Содержание

1 Тривиум

Определение 1. $H = (V, E), |V| < \infty, E \subset 2^V$ — *гиперграф.* V — *вершины*, E — *рёбра.*

Если $\forall e \in E \to |e| = k$, то гиперграф k-*однородный* ($k = 2$ — обычный граф).

Определение 2. *Число рёбер* гиперграфа $|E|$ или $|E(H)| = e(H)$.

Степень вершины $v \in V$ — $\deg v = \#\{e \in E \mid v \in e\}$.

$\sum\limits_{v \in V} \deg v = \sum\limits_{e \in E} |e| = k|E|$ (в случае k-однородности).

$\Delta(H) = \max\limits_{v \in V} \deg v$.

$\delta(H) = \min\limits_{v \in V} \deg v$.

$t(H) = \frac{1}{|V|} \sum\limits_{v \in V} \deg v$.

Определение 3. *Степенью ребра* в $H = (V, E)$ называется $\deg e = \#\{f \in E \mid f \neq e, |f \cap e| \neq \varnothing\}$.

$D(H) = \max\limits_{e \in E} \deg e$.

Если H k-однороден, то $\Delta(H) - 1 \leqslant D(H) \leqslant k(\Delta(H) - 1)$.

Определение 4. $W \subset V$ в $H = (V, E)$ называется *независимым*, если $\forall e \in E \to |e \cap W| < |e|$.

Число независимости $\alpha(H)$ — максимальный размер независимого множества в H.

Определение 5. Раскраска множества вершин $H = (V, E)$ называется *правильной*, если любое ребро не является одноцветным. Равносильно: все цветовые множества независимы.

Хроматическое число $\chi(H)$ — минимальное число цветов в правильной раскраске гиперграфа.

Очевидно $\frac{|V|}{\alpha(H)} \leqslant \chi(H) \leqslant \Delta(H) + 1$.

2 Теорема Турана и её обобщения

K_n — полный граф на n вершинах.

$K_{n_1,\ldots,n_r}$ — полный r-дольный граф с долями размера $n_1, \ldots, n_r$.

K_{m*r} — полный r-дольный граф с размерами долей $= m$.

Теорема 1 (Туран, 1941)**.** *Пусть $n_1, \ldots, n_r$ числа, такие что $n_1 + \ldots + n_r = n, n_i = \left\lceil \frac{n}{r} \right\rceil$ или $n_i = \left\lfloor \frac{n}{r} \right\rfloor$. Пусть граф G на n вершинах не содержит подграфа, изоморфного K_{r+1}. Тогда*

$$|E(G)| \leqslant |E(K_{n_1,\ldots,n_r})| \leqslant \left\lfloor \frac{n^2}{2} \left(1 - \frac{1}{r}\right) \right\rfloor$$

.

Доказательство. Пусть $G = (V, E)$ — граф с максимальным числом вершин, не содержащий K_{r+1}. Покажем, что в G не существует тройки вершин u, v, w такой, что $(u, v) \in E, (u, w), (v, w) \notin E$. Пусть такая тройка есть, тогда

- Пусть $\deg w < \deg u$ (или $\deg w < \deg v$). Удалим w из G и заменим её на копию u — вершину u'. Получится граф с большим числом рёбер, при этом K_{r+1} он не содержит (иначе его содержал бы и G).

- Пусть $\deg w \geqslant \deg u, \deg w \geqslant \deg v$. Тогда удалим u, v из графа, добавим вместо них две копии вершины w. По аналогичному соображению число рёбер увеличилось, а K_{r+1} не появилось.

Вывод: отношение $u \sim v \Leftrightarrow (u, v) \notin E$ является отношением эквивалентности. Значит наш граф G является полным многодольным графом, притом ясно, что долей не больше r (будем считать, что ровно r, просто некоторые доли пусты). Покажем, что доли почти равны.

В самом деле, если $|A| > |B|+1$, то при перекладывании одной вершины из A в B теряется $|B|$ рёбер и проводится $|A| - 1$ рёбер, стало быть число рёбер увеличивается. Значит размеры всех долей отличаются не более, чем на 1, что доказывает теорему. □

Граф $K_{n_1,\dots,n_r}$ из теоремы Турана принято называть графом Турана.

Утверждение 1. Следствие: $\alpha(G) \geqslant \frac{n}{t(G)+1}$.

Доказательство. Пусть $\alpha = \alpha(G)$, тогда $\overline{G}$ не содержит $K_{\alpha+1}$. По теореме Турана $|E(\overline{G})| \leqslant \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \frac{n^2}{2} \Rightarrow |E(G)| \geqslant C_n^2 - \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \frac{n^2}{2}$.

Итак, $\frac{n^2}{2\alpha} \leqslant |E(G)| + \frac{n^2}{2} - C_n^2 = \frac{t(G)n}{2} + \frac{n}{2}$, что доказывает следствие.

Получается, что оценка точна и достигается (с точностью до округления) на $\overline{T(n, r)}$. □

3 Тоерема Эрдёша-Стоуна

Пусть H — произвольный граф. *Числом Турана* $ex(n, H)$ называется

$$ex(n, H) = \max\{|E(G)| : |V(G)| = n, G \text{ не содержит подграфа, изоморфного } H\}.$$

Теорема Турана говорит, что $ex(n, K_{r+1}) = |E(K_{n_1,\dots,n_r})|$.

