UFMS - Faculdade de Computação

Algoritimos de Programação II
Turma 3

Professor: Marco Aurélio Stefanes

Lista 01

Aluno:
Augusto Cesar de Aquino Ribas
Análise de Sistemas

1 Aula 01-03 : Exercícios. 1.5 a 1.9

1. (a) Escreva uma função recursiva com a seguinte interface:

```
int soma_digitos(int n)
```

que receba um número inteiro positivo n e devolva a soma de seus dígitos.

```
int soma_digitos(int n) {
  int soma;

  if((n/10)==0) {
    soma=n;
  } else {
    soma=n%10+soma_digitosR(n/10);
  }

  return soma;

}
```

(b) Escreva um programa que receba um número inteiro n e imprima a soma de seus dígitos. Use a função do item (a).

```
#include <stdio.h>

int soma_digitos(int n) {
  int soma;
  if((n/10)==0) {
    soma=n;
  } else {
    soma=n%10+soma_digitosR(n/10);
  }
  return soma;
}

int main(void)
{
  int n;
  scanf("%d",&n);
  printf("Funcao recursiva: Soma dos digitos e %d\n",soma_digitos(n));
  return 0;
}
```

2. A **seqüência de Fibonacci** é uma seqüência de números inteiros positivos dada pela seguinte fórmula:

$$\begin{cases} F_1 &= 1 \\ F_2 &= 1 \\ F_i &= F_{i-1} + F_{i-2}, \text{ para } i \geq 3 \end{cases}$$

   (a) Escreva uma função recursiva com a seguinte interface:

```c
int Fib(int i)
```

   que receba um número inteiro positivo i e devolva o i-ésimo termo da seqüência de Fibonacci, isto é, F_i.

```c
int fib(int i){

  if(i==1) {
    return 1;
  } else {
    if(i==2) {
      return 1;
    } else {
      return fib(i-1)+fib(i-2);
    }
  }
}
```

   (b) Escreva um programa que receba um número inteiro $i \geq 1$ e imprima o termo F_i da seqüência de Fibonacci. Use a função do item (a).

```c
#include <stdio.h>

int fib(int i){
  if(i==1) {
    return 1;
  } else {
    if(i==2) {
      return 1;
    } else {
      return fib(i-1)+fib(i-2);
    }
  }
}

int main(void)
{
  int i;
  scanf("%d",&i);
  printf("Resultado = %d\n", fib(i));
  return 0;
}
```

3. O **piso** de um número inteiro positivo x é o único inteiro i tal que $i \leq x < i+1$. O piso de x é denotado por $\lfloor x \rfloor$.

   Segue uma amostra de valores da função $\lfloor \log_2 n \rfloor$:

n	15	16	31	32	63	64	127	128	255	256	511	512
$\lfloor \log_2 n \rfloor$	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9

   (a) Escreva uma função recursiva com a seguinte interface:

```
int piso_log2(int n)
```

   que receba um número inteiro positivo n e devolva $\lfloor \log_2 n \rfloor$.

```
int piso_log2(int n){
  if(n/2==0) {
    return 0;
  } else {
    return 1+piso_log2(n/2);
  }

}
```

   (b) Escreva um programa que receba um número inteiro $n \geq 1$ e imprima $\lfloor \log_2 n \rfloor$. Use a função do item (a).

```
#include <stdio.h>

int piso_log2(int n){
  if(n/2==0) {
    return 0;
  } else {
    return 1+piso_log2(n/2);
  }

}

int main(void)
{
  int n;

  scanf("%d",&n);
  printf("%d\n",piso_log2(n));
  return 0;
}
```

4. Considere o seguinte processo para gerar uma seqüência de números. Comece com um inteiro n. Se n é par, divida por 2. Se n é ímpar, multiplique por 3 e some 1. Repita esse processo com o novo valor de n, terminando quando $n = 1$. Por exemplo, a seqüência de números a seguir é gerada para $n = 22$:

   22 11 34 17 52 26 13 40 20 10 5 16 8 4 2 1

   É conjecturado que esse processo termina com $n = 1$ para todo inteiro $n > 0$. Para uma entrada n, o **comprimento do ciclo de** n é o número de elementos gerados na seqüência. No exemplo acima, o comprimento do ciclo de 22 é 16.

   (a) Escreva uma função não-recursiva com a seguinte interface:

   ```c
   int ciclo(int n)
   ```

   que receba um número inteiro positivo n, mostre a seqüência gerada pelo processo descrito acima na saída e devolva o comprimento do ciclo de n.

