Содержание

1 Тривиум

Определение 1. $H = (V, E), |V| < \infty, E \subset 2^V$ — *гиперграф*. V — *вершины*, E — *рёбра*.

Если $\forall e \in E \to |e| = k$, то гиперграф k-*однородный* ($k = 2$ — обычный граф).

Определение 2. *Число рёбер* гиперграфа $|E|$ или $|E(H)| = e(H)$.

Степень вершины $v \in V$ — $\deg v = \#\{e \in E \mid v \in e\}$.

$\sum\limits_{v \in V} \deg v = \sum\limits_{e \in E} |e| = k|E|$ (в случае k-однородности).

$\Delta(H) = \max\limits_{v \in V} \deg v$.

$\delta(H) = \min\limits_{v \in V} \deg v$.

$t(H) = \frac{1}{|V|} \sum\limits_{v \in V} \deg v$.

Определение 3. *Степенью ребра* в $H = (V, E)$ называется $\deg e = \#\{f \in E \mid f \neq e, |f \cap e| \neq \varnothing\}$.

$D(H) = \max\limits_{e \in E} \deg e$.

Если H k-однороден, то $\Delta(H) - 1 \leqslant D(H) \leqslant k(\Delta(H) - 1)$.

Определение 4. $W \subset V$ в $H = (V, E)$ называется *независимым*, если $\forall e \in E \to |e \cap W| < |e|$.

Число независимости $\alpha(H)$ — максимальный размер независимого множества в H.

Определение 5. Раскраска множества вершин $H = (V, E)$ называется *правильной*, если любое ребро не является одноцветным. Равносильно: все цветовые множества независимы.

Хроматическое число $\chi(H)$ — минимальное число цветов в правильной раскраске гиперграфа.

Очевидно $\frac{|V|}{\alpha(H)} \leqslant \chi(H) \leqslant \Delta(H) + 1$.

2 Теорема Турана и её обобщения

K_n — полный граф на n вершинах.

$K_{n_1, \ldots, n_r}$ — полный r-дольный граф с долями размера $n_1, \ldots, n_r$.

$K_{m * r}$ — полный r-дольный граф с размерами долей $= m$.

Теорема 1 (Туран, 1941)**.** *Пусть* $n_1, \ldots, n_r$ *числа, такие что* $n_1 + \ldots + n_r = n, n_i = \left\lceil \frac{n}{r} \right\rceil$ *или* $n_i = \left\lfloor \frac{n}{r} \right\rfloor$. *Пусть граф* G *на* n *вершинах не содержит подграфа, изоморфного* K_{r+1}. *Тогда*

$$|E(G)| \leqslant |E(K_{n_1, \ldots, n_r})| \leqslant \left\lfloor \frac{n^2}{2} \left(1 - \frac{1}{r}\right) \right\rfloor$$

.

Доказательство. Пусть $G = (V, E)$ — граф с максимальным числом вершин, не содержащий K_{r+1}. Покажем, что в G не существует тройки вершин u, v, w такой, что $(u, v) \in E, (u, w), (v, w) \notin E$. Пусть такая тройка есть, тогда

- Пусть $\deg w < \deg u$ (или $\deg w < \deg v$). Удалим w из G и заменим её на копию u — вершину u'. Получится граф с большим числом рёбер, при этом K_{r+1} он не содержит (иначе его содержал бы и G).
- Пусть $\deg w \geqslant \deg u, \deg w \geqslant \deg v$. Тогда удалим u, v из графа, добавим вместо них две копии вершины w. По аналогичному соображению число рёбер увеличилось, а K_{r+1} не появилось.

Вывод: отношение $u \sim v \Leftrightarrow (u, v) \notin E$ является отношением эквивалентности. Значит наш граф G является полным многодольным графом, притом ясно, что долей не больше r (будем считать, что ровно r, просто некоторые доли пусты). Покажем, что доли почти равны.

В самом деле, если $|A| > |B| + 1$, то при перекладывании одной вершины из A в B теряется $|B|$ рёбер и проводится $|A| - 1$ рёбер, стало быть число рёбер увеличивается. Значит размеры всех долей отличаются не более, чем на 1, что доказывает теорему. □

Граф $K_{n_1,\ldots,n_r}$ из теоремы Турана принято называть графом Турана.

Утверждение 1. Следствие: $\alpha(G) \geqslant \frac{n}{t(G)+1}$.

