Содержание

Литература:

- ???

1 Лямбда-исчисление

Безтиповое лямбда-исчисление: термы, α-конверсия, β, η-редукция.

Определение 1. $V = \{v_0, \dots, v_1\} \sim \mathbb{N}$ — алфавит. Определим λ-терм:

- $x \in V \Rightarrow x \in \Lambda$
- $M, N \in \Lambda \to (MN) \in \Lambda$
- $x \in V, M \in \Lambda \Rightarrow (\lambda x.M) \in \Lambda$

Замечание. Примечания: аппликация (применение) левоассоциативно, абстракция — наоборот.

Конверсии бывают некорректные. Можно сформулировать правило, определяющее корректную подстановку. Но мы будем далее считать, что в любом контексте ни одна переменная не имеет одновременно сводобных и связанных вхождений. Для этого примерним автоматические переименование в невстречающиеся: $\lambda x.M \to_\alpha \lambda y.(M[x := y]), y \notin V(M)$.

Определение 2. Определим абстрактные редукции. $R \subset \Lambda \times \Lambda$ — редукция. Условия совместимости:

1. $MRN \Rightarrow M \to_R N$
2. $M \to_R N \Rightarrow LM \to_R LN, ML \to_R NL, \lambda x.M \Rightarrow_R \lambda x.N$

Также замкнём нашу редукцию: $\twoheadrightarrow_R$ и построим соответствующее отношение эквивалентности $=_R$.

Определение 3. Терм R-нормален, если $\nexists N M \to_R N$. Терм N является нормальной формой терма M, если он R-нормальный и $M =_R N$.

Терм нормализуемый, если у него есть нормальная форма и сильно нормализуемый, если любая цепочка редукций обрывается (на R-нормальной форме).

Лемма 1 (О ромбе)**.** *Пусть $R \in \{\beta, \beta\eta\}$. Тогда если $M \twoheadrightarrow N_1, M \twoheadrightarrow N_2$, то $\exists L : N_1 \twoheadrightarrow L, N_2 \twoheadrightarrow L$.*

Теорема 1 (Чёрча-Россера)**.** *Если $M =_R N \Rightarrow \exists L : M \twoheadrightarrow L, N \twoheadrightarrow L$.*

Следствие. *Нормальная форма (если существует) единственна.*

Нормальная форма существует не всегда. Не каждая цепочка преобразований ведёт к нормальной форме.

Утверждение 1. На базе лямбда-термов можно построить логику высказываний и примитивно-рекурсивную арифметику, нужным образом закодировав нужные функции.

Комбинатор неподвижной точки: $Y = \lambda f.(\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx))$ обладает интересным свойством $F(YF) = YF$.

Пример 1. Хотим найти комбинатор M, заданный условием $MXY = XM(MM)Y(MMM)$. Рассмотрим $F = \lambda mxy.xm(mm)y(mmm)$ и положим $M = YF$. Тогда все получится.

Можно находить и совместные неподвижные точки: $X = FXY, Y = GXY$. Возьмём $\Phi = \lambda p.\langle F(\pi_1 p)(\pi_2 p), G(\pi_1 p)(\pi_2 p)\rangle$. Тогда $Z = Y\Phi$ неподвижная точка, значит $Z = \Phi Z = \langle F(\pi_1 Z)(\pi_2 Z), G(\pi_1 Z)(\pi_2 Z)\rangle$. Тогда остаётся взять $X = \pi_1 Z, Y = \pi_2 Z$.

Используя эту машинерию, можно построить все примитивно-рекурсивные функции, а также другие виды рекурсии, а также и минимизацию.

Теорема 2. *Следующие условия равносильны:*

- f *представимо лямбда-термом*
- f *вычислимо на машинах Тьюринга*
- f *частично-рекурсивна (примитивная рекурсия + минимизация, возможны не тотальные функции)*

2 Типизированное лямбда-исчисление

Типы: пропозициональные формулы с импликацией.

Определение 4. Счетный алфавит типов
$A, B \in Tp, (A \to B) \in Tp$
$A_1 \to (A_2 \to \ldots \to (A_n \to B)) = A_1 \to \ldots \to A_n \to B$

Определение 5. $PdTm$ — псевдотермы.
$X \in Var \Rightarrow X \in PdTm$
$M, N \in PdTm \Rightarrow (MN) \in PdTm$
$x \in Var, A \in Tp, M \in PdTm \Rightarrow (\lambda x^A.M) \in PdTm.$

Псевдотермы, потому что не все из них будут считаться корректными.
Контекст $\Gamma = \{x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n\}$.
Вывод типов: $\vdash \subset Context \times Statement$. Правила

- $\Gamma, x : A \vdash x : A$
- $\frac{\Gamma \vdash M : A \to B, \Gamma \vdash N : A}{\Gamma \vdash MN : B}$
- $\frac{\Gamma, x : A \vdash M : B}{\Gamma \vdash (\lambda x^A.M) : A \to B}$

Каждое выведение может быть получено единственным образом (лемма об обращении).

