
CS102
C++
算法

动态规划

dynamic programming

状态定义+状态转移方程

魔鬼的步伐	$f[i] = f[i-a] \| i \geq a + f[i-b] \| i \geq b$
最大连续子序列和	$f[i] = max(f[i-1], 0) + x[i]$
钢条切割	$f[i] = max_{1 \leq j \leq i} \{f[i-j] + p[j]\}$
最长下降子序列	$f[i] = max_{0 \leq j \leq i-1} \{f[j] \| x[j] > x[i]\} + 1$

单调子序列问题

Monotonic Subsequences

各种子序列(标记红色)

7	8	4	6	8	9	3	2	上升子序列

7	8	4	6	8	9	3	2	不升子序列

7	8	4	6	8	9	3	2	下降子序列

7	8	4	6	8	9	3	2	下降子序列

单调子序列问题

最长上升子序列

最长不升子序列

最长下降子序列

最长不降子序列

上升子序列最小划分数

不升子序列最小划分数

下降子序列最小划分数

不降子序列最小划分数

单调子序列问题

最大上升子序列

8个问题的核心 其实是2个问题	本质是同 1个算法

不升子序列最小划分数

例题：最长上升子序列

The **longest increasing subsequence (LIS)** problem is to find a subsequence of a given sequence in which the subsequence's elements are in sorted order, highest to lowest, and in which the subsequence is as long as possible.

输入样例
8
2 1 2 7 2 3 8 4

输入第一行为n代表序列长度。
输入第二行为序列的n个数字:x[0],x[1],...,x[n-1]
输出上升子序列最长的长度。

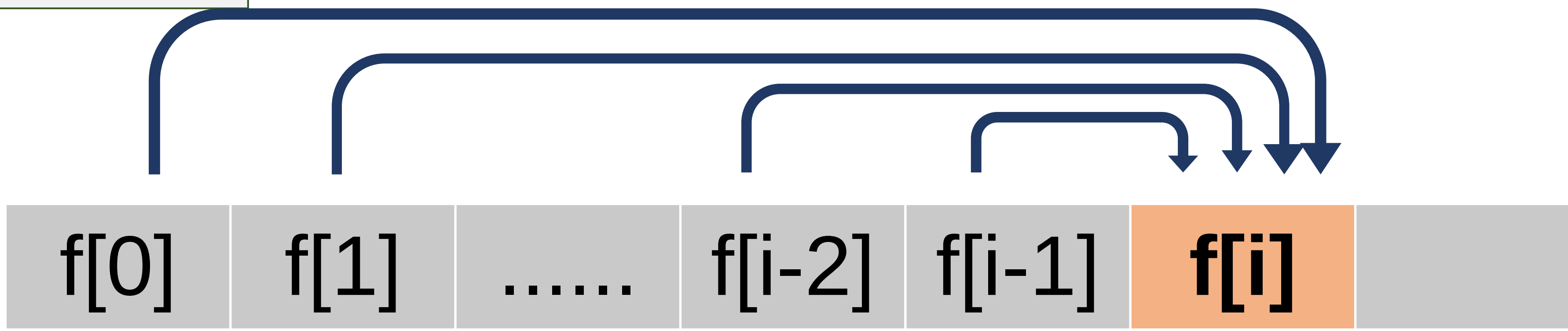
输出样例
4

思考：如何设计状态?
如何设计f[i]代表什么含义?
如何建立f[i]和f[i-1],f[i-2],...的联系?

