

## Содержание

1	Тривиум	2
2	Теорема Турана и её обобщения	2
3	Теорема Эрдёша-Стоуна	3
4	Двудольные графы	5
5	Числа Турана для гиперграфов	6
6	Верхняя оценка на турановскую плотность	7
7	Центральная турановская плотность	8
8	Нижние оценки турановской плотности	9
9	Аналоги теоремы Турана для разреженных графов и гиперграфов	10
10	Точность оценки теоремы Ширера	11
11	Оценки внедиагональных чисел Рамсея	11
12	Графы без больших клик	13
13	Теорема Алона	16
14	Числа независимости гиперграфов с большим обхватом	17
15	Гипотеза Хейлбронна в комбинаторной геометрии	19

# 1 Тривиум

**Определение 1.**  $H = (V, E)$ ,  $|V| < \infty$ ,  $E \subset 2^V$  — гиперграф.  $V$  — вершины,  $E$  — рёбра.

Если  $\forall e \in E \rightarrow |e| = k$ , то гиперграф  $k$ -однородный ( $k = 2$  — обычный граф).

**Определение 2.** Число рёбер гиперграфа  $|E|$  или  $|E(H)| = e(H)$ .

Степень вершины  $v \in V$  —  $\deg v = \#\{e \in E \mid v \in e\}$ .

$\sum_{v \in V} \deg v = \sum_{e \in E} |e| = k|E|$  (в случае  $k$ -однородности).

$\Delta(H) = \max_{v \in V} \deg v$ .

$\delta(H) = \min_{v \in V} \deg v$ .

$t(H) = \frac{1}{|V|} \sum_{v \in V} \deg v$ .

**Определение 3.** Степенью ребра в  $H = (V, E)$  называется  $\deg e = \#\{f \in E \mid f \neq e, |f \cap e| \neq \emptyset\}$ .

$D(H) = \max_{e \in E} \deg e$ .

Если  $H$   $k$ -однороден, то  $\Delta(H) - 1 \leq D(H) \leq k(\Delta(H) - 1)$ .

**Определение 4.**  $W \subset V$  в  $H = (V, E)$  называется независимым, если  $\forall e \in E \rightarrow |e \cap W| < |e|$ .

Число независимости  $\alpha(H)$  — максимальный размер независимого множества в  $H$ .

**Определение 5.** Раскраска множества вершин  $H = (V, E)$  называется правильной, если любое ребро не является одноцветным. Равносильно: все цветные множества независимы.

Хроматическое число  $\chi(H)$  — минимальное число цветов в правильной раскраске гиперграфа.

Очевидно  $\frac{|V|}{\alpha(H)} \leq \chi(H) \leq \Delta(H) + 1$ .

# 2 Теорема Турана и её обобщения

$K_n$  — полный граф на  $n$  вершинах.

$K_{n_1, \dots, n_r}$  — полный  $r$ -дольный граф с долями размера  $n_1, \dots, n_r$ .

$K_{m*r}$  — полный  $r$ -дольный граф с размерами долей  $= m$ .

**Теорема 1** (Туран, 1941). Пусть  $n_1, \dots, n_r$  числа, такие что  $n_1 + \dots + n_r = n$ ,  $n_i = \lceil \frac{n}{r} \rceil$  или  $n_i = \lfloor \frac{n}{r} \rfloor$ . Пусть граф  $G$  на  $n$  вершинах не содержит подграфа, изоморфного  $K_{r+1}$ . Тогда

$$|E(G)| \leq |E(K_{n_1, \dots, n_r})| \leq \left\lfloor \frac{n^2}{2} \left(1 - \frac{1}{r}\right) \right\rfloor$$

*Доказательство.* Пусть  $G = (V, E)$  — граф с максимальным числом вершин, не содержащий  $K_{r+1}$ . Покажем, что в  $G$  не существует тройки вершин  $u, v, w$  такой, что  $(u, v) \in E, (u, w), (v, w) \notin E$ . Пусть такая тройка есть, тогда

- Пусть  $\deg w < \deg u$  (или  $\deg w < \deg v$ ). Удалим  $w$  из  $G$  и заменим её на копию  $u$  — вершину  $u'$ . Получится граф с большим числом рёбер, при этом  $K_{r+1}$  он не содержит (иначе его содержал бы и  $G$ ).
- Пусть  $\deg w \geq \deg u, \deg w \geq \deg v$ . Тогда удалим  $u, v$  из графа, добавим вместо них две копии вершины  $w$ . По аналогичному соображению число рёбер увеличилось, а  $K_{r+1}$  не появилось.

Вывод: отношение  $u \sim v \Leftrightarrow (u, v) \notin E$  является отношением эквивалентности. Значит наш граф  $G$  является полным многодольным графом, притом ясно, что долей не больше  $r$  (будем считать, что ровно  $r$ , просто некоторые доли пусты). Покажем, что доли почти равны.

В самом деле, если  $|A| > |B| + 1$ , то при перекладывании одной вершины из  $A$  в  $B$  теряется  $|B|$  рёбер и проводится  $|A| - 1$  рёбер, стало быть число рёбер увеличивается. Значит размеры всех долей отличаются не более, чем на 1, что доказывает теорему.  $\square$

Граф  $K_{n_1, \dots, n_r}$  из теоремы Турана принято называть графом Турана.

**Утверждение 1.** Следствие:  $\alpha(G) \geq \frac{n}{t(G)+1}$ .

*Доказательство.* Пусть  $\alpha = \alpha(G)$ , тогда  $\overline{G}$  не содержит  $K_{\alpha+1}$ . По теореме Турана  $|E(\overline{G})| \leq (1 - \frac{1}{\alpha}) \frac{n^2}{2} \Rightarrow |E(G)| \geq C_n^2 - (1 - \frac{1}{\alpha}) \frac{n^2}{2}$ .

Итак,  $\frac{n^2}{2\alpha} \leq |E(G)| + \frac{n^2}{2} - C_n^2 = \frac{t(G)n}{2} + \frac{n}{2}$ , что доказывает следствие.

Получается, что оценка точна и достигается (с точностью до округления) на  $T(n, r)$ .  $\square$

### 3 Теорема Эрдёша-Стоуна

Пусть  $H$  — произвольный граф. Числом Турана  $ex(n, H)$  называется

$$ex(n, H) = \max\{|E(G)| : |V(G)| = n, G \text{ не содержит подграфа, изоморфного } H\}.$$

Теорема Турана говорит, что  $ex(n, K_{r+1}) = |E(K_{n_1, \dots, n_r})|$ .

**Теорема 2** (Эрдёш-Стоун, 1946). Пусть  $r \geq 2$ ,  $H$  — фиксированный граф с  $\chi(H) = r + 1$ , тогда  $ex(n, H) = (1 - \frac{1}{r}) \frac{n^2}{2} + o(n^2)$ .

**Лемма 1.** Пусть  $r \geq 1, \varepsilon > 0$ . Тогда для всех достаточно больших  $n$  любой граф на  $n$  вершинах с  $(1 - \frac{1}{r} + \varepsilon) C_n^2$  рёбрами содержит подграф  $K_{t^*(r+1)}$ , где  $t = \Omega_{r, \varepsilon}(\log n)$ .

*Доказательство.* Рассмотрим сначала случай, когда все вершины имеют степень не менее  $(1 - \frac{1}{r} + \varepsilon)n$ . Будем доказывать по индукции по  $r$ .

База,  $r = 1$ , надо найти  $K_{t,t}$ . Пусть  $v_1, \dots, v_t$  — случайно выбранные  $t$  вершин из  $V$ , а  $X$  число их общих соседей.

$$EX = \sum_{u \in V} \frac{C_{\deg u}^t}{C_n^t} \geq n \frac{C_{n\varepsilon}^t}{C_n^t} \geq n \frac{(n\varepsilon - t)^t}{n^t} = n \left( \frac{n\varepsilon - t}{n} \right)^t.$$

Хотим, чтобы  $EX > t$ , для этого можно взять  $t = \Omega_\varepsilon(\log n)$  подходит для небольшой константы. При таком  $t$  существуют  $v_1, \dots, v_t$  с не менее, чем  $t$  общими соседями, это и есть  $K_{t,t}$ .

Докажем шаг индукции. Пусть мы нашли  $K_{T*r}$ , где  $T = \Omega_{r,\varepsilon}(\log n)$  в графе  $G$ . Обозначим  $U_1, \dots, U_r$  — доли этого графа,  $U = \bigcup_{i=1}^r U_i$ .

