Лекция 3. Эргодическая теорема II

1 Общие соображения

Имеем группу (полугруппу) G, которая отвечает за время. В статистическом случае мы делаем N наблюдений и усредняем результаты согласно равномерному распределению. Причем тут вообще равномерность? Это инвариантность относительно естественного действия группы, то есть это так называемая мера Хаара: $\lambda(\delta + A) = \lambda(A)$.

Значит в гипотетическом общем случае наш план таков: выделить область времени U и посчитать $\frac{1}{\lambda(U)} \int\limits_U f(T^t x) d\lambda(t)$ ожидая, что это сходится к $E_\lambda f$ при $U \to \infty$ в каком-то смысле.

Определение 1. Пусть есть последовательность F_n, тогда если $\frac{\lambda(F_n \oplus (\delta + F_n))}{\lambda(F_n)} \to 0$ для всех $z \in K$-компакта, то эти множества называются Фёльнеровскими.

Определение 2. Аменабельная группа G — такая группа, в которой есть «последовательность» Фёльнеровских множеств F_n.

Один из главных примеров не аменабельной группы — это свободная группа F_2, где граница шара по размеру сопоставима с самим шаром. Оказывается, что аменабельность замкнута относительно всех разумных теоретико-групповых операций, а значит те группы, которые содержат F_2 не аменабельны, в частности группа SO(3).

Упражнение 1. Есть ли в группе $\left\langle \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ соотношения?

Напоминание: унитарный оператор — такой, что $A^* = A^{-1}$ или $\langle Af, g \rangle = \langle f, A^* g \rangle$.

Опретор Купмана сохраняет скалярные произведение: $\int\limits_X f(Tx)\overline{g(Tx)} d\mu(x)$ по теореме о замене переменных в интеграле Лебега есть $\langle f, g \rangle$, что и нужно.

Упражнение 2. T — эргодично $\Leftrightarrow \exists \varphi \neq const, \hat{T} = \varphi \Leftrightarrow \ker(\hat{T} - 1) = \{const\}$.

Докажем теперь, что из эргодичности следует перемешивание. Без ограничения общности $E_\lambda \varphi = 0$. $T \in Mix \Leftrightarrow \forall f, g \to \left\langle \hat{T}^k f, g \right\rangle \to E_\lambda f E_\lambda g$, то есть $\hat{T}^k \underset{w}{\to} \Theta$ (ортопроектор на константу).

$$\langle \Theta f, g \rangle = \int (E_\lambda f) 1 g d\lambda = E_\lambda f \int g d\lambda$$

.

2 Теорема фон Неймана, лемма Рохлина-Халмоша

Теорема 1 (Эргодическая теорема фон Неймана)**.** $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\hat{T}f \to E_\mu f$ *в* $L^2(X,\mu)$, *если* T *— эргодично.*

Доказательство. Пусть T не обязательно эргодично. Пусть $I = \{\varphi : \hat{T}\varphi = \varphi\}$. $L^2(\mu) = I \oplus I^\perp, \hat{T}I = I$.

Если $\varphi \in I$, то $\frac{1}{n}\sum \hat{T}\varphi = \frac{1}{n}(\varphi + \dots \varphi) = \varphi \to \varphi$.

Иначе, пусть функция имеет вид $f = h - \hat{T}h$. Сумма примет вид $\frac{1}{n}\left(h - \hat{T}h + \hat{T}h - \hat{T}^2h + \dots\right) = \frac{1}{n}(h - \hat{T}^n h) \to 0$, так как $\hat{T}$ — унитарный.

Дальнейшая идея в том, чтобы показать, что функции такого вида плотны в $I^\perp$. Рассмотрим замыкание $M = \overline{\{h - \hat{T}h\}}$. Если оно не совпадает с I, то все пространство разбивается на три: $L^2(\mu) = I \oplus M \oplus F$ для какого-то F. $\exists f \in F : f \perp (h - \hat{T}h)$ для любого h, тогда $\left\langle f, h - \hat{T}h \right\rangle = \langle f, h\rangle - \left\langle f, \hat{T}h\right\rangle = \langle f, h\rangle - \left\langle \hat{T}^{-1}f, g\right\rangle = \left\langle f - \hat{T}^{-1}h\right\rangle$, значит, так как h любое, то $f - \hat{T}^{-1}f = 0 \Rightarrow \hat{T}f = f$, противоречие. □

Лемма (Рохлина-Халмоша)**.** *Пусть* T *— эргодическая и заданы параметры* $\varepsilon > 0, h \in \mathbb{N}$, *тогда существует башня высоты* h, *такая что* $\mu(\bigsqcup\limits_{k=0}^{h-1} T^k B) > 1 - \varepsilon$.

Доказательство. Выберем произвольное множество B и построим $L_k = TL_{k-1} \setminus B, L_0 = B$. Тогда множество $D = \bigsqcup_{k=0}^{\infty} L_k$ инвариантно, $TD = D$. Отсюда $D = X$ в силу эргодичности.

Выберем теперь любое множество B, такое, что $\mu(B)(h-1) < \varepsilon$ и рассмотрим $B, TB, \dots$. Спроецируем каждый h-й уровень на h вниз и выберем h множеств, из урезанных слоев, построив таким образом новую башню $C, TC, T^2C, \dots$. Она дизъюнктна и мера её объединения не меньше чем $1 - \mu(E) = 1 - \mu(B)(h-1) \leqslant 1 - \varepsilon$, так как ошибочные кусочки накрывают B не более, чем h раз. □

3 Доказательство эргодической теоремы

Доказательство. Рассмотрим $f = I_{X_0}$, $\mu(X_0) = 1 - \mu(X_0) = \mu(X_1) = \frac{1}{2}$. Вместо одной второй можно взять любую положительную константу. Такими индикаторами можно аппроксимировать любую функцию.

$$\mu(x : \lim\sup_{n\to\infty} \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x)}_{S_n} \geqslant \frac{1}{2} + c) > 0, c > 0$$

.

Это значит $\forall x \exists n_j \to +\infty : S_j \geqslant \frac{1}{2} + \frac{c}{2}$.

Рассмотрим башню H меры, близкой к 1 с достаточно большой высотой. $n_1(x)$ измеримо, $\mu(x : n_1(x) > M) = 0, M \to \infty$. M нужно выбрать таким, чтобы эта мера была меньше какого-то малого δ. Хотим разбивать нашу башню на множества меры 0 по вертикали. Сверху нужно отступить M, чтобы не испортить статистику, потеряем на этом не больше $\frac{M}{H}$ меры. Важно аккуратно сделать это разбиение измеримым и пропускать те моменты, где в нужном столбике меньше $\frac{1}{2} + \frac{c}{2}$ единичек. $\square$