תרגיל בית 2

טל פכור
מלה פרל

שאלה 1

יהיו $X_1,\dots,X_n \sim Geo(p)$ מצאו אומד נראות מירבית עבור p וחשבו לו רווח סמך ברמת סמך $1-\alpha$.

פונק ההסתברות של מ"מ גיאומטרי $P_X(x) = (1-p)^{x-1}\cdot p$

$$\to L(x) = \prod_{i=1}^{n} P_{X_i}(x_i) = (1-p)^{\sum_{i=1}^{n} x_i - n}\cdot p^n$$

$$\to \log(L(x)) = \log(1-p)\cdot\left(\sum x_i - n\right) + n\cdot\log(p)$$

$$\frac{\partial \log(L(x))}{\partial p} = \frac{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}{1-p} + \frac{n}{p}$$

נשווה ל-0:

$$\frac{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{1-p}{p} \to \frac{1}{p} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} + 1 - 1$$

$$\to \hat{p} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i} = \frac{1}{\bar{X}}$$

נחשב רווח סמך ברמת $1-\alpha$:

נזכיר כי שונות מ"מ גיאומטרי X עם פרמטר הצלחה p הוא $Var(X) = \frac{(1-\hat{p})}{\hat{p}^2}$

כלומר $I(p) = \frac{(1-\hat{p})}{\hat{p}^2}$ ולכן $I_n(\hat{p}) = \frac{n(1-\hat{p})}{\hat{p}^2}$.

לכן מהצבית

$$\hat{se} = \sqrt{\frac{1}{I_n(\hat{p})}} = \sqrt{\frac{\hat{p}^2}{n\cdot(1-\hat{p})}} = \hat{p}\sqrt{\frac{1}{n\cdot(1-\hat{p})}}$$

רווח הסמך המקורב הוא:

$$\left[\hat{p} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\ \hat{p} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right]$$ כנדרש להראות.

שאלה 3

יהי מבחן מגודל α בו דוחים את H_0 אם ורק אם $T(X^n) \geq c_\alpha$. הוכיחו כי מתקיים

$$p - value = \sup_{\theta\in\Theta_0} P_\theta\big(T(X^n) \geq T(x^n)\big)$$

כאשר x^n הוא הערך הנצפה עבור המשתנים המקריים X^n.

אם $T(X^n) \geq c_\alpha$ אז נדחה H_0 במבחן ברמה α הנתון.

מבחן מגודל ברמת מובהקות α אם גודלו לפחות α, כלומר $\alpha = \sup_{\theta\in\Theta_0}(\beta(\theta))$

כלומר $\alpha = \sup_{\theta\in\Theta_0}(\beta(\theta)) = \sup_{\theta\in\Theta_0} P(T(X^n) \geq T(x^n))$

$P(T(x^n) \geq c_\alpha)$ פונק' יורדת ככל ש- c_α גדל. לכן $C_{pvalue} = \max_{\theta\in\Theta_0}\{T(x^n)\}$

הכוונה $\{c_\alpha\}$ כמספרים
ללא הקשר תלות ב-α.

נסמן $T(x^n) = c_{\alpha'}$. לפיכך:

דחיית H_0 $\longleftrightarrow$ $c_\alpha \leq c_{\alpha'}$ $\longleftrightarrow$ $\alpha = P_{H_0}(T(x^n) \geq c_\alpha) \geq P_{H_0}(T(x^n) \geq c_{\alpha'}) = \alpha'$

<u>מהגדרת p_{value}</u>: $p_{value} = \inf_{\alpha}\{T(x^n) \geq c_\alpha\}$, ונסמן C_{pvalue} במקור הערך הקריטי.

$T(x^n)$ המשיג* את החסם התחתון: $P_{H_0}(T(x^n) \geq c_\alpha) \geq P_{H_0}(T(x^n) \geq C_{pvalue}) = p_{value}$

מכיוון ש $p_{value} = P_{H_0}(T(x^n) \geq C_{pvalue})$, מתקיים $c_\alpha \leq \max\{T(x^n)\} = C_{pvalue}$.

