8/10

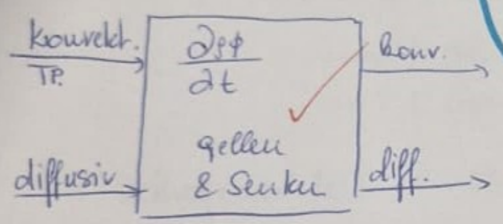
Aufgabe 1: Erhaltungsgleichungen (10 Punkte)

Schreiben Sie die Impuls-Erhaltungsgleichung für die x-Richtung an. Benennen Sie die einzelnen Terme und beschreiben Sie die dazugehörigen Transport-mechanismen.

Gleichungssystem Impulserhaltung → x-Richtung ??

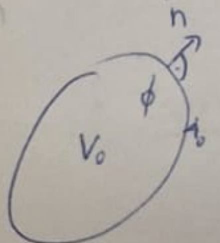
$$\underbrace{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}}_{\text{transient}} + \underbrace{(\vec{v}\,\nabla)\vec{v}}_{\text{konvektiv}} = \underbrace{\vec{f} - \frac{1}{\rho}\cdot \nabla\vec{p} + \nu\Delta\vec{v}}_{\text{resultiert aus dem Diffusiven Teil}} \left(+ \underbrace{\int q_\phi \, dV}_{\text{Quellen \& Senken}}\right)$$

Quellen & Senken => hängt vom Kontrollvolumen ab.



Allgemein Navier-Stokes-Gleichung

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_{V_0} \rho\phi\, dV}_{\text{transient}} = \underbrace{-\oint_{A_0} \rho\cdot\phi\cdot\vec{v}\cdot\vec{n}\, dA}_{\text{konvektiv}} + \underbrace{\oint_{A_0} \rho\cdot\Gamma\cdot\nabla\cdot\phi\cdot\vec{n}\, dA}_{\text{diffusiv}} + \underbrace{\int_{V_0} q_\phi\, dV}_{\text{Quellen \& Senken}}$$



für Impulserhaltung : $\frac{d\,(m\cdot\vec{v})}{dt} = \sum f_i$

und $\underline{\phi = \vec{v}}$.

(Massenerhaltung $\phi = 1$ $\frac{dm}{dt} = 0$)

6/10

Aufgabe 2: Diskretisierung (10 Punkte)

a) Was sind die wichtigsten Kennzahlen zur Beurteilung der Qualität einer Vernetzung?

b) Welche beiden grundlegenden Verfahren zur räumlichen Interpolation (Spatial Interpolation) haben wir kennengelernt? Beschreiben Sie beide Verfahren.

a) • Skewness: $\sigma_s = max \left\{ \frac{\theta_{max} - \theta_{opt}}{180° - \theta_{opt}} ; \frac{\theta_{opt} - \theta_{min}}{\theta_{opt}} \right\}$ ✓

$\sigma_s \in [0, 1]$

→ 1 schlecht ~ ab 0,95 instabil (laut Skript)

→ 0 gut

• Orthogonalität: Wert $\in [0; 1]$ ✓

hier 1 → gut

0 → schlecht

$\square \rightarrow 90°$, $\triangle \rightarrow 70{,}53°$ } optimal

• Aspect Ratio: $AR = \frac{l_{max}}{l_{min}} < 100$ okay (single precision)

(Längenverhältnis einer Zelle) ✓

• ~~Expansion Faktor~~:

$EF = \frac{d_{neighbour}}{d_{cell}} \sim 4$

Verhältnis ~~st~~ von Zellgröße benachbarter Zellen ✓

b) Finite Volumenmethode: Navier-Stokes-Equation Interpolation! ✗

$$\int_{V_0} \nabla \phi \cdot dV = \oint_{A_0} \phi_f \, \vec{n}_f \, d\vec{A}_f$$

→ Volumenintegral kann als geschlossenes Flächenintegral beschrieben werden

Rückseite →

Don't write on the back side! Do not use pencil! (except for sketches)
Write first and family name on each sheet:

Aufgabe 2b: → Annäherung des Volumenintegrals

$$\int_{V_0} \phi \cdot dV \approx \phi \cdot V_0$$

(könnte grundsätzlich "verfeinert" werden, "gewichtet" ist in 3-D kompliziert)

→ Annäherung der Flächenintegrale

Interpolation! ✓

- ~~Diffe~~ Mittelpunktsregel $\int_{A_0} \phi_f \cdot dA = \phi_f \cdot A_0$
- Trapezregel: $\int_{A_0} \phi_f \, dA = \frac{(\phi_n + \phi_s)}{2} \cdot A_0$
- Simpsonregel: $\int_{A_0} \phi_f \, dA = \frac{1}{6} \cdot A_0 \left(\phi_n + 4\phi_f + \phi_s \right)$

9/10

Aufgabe 3: Lösung der Gleichungen (10 Punkte)

In welcher Form liegt ein Gleichungssystem bei CFD-Berechnungen typischerweise vor?

