图论选讲

武弘勋

July 3, 2017

开场白

- 定义图 G 为点和边的集合 $< V, E >$

- 定义图 G 为点和边的集合 $< V, E >$
- 图论是十分成功的描述关系与结构的理论

- 定义图 G 为点和边的集合 $< V, E >$
- 图论是十分成功的描述关系与结构的理论
- 一切问题皆图论!

图论

- 定义图 G 为点和边的集合 $<V, E>$
- 图论是十分成功的描述关系与结构的理论
- 一切问题皆图论!
- 并不是开玩笑囧，因为最小独立集是 npc 的嘛（笑

图论

- lzz 说课要深入浅出

- lzz 说课要深入浅出
- 深入：基本是我高二做到的题目（除了 Korn 和 bzoj4061）

- lzz 说课要深入浅出
- 深入：基本是我高二做到的题目（除了 Korn 和 bzoj4061）
- 浅出：按照基本的知识点组织在一起，都是很好懂的题目

无向图

最短路最长路

- 最经典的图论问题

cf 715B

- $n \leq 1000, m \leq 10^4$ 的无向图，一些边的边权你可以任意决定为一些正数，使得 S 到 T 的最短路长度恰好为 L。

cf 715B

- $n \leq 1000, m \leq 10^4$ 的无向图，一些边的边权你可以任意决定为一些正数，使得 S 到 T 的最短路长度恰好为 L。
- warm up

cf 715B

- $n \le 1000, m \le 10^4$ 的无向图，一些边的边权你可以任意决定为一些正数，使得 S 到 T 的最短路长度恰好为 L。
- warm up
- 注意我们只要保存每个边权都为 1 的时候的最短路中的边就可以了

cf 715B

- $n \leq 1000, m \leq 10^4$ 的无向图，一些边的边权你可以任意决定为一些正数，使得 S 到 T 的最短路长度恰好为 L。
- warm up
- 注意我们只要保存每个边权都为 1 的时候的最短路中的边就可以了
- 边数缩小到 $O(n)$ 条，那么直接修改每个边的边权使得这条路的距离为 L, 然后 check 一下。如果最短路还是小于 L, 那么可以把这个边删去。$O(nmlogn)$

cf 715B

- $n \le 1000, m \le 10^4$ 的无向图，一些边的边权你可以任意决定为一些正数，使得 S 到 T 的最短路长度恰好为 L。
- warm up
- 注意我们只要保存每个边权都为 1 的时候的最短路中的边就可以了
- 边数缩小到 $O(n)$ 条，那么直接修改每个边的边权使得这条路的距离为 L, 然后 check 一下。如果最短路还是小于 L, 那么可以把这个边删去。$O(nmlogn)$
- 更好的做法?

cf 715B

- $n \leq 1000, m \leq 10^4$ 的无向图，一些边的边权你可以任意决定为一些正数，使得 S 到 T 的最短路长度恰好为 L。
- warm up
- 注意我们只要保存每个边权都为 1 的时候的最短路中的边就可以了
- 边数缩小到 $O(n)$ 条，那么直接修改每个边的边权使得这条路的距离为 L, 然后 check 一下。如果最短路还是小于 L, 那么可以把这个边删去。$O(nmlogn)$
- 更好的做法?
- 我们可以把一个前缀赋为 $x+1$，一个后缀赋为 x，连续性单调性证明可行。$O(nlogL)$

cf 329E

笛卡尔坐标系上 n 个整点，求最大曼哈顿距离哈密顿回路。

$n \leq 10^5$

cf 329E

- 先考虑一维的情况，每条边的贡献为 $2i$

cf 329E

- 先考虑一维的情况，每条边的贡献为 $2i$
- 贡献放到点上就是每个点的贡献为 $2x$ 或者 $-2x$，需要是『单个』的合法括号序列

cf 329E

- 先考虑一维的情况，每条边的贡献为 $2i$
- 贡献放到点上就是每个点的贡献为 $2x$ 或者 $-2x$，需要是『单个』的合法括号序列
- 那么显然中位数左边为 $-2x$，中位数右边为 $2x$ 最优

cf 329E

- 先考虑一维的情况，每条边的贡献为 $2i$
- 贡献放到点上就是每个点的贡献为 $2x$ 或者 $-2x$，需要是『单个』的合法括号序列
- 那么显然中位数左边为 $-2x$，中位数右边为 $2x$ 最优
- 二维取两维中位数

cf 329E

- 先考虑一维的情况，每条边的贡献为 $2i$
- 贡献放到点上就是每个点的贡献为 $2x$ 或者 $-2x$，需要是『单个』的合法括号序列
- 那么显然中位数左边为 $-2x$，中位数右边为 $2x$ 最优
- 二维取两维中位数
- 左下等于右上，左上等于右下，但是不连通

cf 329E

- 改两个边把两个环并起来，交叉互换

cf 329E

- 改两个边把两个环并起来，交叉互换
- 以这种连法为例，代价是一维中间距离的两倍

cf 329E

- 改两个边把两个环并起来，交叉互换
- 以这种连法为例，代价是一维中间距离的两倍
- 所以取 $min(x_{n/2+1} - x_{n/2}, y_{n/2+1} - y_{n/2})$

cf 329E

- 还没做完，别忘了奇数的情况

cf 329E

- 还没做完，别忘了奇数的情况
- 如果两个线交在了两个点上，那么我们注意这两个点可以把两个环连通起来了

cf 329E

- 还没做完，别忘了奇数的情况
- 如果两个线交在了两个点上，那么我们注意这两个点可以把两个环连通起来了
- 如果两个线正好交在一个点上，那么这个点可以用来做那个交叉互换

WF2006 J

- $n \leq 100$ 个点的有向图，从点 1 走到点 2 在走回去，最少经过多少个不同的点?

WF2006 J

- $n \le 100$ 个点的有向图，从点 1 走到点 2 在走回去，最少经过多少个不同的点?
- 注意第二条路径总是尽量走到第一条路径中靠前的点

- $n \leq 100$ 个点的有向图，从点 1 走到点 2 在走回去，最少经过多少个不同的点?
- 注意第二条路径总是尽量走到第一条路径中靠前的点
- $f[i][j]$ 表示第二条路径的两个起点分别在 i 和 j 的最小代价

WF2006 J

- $n \leq 100$ 个点的有向图，从点 1 走到点 2 在走回去，最少经过多少个不同的点?
- 注意第二条路径总是尽量走到第一条路径中靠前的点
- $f[i][j]$ 表示第二条路径的两个起点分别在 i 和 j 的最小代价
- $g[i][j]$ 表示第二条路径的起点在 i 另外一个终点在 j

WF2006 J

- $n \le 100$ 个点的有向图，从点 1 走到点 2 在走回去，最少经过多少个不同的点?
- 注意第二条路径总是尽量走到第一条路径中靠前的点
- $f[i][j]$ 表示第二条路径的两个起点分别在 i 和 j 的最小代价
- $g[i][j]$ 表示第二条路径的起点在 i 另外一个终点在 j
- 从 $f[i][j]$ 转移到 $g[j][k]$ 和 $g[i][j]$ 转移到 $f[i][k]$

WF2006 J

- $n \le 100$ 个点的有向图，从点 1 走到点 2 在走回去，最少经过多少个不同的点?
- 注意第二条路径总是尽量走到第一条路径中靠前的点
- $f[i][j]$ 表示第二条路径的两个起点分别在 i 和 j 的最小代价
- $g[i][j]$ 表示第二条路径的起点在 i 另外一个终点在 j
- 从 $f[i][j]$ 转移到 $g[j][k]$ 和 $g[i][j]$ 转移到 $f[i][k]$
- 当然你也可以预处理终点的转移去掉一半的点

