Révisions d'Algèbre et compléments

Somme de SEV : $\sum_{k=1}^{n} F_k = \{ \sum_{k=1}^{n} x_k \mid x_1 \in F_1 \ldots x_n \in F_n \}$

Somme directe : $\forall (x_1 \ldots x_n)$, $\sum_{k=1}^{n} x_k = 0 \Rightarrow x_k = 0 \ \forall k \in [\![1;n]\!]$

On la note alors $\bigoplus_{k=1}^{n} F_k$

Deux supplémentaires : 2 sev sont dits supplémentaires si $E = F \oplus G$

Somme directe pour 2 ensembles : $F \cap G = \{0\} \Leftrightarrow F$ et G somme directe

(faux à partir de 3 sev)

Théorème :

$1 \Leftrightarrow 2 \Leftrightarrow 3 \Leftrightarrow 4$

1. $\sum_{k=1}^{n} F_k = \bigoplus_{k=1}^{n} F_k$
2. $\forall x \in \sum_{k=1}^{n} F_k$; $\exists ! (x_1 \ldots x_n) \in (F_1 \ldots F_n)$; $x = \sum_{k=1}^{n} x_k$
3. $\forall k \in [\![1;n]\!]$ $(F_k \cap \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}} F_k) = \{0\}$
4. $\forall k \in [\![1;n]\!]$ $(F_k \cap \sum_{j=1}^{k-1} F_j) = \{0\}$

Notation : $Vect(A)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires finies d'éléments de A.

Rappels de propriétés des Vect :

1. $Vect(A \cup B) = Vect(A) + Vect(B)$
2. $Vect(A)$ est un sev de E contenant A
3. Tout sev contenant A contient $Vect(A)$

Conséquences du lemme de l'échange :

1. E possède une base finie, alors toutes ses bases ont le m̂ card.
2. Si $\dim(E) = n$, toute famille libre a au plus n éléments et toute famille génératrice a au moins n éléments
3. Toute famille de E de cardinal n est libre ssi elle est génératrice

Théorème de la base incomplète : Soit L une famille libre de E et B une base finie de E, alors on peut compléter L en une base de E avec des élém de B

Lemme de l'échange : Soient $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ $(x_1 \ldots x_n)$ une famille libre de E et $(y_1 \ldots y_p)$ une famille génératrice de E

1. $n \leq p$
2. $\exists$ une partie $\{h_1 \ldots h_{n-p}\}$ de $[\![1;p]\!]$ de cardinal $p-n$ tq $(x_1 \ldots x_n, h_1 \ldots h_{n-p})$ est génératrice de E

Codimension : Soit F un SEV admettant 2 supplémentaires S et S' $\Rightarrow \dim(S) = \dim(S')$

↳ E de dimension finie : 1. F un SEV de E, alors F admet un supplémentaire dans E

2. $\operatorname{codim}_E(F) = \dim(E) - \dim(F)$

Conséquences : $\rightarrow \dim(F) \leq \dim(E)$, on a égalité ssi $E = F$

$\rightarrow \dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$

Formule de Grassmann : $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$

$\Rightarrow \dim\left(\sum_{k=1}^{n} F_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \dim(F_k)$ (cas d'égalité = somme directe)

Base adaptée : $E = \bigoplus_{k=1}^{n} F_k$; on note B_k les bases des $F_k \Rightarrow B$ une base de E

$\Rightarrow B = (B_1 \dots B_n)$

$\dim(\mathcal{L}(E,F)) = \dim(E) \times \dim(F)$

Propriétés : $f \circ g = g \circ f$, $\ker(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont stables par g

Propriété : Soit p un projecteur : $E = \ker(p) \oplus \operatorname{Im}(p)$

Théorème de recollement d'applications linéaires :

Soient $(E_1 \dots E_n)$ des SEV de E tq $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$

Soient $f_1 : E_1 \rightarrow F \dots f_n : E_n \rightarrow F$; $\exists!\, f \in \mathcal{L}(E,F)$; $f_{|E_k} = f_k$

Propriété (en dim finie) : Soient $(e_1 \dots e_n)$ une base de E ; $(f_1 \dots f_n)$ une base

def : $\exists!\, f \in \mathcal{L}(E,F)$, $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $f(e_k) = f_k$

Théorème du rang : Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$

1. Pour tout supplémentaire S de $\ker(f)$; f induit un ~~endo~~ isomorphisme de $S \rightarrow \operatorname{Im}(f)$

2. $\dim(\ker(f)) + \operatorname{rg}(f) = \dim(E)$

Conséquence : f surjectif $\Leftrightarrow$ f injectif $\Leftrightarrow$ f bijectif ⚠ en dimension finie

La trace ne dépend pas de la base choisie ⊕ la trace est invariable par produit $\operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA)$

commutativité.

