Содержание

1 Модели случайных графов

Определение 1. *Случайный граф* — случайный элемент со значениями в некотором конечном множестве графов.

Определение 2. *Равномерная модель.* K_n — полный граф, $0 \leqslant m \leqslant C_n^2$, $\mathcal{G}_m$ — множество всех остовных подграфов K_n, имеющих ровно m рёбер. Случайный граф в этой модели — случайный элемент с равномерным распределением на $\mathcal{G}_m$.

$$P(G(n,m) = F) = \frac{1}{C_{C_n^2}^m} \,\forall F \in \mathcal{G}_m$$

Фиксировано число рёбер, но другие характеристики выглядят посложнее, скажем $\deg v$ имеет гипергеометрическое распределение.

Определение 3. *Биномиальная модель.* $\mathcal{G}$ — множество всех остовных подграфов K_n, $p \in [0,1]$. Случайный граф в этой модели — случайный элемент на $\mathcal{G}$ со следующим распределением:

$$P(G(n,p) = F) = p^{|E(F)|}(1-p)^{C_n^2 - |E(F)|} \,\forall F \in \mathcal{G}$$

Много независимых событий, из-за чего многие характеристики имеют удобное распределение, например $\deg v \sim B(n-1, P)$. Число рёбер, впрочем, случайно.

Другие модели:

- Граф G, схема Бернулли на его рёбрах. Скажем, $G = K_{n,m}$ — случайный двудольный граф.
- Равномерное распределение на какой-то совокупности графов $\mathcal{F}$. Например, случайный d-регулярный граф
  - $d = 1$ — случайное совершенное паросочетание
  - $d = 2$ — случайный набор циклов
  - $d = 3$ — можно показать, что а.п.н. это гамильтонов цикл плюс какое-то совершенное паросочетание
- Случайный процесс на графе
  - С дискретным временем: $\tilde{G} = (\tilde{G}(n,m), m = 0 \dots C_n^2)$, в котором на каждом шаге появляется новое случайное равномерно выбранное ребро. $\tilde{G}(n,m) \overset{d}{=} G(n,m)$. Можно смотреть случайные моменты
    * $\tau_1(n) = \min\{m : \delta(\tilde{G}(n,m)) \geqslant 1\}$
    * $\sigma_1(n) = \min\{m : \tilde{G}(n,m) \text{ связен}\}$

    Теорема 1 (Баллобаш, Томасон)**.**

    $$P\left(\tau_1(n) = \sigma_1(n)\right) \to 1, n \to \infty$$

– С непрерывным временем: пусть для каждого ребра e графа K_n задана случайная величина T_e. Тогда для $\forall t > 0$ можно рассмотреть процесс:

$$\tilde{G}_T = \{e \mid T_e \leqslant t\}$$

Если все T_e распределены одинаково, $\tilde{G}_T(n,t) \stackrel{d}{=} G(n,p)$, где $p = P(T_e \leqslant t)$.

– Triangle-free process. На каждом шаге включаем одно случайное ребро так, чтобы не возникало треугольников. Можно показать, что в результате такого процесса α(итогового графа) $= O(\sqrt{n \ln n})$. Следствие: оценка на число Рамсея $R(3,t) \geqslant c\frac{t^2}{\ln t}$.

2 Общая теория случайных подмножеств

Пусть Γ — конечное множество, $|\Gamma| = N$.

- $\Gamma(p)$ — схема Бернулли на Γ.
- $\Gamma(n)$ — случайное подмножество размера n с равномерным распределением
- $\tilde{\Gamma}(m)$ — случайный процесс, включающий элементы последовательно

В асимптотиских утверждениях $\Gamma = \Gamma_n, n \in \mathbb{N}$ — последовательность, притом $N = N(n)$.

3 Монотонные и выпуклые свойства

Определение 4. Q — семейство подмножеств Γ называется *возрастающим*, если $A \in Q, A \subset B \to B \in Q$, *убывающим*, если $A \supset B \to B \in Q$, *монотонным*, если оно возрастающее или убывающее.

Ясно, что Q — возрастающее тогда и только тогда, когда $\overline{Q} = 2^\Gamma \setminus Q$ — убывающее. Будем обозначать $\Gamma(p) \models Q \Leftrightarrow \Gamma(p) \in Q$ («обладает свойством Q»).

Пример 1. Γ — рёбра K_n. Возрастающие свойства:

- связность
- содержит какой-то подграф
- $\delta(G) \geqslant k$

Убывающие свойства:

- планарность
- $\chi(G) \leqslant k$

- ацикличность

Лемма 1. *Пусть Q — возрастающее свойство. Тогда* $\forall p_1 \leqslant p_2, m_1 \leqslant m_2$*:*

$$P(\Gamma(p_1) \models Q) \leqslant P(\Gamma(p_2) \models Q)$$

$$P(\Gamma(m_1) \models Q) \leqslant P(\Gamma(m_2) \models Q)$$

Доказательство.

- $P(\Gamma(m_1) \models Q) = P(\tilde{\Gamma}(m_1) \models Q) \leqslant P(\tilde{\Gamma}(m_2) \models Q) = P(\Gamma(m_2) \models Q)$
- Пусть $\Gamma(p') \perp \Gamma(p'')$ — два независимых подмножества. Тогда $\Gamma(p') \cup \Gamma(p'') \overset{d}{=} \Gamma(p)$, где $p = p' + p'' - p'p''$. Тогда можно положить $p' = \frac{p_2 - p_1}{1 - p_1}$, а также, что $\Gamma(p') \perp \Gamma(p_1)$. Тогда

$$P(\Gamma(p_1) \models Q) \leqslant P(\Gamma(p_1) \cup \Gamma(p') \models Q) = P(\Gamma(p_2) \models Q).$$

□

Определение 5. Свойство Q называется *выпуклым*, если $A \subset C \subset B \in Q \Rightarrow C \in Q$

Пример 2.

