

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)
Кафедра МО ЭВМ

ОТЧЕТ
по курсовой работе
по дисциплине «Дифференциальные уравнения»
ТЕМА: РАДИОАКТИВНЫЙ РАСПАД ВЕЩЕСТВА

| | | |
|------------------|-------|--------------|
| Студент гр. 8383 | _____ | Сахаров В.М. |
| Студент гр. 8383 | _____ | Гоголев Е.Е. |
| Преподаватель | _____ | Павлов Д.А. |

Санкт-Петербург
2021

Задание

Смоделировать радиоактивный распад вещества, заданный уравнением

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) = -kx$$

При помощи различных численных методов.

Выполнение работы

Данное уравнение имеет тривиальное аналитическое решение $x(t) = x_0 e^{-kt}$, где x_0 – начальное количество вещества. Примем начальное количество вещества за единицу, параметр k возьмем равным 3. Отобразим график аналитического решения на интервале от 0 до 2.

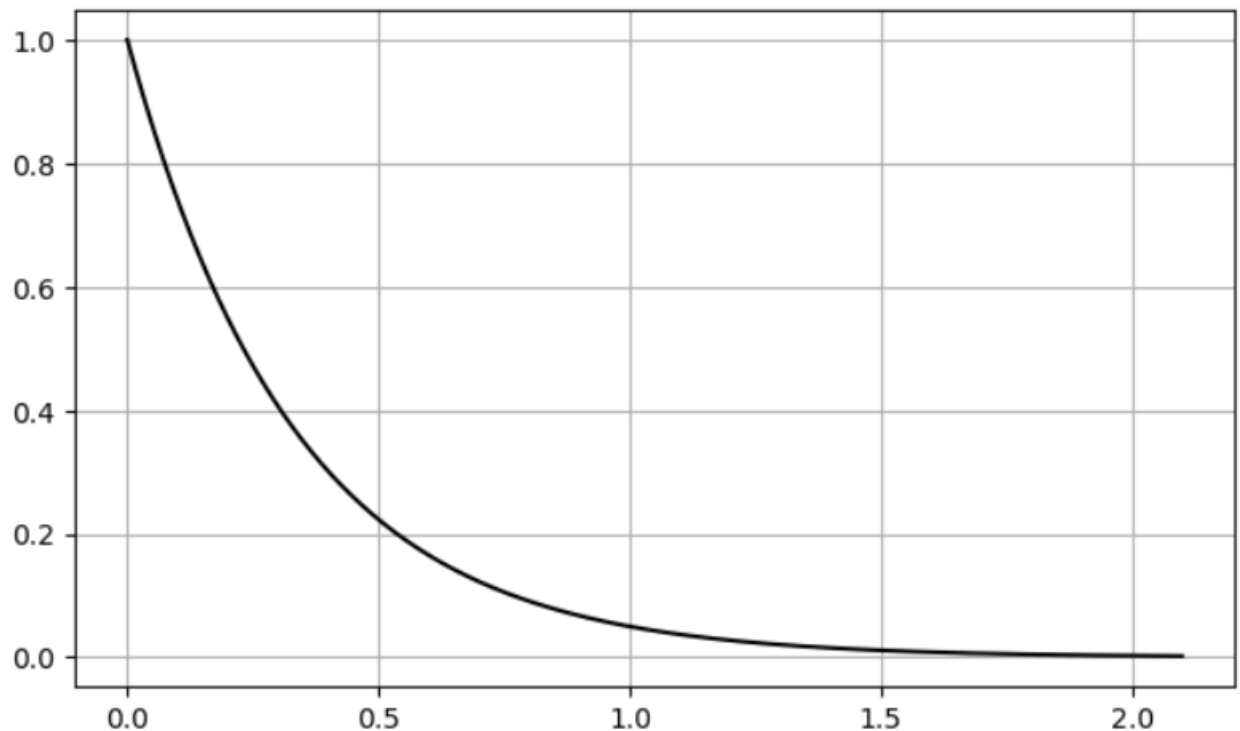


Рисунок 1 – аналитическое решение

Реализуем явный метод Эйлера и отобразим решение, полученное данным методом, на графике вместе с точным решением. Таблица Бутчера для метода Эйлера выглядит следующим образом:

| |
|---|
| 0 |
| 1 |

Результат на рис. 2. Размер шага $h = 0.1$, интегрирование производилось на интервале $t = [0, 2]$. Функция правой части f была вызвана 20 раз.

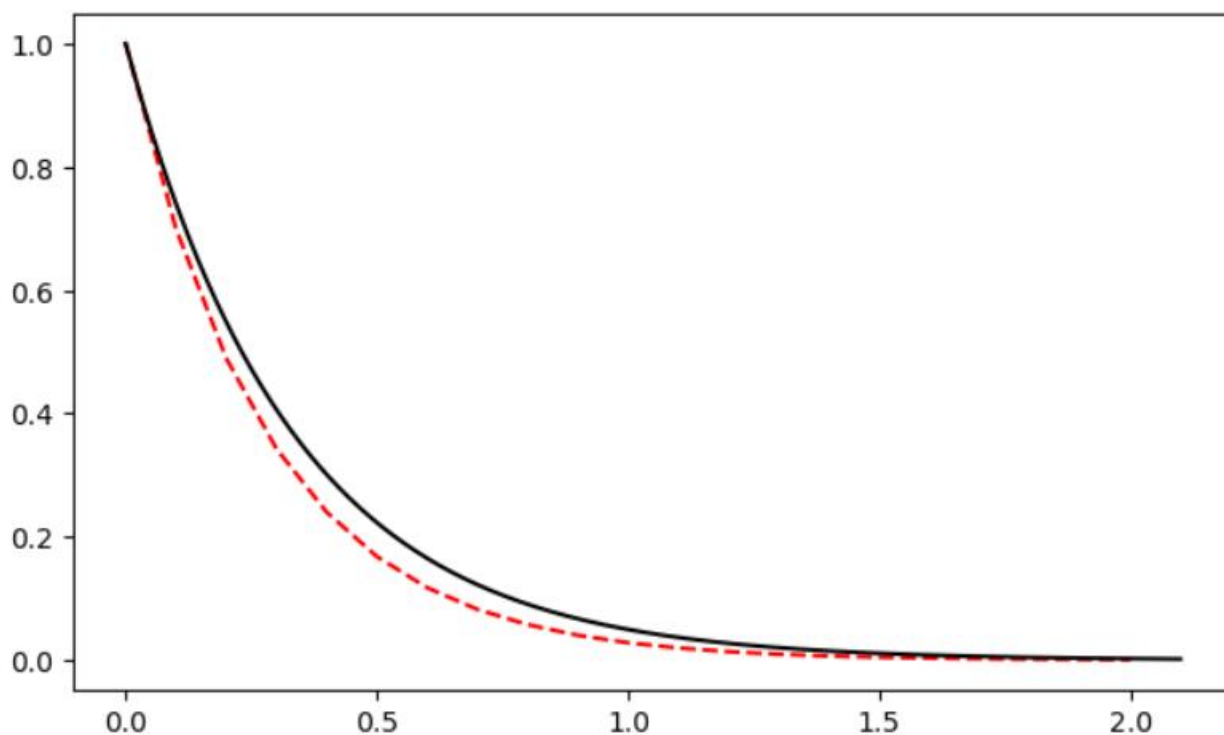


Рисунок 2 – решение методом Эйлера

Заметны небольшие расхождения с истинным решением. Отобразим график разности полученного решения и точного решения (рис. 3).

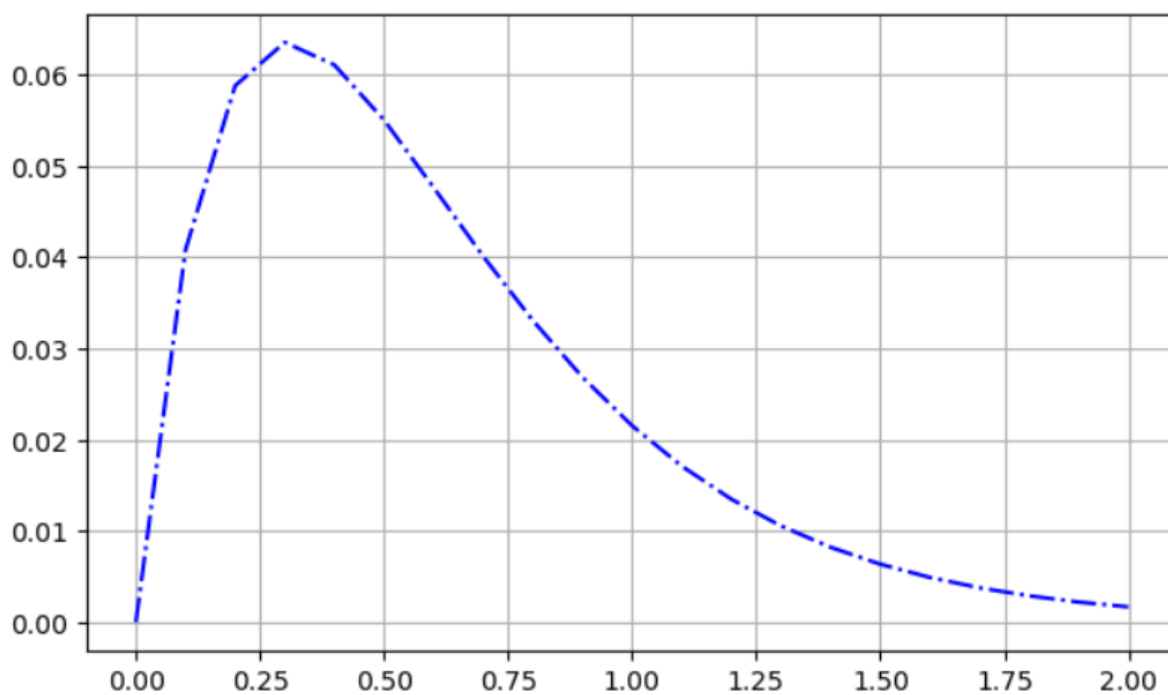


Рисунок 3 – ошибка метода Эйлера

На графике видно, что ошибка резко возрастает в начале распада. Это связано с жесткостью задачи. Рассчитаем метрики для данной разности.

Таблица 1

| Название метода | Максимальная по модулю ошибка | Средняя ошибка | Стандартное отклонение ошибки |
|-----------------|-------------------------------|----------------------|-------------------------------|
| Метод Эйлера | 0.06356965974059908 | -0.02474949488126303 | 0.021791550323556598 |

Реализуем метод Ралстона второго порядка и метод средней точки, отобразим их графики (рис. 4).

