Содержание

Лекция 1. Определение и примеры динамических

1 Введение

Литература:

- (!) Синай «Эргодическая теория», издательство «Фазис» или «РХД» — брошюра из нескольких лекций.
- Каток—Хиссельблат «Введение в современную теорию динамических систем» — энциклопедического плана, есть материал про топологическую динамику.
- Коррфельд—Синай—Фомин «Эргодическая теория» — учебник, однако старый.
- «Динамические системы-2» издательства «ВИНИТИ».
- (!) Халмош «Лекции по эргодической теории».
- Мартин-Итленд «Математическая теория энтропии».
- Арнольд «Математические методы классической механики».

Динамические системы — где-то 1920е, Банах, фон Нейман и другие, рассмотрение различных объектов как процессов. Что характерно:

- время
- состояние
- эволюция/динамика

Пример 1. $x'' + \omega^2 x = 0 \Rightarrow x = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t$. Можно переписать как $x' = y, y' = -\omega^2 x$, тогда динамика будет определяться однозначно состоянием.

Исторически пытались решать такие задачи грубо говоря формулой. Но даже имея точную формулу решения, мы можем ошибаться сильно, если плохо измерены начальные условия, если со временем теряется много информации (не говоря уже о том, что большинство задач аналитически не решается). Значит по возможности рассматривать динамику как-то глобально.

Определение 1. Фазовый поток $T^t : (x_0, y_0) \mapsto (x(t), y(t))$, где $(x(t), y(t))$ — решение с начальными условиями (x_0, y_0).

- $T^{t+s} = T^t \circ T^s$.
- $(T^t)^{-1} = T^{-t}$.

- $T^t \in Diff(\mathbb{R}^2)$
- То есть T^t есть гомоморфизм. $T^t : \mathbb{R} \to Diff(\mathbb{R}^2)$.

Это и есть основная модель динамической системы. Время не обязательно непрерывно: мы можем рассматривать осциллятор только в целые моменты времени. То есть у нас будет фигурировать множество поворотов окружноти на угол α. Есть еще много других, естественных примеров: конечные автоматы, случайные процессы с дискретным временем.

Под классическим временем понимается $\mathbb{Z}$ или $\mathbb{R}$, в общем случае можно брать другие группы.

Определение 2. Динамическая система — следующая четвека:

- G — группа или полугруппа времени (обычно коммутативная),
- X — фазововое пространство,
- $\mathcal{S}$ — структура,
- T^t — фазовый поток.

Со следующими свойствами:

- $T^0 = Id$,
- $T^{t+s} = T^t \circ T^s$,
- $(T^t)^{-1} = T^{-t}$,
- T^t — сохраняет структуру $\mathcal{S}$.

Примеры структур:

- тривиальная структура. $T^t \in X^X$,
- топология, прообраз открытого открыт,
- вероятнтсть $(X, \mathcal{B}, \mu)$,
- линейное пространство,
- группа.

Определение 3. В случае $\mathbb{Z}$ процесс ассоциирован с некоторым измерением $f : X \to \mathbb{C}$, порождающим последовательность $f_k(x) = f(T^k x)$.

2 Эргодическая теория

Сперва из всех динамических систем предпочтем те, в которых стуктура имеет вероятностный характер, чтобы изучить ряд количественных методов, а также из-за близости к дискретной математике.

Пример 2 (Динамические системы по случайным процессам)**.** Рассмотрим переход от случайного процесса к динамической системе. Имеем случайный процесс с дискрентым временем: $\ldots, \xi_{-1}, \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_t : \Omega \to \mathbb{A}$.

Рассмотрим фазовое пространство $X = \mathbb{A}^{\mathbb{Z}} = (\ldots, x_0, x_1, \ldots)$, на нём можно ввести цилиндрическую сигма-алгебру и индуцировать меру. Один шаг процесса определим как $S : (x_i) \mapsto (x_{i+1})$.