Révisions d'Analyse et compléments :

Théorème (Règle) de D'Alembert :

Si $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ admet une limite $l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ alors :

1. Si $l < 1$: $\sum u_n$ converge
2. Si $l > 1$, $u_n \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$

Convergence absolue $\sum u_n$ converge absolument si $\sum |u_n|$ converge
(On parle de semi convergence si $\sum u_n$ converge mais $\sum |u_n|$ diverge)

Théorème spécial des séries alternées : Soit u_n tq :

1. $u_n \times u_{n+1} \leq 0$
2. $|u_n|$ décroît
3. $u_n \xrightarrow[+\infty]{} 0$

1. $\sum u_n$ converge
2. (R_n) la suite des restes partiels, $\forall n \in \mathbb{N}$; $\begin{cases} |R_n| \leq |u_{n+1}| \\ sgn(R_n) = sgn(u_{n+1}) \end{cases}$

Produit de Cauchy : on note $c_n = u_n * w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k w_{n-k}$

Les Propriétés : Si $\sum u_n$ et $\sum w_n$ convergent absolument :
alors $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_p\right)\left(\sum_{j=0}^{+\infty} w_j\right)$ et $\sum c_n$ converge absolument

Théorème des bornes atteintes : Soit $[a, b]$ un segment inclus dans $\mathbb{R}$ et
$f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \Rightarrow f$ admet un minimum et un maximum globaux sur $[a, b]$
$\rightarrow$ L'image d'un segment ~~con~~ par une application continue est un segment

Théorème de la bijection : $f \in \mathcal{C}^0(I)$ strictement monotone :

1. f définit une bijection de I dans $f(I)$
2. $f^{-1} \in \mathcal{C}^0(f(I), I)$ (aussi)

Uniforme continuité : f est uniformément continue : si
$\forall (x, y) \in I^2$; $\exists \eta \in \mathbb{R}^*, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ $(|x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon)$

Théorème de Heine : Toute fonction continue sur un segment est uniformément continue sur ce même segment

Lipschitzianité : f est K-lipschitzienne si $\exists K \in \mathbb{R}_+$ tq $\forall (x, y) \in I^2$
$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$, f est contractante si $K \in [0; 1[$
Toute fonc° lipschitzienne est unif continue (sans réciproque)

Théorème de Rolle : f dérivable et continue sur $[a,b]$ et $f(a)=f(b)$ alors $\exists c \in]a,b[$ tq $f'(c)=0$

Théorème des accroissements finis : f dérivable et continue : $\exists x \in]a,b[$ tq $f(b)-f(a) = f'(x) \cdot (b-a)$

Inégalité des accroissements finis complexes : f continue et dérivable de :
$|f(b)-f(a)| \leq |(b-a)| \sup_{]a,b[} (|f'|)$

$\Rightarrow$ f lipschitzienne ssi f' est bornée

Formule de Leibniz : $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$

Formule de Taylor Young : $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n)$

Formule de Taylor Lagrange : $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$

Continuité par morceaux : f est C_m sur I si elle l'est sur tout segment inclus dans I (une fonction C_M est bornée et n'atteint pas forcément ses bornes)

~~Somme de Riemann~~

Théorème fondamental de l'analyse : $F(x) = \int_a^x f$.

1. $f \in C^0$ sur I

2. Si f est C^0 sur I, alors F est D^1 et $F'(x) = f(x)$

Formule de Taylor avec reste intégral : $f(x) = T_{n,a}(x) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt$

Absolue convergence pour les intégrales : $\int |f|$ converge alors $\int f$ converge (Absolue convergence)

Stirling :

$n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$

Théorème de comparaison des intégrales

1. $\int |g|$ cvg
2. $f = O(g)$

$\Rightarrow \int |f|$ converge

Carré intégrable : $f \in \mathcal{L}^2 \Rightarrow f^2 \in \mathcal{L}^1$: $(f,g) \in (\mathcal{L}^2)^2$ alors $(fg) \in \mathcal{L}^1$

Inégalité de Cauchy Schwarz : $\left(\int fg\right)^2 \leq \int f^2 \cdot \int g^2$

$\rightarrow$ Cas d'égalité : (f,g) liées

Comparaison série intégrale : $\sum f(n)$ cvg $\Leftrightarrow \int f$ converge

Séries de Riemann : $\sum 1/n^\alpha$ cvg ssi $\alpha > 1$

Topologie.

Norme : $\|.\|$ est une norme si elle vérifie

1. Homogénéité : $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
2. Inégalité triangulaire $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$
3. Séparation des points : $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$

Propriétés :
1. $\|0\| = 0$
2. $\|x\| > 0$
3. $| \|x\| - \|y\| | \leq \|x - y\|$ (inégalité triangulaire inverse)

Distance : $d_{\|.\|} : \begin{cases} E^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto \|x-y\| \end{cases}$

Equivalence de Normes : $\|.\| \sim \|.\|'$ si $\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^{*}$ tq
$\alpha \|x\| \leq \|.\|' \leq \beta \|.\|$

Remarque : $\sim$ est une relation d'équivalence.

