

Содержание

1	Модели случайных графов	2
2	Общая теория случайных подмножеств	3
3	Монотонные и выпуклые свойства	3
4	Асимптотическая эквивалентность моделей	4
5	Связь в обратную сторону	6
6	Пороговые вероятности	7

1 Модели случайных графов

Определение 1. *Случайный граф* — случайный элемент со значениями в некотором конечном множестве графов.

Определение 2. *Равномерная модель.* K_n — полный граф, $0 \leq m \leq C_n^2$, \mathcal{G}_m — множество всех остовных подграфов K_n , имеющих ровно m рёбер. Случайный граф в этой модели — случайный элемент с равномерным распределением на \mathcal{G}_m .

$$P(G(n, m) = F) = \frac{1}{C_n^m} \forall F \in \mathcal{G}_m$$

Фиксировано число рёбер, но другие характеристики выглядят сложнее, скажем $\deg v$ имеет гипергеометрическое распределение.

Определение 3. *Биномиальная модель.* \mathcal{G} — множество всех остовных подграфов K_n , $p \in [0, 1]$. Случайный граф в этой модели — случайный элемент на \mathcal{G} со следующим распределением:

$$P(G(n, p) = F) = p^{|E(F)|} (1 - p)^{C_n^2 - |E(F)|} \forall F \in \mathcal{G}$$

Много независимых событий, из-за чего многие характеристики имеют удобное распределение, например $\deg v \sim B(n-1, P)$. Число рёбер, впрочем, случайно.

Другие модели:

- Граф G , схема Бернулли на его рёбрах. Скажем, $G = K_{n,m}$ — случайный двудольный граф.
- Равномерное распределение на какой-то совокупности графов \mathcal{F} . Например, случайный d -регулярный граф
 - $d = 1$ — случайное совершенное паросочетание
 - $d = 2$ — случайный набор циклов
 - $d = 3$ — можно показать, что а.п.н. это гамильтонов цикл плюс какое-то совершенное паросочетание
- Случайный процесс на графе
 - С дискретным временем: $\tilde{G} = (\tilde{G}(n, m), m = 0 \dots C_n^2)$, в котором на каждом шаге появляется новое случайное равномерно выбранное ребро. $\tilde{G}(n, m) \stackrel{d}{=} G(n, m)$. Можно смотреть случайные моменты
 - * $\tau_1(n) = \min\{m : \delta(\tilde{G}(n, m)) \geq 1\}$
 - * $\sigma_1(n) = \min\{m : \tilde{G}(n, m) \text{ связан}\}$

Теорема 1 (Баллобаш, Томасон).

$$P(\tau_1(n) = \sigma_1(n)) \rightarrow 1, n \rightarrow \infty$$

- С непрерывным временем: пусть для каждого ребра e графа K_n задана случайная величина T_e . Тогда для $\forall t > 0$ можно рассмотреть процесс:

$$\tilde{G}_T = \{e \mid T_e \leq t\}$$

Если все T_e распределены одинаково, $\tilde{G}_T(n, t) \stackrel{d}{=} G(n, p)$, где $p = P(T_e \leq t)$.

- Triangle-free process. На каждом шаге включаем одно случайное ребро так, чтобы не возникало треугольников. Можно показать, что в результате такого процесса $\alpha(\text{итогового графа}) = O(\sqrt{n \ln n})$. Следствие: оценка на число Рамсея $R(3, t) \geq c \frac{t^2}{\ln t}$.

2 Общая теория случайных подмножеств

Пусть Γ — конечное множество, $|\Gamma| = N$.

- $\Gamma(p)$ — схема Бернулли на Γ .
- $\Gamma(n)$ — случайное подмножество размера n с равномерным распределением
- $\tilde{\Gamma}(m)$ — случайный процесс, включающий элементы последовательно

В асимптотических утверждениях $\Gamma = \Gamma_n, n \in \mathbb{N}$ — последовательность, притом $N = N(n)$.

3 Монотонные и выпуклые свойства

Определение 4. Q — семейство подмножеств Γ называется *возрастающим*, если $A \in Q, A \subset B \rightarrow B \in Q$, *убывающим*, если $A \supset B \rightarrow B \in Q$, *монотонным*, если оно возрастающее или убывающее.

Ясно, что Q — возрастающее тогда и только тогда, когда $\overline{Q} = 2^\Gamma \setminus Q$ — убывающее. Будем обозначать $\Gamma(p) \models Q \Leftrightarrow \Gamma(p) \in Q$ («обладает свойством Q »).

