
CS150
初赛专题
集训

CS150 初赛专题集训公布资料的固定网站
请每次课前自行将资料下载到电脑

https://pan.baidu.com/s/12ZsJgSE-p17VxI-ObMe7Mg

快快编程地址
http://120.132.18.213:9062
请登陆网站提交作业

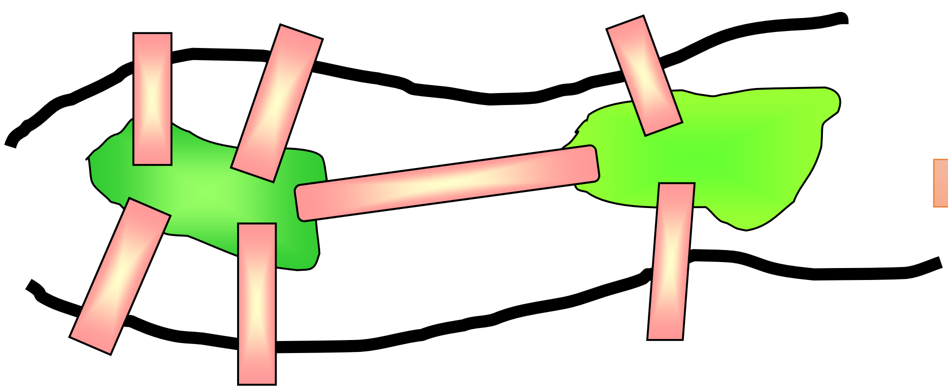
图论

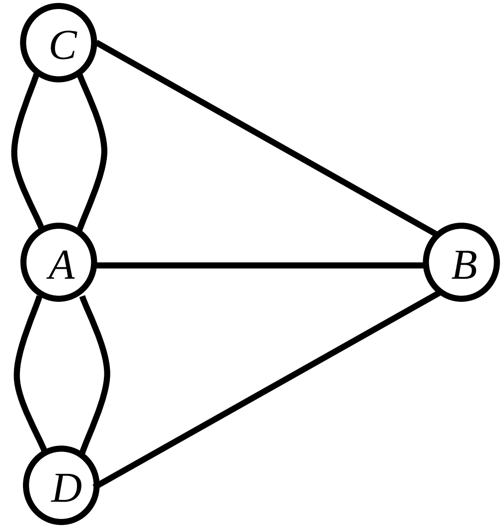
图的定义

图是由顶点的有穷非空集合和顶点之间边的集合组成，通常表示为：

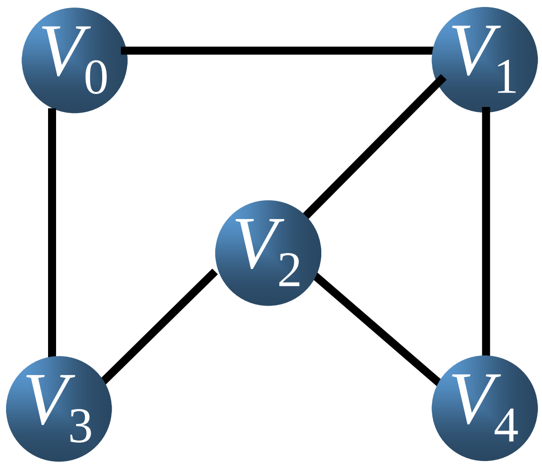
$$G=(V,\ E)$$

其中：*G*表示一个图，*V*是图*G*中顶点的集合，*E*是图*G*中顶点之间边的集合。



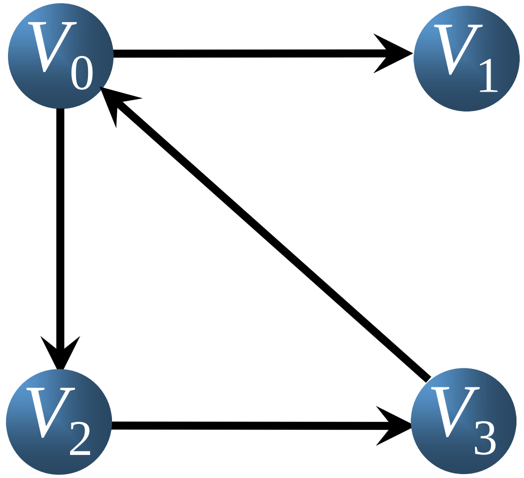


图的分类



若顶点v_i和v_j之间的边没有方向，则称这条边为无向边，表示为(v_i,v_j)。

如果图的任意两个顶点之间的边都是无向边，则称该图为无向图。



若从顶点v_i到v_j的边有方向，则称这条边为有向边，表示为$<v_i,v_j>$。

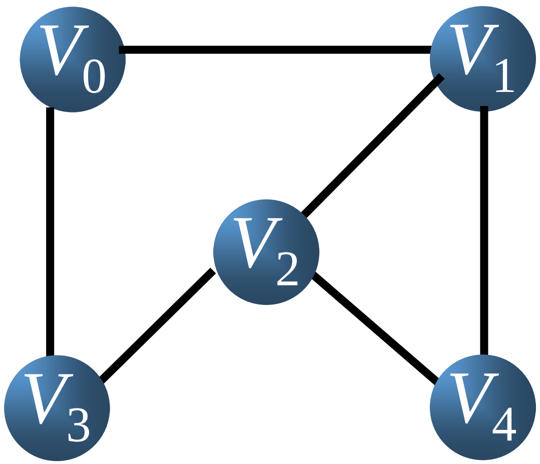
如果图的任意两个顶点之间的边都是有向边，则称该图为有向图。

顶点的度

顶点的度：在无向图中，顶点v的度是指依附于该顶点的边数，记为TD (v)。

在具有*n*个顶点、*e*条边的无向图G中，各顶点的度之和与边数之和的关系

$$\sum_{i=1}^{n} TD(v_i) = 2e$$



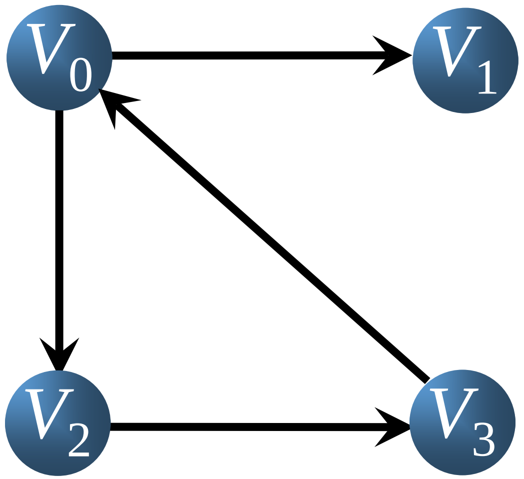
顶点的度

顶点的入度：在有向图中，顶点v的入度是指以该顶点为弧头的弧的数目，记为ID (v)；

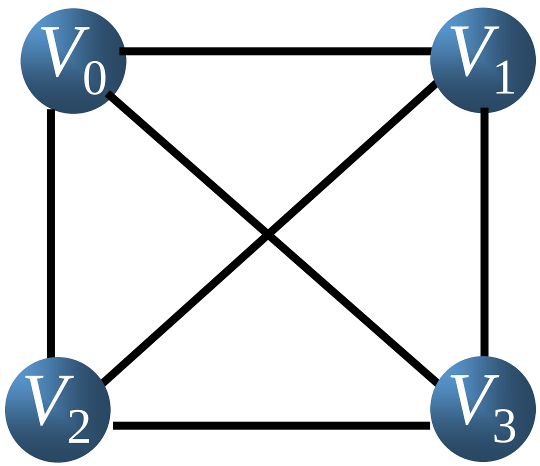
顶点的出度：在有向图中，顶点v的出度是指以该顶点为弧尾的弧的数目，记为OD (v)。