Доказательство. Пусть $\alpha = \alpha(G)$, тогда $\overline{G}$ не содержит $K_{\alpha+1}$. По теореме Турана $|E(\overline{G})| \leqslant \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \frac{n^2}{2} \Rightarrow |E(G)| \geqslant C_n^2 - \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \frac{n^2}{2}$.

Итак, $\frac{n^2}{2\alpha} \leqslant |E(G)| + \frac{n^2}{2} - C_n^2 = \frac{t(G)n}{2} + \frac{n}{2}$, что доказывает следствие.

Получается, что оценка точна и достигается (с точностью до округления) на $\overline{T(n, r)}$. □

3 Тоерема Эрдёша-Стоуна

Пусть H — произвольный граф. *Числом Турана* $ex(n, H)$ называется

$$ex(n, H) = \max\{|E(G)| : |V(G)| = n, G \text{ не содержит подграфа, изоморфного } H\}.$$

Теорема Турана говорит, что $ex(n, K_{r+1}) = |E(K_{n_1,\ldots,n_r})|$.

Теорема 2 (Эрдёш-Стоун, 1946). *Пусть $r \geqslant 2$, H — фиксированный граф с $\chi(H) = r + 1$, тогда $ex(n, H) = \left(1 - \frac{1}{r}\right) \frac{n^2}{2} + o(n^2)$.*

Лемма. *Пусть $r \geqslant 1, \varepsilon > 0$. Тогда для всех достаточно больших n любой граф на n вершинах с $\left(1 - \frac{1}{r} + \varepsilon\right) C_n^2$ рёбрами содержит подграф $K_{t*(r+1)}$, где $t = \Omega_{r,\varepsilon}(\log n)$.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда все вершины имеют степень не менее $\left(1-\frac{1}{r}+\varepsilon\right)n$. Будем доказывать по индукции по r.

База, $r=1$, надо найти $K_{t,t}$. Пусть $v_1,\ldots,v_t$ — случайно выбранные t вершин из V, а X число их общих соседей.

$$EX=\sum_{u\in V}\frac{C^t_{\deg u}}{C^t_n}\geqslant n\frac{C^t_{n\varepsilon}}{C^t_n}\geqslant n\frac{(n\varepsilon-t)^t}{n^t}=n\left(\frac{n\varepsilon-t}{n}\right)^t.$$

Хотим, чтобы $EX>t$, для этого можно взять $t=\Omega_\varepsilon(\log n)$ подходит для небольшой константы. При таком t существуют $v_1,\ldots,v_t$ с не менее, чем t общими соседями, это и есть $K_{t,t}$.

Докажем шаг индукции. Пусть мы нашли K_{T*r}, где $T=\Omega_{r,\varepsilon}(\log n)$ в графе G. Обозначим $U_1,\ldots,U_r$ — доли этого графа, $U=\bigcup\limits_{i=1}^{r}U_i$.

Пусть v — случайная вершина G, X_v — число её соседей внутри U.

$$EX_v=\frac{1}{n}\sum_{v\in V}\sum_{(u,v)\in E}1=\frac{1}{n}\sum_{u\in U}\deg u\geqslant rT\left(1-\frac{1}{r}+\varepsilon\right).$$

Однако $X_v\leqslant rT$, значит

$$\begin{aligned}EX_v\leqslant rT\left(1-\frac{1}{r}+\frac{\varepsilon}{2}\right)P\left(X_v<rT\left(1-\frac{1}{r}+\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)+\\ rTP\left(X_v>rT\left(1-\frac{1}{r}+\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)=\\ rT\left(1-\frac{1}{r}+\frac{\varepsilon}{2}\right)+rT\left(1-\frac{1}{r}+\frac{\varepsilon}{2}\right)P\left(X_v>rT\left(1-\frac{1}{r}+\frac{\varepsilon}{2}\right)\right).\end{aligned}$$

Отсюда $P\left(X_v>rT\left(1-\frac{1}{r}+\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)\geqslant\frac{rT\frac{\varepsilon}{2}}{rT\left(\frac{1}{r}-\frac{\varepsilon}{2}\right)}\geqslant\frac{r\varepsilon}{r}\geqslant\varepsilon$.

Вывод: не менее εn вершин имеют хотя бы $rT\left(1-\frac{1}{r}+\frac{\varepsilon}{2}\right)$ соседей в U. Обозначим его через S, $|S|\geqslant\varepsilon n$.

