Лекция 2. Группа монодромии накрытия

1 Поднятие

Лемма (О поднятии)**.** *Для любого пути в базе* $\varphi : [0;1] \to B$ *и* $v_0 \in \pi^{-1}(\varphi(0))$ *существует единственный путь-поднятие:* $\overline{\varphi}_v : [0;1] \to E$: $\overline{\varphi}_v(0) = v$ *и* $\varphi = \pi \circ \overline{\varphi}_v$.

Доказательство. Для каждой точки отрезка $\forall t \in [0;1]\ \exists U_t$ — окрестность точки t с таким свойством, что $\varphi(U_t) \subset U(\varphi(t))$, где $U(\varphi(t))$ — тривиализующая окретсность: $\pi^{-1}(U(\varphi(t))) \xrightarrow{k} U(\varphi(t)) \times F$.

В силу компактности отрезка выберем конечное подпокрытие: $\exists t_0, \dots, t_N$: $[0;1] = \bigcup\limits_{j=0}^{N} U_{t_j}$. Более того, сузим все интервалы до отрезков, граничащих по концам: $[0;1] = \bigcup\limits_{j=0}^{N-1} [t_j; t_{j+1}]$.

Для каждого j $\exists U_j \subset B : \varphi([t_j;t_{j+1}]) \subset U_j, k_j : \pi^{-1}(U_j) \to U_j \times F$ (при этом $\pi = k_j \circ p_1$).

Поднятие тогда определим так: $\overline{\varphi} = k_j^{-1}(\varphi(t), p_2 \circ k(\overline{\varphi}(t_j))$. Это отображение непрерывно, так как непрерывно на каждом из замкнутых множеств, которые разбивают весь отрезок.

$\pi \circ \overline{\varphi}(t) = \pi(k^{-1}(\varphi(t), \dots)) = p_1(\varphi(t), \dots) = \varphi(t)$.

Единственность покажем по индукции: если $\overline{\varphi}'$ тоже поднятие и оно совпадает на нескольких первых отрезках, нужно показать, что оно совпадает и на следующем. $\square$

Определение 1 (Действие фундаментальной группы)**.** Действие группы $\pi_1(B, b_0)$ на множестве $\pi^{-1}(b_0)$ определим формулой $\psi : \pi_1(B, b_0) \to S(\pi^{-1}(b_0)), \psi([\varphi])(v) = \overline{\varphi}_v(1)$.

Утверждение 1. $\overline{(\varphi_1\varphi_2)} = \overline{\varphi}_{1,v_1}\overline{\varphi}_{2,v_0}$, где $v_1 = \overline{\varphi}_{2,v_0}(1)$.

Доказательство. Отображение является поднятием какого-то пути, если удовлетворяет двум свойствам из определения. Первое свойство очевидно, второе: $\pi \circ (\overline{\varphi}_{1,v_1}\overline{\varphi}_{2,v_0} = \varphi_2$ при $t \in [0; \frac{1}{2})$ и $\varphi_1(2t+1)$ иначе. $\square$

Корректность определения:

- Гомоморфизм: $\psi([\varphi_1][\varphi_2])(v) = \psi([\varphi_1\varphi_2])(v) = \overline{(\varphi_1\varphi_2)}_v(1) = \overline{\varphi}_{1,v_1}\overline{\varphi}_{2,v}(1) = \overline{\varphi}_{1,v_1}(1) = \psi([\varphi_1])(\overline{\varphi}_{2,v}(1)) = \psi([\varphi_1]) \circ \psi([\varphi_2])(v)$ где, $v_1 = \overline{\varphi}_{2,v}$
- Биективность: обратным будет отображение $\psi([\varphi^{-1}])$.
- Если $[\varphi_1] = [\varphi_2]$, то $\overline{\varphi}_{1,v}(1) = \overline{\varphi}_{2,v}(1)$ (упражнение).

2 Группа монодромии

Определение 2 (Группа монодромии)**.** Группа монодромии G_{b_0} накрытия $\pi : E \to B \ni b_0$ — это образ $\psi(\pi_1(B, b_0))$.

Пример. У накрытия $\exp : \mathbb{R} \to S^1$ выполнено $\psi([\varphi])(v) = v + 1$, то есть $G_{b_0} \cong \mathbb{Z} \cong \pi(B, b_0)$.

Пример. У тривиального накрытия группа монодромии тривиальна, в то время, как фундаментальная группа $\pi_1(B, b_0)$ может быть нетривиальна, то есть нельзя сказать, что ψ — изоморфизм.

Пример. У накрытия $P_k : S^1 \to S^1, P_k(e^{2\pi it}) = e^{2\pi ikt}$ выполнено $\psi([\varphi])(v) = ve^{\frac{2\pi it}{k}}$, то есть $G_{b_0} \cong \mathbb{Z}_k$.

