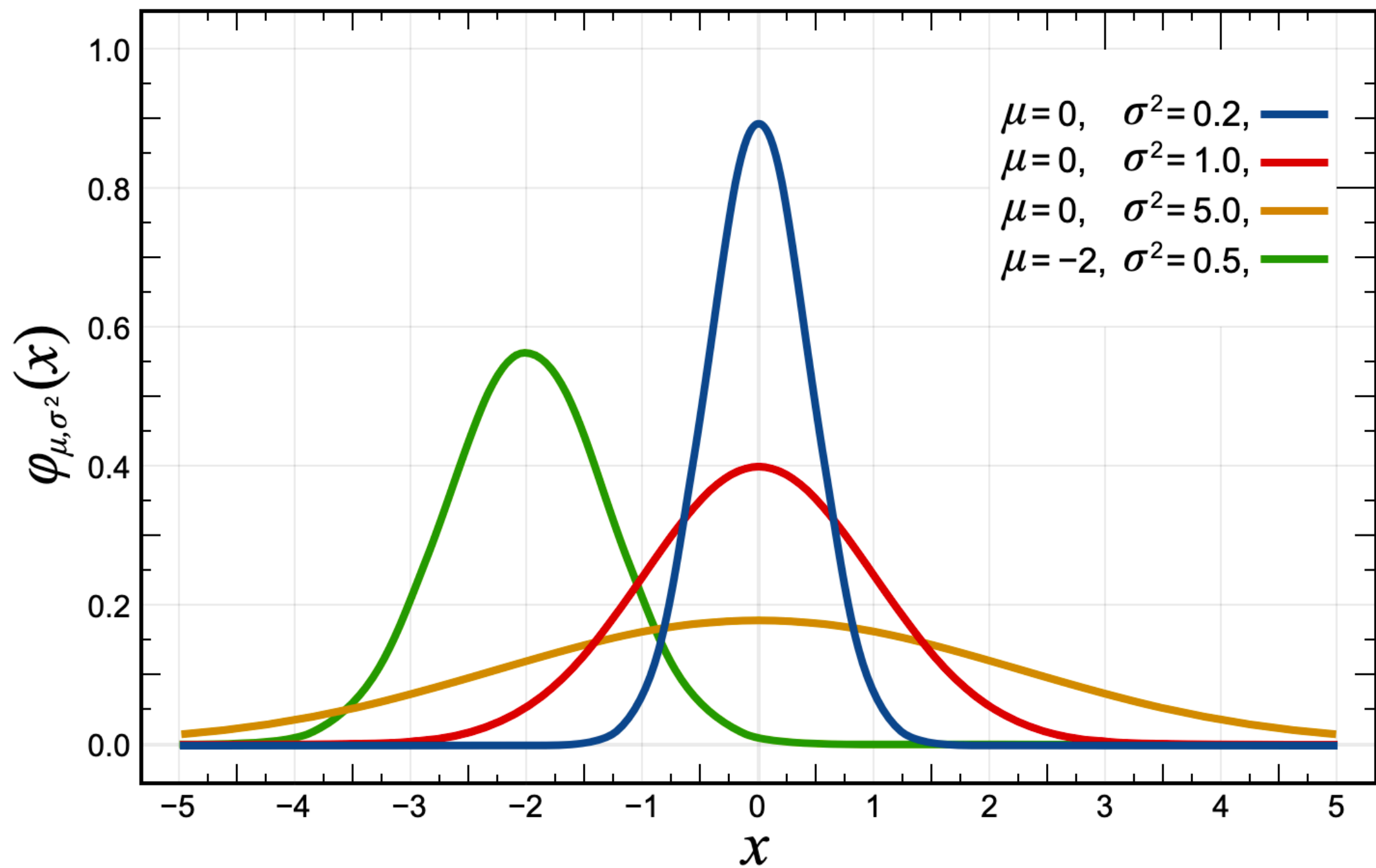
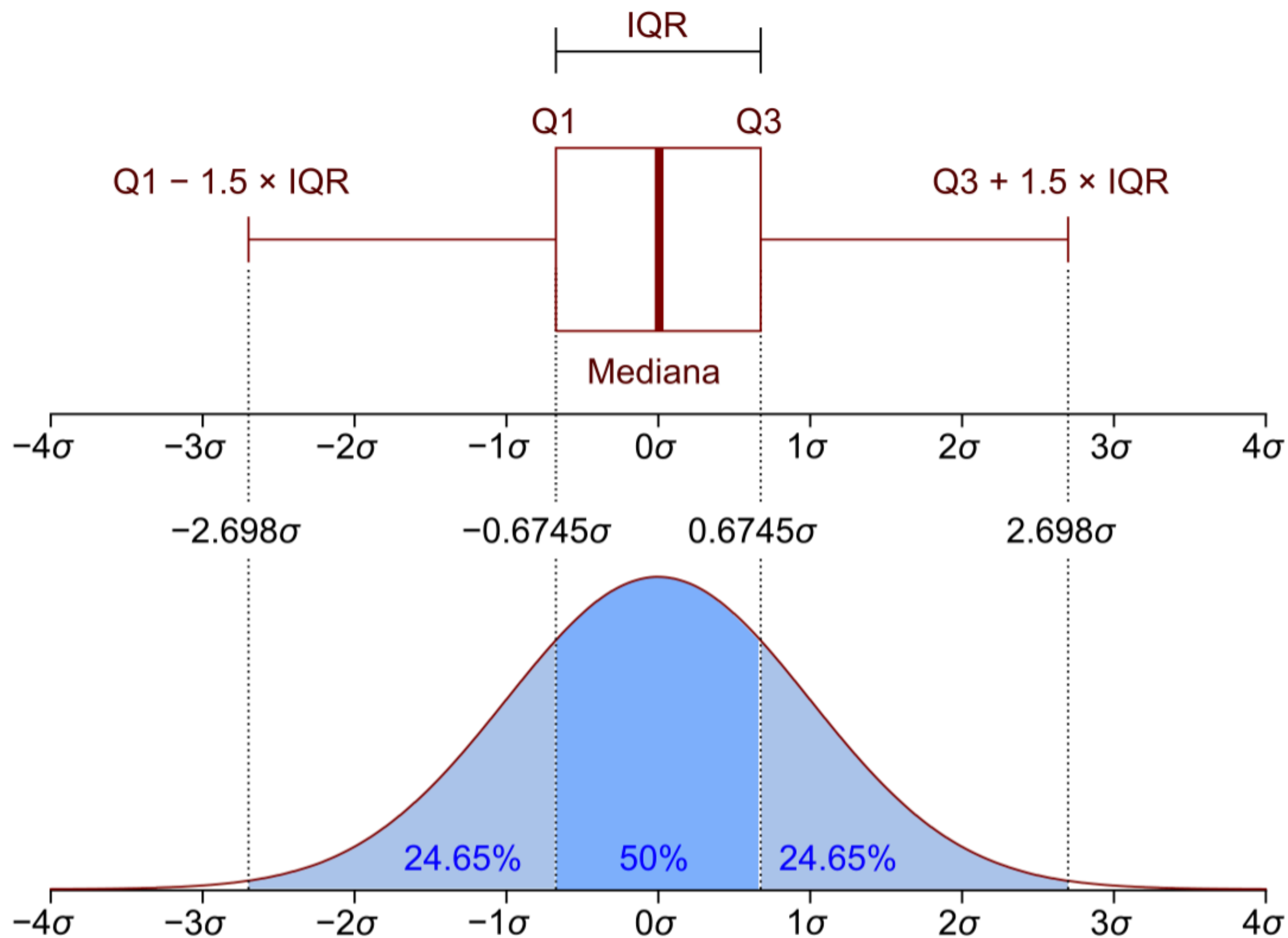


