

Содержание

1	Модели случайных графов	3
2	Общая теория случайных подмножеств	4
3	Монотонные и выпуклые свойства	4
4	Асимптотическая эквивалентность моделей	5
5	Связь в обратную сторону	7
6	Пороговые вероятности	8
7	Малые подграфы в случайном графе	10
8	Пороговая вероятность	10
9	Метод моментов	11
10	Предельные теоремы для X_G	13
11	Эволюция случайного графа	17
12	Неравенство Чернова	18
13	Эволюция при $np = c < 1$	18
14	Параметры унициклических компонент	19
15	Теорема о гигантской компоненте	20
16	Случай $np \sim 1$	22
17	Поведение сложных компонент	25
18	Свойства первого и второго порядка	26
19	Сложные компоненты в фазовом переходе	28
20	k-связность	30
21	Совершенные паросочетания	32
22	Длинные пути в случайном графе	33
23	Гамильтоновы циклы	35
24	Смежные результаты	38

25 Неравенство FKG	39
26 Неравенство Янсона	39
27 Неравенство Азумы-Хёфдинга	40
28 Мартингалы реберного и вершинного типа	42

Литература:

- Bollobas «Random graphs»
- Janson, Lucak, Rucinski «Random graphs»

1 Модели случайных графов

Определение 1. *Случайный граф* — случайный элемент со значениями в некотором конечном множестве графов.

Определение 2. *Равномерная модель.* K_n — полный граф, $0 \leq m \leq C_n^2$, \mathcal{G}_m — множество всех остовных подграфов K_n , имеющих ровно m рёбер. Случайный граф в этой модели — случайный элемент с равномерным распределением на \mathcal{G}_m .

$$P(G(n, m) = F) = \frac{1}{C_n^m} \forall F \in \mathcal{G}_m$$

Фиксировано число рёбер, но другие характеристики выглядят посложнее, скажем $\deg v$ имеет гипергеометрическое распределение.

Определение 3. *Биномиальная модель.* \mathcal{G} — множество всех остовных подграфов K_n , $p \in [0, 1]$. Случайный граф в этой модели — случайный элемент на \mathcal{G} со следующим распределением:

$$P(G(n, p) = F) = p^{|E(F)|} (1 - p)^{C_n^2 - |E(F)|} \forall F \in \mathcal{G}$$

Много независимых событий, из-за чего многие характеристики имеют удобное распределение, например $\deg v \sim B(n-1, P)$. Число рёбер, впрочем, случайно.

Другие модели:

- Граф G , схема Бернулли на его рёбрах. Скажем, $G = K_{n,m}$ — случайный двудольный граф.
- Равномерное распределение на какой-то совокупности графов \mathcal{F} . Например, случайный d -регулярный граф
 - $d = 1$ — случайное совершенное паросочетание
 - $d = 2$ — случайный набор циклов
 - $d = 3$ — можно показать, что а.п.н. это гамильтонов цикл плюс какое-то совершенное паросочетание
- Случайный процесс на графе
 - С дискретным временем: $\tilde{G} = (\tilde{G}(n, m), m = 0 \dots C_n^2)$, в котором на каждом шаге появляется новое случайное равномерно выбранное ребро. $\tilde{G}(n, m) \stackrel{d}{=} G(n, m)$. Можно смотреть случайные моменты

- * $\tau_1(n) = \min\{m : \delta(\tilde{G}(n, m)) \geq 1\}$
- * $\sigma_1(n) = \min\{m : \tilde{G}(n, m) \text{ связан}\}$

Теорема 1 (Баллобаш, Томасон).

$$P(\tau_1(n) = \sigma_1(n)) \rightarrow 1, n \rightarrow \infty$$

- С непрерывным временем: пусть для каждого ребра e графа K_n задана случайная величина T_e . Тогда для $\forall t > 0$ можно рассмотреть процесс:

$$\tilde{G}_T = \{e \mid T_e \leq t\}$$

Если все T_e распределены одинаково, $\tilde{G}_T(n, t) \stackrel{d}{=} G(n, p)$, где $p = P(T_e \leq t)$.

- Triangle-free process. На каждом шаге включаем одно случайное ребро так, чтобы не возникало треугольников. Можно показать, что в результате такого процесса α (итогового графа) = $O(\sqrt{n \ln n})$. Следствие: оценка на число Рамсея $R(3, t) \geq c \frac{t^2}{\ln t}$.

2 Общая теория случайных подмножеств

Пусть Γ — конечное множество, $|\Gamma| = N$.

- $\Gamma(p)$ — схема Бернулли на Γ .
- $\Gamma(n)$ — случайное подмножество размера n с равномерным распределением
- $\tilde{\Gamma}(m)$ — случайный процесс, включающий элементы последовательно

В асимптотических утверждениях $\Gamma = \Gamma_n, n \in \mathbb{N}$ — последовательность, притом $N = N(n)$.

3 Монотонные и выпуклые свойства

Определение 4. Q — семейство подмножеств Γ называется *возрастающим*, если $A \in Q, A \subset B \rightarrow B \in Q$, *убывающим*, если $A \supset B \rightarrow B \in Q$, *монотонным*, если оно возрастающее или убывающее.

Ясно, что Q — возрастающее тогда и только тогда, когда $\overline{Q} = 2^\Gamma \setminus Q$ — убывающее. Будем обозначать $\Gamma(p) \models Q \Leftrightarrow \Gamma(p) \in Q$ («обладает свойством Q »).

Пример 1. Γ — рёбра K_n . Возрастающие свойства:

- связность
- содержит какой-то подграф

- $\delta(G) \geq k$

Убывающие свойства:

- планарность
- $\chi(G) \leq k$
- ацикличность

Лемма 1. Пусть Q — возрастающее свойство. Тогда $\forall p_1 \leq p_2, m_1 \leq m_2$:

$$P(\Gamma(p_1) \models Q) \leq P(\Gamma(p_2) \models Q)$$

$$P(\Gamma(m_1) \models Q) \leq P(\Gamma(m_2) \models Q)$$

Доказательство.

- $P(\Gamma(m_1) \models Q) = P(\tilde{\Gamma}(m_1) \models Q) \leq P(\tilde{\Gamma}(m_2) \models Q) = P(\Gamma(m_2) \models Q)$
- Пусть $\Gamma(p') \perp \Gamma(p'')$ — два независимых подмножества. Тогда $\Gamma(p') \cup \Gamma(p'') \stackrel{d}{=} \Gamma(p)$, где $p = p' + p'' - p'p''$. Тогда можно положить $p' = \frac{p_2 - p_1}{1 - p_1}$, а также, что $\Gamma(p') \perp \Gamma(p_1)$. Тогда

$$P(\Gamma(p_1) \models Q) \leq P(\Gamma(p_1) \cup \Gamma(p') \models Q) = P(\Gamma(p_2) \models Q).$$

□

Определение 5. Свойство Q называется *выпуклым*, если $A \subset C \subset B \in Q \Rightarrow C \in Q$

Пример 2.

- все монотонные выпуклы
- $\chi(G) = k$

4 Асимптотическая эквивалентность моделей

Хотим установить какую-то связь между моделями $\Gamma(p)$ и $\Gamma(m)$ при $pN \sim m$. Для этого введём следующий контекст:

- $\Gamma(n), n \in \mathbb{N}$ — последовательность конечных множеств
- $N = N(n) \rightarrow +\infty$
- $Q = Q(n)$
- $p = p(n) \in [0, 1]$
- $m = m(n) \in \{0, \dots, N\}$

- $\Gamma(n, p), \Gamma(n, m)$ — случайные подмножества $\Gamma(n)$

Лемма 2. Пусть Q — свойство $\Gamma(n)$. Пусть $p = p(n) \in [0, 1]$ — некоторая функция. Если для любой последовательности $m = m(n)$, такой что

$$m = Np + O(\sqrt{Npq}), q = 1 - p$$

выполнено

$$P(\Gamma(n, m) \models Q) \rightarrow a, n \rightarrow \infty$$

то

$$P(\Gamma(n, p) \models Q) \rightarrow a, n \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Пусть $C > 0$ — большая константа и положим $M(C) = \{m \mid |m - Np| \leq C\sqrt{Npq}\}$. Обозначим

$$m_* = \operatorname{argmin}_{m \in M(C)} P(\Gamma(n, m) \models Q)$$

$$m^* = \operatorname{argmax}_{m \in M(C)} P(\Gamma(n, m) \models Q)$$

По формуле полной вероятности:

$$\begin{aligned} P(\Gamma(n, p) \models Q) &= \sum_{m=0}^N P(\Gamma(n, p) \models Q \mid |\Gamma(n, p)| = m) P(|\Gamma(n, p)| = m) = \\ &= \sum_{m=0}^N P(\Gamma(n, m) \models Q) P(|\Gamma(n, p)| = m) \geq \\ &= \sum_{m \in M(C)} P(\Gamma(n, m) \models Q) P(|\Gamma(n, p)| = m) \geq \\ &= P(\Gamma(n, m_*) \models Q) P(|\Gamma(n, p)| \in M(C)) \end{aligned}$$

Но $|\Gamma(n, p)| \sim \operatorname{Bin}(N, p)$, $E|\Gamma(n, p)| = Np$, $D|\Gamma(n, p)| = Npq$. По неравенству Чебышева:

$$P(|\Gamma(n, p)| - Np > C\sqrt{Npq}) \leq \frac{Npq}{C^2 Npq} = \frac{1}{C^2}$$

Значит $P(\Gamma(n, p) \models Q) \geq P(\Gamma(n, m_*) \models Q) (1 - \frac{1}{C^2})$.

Аналогично

$$\begin{aligned} P(\Gamma(n, p) \models Q) &\leq \sum_{m \in M(C)} P(\Gamma(n, m) \models Q) P(|\Gamma(n, p)| = m) + \sum_{m \notin M(C)} P(|\Gamma(n, p)| = m) \\ &\leq P(\Gamma(n, m^*) \models Q) + \frac{1}{C^2} \end{aligned}$$

Значит $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} P(\Gamma(n, p) \models Q) \leq a + \frac{1}{C^2}$.

Также $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} P(\Gamma(n, p) \models Q) \geq a(1 - \frac{1}{C^2})$.

Это верно для любого $C > 0$. Тогда $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} P(\Gamma(n, p) \models Q) = a$. \square

5 Связь в обратную сторону

Лемма 3. Пусть Q — монотонное свойство, $a \in [0; 1]$. Если $\forall p = p(n)$ такой, что $p = \frac{m}{N} + o(\sqrt{\frac{m(N-m)}{N^3}})$ выполнено, что $P(\Gamma(n, p) \models Q) \rightarrow a$, то $P(\Gamma(n, m) \models Q) \rightarrow a$.

Докажем только ослабленный вариант, где $a = 0$ или $a = 1$.

Лемма 4. Пусть Q — монотонное свойство, $m = m(n), m(n) \rightarrow +\infty$ и $\varlimsup_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{N} < 1$. Тогда если $P(\Gamma(n, \frac{m}{N}) \models Q) \rightarrow 1$, то $P(\Gamma(n, m) \models Q) \rightarrow 1$.

Доказательство.

1. Если Q — возрастающее свойство, то

$$\begin{aligned} P(\Gamma(n, \frac{m}{N}) \models Q) &= \sum_{k=0}^N P(\Gamma(n, \frac{m}{N}) \models Q \mid |\Gamma(n, \frac{m}{N})| = k) P(|\Gamma(n, \frac{m}{N})| = k) \leq \\ &\sum_{k=0}^N P(\Gamma(n, k) \models Q) P(|\Gamma(n, \frac{m}{N})| = k) \leq \sum_{k=0}^m + \sum_{k>m+1} \leq \\ &P(\Gamma(n, m) \models Q) P(|\Gamma(n, \frac{m}{N})| \leq m) + P(|\Gamma(n, \frac{m}{N})| > m) \end{aligned}$$

По ЦПТ (условие на скорость роста $m(n)$ позволяет ею воспользоваться), получаем, что

$$1 \leq \frac{1}{2} \varliminf_n P(\Gamma(n, m) \models Q) + \frac{1}{2}$$

Значит $\exists \lim_n P(\Gamma(n, m) \models Q) = 1$.

2. Если Q — убывающее, то $P(\Gamma(n, \frac{m}{N}) \models Q) \leq P(|\Gamma(n, m)| > m) P(\Gamma(n, m) \models Q) + P(|\Gamma(n, m)| \leq m)$. Далее, все тоже самое.

□

Следствие. То же самое верно и для $a = 0$.

Следствие (Асимптотическая эквивалентность моделей). Пусть Q — возрастающее свойство, $m = m(n) \rightarrow +\infty$, $\varlimsup_n \frac{m}{N} \leq 1 - \delta$. Тогда

1. $P(\Gamma(n, \frac{m}{N}) \models Q) \rightarrow 1 \Rightarrow P(\Gamma(n, m) \models Q) \rightarrow 1$.
2. $P(\Gamma(n, \frac{m}{N}) \models Q) \rightarrow 0 \Rightarrow P(\Gamma(n, m) \models Q) \rightarrow 0$.
3. $P(\Gamma(n, m) \models Q) \rightarrow 1 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 P(\Gamma(n, \frac{m}{N}(1 + \varepsilon)) \models Q) \rightarrow 1$.
4. $P(\Gamma(n, m) \models Q) \rightarrow 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 P(\Gamma(n, \frac{m}{N}(1 - \varepsilon)) \models Q) \rightarrow 0$.

Доказательство. Первые два — это лемма и следствие. Положим $\frac{m}{N}(1 + \varepsilon) = p(n)$. Тогда если $m'(n) = NP + O(\sqrt{Npq}) = (1 + \varepsilon)m + O(\sqrt{m})$, то $m'(n) \geq m(n)$ начиная с какого-то момента, значит в силу возрастания Q $P(\Gamma(n, m') \models Q) \geq P(\Gamma(n, m) \models Q) \rightarrow 1$. Значит $P(\Gamma(n, m') \models Q) \rightarrow 1$, то есть по лемме $P(\Gamma(n, \frac{m}{N}(1 + \varepsilon)) \models Q) \rightarrow 1$. Аналогично следует последний пункт. \square

6 Пороговые вероятности

Мы доказали эквивалентность моделей только в случае вероятности, стремящейся к 0 или к 1. Однако, это самый важный случай, так как имеет место эффект «пороговой вероятности».

Определение 6. Пусть Q — возрастающее свойство подмножеств $\Gamma(n)$. Функция $\hat{p} = \hat{p}(n)$ называется *пороговой вероятностью* для Q , если выполнено $\lim_{n \rightarrow \infty} P(\Gamma(n, p) \models Q) = 1$ при $p = \omega(\hat{p})$ и 0, если $p = o(\hat{p})$.

Определение 7. Если Q — возрастающее свойство, то функция $\hat{m} = \hat{m}(n)$ называется *пороговой функцией* для Q , если выполнено $\lim_{n \rightarrow \infty} P(\Gamma(n, m) \models Q) = 1$ при $m = \omega(\hat{m})$ и 0 при $m = o(\hat{m})$.

Замечание. Для убывающих свойств все то же самое, с точностью до наоборот.

Замечание. \hat{m} — пороговая вероятность $\Leftrightarrow \hat{p} = \frac{\hat{m}}{N}$ — пороговая функция.

Пример 3. • $\Gamma(n) = \{1, \dots, n\}$, $Q = \{\text{внутри есть 3-прогрессия}\}$. Тогда $\hat{p} = n^{-\frac{2}{3}}$ — пороговая вероятность, $\hat{m} = n^{\frac{1}{3}}$ — пороговая функция.

• $\Gamma(n)$ — рёбра K_n , $Q = \{\text{есть } \Delta\}$. Тогда $\hat{p} = \frac{1}{n}$ — пороговая вероятность.

Утверждение 1. Пусть Q — нетривиальное возрастающее свойство подмножеств $\Gamma(n)$. Тогда функция $f(p) = P(\Gamma(n, p) \models Q)$ является непрерывной, строго возрастающей на $[0; 1]$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$.

Доказательство. Возрастание следует из предыдущих лемм.

$$f(p) = \sum_{A \in Q} P(\Gamma(n, p) = A) = \sum_{A \in Q} p^{|A|} (1 - p)^{N - |A|}.$$

Это многочлен, строго возрастающая непрерывная функция. \square

Определение 8. Если Q — возрастающее свойство, то $\forall a \in (0, 1)$ положим $p(a, n) = f_n^{-1}(a)$. Введём также $m(a, n) = \min\{m : P(\Gamma(n, m) \models Q) \geq a\}$.

Лемма 5. Пусть Q — возрастающее свойство, тогда $\hat{p} = \hat{p}(n)$ является пороговой вероятностью для $Q \Leftrightarrow \forall a \in (0, 1)$ выполнено $\hat{p} \asymp p(a, n)$. И \hat{m} — пороговая вероятность для $Q \Leftrightarrow \forall a \in (0, 1)$ выполнено $\hat{m} \asymp m(a, n)$.

Доказательство. Докажем для равномерной модели. Пусть \hat{m} — пороговая, но $\exists a \in (0, 1)$ такое, что $\hat{m} \neq m(a, n)$. Тогда существует подпоследовательность \hat{m}_{n_k} такая, что отношение $\frac{\hat{m}_{n_k}}{m(a, n_k)} \rightarrow 0$ или $+\infty$.

Пусть предел нулевой. Тогда $m' = m(a, n_k) - 1$ есть $\omega(\hat{m})$. В таком случае $\lim_{k \rightarrow \infty} P(\Gamma(n, m'(n_k)) \models Q) = 1$. Но $P(\Gamma(n, m'(n_k)) \models Q) \leq a < 1$, противоречие.

