Fábio Henrique Viduani Martinez Diego Padilha Rubert

Faculdade de Computação
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

Algoritmos e Programação II, Análise de Sistemas, 2010

Conteúdo da aula

- Introdução e motivação
- Problema da separação
- Ordenação por separação
- 4 Exercícios

- Operação básica em Computação
- Métodos mais eficientes de ordenação
- Ordenação com recursão
- Dividir para conquistar

- Operação básica em Computação
- Métodos mais eficientes de ordenação
- Ordenação com recursão
- Dividir para conquistar

- Operação básica em Computação
- Métodos mais eficientes de ordenação
- Ordenação com recursão
- Dividir para conquistar

- Operação básica em Computação
- Métodos mais eficientes de ordenação
- Ordenação com recursão
- Dividir para conquistar

Problema

Rearranjar o vetor v[p..r] de modo que tenhamos

$$v[p..q] \leqslant v[q+1..r]$$

para algum q em p..r-1. A expressão $v[p..q] \le v[q+1..r]$ significa que $v[i] \le v[j]$ para todo i, $p \le i \le q$, e todo j, $q < j \le r$.

```
int separa(int p, int r, int V[MAX])
{
   int x, i, j;
  x = v[p];
  i = p - 1;
   j = r + 1;
  while (1) {
      do
         j--;
      \} while (V[j] > x);
      do {
         i++;
      } while (V[i] < x);
      if(i < j)
         troca(&V[i], &V[i]);
      else
         return j;
```

- No início de cada iteração valem os seguintes invariantes:
 - ▶ v[p..r] é uma permutação do vetor original,
 - $v[\rho..i] \leqslant x \leqslant v[j..r]$ e
- ▶ Tempo de execução de pior caso é proporcional a r p + 1, isto é, proporcional ao número de elementos do vetor.

- No início de cada iteração valem os seguintes invariantes:
 - ▶ v[p..r] é uma permutação do vetor original,
 - $v[p..i] \leqslant x \leqslant v[j..r]$ e
 - $p \le i \le j \le r$.
- ▶ Tempo de execução de pior caso é proporcional a r p + 1, isto é, proporcional ao número de elementos do vetor.

- No início de cada iteração valem os seguintes invariantes:
 - ▶ v[p..r] é uma permutação do vetor original,
 - $v[p..i] \leqslant x \leqslant v[j..r]$ e
 - $p \leqslant i \leqslant j \leqslant r.$
- ▶ Tempo de execução de pior caso é proporcional a r p + 1, isto é, proporcional ao número de elementos do vetor.

- No início de cada iteração valem os seguintes invariantes:
 - ▶ v[p..r] é uma permutação do vetor original,
 - $v[p..i] \leqslant x \leqslant v[j..r]$ e
 - $p \leqslant i \leqslant j \leqslant r.$
- ▶ Tempo de execução de pior caso é proporcional a r p + 1, isto é, proporcional ao número de elementos do vetor.

- ▶ Separamos os elementos "pequenos" dos elementos "grandes" de um vetor v com r − p elementos
- Ordenamos recursivamente esses dois trechos de v
- "Colamos" esses dois trechos para obter o vetor v original ordenado

- ▶ Separamos os elementos "pequenos" dos elementos "grandes" de um vetor v com r − p elementos
- Ordenamos recursivamente esses dois trechos de v
- "Colamos" esses dois trechos para obter o vetor v original ordenado

- ▶ Separamos os elementos "pequenos" dos elementos "grandes" de um vetor v com r − p elementos
- Ordenamos recursivamente esses dois trechos de v
- "Colamos" esses dois trechos para obter o vetor v original ordenado

```
/* Recebe um vetor V[p..r-1] e o rearranja em ordem crescente */
void quicksort(int p, int r, int V[MAX])
{
   int q;

   if (p < r) {
        q = separa(p, r, V);
        quicksort(p, q, V);
        quicksort(q+1, r, V);
   }
}</pre>
```