Testes de Hipóteses

Danilo A C Souto



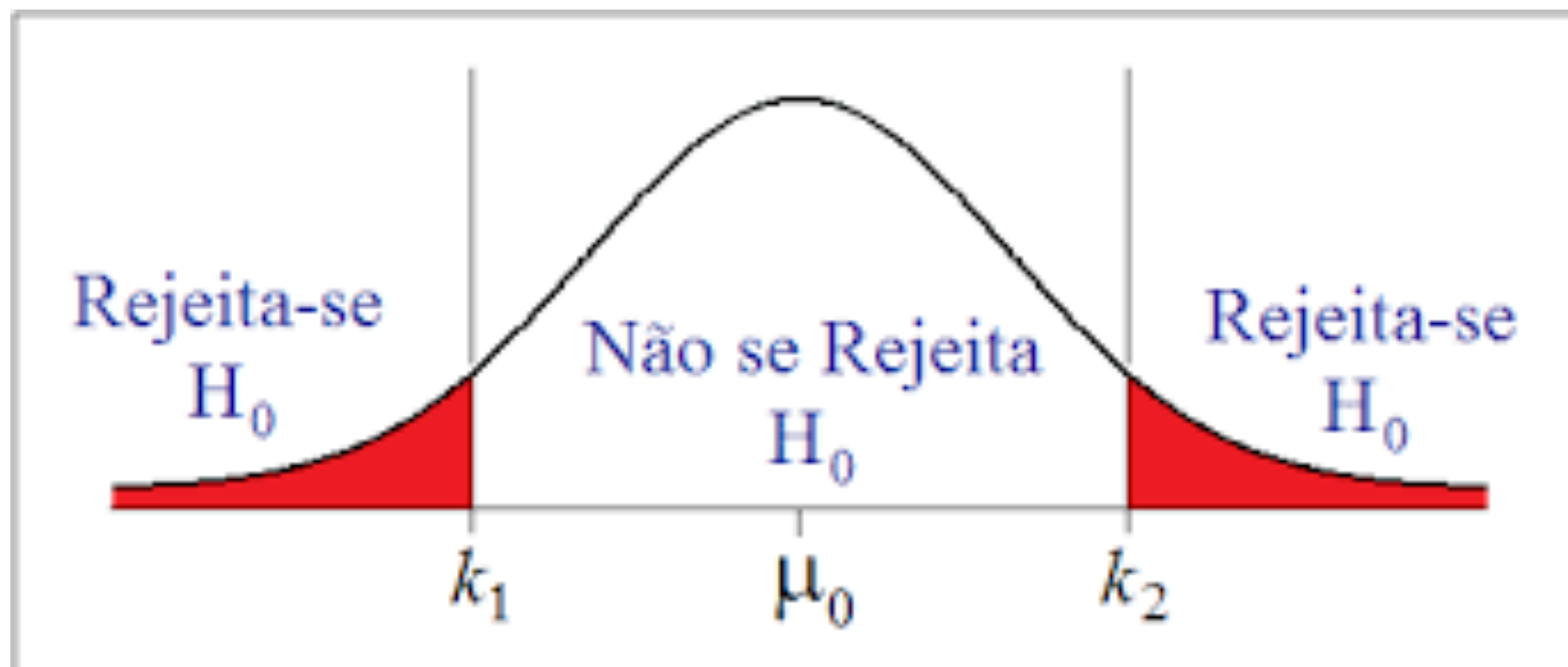


<https://www.youtube.com/watch?v=Vo9Esp1yaC8>

- Uma das aplicações mais usadas na estatística
- Verifica a veracidade de uma informação
- Duas hipóteses
 - $H_0 \Rightarrow$ Hipótese nula
 - $H_A \Rightarrow$ Hipótese alternativa
- Hipótese **nula** (H_0) é sempre uma proposta “**igualdade**” ou de “não diferença” com relação a um parâmetro da população.
 - $H_0 \rightarrow \bar{X} = \mu$
- Hipótese **alternativa** (H_A) é sempre uma proposta “igualdade” ou de “não diferença” não pode ser comprovada
 - $H_A \rightarrow \bar{X} \neq \mu$
- Se o valor cair na região crítica rejeita-se a hipótese nula
- Rejeitar H_0 implica que há evidências para rejeitá-la com um risco conhecido p

Nível de significância (erro aceitável)

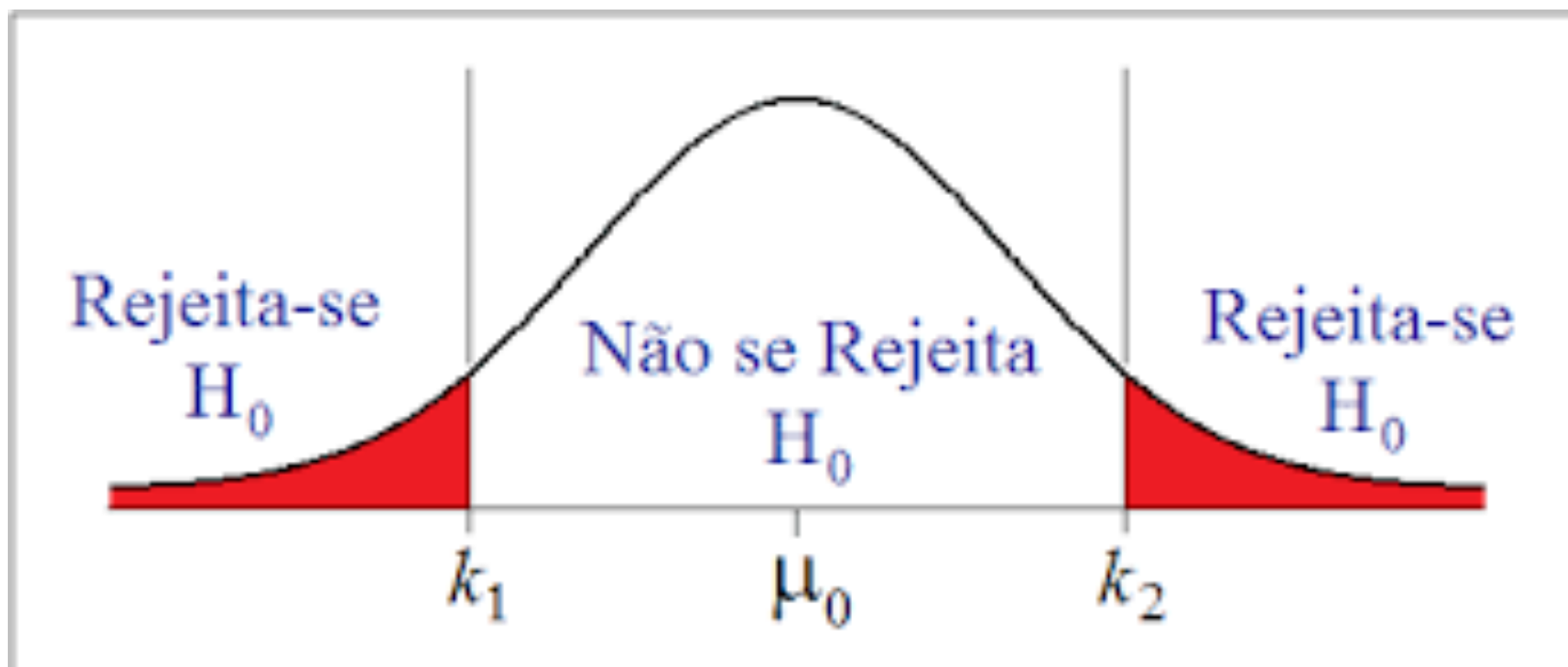
$$\left\{ \begin{array}{l} c = 1 - p \quad \text{onde:} \\ c \text{ é a confiança} \\ p \text{ é a significância} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} c = 95 \% = 0,95 \\ p = 1 - c \\ p = 1 - 0,95 \\ p = 0,05 = 5 \% \end{array} \right.$$



$$H_A : \bar{X} \neq \mu \quad H_0 : \bar{X} = \mu \quad H_A : \bar{X} \neq \mu$$