Если же предел равен $+\infty$, то $m(n_k) = o(\hat{m})$. Тогда $\lim_k P(\Gamma(n, m(n_k)) \models Q) = 0$. Но для любого k выполнено $P(\Gamma(n, m(n_k)) \models Q) \geq a > 0$, противоречие.

В обратную сторону: пусть $\hat{m} = \omega(\hat{m})$. Тогда $\forall a \in (0, 1) m = \omega(m(a, n))$, значит в силу возрастания Q $P(\Gamma(n, m) \models Q) \geq P(\Gamma(n, m(a, n)) \models Q) \Rightarrow \lim_n P(\Gamma(n, m) \models Q) \geq \lim_n P(\Gamma(n, m(a, n)) \models Q) \geq a$, то есть $\exists \lim_n P(\Gamma(n, m) \models Q) = 1$.

Если $m = o(\hat{m})$, то все аналогично. \square

Теорема 2. Каждое монотонное свойство имеет пороговую вероятность.

Доказательство. Считаем, что Q — возрастающее свойство. Надо показать, что все функции $p(a, n)$ имеют один и тот же порядок. Возьмём $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$ и такое m , что $(1 - \varepsilon)^m \leq \varepsilon$. Рассмотрим $\Gamma^{(1)}(n, p(\varepsilon, n)), \dots, \Gamma^{(m)}(n, p(\varepsilon, n))$ — н.о.р. случайные подмножества $\Gamma(n)$. Тогда

$$\tilde{\Gamma} = \Gamma^{(1)}(n, p(\varepsilon, n)) \cup \dots \cup \Gamma^{(m)}(n, p(\varepsilon, n)) \stackrel{d}{=} \Gamma(n, p'),$$

где $p' = 1 - (1 - p(\varepsilon, n))^m \leq mp(\varepsilon, n)$.

$$P(\tilde{\Gamma} \models Q) = P(\Gamma(n, p') \models Q) \leq P(\Gamma(n, mp(\varepsilon, n)) \models Q).$$

С другой стороны $P(\tilde{\Gamma} \not\models Q) \leq P(\forall i \Gamma^{(i)}(n, p(\varepsilon, n)) \not\models Q) = P^m(\Gamma^{(1)}(n, p(\varepsilon, n)) \not\models Q) = (1 - \varepsilon)^m \leq \varepsilon$. Тогда $P(\tilde{\Gamma} \models Q) \geq 1 - \varepsilon = P(\Gamma(n, p(1 - \varepsilon, n)) \models Q)$.

Значит $\forall n mp(\varepsilon, n) \geq p(1 - \varepsilon, n)$. Итого $p(\varepsilon, n) \leq p(\frac{1}{2}, n) \leq p(1 - \varepsilon, n) \leq mp(\varepsilon, n)$. Значит по лемме, $p(\frac{1}{2}, n) = \hat{p}$ — пороговая вероятность для Q . \square

Следствие. Для \forall монотонного свойства \exists пороговая функция \hat{m} .

Определение 9. Пусть Q — выпуклое свойство. Тогда функции $\hat{p}_1 \leq \hat{p}_2$ называются *пороговыми* для Q , если...

Пример 4. $\Gamma(n)$ — рёбра K_n .

- $Q = \{\text{обхват} = 4\}$, $\hat{p}_1 = \hat{p}_2 = \frac{1}{n}$
- $Q = \{\text{кликовое число} = 4\}$, $\hat{p}_1 = n^{-\frac{2}{3}}$, $\hat{p}_2 = n^{-\frac{1}{2}}$

Определение 10. Пусть Q — возрастающее. Тогда $\hat{p} = \hat{p}(n)$ называется *точной пороговой вероятностью* для Q , если $\forall \varepsilon > 0$ выполнено $\lim_{n \rightarrow \infty} P(\Gamma(n, p) \models Q) = 1$ при $p \geq (1 + \varepsilon)\hat{p}$ и 0 при $p \leq (1 - \varepsilon)\hat{p}$.

Пример 5. $\Gamma(n)$ — рёбра K_n .

- $Q = \{\text{связность}\}$, $\hat{p} = \frac{\ln n}{n}$ — точная пороговая вероятность
- $Q = \{\text{есть } \Delta\}$, $\hat{p} = \frac{1}{n}$ — пороговая вероятность, но точной пороговой вероятности нет
- $Q = \{\text{ацикличность}\}$, $\hat{p} = \frac{1}{n}$ — пороговая вероятность для Q , но точна она только с одной стороны

Теорема 3 (Фридгут). Пусть Q — монотонное свойство графов, \hat{p} — пороговая и она не точная. Тогда существует конечное разбиение $N_j, j = 1, \dots, k$ множества \mathbb{N} и рациональные числа $\alpha_1, \dots, \alpha_k > 0$ такие, что $\forall n \in N_j$ выполнено $\hat{p}(n) \asymp n^{-\alpha_j}$.

7 Малые подграфы в случайном графе

Рассмотрим $G(n, p), p = p(n)$. Пусть G — фиксированный. Вопросы:

- с какой вероятностью $G(n, p)$ содержит копию G ?
- X_G — число копий G в $G(n, p)$. Каково предельное распределение X_G ?

8 Пороговая вероятность

Утверждение 2 (Метод первого момента). Пусть $(X_n, n \in \mathbb{N})$ — последовательность с.в. со значениями в \mathbb{Z}_+ . Тогда $P(X_n > 0) \leq EX_n$. То есть если $EX_n \rightarrow 0$, то $P(X_n > 0) \rightarrow 0 \Rightarrow P(X_n = 0) \rightarrow 1$.

Утверждение 3 (Метод второго момента). Пусть $(X_n, n \in \mathbb{N})$ — последовательность с.в. со значениями в \mathbb{Z}_+ . Тогда $P(X_n = 0) \leq P(|X_n - EX_n| \leq EX_n) \leq \frac{DX_n}{(EX_n)^2}$. То есть если $DX_n = o(E(X_n)^2)$, то $P(X_n = 0) \rightarrow 0$, то есть $P(X_n \geq 1) \rightarrow 1$.

Определение 11. Плотностью графа $G = (V, E)$ называется $\rho(G) = \frac{|E|}{|V|}$.
 $m(G) = \max_{H \subseteq G} \rho(H)$.

Граф G сбалансирован, если $\rho(G) = m(G)$ и строго сбалансирован, если $\rho(H) < \rho(G) \forall H \subset G$.

Определение 12. Группой автоморфизмов $\text{Aut}(G)$ графа G называется группа всех изоморфизмов графа с собой. $\text{aut}(G) = |\text{Aut}(G)|$.

Лемма 6. Пусть G — фиксированный. X_G — число копий G в $G(n, p)$. Тогда

$$EX_G = C_n^v \frac{v!}{\text{aut}(G)} p^{|E|} = \Theta_G(n^v p^{|E|}).$$

Посчитаем дисперсию. Введём $\Phi_G = \min\{EX_H : H \subset G, H \neq \emptyset\}$. Тогда

$$\Phi(G) \asymp \min_{H \subset G, |E(H)| > 0} n^{|V(H)|} p^{|E(H)|}$$

Лемма 7.

$$DX_G \asymp (1-p) \sum_{H \subset G} n^{2v-v_H} p^{2e-e_H} \asymp (1-p) \sum_{H \subset G} \frac{(EX_G)^2}{EX_H} \asymp (1-p) \frac{(EX_G)^2}{\Phi_G}.$$

Доказательство. Пусть G' — копия G в K_n , $I_{G'} = I\{G' \subset G(n, p)\}$. Тогда $X_G = \sum_{G'} I_{G'}$.

$$\text{Тогда } DX_G = \text{cov}(X_G, x_G) = \sum_{G', G''} \text{cov}(I_{G'}, I_{G''}) = \sum_{G', G'', |E(G' \cap G'')| > 0} \text{cov}(I_{G'}, I_{G''}).$$

Это можно переписать как

$$\sum_{H \subset G} \sum_{G', G'', G' \cap G'' \equiv H} (p^{2e-e_H} - p^{2e}) \asymp \sum_{H \subset G} n^{2v-v_H} p^{2e-e_H} (1-p^{e_H})$$

С точки зрения порядка $1-p^{e_H} \asymp 1-p$, что даёт требуемое. \square

Теорема 4. Пороговая вероятность наличия графа G равна $\hat{p} = n^{-\frac{1}{m(G)}}$.

Доказательство. Пусть $p = p(n) = o(n^{-\frac{1}{m(G)}})$. Возьмём $H \subset G$, $\rho(H) = m(G)$. По лемме $P(G(n, p) \models G) \leq P(G(n, p) \models H) \leq EX_H = \Theta(n^{v_H} p^{e_H})$.

При данном p получаем $\Theta((np^{\rho(H)})^{v_H}) \rightarrow 0$.

Пусть наоборот, $p = p(n) = \omega(n^{-\frac{1}{m(G)}})$. Тогда $\Phi(G) = \min_{H \subset G} EX_H \asymp \min_H n^{v_H} p^{e_H} = \min_H (np^{\rho(H)})^{v_H} \rightarrow +\infty$. По лемме, $P(G(n, p) \not\models G) = P(X_G = 0) \leq \frac{DX_G}{(EX_G)^2} = o(\frac{1}{\Phi_G}) \rightarrow 0$. \square

Теорема 5. Для любого непустого графа G вероятность $P(G(n, p) \not\models G) \leq \exp(-\Theta(\Phi_G))$.

А что будет, если $np^{m(G)} \rightarrow c > 0$?

Теорема 6 (Пуассоновская предельная теорема). Если G строго сбалансирован и $np^{m(G)} \rightarrow c > 0$, то $X_G \rightarrow \text{Pois}(\lambda)$, где $\lambda = \frac{c^{v_G}}{\text{aut}(G)}$.

9 Метод моментов

Определение 13. Последовательность вероятностных мер $\{P_n, n \in \mathbb{N}\}$ на метрическом пространстве S слабо сходится к мере P , если $\forall f : S \rightarrow \mathbb{R}$ — ограниченной непр. функции выполнено:

$$\int_S f(x) P_n(dx) \rightarrow \int_S f(x) P(dx).$$

Обозначение: $P_n \xrightarrow{w} P$.

Определение 14. Семейство вероятностных мер $\{P_\alpha\}$ на метрическом пространстве S называется *плотным*, если $\forall \varepsilon \exists K_\varepsilon$ — компакт, такой что $\forall \alpha P_\alpha(S \setminus K_\varepsilon) \leq \varepsilon$.

Семейство мер называется *относительно компактным*, если в любой последовательности мер из семейства найдётся сходящаяся подпоследовательность.

Теорема 7 (Прохоров). В полном сепарабельном пространстве семейство мер плотно тогда и только тогда, когда оно относительно компактно.

Следствие. Пусть есть плотная последовательность мер на полном сепарабельном метрическом пространстве. Пусть кроме того любая слабо сходящаяся подпоследовательность слабо сходится к одной и той же мере Q . Тогда $P_n \xrightarrow{w} Q$.

Определение 15. Распределение случайной величины X однозначно определяется своими моментами, если из того, что выполнено $\forall k EX^k = EY^k$ следует $X \stackrel{d}{=} Y$.

Лемма 8. Пусть $\exists \varepsilon > 0$, такое что Ee^{tX} конечно $\forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Тогда распределение однозначно определено своими моментами.

Доказательство. Рассмотрим $f(z) = E \exp(zX)$ как функцию комплексного переменного. В области $|\operatorname{Re} z| < \varepsilon$ она голоморфна. Тогда $f(z)$ раскладывается в ряд Тейлора в окрестности нуля:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{EX^k}{k!} z^k.$$

Пусть Y — другая с.в., такая что $EY^k = EX^k$. Составим функцию $g(z) = E \exp(zY)$. $g(z)$ аналитична в той же полосе и $g(z)$ раскладывается в такой же ряд Тейлора в окрестности 0. По теореме о единственности они совпадают полностью, значит характеристические функции у них одинаковые, то есть и распределения. \square

Пример 6.

- Все распределения с конечным носителем
- Все распределения с экспоненциально убывающими хвостами: экспоненциальные, гамма, нормальные, пуассоновские
- Пример плохого распределения: $X^3, X \sim N(0, 1)$

Определение 16. Последовательность ξ_n называется *равномерно интегрируемой*, если

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \sup_n E(|\xi_n| I(|\xi_n| \geq c)) = 0.$$

Теорема 8. Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$, $\xi \geq 0$, $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$. Тогда $E\xi_n \rightarrow E\xi \Leftrightarrow \{\xi_n\}$ — равномерно интегрируема.

Теорема 9 (Метод моментов). Пусть распределение X однозначно определяется своими моментами. Тогда если $\forall k \in \mathbb{N} \ E X_n^k \rightarrow E X^k$, то $X_n \xrightarrow{d} X$.

Доказательство. Хотим проверить, что наша последовательность плотная, удостовериться, что частичный предел может быть только один и получить требуемое.

Итак, пусть P_n — распределение с.в. X_n . Пусть $M_k = \sup_n E X_n^k$. Тогда $\forall R > 0 \ P_n(\mathbb{R} \setminus [-R; R]) = P(|X_n| > R) \leq \frac{E|X_n|^2}{R^2} \leq \frac{M_2}{R^2} \rightarrow 0$ равномерно по n с ростом R .

По теореме Прохорова P_n содержит слабо сходящуюся подпоследовательность P_{n_k} . Покажем, что $P_{n_k} \xrightarrow{d} P_X$. Если $P_{n_k} \xrightarrow{w} Q$, то $X_{n_k} \xrightarrow{d} Y$, где Y — какая-то с.в. Заметим, что $X_{n_k}^s$ — равномерно интегрируема:

$$\sup_k E(|X_{n_k}^s| I(|X_{n_k}^s| \geq c)) \leq \sup_k E \frac{X_{n_k}^{2s}}{c} \leq \frac{M_{2s}}{c} \rightarrow 0.$$

По теореме о равномерной интегрируемости $E X_{n_k}^s \rightarrow E Y^s$. По условию $E X_{n_k}^s \rightarrow E X^s$, то есть $E X^s = E Y^s$. Значит $X \stackrel{d}{=} Y$ и $P_{n_k} \rightarrow P_X$.

По следствию из теоремы Прохорова $P_n \xrightarrow{w} P_X$, то есть $X_n \xrightarrow{d} X$. \square

Определение 17. Пусть Z — случайный вектор. Его распределение однозначно определяется своими моментами, если из того, что $\forall \alpha(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \ E Z^\alpha = E Z_1^{\alpha_1} \dots Z_m^{\alpha_m} = E Y^\alpha$ следует, что $Z \stackrel{d}{=} Y$.

Теорема 10 (Метод моментов). Пусть распределение случайного вектора Z однозначно определяется своими моментами. Тогда если $\forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n \ E X_n^\alpha \rightarrow E X^\alpha$, то $Z_n \xrightarrow{d} Z$.

10 Предельные теоремы для X_G

Доказательство пуассоновской предельной теоремы. Воспользуемся методом моментов. Факториальные моменты $Y \sim Pois(\lambda)$ равны $E(Y)_k = EY(Y-1) \dots (Y-k+1) = \lambda^k$. Достаточно показать, что $E(X_G)_k \rightarrow \lambda^k$ при $n \rightarrow \infty$.

Пусть G_1, \dots, G_N — копии G в K_n , $I_{G_i} = I\{G_i \subset G(n, p)\}$. Тогда $X_G = \sum_{i=1}^N I_{G_i}$ и

$$(X_G)_k = \sum_{i_1, \dots, i_k} I_{G_{i_1}} \dots I_{G_{i_k}}.$$

$$E(X_G)_k = \sum_{i_1, \dots, i_k} E I_{G_{i_1}} \dots I_{G_{i_k}} = E'_k + E''_k,$$

где E'_k — сумма по тем наборам, где все G_{i_k} попарно не имеют общих вершин, E''_k — остальные слагаемые.

$$E'_k = (p^{e_G})^k \sum 1 = (p^{e_G})^k C_n^{v_G} \frac{v_G!}{\text{aut}(G)} C_{n-v_G}^{v_G} \frac{v_G!}{\text{aut } G} \cdots C_{n-(k-1)v_G}^{v_G} \frac{v_G!}{\text{aut } G} \sim$$

$$(p^{e_G} \frac{n^{v_G}}{\text{aut}(G)})^k \rightarrow (\frac{c^{v_G}}{\text{aut}(G)})^k = \lambda^k$$

Нужно показать, что $E''_k = o(1)$. Для каждого t рассмотрим $e(t) = \min\{|E(G_1 \cup \dots \cup G_k)| \mid |V(G_1 \cup \dots \cup G_k)| = t\}$.

Утверждение 4. Пусть $k \geq 2, 2 \leq t < kv_G$, тогда $e(t) > tm(G)$.

Доказательство. Пусть F — любой граф. Положим $f_F = m(G)v_F - e_F$. Тогда $f_G = 0$ и $f_H > 0$ для любого собственного подграфа $H \subset G$.

Покажем, что если $F = G_1 \cup \dots \cup G_k$, то $f_F < 0$. Заметим, что $f_{F_1 \cup F_2} = f_{F_1} + f_{F_2} - f_{F_1 \cap F_2}$. Если $k = 2$, то $F = G_1 \cup G_2$ и $|V(G_1 \cap G_2)| > 0$. Тогда $f_{G_1 \cup G_2} = f_{G_1} + f_{G_2} - f_{G_1 \cap G_2} = 0 + 0 - f_{G_1 \cap G_2} < 0$.

Работаем по индукции: пусть $F' = G_1 \cup \dots \cup G_{k-1}$ и считаем, что $f_{F'} < 0$. Тогда $f_{G_1 \cup \dots \cup G_k} = f_{F'} + f_{G_k} - f_{F' \cap G_k} < 0$.