Para ordenar um vetor v[0..n − 1] basta chamar a função quicksort com os seguintes argumentos:

```
quicksort(0, n-1, v);
```

Um exemplo de execução da função quicksort para um vetor de entrada $v[0..7] = \{4,6,7,3,5,1,2,8\}$ e chamada

```
quicksort(0, 7, V);
```

Para ordenar um vetor v[0..n − 1] basta chamar a função quicksort com os seguintes argumentos:

```
quicksort(0, n-1, v);
```

• Um exemplo de execução da função quicksort para um vetor de entrada $v[0..7] = \{4,6,7,3,5,1,2,8\}$ e chamada

```
quicksort(0, 7, V);
```

- Desempenho da função quicksort quando queremos ordenar um vetor v[0..n – 1]
 - Proporcional ao número de comparações realizadas entre os elementos do vetor
 - Se o índice devolvido pela função separa sempre tiver valor mais ou menos médio de p e r, então o número de comparações será aproximadamente n log₂ n
 - Caso contrário, o número de comparações será da ordem de n²
 - ▶ Portanto, o consumo de tempo de pior caso da ordenação por separação não é melhor que o dos métodos elementares
 - Felizmente, o pior caso para a ordenação por separação é raro. Dessa forma, o consumo de tempo médio da função quicksort é proporcional a nlog₂ n

- Desempenho da função quicksort quando queremos ordenar um vetor v[0..n – 1]
 - Proporcional ao número de comparações realizadas entre os elementos do vetor
 - Se o índice devolvido pela função separa sempre tiver valor mais ou menos médio de p e r, então o número de comparações será aproximadamente n log₂ n
 - Caso contrário, o número de comparações será da ordem de n²
 - Portanto, o consumo de tempo de pior caso da ordenação por separação não é melhor que o dos métodos elementares
 - Felizmente, o pior caso para a ordenação por separação é raro. Dessa forma, o consumo de tempo médio da função quicksort é proporcional a n log₂ n

- Desempenho da função quicksort quando queremos ordenar um vetor v[0..n – 1]
 - Proporcional ao número de comparações realizadas entre os elementos do vetor
 - Se o índice devolvido pela função separa sempre tiver valor mais ou menos médio de p e r, então o número de comparações será aproximadamente nlog₂ n
 - Caso contrário, o número de comparações será da ordem de n^2
 - Portanto, o consumo de tempo de pior caso da ordenação por separação não é melhor que o dos métodos elementares
 - Felizmente, o pior caso para a ordenação por separação é raro. Dessa forma, o consumo de tempo médio da função quicksort é proporcional a nlog₂ n

- Desempenho da função quicksort quando queremos ordenar um vetor v[0..n – 1]
 - Proporcional ao número de comparações realizadas entre os elementos do vetor
 - Se o índice devolvido pela função separa sempre tiver valor mais ou menos médio de p e r, então o número de comparações será aproximadamente nlog₂ n
 - Caso contrário, o número de comparações será da ordem de n²
 - Portanto, o consumo de tempo de pior caso da ordenação por separação não é melhor que o dos métodos elementares
 - Felizmente, o pior caso para a ordenação por separação é raro. Dessa forma, o consumo de tempo médio da função quicksort é proporcional a nlog₂ n

- Desempenho da função quicksort quando queremos ordenar um vetor v[0..n – 1]
 - Proporcional ao número de comparações realizadas entre os elementos do vetor
 - Se o índice devolvido pela função separa sempre tiver valor mais ou menos médio de p e r, então o número de comparações será aproximadamente nlog₂ n
 - Caso contrário, o número de comparações será da ordem de n²
 - Portanto, o consumo de tempo de pior caso da ordenação por separação não é melhor que o dos métodos elementares
 - Felizmente, o pior caso para a ordenação por separação é raro. Dessa forma, o consumo de tempo médio da função quicksort é proporcional a n log₂ n