Далее, любая вершина из S имеет хотя бы εT соседей внутри U_i. Иначе, множество соседей в U имеет мощности сторого меньше, чем

$$\varepsilon T+(r-1)T=rT\left(1-\frac{1}{r}+\frac{\varepsilon}{r}\right)\leqslant rT\left(1-\frac{1}{r}+\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Пусть $W_1,\ldots,W_r$ случайные t-подмножества $U_1,\ldots,U_r$, а X — число их общих соседей внутри S.

$EX\geqslant|S|\left(\frac{C_{\varepsilon T}t}{C^t_T}\right)^r$, тогда положим $t=\frac{\varepsilon}{2}T$, тогда $EX\geqslant\varepsilon n\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{rt}\geqslant t$. Это выполнено при $t=c(r,\varepsilon)\log n$ для подходящей константы $c(r,\varepsilon)>0$.

Обратимся теперь к случаю, если не все степени достаточно большие. Покажем, что в G существует индуцированный подграф G' на s вершинах, все степени которого не меньше $\left(1-\frac{1}{r}+\varepsilon\right)s$, а $s\geqslant\frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon}n$. Тогда по предыдущему рассуждению G' содержит K_{t*r}, где $t=\Omega_{r,\varepsilon}(\log s)=\Omega_{r,\varepsilon}(\log s)$.

Построим G' следующим образом: $G_n=G$. Далее:

- если G_m содержит вершину степени $< \left(1 - \frac{1}{r} + \frac{\varepsilon}{2}\right) m$, то удалим её из G_m.

- продолжаем, пока процесс не остановится.

Пусть G_s — итоговый граф, тогда в нём не менее чем $|E(G_n)| - \left(1 - \frac{1}{r} + \frac{\varepsilon}{2}\right)(n + n - 1 + \ldots + s + 1) \geqslant \left(1 - \frac{1}{r} + \varepsilon\right) C_n^2 - \left(1 - \frac{1}{r} + \frac{\varepsilon}{2}\right) C_{n+1}^2 = \frac{\varepsilon}{2} C_n^2 - n$ рёбер.

С другой стороны, $|E(G_s)| \leqslant C_s^2 \Rightarrow C_s^2 \geqslant \frac{\varepsilon}{2} C_n^2 - n \Rightarrow s \geqslant \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon} n$.

Итак, лемма доказана. □

Доказательство теоремы Эрдёша-Стоуна. Так как $\chi(H) = r + 1$, то H вкладывается в $K_{(r+1)*m}$ для какого-то m. Значит $ex(n, H) \leqslant ex(n, K_{(r+1)*m})$, что по лемме не больше, чем $(1 - \frac{1}{r})\frac{n^2}{2} + o(n^2)$.

С другой стороны граф Турана $T_{n,r}$ не содержит H, значит $ex(n, H) \geqslant |E(T_{n,r})| = (1 - \frac{1}{r})\frac{n^2}{2}$. □

4 Двудольные графы

Теорема Эрдёша-Стоуна говорит про двудольные графы только, что $ex(n, H) = o(n^2)$. Займёмся выяснением более точной оценки.

Теорема 3 (Шош, Ковари, Туран, 1954)**.** *$ex(n, K_{s,t}) \leqslant \frac{1}{2}(s-1)^{\frac{1}{t}} n^{2-\frac{1}{t}} + \frac{1}{2}(t-1)n$.*

Доказательство. Пусть $d_1 \geqslant \ldots \geqslant d_n$ — степени вершин G. Пусть, кроме того, $d_1 \geqslant \ldots \geqslant d_m \geqslant t > d_{m+1} \geqslant \ldots d_n$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} C_{d_i}^t = \sum_{i=1}^{m} C_{d_i}^t > \frac{1}{t!} m \sum_{i=1}^{m} (d_i - t + 1)^t \frac{1}{m}.$$

По неравенству Йенсена ($E\xi^t \geqslant (E\xi)^t$) получаем

$$\sum_{i=1}^{n} C_{d_i}^t = \frac{m}{t!} \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{d_i - t + 1}{m} \right)^t \geqslant \frac{1}{t!} m^{1-t} \left(\sum_{i=1}^{m} (d_i - t + 1) \right)^t \geqslant$$
$$\frac{1}{t!} n^{1-t} \left(\sum_{i=1}^{n} d_i - m(t-1) - \sum_{i=m+1}^{n} d_i \right)^t > \frac{1}{t!} n^{1-t} \left((s-1)^{\frac{1}{t}} n^{2-\frac{1}{t}} \right)^t =$$
$$\frac{s-1}{t!} n^t > (s-1) C_n^t.$$