- все монотонные выпуклы
- $\chi(G) = k$

4 Асимптотическая эквивалентность моделей

Хотим установить какую-то связь между моделями $\Gamma(p)$ и $\Gamma(m)$ при $pN \sim m$. Для этого введём следующий контекст:

- $\Gamma(n), n \in \mathbb{N}$ — последовательность конечных множеств
- $N = N(n) \to +\infty$
- $Q = Q(n)$
- $p = p(n) \in [0, 1]$
- $m = m(n) \in \{0, \ldots, N\}$
- $\Gamma(n, p), \Gamma(n, m)$ — случайные подмножества $\Gamma(n)$

Лемма 2. *Пусть Q — свойство $\Gamma(n)$. Пусть $p = p(n) \in [0,1]$ — некоторая функция. Если для любой последовательности $m = m(n)$, такой что*

$$m = Np + O(\sqrt{Npq}), q = 1 - p$$

выполнено

$$P(\Gamma(n,m) \models Q) \to a, n \to \infty$$

то

$$P(\Gamma(n,p) \models Q) \to a, n \to \infty.$$

Доказательство. Пусть $C > 0$ — большая константа и положим $M(C) = \{m \mid |m - Np| \leqslant C\sqrt{Npq}\}$. Обозначим

$$m_* = \underset{m \in M(C)}{\operatorname{argmin}} P(\Gamma(n,m) \models Q)$$

$$m^* = \underset{m \in M(C)}{\operatorname{argmax}} P(\Gamma(n,m) \models Q)$$

По формуле полной вероятности:

$$P(\Gamma(n,p) \models Q) = \sum_{m=0}^{N} P(\Gamma(n,p) \models Q \mid \quad |\Gamma(n,p)| = m) P(|\Gamma(n,p)| = m) =$$
$$\sum_{m=0}^{N} P(\Gamma(n,m) \models Q) P(|\Gamma(n,p)| = m) \geqslant$$
$$\sum_{m \in M(C)} P(\Gamma(n,m) \models Q) P(|\Gamma(n,p)| = m) \geqslant$$
$$P(\Gamma(n,m_*) \models Q) P(|\Gamma(n,p)| \in M(C)|)$$

Но $|\Gamma(n,p)| \sim Bin(N,p), E|\Gamma(n,p)| = Np, D|\Gamma(n,p)| = Npq$. По неравенству Чебышева:

$$P(||\Gamma(n,p)| - Np| > C\sqrt{Npq}) \leqslant \frac{Npq}{C^2 Npq} = \frac{1}{C^2}$$

Значит $P(\Gamma(n,p) \models Q) \geqslant P(\Gamma(n,m_*) \models Q) \left(1 - \frac{1}{C^2}\right)$.

Аналогично

$$P(\Gamma(n,p) \models Q) \leqslant \sum_{m \in M(C)} P(\Gamma(n,m) \in Q) P(|\Gamma(n,p)| = m) + \sum_{m \notin M(C)} P(|\Gamma(n,p)| = m)$$
$$\leqslant P(\Gamma(n,m^*) \in Q) + \frac{1}{C^2}$$

Значит $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} P(\Gamma(n,p) \models Q) \leqslant a + \frac{1}{C^2}$.

Также $\underline{\lim\limits_{n \to \infty}} P(\Gamma(n,p) \models Q) \geqslant a(1 - \frac{1}{C^2})$.

Это верно для любого $C > 0$. Тогда $\exists \lim P(\Gamma(n,p) \models Q) = a$. $\square$

5 Связь в обратную сторону

Лемма 3. *Пусть Q — монотонное свойство, $a \in [0;1]$. Если $\forall p = p(n)$ такой, что $p = \frac{m}{N} + o(\sqrt{\frac{m(N-m)}{N^3}})$ выполнено, что $P(\Gamma(n,p) \models Q) \to a$, то $P(\Gamma(n,m) \models Q) \to a$.*

Докажем только ослабленный вариант, где $a = 0$ или $a = 1$.

Лемма 4. *Пусть Q — монотонное свойство, $m = m(n), m(n) \to +\infty$ и $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{m}{N} < 1$. Тогда если $P(\Gamma(n, \frac{m}{N}) \models Q) \to 1$, то $P(\Gamma(n,m) \models Q) \to 1$.*

Доказательство.

1. Если Q — возрастающее свойство, то

$$P(\Gamma(n,\frac{m}{N}) \models Q) = \sum_{k=0}^{N} P(\Gamma(n,\frac{m}{N}) \models Q \mid |\Gamma(n,\frac{m}{N})| = k) P(|\Gamma(n,\frac{m}{N})| = k) \leqslant$$
$$\sum_{k=0}^{N} P(\Gamma(n,k) \models Q) P(|\Gamma(n,\frac{m}{N})| = k) \leqslant \sum_{k=0}^{m} + \sum_{k>m+1} \leqslant$$
$$P(\Gamma(n,m) \models Q) P(|\Gamma(n,\frac{m}{N})| \leqslant m) + P(|\Gamma(n,\frac{m}{N})| > m)$$

   По ЦПТ (условие на скорость роста $m(n)$ позволяет ею воспользоваться), получаем, что

$$1 \leqslant \frac{1}{2} \underline{\lim_{n}} P(\Gamma(n,m) \models Q) + \frac{1}{2}$$

   Значит $\exists \lim\limits_{n} P(\Gamma(n,m) \models Q) = 1$.

2. Если Q — убывающее, то $P(\Gamma(n, \frac{m}{N}) \models Q) \leqslant P(|\Gamma(n,m)| > m) P(\Gamma(n,m) \models Q) + P(|\Gamma(n,m)| \leqslant m)$. Далее, все тоже самое.

