# Теория вероятностей, 3 семестр

ИВАЩЕНКО ДМИТРИЙ


Багрепорты, комментарии, предложения и прочее приветствуются посредством vk.com/skird, а также e-mail

*Благодарность.* Спасибо Павлу Ахтямову и Алексею Журавлеву за конспекты потраченных лекций.

*Благодарность.* Спасибо Константину Гудкову, Александру Голованову, Мирону Левкову, а также всем остальным, кто приложил руку, за помощь в исправлении ошибок и опечаток.

Последние изменения: 10 января 2015 г. 20:52

## Содержание

**Лекция 1. Аксиоматика теории вероятностей**

## 1. События и вероятности. Алгебры и сигма-алгебры.

**Определение.** $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ — *множество элементарных исходов.*

**Определение.** *Событием* будем называть произвольное подмножество $A \subset \Omega$.

**Определение.** *Алгебра* — система $\mathcal{A}$ подмножеств $\Omega$, такая что

(1) $\Omega \in \mathcal{A}$

(2) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{A}$

(3) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$

**Определение.** *Сигма-алгебра* — система $\mathcal{F}$ подмножеств $\Omega$, такая что

(1) $\Omega \in \mathcal{F}$

(2) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{F}$

(3) $A_1, \ldots, A_n, \ldots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

*Замечание.* Неважно, возьмем мы в определение объединение или пересечение, так как они выражаются друг через друга с помощью закона де Моргана.

**Определение.** *Конечно аддитивной мерой* над алгеброй $\mathcal{A}$ мы будем называть функцию $P: \ \mathcal{A} \mapsto \mathbb{R}$, обладающую некоторыми свойствами:

(1) $\forall A \in \mathcal{A} \to P(A) \geq 0$

(2) $A, B$ — события, $A \cap B = \varnothing \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

**Определение.** Если конечно аддитивная мера с $P(\Omega) < \infty$, то она называется *конечно аддитивной конечной мерой.*

**Определение.** Если $P(\Omega) = 1$, то $P$ — *конечно аддитивная вероятностная мера.*

**Определение.** *Счетно аддитивной вероятностной мерой* над сигма-алгеброй $\mathcal{F}$ будем называть функцию $P: \ \mathcal{F} \mapsto [0; 1]$, такую, что:

(1) $\forall A \in \mathcal{F} \to P(A) \geq 0$

(2) $P(\Omega) = 1$

(3) $A_1, \ldots, A_n, \ldots \in \mathcal{F}, \ \forall i \neq j \in \mathbb{N} \to A_i \cap A_j = \varnothing \Longrightarrow P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

*Замечание.* В случае, если $\Omega$ конечно, то сигма-алгебра и алгебра — это одно и то же.

**Определение.** Тройку $\langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle$ будем называть *вероятностным пространством.*

**Пример.** Можно рассмотреть схему неупорядоченного выбора без повторений из $k$ элементов по $n$. $|\Omega| = C_n^k$, а если положить, что элементарные исходы равновероятны, то для каждого из них $P(\omega_i) = \frac{1}{C_n^k}$.

*Замечание.* Некоторые очевидные свойства алгебры:

(1) $\varnothing \in \mathcal{F}$

(2) $\forall A_1, \ldots, A_n, \ldots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

(3) $\forall A, B \to A \setminus B \in \mathcal{F}$

## 2. Некоторые свойства вероятности

*Замечание.* Некоторые очевидные свойства вероятности:

(1) $P(\varnothing) = 0$

(2) Если $A \subset B$, то $P(B) \geq P(A)$

(3) $P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum\limits_{i<j}^{i,j \leq n} P(A_i \cap A_j) + \ldots + (-1)^n \cdot P(A_1 \cap \ldots \cap A_n)$ — формула включения-исключения

**Теорема.** *(о непрерывности вероятностной меры) Пусть $\Omega$ — произвольное множество, $\mathcal{A}$ — алгебра на нем. Тогда следующие свойства эквивалентны:*

*(1) $P$ — вероятность на $(\Omega, \mathcal{A})$*

*(2) $P$ — конечно аддитивная вероятность на $(\Omega, \mathcal{A})$, непрерывная сверху*

$$\forall A_1 \subset A_2 \subset \ldots, \ \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A} \to \lim_{n\to\infty} P(A_n) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)$$

*(3) $P$ — конечно аддитивная вероятность на $(\Omega, \mathcal{A})$, непрерывная снизу*

$$\forall A_1 \supset A_2 \supset \ldots, \ \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A} \to \lim_{n\to\infty} P(A_n) = P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)$$

*(4) $P$ — конечно аддитивная вероятность на $(\Omega, \mathcal{A})$, непрерывная в нуле*

$$\forall A_1 \supset A_2 \supset \ldots, \ \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \varnothing \to \lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0$$

*Доказательство.*

(1) $\Rightarrow$ (2). Положим $A_0 = \varnothing$, и пусть $A_i \in \mathcal{A}$, $A_i \subset A_{i+1}$ и $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$. Тогда рассмотрим $B_i = A_i \setminus A_{i-1}$. Ясно, что $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i$, $\forall i \neq j \in \mathbb{N} \to B_i \cap B_j = \varnothing$. Тогда

$$P(\bigcup A_i) = P(\bigcup B_i) = \sum P(B_i) = \sum (P(A_i) - P(A_{i-1})) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sum (P(A_i) - P(A_{i-1})) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

(2) $\Rightarrow$ (3). Пусть $A_1 \supset A_2 \ldots \in \mathcal{A}$ и $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$. Тогда

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = \left(-P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}\right)\right) = 1 - \lim_{n\to\infty} P(\overline{A_n}) = 1 - \lim_{n\to\infty} (1 - P(A_n)) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

(3) $\Rightarrow$ (4). Очевидно, так как (4) — частный случай (3).

(4) $\Rightarrow$ (1). Пусть $A_i \in \mathcal{A}$ и $\forall i \neq j \in \mathbb{N} \to A_i \cap A_j = \varnothing$, а также $A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$. Тогда рассмотрим $B_n = A \setminus \left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right)$. Очевидно, что $B_i \supset B_{i+1}$, $B_i \in \mathcal{A}$, а также $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} B_i = \varnothing$. Тогда

$$0 = \lim_{n\to\infty} P(B_n) = \lim_{n\to\infty} P\left(A \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(P(A) - P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)\right) =$$
$$= P(A) - \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A) - \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = P(A) - \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

□

**Пример.** Модель классической вероятности — конечный набор $\Omega$ с алгеброй $\mathcal{A} = 2^{\Omega}$ и равновероятными элементарными исходами.

**Пример.** Модель геометрическая вероятности — $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с алгеброй $\mathcal{F}$ измеримых множеств и вероятностной мерой $P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$.

**Лекция 2. Условная вероятность**

## 3. Определение и свойства

**Определение.** Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство, $A, B \in \mathcal{F}$, тогда *условной вероятностью* $A$ при условии $B$ называется $P(A \mid B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$, если $P(B) \neq 0$ и 0 иначе.

*Утверждение.* Если $B \in \mathcal{F},\ P(B) > 0$, то $P(\cdot \mid B)$ — вероятностной мера на $(\Omega, \mathcal{F})$

*Доказательство.* Проверим свойства вероятностной меры:
$P(\Omega \mid B) = \frac{P(\Omega\cap B)}{P(B)} = 1$. Теперь пусть $A_1, \ldots \in \mathcal{F},\ \forall i \neq j \to A_i \neq A_j$. Тогда

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \mid B\right) = \frac{P\left(\left[\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right] \cap B\right)}{P(B)} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A_i \cap B)}{P(B)} = \bigcup_{i=1}^{\infty} P(A_i \mid B)$$

□

## 4. Формула полной вероятности

*Утверждение.* Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство, $D_1, \ldots \in \mathcal{F}$: $\Omega = \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} D_i$. Пусть $A \in \mathcal{F}$, тогда

$$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A \mid D_i) \cdot P(D_i)$$

*Доказательство.* $A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} (D_i \cap A)$, при этом при $i \neq j \Rightarrow (D_i \cap A) \cap (D_j \cap A) = \varnothing$.

Тогда $P(A) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A \cap D_i)$, $P(A \mid D_i) = \frac{P(A\cap D_i)}{P(D_i)}$ при $P(D_i) \neq 0$. Поэтому в общем случае $P(A \cap D_i) = P(A \mid D_i) \cdot P(D_i)$.

Суммируя, получаем $P(A) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A \mid D_i) \cdot P(D_i)$. □

*Замечание.* В конечном случае формула также верна, достаточно взять $D_i = \varnothing$ при $i > n$.

**Пример.** Если $n$ шаров, из них $k$ черных и $n-k$ белых. Достаем по очереди шары без возвращений. Какова вероятность черного шара на $j$-ом выборе?

Занумеруем шары $\{1,\ldots,n\}$, возьмем $\Omega = \{(i_1,\ldots,i_j) — \text{различные числа от 1 до } n\}$. Пусть $A = \{(1, i_2, \ldots, i_j)\}$, $B = \{(i_1,\ldots,i_{j-1},1)\}$. Покажем, что они равномощны. В самом деле, есть простая биекция (поменять первый элемент с последним), значит $|A| = |B|$. Пусть первые $k$ шаров черные. Тогда искомая вероятность — это

$$P = \sum_{i=1}^{k} P(\text{при выборе } j \text{ выпал шар } i) = \sum_{i=1}^{k} P(\text{при выборе 1 выпал шар } i) = \frac{k}{n}$$

Теперь решим формулой полной вероятности.

Пусть $D_i = (\text{после выбора } j-1 \text{ осталось } i \text{ черных шаров})$.

$$P(A_j) = \sum_{i=\max(k-j+1,0)}^{\min(k,n-j+1)} P(A_j \mid D_i)\cdot P(D_i) =$$

$$= \sum_{i=\max(k-j+1,0)}^{\min(k,n-j+1)} \frac{i}{n-j+1}\cdot\frac{C_{j-1}^{k-i}\cdot k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot(k-(k-i)+1)}{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-(j-1)+1)} = \ldots =$$

$$= \frac{C_{n-1}^{k-1}}{C_n^k} = \frac{k}{n}$$

Это был плохой метод. Попробуем иначе:

$D_0 = (\text{при первом выборе выпал черный шар})$, $D_1 = (\text{при первом выборе выпал белый шар})$

Будем доказывать, что $P(A_i) = \frac{k}{n}$ по индукции. Предположим, что $P(A_{j-1}) = \frac{k}{n}$. Тогда

$$P(A_j) = P(A_j \mid D_0)\cdot P(D_0) + P(A_j \mid D_1)\cdot P(D_1) =$$

$$= \frac{k-1}{n-1}\cdot\frac{k}{n} + \frac{k}{n-1}\cdot\frac{n-k}{n} = \frac{k^2-k+n\cdot k-k^2}{n(n-1)} = \frac{k}{n}$$

## 5. Формула Байеса

*Утверждение.* Пусть $(\Omega,\mathcal{F},P)$ — вероятностное пространство, $\forall i\in\mathbb{N}\to D_i\in\mathcal{F}$: $\Omega = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} D_i$. Пусть $A\in\mathcal{F}$, тогда

$$P(D_n \mid A) = \frac{P(A\mid D_n)\cdot P(D_n)}{\sum_{k=1}^{\infty} P(A\mid D_k)\cdot P(D_k)}$$

*Доказательство.*

$$P(D_n\mid A) = \frac{P(D_n\cap A)}{P(A)} = \frac{P(A\mid D_n)\cdot P(D_n)}{\sum_{k=1}^{\infty} P(A\mid D_k)\cdot P(D_k)}$$

□

**Пример.** Пусть есть два студента, которые не ждут более 15 минут. $D_0$ — оба пришли в первые 15 минут. $D_1 = \Omega \setminus D_0$.

Мы знаем, что они встретились. Какова вероятность, что кто-то из них пришел позже, чем в 15 минут.

$$P(D_1 \mid A) = \frac{P(A \mid D_1) \cdot P(D_1)}{P(A \mid D_0) \cdot P(D_0) + P(A \mid D_1) \cdot P(D_1)} = \frac{\frac{2}{5} \cdot \left(1 - \frac{1}{16}\right)}{1 \cdot \frac{1}{16} + \frac{2}{5} \cdot \left(1 - \frac{1}{16}\right)} = \frac{6}{7}$$

## 6. Независимость событий

**Определение.** События $A, B \in \mathcal{F}$ называются *независимыми*, если $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

*Замечание.* Что то же самое $P(A \mid B) = P(A),\ P(B \mid A) = P(B)$.

**Определение.** Набор событий $A_1, \ldots, A_n$ называется *независимой совокупностью*, если для любых различных $1 \le k_1, \ldots k_j \le n$ верно $P(A_{k_1} \cap \ldots \cap A_{k_j}) = P(A_{k_1}) \cdot \ldots \cdot P(A_{k_j})$.

*Замечание.* Из независимости совокупности следует попарная, обратное неверно.

**Пример.** Возьмем тетраэдр, у которого каждая грань покрашена в какие-то цвета. Три грани монохромны, четвертая покрашена в 3 цвета сразу. События выпадения каждого цвета попарно независимы, но в совокупности это неверно.

$\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_4\},\ A = \{\omega_1, \omega_4\},\ B = \{\omega_2, \omega_4\},\ C = \{\omega_3, \omega_4\}$.

$P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = P(\{\omega_4\}) = \frac{1}{4}$, значит они попарно независимы.

$P(A \cap B \cap C) = \{\omega_4\} = \frac{1}{4},\ P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = \frac{1}{8}$, значит нет независимости в совокупности.

**Определение.** $\{A_\gamma,\ \gamma \in \Gamma\}$ — *независимы в совокупности*, если для любых $k$ различных $\gamma_1, \ldots, \gamma_k \in \Gamma$ верно, что

$$P(A_{\gamma_1} \cap \ldots \cap A_{\gamma_k}) = P(A_{\gamma_1}) \cdot \ldots \cdot P(A_{\gamma_k})$$

**Определение.** Пусть $M_1, \ldots, M_n$ — системы событий. Они называются *независимыми в совокупности*, если $\forall A_i \in M_i \to A_1, \ldots, A_n$ — независимы в совокупности.

**Пример.** Пусть $A_1, \ldots, A_n$ — независимые в совокупности события. Тогда введем $\mathcal{F}_{A_i} = \left\{\varnothing, A_i, \overline{A}_i, \Omega\right\}$. Они будут независимой в совокупности системой событий.

Пусть $B_i \in \mathcal{F}_i$.

Если $B_{i_j} = \varnothing$, то тривиально $P\left(B_{i_1} \cap \ldots \cap P_{i_j}\right) = 0 = P(B_{i_1}) \cdot \ldots \cdot P(B_{i_j})$. Случай $B_{i_j} = \Omega$ разбирается так же.

Теперь $B_i = A_i$ или $B_i = \overline{A_i}$. Положим без потери общности, что $B_{i_1} = \overline{A_{i_1}}$...

**Лекция 3. Распределения вероятностей**

## 7. $\sigma$-алгебры, содержащая семейство множеств

*Утверждение.* Существует $\sigma$-алгебра $\mathcal{F}$, содержащая $M \subset \Omega$

*Доказательство.* Очевидно, так как $2^\Omega$ образует $\sigma$-алгебру. □

**Определение.** $\sigma$-алгебра $\mathcal{F}$ называется *минимальной $\sigma$-алгеброй*, содержащей систему $M$ подмножеств $\Omega$, если $\forall \Sigma \subset 2^\Omega,\ M \subset \Sigma \subset \mathcal{F},\ \Sigma \ne \mathcal{F} \to \Sigma$ — не $\sigma$-алгебра.

*Утверждение.* Минимальная $\sigma$-алгебра для $M$ единственна.

*Доказательство.* Пересечение всех $\sigma$-алгебр, содержащих $M$, тоже его содержит. $\square$

*Утверждение.* Пусть $\mathcal{F}_\gamma,\ \gamma \in \Gamma$ — это семейство сигма-алгебр, содержащих $M$. Тогда $\bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{F}_\gamma$ — $\sigma$-алгебра, содержащая $M$.

*Доказательство.* Проверяем свойства:

1) $\forall \gamma \in \Gamma \to \Omega \in \mathcal{F}_\gamma \Rightarrow \Omega \in \bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{F}_\gamma$

2) $A \in \bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{F}_\gamma \Rightarrow \big(\forall \gamma \in \Gamma \to A \in \mathcal{F}_\gamma \Rightarrow\ \overline{A} \in \mathcal{F}\big) \Rightarrow \overline{A} \in \bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{F}_\gamma$

3) $A_1, A_2, \ldots \in \bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{F}_\gamma \Rightarrow \forall \gamma \in \Gamma \to A_1, \ldots \in \mathcal{F}_\gamma \Rightarrow \forall \gamma \in \Gamma \to \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}_\gamma \Rightarrow \bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{F}_\gamma$ — сигма-алгебра. $\square$

*Замечание.* Тогда минимальная $\sigma$-алгебра, содержащая $M$ существует и равна пересечению всех $\sigma$-алгебр, содержащих $M$. Обозначать такую алгебры мы будем $\sigma(M)$.

*Замечание.* То же самое верно для алгебр. Минимальную алгебру, содержащую $M$, будем обозначать $\alpha(M)$

## 8. Примеры: борелевская $\sigma$-алгебра

**Пример.**

1) $\mathcal{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\} = \sigma(\{\varnothing\}) = \alpha(\{\varnothing\})$.

2) $\mathcal{F}_A = \big\{\varnothing, A, \overline{A}, \Omega\big\} = \sigma(\{A\}) = \alpha(\{A\})$

3) Пусть $D = \{D_1, D_2, \ldots\}$ — счетное разбиение $\Omega$. Тогда $\sigma(D)$ — все не более чем счетные объединения множеств $D_1$ и $\varnothing$, $\alpha(D)$ — все конечные объединения.

4) $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\} \Rightarrow \sigma(\{\{\omega_1\}, \ldots, \{\omega_n\}\}) = 2^\Omega = \alpha(\{\{\omega_1\}, \ldots, \{\omega_n\}\})$

5) $\Omega = \mathbb{R}$. $M = \{(a, b]\,,\ -\infty \le a < b < +\infty\}$, $\sigma(M) := \mathcal{B}(\mathbb{R})$ — *борелевская* $\sigma$-алгебра в $\mathbb{R}$.

## 9. Распределения вероятностей

**Определение.** Вероятностная мера $P$ на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ называется *распределением вероятностей*

**Определение.** Функция $F:\ \mathbb{R} \mapsto [0;1]$ такая, что $F(x) = P((-\infty; x])$, называется *функцией распределения*, соответствующей распределению $P$.

*Утверждение.* Некоторые свойства $F$:

1) $F$ — не убывает

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0,\ \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$

3) $F$ непрерывна справа, то есть $\forall x_0 \in \mathbb{R} \to \lim\limits_{x\to x_0+0} F(x) = F(x_0)$

*Доказательство.*

1) Пусть $x < y$, тогда $(-\infty; x] \subset (-\infty; y] \Rightarrow F(x) = P((-\infty; x]) \le P((-\infty; y]) = F(y)$.

2) Пусть $x_n \searrow -\infty$. Тогда $A_n = (-\infty; x_n] \searrow \varnothing$, то есть $\forall i \to A_i \supset A_{i+1}$ и $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \varnothing$. По теореме о непрерывности вероятностной меры:

$$0 = P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i\to\infty} P(A_i) = \lim_{i\to\infty} F(x_i)$$

Аналогично доказывается, что $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$.

3) Пусть $x_n \searrow x_0$. Тогда $A_n = (-\infty; x_n] \searrow (-\infty; x_0]$.

$$F(x_0) = P\left((-\infty; x_0]\right) = P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i\to\infty} P(A_i) = \lim_{i\to\infty} F(x_i)$$

□

*Замечание.* Функция распределения не обязана быть непрерывной слева, так как в случае $P\left(\{x_0\}\right) > 0$

$$\lim_{x\to x_0-0} F(x) = P\left((-\infty; x_0)\right) < F(x_0)$$

**Теорема.** *Пусть $F: \mathbb{R} \mapsto [0;1]$ удовлетворяет свойствам (1) — (3), тогда существует единственное соответствующее ей распределение вероятностей $P$, причем $\forall -\infty \le a < b < \infty \to P\left(a, b\right] = F(b) - F(a)$.*

**Определение.** Любую функцию $F$, обладающую свойствами (1) — (3), называют *функцией распределения*.

**Пример.**

(1) $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 \le x \le 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$, $P\left((a; b]\right) = b - a,\ 0 \le a < b \le 1$. $\mu \overset{def}{=} P$ — мера Лебега на $[0;1]$

(2) $F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ 1, & x \ge a \end{cases}$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \Rightarrow P(A) = \begin{cases} 1, & a \in A \\ 0, & a \notin A \end{cases} = I(a \in A)$

*Доказательство.* Покажем, что в последнем примере это действительно так. Очевидно, что $P(A) = F(y) - F(x)$, если $A = (x; y]$. Теперь докажем, что $\widetilde{P} = I(a \in A)$ — вероятностная мера. Если $A_1, \ldots$ — непересекающиеся множества из $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, то

$$\widetilde{P}\left(\bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \begin{cases} 1, & \text{если } \exists i:\ a \in A_i \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

С другой стороны, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \widetilde{P}(A_i)$ — это то же самое, значит $\widetilde{P}$ — вероятность. Тогда по теореме о единственности вероятностной меры распределения имеем $P = \widetilde{P}$. □

## 10. Дискретные распределения

**Определение.** Пусть $X \subset \mathbb{R}$ — не более чем счетное. Тогда последовательность $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется *дискретным распределением вероятностей* на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

$$P(x_n) = p_n, \text{ где } X = \{x_1, \ldots\}$$

Если $p_n > 0$ и $\sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i = 1$.