   ```c
   int ciclo(int n){
     int ciclo=1;
     while(n!=1) {
       if(n%2==0) {
         printf("%d ",n/2);
         n=n/2;
       } else {
         printf("%d ",n*3+1);
         n=n*3+1;
       }
       ciclo++;
     }
     return ciclo;
   }
   ```

(b) Escreva uma versão recursiva da função do item (a) com a seguinte interface:

```c
int cicloR(int n)
```

que receba um número inteiro positivo n, mostre a seqüência gerada pelo processo descrito acima na saída e devolva o comprimento do ciclo de n.

```c
int cicloR(int n){
  if(n%2==0) {
    printf("%d ",n/2);
    n=n/2;
  } else {
    printf("%d ",n*3+1);
    n= n*3+1;
  }
  if(n==1) {
    return 2;
  } else {
    return 1+cicloR(n);
  }
}
```

(c) Escreva um programa que receba um número inteiro $n \geq 1$ e determine a seqüência gerada por esse processo e também o comprimento do ciclo de n. Use as funções em (a) e (b) para testar.

```c
#include <stdio.h>

int ciclo(int n){
  int ciclo=1;
  while(n!=1) {
    if(n%2==0) {
      printf("%d ",n/2);
      n=n/2;
    } else {
      printf("%d ",n*3+1);
      n=n*3+1;
    }
    ciclo++;
  }
  return ciclo;
}
int cicloR(int n){
  if(n%2==0) {
    printf("%d ",n/2);
    n=n/2;
  } else {
    printf("%d ",n*3+1);
    n= n*3+1;
  }
  if(n==1) {
    return 2;
  } else {
    return 1+cicloR(n);
  }
}

int main(void)
{
  int x, saida;
  scanf("%d",&x);
  saida=ciclo(x);
  printf("\niterativo %d\n",saida);
  saida=cicloR(x);
  printf("\nrecursivo %d\n",saida);
  return 0;
}
```

5. Podemos calcular a potência x^n de uma maneira mais eficiente. Observe primeiro que se n é uma potência de 2 então x^n pode ser computada usando seqüências de quadrados. Por exemplo, x^4 é o quadrado de x^2 e assim x^4 pode ser computado usando somente duas multiplicações ao invés de três. Esta técnica pode ser usada mesmo quando n não é uma potência de 2, usando a seguinte fórmula:

$$x^n = \begin{cases} 1\,, & \text{se } n = 0, \\ (x^{n/2})^2\,, & \text{se } n \text{ é par,} \\ x \cdot x^{n-1}\,, & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

(a) Escreva uma função com interface

```
int potencia(int x, int n)
```

que receba dois números inteiros x e n e calcule e devolva x^n usando a fórmula acima.

```
int potencia(int x, int n) {
  int num;
  if(n==0) {
    /*Se n e zero*/
    return 1;
  } else {
    if( (n%2) == 0 ) {
    /*Se n e par*/
      num=potencia(x,n/2);
      return num*num;
    } else {
    /*Se n e impar*/
      return x * potencia(x,n-1);
    }
  }
}
```

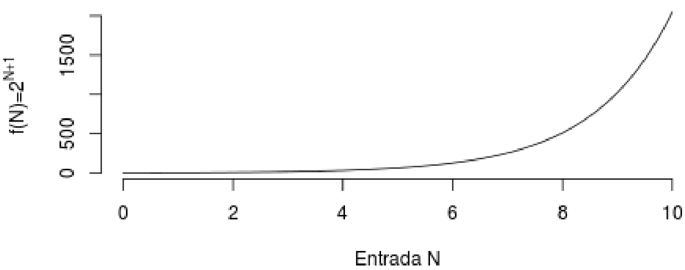
(b) Escreva um programa que receba dois números inteiros a e b e imprima o valor de a^b.

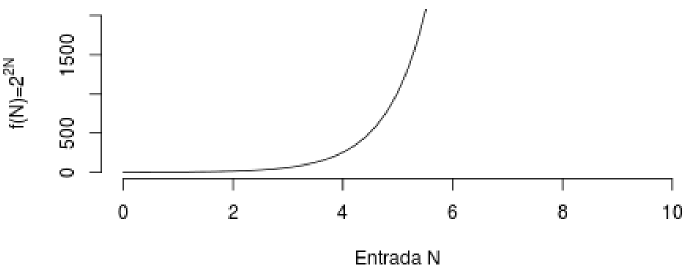
```c
#include <stdio.h>

int potencia(int x, int n) {
  int num;
  if(n==0) {
    /*Se n e zero*/
    return 1;
  } else {
    if( (n%2) == 0 ) {
    /*Se n e par*/
      num=potencia(x,n/2);
      return num*num;
    } else {
    /*Se n e impar*/
      return x * potencia(x,n-1);
    }
  }
}

int main(void) {
  int num, pot;
  scanf("%d %d",&num, &pot);
  printf("Resposta: %d\n",potencia(num,pot));
  return 0;
}
```

2 Aula 05: Exercícios 2.6 a 2.10

1. É verdade que $2^{n+1} = O(2^n)$? E é verdade que $2^{2 \cdot n} = O(2^n)$?

