Задача 7.1. За день до дождя кот всегда чихает. Сегодня он чихнул. Точно ли завтра будет дождь?

Решение. В условиях не сказано, что кот чихает исключительно за день до дождя. Поэтому он может чихнуть и просто так. ■

Задача 7.2. В мешке 24 кг зерна. Отмерьте на чашечных весах без стрелки 9 кг зерна.

Решение. Разложим зерно на две чаши так, чтобы уравновесить их. Тогда в каждой чаше будет по 12 кг зерна. Теперь зерно с одной из чаш уберём, а зерно с другой снова разложим на две чаши так, чтобы уравновесить их. Получим по 6 кг зерна в каждой чаше. Снова 6 кг с одной из чаш отложим, а оставшиеся 6 кг поделим пополам. Одну из половинок — 3 кг — добавим к отложенным 6 кг и получим требуемые 9 кг. ■

Задача 7.3. Если бы Юра купил 3 тетради, у него осталось бы 110 р, а если бы он захотел купить 9 таких тетрадей, ему не хватило бы 70 р. Сколько денег у Юры?

Ответ: 200 рублей.

Решение. Посчитаем разницу между двумя вариантами в тетрадях и в рублях. Во втором случае на $9-3=6$ тетрадей больше и на $110+70=180$ рублей дороже. Значит, каждая тетрадь стоит $180/6=30$ рублей. Отсюда изначально у него было $3\cdot 30+110=200$ рублей. ■

Задача 7.4. Петя и Витя по очереди берут из коробки одну, две или три конфеты. Выигрывает взявший последнюю конфету. Кто может обеспечить себе победу, если конфет в коробке всего **а)** 4; **б)** 5; **в)** 7; **г)** 8; **д)** 179?

Ответ: **а**) Витя; **б**) Петя; **в**) Петя; **г**) Витя; **д**) Петя.

Решение. **а**) Выигрывает Витя. Петя берёт 1, 2 или 3 конфеты, после этого Витя берёт соответственно 3, 2 или 1 оставшуюся и выигрывает.
б), **в**) Петя может взять несколько конфет так, чтобы осталось 4 конфеты. Тогда он оказывается в условиях пункта а), но уже ходит вторым, и поэтому сможет выиграть.
д) Будем анализировать выигрышные и проигрышные позиции. Позиция называется выигрышной, если мы, стартуя с этой позиции, можем ходить так, чтобы гарантировать себе выигрыш. Позиция называется проигрышной, если наоборот, соперник может гарантировать себе выигрыш. Заметим, что позиция выигрышная, если из неё есть ход в проигрышную позицию, и проигрышная — если все ходы из неё ведут в выигрышную.

в	в	п	в	в	в	п	в	в	в	п
10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Если у нас не осталось ни одной конфеты, то мы проиграли: наш ход, а конфет нет. Позиция, соответствующая 0 конфетам проигрышная. Позиции с 1-й, 2-мя или 3-мя конфетами выигрышные: можно все конфеты забрать и выиграть. Если имеется 4 конфеты, то любой ход ведёт в выигрышную позицию, значит эта позиция — проигрышная. Позиции с 5, 6 и 7 конфетами выигрышные, а позиция с 8 конфетами проигрышная (сколько бы мы конфет не взяли, второй игрок сможет нам оставить 4 конфеты). И так далее, позиции с числом конфет, делящимся на 4, проигрышные. Следовательно, 176 конфет — тоже проигрышная позиция, а 179 — выигрышная. Итоговая выигрышная стратегия у второго такая: первым ходом он забирает три конфеты, оставляя 176. И дальше каждым ходом убирает конфеты так, чтобы оставшееся число конфет делилось на 4. ■

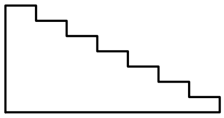
Задача 7.5. Десять человек пришли в гости в галошах. Уходили они по одному, и каждый надевал любую пару галош, в которую мог влезть. Если таких галош не было, гость уходил без галош. **а)** Мог ли кто-нибудь уйти без галош? **б)** Могло ли уйти без галош 5 гостей? **в)** Пусть ушло 4 гостя. Докажите, что хотя бы один из оставшихся может уйти в своих галошах.

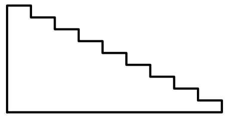
Ответ: **а**) Да, мог; **б**) да, могло уйти пятеро.

Решение. **а**), **б**) Пример придумать легко — пять человек с самыми маленькими размерами галош могут уйти в пяти парах галош самого большого размера, и тогда остальным придется уйти без галош.
б) У каждого из шестерых оставшихся была пара галош подходящего размера, всего получаем шесть пар. Но унесли максимум четыре пары из этих шести (ушедших ведь четверо). Значит чья-то пара

галош осталась нетронутой, и этот человек тоже может уйти! ■

Задача 7.6. По каждой из двух лестниц равной высоты 1 м и с равными основаниями длины 2 м (см. рис.) проползло по червяку: от самого низа до самой левой точки вверху. Сколько прополз каждый червяк?





Ответ: Каждый червяк прополз 3 м.