$p_{value} = \inf_{\alpha}\{T(x^n) \geq c_\alpha\} = \sup_{\theta\in\Theta_0} P(T(X^n) \geq T(x^n))$ $\longleftrightarrow$ $c_\alpha \leq \sup_{\theta\in\Theta_0}(T(x^n))$

* משיג את החסם או לפחות במובן גבולי

$$\lim_{\substack{T(x^n)\to C_{pvalue}\\ \theta\in\Theta_0}} P_{H_0}(T(x^n) \geq T(x^n)) = p_{value}$$

– כמובן ש , קיימים אחרת הנ"ל לא מוגדר מלכתחילה.
מרציפות P בהגדרה קיים ערך כזה, כלומר C_{value}.

* לא היה ברור אם צ"ל ש $p_{value} = \alpha$,
כלומר אם הסופרמום
הוא $P_{\sup\{\theta\in\Theta_0\}}$
או $\sup\{p\}$.
ההוכחות משתנות
ומרגיש הגיוני יותר
מהגדרת p_{val} שלנו
מדובר ב- $\sup\{p()\}$.
בכל אופן עשיתי למהדרה.

$\boxed{\hat{\theta} = \theta^*}$

שאלה 5

א. הוכיחו כי כאשר השערת האפס אינה נכונה, כלומר כאשר $\theta_* \neq \theta_0$, עוצמת מבחן וולד נתונה בקירוב על ידי

$$\beta(\theta_*) = 1 - \Phi\left(\frac{\theta_0 - \theta_*}{\widehat{se}} + z_{\alpha/2}\right) + \phi\left(\frac{\theta_0 - \theta_*}{\widehat{se}} - z_{\alpha/2}\right)$$

ב. הראו כי $\beta(\theta_*) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

א. נדחה את H_0 בהשערה דו צדדית אם $|W| = \left|\frac{\hat{\theta} - \theta_0}{\hat{se}}\right| > z_{\alpha/2}$

כלומר $\frac{\hat{\theta} - \theta_0}{\hat{se}} > z_{\alpha/2}$ או $\frac{\theta_0 - \hat{\theta}}{\hat{se}} > z_{\alpha/2}$

$$\beta(\hat{\theta}) = P\left(\frac{\theta_0 - \hat{\theta}}{\hat{se}} > z_{\alpha/2}\right) + P\left(\frac{\hat{\theta} - \theta_0}{\hat{se}} > z_{\alpha/2}\right)$$

$$P\left(\frac{\theta_0 - \hat{\theta}}{\hat{se}} - z_{\alpha/2} > 0\right) + P\left(0 > \frac{\theta_0 - \hat{\theta}}{\hat{se}} + z_{\alpha/2}\right)$$

$P(z>0) = \phi(-z) = 1 - \phi(z)$

$$\beta(\hat{\theta}) = \phi\left(\frac{\theta_0 - \hat{\theta}}{\hat{se}} - z_{\alpha/2}\right) + 1 - \phi\left(\frac{\theta_0 - \hat{\theta}}{\hat{se}} + z_{\alpha/2}\right)$$

היפוך במיקום הגורמים

כנדרש.

ב.

$$\beta(\hat{\theta}) = 1 - P\left(\frac{\theta_0 - \hat{\theta}}{\hat{se}} \leq z_{\alpha/2}\right) + P\left(\frac{\theta_0 - \hat{\theta}}{\hat{s}} < -z_{\alpha/2}\right)$$

$\frac{\theta_0 - \hat{\theta}}{\hat{se}} \xrightarrow{n} N(0,1)$ אסימפטוטית נורמלי, ומשפט הגבול המרכזי מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} \beta(\hat{\theta}) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{1 - \phi(z_{\alpha/2})}_{1 - \alpha/2} + \underbrace{\phi(-z_{\alpha/2})}_{1 - (1 - \frac{\alpha}{2})} = 1 - \frac{\alpha}{2} + 1 - \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) = 1$$

כנדרש.

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \beta(\hat{\theta}) = 1}$$

c 2

$$P(X \le \tau) = 0.95$$

$$P\Big(\underbrace{\frac{X-\mu}{\sigma}}_{Z} \le \frac{\tau-\mu}{\sigma}\Big) = 0.95$$

$$\phi\Big(\frac{\tau-\mu}{\sigma}\Big) = 0.95$$

$$\tau - \mu = \phi^{-1}(0.95)\sigma$$

$$\tau = \phi^{-1}(0.95)\sigma + \mu$$

$$L(\sigma) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\Big\{\frac{-(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\Big\} = \text{ב}$$

$$\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{n}{2}}} \cdot e^{-\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\log L(\theta) = -\frac{n}{2}\log(2\pi\sigma^2) - \sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma^2}\log L(\theta) = -\frac{n}{2}\cdot\frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{2}\,\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{\sigma^4} = 0$$

$$\boxed{\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2} \Rightarrow \boxed{\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}}$$