Теорема 1 (Пуанкаре о возвращении)**.** *Пусть* $\mu(X) = 1, T : X \to X, \mu(T^{-1}A) = \mu(TA) = \mu(A)$, *тогда для любого измеримого* $A, \mu(A) > 0$ *найдётся* $n > 0 :$ $\mu(A \cap T^n A) > 0$.

Доказательство. $\mu(T^{n+k}A \cap T^n A) = \mu(TA^k)$, то есть если $\mu(TA^k) = 0$ для всех k, то все множества $T^n A$ попарно непересекаются, что невозможно, так как множество X конечной меры, а множество A — положительной. $\square$

Визуально, рассмотрим конструкцию, которая называется «башня» или «здание». Изобразим A как первый этаж L_0, TA частично перейдет в само A, частично в новые точки $TA \setminus A$. Далее, некотрые точки перейдут в новые, некоторые перейдут обратно в A. Так строим этажи $L_0, L_1, \ldots$. Некоторые свойства полученной конструкции:

- $T(\bigcup L_n) = \bigcup L_n$.
- $r_A(x) =$ время возвращения в A корректно определено почти всюду и измеримо.
- $\mu(\bigcup L_n) = \int\limits_A r_A(x) d\mu$.
- $E(r_A \mid A) \leqslant \frac{1}{\mu(A)}$.

Определение 4. Башня высоты h с основанием A есть непересекающиеся множества $A, \ldots, T^{h-1}A$.

Упражнение 1 (Лемма Рохлина-Халмоша)**.** $\forall \varepsilon > 0, h \in \mathbb{N} \to \exists$ башня, такая что $\mu(\bigsqcup\limits_{k=0}^{h-1} T^k A) > 1 - \varepsilon$ (T сохраняет меру, и, возможно, еще что-нибудь).

3 Семинарская часть

Определение 5. Биллиард — система из точки и множества на плоскости, в котором движется точка, отражаясь по стандартным законам.

Упражнение 2. Есть биллиард в угле величины $\alpha < \frac{\pi}{2}$. Уйдет ли точка на бесконечность?

Упражнение 3. Есть биллиард во множестве $X = \{(x, y) \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0, y \leqslant \frac{1}{1+x^2}$. Уйдет ли точка, выпущенная из $(0, 0)$, на бесконечность?

Упражнение 4. Есть биллиард в прямоугольнике. Есть ли замнутые траектории? Есть ли незамкнутые? Есть ли всюду плотные?

Упражнение 5. Есть биллиард в круге. Какие бывают траектории? А в эллипсе?

Лекция 2. Эргодическая теорема I

4 Эргодические системы, теорема Биркгофа-Хинчина

Рассматриваются системы вида $(G, (X, \mathcal{B}, \mu), T^t)$, с конечной мерой $\mu(X) = 1$. Ограничимся также только дискретным временем $\mathbb{Z}$.

Определение 1. T называется *эргодическим*, если $\forall A \in \mathcal{B} : 0 < \mu(A) < \mu(X), TA \neq A \pmod 0$.

Это значит, что в X нет разбиения на два инвариантных множества A, B ненулевой меры. Действие называется эргодическим, если T^t эргодчино для любого t.

Теорема 1 (Эргодическая теорема Биркгофа-Хинчина)**.** *Если T — эргодическое, то $\underset{п.н.}{\forall}\, x \in X$, ограниченной измеримой $f \in L^\infty(X)$ выполнено*

$$\frac{1}{n}\sum_{0}^{n-1} f(T^k x) \to const = \int\limits_X f d\mu$$

Определение 2. T называется *перемешивающим* ($T \in Mix$), если

$$\forall A, B \in \mathcal{B} : \mu(T^k A \cap B) \to \mu(A)\mu(B)$$

.

Определение 3. T называется *слабо перемешивающим* ($T \in WMix$), если

$$\forall A, B \in \mathcal{B}\, \exists \{k_j\}_1^\infty : \mu(T_j^k A \cap B) \to \mu(A)\mu(B)$$

.