- $n \le 10^5$ 的无向连通图求两点间模 $k \le 10^9$ 意义下的最短路，可以重复经过边和点

- $n \le 10^5$ 的无向连通图求两点间模 $k \le 10^9$ 意义下的最短路，可以重复经过边和点
- author：jcvb

- $n \le 10^5$ 的无向连通图求两点间模 $k \le 10^9$ 意义下的最短路，可以重复经过边和点
- author：jcvb
- 『我尝试用我的人工智能程序来运行最短路算法，可它似乎出了一点 BUG。它一直在一条正权边上来回穿梭，试图通过超过有符号 32 位长整形所能表示的最大正整数的方式来达到总长度最小化。——p 妈』

取 mod 最短路

- 一样的道理，我们可以反复走同一条边

取 mod 最短路

- 一样的道理，我们可以反复走同一条边
- mod 奇数 k 可以反复走 k 次就消掉了

取 mod 最短路

- 一样的道理，我们可以反复走同一条边
- mod 奇数 k 可以反复走 k 次就消掉了
- mod 偶数，CRT 考虑每个 p^q，生成出 $p^{q'}$ 的所有倍数

取 mod 最短路

- 一样的道理，我们可以反复走同一条边
- mod 奇数 k 可以反复走 k 次就消掉了
- mod 偶数，CRT 考虑每个 p^q，生成出 $p^{q'}$ 的所有倍数
- 2^q 是个例外，判定二分图

取 mod 最短路

- 一样的道理，我们可以反复走同一条边
- mod 奇数 k 可以反复走 k 次就消掉了
- mod 偶数，CRT 考虑每个 p^q，生成出 $p^{q'}$ 的所有倍数
- 2^q 是个例外，判定二分图
- 最后其实就等于是 0 或者 gcd

连通性

- 很基本的『关系』

连通性

- 很基本的『关系』
- 注意是割点、桥、连通、双连通。

cf657 E

- $n, m \leq 3 * 10^5$ 的无向图，$q \leq 3 * 10^5$ 个询问

cf657 E

- $n, m \leq 3 * 10^5$ 的无向图, $q \leq 3 * 10^5$ 个询问
- 每次给你一个点的集合 V' 和额外的边集 E'

cf657 E

- $n, m \leq 3 * 10^5$ 的无向图, $q \leq 3 * 10^5$ 个询问
- 每次给你一个点的集合 V' 和额外的边集 E'
- 问是否 $\forall x, y \in V'$，在 $E \cup E'$ 中存在一条不经过重复边的路径先从 x 到 y 再从 y 到 x, 强制在线

cf657 E

- $n, m \leq 3 * 10^5$ 的无向图, $q \leq 3 * 10^5$ 个询问
- 每次给你一个点的集合 V' 和额外的边集 E'
- 问是否 $\forall x, y \in V'$，在 $E \cup E'$ 中存在一条不经过重复边的路径先从 x 到 y 再从 y 到 x, 强制在线
- 缩双连通分量，之后求个虚树判断是否双连通即可

Korn

一个有 n 个点的无向图

求所有这样的点:

从它开始走，只要当前点有一条连出去的未访问过的边就要继续走，每次必须走一条之前没有访问过的边

如果从它开始走无论怎么走都会走出一条欧拉回路

就称它不可避

求所有不可避的点

$n \leq 10^5$

Korn

- 猜猜什么时候不可避?

Korn

- 猜猜什么时候不可避?
- 当且仅当所有环都经过这个点

Korn

- 猜猜什么时候不可避?
- 当且仅当所有环都经过这个点
- 充分性显然,必要性考虑把不经过这个点的环删去之后求欧拉回路

Korn

- 猜猜什么时候不可避?
- 当且仅当所有环都经过这个点
- 充分性显然，必要性考虑把不经过这个点的环删去之后求欧拉回路
- 怎么判定呢?

Korn

- 继续深挖性质，考虑删除这个点，所有环都过这个点的话留下的一定是森林

Korn

- 继续深挖性质，考虑删除这个点，所有环都过这个点的话留下的一定是森林
- 考虑删去这个点之后可能分成若干联通块

Korn

- 继续深挖性质，考虑删除这个点，所有环都过这个点的话留下的一定是森林
- 考虑删去这个点之后可能分成若干联通块
- 每个联通块是树的充要条件是恰有 n-1 条边

Korn

- 继续深挖性质，考虑删除这个点，所有环都过这个点的话留下的一定是森林
- 考虑删去这个点之后可能分成若干联通块
- 每个联通块是树的充要条件是恰有 n-1 条边
- 如果这个点不是割点，直接减去这个点的度数

Korn

- 继续深挖性质，考虑删除这个点，所有环都过这个点的话留下的一定是森林
- 考虑删去这个点之后可能分成若干联通块
- 每个联通块是树的充要条件是恰有 n-1 条边
- 如果这个点不是割点，直接减去这个点的度数
- 如果这个点是割点，枚举这个点连出的每条边并判断?

- 继续深挖性质，考虑删除这个点，所有环都过这个点的话留下的一定是森林
- 考虑删去这个点之后可能分成若干联通块
- 每个联通块是树的充要条件是恰有 n-1 条边
- 如果这个点不是割点，直接减去这个点的度数
- 如果这个点是割点，枚举这个点连出的每条边并判断?
- 怎么知道连到的每个联通块所包含的边数呢

Korn

- 继续深挖性质，考虑删除这个点，所有环都过这个点的话留下的一定是森林
- 考虑删去这个点之后可能分成若干联通块
- 每个联通块是树的充要条件是恰有 n-1 条边
- 如果这个点不是割点，直接减去这个点的度数
- 如果这个点是割点，枚举这个点连出的每条边并判断？
- 怎么知道连到的每个联通块所包含的边数呢
- 缩点双形成点双树，点双树中记录下子树边数和即可

环

- 很基本的图的结构，但是同时也很难处理

环

- 很基本的图的结构，但是同时也很难处理
- 为我们带来了一系列的 npc 问题

UR2B 跳蚤公路

- $n \leq 100$ 的无向图中每条边的权都是 $x + b$ 或 $-x + b$

UR2B 跳蚤公路

- $n \leq 100$ 的无向图中每条边的权都是 $x + b$ 或 $-x + b$
- 对所有点 i，求 x 的范围使得没有从 1 到 i 的含负权环路径

UR2B 跳蚤公路

- $n \leq 100$ 的无向图中每条边的权都是 $x + b$ 或 $-x + b$
- 对所有点 i，求 x 的范围使得没有从 1 到 i 的含负权环路径
- 二分 x，找负权环看系数来判定

UR2B 跳蚤公路

- $n \le 100$ 的无向图中每条边的权都是 $x+b$ 或 $-x+b$
- 对所有点 i，求 x 的范围使得没有从 1 到 i 的含负权环路径
- 二分 x，找负权环看系数来判定
- 标解是什么？

- $n \leq 100$ 的无向图中每条边的权都是 $x+b$ 或 $-x+b$
- 对所有点 i，求 x 的范围使得没有从 1 到 i 的含负权环路径
- 二分 x，找负权环看系数来判定
- 标解是什么？
- 第 n 步迭代不能更新，对所有系数存下来解不等式

- $n \le 100$ 的无向图中每条边的权都是 $x + b$ 或 $-x + b$
- 对所有点 i，求 x 的范围使得没有从 1 到 i 的含负权环路径
- 二分 x，找负权环看系数来判定
- 标解是什么？
- 第 n 步迭代不能更新，对所有系数存下来解不等式
- 集合 1 的最小值小于集合 2 最小值的不等式？拆成并和交

