

## Содержание

1	Модели случайных графов	2
2	Общая теория случайных подмножеств	3
3	Монотонные и выпуклые свойства	3
4	Асимптотическая эквивалентность моделей	4
5	Связь в обратную сторону	6
6	Пороговые вероятности	7
7	Малые подграфы в случайном графе	9
8	Пороговая вероятность	9
9	Метод моментов	10
10	Предельные теоремы для $X_G$	12

# 1 Модели случайных графов

**Определение 1.** *Случайный граф* — случайный элемент со значениями в некотором конечном множестве графов.

**Определение 2.** *Равномерная модель.*  $K_n$  — полный граф,  $0 \leq m \leq C_n^2$ ,  $\mathcal{G}_m$  — множество всех остовных подграфов  $K_n$ , имеющих ровно  $m$  рёбер. Случайный граф в этой модели — случайный элемент с равномерным распределением на  $\mathcal{G}_m$ .

$$P(G(n, m) = F) = \frac{1}{C_n^m} \forall F \in \mathcal{G}_m$$

Фиксировано число рёбер, но другие характеристики выглядят сложнее, скажем  $\deg v$  имеет гипергеометрическое распределение.

**Определение 3.** *Биномиальная модель.*  $\mathcal{G}$  — множество всех остовных подграфов  $K_n$ ,  $p \in [0, 1]$ . Случайный граф в этой модели — случайный элемент на  $\mathcal{G}$  со следующим распределением:

$$P(G(n, p) = F) = p^{|E(F)|} (1 - p)^{C_n^2 - |E(F)|} \forall F \in \mathcal{G}$$

Много независимых событий, из-за чего многие характеристики имеют удобное распределение, например  $\deg v \sim B(n-1, p)$ . Число рёбер, впрочем, случайно.

Другие модели:

- Граф  $G$ , схема Бернулли на его рёбрах. Скажем,  $G = K_{n,m}$  — случайный двудольный граф.
- Равномерное распределение на какой-то совокупности графов  $\mathcal{F}$ . Например, случайный  $d$ -регулярный граф
  - $d = 1$  — случайное совершенное паросочетание
  - $d = 2$  — случайный набор циклов
  - $d = 3$  — можно показать, что а.п.н. это гамильтонов цикл плюс какое-то совершенное паросочетание
- Случайный процесс на графе
  - С дискретным временем:  $\tilde{G} = (\tilde{G}(n, m), m = 0 \dots C_n^2)$ , в котором на каждом шаге появляется новое случайное равномерно выбранное ребро.  $\tilde{G}(n, m) \stackrel{d}{=} G(n, m)$ . Можно смотреть случайные моменты
    - \*  $\tau_1(n) = \min\{m : \delta(\tilde{G}(n, m)) \geq 1\}$
    - \*  $\sigma_1(n) = \min\{m : \tilde{G}(n, m) \text{ связан}\}$

**Теорема 1** (Баллобаш, Томасон).

$$P(\tau_1(n) = \sigma_1(n)) \rightarrow 1, n \rightarrow \infty$$

- С непрерывным временем: пусть для каждого ребра  $e$  графа  $K_n$  задана случайная величина  $T_e$ . Тогда для  $\forall t > 0$  можно рассмотреть процесс:

$$\tilde{G}_T = \{e \mid T_e \leq t\}$$

Если все  $T_e$  распределены одинаково,  $\tilde{G}_T(n, t) \stackrel{d}{=} G(n, p)$ , где  $p = P(T_e \leq t)$ .

- Triangle-free process. На каждом шаге включаем одно случайное ребро так, чтобы не возникало треугольников. Можно показать, что в результате такого процесса  $\alpha(\text{итогового графа}) = O(\sqrt{n \ln n})$ . Следствие: оценка на число Рамсея  $R(3, t) \geq c \frac{t^2}{\ln t}$ .

## 2 Общая теория случайных подмножеств

Пусть  $\Gamma$  — конечное множество,  $|\Gamma| = N$ .

- $\Gamma(p)$  — схема Бернулли на  $\Gamma$ .
- $\Gamma(n)$  — случайное подмножество размера  $n$  с равномерным распределением
- $\tilde{\Gamma}(m)$  — случайный процесс, включающий элементы последовательно

В асимптотических утверждениях  $\Gamma = \Gamma_n, n \in \mathbb{N}$  — последовательность, притом  $N = N(n)$ .

## 3 Монотонные и выпуклые свойства

**Определение 4.**  $Q$  — семейство подмножеств  $\Gamma$  называется *возрастающим*, если  $A \in Q, A \subset B \rightarrow B \in Q$ , *убывающим*, если  $A \supset B \rightarrow B \in Q$ , *монотонным*, если оно возрастающее или убывающее.

Ясно, что  $Q$  — возрастающее тогда и только тогда, когда  $\overline{Q} = 2^\Gamma \setminus Q$  — убывающее. Будем обозначать  $\Gamma(p) \models Q \Leftrightarrow \Gamma(p) \in Q$  («обладает свойством  $Q$ »).

**Пример 1.**  $\Gamma$  — рёбра  $K_n$ . Возрастающие свойства:

- связность
- содержит какой-то подграф
- $\delta(G) \geq k$

Убывающие свойства:

- планарность
- $\chi(G) \leq k$

- ацикличность

**Лемма 1.** Пусть  $Q$  — возрастающее свойство. Тогда  $\forall p_1 \leq p_2, m_1 \leq m_2$ :

$$P(\Gamma(p_1) \models Q) \leq P(\Gamma(p_2) \models Q)$$

$$P(\Gamma(m_1) \models Q) \leq P(\Gamma(m_2) \models Q)$$

*Доказательство.*

- $P(\Gamma(m_1) \models Q) = P(\tilde{\Gamma}(m_1) \models Q) \leq P(\tilde{\Gamma}(m_2) \models Q) = P(\Gamma(m_2) \models Q)$
- Пусть  $\Gamma(p') \perp \Gamma(p'')$  — два независимых подмножества. Тогда  $\Gamma(p') \cup \Gamma(p'') \stackrel{d}{=} \Gamma(p)$ , где  $p = p' + p'' - p'p''$ . Тогда можно положить  $p' = \frac{p_2 - p_1}{1 - p_1}$ , а также, что  $\Gamma(p') \perp \Gamma(p_1)$ . Тогда

$$P(\Gamma(p_1) \models Q) \leq P(\Gamma(p_1) \cup \Gamma(p') \models Q) = P(\Gamma(p_2) \models Q).$$

