Задание 6 по случайным графам

Дмитрий Иващенко

14 мая 2018 г.

Задача 1

Воспользуемся мартингалами вершинного типа. Пусть $v_1, \dots, v_n$ — вершины $G(n,p)$, а $Z_j = (I((v_i, v_j) \in E) \mid i < j)$ — случайный вектор размерности j. Введём функцию $f(x_1, \dots, x_n)$, которая будет равна $\chi(G)$ либо $\alpha(G)$, либо $\omega(G)$. Заметим, что при изменении значений индикаторов у одной вершины значение функции изменится не более, чем на 1: для клики и числа независимости эта вершина никак не влияет на остальные, поэтому она может либо войти либо не войти в клику/число независимости, а для хроматического числа для нее может потребоваться один новый цвет (ну или наоборот, можно будет обойтись без бывшего цвета этой вершины). Так или иначе:

$$\forall i \forall x_i, y_i \ |f(z_1, \dots, x_i, \dots, z_n) - f(z_1, \dots, y_i, \dots, z_n)| \leqslant 1.$$

Тогда из неравенства Азумы-Хёффдинга

$$P(|X - EX| > \varepsilon n^{\frac{1}{2}+\delta}) \leqslant 2\exp\left(-\frac{n^{1+2\delta}}{2n}\right) = 2\exp\left(-\frac{1}{2}n^{2\delta}\right) \to 0.$$

Задача 2

Рассмотрим $d_\varepsilon < \alpha = np = o(n)$, $k = \frac{2}{p}\left(\ln\alpha - \ln\ln\alpha - \ln 2 + 1 + \varepsilon\right)$, $b = \frac{n}{k} = \frac{\alpha}{2(\ln\alpha - \ln\ln\alpha - \ln 2 + 1 + \varepsilon)}$.

Будем доказывать по методу первого момента, для этого нужно показать, что $EX_k \to 0$, где X_k — число независимых множеств размера k.

$$EX_k = C_n^k (1-p)^{C_k^2}.$$

$$C_n^k \leqslant \left(\frac{n}{k}\right)^k \left(\frac{n}{n-k}\right)^{n-k} \leqslant b^k \left(\frac{n}{n-\frac{n}{b}}\right)^{n-k} = b^k \left(\frac{b}{b-1}\right)^{n-k} =$$
$$= b^n (b-1)^{-n+\frac{n}{b}} = b^n (b-1)^{-n\left(\frac{b-1}{b}\right)}$$

$$(1-p)^{\frac{k(k-1)}{2}} = \exp\left(\frac{k(k-1)}{2}\ln(1-p)\right) \leqslant \exp\left(-\frac{pk^2}{2}+pk\right) = \exp\left(-\frac{pn^2}{2b^2}+\frac{pn}{b}\right)$$

Итого, заносим все под экспоненту и получаем

$$EX_k \leqslant \exp\left(\frac{n}{b}(b\ln b-(b-1)\ln(b-1)-\frac{\alpha}{2b}+\frac{\alpha}{n}\right) =$$
$$= \exp\left(\frac{2}{p}(\ln\alpha-\ln\ln\alpha-\ln 2+1+\varepsilon)\left(b\ln b-(b-1)\ln(b-1)-\frac{\alpha}{2b}+\frac{\alpha}{n}\right)\right)$$

$p=o(1)$, поэтому $\frac{2}{p}\to\infty$, множитель $(\ln\alpha-\ln\ln\alpha-\ln 2+1+\varepsilon)$ не меньше, чем $\ln d_\varepsilon-\ln\ln d_\varepsilon-const$, что можно сделать достаточно большой положительной константой. Обратимся к последнему множителю, покажем, что он отрицателен и отделён от 0.

Во-первых, $\alpha=o(n)\Rightarrow\frac{\alpha}{n}=o(1)\to 0$.

Во-вторых, рассмотрим $f(x)=x\ln x-(x-1)\ln(x-1)$. Разложение в $x\to\infty$ даёт $f(x)=\ln x+1+O\left(\frac{1}{x}\right)$, поэтому так как $b=\frac{\alpha}{2(\ln\alpha-\ln\ln\alpha-\ln 2+1-\varepsilon)}\sim\frac{\alpha}{2\ln\alpha}$ можно сделать достаточно большим при достаточно большом d_ε, то можем считать, что $b\ln b-(b-1)\ln(b-1)$ отличается от $\ln b+1$ не более, чем на $\frac{\varepsilon}{2}$.