Это и означает, что $|E(G_1 \cup \dots \cup G_k)| > tm(G)$. \square

Применим утверждение к оценке E''_k . Если $A(k, t)$ — это число способов разместить k копий на t вершинах.

$$E''_k \leq \sum_{t=k}^{kv_G-1} C_n^t A(k, t) p^{e(t)} = o\left(\sum_{t=k}^{kv_G-1} n^t p^{e(t)}\right) =$$

$$o\left(\sum_{t=k}^{kv_G-1} (n^t p^{tm(G)}) p^{e(t)-tm(G)}\right) \rightarrow 0$$

\square

Теорема 11 (Многомерный случай). Пусть G_1, \dots, G_s — различные строго сбалансированные графы одной и той же плотности $m = m(G_i)$. Тогда если $np^m \rightarrow c > 0$, то $(X_{G_1}, \dots, X_{G_s}) \xrightarrow{d} (Z_1, \dots, Z_s)$, где Z_j — независимые случайные величины, $Z_j \sim \text{Pois}(\lambda_j)$, $\lambda_j = \frac{c^{v_{G_j}}}{\text{aut}(G_j)}$.

Пример 7. Всюду $m(G) = 1$, $np \rightarrow c > 0$

- $G = C_3 \sqcup C_3$ — два непересекающихся треугольника. Тогда $X_G \xrightarrow{d} \frac{1}{2}Z(Z-1)$, где $Z \sim \text{Pois}(\frac{c^3}{6})$. Тогда $P(X_G = 0) \rightarrow (1 + \frac{c^3}{6}) \exp(-\frac{c^3}{6})$
- $G = C_3 \sqcup C_4$. $X_G \xrightarrow{d} Z_1 Z_2$, Z_i — независимые, $Z_1 \sim \text{Pois}(\frac{c^3}{6})$, $Z_2 \sim \text{Pois}(\frac{c^4}{8})$. Тогда $P(X_G = 0) \rightarrow 1 - (1 - e^{-\frac{c^3}{6}})(1 - e^{-\frac{c^4}{8}})$

- G — треугольник с висячей вершиной. Тогда $X_G \xrightarrow{d} \sum_{i=1}^W Z_i$, где Z_i — независимые $Pois(3c)$, W — независима с ними, $W \sim Pois\left(\frac{e^3}{6}\right)$.
 $P(X_G = 0) \rightarrow \exp\left(-(1 - e^{-3c})\frac{e^3}{6}\right)$

Итого, ясно, что $np^{m(G)} \rightarrow 0 \Rightarrow X_G \xrightarrow{d} 0$ и $np^{m(G)} \rightarrow c \Rightarrow X_G \xrightarrow{d} Pois$.
 Утверждение состоит в том, что в случае, если $np^{m(G)} \rightarrow \infty \Rightarrow X_G \xrightarrow{d} N$.

Теорема 12 (ЦПТ для X_G). Пусть G — непустой фиксированный граф, $np^{m(G)} \rightarrow \infty$, $n^2(1-p) \rightarrow \infty$. Тогда

$$\frac{X_G - EX_G}{\sqrt{DX_G}} \xrightarrow{d} N(0, 1).$$

Доказательство. Работаем по методу моментов. Вспомним, что если $Y \sim N(0, 1)$, то $EY^k = (k-1)!!$ при чётных k и 0 при нечётных.

Пусть G_1, \dots, G_N — копии G в K_n , I_{G_i} — соответствующие индикаторы. Тогда $X_G = \sum I_{G_i}$ и обозначим $T(G_{i_1}, \dots, G_{i_k}) = E \prod_j (I_{G_{i_j}} - EI_{G_{i_j}})$. Тогда

$$E(X_G - EX_G)^k = \sum_{i_1, \dots, i_k} T(G_{i_1}, \dots, G_{i_k}).$$

Для набора копий (G_1, \dots, G_K) введём граф $L(G_1, \dots, G_K)$ с вершинами $\{1, \dots, k\}$ и (j, m) — ребро $\Leftrightarrow G_{i_j}$ и G_{i_m} имеют общее ребро. Тогда сумму перепишем как:

$$E(X_G - EX_G)^k = \sum_{L \subset K_k} \sum_{i_1, \dots, i_k} T(G_{i_1}, \dots, G_{i_k}).$$

Разбираем три случая. Если L — совершенное паросочетание. Вспомним, что $DX_G = \sum_{H \subset G, e_H > 0} C_n^{v_H} C_{n-v_H}^{v_G-v_H} C_{n-v_G}^{v_G-v_H} A(G, H) \cdot (p^{2e_G-e_H} - p^{2e_G}) = d(n, p)$.
 Положим рёбра L равными $\{(1, 2), \dots, (k-1, k)\}$, k — чётное.

$$\begin{aligned} \sum T &= \sum_{i_1, \dots, i_k} \prod_{j=1}^{\frac{k}{2}} \text{cov}(I_{G_{2j-1}}, I_{G_{2j}}) \\ &\leq \sum_{j=1}^{\frac{k}{2}} \prod_{G_{2j-1} \not\cap G_{2j}} \sum \text{cov}(I_{G_{2j-1}}, I_{G_{2j}}) = (DX_G)^{\frac{k}{2}}. \end{aligned}$$

С другой стороны

$$\begin{aligned} \sum T &\geq \sum_{i_1, i_2} \prod_{j=1}^{\frac{k}{2}} \text{cov}(I_{G_{2j-1}}, I_{G_{2j}}) \\ &= \sum_{i_1, i_2} \text{cov}(G_{i_1}, G_{i_2}) \sum_{G_{i_3} \cup G_{i_4} \not\cap G_{i_1} \cup G_{i_2}} \text{cov}(G_{i_3}, G_{i_4}) \sum \dots \\ &\geq d(n, p) d(n - 2v_G, p) \dots \sim (d(n, p))^{\frac{k}{2}} = (DX_G)^{\frac{k}{2}} \end{aligned}$$

Таким образом, первый случай даёт вклад $(k-1)!!(DX_G)^{\frac{k}{2}}$.

Если L имеет изолированную вершину, то $T = E(I_{G_{i_1}} - EI_{G_{i_1}}) \dots = 0$, то есть вклад таких слагаемых равен 0.

В противном случае в L строго меньше, чем $\frac{k}{2}$ компонент связности. Про-
нумеруем его так, чтобы компоненты имели вид $\{1, \dots, r_1\}, \{r_1+1, \dots, r_2\}, \dots$.
Пусть также число компонент равно $c(L) < \frac{k}{2}$, а также $\forall i \notin \{1, r_1+1, \dots, r_{c-1}+1\} \exists j : (j, i) \in E(L)$.

Пусть G_{i_1}, \dots, G_{i_k} — набор копий, такой что $L(G_{i_1}, \dots, G_{i_k}) = L$. Обозна-
чим $G^{(j)} = \bigcup_{s=1}^j G_{i_s}$, $F_j = G^{(j-1)} \cap G_{i_j}$. $e_{F_j} = 0 \Leftrightarrow j \in \{1, r_1+1, \dots, r_{c-1}+1\}$.

Если $p \leq \frac{1}{2}$, то

$$|T| \leq E \prod_{j=1}^k (I_{G_{i_j}} + EI_{G_{i_j}}) \leq 2^k EI_{G_{i_1}} \dots I_{G_{i_k}} = 2^k p^{e_{G^{(k)}}}.$$

Если же $p > \frac{1}{2}$, то оставим в каждой компоненте по одному множителю.

$$|T| \leq E \prod_{s=1}^c |I_{G_{i_{r_s}}} - EI_{G_{i_{r_s}}}| = (E|I_{G_1} - EI_{G_1}|)^c = \\ (2(1-p)^{e_G} p^{e_G})^c \leq (2e_G(1-p))^c$$

Итого, $|T(G_{i_1}, \dots, G_{i_k})| = o(p^{e_{G^{(k)}}}(1-p)^c)$. Далее $e_{G^{(k)}} = ke_G - \sum_{j=1}^k e_{F_j}$.

Тогда при заданных графах F_1, \dots, F_k число наборов $(G_{i_1}, \dots, G_{i_k})$ с усло-
вием $G^{(j-1)} \cap G_{i_j} \cong F_j$ в K_n есть $o(n^{kv_G - \sum_{j=1}^k v_{F_j}})$.

$$\sum_{i_1, \dots, i_k, L(\dots) = L, F_1, \dots, F_k - \text{фикс}} T = O \left(n^{kv_G - \sum_{j=1}^k v_{F_j}} p^{ke_G - \sum_{j=1}^k e_{F_j}} (1-p)^c \right).$$

Если $e_{F_j} = 0$, то $n^{v_{F_j}} p^{e_{F_j}} = n^{v_{F_j}} \geq 1$. Таких F_j ровно c . Остальные F_j имеют рёбра, значит $n^{v_{F_j}} p^{e_{F_j}} \geq EX_{F_j} \geq \Phi_G$.

Значит

$$\sum T = O \left((n^{v_G} p^{e_G})^k \frac{(1-p)^c}{(\Phi_G)^{k-c}} \right) = O \left((DX_G)^{\frac{k}{2}} \frac{(1-p)^{c-\frac{k}{2}}}{(\Phi_G)^{\frac{k}{2}-c}} \right).$$

Осталось показать, что $((1-p)\Phi_G)^{c-\frac{k}{2}} \rightarrow 0$, но $c - \frac{k}{2} < 0$, то есть $(1-p)\Phi_G \rightarrow +\infty$.

Если $p \leq \frac{1}{2}$, то $\Phi_G(1-p) \asymp \Phi_G$, но по условию $np^{m(G)} \rightarrow \infty \Rightarrow \Phi_G \rightarrow \infty$.

Если же $p > \frac{1}{2}$, то $\Phi_G \asymp \min_{H \subset G, e_H > 0} n^{v_H} p^{e_H} \asymp \min_{H \subset G, e_H > 0} n^{v_H} = n^2$.

По условию $n^2(1-p) \rightarrow \infty \Rightarrow \Phi_G \rightarrow \infty$.

Итого, по методу моментов, теорема доказана. \square

11 Эволюция случайного графа

- $p = o\left(\frac{1}{n^2}\right) \Rightarrow$ в графе а.п.н. нет рёбер
- $p = \frac{c}{n^2} \Rightarrow$ число рёбер равно $Pois\left(\frac{c}{2}\right)$
- $p = o\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow ?$

Утверждение 5. $p = o\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow$ случайный граф — а. п. н. лес

Доказательство. X — число простых циклов в $G(n, p)$. Будем оценивать $P(X \geq 1) \leq EX$.

$$EX = \sum_{k=3}^n C_n^k \frac{(k-1)!}{2} p^k \leq \sum_{k=3}^n \frac{n^k (k-1)! p^k}{2k!} \leq \sum_{k=3}^{\infty} n^k p^k \leq \frac{(np)^3}{1-np} \rightarrow 0. \quad \square$$

Утверждение 6. $\forall c > 0 P(G(n, p) \text{ содержит компоненту размера } \geq c \ln n) \rightarrow 0$.

Доказательство. X — число древесных компонент размера $\geq c \ln n - 1$.

$$\begin{aligned} EX &= \sum_{k=c \ln n - 1}^n C_n^k k^{k-2} p^{k-1} (1-p)^{C_k^2 - k + 1 + k(n-k)} \leq \sum_{k=c \ln n - 1}^n C_n^k k^{k-2} p^{k-1} \leq \\ &\sum_{k=c \ln n - 1}^n \left(\frac{en}{k}\right)^k k^{k-2} p^{k-1} = en \sum (enp)^{k-1} \frac{1}{k^2} \leq en(enp)^{c \ln n} \sum_{c=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \frac{A}{p} (enp)^{c \ln n} = \\ &A(e^{\frac{1}{c}} np)^{c \ln n} \rightarrow 0 \end{aligned} \quad \square$$

Пусть X_k — число древесных компонент размера k . Если $n = o(n^{-\frac{k}{k-1}})$, то $P(\exists \text{ компонента размера } \geq k) \rightarrow 0$. Если $p \sim cn^{-\frac{k}{k-1}}$, то вероятность того, что есть компонента размера $> k$ стремится к 0. Если T — конкретное дерево размера k , то число копий такого дерева будет $X_T \xrightarrow{d} Pois\left(\frac{c^{k-1}}{\text{aut}(T)}\right)$.

$X_k = X_{T_1} + \dots + X_{T_m}$. Раз нет циклов и компонент размера больше k , то X_k почти наверное равно $N_{T_1} + \dots + N_{T_m} \sim Pois\left(\frac{c^{k-1}}{\text{aut}(T_1)} + \frac{c^{k-1}}{\text{aut}(T_m)}\right) = Pois\left(\frac{c^{k-1} k^{k-2}}{k!}\right)$.

Если $p \gg n^{-\frac{k}{k-1}}$, то $\frac{N_T}{EN_T} \xrightarrow{P} 1$. $EN_T = C_n^k \cdot p^{k-1} \frac{k!}{\text{aut}(T)} \sim \frac{n^k p^{k-1}}{\text{aut}(T)} \gg 1$.

Пусть F — дерево на $k+1$ вершине. Если $p \ll n^{-\frac{k+1}{k}}$, то таких деревьев нет. Иначе, пусть $cn^{-\frac{k+1}{k}} < p < Cn^{-\frac{k+1}{k}}$. Так как свойство «содержать подграф» монотонно, то можно считать, что число деревьев, изоморфных F не больше, чем для $p = Cn^{-\frac{k+1}{k}}$. Так как $N_F(p = Cn^{-\frac{k+1}{k}}) \rightarrow Pois$, то $\forall \varepsilon > 0 \exists M : P(N_F > M) < \varepsilon$. Значит такие компоненты почти все не могут быть расширены. В последнем случае $p \gg n^{-\frac{k+1}{k}} \frac{N_F}{EN_F} \xrightarrow{P} 1$. $EN_F \ll EN_T$, притом оба стремятся к бесконечности.

Следствие. $\frac{X_k}{E(N_{T_1} + \dots + N_{T_m})} \xrightarrow{P} 1$, притом $E(N_{T_1} + \dots + N_{T_m}) \sim \frac{k^{k-2}}{k!} n^k p^{k-1}$.

12 Неравенство Чернова

Рассмотрим $X \sim \text{Bin}(n, p)$, $\lambda = np$. Хотим оценить $P(X > \lambda + t) = P(\exp(uX) > \exp(u(\lambda + t))) \leq \frac{E \exp(uX)}{e^{u(\lambda + t)}}$.

$E \exp(uX) = E(e^u)^{\xi_1 + \dots + \xi_n} = (1 - p + pe^u)^n$. Нужно минимизировать по u дробь $\frac{(1 - p + pe^u)^n}{e^{u(\lambda + t)}}$.

$$\begin{aligned} f(u) &= \exp(-u(\lambda + t))(1 - p + pe^u)^n \\ f'(u) &= -(\lambda + t) \exp^{-u(\lambda + t)}(1 - p + pe^u)^n + \exp(-u(\lambda + t))npe^u(1 - p + pe^u)^{n-1} = 0. \end{aligned}$$

$$-(\lambda + t)(1 - p + pe^u) + npe^u = 0 \Rightarrow e^u(\lambda - p(\lambda + t)) = (\lambda + t)(1 - p).$$

Отсюда находим $e^u = \frac{(\lambda + t)(1 - p)}{\lambda - p(\lambda + t)}$, ясно, что это минимум.

$$\text{Подставим. } P(X > \lambda + t) \leq \left(\frac{\lambda - p(\lambda + t)}{(\lambda + t)(1 - p)} \right)^{\lambda + t} \left(1 - p + p \frac{(\lambda + t)(1 - p)}{\lambda - p(\lambda + t)} \right)^n.$$

$$\begin{aligned} \text{Это равно } (1 - p)^{n - \lambda - t} \left(1 + \frac{\lambda + t}{n - (\lambda + t)} \right)^n \left(\frac{\lambda - p(\lambda + t)}{\lambda + t} \right)^{\lambda + t} &= \frac{n^n}{(n - (\lambda + t))^n} (1 - p)^{n - \lambda - t} p^{\lambda + t} \frac{((n - (\lambda + t))^{\lambda + t})}{(\lambda + t)^{\lambda + t}} \\ &= \left(\frac{\lambda}{\lambda + t} \right)^{\lambda + t} \left(\frac{n - \lambda}{n - \lambda - t} \right)^{n - \lambda - t} = \exp(-\lambda(1 + \frac{t}{\lambda}) \ln(1 + \frac{t}{\lambda}) - (n - \lambda)(1 - \frac{t}{n - \lambda}) \ln(1 - \frac{t}{n - \lambda})). \end{aligned}$$

Если обозначить $\varphi(x) = (1 + x) \ln(1 + x) - x$, то

$$P(X > \lambda + t) \leq \exp \left(-\lambda \varphi\left(\frac{t}{\lambda}\right) - (n - \lambda) \varphi\left(-\frac{t}{n - \lambda}\right) \right).$$

$\varphi(0) = 0$, $\varphi \sim \frac{x^2}{2}$ при $x \rightarrow 0$, поэтому можем оценить $P(X > \lambda + t) \leq \exp(-\lambda \varphi(\frac{t}{\lambda}))$.

Заметим, что $\varphi'(0) = 0$, $\varphi'' = \frac{1}{1+x} \geq \left(\frac{x^2}{2(1+\frac{x}{3})} \right)''$, то есть $\varphi(x) \geq \frac{x^2}{2(1+\frac{x}{3})}$.

$$\text{Итак, } P(X > \lambda + t) \leq \exp \left(-\lambda \frac{t^2}{2\lambda^2(1+\frac{t}{3\lambda})} \right).$$

Следствие (Неравенство Чернова). $P(|X - \lambda| \leq 2 \exp \left(-\frac{t^2}{2(\lambda + \frac{t}{3})} \right))$.