□

**Определение 5.** Свойство  $Q$  называется *выпуклым*, если  $A \subset C \subset B \in Q \Rightarrow C \in Q$

**Пример 2.**

- все монотонные выпуклы
- $\chi(G) = k$

## 4 Асимптотическая эквивалентность моделей

Хотим установить какую-то связь между моделями  $\Gamma(p)$  и  $\Gamma(m)$  при  $pN \sim m$ . Для этого введём следующий контекст:

- $\Gamma(n), n \in \mathbb{N}$  — последовательность конечных множеств
- $N = N(n) \rightarrow +\infty$
- $Q = Q(n)$
- $p = p(n) \in [0, 1]$
- $m = m(n) \in \{0, \dots, N\}$
- $\Gamma(n, p), \Gamma(n, m)$  — случайные подмножества  $\Gamma(n)$

**Лемма 2.** Пусть  $Q$  — свойство  $\Gamma(n)$ . Пусть  $p = p(n) \in [0, 1]$  — некоторая функция. Если для любой последовательности  $m = m(n)$ , такой что

$$m = Np + O(\sqrt{Npq}), q = 1 - p$$

выполнено

$$P(\Gamma(n, m) \models Q) \rightarrow a, n \rightarrow \infty$$

то

$$P(\Gamma(n, p) \models Q) \rightarrow a, n \rightarrow \infty.$$

*Доказательство.* Пусть  $C > 0$  — большая константа и положим  $M(C) = \{m \mid |m - Np| \leq C\sqrt{Npq}\}$ . Обозначим

$$m_* = \operatorname{argmin}_{m \in M(C)} P(\Gamma(n, m) \models Q)$$

$$m^* = \operatorname{argmax}_{m \in M(C)} P(\Gamma(n, m) \models Q)$$

По формуле полной вероятности:

$$\begin{aligned} P(\Gamma(n, p) \models Q) &= \sum_{m=0}^N P(\Gamma(n, p) \models Q \mid |\Gamma(n, p)| = m) P(|\Gamma(n, p)| = m) = \\ &= \sum_{m=0}^N P(\Gamma(n, m) \models Q) P(|\Gamma(n, p)| = m) \geq \\ &= \sum_{m \in M(C)} P(\Gamma(n, m) \models Q) P(|\Gamma(n, p)| = m) \geq \\ &= P(\Gamma(n, m_*) \models Q) P(|\Gamma(n, p)| \in M(C)) \end{aligned}$$

Но  $|\Gamma(n, p)| \sim \operatorname{Bin}(N, p)$ ,  $E|\Gamma(n, p)| = Np$ ,  $D|\Gamma(n, p)| = Npq$ . По неравенству Чебышева:

$$P(|\Gamma(n, p)| - Np > C\sqrt{Npq}) \leq \frac{Npq}{C^2 Npq} = \frac{1}{C^2}$$

Значит  $P(\Gamma(n, p) \models Q) \geq P(\Gamma(n, m_*) \models Q) (1 - \frac{1}{C^2})$ .

Аналогично

$$\begin{aligned} P(\Gamma(n, p) \models Q) &\leq \sum_{m \in M(C)} P(\Gamma(n, m) \models Q) P(|\Gamma(n, p)| = m) + \sum_{m \notin M(C)} P(|\Gamma(n, p)| = m) \\ &\leq P(\Gamma(n, m^*) \models Q) + \frac{1}{C^2} \end{aligned}$$

Значит  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} P(\Gamma(n, p) \models Q) \leq a + \frac{1}{C^2}$ .

Также  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} P(\Gamma(n, p) \models Q) \geq a(1 - \frac{1}{C^2})$ .

Это верно для любого  $C > 0$ . Тогда  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} P(\Gamma(n, p) \models Q) = a$ .  $\square$

## 5 Связь в обратную сторону

**Лемма 3.** Пусть  $Q$  — монотонное свойство,  $a \in [0; 1]$ . Если  $\forall p = p(n)$  такой, что  $p = \frac{m}{N} + o(\sqrt{\frac{m(N-m)}{N^3}})$  выполнено, что  $P(\Gamma(n, p) \models Q) \rightarrow a$ , то  $P(\Gamma(n, m) \models Q) \rightarrow a$ .

Докажем только ослабленный вариант, где  $a = 0$  или  $a = 1$ .

**Лемма 4.** Пусть  $Q$  — монотонное свойство,  $m = m(n), m(n) \rightarrow +\infty$  и  $\varlimsup_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{N} < 1$ . Тогда если  $P(\Gamma(n, \frac{m}{N}) \models Q) \rightarrow 1$ , то  $P(\Gamma(n, m) \models Q) \rightarrow 1$ .

*Доказательство.*

1. Если  $Q$  — возрастающее свойство, то

$$\begin{aligned} P(\Gamma(n, \frac{m}{N}) \models Q) &= \sum_{k=0}^N P(\Gamma(n, \frac{m}{N}) \models Q \mid |\Gamma(n, \frac{m}{N})| = k) P(|\Gamma(n, \frac{m}{N})| = k) \leq \\ &\sum_{k=0}^N P(\Gamma(n, k) \models Q) P(|\Gamma(n, \frac{m}{N})| = k) \leq \sum_{k=0}^m + \sum_{k>m+1} \leq \\ &P(\Gamma(n, m) \models Q) P(|\Gamma(n, \frac{m}{N})| \leq m) + P(|\Gamma(n, \frac{m}{N})| > m) \end{aligned}$$

По ЦПТ (условие на скорость роста  $m(n)$  позволяет ею воспользоваться), получаем, что

$$1 \leq \frac{1}{2} \varliminf_n P(\Gamma(n, m) \models Q) + \frac{1}{2}$$

Значит  $\exists \lim_n P(\Gamma(n, m) \models Q) = 1$ .