   Sim, a notação do O ou notação assintótica utilizada para analisar o comportamento assintótico de funções, ou seja, como é o crescimento destas, apesar da diferenças no expoentes pelos quais 2 está sendo elevado em cada caso, em ambos os casos a função cresce exponencialmente como potencia de 2 como visto na figura.





2. Suponha que você tenha algoritmos com os cinco tempos de execução listados abaixo. Quão mais lento cada um dos algoritmos fica quando você (i) duplica o tamanho da entrada, ou (ii) incrementa em uma unidade o tamanho da entrada?

   (a) n^2
   Nesse caso, se duplicamos o tamanho para n^2 teremos:
   $(2 \cdot n)^2$
   $2^2 \cdot n^2$
   $4 \cdot n^2$
   Ou seja, ao dobrarmos o tamanho da entrada, quadruplicamos o tempo do algoritimo.
   Para o casso de incrementarmos em uma unidade a entrada temos:
   $(n+1)^2$
   $(n+1) \cdot (n+1)$
   $n^2 + 2 \cdot n + 1^2$
   $(2 \cdot n + 1) + n^2$
   Ou seja, se incrementarmos em uma unidade a entrada, aumentamos em $(2 \cdot n + 1)$ o tempo de execução do algoritimo.

   (b) n^3
   Duplicando a entrada aumentamos em oito vezes o tempo de execução:
   $(2 \cdot n)^3$
   $(2^3) \cdot (n^3)$
   $8 \cdot (n^3)$
   Aumentando em uma unidade a entrada temos um aumento no tempo de execução em $3 \cdot (n + \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}$ unidades
   $(n+1)^3$
   $n^3 + 3n^2 + 3n + 1$
   $(3n^2 + 3n + 1) + (n^3)$
   $3 \cdot (n + \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4} + (n^3)$

   (c) $100 \cdot n^2$
   Duplicando a entrada aumentamos em quatrocentas vezes o tempo de execução:
   $100 \cdot (2 \cdot n)^2$
   $100 \cdot 2^2 \cdot n^2$
   $100 \cdot 4 \cdot n^2$
   $400 \cdot n^2$

   Aumentando em uma unidade a entrada temos um aumento no tempo de execução em$(200 \cdot n + 100)$
   $100 \cdot (n+1)^2$
   $100 \cdot (n+1) \cdot (n+1)$
   $100 \cdot (n^2 + 2 \cdot n + 1^2)$
   $100 \cdot n^2 + 200 \cdot n + 100$
   $(200 \cdot n + 100) + 100 \cdot n^2$

(d) $n \cdot \log_2(n)$
Duplicando a entrada, dobramos o tempo de execução:
$2 \cdot n \cdot \log_2(2 \cdot n)$
$2 \cdot n \cdot \log_2(2) \cdot \log_2(n)$
$2 \cdot n \cdot 1 \cdot \log_2(n)$
$2 \cdot n \cdot \log_2(n)$
$2 \cdot (n \cdot \log_2(n))$

Aumentando em uma unidade a entrada temos um aumento no tempo de execução em bem pequeno, ja que ao dobrarmos o tamanho da entrada dobramos o tempo, então aumentar em uma unidade é relativamente pequeno
$(n + 1) \cdot \log_2(n + 1)$

(e) 2^n
Duplicando a entrada aumentamos em quadruplicamos o tempo de execução:
$2^{2 \cdot n}$
$(2^2)^n$
4^n

Aumentando em uma unidade a entrada, dobramos o tempo de execução
2^{n+1}
$2^n * 2^1$
$2 * 2^n$

3. Suponha que você tenha algoritmos com os seis tempos de execução listados abaixo. Suponha que você tenha um computador capaz de executar 1010 operações por segundo e você precisa computar um resultado em no máximo uma hora de computação. Para cada um dos algoritmos, qual é o maior tamanho da entrada n para o qual você poderia receber um resultado em uma hora?

