Содержание

Литература:

- ???

1 Лямбда-исчисление

Безтиповое лямбда-исчисление: термы, α-конверсия, β, η-редукция.

Определение 1. $V = \{v_0, \dots, v_1\} \sim \mathbb{N}$ — алфавит. Определим λ-терм:

- $x \in V \Rightarrow x \in \Lambda$
- $M, N \in \Lambda \to (MN) \in \Lambda$
- $x \in V, M \in \Lambda \Rightarrow (\lambda x.M) \in \Lambda$

Замечание. Примечания: аппликация (применение) левоассоциативно, абстракция — наоборот.

Конверсии бывают некорректные. Можно сформулировать правило, определяющее корректную подстановку. Но мы будем далее считать, что в любом контексте ни одна переменная не имеет одновременно сводобных и связанных вхождений. Для этого примерним автоматические переименование в невстречающиеся: $\lambda x.M \to_\alpha \lambda y.(M[x \coloneqq y]), y \notin V(M)$.

Определение 2. Определим абстрактные редукции. $R \subset \Lambda \times \Lambda$ — редукция. Условия совместимости:

1. $MRN \Rightarrow M \to_R N$
2. $M \to_R N \Rightarrow LM \to_R LN, ML \to_R NL, \lambda x.M \Rightarrow_R \lambda x.N$

Также замкнём нашу редукцию: $\twoheadrightarrow_R$ и построим соответствующее отношение эквивалентности $=_R$.

Определение 3. Терм R-нормален, если $\nexists NM \to_R N$. Терм N является нормальной формой терма M, если он R-нормальный и $M =_R N$.

Терм нормализуемый, если у него есть нормальная форма и сильно нормализуемый, если любая цепочка редукций обрывается (на R-нормальной форме).

Лемма 1 (О ромбе)**.** *Пусть $R \in \{\beta, \beta\eta\}$. Тогда если $M \twoheadrightarrow N_1, M \twoheadrightarrow N_2$, то $\exists L : N_1 \twoheadrightarrow L, N_2 \twoheadrightarrow L$.*

Теорема 1 (Чёрча-Россера)**.** *Если $M =_R N \Rightarrow \exists L : M \twoheadrightarrow L, N \twoheadrightarrow L$.*

Следствие. *Нормальная форма (если существует) единственна.*

Нормальная форма существует не всегда. Не каждая цепочка преобразований ведёт к нормальной форме.

Утверждение 1. На базе лямбда-термов можно построить логику высказываний и примитивно-рекурсивную арифметику, нужным образом закодировав нужные функции.

Комбинатор неподвижной точки: $Y = \lambda f.(\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx))$ обладает интересным свойством $F(YF) = YF$.

Пример 1. Хотим найти комбинатор M, заданный условием $MXY = XM(MM)Y(MMM)$. Рассмотрим $F = \lambda mxy.xm(mm)y(mmm)$ и положим $M = YF$. Тогда все получится.

Можно находить и совместные неподвижные точки: $X = FXY, Y = GXY$. Возьмём $\Phi = \lambda p.\langle F(\pi_1 p)(\pi_2 p), G(\pi_1 p)(\pi_2 p)\rangle$. Тогда $Z = Y\Phi$ неподвижная точка, значит $Z = \Phi Z = \langle F(\pi_1 Z)(\pi_2 Z), G(\pi_1 Z)(\pi_2 Z)\rangle$. Тогда остаётся взять $X = \pi_1 Z, Y = \pi_2 Z$.

Используя эту машинерию, можно построить все примитивно-рекурсивные функции, а также другие виды рекурсии, а также и минимизацию.

Теорема 2. *Следующие условия равносильны:*

- f *представимо лямбда-термом*
- f *вычислимо на машинах Тьюринга*
- f *частично-рекурсивна (примитивная рекурсия + минимизация, возможны не тотальные функции)*