2. Если  $Q$  — убывающее, то  $P(\Gamma(n, \frac{m}{N}) \models Q) \leq P(|\Gamma(n, m)| > m) P(\Gamma(n, m) \models Q) + P(|\Gamma(n, m)| \leq m)$ . Далее, все тоже самое.

□

**Следствие.** То же самое верно и для  $a = 0$ .

**Следствие** (Асимптотическая эквивалентность моделей). Пусть  $Q$  — возрастающее свойство,  $m = m(n) \rightarrow +\infty$ ,  $\varlimsup_n \frac{m}{N} \leq 1 - \delta$ . Тогда

1.  $P(\Gamma(n, \frac{m}{N}) \models Q) \rightarrow 1 \Rightarrow P(\Gamma(n, m) \models Q) \rightarrow 1$ .
2.  $P(\Gamma(n, \frac{m}{N}) \models Q) \rightarrow 0 \Rightarrow P(\Gamma(n, m) \models Q) \rightarrow 0$ .
3.  $P(\Gamma(n, m) \models Q) \rightarrow 1 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 P(\Gamma(n, \frac{m}{N}(1 + \varepsilon)) \models Q) \rightarrow 1$ .
4.  $P(\Gamma(n, m) \models Q) \rightarrow 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 P(\Gamma(n, \frac{m}{N}(1 - \varepsilon)) \models Q) \rightarrow 0$ .

*Доказательство.* Первые два — это лемма и следствие. Положим  $\frac{m}{N}(1 + \varepsilon) = p(n)$ . Тогда если  $m'(n) = NP + O(\sqrt{Npq}) = (1 + \varepsilon)m + O(\sqrt{m})$ , то  $m'(n) \geq m(n)$  начиная с какого-то момента, значит в силу возрастания  $Q$   $P(\Gamma(n, m') \models Q) \geq P(\Gamma(n, m) \models Q) \rightarrow 1$ . Значит  $P(\Gamma(n, m') \models Q) \rightarrow 1$ , то есть по лемме  $P(\Gamma(n, \frac{m}{N}(1 + \varepsilon)) \models Q) \rightarrow 1$ . Аналогично следует последний пункт.  $\square$

## 6 Пороговые вероятности

Мы доказали эквивалентность моделей только в случае вероятности, стремящейся к 0 или к 1. Однако, это самый важный случай, так как имеет место эффект «пороговой вероятности».

**Определение 6.** Пусть  $Q$  — возрастающее свойство подмножеств  $\Gamma(n)$ . Функция  $\hat{p} = \hat{p}(n)$  называется *пороговой вероятностью* для  $Q$ , если выполнено  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(\Gamma(n, p) \models Q) = 1$  при  $p = \omega(\hat{p})$  и 0, если  $p = o(\hat{p})$ .

**Определение 7.** Если  $Q$  — возрастающее свойство, то функция  $\hat{m} = \hat{m}(n)$  называется *пороговой функцией* для  $Q$ , если выполнено  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(\Gamma(n, m) \models Q) = 1$  при  $m = \omega(\hat{m})$  и 0 при  $m = o(\hat{m})$ .

*Замечание.* Для убывающих свойств все то же самое, с точностью до наоборот.

*Замечание.*  $\hat{m}$  — пороговая вероятность  $\Leftrightarrow \hat{p} = \frac{\hat{m}}{N}$  — пороговая функция.

**Пример 3.** •  $\Gamma(n) = \{1, \dots, n\}$ ,  $Q = \{\text{внутри есть 3-прогрессия}\}$ . Тогда  $\hat{p} = n^{-\frac{2}{3}}$  — пороговая вероятность,  $\hat{m} = n^{\frac{1}{3}}$  — пороговая функция.

•  $\Gamma(n)$  — рёбра  $K_n$ ,  $Q = \{\text{есть } \Delta\}$ . Тогда  $\hat{p} = \frac{1}{n}$  — пороговая вероятность.

**Утверждение 1.** Пусть  $Q$  — нетривиальное возрастающее свойство подмножеств  $\Gamma(n)$ . Тогда функция  $f(p) = P(\Gamma(n, p) \models Q)$  является непрерывной, строго возрастающей на  $[0; 1]$ ,  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$ .

*Доказательство.* Возрастание следует из предыдущих лемм.

$$f(p) = \sum_{A \in Q} P(\Gamma(n, p) = A) = \sum_{A \in Q} p^{|A|} (1 - p)^{N - |A|}.$$

Это многочлен, строго возрастающая непрерывная функция.  $\square$

**Определение 8.** Если  $Q$  — возрастающее свойство, то  $\forall a \in (0, 1)$  положим  $p(a, n) = f_n^{-1}(a)$ . Введём также  $m(a, n) = \min\{m : P(\Gamma(n, m) \models Q) \geq a\}$ .

**Лемма 5.** Пусть  $Q$  — возрастающее свойство, тогда  $\hat{p} = \hat{p}(n)$  является пороговой вероятностью для  $Q \Leftrightarrow \forall a \in (0, 1)$  выполнено  $\hat{p} \asymp p(a, n)$ . И  $\hat{m}$  — пороговая вероятность для  $Q \Leftrightarrow \forall a \in (0, 1)$  выполнено  $\hat{m} \asymp m(a, n)$ .

*Доказательство.* Докажем для равномерной модели. Пусть  $\hat{m}$  — пороговая, но  $\exists a \in (0, 1)$  такое, что  $\hat{m} \neq m(a, n)$ . Тогда существует подпоследовательность  $\hat{m}_{n_k}$  такая, что отношение  $\frac{\hat{m}_{n_k}}{m(a, n_k)} \rightarrow 0$  или  $+\infty$ .

Пусть предел нулевой. Тогда  $m' = m(a, n_k) - 1$  есть  $\omega(\hat{m})$ . В таком случае  $\lim_{k \rightarrow \infty} P(\Gamma(n, m'(n_k)) \models Q) = 1$ . Но  $P(\Gamma(n, m'(n_k)) \models Q) \leq a < 1$ , противоречие.