Таким образом, получаем, что последний множитель не больше, чем

$$\ln b+1-\ln\alpha+\ln\ln\alpha+\ln 2-1-\frac{\varepsilon}{2} =$$
$$= \ln\left(\frac{\alpha}{2(\ln\alpha-\ln\ln\alpha-\ln 2+1+\varepsilon)}\right)-\ln\alpha+\ln\ln\alpha+\ln 2-1-\frac{\varepsilon}{2} =$$
$$= \ln\alpha-\ln 2-\ln(\ln\alpha-\ln\ln\alpha-\ln 2+1+\varepsilon)-\ln\alpha+\ln\ln\alpha+\ln 2-1-\frac{\varepsilon}{2} =$$
$$= \ln\left(\frac{\ln\alpha}{\ln\alpha-\ln\ln\alpha-\ln 2+1+\varepsilon}\right)-\frac{\varepsilon}{2}$$

При достаточно большом d_ε это не больше, чем $-\frac{\varepsilon}{4}$, что нам и нужно. Значит выражение под экспонентой стремится к $-\infty$, то есть $EX_k\to 0$.

Задача 3

Пусть граф k-вырожден, то есть $D(G)=k$. Тогда индукцией легко показать, что он красится в $k+1$ цвет: в самом деле, выберем вершину степени не более k, индуктивно покрасим все остальное в $k+1$ цвет, оставшейся вершине по принципу Дирихле найдётся подходящий цвет, так как соседей у неё всего k.

Пусть теперь $2m(G)$ это некотрое число x. Докажем, что наш граф $\lfloor x\rfloor$-вырожден. Рассмотрим любой подграф на k вершинах, его плотность не больше $\frac{x}{2}$. Значит, в нём не более $\frac{kx}{2}$ рёбер. Тогда суммарная степень не больше kx, а средняя степень не превышает x, а значит найдётся вершина степени не больше $\lfloor x\rfloor$.

Задача 4

Распишем сразу неравенство Чернова для относительного уклонения:

$$P(X > (1+\delta)\mu) \leqslant \left(\frac{e^\delta}{(1+\delta)^{1+\delta}}\right)^\mu \leqslant \exp(-\mu((1+\delta)\ln(1+\delta)-\delta)) =$$
$$= \exp\left(-\mu(1+\delta)\left(\ln(1+\delta)-1+\frac{1}{1+\delta}\right)\right)$$

Обозначим $t = 1+\delta$, тогда $P(X > t\mu) \leqslant \exp\left(-t\mu\left(t-1+\frac{1}{t}\right)\right) \leqslant \exp\left(-t\mu\left(t-1\right)\right)$.

Далее, нужно оценить вероятность подграфа размера k иметь больше, чем $m(F)k$ рёбер. То есть $\mu = \frac{k(k-1)p}{2}, t = \frac{2m(F)}{(k-1)p}$. Если $\sum\limits_{k=1}^{s} C_n^k P_s \to 0$, то по методу первого момента а.п.н. подргафов с «плохой» плотностью нет.

a) $t = \frac{2n}{(k-1)\ln^2(np)}$, отсюда:

$$P(X \geqslant m(F)k) \leqslant \exp\left(-\frac{npk}{\ln^2(np)}\left(\frac{2n}{(k-1)\ln^2(np)}-1\right)\right) =$$
$$= \exp\left(-\frac{2n^2p}{\ln^4 np}\frac{k}{k-1}+\frac{npk}{\ln^2(np)}\right) \leqslant \exp\left(-\frac{2n^2p}{\ln^4 np}+\frac{n^2p}{2\ln^4(np)}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \exp\left(-\frac{3}{2}\frac{np}{\ln^4(np)}\cdot n\right)$$

Оцениваем теперь сумму:

$$\sum_{k=1}^{\frac{n}{2\ln^2(np)}} C_n^k \exp\left(-\frac{3}{2}\frac{np}{\ln^4(np)}\cdot n\right) \leqslant \exp\left(-\frac{3}{2}\frac{np}{\ln^4(np)}\cdot n\right) 2^{H\left(\frac{1}{2\ln^2(np)}\right)n}$$

Здесь $H(x) = -x\log_2(x) - (1-x)\log_2(x)$ — энтропийная функция.