Bilateral

$$\begin{cases} c = 95\% = 0,95 \\ p = 1 - c \\ p = 1 - 0,95 \\ p = 0,05 = 5\% \end{cases}$$



$$k_1 = 0,025$$

$$0,95$$

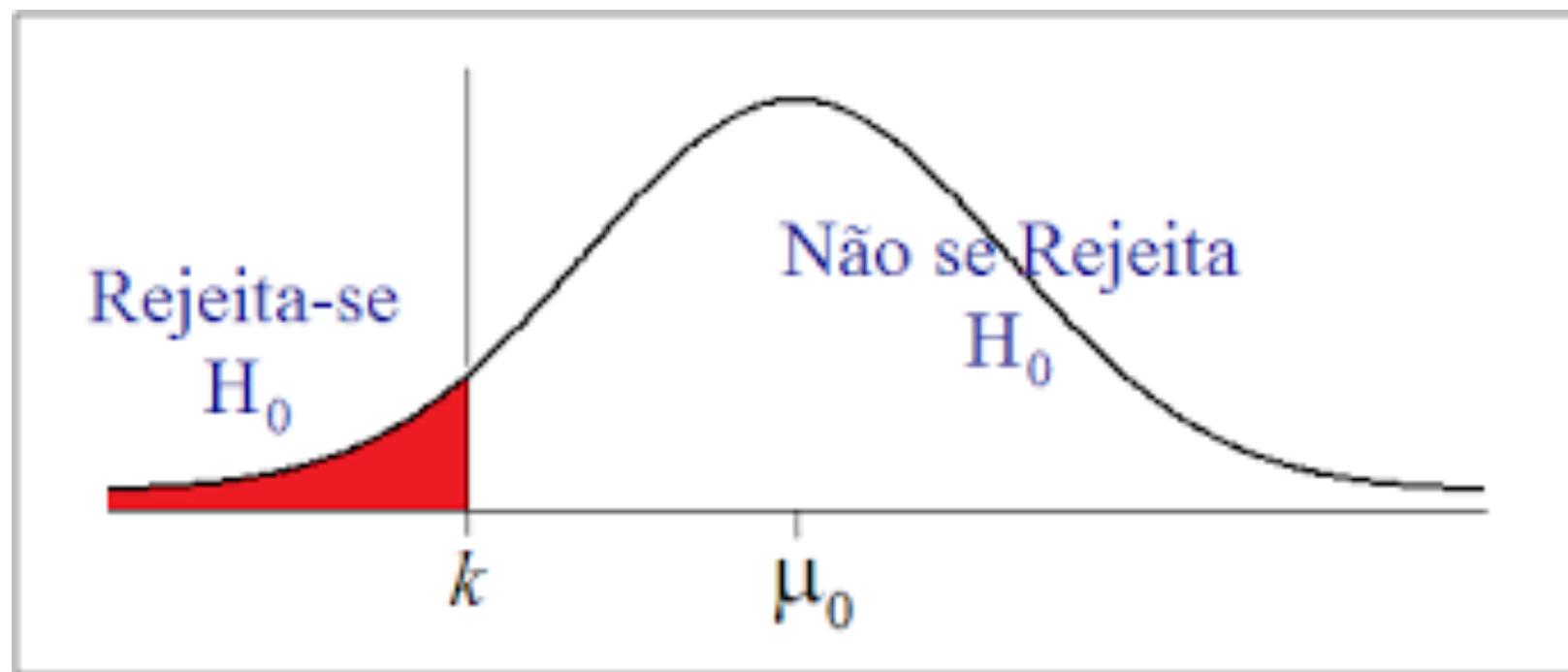
$$k_2 = 0,975$$

$$k_1 = \frac{p}{2}$$

$$k_2 = 1 - \frac{p}{2}$$

$$H_0 : \bar{X} = \mu$$

$$H_A : \bar{X} < \mu$$



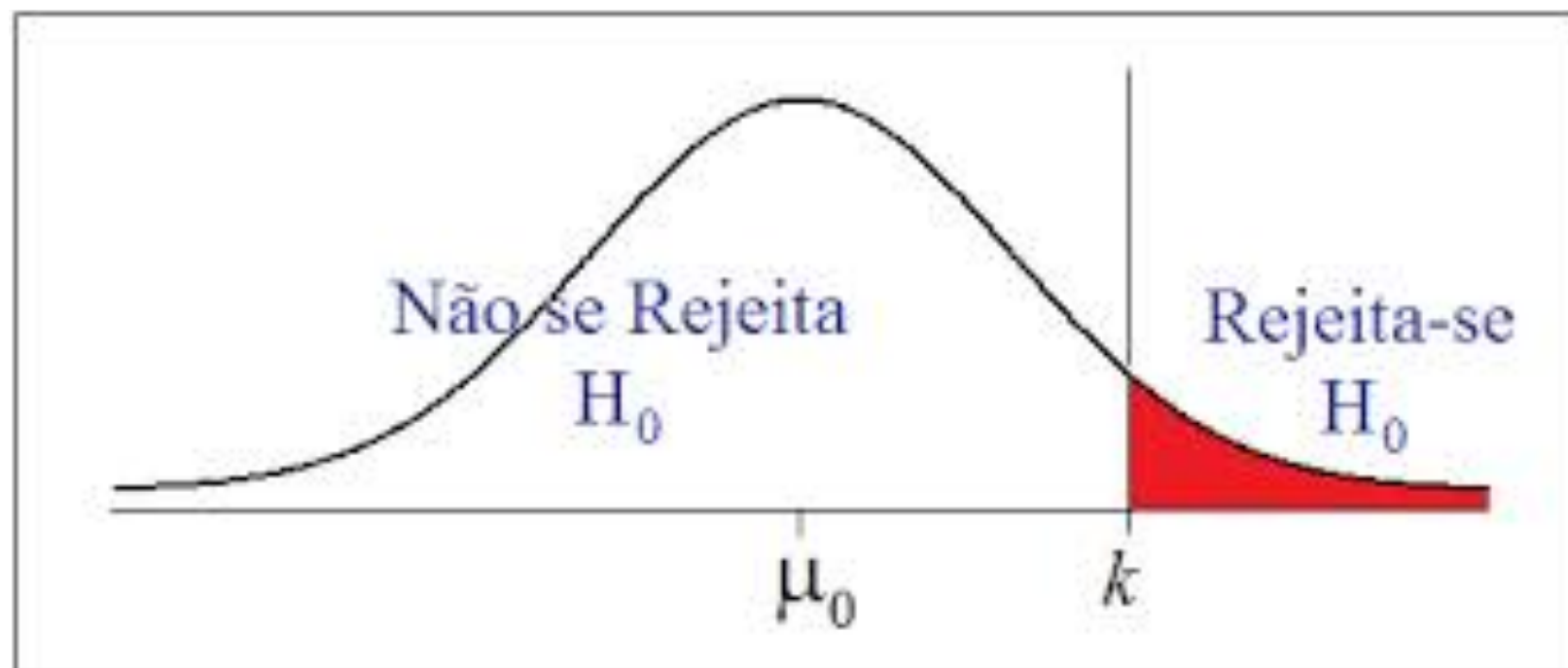
$$k = p$$

$$k = 0,05$$

Unilateral à esquerda

$$H_0 : \bar{X} = \mu$$

$$H_A : \bar{X} > \mu$$



$$k = 1 - p$$

$$k = 0,95$$

Unilateral à direita

Tipos de testes

Número de amostras $n < 30$, Teste T

Número de amostras $n \geq 30$, Teste Z

\bar{x} : média da amostra

μ : média da população

n : tamanho da amostra

σ : desvio padrão da população

S : desvio padrão da amostra

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

Variância Conhecida

O instituto de normas e medidas determina que um determinado produto químico tem que ter a quantidade de 72mg. Fabricantes além da tolerância de (5%) devem ser multados. Sabe-se que o desvio da linha é de 2mg Foram coletadas as seguintes amostras:

74.3 73.5 73.5 73.2 72.5 74.9 73.6 71.1 73.8 72.6

Deve-se multar o fabricante?

