Содержание

1 Введение

Что будет затронуто:

- Введение в функциональный анализ
- Алгебраические структуры, геометрия графов
- Спектральная теория
- Гармонический анализ
- Приложения к дискретной математике

2 Алгебраические структуры

Определение 1. Напоминание определений основных структур:

- Полугруппа — множество с ассоциативной операцией.
- Полугруппа с единицей.
- Группа — множество с обратимой ассоциативной операцией.

  В том числе свободная группа и группа, заданная соотношениями $G = \langle S \mid \mathcal{A} \rangle$.

  Автоматные группы. Пусть задан конечный преобразователь F с двумя состояниями $\{a, b\}$. Несколько преобразователей можно комбинировать. Получился моноид. $G(\mathcal{A}) = \langle \mathcal{A}_a, \mathcal{A}_b \rangle$, где $\mathcal{A}$ — обратимый преобразователь, $\mathcal{A}_x$ — преобразователь с начальным состоянием x.

3 Немного конечномерной линейной алгебры

Рассмотрим вычисление аналитических функций от матриц. $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$.

Метод: применение интерполяционных многочленов. Если оператор диагонализуем, то все ясно, нужно знать только $f(\lambda_i)$. Утверждается, что всегда работает следующее: для каждой Жорданового блока запишем $P(\lambda_1) = f(\lambda_1), \ldots, P^{(r_1-1)}(\lambda_1) = f^{(r_1-1)}(\lambda_1)$, где r_1 — кратность λ_1, интерполируем это и вычислим $P(A)$.

4 Ещё немного о разных группах

Определение 2. Пусть есть последовательность F_n, тогда если $\frac{\lambda(F_n \oplus (\delta + F_n))}{\lambda(F_n)} \to 0$ для всех $z \in K$-компакта, то эти множества называются Фёльнеровскими.

Определение 3. Аменабельная группа G — такая группа, в которой есть «последовательность» Фёльнеровских множеств F_n.

Утверждается, что если вероятность случайного блуждания вернуться в 1 за n шагов стремится к 0 очень быстро, то группа не аменабельна.

С неаменабелностью SO(3) связан парадокс Банаха-Тарского.

Насчёт автоматных групп: их можно представлять как некоторые преобразования бинарного дерева. Необходимым условием обратимости, конечно, является обратимость преобразования дерева.

Такие автоматы порождают 5 интересных групп, которые мы точно будем рассматривать.

Упражнение 1. Дискретное преобразование Фурье в $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_8$: спектр, СЗ, СВ, как все устроено.

5 Общая конструкция преобразования Фурье

Пусть есть топологическая группа G. Опредеделим характер $\gamma \in Hom(G, S^1), S^1 = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\})$, притом потребуем того, что γ — непрерывен.

Определение 4. Дуальная группа $\hat{G} = \{\gamma\}$ определена поточечным умножением характеров.

Теорема 1 (Понтрягина о двойственности)**.** *Если G — абелева топологическая группа, тогда $\hat{\hat{G}} = G$.*

При этом, если G — компактна, то $\hat{G}$ — дискретна. Если G — дискретна, то $\hat{G}$ — компактна.

Топологические группы с нестандартной топологией могут быть представлены как стандратные топологии на смежных классах $G/H, H < G$.

Упражнение 2. Можно ли придумать нестандартную топологию на конечной группе, которая не встречатеся среди стандартных групповых топологий?

Определение 5. Преобразование Фурье: $F : f(x) \mapsto \hat{f}(\gamma) = \int\limits_G f(x)\overline{\gamma(x)}d\mu$, где μ — левая мера Хаара.

Характеры $\mathbb{R} : \gamma_t(x) = \exp(2\pi itx), t \in \mathbb{R}, \hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$. Преобразование Фурье выглядит так: $\hat{f}(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\exp(-2\pi itx)dx$.

Тор $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, его характеры $\gamma_t = \exp(2\pi itx), t \in \mathbb{Z}$, дуальная группа $\hat{\mathbb{T}} = \mathbb{Z}$. Преобразование Фурье: $\hat{f}(j) = \int\limits_0^1 f(x)\exp(-2\pi ijx)dx$.

Соответственно $\hat{\mathbb{Z}} = \mathbb{T}$, так как достаточно задать $\gamma(1) = \exp(2\pi i\alpha)$.

Для $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ характеры такие: $\gamma_j(x) = \exp(2\pi i\frac{jx}{n})$, $\hat{f}(j) = \sum\limits_{x=0}^{n-1} f(x)\exp(-2\pi i\frac{jx}{n})$.

Упражнение 3. Топология на $\mathbb{Z}_{(2)}$ — односторонние двоичные последовательности со сложением. Проверить, что это компактная группа.

Упражнение 4. Преобразование Фурье на $\mathbb{Z}_2^n$.

6 Нормы на $\mathbb{Q}$

Теорема 2. *Существуют следующие (мультипликативные) нормы на* $\mathbb{Q}$*:*

- *тривиальная*
- *стандартная:* $|x| = xsgn(x)$
- *p-адическая,* $|x|_p = |\frac{a}{p^k}| = p^k$*,* p *— простое.*

Упражнение 5. Если двигаться шагами по 2^k с весом 2^{-k} от точки 0 к точке $x \in \mathbb{Z}$, то чему равен вес кратчайшего пути?

Упражнение 6. $G = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & \frac{1}{a} \end{bmatrix} \right\}$. Найти левую и правую меру Хаара.