13 Эволюция при $np = c < 1$

Перейдём к случаю $np = c < 1$.

Теорема 13. $P(\text{наибольшая компонента} \leq \frac{3}{(1-c)^2} \ln n) \rightarrow 1$.

Доказательство. Рассмотрим случайный процесс, строящий компоненту, начиная с какой-то вершины, добавляющий за 1 шаг всех соседей.

$P(\text{стартуя с вершины 1, мы получим компоненту большого размера}) = o(\frac{1}{n})$.

Докажем это. Пусть X_1, \dots, X_t — количество вершин, добавляемых на каждом шаге. Можно с помощью добавления фиктивных вершин аппроксимировать $X_i \leq Y_i \sim \text{Bin}(n, p)$, притом все Y_i независимы. Тогда искомая вероятность равна $P(X_1 + \dots + X_t \geq t + 1)$, где $t = \frac{3}{(1-c)^2} \ln n$. Оцениваем через Y_i и применяем неравенство Чернова:

$$P < \exp\left(-\frac{(t+1-tnp)^2}{2(tnp+\frac{t+1-tnp}{3})}\right) = \exp\left(-\frac{(t(1-c)+1)^2}{2(\frac{1}{3}+t(\frac{1}{3}+\frac{2c}{3}))}\right) = \exp\left(-\ln n \frac{3}{(1-c)^2}(1 - c)^2 \frac{1}{\frac{2}{3}+\frac{4c}{3}} + O(1)\right) < \exp\left(-\frac{3}{2} \ln n + O(1)\right) = O(n^{-1.5}) = o\left(\frac{1}{n}\right). \quad \square$$

Теорема 14. $P(G(n, p)$ содержит компоненту с хотя бы 2 циклами) $\leq \frac{2}{n(1-c)^3}$.

Доказательство. Пусть X — число «сложных» компонент. $P(X \geq 1) \leq$

$EX = \sum_{k=4}^n EX_k$, где X_k — число «сложных» компонент размера k . Будем оценивать EX_k .

$EX_k \leq C_n^k k! k^2$ (считаем число вариантов сделать компоненту вида $o - o$ или Θ). \tilde{X}_k — число компонент указанного вида. $\tilde{X} = \sum_{k=4}^n \tilde{X}_k$. $\tilde{X} = 0 \Leftrightarrow X = 0$.

$$\sum_{k=4}^n E\tilde{X}_k \leq \sum_{k=4}^n \frac{k^2 c^{k+1}}{n} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=4}^{\infty} k^2 c^{k+1} \leq \frac{1}{n} \int_0^{\infty} x^2 c^x dx.$$

$$\int x^2 c^x dx = \int \frac{x^2 d(c^x)}{\ln c} = - \int \frac{2xc^x dx}{\ln c} = -\frac{2}{(\ln c)^3} < \frac{2}{(1-c)^3}. \quad \square$$

14 Параметры унициклических компонент

Следствие. Если $c \in (0, 1)$, то сложных компонент в графе нет.

Теорема 15. Пусть $np = c > 0, k \geq 3$. Обозначим за U_k — число унициклических компонент размера k в $G(n, p)$. Тогда $U_k \xrightarrow{d} \text{Pois}(\lambda)$, $\lambda = \frac{1}{2k}(ce^{-c})^k \sum_{j=0}^k \frac{k!}{j!}$.

Доказательство. Подсчёт по методу моментов. \square

Теорема 16. Пусть k_1, \dots, k_s — различные числа. Тогда $(U_{k_1}, \dots, U_{k_s}) \xrightarrow{d} (Z_1, \dots, Z_s)$, где Z_i независимые $\text{Pois}(\lambda_i)$, $\lambda_i = \frac{1}{2k_i}(ce^{-c})^{k_i} \sum_{j=0}^{k_i} \frac{k_i!}{j!}$.

Теорема 17. Пусть U — общее число вершин в унициклических компонентах $G(n, p)$, притом $c < 1$. Тогда $EU_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sum_{k=3}^{\infty} (ce^{-c})^k \sum_{j=0}^{k-3} \frac{k^j}{j!}$, а также $DU_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sum_{k=3}^{\infty} (ce^{-c})^k \sum_{j=0}^{k-3} \frac{k^j}{j!}$.

Доказательство. $U_n(k)$ — число унициклических компонент размера k .

$$U_n = \sum_{k=3}^n k U_n(k). \text{ Отсюда } EU_n = \sum_{k=3}^n k C_n^k C(k, k) p^k (1-p)^{C_k^2 - k + (n-k)k}.$$

Каждое слагаемое сходится туда, куда нужно. Нужно показать, что сходимость равномерная. А именно, проверим, что $\exists \gamma > 0 : \forall k \leq n$ $k C_n^k C(k, k) p^k (1-p)^{C_k^2 - k + (n-k)k} \leq \exp(-\gamma k)$.

$$C(k, k) = \frac{(k-1)!}{2} \sum_{j=0}^{k-3} \frac{k^j}{j!} \leq \frac{(k-1)!}{2} e^k.$$

$$C_n^k = o\left(\frac{1}{k!} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n} \left(\frac{e}{n-k}\right)^{n-k} \frac{1}{\sqrt{n-k}}\right) = o\left(\frac{1}{k!} e^{-k} \left(\frac{n}{n-k}\right)^{n-k+\frac{1}{2}} n^k\right).$$

$$(1-p)^{C_k^2-k+(n-k)k} = o\left((1-p)^{nk-\frac{k^2}{2}}\right).$$

Итого, слагаемое S_k равно $o\left(\left(\frac{n}{n-k}\right)^{n-k+\frac{1}{2}} c^k (1-p)^{nk-\frac{k^2}{2}}\right) = o\left(\sqrt{\frac{n}{n-k}} e^{f(\beta)} k\right)$,

где $\beta = \frac{k}{n}$.

Заметим, что $\sqrt{\frac{n}{n-k}}$ не мешает экспоненциальной скорости сходимости по k и выкинем это.

$1-p = 1 - \frac{c}{n}$, $\ln p = -p + O(p^2)$. Тогда $f(\beta) = \ln c - c + \frac{c\beta}{2} + \ln(1-\beta)^{-1} \left(\frac{1}{\beta} - 1\right) = -\frac{1-\beta}{\beta} \ln(1-\beta) + \ln c - c + \frac{c\beta}{2}$.

Хотим показать, что $\forall \beta \in [0, 1] f(\beta) \leq -\gamma$ для $\gamma > 0$. $f(0) = 1 + \ln c - c < 0$ для $c < 1$. Тогда $\exists \beta_0 > 0 : \forall \beta \leq \beta_0 f(\beta) \leq \frac{f(0)}{2} < 0$.

Рассмотрим $g(\beta) = \beta f(\beta) = -(1-\beta) \ln(1-\beta) + \ln c \beta - \beta c + \frac{\beta^2 c}{2}$.

$g'(\beta) = \ln(1-\beta) + 1 + \ln c - c + \beta c$.

$g''(\beta) = -\frac{1}{1-\beta} + c$. Это равно 0 при $\beta = 1 - \frac{1}{c}$.

Если $c < 1$, то $g''(\beta) < 0$ на $[0, 1]$. $g'(1 - \frac{1}{c}) = 0$. То есть g будет убывать на $[0, 1]$.

Даже если $c > 1$, $1 - \frac{1}{c}$ — точка максимума $g'(\beta)$. Но $g'(1 - \frac{1}{c}) = 0 \Rightarrow g'(\beta) \leq 0$ на $[0, 1]$, то есть так или иначе $g(\beta)$ убывает на $[0, 1]$ для всех $\beta > \beta_0$.

$f(\beta) = \beta^{-1} g(\beta) \leq g(\beta) \leq g(\beta_0) = \gamma' < 0$. Тогда взяв $\gamma = \min\{-\frac{f(0)}{2}, -\gamma'\}$, получаем $f(\beta) \leq -\gamma$. Тем самым, равномерная сходимость доказана, значит EU_n сходится к сумме пределов.

Заметим также, что при фиксированных k_1, k_2 $EU_n(k_1)U_n(k_2) \sim EU_n(k_1)EU_n(k_2)$ при $k_1 \neq k_2$. А $EU_n(k)(U_n(k) - 1) \sim EU_n(k)^2$.

$$\text{Тогда } EU_n^2 = E\left(\sum_{k=3}^n k U_n(k)\right)^2 \sim \sum_{k_1 \neq k_2} k_1 k_2 EU_n(k_1)EU_n(k_2) + \sum_{k=3}^n k^2 EU_n^2(k) \sim$$

$$(EU_n)^2 + \sum_{k=3}^n k^2 EU_n(k) \Rightarrow DU_n \rightarrow \frac{1}{2} \sum_{k=3}^{\infty} k (ce^{-c})^k \sum_{j=0}^{k-3} \frac{k^j}{j!}. \quad \square$$

Следствие. *Общее число вершин в унициклических компонентах ограничено по вероятности.*

15 Теорема о гигантской компоненте

Ветвящиеся процессы Гальтона-Ватсона: $\{\xi_k^{(n)}\}$ — н. о. р., $\xi \in \mathbb{Z}_+$.

$$x_0 = 1, x_n = \sum_{k=1}^{X_{n-1}} \xi_k^{(n)}.$$

$$\varphi_\xi(z) = Ez^\xi = \sum_{k=0}^{\infty} z^k P(\xi = k). \quad q = P(\exists n : X_n = 0).$$

Утверждение 7. $q = \varphi_\xi(q)$.

Теорема 18. $\mu = E\xi, P(\xi = 1) < 1$. Тогда

1. $\mu \leq 1 \Rightarrow q = 1$ и других решений нет
2. $\mu > 1 \Rightarrow q = q_0 \in [0; 1]$ и решений ровно два: q_0 и 1.

Пример 8. $\xi \sim Pois(c)$, $\varphi_\xi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \frac{c^k}{k!} e^{-c} = \exp((z-1)c)$.

$q = e^{(q-1)c}$, $\beta = 1 - q$ — вероятность невырождения. $\beta + \exp(-\beta c) = 1$.

Теорема 19. Пусть $np = c > 1$. Положим $\beta = \beta(c)$ — решение уравнения $\beta + \exp(-\beta c) = 1$ из $(0, 1)$. Тогда с вероятностью, стремящейся к 1 $G(n, p)$ содержит гигантскую компоненту, чей размер при делении на n стремится к β по вероятности.

Все остальные компоненты при этом имеют размер не более $\frac{16c}{(c-1)^2} \ln c$.

Доказательство. Обозначим $k_- = \frac{16c}{(c-1)^2} \ln n$, $k_+ = n^{\frac{2}{3}}$.

Для всех вершин v запустим процесс набора её компоненты связности.

Для $\forall t = 0, 1, \dots$ введем тройку (C_t, A_t, U_t) , где C_t — рассмотренные вершины, A_t — активные вершины, U_t — неактивные вершины.

$C_0 = \emptyset$, $A_0 = \{v\}$, $U_0 = V \setminus \{v\}$.

При тройке (C_t, A_t, U_t) на шаге $t+1$:

- берем первую вершину v_t из A_t .
- $C_{t+1} = C_t \cup \{v_t\}$
- Пусть X_{t+1} — множество соседей v_t в U_t
- $A_{t+1} = A_t \setminus \{v_t\} \cup X_{t+1}$.
- $U_{t+1} = U_t \setminus X_{t+1}$.

Процесс останавливается когда либо $A_t = \emptyset$, $U_t = \emptyset$, компонента при этом есть C_t .

Покажем, что с вероятностью, стремящейся к 1 выполнена следующая альтернатива:

1. процесс закончился ко времени k_-
2. для $\forall t \in [k_-, k_+]$ $|A_t| \geq \left(\frac{c-1}{2}\right) t$

Пусть это не так. Тогда $\exists t \in [k_-, k_+] : |A_t| < \left(\frac{c-1}{2}\right) t$, притом $|A_i| > 0$ при $i \leq t-1$. Заметим, что $|A_t| = \sum_{k=1}^t Y_k - t + 1$, где $Y_k = |X_k|$.

$P(|A_t| < \frac{c-1}{2} t) = P(\sum_{k=1}^t Y_k < \frac{c+1}{2} t - 1)$. На любом шаге у нас есть не мень-

ше, чем $n - \frac{c+1}{2} k_+$ неактивных вершин. Тогда $P(|A_t| < \frac{c-1}{2} t) \leq P(\sum_{k=1}^t Z_k < \frac{c+1}{2} t - 1)$, где Z_1, \dots, Z_t независимые $Bin(n - \frac{c+1}{2} k_+, p)$.

Это равно $P\left(\sum_{k=1}^t (Z_k - EZ_k) < \frac{c-1}{t} - 1 + \frac{c+1}{2}k + pt\right) \leq \exp\left(-\frac{(\frac{c-1}{2}t + 1 - \frac{c+1}{2}k + pt)^2}{2(ct - \frac{c+1}{2}k + pt)}\right) = \exp\left(-\frac{(c-1)^2}{8c}t(1 + o(1))\right).$

Так как $t \geq k = \frac{16c}{(c-1)^2} \ln n$, $P(|A_t| < \frac{c-1}{2}t) \leq \exp(-2 \ln n(1 + o(1))) = n^{-2+o(1)}.$

Суммируя по всем $v \in V$ (n штук) и $t \in [k-, k+]$ получаем следующее: $P(\text{альтернатива не выполнена}) \leq n^{\frac{5}{3}} n^{-2+o(1)} \rightarrow 0.$

Назовём компоненты размера $\geq k$ большими. Пусть v, w — две вершины из разных больших компонент. Для них обоих выполнена вторая часть альтернативы. Значит в любой момент времени между их множествами активных вершин рёбер нет. Но в момент времени k_+ в этих множествах хотя бы $\frac{c-1}{2}k_+$ активных вершин.

$P(v, w \text{ лежат в разных компонентах} \mid (C_{k_+}, A_{k_+}, U_{k_+}), (C'_{k_+}, A'_{k_+}, U'_{k_+})) \leq (1-p)^{|A_{k_+}| |A'_{k_+}|} \leq (1-p)^{\left(\frac{c-1}{2}\right)^2 k_+^2} = \left(1 - \frac{c}{n}\right)^{\frac{(c-1)^2}{4} n^{\frac{4}{3}}} \rightarrow 0.$

Будем называть вершины из большой компоненты большими, а остальные — маленькими. Пусть v — вершина $G(n, p)$. Тогда

$P(v \text{ маленькая}) \leq \rho(n - k_-, p)$, где $\rho(n, p)$ — вероятность вырождения ветвящегося процесса с законом $Bin(n, p)$. $\rho(n, p) \rightarrow 1 - \beta$.

С другой стороны

$$P(v \text{ маленькая}) \geq P(\text{процесс выродился, набрав } Y \leq k_-).$$

Так как $k_- \rightarrow \infty$, то $P(v \text{ маленькая}) \geq P(Y \leq \infty) = 1 - \beta$.

Значит $P(v \text{ маленькая}) = (1 - \beta)(1 + o(1))$. Пусть X_n — общее число маленьких вершин в $G(n, p)$, тогда $EX_n = n(1 - \beta)(1 + o(1))$.

$$EX_n(X_n - 1) \leq n(1 - \beta)(1 + o(1))k_- + (n - k_-)(1 - \beta)(1 + o(1)) \sim (EX_n)^2.$$

По неравенству Чебышева $\forall \varepsilon > 0$

$$P\left(\left|\frac{X_n - (1 - \beta)n}{n}\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{DX_n}{(n\varepsilon)^2} = o\left(\frac{(EX_n)^2}{n^2}\right) = o(1)$$

Тогда $\frac{X_n}{n} \xrightarrow{P} 1 - \beta$, что и требовалось доказать. \square

Теорема 20 (ЦПТ для размера гигантской компоненты). Пусть $c > 1, p = \frac{c}{n}$, $N(n, p)$ — размер гигантской компоненты $G(n, p)$. Тогда

$$\sqrt{n} \left(\frac{N(n, p)}{n} - \beta \right) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2),$$

$$\text{где } \sigma^2 = \frac{\beta(1-\beta)}{(1-c(1-\beta))^2}$$

16 Случай $np \sim 1$

При $np < 1$ и при $np > 1$ картина ясна. Выясним промежуточную картину, наблюдаемую при $np \sim 1$.

Введем параметризацию $G(\lambda) = G(n, p)$, где $p = \frac{1}{n} + \frac{\lambda}{n^{\frac{4}{3}}}$.

Определение 18. Компонента связности называется l -компонентой, если число рёбер равно числу вершин плюс l .

Введем такие обозначения:

- $X(n, l)$ — число l -компонент
- $Y(n, l)$ — общее число вершин во всех l -компонентах
- $X(n, k, l)$ — число l -компонент на k вершинах
- $C(k, k + l)$ — число связных графов на k вершинах

Утверждение 8.

1. $X(n, l) = \sum_{k=1}^n X(n, k, l)$
2. $Y(n, l) = \sum_{k=1}^n kX(n, k, l)$
3. $EX(n, k, l) = C_n^k C(k, k + l) p^{k+l} (1 - p)^{C_k^2 - k - l + k(n-k)}$

Утверждение 9.

1. Если $a = o(b^{\frac{3}{4}})$, то $\frac{b(b-1)\dots(b-a+1)}{b^2} = (1 + O(\frac{a}{b}) + O(\frac{a^4}{b^3})) \exp\left(-\frac{a^2}{2b} - \frac{a^3}{6b^2}\right)$.
2. $\exists c > 0 : \forall a \leq b \quad \frac{(b)_a}{b^a} = O(\exp\left(-\frac{a^2}{2b} - \frac{a^3}{6b^2} - c\frac{a^4}{b^3}\right))$.

