24.10.2015

Аримфметика Пеано (NB: перечислимость множества аксиом важна).

Первая теорема Гёделя грубо: не получится вывести $\exists k : T(n, x, k)$ — проблема остановки. Вторая теорема Гёделя о построении арифметичного предиката выводимости.

Примитивно-рекурсивные функции ($\mathcal{PR}$) — наименьшее множество, замкнутое относительно операций композиции, примитивной рекурсии и содержащее $\{I_i^n, S, 0\}$.

Лемма о разборе случаев: $gI(h(y) = 0) + h(1 - I(h(y) = 0)) \in \mathcal{PR}$, если $g, h \in \mathcal{PR}$.

Еще лемма: $f(x, y) = \sum_{z \leqslant x} g(z, y) \in \mathcal{PR}$, если $f \in \mathcal{PR}$. Произведение, конечно, тоже.

Примитивно-рекурсивное отношение — то, у которого характеристическая функция примитивно-рекурсивна.

Еще лемма: если $R \in \mathcal{PR}$, то $\exists z \leqslant x : R(z, y) \in \mathcal{PR}$, а также $\forall z \leqslant x : R(z, y) \in \mathcal{PR}$.

Конечно, примитивно-рекурсивны $P \wedge Q, P \vee Q, \neg P$, также усечённая минимизация, предыдущее число, равенство и много ещё что.

Примитивно-рекурсивен оператор ограниченной минимизации $f(x, y) = \mu z < x.h(z, y) = 0$. То есть можно считать какие-нибудь обратные функции вроде корня.

31.10.2015

Примитивно-рекурсивное кодирование пар $\langle x, y\rangle = \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + x$. Проекторы: $\pi^1 \langle x, y\rangle = x, \pi^2 \langle x, y\rangle = y$.

Последовательности кодируем как $[a_1, \ldots, a_n] = p_1^{a_1+1} \ldots p_n^{a_n+1}$. Говоря так, мы на самом деле работаем с примитивно-рекурсивными функциями $IsSeq(x), Len(x), Get(x, i)$ и прочее.

С помощью этого всего можно реализовать другую схему рекурсии, обращающуюся ко всем предыдущим значениям (возвратная рекурсия).

Теорема 1. *Пусть* $f(\overline{x}, 0) = g(\overline{x}), f(\overline{x}, z+1) = h(z, f'(\overline{x}, z))$, *где* $f'(\overline{x}, z) = [f(\overline{x}, 0), \ldots, f(\overline{x}, z)]$. *Тогда, если* $g, h \in \mathcal{PR}$, *то* $f \in \mathcal{PR}$.

Интресное: обратная функция Аккермана (было письмо).

07.11.2015

Наша теория: предикатный символ равенства, функциональный символ последователя $S^{(1)}$, нуля $0^{(0)}$, а также множество символов Fnc.

$Fnc^0 \ni 0, Fnc^1 \ni S, Fnc^n \supseteq \{I_k^n \mid 0 \leqslant k < n\}$, причём $g_1, \ldots, g_m \in Fnc^n, h \in Fnc^m \Rightarrow Chg_1 \ldots g_m) \in Fnc^n$, а также $g \in Fnc^n, h \in Fnc^{n+2} \Rightarrow$

$Rgh \in Fnc^{n+1}$, где Rgh обозначает оператор примитивной рекурсии, $Fnc = \bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} Fnc^i$.

Теперь надо закодировать весь наш язык первого порядка. Переменные $\#(v_k) = \langle 1, k \rangle$. Логические символы $\{\neg, \rightarrow, \forall\}$ кодируем как $\langle 2, x \rangle$, единственный предикатный символ как $\langle 3, 0 \rangle$. Осталось закодировать Fnc.

$\#(0) = \langle 4, \langle 1, 0 \rangle \rangle$. $\#(S) = \langle 5, \langle 1, 1 \rangle \rangle$. $\#(I_k^m) = \langle 6, \langle k, m \rangle \rangle$. $\#(C) = \langle 7, 0 \rangle$. $\#(R) = \langle 8, 0 \rangle$.

В качестве кода какой-то программы p из Fnc хотим взять код последовательности номеров символов в записи.

