Задача 7.1. Алёша задумал число. Он прибавил к нему 5, потом разделил сумму на 3, умножил на 4, отнял 6, разделил на 7 и получил 2. Какое число задумал Алёша?

Ответ: 10.

Решение. Мы знаем, что в итоге Алёша получил 2. Раскрутим его действия с конца. До деления на 7, получается, что у него было число 14. До вычитания 6 было 20. До умножения на 4 было 5, до деления на 3 было 15. А до прибавления 5 было 10. ■

Задача 7.2. **а)** На окружности даны 100 точек. Кузнечик прыгает по точкам через одну по часовой стрелке. Сколько всего точек он посетит? А если он прыгает через **б)** 3; **в)** 7; **г)** 2 точки?

Ответ: **а**) 50; **б**) 25; **в**) 25; **г**) 100.

Решение. **а**) Занумеруем точки на окружности по часовой стрелке, начав с первой точки, где сидел кузнечик. Тогда кузнечик пропрыгает по всем нечетным точкам, прыгая через одну, допрыгает до 99-й и дальше попадет опять в первую. То есть посетит 50 точек.
б) Если кузнечик прыгает через 3 точки, то, начав с 1-й, пропустит 2-ю, 3-ю, 4-ю и попадет в 5-ю, затем попадет в 9-ю и т.д. (попадет во все точки вида $1 + 4 \cdot k$). В конце круга он попадет в 97-ю точку и из нее опять в 1-ю. То есть он пропрыгает четверть всех точек — 25.
в) Если кузнечик прыгает через 7 точек, то, начав с 1-й, пропустит 2-ю, 3-ю, 4-ю, 5-ю, 6-ю, 7-ю, 8-ю и попадет в 9-ю, затем попадет в 17-ю и т.д. (во все точки вида $1 + 8 \cdot k$). В конце круга он попадет в 97-ю точку и из нее попадет в 5-ю. Далее (на втором круге) он побывает во всех точак вида $5 + 8 \cdot k$ и в конце круга попадет в 93-ю точку, из которой уже попадет опять в 1-ю и дальше будет повторять свой путь. Заметим, что в итоге кузнечик пропрыгал все те же точки, что и в пункте б), только за 2 круга. И опять посетил 25 точек.
г) Если кузнечик прыгает через 2 точки, то, начав с 1-й, дальше попадет в 4-ю, 7-ю и т.д. (во все точки вида $1 + 3 \cdot k$). В конце круга он попадет в 100-ю точку, а из нее в 3-ю. То есть, на втором круге он пойдет по точкам вида $3 \cdot k$ и в конце круга попадет в 99-ю точку, из которой уже попадет во 2-ю, то есть и на третий круг пойдет по новым точкам, теперь вида $2 + 3 \cdot k$. Так он дойдет до 98-й точки, а из неё вернется в первую. Заметим, что кузнечик при этом прошел абсолютно по всем точкам круга, то есть посетил 100 точек. ■

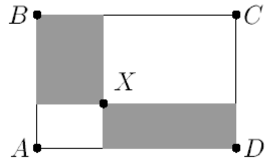
Задача 7.3. Киты и слоны сидят за круглым столом, всего 100 животных, причем китов больше половины. Верно ли, что: **а)** найдутся кит и слон, между которыми ровно одно животное; **б)** найдутся кит и слон, между которыми ровно два животных; **в)** найдутся кит и слон, между которыми ровно семь животных; **г)** найдутся два кита, между которыми ровно трое животных?

Ответ: **а**) Да; **б**) Да; **в**) Нет; **г**) Да.

