Содержание

Литература:

- Boloobas «Random graphs»
- Janson, Lucak, Rucinski «Random graphs»

1 Модели случайных графов

Определение 1. *Случайный граф* — случайный элемент со значениями в некотором конечном множестве графов.

Определение 2. *Равномерная модель.* K_n — полный граф, $0 \leqslant m \leqslant C_n^2$, $\mathcal{G}_m$ — множество всех остовных подграфов K_n, имеющих ровно m рёбер. Случайный граф в этой модели — случайный элемент с равномерным распределением на $\mathcal{G}_m$.

$$P(G(n,m) = F) = \frac{1}{C_{C_n^2}^m} \, \forall F \in \mathcal{G}_m$$

Фиксировано число рёбер, но другие характеристики выглядят посложнее, скажем $\deg v$ имеет гипергеометрическое распределение.

Определение 3. *Биномиальная модель.* $\mathcal{G}$ — множество всех остовных подграфов K_n, $p \in [0,1]$. Случайный граф в этой модели — случайный элемент на $\mathcal{G}$ со следующим распределением:

$$P(G(n,p) = F) = p^{|E(F)|}(1-p)^{C_n^2 - |E(F)|} \, \forall F \in \mathcal{G}$$

Много независимых событий, из-за чего многие характеристики имеют удобное распределение, например $\deg v \sim B(n-1, P)$. Число рёбер, впрочем, случайно.

Другие модели:

- Граф G, схема Бернулли на его рёбрах. Скажем, $G = K_{n,m}$ — случайный двудольный граф.
- Равномерное распределение на какой-то совокупности графов $\mathcal{F}$. Например, случайный d-регулярный граф
  - $d = 1$ — случайное совершенное паросочетание
  - $d = 2$ — случайный набор циклов
  - $d = 3$ — можно показать, что а.п.н. это гамильтонов цикл плюс какое-то совершенное паросочетание
- Случайный процесс на графе
  - С дискретным временем: $\tilde{G} = (\tilde{G}(n,m), m = 0 \dots C_n^2)$, в котором на каждом шаге появляется новое случайное равномерно выбранное ребро. $\tilde{G}(n,m) \overset{d}{=} G(n,m)$. Можно смотреть случайные моменты

* $\tau_1(n) = \min\{m : \delta(\tilde{G}(n,m)) \geqslant 1\}$
* $\sigma_1(n) = \min\{m : \tilde{G}(n,m)$ связен$\}$

Теорема 1 (Баллобаш, Томасон)**.**

$$P\left(\tau_1(n) = \sigma_1(n)\right) \to 1, n \to \infty$$

– С непрерывным временем: пусть для каждого ребра e графа K_n задана случайная величина T_e. Тогда для $\forall t > 0$ можно рассмотреть процесс:

$$\tilde{G}_T = \{e \mid T_e \leqslant t\}$$

Если все T_e распределены одинаково, $\tilde{G}_T(n,t) \stackrel{d}{=} G(n,p)$, где $p = P(T_e \leqslant t)$.

– Triangle-free process. На каждом шаге включаем одно случайное ребро так, чтобы не возникало треугольников. Можно показать, что в результате такого процесса α(итогового графа) $= O(\sqrt{n \ln n})$. Следствие: оценка на число Рамсея $R(3,t) \geqslant c\frac{t^2}{\ln t}$.

2 Общая теория случайных подмножеств

Пусть Γ — конечное множество, $|\Gamma| = N$.

- $\Gamma(p)$ — схема Бернулли на Γ.
- $\Gamma(n)$ — случайное подмножество размера n с равномерным распределением
- $\tilde{\Gamma}(m)$ — случайный процесс, включающий элементы последовательно

В асимптотиских утверждениях $\Gamma = \Gamma_n, n \in \mathbb{N}$ — последовательность, притом $N = N(n)$.

3 Монотонные и выпуклые свойства

Определение 4. Q — семейство подмножеств Γ называется *возрастающим*, если $A \in Q, A \subset B \to B \in Q$, *убывающим*, если $A \supset B \to B \in Q$, *монотонным*, если оно возрастающее или убывающее.

Ясно, что Q — возрастающее тогда и только тогда, когда $\overline{Q} = 2^\Gamma \setminus Q$ — убывающее. Будем обозначать $\Gamma(p) \models Q \Leftrightarrow \Gamma(p) \in Q$ («обладает свойством Q»).

Пример 1. Γ — рёбра K_n. Возрастающие свойства:

- связность
- содержит какой-то подграф

- $\delta(G) \geqslant k$

Убывающие свойтва:

- планарность
- $\chi(G) \leqslant k$
- ацикличность

Лемма 1. *Пусть Q — возрастющее свойство. Тогда $\forall p_1 \leqslant p_2, m_1 \leqslant m_2$:*

$$P(\Gamma(p_1) \models Q) \leqslant P(\Gamma(p_2) \models Q)$$

$$P(\Gamma(m_1) \models Q) \leqslant P(\Gamma(m_2) \models Q)$$

Доказательство.

- $P(\Gamma(m_1) \models Q) = P(\tilde{\Gamma}(m_1) \models Q) \leqslant P(\tilde{\Gamma}(m_2) \models Q) = P(\Gamma(m_2) \models Q)$
- Пусть $\Gamma(p') \perp \Gamma(p'')$ — два независимых подмножества. Тогда $\Gamma(p') \cup \Gamma(p'') \overset{d}{=} \Gamma(p)$, где $p = p' + p'' - p'p''$. Тогда можно положить $p' = \frac{p_2 - p_1}{1 - p_1}$, а также, что $\Gamma(p') \perp \Gamma(p_1)$. Тогда

$$P(\Gamma(p_1) \models Q) \leqslant P(\Gamma(p_1) \cup \Gamma(p') \models Q) = P(\Gamma(p_2) \models Q).$$

□

Определение 5. Свойство Q называется *выпуклым*, если $A \subset C \subset B \in Q \Rightarrow C \in Q$

Пример 2.

- все монотонные выпуклы
- $\chi(G) = k$

4 Асимптотическая эквивалентность моделей

Хотим установить какую-то связь между моделями $\Gamma(p)$ и $\Gamma(m)$ при $pN \sim m$. Для этого введём следующий контекст:

- $\Gamma(n), n \in \mathbb{N}$ — последовательность конечных множеств
- $N = N(n) \to +\infty$
- $Q = Q(n)$
- $p = p(n) \in [0, 1]$
- $m = m(n) \in \{0, \ldots, N\}$

- $\Gamma(n,p), \Gamma(n,m)$ — случайные подмножества $\Gamma(n)$

Лемма 2. *Пусть Q — свойство $\Gamma(n)$. Пусть $p = p(n) \in [0,1]$ — некоторая функция. Если для любой последовательности $m = m(n)$, такой что*

$$m = Np + O(\sqrt{Npq}), q = 1 - p$$

выполнено

$$P(\Gamma(n,m) \models Q) \to a, n \to \infty$$

то

$$P(\Gamma(n,p) \models Q) \to a, n \to \infty.$$

Доказательство. Пусть $C > 0$ — большая константа и положим $M(C) = \{m \mid |m - Np| \leqslant C\sqrt{Npq}\}$. Обозначим

$$m_* = \operatorname*{argmin}_{m \in M(C)} P(\Gamma(n,m) \models Q)$$

$$m^* = \operatorname*{argmax}_{m \in M(C)} P(\Gamma(n,m) \models Q)$$

По формуле полной вероятности:

$$\begin{aligned} P(\Gamma(n,p) \models Q) = \sum_{m=0}^{N} P(\Gamma(n,p) \models Q \mid & \quad |\Gamma(n,p)| = m) P(|\Gamma(n,p)| = m) = \\ & \sum_{m=0}^{N} P(\Gamma(n,m) \models Q) P(|\Gamma(n,p)| = m) \geqslant \\ & \sum_{m \in M(C)} P(\Gamma(n,m) \models Q) P(|\Gamma(n,p)| = m) \geqslant \\ & P(\Gamma(n,m_*) \models Q) P(|\Gamma(n,p)| \in M(C)|) \end{aligned}$$

Но $|\Gamma(n,p)| \sim Bin(N,p), E|\Gamma(n,p)| = Np, D|\Gamma(n,p)| = Npq$. По неравенству Чебышева:

$$P(||\Gamma(n,p)| - Np| > C\sqrt{Npq}) \leqslant \frac{Npq}{C^2 Npq} = \frac{1}{C^2}$$

Значит $P(\Gamma(n,p) \models Q) \geqslant P(\Gamma(n,m_*) \models Q)\left(1 - \frac{1}{C^2}\right)$.

Аналогично

$$\begin{aligned} P(\Gamma(n,p) \models Q) \leqslant \sum_{m \in M(C)} P(\Gamma(n,m) \in Q) P(|\Gamma(n,p)| = m) + & \sum_{m \notin M(C)} P(|\Gamma(n,p)| = m) \\ & \leqslant P(\Gamma(n,m^*) \in Q) + \frac{1}{C^2} \end{aligned}$$

Значит $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} P(\Gamma(n,p) \models Q) \leqslant a + \frac{1}{C^2}$.

Также $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} P(\Gamma(n,p) \models Q) \geqslant a(1 - \frac{1}{C^2})$.

Это верно для любого $C > 0$. Тогда $\exists \lim P(\Gamma(n,p) \models Q) = a$. □

5 Связь в обратную сторону

Лемма 3. *Пусть Q — монотонное свойство, $a \in [0;1]$. Если $\forall p = p(n)$ такой, что $p = \frac{m}{N} + o(\sqrt{\frac{m(N-m)}{N^3}})$ выполнено, что $P(\Gamma(n,p) \models Q) \to a$, то $P(\Gamma(n,m) \models Q) \to a$.*

Докажем только ослабленный вариант, где $a = 0$ или $a = 1$.

Лемма 4. *Пусть Q — монотонное свойство, $m = m(n), m(n) \to +\infty$ и $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{m}{N} < 1$. Тогда если $P(\Gamma(n, \frac{m}{N}) \models Q) \to 1$, то $P(\Gamma(n,m) \models Q) \to 1$.*

Доказательство.

1. Если Q — возрастающее свойство, то

$$P(\Gamma(n, \frac{m}{N}) \models Q) = \sum_{k=0}^{N} P(\Gamma(n, \frac{m}{N}) \models Q \mid |\Gamma(n, \frac{m}{N})| = k) P(|\Gamma(n, \frac{m}{N})| = k) \leqslant$$
$$\sum_{k=0}^{N} P(\Gamma(n,k) \models Q) P(|\Gamma(n, \frac{m}{N})| = k) \leqslant \sum_{k=0}^{m} + \sum_{k>m+1} \leqslant$$
$$P(\Gamma(n,m) \models Q) P(|\Gamma(n, \frac{m}{N})| \leqslant m) + P(|\Gamma(n, \frac{m}{N})| > m)$$

   По ЦПТ (условие на скорость роста $m(n)$ позволяет ею воспользоваться), получаем, что

$$1 \leqslant \frac{1}{2} \underline{\lim_{n}} P(\Gamma(n,m) \models Q) + \frac{1}{2}$$

   Значит $\exists \lim\limits_{n} P(\Gamma(n,m) \models Q) = 1$.

2. Если Q — убывающее, то $P(\Gamma(n, \frac{m}{N}) \models Q) \leqslant P(|\Gamma(n,m)| > m) P(\Gamma(n,m) \models Q) + P(|\Gamma(n,m)| \leqslant m)$. Далее, все тоже самое.

□

Следствие. *То же самое верно и для $a = 0$.*

Следствие (Асимптотическая эквивалентность моделей)**.** *Пусть Q — возрастающее свойство, $m = m(n) \to +\infty$, $\overline{\lim\limits_{n}} \frac{m}{N} \leqslant 1 - \delta$. Тогда*

1. $P(\Gamma(n, \frac{m}{N}) \models Q) \to 1 \Rightarrow P(\Gamma(n,m) \models Q) \to 1$.
2. $P(\Gamma(n, \frac{m}{N}) \models Q) \to 0 \Rightarrow P(\Gamma(n,m) \models Q) \to 0$.
3. $P(\Gamma(n,m) \models Q) \to 1 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\, P(\Gamma(n, \frac{m}{N}(1+\varepsilon)) \models Q) \to 1$.
4. $P(\Gamma(n,m) \models Q) \to 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\, P(\Gamma(n, \frac{m}{N}(1-\varepsilon)) \models Q) \to 0$.

Доказательство. Первые два — это лемма и следствие. Положим $\frac{m}{N}(1+\varepsilon) = p(n)$. Тогда если $m'(n) = NP + O(\sqrt{Npq}) = (1+\varepsilon)m + O(\sqrt{m})$, то $m'(n) \geqslant m(n)$ начиная с какого-то момента, значит в силу возрастания Q $P(\Gamma(n,m') \models Q) \geqslant P(\Gamma(n,m) \models Q) \to 1$. Значит $P(\Gamma(n,m') \models Q) \to 1$, то есть по лемме $P(\Gamma(n, \frac{m}{N}(1+\varepsilon)) \models Q) \to 1$. Аналогично следует последний пункт. $\square$

6 Пороговые вероятности

Мы доказали эквивалентность моделей только в случае вероятности, стремящейся к 0 или к 1. Однако, это самый важный случай, так как имеет место эффект «пороговой вероятности».

Определение 6. Пусть Q — возрастающее свойство подмножеств $\Gamma(n)$. Функция $\hat{p} = \hat{p}(n)$ называется *пороговой вероятностью* для Q, если выполнено $\lim\limits_{n\to\infty} P(\Gamma(n,p) \models Q) = 1$ при $p = \omega(\hat{p})$ и 0, если $p = o(\hat{p})$.

Определение 7. Если Q — возрастающее свойство, то функция $\hat{m} = \hat{m}(n)$ называется *пороговой функцией* для Q, если выполнено $\lim\limits_{n\to\infty} P(\Gamma(n,m) \models Q) = 1$ при $m = \omega(\hat{m})$ и 0 при $m = o(\hat{m})$.

Замечание. Для убывающих свойств все то же самое, с точностью до наоборот.

Замечание. $\hat{m}$ — пороговая вероятность $\Leftrightarrow \hat{p} = \frac{\hat{m}}{N}$ — пороговая функция.

Пример 3.
- $\Gamma(n) = \{1, \dots, n\}$, $Q = \{$внутри есть 3-прогрессия$\}$. Тогда $\hat{p} = n^{-\frac{2}{3}}$ — пороговая вероятность, $\hat{m} = n^{\frac{1}{3}}$ — пороговая функция.
- $\Gamma(n)$ — рёбра K_n, $Q = \{$есть $\Delta\}$. Тогда $\hat{p} = \frac{1}{n}$ — пороговая вероятность.

Утверждение 1. Пусть Q — нетривиальное возрастающее свойство подмножеств $\Gamma(n)$. Тогда функция $f(p) = P(\Gamma(n,p) \models Q)$ является непрерывной, строго возрастающей на $[0;1]$, $f(0) = 0, f(1) = 1$.

Доказательство. Возрастание следует из предыдущих лемм.

$$f(p) = \sum_{A \in Q} P(\Gamma(n,p) = A) = \sum_{A \in Q} p^{|A|}(1-p)^{N-|A|}.$$

Это многочлен, строго возрастающая непрерывная функция. $\square$

Определение 8. Если Q — возрастающее свойство, то $\forall a \in (0,1)$ положим $p(a,n) = f_n^{-1}(a)$. Введём также $m(a,n) = \min\{m : P(\Gamma(n,m) \models Q) \geqslant a\}$.

Лемма 5. *Пусть Q — возрастающее свойство, тогда $\hat{p} = \hat{p}(n)$ является пороговой вероятностью для $Q \Leftrightarrow \forall a \in (0,1)$ выполнено $\hat{p} \asymp p(a,n)$. И $\hat{m}$ — пороговая вероятность для $Q \Leftrightarrow \forall a \in (0,1)$ выполнено $\hat{m} \asymp m(a,n)$.*

Доказательство. Докажем для равномерной модели. Пусть $\hat{m}$ — пороговая, но $\exists a :\in (0,1)$ такое, что $\hat{m} \not\asymp m(a,n)$. Тогда существует подпоследовательность $\hat{m}_{n_k}$ такая, что отношение $\frac{\hat{m}_{n_k}}{m(a,n_k)} \to 0$ или $+\infty$.

Пусть предел нулевой. Тогда $m' = m(a,n_k)-1$ есть $\omega(\hat{m})$. В таком случае $\lim\limits_{k\to\infty} P(\Gamma(n, m'(n_k)) \models Q) = 1$. Но $P(\Gamma(n, m'(n_k)) \models Q) \leqslant a < 1$, противоречие.

Если же предел равен $+\infty$, то $m(n_k) = o(\hat{m})$. Тогда $\lim\limits_{k} P(\Gamma(n, m(n_k)) \models Q) = 0$. Но для любого k выполнено $P(\Gamma(n, m(n_k)) \models Q) \geqslant a > 0$, противоречие.

В обратную сторону: пусть $\hat{m} = \omega(\hat{m})$. Тогда $\forall a \in (0,1)\, m = \omega(m(a,n))$, значит в силу возрастания Q $P(\Gamma(n,m) \models Q) \geqslant P(\Gamma(n, m(a,n)) \models Q) \Rightarrow \varliminf\limits_{n} P(\Gamma(n,m) \models Q) \geqslant \varliminf\limits_{n} P(\Gamma(n, m(a,n)) \models Q) \geqslant a$, то есть $\exists \lim\limits_{n} P(\Gamma(n,m) \models Q) = 1$.

Если $m = o(\hat{m})$, то все аналогично. $\square$

Теорема 2. *Каждое монотонное свойство имеет пороговую вероятность.*

Доказательство. Считаем, что Q — возрастающее свойство. Надо показать, что все функции $p(a,n)$ имеют один и тот же порядок. Возьмём $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$ и такое m, что $(1-\varepsilon)^m \leqslant \varepsilon$. Рассмотрим $\Gamma^{(1)}(n, p(\varepsilon, n)), \ldots, \Gamma^{(m)}(n, p(\varepsilon, n_))$ — н.о.р. случайные подмножества $\Gamma(n)$. Тогда

$$\tilde{\Gamma} = \Gamma^{(1)}(n, p(\varepsilon,n)) \cup \ldots \cup \Gamma^{(m)}(n, p(\varepsilon,n)) \overset{d}{=} \Gamma(n, p'),$$

где $p' = 1 - (1-p(\varepsilon,n))^m \leqslant mp(\varepsilon,n)$.

$P(\tilde{\Gamma} \models Q) = P(\Gamma(n,p') \models Q) \leqslant P(\Gamma(n, mp(\varepsilon,n)) \models Q)$.

С другой стороны $P(\tilde{\Gamma} \not\models Q) \leqslant P(\forall i \Gamma^{(i)}(n, p(\varepsilon,n)) \not\models Q) = P^m(\Gamma^{(1)}(n, p(\varepsilon,n)) \not\models Q) = (1-\varepsilon)^m \leqslant \varepsilon$. Тогда $P(\tilde{\Gamma} \models Q) \geqslant 1-\varepsilon) = P(\Gamma(n, p(1-\varepsilon, n)) \models Q)$.