Пусть  $v$  — случайная вершина  $G$ ,  $X_v$  — число её соседей внутри  $U$ .

$$EX_v = \frac{1}{n} \sum_{v \in V} \sum_{(u,v) \in E} 1 = \frac{1}{n} \sum_{u \in U} \deg u \geq rT \left( 1 - \frac{1}{r} + \varepsilon \right).$$

Однако  $X_v \leq rT$ , значит

$$\begin{aligned} EX_v &\leq rT \left( 1 - \frac{1}{r} + \frac{\varepsilon}{2} \right) P \left( X_v < rT \left( 1 - \frac{1}{r} + \frac{\varepsilon}{2} \right) \right) + \\ &\quad rTP \left( X_v > rT \left( 1 - \frac{1}{r} + \frac{\varepsilon}{2} \right) \right) = \\ &\quad rT \left( 1 - \frac{1}{r} + \frac{\varepsilon}{2} \right) + rT \left( 1 - \frac{1}{r} + \frac{\varepsilon}{2} \right) P \left( X_v > rT \left( 1 - \frac{1}{r} + \frac{\varepsilon}{2} \right) \right). \end{aligned}$$

$$\text{Отсюда } P \left( X_v > rT \left( 1 - \frac{1}{r} + \frac{\varepsilon}{2} \right) \right) \geq \frac{rT \frac{\varepsilon}{2}}{rT \left( \frac{1}{r} - \frac{\varepsilon}{2} \right)} \geq \frac{r\varepsilon}{r} \geq \varepsilon.$$

Вывод: не менее  $\varepsilon n$  вершин имеют хотя бы  $rT \left( 1 - \frac{1}{r} + \frac{\varepsilon}{2} \right)$  соседей в  $U$ . Обозначим его через  $S$ ,  $|S| \geq \varepsilon n$ .

Далее, любая вершина из  $S$  имеет хотя бы  $\varepsilon T$  соседей внутри  $U_i$ . Иначе, множество соседей в  $U$  имеет мощности строго меньше, чем

$$\varepsilon T + (r-1)T = rT \left( 1 - \frac{1}{r} + \frac{\varepsilon}{r} \right) \leq rT \left( 1 - \frac{1}{r} + \frac{\varepsilon}{2} \right).$$

Пусть  $W_1, \dots, W_r$  случайные  $t$ -подмножества  $U_1, \dots, U_r$ , а  $X$  — число их общих соседей внутри  $S$ .

$EX \geq |S| \left( \frac{C_{\varepsilon T}^t}{C_T^t} \right)^r$ , тогда положим  $t = \frac{\varepsilon}{2}T$ , тогда  $EX \geq \varepsilon n \left( \frac{\varepsilon}{2} \right)^{rt} \geq t$ . Это выполнено при  $t = c(r, \varepsilon) \log n$  для подходящей константы  $c(r, \varepsilon) > 0$ .

Обратимся теперь к случаю, если не все степени достаточно большие. Покажем, что в  $G$  существует индуцированный подграф  $G'$  на  $s$  вершинах, все степени которого не меньше  $(1 - \frac{1}{r} + \varepsilon)s$ , а  $s \geq \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon n}$ . Тогда по предыдущему рассуждению  $G'$  содержит  $K_{t*r}$ , где  $t = \Omega_{r,\varepsilon}(\log s) = \Omega_{r,\varepsilon}(\log s)$ .

Построим  $G'$  следующим образом:  $G_n = G$ . Далее:

- если  $G_m$  содержит вершину степени  $< \left(1 - \frac{1}{r} + \frac{\varepsilon}{2}\right) m$ , то удалим её из  $G_m$ .
- продолжаем, пока процесс не остановится.

Пусть  $G_s$  — итоговый граф, тогда в нём не менее чем  $|E(G_n)| - \left(1 - \frac{1}{r} + \frac{\varepsilon}{2}\right) (n + n - 1 + \dots + s + 1) \geq \left(1 - \frac{1}{r} + \varepsilon\right) C_n^2 - \left(1 - \frac{1}{r} + \frac{\varepsilon}{2}\right) C_{n+1}^2 = \frac{\varepsilon}{2} C_n^2 - n$  рёбер.

С другой стороны,  $|E(G_s)| \leq C_s^2 \Rightarrow C_s^2 \geq \frac{\varepsilon}{2} C_n^2 - n \Rightarrow s \geq \frac{1}{2} \sqrt{\varepsilon n}$ .

Итак, лемма доказана.  $\square$

*Доказательство теоремы Эрдёша-Стоуна.* Так как  $\chi(H) = r + 1$ , то  $H$  вкладывается в  $K_{(r+1)*m}$  для какого-то  $m$ . Значит  $ex(n, H) \leq ex(n, K_{(r+1)*m})$ , что по лемме не больше, чем  $\left(1 - \frac{1}{r}\right) \frac{n^2}{2} + o(n^2)$ .

С другой стороны граф Турана  $T_{n,r}$  не содержит  $H$ , значит  $ex(n, H) \geq |E(T_{n,r})| = \left(1 - \frac{1}{r}\right) \frac{n^2}{2}$ .  $\square$

## 4 Двудольные графы

Теорема Эрдёша-Стоуна говорит про двудольные графы только, что  $ex(n, H) = o(n^2)$ . Займёмся выяснением более точной оценки.

**Теорема 3** (Шош, Ковари, Туран, 1954).  $ex(n, K_{s,t}) \leq \frac{1}{2}(s-1)^{\frac{1}{t}} n^{2-\frac{1}{t}} + \frac{1}{2}(t-1)n$ .

*Доказательство.* Пусть  $d_1 \geq \dots \geq d_n$  — степени вершин  $G$ . Пусть, кроме того,  $d_1 \geq \dots \geq d_m \geq t > d_{m+1} \geq \dots d_n$ . Тогда

$$\sum_{i=1}^n C_{d_i}^t = \sum_{i=1}^m C_{d_i}^t > \frac{1}{t!} m \sum_{i=1}^m (d_i - t + 1)^t \frac{1}{m}.$$

По неравенству Йенсена  $(E\xi^t \geq (E\xi)^t)$  получаем

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n C_{d_i}^t &= \frac{m}{t!} \left( \sum_{i=1}^m \frac{d_i - t + 1}{m} \right)^t \geq \frac{1}{t!} m^{1-t} \left( \sum_{i=1}^m (d_i - t + 1) \right)^t \geq \\ &\frac{1}{t!} n^{1-t} \left( \sum_{i=1}^n d_i - m(t-1) - \sum_{i=m+1}^n d_i \right)^t > \frac{1}{t!} n^{1-t} \left( (s-1)^{\frac{1}{t}} n^{2-\frac{1}{t}} \right)^t = \\ &\frac{s-1}{t!} n^t > (s-1) C_n^t. \end{aligned}$$

Рассмотрим  $v_1, \dots, v_t$  — случайные  $t$  вершин и введём  $X$  — число их общих соседей, тогда  $EX = \frac{\sum_{i=1}^n C_{d_i}^t}{C_n^t} > s - 1$ . Значит существуют  $v_1, \dots, v_t$ , имеющие хотя бы  $s$  общих соседей, значит  $K_{s,t}$  найдено  $\square$

Это только оценка, в отличие от теоремы Эрдёша-Стоуна, получить точную асимптотику оказывается совсем непросто. Известно, что если  $s > (t-1)!$ , то оценка из теоремы точна асимптотически. Однако, уже для  $s = t = 4$  поведение  $ex(n, K_{4,4})$  неизвестно.

**Утверждение 2.** • Если  $G$  — дистанционный граф в  $\mathbb{R}^2$  на  $n$  вершинах, то  $|E(G)| = O(n^{\frac{3}{2}})$

• Для дистанционного графа в  $\mathbb{R}^3$  на  $n$  вершинах  $|E(G)| = O(n^{\frac{5}{3}})$

*Доказательство.* Нужно заметить, что в первом случае  $G$  не содержит  $K_{3,2}$ , а во втором  $K_{3,3}$ , и применить теорему.  $\square$

## 5 Числа Турана для гиперграфов

**Определение 6.** Пусть  $n > b > k$ . Числом Турана  $T(n, b, k)$  называется минимальное число рёбер в  $k$ -однородном гиперграфе на  $n$  вершинах и числом независимости  $< b$ .

$$T(n, b, k) = \min\{|E(H)| : H \in \mathcal{H}_k, |V(H)| = n, \alpha(H) < b\}.$$

Гиперграфы данного множества называются  $(n, b, k)$ -системами.

**Пример 1.**  $T(n, b, 2) = |E(\overline{T_{n,b-1}})| = C_n^2 - |E(T_{n,b-1})| \sim \frac{n^2}{2(b-1)}.$

Если  $C_v^k$  — все  $k$ -подмножества,  $C_v^b$  — все  $b$ -подмножества, ( $k$ -подмножество  $A$  представляет  $b$ -подмножество  $B$ , если  $A \subset B$ ), то  $T(n, b, k)$  — наименьшая система общих представителей.

