

Содержание

Лекция 1. Определение и примеры динамических систем	2
1 Введение	2
2 Эргодическая теория	4
3 Семинарская часть	4
Лекция 2. Эргодическая теорема I	5
4 Эргодические системы, теорема Биркгофа-Хинчина	5
5 Оператор Купмана	6
6 Семинарская часть	6
Лекция 3. Эргодическая теорема II	7
7 Общие соображения	7
8 Теорема фон Неймана, лемма Рохлина-Халмоша	8
9 Доказательство эргодической теоремы	8
Лекция 4. Спектральная теорема I	9
10 Спектральная теорема для простого спектра	9
11 Семинарская часть	10
Лекция 5. Спектральная теорема II	10
12 Общая спектральная теорема	10
13 Семинарская часть	11
Лекция 6. Немного про джойнинги	11
14 Структура пространства всех джойнингов	11
Лекция 7. Про слабоперемешивающие системы	12
15 Построение слабоперемешивающей, но не перемешивающей системы	12
Лекция 8. Метрическая энтропия	13
16 Энтропия динамической системы	13

17 Семинарская часть	14
Лекция 9. Топологическая динамика	15
18 Топологические динамические системы и их свойства	15
19 Символические системы	16

Лекция 1. Определение и примеры динамических

1 Введение

Литература:

- (!) Синай «Эргодическая теория», издательство «Фазис» или «РХД» — брошюра из нескольких лекций.
- Каток—Хиссельблат «Введение в современную теорию динамических систем» — энциклопедического плана, есть материал про топологическую динамику.
- Коррфельд—Синай—Фомин «Эргодическая теория» — учебник, однако старый.
- «Динамические системы-2» издательства «ВИНИТИ».
- (!) Халмош «Лекции по эргодической теории».
- Мартин-Итленд «Математическая теория энтропии».
- Арнольд «Математические методы классической механики».
- Shields «Ergodic theory of discrete sample paths».

Динамические системы — где-то 1920е, Банах, фон Нейман и другие, рассмотрение различных объектов как процессов. Что характерно:

- время
- состояние
- эволюция/динамика

Пример 1. $x'' + \omega^2 x = 0 \Rightarrow x = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t$. Можно переписать как $x' = y, y' = -\omega^2 x$, тогда динамика будет определяться однозначно состоянием.

Исторически пытались решать такие задачи грубо говоря формулой. Но даже имея точную формулу решения, мы можем ошибаться сильно, если плохо измерены начальные условия, если со временем теряется много информации (не говоря уже о том, что большинство задач аналитически не решается). Значит по возможности рассматривать динамику как-то глобально.

Определение 1. Фазовый поток $T^t : (x_0, y_0) \mapsto (x(t), y(t))$, где $(x(t), y(t))$ — решение с начальными условиями (x_0, y_0) .

- $T^{t+s} = T^t \circ T^s$.

- $(T^t)^{-1} = T^{-t}$.
- $T^t \in Diff(\mathbb{R}^2)$
- То есть T^t есть гомоморфизм. $T^t : \mathbb{R} \rightarrow Diff(\mathbb{R}^2)$.

Это и есть основная модель динамической системы. Время не обязательно непрерывно: мы можем рассматривать осциллятор только в целые моменты времени. То есть у нас будет фигурировать множество поворотов окружности на угол α . Есть еще много других, естественных примеров: конечные автоматы, случайные процессы с дискретным временем.

Под классическим временем понимается \mathbb{Z} или \mathbb{R} , в общем случае можно брать другие группы.

Определение 2. Динамическая система — следующая четвека:

- G — группа или полугруппа времени (обычно коммутативная),
- X — фазовое пространство,
- \mathcal{S} — структура,
- T^t — фазовый поток.

Со следующими свойствами:

- $T^0 = Id$,
- $T^{t+s} = T^t \circ T^s$,
- $(T^t)^{-1} = T^{-t}$,
- T^t — сохраняет структуру \mathcal{S} .

Примеры структур:

- тривиальная структура. $T^t \in X^X$,
- топология, прообраз открытого открыт,
- вероятность (X, \mathcal{B}, μ) ,
- линейное пространство,
- группа.

Определение 3. В случае \mathbb{Z} процесс ассоциирован с некоторым измерением $f : X \rightarrow \mathbb{C}$, порождающим последовательность $f_k(x) = f(T^k x)$.

2 Эргодическая теория

Сперва из всех динамических систем предпочтем те, в которых структура имеет вероятностный характер, чтобы изучить ряд количественных методов, а также из-за близости к дискретной математике.

Пример 2 (Динамические системы по случайным процессам). Рассмотрим переход от случайного процесса к динамической системе. Имеем случайный процесс с дискретным временем: $\dots, \xi_{-1}, \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_t : \Omega \rightarrow \mathbb{A}$.

Рассмотрим фазовое пространство $X = \mathbb{A}^{\mathbb{Z}} = (\dots, x_0, x_1, \dots)$, на нём можно ввести цилиндрическую сигма-алгебру и индуцировать меру. Один шаг процесса определим как $S : (x_i) \mapsto (x_{i+1})$.

