24.10.2015

- Графы — множество моделей теории с парой предикатных символов.
- Группы — множество моделей теории с чуть большим количеством предикатных и функциональных символов.

Мысль первая: много моделей можно описать какими-то равенствами (кванторы всеобщности можно убрать, ибо из φ выводится $\forall\varphi$. Также всегда считаем, что всегда есть бинарный предикатный символ равенства.

Поэтому рассматриваем *решётки* — $\mathcal{L} = (L \neq \varnothing, \wedge, \vee, =)$. Что делает решётку решеткой:

L1. Коммутативность

L2. Ассоциативность

L3. Рефлексивность (можно получить из остальных)

L4. Идемпотентность

Примеры

- Булевы функции $(\mathbb{B}, \wedge, \vee)$
- Подмножества $(2^X, \cap, \cup)$
- $(\mathbb{N}_+, (\cdot,\cdot), [\cdot,\cdot])$
- Нормальные подгруппы $(N(G), \cap, \cdot)$

Порой (во всех предыдущих случаях) можно сопоставить решетке какой-то порядок.

Пусть $(A, \leqslant)$ — ч.у.м. Говорим, что a — верхняя (нижняя) грань $P \subset A$, если $\forall x \in P x \leqslant a (x \geqslant a)$. Ясно, что можно определить $\sup P$.

Говорим, что $a \prec b$ (покрывает), если $\forall c (a \leqslant b \leqslant c \Rightarrow c = a \wedge c = b)$.

Диаграммы Хассa — изображения порядков.

Теорема 1. *$(L, \wedge, \vee)$ — решётка тогда и только тогда, когда $\exists \leqslant \subset L^2$ — ч.у.м. и $a \wedge b = \inf\{a, b\}, a \vee b = \sup\{a, b\}$.*

Доказательство.
$\Longrightarrow a \leqslant b \stackrel{def}{=} a \wedge b = a$. Формально проверяем конструкцию.
$\Longleftarrow$ Определим $a \wedge b = \inf\{a, b\}, a \vee b = \sup\{a, b\}$ и снова всё проверим. □

Изоморфизм решёток: $(L_1, \wedge_1, \vee_1) \stackrel{\alpha}{\cong} (L_2, \wedge_2, \vee_2)$. При этом α — биекция, сохраняет $\wedge, \vee$.

Теорема 2. *$L_1 \stackrel{\alpha}{\cong} L_2$ тогда и только тогда, когда $L_1 \stackrel{\alpha}{\sim} L_2$ и α, α^{-1} — монотонные отображения, то есть являются изоморфизмами упорядоченных множеств.*

Доказательство.
$\Longrightarrow a \leqslant_1 b \Rightarrow a = a \wedge_1 b \Rightarrow \alpha(a) = \alpha(a \wedge_1 b) = \alpha(a) \wedge_2 \alpha(b) \Rightarrow \alpha(a) \leqslant_2 \alpha(b)$.
α^{-1} — тоже изоморфизм.
$\Longleftarrow$ Хотим: $\alpha(a \vee_1 b) = \alpha(a) \vee_2 \alpha(b)$. Пишем: $a \leqslant_1 a \vee_1 b, b \leqslant_1 a \vee_1 b \Rightarrow \alpha(a), \alpha(b) \leqslant_2 \alpha(a \vee_1 b)$, то есть верхняя грань. $\alpha(a) \leqslant_2 c, \alpha(b) \leqslant_2 c \Rightarrow a \leqslant_1 \alpha^{-1}(c), b \leqslant_1 \alpha^{-1}(c) \Rightarrow \alpha(a \vee_1 b) \leqslant_2 c$, что и нужно. □

(Изомофрное) *вложение* $\eta : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$, причём η сохраняет порядок и инъективно. *Подрешётка* — когда носители вложены, причем $\eta = id_{L_1} : L_1 \to L_2$ — вложение (NB: подмодель $\neq$ подрешётка).