- Desempenho da função quicksort quando queremos ordenar um vetor v[0..n – 1]
 - Proporcional ao número de comparações realizadas entre os elementos do vetor
 - Se o índice devolvido pela função separa sempre tiver valor mais ou menos médio de p e r, então o número de comparações será aproximadamente nlog₂ n
 - Caso contrário, o número de comparações será da ordem de n²
 - Portanto, o consumo de tempo de pior caso da ordenação por separação não é melhor que o dos métodos elementares
 - Felizmente, o pior caso para a ordenação por separação é raro. Dessa forma, o consumo de tempo médio da função quicksort é proporcional a n log₂ n

- 7.1 Ilustre a operação da função **separa** sobre o vetor v que contém os elementos do conjunto $\{13, 19, 9, 5, 12, 8, 7, 4, 11, 2, 6, 21\}$.
- 7.2 Qual o valor de q a função separa devolve quando todos os elementos no vetor v[p..r] têm o mesmo valor?
- 7.3 A função separa produz o resultado correto quando p = r?
- 7.4 Escreva uma função que rearranje um vetor v[p..r] de números inteiros de modo que os elementos negativos e nulos fiquem à esquerda e os positivos fiquem à direita. Em outras palavras, rearranje o vetor de modo que tenhamos $v[p..q-1] \le 0$ e v[q..r] > 0 para algum q em p..r+1. Procure escrever uma função eficiente que não use um vetor auxiliar.

- 7.1 Ilustre a operação da função **separa** sobre o vetor v que contém os elementos do conjunto $\{13, 19, 9, 5, 12, 8, 7, 4, 11, 2, 6, 21\}$.
- 7.2 Qual o valor de q a função separa devolve quando todos os elementos no vetor v[p..r] têm o mesmo valor?
- 7.3 A função separa produz o resultado correto quando p = r?
- 7.4 Escreva uma função que rearranje um vetor v[p..r] de números inteiros de modo que os elementos negativos e nulos fiquem à esquerda e os positivos fiquem à direita. Em outras palavras, rearranje o vetor de modo que tenhamos $v[p..q-1] \le 0$ e v[q..r] > 0 para algum q em p..r+1. Procure escrever uma função eficiente que não use um vetor auxiliar.

- 7.1 Ilustre a operação da função **separa** sobre o vetor v que contém os elementos do conjunto $\{13, 19, 9, 5, 12, 8, 7, 4, 11, 2, 6, 21\}$.
- 7.2 Qual o valor de q a função separa devolve quando todos os elementos no vetor v[p..r] têm o mesmo valor?
- 7.3 A função separa produz o resultado correto quando p = r?
- 7.4 Escreva uma função que rearranje um vetor v[p..r] de números inteiros de modo que os elementos negativos e nulos fiquem à esquerda e os positivos fiquem à direita. Em outras palavras, rearranje o vetor de modo que tenhamos $v[p..q-1] \le 0$ e v[q..r] > 0 para algum q em p..r+1. Procure escrever uma função eficiente que não use um vetor auxiliar.

- 7.1 Ilustre a operação da função **separa** sobre o vetor v que contém os elementos do conjunto $\{13, 19, 9, 5, 12, 8, 7, 4, 11, 2, 6, 21\}$.
- 7.2 Qual o valor de q a função separa devolve quando todos os elementos no vetor v[p..r] têm o mesmo valor?
- 7.3 A função separa produz o resultado correto quando p = r?
- 7.4 Escreva uma função que rearranje um vetor v[p..r] de números inteiros de modo que os elementos negativos e nulos fiquem à esquerda e os positivos fiquem à direita. Em outras palavras, rearranje o vetor de modo que tenhamos $v[p..q-1] \leqslant 0$ e v[q..r] > 0 para algum q em p..r+1. Procure escrever uma função eficiente que não use um vetor auxiliar.

7.5 Digamos que um vetor v[p..r] está **arrumado** se existe q em p..r que satisfaz

$$v[p..q-1] \leqslant v[q] < v[q+1..r]$$
.

