Лекция 3.

1 Разветвленные накрытия

Определение 1. Разветвленное накрытие $\pi : E \to B$ — это накрытие над $B \setminus B'$, где $B' \subset B$ — конечно (варианты: дискретно, нигде не плотно, имеет меньшую размерность. Все они равносильны, если B одномерно).

Минимальное по включению такое B' называется бифуркационным множеством разветвленного накрытия π.

Определение 2. Пусть $f(x)$ — многозначная комплексная функция ($f(x) = \{y \mid F(x,y) = 0\}$). Её разветвленным накрытием назовём $p : X \to \mathbb{C}, p(x,y) = x(X = \{(x,y) \mid F(x,y) = 0\})$.

Хочется сказать, что бифуркационное множество многочлена содержится в множестве $\{x \mid \exists y : (x,y) \in X, \frac{\partial F}{\partial y} = 0\}$. Однако, многочлен $xy - 1$ имеет бифуркационное множество $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, хотя точек указанного вида нет. Проблема в том, что у точки 0 прообраза нет, однако прообраз окрестности не пуст, поэтому повторить доказательство для многочленов вида $g(y) - x$ не выйдет. Поэтому нам нужно, чтобы окрестности прообразов точки A содержали прообраз какой-то окрестности A, тогда все можно сделать по теореме об обратной функции.

То есть верное утверждение будем таким: бифуркационное множество B функции $f(x)$ лежит объединении в $B_1 = \{x_0 \mid F(x_0, \cdot) < \deg_y F\}$ и B'.

Определение 3. Пара отображений $f : E_1 \to E_2, g : B_1 \to B_2$ называется гомоморфизмом накрытий $p_1 : E_1 \to B_1$ и $p_2 : E_2 \to B_2$, если $p_2 \circ f = g \circ p_1$, то есть коммутирует диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{f} & E_2 \\ \downarrow{\scriptstyle p_1} & & \downarrow{\scriptstyle p_2} \\ B_1 & \xrightarrow{g} & B_2 \end{array}$$

Пример.

$$p_1 : X \to \mathbb{C}, X = \{G = 0\} \subset \mathbb{C}^2$$
$$p_2 : X' \to \mathbb{C}, X' = \{f(y) = x\} \subset \mathbb{C}^2$$

Пусть $p : E \to \mathbb{C}$ — разветвленное накрытие, $B_1 \supset B$, где B — бифуркационное множество. Тогда:

- $\pi_1(\mathbb{C} \setminus B) \overset{i_*}{\leftarrow} \pi_1(\mathbb{C} \setminus B_1)$, где $i : \mathbb{C} \setminus B_1$ вкладывает в $\mathbb{C} \setminus B$, так как локальная связность не нарушается от выкидывания дискретного набора точек. i_* является вместе с тем эпиморфизмом.

- Пусть есть две группы монодромии $G_1 = G_{p|_{\mathbb{C} \setminus B}}$, $G_2 = G_{p|_{\mathbb{C} \setminus B_1}}$.

$$G_1 = \psi_p(\pi_1(\mathbb{C} \setminus B)) = \psi_p(i_*(\pi_1(\mathbb{C} \setminus B_1))), G_2 = \psi_p(\pi_1(\mathbb{C} \setminus B_1))$$

.

> Поскольку i_* ничего не делает с петлями с точки зрения монодромии, хотя петель могло стать больше, то $G_1 = G_2$.

Таким образом группу монодромии разветвленного накрытия можно корректно определелить как группу монодромии накрытия на $\mathbb{C} \setminus B$, где B — любое дискретное множество, содержащее бифуркационное.