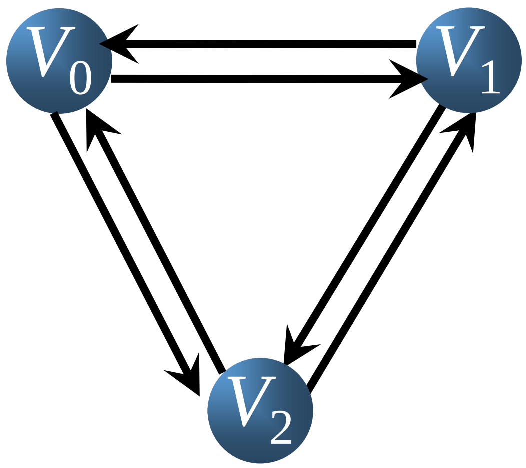
在具有n个顶点、e条边的有向图G中，各顶点的入度之和与各顶点的出度之和的关系？与边数之和的关系？

$$\sum_{i=1}^{n} ID(v_i) = \sum_{i=1}^{n} OD(v_i) = e$$



完全图





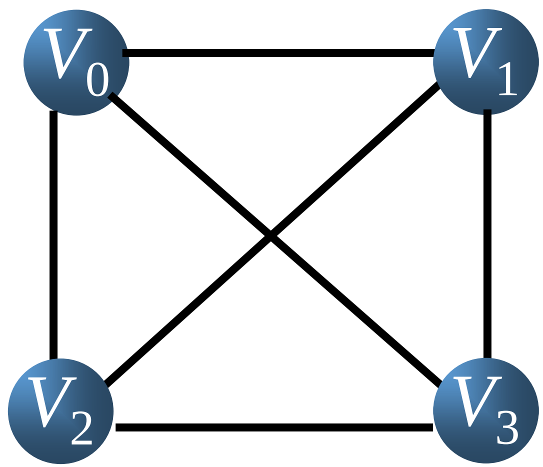
无向完全图：在无向图中，如果任意两个顶点之间都存在边，则称该图为无向完全图。

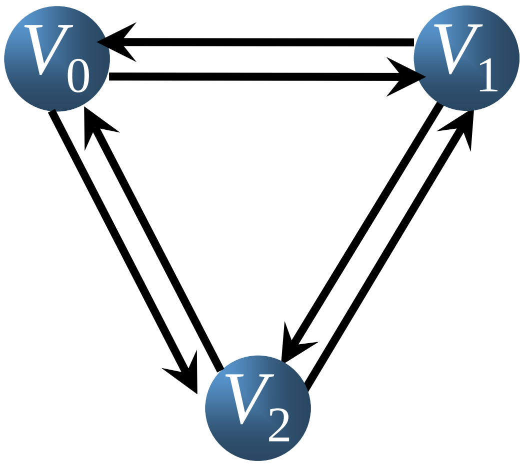
有向完全图：在有向图中，如果任意两个顶点之间都存在方向相反的两条弧，则称该图为有向完全图。

练习

含有n个顶点的无向完全图有多少条边?

含有n个顶点的有向完全图有多少条弧?