Хотим записать предикат «быть кодом функционального терма с m переменными». $FTm(x, n) = 1$ в следующих случаях:

- $Sq(x) \wedge Len(x) = 1 \wedge n = 0 \wedge (x)_0 = \#(0)$
- $\ldots, n = 1 \wedge (x)_0 = \#(S)$
- $\ldots, \exists 0 < k < n : (x)_0 = \langle 6, \langle k, n \rangle \rangle$
- $Sq(x) \wedge Len(x) \geqslant 3 \wedge (x)_0 = \#(C) \wedge FTm((x)_1, Len(x) - 2) = 1 \wedge \forall i < Len(x) - 2 \rightarrow (FTm((x)_{i+2}, n))$
- $Sq(x) \wedge Len(x) = 3 \wedge n > 0 \wedge x > n + 1 \wedge (x)_0 = \#(R) \wedge FTm((x)_1, n - 1) \wedge (FTm((x)_2, n + 1))$

Кодирование терма $T(x)$:

- $Sq(x) \wedge Len(x) = 1 \wedge \exists k < x : (x)_0 = \#(v_k)$
- $Sq(x) \wedge FTm((x)_0, Len(x) - 1) \wedge Len(x) > 0 \wedge \forall i < Len(x) - 1 \rightarrow (T((x)_i) = 1)$

Кодирование формул $F(x)$ ($\lceil \forall v_j \varphi \rceil = [\#(\forall), \#(v_j), \lceil \varphi \rceil]]$):

- $Sq(x) \wedge Len(x) = 3 \wedge (x)_0 = \#(=) \wedge T((x)_1) = 1 \wedge T((x)_2) = 1$
- $Sq(x) \wedge Len(x) = 3 \wedge (x)_0 = \#(\forall) \wedge \exists j < x : ((x)_1 = \langle 1, j \rangle) \wedge Fm((x)_2) = 1$
- $\ldots$

Следующая цель: функция подстановки $Sub(\lceil \varphi \rceil, j, \lceil t \rceil) = \lceil \varphi(t \mid_{v_j}) \rceil$.

14.11.2015

План построения Sub (считаем, что все формулы записываются через $\forall, \rightarrow, \perp$):

- проверить, что первый аргумент — формула, если нет, то вернуть 0.
- если первый аргумент — код одной переменной, то осуществить простую подстановку.

- если первый аргумент начинается с квантора по переменной, то нужно его проигнорировать в случае, если переменная заменяемая и осуществить подстановку под квантором в противном случае.

- ...

Можно построить также двухаргументный $Sub : Sub(\ulcorner\varphi\urcorner, \ulcorner t\urcorner) = sub(\ulcorner\varphi\urcorner, i, \ulcorner t\urcorner), i = \mu j < \ulcorner\varphi\urcorner : j$ входит свободно в $\ulcorner\varphi\urcorner$.

Нумералы: $\overline{0} = 0, \overline{n+1} = S\overline{n}$. Рассмотрим функцию $\nu(n) = \ulcorner\overline{n}\urcorner$ (примитивно-рекурсивную). Тогда $Sub(\ulcorner\varphi\urcorner, \nu(n)) = \ulcorner\varphi(\overline{n}/x)\urcorner$. Такую функцию назовем $S(x, y)$.

Теперь выпишем предикатные аксиомы:

- $\varphi \to (\psi \to \varphi)$
- $(\varphi \to (\psi \to \theta)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \theta))$
- $(\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$
- $\forall x\varphi \to \varphi(t/x)$
- $\forall x(\varphi \to \psi) \to (\forall x\varphi \to \forall x\psi)$
- $\varphi \to \forall x\varphi, x \notin FV(\varphi)$
- Modus ponens, обобщение: $\frac{\varphi}{\forall x\varphi}$.

Примитивно-рекурсивная арифметика ($\mathcal{PRA}$):

- $x = x$
- $x = y \to (A \to A(y/x))$
- $\neg(Sx = 0)$
- $Sx = Sy \to x = y$
- $I^n_k x_1, \dots, x_n = x_k$
- Аксиомы композиции
- Аксиомы примитивной рекурсии
- Индукция по бекванторным формулам: $\varphi(0) \to (\forall x(\varphi(x) \to \varphi(Sx)) \to \varphi$, где в φ нет кванторов.