5 Оператор Купмана

Определение 4. Оператор Купмана $\hat{T} : f(x) \mapsto f(Tx)$.

Для недискретного времени это будет представлением группы времени. Изучение свойств этого линейного оператора приводит к так называемой спектральной теории.

Замечание. Можно переформулировать все три данных определения:

- Эргодичность: $\hat{T} f_0 = f_0 \Rightarrow f_0 = const$.
- Перемешивание: $\left\langle T^k f, g \right\rangle \to 0$, $\int f d\mu = \int g d\mu = 0$. Иначе, $\hat{T}^k \underset{w}{\to} \Theta = P_{\{const\}}$ (ортопроектор на константу).
- $WCl(\{\hat{T}^k\}) \ni \Theta$.

Теорема 2. *$T \in Mix \Rightarrow T$ — эргодическое.*

Доказательство. От противного: пусть $\exists \xi \neq const \hat{T}\xi = \xi$. $\xi_0 = \xi - \Theta\xi = \xi - \mathbb{E}\xi = \xi - \overline{\xi}$ $(\Theta : f(x) \mapsto (x \to \int f d\mu)$. Обозначение Θ похоже на 0, неслучайно: $\Theta A = A \Theta = \Theta)$.

$\Theta \xi_0 = 0, \int \xi_0 d\mu = 0, \xi_0 \neq const$. $\left\langle T^k \xi_0, \xi_0 \right\rangle \to 0$, но $\left\langle T^k \xi_0, \xi_0 \right\rangle = \langle \xi_0, \xi_0 \rangle > 0$, противоречие. □

6 Семинарская часть

Упражнение 1. Показать, что $[0;1] \cong [0;1] \times [0;1]$ как пространства с мерой, то есть построить измеримую биекцию, сохраняющую меру.

Определение 5. Преобразование пекаря: $A \mid B \to \frac{B}{A}$.

Формула для преобразования пекаря в двоичном коде очень простая: $\ldots y_2 y_1 x_1 x_2 \ldots \Rightarrow \ldots y_2 y_1 x_1 x_2 x_3 \ldots$, почти как левый сдвиг для случайных процессов.

Определение 6. Подкова Смейла: $(x, y) \mapsto (\frac{x}{3}, 3y) \pmod 1$.

Определение 7. Сдвиг Бернулли: $\mathbb{A} = \{0, 1\}, p = (p_0, p_1), p_0 + p_1 = 1$. $\Sigma_2 = \mathbb{A}^{\mathbb{Z}} = \{x : \mathbb{Z} \to \mathbb{A}\}$. Тогда для слова w: $P([w]) = p_0^{\#\text{нулей в w}} p_1^{\#\text{единиц в w}}$.

Упражнение 2. Найти инвариантное множество для подковы Смейла. Показать, что канторовское множество изоморфно $[0;1]$ как пространство с мерой.

Упражнение 3. Попробовать устранить «негладкость» преобразования пекаря и «сингулярность подковы Смейла».

Упражнение 4 $(\star\star)$. $T \in Mix \Leftrightarrow \forall A \in \mathcal{B} \to \mu(T^k A \cap A) \to \mu(A)^2$.

Лекция 3. Эргодическая теорема II

7 Общие соображения

Имеем группу (полугруппу) G, которая отвечает за время. В статистическом случае мы делаем N наблюдений и усредняем результаты согласно равномерному распределению. Причем тут вообще равномерность? Это инвариантность относительно естественного действия группы, то есть это так называемая мера Хаара: $\lambda(\delta + A) = \lambda(A)$.

Значит в гипотетическом общем случае наш план таков: выделить область времени U и посчитать $\frac{1}{\lambda(U)} \int\limits_U f(T^t x) d\lambda(t)$ ожидая, что это сходится к $E_\lambda f$ при $U \to \infty$ в каком-то смысле.