Вообще говоря, корректность определения группы монодромии не очевидна.

Утверждение 2. Пусть $\varphi_1 \sim \varphi_2$, $\Theta : [0;1]^2 \to B : \Theta(t, 0) = \varphi_1(t), \Theta(t, 1) = \varphi_2(t)$, тогда $\psi(\varphi_1) = \psi(\varphi_2)$.

Доказательство. $\psi([\varphi_j])(x) = \overline{\varphi}_{j,x}(1)$. Нужно показать, что $\overline{\varphi}_{1,x}(1) = \overline{\varphi}_{2,x}(1)$. Мы будем определять отображение $\overline{\Theta} : [0;1]^2 \to E$ так, чтобы еще $\Theta(0, t) = x$.

Лемма (О продолжении поднятия)**.** *Пусть* $f : D^n \to B$*,* $F_0 : D_1 \to E : f\mid_{D_1} \equiv p \circ F$*, где* $D_1 = \{x \in \partial D^n \mid x_n \leqslant 0\}$*. Тогда* $\exists F : D^n \to B, F_0 = F\mid_{D_1}, f = p \circ F$*.*

По лемме, такое поднятие $\overline{\Theta}$ существует. Тогда рассмотрим $p \circ \overline{\Theta}\mid_{\{(1,t)\}} = \Theta(\{1, \tau\}) = \{\varphi_\tau(1)\}$, а значит, что $\overline{\Theta}(\{1, \tau\}) \subset p^{-1}(b)$ — дискретно, то есть $|\overline{\Theta}(\{1, \tau\})| = 1$.

Доказательство леммы. Легко показать, что у каждой точки x_0, которую мы смогли поднять, есть окрестность, которую можно поднять. В силу компактности квадрата, достаточно взять конечное число открытых множеств, чтобы его покрыть. Более того, можно показать, что можно взять мелкую сетку из маленьких замкнутых квадратиков, каждый из которых лежит в открытом множестве, над которым накрытие тривиально, и продолжать поднятие построчно по этим квадратикам. □

□

Определение 3 (Изоморфизм накрытий)**.** Накрытия $\pi_i : E_i \to B_i$, $i \in \{0, 1\}$ изоморфны, если существует гомеоморфизмы $f : E_1 \leftrightarrow E_2, g : B_1 \leftrightarrow B_2$, такие что $\pi_2 \circ f \cong g \circ \pi_1$.

Замечание (Связь группы монодромии с фундаментальной группой)*.* Если $\varphi : [0;1] \to B, \varphi(0) = b_0, \varphi(1) = b_1$, то $G_{b_0} \cong G_{b_1}$.

Замечание (Изоморфизм групп монодромии). Если два накрытия изоморфны, то $G_{b_1} \cong G_{g(b_1)}$.

Доказательство. Рассмотрим два построения.

Рассмотрим $[\varphi] \in \pi_1(b_1, b_0)$ и $[g(\varphi)] \in \pi_1(B_2, b_2)$. Отображение определим как $h : G_{b_1} \to G_{g(b_1)}, h(\psi([\varphi]) = \psi(g_*([\varphi]))$, где g_* — индуцированное отображением g отображение фундаментальных групп. Нужно показать, что если $[\varphi_1] \neq [\varphi_2]$, то $\psi([\varphi_1]) \neq \psi([\varphi_2])$.

Пусть $\sigma \in G_{b_1} \subset S(\pi^{-1}(b_1))$. Определим отображение $h(\sigma)(v) = f(\sigma(f^{-1}(v)))$. Нужно показать корректность: $h(\sigma) \in G_{b_2}$.

Если покажем, что эти построения это на самом деле одно и то же, то оба будут корректны.

Утверждается, что $\psi([g(\varphi)])(v) = \overline{g(\varphi)}_v(1) = f(\overline{\varphi}_{f^{-1}(v)})(1)$. Для этого надо проверить свойства: 1) $f(\overline{\varphi}_{f^{-1}(v)})(0) = f(f^{-1}(v)) = v$; 2) $\pi_2(f(\overline{\varphi}_{f^{-1}(v)})) = g(\pi_1(\overline{\varphi}_{f^{-1}(v)})) = g(\varphi)$.

Тогда $\psi([g(\varphi)]) = f(\overline{\varphi}_{f^{-1}(v)})(1) = f(\psi([\varphi])(f^{-1}(v))) = f(\sigma(f^{-1}(v)))$, что нам и надо. □

Замечание (Гомоморфизм накрытий). Эти рассуждения работают, если f, g — непрерывные отображения, такие что $\pi_2 \circ f = g \circ \pi_1$, а также, что $f\mid_{P_i}$ — биекция, где P_i — это i-й слой накрытия. В этом случае не факт, что индуцированное отображение является изоморфизмом.

Такие f, g задают так называемый гомоморфизм накрытий.