Таблица Бутчера для метода Ралстона:

| | |
|-----|-----|
| 0 | |
| 2/3 | 0 |
| 1/4 | 3/4 |

Таблица Бутчера для метода средней точки:

| | |
|-----|---|
| 0 | |
| 1/2 | 0 |
| 0 | 1 |

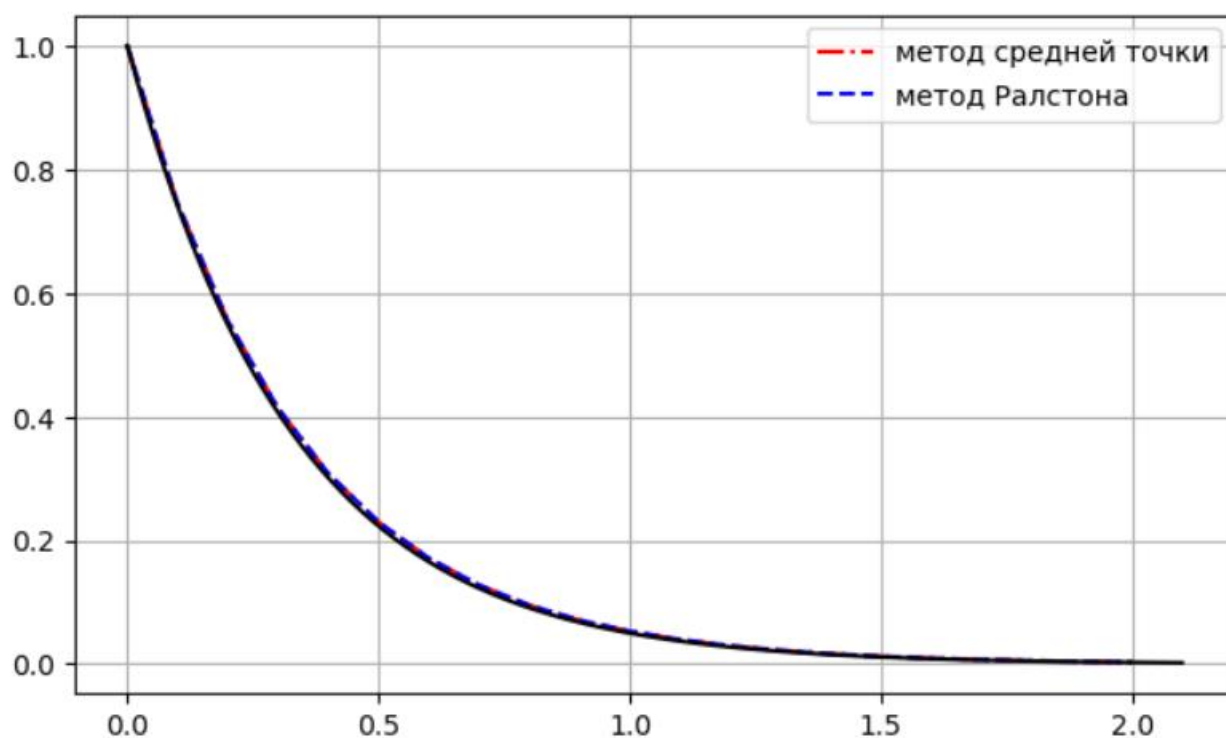


Рисунок 4 – методы второго порядка

Для параметров $x_0 = 1$, $k = 1$, $h = 0.1$ графики выглядят идентично.

Отобразим графики ошибок методов (рис. 5 и рис. 6) и посчитаем метрики этих ошибок.

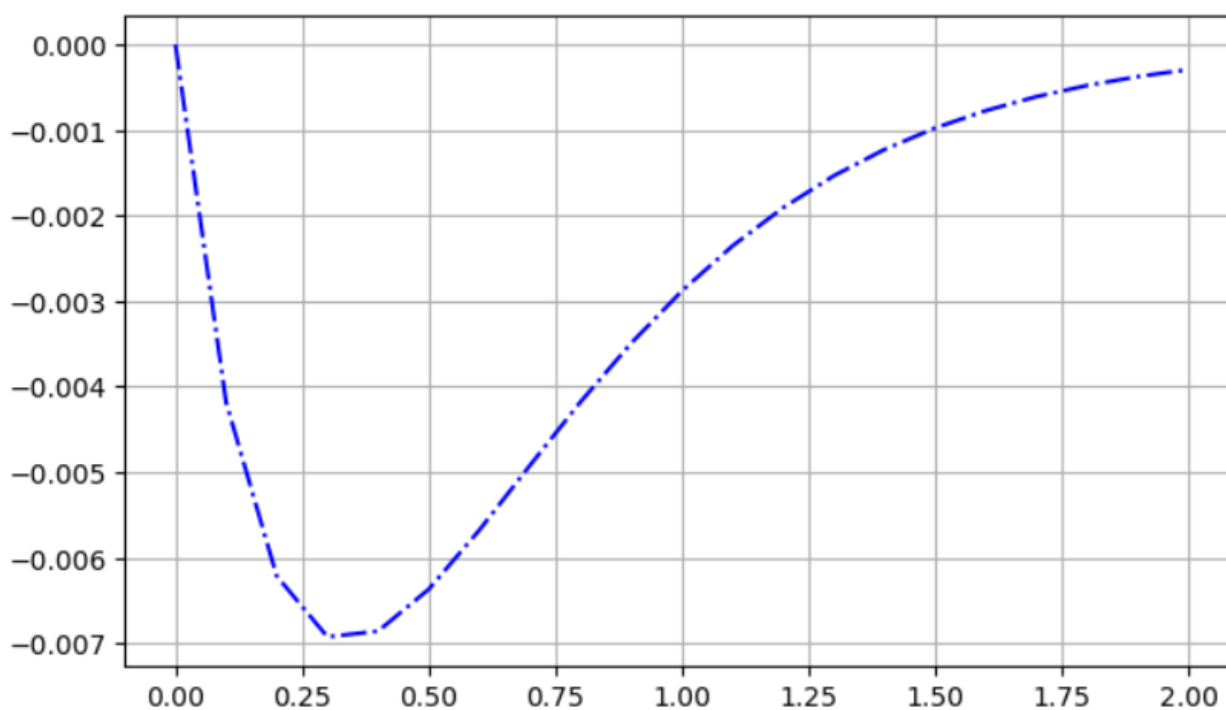


Рисунок 5 – ошибка метода Рунге второго порядка

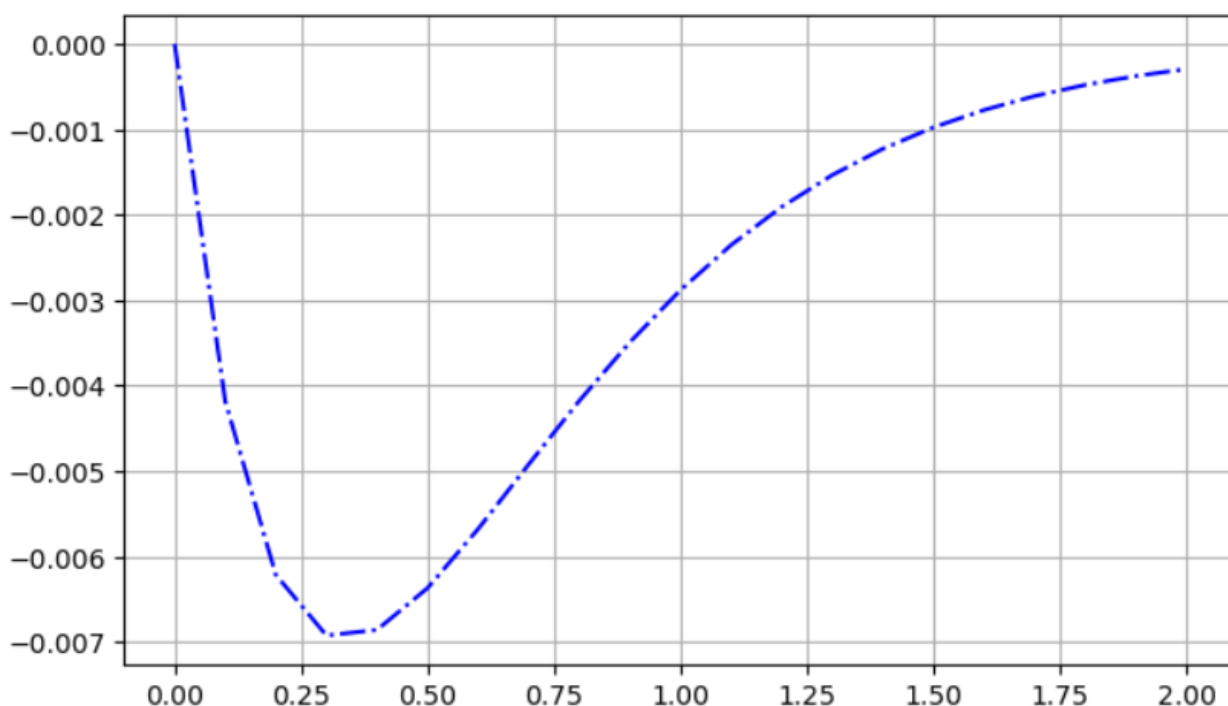


Рисунок 6 – ошибка метода средней точки

Таблица 2

| Название метода | Максимальная по модулю ошибка | Средняя ошибка | Стандартное отклонение ошибки |
|---------------------|-------------------------------|-----------------------|-------------------------------|
| Метод Ралстона | 0.0069239652594008105 | 0.0029644254880526392 | 0.0023602906805443745 |
| Метод средней точки | 0.0069239652594009216 | 0.0029644254880526674 | 0.0023602906805444013 |

Метод Ралстона имеет наименьшую теоретическую оценку ошибки среди всех методов второго порядка. При решении данной задачи он показывает лучшие характеристики, чем метод средней точки, но разница между ними крайне мала (максимальная по модулю ошибка отличается примерно на 10^{-16})

Реализуем методы 3, 4, 5 порядков:

- метод Ралстона порядка 3

- классический метод Рунге-Кутты порядка 4
- метод Рунге-Кутты-Фельберга порядка 5

Таблица Бутчера для метода Ралстона:

| | | |
|-----|-----|-----|
| 0 | | |
| 1/2 | 0 | |
| 0 | 3/4 | 0 |
| 2/9 | 1/3 | 4/9 |

Таблица Бутчера для метода Рунге-Кутты 4 порядка:

| | | |
|-----|-----|-----|
| 0 | | |
| 1/2 | 0 | |
| 0 | 3/4 | 0 |
| 2/9 | 1/3 | 4/9 |

Таблица Бутчера для метода Рунге-Кутты-Фельберга:

| | | | | | |
|-----------|------------|------------|-------------|--------|------|
| 0 | | | | | |
| 1/4 | 0 | | | | |
| 3/32 | 9/32 | 0 | | | |
| 1932/2197 | -7200/2197 | 7296/2197 | 0 | | |
| 439/216 | -8 | 3680/513 | -845/4104 | 0 | |
| -8/27 | 2 | -3544/2565 | 1859/4104 | -11/40 | 0 |
| 16/135 | 0 | 6656/12825 | 28561/56430 | -9/50 | 2/55 |

Решим задачу перечисленными выше методами и нарисуем графики решений (рис. 7). Все параметры те же, что и в предыдущем случае. Для метода Ралстона функция правой части была вызвана 60 раз, для метода Рунге-Кутты – 80 раз, для метода Рунге-Кутты-Фельберга – 120 раз.

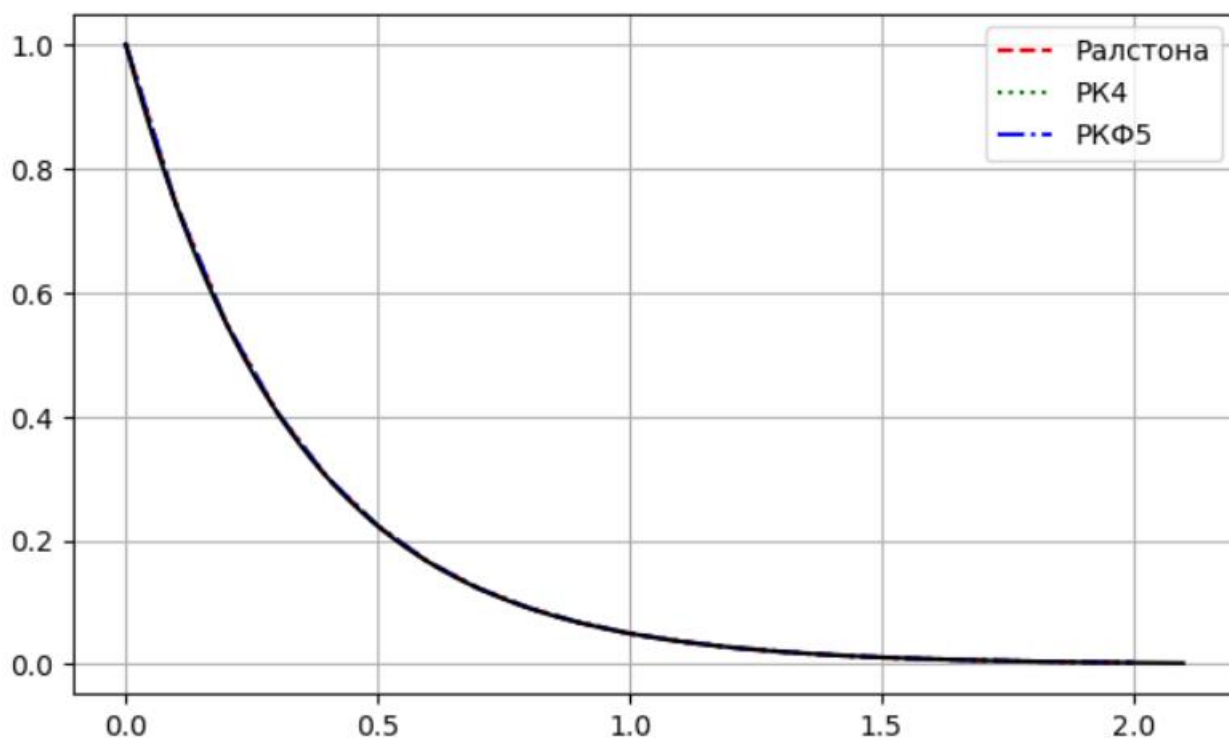


Рисунок 7 – методы 3, 4 и 5 порядков

Полученные графики численных решений выглядят, как и в предыдущем случае, одинаково. Посчитаем метрики ошибок данных методов.

