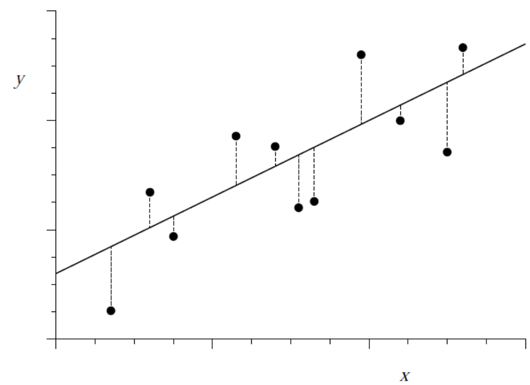
TP 3

Exercice 1 :

Il existe une situation courante en physique, qui se vérifie lorsqu'une expérience produit des données se trouvant approximativement sur une ligne droite, comme les points (ou cercles) de cette figure :



La ligne continue représente ici la ligne droite, que nous ne connaissons pas, et les points (ou cercles) représentent les données mesurées se situant à peu près le long de la ligne, mais qui ne tombent pas exactement sur elle, généralement en raison d'une erreur de mesure. La ligne droite peut être représentée sous la forme commune $y = mx + c$. Il est intéressant de déterminer quelles sont les valeurs le plus appropriées de la pente m et quelle est l'ordonnée correspondant aux données mesurées c. Dans la mesure où les données ne tombent pas parfaitement sur une ligne droite, il n'y a pas de réponse exacte à une telle question, mais on peut trouver la ligne droite qui donne la meilleure approximation pour ces données. La technique standard pour faire cela est la méthode de moindres carrés. Faisons quelques hypothèses sur les paramètres m et c pour évaluer la ligne droite. Nous calculons ensuite les distances verticales entre les points représentant les données et la ligne droite (cela correspond aux courtes lignes verticales dans la figure), puis nous calculons la somme des carrés de ces distqnces indiquées avec χ^2. Si nous avons N valeurs avec coordonnées (x_i , y_i), alors χ^2 est donnée par :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} (mx_i + c - y_i)^2$$

L'interpolation par la méthode des moindres carrés de nos données correspond à la ligne droite qui minimise cette distance quadratique totale entre les données et la ligne.

Nous trouvons le minimum en calculant les dérivées par rapport à m et à c et en les mettant égales à zéro, ce qui donne :

$$m \sum_{i=1}^{N} x_i^2 + c \sum_{i=1}^{N} x_i - \sum_{i=1}^{N} x_i y_i = 0$$

$$m \sum_{i=1}^{N} x_i + cN - \sum_{i=1}^{N} y_i = 0$$

Pour simplifier, nous allons définir les quantités suivantes :

$$E_x = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i, \qquad E_y = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i, \qquad E_{xx} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2, \qquad E_{xy} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i y_i,$$

À travers lesquelles nous pouvons réécrire les équations telles que :

$$mE_{xx} + cE_x = E_{xy}$$
$$mE_x + c = E_y$$

Et :

$$m = \frac{E_{xy} - E_x E_y}{E_{xx} - E_x^2}, \qquad c = \frac{E_{xx}E_y - E_x E_{xy}}{E_{xx} - E_x^2}$$

Ce sont les équations de la méthode des moindres carrés pour une interpolation linéaire de N valeurs. Cela vous donne les valeurs de m et c pour la ligne qui correspond le mieux aux données expérimentales.

1. Voici les coordonnées x et y d'un ensemble de valeurs :

5.4874e+14	0.5309
6.931e+14	1.0842
7.4307e+14	1.2734
8.2193e+14	1.6598
9.6074e+14	2.19856
1.184e+15	3.10891

   Écrivez un programme permettant de lire ces valeurs et tracer un plot avec une valeur ou un cercle pour chaque valeur.

2. Ajoutez dans votre programme, avant la partie comprenant le plot, comment calculer les quantités E_x, E_y, E_{xx} et E_{xy} définis ci-dessus, calculez-le et imprimez les valeurs de m et c.

3. Maintenant, écrivez un code permettant d'analyser chacune des valeurs et évaluer la quantité mx_i+c en utilisant les valeurs de m et c que vous avez calculé.

   Stockez ces valeurs dans un nouveau tableau, ou une liste, puis tracez une courbe des ces nouvelles données (avec une ligne solide) sur le même graphique des données d'origine. Vous devriez vous retrouver avec un plot de valeurs correspondant aux données et une ligne droite qui les traverse.

4. Les données dans le tableau sont prises à partir d'une expérience historique menée par Robert Millikan qui a mesuré l'effet photoélectrique. Lorsque la lumière d'une longueur d'onde appropriée arrive sur la surface d'un métal, les photons peuvent exciter les électrons de conduction du métal et, parfois, les extraire de la surface dans le espace libre. L'énergie d'un électron éjecté est égale à l'énergie du photon incident moins une petite quantité ϕ appelé fonction de travail de la surface, qui représente l'énergie nécessaire pour extraire un électron de la surface. L'énergie d'un photon est $h\nu$, où h est la constante de Planck et ν est la fréquence de la lumière, et nous pouvons mesurer l'énergie d'un électron éjecté par la mesure de la tension V qui est nécessaire afin d'arrêter le mouvement des électrons. La tension, la fréquence, et la fonction de travail sont liées par l'équation :

$$V = \frac{h}{e}\nu - \phi$$

   Où e est la charge de l'électron. Cette équation a été élaborée par Albert Einstein en 1905. Les données du tableau représentent les fréquences ν en hertz (la première colonne) et les tensions V en volts (deuxième colonne) à partir de mesures de l'effet photoélectrique par Millikan. En utilisant l'équation ci-dessus et le programme que vous avez écrit, et en sachant que la charge de l'électron est 1.602×10^{-19} C, calculez à partir des données expérimentales de Millikan la valeur de la constante de Planck, h. Comparez votre valeur à la valeur connue de la constante (6.63×10^{-34} Js).

Petite information historique : Ce calcul est essentiellement le même que celui que Millikan a utilisé pour déterminer la valeur de la constante de Planck, bien que faute d'ordinateur, il a fait l'interpolation des données à vue de nez. Grâce à ce travail, Millikan a reçu le Prix Nobel de physique en 1923.

Exercice 2 : *Volumes*

1. Définir une fonction cube qui calcule le volume d'un cube.
2. Définir une fonction sphere qui calcule le volume d'une sphère en appelant la fonction cube.
3. Définir une fonction à deux arguments qui calcule le volume d'un cône, puis d'une pyramide.
4. Écrire une fonction volume qui prend pour argument une longueur, une chaine de caractères qui peut valoir "cube","sphere","cone" ou "pyramide" et qui appelle la fonction souhaitée. Astuce : il faudra définir un deuxième argument de longueur optionnel.

Exercice 3 : *Tracé de fonctions mathématiques*

Définir et tracer les fonctions mathématiques suivantes :

1. $f(x) = \frac{1}{1-x}$ pour $x \in [-5, 5]$
2. $f(x) = \begin{cases} e^{\sqrt{1-ax^2}}, & |x| < \sqrt{1/a} \\ 0, & |x| > \sqrt{1/a} \end{cases}$ avec un a un paramètre de la fonction, par défaut égal à 1, pour $x \in [-5, 5]$ et $a = 1, 0.5, 0.1, 0.01$.
3. un angle en radians et le convertit en degrés.