Лемма 9. В модели $G(\lambda)$ для фиксированного $l \geq -1$

1. если $k = o(n^{\frac{3}{4}})$, то $EX(n, k, l) = (1 + l\lambda n^{-\frac{1}{3}} + O(n^{-\frac{2}{3}}) + O(\frac{k}{n}) + O(\frac{k^4}{n^3})) n^{-l} c(k, k + l) \frac{e^{-k}}{k!} \exp(-F(x_k))$
2. для всех k $EX(n, k, l) = O(n^{-l} C(k, k + l) \frac{e^{-k}}{k!} \exp(-F(x_k)))$,

где $x_k = \frac{k}{n^{\frac{2}{3}}}$, $F(x) = \frac{1}{6}(x^3 - 3x^2\lambda + 3x\lambda^2) = \frac{1}{6}((x - \lambda)^3 + \lambda^3)$.

Доказательство. $C_n^k = \frac{n^k}{k!} \frac{(n)_k}{n^k} = \frac{n^k}{k!} (1 + O(\frac{k}{n}) + O(\frac{k^4}{n^3})) \exp(-\frac{k^2}{2n} - \frac{k^3}{6n^2})$.
 $p^{k+l} = n^{-(k+l)} (1 + \lambda n^{-\frac{1}{3}})^{k+l} = n^{-(k+l)} (1 + l\lambda n^{-\frac{1}{3}} + O(n^{-\frac{2}{3}})) (1 + \lambda n^{-\frac{1}{3}})^k =$
 $n^{-k-l} (1 + l\lambda n^{-\frac{1}{3}} + o(n^{-\frac{2}{3}})) \exp(\lambda k n^{-\frac{1}{3}} - \frac{\lambda^2 k^2}{2n^{\frac{2}{3}}} + O(\frac{n}{k}))$.

Осталось рассмотреть $(1 - p)$.

$(1 - p)^{C_k^2 - k - l + k(n-k)} = (1 + O(\frac{k}{n})) (1 - p)^{\frac{k^2}{2} + kn - k^2} = (1 + O(\frac{k}{n})) \exp(\frac{k^2}{2} p - pkn + O(\frac{k}{n})) = (1 + O(\frac{k}{n})) \exp(\frac{k^2}{2n} - k + \frac{\lambda k^2}{2n^{\frac{4}{3}}} - \lambda kn^{-\frac{1}{3}})$.

Собирая все вместе и упрощая, получаем требуемое. Аналогично доказывается и второй пункт. \square

Лемма 10.

$$1. EY(n, -1) = n - n^{\frac{2}{3}}(f_{-1}(\lambda) + O(n^{-\frac{1}{3}}))$$

$$2. EY(n, 0) = f_0(\lambda)n^{\frac{2}{3}} + O(n^{\frac{1}{3}}),$$

$$\text{где } f_{-1}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty x^{-\frac{3}{2}}(1 - e^{-F(x)})dx + \lambda, \quad f_0(\lambda) = \frac{1}{4} \int_0^\infty e^{-F(x)}dx.$$

Доказательство. 1. Разобьем сумму для $EY(n, -1)$ на две части: для $k \leq n^\alpha$ и $k > n^\alpha$ для какого-то фиксированного $\alpha \in (\frac{2}{3}; \frac{3}{4})$.

$$\sum_{k \leq n^\alpha} kEX(n, k, l) = \sum_{k \leq n^\alpha} \frac{k^{k-1}e^{-k}}{k!} ne^{-F(x_k)}(1 - \lambda n^{-\frac{1}{3}} + O(n^{-\frac{2}{3}})) + R_n, \text{ где}$$

$$R_n = O\left(\sum_{k \leq n^\alpha} \frac{k^{k-1}e^{-k}}{k!} ke^{-F(x_k)} + \sum_{k \leq n^\alpha} \frac{k^{k-1}e^{-k}}{k!} \frac{k^4}{n^2} e^{-F(x_k)}\right).$$

$$\text{Далее } \sum_{k \leq n^\alpha} \frac{k^k e^{-k}}{k!} e^{-F(x_k)} = O\left(\sum_{k \leq n^\alpha} \frac{1}{\sqrt{k}} e^{-F(x_k)}\right) = O\left(\sum_{k \leq n^\alpha} \frac{1}{\sqrt{x_k}} n^{-\frac{1}{3}} e^{-F(x_k)}\right) =$$

$$O\left(n^{\frac{1}{3}} \sum_{k \leq n^\alpha} \frac{1}{\sqrt{x_k}} e^{-F(x_k)} \delta x_k\right), \text{ где } x_k = \frac{k}{n^{\frac{2}{3}}}, \delta x_k = \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}.$$

$$\text{Это равно } O\left(n^{\frac{1}{3}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-F(x)} dx\right) = O\left(n^{\frac{1}{3}}\right)$$

Оцениваем вторую часть суммы ($F(x) \geq \frac{x^3}{7}$ для больших x): $\sum_{k > n^\alpha} kE(x, n, -1) =$

$$O\left(\sum_{k > n^\alpha} \frac{k^{k-1}e^{-k}}{k!} ne^{-F(x_k)}\right) = O\left(n \sum_{k > n^\alpha} \frac{k^{k-1}e^{-k}}{k!} \exp\left(-\frac{x_k^3}{7}\right)\right) = O\left(n \exp\left(-\frac{n^{\alpha-\frac{2}{3}} \cdot 3}{7}\right) \sum_{k > n^\alpha} \frac{k^{k-1}e^{-k}}{k!}\right) =$$

$$O\left(ne^{-\frac{1}{7}n^{3\alpha-2}} \sum_k \frac{k^{k-1}e^{-k}}{k!}\right) = O\left(n^{\frac{1}{3}}\right).$$

$$\text{Итого } EY(n, -1) = \sum_{k \leq n^\alpha} \frac{k^{k-1}e^{-k}}{k!} ne^{-F(x_k)}(1 - \lambda n^{-\frac{1}{3}} + O(n^{-\frac{2}{3}})) + O(n^{\frac{1}{3}}).$$

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{k^{k-1}e^{-k}}{k!} e^{-F(x_k)} = 1 - \sum_{k=1}^\infty \frac{k^{k-1}e^{-k}}{k!} (1 - e^{-F(x_k)}), \text{ так как } \sum_{k=1}^\infty \frac{k^{k-1}e^{-k}}{k!} = 1$$

(это можно увидеть, сопоставив с формулой для числа вершин, занимаемых древесными компонентами).

$$\text{По формуле Стирлинга: } \frac{k^{k-1}e^{-k}}{k!} (1 - e^{-F(x_k)}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x_k^3 n^2}} (1 - e^{-F(x_k)}) \left(1 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right).$$

$$\text{Тогда } EY(n, -1) = (1 - \lambda n^{-\frac{1}{3}})(-1) \sum_{k \leq n^\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi x_k^3}} \delta x_k (1 - e^{-F(x_k)}) \cdot n^{\frac{2}{3}} +$$

$$n - \lambda n^{\frac{2}{3}} + O(n^{\frac{1}{3}}).$$

$$\text{С ростом } n \text{ это асимптотически эквивалентно } n - n^{\frac{2}{3}} \left(\lambda + \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{-\frac{3}{2}} (1 - e^{-F(x)}) dx\right) + O(n^{\frac{1}{3}}).$$

2. Доказывается аналогично

□

Следствие. $EY(n, \geq 1) = n^{\frac{2}{3}}(f_{-1}(\lambda) - f_0(\lambda)) + O(n^{\frac{1}{3}})$

Следствие. В модели $G(\lambda)$ размер наибольшей недревесной компоненты есть $O_P(n^{\frac{2}{3}})$.

Лемма 11. В модели $G(\lambda)$ размер наибольшей древесной компоненты есть $O_P(n^{\frac{2}{3}})$.

Доказательство. Пусть $w(n) \rightarrow \infty$. $P(\exists T : |T| \geq n^{\frac{2}{3}}w(n)) \leq \sum_{k > n^{\frac{2}{3}}w(n)} EX(n, k, -1) =$
 $O\left(\sum_{k > n^{\frac{2}{3}}w(n)} n \frac{k^{k-2}e^{-k}}{k!} e^{-F(x_k)}\right) = O\left(e^{-\frac{w^3}{7}} n \sum_{k > w(n)n^{\frac{2}{3}}} k^{-\frac{5}{2}}\right) = O\left(e^{-\frac{w^3}{7}w(n)^{-\frac{2}{3}}}\right) \rightarrow$
 $0. \quad \square$

Следствие. В модели $G(\lambda)$ размер наибольшей компоненты есть $O_P(n^{\frac{2}{3}})$.

17 Поведение сложных компонент

Теорема 21 (Багаев). $C(k, k+1) \sim \frac{5}{24}k^{k+1}$.

Теорема 22 (Райт, 1980). Для $l \geq 2$ и $l = o(k^{\frac{1}{3}})$ выполнено

$$C(k, k+l) = \gamma_l k^{k+\frac{3l-1}{2}} \left(1 + O\left(\sqrt{\frac{l^3}{k}}\right)\right),$$

$$\text{где } \gamma_l = \frac{\sqrt{\pi}3^l(l-1)\delta_l}{2^{\frac{5l-1}{2}}\Gamma(\frac{l}{2})}, \delta_1 = \delta_2 = \frac{5}{36}, \delta_{l+1} = \delta_l + \sum_{h=1}^{l-1} \frac{\delta_h \delta_{l-h}}{(l+1)C_l^h}.$$

Теорема 23 (Боллобаш).

1. Если $1 \leq l \leq k$, то $C(k, k+l) \leq \left(\frac{c_1}{l}\right)^{\frac{l}{2}} k^{k+\frac{3l-1}{2}}$
2. Если $k \leq l \leq C_k^2 - k$, то $C(k, k+l) \leq c_2 e^{-\frac{l}{2}} k^{k+\frac{3l-1}{2}}$

Лемма 12. Пусть $l \geq 1$ — фиксировано, $w(n) \rightarrow \infty$. Тогда с вероятностью, стремящейся к 1, $G(\lambda)$ не содержит l -компонент размер $\leq \frac{n^{\frac{2}{3}}}{w(n)}$.

Доказательство. Положим $k_1 = \frac{n^{\frac{2}{3}}}{w(n)}$, тогда $P(\exists H : |H| \leq \frac{n^{\frac{2}{3}}}{w(n)}) \leq \sum_{k \leq k_1} EX(n, k, l) =$
 $O\left(e^{-\frac{l}{2}} k^{k+\frac{3l-1}{2}} \frac{e^{-k}}{k!} n^{-l} e^{-F(x_k)}\right) = O\left(\sum_{k \leq k_1} k^{\frac{3l}{2}-1} n^{-l} e^{-F(x_k)}\right) = O\left(\sum_{k \leq k_1} x_k^{\frac{3l}{2}-1} n^{l-\frac{2}{3}} n^{-l} e^{-F(x_k)}\right) =$
 $O\left(\sum_{k \leq k_1} x_k^{\frac{3l}{2}-1} \delta x_k e^{-F(x_k)}\right) = O\left(\int_0^{\frac{1}{w(n)}} x^{\frac{3l}{2}-1} e^{-F(x)} dx\right) \rightarrow 0 \quad \square$

18 Свойства первого и второго порядка

Рассматривается семейство свойств графов, выразимое формулами первого порядка:

- переменные x, y, z, \dots , принимающие значения в множестве вершин
- логические связки
- предикаты: \sim — связанность ребром, $=$ — равенство
- кванторы \forall, \exists по переменным

Таким образом можно выразить не все свойства. Поэтому иногда приходится рассматривать свойства второго порядка, то есть дополнительно разрешать следующее

- Символы X, Y, Z, \dots , принимающие значения в множестве предикатов конечной валентности на множестве вершин
- кванторы \forall, \exists таким символам

Можно выразить свойство «содержать чётное число вершин»:

$$\exists X (\forall x \exists y ([X(x, y)] \wedge [\forall z (z \neq y) \rightarrow \neg X(x, z)]) \wedge (\forall x \neg X(x, x)) \wedge (\forall x \forall y X(x, y) \leftrightarrow X(y, x)))$$

Язык второго порядка называется *монадическим*, если допускается только квантификация по унарным предикатам. Монадическим языком можно записать свойство связности: нельзя разбить на два нетривиальных подмножества, между которыми нет ребер.

Указанные свойства не могут быть выражены языком «меньшего» порядка. Проще всего показать это, используя теорему Эренфойхта.

Определение 19. Графы G, H являются k -элементарно эквивалентными, если никакая формула φ первого порядка кванторной глубины не более k не может их отличить, то есть $G \equiv_k H \Leftrightarrow \forall \varphi (G \models \varphi \Leftrightarrow H \models \varphi)$.

Теорема 24 (Эренфойхт). Пусть G, H — графы, $k \in \mathbb{N}$. $G \equiv_k H$ тогда и только тогда, когда у Консерватора есть выигрышная стратегия в игре $EHR(G, H, k)$.

Можно показать, что на графах C_{3^k} и $C_{3^k} \sqcup C_{3^k}$ в k раундах побеждает консерватор, что значит, что не существует первопорядковой формулы для свойства связности.

Теорема 25 (1969, Глебский, Коган, Лиогонький, Таланов; 1976 Фагин). $\forall \varphi$ превопорядковой формулы $\lim_{n \rightarrow \infty} P(G(n, \frac{1}{2}) \models \varphi) \in \{0, 1\}$.

Теорема 26 (Закон 0 или 1, современная формулировка). Если $p = p(n) : \min\{p, 1-p\}n^\alpha \rightarrow \infty \forall \alpha > 0$, а φ превопорядковая формула, то $\lim_{n \rightarrow \infty} P(G(n, p) \models \varphi) \in \{0, 1\}$.

Следствие (Из теоремы Эренфойхта). $G(n, p)$ подчиняется закону 0 или 1 для всех формул первого порядка глубины k тогда и только тогда, когда

$$P(\text{Консерватор выигрывает в игре } EHR(G(n, p(n)), G(m, p(m)), k)) \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 1$$

Закона 0 или 1. Рассмотрим свойство полного расширения уровня s : любое множество из не более, чем s вершин расширяется еще одной вершиной так, чтобы любое указанное подмножество вершин A было соединено с новой вершиной, а остальные вершины не были.

Если G, H обладают таким свойством, то у Консерватора есть выигрышная стратегия. Оценим вероятность обладания таким свойством.

$$P(G(n, p) \text{ не обладает свойством полного расширения}) \leq C_n^s 2^s (1 - \min\{p, 1-p\})^s \rightarrow 0$$

Следствия из теоремы Эренфойхта.

⇐ Пусть а.п.н. есть выигрышная стратегия в k раундах, но закон 0 или 1 не выполнен. Тогда $\exists \varphi$ глубины k , для которой закон не выполнен. Возможны две ситуации:

- Существует частичный предел $c \in (0, 1)$
- И 0, и 1 лежат в множестве частичных пределов

$P(\text{Новатор побеждает}) \geq P(G^1(n_i, p) \models \varphi, G^2(n_i, p) \not\models \varphi) = P(G^1(n_i, p) \models \varphi)P(G^2(n_i, p) \not\models \varphi) = c(1-c) \neq 0$ (для подпоследовательности, на которой достигается предел c). Аналогично, если есть подпоследовательности, на которых достигнуты пределы 0 и 1, то новатор побеждает с вероятностью, стремящейся к 1.

⇒ Пусть $\liminf P(\text{Консерватор побеждает}) < 1$. Тогда выберем подпоследовательность $(m_i, n_i) : \lim P(\dots) = \varepsilon < 1$. В эту сторону придётся воспользоваться следующим утверждением.

Утверждение 10. Существует лишь конечное число различных формул, выражающих различные свойства графа.

Итак, $P(G(n_i, p) \not\models_k G(m_i, p)) \rightarrow 1 - \varepsilon > 0$. Это означает то, что $P(\exists \varphi : d(\varphi) = k, G(n_i, p) \models \varphi, G(m_i, p) \not\models \varphi) \leq \sum_{\varphi} P(G(n_i, p) \models \varphi, G(m_i, p) \not\models \varphi)$. Тогда найдётся одна формула φ глубины k , такая что $P(G(n_i, p) \models \varphi, G(m_i, p) \not\models \varphi) = p_{\varphi}$ максимальна. $p_{\varphi} \geq \frac{1-\varepsilon}{M} > 0$. Для завершения доказательства осталось выбрать подпоследовательность, в которой какая-то формула встречается бесконечное число раз. □

Теорема 27 (Спенсер, Шелах, 1988). Пусть $p = n^{-\alpha}, \alpha > 0$. Тогда

- $\alpha \notin \mathbb{R} \Rightarrow$ закон 0 или 1
- $\alpha \in \mathbb{Q} \cap (0, 1] \Rightarrow$ закон не выполнен
- $\alpha = 1 + \frac{1}{m} \Rightarrow$ закон не выполнен

- $\alpha > 1, \alpha \neq 1 + \frac{1}{m} \Rightarrow$ закон выполнен

Для языков второго порядка закон не выполнен, так как можно записать свойство «число вершин чётно».

Теорема 28 (Кауфманн, Шелах, 1985). $\exists \varphi$ монадическая, такая что $P(G(n, \frac{1}{2}) \models \varphi)$ не имеет предела.

Теорема 29 (Ле Барс, 2001). $\exists \varphi$ экзистенциальная (допускается квантификация по монадическим переменным только с помощью \exists), для которой нет предела вероятности $P(G(n, \frac{1}{2}) \models \varphi)$.

19 Сложные компоненты в фазовом переходе

В предыдущих сериях мы выяснили, что в $G(\lambda)$ нет сложных компонент размера $o_p(n^{\frac{2}{3}})$.

