Лекция 6. Системы уравнений II

1 Основные соображения по упрощению

Самый общий вопрос: при каких A общая система разрешима в радикалах. Первые мысли:

- Удобно рассматривать мономиальные замены переменных на комлексном торе $\mathbb{C}^{*k}$. $x^k = u^{Mk}$, где $M \in GL_k(\mathbb{Z})$.
- Случаи, которые можно свести к более простым:
  - A называется *невырожденной*, если $\forall i \to A_i \ni 0 \in \mathbb{Z}^k$, $\left\langle \bigcup\limits_{j=1}^{k} A_j \right\rangle_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}^k$. Вырожденные сводятся к невырожденным.
    Если $\exists i : 0 \notin A_i$. $\mathbb{C}^{A_j}$ заменяется на $\mathbb{C}^{A_j - \{k_0\}}$.
    Если же $\left\langle \bigcup\limits_{j=1}^{k} A_j \right\rangle_{\mathbb{Z}} \neq \mathbb{Z}^k$, то сведение делается (почти) мономиальной заменой $M : M^{-1}e_j = v_j \Rightarrow M^{-1} = (v_1 \dots v_k)$. Почти потому что замена может быть необратимой.
  - Пусть $\exists j_1 < \ldots < j_l : \dim \sum\limits_{p=1}^{l} A_{j_p} \leqslant l < n$ (сумма Минковского). Тогда набор $A_1, \ldots, A_n$ называется *приводимым*.
    Рассмотрим набор векторов $\alpha_1, \ldots, \alpha_l \in \mathbb{Z}^n$, которые порождают $\mathbb{Z}^n \cap \left\langle \sum\limits_{p=1}^{l} A_{j_p} \right\rangle$. Чтобы сделать замену нам хочется достроить этот набор до базиса $\mathbb{Z}^n$ (это возможно не всегда, но можно достроить хотя бы просто до базиса подрешётки размерности n).
    Рассмотрим мономиальную замену $u^k = x^{Mk}$, где $M = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, переходя к системе $P'_{j_s}(u) = P_{j_s}(x)$ с носителем $A'_{j_s} = A(P'_{j_s}) = M^{-1}(A_{j_s})$. В частности $M^{-1}(\alpha_j) = e_j$. Значит $A'_{j_s} \subset \mathbb{Z}^l \subset \langle e_1, \ldots, e_l \rangle$.
    Тогда разрешимость системы сводится к двум вопросам: разрешимость системы l уравнений с носителями A'_{j_s}, $s = 1, \ldots, l$ (кроме некоторых случаев, если она неразрешима, то и большая тоже) и разрешимость системы с носителями $\{A'_{j_s}/\mathbb{Z}^l \mid s > l\}$.

Теперь можно сформулировать гипотезу.

Утверждение 1. Если система невырождена и неприводима, а ожидаемое количество решений больше 4, то она не разрешима в радикалах.

2 Смешанный объём Минковского

Нужно только уточнить, что понимается под «ожидаемым числом решений».

Теорема 1 (Бернштейн, Хованский)**.** *Для системы общего пололжения с носителями* $A_1, \ldots, A_n$ *(невырожденной) количество решений в* $(\mathbb{C}^*)^n$ *совпадает со смешанным объёмом Минковского* $MV_n(\langle A_1\rangle, \ldots, \langle A_n\rangle)$.

Смешанный объём Минковского можно определить многими способами:

- Конструктивно. Пусть выпуклые тела $A_1, \ldots, A_n \subset \mathbb{R}^n$, $F_A : (\mathbb{R}_+)^n \to \mathbb{R}$, $F(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = V_n(\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j A_j)$. Можно показать, что F — гладкая, что даёт нам право рассмотреть $\frac{\partial^n F_A}{\partial\lambda_1 \ldots \partial\lambda_n}(0)$ и объявить это *смешанным объёмом Минковского* $MV_n(A_1, \ldots, A_n)$.
- Некоторые свойства:
  - $MV(A, \ldots, A) = n! V_n(A)$. В самом деле $F_A = V_n((\sum \lambda_j)A) = V_n(A)(\sum \lambda_j)^n \Rightarrow \frac{\partial^n F_A}{\partial\lambda_1 \ldots \partial\lambda_n} = n!$.
  - MV — симметрична:
  $$MV_n(A_1, \ldots, A_n) = MV(A_{\sigma(1)}, \ldots, A_{\sigma(n)}), \sigma \in S_n.$$
  - MV — полилинейна:
  $$MV_n(\lambda_1 A_1' + \lambda_2 A_1'', A_2, \ldots, A_n) = \\ \lambda_1 MV_n(A_1', A_2, \ldots, A_n) + \lambda_2 MV_n(A_1'', A_2, \ldots, A_n).$$
- Предыдущих трёх свойств достаточно, чтобы определить функцию на множестве $(\Omega_n)^n$ (Ω_n — множество выпуклых тел в $\mathbb{R}^n$) однозначно. В частности:
$$MV_2(A_1, A_2) = V(A_1 + A_2) - V(A_1) - V(A_2).$$
- Предыдущая формула ведёт нас к явному определению:
$$MV_n(A_1, \ldots, A_n) = \\ V_n\left(\sum A_j\right) - \sum_{k=1}^{n} V_n\left(\sum_{j \neq k} A_j\right) + \ldots + (-1)^{n-1} \sum_k V_n(A_k).$$

Пример. Найдем ожидаемое число решений системы $P_1(x, y) = ax^3 + bxy + c = P_2(x, y) = dx + ey^2 + f$. Выпуклые оболочки носителей — два треугольника, посчитав площадь суммы и суммы площадей, получаем 6.

3 Критерий разрешимости системы в радикалах

Теорема 2. *Утверждение гипотезы верно для наборов* $A_1, \ldots, A_n$*, для которых* $\exists j \exists k_1, k_2 \in A_j : [k_1; k_2] \not\subset \partial \langle A_j \rangle$.

Частный случай такого препятствия — линейные уравнения (A_j — маленький симплекс, который мономиальной заменой приводится к стандартному), которые, казалось бы, отметаются ограничением на невырожденность и неприводимость, однако, оказываются, бывают более сложные примеры таких многогранников.