

Лекция 2. Группа монодромии накрытия

1 Поднятие

Лемма (О поднятии). Для любого пути в базе $\varphi : [0; 1] \rightarrow B$ и $v_0 \in \pi^{-1}(\varphi(0))$ существует единственный путь-поднятие: $\bar{\varphi}_v : [0; 1] \rightarrow E : \bar{\varphi}_v(0) = v$ и $\varphi = \pi \circ \bar{\varphi}_v$.

Доказательство. Для каждой точки отрезка $\forall t \in [0; 1] \exists U_t$ — окрестность точки t с таким свойством, что $\varphi(U_t) \subset U(\varphi(t))$, где $U(\varphi(t))$ — тривиализующая окрестность: $\pi^{-1}(U(\varphi(t))) \xrightarrow{k} U(\varphi(t)) \times F$.

В силу компактности отрезка выберем конечное подпокрытие: $\exists t_0, \dots, t_N : [0; 1] = \bigcup_{j=0}^N U_{t_j}$. Более того, сузим все интервалы до отрезков, граничащих

по концам: $[0; 1] = \bigcup_{j=0}^{N-1} [t_j; t_{j+1}]$.

Для каждого $j \exists U_j \subset B : \varphi([t_j; t_{j+1}]) \subset U_j, k_j : \pi^{-1}(U_j) \rightarrow U_j \times F$ (при этом $\pi = k_j \circ p_1$).

Поднятие тогда определим так: $\bar{\varphi} = k_j^{-1}(\varphi(t), p_2 \circ k(\bar{\varphi}(t_j)))$. Это отображение непрерывно, так как непрерывно на каждом из замкнутых множеств, которые разбивают весь отрезок.

$$\pi \circ \bar{\varphi}(t) = \pi(k^{-1}(\varphi(t), \dots)) = p_1(\varphi(t), \dots) = \varphi(t).$$

Единственность покажем по индукции: если $\bar{\varphi}'$ тоже поднятие и оно совпадает на нескольких первых отрезках, нужно показать, что оно совпадает и на следующем. \square

Определение 1 (Действие фундаментальной группы). Действие группы $\pi_1(B, b_0)$ на множестве $\pi^{-1}(b_0)$ определим формулой $\psi : \pi_1(B, b_0) \rightarrow S(\pi^{-1}(b_0)), \psi([\varphi])(v) = \bar{\varphi}_v(1)$.

Утверждение 1. $\overline{(\varphi_1 \varphi_2)} = \bar{\varphi}_{1, v_1} \bar{\varphi}_{2, v_0}$, где $v_1 = \bar{\varphi}_{2, v_0}(1)$.

Доказательство. Отображение является поднятием какого-то пути, если удовлетворяет двум свойствам из определения. Первое свойство очевидно, второе: $\pi \circ (\bar{\varphi}_{1, v_1} \bar{\varphi}_{2, v_0}) = \varphi_2$ при $t \in [0; \frac{1}{2})$ и $\varphi_1(2t + 1)$ иначе. \square

Корректность определения:

- Гомоморфизм: $\psi([\varphi_1][\varphi_2])(v) = \psi([\varphi_1 \varphi_2])(v) = \overline{(\varphi_1 \varphi_2)}_v(1) = \bar{\varphi}_{1, v_1} \bar{\varphi}_{2, v}(1) = \bar{\varphi}_{1, v_1}(1) = \psi([\varphi_1])(\bar{\varphi}_{2, v}(1)) = \psi([\varphi_1]) \circ \psi([\varphi_2])(v)$ где, $v_1 = \bar{\varphi}_{2, v}$
- Биактивность: обратным будет отображение $\psi([\varphi^{-1}])$.
- Если $[\varphi_1] = [\varphi_2]$, то $\bar{\varphi}_{1, v}(1) = \bar{\varphi}_{2, v}(1)$ (упражнение).

2 Группа монодромии

Определение 2 (Группа монодромии). Группа монодромии G_{b_0} накрытия $\pi : E \rightarrow B \ni b_0$ — это образ $\psi(\pi_1(B, b_0))$.

Пример. У накрытия $\exp : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ выполнено $\psi([\varphi])(v) = v + 1$, то есть $G_{b_0} \cong \mathbb{Z} \cong \pi_1(B, b_0)$.

Пример. У тривиального накрытия группа монодромии тривиальна, в то время, как фундаментальная группа $\pi_1(B, b_0)$ может быть нетривиальна, то есть нельзя сказать, что ψ — изоморфизм.

Пример. У накрытия $P_k : S^1 \rightarrow S^1, P_k(e^{2\pi it}) = e^{2\pi ikt}$ выполнено $\psi([\varphi])(v) = ve^{\frac{2\pi it}{k}}$, то есть $G_{b_0} \cong \mathbb{Z}_k$.