**Утверждение 3.**  $T(n, b, k) \geq \lceil \frac{n}{n-k} T(n-1, b, k) \rceil.$

*Доказательство.* Пусть  $H = (V, E)$  — произвольная  $(n, b, k)$ -система. Возьмём одну вершину  $v$  и удалим её вместе с рёбрами, останется  $H_v$  —  $(n-1, b, k)$ -система, в которой хотя бы  $T(n-1, b, k)$  рёбер. Тогда

$$|E(H)|(n-k) = \sum_{v \in V} |E(H_v)| \geq T(n-1, b, k) \cdot n,$$

откуда следует утверждение.  $\square$

**Утверждение 4.**  $\forall b > k \geq 2 \rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T(n, b, k)}{C_n^k} = t(b, k).$

*Доказательство.*  $\frac{T(n, b, k)}{C_n^k} \geq \frac{T(n-1, b, k)}{C_{n-1}^k}$  по утверждению, значит последовательность монотонна (и ограничена единицей).  $\square$

**Определение 7.** Величина  $t(b, k)$  называется Турановской плотностью.

Из доказательства следует, что  $T(n, b, k) \leq t(b, k) C_n^k.$

**Утверждение 5.**  $T(n, b, k) \leq T(n-1, b, k) + T(n-1, b-1, k-1)$ .

*Доказательство.* Пусть  $H_1 = (V, E_1)$  — это минимальная  $(n-1, b, k)$ -система,  $H_2 = (V, E_2)$  — это минимальная  $(n-1, b-1, k-1)$ -система. Возьмём  $v \notin V$  и рассмотрим  $H = (V \cup \{v\}, E_1 \cup E'_2, E'_2 = \{e \cap \{v\} : e \in E_2\})$ . Тогда  $H$  — это  $(n, b, k)$ -система, значит  $|E(H)| \geq T(n, b, k)$ , а с другой стороны  $|E(H)| = T(n-1, b, k) + T(n-1, b-1, k-1)$ .  $\square$

**Утверждение 6.**  $t(b, k) \leq t(b-1, k-1)$ .

*Доказательство.*  $\frac{k}{n}T(n, b, k) = T(n, b, k) - \frac{n-k}{n}T(n, b, k) \leq T(n, b, k) - T(n-1, b, k) \leq T(n-1, b-1, k-1) \Rightarrow \frac{T(n, b, k)}{C_n^k} = \frac{k}{n} \frac{T(n, b, k)}{C_{n-1}^{k-1}} \leq \frac{T(n-1, b-1, k-1)}{C_{n-1}^{k-1}}$ . Переходя к пределу, получаем требуемое.  $\square$

**Утверждение 7** (из анализа). Пусть  $b_0, \dots, b_{l-1}$  — циклически упорядоченные действительные числа,  $b = \frac{b_0 + \dots + b_{l-1}}{l}$ . Тогда  $\exists n : \forall s = 1, \dots, l \rightarrow b_m + b_{m+1} + \dots + b_{m+s-1} \geq sb$ .

*Доказательство.* Возьмём циклический сдвиг, соответствующий минимуму префиксных сумм.  $\square$

## 6 Верхняя оценка на турановскую плотность

**Теорема 4.**  $t(n, k) \leq \left(\frac{k-1}{b-1}\right)^{k-1}$ .

*Доказательство.* Пусть  $V$  — некоторое множество из  $n$  вершин и возьмём  $l, d$  так, что  $k = \lceil \frac{db}{l} \rceil$ . Разделим  $V$  на примерно равные части  $A_0, \dots, A_{l-1}$  и построим следующий гиперграф. Каждое  $B \subset V$ ,  $|B| = k$ , включается в  $H$  в качестве ребра, если числа  $b_i = |B \cap A_i|$  удовлетворяют свойству:  $\exists m : \forall s = 1, \dots, d \rightarrow \sum_{i=1}^s b_{m+i-1} \geq s \frac{b}{l}$ .

Покажем, что это  $(n, b, k)$ -система. Пусть  $C \subset V$ ,  $|C| = b$ . Введём  $c_i = |C \cap A_i|$ . Для чисел  $c_0, \dots, c_{l-1}$  существует сдвиг, для которого все частичные суммы не меньше  $\sum_{i=1}^s c_{m+i-1} \geq s \frac{b}{l}$ . Тогда выберем  $B \subset C$  следующим образом  $B = (C \cap A_m) \sqcup (C \cap A_{m+1}) \sqcup \dots \sqcup W$ , где  $W = C \cap A_{j+m}$ . Заметим, что  $\frac{db}{l} \leq k$ , а это значит для всех  $s = 1, \dots, l$  неравенство на префиксные суммы  $b_i$  будет следовать либо из того, что  $b_i = c_i$  до какого-то момента, либо из того, что  $s \leq d$ .

Оценим теперь число рёбер:

$$|E(H)| = \sum_{m=0}^{l-1} \sum_{a_1, \dots, a_d} \prod_{i=1}^d C_{A_{m+i-1}}^{a_i}$$

Притом средняя сумма берётся по наборам  $a_1, \dots, a_d$ , таким что  $a_1, \dots, a_d \in \{0, \dots, k\}$   $a_1 + \dots + a_d = k$ ,  $a_1 + \dots + a_s \geq \frac{sb}{l} \forall s = 1, \dots, d$ . Тогда

$$E(H) \leq l \sum_{a_1, \dots, a_d} \left( \prod_{i=1}^d C_{\frac{n}{l}}^{d_i} \right) \leq l \left( \frac{n}{e} \right)^k \sum_{a_1, \dots, a_d} \frac{1}{a_1! \dots a_d!}.$$

Положим  $l = b - 1$ ,  $d = k - 1$ . Если условия на частичные суммы нет, то сумма по всем  $a_1, \dots, a_d$  равна  $\frac{d^k}{k!}$ .

Если  $l = b - 1$ , то  $s \frac{b}{b-1} \in (s, s+1)$ , то есть  $a_1 + \dots + a_s \geq s \frac{b}{b-1}$  эквивалентно  $a_1 + \dots + a_s > s$ . Введем  $y_i = a_i - 1$ ,  $y_1 + \dots + y_{k-1} = 1$ ,  $y_i \geq -1$ ,  $y_1 + \dots + y_s > 0 \forall s = 1, \dots, k$ .

Тогда  $\exists$  ровно один циклический сдвиг последовательности  $y_1, \dots, y_{k-1}$ , такой, что все частичные суммы положительны.

Вывод:  $\sum_{a_1, \dots, a_d} \frac{1}{a_1! \dots a_d!} = \frac{1}{k-1} \frac{(k-1)^k}{k!}$ , стало быть  $|E(H)| \leq (1 + o(1))(b - 1) \left( \frac{n}{b-1} \right)^k \frac{(k-1)^k}{k!} \Rightarrow t(b, k) \leq \left( \frac{k-1}{b-1} \right)^{k-1}$ .  $\square$

## 7 Центральная турановская плотность

Из оценки  $t(b, k) \leq \left( \frac{k-1}{b-1} \right)^{k-1}$  следует при  $b = k + 1$ , что  $t(k + 1, k) \leq \frac{1}{e}(1 + o(1))$ .

**Теорема 5.**  $t(2k + 1, 2k) \leq \frac{C_{2k}^k}{2^{2k}} = O\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ .

*Доказательство.* Пусть  $V = \{1, \dots, n\}$ , а  $i_1 < \dots < i_{2k}$  — упорядоченный набор чисел. Тогда объявляем  $(i_1, \dots, i_{2k})$  ребром, если во множестве  $\{i_1 + 1, i_2 + 2, \dots, i_{2k} + 2k\}$  ровно  $k$  чисел чётные.

Обозначим за  $\mathcal{A}$  множество таких наборов и проверим, что  $\mathcal{A}$  — это  $(n, 2k + 1, 2k)$ -система. Будем делать это индукцией по  $k$ . База  $k = 1$  следует из того, что среди любых трёх чисел  $a_1 < a_2 < a_3$  найдутся два числа одной чётности, которые будут образовывать ребро.

Пусть для  $l \leq k - 1$  всё доказано. Пусть  $l = k$ ,  $a_1 < \dots < a_{2k+1}$ . Если существует пара соседних чисел  $a_j, a_{j+1}$  одной чётности, то удалим их из набора и к оставшимся применим индукцию. По её предположению найдётся поднабор  $a'_1 < \dots < a'_{2k-2}$  такой, что при добавлении индексов среди них будет ровно  $k - 1$  чётных чисел.

Теперь добавим к этому поднабору удалённые числа  $a_j, a_{j+1}$ . Получаем  $a'_1 < \dots < a'_t < a_j < a_{j+1} < a'_{t+1} < \dots < a'_{2k-2}$ . При добавлении  $(1, 2, \dots, 2k)$  получаем  $a'_1 + 1 < \dots < a'_t + t < a_j + t + 1 < a_{j+1} + t + 2 < a'_{t+1} + t + 3 < \dots < a'_{2k-2} + 2k$ , где, очевидно, будет половина чётных и половина нечётных чисел, так как  $a_j + t + 1$  и  $a_{j+1} + t + 2$  имеют разную чётность.

Если же чётность постоянно меняется, то достаточно удалить  $a_{k+1}$ .

