Содержание

1 Введение

Рассматриваем задачу $f_0(x) \to extr, x \in A \subset X, f_0(x) : X \to \mathbb{R}$.
Темы и сюжеты, которые будут обсуждаться:

- Конечномерный принцип Лагранжа
- Дифференцирование в нормированных пространствах и бесконечномерный принцип Лагранжа
- Условия первого порядка в вариационном исчислении, простейшая задача, изопериметрическая задача, задача с подвижными концами
- Условия второго порядка для простейших задач классического вариационного исчисления
- Задача оптимального управления и принцип максимума Понтрягина
- Выпуклые задачи, алгоритмы.

2 Конечномерный принцип Лагранжа

Для начала рассмотрим случай $f_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ с ограничениями-равенствами и неравенствами. $f_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f_0(x) \to \min, f_j(x) \leqslant 0, j = 1, \dots, m', f_k(x) = 0, k = m' + 1, \dots, m$.

Теорема 1 (Ферма, 1638)**.** *Пусть X — банахово, f_0 дифференцируема по Фреше. Тогда если x_0 — $locmin$ функции f_0, то $f'(x_0) = 0$.*

Доказательство. $f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h)$. $f'(x_0) \neq 0 \Rightarrow \exists h_0 : f'(x_0)h < 0 \Rightarrow$ для достаточно малого $\lambda > 0 \to f(x_0 + \lambda h_0) < f(x_0)$, противоречие. □

Соответственно при исследовании мы решали $f_0'(x) = 0$, получали множество точек, считали Гессиан $\langle f_0''(x)h, h\rangle = \left(\frac{\partial^2 f_0}{\partial x_i \partial x_j}\right)$. Необходимо, чтобы он был неотрицательно определён, положительной определённости же достаточно для минимума. Соответственно вопрос сводился к линейной алгебре, где мы пользовались критерием Сильвестра.

Теорема 2 (Теорема Брауэра)**.** *Пусть в конечномерном пространстве $f : B_r(x_0) \to B_r(x_0)$ — непрерывная. Тогда $\exists \hat{x} \in B_r(x_0), f(\hat{x}) = \hat{x}$.*

Следствие (Теорема об ε-сдвиге)**.** *Пусть $\varphi : B_r(0) \to \mathbb{R}^n$ непрерывная, такая что $|\varphi(y) - y| \leqslant \varepsilon \Rightarrow \forall a \in B_{r-\varepsilon}(0) \to \exists \hat{y} : \varphi(\hat{y}) = a$.*

Доказательство. $F(y) = a + y - \varphi(y)$. Покажем, что $F(B_r(0)) \subset B_r(0)$. В самом деле $|F(y)| \leqslant |a| + |y - \varphi(y)| \leqslant r - \varepsilon + \varepsilon = r$. По теореме Брауэра $\exists \hat{y} : F(\hat{y}) = \hat{y} \Rightarrow a + \hat{y} - \varphi(\hat{y}) = \hat{y} \Rightarrow a = \varphi(\hat{y})$. □

Теорема 3 (Правило множителей Лагранжа для задач с равенством)**.** *Рассмотрим задачу* $f_0(x) \to \min, f_j(x) = 0, j = 1, \dots, m$. *Пусть* x_0 — *locmin,* $x \in \mathbb{R}^n, f_j \in D(\mathbb{R}^n)$. *Тогда* $\exists \lambda \in \mathbb{R}^{m+1} : |\lambda| \neq 0, L'_x(x_0) = 0$, *где* $L(x, \lambda) = \sum\limits_{j=0}^{m} \lambda_j f_j(x)$.

Доказательство. Пусть x_0 — locmin, $f(x_0) = 0$. Рассмотрим множество $Y = \{(f'_0(x_0)h, \dots, f'_m(x_0)h) \mid h \in \mathbb{R}^n\} \subset \mathbb{R}^{m+1}$ — линейное подпространство. Рассмотрим два случая:

1) $Y \neq \mathbb{R}^{m+1}$, тогда $\exists \lambda, |\lambda| \neq 0 : \lambda \perp Y \Rightarrow \sum \lambda_j f'_j(x_0) = 0$.

2) $\exists h_j : f'_j(x_0)h_k = \delta_{jk}$. Рассмотрим $\varphi : B_r(0) \to \mathbb{R}^{m+1}$, $(y_0, \dots, y_m) \mapsto (f_0(x_0 + \sum y_j h_j), \dots, f_m(x_0 + \sum y_j h_j))$. Пусть $r > 0$. $f_k(x_0 + \sum y_j h_j) - y_k = 0 + \langle f'_k(x_0), y_k h_k \rangle + o(y) - y_k = o(y)$.