Таблица 3

| Название метода | Максимальная по модулю ошибка | Средняя ошибка | Стандартное отклонение ошибки |
|-----------------------------|-------------------------------|------------------------|-------------------------------|
| Метод Ралстона | 0.00052370461559908 | -0.000221862799558327 | 0.00017865729027476 |
| Метод Рунге-Кутты | 3.17429687036741e-05 | 1.3458167297180889e-05 | 1.08282550295585e-05 |
| Метод Рунге-Кутты-Фельберга | 1.02111963706796e-06 | -4.329073194323087e-07 | 3.4832844974418e-07 |

Очевидно, что с повышением порядка метода уменьшается ошибка и возрастает число вызовов функции правой части. Если сравнить прирост точности вычислений метода второго порядка с методом первого порядка, получим хорошее улучшение (максимальная ошибка снизилась на два порядка, остальные показатели также улучшились). Однако далее с повышением порядка метода точность растет незначительно, при том что число вызовов функции f растет в арифметической прогрессии (до 4 порядка, далее - еще больше, т.к. для порядка $n > 4$ ранг $s > n$). Таким образом, на практике для данной задачи использование методов более высоких порядков может быть нецелесообразно.

Увеличим значение коэффициента распада k до 9 и отобразим решение задачи с помощью всех ранее реализованных методов (рис. 8). Видно, что при больших значениях k метод Эйлера приобретает огромную ошибку, методы 2, 3 и 4 порядков также стали работать хуже, что заметно по графику. При дальнейшем увеличении k метод Эйлера "прыгает" между разными по знаку значениями, уходя в отрицательную область, а затем и вовсе расходится.

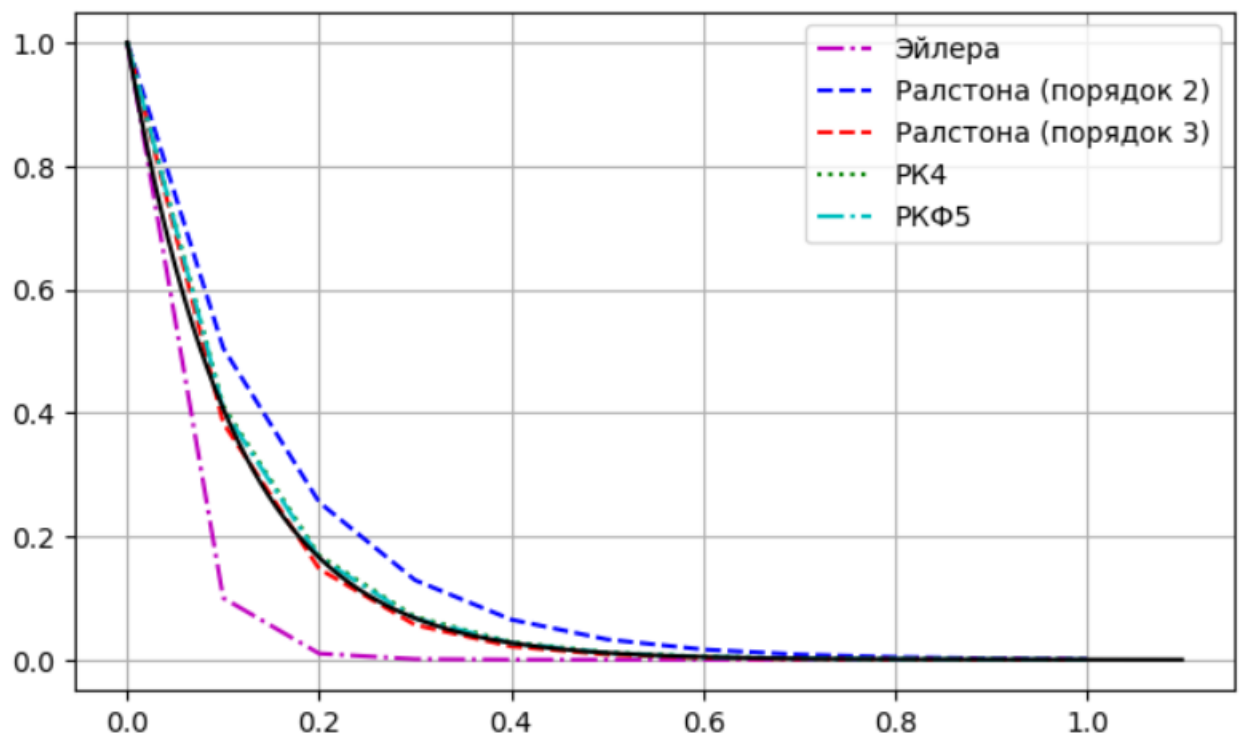


Рисунок 8 – жесткость задачи

Посчитаем метрики ошибки для метода порядка 5:

Таблица 4

| Название метода | Максимальная по модулю ошибка | Средняя ошибка | Стандартное отклонение ошибки |
|-----------------------------|-------------------------------|-----------------------|-------------------------------|
| Метод Рунге-Кутты-Фельберга | 0.000397409259829784 | -0.000102434194573929 | 0.000135113703438052 |

Для метода 5 порядка ошибка тоже увеличилась во много раз, пусть это и не так заметно на графике. Такое поведение методов связано с жесткостью задачи. В данном случае жесткость задачи регулируется коэффициентом k . Данную проблему можно решить следующими способами:

- Уменьшение длины шага
- Использование неявных методов

При уменьшении длины шага сильно возрастет количество обращений к функции f . Реализуем 2 неявных метода Рунге-Кутты: обратный метод Эйлера порядка 1 и неявный метод средней точки (implicit midpoint) порядка 2.

Таблица Бутчера для обратного метода Эйлера:

| |
|---|
| 1 |
| 1 |

Таблица Бутчера для неявного метода средней точки:

| |
|-----|
| 1/2 |
| 1 |

Графики представлены на рис. 9. Интегрирование проводилось с теми же параметрами, что и для явных методов, на интервале от 0 до 1.

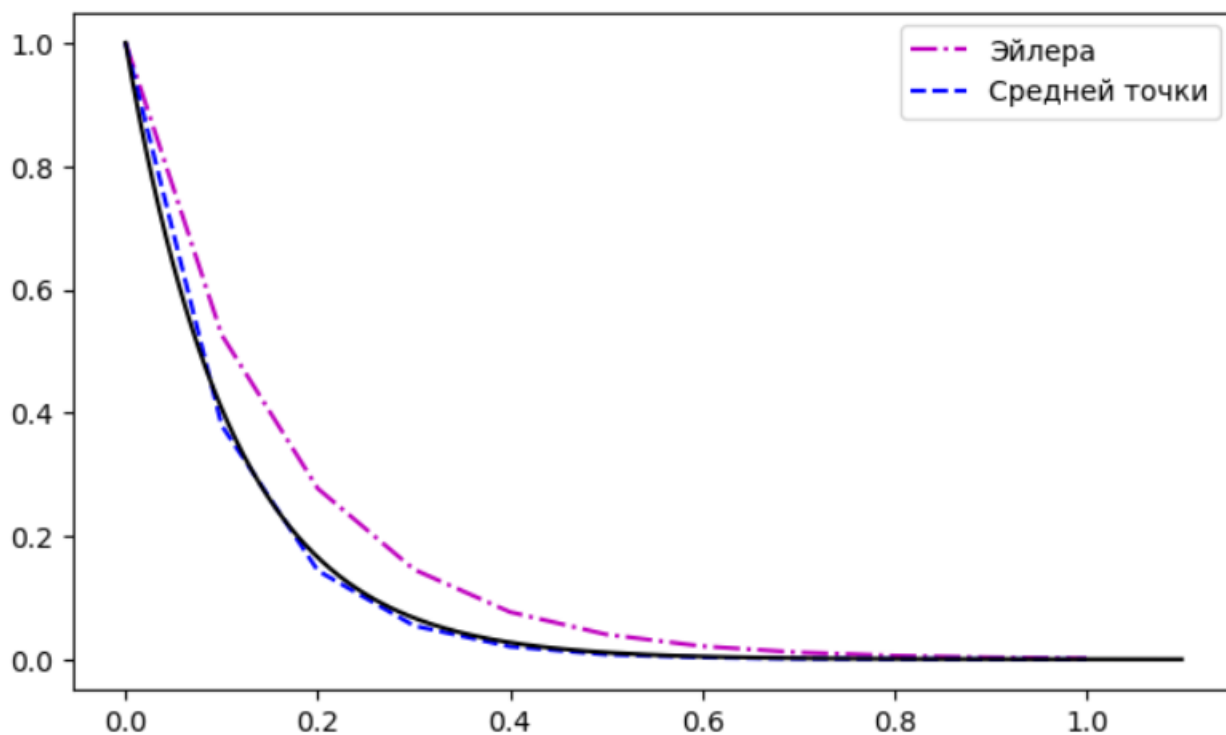


Рисунок 9 – неявные методы

Рассчитаем метрики ошибок для данных двух методов и нарисуем их графики (рис. 10 и рис. 11)

Таблица 5

| Название метода | Максимальная по модулю ошибка | Средняя ошибка | Стандартное отклонение ошибки |
|-----------------------------|-------------------------------|-----------------------|-------------------------------|
| Обратный метод Эйлера | 0.11974613 | 0.0385696 | 0.04299382 |
| Неявный метод средней точки | 0.02725931491301281 | -0.006723615022089722 | 0.00915397193885556 |

