Содержание

1 Введение **2**

2 Конечномерный принцип Лагранжа **2**

1 Введение

Рассматриваем задачу $f_0(x) \to extr, x \in A \subset X, f_0(x) : X \to \mathbb{R}$.
Темы и сюжеты, которые будут обсуждаться:

- Конечномерный принцип Лагранжа
- Дифференцирование в нормированных пространствах и бесконечномерный принцип Лагранжа
- Условия первого порядка в вариационном исчислении, простейшая задача, изопериметрическая задача, задача с подвижными концами
- Условия второго порядка для простейших задач классического вариационного исчисления
- Задача оптимального управления и принцип максимума Понтрягина
- Выпуклые задачи, алгоритмы.

2 Конечномерный принцип Лагранжа

Для начала рассмотрим случай $f_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ с ограничениями-равенствами и неравенствами. $f_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f_0(x) \to \min, f_j(x) \leqslant 0, j = 1, \ldots, m', f_k(x) = 0, k = m' + 1, \ldots, m$.

Теорема 1 (Ферма, 1638)**.** *Пусть X — банахово, f_0 дифференцируема по Фреше. Тогда если x_0 — $locmin$ функции f_0, то $f'(x_0) = 0$.*

Доказательство. $f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h)$. $f'(x_0) \neq 0 \Rightarrow \exists h_0 : f'(x_0)h < 0 \Rightarrow$ для достаточно малого $\lambda > 0 \to f(x_0 + \lambda h_0) < f(x_0)$, противоречие. $\square$

Соответственно при исследовании мы решали $f_0'(x) = 0$, получали множество точек, считали Гессиан $\langle f_0''(x)h, h\rangle = \left(\frac{\partial^2 f_0}{\partial x_i \partial x_j}\right)$. Необходимо, чтобы он был неотрицательно определён, положительной определённости же достаточно для минимума. Соответственно вопрос сводился к линейной алгебре, где мы пользовались критерием Сильвестра.

Теорема 2 (Теорема Брауэра)**.** *Пусть в конечномерном пространстве $f : B_r(x_0) \to B_r(x_0)$ — непрерывная. Тогда $\exists \hat{x} \in B_r(x_0), f(\hat{x}) = \hat{x}$.*

Следствие (Теорема об ε-сдвиге)**.** *Пусть $\varphi : B_r(0) \to \mathbb{R}^n$ непрерывная, такая что $|\varphi(y) - y| \leqslant \varepsilon \Rightarrow \forall a \in B_{r-\varepsilon}(0) \to \exists \hat{y} : \varphi(\hat{y}) = a$.*

Доказательство. $F(y) = a + y - \varphi(y)$. Покажем, что $F(B_r(0)) \subset B_r(0)$. В самом деле $|F(y)| \leqslant |a| + |y - \varphi(y)| \leqslant r - \varepsilon + \varepsilon = r$. По теореме Брауэра $\exists \hat{y} : F(\hat{y}) = \hat{y} \Rightarrow a + \hat{y} - \varphi(\hat{y}) = \hat{y} \Rightarrow a = \varphi(\hat{y})$. $\square$

Теорема 3 (Правило множителей Лагранжа для задач с равенством)**.** *Рассмотрим задачу* $f_0(x) \to \min, f_j(x) = 0, j = 1, \dots, m$. *Пусть* x_0 *— locmin,* $x \in \mathbb{R}^n, f_j \in D(\mathbb{R}^n)$. *Тогда* $\exists \lambda \in \mathbb{R}^{m+1} : |\lambda| \neq 0, L'_x(x_0) = 0$, *где* $L(x, \lambda) = \sum\limits_{j=0}^{m} \lambda_j f_j(x)$.

Доказательство. Пусть x_0 — locmin, $f(x_0) = 0$. Рассмотрим множество $Y = \{(f'_0(x_0)h, \dots, f'_m(x_0)h) \mid h \in \mathbb{R}^n\} \subset \mathbb{R}^{m+1}$ — линейное подпространство. Рассмотрим два случая:

1) $Y \neq \mathbb{R}^{m+1}$, тогда $\exists \lambda, |\lambda| \neq 0 : \lambda \perp Y \Rightarrow \sum \lambda_j f'_j(x_0) = 0$.

2) $\exists h_j : f'_j(x_0)h_k = \delta_{jk}$. Рассмотрим $\varphi : B_r(0) \to \mathbb{R}^{m+1}$, $(y_0, \dots, y_m) \mapsto (f_0(x_0 + \sum y_j h_j), \dots, f_m(x_0 + \sum y_j h_j))$. Пусть $r > 0$. $f_k(x_0 + \sum y_j h_j) - y_k = 0 + \langle f'_k(x_0), y_k h_k \rangle + o(y) - y_k = o(y)$.

$\varphi(y) - y = o(y), y \to 0, |\varphi(y) - y| < \frac{r}{2} \forall y \in B_r(0)$, по лемме об ε-сдвиге $\exists \hat{y} \in B_r(0) : \varphi(\hat{y}) = \left(-\frac{r}{2}, 0, 0\right)$. $\square$