- 7.6 Que acontece se trocarmos a expressão if (p < r) pela expressão if (p != r) no corpo da função quicksort?
- 7.7 Compare as funções quicksort e mergesort. Discuta as semelhanças e diferenças.
- 7.8 Como você modificaria a função quicksort para ordenar elementos em ordem decrescente?



7.5 Digamos que um vetor v[p..r] está **arrumado** se existe q em p..r que satisfaz

$$v[p..q-1] \leqslant v[q] < v[q+1..r]$$
.

- 7.6 Que acontece se trocarmos a expressão if (p < r) pela expressão if (p != r) no corpo da função quicksort?
- 7.7 Compare as funções quicksort e mergesort. Discuta as semelhanças e diferenças.
- 7.8 Como você modificaria a função **quicksort** para ordenar elementos em ordem decrescente?

7.5 Digamos que um vetor v[p..r] está **arrumado** se existe q em p..r que satisfaz

$$v[p..q-1] \leqslant v[q] < v[q+1..r]$$
.

- 7.6 Que acontece se trocarmos a expressão if (p < r) pela expressão if (p != r) no corpo da função quicksort?
- 7.7 Compare as funções quicksort e mergesort. Discuta as semelhanças e diferenças.
- 7.8 Como você modificaria a função quicksort para ordenar elementos em ordem decrescente?



7.5 Digamos que um vetor v[p..r] está **arrumado** se existe q em p..r que satisfaz

$$v[p..q-1] \leqslant v[q] < v[q+1..r]$$
.

- 7.6 Que acontece se trocarmos a expressão if (p < r) pela expressão if (p != r) no corpo da função quicksort?
- 7.7 Compare as funções quicksort e mergesort. Discuta as semelhanças e diferenças.
- 7.8 Como você modificaria a função quicksort para ordenar elementos em ordem decrescente?



7.9 Os bancos frequentemente gravam transações sobre uma conta corrente na ordem das datas das transações, mas muitas pessoas preferem receber seus extratos bancários em listagens ordenadas pelo número do cheque emitido. As pessoas em geral emitem cheques na ordem da numeração dos cheques, e comerciantes usualmente descontam estes cheques com rapidez razoável. O problema de converter uma lista ordenada por data de transação em uma lista ordenada por número de cheques é portanto o problema de ordenar uma entrada quase já ordenada. Argumente que, neste caso, o método de ordenação por inserção provavelmente se comportará melhor do que o método de ordenação por separação.

- 7.10 Forneça um argumento cuidadoso para mostrar que a função separa é correta. Prove o seguinte:
 - (a) Os índices i e j nunca referenciam um elemento de v fora do intervalo [p..r];
 - (b) O índice *j* não é igual a *r* quando **separa** termina (ou seja, a partição é sempre não trivial);
 - (c) Todo elemento de v[p..j] é menor ou igual a todo elemento de v[j+1..r] quando a função **separa** termina.
 - 7.11 Escreva uma versão da função quicksort que coloque um vetor de cadeias de caracteres em ordem lexicográfica.

- 7.10 Forneça um argumento cuidadoso para mostrar que a função separa é correta. Prove o seguinte:
 - (a) Os índices i e j nunca referenciam um elemento de v fora do intervalo [p..r];
 - (b) O índice j não é igual a r quando separa termina (ou seja, a partição é sempre não trivial);
 - (c) Todo elemento de v[p..j] é menor ou igual a todo elemento de v[j+1..r] quando a função **separa** termina.
 - 7.11 Escreva uma versão da função quicksort que coloque um vetor de cadeias de caracteres em ordem lexicográfica.

- 7.10 Forneça um argumento cuidadoso para mostrar que a função separa é correta. Prove o seguinte:
 - (a) Os índices i e j nunca referenciam um elemento de v fora do intervalo [p..r];
 - (b) O índice j não é igual a r quando separa termina (ou seja, a partição é sempre não trivial);
 - (c) Todo elemento de v[p..j] é menor ou igual a todo elemento de v[j+1..r] quando a função **separa** termina.
 - 7.11 Escreva uma versão da função quicksort que coloque um vetor de cadeias de caracteres em ordem lexicográfica.