Значит $\forall n\, mp(\varepsilon,n) \geqslant p(1-\varepsilon,n)$. Итого $p(\varepsilon,n) \leqslant p(\frac{1}{2},n) \leqslant p(1-\varepsilon,n) \leqslant mp(\varepsilon,n)$. Значит по лемме, $p(\frac{1}{2},n) = \hat{p}$ — пороговая вероятность для Q. $\square$

Следствие. *Для $\forall$монотонного свойства $\exists$ пороговая функция $\hat{m}$.*

Определение 9. Пусть Q — выпуклое свойство. Тогда функции $\hat{p_1} \leqslant \hat{p_2}$ называются *пороговыми* для Q, если...

Пример 4. $\Gamma(n)$ — рёбра K_n.

- $Q = \{\text{обхват} = 4\}$, $\hat{p_1} = \hat{p_2} = \frac{1}{n}$
- $Q = \{\text{кликовое число} = 4\}$, $\hat{p_1} = n^{-\frac{2}{3}}$, $\hat{p_2} = n^{-\frac{1}{2}}$

Определение 10. Пусть Q — возрастающее. Тогда $\hat{p} = \hat{p}(n)$ называется *точной пороговой вероятностью* для Q, если $\forall \varepsilon > 0$ выполнено $\lim\limits_{n\to\infty} P(\Gamma(n,p) \models Q) = 1$ при $p \geqslant (1+\varepsilon)\hat{p}$ и 0 при $p \leqslant (1-\varepsilon)\hat{p}$.

Пример 5. $\Gamma(n)$ — рёбра K_n.

- $Q = \{$связность$\}$, $\hat{p} = \frac{\ln n}{n}$ — точная пороговая вероятность
- $Q = \{$есть $\Delta\}$, $\hat{p} = \frac{1}{n}$ — пороговая вероятность, но точной пороговой вероятности нет
- $Q = \{$ацикличность$\}$, $\hat{p} = \frac{1}{n}$ — пороговая вероятность для Q, но точна она только с одной стороны

Теорема 3 (Фридгут)**.** *Пусть Q — монотонное свойство графов, $\hat{p}$ — пороговая и она не точная. Тогда существует конечное разбиение $N_j, j = 1, \ldots, k$ множества $\mathbb{N}$ и рациональные числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_k > 0$ такие, что $\forall n \in N_j$ выполнено $\hat{p}(n) \asymp n^{-\alpha_j}$.*

7 Малые подграфы в случайном графе

Рассмотрим $G(n,p), p = p(n)$. Пусть G — фиксированный. Вопросы:

- с какой вероятностью $G(n,p)$ содержит копию G?
- X_G — число копий G в $G(n,p)$. Каково предельное распределение X_G?

8 Пороговая вероятность

Утверждение 2 (Метод первого момента)**.** Пусть $(X_n, n \in \mathbb{N})$ — последовательность с.в. со значениями в $\mathbb{Z}_+$. Тогда $P(X_n > 0) \leqslant EX_n$. То есть если $EX_n \to 0$, то $P(X_n > 0) \to 0 \Rightarrow P(X_n = 0) \to 1$.

Утверждение 3 (Метод второго момента)**.** Пусть $(X_n, n \in \mathbb{N})$ — последовательность с.в. со значениями в $\mathbb{Z}_+$. Тогда $P(X_n = 0) \leqslant P(|X_n - EX_n| \leqslant EX_n) \leqslant \frac{DX_n}{(EX_n)^2}$. То есть если $DX_n = o(E(X_n)^2)$, то $P(X_n = 0) \to 0$, то есть $P(X_n \geqslant 1) \to 1$.

Определение 11. *Плотностью* графа $G = (V,E)$ называется $\rho(G) = \frac{|E|}{|V|}$.
$m(G) = \max\limits_{H \subseteq G} \rho(H)$.

Граф G *сбалансирован*, если $\rho(G) = m(G)$ и *строго сбалансирован*, если $\rho(H) < \rho(G) \forall H \subset G$.

Определение 12. *Группой автоморфизмов* $Aut(G)$ графа G называется группа всех изоморфизмов графа с собой. $aut(G) = |Aut(G)|$.

Лемма 6. *Пусть G — фиксированный. X_G — число копий G в $G(n,p)$. Тогда*

$$EX_G = C_n^v \frac{v!}{aut(G)} p^{|E|} = \Theta_G(n^v p^{|E|}).$$

Посчитаем дисперсию. Введём $\Phi_G = \min\{EX_H : H \subset G, H \neq \varnothing\}$. Тогда

$$\Phi(G) \asymp \min_{H \subset G, |E(H)| > 0} n^{|V(H)|} p^{|E(H)|}$$

.

Лемма 7.

$$DX_G \asymp (1-p)\sum_{H\subset G} n^{2v-v_H}p^{2e-e_H} \asymp (1-p)\sum_{H\subset G}\frac{(EX_G)^2}{EX_H} \asymp (1-p)\frac{(EX_G)^2}{\Phi_G}.$$

Доказательство. Пусть G' — копия G в K_n, $I_{G'} = I\{G' \subset G(n,p)\}$. Тогда $X_G = \sum\limits_{G'} I_{G'}$.

Тогда $DX_G = cov(X_G, x_G) = \sum\limits_{G',G''} cov(I_{G'}, I_{G''}) = \sum\limits_{G',G'',|E(G'\cap G'')|>0} cov(I_{G'}, I_{G''})$.

Это можно переписать как

$$\sum_{H\subset G}\sum_{G',G'',G'\cap G''\equiv H}(p^{2e-e_H}-p^{2e}) \asymp \sum_{H\subset G} n^{2v-v_H}p^{2e-e_H}(1-p^{e_H})$$

С точки зрения порядка $1-p^{e_H} \asymp 1-p$, что даёт требуемое. □

Теорема 4. *Пороговая вероятность наличия графа G равна $\hat{p} = n^{-\frac{1}{m(G)}}$.*

Доказательство. Пусть $p = p(n) = o(n^{-\frac{1}{m(G)}})$. Возьмём $H \subset G, \rho(H) = m(G)$. По лемме $P(G(n,p) \models G) \leqslant P(G(n,p) \models H) \leqslant EX_H = \Theta(n^{v_H}p^{e_H})$.

При данном p получаем $\Theta((np^{\rho(H)})^{v_H}) \to 0$.

Пусть наоборот, $p = p(n) = \omega(n^{-\frac{1}{m(G)}})$. Тогда $\Phi(G) = \min\limits_{H\subset G} EX_H \asymp \min\limits_{H} n^{v_H}p^{e_H} = \min\limits_{H}(np^{\rho(H)})^{v_H} \to +\infty$. По лемме, $P(G(n,p) \not\models G) = P(X_G = 0) \leqslant \frac{DX_G}{(EX_G)^2} = o(\frac{1}{\Phi_G}) \to 0$. □

Теорема 5. *Для любого непустого графа G вероятность $P(G(n,p) \not\models G) \leqslant \exp(-\Theta(\Phi_G))$.*

А что будет, если $np^{m(G)} \to c > 0$?

Теорема 6 (Пуассоновская предельная теорема)**.** *Если G строго сбалансирован и $np^{m(G)} \to c > 0$, то $X_G \to Pois(\lambda)$, где $\lambda = \frac{c^{v_G}}{aut(G)}$.*

9 Метод моментов

Определение 13. Последовательность вероятностных мер $\{P_n, n \in \mathbb{N}\}$ на метрическом пространстве S *слабо сходится* к мере P, если $\forall f : S \to \mathbb{R}$ — ограниченной непр. функции выполнено:

$$\int_S f(x)P_n(dx) \to \int_S f(x)P(dx).$$

Обозначение: $P_n \xrightarrow{w} P$.

Определение 14. Семейство вероятностных мер $\{P_\alpha\}$ на метрическм пространстве S называется *плотным*, если $\forall \varepsilon \exists K_\varepsilon$ — компакт, такой что $\forall \alpha P_\alpha(S \setminus K_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$.

Семейство мер называется *относительно компактным*, если в любой последовательности мер из семейства найдётся сходящаяся подпоследовательность.

Теорема 7 (Прохоров)**.** *В полном сепарабельном простравнстве семейство мер плотно тогда и только тогда, когда оно относительно компактно.*

Следствие. *Пусть есть плотная последовательность мер на полном сепарабельном метрическом пространстве. Пусть кроме того любая слабо сходящаяся подпоследовательность слобо сходится к одной и той же мере Q. Тогда $P_n \xrightarrow{w} Q$.*

Определение 15. Распределение случайной величины X однозначно определяется своими моментами, если из того, что выполнено $\forall k\ EX^k = EY^k$ следует $X \overset{d}{=} Y$.

Лемма 8. *Пусть $\exists \varepsilon > 0$, такое что Ee^{tX} конечно $\forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Тогда распределние однозначно определено своиоми моментами.*

Доказательство. Рассмотрим $f(z) = E\exp(zX)$ как функцию комплексного переменного. В области $|\operatorname{Re} z| < \varepsilon$ она голоморфна. Тогда $f(z)$ раскладывается в ряд Тейлора в окрестности нуля:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{EX^k}{k!} z^k.$$

Пусть Y — другая с.в., такая что $EY^k = EX^k$. Составим функцию $g9z) = E\exp(zY)$. $g(z)$ аналитична в той же полосе и $g(z)$ раскладывается в такой же ряд Тейлора в окрестности 0. По теореме о единственности они совпадают полностью, значит характестические функции у них одинаковые, то есть и распределения. $\square$

Пример 6.

- Все распределения с конечным носителем
- Все распределения с экспоненциально убывающими хвостами: экспоненциальные, гамма, нормальные, пуассоновские
- Пример плохого распределения: $X^3, X \sim N(0,1)$

Определение 16. Последовательность ξ_n называется *равномерно интегрирумой*, если

$$\lim_{c\to\infty} \sup_n E(|\xi_n| I(|\xi_n| \geqslant c)) = 0.$$

Теорема 8. *Пусть* $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$, $\xi \geqslant 0$, $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$. *Тогда* $E\xi_n \to E\xi \Leftrightarrow \{\xi_n\}$ — *равномерно интегрируема.*

Теорема 9 (Метод моментов). *Пусть распределение* X *однозначно определяется своими моментами. Тогда если* $\forall k \in \mathbb{N}$ $EX_n^k \to EX^k$, *то* $X_n \xrightarrow{d} X$.

Доказательство. Хотим проверить, что наша последовательность плотная, удостовериться, что частичный предел может быть только один и получить требуемое.

Итак, пусть P_n — распределние с.в. X_n. Пусть $M_k = \sup\limits_n EX_n^k$. Тогда $\forall R > 0$ $P_n(\mathbb{R} \setminus [-R; R]) = P(|X_n| > R) \leqslant \frac{E|X_n|^2}{R^2} \leqslant \frac{M_2}{R^2} \to 0$ равномерно по n с ростом R.

По теореме Прохорова P_n содерит слабо сходящуюся подпоследовательность P_{n_k}. Покажем, что $P_{n_k} \xrightarrow{d} P_X$. Если $P_{n_k} \xrightarrow{w} Q$, то $X_{n_k} \xrightarrow{d} Y$, где Y — какая-то с.в. Заметим, что $X_{n_k}^s$ — равномерно интегрируема:

$$\sup_k E(|X_{n_k}^s| I(|X_{n_k}^s| \geqslant c)) \leqslant \sup_k E\frac{X_{n_k}^{2s}}{c} \leqslant \frac{M_{2s}}{c} \to 0.$$

По теореме о равномерной интегрирумости $EX_{n_k}^s \to EY^k$. По условию $EX_{n_k}^s \to EX^s$, то есть $EX^s = EY^s$. Зрачит $X \stackrel{d}{=} Y$ и $P_{n_k} \to P_X$.

По следствию из теоремы Прохорова $P_n \xrightarrow{w} P_X$, то есть $X_n \xrightarrow{d} X$. □

Определение 17. Пусть Z — случайный вектор. Его распределение однозначено определяется своими моментами, если из того, что $\forall \alpha(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ $EZ^\alpha = EZ_1^{\alpha_1} \ldots Z_m^{\alpha_m} = EY^\alpha$ следует, что $Z \stackrel{d}{=} Y$.

Теорема 10 (Метод моментов). *Пусть распределение случайного ветора* Z *однозначно определяется своими моментами. Тогда если* $\forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ $EX_n^\alpha \to EX^\alpha$, *то* $Z_n \xrightarrow{d} Z$.

10 Предельные теоремы для X_G

Доказательство пуассоновской предельной теоремы. Воспользуемся методом моментов. Факториальные моменты $Y \sim Pois(\lambda)$ равны $E(Y)_k = EY(Y-1)\ldots(Y-k+1) = \lambda^k$. Достаточно показать, что $E(X_G)_k \to \lambda^k$ при $n \to \infty$.

Пусть $G_1, \ldots, G_N$ — копии G в K_n, $I_{G_i} = I\{G_i \subset G(n,p)\}$. Тогда $X_G = \sum\limits_{i=1}^N I_{G_i}$ и

$$(X_G)_k = \sum_{i_1,\ldots,i_k} I_{G_{i_1}} \ldots I_{G_{i_k}}.$$

$$E(X_G)_k = \sum_{i_1\ldots,i_k} EI_{G_{i_1}} \ldots I_{G_{i_k}} = E'_k + E''_k,$$

где E'_k — сумма по тем наборам, где все G_{i_k} попарно не имеют общих вершин, E''_k — остальные слагаемые.

$$E'_k = (p^{e_G})^k \sum 1 = (p^{e_G})^k C_n^{v_G} \frac{v_G!}{\operatorname{aut}(G)} C_{n-v_G}^{v_G} \frac{v_G!}{\operatorname{aut} G} \dots C_{n-(k-1)v_G}^{v_G} \frac{v_G!}{\operatorname{aut} G} \sim$$
$$(p^{e_G} \frac{n^{v_G}}{\operatorname{aut}(G)})^k \to (\frac{c^{v_G}}{\operatorname{aut}(G)})^k = \lambda^k$$

Нужно показать, что $E''_k = o(1)$. Для каждого t рассмотрим $e(t) = \min\{|E(G_1 \cup \ldots \cup G_k)| \mid |V(G_1 \cup \ldots G_k)| = t\}$.

Утверждение 4. Пусть $k \geqslant 2, 2 \leqslant t < kv_G$, тогда $e(t) > tm(G)$.

Доказательство. Пусть F — любой граф. Положим $f_F = m(G)v_F - e_F$. Тогда $f_G = 0$ и $f_H > 0$ для любого собственного подргафа $H \subset G$.

Покажем, что если $F = G_1 \cup \ldots G_k$, то $f_F < 0$. Заметим, что $f_{F_1 \cup F_2} = f_{F_1} + f_{F_2} - f_{F_1 \cap F_2}$. Если $k = 2$, то $F = G_1 \cup G_2$ и $|V(G_1 \cap G_2)| > 0$. Тогда $f_{G_1 \cup G_2} = f_{G_1} + f_{G_2} - f_{G_1 \cap G_2} = 0 + 0 - f_{G_1 \cap G_2} < 0$.

Работаем по индукции: пусть $F' = G_1 \cup \ldots \cup G_{k-1}$ и считаем, что $f_{F'} < 0$. Тогда $f_{G_1 \cup \ldots G_k} = f_{F'} + f_{G_k} - f_{F' \cap G_k} < 0$.

Это и означает, что $|E(G_1 \cup \ldots G_k)| > tm(G)$. □

Применим утверждение к оценке E''_k. Если $A(k,t)$ — это число способов разместить k копий на t вершинах.

$$E''_k \leqslant \sum_{t=k}^{kv_G - 1} C_n^t A(k,t) p^{e(t)} = o\left(\sum_{t=k}^{kv_G-1} n^t p^{e(t)}\right) =$$
$$o\left(\sum_{t=k}^{kv_G-1} (n^t p^{tm(G)}) p^{e(t)-tm(G)}\right) \to 0$$

□

Теорема 11 (Многомерный случай)**.** *Пусть $G_1, \ldots, G_s$ — различные строго сбалансированные графы одной и той же плотности $m = m(G_i)$. Тогда если $np^m \to c > 0$, то $(X_{G_1}, \ldots, X_{G_s}) \xrightarrow{d} (Z_1, \ldots, Z_s)$, где Z_j — независимые случайные величины, $Z_j \sim Pois(\lambda_j), \lambda_j = \frac{c^{V_{G_j}}}{\operatorname{aut}(G)}$.*

Пример 7. Всюду $m(G) = 1$, $np \to c > 0$

- $G = C_3 \sqcup C_3$ — два непересекающихся треугольника. Тогда $X_G \xrightarrow{d} \frac{1}{2}Z(Z-1)$, где $Z \sim Pois(\frac{c^3}{6})$. Тогда $P(X_G = 0) \to (1 + \frac{c^3}{6})\exp(-\frac{c^3}{6})$
- $G = C_3 \sqcup C_4$. $X_G \xrightarrow{d} Z_1 Z_2$, Z_i — независимые, $Z_1 \sim Pois\left(\frac{c^3}{6}\right), Z_2 \sim Pois\left(\frac{c^4}{8}\right)$. Тогда $P(X_G = 0) \to 1 - (1 - e^{-\frac{c^3}{6}})(1 - e^{-\frac{c^4}{8}})$

- G — треугольник с висячей вершиной. Тогда $X_G \xrightarrow{d} \sum_{i=1}^{W} Z_i$, где Z_i — независимые $Pois(3c)$, W — независима с ними, $W \sim Pois\left(\frac{c^3}{6}\right)$. $P(X_G = 0) \to \exp\left(-(1-e^{-3c})\frac{c^3}{6}\right)$

Итого, ясно, что $np^{m(G)} \to 0 \Rightarrow X_G \xrightarrow{d} 0$ и $np^{m(G)} \to c \Rightarrow X_G \xrightarrow{d} Pois$. Утверждение состоит в том, что в случае, если $np^{m(G)} \to \infty \Rightarrow X_G \xrightarrow{d} N$.

Теорема 12 (ЦПТ для X_G)**.** *Пусть G — непустой фиксированный граф, $np^{m(G)} \to \infty$, $n^2(1-p) \to \infty$. Тогда*

$$\frac{X_G - EX_G}{\sqrt{DX_G}} \xrightarrow{d} N(0,1).$$

Доказательство. Работаем по методу моментов. Вспомним, что если $Y \sim N(0,1)$, то $EY^k = (k-1)!!$ при чётных k и 0 при нечётных.

Пусть $G_1, \ldots, G_N$ — копии G в K_n, I_{G_i} — соответствующие индикаторы. Тогда $X_G = \sum I_{G_i}$ и обозначим $T(G_{i_1}, \ldots, G_{i_k}) = E\prod\limits_j (I_{G_{i_j}} - EI_{G_{i_j}})$. Тогда $E(X_G - EX_G)^k = \sum\limits_{i_1,\ldots,i_k} T(G_{i_1}, \ldots, G_{i_k})$.