המשך בעמ' הבא)

$$S(x;se) = \frac{\partial \log f(x;\sigma)}{\partial \sigma}$$

$$\frac{\partial}{\partial \sigma}\left(\log\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right)\right) =$$

$$\frac{\partial}{\partial \sigma}\left(-\log\left(\sqrt{2\pi\sigma^2}\right) - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) =$$

$$-1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \sqrt{2\pi} + \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^3} \cdot (2) = \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^3} - \frac{1}{\sigma}$$

$$C_n = \left(\hat{se} - 2\sqrt{\frac{1}{I_n(se)}}, \hat{se} + 2\sqrt{\frac{1}{I_n(se)}}\right)$$

$$\hat{se} = \sqrt{\frac{1}{I_n(\hat{se})}} = \sqrt{\frac{1}{n \cdot \left(-E\left[-\frac{1}{\sigma^2} + \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^4}\right]\right)}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{n\left(\frac{1}{\sigma^2} - \frac{1}{\sigma^4} \cdot E\left[x^2 - 2\mu x + \mu^2\right]\right)}} = \frac{1}{\sqrt{n\left(\frac{1}{\sigma^2}\right) - \frac{n}{\sigma^4} \cdot \left(E[x^2] - 2\mu^2 + \mu^2\right)}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{n\left(\frac{1}{\sigma^2}\right) - \frac{n}{\sigma^4}\left(Var(x) + \mu^2 - \mu^2\right)}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{n}{\sigma^2} + \frac{n\sigma^2}{\sigma^4}}} =$$

$$\boxed{\hat{se} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2n}{\sigma^2}}}} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{2n}}$$

$$\boxed{C_n : \left(\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2} - z_{0.025} \cdot \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{2n}}, \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2} + z_{0.025} \cdot \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{2n}}\right)}$$

(c)

$$\hat{se}(\hat{r}_n)=|g'(\hat{\sigma}_n)|\cdot\hat{se}(\hat{\sigma}_n)$$

$$\tau=\phi^{-1}(0.95)\sigma+\mu=g(\sigma)$$

$$\hat{\tau}_n=g(\hat{\sigma})=\phi^{-1}(0.95)\cdot\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{n}}+\mu$$

$$\hat{se}(\hat{r}_n)=|\phi^{-1}(0.95)|\cdot\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{2n}}$$

$$\boxed{C_n=\left(\left(\phi^{-1}(0.95)\cdot\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)}{n}}+\mu\right)-z_{0.025}\cdot|\phi^{-1}(0.95)|\cdot\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{2n}},\ \left(\phi^{-1}(0.95)\cdot\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)}{n}}+\mu\right)+z_{0.025}\cdot|\phi^{-1}(0.95)|\cdot\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{2n}}\right)}$$

(3) $\Psi(\sigma)=\log(\sigma)$ היא פונק' גזירה ברציפות בתחום ההגדרה

ולכן $\hat{\Psi}_n=\log(\hat{\sigma}_n)$

רווח הסמך לנ"ל $g(\theta)=g(\sigma)=\log(\sigma)$ שווה ל:

$$[\hat{\Psi}_n\pm z_{0.025}\cdot\hat{se}]$$

לפי שיטת הדלתא:

$$\hat{se}(\hat{\Psi}_n)=|(\log(\hat{\sigma}))'|\cdot\hat{se}(\hat{\theta}_n)=$$

$$\frac{1}{\hat{\sigma}}\cdot\frac{\sqrt{\hat{\sigma}^2}}{\sqrt{2n}}=\boxed{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{2n}}}$$

ולכן רווח הסמך הוא:

$$\boxed{C_n=\left(\log\left(\phi^{-1}(0.95)\cdot\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)}{n}}+\mu\right)-z_{0.025}\cdot\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{2n}},\ \log\left(\phi^{-1}(0.95)\cdot\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)}{n}}+\mu\right)+z_{0.025}\cdot\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{2n}}\right)}$$

(א) 4

$\beta(\theta)=P_\theta(\text{reject }H_0)=P(X_{(n)}>c)=1-P(X_{(1)}\le c)\cdot P(X_{(2)}\le c)\dots\cdot P(X_{(n)}\le c)=$

$$\boxed{1-\left(\frac{c}{\theta}\right)^n}$$

(ב) הפונקציה עולה ככל ש-θ עולה.