- 7.10 Forneça um argumento cuidadoso para mostrar que a função separa é correta. Prove o seguinte:
 - (a) Os índices i e j nunca referenciam um elemento de v fora do intervalo [p..r];
 - (b) O índice j não é igual a r quando separa termina (ou seja, a partição é sempre não trivial);
 - (c) Todo elemento de v[p..j] é menor ou igual a todo elemento de v[j+1..r] quando a função separa termina.
- 7.11 Escreva uma versão da função quicksort que coloque um vetor de cadeias de caracteres em ordem lexicográfica.

7.12 Considere a seguinte solução do problema da separação, devido a N. Lomuto. Para separar v[p..r], esta versão incrementa duas regiões, v[p..i] e v[i+1..j], tal que todo elemento na primeira região é menor ou igual a x = v[r] e todo elemento na segunda região é maior que x.

```
int separa Lomuto(int p, int r, int V[MAX])
   int x, i, j;
  x = v[r];
   i = p - 1;
  for (j = p; j \le r; j++)
      if (V[j] \le x) {
         i++;
         troca(&V[i], &V[i]);
   if(i < r)
      return i;
  else
      return i - 1;
```

- (a) Illustre a operação da função **separa_Lomuto** sobre o vetor v que contém os elementos $\{13, 19, 9, 5, 12, 8, 7, 4, 11, 2, 6, 21\}$.
- (b) Argumente que separa_Lomuto está correta
- (c) Qual o número máximo de vezes que um elemento pode ser movido pelas funções separa e separa_Lomuto? Justifique sua resposta.
- (d) Argumente que **separa_Lomuto**, assim como **separa**, tem tempo de execução proporcional a n sobre um vetor de n = r p + 1 elementos.
- (e) Como a troca da função **separa** pela função **separa_Lomuto** afeta o tempo de execução do método da ordenação por separação quando todos os valores de entrada são iguais?

- (a) Illustre a operação da função **separa_Lomuto** sobre o vetor v que contém os elementos $\{13, 19, 9, 5, 12, 8, 7, 4, 11, 2, 6, 21\}$.
- (b) Argumente que separa_Lomuto está correta.
- (c) Qual o número máximo de vezes que um elemento pode ser movido pelas funções separa e separa Lomuto? Justifique sua resposta.
- (d) Argumente que **separa_Lomuto**, assim como **separa**, tem tempo de execução proporcional a n sobre um vetor de n = r p + 1 elementos.
- (e) Como a troca da função **separa** pela função **separa_Lomuto** afeta o tempo de execução do método da ordenação por separação quando todos os valores de entrada são iguais?

- (a) Ilustre a operação da função **separa_Lomuto** sobre o vetor v que contém os elementos $\{13, 19, 9, 5, 12, 8, 7, 4, 11, 2, 6, 21\}$.
- (b) Argumente que separa_Lomuto está correta.
- (c) Qual o número máximo de vezes que um elemento pode ser movido pelas funções separa e separa_Lomuto? Justifique sua resposta.
- (d) Argumente que **separa_Lomuto**, assim como **separa**, tem tempo de execução proporcional a n sobre um vetor de n = r p + 1 elementos.
- (e) Como a troca da função **separa** pela função **separa_Lomuto** afeta o tempo de execução do método da ordenação por separação quando todos os valores de entrada são iguais?