1) Formula-se as hipóteses

$$H_0 : \mu = 72mg$$

$$H_A : \mu \neq 72mg$$

$$\sigma = 2mg$$

2) Selecione o teste: Z

O desvio padrão é de origem populacional e não amostral

74.3 73.5 73.5 73.2 72.5 74.9 73.6 71.1 73.8 72.6

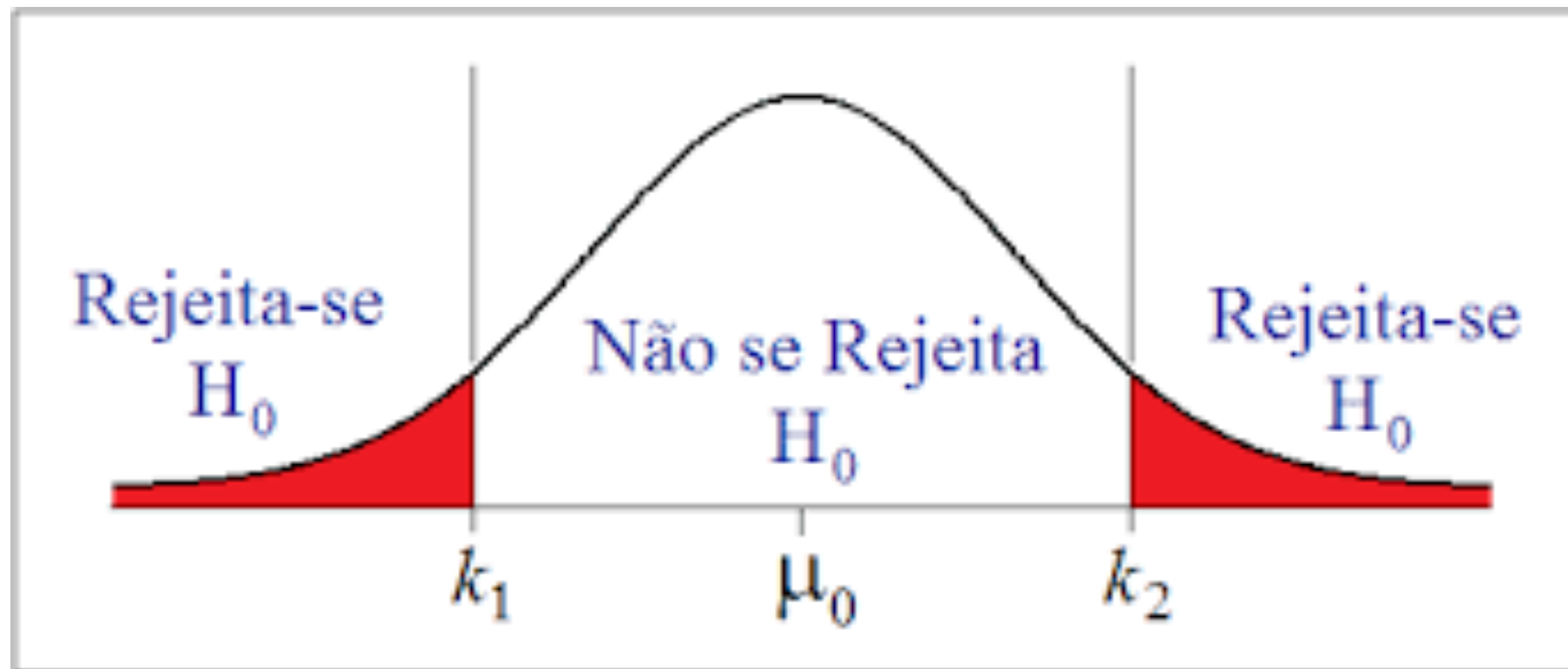
Deve-se multar o fabricante?

$$H_0 : \mu = 72mg$$

$$H_A : \mu \neq 72mg$$

$$\sigma = 2mg$$

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

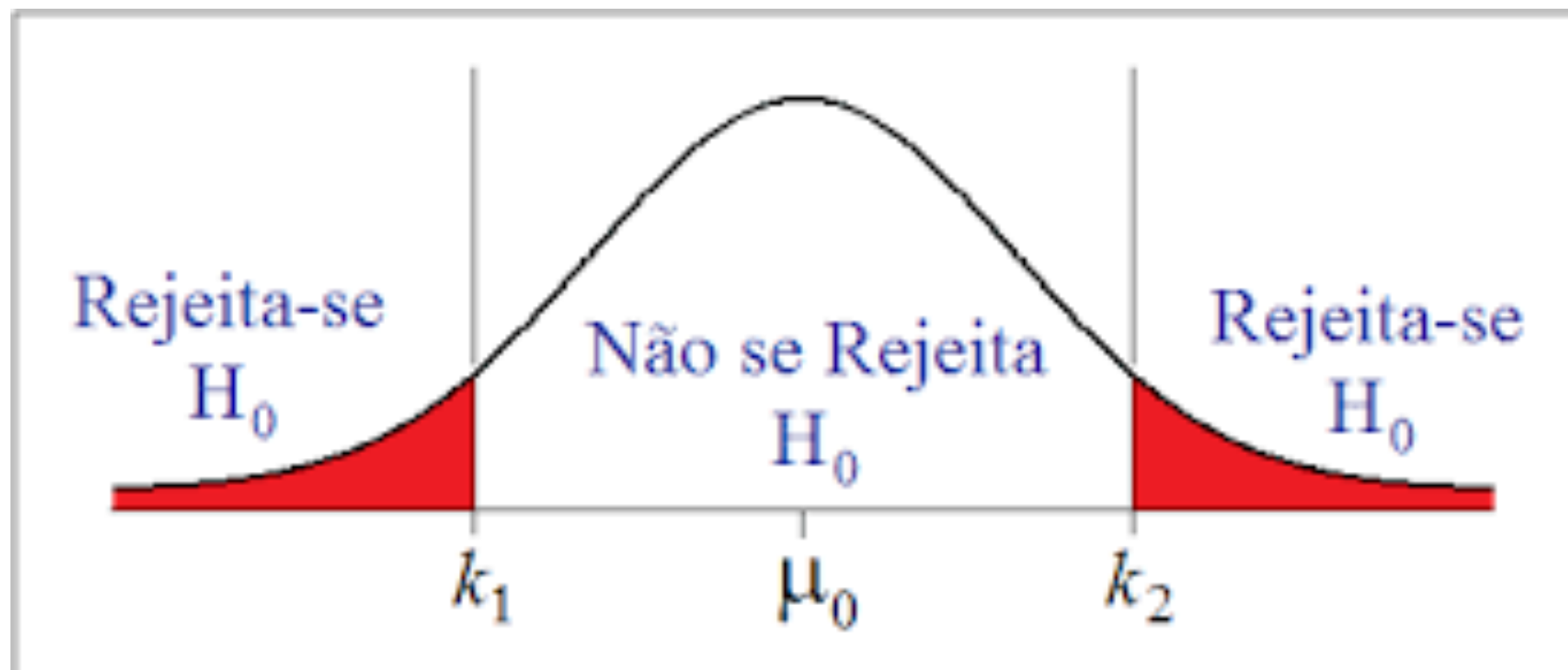


Valor de $k_2 =$?
Ver na Tabela Z

A tabela da distribuição normal relaciona a proporção em desvios padrões.

