Содержание

1 Модели случайных графов

Определение 1. *Случайный граф* — случайный элемент со значениями в некотором конечном множестве графов.

Определение 2. *Равномерная модель.* K_n — полный граф, $0 \leqslant m \leqslant C_n^2$, $\mathcal{G}_m$ — множество всех остовных подграфов K_n, имеющих ровно m рёбер. Случайный граф в этой модели — случайный элемент с равномерным распределением на $\mathcal{G}_m$.

$$P(G(n,m) = F) = \frac{1}{C_{C_n^2}^m} \, \forall F \in \mathcal{G}_m$$

Фиксировано число рёбер, но другие характеристики выглядят посложнее, скажем $\deg v$ имеет гипергеометрическое распределение.

Определение 3. *Биномиальная модель.* $\mathcal{G}$ — множество всех остовных подграфов K_n, $p \in [0,1]$. Случайный граф в этой модели — случайный элемент на $\mathcal{G}$ со следующим распределением:

$$P(G(n,p) = F) = p^{|E(F)|}(1-p)^{C_n^2 - |E(F)|} \, \forall F \in \mathcal{G}$$

Много независимых событий, из-за чего многие характеристики имеют удобное распределение, например $\deg v \sim B(n-1, P)$. Число рёбер, впрочем, случайно.

Другие модели:

- Граф G, схема Бернулли на его рёбрах. Скажем, $G = K_{n,m}$ — случайный двудольный граф.
- Равномерное распределение на какой-то совокупности графов $\mathcal{F}$. Например, случайный d-регулярный граф
  - $d = 1$ — случайное совершенное паросочетание
  - $d = 2$ — случайный набор циклов
  - $d = 3$ — можно показать, что а.п.н. это гамильтонов цикл плюс какое-то совершенное паросочетание
- Случайный процесс на графе
  - С дискретным временем: $\tilde{G} = (\tilde{G}(n,m), m = 0 \ldots C_n^2)$, в котором на каждом шаге появляется новое случайное равномерно выбранное ребро. $\tilde{G}(n,m) \overset{d}{=} G(n,m)$. Можно смотреть случайные моменты
    * $\tau_1(n) = \min\{m : \delta(\tilde{G}(n,m)) \geqslant 1\}$
    * $\sigma_1(n) = \min\{m : \tilde{G}(n,m) \text{ связен}\}$

    Теорема 1 (Баллобаш, Томасон)**.**

    $$P\left(\tau_1(n) = \sigma_1(n)\right) \to 1, n \to \infty$$

– С непрерывным временем: пусть для каждого ребра e графа K_n задана случайная величина T_e. Тогда для $\forall t > 0$ можно рассмотреть процесс:
$$\tilde{G}_T = \{e \mid T_e \leqslant t\}$$
Если все T_e распределены одинаково, $\tilde{G}_T(n,t) \stackrel{d}{=} G(n,p)$, где $p = P(T_e \leqslant t)$.

– Triangle-free process. На каждом шаге включаем одно случайное ребро так, чтобы не возникало треугольников. Можно показать, что в результате такого процесса α(итогового графа) $= O(\sqrt{n \ln n})$. Следствие: оценка на число Рамсея $R(3,t) \geqslant c\frac{t^2}{\ln t}$.

2 Общая теория случайных подмножеств

Пусть Γ — конечное множество, $|\Gamma| = N$.

- $\Gamma(p)$ — схема Бернулли на Γ.
- $\Gamma(n)$ — случайное подмножество размера n с равномерным распределением
- $\tilde{\Gamma}(m)$ — случайный процесс, включающий элементы последовательно

В асимптотиских утверждениях $\Gamma = \Gamma_n, n \in \mathbb{N}$ — последовательность, притом $N = N(n)$.

3 Монотонные и выпуклые свойства

Определение 4. Q — семейство подмножеств Γ называется *возрастающим*, если $A \in Q, A \subset B \to B \in Q$, *убывающим*, если $A \supset B \to B \in Q$, *монотонным*, если оно возрастающее или убывающее.

Ясно, что Q — возрастающее тогда и только тогда, когда $\overline{Q} = 2^\Gamma \setminus Q$ — убывающее. Будем обозначать $\Gamma(p) \models Q \Leftrightarrow \Gamma(p) \in Q$ («обладает свойством Q»).

Пример 1. Γ — рёбра K_n. Возрастающие свойства:

- связность
- содержит какой-то подграф
- $\delta(G) \geqslant k$

Убывающие свойтва:

- планарность
- $\chi(G) \leqslant k$

- ацикличность

Лемма 1. *Пусть Q — возрастющее свойство. Тогда* $\forall p_1 \leqslant p_2, m_1 \leqslant m_2$*:*

$$P(\Gamma(p_1) \models Q) \leqslant P(\Gamma(p_2) \models Q)$$

$$P(\Gamma(m_1) \models Q) \leqslant P(\Gamma(m_2) \models Q)$$

Доказательство.

