

1 Тривиум

Определение 1. $H = (V, E)$, $|V| < \infty$, $E \subset 2^V$ — гиперграф. V — вершины, E — рёбра.

Если $\forall e \in E \rightarrow |e| = k$, то гиперграф k -однородный ($k = 2$ — обычный граф).

Определение 2. Число рёбер гиперграфа $|E|$ или $|E(H)| = e(H)$.

Степень вершины $v \in V$ — $\deg v = \#\{e \in E \mid v \in e\}$.

$\sum_{v \in V} \deg v = \sum_{e \in E} |e| = k|E|$ (в случае k -однородности).

$\Delta(H) = \max_{v \in V} \deg v$.

$\delta(H) = \min_{v \in V} \deg v$.

$t(H) = \frac{1}{|V|} \sum_{v \in V} \deg v$.

Определение 3. Степенью ребра в $H = (V, E)$ называется $\deg e = \#\{f \in E \mid f \neq e, |f \cap e| \neq \emptyset\}$.

$D(H) = \max_{e \in E} \deg e$.

Если H k -однороден, то $\Delta(H) - 1 \leq D(H) \leq k(\Delta(H) - 1)$.

Определение 4. $W \subset V$ в $H = (V, E)$ называется независимым, если $\forall e \in E \rightarrow |e \cap W| < |e|$.

Число независимости $\alpha(H)$ — максимальный размер независимого множества в H .

Определение 5. Раскраска множества вершин $H = (V, E)$ называется правильной, если любое ребро не является одноцветным. Равносильно: все цветные множества независимы.

Хроматическое число $\chi(H)$ — минимальное число цветов в правильной раскраске гиперграфа.

Очевидно $\frac{|V|}{\alpha(H)} \leq \chi(H) \leq \Delta(H) + 1$.

2 Теорема Турана и её обобщения

K_n — полный граф на n вершинах.

K_{n_1, \dots, n_r} — полный r -дольный граф с долями размера n_1, \dots, n_r .

K_{m*r} — полный r -дольный граф с размерами долей $= m$.

Теорема 1 (Туран, 1941). Пусть n_1, \dots, n_r числа, такие что $n_1 + \dots + n_r = n$, $n_i = \lceil \frac{n}{r} \rceil$ или $n_i = \lfloor \frac{n}{r} \rfloor$. Пусть граф G на n вершинах не содержит подграфа, изоморфного K_{r+1} . Тогда

$$|E(G)| \leq |E(K_{n_1, \dots, n_r})| \leq \left\lfloor \frac{n^2}{2} \left(1 - \frac{1}{r}\right) \right\rfloor$$

Доказательство. Пусть $G = (V, E)$ — граф с максимальным числом вершин, не содержащий K_{r+1} . Покажем, что в G не существует тройки вершин u, v, w такой, что $(u, v) \in E, (u, w), (v, w) \notin E$. Пусть такая тройка есть, тогда

- Пусть $\deg w < \deg u$ (или $\deg w < \deg v$). Удалим w из G и заменим её на копию u — вершину u' . Получится граф с большим числом рёбер, при этом K_{r+1} он не содержит (иначе его содержал бы и G).
- Пусть $\deg w \geq \deg u, \deg w \geq \deg v$. Тогда удалим u, v из графа, добавим вместо них две копии вершины w . По аналогичному соображению число рёбер увеличилось, а K_{r+1} не появилось.

Вывод: отношение $u \sim v \Leftrightarrow (u, v) \notin E$ является отношением эквивалентности. Значит наш граф G является полным многодольным графом, притом ясно, что долей не больше r (будем считать, что ровно r , просто некоторые доли пусты). Покажем, что доли почти равны.

В самом деле, если $|A| > |B| + 1$, то при перекладывании одной вершины из A в B теряется $|B|$ рёбер и проводится $|A| - 1$ рёбер, стало быть число рёбер увеличивается. Значит размеры всех долей отличаются не более, чем на 1, что доказывает теорему. \square

Граф K_{n_1, \dots, n_r} из теоремы Турана принято называть графом Турана.

Утверждение 1. Следствие: $\alpha(G) \geq \frac{n}{t(G)+1}$.

Доказательство. Пусть $\alpha = \alpha(G)$, тогда \overline{G} не содержит $K_{\alpha+1}$. По теореме Турана $|E(\overline{G})| \leq (1 - \frac{1}{\alpha}) \frac{n^2}{2} \Rightarrow |E(G)| \geq C_n^2 - (1 - \frac{1}{\alpha}) \frac{n^2}{2}$.

Итак, $\frac{n^2}{2\alpha} \leq |E(G)| + \frac{n^2}{2} - C_n^2 = \frac{t(G)n}{2} + \frac{n}{2}$, что доказывает следствие.

Получается, что оценка точна и достигается (с точностью до округления) на $T(n, r)$. \square

3 Теорема Эрдёша-Стоуна

Пусть H — произвольный граф. Числом Турана $ex(n, H)$ называется

$$ex(n, H) = \max\{|E(G)| : |V(G)| = n, G \text{ не содержит подграфа, изоморфного } H\}.$$

Теорема Турана говорит, что $ex(n, K_{r+1}) = |E(K_{n_1, \dots, n_r})|$.

Теорема 2 (Эрдёш-Стоун, 1946). Пусть $r \geq 2$, H — фиксированный граф с $\chi(H) = r + 1$, тогда $ex(n, H) = (1 - \frac{1}{r}) \frac{n^2}{2} + o(n^2)$.

Доказательство.