Определение 1. Пусть есть последовательность F_n, тогда если $\frac{\lambda(F_n \oplus (\delta + F_n))}{\lambda(F_n)} \to 0$ для всех $z \in K$-компакта, то эти множества называются Фёльнеровскими.

Определение 2. Аменабельная группа G — такая группа, в которой есть «последовательность» Фёльнеровских множеств F_n.

Один из главных примеров не аменабельной группы — это свободная группа F_2, где граница шара по размеру сопоставима с самим шаром. Оказывается, что аменабельность замкнута относительно всех разумных теоретико-групповых операций, а значит те группы, которые содержат F_2 не аменабельны, в частности группа SO(3).

Упражнение 1. Есть ли в группе $\left\langle \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ соотношения?

Напоминание: унитарный оператор — такой, что $A^* = A^{-1}$ или $\langle Af, g \rangle = \langle f, A^* g \rangle$.

Опретор Купмана сохраняет скалярные произведение: $\int\limits_X f(Tx)\overline{g(Tx)} d\mu(x)$ по теореме о замене переменных в интеграле Лебега есть $\langle f, g \rangle$, что и нужно.

Упражнение 2. T — эргодично $\Leftrightarrow \exists \varphi \neq const, \hat{T} = \varphi \Leftrightarrow \ker(\hat{T} - 1) = \{const\}$.

Докажем теперь, что из эргодичности следует перемешивание. Без ограничения общности $E_\lambda \varphi = 0$. $T \in Mix \Leftrightarrow \forall f, g \to \left\langle \hat{T}^k f, g \right\rangle \to E_\lambda f E_\lambda g$, то есть $\hat{T}^k \underset{w}{\to} \Theta$ (ортопроектор на константу).

$$\langle \Theta f, g \rangle = \int (E_\lambda f) 1 g d\lambda = E_\lambda f \int g d\lambda$$

.

8 Теорема фон Неймана, лемма Рохлина-Халмоша

Теорема 1 (Эргодическая теорема фон Неймана)**.** $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\hat{T}f \to E_\mu f$ *в* $L^2(X,\mu)$, *если* T *— эргодично.*

Доказательство. Пусть T не обязательно эргодично. Пусть $I = \{\varphi : \hat{T}\varphi = \varphi\}$. $L^2(\mu) = I \oplus I^\perp, \hat{T}I = I$.

Если $\varphi \in I$, то $\frac{1}{n}\sum \hat{T}\varphi = \frac{1}{n}(\varphi + \dots \varphi) = \varphi \to \varphi$.

Иначе, пусть функция имеет вид $f = h - \hat{T}h$. Сумма примет вид $\frac{1}{n}\left(h - \hat{T}h + \hat{T}h - \hat{T}^2h + \dots\right) = \frac{1}{n}(h - \hat{T}^n h) \to 0$, так как $\hat{T}$ — унитарный.

Дальнейшая идея в том, чтобы показать, что функции такого вида плотны в $I^\perp$. Рассмотрим замыкание $M = \overline{\{h - \hat{T}h\}}$. Если оно не совпадает с I, то все пространство разбивается на три: $L^2(\mu) = I \oplus M \oplus F$ для какого-то F. $\exists f \in F : f \perp (h - \hat{T}h)$ для любого h, тогда $\left\langle f, h - \hat{T}h\right\rangle = \langle f, h\rangle - \left\langle f, \hat{T}h\right\rangle = \langle f, h\rangle - \left\langle \hat{T}^{-1}f, g\right\rangle = \left\langle f - \hat{T}^{-1}h\right\rangle$, значит, так как h любое, то $f - \hat{T}^{-1}f = 0 \Rightarrow \hat{T}f = f$, противоречие. □

Лемма (Рохлина-Халмоша)**.** *Пусть* T *— эргодическая и заданы параметры* $\varepsilon > 0, h \in \mathbb{N}$*, тогда существует башня высоты* h*, такая что* $\mu(\bigsqcup\limits_{k=0}^{h-1} T^k B) > 1 - \varepsilon$.

