Лекция 7. Системы полиномиальных уравнений

У нас теперь есть система полиномиальных уравнений: $P_1 = \ldots = P_k = 0$, притом $P_j \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_k]$.

Для начала нужно понять, что вообще может играть роль степени многочлена для системы. Подходы могут быть разные, мы рассмотрим только один из них.

Носитель многочлена P от k переменных $x_1, \ldots, x_k$ есть точки $A(P) \subset \mathbb{Z}^k$. В общем случае $P = \sum_{k \in \mathbb{Z}^k} c_k x^k$, где $x^k = \prod x_j^{k_j}$, а носитель это $A(P) = \left\{k \in \mathbb{Z}^k \mid c_k \neq 0\right\}$. Положим также, что $|A(P)| < \infty$, чтобы у нас был многочлен, а не ряд Лорана.

Определение 1. Решением общей системы уравнений с носителем A называется функция $F = F_{A_1, \ldots, A_k} : \mathbb{C}^{A_1} \times \ldots \times \mathbb{C}^{A_k} \to 2^{\mathbb{C}^{*k}}$.

Для простоты, чтобы облегчить замены переменных, будем рассматривать решения только ненулевые.

$F(c^1, \ldots, c^k) = \{x \in \mathbb{C}^k \mid P_{c^1}(x) = \ldots P_{c^k}(x) = 0\}, c^j \in \mathbb{C}^{A_j}$.

Определение 2. Нужно теперь как минимум определить многозначную вектор-функцию, выраженную в радикалах. g является таковой, если каждая её компонента является функцией, выраженной в радикалах, то есть либо константа, либо корень из какой-то компоненты, либо сумма, произведение или композиция других выражений в радикалах (частное подразумеваем как корень минус первой степени).

Общая система с носителями $A_1, \ldots, A_k$ разрешима в радикалах, если $\forall c_0 \in \mathbb{C}^A, |F(c_0)| < \infty \, \exists U(c_0) \subset \mathbb{C}^A, U(c_0)$ — открытая по-Зарисски, такая что существует разрешимая в радикалах функция $g : \mathbb{C}^{U(c_0)}$, такая, что $G \supset F$.

Замечание. Топология Зарисского на множестве $\mathbb{F}^k$ это $\Omega = \{\mathbb{F}^k \setminus A \mid \exists l \in \mathbb{N}, P_1, \ldots, P_l \in \mathbb{F}[x_1, \ldots, x_k] \mid A = \{P_1 = \ldots = P_l = 0\}\}$.

Самый общий вопрос: при каких A общая система разрешима в радикалах. Первые мысли:

- Удобно рассматривать мономиальные замены переменных на комлексном торе $\mathbb{C}^{*k}$. $x^k = u^{Mk}$, где $M \in GL_k(\mathbb{Z})$.
- Случаи, которые можно свести к более простым:
  - A называется невырожденной, если $\forall i \to A_i \ni 0 \in \mathbb{Z}^k, \left\langle \bigcup_{j=1}^{k} A_j \right\rangle_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}^k$. Вырожденные сводятся к невырожденным.
    Если $\exists i : 0 \notin A_i$. $\mathbb{C}^{A_j}$ заменяется на $\mathbb{C}^{A_j - \{k_0\}}$.
    Если же $\left\langle \bigcup_{j=1}^{k} A_j \right\rangle_{\mathbb{Z}} \neq \mathbb{Z}^k$, то сведение делается (почти) мономиальной заменой $M : M^{-1} e_j = v_j \Rightarrow M^{-1} = (v_1 \ldots v_k)$. Почти потому что замена может быть необратимой.