Содержание

1 Введение

- «Теорема Абеля в задачах и решениях», Алексеев
- По алгебраической геометрии: Харцкорн, Шафаревич.

Лекция 1. Теорема Абеля-Руфини

2 Полиномиальные уравнения, многозначные функции

Задача обращения: $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, найти $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(g(y)) = y$, притом функция многозначная.

Если f — многочлен, то знаем формулу для $\deg f \leqslant 4$.

Определение 1 (Многозначная функция)**.** Многозначная функция f — неявная функция $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, заданная полиномиальным уравнением $\{F = 0\}, F : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$.

Либо $f = \{x \in \mathbb{C}^2 \mid F(x) = 0\}$, либо $f : \mathbb{C} \to 2^{\mathbb{C}}, f(x) = \{y \in \mathbb{C} \mid F(x, y) = 0\}$.

Если f, g — многозначные, то можно определить композицию $h = g \circ f = \{(x, z) \mid \exists y : F(x, y) = G(y, z) = 0\}$. Определение пока что некорректно, нужно как-то перейти к одному уравнению.

Определение 2 (Афинное алгебраическое многообразие)**.** Афинное (в смысле не проективное) алгебраическое многообразие $X \subset \mathbb{C}^n$ — это множество, заданное системой полиномиальных уравнений.

$X = \{x \in \mathbb{C}^n \mid F_j(x) = 0, j = 1, \ldots, k\}, F_j : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ — многочлены.

Проблема: если взять афинное алгераическое многообразие, заданное двумя уравнениями в $\mathbb{C}^3$, то его проекция на (x, z) одним уравнением может и не задаваться.

Теорема 1 (О проекции афинного алгебраического многообразия)**.** *Пусть отображение $H : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ полиномиальное. Тогда $H(X) \subset \mathbb{C}^m$ — афинное алгебраическое многообразие.*

Пример. Многообразие $X = \{xy = yz = xz = 0\}$ имеет коразмерность 2, хочется задать его двумя уравнениями, но можно показать, что это невозможно.

Теорема 2. *Любое алгебраическое многообразие размерности $n - 1$ в $\mathbb{C}^n$ можно задать одним уравнением.*

В этом свете наша композиция определена корректна.

Определение 3 (Сумма, произведение многозначных функций)**.** Если $l : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, то $l(f,g) = \{(x, l(y_1,y_2) \mid F(x,y_1) = F(x,y_2) = 0\}$. В чатности, так можно определить сложение и умножение.

Так как это проекция многооразия $\{(x, y_1, y_2, z) \mid F(x,y_1) = F(x,y_2) = z - l(y_1,y_2) = 0\}$, то полученный объект — это многозначная функция.

3 Теорема Абеля

Определение 4 (Выразимость в радикалах)**.** Функция $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ выражена в радикалах, если:

- $f(x) = c, f(x) = \sqrt[n]{x}$ $(F(x,y) = x^n - y)$.
- Композиция функций, выраженных в радикалах.
- $l(f,g)$, где l — многочлен, f,g выражены в радикалах.

Определение 5 (Разрешимость в радикалах)**.** $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — разрешима в радикалах, если существует g — многозанчная $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, выраженная в радикалах, такая что $g(y) \supset f^{-1}(y)$.

Замечание. $g(y) = f^{-1}(y)$ не получается, например, в случае формулы Кардано 6 корней. Однако, нас в принципе не очень смущает наличие побочных корней.

Если мы можем выразить корни уравнения формулой в радикалах, то можно разрешить в радикалах соответсвующий многочлен, просто подставив $c_0 - y$ вместо свободного члена c_0.

Теорема 3 (Теорема Абеля)**.** *Многочлен f общего положения* $\deg f \geqslant 5$ *неразрешим в радикалах.*

Говоря про общее положение подразумеваем, что это неверно лишь на нигде не плотном множестве. Более того, в нашем случае это нигде не плотное множество будет алгебраическим многообразием меньшей размерности.

4 Топологическая теория Галуа

Определение 6 (Накрытие)**.** Накрытие $\pi : E \to B$ — это непрерывное отображение топологических пространств, такое, что существует F — дискретное топологическое пространство, такое что $\forall x \in B \to \exists U = U(x) : \exists \varphi_x : \pi^{-1}(U) \to U \times F$, такое что оно осуществляет гомеоморфизм, а также $p_u(\varphi_x(e)) = \pi(e)$, где $p : F \times U$ — проектор на U.

Замечание. Если просто попросить, что $\pi^{-1}(U) \cong U \times F$, то накрытием будет отображение из интервала в интервал, которое левую треть отображает в левую половину линейно, правую в правую, а середину склеивает в одну точку.