Теорема 2 (Эрдёш-Стоун, 1946). *Пусть $r \geqslant 2$, H — фиксированный граф с $\chi(H) = r + 1$, тогда $ex(n, H) = \left(1 - \frac{1}{r}\right) \frac{n^2}{2} + o(n^2)$.*

Лемма 1. *Пусть $r \geqslant 1, \varepsilon > 0$. Тогда для всех достаточно больших n любой граф на n вершинах с $\left(1 - \frac{1}{r} + \varepsilon\right) C_n^2$ рёбрами содержит подграф $K_{t*(r+1)}$, где $t = \Omega_{r,\varepsilon}(\log n)$.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда все вершины имеют степень не менее $\left(1-\frac{1}{r}+\varepsilon\right)n$. Будем доказывать по индукции по r.

База, $r=1$, надо найти $K_{t,t}$. Пусть $v_1,\ldots,v_t$ — случайно выбранные t вершин из V, а X число их общих соседей.

$$EX=\sum_{u\in V}\frac{C^t_{\deg u}}{C^t_n}\geqslant n\frac{C^t_{n\varepsilon}}{C^t_n}\geqslant n\frac{(n\varepsilon-t)^t}{n^t}=n\left(\frac{n\varepsilon-t}{n}\right)^t.$$

Хотим, чтобы $EX>t$, для этого можно взять $t=\Omega_\varepsilon(\log n)$ подходит для небольшой константы. При таком t существуют $v_1,\ldots,v_t$ с не менее, чем t общими соседями, это и есть $K_{t,t}$.

Докажем шаг индукции. Пусть мы нашли K_{T*r}, где $T=\Omega_{r,\varepsilon}(\log n)$ в графе G. Обозначим $U_1,\ldots,U_r$ — доли этого графа, $U=\bigcup\limits_{i=1}^{r}U_i$.

Пусть v — случайная вершина G, X_v — число её соседей внутри U.

$$EX_v=\frac{1}{n}\sum_{v\in V}\sum_{(u,v)\in E}1=\frac{1}{n}\sum_{u\in U}\deg u\geqslant rT\left(1-\frac{1}{r}+\varepsilon\right).$$

Однако $X_v\leqslant rT$, значит

$$\begin{aligned}EX_v\leqslant rT\left(1-\frac{1}{r}+\frac{\varepsilon}{2}\right)P\left(X_v<rT\left(1-\frac{1}{r}+\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)+\\ rTP\left(X_v>rT\left(1-\frac{1}{r}+\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)=\\ rT\left(1-\frac{1}{r}+\frac{\varepsilon}{2}\right)+rT\left(1-\frac{1}{r}+\frac{\varepsilon}{2}\right)P\left(X_v>rT\left(1-\frac{1}{r}+\frac{\varepsilon}{2}\right)\right).\end{aligned}$$

Отсюда $P\left(X_v>rT\left(1-\frac{1}{r}+\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)\geqslant\frac{rT\frac{\varepsilon}{2}}{rT\left(\frac{1}{r}-\frac{\varepsilon}{2}\right)}\geqslant\frac{r\varepsilon}{r}\geqslant\varepsilon$.

Вывод: не менее εn вершин имеют хотя бы $rT\left(1-\frac{1}{r}+\frac{\varepsilon}{2}\right)$ соседей в U. Обозначим его через S, $|S|\geqslant\varepsilon n$.

Далее, любая вершина из S имеет хотя бы εT соседей внутри U_i. Иначе, множество соседей в U имеет мощности сторого меньше, чем

$$\varepsilon T+(r-1)T=rT\left(1-\frac{1}{r}+\frac{\varepsilon}{r}\right)\leqslant rT\left(1-\frac{1}{r}+\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Пусть $W_1,\ldots,W_r$ случайные t-подмножества $U_1,\ldots,U_r$, а X — число их общих соседей внутри S.

$EX\geqslant|S|\left(\frac{C_{\varepsilon T}t}{C^t_T}\right)^r$, тогда положим $t=\frac{\varepsilon}{2}T$, тогда $EX\geqslant\varepsilon n\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{rt}\geqslant t$. Это выполнено при $t=c(r,\varepsilon)\log n$ для подходящей константы $c(r,\varepsilon)>0$.

Обратимся теперь к случаю, если не все степени достаточно большие. Покажем, что в G существует индуцированный подграф G' на s вершинах, все степени которого не меньше $\left(1-\frac{1}{r}+\varepsilon\right)s$, а $s\geqslant\frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon}n$. Тогда по предыдущему рассуждению G' содержит K_{t*r}, где $t=\Omega_{r,\varepsilon}(\log s)=\Omega_{r,\varepsilon}(\log s)$.

Построим G' следующим образом: $G_n=G$. Далее:

- если G_m содержит вершину степени $< \left(1 - \frac{1}{r} + \frac{\varepsilon}{2}\right) m$, то удалим её из G_m.

- продолжаем, пока процесс не остановится.

Пусть G_s — итоговый граф, тогда в нём не менее чем $|E(G_n)| - \left(1 - \frac{1}{r} + \frac{\varepsilon}{2}\right)(n + n - 1 + \ldots + s + 1) \geqslant \left(1 - \frac{1}{r} + \varepsilon\right) C_n^2 - \left(1 - \frac{1}{r} + \frac{\varepsilon}{2}\right) C_{n+1}^2 = \frac{\varepsilon}{2} C_n^2 - n$ рёбер.

