

# 1 Введение

Что будет затронуто:

- Введение в функциональный анализ
- Алгебраические структуры, геометрия графов
- Спектральная теория
- Гармонический анализ
- Приложения к дискретной математике

## Лекция 1. Алгебраические структуры

### 2 Алгебраические структуры

**Определение 1.** Напоминание определений основных структур:

- Полугруппа — множество с ассоциативной операцией.
- Полугруппа с единицей.
- Группа — множество с обратимой ассоциативной операцией.

В том числе свободная группа и группа, заданная соотношениями  $G = \langle S \mid \mathcal{A} \rangle$ .

Автоматные группы. Пусть задан конечный преобразователь  $F$  с двумя состояниями  $\{a, b\}$ . Несколько преобразователей можно комбинировать. Получился моноид  $G(\mathcal{A}) = \langle \mathcal{A}_a, \mathcal{A}_b \rangle$ , где  $\mathcal{A}$  — обратимый преобразователь,  $\mathcal{A}_x$  — преобразователь с начальным состоянием  $x$ .

### 3 Немного конечномерной линейной алгебры

Рассмотрим вычисление аналитических функций от матриц.  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ .

Метод: применение интерполяционных многочленов. Если оператор диагонализуем, то все ясно, нужно знать только  $f(\lambda_i)$ . Утверждается, что всегда работает следующее: для каждой Жордановой блока запишем  $P(\lambda_1) = f(\lambda_1), \dots, P^{(r_1-1)}(\lambda_1) = f^{(r_1-1)}(\lambda_1)$ , где  $r_1$  — кратность  $\lambda_1$ , интерполируем это и вычислим  $P(A)$ .