Решение. **а**) Здесь и далее мы понимаем условие задачи так, что и слоны, и киты за столом присутствуют (иначе, например, в первом пункте за столом могли быть только киты, и нужные нам кит и слон не найдутся). Предположим, что нет кита и слона, между которыми ровно одно животное. Найдем какого-то слона, обозначим его место первым и пронумеруем далее все места по часовой стрелке. Из того, что нет слона и кита, между которыми ровно одно животное, получаем, что на 3-м, 5-м, ..., 99-м местах тоже сидят слоны. Но тогда слонов уже хотя бы половина, и китов не может быть больше половины — противоречие. Значит, кит и слон, между которыми ровно одно животное, найдутся.
б) Допустим, что таких кита и слона нет. Возьмем какого-нибудь кита и обозначим его место первым. Тогда раз кита и слона, между которыми ровно 2 животных нет, то на 4-м, 7-м и т.д. местах сидят тоже киты. Заметим, что мы сейчас двигаемся по кругу ровно так, как кузнечик из пункта г) предыдущей задачи, а значит, обойдем все места за столом, и на всех окажутся киты. Противоречие. Значит, найдутся кит и слон, между которыми ровно 2 животных.
в) Здесь можно придумать пример, когда таких нет. Например, слоны сидят на всех местах 1, 5, 9, ..., 97 (то есть, на местах вида $1 + 4 \cdot k$), а киты — на всех остальных. Тогда китов 75, то есть больше половины, при этом через 7 мест от любого слона сидит слон (это видно из пункта в) предыдущей задачи: — начав с первого места и прыгая через 7 мест, мы будем попадать в точности в те точки, где у нас сидят слоны.)

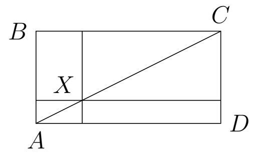
г) Допустим, что таких двух китов не найдется. Посмотрим, какие места у нас расположены через 3 (опять вернемся к задаче с кузнечиком). Это места вида $1 + 4 \cdot k$, вторая серия мест $2 + 4 \cdot k$, третья — $3 + 4 \cdot k$ и последняя — $4 \cdot k$. В каждой серии 25 мест. Посмотрим, сколько максимум китов может быть в одной серии. Раз никакие 2 кита не сидят так, что между ними ровно 3 животных, то в каждой серии нет двух китов подряд, и значит, китов в каждой серии не более половины. Но тогда и всего китов не больше половины — противоречие. Значит, такие 2 кита, что между ними ровно 3 животных, найдутся. ■

Задача 7.4. Прямоугольник $ABCD$ разбит двумя прямыми, пересекающимися в точке X, на 4 прямоугольника (см. рис.). **а)** Докажите, что если X лежит на диагонали AC, то площади закрашенных прямоугольников равны. **б)** Пусть площади закрашенных прямоугольников равны. Обязательно ли тогда X лежит на диагонали AC?

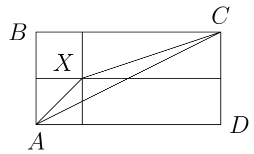


Ответ: **б**) Да, обязательно.

Решение. **а**) Заметим, что диагональ AC прямоугольника $ABCD$ делит его на равные части, откуда суммарная площадь закрашенного прямоугольника и белых треугольников над AC равна суммарной площади закрашенного прямоугольника и белых треугольников под AC. Но диагонали AX и XC белых прямоугольников также делят эти прямоугольники пополам, то есть суммарная площадь белых прямоугольников над диагональю равна суммарной площади белых прямоугольников по диагональю. Но тогда и площади закрашенных прямоугольников равны.



б) Точно так же, как и раньше, получаем, что прямоугольник $ABCD$ делится на части равной площади как диагональю AC, так и ломаной AXC. Но тогда площадь треугольника AXC равна нулю, что возможно лишь в случае, когда X лежит на AC.



■

Задача 7.5. Дана белая полоска **а)** 1×15; **б)** 1×20 клеток. Двое по очереди окрашивают 1 или 2 соседние белые клетки. Проигрывает тот, кому нечего окрашивать. Кто может обеспечить себе победу?

Ответ: **а**) Первый; **б**) Первый.