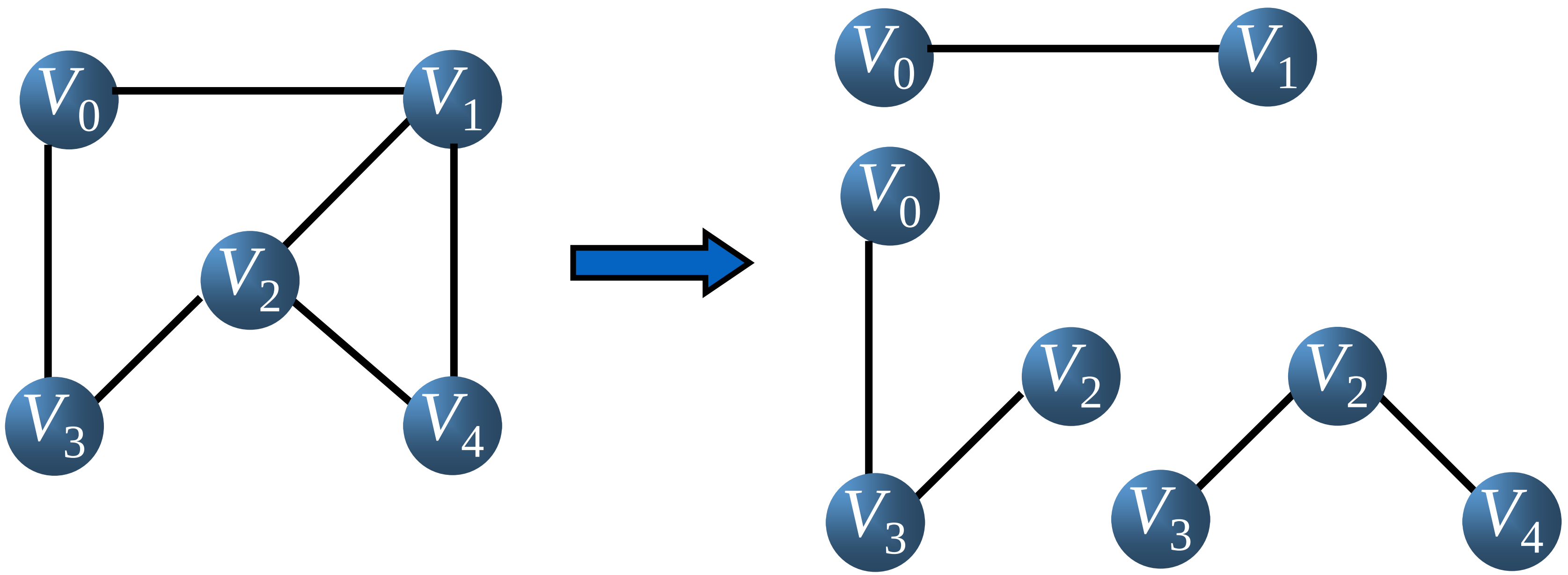


含有n个顶点的无向完全图有$n\times(n-1)/2$条边。

含有n个顶点的有向完全图有$n\times(n-1)$条边。

子图

子图：若图G=（V，E），G'=（V'，E'），如果$V' \subseteq V$且$E' \subseteq E$，则称图G'是G的子图。

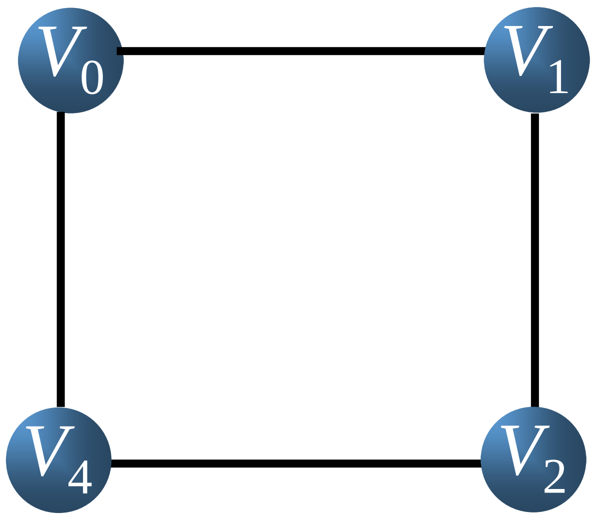


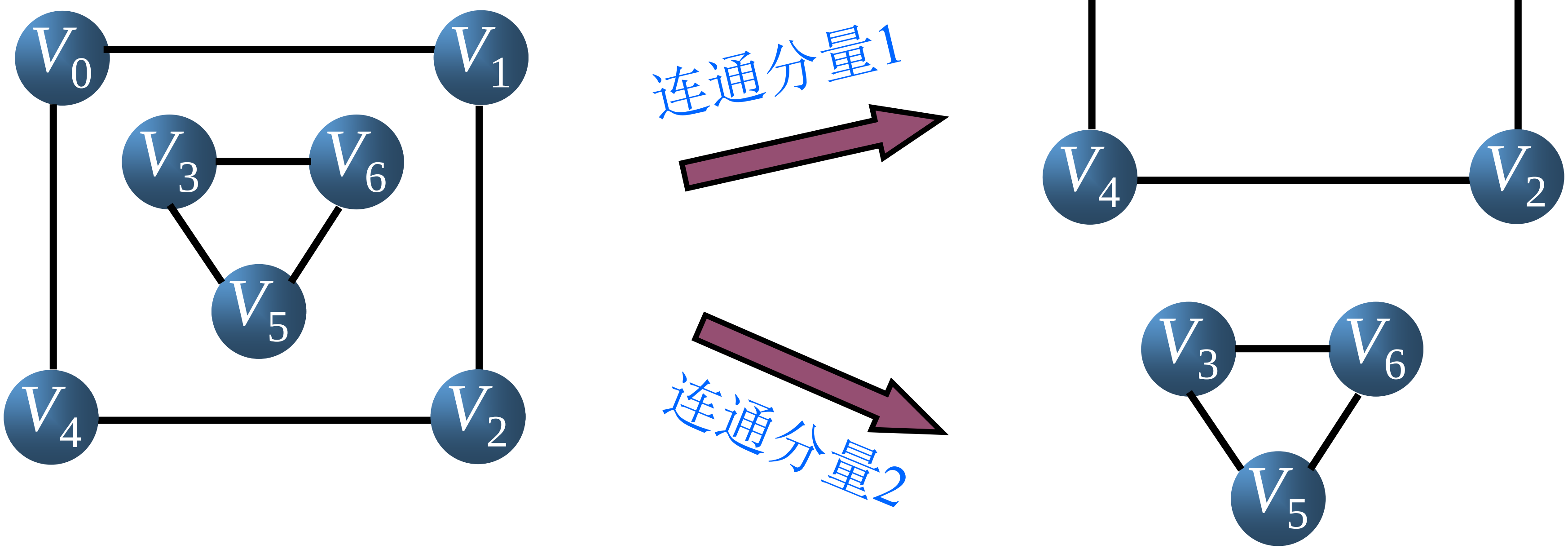