**Пример.**

1) Распределение Бернулли — $Bern(p)$: $X = \{0, 1\}$,

$$P(\{0\}) = 1 - p,\ P(\{1\}) = p,\ p \in (0; 1)$$

2) Дискретно-равномерное распределение — $U(\{1, \ldots, N\})$:

$$X = \{1, \ldots, N\},\ \forall i \in X \to P(\{i\}) = \frac{1}{N}$$

3) Биномиальное распределение с параметрами $(n, p)$ — $Bin(n, p)$:

$$X = \{0, \ldots, n\},\ P(\{k\}) = C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

4) Распределение Пуассона с параметром $\lambda$ — $Pois(\lambda)$:

$$X = \mathbb{Z}_+,\ P(\{k\}) = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$$

*Замечание.* $e^{-\lambda} \cdot \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1$. Также $Bin(n, \frac{\lambda}{n}) \approx Pois(\lambda)$, потому что при больших $n$: $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \approx \frac{1}{e}$.

**Лекция 4. Непрерывные распределения**

## 11. Непрерывные распределения и плотность

**Определение.** Если существует такая функция $p(x)$, что $\forall x \in \mathbb{R} \to p(x) \geq 0$ и функция распределения $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p(t) \cdot dt$, то $F$ и соответствующее распределение $P$ называется *абсолютно непрерывными*, а $p$ называется *плотностью распределения.*

*Утверждение.* Пусть $p(x)$ — функция, удовлетворяющая условиям

(1) $\forall x \to p(x) \geq 0$

(2) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x) \cdot dx = 1$

Тогда $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p(t) \cdot dt$ является функцией распределения.

*Доказательство.*

(1) Докажем неубывание: $F(x_1) - F(x_2) = \int\limits_{x_1}^{x_2} p(x) \cdot dx \geq 0$ при $x_1 > x_2$.

(2)

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty} \int_{-\infty}^{x} p(t) \cdot dt = \lim_{x\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} I(t \leq x) \cdot p(t) \cdot dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{x\to\infty} I(t \leq x) \cdot p(t) \cdot dt = \int_{-\infty}^{\infty} p(t) \cdot dt = 1$$

(3) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lim\limits_{x\to-\infty} I(t \le x) \cdot p(t) \cdot dt = 0$

(4) $\lim\limits_{x\to x_0} F(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \int\limits_{-\infty}^{x} p(t) \cdot dt = \int\limits_{-\infty}^{x_0} p(t) \cdot dt = F(x_0)$ □

*Замечание.* Функция $I(x \le a) = \begin{cases} 1, & x \le a \\ 0, & x > a \end{cases}$

**Определение.** Если $p$ удовлетворяет свойствам (1) и (2), то ее называют *плотностью.*

*Утверждение.* Пусть $p$ — плотность распределения $P$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ — борелевское множество. Тогда $P(B) = \int\limits_B p(t) \cdot dt$

*Доказательство.* Приведем пока только схему доказательства.

По теореме о единственности вероятностной меры с заданной функцией распределения достаточно доказать, что функция, задаваемая равенством $P(B) = \int\limits_B p(t) \cdot dt$ является мерой на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Проверить счетную аддитивность интеграла Лебега мы пока не сможем, но мы можем проверить, например, $P(\mathbb{R}) = \int\limits_{\mathbb{R}} p(t) \cdot dt = 1$. □

*Утверждение.* Если $F$ — всюду на $\mathbb{R}$ дифференцируемая функция распределения, то его плотность есть $p(t) = F'(t)$

*Доказательство.* Следует из формулы Ньютона-Лейбница. □

## 12. Примеры часто встречающихся распределений

**Пример.**

(1) $R([a;b])$ — равномерное распределение с параметрами $a$ и $b$:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a;b] \\ 0, & x \notin [a;b] \end{cases}$$

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \le x \le b \\ 1, & x > b \end{cases}$$

(2) $N(a, \sigma^2)$ — нормальное распределение с параметрами $a$ и $\sigma^2$:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \cdot dx$$

(3) $Exp(\lambda)$ — экспоненциальное или показательное распределение с параметром $\lambda > 0$:

$$p(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} \cdot I(x \ge 0)$$

$$F(x) = \left(1 - e^{-\lambda x}\right) \cdot I(x \ge 0)$$

(4) $\Gamma(\alpha, \beta)$ — гамма-распределение с параметрами $\alpha, \beta > 0$:

$$p(x) = \frac{\alpha^\beta \cdot x^{\beta-1} \cdot e^{-\alpha \cdot x}}{\Gamma(\beta)}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(t) \cdot dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x\alpha)^{\beta-1} e^{-\alpha x}}{\Gamma(\beta)} \cdot d(\alpha x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^{\beta-1} \cdot e^{-t}}{\Gamma(\beta)} \cdot dt = 1$$

Последнее верно, так как $\Gamma(\beta) \overset{def}{=} \int\limits_{-\infty}^{\infty} t^{\beta-1} \cdot e^{-t} \cdot dt$. Про $\Gamma$-функцию полезно знать, что $\Gamma(n) = (n-1)!$ и $\Gamma(\beta) = (\beta - 1) \cdot \Gamma(\beta - 1)$ при $\beta > 1$.

(5) Распределение Коши с параметром $\theta > 0$:

$$p(x) = \frac{\theta}{\pi\left(x^2 + \theta^2\right)}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\theta}{\pi\left(x^2 + \theta^2\right)} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi\left(1 + x^2\right)} \cdot dt = 1$$

$$F(x) = \frac{\arctan\left(\frac{x}{\theta}\right) + \frac{\pi}{2}}{\pi}$$

## 13. Многомерные распределения

**Определение.** *Борелевской $\sigma$-алгеброй* на $\mathbb{R}^n$ называется $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ — наименьшая, содержащая множества вида $B_1 \times \ldots \times B_n$, где $\forall i \in \{1, \ldots, n\} \to B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Вероятностная мера на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ называется *распределением вероятностей.* Функция $F : \mathbb{R}^n \mapsto [0; 1]$ такая, что $F(x_1, \ldots, x_n) = P((-\infty; x_1], \ldots, (-\infty; x_n])$ называется *функцией распределения.*

*Замечание.* Некоторые свойства многомерных распределений

(1) Пусть $\Delta^i_{a,b} F(x_1, \ldots, x_n) = F\left(x_1, \ldots, x_{i-1}, b, x_{i+1}, \ldots, x_n\right) - F\left(x_1, \ldots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \ldots, x_n\right)$. Тогда $\forall a_1 < b_1, \ldots, a_n < b_n$ верно

$$\Delta^1_{a_1,b_1} \ldots \Delta^n_{a_n,b_n} F(x_1, \ldots, x_n) \geq 0$$

*Доказательство.* Докажем, что

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\}, a_1 < b_1, \ldots, a_k < b_k \to \Delta^1_{a_1,b_1} \ldots \Delta^k_{a_k,b_k} F(x_1, \ldots, x_n) = \\ = P((a_1; b_1], \ldots, (a_k; b_k], (-\infty; x_{k+1}], \ldots, (-\infty; x_n])$$

Индукция по $k$. База $k = 1$:

$$\Delta^1_{a_1,b_1} F(x_1, \ldots, x_n) = F(b_1, x_2, \ldots, x_n) - F(a_1, x_2, \ldots, x_n) = \\ = P((-\infty; b_1], (-\infty; x_2], \ldots, (-\infty; x_n]) - P((-\infty; a_1], (-\infty; x_2], \ldots, (-\infty; x_n]) = \\ = P((a_1; b_1], (-\infty; x_2], \ldots, (-\infty; x_n])$$

Так как события вложены. Докажем шаг индукции:

$$\Delta^1_{a_1,b_1}\dots\Delta^{k+1}_{a_{k+1},b_{k+1}}F(x_1,\dots,x_n) = \\ = \Delta^1_{a_1,b_1}\dots\Delta^k_{a_k,b_k}\left(F(x_1,\dots,x_k,b,x_{k+2},\dots,x_n) - F(x_1,\dots,x_k,a,x_{k+2},\dots,x_n)\right)$$

По линейности оператора $\Delta^i_{a,b}$ имеем

$$\Delta^1_{a_1,b_1}\dots\Delta^k_{a_k,b_k}F(x_1,\dots,x_k,b,x_{k+2},\dots,x_n) - \Delta^1_{a_1,b_1}\dots\Delta^k_{a_k,b_k}F(x_1,\dots,x_k,a,x_{k+2},\dots,x_n) = \\ = P((a_1;b_1],\dots,(a_k;b_k],(-\infty;b_{k+1}](-\infty;x_{k+2}],\dots,(-\infty;x_n]) - \\ - P((a_1;b_1],\dots,(a_k;b_k],(-\infty;b_{k+1}],(-\infty;x_{k+2}],\dots,(-\infty;x_n]) = \\ P((a_1;b_1],\dots,(a_{k+1};b_{k+1}],(-\infty;x_{k+1}],\dots,(-\infty;x_n])$$

Значит $\Delta^1_{a_1,b_1}\dots\Delta^n_{a_n,b_n}F(x_1,\dots,x_n) = P((a_1;b_1],\dots,(a_n;b_n]) \geq 0$ по свойству вероятностной меры. $\square$

(2) Будем обозначать для $x = (x_1,\dots,x_n)\,,\ y = (y_1,\dots,y_n)$

- $x \geq y$, если $\forall i \in \{1,\dots,n\} \to x_i \geq y_i$
- $x^k \uparrow x$, если $\forall i \in \{1,\dots n\} \to x_i^k \to x_i$ при $k \to \infty$ и $\forall k \to x^{k+1} \geq x^k$
- $x^k \downarrow x$ — аналогично

Тогда $\lim\limits_{x_1\to\infty,\dots,x_n\to\infty} F(x_1,\dots,x_n) = 1$ и $\forall i \in \mathbb{N} \to \lim\limits_{x_i\to-\infty} F(x_1,\dots,x_n) = 0$

(3) $\lim\limits_{x^k\downarrow x} F(x^k) = F(x)$

*Доказательство.* Нужно показать, что

$$\lim_{x_1\to\infty,\dots,x_n\to\infty} F(x_1,\dots,x_n) = \lim_{x_1\to\infty,\dots,x_n\to\infty} P((-\infty;x_1],\dots,(-\infty;x_n])$$

Докажем, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists N :\ \forall x_1 > N,\dots,x_n > N \to F(x_1,\dots,x_n) > 1-\varepsilon$. Обозначим

$$F_N = F(N,\dots,N) = P(\underbrace{(-\infty;N],\dots,(-\infty;N]}_{A_n})$$

Очевидно, $A_N \subset A_{N+1}$. По теореме о непрерывности вероятностной меры $P(A_n) \to 1$ при $n \to \infty$, так как $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \mathbb{R}^n$. Тогда в качестве искомого $N$ можно взять $N$, которое даст равенство $\lim\limits_{n\to\infty} P(A_n) = 1$ для $\varepsilon$. По свойству неубывания вероятностной меры $F(x_1,\dots,x_n) \geq P(A_N) > 1-\varepsilon$. $\square$

**Упражнение.** Провести аналогичное доказательство для остальных свойств.

**Лекция 5. Случайные величины**

## 14. Функции многомерных распределений

**Теорема.** *Если* $F: \mathbb{R}^n \mapsto [0;1]$ *удовлетворяет свойствам (1) — (3), то существует единственное распределение на* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$*, для которого* $F$ *является функцией распределения.*

**Пример.** Пусть $F_1(x), \ldots, F_n(x)$ — одномерные функции распределения. Тогда $F(x_1, \ldots, x_n) = F_1(x_1) \cdot \ldots \cdot F_n(x_n)$ — функция распределения. Пусть $P$ — распределение, соответствующее $F$, а $P_i$ соответствует $F_i$.

Тогда

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to P(\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R} \times \underbrace{B}_{i} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}) = P_i(B)$$

Докажем это. Определим

$$\widetilde{P}\left(\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R} \times \underbrace{(-\infty; a]}_{i} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}\right) = F_i(a)$$

Тогда

$$\widetilde{P}\left(\underbrace{(-\infty; a_1]}_{i} \times \ldots \times \underbrace{(-\infty; a_n]}_{i}\right) = F_1(a_1) \cdot \ldots \cdot F_n(a_n)$$

Это значит, что $\widetilde{P} = P$, так как мы задали распределение однозначно.

$P_1, \ldots, P_n$ называются *маргинальными* распределениями для $P$.

**Пример.** $F(x_1, \ldots, x_n) = \prod\limits_{x_i \in [0;1]} (x_i \cdot I(\forall i \leq n \to x_i > 0) + I(\forall i \leq n \to x_i > 1))$ соответствует мере Лебега на $[0;1]^n$

Маргинальные распределения имеют вид $F(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1 \\ 0, & x \leq 0 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$

**Определение.** Функция распределения $F$ называется *абсолютно непрерывной* (вместе с соответствующим распределением), если существует такая $p(x_1, \ldots, x_n) \geq 0$, то

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \int\limits_{-\infty}^{x_1} \cdots \int\limits_{-\infty}^{x_n} p(t_1, \ldots, t_n) \cdot dt_1 \cdot \ldots \cdot dt_n$$

Функция $p$ называется *плотностью* распределения.

*Утверждение.*

(1) Если $p(x_1, \ldots, x_n) \geq 0$, такая что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(t_1, \ldots, t_n) \cdot dt_1 \cdot \ldots \cdot dt_n = 1$, то существует функция распределения $F$, для которой $p$ — плотность.

(2) Если $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, то

$$P(B) = \int\limits_{B} p(t_1, \ldots, t_n) \cdot dt_1 \cdot \ldots \cdot dt_n$$

(3) Если $F$ — дифференцируема, то

$$p(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\partial}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial}{\partial x_n} \cdot F(x_1, \ldots, x_n)$$

**Пример.** Равномерное распределение на $[a;b]^n$:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x_i \in [a;b] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \int\limits_{-\infty}^{x_1} \cdots \int\limits_{-\infty}^{x_n} p(t_1, \ldots, t_n) \cdot dt_1 \cdot \ldots \cdot dt_n = \begin{cases} 0, & \exists i: \ x_i \leq a \\ \frac{\prod\limits_{x_i < b} (x_i - a)}{(b-a)^n}, & \forall i \leq n \to x_i \geq 0, \ \exists i: \ x_i < b \\ 1, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$P(\{x_1, x_2: \ x_1 + x_2 \leq b + a\}) = \int\limits_{-a}^{b} \int\limits_{-a}^{b+a-x_1} \int\limits_{-a}^{b} \cdots \int\limits_{-a}^{b} \left(\frac{1}{b-a}\right)^n \cdot dx_1 \cdot \ldots \cdot dx_n =$$

$$\int\limits_{-a}^{b} \int\limits_{-a}^{b+a-x_1} \left(\frac{1}{b-a}\right)^2 \cdot dx_1 \cdot dx_2 = \int\limits_{a}^{b} \frac{b - x_1}{(b-a)^2} \cdot dx_1 = \frac{b(b-a) - \frac{b^2 - a^2}{2}}{(b-a)^2} = \frac{1}{2}$$

**Определение.** Пусть $X = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset \mathbb{R}^n$, тогда последовательность $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, где $p_k \geq 0$ и $\sum\limits_k p_k = 1$, называется дискретным распределением вероятностей $P(\{x_k\}) = p_k$

**Пример.** $x = \{0,1\}^n, \ p_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^n, \forall i \in \{1, \ldots, 2^n\} \to P\left(\left\{x \cdot \sum\limits_{i=1}^n x_i = k\right\}\right) = \frac{C_n^k}{2^n}$

## 15. Случайные величины

**Определение.** Пусть $(\Omega, \mathcal{F})$ и $(E, \mathcal{E})$ — измеримые пространства (с заданной $\sigma$-алгеброй). Пусть $f: \ \Omega \mapsto E$. Оно называется $\mathcal{F} \mid \mathcal{E}$ — измеримым, если

$$\forall B \in \mathcal{E} \to f^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega: \ f(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$$

Если задана $P$ — вероятностная мера на $(\Omega, \mathcal{F})$, то $f$ — *случайный элемент.*

Если $E = \mathbb{R}^n, \ \mathcal{E} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, то $f$ — *случайный вектор.*

Если $n = 1$, то $f$ — *случайная величина.*

*Замечание.* Поймем, какую роль играет условие измеримости. Пусть $\xi$ — случайная величина на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, такая что

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to P_\xi(B) = P(\{\omega: \ \xi(\omega) \in B\})$$

*Утверждение.* Тогда $P_\xi$ — распределение вероятностей.

*Доказательство.* Проверяем его свойства:

1) $P_\xi(\mathbb{R}) = P(\{\omega: \ \xi(\omega) \in \mathbb{R}\}) = P(\Omega) = 1$.

2) Если $B_1, \ldots \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \ B_i \cap B_j = \varnothing$ при $i \neq j$, то

$$P_\xi\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = P\left(\left\{\omega: \ \xi(\omega) \in \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right\}\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \{\omega: \ \xi(\omega) \in B_i\}\right)$$

Так как одно $w$ может перейти только в одно $B_i$, то

$$P_\xi\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(\{\omega: \ \xi(\omega) \in B_i\}) = \sum_{i=1}^{\infty} P_\xi(B_i)$$

□

*Замечание.* Для удобства примем обозначение $P\left(\{\omega:\ \xi(\omega)\le x\}\right) = P\left(\xi\le x\right)$ (для всех подобных выражений).

*Замечание.* Все наши утверждения будут верны для случайных величин и случайных векторов. Доказательства будем приводить как правило для случайных величин.

## 16. Порожденная $\sigma$-алгебра

**Определение.** Пусть $\xi$ — случайная величина (вектор) на $(\Omega,\mathcal{F},P)$. Тогда *$\sigma$-алгеброй, порожденной* $\xi$ называется

$$\mathcal{F}_\xi = \{A\in\mathcal{F}:\ \exists B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n),\ A=\{\omega:\ \xi(\omega)\in B\}\}$$

*Утверждение.* $\mathcal{F}_\xi$ — $\sigma$-алгебра

*Доказательство.* Проверяем определение:

1) $\Omega=\{\omega:\ \xi(\omega)\in\mathbb{R}\}\in\mathcal{F}_\xi$

2) $A\in\mathcal{F}_\xi$. Пусть $B=\xi(A)$, тогда $B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})\Rightarrow\overline{B}\in\mathcal{B}(\mathbb{R})\Rightarrow\overline{A}=\left\{\omega:\ \xi(\omega)\in\overline{B}\right\}\in\mathcal{F}_\xi$

3) Пусть $A_1,\ldots\in\mathcal{F}_\xi$. Пусть $B_i=\xi(A_i)$, тогда

$$\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i=\left\{\omega:\ \xi(\omega)\in\underbrace{\bigcap_{i=1}^{\infty}B_i}_{\in\mathcal{B}(\mathbb{R})}\right\}\in\mathcal{F}_\xi$$

□

*Утверждение.* Случайная величина $\xi$ является $\mathcal{F}_\eta\mid\mathcal{E}$*-измеримой*, тогда и только тогда, когда $\mathcal{F}_\xi\subset\mathcal{F}_\eta$.

*Замечание.* Будем называть $\mathcal{F}_\eta$-измеримость просто $\eta$-измеримостью.

*Доказательство.*

$\Rightarrow$ Имеем $\forall B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})\to\{\omega:\ \xi(\omega)\in B\}\in\mathcal{F}_\eta$. Пусть $A\in\mathcal{F}_\xi$, тогда

$$\exists B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}):\ A=\{\omega:\ \xi(\omega)\in B\}\Rightarrow A\in\mathcal{F}_\eta$$

Значит, $\mathcal{F}_\xi\subset\mathcal{F}_\eta$.