Ясно, что выбором достаточно большой константы C_0 $\frac{np}{\ln^4(np)}$ можно сделать достаточно большим, а $\frac{1}{2\ln^2(np)}$ достаточно малым, чтобы последнее выражение стремилось к 0.

b) $t = \frac{2\ln^3 n}{(k-1)p}$, отсюда:

$$P(X \geqslant m(F)k) \leqslant \exp\left(-k\ln^3 n\left(\frac{2\ln^3 n}{(k-1)p}-1\right)\right) = \exp\left(-\frac{k}{k-1}\frac{\ln^6 n}{p} - k\ln^3 n\right) \leqslant$$
$$\leqslant \exp\left(-\frac{\sqrt{n}}{\ln^4 n} - 2\sqrt{n}\ln^{3.5} n\right) = \exp\left(-\sqrt{n}\ln^4 n(1+o(1))\right)$$

Теперь оценим

$$\sum_{k=1}^{2\sqrt{n\ln n}} C_n^k \leqslant 2\sqrt{n\ln n}\left(\frac{ne}{2\sqrt{n\ln n}}\right)^{2\sqrt{n\ln n}} =$$

$$= \exp\left(\ln 2 + \frac{1}{2}\ln n + \frac{1}{2}\ln\ln n + 2\sqrt{n\ln n}\left(\ln n + 1 - \ln 2 - \frac{1}{2}\ln n - \frac{1}{2}\ln\ln n\right)\right) =$$

$$= \exp\left(2\sqrt{n\ln n}(o(1) + \frac{1}{2}\ln n + 1 - \ln 2 - \frac{1}{2}\ln\ln n)\right) = \exp\left(\sqrt{n}\ln^{1.5} n(1+o(1))\right).$$

Очевидно, что произведение оценок стремится к 0.

c) $t = \frac{2.9}{(k-1)p}$, отсюда:

$$P(X \geqslant m(F)k) \leqslant \exp\left(-1.45k\left(\frac{2.9}{(k-1)p} - 1\right)\right) = \exp\left(-\frac{1.49\cdot 2.9}{p}\frac{k}{k-1} + 1.45k\right) \leqslant$$

$$\leqslant \exp(-4.2n^{\frac{6}{7}} + 1.45\cdot 70\sqrt{nln}) = \exp\left(-4.2n^{\frac{6}{7}}(1+o(1))\right)$$

Теперь оценим аналогично предыдущему пункту

$$\sum_{k=1}^{70\sqrt{n\ln n}} C_n^k \leqslant \exp(35\sqrt{n}\ln^{1.5} n(1+o(1)).$$

Снова, произведение оценок стемится к 0.

Задача 5

Мы знаем, что при $np = 1.001$ размер гигантской компоненты, делёный на n по вероятности стремится к β, где $\beta + e^{-\beta p} = 1$, то есть $\beta \approx 0.002$. Если же np меньше, то наибольшая компонента будет меньше.

Тогда, если мы докажем, что компонент размера, скажем, $0.05n$ с плохой плотностью а.п.н. не существует, то и плотность всего графа будет а.п.н. хорошая.

Оценим ожидаемое число подграфов размера не более $0.05n$ с плотностью больше, чем 1.45. Для фикисрованного $k \leqslant 0.05n$: $P(X \geqslant 1.45k) = P(X \geqslant y\lambda) \leqslant \exp(-y\lambda(y-1))$, где $\lambda = \frac{k(k-1)c}{2n}$, $y = \frac{1.45k}{\lambda} = \frac{2.9n}{c(k-1)} \geqslant 1$. Получаем:

$$P(X \geqslant 1.45k) \leqslant \exp\left(-1.45k\left(\frac{2.9n}{(k-1)c} - 1\right)\right) \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left(-1.45\frac{k}{k-1}\frac{2.9n}{c} + 1.45k\right) \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left(-\frac{1.45\cdot 2.9}{c}n + 0.08n\right) \leqslant \exp(-4n)$$

Тогда $\sum\limits_{k=1}^{0.05n} C_n^k \exp(-4n) \leqslant \exp(-4n)2^{H(0.05)n} \leqslant e^{-4n+0.2n} \leqslant e^{-3n} \to 0.$

Задача 6

Рассмотрим индикаторы C_n^2 рёбер, возможные циклы на $l = 2\lceil \ln\ln n \rceil + 1$ вершины и соответствующие им случайные величины X_A из неравенства Янсона.

Здесь и далее, там как $l = o(\sqrt{n})$, то все $C_{n-a}^b)$ оценены как $\frac{n^b}{b!}(1 + o(1))$ (там где $a = O(l), b = O(l)$).

Вычислим матожидание числа циклов: $\lambda = EX = C_n^l \frac{(l-1)!}{2} p^l \sim \frac{n^l}{l!}\frac{(l-1)!}{2}\frac{c^l}{n^l} \sim \frac{c^l}{l}$.