连通图、连通分量

连通图： 在无向图中，如果从一个顶点v_i到另一个顶点$v_j(i \neq j)$有路径，则称顶点v_i和v_j是连通的。如果图中任意两个顶点都是连通的，则称该图是连通图。

连通分量：

非连通图的极大连通子图称为连通分量。

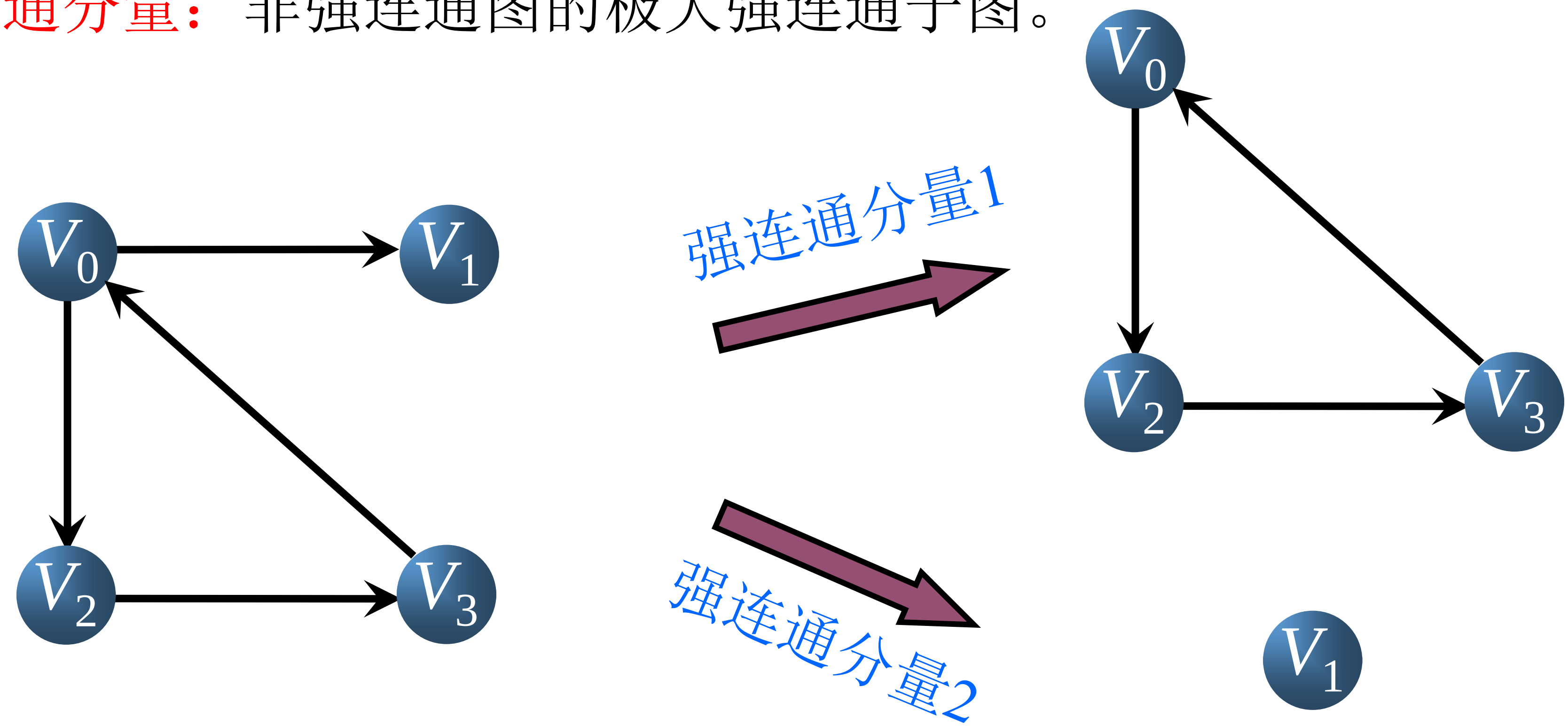




强连通图、强连通分量

强连通图：在有向图中，对图中任意一对顶点v_i和v_j ($i\neq j$)，若从顶点v_i到顶点v_j和从顶点v_j到顶点v_i均有路径，则称该有向图是强连通图。

