2151298 杨滕超 2班 《离散数学》

一、

1	2	3	4	5	6	7
F	T	T	F	F	T	F

二、

1	2	3	4	5	6	7	8	9
C	C	B	A	A	A	B	C	D

三、1. K_5 ~~$K_{3,3}$~~ $K_{3,3}$

2. 2^n

3. 同构

4. 前序遍历、中序遍历、后序遍历

四、1. (a) 最多有 $2^{2^2}=16$ 个，以下列出所有组合，0代表F假，1代表T真

p	q	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

(b)

$\wedge$	T	F
T	T	F
F	F	F

是独异点.

$\forall p,q,r\in\{T,F\}$.

有 $(p\wedge q)\wedge r = p\wedge(q\wedge r)$

由运算表可知运算封闭

且 $T\wedge T=T$，$T\wedge F=F$

T为幺元

但 $F\wedge T=F$，$F\wedge F=F$

F为零元，F没逆元

故不构成群.

是独异点

2. (a) 自反性满足.

但 对称性. 反对称性、传递性不满足

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. 环：对于 $\langle G,+,*\rangle$ 中，对 $\langle G,+\rangle$ 为交换群，$\langle G,*\rangle$ 为半群

域：在环的基础满足对 * 运算含幺，可交换，无零因子，

且对于 $G-\{0\}$ 中任意元素都有 * 运算的逆元

2151298 杨腾逗 2班 《离散数学》

五. 1. (1)

$I_A \subseteq R \cup R^0$

故 $R \cup R^0$ 有自反性，即 $r(R) \subseteq R \cup R^0$

假设 R' 是包含 R 的自反关系.

$I_A \subseteq R'$，$R \subseteq R'$

$\therefore I_A \cup R = R \cup R^0 \subseteq R'$

$\therefore R \cup R^0$ 是包含 R 的最小的自反关系

$\therefore r(R) = R \cup R^0$

(2)

$(R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots) \circ (R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots)$

$= R \circ (R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots) \cup \cancel{R^2(R} R^2 \circ (R \cup R^2 \cup \cdots) \cup \cdots$

$= (R^2 \cup R^3 \cup R^4 \cup \cdots) \cup (R^3 \cup R^4 \cup R^5 \cup \cdots) \cup \cdots$

$\subseteq R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots$

故 $R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots$ 具有传递性，即 $t(R) \subseteq R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots$

下证 $\forall n \in N^*$ 都有 $R^n \subseteq t(R)$

$n=1$ 时. $R \subseteq t(R)$ 成立.

假设 $n=k$ 时. $R^k \subseteq t(R)$

$n=k+1$ 时. $\forall \langle x,y \rangle \in R^{k+1} = R^k \circ R$

$\exists t$ 满足 $\langle x,t \rangle \in R^k$，$\langle t,y \rangle \in R$.

又 $R^k \subseteq t(R)$，$R \subseteq t(R)$

$\therefore \langle x,t \rangle \in t(R)$，$\langle t,y \rangle \in t(R)$

由 $t(R)$ 的传递性. $\langle x,y \rangle \in t(R)$

故 $R^{k+1} \subseteq t(R) \Rightarrow R^n \subseteq t(R)$，$n \in N^*$

$\therefore R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots \subseteq t(R)$

综上：$t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots$

2151298　杨晓亚　2班　《离散数学》

五 2. $l=2$时，结论成立.

假设$l=k$时，结论成立. 下证$l=k+1$时，结论也成立.

由矩阵乘法 $(A(G))^{k+1}=(A(G))^{k}\cdot A(G)$

即对于i行j列元素 $a_{ij}^{(k+1)}=\sum_{m=1}^{n} a_{im}\cdot a_{mj}^{(k)}$

其中 a_{im} 为从 v_i 到 v_m 长度为1的通路数

$a_{mj}^{(k)}$ 为从 v_m 到 v_j 长度为k的通路数.

$\sum_{m=1}^{n} a_{im}\cdot a_{mj}^{(k)}$ 为从 v_i 经过 v_m 到 v_j 长度为 $k+1$ 的通路数

故对 $l=k+1$ 也成立.

因此结论成立.

3、设G的补图$\bar{G}$有e'条边.

$e+e'=$ ~~n(n)~~ $\frac{n(n-1)}{2}$

由 $n>(n-1)(n-2)/2$

可推出 $e'<n-1$

$\bar{G}$不连通

不妨设$\bar{G}$中有S个连通子图，对于$\bar{G}$的补图即G而言.

