Лекция 4. Спектральная теорема

1 Спектральная теорема

Перед тем, как сформулировать спектальную теорему, вспомним некотрорые факты:

- Оператор Купмана $\hat{T}^t$ унитарен.
- Под гильбертовым пространством H понимаем линейное пространство над $\mathbb{C}$ с эрмитовым скалряным произведением $\langle u, v \rangle$, полное относительно порождённой метрики.

  Мы будем интересоваться как правило пространством $H = L^2(X, \mathcal{B}, \mu) = \left\{ f : \|f\|^2 = \int\limits_X |f|^2 d\mu < \infty \right\} /_\sim$.
- Циклическое пространство $Z(h) = \overline{Span}(\hat{T}^k h : k \in \mathbb{Z})$ — минимальное замкнутое инвариантное подпространство.

Теорема 1 (Спектральная теорема для систем с простым спектром)**.** *Пусть есть унитарный оператор в гильбертовом пространстве и пусть $\exists h$: $Z(h) = H$, тогда имеет место коммутативная диаграмма:*

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\hat{T}} & H \\ \Big\downarrow \psi & & \Big\downarrow \psi \\ H & \xrightarrow{M_z : \varphi(\lambda) \mapsto \lambda\varphi(\lambda)} & L^2(S^1, \sigma_h) \end{array}$$

Где $\sigma_h : \left\langle \hat{T}^k h, h \right\rangle = \int\limits_{S^1} z^k d\sigma_h$.

Притом, если есть циклический вектор h', то $\sigma_h \sim \sigma_{h'}$, где $\hat{T} \sim \hat{S} = \Phi^{-1}\hat{T}\Phi \Leftrightarrow \sigma_h^{(\hat{T})} \sim \sigma_h^{(\hat{S})}$, $\nu \sim \mu \Leftrightarrow \nu \ll \mu, \mu \ll \nu$; $\nu \ll \mu : \nu = p(\lambda)\mu$.

Что такое кратность? Модельный пример — система из двух одинаковых маятников, независимо колеблющихся. Более формально, $H > L_1 \oplus \ldots L_m$: $\hat{T} \mid_{H_i} \sim \hat{T} \mid_{H_j}$.

Общие спектральные инварианты: $([\sigma], \mathcal{M}(\lambda))$, $\mathcal{M}$ — функция кратности, $\mathcal{M} : S^1 \to \mathbb{N} \sqcup \{\infty\}$.

2 Семинарская часть

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ имеет СЗ $\pm\sqrt{2}$. Спектр этого оператора $\sigma = \frac{\delta_{-\sqrt{2}} + \delta_{\sqrt{2}}}{2}$.

Упражнение 1 $(*)$**.** Придумать вектор: h, дающий такую σ.

$\Lambda = \{\pm\sqrt{2}\}, L^2(\Lambda, \sigma) = \{\varphi : \Lambda \to \mathbb{C}\} \cong \mathbb{C}^2$. $M_\lambda(\varphi) = \lambda\varphi(\lambda)$. Если функцию φ представлять столбцом значений в $\pm\sqrt{2}$, то

$$M_\lambda(\begin{bmatrix}\varphi(-\sqrt{2}) \\ \varphi(\sqrt{2})\end{bmatrix}) = \begin{bmatrix}-\sqrt{2}\varphi(-\sqrt{2}) \\ \sqrt{2}\varphi(\sqrt{2})\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varphi(-\sqrt{2}) \\ \varphi(\sqrt{2})\end{bmatrix}$$

.

Рассмотрим теперь группу $\mathbb{T} = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. И матрицу $A(x, y) = \begin{bmatrix}2 & 1 \\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x \\ y\end{bmatrix}$

Характеры тора (гомоморфизмы в комплексную единичную окружность) выглядят так: $\gamma_{j,k}(x, y) = \exp(2\pi i(jx + ky))$. Возьмём один характер и рассмотрим его динамику под действием оператора Купмана.

Можно проверить, что $\gamma_{j_0,k_0}(A(x, y)) = \gamma_{A^T(j_0,k_0)}(x, y)$. Действие корректно задано на торе, если все элементы A — целые. Оно обратимо, если обратная матрица тоже целочисленна, то есть $\det A = 1$.

Орбиты этого действия на $\mathbb{Z}^2$ получились гиперболами на соответствующих целых точках (плюс одна стационарная орбита). Спектральный тип этой системы получился (Leb, ∞).

Упражнение 2. Возмем последовательность характеров на одной гиперболе: $\xi_j : \hat{A}\xi_i = \xi_{i+1}$. Посчитать σ_{ξ_0} и $\left\langle \hat{A}^k\xi_i, \xi_i \right\rangle$.