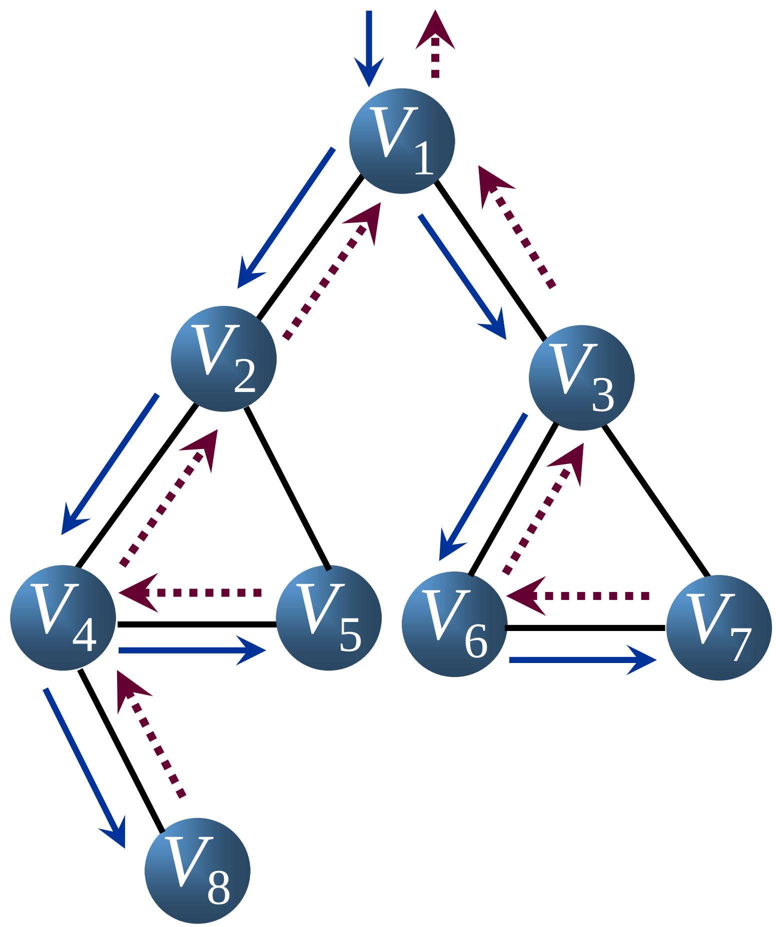
强连通分量：非强连通图的极大强连通子图。

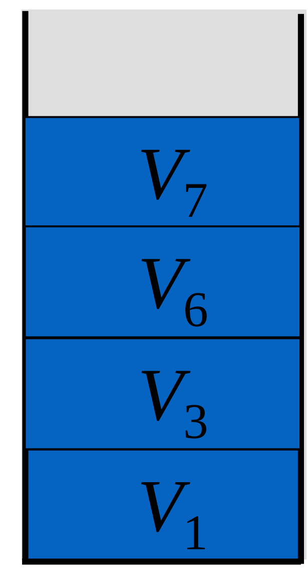


深度优先遍历

深一层递归

递归返回

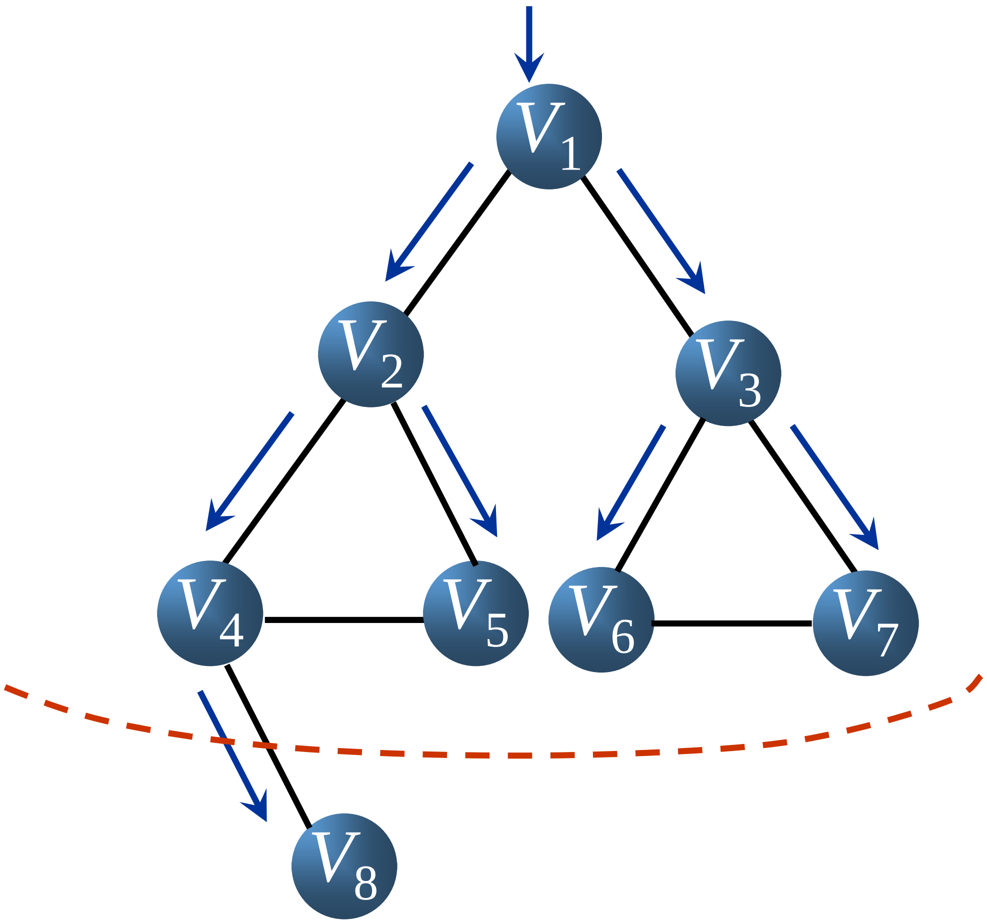




数据结构：栈

遍历序列：V_1 V_2 V_4 V_5 V_8 V_3 V_6 V_7

广度优先遍历



数据结构：队列

遍历序列：V_1 V_2 V_3 V_4 V_5 V_6 V_7 V_8

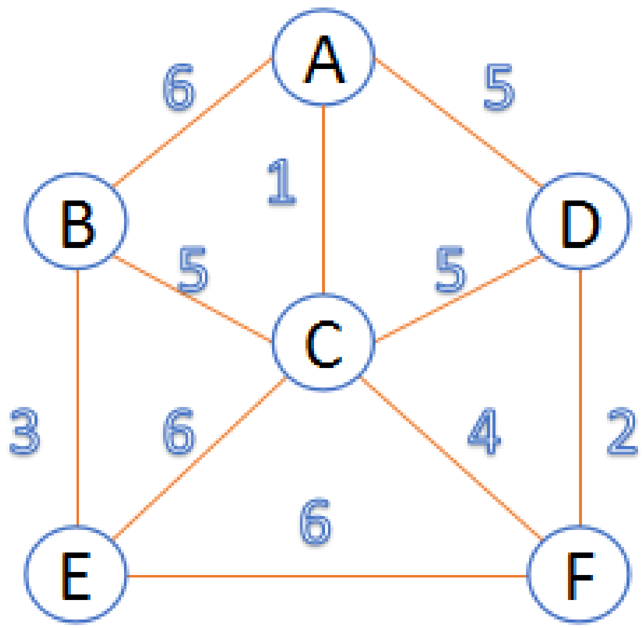
最小生成树

- **生成树的代价**：设G = (V, E)是一个无向连通网，生成树上各边的权值之和称为该**生成树的代价**。

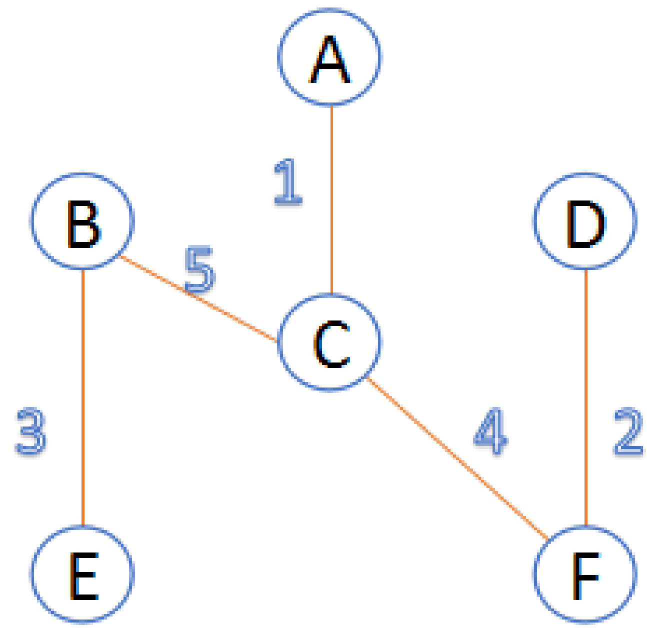
- **最小生成树**：在图G所有生成树中，代价最小的生成树称为**最小生成树**。

最小生成树的概念可以应用到许多实际问题中。
例：在*n*个城市之间建造通信网络，至少要架设*n*-1条通信线路，而每两个城市之间架设通信线路的造价是不一样的，那么如何设计才能使得总造价最小？