- 积和式和行列式的关系

环覆盖

- 积和式和行列式的关系
- 行列式做环覆盖

生成树

生成树计数

- 经典的图论计数

生成树计数

- 经典的图论计数
- 基尔霍夫矩阵

- $n, k \le 50, e_w \le 10^9$ 求所有生成树的权值和的 k 次方和

- $n, k \leq 50, e_w \leq 10^9$ 求所有生成树的权值和的 k 次方和
- author：skydec

hihocoder Challenge 28

- $n, k \le 50, e_w \le 10^9$ 求所有生成树的权值和的 k 次方和
- author：skydec
- k 次方和可以拆成选 k 条可以相同的边的乘积

- $n, k \leq 50, e_w \leq 10^9$ 求所有生成树的权值和的 k 次方和
- author：skydec
- k 次方和可以拆成选 k 条可以相同的边的乘积
- 直接暴力插值即可，$O(n^5)$

曼哈顿距离最大生成树

- $n \leq 10^5$

曼哈顿距离最大生成树

- $n \leq 10^5$
- $n \leq 10^6$

曼哈顿距离最大生成树

- $n \le 10^5$
- $n \le 10^6$
- easy

USACO OPEN17 grass

- 动态修改点的颜色，求不同色点间边权的最小值

USACO OPEN17 grass

- 动态修改点的颜色，求不同色点间边权的最小值
- $n \leq 5 * 10^5$

USACO OPEN17 grass

- 动态修改点的颜色，求不同色点间边权的最小值
- $n \leq 5 * 10^5$
- 两点间颜色不同，那么任何一个路径上都一定会有不同

USACO OPEN17 grass

- 动态修改点的颜色，求不同色点间边权的最小值
- $n \leq 5 * 10^5$
- 两点间颜色不同，那么任何一个路径上都一定会有不同
- 取最小生成树，每个点维护下孩子的所有颜色

有向图

- 一个 $n \leq 1000$ 个点 $m \leq 1000$ 条边的有重边自环的 DAG

csacademy Room18 H

- 一个 $n \leq 1000$ 个点 $m \leq 1000$ 条边的有重边自环的 DAG
- 边带权

csacademy Room18 H

- 一个 $n \leq 1000$ 个点 $m \leq 1000$ 条边的有重边自环的 DAG
- 边带权
- 你每次走到一个点的时候，这个点的所有出边边权随机打乱

csacademy Room18 H

- 一个 $n \le 1000$ 个点 $m \le 1000$ 条边的有重边自环的 DAG
- 边带权
- 你每次走到一个点的时候，这个点的所有出边边权随机打乱
- 你每次可以根据现在出边的边权决策往哪走

csacademy Room18 H

- 一个 $n \leq 1000$ 个点 $m \leq 1000$ 条边的有重边自环的 DAG
- 边带权
- 你每次走到一个点的时候，这个点的所有出边边权随机打乱
- 你每次可以根据现在出边的边权决策往哪走
- 求你最优策略下从 S 走到 T 的期望距离

csacademy Room18 H

- 一个 $n \le 1000$ 个点 $m \le 1000$ 条边的有重边自环的 DAG
- 边带权
- 你每次走到一个点的时候，这个点的所有出边边权随机打乱
- 你每次可以根据现在出边的边权决策往哪走
- 求你最优策略下从 S 走到 T 的期望距离
- 注意图有自环和重边

csacademy Room18 H

- 按照拓扑序 dp

csacademy Room18 H

- 按照拓扑序 dp
- 对每个点二分它的最优期望距离 L

csacademy Room18 H

- 按照拓扑序 dp
- 对每个点二分它的最优期望距离 L
- 枚举实际最优距离 d，只有 $O(nm)$ 种，每个点匹配一个后缀，求出概率

- 按照拓扑序 dp
- 对每个点二分它的最优期望距离 L
- 枚举实际最优距离 d，只有 $O(nm)$ 种，每个点匹配一个后缀，求出概率
- 最后算出期望，和 L 比大小

传递闭包

线代方法

- 每个点连一个自环，然后删去 s 的所有入边和 t 的所有出边

线代方法

- 每个点连一个自环，然后删去 s 的所有入边和 t 的所有出边
- 加一条 t 到 s 的边，变成环覆盖

- 每个点连一个自环，然后删去 s 的所有入边和 t 的所有出边
- 加一条 t 到 s 的边，变成环覆盖
- zjoi 讲课内容这里就不展开了

gym101372 E

- $n \leq 2 * 10^5, m \leq 2 * 10^5$ 的 DAG

gym101372 E

- $n \leq 2 * 10^5, m \leq 2 * 10^5$ 的 DAG
- 两倍近似计算每个点的传递闭包大小

gym101372 E

- $n \leq 2 * 10^5, m \leq 2 * 10^5$ 的 DAG
- 两倍近似计算每个点的传递闭包大小
- minhash trick

gym101372 E

- $n \leq 2 * 10^5, m \leq 2 * 10^5$ 的 DAG
- 两倍近似计算每个点的传递闭包大小
- minhash trick
- 造随机数要小心

2-SAT

CERC16L

- 构造一个 n 个变量的 2-SAT，使得它只有给定的三个解

CERC16L

- 构造一个 n 个变量的 2-SAT，使得它只有给定的三个解
- $n \leq 50$，不超过 500 条限制

- 构造一个 n 个变量的 2-SAT，使得它只有给定的三个解
- $n \leq 50$，不超过 500 条限制
- 三个解真值表只有 $2^3 = 8$ 种，真值表相同相反的变量并到一起只有 4 种了

CERC16L

- 构造一个 n 个变量的 2-SAT，使得它只有给定的三个解
- $n \leq 50$，不超过 500 条限制
- 三个解真值表只有 $2^3 = 8$ 种，真值表相同相反的变量并到一起只有 4 种了
- 可以暴力连边然后 check，或者构造一下

竞赛图

bzoj4727

- 给你一个竞赛图 $n \leq 2000$，求每个点经过点数最多的哈密顿路径经过多少个点，输出解

bzoj4727

- 给你一个竞赛图 $n \leq 2000$，求每个点经过点数最多的哈密顿路径经过多少个点，输出解
- 强连通竞赛图一定存在哈密顿回路

bzoj4727

- 给你一个竞赛图 $n \le 2000$，求每个点经过点数最多的哈密顿路径经过多少个点，输出解
- 强连通竞赛图一定存在哈密顿回路
- 证明?

bzoj4727

- 给你一个竞赛图 $n \leq 2000$，求每个点经过点数最多的哈密顿路径经过多少个点，输出解
- 强连通竞赛图一定存在哈密顿回路
- 证明?
- 构造?