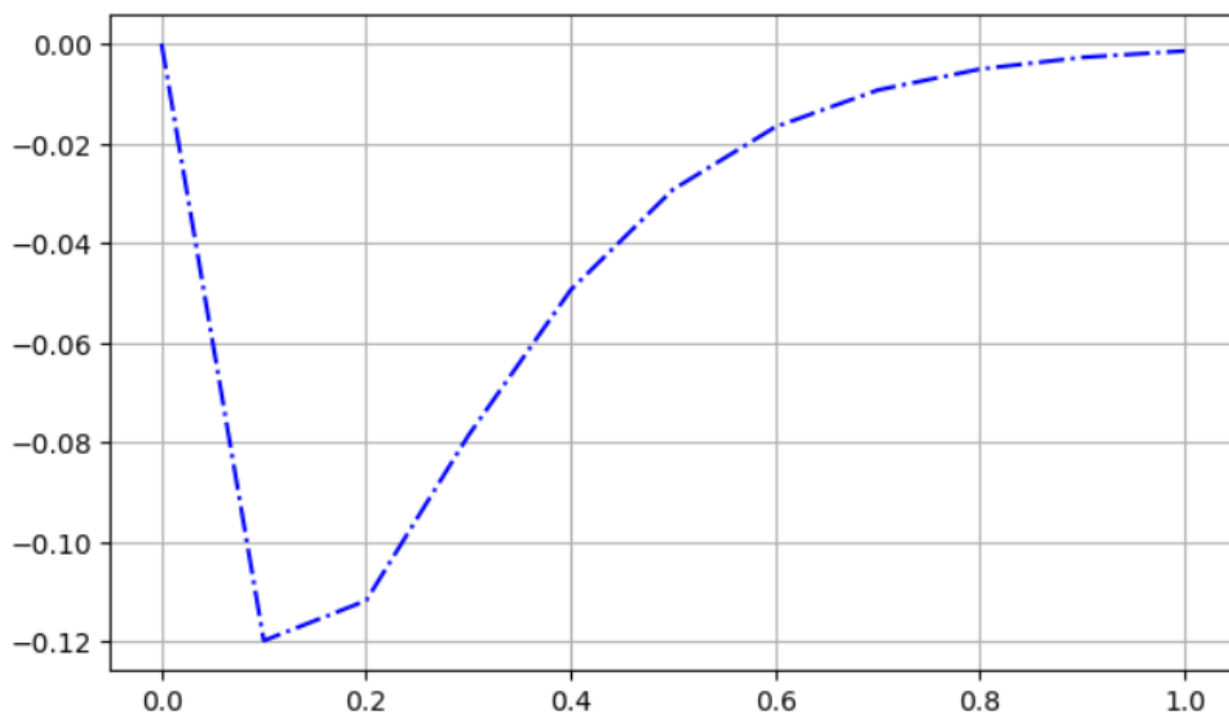


Рисунок 10 – ошибка обратного метода Эйлера

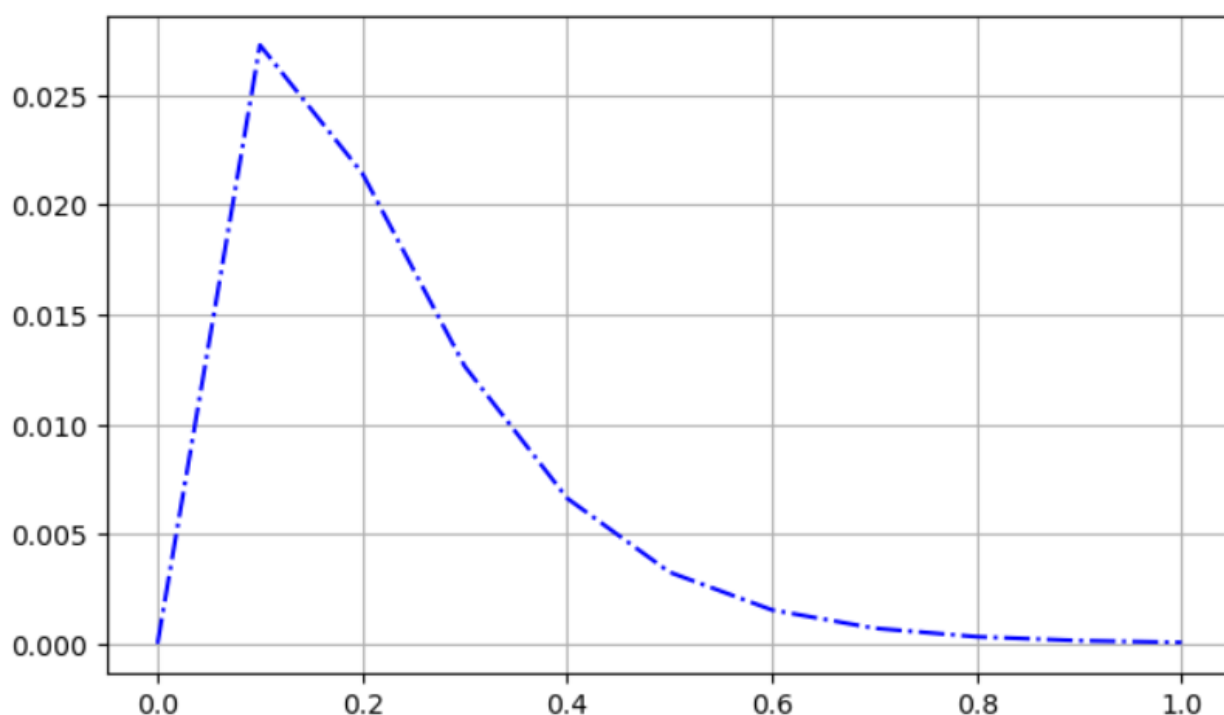


Рисунок 11 – ошибка неявного метода средней точки

Посчитаем также метрики ошибок явных методов тех же порядков на жесткой задаче:

Таблица 6

| Название метода | Максимальная по модулю ошибка | Средняя ошибка | Стандартное отклонение ошибки |
|---------------------------|-------------------------------|----------------------|-------------------------------|
| Прямой метод Эйлера | 0.30656965974059913 | -0.05217473536887763 | 0.09216111554455934 |
| Явный метод средней точки | 0.098430340259401 | 0.030369844993033267 | 0.035013857160488264 |

Видно, что максимальная ошибка уменьшилась приблизительно в три раза при использовании неявных методов на жесткой задаче. Также эти методы более устойчивы. При этом, обратный метод Эйлера вызвал функцию f 76 раз, а неявный метод средней точки 483 раз (при $k = 9$), что намного больше результатов явных методов. Это связано с тем, что на каждом шаге

для неявных методов необходимо дополнительно численно решать уравнение.

Вложенные методы Рунге-Кутты позволяют на каждом шаге оценивать локальную ошибку и изменять длину шага оптимальным образом. Реализуем вложенный метод Рунге-Кутты-Фельберга 4(5) и метод Дормана-Принса 5(4).

Результат работы методов на рис. 12. Интегрирование производилось с параметром $k = 3$ на временном интервале от 0 до 4.

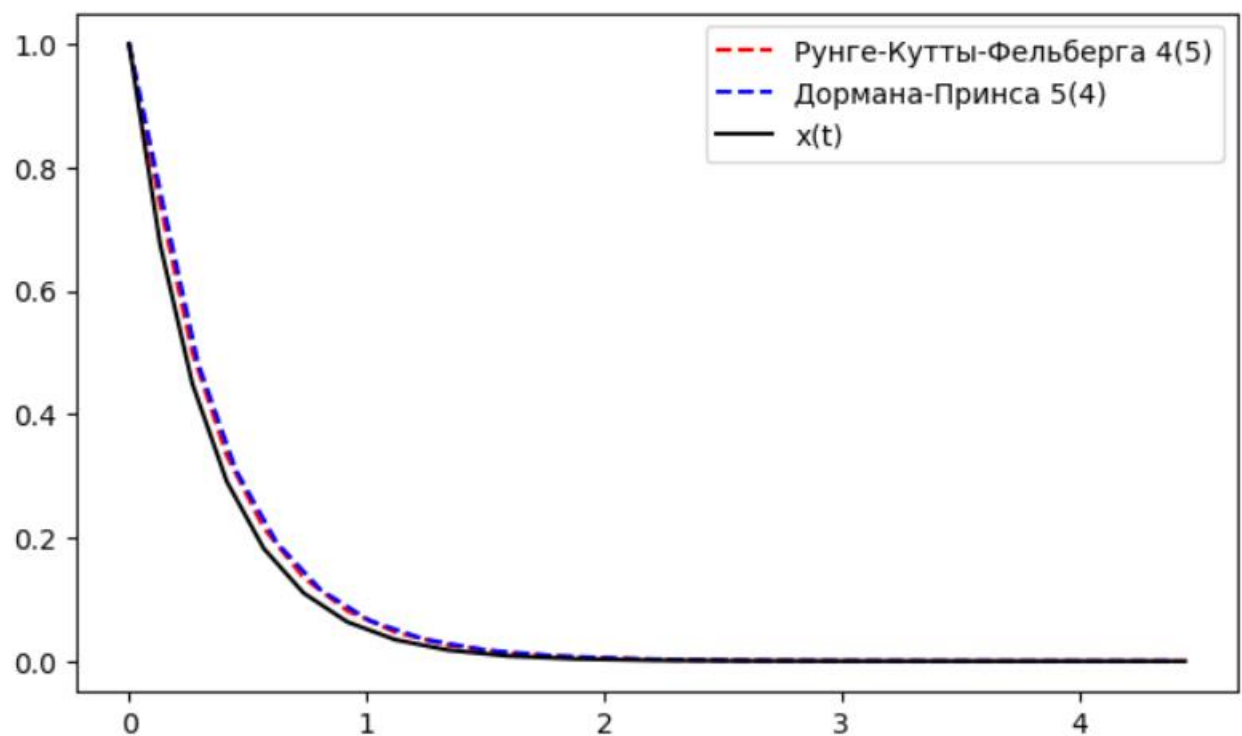


Рисунок 12 – вложенные методы

Метод Рунге-Кутты-Фельберга 4(5) сделал на заданном временном интервале всего 16 шагов, вызвав функцию f 90 раз. Метод Дормана-Принса 5(4) сделал на один шаг меньше, функция f вызывалась 98 раз.

Точность вложенных методов зависит от параметров a_tol и r_tol . Возьмем $k = 4$ и исследуем метрики глобальной ошибки метода Рунге-Кутты-Фельберга 4(5) при различных a_tol и r_tol . Результат в таблице ниже.

Таблица 7

| atol, rtol | Максимальная по модулю ошибка | Средняя ошибка | Стандартное отклонение ошибки | Число вызовов f | Число шагов | Интервал интегрирования |
|------------|-------------------------------|-----------------------|-------------------------------|-----------------|-------------|-------------------------|
| 10^{-7} | 0.20898747059250955 | 0.03709266180322486 | 0.062357594922912055 | 60 | 11 | [0, 5] |
| 10^{-10} | 0.23522612381877706 | 0.06574373940015864 | 0.07113737351094292 | 60 | 11 | [0, 5] |
| 10^{-13} | 0.08692914891620229 | 0.027510324750172822 | 0.025112834406690165 | 108 | 19 | [0, 5] |
| 10^{-16} | 0.0060370661027575045 | 0.0036775749745126857 | 0.0018242166253867624 | 204 | 35 | [0, 5] |
| 10^{-19} | 0.045925842300907904 | 0.009750758048837004 | 0.012520025496543257 | 396 | 67 | [0, 5] |

Из таблицы очевидно, что в данном случае оптимальным значением параметров a_tol и r_tol является 10^{-16} .

Сравним оценку локальной ошибки метода, получаемую на каждом шаге, с истинным значением локальной ошибки. Результаты на рис. 13.1 – 13.2.