□

Следствие. *То же самое верно и для $a = 0$.*

Следствие (Асимптотическая эквивалентность моделей)**.** *Пусть Q — возрастающее свойство, $m = m(n) \to +\infty$, $\overline{\lim\limits_{n}} \frac{m}{N} \leqslant 1 - \delta$. Тогда*

1. $P(\Gamma(n, \frac{m}{N}) \models Q) \to 1 \Rightarrow P(\Gamma(n,m) \models Q) \to 1$.
2. $P(\Gamma(n, \frac{m}{N}) \models Q) \to 0 \Rightarrow P(\Gamma(n,m) \models Q) \to 0$.
3. $P(\Gamma(n,m) \models Q) \to 1 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\, P(\Gamma(n, \frac{m}{N}(1+\varepsilon)) \models Q) \to 1$.
4. $P(\Gamma(n,m) \models Q) \to 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\, P(\Gamma(n, \frac{m}{N}(1-\varepsilon)) \models Q) \to 0$.

Доказательство. Первые два — это лемма и следствие. Положим $\frac{m}{N}(1+\varepsilon)=p(n)$. Тогда если $m'(n)=NP+O(\sqrt{Npq})=(1+\varepsilon)m+O(\sqrt{m})$, то $m'(n)\geqslant m(n)$ начиная с какого-то момента, значит в силу возрастания Q $P(\Gamma(n,m')\models Q)\geqslant P(\Gamma(n,m)\models Q)\to 1$. Значит $P(\Gamma(n,m')\models Q)\to 1$, то есть по лемме $P(\Gamma(n,\frac{m}{N}(1+\varepsilon))\models Q)\to 1$. Аналогично следует последний пункт. □

6 Пороговые вероятности

Мы доказали эквивалентность моделей только в случае вероятности, стремящейся к 0 или к 1. Однако, это самый важный случай, так как имеет место эффект «пороговой вероятности».

Определение 6. Пусть Q — возрастающее свойство подмножеств $\Gamma(n)$. Функция $\hat{p}=\hat{p}(n)$ называется *пороговой вероятностью* для Q, если выполнено $\lim\limits_{n\to\infty}P(\Gamma(n,p)\models Q)=1$ при $p=\omega(\hat{p})$ и 0, если $p=o(\hat{p})$.

Определение 7. Если Q — возрастающее свойство, то функция $\hat{m}=\hat{m}(n)$ называется *пороговой функцией* для Q, если выполнено $\lim\limits_{n\to\infty}P(\Gamma(n,m)\models Q)=1$ при $m=\omega(\hat{m})$ и 0 при $m=o(\hat{m})$.

Замечание. Для убывающих свойств все то же самое, с точностью до наоборот.

Замечание. $\hat{m}$ — пороговая вероятность $\Leftrightarrow \hat{p}=\frac{\hat{m}}{N}$ — пороговая функция.

Пример 3.
- $\Gamma(n)=\{1,\ldots,n\}$, $Q=\{$внутри есть 3-прогрессия$\}$. Тогда $\hat{p}=n^{-\frac{2}{3}}$ — пороговая вероятность, $\hat{m}=n^{\frac{1}{3}}$ — пороговая функция.
- $\Gamma(n)$ — рёбра K_n, $Q=\{$есть $\Delta\}$. Тогда $\hat{p}=\frac{1}{n}$ — пороговая вероятность.

Утверждение 1. Пусть Q — нетривиальное возрастающее свойство подмножеств $\Gamma(n)$. Тогда функция $f(p)=P(\Gamma(n,p)\models Q)$ является непрерывной, строго возрастающей на $[0;1]$, $f(0)=0, f(1)=1$.

Доказательство. Возрастание следует из предыдущих лемм.

$$f(p)=\sum_{A\in Q}P(\Gamma(n,p)=A)=\sum_{A\in Q}p^{|A|}(1-p)^{N-|A|}.$$

Это многочлен, строго возрастающая непрерывная функция. □

Определение 8. Если Q — возрастающее свойство, то $\forall a\in(0,1)$ положим $p(a,n)=f_n^{-1}(a)$. Введём также $m(a,n)=\min\{m:P(\Gamma(n,m)\models Q)\geqslant a\}$.

Лемма 5. *Пусть Q — возрастающее свойство, тогда $\hat{p}=\hat{p}(n)$ является пороговой вероятностью для $Q\Leftrightarrow\forall a\in(0,1)$ выполнено $\hat{p}\asymp p(a,n)$. И $\hat{m}$ — пороговая вероятность для $Q\Leftrightarrow\forall a\in(0,1)$ выполнено $\hat{m}\asymp m(a,n)$.*

Доказательство. Докажем для равномерной модели. Пусть $\hat{m}$ — пороговая, но $\exists a :\in (0,1)$ такое, что $\hat{m} \not\asymp m(a,n)$. Тогда существует подпоследовательность $\hat{m}_{n_k}$ такая, что отношение $\frac{\hat{m}_{n_k}}{m(a,n_k)} \to 0$ или $+\infty$.

Пусть предел нулевой. Тогда $m' = m(a,n_k)-1$ есть $\omega(\hat{m})$. В таком случае $\lim\limits_{k\to\infty} P(\Gamma(n,m'(n_k)) \models Q) = 1$. Но $P(\Gamma(n,m'(n_k)) \models Q) \leqslant a < 1$, противоречие.

Если же предел равен $+\infty$, то $m(n_k) = o(\hat{m})$. Тогда $\lim\limits_{k} P(\Gamma(n,m(n_k)) \models Q) = 0$. Но для любого k выполнено $P(\Gamma(n,m(n_k)) \models Q) \geqslant a > 0$, противоречие.

В обратную сторону: пусть $\hat{m} = \omega(\hat{m})$. Тогда $\forall a \in (0,1)\, m = \omega(m(a,n))$, значит в силу возрастания Q $P(\Gamma(n,m) \models Q) \geqslant P(\Gamma(n,m(a,n)) \models Q) \Rightarrow \varliminf\limits_{n} P(\Gamma(n,m) \models Q) \geqslant \varliminf\limits_{n} P(\Gamma(n,m(a,n)) \models Q) \geqslant a$, то есть $\exists \lim\limits_{n} P(\Gamma(n,m) \models Q) = 1$.