Boule ouverte de centre a et de rayon r : $B_{\|.\|}(a,r) = \{x \in E, \|x - a\| < r\}$

Boule fermée " " " " " " " : $\overline{B}_{\|.\|}(a,r) = \{x \in E, \|x - a\| \leq r\}$

Sphère de centre a et de rayon r, $S(a,r) = \{x \in E, \|x - a\| = r\}$

Partie de E bornée : on dit que A est bornée si $\exists r$ tq $A \subset \overline{B}_{\|.\|}(a, r)$

Ouvert : a est intérieur à A si $\exists r \in \mathbb{R}_+^{*}$ $B_{\|.\|}(a,r) \subset A$

→ A est ouvert si tout élément de A lui est intérieur

Fermé : A est fermé si $E \setminus A$ est ouvert

→ E et $\emptyset$ sont les seuls ensembles ouverts et fermés

Propriété : O_i les ouverts de E et (F_i) les fermés de E,

1. $\bigcup_{i \in I} O_i$ est un ouvert de E
2. $\bigcap_{i \in I} O_i$ est un ouvert de E si I fini
3. $\bigcap_{i \in I} F_i$ est un fermé de E, | 4. $\bigcup_{i \in I} F_i$ est un fermé de E si I fini

Intérieur : $\mathring{A}$ est l'ensemble des points intérieurs à A.

1. $\mathring{A}$ un ouvert | 2. $A^{\circ} \subset A$ | 3. O un ouvert de E. $O \subset A \Rightarrow O \subset \mathring{A}$

Parties convexes, A est convexe si $\forall (x,y) \in A^2$, $[x,y] \subset A$

$[x,y] = \{ \lambda x + (1-\lambda) y \mid \lambda \in [0;1] \}$

→ Toute boule ouverte ou fermée est convexe

Caractérisation séquentielle des fermés

A est fermé pour $\|.\|$ $\iff \forall (u_n) \in (A)^{\mathbb{N}}$, tq $u_n \xrightarrow[+\infty]{} l$, $l \in A$

Adhérence, x est adhérent à A si $\exists (u_n) \in A^{\mathbb{N}}$ tq $u_n \xrightarrow[+\infty]{\|.\|} x$

↳ $\bar{A}$ est l'ensemble des pts adhérents à A

1. $\bar{A}$ fermé. 2. $A \subset \bar{A}$. 3 F un fermé tq $F \subset A$; $\bar{A} \subset F$

Frontière, $Fr(A) = \bar{A} / \mathring{A}$

Indépendance de la norme, En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Propriété, Si $\|.\| \sim \|.\|'$

→ Si u_n cv pour $\|.\|$ vers l, alors u_n cvg pour $\|.\|'$ vers l

→ F fermé pour $\|.\|$ $\iff$ F fermé pour $\|.\|'$

→ O ouvert pour $\|.\|$ $\iff$ O ouvert pour $\|.\|'$

→ en dimension finie ; la convergence s'étudie composante à composante

→ la convergence des suites de matrices s'étudie coeff à coeff

Généralisation du théorème de Bolzano-Weierstrass,

Réduction:

▸ **Rappels:**

- Formule de Taylor pour les polynômes: $P(X+a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} X^k$
- Théorème fondamental de l'algèbre:
  Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant, P admet une racine dans $\mathbb{C}$.
- Polynômes irréductibles:
  - Les seuls polynômes irréductibles sur $\mathbb{C}$ sont de degré 1
  + Tout élément non nul de $\mathbb{C}[X]$ est scindé sur $\mathbb{C}$
  - Sur $\mathbb{R}$, les pol. irréductibles sont de degré 1 ou 2 si $\Delta < 0$

• **Polynômes interpolateurs de Lagrange:** $(x_0 \dots x_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ distincts 2à2.
$\exists! (L_0 \dots L_n) \in \mathbb{K}[X]$ tq $\forall (i,j) \in [\![0;n]\!]^2$ $L_i(x_j) = \delta_{i,j}$
(La famille des polynômes de Lagrange associés à $(x_0 \dots x_n)$)
- $(L_0 \dots L_n)$ forment une base de $\mathbb{K}_n[X]$
  $\Rightarrow \forall P \in \mathbb{K}_n[X]$, $P = \sum_{i=0}^{n} P(x_i) L_i$

▸ **Déterminants:**

- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
- $\det(I_n) = 1$
- $A \in GL_n(\mathbb{C}) \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$
- $A \in GL_n(\mathbb{C}) \Rightarrow \det(A^{-1}) = 1/\det(A)$
- Ajouter à une ligne/col de A une C.L des autres ne change pas $\det(A)$

- $\det(A^T) = \det(A)$
- $\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot \det(A)$
- Echanger 2 lignes/colonnes oppose $\det(A)$
- Mult. 1 ligne/col par λ multiplie $\det(A)$ par λ

• **Cofacteurs:** $(\varphi_{i,j})$ la matrice obtenue en retirant (L_i, C_j) de A

$A_{i,j} = (-1)^{i+j} \det(\varphi_{i,j}(A))$ $\rightarrow \forall i \in [\![1;n]\!]$ $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} A_{i,j}$

dvpt selon ligne/col. $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} A_{i,j}$

• **Vandermonde:** $V(x_1 \dots x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$: $V(x_1 \dots x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$

• **Det d'une matrice triangulaire:** produit des coeff diagonaux.

