1 Обыкновенные производящие функции

$f(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n t^n \leftrightarrow (x_0, \ldots, x_n, \ldots)$. С помощью них можем суммировать какие-то простые ряды и прочее.

Кстати, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim_{t\to 1}(1-t)f(t)$.

Тривиальная производящая функция: $1, 1, 1, \ldots \sim \frac{1}{1-t}$.

Факториалы: $1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \ldots \sim e^t$.

Дельта-функция: $1, 0, 0, \ldots \sim 1$.

Биномиальные коэффиенты: $C_n^k \sim (1+t)^k$.

Упражнение 1. Производящая функция $C_n^{k_0}$ (k_0 фиксированно).

Соображение: В 90% случаев можно искать решение в виде: $f(t) = \frac{\mu}{1-t} + \psi(t)$, где ψ — регулярная.

Рассмотрим: $x_{n+1} = \frac{nx_n + x_{n-1}}{n+1}$.

$f(t)$	$f'(t)$
$\sum x_n t^n$	$\sum n x_n t^{n-1}$
$\sum x_{n+1} t^{n+1}$	$\sum (n+1) x_{n+1} t^n$
$\sum x_{n-1} t^{n-1}$	$\sum (n-1) x_{n-1} t^{n-2}$

$$\begin{aligned}
(n+1)x_{n+1} &= nx_n + x_{n-1} \\
f' &= tf' + tf \\
(1-t)f' &= tf + x_1 \\
\frac{df}{f} &= \frac{tdt}{1-t} \\
f = -t + \int \frac{dt}{1-t} &= -t - \ln(1-t) + c \\
c\frac{e^{-t}}{1-t}(1-t) = x_1 = \int x_1 e^t dt &= x_1 e^t + c_0 \\
f(t) &= \frac{x_1 + (x_0 - x_1)e^{-t}}{1-t}
\end{aligned}$$

Упражнение 2. Какое отношение эта задача имеет к числу беспорядков на n элементах?