$X(n, l)$ — число l -компонент. $L_n = \max\{l : X(n, l) > 0\}$.

Теорема 30. В модели $G(\lambda)$ случайная величина L_n ограничена по вероятности.

Доказательство. Пусть $l_0 = w(n) \rightarrow \infty$. Хотим показать, что $P(L_n \geq l_0) \rightarrow 0$. Положим $w_1(n) = w^{\frac{1}{4}}(n) = l_0^{\frac{1}{4}}$ и будем считать, что $w(n) = O(n^{\frac{4}{3}-\delta})$ для какого-то $\delta > 0$. В силу предыдущих результатов, можно считать, что размер компоненты не превосходит $k_0 = w_1 n^{\frac{2}{3}}$. Итак, мы хотим получить, что

$$\sum_{k \leq k_0, l_0 < l \leq C_k^2 - k} EX(n, k, l) \rightarrow 0$$

$EX(n, k, l) = C_n^k C(k, k+l) p^{k+l} (1-p)^{C_k^2 - k - l + (n-k)k}$. Обозначим $\varepsilon = \lambda n^{-\frac{1}{3}}, p = \frac{1+\varepsilon}{n}$. Используем следующие оценки

$$\begin{aligned} C_n^k &= O\left(\frac{n^k}{k!} \exp\left(-\frac{k^2}{2n}\right)\right) \\ p^{k+l} &= \left(\frac{1+\varepsilon}{n}\right)^{k+l} \leq \exp(\varepsilon k) p^l \frac{1}{n^k} \\ (1-p)^{C_k^2 - k - l + (n-k)k} &= (1-p)^{-l} (1-p)^{C_k^2 - k + k(n-k)} \leq (1-p)^l \exp\left(-\frac{1+\varepsilon}{n}(C_k^2 - k + (n-k)k)\right) = \\ &= O\left((1-p)^l \exp\left((1+\varepsilon)k + \frac{(1+\varepsilon)k^2}{2n}\right)\right) \\ \frac{|\varepsilon|k^2}{n} &\leq \frac{k_0^2|\varepsilon|}{n} = \frac{|\lambda|n^{-\frac{1}{3}}n^{\frac{4}{3}}w_1^2(n)}{n} = |\lambda|w^{\frac{1}{2}}(n) \end{aligned}$$

В итоге:

$$\begin{aligned} \sum_{k \leq k_0, l_0 < l \leq C_k^2 - k} EX(n, k, l) &\leq O\left(\sum_{k \leq k_0} C(k, k+l) \frac{n^k}{k!} e^{-\frac{k^2}{2n}} e^{\varepsilon k} p^l \frac{1}{n^k} (1-p)^{-l} e^{-k} e^{-\varepsilon k} e^{\frac{k^2}{2n}} e^{\frac{|\lambda|\sqrt{w}}{2}}\right) = \\ &= O\left(\sum_{k \leq k_0, l_0 < l \leq C_k^2 - k} C(k, k+l) \frac{e^{-k}}{k!} \left(\frac{p}{1-p}\right)^l e^{\frac{|\lambda|\sqrt{w}}{2}}\right) \end{aligned}$$

Сумму разобьем на две части: $l > k, l \leq k$. Оценим по отдельности:

$$\Sigma_1 : C(k, k+l) = O(k^{k+l}), k! > \left(\frac{k}{e}\right)^k$$

$$\Sigma_1 = O\left(e^{\frac{|\lambda|\sqrt{w}}{2}} \sum_{k=4}^{k_0} \sum_{l > \max(k, l_0)} \left(\frac{kp}{1-p}\right)^l\right) = O\left(e^{\frac{|\lambda|\sqrt{w}}{2}} \sum_{k=4}^{k_0} \left(\frac{kp}{1-p}\right)^{\max(l_0, k)}\right) \leq$$

$$O\left(e^{\frac{|\lambda|\sqrt{w}}{2}} l_0 \left(\frac{k_0 p}{1-p}\right)^{l_0}\right) = O\left(e^{\frac{|\lambda|\sqrt{w}}{2}} w(n) (2n^{-\frac{\delta}{4}})^{w(n)}\right) \rightarrow 0$$

$$\Sigma_2 : C(k, k+l) = O(e^{-\frac{l}{2}} k^{k+\frac{3l-1}{2}}), k! > \left(\frac{n}{e}\right)^k \sqrt{2\pi k}$$

$$\Sigma_2 \leq O\left(e^{|\lambda|\sqrt{w}2} \sum_{k=l_0}^{k_0} \sum_{l=l_0}^k e^{-\frac{l}{2}} k^{\frac{3l-2}{2}} \left(\frac{p}{1-p}\right)^l\right)$$

$\frac{kp}{(1-p)\sqrt{l}} \leq \frac{k_0^{\frac{3}{2}} p}{(1-p)\sqrt{l_0}} \leq \frac{(n^{\frac{2}{3}} w_1(n))^{\frac{3}{2}} p}{(1-p)\sqrt{w}} = \frac{npw^{\frac{3}{8}}}{(1-p)w^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{2}{w^{\frac{1}{8}}(n)} \rightarrow 0$. Значит сумма оценивается сверху геометрической прогрессией.

$$\Sigma_2 = O\left(e^{|\lambda|\sqrt{w}2} \sum_{k=l_0}^{k_0} \frac{1}{k} \left(\frac{k^{\frac{3}{2}} p}{(1-p)\sqrt{l_0}}\right)^{l_0}\right) \leq O\left(e^{\frac{|\lambda|\sqrt{w}}{2}} k_0 \frac{1}{k_0} \left(\frac{k_0^{\frac{3}{2}} p}{(1-p)\sqrt{l_0}}\right)^{l_0}\right) \leq$$

$$O\left(e^{\frac{|\lambda|\sqrt{w}}{2}} \left(\frac{2}{w(n)^{\frac{1}{8}}}\right)^{w(n)}\right) \rightarrow 0 \quad \square$$

Следствие. В модели $G(\lambda)$ число сложных компонент ограничено по вероятности и каждая из них имеет размер $\Omega_P(n^{\frac{2}{3}})$.

Доказательство. Из теоремы следует, что сложность ограничена по вероятности. При фиксированной сложности l число l -компонент ограничено по вероятности, что было доказано ранее. По предыдущим утверждениям все такие компоненты имеют размер $\Omega_P(n^{\frac{2}{3}})$. \square

Дополнительные факты:

- Сложные компоненты в $G(\lambda)$ есть не всегда. Пусть C_n — число сложных компонент в $G(\lambda)$. Тогда $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} EC_n = \int_0^\infty g(x) e^{-F(x)} dx = I(\lambda)$, $F(x) = \frac{1}{6}((x-\lambda)^3 + \lambda^3)$, $g(x) = \sum_{l \geq 1} \gamma_l x^{\frac{3l}{2}-1}$, где $c(k, k+l) \sim \gamma_l k^{k+\frac{3l-1}{2}}$

- $I(\lambda) \rightarrow 0, \lambda \rightarrow -\infty$

- $I(\lambda) \rightarrow 1, \lambda \rightarrow +\infty$

- $h_n(\lambda) = P(\text{нет сложных компонент})$.

$$\text{Тогда } \lim_{\lambda \rightarrow \infty} h_n(\lambda) = h(\lambda) e^{-\frac{\lambda^3}{6} \left(\frac{2}{3\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(-\frac{\lambda}{2} 3^{\frac{2}{3}}\right)^j \cos \frac{\pi j}{4} \Gamma\left(\frac{2}{3}j + \frac{1}{2}\right)}.$$

$$\text{Например, } h(0) = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

- Пусть C_n — число циклов в $G(\lambda)$, а C_n^* — число унициклических компонент. Тогда в силу следствия $C_n - C_n^* = O_P(1)$. А распределение C_n^*

(в отличие от $c > 1$ и $c < 1$) асимптотически нормальным. Например, при $\lambda < 0$

$$\frac{C_n^* - \frac{1}{6} \ln n}{\sqrt{\frac{1}{6} \ln n}} \xrightarrow{d} 1$$

20 k-связность

Определение 20. Граф G называется k -связным, если при удалении $k - 1$ вершины нельзя получить несвязный или пустой граф.

Минимальное k , такое, что G k -связен — вершинная связность, $k(G)$.

Аналогично определяется рёберная k -связность.

Графовый случайный процесс: $\tilde{G} = (\tilde{G}(n, m), m = 0, \dots, C_n^2)$.

$\tilde{G}(n, 0)$ — пустой. $\tilde{G}(n, m + 1)$ получен из $\tilde{G}(n, m)$ добавлением случайного недобавленного ребра.

Для возрастающего свойства Q введём $\tau(Q) = \min\{m : \tilde{G}(n, m) \models Q\}$.

$\tau_k(\delta) = \tau(\delta(G) \geq k)$, $\tau_k(\kappa) = \tau(k(G) \geq k)$, $\tau_k(\lambda) = \tau(\lambda(G) \geq k)$.

Цель: показать, что при фиксированном $k \in \mathbb{N}$ выполнено $P(\tau_k(\delta) = \tau_k(\kappa)) \rightarrow 1$.

Определение 21. Пусть G — граф, подмножество $S \subset V$ называется *сепаратором*, если $V \setminus S$ представимо в виде $W_1 \sqcup W_2$, $|W_1| \leq |W_2|$ и между W_1 и W_2 нет рёбер.

Сепаратор называется тривиальным, если $|W_1| = 1$.

S называется s -сепаратором, если $|S| = s$.

Лемма 13 (О сепараторах). Пусть $k \in \mathbb{N}$ и $w(n) \rightarrow \infty$, $w(n) \leq \ln \ln \ln n$. Пусть $p = \frac{\ln n + k \ln \ln n - w(n)}{n}$, тогда вероятность того, что $G(n, p)$ содержит нетривиальный сепаратор стремится к 0.

Доказательство. $A_r = \{G(n, p) \text{ имеет нетривиальный } k\text{-сепаратор с } |W_1| = r\}$.

Будем рассматривать $r_0 = \max(k + 1, 10)$, $r_1 = \lfloor n^{\frac{5}{9}} \rfloor$, $r_2 = \lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor$

Хотим $P\left(\bigcup_{r=2}^{r_2} A_r\right) \rightarrow 0$. Сумму разбиваем на три, каждую будем оценивать отдельно.

1. $r \leq r_0$. Из условия на p получаем $P(\delta(G(n, p)) = k) \rightarrow 1$. Тогда в W_1 найдутся две вершины степени $\leq k + r$ на расстоянии не более 2 (либо рёбер внутри W_1 нет, тогда оно соединено со всем S , либо есть).

Оценим вероятность этого события:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i,j=k}^{k+r} \sum_{k=1}^2 C_n^2 C_{n-2}^{l-1} p^l C_n^{i-1} C_n^{j-1} p^{i+j-2} (1-p)^{2n-i-j+1} \leq \\
& \sum_{i,j=k}^{k+r} \sum_{r=1}^2 i n^{l+1+i+j-2} p^{i+j-2+l} (1-p)^{2n-i-j+1} \leq \\
& \sum_{i,j=k}^{k+r} \sum_{l=1}^2 n (np)^{i+j+l-2} e^{-2np+o(1)} \leq o\left((\ln n)^{2(k+r)} e^{-2np} n\right) = \\
& o\left((\ln n)^{2k+2r} \exp(-2 \ln n - 2k \ln \ln n + 2w)n\right) = o\left((\ln n)^r e^{2w(n)} \frac{1}{n}\right) \rightarrow 0
\end{aligned}$$

2. $r_0 \leq r \leq r_1$. Заметим, что на множестве $S \cup W_1$ должно быть не меньше, чем $\frac{rk}{2}$ рёбер.

$$\begin{aligned}
C_{C_{r+k}^2}^{\frac{rk}{2}} p^{\frac{rk}{2}} & \leq \left(\frac{\exp(\frac{1}{4}(r+k)^2)}{\frac{rk}{2}} \right)^{\frac{rk}{2}} p^{\frac{rk}{2}} \leq \left(\frac{4er^2p}{rk} \right)^{\frac{rk}{2}} = \left(\frac{4erp}{k} \right)^{\frac{rk}{2}} \leq \\
& \left(n^{-\frac{4}{9}+o(1)} \right)^{\frac{rk}{2}} < n^{-\frac{3}{14}rk}
\end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{r=r_0+1}^{r_1} A_r\right) & \leq o(1) + \sum_{r=r_0+1}^{r_1} C_n^r C_{n-r}^k n^{-\frac{3}{14}rk} (1-p)^{r(n-r-k)} \leq \\
& o(1) + \sum_{r=r_0+1}^{r_1} n^{r+k-\frac{3}{14}rk} \exp(-pr(n-r-k)) \leq \\
& o(1) + \sum_{r=r_0+1}^{r_1} n^{k-\frac{3}{14}rk+\frac{r^2}{n}}
\end{aligned}$$

Так как $r \geq 11$, то сумма стремится к 0.

3. $r > r_1$. Между W_1 и W_2 нет рёбер (и они большие).

$$\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{r=r_1+1}^{r_2} A_r\right) & \leq \sum_{r=r_1+1}^{r_2} C_n^r C_{n-r}^k (1-p)^{r(n-r-k)} \leq \sum_{r=r_1+1}^{r_2} \left(\frac{en}{r}\right)^r n^k e^{-pr(n-r-k)} \leq \\
& \sum_{r=r_1+1}^{r_2} \left(\frac{en}{r}\right)^r n^k e^{-pr\frac{n-k}{2}} = \sum_{r=r_1+1}^{r_2} n^k \left(\frac{en}{r} e^{-p\frac{n-k}{2}}\right)^r \leq \sum_{r=r_1+1}^{r_2} n^k e^{r(\frac{4}{9}-\frac{1}{2})} \ln n (1+o(1)) \leq \\
& \sum_{r=r_1+1}^{r_2} n^k n^{-\frac{r}{20}} \rightarrow 0
\end{aligned}$$

□

Теорема 31. В графовом случайном процессе для фиксированного k $P(\tau_k(\delta) = \tau_k(\kappa)) \rightarrow 1$.

Доказательство. Пусть $k = 1$. Ясно, что $\tau_k(\kappa) \geq \tau_k(\delta)$. Положим $w(n) = \ln \ln \ln n$.

$$m_1 = \lfloor \frac{n}{2} (\ln n - w(n)) \rfloor$$

$$m_2 = \lfloor \frac{n}{2} (\ln n + w(n)) \rfloor$$

В силу асимпт. эквивалентности моделей

$$P(\tilde{G}(n, m_1) \text{ связан}) \rightarrow 0$$

$$P(\tilde{G}(n, m_2) \text{ связан}) \rightarrow 1$$

Тем самым $P(m_1 < \tau_k(\delta) \leq m_2) \rightarrow 1$. Граф $\tilde{G}(n, m_1)$ с большой вероятностью состоит из гигантской компоненты и изолированных вершин, причем число последних $\leq \ln n$. Обозначим это событие через \mathcal{B} . Тогда $\tau_1(\kappa) > \tau_1(\delta)$, если в моменты времени $\{m_1 + 1, \dots, m_2\}$ одно из рёбер было проведено между изолированными.

$$P(\tau_1(\kappa) > \tau_1(\delta) \mid \mathcal{B}) \leq \frac{(m_2 - m_1)(\ln n)^2}{C_n^2 - m_2} = o\left(\frac{nw(n)(\ln n)^2}{n^2}\right) \rightarrow 0.$$

Пусть $k \geq 2$. По лемме о сепараторах при $m_0 = \lfloor \frac{n}{2} (\ln n + (k-1) \ln \ln n - \ln \ln \ln n) \rfloor$

$$P(\tilde{G}(n, m_0) \text{ содержит нетривиальный } (k-1)\text{-сепаратор}) \rightarrow 0.$$

Кроме того $P(\delta(\tilde{G}(n, m_0)) = k-1) \rightarrow 1$. Тогда $\forall m \geq m_0$ $\tilde{G}(n, m)$ тоже не содержит нетривиальных $(k-1)$ -сепараторов. Снова $\tau_k(\kappa) \geq \tau_k(\delta)$ и если $\delta(\tilde{G}(n, m)) = k$, то $\tilde{G}(n, m)$ не будет вершинно k -связным только при наличии нетривиального $(k-1)$ -сепаратора. Но их нет, значит $\tau_k(\delta) = \tau_k(\kappa)$. □

Упражнение 1. Доказать, что при фиксированном k $P(\tau_k(\delta) = \tau_k(\lambda)) \rightarrow 1$.

Следствие. Если $p \leq \frac{\ln n + k \ln \ln n}{n}$, k — фиксированное, то $P(\delta(G(n, p)) = k(G(n, p)) = \lambda(G(n, p))) \rightarrow 1$.

Следствие. Пусть $p = \frac{\ln n + k \ln \ln n + x + o(1)}{n}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $x \in \mathbb{R}$, то

$$P(k(G(n, p)) = \lambda(G(n, p)) = k) \rightarrow 1 - \exp\left(-\frac{e^{-x}}{k!}\right),$$

$$P(k(G(n, p)) = \lambda(G(n, p)) = k+1) \rightarrow \exp\left(-\frac{e^{-x}}{k!}\right).$$

21 Совершенные паросочетания

Пороговая вероятность наличия совершенного паросочетания в $G(n, p)$?

Теорема 32 (Холл). Пусть G — двудольный с равными долями X, Y . Тогда в G есть совершенное паросочетание тогда и только тогда, когда $\forall W \subset X |N(W)| \geq |W|$

В случайном графе сложно: он не двудольный, а также в нём достаточно много «плохих» вершин. Оказывается, все зависит от наличия конфигурации «вишня»: пара вершин степени 1 с общим соседом.