С другой стороны, $|E(G_s)| \leqslant C_s^2 \Rightarrow C_s^2 \geqslant \frac{\varepsilon}{2} C_n^2 - n \Rightarrow s \geqslant \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon} n$.

Итак, лемма доказана. □

Доказательство теоремы Эрдёша-Стоуна. Так как $\chi(H) = r + 1$, то H вкладывается в $K_{(r+1)*m}$ для какого-то m. Значит $ex(n, H) \leqslant ex(n, K_{(r+1)*m})$, что по лемме не больше, чем $(1 - \frac{1}{r})\frac{n^2}{2} + o(n^2)$.

С другой стороны граф Турана $T_{n,r}$ не содержит H, значит $ex(n, H) \geqslant |E(T_{n,r})| = (1 - \frac{1}{r})\frac{n^2}{2}$. □

4 Двудольные графы

Теорема Эрдёша-Стоуна говорит про двудольные графы только, что $ex(n, H) = o(n^2)$. Займёмся выяснением более точной оценки.

Теорема 3 (Шош, Ковари, Туран, 1954). *$ex(n, K_{s,t}) \leqslant \frac{1}{2}(s-1)^{\frac{1}{t}} n^{2-\frac{1}{t}} + \frac{1}{2}(t-1)n$.*

Доказательство. Пусть $d_1 \geqslant \ldots \geqslant d_n$ — степени вершин G. Пусть, кроме того, $d_1 \geqslant \ldots \geqslant d_m \geqslant t > d_{m+1} \geqslant \ldots d_n$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} C_{d_i}^t = \sum_{i=1}^{m} C_{d_i}^t > \frac{1}{t!} m \sum_{i=1}^{m} (d_i - t + 1)^t \frac{1}{m}.$$

По неравенству Йенсена ($E\xi^t \geqslant (E\xi)^t$) получаем

$$\sum_{i=1}^{n} C_{d_i}^t = \frac{m}{t!} \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{d_i - t + 1}{m} \right)^t \geqslant \frac{1}{t!} m^{1-t} \left(\sum_{i=1}^{m} (d_i - t + 1) \right)^t \geqslant$$
$$\frac{1}{t!} n^{1-t} \left(\sum_{i=1}^{n} d_i - m(t-1) - \sum_{i=m+1}^{n} d_i \right)^t > \frac{1}{t!} n^{1-t} \left((s-1)^{\frac{1}{t}} n^{2-\frac{1}{t}} \right)^t =$$
$$\frac{s-1}{t!} n^t > (s-1) C_n^t.$$

Рассмотрим $v_1, \ldots, v_t$ — случайные t вершин и введём X — число их общих соседей, тогда $EX = \frac{\sum_{i=1}^{n} C_{d_i}^t}{C_n^t} > s - 1$. Значит существуют $v_1, \ldots, v_t$, имеющие хотя бы s общих соседей, значит $K_{s,t}$ найдено □

Это только оценка, в отличие от теоремы Эрдёша-Стоуна, получить точную асимптотику оказывается совсем непросто. Известно, что если $s > (t-1)!$, то оценка из теоремы точна асимптотически. Однако, уже для $s = t = 4$ поведение $ex(n, K_{4,4})$ неизвестно.

Утверждение 2.
- Если G — дистанционный граф в $\mathbb{R}^2$ на n вершинах, то $|E(G)| = O(n^{\frac{3}{2}})$
- Для дистанционного графа в $\mathbb{R}^3$ на n вершинах $|E(G)| = O(n^{\frac{5}{3}})$

Доказательство. Нужно заметить, что в первом случае G не содержит $K_{3,2}$, а во втором $K_{3,3}$, и применить теорему. □

5 Числа Турана для гиперграфов

Определение 6. Пусть $n > b > k$. Числом Турана $T(n, b, k)$ называется минимальное рёбер в k-однородном гиперграфе на n вершинах и числом независимости $< b$.

$$T(n, b, k) = \min\{|E(H)| : H \in \mathcal{H}_k, |V(H)| = n, \alpha(G) < b\}.$$

Гиперграфы данного множества называются (n, b, k)-системами.

Пример 1. $T(n, b, 2) = |E(\overline{T_{n,b-1}})| = C_n^2 - |E(T_{n,b-1})| \sim \frac{n^2}{2(b-1)}$.

Если C_v^k — все k-подмножества, C_v^b — все b-подмножества, (k-подмножество A представляет b-подмножество B, если $A \subset B$), то $T(n, b, k)$ — наименьшая система общих представителей.

Утверждение 3. $T(n, b, k) \geqslant \lceil \frac{n}{n-k} T(n-1, b, k) \rceil$.

Доказательство. Пусть $H = (V, E)$ — произвольная (n, b, k)-система. Возьмём одну вершину v и удалим её вместе с рёбрами, останется H_v — $(n-1, b, k)$-система, в которой хотя бы $T(n-1, b, k)$ рёбер. Тогда

$$|E(H)|(n-k) = \sum_{v \in V} |E(H_v)| \geqslant T(n-1, b, k) \cdot n,$$

откуда следует утверждение. □

Утверждение 4. $\forall b > k \geqslant 2 \to \exists \lim_{n\to\infty} \frac{T(n,b,k)}{C_n^k} = t(b, k)$.