Оценим теперь  $|\mathcal{A}|$ . Пусть  $a_1 < \dots < a_{2k}$  — ребро из  $\mathcal{A}$ ,  $x_i \equiv a_i \pmod{2}$ ,  $x_i \in \{0, 1\}$ . Положим  $b_i = \frac{a_i - x_i}{2} \in [0; \frac{n}{2}]$ . Тогда набор  $b_1, \dots, b_{2k}$  может быть



выбран  $\leq C_n^{2k}(1 + o(1))$  способами. Вектор  $(x_1, \dots, x_{2k})$  выбирается  $C_{2k}^k$  способами. Значит  $|\mathcal{A}| \leq C_n^{2k}(1 + o(1))C_{2k}^k = C_n^{2k}2^{-2k}(1 + o(1))$ , откуда  $t(2k+1, 2k) \leq \lim_n \frac{|\mathcal{A}|}{C_n^{2k}} \leq C_{2k}^k 2^{-2k} = O\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ .  $\square$

Насколько хороша эта оценка? Известны такие результаты:

- $0.409 \approx \frac{7-\sqrt{21}}{6} \leq t(3, 4) \leq \frac{4}{9} \approx 0.44$ . Предположение состоит в том
- Сидоренко (1982, 1987)  $\frac{1}{k} \leq t(k+1, k) \leq \frac{\ln k}{2k}(1 + o(1))$ .
- для  $b = k + a, a = \text{const}$  оценка Франкла-Рёдля (1985)  $t(k+a, k) \leq \frac{a(a+4+o(1)) \ln k}{C_k^a}$ .
- Жиро (1997)  $t(k+1, k) \geq \frac{2}{k\left(1 + \sqrt{\frac{k}{k+4}}\right)}$ .
- для  $b \geq k + \frac{k}{\log_2 k}$  оценка Сидоренко  $t(b, k) \leq \frac{(b-k+1)(1+o(1)) \ln C_b^k}{C_b^k}$ .

## 8 Нижние оценки турановской плотности

**Утверждение 8.**  $T(n, b, k) \geq \frac{C_n^k}{C_b^k}$ .

*Доказательство.* Любое  $k$ -подмножество представляет не более  $C_{n-k}^{b-k}$  подмножеств. Если есть  $(n, b, k)$  система, то все подмножества представлены, значит  $|E(H)|C_{n-k}^{b-k} \geq C_n^b \Rightarrow |E(H)| \geq \frac{C_n^k}{C_b^k}$ .  $\square$

В терминах турановской плотности  $t(b, k) \geq \frac{1}{C_b^k} \approx b^{-k}$ .

**Теорема 6** (Спенсер). Пусть  $n \geq (b-1)\frac{k}{k-1}$ . Тогда  $T(n, b, k) \geq \left(\frac{n}{k}\right)^k \left(\frac{k-1}{b-1}\right)^{k-1}$ .

*Доказательство.* Пусть  $H = (V, E)$  — это  $(n, b, k)$  система, то есть  $\alpha(H) < b$ .

Пусть  $X$  — случайное подмножество, выбранное схемой Бернулли с параметром  $p$ .  $E|X| = np$ . Пусть  $Y$  — это число рёбер, полностью вошедших в  $X$ ,  $EY = |E|p^k$ . Удалим по одной вершине из каждого ребра, полностью попавшего в  $X$ , тогда останется  $X^*$  — независимое, значит  $|X^*| \leq b-1 \Rightarrow b-1 \geq E|X^*| \geq E(|X| - Y) = np - |E|p^k \Rightarrow |E| \geq (np - b + 1)p^{-k}$ . Максимизируя это по  $p$ , получаем, что  $p = \frac{(b-1)k}{n(k-1)}$ , а  $|E| \geq \left(\frac{(b-1)k}{k-1} - (b-1)\right) \left(\frac{(b-1)k}{n(k-1)}\right)^{-k} = \left(\frac{n}{k}\right)^k \left(\frac{k-1}{b-1}\right)^{k-1}$ .  $\square$

**Утверждение 9.** Если  $H$  —  $k$ -однородный гиперграф, на  $n$  вершинах, тогда  $\alpha(H) \geq \frac{k-1}{k} \frac{n^{\frac{1}{k-1}}}{t(H)^{\frac{1}{k-1}}}$ .

*Доказательство.* Пусть  $\alpha(H) = b - 1$ , тогда  $H$  — это  $(n, b, k)$  система, тогда по теореме Спенсера

$$\frac{nt(H)}{k} = |E(H)| \geq T(n, b, k) \geq \left(\frac{n}{k}\right)^k \left(\frac{k-1}{b-1}\right)^{k-1} \Rightarrow b-1 \geq \frac{n}{k}(k-1) \frac{1}{t(H)^{\frac{1}{k-1}}}$$

□

**Утверждение 10.**  $t(b, k) \approx \frac{1}{b^{k-1}}$  при  $k = \text{const}, b \rightarrow \infty$ .

## 9 Аналоги теоремы Турана для разреженных графов и гиперграфов

**Теорема 7** (Айтаи, Комлош, Семереди, Ширер). Пусть  $f(t) = \frac{t \ln t - t + 1}{(t-1)^2}$ ,  $f(0) = 1$ ,  $f(1) = \frac{1}{2}$ . Тогда, если  $G$  — граф на  $n$  вершинах без треугольников, то  $\alpha(G) \geq n f(t(G))$ .

*Доказательство.* Заметим, что для  $x \geq 0$   $f(x)$  непрерывна, кроме того  $f(x) \in (0; 1)$  при  $x > 0$ ,  $f'(x) < 0$ ,  $f''(x) \geq 0$ . Также  $f(x)$  является решением уравнения  $(x+1)f(x) = 1 + (x-x^2)f'(x)$ .

Индукция по числу вершин в  $G$ . Обозначим  $t = t(G)$ . Если  $n \leq \frac{t}{f(t)}$ , то всё доказано, так как соседи одной вершины являются независимыми.

Пусть теперь  $v$  — произвольная вершина,  $d_1$  — её степень,  $d_2$  — средняя степень её соседей. Покажем, что можно выбрать  $v$  так, что

$$(d_1 + 1)f(t) \leq 1 + (td_1 + t - 2d_1d_2)f'(t) \quad (*)$$

Для этого возьмём вершину случайно и проверим это неравенство в среднем. Пусть  $Y$  — сумма степеней соседей  $v$ ,  $Y = d_1d_2$ .

$$EY = \frac{1}{n} \sum_v \sum_{u: (u,v) \in E} \deg u = \frac{1}{n} \sum_u \deg^2 u \geq t^2.$$

В левой части неравенства в среднем стоит  $(t+1)f(t)$ , правая часть в среднем не меньше  $1 + (t^2 + t - 2t^2)f'(t) = 1 + (t - t^2)f'(t) \geq (t+1)f(t)$  в силу свойств  $f$ . Значит неравенство в самом деле выполнено в среднем, значит существует вершина, для которой выполнено указанное требование.

Удалим  $v$  из графа вместе с её соседями. Останется граф  $G'$ , с  $|V(G')| = n - 1 - d_1$ ,  $|E(G')| = \frac{nt}{2} - d_1d_2$ , так как  $G$  не содержит треугольников.

$t' = t(G') = \frac{2|E(G')|}{|V(G')|} = \frac{nt - 2d_1d_2}{n - 1 - d_1}$ , значит по индукции  $\alpha(G') \geq n' f(t')$ . Значит  $\alpha(G) \geq 1 + \alpha(G') \geq 1 + n' f(t')$ . Оценим по формуле Тейлора  $f(t') \geq f(t) + f'(t)(t' - t)$ , так как  $f''(t) > 0$ , значит

$$\begin{aligned} \alpha(G) &\geq 1 + n'(f(t) + f'(t)(t' - t)) = 1 + n'f(t) + n'f(t)t' - n'tf'(t) = \\ &1 + (n - 1 - d_1)f(t) + f'(t)(nt - 2d_1d_2) - (n - 1 - d_1)tf'(t) = \\ &1 + (n - 1 - d_1)f(t) + (t + td_1 - 2d_1d_2)f'(t) \geq (*) \geq \\ &(n - 1 - d_1)f(t) + (d_1 + 1)f(t) = nf(t). \end{aligned}$$

□

Пусть  $R(s, t)$  — число Рамсея, то есть  $\min\{n : \forall G = (V, E), |V| = n \rightarrow \alpha(G) \geq t \vee \omega(G) \geq s\}$ .

**Утверждение 11.**  $R(3, t) \leq \frac{t^2}{\ln t} (1 + o(1))$ .

*Доказательство.* Если  $G = (V, E), |V| = n$ . Если  $\omega(G) \geq 3$ , то есть треугольник, иначе  $\omega(G) < 3$  и  $t(G) \geq t$ , тогда  $\alpha(G) \geq t(G) \geq t$ . Если  $\omega(G) < 3, t(G) < t$ , то по теореме Ширера  $\alpha(G) \geq nf(t) = \frac{n \ln t}{t} (1 + o(1)) \geq t$ , если  $n \geq \frac{t^2}{\ln t} (1 + o(1))$ . □

Результат Кима (1995), улучшенный Бошаном, Кивашем, Гриффитсом (2013):  $R(3, t) \geq \frac{1}{4} \frac{t^2}{\ln t} (1 + o(1))$ .