Если $m = o(\hat{m})$, то все аналогично. □

Теорема 2. *Каждое монотонное свойство имеет пороговую вероятность.*

Доказательство. Считаем, что Q — возрастающее свойство. Надо показать, что все функции $p(a,n)$ имеют один и тот же порядок. Возьмём $\varepsilon \in (0,\frac{1}{2})$ и такое m, что $(1-\varepsilon)^m \leqslant \varepsilon$. Рассмотрим $\Gamma^{(1)}(n,p(\varepsilon,n)),\ldots,\Gamma^{(m)}(n,p(\varepsilon,n_))$ — н.о.р. случайные подмножества $\Gamma(n)$. Тогда

$$\tilde{\Gamma} = \Gamma^{(1)}(n,p(\varepsilon,n)) \cup \ldots \cup \Gamma^{(m)}(n,p(\varepsilon,n)) \stackrel{d}{=} \Gamma(n,p'),$$

где $p' = 1-(1-p(\varepsilon,n))^m \leqslant mp(\varepsilon,n)$.

$P(\tilde{\Gamma} \models Q) = P(\Gamma(n,p') \models Q) \leqslant P(\Gamma(n,mp(\varepsilon,n)) \models Q)$.

С другой стороны $P(\tilde{\Gamma} \not\models Q) \leqslant P(\forall i \Gamma^{(i)}(n,p(\varepsilon,n)) \not\models Q) = P^m(\Gamma^{(1)}(n,p(\varepsilon,n)) \not\models Q) = (1-\varepsilon)^m \leqslant \varepsilon$. Тогда $P(\tilde{\Gamma} \models Q) \geqslant 1-\varepsilon) = P(\Gamma(n,p(1-\varepsilon,n)) \models Q)$.

Значит $\forall n\, mp(\varepsilon,n) \geqslant p(1-\varepsilon,n)$. Итого $p(\varepsilon,n) \leqslant p(\frac{1}{2},n) \leqslant p(1-\varepsilon,n) \leqslant mp(\varepsilon,n)$. Значит по лемме, $p(\frac{1}{2},n) = \hat{p}$ — пороговая вероятность для Q. □

Следствие. *Для $\forall$монотонного свойства $\exists$ пороговая функция $\hat{m}$.*

Определение 9. Пусть Q — выпуклое свойство. Тогда функции $\hat{p_1} \leqslant \hat{p_2}$ называются *пороговыми* для Q, если...

Пример 4. $\Gamma(n)$ — рёбра K_n.

- $Q = \{\text{обхват} = 4\}$, $\hat{p_1} = \hat{p_2} = \frac{1}{n}$
- $Q = \{\text{кликовое число} = 4\}$, $\hat{p_1} = n^{-\frac{2}{3}}$, $\hat{p_2} = n^{-\frac{1}{2}}$

Определение 10. Пусть Q — возрастающее. Тогда $\hat{p} = \hat{p}(n)$ называется *точной пороговой вероятностью* для Q, если $\forall \varepsilon > 0$ выполнено $\lim\limits_{n\to\infty} P(\Gamma(n,p) \models Q) = 1$ при $p \geqslant (1+\varepsilon)\hat{p}$ и 0 при $p \leqslant (1-\varepsilon)\hat{p}$.

Пример 5. $\Gamma(n)$ — рёбра K_n.

- $Q = \{\text{связность}\}$, $\hat{p} = \frac{\ln n}{n}$ — точная пороговая вероятность
- $Q = \{\text{есть } \Delta\}$, $\hat{p} = \frac{1}{n}$ — пороговая вероятность, но точной пороговой вероятности нет
- $Q = \{\text{ацикличность}\}$, $\hat{p} = \frac{1}{n}$ — пороговая вероятность для Q, но точна она только с одной стороны

Теорема 3 (Фридгут)**.** *Пусть Q — монотонное свойство графов, $\hat{p}$ — пороговая и она не точная. Тогда существует конечное разбиение $N_j, j = 1, \ldots, k$ множества $\mathbb{N}$ и рациональные числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_k > 0$ такие, что $\forall n \in N_j$ выполнено $\hat{p}(n) \asymp n^{-\alpha_j}$.*

7 Малые подграфы в случайном графе

Рассмотрим $G(n,p), p = p(n)$. Пусть G — фиксированный. Вопросы:

- с какой вероятностью $G(n,p)$ содержит копию G?
- X_G — число копий G в $G(n,p)$. Каково предельное распределение X_G?

8 Пороговая вероятность

Утверждение 2 (Метод первого момента)**.** Пусть $(X_n, n \in \mathbb{N})$ — последовательность с.в. со значениями в $\mathbb{Z}_+$. Тогда $P(X_n > 0) \leqslant EX_n$. То есть если $EX_n \to 0$, то $P(X_n > 0) \to 0 \Rightarrow P(X_n = 0) \to 1$.

Утверждение 3 (Метод второго момента)**.** Пусть $(X_n, n \in \mathbb{N})$ — последовательность с.в. со значениями в $\mathbb{Z}_+$. Тогда $P(X_n = 0) \leqslant P(|X_n - EX_n| \leqslant EX_n) \leqslant \frac{DX_n}{(EX_n)^2}$. То есть если $DX_n = o(E(X_n)^2)$, то $P(X_n = 0) \to 0$, то есть $P(X_n \geqslant 1) \to 1$.

Определение 11. *Плотностью* графа $G = (V, E)$ называется $\rho(G) = \frac{|E|}{|V|}$.

$m(G) = \max\limits_{H \subseteq G} \rho(H)$.

Граф G *сбалансирован*, если $\rho(G) = m(G)$ и *строго сбалансирован*, если $\rho(H) < \rho(G) \forall H \subset G$.