Теорема 1 (Пуанкаре о возвращении). Пусть $\mu(X) = 1, T : X \rightarrow X, \mu(T^{-1}A) = \mu(TA) = \mu(A)$, тогда для любого измеримого $A, \mu(A) > 0$ найдётся $n > 0 : \mu(A \cap T^n A) > 0$.

Доказательство. $\mu(T^{n+k}A \cap T^n A) = \mu(TA^k)$, то есть если $\mu(TA^k) = 0$ для всех k , то все множества $T^n A$ попарно непересекаются, что невозможно, так как множество X конечной меры, а множество A — положительной. \square

Визуально, рассмотрим конструкцию, которая называется «башня» или «здание». Изобразим A как первый этаж L_0 , TA частично перейдет в само A , частично в новые точки $TA \setminus A$. Далее, некоторые точки перейдут в новые, некоторые перейдут обратно в A . Так строим этажи L_0, L_1, \dots . Некоторые свойства полученной конструкции:

- $T(\bigcup L_n) = \bigcup L_n$.
- $r_A(x)$ = время возвращения в A корректно определено почти всюду и измеримо.
- $\mu(\bigcup L_n) = \int_A r_A(x) d\mu$.
- $E(r_A \mid A) \leq \frac{1}{\mu(A)}$.

Определение 4. Башня высоты h с основанием A есть непересекающиеся множества $A, \dots, T^{h-1}A$.

Упражнение 1 (Лемма Рохлина-Халмоша). $\forall \varepsilon > 0, h \in \mathbb{N} \rightarrow \exists$ башня, такая что $\mu(\bigcup_{k=0}^{h-1} T^k A) > 1 - \varepsilon$ (T сохраняет меру, и, возможно, еще что-нибудь).

3 Семинарская часть

Определение 5. Биллиард — система из точки и множества на плоскости, в котором движется точка, отражаясь по стандартным законам.

Упражнение 2. Есть бильярд в угле величины $\alpha < \frac{\pi}{2}$. Уйдет ли точка на бесконечность?

Упражнение 3. Есть бильярд во множестве $X = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, y \leq \frac{1}{1+x^2}\}$. Уйдет ли точка, выпущенная из $(0, 0)$, на бесконечность?

Упражнение 4. Есть бильярд в прямоугольнике. Есть ли замкнутые траектории? Есть ли незамкнутые? Есть ли всюду плотные?

Упражнение 5. Есть бильярд в круге. Какие бывают траектории? А в эллипсе?

Лекция 2. Эргодическая теорема I

4 Эргодические системы, теорема Биркгофа-Хинчина

Рассматриваются системы вида $(G, (X, \mathcal{B}, \mu), T^t)$, с конечной мерой $\mu(X) = 1$. Ограничимся также только дискретным временем \mathbb{Z} .

Определение 1. T называется *эргодическим*, если $\forall A \in \mathcal{B} : 0 < \mu(A) < \mu(X), TA \neq A \pmod{0}$.

Это значит, что в X нет разбиения на два инвариантных множества A, B ненулевой меры. Действие называется эргодическим, если T^t эргодично для любого t .

Теорема 1 (Эргодическая теорема Биркгофа-Хинчина). *Если T — эргодическое, то $\forall x \in X$, ограниченной измеримой $f \in L^\infty(X)$ выполнено*

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x) \rightarrow \text{const} = \int_X f d\mu$$

Определение 2. T называется *перемешивающим* ($T \in Mix$), если

$$\forall A, B \in \mathcal{B} : \mu(T^k A \cap B) \rightarrow \mu(A)\mu(B)$$

.

Определение 3. T называется *слабо перемешивающим* ($T \in WMix$), если

$$\forall A, B \in \mathcal{B} \exists \{k_j\}_1^\infty : \mu(T_{k_j}^k A \cap B) \rightarrow \mu(A)\mu(B)$$

.

5 Оператор Купмана

Определение 4. Оператор Купмана $\hat{T} : f(x) \mapsto f(Tx)$.

Для не дискретного времени это будет представлением группы времени. Изучение свойств этого линейного оператора приводит к так называемой спектральной теории.

Замечание. Можно переформулировать все три данных определения:

- Эргодичность: $\hat{T}f_0 = f_0 \Rightarrow f_0 = \text{const}$.
- Перемешивание: $\langle T^k f, g \rangle \rightarrow 0$, $\int f d\mu = \int g d\mu = 0$. Иначе, $\hat{T}^k \xrightarrow{w} \Theta = P_{\{\text{const}\}}$ (ортопроектор на константу).
- $WCl(\{\hat{T}^k\}) \ni \Theta$.

Теорема 2. $T \in Mix \Rightarrow T$ — эргодическое.

Доказательство. От противного: пусть $\exists \xi \neq \text{const} \hat{T}\xi = \xi$. $\xi_0 = \xi - \Theta\xi = \xi - \mathbb{E}\xi = \xi - \bar{\xi}$ ($\Theta : f(x) \mapsto (x \rightarrow \int f d\mu)$). Обозначение Θ похоже на 0, неслучайно: $\Theta A = A\Theta = \Theta$.