Доказательство. $\frac{T(n,b,k)}{C_n^k} \geqslant \frac{T(n-1,b,k)}{C_{n-1}^k}$ по утверждению, значит последовательность монотонна (и ограничена единицей). □

Определение 7. Величина $t(b, k)$ называется Турановской плотностью.

Из доказательства следует, что $T(n, b, k) \leqslant t(b, k) C_n^k$.

Утверждение 5. $T(n,b,k) \leqslant T(n-1,b,k) + T(n-1,b-1,k-1)$.

Доказательство. Пусть $H_1 = (V, E_1)$ — это минимальная $(n-1,b,k)$-система, $H_2 = (V, E_2)$ — это минимальная $(n-1,b-1,k-1)$-система. Возьмём $v \notin V$ и рассмотри $H = (V \cup \{v\}, E_1 \cup E_2'), E_2' = \{e \cap \{v\} : e \in E_2\}$. Тогда H — это (n,b,k)-система, значит $|E(H)| \geqslant T(n,b,k)$, а с другой стороны $|E(H)| = T(n-1,b,k) + T(n-1,b-1,k-1)$. □

Утверждение 6. $t(b,k) \leqslant t(b-1,k-1)$.

Доказательство. $\frac{k}{n}T(n,b,k) = T(n,b,k) - \frac{n-k}{n}T(n,b,k) \leqslant T(n,b,k) - T(n-1,b,k) \leqslant T(n-1,b-1,k-1) \Rightarrow \frac{T(n,b,k)}{C_n^k} = \frac{k}{n}\frac{T(n,b,k)}{C_{n-1}^{k-1}} \leqslant \frac{T(n-1,b-1,k-1)}{C_{n-1}^{k-1}}$. Переходя к пределу, получаем требуемое. □

Утверждение 7 (из анализа)**.** Пусть $b_0, \ldots, b_{l-1}$ — циклически упорядоченные действительные числа, $b = \frac{b_0 + \ldots + b_{l-1}}{l}$. Тогда $\exists n : \forall s = 1, \ldots, l \to b_m + b_{m+1} + \ldots + b_{m+s-1} \geqslant sb$.

Доказательство. Возьмём циклический сдвиг, соответствующий минимуму префиксных сумм. □

6 Верхняя оценка на турановскую плотность

Теорема 4. $t(n,k) \leqslant \left(\frac{k-1}{b-1}\right)^{k-1}$.

Доказательство. Пусть V — некоторое множество из n вершин и возьмём l, d так, что $k = \lceil \frac{db}{l} \rceil$. Разделим V на примерно равные части $A_0, \ldots, A_{l-1}$ и построим следующий гиперграф. Каждое $B \subset V$, $|B| = k$, включается в H в качестве ребра, если числа $b_i = |B \cap A_i|$ удовлетворяют свойству: $\exists m : \forall s = 1, \ldots, d \to \sum\limits_{i=1}^{s} b_{m+i-1} \geqslant s\frac{b}{l}$.

Покажем, что это (n,b,k)-система. Пусть $C \subset V$, $|C| = b$. Введём $c_i = |C \cap A_i|$. Для чисел $c_0, \ldots, c_{l-1}$ существует сдвиг, для которого все частичные суммы не меньше $\sum\limits_{i=1}^{s} c_{m+i-1} \geqslant s\frac{b}{l}$. Тогда выберем $B \subset C$ следующим образом $B = (C \cap A_m) \sqcup (C \cap A_{m+1}) \sqcup \ldots \sqcup W$, где $W = C \cap A_{j+m}$. Заметим, что $\frac{db}{l} \leqslant k$, а это значит для всех $s = 1, \ldots, l$ неравенство на префиксные суммы b_i будет следовать либо из того, что $b_i = c_i$ до какого-то момента, либо из того, что $s \leqslant d$.

Оценим теперь число рёбер:

$$|E(H)| = \sum_{m=0}^{l-1} \sum_{a_1, \ldots, a_d} \prod_{i=1}^{d} C_{A_{m+i-1}}^{a_i}$$

Притом средняя сумма берётся по наборам $a_1, \ldots, a_d$, таким что $a_1, \ldots, a_d \in \{0, \ldots, k\} a_1 + \ldots + a_d = k, a_1 + \ldots + a_s \geqslant \frac{sb}{l} \forall s = 1, \ldots d$. Тогда

$$E(H) \leqslant l \sum_{a_1,\ldots,a_d} \left(\prod_{i=1}^{d} C_{\frac{n}{l}}^{d_i} \right) \leqslant l \left(\frac{n}{e} \right)^k \sum_{a_1,\ldots,a_d} \frac{1}{a_1! \ldots a_d!}.$$

Положим $l = b - 1, d = k - 1$. Если условия на частичные суммы нет, то сумма по всем $a_1, \ldots, a_d$ равна $\frac{d^k}{k!}$.

Если $l = b-1$, то $s\frac{b}{b-1} \in (s, s+1)$, то есть $a_1 + \ldots + a_s \geqslant s\frac{b}{b-1}$ эквивалентно $a_1 + \ldots + a_s > s$. Введем $y_i = a_i - 1, y_1 + \ldots + y_{k-1} = 1, y_i \geqslant -1, y_1 + \ldots + y_s > 0 \forall s = 1, \ldots, k$.

Тогда $\exists$ ровно один циклический сдвиг последовательности $y_1, \ldots, y_{k-1}$, такой, что все частичные суммы положительны.