二分图

二分图

- 分成两个集合

二分图

- 分成两个集合
- 二染色

二分图

- 分成两个集合
- 二染色
- 问题大多和匹配有关，我们下午再说

最小边支配集

- 选出最少的边，使得每个边都和至少一个选出的边相邻

最小边支配集

- 选出最少的边，使得每个边都和至少一个选出的边相邻
- 给大家思考一会

最小边支配集

- 选出最少的边，使得每个边都和至少一个选出的边相邻
- 给大家思考一会
- 嗯是个 npc 问题，度数大于 2 就可以规约到 3-SAT

cf542 E

- $n \leq 1000$ 个点 $m \leq 10^4$ 条边的无向图

cf542 E

- $n \leq 1000$ 个点 $m \leq 10^4$ 条边的无向图
- 每次缩起来两个不相连的点，最后最长能缩成多长的链?

cf542 E

- $n \leq 1000$ 个点 $m \leq 10^4$ 条边的无向图
- 每次缩起来两个不相连的点，最后最长能缩成多长的链?
- 归纳法，奇环无解

cf542 E

- $n \le 1000$ 个点 $m \le 10^4$ 条边的无向图
- 每次缩起来两个不相连的点，最后最长能缩成多长的链?
- 归纳法，奇环无解
- 二分图的话每个两个有边的点在最后的链上一定相邻

cf542 E

- $n \leq 1000$ 个点 $m \leq 10^4$ 条边的无向图
- 每次缩起来两个不相连的点，最后最长能缩成多长的链?
- 归纳法，奇环无解
- 二分图的话每个两个有边的点在最后的链上一定相邻
- 每个点 bfs 找最长路

bzoj4061

- 一个 $n \le 10^5$ 个点 $m \le 3 * 10^5$ 个边的无向图

bzoj4061

- 一个 $n \le 10^5$ 个点 $m \le 3 * 10^5$ 个边的无向图
- 新建一个点，确定它到每个边的路径长度，非负可以不是整数

bzoj4061

- 一个 $n \leq 10^5$ 个点 $m \leq 3 * 10^5$ 个边的无向图
- 新建一个点，确定它到每个边的路径长度，非负可以不是整数
- 使得每个点到 1 和 2 的最短路都不经过他

bzoj4061

- 一个 $n \le 10^5$ 个点 $m \le 3 * 10^5$ 个边的无向图
- 新建一个点，确定它到每个边的路径长度，非负可以不是整数
- 使得每个点到 1 和 2 的最短路都不经过他
- 最小化它到每个点的距离的和

bzoj4061

- 先求出每个点到 1 和 2 的最短路

bzoj4061

- 先求出每个点到 1 和 2 的最短路
- x_i 表示这个点到 i 的距离，可以列出方程 $x_1 + x_i \geq k$

bzoj4061

- 先求出每个点到 1 和 2 的最短路
- x_i 表示这个点到 i 的距离，可以列出方程 $x_1 + x_i \geq k$
- 显然在满足方程的情况下每个点的距离 x_i 越小越好

bzoj4061

- 先求出每个点到 1 和 2 的最短路
- x_i 表示这个点到 i 的距离，可以列出方程 $x_1 + x_i \geq k$
- 显然在满足方程的情况下每个点的距离 x_i 越小越好
- $x_i = max(|x_1 - k_1|, |x_2 - k_2|)$

bzoj4061

- 先求出每个点到 1 和 2 的最短路
- x_i 表示这个点到 i 的距离，可以列出方程 $x_1 + x_i \geq k$
- 显然在满足方程的情况下每个点的距离 x_i 越小越好
- $x_i = max(|x_1 - k_1|, |x_2 - k_2|)$
- 最小化 $\sum x_i$，这是个切比雪夫距离，转 45 度变成曼哈顿距离

bzoj4061

- 先求出每个点到 1 和 2 的最短路
- x_i 表示这个点到 i 的距离，可以列出方程 $x_1 + x_i \geq k$
- 显然在满足方程的情况下每个点的距离 x_i 越小越好
- $x_i = max(|x_1 - k_1|, |x_2 - k_2|)$
- 最小化 $\sum x_i$，这是个切比雪夫距离，转 45 度变成曼哈顿距离
- 两维取中位数即可

三分图?

- 我们能不能定义一个三分图呢?

三分图?

- 我们能不能定义一个三分图呢?
- 图能不能三染色?

三分图?

- 我们能不能定义一个三分图呢?
- 图能不能三染色?
- npc

有向三分图?

- 我们试着换一个定义

有向三分图?

- 我们试着换一个定义
- 似乎很好判定了? 有什么意义吗?

agc 006 F

- $n \le 10^5$，$n * n$ 的棋盘上有 $m \le 10^5$ 个点是黑色

agc 006 F

- $n \leq 10^5$，$n * n$ 的棋盘上有 $m \leq 10^5$ 个点是黑色
- 如果 $a[i][j]$ 和 $a[j][k]$ 是黑的，那么 $a[k][i]$ 可以被染黑

agc 006 F

- $n \le 10^5$，$n * n$ 的棋盘上有 $m \le 10^5$ 个点是黑色
- 如果 $a[i][j]$ 和 $a[j][k]$ 是黑的，那么 $a[k][i]$ 可以被染黑
- 最终有多少个黑点?

agc 006 F

- 其实是 mod 3 意义下的三元环

agc 006 F

- 其实是 mod 3 意义下的三元环
- 如果同时有余 0，1，2 的，那么补全即可

agc 006 F

- 其实是 mod 3 意义下的三元环
- 如果同时有余 0，1，2 的，那么补全即可
- 否则直接是现有的边数

欧拉回路

cf788 B

- $n \le 10^6$ 个点 $m \le 10^6$ 条边的无向图

cf788 B

- $n \le 10^6$ 个点 $m \le 10^6$ 条边的无向图
- 路径是好的当且仅当它经过 $m-2$ 条边两次，剩下两条边一次

cf788 B

- $n \leq 10^6$ 个点 $m \leq 10^6$ 条边的无向图
- 路径是好的当且仅当它经过 $m-2$ 条边两次，剩下两条边一次
- 求有多少个这样的好路径，两个路径不同当且仅当经过路径的 multiset 不同

- $n \le 10^6$ 个点 $m \le 10^6$ 条边的无向图
- 路径是好的当且仅当它经过 $m-2$ 条边两次，剩下两条边一次
- 求有多少个这样的好路径，两个路径不同当且仅当经过路径的 multiset 不同
- 转为欧拉通路

cf788 B

- $n \le 10^6$ 个点 $m \le 10^6$ 条边的无向图
- 路径是好的当且仅当它经过 $m-2$ 条边两次，剩下两条边一次
- 求有多少个这样的好路径，两个路径不同当且仅当经过路径的 multiset 不同
- 转为欧拉通路
- 除了特殊的两个边剩下的边对点度数的贡献都是偶数，所以特殊的两个边必须共一个点

欧拉图计数

- 度数是偶数?

欧拉图计数

- 度数是偶数?
- 前 $n-1$ 个点任意连边，最后一个点连到所有奇数点

欧拉图计数

- 度数是偶数?
- 前 $n-1$ 个点任意连边，最后一个点连到所有奇数点
- 连通?

- 度数是偶数?
- 前 $n-1$ 个点任意连边，最后一个点连到所有奇数点
- 连通?
- 容斥

欧拉回路计数

- BEST 定理

欧拉回路计数

- BEST 定理
- 任意一个点的生成树形图个数乘上每个点度数减 1 的阶乘

cf547 D

- 有一些点 (x, y)，请你对点黑白染色，使得每行每列都满足 $|blackpoint - whitepoint| <= 1$

cf547 D

- 有一些点 (x, y)，请你对点黑白染色，使得每行每列都满足 $|blackpoint - whitepoint| <= 1$
- $n \leq 2 * 10^5$

cf547 D

- 有一些点 (x, y)，请你对点黑白染色，使得每行每列都满足 $|blackpoint - whitepoint| <= 1$
- $n \leq 2 * 10^5$
- 如果白色点个数等于黑色点个数怎么做呢?

