Содержание

Литература:

- Гринлиф, «инвариантные средние в топологических группах»

1 Введение

Одни из объектов изучения: групповые графы.

Определение 1. Граф Кэли $Cayley(G, S) = (G, \{x \mapsto sx\})$, где $S \subset G$ (ориентированный граф).

Определение 2. Граф Шрейра $(G/H, \{xH \mapsto sxH\})$, где $S \subset G$ (ориентированный мультиграф).

В качестве простой конструкции нетривиальной группы рассмотрим так называемые автоматные группы. Пусть $\mathbb{A}$ — алфавит ($\{0, 1\}$). Рассматриваются конечные преобразователи на двух состояниях a, b. На каждый входной символ выдается один выходной. Мы хотим рассматривать только обратимые преобразования, поэтому можно показать, что вершины можно разметить на два класса: 1 — в вершине выдается тот же символ, что и на входе, ε — выдается противоположный. Естественным образом у такого автомата есть два преобразования: преобразовать слово, начав в вершине a или b. Автоматная группа образована этими самыми преобразованиями $G = \langle A_a, A_b \rangle$.

Можно рассматривать эти преобразования как автоморфизмы двоичного дерева. Тут удобен формализм преобразования вершины вида $\varepsilon^k(\xi, \eta)$, где $k \in \{0, 1\}$, а (ξ, η) — это преобразования двух дочерних поддеревьев. Заметим также, что $\varepsilon(\xi, \eta) = (\eta, \xi)\varepsilon$. Тогда в примере автомата, прибавляющего единицу (adding machine): $a = \varepsilon(a, b), b = (b, b)$, откуда $b = Id$, а $\langle a \rangle = \mathbb{Z}$.

Возможные автоматные группы: $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, D_\infty$ — простые примеры. Нетривиальный пример: lamplighter group.

2 Аменабельность

Пусть G — топологическая группа.

Определение 3. Левая мера Хаара — это такая мера μ, что $\forall B$ — борелевского $\forall g \in G \mu(gB) = \mu(B)$.

Аналогично определим правую меру Хаара. Будем называть меру просто мерой Хаара, если она одновременно левая и правая.

Очевидно, что мера Хаара существует для некоторых видов групп:

- Абелевы
- Конечные

- Счётные дискретные группы

Мы хотим дать определение аменабельной группе. Неформально можно сказать, что аменабельность — это про существование эффективного усреднения по группе. Рассмотрим несколько подходов к этому определению:

Определение 4. Пусть $\xi : B(G) \to \mathbb{C}$ — усредняющий функционал, линейный (конечноаддитивный), притом $\xi(1) = 1$. Если он существует, то группа называется аменабельной.

Определение 5. Пусть $m : 2^X \to \mathbb{R}_+$ — конечно-аддитивная мера. Если она существует, то группа называется аменабельной.

Определение 6. Пусть есть последовательность F_n компактных множеств, тогда если $\forall g \in G \max\limits_{g \in G} \frac{\mu(gF_n \oplus F_n)}{\mu(F_n)} \to 0$ то эти множества называются Фёльнеровскими.

Аменабельная группа G — такая группа, в которой есть последовательность Фёльнеровских множеств.

Определение 7. Пусть $T : G \to G$, тогда оператор Купмана $\hat{T} : f(x) \mapsto f(T(x))$, где f работает на гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = L^2(G, \mu)$.

Лемма 1. *$\hat{T}$ — унитарный, если $T(x) = ax$*

Доказательство. $\left\langle \hat{T}f, \hat{T}g \right\rangle = \int\limits_G f(ax)\overline{g(ax)}d\mu = \int\limits_G f(y)\overline{g(y)}d\mu = \langle f, g \rangle$. Также $\exists \hat{T}^{-1}$. □

3 Lamplighter group L_2

В классическом варианте преобразования $A_a : x_0x_1x_2 \ldots \mapsto (x_0+1)(x_1+x_0)\ldots$ и $A_b : x_0x_1x_2 \ldots \mapsto (x_0+0)(x_1+x_0)\ldots$.

Рассмотрим действие на производящих функциях на $\mathbb{Z}_2$. $\hat{a} : f(t) \mapsto (t+1)f(t)$, $\hat{b} : f(t) \mapsto (t+1)f(t)+1$. Хотим сделать такую замену $t+1 = z$, но в записи $x_0 + x_1(z-1) + x_2(z-1)^2 + \ldots$ бесконечное количество слагаемых при 1. Поэтому будем рассматривать действие только на финитных последовательностях.

Получается другое представление нашей группы: рассматриваем $\hat{a}$ и $\hat{b}$ на кольце Лорановых многочленов (ограниченная положительная или отрицательная степень, притом коэффициенты, конечно, по модулю 2):

$$\hat{b} : f \mapsto zf, \hat{a} : f \mapsto zf + 1.$$

Классическая интерпретация такого действия: фонарщик на бесконечном ряду фонарей. Его два возможных действия: перейти вправо или перейти вправо и зажечь лампу. Можно записать с точки зрения этого фонарщика следующие преобразования:

$$\hat{b} : (c_j) \mapsto (c_{j+1}), \hat{a} : (c_j) \mapsto (c_{j+1}) + \delta_0, \hat{c} : (c_j) = (c_j) + \delta_0.$$

В базисе, b и $c = b^{-1}a$ группа записывается проще всего, но в терминах исходных автоматов выходит нетривиально.

