Содержание

1 Тривиум

Определение 1. $H = (V, E), |V| < \infty, E \subset 2^V$ — *гиперграф.* V — *вершины*, E — *рёбра.*

Если $\forall e \in E \to |e| = k$, то гиперграф k-*однородный* ($k = 2$ — обычный граф).

Определение 2. *Число рёбер* гиперграфа $|E|$ или $|E(H)| = e(H)$.

Степень вершины $v \in V$ — $\deg v = \#\{e \in E \mid v \in e\}$.

$\sum\limits_{v \in V} \deg v = \sum\limits_{e \in E} |e| = k|E|$ (в случае k-однородности).

$\Delta(H) = \max\limits_{v \in V} \deg v$.

$\delta(H) = \min\limits_{v \in V} \deg v$.

$t(H) = \frac{1}{|V|} \sum\limits_{v \in V} \deg v$.

Определение 3. *Степенью ребра* в $H = (V, E)$ называется $\deg e = \#\{f \in E \mid f \neq e, |f \cap e| \neq \varnothing\}$.

$D(H) = \max\limits_{e \in E} \deg e$.

Если H k-однороден, то $\Delta(H) - 1 \leqslant D(H) \leqslant k(\Delta(H) - 1)$.

Определение 4. $W \subset V$ в $H = (V, E)$ называется *независимым*, если $\forall e \in E \to |e \cap W| < |e|$.

Число независимости $\alpha(H)$ — максимальный размер независимого множества в H.

Определение 5. Раскраска множества вершин $H = (V, E)$ называется *правильной*, если любое ребро не является одноцветным. Равносильно: все цветовые множества независимы.

Хроматическое число $\chi(H)$ — минимальное число цветов в правильной раскраске гиперграфа.

Очевидно $\frac{|V|}{\alpha(H)} \leqslant \chi(H) \leqslant \Delta(H) + 1$.

2 Теорема Турана и её обобщения

K_n — полный граф на n вершинах.

$K_{n_1, \ldots, n_r}$ — полный r-дольный граф с долями размера $n_1, \ldots, n_r$.

K_{m*r} — полный r-дольный граф с размерами долей $= m$.

Теорема 1 (Туран, 1941)**.** *Пусть* $n_1, \ldots, n_r$ *числа, такие что* $n_1 + \ldots + n_r = n, n_i = \left\lceil \frac{n}{r} \right\rceil$ *или* $n_i = \left\lfloor \frac{n}{r} \right\rfloor$. *Пусть граф* G *на* n *вершинах не содержит подграфа, изоморфного* K_{r+1}. *Тогда*

$$|E(G)| \leqslant |E(K_{n_1, \ldots, n_r})| \leqslant \left\lfloor \frac{n^2}{2} \left(1 - \frac{1}{r}\right) \right\rfloor$$

.

Доказательство. Пусть $G = (V, E)$ — граф с максимальным числом вершин, не содержащий K_{r+1}. Покажем, что в G не существует тройки вершин u, v, w такой, что $(u, v) \in E, (u, w), (v, w) \notin E$. Пусть такая тройка есть, тогда

- Пусть $\deg w < \deg u$ (или $\deg w < \deg v$). Удалим w из G и заменим её на копию u — вершину u'. Получится граф с большим числом рёбер, при этом K_{r+1} он не содержит (иначе его содержал бы и G).

- Пусть $\deg w \geqslant \deg u, \deg w \geqslant \deg v$. Тогда удалим u, v из графа, добавим вместо них две копии вершины w. По аналогичному соображению число рёбер увеличилось, а K_{r+1} не появилось.

Вывод: отношение $u \sim v \Leftrightarrow (u, v) \notin E$ является отношением эквивалентности. Значит наш граф G является полным многодольным графом, притом ясно, что долей не больше r (будем считать, что ровно r, просто некоторые доли пусты). Покажем, что доли почти равны.

В самом деле, если $|A| > |B|+1$, то при перекладывании одной вершины из A в B теряется $|B|$ рёбер и проводится $|A| - 1$ рёбер, стало быть число рёбер увеличивается. Значит размеры всех долей отличаются не более, чем на 1, что доказывает теорему. $\square$

Граф $K_{n_1,\dots,n_r}$ из теоремы Турана принято называть графом Турана.

Утверждение 1. Следствие: $\alpha(G) \geqslant \frac{n}{t(G)+1}$.

Доказательство. Пусть $\alpha = \alpha(G)$, тогда $\overline{G}$ не содержит $K_{\alpha+1}$. По теореме Турана $|E(\overline{G})| \leqslant \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \frac{n^2}{2} \Rightarrow |E(G)| \geqslant C_n^2 - \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \frac{n^2}{2}$.

Итак, $\frac{n^2}{2\alpha} \leqslant |E(G)| + \frac{n^2}{2} - C_n^2 = \frac{t(G)n}{2} + \frac{n}{2}$, что доказывает следствие.

Получается, что оценка точна и достигается (с точностью до округления) на $\overline{T(n, r)}$. $\square$

3 Тоерема Эрдёша-Стоуна

Пусть H — произвольный граф. *Числом Турана* $ex(n, H)$ называется

$$ex(n, H) = \max\{|E(G)| : |V(G)| = n, G \text{ не содержит подграфа, изоморфного } H\}.$$

Теорема Турана говорит, что $ex(n, K_{r+1}) = |E(K_{n_1,\dots,n_r})|$.