cf547 D

- 有一些点 (x, y)，请你对点黑白染色，使得每行每列都满足 $|blackpoint - whitepoint| <= 1$
- $n \leq 2 * 10^5$
- 如果白色点个数等于黑色点个数怎么做呢?
- 行列连边连出一个二分图，求欧拉回路黑白染色

cf547 D

- 有一些点 (x, y)，请你对点黑白染色，使得每行每列都满足 $|blackpoint - whitepoint| <= 1$
- $n \leq 2 * 10^5$
- 如果白色点个数等于黑色点个数怎么做呢?
- 行列连边连出一个二分图，求欧拉回路黑白染色
- 那么差小于等于 1 我们可以每个奇数行列加一个边使得它存在欧拉回路

cf547 D

- 有一些点 (x, y)，请你对点黑白染色，使得每行每列都满足 $|blackpoint - whitepoint| <= 1$
- $n \leq 2 * 10^5$
- 如果白色点个数等于黑色点个数怎么做呢?
- 行列连边连出一个二分图，求欧拉回路黑白染色
- 那么差小于等于 1 我们可以每个奇数行列加一个边使得它存在欧拉回路
- 二分图两边的奇数点的个数不一定一样多，所以应该两边建两个虚点，然后连到虚点

cf429 E

- 有一些区间 $[li, ri]$，请你对这些区间黑白染色，使得每个点覆盖它的 $|blacksegment - whitesegment| \le 1$

cf429 E

- 有一些区间 $[li, ri]$，请你对这些区间黑白染色，使得每个点覆盖它的 $|blacksegment - whitesegment| \leq 1$
- $n \leq 10^5$

cf429 E

- 有一些区间 $[li, ri]$，请你对这些区间黑白染色，使得每个点覆盖它的 $|blacksegment - whitesegment| \le 1$
- $n \le 10^5$
- 考虑如果是等于，那么就是每个点的被覆盖次数 s_i 等于 0

cf429 E

- 有一些区间 $[li, ri]$，请你对这些区间黑白染色，使得每个点覆盖它的 $|blacksegment - whitesegment| \leq 1$
- $n \leq 10^5$
- 考虑如果是等于，那么就是每个点的被覆盖次数 s_i 等于 0
- 那么我们差分一下这个 s_i, 那么每个区间的贡献就是 $a_l + +$, $a_{r+1} - -$，或者 $a_l - -$,$a_{r+1} + +$

cf429 E

- 有一些区间 $[li, ri]$，请你对这些区间黑白染色，使得每个点覆盖它的 $|blacksegment - whitesegment| \leq 1$
- $n \leq 10^5$
- 考虑如果是等于，那么就是每个点的被覆盖次数 s_i 等于 0
- 那么我们差分一下这个 s_i, 那么每个区间的贡献就是 $a_l + +$, $a_{r+1} - -$，或者 $a_l - -$,$a_{r+1} + +$
- 连一条 l 和 $r + 1$ 之间的边，求欧拉回路黑白染色

cf429 E

- 有一些区间 $[li, ri]$，请你对这些区间黑白染色，使得每个点覆盖它的 $|blacksegment - whitesegment| \le 1$
- $n \le 10^5$
- 考虑如果是等于，那么就是每个点的被覆盖次数 s_i 等于 0
- 那么我们差分一下这个 s_i, 那么每个区间的贡献就是 $a_l + +$, $a_{r+1} - -$，或者 $a_l - -$,$a_{r+1} + +$
- 连一条 l 和 $r + 1$ 之间的边，求欧拉回路黑白染色
- 大于等于 1 怎么做呢？这里可以把奇数点两两配对了

博弈

图论中的博弈

- 图上我们可以顺着边移动，就衍生出了许多博弈问题

- 图上我们可以顺着边移动，就衍生出了许多博弈问题
- 博弈问题的特点：灵活多变

UVG

- 二分图上不能走过重复的点，每人走一步，谁会获胜?

UVG

- 二分图上不能走过重复的点，每人走一步，谁会获胜？
- 经典问题

UVG

- 二分图上不能走过重复的点，每人走一步，谁会获胜？
- 经典问题
- 先手必胜当且仅当起点一定在最大匹配上

- 二分图上不能走过重复的点，每人走一步，谁会获胜?
- 经典问题
- 先手必胜当且仅当起点一定在最大匹配上
- 点是否一定在最大匹配上?

UVG

- 二分图上不能走过重复的点，每人走一步，谁会获胜?
- 经典问题
- 先手必胜当且仅当起点一定在最大匹配上
- 点是否一定在最大匹配上?
- bfs 有无增广轨

UEG

- 二分图上不能走过重复的边，每人走一步，谁会获胜？

UEG

- 二分图上不能走过重复的边，每人走一步，谁会获胜?
- 经典问题

- 二分图上不能走过重复的边，每人走一步，谁会获胜？
- 经典问题
- 显然如果存在一个集合 S，满足外界每个点到 S 的边数都是偶数，那么从 S 里出发，无论先手怎么移动，后手总能一步移动回来，从而此时后手必胜

UEG

- 二分图上不能走过重复的边，每人走一步，谁会获胜?
- 经典问题
- 显然如果存在一个集合 S，满足外界每个点到 S 的边数都是偶数，那么从 S 里出发，无论先手怎么移动，后手总能一步移动回来，从而此时后手必胜
- 二分图上我们不妨试着在一侧找出这样一个 $evenkernel$，显然这就等于是在二分图的邻接矩阵中找一个包含起点的 $xor = 0$ 的向量集合

- 二分图上不能走过重复的边，每人走一步，谁会获胜?
- 经典问题
- 显然如果存在一个集合 S，满足外界每个点到 S 的边数都是偶数，那么从 S 里出发，无论先手怎么移动，后手总能一步移动回来，从而此时后手必胜
- 二分图上我们不妨试着在一侧找出这样一个 $evenkernel$, 显然这就等于是在二分图的邻接矩阵中找一个包含起点的 $xor = 0$ 的向量集合
- 为了证明这一点我们要证明如果不存在一个对第 i 行的线性表出，那么先手就一定可以通过移动一步使得存在一个对第 j 列的线性表出

- 先手在左侧第 i 个，等于是在第 i 行，每移动一步等于选择第 j 列，然后把 i 行 j 列的 1 变成 0，然后后手就在第 j 列

- 先手在左侧第 i 个，等于是在第 i 行，每移动一步等于选择第 j 列，然后把 i 行 j 列的 1 变成 0，然后后手就在第 j 列
- 也就是如果不存在对 i 行的线性表出，那么一定存在一个 j，使得 $a[i][j] = 0$ 之后存在对 j 这一列的线性表出

- 先手在左侧第 i 个，等于是在第 i 行，每移动一步等于选择第 j 列，然后把 i 行 j 列的 1 变成 0，然后后手就在第 j 列
- 也就是如果不存在对 i 行的线性表出，那么一定存在一个 j，使得 $a[i][j] = 0$ 之后存在对 j 这一列的线性表出
- 也就等价于修改之前列上可以 xor 出一个只有第 i 行是 1 的向量，这一定是合法的

- 先手在左侧第 i 个，等于是在第 i 行，每移动一步等于选择第 j 列，然后把 i 行 j 列的 1 变成 0，然后后手就在第 j 列
- 也就是如果不存在对 i 行的线性表出，那么一定存在一个 j，使得 $a[i][j]=0$ 之后存在对 j 这一列的线性表出
- 也就等价于修改之前列上可以 xor 出一个只有第 i 行是 1 的向量，这一定是合法的
- 因为我们把它加到矩阵的最后一列，因为只有第 i 行是 1，而第 i 行本来就和别的行线性无关，所以矩阵的秩不会改变

- 先手在左侧第 i 个，等于是在第 i 行，每移动一步等于选择第 j 列，然后把 i 行 j 列的 1 变成 0，然后后手就在第 j 列
- 也就是如果不存在对 i 行的线性表出，那么一定存在一个 j，使得 $a[i][j] = 0$ 之后存在对 j 这一列的线性表出
- 也就等价于修改之前列上可以 xor 出一个只有第 i 行是 1 的向量，这一定是合法的
- 因为我们把它加到矩阵的最后一列，因为只有第 i 行是 1，而第 i 行本来就和别的行线性无关，所以矩阵的秩不会改变
- 也就意味着前面的列可以 xor 出来这个向量，从而证明了这个结论

