תרגיל בית 1

סטטיסטיקה 2

מגישות: הלה פרל 324620814

טל פאר 208851253

1

א

$$\boxed{Z = X + Y}$$

קונבולוציה

X,Y חיוביים

$$P(Z=n) = P(X+Y=n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P(X=k)\cdot P(Y=n-k) =$$

$$\sum_{k=0}^{n} P(X=k)\cdot P(Y=n-k) = \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^{k}}{k!}\cdot\frac{e^{-\mu}\cdot\mu^{n-k}}{(n-k)!} =$$

$$e^{-(\lambda+\mu)}\cdot\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda^{k}\cdot\mu^{n-k}}{k!\,(n-k)!} = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{n!}\cdot\underbrace{\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\cdot\lambda^{k}\cdot\mu^{n-k}}$$

$$= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{n!}(\lambda+\mu)^{n} \sim \text{pois}(\lambda+\mu)$$

התפלגות בינומית

ב

$$Var(Y) = E(Y^2) - E^2(Y) = E(E(Y^2|X)) - E^2(E(Y|X)) =$$

$$= E(Var(Y|X) + E^2(Y|X)) - E^2(E(Y|X)) =$$

$$= E(Var(Y|X)) + \underbrace{E(E^2(Y|X))}_{E[\text{"}X^2\text{"}]} - \underbrace{E^2(E(Y|X))}_{(\text{"}E[X]\text{"})^2}$$

$$= E(Var(Y|X)) + Var(E(Y|X))$$

שאלה 2

א1. Y,Z תלויים.

נניח בשלילה כי Y,Z בת"ל, לכן $P_{Y,Z}(y,z) = P_Y(y)\cdot P_Z(z)$.

מהגדרת Y,Z: $P_{Y,Z}(Z=0, Y=0) = 0$ אך $P_Y(y=0)\cdot P_Z(z=0) = (1-b)\cdot a \neq 0$

כלומר $P_{Y,Z}(y,z) \neq P_Y(y)\cdot P_Z(z)$ בסתירה לנחת כי Y,Z בת"ל ולכן Y,Z ת"ל ■

ב. נחשב לפי ערכי Z האפשריים: $E(Y|Z) = E(Y|Z=0) + E(Y|Z=1)$

$$E(Y|Z=0) = 1\cdot P(Y=1|Z=0) + 0\cdot P(Y=0|Z=0) = P(Y=1|Z=0) = \frac{P(X\le a)}{P(X\le a)} = 1$$

$$E(Y|Z=1) = 1\cdot P(Y=1|Z=1) + 0\cdot P(Y=0|Z=1) = P(Y=1|Z=1) = \frac{P(a\le X\le b)}{P(a\le X\le 1)} = \frac{b-a}{1-a}$$

$$\longrightarrow \quad E(Y|Z) = \begin{cases} 1, & Z=0 \\ \frac{b-a}{1-a}, & Z=1 \end{cases}$$

3

א

$$P(Z_n < z) = P(\min(X_1 \ldots X_n) < z) =$$

$$1 - P(\min(X_1 \ldots X_n) \geq z) =$$

$$1 - P(X_1 \geq z)P(X_2 \geq z)P(X_3 \geq z)\ldots =$$

$$1 - \prod_{i=1}^{n}(1-z) = 1-(1-z)^n$$

$$F_X = \begin{cases} 0 & z \leq 0 \\ 1-(1-z)^n & 0 < z < 1 \\ 1 & z \geq 1 \end{cases}$$

ב

$$P(U_n \leq z) = P(n \cdot Z_n \leq z) = P\left(Z_n \leq \frac{z}{n}\right) =$$

$$1 - \left(1 - \frac{z}{n}\right)^n \xrightarrow{D} \underbrace{1 - e^{-z}}_{*} \sim exp(1)$$

כפי התפלגות מצטברת של exp(1)

* מהגדרת התכנסות בהתפלגות:

$$\lim_{n\to\infty} F_{Z_n}(a) = F_X(a)$$

$$\lim\left(1-\left(1-\frac{z}{n}\right)^n\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 - e^{-z}$$

שאלה 4

$X_n \sim N(0, \frac{1}{n})$, X מתפלגות $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ 1, & x \ge 0 \end{cases}$

הסדרה $X_n \xrightarrow{P} X$ אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים n_0 כך שלכל $n > n_0$ מתקיים $P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$.