Лемма. Пусть $r \geq 1, \varepsilon > 0$. Тогда для всех достаточно больших n любой граф на n вершинах с $(1 - \frac{1}{r} + \varepsilon) C_n^2$ рёбрами содержит подграф $K_{t^*(r+1)}$, где $t = \Omega_{r, \varepsilon}(\log n)$.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда все вершины имеют степень не менее $(1 - \frac{1}{r} + \varepsilon)n$. Будем доказывать по индукции по r .

База, $r = 1$, надо найти $K_{t,t}$. Пусть v_1, \dots, v_t — случайно выбранные t вершин из V , а X число их общих соседей.

$$EX = \sum_{u \in V} \frac{C_{\deg u}^t}{C_n^t} \geq n \frac{C_{n\varepsilon}^t}{C_n^t} \geq n \frac{(n\varepsilon - t)^t}{n^t} = n \left(\frac{n\varepsilon - t}{n} \right)^t.$$

Хотим, чтобы $EX > t$, для этого можно взять $t = \Omega_\varepsilon(\log n)$ подходит для небольшой константы. При таком t существуют v_1, \dots, v_t с не менее, чем t общими соседями, это и есть $K_{t,t}$.

Докажем шаг индукции. Пусть мы нашли K_{T*r} , где $T = \Omega_{r,\varepsilon}(\log n)$ в графе G . Обозначим U_1, \dots, U_r — доли этого графа, $U = \bigcup_{i=1}^r U_i$.

Пусть v — случайная вершина G , X_v — число её соседей внутри U .

$$EX_v = \frac{1}{n} \sum_{v \in V} \sum_{(u,v) \in E} 1 = \frac{1}{n} \sum_{u \in U} \deg u \geq rT \left(1 - \frac{1}{r} + \varepsilon \right).$$

Однако $X_v \leq rT$, значит

$$\begin{aligned} EX_v &\leq rT \left(1 - \frac{1}{r} + \frac{\varepsilon}{2} \right) P \left(X_v < rT \left(1 - \frac{1}{r} + \frac{\varepsilon}{2} \right) \right) + \\ &\quad rTP \left(X_v > rT \left(1 - \frac{1}{r} + \frac{\varepsilon}{2} \right) \right) = \\ &\quad rT \left(1 - \frac{1}{r} + \frac{\varepsilon}{2} \right) + rT \left(1 - \frac{1}{r} + \frac{\varepsilon}{2} \right) P \left(X_v > rT \left(1 - \frac{1}{r} + \frac{\varepsilon}{2} \right) \right). \end{aligned}$$

$$\text{Отсюда } P \left(X_v > rT \left(1 - \frac{1}{r} + \frac{\varepsilon}{2} \right) \right) \geq \frac{rT \frac{\varepsilon}{2}}{rT \left(\frac{1}{r} - \frac{\varepsilon}{2} \right)} \geq \frac{r\varepsilon}{r} \geq \varepsilon.$$

Вывод: не менее εn вершин имеют хотя бы $rT \left(1 - \frac{1}{r} + \frac{\varepsilon}{2} \right)$ соседей в U . Обозначим его через S , $|S| \geq \varepsilon n$.

Далее, любая вершина из S имеет хотя бы εT соседей внутри U_i . Иначе, множество соседей в U имеет мощности строго меньше, чем

$$\varepsilon T + (r-1)T = rT \left(1 - \frac{1}{r} + \frac{\varepsilon}{r} \right) \leq rT \left(1 - \frac{1}{r} + \frac{\varepsilon}{2} \right).$$

Пусть W_1, \dots, W_r случайные t -подмножества U_1, \dots, U_r , а X — число их общих соседей внутри S .

$EX \geq |S| \left(\frac{C_{\varepsilon T}^t}{C_T^t} \right)^r$, тогда положим $t = \frac{\varepsilon}{2}T$, тогда $EX \geq \varepsilon n \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^{rt} \geq t$. Это выполнено при $t = c(r, \varepsilon) \log n$ для подходящей константы $c(r, \varepsilon) > 0$.

Обратимся теперь к случаю, если не все степени достаточно большие. Покажем, что в G существует индуцированный подграф G' на s вершинах, все степени которого не меньше $(1 - \frac{1}{r} + \varepsilon)s$, а $s \geq \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon n}$. Тогда по предыдущему рассуждению G' содержит K_{t*r} , где $t = \Omega_{r,\varepsilon}(\log s) = \Omega_{r,\varepsilon}(\log s)$.

Построим G' следующим образом: $G_n = G$. Далее:

- если G_m содержит вершину степени $< \left(1 - \frac{1}{r} + \frac{\varepsilon}{2}\right) m$, то удалим её из G_m .
- продолжаем, пока процесс не остановится.

Пусть G_s — итоговый граф, тогда в нём не менее чем $|E(G_n)| - \left(1 - \frac{1}{r} + \frac{\varepsilon}{2}\right) (n + n - 1 + \dots + s + 1) \geq \left(1 - \frac{1}{r} + \varepsilon\right) C_n^2 - \left(1 - \frac{1}{r} + \frac{\varepsilon}{2}\right) C_{n+1}^2 = \frac{\varepsilon}{2} C_n^2 - n$ рёбер.

С другой стороны, $|E(G_s)| \leq C_s^2 \Rightarrow C_s^2 \geq \frac{\varepsilon}{2} C_n^2 - n \Rightarrow s \geq \frac{1}{2} \sqrt{\varepsilon n}$.

Итак, лемма доказана. □

□