Лекция 4.

1 Нормы на $\mathbb{Q}$

Теорема 1. *Существуют следующие (мультипликативные) нормы на $\mathbb{Q}$:*

- *тривиальная*
- *стандартная:* $|x| = x sgn(x)$
- *p-адическая,* $|x|_p = |\frac{a}{p^k}| = p^k$, *$p$ — простое.*

Упражнение 1. Если двигаться шагами по 2^k с весом 2^{-k} от точки 0 к точке $x \in \mathbb{Z}$, то чему равен вес кратчайшего пути?

Упражнение 2. $G = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & \frac{1}{a} \end{bmatrix} \right\}$. Найти левую и правую меру Хаара.

Если пополнить p-адические числа, получим $\mathbb{Q}_{(p)} = [\mathbb{Q}]_{|\cdot|_p}$. Числа там имеют вид $\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} x_j p^j$. Можно выделить абелеву подгруппу $\mathbb{Z}_{(p)}$ с числами, где нет отрицательных j.

Упражнение 3. $\mathbb{Z}_{(p)}$ — компактно.

Упражнение 4. $\mathbb{Z}_{(p)}$ — гомеоморфно p-ичному дереву и канторовскому множеству.

Упражнение 5. Записать $-1, \frac{1}{2}$ как p-адическую дробь.

Упражнение 6 $(**)$**.** Исследовать в p-адических числах $e^t = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots$.

Упражнение 7. Доказать, что $T : x \mapsto x + 1$ непрерывно, сохраняет меру Хаара, и что все сдвиги на этой группе $R_a : x \mapsto x + a$ сводятся к T.

Упражнение 8. Найти меру Хаара этой группы.

Упражнение 9. Проверить, что характеры $\mathbb{Z}_{(p)}$ — это $\gamma_{\frac{\alpha}{p^k}}(x) = \exp(2\pi i \frac{\alpha}{p^k} x)$.