Diz quantos elementos (%) é menor que o desvio padrão.

z	0,0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817



$$k_2 = 1 - \frac{p}{2}$$

$$k_2 = 0,975$$

Valor de $k_2 =$?
Ver na Tabela Z

A tabela da distribuição normal relaciona a proporção em desvios padrões.

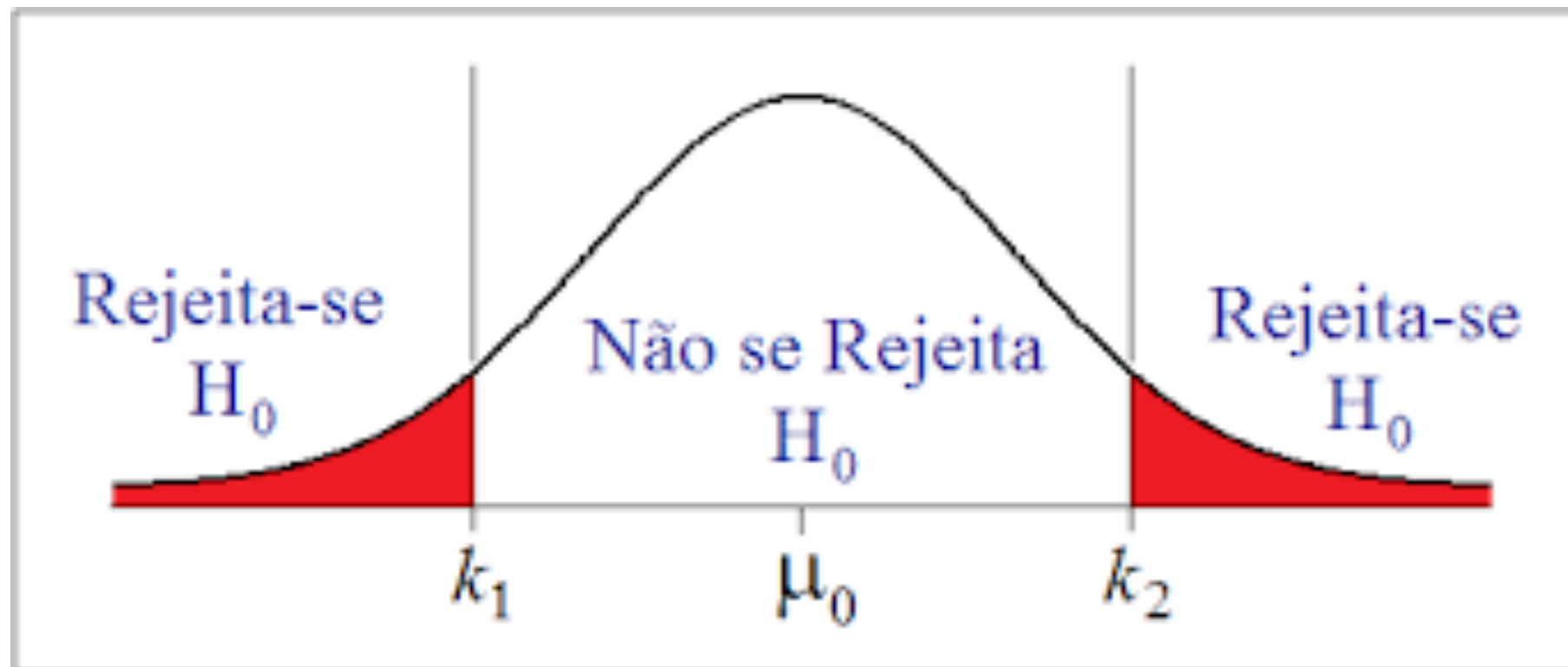
Diz quantos elementos (%) é menor que o desvio padrão

z	0,0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817

3) Cálculo de Z

$$\bar{x} = 73,3$$

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{73,3 - 72}{\frac{2}{\sqrt{10}}} = \frac{1,3}{0,632} = 2,06$$