Для набора копий $(G_1, \ldots G_K)$ введём граф $L(G_1, \ldots G_k)$ с вершинами $\{1, \ldots, k\}$ и (j,m) — ребро $\Leftrightarrow G_{i_j}$ и G_{i_m} имеют общее ребро. Тогда сумму перепишем как:

$$E(X_G - EX_G)^k = \sum_{L \subset K_k} \sum_{i_1,\ldots,i_k} T(G_{i_1}, \ldots, G_{i_k}).$$

Разбираем три случая. Если L — совершенное паросочетание. Вспомним, что $Dx_G = \sum\limits_{H \subset G, e_H > 0} C_n^{v_H} C_{n-v_H}^{v_G - v_H} C_{n-v_G}^{v_G - v_H} A(G,H) \cdot (p^{2e_G - e_H} - p^{2e_G}) = d(n,p)$. Положим рёбра L равными $\{(1,2), \ldots, (k-1,k)\}$, k — чётное.

$$\sum T = \sum_{i_1,\ldots,i_k} \prod_{j=1}^{\frac{k}{2}} \operatorname{cov}(I_{G_{2j-1}}, I_{G_{2j}})$$
$$\leqslant \sum \prod_{j=1}^{\frac{k}{2}} \sum_{G_{2j-1} \not\cap G_{2j}} \operatorname{cov}(I_{G_{2j-1}}, I_{G_{2j}}) = (DX_G)^{\frac{k}{2}}.$$

С другой стороны

$$\sum T \geqslant \sum \prod_{j=1}^{\frac{k}{2}} \operatorname{cov}(I_{G_{2j-1}}, I_{G_{2j}})$$
$$= \sum_{i_1,i_2} \operatorname{cov}(G_{i_1}, G_{i_2}) \sum_{G_{i_3} \cup G_{i_4} \not\cap G_{i_1} \cup G_{i_2}} \operatorname{cov}(G_{i_3}, G_{i_4}) \sum \ldots$$
$$\geqslant d(n,p) d(n - 2v_G, p) \ldots \sim (d(n,p))^{\frac{k}{2}} = (DX_G)^{\frac{k}{2}}$$

Таким образом, первый случай даёт вклад $(k-1)!!(DX_G)^{\frac{k}{2}}$.

Если L имеет изолированную вершину, то $T = E(I_{G_{i_1}} - EI_{G_{i_1}})\ldots = 0$, то есть вклад таких слагаемых равен 0.

В противном случае в L строго меньше, чем $\frac{k}{2}$ компонент связности. Пронумеруем его так, чтобы компоненты имели вид $\{1,\ldots,r_1\}, \{r_1+1,\ldots,r_2\},\ldots$. Пусть также число компонент равно $c(L) < \frac{k}{2}$, а также $\forall i \notin \{1, r_1+1, \ldots, r_{c-1}+1\} \exists j : (j,i) \in E(L)$.

Пусть $G_{i_1},\ldots,G_{i_k}$ — набор копий, такой что $L(G_{i_1},\ldots,G_{i_k}) = L$. Обозначим $G^{(j)} = \bigcup\limits_{s=1}^{j} G_{i_s}$, $F_j = G^{(j-1)} \cap G_{i_j}$. $e_{F_j} = 0 \Leftrightarrow j \in \{1, r_1+1, \ldots, r_{c-1}+1\}$.

Если $p \leqslant \frac{1}{2}$, то

$$|T| \leqslant E\prod_{j=1}^{k}(I_{G_{i_j}} + EI_{G_{i_j}}) \leqslant 2^k EI_{G_{i_1}}\ldots I_{G_{i_k}} = 2^k p^{e_{G^{(k)}}}.$$

Если же $p > \frac{1}{2}$, то оставим в каждой компоненте по одному множителю.

$$|T| \leqslant E\prod_{s=1}^{c}|I_{G_{i_{r_s}}} - EI_{G_{i_{r_s}}}| = (E|I_{G_1} - EI_{G_1}|)^c = (2(1-p)^{e_G}p^{e_G})^c \leqslant (2e_G(1-p))^c$$

Итого, $|T(G_{i_1},\ldots,G_{i_k})| = o(p^{e_{G^{(k)}}}(1-p)^c)$. Далее $e_{G^{(k)}} = ke_G - \sum\limits_{j=1}^{k} e_{F_j}$.

Тогда при заданных графах $F_1,\ldots,F_k$ число наборов $(G_{i_1},\ldots,G_{i_k})$ с условием $G^{(j-1)} \cap G_{i_j} \cong F_j$ в K_n есть $o(n^{kv_G - \sum\limits_{j=1}^{k} v_{F_j}})$.

$$\sum_{i_1,\ldots,i_k, L(\ldots)=L, F_1,\ldots F_k \text{ — фикс}} T = O\left(n^{kv_G - \sum\limits_{j=1}^{k} v_{F_j}} p^{ke_G - \sum\limits_{j=1}^{k} e_{F_j}}(1-p)^c\right).$$

Если $e_{F_j} = 0$, то $n^{v_{F_j}}p^{e_{F_j}} = n^{v_{F_j}} \geqslant 1$. Таких F_j ровно c. Остальные F_j имеют рёбра, значит $n^{v_{F_j}}p^{e_{F_j}} \geqslant EX_{F_j} \geqslant \Phi_G$.

Значит

$$\sum T = O\left((n^{v_G}p^{e_G})^k \frac{(1-p)^c}{(\Phi_G)^{k-c}}\right) = O\left((DX_G)^{\frac{k}{2}} \frac{(1-p)^{c-\frac{k}{2}}}{(\Phi_G)^{\frac{k}{2}-c}}\right).$$

Осталось показать, что $((1-p)\Phi_G)^{c-\frac{k}{2}} \to 0$, но $c - \frac{k}{2} < 0$, то есть $(1-p)\Phi_G \to +\infty$.

Если $p \leqslant \frac{1}{2}$, то $\Phi_G(1-p) \asymp \Phi_G$, но по условию $np^{m(G)} \to \infty \Rightarrow \Phi_G \to \infty$.

Если же $p > \frac{1}{2}$, то $\Phi_G \asymp \min\limits_{H \subset G, e_H > 0} n^{v_H}p^{e_H} \asymp \min\limits_{H \subset G, e_H > 0} n^{v_H} = n^2$.

По условию $n^2(1-p) \to \infty \Rightarrow \Phi_G \to \infty$.

Итого, по методу моментов, теорема доказана. $\square$

11 Эволюция случайного графа

- $p = o\left(\frac{1}{n^2}\right) \Rightarrow$ в графе а.п.н. нет рёбер
- $p = \frac{c}{n^2} \Rightarrow$ число рёбер равно $Pois(\frac{c}{2})$
- $p = o\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow$?

Утверждение 5. $p = o\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow$ случайный граф — а. п. н. лес

Доказательство. X — число простых циклов в $G(n,p)$. Будем оценивать $P(X \geqslant 1) \leqslant EX$.

$EX = \sum\limits_{k=3}^{n} C_n^k \frac{(k-1)!}{2} p^k \leqslant \sum\limits_{k=3}^{n} \frac{n^k (k-1)! p^k}{2k!} \leqslant \sum\limits_{k=3}^{\infty} n^k p^k \leqslant \frac{(np)^3}{1-np} \to 0.$ □

Утверждение 6. $\forall c > 0\ P(G(n,p)$ содержит компоненту размера $\geqslant c\ln n) \to 0.$

Доказательство. X — число древесных компонент размера $\geqslant c\ln n - 1$.

$EX = \sum\limits_{k=c\ln n-1}^{n} C_n^k k^{k-2} p^{k-1} (1-p)^{C_k^2 - k+1+k(n-k)} \leqslant \sum\limits_{k=c\ln n-1}^{n} C_n^k k^{k-2} p^{k-1} \leqslant \sum\limits_{k=c\ln n-1}^{n} \left(\frac{en}{k}\right)^k k^{k-2} p^{k-1} = en \sum (enp)^{k-1} \frac{1}{k^2} \leqslant en(enp)^{c\ln n} \sum\limits_{c=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \frac{A}{p}(enp)^{c\ln n} = A(e^{\frac{1}{c}} np)^{c\ln n} \to 0$ □

Пусть X_k — число древесных компонент размера k. Если $n = o(n^{-\frac{k}{k-1}})$, то $P(\exists$компонента размера $\geqslant k) \to 0$. Если $p \sim cn^{-\frac{k}{k-1}}$, то вероятность того, что есть компонента размера $> k$ стремится к 0. Если T — конкретное дерево размера k, то число копий такого дерева будет $X_T \xrightarrow{d} Pois\left(\frac{c^{k-1}}{\mathrm{aut}(T)}\right)$.

$X_k = X_{T_1} + \ldots + X_{T_m}$. Раз нет циклов и компонент размера больше k, то X_k почти наверное равно $N_{T_1} + \ldots + N_{T_m} \sim Pois\left(\frac{c^{k-1}}{\mathrm{aut}(T_1)} + \frac{c^{k-1}}{\mathrm{aut}(T_m)}\right) = Pois\left(\frac{c^{k-1}k^{k-2}}{k!}\right)$.

Если $p \gg n^{-\frac{k}{k-1}}$, то $\frac{N_T}{EN_T} \xrightarrow{P} 1$. $EN_T = C_n^k \cdot p^{k-1} \frac{k!}{\mathrm{aut}(T)} \sim \frac{n^k p^{k-1}}{\mathrm{aut}(T)} \gg 1$.

Пусть F — дерево на $k+1$ вершине. Если $p \ll n^{-\frac{k+1}{k}}$, то таких деревьев нет. Иначе, пусть $cn^{-\frac{k+1}{k}} < p < Cn^{-\frac{k+1}{k}}$. Так как свойство «содержать подграф» монотонно, то можно считать, что число деревьев, изоморфных F не больше, чем для $p = Cn^{-\frac{k+1}{k}}$. Так как $N_F(p = Cn^{-\frac{k+1}{k}}) \to Pois$, то $\forall \varepsilon > 0 \exists M : P(N_F > M) < \varepsilon$. Значит такие компоненты почти все не могут быть расширены. В последнем случае $p >> n^{-\frac{k+1}{k}}$ $\frac{N_F}{EN_F} \xrightarrow{P} 1$. $EN_F << EN_T$, притом оба стремятся к бесконечности.

Следствие. $\frac{X_k}{E(N_{T_1}+\ldots+N_{T_m})} \xrightarrow{P} 1$, *притом* $E(N_{T_1} + \ldots E_{T_m}) \sim \frac{k^{k-2}}{k!} n^k p^{k-1}$.

12 Неравенство Чернова

Рассмотрим $X \sim Bin(n,p), \lambda = np$. Хотим оценить $P(X > \lambda + t) = P(\exp(uX) > \exp(u(\lambda+t)) \leqslant \frac{E\exp(uX)}{e^{u(\lambda+t)}}$.

$E\exp(uX) = E(e^u)^{\xi_1+\ldots+\xi_n} = (1-p+pe^n)^n$. Нужно минимизировать по u дробь $\frac{(1-p+pe^u)^n}{e^{u(\lambda+t)}}$.

$f(u) = \exp(-u(\lambda+t))(1-p+pe^u)^n$

$f'(u) = -(\lambda+t)\exp^{-u(\lambda+t)}(1-p+pe^u)^n + \exp(-u(\lambda+t))npe^u(1-p+pe^u)^{n-1} = 0$.

$-(\lambda+t)(1-p+pe^u) + npe^u = 0 \Rightarrow e^u(\lambda - p(\lambda+t)) = (\lambda+t)(1-p)$.

Отсюда находим $e^u = \frac{(\lambda+t)(1-p)}{\lambda-p(\lambda+t)}$, ясно, что это минимум.

Подставим. $P(X > \lambda+t) \leqslant \left(\frac{\lambda-p(\lambda+t)}{(\lambda+t)(1-p)}\right)^{\lambda+t}\left(1-p+p\frac{(\lambda+t)(1-p)}{\lambda-p(\lambda+t)}\right)^n$.

Это равно $(1-p)^{n-\lambda-t}\left(1+\frac{\lambda+t}{n-(\lambda+t)}\right)^n\left(\frac{\lambda-p(\lambda+t)}{\lambda+t}\right)^{\lambda+t} = \frac{n^n}{(n-(\lambda+t))^n}(1-p)^{n-\lambda-t}p^{\lambda+t}\frac{((n-(\lambda+t))^{\lambda+t}}{(\lambda+t)^{\lambda+t}} = \left(\frac{\lambda}{\lambda+t}\right)^{\lambda+t}\left(\frac{n-\lambda}{n-\lambda-t}\right)^{n-\lambda-t} = \exp(-\lambda(1+\frac{t}{\lambda})\ln(1+\frac{t}{\lambda}) - (n-\lambda)(1-\frac{t}{n-\lambda}\ln(1-\frac{t}{n-\lambda})))$.

Если обозначить $\varphi(x) = (1+x)\ln(1+x) - x$, то

$$P(X > \lambda+t) \leqslant \exp\left(-\lambda\varphi(\frac{t}{\lambda}) - (n-\lambda)\varphi(-\frac{t}{n-\lambda})\right).$$

$\varphi(0) = 0, \varphi \sim \frac{x^2}{2}$ при $x \to 0$, поэтому можем оценить $P(X > \lambda+t) \leqslant \exp\left(-\lambda\varphi(\frac{t}{\lambda})\right)$.

Заметим, что $\varphi'(0) = 0, \varphi'' = \frac{1}{1+x} \geqslant \left(\frac{x^2}{2(1+\frac{x}{3})}\right)''$, то есть $\varphi(x) \geqslant \frac{x^2}{2(1+\frac{x}{3})}$.

Итак, $P(X > \lambda+t) \leqslant \exp\left(-\lambda\frac{t^2}{2\lambda^2(1+\frac{t}{3\lambda})}\right)$.

Следствие (Неравенство Чернова)**.** $P(|X-\lambda|) \leqslant 2\exp\left(-\frac{t^2}{2(\lambda+\frac{t}{3})}\right)$.

13 Эволюция при $np = c < 1$

Перейдём к случаю $np = c < 1$.

Теорема 13. $P($*наибольшая компонента* $\leqslant \frac{3}{(1-c)^2}\ln n) \to 1$.

Доказательство. Рассмотрим случайный процесс, строящий компоненту, начиная с какой-то вершины, добавляющий за 1 шаг всех соседей.

$P($стартуя с вершины 1, мы получим компоненту большого размера$) = o(\frac{1}{n})$.

Докажем это. Пусть $X_1, \ldots, X_\tau$ — количество вершин, добавляемых на каждом шаге. Можно с помощью добавления фиктивных вершин апроксимировать $X_i \leqslant Y_i \sim Bin(n,p)$, притом все Y_i независимы. Тогда искомая вероятность равна $P(X_1 + \ldots + X_t \geqslant t+1)$, где $t = \frac{3}{(1-c)^2}\ln n$. Оцениваем через Y_i и применяем неравенство Чернова:

$P < \exp(-\frac{(t+1-tnp)^2}{2(tnp+\frac{t+1-tnp}{3})}) = \exp(-\frac{(t(1-c)+1)^2}{2(\frac{1}{3}+t(\frac{1}{3}+\frac{2c}{3}))}) = \exp(-\ln n\frac{3}{(1-c)^2}(1-c)^2\frac{1}{\frac{2}{3}+\frac{4c}{3}} + O(1)) < \exp(-\frac{3}{2}\ln n + O(1) = O(n^{-1.5}) = o(\frac{1}{n})$. □

Теорема 14. *$P(G(n,p)$ содержит компоненту с хотя бы 2 циклами$) \leqslant \frac{2}{n(1-c)^3}$.*

Доказательство. Пусть X — число «сложных» компонент. $P(X \geqslant 1) \leqslant EX = \sum\limits_{k=4}^{n} EX_k$, где X_k — число «сложных» компонент размера k. Будем оценивать EX_k.

$EX_k \leqslant C_n^k k! k^2$ (считаем число вариантов сделать компоненту вида $o-o$ или Θ). $\tilde{X}_k$ — число компонент указанного вида. $\tilde{X} = \sum\limits_{k=4}^{n} \tilde{X}_k$. $\tilde{X} = 0 \Leftrightarrow X = 0$.

$\sum\limits_{k=4}^{n} E\tilde{X}_k \leqslant \sum\limits_{k=4}^{n} \frac{k^2c^{k+1}}{n} \leqslant \frac{1}{n}\sum\limits_{k=4}^{\infty} k^2c^{k+1} \leqslant \frac{1}{n}\int\limits_0^\infty x^2c^x dx$.

$\int x^2c^x dx = \int \frac{x^2 d(c^x)}{\ln c} = -\int\limits_0^\infty \frac{2xc^x dx}{\ln c} = -\frac{2}{(\ln c)^3} < \frac{2}{(1-c)^3}$. □

14 Параметры уницикличеcких компонент

Следствие. *Если $c \in (0,1)$, то сложных компонент в графе нет.*

Теорема 15. *Пусть $np = c > 0, k \geqslant 3$. Обозначим за U_k — число уницикличеcких компонент размера k в $G(n,p)$. Тогда $U_k \xrightarrow{d} Pois(\lambda)$, $\lambda = \frac{1}{2k}(ce^{-c})^k \sum\limits_{j=0}^{k} \frac{k!}{j!}$.*

Доказательство. Подсчёт по методу моментов. □

Теорема 16. *Пусть $k_1, \dots, k_s$ — различные числа. Тогда $(U_{k_1}, \dots, U_{k_s}) \xrightarrow{d} (Z_1, \dots, Z_s)$, где Z_i независимые $Pois(\lambda_i)$, $\lambda_i = \frac{1}{2k_i}(ce^{-c})^{k_i} \sum\limits_{j=0}^{k_i} \frac{k_i^j}{j!}$.*

Теорема 17. *Пусть U — общее число вершин в уницикличеcких компонентах $G(n,p)$, притом $c < 1$. Тогда $EU_n \underset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{2}\sum_{k=3}^\infty (ce^{-c})^k \sum_{j=0}^{k-3}\frac{k^j}{j!}$, а также $DU_n \underset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{2}\sum_{k=3}^\infty (ce^{-c})^k \sum_{j=0}^{k-3}\frac{k^j}{j!}$.*

Доказательство. $U_n(k)$ — число уницикличеcких компонент размера k. $U_n = \sum\limits_{k=3}^{n} kU_n(k)$. Отсюда $EU_n = \sum\limits_{k=3}^{n} kC_n^k C(k,k)p^k(1-p)^{C_k^2-k+(n-k)k}$.

Каждое слагаемое сходится туда, куда нужно. Нужно показать, что сходимость равномерная. А именно, проверим, что $\exists \gamma > 0 : \forall k \leqslant n\; kC_n^k C(k,k)p^k(1-p)^{C_k^2-k+(n-k)k} \leqslant \exp(-\gamma k)$.

$C(k,k) = \frac{(k-1)!}{2}\sum\limits_{j=0}^{k-3}\frac{k^j}{j!} \leqslant \frac{(k-1)!}{2}e^k$.