最小生成树示例



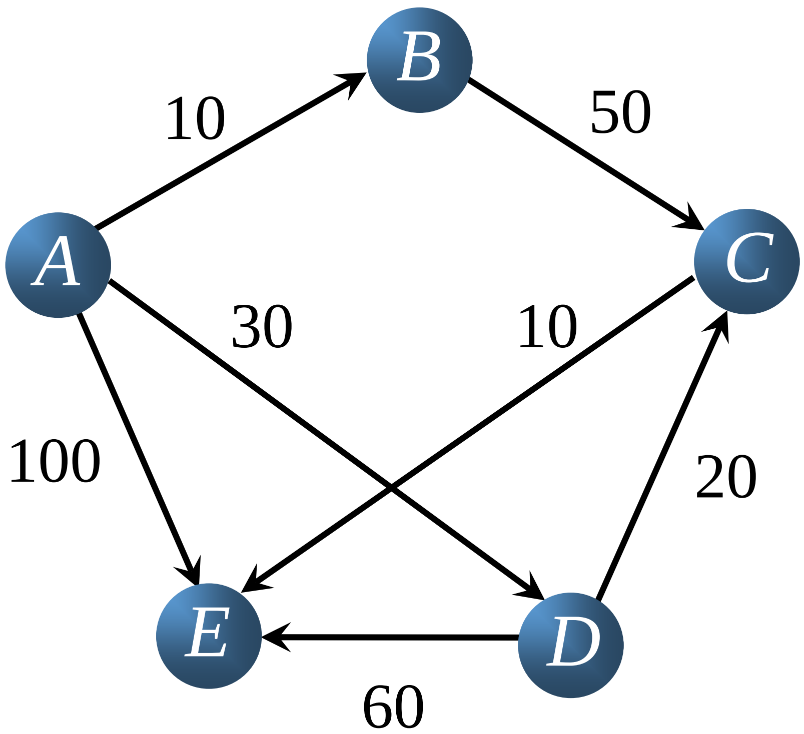
连通网G



最小生成树

最短路径

在网图中，最短路径是指两顶点之间经历的边上权值之和最短的路径。



AE：100

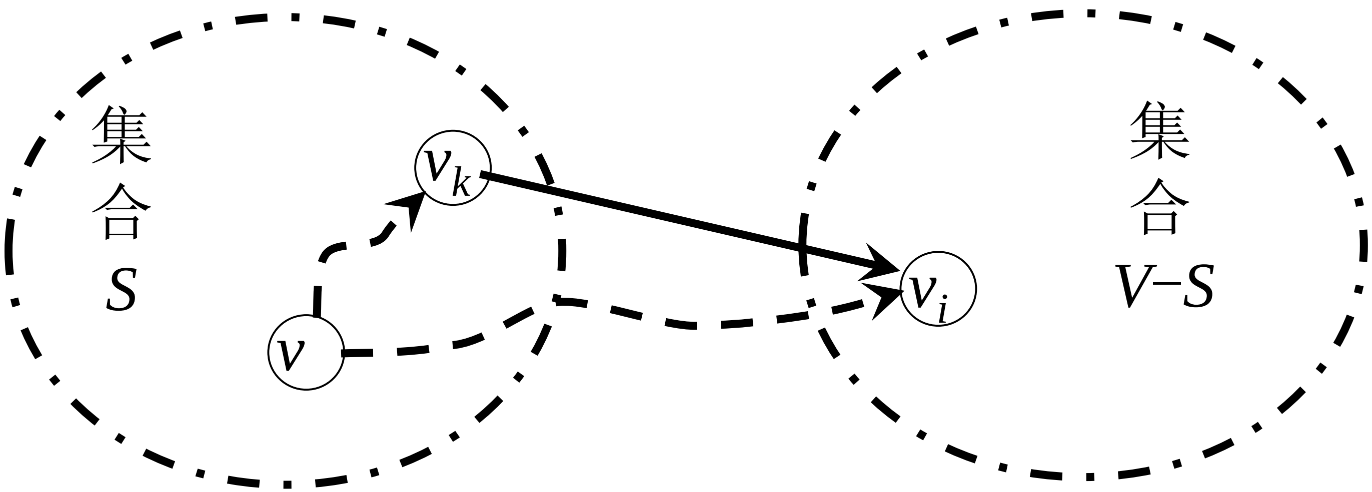
ADE：90

ADCE：60

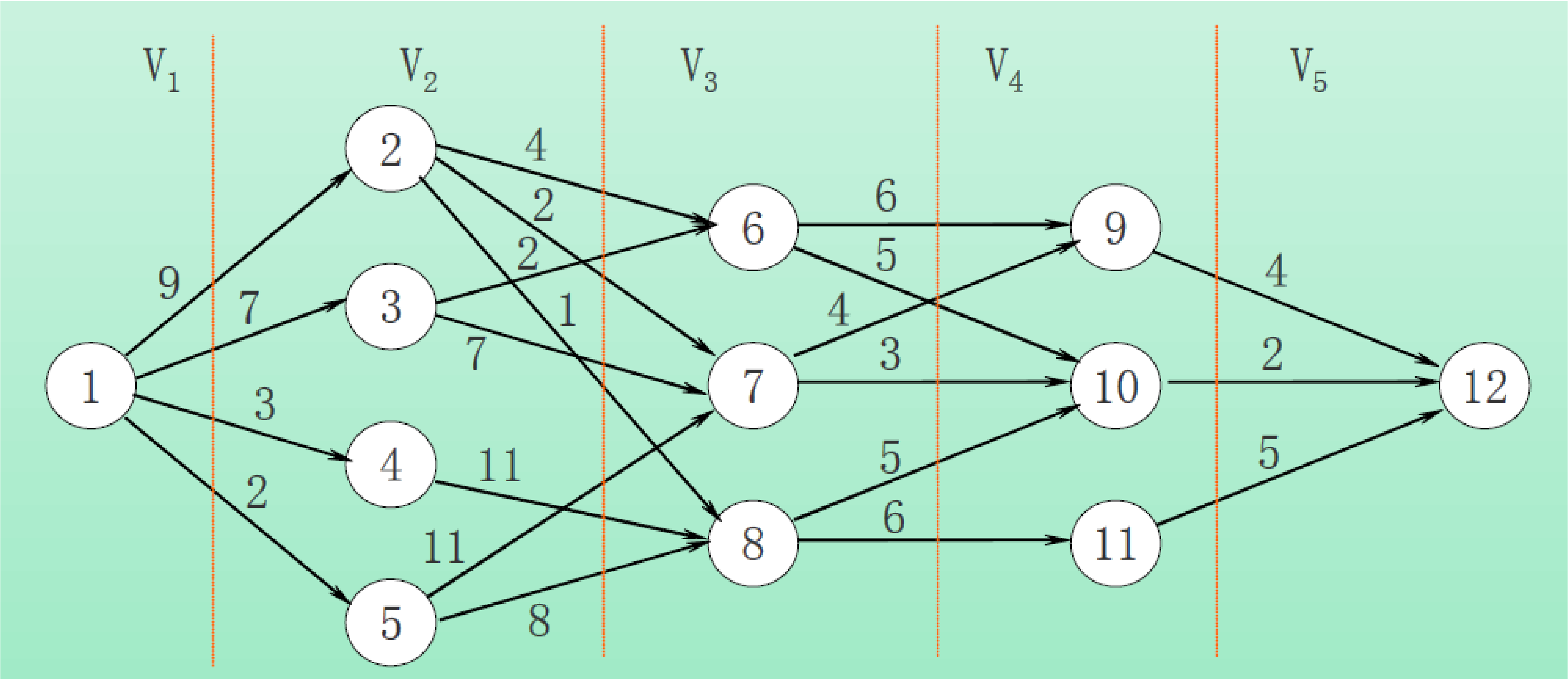
ABCE：70

Dijkstra算法

基本思想：设置一个集合S存放已经找到最短路径的顶点，S的初始状态只包含源点v，对$v_i \in V-S$，假设从源点v到v_i的有向边为最短路径。以后每求得一条最短路径$v, \ldots, v_k$，就将v_k加入集合S中，并将路径$v, \ldots, v_k, v_i$与原来的假设相比较，取路径长度较小者为最短路径。重复上述过程，直到集合V中全部顶点加入到集合S中。



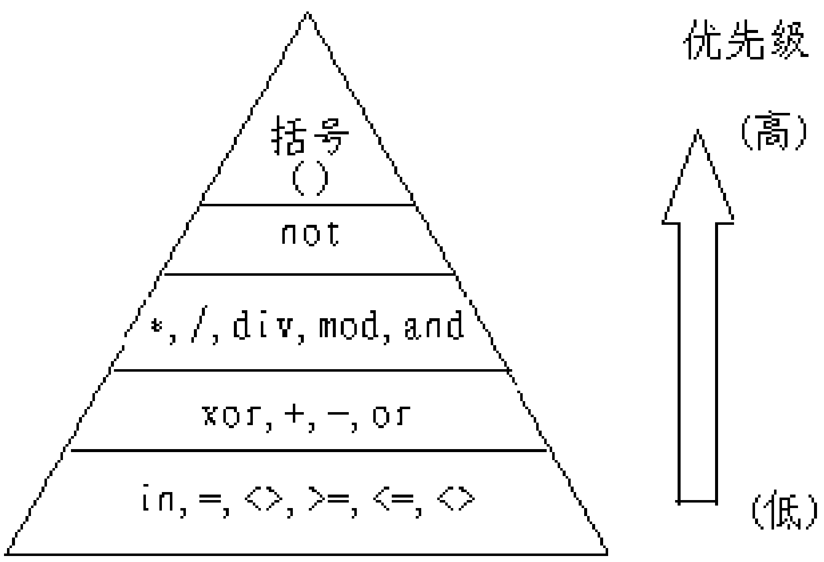
最短距离



节点1到12的最短距离是______

逻辑运算

逻辑运算符	英语表示	符号	举例
非	not	¬	¬1=0，¬0=1
与	and	∧	0∧1=0，1∧0=0，1∧1=1，1∧1=1
或	or	∨	0∨0=0，0∨1=1，1∨0=1，1∨1=1



运算符优先级，同级的运算符不分高低，计算时按照从左到右运算。

否定（非）

$\neg p$: "非p"

$\neg p$的真值表

p	$\neg p$
0	1
1	0

p所有可能的取值

合取（与）

$p \wedge q$：“p 并且 q”

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$p \wedge q = 1$ 当且仅当 p和q均为1