$\Leftarrow$ $\mathcal{F}_\xi\subset\mathcal{F}_\eta$. Тогда

$$\forall B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})\to A=\{\omega:\ \xi(\omega)\in B\}\in\mathcal{F}_\xi\subset\mathcal{F}_\eta\Rightarrow A\in\mathcal{F}_\eta$$

Значит $\xi$ — $\mathcal{F}_\eta$-измерима. □

**Определение.** Функция $f:\ \mathbb{R}^n\mapsto\mathbb{R}^k$ называется *борелевской*, если она является $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\mid\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$-измеримой.

**Теорема.** *Случайная величина (вектор) $\xi$ является $\eta$-измеримой тогда и только тогда, когда $\exists$борелевская функция $f:\ \xi=f(\eta)$*

*Доказательство.* Мы покажем только достаточность:

Пусть $\xi = f(\eta)$, тогда

$$\forall A \in \mathcal{F}_\xi \to \exists B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}): \ A = \{\omega: \ \xi(\omega) \in B\} = \{\omega: \ f(\eta(\omega)) \in B\}$$

Значит найдется борелевское множество $C = f^{-1}(B)$: $A = \{\omega: \ \eta(\omega) \in C\} \Rightarrow A \in \mathcal{F}_\eta$, а значит $\mathcal{F}_\xi \subset \mathcal{F}_\eta$. Используя предыдущее утверждение, получаем, что $\xi$ является $\eta$-измеримой. □

**Лекция 6. Независимость случайных величин**

## 17. Операции со случайными величинами

*Замечание.* Если $\xi$ — случайная величина (вектор), $f$ — борелевская функция, то $f(\xi)$ — случайная величина (вектор)

*Доказательство.* Мы знаем, что $\eta = f(\xi)$ будет $\xi$-измеримой. Но $\mathcal{F}_\xi \subset \mathcal{F} \Rightarrow f(\xi)$ будет $\mathcal{F} \mid \mathbb{R}$ измеримой, то есть $f(\xi)$ — случайная величина. □

**Теорема.** *Любая непрерывная и кусочно-непрерывная функция является борелевской.*

*Доказательство.* Доказывать не будем, но перечислим некоторые основные функции. Если $(\xi, \eta)$ — случайный вектор, то $\xi + \eta, \ \xi - \eta, \ \xi\eta, \ \frac{\xi}{\eta} \cdot I(\eta \neq 0)$ — случайные величины. □

**Теорема.** *(критерий измеримости) Пусть* $(\Omega, \mathcal{F})$, $(E, \mathcal{E})$ *— измеримые пространства,* $M \subset \mathcal{E}: \ \sigma(M) = \mathcal{E}$. *Тогда* $f: \ \Omega \mapsto E$ *является* $\mathcal{F} \mid \mathcal{E}$ *— измеримыми тогда только тогда, когда* $\forall A \in M \to f^{-1}(A) = \{\omega: \ f(\omega) \in A\} \in \mathcal{F}$.

*Доказательство.* Необходимость очевидна. Покажем достаточность. Пусть

$$\Sigma = \left\{A \subset E: \ f^{-1}(A) \in \mathcal{F}\right\}$$

Покажем, что это $\sigma$-алгебра.

(1) $f^{-1}(E) = \Omega \in \mathcal{F} \Rightarrow E \in \Sigma$.

(2) Пусть $A \in \Sigma$, тогда $f^{-1}(A) \in \mathcal{F}$, тогда $\left\{\omega: \ f(\omega) \in \overline{A}\right\} = \overline{\{\omega: \ f(\omega) \in A\}} \in \mathcal{F} \Rightarrow \overline{A} \in \Sigma$.

(3) Пусть $A_1, \ldots \in \Sigma$. Тогда $\left\{\omega: \ f(\omega) \in \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right\} = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \{\omega: \ f(\omega) \in A_i\} \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \Sigma$.

По условию $M \subset \Sigma \Rightarrow \sigma(M) \subset \Sigma \Rightarrow \mathcal{E} \subset \Sigma$. Значит $\forall A \in \mathcal{E} \to A \in \Sigma \Rightarrow f^{-1}(A) \in \mathcal{F}$, а это и есть $\mathcal{F} \mid \mathcal{E}$ -измеримость. □

*Утверждение.* $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — случайный вектор $\Leftrightarrow \forall i \to \xi_i$ — случайная величина.

*Доказательство.* Пусть $\xi$ — случайный вектор. Пусть $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, тогда

$$\left\{\omega: \ \xi(\omega) \in \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R} \times \overbrace{B}^{i} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}\right\} \in \mathcal{F}$$

Тогда $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \xi_i^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \Rightarrow \xi_i$ — случайная величина.

Пусть теперь $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — случайные величины. Возьмем $M = \{B_1 \times \ldots \times B_n \mid B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$. Тогда $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(M)$. Пусть $A = B_1 \times \ldots \times B_n \in M$ тогда:

$$\{\omega: \ \xi(\omega) \in A\} = \{\omega: \ \xi_1(\omega) \in B_1, \ldots, \xi_n(\omega) \in B_n\} = \bigcap_{i=1}^{n} \{\omega: \ \xi_i(\omega) \in B_i\} \in \mathcal{F}$$

Тогда по критерию измеримости $\xi$ — случайный вектор. □

*Замечание.* Тогда сумма, разность и прочие функции от случайных величин есть случайные величины.

*Замечание.* Следствие верно и в случае, если $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — случайные векторы.

## 18. Распределение, функция распределения и плотность случайной величины

**Определение.** $\xi$ — случайная величина (вектор) на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, тогда $P_\xi$ — распределение вероятности с функцией распределения $F_\xi$, которую мы будем называть *функцией распределения случайной величины* $\xi$.

При этом $P_\xi$ называется *распределением* $\xi$, а если оно абсолютно непрерывно с плотностью $p_\xi$, то $p_\xi$ будем называть *плотностью* $\xi$.

**Пример.**

(1) $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, $\mathcal{F} = 2^\Omega$, $P(\{\omega_1\}) = p \in (0;1)$, $\xi(\omega_1) = 1$, $\xi(w_2) = 0$, тогда

$$P_\xi(B) = P(\xi \in B) = p \cdot I(1 \in B) + (1-p) \cdot I(0 \in B)$$

Получаем распределение Бернулли с параметром $p$.

(2) $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $A \in \mathcal{F}$, тогда $I_A = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}$ — случайная величина. Проверим критерий измеримости для $M = \{(-\infty; x] \mid x \in \mathbb{R}\}$, $\sigma(M) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$:

$$\{\omega : \ I_A(\omega) \leq x\} = \begin{cases} \varnothing, & x < 0 \\ \overline{A}, & 0 \leq x < 1 \in \mathcal{F} \\ \Omega, & x \geq 1 \end{cases}$$

(3) Пусть $\xi$ принимает значения $\{1, 2, 3, 4\}$. $P(\xi = 1) = \ldots = P(\xi = 4) = \frac{1}{4}$. Этим мы задали случайную величину и ее распределение, так как:

$$P_\xi(B) = \frac{1}{4}\left(I(1 \in B) + I(2 \in B) + I(3 \in B) + I(4 \in B)\right)$$

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 1/4, & 1 \leq x < 2 \\ 1/2, & 2 \leq x < 3 \\ 3/4, & 3 \leq x < 4 \\ 1, & x \geq 4 \end{cases}$$

(4) Рассмотрим $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, где $\Omega = [1;4]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}([1;4])$, $P$ — равномерное на $[1;4]$. Зададим $\xi(x) = x$, тогда $P_\xi(B) = P(B) \Rightarrow P_\xi$ — равномерное на $[1;4]$, а также

$$F_\xi = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \frac{x-1}{3}, & 1 \leq x < 4 \\ 1, & x \geq 4 \end{cases}$$

## 19. Независимость случайных величин и векторов

**Определение.** Случайные векторы $\xi_1$ (размерности $k_1$) и $\xi_2$ (размерности $k_2$) называются *независимыми*, если

$$\forall B_1 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{k_1}),\ B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{k_2}) \to P(\xi_1 \in B_1, \xi_2 \in B_2) = P(\xi_1 \in B_1) \cdot P(\xi_2 \in B_2)$$

Мы будем обозначать $\xi_1 \perp\!\!\!\perp \xi_2$

**Определение.** Случайные векторы $\xi_1, \dots, \xi_n$ называются *попарно независимыми*, если $\forall i \neq j \to \xi_i \perp\!\!\!\perp \xi_j$.

**Определение.** Случайные векторы $\xi_1, \dots, \xi_n$ размерностей $k_1, \dots, k_n$ называются *независимыми* в совокупности, если

$$\forall B_1 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{k_1}), \dots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{k_n}) \to P(\xi_1 \in B_1, \dots, \xi_n \in B_n) = P(\xi_1 \in B_1) \cdot \ldots \cdot P(\xi_n \in B_n)$$

**Определение.** Если $\{\xi_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ — система случайных векторов, то векторы из этой системы называются *независимыми в совокупности*, если для любых $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathcal{A}$ — различных, векторы $\xi_{\alpha_1}, \dots, \xi_{\alpha_n}$ независимы в совокупности.

**Теорема.** *(критерий независимости) Случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_n$ являются независимыми в совокупности тогда и только тогда, когда $F_\xi(x_1, \dots, x_n) = F_{\xi_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot F_{\xi_n}(x_n)$ для любых $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, где $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$*

*Доказательство.* Необходимость очевидна. Для доказательства достаточности нам потребуются следующие определения:

**Определение.** Система подмножества $\Omega$ называется $\lambda$-системой, если

(1) $\Omega \in M$

(2) Если $A, B \in M,\ A \supset B$, то $A \setminus B \in M$

(3) Если $A_1, \ldots \in M$ такие, что $A_i \subset A_{i+1}$, то $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in M$

**Определение.** Система подмножества $\Omega$ называется $\pi$-системой, если $\forall A, B \in \Omega \to A \cap B \in \Omega$

**Теорема.** *Если $M$ — $\pi$-система, то $\lambda(M) = \sigma(M)$, где $\lambda(M)$ — наименьшая $\lambda$-система, содержащая $M$.*

**Упражнение.** Доказать это.

Теперь будем доказывать критерий независимости. Заметим, что $M = \{(-\infty; x] \mid x \in \mathbb{R}\}$ — $\pi$-система. Докажем, что $\forall k \in \{1, \dots, n\}$, $\forall B_1, \dots, B_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ и $\forall x_{k+1}, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ верно

$$P(\xi_1 \in B_1, \dots, \xi_k \in B_k, \xi_{k+1} \le x_{k+1}, \dots, \xi_n \le x_n) = \\ = P(\xi_1 \in B_1) \cdot \ldots \cdot P(\xi_k \in B_k) \cdot P(\xi_{k+1} \le x_{k+1}) \cdot \ldots \cdot P(\xi_n \le x_n)$$

Индукция по $k$.

$k = 1$. Пусть $B_1 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ и

$$\Sigma = \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) :\ P(\xi_1 \in B, \xi_2 \le x_2, \dots, \xi_n \le x_n) = P(\xi_1 \in B) \cdot P(\xi_2 \le x_2) \cdot \ldots \cdot P(\xi_n \le x_n)\}$$

$M \subset \Sigma$ — по условию. Докажем, что $\Sigma$ — $\lambda$-система.

(1)

$$P(\xi_1 \in \mathbb{R}, \xi_2 \le x_2 \ldots, \xi_n \le x_n) = \lim_{x_1 \to \infty} P(\xi_1 \le x_1, \xi_2 \le x_2 \ldots, \xi_n \le x_n) = \lim_{x_1 \to \infty} P(\xi_1 \le x_1) \cdot \ldots \cdot P(\xi_n \le x_n) = P(\xi_1 \in \mathbb{R}) \cdot P(\xi_2 \le x_2) \cdot \ldots \cdot P(\xi_n \le x_n)$$

Значит $\mathbb{R} \in \Sigma$.

(2) $A, B \in \Sigma,\ A \subset B$, тогда

$$\begin{aligned} &P(\xi_1 \in B \setminus A, \xi_2 \le x_2, \ldots, \xi_n \le x_n) = \\ &= P(\xi_1 \in B, \xi_2 \le x_2, \ldots, \xi_n \le x_n) - P(\xi_1 \in A, \xi_2 \le x_2, \ldots, \xi_n \le x_n) = \\ &= P(\xi_1 \in B) \cdot P(\xi_2 \le x_2) \cdot \ldots \cdot P(\xi_2 \le x_n) - P(\xi_1 \in A) \cdot P(\xi_2 \le x_2) \cdot \ldots \cdot P(\xi_n \le x_n) = \\ &= (P(\xi_1 \in B) - P(\xi_1 \in A)) \cdot P(\xi_2 \le x_2) \cdot \ldots \cdot P(\xi_2 \le x_n) = \\ &= P(\xi_1 \in B \setminus A) \cdot P(\xi_2 \le x_2) \cdot \ldots \cdot P(\xi_2 \le x_n) \end{aligned}$$

То есть $B \setminus A \in \Sigma$.

(3) $A_1 \subset \ldots \in \Sigma,\ A_n \uparrow A$.

$$\begin{aligned} &P(\xi_1 \in A, \xi_2 \le x_2 \ldots, \xi_n \le x_n) = \lim_{k \to \infty} P(\xi_1 \in A_k, \xi_2 \le x_2 \ldots, \xi_n \le x_n) = \\ &= \lim_{k \to \infty} P(\xi_1 \in A_k) \cdot P(\xi_2 \le x_2) \cdot \ldots \cdot P(\xi_n \le x_n) = \\ &= P(\xi_1 \in A) \cdot P(\xi_2 \le x_2) \cdot \ldots \cdot P(\xi_n \le x_n) \Rightarrow A \in \Sigma \end{aligned}$$

То есть $A \in \Sigma$.

Тогда $\Sigma \supset \lambda(M) = \sigma(M) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \Rightarrow \Sigma = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Покажем шаг индукции. Пусть верно

$$\begin{aligned} &P(\xi_1 \in B_1, \ldots, \xi_k \in B_k, \xi_{k+1} \le x_{k+1}, \ldots, \xi_n \le x_n) = \\ &= P(\xi_1 \in B_1) \cdot \ldots \cdot P(\xi_k \in B_k) \cdot P(\xi_{k+1} \le x_{k+1}) \cdot \ldots \cdot P(\xi_n \le x_n) \end{aligned}$$

Пусть

$$\begin{aligned} \Sigma = \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) :\ &P(\xi_1 \in B_1, \ldots, \xi_k \in B_k, \xi_{k+1} \le x_2, \ldots, \xi_n \le x_n) = \\ &= P(\xi_1 \in B_1) \cdot \ldots \cdot P(\xi_k \in B_k) \cdot P(\xi_{k+1} \le x_{k+1}) \cdot \ldots \cdot P(\xi_n \le x_n)\} \end{aligned}$$

Покажем аналогично, что $\Sigma$ есть $\lambda$-система. Тогда $\Sigma = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \Rightarrow$ для $k+1$ тоже доказано. $\square$

*Утверждение.* Пусть $(\xi_\alpha)_{\alpha \in A}$ — система случайных независимых величин. Тогда

$$\forall \alpha_1^1, \ldots, \alpha_{m_1}^1, \ldots, a_1^n, \ldots, a_{m_n}^n \in A \to \left(\xi_{\alpha_1^1}, \ldots, \xi_{a_{m_1}^1}\right), \ldots, \left(\xi_{\alpha_1^n}, \ldots, \xi_{a_{m_n}^n}\right) \text{ — независимы}$$

*Доказательство.* $\xi_{\alpha_1^1}, \ldots, \xi_{a_{m_n}^n}$ — независимы. По критерию независимости

$$F_{\xi_{\alpha_1^1}, \ldots \xi_{\alpha_{m_n}^n}} = \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m_i} F_{\xi_{\alpha_i^j}}(x_j^i)$$

Пусть $\eta^i = \left(\xi_{\alpha_1^i}, \ldots, \xi_{\alpha_{m_i}^i}\right)$. По критерию независимости $F_{\eta^i}\left(x_1^i, \ldots, x_{m_i}^i\right) = \prod\limits_{j=1}^{m_i} F_{\xi_{\alpha_j^i}}(x_j)$. Тогда предыдущее равенство переписывается как

$$F_{\xi_{\alpha_1^1}, \ldots \xi_{\alpha_{m_n}^n}} = \prod_{i=1}^{n} F_{\eta_i}\left(x_1^i, \ldots, x_{m_i}^i\right)$$

Итак, по критерию независимости $\eta^1, \ldots, \eta^n$ — независимы. □

**Теорема.** *Пусть $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_m)$ — независимые случайные векторы и $f:\ \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^k$, $g:\ \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^s$ — борелевские функции. Тогда вектора $f(\xi)$ и $g(\eta)$ независимы.*

*Доказательство.* Пусть $B_1, B_2$ таковы, что $B_1 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$, $B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^s)$. Тогда

$$P\left(f(\xi) \in B_1, g(\eta) \in B_2\right) = P\left(\xi \in f^{-1}(B_1), \eta \in g^{-1}(B_2)\right)$$

Так как $f$ и $g$ борелевские, то $f^{-1}(B_1)$ и $g^{-1}(B_2)$ — борелевские множества. Тогда равенство можно переписать как

$$P\left(f(\xi) \in B_1, g(\eta) \in B_2\right) = P\left(\xi \in f^{-1}(B_1)\right) \cdot P\left(\eta \in f^{-1}(B_2)\right) = P\left(f\left(\xi\right) \in B_1\right) \cdot P\left(g(\eta) \in B_2\right)$$

Итак, $f\left(\xi\right)$ и $g\left(\eta\right)$ — независимы. □

*Замечание.* Утверждение верно для любого конечного набора векторов

**Лекция 7. Математическое ожидание дискретных величин**

### 20. Определение и свойства

**Определение.** Пусть $\xi$ — дискретная случайная величина на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $X$ — множество ее значений. Тогда *математическое ожидание* $\xi$ определено как

$$E\xi = \sum_{x \in X} x \cdot P\left(\xi = x\right)$$

*Утверждение.* Пусть $D = \{D_1, D_2 \ldots\}$ — разбиение $\Omega$, такое, что $\forall i \in \mathbb{N} \to \xi = const$ на $D_i$. Тогда $E\xi = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \xi(\omega_i) \cdot P(D_i)$

*Доказательство.*

$$E\xi = \sum_{x \in X} x \cdot P\left(\xi = x\right) = \sum_{x \in X} x \cdot \sum_{i:\ \xi(\omega_i) = x} P(D_i) = \sum_{x \in X} \sum_{i:\ \xi(\omega_i) = x} \xi(\omega_i) \cdot P(D_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi(\omega_i) \cdot P(D_i)$$

□

*Замечание.* Простые свойства математического ожидания

(1) $EC = C$, где $C = const$

(2) $EI_A = P(A)$

(3) Если $\xi \geq 0$, то $E\xi \geq 0$

(4) $E\left(c\xi\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} c \cdot \xi(\omega_i) \cdot P(D_i) = cE\xi$

*Замечание.* Если ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\xi(\omega_i)\cdot P(D_i)$ не сходится, то математическое ожидание не определено.

**Лемма.** *Если* $|E\xi| < \infty,\ |E\eta| < \infty$, *то* $E(\xi+\eta) = E\xi + E\eta$

*Если* $|E\xi| = \infty,\ |E\eta| < \infty$, *то* $E(\xi+\eta) = E\xi$

*Если* $E\xi = E\eta = +\infty$ *или* $E\xi = E\eta = -\infty$, *то* $E(\xi+\eta) = E\xi = E\eta$.

*Доказательство.* Пусть $|E\xi| < \infty,\ |E\eta| < \infty$, тогда

$$E(\xi+\eta) = \sum_{z\in X+Y} z\cdot P(\xi+\eta = z) = \sum_{x\in X+Y} z\cdot \sum_{\substack{x\in X, y\in Y\\ x+y=z}} P(\xi = x, \eta = y) = \\ = \sum_{x\in X+Y}\sum_{\substack{x\in X, y\in Y\\ x+y=z}} (x+y)\cdot P(\xi = x, \eta = y)$$

$$E\xi = \sum_{x\in X} x\cdot P(\xi = x) = \sum_{z\in X+Y}\sum_{\substack{x\in X, y\in Y\\ x+y=z}} x\cdot P(\xi = x, \eta = y),\ E\eta = \sum_{z\in X+Y}\sum_{\substack{x\in X, y\in Y\\ x+y=z}} y\cdot P(\xi = x, \eta = y)$$

В итоге, так как $E\xi, E\eta$ конечны, то

$$E\xi + E\eta = \sum_{z\in X+Y}\sum_{\substack{x\in X, y\in Y\\ x+y=z}} (x+y)\cdot P(\xi = x, \eta = y)$$

То есть $E(\xi+\eta) = E\xi + E\eta$.