- Toute somme d'espaces propres est directe
- Dimension et multiplicité : $\dim(E_\lambda(f)) \leq m_\lambda(f) \quad \forall \lambda \in Sp(f)$
- Diagonalisation : $f \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable si $\exists$ une base $\mathcal{B}$ de E tq $mat_{\mathcal{B}}(f) \in D_n(\mathbb{K})$ (De même pour une matrice A qcq)

  $\Leftrightarrow \exists P \in GL_n(\mathbb{K}) \quad P^{-1}AP \in D_n(\mathbb{K})$ (Respectivement trigonalisable) avec T_n^+ / matrice triangulaire
- Caractérisation : Toutes les propriétés suivantes sont équivalentes :
  - → f diagonalisable
  - → $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(f)} E_\lambda(f)$
  - → $\dim(E) = \sum_{\lambda \in Sp(f)} \dim(E_\lambda(f))$
  - → χ_f scindé sur $\mathbb{K}$ et $\forall \lambda \in Sp(f) \quad m_\lambda(f) = \dim(E_\lambda(f))$

  ⇒ Si χ_f scindé à racines simples ; alors f est diagonalisable
- Propriété : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable et F un sev de E stable par f.

  ⇒ f_F diagonalisable
- Théorème : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. f trigonalisable ssi χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$

  ⇒ Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$; tout endomorphisme est trigonalisable
- Trace d'un endomorphisme trigonalisable :

  $$Tr(f) = \sum_{\lambda \in Sp(f)} m_\lambda \cdot \lambda$$
- Caractérisation du polynôme caractéristique :

  → Le coefficient constant de χ_A est $(-1)^n \det(A)$ et son coefficient de degré $(n-1)$ est $(-Tr(A))$

Fonctions vectorielles.

Définition de la limite.

→ $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 ; \forall x \in D_f$ si $\|x-a\| \leq \eta$: $\|f(x) - l\| \leq \varepsilon$

→ $f \xrightarrow[a]{} l \iff \forall u_n \in (D_f \cap \{a\})^{\mathbb{N}} \; (u_n \xrightarrow[+\infty]{} a \Rightarrow f(u_n) \xrightarrow[+\infty]{} l$

Continuité, f est continue en a si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} f(a)$

Propriété, 1. $f \in \mathcal{C}^0(E, F)$

2. $\forall \Omega \in F$ un ouvert $f^{-1}(\Omega)$ un ouvert

3. $\forall A$ un fermé de F, $f^{-1}(A)$ un fermé

Théorème des bornes atteintes. Soit K un fermé, borné, non vide et f une application $\mathcal{C}^0(K, \mathbb{R})$, f admet un maximum et un minimum globaux

Propriété. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. f est lipschitzienne

CSQ → Toute application multilinéaire sur E est continue

(Toute application polynomiale est continue)

Dérivabilité. f est partiellement dérivable en a selon v si l'application,

$t \mapsto \dfrac{f(a+tv) - f(a)}{t}$ admet une limite finie en 0. : on la note $\dfrac{\partial f}{\partial v}(a)$

Remarque. La dérivabilité partielle s'étudie composante à composante.

⚠ L'existence de toutes les dérivées partielles n'entraîne pas la continuité

Différentiabilité, f est différentiable sur Ω si $\exists\, d \in \mathcal{L}(E, F)$ tq

$$\|f(a+h) - f(a) - d(h)\| \underset{\|h\| \to 0}{=} o(\|h\|)$$

d est unique

↳ On appelle d la différentielle de f et on la note df_a

Propriétés. f une application différentiable en $a \in \Omega$.

1. f continue en a

2. f est partiellement dérivable en a selon tout vecteur, $\dfrac{\partial f}{\partial v} = df_a(v)$

3. Si $B = (e_1 \ldots e_d)$ une base de E, alors

$$df_a : h \mapsto \sum_{i=1}^{d} h_i \frac{\partial f}{\partial e_i}(a)$$

Propriété, Soit f différentiable en a et g différentiable en $f(a)$.

$d(g \circ f)_a = (dg_{f(a)} \circ df_a)$

Propriété, $\varphi \begin{cases} \Omega \to G \\ x \mapsto g(f_1(x) \ldots f_p(x)) \end{cases}$ g/f diff. , φ différentiable

$$d\varphi_a : h \mapsto \sum_{i=1}^{p} g(f_1(a) \ldots f_{i-1}(a) ; df_{i,a}(h) \ldots f_p(a))$$

=> Toute application p-linéaire est différentiable et sa différentielle est p-linéaire

Remarque : $df_a = h \mapsto (\vec{\nabla} f(a))^T \cdot \vec{h}$

Gradient : $Df(a) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(a) \\ \vdots \\ \partial_d f(a) \end{pmatrix}$

Jacobienne : $Jf(a) = Mat_{B,B'}(df_a) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(a) & \dots & \partial_d f_1(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_p(a) & \dots & \partial_d f_p(a) \end{pmatrix}$ p lignes, d colonnes

On note $(f_1 \dots f_p)$ les composantes de f dans B'

→ $J_{g \circ f}(a) = J_g(f(a))\, J_f(a)$

Règle de la chaîne : g différentiable

$\varphi : t \mapsto g(x_1(t), \dots, x_d(t))$

$\varphi'(t) = \sum_{i=1}^{d} x_i'(t)\, \partial_i g(x_1(t), \dots, x_d(t))$

Critère de Monge à 2 dimensions :

$r = \partial^2_{1,1} f$, $s = \partial^2_{1,2} f$; $t = \partial^2_2 f$

- $rt - s^2 > 0$; $r < 0$: max local
- $rt - s^2 > 0$; $r > 0$: min local
- $rt - s^2 < 0$; point critique mais pas un extremum
- $rt - s^2 = 0$ conclusion impossible