Вывод в $\mathcal{PRA}$ определяется как обычно: каждый шаг это либо логическая аксиома, либо аксиома $\mathcal{PRA}$, либо выводится из предыдущих по modus ponens или обобщению. Стоит заметить, что множество аксиом примитивно-рекурсивно.

Теперь можно написать предикат $Prf_{\mathcal{PRA}}(y, x) =$ «y вывод в $\mathcal{PRA}$ формулы с кодом x». $\mathcal{PRA}$ можно расширять примитивно-рекурсивным множеством аксиом, сохраняя предикат доказательства.

Также можно построить предикат $Pr_{\mathcal{PRA}}(x) = \exists y Prf_{\mathcal{PRA}}(y, x)$ (квантор неограниченный!).

Если T примитивно-рекурсивно расширяет $\mathcal{PRA}$, то у нас есть Prf_T и Pr_T, причём первый из них примитивно рекурсивен. Притом так как предикат $Prf_T \in \mathcal{PR}$, то его характеристическая функция — какая-то примитивно-рекурсивная формула.

Обозначим $\lceil \varphi(x\cdot) \rceil = S\lceil \varphi \rceil x$.

Теорема 2 (Гильберта-Бернайса-Лёба). *Пусть T — примитивно-рекурсивное расширение $\mathcal{PRA}$.*

- *Если φ — замкнутая формула, то $T \vdash \varphi \Rightarrow \mathcal{PRA} \vdash Pr_T(\lceil \varphi \rceil)$*
- $\mathcal{PRA} \vdash Pr_T(\lceil \varphi(\overline{x}\cdot) \to \psi(\overline{x}\cdot) \rceil) \to (Pr_T(\lceil \varphi(\overline{x}\cdot) \rceil) \to Pr_T(\lceil \psi(\overline{x}\cdot) \rceil))$
- $\mathcal{PRA} \vdash Pr_T(\varphi(\overline{x}\cdot) \to Pr_T(\lceil Pr_T(\lceil \varphi(\overline{x}\cdot) \rceil))$

Будем далее обозначать: $\Box_T \varphi = Pr_T(\lceil \varphi \rceil)$, а также $[\varphi(x_1, \dots, x_n)] = \lceil \varphi(x_1\cdot, \dots, x_n\cdot) \rceil$. Это терм, в котором все переменные свободны.

12.12.2015

Теорема 3 (Лёба). *Пусть T примитивно-рекурсивна и расширяет $\mathcal{PRA}$. Тогда $\forall \varphi$ — предложения если T выводит $\Box_T \varphi \to \varphi$, то выводит и φ.*

Теорема 4 (Тарский). *Не существует формулы ψ, такую что $\forall \varphi$ — предложения выполнено, что в $\mathbb{N}$ верно $\psi(\lceil \varphi \rceil) \Leftrightarrow$ $\mathbb{N}$ верно φ.*

Теорема 5 (1-я Гёделя о непноте). *Если T примитивно-рекурсивное расширение $\mathcal{PRA}$, то (1) T не выводит $\bot$. (2) Если T Σ_1-корректна, то существует предложение φ, такое, что не выводится ни φ, ни $\neg\varphi$.*

Теорема 6 (2-я Гёделя о непноте). *Если T примитивно-рекурсивное расширение $\mathcal{PRA}$, T не выводит $\bot$, T является Σ_1-корректной. Тогда T не выводит $Con(T)$ и $\neg Con(T)$ ($Con(T) = \neg \Box_T \bot$).*

Теорема 7 (усиление Гёделя-Россера). *Если T примитивно-рекурсивное расширение $\mathcal{PRA}$, не выводит ложь, то существует предложение φ, такое что T не выводит φ и $\neg\varphi$.*

Лемма 1. $\forall \varphi(\overline{y}) \in \Delta_0 \to \exists \widetilde{f} \in \widetilde{\mathcal{PR}} : \mathcal{PRA} \vdash \varphi(\overline{y}) \leftrightarrow (\widetilde{f}\overline{y} = 0)$.

Класс Δ_0 с ограниченными кванторами (?). Σ_1, Π_1 и т.д.: сначала обычные кванторы, потом Δ_0.

Лемма 2. $\mathcal{PRA} \vdash \varphi \leftrightarrow \exists y(Prf_T(y, \lceil \neg\varphi \rceil) \wedge \forall z < y \neg Prf_T(z, \lceil \varphi \rceil)$.