$\Theta\xi_0 = 0$, $\int \xi_0 d\mu = 0$, $\xi_0 \neq \text{const}$. $\langle T^k \xi_0, \xi_0 \rangle \rightarrow 0$, но $\langle T^k \xi_0, \xi_0 \rangle = \langle \xi_0, \xi_0 \rangle > 0$, противоречие. \square

6 Семинарская часть

Упражнение 1. Показать, что $[0; 1] \cong [0; 1] \times [0; 1]$ как пространства с мерой, то есть построить измеримую биекцию, сохраняющую меру.

Определение 5. Преобразование пекаря: $A \mid B \rightarrow \frac{B}{A}$.

Формула для преобразования пекаря в двоичном коде очень простая: $\dots y_2 y_1 x_1 x_2 \dots \Rightarrow \dots y_2 y_1 x_1 x_2 x_3 \dots$, почти как левый сдвиг для случайных процессов.

Определение 6. Подкова Смейла: $(x, y) \mapsto (\frac{x}{3}, 3y) \pmod{1}$.

Определение 7. Сдвиг Бернулли: $\mathbb{A} = \{0, 1\}$, $p = (p_0, p_1)$, $p_0 + p_1 = 1$. $\Sigma_2 = \mathbb{A}^{\mathbb{Z}} = \{x : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{A}\}$. Тогда для слова w : $P([w]) = p_0^{\# \text{нулей в } w} p_1^{\# \text{единиц в } w}$.

Упражнение 2. Найти инвариантное множество для подковы Смейла. Показать, что канторовское множество изоморфно $[0; 1]$ как пространство с мерой.

Упражнение 3. Попробовать устранить «негладкость» преобразования пекаря и «сингулярность подковы Смейла».

Упражнение 4 ($\star\star$). $T \in Mix \Leftrightarrow \forall A \in \mathcal{B} \rightarrow \mu(T^k A \cap A) \rightarrow \mu(A)^2$.

Лекция 3. Эргодическая теорема II

7 Общие соображения

Имеем группу (полугруппу) G , которая отвечает за время. В статистическом случае мы делаем N наблюдений и усредняем результаты согласно равномерному распределению. Причем тут вообще равномерность? Это инвариантность относительно естественного действия группы, то есть это так называемая мера Хаара: $\lambda(\delta + A) = \lambda(A)$.

Значит в гипотетическом общем случае наш план таков: выделить область времени U и посчитать $\frac{1}{\lambda(U)} \int_U f(T^t x) d\lambda(t)$ ожидая, что это сходится к $E_\lambda f$ при $U \rightarrow \infty$ в каком-то смысле.

Определение 1. Пусть есть последовательность F_n , тогда если $\frac{\lambda(F_n \oplus (\delta + F_n))}{\lambda(F_n)} \rightarrow 0$ для всех $z \in K$ -компакта, то эти множества называются Фёльнеровскими.

Определение 2. Аменабельная группа G — такая группа, в которой есть «последовательность» Фёльнеровских множеств F_n .

Один из главных примеров не аменабельной группы — это свободная группа F_2 , где граница шара по размеру сопоставима с самим шаром. Оказывается, что аменабельность замкнута относительно всех разумных теоретико-групповых операций, а значит те группы, которые содержат F_2 не аменабельны, в частности группа $SO(3)$.

Упражнение 1. Есть ли в группе $\left\langle \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ соотношения?

Напоминание: унитарный оператор — такой, что $A^* = A^{-1}$ или $\langle Af, g \rangle = \langle f, A^*g \rangle$.

Опатор Купмана сохраняет скалярные произведения: $\int_X f(Tx) \overline{g(Tx)} d\mu(x)$ по теореме о замене переменных в интеграле Лебега есть $\langle f, g \rangle$, что и нужно.

Упражнение 2. T — эргодично $\Leftrightarrow \exists \varphi \neq const, \hat{T} = \varphi \Leftrightarrow \ker(\hat{T} - 1) = \{const\}$.

Докажем теперь, что из эргодичности следует перемешивание. Без ограничения общности $E_\lambda \varphi = 0$. $T \in Mix \Leftrightarrow \forall f, g \rightarrow \langle \hat{T}^k f, g \rangle \rightarrow E_\lambda f E_\lambda g$, то есть $\hat{T}^k \xrightarrow{w} \Theta$ (ортопроектор на константу).

$$\langle \Theta f, g \rangle = \int (E_\lambda f) \overline{g} d\lambda = E_\lambda f \int \overline{g} d\lambda$$

8 Теорема фон Неймана, лемма Рохлина-Халмоша

Теорема 1 (Эргодическая теорема фон Неймана). $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \hat{T}^k f \rightarrow E_\mu f$ в $L^2(X, \mu)$, если T — эргодично.

Доказательство. Пусть T не обязательно эргодично. Пусть $I = \{\varphi : \hat{T}\varphi = \varphi\}$. $L^2(\mu) = I \oplus I^\perp$, $\hat{T}I = I$.

Если $\varphi \in I$, то $\frac{1}{n} \sum \hat{T}^k \varphi = \frac{1}{n}(\varphi + \dots + \varphi) = \varphi \rightarrow \varphi$.