→ A deux dimensions, $\varphi : (t, v) \mapsto g(x(t,v) ; y(t,v))$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial v} = \dfrac{\partial g}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial g}{\partial y} + \dfrac{\partial y}{\partial v} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} = \dfrac{\partial g}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial t} + \dfrac{\partial g}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial t} \end{cases}$$

Théorème fondamental : On note $(e_1 \dots e_d)$ une base de E ; $f \in \mathcal{F}(\Omega, F)$

(i) f partiellement dérivable selon chaque e_i

(ii) chaque $\dfrac{\partial f}{\partial e_i}$ est continue sur Ω

=> f est $\mathcal{C}^1$ sur Ω et f diff sur Ω, et $\forall a \in \Omega$. $df_a \in \mathcal{C}^0(\Omega)$

Point critique : a un point critique si $\forall v \in E$ $\dfrac{\partial f}{\partial v}(a) = 0$

↳ Si f admet un extremum local, alors c'est un point critique sans réciproque

Propriété : Soit Ω un ouvert convexe : $\forall i \in [\![1 ; d]\!]$, $\partial_i f = 0$ => f constante

Théorème de Schwarz : $f \in \mathcal{C}^2(\Omega, F)$; $\forall (v, w) \in E^2$. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial v \partial w} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial w \partial v}$

Formule de Taylor Young : $f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^{d} h_i\, \partial_i f(a) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} h_i h_j\, \partial^2_{i,j} f(a) + o(\|h\|^2)$

Hessienne :

$Hf(a) = \begin{pmatrix} \partial^2_{1,1} f(a) & \dots & \partial^2_{1,d} f(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial^2_{d,1} f(a) & \dots & \partial^2_{d,d}(f(a)) \end{pmatrix} \in S(\mathbb{R})$ par Schwarz

Probabilités

Tribu : $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, A est une tribu tq :
- A n'est pas l'ensemble vide
- $\forall B \in A$, $\Omega \setminus B \in A$
- $\forall (B_n) \in A^{\mathbb{N}}$, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in A$

Les éléments d'une tribu sont des ensembles

Propriété des tribus : $(A,B) \in \mathcal{A}^2$.
- $A \cup B \in \mathcal{A}$
- $A \cap B \in \mathcal{A}$

- Soit $\mathcal{A}$ une tribu. $(\emptyset, \Omega) \in \mathcal{A}^2$
- Soit $(A_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$: $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (A_n) \in \mathcal{A}$

Dénombrabilité. Un ensemble E est dit dénombrable si $\exists$ une bijection de $\mathbb{N}$ dans E

Prop de la dénombrabilité. Soient F et G 2 ensembles dénombrables.
$F \times G$ est dénombrable

Surjection et dénombrabilité. E est fini ou dénombrable si $\exists$ une surjection de $\mathbb{N}$ dans E.

Conséquence. Soit E un ensemble dénombrable, toute partie de E est finie ou dénombrable.
De même, l'union finie / dénomb. d'ensembles finis ou dénomb. est dénombrable.

Théorème de Tonelli : Soient $(a_n) \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$; σ une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)}$$

Théorème de Fubini : Soit $a_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et tq (a_n) est sommable

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)}$$

Définition d'une probabilité. Une mesure est une application de $\underset{\text{tribu}}{A} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$
tq $\mu(\emptyset) = 0$ et $\forall (A_n) \in (A_n)^{\mathbb{N}}$; disjoints 2 à 2 : $\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$ (σadditivité)
→ Une probabilité sur (Ω, A) est une mesure tq $P(\Omega) = 1$
(Ω, A, P) est un espace probabilisé

Propriétés :
1. $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$
2. $\forall (A_n) \in A^{\mathbb{N}}$ $\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(A_n)$ (Sous additivité)
3. $\forall (A,B) \in A^2$: $\mu(A\cap B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A\cup B)$
↳ inclusion - exclusion

(On peut remplacer μ par P car ce sont 2 mesures)

Continuité croissante : Si la suite $A_n \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion,

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n)$$

Continuité décroissante : Si la suite $A_n \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion et si $\mu(A_0) < +\infty$

$$\mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n)$$

⚠ → C'est la seule notion de limite ensembliste.

Def des événements : $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. (I fini / dénombrable).

- Un événement est un élément de $\mathcal{A}$: $A\cup B \Leftrightarrow$ "A ou B" | $A\cap B \Leftrightarrow$ "A et B" | $\Omega / A \Leftrightarrow$ "non A"
- A presque certain $\Leftrightarrow P(A) = 1$
- A presque impossible $\Leftrightarrow P(A) = 0$
- A, B incompatibles $\Leftrightarrow P(A\cap B) = 0$

Un système complet d'événements est une famille (A_i)
(i) $\forall i \in I$: $P(A_i) \neq 0$
(ii) $(i,j) \in I^2$ $P(A_i \cap A_j) = 0$
(iii) $P\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = 1$

Propriété (A_i) des événements incompatibles 2 à 2. $P\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \sum_{i\in I} P(A_i)$

Probabilité conditionnelle. $P(B) \neq 0$ (A et B événements) $P(A|B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$
(A sachant B)