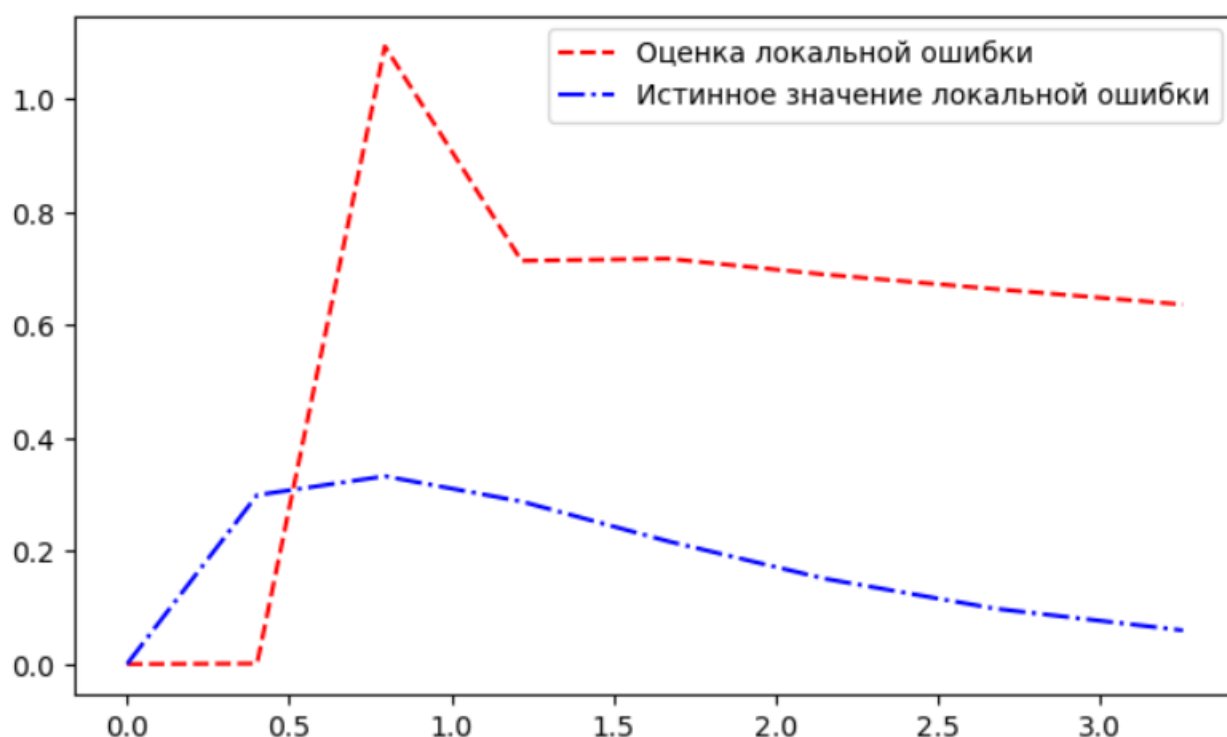


Рисунок 13.1 – сравнение оценки ошибки с ее истинным значением для метода Рунге-Кутты-Фельберга 4(5) при $k = 1$

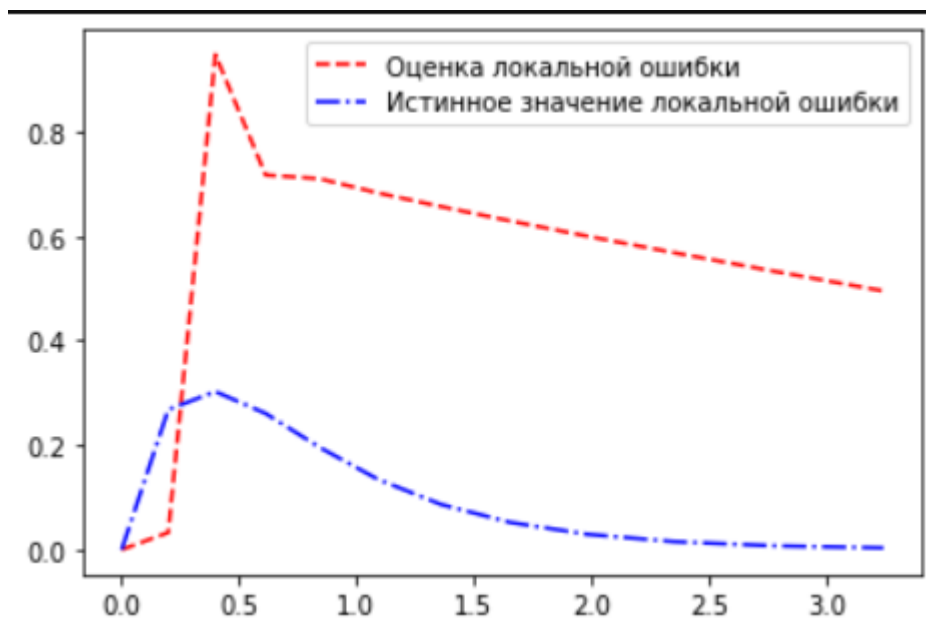


Рисунок 13.2 – сравнение оценки ошибки с ее истинным значением для метода Рунге-Кутты-Фельберга 4(5) при $k = 2$

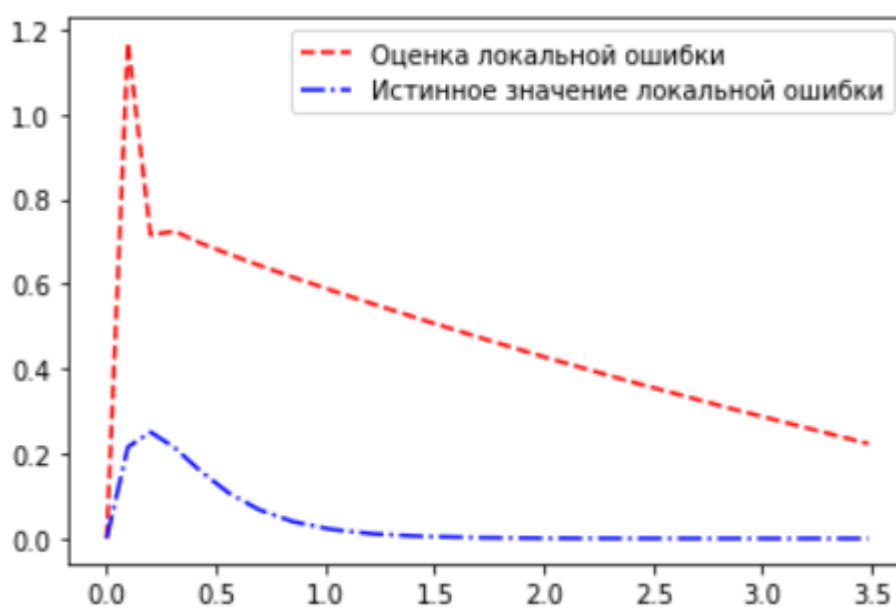


Рисунок 13.3 – сравнение оценки ошибки с ее истинным значением для метода Рунге-Кутты-Фельберга 4(5) при $k = 4$

Для метода Дормана-Принса график выглядит аналогично. По графикам видно, что оценка локальной ошибки немного меняется при различных коэффициентах распада. При этом, оценка локальной ошибки метода в начале интегрирования больше, чем истинная ошибка, и растет быстрее. Это может быть связано с тем, что метод, применяемый для оценки локальной ошибки, также как и метод оценки следующего значения

функции, является явным, а у явных методов в начале интегрирования данной функции ошибка больше, что связано с жесткостью задачи.

Реализуем явный многошаговый метод Адамса-Башфорта и неявный многошаговый метод Адамса-Мултона (схема РЕСЕС). Число шагов в обоих случаях равно 4. Интегрирование производилось с шагом 0.01. Графики для данных методов выглядят одинаково, нарисуем графики их ошибок.

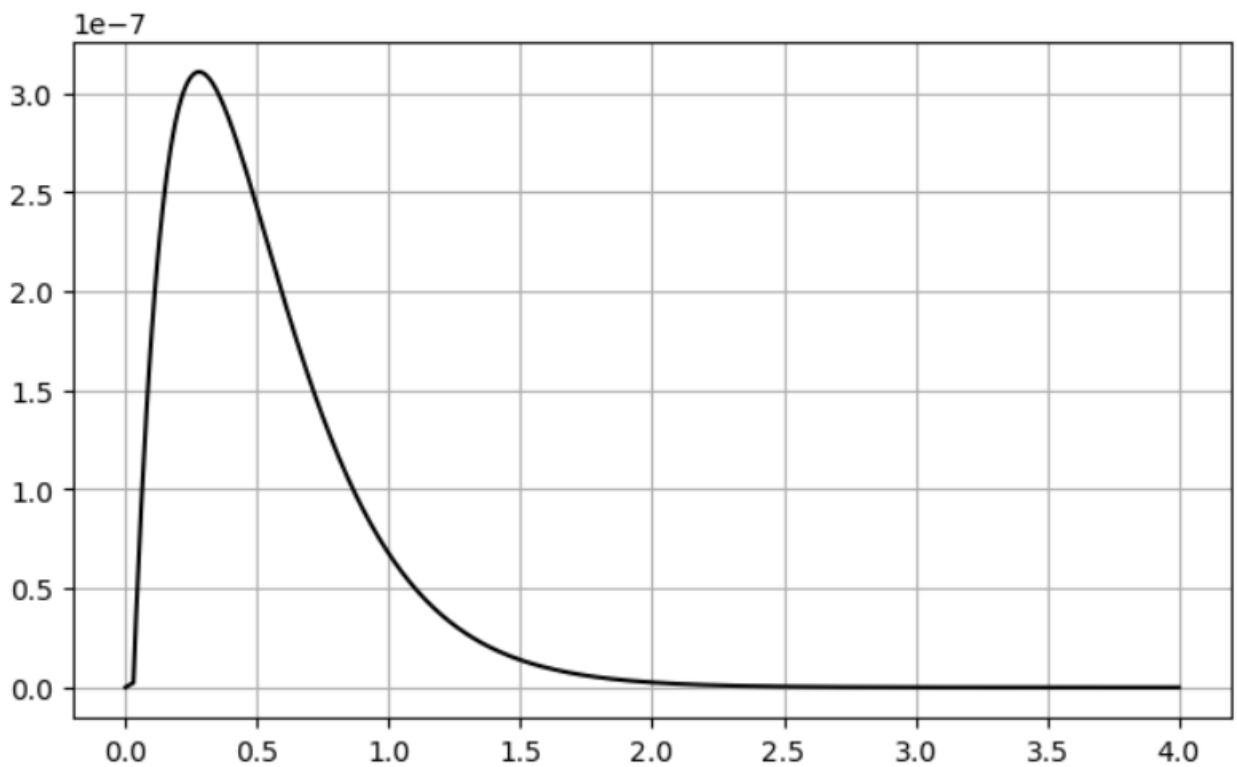


Рисунок 14 – ошибка метода Адамса-Башфорта

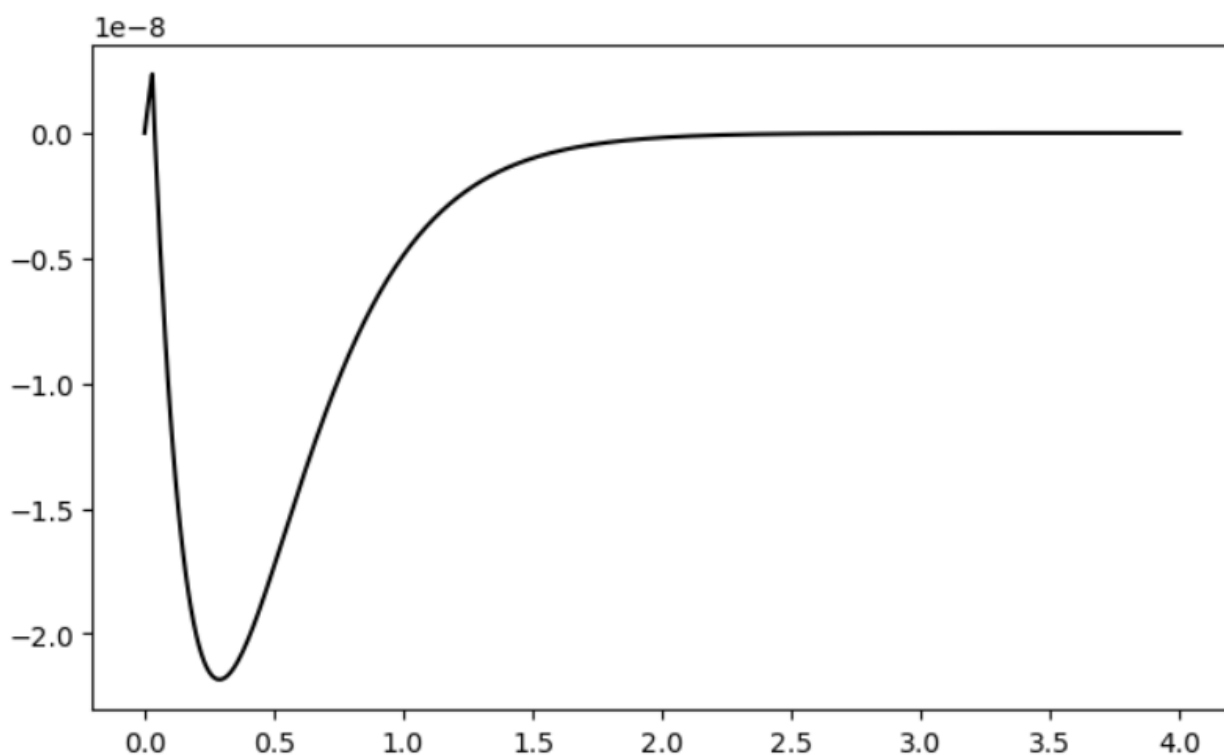


Рисунок 15 – ошибка метода Адамса-Мултона

Графики имеют ту же форму, что и для одношаговых методов – ошибка сильнее всего возрастает в начале интегрирования. Рассчитаем метрики данных ошибок.