Пример 1. Γ — рёбра K_n . Возрастающие свойства:

- связность
- содержит какой-то подграф
- $\delta(G) \geq k$

Убывающие свойства:

- планарность
- $\chi(G) \leq k$

- ацикличность

Лемма 1. Пусть Q — возрастающее свойство. Тогда $\forall p_1 \leq p_2, m_1 \leq m_2$:

$$P(\Gamma(p_1) \models Q) \leq P(\Gamma(p_2) \models Q)$$

$$P(\Gamma(m_1) \models Q) \leq P(\Gamma(m_2) \models Q)$$

Доказательство.

- $P(\Gamma(m_1) \models Q) = P(\tilde{\Gamma}(m_1) \models Q) \leq P(\tilde{\Gamma}(m_2) \models Q) = P(\Gamma(m_2) \models Q)$
- Пусть $\Gamma(p') \perp \Gamma(p'')$ — два независимых подмножества. Тогда $\Gamma(p') \cup \Gamma(p'') \stackrel{d}{=} \Gamma(p)$, где $p = p' + p'' - p'p''$. Тогда можно положить $p' = \frac{p_2 - p_1}{1 - p_1}$, а также, что $\Gamma(p') \perp \Gamma(p_1)$. Тогда

$$P(\Gamma(p_1) \models Q) \leq P(\Gamma(p_1) \cup \Gamma(p') \models Q) = P(\Gamma(p_2) \models Q).$$

□

Определение 5. Свойство Q называется *выпуклым*, если $A \subset C \subset B \in Q \Rightarrow C \in Q$

Пример 2.

- все монотонные выпуклы
- $\chi(G) = k$

4 Асимптотическая эквивалентность моделей

Хотим установить какую-то связь между моделями $\Gamma(p)$ и $\Gamma(m)$ при $pN \sim m$. Для этого введём следующий контекст:

- $\Gamma(n), n \in \mathbb{N}$ — последовательность конечных множеств
- $N = N(n) \rightarrow +\infty$
- $Q = Q(n)$
- $p = p(n) \in [0, 1]$
- $m = m(n) \in \{0, \dots, N\}$
- $\Gamma(n, p), \Gamma(n, m)$ — случайные подмножества $\Gamma(n)$

Лемма 2. Пусть Q — свойство $\Gamma(n)$. Пусть $p = p(n) \in [0, 1]$ — некоторая функция. Если для любой последовательности $m = m(n)$, такой что

$$m = Np + O(\sqrt{Npq}), q = 1 - p$$

выполнено

$$P(\Gamma(n, m) \models Q) \rightarrow a, n \rightarrow \infty$$

то

$$P(\Gamma(n, p) \models Q) \rightarrow a, n \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Пусть $C > 0$ — большая константа и положим $M(C) = \{m \mid |m - Np| \leq C\sqrt{Npq}\}$. Обозначим

$$m_* = \operatorname{argmin}_{m \in M(C)} P(\Gamma(n, m) \models Q)$$

$$m^* = \operatorname{argmax}_{m \in M(C)} P(\Gamma(n, m) \models Q)$$

По формуле полной вероятности:

$$\begin{aligned} P(\Gamma(n, p) \models Q) &= \sum_{m=0}^N P(\Gamma(n, p) \models Q \mid |\Gamma(n, p)| = m) P(|\Gamma(n, p)| = m) = \\ &= \sum_{m=0}^N P(\Gamma(n, m) \models Q) P(|\Gamma(n, p)| = m) \geq \\ &= \sum_{m \in M(C)} P(\Gamma(n, m) \models Q) P(|\Gamma(n, p)| = m) \geq \\ &= P(\Gamma(n, m_*) \models Q) P(|\Gamma(n, p)| \in M(C)) \end{aligned}$$

Но $|\Gamma(n, p)| \sim \operatorname{Bin}(N, p)$, $E|\Gamma(n, p)| = Np$, $D|\Gamma(n, p)| = Npq$. По неравенству Чебышева:

$$P(|\Gamma(n, p)| - Np > C\sqrt{Npq}) \leq \frac{Npq}{C^2 Npq} = \frac{1}{C^2}$$

Значит $P(\Gamma(n, p) \models Q) \geq P(\Gamma(n, m_*) \models Q) (1 - \frac{1}{C^2})$.