Если же предел равен  $+\infty$ , то  $m(n_k) = o(\hat{m})$ . Тогда  $\lim_k P(\Gamma(n, m(n_k)) \models Q) = 0$ . Но для любого  $k$  выполнено  $P(\Gamma(n, m(n_k)) \models Q) \geq a > 0$ , противоречие.

В обратную сторону: пусть  $\hat{m} = \omega(\hat{m})$ . Тогда  $\forall a \in (0, 1) m = \omega(m(a, n))$ , значит в силу возрастания  $Q$   $P(\Gamma(n, m) \models Q) \geq P(\Gamma(n, m(a, n)) \models Q) \Rightarrow \lim_n P(\Gamma(n, m) \models Q) \geq \lim_n P(\Gamma(n, m(a, n)) \models Q) \geq a$ , то есть  $\exists \lim_n P(\Gamma(n, m) \models Q) = 1$ .

Если  $m = o(\hat{m})$ , то все аналогично.  $\square$

**Теорема 2.** Каждое монотонное свойство имеет пороговую вероятность.

*Доказательство.* Считаем, что  $Q$  — возрастающее свойство. Надо показать, что все функции  $p(a, n)$  имеют один и тот же порядок. Возьмём  $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$  и такое  $m$ , что  $(1 - \varepsilon)^m \leq \varepsilon$ . Рассмотрим  $\Gamma^{(1)}(n, p(\varepsilon, n)), \dots, \Gamma^{(m)}(n, p(\varepsilon, n))$  — н.о.р. случайные подмножества  $\Gamma(n)$ . Тогда

$$\tilde{\Gamma} = \Gamma^{(1)}(n, p(\varepsilon, n)) \cup \dots \cup \Gamma^{(m)}(n, p(\varepsilon, n)) \stackrel{d}{=} \Gamma(n, p'),$$

где  $p' = 1 - (1 - p(\varepsilon, n))^m \leq mp(\varepsilon, n)$ .

$$P(\tilde{\Gamma} \models Q) = P(\Gamma(n, p') \models Q) \leq P(\Gamma(n, mp(\varepsilon, n)) \models Q).$$

С другой стороны  $P(\tilde{\Gamma} \not\models Q) \leq P(\forall i \Gamma^{(i)}(n, p(\varepsilon, n)) \not\models Q) = P^m(\Gamma^{(1)}(n, p(\varepsilon, n)) \not\models Q) = (1 - \varepsilon)^m \leq \varepsilon$ . Тогда  $P(\tilde{\Gamma} \models Q) \geq 1 - \varepsilon = P(\Gamma(n, p(1 - \varepsilon, n)) \models Q)$ .

Значит  $\forall n mp(\varepsilon, n) \geq p(1 - \varepsilon, n)$ . Итого  $p(\varepsilon, n) \leq p(\frac{1}{2}, n) \leq p(1 - \varepsilon, n) \leq mp(\varepsilon, n)$ . Значит по лемме,  $p(\frac{1}{2}, n) = \hat{p}$  — пороговая вероятность для  $Q$ .  $\square$

**Следствие.** Для  $\forall$  монотонного свойства  $\exists$  пороговая функция  $\hat{m}$ .

**Определение 9.** Пусть  $Q$  — выпуклое свойство. Тогда функции  $\hat{p}_1 \leq \hat{p}_2$  называются *пороговыми* для  $Q$ , если...

**Пример 4.**  $\Gamma(n)$  — рёбра  $K_n$ .

- $Q = \{\text{обхват} = 4\}$ ,  $\hat{p}_1 = \hat{p}_2 = \frac{1}{n}$
- $Q = \{\text{кликовое число} = 4\}$ ,  $\hat{p}_1 = n^{-\frac{2}{3}}$ ,  $\hat{p}_2 = n^{-\frac{1}{2}}$

**Определение 10.** Пусть  $Q$  — возрастающее. Тогда  $\hat{p} = \hat{p}(n)$  называется *точной пороговой вероятностью* для  $Q$ , если  $\forall \varepsilon > 0$  выполнено  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(\Gamma(n, p) \models Q) = 1$  при  $p \geq (1 + \varepsilon)\hat{p}$  и 0 при  $p \leq (1 - \varepsilon)\hat{p}$ .

**Пример 5.**  $\Gamma(n)$  — рёбра  $K_n$ .



- $Q = \{\text{связность}\}$ ,  $\hat{p} = \frac{\ln n}{n}$  — точная пороговая вероятность
- $Q = \{\text{есть } \Delta\}$ ,  $\hat{p} = \frac{1}{n}$  — пороговая вероятность, но точной пороговой вероятности нет
- $Q = \{\text{ацикличность}\}$ ,  $\hat{p} = \frac{1}{n}$  — пороговая вероятность для  $Q$ , но точна она только с одной стороны

**Теорема 3** (Фридгут). Пусть  $Q$  — монотонное свойство графов,  $\hat{p}$  — пороговая и она не точная. Тогда существует конечное разбиение  $N_j, j = 1, \dots, k$  множества  $\mathbb{N}$  и рациональные числа  $\alpha_1, \dots, \alpha_k > 0$  такие, что  $\forall n \in N_j$  выполнено  $\hat{p}(n) \asymp n^{-\alpha_j}$ .

## 7 Малые подграфы в случайном графе

Рассмотрим  $G(n, p), p = p(n)$ . Пусть  $G$  — фиксированный. Вопросы:

- с какой вероятностью  $G(n, p)$  содержит копию  $G$ ?
- $X_G$  — число копий  $G$  в  $G(n, p)$ . Каково предельное распределение  $X_G$ ?

## 8 Пороговая вероятность

**Утверждение 2** (Метод первого момента). Пусть  $(X_n, n \in \mathbb{N})$  — последовательность с.в. со значениями в  $\mathbb{Z}_+$ . Тогда  $P(X_n > 0) \leq EX_n$ . То есть если  $EX_n \rightarrow 0$ , то  $P(X_n > 0) \rightarrow 0 \Rightarrow P(X_n = 0) \rightarrow 1$ .