Далее будем оценивать величину $\overline{\Delta}$ сверху следующим образом. Нам нужно оценить вероятность появления двух пересекающихся циклов. Пусть циклы пересекаются по $1 \leqslant k \leqslant l-2$ рёбрам и имеют $k+q$ общих вершин, $1 \leqslant q \geqslant k$. Тогда будем оценивать сверху вероятность появления ориентированной пары таких циклов (оценка увеличится еще в 2 раза, ну и ладно):

- Выберем множество из $k+q$ вершин из n: C_n^{k+q}
- Выберем позиции этих вершин в первом цикле и во втором: $(A_l^{k+p})^2$. Тут мы можем выбрать невозможные варианты, например, если одна вершина не соседняя ни с кем, но у нас оценка сверху
- Выберем из $(n-k-q)$ неиспользованных вершин по порядку $l-k-q$, чтобы дополнить первый цикл: A_{n-k-q}^{l-k-q}
- Выберем из $(n-l)$ неиспользованных вершин по порядку $l-k-q$, чтобы дополнить второй цикл: A_{n-l}^{l-k-q}
- Всего проведено рёбер $2l-k$, поэтому вероятность p^{2l-k}
- Отдельно надо учесть совпадающие циклы
- В сумме также будут слагаемые с $k+q > l$, но оценка сверху

Итого:

$$\overline{\Delta} \leqslant \lambda + \sum_{k=1}^{l-2}\sum_{q=1}^{k} C_n^{k+q}(A_l^{k+q})^2 A_{n-k-q}^{l-k-q} A_{n-l}^{l-k-q} p^{2l-k} \leqslant$$

$$\leqslant \lambda + \sum_{k=1}^{l-2}\sum_{q=1}^{k} \frac{n^{k+q}}{(k+q)!} l^{2k+2q} n^{l-k-q} n^{l-k-q} \frac{c^{2l-k}}{n^{2l-k}} \leqslant$$

$$\leqslant \lambda + \sum_{k=1}^{l-2} c^{2l-k} l^{2k} \sum_{q=1}^{k} \left(\frac{l^2}{n}\right)^q \leqslant \lambda + \sum_{k=1}^{l-2} c^{2l-k} l^{2k} \frac{l^2}{n}\frac{n}{n-l^2} =$$

$$= \lambda + (1+o(1))\frac{l^2}{n} c^{2l} \sum_{k=1}^{l-2}\left(\frac{l^2}{c}\right)^k = \lambda + (1+o(1))\frac{l^2}{n} c^{2l} l^{2l-2} c^{1-l} \frac{1}{\frac{l^2}{c}-1} =$$

$$= \lambda + (1+o(1))\frac{c^{l+2}}{n} l^{2l-2}$$

Отсюда $P(X=0) \leqslant \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\frac{c^{2l}}{l^2}}{\frac{c^l}{l}+(1+o(1))\frac{c^{l+2}l^{2l-2}}{n}}\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\frac{c^l}{l}}{1+(1+o(1))\frac{c^2 l^{2l-1}}{n}}\right) =$ $\exp\left(-\frac{c^l}{2l}(1+o(1))\right) = o\left(\frac{1}{\ln n}\right)$ с запасом при $c > 1$.

Задача 7

Во-первых, заметим, что пороговая вероятность $\frac{1}{n}$. При $p = o\left(\frac{1}{n}\right)$ граф состоит из деревьев и поэтому двудолен, при $p = \frac{w(n)}{n}$ есть треугольник. Даже более того, по задаче 6 при $p = \frac{1+\varepsilon}{n}$ есть цикл нечетной длины, то есть с одной стороны порог точный.

Осталось показать, что при $np = c < 1$ граф имеет ненулевой и не единичный шанс быть двудольным. По Пуассоновской предельной теореме, так как цикл длины 3 является строго сбалансированным графом, то $X_{C_3} \to Pois\left(\frac{(1-\varepsilon)^3}{6}\right)$. Таким образом $P(X_{C_3} = 0) \to \exp\left(-\frac{(1-\varepsilon)^3}{6}\right)$. С другой стороны, мы знаем, что число вершин в унициклических компонентах имеет известное константное при фиксированном c матожидание. Аналогично тому рассуждению, унициклические компоненты с нечетным циклом имеют константное матожидание, значит $P(X_{odd} \geqslant 1) \leqslant \frac{1}{C}$, то есть имеется нетривиальная вероятность того, что унициклических компонент с нечётным циклом не будет.