Определение 12. *Группой автоморфизмов* $Aut(G)$ графа G называется группа всех изоморфизмов графа с собой. $aut(G) = |Aut(G)|$.

Лемма 6. *Пусть G — фиксированный. X_G — число копий G в $G(n,p)$. Тогда*

$$EX_G = C_n^v \frac{v!}{aut(G)} p^{|E|} = \Theta_G(n^v p^{|E|}).$$

Посчитаем дисперсию. Введём $\Phi_G = \min\{EX_H : H \subset G, H \neq \varnothing\}$. Тогда

$$\Phi(G) \asymp \min_{H \subset G, |E(H)| > 0} n^{|V(H)|} p^{|E(H)|}$$

.

Лемма 7.

$$DX_G \asymp (1-p)\sum_{H\subset G} n^{2v-v_H}p^{2e-e_H} \asymp (1-p)\sum_{H\subset G}\frac{(EX_G)^2}{EX_H} \asymp (1-p)\frac{(EX_G)^2}{\Phi_G}.$$

Доказательство. Пусть G' — копия G в K_n, $I_{G'} = I\{G' \subset G(n,p)\}$. Тогда $X_G = \sum\limits_{G'} I_{G'}$.

Тогда $DX_G = cov(X_G, x_G) = \sum\limits_{G',G''} cov(I_{G'}, I_{G''}) = \sum\limits_{G',G'',|E(G'\cap G'')|>0} cov(I_{G'}, I_{G''})$.

Это можно переписать как

$$\sum_{H\subset G}\sum_{G',G'',G'\cap G''\equiv H}(p^{2e-e_H}-p^{2e}) \asymp \sum_{H\subset G} n^{2v-v_H}p^{2e-e_H}(1-p^{e_H})$$

С точки зрения порядка $1-p^{e_H} \asymp 1-p$, что даёт требуемое. □

Теорема 4. *Пороговая вероятность наличия графа G равна $\hat{p} = n^{-\frac{1}{m(G)}}$.*

Доказательство. Пусть $p = p(n) = o(n^{-\frac{1}{m(G)}})$. Возьмём $H \subset G, \rho(H) = m(G)$. По лемме $P(G(n,p) \models G) \leqslant P(G(n,p) \models H) \leqslant EX_H = \Theta(n^{v_H}p^{e_H})$.

При данном p получаем $\Theta((np^{\rho(H)})^{v_H}) \to 0$.

Пусть наоборот, $p = p(n) = \omega(n^{-\frac{1}{m(G)}})$. Тогда $\Phi(G) = \min\limits_{H\subset G} EX_H \asymp \min\limits_{H} n^{v_H}p^{e_H} = \min\limits_{H}(np^{\rho(H)})^{v_H} \to +\infty$. По лемме, $P(G(n,p) \not\models G) = P(X_G = 0) \leqslant \frac{DX_G}{(EX_G)^2} = o(\frac{1}{\Phi_G}) \to 0$. □

Теорема 5. *Для любого непустого графа G вероятность $P(G(n,p) \not\models G) \leqslant \exp(-\Theta(\Phi_G))$.*

А что будет, если $np^{m(G)} \to c > 0$?

Теорема 6 (Пуассоновская предельная теорема)**.** *Если G строго сбалансирован и $np^{m(G)} \to c > 0$, то $X_G \to Pois(\lambda)$, где $\lambda = \frac{c^{v_G}}{aut(G)}$.*

9 Метод моментов

Определение 13. Последовательность вероятностных мер $\{P_n, n \in \mathbb{N}\}$ на метрическом пространстве S *слабо сходится* к мере P, если $\forall f : S \to \mathbb{R}$ — ограниченной непр. функции выполнено:

$$\int\limits_S f(x)P_n(dx) \to \int\limits_S f(x)P(dx).$$

Обозначение: $P_n \xrightarrow{w} P$.

Определение 14. Семейство вероятностных мер $\{P_\alpha\}$ на метрическм пространстве S называется *плотным*, если $\forall \varepsilon \exists K_\varepsilon$ — компакт, такой что $\forall \alpha P_\alpha(S \setminus K_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$.

Семейство мер называется *относительно компактным*, если в любой последовательности мер из семейства найдётся сходящаяся подпоследовательность.

Теорема 7 (Прохоров). *В полном сепарабельном простравнстве семейство мер плотно тогда и только тогда, когда оно относительно компактно.*

Следствие. *Пусть есть плотная последовательность мер на полном сепарабельном метрическом пространстве. Пусть кроме того любая слабо сходящаяся подпоследовательность слобо сходится к одной и той же мере Q. Тогда $P_n \xrightarrow{w} Q$.*

Определение 15. Распределение случайной величины X однозначно определяется своими моментами, если из того, что выполнено $\forall k\ EX^k = EY^k$ следует $X \stackrel{d}{=} Y$.

Лемма 8. *Пусть $\exists \varepsilon > 0$, такое что Ee^{tX} конечно $\forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Тогда распределние однозначно определено своиоми моментами.*

Доказательство. Рассмотрим $f(z) = E\exp(zX)$ как функцию комплексного переменного. В области $|\operatorname{Re} z| < \varepsilon$ она голоморфна. Тогда $f(z)$ раскладывается в ряд Тейлора в окрестности нуля:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{EX^k}{k!} z^k.$$

Пусть Y — другая с.в., такая что $EY^k = EX^k$. Составим функцию $g9z) = E\exp(zY)$. $g(z)$ аналитична в той же полосе и $g(z)$ раскладывается в такой же ряд Тейлора в окрестности 0. По теореме о единственности они совпадают полностью, значит характестические функции у них одинаковые, то есть и распределения. □

Пример 6.