Formule des probas composées. (A_n) suite d'événements tq $P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \neq 0$

$$P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = P(A_0) \cdot \prod_{n=1}^{+\infty} P\left(A_n \middle| \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right)$$

Formule des probas totales. (A_i) un système complet d'événements

$$P(A) = \sum_{i\in I} P(A|A_i)$$

Formule de Bayes. $P(A|B) \cdot P(B) = P(A) \cdot P(B|A)$

Indépendance : famille d'événements $(A_i)_{i\in I}$

↳ 2 à 2. $\forall (i,j) \in I^2$ $P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j)$

↳ mutuelle. Pour toute famille finie $J \subset I$: $P\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) = \prod_{j\in J} P(A_j)$

Mutuelle ⇒ 2 à 2 sans réciproque

Propriété : (A_i) des événements mutuellement indépendants.

$B_i \in \{A_i ; \Omega / A_i\}$ ⇒ les (B_i) sont mutuellement indépendants.

Suites de fonctions.

- Convergence simple : $\forall x \in A,\ f_n(x) \xrightarrow[+\infty]{} f(x)$
- Convergence uniforme : $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[+\infty]{} 0$
- Caractérisation séquentielle de la convergence uniforme.

$\forall x_n \in A^{\mathbb{N}}$ $\quad f_n(x_n) - f(x_n) \xrightarrow[+\infty]{} 0$

- Théorème de la double limite.

$$\lim_{x \to a} \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \lim_{n \to +\infty} \lim_{x \to a} f_n(x)$$

- Convergence normale. $\sum f_n$ converge normalement si $\sum \|f_n\|_\infty$ converge.
  ↳ entraine la convergence uniforme.

- Continuité :
  - $f_n \in (\mathcal{C}^0(I, \mathbb{C}))^{\mathbb{N}}$, converge uniformément vers f alors $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{C})$
    (vrai si CVU sur tout segment de I)

- Théorème d'intégration terme à terme sur un segment :
  $f_n \in (\mathcal{C}_m(I, \mathbb{C}))^{\mathbb{N}}$
  (f_n converge uniformément vers f) $\int_a^b f_n \xrightarrow[+\infty]{} \int_a^b f$

- Théorème de la convergence dominée de Lebesgue.
  $f_n \in \mathcal{C}_m(I, \mathbb{C})$:
  1. f_n converge simplement vers f
  2. $\exists \varphi \in F(I, \mathbb{C})$ continue par morceaux et intégrable sur I tq

  $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\quad |f_n(x)| \leq \varphi(x)$

  alors f est intégrable et $\quad \int_I f = \lim_{n \to +\infty} \int_I f_n$

⚠ L'hypothèse de domination doit systématiquement être bien rédigée.

• Théorème d'intégration terme à terme des séries : $(f_n \in (\mathcal{C}_M)^{\mathbb{N}})$

1. $\sum f_n$ converge simplement vers $f \in \mathcal{C}_M(I, \mathbb{C})$
2. $\sum \int_I |f_n|$ converge.

alors f_n intégrable sur I et

$$\int_I f = \int_I \sum f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n$$

$$\int_I f = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n$$

• Théorème de dérivation terme à terme.

$f_n \in (\mathcal{C}^1(I, \mathbb{C}))^{\mathbb{N}}$

1. f_n converge simplement vers f
2. f_n' converge uniformément vers g sur tout segment de I.

$f' = g$. et $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{C})$ $\quad (\lim_{+\infty} f_n)' = \lim_{+\infty} f_n'$

reste vrai aux ordres supérieurs ($\mathcal{C}^1 \to \mathcal{C}^k$)

• Théorème de continuité des intégrales à paramètres. $\left(f(x) = \int_I f(t,x)\, dt\right)$

1. $\forall x \in I$, $t \mapsto f(t,x) \in \mathcal{C}_M(I, \mathbb{C})$
2. $\forall t \in I$: $x \mapsto f(t,x) \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{C})$
3. $\forall x \in [a,b] \subset I$, $\forall t \in I$, $\exists \varphi \in \mathcal{C}_M(I, \mathbb{R}_+)$ intégrable sur I tq

$$|f(t,x)| \leq \varphi_{a,b}(t)$$

alors $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{C})$

• Théorème de dérivation des intégrales à paramètres.

1. $\forall t \in I$, $x \mapsto f(t,x) \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{C})$
2. $\forall x \in I$, $t \mapsto f(t,x) \in \mathcal{C}_M(I, \mathbb{C})$ + intégrable sur I
3. $\forall x \in I$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(t,x) \in \mathcal{C}_M(I, \mathbb{C})$
4. $\forall t \in I$, $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(t,x) \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{C})$
5. $\forall x \in [a,b] \subset I$, $\exists \varphi_{a,b} \in \mathcal{C}_M(I, \mathbb{C})$ intégrable tq $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \varphi_{a,b}(t)$

Alors F de classe $\mathcal{C}^1$ et formule de Leibniz :

$$F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\, dt$$

Isométries d'un espace euclidien.