Таблица 8

| Название метода | Максимальная по модулю ошибка | Средняя ошибка | Стандартное отклонение ошибки |
|-----------------|-------------------------------|-----------------------|-------------------------------|
| Адамса-Башфорта | 3.108175141708358e-07 | 5.26757943956995e-08 | 9.138474870144142e-08 |
| Адамса-Мултона | 2.18317466327278e-08 | -3.68744220972935e-09 | 6.427760361597042e-09 |

Метод Адамса-Мултона работает точнее, т.к. интерполяция производится по $k+1$ точке. При заданных параметрах он дает прирост в точности примерно в 15 раз. Более того, будучи неявным методом, он обладает лучшей по сравнению с методом Адамса-Башфорта устойчивостью и при увеличении коэффициента распада k будет работать с меньшей ошибкой.

Рассмотрим работу метода Рунге-Кутты 4 порядка при различной длине шага. Коэффициент распада равен 3, интегрирование проводится на интервале от 0 до 2.

Таблица 9

| Длина шага | Максимальная по модулю ошибка | Средняя ошибка | Стандартное отклонение ошибки | Число вызовов функции f |
|------------|-------------------------------|----------------------|-------------------------------|-------------------------|
| 0.1 | 0.0042678402594009 | 0.00058127805019586 | 0.00118895591201930 | 80 |
| 0.01 | 2.168100329269e-07 | 3.25584732120805e-08 | 6.1159603211378e-08 | 800 |
| 0.001 | 2.02652339037e-11 | 3.05882157818422e-12 | 5.7244212346352e-12 | 8000 |

При интегрировании методом Рунге-Кутты 4 порядка на одном и том же временном интервале с уменьшением шага в 10 раз метрики точности уменьшаются приблизительно на 4 порядка, что подтверждает порядок метода.

Рассмотрим работу метода Адамса-Мултона при тех же условиях.

Таблица 10

| Длина шага | Максимальная по модулю ошибка | Средняя ошибка | Стандартное отклонение ошибки | Число вызовов функции f |
|------------|-------------------------------|---------------------|-------------------------------|-------------------------|
| 0.1 | 0.000107789751797926 | 7.4262596361807e-06 | 3.9123814491934e-05 | 114 |
| 0.01 | 2.18317466327278e-08 | -7.33136784379e-09 | 7.4700892240397e-09 | 1194 |
| 0.001 | 2.4532043063629e-12 | -8.308643493535e-13 | 8.3595597759096e-13 | 11994 |

Метрики меняются похожим образом, но число вызовов функции правой части растет чуть быстрее за счет дополнительных вызовов для уточнения следующего приближения.

Проведем интегрирование на интервале от 0 до 4 с шагом 0.1 различными методами и сведем результаты в таблицу.

Таблица 11

| Название метода | Максимальная по модулю ошибка | Средняя ошибка | Стандартное отклонение ошибки | Число вызовов f | Число шагов |
|----------------------------|-------------------------------|-------------------------|-------------------------------|-----------------|-------------|
| Прямой Эйлера | 0.019201001071442347 | -0.011395334558859637 | 0.005510046671761798 | 40 | 40 |
| Средней точки | 0.0006615436621095205 | 0.000399902989125523 | 0.00018684565109632658 | 80 | 40 |
| Ралстона (порядок 2) | 0.000661543662109465 | 0.0003999029891254959 | 0.00018684565109630411 | 80 | 40 |
| Ралстона (порядок 3) | 1.6606824209730586e-05 | -1.003245332230171e-05 | 4.69295348768501e-06 | 120 | 40 |
| Рунге-Кутты (порядок 4) | 3.3324105608301124e-07 | 2.0131954634718626e-07 | 9.416993879773786e-08 | 160 | 40 |
| Рунге-Кутты-Фельберга | 3.6124677693649687e-09 | -2.1823845474680186e-09 | 1.0208404777665756e-09 | 240 | 40 |
| Обратный Эйлера | 0.01766385 | 0.01085049 | 0.00492189 | 280 | 40 |
| Неявный средней точки | 0.0003068987901223563 | -0.0001853522343847324 | 8.674721244665948e-05 | 604 | 40 |
| Рунге-Кутты-Фельберга 4(5) | 0.06507841466185815 | 0.016509753861528375 | 0.020224923699152367 | 90 | 16 |
| Дормана-Принса 5(4) | 0.0895617775010279 | 0.02067979724038181 | 0.02693961023771301 | 98 | 15 |
| Адамса-Башфорта | 0.08111450313129842 | -0.03973763405219356 | 0.025767367021759368 | 160 | 40 |
| Адамса-Мултона | 0.0704981831604845 | -0.02082044459363222 | 0.019334805384544497 | 234 | 40 |

Адаптивные методы сделали минимальное число шагов и вызывали функцию правой части не слишком часто. Многошаговые методы не продемонстрировали никаких улучшений по сравнению с одношаговыми при заданных начальных параметрах и достаточно часто вызывали функцию f. Наилучшие характеристики показал метод Рунге-Кутты-Фельберга 5 порядка, однако, как уже было описано ранее, прирост точности

по сравнению с методами 3-4 порядков на практике незначителен, а функция f вызывалась в 2 раза чаще, чем для метода 3 порядка.

При достаточно больших значениях коэффициента распада k , явные методы, показавшие отличные результаты для текущих параметров задачи, начинают работать нестабильно и накапливать большую ошибку. В этом случае лучше всего использовать неявные методы Рунге-Кутты, т.к. они более устойчивы. Например, неявный метод средней точки показал достаточно небольшое отклонение ошибки. Большое число вызовов функции правой части можно сократить, используя более оптимальные методы решения системы уравнений. В данном случае неявный метод средней точки больше всех других методов вызывал функцию f , потому что в его реализации для решения уравнения использовался не самый оптимальный метод простой итерации.

Проведем тест с длинным интервалом интегрирования. Для каждого метода будем постепенно увеличивать интервал интегрирования, пока последнее вычисленное значение функции не окажется меньше 10^{-12} . Данному условию удовлетворяет интервал от 0 до 9.3. Наложим также ограничение на глобальную относительную ошибку в 10^{-9} . Будем уменьшать шаг, пока максимальное значение ошибки на всем интервале не окажется меньше заданного значения. Затем посчитаем число вызовов функции правой части, потребовавшееся методу для выполнения всех перечисленных условий. Результаты приведены в таблице ниже.

Таблица 12

| Название метода | Размер шага | Максимальная глобальная относительная ошибка | Число вызовов f |
|-------------------------|-----------------------|----------------------------------------------|-------------------|
| Средней точки | 6.265787482177985e-06 | 7.382755307726155e-10 | 2946158 |
| Ралстона (порядок 2) | 6.265787482177985e-06 | 7.382762200603305e-10 | 2946158 |
| Ралстона (порядок 3) | 0.0003090315438263265 | 9.314367090373937e-10 | 89601 |
| Рунге-Кутты (порядок 4) | 0.0025418658283290017 | 7.845919851416241e-10 | 14524 |

| | | | |
|-----------------------|-----------------------|-----------------------|---------|
| Рунге-Кутты-Фельберга | 0.01 | 6.259959511554584e-10 | 5538 |
| Неявный средней точки | 7.735540101454301e-06 | 6.420478652253962e-10 | 5960448 |
| Адамса-Башфорта | 0.0009847709021836122 | 7.410161352952914e-10 | 37488 |
| Адамса-Мултона | 0.0018530201888518425 | 6.982124819890579e-10 | 29880 |

В таблице отсутствуют результаты для методов Эйлера, т.к. на практике оказалось очень сложно добиться настолько маленькой ошибки для этих методов. При размере шага порядка 10^{-7} глобальная относительная ошибка все еще была порядка 10^{-6} , а число вычислений f превысило $5 \cdot 10^6$. Очевидно, что данные методы не подходят для решения задачи с высокой точностью. Далее с повышением порядка методов заметно следующее: минимальный размер шага, необходимый для достижения заданной точности, увеличивается, а число вызовов функции правой части уменьшается. Для метода 5 порядка начальное значения шага 0.01 уже дало необходимую точность. Неявный метод средней точки вызывал функцию правой части почти в 2 раза больше, чем явный. Это связано с необходимостью решать уравнение на каждом шаге. Многошаговые методы использовали больший размер шага, чем явный метод 3 порядка, и реже вызывали функцию f . Однако, явные методы 4-5 порядка все же показали лучший результат.

На рис. 16 – рис. 23 представлены графики глобальной относительной ошибки каждого метода.