Решение. **а**) Первым ходом закрашиваем одну центральную клетку. Останутся два куска по 7 клеток. Дальше на каждый ход соперника отвечаем симметричным ходом во второй половине полоски.
б) Аналогично, первым ходом закрашиваем 2 центральные клетки, останутся 2 куска по 9 клеток и дальше опять отвечаем на любой ход противника симметричным ходом во второй половине полочки. ■

Задача 7.6. Найдите возможные значения дроби $\frac{К\cdot А\cdot Р\cdot Л\cdot С\cdot О\cdot Н}{В\cdot А\cdot Р\cdot Е\cdot Н\cdot Ь\cdot Е}$ (разные буквы заменяют разные цифры).

Ответ: 0.

Решение. Заметим, что различных букв в данном примере 10, и поэтому тут представлены все возможные цифры от 0 до 9. В знаменателе 0 встречаться не может, так как на 0 делить нельзя. Следовательно, 0 — в числителе, откуда числитель равен 0, а значит, и дробь равна 0. ■

Задача 7.7. **а)** Робот за ход сдвигается на шахматной доске 8×8 из клетки в соседнюю (по стороне). Некто отметил на доске две клетки А и Б. Хватит ли роботу 14 ходов, чтобы попасть из А в Б? **б)** Всегда ли хватит 13? **в)** В каждую клетку доски 8×8 записали по числу от 1 до 64 (без повторений). Докажите: найдутся две соседние (по стороне) клетки, числа в которых отличаются хотя бы на 5.

Ответ: **а**) Да; **б**) Нет.

Решение. **а**) Каждым своим ходом робот может сократить на 1 расстояние между А и Б либо по вертикали, либо по горизонтали. Поэтому минимальное количество ходов, которое достаточно роботу для попадания из А в Б, равно сумме расстояний по горизонтали и по вертикали между этими точками. Так как максимальное расстояние по вертикали или по горизонтали на шахматной доске — 7, то $7 + 7 = 14$ ходов заведомо хватит. **б**) Если взять 2 конца большой диагонали, то между ними расстояние как раз ровно 7 и по вертикали, и по горизонтали, а значит, потребуется минимум 14 ходов, чтобы попасть из А в Б (13 не хватит). **в**) Пройдём из клетки с числом 1 в клетку с числом 64 с помощью нашего робота. При этом мы сделаем не более 14 шагов. Предположим, что условие задачи не выполнено. Тогда число, записанное в клетке, после одного сдвига увеличится не более, чем на 4. После 14 сдвигов число увеличится не больше, чем на $4 \times 14 = 56$, то есть последнее число будет максимум $1 + 56 = 57$, а не 64. Противоречие. Значит, найдутся соседние по стороне клетки, в которых числа отличаются хотя бы на 5. ■

Задача 7.8. Несколько ребят пили чай с 36 конфетами. Дима сказал: «Я сумею так разделить конфеты, что у каждого будет не больше 5 конфет». Вова ответил: «А я могу так разделить конфеты, что каждому хоть что-то достанется и при этом число конфет у всех будет разным!». Сколько ребят пили чай?

Ответ: 8 ребят.

Решение. Раз можно так разделить конфеты, что у каждого будет не больше 5 конфет, то ребят не меньше 8 (если бы их было 7, то по 5 конфет каждому давало бы только 35 конфет). Если ребят ровно 8, все получили разное число конфет и каждому хоть что-то досталось, конфет получится не меньше $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8$, то есть как раз 36. Значит, больше 8 ребят быть не может, и вариант 8 ребят единственно возможный. ■

Дополнительные задачи

Задача 7.9. Ваня, Витя и Митя играют в настольный теннис. В каждой партии играют два школьника. Тот, кто не принимает участия в данной партии, в следующей игре играет с победителем (ничьих в теннисе не бывает). В результате Ваня сыграл 10 партий, а Витя — 21. Сколько партий сыграл Митя?

Ответ: 11 партий.

