Содержание

1 Введение

Что будет затронуто:

- Введение в функциональный анализ
- Алгебраические структуры, геометрия графов
- Спектральная теория
- Гармонический анализ
- Приложения к дискретной математике

Лекция 1. Алгебраические структуры

2 Алгебраические структуры

Определение 1. Напоминание определений основных структур:

- Полугруппа — множество с ассоциативной операцией.
- Полугруппа с единицей.
- Группа — множество с обратимой ассоциативной операцией.

  В том числе свободная группа и группа, заданная соотношениями $G = \langle S \mid \mathcal{A} \rangle$.

  Автоматные группы. Пусть задан конечный преобразователь F с двумя состояниями $\{a, b\}$. Несколько преобразователей можно комбинировать. Получился моноид. $G(\mathcal{A}) = \langle \mathcal{A}_a, \mathcal{A}_b \rangle$, где $\mathcal{A}$ — обратимый преобразователь, $\mathcal{A}_x$ — преобразователь с начальным состоянием x.

3 Немного конечномерной линейной алгебры

Рассмотрим вычисление аналитических функций от матриц. $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$.

Метод: применение интерполяционных многочленов. Если оператор диагонализуем, то все ясно, нужно знать только $f(\lambda_i)$. Утверждается, что всегда работает следующее: для каждой Жорданового блока запишем $P(\lambda_1) = f(\lambda_1), \ldots, P^{(r_1-1)}(\lambda_1) = f^{(r_1-1)}(\lambda_1)$, где r_1 — кратность λ_1, интерполируем это и вычислим $P(A)$.

Лекция 2. Аменабельные группы

4 Ещё немного о разных группах

Определение 1. Пусть есть последовательность F_n, тогда если $\frac{\lambda(F_n \oplus (\delta + F_n))}{\lambda(F_n)} \to 0$ для всех $z \in K$-компакта, то эти множества называются Фёльнеровскими.

Определение 2. Аменабельная группа G — такая группа, в которой есть «последовательность» Фёльнеровских множеств F_n.

Утверждается, что если вероятность случайного блуждания вернуться в 1 за n шагов стремится к 0 очень быстро, то группа не аменабельна.

С неаменабелностью SO(3) связан парадокс Банаха-Тарского.

Насчёт автоматных групп: их можно представлять как некоторые преобразования бинарного дерева. Необходимым условием обратимости, конечно, является обратимость преобразования дерева.

Такие автоматы порождают 5 интересных групп, которые мы точно будем рассматривать.

Упражнение 1. Дискретное преобразование Фурье в $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_8$: спектр, СЗ, СВ, как все устроено.

Лекция 3. Преоразование Фурье

5 Общая конструкция преобразования Фурье

Пусть есть топологическая группа G. Определелим характер $\gamma \in Hom(G, S^1), S^1 = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\})$, притом потребуем того, что γ — непрерывен.

Определение 1. Дуальная группа $\hat{G} = \{\gamma\}$ определена поточечным умножением характеров.

Теорема 1 (Понтрягина о двойственности)**.** *Если G — абелева топологическая группа, тогда $\hat{\hat{G}} = G$.*

При этом, если G — компактна, то $\hat{G}$ — дискретна. Если G — дискретна, то $\hat{G}$ — компактна.

Топологические группы с нестандартной топологией могут быть представлены как стандратные топологии на смежных классах $G/H, H < G$.

Упражнение 1. Можно ли придумать нестандартную топологию на конечной группе, которая не встречатеся среди стандартных групповых топологий?

Определение 2. Преобразование Фурье: $F : f(x) \mapsto \hat{f}(\gamma) = \int\limits_G f(x)\overline{\gamma(x)} d\mu$, где μ — левая мера Хаара.

Характеры $\mathbb{R}: \gamma_t(x) = \exp(2\pi i t x), t \in \mathbb{R}$, $\hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$. Преобразование Фурье выглядит так: $\hat{f}(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-2\pi i t x) dx$.

Тор $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, его характеры $\gamma_t = \exp(2\pi i t x), t \in \mathbb{Z}$, дуальная группа $\hat{\mathbb{T}} = \mathbb{Z}$. Преобразование Фурье: $\hat{f}(j) = \int\limits_0^1 f(x) \exp(-2\pi i j x) dx$.

Соответственно $\hat{\mathbb{Z}} = \mathbb{T}$, так как достаточно задать $\gamma(1) = \exp(2\pi i \alpha)$.

Для $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ характеры такие: $\gamma_j(x) = \exp(2\pi i \frac{jx}{n})$, $\hat{f}(j) = \sum\limits_{x=0}^{n-1} f(x) \exp(-2\pi i \frac{jx}{n})$.

Упражнение 2. Топология на $\mathbb{Z}_{(2)}$ — односторонние двоичные последовательности со сложением. Проверить, что это компактная группа.

Упражнение 3. Преобразование Фурье на $\mathbb{Z}_2^n$.