Доказательство. Если $T \vdash \neg\varphi$, то $\exists m \in \mathbb{N} : \mathbb{N} \vDash \forall Prf(\underline{m}, \lceil \neg\varphi \rceil)$. $T \nvdash \bot \Rightarrow \mathbb{N} \vDash \forall z < \underline{m} \neg Prf(z, \lceil \varphi \rceil)$.

Если $T \vdash \varphi$, то $\vdash \exists y(Prf(y, \lceil \neg\varphi \rceil) \wedge \forall z < y Prf(z, \lceil \varphi \rceil))$, также $\mathbb{N} \vDash Prf(\underline{n}, \lceil \varphi \rceil)$. По Σ_1-полноте $T \vdash Prf(\underline{n}, \lceil \varphi \rceil)$, так как $T \nvdash \bot$, то $T \vdash \forall y \leqslant \underline{n} \neg Prf(y, \lceil \neg\varphi \rceil)$. $\mathcal{PRA} \vdash (y \leqslant \underline{n}) \vee (\underline{n} < y)$. □

Теорема 8 (формализованная теорема Лёба)**.** *Если T примитивно-рекурсивное расширение $\mathcal{PRA}$, то $\mathcal{PRA} \vdash \Box_T(\Box_T\varphi \to \varphi) \to \Box_T\varphi$, то есть $\mathcal{PRA}$ знает о теореме Лёба.*

Если подставить ложь, то $\mathcal{PRA} \vdash \Box_T Con(T) \to \neg Con(T)$, то есть $\mathcal{PRA} \vdash Con(T) \to \neg\Box_T Con(T)$.

Если к аксиомам добавить $\neg Con(T)$, то $\mathcal{PRA} \vdash Con(T) \to Con(T + \neg Con(T))$, что есть формализованная вторая тоерема Гёделея.

Если $T \nvdash \bot$ и T — п.р. расширение $\mathcal{PRA}$, то $T + \neg Con(T) \nvdash \bot$, но $\mathbb{N} \not\models T + \neg Con(T)$. Получается пример непротиворечивой, но некорректной теории.

$Rf_n(T) = \{\Box_T\varphi \to \varphi\}$ по всем предложениям φ — локальная схема рефлексии для T.

$RFN(T) = \{\forall\overline{x}(\Box_T[\varphi] \to \varphi)\}$ по всем формулам $\varphi(\overline{x})$ — равномерная схема рефлексии.

$\{Con(T)\} \subset Rf_n(T) \subset RFN(T)$. Однако множество кодов $RFN(T)$ примитивно-рекурсивно, то есть его можно добавлять к T.

Лемма 3. *Над $\mathcal{PRA}$ эквивалентны схемы*

- $RFN(T)$
- $\{\forall\overline{x}\Box_T[\varphi] \to \forall\overline{x}\varphi\}$
- $\frac{\forall\overline{x}\Box_T[\varphi]}{\forall\overline{x}}\varphi$ *(правило Клини, более слабая вариация омега-правила).*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) понятно.

(3) $\Rightarrow$ (1).

Лемма 4 (о явной рефлексии)**.** *Выполнено утверждение и его обобщение:*

- $\forall m, n \in \mathbb{N}\ \forall\varphi(x)\ T \vdash Prf_T(\underline{m}, \ulcorner\varphi(\underline{n}/x)\urcorner) \to \varphi(\underline{n}/x)$.
- $\mathcal{PRA} \vdash \forall x, y\Box_T[Prf_T(y, [\varphi]) \to \varphi]$*, то есть об этом знает* $\mathcal{PRA}$.

Доказательство. $\mathbb{N} Prf_T(\underline{m}, \ulcorner\varphi(n)\urcorner) \vee \neg Prf(\underline{m}, \ulcorner\varphi(\underline{n})\urcorner)$.

1 случай. $T \vdash \varphi(\underline{n})$, тогда $T \vdash Prf_T(\underline{m}, \varphi(\underline{n})) \to \varphi(\underline{n})$.

2 случай. $T \vdash \neg Ptf_t(\underline{m}, \ulcorner\varphi(\underline{n})\urcorner) \overset{\Sigma_1}{\Rightarrow} T \vdash \neg Prf_T(\underline{m}, \ulcorner\varphi(n)\urcorner) \Rightarrow T \vdash Prf_T(\underline{m}, \ulcorner\varphi(n)\urcorner) \to \varphi(\underline{m})$.