Решение. Для каждого червяка найдём суммарное расстояние, которое он полз вертикально вверх. Это в точности 1 м — высота лестницы. Также найдём суммарное расстояние, которое каждый червяк полз налево. Это в точности 2 — длина основания лестницы. Значит, каждый червяк прополз 3 м. ■

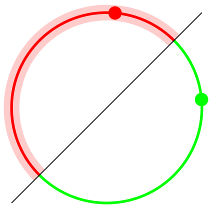
Задача 7.7. **а)** Какое наибольшее количество трёхзначных чисел можно написать на доске так, чтобы все они оканчивались на разные цифры?
б) А так, чтобы любые два числа различались хотя бы в одной из двух последних цифр?
в) Даны целые числа, всего их 101. Докажите, что разность каких-то двух из этих чисел делится на 100.

Ответ: **а**) 10; **б**) 100.

Решение. **а**) Сначала предъявим пример с 10 числами: 100, 101, ..., 109. Так как различных цифр всего 10, то среди любых 11 трёхзначных чисел у каких-то двух будут одинаковые цифры на конце.
б) Аналогично предъявим пример со 100 числами: 100, 101, ..., 199. Так как существует ровно 100 вариантов написать две последние цифры, то нельзя найти больше 100 чисел.
в) По предыдущему пункту, у каких-то двух чисел последние две цифры совпадут. А значит, их разность оканчивается на два нуля, то есть делится на 100. ■

Задача 7.8. Стёпа бежит по кругу с постоянной скоростью. В двух точках круга стоит по фотографу. После старта Стёпа сначала был некое время ближе к первому фотографу, затем в течение 3 минут — ближе ко второму, а потом (до конца круга) снова ближе к первому. За какое время Стёпа пробежал круг?

Ответ: За 6 минут.



Решение. Разделим каждую из дуг между двумя фотографами пополам и проведём прямую, соединяющую середины дуг. Тогда по одну сторону от этой прямой Стёпа ближе к первому фотографу, а по другую — ко второму. Но эта прямая делит круг пополам, поэтому к первому фотографу Стёпа был ближе ровно столько же, сколько и ко второму, то есть тоже 3 минуты. ■

Задача 7.9. Из чисел $1,\ 2,\ \ldots,\ 49,\ 50$ выбрали 26 чисел. Точно ли среди них будут 2 числа с разностью 1?

Ответ: Точно будут.

Решение. Разобъем наши числа на пары: $(1,2)$, $(3,4)$, $(5,6)$, ..., $(49,50)$. В каждой паре числа различаются на 1, всего пар 25. Так как мы выбрали 26 чисел, то обязательно найдутся среди них два числа из одной пары, и они будут различаться на 1. ■

Дополнительные задачи

Задача 7.10. Докажите, что среди учеников любого класса найдутся двое, имеющие одинаковое число друзей в этом классе (если, конечно, в этом классе не менее двух учеников).

Решение. Пусть в классе $n \geqslant 2$ учеников. Каждый из них может иметь тогда от 0 до $n-1$ друзей, всего n вариантов. Но и учеников всего n, и если бы у всех было разное число друзей, то был бы ученик, у которого 0 друзей, ученик, у которого 1 друг, и так далее, вплоть до ученика, у которого $n-1$ друг.

Но в классе не могут одновременно учиться ученик, у которого 0 друзей в этом классе и ученик, у которого $n-1$ друзей в этом классе (ведь первый тогда ни с кем не дружит, а второй дружит со всеми, в том числе и с первым — противоречие). Значит, у кого-то их ребят одинаковое число друзей (среди одноклассников). ■

Задача 7.11. Юра шёл по прямой дороге от одной остановки к другой. Пройдя треть пути, он оглянулся и увидел вдали приближающийся автобус. Известно, что к какой бы остановке ни побежал Юра, он достигнет её одновременно с автобусом. Найдите скорость автобуса, если Юра бегает со скоростью 7 км/ч.

Ответ: 21 км/ч.

Решение. Так как Петя прошёл треть пути, то расстояние до остановки впереди в два раза больше, чем до остановки позади. Пусть Петя побежал до остановки, которая впереди. Тогда в тот момент, когда он пробежит половину пути, автобус окажется у остановки позади. За оставшееся время Петя пробежит треть расстояния между остановками, а автобус проедет его целиком. Значит автобус едет в три раза быстрее, то есть со скоростью 21 км/ч. ■

Задача 7.12. Куб $3 \times 3 \times 3$ нужно разрезать на 27 кубиков $1 \times 1 \times 1$ (каждый разрез должен быть параллелен какой-нибудь грани куба). После каждого разреза разрешено перекладывать разрезанные части. Хватит ли для этого: **а)** шести разрезов; **б)** пяти разрезов.

Ответ: **а**) Хватит; **б**) Не хватит.

Решение. **а**) Сделаем по два разреза параллельно каждой грани куба (каждый разрез содержит одну из граней центрального кубика).
б) Каждый кубик имеет 6 граней. Чтобы вырезать центральный кубик, нужно провести разрез по каждой из шести его граней (ведь все они внутри). Значит, разрезов минимум 6 — как ни перекладывай части данного куба, а одним плоским разрезом нельзя вырезать более одной грани кубика. ■
