Содержание

1 Тривиум

Определение 1. $H = (V, E), |V| < \infty, E \subset 2^V$ — *гиперграф*. V — *вершины*, E — *рёбра*.

Если $\forall e \in E \to |e| = k$, то гиперграф k-*однородный* ($k = 2$ — обычный граф).

Определение 2. *Число рёбер* гиперграфа $|E|$ или $|E(H)| = e(H)$.

Степень вершины $v \in V$ — $\deg v = \#\{e \in E \mid v \in e\}$.

$\sum\limits_{v \in V} \deg v = \sum\limits_{e \in E} |e| = k|E|$ (в случае k-однородности).

$\Delta(H) = \max\limits_{v \in V} \deg v$.

$\delta(H) = \min\limits_{v \in V} \deg v$.

$t(H) = \frac{1}{|V|} \sum\limits_{v \in V} \deg v$.

Определение 3. *Степенью ребра* в $H = (V, E)$ называется $\deg e = \#\{f \in E \mid f \neq e, |f \cap e| \neq \varnothing\}$.

$D(H) = \max\limits_{e \in E} \deg e$.

Если H k-однороден, то $\Delta(H) - 1 \leqslant D(H) \leqslant k(\Delta(H) - 1)$.

Определение 4. $W \subset V$ в $H = (V, E)$ называется *независимым*, если $\forall e \in E \to |e \cap W| < |e|$.

Число независимости $\alpha(H)$ — максимальный размер независимого множества в H.

Определение 5. Раскраска множества вершин $H = (V, E)$ называется *правильной*, если любое ребро не является одноцветным. Равносильно: все цветовые множества независимы.

Хроматическое число $\chi(H)$ — минимальное число цветов в правильной раскраске гиперграфа.

Очевидно $\frac{|V|}{\alpha(H)} \leqslant \chi(H) \leqslant \Delta(H) + 1$.

2 Теорема Турана и её обобщения

K_n — полный граф на n вершинах.

$K_{n_1, \ldots, n_r}$ — полный r-дольный граф с долями размера $n_1, \ldots, n_r$.

K_{m*r} — полный r-дольный граф с размерами долей $= m$.

Теорема 1 (Туран, 1941)**.** *Пусть* $n_1, \ldots, n_r$ *числа, такие что* $n_1 + \ldots + n_r = n, n_i = \left\lceil \frac{n}{r} \right\rceil$ *или* $n_i = \left\lfloor \frac{n}{r} \right\rfloor$*. Пусть граф* G *на* n *вершинах не содержит подграфа, изоморфного* K_{r+1}*. Тогда*

$$|E(G)| \leqslant |E(K_{n_1, \ldots, n_r})| \leqslant \left\lfloor \frac{n^2}{2} \left(1 - \frac{1}{r}\right) \right\rfloor$$

.

Доказательство. Пусть $G = (V, E)$ — граф с максимальным числом вершин, не содержащий K_{r+1}. Покажем, что в G не существует тройки вершин u, v, w такой, что $(u, v) \in E, (u, w), (v, w) \notin E$. Пусть такая тройка есть, тогда

- Пусть $\deg w < \deg u$ (или $\deg w < \deg v$). Удалим w из G и заменим её на копию u — вершину u'. Получится граф с большим числом рёбер, при этом K_{r+1} он не содержит (иначе его содержал бы и G).

- Пусть $\deg w \geqslant \deg u, \deg w \geqslant \deg v$. Тогда удалим u, v из графа, добавим вместо них две копии вершины w. По аналогичному соображению число рёбер увеличилось, а K_{r+1} не появилось.

Вывод: отношение $u \sim v \Leftrightarrow (u, v) \notin E$ является отношением эквивалентности. Значит наш граф G является полным многодольным графом, притом ясно, что долей не больше r (будем считать, что ровно r, просто некоторые доли пусты). Покажем, что доли почти равны.

В самом деле, если $|A| > |B|+1$, то при перекладывании одной вершины из A в B теряется $|B|$ рёбер и проводится $|A| - 1$ рёбер, стало быть число рёбер увеличивается. Значит размеры всех долей отличаются не более, чем на 1, что доказывает теорему. □

Граф $K_{n_1,\dots,n_r}$ из теоремы Турана принято называть графом Турана.

Утверждение 1. Следствие: $\alpha(G) \geqslant \frac{n}{t(G)+1}$.

Доказательство. Пусть $\alpha = \alpha(G)$, тогда $\overline{G}$ не содержит $K_{\alpha+1}$. По теореме Турана $|E(\overline{G})| \leqslant \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \frac{n^2}{2} \Rightarrow |E(G)| \geqslant C_n^2 - \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \frac{n^2}{2}$.

Итак, $\frac{n^2}{2\alpha} \leqslant |E(G)| + \frac{n^2}{2} - C_n^2 = \frac{t(G)n}{2} + \frac{n}{2}$, что доказывает следствие.

Получается, что оценка точна и достигается (с точностью до округления) на $\overline{T(n, r)}$. □

3 Тоерема Эрдёша-Стоуна

Пусть H — произвольный граф. *Числом Турана* $ex(n, H)$ называется

$$ex(n, H) = \max\{|E(G)| : |V(G)| = n, G \text{ не содержит подграфа, изоморфного } H\}.$$

Теорема Турана говорит, что $ex(n, K_{r+1}) = |E(K_{n_1,\dots,n_r})|$.

Теорема 2 (Эрдёш-Стоун, 1946)**.** *Пусть $r \geqslant 2$, H — фиксированный граф с $\chi(H) = r + 1$, тогда $ex(n, H) = \left(1 - \frac{1}{r}\right) \frac{n^2}{2} + o(n^2)$.*

Лемма 1. *Пусть $r \geqslant 1, \varepsilon > 0$. Тогда для всех достаточно больших n любой граф на n вершинах с $\left(1 - \frac{1}{r} + \varepsilon\right) C_n^2$ рёбрами содержит подграф $K_{t*(r+1)}$, где $t = \Omega_{r,\varepsilon}(\log n)$.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда все вершины имеют степень не менее $\left(1 - \frac{1}{r} + \varepsilon\right) n$. Будем доказывать по индукции по r.

База, $r = 1$, надо найти $K_{t,t}$. Пусть $v_1, \dots, v_t$ — случайно выбранные t вершин из V, а X число их общих соседей.

$$EX = \sum_{u \in V} \frac{C^t_{\deg u}}{C^t_n} \geqslant n \frac{C^t_{n\varepsilon}}{C^t_n} \geqslant n \frac{(n\varepsilon - t)^t}{n^t} = n \left(\frac{n\varepsilon - t}{n} \right)^t.$$

Хотим, чтобы $EX > t$, для этого можно взять $t = \Omega_\varepsilon(\log n)$ подходит для небольшой константы. При таком t существуют $v_1, \dots, v_t$ с не менее, чем t общими соседями, это и есть $K_{t,t}$.

Докажем шаг индукции. Пусть мы нашли K_{T*r}, где $T = \Omega_{r,\varepsilon}(\log n)$ в графе G. Обозначим $U_1, \dots, U_r$ — доли этого графа, $U = \bigcup\limits_{i=1}^{r} U_i$.

Пусть v — случайная вершина G, X_v — число её соседей внутри U.

$$EX_v = \frac{1}{n} \sum_{v \in V} \sum_{(u,v) \in E} 1 = \frac{1}{n} \sum_{u \in U} \deg u \geqslant rT \left(1 - \frac{1}{r} + \varepsilon\right).$$

Однако $X_v \leqslant rT$, значит

$$EX_v \leqslant rT\left(1 - \frac{1}{r} + \frac{\varepsilon}{2}\right) P\left(X_v < rT\left(1 - \frac{1}{r} + \frac{\varepsilon}{2}\right)\right) + \\ rTP\left(X_v > rT\left(1 - \frac{1}{r} + \frac{\varepsilon}{2}\right)\right) = \\ rT\left(1 - \frac{1}{r} + \frac{\varepsilon}{2}\right) + rT\left(1 - \frac{1}{r} + \frac{\varepsilon}{2}\right) P\left(X_v > rT\left(1 - \frac{1}{r} + \frac{\varepsilon}{2}\right)\right).$$

Отсюда $P\left(X_v > rT\left(1 - \frac{1}{r} + \frac{\varepsilon}{2}\right)\right) \geqslant \frac{rT\frac{\varepsilon}{2}}{rT\left(\frac{1}{r} - \frac{\varepsilon}{2}\right)} \geqslant \frac{r\varepsilon}{r} \geqslant \varepsilon$.

Вывод: не менее εn вершин имеют хотя бы $rT\left(1 - \frac{1}{r} + \frac{\varepsilon}{2}\right)$ соседей в U. Обозначим его через S, $|S| \geqslant \varepsilon n$.

Далее, любая вершина из S имеет хотя бы εT соседей внутри U_i. Иначе, множество соседей в U имеет мощности сторого меньше, чем

$$\varepsilon T + (r-1)T = rT\left(1 - \frac{1}{r} + \frac{\varepsilon}{r}\right) \leqslant rT\left(1 - \frac{1}{r} + \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Пусть $W_1, \dots, W_r$ случайные t-подмножества $U_1, \dots, U_r$, а X — число их общих соседей внутри S.