- (a) Ilustre a operação da função **separa_Lomuto** sobre o vetor v que contém os elementos $\{13, 19, 9, 5, 12, 8, 7, 4, 11, 2, 6, 21\}$.
- (b) Argumente que **separa_Lomuto** está correta.
- (c) Qual o número máximo de vezes que um elemento pode ser movido pelas funções separa e separa_Lomuto? Justifique sua resposta.
- (d) Argumente que **separa_Lomuto**, assim como **separa**, tem tempo de execução proporcional a n sobre um vetor de n = r p + 1 elementos.
- (e) Como a troca da função **separa** pela função **separa_Lomuto** afeta o tempo de execução do método da ordenação por separação quando todos os valores de entrada são iguais?

- (a) Illustre a operação da função **separa_Lomuto** sobre o vetor v que contém os elementos $\{13, 19, 9, 5, 12, 8, 7, 4, 11, 2, 6, 21\}$.
- (b) Argumente que **separa_Lomuto** está correta.
- (c) Qual o número máximo de vezes que um elemento pode ser movido pelas funções separa e separa_Lomuto? Justifique sua resposta.
- (d) Argumente que **separa_Lomuto**, assim como **separa**, tem tempo de execução proporcional a n sobre um vetor de n = r p + 1 elementos.
- (e) Como a troca da função separa pela função separa_Lomuto afeta o tempo de execução do método da ordenação por separação quando todos os valores de entrada são iguais?

7.13 A função quicksort contém duas chamadas recursivas para ela própria. Depois da chamada da separa, o sub-vetor esquerdo é ordenado recursivamente e então o sub-vetor direito é ordenado recursivamente. A segunda chamada recursiva no corpo da função quicksort não é realmente necessária; ela pode ser evitada usando uma estrutura de controle iterativa. Essa técnica, chamada recursão de cauda, é fornecida automaticamente por bons compiladores. Considere a seguinte versão da ordenação por separação, que simula a recursão de cauda.

```
void quicksort2(int p, int r, int v[MAX])
{
    while (p < r) {
        q = separa(p, r, v);
        quicksort2(p, q, v);
        p = q + 1;
    }
}</pre>
```

7.13 (continuação)

Ilustre a operação da função quicksort2 sobre o vetor v que contém os elementos $\{21,7,5,11,6,42,13,2\}$. Use a chamada quicksort2(0, n-1, v). Argumente que a função quicksort2 ordena corretamente o vetor v.

7.13 (continuação)

Ilustre a operação da função quicksort2 sobre o vetor v que contém os elementos $\{21,7,5,11,6,42,13,2\}$. Use a chamada quicksort2(0, n-1, v). Argumente que a função quicksort2 ordena corretamente o vetor v.

7.14 Um famoso programador propôs o seguinte método de ordenação de um vetor v[0..n-1] de números inteiros:

```
void silly_sort(int i, int j, int v[MAX])
{
   int k;

   if (v[i] > v[j])
        troca(&v[i], &v[j]);
   if (i + 1 < j) {
        k = (j - i + 1) / 3;
        silly_sort(i, j-k, v);
        silly_sort(i+k, j, v);
        silly_sort(i, j-k, v);
   }
}</pre>
```

Ilustre a operação desse novo método de ordenação sobre o vetor v que contém os elementos $\{21,7,5,11,6,42,13,2\}$. Use a chamada $silly_sort(0, n-1, v)$. Argumente que a função $silly_sort$ ordena corretamente o vetor v.

- 7.15 Veja animações dos métodos de ordenação que já vimos nas seguintes páginas:
 - Sort Animation de R. Mohammadi;
 - Sorting Algorithms de J. Harrison;
 - Sorting Algorithms de P. Morin;
 - Sorting Algorithms Animations de D. R. Martin.
 - 7.16 Familiarize-se com a função **qsort** da biblioteca **stdlib** da linguagem C.

- 7.15 Veja animações dos métodos de ordenação que já vimos nas seguintes páginas:
 - Sort Animation de R. Mohammadi;
 - Sorting Algorithms de J. Harrison;
 - Sorting Algorithms de P. Morin;
 - Sorting Algorithms Animations de D. R. Martin.
- 7.16 Familiarize-se com a função qsort da biblioteca stdlib da linguagem C.