Лекция 1. Задача UPATH

1 Рандомизированный алгоритм для UPATH

Главный вопрос: $\mathbf{P} = \mathbf{BPP}$? В книжке «Hardness and randomness» есть некоторые результаты на тему того, что из дерандомизации может следовать $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$.

Успешные примеры дерандомизации: проверка на простоту (алгоритм AKS), задача **UPATH** или **S-T-CONN** $= \{(G, s, t)$: в неорграфе G есть пусть из s в $t\}$.

Теорема 1. ***UPATH*** $\in$ ***RL*** *(randomized logspace).*

Доказательство. Запустим блуждание из s на N шагов. Если в блуждании встретится t, сказать, что достижимо, иначе нет.

Предельная частота (hitting time) ребра $P_{uv} = \lim_{n\to\infty} \frac{E\#\{(s_i, s_{i+1})=(u,v)\}}{n}$ (добавим петли, применим теорию марковских процессов).

$$P_{u,v} = \frac{1}{\text{ожидаемое время первой встречи (u, v) после выхода из v}}$$

Аналогично, существует предельная частота вершины.

Так как блуждание равномерно, то $P_{uv} = \frac{1}{\deg u} P_u$ и $P_u = \sum\limits_{t:(t,u)\in E} P_{tu}$. Тогда $P_{uv} = \frac{1}{\deg u} \sum\limits_{t:(t,u)\in E} P_{tu}$. Из этого следует, что все частоты одинаковы, так если есть максимальная частота, а у какого-то смежного меньше, то получается противоречие с равентсвом. То есть $P_{uv} = \frac{1}{2m}, P_u = \frac{\deg u}{2m}$.

Пусть $t_0 = s, t_1, \ldots, t_{k-1}, t_k = t$ — путь из s в t. Рассмотрим вершину t_0. Среднее время возврата в t_0 не зависит от истории блуждания, поэтому оно ровно такое, как в пределе. Поэтому мы в среднем не менее, чем за $\frac{2m}{\deg u}$ мы будем возвращаться в t_0 и рано или поздно пойдем по ребру (t_0, t_1). Такими рассуждениями, по неравенству Маркова можно проделать $4km$ шагов, чтобы с вероятностью $\geqslant \frac{1}{2}$ прийти в $t_k = t$. $\square$

Определение 1. Граф d-регулярный, если степени всех вершин равны d.

Утверждение 1. Существует универсальная последовательность поворотов полиномиальной длины, которая посещает все вершины.

Идея доказательства состоит в следующем: можно сделать случайное блуждание, такое длинное, что доля графов, на которых оно не посещает все вершины крайне мала. Тогда, так как таких графов не более n^{dn}, то можно сделать долю такой маленькой, что найдется последовательность, удовлетворяющая всем графам.