Задача 1

$g \in H(A) \Rightarrow g + A = A \Rightarrow g + A + B = A + B \Rightarrow g \in H(A + B)$.

Задача 2

Пусть $A < G$. Тогда если $g \in H(A) \Rightarrow g + A = A \Rightarrow g + 0 \in A \Rightarrow g \in A$.

Пусть $H(A) = A$. Рассмотрим $a \in H(A) = A, b \in A \Rightarrow a + A = A \Rightarrow a + b \in A$. Теперь рассмотрим $-a$. В силу того, что множество A замкнуто по сложению и конечно, приходим к выводу, что a имеет конечный порядок, то есть $k \cdot a = 0 \Rightarrow -a = a + \ldots + a \in A$.

Задача 3

По теореме Кнезера: $|A_1 + \ldots + A_h| \geqslant |A_1 + \ldots + A_{h-1}| + |A_h| - |H(A_1 + \ldots + A_h)| \geqslant \ldots \geqslant |A_1| + \ldots + |A_h| - |H(A_1 + A_2)| - \ldots - |H(A_1 + \ldots + A_h)|$. Так как $H(A_1 + A_2) < \ldots < H(A_1 + \ldots + A_h)$, можем оценить последнее выражение как $\sum\limits_{i=1}^{h} |A_i| - (h-1)|H(A_1 + \ldots + A_h)|$.

Задача 6

Возьмём любые два множества A, B и рассмотрим $H = H(A + B)$. Применим неравенство к $A + H, B + H : |A + H + B + H| \geqslant |A + H| + |B + H| - |H(A + H + B + H)|$. Так как $A + B + H + H = A + B + H = A + B$, то получаем $|A + B| \geqslant |A + H| + |B + H| - |H(A + B)|$.

Задача 7

Выведем из каждого следующее:

- $|A + B| = |A||B| \Rightarrow \forall a_1 \neq a_2, b_1 \neq b_2 \to a_1 + b_1 \neq a_2 + b_2 \Rightarrow a_1 - b_2 \neq a_2 - b_1 \Rightarrow |A - B| = |A||B|$.
- $|A - B| = |A||B| \Rightarrow \forall a_1 \neq a_2, b_1 \neq b_2 \to a_1 - b_1 \neq a_2 - b_2 \Rightarrow a_1 + b_2 \neq a_2 + b_1 \Rightarrow$ для пары (a_1, b_2) существует только одна пара $(x, y) = (a_1, b_2)$, такая что $a_1 + b_2 = x + y$, если $x \in A, y \in B$. Значит размер указанного множества равен $|A||B|$.
- Заметим, что $a_1 + b_1 = a_2 + b_2 \Leftrightarrow a_1 - b_2 = a_2 - b_1$, что даёт биекцию между множествами.
- Рассмотрим какой-то элемент $x = a_1 + b_1$. Если $a_2 = x - b_2$, то $a_2 = a_1 + b_1 - b_2 \Rightarrow a_2 - b_1 = a_1 - b_2$. Так как существует ровно одна такая четвёрка, то $a_2 = a_1, b_2 = b_1$, то элемент в пересечении $|A \cap (x - B)|$ ровно один.

- Пусть для какого-то $y = a_1 - b_1 \in A - B$ это не так, то есть $|A \cap (B + a_1 - b_1)| > 1$, то есть существует $a_2, b_2 : a_2 \neq a_1, b_2 \neq b_1, a_2 = b_2 + a_1 - b_1 \Rightarrow a_1 = a_2 - b_2 + b_1$, то есть $|A \cap (B+y)| > 2$ для $y = a_2 - b_2$, противоречие.

- Пусть $0 \neq x \in (A - A) \cap (B - B), x = a_1 - a_2 = b_1 - b_2, a_1 \neq a_2, b_1 \neq b_2$. Тогда $|A \cap (B + y)| > 2$ для $y = a_2 - b_2$.

- Пусть $|A + B| < |A||B|$. Тогда $\exists (a_1, b_1) \neq (a_2, b_2) : a_1 + b_1 = a_2 + b_2 \Rightarrow a_1 - a_2 = b_2 - b_1 = x$, притом $x \neq 0$. Значит $0 \neq x \in (A - A) \cap (B - B)$, противоречие.

Задача 11

Рассмотрим двоичные записи чисел из $A + A$. Все числа вида $2^i + 2^j$ имеют две единицы в двоичной записи (на позициях до n-й) за исключением тех, что имеют вид $2^i + 2^i = 2^{i+1}$. С другой стороны каждое такое число легко получить, сложив нужные степени двойки. Стало быть $|A+A| \geqslant C_{n+1}^2$, значит и $|A + A| = C_{n+1}^2$.