信奥算法

期望DP

皇家赌场2

请同学简述题意
突出核心要点

简化问题找灵感

a=1,b=1	ans=0.5
a=0,b=2	ans=0
a=2,b=0	ans=1
a=1,b=2	ans=1/3
a=2,b=1	ans=2/3

请同学提出猜想

动态规划 概率

定义状态

自然定义法，也叫抄原题大法

题目问什么，状态含义就是什么

问题答案

p[a]代表我现有a元，最终获胜概率

p[i]代表我现有i元，最终获胜概率

动态规划 概率

p[i]代表我现有i元,最终获胜概率

i=0	p[0]=0	i=n=a+b	p[n]=1

0<i<a+b	p[i]=(p[i-1]+p[i+1])/2
解方程	2*p[i]=p[i-1]+p[i+1]
	p[i]-p[i-1]=p[i+1]-p[i]

p[]是个等差数列!	**看边界条件**

p[i]=i/(a+b)

DP小结

状态定义	基于概率 自然状态
转移方程	走一步看看 one-step analysis 当前状态依赖走一步之后的状态
经典结论	p[i]=i/n结论用于其他难题 | 等差数列

另一种理解

因为每一轮的收益期望为0
所以游戏结束时总收益期望也为0

游戏有两种结束状态

你赢 b元
概率q

你输 a元
概率1-q

$$q*b + (1-q)*a = 0$$

$$q=a/(a+b)$$

结论拓展

起点在a,终点0或a+b

最终到b概率：q=a/(a+b) → 0

最终到0概率：q=b/(a+b) → 1

固定a,让b增加到无限大

推论：无限长一维数轴随机游走(random walk),取任意点为目标,"一定"会到达,无限多次

二维也有类似结论，但三维及以上没有这个结论

"醉汉回家"问题

醉汉回家

有个醉汉走在回家路上，由于酒醉未醒，分不清家往哪边走。假如家在东面n的位置，酒吧在西边0位置处，醉汉处在m(m<n)位置。醉汉每一个时间单位走一步，向东(家的方向)或者向西(酒吧的方向)的概率皆为1/2。

(1) 如果醉汉到达酒吧，则在酒吧(停留)过夜。求醉汉回家的概率?

(2) 如果酒吧不收留醉汉，他只能继续游走，求醉汉回家的概率?

皇家赌场3

请同学简述题意
突出核心要点

简化问题找灵感

a=1,b=1	ans=1
a=1,b=2	ans=2
a=1,b=3	ans=3
a=2,b=2	ans=4
a=2,b=3	ans=6

请同学提出猜想

动态规划 期望DP

定义
状态

自然定义法，也叫抄原题大法

题目问什么，状态含义就是什么

问题
答案

f[a]代表我现有a元，到结束次数期望

f[i]代表我现有i元，到结束次数期望

用纸和笔写出边界条件+转移方程

动态规划 期望DP

f[i]代表我现有i元,到结束次数期望

猜f[i]为i的二次函数

i=0	f[0]=0	i=n=a+b	f[n]=0

0<i<a+b	f[i]=(f[i-1]+f[i+1])/2+1

解方程

f[i+1]-f[i] = f[i]-f[i-1] - 2

用差分d[i]=f[i]-f[i-1]化简

d[i+1]=d[i]-2

d[n]=d[1]-2(n-1)

-f[n-1]=f[1]-2(n-1)

f[1]=n-1

差分d[]线性
所以f[]二次

注意
d[1]=f[1]
d[n]=-f[n-1]
f[n-1]=f[ ]

动态规划 期望DP

f[i]代表我现有i元,到结束次数期望

猜f[i]为i的二次函数

i=0	f[0]=0	i=n=a+b	f[n]=0

0<i<a+b	f[i]=(f[i-1]+f[i+1])/2+1

解方程

$$f[i+1]-f[i] = f[i]-f[i-1] - 2$$

$$
\begin{aligned}
&f[n]-\color{red}{f[n-1]}\\
&= f[n-1]-f[n-2] - 2\\
&= f[n-2]-f[n-3] - 4\\
&\cdots\cdots\\
&= \color{red}{f[1]}-\color{purple}{f[0]} - 2(n-1)
\end{aligned}
$$

$$f[1]=n-1$$

注意

f[n-1]=f[1]