Рассмотрим $v_1, \ldots, v_t$ — случайные t вершин и введём X — число их общих соседей, тогда $EX = \frac{\sum_{i=1}^{n} C_{d_i}^t}{C_n^t} > s - 1$. Значит существуют $v_1, \ldots, v_t$, имеющие хотя бы s общих соседей, значит $K_{s,t}$ найдено □

Это только оценка, в отличие от теоремы Эрдёша-Стоуна, получить точную асимптотику оказывается совсем непросто. Известно, что если $s > (t-1)!$, то оценка из теоремы точна асимптотически. Однако, уже для $s = t = 4$ поведение $ex(n, K_{4,4})$ неизвестно.

Утверждение 2.
- Если G — дистанционный граф в $\mathbb{R}^2$ на n вершинах, то $|E(G)| = O(n^{\frac{3}{2}})$
- Для дистанционного графа в $\mathbb{R}^3$ на n вершинах $|E(G)| = O(n^{\frac{5}{3}})$

Доказательство. Нужно заметить, что в первом случае G не содержит $K_{3,2}$, а во втором $K_{3,3}$, и применить теорему. □

5 Числа Турана для гиперграфов

Определение 6. Пусть $n > b > k$. Числом Турана $T(n, b, k)$ называется минимальное рёбер в k-однородном гиперграфе на n вершинах и числом независимости $< b$.

$$T(n, b, k) = \min\{|E(H)| : H \in \mathcal{H}_k, |V(H)| = n, \alpha(G) < b\}.$$

Гиперграфы данного множества называются (n, b, k)-системами.

Пример 1. $T(n, b, 2) = |E(\overline{T_{n,b-1}})| = C_n^2 - |E(T_{n,b-1})| \sim \frac{n^2}{2(b-1)}$.

Если C_v^k — все k-подмножества, C_v^b — все b-подмножества, (k-подмножество A представляет b-подмножество B, если $A \subset B$), то $T(n, b, k)$ — наименьшая система общих представителей.

Утверждение 3. $T(n, b, k) \geqslant \lceil \frac{n}{n-k} T(n-1, b, k) \rceil$.

Доказательство. Пусть $H = (V, E)$ — произвольная (n, b, k)-система. Возьмём одну вершину v и удалим её вместе с рёбрами, останется H_v — $(n-1, b, k)$-система, в которой хотя бы $T(n-1, b, k)$ рёбер. Тогда

$$|E(H)|(n-k) = \sum_{v \in V} |E(H_v)| \geqslant T(n-1, b, k) \cdot n,$$

откуда следует утверждение. □

Утверждение 4. $\forall b > k \geqslant 2 \to \exists \lim_{n\to\infty} \frac{T(n,b,k)}{C_n^k} = t(b, k)$.

Доказательство. $\frac{T(n,b,k)}{C_n^k} \geqslant \frac{T(n-1,b,k)}{C_{n-1}^k}$ по утверждению, значит последовательность монотонна (и ограничена единицей). □

Определение 7. Величина $t(b, k)$ называется Турановской плотностью.

Из доказательства следует, что $T(n, b, k) \leqslant t(b, k) C_n^k$.

Утверждение 5. $T(n, b, k) \leqslant T(n-1, b, k) + T(n-1, b-1, k-1)$.

Доказательство. Пусть $H_1 = (V, E_1)$ — это минимальная $(n-1, b, k)$-система, $H_2 = (V, E_2)$ — это минимальная $(n-1, b-1, k-1)$-система. Возьмём $v \notin V$ и рассмотри $H = (V \cup \{v\}, E_1 \cup E_2'), E_2' = \{e \cap \{v\} : e \in E_2\}$. Тогда H — это (n, b, k)-система, значит $|E(H)| \geqslant T(n, b, k)$, а с другой стороны $|E(H)| = T(n-1, b, k) + T(n-1, b-1, k-1)$. □

Утверждение 6. $t(b, k) \leqslant t(b-1, k-1)$.