31.10.2015

Давайте посмотрим на *дистрибутивные решётки.* Это вот такие:

$$D\wedge : x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z),$$
$$D\vee : x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z).$$

Теорема 3. *Достаточно любого из свойств выше.*

Ещё бывают *модулярные решётки*:

$$M : x \leqslant y \Rightarrow x \vee (y \wedge z) = y \wedge (x \vee z).$$

Теорема 4. *Любая дистрибутивная решётка модулярна.*

Решётка M_5 ($d \to a, b, c \to e$) недистрибутивна. Решётка N_5 ($d \to (a \to b), c \to e$) даже не модулярна. В некотром смысле она внезапно оказывается единственной немодулярной.

Утверждение 1. $L \models x \leqslant y \Rightarrow L \models x \vee (y \wedge z) \leqslant y \wedge (x \vee z)$.

Теорема 5 (Дедекинд)**.** $L \not\models M \Longleftrightarrow N_5$ *вкладывается в* L.

Доказательство. В одну сторону проверено. Если решётка не модулярна, то есть $a, b, c, a \leqslant b : \underbrace{a \vee (b \wedge c)}_{a_1} < \underbrace{b \wedge (a \vee c)}_{b_1}$. Можно убедиться, что элементы $a_1 \wedge c \to (a_1 \to b_1), c \to a_1 \vee c$ образуют N_5. Придётся попотеть, доказать все неравенства, а ещё нужно, чтобы никакие два не совпадали. □

Теорема 6 (Биркгоф)**.** $L \not\models D\wedge \Longleftrightarrow N_5$ *или* M_5 *вкладывается в* L.

Доказательство. В одну сторону снова ясно. Если решётка не дистрибутивна, то $\exists a, b, c : a \wedge (b \vee c) > (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$, ибо нестрогое неравенство выполнено в любой решётке, а равенства нет. Тогда скажем, что

$$d = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c),$$
$$e = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \wedge (b \vee c),$$
$$a_1 = (a \wedge e) \vee d,$$
$$b_1 = (b \wedge e) \vee d,$$
$$c_1 = (c \wedge e) \vee d.$$

Аккуратно проверим и получим $d \to a_1, b_1, c_1 \to e$ изоморфно M_5. $\square$

07.11.2015

Упорядоченное множество *полно*, если у любого подмножества есть супремум и инфимум. Решётка полна, если соответствующее упорядоченное множество полно.

Теорема 7. *Решётка полна тогда и только тогда, когда у любого подмножества существует супремум.*

Доказательство. Возьмем A — множество нижних граней B. У него есть супремум, он будет инфимумом B. $\square$

Рассмотрим $Eq(A)$ — множество всех отношений эквивалентности на A.

Утверждение 2. $(Eq(A), \subseteq)$ *— полная решётка.*

Доказательство. Легко показать, что $\bigcap\limits_{i \in I} E_i = \bigwedge\limits_{i \in I} E_i$. То есть инфимумом будет пересечение. $\square$

$\bigvee\limits_{i \in I} E_i = \bigcup \big\{ E_{i_1} \circ \ldots \circ E_{i_k} \mid (i_1, \ldots, i_k) \in I^k, k \in \mathbb{N} \big\}$, где $\circ$ есть композиция отношений.

C — *оператор замыкания*, если выпонены

C1. $X \subset C(X)$.

C2. $C(C(X)) = C(X)$.

C3. $X \subset Y \Rightarrow C(X) \subset C(Y)$.

Пример — замкнутые классы булевых функций, дедуктивное замыкание: $C(\Gamma) = \{\varphi \in Formulas \mid \Gamma \vdash \varphi\}$.

Есть ещё четвертое свойтсво (не входит в определение): $C(X) = \bigcup \{C(Y) \mid Y \overset{(fin)}{\subset} X\}$. Обратное включение верно всегда. Прямое можно вывести из теоремы о полноте, если она есть.

Закнутое множество совпадает со своим замыканием. Пересечение замыканий равно замыканию пересечений. То есть замкнутые множества образуют полную решётку. Следствие: множество замкнутых классов булевых функций образует полную решётку (решётку Поста).