(p,q) 所有可能的取值

析取（或）

$p\vee q$：“p 或 q”

$p\vee q=0$ 当且仅当 p和q均为0

p	q	$p\vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

永真式、矛盾式与可能式

- 永真式：总是真的，无论其中出现的命题变元如何取值。比如：$p \vee \neg p$
- 矛盾式：总是假的，无论其中出现的命题变元如何取值。比如：$p \wedge \neg p$
- 可能式：既不是永真式又不是矛盾式。比如：$\neg p$

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$	$p \wedge \neg p$
1	0	1	0
0	1	1	0

等值公式

1. 双重否定律

$$\neg\neg P = P$$

2. 结合律

$$(P \vee Q) \vee R = P \vee (Q \vee R)$$
$$(P \wedge Q) \wedge R = P \wedge (Q \wedge R)$$

3. 交换律

$$P \vee Q = Q \vee P$$
$$P \wedge Q = Q \wedge P$$
$$P \leftrightarrow Q = Q \leftrightarrow P$$

4. 分配律

$$P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$
$$P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

5. 吸收律

$$P \vee (P \wedge Q) = P$$
$$P \wedge (P \vee Q) = P$$

6. 摩根律

$$\neg(P \vee Q) = \neg P \wedge \neg Q$$
$$\neg(P \wedge Q) = \neg P \vee \neg Q$$

自学，帮助做题

例题

若A=True，B=False，C=True，D=False，以下逻辑运算表达式真的有（　　）。

A. （A∧B）∨（C∧D ∨¬A）　B. （（¬A ∧ B）∨ C）∧ ¬B

C. （B∨C∨D）∨D∧A　D. A ∧（D ∨¬C）∧B

A选项：（A∧B）∨（C∧D ∨¬A），（A∧B）=假，（C∧D ∨¬A）中C∧D =假，¬A=假，所以（C∧D ∨¬A）=假。于是A选项可以简写为：假∨（假 ∨假）= 假。

B选项：（（¬A ∧ B）∨ C）∧¬B，如果¬B是假那么就可以不去看前面的（（¬A ∧ B）∨ C），可惜的是¬B是真，那么就要看（（¬A ∧ B）∨ C），发现C是真，所以不看（¬A ∧ B），于是B选项可以简写为：（？ ∨ 真）∧ 真 = 真。

例题

若A=True，B=False，C=True，D=False，以下逻辑运算表达式真的有（　　）。

A. （A∧B）∨（C∧D ∨¬A）　B. （（¬A ∧ B）∨ C）∧ ¬B

C. （B∨C∨D）∨D∧A　D. A ∧（D ∨¬C）∧B

C选项：（B∨C∨D）∨D∧A ，D∧A=假，所以不得不看前面部分（B∨C∨D），只要BCD有一个是真，那么（B∨C∨D）=真，而容易发现C=true。所以C选项可以简写为：真 ∨ 假 = 真。

D选项：A ∧（D ∨¬C）∧B，我们很容易发现D选项的特殊结构为 ？∧？ ∧？，三个？有一个是假，那么D为假，A和B不用计算便可看出，所以先发现B=假，所以D=假

问题求解题

加法原理和乘法原理

加法原理

做一件事情,完成它有N类办法，在第一类办法中有M1种不同的方法，在第二类办法中有M2种不同的方法,……,

在第M类办法中有M_N种不同的方法,

那么完成这件事情共有$M_1+M_2+\ldots\ldots+M_N$种不同的方法.

乘法原理

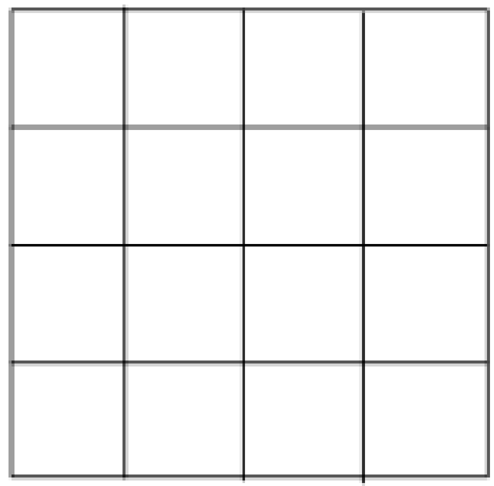
做一件事,完成它需要分成n个步骤，做第一 步有m_1种不同的方法，做第二步有m_2不同的方法,……,

做第n步有m_n不同的方法.

那么完成这件事共有 $N=m_1*m_2*m_3\ldots*m_n$ 种不同的方法

练习

4×4的棋盘，要把A、B、C、D四个不同的棋子放在棋盘的方格中，并使每行每列只能出现一个棋子。共有______种不同的放法

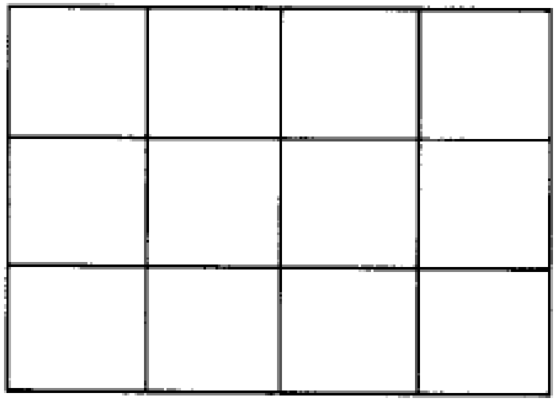


分四步，第一步放棋子A，故有16种不同方法；第二步放棋子B，还剩下9个方格可以放B，B有9种放法；第三步放C，还有4个方格可以放C；最后放D，再只剩下一个方格放D了。共有

16*9*4*1＝576（种）不同放法。

练习

从左下角走到右上角，规定每次只能向右或向上移动，共计有_____种不同的走法?



棋盘为m列，n行，只要向右走一步，再向上走一步，总能经过m步向右和n步向上，到达终点

$$C_{m+n}^{m}$$

排列与组合

排列的定义

从n个不同元素中，任取m个元素，按照一定的顺序排成一列，叫做从n个不同元素中取出m个元素的一个排列。

排列的计算公式

$$P_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

全排列

n个不同的元素排成一排，排列方法有

$$P_n^n = n*(n-1)*(n-2)*\cdots*2*1 = n!$$

排列与组合

组合的定义

从n个不同元素中，任取m个元素并成一组，叫做从n个不同元素中取出m个元素的一个组合。

组合的计算公式

$$C_n{}^m = \frac{P_n{}^m}{P_m{}^m} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!}$$

$$= \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

练习

学校师生合影，共8个学生，4个老师，要求老师在学生中间，且老师互不相邻，共有_____种不同的合影方式

$$P_8^8 * P_7^4 = 40320 * 840 = 33868800$$

题解

先排学生共有P_8^8种排法,然后把老师插入学生之间的空档，共有7个空档可插，选其中的4个空档，共有P_7^4种选法。根据乘法原理，共有的不同坐法为$P_8^8P_7^4$种。

插入法:对于某两个元素或者几个元素要求不相邻的问题,可以用插入法.即先排好没有限制条件的元素,然后将有限制条件的元素按要求插入排好元素的空档之中即可.

