Fiche Cours Markov :

Résumé de cours - Virginie Ehrlacher

Cours ① :

Processus satisfaisant la propriété de Markov :

Ne dépend pas du chemin parcouru, mais uniquement de l'état le précédant (aucune mémoire en temps)

$$P(X_{n+1}=y \mid X_0=y_0 \ldots X_n=x_n) = P(X_{n+1}=y \mid X_n=y_n)$$

(X_n) est une chaîne de Markov

→ La C.M est homogène si $P(X_{n+1}=y \mid X_n=y_n)$ ne dépend pas de n, et on définit sa matrice de transition : $P = \{P(x,y)\}_{x,y \in E}$ avec

$$P(x,y) = P(X_{n+1}=y \mid X_n=x)$$

Propriété de la matrice de transition :

$$\forall x,y \in E,\ P(x,y) \geq 0,\ \forall x \in E : \sum_{y \in E} P(x,y) = 1$$

(Matrice Stochastique)

Théorème - Récurrence aléatoire :

Soit (Z_n) suite de V.A i.i.d sur un espace d'états $\mathcal{Z}$ quelconque, Soit E un espace d'états dénombrables et $f : E \times \mathcal{Z} \longrightarrow E$

Soit X_0 V.A à valeurs dans E indépendante de $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

La récurrence aléatoire, définie par :

$\forall n \geq 0,\ X_{n+1} = f(X_n, Z_{n+1})$ définit une C.M.

Réciproquement, toute C.M peut s'écrire comme une récurrence aléatoire.

Théorème - Processus décalé en temps :

$$P(X_{n+1}=y_1 \ldots X_{n+k}=y_k \mid X_0=y_0 \ldots X_n=y_n)$$

$$= P(X_1=y_1 \ldots X_k=y_k \mid X_0=y_n)$$

Proposition - Marginales finies dimensionnelles :

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une C.M sur E de M.T P dont la donnée initiale est distribuée selon la mesure de proba μ_0 sur E. Alors la proba d'observer la trajectoire $x_0, x_1 \ldots x_n \in E$ est donnée par

$$P_{\mu_0}(X_0=x_0 \ldots X_n=x_n) = \mu_0(x_0)\, P(x_0,x_1)\, P(x_1,x_2) \ldots P(x_{n-1},x_n)$$

3 façons d'identifier une C.M :

→ Récurrence aléatoire

→ Marginales finie - dimensionnelles

Cours ② :

Equation de Chapman-Kolmogorov :

→ On suppose X_0 distrib suivant une mesure de proba μ_0

→ Soit μ_n la loi de X_n.

Alors $\mu_n = \mu_0 P^n$ $\quad \mathbb{P}(X_n = y \mid X_0 = x) = P^n(x,y)$

→ Soit $h : E \to \mathbb{R}$ $\quad \mathbb{E}(h(X_n) \mid X_0 = x) = P^n(h)(x)$

Définition - Mesure invariante

Soit π mesure de proba sur E, π est une mesure invariante pour la C.M (X_n) ssi : $\pi = \pi P$

Conséquence : Si $X_0 \sim \pi$, avec π invariante, alors $\forall n$, $X_n \sim \pi$

Théorème : Si E est fini, $\exists$ au moins une mesure de proba invariante

Définition : Soient $(x,y) \in E$:

. x communique avec y ($x \to y$) si $\exists n \geq 0$ et $x_0 = x$ ... $x_n = y \in E$ tq
$P(X_n = y \mid X_0 = x) > 0 \Leftrightarrow P(x, x_1) P(x_1, x_2) \ldots > 0$

. x et y communiquent ($x \leftrightarrow y$) si $x \to y$ et $y \to x$

Définition : Une classe $E \subset E_0$ est dite fermée ssi :

. $\forall x, y \in E$, $x \in E_0$ et $x \to y \Rightarrow y \in E_0$

. Une classe $E_0 \subset E$ est dite irréductible ssi $(x \leftrightarrow y)$ $\forall x, y \in E_0$, et E_0 fermée

. La C.M $(X_n)_{n \geq 0}$ est dite irréductible ssi E est irréductible

. Si $E_0 = \{x_0\}$ est fermée, on dit que x_0 est un état absorbant

Théorème : Si une C.M irréductible possède une mesure invariante π, alors $\pi(x) > 0$ $\forall x \in E$.