**Утверждение 3** (Метод второго момента). Пусть  $(X_n, n \in \mathbb{N})$  — последовательность с.в. со значениями в  $\mathbb{Z}_+$ . Тогда  $P(X_n = 0) \leq P(|X_n - EX_n| \leq EX_n) \leq \frac{DX_n}{(EX_n)^2}$ . То есть если  $DX_n = o(E(X_n)^2)$ , то  $P(X_n = 0) \rightarrow 0$ , то есть  $P(X_n \geq 1) \rightarrow 1$ .

**Определение 11.** Плотностью графа  $G = (V, E)$  называется  $\rho(G) = \frac{|E|}{|V|}$ .  
 $m(G) = \max_{H \subseteq G} \rho(H)$ .

Граф  $G$  сбалансирован, если  $\rho(G) = m(G)$  и строго сбалансирован, если  $\rho(H) < \rho(G) \forall H \subset G$ .

**Определение 12.** Группой автоморфизмов  $\text{Aut}(G)$  графа  $G$  называется группа всех изоморфизмов графа с собой.  $\text{aut}(G) = |\text{Aut}(G)|$ .

**Лемма 6.** Пусть  $G$  — фиксированный.  $X_G$  — число копий  $G$  в  $G(n, p)$ . Тогда

$$EX_G = C_n^v \frac{v!}{\text{aut}(G)} p^{|E|} = \Theta_G(n^v p^{|E|}).$$

Посчитаем дисперсию. Введём  $\Phi_G = \min\{EX_H : H \subset G, H \neq \emptyset\}$ . Тогда

$$\Phi(G) \asymp \min_{H \subset G, |E(H)| > 0} n^{|V(H)|} p^{|E(H)|}$$

**Лемма 7.**

$$DX_G \asymp (1-p) \sum_{H \subset G} n^{2v-v_H} p^{2e-e_H} \asymp (1-p) \sum_{H \subset G} \frac{(EX_G)^2}{EX_H} \asymp (1-p) \frac{(EX_G)^2}{\Phi_G}.$$

*Доказательство.* Пусть  $G'$  — копия  $G$  в  $K_n$ ,  $I_{G'} = I\{G' \subset G(n, p)\}$ . Тогда  $X_G = \sum_{G'} I_{G'}$ .

$$\text{Тогда } DX_G = \text{cov}(X_G, x_G) = \sum_{G', G''} \text{cov}(I_{G'}, I_{G''}) = \sum_{G', G'', |E(G' \cap G'')| > 0} \text{cov}(I_{G'}, I_{G''}).$$

Это можно переписать как

$$\sum_{H \subset G} \sum_{G', G'', G' \cap G'' \equiv H} (p^{2e-e_H} - p^{2e}) \asymp \sum_{H \subset G} n^{2v-v_H} p^{2e-e_H} (1-p^{e_H})$$

С точки зрения порядка  $1-p^{e_H} \asymp 1-p$ , что даёт требуемое.  $\square$

**Теорема 4.** Пороговая вероятность наличия графа  $G$  равна  $\hat{p} = n^{-\frac{1}{m(G)}}$ .

*Доказательство.* Пусть  $p = p(n) = o(n^{-\frac{1}{m(G)}})$ . Возьмём  $H \subset G$ ,  $\rho(H) = m(G)$ . По лемме  $P(G(n, p) \models G) \leq P(G(n, p) \models H) \leq EX_H = \Theta(n^{v_H} p^{e_H})$ .

При данном  $p$  получаем  $\Theta((np^{\rho(H)})^{v_H}) \rightarrow 0$ .

Пусть наоборот,  $p = p(n) = \omega(n^{-\frac{1}{m(G)}})$ . Тогда  $\Phi(G) = \min_{H \subset G} EX_H \asymp \min_H n^{v_H} p^{e_H} = \min_H (np^{\rho(H)})^{v_H} \rightarrow +\infty$ . По лемме,  $P(G(n, p) \not\models G) = P(X_G = 0) \leq \frac{DX_G}{(EX_G)^2} = o(\frac{1}{\Phi_G}) \rightarrow 0$ .  $\square$

**Теорема 5.** Для любого непустого графа  $G$  вероятность  $P(G(n, p) \not\models G) \leq \exp(-\Theta(\Phi_G))$ .

А что будет, если  $np^{m(G)} \rightarrow c > 0$ ?

**Теорема 6** (Пуассоновская предельная теорема). Если  $G$  строго сбалансирован и  $np^{m(G)} \rightarrow c > 0$ , то  $X_G \rightarrow \text{Pois}(\lambda)$ , где  $\lambda = \frac{c^{v_G}}{\text{aut}(G)}$ .

## 9 Метод моментов

**Определение 13.** Последовательность вероятностных мер  $\{P_n, n \in \mathbb{N}\}$  на метрическом пространстве  $S$  слабо сходится к мере  $P$ , если  $\forall f : S \rightarrow \mathbb{R}$  — ограниченной непр. функции выполнено:

$$\int_S f(x) P_n(dx) \rightarrow \int_S f(x) P(dx).$$

Обозначение:  $P_n \xrightarrow{w} P$ .

**Определение 14.** Семейство вероятностных мер  $\{P_\alpha\}$  на метрическом пространстве  $S$  называется *плотным*, если  $\forall \varepsilon \exists K_\varepsilon$  — компакт, такой что  $\forall \alpha P_\alpha(S \setminus K_\varepsilon) \leq \varepsilon$ .

Семейство мер называется *относительно компактным*, если в любой последовательности мер из семейства найдётся сходящаяся подпоследовательность.

**Теорема 7 (Прохоров).** В полном сепарабельном пространстве семейство мер плотно тогда и только тогда, когда оно относительно компактно.

**Следствие.** Пусть есть плотная последовательность мер на полном сепарабельном метрическом пространстве. Пусть кроме того любая слабо сходящаяся подпоследовательность слабо сходится к одной и той же мере  $Q$ . Тогда  $P_n \xrightarrow{w} Q$ .