Доказательство. Выберем произвольное множество B и построим $L_k = TL_{k-1} \setminus B, L_0 = B$. Тогда множество $D = \bigsqcup_{k=0}^{\infty} L_k$ инвариантно, $TD = D$. Отсюда $D = X$ в силу эргодичности.

Выберем теперь любое множество B, такое, что $\mu(B)(h-1) < \varepsilon$ и рассмотрим $B, TB, \dots$. Спроецируем каждый h-й уровень на h вниз и выберем h множеств, из урезанных слоев, построив таким образом новую башню $C, TC, T^2C, \dots$. Она дизъюнктна и мера её объединения не меньше чем $1 - \mu(E) = 1 - \mu(B)(h-1) \leqslant 1 - \varepsilon$, так как ошибочные кусочки накрывают B не более, чем h раз. □

9 Доказательство эргодической теоремы

Доказательство. Рассмотрим $f = I_{X_0}$, $\mu(X_0) = 1 - \mu(X_0) = \mu(X_1) = \frac{1}{2}$. Вместо одной второй можно взять любую положительную константу. Такими индикаторами можно аппроксимировать любую функцию.

$$\mu(x : \limsup_{n\to\infty} \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x)}_{S_n} \geqslant \frac{1}{2} + c) > 0, c > 0$$

.

Это значит $\forall x \exists n_j \to +\infty : S_j \geqslant \frac{1}{2} + \frac{c}{2}$.

Рассмотрим башню H меры, близкой к 1 с достаточно большой высотой. $n_1(x)$ измеримо, $\mu(x : n_1(x) > M) = 0, M \to \infty$. M нужно выбрать таким, чтобы эта мера была меньше какого-то малого δ. Хотим разбивать нашу башню на множества меры 0 по вертикали. Сверху нужно отступить M, чтобы не испортить статистику, потеряем на этом не больше $\frac{M}{H}$ меры. Важно аккуратно сделать это разбиение измеримым и пропускать те моменты, где в нужном столбике меньше $\frac{1}{2} + \frac{c}{2}$ единичек. □

Лекция 4. Спектральная теорема I

10 Спектральная теорема для простого спектра

Перед тем, как сформулировать спектальную теорему, вспомним некотрорые факты:

- Оператор Купмана $\hat{T}^t$ унитарен.
- Под гильбертовым пространством H понимаем линейное пространство над $\mathbb{C}$ с эрмитовым скалряным произведением $\langle u, v \rangle$, полное относительно порождённой метрики.

  Мы будем интересоваться как правило пространством $H = L^2(X, \mathcal{B}, \mu) = \left\{ f : \|f\|^2 = \int\limits_X |f|^2 d\mu < \infty \right\} /_\sim$.
- Циклическое пространство $Z(h) = \overline{Span}(\hat{T}^k h : k \in \mathbb{Z})$ — минимальное замкнутое инвариантное подпространство.

Теорема 1 (Спектральная теорема для систем с простым спектром)**.** *Пусть есть унитарный оператор в гильбертовом пространстве и пусть $\exists h$: $Z(h) = H$, тогда имеет место коммутативная диаграмма:*

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\hat{T}} & H \\ \downarrow \psi & & \downarrow \psi \\ H & \xrightarrow{M_z : \varphi(\lambda) \mapsto \lambda\varphi(\lambda)} & L^2(S^1, \sigma_h) \end{array}$$

Где $\sigma_h : \left\langle \hat{T}^k h, h \right\rangle = \int\limits_{S^1} z^k d\sigma_h$.

Притом, если есть циклический вектор h', то $\sigma_h \sim \sigma_{h'}$, где $\hat{T} \sim \hat{S} = \Phi^{-1}\hat{T}\Phi \Leftrightarrow \sigma_h^{(\hat{T})} \sim \sigma_h^{(\hat{S})}$, $\nu \sim \mu \Leftrightarrow \nu \ll \mu, \mu \ll \nu$; $\nu \ll \mu : \nu = p(\lambda)\mu$.