   Uma hora correponde a 60 minutos, como cada minuto tem 60 segundos, em uma hora temos 3600 segundos. O computador pode realizar 1010 operações por segundo, logo podemos realizar no maximo 3636000 operações em uma hora. Os valores de resposta são sempre o piso do valor calculado, já que não deve existir meia entrada.

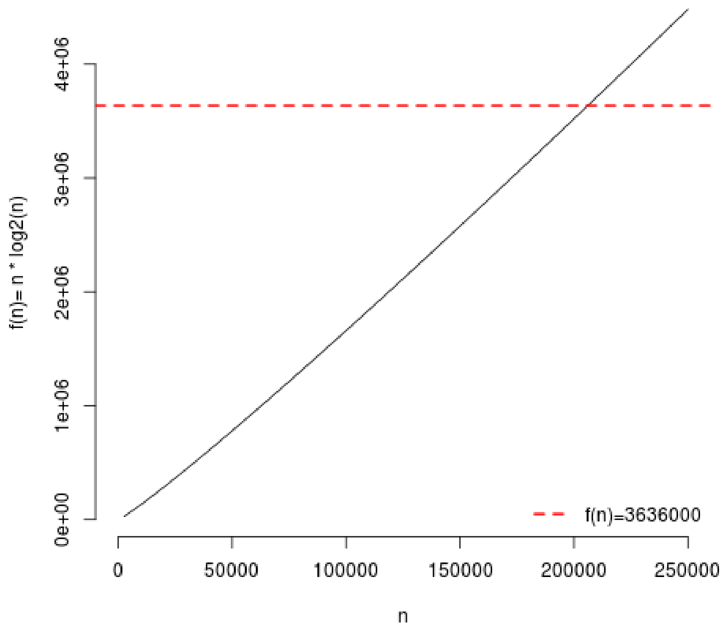
   Assim:

   (a) n^2
   $n^2 = 3636000$
   $n = \sqrt[2]{3636000}$
   $n \approx 1906$

(b) n^3
$n^3 = 3636000$
$n = \sqrt[3]{3636000}$
$n \approx 153$

(c) $100 \cdot n^2$
$100 \cdot n^2 = 3636000$
$n^2 = \frac{3636000}{100}$
$n = \sqrt[2]{36360}$
$n \approx 190$

(d) $n \cdot \log_2(n)$
$n \cdot \log_2(n) = 3636000$
Aqui eu não sei como encontrar o valor analiticamente, mas podemos fazer um programa e nesse ir aumentando o valor de n e salvando o resultado, e nesse caso queremos aumentar o valor de n enquanto o resultado for menor que 3636000, que da: $n \approx 205980$



(e) 2^n
$2^n = 3636000$
$n = \log_2(3636000)$
$n \approx 21$

(f) 2^{2^n}
$n = \log_2(\log_2(3636000))$
$n \approx 4$

4. Rearranje a seguinte lista de funções em ordem crescente de taxa de crescimento. Isto é, se a função $g(n)$ sucede imediatamente a função $f(n)$ na sua lista, então é verdade que $f(n) = O(g(n))$.

$$f1(n) = n^{2.5}$$
$$f2(n) = \sqrt{2 \cdot n}$$
$$f3(n) = n + 10$$
$$f4(n) = 10^n$$
$$f5(n) = 100^n$$
$$f6(n) = n^2 \cdot \log_2(n)$$

Organizadas em ordem crescente de tempo de execução:

$$f2(n) = \sqrt{2 \cdot n}$$
$$f3(n) = n + 10$$
$$f6(n) = n^2 \cdot \log_2(n)$$
$$f1(n) = n^{2.5}$$
$$f4(n) = 10^n$$
$$f5(n) = 100^n$$

5. Considere o problema de computar o valor de um polinômio em um ponto. Dados n coeficientes $a_0, a_1, ..., a_{n-1}$ e um número real x, queremos computar $\sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot x^i$.