- Все распределения с конечным носителем
- Все распределения с экспоненциально убывающими хвостами: экспоненциальные, гамма, нормальные, пуассоновские
- Пример плохого распределения: $X^3, X \sim N(0,1)$

Определение 16. Последовательность ξ_n называется *равномерно интегрирумой*, если

$$\lim_{c\to\infty} \sup_n E(|\xi_n| I(|\xi_n| \geqslant c)) = 0.$$

Теорема 8. *Пусть* $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$, $\xi \geqslant 0$, $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$. *Тогда* $E\xi_n \to E\xi \Leftrightarrow \{\xi_n\}$ *— равномерно интегрируема.*

Теорема 9 (Метод моментов)**.** *Пусть распределение* X *однозначно определяется своими моментами. Тогда если* $\forall k \in \mathbb{N}$ $EX_n^k \to EX^k$, *то* $X_n \xrightarrow{d} X$.

Доказательство. Хотим проверить, что наша последовательность плотная, удостовериться, что частичный предел может быть только один и получить требуемое.

Итак, пусть P_n — распределние с.в. X_n. Пусть $M_k = \sup\limits_n EX_n^k$. Тогда $\forall R > 0$ $P_n(\mathbb{R} \setminus [-R; R]) = P(|X_n| > R) \leqslant \frac{E|X_n|^2}{R^2} \leqslant \frac{M_2}{R^2} \to 0$ равномерно по n с ростом R.

По теореме Прохорова P_n содерит слабо сходящуюся подпоследовательность P_{n_k}. Покажем, что $P_{n_k} \xrightarrow{d} P_X$. Если $P_{n_k} \xrightarrow{w} Q$, то $X_{n_k} \xrightarrow{d} Y$, где Y — какая-то с.в. Заметим, что $X_{n_k}^s$ — равномерно интегрируема:

$$\sup_k E(|X_{n_k}^s| I(|X_{n_k}^s| \geqslant c)) \leqslant \sup_k E\frac{X_{n_k}^{2s}}{c} \leqslant \frac{M_{2s}}{c} \to 0.$$

По теореме о равномерной интегрирумости $EX_{n_k}^s \to EY^k$. По условию $EX_{n_k}^s \to EX^s$, то есть $EX^s = EY^s$. Зрачит $X \stackrel{d}{=} Y$ и $P_{n_k} \to P_X$.

По следствию из теоремы Прохорова $P_n \xrightarrow{w} P_X$, то есть $X_n \xrightarrow{d} X$. $\square$

Определение 17. Пусть Z — случайный вектор. Его распределение однозначено определяется своими моментами, если из того, что $\forall \alpha(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ $EZ^\alpha = EZ_1^{\alpha_1} \dots Z_m^{\alpha_m} = EY^\alpha$ следует, что $Z \stackrel{d}{=} Y$.

Теорема 10 (Метод моментов)**.** *Пусть распределение случайного ветора* Z *однозначно определяется своими моментами. Тогда если* $\forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ $EX_n^\alpha \to EX^\alpha$, *то* $Z_n \xrightarrow{d} Z$.

10 Предельные теоремы для X_G

Доказательство пуассоновской предельной теоремы. Воспользуемся методом моментов. Факториальные моменты $Y \sim Pois(\lambda)$ равны $E(Y)_k = EY(Y-1)\dots(Y-k+1) = \lambda^k$. Достаточно показать, что $E(X_G)_k \to \lambda^k$ при $n \to \infty$.

Пусть $G_1, \dots, G_N$ — копии G в K_n, $I_{G_i} = I\{G_i \subset G(n,p)\}$. Тогда $X_G = \sum\limits_{i=1}^N I_{G_i}$ и

$$(X_G)_k = \sum_{i_1,\dots,i_k} I_{G_{i_1}} \dots I_{G_{i_k}}.$$

$$E(X_G)_k = \sum_{i_1\dots,i_k} EI_{G_{i_1}} \dots I_{G_{i_k}} = E'_k + E''_k,$$

где E'_k — сумма по тем наборам, где все G_{i_k} попарно не имеют общих вершин, E''_k — остальные слагаемые.

$$E'_k = (p^{e_G})^k \sum 1 = (p^{e_G})^k C_n^{v_G} \frac{v_G!}{\operatorname{aut}(G)} C_{n-v_G}^{v_G} \frac{v_G!}{\operatorname{aut} G} \dots C_{n-(k-1)v_G}^{v_G} \frac{v_G!}{\operatorname{aut} G} \sim (p^{e_G} \frac{n^{v_G}}{\operatorname{aut}(G)})^k \to (\frac{c^{v_G}}{\operatorname{aut}(G)})^k = \lambda^k$$

Нужно показать, что $E''_k = o(1)$. Для каждого t рассмотрим $e(t) = \min\{|E(G_1 \cup \ldots \cup G_k)| \mid |V(G_1 \cup \ldots G_k)| = t\}$.

Утверждение 4. Пусть $k \geqslant 2, 2 \leqslant t < kv_G$, тогда $e(t) > tm(G)$.

Доказательство. Пусть F — любой граф. Положим $f_F = m(G)v_F - e_F$. Тогда $f_G = 0$ и $f_H > 0$ для любого собственного подргафа $H \subset G$.

Покажем, что если $F = G_1 \cup \ldots G_k$, то $f_F < 0$. Заметим, что $f_{F_1 \cup F_2} = f_{F_1} + f_{F_2} - f_{F_1 \cap F_2}$. Если $k = 2$, то $F = G_1 \cup G_2$ и $|V(G_1 \cap G_2)| > 0$. Тогда $f_{G_1 \cup G_2} = f_{G_1} + f_{G_2} - f_{G_1 \cap G_2} = 0 + 0 - f_{G_1 \cap G_2} < 0$.

Работаем по индукции: пусть $F' = G_1 \cup \ldots \cup G_{k-1}$ и считаем, что $f_{F'} < 0$. Тогда $f_{G_1 \cup \ldots G_k} = f_{F'} + f_{G_k} - f_{F' \cap G_k} < 0$.