$EX \geqslant |S| \left(\frac{C_{\varepsilon T} t}{C^t_T}\right)^r$, тогда положим $t = \frac{\varepsilon}{2} T$, тогда $EX \geqslant \varepsilon n \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{rt} \geqslant t$. Это выполнено при $t = c(r,\varepsilon) \log n$ для подходящей константы $c(r,\varepsilon) > 0$.

Обратимся теперь к случаю, если не все степени достаточно большие. Покажем, что в G существует индуцированный подграф G' на s вершинах, все степени которого не меньше $\left(1 - \frac{1}{r} + \varepsilon\right) s$, а $s \geqslant \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon} n$. Тогда по предыдущему рассуждению G' содержит K_{t*r}, где $t = \Omega_{r,\varepsilon}(\log s) = \Omega_{r,\varepsilon}(\log s)$.

Построим G' следующим образом: $G_n = G$. Далее:

- если G_m содержит вершину степени $< \left(1 - \frac{1}{r} + \frac{\varepsilon}{2}\right) m$, то удалим её из G_m.

- продолжаем, пока процесс не остановится.

Пусть G_s — итоговый граф, тогда в нём не менее чем $|E(G_n)| - \left(1 - \frac{1}{r} + \frac{\varepsilon}{2}\right)(n + n - 1 + \ldots + s + 1) \geqslant \left(1 - \frac{1}{r} + \varepsilon\right) C_n^2 - \left(1 - \frac{1}{r} + \frac{\varepsilon}{2}\right) C_{n+1}^2 = \frac{\varepsilon}{2} C_n^2 - n$ рёбер.

С другой стороны, $|E(G_s)| \leqslant C_s^2 \Rightarrow C_s^2 \geqslant \frac{\varepsilon}{2} C_n^2 - n \Rightarrow s \geqslant \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon} n$.

Итак, лемма доказана. □

Доказательство теоремы Эрдёша-Стоуна. Так как $\chi(H) = r + 1$, то H вкладывается в $K_{(r+1)*m}$ для какого-то m. Значит $ex(n, H) \leqslant ex(n, K_{(r+1)*m})$, что по лемме не больше, чем $(1 - \frac{1}{r})\frac{n^2}{2} + o(n^2)$.

С другой стороны граф Турана $T_{n,r}$ не содержит H, значит $ex(n, H) \geqslant |E(T_{n,r})| = (1 - \frac{1}{r})\frac{n^2}{2}$. □

4 Двудольные графы

Теорема Эрдёша-Стоуна говорит про двудольные графы только, что $ex(n, H) = o(n^2)$. Займёмся выяснением более точной оценки.

Теорема 3 (Шош, Ковари, Туран, 1954)**.** *$ex(n, K_{s,t}) \leqslant \frac{1}{2}(s-1)^{\frac{1}{t}} n^{2-\frac{1}{t}} + \frac{1}{2}(t-1)n$.*

Доказательство. Пусть $d_1 \geqslant \ldots \geqslant d_n$ — степени вершин G. Пусть, кроме того, $d_1 \geqslant \ldots \geqslant d_m \geqslant t > d_{m+1} \geqslant \ldots d_n$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} C_{d_i}^t = \sum_{i=1}^{m} C_{d_i}^t > \frac{1}{t!} m \sum_{i=1}^{m} (d_i - t + 1)^t \frac{1}{m}.$$

По неравенству Йенсена ($E\xi^t \geqslant (E\xi)^t$) получаем

$$\sum_{i=1}^{n} C_{d_i}^t = \frac{m}{t!} \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{d_i - t + 1}{m} \right)^t \geqslant \frac{1}{t!} m^{1-t} \left(\sum_{i=1}^{m} (d_i - t + 1) \right)^t \geqslant$$
$$\frac{1}{t!} n^{1-t} \left(\sum_{i=1}^{n} d_i - m(t-1) - \sum_{i=m+1}^{n} d_i \right)^t > \frac{1}{t!} n^{1-t} \left((s-1)^{\frac{1}{t}} n^{2-\frac{1}{t}} \right)^t =$$
$$\frac{s-1}{t!} n^t > (s-1) C_n^t.$$

Рассмотрим $v_1, \ldots, v_t$ — случайные t вершин и введём X — число их общих соседей, тогда $EX = \frac{\sum_{i=1}^{n} C_{d_i}^t}{C_n^t} > s - 1$. Значит существуют $v_1, \ldots, v_t$, имеющие хотя бы s общих соседей, значит $K_{s,t}$ найдено □

Это только оценка, в отличие от теоремы Эрдёша-Стоуна, получить точную асимптотику оказывается совсем непросто. Известно, что если $s > (t-1)!$, то оценка из теоремы точна асимптотически. Однако, уже для $s = t = 4$ поведение $ex(n, K_{4,4})$ неизвестно.

Утверждение 2.
- Если G — дистанционный граф в $\mathbb{R}^2$ на n вершинах, то $|E(G)| = O(n^{\frac{3}{2}})$
- Для дистанционного графа в $\mathbb{R}^3$ на n вершинах $|E(G)| = O(n^{\frac{5}{3}})$

Доказательство. Нужно заметить, что в первом случае G не содержит $K_{3,2}$, а во втором $K_{3,3}$, и применить теорему. □

5 Числа Турана для гиперграфов

Определение 6. Пусть $n > b > k$. Числом Турана $T(n, b, k)$ называется минимальное рёбер в k-однородном гиперграфе на n вершинах и числом независимости $< b$.

$$T(n, b, k) = \min\{|E(H)| : H \in \mathcal{H}_k, |V(H)| = n, \alpha(G) < b\}.$$

Гиперграфы данного множества называются (n, b, k)-системами.

Пример 1. $T(n, b, 2) = |E(\overline{T_{n,b-1}})| = C_n^2 - |E(T_{n,b-1})| \sim \frac{n^2}{2(b-1)}$.

Если C_v^k — все k-подмножества, C_v^b — все b-подмножества, (k-подмножество A представляет b-подмножество B, если $A \subset B$), то $T(n, b, k)$ — наименьшая система общих представителей.

Утверждение 3. $T(n, b, k) \geqslant \lceil \frac{n}{n-k} T(n-1, b, k) \rceil$.

Доказательство. Пусть $H = (V, E)$ — произвольная (n, b, k)-система. Возьмём одну вершину v и удалим её вместе с рёбрами, останется H_v — $(n-1, b, k)$-система, в которой хотя бы $T(n-1, b, k)$ рёбер. Тогда

$$|E(H)|(n-k) = \sum_{v \in V} |E(H_v)| \geqslant T(n-1, b, k) \cdot n,$$

откуда следует утверждение. □

Утверждение 4. $\forall b > k \geqslant 2 \to \exists \lim_{n\to\infty} \frac{T(n,b,k)}{C_n^k} = t(b, k)$.

Доказательство. $\frac{T(n,b,k)}{C_n^k} \geqslant \frac{T(n-1,b,k)}{C_{n-1}^k}$ по утверждению, значит последовательность монотонна (и ограничена единицей). □

Определение 7. Величина $t(b, k)$ называется Турановской плотностью.

Из доказательства следует, что $T(n, b, k) \leqslant t(b, k) C_n^k$.

Утверждение 5. $T(n, b, k) \leqslant T(n-1, b, k) + T(n-1, b-1, k-1)$.

Доказательство. Пусть $H_1 = (V, E_1)$ — это минимальная $(n-1, b, k)$-система, $H_2 = (V, E_2)$ — это минимальная $(n-1, b-1, k-1)$-система. Возьмём $v \notin V$ и рассмотри $H = (V \cup \{v\}, E_1 \cup E_2'), E_2' = \{e \cap \{v\} : e \in E_2\}$. Тогда H — это (n, b, k)-система, значит $|E(H)| \geqslant T(n, b, k)$, а с другой стороны $|E(H)| = T(n-1, b, k) + T(n-1, b-1, k-1)$. □

Утверждение 6. $t(b, k) \leqslant t(b-1, k-1)$.

Доказательство. $\frac{k}{n} T(n, b, k) = T(n, b, k) - \frac{n-k}{n} T(n, b, k) \leqslant T(n, b, k) - T(n-1, b, k) \leqslant T(n-1, b-1, k-1) \Rightarrow \frac{T(n,b,k)}{C_n^k} = \frac{k}{n} \frac{T(n,b,k)}{C_{n-1}^{k-1}} \leqslant \frac{T(n-1,b-1,k-1)}{C_{n-1}^{k-1}}$. Переходя к пределу, получаем требуемое. □

Утверждение 7 (из анализа)**.** Пусть $b_0, \ldots, b_{l-1}$ — циклически упорядоченные действительные числа, $b = \frac{b_0 + \ldots + b_{l-1}}{l}$. Тогда $\exists n : \forall s = 1, \ldots, l \to b_m + b_{m+1} + \ldots + b_{m+s-1} \geqslant sb$.

Доказательство. Возьмём циклический сдвиг, соответствующий минимуму префиксных сумм. □

6 Верхняя оценка на турановскую плотность

Теорема 4. $t(n, k) \leqslant \left(\frac{k-1}{b-1}\right)^{k-1}$.