Иначе, пусть функция имеет вид $f = h - \hat{T}h$. Сумма примет вид $\frac{1}{n} (h - \hat{T}h + \hat{T}h - \hat{T}^2h + \dots) = \frac{1}{n} (h - \hat{T}^n h) \rightarrow 0$, так как \hat{T} — унитарный.

Дальнейшая идея в том, чтобы показать, что функции такого вида плотны в I^\perp . Рассмотрим замыкание $M = \overline{\{h - \hat{T}h\}}$. Если оно не совпадает с I , то все пространство разбивается на три: $L^2(\mu) = I \oplus M \oplus F$ для какого-то F . $\exists f \in F : f \perp (h - \hat{T}h)$ для любого h , тогда $\langle f, h - \hat{T}h \rangle = \langle f, h \rangle - \langle f, \hat{T}h \rangle = \langle f, h \rangle - \langle \hat{T}^{-1}f, h \rangle = \langle f - \hat{T}^{-1}f, h \rangle$, значит, так как h любое, то $f - \hat{T}^{-1}f = 0 \Rightarrow \hat{T}f = f$, противоречие. \square

Лемма (Рохлина-Халмоша). Пусть T — эргодическая и заданы параметры $\varepsilon > 0, h \in \mathbb{N}$, тогда существует башня высоты h , такая что $\mu(\bigcup_{k=0}^{h-1} T^k B) > 1 - \varepsilon$.

Доказательство. Выберем произвольное множество B и построим $L_k = TL_{k-1} \setminus B, L_0 = B$. Тогда множество $D = \bigcup_{k=0}^{\infty} L_k$ инвариантно, $TD = D$. Отсюда $D = X$ в силу эргодичности.

Выберем теперь любое множество B , такое, что $\mu(B)(h-1) < \varepsilon$ и рассмотрим B, TB, \dots . Спроецируем каждый h -й уровень на h вниз и выберем h множеств, из урезанных слоев, построив таким образом новую башню C, TC, T^2C, \dots . Она дизъюнктна и мера её объединения не меньше чем $1 - \mu(B)(h-1) \leq 1 - \varepsilon$, так как ошибочные кусочки покрывают B не более, чем h раз. \square

9 Доказательство эргодической теоремы

Доказательство. Рассмотрим $f = I_{X_0}$, $\mu(X_0) = 1 - \mu(X_0) = \mu(X_1) = \frac{1}{2}$. Вместо одной второй можно взять любую положительную константу. Таки-ми индикаторами можно аппроксимировать любую функцию.

$$\mu(x : \limsup_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x)}_{S_n} \geq \frac{1}{2} + c) > 0, c > 0$$

Это значит $\forall x \exists n_j \rightarrow +\infty : S_j \geq \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$.

Рассмотрим башню H меры, близкой к 1 с достаточно большой высотой. $n_1(x)$ измеримо, $\mu(x : n_1(x) > M) = 0, M \rightarrow \infty$. M нужно выбрать таким, чтобы эта мера была меньше какого-то малого δ . Хотим разбивать нашу башню на множества меры 0 по вертикали. Сверху нужно отступить M , чтобы не испортить статистику, потеряем на этом не больше $\frac{M}{H}$ меры. Важно аккуратно сделать это разбиение измеримым и пропускать те моменты, где в нужном столбике меньше $\frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$ единичек. \square

Лекция 4. Спектральная теорема I

10 Спектральная теорема для простого спектра

Перед тем, как сформулировать спектральную теорему, вспомним некоторые факты:

- Оператор Купмана \hat{T}^t унитарен.
 - Под гильбертовым пространством H понимаем линейное пространство над \mathbb{C} с эрмитовым скалярным произведением $\langle u, v \rangle$, полное относительно порождённой метрики.
- Мы будем интересоваться как правило пространством $H = L^2(X, \mathcal{B}, \mu) = \left\{ f : \|f\|^2 = \int_X |f|^2 d\mu < \infty \right\} / \sim$.
- Циклическое пространство $Z(h) = \overline{\text{Span}(\hat{T}^k h : k \in \mathbb{Z})}$ — минимальное замкнутое инвариантное подпространство.

Теорема 1 (Спектральная теорема для систем с простым спектром). Пусть есть унитарный оператор в гильбертовом пространстве и пусть $\exists h : Z(h) = H$, тогда имеет место коммутативная диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\hat{T}} & H \\ \downarrow \psi & & \downarrow \psi \\ H & \xrightarrow{M_z : \varphi(\lambda) \mapsto \lambda \varphi(\lambda)} & L^2(S^1, \sigma_h) \end{array}$$

$$\text{Где } \sigma_h : \langle \hat{T}^k h, h \rangle = \int_{S^1} z^k d\sigma_h.$$

Притом, если есть циклический вектор h' , то $\sigma_h \sim \sigma_{h'}$, где $\hat{T} \sim \hat{S} = \Phi^{-1} \hat{T} \Phi \Leftrightarrow \sigma_h^{(\hat{T})} \sim \sigma_h^{(\hat{S})}$, $\nu \sim \mu \Leftrightarrow \nu \ll \mu, \mu \ll \nu; \nu \ll \mu : \nu = p(\lambda)\mu$.