练习

5个男生3个女生排成一排,3个女生要排在一起,有_____种不同的排法?

$$P_6^6 * P_3^3 = 720 * 6 = 4320$$

题解

因为女生要排在一起,所以可以将3个女生看成是一个人，与5个男生作全排列,有P_6^6种排法,其中女生内部也有P_3^3种排法，根据乘法原理,共有$P_6^6P_3^3$种不同的排法。

捆绑法:要求某几个元素必须排在一起的问题,可以用捆绑法来解决问题.即将需要相邻的元素合并为一个元素,再与其它元素一起作排列,同时要注意合并元素内部也可以作排列.

练习

袋中有不同年份生产的5分硬币23个,不同年份生产的1角硬币10个,如果从袋中取出2元钱,有_____种取法

$$C_{23}^{3}+C_{10}^{1}C_{23}^{1}=1771+230=2001$$

题解

此题是一个组合问题,若是直接考虑取钱的问题的话,情况比较多,也显得比较凌乱,难以理出头绪来.但是如果根据组合数性质考虑剩余问题的话,就会很容易解决问题。

把所有的硬币全部取出来,将得到 $0.05\times23+0.10\times10=2.15$元,所以比2元多0.15元,所以剩下0.15元即剩下3个5分或1个5分与1个1角,所以共有$C_{23}^{3}+C_{23}^{1}C_{10}^{1}$种取法.

剩余法:在组合问题中,有多少取法,就有多少种剩法,他们是一一对应的,因此,当求取法困难时,可转化为求剩法.

练习

学校安排考试科目5门,语文要在数学之前考,有_____种不同的安排顺序

$$\frac{1}{2} * P_5^5 = \frac{1}{2} * 120 = 60$$

题解

对于任何一个排列问题,就其中的两个元素来讲的话，他们的排列顺序只有两种情况,并且在整个排列中，他们出现的机会是均等的，因此要求其中的某一种情况，能够得到全体，那么问题就可以解决了，并且也避免了问题的复杂性。

不加任何限制条件,整个排法有P_5^5种，“语文安排在数学之前考”，与“数学安排在语文之前考”的排法是相等的,所以语文安排在数学之前考的排法共有$\frac{1}{2}P_5^5$种。

对等法:在有些题目中,它的限制条件的肯定与否定是对等的,各占全体的二分之一.在求解中只要求出全体,就可以得到所求.

练习

某个班级共有43位同学,从中任抽5人,正、副班长、体育委员至少有一人在内的抽法有_____种

$$C_{43}^{5} - C_{40}^{5} = 962598 - 658008 = 304590$$

题解

此题若是直接去考虑的话,就要将问题分成好几种情况， 这样解题的话,容易造成各种情况遗漏或者重复的情况。而如果从此问题相反的方面去考虑的话， 不但容易理解， 而且在计算中也是非常的简便.这样就可以简化计算过程。

43人中任抽5人的方法有C_{43}^{5}种， 正副班长， 团支部书记都不在内的抽法有C_{40}^{5}种， 所以正副班长， 团支部书记至少有1人在内的抽法有$C_{43}^{5}-C_{40}^{5}$种。

排异法:有些问题,正面直接考虑比较复杂， 而它的反面往往比较简捷， 可以先求出它的反面,再从整体中排除。

圆周排列

从n个不同的元素中取r个沿一圆周排列，排列的方案：

$$P_n^r / \mathrm{r}$$

N个元素的圆周排列：

$$P_n^n / \mathrm{n} \;=\; (\mathrm{n-1})\,!$$

错排

有1，2，3，…，n 个数字，求i不在第i个位置的排列方式有多少种?

设f(n)为n个不同元素的错排方案。

① n不动，把另外的n-1个数错排，方案是：f（n-1），然后n和另外的n-1个每一个交换，共有(n-1)*f(n-1)种方案。

② n和其他的n-1个之一交换，其余的n-2个错排，共有

（n-1）*f（n-2）种方案。

递推方程： f(n)=(n-1)*(f(n-1)+f(n-2))

边界条件： f(1)=0;f(2)=1;

练习

5名男生和5名女生围绕圆桌就坐，为了活跃气氛，男生和女生间隔而坐，每个男生左右两边都是女生，每个女生两边都是男生，共有______种不同的就坐方案

$$\frac{P_5^5}{5} * P_5^5 = 24 * 120 = 2880$$

练习

在书架上放有编号为1， 2， …， n的n本书。现将n本书全部取下然后再放回去，当放回去时要求每本书都不能放在原来的位置上。例如：n = 3时：

原来位置为：1 2 3

放回去时只能为：3 1 2 或 2 3 1 这两种

求当n = 5时满足以上条件的放法共有多少种？（不用列出每种放法）

$$f(5) = 4\big(f(4) + f(3)\big)$$

$$f(1) = 0$$

$$f(2) = 1$$

$$f(5) = 4 * (9 + 2) = 44$$

递推

把从1到n标号的n个球放到m个无区别的盒子里，要求每个盒子里至少有一个小球，问不同的放法数量。

(1)n独自占一个盒子；那么剩下的球只能放在m-1个盒子中，方案数为

$$S(n-1,m-1)$$

(2) n与别的球共占一个盒子；那么可以事先将1, 2,… n-1这n-1个球放入m个盒子中，然后再将球n可以放入其中一个盒子中，方案数为

$$m*S(n-1,m)$$

$$S(n,m)=m*S(n-1,m)+S(n-1,m-1) \quad (n>1,m>1)$$

边界条件：S (n,1)=1；S(n,n)=1；S(n,k)=0 (k>n)

练习

给定n 个有标号的球，标号依次为1，2，…，n。将这n 个球放入r 个相同的盒子里，不允许有空盒，其不同放置方法的总数记为S(n,r)。例如，S(4,2)=7，这7 种不同的放置方法依次为

① {(1),(234)},
② {(2),(134)},
③ {(3),(124)},
④ {(4),(123)},
⑤ {(12),(34)},
⑥ {(13),(24)},
⑦ {(14),(23)}

递推

将整数n分成k份，且每份不能为空，任意两种分法不能相同(不考虑顺序)，问有多少种不同的分法。

例如：n=7，k=3，下面三种分法被认为是相同的。

1，1，5; 1，5，1; 5，1，1;

共计4分法 (1，1，5; 1，2，4; 1，3，3; 2，2，3;)

用f(i,j)表示将整数i分成j分的分法，可以划分为两类：

(1)j分中不包含1的分法，为保证每份都>=2，可以先那出j个1分到每一份，然后再把剩下的i-j分成j份即可，分法有：f(i-j, j)。

(2) j份中至少有一份为1的分法，可以先那出一个1作为单独的1份，剩下的i-1再分成j-1份即可，分法有：f(i-1, j-1)。

f(i, j)= f(i-j, j)+ f(i-1, j-1)

边界条件：f（i，1）=1，f（i，j）=0，（i<j）