   (a) Escreva um programa simples com tempo de execução de pior caso $O(n^2)$ para solucionar este problema.

```c
#include<stdio.h>
#define MAX 100
float polinomio(int grau, float coef[], float x) {
  int i,j;
  float out=0, pot;

  for(i=0;i<=grau;i++){
    pot=1;
    for(j=1;j<=i;j++){
      pot=pot*x;
    }
    out=out+(coef[i]*(pot));
  }

  return out;
}

int main(void)
{
  int i, grau;
  float coef[MAX],x;

  printf("Entre com o grau do polinomio:");
  scanf("%d",&grau);
  printf("Entre com os coeficientes (do maior para o menor grau):");
  for(i=grau;i>=0;i--){
    scanf("%f",&coef[i]);
  }
  printf("Entre com o valor a ser avaliado:");
  scanf("%f",&x);

  printf("Metodo convencional: f(%f) = %f\n",x, polinomio(grau,coef,x));
  return 0;
}
```

(b) Escreva um programa com tempo de execução de pior caso $O(n)$ para solucionar este problema usando o método chamado de regra de Horner para reescrever o polinômio:

```c
#include<stdio.h>
#define MAX 100
float horner(int grau, float coef[], float x) {
  int i;
  float out=0;
  for(i=grau;i>0;i--) {
    out=(out+coef[i])*x;
  }
  out=out+coef[0];
  return out;
}

int main(void)
{
  int i, grau;
  float coef[MAX],x;
  printf("Entre com o grau do polinomio:");
  scanf("%d",&grau);
  printf("Entre com os coeficientes (do maior para o menor grau):");
  for(i=grau;i>=0;i--){
    scanf("%f",&coef[i]);
  }
  printf("Entre com o valor a ser avaliado:");
  scanf("%f",&x);

  printf("Metodo Horner: f(%f) = %f\n",x,horner(grau,coef,x));
  return 0;
}
```

6. Seja $A[0...n-1]$ um vetor de n números inteiros distintos dois a dois. Se $i < j$ e $A[i] > A[j]$ então o par (i, j) é chamado uma inversão de A.

   (a) Liste as cinco inversões do vetor $A = 2, 3, 8, 6, 1$.
   $S = \{(3, 8), (3, 1), (8, 6), (8, 1), (6, 1)\}$

   (b) Qual vetor com elementos no conjunto $\{1, 2, ..., n\}$ tem a maior quantidade de inversões? Quantas são?

   O vetor terá a maior quantidade de inversões quando estiver ordenado de forma decrescente. Nesse caso teremos $(x_n \geq x_{n-1} \geq x_{n-2} \dots \geq x_1)$. De certa forma, o número de inversões corresponde ao quanto um vetor está desorganizado, sendo o número de trocas necessarias para organiza-lo.

   (c) Escreva um programa que determine o número de inversões em qualquer permutação de n elementos em tempo de execução de pior caso $O(n \cdot \log_2(n))$.

   Como o número de inversões é a quantidade de trocas que precisamos realizar para ordenar um vetor, podemos usar a mesma estratégia de um algoritimo usado para ordenação para processar essa contagem. Como nosso objetivo é relizar essa contagem com garantia de um tempo igual a $O(n \cdot \log_2(n))$, podemos tentar adaptar os algoritimos do mergesort ou heapsort para tal tarefa, aqui adaptamos o mergesort, realizando a contagem dentro da função intercala e somando todas as contagens dentro da função mergesort.

```c
#include <stdio.h>
#define MAX 100

int intercala(int p, int q, int r, int v[MAX])
{
    int i, j, k, w[MAX];
    int inv=0;
    i = p;
    j = q;
    k = 0;
    while (i < q && j < r) {
        if (v[i] < v[j]) {
            w[k] = v[i];
            i++;
        }
        else {
            w[k] = v[j];
            j++;
            inv = inv + (q - i);
        }
        k++;
    }
    while (i < q) {
        w[k] = v[i];
        i++;
```

```c
            k++;
        }
        while (j < r) {
            w[k] = v[j];
            j++;
            k++;
        }
        for (i = p; i < r; i++)
            v[i] = w[i-p];
        return inv;
}

/* Recebe um vetor v[p..r-1] e o rearranja em ordem crescente */
int mergesort(int p, int r, int v[MAX]) {
        int q;
        int inv=0;
        if (p < r - 1) {
            q = (p + r) / 2;
            inv  = mergesort(p, q, v);
            inv += mergesort(q, r, v);
            inv += intercala(p, q, r, v);
        }
        return inv;
}

int main(void) {
    int n, i  ,vetor[MAX] ,inv;
    printf("Entre com o numero de elementos:");
    scanf("%d",&n);
    printf("Entre com os elementos:");
    for(i=0;i<n;i++) {
      scanf("%d",&vetor[i]);
    }
    inv=mergesort(0,n,vetor);
    for(i=0;i<n;i++) {
      printf("%d ",vetor[i]);
    }
    printf("\n");
    printf("Existiam %d inversoes\n",inv);
    return 0;
}
```