Вывод: $\sum\limits_{a_1,\ldots,a_d} \frac{1}{a_1! \ldots a_d!} = \frac{1}{k-1} \frac{(k-1)^k}{k!}$, стало быть $|E(H)| \leqslant (1 + o(1))(b - 1) \left(\frac{n}{b-1} \right)^k \frac{(k-1)^k}{k!} \Rightarrow t(b, k) \leqslant \left(\frac{k-1}{b-1} \right)^{k-1}$. $\square$

7 Центральная турановская плотность

Из оценки $t(b, k) \leqslant \left(\frac{k-1}{b-1} \right)^{k-1}$ следует при $b = k + 1$, что $t(k + 1, k) \leqslant \frac{1}{e}(1 + o(1))$.

Теорема 5. $t(2k + 1, 2k) \leqslant \frac{C_{2k}^k}{2^{2k}} = O\left(\frac{1}{\sqrt{k}} \right)$.

Доказательство. Пусть $V = \{1, \ldots, n\}$, а $i_1 < \ldots < i_{2k}$ — упорядоченный набор чисел. Тогда объявляем $(i_1, \ldots, i_{2k})$ ребром, если во множестве $\{i_1 + 1, i_2 + 2, \ldots, i_{2k} + 2k\}$ ровно k чисел чётные.

Обозначим за $\mathcal{A}$ множество таких наборов и проверим, что $\mathcal{A}$ — это $(n, 2k+1, 2k)$-система. Будем делать это индукцией по k. База $k = 1$ следует из того, что среди любых трёх чисел $a_1 < a_2 < a_3$ найдутся два числа одной чётности, которые будут образовывать ребро.

Пусть для $l \leqslant k - 1$ всё доказано. Пусть $l = k, a_1 < \ldots < a_{2k+1}$. Если существует пара соседних чисел a_j, a_{j+1} одной чётности, то удалим их из набора и к оставшимся применим индукцию. По её предположению найдётся поднабор $a'_1 < \ldots < a'_{2k-2}$ такой, что при добавлении индексов среди них будет ровно $k - 1$ чётных чисел.

Теперь добавим к этому поднабору удалённые числа a_j, a_{j+1}. Получаем $a'_1 < \ldots < a'_t < a_j < a_{j+1} < a'_{t+1} < \ldots < a'_{2k-2}$. При добавлении $(1, 2, \ldots, 2k)$ получаем $a'_1 + 1 < \ldots < a'_t + t < a_j + t + 1 < a_{j+1} + t + 2 < a'_{t+1} + t + 3 < \ldots < a'_{2k-2} + 2k$, где, очевидно, будет половина чётных и половина нечётных чисел, так как $a_j + t + 1$ и $a_{j+1} + t + 2$ имеют разную чётность.

Если же чётность постоянно меняется, то достаточно удалить a_{k+1}.

Оценим теперь $|\mathcal{A}|$. Пусть $a_1 < \ldots < a_{2k}$ — ребро из $\mathcal{A}$, $x_i \equiv a_i \pmod 2, x_i \in \{0, 1\}$. Положим $b_i = \frac{a_i - x_i}{2} \in [0; \frac{n}{2}]$. Тогда набор $b_1, \ldots, b_{2k}$ может быть выбран $\leqslant C_{\frac{n}{2}}^{2k}(1+o(1))$ способами. Вектор $(x_1,\dots,x_{2k})$ выбирается C_{2k}^k способами. Значит $|\mathcal{A}| \leqslant C_{\frac{n}{2}}^{2k}(1+o(1))C_{2k}^k = C_n^{2k}2^{-2k}(1+o(1))$, откуда $t(2k+1,2k) \leqslant \lim\limits_n \frac{|\mathcal{A}|}{C_n^{2k}} \leqslant C_{2k}^k 2^{-2k} = O\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$. □

Насколько хороша эта оценка? Известны такие результаты:

- $0.409 \approx \frac{7-\sqrt{21}}{6} \leqslant t(3,4) \leqslant \frac{4}{9} \approx 0.44$. Предположение состоит в том
- Сидоренко (1982, 1987) $\frac{1}{k} \leqslant t(k+1,k) \leqslant \frac{\ln k}{2k}(1+o(1))$.
- для $b = k+a, a = const$ оценка Франкла-Рёдля (1985) $t(k+a,k) \leqslant \frac{a(a+4+o(1))\ln k}{C_k^a}$.
- Жиро (1997) $t(k+1,k) \geqslant \frac{2}{k\left(1+\sqrt{\frac{k}{k+4}}\right)}$.
- для $b \geqslant k + \frac{k}{\log_2 k}$ оценка Сидоренко $t(b,k) \leqslant \frac{(b-k+1)(1+o(1))\ln C_b^k}{C_b^k}$.

8 Нижние оценки турановской плотности

Утверждение 8. $T(n,b,k) \geqslant \frac{C_n^k}{C_b^k}$.

Доказательство. Любое k-подмножество представляет не более C_{n-k}^{b-k} подмножеств. Если есть (n,b,k) система, то все подмножества представлены, значит $|E(H)|C_{n-k}b-k \geqslant C_n^b \Rightarrow |E(H)| \geqslant \frac{C_n^k}{C_b^k}$. □

В терминах турановской плотности $t(b,k) \geqslant \frac{1}{C_b^k} \approx b^{-k}$.