## 10 Точность оценки теоремы Ширера

**Лемма 2.** Пусть  $d = d(n)$  — последовательность такая, что  $4 \leq d \leq o(n^{\frac{1}{4}})$ , тогда существует последовательность графов  $G_n$ , что  $V(|G_n|) = n, g(G_n) > 3, t(G_n) \sim d, \alpha(G_n) \leq \frac{2n \log d}{d} (1 + o(1))$ .

*Доказательство.* Рассмотрим случайный граф  $G(n, p), p = \frac{d}{n}$ .

Если  $X_n = |E(G(n, p))|$ , то  $EX_n = C_n^2 p \sum \frac{nd}{2}, DX_n = C_n^2 p(1 - p) = o(dn)$ . Тогда  $P(|X_n - EX_n| \geq n^{\frac{2}{3}}) \leq \frac{DX_n}{n^{\frac{4}{3}}} \rightarrow 0$ . Значит асимптотически почти наверное  $C_n^2 p - n^{\frac{2}{3}} \leq X_n \leq C_n^2 p + n^{\frac{2}{3}}$ , значит  $X_n \sim \frac{nd}{2}$ .

Оценим вероятность того, что в  $G(n, p)$  есть независимое множество размера  $\lceil \frac{2n \ln d}{d} \rceil = b$ .  $P(\alpha(G(n, p)) \geq b) \leq C_n^b (1 - p)^{C_b^2} \sim \frac{n^b}{b!} (1 - p)^{C_b^2} \leq \left(\frac{ne}{b}\right)^b \exp(-pC_b^2) = \left(\frac{ne}{b} \exp(-p\frac{b-1}{2})\right)^b \leq \left(\frac{\exp(1+o(1))}{2 \ln d}\right)^b \rightarrow b$ , если  $d \geq 4$ .

Пусть  $Y$  — число треугольников в  $G(n, p)$ ,  $EY = C_n^3 p^3 < \frac{d^3}{6}$ .  $P(Y \geq d^3) \leq \frac{1}{6}$ .

Значит, для достаточно больших  $n$  существует  $G'_n$  на  $n$  вершинах, такой что число его рёбер есть  $\frac{nd}{2}$ ,  $\alpha(G'_n) < \frac{2n \ln d}{d}$ , а число треугольников не больше  $d^3$ . Удалим по ребру из каждого треугольника, получим граф  $G_n$ .  $|E(G_n)| \geq |E(G'_n)| - d^3 \sim \frac{nd}{2}$ .  $\alpha(G_n) \leq \alpha(G'_n) + d^3 \sim \frac{2n \ln d}{d}$ , так как  $d = o(n^{\frac{1}{4}})$ . □

## 11 Оценки внедиагональных чисел Рамсея

Рассмотрим  $R(s, t)$  в случае фиксированного  $s \geq 4$  и растущего  $t$ .

**Лемма 3.** Пусть  $G$  — на  $n$  вершинах со средней степенью вершины  $t$ , числом рёбер  $e$  и числом треугольников  $t$ . Пусть  $p \in (0, 1), np \geq 12$ . Тогда  $G$  содержит индуцированный подграф  $G'$  такой, что  $n' > \frac{np}{2}, e' < 3ep^2, h' < 3hp^3, t' < 6tp$ .

*Доказательство.* Нам подойдёт случайный подграф, индуцированный по схеме Бернулли.

$$P\left(n' \leq \frac{np}{2}\right) < P\left(|n' - np| > \frac{np}{2}\right) \leq \frac{np(1-p)}{\frac{n^2 p^2}{4}} < \frac{4}{np} \leq \frac{1}{3}.$$

$$Ee' = ep^2 \Rightarrow P(e' \geq 3ep^2) \leq \frac{1}{3} \text{ по неравенству Маркова.}$$

$$Eh' = hp^3 \Rightarrow P(h' \geq 3hp^3) \leq \frac{1}{3} \text{ по неравенству Маркова.}$$

$$t' = \frac{2e'}{n'} < \frac{12ep^2}{np} = 6tp.$$

Значит с положительной вероятностью искомый граф найдётся.  $\square$

**Лемма 4.** Пусть  $\varepsilon \in (0, 2)$ ,  $G$  — граф на  $n$  вершинах со средней степенью  $t$  и числом треугольников  $h < nt^{2-\varepsilon}$ . Тогда  $\alpha(G) \geq c' \frac{n \ln t}{t}$ , где  $c'(\varepsilon) > 0$  зависит только от  $\varepsilon$ .

*Доказательство.* Пусть  $\gamma > 0$  — абсолютная константа такая, что для любого графа без треугольников выполнено  $\alpha(H) \geq \gamma \frac{|V(H)| \ln t(H)}{t(H)}$ . Положим  $c' = \frac{\varepsilon \gamma}{168}$ .

Если  $t < 12^{\frac{2}{\varepsilon}}$ , то все очевидно по теореме Турана. Пусть  $t > 12^{\frac{2}{\varepsilon}}$ . Применим к  $G$  лемму 3 с  $p = t^{\frac{\varepsilon}{4}} - 1$  и рассмотрим найденный индуцированный подграф  $G'$ . В нём будет не более  $3hp^3$  треугольников, то есть меньше, чем  $3nt^{2-\varepsilon}t^{\frac{\varepsilon}{2}-2}p = 3npt^{-\frac{\varepsilon}{2}} \leq \frac{np}{4}$ .

Удалим из каждого треугольника  $G'$  по вершине, получив  $G''$  без треугольников.

$$n'' \geq n' - \frac{np}{4} \geq \frac{np}{4}.$$

$$e'' \leq e' < 3ep^2.$$

$$t'' = \frac{2e''}{n''} \leq \frac{24ep^2}{np} = 12p \frac{2e}{n} = 12t^{\frac{\varepsilon}{4}}.$$

Тогда по теореме Ширера  $\alpha(G) \geq \alpha(G'') \geq \gamma \frac{n'' \ln t''}{t''} \geq \gamma \frac{np}{4} \frac{\ln 12t^{\frac{\varepsilon}{4}}}{12t^{\frac{\varepsilon}{4}}} = \frac{\gamma}{48} \frac{n}{t} \ln 12t^{\frac{\varepsilon}{4}} \geq \frac{\gamma \varepsilon}{168} \frac{n \ln t}{t}$ .  $\square$

**Теорема 8.** Пусть  $t \geq t_0(s)$ , тогда  $R(s, t) \leq c^s \frac{t^{s-1}}{(\ln t)^{s-2}}$ , где  $0 < c \leq 20000$  — абсолютная константа.

*Доказательство.* Из теоремы АКС известно, что  $\gamma$  можно взять равной  $\frac{1}{100}$ . Выберем в лемме 4  $\varepsilon = \frac{1}{s-2} 0.97 < \varepsilon < \frac{1}{s-2} 0.99$ . Индукция по  $s$  с уже доказанной базой  $s = 3$ . Пусть для  $s' < s$  всё доказано, докажем теперь шаг.

Рассмотрим произвольный граф  $G$  на  $n$  вершинах,  $n \geq c^s \frac{t^{s-1}}{(\ln t)^{s-2}}$ . Если  $\omega(G) \geq s$ , то очевидно. Если  $\omega(G) < s$  и  $m = c^{s-1} \frac{t^{s-2}}{(\ln t)^{s-3}} \leq \Delta(G)$ , то среди соседей вершины максимальной степени также найдётся либо  $s-1$ -клика, либо  $t$ -независимое множество, то есть все выполнено. То есть считаем, что  $\omega(G) < s, m > \Delta(G) \geq t(G)$ . Обозначим через  $h$  число треугольников в  $G$ .

Если  $h < nm^{2-\varepsilon}$ , то по лемме 4  $\alpha(G) \geq c' \frac{n \ln m}{m} \geq 20000c' \frac{t}{\ln t} \ln m \geq \frac{50}{48} \varepsilon \frac{t}{\ln t} (s-2) \ln \frac{t}{\ln t} \geq \frac{0.97}{0.96} t \left( \frac{\ln t - \ln \ln t}{\ln t} \right) \geq t$  при всех достаточно больших  $t$ .

Если  $h \geq nm^{2-\varepsilon}$ , то есть вершина, которая содержится в  $3m^{2-\varepsilon}$  треугольниках. Пусть  $G'$  — это граф соседей  $v$ , тогда  $|E(G')| \geq 3m^{2-\varepsilon}$ , при том, что  $|V(G')| < m$ . Значит в  $G'$  есть вершина  $w$  степени хотя бы  $6m^{1-\varepsilon}$ .