$|f^{-1}(y)| = \deg f$, кроме некоторых точек, а именно тех, где $f(x) = y, f'(x) = 0$, то есть это верно для всех y кроме так называемых критических значений многочлена B'.

Утверждение 1. Пусть $B' = \{y \mid \exists x : f'(x) = 0, y = f(x)\}$. Тогда отображение $f\mid_{\mathbb{C}\setminus f^{-1}(B')}$ является накрытием над $\mathbb{C}\setminus B'$.

Доказательство. Нужно взять окрестность некоторой точки $x \in \mathbb{C}\setminus B'$, взять все её прообразы, взять у них по окрестности, пересечь их образы, позаботиться о том, чтобы они не пересекались и не содержали плохих точек и применить теорему об обратной функции. $\square$

Лекция 2. Группа монодромии накрытия

5 Поднятие

Лемма (О поднятии). *Для любого пути в базе $\varphi : [0;1] \to B$ и $v_0 \in \pi^{-1}(\varphi(0))$ существует единственный путь-поднятие: $\overline{\varphi}_v : [0;1] \to E$: $\overline{\varphi}_v(0) = v$ и $\varphi = \pi \circ \overline{\varphi}_v$.*

Доказательство. Для каждой точки отрезка $\forall t \in [0;1]\ \exists U_t$ — окрестность точки t с таким свойством, что $\varphi(U_t) \subset U(\varphi(t))$, где $U(\varphi(t))$ — тривиализующая окретстность: $\pi^{-1}(U(\varphi(t))) \xrightarrow{k} U(\varphi(t)) \times F$.

В силу компактности отрезка выберем конечное подпокрытие: $\exists t_0, \ldots, t_N$: $[0;1] = \bigcup\limits_{j=0}^{N} U_{t_j}$. Более того, сузим все интервалы до отрезков, граничащих по концам: $[0;1] = \bigcup\limits_{j=0}^{N-1} [t_j; t_{j+1}]$.

Для каждого j $\exists U_j \subset B : \varphi([t_j; t_{j+1}]) \subset U_j, k_j : \pi^{-1}(U_j) \to U_j \times F$ (при этом $\pi = k_j \circ p_1$).

Поднятие тогда определим так: $\overline{\varphi} = k_j^{-1}(\varphi(t), p_2 \circ k(\overline{\varphi}(t_j))$. Это отображение непрерывно, так как непрерывно на каждом из замкнутых множеств, которые разбивают весь отрезок.

$\pi \circ \overline{\varphi}(t) = \pi(k^{-1}(\varphi(t), \ldots)) = p_1(\varphi(t), \ldots) = \varphi(t)$.

Единственность покажем по индукции: если $\overline{\varphi}'$ тоже поднятие и оно совпадает на нескольких первых отрезках, нужно показать, что оно совпадает и на следующем. $\square$

Определение 1 (Действие фундаментальной группы)**.** Действие группы $\pi_1(B, b_0)$ на множестве $\pi^{-1}(b_0)$ определим формулой $\psi : \pi_1(B, b_0) \to S(\pi^{-1}(b_0)), \psi([\varphi])(v) = \overline{\varphi}_v(1)$.

Утверждение 1. $\overline{(\varphi_1\varphi_2)} = \overline{\varphi}_{1,v_1}\overline{\varphi}_{2,v_0}$, где $v_1 = \overline{\varphi}_{2,v_0}(1)$.

Доказательство. Отображение является поднятием какого-то пути, если удовлетворяет двум свойствам из определения. Первое свойство очевидно, второе: $\pi \circ (\overline{\varphi}_{1,v_1}\overline{\varphi}_{2,v_0} = \varphi_2$ при $t \in [0; \frac{1}{2})$ и $\varphi_1(2t+1)$ иначе. $\square$

Корректность определения:

- Гомоморфизм: $\psi([\varphi_1][\varphi_2])(v) = \psi([\varphi_1\varphi_2])(v) = \overline{(\varphi_1\varphi_2)}_v(1) = \overline{\varphi}_{1,v_1}\overline{\varphi}_{2,v}(1) = \overline{\varphi}_{1,v_1}(1) = \psi([\varphi_1])(\overline{\varphi}_{2,v}(1)) = \psi([\varphi_1]) \circ \psi([\varphi_2])(v)$ где, $v_1 = \overline{\varphi}_{2,v}$
- Биективность: обратным будет отображение $\psi([\varphi^{-1}])$.
- Если $[\varphi_1] = [\varphi_2]$, то $\overline{\varphi}_{1,v}(1) = \overline{\varphi}_{2,v}(1)$ (упражнение).