Вообще говоря, корректность определения группы монодромии не очевидна.

Утверждение 2. Пусть $\varphi_1 \sim \varphi_2$, $\Theta : [0; 1]^2 \rightarrow B : \Theta(t, 0) = \varphi_1(t), \Theta(t, 1) = \varphi_2(t)$, тогда $\psi(\varphi_1) = \psi(\varphi_2)$.

Доказательство. $\psi([\varphi_j])(x) = \bar{\varphi}_{j,x}(1)$. Нужно показать, что $\bar{\varphi}_{1,x}(1) = \bar{\varphi}_{2,x}(1)$. Мы будем определять отображение $\Theta : [0; 1]^2 \rightarrow E$ так, чтобы еще $\Theta(0, t) = x$.

Лемма (О продолжении поднятия). Пусть $f : D^n \rightarrow B, F_0 : D_1 \rightarrow E : f|_{D_1} \equiv p \circ F$, где $D_1 = \{x \in \partial D^n \mid x_n \leq 0\}$. Тогда $\exists F : D^n \rightarrow B, F_0 = F|_{D_1}, f = p \circ F$.

По лемме, такое поднятие $\bar{\Theta}$ существует. Тогда рассмотрим $p \circ \bar{\Theta}|_{\{(1,t)\}} = \Theta(\{1, \tau\}) = \{\varphi_\tau(1)\}$, а значит, что $\bar{\Theta}(\{1, \tau\}) \subset p^{-1}(b)$ — дискретно, то есть $|\bar{\Theta}(\{1, \tau\})| = 1$.

Доказательство леммы. Легко показать, что у каждой точки x_0 , которую мы смогли поднять, есть окрестность, которую можно поднять. В силу компактности квадрата, достаточно взять конечное число открытых множеств, чтобы его покрыть. Более того, можно показать, что можно взять мелкую сетку из маленьких замкнутых квадратиков, каждый из которых лежит в открытом множестве, над которым накрытие тривиально, и продолжать поднятие построчно по этим квадратикам. \square

\square

Определение 3 (Изоморфизм накрытий). Накрытия $\pi_i : E_i \rightarrow B_i, i \in \{0, 1\}$ изоморфны, если существует гомеоморфизмы $f : E_1 \leftrightarrow E_2, g : B_1 \leftrightarrow B_2$, такие что $\pi_2 \circ f \cong g \circ \pi_1$.

Замечание (Связь группы монодромии с фундаментальной группой). Если $\varphi : [0; 1] \rightarrow B, \varphi(0) = b_0, \varphi(1) = b_1$, то $G_{b_0} \cong G_{b_1}$.

Замечание (Изоморфизм групп монодромии). Если два накрытия изоморфны, то $G_{b_1} \cong G_{g(b_1)}$.

Доказательство. Рассмотрим два построения.

Рассмотрим $[\varphi] \in \pi_1(b_1, b_0)$ и $[g(\varphi)] \in \pi_1(B_2, b_2)$. Отображение определим как $h : G_{b_1} \rightarrow G_{g(b_1)}$, $h(\psi([\varphi])) = \psi(g_*([\varphi]))$, где g_* — индуцированное отображением g отображение фундаментальных групп. Нужно показать, что если $[\varphi_1] \neq [\varphi_2]$, то $\psi([\varphi_1]) \neq \psi([\varphi_2])$.

Пусть $\sigma \in G_{b_1} \subset S(\pi^{-1}(b_1))$. Определим отображение $h(\sigma)(v) = f(\sigma(f^{-1}(v)))$. Нужно показать корректность: $h(\sigma) \in G_{b_2}$.

Если покажем, что эти построения это на самом деле одно и то же, то оба будут корректны.

Утверждается, что $\psi([g(\varphi)])(v) = \overline{g(\varphi)}_v(1) = f(\overline{\varphi}_{f^{-1}(v)})(1)$. Для этого надо проверить свойства: 1) $f(\overline{\varphi}_{f^{-1}(v)})(0) = f(f^{-1}(v)) = v$; 2) $\pi_2(f(\overline{\varphi}_{f^{-1}(v)})) = g(\pi_1(\overline{\varphi}_{f^{-1}(v)})) = g(\varphi)$.

Тогда $\psi([g(\varphi)]) = f(\overline{\varphi}_{f^{-1}(v)})(1) = f(\psi([\varphi])(f^{-1}(v))) = f(\sigma(f^{-1}(v)))$, что нам и надо. \square

Замечание (Гомоморфизм накрытий). Эти рассуждения работают, если f, g — непрерывные отображения, такие что $\pi_2 \circ f = g \circ \pi_1$, а также, что $f|_{P_i}$ — биекция, где P_i — это i -й слой накрытия. В этом случае не факт, что индуцированное отображение является изоморфизмом.

Такие f, g задают так называемый гомоморфизм накрытий.