Доказательство. Пусть V — некоторое множество из n вершин и возьмём l, d так, что $k = \lceil \frac{db}{l} \rceil$. Разделим V на примерно равные части $A_0, \ldots, A_{l-1}$ и построим следующий гиперграф. Каждое $B \subset V$, $|B| = k$, включается в H в качестве ребра, если числа $b_i = |B \cap A_i|$ удовлетворяют свойству: $\exists m : \forall s = 1, \ldots, d \to \sum\limits_{i=1}^{s} b_{m+i-1} \geqslant s\frac{b}{l}$.

Покажем, что это (n, b, k)-система. Пусть $C \subset V$, $|C| = b$. Введём $c_i = |C \cap A_i|$. Для чисел $c_0, \ldots, c_{l-1}$ существует сдвиг, для которого все частичные суммы не меньше $\sum\limits_{i=1}^{s} c_{m+i-1} \geqslant s\frac{b}{l}$. Тогда выберем $B \subset C$ следующим образом $B = (C \cap A_m) \sqcup (C \cap A_{m+1}) \sqcup \ldots \sqcup W$, где $W = C \cap A_{j+m}$. Заметим, что $\frac{db}{l} \leqslant k$, а это значит для всех $s = 1, \ldots, l$ неравенство на префиксные суммы b_i будет следовать либо из того, что $b_i = c_i$ до какого-то момента, либо из того, что $s \leqslant d$.

Оценим теперь число рёбер:

$$|E(H)| = \sum_{m=0}^{l-1} \sum_{a_1, \ldots, a_d} \prod_{i=1}^{d} C_{A_{m+i-1}}^{a_i}$$

Притом средняя сумма берётся по наборам $a_1, \ldots, a_d$, таким что $a_1, \ldots, a_d \in \{0, \ldots, k\} a_1 + \ldots + a_d = k, a_1 + \ldots + a_s \geqslant \frac{sb}{l} \forall s = 1, \ldots d$. Тогда

$$E(H) \leqslant l \sum_{a_1,\ldots,a_d} \left(\prod_{i=1}^{d} C_{\frac{n}{l}}^{d_i} \right) \leqslant l \left(\frac{n}{e}\right)^k \sum_{a_1,\ldots,a_d} \frac{1}{a_1! \ldots a_d!}.$$

Положим $l = b - 1, d = k - 1$. Если условия на частичные суммы нет, то сумма по всем $a_1, \ldots, a_d$ равна $\frac{d^k}{k!}$.

Если $l = b-1$, то $s\frac{b}{b-1} \in (s, s+1)$, то есть $a_1 + \ldots + a_s \geqslant s\frac{b}{b-1}$ эквивалентно $a_1 + \ldots + a_s > s$. Введем $y_i = a_i - 1, y_1 + \ldots + y_{k-1} = 1, y_i \geqslant -1, y_1 + \ldots + y_s > 0 \forall s = 1, \ldots, k$.

Тогда $\exists$ ровно один циклический сдвиг последовательности $y_1, \ldots, y_{k-1}$, такой, что все частичные суммы положительны.

Вывод: $\sum\limits_{a_1,\ldots,a_d} \frac{1}{a_1! \ldots a_d!} = \frac{1}{k-1} \frac{(k-1)^k}{k!}$, стало быть $|E(H)| \leqslant (1 + o(1))(b - 1) \left(\frac{n}{b-1}\right)^k \frac{(k-1)^k}{k!} \Rightarrow t(b,k) \leqslant \left(\frac{k-1}{b-1}\right)^{k-1}$. □

7 Центральная турановская плотность

Из оценки $t(b,k) \leqslant \left(\frac{k-1}{b-1}\right)^{k-1}$ следует при $b = k + 1$, что $t(k + 1, k) \leqslant \frac{1}{e}(1 + o(1))$.

Теорема 5. $t(2k + 1, 2k) \leqslant \frac{C_{2k}^k}{2^{2k}} = O\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$.

Доказательство. Пусть $V = \{1, \ldots, n\}$, а $i_1 < \ldots < i_{2k}$ — упорядоченный набор чисел. Тогда объявляем $(i_1, \ldots, i_{2k})$ ребром, если во множестве $\{i_1 + 1, i_2 + 2, \ldots, i_{2k} + 2k\}$ ровно k чисел чётные.

Обозначим за $\mathcal{A}$ множество таких наборов и проверим, что $\mathcal{A}$ — это $(n, 2k+1, 2k)$-система. Будем делать это индукцией по k. База $k = 1$ следует из того, что среди любых трёх чисел $a_1 < a_2 < a_3$ найдутся два числа одной чётности, которые будут образовывать ребро.

Пусть для $l \leqslant k - 1$ всё доказано. Пусть $l = k, a_1 < \ldots < a_{2k+1}$. Если существует пара соседних чисел a_j, a_{j+1} одной чётности, то удалим их из набора и к оставшимся применим индукцию. По её предположению найдётся поднабор $a'_1 < \ldots < a'_{2k-2}$ такой, что при добавлении индексов среди них будет ровно $k - 1$ чётных чисел.

Теперь добавим к этому поднабору удалённые числа a_j, a_{j+1}. Получаем $a'_1 < \ldots < a'_t < a_j < a_{j+1} < a'_{t+1} < \ldots < a'_{2k-2}$. При добавлении $(1, 2, \ldots, 2k)$ получаем $a'_1 + 1 < \ldots < a'_t + t < a_j + t + 1 < a_{j+1} + t + 2 < a'_{t+1} + t + 3 < \ldots < a'_{2k-2} + 2k$, где, очевидно, будет половина чётных и половина нечётных чисел, так как $a_j + t + 1$ и $a_{j+1} + t + 2$ имеют разную чётность.

Если же чётность постоянно меняется, то достаточно удалить a_{k+1}.

Оценим теперь $|\mathcal{A}|$. Пусть $a_1 < \ldots < a_{2k}$ — ребро из $\mathcal{A}$, $x_i \equiv a_i \pmod 2, x_i \in \{0, 1\}$. Положим $b_i = \frac{a_i - x_i}{2} \in [0; \frac{n}{2}]$. Тогда набор $b_1, \ldots, b_{2k}$ может быть выбран $\leqslant C^{2k}_{\frac{n}{2}}(1+o(1))$ способами. Вектор $(x_1,\ldots,x_{2k})$ выбирается C^k_{2k} способами. Значит $|\mathcal{A}| \leqslant C^{2k}_{\frac{n}{2}}(1+o(1))C^k_{2k} = C^{2k}_n 2^{-2k}(1+o(1))$, откуда $t(2k+1,2k) \leqslant \lim\limits_n \frac{|\mathcal{A}|}{C^{2k}_n} \leqslant C^k_{2k}2^{-2k} = O\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$. □

Насколько хороша эта оценка? Известны такие результаты:

- $0.409 \approx \frac{7-\sqrt{21}}{6} \leqslant t(3,4) \leqslant \frac{4}{9} \approx 0.44$. Предположение состоит в том
- Сидоренко (1982, 1987) $\frac{1}{k} \leqslant t(k+1,k) \leqslant \frac{\ln k}{2k}(1+o(1))$.
- для $b = k+a, a = const$ оценка Франкла-Рёдля (1985) $t(k+a,k) \leqslant \frac{a(a+4+o(1))\ln k}{C^a_k}$.
- Жиро (1997) $t(k+1,k) \geqslant \frac{2}{k\left(1+\sqrt{\frac{k}{k+4}}\right)}$.
- для $b \geqslant k + \frac{k}{\log_2 k}$ оценка Сидоренко $t(b,k) \leqslant \frac{(b-k+1)(1+o(1))\ln C^k_b}{C^k_b}$.

8 Нижние оценки турановской плотности

Утверждение 8. $T(n,b,k) \geqslant \frac{C^k_n}{C^k_b}$.

Доказательство. Любое k-подмножество представляет не более C^{b-k}_{n-k} подмножеств. Если есть (n,b,k) система, то все подмножества представлены, значит $|E(H)|C_{n-k}b-k \geqslant C^b_n \Rightarrow |E(H)| \geqslant \frac{C^k_n}{C^k_b}$. □

В терминах турановской плотности $t(b,k) \geqslant \frac{1}{C^k_b} \approx b^{-k}$.

Теорема 6 (Спенсер). *Пусть* $n \geqslant (b-1)\frac{k}{k-1}$. *Тогда* $T(n,b,k) \geqslant \left(\frac{n}{k}\right)^k \left(\frac{k-1}{b-1}\right)^{k-1}$.

Доказательство. Пусть $H=(V,E)$ — это (n,b,k) система, то есть $\alpha(H) < b$.

Пусть X — случайное подмножество, выбранное схемой Бернулли с параметром p. $E|X| = np$. Пусть Y — это число рёбер, полностью вошедших в X, $EY = |E|p^k$. Удалим по одной вершине из каждого ребра, полностью попавшего в X, тогда останется X^* — независимое, значит $|X^*| \leqslant b-1 \Rightarrow b-1 \geqslant E|X^*| \geqslant E(|X|-Y) = np-|E|p^k \Rightarrow |E| \geqslant (np-b+1)p^{-k}$. Максимизируя это по p, получаем, что $p = \frac{(b-1)k}{n(k-1}$, а $|E| \geqslant \left(\frac{(b-1)k}{k-1} - (b-1)\right)\left(\frac{(b-1)k}{n(k-1)}\right)^{-k} = \left(\frac{n}{k}\right)^k \left(\frac{k-1}{b-1}\right)^{k-1}$. □

Утверждение 9. Если H — k-однородный гиперграф, на n вершинах, тогда $\alpha(H) \geqslant \frac{k-1}{k}\frac{n}{t(H)^{\frac{1}{k-1}}}$.