**Определение 15.** Распределение случайной величины  $X$  однозначно определяется своими моментами, если из того, что выполнено  $\forall k EX^k = EY^k$  следует  $X \stackrel{d}{=} Y$ .

**Лемма 8.** Пусть  $\exists \varepsilon > 0$ , такое что  $Ee^{tX}$  конечно  $\forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ . Тогда распределение однозначно определено своими моментами.

*Доказательство.* Рассмотрим  $f(z) = E \exp(zX)$  как функцию комплексного переменного. В области  $|\operatorname{Re} z| < \varepsilon$  она голоморфна. Тогда  $f(z)$  раскладывается в ряд Тейлора в окрестности нуля:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{EX^k}{k!} z^k.$$

Пусть  $Y$  — другая с.в., такая что  $EY^k = EX^k$ . Составим функцию  $g(z) = E \exp(zY)$ .  $g(z)$  аналитична в той же полосе и  $g(z)$  раскладывается в такой же ряд Тейлора в окрестности 0. По теореме о единственности они совпадают полностью, значит характеристические функции у них одинаковые, то есть и распределения.  $\square$

**Пример 6.**

- Все распределения с конечным носителем
- Все распределения с экспоненциально убывающими хвостами: экспоненциальные, гамма, нормальные, пуассоновские
- Пример плохого распределения:  $X^3, X \sim N(0, 1)$

**Определение 16.** Последовательность  $\xi_n$  называется *равномерно интегрируемой*, если

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \sup_n E(|\xi_n| I(|\xi_n| \geq c)) = 0.$$

**Теорема 8.** Пусть  $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ ,  $\xi \geq 0$ ,  $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ . Тогда  $E\xi_n \rightarrow E\xi \Leftrightarrow \{\xi_n\}$  — равномерно интегрируема.

**Теорема 9** (Метод моментов). Пусть распределение  $X$  однозначно определяется своими моментами. Тогда если  $\forall k \in \mathbb{N} \ E X_n^k \rightarrow E X^k$ , то  $X_n \xrightarrow{d} X$ .

*Доказательство.* Хотим проверить, что наша последовательность плотная, удостовериться, что частичный предел может быть только один и получить требуемое.

Итак, пусть  $P_n$  — распределение с.в.  $X_n$ . Пусть  $M_k = \sup_n E X_n^k$ . Тогда  $\forall R > 0 \ P_n(\mathbb{R} \setminus [-R; R]) = P(|X_n| > R) \leq \frac{E|X_n|^2}{R^2} \leq \frac{M_2}{R^2} \rightarrow 0$  равномерно по  $n$  с ростом  $R$ .

По теореме Прохорова  $P_n$  содержит слабо сходящуюся подпоследовательность  $P_{n_k}$ . Покажем, что  $P_{n_k} \xrightarrow{d} P_X$ . Если  $P_{n_k} \xrightarrow{w} Q$ , то  $X_{n_k} \xrightarrow{d} Y$ , где  $Y$  — какая-то с.в. Заметим, что  $X_{n_k}^s$  — равномерно интегрируема:

$$\sup_k E(|X_{n_k}^s| I(|X_{n_k}^s| \geq c)) \leq \sup_k E \frac{X_{n_k}^{2s}}{c} \leq \frac{M_{2s}}{c} \rightarrow 0.$$

По теореме о равномерной интегрируемости  $E X_{n_k}^s \rightarrow E Y^s$ . По условию  $E X_{n_k}^s \rightarrow E X^s$ , то есть  $E X^s = E Y^s$ . Значит  $X \stackrel{d}{=} Y$  и  $P_{n_k} \rightarrow P_X$ .

По следствию из теоремы Прохорова  $P_n \xrightarrow{w} P_X$ , то есть  $X_n \xrightarrow{d} X$ .  $\square$

**Определение 17.** Пусть  $Z$  — случайный вектор. Его распределение однозначно определяется своими моментами, если из того, что  $\forall \alpha(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \ E Z^\alpha = E Z_1^{\alpha_1} \dots Z_m^{\alpha_m} = E Y^\alpha$  следует, что  $Z \stackrel{d}{=} Y$ .

**Теорема 10** (Метод моментов). Пусть распределение случайного вектора  $Z$  однозначно определяется своими моментами. Тогда если  $\forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n \ E X_n^\alpha \rightarrow E X^\alpha$ , то  $Z_n \xrightarrow{d} Z$ .

## 10 Предельные теоремы для $X_G$

*Доказательство пуассоновской предельной теоремы.* Воспользуемся методом моментов. Факториальные моменты  $Y \sim Pois(\lambda)$  равны  $E(Y)_k = EY(Y-1) \dots (Y-k+1) = \lambda^k$ . Достаточно показать, что  $E(X_G)_k \rightarrow \lambda^k$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Пусть  $G_1, \dots, G_N$  — копии  $G$  в  $K_n$ ,  $I_{G_i} = I\{G_i \subset G(n, p)\}$ . Тогда  $X_G = \sum_{i=1}^N I_{G_i}$  и

$$(X_G)_k = \sum_{i_1, \dots, i_k} I_{G_{i_1}} \dots I_{G_{i_k}}.$$

$$E(X_G)_k = \sum_{i_1, \dots, i_k} E I_{G_{i_1}} \dots I_{G_{i_k}} = E'_k + E''_k,$$

где  $E'_k$  — сумма по тем наборам, где все  $G_{i_k}$  попарно не имеют общих вершин,  $E''_k$  — остальные слагаемые.

$$E'_k = (p^{e_G})^k \sum 1 = (p^{e_G})^k C_n^{v_G} \frac{v_G!}{\text{aut}(G)} C_{n-v_G}^{v_G} \frac{v_G!}{\text{aut } G} \cdots C_{n-(k-1)v_G}^{v_G} \frac{v_G!}{\text{aut } G} \sim$$

$$(p^{e_G} \frac{n^{v_G}}{\text{aut}(G)})^k \rightarrow (\frac{c^{v_G}}{\text{aut}(G)})^k = \lambda^k$$

Нужно показать, что  $E''_k = o(1)$ . Для каждого  $t$  рассмотрим  $e(t) = \min\{|E(G_1 \cup \dots \cup G_k)| \mid |V(G_1 \cup \dots \cup G_k)| = t\}$ .