- $P(\Gamma(m_1) \models Q) = P(\tilde{\Gamma}(m_1) \models Q) \leqslant P(\tilde{\Gamma}(m_2) \models Q) = P(\Gamma(m_2) \models Q)$
- Пусть $\Gamma(p') \perp \Gamma(p'')$ — два независимых подмножества. Тогда $\Gamma(p') \cup \Gamma(p'') \stackrel{d}{=} \Gamma(p)$, где $p = p' + p'' - p'p''$. Тогда можно положить $p' = \frac{p_2 - p_1}{1 - p_1}$, а также, что $\Gamma(p') \perp \Gamma(p_1)$. Тогда

$$P(\Gamma(p_1) \models Q) \leqslant P(\Gamma(p_1) \cup \Gamma(p') \models Q) = P(\Gamma(p_2) \models Q).$$

□

Определение 5. Свойство Q называется *выпуклым*, если $A \subset C \subset B \in Q \Rightarrow C \in Q$

Пример 2.

- все монотонные выпуклы
- $\chi(G) = k$

4 Асимптотическая эквивалентность моделей

Хотим установить какую-то связь между моделями $\Gamma(p)$ и $\Gamma(m)$ при $pN \sim m$. Для этого введём следующий контекст:

- $\Gamma(n), n \in \mathbb{N}$ — последовательность конечных множеств
- $N = N(n) \to +\infty$
- $Q = Q(n)$
- $p = p(n) \in [0, 1]$
- $m = m(n) \in \{0, \ldots, N\}$
- $\Gamma(n, p), \Gamma(n, m)$ — случайные подмножества $\Gamma(n)$

Лемма 2. *Пусть Q — свойство $\Gamma(n)$. Пусть $p = p(n) \in [0,1]$ — некоторая функция. Если для любой последовательности $m = m(n)$, такой что*

$$m = Np + O(\sqrt{Npq}), q = 1 - p$$

выполнено

$$P(\Gamma(n,m) \models Q) \to a, n \to \infty$$

то

$$P(\Gamma(n,p) \models Q) \to a, n \to \infty.$$

Доказательство. Пусть $C > 0$ — большая константа и положим $M(C) = \{m \mid |m - Np| \leqslant C\sqrt{Npq}\}$. Обозначим

$$m_* = \underset{m \in M(C)}{\operatorname{argmin}} P(\Gamma(n,m) \models Q)$$

$$m^* = \underset{m \in M(C)}{\operatorname{argmax}} P(\Gamma(n,m) \models Q)$$

По формуле полной вероятности:

$$\begin{aligned} P(\Gamma(n,p) \models Q) = \sum_{m=0}^{N} P(\Gamma(n,p) \models Q \mid \quad & |\Gamma(n,p)| = m) P(|\Gamma(n,p)| = m) = \\ \sum_{m=0}^{N} P(\Gamma(n,m) \models Q) P(|\Gamma(n,p)| = m) \geqslant \\ \sum_{m \in M(C)} P(\Gamma(n,m) \models Q) P(|\Gamma(n,p)| = m) \geqslant \\ P(\Gamma(n,m_*) \models Q) P(|\Gamma(n,p)| \in M(C)|) \end{aligned}$$

Но $|\Gamma(n,p)| \sim Bin(N,p), E|\Gamma(n,p)| = Np, D|\Gamma(n,p)| = Npq$. По неравенству Чебышева:

$$P(||\Gamma(n,p)| - Np| > C\sqrt{Npq}) \leqslant \frac{Npq}{C^2 Npq} = \frac{1}{C^2}$$

Значит $P(\Gamma(n,p) \models Q) \geqslant P(\Gamma(n,m_*) \models Q)\left(1 - \frac{1}{C^2}\right)$.

Аналогично

$$\begin{aligned} P(\Gamma(n,p) \models Q) \leqslant \sum_{m \in M(C)} P(\Gamma(n,m) \in Q) P(|\Gamma(n,p)| = m) + \sum_{m \notin M(C)} P(|\Gamma(n,p)| = m) \\ \leqslant P(\Gamma(n,m^*) \in Q) + \frac{1}{C^2} \end{aligned}$$

Значит $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} P(\Gamma(n,p) \models Q) \leqslant a + \frac{1}{C^2}$.

Также $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} P(\Gamma(n,p) \models Q) \geqslant a(1 - \frac{1}{C^2})$.

Это верно для любого $C > 0$. Тогда $\exists \lim P(\Gamma(n,p) \models Q) = a$. □