6 Группа монодромии

Определение 2 (Группа монодромии)**.** Группа монодромии G_{b_0} накрытия $\pi : E \to B \ni b_0$ — это образ $\psi(\pi_1(B, b_0))$.

Пример. У накрытия $\exp : \mathbb{R} \to S^1$ выполнено $\psi([\varphi])(v) = v + 1$, то есть $G_{b_0} \cong \mathbb{Z} \cong \pi(B, b_0)$.

Пример. У тривиального накрытия группа монодромии тривиальна, в то время, как фундаментальная группа $\pi_1(B, b_0)$ может быть нетривиальна, то есть нельзя сказать, что ψ — изоморфизм.

Пример. У накрытия $P_k : S^1 \to S^1, P_k(e^{2\pi it}) = e^{2\pi ikt}$ выполнено $\psi([\varphi])(v) = ve^{\frac{2\pi it}{k}}$, то есть $G_{b_0} \cong \mathbb{Z}_k$.

Вообще говоря, корректность определения группы монодромии не очевидна.

Утверждение 2. Пусть $\varphi_1 \sim \varphi_2$, $\Theta : [0;1]^2 \to B : \Theta(t, 0) = \varphi_1(t), \Theta(t, 1) = \varphi_2(t)$, тогда $\psi(\varphi_1) = \psi(\varphi_2)$.

Доказательство. $\psi([\varphi_j])(x) = \overline{\varphi}_{j,x}(1)$. Нужно показать, что $\overline{\varphi}_{1,x}(1) = \overline{\varphi}_{2,x}(1)$. Мы будем определять отображение $\overline{\Theta} : [0;1]^2 \to E$ так, чтобы еще $\Theta(0, t) = x$.

Лемма (О продолжении поднятия)**.** *Пусть* $f : D^n \to B$, $F_0 : D_1 \to E : f \mid_{D_1} \equiv p \circ F$, *где* $D_1 = \{x \in \partial D^n \mid x_n \leqslant 0\}$*. Тогда* $\exists F : D^n \to B, F_0 = F \mid_{D_1}, f = p \circ F$.

По лемме, такое поднятие $\overline{\Theta}$ существует. Тогда рассмотрим $p \circ \overline{\Theta} \mid_{\{(1,t)\}} = \Theta(\{1, \tau\}) = \{\varphi_\tau(1)\}$, а значит, что $\overline{\Theta}(\{1, \tau\}) \subset p^{-1}(b)$ — дискретно, то есть $|\overline{\Theta}(\{1, \tau\})| = 1$.

Доказательство леммы. Легко показать, что у каждой точки x_0, которую мы смогли поднять, есть окрестность, которую можно поднять. В силу компактности квадрата, достаточно взять конечное число открытых множеств, чтобы его покрыть. Более того, можно показать, что можно взять мелкую сетку из маленьких замкнутых квадратиков, каждый из которых лежит в открытом множестве, над которым накрытие тривиально, и продолжать поднятие построчно по этим квадратикам. □

$\square$

Определение 3 (Изоморфизм накрытий)**.** Накрытия $\pi_i : E_i \to B_i$, $i \in \{0,1\}$ изоморфны, если существует гомеоморфизмы $f : E_1 \leftrightarrow E_2, g : B_1 \leftrightarrow B_2$, такие что $\pi_2 \circ f \cong g \circ \pi_1$.

Замечание (Связь группы монодромии с фундаментальной группой)*.* Если $\varphi : [0;1] \to B, \varphi(0) = b_0, \varphi(1) = b_1$, то $G_{b_0} \cong G_{b_1}$.

Замечание (Изоморфизм групп монодромии)*.* Если два накрытия изоморфны, то $G_{b_1} \cong G_{g(b_1)}$.

Доказательство. Рассмотрим два построения.

Рассмотрим $[\varphi] \in \pi_1(b_1, b_0)$ и $[g(\varphi)] \in \pi_1(B_2, b_2)$. Отображение определим как $h : G_{b_1} \to G_{g(b_1)}, h(\psi([\varphi]) = \psi(g_*([\varphi]))$, где g_* — индуцированное отображением g отображение фундаментальных групп. Нужно показать, что если $[\varphi_1] \neq [\varphi_2]$, то $\psi([\varphi_1]) \neq \psi([\varphi_2])$.

Пусть $\sigma \in G_{b_1} \subset S(\pi^{-1}(b_1))$. Определим отображение $h(\sigma)(v) = f(\sigma(f^{-1}(v)))$. Нужно показать корректность: $h(\sigma) \in G_{b_2}$.

Если покажем, что эти построения это на самом деле одно и то же, то оба будут корректны.