Что такое кратность? Модельный пример — система из двух одинаковых маятников, независимо колеблющихся. Более формально, $H > L_1 \oplus \dots L_m$: $\hat{T}\mid_{H_i} \sim \hat{T}\mid_{H_j}$.

Общие спектральные инварианты: $([\sigma], \mathcal{M}(\lambda))$, $\mathcal{M}$ — функция кратности, $\mathcal{M} : S^1 \to \mathbb{N} \sqcup \{\infty\}$.

Упражнение 1. Можно ли в какой-то группе придумать два набора подгрупп, таких, что: $1_{G_1} + \ldots + 1_{G_n} = 1_{H_1} + \ldots + 1_{H_n}$?

11 Семинарская часть

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ имеет СЗ $\pm\sqrt{2}$. Спектр этого оператора $\sigma = \frac{\delta_{-\sqrt{2}} + \delta_{\sqrt{2}}}{2}$.

Упражнение 2 $(*)$**.** Придумать вектор: h, дающий такую σ.

$\Lambda = \{\pm\sqrt{2}\}, L^2(\Lambda, \sigma) = \{\varphi : \Lambda \to \mathbb{C}\} \cong \mathbb{C}^2$. $M_\lambda(\varphi) = \lambda\varphi(\lambda)$. Если функцию φ представлять столбцом значений в $\pm\sqrt{2}$, то

$$M_\lambda(\begin{bmatrix} \varphi(-\sqrt{2}) \\ \varphi(\sqrt{2}) \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} -\sqrt{2}\varphi(-\sqrt{2}) \\ \sqrt{2}\varphi(\sqrt{2}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi(-\sqrt{2}) \\ \varphi(\sqrt{2}) \end{bmatrix}$$

.

Рассмотрим теперь группу $\mathbb{T} = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. И матрицу $A(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

Характеры тора (гомоморфизмы в комплексную единичную окружность) выглядят так: $\gamma_{j,k}(x, y) = \exp(2\pi i(jx + ky))$. Возьмём один характер и рассмотрим его динамику под действием оператора Купмана.

Можно проверить, что $\gamma_{j_0,k_0}(A(x, y)) = \gamma_{A^T(j_0,k_0)}(x, y)$. Действие корректно задано на торе, если все элементы A — целые. Оно обратимо, если обратная матрица тоже целочисленна, то есть $\det A = 1$.

Орбиты этого действия на $\mathbb{Z}^2$ получились гиперболами на соответствующих целых точках (плюс одна стационарная орбита). Спектральный тип этой системы получился (Leb, ∞).

Упражнение 3. Возмем последовательность характеров на одной гиперболе: $\xi_j : \hat{A}\xi_i = \xi_{i+1}$. Посчитать σ_{ξ_0} и $\left\langle \hat{A}^k \xi_i, \xi_i \right\rangle$.

Лекция 5. Спектральная теорема II

12 Общая спектральная теорема

Список праздных фактов:

- $\operatorname{supp} \sigma = \bigcup\limits_{\substack{\sigma(X \setminus K) = 0, \\ \text{K — замкнуто}}}$
- $\sigma_1 * \sigma_2$ — распределение случайной величины $\xi_1 + \xi_2, \xi_1 \perp \xi_2$.
- (абсолютная непрерывность мер) $\nu \ll \mu \Leftrightarrow \nu = p(z)\mu, p \in L^1(\mu)$.

- (сингулярность мер) $\nu \perp \eta \Leftrightarrow \exists$борелевское $F : \nu(F) = 1, \eta(\Omega \setminus F) = 1$
- Любые две меры σ_1, σ_2 можно представить как $\sigma_1 = \nu_1 + \omega_1, \sigma_2 = \nu_2 + \omega_2$, притом $\omega_1 \sim \omega_2 \perp \nu_1 \perp \nu_2$.