$$k_2 = 1 - \frac{p}{2}$$

$$k_2 = 0,975$$

$$k_2 = 1,96$$

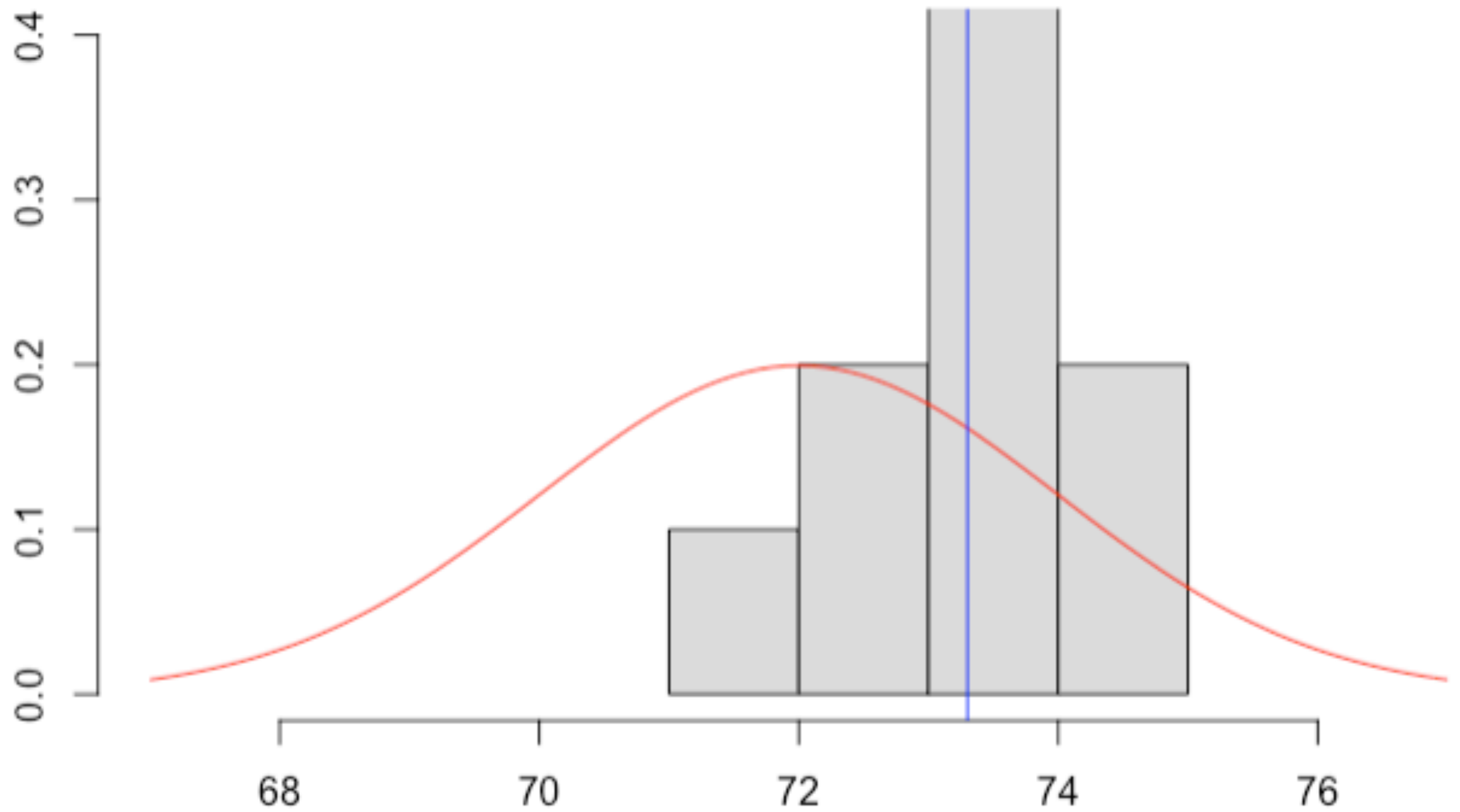
$$z = 2,05$$

$$2,05 > 1,96$$

$$z > k_2$$

4) Elaborar uma resposta:
Rejeita H_0 , pode ser multado

z	0,0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817



O instituto de normas e medidas determina que um determinado produto químico tem que ter a quantidade de 72mg. Fabricantes com desvios fora de 2mg (5%) devem ser multados. Foram coletadas as seguintes amostras

70.3 71.3 76.7 72.2 72.4 77.1 73.4 68.2 69.9 70.7

Deve-se multar o fabricante?