לכן, על מנת לקבל sup, נבחר את ה-θ הכי גבוה

תחת השערת ה-0.

$$\alpha=\sup_{\theta\in\Theta_0}\beta(\theta)=\beta(0.5)=1-\left(\frac{c}{0.5}\right)^n=\boxed{1-(2c)^n}$$

(ג) $1-(2c)^n\le\alpha$ - המשמעות של מבחן ברמת מובהקות α.

$$\alpha\ge 1-(2c)^n\Rightarrow c^n\ge\frac{1-\alpha}{2^n}\Rightarrow c\ge\frac{(1-0.05)^{\frac{1}{n}}}{2^n}$$

$$\Rightarrow\boxed{\frac{(0.95)^{\frac{1}{n}}}{2}\le c}$$

(ד) P-value $=P_{H_0}(X_{(20)}>0.48)=1-P(X_{(1)}\le 0.48)\dots P(X_{(20)}\le 0.48)=$

$1-\left(\frac{0.48}{\theta}\right)^{20}$ $\quad\quad 0\le\theta\le 0.5$

המסקנה לגבי H_0: לא "יתכן" $\theta\le 0.48-\varepsilon$, כיון

שהם לא יכולים לחרוג מגבולות הקטע $(0,\theta)$ ונתון

$X(20)=0.48-\varepsilon$.

כלומר סה"כ: $H_0: 0.48 \le \theta \le 0.5$

הביטוי עבור p-value: $0 < \theta \le 0.5$

$$0 \le \frac{1}{\theta} \le 2 \qquad 1\cdot 0.48$$

$$0 \le \frac{0.48}{\theta} \le 0.96$$

$$0 \le \left(\frac{0.48}{\theta}\right)^{20} \le 0.44$$

$$1 \ge \underbrace{1-\left(\frac{0.48}{\theta}\right)^{20}}_{=\,p\text{-value}} \ge 0.56$$

כלומר סה"כ כל θ שניקח מעל 0.48 תתן לנו תוצאה גדולה מ-0.56 כפי שראינו, ולכן:

כמעט לכל α, נדחה את H_0.

6 א

מציאת ל-μ הינו אומד נראות מקסימלית ל-μ:

$$L(\mu)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2}=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sigma^n}\cdot\prod_{i=1}^{n}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$\ell(\mu)=-n(\log(\sigma))-\frac{n}{2}\cdot\log(2\pi)+\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2\right)=$$

$$-n(\log\sigma)-\frac{n}{2}\log(2\pi)-\frac{1}{2\sigma^2}\cdot\sum_{i=1}^{n}(x_i^2-2x_i\mu+\mu^2)$$

$$\ell'(\mu)=-\frac{\left(-2\sum_{i=1}^{n}x_i\right)}{2\sigma^2}-\frac{2n\mu}{2\sigma^2}=\frac{-n\mu+\sum_{i=1}^{n}x_i}{\sigma^2}=0\Rightarrow\hat{\mu}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}=\bar{X}$$

$$S(\mu;x)=\frac{\partial}{\partial\mu}\log\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2}\right)=$$

$$\frac{\partial}{\partial(\mu)}\left[-\log(\sigma\sqrt{2\pi})\cdot-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2\right]=$$

$$\frac{\partial}{\partial(\mu)}\left[-\log(\sigma)-\log(\sqrt{2\pi})-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i-\mu)^2\right]=$$

$$-\frac{1}{2\sigma^2}\cdot(-2x_i+2\mu)=\frac{x_i-\mu}{\sigma^2}$$

$$S'(\mu;x)=-\frac{1}{\sigma^2}$$

$$-E_\theta\left[-\frac{1}{\sigma^2}\right]=\frac{1}{\sigma^2}\Rightarrow I_n(\theta)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma^2}=\frac{n}{\sigma^2}$$

$$\hat{se}=\sqrt{\frac{1}{\left(\frac{n}{\sigma^2}\right)}}=\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$$

$$W=\frac{\hat{\mu}-\mu}{\hat{se}}=\frac{(\bar{x}-\mu)}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

כלומר מבחן וולד מבוסס עבור מבחן ההשערות:

נדחה את השערת האפס עבור: $\boxed{\left|\frac{(\bar{x}-\mu)}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right|>Z_{\frac{\alpha}{2}}}$