Если пополнить p-адические числа, получим $\mathbb{Q}_{(p)} = [\mathbb{Q}]_{|\cdot|_p}$. Числа там имеют вид $\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} x_j p^j$. Можно выделить абелеву подгруппу $\mathbb{Z}_{(p)}$ с числами, где нет отрицательных j.

Упражнение 7. $\mathbb{Z}_{(p)}$ — компактно.

Упражнение 8. $\mathbb{Z}_{(p)}$ — гомеоморфно p-ичному дереву и канторовскому множеству.

Упражнение 9. Записать $-1, \frac{1}{2}$ как p-адическую дробь.

Упражнение 10 (∗∗)**.** Исследовать в p-адических числах $e^t = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots$.

Упражнение 11. Доказать, что $T : x \mapsto x+1$ непрерывно, сохраняет меру Хаара, и что все сдвиги на этой группе $R_a : x \mapsto x + a$ сводятся к T.

Упражнение 12. Найти меру Хаара этой группы.

Упражнение 13. Проверить, что характеры $\mathbb{Z}_{(p)}$ — это $\gamma_{\frac{\alpha}{p^k}}(x) = \exp(2\pi i \frac{\alpha}{p^k} x)$.

7 Обыкновенные производящие функции

$f(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n t^n \leftrightarrow (x_0, \ldots, x_n, \ldots)$. С помощью них можем суммировать какие-то простые ряды и прочее.

Кстати, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim_{t\to 1}(1-t)f(t)$.

Тривиальная производящая функция: $1, 1, 1, \ldots \sim \frac{1}{1-t}$.

Факториалы: $1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \ldots \sim e^t$.

Дельта-функция: $1, 0, 0, \ldots \sim 1$.

Биномиальные коэффиенты: $C_n^k \sim (1+t)^k$.

Упражнение 14. Производящая функция $C_n^{k_0}$ (k_0 фиксированно).

Соображение: В 90% случаев можно искать решение в виде: $f(t) = \frac{\mu}{1-t} + \psi(t)$, где ψ — регулярная.

Рассмотрим: $x_{n+1} = \frac{nx_n + x_{n-1}}{n+1}$.

$f(t)$	$f'(t)$
$\sum x_n t^n$	$\sum n x_n t^{n-1}$
$\sum x_{n+1} t^{n+1}$	$\sum (n+1) x_{n+1} t^n$
$\sum x_{n-1} t^{n-1}$	$\sum (n-1) x_{n-1} t^{n-2}$

$$\begin{aligned}
(n+1)x_{n+1} &= nx_n + x_{n-1} \\
f' &= tf' + tf \\
(1-t)f' &= tf + x_1 \\
\frac{df}{f} &= \frac{tdt}{1-t} \\
f = -t + \int \frac{dt}{1-t} &= -t - \ln(1-t) + c \\
c\frac{e^{-t}}{1-t}(1-t) = x_1 = \int x_1 e^t dt &= x_1 e^t + c_0 \\
f(t) &= \frac{x_1 + (x_0 - x_1)e^{-t}}{1-t}
\end{aligned}$$

Упражнение 15. Какое отношение эта задача имеет к числу беспорядков на n элементах?

8 Подсчёт структур с помощью экспоненциальных производящих функций

Будем рассматривать функции вида $f(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x_n t^n$. С помощью них будем считать число каких-то интересных множеств с точностью до размера.

$1, 1, 1, \ldots$	$f(t) = e^t$	тривиальная, $P(A) = T$
$1, 0, 0, \ldots$	$f(t) = 1$	$P(A) = (A = \varnothing)$
$0, 1, 0, \ldots$	$f(t) = x$	$P(A) = (\lvert A \rvert = 1)$
$0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots$	$f(t) = \frac{x^k}{k!}$	$P(A) = (\lvert A \rvert = k)$

Можем складывать, если уверены в дизъюнктности.

Умножение соответствует разбиению на два множества, каждое со своей структурой.

К примеру две тривиальных функции: $e^t \cdot e^t = e^{2t} = \sum 2^n \frac{t^n}{n!}$, количество подмножеств, что и должно было получиться.

Числа Белла: $(e^t - 1)$ — непустота, значит разбиения это $e^{e^t - 1}$.

Число перестановок: выбираем первый элемент, остальное должно иметь упорядоченную структуру. То есть $tf(t) = f(t) - 1$ (минус один важно не забыть, потому что нельзя выбрать один элемент из пустого множества). Итого получаем $f(t) = \frac{1}{1-t}$.

Беспорядки: все есть сумма $\frac{1}{1-t} = f_0 + \ldots + f_n + \ldots$, где f_i — число перестановок с i неподвижными точками. $f_k = \frac{x^k}{k!} f_0$, так как перестановка с k неподвижными точками — это разбиение на k точек и беспорядок. Итого $f = \frac{e^{-t}}{1-t}$, вычет в 1 равен e^{-1}.

Логарифмирование. Рассмотрим $e^{L(t)} = \frac{1}{1-t}$. Перестановка разбивается на циклы, число таких циклических упорядочиваний получается $L(t) = -\ln(1-t) = -(-t - \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} + \ldots) = \sum \frac{t^n}{n!}(n-1)!$, как и должно было получиться.

Производная соответствует удалению одного элемента. Например, $f'(t) = f \cdot f = f^2$ — удаление одного элемента из перестановки это тоже самое, что разбиение на два множества — до и после этого элемента.