Лемма 2 (О подстановке)**.**

- $\Gamma \vdash M : A \Rightarrow \Gamma[\alpha := B] \vdash M : A[\alpha := B]$
- $\frac{\Gamma, x:A \vdash M:B, \Gamma \vdash N:A}{\Gamma \vdash M[x:=N]:B}$

Лемма 3 (subject reduction)**.** $\Gamma \vdash M : A, M \twoheadrightarrow_{\beta\eta} N \Rightarrow \Gamma \vdash N : A$

Утверждение 2. $\Gamma \vdash M : A, \Gamma \vdash M : B \Rightarrow A = B$

Доказательство. Разберём один из случаев: $\Gamma \vdash \lambda x^C.N : A \Rightarrow A = C \to D, \Gamma, x : C \vdash N : D$. Если $B = C \to E$, то аналогично $\Gamma, x : C \vdash N : E$. По индукции $D = E$, значит $A = B$. $\square$

Лемма 4 (о ромбе)**.** *Если* $\Gamma \vdash M, N_1, N_2 : A$*, притом* $M \twoheadrightarrow N_1, M \twoheadrightarrow N_2$*, тогда* $\exists L : \Gamma \vdash L : A, N_1 \twoheadrightarrow L, N_2 \twoheadrightarrow L$.

Теорема 3 (Чёрча-Россера)**.** *Пусть* $\Gamma \vdash M, N : A, M =_{\beta\eta} N$*, тогда* $\exists L : \Gamma \vdash L : A, M \twoheadrightarrow L, N \twoheadrightarrow L$.

Более того, верно, что у любого терма нормальная форма существует, единственна и любая последовательность редукций конечна. В частности, терму $\omega_2 = \lambda x.xx$ нельзя приписать никакой тип.

Пример 2. $\lambda x^A y^B.x : A \to (B \to A)$.

Берём контекст $\Gamma = \{x : A, y : B\}$. Выводим:
$\Gamma \vdash x : A$
$x : A \vdash \lambda y^B.x : B \to A$
$\vdash \lambda x^A y^B.x : A \to B \to A$

Теперь можно определить «корректные» псевдотермы: $\Lambda_{\to}^{\Gamma}(A) = \{M \in PdTm \mid \Gamma \vdash M : A\}$.

$\Lambda_{\to}(A) = \bigcup\limits_{\Gamma} \Lambda_{\to}^{\Gamma}(A)$

$\Lambda_{\to} = \bigcup\limits_{A \in Tb} \Lambda_{\to}(A)$

Теорема 4 (сильная нормализуемость)**.** *Если* $M \in \Lambda_{\to}$*, то любая цепочка* $\beta\eta$*-редукций конечна и может быть прододжена до нормальной формы.*

Что можно вычислить в типизированном лямбда-исчислении?

$Int = (\alpha_0 \to \alpha_0) \to (\alpha_0 \to \alpha_0)$ — целочисленный тип, взятый из привычных нумералов Чёрча: $\underline{n} = \lambda f^{\alpha_0 \to \alpha_0} x_0^{\alpha}.f^n x$.

Утверждение 3. $\forall n$ выполнено $\underline{n} \in \Lambda_{\to}(Int)$. $\vdash \lambda f^{\alpha_0 \to \alpha_0} x_0^{\alpha}.f^n x$.

Аналогично перенесём понятие представимости функций $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$.

Заметим, что $Sc = \lambda kfx.f(kfx)$ типизуем типом $Int \to Int$. Точно также типизуются сложением, умножение. Но с возведением в степень проблемы: $E = \lambda kl.lk$ не типизуется.

Можно показать, что при таком кодировании чисел получится представить только эти операции, проекторы, проверку на 0 и все их композиции.

Определение 6.

- $PVar = \{p_0, \ldots, p_1\} \sim \mathbb{N}$
- $p_i \in PVar \Rightarrow p_i \in IFm$
- $A, B \in IFm \Rightarrow (A \to B) \in IFm$

Натуральный вывод: помеченное дерево с правилами элиминации импликации (modus ponens) и добавлением импликации. Такой вывод двойственнен выводу типа.

Одинаковых меток на разных гипотезах быть не может.

Элиминация импликации: $\frac{A, A \to B}{B}$, где $A, A \to B$ имеют какой-то вывод.

Добавление импликации: $[A^x] \Rightarrow \frac{B}{A \to B} I[x]$.

Контекст соответветствует гипотезам, метки — переменным в лямбда-термах, типы — функциям, терм на самом деле кодирует доказательство формулы.

Интуиционистская имликация: f «доказательство» импликации $A \to B$, если f вычислима и преобразует любое доказательство A в доказательство B. В этом смысле типизированные функции интерпретируются как описания доказательств (изоморфизм Карри-Ховарда).