$C_n^k = o\left(\frac{1}{k!}\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}\left(\frac{e}{n-k}\right)^{n-k}\frac{1}{\sqrt{n-k}}\right) = o\left(\frac{1}{k!}e^{-k}\left(\frac{n}{n-k}\right)^{n-k+\frac{1}{2}} n^k\right)$.

$(1-p)^{C_k^2-k+(n-k)k} = o\left((1-p)^{nk-\frac{k^2}{2}}\right)$.

Итого, слагаемое S_k равно $o\left(\left(\frac{n}{n-k}\right)^{n-k+\frac{1}{2}} c^k(1-p)^{nk-\frac{k^2}{2}}\right) = o\left(\sqrt{\frac{n}{n-k}}e^{f(\beta)}k\right)$, где $\beta = \frac{k}{n}$.

Заметим, что $\sqrt{\frac{n}{n-k}}$ не мешает экспоненциальной скорости сходимости по k и выкинем это.

$1-p = 1-\frac{c}{n}, \ln p = -p + O(p^2)$. Тогда $f(\beta) = \ln c - c + \frac{c\beta}{2} + \ln(1-\beta)^{-1}\left(\frac{1}{\beta}-1\right) = -\frac{1-\beta}{\beta}\ln(1-\beta) + \ln c - c + \frac{c\beta}{2}$.

Хотим показать, что $\forall\beta \in [0,1] f(\beta) \leqslant -\gamma$ для $\gamma > 0$. $f(0) = 1+\ln c - c < 0$ для $c < 1$. Тогда $\exists\beta_0 > 0 : \forall\beta \leqslant \beta_0\ f(\beta) \leqslant \frac{f(0)}{2} < 0$.

Рассмотрим $g(\beta) = \beta f(\beta) = -(1-\beta)\ln(1-\beta) + \ln c\beta - \beta c + \frac{\beta^2 c}{2}$.

$g'(\beta) = \ln(1-\beta) + 1 + \ln c - c + \beta c$.

$g''(\beta) = -\frac{1}{1-\beta} + c$. Это равно 0 при $\beta = 1 - \frac{1}{c}$.

Если $c < 1$, то $g''(\beta) < 0$ на $[0,1]$. $g'(1-\frac{1}{c}) = 0$. То есть g будет убывать на $[0,1]$.

Даже если $c > 1$, $1-\frac{1}{c}$ — точка максимума $g'(\beta)$. Но $g'(1-\frac{1}{c}) = 0 \Rightarrow g'(\beta) \leqslant 0$ на $[0,1]$, то есть так или иначе $g(\beta)$ убывает на $[0,1]$ для всех $\beta > \beta_0$.

$f(\beta) = \beta^{-1}g(\beta) \leqslant g(\beta) \leqslant g(\beta_0) = \gamma' < 0$. Тогда взяв $\gamma = \min\{-\frac{f(0)}{2}, -\gamma'\}$, получаем $f(\beta) \leqslant -\gamma$. Тем самым, равномерная сходимость доказана, значит EU_n сходится к сумме пределов.

Заметим также, что при фиксированных k_1, k_2 $EU_n(k_1)U_n(k_2) \sim EU_n(k_1)EU_n(k_2)$ при $k_1 \neq k_2$. А $EU_n(k)(U_n(k)-1) \sim EU_n(k)^2$.

Тогда $EU_n^2 = E\left(\sum\limits_{k=3}^{n} kU_n(k)\right)^2 \sim \sum\limits_{k_1\neq k_2} k_1k_2EU_n(k_1)EU_n(k_2) + \sum\limits_{k=3}^{n} k^2EU_n^2(k) \sim (EU_n)^2 + \sum\limits_{k=3}^{n} k^2EU_n(k) \Rightarrow DU_n \to \frac{1}{2}\sum\limits_{k=3}^{\infty} k(ce^{-c})^k \sum\limits_{j=0}^{k-3}\frac{k^j}{j!}$. □

Следствие. *Общее число вершин в унициклических компонентах ограничено по вероятности.*

15 Теорема о гигантской компоненте

Ветвящиеся процессы Гальтона-Ватсона: $\{\xi_k^{(n)}\}$ — н. о. р., $\xi \in \mathbb{Z}_+$.

$x_0 = 1, x_n = \sum_{k=1}^{X_n-1}\xi_k^{(n)}$.

$\varphi_\xi(z) = Ez^\xi = \sum\limits_{k=0}^{\infty} z^kP(\xi = k)$. $q = P(\exists n : X_n = 0)$.

Утверждение 7. $q = \varphi_\xi(q)$.

Теорема 18. $\mu = E\xi, P(\xi = 1) < 1$. *Тогда*

1. *$\mu \leqslant 1 \Rightarrow q = 1$ и других решений нет*

2. *$\mu > 1 \Rightarrow q = q_0 \in [0;1]$ и решений ровно два: q_0 и 1.*

Пример 8. $\xi \sim Pois(c)$, $\varphi_\xi(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} z^k \frac{c^k}{k!} e^{-c} = \exp((z-1)c)$.

$q = e^{(q-1)c}, \beta = 1 - q$ — вероятность невырождения. $\beta + \exp(-\beta c) = 1$.

Теорема 19. *Пусть $np = c > 1$. Положим $\beta = \beta(c)$ — решение уравнения $\beta + \exp(-\beta c) = 1$ из $(0,1)$. Тогда с вероятностью, стремящейся к 1 $G(n,p)$ содержит гигантскую компоненту, чей размер при делении на n стремится к β по вероятности.*

Все остальные компоненты при этом имеют размер не более $\frac{16c}{(c-1)^2} \ln c$.

Доказательство. Обозначим $k_- = \frac{16c}{(c-1)^2} \ln n, k_+ = n^{\frac{2}{3}}$.

Для всех вершин v запустим процесс набора её компоненты связности.

Для $\forall t = 0, 1, \ldots$ введем тройку (C_t, A_t, U_t), где C_t — рассмотренные вершины, A_t — активные вершины, U_t — неактивные вершины.

$C_0 = \varnothing, A_0 = \{v\}, U_0 = V\{v\}$.

При тройке (C_t, A_t, U_t) на шаге $t+1$:

- берем первую вершину v_t из A_t.
- $C_{t+1} = C_t \cup \{v_t\}$
- Пусть X_{t+1} — множество соседей v_t в U_t
- $A_{t+1} = A_t \setminus \{v_t\} \cup X_{t+1}$.
- $U_{t+1} = U_t \setminus X_{t+1}$.

Процесс останавливается когда либо $A_t = \varnothing, U_t = \varnothing$, компонента при этом есть C_t.

Покажем, что с вероятностью, стремящейся к 1 выполнена следующая альтернатива:

1. процесс закончился ко времени k_-
2. для $\forall t \in [k_-, k_+]$ $|A_t| \geqslant \left(\frac{c-1}{2}\right) t$

Пусть это не так. Тогда $\exists t \in [k_-; k_+] : |A_t| < \left(\frac{c-1}{2}\right) t$, притом $|A_i| > 0$ при $i \leqslant t-1$. Заметим, что $|A_t| = \sum\limits_{k=1}^{t} Y_k - t + 1$, где $Y_k = |X_k|$.

$P(|A_t| < \frac{c-1}{2} t) = P(\sum\limits_{k=1}^{t} Y_k < \frac{c+1}{2} t - 1)$. На любом шаге у нас есть не меньше, чем $n - \frac{c+1}{2} k_+$ неактивных вершин. Тогда $P(|A_t| < \frac{c-1}{2} t) \leqslant P(\sum\limits_{k=1}^{t} Z_k < \frac{c+1}{2} t - 1)$, где $Z_1, \ldots, Z_t$ независимые $Bin(n - \frac{c+1}{2} k_+, p)$.

Это равно $P(\sum\limits_{k=1}^{t}(Z_k - EZ_k) < \frac{c-1}{t} - 1 + \frac{c+1}{2}k + pt) \leqslant \exp\left(-\frac{(\frac{c-1}{2}t+1-\frac{c+1}{2}k+pt)^2}{2(ct-\frac{c+1}{2}k+pt)}\right) = \exp\left(-\frac{(c-1)^2}{8c}t(1+o(1))\right)$.

Так как $t \geqslant k = \frac{16c}{(c-1)^2}\ln n$, $P(|A_t| < \frac{c-1}{2}t) \leqslant \exp(-2\ln n(1+o(1))) = n^{-2+o(1)}$.

Суммируя по всем $v \in V$ (n штук) и $t \in [k-, k+]$ получаем следующее: P(альтернатива не выполнена) $\leqslant n^{\frac{5}{3}} n^{-2+o(1)} \to 0$.

Назовём компоненты размера $\geqslant k$ большими. Пусть v, w — две вершины из разных больших компонент. Для них обоих выполнена вторая часть алтернативы. Значит в любой момент времени между их множествами активных вершин рёбер нет. Но в момент времени k_+ в этих множествах хотя бы $\frac{c-1}{2}k_+$ активных вершин.

$P(v, w$ лежат в разных компонентах $\mid (C_{k_+}, A_{k_+}, U_{k_+}), (C'_{k_+}, A'_{k_+}, U'_{k_+})) \leqslant (1-p)^{|A_{k_+}||A'_{k_+}|} \leqslant (1-p)^{\left(\frac{c-1}{2}\right)^2 k_+^2} = \left(1-\frac{c}{n}\right)^{\frac{(c-1)^2}{4}n^{\frac{4}{3}}} \to 0$.

Будем называть вершины из большой компоненты большими, а остальные — маленькими. Пусть v — вершина $G(n,p)$. Тогда

$P(v$ маленькая$) \leqslant \rho(n-k_-, p)$, где $\rho(n,p)$ — вероятность вырождения ветвящегося процесса с законом $Bin(n,p)$. $\rho(n,p) \to 1-\beta$.

С другой стороны

$$P(v \text{ маленькая}) \geqslant P(\text{процесс выродился, набрав } Y \leqslant k_-).$$

Так как $k_- \to \infty$, то $P(v$ маленькая$) \geqslant P(Y \leqslant \infty) = 1-\beta$.

Значит $P(v$ маленькая$) = (1-\beta)(1+o(1))$. Пусть X_n — общее число маленьких вершин в $G(n,p)$, тогда $EX_n = n(1-\beta)(1+o(1))$.

$EX_n(X_n-1) \leqslant n(1-\beta)(1+o(1))k_- + (n-k_-)(1-\beta)(1+o(1)) \sim (EX_n)^2$.

По неравенству Чебышева $\forall \varepsilon > 0$

$$P\left(\left|\frac{X_n - (1-\beta)n}{n}\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{DX_n}{(n\varepsilon)^2} = o\left(\frac{(EX_n)^2}{n^2}\right) = o(1)$$

Тогда $\frac{X_n}{n} \xrightarrow{P} 1-\beta$, что и требовалось доказать. □

Теорема 20 (ЦПТ для размера гигантской компоненты)**.** *Пусть $c > 1, p = \frac{c}{n}$, $N(n,p)$ — размер гигантской компоненты $G(n,p)$. Тогда*

$$\sqrt{n}\left(\frac{N(n,p)}{n} - \beta\right) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2),$$

где $\sigma^2 = \frac{\beta(1-\beta)}{(1-c(1-\beta))^2}$

16 Случай $np \sim 1$

При $np < 1$ и при $np > 1$ картина ясна. Высяним промежуточную картину, наблюдаемую при $np \sim 1$.

Введем параметризацию $G(\lambda) = G(n,p)$, где $p = \frac{1}{n} + \frac{\lambda}{n^{\frac{4}{3}}}$.

Определение 18. Компонента связности называется *l-компонентой*, если число рёбер равно числу вершин плюс l.

Введем такие обозначения:

- $X(n,l)$ — число l-компонент
- $Y(n,l)$ — общее число вершин во всех l-компонентах
- $X(n,k,l)$ — число l-компонент на k вершинах
- $C(k,k+l)$ — число связных графов на k вершинах

Утверждение 8.

1. $X(n,l) = \sum\limits_{k=1}^{n} X(n,k,l)$
2. $Y(n,l) = \sum\limits_{k=1}^{n} kX(n,k,l)$
3. $EX(n,k,l) = C_n^k C(k,k+l)p^{k+l}(1-p)^{C_k^2-k-l+k(n-k)}$

Утверждение 9.

1. Если $a = o(b^{\frac{3}{4}})$, то $\frac{b(b-1)\dots(b-a+1)}{b^2} = (1+O(\frac{a}{b})+O(\frac{a^4}{b^3}))\exp\left(-\frac{a^2}{2b}-\frac{a^3}{6b^2}\right)$.
2. $\exists c>0 : \forall a \leqslant b\ \frac{(b)_a}{b^a} = O(\exp\left(-\frac{a^2}{2b}-\frac{a^3}{6b^2}-c\frac{a^4}{b^3}\right))$.

Лемма 9. *В модели $G(\lambda)$ для фиксированного $l \geqslant -1$*

1. *если $k = o(n^{\frac{3}{4}})$, то $EX(n,k,l) = (1 + l\lambda n^{-\frac{1}{3}} + O(n^{-\frac{2}{3}}) + O(\frac{k}{n}) + O(\frac{k^4}{n^3}))n^{-l}c(k,k+l)\frac{e^{-k}}{k!}\exp(-F(x_k))$*
2. *для всех k $EX(n,k,l) = O(n^{-l}C(k,k+l)\frac{e^{-k}}{k!}\exp(-F(x_k))$,*

где $x_k = \frac{k}{n^{\frac{2}{3}}}, F(x) = \frac{1}{6}(x^3-3x^2\lambda+3x\lambda^2) = \frac{1}{6}((x-\lambda)^3+\lambda^3)$.

Доказательство. $C_n^k = \frac{n^k}{k!}\frac{(n)_k}{n^k} = \frac{n^k}{k!}(1+O(\frac{k}{n})+O(\frac{k^4}{n^3}))\exp(-\frac{k^2}{2n}-\frac{k^3}{6n^2})$.

$p^{k+l} = n^{-(k+l)}(1+\lambda n^{-\frac{1}{3}})^{k+l} = n^{-(k+l)}(1+l\lambda n^{-\frac{1}{3}}+O(n^{-\frac{2}{3}}))(1+\lambda n^{-\frac{1}{3}})^k = n^{-k-l}(1+l\lambda n^{-\frac{1}{3}}+o(n^{-\frac{2}{3}}))\exp(\lambda kn^{-\frac{1}{3}}-\frac{\lambda^2 k}{2n^{\frac{2}{3}}}+O(\frac{n}{k}))$.

Осталось рассмотреть $(1-p)$.

$(1-p)^{C_k^2-k-l+k(n-k)} = (1+O(\frac{k}{n}))(1-p)^{\frac{k^2}{2}+kn-k^2} = (1+O(\frac{k}{n}))\exp(\frac{k^2}{2}p - pkn+O(\frac{k}{n})) = (1+O(\frac{k}{n}))\exp(\frac{k^2}{2n}-k+\frac{\lambda k^2}{2n^{\frac{4}{3}}}-\lambda kn^{-\frac{1}{3}})$.

Собирая все вместе и упрощая, получаем требуемое. Аналогично доказывается и второй пункт. □

Лемма 10.

1. $EY(n,-1) = n - n^{\frac{2}{3}}(f_{-1}(\lambda) + O(n^{-\frac{1}{3}}))$

2. $EY(n,0) = f_0(\lambda)n^{\frac{2}{3}} + O(n^{\frac{1}{3}})$,

где $f_{-1}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^\infty x^{-\frac{3}{2}}(1 - e^{-F(x)})dx + \lambda,\ f_0(\lambda) = \frac{1}{4}\int\limits_0^\infty e^{-F(x)}dx.$

Доказательство. 1. Разобъем сумму для $EY(n,-1)$ на две части: для $k \leqslant n^\alpha$ и $K > n^\alpha$ для какого-то фиксированного $\alpha \in (\frac{2}{3}; \frac{3}{4})$.

$\sum\limits_{k \leqslant n^\alpha} kEX(n,k,l) = \sum\limits_{k\leqslant n^\alpha} \frac{k^{k-1}e^{-k}}{k!} ne^{-F(X_k)}(1 - \lambda n^{-\frac{1}{3}} + O(n^{-\frac{2}{3}})) + R_n$, где

$R_n = O\left(\sum\limits_{k\leqslant n^\alpha} \frac{k^{k-1}e^{-k}}{k!} ke^{-F(x_k)} + \sum\limits_{k\leqslant n^\alpha} \frac{k^{k-1}e^{-k}}{k!}\frac{k^4}{n^2}e^{-F(x_k)}\right)$.

Далее $\sum\limits_{k\leqslant n^\alpha} \frac{k^k e^{-k}}{k!} e^{-F(x_k)} = O\left(\sum\limits_{k\leqslant n^\alpha} \frac{1}{\sqrt{k}} e^{-F(x_k)}\right) = O\left(\sum\limits_{k\leqslant n^\alpha} \frac{1}{\sqrt{x_k}} n^{-\frac{1}{3}} e^{-F(x_k)}\right) =$
$O\left(n^{\frac{1}{3}} \sum\limits_{k\leqslant n^\alpha} \frac{1}{\sqrt{x_k}} e^{-F(x_k)}\delta x_k\right)$, где $x_k = \frac{k}{n^{\frac{2}{3}}}, \delta x_k = \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$.

Это равно $O\left(n^{\frac{1}{3}} \int\limits_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-F(x)}dx\right) = O\left(n^{\frac{1}{3}}\right)$

Оцениваем вторую часть суммы ($F(x) \geqslant \frac{x^3}{7}$ для больших x): $\sum\limits_{k>n^\alpha} kE(x,n,-1) =$
$O\left(\sum\limits_{k>n^\alpha} \frac{k^{k-1}e^{-k}}{k!} ne^{-F(x_k)}\right) = O\left(n\sum\limits_{k>n^\alpha} \frac{k^{k-1}e^{-k}}{k!} \exp(-\frac{x_k^3}{7})\right) = O\left(n\exp(-\frac{n^{\alpha-\frac{2}{3}}\cdot 3}{7} \sum\limits_{k>n^\alpha} \frac{k^{k-1}e^{-k}}{k!})\right) =$
$O\left(ne^{-\frac{1}{7}n^{3\alpha-2}\sum\limits_k \frac{k^{k-1}e^{-k}}{k!}}\right) = O\left(n^{\frac{1}{3}}\right)$.

Итого $EY(n,-1) = \sum\limits_{k\leqslant n^\alpha} \frac{k^{k-1}e^{-k}}{k!} ne^{-F(x_k)}(1 - \lambda n^{-\frac{1}{3}} + O(n^{-\frac{2}{3}})) + O(n^{\frac{1}{3}})$.

$\sum\limits_{k=1}^\infty \frac{k^{k-1}e^{-k}}{k!} e^{-F(x_k)} = 1 - \sum\limits_{k=1}^\infty \frac{k^{k-1}e^{-k}}{k!}(1 - e^{-F(x_k)})$, так как $\sum\limits_{k=1}^\infty \frac{k^{k-1}e^{-k}}{k!} =$
1 (это можно увидеть, сопоставив с формулой для числа вершин, занимаемых древесными компонентами).

