1 Введение

- «Теорема Абеля в задачах и решениях», Алексеев
- По алгебраической геометрии: Харцкорн, Шафаревич.

Лекция 1. Теорема Абеля-Руфини

2 Полиномиальные уравнения, многозначные функции

Задача обращения: $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, найти $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(g(y)) = y$, притом функция многозначная.

Если f — многочлен, то знаем формулу для $\deg f \leqslant 4$.

Определение 1 (Многозначная функция)**.** Многозначная функция f — неявная функция $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, заданная полиномиальным уравнением $\{F = 0\}, F : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$.

Либо $f = \{x \in \mathbb{C}^2 \mid F(x) = 0\}$, либо $f : \mathbb{C} \to 2^{\mathbb{C}}, f(x) = \{y \in \mathbb{C} \mid F(x, y) = 0\}$.

Если f, g — многозначные, то можно определить композицию $h = g \circ f = \{(x, z) \mid \exists y : F(x, y) = G(y, z) = 0\}$. Определение пока что некорректно, нужно как-то перейти к одному уравнению.

Определение 2 (Афинное алгебраическое многообразие)**.** Афинное (в смысле не проективное) алгебраическое многообразие $X \subset \mathbb{C}^n$ — это множество, заданное системой полиномиальных уравнений.

$X = \{x \in \mathbb{C}^n \mid F_j(x) = 0, j = 1, \ldots, k\}, F_j : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ — многочлены.

Проблема: если взять афинное алгераическое многообразие, заданное двумя уравнениями в $\mathbb{C}^3$, то его проекция на (x, z) одним уравнением может и не задаваться.

Теорема 1 (О проекции афинного алгебраического многообразия)**.** *Пусть отображение $H : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ полиномиальное. Тогда $H(X) \subset \mathbb{C}^m$ — афинное алгебраическое многообразие.*

Пример. Многообразие $X = \{xy = yz = xz = 0\}$ имеет коразмерность 2, хочется задать его двумя уравнениями, но можно показать, что это невозможно.

Теорема 2. *Любое алгебраическое многообразие размерности $n - 1$ в $\mathbb{C}^n$ можно задать одним уравнением.*

В этом свете наша композиция определена корректна.

Определение 3 (Сумма, произведение многозначных функций)**.** Если $l: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, то $l(f,g) = \{(x, l(y_1, y_2) \mid F(x, y_1) = F(x, y_2) = 0\}$. В чатности, так можно определить сложение и умножение.

Так как это проекция многооразия $\{(x, y_1, y_2, z) \mid F(x, y_1) = F(x, y_2) = z - l(y_1, y_2) = 0\}$, то полученный объект — это многозначная функция.

3 Теорема Абеля

Определение 4 (Выразимость в радикалах)**.** Функция $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ выражена в радикалах, если:

- $f(x) = c, f(x) = \sqrt[n]{x}$ $(F(x,y) = x^n - y)$.
- Композиция функций, выраженных в радикалах.
- $l(f,g)$, где l — многочлен, f, g выражены в радикалах.

Определение 5 (Разрешимость в радикалах)**.** $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — разрешима в радикалах, если существует g — многозанчная $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, выраженная в радикалах, такая что $g(y) \supset f^{-1}(y)$.

Замечание. $g(y) = f^{-1}(y)$ не получается, например, в случае формулы Кардано 6 корней. Однако, нас в принципе не очень смущает наличие побочных корней.

Если мы можем выразить корни уравнения формулой в радикалах, то можно разрешить в радикалах соответсвующий многочлен, просто подставив $c_0 - y$ вместо свободного члена c_0.

Теорема 3 (Теорема Абеля)**.** *Многочлен f общего положения* $\deg f \geqslant 5$ *неразрешим в радикалах.*

Говоря про общее положение подразумеваем, что это неверно лишь на нигде не плотном множестве. Более того, в нашем случае это нигде не плотное множество будет алгебраическим многообразием меньшей размерности.

4 Топологическая теория Галуа

Определение 6 (Накрытие)**.** Накрытие $\pi : E \to B$ — это непрерывное отображение топологических пространств, такое, что существует F — дискретное топологическое пространство, такое что $\forall x \in B \to \exists U = U(x) : \exists \varphi_x : \pi^{-1}(U) \to U \times F$, такое что оно осуществляет гомеоморфизм, а также $p_u(\varphi_x(e)) = \pi(e)$, где $p : F \times U$ — проектор на U.

Замечание. Если просто попросить, что $\pi^{-1}(U) \cong U \times F$, то накрытием будет отображение из интервала в интервал, которое левую треть отображает в левую половину линейно, правую в правую, а середину склеивает в одну точку.

$|f^{-1}(y)| = \deg f$, кроме некоторых точек, а именно тех, где $f(x) = y, f'(x) = 0$, то есть это верно для всех y кроме так называемых критических значений многочлена B'.

Утверждение 1. Пусть $B' = \{y \mid \exists x : f'(x) = 0, y = f(x)\}$. Тогда отображение $f|_{\mathbb{C}\setminus f^{-1}(B')}$ является накрытием над $\mathbb{C} \setminus B'$.

Доказательство. Нужно взять окрестность некоторой точки $x \in \mathbb{C} \setminus B'$, взять все её прообразы, взять у них по окрестности, пересечь их образы, позаботиться о том, чтобы они не пересекались и не содержали плохих точек и применить теорему об обратной функции. □