Теорема 6 (Спенсер)**.** *Пусть* $n \geqslant (b-1)\frac{k}{k-1}$. *Тогда* $T(n,b,k) \geqslant \left(\frac{n}{k}\right)^k \left(\frac{k-1}{b-1}\right)^{k-1}$.

Доказательство. Пусть $H=(V,E)$ — это (n,b,k) система, то есть $\alpha(H) < b$.

Пусть X — случайное подмножество, выбранное схемой Бернулли с параметром p. $E|X| = np$. Пусть Y — это число рёбер, полностью вошедших в X, $EY = |E|p^k$. Удалим по одной вершине из каждого ребра, полностью попавшего в X, тогда останется X^* — независимое, значит $|X^*| \leqslant b-1 \Rightarrow b-1 \geqslant E|X^*| \geqslant E(|X|-Y) = np - |E|p^k \Rightarrow |E| \geqslant (np-b+1)p^{-k}$. Максимизируя это по p, получаем, что $p = \frac{(b-1)k}{n(k-1}$, а $|E| \geqslant \left(\frac{(b-1)k}{k-1} - (b-1)\right)\left(\frac{(b-1)k}{n(k-1)}\right)^{-k} = \left(\frac{n}{k}\right)^k \left(\frac{k-1}{b-1}\right)^{k-1}$. □

Утверждение 9. Если H — k-однородный гиперграф, на n вершинах, тогда $\alpha(H) \geqslant \frac{k-1}{k}\frac{n}{t(H)^{\frac{1}{k-1}}}$.

Доказательство. Пусть $\alpha(H) = b-1$, тогда H — это (n, b, k) система, тогда по теореме Спенсера

$$\frac{nt(H)}{k} = |E(H)| \geqslant T(n,b,k) \geqslant \left(\frac{n}{k}\right)^k \left(\frac{k-1}{b-1}\right)^{k-1} \Rightarrow b-1 \geqslant \frac{n}{k}(k-1)\frac{1}{t(H)^{\frac{1}{k-1}}}$$

□

Утверждение 10. $t(b,k) \approx \frac{1}{b^{k-1}}$ при $k = const, b \to \infty$.

9 Аналоги теоремы Турана для разреженных графов и гиперграфов

Теорема 7 (Айтаи, Комлош, Семереди, Ширер)**.** *Пусть* $f(t) = \frac{t \ln t - t + 1}{(t-1)^2}, f(0) = 1, f(1) = \frac{1}{2}$. *Тогда, если* G *— граф на* n *вершинах без треугольников, то* $\alpha(G) \geqslant nf(t(G))$.

Доказательство. Заметим, что для $x \geqslant 0$ $f(x)$ непрерывна, кроме того $f(x) \in (0;1)$ при $x > 0, f'(x) < 0, f''(x) \geqslant 0$. Также $f(x)$ является решением уравнения $(x+1)f(x) = 1 + (x - x^2)f'(x)$.

Индукция по числу вершин в G. Обозначим $t = t(G)$. Если $n \leqslant \frac{t}{f(t)}$, то всё доказано, так как соседи одной вершины являются независимыми.

Пусть теперь v — произвольная вершина, d_1 — её степень, d_2 — средняя степень её соседей. Покажем, что можно выбрать v так, что

$$(d_1 + 1)f(t) \leqslant 1 + (td_1 + t - 2d_1 d_2)f'(t) \qquad (*)$$

Для этого возьмём вершину случайно и проверим это неравенство в среднем. Пусть Y — сумма степеней соседей v, $Y = d_1 d_2$.

$$EY = \frac{1}{n}\sum_v \sum_{u:(u,v)\in E} \deg u = \frac{1}{n}\sum_u \deg^2 u \geqslant t^2.$$

В левой части неравенства в среднем стоит $(t+1)f(t)$, правая часть в среднем не меньше $1 + (t^2 + t - 2t^2)f'(t) = 1 + (t - t^2)f'(t) \geqslant (t+1)f(t)$ в силу свойств f. Значит неравенство в самом деле выполнено в среднем, значит существует вершина, для которой выполнено указанное требование.

Удалим v из графа вместе с её соседями. Останется граф G', с $|V(G')| = n - 1 - d_1, |E(G')| = \frac{nt}{2} - d_1 d_2$, так как G не содержит треугольников.

$t' = t(G') = \frac{2|E(G')|}{|V(G')|} = \frac{nt - 2d_1 d_2}{n - 1 - d_1}$, значит по индукции $\alpha(G') \geqslant n' f(t')$. Значит $\alpha(G) \geqslant 1 + \alpha(G') \geqslant 1 + n' f(t')$. Оценим по формуле Тейлора $f(t') \geqslant f(t) + f'(t)(t' - t)$, так как $f''(t) > 0$, значит

$$\begin{aligned}\alpha(G) \geqslant 1 + n'(f(t) + f'(t)(t'-t)) = 1 + n'f(t) + n'f(t)t' - n'tf'(t) = \\ 1 + (n-1-d_1)f(t) + f'(t)(nt - 2d_1 d_2) - (n-1-d_1)tf'(t) = \\ 1 + (n-1-d_1)f(t) + (t + td_1 - 2d_1 d_2)f'(t) \geqslant (*) \geqslant \\ (n-1-d_1)f(t) + (d_1+1)f(t) = nf(t).\end{aligned}$$

$\square$

Пусть $R(s,t)$ — число Рамсея, то есть $\min\{n : \forall G = (V,E), |V| = n \to \alpha(G) \geqslant t \vee \omega(G) \geqslant s\}$.