Аналогично

$$\begin{aligned} P(\Gamma(n, p) \models Q) &\leq \sum_{m \in M(C)} P(\Gamma(n, m) \models Q) P(|\Gamma(n, p)| = m) + \sum_{m \notin M(C)} P(|\Gamma(n, p)| = m) \\ &\leq P(\Gamma(n, m^*) \models Q) + \frac{1}{C^2} \end{aligned}$$

Значит $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} P(\Gamma(n, p) \models Q) \leq a + \frac{1}{C^2}$.

Также $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} P(\Gamma(n, p) \models Q) \geq a(1 - \frac{1}{C^2})$.

Это верно для любого $C > 0$. Тогда $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} P(\Gamma(n, p) \models Q) = a$. \square

5 Связь в обратную сторону

Лемма 3. Пусть Q — монотонное свойство, $a \in [0; 1]$. Если $\forall p = p(n)$ такой, что $p = \frac{m}{N} + o(\sqrt{\frac{m(N-m)}{N^3}})$ выполнено, что $P(\Gamma(n, p) \models Q) \rightarrow a$, то $P(\Gamma(n, m) \models Q) \rightarrow a$.

Докажем только ослабленный вариант, где $a = 0$ или $a = 1$.

Лемма 4. Пусть Q — монотонное свойство, $m = m(n), m(n) \rightarrow +\infty$ и $\varlimsup_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{N} < 1$. Тогда если $P(\Gamma(n, \frac{m}{N}) \models Q) \rightarrow 1$, то $P(\Gamma(n, m) \models Q) \rightarrow 1$.

Доказательство.

1. Если Q — возрастающее свойство, то

$$\begin{aligned} P(\Gamma(n, \frac{m}{N}) \models Q) &= \sum_{k=0}^N P(\Gamma(n, \frac{m}{N}) \models Q \mid |\Gamma(n, \frac{m}{N})| = k) P(|\Gamma(n, \frac{m}{N})| = k) \leq \\ &\sum_{k=0}^N P(\Gamma(n, k) \models Q) P(|\Gamma(n, \frac{m}{N})| = k) \leq \sum_{k=0}^m + \sum_{k>m+1} \leq \\ &P(\Gamma(n, m) \models Q) P(|\Gamma(n, \frac{m}{N})| \leq m) + P(|\Gamma(n, \frac{m}{N})| > m) \end{aligned}$$

По ЦПТ (условие на скорость роста $m(n)$ позволяет ею воспользоваться), получаем, что

$$1 \leq \frac{1}{2} \varliminf_n P(\Gamma(n, m) \models Q) + \frac{1}{2}$$

Значит $\exists \lim_n P(\Gamma(n, m) \models Q) = 1$.

2. Если Q — убывающее, то $P(\Gamma(n, \frac{m}{N}) \models Q) \leq P(|\Gamma(n, m)| > m) P(\Gamma(n, m) \models Q) + P(|\Gamma(n, m)| \leq m)$. Далее, все тоже самое.

□

Следствие. То же самое верно и для $a = 0$.

Следствие (Асимптотическая эквивалентность моделей). Пусть Q — возрастающее свойство, $m = m(n) \rightarrow +\infty$, $\varlimsup_n \frac{m}{N} \leq 1 - \delta$. Тогда

1. $P(\Gamma(n, \frac{m}{N}) \models Q) \rightarrow 1 \Rightarrow P(\Gamma(n, m) \models Q) \rightarrow 1$.
2. $P(\Gamma(n, \frac{m}{N}) \models Q) \rightarrow 0 \Rightarrow P(\Gamma(n, m) \models Q) \rightarrow 0$.
3. $P(\Gamma(n, m) \models Q) \rightarrow 1 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 P(\Gamma(n, \frac{m}{N}(1 + \varepsilon)) \models Q) \rightarrow 1$.
4. $P(\Gamma(n, m) \models Q) \rightarrow 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 P(\Gamma(n, \frac{m}{N}(1 - \varepsilon)) \models Q) \rightarrow 0$.