Утверждается, что $\psi([g(\varphi)])(v) = \overline{g(\varphi)}_v(1) = f(\overline{\varphi}_{f^{-1}(v)})(1)$. Для этого надо проверить свойства: 1) $f(\overline{\varphi}_{f^{-1}(v)})(0) = f(f^{-1}(v)) = v$; 2) $\pi_2(f(\overline{\varphi}_{f^{-1}(v)})) = g(\pi_1(\overline{\varphi}_{f^{-1}(v)})) = g(\varphi)$.

Тогда $\psi([g(\varphi)]) = f(\overline{\varphi}_{f^{-1}(v)})(1) = f(\psi([\varphi])(f^{-1}(v))) = f(\sigma(f^{-1}(v)))$, что нам и надо. $\square$

Замечание (Гомоморфизм накрытий)*.* Эти рассуждения работают, если f, g — непрерывные отображения, такие что $\pi_2 \circ f = g \circ \pi_1$, а также, что $f\ |_{P_i}$ — биекция, где P_i — это i-й слой накрытия. В этом случае не факт, что индуцированное отображение является изоморфизмом.

Такие f, g задают так называемый гомоморфизм накрытий.

Лекция 3.

7 Разветвленные накрытия

Определение 1. Разветвленное накрытие $\pi : E \to B$ — это накрытие над $B \setminus B'$, где $B' \subset B$ — конечно (варианты: дискретно, нигде не плотно, имеет меньшую размерность. Все они равносильны, если B одномерно).

Минимальное по включению такое B' называется бифуркационным множеством разветвленного накрытия π.

Определение 2. Пусть $f(x)$ — многозначная комплексная функция ($f(x) = \{y \mid F(x,y) = 0\}$). Её разветвленным накрытием назовём $p : X \to \mathbb{C}, p(x,y) = x(X = \{(x,y) \mid F(x,y) = 0\})$.

Хочется сказать, что бифуркационное множество многочлена содержится в множестве $\{x \mid \exists y : (x, y) \in X, \frac{\partial F}{\partial y} = 0\}$. Однако, многочлен $xy - 1$ имеет бифуркационное множество $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, хотя точек указанного вида нет. Проблема в том, что у точки 0 прообраза нет, однако прооразокрестности не пуст, поэтому повторить доказательство для многочленов вида $g(y) - x$ не выйдет. Поэтому нам нужно, чтобы окрестности прообразов точки A содержали прообраз какой-то окрестности A, тогда все можно сделать по теореме об обратной функции.

То есть верное утверждение будем таким: бифуркационное множество B функции $f(x)$ лежит объединении в $B_1 = \{x_0 \mid F(x_0, \cdot) < \deg_y F\}$ и B'.

Определение 3. Пара отображений $f : E_1 \to E_2, g : B_1 \to B_2$ называется гомоморфизмом накрытий $p_1 : E_1 \to B_1$ и $p_2 : E_2 \to B_2$, если $p_2 \circ f = g \circ p_1$, то есть коммутирует диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{f} & E_2 \\ \downarrow{\scriptstyle p_1} & & \downarrow{\scriptstyle p_2} \\ B_1 & \xrightarrow{g} & B_2 \end{array}$$

Пример.

$$p_1 : X \to \mathbb{C}, X = \{G = 0\} \subset \mathbb{C}^2$$

$$p_2 : X' \to \mathbb{C}, X' = \{f(y) = x\} \subset \mathbb{C}^2$$

Пусть $p : E \to \mathbb{C}$ — разветвленное накрытие, $B_1 \supset B$, где B — бифуркационное множество. Тогда:

- $\pi_1(\mathbb{C} \setminus B) \xleftarrow{i_*} \pi_1(\mathbb{C} \setminus B_1)$, где $i : \mathbb{C} \setminus B_1$ вкладывает в $\mathbb{C} \setminus B$, так как локальная связность не нарушается от выкидывания дискретного набора точек. i_* является вместе с тем эпиморфизмом.

- Пусть есть две группы монодромии $G_1 = G_{p|_{\mathbb{C} \setminus B}}$, $G_2 = G_{p|_{\mathbb{C} \setminus B_1}}$.

  $$G_1 = \psi_p(\pi_1(\mathbb{C} \setminus B)) = \psi_p(i_*(\pi_1(\mathbb{C} \setminus B_1))), G_2 = \psi_p(\pi_1(\mathbb{C} \setminus B_1))$$

  .

  Поскольку i_* ничего не делает с петлями с точки зрения монодромии, хотя петель могло стать больше, то $G_1 = G_2$.

Таким образом группу монодромии разветвленного накрытия можно корректно опредeлелить как группу монодромии накрытия на $\mathbb{C} \setminus B$, где B — любое дискретное множество, содержащее бифуркационное.