LIS：解法1

$f[i]$代表以$x[i]$结尾的上升子序列最长能有多长

状态i描述子序列结尾的位置



计算f[i]时参考
f[0],f[1],....,f[i−1]的结果

LIS：解法1

$f[i]$代表以$x[i]$结尾的上升子序列最长能有多长

状态i描述子序列结尾的位置

当i为0时	$f[0] = 1$	初始条件
当i>=1时	$f[i] = max_{0 \le j \le i-1}\{f[j] \mid x[j] < x[i]\} + 1$	状态转移方程

计算f[i]时参考f[0], f[1], ..., f[i-1]的结果

$$ans = max_i\{f[i]\}$$

最终答案

复杂度O(N^2)，能否更快？

LIS：解法1

```
#include<iostream>
#include<algorithm>
#define N 1005
using namespace std;
int n,f[N],x[N];
int main(){
	cin>>n;
	for(int i=0;i<n;i++)cin>>x[i];
	f[0]=1;
	for(int i=1;i<n;i++){
		f[i]=1;
		for(int j=0;j<i;j++)
			if(x[j]<x[i])f[i]=max(f[i],f[j]+1);
	}
	cout<<*max_element(f,f+n)<<endl;
	return 0;
}
```

例题：不升子序列最小划分数

原序列共有n个整数数字，需要将原序列划分，组成几条不上升子序列，求最少分成几条。
输入第一行为n代表序列长度。
输入第二行为序列的n个数字:x[0],x[1],...,x[n-1]
输出不升子序列最小划分数

输入样例
6
2 1 2 7 2 3

输出样例
3

样例最少3条
不升子序列
例如：
2 1
2 2
7 3

x[i]
2
1
2
7
2
3

贪心法：不升子序列最小划分数

贪心算法：
依次循环安排每个数字x[i]：
1.如果x[i]无法接在已有子序列之后，
就新增加一个子序列，安排x[i]
2.如果x[i]可以接在已有子序列后，
就在可选子序列中挑选最小数的结尾后，安排x[i]

d[i]代表第i条不升子序列的最后一个数字

贪心法步骤：依次根据x[i]不断修改d数组

贪心法：不升子序列最小划分数

d[i]代表第i条不升子序列的最后一个数字

i	x[i]
0	2
1	1

d[0]	d[1]	d[2]	d[3]	d[4]	d[5]	
∞	∞	∞	∞	∞	∞	
2	∞	∞	∞	∞	∞	1条不升子序列
1	∞	∞	∞	∞	∞	1条不升子序列

贪心法：不升子序列最小划分数

d[i]代表第i条不升子序列的最后一个数字

i	x[i]
0	2
1	1
2	2

d[0]	d[1]	d[2]	d[3]	d[4]	d[5]	
∞	∞	∞	∞	∞	∞	
2	∞	∞	∞	∞	∞	1条不升子序列
1	∞	∞	∞	∞	∞	1条不升子序列
1	2	∞	∞	∞	∞	2条不升子序列

贪心法：不升子序列最小划分数

d[i]代表第i条不升子序列的最后一个数字

i	x[i]
0	2
1	1
2	2
3	7

d[0]	d[1]	d[2]	d[3]	d[4]	d[5]	
∞	∞	∞	∞	∞	∞	
2	∞	∞	∞	∞	∞	1条不升子序列
1	∞	∞	∞	∞	∞	1条不升子序列
1	2	∞	∞	∞	∞	2条不升子序列
1	2	7	∞	∞	∞	3条不升子序列

贪心法：不升子序列最小划分数

d[i]代表第i条不升子序列的最后一个数字

i	x[i]
0	2
1	1
2	2
3	7
4	2

d[0]	d[1]	d[2]	d[3]	d[4]	d[5]	
∞	∞	∞	∞	∞	∞	
2	∞	∞	∞	∞	∞	1条不升子序列
1	∞	∞	∞	∞	∞	1条不升子序列
1	2	∞	∞	∞	∞	2条不升子序列
1	2	7	∞	∞	∞	3条不升子序列
1	2	7	∞	∞	∞	3条不升子序列

贪心法：不升子序列最小划分数

d[i]代表第i条不升子序列的最后一个数字

i	x[i]
0	2
1	1
2	2
3	7
4	2
5	3

d[0]	d[1]	d[2]	d[3]	d[4]	d[5]	
∞	∞	∞	∞	∞	∞	
2	∞	∞	∞	∞	∞	1条不升子序列
1	∞	∞	∞	∞	∞	1条不升子序列
1	2	∞	∞	∞	∞	2条不升子序列
1	2	7	∞	∞	∞	3条不升子序列
1	2	7	∞	∞	∞	3条不升子序列
1	2	3	∞	∞	∞	3条不升子序列