Доказательство. Первые два — это лемма и следствие. Положим $\frac{m}{N}(1 + \varepsilon) = p(n)$. Тогда если $m'(n) = NP + O(\sqrt{Npq}) = (1 + \varepsilon)m + O(\sqrt{m})$, то $m'(n) \geq m(n)$ начиная с какого-то момента, значит в силу возрастания Q $P(\Gamma(n, m') \models Q) \geq P(\Gamma(n, m) \models Q) \rightarrow 1$. Значит $P(\Gamma(n, m') \models Q) \rightarrow 1$, то есть по лемме $P(\Gamma(n, \frac{m}{N}(1 + \varepsilon)) \models Q) \rightarrow 1$. Аналогично следует последний пункт. \square

6 Пороговые вероятности

Мы доказали эквивалентность моделей только в случае вероятности, стремящейся к 0 или к 1. Однако, это самый важный случай, так как имеет место эффект «пороговой вероятности».

Определение 6. Пусть Q — возрастающее свойство подмножеств $\Gamma(n)$. Функция $\hat{p} = \hat{p}(n)$ называется *пороговой вероятностью* для Q , если выполнено $\lim_{n \rightarrow \infty} P(\Gamma(n, p) \models Q) = 1$ при $p = \omega(\hat{p})$ и 0, если $p = o(\hat{p})$.

Определение 7. Если Q — возрастающее свойство, то функция $\hat{m} = \hat{m}(n)$ называется *пороговой функцией* для Q , если выполнено $\lim_{n \rightarrow \infty} P(\Gamma(n, m) \models Q) = 1$ при $m = \omega(\hat{m})$ и 0 при $m = o(\hat{m})$.

Замечание. Для убывающих свойств все то же самое, с точностью до наоборот.

Замечание. \hat{m} — пороговая вероятность $\Leftrightarrow \hat{p} = \frac{\hat{m}}{N}$ — пороговая функция.

Пример 3. • $\Gamma(n) = \{1, \dots, n\}$, $Q = \{\text{внутри есть 3-прогрессия}\}$. Тогда $\hat{p} = n^{-\frac{2}{3}}$ — пороговая вероятность, $\hat{m} = n^{\frac{1}{3}}$ — пороговая функция.

• $\Gamma(n)$ — рёбра K_n , $Q = \{\text{есть } \Delta\}$. Тогда $\hat{p} = \frac{1}{n}$ — пороговая вероятность.

Утверждение 1. Пусть Q — нетривиальное возрастающее свойство подмножеств $\Gamma(n)$. Тогда функция $f(p) = P(\Gamma(n, p) \models Q)$ является непрерывной, строго возрастающей на $[0; 1]$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$.

Доказательство. Возрастание следует из предыдущих лемм.

$$f(p) = \sum_{A \in Q} P(\Gamma(n, p) = A) = \sum_{A \in Q} p^{|A|} (1 - p)^{N - |A|}.$$

Это многочлен, строго возрастающая непрерывная функция. \square

Определение 8. Если Q — возрастающее свойство, то $\forall a \in (0, 1)$ положим $p(a, n) = f_n^{-1}(a)$. Введём также $m(a, n) = \min\{m : P(\Gamma(n, m) \models Q) \geq a\}$.

Лемма 5. Пусть Q — возрастающее свойство, тогда $\hat{p} = \hat{p}(n)$ является пороговой вероятностью для $Q \Leftrightarrow \forall a \in (0, 1)$ выполнено $\hat{p} \asymp p(a, n)$. И \hat{m} — пороговая вероятность для $Q \Leftrightarrow \forall a \in (0, 1)$ выполнено $\hat{m} \asymp m(a, n)$.

Доказательство. Докажем для равномерной модели. Пусть \hat{m} — пороговая, но $\exists a \in (0, 1)$ такое, что $\hat{m} \neq m(a, n)$. Тогда существует подпоследовательность \hat{m}_{n_k} такая, что отношение $\frac{\hat{m}_{n_k}}{m(a, n_k)} \rightarrow 0$ или $+\infty$.

Пусть предел нулевой. Тогда $m' = m(a, n_k) - 1$ есть $\omega(\hat{m})$. В таком случае $\lim_{k \rightarrow \infty} P(\Gamma(n, m'(n_k)) \models Q) = 1$. Но $P(\Gamma(n, m'(n_k)) \models Q) \leq a < 1$, противоречие.

Если же предел равен $+\infty$, то $m(n_k) = o(\hat{m})$. Тогда $\lim_k P(\Gamma(n, m(n_k)) \models Q) = 0$. Но для любого k выполнено $P(\Gamma(n, m(n_k)) \models Q) \geq a > 0$, противоречие.