Это и означает, что $|E(G_1 \cup \ldots G_k)| > tm(G)$. □

Применим утверждение к оценке E''_k. Если $A(k,t)$ — это число способов разместить k копий на t вершинах.

$$E''_k \leqslant \sum_{t=k}^{kv_G - 1} C_n^t A(k,t) p^{e(t)} = o\left(\sum_{t=k}^{kv_G-1} n^t p^{e(t)}\right) = o\left(\sum_{t=k}^{kv_G-1} (n^t p^{tm(G)}) p^{e(t)-tm(G)}\right) \to 0$$

□

Теорема 11 (Многомерный случай)**.** *Пусть $G_1, \ldots, G_s$ — различные строго сбалансированные графы одной и той же плотности $m = m(G_i)$. Тогда если $np^m \to c > 0$, то $(X_{G_1}, \ldots, X_{G_s}) \xrightarrow{d} (Z_1, \ldots, Z_s)$, где Z_j — независимые случайные величины, $Z_j \sim Pois(\lambda_j), \lambda_j = \frac{c^{V_{G_j}}}{\operatorname{aut}(G)}$.*

Пример 7. Всюду $m(G) = 1$, $np \to c > 0$

- $G = C_3 \sqcup C_3$ — два непересекающихся треугольника. Тогда $X_G \xrightarrow{d} \frac{1}{2} Z(Z-1)$, где $Z \sim Pois(\frac{c^3}{6})$. Тогда $P(X_G = 0) \to (1 + \frac{c^3}{6}) \exp(-\frac{c^3}{6})$
- $G = C_3 \sqcup C_4$. $X_G \xrightarrow{d} Z_1 Z_2$, Z_i — независимые, $Z_1 \sim Pois\left(\frac{c^3}{6}\right), Z_2 \sim Pois\left(\frac{c^4}{8}\right)$. Тогда $P(X_G = 0) \to 1 - (1 - e^{-\frac{c^3}{6}})(1 - e^{-\frac{c^4}{8}})$

- G — треугольник с висячей вершиной. Тогда $X_G \xrightarrow{d} \sum_{i=1}^{W} Z_i$, где Z_i — независимые $Pois(3c)$, W — независима с ними, $W \sim Pois\left(\frac{c^3}{6}\right)$. $P(X_G=0) \to \exp\left(-(1-e^{-3c})\frac{c^3}{6}\right)$

Итого, ясно, что $np^{m(G)} \to 0 \Rightarrow X_G \xrightarrow{d} 0$ и $np^{m(G)} \to c \Rightarrow X_G \xrightarrow{d} Pois$. Утверждение состоит в том, что в случае, если $np^{m(G)} \to \infty \Rightarrow X_G \xrightarrow{d} N$.

Теорема 12 (ЦПТ для X_G)**.** *Пусть G — непустой фиксированный граф, $np^{m(G)} \to \infty$, $n^2(1-p) \to \infty$. Тогда*

$$\frac{X_G - EX_G}{\sqrt{DX_G}} \xrightarrow{d} N(0,1).$$

Доказательство. Работаем по методу моментов. Вспомним, что если $Y \sim N(0,1)$, то $EY^k = (k-1)!!$ при чётных k и 0 при нечётных.

Пусть $G_1, \ldots, G_N$ — копии G в K_n, I_{G_i} — соответствующие индикаторы. Тогда $X_G = \sum I_{G_i}$ и обозначим $T(G_{i_1}, \ldots, G_{i_k}) = E\prod\limits_j (I_{G_{i_j}} - EI_{G_{i_j}})$. Тогда $E(X_G - EX_G)^k = \sum\limits_{i_1,\ldots,i_k} T(G_{i_1}, \ldots, G_{i_k})$.

Для набора копий $(G_1, \ldots G_K)$ введём граф $L(G_1, \ldots G_k)$ с вершинами $\{1, \ldots, k\}$ и (j,m) — ребро $\Leftrightarrow G_{i_j}$ и G_{i_m} имеют общее ребро. Тогда сумму перепишем как:

$$E(X_G - EX_G)^k = \sum_{L \subset K_k} \sum_{i_1,\ldots,i_k} T(G_{i_1}, \ldots, G_{i_k}).$$

Разбираем три случая. Если L — совершенное паросочетание. Вспомним, что $Dx_G = \sum\limits_{H \subset G, e_H > 0} C_n^{v_H} C_{n-v_H}^{v_G - v_H} C_{n-v_G}^{v_G - v_H} A(G,H) \cdot (p^{2e_G - e_H} - p^{2e_G}) = d(n,p)$. Положим рёбра L равными $\{(1,2), \ldots, (k-1,k)\}$, k — чётное.

$$\sum T = \sum_{i_1,\ldots,i_k} \prod_{j=1}^{\frac{k}{2}} \operatorname{cov}(I_{G_{2j-1}}, I_{G_{2j}})$$
$$\leqslant \sum \prod_{j=1}^{\frac{k}{2}} \sum_{G_{2j-1} \not\cap G_{2j}} \operatorname{cov}(I_{G_{2j-1}}, I_{G_{2j}}) = (DX_G)^{\frac{k}{2}}.$$

С другой стороны

$$\sum T \geqslant \sum \prod_{j=1}^{\frac{k}{2}} \operatorname{cov}(I_{G_{2j-1}}, I_{G_{2j}})$$
$$= \sum_{i_1,i_2} \operatorname{cov}(G_{i_1}, G_{i_2}) \sum_{G_{i_3} \cup G_{i_4} \not\cap G_{i_1} \cup G_{i_2}} \operatorname{cov}(G_{i_3}, G_{i_4}) \sum \ldots$$
$$\geqslant d(n,p) d(n - 2v_G, p) \ldots \sim (d(n,p))^{\frac{k}{2}} = (DX_G)^{\frac{k}{2}}$$

Таким образом, первый случай даёт вклад $(k-1)!!(DX_G)^{\frac{k}{2}}$.

Если L имеет изолированную вершину, то $T = E(I_{G_{i_1}} - EI_{G_{i_1}})\ldots = 0$, то есть вклад таких слагаемых равен 0.