Теорема 2 (Эрдёш-Стоун, 1946)**.** *Пусть $r \geqslant 2$, H — фиксированный граф с $\chi(H) = r + 1$, тогда $ex(n, H) = \left(1 - \frac{1}{r}\right) \frac{n^2}{2} + o(n^2)$.*

Доказательство.

Лемма. *Пусть $r \geqslant 1, \varepsilon > 0$. Тогда для всех достаточно больших n любой граф на n вершинах с $\left(1 - \frac{1}{r} + \varepsilon\right) C_n^2$ рёбрами содержит подграф $K_{t*(r+1)}$, где $t = \Omega_{r,\varepsilon}(\log n)$.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда все вершины имеют степень не менее $\left(1-\frac{1}{r}+\varepsilon\right)n$. Будем доказывать по индукции по r.

База, $r=1$, надо найти $K_{t,t}$. Пусть $v_1,\ldots,v_t$ — случайно выбранные t вершин из V, а X число их общих соседей.

$$EX=\sum_{u\in V}\frac{C^t_{\deg u}}{C^t_n}\geqslant n\frac{C^t_{n\varepsilon}}{C^t_n}\geqslant n\frac{(n\varepsilon-t)^t}{n^t}=n\left(\frac{n\varepsilon-t}{n}\right)^t.$$

Хотим, чтобы $EX>t$, для этого можно взять $t=\Omega_\varepsilon(\log n)$ подходит для небольшой константы. При таком t существуют $v_1,\ldots,v_t$ с не менее, чем t общими соседями, это и есть $K_{t,t}$.

Докажем шаг индукции. Пусть мы нашли K_{T*r}, где $T=\Omega_{r,\varepsilon}(\log n)$ в графе G. Обозначим $U_1,\ldots,U_r$ — доли этого графа, $U=\bigcup\limits_{i=1}^{r}U_i$.

Пусть v — случайная вершина G, X_v — число её соседей внутри U.

$$EX_v=\frac{1}{n}\sum_{v\in V}\sum_{(u,v)\in E}1=\frac{1}{n}\sum_{u\in U}\deg u\geqslant rT\left(1-\frac{1}{r}+\varepsilon\right).$$

Однако $X_v\leqslant rT$, значит

$$EX_v\leqslant rT\left(1-\frac{1}{r}+\frac{\varepsilon}{2}\right)P\left(X_v<rT\left(1-\frac{1}{r}+\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)+$$
$$rTP\left(X_v>rT\left(1-\frac{1}{r}+\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)=$$
$$rT\left(1-\frac{1}{r}+\frac{\varepsilon}{2}\right)+rT\left(1-\frac{1}{r}+\frac{\varepsilon}{2}\right)P\left(X_v>rT\left(1-\frac{1}{r}+\frac{\varepsilon}{2}\right)\right).$$

Отсюда $P\left(X_v>rT\left(1-\frac{1}{r}+\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)\geqslant\frac{rT\frac{\varepsilon}{2}}{rT\left(\frac{1}{r}-\frac{\varepsilon}{2}\right)}\geqslant\frac{r\varepsilon}{r}\geqslant\varepsilon$.

Вывод: не менее εn вершин имеют хотя бы $rT\left(1-\frac{1}{r}+\frac{\varepsilon}{2}\right)$ соседей в U. Обозначим его через S, $|S|\geqslant\varepsilon n$.

Далее, любая вершина из S имеет хотя бы εT соседей внутри U_i. Иначе, множество соседей в U имеет мощности сторого меньше, чем

$$\varepsilon T+(r-1)T=rT\left(1-\frac{1}{r}+\frac{\varepsilon}{r}\right)\leqslant rT\left(1-\frac{1}{r}+\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Пусть $W_1,\ldots,W_r$ случайные t-подмножества $U_1,\ldots,U_r$, а X — число их общих соседей внутри S.

$EX\geqslant|S|\left(\frac{C_{\varepsilon T}t}{C^t_T}\right)^r$, тогда положим $t=\frac{\varepsilon}{2}T$, тогда $EX\geqslant\varepsilon n\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{rt}\geqslant t$. Это выполнено при $t=c(r,\varepsilon)\log n$ для подходящей константы $c(r,\varepsilon)>0$.

Обратимся теперь к случаю, если не все степени достаточно большие. Покажем, что в G существует индуцированный подграф G' на s вершинах, все степени которого не меньше $\left(1-\frac{1}{r}+\varepsilon\right)s$, а $s\geqslant\frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon}n$. Тогда по предыдущему рассуждению G' содержит K_{t*r}, где $t=\Omega_{r,\varepsilon}(\log s)=\Omega_{r,\varepsilon}(\log s)$.

Построим G' следующим образом: $G_n=G$. Далее:

- если G_m содержит вершину степени $< \left(1 - \frac{1}{r} + \frac{\varepsilon}{2}\right) m$, то удалим её из G_m.

- продолжаем, пока процесс не остановится.

Пусть G_s — итоговый граф, тогда в нём не менее чем $|E(G_n)| - \left(1 - \frac{1}{r} + \frac{\varepsilon}{2}\right)(n + n - 1 + \ldots + s + 1) \geqslant \left(1 - \frac{1}{r} + \varepsilon\right) C_n^2 - \left(1 - \frac{1}{r} + \frac{\varepsilon}{2}\right) C_{n+1}^2 = \frac{\varepsilon}{2} C_n^2 - n$ рёбер.

С другой стороны, $|E(G_s)| \leqslant C_s^2 \Rightarrow C_s^2 \geqslant \frac{\varepsilon}{2} C_n^2 - n \Rightarrow s \geqslant \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon} n$.

Итак, лемма доказана. $\square$

$\square$