$$H_0 : \mu = 72mg$$

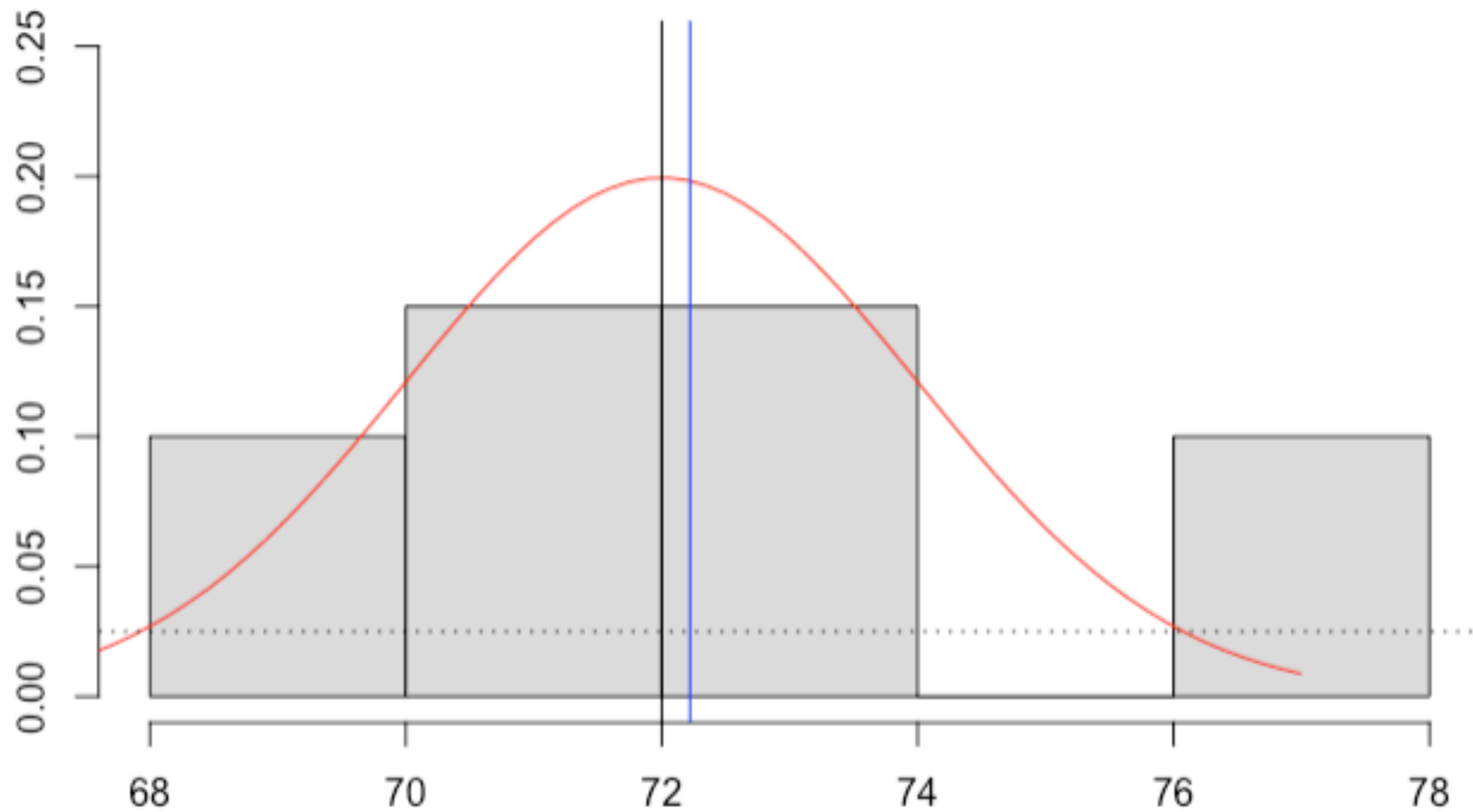
$$H_A : \mu \neq 72mg$$

$$\sigma = 2mg$$

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

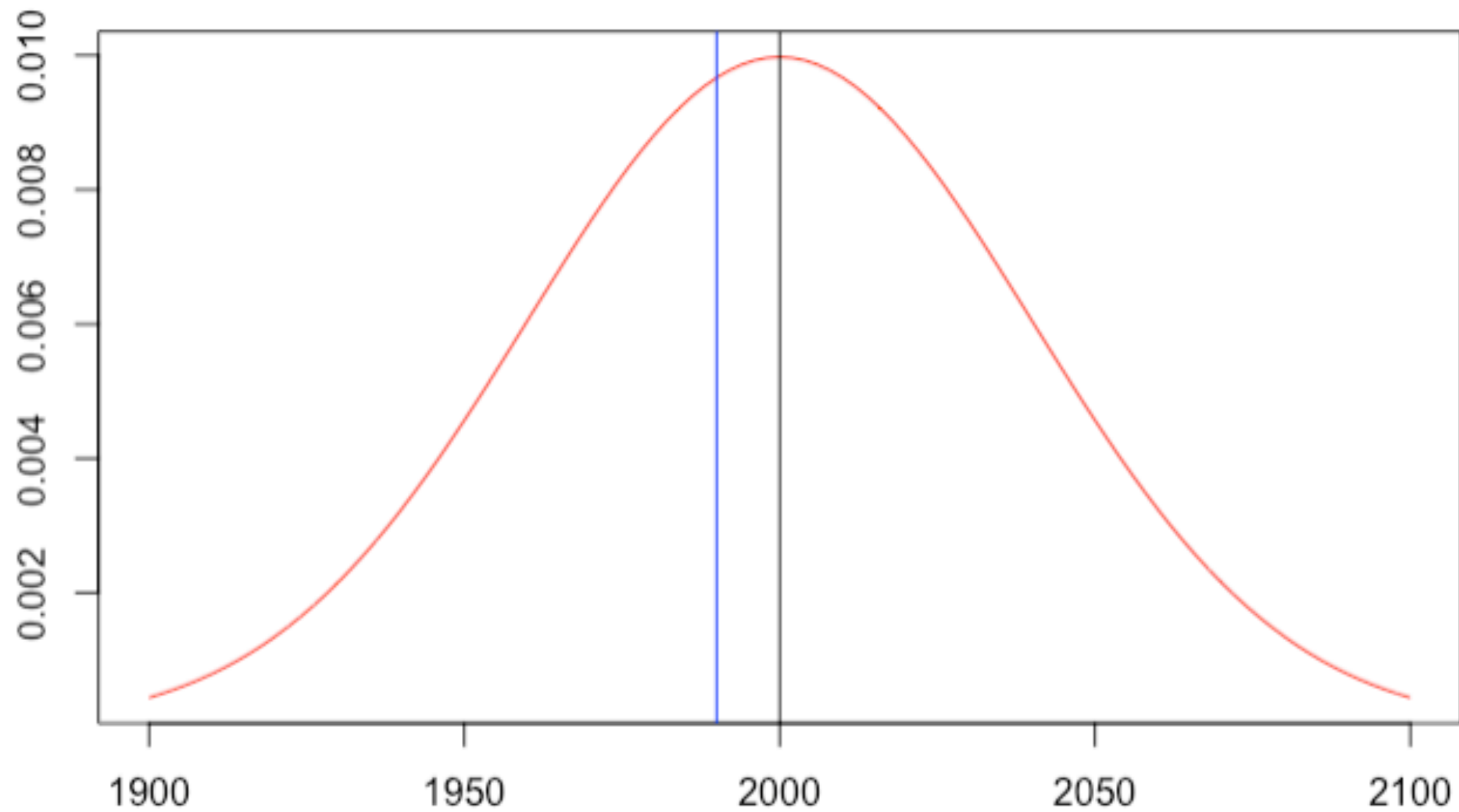
$$\bar{x} = 72,2$$

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{72,2 - 72}{\frac{0,2}{\sqrt{10}}} = \frac{1,3}{0,632} = 0,34$$



- Um fabricante de molhos anuncia que o conteúdo líquido das embalagens de seu produto é, em média, de 2.000 gramas, com desvio padrão de 40 gramas.
- A fiscalização de pesos e medidas investigou uma amostra aleatória de 64 latas, verificando uma média de 1990 gramas por embalagem.
- Dado um nível de significância de 0,05, o fabricante deverá ser multado por vender o produto abaixo do especificado?

- Formular as hipóteses
- Selecionar o teste
- Calcular
- Preparar a resposta



A média está próxima, não deve existir um problema

Será?

Hipóteses:

$$H_0 : \bar{x} = 2000$$

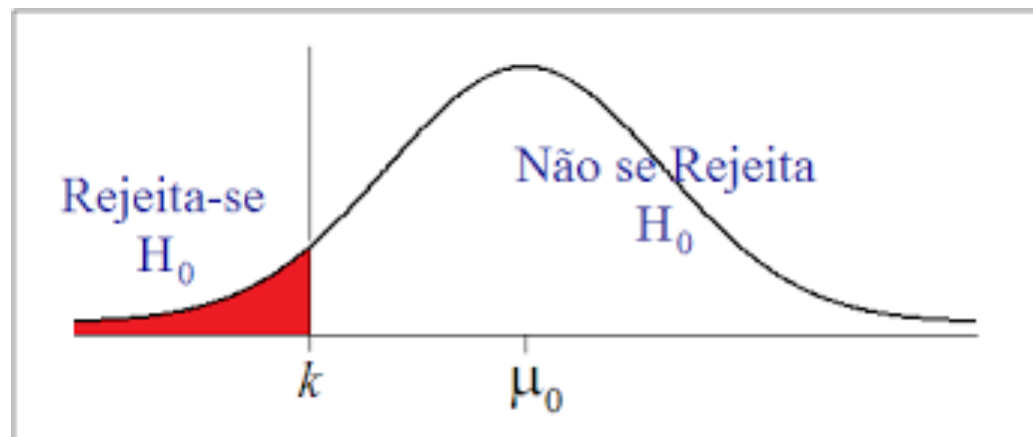
$$H_A : \bar{x} \neq 2000$$

$$n = 64$$

$$\sigma = 40$$

Teste : Z (Desvio padrão não é amostral)

k = ?

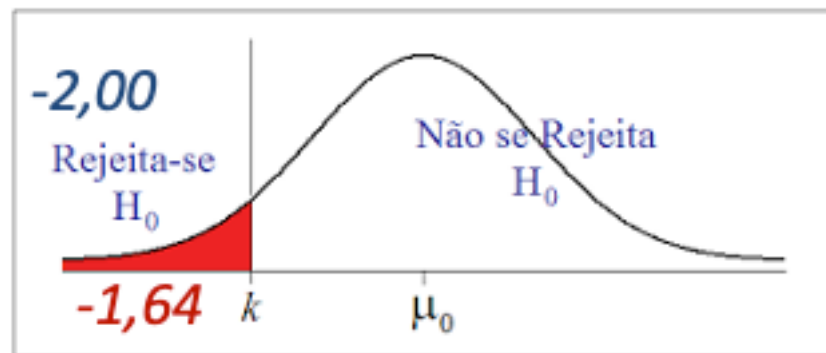


$k = -1,64$

z	0,0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06
0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761
-0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364
-0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974
-0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594
-0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228
-0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2879
-0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546
-0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236
-0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1950
-0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685
-1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446
-1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230
-1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038
-1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869
-1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0721
-1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594
-1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485
-1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392

Cálculo:

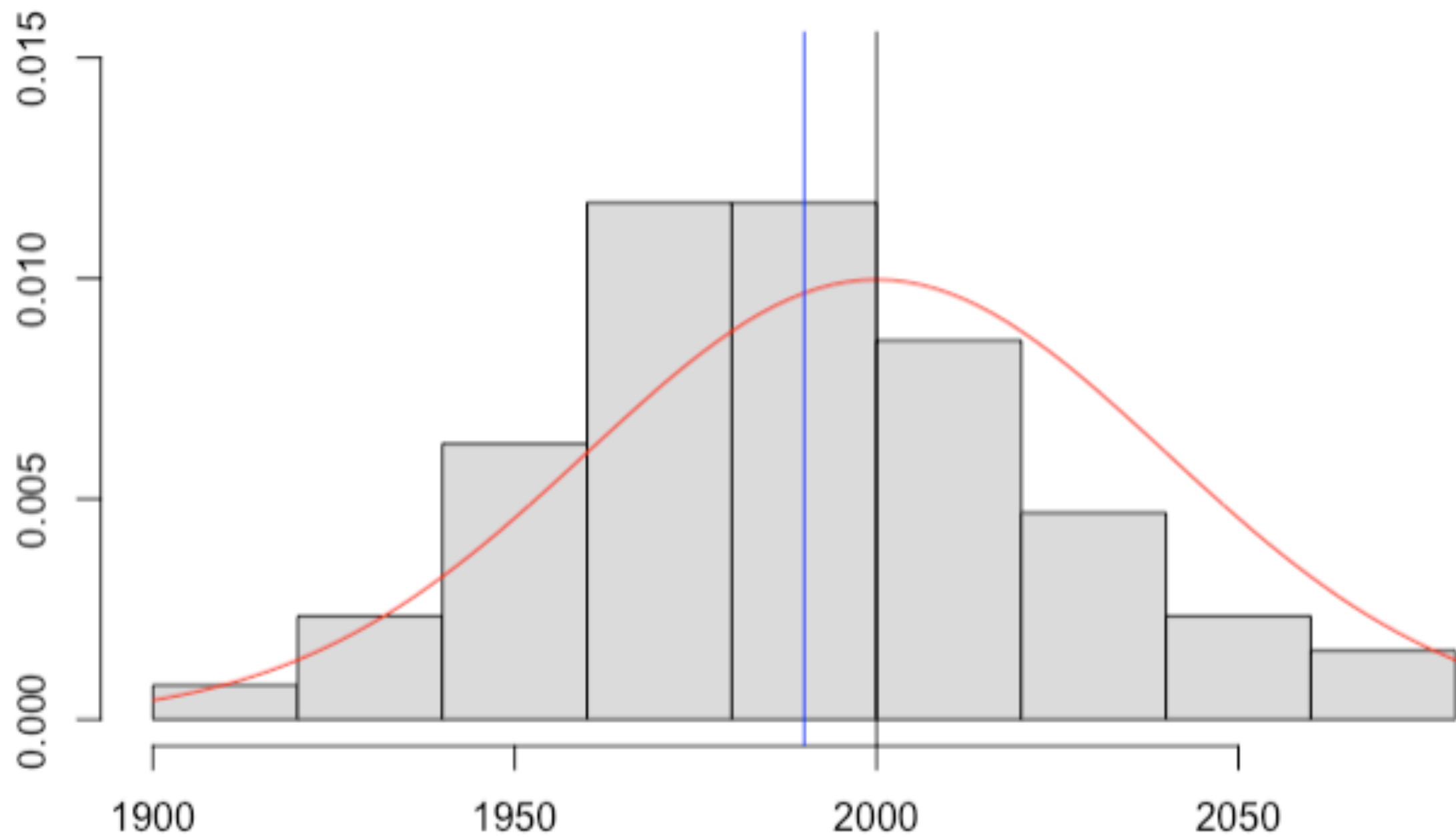
$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{1990 - 2000}{\frac{40}{\sqrt{64}}} = \frac{10}{5} = -2,00$$