Теорема 1. $\sigma = \sigma_d + \sigma_s + \sigma_{ac}$ *(представляется в виде суммы дискретной составляющей, сингулярной составляюшей и абсолютно непрерывной составляющией), притом* $(\sigma_d, \sigma_s) \perp \sigma_{ac}$.

При этом $\sigma_d \sim 1_\Lambda, \Lambda < S^1$ *— дискретная.*

Теорема 2 $(*)$**.** *Если* $\hat{T}$ *— эргодическое в бесконечномерном* $L^2(x, \mu)$*, тогда* $Sp(\hat{T}) = supp\ \sigma = S^1$.

Если рассматривать системы с кратностью, получается картина, которую можно воспринимать двумя способами:

- Есть меры $\sigma_1, \ldots, \sigma_\infty$, попарно сингулярные, притом у нас есть по n копий пространства V_n: $\hat{T}\mid_{V_{2,j}} \cong (L^2(\sigma_2), \mu_2)$.
- У нас есть $\sigma_1, \ldots, \sigma_\infty$, притом $\sigma_{k+1} \ll \sigma_k, \sigma_1 = \sigma$. В терминах предыдущего случая $\sigma = \frac{\sigma_1}{4} + \ldots + \frac{\sigma_k}{2^{k+1}} + \ldots + \frac{\sigma_\infty}{2}$.

Спектральный инвариант тогда имеет вид $(\sigma, M(z))$, где $M(z)$ — измеримая функция кратности.

13 Семинарская часть

Определение 1. Пусть $T : (X, \mu), S(Y, \nu)$. η есть джойнинг T, S если $\pi_x \eta = \mu, \pi_y \eta = \nu, (T \times S)\eta = \eta$.

Диагональный автоджойнинг: $\Delta(A \times B) = \mu(A \cap B)$.

Упражнение 1.

- $\Delta_S(A \times B) = \mu(AS \cap B)$ — джойнинг, если $ST = TS$, S сохраняет меру. Замечание: $\Delta_{T^k}(A \times B) = \mu(T^k A \cap B) \to \mu(A)\mu(B) \Leftrightarrow \Delta_{T^k} \stackrel{w}{\to} \mu \times \mu$ — джойнинговое определение перемешивания.
- $T : \sigma_1, S : \sigma_2, \sigma_1 \perp \sigma_2 \Rightarrow T \perp S$ — дизъюнктны, то есть единственный джойнинг — это $\mu \times \nu$.

Если есть $\beta(f(x), g(y)) = \int\limits_{X \times X} f(x)g(y)d\eta$, то она представима как $\langle J_\eta, g \rangle$. Например, $J_{\mu \times \nu} = \Theta$ — ортопроектор на константу, $J_\Delta = Id, J_{\Delta_S} = \hat{S}$.

Лекция 6. Немного про джойнинги

Праздный факт:

Теорема 1 (Рохлин). *Любое пространство Лебега (конечной меры) без атомов (точек ненулевой меры) изоморфно* $[0;1]$.

Рассмотрим множество всех джойнингов $J_{T,S}$. Оно выпукло и компактно (множество всех мер компактно в силу слабой компактности шара в гильбертовом пространстве, а замкунтое подмножество компакта компактно). Всякий джойнинг может быть тогда выражен как

$$\eta = \int\limits_{\partial J_{T,S}} \alpha d\xi_{(\eta)}.$$

Утверждается, что $\partial J_{T,S}$ представляет собой все эргодические джойнинги.

Пусть есть две эргодические системы T и S с общим дискретным спектром Λ. Тогда $J_{T,S}$ непусто и компактно, то есть имеет границу. Значит существует какой-то эргодический джойнинг η.

$L^2(\mu) = Span\{\varphi_\lambda(x) : \lambda \in \Lambda\}$, $L^2(\nu) = Span\{\psi_\lambda(x) : \lambda \in \Lambda\}$.