Что такое кратность? Модельный пример — система из двух одинаковых маятников, независимо колеблющихся. Более формально, $H > L_1 \oplus \dots \oplus L_m : \hat{T} |_{H_i} \sim \hat{T} |_{H_j}$.

Общие спектральные инварианты: $([\sigma], \mathcal{M}(\lambda))$, \mathcal{M} — функция кратности, $\mathcal{M} : S^1 \rightarrow \mathbb{N} \sqcup \{\infty\}$.

Упражнение 1. Можно ли в какой-то группе придумать два набора подгрупп, таких, что: $1_{G_1} + \dots + 1_{G_n} = 1_{H_1} + \dots + 1_{H_n}$?

11 Семинарская часть

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ имеет СЗ $\pm\sqrt{2}$. Спектр этого оператора $\sigma = \frac{\delta_{-\sqrt{2}} + \delta_{\sqrt{2}}}{2}$.

Упражнение 2 (*). Придумать вектор: h , дающий такую σ .

$\Lambda = \{\pm\sqrt{2}\}$, $L^2(\Lambda, \sigma) = \{\varphi : \Lambda \rightarrow \mathbb{C}\} \cong \mathbb{C}^2$. $M_\lambda(\varphi) = \lambda\varphi(\lambda)$. Если функцию φ представлять столбцом значений в $\pm\sqrt{2}$, то

$$M_\lambda \begin{bmatrix} \varphi(-\sqrt{2}) \\ \varphi(\sqrt{2}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2}\varphi(-\sqrt{2}) \\ \sqrt{2}\varphi(\sqrt{2}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi(-\sqrt{2}) \\ \varphi(\sqrt{2}) \end{bmatrix}$$

Рассмотрим теперь группу $\mathbb{T} = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. И матрицу $A(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

Характеры тора (гомоморфизмы в комплексную единичную окружность) выглядят так: $\gamma_{j,k}(x, y) = \exp(2\pi i(jx + ky))$. Возьмём один характер и рассмотрим его динамику под действием оператора Купмана.

Можно проверить, что $\gamma_{j_0, k_0}(A(x, y)) = \gamma_{A^T(j_0, k_0)}(x, y)$. Действие корректно задано на торе, если все элементы A — целые. Оно обратимо, если обратная матрица тоже целочисленна, то есть $\det A = 1$.

Орбиты этого действия на \mathbb{Z}^2 получились гиперболами на соответствующих целых точках (плюс одна стационарная орбита). Спектральный тип этой системы получился (Leb, ∞) .

Упражнение 3. Возьмем последовательность характеров на одной гиперболе: $\xi_j : \hat{A}\xi_i = \xi_{i+1}$. Посчитать σ_{ξ_0} и $\langle \hat{A}^k \xi_i, \xi_i \rangle$.

Лекция 5. Спектральная теорема II

12 Общая спектральная теорема

Список праздных фактов:

- $\text{supp } \sigma = \bigcup_{\substack{\sigma(X \setminus K) = 0, \\ K - \text{замкнуто}}} K$
- $\sigma_1 * \sigma_2$ — распределение случайной величины $\xi_1 + \xi_2, \xi_1 \perp \xi_2$.
- (абсолютная непрерывность мер) $\nu \ll \mu \Leftrightarrow \nu = p(z)\mu, p \in L^1(\mu)$.

- (сингулярность мер) $\nu \perp \eta \Leftrightarrow \exists$ борелевское $F : \nu(F) = 1, \eta(\Omega \setminus F) = 1$
- Любые две меры σ_1, σ_2 можно представить как $\sigma_1 = \nu_1 + \omega_1, \sigma_2 = \nu_2 + \omega_2$, притом $\omega_1 \sim \omega_2 \perp \nu_1 \perp \nu_2$.

Теорема 1. $\sigma = \sigma_d + \sigma_s + \sigma_{ac}$ (представляется в виде суммы дискретной составляющей, сингулярной составляющей и абсолютно непрерывной составляющей), притом $(\sigma_d, \sigma_s) \perp \sigma_{ac}$.

При этом $\sigma_d \sim 1_\Lambda, \Lambda < S^1$ — дискретная.

Теорема 2 (*). Если \hat{T} — эргодическое в бесконечномерном $L^2(x, \mu)$, тогда $Sp(\hat{T}) = \text{supp } \sigma = S^1$.

Если рассматривать системы с кратностью, получается картина, которую можно воспринимать двумя способами:

- Есть меры $\sigma_1, \dots, \sigma_\infty$, попарно сингулярные, притом у нас есть по n копий пространства $V_n : \hat{T}|_{V_{2,j}} \cong (L^2(\sigma_2), \mu_2)$.
- У нас есть $\sigma_1, \dots, \sigma_\infty$, притом $\sigma_{k+1} \ll \sigma_k, \sigma_1 = \sigma$. В терминах предыдущего случая $\sigma = \frac{\sigma_1}{4} + \dots + \frac{\sigma_k}{2^{k+1}} + \dots + \frac{\sigma_\infty}{2}$.