Cas E fini - thm : Pour toute C.M irréductible sur un espace d'états E fini :

Tps de premier retour :

- il existe une unique mesure de proba invariante π
- π est donnée par : $\forall x \in E$ $\pi(x) = \dfrac{1}{\mathbb{E}_x(T_x^+)}$

où $T_x^+ = \inf\{n \geq 1 ; X_n = x\}$

Cours ③

$T_y^+ = \inf\{n \geq 1, X_n = y\}$

Définition : Un état x de E est dit :

- transitoire : si $\mathbb{P}_x(T_x^+ < +\infty) < 1$
- Récurrent, si $\mathbb{P}_x(T_x^+ < +\infty) = 1$

2 types d'états récurrents :

- Récurrent nul : $\mathbb{E}_x(T_x^+) = \infty$
- Récurrent positif : $\mathbb{E}_x(T_x^+) < \infty$

Nombre de visites d'un état, $x \in E$

$N_x = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_n = x\}}$

- x récurrent $\Leftrightarrow$ $\mathbb{P}_x(N_x = \infty) = 1$
- x transitoire $\Leftrightarrow$ $\mathbb{P}(N_x < \infty) = 1$

Dans ce cas, N_x suit une loi géométrique de paramètre $\mathbb{P}_x(T_x^+ = \infty) > 0$ et

$$\mathbb{E}_x(N_x) = \frac{1}{\mathbb{P}_x(T_x^+ = \infty)}$$

Théorème :

- Si x transitoire $\iff \sum_{n\geq 0} P^n(x,x) < \infty$
- Si x récurrent $\iff \sum_{n\geq 0} P^n(x,x) = \infty$
- Si x récurrent et $x \to y$, alors y récurrent

Conséquence : Si la CM est irréductible, les états sont tous soit transitoires soit récurrents

Théorème : Une CM irréductible et récurrente possède une mesure invariante π tq $\pi(x) > 0$, $\forall x \in E$ et unique à 1 cste mult près.

- Les états d'une CM irréductible et récurrente sont tous récurrents positifs ou nuls
- Les 2 assertions suivantes sont équivalentes :

(i) la CM est récurrente positive

(ii) $\exists$ une mesure de proba invariante π

Elle est alors unique et donnée par :

$$\pi(x) = \frac{1}{E_x(T_x^+)}$$

Notions importantes :

. Un temps d'arrêt T associé à (X_n) est une V.A à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ tq $\forall n \geq 0$; l'événement $\{T=n\}$ est entièrement déterminé par les variables $\{X_0 \text{ — } X_n\}$

Théorème - Propriété de Markov forte :

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$, une CM de MT P et de loi initiale μ_0, et soit T tps d'arrêt pour $(X_n)_{n\geq 0}$.

. Conditionnellement à $\{T < \infty\}$ et $\{X_T = x\}$ le p.a.d $(X_{T+k})_{k\geq 0}$ est une CM de matrice de transition P, partant initialement de x et indépendante de $\{X_0 \text{ — } X_{T-1}\}$

Définition : Une CM de MT P est dite réversible par rapport à la mesure π si $\forall (x,y) \in E$,

$$\pi(x) P(x,y) = \pi(y) P(y,x)$$

Théorème : Si une CM de MT est réversible par rapport à une certaine mesure π alors π est une mesure invariante.

Cours ④ - Comportement asymptotique :

Rappel - loi des grands nombres :

$(X_n)_{n\geq 0}$ suite de VA iid tq $\mathbb{E}(|f(X_0)|) < +\infty$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(X_i) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{E}(f(X_1)) \text{ p.s}$$

Théorème Ergodique :

(X_n) une C.M irréductible et rec. pos. :

. Soit $F : E \to \mathbb{R}$ tq $\mathbb{E}_\pi(|F|) = \sum_{x\in E}\pi(x)|F(x)| < \infty$

Alors $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} F(X_i) \xrightarrow[+\infty]{} \mathbb{E}_\pi(F)$ p.s

. Soit $G : E\times E \to \mathbb{R}$ tq $\sum_{x,y\in E}\pi(x)P(x,y)|G(x,y)| < \infty$

Alors
$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} G(X_{i-1}; X_i) \xrightarrow[\infty]{} \mathbb{E}_\pi(G(X_0, X_1)) \text{ p.s}$$

$$= \sum_{x,y\in E}\pi(x)P(x,y)G(x,y)$$

Définition - Apériodicité :

Une CM irréductible sur E est dite **apériodique** si $\forall x,y \in E$ $\exists n(x,y)\in\mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n(x,y)$; $\mathbb{P}_x(X_n = y) > 0$

$P^n(x,y) > 0$

Lemme - Si CM irréductible et si un état $x\in E$ est apériodique, i.e si $P^n(x,x) > 0$ pour n suffisamment grand ; alors la CM est apériodique.