По формуле Стирлинга: $\frac{k^{k-1}e^{-k}}{k!}(1 - e^{-F(x_k)}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x_k^3 n^2}}(1 - e^{-F(x_k)})(1 + O(\frac{1}{k}))$.

Тогда $EY(n,-1) = (1 - \lambda n^{-\frac{1}{3}})(-1)\sum\limits_{k\leqslant n^\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi x_k^3}} \delta x_k(1 - e^{-F(x_k)}) \cdot n^{\frac{2}{3}} + n - \lambda n^{\frac{2}{3}} + O(n^{\frac{1}{3}})$.

С ростом n это асимптотически эквивалентно $n - n^{\frac{2}{3}}(\lambda + \int\limits_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{-\frac{3}{2}}(1 - e^{-F(x)})dx) + O(n^{\frac{1}{3}})$.

2. Доказывается аналогично

□

Следствие. $EY(n, \geqslant 1) = n^{\frac{2}{3}}(f_{-1}(\lambda) - f_0(\lambda)) + O(n^{\frac{1}{3}})$

Следствие. *В модели $G(\lambda)$ размер наибольшей недревесной компоненты есть $O_P(n^{\frac{2}{3}})$.*

Лемма 11. *В модели $G(\lambda)$ размер наибольшей древесной компоненты есть $O_P(n^{\frac{2}{3}})$.*

Доказательство. Пусть $w(n) \to \infty$. $P(\exists T : |T| \geqslant n^{\frac{2}{3}} w(n)) \leqslant \sum\limits_{k > n^{\frac{2}{3}} w(n)} EX(n, k, -1) = O\left(\sum\limits_{k > n^{\frac{2}{3}} w(n)} n \frac{k^{k-2} e^{-k}}{k!} e^{-F(x_k)}\right) = O\left(e^{-\frac{w^3}{7}} n \sum\limits_{k > w(n) n^{\frac{2}{3}}} k^{-\frac{-5}{2}}\right) = O\left(e^{-\frac{w^3}{7}} w(n)^{-\frac{3}{2}}\right) \to 0.$ □

Следствие. *В модели $G(\lambda)$ размер наибольшей компоненты есть $O_P(n^{\frac{2}{3}})$.*

17 Поведение сложных компонент

Теорема 21 (Багаев)**.** $C(k, k+1) \sim \frac{5}{24} k^{k+1}$.

Теорема 22 (Райт, 1980)**.** *Для $l \geqslant 2$ и $l = o(k^{\frac{1}{3}})$ выпонено*

$$C(k, k+l) = \gamma_l k^{k + \frac{3l-1}{2}} \left(1 + O\left(\sqrt{\frac{l^3}{k}}\right)\right),$$

где $\gamma_l = \frac{\sqrt{\pi} 3^l (l-1) \delta_l}{2^{\frac{5l-1}{2}} \Gamma(\frac{l}{2})}$, $\delta_1 = \delta_2 = \frac{5}{36}, \delta_{l+1} = \delta_l + \sum\limits_{h=1}^{l-1} \frac{\delta_h \delta_{l-h}}{(l+1) C_l^h}$.

Теорема 23 (Боллобаш)**.**

1. *Если $1 \leqslant l \leqslant k$, то $C(k, k+l) \leqslant \left(\frac{c_1}{l}\right)^{\frac{l}{2}} k^{k + \frac{3l-1}{2}}$*
2. *Если $k \leqslant l \leqslant C_k^2 - k$, то $C(k, k+l) \leqslant c_2 e^{-\frac{l}{2}} k^{k + \frac{3l-1}{2}}$*

Лемма 12. *Пусть $l \geqslant 1$ — фиксировано, $w(n) \to \infty$. Тогда с вероятностью, стремящейся к 1, $G(\lambda)$ не содержит l-компонент размер $\leqslant \frac{n^{\frac{2}{3}}}{w(n)}$.*

Доказательство. Положим $k_1 = \frac{n^{\frac{2}{3}}}{w(n)}$, тогда $P(\exists H : |H| \leqslant \frac{n^{\frac{2}{3}}}{w(n)}) \leqslant \sum\limits_{k \leqslant k_1} EX(n, k, l) = O\left(e^{-\frac{l}{2}} k^{k + \frac{3l-1}{2}} \frac{e^{-k}}{k!} n^{-l} e^{-F(x_k)}\right) = O\left(\sum\limits_{k \leqslant k_1} k^{\frac{3l}{2} - 1} n^{-l} e^{-F(x_k)}\right) = O\left(\sum\limits_{k \leqslant k_1} x_k^{\frac{3l}{2} - 1} n^{l - \frac{2}{3}} n^{-l} e^{-F(x_k)}\right) = O\left(\sum\limits_{k \leqslant k_1} x_k^{\frac{3l}{2} - 1} \delta x_k e^{-F(x_k)}\right) = O\left(\int\limits_0^{\frac{1}{w(n)}} x^{\frac{3l}{2} - 1} e^{-F(x)} dx\right) \to 0$ □

18 Свойства первого и второго порядка

Рассматривается семейство свойств графов, выразимое формулами первого порядка:

- переменные $x, y, z, \ldots$, принимающие значения в множестве вершин
- логические связки
- предикаты: $\sim$ — связанность ребром, $=$ — равенство
- кванторы $\forall, \exists$ по переменным

Таким образом можно выразить не все свойства. Поэтому иногда приходится рассматривать свойства второго порядка, то есть дополнительно разрешать следующее

- Символы $X, Y, Z, \ldots$, принимающие значения в множестве предикатов конечной валентности на множестве вершин
- кванторы $\forall, \exists$ таким символам

Можно выразить свойство «содержать чётное число вершин»:

$$\exists X\, (\forall x \exists y\, ([X(x,y)] \wedge [\forall z (z \neq y) \to \neg X(x,z)]) \wedge (\forall x \neg X(x,x)) \wedge (\forall x \forall y X(x,y) \leftrightarrow X(y,x)))$$

Язык второго порядка называется *монадическим*, если допускается только квантификация по унарным предикатам. Монадическим языком можно записать свойство связности: нельзя разбить на два нетривиальных подмножества, между которыми нет ребер.

Указанные свойства не могут быть выражены языком «меньшего» порядка. Проще всего показать это, использую теорему Эренфойхта.

Определение 19. Графы G, H являются k-элементарно эквивалентными, если никакая формула φ первого порядка кванторной глубины не более k не может их отличить, то есть $G \equiv_k H \Leftrightarrow \forall \varphi (G \models \varphi \Leftrightarrow G \models \varphi)$.

Теорема 24 (Эренфойхт). *Пусть G, H — графы, $k \in \mathbb{N}$. $G \equiv_k H$ тогда и только тогда, когда у Консерватора есть выигрышная стратегия в игре $EHR(G, H, k)$.*

Можно показать, что на графах C_{3^k} и $C_{3^k} \sqcup C_{3^k}$ в k раундах побеждает консерватор, что значит, что не существует первопорядковой формулы для свойства связности.

Теорема 25 (1969, Глебский, Коган, Лиогонький, Таланов; 1976 Фагин). *$\forall \varphi$ превопорядковой формулы $\lim\limits_{n\to\infty} P(G(n, \frac{1}{2}) \models \varphi) \in \{0, 1\}$.*

Теорема 26 (Закон 0 или 1, современная формулировка). *Если $p = p(n)$: $\min\{p, 1-p\} n^{\alpha} \to \infty \forall \alpha > 0$, а φ превопорядковая формула, то $\lim\limits_{n\to\infty} P(G(n,p) \models \varphi) \in \{0, 1\}$.*

Следствие (Из теоремы Эренфойхта). *$G(n,p)$ подчиняется закону 0 или 1 для всех формул первого порядка глубины k тогда и только тогда, когда*

$$P(\textit{Консерватор выигрывает в игре } EHR(G(n,p(n)),G(m,p(m)),k)) \underset{n,m\to\infty}{\to} 1$$

Закона 0 или 1. Рассмотрим свойство полного расширения уровня s: любое множество из не более, чем s вершин расширяется еще одной вершиной так, чтобы любое указаное подмножество вершин A было соединено с новой вершиной, а остальные вершины не были.

Если G,H обладают таким свойством, то у Консерватора есть выигрышная стретегия. Оценим вероятность обладания таким свойством.

$P(G(n,p)$ не обладает свойством полного расширения$) \leqslant C_n^s 2^s(1-\min\{p,1-p\}^s)^{n-s} \leqslant e^{s\log n - \min\{p,1-p\}^s(n-s)} \to 0$ □

Следствия из теоремы Эренфойхта.
$\Leftarrow$ Пусть а.п.н. есть выигрышная стратегия в k раундах, но закон 0 или 1 не выполнен. Тогда $\exists\varphi$ глубины k, для которой закон не выолнен. Возможны две ситуации:

- Существует частичный предел $c\in(0,1)$
- И 0, и 1 лежат в множестве частичных пределов

$P($Новатор побеждает$) \geqslant P(G^1(n_i,p)\models\varphi, G^2(n_i,p)\not\models\varphi) = P(G^1(n_i,p)\models\varphi)P(G^2(n_i,p)\not\models\varphi) = c(1-c)\neq 0$ (для подпоследовательности, на которой достигается предел c). Аналогично, если есть подпоследовательности, на которых достигнуты пределы 0 и 1, то новатор побеждает с вероятностью, стремящейся к 1.

$\Rightarrow$ Пусть $\underline{\lim} P($Консерватор побеждает$) < 1$. Тогда выберем подпоследовательность $(m_i,n_i) : \lim P(\ldots) = \varepsilon < 1$. В эту сторону придётся воспользоваться следующим утверждением.

Утверждение 10. Существует лишь конечное число различных формул, выражающих различные свойства графа.

Итак, $P(G(n_i,p)\not\equiv_k G(m_i,p)) \to 1-\varepsilon > 0$. Это означает то, что $P(\exists\varphi : d(\varphi)=k, G(n_i,p)\models\varphi, G(m_i,p)\not\models\varphi) \leqslant \sum\limits_{\varphi} P(G(n_i,p)\models\varphi, G(m_i,p)\not\models\varphi)$. Тогда найдётся одна формула φ глубины k, такая что $P(G(n_i,p)\models\varphi, G(m_i,p)\not\models\varphi) = p_\varphi$ максимальна. $p_\varphi \geqslant \frac{1-\varepsilon}{M} > 0$. Для завершения доказательства осталось выбрать подпоследовательность, в которой какая-то формула встречается бесконечное число раз. □

Теорема 27 (Спенсер, Шелах, 1988). *Пусть $p=n^{-\alpha}, \alpha>0$. Тогда*

- *$\alpha\notin\mathbb{R}\Rightarrow$ закон 0 или 1*
- *$\alpha\in Q\cap(0,1]\Rightarrow$ закон не выполнен*
- *$\alpha = 1+\frac{1}{m}\Rightarrow$ закон не выполнен*

- $\alpha > 1, \alpha \neq 1 + \frac{1}{m} \Rightarrow$ *закон выполнен*

Для языков второго порядка закон не выполнен, так как можно записать свойство «число вершин чётно».

Теорема 28 (Кауфманн, Шелах, 1985)**.** *$\exists \varphi$ монадическая, такая что $P(G(n, \frac{1}{2}) \models \varphi)$ не имеет предела.*

Теорема 29 (Ле Барс, 2001)**.** *$\exists \varphi$ экзистенциальная (допускается квантификация по монадическим переменным только с помощью $\exists$), для которой нет предела вероятности $P(G(n, \frac{1}{2}) \models \varphi)$.*

19 Сложные компоненты в фазовом переходе

В предыдущих сериях мы выяснили, что в $G(\lambda)$ нет сложных компонент размера $o_p(n^{\frac{2}{3}})$.

$X(n,l)$ — число l-компонент. $L_n = \max\{l : X(n,l) > 0\}$.

Теорема 30. *В модели $G(\lambda)$ случайная величина L_n ограничена по вероятности.*

Доказательство. Пусть $l_0 = w(n) \to \infty$. Хотим показать, что $P(L_n \geqslant l_0) \to 0$. Положим $w_1(n) = w^{\frac{1}{4}}(n) = l_0^{\frac{1}{4}}$ и будем считать, что $w(n) = O(n^{\frac{4}{3}-\delta})$ для какого-то $\delta > 0$. В силу предыдущих результатов, можно считать, что размер компоненты не превосходит $k_0 = w_1 n^{\frac{2}{3}}$. Итак, мы хотим получить, что

$$\sum_{k \leqslant k_0, l_0 < l \leqslant C_k^2 - k} EX(n,k,l) \to 0$$

$EX(n,k,l) = C_n^k C(k, k+l) p^{k+l} (1-p)^{C_k^2 - k - l + (n-k)k}$. Обозначим $\varepsilon = \lambda n^{-\frac{1}{3}}, p = \frac{1+\varepsilon}{n}$. Используем следущие оценки

$C_n^k = O\left(\frac{n^k}{k!} \exp\left(-\frac{k^2}{2n}\right)\right)$

$p^{k+l} = \left(\frac{1+\varepsilon}{n}\right)^{k+l} \leqslant \exp(\varepsilon k) p^l \frac{1}{n^k}$

$(1-p)^{C_k^2 - k - l + k(n-k)} = (1-p)^{-l} (1-p)^{C_k^2 - k + k(n-k)} \leqslant (1-p)^l \exp\left(-\frac{1+\varepsilon}{n}(C_k^2 - k + (n-k)k)\right) = O\left((1-p)^l \exp\left((1+\varepsilon)k + \frac{(1+\varepsilon)k^2}{2n}\right)\right)$

$\frac{|\varepsilon| k^2}{n} \leqslant \frac{k_0^2 |\varepsilon|}{n} = \frac{|\lambda| n^{-\frac{1}{3}} n^{\frac{4}{3}} w_1^2(n)}{n} = |\lambda| w^{\frac{1}{2}}(n)$

В итоге:

$$\sum_{k \leqslant k_0, l_0 < l \leqslant C_k^2 - k} EX(n,k,l) \leqslant O\left(\sum_{k \leqslant k_0} C(k,k+l) \frac{n^k}{k!} e^{-\frac{k^2}{2n}} e^{\varepsilon k} p^l \frac{1}{n^k} (1-p)^{-l} e^{-k} e^{-\varepsilon k} e^{\frac{k^2}{2n}} e^{\frac{|\lambda| \sqrt{w}}{2}}\right) =$$

$$O\left(\sum_{k \leqslant k_0, l_0 < l \leqslant C_k^2 - k} C(k,k+l) \frac{e^{-k}}{k!} \left(\frac{p}{1-p}\right)^l e^{\frac{|\lambda| \sqrt{w}}{2}}\right)$$

Сумму разобъем на две части: $l > k, l \leqslant k$. Оценим по отдельности:

$\Sigma_1 : C(k, k+l) = O(k^{k+l}), k! > \left(\frac{k}{e}\right)^k$

$\Sigma_1 = O\left(e^{\frac{|\lambda|\sqrt{w}}{2}} \sum_{k=4}^{k_0} \sum_{l > \max(k, l_0)} \left(\frac{kp}{1-p}\right)^l\right) = O\left(e^{\frac{|\lambda|\sqrt{w}}{2}} \sum_{k=4}^{k_0} \left(\frac{kp}{1-p}\right)^{\max(l_0, k)}\right) \leqslant$
$O\left(e^{\frac{|\lambda|\sqrt{w}}{2}} l_0 \left(\frac{k_0 p}{1-p}\right)^{l_0}\right) = O\left(e^{\frac{|\lambda|\sqrt{w}}{2}} w(n)(2n^{-\frac{\delta}{4}})^{w(n)}\right) \to 0$

$\Sigma_2 : C(k, k+l) = O(e^{-\frac{l}{2}} k^{k+\frac{3l-1}{2}}), k! > \left(\frac{n}{e}\right)^k \sqrt{2\pi k}$

$\Sigma_2 \leqslant O\left(e^{|\lambda|\sqrt{w}2} \sum_{k=l_0}^{k_0} \sum_{l=l_0}^{k} e^{-\frac{l}{2}} k^{\frac{3l-2}{2}} \left(\frac{p}{1-p}\right)^l\right)$

$\frac{kp}{(1-p)\sqrt{l}} \leqslant \frac{k_0^{\frac{3}{2}} p}{(1-p)\sqrt{l_0}} \leqslant \frac{(n^{\frac{2}{3}} w_1(n))^{\frac{3}{2}} p}{(1-p)\sqrt{w}} = \frac{npw^{\frac{3}{8}}}{(1-p)w^{\frac{1}{2}}} \leqslant \frac{2}{w^{\frac{1}{8}}(n)} \to 0$. Значит сумма оценивается сверху геометрической прогрессией.

$\Sigma_2 = O\left(e^{|\lambda|\sqrt{w}2} \sum_{k=l_0}^{k_0} \frac{1}{k} \left(\frac{k^{\frac{3}{2}} p}{(1-p)\sqrt{l_0}}\right)^{l_0}\right) \leqslant O\left(e^{\frac{|\lambda|\sqrt{w}}{2}} k_0 \frac{1}{k_0} \left(\frac{k_0^{\frac{3}{2}} p}{(1-p)\sqrt{l_0}}\right)^{l_0}\right) \leqslant$
$O\left(e^{\frac{|\lambda|\sqrt{w}}{2}} \left(\frac{2}{w(n)^{\frac{1}{8}}}\right)^{w(n)}\right) \to 0$ □

Следствие. *В модели $G(\lambda)$ число сложных компонент ограничено по вероятности и каждая из них имеет размер $\Omega_P(n^{\frac{2}{3}})$.*

Доказательство. Из теоремы следует, что сложность ограничена по вероятности. При фиксированной сложности l число l-компонент ограничено по вероятности, что было доказано ранее. По предыдущим утверждениям все такие компоненты имеют размер $\Omega_P(n^{\frac{2}{3}})$. □

Дополнительные факты:

- Сложные компоненты в $G(\lambda)$ есть не всегда. Пусть C_n — число сложных компонент в $G(\lambda)$. Тогда $\lim EC_n = \int_0^\infty g(x)e^{-F(x)}dx = I(\lambda), F(x) = \frac{1}{6}((x-\lambda)^3 + \lambda^3)$, $g(x) = \sum_{l \geqslant 1} \gamma_l x^{\frac{3l}{2}-1}$, где $c(k, k+l) \sim \gamma_l k^{k+\frac{3l-1}{2}}$
- $I(\lambda) \to 0, \lambda \to -\infty$
- $I(\lambda) \to 1, \lambda \to +\infty$
- $h_n(\lambda) = P(\text{нет сложных компонент})$.

  Тогда $\lim h_n(\lambda) = h(\lambda) e^{-\frac{\lambda^3}{6}\left(\frac{2}{3\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}\left(-\frac{\lambda}{2} 3^{\frac{2}{3}}\right)^j \cos\frac{\pi j}{4} \Gamma\left(\frac{2}{3}j + \frac{1}{2}\right)}$.