Индукцируем на соседях  $w$  подграф  $G''$ . Осталось показать, что  $|V(G'')| \geq R(s-2, t)$ . При достаточно больших  $t$ :

$$6m^{1-\varepsilon} = 6 \cdot \left( 20000^{s-1} \frac{t^{s-2}}{(\ln t)^{s-3}} \right)^{1-\varepsilon} \geq 6 \cdot 20000^{(s-1)\frac{s-3}{s-2}} \frac{t^{(s-2)-0.99}}{(\ln t)^{(s-3)-0.98\frac{s-3}{s-2}}} > \\ 6 \cdot 20000^{s-2} \frac{t^{s-3}}{(\ln t)^{s-4}} \frac{t^{0.01}}{(\ln t)^{1-0.99\frac{s-3}{s-2}} 20000^{\frac{1}{s-2}}} > 20000^{s-2} \frac{t^{s-3}}{(\ln t)^{s-4}} \geq R(s-2, t).$$

□

С помощью локальной леммы можно вывести нижнюю оценку  $R(s, t) \geq c(s) \left( \frac{t}{\ln t} \right)^{\frac{s+1}{2}}$ , что сходится при  $s = 3$ , но существенно расходится при больших  $s$ . В других результатах улучшена степень логарифма, но по степени  $t$  результатов нет.

## 12 Графы без больших клик

Далее мы займёмся графами, не содержащими  $K_n$  и покажем, что  $\alpha(G) \geq c \frac{n \ln t}{t \ln \ln t}$ , что является нетривиальной оценкой по сравнению с теоремой Турана. Для начала вспомним некоторые вещи:

**Определение 8.** Пусть  $X$  — случайная величина или вектор с плотностью  $p$ . Тогда энтропия это  $H(X) = E[-\log_2 p(x)]$ .

Простые свойства:

- $H(X) \geq 0$ ,  $H(X) = 0 \Leftrightarrow X = a_j$  п. н.
- $H(X) \leq \log_2 n$
- $H(X_1, \dots, X_m) \leq \sum_{j=1}^m H(X_j)$
- $h(x) = -x \log_2 x - (1-x) \log_2 (1-x)$  — это энтропия распределения  $Bern(p)$ . Притом  $h(x)$  выпукла вверх.

**Лемма 5.** Пусть  $G = (V, E)$ ,  $|V| = n$ ,  $\omega(G) < r$ ,  $r \geq 3$ . Обозначим через  $i(G)$  число независимых множеств в  $G$ , а  $\bar{\alpha}(G)$  — их средний размер. Тогда

$$\bar{\alpha}(G) \geq c(r) \frac{\ln i(G)}{\ln \ln i(G)},$$

где  $c(r) > 0$  зависит только от  $r$ .

*Доказательство.* Пусть  $S$  — случайное (равномерно выбранное) независимое множество. Тогда  $H(S) = \log_2 i(G)$ . Считаем, что  $V(G) = \{1, \dots, n\}$ . Обозначим  $\varphi = \frac{\bar{\alpha}(G)}{n}$ ,  $\alpha = \alpha(G)$ . Тогда выполнено следующее:

- $i(G) \leq 2^{nh(\varphi)}$
- $\bar{\alpha}(G) = n\varphi$
- $i(G) \geq 2^\alpha$

Последние два пункта очевидны, докажем первый. Для  $\forall v \in V(G)$  положим  $X_v = I\{v \in \cdot\}$ .  $\forall \beta \in \{0, 1\}^n, \beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ .  $P(X_1 = \beta_1, \dots, X_n = \beta_n) = \frac{1}{i(G)} I(\beta)$  определяет независимое множество). Значит

$$\log_2 i(G) = H(X_1, \dots, X_n) \leq \sum_{j=1}^n H(X_j) = \sum_{j=1}^n h\left(\frac{i_j(G)}{i(G)}\right),$$

где  $i_j(G)$  — число независимых множеств, содержащих вершину  $j$ . По неравенству Йенсена получаем:

$$\log_2 i(G) \leq nh \left( \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{i_j(G)}{i(G)} \right) = nh \left( \frac{1}{n} \bar{\alpha}(G) \right) = nh(\varphi).$$

Из первых двух неравенств  $\bar{\alpha}(G) = n\varphi = \frac{\varphi}{h(\varphi)} nh(\varphi) \geq \frac{\varphi}{h(\varphi)} \log_2 i(G)$ . Заметим, что  $\frac{x}{h(x)}$  возрастает по  $x$ . Из первого и третьего неравенства получаем, что  $nh(\varphi) \geq \alpha$ . По условию  $\omega(G) < r, \alpha(G) < \alpha + 1$ , значит  $n < R(r, \alpha + 1) \leq (\alpha + 1)^{r-1} \Rightarrow \alpha + 1 > n^{\frac{1}{r-1}}$ .  $h(\varphi) \geq \frac{1}{n} \left( n^{\frac{1}{r-1}} - 1 \right) = \frac{1+o(1)}{n^{\frac{r-2}{r-1}}}$ .

Если  $-x \ln x \geq \beta$ , то  $x \geq \frac{(1+o(1))\beta}{\ln \beta}$ . Тогда  $\varphi \geq \frac{(1+o(1)) \ln 2}{n^{\frac{r-2}{r-1}} \frac{r-2}{r-1} \ln n}$ . Наконец,  $\log_2 i(G) \geq \alpha \geq n^{\frac{1}{r-1}} - 1 \Rightarrow \log_2 \log_2 i(G) \geq \frac{1}{r-1} \log_2 n(1 + o(1))$ .

Подставляем всё в нашу оценку:

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}(G) &\geq \frac{\varphi}{h(\varphi)} \log_2 i(G) = \frac{1}{-\log_2 \varphi(1 + o(1))} \log_2 i(G) \geq \frac{\log_2 i(G)}{\frac{r-2}{r-1} \log_2 n} (1 + o(1)) \geq \\ &\frac{1}{r-2} \frac{\log_2 i(G)}{\log_2 \log_2 i(G)} (1 + o(1)) = \frac{1}{r-2} \frac{\ln i(G)}{\ln \ln i(G)} (1 + o(1)). \end{aligned}$$

□

**Теорема 9** (Ширер). Пусть  $G$  —  $d$ -регулярный граф на  $n$  вершинах, не содержащий  $K_r, r \geq 4$ . Тогда  $\alpha(G) \geq c(r) \frac{n \ln d}{d \ln \ln d}$ .

*Доказательство.* Пусть  $\mathcal{F}$  — множество всех независимых множеств в  $G$ , а  $S$  — его случайный элемент (с равномерным распределением). Для  $\forall v \in V(G)$  положим  $p_v = P(v \in S)$ .  $\bar{p}_v = \frac{1}{d} E \sum_{u \in V} I\{(u, v) \in E(G), u \in S\}$  — среднее число соседей в  $S$ .

Обозначим  $T_v$  — множество соседей  $v$ .  $H_v = G \setminus (\{v\} \cup T_v)$ . Для  $\forall U \subset T_v$  положим  $f(U)$  — вероятность того, что случайное независимое множество

в  $H_v$  не имеет соседей в  $U$ , но соединено со всеми вершинами из  $T_v \setminus U$ . Пусть  $I(U)$  — число независимых множеств внутри  $U$ . Тогда

$$p_v = \frac{i_v}{i(G)} = \frac{i_v}{i_v + \sum_{U \subset T_v} I(U)f(U)i(H_v)} = \frac{1}{1 + \sum_{U \subset T_v} f(U)I(U)}.$$

Аналогично

$$\bar{p}_v = \frac{\sum_{U \subset T_v} f(U)I(U)\bar{\alpha}(U)}{d \left( 1 + \sum_{U \subset T_v} f(U)I(U) \right)}.$$

Заметим, что если  $G$  не содержит  $K_r$ , то  $T_v$  не содержит  $K_{r-1}$ , значит по лемме  $\bar{\alpha}(U) \geq c(r-1) \frac{\ln I(U)}{\ln \ln I(U)}$ . Тогда для  $\lambda > 0$  рассмотрим сумму  $w = \sum_{U \subset T_v, |I(U)| \geq \lambda} I(U)f(U)$ .