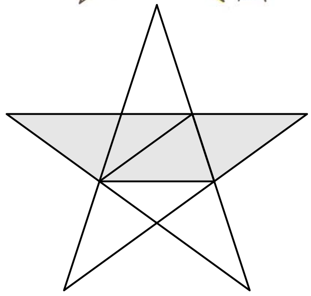
Решение. Всего партий было сыграно не меньше 21 (столько сыграл Витя). Заметим, что никто не может пропустить две игры подряд: если одну игру и пропустил, то следующую уже играет (с победителем предыдущей). Поэтому если бы всего партий было 22 (или больше), то Ваня сыграл бы тогда не меньше 11 партий (ведь не реже каждого второго раза он играет). Но Ваня сыграл 10 партий — значит всего партий было ровно 21.

Но все эти партии тогда играл Витя. А так как каждую свою партию он играл либо с Ваней, либо с Митей, и с Ваней сыграл 10 раз, то с Митей Витя сыграл 11 раз. То есть Митя сыграл ровно 11 партий (все — с Витей). ■

Задача 7.10. Докажите, что у правильной пятиконечной звезды, изображённой на рисунке справа, закрашена ровно половина площади.

Решение. Наша пятиконечная звезда состоит из правильного пятиугольника — центральной части звезды, и примыкающих к нему пяти треугольников — будем называть их лучами звезды.

Проведем в центральном пятиугольнике две диагонали (см.рис.). Они делят его на три части — два одинаковых маленьких треугольника и один побольше. Тот, что побольше, равен лучу звезды, поскольку вместе с примыкающем к нему лучом звезды он образует параллелограмм (докажите!).



Тогда видно, что окрашенная часть звезды состоит из трех больших треугольников, равных лучам звезды, и одного маленького. И неокрашенная часть звезды тоже состоит из трех лучей звезды и одного маленького треугольника. Значит окрашена ровно половина площади звезды. ■

Задача 7.11. **а)** Король объявил сотне мудрецов, что устроит им испытание. Мудрецам завяжут глаза, наденут каждому на голову чёрный, белый или синий колпак, построят в колонну и развяжут глаза. Затем мудрецы по очереди, начиная с последнего, будут называть цвет своего колпака. Кто ошибётся — тому голову с плеч. Сколько мудрецов гарантированно может спастись? (Каждый видит всех впереди стоящих; у мудрецов до испытания есть время, чтобы договориться.) **б)** А если колпаки 10 цветов?

Ответ: **а**) 99; **б**) 99

Решение. **а**) Для удобства поставим в соответствие каждому цвету число: черный — 0, белый — 1 и синий — 2. Тогда мудрецы могут действовать так: последний считает сумму чисел, соответствующих цветам, и делит ее на 3 с остатком. Какой остаток получился — такой цвет он и называет (этот мудрец, естественно, может спастись только если цвет случайно совпал, так как он про свой цвет не знает ничего). После этого второй мудрец тоже считает сумму чисел для колпаков перед собой и делит ее с остатком на 3. Но так как он знает, какой остаток получился у первого мудреца, он сможет понять, какой колпак на нем самом (для примера: если первый назвал синий цвет, то есть остаток был 2, то если у второго тоже получилось 2, на нем черный колпак, если 1 — белый, если 0 — синий). И так далее — каждый мудрец знает, какое число назвал первый мудрец, и знает, какие колпаки были на всех остальных мудрецах, что стоят за ним, а значит, знает остаток от деления на 3 у суммы чисел для всех колпаков перед ним плюс число его собственного колпака. Посчитав остаток от деления на 3 у суммы чисел всех колпаков, которые он видит перед собой, мудрец узнает и цвет своего колпака.

б) 10 цветов на самом деле ничуть не страшнее, чем 3. Стратегия точно такая же, только числа для цветов понадобятся уже числа от 0 до 9, и мудрецам надо будет называть остаток от деления на 10. Как и в прошлом пункте, все, кроме последнего мудреца, смогут спастись. ■