  Например, $h(0) = \sqrt{\frac{2}{3}}$.
- Пусть C_n — число циклов в $G(\lambda)$, а C_n^* — число унициклических компонент. Тогда в силу следствия $C_n - C_n^* = O_P(1)$. А распределение C_n^*

(в отличие от $c > 1$ и $c < 1$) асимптотически нормальным. Например, при $\lambda < 0$

$$\frac{C_n^* - \frac{1}{6}\ln n}{\sqrt{\frac{1}{6}\ln n}} \xrightarrow{d} 1$$

20 k-связность

Определение 20. Граф G называется k-связным, если при удалении $k-1$ вершины нельзя получить несвязный или пустой граф.

Минимальное k, такое, что G k-связен — вершинная связность, $k(G)$.

Аналогично определяется рёберная k-связность.

Графовый случайный процесс: $\tilde{G} = (\tilde{G}(n,m), m = 0, \ldots, C_n^2)$.

$\tilde{G}(n,0)$ — пустой. $\tilde{G}(n,m+1)$ получен из $\tilde{G}nm$ добавлением случайного недобавленного ребра.

Для возрастающего свойства Q введём $\tau(Q) = \min\{m : \tilde{G}(n,m) \models Q\}$.

$\tau_k(\delta) = \tau(\delta(G) \geqslant k), \tau_k(\kappa) = \tau(k(G) \geqslant k), \tau_k(\lambda) = \tau(\lambda(G) \geqslant k)$.

Цель: показать, что при фиксированном $k \in \mathbb{N}$ выполнено $P(\tau_k(\delta) = \tau_k(\kappa)) \to 1$.

Определение 21. Пусть G — граф, подмножество $S \subset V$ называется *сепаратором*, если $V \setminus S$ представимо в виде $W_1 \sqcup W_2, |W_1| \leqslant |W_2|$ и между W_1 и W_2 нет рёбер.

Сепаратор называется тривиальным, если $|W_1| = 1$.

S называется s-сепаратором, если $|S| = s$.

Лемма 13 (О сепараторах)**.** *Пусть $k \in \mathbb{N}$ и $w(n) \to \infty, w(n) \leqslant \ln\ln\ln n$. Пусть $p = \frac{\ln n + k\ln\ln n - w(n)}{n}$, тогда вероятность того, что $G(n,p)$ содержит нетривиальный сепаратор стремится к 0.*

Доказательство. $A_r = \{G(n,p)$ имеет нетривиальный k-сепаратор с $|W_1| = r\}$. Будем рассматривать $r_0 = \max(k+1, 10), r_1 = \lfloor n^{\frac{5}{9}} \rfloor, r_2 = \lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor$

Хотим $P\left(\bigcup\limits_{r=2}^{r_2} A_r\right) \to 0$. Сумму разбиваем на три, каждую будем оценивать отдельно.

1. $r \leqslant r_0$. Из условия на p получаем $P(\delta(G(n,p)) = k) \to 1$. Тогда в W_1 найдутся две вершины степени $\leqslant k + r$ на расстоянии не более 2 (либо рёбер внутри W_1 нет, тогда оно соединено со всем S, либо есть).

Оценим вероятность этого события:

$$\sum_{i,j=k}^{k+r}\sum_{k=1}^{2} C_n^2 C_{n-2}^{l-1} p^l C_n^{i-1} C_n^{j-1} p^{i+j-2}(1-p)^{2n-i-j+1} \leqslant$$

$$\sum_{i,j=k}^{k+r}\sum_{r=1}^{2} i n^{l+1+i+j-2} p^{i+j-2+l}(1-p)^{2n-i-j+1} \leqslant$$

$$\sum_{i,j=k}^{k+r}\sum_{l=1}^{2} n(np)^{i+j+l-2} e^{-2np+o(1)} \leqslant o\left((\ln n)^{2(k+r)} e^{-2np} n\right) =$$

$$o\left((\ln n)^{2k+2r}\exp(-2\ln n - 2k\ln\ln n + 2w)n\right) = o\left((\ln n)^r e^{2w(n)}\frac{1}{n}\right) \to 0$$

2. $r_0 \leqslant r \leqslant r_1$. Заметим, что на множестве $S \cup W_1$ должно быть не меньше, чем $\frac{rk}{2}$ рёбер.

$$C_{C_{r+k}^2}^{\frac{rk}{2}} p^{\frac{rk}{2}} \leqslant \left(\frac{\exp(\frac{1}{4}(r+k)^2)}{\frac{rk}{2}}\right)^{\frac{rk}{2}} p^{\frac{rk}{2}} \leqslant \left(\frac{4er^2p}{rk}\right)^{\frac{rk}{2}} = \left(\frac{4erp}{k}\right)^{\frac{rk}{2}} \leqslant$$

$$\left(n^{-\frac{4}{9}+o(1)}\right)^{\frac{rk}{2}} < n^{-\frac{3}{14}rk}$$

Отсюда

$$P\left(\bigcup_{r=r_0+1}^{r_1} A_r\right) \leqslant o(1) + \sum_{r=r_0+1}^{r_1} C_n^r C_{n-r}^k n^{-\frac{3}{14}rk}(1-p)^{r(n-r-k)} \leqslant$$

$$o(1) + \sum_{r=r_0+1}^{r_1} n^{r+k-\frac{3}{14}rk}\exp(-pr(n-r-k)) \leqslant$$

$$o(1) + \sum_{r=r_0+1}^{r_1} n^{k-\frac{3}{14}rk+\frac{r^2}{n}}$$

Так как $r \geqslant 11$, то сумма стремится к 0.

3. $r > r_1$. Между W_1 и W_2 нет рёбер (и они большие).

$$P\left(\bigcup_{r=r_1+1}^{r_2} A_r\right) \leqslant \sum_{r=r_1+1}^{r_2} C_n^r C_{n-r}^k (1-p)^{r(n-r-k)} \leqslant \sum_{r=r_1+1}^{r_2}\left(\frac{en}{r}\right)^r n^k e^{-pr(n-r-k)} \leqslant$$

$$\sum_{r=r_1+1}^{r_2}\left(\frac{en}{r}\right)^r n^k e^{-pr\frac{n-k}{2}} = \sum_{r=r_1+1}^{r_2} n^k\left(\frac{en}{r}e^{-p\frac{n-k}{2}}\right)^r \leqslant \sum_{r=r_1+1}^{r_2} n^k e^{r(\frac{4}{9}-\frac{1}{2})\ln n(1+o(1))} \leqslant$$

$$\sum_{r=r_1+1}^{r_2} n^k n^{-\frac{r}{20}} \to 0$$

□

Теорема 31. *В графовом случайном процессе для фиксированного k $P(\tau_k(\delta) = \tau_k(\kappa)) \to 1$.*

Доказательство. Пусть $k = 1$. Ясно, что $\tau_k(\kappa) \geqslant \tau_k(\delta)$. Положим $w(n) = \ln\ln\ln n$.

$m_1 = \lfloor \frac{n}{2}(\ln n - w(n)) \rfloor$

$m_2 = \lfloor \frac{n}{2}(\ln n + w(n)) \rfloor$

В силу асимп. эквивалентности моделей

$P(\tilde{G}(n, m_1)$ связен$) \to 0$

$P(\tilde{G}(n, m_2)$ связен$) \to 1$

Тем самым $P(m_1 < \tau_k(\delta) \leqslant m_2) \to 1$. Граф $\tilde{G}(n, m_1)$ с большой вероятностью состоит из гигантской компоненты и изолированных вершин, причем число последних $\leqslant \ln n$. Обозначим это событие через $\mathcal{B}$. Тогда $\tau_1(\kappa) > \tau_1(\delta)$, если в моменты времени $\{m_1 + 1, \ldots, m_2\}$ одно из рёбер было проведено между изолированными.

$P(\tau_1(\kappa) > \tau_1(\delta) \mid \mathcal{B}) \leqslant \frac{(m_2 - m_1)(\ln n)^2}{C_n^2 - m_2} = o\left(\frac{nw(n)(\ln n)^2}{n^2}\right) \to 0.$

Пусть $k \geqslant 2$. По лемме о сепараторах при $m_0 = \lfloor \frac{n}{2}(\ln n + (k-1)\ln\ln n - \ln\ln\ln n) \rfloor$

$P(\tilde{G}(n, m_0)$ содержит нетривиальный $(k-1)$-сеператор$) \to 0$.

Кроме того $P(\delta(\tilde{G}(n, m_0)) = k - 1) \to 1$. Тогда $\forall m \geqslant m_0$ $\tilde{G}(n, m)$ тоже не содержит нетривиальных $(k-1)$-сепараторов. Снова $\tau_k(\kappa) \geqslant \tau_k(\delta)$ и если $\delta(\tilde{G}(n, m)) = k$, то $\tilde{G}(n, m)$ не будет вершинно k-связным только при наличии нетривиального $(k-1)$-сепаратора. Но их нет, значит $\tau_k(\delta) = \tau_k(\kappa)$. □

Упражнение 1. Доказать, что при фиксированном k $P(\tau_k(\delta) = \tau_k(\lambda)) \to 1)$.

Следствие. *Если $p \leqslant \frac{\ln n + k \ln\ln\ln n}{n}$, k — фиксированное, то $P(\delta(G(n,p)) = k(G(n,p)) = \lambda(G(n,p))) \to 1$.*

Следствие. *Пусть $p = \frac{\ln n + k \ln\ln n + x + o(1)}{n}$, $k \in \mathbb{Z}_+, x \in \mathbb{R}$, то*

$P(k(G(n,p)) = \lambda(G(n,p)) = k) \to 1 - \exp\left(-\frac{e^{-x}}{k!}\right)$,

$P(k(G(n,p)) = \lambda(G(n,p)) = k + 1) \to \exp\left(-\frac{e^{-x}}{k!}\right)$.

21 Совершенные паросочетания

Пороговая вероятность наличия совершенного паросочетания в $G(n,p)$?

Теорема 32 (Холл)**.** *Пусть G — двудольный с равными долями X, Y. Тогда в G есть совершенное паросочетание тогда и только тогда, когда $\forall W \subset X |N(W)| \geqslant |W|$*

В случайном графе сложно: он не двудольный, а также в нём достаточно много «плохих» вершин. Оказывается, все зависит от наличия конфигурации «вишня»: пара вершин степени 1 с общим соседом.

22 Длинные пути в случайном графе

Пусть граф уже связен: $p = \frac{(1+\varepsilon)\ln n}{n}$. Можем ли мы в нём набрать достаточно длинный путь?

Теорема 33. *Пусть $p = \frac{\theta}{n}, 0 < \theta = \theta(n) < \ln n - 3\ln\ln n$. Тогда с вероятностью, стремящейся к 1, $G(n,p)$ содержит путь длины $(1 - \frac{4\ln 2}{\theta})n$.*

Доказательство. Рассмотрим случайный мультиграф $G(n,r,r)$, в котором между любыми двумя проводится независимо два случайных ребра: красное и синее, оба с вероятностью r. Если цветные рёбра обесцветить, то $G(n,r,r)$ превращается в $G(n,p_0)$, где $p_0 = 1-(1-r)^2$, то есть при $r = \frac{r}{2}$, то $p_0 = p - \frac{p^4}{4} < p$. Таким образом, если в $G(n,r,r)$ есть достаточно длинный путь, то и в $G(n,p)$ он тоже есть в силу монотонности свойства.

Идея заключается в анализе поиска в глубину, а именно следующей его имитации:

- Будем двигаться по красным рёбрам без возвратов, пока возможно, выбирая произвольный из доступных вариантов
- Когда переход в новые вершины по красным рёбрам невозможен, пытаемся перейти по синим
- Когда переход невозможен и по синему ребру, возвращаемся в ближашую вершину, из которой мы не пытались переходить по синим ребрам
- Если мы вернулись в начало пути, то выкинем из графа все, что прошли и запустимся из другой вершины

Более формально: $G(n,r,r)$ — цветной мультиграф и $\forall k = 0, \ldots \exists (P_k, U_k, B_k)$, где P_k — текущий набранный путь, U_k — множество неиспользованных вершин, B_k — множество «синих» вершин (из которых мы пытались идти по синему ребру). В начальный момент времени есть $x_0 \in V(G(n,r,r)), P_0 = x_0, U_0 = V \setminus \{x_0\}, B_0 = \varnothing$.

Пусть известна тройка (P_k, U_k, B_k), x_k — первая вершина P_k, y_k — последняя, $|U_k| = u_k$. Если $u_k = 0$, то алгоритм остановится. Иначе, есть следующие случаи:

1. $y_k \notin B_k$. Если есть красное ребро (y_k, y_{k+1}), где $y_{k+1} \in U_k$, то y_{k+1} добавляется в путь: $P_{k+1} = P_k y_{k+1}, U_{k+1} = U_k \setminus \{y_{k+1}\}, B_{k+1} = B_k$.

   Если красных рёбер не нашлось, то $P_{k+1} = P_k, U_{k+1} = U_k, B_{k+1} = B_k \cup \{y_k\}$

2. $y_k \in B_k$ и $V(P_k) \setminus B_k \neq \varnothing$, то ищется синее ребро (y_k, y_{k+1}) между y_k и U_k. Если оно найдено, то оно добавляется: $P_{k+1} = P_k y_{k+1}, U_{k+1} = U_k \setminus \{y_{k+1}\}, B_{k+1} = B_k$.

   Если синего ребра не нашлось, то нужно найти y_{k+1} — ближайшую к y_k вершину P_k не из B_k. Укорачиваем путь до y_{k+1} и добавляем её в B_k: $P_{k+1} = x_k \ldots y_{k+1}, U_{k+1} = U_k, B_{k+1} = B_k \cup \{y_{k+1}\}$

3. $V(P_k) \subset B_k$. Тогда с вероятностью $(1-r)^{u_k}$ будем просто ничего не делать ($P_{k+1} = P_k, U_{k+1} = U_k, B_{k+1} = B_k$). Если же эта вероятность не реализовалась, то ищем синее ребро между y_k и U_k.

   Если ребро не найдено, то процесс придется начать сначала: $P_{k+1} = x_{k+1}, U_{k+1} = U_k \setminus \{x_{k+1}\}, B_{k+1} = B_k$.

Замечание. Ничегонеделание не меняет никакие множества, а просто растягивает один шаг на, возможно, несколько. Таким образом получается удобное свойство: на каждом шаге алгоритма размер U_k меняется примерно одинаково.

Пусть $l_k = |P_k| - 1$, $b_k = |B_k|$. По определнию имеем $n - u_0 + b_0 = 1$. Для каждого момента $k \in \mathbb{N}$ рассмотрим величины $n - u_k + b_k$ и $n - u_{k+1} + b_{k+1}$. Ясно, что $1 + n - u_k + b_k \geqslant n - u_{k+1} + b_{k+1}$. Далее рассмотрим $V \setminus (U_k \cup V(P_k))$. Оно лежит в B_k. Тогда $n - u_k + b_k \leqslant k+1$, так как оно увеличивается не более чем на 1 за шаг. $l_k = |P_k| - 1 \geqslant n - n_k - b_k - 1 \geqslant 2(n - u_k) - k - 2$. Таким образом, нам надо показать, что при правильном выборе k эта разность будет достаточно большой.

Пусть $H_k = \{(P_i, U_i, B_i), i = 0, \dots, k\}$ — история алгоритма. На каждом шаге мы проверяем наличие рёбер какого-то цвета между y_k и U_k и каждый раз рассматриваются новые ребра (либо мы стоим на месте). Так или иначе, веротность неудачи равна $(1-r)^{u_k}$. Таким образом:

$$P(u_{k+1} = j \mid u_j = j, H_k = H) = (1-r)^j.$$

Но $u_{k+1} = u_k$ или $u_{k+1} = u_k - 1$. Время, которое мы стоим в состоянии j получается подчинено геометрическому распределению с вероятностью неуспеха $(1-r)^j$. Пусть $X_i = \max\{k - l + 1 : u_k = u_l = i\} \sim Geom(1-(1-r)^i)$. $Y_j = \sum\limits_{j+1}^{n} X_i$ — время достижения цепью состояния j. $P(u_k \leqslant j) = P(Y_k \leqslant k)$.

Надо подобраться подходящие j, k, так чтобы $P(Y_j \leqslant k) \to 1, 2(n-j) - k - 2 \geqslant \left(1 - \frac{4 \ln 2}{\theta}\right) n$.

Оценим ожиданию и дисперсию Y_j, при $j = \left\lceil \frac{\ln 2}{r} \right\rceil$:

$$DY_j = \sum_{i=j+1}^{n-1} DX_i = \sum_{j+1}^{n-1} \frac{(1-r)^i}{(1-(1-r)^i)^2} \leqslant$$
$$\leqslant \left[(1-r)^{j+1} \leqslant (1-r)^{\frac{\ln 2}{r}} \leqslant e^{-\ln 2} = \frac{1}{2} \right] \leqslant 2n$$

$$EY_j = \sum_{i=j+1}^{n-1} EX_i = \sum_{j+1}^{n-1} \frac{1}{1-(1-r)^i} \leqslant \sum_{j+1}^{n-1} \frac{1}{1-e^{-r_i}} \leqslant \int\limits_{j}^{n-1} \frac{1}{1-e^{-rx}} dx =$$

$$= [y = rx] = \frac{1}{r} \int\limits_{r_j}^{r(n-1)} \frac{1}{1-e^{-y}} dy \leqslant \frac{1}{r} \int\limits_{\ln 2}^{rn} \sum_{m=0}^{\infty} e^{-ym} dy =$$

$$= \frac{1}{r} \left(rn - \ln 2 + \sum_{m=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{m} e^{-ym} \right) |_{\ln 2}^{rn} \right) =$$

$$= \frac{1}{r} \left(rn - \ln 2 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} 2^{-m} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} e^{-rnm} \right) \leqslant n - \frac{1}{r} e^{-rn}$$

Отсюда по неравенству Чебышева следует, что при $w(n) = \ln\ln n$ выполнено $P(Y_j \leqslant n - \frac{1}{r}e^{-rn} + \sqrt{n}w(n)) \to 1$. Значит $P(u_k \leqslant j) \to 1$, где $k = \left\lceil n - \frac{1}{r}e^{-rn} + \sqrt{n}w(n) \right\rceil, j = \left\lceil \frac{\ln 2}{r} \right\rceil$. Значит. с большой вероятностью

$$l_k \geqslant 2(n - u_k) - k - 2 \geqslant 2(n-j) - k - 2 \geqslant$$

$$\geqslant 2n - 2\left\lceil \frac{\ln 2}{r} \right\rceil - n + \frac{1}{r} e^{-rn} - \sqrt{(n)} w(n) - 3 =$$

$$= n - \frac{4 \ln 2}{\theta} n + \frac{1}{r} e^{-rn} - \sqrt{n} w(n) - 5$$

Поясним, поему последние слагаемые дают в сумме > 0. $\frac{1}{r}e^{-rn} = \frac{2n}{\theta}e^{-\frac{theta}{2}} \geqslant \frac{2n}{\ln n - 3\ln\ln n} e^{-\frac{\ln 2}{2} + \frac{3}{2}\ln\ln n} \geqslant \frac{2n}{\ln n}\frac{1}{\sqrt{n}}(\ln n)^{\frac{3}{2}}(1 + o(1)) = 2\sqrt{n \ln n}(1 + o(1)) = \omega(\sqrt{n}w(n))$. □

Следствие. *Рассмотрим ориентированный случайный граф с вероятностью ребра (в одну из двух сторон)* $p = \frac{\theta}{n}, 0 < \theta < \ln n - 3\ln\ln n$. *Тогда с вероятностью, стремящейся к 1, такой граф содержит ориентированный путь длины* $\geqslant n\left(1 - \frac{4\ln 2}{\theta}\right)$.