Положим  $y = c(r-1) \frac{\ln \lambda}{\ln \ln \lambda}$ . Тогда  $p_v \geq \frac{1}{1+\lambda+w}$  и  $\bar{p}_v \geq \frac{yw}{(1+\lambda+w)d}$ . Первая оценка убывает, а вторая возрастает, отсюда  $p_v + \bar{p}_v \geq \max(p_v, \bar{p}_v) \geq \max\left(\frac{1}{1+\lambda+w}, \frac{yw}{(1+\lambda+w)d}\right) \geq \frac{1}{1+\lambda+\frac{d}{y}}$ . Находим оптимальное  $\lambda \sim \frac{d}{\ln d}$  и получаем оценку

$$p_v + \bar{p}_v \geq \frac{1}{1 + \frac{d}{\ln d} + \frac{d \ln \ln d}{c(r-1) \ln d} (1 + o(1))} = c(r-1) \frac{\ln d}{d \ln \ln d} (1 + o(1)).$$

Осталось заметить, что  $\bar{\alpha}(G) = E|S| = \sum_{v \in V} p_v$ , а с другой стороны  $\bar{\alpha}(G) = E \sum_{v \in V} I\{u \in S\} \frac{\deg u}{d} = E \sum_{v \in V} \frac{1}{d} \sum_{U \in T_v} I\{u \in S\} = \bar{p}_v$ . Тогда

$$\alpha(G) \geq \bar{\alpha}(G) = \frac{1}{2} \sum_{v \in V} (p_v + \bar{p}_v) \geq \frac{c(r-1)}{2} \frac{n \ln d}{d \ln \ln d} (1 + o(1))$$

.

□

**Следствие.** Пусть  $G$  — граф на  $n$  вершинах, не содержащий  $K_r$  с максимальной степенью  $\Delta(G) = d$ . Тогда  $\alpha(G) \geq c(r) \frac{n \ln d}{d \ln \ln d}$ .

*Доказательство.* Пусть  $G$  — не  $d$ -регулярный. Рассмотрим  $G'$  — копию  $G$ , не пересекающуюся по вершинам. Соединим ребрами  $v' \in G', v \in G$ , если  $v'$  — копия  $v$  и  $\deg_G v < d$ . Продолжим процедуру, пока граф не станет  $d$ -регулярным. Тогда полученный граф  $G^*$  не содержит  $K_r$  и  $n^* = |V(G^*)| = 2^k n$ , тогда по теореме  $\alpha(G^*) \geq c(r) \frac{n^* \ln d}{d \ln \ln d}$ . Но  $\alpha(G^*) \leq \alpha(G) 2^k$ , значит  $\alpha(G) \geq c(r) \frac{n \ln d}{d \ln \ln d}$ . □

**Следствие.** Пусть  $G$  — граф на  $n$  вершинах, не содержащий  $K_r$  со средней степенью  $t(G) = t$ . Тогда  $\alpha(G) \geq c(r) \frac{n \ln t}{t \ln \ln t}$ .

*Доказательство.* Удалим из  $G$  все вершины степени больше  $2t$ . Для оставшегося графа  $G'$  максимальная степень не больше  $2t$ . При этом  $|V(G')| = n' \geq \frac{n}{2}$ . Тогда  $\alpha(G) \geq \alpha(G') \geq c(r) \frac{n \ln 2t}{2t \ln \ln 2t} \geq c'(r) \frac{n \ln t}{t \ln \ln t}$ .  $\square$

**Следствие.** Пусть  $H$  — какой-то граф, а  $G$  — граф на  $n$  вершинах со средней степенью вершины  $t$ , не содержащий подграфов, изоморфных  $H$ . Тогда  $\alpha(G) \geq c(H) \frac{n \ln t}{t \ln \ln t}$ .

Недоказанное пока что предположение состоит в том, что повторный логарифм можно убрать аналогично задаче о графах без треугольников.

### 13 Теорема Алона

Далее мы докажем, что приведенная гипотеза верна, если  $G$  удовлетворяет свойству:  $\forall v \in V(G) \chi(G_v) \leq r \Rightarrow$  нет  $K_{r+2}$ . Пусть

**Лемма 6.**  $X$  — некоторое конечное множество,  $|X| = x$ ,  $\mathcal{F} \subset 2^X$  — система подмножеств такая, что  $|\mathcal{F}| = 2^{\varepsilon x}$ . Тогда средний размер элементов  $\mathcal{F}$  не меньше  $\frac{\varepsilon x}{10 \log_2(1 + \frac{1}{\varepsilon})}$ .

*Доказательство.* Считаем, что  $\mathcal{F}$  состоит  $2^{\varepsilon x}$  самых маленьких множеств. В силу того, что  $\frac{6}{7} \frac{1}{8} > \frac{1}{10}$ , достаточно проверить, что  $\frac{6}{7}$  элементов  $\mathcal{F}$  имеют размер не менее  $\frac{\varepsilon x}{8 \log_2(1 + \frac{1}{\varepsilon})} < \frac{x}{8}$ . Для любого  $r \leq \frac{x}{8}$  выполнено  $C_x^r > 7C_{x-1}^{r-1}$ . Значит  $C_x^r \geq \frac{6}{7} \sum_{i=0}^r r C_x^i$ . Осталось проверить, что

$$\sum_{i=0}^{\frac{\varepsilon x}{8 \log_2(1 + \frac{1}{\varepsilon})}} C_x^i \leq 2^{\varepsilon x}.$$

Пусть  $\xi \sim \text{Bin}(x, \frac{1}{2})$ , тогда  $\sum_{i=0}^r C_x^i 2^{-x} = P(\xi \leq r) = P(\xi \geq x - r) \leq |\forall u > 0| \leq P(e^{u\xi} \geq e^{u(x-r)}) \leq \frac{E e^{u\xi}}{e^{u(x-r)}} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^u\right)^x e^{-u(x-r)} = 2^{-x} \frac{(e^u + 1)^x}{e^{u(x-r)}}$ . Минимум по  $u$  достигается на  $e^u = \frac{x}{r}$ , поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^r C_x^i &\leq \left(\frac{x}{r}\right)^x \left(\frac{x}{r} - 1\right)^{r-x} = \left(\frac{x}{r}\right)^r \left(1 - \frac{r}{x}\right)^{r-x} = \\ &2^{-r \log_2 \frac{r}{x} - (r-x) \log_2 \left(1 - \frac{r}{x}\right)} = 2^{h\left(\frac{r}{x}\right)x}. \end{aligned}$$

Теперь достаточно показать, что  $h\left(\frac{\varepsilon}{8 \log_2(1 + \frac{1}{\varepsilon})}\right) \leq \varepsilon$ . Если  $y < \frac{1}{2}$ , то  $h(y) \leq 2y \log_2 \frac{1}{y}$ , а значит, что  $h\left(\frac{\varepsilon}{8 \log_2(1 + \frac{1}{\varepsilon})}\right) \leq \frac{1}{4 \log_2(1 + \frac{1}{\varepsilon})} \log_2 \left(\frac{8 \log_2(1 + \frac{1}{\varepsilon})}{\varepsilon}\right)$ .  $4 \log_2(1 + \frac{1}{\varepsilon}) \geq 3 + \log_2 \log_2(1 + \frac{1}{\varepsilon}) + \log_2 \frac{1}{\varepsilon}$ , так как  $\log_2 \frac{1}{\varepsilon} < \log_2(1 + \frac{1}{\varepsilon})$  и  $\forall s \geq 1 \rightarrow 3 + \log_2 s \leq 3s$ .  $\square$



**Теорема 10** (Алон). Пусть  $G = (V, E)$  — граф на  $n$  вершинах, с  $\Delta(G) = d$ . Пусть граф, индуцированный на множестве соседей любой вершины  $v$  является  $r$ -раскрашиваемым. Тогда  $\alpha(G) \geq \frac{1}{160 \log_2(r+1)} \frac{n \log_2 d}{d}$ .

*Доказательство.* Если  $d \leq 16$ , то все следует из теоремы Турана  $\alpha(G) \geq \frac{n}{d+1}$ . Далее считаем, что  $d > 16$ .

Пусть  $W$  — равномерно случайное независимое множество. Для  $\forall v \in V$  обозначим множество её соседей за  $N(v)$  и введём случайную величину

$$X_v = d|\{v\} \cap W| + |N(v) \cap W|.$$

Если  $v \in W$ , то  $X_v = d$ . Иначе  $X_v \leq |N(v)| \leq d$ . Покажем, что  $EX_v \geq \frac{\log_2 d}{80 \log_2(r+1)}$ .

Пусть  $H_v$  — подграф, индуцированный на  $\{v\} \cup N(v)$ . Покажем, что  $\forall S$  — независимых подмножеств выполнено:

$$E(X_v \mid W \cap H_v = S) \geq \frac{\log_2 d}{80 \log_2(r+1)}.$$

Пусть  $X$  — множество не-соседей  $s$  в  $N(v)$ ,  $|X| = x$ . Пусть число независимых множеств в подграфе, индуцированном на  $X$  равно  $2^{\varepsilon x}$ . По условию такой подграф является  $r$ -раскрашиваемым, значит в  $X$  существует независимое множество размера хотя бы  $\frac{x}{r}$ , значит  $2^{\varepsilon x} \geq 2^{\frac{x}{r}} \Rightarrow \varepsilon \geq \frac{1}{r}$ .