В противном случае в L строго меньше, чем $\frac{k}{2}$ компонент связности. Пронумеруем его так, чтобы компоненты имели вид $\{1,\ldots,r_1\},\{r_1+1,\ldots,r_2\},\ldots$. Пусть также число компонент равно $c(L) < \frac{k}{2}$, а также $\forall i \notin \{1, r_1+1, \ldots, r_{c-1}+1\} \exists j : (j,i) \in E(L)$.

Пусть $G_{i_1},\ldots,G_{i_k}$ — набор копий, такой что $L(G_{i_1},\ldots,G_{i_k}) = L$. Обозначим $G^{(j)} = \bigcup\limits_{s=1}^{j} G_{i_s}$, $F_j = G^{(j-1)} \cap G_{i_j}$. $e_{F_j} = 0 \Leftrightarrow j \in \{1, r_1+1, \ldots, r_{c-1}+1\}$.

Если $p \leqslant \frac{1}{2}$, то

$$|T| \leqslant E\prod_{j=1}^{k}(I_{G_{i_j}} + EI_{G_{i_j}}) \leqslant 2^k EI_{G_{i_1}}\ldots I_{G_{i_k}} = 2^k p^{e_{G^{(k)}}}.$$

Если же $p > \frac{1}{2}$, то оставим в каждой компоненте по одному множителю.

$$|T| \leqslant E\prod_{s=1}^{c}|I_{G_{i_{r_s}}} - EI_{G_{i_{r_s}}}| = (E|I_{G_1} - EI_{G_1}|)^c =$$
$$(2(1-p)^{e_G}p^{e_G})^c \leqslant (2e_G(1-p))^c$$

Итого, $|T(G_{i_1},\ldots,G_{i_k})| = o(p^{e_{G^{(k)}}}(1-p)^c)$. Далее $e_{G^{(k)}} = ke_G - \sum\limits_{j=1}^{k} e_{F_j}$.

Тогда при заданных графах $F_1,\ldots,F_k$ число наборов $(G_{i_1},\ldots,G_{i_k})$ с условием $G^{(j-1)} \cap G_{i_j} \cong F_j$ в K_n есть $o(n^{kv_G - \sum\limits_{j=1}^{k} v_{F_j}})$.

$$\sum_{i_1,\ldots,i_k,L(\ldots)=L,F_1,\ldots F_k\text{ — фикс}} T = O\left(n^{kv_G - \sum\limits_{j=1}^{k} v_{F_j}} p^{ke_G - \sum\limits_{j=1}^{k} e_{F_j}}(1-p)^c\right).$$

Если $e_{F_j} = 0$, то $n^{v_{F_j}}p^{e_{F_j}} = n^{v_{F_j}} \geqslant 1$. Таких F_j ровно c. Остальные F_j имеют рёбра, значит $n^{v_{F_j}}p^{e_{F_j}} \geqslant EX_{F_j} \geqslant \Phi_G$.

Значит

$$\sum T = O\left((n^{v_G}p^{e_G})^k \frac{(1-p)^c}{(\Phi_G)^{k-c}}\right) = O\left((DX_G)^{\frac{k}{2}} \frac{(1-p)^{c-\frac{k}{2}}}{(\Phi_G)^{\frac{k}{2}-c}}\right).$$

Осталось показать, что $((1-p)\Phi_G)^{c-\frac{k}{2}} \to 0$, но $c - \frac{k}{2} < 0$, то есть $(1-p)\Phi_G \to +\infty$.

Если $p \leqslant \frac{1}{2}$, то $\Phi_G(1-p) \asymp \Phi_G$, но по условию $np^{m(G)} \to \infty \Rightarrow \Phi_G \to \infty$.

Если же $p > \frac{1}{2}$, то $\Phi_G \asymp \min\limits_{H\subset G, e_H>0} n^{v_H}p^{e_H} \asymp \min\limits_{H\subset G, e_H>0} n^{v_H} = n^2$.

По условию $n^2(1-p) \to \infty \Rightarrow \Phi_G \to \infty$.

Итого, по методу моментов, теорема доказана. $\square$

11 Эволюция случайного графа

- $p = o\left(\frac{1}{n^2}\right) \Rightarrow$ в графе а.п.н. нет рёбер
- $p = \frac{c}{n^2} \Rightarrow$ число рёбер равно $Pois(\frac{c}{2})$
- $p = o\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow$?

Утверждение 5. $p = o\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow$ случайный граф — а. п. н. лес

Доказательство. X — число простых циклов в $G(n,p)$. Будем оценивать $P(X \geqslant 1) \leqslant EX$.

$EX = \sum\limits_{k=3}^{n} C_n^k \frac{(k-1)!}{2} p^k \leqslant \sum\limits_{k=3}^{n} \frac{n^k (k-1)! p^k}{2k!} \leqslant \sum\limits_{k=3}^{\infty} n^k p^k \leqslant \frac{(np)^3}{1-np} \to 0.$ □

Утверждение 6. $\forall c > 0 P(G(n,p)$ содержит компоненту размера $\geqslant c \ln n) \to 0.$

Доказательство. X — число древесных компонент размера $\geqslant c\ln n - 1$.

$EX = \sum\limits_{k=c\ln n-1}^{n} C_n^k k^{k-2} p^{k-1} (1-p)^{C_k^2 - k + 1 + k(n-k)} \leqslant \sum\limits_{k=c\ln n-1}^{n} C_n^k k^{k-2} p^{k-1} \leqslant \sum\limits_{k=c\ln n-1}^{n} \left(\frac{en}{k}\right)^k k^{k-2} p^{k-1} = en \sum (enp)^{k-1} \frac{1}{k^2} \leqslant en(enp)^{c\ln n} \sum\limits_{c=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \frac{A}{p}(enp)^{c\ln n} = A(e^{\frac{1}{c}} np)^{c\ln n} \to 0$ □