Доказательство. Пусть $\alpha(H)=b-1$, тогда H — это (n,b,k) система, тогда по теореме Спенсера

$$\frac{nt(H)}{k}=|E(H)|\geqslant T(n,b,k)\geqslant\left(\frac{n}{k}\right)^k\left(\frac{k-1}{b-1}\right)^{k-1}\Rightarrow b-1\geqslant\frac{n}{k}(k-1)\frac{1}{t(H)^{\frac{1}{k-1}}}$$

$\square$

Утверждение 10. $t(b,k)\approx\frac{1}{b^{k-1}}$ при $k=const, b\to\infty$.

9 Аналоги теоремы Турана для разреженных графов и гиперграфов

Теорема 7 (Айтаи, Комлош, Семереди, Ширер)**.** *Пусть* $f(t)=\frac{t\ln t-t+1}{(t-1)^2}, f(0)=1, f(1)=\frac{1}{2}$. *Тогда, если* G *— граф на* n *вершинах без треугольников, то* $\alpha(G)\geqslant nf(t(G))$.

Доказательство. Заметим, что для $x\geqslant 0$ $f(x)$ непрерывна, кроме того $f(x)\in(0;1)$ при $x>0, f'(x)<0, f''(x)\geqslant 0$. Также $f(x)$ является решением уравнения $(x+1)f(x)=1+(x-x^2)f'(x)$.

Индукция по числу вершин в G. Обозначим $t=t(G)$. Если $n\leqslant\frac{t}{f(t)}$, то всё доказано, так как соседи одной вершины являются независимыми.

Пусть теперь v — произвольная вершина, d_1 — её степень, d_2 — средняя степень её соседей. Покажем, что можно выбрать v так, что

$$(d_1+1)f(t)\leqslant 1+(td_1+t-2d_1d_2)f'(t)\qquad(*)$$

Для этого возьмём вершину случайно и проверим это неравенство в среднем. Пусть Y — сумма степеней соседей v, $Y=d_1d_2$.

$$EY=\frac{1}{n}\sum_v\sum_{u:(u,v)\in E}\deg u=\frac{1}{n}\sum_u\deg^2 u\geqslant t^2.$$

В левой части неравенства в среднем стоит $(t+1)f(t)$, правая часть в среднем не меньше $1+(t^2+t-2t^2)f'(t)=1+(t-t^2)f'(t)\geqslant(t+1)f(t)$ в силу свойств f. Значит неравенство в самом деле выполнено в среднем, значит существует вершина, для которой выполнено указанное требование.

Удалим v из графа вместе с её соседями. Останется граф G', с $|V(G')|=n-1-d_1, |E(G')|=\frac{nt}{2}-d_1d_2$, так как G не содержит треугольников.

$t'=t(G')=\frac{2|E(G')|}{|V(G')|}=\frac{nt-2d_1d_2}{n-1-d_1}$, значит по индукции $\alpha(G')\geqslant n'f(t')$. Значит $\alpha(G)\geqslant 1+\alpha(G')\geqslant 1+n'f(t')$. Оценим по формуле Тейлора $f(t')\geqslant f(t)+f'(t)(t'-t)$, так как $f''(t)>0$, значит

$$\begin{aligned}\alpha(G)\geqslant 1+n'(f(t)+f'(t)(t'-t))=1+n'f(t)+n'f(t)t'-n'tf'(t)=\\ 1+(n-1-d_1)f(t)+f'(t)(nt-2d_1d_2)-(n-1-d_1)tf'(t)=\\ 1+(n-1-d_1)f(t)+(t+td_1-2d_1d_2)f'(t)\geqslant(*)\geqslant\\ (n-1-d_1)f(t)+(d_1+1)f(t)=nf(t).\end{aligned}$$

$\square$

Пусть $R(s,t)$ — число Рамсея, то есть $\min\{n : \forall G = (V,E), |V| = n \to \alpha(G) \geqslant t \vee \omega(G) \geqslant s\}$.

Утверждение 11. $R(3,t) \leqslant \frac{t^2}{\ln t}(1+o(1))$.

Доказательство. Если $G = (V,E), |V| = n$. Если $\omega(G) \geqslant 3$, то есть треугольник, иначе $\omega(G) < 3$ и $t(G) \geqslant t$, тогда $\alpha(G) \geqslant t(G) \geqslant t$. Если $\omega(G) < 3, t(G) < t$, то по теореме Ширера $\alpha(G) \geqslant nf(t) = \frac{n \ln t}{t}(1+o(1)) \geqslant t$, если $n \geqslant \frac{t^2}{\ln t}(1+o(1))$. $\square$

Результат Кима (1995), улучшенный Бошаном, Кивашем, Гриффитсом (2013): $R(3,t) \geqslant \frac{1}{4}\frac{t^2}{\ln t}(1+o(1))$.

10 Точность оценки теоремы Ширера

Лемма 2. *Пусть $d = d(n)$ — последовательность такая, что $4 \leqslant d \leqslant o(n^{\frac{1}{4}})$, тогда существует последовательность графов G_n, что $V(|G_n|) = n, g(G_n) > 3, t(G_n) \sim d, \alpha(G_n) \leqslant \frac{2n \log d}{d}(1+o(1))$.*

Доказательство. Рассмотрим случайный граф $G(n,p), p = \frac{d}{n}$.

Если $X_n = |E(G(n,p))|$, то $EX_n = C_n^2 p \sum \frac{nd}{2}, DX_n = C_n^2 p(1-p) = o(dn)$. Тогда $P(|X_n - EX_n| \geqslant n^{\frac{2}{3}}) \leqslant \frac{DX_n}{n^{\frac{4}{3}}} \to 0$. Значит асимптотически почти наверное $C_n^2 p - n^{\frac{2}{3}} \leqslant X_n \leqslant C_n^2 p + n^{\frac{2}{3}}$, значит $X_n \sim \frac{nd}{2}$.

Оценим вероятность того, что в $G(n,p)$ есть независимое множество размера $\left\lceil \frac{2n \ln d}{d} \right\rceil = b$. $P(\alpha(G(n,p)) \geqslant b) \leqslant C_n^b (1-p)^{C_b^2} \sim \frac{n^b}{b!}(1-p)^{C_b^2} \leqslant \left(\frac{ne}{b}\right)^b \exp\left(-pC_b^2\right) = \left(\frac{ne}{b}\exp\left(-p\frac{b-1}{2}\right)\right)^b \leqslant \left(\frac{\exp(1+o(1))}{2\ln d}\right)^b \to b$, если $d \geqslant 4$.

Пусть Y — число треугольников в $G(n,p)$, $EY = C_n^3 p^3 < \frac{d^3}{6}$. $P(Y \geqslant d^3) \leqslant \frac{1}{6}$.

Значит, для достаточно больших n существует G'_n на n вершинах, такой что число его рёбер есть $\frac{nd}{2}$, $\alpha(G'_n) < \frac{2n \ln d}{d}$, а число треугольников не больше d^3. Удалим по ребру из каждого треугольника, получим граф G_n. $|E(G_n)| \geqslant |E(G'_n)| - d^3 \sim \frac{nd}{2}$. $\alpha(G_n) \leqslant \alpha(G'_n) + d^3 \sim \frac{2n \ln d}{d}$, так как $d = o(n^{\frac{1}{4}})$. $\square$

11 Оценки внедиагональных чисел Рамсея

Рассмотрим $R(s,t)$ в случае фиксированного $s \geqslant 4$ и растущего t.

Лемма 3. *Пусть G — на n вершинах со средней степенью вершины t, числом рёбер e и числом треугольников t. Пусть $p \in (0,1), np \geqslant 12$. Тогда G содержит индуцированный подграф G' такой, что $n' > \frac{np}{2}, e' < 3ep^2, h' < 3hp^3, t' < 6tp$.*

Доказательство. Нам подойдёт случайный подграф, индуцированный по схеме Бернулли.

$P\left(n' \leqslant \frac{np}{2}\right) < P\left(|n'-np| > \frac{np}{2}\right) \leqslant \frac{np(1-p)}{\frac{n^2p^2}{4}} < \frac{4}{np} \leqslant \frac{1}{3}$.

$Ee' = ep^2 \Rightarrow P(e' \geqslant 3ep^2) \leqslant \frac{1}{3}$ по неравенству Маркова.

$Eh' = hp^3 \Rightarrow P(h' \geqslant 3hp^3) \leqslant \frac{1}{3}$ по неравенству Маркова.

$t' = \frac{2e'}{n'} < \frac{12ep^2}{np} = 6tp$.

Значит с положительной вероятностью искомый граф найдётся. □

Лемма 4. *Пусть $\varepsilon \in (0,2)$, G — граф на n вершинах со средней степенью t и числом треугольников $h < nt^{2-\varepsilon}$. Тогда $\alpha(G) \geqslant c'\frac{n\ln t}{t}$, где $c'(\varepsilon) > 0$ зависит только от ε.*

Доказательство. Пусть $\gamma > 0$ — абсолютная константа такая, что для любого графа без треугольников выполнено $\alpha(H) \geqslant \gamma\frac{|V(H)|\ln t(H)}{t(H)}$. Положим $c' = \frac{\varepsilon\gamma}{168}$.