Если  $W \cap H_v = S$ , то для дополнения  $W$  есть  $1 + 2^{\varepsilon x}$  вариантов. Значит

$$E(X_v \mid W \cap H_v = S) = \frac{d}{2^{\varepsilon x} + 1} + \frac{\sum_{I \subset X, I \in \text{Indep}} |I|}{2^{\varepsilon x} + 1}$$

По лемме  $\sum_{I \subset X, I \in \text{Indep}} |I| \geq 2^{\varepsilon x} \frac{\varepsilon x}{10 \log_2(1 + \frac{1}{\varepsilon})} \geq \frac{d}{2^{\varepsilon x} + 1} + \frac{2^{\varepsilon x}}{2^{\varepsilon x} + 1} \frac{\varepsilon x}{10 \log_2(1 + \frac{1}{\varepsilon})}$ .

Если  $2^{\varepsilon x + 1} \leq \sqrt{d}$ , то первое слагаемое уже больше  $\sqrt{d} > \log_2 \frac{d}{2}$ . Если же  $\varepsilon x > \frac{1}{2} \log_2 d - 1 \geq \frac{1}{4} \log_2 d$ , значит

$$E(X_v \mid W \cap H_v = S) \geq \frac{\log_2 d}{80 \log_2(1 + \frac{1}{\varepsilon})} \geq \frac{\log_2 d}{80 \log_2(r+1)}.$$

В итоге,  $\sum_v X_v = d|W| + \sum_{u \in W} \deg u \leq 2d|W|$ , значит  $\alpha(G) \geq \bar{\alpha}(G) = E|W| \geq \frac{1}{2d} \sum_{v \in V} EX_v \geq \frac{n \log_2 d}{160d \log_2(r+1)}$ .  $\square$

**Следствие.** В условиях теоремы Алона, если  $t = t(G)$  — средняя степень, то  $\alpha(G) \geq \frac{c}{\log_2(1+r)} \frac{n \log_2 t}{t}$ , где  $c > 0$  — абсолютная константа.

## 14 Числа независимости гиперграфов с большим обхватом

**Следствие** (Из теоремы Спенсера). Если  $H$  —  $k$ -однородный гиперграф, на  $n$  вершинах, тогда  $\alpha(H) \geq \frac{k-1}{k} \frac{n}{t(H)^{\frac{1}{k-1}}}$ .

**Теорема 11** (Айтан, Комлош, Пинтц, Спенсер, Семереди). Пусть  $H$  —  $k$ -однородный гиперграф на  $n$  вершинах, а также

- $g(H) > 4$
- $t = t(H) \geq t_0(k)$
- $n \geq n_0(t, k)$ .

Тогда  $\alpha(H) \geq \left(\frac{0.98}{e}\right) \cdot 10^{-\frac{5}{k+1}} n \left(\frac{\ln t}{t}\right)^{\frac{1}{k-1}}$ .

Если отказаться от последнего условия, то оценка  $\alpha(H) \geq c(k)n \left(\frac{\ln t}{t}\right)^{\frac{1}{k-1}}$ .

**Теорема 12** (Дьюк, Лефман, Рёдль). Пусть  $H$  — простой ( $g(H) > 2$ )  $k$ -однородный гиперграф на  $n$  вершинах,  $\Delta(H) = \Delta \geq \Delta_0(k)$ , тогда

$$\alpha(H) \geq c(k)n \left(\frac{\ln \Delta}{\Delta}\right)^{\frac{1}{k-1}},$$

где  $c(k) > 0$  — положительная функция.

*Доказательство.* Пусть  $m_i$  — число циклов длины  $i$  в  $H$ ,  $i = 3, 4$ . Так как  $H$  простой, то  $m_i \leq n(\Delta_k - 1)^{i-1} \leq c_i(k)n\Delta^{i-1}$ . Рассмотрим  $Y$  — случайное подмножество вершин  $H$  по схеме Бернулли с вероятностью  $p$ . Выберем  $p = \Delta^{\frac{\varepsilon-1}{k-1}}$ ,  $\varepsilon \in (0, 1)$ .  $|Y| \sim \text{Bin}(n, p)$ ,  $np \geq \Delta^{1+\frac{\varepsilon+1}{k-1}} \rightarrow \infty$ . Значит при достаточно большом  $\Delta$   $P(|Y| \in [np - o(np), np + o(np)]) \geq 0.99$ .

Пусть  $\mu_i$ ,  $i = 3, 4$  — число циклов длины  $i$  в гиперграфе, индуцированном на  $Y$ , тогда  $E\mu_i = m_i p^{i(k-1)} \leq c_i(k)n\Delta^{i-1}\Delta^{i(\varepsilon-1)} = c_i(k)n\Delta^{i\varepsilon-1}$ . Хотим, чтобы  $i\varepsilon - 1 < \frac{\varepsilon-1}{k-1} \Rightarrow \varepsilon < \frac{k-2}{4k-5}$ . В таком случае  $E\mu_i = o(np)$ ,  $i = 3, 4$  при  $\Delta \rightarrow \infty$ . Число рёбер в  $Y$  в среднем равно  $p^k |E| \leq p^k \frac{n\Delta}{k}$ . Тогда с положительной вероятностью будет выполнено следующее:

- $|Y| = np + o(np)$
- $\mu_i = o(np)$ ,  $i = 3, 4$
- Число рёбер в  $Y$  не больше  $\frac{2p^k n\Delta}{k}$ .

Удалим из всех циклов внутри  $Y$  по вершине. Остаётся гиперграф  $H'$  с условием  $g(H') > 4$ , притом  $|V(H')| = np + o(np) \geq \frac{np}{2}$ ,  $t(H') \leq \frac{2p^k n\Delta}{|V'(H)|} \leq 4p^{k-1}\Delta$ . По теореме АКПСС

$$\begin{aligned} \alpha(H') &\geq c'(k)|V(H')| \left(\frac{\ln t(H')}{t(H')}\right)^{\frac{1}{k-1}} \geq c'(k) \frac{np}{2} \left(\frac{\ln 4p^{k-1}\Delta}{4p^{k-1}\Delta}\right)^{\frac{1}{k-1}} \geq \\ &c'(k) \frac{n}{2} \left(\frac{\ln 4\Delta^\varepsilon}{4\Delta}\right)^{\frac{1}{k-1}} \geq c(k)n \left(\frac{\ln \Delta}{\Delta}\right)^{\frac{1}{k-1}} \end{aligned}$$

□

**Следствие.** Если  $H$  — простой  $k$ -однородный гиперграф со средней степенью вершины  $t$ , то  $\alpha(H) \geq c(k)n \left(\frac{\ln t}{t}\right)^{\frac{1}{k-1}}$ .

## 15 Гипотеза Хейлбронна в комбинаторной геометрии

В единичный круг вброшено  $N$  точек.  $\exists c > 0$  такое, что при любом расположении точек найдётся треугольник с площадью  $\leq \frac{c}{N^2}$ .

**Утверждение 12.** Гипотеза Хейлбронна неверна.

*Доказательство.*  $t = n^{\frac{1}{10}}, \delta = \frac{t^2}{51n^2}, n$  — какое-то большое число. Пусть  $X, Y, Z$  — три случайные точки в единичном круге  $U$ . Геометрическими соображениями вероятность того, что треугольник с вершинами в  $X, y, Z$  имеет площадь меньше  $\Delta$  оценивается как  $\frac{1}{\pi^2} \int_0^2 \frac{4\Delta}{r} 2\pi r dr \leq \frac{16}{\pi} \Delta < \frac{t^2}{n^2}$ .

Рассмотрим  $n$  случайных точек внутри  $U$  и построим 3-однородный гиперграф  $H'$ , где в ребро объединяются те тройки вершин, которые образуют треугольник площади меньше  $\Delta$ . По неравенству Маркова хотя бы  $\frac{1}{2}$  число рёбер будет  $2C_n^3 \frac{t^2}{n^2} \leq \frac{nt^2}{3}$ .

Вероятность образования 2-цикла среди 4 вершин в таком графе оценивается как  $\frac{1}{\pi^3} \int_0^2 \min\left(2, \frac{4\Delta}{r}\right)^2 2\pi r dr \leq \frac{1}{\pi^3} \int_0^{2\Delta} 8\pi r dr + \frac{1}{\pi^3} \int_{2\Delta}^2 \frac{32\Delta^2}{r^2} \pi r dr = o(\Delta^2 \ln \Delta) = o(n^{\frac{4}{10} - 4 \ln n}) = o(n^{\frac{1}{2} - 4})$ . Значит среднее число 2-циков есть  $o(\sqrt{n})$ . Удалим по одной вершине из каждого. Останется простой гиперграф, в котором по теореме ДЛР  $\alpha(H) \geq cn \left(\frac{\ln t}{t}\right)^{\frac{1}{2}}$ . Заметим, что  $t(H) < \frac{nt^2}{|V(H)|} \sim t^2 \Rightarrow \alpha(H) \geq cn \frac{\sqrt{\ln t}}{t} = N$ . Эти  $N$  точек не содержат ни одного треугольника большой площади.  $\Delta = \frac{t^2}{51n^2} \geq c' \frac{\ln N}{N^2}$ .  $\square$