Группа довольно большая, у её графа Кэли рост экспоненциальный, но тем не менее, она является аменабельной.

4 Спектральный анализ операторов и динамических систем на графах

Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ — измеримое пространство с мерой μ. Пусть $T : X \to X, \mu(TA) = \mu(T^{-1}A) = \mu(A) \forall A \in \mathcal{A}$.

$U = \hat{T} : f(x) \mapsto f(Tx)$, $\hat{T}$ — унитарный, $\hat{T}^{-1} = \hat{T}^*$.

Упражнение 1. Пусть $k_j \to +\infty$ — последовательность натуральных чисел. Найти все матрицы A, такие что $A^{k_j} \to \frac{A+E}{2}$.

Теорема 1 (Спектральная теорема)**.** *Пусть $U : H \to H$ — унитарный оператор, $U^* = U^{-1}$.*

Пусть $\exists h_0 : Z(h_0) = Span(U^k h_0 : k \in \mathbb{Z}) = H$.

Тогда объекты, указанные на диаграмме существуют и она коммутирует:

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{U} & H \\ \Big\downarrow{\psi} & & \Big\downarrow{\psi} \\ L^2(S_1, \sigma) & \xrightarrow{M_z : \varphi(\lambda) \mapsto \lambda\varphi(\lambda)} & L^2(S^1, \sigma) \end{array}$$

Притом $R_f(k) = \left\langle U^k h_0, h_0 \right\rangle = \int\limits_{S^1} z^k d\sigma$, то есть мера σ есть преоразование Фурье корреляционной последовательности $R_f(k)$.

Теорема 2. *Пусть $L_2 = \left\langle t, s \mid s^2 = 1, [s^{t^i}, s^{t^j}] = 1 \right\rangle$. Тогда $Sp(\Delta) = \{\pm \cos \pi \frac{p}{q} : \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}\}$.*

Рассматрим графы де Брёйна: $B_n = (\{x = x_{n-1} \dots x_0, x_i \in \{0, 1\}\}, x_{n-1} \dots x_0 \to \{x_{n-2} \dots x_0 0, x_{n-2} \dots x_0 1\})$. У них есть несколько естественных раскрасок (рёберных):

- $x = x_{n-1} \dots x_0 \mapsto f(t) = x_{n-1}t^{n-1} + \dots + tx_1 + x_0$. Тогда два действия (дописывания 0 или 1) выражаются как $\tilde{a} : f \mapsto tf$ и $\tilde{b} : f \mapsto tf + 1$ (действие в факторкольце $\mathbb{Z}_2[t] / \langle t^n \rangle$, необратимое)

- Рассмотрим отдельно первый бит и обозначим $a(0x) = x_{n-2} \dots x_0 0, a(1x) = x_{n-2} \dots x_0 1$, а b все то же самое, но с флипом последнего бита. То есть действие такое же ($\tilde{a} : f \mapsto tf$ и $\tilde{b} : f \mapsto tf + 1$), но $f \in \mathbb{Z}_2 / \langle t^n - 1 \rangle$.

Можно заметить, что это на самом деле граф Шрейра группы L_2.

5 Спектральная теорема для унитарного оператора

Определение 8. Говорим, что для унитарного оператора A наблюдается явление кратности, если $\exists L_1 \cap L_2 = \{0\} : A|_{L_1} \simeq A\,|_{L_2}$.

Что такое кратность? Модельный пример — система из двух одинаковых маятников, независимо колеблющихся. Более формально, $H > L_1 \oplus \ldots L_m$: $\hat{A}\,|_{H_i} \sim \hat{A}\,|_{H_j}$.

Общие спектральные инварианты: $([\sigma], \mathcal{M}(\lambda))$, $\mathcal{M}$ — функция кратности, $\mathcal{M} : S^1 \to \mathbb{N} \sqcup \{\infty\}$.

Пусть теперь оператор самосопряженный: $A^* = A$. Нужно с помощью дробно-линейного преобразования перевести спектр на окружность, применить теорему там и применить обратное преобразование.

Пусть Γ — граф Кэли G по отношению ко множеству образующих $S = S^{-1}$, $\mu = \frac{1}{|S|} \sum\limits_{s \in S} \delta_s$ (будем считать, что $\nexists a : a^2 = e$).

$$M_\mu f = \mu * f = \sum_{t \in G} f(t^{-1}x)\mu(t) = \sum_{s \in S} f(s^{-1}x)\mu(s).$$

Замечание. $M_\mu \cdot M_\nu = M_{\mu * \nu}$, где свёртка $\mu * \nu$ определяется как распределение произведения независимых $s_1 \cdot s_2$:

$$(\mu * \nu)(x) = \sum_{t \in G} \mu(xt^{-1}\nu(t).$$

Лемма 2. *В пространтсве* $L^2(G) : \|M\| \leqslant 1$.

Доказательство. M есть выпуклая комбинация элементарных действий: $\|Mf\| = \left\| \sum\limits_{s \in S} \delta_s f \right\| \leqslant \sum\limits_{s \in S} \|\delta_s f\| = \|f\|$. □