Лекция 8. Метрическая энтропия

1 Энтропия динамической системы

Рассмотрим фазовое пространство $(X, \mathcal{B}, \mu)$ и конечное разбиение $P = \{C_1, \ldots, C_n\}$.

Определение 1. *Энтропия* разбиения P — это $H(P) = -\sum \mu(C_i) \log_2 \mu(C_i)$.

Замечание. В определении основание логарифма не так важно, но мы принимаем его за 2, чтобы «измерять» информацию в привычных битах.

Нетрудно понять, что $H(P) = E_\mu I_P(x)$, где $I(x)$ — информационная функция: $I_P(x) = -\log_2 \mu(C(x))$, где $C(x) : X \to P, C(x) \ni x$.

Возьмём разбиение P_0 и построим $Q_N = P_0 \vee T^{-1} P_0 \vee \ldots \vee T^{-N+1} P_0$, где $A \vee B$ обозначает взятие минимального разбиения, содержащего A и B.

Определение 2. Пусть (X, T) — динамическая система, $P = \{C_\alpha, \alpha \in \mathbb{A}\}$ — разбиение. Пусть также $x_j \in \mathbb{A} : C_{x_j} \ni T^j(x)$. Тогда бесконечная последовательность $\{x_j \mid j \in G\}$ называется *кодом* точки x.

Для $w \in \mathbb{A}^*$ примем обозначение $[w] = \{x : x_0 \ldots x_{|w|-1} = w\}$.

Можно рассматривать проецсс кодирования как случайный процесс в следующем смысле: пусть $\xi_0(x) = \alpha, x \in C_\alpha$ — кодирующая случайная величина, тогда процесс кодирования $\xi_j = \xi_0 T^i$.

Определение 3. *Энтропией* процесса $\{\xi_j\}$ называется $h(\xi) = h_{P_0}(T) = \lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{N} H(Q_N)$.

Отметим также свойство: $H(P_0) \leqslant \log_2 |P_0|$, достигается оценка очевидно для равномерного разбиения.

Условную энтропию можно ввести с помощью условное матожидание. Точно, через матожидание, также можно ввести энтропию бесконечного разбиения, однако, она уже не обязана быть конечной.

Теорема 1. $H_P(T) = H(P \mid \bigvee\limits_{-\infty}^{-1} T^i P)$.

Замечание. Представить себе процесс с пространством, неизоморфным пространству Лебега не очень просто, но такие есть (как пример, Винеровский процесс).

Определение 4. η — *измеримое разбиение*, если $\eta = \{f^{-1}(\{y\})\}$ для некоторого измеримого $f : X \to Y$.

Разбиения	σ-алгебры
пространство Лебега $\cong [0;1]$	
$\nu = \{X\}$	$\{\varnothing, X\}$
$\mathbb{c} = \{\{x\} \mid x \in X\}$	$\mathcal{A}$ — полная на $[0;1]$
$\xi \vee \eta = \{C_1 \cap C_2\}$	$\mathcal{B}_1 \wedge \mathcal{B}_2$
$\xi \wedge \eta$	$\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$

Определение 5. $\mathcal{A}$ называется *μ-полной*, если $\mathcal{A} = [\mathcal{A}]_\mu$.

Определение 6. Система $(Y, \mathcal{B}, \gamma, S)$ является *фактором* $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$, если существует «вложение»: $\exists \varphi : X \to Y, \mathcal{B} \leqslant \mathcal{A}$.

Или: $\mathcal{B} \leqslant \mathcal{A}, S = T\mid_{\mathcal{B}}$ при условии, что $T\mathcal{B} = \mathcal{B}$.

Определение 7. *Энтропия динамической системы* $h(T) = \sup\limits_P h_P(T)$, где P – конечное разбиение.

$h > 0$	Спектр (Leb, ∞)
$h = 0$	Самые разные спектры, разные кратности, примеры субэкспоненциального роста сложности

Теорема 2 (Шеннон-Макмилан-Брейман). *Энтропию процесса можно эквивалентно определить следующим образом: $\exists h \geqslant 0 : \forall \varepsilon > 0 \to$ для μ-большинства блоков $[w]$ длины n (мера всех остальных блоков стремится к 0): $2^{-n(h+\varepsilon)} < \mu([w]) < 2^{-n(h-\varepsilon)}$. Такое h и есть энтропия процесса.*

2 Семинарская часть

Символическая сложность: $P_w(n) = \#L_n(w), L_n(w) = \{u \leqslant w : |u| = n\}$.

Упражнение 1.

- $\min p(n)$ для непериодических слов?
- построить экспоненциальный рост: 2^{h_n}
- построить линейный рост
- достигается ли наименьшая скорость роста в первом пункте
- добиться квадратичной скрости
- добиться кубической скорости
- добиться субэкспоненциальной скорости
- $(^*)$ какова скорость роста для слабо-перемешивающей системы из предыдущей лекции? Для последовательности Туве-Морса.