- **Rappels :**

  - $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$ $(.|.)$ un produit scalaire
  - Identité de polarisation. $(x|y) = \frac{1}{2}(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$
    $= \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x-y\|^2)$
    $= \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4}$
  - Décomposition base orthonormée.
    $\vec{x} = \sum_{k=1}^{n} (\vec{x_k}|\vec{e_k})\, \vec{e_k}$
  - F un SEV de E alors $E = F \oplus F^\perp$
  - Relation de Chasles. $\det_B(B'') = \det_B(B') \cdot \det_{B'}(B'')$ | $\det_{B'}(B) \cdot \det_B(B') = 1$

- **Orientation d'un $\mathbb{R}$-EV.**
  - On dit que B et B' sont dans même sens ssi $\det_{B'}(B) > 0$
  - $\sim$ une relation d'équivalence possédant 2 classes d'éq.
  - Une orientation de E est le choix d'une de ces classes

- **Isométries vectorielles.** f est une isométrie vectorielle / endom. orthogonal si $f \in \mathcal{L}(E)$, $\forall x \in E$

  $\longrightarrow$ $\|f(x)\| = \|x\|$

  f une isométrie $\Leftrightarrow$ $(f(x)|f(y)) = (x|y)$

  F sev stable par f : $\Rightarrow$ $f(F) = F$ et $f(F^\perp) = F^\perp$

  On note $O(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles
  $\Rightarrow$ $O(E)$ stable par compo/récip.

- **Lien avec les bases orthonormées.**

  $1 \Leftrightarrow 2 \Leftrightarrow 3$

  1. $f \in O(E)$
  2. $\forall B$ une BON de E ; $f(B)$ est une BON de E
  3. $\exists B$ une BON de E tq $f(B)$ une BON de E.

- **Matrices orthogonales.** On dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si la famille de ses colonnes est orthonormée pour le produit scalaire canonique.
  On note $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble de ces matrices.

- **Produit scalaire canonique :** $\langle . \rangle$, produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

  $\langle X, Y \rangle = X^T \times Y$

Séries entières

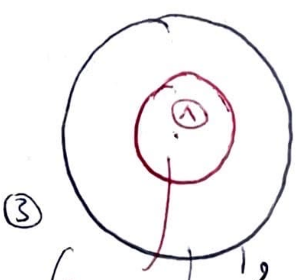
- **Notations :**

  - Série entière de la forme : $\sum a_n z^n$, $a_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

$r \in \mathbb{R}_+^*$, $a \in \mathbb{C}$

- $D(a,r) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < r\}$
- $\overline{D(a,r)} = \{z \in \mathbb{C} ; |z-a| \leq r\}$
- $\mathcal{C}(a,r) = \{z \in \mathbb{C} ; |z-a| = r\}$

- **Lemme d'Abel :** Soit $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $z_0 \in \mathbb{C}^*$ tq $(a_n z_0^n)$ est bornée :



1. $\forall r \in]0 ; |z_0|[$ $\sum a_n z^n$ converge normalement sur $\overline{D(0,r)}$

2. $\sum a_n z^n$ converge absolument sur $D(0,r)$

CVN

CVA

div Gross en dehors du cercle

$\rightarrow$ Sur le cercle, on ne peut pas conclure.

- **Rayon de convergence :** On note R_a ce rayon.

$R_a \Rightarrow$ sup dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ des r tq $(a_n r^n)$ bornée.

$R_a = \sup(\{r \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\} \mid (a_n r^n) \text{ bornée}\})$

- On réécrit le lemme d'Abel en remplaçant r par R_a (cas limite).

3. Si $R_a < +\infty$: $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement sur $\mathbb{C} \setminus \overline{D(0;R_a)}$

- **Comparaison de suites.**

$a_n = O(b_n) \Rightarrow R_b \leq R_a$ | $a_n \sim b_n \Rightarrow R_a = R_b$ | $b_n = |a_n| \Rightarrow R_a = R_b$

- **Cas de la semi convergence.** Si $\sum a_n z_0^n$ est semi convergente, alors $R_a = |z_0|$

- **Règle de D'Alembert :** Soit $a_n \in (\mathbb{C}^*)^{\mathbb{N}}$ tq $\frac{a_{n+1}}{a_n} \underset{+\infty}{\rightarrow} \ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$

$R_a = \frac{1}{\ell}$ (avec $\frac{1}{+\infty} = 0$ et $\frac{1}{0} = +\infty$)

- **Opérations algébriques :**

- $b_n = \lambda a_n$ $(\lambda \in \mathbb{C}^*)$
  $R_b = R_a$

- $c_n = a_n + b_n$
  1. $R_c \geq \min(R_a, R_b)$
  2. Si $R_a \neq R_b$ $\Rightarrow R_c = \min(R_a, R_b)$

$c_n = a_n * b_n \Rightarrow c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

$R_c \geq \min(R_a, R_b)$

• Développements en séries entières.

On dit que f est **DSE au voisinage de x_0** si $\exists r \in \mathbb{R}_+^*$ et $a_n \in (\mathbb{C})^{\mathbb{N}}$

$\forall x \in I \cap]x_0-r; x_0+r[: f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_0^n$

• Conséquences :

- f DSE au vois de x_0 ssi $f(x_0+x)$ l'est au voisinage de 0
- $R_a \geq r > 0$
- f est DSE au vois de x_0 alors elle est C^0 au vois de x_0.

