

Содержание

1	Введение	2
2	Аменабельность	2
3	Lamplighter group L_2	3
4	Спектральный анализ операторов и динамических систем на графах	4

Литература:

- Гринлиф, «инвариантные средние в топологических группах»

1 Введение

Одни из объектов изучения: групповые графы.

Определение 1. Граф Кэли $Cayley(G, S) = (G, \{x \mapsto sx\})$, где $S \subset G$ (ориентированный граф).

Определение 2. Граф Шрейра $(G/H, \{xH \mapsto sxH\})$, где $S \subset G$ (ориентированный мультиграф).

В качестве простой конструкции нетривиальной группы рассмотрим так называемые автоматные группы. Пусть \mathbb{A} — алфавит $(\{0, 1\})$. Рассматриваются конечные преобразователи на двух состояниях a, b . На каждый входной символ выдается один выходной. Мы хотим рассматривать только обратимые преобразования, поэтому можно показать, что вершины можно разметить на два класса: 1 — в вершине выдается тот же символ, что и на входе, ε — выдается противоположный. Естественным образом у такого автомата есть два преобразования: преобразовать слово, начав в вершине a или b . Автоматная группа образована этими самими преобразованиями $G = \langle A_a, A_b \rangle$.

Можно рассматривать эти преобразования как автоморфизмы двоичного дерева. Тут удобен формализм преобразования вершины вида $\varepsilon^k(\xi, \eta)$, где $k \in \{0, 1\}$, а (ξ, η) — это преобразования двух дочерних поддеревьев. Заметим также, что $\varepsilon(\xi, \eta) = (\eta, \xi)\varepsilon$. Тогда в примере автомата, прибавляющего единицу (adding machine): $a = \varepsilon(a, b), b = (b, b)$, откуда $b = Id$, а $\langle a \rangle = \mathbb{Z}$.

Возможные автоматные группы: $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, D_\infty$ — простые примеры. Нетривиальный пример: lamplighter group.

2 Аменабельность

Пусть G — топологическая группа.

Определение 3. Левая мера Хаара — это такая мера μ , что $\forall B$ — борелевского $\forall g \in G \mu(gB) = \mu(B)$.

Аналогично определим правую меру Хаара. Будем называть меру просто мерой Хаара, если она одновременно левая и правая.

Очевидно, что мера Хаара существует для некоторых видов групп:

- Абелевы
- Конечные

- Счётные дискретные группы

Мы хотим дать определение аменабельной группе. Неформально можно сказать, что аменабельность — это про существование эффективного усреднения по группе. Рассмотрим несколько подходов к этому определению:

Определение 4. Пусть $\xi : B(G) \rightarrow \mathbb{C}$ — усредняющий функционал, линейный (конечноаддитивный), притом $\xi(1) = 1$. Если он существует, то группа называется аменабельной.

Определение 5. Пусть $m : 2^X \rightarrow \mathbb{R}_+$ — конечно-аддитивная мера. Если она существует, то группа называется аменабельной.

Определение 6. Пусть есть последовательность F_n компактных множеств, тогда если $\forall g \in G \max_{g \in G} \frac{\mu(gF_n \oplus F_n)}{\mu(F_n)} \rightarrow 0$ то эти множества называются Фёльнеровскими.

Аменабельная группа G — такая группа, в которой есть последовательность Фёльнеровских множеств.

Определение 7. Пусть $T : G \rightarrow G$, тогда оператор Купмана $\hat{T} : f(x) \mapsto f(T(x))$, где f работает на гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = L^2(G, \mu)$.

Лемма 1. \hat{T} — унитарный, если $T(x) = ax$

Доказательство. $\langle \hat{T}f, \hat{T}g \rangle = \int_G f(ax) \overline{g(ax)} d\mu = \int_G f(y) \overline{g(y)} d\mu = \langle f, g \rangle$. Также $\exists \hat{T}^{-1}$. □

3 Lamplighter group L_2

В классическом варианте преобразования $A_a : x_0 x_1 x_2 \dots \mapsto (x_0 + 1)(x_1 + x_0) \dots$ и $A_b : x_0 x_1 x_2 \dots \mapsto (x_0 + 0)(x_1 + x_0) \dots$

Рассмотрим действие на производящих функциях на \mathbb{Z}_2 . $\hat{a} : f(t) \mapsto (t + 1)f(t)$, $\hat{b} : f(t) \mapsto (t + 1)f(t) + 1$. Хотим сделать такую замену $t + 1 = z$, но в записи $x_0 + x_1(z - 1) + x_2(z - 1)^2 + \dots$ бесконечное количество слагаемых при 1. Поэтому будем рассматривать действие только на финитных последовательностях.