Утверждение 11. $R(3,t) \leqslant \frac{t^2}{\ln t}(1+o(1))$.

Доказательство. Если $G = (V,E), |V| = n$. Если $\omega(G) \geqslant 3$, то есть треугольник, иначе $\omega(G) < 3$ и $t(G) \geqslant t$, тогда $\alpha(G) \geqslant t(G) \geqslant t$. Если $\omega(G) < 3, t(G) < t$, то по теореме Ширера $\alpha(G) \geqslant nf(t) = \frac{n \ln t}{t}(1+o(1)) \geqslant t$, если $n \geqslant \frac{t^2}{\ln t}(1+o(1))$. $\square$

Результат Кима (1995), улучшенный Бошаном, Кивашем, Гриффитсом (2013): $R(3,t) \geqslant \frac{1}{4}\frac{t^2}{\ln t}(1+o(1))$.

10 Точность оценки теоремы Ширера

Лемма 2. *Пусть $d = d(n)$ — последовательность такая, что $4 \leqslant d \leqslant o(n^{\frac{1}{4}})$, тогда существует последовательность графов G_n, что $V(|G_n|) = n, g(G_n) > 3, t(G_n) \sim d, \alpha(G_n) \leqslant \frac{2n \log d}{d}(1+o(1))$.*

Доказательство. Рассмотрим случайный граф $G(n,p), p = \frac{d}{n}$.

Если $X_n = |E(G(n,p))|$, то $EX_n = C_n^2 p \sum \frac{nd}{2}, DX_n = C_n^2 p(1-p) = o(dn)$. Тогда $P(|X_n - EX_n| \geqslant n^{\frac{2}{3}}) \leqslant \frac{DX_n}{n^{\frac{4}{3}}} \to 0$. Значит асимптотически почти наверное $C_n^2 p - n^{\frac{2}{3}} \leqslant X_n \leqslant C_n^2 p + n^{\frac{2}{3}}$, значит $X_n \sim \frac{nd}{2}$.

Оценим вероятность того, что в $G(n,p)$ есть независимое множество размера $\left\lceil \frac{2n \ln d}{d} \right\rceil = b$. $P(\alpha(G(n,p)) \geqslant b) \leqslant C_n^b (1-p)^{C_b^2} \sim \frac{n^b}{b!}(1-p)^{C_b^2} \leqslant \left(\frac{ne}{b}\right)^b \exp\left(-pC_b^2\right) = \left(\frac{ne}{b} \exp\left(-p\frac{b-1}{2}\right)\right)^b \leqslant \left(\frac{\exp(1+o(1))}{2 \ln d}\right)^b \to b$, если $d \geqslant 4$.

Пусть Y — число треугольников в $G(n,p)$, $EY = C_n^3 p^3 < \frac{d^3}{6}$. $P(Y \geqslant d^3) \leqslant \frac{1}{6}$.

Значит, для достаточно больших n существует G'_n на n вершинах, такой что число его рёбер есть $\frac{nd}{2}$, $\alpha(G'_n) < \frac{2n \ln d}{d}$, а число треугольников не больше d^3. Удалим по ребру из каждого треугольника, получим граф G_n. $|E(G_n)| \geqslant |E(G'_n)| - d^3 \sim \frac{nd}{2}$. $\alpha(G_n) \leqslant \alpha(G'_n) + d^3 \sim \frac{2n \ln d}{d}$, так как $d = o(n^{\frac{1}{4}})$. $\square$

11 Оценки внедиагональных чисел Рамсея

Рассмотрим $R(s,t)$ в случае фиксированного $s \geqslant 4$ и растущего t.

Лемма 3. *Пусть G — на n вершинах со средней степенью вершины t, числом рёбер e и числом треугольников t. Пусть $p \in (0,1), np \geqslant 12$. Тогда G содержит индуцированный подграф G' такой, что $n' > \frac{np}{2}, e' < 3ep^2, h' < 3hp^3, t' < 6tp$.*

Доказательство. Нам подойдёт случайный подграф, индуцированный по схеме Бернулли.

$P\left(n' \leqslant \frac{np}{2}\right) < P\left(|n' - np| > \frac{np}{2}\right) \leqslant \frac{np(1-p)}{\frac{n^2p^2}{4}} < \frac{4}{np} \leqslant \frac{1}{3}$.

$Ee' = ep^2 \Rightarrow P(e' \geqslant 3ep^2) \leqslant \frac{1}{3}$ по неравенству Маркова.

$Eh' = hp^3 \Rightarrow P(h' \geqslant 3hp^3) \leqslant \frac{1}{3}$ по неравенству Маркова.

$t' = \frac{2e'}{n'} < \frac{12ep^2}{np} = 6tp$.

Значит с положительной вероятностью искомый граф найдётся. □

Лемма 4. *Пусть $\varepsilon \in (0,2)$, G — граф на n вершинах со средней степенью t и числом треугольников $h < nt^{2-\varepsilon}$. Тогда $\alpha(G) \geqslant c'\frac{n\ln t}{t}$, где $c'(\varepsilon) > 0$ зависит только от ε.*

Доказательство. Пусть $\gamma > 0$ — абсолютная константа такая, что для любого графа без треугольников выполнено $\alpha(H) \geqslant \gamma\frac{|V(H)|\ln t(H)}{t(H)}$. Положим $c' = \frac{\varepsilon\gamma}{168}$.