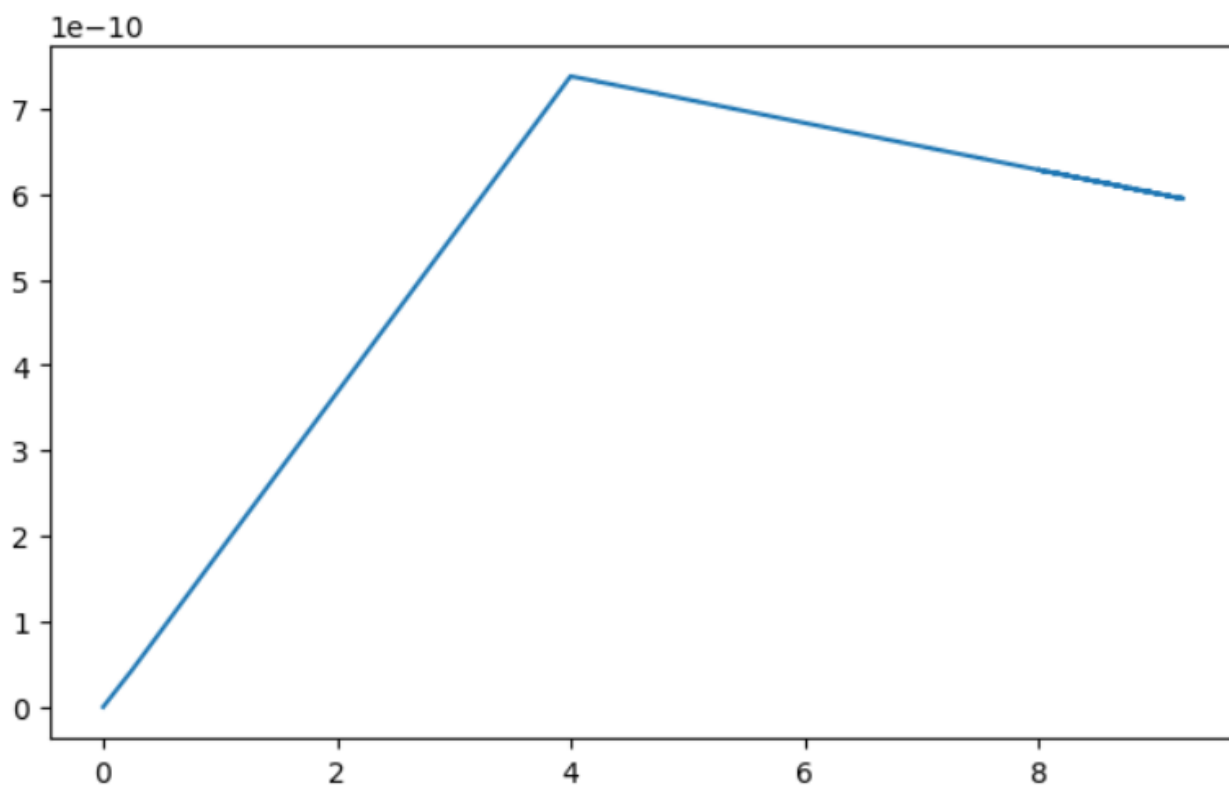


Рисунок 16 – глобальная относительная ошибка метода средней точки

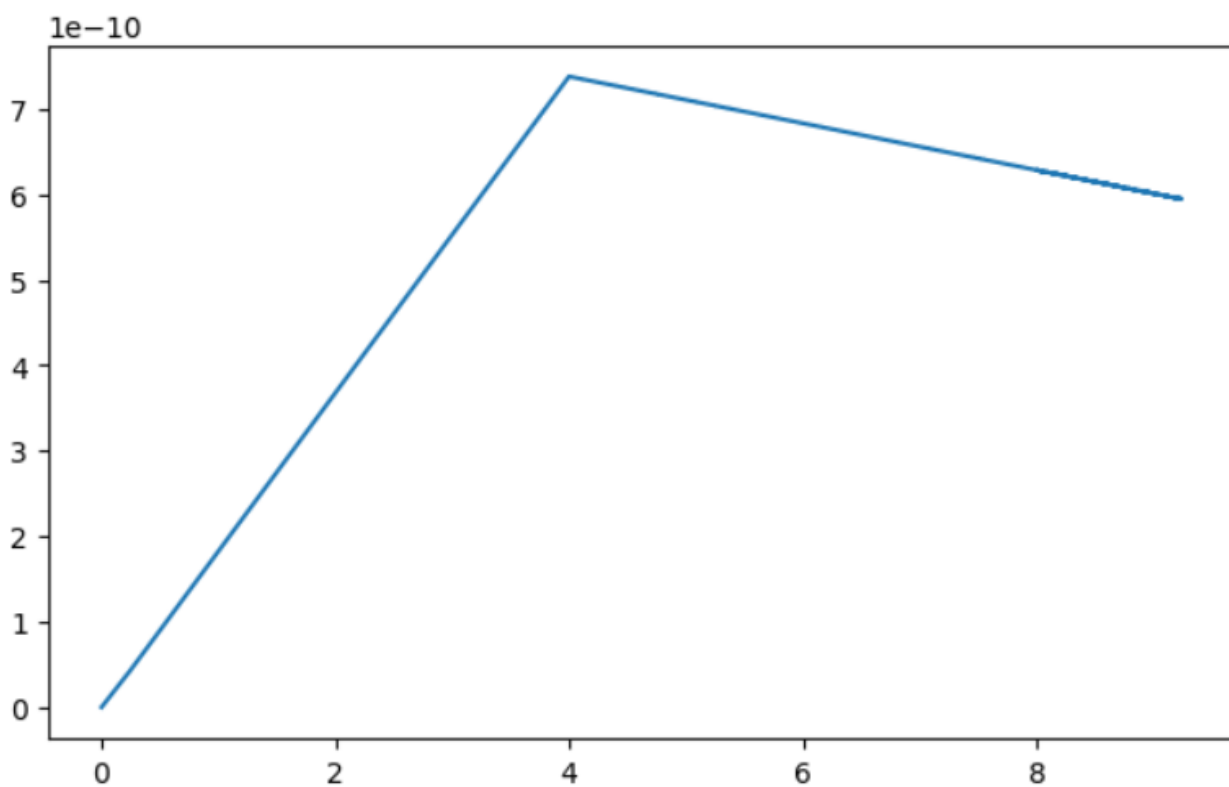


Рисунок 17 – глобальная относительная ошибка метода Ралстона порядка 2

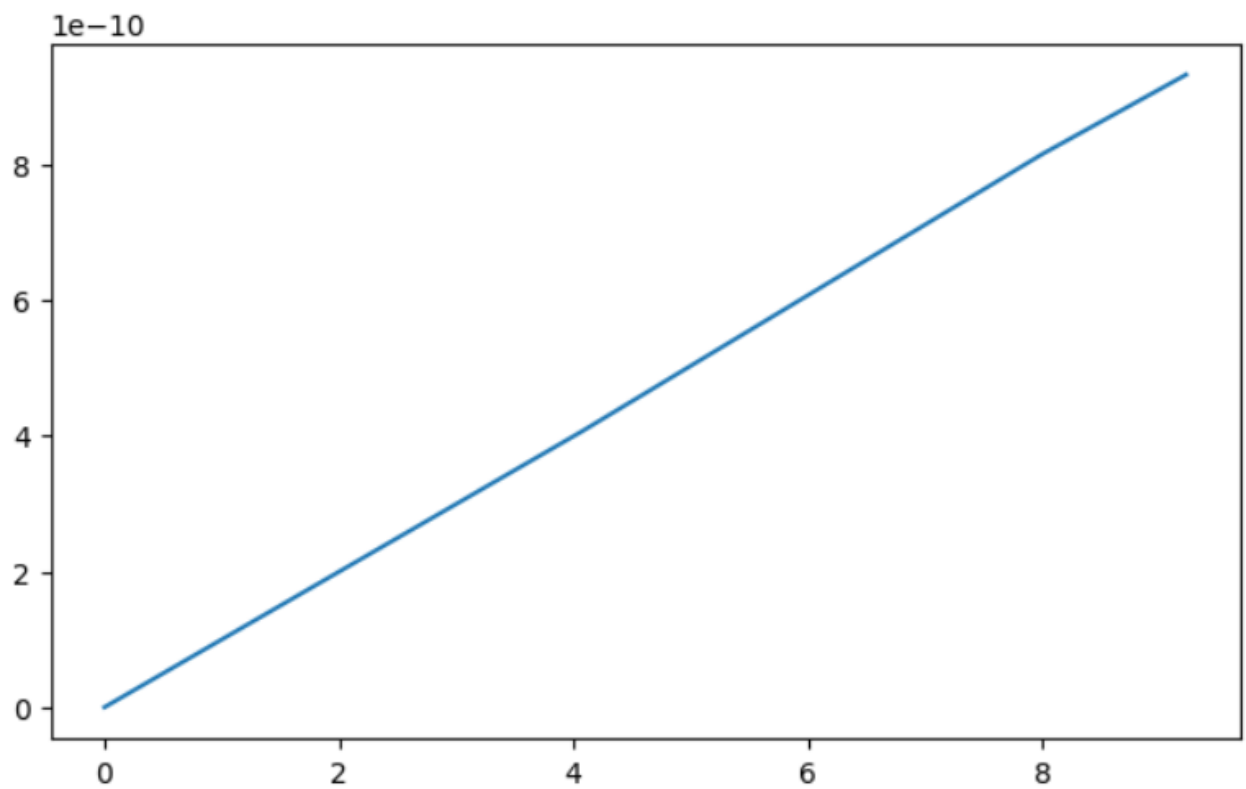


Рисунок 18 – глобальная относительная ошибка метода Ралстона порядка 3

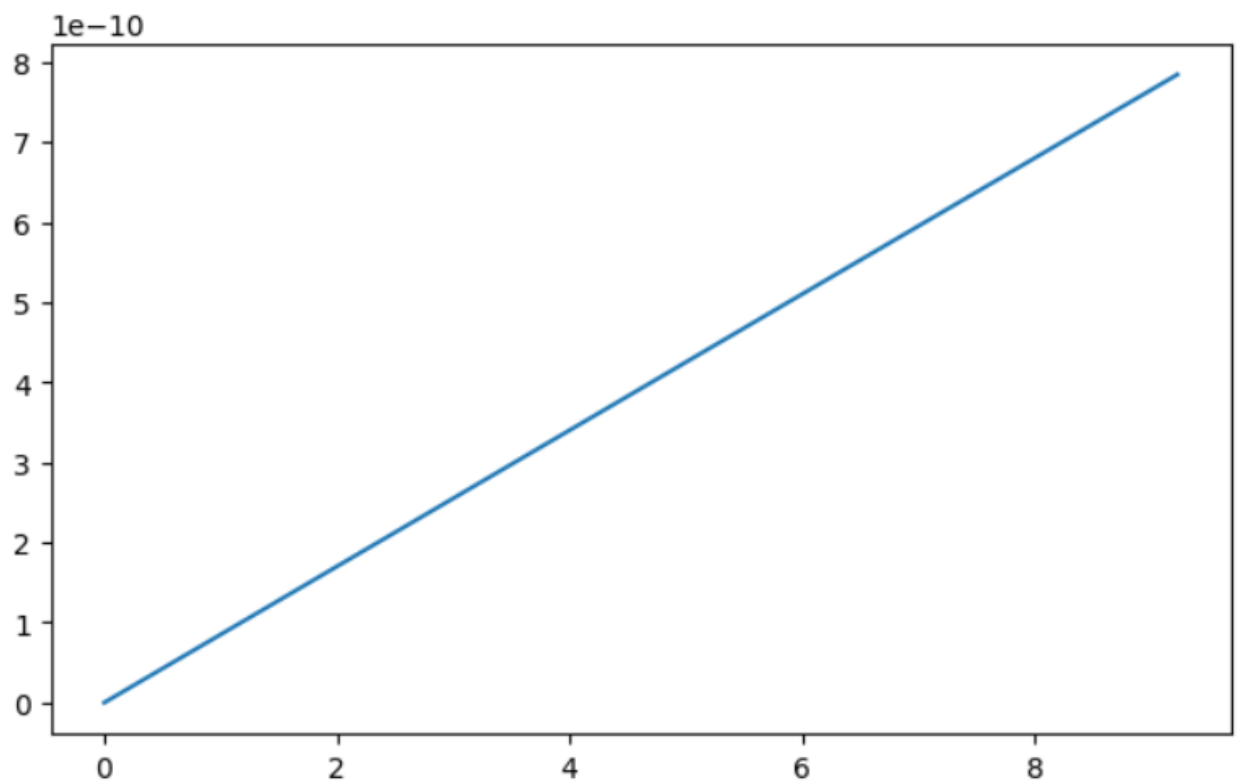


Рисунок 19 – глобальная относительная ошибка метода Рунге-Кутты

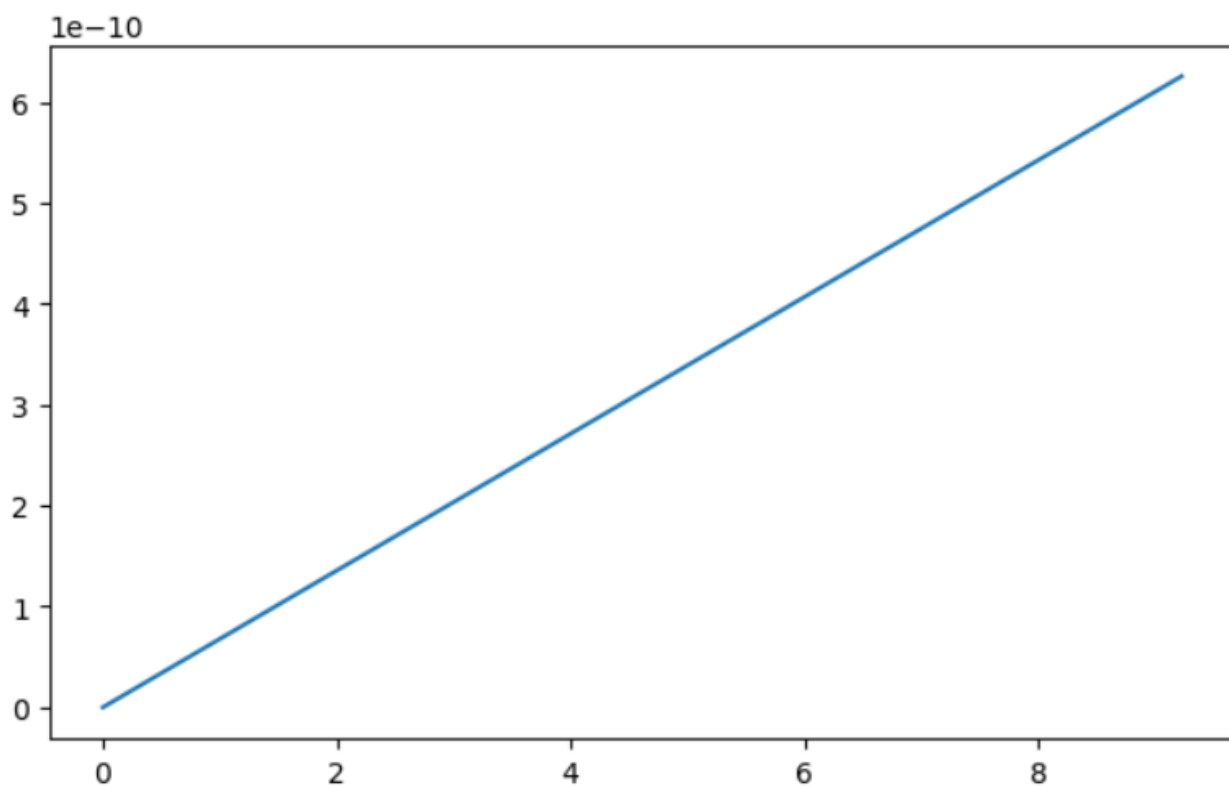


Рисунок 20 - глобальная относительная ошибка метода Рунге-Кутты-Фельберга

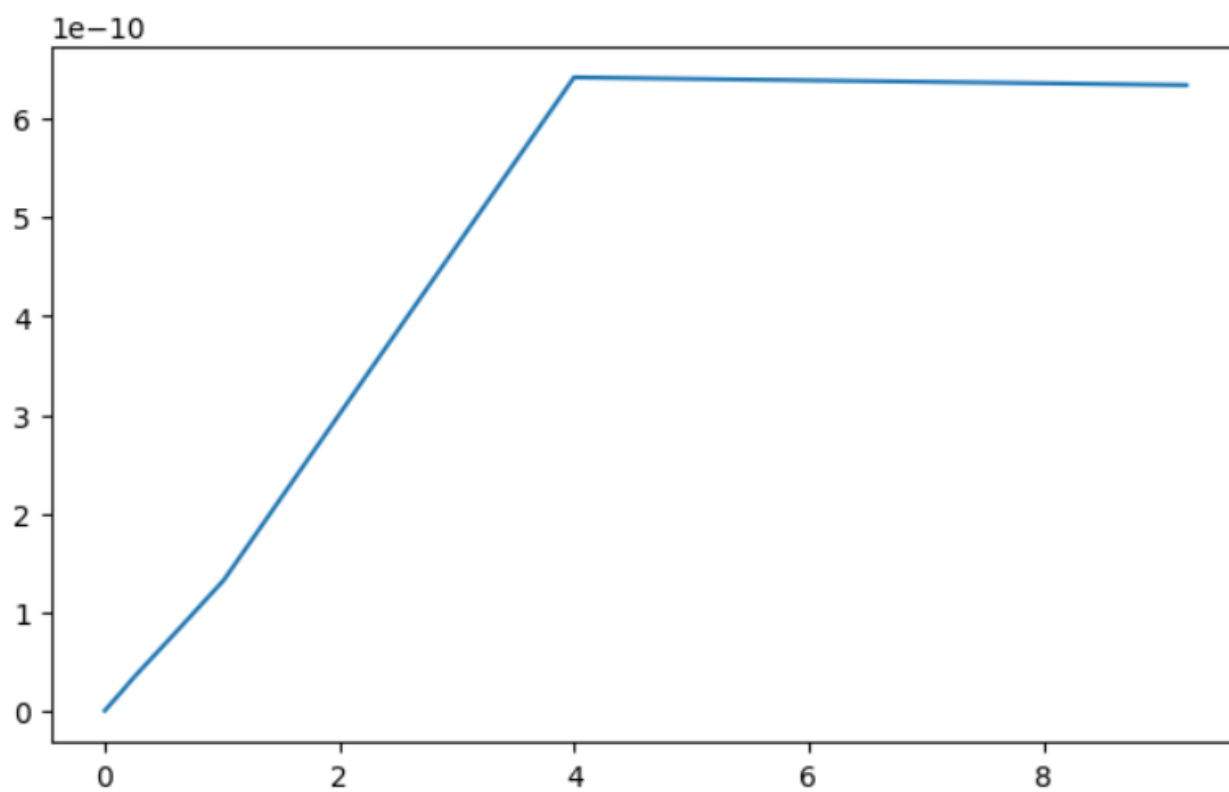


Рисунок 21 - глобальная относительная ошибка неявного метода средней точки

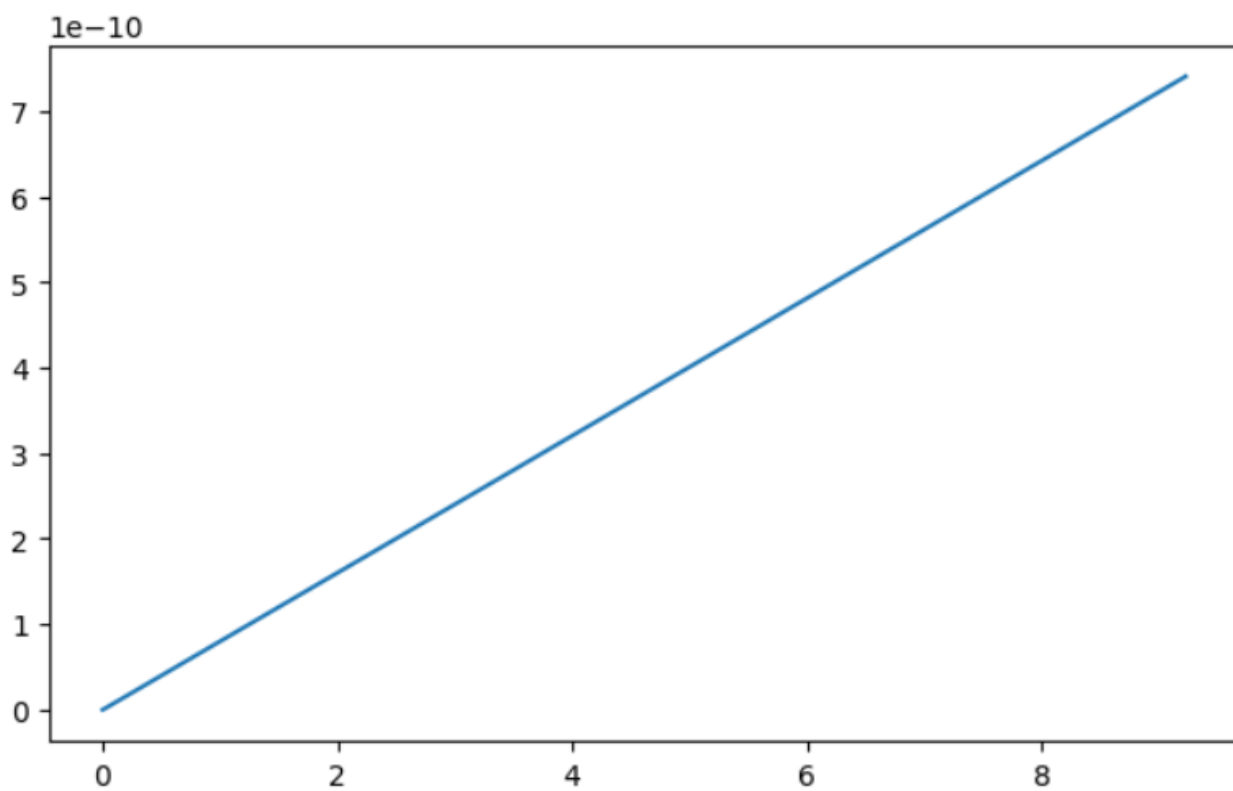