• Opérations Algébriques. (f, g) DSE $(V(x_0))$

- $\lambda f + g \to$ DSE
- $fg \to$ DSE
- $(g \circ f)$ DSE (+ hypothèses de def)
- F, la primitive de f, est DSE

- f dérivable au vois de x_0 $\Rightarrow f'$ DSE au vois de x_0.

• Coefficients du DSE (CSQ deriv).

- $a_p = \dfrac{f^{(p)}(x_0)}{p!}$

- $f^{(p)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+p} \dfrac{(n+p)!}{p!} (x-x_0)^n$

• Propriété : Une fonction DSE est toujours C^∞.

• Développements en séries entières usuels :

1. $\forall x \in]-1;1[: \dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$
2. $\forall x \in]-1;1[: \dfrac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$
3. $\forall x \in]-1;1[: \ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n}$
4. $\forall x \in]-1;1[: \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n}$
5. $\forall x \in \mathbb{R} : e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!}$
6. $\forall x \in \mathbb{R}\ \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
7. $\forall x \in \mathbb{R}.\ \cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$
8. $\forall x \in \mathbb{R}\ \mathrm{sh}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
9. $\forall x \in \mathbb{R}.\ \mathrm{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$
10. $\forall x \in]-1;1[: \dfrac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$
11. $\forall x \in]-1;1[; \arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)}$
12. $\forall x \in]-1;1[; (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n!} \left(\prod_{k=0}^{n-1} (\alpha-k)\right) x^n$

Variables aléatoires discrètes ① $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ espace proba.

Variable aléatoire discrète : Une variable aléatoire discrète sur Ω à valeur dans E est une application $X : \Omega \longrightarrow E$ tq.

1) $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable

2) $\forall u \in X(\Omega) \quad X^{-1}(\{u\}) \subset \mathcal{A}$

Loi de X : $P_X : \begin{cases} \mathcal{P}(X(\Omega)) \longrightarrow \mathbb{R} \\ A \longmapsto P(X \in A) = P(X^{-1}(A)) \end{cases}$ | P_X est une probabilité sur $(X(\Omega), \mathcal{P}(X(\Omega)))$

Propriété : | Si f déf sur $X(\Omega)$ alors $f \circ X$ une VAD si X une VAD

| X, Y 2 VAD, alors (X, Y) est une VAD

Si $P_X = P_Y$, alors on note $X \sim Y$ et $f(X) \sim f(Y)$

Fonction de répartition : X une VAD réelle, la fonction de répartition F_X est

$F_X : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow [0;1] \\ x \longmapsto P(X \leq x) \end{cases}$

Propriété de la fonction de répartition : 1. F_X est croissante

2. $F_X \xrightarrow[+\infty]{} 1$

3. $F_X \xrightarrow[-\infty]{} 0$

Loi conjointe : Loi conjointe de (X, Y)

$P_{X,Y} \begin{cases} (X,Y)(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto P((X, Y) = (x, y)) \end{cases}$ | Les lois marginales de (X, Y) sont P_X et P_Y

Loi conditionnelle : La loi de X sachant $Y \in B$.

$P_{X|Y\in B} : \begin{cases} X(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \\ A \longrightarrow \dfrac{P((X \in A) \cap (Y \in B))}{P(Y \in B)} \end{cases}$

Indépendance : (X, Y) indépendants $\Rightarrow X \perp\!\!\!\perp Y$. Si f déf sur $X(\Omega)$ et g sur $Y(\Omega)$

$\Rightarrow f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$

Lemme des coalitions : $(X_1 \ldots X_n)$ des VAD mutuellement indép.

$f(X_1 \ldots X_p) \perp\!\!\!\perp g(X_{p+1} \ldots X_n)$

Propriétés des lois usuelles.

Famille indépendantes et Bernoulli : Si $(X_1 \ldots X_n)$ sont mutuellement indépendantes et suivent la loi de Bernoulli de paramètre p.

$\sum_{k=1} X_k \sim B(n,p)$ (ce n'est pas vrai pour une dépendance 2 à 2)

Prop : indépendance et loi de Poisson :

Si $X \perp\!\!\!\perp Y$ et $X \sim P(\lambda)$ $Y \sim P(\mu)$ alors $X+Y \sim P(\lambda+\mu)$

Variable aléatoire sans mémoire : Soit X une VAD suivant $G(p)$.

$\forall (k,n) \in \mathbb{N}^2$ $\quad \underset{X \geq n}{P(X \geq k+n)} = P(X \geq k)$

sachant

$\hookrightarrow P(X \geq k+n \mid X \geq n) = P(X \geq k)$

Approximation binomiale d'une loi de poisson.

Soit $(p_n) \in [0;1]^{\mathbb{N}}$ tq $np_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \lambda \in \mathbb{R}_+^*$

X_n une VAD de loi $B(n,p_n)$

$\forall k \in \mathbb{N}$ $\quad P(X_n = k) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \dfrac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$

Théorème : loi faible des grands nombres :

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ VAD 2 à 2 indépendantes de même loi. $M_n = \dfrac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} X_k$

$P(|M_n - E(X_0)| \geq \varepsilon) \xrightarrow[+\infty]{} 0$

$\longrightarrow$ les X_n doivent avoir un moment d'ordre 2.