23 Гамильтоновы циклы

Какова пороговая вероятность для Гамильтонова цикла? С одной стороны $\hat{p} \leqslant \frac{\ln n + \ln\ln n - w(n)}{n}$, так как нужна связность и степень каждой вершины хотя бы 2. С другой стороны совсем понятная оценка только $p = \frac{1}{2}$.

Цель: при $p = \frac{\ln n + \ln\ln n + w(n)}{n}$ $P(G(n,p)$ гамильтонов$) \to 1$ при $w(n) \to +\infty$.

Определение 22. Пусть $G = (V, E)$ — граф и $P = x_0 \dots x_h$ — самый длинный простой путь в G. Пусть есть ребро (x_h, x_i) (не в путь P оно вести не может). *Простой трансформацией* пути назовём $P' = x_0 \dots x_i x_h x_{h-1} \dots x_{i+1}$.

Композицию нескольких простых трансформаций будем называть просто *трансформацией.*

Пусть $U(P)$ — подмножество конечный вершин всех возможных трансформаций пути P, а $N(P) = \{x_i : 0 \leqslant i \leqslant h-1, \{x_{i-1}, x_{i+1}\} \cap U(P) \neq \varnothing\}$ — их соседи по пути. $R(P) = V(P) \setminus (U(P) \cup N(P))$ — остальные вершины.

Лемма 14 (Поша)**.** *Между $R(P)$ и $U(P)$ нет рёбер.*

Доказательство. Пусть $x \in U(P), (x, y) \in E(G)$. Тогда, во-первых, $y \in V(P)$ в силу максимальности P, так как существует трансформация P_x с конечной вершиной x. Если $y = x_h$, то $y \in U(P)$. Иначе пусть z — правый сосед в P_x. Существует трансформация с последней вершиной z, значит $z \in U(P)$.

Если $(y, z) \in E(P)$, то $y \in N(P)$. Иначе, $(y, z) \notin E(P)$, пусть соседи y есть $w, w' \neq z$. Тогда при переходе от P к P_x одно из рёбер $(w, y), (y, w')$ должно было быть удалено и в этот момент либо y, либо кто-то из w, w' стал последней вершиной, то есть $y \in U(P) \cup N(P)$. □

Мы знаем, что p уже достаточно велико, чтобы граф был связным. Если бы у нас был длинный цикл, то мы бы могли продолжить его на 1 вершину, так как в силу связности на нем что-то «растёт». То есть единственное, что нам может помешать — наличие достаточно длинного пути при отсутствии длиного цикла.

Лемма 15. *Пусть $h \geqslant 2, u \geqslant 1$, граф G имеет макс. длину пути h, но не имеет циклов длины $h+1$. Пусть для любого $U \subset V(G), |U| < u$ выполнено $|U \cup N(U)| \geqslant 3|U|$, тогда существует набор из u различных вершин $y_1, \ldots, y_u$ и u (не обязательно различных) подмножеств $Y_1, \ldots, Y_u$ с условием $|Y_j| \geqslant u$, такие что между y_j и Y_j нет рёбер, а добавлением любого ребра между ними дает цикл длины $h+1$.*

Таким образом, имеется по крайней мере $\geqslant \frac{u(u+1)}{2}$ нерёбер в G добавление которых дает цикл длины $h+1$.

Доказательство. Пусть P — самый длинный путь, $R(P), N(P), U(P)$ — множества из леммы Поша. По лемме $U(P) \cup \Gamma(U(P)) \subset U(P) \cup N(P)$. Но $N(P) \setminus U(P) \subset \{x_{h-1}\} \cup \{x_{i-1}, x_{i+1} : i \leqslant i \leqslant h-2\} \Rightarrow |U(P) \cup \Gamma(U(P))| \leqslant |U(P)| + 2(|U(P)| - 1) + 1 = 3|U(P)| - 1 < 3|U(P)|$. Отсюда, по условию, $|U(P)| \geqslant u$.

Пусть $\{y_1, \ldots, y_u\} \subset U(P)$. Для каждого y_i можем рассмотреть путь из y_i в x_0 (в силу наличия трансформации). Для него верны те же самые рассуждения, то есть можно выделить множество Y_i размера хотя бы u, такое, что любое ребро между y_i и Y_i дает цикл длины $h+1$. Ясно, что худший случай, если все Y_j совпадут с $\{y_1, \ldots, y_u\}$, то есть существует хотя бы $\frac{u(u+1)}{2}$ подходящих нерёбер. □

Лемма 16. *Пусть $\frac{\ln n}{n} \leqslant p \leqslant 2\frac{\ln n}{n}, 0 < \delta < \frac{1}{\gamma} < \frac{1}{2}$ — фиксированные константы. Положим $u_0 = \lfloor (\ln n)^{\gamma} \rfloor$, $u_1 = \lfloor \delta n \rfloor$. Тогда с вероятностью,* *стремящейся к 1 любое подмножество $U_n \subset V(G(n,p))$ с условием $u_0 \leqslant |U_n| \leqslant u_1$ удовлетворяет $|U_n \cup \Gamma(U_n)| \geqslant \gamma |U_n|$.*

Доказательство. Пусть $X_n(u,w)$ — число пар множеств $(U,W), |U| = u, |W| = w, \Gamma(U) \setminus U = W$. Тогда $EX_n(u,w) = C_n^u C_{n-u}^w (1-p)^{u(n-u-w)}(1-(1-p)^u)^w \leqslant \frac{n^{u+w}}{w!}\left(\frac{e}{u}\right)^u n^{-u(1-\frac{u+w}{n})}(up)^w$.

Значит $P(G(n,p)$ не обладает искомым свойством$) \leqslant \sum\limits_{u=u_0}^{u_1}\sum\limits_{w=1}^{(\gamma-1)u} EX_n(u,w)EX_n(u,w) \leqslant \sum\limits_{u=u_0}^{u_1}\sum\limits_{w=1}^{(\gamma-1)u} \frac{n^{u+w}}{w!}\left(\frac{e}{u}\right)^u n^{-u} n^{\frac{u(u+w)}{n}}(up)^w \leqslant [(np)^w \leqslant (2\ln n)^w \leqslant (2\ln n)^{(\gamma-1)u}] \leqslant \sum\limits_{u=u_0}^{u_1}(2\ln n)^{(\gamma-1)u}\left(\frac{e}{u}\right)^u n^{\frac{\gamma u^2}{n}}\sum\limits_{w=0}^{(\gamma-1)u}\frac{u^w}{w!} \leqslant \left[\sum\limits_{w=0}^{(\gamma-1)u}\frac{u^w}{w!} \leqslant e^u\right] \leqslant \sum\limits_{u=u_0}^{u_1}\left((2\ln n)^{\gamma-1}e^2\frac{1}{u}n^{\frac{\gamma u}{n}}\right)^u \to 0$, так как $(2\ln n)^{\gamma-1}e^2\frac{1}{u}n^{\frac{\gamma u}{n}} \to 0$ равномерно.

Покажем это, возьмем $\varepsilon > 0, \gamma\delta + \varepsilon < 1$. Тогда для $u \leqslant n^{\gamma\delta+\varepsilon}$ выполнено $u^{\frac{\gamma u}{n}} = 1 + o(1), \frac{(\ln n)^{\gamma-1}}{n} \leqslant \frac{1}{\ln n} \to 0$.

Если же $u > n^{\gamma\delta+\varepsilon}$, то $n^{\frac{\gamma u}{n}}u^{-1} \leqslant n^{\gamma\delta}n^{-\gamma\delta-\varepsilon} = n^{-\varepsilon} \to 0$ и $(\ln n)^{\gamma-1}$ мал по отношению к n^{ε}. □

Лемма 17. *Пусть $w(n) \to \infty, p = \frac{\ln n + \ln\ln n + w(n)}{n}$, тогда а.п.н. для любого $U_n \subset V(G(n,p))$ выполняется $|U_n \cup \Gamma(U_n)| \geqslant 3|U_n|$ при $|U_n| \leqslant \frac{n}{4}$.*

Доказательство. Можно считать, что $p \leqslant \frac{2\ln n}{n}$. Применим предыдущую лемму с $\gamma = 3, \delta = \frac{1}{4}$. Тогда все доказано для $|U_n| \geqslant (\ln n)^3 = u_0$.

При выбранном p $P(\delta(G(n,p)) \geqslant 2) \to 1$. Если $|U_n| = 1$, то для него все доказано. Легко проверить, что с большой вероятностью вершины степени 2 не соединены друг с другом. Пусть U_n — самое маленькое «плохое» множество: $|U_n \cup \Gamma(U_n)| < 3|U_n|$. Считаем, что $2 \leqslant |U_n| \leqslant u_0, T = U_n \cup \Gamma(U_n), |T| = t, 4 \leqslant t \leqslant 3u_0$. Тогда

- подграф на T связен, иначе U_n не минимально
- внутри T есть $\frac{t}{3}$ вершин, имеющих соседей только внутри T

При фиксированном t вероятность найти такое T не больше

$$\sum_{l=-1}^{C_t^2-t} C_n^t C(t,t+l)p^{t+l}C_t^{\frac{t}{3}}(1-p)^{\frac{t}{3}(n-t} = o\left(\sum_{l=-1}^{C_t^2-t}\left(\frac{en}{t}\right)^t t^{t+\frac{3l-1}{2}}p^{t+l}2^t\exp(-\frac{t}{3}np)\right) =$$

$$= o\left(e^t(2\ln n)^t 2^t\exp(-\frac{t}{3}np)\sum_{l=-1}^{C_t^2-t}(t^{\frac{3l-1}{2}}p^l)\right) \leqslant o\left((4e\ln n)^t n^{1-\frac{t}{3}}\right)$$

Суммируя по t от 4 до $3u_0$ получаем стремление к 0. □

Теорема 34 (о гамильтоновсти)**.** $\lim\limits_{n\to\infty} P(G(n,p)$ *гамильтонов*$) = 0$ *при* $np - \ln n - \ln\ln n \to -\infty$ *и 1 при* $np - \ln n - \ln\ln n \to +\infty$.

Доказательство. Пусть $k = \frac{4n}{\ln n}, p_i = \frac{64 \ln}{n^2}, p_0 = p - kp_1 k = p - \frac{64 \ln n}{n^2} k$.

Рассмотрим модель случайного мультиграфа $\hat{G}_j = G_j(n, p_0, \dots, p_j)$, в котором две вершины с вероятностью p_i соединены ребром цвета i. При отождествленнии ребер получим граф $G(n, p')$, где $p' \leqslant p_0 + kp = p$.

Пусть $\hat{G}_0$ — начальный граф. Введем свойство Q:

- G связен
- $\forall U \subset V(G), |U| \leqslant \frac{n}{4}$ выполнено $|U \cup \Gamma(U)| \geqslant 3|U|$

В силу предыдущих лемм граф $\hat{G}_0$ удовлетворяет Q а.п.н., значит все $\hat{G}_j$ тоже. По теореме о длинном пути $l(\hat{G}_0) \geqslant n\left(1 - \frac{4 \ln 2}{\ln n - \ln \ln n}\right)$, так как $p_0 \geqslant \frac{\ln n + \ln \ln n + w(n) - O(1)}{n}$, то есть $P(l(\hat{G}_0 > n - k, \hat{G}_0 \models Q) \to 1$.

Пусть $\hat{G}_j$ удовлетворяет Q. Если там нет цикла длины $l(\hat{G}_j) + 1$, то по лемме в нём есть хотя бы $\frac{n^2}{32}$ нерёбер, добавление котороых даёт такой цикл. Если же такой цикл есть, то в силу связности $l(\hat{G}_j) > n - k + j + 1 \Rightarrow l(\hat{G_{j+1}}) > n - k + j + 1$.

Тогда $P(l(\hat{G_{j+1}} = l(\hat{G}_j)) \mid \hat{G}_j \models Q,$ нет цикла длины $l(\hat{G}_j) + 1) \leqslant (1 - p_j)^{\frac{n^2}{32}} \leqslant \exp(-p_j \frac{n^2}{32}) = \frac{1}{n^2}$.

Тогда $P($нет цикла длины n в $\hat{G}_n) \leqslant n \frac{1}{n^2} + P(\hat{G}_0 \not\models Q) \to 0$. $\square$

24 Смежные результаты

Если рассмотреть графовый случайный процесс $\tilde{G}$ и два момента в нём $\tau_1 = \min\{m : \tilde{G}(n, m)$ гамильтонов$\}, \tau_2 = \min\{m : \delta(\tilde{G}) \geqslant 2\}$. Тогда выполняется следующая теорема:

Теорема 35. *В графовом случайной процессе а.п.н* $\tau_1 = \tau_2$.

Можно поставить вопрос о том, сколько непересекающихся гамильтоновых циклов есть в графе. Их количество конечно не превосходит $\frac{\delta(G)}{2}$.

Теорема 36. *Пусть* $\frac{(\ln n)^{50}}{n} \leqslant p \leqslant 1 - \frac{(\ln n)^9}{n^{\frac{1}{4}}}$. *Тогда с большой вероятностью в* $G(n,p)$ *можно выделить* $\left\lfloor \frac{\delta(G(n,p))}{2} \right\rfloor$ *непересекающихся гамильтоновых циклов.*

Еще одна смежная задача: сколько гамильтоновых циклов нужно, чтобы покрыть все рёбра?

Теорема 37. *Пусть* $\frac{(\ln n)^{17}}{n} \leqslant p \leqslant 1 - n^{-\frac{1}{8}}$. *Тогда с большой вероятностью ребра* $G(n,p)$ *можно покрыть* $\left\lceil \frac{\Delta(G(n,p))}{2} \right\rceil$ *гамильтоновыми циклами.*

25 Неравенство FKG

$f(x_1, \dots, x_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Определение 23. Функция f называется возрастающей, если не убывает по каждой переменной. Аналогично определяется убывающая функция.

Теорема 38 (FKG-неравенство)**.** *Пусть $X_1, \dots, X_n$ — независимые с.в., $f(x_1, \dots, x_n), g(x_1, \dots, x_n)$ — возрастающие (убывающие) функции. Тогда*

$$cov(f(X_1, \dots, X_n), g(X_1, \dots, X_n)) \geqslant 0.$$

Доказательство. Индукция по n. Пусть $n = 1$, тогда $(f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \geqslant 0$. Пусть Y независима с X_1 с.в. с тем же распределением, $Y \overset{d}{=} X_1$. Тогда

$$(f(X_1) - f(Y))(g(X_1) - g(Y)) \geqslant 0.$$

Берем мат. ожидание:

$$E(f(X_1) - f(Y))(g(X_1) - g(Y)) = \\ = 2Ef(X_1)g(X_1) - 2Ef(X_1) \cdot Eg(X_1) = 2\operatorname{cov}(f(X_1), g(X_1) \geqslant 0.$$

Докажем теперь шаг. Рассмотрим $f'(x_1, \dots, x_{n-1}) = Ef(X_1, \dots, X_n) \mid X_1 = x_1, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}) = Ef(x_1, \dots, x_{n-1}, X_n), g'(x_1, \dots, x_{n-1}) = Eg(x_1, \dots, x_{n-1}, X_n)$.

Это тоже возрастающие функции от $n-1$ переменной. По предположению индукции $\operatorname{cov}(f'(x_1, \dots, x_{n-1}), g'(x_1, \dots, x_{n-1})) \geqslant 0$. Аналогично, $\tilde{f}_{x_1,\dots,x_{n-1}}(x_n) = f(x_1, \dots, x_n), \tilde{g}_{x_1,\dots,x_{n-1}}(x_n) = g(x_1, \dots, x_n)$ — возрастающие функции 1 переменной, то есть $\operatorname{cov}(\tilde{f}, \tilde{g}) \geqslant 0$.

В итоге

$$Ef(X_1, \dots, X_n)g(X_1, \dots, X_n) = E(E(f(X_1, \dots, X_n)g(X_1, \dots, X_n) \mid X_1, \dots X_n)) = \\ = \int\limits_{\mathbb{R}^n} E(f(x_1, \dots, x_{n-1}, X_n)g(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n))P_{X_1}(dx_1) \dots P_{X_n}(dx_n) \geqslant \\ \geqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} E\tilde{f}_{x_1,\dots,x_{n-1}}(x_n)\tilde{g}_{x_1,\dots,x_{n-1}}(x_n)P_{X_1}(dx_1) \dots P_{X_n}(dx_n) = \\ = \int\limits_{\mathbb{R}^n} Ef'(x_1, \dots, x_{n-1})g'(x_1, \dots, x_{n-1}) = Ef'(X_1, \dots, X_{n-1})g'(X_1, \dots, X_{n-1}) \geqslant \\ \geqslant Ef'(X_1, \dots, X_{n-1})g'(X_1, \dots, X_{n-1}) = Ef(X_1, \dots, X_n)g(X_1, \dots, X_n)$$

□

26 Неравенство Янсона

Пусть Γ — конечное множество мощности N. $\Gamma(p_1, \dots, p_N)$ — биномиальная модель случайного подмножества. Введем для $A \subset \Gamma$ величину $I_A = I(A \subset \Gamma(p_1, \dots, p_N))$.

Теорема 39 (неравенство Янсона)**.** *Пусть S — система подножеств Γ, $X = \sum\limits_{A \in S} I_A$, $\lambda = EX$, $\overline{\Delta} = \sum\limits_{A,B \in S, A \cap B \neq \varnothing} EI_AI_B$. Тогда $\forall 0 \leqslant t \leqslant EX$ выполнено*

$$P(X \leqslant EX - t) \leqslant \exp\left(-\frac{t^2}{2\overline{\Delta}}\right).$$

Доказательство. Рассмотрим $\psi(s) = Ee^{-sX}, s \geqslant 0$. Тогда

$$-\psi'(s) = EXe^{-sX} = \sum_{A \in S} E(I_A e^{-sX}).$$

Для $A \in S$ введем $Y_A = \sum\limits_{B \in S, A \cap B \neq \varnothing} I_B, Z_A = \sum\limits_{B \in S, A \cap B = \varnothing} I_B$.