NEERC16 G Game on Graph

- 人赢和妹子玩游戏，每人轮流在有向图上移动一步，人赢先手

NEERC16 G Game on Graph

- 人赢和妹子玩游戏，每人轮流在有向图上移动一步，人赢先手
- 妹子想要游戏无穷，有穷的话赢更好

- 人赢和妹子玩游戏，每人轮流在有向图上移动一步，人赢先手
- 妹子想要游戏无穷，有穷的话赢更好
- 人赢想要游戏有穷，有穷的话赢最好

NEERC16 G Game on Graph

- 人赢和妹子玩游戏，每人轮流在有向图上移动一步，人赢先手
- 妹子想要游戏无穷，有穷的话赢更好
- 人赢想要游戏有穷，有穷的话赢最好
- 求最后会怎么样, $n, m \leq 10^5$

NEERC16 G Game on Graph

- 把棋子位置和先手情况的 pair 作为一个点

NEERC16 G Game on Graph

- 把棋子位置和先手情况的 pair 作为一个点
- 对于妹子点后继点中有有穷点那么有穷

NEERC16 G Game on Graph

- 把棋子位置和先手情况的 pair 作为一个点
- 对于妹子点后继点中有有穷点那么有穷
- 对于人赢点后继点都是有穷点才会有穷

NEERC16 G Game on Graph

- 把棋子位置和先手情况的 pair 作为一个点
- 对于妹子点后继点中有有穷点那么有穷
- 对于人赢点后继点都是有穷点才会有穷
- 反向 bfs 标记

NEERC16 G Game on Graph

- 把棋子位置和先手情况的 pair 作为一个点
- 对于妹子点后继点中有有穷点那么有穷
- 对于人赢点后继点都是有穷点才会有穷
- 反向 bfs 标记
- 如果有穷的话胜负也是类似的，妹子要走到有穷中赢的点才会行

NEERC16 G Game on Graph

- 把棋子位置和先手情况的 pair 作为一个点
- 对于妹子点后继点中有有穷点那么有穷
- 对于人赢点后继点都是有穷点才会有穷
- 反向 bfs 标记
- 如果有穷的话胜负也是类似的，妹子要走到有穷中赢的点才会行
- 然后一样的反向标记一波

弦图

定义

- 弦图：任意一个大于 3 的环都有一条弦的图

定义

- 弦图：任意一个大于 3 的环都有一条弦的图
- 诱导子图：若干个点和他们之间的所有边形成的子图

定义

- 弦图：任意一个大于 3 的环都有一条弦的图
- 诱导子图：若干个点和他们之间的所有边形成的子图
- 单纯点：她和她相邻的所有点的诱导子图是一个团的点

定义

- 弦图：任意一个大于 3 的环都有一条弦的图
- 诱导子图：若干个点和他们之间的所有边形成的子图
- 单纯点：她和她相邻的所有点的诱导子图是一个团的点
- 完美消除序列：每次从图中找一个单纯点删去形成的序列

结论

- 弦图中任何一个点的子集的诱导子图都是弦图，（诱导子图里所有出现的环在原图中对应的弦，在诱导子图中也出现了）

- 弦图中任何一个点的子集的诱导子图都是弦图，（诱导子图里所有出现的环在原图中对应的弦，在诱导子图中也出现了）
- （弦图的任何一个子图不一定是弦图，必须是诱导子图才成立）

结论

- 弦图中任何一个点的子集的诱导子图都是弦图，（诱导子图里所有出现的环在原图中对应的弦，在诱导子图中也出现了）
- （弦图的任何一个子图不一定是弦图，必须是诱导子图才成立）
- 弦图一定存在单纯点

结论

- 弦图中任何一个点的子集的诱导子图都是弦图，（诱导子图里所有出现的环在原图中对应的弦，在诱导子图中也出现了）
- （弦图的任何一个子图不一定是弦图，必须是诱导子图才成立）
- 弦图一定存在单纯点
- (四个点的弦图只有一种，所有弦图都是在这个图上加三角形、加弦产生的，加三角形单纯点数不降，加弦相当于重叠两个弦图，单纯点数不降)

- 弦图中任何一个点的子集的诱导子图都是弦图，（诱导子图里所有出现的环在原图中对应的弦，在诱导子图中也出现了）
- （弦图的任何一个子图不一定是弦图，必须是诱导子图才成立）
- 弦图一定存在单纯点
- (四个点的弦图只有一种，所有弦图都是在这个图上加三角形、加弦产生的，加三角形单纯点数不降，加弦相当于重叠两个弦图，单纯点数不降)
- 弦图一定存在完美消除序列，存在完美消除序列的一定是弦图！

- 弦图中任何一个点的子集的诱导子图都是弦图，（诱导子图里所有出现的环在原图中对应的弦，在诱导子图中也出现了）
- （弦图的任何一个子图不一定是弦图，必须是诱导子图才成立）
- 弦图一定存在单纯点
- (四个点的弦图只有一种，所有弦图都是在这个图上加三角形、加弦产生的，加三角形单纯点数不降，加弦相当于重叠两个弦图，单纯点数不降)
- 弦图一定存在完美消除序列，存在完美消除序列的一定是弦图！
- 前者是因为删除一个单纯点之后等于是剩下点的诱导子图，肯定还是弦图。后者是因为每次加进去的都是一个单纯点，如果加入后产生了大于 3 的无弦环，和它相邻的两个环上点有边，矛盾了。(新的认识：弦图是不断地加团产生的！所以

- 好了，我们对她的认识已经大大加深了，可以开始攻略了（雾

- 好了，我们对她的认识已经大大加深了，可以开始攻略了 (雾
- 如何求出一个完美消除序列?

- 好了，我们对她的认识已经大大加深了，可以开始攻略了 (雾
- 如何求出一个完美消除序列?
- 可能看到这个问题第一反应是不断找单纯点删除

算法

- 好了，我们对她的认识已经大大加深了，可以开始攻略了 (雾
- 如何求出一个完美消除序列?
- 可能看到这个问题第一反应是不断找单纯点删除
- 一般图找单纯点似乎没有比 $O(nm)$ 暴力更好的做法了

- 好了，我们对她的认识已经大大加深了，可以开始攻略了 (雾
- 如何求出一个完美消除序列?
- 可能看到这个问题第一反应是不断找单纯点删除
- 一般图找单纯点似乎没有比 $O(nm)$ 暴力更好的做法了
- 当然 m 和 n 同阶的时候可以用 $O(n^{2.3728639})$ 的矩阵乘法做，等于是邻接 01 矩阵的三次方

- 好了，我们对她的认识已经大大加深了，可以开始攻略了(雾
- 如何求出一个完美消除序列?
- 可能看到这个问题第一反应是不断找单纯点删除
- 一般图找单纯点似乎没有比 $O(nm)$ 暴力更好的做法了
- 当然 m 和 n 同阶的时候可以用 $O(n^{2.3728639})$ 的矩阵乘法做，等于是邻接 01 矩阵的三次方
- 对妹子这么暴力是不行的

算法

- 最大势（MCS）算法

- 最大势（MCS）算法
- 我们每次找一个和最多的已访问点相邻的未访问点加到队列里（注意不连通的时候和开始相邻的个数可以是 0），队列倒序就是一个完美消除序列

- 最大势（MCS）算法
- 我们每次找一个和最多的已访问点相邻的未访问点加到队列里（注意不连通的时候和开始相邻的个数可以是 0），队列倒序就是一个完美消除序列
- 为什么是对的？

算法

- 最大势（MCS）算法
- 我们每次找一个和最多的已访问点相邻的未访问点加到队列里（注意不连通的时候和开始相邻的个数可以是 0），队列倒序就是一个完美消除序列
- 为什么是对的？
- 不会证。。似乎还能用这种方法找图的生成森林分解？。。不懂这套理论 TAT