总有边将S个连通子图两两相连通. 形成n部图

故G连通

4、由G为二部图. 不妨令一部分V_1的顶点数量为k.

则$|V_2|=\nu-k$.

由二部图的性质 $e\le k(\nu-k)$

设 $f(k)=k(\nu-k)=k\nu-k^2$

$f'(k)=\nu-2k$, $f''(k)=-2$

$k=\frac{\nu}{2}$时. $f(k)=k(\nu-k)$有最大值$\frac{\nu^2}{4}$

故 $e\le\frac{\nu^2}{4}$，$|V_1|=|V_2|=\frac{\nu}{2}$时取等号

2151298 杨腾超 2班 《离散数学》

五、5. 不妨令4阶群中元素为 e, a, b, c，其中 e 为幺元 $G=\{e,a,b,c\}$

∘	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	I	J	K
b	b			
c	c			

由幺元性质可填第一行与第一列结果

$\forall x \in G$ 有 $e \circ x = x \circ e = x$

对于 I, J, K 位置.

I 可填入 b 或 e（c 与 b 等价）

①若填入 b 于 I 位置.

∘	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	b	c	e
b	b	X	Y	Z
c	c			

则可确定 J, K 位置分别为 c, e.

同理对于 X, Y, Z 位置可填入 c, e, a

最后可得到四阶循环群如下

四阶循环群

∘	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	b	c	e
b	b	c	e	a
c	c	e	a	b

其中 $a^1=a$, $a^2=b$, $a^3=c$, $a^4=e$, $a^5=a$, $a^6=b \cdots$

~~$a^5=a\circ e=e\circ a=a$~~ 以 a 为生成元

~~$a^6=a\circ b=b\circ a=c$~~ $G=\{a^k \mid k\in N^*\}$

~~$a^7=a\circ c=c\circ a$~~

②若填入 e 于 I 位置.

Klein四元群

∘	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

则可确定 J, K 位置为 c, b.

同理可得 Klein 四元群

下证：$|G|=4$

$\forall a\in G \Rightarrow |a| \mid |G|$，(拉格朗日定理推论)

故 $|a|$ 的取值为 $1, 2, 4$，但 $|e|=1$，故 $|a|\neq 1, |b|\neq 1, |c|\neq 1$

已经说明循环群情况 $|a|\neq 4, |b|\neq 4, |c|\neq 4$

故 $|a|=|b|=|c|=2 \Rightarrow a^2=b^2=c^2=e$

下证 $a\circ b=c$，利用消去律

若 $a\circ b=e$ 则 $a^{-1}\circ a\circ b=a^{-1}$ 即 $b=a^{-1}$ 矛盾不成立

若 $a\circ b=a$ 则 $b=e$ 矛盾不成立.

若 $a\circ b=b$ 则 $a=e$ 矛盾不成立

故 $a\circ b=c$

同理可说明 $a\circ b=b\circ a=c$

$a\circ c=c\circ a=b$

$b\circ c=c\circ b=a$

即可得 Klein 四元群

综上，4阶群为循环群或 Klein 群

2151298 杨晓星 2班 《离散数学》

五. 6. (1) $f(e_1)f(e_1)=f(e_1e_1)=f(e_1)=f(e_1)e_2$

故 $f(e_1)=e_2$.

(2) $\forall x\in G_1$
$f(x)f(x^{-1})=f(x\cdot x^{-1})=f(e_1)=e_2$

故由 x 的任意性 $\Rightarrow f(x^{-1})=f(x)^{-1}$

(3) 由 $e_1\in H$ 可知 $f(e_1)=e_2\in f(H)$

故 $f(H)$ 卷非空

$\forall a,b\in H$ 有 $f(a),f(b)\in f(H)$, $f(a),f(b)\in G_2$

$\because H\leq G_1$ $\therefore$ $b^{-1}\in H\Rightarrow f(b^{-1})\in f(H)$, $f(b^{-1})\in G_2$

由 (2) 可知 $f(b^{-1})=f(b)^{-1}$

由子群判定定理二

对于 $f(a)\cdot f(b)^{-1}=f(a)f(b^{-1})=f(ab^{-1})$

$H\leq G_1\Rightarrow ab^{-1}\in H\Rightarrow f(ab^{-1})\in f(H)$, $f(ab^{-1})\in G_2$

故 $f(H)$ 为 G_2 的子群, 即 $f(H)\leq G_2$