Если $t < 12^{\frac{2}{\varepsilon}}$, то все очевидно по теореме Турана. Пусть $t > 12^{\frac{2}{\varepsilon}}$. Применим к G лемму 3 с $p = t^{\frac{\varepsilon}{4}} - 1$ и рассмотрим найденный индуцированный подграф G'. В нём будет не более $3hp^3$ треугольников, то есть меньше, чем $3nt^{2-\varepsilon}t^{\frac{1}{2}\varepsilon-2}p = 3npt^{-\frac{\varepsilon}{2}} \leqslant \frac{np}{4}$.

Удалим из каждого тругольника G' по вершине, получив G'' без треугольников.

$n'' \geqslant n' - \frac{np}{4} \geqslant \frac{np}{4}$.

$e'' \leqslant e' < 3ep^2$.

$t'' = \frac{2e''}{n''} \leqslant \frac{24ep^2}{np} = 12p\frac{2e}{n} = 12t^{\frac{\varepsilon}{4}}$.

Тогда по теореме Ширера $\alpha(G) \geqslant \alpha(G'') \geqslant \gamma\frac{n''\ln t''}{t''} \geqslant \gamma\frac{np}{4}\frac{\ln 12t^{\frac{\varepsilon}{4}}}{12^{\frac{\varepsilon}{4}}} = \frac{\gamma}{48}\frac{n}{t}\ln 12t^{\frac{\varepsilon}{4}} \geqslant \frac{\gamma\varepsilon}{168}\frac{n\ln t}{t}$. □

Теорема 8. *Пусть $t \geqslant t_0(s)$, тогда $R(s,t) \leqslant c^s\frac{t^{s-1}}{(\ln t)^{s-2}}$, где $0 < c \leqslant 20000$ — абсолютная константа.*

Доказательство. Из теоремы АКС известно, что γ можно взять равной $\frac{1}{100}$. Выберем в лемме 4 $\varepsilon = \frac{1}{s-2}0.97 < \varepsilon < \frac{1}{s-2}0.99$. Индукция по s с уже доказанной базой $s = 3$. Пусть для $s' < s$ всё доказано, докажем теперь шаг.

Рассмотрим произвольный граф G на n вершинах, $n \geqslant c^s\frac{t^{s-1}}{(\ln t)^{s-2}}$. Если $\omega(G) \geqslant s$, то очевидно. Если $\omega(G) < s$ и $m = c^{s-1}\frac{t^{s-2}}{(\ln t)^{s-3}} \leqslant \Delta(G)$, то среди соседей вершины максимальной степени также найдется либо $s-1$-клика, либо t-независимое множество, то есть все выпонено. То есть считаем, что $\omega(G) < s, m > \Delta(G) \geqslant t(G)$. Обозначим через h число треугольников в G.

Если $h < nm^{2-\varepsilon}$, то по лемме 4 $\alpha(G) \geqslant c'\frac{n\ln m}{m} \geqslant 20000c'\frac{t}{\ln t}\ln m \geqslant \frac{50}{48}\varepsilon\frac{t}{\ln t}(s-2)\ln\frac{t}{\ln t} \geqslant \frac{0.97}{0.96}t\left(\frac{\ln t - \ln\ln t}{\ln t}\right) \geqslant t$ при всех достаточно больших t.

Если $h \geqslant nm^{2-\varepsilon}$, то есть вершина, которая содержится в $3m^{2-\varepsilon}$ треугольниках. Пусть G' — это граф соседей v, тогда $|E(G')| \geqslant 3m^{2-\varepsilon}$, при том, что $|V(G')| < m$. Значит в G' есть вершина w степени хотя бы $6m^{1-\varepsilon}$.

Индуцируем на соседях w подграф G''. Осталось показать, что $|V(G'')| \geqslant R(s-2,t)$. При достаточно больших t:

$$6m^{1-\varepsilon} = 6\cdot\left(20000^{s-1}\frac{t^{s-2}}{(\ln t)^{s-3}}\right)^{1-\varepsilon} \geqslant 6\cdot 20000^{(s-1)\frac{s-3}{s-2}}\frac{t^{(s-2)-0.99}}{(\ln t)^{(s-3)-0.98\frac{s-3}{s-2}}} >$$

$$6{\cdot}20000^{s-2}\frac{t^{s-3}}{(\ln t)^{s-4}}\frac{t^{0.01}}{(\ln t)^{1-0.99\frac{s-3}{s-2}}20000^{\frac{1}{s-2}}} > 20000^{s-2}\frac{t^{s-3}}{(\ln t)^{s-4}} \geqslant R(s-2,t).$$

$\square$

С помощью локальной леммы можно вывести нижнюю оценку $R(s,t) \geqslant c(s)\left(\frac{t}{\ln t}\right)^{\frac{s+1}{2}}$, что сходится при $s=3$, но существенно расходится при больших s. В других результатах улучшена степень логарифма, но по степени t результатов нет.

12 Графы без больших клик

Далее мы займёмя графами, не содержащими K_n и покажем, что $\alpha(G) \geqslant c\frac{n\ln t}{t\ln\ln t}$, что является нетривиальной оценкой по сравнению с теоремой Турана. Для начала вспомним некоторые вещи:

Определение 8. Пусть X — случайная величина или вектор с плотностью p. Тогда энтропия это $H(X) = E\left[-\log_2 p(x)\right]$.

Простые свойства:

- $H(X) \geqslant 0$, $H(X) = 0 \Leftrightarrow X = a_j$ п. н.
- $H(X) \leqslant \log_2 n$
- $H(X_1,\ldots,X_m) \leqslant \sum\limits_{j=1}^{m} H(X_j)$
- $h(x) = -x\log_2 x - (1-x)\log_2(1-x)$ — это энтропия распределения $Bern(p)$. Притом $h(x)$ выпукла вверх.

Лемма 5. *Пусть $G = (V,E), |V| = n, \omega(G) < r, r \geqslant 3$. Обозначим через $i(G)$ число независимых множеств в G, а $\overline{\alpha}(G)$ — их средний размер. Тогда*

$$\overline{\alpha}(G) \geqslant c(r)\frac{\ln i(G)}{\ln\ln i(G)},$$

где $c(r) > 0$ зависит только от r.

Доказательство. Пусть S — случайное (равномерно выбранное) независимое множество. Тогда $H(S) = \log_2 i(G)$. Считаем, что $V(G) = \{1,\ldots,n\}$. Обозначим $\varphi = \frac{\overline{\alpha}(G)}{n}$, $\alpha = \alpha(G)$. Тогда выполнено следующее:

- $i(G) \leqslant 2^{nh(\varphi)}$
- $\overline{\alpha}(G) = n\varphi$
- $i(G) \geqslant 2^{\alpha}$

Последние два пункта очевидны, докажем первый. Для $\forall v \in V(G)$ положим $X_v = I\{v \in\}$. $\forall \beta \in \{0,1\}^n, \beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$. $P(X_1 = \beta_1, \dots, X_n = \beta_n) = \frac{1}{i(G)} I(\beta$ определяет независимое множество). Значит

$$\log_2 i(G) = H(X_1, \dots, X_n) \leqslant \sum_{j=1}^{n} H(X_j) = \sum_{j=1}^{n} h\left(\frac{i_j(G)}{i(G)}\right),$$

где $i_j(G)$ — число независимых множеств, содержащих вершину j. По неравенству Йенсена получаем:

$$\log_2 i(G) \leqslant nh\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{i_j(G)}{i(G)}\right) = nh\left(\frac{1}{n}\overline{\alpha}(G)\right) = nh(\varphi).$$

Из первых двух неравенств $\overline{\alpha}(G) = n\varphi = \frac{\varphi}{h(\varphi)} nh(\varphi) \geqslant \frac{\varphi}{h(\varphi)} \log_2 i(G)$. Заметим, что $\frac{x}{h(x)}$ возрастает по x. Из первого и третьего неравенства получаем, что $nh(\varphi) \geqslant \alpha$. По условию $\omega(G) < r, \alpha(G) < \alpha + 1$, значит $n < R(r, \alpha+1) \leqslant (\alpha+1)^{r-1} \Rightarrow \alpha + 1 > n^{\frac{1}{r-1}}$. $h(\varphi) \geqslant \frac{1}{n}\left(n^{\frac{1}{r-1}} - 1\right) = \frac{1+o(1)}{n^{\frac{r-2}{r-1}}}$.

Если $-x \ln x \geqslant \beta$, то $x \geqslant \frac{(1+o(1))\beta}{\ln \beta}$. Тогда $\varphi \geqslant \frac{(1+o(1))\ln 2}{n^{\frac{r-2}{r-1}} \frac{r-2}{r-1} \ln n}$. Наконец, $\log_2 i(G) \geqslant \alpha \geqslant n^{\frac{1}{r-1}} - 1 \Rightarrow \log_2 \log_2 i(G) \geqslant \frac{1}{r-1} \log_2 n(1+o(1))$.