22 Длинные пути в случайном графе

Пусть граф уже связан: $p = \frac{(1+\varepsilon)\ln n}{n}$. Можем ли мы в нём набрать достаточно длинный путь?

Теорема 33. Пусть $p = \frac{\theta}{n}$, $0 < \theta = \theta(n) < \ln n - 3 \ln \ln n$. Тогда с вероятностью, стремящейся к 1, $G(n, p)$ содержит путь длины $(1 - \frac{4 \ln 2}{\theta})n$.

Доказательство. Рассмотрим случайный мультиграф $G(n, r, r)$, в котором между любыми двумя проводится независимо два случайных ребра: красное и синее, оба с вероятностью r . Если цветные рёбра обесцветить, то $G(n, r, r)$ превращается в $G(n, p_0)$, где $p_0 = 1 - (1 - r)^2$, то есть при $r = \frac{r}{2}$, то $p_0 = p - \frac{p^2}{4} < p$. Таким образом, если в $G(n, r, r)$ есть достаточно длинный путь, то и в $G(n, p)$ он тоже есть в силу монотонности свойства.

Идея заключается в анализе поиска в глубину, а именно следующей его имитации:

- Будем двигаться по красным рёбрам без возвратов, пока возможно, выбирая произвольный из доступных вариантов
- Когда переход в новые вершины по красным рёбрам невозможен, пытаемся перейти по синим
- Когда переход невозможен и по синему ребру, возвращаемся в ближайшую вершину, из которой мы не пытались переходить по синим ребрам
- Если мы вернулись в начало пути, то выкинем из графа все, что прошли и запустимся из другой вершины

Более формально: $G(n, r, r)$ — цветной мультиграф и $\forall k = 0, \dots \exists (P_k, U_k, B_k)$, где P_k — текущий набранный путь, U_k — множество неиспользованных вершин, B_k — множество «синих» вершин (из которых мы пытались идти по синему ребру). В начальный момент времени есть $x_0 \in V(G(n, r, r))$, $P_0 = x_0$, $U_0 = V \setminus \{x_0\}$, $B_0 = \emptyset$.

Пусть известна тройка (P_k, U_k, B_k) , x_k — первая вершина P_k , y_k — последняя, $|U_k| = u_k$. Если $u_k = 0$, то алгоритм остановится. Иначе, есть следующие случаи:

1. $y_k \notin B_k$. Если есть красное ребро (y_k, y_{k+1}) , где $y_{k+1} \in U_k$, то y_{k+1} добавляется в путь: $P_{k+1} = P_k y_{k+1}$, $U_{k+1} = U_k \setminus \{y_{k+1}\}$, $B_{k+1} = B_k$.
Если красных рёбер не нашлось, то $P_{k+1} = P_k$, $U_{k+1} = U_k$, $B_{k+1} = B_k \cup \{y_k\}$
2. $y_k \in B_k$ и $V(P_k) \setminus B_k \neq \emptyset$, то ищется синее ребро (y_k, y_{k+1}) между y_k и U_k . Если оно найдено, то оно добавляется: $P_{k+1} = P_k y_{k+1}$, $U_{k+1} = U_k \setminus \{y_{k+1}\}$, $B_{k+1} = B_k$.

Если синего ребра не нашлось, то нужно найти y_{k+1} — ближайшую к y_k вершину P_k не из B_k . Укорачиваем путь до y_{k+1} и добавляем её в B_k : $P_{k+1} = x_k \dots y_{k+1}$, $U_{k+1} = U_k$, $B_{k+1} = B_k \cup \{y_{k+1}\}$

3. $V(P_k) \subset B_k$. Тогда с вероятностью $(1-r)^{u_k}$ будем просто ничего не делать ($P_{k+1} = P_k, U_{k+1} = U_k, B_{k+1} = B_k$). Если же эта вероятность не реализовалась, то ищем синее ребро между y_k и U_k .

Если ребро не найдено, то процесс придется начать сначала: $P_{k+1} = x_{k+1}, U_{k+1} = U_k \setminus \{x_{k+1}\}, B_{k+1} = B_k$.

Замечание. Ничего не делание не меняет никакие множества, а просто растягивает один шаг на, возможно, несколько. Таким образом получается удобное свойство: на каждом шаге алгоритма размер U_k меняется примерно одинаково.

Пусть $l_k = |P_k| - 1, b_k = |B_k|$. По определению имеем $n - u_0 + b_0 = 1$. Для каждого момента $k \in \mathbb{N}$ рассмотрим величины $n - u_k + b_k$ и $n - u_{k+1} + b_{k+1}$. Ясно, что $1 + n - u_k + b_k \geq n - u_{k+1} + b_{k+1}$. Далее рассмотрим $V \setminus (U_k \cup V(P_k))$. Оно лежит в B_k . Тогда $n - u_k + b_k \leq k + 1$, так как оно увеличивается не более чем на 1 за шаг. $l_k = |P_k| - 1 \geq n - n_k - b_k - 1 \geq 2(n - u_k) - k - 2$. Таким образом, нам надо показать, что при правильном выборе k эта разность будет достаточно большой.

Пусть $H_k = \{(P_i, U_i, B_i), i = 0, \dots, k\}$ — история алгоритма. На каждом шаге мы проверяем наличие рёбер какого-то цвета между y_k и U_k и каждый раз рассматриваются новые ребра (либо мы стоим на месте). Так или иначе, вероятность неудачи равна $(1-r)^{u_k}$. Таким образом:

$$P(u_{k+1} = j \mid u_j = j, H_k = H) = (1-r)^j.$$

Но $u_{k+1} = u_k$ или $u_{k+1} = u_k - 1$. Время, которое мы стоим в состоянии j получается подчинено геометрическому распределению с вероятностью успеха $(1-r)^j$. Пусть $X_i = \max\{k - l + 1 : u_k = u_l = i\} \sim \text{Geom}(1 - (1-r)^i)$. $Y_j = \sum_{i=j+1}^n X_i$ — время достижения цепью состояния j . $P(u_k \leq j) = P(Y_k \leq k)$.

Надо подобрать подходящие j, k , так чтобы $P(Y_j \leq k) \rightarrow 1, 2(n-j) - k - 2 \geq (1 - \frac{4 \ln 2}{\theta}) n$.

Оценим ожиданию и дисперсию Y_j , при $j = \lceil \frac{\ln 2}{r} \rceil$:

$$\begin{aligned} DY_j &= \sum_{i=j+1}^{n-1} DX_i = \sum_{i=j+1}^{n-1} \frac{(1-r)^i}{(1 - (1-r)^i)^2} \leq \\ &\leq \left[(1-r)^{j+1} \leq (1-r)^{\frac{\ln 2}{r}} \leq e^{-\ln 2} = \frac{1}{2} \right] \leq 2n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
EY_j &= \sum_{i=j+1}^{n-1} EX_i = \sum_{j+1}^{n-1} \frac{1}{1 - (1-r)^i} \leq \sum_{j+1}^{n-1} \frac{1}{1 - e^{-r_i}} \leq \int_j^{n-1} \frac{1}{1 - e^{-rx}} dx = \\
&= [y = rx] = \frac{1}{r} \int_{r_j}^{r(n-1)} \frac{1}{1 - e^{-y}} dy \leq \frac{1}{r} \int_{\ln 2}^{rn} \sum_{m=0}^{\infty} e^{-ym} dy = \\
&= \frac{1}{r} \left(rn - \ln 2 + \sum_{m=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{m} e^{-ym} \right) \Big|_{\ln 2}^{rn} \right) = \\
&= \frac{1}{r} \left(rn - \ln 2 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} 2^{-m} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} e^{-rnm} \right) \leq n - \frac{1}{r} e^{-rn}
\end{aligned}$$

Отсюда по неравенству Чебышева следует, что при $w(n) = \ln \ln n$ выполнено $P(Y_j \leq n - \frac{1}{r} e^{-rn} + \sqrt{n}w(n)) \rightarrow 1$. Значит $P(u_k \leq j) \rightarrow 1$, где $k = \lceil n - \frac{1}{r} e^{-rn} + \sqrt{n}w(n) \rceil, j = \lceil \frac{\ln 2}{r} \rceil$. Значит. с большой вероятностью

$$\begin{aligned}
l_k &\geq 2(n - u_k) - k - 2 \geq 2(n - j) - k - 2 \geq \\
&\geq 2n - 2 \left\lceil \frac{\ln 2}{r} \right\rceil - n + \frac{1}{r} e^{-rn} - \sqrt{n}w(n) - 3 = \\
&= n - \frac{4 \ln 2}{\theta} n + \frac{1}{r} e^{-rn} - \sqrt{n}w(n) - 5
\end{aligned}$$

Поясним, почему последние слагаемые дают в сумме > 0 . $\frac{1}{r} e^{-rn} = \frac{2n}{\theta} e^{-\frac{\theta n}{2}} \geq \frac{2n}{\ln n - 3 \ln \ln n} e^{-\frac{\ln 2}{2} + \frac{3}{2} \ln \ln n} \geq \frac{2n}{\ln n} \frac{1}{\sqrt{n}} (\ln n)^{\frac{3}{2}} (1 + o(1)) = 2\sqrt{n \ln n} (1 + o(1)) = \omega(\sqrt{n}w(n))$. \square

Следствие. Рассмотрим ориентированный случайный граф с вероятностью ребра (в одну из двух сторон) $p = \frac{\theta}{n}, 0 < \theta < \ln n - 3 \ln \ln n$. Тогда с вероятностью, стремящейся к 1, такой граф содержит ориентированный путь длины $\geq n \left(1 - \frac{4 \ln 2}{\theta}\right)$.

23 Гамильтоновы циклы

Какова пороговая вероятность для Гамильтонова цикла? С одной стороны $\hat{p} \leq \frac{\ln n + \ln \ln n - w(n)}{n}$, так как нужна связность и степень каждой вершины хотя бы 2. С другой стороны совсем понятная оценка только $p = \frac{1}{2}$.

Цель: при $p = \frac{\ln n + \ln \ln n + w(n)}{n}$ $P(G(n, p) \text{ гамильтонов}) \rightarrow 1$ при $w(n) \rightarrow +\infty$.

Определение 22. Пусть $G = (V, E)$ — граф и $P = x_0 \dots x_h$ — самый длинный простой путь в G . Пусть есть ребро (x_h, x_i) (не в путь P оно вести не может). Простой трансформацией пути назовём $P' = x_0 \dots x_i x_h x_{h-1} \dots x_{i+1}$.

Композицию нескольких простых трансформаций будем называть просто *трансформацией*.

Пусть $U(P)$ — подмножество конечных вершин всех возможных трансформаций пути P , а $N(P) = \{x_i : 0 \leq i \leq h-1, \{x_{i-1}, x_{i+1}\} \cap U(P) \neq \emptyset\}$ — их соседи по пути. $R(P) = V(P) \setminus (U(P) \cup N(P))$ — остальные вершины.

Лемма 14 (Поша). *Между $R(P)$ и $U(P)$ нет рёбер.*

Доказательство. Пусть $x \in U(P), (x, y) \in E(G)$. Тогда, во-первых, $y \in V(P)$ в силу максимальной P , так как существует трансформация P_x с конечной вершиной x . Если $y = x_h$, то $y \in U(P)$. Иначе пусть z — правый сосед в P_x . Существует трансформация с последней вершиной z , значит $z \in U(P)$.

Если $(y, z) \in E(P)$, то $y \in N(P)$. Иначе, $(y, z) \notin E(P)$, пусть соседи y есть $w, w' \neq z$. Тогда при переходе от P к P_x одно из рёбер $(w, y), (y, w')$ должно было быть удалено и в этот момент либо y , либо кто-то из w, w' стал последней вершиной, то есть $y \in U(P) \cup N(P)$. \square

Мы знаем, что p уже достаточно велико, чтобы граф был связным. Если бы у нас был длинный цикл, то мы бы могли продолжить его на 1 вершину, так как в силу связности на нем что-то «растёт». То есть единственное, что нам может помешать — наличие достаточно длинного пути при отсутствии длинного цикла.

Лемма 15. *Пусть $h \geq 2, u \geq 1$, граф G имеет макс. длину пути h , но не имеет циклов длины $h+1$. Пусть для любого $U \subset V(G), |U| < u$ выполнено $|U \cup N(U)| \geq 3|U|$, тогда существует набор из u различных вершин y_1, \dots, y_u и u (не обязательно различных) подмножеств Y_1, \dots, Y_u с условием $|Y_j| \geq u$, такие что между y_j и Y_j нет рёбер, а добавлением любого ребра между ними дает цикл длины $h+1$.*

Таким образом, имеется по крайней мере $\geq \frac{u(u+1)}{2}$ нерёбер в G добавление которых дает цикл длины $h+1$.

Доказательство. Пусть P — самый длинный путь, $R(P), N(P), U(P)$ — множества из леммы Поша. По лемме $U(P) \cup \Gamma(U(P)) \subset U(P) \cup N(P)$. Но $N(P) \setminus U(P) \subset \{x_{h-1}\} \cup \{x_{i-1}, x_{i+1} : i \leq h-2\} \Rightarrow |U(P) \cup \Gamma(U(P))| \leq |U(P)| + 2(|U(P)| - 1) + 1 = 3|U(P)| - 1 < 3|U(P)|$. Отсюда, по условию, $|U(P)| \geq u$.

Пусть $\{y_1, \dots, y_u\} \subset U(P)$. Для каждого y_i можем рассмотреть путь из y_i в x_0 (в силу наличия трансформации). Для него верны те же самые рассуждения, то есть можно выделить множество Y_i размера хотя бы u , такое, что любое ребро между y_i и Y_i дает цикл длины $h+1$. Ясно, что худший случай, если все Y_j совпадут с $\{y_1, \dots, y_u\}$, то есть существует хотя бы $\frac{u(u+1)}{2}$ подходящих нерёбер. \square

Лемма 16. *Пусть $\frac{\ln n}{n} \leq p \leq 2\frac{\ln n}{n}, 0 < \delta < \frac{1}{\gamma} < \frac{1}{2}$ — фиксированные константы. Положим $u_0 = \lfloor (\ln n)^\gamma \rfloor, u_1 = \lfloor \delta n \rfloor$. Тогда с вероятностью,*

стремящейся к 1 любое подмножество $U_n \subset V(G(n, p))$ с условием $u_0 \leq |U_n| \leq u_1$ удовлетворяет $|U_n \cup \Gamma(U_n)| \geq \gamma |U_n|$.

Доказательство. Пусть $X_n(u, w)$ — число пар множеств (U, W) , $|U| = u$, $|W| = w$, $\Gamma(U) \setminus U = W$. Тогда $EX_n(u, w) = C_n^u C_{n-u}^w (1-p)^{u(n-u-w)} (1-(1-p)^u)^w \leq \frac{n^{u+w}}{w!} \left(\frac{e}{u}\right)^u n^{-u(1-\frac{u+w}{n})} (up)^w$.

$$\begin{aligned} \text{Значит } P(G(n, p) \text{ не обладает искомым свойством}) &\leq \sum_{u=u_0}^{u_1} \sum_{w=1}^{(\gamma-1)u} EX_n(u, w) EX_n(u, w) \leq \\ &\sum_{u=u_0}^{u_1} \sum_{w=1}^{(\gamma-1)u} \frac{n^{u+w}}{w!} \left(\frac{e}{u}\right)^u n^{-u(1-\frac{u+w}{n})} (up)^w \leq [(np)^w \leq (2 \ln n)^w \leq (2 \ln n)^{(\gamma-1)u}] \leq \\ &\sum_{u=u_0}^{u_1} (2 \ln n)^{(\gamma-1)u} \left(\frac{e}{u}\right)^u n^{\frac{\gamma u^2}{n}} \sum_{w=0}^{(\gamma-1)u} \frac{u^w}{w!} \leq \left[\sum_{w=0}^{(\gamma-1)u} \frac{u^w}{w!} \leq e^u \right] \leq \sum_{u=u_0}^{u_1} ((2 \ln n)^{\gamma-1} e^2 \frac{1}{u} n^{\frac{\gamma u}{n}})^u \rightarrow \\ &0, \text{ так как } (2 \ln n)^{\gamma-1} e^2 \frac{1}{u} n^{\frac{\gamma u}{n}} \rightarrow 0 \text{ равномерно.} \end{aligned}$$

Покажем это, возьмем $\varepsilon > 0$, $\gamma\delta + \varepsilon < 1$. Тогда для $u \leq n^{\gamma\delta+\varepsilon}$ выполнено $u^{\frac{\gamma u}{n}} = 1 + o(1)$, $\frac{(\ln n)^{\gamma-1}}{n} \leq \frac{1}{\ln n} \rightarrow 0$.

Если же $u > n^{\gamma\delta+\varepsilon}$, то $n^{\frac{\gamma u}{n}} u^{-1} \leq n^{\gamma\delta} n^{-\gamma\delta-\varepsilon} = n^{-\varepsilon} \rightarrow 0$ и $(\ln n)^{\gamma-1}$ мал по отношению к n^ε . \square

Лемма 17. Пусть $w(n) \rightarrow \infty$, $p = \frac{\ln n + \ln \ln n + w(n)}{n}$, тогда а.н.н. для любого $U_n \subset V(G(n, p))$ выполняется $|U_n \cup \Gamma(U_n)| \geq 3|U_n|$ при $|U_n| \leq \frac{n}{4}$.

Доказательство. Можно считать, что $p \leq \frac{2 \ln n}{n}$. Применим предыдущую лемму с $\gamma = 3$, $\delta = \frac{1}{4}$. Тогда все доказано для $|U_n| \geq (\ln n)^3 = u_0$.