ב) מצאנו משאלה 2 סעיף ג' שהאומד לשונות

הוא: $\boxed{\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}}$

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

$$S(x;\theta)=\frac{\partial}{\partial\sigma^2}\log\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\right)=$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma^2}\left[-\log\left(\sqrt{2\pi\sigma^2}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]=$$

$$-\frac{1}{\sigma}\cdot\frac{1}{2\sigma}+\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^4}=\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^4}-\frac{1}{2\sigma^2}=$$

$$S'(x;\sigma^2)=\frac{-2(x-\mu)^2}{2\sigma^6}+\frac{1}{2\sigma^4}=\frac{1}{2\sigma^4}-\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^6}$$

$$I(\sigma^2)=-E\left[\frac{1}{2\sigma^4}-\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^6}\right]=-\frac{1}{2\sigma^4}+\left(\frac{E[x^2]-2\mu E[x]+\mu^2}{\sigma^6}\right)$$

$$= \frac{1}{\sigma^4} - \frac{1}{\sigma^6}\left(Var(x) + E^2[x] - 2\mu\cdot\mu + \mu^2\right) = -\frac{1}{2\sigma^4} + \frac{1}{\sigma^6}\left(\sigma^2\right) = \frac{1}{2\sigma^4}$$

$$\hat{se}(\hat{\sigma}^2) = \sqrt{\frac{2\sigma^4}{n}} = \sqrt{\frac{1}{I_n(\sigma^2)}}$$

$$W = \frac{\hat{\sigma}^2 - \sigma^2}{\sqrt{\frac{2\sigma^4}{n}}}$$

כלומר המבחן הוא: נדחה את השערת האפס אם:

$$\boxed{|W| > z_{\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow \left|\frac{\hat{\sigma}^2 - \sigma^2}{\sqrt{\frac{2\sigma^4}{n}}}\right| > z_{\frac{\alpha}{2}}}$$

1

$$L(p) = \prod_{i=1}^{n} (1-p)^{x_i - 1} \cdot p = \quad (0 \leq p \leq 1)$$

$$p^n \cdot (1-p)^{\sum_{i=1}^{n} x_i - n}$$

$$\ell(p) = \log(p^n) + \log\left((1-p)^{\sum_{i=1}^{n} x_i - n}\right) = n \log p + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i - n\right) \log(1-p)$$

$$= n \log p + \sum_{i=1}^{n} x_i \log(1-p) - n \log(1-p)$$

$$\ell'(p) = \frac{n}{p} - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{1-p} + \frac{n}{1-p} = 0 = \frac{n - np - p\sum_{i=1}^{n} x_i + pn}{p(1-p)}$$

$$\Rightarrow p = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i} = \frac{1}{\bar{x}}$$

$$s(x;p) = \frac{\partial}{\partial p}\left(\log\left((1-p)^{x-1} \cdot p\right)\right) = \frac{\partial}{\partial p}\left[(x-1)\log(1-p) + \log(p)\right]$$

$$= \frac{1-x}{1-p} + \frac{1}{p}$$

$$I(p) = Var\left(\frac{1-x}{1-p} + \frac{1}{p}\right) = Var\left(\frac{\cancel{p} - xp + 1 - \cancel{p}}{p(1-p)}\right) = Var\left(\frac{1-xp}{p(1-p)}\right) =$$

$$\frac{1}{(1-p)^2} \cdot Var\left(\frac{1}{p} - X\right) = \frac{1}{(1-p)^2} \cdot Var(X) = \frac{1}{(1-p)^2} \cdot \frac{(1-p)}{p^2} =$$

$$\frac{1}{p^2(1-p)} \Rightarrow I_n(p) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p^2(1-p)} = \frac{n}{p^2(1-p)}$$

$$\hat{se}(\hat{p}) = \sqrt{\frac{p^2(1-p)}{n}}$$

$$\boxed{C_n = \left[\frac{1}{\bar{X}} - \sqrt{\frac{p^2(1-p)}{n}} \cdot z_{\frac{\alpha}{2}} \quad , \frac{1}{\bar{X}} + \sqrt{\frac{p^2(1-p)}{n}} \cdot z_{\frac{\alpha}{2}} \right]}$$

$$\alpha = \sup_{\theta \in \Theta_0} \beta(\theta) = \sup_{\theta \in \Theta_0} P_\theta(T(X^n) \geq c_\alpha)$$

3

$$P_\theta(T(X^n) \geq c_\alpha)$$