**Утверждение 4.** Пусть  $k \geq 2, 2 \leq t < kv_G$ , тогда  $e(t) > tm(G)$ .

*Доказательство.* Пусть  $F$  — любой граф. Положим  $f_F = m(G)v_F - e_F$ . Тогда  $f_G = 0$  и  $f_H > 0$  для любого собственного подграфа  $H \subset G$ .

Покажем, что если  $F = G_1 \cup \dots \cup G_k$ , то  $f_F < 0$ . Заметим, что  $f_{F_1 \cup F_2} = f_{F_1} + f_{F_2} - f_{F_1 \cap F_2}$ . Если  $k = 2$ , то  $F = G_1 \cup G_2$  и  $|V(G_1 \cap G_2)| > 0$ . Тогда  $f_{G_1 \cup G_2} = f_{G_1} + f_{G_2} - f_{G_1 \cap G_2} = 0 + 0 - f_{G_1 \cap G_2} < 0$ .

Работаем по индукции: пусть  $F' = G_1 \cup \dots \cup G_{k-1}$  и считаем, что  $f_{F'} < 0$ . Тогда  $f_{G_1 \cup \dots \cup G_k} = f_{F'} + f_{G_k} - f_{F' \cap G_k} < 0$ .

Это и означает, что  $|E(G_1 \cup \dots \cup G_k)| > tm(G)$ .  $\square$

Применим утверждение к оценке  $E''_k$ . Если  $A(k, t)$  — это число способов разместить  $k$  копий на  $t$  вершинах.

$$E''_k \leq \sum_{t=k}^{kv_G-1} C_n^t A(k, t) p^{e(t)} = o\left(\sum_{t=k}^{kv_G-1} n^t p^{e(t)}\right) =$$

$$o\left(\sum_{t=k}^{kv_G-1} (n^t p^{tm(G)}) p^{e(t)-tm(G)}\right) \rightarrow 0$$

$\square$

**Теорема 11** (Многомерный случай). Пусть  $G_1, \dots, G_s$  — различные строго сбалансированные графы одной и той же плотности  $m = m(G_i)$ . Тогда если  $np^m \rightarrow c > 0$ , то  $(X_{G_1}, \dots, X_{G_s}) \xrightarrow{d} (Z_1, \dots, Z_s)$ , где  $Z_j$  — независимые случайные величины,  $Z_j \sim \text{Pois}(\lambda_j)$ ,  $\lambda_j = \frac{c^{v_{G_j}}}{\text{aut}(G_j)}$ .

**Пример 7.** Всюду  $m(G) = 1$ ,  $np \rightarrow c > 0$

- $G = C_3 \sqcup C_3$  — два непересекающихся треугольника. Тогда  $X_G \xrightarrow{d} \frac{1}{2}Z(Z-1)$ , где  $Z \sim \text{Pois}(\frac{c^3}{6})$ . Тогда  $P(X_G = 0) \rightarrow (1 + \frac{c^3}{6}) \exp(-\frac{c^3}{6})$
- $G = C_3 \sqcup C_4$ .  $X_G \xrightarrow{d} Z_1 Z_2$ ,  $Z_i$  — независимые,  $Z_1 \sim \text{Pois}(\frac{c^3}{6})$ ,  $Z_2 \sim \text{Pois}(\frac{c^4}{8})$ . Тогда  $P(X_G = 0) \rightarrow 1 - (1 - e^{-\frac{c^3}{6}})(1 - e^{-\frac{c^4}{8}})$

- $G$  — треугольник с висячей вершиной. Тогда  $X_G \xrightarrow{d} \sum_{i=1}^W Z_i$ , где  $Z_i$  — независимые  $Pois(3c)$ ,  $W$  — независима с ними,  $W \sim Pois\left(\frac{c^3}{6}\right)$ .  
 $P(X_G = 0) \rightarrow \exp\left(-(1 - e^{-3c})\frac{c^3}{6}\right)$

Итого, ясно, что  $np^{m(G)} \rightarrow 0 \Rightarrow X_G \xrightarrow{d} 0$  и  $np^{m(G)} \rightarrow c \Rightarrow X_G \xrightarrow{d} Pois$ .  
 Утверждение состоит в том, что в случае, если  $np^{m(G)} \rightarrow \infty \Rightarrow X_G \xrightarrow{d} N$ .

**Теорема 12** (ЦПТ для  $X_G$ ). Пусть  $G$  — непустой фиксированный граф,  $np^{m(G)} \rightarrow \infty$ ,  $n^2(1-p) \rightarrow \infty$ . Тогда

$$\frac{X_G - EX_G}{\sqrt{DX_G}} \xrightarrow{d} N(0, 1).$$

*Доказательство.* Работаем по методу моментов. Вспомним, что если  $Y \sim N(0, 1)$ , то  $EY^k = (k-1)!!$  при чётных  $k$  и 0 при нечётных.

Пусть  $G_1, \dots, G_N$  — копии  $G$  в  $K_n$ ,  $I_{G_i}$  — соответствующие индикаторы. Тогда  $X_G = \sum I_{G_i}$  и обозначим  $T(G_{i_1}, \dots, G_{i_k}) = E \prod_j (I_{G_{i_j}} - EI_{G_{i_j}})$ . Тогда

$$E(X_G - EX_G)^k = \sum_{i_1, \dots, i_k} T(G_{i_1}, \dots, G_{i_k}).$$

Для набора копий  $(G_1, \dots, G_K)$  введём граф  $L(G_1, \dots, G_K)$  с вершинами  $\{1, \dots, k\}$  и  $(j, m)$  — ребро  $\Leftrightarrow G_{i_j}$  и  $G_{i_m}$  имеют общее ребро. Тогда сумму перепишем как:

$$E(X_G - EX_G)^k = \sum_{L \subset K_k} \sum_{i_1, \dots, i_k} T(G_{i_1}, \dots, G_{i_k}).$$

Разбираем три случая. Если  $L$  — совершенное паросочетание. Вспомним, что  $DX_G = \sum_{H \subset G, e_H > 0} C_n^{v_H} C_{n-v_H}^{v_G-v_H} C_{n-v_G}^{v_G-v_H} A(G, H) \cdot (p^{2e_G-e_H} - p^{2e_G}) = d(n, p)$ .