Théorème :

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une CM irréductible et apériodique de mesure de proba invariante π

Supposons X_0 distribuée selon μ_0, alors :

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}_{\mu_0}(X_n = x) = \pi(x)$$

Définition :

Soit μ, ν 2 mesures de proba sur E. La **distance en variation totale** entre μ et ν est déf par :

$$\|\mu - \nu\|_{T.V} = \frac{1}{2}\sum_{x\in E}|\mu(x) - \nu(x)| \quad ☆$$

$$= \max_{B\subset E}|\mu(B) - \nu(B)|$$

$$☆ = \inf\{\mathbb{P}(X\neq Y) ; (X,Y) \text{ couplage de } \mu, \nu\}$$

Théorème de Doeblin :

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une CM irréductible sur E.
On suppose que sa MT vérifie la condition de Doeblin :

" $\exists\, n \geq 1$; $1 > \delta > 0$, et ν mesure sur E tq $P^n(x,z) \geq \delta\, \nu(z)$; $\forall x, z \in E$ "

Alors la CM admet une unique mesure de proba invariante π et $\sup_{x\in E} \| P^n(x,\cdot) - \pi \|_{TV} \leq (1-\delta)^{\lfloor n/n \rfloor}$

Remarque : Si E est fini, toute CM irréductible et apériodique vérifie la condition de Doeblin.

Cours 6 - Espérances conditionnelles

Rappel - Espérance conditionnelle sur un espace d'états discrets

X v.a. dans E, Y va à valeurs dans E'

$$P(X=x \mid Y=y) = \frac{P(X=x, Y=y)}{P(Y=y)} \quad \text{si } P(Y=y) > 0$$

$P(\cdot \mid Y=y)$ définit alors une nouvelle mesure de proba sur E appelée proba conditionnelle

$\forall y \in E'$, $h(y) := E(X \mid Y=y) \Rightarrow E(X \mid Y) = h(Y)$
esp. cond.

Définition : Une tribu sur un ensemble Ω est une famille d'événements $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ tq
(i) $\Omega \in \mathcal{A}$; (ii) si $A \in \mathcal{A}$ alors $A^c \in \mathcal{A}$
(iii) Toute réunion dénombrable d'événements de $\mathcal{A}$ appartient à $\mathcal{A}$.

- Si $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, on note $\sigma(\mathcal{C})$ la plus petite tribu contenant $\mathcal{C}$, c'est la tribu engendrée par $\mathcal{C}$.

Espace de probabilité - $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ avec $\mathcal{A}$ tribu sur Ω et $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0;1]$ mesure de probabilité

- Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$. On dit que X est $\mathcal{A}$-mesurable ssi $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$:

$$\{X \in B\} = \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}$$

- On note $\sigma(X)$ la tribu engendrée par les événements $\{X \in B\}$ pour $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

Lemme 9.2 - Soit Y et W 2 V.A sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$
Y à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$ et W à valeurs dans $\mathbb{R}$
Alors W $\sigma(Y)$-mesurable $\iff \exists f : E \to \mathbb{R}$ mesurable tq $W = f(Y)$

Théorème 9.3 - Soit X v.A $\mathcal{A}$-mesurable tq $X \in \mathbb{L}^1(\mathcal{A}, \mathbb{P})$. Soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ une autre tribu. Il existe une unique V.A Z (définie p.s) tq :
(a) Z est $\mathcal{F}$-mesurable
(b) $\mathbb{E}(|Z|) < \infty$
(c) Pour toute V.A bornée et $\mathcal{F}$-mesurable, alors
$\mathbb{E}(XW) = \mathbb{E}(ZW)$
On définit l'espérance de X sachant $\mathcal{F}$ par
$$\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}) = Z$$

Prop 9.4 - L'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(\cdot \mid \mathcal{F})$ est linéaire et $\forall X \in \mathbb{L}^1(\mathcal{A}, \mathbb{P})$:
(i) $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F})) = \mathbb{E}(X)$
(ii) Si $X \geq 0$, alors $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}) \geq 0$ p.s
(iii) Si X est $\mathcal{F}$-mesurable, alors $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}) = X$ p.s

Si $\mathcal{F} = \sigma(Y)$ on note $\mathbb{E}(X \mid Y) = \mathbb{E}(X \mid \sigma(Y))$

Cours 7 - Martingales

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ espace de probabilités, $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)$ une filtration

Définition : Soit $M = (M_n)_{n \geq 0}$ un processus aléatoire adapté sur l'espace de proba filtré $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$. Si M_n est <u>intégrable</u> $\forall n$, on dit que M_n est :
- martingale si $\mathbb{E}(M_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) = M_{n-1}$; $\forall n \geq 1$
- sous-martingale si $\mathbb{E}(M_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) \geq M_{n-1}$; $\forall n \geq 1$
- sur-martingale si $\mathbb{E}(M_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) \leq M_{n-1}$; $\forall n \geq 1$