Если $|E\xi| = \infty,\ |E\eta| < \infty$, то

$$E(\xi+\eta) = \lim_{n\to\infty}\sum_{z\in X_n+Y_n} z\cdot P(\xi+\eta = z)$$
$$E\xi = \lim_{n\to\infty}\sum_{z\in X_n+Y_n} x\cdot P(\xi+\eta = z)$$
$$E\eta = \lim_{n\to\infty}\sum_{z\in X_n+Y_n} y\cdot P(\xi+\eta = z)$$

Тогда $E(\xi+\eta) = E\xi$, так как $|E\xi| = \infty$. Остальные случаи аналогичны. □

**Лемма.** *Если* $\xi \geq \eta$ *и* $\exists E\xi, E\eta$, *то* $E\xi \geq E\eta$

*Доказательство.* Пусть $|E\xi| < \infty$ и $|E\eta| < \infty$, тогда $E(\xi-\eta) = E\xi + E(-\eta) = E\xi - E\eta \geq 0 \Rightarrow E\xi \geq E\eta$

Пусть $E\xi = c,\ E\eta = +\infty$, тогда $E(\xi-\eta) = E\xi + E(-\eta) = -\infty \geq 0$ — противоречие.

Аналогично действуем и в остальных случаях. □

**Лемма.** $E|\xi| \geq |E\xi|$, *если* $E\xi$ *конечно.*

*Доказательство.*

$$E\xi = \sum_{x\in X} x\cdot P(\xi = x) = \sum_{x\in X^+} x\cdot P(\xi = x) + \sum_{x\in X^-} x\cdot P(\xi = x)$$

$$E|\xi| = \sum_{x\in |X|} x\cdot P(|\xi| = x) = \sum_{x\in X^+} x\cdot P(\xi = x) - \sum_{x\in X^-} x\cdot P(\xi = x) = \sum_{x\in X} |x|\cdot P(\xi = x)$$

$$|E\xi| = \left|\sum_{x\in X} x\cdot P(\xi = x)\right| \le \sum_{x\in X} |x|\cdot P(\xi = x) = E|\xi|$$

□

**Лемма.** *Пусть $\varphi$ — произвольная функция $\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$, тогда $E\varphi(\xi) = \sum\limits_{x\in X}\varphi(x)\cdot P(\xi = x)$*

*Доказательство.*

$$E\varphi(\xi) = \sum_{y\in Y} y\cdot P(\varphi(\xi) = y) = \sum_{y\in Y} y\cdot \sum_{x\in\varphi^{-1}(y)} P(\xi = x) =$$

$$= \sum_{y\in Y}\sum_{x\in\varphi^{-1}(y)}\varphi(x)\cdot P(\xi = x) = \sum_{x\in X}\varphi(x)\cdot P(\xi = x)$$

Где $Y = Im\ \varphi(\xi)$, $\{\varphi(\xi) = y\} = \bigsqcup\limits_{x\in\varphi^{-1}(y)}\{\xi = x\}$. □

**Лемма.** *(Неравенство Коши-Буняковского) Пусть $|E\xi| < \infty$, $|E\eta| < \infty$, тогда $(E\xi\eta)^2 \le E\xi^2 E\eta^2$*

*Доказательство.* Если $E\xi^2 = 0 \Leftrightarrow P(\xi = 0) = 1$, то $P(\xi\eta = 0) = 1 \Rightarrow E\xi\eta = 0$.

Пусть $(E\xi)^2 + (E\eta)^2 \ne 0$. Рассмотрим $\widetilde{\xi} = \frac{|\xi|}{\sqrt{E\xi^2}}$, $\widetilde{\eta} = \frac{|\eta|}{\sqrt{E\eta^2}}$.

$$E\widetilde{\xi}^2 = E\frac{\xi^2}{E\xi^2} = \frac{1}{E\xi^2}\cdot E\xi^2 = 1 = E\widetilde{\eta}^2$$

$$\widetilde{\xi}^2 + \widetilde{\eta}^2 \ge 2\widetilde{\xi}\widetilde{\eta}$$

$$E\left(\widetilde{\xi}^2 + \widetilde{\eta}^2\right) \ge E\left(2\widetilde{\xi}\widetilde{\eta}\right) = 2E\left(\widetilde{\xi}\widetilde{\eta}\right)$$

Отсюда $1 \ge E\left(\widetilde{\xi}\widetilde{\eta}\right) = E\left(\frac{|\xi\eta|}{\sqrt{E\eta^2 E\xi^2}}\right) \Rightarrow \sqrt{E\eta^2 E\xi^2} \ge E|\xi\eta| \Rightarrow E\eta^2 E\xi^2 \ge (E\xi\eta)^2$, что нам и нужно. □

**Пример.**

(1) $\xi \sim Bern(p)$, $E\xi = 1\cdot p + 0\cdot(1-p) = p$

(2) $\xi \sim Bin(n,p)$, $E\xi = \sum\limits_{k=0}^{n} k\cdot C_n^k p^k (1-p)^k = np$ или $\xi = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, $\xi_i \sim Bern(p) \Rightarrow E\xi = n\cdot E\xi_1 = np$

(3) $\xi \sim Pois(\lambda)$, $E\xi = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k\cdot\frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^k}{k!} = \lambda\cdot\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda\cdot\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^k}{k!} = \lambda$

**Лекция 8. Математическое ожидание в общем случае**

## 21. Математическое ожидание абсолютно непрерывных величин

**Определение.** Пусть $\xi$ — абсолютно непрерывная случайная величина, тогда математическое ожидание $\xi$ есть

$$E\xi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot p_\xi(x) \cdot dx$$

Где $p_\xi$ — плотность $\xi$.

**Пример.**

1) $\xi \sim U\left([a;b]\right) \Rightarrow p_\xi(x) = \frac{I(x\in[a;b])}{b-a}$, $E\xi = \int\limits_a^b \frac{1}{b-a} \cdot x \cdot dx = \frac{a+b}{2}$

2) $\xi \sim exp\left(\lambda\right) \Rightarrow p_\xi(x) = e^{-\lambda x} \cdot I(x \geq 0)$, $E\xi = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda x} \cdot x \cdot dx = -\frac{1}{\lambda} \int\limits_0^{+\infty} \lambda \cdot x \cdot d(e^{-\lambda x}) = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \mid_0^{+\infty} = \frac{1}{\lambda}$

3) $\xi \sim norm(a, \sigma^2) \Rightarrow p_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$,

$$E\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-a)+a}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right) \cdot dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right) \cdot d\left((x-a)^2\right) +$$
$$+ a\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2\right) \cdot d\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \cdot dt = a$$

## 22. Простые случайные величины

*Утверждение.* Пусть $\xi_1, \ldots$ — случайные величины на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Тогда $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \xi_n$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \xi_n$, $\sup \xi_n$, $\inf \xi_n$ — случайные величины на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

*Доказательство.* $\sigma\left(\{(-\infty; x]\}\right) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Пусть $x \in \mathbb{R}$, тогда

$$\left\{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \xi_n < x\right\} = \left\{\exists \varepsilon > 0 : \ \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \xi_n = x - \varepsilon\right\} = \left\{\exists k \in \mathbb{N} : \ \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \xi_n \leq x - \frac{1}{k}\right\} =$$
$$\left\{\exists k \in \mathbb{N}, \ \exists n \in \mathbb{N}, \ \forall m \geq n \to \xi_m \leq x - \frac{1}{k}\right\} = \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty} \left\{\xi_m \leq x - \frac{1}{k}\right\} \in \mathcal{F}$$

По критерию измеримости $\overline{\lim}\xi_n$ — случайная величина.

Аналогичное доказательство можно провести для нижнего предела.

Для инфимума выражение еще проще:$\{\inf f \geq x\}$ =$\{\forall n \to \xi_n \geq x\} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \{\xi_n \geq x\} \in \mathcal{F}$ (так как $\sigma\left(\{[x; +\infty)\}\right) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$). □

**Определение.** Случайная величина называется *простой*, если она принимает конечное число значений.

**Теорема.** *(о приближении случайной величины простыми случайными величинами)*

*Пусть $\xi$ принимает только неотрицательные значения. Тогда существует последовательность $\xi_n$ простых случайных величин, такая, что*

$$\forall n \to \xi_n \geq 0,\ \xi_n \uparrow \xi\ \left(\forall \omega \to \lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega) = \xi(\omega),\ \forall n \to \xi_{n+1}(\omega) \geq \xi_n(\omega)\right)$$

*Если $\xi$ — произвольная случайная величина, то существует последовательность простых случайных величин такая, что $\forall n \to |\xi_{n+1}| \geq |\xi_n|$ и $\xi_n \to \xi$ при $n \to \infty$.*

*Доказательство.*

1) $\xi_n(\omega) = \sum\limits_{k=1}^{n\cdot 2^n} \frac{k-1}{2^n} \cdot I\left(\frac{k-1}{2^n} \leq \xi(\omega) < \frac{k}{2^n}\right) + n \cdot I(\xi(\omega) \geq n)$. Эта последовательность возрастает и сходится к $\xi$

2) $\xi = \xi^+ - \xi^-$, где $\xi^+ = \max(\xi, 0)$, $\xi^- = \max(-\xi, 0)$. Их можно приблизить по пункту 1. Тогда:

$$\xi_n^+ \uparrow \xi^+,\ \xi_n^- \uparrow \xi^-$$

$\xi_n^+, \xi_n^-$ — простые и $\xi_n = \xi_n^+ - \xi_n^-$ — искомая последовательность. □

## 23. Определение математического ожидания

**Определение.** Пусть $\xi$ — неотрицательная случайная величина, $\xi_n$ — простые случайные величины, $\xi_n \uparrow \xi$.

Тогда определим $E\xi = \lim\limits_{n\to\infty} E\xi_n$.

Если $\xi$ — произвольная, то $\xi = \xi^+ - \xi^-$. Если хотя бы одно из чисел $E\xi^+, E\xi^-$ конечно, то $E\xi = E\xi^+ - E\xi^-$, иначе мат. ожидание не определено.

**Лемма.** *Пусть $\xi$ — неотрицательная случайная величина, $\xi_n \uparrow \xi$ — простые случайные величины. $\eta$ — простая случайная величина $\xi \geq \eta$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} E\xi_n \geq E\eta$.*

*Доказательство.* Пусть $\varepsilon > 0$. $A_n = \{\xi_n \geq \eta - \varepsilon\}$. $A_n \uparrow \Omega,\ n \to \infty$. По теореме о непрерывности вероятностной меры $P(A_n) \to 1$.

Пусть $|\eta| \leq C$ (она принимает конечное число значений).

$$E\eta = E\eta \cdot \left(I_{A_n} + I_{\overline{A_n}}\right) = E\left(\eta I_{A_n} + \eta I_{\overline{A_n}}\right) = E\eta I_{A_n} + E\eta I_{\overline{A_n}}$$
$$\eta \leq C \Rightarrow \eta I_{\overline{A_n}} \leq C \cdot I_{\overline{A_n}} \Rightarrow E\eta \cdot I_{\overline{A_n}} \leq EC \cdot I_{\overline{A_n}} = C \cdot EI_{\overline{A_n}} = C \cdot P\left(\overline{A_n}\right)$$
$$\eta I_{A_n} \leq (\xi_n + \varepsilon) I_{A_n} \Rightarrow E\eta I_{A_n} \leq E(\xi_n + \varepsilon) I_{A_n} = E\xi_n \cdot A_n + E\varepsilon I_{A_n} \leq E\xi_n + \varepsilon$$
$$\exists n_0 :\ \forall n \geq n_0 \to P(\overline{A_n}) \leq \varepsilon$$

Тогда $\forall n \geq n_0$:

$$E\eta \leq E\xi_n + \varepsilon + C\varepsilon$$

Отсюда $\forall n \geq n_0 \to E\eta < E\xi_n + \varepsilon + C\varepsilon$. Так как $\varepsilon$ любое, то $\lim\limits_{n\to\infty} E\xi_n \geq E\eta$. □

*Замечание.* Отсюда следует, что если $\xi_n$,$\eta_n$ — простые неотрицательные случайные величины, такие что: $\xi_n \uparrow \xi,\ \eta_n \uparrow \xi$, то $\lim\limits_{n\to\infty} E\xi_n = \lim\limits_{n\to\infty} E\eta_n$.

*Доказательство.* $\forall n \to \xi_n \leq \xi \Rightarrow E\xi_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} E\eta_k$. С другой стороны $\eta_n \leq \xi \Rightarrow E\eta_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} E\xi_k$. То есть пределы равны. □

*Замечание.* В итоге мы определили интеграл Лебега

$$E\xi = \int\limits_{\Omega} \xi(w) \cdot P(dw)$$

**Лекция 9. Свойства математического ожидания**

## 24. Свойства математического ожидания

**Лемма.** *Если $\xi \geq \eta$ и существует $E\xi$ и $E\eta$, то $E\xi \geq E\eta$.*

*Доказательство.* Пусть $\xi \geq \eta \geq 0$, $\xi_n \uparrow \xi$, $\eta_n \uparrow \eta$ — простые неотрицательные.

$$\eta_n \leq \eta \leq \xi \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \to E\xi \geq E\eta_n \Rightarrow E\xi \geq \lim_{n\to\infty} E\eta_n = E\eta$$

Теперь пусть $\xi, \eta$ — произвольные. $\xi = \xi^+ - \xi^-,\ \eta = \eta^+ - \eta^-$.

$$\xi \geq \eta \Rightarrow \xi^+ \geq \eta^+,\ \eta^- \geq \xi^-$$

Если $E\xi^+ = \infty,\ E\eta^- = \infty,\ E\xi^- < \infty,\ E\eta^+ < \infty$, то $E\xi = +\infty$, $E\eta = -\infty$.

Аналогично разбираем остальные случаи с бесконечностями.

Если же все ожидания конечны, то $E\xi = E\xi^+ - E\xi^- \geq E\eta^+ - E\eta^- = E\eta$. □

**Лемма.** *Если $\xi \geq 0$, то $E\xi \geq 0$. Более того, если к тому же $E\xi = 0$, то $P(\xi = 0) = 1$.*

*Доказательство.* Первая часть — частный случай прошлой леммы. Если $\xi_n \uparrow \xi$ — простые неотрицательные, то $E\xi = E\xi_n = 0$.

Тогда $\forall n \in \mathbb{N} \to P(\xi_n = 0) = 1,\ \{\xi > 0\} = \lim\limits_{n\to\infty} \{\xi_n > 0\}$. Так как $P(\xi_n > 0) = 0$, то $P(\xi > 0) = 0$. □

**Лемма.** *Пусть существует $E\xi$. Тогда $\forall A \in \mathcal{F}$ существует $E\xi I_A$. Если $E\xi$ — конечно, то $\forall A \in \mathcal{F} \to E\xi I_A$ — конечно.*

*Доказательство.* $\xi = \xi^+ - \xi^-$. Либо $\xi^+$ конечно, либо $\xi^-$ конечно. Пусть $E\xi^+$ конечно, тогда

$\xi I_A = \xi^+ \cdot I_A - \xi^- \cdot I_A = (\xi I_A)^+ - (\xi I_A)^-$, тогда $E(\xi I_A)^+ \leq E\xi^+ < \infty \Rightarrow \exists E\xi I_A$.

Если оба $E\xi^+$и $E\xi^-$ конечны, то из тех же соображений $E(\xi I_A)^+,\ E(\xi I_A)^-$ — конечны, значит $E(\xi I_A)$ — тоже. □

**Лемма.** *Если $P(\xi = 0) = 1$, то $E\xi = 0$.*

*Доказательство.* Для простых $\xi$ уже доказано.

Иначе пусть $\xi$ — неотрицательная. Тогда существует последовательность простых неотрицательных неубывающих $\xi_n \uparrow \xi$.

$$E\xi = \lim_{n\to\infty} E\xi_n$$

Так как $P(\xi = 0) = 1$, то $P(\xi_n = 0) = 1$, так как $0 \le \xi_n \le \xi$. Поэтому $\forall n \in \mathbb{N} \to E\xi_n = 0 \Rightarrow E\xi = 0$.

Если $\xi$ — произвольная, то $\xi = \xi^+ - \xi^-$, притом так как $P(\xi = 0) = 1$, то $P(\xi^+ = 0) = P(\xi^- = 0) = 1$. Значит

$$E\xi = E\xi^+ - E\xi^- = 0 - 0 = 0$$

$\square$

**Лемма.** *$|E\xi| \le E|\xi|$, если существует $E\xi$.*

*Доказательство.* $E\xi = E\xi^+ - E\xi^-$, $|\xi| = \xi^+ + \xi^-$. Тогда

$$E|\xi| = E\left(\xi^+ + \xi^-\right) = E\xi^+ + E\xi^-$$
$$|E\xi| = \left|E\left(\xi^+ - \xi^-\right)\right| = \left|E\xi^+ - E\xi^-\right|$$

$\square$

**Лемма.** *Если $E\xi, E\eta$ конечны, то $E(\xi + \eta) = E\xi + E\eta$.*

*Доказательство.* Пусть $\xi, \eta$ — неотрицательные случайные величины. Тогда существуют $\xi_n \uparrow \xi$, $\eta_n \uparrow \eta$. Тогда $\xi_n + \eta_n \uparrow \xi + \eta$ и последовательность $\xi_n + \eta_n$ неубывает. Тогда по определению

$$E(\xi + \eta) = \lim_{n\to\infty} E(\xi_n + \eta_n) = \lim_{n\to\infty} (E\xi_n + E\eta_n) = \lim_{n\to\infty} E\xi_n + \lim_{n\to\infty} E\eta_n = E\xi + E\eta$$

$\square$

**Лемма.** *Если существует $E\xi$, то $E(c\xi) = cE\xi$.*

*Доказательство.* Пусть $\xi \ge 0$, $c > 0$. Тогда $c\xi$ тоже неотрицательна. Если $\xi_n$ — последовательность неубывающих неотрицательных простых случайных величин $\xi_n \uparrow \xi$, то $c\xi_n \uparrow c\xi$.

$$Ec\xi = \lim E(c\xi_n) = c \lim E\xi_n = cE\xi$$

Пусть $c < 0$. Тогда $c\xi = -(c\xi)^-$, $(c\xi)^- = (-c)\xi^+$, $\xi = \xi^+$.

$$E(c\xi) = -E\left((c\xi)^-\right) = -E\left((-c)\,\xi^+\right) = -(-c)E\xi^+ = cE\xi$$

Пусть $\xi$ — произвольная, $c \ge 0$. Тогда

$$E(c\xi) = E\left(c\xi^+ - c\xi^-\right) = E\left((c\xi)^+ - (c\xi)^-\right) = cE\left(\xi^+ - \xi^-\right) = cE\xi$$

Если теперь $c < 0$, то $c\xi = (c\xi)^+ - (c\xi)^-$, $(c\xi)^+ = (-c)\xi^-$. $(c\xi)^- = (-c)\xi^+$. Тогда

$$Ec\xi = E\left(c\xi^+\right) - E\left(c\xi^-\right) = E\left((-c)\xi^-\right) - E\left((-c)\xi^+\right) = -cE\xi^- + cE\xi^+ = cE\xi$$

$\square$

**Лемма.** *Пусть $\forall A \in \mathcal{F} \to E\xi I_A \le E\eta I_A$. Тогда $P(\xi \le \eta) = 1$.*

*Доказательство.* Возьмем $B = \{\xi > \eta\} \in \mathcal{F}$. Если $\xi, \eta$ — случайные величины, то $(\xi, \eta)$ — случайный вектор. Возьмем

$\{(x, y) : \ x > y\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$, так как его образ есть $B$. Имеем $\xi I_B \geq \eta I_B$, тогда $E\xi I_B \geq E\eta I_B$, а следовательно

$$E\xi I_B = E\eta I_B \Rightarrow E\xi I_B + E\left(-\eta I_B\right) = 0 \Rightarrow E\left(\xi I_B - \eta I_B\right) = 0$$

$$\left(\xi - \eta\right) I_B \geq 0,\ E\left(\left(\xi - \eta\right) I_B\right) = 0 \Rightarrow P\left(\left(\xi - \eta\right) I_B = 0\right) = 1 \Leftrightarrow P\left(I_B = 0\right) = 1 \Rightarrow P\left(\xi \leq \eta\right) = 1$$

□

## 25. Теоремы об интеграле Лебега

**Теорема.** *(Лебега о мажорируемой сходимости) Пусть $\xi, \xi_1, \ldots$ — последовательность величин, такая что*

*(1) $\forall w \in \Omega\ \xi_n(w) \to \xi\left(w\right)$*

*(2) $\forall n \in \mathbb{N}$, $|\xi_n| \leq \eta$, где $\eta$ — случайная величина с конечным $E\eta$.*

*Тогда*

*(1) $E\xi_n \to E\xi$*

*(2) $E\left|\xi_n - \xi\right| \to 0$*

**Теорема.** *(о замене переменных в интеграле Лебега) Пусть $\xi$ — случайная величина, $\varphi$ — борелевская функция. Тогда*

$$E\varphi(\xi) = \int\limits_{\Omega} \varphi\left(\xi\left(w\right)\right) P(dw) = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x) \cdot P_\xi(dx)$$

