Лекция 5.

1 Общая спектральная теорема I

Список праздных фактов:

- $\operatorname{supp} \sigma = \bigcup\limits_{\substack{\sigma(X \setminus K)=0, \\ \text{K — замкнуто}}}$
- $\sigma_1 * \sigma_2$ — распределение случайной величины $\xi_1 + \xi_2, \xi_1 \perp \xi_2$.
- (абсолютная непрерывность мер) $\nu \ll \mu \Leftrightarrow \nu = p(z)\mu, p \in L^1(\mu)$.
- (сингулярность мер) $\nu \perp \eta \Leftrightarrow \exists$борелевское $F : \nu(F) = 1, \eta(\Omega \setminus F) = 1$
- Любые две меры σ_1, σ_2 можно представить как $\sigma_1 = \nu_1 + \omega_1, \sigma_2 = \nu_2 + \omega_2$, притом $\omega_1 \sim \omega_2 \perp \nu_1 \perp \nu_2$.

Теорема 1. $\sigma = \sigma_d + \sigma_s + \sigma_{ac}$ *(представляется в виде суммы дискретной составляющей, сингулярной составляюшей и абсолютно непрерывной составляющией), притом* $(\sigma_d, \sigma_s) \perp \sigma_{ac}$.

При этом $\sigma_d \sim 1_\Lambda, \Lambda < S^1$ *— дискретная.*

Теорема 2 (*). *Если* $\hat{T}$ *— эргодическое в бесконечномерном* $L^2(x, \mu)$*, тогда* $Sp(\hat{T}) = supp\ \sigma = S^1$.

Если рассматривать системы с кратностью, получается картина, которую можно воспринимать двумя способами:

- Есть меры $\sigma_1, \ldots, \sigma_\infty$, попарно сингулярные, притом у нас есть по n копий пространства V_n: $\hat{T}\ |_{V_{2,j}} \cong (L^2(\sigma_2), \mu_2)$.
- У нас есть $\sigma_1, \ldots, \sigma_\infty$, притом $\sigma_{k+1} \ll \sigma_k, \sigma_1 = \sigma$. В терминах предыдущего случая $\sigma = \frac{\sigma_1}{4} + \ldots + \frac{\sigma_k}{2^{k+1}} + \ldots + \frac{\sigma_\infty}{2}$.

Спектральный инвариант тогда имеет вид $(\sigma, M(z))$, где $M(z)$ — измеримая функция кратности.

2 Семинарская часть

Определение 1. Пусть $T : (X, \mu), S(Y\nu)$. Мура η есть джойнинг T, S если $\pi_x\eta = \mu, \pi_y\eta = \nu, (T \times S)\eta = \eta$.

Диагональный автоджойнинг: $\Delta(A \times B) = \mu(A \cap B)$.

Упражнение 1.

- $\Delta_S(A \times B) = \mu(AS \cap B)$ — джойнинг, если $ST = TS$, S сохраняет меру. Замечание: $\Delta_{T^k}(A \times B) = \mu(T^k A \cap B) \to \mu(A)\mu(B) \Leftrightarrow \Delta_{T^k} \xrightarrow{w} \mu \times \mu$ — джойнинговое определение перемешивания.

- $T : \sigma_1, S : \sigma_2, \sigma_1 \perp \sigma_2 \Rightarrow T \perp S$ — дизъюнктны, то есть единственный джойнинг — это $\mu \times \nu$.

Если есть $\beta(f(x), g(y)) = \int\limits_{X \times X} f(x)g(y)d\eta$, то она представима как $\langle J_\eta, g \rangle$.

Например, $J_{\mu \times \nu} = \Theta$ — ортопроектор на константу, $J_\Delta = Id, J_{\Delta_S} = \hat{S}$.