При выбранном p $P(\delta(G(n, p)) \geq 2) \rightarrow 1$. Если $|U_n| = 1$, то для него все доказано. Легко проверить, что с большой вероятностью вершины степени 2 не соединены друг с другом. Пусть U_n — самое маленькое «плохое» множество: $|U_n \cup \Gamma(U_n)| < 3|U_n|$. Считаем, что $2 \leq |U_n| \leq u_0$, $T = U_n \cup \Gamma(U_n)$, $|T| = t$, $4 \leq t \leq 3u_0$. Тогда

- подграф на T связан, иначе U_n не минимально
- внутри T есть $\frac{t}{3}$ вершин, имеющих соседей только внутри T

При фиксированном t вероятность найти такое T не больше

$$\begin{aligned} \sum_{l=-1}^{C_t^2-t} C_n^t C(t, t+l) p^{t+l} C_t^{\frac{t}{3}} (1-p)^{\frac{t}{3}(n-t)} &= o \left(\sum_{l=-1}^{C_t^2-t} \left(\frac{en}{t}\right)^t t^{t+\frac{3l-1}{2}} p^{t+l} 2^t \exp\left(-\frac{t}{3}np\right) \right) = \\ &= o \left(e^t (2 \ln n)^t 2^t \exp\left(-\frac{t}{3}np\right) \sum_{l=-1}^{C_t^2-t} (t^{\frac{3l-1}{2}} p^l) \right) \leq o \left((4e \ln n)^t n^{1-\frac{t}{3}} \right) \end{aligned}$$

Суммируя по t от 4 до $3u_0$ получаем стремление к 0. \square

Теорема 34 (о гамильтоновости). $\lim_{n \rightarrow \infty} P(G(n, p) \text{ гамильтонов}) = 0$ при $np - \ln n - \ln \ln n \rightarrow -\infty$ и 1 при $np - \ln n - \ln \ln n \rightarrow +\infty$.

Доказательство. Пусть $k = \frac{4n}{\ln n}$, $p_i = \frac{64 \ln}{n^2}$, $p_0 = p - kp_1k = p - \frac{64 \ln n}{n^2}k$.

Рассмотрим модель случайного мультиграфа $\hat{G}_j = G_j(n, p_0, \dots, p_j)$, в котором две вершины с вероятностью p_i соединены ребром цвета i . При отождествлении ребер получим граф $G(n, p')$, где $p' \leq p_0 + kp = p$.

Пусть \hat{G}_0 — начальный граф. Введем свойство Q :

- G связан
- $\forall U \subset V(G), |U| \leq \frac{n}{4}$ выполнено $|U \cup \Gamma(U)| \geq 3|U|$

В силу предыдущих лемм граф \hat{G}_0 удовлетворяет Q а.п.н., значит все \hat{G}_j тоже. По теореме о длинном пути $l(\hat{G}_0) \geq n \left(1 - \frac{4 \ln 2}{\ln n - \ln \ln n}\right)$, так как $p_0 \geq \frac{\ln n + \ln \ln n + w(n) - O(1)}{n}$, то есть $P(l(\hat{G}_0) > n - k, \hat{G}_0 \models Q) \rightarrow 1$.

Пусть \hat{G}_j удовлетворяет Q . Если там нет цикла длины $l(\hat{G}_j) + 1$, то по лемме в нём есть хотя бы $\frac{n^2}{32}$ нерёбер, добавление которых даёт такой цикл. Если же такой цикл есть, то в силу связности $l(\hat{G}_j) > n - k + j + 1 \Rightarrow l(\hat{G}_{j+1}) > n - k + j + 1$.

Тогда $P(l(\hat{G}_{j+1}) = l(\hat{G}_j) \mid \hat{G}_j \models Q)$, нет цикла длины $l(\hat{G}_j) + 1 \leq (1 - p_j)^{\frac{n^2}{32}} \leq \exp(-p_j \frac{n^2}{32}) = \frac{1}{n^2}$.

Тогда $P(\text{нет цикла длины } n \text{ в } \hat{G}_n) \leq n \frac{1}{n^2} + P(\hat{G}_0 \not\models Q) \rightarrow 0$. \square

24 Смежные результаты

Если рассмотреть графовый случайный процесс \tilde{G} и два момента в нём $\tau_1 = \min\{m : \tilde{G}(n, m) \text{ гамильтонов}\}$, $\tau_2 = \min\{m : \delta(\tilde{G}) \geq 2\}$. Тогда выполняется следующая теорема:

Теорема 35. В графовом случайной процессе а.п.н $\tau_1 = \tau_2$.

Можно поставить вопрос о том, сколько непересекающихся гамильтоновых циклов есть в графе. Их количество конечно не превосходит $\frac{\delta(G)}{2}$.

Теорема 36. Пусть $\frac{(\ln n)^{50}}{n} \leq p \leq 1 - \frac{(\ln n)^9}{n^{\frac{1}{4}}}$. Тогда с большой вероятностью в $G(n, p)$ можно выделить $\left\lfloor \frac{\delta(G(n, p))}{2} \right\rfloor$ непересекающихся гамильтоновых циклов.

Еще одна смежная задача: сколько гамильтоновых циклов нужно, чтобы покрыть все рёбра?

Теорема 37. Пусть $\frac{(\ln n)^{17}}{n} \leq p \leq 1 - n^{-\frac{1}{8}}$. Тогда с большой вероятностью рёбра $G(n, p)$ можно покрыть $\left\lceil \frac{\Delta(G(n, p))}{2} \right\rceil$ гамильтоновыми циклами.

25 Неравенство FKG

$$f(x_1, \dots, x_n) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

Определение 23. Функция f называется возрастающей, если не убывает по каждой переменной. Аналогично определяется убывающая функция.

Теорема 38 (FKG-неравенство). Пусть X_1, \dots, X_n — независимые с.в., $f(x_1, \dots, x_n), g(x_1, \dots, x_n)$ — возрастающие (убывающие) функции. Тогда

$$\text{cov}(f(X_1, \dots, X_n), g(X_1, \dots, X_n)) \geq 0.$$

Доказательство. Индукция по n . Пусть $n = 1$, тогда $(f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \geq 0$. Пусть Y независима с X_1 с.в. с тем же распределением, $Y \stackrel{d}{=} X_1$. Тогда

$$(f(X_1) - f(Y))(g(X_1) - g(Y)) \geq 0.$$

Берем мат. ожидание:

$$\begin{aligned} E(f(X_1) - f(Y))(g(X_1) - g(Y)) &= \\ &= 2Ef(X_1)g(X_1) - 2Ef(X_1) \cdot Eg(X_1) = 2\text{cov}(f(X_1), g(X_1)) \geq 0. \end{aligned}$$

Докажем теперь шаг. Рассмотрим $f'(x_1, \dots, x_{n-1}) = Ef(X_1, \dots, X_n) \mid X_1 = x_1, \dots, X_{n-1} = x_{n-1} = Ef(x_1, \dots, x_{n-1}, X_n), g'(x_1, \dots, x_{n-1}) = Eg(x_1, \dots, x_{n-1}, X_n)$.

Это тоже возрастающие функции от $n - 1$ переменной. По предположению индукции $\text{cov}(f'(x_1, \dots, x_{n-1}), g'(x_1, \dots, x_{n-1})) \geq 0$. Аналогично, $\tilde{f}_{x_1, \dots, x_{n-1}}(x_n) = f(x_1, \dots, x_n), \tilde{g}_{x_1, \dots, x_{n-1}}(x_n) = g(x_1, \dots, x_n)$ — возрастающие функции 1 переменной, то есть $\text{cov}(\tilde{f}, \tilde{g}) \geq 0$.

В итоге

$$\begin{aligned} Ef(X_1, \dots, X_n)g(X_1, \dots, X_n) &= E(E(f(X_1, \dots, X_n)g(X_1, \dots, X_n) \mid X_1, \dots, X_n)) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} E(f(x_1, \dots, x_{n-1}, X_n)g(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n))P_{X_1}(dx_1) \dots P_{X_n}(dx_n) \geq \\ &\geq \int_{\mathbb{R}^n} E\tilde{f}_{x_1, \dots, x_{n-1}}(x_n)\tilde{g}_{x_1, \dots, x_{n-1}}(x_n)P_{X_1}(dx_1) \dots P_{X_n}(dx_n) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} Ef'(x_1, \dots, x_{n-1})g'(x_1, \dots, x_{n-1}) = Ef'(X_1, \dots, X_{n-1})g'(X_1, \dots, X_{n-1}) \geq \\ &\geq Ef'(X_1, \dots, X_{n-1})g'(X_1, \dots, X_{n-1}) = Ef(X_1, \dots, X_n)g(X_1, \dots, X_n) \end{aligned}$$

□

26 Неравенство Янсона

Пусть Γ — конечное множество мощности N . $\Gamma(p_1, \dots, p_N)$ — биномиальная модель случайного подмножества. Введем для $A \subset \Gamma$ величину $I_A = I(A \subset \Gamma(p_1, \dots, p_N))$.

Теорема 39 (неравенство Янсона). Пусть S — система подмножеств Γ , $X = \sum_{A \in S} I_A$, $\lambda = EX$, $\bar{\Delta} = \sum_{A, B \in S, A \cap B \neq \emptyset} EI_A I_B$. Тогда $\forall 0 \leq t \leq EX$ выполнено

$$P(X \leq EX - t) \leq \exp\left(-\frac{t^2}{2\bar{\Delta}}\right).$$

Доказательство. Рассмотрим $\psi(s) = Ee^{-sX}$, $s \geq 0$. Тогда

$$-\psi'(s) = EXe^{-sX} = \sum_{A \in S} E(I_A e^{-sX}).$$

$$\text{Для } A \in S \text{ введем } Y_A = \sum_{B \in S, A \cap B \neq \emptyset} I_B, Z_A = \sum_{B \in S, A \cap B = \emptyset} I_B.$$

Заметим, что Y_A, Z_A — возрастающие функции от $\{\xi_i = I(i \in \Gamma(p_1, \dots, p_N)) : i \notin A\}$. Тогда

$$\begin{aligned} E(I_A e^{-sX}) &= p(A)E(e^{-sX} \mid I_A = 1) = p(A)E(e^{-sY_A} e^{-sZ_A} \mid I_A = 1) \geq \\ &\geq [\text{FKG}] \geq p(A)E(e^{-sY_A} \mid I_A = 1)E(e^{-sZ_A} \mid I_A = 1) = [Z_A \perp I_A] = \\ &= p(A)E(e^{-sY_A} \mid I_A = 1)Ee^{-sZ_A} \geq p(A)E(e^{-sY_A} \mid I_A = 1)\psi(s) \\ &\Rightarrow (-\ln \psi(s))' \geq \sum_{A \in S} p(A)E(e^{sY_A} \mid I_A = 1) \geq [\text{неравенство Йенсена}] \geq \\ &\geq \sum_{A \in S} p(A)e^{-E(sY_A \mid I_A = 1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\ln \psi(s) &= \int_0^s (-\ln \psi(u))' du \geq \int_0^s (\lambda e^{-\frac{u}{\lambda} \bar{\Delta}}) du = \frac{\lambda^2}{\bar{\Delta}} (1 - e^{-\frac{s \bar{\Delta}}{\lambda}}) \geq \\ &\geq [1 - e^{-x} \geq x - \frac{x^2}{2}] \geq s\lambda - \frac{s^2 \bar{\Delta}}{2} \end{aligned}$$

В итоге, $P(X \leq \lambda - t) = P(e^{-sX} \geq e^{-s(\lambda - t)}) \leq \frac{Ee^{-sX}}{e^{-s(\lambda - t)}} = e^{\ln \psi(s) + s\lambda - st} \leq e^{-s\lambda + \frac{s^2 \bar{\Delta}}{2} + s\lambda - st}$

Минимум при $s = \frac{t}{\bar{\Delta}}$, значит $P(X \leq EX - t) \leq e^{-\frac{t^2}{2\bar{\Delta}}}$. \square

Следствие. В условиях неравенства Янсона $P(X = 0) \leq e^{-\frac{\lambda^2}{2\bar{\Delta}}}$.

27 Неравенство Азумы-Хёффдинга

Определение 24. $(X_n, n = 0, \dots)$ — мартингал относительно фильтрации $(F_n, n = 0, \dots)$, если

- X_n измерим относительно F_n

- $E|X_n| < +\infty$
- $\forall n > k E(X_n | F_k) = X_k$

Упражнение 2. Последнее условие эквивалентно $E(X_n | F_{n-1}) = X_{n-1}$.

Если в последнем условии неравенство вместо равенства, то это субмартингал или супермартингал.

Теорема 40 (неравенство Азумы-Хёффдинга). Пусть $(X_k, k = 0, \dots, n)$ — мартингал относительно F_k , причём $X_0 = EX_n$ и для некоторых констант c_1, \dots, c_n выполнено $|X_k - X_{k-1}| \leq c_k \ \forall k = 1, \dots, n$.

Тогда $\forall t \geq 0$ выполнено

$$P(X_n \geq EX_n + t), P(X_n \leq EX_n - t) \leq e^{-\frac{t^2}{2 \sum_{k=1}^n c_k^2}}$$

Доказательство. Обозначим $Y_k = X_k - X_{k-1}, k = 1, \dots, n$, тогда $X_n - X_0 = \sum_{k=1}^n Y_k$. Обозначим $S_j = \sum_{k=1}^j Y_k$, тогда $\forall u > 0$ выполнено

$$\begin{aligned} P(X_n \geq EX_n + t) &= P(S_n \geq t) = P(e^{uS_n} \geq e^{ut}) \leq [\text{Марков}] \leq e^{-ut} Ee^{uS_n} = \\ &= e^{-ut} E(E(e^{uS_n} | F_{n-1})) = e^{-ut} E(e^{uS_{n-1}} E(e^{uY_n} | F_{n-1})). \end{aligned}$$

Далее, $|Y_n| \leq c_n$ и $E(Y_n | F_{n-1}) = 0$. Тогда в силу выпуклости функции e^{ux} :

$$e^{uY_n} \leq \frac{c_n + Y_n}{2c_n} e^{uc_n} + \frac{c_n - Y_n}{2c_n} e^{-uc_n}.$$

Берем УМО относительно F_{n-1} :

$$E(e^{uY_n} | F_{n-1}) \leq \frac{1}{2}(e^{uc_n} + e^{-uc_n}) = \text{ch}(uc_n) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(uc_n)^{2m}}{(2m)!} \leq e^{\frac{(uc_n)^2}{2}}$$

Отсюда $P(X_n \geq EX_n + t) \leq e^{-ut} e^{\frac{(uc_n)^2}{2}} Ee^{uS_{n-1}} \leq [\text{рекурсия}] \leq e^{-ut} e^{\frac{u^2}{2} \sum_{k=1}^n c_k^2}$.
Минимум достигается при $u = \frac{t}{\sum_{k=1}^n c_k^2}$, что нам и нужно. \square

Пусть X — случайная величина, а (F_0, \dots, F_n) — фильтрация, такая что F_0 — тривиальная и X измерим относительно F_n . Тогда $X_k = E(X | F_k)$ — мартингал, почти подходящий под неравенство Азумы-Хёффдинга.

Следствие. Пусть Z_1, \dots, Z_n — независимые случайные вектора размерности Z_i равна k_i . Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ такова, что $\forall i = 1, \dots, n \forall x_i, y_i \in \mathbb{R}^{k_i}$ выполнено

$$|f(z_1, \dots, x_i, \dots, z_n) - f(z_1, \dots, y_i, \dots, z_n)| \leq c_i.$$

Обозначим $X = f(Z_1, \dots, Z_n)$, тогда $\forall t \geq 0$ выполнено:

$$P(X \geq EX + t), P(X \leq EX - t) \leq e^{-\frac{t^2}{2 \sum_{k=1}^n c_k^2}}$$

Доказательство. Пусть $F_k = \sigma(Z_1, \dots, Z_k)$. Тогда F_0, \dots, F_n — фильтрация, $X_k = E(X \mid F_k)$ — мартингал, притом $X_0 = EX$, $X_n = X$. Тогда для неравенства Азумы-Хёфдинга необходимо проверить, что $\forall k |X_k - X_{k-1}| \leq c_k$.

Но для $\forall z_1, \dots, z_k$ выполнено

$$\begin{aligned} |E(X \mid Z_1 = z, \dots, Z_{k-1} = z_{k-1}) - E(X \mid Z_1 = z_1, \dots, Z_k = z_k)| &= [\text{нез}] = \\ &= |Ef(z_1, \dots, z_{k-1}, Z_k, \dots, Z_n) - Ef(z_1, \dots, z_k, Z_{k+1}, \dots, Z_n)| \leq c_k \end{aligned}$$

□

28 Мартингалы реберного и вершинного типа

Z_1, \dots, Z_N — индикаторы появления ребер в $G(n, p)$, $N = C_n^2$. $Z_j = I(E_j \in G(n, p))$.

Таким образом, нас интересуют характеристики, которые слабо меняются при добавлении и удалении ребра.

- число ребер
- макс. и мин. степень
- число компонент связности

Нарямую применять его тяжело из-за того, что N достаточно большое. Можно перейти к равномерной модели (если p какое-то небольшое и среднее число ребер, например, линейное). Другой путь: мартингалы вершинного типа.

v_1, \dots, v_n — вершины K_n , $Z_j = \{I\{(v_i, v_j) \in E(G(n, p))\} : i < j\}$ — случайный вектор из $(j-1)$ -го индикатора. Такой процесс неформально «проявляет» вершины по одной.

Таким образом, нас интересуют характеристики, которые слабо меняются при добавлении и удалении вершины:

- хроматическое число
- число независимости, кликовое число

Упражнение 3. $\forall \delta > 0$ выполнено

$$\frac{\alpha(G(n, p)) - E\alpha(G(n, p))}{n^{\frac{1}{2} + \delta}} \xrightarrow{P} 0.$$