Лекция 1. Определение и примеры динамических

1 Введение

Литература:

- (!) Синай «Эргодическая теория», издательство «Фазис» или «РХД» — брошюра из нескольких лекций.
- Каток—Хиссельблат «Введение в современную теорию динамических систем» — энциклопедического плана, есть материал про топологическую динамику.
- Коррфельд—Синай—Фомин «Эргодическая теория» — учебник, однако старый.
- «Динамические системы-2» издательства «ВИНИТИ».
- (!) Халмош «Лекции по эргодической теории».
- Мартин-Итленд «Математическая теория энтропии».
- Арнольд «Математические методы классической механики».

Динамические системы — где-то 1920е, Банах, фон Нейман и другие, рассмотрение различных объектов как процессов. Что характерно:

- время
- состояние
- эволюция/динамика

Пример 1. $x'' + \omega^2 x = 0 \Rightarrow x = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t$. Можно переписать как $x' = y, y' = -\omega^2 x$, тогда динамика будет определяться однозначно состоянием.

Исторически пытались решать такие задачи грубо говоря формулой. Но даже имея точную формулу решения, мы можем ошибаться сильно, если плохо измерены начальные условия, если со временем теряется много информации (не говоря уже о том, что большинство задач аналитически не решается). Значит по возможности рассматривать динамику как-то глобально.

Определение 1. Фазовый поток $T^t : (x_0, y_0) \mapsto (x(t), y(t))$, где $(x(t), y(t))$ — решение с начальными условиями (x_0, y_0).

- $T^{t+s} = T^t \circ T^s$.
- $(T^t)^{-1} = T^{-t}$.

- $T^t \in Diff(\mathbb{R}^2)$
- То есть T^t есть гомоморфизм. $T^t : \mathbb{R} \to Diff(\mathbb{R}^2)$.

Это и есть основная модель динамической системы. Время не обязательно непрерывно: мы можем рассматривать осциллятор только в целые моменты времени. То есть у нас будет фигурировать множество поворотов окружноти на угол α. Есть еще много других, естественных примеров: конечные автоматы, случайные процессы с дискретным временем.

Под классическим временем понимается $\mathbb{Z}$ или $\mathbb{R}$, в общем случае можно брать другие группы.

Определение 2. Динамическая система — следующая четвека:

- G — группа или полугруппа времени (обычно коммутативная),
- X — фазововое пространство,
- $\mathcal{S}$ — структура,
- T^t — фазовый поток.

Со следующими свойствами:

- $T^0 = Id$,
- $T^{t+s} = T^t \circ T^s$,
- $(T^t)^{-1} = T^{-t}$,
- T^t — сохраняет структуру $\mathcal{S}$.

Примеры структур:

- тривиальная структура. $T^t \in X^X$,
- топология, прообраз открытого открыт,
- вероятнтсть $(X, \mathcal{B}, \mu)$,
- линейное пространство,
- группа.

Определение 3. В случае $\mathbb{Z}$ процесс ассоциирован с некоторым измерением $f : X \to \mathbb{C}$, порождающим последовательность $f_k(x) = f(T^k x)$.

2 Эргодическая теория

Сперва из всех динамических систем предпочтем те, в которых стуктура имеет вероятностный характер, чтобы изучить ряд количественных методов, а также из-за близости к дискретной математике.

Пример 2 (Динамические системы по случайным процессам)**.** Рассмотрим переход от случайного процесса к динамической системе. Имеем случайный процесс с дискрентым временем: $\ldots, \xi_{-1}, \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_t : \Omega \to \mathbb{A}$.

Рассмотрим фазовое пространство $X = \mathbb{A}^{\mathbb{Z}} = (\ldots, x_0, x_1, \ldots)$, на нём можно ввести цилиндрическую сигма-алгебру и индуцировать меру. Один шаг процесса определим как $S : (x_i) \mapsto (x_{i+1})$.

Теорема 1 (Пуанкаре о возвращении)**.** *Пусть* $\mu(X) = 1, T : X \to X, \mu(T^{-1}A) = \mu(TA) = \mu(A)$*, тогда для любого измеримого* $A, \mu(A) > 0$ *найдётся* $n > 0 :$ $\mu(A \cap T^n A) > 0$.

Доказательство. $\mu(T^{n+k}A \cap T^n A) = \mu(TA^k)$, то есть если $\mu(TA^k) = 0$ для всех k, то все множества $T^n A$ попарно непересkаются, что невозможно, так как множество X конечной меры, а множество A — положительной. □

Визуально, рассмотрим конструкцию, которая называется «башня» или «здание». Изобразим A как первый этаж L_0, TA частично перейдет в само A, частично в новые точки $TA \setminus A$. Далее, некотрые точки перейдут в новые, некоторые перейдут обратно в A. Так строим этажи $L_0, L_1, \ldots$. Некоторые свойства полученной конструкции:

- $T(\bigcup L_n) = \bigcup L_n$.
- $r_A(x) =$ время возвращения в A корректно определено почти всюду и измеримо.
- $\mu(\bigcup L_n) = \int\limits_A r_A(x) d\mu$.
- $E(r_A \mid A) \leqslant \frac{1}{\mu(A)}$.

Определение 4. Башня высоты h с основанием A есть непересkающиеся множества $A, \ldots, T^{h-1}A$.

Упражнение 1 (Лемма Рохлина-Халмоша)**.** $\forall \varepsilon > 0, h \in \mathbb{N} \to \exists$ башня, такая что $\mu(\bigsqcup\limits_{k=0}^{h-1} T^k A) > 1 - \varepsilon$ (T сохраняет меру, и, возможно, еще что-нибудь).

3 Семинарская часть

Определение 5. Биллиард — система из точки и множества на плоскости, в котором движется точка, отражаясь по стандартным законам.

Упражнение 2. Есть биллиард в угле величины $\alpha < \frac{\pi}{2}$. Уйдет ли точка на бесконечность?

Упражнение 3. Есть биллиард во множестве $X = \{(x, y) \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0, y \leqslant \frac{1}{1+x^2}$. Уйдет ли точка, выпущенная из $(0, 0)$, на бесконечность?

Упражнение 4. Есть биллиард в прямоугольнике. Есть ли замнутые траектории? Есть ли незамкнутые? Есть ли всюду плотные?

Упражнение 5. Есть биллиард в круге. Какие бывают траектории? А в эллипсе?