Если $t < 12^{\frac{2}{\varepsilon}}$, то все очевидно по теореме Турана. Пусть $t > 12^{\frac{2}{\varepsilon}}$. Применим к G лемму 3 с $p = t^{\frac{\varepsilon}{4}} - 1$ и рассмотрим найденный индуцированный подграф G'. В нём будет не более $3hp^3$ треугольников, то есть меньше, чем $3nt^{2-\varepsilon}t^{\frac{1}{2}\varepsilon-2}p = 3npt^{-\frac{\varepsilon}{2}} \leqslant \frac{np}{4}$.

Удалим из каждого тругольника G' по вершине, получив G'' без треугольников.

$n'' \geqslant n' - \frac{np}{4} \geqslant \frac{np}{4}$.

$e'' \leqslant e' < 3ep^2$.

$t'' = \frac{2e''}{n''} \leqslant \frac{24ep^2}{np} = 12p\frac{2e}{n} = 12t^{\frac{\varepsilon}{4}}$.

Тогда по теореме Ширера $\alpha(G) \geqslant \alpha(G'') \geqslant \gamma\frac{n''\ln t''}{t''} \geqslant \gamma\frac{np}{4}\frac{\ln 12t^{\frac{\varepsilon}{4}}}{12^{\frac{\varepsilon}{4}}} = \frac{\gamma}{48}\frac{n}{t}\ln 12t^{\frac{\varepsilon}{4}} \geqslant \frac{\gamma\varepsilon}{168}\frac{n\ln t}{t}$. □

Теорема 8. *Пусть $t \geqslant t_0(s)$, тогда $R(s,t) \leqslant c^s\frac{t^{s-1}}{(\ln t)^{s-2}}$, где $0 < c \leqslant 20000$ — абсолютная константа.*

Доказательство. Из теоремы АКС известно, что γ можно взять равной $\frac{1}{100}$. Выберем в лемме 4 $\varepsilon = \frac{1}{s-2}0.97 < \varepsilon < \frac{1}{s-2}0.99$. Индукция по s с уже доказанной базой $s = 3$. Пусть для $s' < s$ всё доказано, докажем теперь шаг.

Рассмотрим произвольный граф G на n вершинах, $n \geqslant c^s\frac{t^{s-1}}{(\ln t)^{s-2}}$. Если $\omega(G) \geqslant s$, то очевидно. Если $\omega(G) < s$ и $m = c^{s-1}\frac{t^{s-2}}{(\ln t)^{s-3}} \leqslant \Delta(G)$, то среди соседей вершины максимальной степени также найдется либо $s-1$-клика, либо t-независимое множество, то есть все выпонено. То есть считаем, что $\omega(G) < s, m > \Delta(G) \geqslant t(G)$. Обозначим через h число треугольников в G.

Если $h < nm^{2-\varepsilon}$, то по лемме 4 $\alpha(G) \geqslant c'\frac{n\ln m}{m} \geqslant 20000c'\frac{t}{\ln t}\ln m \geqslant \frac{50}{48}\varepsilon\frac{t}{\ln t}(s-2)\ln\frac{t}{\ln t} \geqslant \frac{0.97}{0.96}t\left(\frac{\ln t - \ln\ln t}{\ln t}\right) \geqslant t$ при всех достаточно больших t.

Если $h \geqslant nm^{2-\varepsilon}$, то есть вершина, которая содержится в $3m^{2-\varepsilon}$ треугольниках. Пусть G' — это граф соседей v, тогда $|E(G')| \geqslant 3m^{2-\varepsilon}$, при том, что $|V(G')| < m$. Значит в G' есть вершина w степени хотя бы $6m^{1-\varepsilon}$.

Индуцируем на соседях w подграф G''. Осталось показать, что $|V(G'')| \geqslant R(s-2,t)$. При достаточно больших t:

$$6m^{1-\varepsilon} = 6 \cdot \left(20000^{s-1}\frac{t^{s-2}}{(\ln t)^{s-3}}\right)^{1-\varepsilon} \geqslant 6 \cdot 20000^{(s-1)\frac{s-3}{s-2}}\frac{t^{(s-2)-0.99}}{(\ln t)^{(s-3)-0.98\frac{s-3}{s-2}}} >$$

$$6 \cdot 20000^{s-2}\frac{t^{s-3}}{(\ln t)^{s-4}}\frac{t^{0.01}}{(\ln t)^{1-0.99\frac{s-3}{s-2}}20000^{\frac{1}{s-2}}} > 20000^{s-2}\frac{t^{s-3}}{(\ln t)^{s-4}} \geqslant R(s-2,t).$$

□

С помощью локальной леммы можно вывести нижнюю оценку $R(s,t) \geqslant c(s)\left(\frac{t}{\ln t}\right)^{\frac{s+1}{2}}$, что сходится при $s=3$, но существенно расходится при больших s. В других результатах улучшена степень логарифма, но по степени t результатов нет.

Далее мы займёмя графами, не содержащими, например, K_4 и покажем, что $\alpha(G) \geqslant c\frac{n \ln t}{t \ln \ln t}$, что является нетривиальной оценкой по сравнению с теоремой Турана. Предположение состоит в том, что повторный логарифм можно убрать, притом это верно для любых подграфов (не только K_4).