Спектральный инвариант тогда имеет вид $(\sigma, M(z))$, где $M(z)$ — измеримая функция кратности.

13 Семинарская часть

Определение 1. Пусть $T : (X, \mu), S(Y, \nu)$. η есть джойнинг T, S если $\pi_x \eta = \mu, \pi_y \eta = \nu, (T \times S)\eta = \eta$.

Диагональный автоджойнинг: $\Delta(A \times B) = \mu(A \cap B)$.

Упражнение 1.

- $\Delta_S(A \times B) = \mu(AS \cap B)$ — джойнинг, если $ST = TS$, S сохраняет меру.
Замечание: $\Delta_{T^k}(A \times B) = \mu(T^k A \cap B) \rightarrow \mu(A)\mu(B) \Leftrightarrow \Delta_{T^k} \xrightarrow{w} \mu \times \mu$ — джойнинговое определение перемешивания.
- $T : \sigma_1, S : \sigma_2, \sigma_1 \perp \sigma_2 \Rightarrow T \perp S$ — дизъюнкты, то есть единственный джойнинг — это $\mu \times \nu$.

Если есть $\beta(f(x), g(y)) = \int_{X \times X} f(x)g(y)d\eta$, то она представима как $\langle J_\eta, g \rangle$.

Например, $J_{\mu \times \nu} = \Theta$ — ортопроектор на константу, $J_\Delta = Id, J_{\Delta_S} = \hat{S}$.

Лекция 6. Немного про джойнинги

14 Структура пространства всех джойнингов

Праздный факт:

Теорема 1 (Рохлин). *Любое пространство Лебега (конечной меры) без атомов (точек ненулевой меры) изоморфно $[0; 1]$.*

Рассмотрим множество всех джойнингов $J_{T,S}$. Оно выпукло и компактно (множество всех мер компактно в силу слабой компактности шара в гильбертовом пространстве, а замкнутое подмножество компакта компактно). Всякий джойнинг может быть тогда выражен как

$$\eta = \int_{\partial J_{T,S}} \alpha d\xi_{(\eta)}.$$

Утверждается, что $\partial J_{T,S}$ представляет собой все эргодические джойнинги.

Пусть есть две эргодические системы T и S с общим дискретным спектром Λ . Тогда $J_{T,S}$ непусто и компактно, то есть имеет границу. Значит существует какой-то эргодический джойнинг η .

$$L^2(\mu) = \text{Span}\{\varphi_\lambda(x) : \lambda \in \Lambda\}, \quad L^2(\nu) = \text{Span}\{\psi_\lambda(x) : \lambda \in \Lambda\}.$$

$$(\hat{T} \times \hat{S})\varphi_{\lambda_1}(x)\psi_{\lambda_2}(y) = \lambda_1\lambda_2\varphi_{\lambda_1}\psi_{\lambda_2}. \quad L^2(\eta) = \langle \varphi_{\lambda_1} \otimes \psi_{\lambda_2} \rangle.$$

Утверждается, что канонические вложения $\hat{\pi}_1 : L^2(\mu) \rightarrow L^2(\eta), \hat{\pi}_2 : L^2(\nu) \rightarrow L^2(\eta)$ являются изоморфизмами.

Лекция 7. Про слабоперемешивающие системы

15 Построение слабоперемешивающей, но не перемешивающей системы

Хотим построить слабо-перемешивающую, но не перемешивающую систему.

Рассмотрим следующий процесс преобразования слов и будем его анализировать. $w_0 = 0, w_1 = 0010, \dots, w_{n+1} = w_n w_n 1 w_n$.

Определим эмпирическое распределение: $p(u||w_\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} p(u||w_n)$, где $p(u||v) = \frac{\#\{\text{вхождений } u \text{ в } v\}}{|v| - |u| + 1}$.

Лемма. *Меры $\mu_n(u) = p(u||w_\infty), |u| = n$ согласованы, то есть если по большей мере рассмотреть маленькое слово, то получится то же, что по меньшей мере (или, что существует мера μ , проекцией которой являются все данные меры). Таким образом имеется динамическая система на пространстве $(\mathbb{A}^{\mathbb{Z}}, \mathcal{B}, \mu)$ с оператором Купмана $T : (x_i) \mapsto (x_{i+1})$.*

Теорема 1.

- T — эргодическое;
- $\hat{T}^{h_n} \xrightarrow{w} \frac{\hat{T}+1}{2}$;
- $T \in WMix, T \notin Mix$.

Процесс можно представить так: имеем слово w , записанное в башню снизу вверх. За 1 шаг мы должны скопировать w , получив три башни рядом. Далее на среднюю башню нужно дописать 1 и склеить все в один столбик.

Определение 1. $T \in \text{Rang}(1)$, если $\exists \xi_n = \{B_n, TB_n, \dots, T^{h_n-1}B_n, \varepsilon_n\} \rightarrow \varepsilon$, то есть $\forall A \exists \xi_n$ — измеримая на A и $\mu(A\Delta A_n) \rightarrow 0$.

Рассмотрим $\left\langle \hat{T}^{-h_n} f, g \right\rangle = \int_X \hat{T}^{h_n} f(x) g(x) d\mu = \frac{1}{2} \langle f, g \rangle + \frac{1}{2} \langle \hat{T} f, g \rangle$. То есть второй пункт доказан.