Подставляем всё в нашу оценку:

$$\overline{\alpha}(G) \geqslant \frac{\varphi}{h(\varphi)} \log_2 i(G) = \frac{1}{-\log_2 \varphi(1+o(1))} \log_2 i(G) \geqslant \frac{\log_2 i(G)}{\frac{r-2}{r-1}\log_2 n}(1+o(1)) \geqslant \frac{1}{r-2}\frac{\log_2 i(G)}{\log_2 \log_2 i(G)}(1+o(1)) = \frac{1}{r-2}\frac{\ln i(G)}{\ln \ln i(G)}(1+o(1)).$$

□

Теорема 9 (Ширер). *Пусть G — d-регулярный граф на n вершинах, не содержащий $K_r, r \geqslant 4$. Тогда $\alpha(G) \geqslant c(r)\frac{n \ln d}{d \ln \ln d}$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{F}$ — множество всех независимых множеств в G, а S — его случайный элемент (с равномерным распределением). Для $\forall v \in V(G)$ положим $p_v = P(v \in S)$. $\overline{p}_v = \frac{1}{d} E \sum\limits_{u \in V} I\left\{(u,v) \in E(G), u \in S\right\}$ — среднее число соседей в S.

Обозначим T_v — множество соседей v. $H_v = G \setminus (\{v\} \cup T_v)$. Для $\forall U \subset T_v$ положим $f(U)$ — вероятность того, что случайное независимое множество в H_v не имеет соседей в U, но соединено со всеми вершинами из $T_v \setminus U$. Пусть $I(U)$ — число независимых множеств внутри U. Тогда

$$p_v = \frac{i_v}{i(G)} = \frac{i_v}{i_v + \sum\limits_{U \subset T_v} I(U) f(U) i(H_v)} = \frac{1}{1 + \sum\limits_{U \subset T_v} f(U) I(U)}.$$

Аналогично

$$\overline{p}_v = \frac{\sum\limits_{U \subset T_v} f(U) I(U) \overline{\alpha}(U)}{d\left(1 + \sum\limits_{U \subset T_v} f(U) I(U)\right)}.$$

Заметим, что если G не содержит K_r, то T_v не содержит K_{r-1}, значит по лемме $\overline{\alpha}(U) \geqslant c(r-1)\frac{\ln I(U)}{\ln\ln I(U)}$. Тогда для $\lambda > 0$ рассмотрим сумму $w = \sum\limits_{U \subset T_v, |I(U)| \geqslant \lambda} I(U) f(U)$.

Положим $y = c(r-1)\frac{\ln \lambda}{\ln\ln \lambda}$. Тогда $p_v \geqslant \frac{1}{1+\lambda+w}$ и $\overline{p}_v \geqslant \frac{yw}{(1+\lambda+w)d}$. Первая оценка убывает, а вторая возрастает, отсюда $p_v + \overline{p}_v \geqslant \max(p_v, \overline{p}_v) \geqslant \max\left(\frac{1}{1+\lambda+w}, \frac{yw}{(1+\lambda+w)d}\right) \geqslant \frac{1}{1+\lambda+\frac{d}{y}}$. Находим оптимальное $\lambda \sim \frac{d}{\ln d}$ и получаем оценку

$$p_v + \overline{p}_v \geqslant \frac{1}{1 + \frac{d}{\ln d} + \frac{d \ln\ln d}{c(r-1)\ln d}(1+o(1))} = c(r-1)\frac{\ln d}{d \ln\ln d}(1+o(1)).$$

Осталось заметить, что $\overline{\alpha}(G) = E|S| = \sum\limits_{v \in V} p_v$, а с другой стороны $\overline{\alpha}(G) = E\sum\limits_{v \in V} I\{u \in S\}\frac{\deg u}{d} = E\sum\limits_{v \in V} \frac{1}{d} \sum\limits_{U \in T_v} I\{u \in S\} = \overline{p}_v$. Тогда

$$\alpha(G) \geqslant \overline{\alpha}(G) = \frac{1}{2}\sum_{v \in V}(p_v + \overline{p}_v) \geqslant \frac{c(r-1)}{2}\frac{n \ln d}{d \ln\ln d}(1+o(1))$$

. □

Следствие. *Пусть G — граф на n вершинах, не содержащий K_r с максимальной степенью $\Delta(G) = d$. Тогда $\alpha(G) \geqslant c(r)\frac{n \ln d}{d \ln\ln d}$.*

Доказательство. Пусть G — не d-регулярный. Рассмотрим G' — копию G, не пересекающуюся по вершинам. Соединим ребрами $v' \in G', v \in G$, если v' — копия v и $\deg_G v < d$. Продолжим процедуру, пока граф не станет d-регулярным. Тогда полученный граф G^* не содержит K_r и $n^* = |V(G^*)| = 2^k n$, тогда по теореме $\alpha(G^*) \geqslant c(r)\frac{n^* \ln d}{d \ln\ln d}$. Но $\alpha(G^*) \leqslant \alpha(G) 2^k$, значит $\alpha(G) \geqslant c(r)\frac{n \ln d}{d \ln\ln d}$. □

Следствие. *Пусть G — граф на n вершинах, не содержащий K_r со средней степенью $t(G) = t$. Тогда $\alpha(G) \geqslant c(r)\frac{n \ln t}{t \ln\ln t}$.*

Доказательство. Удалим из G все вершины степени больше $2t$. Для оставшегося графа G' максимальная степень не больше $2t$. При этом $|V(G')| = n' \geqslant \frac{n}{2}$. Тогда $\alpha(G) \geqslant \alpha(G') \geqslant c(r)\frac{n \ln 2t}{2t \ln \ln 2t} \geqslant c'(r)\frac{n \ln t}{t \ln \ln t}$. $\square$

Следствие. *Пусть H — какой-то граф, а G — граф на n вершинах со средней степенью вершины t, не содержащий подграфов, изоморфных H. Тогда $\alpha(G) \geqslant c(H)\frac{n \ln t}{t \ln \ln t}$.*

Недоказанное пока что предположение состоит в том, что повторный логарифм можно убрать аналогично задаче о графах без треугольников.

13 Теорема Алона

Далее мы докажем, что приведенная гипотеза верна, если G удовлетворяет свойству: $\forall v \in V(G)\chi(G_v) \leqslant r \Rightarrow$ нет K_{r+2}. Пусть

Лемма 6. *X — некоторое конечное множество, $|X| = x, \mathcal{F} \subset 2^X$ — система подмножеств такая, что $|\mathcal{F}| = 2^{\varepsilon x}$. Тогда средний размер элементов $\mathcal{F}$ не меньше $\frac{\varepsilon x}{10 \log_2\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)}$.*

Доказательство. Считаем, что $\mathcal{F}$ состоит $2^{\varepsilon x}$ самых маленьких множеств. В силу того, что $\frac{6}{7}\frac{1}{8} > \frac{1}{10}$, достаточно проверить, что $\frac{6}{7}$ элементов $\mathcal{F}$ имеют размер не менее $\frac{\varepsilon x}{8 \log_2\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)} < \frac{x}{8}$. Для любого $r \leqslant \frac{x}{8}$ выполнено $C_x^r > 7C_{x-1}^{r-1}$. Значит $C_x^r \geqslant \frac{6}{7} \sum\limits_{i=0} rC_x^i$. Осталось проверить, что

$$\sum_{i=0}^{\frac{\varepsilon x}{8 \log_2\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)}} C_x^i \leqslant 2^{\varepsilon x}.$$

Пусть $\xi \sim Bin(x, \frac{1}{2})$, тогда $\sum\limits_{i=0}^{r} C_x^i 2^{-x} = P(\xi \leqslant r) = P(\xi \geqslant x - r) \leqslant |\forall u > 0| \leqslant P(e^{u\xi} \geqslant e^{u(x-r)}) \leqslant \frac{Ee^{u\xi}}{u(x-r)} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^u\right)^x e^{-u(x-r)} = 2^{-x}\frac{(e^u+1)^x}{e^{u(x-r)}}$. Минимум по u достигается на $e^u = \frac{x}{r}$, поэтому

$$\sum_{i=0}^{r} C_x^i \leqslant \left(\frac{x}{r}\right)^x \left(\frac{x}{r} - 1\right)^{r-x} = \left(\frac{x}{r}\right)^r \left(1 - \frac{r}{x}\right)^{r-x} =$$
$$2^{-r \log_2 \frac{r}{x} - (r-x)\log_2\left(1-\frac{r}{x}\right)} = 2^{h\left(\frac{r}{x}\right)x}.$$

Теперь достаточно показать, что $h\left(\frac{\varepsilon}{8 \log_2\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)}\right) \leqslant \varepsilon$. Если $y < \frac{1}{2}$, то $h(y) \leqslant 2y \log_2 \frac{1}{y}$, а значит, что $h\left(\frac{\varepsilon}{8 \log_2\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)}\right) \leqslant \frac{1}{4 \log_2\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)} \log_2\left(\frac{8 \log_2\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)}{\varepsilon}\right)$.

$4\log_2\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right) \geqslant 3 + \log_2 \log_2\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right) + \log_2 \frac{1}{\varepsilon}$, так как $\log_2 \frac{1}{\varepsilon} < \log_2\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)$ и $\forall s \geqslant 1 \to 3 + \log_2 s \leqslant 3s$. $\square$

Теорема 10 (Алон)**.** *Пусть $G = (V, E)$ — граф на n вершинах, с $\Delta(G) = d$. Пусть граф, индуцированный на множестве соседей любой вершины v является r-раскрашиваемым. Тогда $\alpha(G) \geqslant \frac{1}{160\log_2(r+1)}\frac{n\log_2 d}{d}$.*

Доказательство. Если $d \leqslant 16$, то все следует из теоремы Турана $\alpha(G) \geqslant \frac{n}{d+1}$. Далее считаем, что $d > 16$.