$(\hat{T} \times \hat{S})\varphi_{\lambda_1}(x)\psi_{\lambda_2}(y) = \lambda_1\lambda_2\varphi_{\lambda_1}\psi_{\lambda_2}$. $L^2(\eta) = \langle \varphi_{\lambda_1} \otimes \psi_{\lambda_2} \rangle$.

Утверждается, что канонические вложения $\hat{\pi}_1 : L^2(\mu) \to L^2(\eta), \hat{\pi}_2 : L^2(\nu) \to L^2(\eta)$ являются изоморфизмами.

Лекция 7. Про слабо-перемешивающие системы

Хотим построить слабо-перемешивающую, но не перемешивающую систему.

Рассмотрим следующий процесс преобразования слов и будем его анализировать. $w_0 = 0, w_1 = 0010, \ldots, w_{n+1} = w_n w_n 1 w_n$.

Определим эмпирическое распределение: $p(u\|w_\infty) = \lim\limits_{n\to\infty} p(u\|w_n)$, где $p(u\|v) = \frac{\#\{\text{вхождений u в v}\}}{|v|-|u|+1}$.

Лемма. *Меры* $\mu_n(u) = p(u\|w_\infty), |u| = n$ *согласованы, то есть если по большей мере рассмотреть маленькое слово, то получится то же, что по меньшей мере (или, что существует мера* μ*, проекцией которой являются все данные меры). Таким образом имеется динамическая система на пространстве* $(\mathbb{A}^{\mathbb{Z}}, \mathcal{B}, \mu)$ *с оператором Купмана* $T : (x_i) \mapsto (x_{i+1})$.

Теорема 1.

- T *— эргодическое;*
- $\hat{T}^{h_n} \underset{w}{\to} \frac{\hat{T}+1}{2}$;
- $T \in WMix, T \notin Mix$.

Процесс можно представить так: имеем слово w, записанное в башню снизу вверх. За 1 шаг мы должны скопировать w, получив три башни рядом. Далее на среднюю башню нужно дописать 1 и склеить все в один столбик.

Определение 1. $T \in Rang(1)$, если $\exists \xi_n = \{B_n, TB_n, \dots, T^{h_n-1}B_n, \varepsilon_n\} \to \varepsilon$, то есть $\forall A \exists \xi_n$ — измеримая на A и $\mu(A \Delta A_n) \to 0$.

Рассмотрим $\left\langle \hat{T}^{-h_n} f, g \right\rangle = \int\limits_X \hat{T}^{h_n} f(x) g(x) d\mu = \frac{1}{2} \langle f, g \rangle + \frac{1}{2} \left\langle \hat{T} f, g \right\rangle$. То есть второй пункт доказан.

Этюд: характеризация полиномов, таких, что $\lim \hat{T}^{-mh_n} = P_m(\hat{T})$. Можно получить, что $P_{3m} = P_m$ и выразить P_{3m+1}, P_{3m+2} через $P_m = P_{3m}$ и $P_{m+1} = P3m + 3$ и изобразить их как результат случайного блуждания на графе Шреера $BS(1,3)/\langle t \rangle$, где $BS(1,3) = \left\langle a, t \mid tat^{-1} = a^3 \right\rangle$ (стандартное действие $a : x \mapsto x + 1$, $t : x \mapsto 3x$).

Теорема 2. *Для эргодических T следующие утверждения эквивалентны:*

- $T \in WMix$;
- $\sigma_T = \sigma_s + \sigma_{ac} (\nexists \varphi : \hat{T}\varphi = \lambda\varphi, \lambda \neq 1)$;
- *Джойнинг $\mu \times \mu$ эргодичен относительно $T \times T$;*
- *(Н. Винер) $\forall \varepsilon > 0 \to \mathcal{F} = \{t : | \left\langle \hat{T}^t f, g \right\rangle | > \varepsilon\}$ имеет нулевую плотность: $\frac{\mathcal{F} \cap [1,N]}{N} \to 0$.*