Этюд: характеристика полиномов, таких, что $\lim \hat{T}^{-mh_n} = P_m(\hat{T})$. Можно получить, что $P_{3m} = P_m$ и выразить P_{3m+1}, P_{3m+2} через $P_m = P_{3m}$ и $P_{m+1} = P_{3m} + 3$ и изобразить их как результат случайного блуждания на графе Шреера $BS(1, 3)/\langle t \rangle$, где $BS(1, 3) = \langle a, t \mid tat^{-1} = a^3 \rangle$ (стандартное действие $a : x \mapsto x + 1, t : x \mapsto 3x$).

Теорема 2. Для эргодических T следующие утверждения эквивалентны:

- $T \in WMix$;
- $\sigma_T = \sigma_s + \sigma_{ac}(\hat{T}\varphi : \hat{T}\varphi = \lambda\varphi, \lambda \neq 1)$;
- Джойнинг $\mu \times \mu$ эргодичен относительно $T \times T$;
- (Н. Винер) $\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \mathcal{F} = \{t : |\langle \hat{T}^t f, g \rangle| > \varepsilon\}$ имеет нулевую плотность: $\frac{\mathcal{F} \cap [1, N]}{N} \rightarrow 0$.

Лекция 8. Метрическая энтропия

16 Энтропия динамической системы

Рассмотрим фазовое пространство (X, \mathcal{B}, μ) и конечное разбиение $P = \{C_1, \dots, C_n\}$.

Определение 1. Энтропия разбиения P — это $H(P) = -\sum \mu(C_i) \log_2 \mu(C_i)$.

Замечание. В определении основание логарифма не так важно, но мы принимаем его за 2, чтобы «измерять» информацию в привычных битах.

Нетрудно понять, что $H(P) = E_\mu I_P(x)$, где $I(x)$ — информационная функция: $I_P(x) = -\log_2 \mu(C(x))$, где $C(x) : X \rightarrow P, C(x) \ni x$.

Возьмём разбиение P_0 и построим $Q_N = P_0 \vee T^{-1}P_0 \vee \dots \vee T^{-N+1}P_0$, где $A \vee B$ обозначает взятие минимального разбиения, содержащего A и B .

Определение 2. Пусть (X, T) — динамическая система, $P = \{C_\alpha, \alpha \in \mathbb{A}\}$ — разбиение. Пусть также $x_j \in \mathbb{A} : C_{x_j} \ni T^j(x)$. Тогда бесконечная последовательность $\{x_j \mid j \in \mathbb{N}\}$ называется *кодом* точки x .

Для $w \in \mathbb{A}^*$ примем обозначение $[w] = \{x : x_0 \dots x_{|w|-1} = w\}$.

Можно рассматривать процесс кодирования как случайный процесс в следующем смысле: пусть $\xi_0(x) = \alpha, x \in C_\alpha$ — кодирующая случайная величина, тогда процесс кодирования $\xi_j = \xi_0 T^j$.

Определение 3. Энтропией процесса $\{\xi_j\}$ называется $h(\xi) = h_{P_0}(T) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} H(Q_N)$.

Отметим также свойство: $H(P_0) \leq \log_2 |P_0|$, достигается оценка очевидно для равномерного разбиения.

Условную энтропию можно ввести с помощью условное матожидание. Точно, через матожидание, также можно ввести энтропию бесконечного разбиения, однако, она уже не обязана быть конечной.

Теорема 1. $H_P(T) = H(P \mid \bigvee_{-\infty}^{-1} T^i P)$.

Замечание. Представить себе процесс с пространством, неизоморфным пространству Лебега не очень просто, но такие есть (как пример, Винеровский процесс).

Определение 4. η — измеримое разбиение, если $\eta = \{f^{-1}(\{y\})\}$ для некоторого измеримого $f : X \rightarrow Y$.

Разбиения	σ -алгебры
пространство Лебега $\cong [0; 1]$	
$\nu = \{X\}$	$\{\emptyset, X\}$
$\mathfrak{c} = \{\{x\} \mid x \in X\}$	\mathcal{A} — полная на $[0; 1]$
$\xi \vee \eta = \{C_1 \cap C_2\}$	$\mathcal{B}_1 \wedge \mathcal{B}_2$
$\xi \wedge \eta$	$\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$

Определение 5. \mathcal{A} называется μ -полной, если $\mathcal{A} = [\mathcal{A}]_\mu$.

Определение 6. Система $(Y, \mathcal{B}, \gamma, S)$ является фактором (X, \mathcal{A}, μ, T) , если существует «вложение»: $\exists \varphi : X \rightarrow Y, \mathcal{B} \leq \mathcal{A}$.

Или: $\mathcal{B} \leq \mathcal{A}, S = T|_{\mathcal{B}}$ при условии, что $T\mathcal{B} = \mathcal{B}$.

Определение 7. Энтропия динамической системы $h(T) = \sup_P h_P(T)$, где P — конечное разбиение.