贪心法：代码1

```
#include<iostream>
#include<algorithm>
#define N 1005
using namespace std;
int n,i,j,d[N],x[N];
int main(){
	cin>>n;
	for(int i=0;i<n;i++)cin>>x[i];
	int cnt=0;
	for(i=0;i<n;i++){
		for(j=0;j<cnt;j++)
			if(d[j]>=x[i])break;
		d[j]=x[i];
		if(j==cnt)cnt++;
	}
	cout<<cnt<<endl;
	return 0;
}
```

复杂度O(N^2)
能否更快？

贪心法：代码2

d[i]代表第i条不升子序列的最后一个数字

思考：为什么d数组随时保持着从小到大排序?

```
#include<iostream>
#include<algorithm>
#define N 1005
#define INF 2e9
using namespace std;
int n,d[N],x[N];
int main(){
    cin>>n;
    for(int i=0;i<n;i++)cin>>x[i];
    fill(d,d+n,INF);
    for(int i=0;i<n;i++)
        *lower_bound(d,d+n,x[i])=x[i];
    int cnt=lower_bound(d,d+n,INF)-d;
    cout<<cnt<<endl;
    return 0;
}
```

复杂度
O(NlogN)

Dilworth定理

链的最长长度 ＝ 反链划分数最小值

Dilworth定理

最长上升子序列	不升子序列最小划分数

最长的长度为LIS = 最小划分数为M

1.证明LIS≥M

在贪心法求解“不升子序列最小划分数M”时构造出了d数组记录每一条不升子序列的尾数。最终d数组形成一条上升子序列，该长度不可能超过LIS。

2.证明LIS≤M

对于一条给定的上升子序列L，L其中任意2个元素都不可能在同一条不升子序列中出现。L的每个元素都分别在不同的不升子序列中。

LIS解法2：不升子序列最小划分数

```cpp
#include<iostream>
#include<algorithm>
#define N 1005
#define INF 2e9
using namespace std;
int n,d[N],x[N];
int main(){
	cin>>n;
	for(int i=0;i<n;i++)cin>>x[i];
	fill(d,d+n,INF);
	for(int i=0;i<n;i++)
		*lower_bound(d,d+n,x[i])=x[i];
	int cnt=lower_bound(d,d+n,INF)-d;
	cout<<cnt<<endl;
	return 0;
}
```

Dilworth定理

链的最长长度 ＝ 反链划分数最小值

链：上升子序列

反链：不升子序列

链：不降子序列

反链：下降子序列

单调子序列问题
综合练习

上升子序列最小划分数

原序列共有n个整数数字，需要将原序列划分，组成几条上升子序列，求最少分成几条。
输入第一行为n代表序列长度。
输入第二行为序列的n个数字:x[0],x[1],...,x[n-1]
输出上升子序列最小划分数

输入样例
6
2 1 2 7 2 3

输出样例
3

样例至少3条上升子序列
例如：
2 7
1 2 3
2

上升子序列最小划分数

x数组的上升子序列最小划分数 = -x数组的下降子序列最小划分数

相反数

```
fill(d,d+n,INF);
for(int i=0;i<n;i++)
    *upper_bound(d,d+n,-x[i])=-x[i];
int cnt=lower_bound(d,d+n,INF)-d;
cout<<cnt<<endl;
```

单调子序列问题

x数组的最长不升子序列 = x数组的上升子序列最小划分数

Dilworth
反链

相反数 = | = 相反数

-x数组的最长不降子序列 = -x数组的下降子序列最小划分数

Dilworth
反链

课件下载链接：
链接：https://pan.baidu.com/s/1ei7f7w
密码：q66i

作业网站：
http://120.132.18.213:8080/thrall-web/main#home