Заметим, что Y_A, Z_A — возрастающие функции от $\{\xi_i = I(i \in \Gamma(p_1, \ldots, p_N)) : i \notin A\}$. Тогда

$$\begin{aligned} E(I_A e^{-sX}) = p(A)E(e^{-sX} \mid I_A = 1) = p(A)E(e^{-sY_A}e^{-sZ_a} \mid I_A = 1) \geqslant \\ \geqslant [\text{FKG}] \geqslant p(A)E(e^{-sY_a} \mid I_A = 1)E(e^{-sZ_A} \mid I_A = 1) = [Z_A \bot I_A] = \\ = p(A)E(e^{-sY_a} \mid I_A = 1)Ee^{-sZ_a} \geqslant p(A)E(e^{-sY_A} \mid I_A = 1)\psi(s) \\ \Rightarrow (-\ln\psi(s))' \geqslant \sum_{A \in S} p(A)E(e^{sY_a} \mid I_A = 1) \geqslant [\text{неравенство Йенсена}] \geqslant \\ \geqslant \sum_{A \in S} p(A)e^{-E(sY_a \mid I_A = 1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\ln\psi(s) = \int\limits_0^s (-\ln\psi(u))'du \geqslant \int\limits_0^s (\lambda e^{-\frac{u}{\lambda}\overline{\Delta}})du = \frac{\lambda^2}{\overline{\Delta}}(1 - e^{-\frac{s\overline{\Delta}}{\lambda}}) \geqslant \\ \geqslant [1 - e^{-x} \geqslant x - \frac{x^2}{2}] \geqslant s\lambda - \frac{s^2\overline{\Delta}}{2} \end{aligned}$$

В итоге, $P(X \leqslant \lambda - t) = P(e^{-sX} \geqslant e^{-s(\lambda - t)}) \leqslant \frac{Ee^{-sX}}{e^{-s(\lambda-t)}} = e^{\ln\psi(s)}e^{s\lambda - st} \leqslant e^{-s\lambda + \frac{s^2\overline{\Delta}}{2} + s\lambda - st}$

Минимум при $s = \frac{t}{\overline{\Delta}}$, значит $P(X \leqslant EX - t) \leqslant e^{-\frac{t^2}{2\overline{\Delta}}}$. □

Следствие. *В условиях неравенства Янсона $P(X = 0) \leqslant e^{-\frac{\lambda^2}{2\overline{\Delta}}}$.*

27 Неравенство Азумы-Хёффдинга

Определение 24. $(X_n, n = 0, \ldots,)$ — мартингал относительно фильтрации $(F_n, n = 0, \ldots)$, если

- X_n измерим относительно F_n

- $E|X_n| < +\infty$
- $\forall n > k E(X_n \mid F_k) = X_k$

Упражнение 2. Последнее условие эквивалентно $E(X_n \mid F_{n-1}) = X_{n-1}$.

Если в последнем условии неравенство вместо равенства, то это субмартингал или супермартингал.

Теорема 40 (неравенство Азумы-Хёффдинга)**.** *Пусть $(X_k, k = 0, \ldots, n)$ — мартингал относительно F_k, причём $X_0 = EX_n$ и для некоторых констант $c_1, \ldots, c_n$ выполнено $|X_k - X_{k-1}| \leqslant c_k$ $\forall k = 1, \ldots, n$.*

Тогда $\forall t \geqslant 0$ выполнено

$$P(X_n \geqslant EX_n + t), P(X_n \leqslant EX_n - t) \leqslant e^{-\frac{t^2}{2\sum\limits_{k=1}^{n} c_k^2}}$$

Доказательство. Обозначим $Y_k = X_k - X_{k-1}, k = 1, \ldots, n$, тогда $X_n - X_0 = \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k$. Обозначим $S_j = \sum\limits_{k=1}^{j} Y_k$, тогда $\forall u > 0$ выполнено

$$P(X_n \geqslant EX_n + t) = P(S_n \geqslant t) = P(e^{uS_n} \geqslant e^{ut}) \leqslant [\text{Марков}] \leqslant e^{-ut} E e^{uS_n} = \\ = e^{-ut} E(E(e^{uS_n} \mid F_{n-1})) = e^{-ut} E(e^{uS_{n-1}} E(e^{uY_n} \mid F_{n-1})).$$

Далее, $|Y_n| \leqslant c_n$ и $E(Y_n \mid F_{n-1}) = 0$. Тогда в силу выпуклости функции e^{ux}:

$$e^{uY_n} \leqslant \frac{c_n + Y_n}{2c_n} e^{uc_n} + \frac{c_n - Y_n}{2c_n} e^{-uc_n}.$$

Берем УМО относительно F_{n-1}:

$$E(e^{uY_n} \mid F_{n-1}) \leqslant \frac{1}{2}(e^{uc_n} + e^{-uc_n}) = \operatorname{ch}(uc_n) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(uc_n)^{2m}}{(2m)!} \leqslant e^{\frac{(uc_n)^2}{2}}$$

Отсюда $P(X_n \geqslant EX_n + t) \leqslant e^{-ut} e^{\frac{(uc_n)^2}{2}} E e^{uS_{n-1}} \leqslant [\text{рекурсия}] \leqslant e^{-ut} e^{\frac{u^2}{2} \sum\limits_{k=1}^{n} c_k^2}$.
Минимум достигается при $u = \frac{t}{\sum\limits_{k=1}^{n} c_k^2}$, что нам и нужно. $\square$

Пусть X — случайная величина, а $(F_0, \ldots, F_n)$ — фильтрация, такая что F_0 — тривиальная и X измерим относительно F_n. Тогда $X_k = E(X \mid F_k)$ — мартингал, почти подходящий под неравенство Азумы-Хёффдинга.

Следствие. *Пусть $Z_1, \ldots, Z_n$ — независимые случайные вектора размерность Z_i равна k_i. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ такова, что $\forall i = 1, \ldots, n \forall x_i, y_i \in \mathbb{R}^{k_i}$ выполнено*

$$|f(z_1, \ldots, x_i, \ldots, z_n) - f(z_1, \ldots, y_i, \ldots, z_n)| \leqslant c_i.$$

Обозначим $X = f(Z_1, \ldots, Z_n)$, тогда $\forall t \geqslant 0$ выполнено:

$$P(X \geqslant EX + t), P(X \leqslant EX - t) \leqslant e^{-\frac{t^2}{2\sum\limits_{k=1}^{n} c_k^2}}$$

Доказательство. Пусть $F_k = \sigma(Z_1, \dots, Z_k)$. Тогда $F_0, \dots, F_n$ — фильтрация, $X_k = E(X \mid F_k)$ — мартингал, притом $X_0 = EX$, $X_n = X$. Тогда для неравенства Азумы-Хёффдинга необходимо проверить, что $\forall k |X_k - X_{k-1}| \leqslant c_k$.

Но для $\forall z_1, \dots, z_k$ выполнено

$$|E(X \mid Z_1 = z, \dots, Z_{k-1} = z_{k-1}) - E(X \mid Z_1 = z_1, \dots, Z_k = z_k)| = [\text{нез}] =$$
$$= |Ef(z_1, \dots, z_{k-1}, Z_k, \dots, Z_n) - Ef(z_1, \dots, z_k, Z_{k+1}, \dots, Z_n)| \leqslant c_k$$

□

28 Мартингалы реберного и вершинного типа

$Z_1, \dots, Z_N$ — индикаторы появления ребер в $G(n,p), N = C_n^2$. $Z_j = I(E_j \in G(n,p))$.

Таким образом, нас интересуют характеристики, которые слабо меняются при добавлении и удалении ребра.

- число ребер
- макс. и мин. степень
- число компонент связности

Напрямую применять его тяжеловато из-за того, что N достаточно большое. Можно перейти к равномерной модели (если p какое-то небольшое и среднее число ребер, например, линейное). Другой путь: мартингалы вершинного типа.

$v_1, \dots, v_n$ — вершины K_n, $Z_j = \{I\{(v_i, v_j) \in E(G(n,p))\} : i < j\}$ — случайный вектор из $(j-1)$-го индикатора. Такой процесс неформально «проявляет» вершины по одной.

Таким образом, нас интересуют характеристики, которые слабо меняются при добавлении и удалении вершины:

- хроматическое число
- число независимости, кликовое число

Упражнение 3. $\forall \delta > 0$ выполнено

$$\frac{\alpha(G(n,p)) - E\alpha(G(n,p))}{n^{\frac{1}{2}+\delta}} \xrightarrow{P} 0.$$

29 Число независимости случайного графа

Нас интересует три режима (анонсируем ответы):

- $p = const \in (0,1)$, независимое множество в этом случае порядка $\ln n$

- $pn \to +\infty$, $\alpha(G(n,p)) \sim \frac{\ln np}{p}$
- $p = \frac{c}{n}, c > 0$, $\alpha(G(n,p)) \sim n$

Теорема 41 (о числе независимости)**.** *Пусть $p \in (0,1)$ — фиксировано, $b = \frac{1}{1-p}$. Для фиксированного $\varepsilon > 0$ введем*

$$k_{-\varepsilon} = \left\lfloor 2\log_b n - 2\log_b \log_b n + 2\log_b \frac{e}{2} + 1 - \varepsilon \right\rfloor,$$

$$k_{+\varepsilon} = \left\lceil 2\log_b n - 2\log_b \log_b n + 2\log_b \frac{e}{2} + 1 + \varepsilon \right\rceil.$$

Тогда $P(k_{-\varepsilon} \leqslant \alpha(G(n,p)) \leqslant k_{+\varepsilon} - 1) \to 1$.

Доказательство. Пусть X_k — число независимых множеств размера k. Тогда $EX_k = C_n^k (1-p)^{C_k^2}$.

Покажем, что $X_{k_{-\varepsilon}} \to +\infty$, а $X_{k_{+\varepsilon}} \to 0$.

Если $k = \Theta(\ln n)$, то

$$EX_k \sim \frac{n^k}{k!} b^{C_k^2} \sim \left(\frac{en}{k}\right)^k \sqrt{2\pi k} b^{-C_k^2} =$$
$$= b^{-C_k^2 + k\log_b n + k\log_b e - k\log_b k + \frac{1}{2}\log_b k + O(1)} =$$
$$= b^{k(\log_b n + \log_b e - \log_b k - \frac{k}{2} + \frac{1}{2} + o(1))}$$

При $k = k_{\pm\varepsilon}$ вычислим $\log_b k = \log_b(2\log_b n - 2\log_b \log_b n + O(1)) = \log_b \log_b n + \log_b 2 + \log_b(1 + O(\frac{\log_b \log_b n}{\log_b n})) = \log_b \log_b n + \log_b 2 + o(1)$.

Тем самым

$$\log_b n + \log_b e - \log_b k - \frac{k}{2} + \frac{1}{2} + O(1) =$$
$$= \log_b n - \log_b \log_b n + \log_b \frac{e}{2} + \frac{1}{2} - \frac{k}{2} + o(1)$$

При $k = k_{+\varepsilon}$ это выражение не больше, чем $-\frac{\varepsilon}{2} + o(1)$, значит $EX_{k_{+\varepsilon}} \to 0$. При $k = k_{-\varepsilon}$ это выражение не меньше $\frac{\varepsilon}{2} + o(1)$, то есть $EX_{k_{-\varepsilon}} \to +\infty$.

$P(\alpha(G(n,p)) \geqslant k_{+\varepsilon}) = P(X_{k_{+\varepsilon}} > 0) \leqslant EX_{k_{+\varepsilon}}$. Оценим $DX_{k_{-\varepsilon}}$.

$EX_k^2 = \sum\limits_{l=0}^{k} C_n^k C_k^l C_{n-k}^{k-l} (1-p)^{2C_k^2 - C_l^2}$.

$(EX_k)^2 = \sum\limits_{l=0}^{k} C_n^k C_k^l C_{n-k}^{k-l} (1-p)^{2C_k^2}$.

Тогда $DX_k = \sum\limits_{l=0}^{k} C_n^k C_k^l C_{n-k}^{k-l} (1-p)^{2C_k^2} ((1-p)^{-C_l^2} - 1)$.

Отсюда (отбросим два первых слагаемых, они 0):

$$\frac{DX_k}{(EX_k)^2} = \sum_{l=2}^{k} \frac{C_k^l C_{n-k}^{k-l}}{C_n^k} (b^{C_l^2} - 1) \leqslant \sum_{l=2}^{k} \frac{C_k^l C_{n-k}^{k-l}}{C_n^k} b^{C_l^2} = \sum_{l=2} F_l$$

Найдем наибольшее слагаемое в сумме:

$$\frac{F_{l+1}}{F_l}=\frac{C_l^kC_{n-k}^{k-l}}{C_k^{l+1}C_{n-l}^{k-l-1}}b^{C_l^2-C_{l+1}^2}=\frac{(l+1)(n+l+1-2k)}{(k-l)(k-l)}b^{-l}=[k\sim 2\log_b n].$$

Пусть $i_0=\min\{l:F_l<F_{l+1}\}$. Ясно, что $i_0\sim\log_b n$. Наша цель: показать, что F_l сначала убывают, потом возрастают, то есть максимум где-то на концах. Если $i_0\leqslant l\leqslant i_0+\sqrt{k}$:

$$\frac{F_l}{F_{l+1}}\sim\frac{2n}{k}b^{-l}=\frac{2n}{k}b^{-i_0}b^{i_0-l}\sim\frac{F_{i_0}}{F_{i_0+1}}\frac{1}{b}<\frac{1}{b}(1+o(1))<1$$

Если же $i_0>i_0+\sqrt{k}$, то

$$\frac{F_l}{F_{l+1}}=O(\ln n\cdot n\cdot b^{-l})=O(n\ln nb^{-\frac{k}{2}-i_0-\sqrt{k}})=O(b^{\ln\ln n-\sqrt{k}})\to 0$$

Вывод: максимумальное слагаемое либо F_2, либо F_k. Отсюда

$$\frac{DX_k}{(EX_k)^2}\leqslant(F_2+F_k)(k-2)\leqslant(k-2)\left(\frac{C_k^2C_{n-k}^{k-2}}{C_n^k}+\frac{1}{C_n^k}b^{C_k^2}\right)=$$
$$=\left[\frac{1}{C_n^k}b^{C_k^2}=\frac{1}{EX_k}\leqslant b^{-k(\frac{\varepsilon}{2}+o(1))}\right]=O\left(\frac{k^5}{n^2}+b^{-k(\frac{\varepsilon}{2}+o(1))}\right)\to 0$$

□

30 Случайный граф в динамике

Пусть $p=const$. Мы можем строить граф $G(n,p)$ добавлением одной вершины, так как p не зависит от n. В итоге получится счетный граф $G(\mathbb{N},p)$. $\alpha(G(n,p))$ не уменьшается. Мы можем указать две границы n_r,n_r', такие что между ними число независимости будет r.

Пусть $\varepsilon\in(0,\frac{1}{2})$. Для фиксированного $r\in\mathbb{N}$. Положим $E(n,r)=C_n^r(1-p)^{C_r^2}$. Определим:

$n_r=\max\{n:E(n,r)\leqslant r^{-(1+\varepsilon)}$.

$n_r'=\min\{n:E(n,r)\leqslant r^{1+\varepsilon}$.

По доказанной теореме $n_r\sim n_r'\sim\frac{r}{e}n^{\frac{r-1}{2}}$. $n_r<n_r'$ и $n_r'-n_r<\frac{5\ln r}{2r}n_r$. Тогда при больших r: $n_r<n_r'<n_{r+1}$.

Теорема 42. *С вероятностью 1 последовательность графов $\tilde{G}(n,p)$ в модели $G(\mathbb{N},p)$ удовлетворяет для всех достаточно больших r свойству:*

$$\alpha(\tilde{G}(n,p))=r\forall n\in[n_r',n_{r+1}].$$

Доказательство. В силу определения n_r, n'_r, $r = \Theta(\log_b n'_r)$, значит из доказательства предыдущей теоремы

$$P(\alpha(G(n,p)) < r) \leqslant F_2 + F_r + (r-3)(F_3 + F_{r-1}) \leqslant$$
$$\leqslant 2\frac{br^4}{(n'_r)^2} + \frac{1}{E(n'_r, r)} + r\left(2\frac{b^3r^6}{(n'_r)^3} + \frac{rn'_r b^{-(r-1)}}{E(n'_r, r)}\right) \leqslant \left[n'_r \sim \frac{r}{e} b^{\frac{r-1}{2}}\right] \leqslant$$
$$\leqslant \frac{4br^4}{(n'_r)^4} + \frac{1}{E(n'_r, r)} + \frac{\frac{2r^2}{l} b^{-\frac{(r-1)}{2}}}{E(n'_r, r)} \leqslant [r \text{ достаточно велико}] \leqslant \frac{2}{r^{1+\varepsilon}}$$

Кроме того, $P(\alpha(\tilde{(G)}(n_{r+1}, p)) \geqslant r+1) \leqslant E(n_{r+1}, r+1) \leqslant r^{-(1+\varepsilon)}$, значит, в силу вложенности графов $\tilde{G}(n,p)$, получаем, что

$$P(\exists n : [n'_r, n_{r+1}] : \alpha(\tilde{G}(n,p)) \neq r) \leqslant$$
$$\leqslant P(\alpha(\tilde{G}(n'_r, p)) < r) + P(\alpha(\tilde{G}(n_{r+1})) \geqslant r+1) \leqslant 3r^{-(1+\varepsilon)}$$

Сумма $\sum r^{-(1+\varepsilon)} < +\infty$, поэтому по лемме Борелля-Кантелли с вероятностью 1 выполнено лишь конечное число событий из $\{\exists n \in [n'_r; n_{r+1}] : \alpha(\tilde{G}(n,p)) \neq r\}$. ☐

Следствие. *Пусть* $p \in (0,1)$ *— константа.* $b = \frac{1}{p}$. *Для* $\varepsilon > 0$ *положим*
$k_{+\varepsilon} = \left\lceil 2\log_b n + 2\log_b \log_b n + 2\log_b \frac{e}{2} + 1 + \varepsilon \right\rceil$.
$k_{-\varepsilon} = \left\lfloor 2\log_b n + 2\log_b \log_b n + 2\log_b \frac{e}{2} + 1 - \varepsilon \right\rfloor$.
Тогда $P(k_{-\varepsilon} \leqslant \omega(G(n,p)) \leqslant k_{+\varepsilon} - 1) \to 1$.

Теорема 43 (Фриз). *Для* $\forall \varepsilon > 0 \exists d_\varepsilon > 0$ *такое, что при* $d_\varepsilon \leqslant np = o(n)$ *выполнено:*

$$P\left(\left|\alpha(G(n,p)) - \frac{2}{p}(\ln(np) - \ln\ln(np) - \ln 2 + 1)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{p}\right) \to 1.$$

Мы знаем, что $\chi(G) \geqslant \frac{n}{\alpha(G)}$.

Следствие. *Пусть* $p = const \in (0,1)$, $b = \frac{1}{1-p}$, *тогда*

$$P\left(\chi(G(n,p)) \geqslant \frac{n}{2\log_b n - 2\log_b \log_b n + O(1)}\right) \to 1$$

Наивный жадный алгоритм дает порядка $\frac{n}{\log_b n}$ цветов. Можно действовать иначе: брать максимальное независимое множество и красить его в отдельный цвет. Оказывается, это даёт почти оптимальную оценку.