*Доказательство.* Пусть $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\varphi = I_B$. Тогда $E\varphi(\xi) = EI\left(\xi \in B\right) = P\left(\xi \in B\right)$. С другой стороны

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x) \cdot P_\xi(dx) = E_{P_\xi}\varphi = E_{P_\xi} I_B = P_\xi(B)$$

Пусть теперь $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ — не пересекающиеся, $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$. $\varphi = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i I_{B_i}$ — простая. Тогда

$$E\varphi(\xi) = E\left(\sum_{i=1}^{n} c_i I\left(\xi \in B_i\right)\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i EI\left(\xi \in B_i\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i \int\limits_{\mathbb{R}} I_{B_i} \cdot P_\xi(dx)$$

С другой стороны

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x) P_\xi(dx) = \int\limits_{\mathbb{R}} \sum_{i=1}^{n} c_i I\left(x \in B_i\right) P_\xi(dx) = \sum_{i=1}^{n} c_i \int\limits_{\mathbb{R}} I\left(x \in B_i\right) P_\xi(dx)$$

Пусть теперь $\varphi \geq 0$. Тогда пусть $\varphi_n \uparrow \varphi$ — простые неотрицательные. Тогда $|\varphi_n| \leq \varphi$. Тогда по теореме Лебега о мажорируемой сходимости

$$E\varphi(\xi) = \lim_{n\to\infty} E\varphi_n(\xi) = \lim_{n\to\infty}\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi_n(x)\cdot P_\xi(dx) = \int\limits_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)\cdot P_\xi(dx) = \int\limits_{\mathbb{R}}\varphi(x)P_\xi(dx)$$

Пусть теперь $\varphi$ — произвольная. $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$. Тогда

$$E\varphi(\xi) = E\left(\varphi^+(\xi) - \varphi^-(\xi)\right) = E\varphi^+(\xi) - E\varphi^-(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}}\varphi^+(x)P_\xi(dx) - \int\limits_{\mathbb{R}}\varphi^-(x)P_\xi(dx) =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}}\left(\varphi^+(x) - \varphi^-(x)\right)P_\xi(dx) = \int\limits_{\mathbb{R}}\varphi(x)P_\xi(dx)$$

□

**Пример.**

(1) $\xi \sim N(0,1)$. $\varphi(x) = x^2$. Тогда

$$E\varphi(\xi) = E\xi^2 = \int\limits_{\mathbb{R}} x^2P_\xi(dx) = \int\limits_{\mathbb{R}} x^2\cdot P_\xi(x)\cdot dx = \int\limits_{\mathbb{R}}\frac{x^2}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\cdot dx =$$
$$= -\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{x}{\sqrt{2\pi}}d\left(\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right) = -\frac{x}{\sqrt{2\pi}}\cdot\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-\infty}^{+\infty} + \int\limits_{\mathbb{R}}\frac{\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}}\cdot dx = -(0-0)+1 = 1$$

(2) $\xi \sim \exp(3)\,,\ \varphi(x) = e^x$

$$Ee^\xi = \int\limits_0^{+\infty} 3e^x\cdot e^{-3x}\cdot dx = \int\limits_0^{+\infty} 3e^{-2x}\cdot dx = -\frac{3}{2}e^{-2x}\Big|_0^{+\infty} = \frac{3}{2}$$

(3) $\xi \sim Pois(\lambda)$, $\varphi(x) = e^x$

$$Ee^\xi = \int\limits_{\mathbb{R}} e^x\cdot P_\xi(dx) = \sum_{x=0}^{\infty} e^x\cdot\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{(e\lambda)^x}{x!} = e^{-\lambda}\cdot e^{e\lambda} = e^{\lambda(e-1)}$$

**Лекция 10. Дисперсия и ковариация случайных величин**

## 26. Дисперсия и ковариация

**Определение.** *Дисперсия* случайной величины $\xi$ определяется как $D\xi = E\left(\xi - E\xi\right)^2$.

*Утверждение.* $D\xi = E\left(\xi^2\right) - \left(E\xi\right)^2$

*Доказательство.* $D\xi = E\left(\xi - E\xi\right)^2 = E\left(\xi^2 - 2\xi E\xi + (E\xi)^2\right) = E\xi^2 - E\left(2\xi\cdot E\xi\right) + \left(E\xi\right)^2 = E\xi^2 - 2\left(E\xi\right)^2 + \left(E\xi\right)^2 = E\xi^2 - \left(E\xi\right)^2$ □

**Пример.** Если $\xi \sim N(0,1) \Rightarrow D\xi = 1$.

**Лемма.** $D\xi \geq 0$

*Доказательство.* $D\xi = E\left(\xi - E\xi\right)^2$. $\left(\xi - E\xi\right)^2 \geq 0 \Rightarrow D\xi \geq 0$ □

**Лемма.** $D\xi = 0 \Leftrightarrow \exists c: \ P(\xi = c) = 1$

*Доказательство.*
$\Rightarrow$. $D\xi = 0 \Rightarrow E(\xi - E\xi)^2 = 0 \Rightarrow P(\xi - E\xi = 0) = 1 \Rightarrow P(\xi = E\xi) = 1$
$\Leftarrow$. $P(\xi = c) = 1 \Rightarrow D\xi = E(\xi - E\xi)^2 = E(\xi - c)^2 = 0 \Rightarrow D\xi = 0$ □

**Определение.** *Ковариацией* случайных величин $\xi$ и $\eta$ называется

$$cov(\xi, \eta) = E((\xi - E\xi)(\eta - E\eta))$$

*Замечание.* $D\xi = cov(\xi, \xi)$

**Определение.** *Коэффициентом корреляции* величин $\xi$ и $\eta$ называется $\rho(\xi, \eta) = \frac{cov(\xi,\eta)}{\sqrt{D\xi D\eta}}$

**Лемма.** $cov(\xi, \eta) = E\xi\eta - E\xi E\eta$

*Доказательство.* $cov(\xi, \eta) = E(\xi\eta - \xi E\eta - \eta E\xi + E\xi E\eta) = E\xi\eta - E\xi E\eta - E\xi E\eta + E\xi E\eta = E\xi\eta - E\xi E\eta$ □

**Теорема.** *Если $\xi \perp\!\!\!\perp \eta$, то $E\xi\eta = E\xi E\eta$*

**Лемма.** *Если $\xi, \eta$ — независимы, то $cov(\xi, \eta) = 0$*

*Доказательство.* Очевидно следует из предыдущей теоремы □

**Лемма.** *(Билинейность ковариации) $cov(a_1\xi_1 + a_2\xi_2, \eta) = a_1 cov(\xi_1, \eta) + a_2 cov(\xi_2, \eta)$*

*Доказательство.*

$$\begin{aligned}cov(a_1\xi_1 + a_2\xi_2, \eta) &= E((a_1\xi_1 + a_2\xi_2)\eta) - E(a_1\xi_1 + a_2\xi_2)E\eta = \\ &= a_1E\xi_1\eta + a_2E\xi_2\eta - a_1E\xi_1E\eta - a_2E\xi_2\eta = a_1cov(\xi_1, \eta) + a_2cov(\xi_2, \eta)\end{aligned}$$

□

**Лемма.** $D(\xi_1 + \ldots + \xi_n) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} cov(\xi_i, \xi_j) = \sum\limits_{i=1}^{n} D\xi_i + \sum\limits_{i \neq j} cov(\xi_i, \xi_j)$

*Доказательство.* $D(\xi_1 + \ldots + \xi_n) = cov(\xi_1 + \ldots + \xi_n, \xi_1 + \ldots + \xi_n) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} cov(\xi_i, \xi_j)$ □

**Лемма.** *Если $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — попарно независимы, то $D(\xi_1 + \ldots + \xi_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} D\xi_i$*

*Доказательство.* Так как $\xi_i \perp\!\!\!\perp \xi_j$ при $i \neq j$, то $cov(\xi_i, \xi_j) = 0$. Тогда из предыдущей леммы получаем требуемое. □

**Пример.** Найдем дисперсии некоторых случайных величин
(1) $\xi \sim Bin(n, p)$. $D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = E\xi^2 - n^2p^2$.

$$\begin{aligned}E\xi^2 &= \sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k \cdot p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=2}^{n} k(k-1) C_n^k \cdot p^k (1-p)^{n-k} + \sum_{k=1}^{n} k \cdot C_n^k \cdot p^k (1-p)^{n-k} = \\ &= p^2 n(n-1) \sum_{k=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!} p^{k-2} (1-p)^{n-k} + np \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1} (1-p)^{n-k} = \\ &= p^2 \cdot n(n-1) + np = np(pn - p + 1)\end{aligned}$$

Итак, $D\xi = n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2 = np(1-p)$

Иначе, $\xi = \xi_1 + \ldots + \xi_n,\ \xi_i \sim Bern(p) \Rightarrow D\xi = \sum\limits_{i=1}^{n} D\xi_i = np\,(1-p)$

(2) $\xi \sim U\,[a;b]$. $D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = E\xi^2 - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$.

$$E\xi^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot \frac{1}{b-a} \cdot I\,(a \le x \le b) \cdot dx = \frac{b^3 - a^3}{3\,(b-a)} = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}$$

Итак, $D\xi = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \frac{a^2+2ab+b^2}{4} = \frac{(a-b)^2}{12}$

(3) $G(n,p)$, $\Omega$ — множество всех графов без петель и кратных ребер на $V = [n]$, $\mathcal{F} = 2^{\Omega},\ P(G) = p^{|E(G)|} \cdot (1-p)^{C_n^2 - |E(G)|}$.$\xi$ — число треугольников.

$$E\xi = C_n^3 \cdot p^3,\ D\xi = \sum_{i=1}^{C_n^3} D\xi_i + \sum_{i \ne j} cov\,(I_i, I_j) = C_n^3 p^3\,(1-p)^3 + \sum_{i \ne j} cov\,(I_i, I_j)$$

Все ковариации равны 0, кроме тех, что соответствую пересекающимся по ребру треугольникам.

$$\sum_{i \ne j} cov\,(I_i, I_j) = 2C_n^2 C_{n-2}^2\,(EI_iI_j - EI_iEI_j) = 2C_n^2 C_{n-2}^2\left(p^5 - p^6\right)$$

Итого, $D\xi = C_n^3 p^3\,(1-p)^3 + 2C_n^2 C_{n-2}^2 p^5\,(1-p)$.

**Лекция 11. Неравенства, связанные с математическими ожиданиями**

## 27. Неравенства Коши, Маркова, Чебышева и Йенсена

*Утверждение.* (Неравенство Коши-Буняковского-Шварца) Если $E\xi^2 < \infty,\ E\eta^2 < \infty$, то $E\,|\xi\eta| < \infty$ и $(E\,|\xi\eta|)^2 \le E\xi^2 E\eta^2$.

*Доказательство.* Если $E\xi^2 = 0$, то $P\,(\xi = 0) = 1 \Rightarrow P\,(|\xi\eta| = 0) = 1 \Rightarrow E\,|\xi\eta| = 0$

Если $E\xi^2 \ne 0,\ E\eta^2 \ne 0$, то положим $\widetilde{\xi} = \frac{\xi}{\sqrt{E\xi^2}},\ \widetilde{\eta} = \frac{\eta}{\sqrt{E\eta^2}}$. Тогда

$$2\left|\widetilde{\xi}\widetilde{\eta}\right| \le \widetilde{\xi}^2 + \widetilde{\eta}^2 \Rightarrow 2E\left|\widetilde{\xi}\widetilde{\eta}\right| \le E\widetilde{\xi}^2 + E\widetilde{\eta}^2 = 2 \Rightarrow E\left|\widetilde{\xi}\widetilde{\eta}\right| \le 1 \Rightarrow E\,|\xi\eta| \le \sqrt{E\xi^2 E\eta^2}$$

□

**Теорема.** *(Неравенство Маркова) Если* $E\,|\xi| < \infty$, *то* $\forall a > 0 \to P\,(|\xi| > a) \le \frac{E|\xi|}{a}$

*Доказательство.*

$E\,|\xi| = E\,(|\xi| \cdot I\,(|\xi| > a) + |\xi| \cdot I\,(|\xi| \le a)) = E\,|\xi|\,I\,(|\xi| > a) + E\,|\xi| \cdot I\,(|\xi| \le a) \ge E\,|\xi|\,I\,(|\xi| > a)$

Заметим, что $|\xi|\,I\,(|\xi| > a) \ge a \cdot I\,(|\xi| > a)$, поэтому

$$E\,|\xi|\,I\,(|\xi| > a) \ge a \cdot EI\,(|\xi| > a) = a \cdot P\,(|\xi| > a)$$

Итого, $P\,(|\xi| > a) \le \frac{E|\xi|}{a}$. □

**Теорема.** *(Неравенство Чебышева) Если* $E\xi^2 < \infty$, *то* $\forall a > 0 \to P\,(|\xi - E\xi| > a) \le \frac{D\xi}{a^2}$

*Доказательство.* По неравенству Маркова $P\left(|\xi - E\xi| > a\right) = P\left(\left(\xi - E\xi\right)^2 > a^2\right) \le \frac{E(\xi - E\xi)^2}{a^2} = \frac{D\xi}{a^2}$ □

*Замечание.* Неравенство Чебышева влечет важную теорему

**Теорема.** *(Закон больших чисел в форме Чебышева) Если $\xi_1, \xi_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с конечным вторым моментом ($E\xi^2 < \infty$), то $\forall \varepsilon > 0, \delta > 0 \to P\left(\left|\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n - n \cdot E\xi_1}{n^{1/2+\delta}}\right| > \varepsilon\right) \to 0$ при $n \to \infty$.*

*Доказательство.* По неравенству Чебышева $P\left(|S_n - ES_n| > \varepsilon n^{1/2+\delta}\right) \le \frac{DS_n}{\varepsilon^2 \cdot n^{1+2\delta}} = \frac{nD\xi_1}{\varepsilon^2 n^{1+2\delta}} = \frac{D\xi_1}{\varepsilon^2 n^{2\delta}} \to 0$ при $n \to \infty$. □

*Замечание.* $P\left(|S_n - ES_n| > n^{1/2+\delta} \cdot \varepsilon\right) \to 0$ при $n \to \infty$ значит, что $\frac{|S_n - ES_n|}{n^{1/2+\delta}} \xrightarrow{P} 0$ (сходимость по вероятности, о ней речь пойдет позже).

**Теорема.** *(Неравенство Йенсена) Если $E|\xi| < \infty,\ g(x)$ — выпукла вниз, то $Eg(\xi) \ge g(E\xi)$*

*Доказательство.* Из выпуклости вниз $g$ имеем $\forall x_0 \in \mathbb{R} \to \exists \lambda(x_0) \in \mathbb{R}:\ \forall x \to g(x) \ge g(x_0) + \lambda(x_0)(x - x_0)$.

Положим $x_0 = E\xi,\ x = \xi$. Тогда $g(\xi) \ge g(E\xi) + \lambda(E\xi)(\xi - E\xi) \Rightarrow Eg(\xi) \ge g(E\xi) + \lambda(E\xi) \cdot E(\xi - E\xi) = g(E\xi)$. □

*Замечание.* Например, с помощью неравенства Йенсена легко проверить $E|\xi| \ge |E\xi|,\ E\xi^2 \ge (E\xi)^2$.

**Лекция 12. Основные виды сходимости по вероятности**

## 28. Разные виды сходимости

**Определение.** Последовательность $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится *почти наверное* (*сходится с вероятностью 1*), если $P(\xi_n \to \xi) = 1$.

Мы будем писать $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$

**Определение.** *Сходимость в $L_p$.* Пусть $p > 0$, тогда $\xi_n \xrightarrow{L_p} \xi$, если $E|\xi_n - \xi|^p \to 0$.

*Замечание.* Предполагается, что $E|\xi| < \infty,\ E|\xi_n|^p < \infty$

**Определение.** *Сходимость по вероятности.* $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$, если $\forall \varepsilon > 0 \to P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) \to 0$.

**Определение.** *Слабая сходимость.* $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$, если для любой непрерывной ограниченной $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ верно $Ef(\xi_n) \to Ef(\xi)$.

## 29. Связь разных видов сходимостей

**Теорема.**

*(1) Если $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$, то $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$*

*(2) Если $\xi_n \xrightarrow{L_p} \xi$ для некоторого $p > 0$, то $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$*

*(3) Если $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$, то $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$*

*Доказательство.*

(1) Пусть $\varepsilon > 0$. Рассмотрим события

$$A_n = \{\omega \mid |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| \le \varepsilon\}$$
$$B_n = \{\omega \mid \forall k \ge n \to |\xi_k(\omega) - \xi(\omega)| \le \varepsilon\}$$

Ясно, что $B_n \subset A_n$.

$$B_n \uparrow B = \{\omega \mid \exists n \forall k \ge n \to |\xi_k(\omega) - \xi(w)| \le \varepsilon\}$$

Однако $P(\{w \mid \xi_n(w) \to \xi(w)\}) = 1 \Rightarrow P(B) = 1$. Итак, $\lim\limits_{n\to\infty} P(B_n) = 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} P(A_n) = 1$.

(2) $E|\xi_n - \xi|^p \to 0$. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда по неравенству Маркова получаем

$$P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) = P(|\xi_n - \xi|^p > \varepsilon^p) \le \frac{E|\xi_n - \xi|^p}{\varepsilon^p} \to 0$$

То есть $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$.

(3) Рассмотрим непрерывную ограниченную $f:\ \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) \le C$ и пусть $\varepsilon > 0$. Тогда:

(1) Из сходимости по вероятности $\exists k \in \mathbb{N}, \delta > 0:\ \forall n \ge k \to P(|\xi_n - \xi| \ge \delta) < \frac{\varepsilon}{6C}$
(2) $\exists N:\ P(|\xi| > N) < \frac{\varepsilon}{6C}$.

*Доказательство.* Пусть $\widetilde{\xi_i} = \xi \cdot I(|\xi| \le i)$. Тогда $\widetilde{\xi_i} \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi,\ i \to \infty \Rightarrow \widetilde{\xi_i} \xrightarrow{P} \xi$. Тогда

$$P\left(\left|\widetilde{\xi_i} - \xi\right| > \frac{1}{2}\right) \to 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}:\ P\left(|\xi_N - \xi| > \frac{1}{2}\right) < \frac{\varepsilon}{6C}$$

Однако, $P\left(\left|\widetilde{\xi_N} - \xi\right| > \frac{1}{2}\right) = P(|\xi| > N)$, так как события совпадают. □

(3) На любом отрезке $f$ равномерно непрерывна, поэтому $\forall x, y \in [-N - \delta; N + \delta]$, $|x - y| < \delta \to |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$

Теперь распишем нужную разность на три случая:

$$|Ef(\xi_n) - Ef(\xi)| = |E(f(\xi_n) - f(\xi))| = \Bigg|E\Bigg[(f(\xi_n) - f(\xi))\underbrace{I(|\xi| > N)}_{I_1}$$
$$+ (f(\xi_n) - f(\xi))\underbrace{I(|\xi| \le N, |\xi - \xi_n| \ge \delta)}_{I_2} + (f(\xi_n) - f(\xi))\underbrace{I(|\xi| \le N, |\xi - \xi_n| < \delta)}_{I_3}\Bigg]\Bigg| \le$$
$$E|f(\xi_n) - f(\xi)| I_1 + E|f(\xi_n) - f(\xi)| I_2 + E|f(\xi_n) - f(\xi)| I_3$$

Так как $|f(\xi_n) - f(\xi)| \le 2C$, то $E|f(\xi_n) - f(\xi)| I_1 \le 2C \cdot P(|\xi| > N) = \frac{\varepsilon}{3}$.

Также $E|f(\xi_n) - f(\xi)| I_2 \le E|f(\xi_n) - f(\xi)| \cdot I(|\xi - \xi_n| \ge \delta) \le 2C \cdot P(|\xi - \xi_n| \ge \delta) = \frac{\varepsilon}{3}$.

Наконец, по равномерной непрерывности $E|f(\xi_n) - f(\xi)| I_3 \le \frac{\varepsilon}{3} \cdot P(|\xi - \xi_n| < \delta, |\xi| \le N) \le \frac{\varepsilon}{3}$.

Итак, $|Ef(\xi_n) - Ef(\xi)| \le 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$, что и требовалось. □

## 30. Неэквивалентность разных видов сходимости

*Утверждение.* $\xi_n \xrightarrow{d} \xi \not\Rightarrow \xi_n \xrightarrow{P} \xi$.

*Доказательство.* Положим $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, $P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = \frac{1}{2}$.

Введем $\xi(\omega_1) = -1, \xi(\omega_2) = 1$, а $\xi_n(\omega_1) = 1$, $\xi_n(\omega_2) = -1$.