В обратную сторону: пусть $\hat{m} = \omega(\hat{m})$. Тогда $\forall a \in (0, 1) m = \omega(m(a, n))$, значит в силу возрастания Q $P(\Gamma(n, m) \models Q) \geq P(\Gamma(n, m(a, n)) \models Q) \Rightarrow \lim_n P(\Gamma(n, m) \models Q) \geq \lim_n P(\Gamma(n, m(a, n)) \models Q) \geq a$, то есть $\exists \lim_n P(\Gamma(n, m) \models Q) = 1$.

Если $m = o(\hat{m})$, то все аналогично. \square

Теорема 2. Каждое монотонное свойство имеет пороговую вероятность.

Доказательство. Считаем, что Q — возрастающее свойство. Надо показать, что все функции $p(a, n)$ имеют один и тот же порядок. Возьмём $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$ и такое m , что $(1 - \varepsilon)^m \leq \varepsilon$. Рассмотрим $\Gamma^{(1)}(n, p(\varepsilon, n)), \dots, \Gamma^{(m)}(n, p(\varepsilon, n))$ — н.о.р. случайные подмножества $\Gamma(n)$. Тогда

$$\tilde{\Gamma} = \Gamma^{(1)}(n, p(\varepsilon, n)) \cup \dots \cup \Gamma^{(m)}(n, p(\varepsilon, n)) \stackrel{d}{=} \Gamma(n, p'),$$

где $p' = 1 - (1 - p(\varepsilon, n))^m \leq mp(\varepsilon, n)$.

$$P(\tilde{\Gamma} \models Q) = P(\Gamma(n, p') \models Q) \leq P(\Gamma(n, mp(\varepsilon, n)) \models Q).$$

С другой стороны $P(\tilde{\Gamma} \not\models Q) \leq P(\forall i \Gamma^{(i)}(n, p(\varepsilon, n)) \not\models Q) = P^m(\Gamma^{(1)}(n, p(\varepsilon, n)) \not\models Q) = (1 - \varepsilon)^m \leq \varepsilon$. Тогда $P(\tilde{\Gamma} \models Q) \geq 1 - \varepsilon = P(\Gamma(n, p(1 - \varepsilon, n)) \models Q)$.

Значит $\forall n mp(\varepsilon, n) \geq p(1 - \varepsilon, n)$. Итого $p(\varepsilon, n) \leq p(\frac{1}{2}, n) \leq p(1 - \varepsilon, n) \leq mp(\varepsilon, n)$. Значит по лемме, $p(\frac{1}{2}, n) = \hat{p}$ — пороговая вероятность для Q . \square

Следствие. Для \forall монотонного свойства \exists пороговая функция \hat{m} .

Определение 9. Пусть Q — выпуклое свойство. Тогда функции $\hat{p}_1 \leq \hat{p}_2$ называются *пороговыми* для Q , если...

Пример 4. $\Gamma(n)$ — рёбра K_n .

- $Q = \{\text{обхват} = 4\}$, $\hat{p}_1 = \hat{p}_2 = \frac{1}{n}$
- $Q = \{\text{кликовое число} = 4\}$, $\hat{p}_1 = n^{-\frac{2}{3}}$, $\hat{p}_2 = n^{-\frac{1}{2}}$

Определение 10. Пусть Q — возрастающее. Тогда $\hat{p} = \hat{p}(n)$ называется *точной пороговой вероятностью* для Q , если $\forall \varepsilon > 0$ выполнено $\lim_{n \rightarrow \infty} P(\Gamma(n, p) \models Q) = 1$ при $p \geq (1 + \varepsilon)\hat{p}$ и 0 при $p \leq (1 - \varepsilon)\hat{p}$.

Пример 5. $\Gamma(n)$ — рёбра K_n .

- $Q = \{\text{связность}\}$, $\hat{p} = \frac{\ln n}{n}$ — точная пороговая вероятность
- $Q = \{\text{есть } \Delta\}$, $\hat{p} = \frac{1}{n}$ — пороговая вероятность, но точной пороговой вероятности нет
- $Q = \{\text{ацикличность}\}$, $\hat{p} = \frac{1}{n}$ — пороговая вероятность для Q , но точна она только с одной стороны

Теорема 3 (Фридгут). Пусть Q — монотонное свойство графов, \hat{p} — пороговая и она не точная. Тогда существует конечное разбиение $N_j, j = 1, \dots, k$ множества \mathbb{N} и рациональные числа $\alpha_1, \dots, \alpha_k > 0$ такие, что $\forall n \in N_j$ выполнено $\hat{p}(n) \asymp n^{-\alpha_j}$.