Лекция 9. Топологическая динамика

1 Топологические динамические системы и их свойства

Рассмотрим поведение точки, траектория которой задаётся дифференциальным уравнением $\dot{x} = v(x)$. Простой пример локального исследования такой системы из дифференциальных уравнений —фазовые портреты дифференциальных уравнений на плоскости. Также можно изучать более глобальные параметры, например, «предельные циклы».

Вспомним, что динамическая система в этом случае это (X, τ, T^t, G), где τ — топология, а T^t — поток непрерывных преобразований.

Общие конструкции (считаем, что время — $\mathbb{Z}$):

- ω-предельные точки $\omega_T(X) = \{y : \exists x \in X, k_j \to \infty : y = T^{k_j} x\}$. Обозначим также $X' = \omega_T(X)$.
- α-предельные точки $\alpha_T(X) = \{y : \exists x \in X, k_j \to -\infty : y = T^{k_j} x\}$.
- T называется *транзитивным*, если $\exists x_0 : \omega_T(\{x\}) = X$
- T называется *минимальным*, если $\forall x_0 : \omega_T(\{x\}) = X$

2 Символические системы

Определение 1. Пусть $\mathbb{A}$ — конечный алфавит. $\Omega = \{(\ldots x_0 x_1 x_2 \ldots) \mid x_t \in \mathbb{A}\}, S : (x_i) \mapsto (x_{i+1})$. Тогда (Ω, S) — *топологическая система Бернулли.*

Топология слабая: база $W_u = \{x : u \preceq x\}$. Также можно задать метрикой $d(x, y) = \frac{1}{2}|x_0 - y_0| + \sum\limits_{i \neq 0} \frac{|x_i - y_i|}{2^{|i|+2}}$.

Упражнение 1. Изучить все описанные свойства для бернуллиевской системы.

Упражнение 2. $(*)$ Изучить все описанные свойства для динамической системы из лекции 7 $(1 \to 1, 0 \to 0010)$.

Упражнение 3. Пусть $\overline{Y}$ = замыкание $\{S^k y : y \in Y\}$. Показать, что $\overline{Y}$ — компакт и найти $S(Y)$ для следующих Y:

- $Y = \{(\ldots 0101010 \ldots)\}$.
- $Y = \{(\ldots 0001000 \ldots)\}$.
- $Y = \{(0 \ldots 010 \ldots 010 \ldots)\}$ (единицы на местах i и j).

Упражнение 4. Привести пример $X \subset \Omega$, которая была бы транзитивна, но не минимальна.

Упражнение 5. $(*)$ Привести пример системы $X \subset \Omega$, такой что $X \neq X' \neq X''$.

Рассмотрим динамическую систему «подкова Смейла»: $\Omega = [0;1] \times [0;1]$, $T(x,y) = (\frac{x}{3} + \frac{2y}{3}, 3y)$. Множество $K \times K$ получается инвариантным, и на нём возникает интересная динамика, на самом деле на этом подмножестве система бернуллиевская.

Определение 2. *Топологическая марковская цепь* это слова $\ldots x_0 x_1 x_2 \ldots$ над $\mathbb{A}$, притом слово $\alpha\beta$ разрешено, если в некотором заданном графе на всех словах $\mathbb{A}^*$ есть стрелка $\alpha \to \beta$.

Для обощения на большую размерность стоит упомянуть, что лучше использовать не «разрешённые» переходы, а наоборот, «запрещённые».

Пример двумерной марковской цепи: $\mathbb{Z}^2$ и запрещены конфигурации, где в клетках $(i,j), (i+1,j), (i+1,j+1)$ сумма равна 1 по модулю 2 (алфавит бинарный). Такая цепь, наример, является контрпримером к проблеме Рохлина о кратном перемешивании, так как является двукратно перемешивающей, но не трехкратно.

Следующий пример принадлежит Аносову: дело происходит на $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.

$$A : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Интересные свойства:

- $A\mu = \mu$.
- A — автоморфимзм, диффеоморфизм.
- $A \cong$ марковскому процессу.
- $\exists A^{-1}$.