1 Подсчёт структур с помощью экспоненциальных производящих функций

Будем рассматривать функции вида $f(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x_n t^n$. С помощью них будем считать число каких-то интересных множеств с точностью до размера.

$1, 1, 1, \ldots$	$f(t) = e^t$	тривиальная, $P(A) = T$
$1, 0, 0, \ldots$	$f(t) = 1$	$P(A) = (A = \varnothing)$
$0, 1, 0, \ldots$	$f(t) = x$	$P(A) = (\lvert A \rvert = 1)$
$0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots$	$f(t) = \frac{x^k}{k!}$	$P(A) = (\lvert A \rvert = k)$

Можем складывать, если уверены в дизъюнктности.

Умножение соответствует разбиению на два множества, каждое со своей структурой.

К примеру две тривиальных функции: $e^t \cdot e^t = e^{2t} = \sum 2^n \frac{t^n}{n!}$, количество подмножеств, что и должно было получиться.

Числа Белла: $(e^t - 1)$ — непустота, значит разбиения это $e^{e^t - 1}$.

Число перестановок: выбираем первый элемент, остальное должно иметь упорядоченную структуру. То есть $tf(t) = f(t) - 1$ (минус один важно не забыть, потому что нельзя выбрать один элемент из пустого множества). Итого получаем $f(t) = \frac{1}{1-t}$.

Беспорядки: все есть сумма $\frac{1}{1-t} = f_0 + \ldots + f_n + \ldots$, где f_i — число перестановок с i неподвижными точками. $f_k = \frac{x^k}{k!} f_0$, так как перестановка с k неподвижными точками — это разбиение на k точек и беспорядок. Итого $f = \frac{e^{-t}}{1-t}$, вычет в 1 равен e^{-1}.

Логарифмирование. Рассмотрим $e^{L(t)} = \frac{1}{1-t}$. Перестановка разбивается на циклы, число таких циклических упорядочиваний получается $L(t) = -\ln(1-t) = -(-t - \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} + \ldots) = \sum \frac{t^n}{n!}(n-1)!$, как и должно было получиться.

Производная соответствует удалению одного элемента. Например, $f'(t) = f \cdot f = f^2$ — удаление одного элемента из перестановки это тоже самое, что разбиение на два множества — до и после этого элемента.