Пусть W — равномерно случйаное независимое множество. Для $\forall v \in V$ обозначим множество её соседей за $N(v)$ и введём случйную величину

$$X_v = d|\{v\} \cap W| + |N(v) \cap W|.$$

Если $v \in W$, то $X_v = d$. Иначе $X_v \leqslant |N(v)| \leqslant d$. Покажем, что $EX_v \geqslant \frac{\log_2 d}{80\log_2(r+1)}$.

Пусть H_v — подграф, индуцированный на $\{v\} \cup N(v)$. Покажем, что $\forall S$ — независимых подмножеств выполнено:

$$E(X_v \mid W \cap H_v = S) \geqslant \frac{\log_2 d}{80\log_2(r+1)}.$$

Пусть X — множество не-соседей s в $N(v), |X| = x$. Путь число независимых множеств в подграфе, индуцированном на X равно $2^{\varepsilon x}$. По условию такой подграф является r-раскрашиваемым, значит в X существует независимое множество размера хотя бы $\frac{x}{r}$, значит $2^{\varepsilon x} \geqslant 2^{\frac{x}{r}} \Rightarrow \varepsilon \geqslant \frac{1}{r}$.

Если $W \cap H_v = S$, то для дополнения W есть $1 + 2^{\varepsilon x}$ вариантов. Значит

$$E(X_v \mid W \cap H_v = S) = \frac{d}{2^{\varepsilon x} + 1} + \frac{\sum\limits_{I \subset X, I \in Indep} |I|}{2^{\varepsilon x} + 1}$$

По лемме $\sum\limits_{I \subset X, I \in Indep} |I| \geqslant 2^{\varepsilon x}\frac{\varepsilon x}{10\log_2\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)} \geqslant \frac{d}{2^{\varepsilon x}+1} + \frac{2^{\varepsilon x}}{2^{\varepsilon x}+1}\frac{\varepsilon x}{10\log_2\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)}$.

Если $2^{\varepsilon x+1} \leqslant \sqrt{d}$, то первое слагаемое уже больше $\sqrt{d} > \log_2\frac{d}{2}$. Если же $\varepsilon x > \frac{1}{2}\log_2 d - 1 \geqslant \frac{1}{4}\log_2 d$, значит

$$E(X_v \mid W \cap H_v = S) \geqslant \frac{\log_2 d}{80\log_2\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)} \geqslant \frac{\log_2 d}{80\log_2(r+1)}.$$

В итоге, $\sum\limits_v X_v = d|W| + \sum\limits_{u \in W} \deg u \leqslant 2d|W|$, значит $\alpha(G) \geqslant \overline{\alpha}(G) = E|W| \geqslant \frac{1}{2d}\sum\limits_{v \in V} EX_v \geqslant \frac{n\log_2 d}{160d\log_2(r+1)}$. □

Следствие. *В условиях теоремы Алона, если $t = t(G)$ — средняя степень, то $\alpha(G) \geqslant \frac{c}{\log_2(1+r}\frac{n\log_2 t}{t}$, где $c > 0$ — абсолютная константа.*

14 Числа независимости гиперграфов с большим обхватом

Следствие (Из теоремы Спенсера)**.** *Если H — k-однородный гиперграф, на n вершинах, тогда $\alpha(H) \geqslant \frac{k-1}{k}\frac{n}{t(H)^{\frac{1}{k-1}}}$.*

Теорема 11 (Айтан, Комлош, Пинтц, Спенсер, Семереди)**.** *Пусть H — k-однородный гиперграф на n вершинах, а также*

- $g(H) > 4$
- $t = t(H) \geqslant t_0(k)$
- $n \geqslant n_0(t,k)$.

Тогда $\alpha(H) \geqslant \left(\frac{0.98}{e}\right) \cdot 10^{-\frac{5}{k+1}} n \left(\frac{\ln t}{t}\right)^{\frac{1}{k-1}}$.

Если отказаться от последнего условия, то оценка $\alpha(H) \geqslant c(k) n \left(\frac{\ln t}{t}\right)^{\frac{1}{k-1}}$.

Теорема 12 (Дьюк, Лефман, Рёдль)**.** *Пусть H — простой ($g(H) > 2$) k-однородный гиперграф на n вершинах, $\Delta(H) = \Delta \geqslant \Delta_0(k)$, тогда*

$$\alpha(H) \geqslant c(k) n \left(\frac{\ln \Delta}{\Delta}\right)^{\frac{1}{k-1}},$$

где $c(k) > 0$ — положительная функция.

Доказательство. Пусть m_i — число циклов длины i в H, $i = 3, 4$. Так как H простой, то $m_i \leqslant n(\Delta_k - 1)^{i-1} \leqslant c_i(k) n \Delta^{i-1}$. Рассмотрим Y — случайное подмножество вершин H по схеме Бернулли с вероятностью p. Выберем $p = \Delta^{\frac{\varepsilon-1}{k-1}}, \varepsilon \in (0,1)$. $|Y| \sim Bin(n,p), np \geqslant \Delta^{1+\frac{\varepsilon+1}{k-1}} \to \infty$. Значит при достаточно большом Δ $P\left(|Y| \in [np - o(np), np + o(np)]\right) \geqslant 0.99$.

Пусть $\mu_i, i = 3, 4$ — число циклов длины i в гиперграфе, индуцированном на Y, тогда $E\mu_i = m_i p^{i(k-1)} \leqslant c_i(k) n \Delta^{i-1} \Delta^{i(\varepsilon-1)} = c_i(k) n \Delta^{i\varepsilon-1}$. Хотим, чтобы $i\varepsilon - 1 < \frac{\varepsilon-1}{k-1} \Rightarrow \varepsilon < \frac{k-2}{4k-5}$. В таком случае $E\mu_i = o(np), i = 3, 4$ при $\Delta \to \infty$. Число рёбер в Y в среднем равно $p^k|E| \leqslant p^k \frac{n\Delta}{k}$. Тогда с положительной вероятностью будет выполнено следующее:

- $|Y| = np + o(np)$
- $\mu_i = o(np), i = 3, 4$
- Число рёбер в Y не больше $\frac{2p^k n\Delta}{k}$.

Удалим из всех циклов внутри Y по вершине. Остаётся гиперграф H' с условием $g(H') > 4$, притом $|V(H')| = np + o(np) \geqslant \frac{np}{2}$, $t(H') \leqslant \frac{2p^k n\Delta}{|V'(H)|} \leqslant 4p^{k-1}\Delta$. По теореме АКПСС

$$\alpha(H') \geqslant c'(k)|V(H')| \left(\frac{\ln t(H')}{t(H')}\right)^{\frac{1}{k-1}} \geqslant c'(k)\frac{np}{2}\left(\frac{\ln 4p^{k-1}\Delta}{4p^{k-1}\Delta}\right)^{\frac{1}{k-1}} \geqslant$$
$$c'(k)\frac{n}{2}\left(\frac{\ln 4\Delta^{\varepsilon}}{4\Delta}\right)^{\frac{1}{k-1}} \geqslant c(k) n \left(\frac{\ln \Delta}{\Delta}\right)^{\frac{1}{k-1}}$$

□

Следствие. *Если H — простой k-однородный гиперграф со средней степенью вершины t, то* $\alpha(H) \geqslant c(k) n \left(\frac{\ln t}{t}\right)^{\frac{1}{k-1}}$.

15 Гипотеза Хейлбронна в комбинаторной геометрии

В единичный круг順 вброшено N точек. $\exists c > 0$ такое, что при любом расположении точек найдётся треугольник с площадью $\leqslant \frac{c}{N^2}$.

Утверждение 12. Гипотеза Хейлбронна неверна.

Доказательство. $t = n^{\frac{1}{10}}, \delta = \frac{t^2}{51n^2}, n$ — какое-то большое число. Пусть X, Y, Z — три случайные точки в единичном круге U. Геометрическими соображениями вероятность того, что треугольник с вершинами в X, y, Z имеет площадь меньше Δ оценивается как $\frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^2 \frac{4\Delta}{r} 2\pi r dr \leqslant \frac{16}{\pi}\Delta < \frac{t^2}{n^2}$.

Рассмотрим n случайных точек внутри U и посторим 3-однородный гиперграф H', где в ребро объединяются те тройки вершин, которые образуют треугольник площади меньше Δ. По неравенству Маркова хотя бы $\frac{1}{2}$ число рёбер будет $2C_n^3 \frac{t^2}{n^2} \leqslant \frac{nt^2}{3}$.