Тогда $Ef(\xi_n) = \frac{1}{2}f(1) + \frac{1}{2}f(-1) = Ef(\xi) \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{d} \xi$, однако $P\left(|\xi_n - \xi| > \frac{1}{2}\right) = 1$, то есть $\xi_n \overset{P}{\not\to} \xi$ □

*Утверждение.* $\xi_n \xrightarrow{P} \xi \not\Rightarrow \xi_n \xrightarrow{L_p} \xi$, а также $\xi_n \xrightarrow{P} \xi \not\Rightarrow \xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$.

*Доказательство.* $\Omega = [0;1]$, $P$ — мера Лебега на $[0;1]$. Рассмотрим $\xi = 0$ и последовательность

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= 2^{2/p} \cdot I\left(\omega \in \left[0; \frac{1}{2}\right]\right) \\
\xi_2 &= 2^{2/p} \cdot I\left(\omega \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]\right) \\
&\vdots \\
\xi_{2^n-1} &= 2^{2n/p} \cdot I\left(\omega \in \left[0; \frac{1}{2^n}\right]\right) \\
\xi_{2^n} &= 2^{2n/p} \cdot I\left(\omega \in \left[\frac{1}{2^n}; \frac{2}{2^n}\right]\right) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Пусть теперь $\varepsilon > 0$. $P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) = P(\xi_n \neq 0) \to 0$, то есть $\xi_n \xrightarrow{P} 0$.

При этом $\forall \omega \in [0;1]$, $k \in \mathbb{N} \to \exists n \geq k :\ |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| > 1 \Rightarrow \xi_n \overset{\text{п.н.}}{\not\to} \xi$.

Далее, $E|\xi_{2^n-1} - \xi|^p = 2^{2n} \cdot P(\xi_{2^n-1} \neq 0) = 2^n \to \infty$, то есть $\xi_n \overset{L_p}{\not\to} \xi$. □

*Утверждение.* $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi \not\Rightarrow \xi_n \xrightarrow{L_p} \xi$

*Доказательство.* $\Omega = [0;1]$, $P$ — мера Лебега на $[0;1]$, $\xi_n = 2^{n/p} \cdot I\left(\omega \leq \frac{1}{n}\right)$. Легко видеть, что $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} 0$, так как отрезок, где $\xi_n$ не нулевая сжимается к 0. Однако, $E|\xi_n|^p = 2^n \cdot P\left(\omega \leq \frac{1}{n}\right) = \frac{2^n}{n} \to \infty$, то есть $\xi_n \overset{L_p}{\not\to} \xi$. □

*Утверждение.* $\xi_n \xrightarrow{L_p} \xi \not\Rightarrow \xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$

*Доказательство.* $\Omega = [0;1]$, $P$ — мера Лебега на $[0;1]$, $\xi = 0$, $\xi_n$ возьмем как

$$\xi_1 = I\left(\omega \in \left[0; \frac{1}{2}\right]\right)$$
$$\xi_2 = I\left(\omega \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]\right)$$
$$\vdots$$
$$\xi_{2^n-1} = I\left(\omega \in \left[0; \frac{1}{2^n}\right]\right)$$
$$\xi_{2^n} = I\left(\omega \in \left[\frac{1}{2^n}; \frac{2}{2^n}\right]\right)$$
$$\vdots$$

$E\left|\xi_n\right|^p = P\left(\xi_n \neq 0\right) \to 0 \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{L_p} \xi$.

Однако $\xi_n \overset{\text{п.н.}}{\not\to} \xi$, так как $\forall \omega \in [0; 1]\,,\ n \in \mathbb{N} \to \exists k > n:\ \xi_k(\omega) = 1$. $\square$

### 31. Сходимость по вероятности

**Определение.** Последовательность $\xi_n \to \xi$ по распределению, если $F_{\xi_n}(x) \to F_\xi(x)$ для любого $x$ из множества точек непрерывности $F_\xi$.

**Теорема.** *(Александров) Следующие три утверждения равносильны*

*(1)* $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$

*(2)* $\xi_n \to \xi$ *по распределению*

*(3)* $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ P_\xi(\partial B) = 0 \to P_{\xi_n}(B) \to P(B)$

*Замечание.* Из (3) легко следует (2), остальное приведем без доказательства.

## Лекция 13. Лемма Бореля-Кантелли и случайные блуждания

### 32. Лемма Бореля-Кантелли

**Определение.** Рассмотрим последовательность $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$.

Все события $\{\omega \mid \forall k \in \mathbb{N} \to \exists n \geq k:\ \omega \in A_n\}$ будем называть *происходящими бесконечно часто.*

Иначе это множество можно записать как $A_{\text{п.б.ч}} = \bigcap\limits_{k \geq 1} \bigcup\limits_{n \geq k} A_n$

**Лемма.** *(Бореля-Кантелли) Для событий* $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ *выполнено следующее*

*(1) Если* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P\left(A_n\right) < \infty$, *то* $P\left(A_{\text{п.б.ч}}\right) = 0$

*(2) Если события* $A_1, A_2, \ldots$ *независимы в совокупности и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P\left(A_n\right) = \infty$, *то* $P\left(A_{\text{п.б.ч}}\right) = 1$

*Доказательство.* $\square$

(1) $P\left(A_{\text{п.б.ч.}}\right) = P\left(\bigcap\limits_{k\geq 1}\bigcup\limits_{n\geq k} A_n\right) = \lim\limits_{k\to\infty} P\left(\bigcup\limits_{n\geq k} A_n\right) \leq \lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{n\geq k} P\left(A_n\right) = 0,$ так как $\sum\limits_{n\geq k} P\left(A_n\right)$ — остаточный член сходящегося ряда.

(2)

$$P\left(\overline{A_{\text{п.б.ч}}}\right) = P\left(\bigcup_{k\geq 1}\bigcap_{n\geq k}\overline{A_n}\right) = \lim_{k\to\infty} P\left(\bigcap_{n\geq k}\overline{A_n}\right) = \lim_{k\to\infty}\prod_{n\geq k} P\left(\overline{A_n}\right) = \lim_{k\to\infty}\prod_{n\geq k}\left(1 - P\left(A_n\right)\right) =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\exp\left(\sum_{n\geq k}\ln\left(1 - P\left(A_n\right)\right)\right) \leq \lim_{k\to\infty}\exp\left(\sum_{n\geq k} - P\left(A_n\right)\right) = 0$$

*Замечание.* При помощи леммы Бореля-Кантелли мы позже докажем, что если $\xi_i$ — независимые случайные величины, $P\left(\xi_i = 1\right) = P\left(\xi_i = -1\right) = \frac{1}{2}$, а $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, то $\frac{S_n}{n^{1/2+\delta}} \overset{\text{п.н.}}{\to} 0$. При фиксированном положительном $\delta$ бесконечно часто происходит попадание в зону

$$\sqrt{2n\ln\ln n}\left(1 - \varepsilon\right) < S_n < \sqrt{2n\ln\ln n}\left(1 + \varepsilon\right)$$

что утверждает следующая теорема

**Теорема.** *(Закон повторного логарифма) Если $\xi_1, \ldots$ — независимые одинаково распределенные величины, $E\xi = 0,\ D\xi = 1$, то $P\left(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{|S_n|}{\sqrt{2n\ln\ln n}} = 1\right) = 1$.*

*Замечание.* Теорему приведем без доказательства.

**Пример.** Пусть $\xi_1, \ldots \sim \exp\left(1\right)$ — независимые. Тогда $P\left(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{\xi_n}{\ln n} = 1\right) = 1$.

$$P\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\xi_n}{\ln n} \leq 1\right) = 1 \Leftrightarrow P\left(\forall\varepsilon > 0\ \exists n\in\mathbb{N}:\ \forall k\geq n \to \frac{\xi_k}{\ln k} \leq 1 + \varepsilon\right) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall\varepsilon = \frac{1}{m} \to P\left(\exists n\in\mathbb{N}:\ \forall k\geq n \to \frac{\xi_k}{\ln k} \leq 1 + \varepsilon\right) = 1 \Leftrightarrow \forall\varepsilon = \frac{1}{m} \to P\overline{\left(\text{б. ч. }\frac{\xi_k}{\ln k} > 1 + \varepsilon\right)} = 1$$

Пользуясь леммой Бореля-Кантелли, получаем, что утверждение равносильно $\forall\varepsilon = \frac{1}{m} \to \sum\limits_{k=1}^{\infty} P\left(\frac{\xi_k}{\ln k} \leq 1 + \varepsilon\right) < \infty$. Проверим это, для нашего распределения:

$$P\left(\xi_k > \left(1 + \varepsilon\right)\cdot\ln k\right) = 1 - F_{\xi_k}\left(\left(1 + \varepsilon\right)\cdot\ln k\right) = \exp\left(-\left(1 + \varepsilon\right)\cdot\ln k\right) = k^{-1-\varepsilon}$$

Так как ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{-1-\varepsilon}$ сходится для $\varepsilon > 0$, то $P\left(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{\xi_n}{\ln n} \leq 1\right) = 1$

В другую сторону, проделаем аналогичные вычисления:

$$P\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\xi_n}{\ln n} \geq 1\right) = 1 \Leftrightarrow \forall\varepsilon = \frac{1}{m} \to P\left(\frac{\xi_n}{\ln n} \geq 1 - \varepsilon\text{ б.ч.}\right) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall\varepsilon = \frac{1}{m} \to \sum_{k=1}^{\infty} P\left(\frac{\xi_k}{\ln k} \geq 1 - \varepsilon\right) = \infty \Leftrightarrow \forall\varepsilon = \frac{1}{m} \to \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1+\varepsilon} = \infty$$

Последнее выполнено, а значит, в итоге получаем $P\left(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{\xi_n}{\ln n} = 1\right) = 1$.

## 33. Простейшие случайные блуждания

**Определение.** Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины. *Случайным блужданием* называется последовательность величин $S_i = \sum\limits_{j=1}^{j<i} \xi_j$.

Если $P(\xi_1 = 1) = p,\ P(\xi_1 = -1) = 1 - p$, то случайное блуждание называется *простейшим.*

Если $p = \frac{1}{2}$, то оно называется *симметричным.*

При фиксированном $w$ последовательность $S_0(w), S_1(w), \ldots$ называется *траекторией* случайного блуждания.

*Утверждение.* (Принцип отражения) Пусть есть простейшее случайное блуждание. Количество путей из $(0;0)$ в $(n;x)$ есть $N(n,x) = C_n^{\frac{n+x}{2}}$. Тогда количество $N_0(n,x)$ путей из $(0;0)$ в $(n;x)$, не пересекающих $y = 0$ есть

$$N_0(n,x) = N(n-1, x-1) - N(n-1, x+1)$$

*Доказательство.* Первый шаг всех этих путей идет вверх (если $x > 0$). Пусть есть какой-то путь из $(1;1)$, пересекающий $y = 0$. Тогда рассмотрим первое пересечение в точке $n_0$ и отразим участок пути $[0;n_0]$ относительно оси $Ox$. Это биекция с множеством путей из точки $(1;-1)$ в $(n;x)$. Итого, количество искомых путей есть

$$N_0(n,x) = N(n-1, x-1) - N(n-1, x+1)$$

Расписав вероятность каждой траектории, получаем:

$$P(S_1 > 0, \ldots, S_{n-1} > 0, S_n = x) = p^{\frac{n+x}{2}} (1-p)^{\frac{n-x}{2}} \left( C_{n-1}^{\frac{n+x}{2}-1} - C_{n-1}^{\frac{n+x}{2}} \right)$$

$\square$

## 34. Усиленные законы больших чисел

**Теорема.** *(Усиленный закон больших чисел (УЗБЧ) для независимых случайных величин с конечными дисперсиями)*

*Пусть $\xi_1, \ldots$ — независимые случайные величины, имеющие ожидание $E\xi_i$ и второй момент $E\xi_i^2 < \infty$.*

*Пусть $0 < b_1 < b_2 < \ldots,\ b_n \uparrow \infty$ при $n \to \infty$ и при этом $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{D\xi_n}{b_n^2} < \infty$.*

*Тогда почти наверное $\frac{S_n - ES_n}{b_n} \to 0$.*

*Замечание.* Если $b_n = n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{D\xi_n}{n^2} < \infty$, то $\forall \delta > 0 \to \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{S_n - ES_n}{n^{1+\delta}} < \infty \Rightarrow$ почти наверное $\frac{S_n + ES_n}{n^{1/2+\delta}} \to 0$.

**Теорема.** *(УЗБЧ для независимых одинаково распределенных случайных величин с конечными математическими ожиданиями)*

*Пусть $\xi_1, \ldots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, $E|\xi_i| < \infty$, тогда почти наверное $\frac{S_n - ES_n}{n} \to 0$ при $n \to \infty$.*

## 35. Фундаментальность по вероятности и с вероятностью 1

**Определение.** Последовательность $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *фундаментальна с вероятностью* $1$, если $P(\{\xi_n\}$ — фундаментальна$) = 1$.

Последовательность $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *фундаментальна по вероятности*, если $\lim\limits_{n,m\to\infty} P\left(|\xi_n - \xi_m| \geq \varepsilon\right) \to 0$.

**Теорема.** *(критерий сходимости с вероятностью 1). Пусть $\{\xi_n\}$ — последовательность случайных величин. Тогда $\exists\xi$, равная пределу почти наверное последовательности $\{\xi_n\}$ тогда и только тогда, когда $\{\xi_n\}$ — фундаментальна с вероятностью 1.*

*Доказательство.* Пусть $\xi_n \overset{\text{п.н.}}{\to} \xi,\ n\to\infty$. Пусть $A = \{\omega \mid \xi_n(\omega) \to \xi(\omega)\}\,,\ P(A) = 1$.

$\forall\omega\in A \to \{\xi_n(\omega)\}$ — фундаментальна, значит $P\left(\{\xi_n\}\right.$ — фундаментальна$\left.\right) = 1$.

Пусть $\{\xi_n\}$ — фундаментальна с вероятностью 1. Пусть $A = \{\omega:\ \{\xi_n(\omega)\}$ — фундаментальна$\}$.

$\forall\omega\in A \to \exists\xi(\omega):\ \xi_n(\omega)\to\xi(\omega),\ n\to\infty.\forall\omega\in\overline{A}$ положим $\xi(\omega) = 0$. Тогда $\xi_n \overset{\text{п.н.}}{\to} \xi,\ n\to\infty$. □

**Теорема.** *(критерий сходимости по вероятности). Пусть $\{\xi_n\}$ — последовательность случайных величин. Тогда $\exists\xi:\ \xi_n \overset{P}{\to} \xi,\ n\to\infty$, тогда и только тогда, когда $\{\xi_n\}$ — фундаментальна по вероятности.*

*Доказательство.* Если $\{\xi_n\}$ сходится по вероятности, то

$$P(|\xi_n - \xi_m| \geq \varepsilon) \leq P\left(\left(|\xi_n - \xi| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) \vee \left(|\xi_m - \xi| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right)\right) \leq$$
$$\leq P\left(|\xi_n - \xi| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) + P\left(|\xi_m - \xi| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) \underset{n,m\to\infty}{\to} 0$$

Пусть $\{\xi_n\}$ — фундаментальна.

**Лемма.** *Если $\{\xi_n\}$ — фундаментальна по вероятности, то из нее можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся с вероятностью 1.*

*Доказательство.* Положим $n_1 = 1$. Далее
$$n_j = \min\left\{k > n_{j-1}:\ \forall r,s \geq k \to P\left(|\xi_r - \xi_s| \geq 2^{-j+1}\right) < 2^{-j+1}\right\}$$
. Это можно сделать, так как последовательность фундаментальна с вероятностью 1.

$\sum\limits_{j=1}^{\infty} P\left(\left|\xi_{n_{j+1}} - \xi_{n_j}\right| > 2^{-j+1}\right) < \sum\limits_{j=1}^{\infty} 2^{-j+1} < \infty$. Поэтому по лемме Бореля-Кантелли имеем

$$P\left(\left|\xi_{n_j+1} - \xi_{n_j}\right| \geq 2^{-j+1} \text{ бесконечное число раз}\right) = 0$$

Тогда $P\left(\sum\limits_{j=1}^{\infty}\left|\xi_{n_{j+1}} - \xi_{n_j}\right| < \infty\right) = 1$.

Рассмотрим $A = \left\{\omega:\ \sum\limits_{j=1}^{\infty}\left|\xi_{n_{j+1}}(\omega) - \xi_{n_j(\omega)}\right| < \infty\right\},\ P(A) = 1.$

$$\forall \omega \in A \to \exists \xi(\omega): \lim_{j\to\infty} \xi_{n_j}(\omega) = \lim_{j\to\infty} \left(\xi_{n_1}(\omega) + (\xi_{n_2}(\omega) - \xi_{n_1}(\omega)) + \ldots + \left(\xi_{n_j}(\omega) - \xi_{n_{j-1}}(\omega)\right)\right) =$$
$$= \xi_{n_1}(\omega) + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\xi_{n_{j+1}}(\omega) - \xi_{n_j}(\omega)\right)$$

Для всех $\omega \notin A,\ \xi(\omega) := 0 \Rightarrow \xi_{n_j} \overset{\text{п.н.}}{\to} \xi,\ j \to \infty.$ □

$\xi_{n_j}$ — подпоследовательность, сходящаяся к $\xi$ с вероятностью 1, значит $\xi_{n_j} \overset{P}{\to} \xi,\ j \to \infty.$

$$P\left(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon\right) \leq P\left(\left|\xi_n - \xi_{n_j}\right| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) + P\left(\left|\xi_{n_j} - \xi\right| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) \to 0$$

□

**Теорема.** *(Критерий фундаментальности с вероятностью 1). Последовательность* $\{\xi_n\}$ *фундаментальна с вероятностью 1 тогда и только тогда, когда*

$$\forall \varepsilon > 0 \to P\left(\sup_{k\geq 1} |\xi_{n+k} - \xi_n| \geq \varepsilon\right) \to 0,\ n \to \infty$$

.