动态规划 期望DP

f[i]代表我现有i元,到结束次数期望

猜f[i]为i的二次函数

i=0	f[0]=0	i=n=a+b	f[n]=0

0<i<a+b	f[i]=(f[i-1]+f[i+1])/2+1

解方程	f[i+1]-f[i] = f[i]-f[i-1] - 2
f[1]=n-1	f[i]-f[i-1]=f[1]-f[0]-2(i-1)=n
	f[i]=f[i]-f[i-1]+f[i-1]-f[i-2] +..+f[1]-f[0] =(n+1)i-(i+1)i=(n-i)i
	f[a]=(n-a)a=ab

DP小结

状态定义	基于期望	
	自然状态	
转移方程	走一步看看	
	one-step analysis	
	当前状态依赖走一步之后的状态	
	差分思想	
经典结论	E[T]=a*b结论用于其他难题	二次关系

1550.飞行棋

飞行棋

每轮走{1,2,3,4,5,6}格，概率1/6。有m条“飞行”航线：能从xi号瞬移到yi号，0<xi<yi<=n。从0号要走到或超过n号格子，求期望投骰子的次数

定义状态

f[i]代表从i号到结束的期望轮次

问题答案

f[0]代表从0号到结束的期望轮次

纸和笔推导转移方程

飞行棋

f[i]代表从i号到结束的期望轮次

i=n,n+1,n+2,n+3,n+4,n+5

f[i]=0

0<=i<=n-

f[i]=(f[i+1]+f[i+2]+...+f[i+6])/6+1

处理航线：x_k->y_k

$f[x_k]=f[y_k]$

因为0<xi<yi<=n,所以依赖关系DAG有单向性,可以递推

思考题：若允许xi>yi,如何处理

1543.盲盒3

连中k个相同

卡牌收集问题里，共m种卡牌，目标：
连续k次抽卡结果都一样
求抽卡次数期望

定义状态	f[i]代表已经i次相同还需次数的期望
问题答案	f[0]代表已经0次相同还需次数的期望
	纸和笔推导转移方程

连中k个相同

f[i]代表已经i次相同，还需次数的期望

i=k	f[k]=0	i=0	f[0]=f[1]+1

1<=i<=k-1	f[i]=f[i+1]/m + **f[1]*(m-1)/m+1**
消除**紫色项**用差分	f[i-1]=f[i]/m + **f[1]*(m-1)/m+1**
	f[i-1]-f[i]=(f[i]-f[i+1])/m

f[0]-f[1]=1
f[1]-f[2]=m
f[2]-f[3]=m^2

……

f[k-1]-f[k]=m^{k-1}

f[0]-f[k]
=(m^k-1)/(m-1)

1548.跳舞机1

跳舞机1

长度为n为字符串只含：o成功，x失败，?一半成功一半失败。得分为连续成功长度平方和，求得分期望值。

定义状态	f[i]代表前i个的得分期望
问题答案	f[n]代表前n个的得分期望
	纸和笔推导转移方程

跳舞机1

长度为n为字符串只含：o成功，x失败，?一半成功一半失败。得分为连续成功长度平方和，求得分期望值。

定义状态	a[i]代表第i格对得分期望的贡献 即a[i]=f[i]-f[i-1]为差分
问题答案	a[1]+a[2]+...+a[n]

纸和笔推导转移方程

期望分步走,一步一期望

跳舞机1

a[i]代表第i格对得分期望的贡献

随机变量x_i为用第i格结尾的连续长度

g[i]代表用第i格结尾的连续长度的期望

概率$1-p_i$	$x_i=0$	概率p_i	$x_i=x_{i-1}+1$

$$a[i]=(1-p_i)*0+p_i*(E[x_i^2]-E[x_{i-1}^2])$$
$$=p_i*(E[(x_{i-1}+1)^2]-E[x_{i-1}^2])$$
$$=p_i*(E[x_{i-1}^2+2x_{i-1}+1]-E[x_{i-1}^2])$$
$$=p_i*(2E[x_{i-1}]+1)$$
$$=p_i*(2g[i-1]+1)$$

$$g[i]=p_i*E[x_{i-1}+1]=p_i*(g[i-1]+1)$$

快快编程作业

1550

1544

1549