$h > 0$	Спектр (Leb, ∞)
$h = 0$	Самые разные спектры, разные кратности, примеры субэкспоненциального роста сложности

Теорема 2 (Шеннон-Макмилан-Брейман). Энтропию процесса можно эквивалентно определить следующим образом: $\exists h \geq 0 : \forall \varepsilon > 0 \rightarrow$ для μ -большинства блоков $[w]$ длины n (мера всех остальных блоков стремится к 0): $2^{-n(h+\varepsilon)} < \mu([w]) < 2^{-n(h-\varepsilon)}$. Такое h и есть энтропия процесса.

17 Семинарская часть

Символическая сложность: $P_w(n) = \#L_n(w), L_n(w) = \{u \leq w : |u| = n\}$.

Упражнение 1.

- $\min p(n)$ для непериодических слов?
- построить экспоненциальный рост: 2^{h_n}
- построить линейный рост
- достигается ли наименьшая скорость роста в первом пункте
- добиться квадратичной скорости
- добиться кубической скорости
- добиться субэкспоненциальной скорости
- (*) какова скорость роста для слабо-перемешивающей системы из предыдущей лекции? Для последовательности Туве-Морса.

Лекция 9. Топологическая динамика

18 Топологические динамические системы и их свойства

Рассмотрим поведение точки, траектория которой задаётся дифференциальным уравнением $\dot{x} = v(x)$. Простой пример локального исследования такой системы из дифференциальных уравнений — фазовые портреты дифференциальных уравнений на плоскости. Также можно изучать более глобальные параметры, например, «предельные циклы».

Вспомним, что динамическая система в этом случае это (X, τ, T^t, G) , где τ — топология, а T^t — поток непрерывных преобразований.

Общие конструкции (считаем, что время — \mathbb{Z}):

- ω -предельные точки $\omega_T(X) = \{y : \exists x \in X, k_j \rightarrow \infty : y = T^{k_j}x\}$.
Обозначим также $X' = \omega_T(X)$.
- α -предельные точки $\alpha_T(X) = \{y : \exists x \in X, k_j \rightarrow -\infty : y = T^{k_j}x\}$.
- T называется *транзитивным*, если $\exists x_0 : \omega_T(\{x\}) = X$
- T называется *минимальным*, если $\forall x_0 : \omega_T(\{x\}) = X$

19 Символические системы

Определение 1. Пусть \mathbb{A} — конечный алфавит. $\Omega = \{(\dots x_0 x_1 x_2 \dots) \mid x_t \in \mathbb{A}\}$, $S : (x_i) \mapsto (x_{i+1})$. Тогда (Ω, S) — *топологическая система Бернулли*.

Топология слабая: база $W_u = \{x : u \preceq x\}$. Также можно задать метрикой $d(x, y) = \frac{1}{2}|x_0 - y_0| + \sum_{i \neq 0} \frac{|x_i - y_i|}{2^{|i|+2}}$.

Упражнение 1. Изучить все описанные свойства для бернуллиевской системы.

Упражнение 2. (*) Изучить все описанные свойства для динамической системы из лекции 7 ($1 \rightarrow 1, 0 \rightarrow 0010$).

Упражнение 3. Пусть \bar{Y} — замыкание $\{S^k y : y \in Y\}$. Показать, что \bar{Y} — компакт и найти $S(Y)$ для следующих Y :

- $Y = \{(\dots 0101010 \dots)\}$.
- $Y = \{(\dots 0001000 \dots)\}$.
- $Y = \{(0 \dots 010 \dots 010 \dots)\}$ (единицы на местах i и j).

Упражнение 4. Привести пример $X \subset \Omega$, которая была бы транзитивна, но не минимальна.

Упражнение 5. (*) Привести пример системы $X \subset \Omega$, такой что $X \neq X' \neq X''$.

Рассмотрим динамическую систему «подкова Смейла»: $\Omega = [0; 1] \times [0; 1]$, $T(x, y) = (\frac{x}{3} + \frac{2y}{3}, 3y)$. Множество $K \times K$ получается инвариантным, и на нём возникает интересная динамика, на самом деле на этом подмножестве система бернуллиевская.

Определение 2. *Топологическая марковская цепь* это слова $\dots x_0 x_1 x_2 \dots$ над \mathbb{A} , притом слово $\alpha\beta$ разрешено, если в некотором заданном графе на всех словах \mathbb{A}^* есть стрелка $\alpha \rightarrow \beta$.

Для обобщения на большую размерность стоит упомянуть, что лучше использовать не «разрешённые» переходы, а наоборот, «запрещённые».

Пример двумерной марковской цепи: \mathbb{Z}^2 и запрещены конфигурации, где в клетках $(i, j), (i+1, j), (i+1, j+1)$ сумма равна 1 по модулю 2 (алфавит бинарный). Такая цепь, например, является контрпримером к проблеме Рохлина о кратном перемешивании, так как является двукратно перемешивающей, но не трехкратно.

Следующий пример принадлежит Аносову: дело происходит на $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$.

$$A : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Интересные свойства:

- $A\mu = \mu$.
- A — автоморфизм, диффеоморфизм.
- $A \cong$ марковскому процессу.
- $\exists A^{-1}$.