Proposition : Soit $(M_n)_{n \geq 0}$ une martingale, et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application convexe tq $\mathbb{E}(|g(M_n)|) < +\infty$.
$\hookrightarrow$ $(g(M_n))_{n \geq 0}$ est une sous-martingale

Proposition : Soit (M_n) une martingale, alors
$\forall n \geq 0$; $\forall k \geq 1$. $\mathbb{E}(M_{n+k} \mid \mathcal{F}_n) = M_n$

Proposition 10.4 : Soit $M = (M_n)$ une martingale et $(\phi_n)_{n \geq 0}$ un processus prévisible et borné.

Alors le processus défini par :

$X_0 = 0$, et $X_n = \sum_{k=1}^{n} \phi_k (M_k - M_{k-1})$; $\forall n \geq 1$

est une martingale

Théorème d'arrêt de Doob : Soit M une martingale et T un temps d'arrêt sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$

Alors le processus arrêté

$$M_n^T = \begin{cases} M_n & \text{si } n < T \\ M_T & \text{si } n > T \end{cases}$$

est une martingale.

De plus, si une des 2 prop. ci-dessous est satisfaite :

(i) $T < \infty$ p.s, et $\exists c > 0$ tq $\forall n \geq 0 \; |M_n^T| \leq C$

(ii) $E(T) < +\infty$; $\exists C > 0$ tq $\sup_n |M_n - M_{n-1}| \leq C$ p.s

alors $E(M^T) = E(M_0)$

Propriété Soit $M = (M_n)$ un proc. aléatoire adapté à la filtration $\mathbb{F}$ tq $E(|M_n|) < +\infty \; \forall n$

Alors M est une martingale ssi

$E(M_T) = E(M_0)$ pour tout temps d'arrêt T borné.

- $X = (X_n)_{n \geq 0}$ est un processus aléatoire.

  - adapté : ssi X_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable $\forall n$

  - prévisible : ssi X_n est $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurable $\forall n$

Cours ③

Théorème : Soit (M_n) une martingale vérifiant

$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} E(|\Delta M_n|^2) < \infty$ avec $\Delta M_n = M_n - M_{n-1}$

$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} M_n = 0$ p.s

Théorème - Convergence de Doob :

Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une sous-martingale satisfaisant

$\sup_{n \geq 0} E(|X_n|) < +\infty$ ⚠ cv. p.s en général $\nRightarrow X_n \xrightarrow{L^1} X_\infty$

alors $\Rightarrow \exists X_\infty \in L^1$ tq $X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} X_\infty$ p.s

Corollaire - Si $(X_n)_{n\geq 0}$ est une martingale positive alors il existe $X_\infty \in \mathbb{L}^1$ tq $X_n \to X_\infty$ p.s

Théorème - Convergence dans $\mathbb{L}^p$: Soit $p>1$ et $(M_n)_{n\geq 0}$ une martingale tq $\sup_n (\mathbb{E}|M_n|^p) < +\infty$

$\Rightarrow \exists M_\infty \in \mathbb{L}^p$ tq $\forall n \geq 0 \quad M_n = \mathbb{E}(M_\infty | \mathcal{F}_n)$

et $(M_n)_{n\geq 0}$ cv vers M_∞ p.s et dans $\mathbb{L}^p$:

$$\mathbb{E}(|M_n - M_\infty|^p) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Théorème - Inégalité de Doob : Soit $(M_n)_{n\geq 0}$ une sous-martingale et $M_n^* = \max\{M_k,\ k\leq n\}$

$\Rightarrow$ alors on a :

(i) $\forall c>0 : \quad c\mathbb{P}(M_n^* \geq c) \leq \mathbb{E}(M_n \mathbb{1}_{\{M_n^* \geq c\}}) \quad \forall n$

(ii) Si on suppose de plus que $M_n \geq 0$ et $M_n \in \mathbb{L}^p\ \forall n$, alors $\forall n$; $M_n^* \in \mathbb{L}^p$ et : $(p>1)$

$$\mathbb{E}(|M_n^*|^p)^{1/p} \leq \frac{p}{p-1} \mathbb{E}(|M_n|^p)^{1/p}$$

Théorème - Inégalité de Hoeffding : Soit (M_n) mart tq $M_0 = 0$ et $\forall n\geq 1$; $|\Delta M_n| \leq K_n$

$\Rightarrow \forall x \geq 0 ; \forall n \geq 1, \quad \mathbb{P}(|M_n| \geq x) \leq 2\exp\left(\frac{-x^2}{2\sum_{i=1}^{n} K_i^2}\right)$