- 最大势（MCS）算法
- 我们每次找一个和最多的已访问点相邻的未访问点加到队列里（注意不连通的时候和开始相邻的个数可以是 0），队列倒序就是一个完美消除序列
- 为什么是对的？
- 不会证。。似乎还能用这种方法找图的生成森林分解？。。不懂这套理论 TAT
- 实现技巧

- 最大势（MCS）算法
- 我们每次找一个和最多的已访问点相邻的未访问点加到队列里（注意不连通的时候和开始相邻的个数可以是 0)，队列倒序就是一个完美消除序列
- 为什么是对的?
- 不会证。。似乎还能用这种方法找图的生成森林分解?。。不懂这套理论 TAT
- 实现技巧
- 我们等于要支持每次给一个元素 +1、取出最大元素，用链表维护每个值对应的所有元素，修改操作肯定是 $O(1)$ 的，查询操作我们只需要记录一个 mx 表示最大的有值的链表位置，如果 mx 为空，我们就把 mx 减 1，由于 mx 每次只会 +1，所以均摊下来是 $O(1)$ 的

- 如何判断这个是不是合法的完美消除序列?

算法

- 如何判断这个是不是合法的完美消除序列?
- 考虑每次往里面加点，然后窝等于要判加入的 x 和之前的那些点是否构成一个团，注意其实加入之前那些点中的最后一个加入的点 y 的时候，我们已经判过了和 y 相邻的点是不是团

算法

- 如何判断这个是不是合法的完美消除序列?
- 考虑每次往里面加点，然后窝等于要判加入的 x 和之前的那些点是否构成一个团，注意其实加入之前那些点中的最后一个加入的点 y 的时候，我们已经判过了和 y 相邻的点是不是团
- 充分利用已算过的东西，只需要判 y 是否和 x 相连的每个点相连即可

算法

- 如何判断这个是不是合法的完美消除序列?
- 考虑每次往里面加点，然后窝等于要判加入的 x 和之前的那些点是否构成一个团，注意其实加入之前那些点中的最后一个加入的点 y 的时候，我们已经判过了和 y 相邻的点是不是团
- 充分利用已算过的东西，只需要判 y 是否和 x 相连的每个点相连即可
- 两部分都是 $O(n+m)$ 的

算法

- 如何判断这个是不是合法的完美消除序列?
- 考虑每次往里面加点，然后窝等于要判加入的 x 和之前的那些点是否构成一个团，注意其实加入之前那些点中的最后一个加入的点 y 的时候，我们已经判过了和 y 相邻的点是不是团
- 充分利用已算过的东西，只需要判 y 是否和 x 相连的每个点相连即可
- 两部分都是 $O(n+m)$ 的
- 从而可以知道一个有趣的性质，弦图里，假设 $V(x)$ 为 x 以及和 x 相邻的点的集合，那么 $(V(x)\backslash x) \subseteq V(y)$，其中 y 可以是任意一个和 x 相邻的点

算法

- 如何判断这个是不是合法的完美消除序列?
- 考虑每次往里面加点，然后窝等于要判加入的 x 和之前的那些点是否构成一个团，注意其实加入之前那些点中的最后一个加入的点 y 的时候，我们已经判过了和 y 相邻的点是不是团
- 充分利用已算过的东西，只需要判 y 是否和 x 相连的每个点相连即可
- 两部分都是 $O(n+m)$ 的
- 从而可以知道一个有趣的性质，弦图里，假设 $V(x)$ 为 x 以及和 x 相邻的点的集合，那么 $(V(x)\backslash x) \subseteq V(y)$，其中 y 可以是任意一个和 x 相邻的点
- 也就是我们加入一个点的时候其实会从团里踢出去一些点，从删点来考虑的话，相邻的点的集合从前往后是越来越大的。

按照完美消除序列倒序，一个点的决策自己是可以预料的（雾），之前的点对它的影响是确定的：每个和它相邻的点都两两不同，所以它要和度数个颜色不同。满足这个之后，它对之后的点没有影响，因为之后的点无论如何都是要和度数种颜色不同。。。
所以直接就是倒序做，用单纯点的性质，答案就是 $maxd(u) + 1$，当然这其实就是最大团的大小（后面讲极大团的时候就能理解啦）

最小染色计数

- 每个点都和度数个颜色不同嘛，答案就是 $\prod_u (|S| - d(u))$

最小染色计数

- 每个点都和度数个颜色不同嘛，答案就是 $\prod_u(|S| - d(u))$
- 例题（没错！这是有例题的！不是理性愉悦!)：bzoj3350 相似回文串

- 每个点都和度数个颜色不同嘛，答案就是 $\prod_u(|S| - d(u))$
- 例题（没错！这是有例题的！不是理性愉悦！）：bzoj3350 相似回文串
- 不会证明的话如何解决这类题目？

- 每个点都和度数个颜色不同嘛，答案就是 $\prod_u(|S|-d(u))$
- 例题（没错！这是有例题的！不是理性愉悦！）：bzoj3350 相似回文串
- 不会证明的话如何解决这类题目？
- 猜结论，写暴力把相等的缩起来，再验证是不是弦图

字典序第 k 小的最小染色

- 可以计数是不是就可以求第 k 小啊

- 可以计数是不是就可以求第 k 小啊
- 但是完美消除序列的一个缺点是，我们确定其中一些点的颜色然后去计数是不方便的

字典序第 k 小的最小染色

- 可以计数是不是就可以求第 k 小啊
- 但是完美消除序列的一个缺点是，我们确定其中一些点的颜色然后去计数是不方便的
- 必须要满足字典序就是按照完美消除序列的倒序的顺序才可以

- 可以计数是不是就可以求第 k 小啊
- 但是完美消除序列的一个缺点是，我们确定其中一些点的颜色然后去计数是不方便的
- 必须要满足字典序就是按照完美消除序列的倒序的顺序才可以
- 好在 manacher 是的。。所以我们可以 EXT3350 啦。。可以做到 $O(n)$

极大团

- 倒着加完美消除序列的话，每个点加入的时候都会产生一个团（实际上我们就是在验证这个团）

极大团

- 倒着加完美消除序列的话，每个点加入的时候都会产生一个团（实际上我们就是在验证这个团）
- 每个极大团中一定都有最后加入的点

极大团

- 倒着加完美消除序列的话，每个点加入的时候都会产生一个团（实际上我们就是在验证这个团）
- 每个极大团中一定都有最后加入的点
- 这个点加入的时候产生的团就是这个极大团

极大团

- 倒着加完美消除序列的话，每个点加入的时候都会产生一个团（实际上我们就是在验证这个团）
- 每个极大团中一定都有最后加入的点
- 这个点加入的时候产生的团就是这个极大团
- 所以弦图极大团的个数是 $O(n)$ 的！

极大团

- 倒着加完美消除序列的话，每个点加入的时候都会产生一个团（实际上我们就是在验证这个团）
- 每个极大团中一定都有最后加入的点
- 这个点加入的时候产生的团就是这个极大团
- 所以弦图极大团的个数是 $O(n)$ 的！
- 不过需要注意的是，每个点加入的时候产生的团不一定是极大的

极大团

- 倒着加完美消除序列的话，每个点加入的时候都会产生一个团（实际上我们就是在验证这个团）
- 每个极大团中一定都有最后加入的点
- 这个点加入的时候产生的团就是这个极大团
- 所以弦图极大团的个数是 $O(n)$ 的！
- 不过需要注意的是，每个点加入的时候产生的团不一定是极大的
- 实际上这些极大团的关系是一个树！每个 x 的父亲是它对应的 y，注意 $V(x)$ 集合的缩小关系正好就是树的结构（只不过这个树是 $f(x) > x$）