$\varphi(y) - y = o(y), y \to 0, |\varphi(y) - y| < \frac{r}{2} \forall y \in B_r(0)$, по лемме об ε-сдвиге $\exists \hat{y} \in B_r(0) : \varphi(\hat{y}) = \left(-\frac{r}{2}, 0, 0\right)$, противоречие. □

3 Простейшая задача вариационного исчисления

Небольшая известная мотивировочная задача:

Задача (1696, о брахистохроне)**.** Две точки: $(0, 0)$, (a, b). Нужно найти кривую $y(x)$, по которой точка скатится под действием силы тяжести быстрее всего.

Иными словами $\int dt = \int\limits_0^a \sqrt{\frac{1+(y')^2}{2gy}} dx \to \min, y(0) = 0, y(a) = b$

Итак, простейшая задача классического вариационного исчисления: $I(x) = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(t, x, \dot{x}) \to \inf, x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1$.

Определение 1. $\hat{x} \in C^1[t_0, t_1]$ — слабый locmin $\Leftrightarrow \exists \delta > 0 : \forall x : \|x - \hat{x}\|_{C^1} < \delta \Rightarrow I(x) \geqslant I(\hat{x}), x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1$.

Слабым он называется, потому что выбран довольно узкий функциональный класс C^1.

Теорема 4 (Необходимое условие слабого минимума)**.** *Пусть* $\hat{x}$ — *слабый locmin,* $L, L_x, L_{\dot{x}} \in C^1$. *Тогда выполнено уравнение Эйлера-Лагранжа:*

$$-\frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}} + \hat{L}_x = 0$$

Доказательство. Пусть $h \in C^1_0[t_0, t_1]$, то есть $h(t_0) = 0, h(t_1) = 0$. $I(\hat{x} + \lambda h) = \varphi(\lambda)$. Рассмотрим $\varphi'(0) = 0$:

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{L(t, \hat{x} + \lambda h, \dot{\hat{x}}) - L(t, \hat{x}, \dot{\hat{x}})}{\lambda} dt = \int\limits_{t_0}^{t_1} (\hat{L}_x h + \hat{L}_{\dot{x}} \dot{h}) dt = 0 \quad \forall h \in C^1_0$$

Лемма (Дюбуа-Раймон)**.** *Пусть* $a, b \in C[t_0, t_1]$ *и* $\int\limits_{t_0}^{t_1}(a(t)h(t) + b(t)\dot{h}(t))dt = 0 \quad \forall h \in C_0^1$, *тогда* $b \in C^1[t_0, t_1], \dot{b} = a$.

□

4 Интегралы уравнения Эйлера

$-\frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}} + \hat{L}_x = 0$. Иногда можно указать первые интегралы:

- $L = L(t, x), L_x = 0$.
- $L = L(t, \dot{x}), L_{\dot{x}} = 0$, интеграл импульса
- $L = L(x, \dot{x}), H = \dot{x}L_{\dot{x}} - L$ — интеграл энергии

С помощью такого первого интеграла можем сократить себе работу по нахождению брахистохроны, получим в итоге $x = \frac{c}{2}(\tau - \sin\tau), y = -\frac{c}{2}(1 - \cos\tau)$.

Упражнение 1. Сколько есть экстремалей у уравнения Эйлера для брахистохроны? Как ведет себя найденное $\hat{y}$ в окрестности 0? Даёт ли $\hat{y}$ минимум?

Задача (Задача Больца)**.** $B(x) = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(t, x, \dot{x})dt + l(x(t_0), x(t_1)) \to \min$.

Теорема 5 (Необходимое условие)**.** *Пусть* $L, L_x, L_{\dot{x}}, l_{x(t_0}, l_{x(t_1)} \in C, \hat{x}$ — *слабый* $locmin$, *тогда выполнены условия:*

- *Уравнение Эйлера:* $-\frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}} + \hat{L}_x = 0$
- *Условие трансверсальности:* $\hat{L}_{\dot{x}} = (-1)^j \hat{l}_{x(t_j)}$

Доказательство. $\varphi(\lambda) = B(\hat{x} + \lambda h), h \in C^1[t_0, t_1]$. $\varphi'(0) = 0 \Rightarrow$ to be continued (no). □