Веротяность образования 2-цикла среди 4 вершин в таком графе оценивается как $\frac{1}{\pi^3}\int\limits_0^2 \min\left(2, \frac{4\Delta}{r}\right)^2 2\pi r dr \leqslant \frac{1}{\pi^3}\int\limits_0^{2\Delta} 8\pi r dr + \frac{1}{\pi^3}\int\limits_{2\Delta}^2 \frac{32\Delta^2}{r^2}\pi r dr = o(\Delta^2 \ln \Delta) = o\left(n^{\frac{\frac{4}{10} - 4\ln n}{?}}\right) = o(n^{\frac{1}{2}-4})$. Значит среднее число 2-циков есть $o(\sqrt{n})$. Удалим по одной вершине из каждого. Останется простой гиперграф, в котором по теореме ДЛР $\alpha(H) \geqslant cn\left(\frac{\ln t}{t}\right)^{\frac{1}{2}}$. Заметим, что $t(H) < \frac{nt^2}{|V(H)|} \sim t^2 \Rightarrow \alpha(H) \geqslant cn\frac{\sqrt{\ln t}}{t} = N$. Эти N точек не содержат ни одного треугольника большой площади. $\Delta = \frac{t^2}{51n^2} \geqslant c' \frac{\ln N}{N^2}$. □

16 Проблема Эрдёша-Хайнала

Задача: найти $m(k, r) = \min\{|E(H)| : H - k -$ однородный $, \chi(H) > r\}$.

Упражнение 1. $m(2, r) = C_{r+1}^2$.

Простая верхняя оценка: $m(k, r) \leqslant C_{r(k-1)+1}^k$. Тогда для так называемой property B problem $m(k, 2) \leqslant C_{2k-1}^k \sim \frac{4^k}{2\sqrt{\pi k}}$.

Малые значения: $m(3, 2) = 7$ — проективный треугольник Фано, который не красится в два цвета. Более сложные известные $m(4, 2) = 23, m(5, 2) = 51$. Обычно это явная верхняя оценка плюс computer assisted разбор случаев для нижней.

Лемма 7 (Вероятностная нижняя оценка)**.** $m(k, r) > r^{k-1}$.

Доказательство. Пусть $H = (V, E)$ — k-однородный, $|E| \leqslant r^{k-1}$. Если $|E| \leqslant 1$, всё очевидно. Иначе, возьмём случайную раскраску. $\forall A \in E \to P(A$ — одноцветно$) = \frac{r}{r^k} = r^{1-k}$. $P(\exists$одноцветное ребро$) \leqslant |E|r^{1-k} - r^{1-|V|} \leqslant 1 - r^{1-|V|} < 1$. □

Применим к многоцветным числам Рамсея:

$R(s,r) = \{n :$ в любой раскраске рёбер K_n в n цветов найдётся K_s одного цвета$\}$

Вершинами гиперграфа назначим рёбра исходного графа, а рёбра проведём через те, что образуют K_s. Получили C_s^2-однородный гиперграф. Очевидно, что $R(s,n) > n \Leftrightarrow \chi(H_{n,r}) > r$. Отсюда получается оценка $R(s,r) > \frac{s}{e} r^{\frac{s-1}{2} - \frac{1}{s}}$.

Лемма 8 (Вероятностная верхняя оценка)**.** $m(k,r) \leqslant \frac{e}{2} k^2 (r-1) r^{k-1} \ln r (1 + o\left(\frac{1}{k}\right))$.

Доказательство. Рассмотрим множество вершин $V, |V| = v$. Пусть $S \in_R C_V^k$. Тогда для фиксированной раскраски σ оценим вероятность, что множество S одноцветно. Если в σ цветовые классы имеют размеры $v_1, \ldots, v_r$, то $P(S$ — одноцеветно$) = \frac{C_{v_1}^k + \ldots + C_{v_r}^k}{C_v^k} \leqslant \frac{r C_{\frac{v}{r}}^k}{C_v^k} = p$. Тогда вероятность, что m независимых случайных подмножеств одноцветны равна $\prod\limits_{i=1}^{m} (1-p)^m$.

Тогда образуем случайный k-однородный гиперграф с m независимыми рёбрами. $P(\chi(H) \leqslant r) = r^v (1-p)^m < e^{v \ln r - pm}$. Хотим, чтобы это было меньше 1. Это верно при $m = \left\lceil \frac{v \ln r}{p} + 1 \right\rceil$. Теперь оптимизируем по v.

$$
\begin{aligned}
p = \frac{r C_{\frac{v}{r}}^k}{C_v^k} = r \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\frac{v}{r} - i}{v - i} = r^{1-k} \prod_{i=1}^{k-1} \frac{1 - \frac{ri}{v}}{1 - \frac{i}{v}} \geqslant r^{k-1} \exp\left(\sum_{i=1}^{k-1} \frac{i}{v} - \frac{\frac{ri}{v}}{1 - \frac{ri}{v}} \right) = \\
r^{1-k} \exp\left(\sum_{i=1}^{k-1} - \frac{(r-1)iv + ri^2}{v(v-ri)} \right) \geqslant r^{1-k} \exp\left(- \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(r-1)iv + ri^2}{v(v-rk)} \right) = \\
r^{1-k} \exp\left(- \frac{(r-1)k(k-1)}{2(v-rk)} - \frac{k(k-1)(2k-1)r}{6v(v-rk)} \right)
\end{aligned}
$$

Берём $v = \frac{(r-1)k^2}{2}$, тогда $m \leqslant \left\lceil \frac{v \ln r}{p} + 1 \right\rceil = r^{k-1} \ln r \frac{(r-1)k^2}{2} e (1 + o\left(\frac{1}{k}\right))$. □

Если $r \gg k$, то полученная оценка хуже тривиальной, что неожиданно.

Теорема 13 (Теорема Алона)**.** *Пусть $r > k$, тогда $m(k,r) > (k-1) \left\lceil \frac{r}{k} \right\rceil \left\lfloor \frac{k-1}{k} r \right\rfloor^{k-1}$.*

Доказательство. Пусть $a = \left\lceil \frac{k-1}{k} r \right\rceil, b \left\lfloor \frac{r}{k} \right\rfloor \Rightarrow a + b = r$. Пусть $H = (V, E)$ — гиперграф с условием, что $|E| \leqslant (k-1) b a^{k-1}$. Выделим случайную раскраску V в $\{1, \ldots, a\}$. Пусть X — число одноцветных рёбер в этой раскраске, тогда $EX = |E| a^{1-k} \leqslant (k-1)b$. Тогда существует раскраска, в которой $X \leqslant (k-1)b$. Пусть $A_1, \ldots, A_m$ — одноцветные рёбра, $m \leqslant (k-1)b$. Исправим в них по одной вершине на один из b цветов так, чтобы никакой цвет не использовался больше, чем $(k-1)b$ раз. □

Итак, $m(k,r) > (k-1) \left\lceil \frac{r}{k} \right\rceil \left\lfloor \frac{k-1}{k} r \right\rfloor^{k-1} = \Omega(r^k)$ при $r \gg k$.

17 Случай двух цветов

- Мы уже показали, что $2^{k-1} \leqslant m(k,2) = o(k^2 2^k)$
- Бек (1978): $m(k,2) = \Omega\left(\left(\frac{k}{\ln k}\right)^{\frac{1}{3}} 2^k\right)$.
- Радхакришнан, Сринивасан (2000) $m(k,2) = \Omega\left(\left(\frac{k}{\ln k}\right)^{\frac{1}{2}} 2^k\right)$.

Определение 9. Пусть $H = (V,E)$, $r \geqslant 2, |V| = n, \sigma : V \to \{1,\dots,n\}$ — некоторая нумерация. Набор рёбер $(A_1,\dots,A_r)$ образует упорядоченную r-цепь относительно σ, если

- $\forall i < j \to \sigma(A_i) \leqslant \sigma(A_j)$
- $|A_i \cap A_{i+1}| = 1, \forall i = 1,\dots,r-1, |A_i \cap A_j| = \varnothing$ при $|i-j| > 1$.

Рассмотрим жадный алгоритм:

- Раскрашиваем все в цвет 1.
- Рассматриваем все вершины по порядку σ.
- Если текущая вершина является первой по номеру внутри какого-то ребра, то перекрасим её в минимальный цвет, присвоение которого не даёт одноцветного ребра в текущей раскраске. Если такого нет, то выбираем цвет r.

Теорема 14 (Критерий r-раскрашиваемости гиперграфа, критерий Плухара)**.** $\chi(H) \leqslant r \Leftrightarrow \exists\sigma$ *без упорядоченных r-цепей. В последнем случае жадный алгоритм даёт правильную раскраску.*

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть f — правильная раскраска в r цветов. Построим нумерацию так: сначала все вершины первого цвета, потом второго, to be continued. Пусть $(A_1,\dots,A_r)$ — упорядоченная r-цепь относительно σ. Тогда цвета «точек сочленения» равны $1,\dots,r$, значит последнее множество A_r одноцветно, противоречие.

Теперь достаточность. Пусть есть нумерация без упорядоченных r-цепей. Пусть жадный алгоритм не находит правильной раскраски. Пусть ребро A_{r-1} получилось одноцветным. Тогда согласно алгоритму ребро A_{r-1} полностью имеет цвет r. Обозначим первую его вершину v_{r-1}. Тогда в момент покраски этой вершины было ребро A_{r-2} цвета $r-1$, притом все его вершины уже были перекрашены. Таким образом, мы продолжаем цепь в порядке уменьшения нумерации. Так, мы дойдём до ребра A_1 цвета 2.

Рассмотрим последнюю вершину A_{r-1}. Она была перекрашена в цвет r, значит она была первой в каком-то ребре A_r. Это ребро может быть цвета 1. Получили упорядоченную r-цепь $A_1,\dots,A_r$. $\square$

Упражнение 2. Идея случайной нумерации в простом виде даёт оценку $\Omega(k^{\frac{1}{4}} 2^k)$.