Лекция 3. Вершинные экспандеры

1 Экспандеры и их спектральные свойства

Вершинный экспандер — двудольный граф, где любое не слишком большое подмножество левой доли ($\leqslant \frac{n}{3}$) хорошо расширяется (хотя бы в константу раз).

Утверждение 1. Вершинный экспандер существует.

По D-регулярному графу построим матрицу случайного блуждания $M = \frac{A}{D}$, где A — матрица смежности.

- $u = (\frac{1}{N}, \ldots, \frac{1}{N})$ — собственый с $\lambda = 1$.
- Все собственные значения $\leqslant 1$ по модулю.
- Граф несвязен $\Leftrightarrow$ $\lambda = 1$ имеет кратность > 1. В одну сторону очевидно, в другую нужно рассмотреть любой СВ, не пропорциональный $(1, \ldots, 1)$ и взять максимальную компоненту и минимальную — это и есть две компоненты связности.
- Пусть граф связен, тогда $\lambda = -1$ — СЗ $\Leftrightarrow$ граф двудольный. В одну сторону очевидно, в другую нужно показать, что у СВ с СЗ $\lambda = -1$ максимальная компонента равна минус минимальной, далее аналогично предыдущему.

Определение 1. $\lambda(G) = \max\limits_{\pi} \frac{|\pi M - u|}{|\pi - u|} = \max\limits_{x \perp u} \frac{|xM|}{|x|}$.

Утверждение 2. $\lambda(G)$ — модуль второго СЗ матрицы M.

Доказательство. $w = \alpha_2 v^2 + \ldots \alpha_n v^n \to wM = \alpha_2\lambda_2 v^2 + \ldots + \alpha_n \lambda_n v^n$.
$|wM|^2 = \alpha_2^2\lambda_2^2 + \ldots + \alpha_n^2\lambda_n^2 \leqslant \lambda_2^2(\alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2) = \lambda_2^2|w|^2$. □

$|\pi M^t - u| \leqslant \alpha(G)^t |\pi - u| \leqslant \lambda(G)^t$, то есть $\lambda(G)$ — задает скорость сходимости распределения к равномерному.

Утверждается, что если граф связный и не двудольный, то $\lambda(G) < 1 - \frac{1}{N \cdot D \cdot \operatorname{diam}(G)}$.

Теорема 1. *Если* $\lambda(G) \leqslant \lambda \Rightarrow \forall\alpha \to G$ *—* $(\alpha N, \frac{1}{\alpha + (1-\alpha)\lambda^2})$*-экспандер*

Доказательство. $CP(\pi) = |\pi|^2$ — вероятность коллизии. $CP(\pi) = |\pi - u|^2 + \frac{1}{N}$. $CP(\pi) \geqslant \frac{1}{|\mathrm{Supp}\pi|}$ по КБШ.

$CP(\pi M) - \frac{1}{N} = |\pi M - u|^2 \leqslant \lambda(G)|pi - u|^2 \leqslant \lambda^2(CP(\pi) - \frac{1}{N})$. Если π равномерное на S, то $CP(\pi) = \frac{1}{|S|}$, а $CP(\pi M) \geqslant \frac{1}{\mathrm{Supp}\pi M} = \frac{1}{|N(s)|}$.

Итого, $\frac{1}{|N(S)|} - \frac{1}{N} \leqslant \lambda^2(\frac{1}{|S|} - \frac{1}{N})$, подставляя $|S| \leqslant \alpha N$, $\frac{1}{N} \leqslant \frac{\alpha}{|S|}$, получаем требуемое. □

Спектральный разрыв: $\gamma(G) = 1 - \lambda(G)$.

Известно, что если граф D-регулярный и является $\left(\frac{N}{2}, 1 + \delta\right)$-экспандер, то $\gamma(G) = \Omega\left(\frac{\delta}{D}^2\right)$.