בנוסף כפי שלמדנו בקורס הסתברות מ' אם $X_n \xrightarrow{P} X$ אז $X_n \xrightarrow{כ} X$.

נשים לב כי $\lim_{n \to \infty} X_n (0,0)$ כלומר סדרת המ"מ X_n מתכנסת אל המ"מ הקבוע 0.

בנוסף $F_X(x)$ מוגדרת באופן כך ש $P(X<t \mid t<0) = 0$, $P(X<t \mid t \ge 0) = 1$.

נשים לב כי אם $P(X<t \mid t \ge 0) = 1$ וגם $P(X<t \mid t<0) = 0$ אזי.

אזי כי $X=0$ (X קטן מכל מס' אי שלילי וגם גדול מכל מס' שלילי ולכן X המ"מ הקבוע 0).

כלומר אכן $P(|X_n - X| > \varepsilon) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ משום ש X_n מתכנס

ל-0 והוא X , כלומר $X_n \xrightarrow{P} X$. בנוסף כפי שציינו אם $X_n \xrightarrow{P} X$

$X_n \xrightarrow{כ} X$

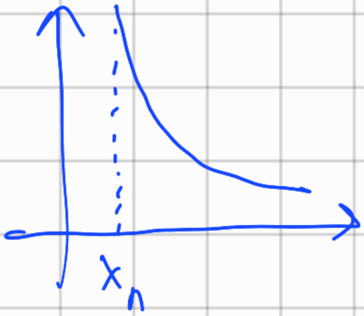
■

5

א

$$F=\left\{ f(x:\theta) : \frac{1}{\theta} \right\}$$

$$\prod_{i=0}^{n} f(x:\theta)=\prod_{i=0}^{n}\frac{1}{\theta}=\left(\frac{1}{\theta}\right)^n$$



ב

$$\hat{\theta}_n=X_n$$

ג

$$\text{bias}(\hat{\theta}_n)=E_\theta[X_n]-\theta$$

נמצא את ההתפלגות של X_n (בתחום $0<x<\theta$):

$$P(X\le x)=P(X_1\le x, X_2\le x \dots X_n\le x)=$$

$$P(X_1\le x)\cdot P(X_2<x)\cdot\ldots P(X_n<x)=\left(\frac{x}{\theta}\right)^n$$

$$f=\left(\left(\frac{x}{\theta}\right)^n\right)'=n\cdot\frac{(x)^{n-1}}{(\theta)^n}$$

$$\int_0^\theta n\cdot\frac{x^{n-1}\cdot x}{\theta^n}\,dx=\left(\frac{n}{n+1}\cdot\frac{x^{n+1}}{\theta^n}\right)_0^\theta=\frac{n}{n+1}\cdot\theta$$

$$\text{bias}(\hat{\theta}_n)=\frac{n}{n+1}\cdot\theta-\theta=\frac{n\theta-n\theta-\theta}{n+1}=\boxed{-\frac{\theta}{n+1}}$$

$$se=\sqrt{Var(\hat{\theta}_n)}$$

$$\sqrt{Var(X_n)}=\left(E[X_n^2]-E^2[X_n]\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$\left(\int_0^\theta x^2\cdot\frac{x^{n-1}}{\theta^n}\cdot n\,dx-\left(\frac{n\theta}{n+1}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$\left(\frac{n}{n+2}\cdot\frac{x^{n+2}}{\theta^n}\Big|_0^\theta - \left(\frac{n\theta}{n+1}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{n\cdot\theta^2}{n+2} - \frac{n^2\theta^2}{(n+1)^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{n\theta^2(n^2+2n+1) - n^2\theta^2(n+2)}{(n+1)^2(n+2)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\left(\frac{n\theta^2(n^2+2n+1-n^2-2n)}{(n+1)^2(n+2)}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{n\theta^2(1)}{(n+1)^2(n+2)}\right)^{\frac{1}{2}} = \boxed{\sqrt{\frac{n\theta^2}{(n+1)^2(n+2)}}}$$