Nennen Sie ein Beispiel für einen iterativen Gleichungslöser und beschreiben Sie die Vorgehensweise der Lösungsfindung (Stichwort: Restwerte bzw. Residuen).

~~Gleichungssystem kann~~

Navier-Stokes-Gleichung kann in Integraler u. in Differentieller Form dargestellt werden. Differentiell ist der Nachteil, dass ev. die Erhaltungsbedingung nicht dargestellt werden kann

=> daher schreibt man sie in integraler Form an und erhält ~~do~~ nach Approximation Summen.

~~→ Gleichungssystem, da es n~~

→ Gleichungssystem durch die Zellen $N = N_{cell} \cdot N_{variables}$

$$a_P \phi_P = \sum a_{NB} \phi_{NB} + b \checkmark$$

→ sparse Matrix ✓, Eindräge entlang Diagonalen & Nebendiagonale

$$\begin{bmatrix} \ddots & & \\ a_E & a_P & a_W \\ & & \ddots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vdots \\ \phi_E \\ \phi_P \\ \phi_W \\ \vdots \end{bmatrix} = \vec{S}$$

Iterative Berechnung der Zellwerte pro Zeitschritt
→ ϕ_{alt}
durch Zu u. Abflüsse aus Zelle Aktualisieren

✗ Löser: z.B. Gauss-Seidel

$$\rightarrow e_P = a_P \phi_P - \sum a_{NB} \phi_{NB} - b$$

↑ Abweichung

Residuen

$R = \sum e_P$ ✓ => Abbruchbedingung festlegen

→ "Dämpfer" kann eingebaut werden ✓ indem man ϕ_P mit ϕ^{old} u. ϕ^{new} berechnet.

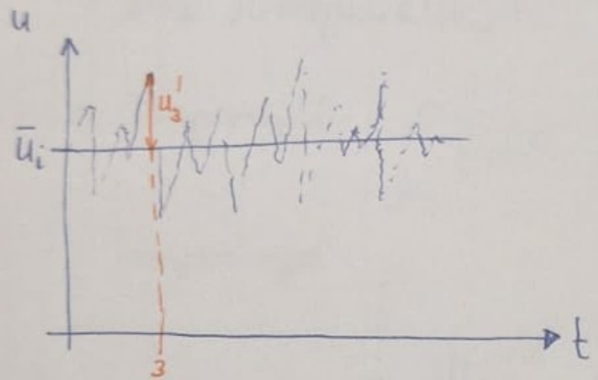
9/10

Aufgabe 4: Turbulenz (10 Punkte)

a) Nennen Sie einige Eigenschaften turbulenter Strömung?
Welche Annahmen gibt es bei RANS-Turbulenzmodellen? Woher kommen darin die sogenannten Reynolds Spannungen und wie wird damit umgegangen?

a) 3-dimensional ✓
instationär ✓
~~durchmischungen~~ ~~immer~~
chaotisch ✓
gute Durchmischung ✓

Rand-Averaged-Navier-Stokes
b) RANS-Modelle



momentane Abweichungen

$$u_i = \bar{u}_i + u_i'$$
$$p_i = \bar{p}_i + p_i'$$

→ es werden die Mittelwerte gebildet u dazu die Abweichungen addiert und anschließend in die Navier-Stokes gleichung und abermals der Mittelwert gebildet ✓ eingesetzt. => dadurch fallen für die Massenerhaltung viele Teile weg und da es keine "Mischterme" gibt, treten keine Reynoldsspannungen auf. ✓

→ bei der Impulserhaltung resultieren eigentlich aus dem konvektiven Teil ~~Renoyl~~ Reynoldsspannungen, die eine diffuse Wirkung haben ✓

→ $\tau_{ij} = -\rho \cdot \overline{v_i' v_j'} = \mu_t \cdot \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$ ✓ Konstanten empirisch ermittelt

μ_t kann über "empirische Methoden" gefunden werden, zB.: k-ε-Modell ✓ $\mu_t = \rho \cdot C_\mu \cdot \frac{k^2}{\epsilon}$

Wirbelviskosität