*Доказательство.* $\{\xi_n\}$ — фундаментальна с вероятностью 1 равносильно

$$P\left(\exists \varepsilon > 0,\ \forall n \in \mathbb{N} \to \exists m \in \mathbb{N}:\ |\xi_n - \xi_m| > \varepsilon\right) = 0$$
$$P\left(\exists s \in \mathbb{N}:\ \forall n \in \mathbb{N} \to \exists m \in \mathbb{N}:\ |\xi_n - \xi_m| > \frac{1}{s}\right) = 0$$
$$\forall s \in \mathbb{N} \to P\left(\forall n \in \mathbb{N} \to \exists m \in \mathbb{N}:\ |\xi_n - \xi_m| > \frac{1}{s}\right) = 0$$
$$\forall s \in \mathbb{N} \to \lim_{n\to\infty} P\left(\exists m \in \mathbb{N}:\ |\xi_n - \xi_m| > \frac{1}{s}\right) = 0$$
$$\forall \varepsilon > 0 \to \lim_{n\to\infty} P\left(\exists m \in \mathbb{N}:\ |\xi_n - \xi_m| > \varepsilon\right) = 0$$
$$\forall \varepsilon > 0 \to \lim_{n\to\infty} P\left(\sup_{k\geq 1} |\xi_{n+k} - \xi_n| > \varepsilon\right) = 0$$

□

## 36. Неравенство Колмогорова

**Теорема.** *(неравенство Колмогорова) Пусть* $\xi_1, \ldots, \xi_n$ *— независимые случайные величины,* $E\xi_i = 0$ *и* $E\xi_i^2 < \infty$. *Тогда*

*(1)* $P\left(\max\limits_{1\leq k\leq n} |S_k| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{ES_n^2}{\varepsilon^2}$

*(2) Если дополнительно* $\exists c > 0:\ \forall i \to P\left(|\xi_i| < c\right) = 1$, *то* $P\left(\max\limits_{1\leq k\leq n} |S_k| \geq \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{(c+\varepsilon)^2}{ES_n^2}$

*Доказательство.* Рассмотрим $A_k = \{\omega : \ |S_1(\omega)| < \varepsilon, \ldots, |S_{k-1}(\omega)| < \varepsilon, |S_k(\omega)| \geq \varepsilon\}$, а также $A = \left\{\omega : \max\limits_{1\leq k\leq n} |S_k(\omega)| \geq \varepsilon\right\}$. Очевидно, $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} A_k$.

$$(1)\ ES_n^2 = ES_n^2 I_A + ES_n^2 I_{\overline{A}} \geq ES_n^2 I_A = E\left(S_n^2 \sum_{k=1}^{n} I_{A_k}\right) = \sum_{k=1}^{n} ES_n^2 I_{A_k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} E\left((S_n - S_k) + S_k\right)^2 I_{A_k} = \sum_{k=1}^{n}\left(E\left(S_n - S_k\right)^2 I_{A_k} + 2E\underbrace{(S_n - S_k)}_{\xi_{k+1}+\ldots+\xi_n}\underbrace{S_k I_{A_k}}_{\xi_1+\ldots\xi_k} + ES_k^2 I_{A_k}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\Big(E\left(S_n - S_k\right)^2 I_{A_k} + 2E\left(S_n - S_k\right)\cdot ES_k I_{A_k} + ES_k^2 I_{A_k}\Big) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\Big(E\left(S_n - S_k\right)^2 I_{A_k} + ES_k^2 I_{A_k}\Big) \geq \sum_{k=1}^{n} ES_k^2 IA_k \geq$$

$$\geq \varepsilon^2 \sum_{k=1}^{n} EI_{A_k} = \varepsilon^2 EI_A = \varepsilon^2 P(A) \Rightarrow P(A) \leq \frac{ES_n^2}{\varepsilon^2}$$

$$(2)\ ES_n^2 = ES_n^2 I_A + ES_n^2 I_{\overline{A}} \leq ES_n^2 I_A + \varepsilon^2 EI_{\overline{A}} = \sum_{k=1}^{n} E\left((S_n - S_k) + S_k\right)^2 I_{A_k} + \varepsilon^2 (1 - P(A)) \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} E\left(S_n - S_k\right)^2 EI_{A_k} + \sum_{k=1}^{n} ES_k^2 I_{A_k} + \varepsilon^2\left(1 - P(A)\right)$$

Так как $|S_k| = |S_{k-1} + \xi_k| \leq |S_{k-1}| + |\xi_k| \leq c + \varepsilon$, то продолжаем

$$\leq (\varepsilon + c)^2 \sum_{k=1}^{n} I_{A_k} + \varepsilon^2\left(1 - P(A)\right) + \sum_{k=1}^{n} E\left(\xi_{k+1} + \ldots + \xi_n\right)^2 EI_{A_k}$$

$E\left(\xi_{k+1} + \ldots + \xi_n\right)^2 = \sum\limits_{j=k+1}^{n} E\xi_j^2 + 2\sum\limits_{i,j} E\xi_i\xi_j \leq \sum\limits_{j=1}^{n} E\xi_j^2 = ES_n^2$. Тогда можем продолжить:

$P(A)\left(ES_n^2 + c^2 + 2\varepsilon c\right) \geq ES_n^2 - \varepsilon^2 \Rightarrow P(A) \geq 1 - \frac{(\varepsilon+c)^2}{ES_n^2 + c^2 + 2\varepsilon c} \geq 1 - \frac{(c+\varepsilon)^2}{ES_n^2}$, что и требовалось. □

**Лекция 14. Усиленные законы больших чисел**

### 37. УЗБЧ для независимых случайных величин с конечными дисперсиями

**Теорема.** *(Усиленный закон больших чисел (УЗБЧ) для независимых случайных величин с конечными дисперсиями)*

*Пусть $\xi_1, \ldots$ — независимые случайные величины, имеющие ожидание $E\xi_i$ и второй момент $E\xi_i^2 < \infty$.*

*Пусть $0 < b_1 < b_2 < \ldots,\ b_n \uparrow \infty$ при $n \to \infty$ и при этом $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{D\xi_n}{b_n^2} < \infty$.*

*Тогда почти наверное $\frac{S_n - ES_n}{b_n} \to 0$.*

*Доказательство.* Предположим, что $E\xi_i = 0$ (вычитание константы сохраняет верность посылок теоремы).

Рассмотрим $S'_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\xi_i}{b_i}$ и покажем, что она сходится почти наверное. По критерию, нам нужно показать фундаментальность с вероятностью 1, то есть то, что $P\left(\sup\limits_{k\geq 1}\left|\sum\limits_{i=n}^{n+k}\frac{\xi_i}{b_i}\right| > \varepsilon\right) \to 0$ при $n \to \infty$.

$$P\left(\sup_{k\geq 1}\left|\sum_{i=n}^{n+k}\frac{\xi_i}{b_i}\right| > \varepsilon\right) = \lim_{k\to\infty} P\left(\max_{1\leq i\leq k}\left|\sum_{j=n}^{n+i}\frac{\xi_j}{b_j}\right| > \varepsilon\right)$$

Распишем по неравенству Колмогорова, учитывая, что $E\xi_i = 0 \Rightarrow E\xi_i^2 = D\xi_i$

$$\lim_{k\to\infty} P\left(\max_{1\leq i\leq k}\left|\sum_{j=n}^{n+i}\frac{\xi_j}{b_j}\right| > \varepsilon\right) \leq \lim_{k\to\infty}\frac{E\left(\sum\limits_{i=n}^{n+k}\frac{\xi_i}{b_i}\right)^2}{\varepsilon^2} = \lim_{k\to\infty}\frac{\sum\limits_{i=n}^{n+k}E\frac{\xi_i^2}{b_i^2} + \sum\limits_{n\leq i\neq j\leq n+k} E\left(\frac{\xi_i\xi_j}{b_ib_j}\right)}{\varepsilon^2} =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\frac{\sum\limits_{i=n}^{n+k}\frac{\overbrace{E\xi_i^2}^{=D\xi_i}}{b_i^2} + \sum\limits_{n\leq i\neq j\leq n+k}\frac{\overbrace{E\xi_iE\xi_j}^{=0}}{b_ib_j}}{\varepsilon^2} = \lim_{k\to\infty}\frac{\sum\limits_{i=n}^{n+k}\frac{D\xi_i}{b_i^2}}{\varepsilon^2} = \frac{\sum\limits_{i=n}^{\infty}\frac{D\xi_i}{b_i^2}}{\varepsilon^2}$$

Последнее стремится к 0 при $n \to \infty$ как остаточный член сходящегося ряда.

Итак, $\exists \xi : \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\xi_n}{b_n} \overset{\text{п.н.}}{\to} \xi$. Докажем, что $\frac{S_n}{b_n} \overset{\text{п.н.}}{\to} 0$. Для этого нам потребуется две леммы.

**Лемма.** *(Теплиц) Пусть* $x_n \to x,\ a_n > 0,\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$, *тогда* $\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k x_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k} \to x$ *при* $n \to \infty$.

*Доказательство.* $\forall\varepsilon > 0 \to \exists n \geq n_0 :\ |x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ из условия. Рассмотрим

$$\left|\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k x_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k} - x\right| = \left|\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k(x_k - x)}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k}\right| \leq \left|\frac{\sum\limits_{k=1}^{n_0} a_k(x_k - x)}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k}\right| + \sum_{k=n_0+1}^{n}\left|\frac{a_k(x_k - x)}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k}\right| <$$

$$< \left|\frac{\sum\limits_{k=1}^{n_0} a_k(x_k - x)}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k}\right| + \frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{\sum\limits_{k=n_0+1}^{n} a_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k} \leq \left|\frac{\sum\limits_{k=1}^{n_0} a_k(x_k - x)}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k}\right| + \frac{\varepsilon}{2}$$

так как ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ — расходится, то $\exists n_1 > n_0 :\ \left|\frac{\sum\limits_{k=1}^{n_0} a_k(x_k - x)}{\sum\limits_{k=1}^{n_1} a_k}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$, тогда искомая разность меньше $\varepsilon$, что нам и надо. □

**Лемма.** *(Кронекер) Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n = x,\ b_n \uparrow +\infty$. *Тогда* $\frac{1}{b_n}\sum\limits_{k=1}^{n} x_k b_k \to 0$ *при* $n \to \infty$.

*Доказательство.* Обозначим через $a_i = b_i - b_{i-1}$, где $b_0 = 0$, тогда $b_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$.

$$\sum_{k=1}^{n} x_k b_k = \sum_{k=1}^{n} x_k \sum_{i=1}^{k} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{k=i}^{n} x_k$$

Введем $y_i = \sum\limits_{k=i}^{\infty} x_k$, тогда

$$\left|\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n} x_k b_k\right| = \left|\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \sum\limits_{k=i}^{n} x_k}{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i}\right| \le \left|\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \sum\limits_{k=i}^{\infty} x_k}{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i}\right| + \left|\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} x_k}{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i}\right|$$

Так как $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k = x$, то $y_i \to 0$ при $i \to \infty$, и $a_i > 0$, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i = \infty$, тогда по лемме Теплица

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i y_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i} \to 0$$

То есть $\exists n_0 : \ \forall n \ge n_0 \to \left|\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} a_i}\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \ |y_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Итак, при $n \ge n_0$

$$\left|\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n} x_k b_k\right| \le \left|\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i y_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i}\right| + \left|\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i y_{n+1}}{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i}\right| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\left|\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i}\right| = \varepsilon$$

□

Вернемся к доказательству УЗБЧ. Рассмотрим $A = \left\{\omega \mid \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n(\omega)}{b_n} \to \xi(\omega)\right\}$, $P(A) = 1$. $\forall \omega \in A$ положим $x_n = \frac{\xi_n(\omega)}{b_n}$, тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n = \xi(\omega)$. По лемме Кронекера

$$\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n} x_k b_k = \frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k(\omega) \to 0$$

Следовательно, так как $P(A) = 1$, то $\frac{\sum_{k=1}^{n} \xi_k}{b_n} \xrightarrow{\text{п.н.}} 0$. □

## 38. УЗБЧ для независимых одинаково распределенных случайных величин с конечными ожиданиями

**Теорема.** *(УЗБЧ для независимых одинаково распределенных случайных величин с конечными математическими ожиданиями)*

*Пусть $\xi_1, \ldots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, $E|\xi_i| < \infty$, тогда почти наверное $\frac{S_n - ES_n}{n} \to 0$ при $n \to \infty$.*

*Доказательство.* Положим снова $E\xi_n = 0$, а также $\widetilde{\xi_n} = \xi_n I\left(|\xi_n| < n\right)$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(|\xi_1| \geq n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot P\left(n \leq |\xi_1| < n+1\right) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot EI\left(n \leq |\xi_1| < n+1\right) =$$
$$= E\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot I\left(n \leq |\xi_1| < n+1\right)$$

Заметим, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot I\left(n \leq |\xi_1| < n+1\right) \leq |\xi_1| \leq 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot I\left(n \leq |\xi_1| < n+1\right)$ тогда

$$E|\xi_1| < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot I\left(n \leq |\xi_1| < n+1\right) < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} P\left(|\xi_1| \geq n\right) < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} P\left(|\xi_n| \geq n\right) < \infty$$

Величины независимы, поэтому по лемме Бореля-Кантелли имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(|\xi_n| \geq n\right) < \infty \Leftrightarrow P\left(|\xi_n| \geq n \text{ бесконечно часто}\right) = 0$$

Обозначим $A = \{\omega \mid |\xi_n(\omega)| \geq n \text{ б.ч.}\}$, $P(A) = 0$. $\forall \omega \in \overline{A} \to \widetilde{\xi_n}$ и $\xi_n$ отличаются в конечном числе точек, значит

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \widetilde{\xi}_k(\omega)}{n} \to 0 \Leftrightarrow \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k(\omega)}{n} \to 0$$

$E\widetilde{\xi_n} = E\xi_n I\left(|\xi_n| < n\right) = E\xi_1 I\left(|\xi_1| < n\right) \to 0$ при $n \to \infty$. Действительно, $\xi_1 I\left(|\xi_1| < n\right) \overset{\text{п.н.}}{\to} \xi_1$, а также $|\xi_1 I\left(|\xi_1| < n\right)| \leq |\xi_1|$, причем $E|\xi_1| < \infty$, то есть по теореме Лебега о мажорируемой сходимости $E\xi_1 I\left(|\xi_1| < n\right) \underset{n\to\infty}{\to} E\xi_1 = 0$.

Тогда по лемме Теплица $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{E\widetilde{\xi}_k}{n} \to 0$ $(x_k = E\widetilde{\xi}_k \to 0,\ a_k = 1)$. Следовательно, $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\widetilde{\xi}_k(\omega) - E\widetilde{\xi}_k}{n} \to 0 \Leftrightarrow \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\xi_k(\omega)}{n} \to 0$.

Итак, нужно доказать, что $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\widetilde{\xi}_k(\omega) - E\widetilde{\xi}_k}{n} \overset{\text{п.н.}}{\to} 0$ при $n \to \infty$. Рассмотрим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{E\widetilde{\xi}_n^2}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} E\widetilde{\xi}_n^2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} I\left(k-1 \leq \left|\widetilde{\xi}_n\right| < k\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} E\sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot I\left(k-1 \leq \left|\widetilde{\xi}_n\right| < k\right) =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} E\sum_{k=1}^{n} k^2 \cdot I\left(k-1 \leq \left|\widetilde{\xi}_n\right| < k\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} E\sum_{k=1}^{n} k^2 \cdot I\left(k-1 \leq |\xi_n| < k\right) =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k^2 \cdot P\left(k-1 \leq |\xi_1| < k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot P\left(k-1 \leq |\xi_1| < k\right) \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Оценим $\sum\limits_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \int\limits_{k-1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_{k-1}^{+\infty} = \frac{1}{k-1}$. Тогда можно продолжить

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{E\widetilde{\xi}_n^2}{n^2} \le \sum_{k=1}^{\infty}k^2 \cdot P\left(k-1 \le |\xi_1| < k\right)\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{n^2} \le \sum_{k=1}^{\infty}k^2 \cdot \frac{2}{k} \cdot P\left(k-1 \le |\xi_1| < k\right) \le$$
$$\le 2\sum_{k=1}^{\infty}k \cdot P\left(k-1 \le |\xi_1| < k\right) \le 2\left(E\left|\xi_1\right| + 1\right) < \infty$$

Итак, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{D\widetilde{\xi}}{n^2} < \infty$, тогда аналогично предыдущему УЗБЧ из неравенства Колмогорова получаем, что $\exists \xi$ : $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\widetilde{\xi}_n - E\xi\right)}{n} \overset{\text{п.н.}}{\to} \xi$, тогда по лемме Кронекера $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\widetilde{\xi}_k - E\xi_k\right) \overset{\text{п.н.}}{\to} 0$, то есть $\frac{1}{n} \cdot \sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k \overset{\text{п.н.}}{\to} 0$, $n \to \infty$, что нам и нужно. □

## 39. Неравенство больших уклонений в УЗБЧ

*Замечание.* Итак, мы получили закон больших чисел: если $\xi_1, \ldots$ — независимые одинаково распределенные величины с конечным ожиданием, то $P\left(\left|\frac{S_n - ES_n}{n}\right| \ge \varepsilon\right) \to 0$ при $n \to \infty$. Докажем, что характер стремления к 0 экспоненциальный.

**Теорема.** *(Неравенство больших уклонений в УЗБЧ) В условия УЗБЧ, если существуют также все моменты, то $\exists c_1, c_2 > 0$, такие, что*

$$P\left(\left|\frac{S_n - ES_n}{n}\right| \ge \varepsilon\right) \le \exp\left(-c_1 \cdot n\right) + \exp\left(-c_2 \cdot n\right)$$

*Доказательство.* Рассмотрим $\varphi_\xi(\lambda) = \ln E\exp\left(\lambda\xi\right)$ и $U$ — некоторую окрестность нуля, в которой $\varphi_\xi$ бесконечно дифференцируема (такая есть, так как есть все моменты). Тогда

$$\varphi_\xi'\left(\lambda\right)\Big|_{\lambda=0} = \frac{E\xi \cdot \exp\left(\lambda\xi\right)}{E\exp\left(\lambda\xi\right)}\Big|_{\lambda=0} = E\xi$$
$$\varphi_\xi''\left(\lambda\right)\Big|_{\lambda=0} = \frac{E\xi^2\exp\left(\lambda\xi\right)E\exp\left(\lambda\xi\right) - \left(E\xi\exp\left(\lambda\xi\right)\right)^2}{\left(E\exp\left(\lambda\xi\right)\right)^2}\Big|_{\lambda=0} = D\xi > 0$$

Пусть теперь $\tau_\xi(a) = \sup\limits_{\lambda \in U}\left(a\lambda - \varphi_\xi\left(\lambda\right)\right)$.

Заметим, что

$$\tau_\xi(E\xi) = 0$$
$$a > E\xi \to \tau_\xi(a) = \sup_{\lambda>0, \lambda\in U}\left(a\lambda - \varphi_\xi(\lambda)\right) > 0$$
$$a < E\xi \to \tau_\xi(a) = \sup_{\lambda<0, \lambda\in U}\left(a\lambda - \varphi_\xi(\lambda)\right) < 0$$

Теперь распишем по неравенству Маркова

$$P\left(\frac{S_n - ES_n}{n} \geq \varepsilon\right) = P\left(\exp\left(\lambda \cdot \frac{S_n - ES_n}{n}\right) \geq \exp(\lambda\varepsilon)\right) \leq \frac{E\exp\left(\lambda \cdot \frac{S_n - ES_n}{n}\right)}{\exp(\lambda\varepsilon)} =$$
$$= \exp\left(-\varepsilon\lambda - \ln E\exp\left(\lambda \cdot \frac{S_n - ES_n}{n}\right)\right) = \exp\left(-\varepsilon\lambda - \ln\prod_{i=1}^{n}\exp\left(\lambda \cdot \frac{\xi_i - E\xi_i}{n}\right)\right) =$$
$$= \exp -n\left(-\varepsilon\frac{\lambda}{n} - \ln E\exp\left(\lambda \cdot \frac{\xi - E\xi}{n}\right)\right) \leq \exp\left(-n \cdot \underbrace{\tau_{\xi - E\xi}(\varepsilon)}_{>0}\right) = \exp(-n \cdot c_1)$$

Аналогично, $P\left(\frac{S_n - ES_n}{n} \leq -\varepsilon\right) \leq \exp(-n \cdot c_2)$. Итак, получаем требуемое

$$P\left(\left|\frac{S_n - ES_n}{n}\right| \geq \varepsilon\right) \leq \exp(-c_1 \cdot n) + \exp(-c_2 \cdot n)$$

$\square$

**Лекция 15. Характеристические функции**

## 40. Характеристическая функция случайной величины

**Определение.** *Характеристической функцией* случайной величины называется функция

$$\varphi_\xi(t) = E\exp(it\xi)$$

**Определение.** *Характеристической функцией* случайного вектора называется функция

$$\varphi_\xi(t) = E\exp(i\langle t, \xi\rangle)$$

**Пример.**

(1) $\xi \sim Bern(p)$, $\varphi_\xi(t) = \exp(it \cdot 1) \cdot p + \exp(it \cdot 0) \cdot (1-p) = p \cdot \exp(it) + q$

(2) $\xi \sim U(a,b)$. $\varphi_\xi(t) = \int\limits_a^b \exp(itx)\frac{1}{b-a} \cdot dx = \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$

(3) $\xi \sim N(0,1)$. $\varphi_\xi(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{itx}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot dx = \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$

(4) $\xi \sim N(a,\sigma^2)$. $\varphi_\xi(t) = E\exp(it\xi) = E\exp\left(it\sigma\left(\frac{\xi-a}{\sigma}\right) + ita\right) = e^{ita} \cdot E\exp\left(it\sigma\frac{\xi-a}{\sigma}\right) = e^{ita} \cdot \varphi_{\frac{\xi-a}{\sigma}}(t\sigma) = e^{ita} \cdot e^{-\frac{(t\sigma)^2}{2}} = \exp\left(-\frac{(t\sigma)^2}{2} + ita\right)$

**Теорема.** *(О единственности) Если $\varphi_\xi(t) \equiv \varphi_\eta(t)$, то $\xi \overset{d}{=} \eta$.*

*Замечание.* Приводим без доказательства.

**Теорема.** *(О независимости) $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — случайный вектор. Тогда $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы в совокупности тогда и только тогда, когда $\varphi_{(\xi_1,\ldots,\xi_n)}(t_1, \ldots, t_n) = \prod\limits_{i=1}^{n}\varphi_{\xi_i(t_i)}$*

*Доказательство.*

$\Rightarrow$. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимы в совокупности, тогда $\left\{e^{it_i\xi_i}\right\}_{i=1}^{n}$ независимы в совокупности.

$$E\exp\left(i\left\langle t,\xi\right\rangle\right) = E\exp\left(i\cdot(t_1\xi_1+\ldots+t_n\xi_n)\right) = E\prod_{i=1}^{n}\left(\cos t_i\xi_i + i\cdot\sin t_i\xi_i\right) = \prod_{i=1}^{n}E\exp\left(it_i\xi_i\right)$$

Так как образы борелевских функций от независимых величин независимы.

$\Leftarrow$. По данным $\xi_1, \ldots, \xi_n$ построим независимые $\eta_1, \ldots, \eta_n$, такие, что $\xi_i \overset{d}{=} \eta_i$. Это делается следующим образом. Рассмотрим вероятностное пространство $\left([0;1]^n, \mathcal{B}([0;1]^n), \mu_L\right)$, где $\mu_L$ — мера Лебега на $[0;1]$ и определим $\eta_i = F_{\xi_i}^{-1}\left(x_i\right)$.

