Лекция 2. Практические методы дерандомизации

1 Задача MAXCUT

MAXCUT: разбить вершины графа на 2 множества S, T, так чтобы между ними было как можно больше ребер.

Если выбрать S случайно, то ожидаемый размер разреза $\frac{1}{2}|E|$, то есть легко можно посторить $\frac{1}{2}$-оптимальное приближение. Вопрос в том, как найти его, не используя случайность.

1й-способ: метод условных матожиданий: первую вершину кладем куда угодно, для каждой следующей рассматриваем 2 ситуации: поместить её в левую долю или в правую. Делаем это, максимизируя условное матожидание. Получается обычный жадный алгоритм — поместить вершину так, чтобы было как можно больше ребер между долями.

2й-способ: использование попарной независимости. Используем случайные биты, не независимые в совокупности, а независимые попарно. Суть в том, что обеспечание попарной независимости требует только логарифмического количества случайных бит.

Матрица кода Адамара: A размером $(2^l - 1) \times l$, по строкам все ненулевые вектора из нулей и единиц. Тогда $y = A \cdot x$, где x вектор случайных величин длины l, будет вектор из равномерно распределенных попарно независимых случайных величин.

Таким образом, если перебрать все случайные биты, мы можем выбрать из них оптимальный и затратить на это полином времени.

2 Задача о максимальном дизайне

Определение 1. $S_1, \dots, S_m \subset \{1, \dots, d\}$ есть (m, d, l, a)-дизайн, если $|S_i| = l$, а $\forall i \neq j \to |S_i \cap S_j| < a$.

Утверждение 1. Если d, l, a — фискированные, то для $m = \frac{C_d^a}{(C_l^a)^2}$ существует дизайн с такими параметрами.

Доказательство. Рассмотрим случайный дизайн. $E_{S_i}(\#\{j < i, |S_j \cap S_i| \geqslant a\}) = (i-1)P(|S_j \cap S_i| \geqslant a) < m\frac{C_l^a C_{d-a}^{l-a}}{C_d^l} < 1$.

Тогда найдется значение, равное 0. □

Отсюда $\forall \gamma > 0, l, m \in \mathbb{N} \to \exists (m, d, l, a)$-дизайн, $a = \gamma \log m, d = o(\frac{l^2}{a})$. То есть в полиномиальную кастрюлю можно напихать экспоненциально много сарделек с пересечением в какую-то константную долю, скажем 10%.

Полученный результат можно дерандомизировать с помощью метода условных матожиданий.