Лекция 7. Про слабо-перемешивающие системы

Хотим построить слабо-перемешивающую, но не перемешивающую систему.

Рассмотрим следующий процесс преобразования слов и будем его анализировать. $w_0 = 0, w_1 = 0010, \dots, w_{n+1} = w_n w_n 1 w_n$.

Определим эмпирическое распределение: $p(u \| w_\infty) = \lim\limits_{n\to\infty} p(u\|w_n)$, где $p(u\|v) = \frac{\#\{\text{вхождений u в v}\}}{|v|-|u|+1}$.

Лемма. *Меры $\mu_n(u) = p(u\|w_\infty), |u| = n$ согласованы, то есть если по большей мере рассмотреть маленькое слово, то получится то же, что по меньшей мере (или, что существует мера μ, проекцией которой являются все данные меры). Таким образом имеется динамическая система на пространстве $(\mathbb{A}^{\mathbb{Z}}, \mathcal{B}, \mu)$ с оператором Купмана $T : (x_i) \mapsto (x_{i+1})$.*

Теорема 1.

- *T — эргодическое;*
- *$\hat{T}^{h_n} \underset{w}{\to} \frac{\hat{T}+1}{2}$;*
- *$T \in WMix, T \notin Mix$.*

Процесс можно представить так: имеем слово w, записанное в башню снизу вверх. За 1 шаг мы должны скопировать w, получив три башни рядом. Далее на среднюю башню нужно дописать 1 и склеить все в один столбик.

Определение 1. $T \in Rang(1)$, если $\exists \xi_n = \{B_n, TB_n, \dots, T^{h_n-1}B_n, \varepsilon_n\} \to \varepsilon$, то есть $\forall A \exists \xi_n$ — измеримая на A и $\mu(A \Delta A_n) \to 0$.

Рассмотрим $\left\langle \hat{T}^{-h_n} f, g \right\rangle = \int\limits_X \hat{T}^{h_n} f(x) g(x) d\mu = \frac{1}{2}\langle f, g\rangle + \frac{1}{2}\left\langle \hat{T} f, g\right\rangle$. То есть второй пункт доказан.

Этюд: характеризация полиномов, таких, что $\lim \hat{T}^{-mh_n} = P_m(\hat{T})$. Можно получить, что $P_{3m} = P_m$ и выразить P_{3m+1}, P_{3m+2} через $P_m = P_{3m}$ и $P_{m+1} = P3m+3$ и изобразить их как результат случайного блуждания на графе Шреера $BS(1,3)/\langle t\rangle$, где $BS(1,3) = \left\langle a, t \mid tat^{-1} = a^3 \right\rangle$ (стандартное действие $a : x \mapsto x+1$, $t : x \mapsto 3x$).

Теорема 2. *Для эргодических T следующие утверждения эквивалентны:*

- *$T \in WMix$;*
- *$\sigma_T = \sigma_s + \sigma_{ac} (\nexists \varphi : \hat{T}\varphi = \lambda\varphi, \lambda \neq 1)$;*
- *Джойнинг $\mu \times \mu$ эргодичен относительно $T \times T$;*
- *(Н. Винер) $\forall \varepsilon > 0 \to \mathcal{F} = \{t : |\left\langle \hat{T}^t f, g \right\rangle| > \varepsilon\}$ имеет нулевую плотность: $\frac{\mathcal{F}\cap[1,N]}{N} \to 0$.*