Легко видеть, что маргинальные распределения нового вектора остались теми же. В самом деле, $P\left(\eta_i < c\right) \Leftrightarrow P\left(\{\overline{x} \mid x_i < F_{\xi_i}(c)\}\right)$. Мера такого множества в самом деле равна $F_{\xi_i}(c)$. Независимость тоже очевидна:

$$P\left(\eta_1 < c_1, \ldots, \eta_n < c_n\right) = P\left\{\overline{x} \mid x_1 < F_{\xi_1}(c_1), \ldots, x_n < F_{\xi_n}(c_n)\right\} = \prod_{i=1}^{n}F_{\xi_i}(c_i) = \prod_{i=1}^{n}F_{\eta_i}(c_i)$$

Тогда

$$\forall t_1, \ldots, t_n \to \varphi_{(\eta_1,\ldots,\eta_n)}\left(t_1, \ldots, t_n\right) = \prod_{k=1}^{n}\varphi_{\eta_k}(t_k) = \prod_{k=1}^{n}\varphi_{\xi_k}(t_k) = \varphi_{(\xi_1,\ldots,\xi_n)}\left(t_1, \ldots, t_n\right)$$

По теореме о единственности получаем, что $(\eta_1, \ldots, \eta_n) \overset{d}{=} (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, то есть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимы в совокупности. $\square$

**Теорема.** *(Формула обращения) Если $F(x)$ — функция распределения случайной величины $\xi$, $a$ и $b$ — какие-то из точек непрерывности, а $\varphi$ — ее характеристическая функция, то*

$$F(b) - F(a) = \lim_{c\to\infty}\int_{-c}^{c}\frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it}\cdot\varphi(t)\cdot dt$$

*Если $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\varphi(t)|\cdot dt < \infty$, то $\exists\rho_\xi(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-itx}\cdot\varphi(t)\cdot dt$ — плотность $\xi$.*

*Замечание.* Приводим без доказательства.

**Теорема.** *Если $\xi_1, \ldots$ — последовательность случайных величин, то*

*(1)* $\xi_n \xrightarrow{d} \xi \Rightarrow \forall t \to \varphi_{\xi_n}(t) \to \varphi_\xi(t)$

*(2)* $\forall t \to \left(\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_{\xi_n}(t) = g(t),\ g(t) \text{ — непрерывна в } 0\right) \Rightarrow \exists\xi :\ \varphi_\xi(t) = g(t),\ \xi_n \xrightarrow{d} \xi.$

*Замечание.* Приводим без доказательства.

## 41. Свойства характеристических функций

*Утверждение.* $|\varphi_\xi(t)| \le |\varphi_\xi(0)| = 1$.

*Доказательство.*

$$|\varphi_\xi(t)| = \left|Ee^{it\xi}\right| \le E\left|e^{it\xi}\right| = E(1) = 1$$
$$\varphi_\xi(0) = E\exp\left(i\cdot 0\cdot\xi\right) = 1$$

$\square$

*Утверждение.* $\varphi_\xi(t)$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$.

*Доказательство.*

$$|\varphi_\xi(t)-\varphi_\xi(s)| = \left|Ee^{it\xi}-Ee^{is\xi}\right| \le E\left|e^{is\xi}\right|\left|e^{i(t-s)\xi}-1\right| = E\left|e^{i(t-s)\xi}-1\right| =$$
$$= E\sqrt{\left(\cos\left((t-s)\xi\right)-1\right)^2+\sin^2\left((t-s)\xi\right)} = E\sqrt{2-2\cos\left((t-s)\xi\right)} = E\left(2\left|\sin\left(\frac{t-s}{2}\xi\right)\right|\right)$$

Но $|\sin(h\xi)| \xrightarrow[t\to 0]{\text{п.н}} 0$, $E|\sin(h\xi)|\to 0$, поэтому, $\forall\varepsilon>0\to\exists\delta>0:\ \forall|t-s|<\delta\to E\left(2\left|\sin\left(\frac{t-s}{2}\xi\right)\right|\right)<\varepsilon$, то есть $|\varphi_\xi(t)-\varphi_\xi(s)|<\varepsilon$, что нам и нужно. $\square$

*Утверждение.* $\varphi_\xi(t)\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\xi\overset{d}{=}-\xi$.

*Доказательство.* $\varphi_\xi(t)=E\left(\cos t\xi+i\sin t\xi\right),\ \varphi_\xi(t)=\varphi_{-\xi}(t)=\overline{\varphi_\xi(t)}$. $\square$

*Утверждение.* Если $E|\xi|^n<\infty$, то $\forall r<n\to\exists\varphi_\xi^{(r)}$ и $\varphi_\xi^{(r)}(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}(ix)^r\,dF(x)$, $E\xi^r=\frac{\varphi_\xi^{(r)}(0)}{i^r}$.

**Пример.** $\left(Ee^{it\xi}\right)'\Big|_{t=0}=Ei\xi\cdot e^{it\xi}\Big|_{t=0}=iE\xi$.

*Утверждение.* Если $\exists\varphi_\xi^{(2n)}(0)<\infty$, то $E\xi^{2n}<\infty$.

*Утверждение.* $\forall t\in(-R;R)\to\varphi_\xi(t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(it)^n}{n!}\cdot E\xi^n$, если $E|\xi|^n<\infty$, $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\frac{(E|\xi|^n)^{1/n}}{n}=\frac{1}{R}$.

**Пример.**

(1) $\sin t$ не является характеристической, так как $\sin 0=0\ne 1$

(2) $\cos t^2$ не является характеристической, так как не является равномерно непрерывной на $\mathbb{R}$

(3) $\cos t$ является характеристической для $\xi$, $P(\xi=1)=P(\xi=-1)=\frac{1}{2}$. Тогда $\varphi_\xi(t)=\frac{1}{2}e^{it}+\frac{1}{2}e^{-it}=\cos t$.

Более того, если $\xi_1,\ldots,\xi_n$ — независимые с таким распределением, то

$$\varphi_{\xi_1+\ldots+\xi_n}(t)=E\exp\left(i\cdot(\xi_1+\ldots+\xi_n)\cdot t\right)=\prod_{j=1}^{n}e^{i\xi_j t}=\cos^n t$$

**Теорема.** *(Бохнер-Хинчин) Пусть $\varphi$ — непрерывна в 0, $\varphi(0)=1$. Тогда $\varphi$ — характеристическая тогда и только тогда, когда $\varphi$ неотрицательно определена, то есть*

$$\forall n,\ t_1,\ldots,t_n\in\mathbb{R}\to\begin{pmatrix}\varphi(t_1-t_1) & \ldots & \varphi(t_1-t_n)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \varphi(t_n-t_1) & \ldots & \varphi(t_n-t_n)\end{pmatrix}\text{ — \textit{неотрицательно определена, т.е}}$$
$$\forall z_1,\ldots,z_n\in\mathbb{C}\to\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\overline{z_i}\varphi\left(t_i-t_j\right)z_j\right)\ge 0$$

*Доказательство.*

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\overline{z}_k\varphi\left(t_i-t_j\right)z_j = E\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}e^{i\xi(t_k-t_j)}z_j\overline{z}_k =$$

$$= E\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(e^{i\xi t_k}z_j\right)\cdot\left(\overline{e^{i\xi t_j}}\overline{z}_k\right) = E\left|\sum_{j=1}^{n}e^{i\xi t_j}z_j\right|^2 \geq 0$$

□

**Лекция 16. Гауссовские векторы**

## 42. Гауссовские векторы

**Определение.** $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ называется *гауссовским вектором*, если

$$\varphi_\xi(t) = \exp\left(i\left\langle a, t\right\rangle - \frac{1}{2}\left\langle \Sigma t, t\right\rangle\right)$$

Где $a \in \mathbb{R}^n,\ \Sigma$ — симметрическая неотрицательно определенная матрица.

**Определение.** $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — гауссовский вектор, если $\exists A \in M_{n\times m}, b \in \mathbb{R}^n:\ \xi^T = A\eta + b$, где $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_m)^T$, $\eta_i$ — независимые, $\eta_i \sim N(0,1)$.

**Определение.** $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — гауссовский вектор, если $\forall\left(\lambda_1, \ldots, \lambda_n\right) \in \mathbb{R}^n \to \left\langle\lambda, \xi\right\rangle$ — нормальная случайная величина.

**Теорема.** *(Об эквивалентных определениях) Три определения эквивалентны.*

*Доказательство.*

(1) $\Rightarrow$ (2). $\Sigma = T^T D\cdot T$, где $T$ — ортогональная, $D$ — диагональная. Тогда,

$$\varphi_{\xi-a}(t) = E\exp\left(i\left\langle\xi-a,t\right\rangle\right) = e^{-i\langle a,t\rangle}\cdot E\exp\left(i\left\langle\xi,t\right\rangle\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}\left\langle\Sigma t,t\right\rangle\right) =$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2}\left\langle T^T\cdot D\cdot T\cdot t,t\right\rangle\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}\cdot\left\langle\left(\sqrt{D}\cdot T\right)^T\left(\sqrt{D}\cdot T\right)\cdot t,t\right\rangle\right) =$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{D}\cdot T\cdot t\right)^T\cdot\left(\sqrt{D}\cdot T\cdot t\right)\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}\cdot\left\langle\sqrt{D}\cdot T\cdot t,\sqrt{D}\cdot T\cdot t\right\rangle\right)$$

$$\varphi_{B(\xi-a)}(t) = E\exp\left(i\left\langle B\left(\xi-a\right),t\right\rangle\right) = E\exp\left(i\left(\xi-a\right)^T\cdot B^T\cdot t\right) =$$

$$= E\exp\left(i\left\langle\xi-a,B^T\cdot t\right\rangle\right) = \varphi_{\xi-a}\left(B^T\cdot t\right)$$

Тогда возьмем $B = \left(\left(\sqrt{D}\cdot T\right)^T\right)^{-1}$, тогда $\varphi_{B(\xi-a)}\left(t\right) = \varphi_{\xi-a}\left(B^T\cdot t\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}\left\langle t,t\right\rangle\right)$.

А значит, если $\eta = B\left(\xi-a\right) \Rightarrow \varphi_\eta(t) = \exp\left(-\frac{1}{2}\left\langle t,t\right\rangle\right)$, то есть $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$, $\eta_i \sim N(0,1)$, $\eta_i \perp\!\!\!\perp \eta_j$ при $i \neq j$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Рассмотрим $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n,\ \xi = A\eta + b$. Тогда

$\left\langle\xi,\lambda\right\rangle = \left\langle A\eta+b,\lambda\right\rangle = \eta^T A^T\lambda + b^T\lambda = c + \sum\limits_{i=1}^{m}c_i\eta_i \sim N\left(c, c_1^2 + \ldots + c_m^2\right)$ (нетрудно убедиться, что сумма стандартных нормальных величин выглядит именно так).

(3) $\Rightarrow$ (1). Так как $\langle \xi, \lambda \rangle$ имеет нормальное распределение, то

$$\varphi_\xi(\lambda) = E\exp\left(i\left\langle \xi,\lambda\right\rangle\right) = \exp\left(iE\left\langle \xi,\lambda\right\rangle - \frac{1}{2}D\left\langle \xi,\lambda\right\rangle\right) =$$

$$= \exp\left(iE\left\langle \xi,\lambda\right\rangle - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} cov\left(\lambda_i\xi_i,\lambda_j\xi_j\right)\right) = \exp\left(i\left\langle a,\lambda\right\rangle - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\lambda_i\lambda_j cov\left(\xi_i,\xi_j\right)\right) =$$

$$= \exp\left(i\left\langle \lambda, a\right\rangle - \frac{1}{2}\cdot\left\langle \Sigma\lambda,\lambda\right\rangle\right)$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} cov\left(\xi_1,\xi_1\right) & \dots & cov\left(\xi_1,\xi_n\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ cov\left(\xi_n,\xi_1\right) & \dots & cov\left(\xi_n,\xi_n\right) \end{pmatrix}$$

Покажем положительную определенность матрицы ковариации:

$$\forall t_1,\dots,t_n \in \mathbb{R} \to \sum_{i,j=1}^{n} cov\left(\xi_i,\xi_j\right)t_it_j = cov\left(\sum_{i=1}^{n} t_i\xi_i, \sum_{j=1}^{n} t_j\xi_j\right) = D\left(\sum_{i=1}^{n} t_i\xi_i\right) \geq 0$$

$\square$

*Замечание.* Тогда, если $\varphi_\xi(t) = \exp\left(i\left\langle a,t\right\rangle - \frac{1}{2}\left\langle \Sigma\cdot t,t\right\rangle\right)$, то $a = E\xi$, а $\Sigma$ — матрица ковариации $\xi_1,\dots,\xi_n$.

*Замечание.* Пусть $\Sigma$ — матрица ковариации гауссовского вектора $\xi$, тогда

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \Sigma_k \end{pmatrix} \Leftrightarrow \varphi_\xi(t) = \varphi_{(\xi_1,\dots,\xi_{j_1})}(t_1,\dots,t_{j_1})\cdot\ldots\cdot\varphi_{(\xi_{j_{k-1}+1},\dots,\xi_n)}(t_{j_{k-1}+1},\dots,t_n)$$

$$\Leftrightarrow \left(\xi_1,\dots,\xi_{j_1}\right), \left(\xi_{j_1+1},\dots,\xi_{j_2}\right), \dots, \left(\xi_{j_{k-1}+1},\dots,\xi_n\right) \text{ — независимы в совокупности}$$

**Лекция 17. Центральная предельная теорема**

## 43. Центральная предельная теорема для одинаково распределенных случайных величин

**Теорема.** *(ЦПТ для одинаково распределенных случайных величин) Пусть $\xi_1,\dots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, $E\xi_i^2 < \infty$. Обозначим $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i$. Тогда*

$$\frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} \xrightarrow{d} \xi \sim N(0,1)$$

*Доказательство.*

$$\varphi_{\frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}}}(t) = E\exp\left(i \cdot \frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} \cdot t\right)$$

Обозначим $E\xi_i = a,\ D\xi_i = \sigma^2$, тогда

$$\varphi_{\frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}}}(t) = E\exp\left(i \cdot \sum_{j=1}^{n} \frac{\xi_j - a}{\sqrt{n\sigma^2}} \cdot t\right) = \prod_{j=1}^{n} E\exp\left(i \cdot \frac{\xi_j - a}{\sqrt{n\sigma^2}} \cdot t\right) = \varphi(t)$$

Разложим каждый множитель $\varphi(t)$ в ряд по моментам:

$$E\frac{\xi_j - a}{\sigma\sqrt{n}} = 0$$

$$E\left(\frac{\xi_j - a}{\sigma\sqrt{n}}\right)^2 = \frac{D\xi_j}{\sigma^2 n} = \frac{1}{n}$$

$$\exp\left(i \cdot \frac{\xi_j - a}{\sqrt{n\sigma^2}} \cdot t\right) = 1 - \frac{1}{2n}t^2 + O\left(\frac{t^3}{n\sqrt{n}}\right) = \exp\left(-\frac{t^2}{2n} + O(t^3)\right)$$

Тогда

$$\varphi(t) = \prod_{j=1}^{n} \exp\left(-\frac{1}{2n} \cdot t^2 + O(t^3)\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}t^2 + O\left(\frac{t^3}{\sqrt{n}}\right)\right) \sim e^{-\frac{1}{2}t^2},\ \text{при } n \to \infty$$

Итак, $\varphi(t) \to \varphi_{N(0,1)}(t)$ при $n \to \infty$, то есть $\frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} \xrightarrow{d} N(0,1)$. □

## 44. Локальная предельная теорема

**Теорема.** *(Локальная предельная теорема) Пусть $\varphi(n) = o(n^{2/3})$. Пусть $\xi_i \sim Bern(p)$ — независимые. Тогда*

$$\sup_{k:\ |k - np| \le \varphi(n)} \left| \frac{P(S_n = k)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} \cdot \exp\left(-\frac{(k-np)^2}{2np(1-p)}\right)} - 1 \right| \to 0$$

*Доказательство.*

$$P(S_n = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \sim \frac{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}{\sqrt{2\pi k}\left(\frac{k}{e}\right)^k \sqrt{2\pi(n-k)}\left(\frac{n-k}{e}\right)^{n-k}} \cdot p^k (1-p)^{n-k}$$

При $n \to \infty,\ k \to \infty,\ n - k \to \infty$ (это верно, так как $|k - np| \le \varphi(n)$), получаем

$$P(S_n = k) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}}\sqrt{1 - \frac{k}{n}}\left(\frac{\left(\frac{k}{n}\right)^{k/n}\left(1 - \frac{k}{n}\right)^{1-k/n}}{p^{k/n} \cdot (1-p)^{1-k/n}}\right)^n}$$

Рассмотрим $f(x) = \frac{x^x(1-x)^{1-x}}{p^x(1-p)^{1-x}}$:

$$\ln f = x\ln x + (1-x)\ln(1-x) - x\ln p - (1-x)\ln(1-p)\,,\ \ln f(p) = 0$$
$$(\ln f)' = \ln x + 1 - \ln(1-x) - 1 - \ln p + \ln(1-p)\,,\ (\ln f)'(p) = 0$$
$$(\ln f)'' = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}$$
$$\ln f = \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{1-p}\right)\frac{1}{2}(x-p)^2 + O\left((x-p)^3\right)$$

Тогда

$$P(S_n = k) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{\frac{k/n}{p}}\sqrt{\frac{1-k/n}{1-p}}}}_{\sim 1} \cdot$$
$$\cdot \exp\left(n \cdot \left(-\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{1-p}\right)\frac{1}{2}\left(\frac{k}{n} - p\right)^2 + O\left((\frac{k}{n} - p)^3\right)\right)\right)$$

Учтем, что $k - np \le \varphi(n),\ \varphi(n) = o(n^{2/3}) \Rightarrow \left(\frac{k-np}{n}\right)^3 = o(\frac{1}{n}) \Rightarrow n \cdot O\left(\left(\frac{k}{n} - p\right)^3\right) = o(1) \to 0$.
Тогда

$$P(S_n = k) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} \cdot \exp\left(-\frac{(k-np)^2}{2np(1-p)}\right)$$

Что и требовалось доказать. □

## 45. Интегральная предельная теорема

**Теорема.** *(Интегральная предельная теорема) Пусть $\xi_i \sim Bern(p)$ — независимые. Тогда*

$$\sup_{-\infty \le a < b \le +\infty}\left|P\left(a < \frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} \le b\right) - \int\limits_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot dx\right| \to 0$$

**Пример.** Экзамен сдают 100000 студентов. Вероятность сдачи $\frac{1}{3}$.

Найти $P$ (сдадут от 32000 до 34000 студентов). Положим $\xi_1, \ldots, \xi_{100000} \sim Bern(\frac{1}{3})$. Тогда

$$P\left(\frac{32000 - 33333}{\sqrt{99999 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}}} < \frac{S_n - 33333}{\sqrt{99999 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}}} \le \frac{34000 - 33333}{\sqrt{99999 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}}}\right) \approx$$
$$\approx \int\limits_{-\frac{1333}{\sqrt{22222}}}^{\frac{667}{\sqrt{22222}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot dx \approx \Phi(4) - \Phi(-9) = \widetilde{\Phi}(4) + \widetilde{\Phi}(9) \approx 0.999968$$

Где $\Phi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot dt,\ \widetilde{\Phi}(x) = \int\limits_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot dt$.

## 46. Теорема Пуассона

**Теорема.** *Пусть* $\xi_i \sim Bern(p)$ *— независимые одинаково распределенные и пусть* $pn \to \lambda$. *Тогда* $S_n \xrightarrow{d} \xi \sim Pois(\lambda)$

*Доказательство.* Найдем

$$P(S_n = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} =$$
$$= \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} \left(\frac{\lambda}{n} + O(\frac{1}{n})\right)^k \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n} + O(\frac{1}{n})\right)^{n-k} \sim$$
$$\sim \frac{n^k}{k!} \cdot \frac{\lambda^k}{n^k} \cdot \exp\left(-\frac{\lambda}{n}(n-k)\right) \sim \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = P(\eta = k)$$

Где $\eta \sim Pois(\lambda)$. То есть $S_n \xrightarrow{d} Pois(\lambda)$. □

**Пример.** Рассмотрим пример с 10000 студентами и вероятностью сдачи $\frac{1}{1000}$.

Найдем $P$(сдадут хотя бы двое). $n = 10000$, $p = 0.001 \Rightarrow np = \lambda = 10$. Рассмотрим $\eta \sim Pois(10)$. Тогда

$$P(S_{10000} \geq 2) \approx P(\eta \geq 2) = 1 - e^{-10} \cdot \left(1 + \frac{10}{1!}\right) = 1 - \frac{11}{e^{10}} \approx 0.9995$$