Рисунок 22 - глобальная относительная ошибка метода Адамса-Башфорта

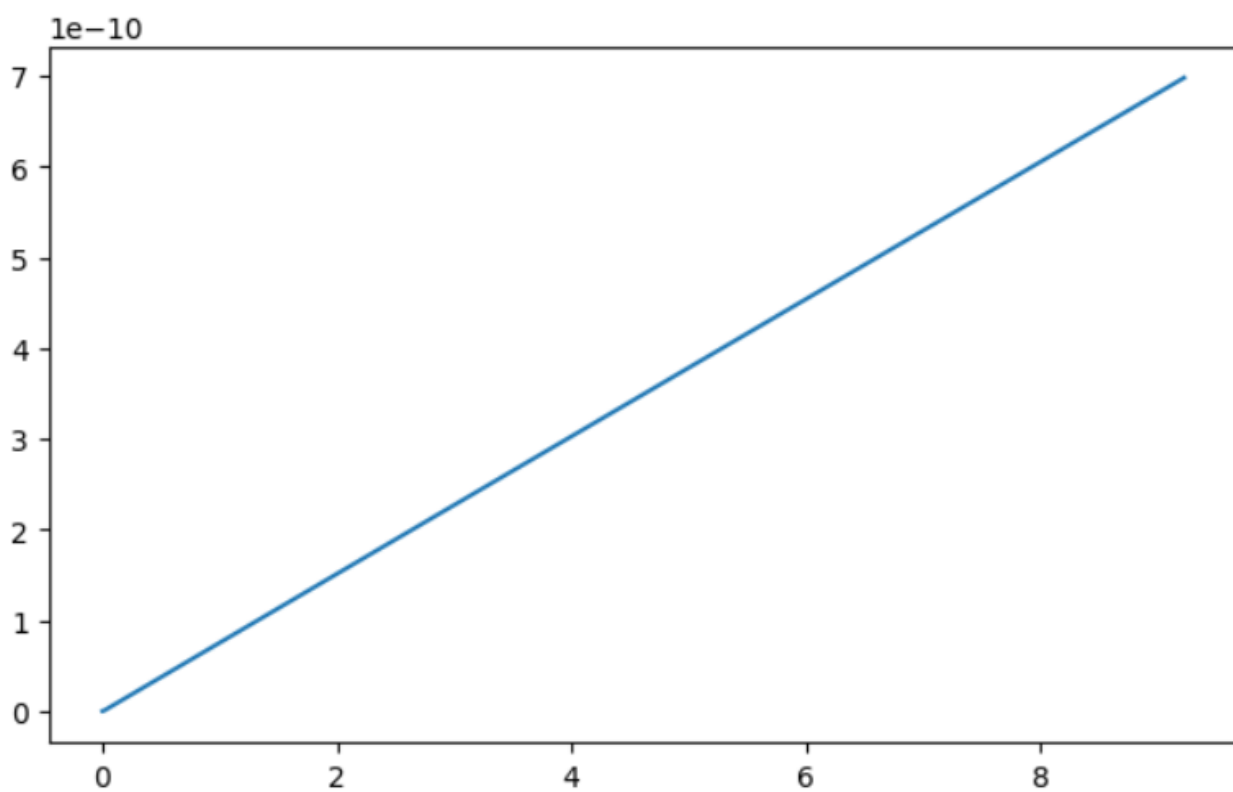


Рисунок 23 - глобальная относительная ошибка метода Адамса-Мултона

Вывод

В ходе выполнения данной работы были реализованы 12 различных численных методов решения ОДУ. Было установлено, что при малых значениях коэффициента распада наилучшим образом работают явные методы Рунге-Кутты. При этом, с повышением порядка метода выше 3-4, точность растет незначительно, а число вызовов функции правой части сильно увеличивается. При больших значениях коэффициента k необходимо использовать неявные методы. Также было выяснено, что адаптивные методы Рунге-Кутты делают наименьшее число шагов, а многошаговые методы не дают значительных улучшений решения данной задачи.