Теорема 8. *Любая полная решётка $\mathcal{L} = (L, \leqslant)$ изоморфна решётке $(L_c, \subset)$ для некоторого оператора замыкания C.*

Доказательство. $X \subset L, C(X) = \{a \in L \mid a \leqslant \bigvee X\}$. Тогда элементу a сопоставим замкнутый класс $\{b \in L \mid b \leqslant a\}$. $\square$

$a \in L$ *компактен*, если $\forall A \subset L(\exists \vee A, a \leqslant \vee A \Rightarrow \exists A' \overset{fin}{\subset} A : a \leqslant \vee A'\}$.

b компактно порождённый, если $\exists C \subset L, b = \vee C, \forall x \in C, x$ — компактен.

Решётка L — алгебраическая, если она полна и любой её элемент компактно порождён.

В частности, конечная решётка алгебраическая и решётка всех подмножеств алгебраическая (компакты в ней это в точности конечные подмножества).

14.11.2015

Замыкание: $C : P(A) \to P(A)$.

$$(C4)\ \forall X \subseteq A \to C(X) = \bigcup \{C(Y) \mid Y \overset{f}{\subseteq} X\}$$

(C1) — (C4) дают *алгебраичность* оператора замыкания.

Теорема 9. *Если C — алгебраический оператор замыкания, то $(L_c = \{X \subseteq A \mid X = C(X)\}, \subseteq)$ есть алгебраическая решётка, причём элементы есть в точности $C(X)$, где X — конечно.*

Доказательство. Пусть $X \overset{f}{\subseteq} A$, тогда докажем, что $C(X)$ компактно:

$$X = \{x_1, \ldots, x_k\}, X \subseteq C(X) \subseteq \bigvee_{i \in I} C(A_i) = C(\bigcup_{i \in I} A_i),$$
$$\forall x_k \in X \to x_k \in C(A_{i_1} \cup \ldots \cup A_{i_{s_k}}),$$
$$X \subset \bigcup_{1 \leqslant k \leqslant n} C(A_{i_1} \cup \ldots \cup A_{i_{s_k}}),$$
$$C(X) \subset C(\bigcup_{1 \leqslant k \leqslant n} C(A_{i_1} \cup \ldots \cup A_{i_{s_k}})).$$

Далее, (C4): $C(X) = \bigcup \{C(Z) \mid Z \overset{f}{\subseteq} X\} \subseteq C(\bigcup_{Z \overset{f}{\subseteq} X} C(Z)) \subset \bigvee_{Z \overset{f}{\subseteq} X} C(Z) \subseteq C(\bigcup_f C(Z)) \subseteq C(\bigcup_f Z)$.

Алгебраичность: $C(X) \subseteq \{C(Y) \mid Y \overset{f}{\subseteq} X\} \subseteq \bigvee_{Y \overset{f}{\subseteq} X} C(Y) \subseteq C(X)$. □

Теорема 10. *Пусть L — алгебраическая решётка. Тогда $L \cong L_C$ для некоторго алгебрического оператора замыкания C.*

Доказательство. Пусть A — множество компактных элементов $X \subseteq A$ решётки L, а $C(X)$ задано как $C(X) = \{b \in A \mid b \leqslant \bigvee X\}$.

Проверяем все свойства оператора замыкания и отображаем элемент $a \mapsto \{b \in A \mid b \leqslant a\}$, то есть во множество компактов, которые его не превосходят. □

Рассмотрим структуру $\mathcal{A} = (A \neq \varnothing, \mathcal{F})$, притом $\forall f \in \mathcal{F} \to \exists n \in \mathbb{N}\ f : A^n \to A$. Это, собственно, алгебра.

Решётка — булева алгебра с двумя функциями. Булева алгебра — дистрибутивная решётка, в которой есть $0, 1$, с тождетсвами $x \wedge 0 = 0, x \vee 1 = 1, x \wedge x' = 0, x \vee x' = 1$ (из этого всё выводится).