Получается другое представление нашей группы: рассматриваем \hat{a} и \hat{b} на кольце Лорановых многочленов (ограниченная положительная или отрицательная степень, притом коэффициенты, конечно, по модулю 2):

$$\hat{b} : f \mapsto zf, \hat{a} : f \mapsto zf + 1.$$

Классическая интерпретация такого действия: фонарщик на бесконечном ряду фонарей. Его два возможных действия: перейти вправо или перейти вправо и зажечь лампу. Можно записать с точки зрения этого фонарщика следующие преобразования:

$$\hat{b} : (c_j) \mapsto (c_{j+1}), \hat{a} : (c_j) \mapsto (c_{j+1}) + \delta_0, \hat{c} : (c_j) \mapsto (c_j) + \delta_0.$$

В базисе, b и $c = b^{-1}a$ группа записывается проще всего, но в терминах исходных автоматов выходит нетривиально.

Группа довольно большая, у её графа Кэли рост экспоненциальный, но тем не менее, она является аменабельной.

4 Спектральный анализ операторов и динамических систем на графах

Пусть (X, \mathcal{A}, μ) — измеримое пространство с мерой μ . Пусть $T : X \rightarrow X$, $\mu(TA) = \mu(T^{-1}A) = \mu(A) \forall A \in \mathcal{A}$.

$U = \hat{T} : f(x) \mapsto f(Tx)$, \hat{T} — унитарный, $\hat{T}^{-1} = \hat{T}^*$.

Упражнение 1. Пусть $k_j \rightarrow +\infty$ — последовательность натуральных чисел. Найти все матрицы A , такие что $A^{k_j} \rightarrow \frac{A+E}{2}$.

Теорема 1 (Спектральная теорема). Пусть $U : H \rightarrow H$ — унитарный оператор, $U^* = U^{-1}$.

Пусть $\exists h_0 : Z(h_0) = \text{Span}(U^k h_0 : k \in \mathbb{Z}) = H$.

Тогда объекты, указанные на диаграмме существуют и она коммутирует:

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{U} & H \\ \downarrow \psi & & \downarrow \psi \\ L^2(S_1, \sigma) & \xrightarrow{M_z : \varphi(\lambda) \mapsto \lambda \varphi(\lambda)} & L^2(S^1, \sigma) \end{array}$$

При этом $R_f(k) = \langle U^k h_0, h_0 \rangle = \int_{S^1} z^k d\sigma$, то есть мера σ есть преобразование Фурье корреляционной последовательности $R_f(k)$.

Теорема 2. Пусть $L_2 = \langle t, s \mid s^2 = 1, [s^{t^i}, s^{t^j}] = 1 \rangle$. Тогда $Sp(\Delta) = \{\pm \cos \pi \frac{p}{q} : \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}\}$.

Рассмотрим графы де Брёйна: $B_n = (\{x = x_{n-1} \dots x_0, x_i \in \{0, 1\}\}, x_{n-1} \dots x_0 \rightarrow \{x_{n-2} \dots x_0 0, x_{n-2} \dots x_0 1\})$. У них есть несколько естественных раскрасок (рёберных):

- $x = x_{n-1} \dots x_0 \mapsto f(t) = x_{n-1}t^{n-1} + \dots + tx_1 + x_0$. Тогда два действия (дописывания 0 или 1) выражаются как $\tilde{a} : f \mapsto tf$ и $\tilde{b} : f \mapsto tf + 1$ (действие в факторкольце $\mathbb{Z}_2[t]/\langle t^n \rangle$, необратимое)
- Рассмотрим отдельно первый бит и обозначим $a(0x) = x_{n-2} \dots x_0 0, a(1x) = x_{n-2} \dots x_0 1$, а b все то же самое, но с флипом последнего бита. То есть действие такое же ($\tilde{a} : f \mapsto tf$ и $\tilde{b} : f \mapsto tf + 1$), но $f \in \mathbb{Z}_2/\langle t^n - 1 \rangle$.

Можно заметить, что это на самом деле граф Шрейра группы L_2 .