Обобщение аналогично. □

Научимся получить произвольную формулу $RFN(T)$ с помощью правила Клини. $\mathcal{PRA} \vdash \forall x\forall y\Box_T[Rf_T(y, [\varphi]) \to \varphi(x)]$. Применим к ней правило Клини: $\mathcal{PRA} \vdash \forall x\forall y(Prf_T(y, [\varphi]) \to \varphi(x) \vdash \forall x(\exists y Prf_T(y, [\varphi]) \to \varphi) \vdash \forall x(\Box_T[\varphi] \to \varphi)$. □

12.12.2015

$RFN_{\Pi_n}(T) = \{\forall \overline{x}(\Box_T[\varphi] \to \varphi) \mid \varphi(\overline{x}) \in \Pi_n\}$ — ограниченная схема рефлексии (аналогично по Σ_n).

Лемма 5. *При $n \geqslant 1$ над $\mathcal{PRA}$ эквивалентны*

- $RFN_{\Sigma_n}(T)$ *и* $RFN_{\Pi_{n+1}}(T)$
- $RFN_{\Pi_1}(T)$, $Rfn_{\Pi_1}(T)$ *и* $Con(T)$.

Теорема 9 (Частичное определение истинности)**.** *Пусть $n \geqslant 1$, тогда существует $Tr_{\Pi_n}(z) \in \Pi_n$, такая что $\forall \varphi(\overline{x}) \in \Pi_n$ выполнено $\mathcal{PRA} \vdash \varphi(\overline{x} \Leftrightarrow Tr_{\Pi_n}[\varphi(\overline{x})]$.*

Замечание. Под $\mathcal{PRA}$ $RFN(T)$ эквивалентна $\{RFN_{\Pi_n(T)} \mid n \geqslant 1\}$, каждая из которых конечно аксиоматизируема.

Теория U — Γ-расширение теории T, если $U \equiv T + \Phi, \Phi \subset \Gamma$ (конечное расширение, Σ_1 расширение).

Лемма 6. *при $n \geqslant 1$*

- $Rfn_{\Pi_n}(T)$ *не содержится ни в каком*
  - *непротиворечивом*
  - *конечном*
  - Σ_n

  Расширении U теории T.
- $Rfn_{\Pi_n}(T)$ *не содержится ни в каком непротиворечивом Σ_n-расширении U теории T.*

Замечание. Следствия

- $Rfn(T)$ не содержится ни в каком непротиворечивом конечном расширении T.
- $RFN(T)$ не содержится ни в каком непротиворечивом расширении T ограниченной сложности.
- $T + Th_{\Pi_1}(\mathbb{N})$ (все истинные в $\mathbb{N}$ Π_1-формулы) $\vdash Rfn(T)$.

Теорема 10. *Если T — Σ_1-корректна, то $T + Rfn(T) \nvdash RFN(T)$.*

Замечание. Факт: $\mathcal{PA} \vdash RFN(\mathcal{PRA})$.

Следствие: PA не содержится ни в каком непротиворечивом расширении PRA ограниченной сложности (в частности, в конечном).

Теорема 11. *Пусть U перечислимое непротиворечивое Σ_n расширение T. Тогда существует предложение $\varphi \in \Sigma_n$, такое что $T + \varphi$ непротиворечива и $T + \varphi \vdash U$.*

Замечание. Факт (лемма Craig'a): Пусть Γ — перечислимое множество формул. Тогда существует примитивно-рекурсивное множество формул Δ, такое что $\mathcal{PRA} + \Delta = \mathcal{PRA} + T$.

Замечание. Первое следствие из теоремы: $Rfn_{\Pi_n(T)}$ не содержится ни в каком непротиворечивом перечислимом Σ_n-расширении теории T.

Второе: Rfn не содержится ни в каком непротиворечивом перечислимом расширении теории T ограниченной сложности.

Из этого следует, что множество всех истинных Π_1-формул $Th_{\Pi_1}(\mathbb{N})$ неперечислимо (иначе противоречие со вторым следствием).

Можно почитать

- Смаринский «Self-reference and modal logics»
- Доказуемая Σ_1 — полнота (Бухгольц?).