Доказательство. $\frac{k}{n}T(n, b, k) = T(n, b, k) - \frac{n-k}{n}T(n, b, k) \leqslant T(n, b, k) - T(n-1, b, k) \leqslant T(n-1, b-1, k-1) \Rightarrow \frac{T(n,b,k)}{C_n^k} = \frac{k}{n}\frac{T(n,b,k)}{C_{n-1}^{k-1}} \leqslant \frac{T(n-1,b-1,k-1)}{C_{n-1}^{k-1}}$. Переходя к пределу, получаем требуемое. □

Утверждение 7 (из анализа)**.** Пусть $b_0, \ldots, b_{l-1}$ — циклически упорядоченные действительные числа, $b = \frac{b_0 + \ldots + b_{l-1}}{l}$. Тогда $\exists n : \forall s = 1, \ldots, l \to b_m + b_{m+1} + \ldots + b_{m+s-1} \geqslant sb$.

Доказательство. Возьмём циклический сдвиг, соответствующий минимуму префиксных сумм. □

6 Верхняя оценка на турановскую плотность

Теорема 4. $t(n, k) \leqslant \left(\frac{k-1}{b-1}\right)^{k-1}$.

Доказательство. Пусть V — некоторое множество из n вершин и возьмём l, d так, что $k = \lceil \frac{db}{l} \rceil$. Разделим V на примерно равные части $A_0, \ldots, A_{l-1}$ и построим следующий гиперграф. Каждое $B \subset V$, $|B| = k$, включается в H в качестве ребра, если числа $b_i = |B \cap A_i|$ удовлетворяют свойству: $\exists m : \forall s = 1, \ldots, d \to \sum\limits_{i=1}^{s} b_{m+i-1} \geqslant s\frac{b}{l}$.

Покажем, что это (n, b, k)-система. Пусть $C \subset V$, $|C| = b$. Введём $c_i = |C \cap A_i|$. Для чисел $c_0, \ldots, c_{l-1}$ существует сдвиг, для которого все частичные суммы не меньше $\sum\limits_{i=1}^{s} c_{m+i-1} \geqslant s\frac{b}{l}$. Тогда выберем $B \subset C$ следующим образом $B = (C \cap A_m) \sqcup (C \cap A_{m+1}) \sqcup \ldots \sqcup W$, где $W = C \cap A_{j+m}$. Заметим, что $\frac{db}{l} \leqslant k$, а это значит для всех $s = 1, \ldots, l$ неравенство на префиксные суммы b_i будет следовать либо из того, что $b_i = c_i$ до какого-то момента, либо из того, что $s \leqslant d$.

Оценим теперь число рёбер:

$$|E(H)| = \sum_{m=0}^{l-1} \sum_{a_1, \ldots, a_d} \prod_{i=1}^{d} C_{A_{m+i-1}}^{a_i}$$

Притом средняя сумма берётся по наборам $a_1, \ldots, a_d$, таким что $a_1, \ldots, a_d \in \{0, \ldots, k\} a_1 + \ldots + a_d = k, a_1 + \ldots + a_s \geqslant \frac{sb}{l} \forall s = 1, \ldots d$. Тогда

$$E(H) \leqslant l \sum_{a_1, \ldots, a_d} \left(\prod_{i=1}^{d} C_{\frac{n}{l}}^{d_i} \right) \leqslant l \left(\frac{n}{e} \right)^k \sum_{a_1, \ldots, a_d} \frac{1}{a_1! \ldots a_d!}.$$

Положим $l = b - 1, d = k - 1$. Если условия на частичные суммы нет, то сумма по всем $a_1, \ldots, a_d$ равна $\frac{d^k}{k!}$.

Если $l = b-1$, то $s \frac{b}{b-1} \in (s, s+1)$, то есть $a_1 + \ldots + a_s \geqslant s \frac{b}{b-1}$ эквивалентно $a_1 + \ldots + a_s > s$. Введем $y_i = a_i - 1$, $y_1 + \ldots + y_{k-1} = 1, y_i \geqslant -1, y_1 + \ldots + y_s > 0 \forall s = 1, \ldots, k$.

Тогда $\exists$ ровно один циклический сдвиг последовательности $y_1, \ldots, y_{k-1}$, такой, что все частичные суммы положительны.

Вывод: $\sum\limits_{a_1, \ldots, a_d} \frac{1}{a_1! \ldots a_d!} = \frac{1}{k-1} \frac{(k-1)^k}{k!}$, стало быть $|E(H)| \leqslant (1 + o(1))(b - 1) \left(\frac{n}{b-1} \right)^k \frac{(k-1)^k}{k!} \Rightarrow t(b, k) \leqslant \left(\frac{k-1}{b-1} \right)^{k-1}$. $\square$