Resposta:

Rejeita H_0

Com uma confiança de 95% o fabricante pode ser multado.



Nota-se um claro deslocamento da amostra à esquerda

Um projeto de investimento está sendo avaliado pelo tempo médio de pay-back. Uma situação envolvendo cenários futuros forneceu os seguintes tempos de retorno do investimento (em anos):

2,8 - 4,3 - 3,7 - 6,4 - 3,2 - 4,1 - 4,4 - 4,6 - 5,2 - 3,9.

Avalie a hipótese de que o tempo médio de retorno seja superior a 4 anos a uma significância de 5%.

Hipóteses

$$H_0 : \mu = 4$$

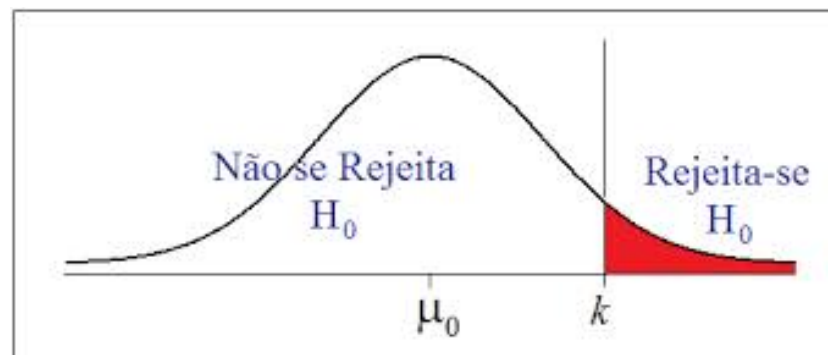
$$H_A : \mu > 4$$

$$p = 0,05$$

$$S = ?$$

$$k = ?$$

Teste:



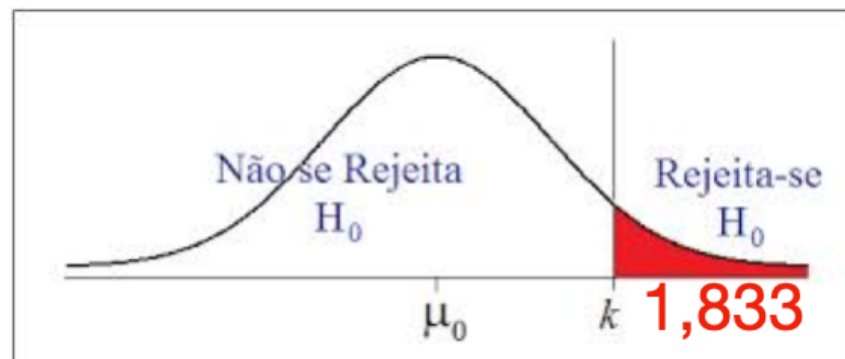
$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

Tabela do teste t

gl	Teste Unilateral								
	15%	10%	5%	2,5%	2%	1%	0,5%	0,1%	0,05%
	Teste Bilateral								
	30%	20%	10%	5%	4%	2%	1%	0,2%	0,1%
1	1,9626	3,0777	6,3137	12,7062	15,8945	31,8210	63,6559	318,2888	636,5776
2	1,3862	1,8856	2,9200	4,3027	4,8487	6,9645	9,9250	22,3285	31,5998
3	1,2498	1,6377	2,3534	3,1824	3,4819	4,5407	5,8408	10,2143	12,9244
4	1,1896	1,5332	2,1318	2,7765	2,9985	3,7469	4,6041	7,1729	8,6101
5	1,1558	1,4759	2,0150	2,5706	2,7565	3,3649	4,0321	5,8935	6,8685
6	1,1342	1,4398	1,9432	2,4469	2,6122	3,1427	3,7074	5,2075	5,9587
7	1,1192	1,4149	1,8946	2,3646	2,5168	2,9979	3,4995	4,7853	5,4081
8	1,1081	1,3968	1,8595	2,3060	2,4490	2,8965	3,3554	4,5008	5,0414
9	1,0997	1,3830	1,8331	2,2622	2,3984	2,8214	3,2498	4,2969	4,7809
10	1,0931	1,3722	1,8125	2,2281	2,3593	2,7638	3,1693	4,1437	4,5868
11	1,0877	1,3634	1,7959	2,2010	2,3281	2,7181	3,1058	4,0248	4,4369
12	1,0832	1,3562	1,7823	2,1788	2,3027	2,6810	3,0545	3,9296	4,3178
13	1,0795	1,3502	1,7709	2,1604	2,2816	2,6503	3,0123	3,8520	4,2209
14	1,0763	1,3450	1,7613	2,1448	2,2638	2,6245	2,9768	3,7874	4,1403
15	1,0735	1,3406	1,7531	2,1315	2,2485	2,6025	2,9467	3,7329	4,0728
16	1,0711	1,3368	1,7459	2,1199	2,2354	2,5835	2,9208	3,6861	4,0149

Cálculo:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{4,26 - 4}{\frac{1,02}{\sqrt{10}}} = 0,808$$



Resposta:

Não rejeita H_0

Não se pode afirmar que o tempo de retorno do investimento seja superior a 4 anos

Teste z para duas amostras

Calcula a diferença entre as médias

Amostras independentes com mais de 30 elementos ($n > 30$)

$$z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}}$$

Com:

$$\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1}{n_1} + \frac{\sigma_2}{n_2}}$$

Teste t para duas amostras

Calcula a diferença entre as médias

1) Desvio padrão populacional σ_1 e σ_2 são desconhecidos

Amostras independentes com mais de 30 elementos ($n > 30$)

$$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{s_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}}$$

Calcular estimativa coligada do desvio padrão

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

(Variâncias diferentes)

Com erro padrão:

$$s_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \hat{\sigma} \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \text{ (Variâncias iguais)}$$

$$s_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

Grau de liberdade (g.l.)

$$gl = n_1 + n_2 - 2$$

Grau de liberdade (g.l.)

$gl =$ menor que $n_1 - 1$ ou $n_2 - 1$