如果每个点 y 加入的时候产生的团不是极大的，则一定会被一个加入的团包含，也就是如果我们加入 x 的时候没有踢出去任何点，那么就说明 y 的团被包含了，没被包含的就是极大团了，记下每个团被加入时的大小，判一判减去被包含的即可。

- 考虑按照一定顺序选点，我们需要注意的就是当前这个点对没选的点的影响。

- 考虑按照一定顺序选点，我们需要注意的就是当前这个点对没选的点的影响。
- 所以应该从前往后考虑完美消除序列，因为是没选的点，所以正好对应的这个点后面的和它相邻的点。

- 考虑按照一定顺序选点，我们需要注意的就是当前这个点对没选的点的影响。
- 所以应该从前往后考虑完美消除序列，因为是没选的点，所以正好对应的这个点后面的和它相邻的点。
- 这个比较特殊，前面都是从加点的角度考虑，这里是从删点的角度考虑。

- 考虑按照一定顺序选点，我们需要注意的就是当前这个点对没选的点的影响。
- 所以应该从前往后考虑完美消除序列，因为是没选的点，所以正好对应的这个点后面的和它相邻的点。
- 这个比较特殊，前面都是从加点的角度考虑，这里是从删点的角度考虑。
- 考虑一个点删去的时候，如果选它，那么影响是所有和它相邻的点不能被选，如果不选它又不选和它相邻的点那么肯定不如选它，如果选和它相邻的点的话，注意 $(V(x)\backslash x) \subseteq V(y)$

- 考虑按照一定顺序选点，我们需要注意的就是当前这个点对没选的点的影响。
- 所以应该从前往后考虑完美消除序列，因为是没选的点，所以正好对应的这个点后面的和它相邻的点。
- 这个比较特殊，前面都是从加点的角度考虑，这里是从删点的角度考虑。
- 考虑一个点删去的时候，如果选它，那么影响是所有和它相邻的点不能被选，如果不选它又不选和它相邻的点那么肯定不如选它，如果选和它相邻的点的话，注意 $(V(x)\backslash x) \subseteq V(y)$
- 这个会导致更多的没访问的点不能被选了，所以还不如选它来的优。

- 考虑按照一定顺序选点，我们需要注意的就是当前这个点对没选的点的影响。
- 所以应该从前往后考虑完美消除序列，因为是没选的点，所以正好对应的这个点后面的和它相邻的点。
- 这个比较特殊，前面都是从加点的角度考虑，这里是从删点的角度考虑。
- 考虑一个点删去的时候，如果选它，那么影响是所有和它相邻的点不能被选，如果不选它又不选和它相邻的点那么肯定不如选它，如果选和它相邻的点的话，注意 $(V(x) \backslash x) \subseteq V(y)$
- 这个会导致更多的没访问的点不能被选了，所以还不如选它来的优。
- (因为从前往后相邻的点的集合是慢慢变大的，所以从前往后能选就选最优。

- 我们选的团肯定是极大的最优，但是并不等于极大团个数，原因是两个极大团的并可以包含另一个极大团，比如说两边两个三角形，中间用一条边连起来，左右两个极大团的并包含了中间那个大小为 2 的极大团

最小团覆盖

- 我们选的团肯定是极大的最优，但是并不等于极大团个数，原因是两个极大团的并可以包含另一个极大团，比如说两边两个三角形，中间用一条边连起来，左右两个极大团的并包含了中间那个大小为 2 的极大团
- 但是选的肯定是极大团让我们可以去考虑每个点对应的极大团

- 我们选的团肯定是极大的最优，但是并不等于极大团个数，原因是两个极大团的并可以包含另一个极大团，比如说两边两个三角形，中间用一条边连起来，左右两个极大团的并包含了中间那个大小为 2 的极大团
- 但是选的肯定是极大团让我们可以去考虑每个点对应的极大团
- 实际上应该是从前往后考虑每个极大团，如果这个极大团的代表元 x 被某个团覆盖了，那么你选它不如选它的孩子去，如果没有被覆盖，那么你肯定要选它

最小团覆盖

- 我们选的团肯定是极大的最优，但是并不等于极大团个数，原因是两个极大团的并可以包含另一个极大团，比如说两边两个三角形，中间用一条边连起来，左右两个极大团的并包含了中间那个大小为 2 的极大团
- 但是选的肯定是极大团让我们可以去考虑每个点对应的极大团
- 实际上应该是从前往后考虑每个极大团，如果这个极大团的代表元 x 被某个团覆盖了，那么你选它不如选它的孩子去，如果没有被覆盖，那么你肯定要选它
- 其实就是从前往后要选才选，所以是等于最大点独立集的。

一些弦图的例子

- manacher 的时候字符相等关系缩起来之后，不等关系的图（bzoj3350）

一些弦图的例子

- manacher 的时候字符相等关系缩起来之后，不等关系的图（bzoj3350）
- 区间图 (interval graph)：每个点表示一个区间，区间有交则两点之间有一条边。（是弦图的简单证明是我们可以构造一个完美消除序列，因为我们可以每次删去右端点最靠左的一个区间，和这个区间相交的区间之间自然是相交的）(当然这没什么用，因为区间图这个右端点排序贪心的性质比弦图强多了。。还不如直接贪心。。。我们要充分利用题目的特殊性质而不是弄个玩意往上套。。)

一些弦图的例子

- manacher 的时候字符相等关系缩起来之后，不等关系的图（bzoj3350）
- 区间图 (interval graph)：每个点表示一个区间，区间有交则两点之间有一条边。（是弦图的简单证明是我们可以构造一个完美消除序列，因为我们可以每次删去右端点最靠左的一个区间，和这个区间相交的区间之间自然是相交的）(当然这没什么用，因为区间图这个右端点排序贪心的性质比弦图强多了。。还不如直接贪心。。。我们要充分利用题目的特殊性质而不是弄个玩意往上套。。)
- 子树相交图 (intersection graph of subtrees): 每个点表示一个子树，相交的子树之间有边。

一些弦图的例子

- manacher 的时候字符相等关系缩起来之后，不等关系的图（bzoj3350）
- 区间图 (interval graph)：每个点表示一个区间，区间有交则两点之间有一条边。（是弦图的简单证明是我们可以构造一个完美消除序列，因为我们可以每次删去右端点最靠左的一个区间，和这个区间相交的区间之间自然是相交的）(当然这没什么用，因为区间图这个右端点排序贪心的性质比弦图强多了。。还不如直接贪心。。。我们要充分利用题目的特殊性质而不是弄个玩意往上套。。)
- 子树相交图 (intersection graph of subtrees): 每个点表示一个子树，相交的子树之间有边。
- 树的子连通块相交图（the intersection graph of connected subgraphs of a tree）：每个点是树的子联通块，相交的子连通块之间有边。（显然这个结论蕴含了上面那个。。）

- 给你一个一般图

随堂小测 ceoi

- 给你一个一般图
- 快速找出其中的无弦环

advanced graphic?

拓展阅读

- 开阔视野

拓展阅读

- 开阔视野
- 用来出题

HyperGraph

- 每个边连多个端点

HyperGraph

- 每个边连多个端点
- HyperGraph 的 cut 是多项式的

Balanced network flow

- 整个网络的流量对称

Balanced network flow

- 整个网络的流量对称
- 建模一般图最大匹配

结语

结语

- 图论是个非常大的专题，一次讲课很难涉及到它的方方面面

结语

- 图论是个非常大的专题，一次讲课很难涉及到它的方方面面
- 选出了最具代表性的图论题目来讲