Положим рёбра  $L$  равными  $\{(1, 2), \dots, (k-1, k)\}$ ,  $k$  — чётное.

$$\begin{aligned} \sum T &= \sum_{i_1, \dots, i_k} \prod_{j=1}^{\frac{k}{2}} \text{cov}(I_{G_{2j-1}}, I_{G_{2j}}) \\ &\leq \sum_{j=1}^{\frac{k}{2}} \prod_{G_{2j-1} \not\cap G_{2j}} \sum \text{cov}(I_{G_{2j-1}}, I_{G_{2j}}) = (DX_G)^{\frac{k}{2}}. \end{aligned}$$

С другой стороны

$$\begin{aligned} \sum T &\geq \sum_{j=1}^{\frac{k}{2}} \prod \text{cov}(I_{G_{2j-1}}, I_{G_{2j}}) \\ &= \sum_{i_1, i_2} \text{cov}(G_{i_1}, G_{i_2}) \sum_{G_{i_3} \cup G_{i_4} \not\cap G_{i_1} \cup G_{i_2}} \text{cov}(G_{i_3}, G_{i_4}) \sum \dots \\ &\geq d(n, p) d(n - 2v_G, p) \dots \sim (d(n, p))^{\frac{k}{2}} = (DX_G)^{\frac{k}{2}} \end{aligned}$$

Таким образом, первый случай даёт вклад  $(k-1)!!(DX_G)^{\frac{k}{2}}$ .

Если  $L$  имеет изолированную вершину, то  $T = E(I_{G_{i_1}} - EI_{G_{i_1}}) \dots = 0$ , то есть вклад таких слагаемых равен 0.

В противном случае в  $L$  строго меньше, чем  $\frac{k}{2}$  компонент связности. Про-  
нумеруем его так, чтобы компоненты имели вид  $\{1, \dots, r_1\}, \{r_1+1, \dots, r_2\}, \dots$ .  
Пусть также число компонент равно  $c(L) < \frac{k}{2}$ , а также  $\forall i \notin \{1, r_1+1, \dots, r_{c-1}+1\} \exists j : (j, i) \in E(L)$ .

Пусть  $G_{i_1}, \dots, G_{i_k}$  — набор копий, такой что  $L(G_{i_1}, \dots, G_{i_k}) = L$ . Обозна-  
чим  $G^{(j)} = \bigcup_{s=1}^j G_{i_s}$ ,  $F_j = G^{(j-1)} \cap G_{i_j}$ .  $e_{F_j} = 0 \Leftrightarrow j \in \{1, r_1+1, \dots, r_{c-1}+1\}$ .

Если  $p \leq \frac{1}{2}$ , то

$$|T| \leq E \prod_{j=1}^k (I_{G_{i_j}} + EI_{G_{i_j}}) \leq 2^k EI_{G_{i_1}} \dots I_{G_{i_k}} = 2^k p^{e_G(k)}.$$

Если же  $p > \frac{1}{2}$ , то оставим в каждой компоненте по одному множителю.

$$|T| \leq E \prod_{s=1}^c |I_{G_{i_{r_s}}} - EI_{G_{i_{r_s}}}| = (E|I_{G_1} - EI_{G_1}|)^c =$$

$$(2(1-p)^{e_G} p^{e_G})^c \leq (2e_G(1-p))^c$$

Итого,  $|T(G_{i_1}, \dots, G_{i_k})| = o(p^{e_G(k)}(1-p)^c)$ . Далее  $e_{G^{(k)}} = ke_G - \sum_{j=1}^k e_{F_j}$ .

Тогда при заданных графах  $F_1, \dots, F_k$  число наборов  $(G_{i_1}, \dots, G_{i_k})$  с усло-  
вием  $G^{(j-1)} \cap G_{i_j} \cong F_j$  в  $K_n$  есть  $o(n^{kv_G - \sum_{j=1}^k v_{F_j}})$ .

$$\sum_{i_1, \dots, i_k, L(\dots)=L, F_1, \dots, F_k - \text{фикс}} T = O \left( n^{kv_G - \sum_{j=1}^k v_{F_j}} p^{ke_G - \sum_{j=1}^k e_{F_j}} (1-p)^c \right).$$

Если  $e_{F_j} = 0$ , то  $n^{v_{F_j}} p^{e_{F_j}} = n^{v_{F_j}} \geq 1$ . Таких  $F_j$  ровно  $c$ . Остальные  $F_j$  имеют рёбра, значит  $n^{v_{F_j}} p^{e_{F_j}} \geq EX_{F_j} \geq \Phi_G$ .

Значит

$$\sum T = O \left( (n^{v_G} p^{e_G})^k \frac{(1-p)^c}{(\Phi_G)^{k-c}} \right) = O \left( (DX_G)^{\frac{k}{2}} \frac{(1-p)^{c-\frac{k}{2}}}{(\Phi_G)^{\frac{k}{2}-c}} \right).$$

Осталось показать, что  $((1-p)\Phi_G)^{c-\frac{k}{2}} \rightarrow 0$ , но  $c - \frac{k}{2} < 0$ , то есть  $(1-p)\Phi_G \rightarrow +\infty$ .

Если  $p \leq \frac{1}{2}$ , то  $\Phi_G(1-p) \asymp \Phi_G$ , но по условию  $np^{m(G)} \rightarrow \infty \Rightarrow \Phi_G \rightarrow \infty$ .

Если же  $p > \frac{1}{2}$ , то  $\Phi_G \asymp \min_{H \subset G, e_H > 0} n^{v_H} p^{e_H} \asymp \min_{H \subset G, e_H > 0} n^{v_H} = n^2$ .

По условию  $n^2(1-p) \rightarrow \infty \Rightarrow \Phi_G \rightarrow \infty$ .

Итого, по методу моментов, теорема доказана.  $\square$