$$MSE = \left(bias(\hat{\theta}_n)\right)^2 + Var(\hat{\theta}_n)$$

$$MSE = \frac{\theta^2}{(n+1)^2} + \frac{n\theta^2}{(n+1)^2(n+2)} =$$

$$\frac{\theta^2}{(n+1)^2}\left(1+\frac{n}{n+2}\right) =$$

$$\frac{\theta^2}{(n+1)^2}\left(\frac{n+2+n}{n+2}\right) = \frac{\theta^2}{(n+1)^2}\cdot\left(\frac{2n+2}{n+2}\right) =$$

$$\boxed{\frac{2\theta^2}{(n+1)(n+2)}}$$

ג

נבדוק האם $\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta^* \Leftarrow MSE \xrightarrow{?} 0$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\theta^2}{(n+1)(n+2)} = 0$$

לכן, **האומד עקיב.**

שאלה 6

ג1.

$$MSE_\theta(\hat\theta) = E(\hat\theta_n - \theta^*)^2$$

$$\overset{1}{=} E(\theta^{*2} - 2\theta^*\cdot\hat\theta_n + \hat\theta_n^2) \overset{2}{=} \theta^{*2} - 2\theta^* E(\hat\theta_n) + E(\hat\theta_n^2)$$

$$\overset{3}{=} \theta^{*2} - \theta^* E(\hat\theta_n) - \theta^* E(\hat\theta_n) + E(\hat\theta_n^2) + E(\hat\theta_n)^2 - E(\hat\theta_n)^2$$

$$\overset{4}{=} \theta^{*2} - \theta^* E(\hat\theta_n) - \theta^* E(\hat\theta_n) + E(\hat\theta_n)^2 + E(\hat\theta_n^2) - E(\hat\theta_n)^2$$

$$\overset{5}{=} \theta^*(\theta^* - E(\hat\theta_n)) - E(\hat\theta_n)(\theta^* - E(\hat\theta_n)) + E(\hat\theta_n^2) - E(\hat\theta_n)^2$$

$$= (\theta^* - E(\hat\theta_n))(\theta^* - E(\hat\theta_n)) + E(\hat\theta_n^2) - E(\hat\theta_n)^2$$

$$= (\theta^* - E(\hat\theta_n))^2 + E(\hat\theta_n^2) - E(\hat\theta_n)^2$$

$$= (bias_\theta(\hat\theta_n))^2 + Var_\theta(\hat\theta_n)$$

1. פתיחת הסוגרי מתוך התוחלת.
2. θ^* קבוע ולכן $E(\theta^*) = \theta^*$, וכן $E(\theta^{*2}) = \theta^{*2}$.
3. הוספה והחסרה של האיבר $E(\hat\theta)^2$
4. סידור מחדש של מיקום האיברים במשוו.
5. קיבוץ איברים דומים.

$$I(\theta) = Var(s(x;\theta)) = E[s^2(x;\theta)] - \underbrace{E^2[s(x;\theta)]}_{=0} = E[s^2(x;\theta)]$$ ג

מהוכחה בתרגול ש: $E[S(X;\theta)] = 0$

$$-E\left[\frac{\partial}{\partial\theta} s(X;\theta)\right] = -E\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial \log f(x;\theta)}{\partial\theta}\right)\right] = -\int \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{f(x;\theta)} \cdot f'(x;\theta)\right) \underbrace{dF_X(x)}_{f(x;\theta)dx} =$$

$$= -\int \frac{f''(x;\theta)\cdot f(x;\theta) - (f'(x;\theta))^2}{f^{\cancel{2}}(x;\theta)} \cancel{f(x;\theta)}\, dx =$$

$$\underbrace{-\int f''(x;\theta)dx}_{= -\frac{d^2}{d\theta^2}\int f(x;\theta)dx} + \underbrace{\int \underbrace{\frac{(f'(x;\theta))^2}{(f(x;\theta))^2}}_{s^2} \cdot f(x;\theta)\, dx}_{E[s^2(x;\theta)]} = -\frac{d^2}{d\theta^2}\underbrace{\int 1\, dx}_{=0} + E[s^2(x;\theta)] =$$

$$E[s^2(x;\theta)]$$

סה"כ קיבלנו: $I(\theta) = E[s^2(x;\theta)] = E[s^2(x;\theta)]$