

COMBINATORIA			
Prodotto cartesiano	$A \times B$	insieme delle coppie ordinate di elementi presi da due insiemi	$ A \times B = A \cdot B $
Sequenza o lista	A^n	Elenco ordinato di “n” elementi anche ripetuti presi da un insieme, è come un prodotto cartesiano di un insieme per se stesso n volte	$ A^n = A ^n$
Insieme delle parti	$P(A)$	Insieme di tutti i possibili sottoinsiemi dell’insieme A	$ P(A) = 2^{ A }$
Prodotto condizionato	$A \times B_{(n,m)}$	Sottoinsieme del prodotto cartesiano in cui si selezionano n elementi dal primo e sulla base di quelli m elementi del secondo	$ A \times B_{(n,m)} = n \cdot m$
Fattoriale discendente (disposizione)	$(n)_k$	prodotto di “k” numeri successivi da “n” a discendere	conteggio del numero di disposizioni (lista ordinata di un sottoinsieme di “k” elementi di un un insieme di “n” elementi)
Permutazione		disposizione (lista ordinata) di tutti gli elementi di un insieme	tutte le possibili combinazioni di elementi non ripetuti
Coefficiente binomiale	$\binom{n}{k}$	Numero dei partizionamenti in 2 blocchi di cardinalità “k” e “n-k” di un insieme di “n” elementi	$\frac{n!}{k!(n-k)!}$ (se $k > n \Rightarrow \binom{n}{k} = 0$)
coefficiente trinomiale	$\binom{n}{a \ b \ c}$	Numero delle possibili partizioni di un insieme di “n” elementi in 3 sottoinsiemi di cardinalità “a”, “b”, “c” con a+b+c=n	$\frac{n!}{a!b!c!}$
Anagramma		permutazione (lista ordinata) di un elenco di elementi anche ripetuti	$\frac{(\#a1+\#a2+...+\#an)!}{\#a1! \cdot \#a2! \cdot ... \cdot \#an!}$
Formula di Stifel		calcolo ricorsivo dei coefficienti binomiali, e rappresentazione equivalente nel triangolo di Tartaglia	$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m}$
Numeri di fibonacci	F(n)	F(0)=1, F(1)=2 e F(n)=F(n-1)+F(n-2) $F(n) = \binom{n+1}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n-1}{2} + ... + \binom{1}{n}$	numero di sequenze binarie di lunghezza “n” in cui non ci sono due 1 consecutivi
Principio di inclusione esclusione	Calcolo della cardinalità dell’unione di due insiemi		$ A \cup B = A + B - A \cap B $
	cardinalità dell’unione di insiemi		$ A_1 \cup A_2 \cup A_3 \dots \cup A_n = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,2, \dots, n\}} (-1)^{ I +1} \left \bigcap_{i \in I} A_i \right $
	cardinalità del complementare dell’unione di insiemi		$ (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \dots \cup A_n)^c = \sum_{I \subseteq \{1, 2, 3 \dots, n\}} (-1)^{ I } \left \bigcap_{i \in I} A_i^c \right $
Scombussolamento		Permutazione in cui nessun elemento rimane al proprio posto	scambio di coppie, rimescolamento di elementi in modo che nessun elemento rimanga al proprio posto
Numero di Bel	Bn	numero di partizioni di un insieme di n elementi	$Bn = \sum_{h=0}^{n-1} \binom{n-1}{h} B_{(n-h)}$
Triangolo di Bell	$B_{(n,m)}$	Serve per calcolare facilmente i numeri di bell, perché $Bn = B_{(0,n)} = B_{(n-1,n-1)}$ Con c e r indici in base zero di colonna e riga del triangolo di bell	$B_{(n,m)} = B_{(n-1,m)} + B_{(n-1,m-1)}$ con $B_{(0,0)} = 1$ e $B_{(0,m)} = B_{(m-1,m-1)}$
Numero di Stirling	$S_{n,k}$	Numero di partizioni possibili in k sottoinsiemi di un insieme di n elementi	$S_{n,k} = k \cdot S_{n-1,k} + S_{n-1,k-1}$ con $S_{n,n} = S_{1,1} = 1$

STATISTICA			
Media campionaria	\bar{X}	valore medio di un elenco di n caratteri X_i	$\bar{X} = \frac{x_1+x_2+x_3+...+x_n}{n}$
Linearità della media		La media di due caratteri legati da un'equazione di primo grado è legata dalla stessa equazione	$y = a \cdot x + b \Rightarrow \bar{y} = a \cdot \bar{x} + b$
Media ponderata	$\overline{X_w}$	Media di valori con peso (importanza, numero di occorrenze) diverso	$\overline{X_w} = \frac{x_1 \cdot w_1 + x_2 \cdot w_2 + ... + x_n \cdot w_n}{w_1 + w_2 + ... + w_n}$
Varianza	σ_x^2	Importante indice di dispersione, rappresenta il grado di “sparpagliamento”	$\sigma_x^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2$
Deviazione standard	σ_x	Radice quadrata della varianza	$\sigma_x = \sqrt{\overline{x^2} - \bar{x}^2} = \sqrt{\sigma_x^2}$
Covarianza campionaria	$\sigma_{x,y}$	Indica il grado di dipendenza reciproca di due caratteri	
		$\sigma_{x,y} = \overline{x \cdot y} - \bar{x} \cdot \bar{y}$	
Indice di correlazione	$\rho_{x,y}$	Indica il grado di dipendenza reciproca di due caratteri, ed è indipendente dall'unità di misura scelta	$\rho_{x,y} = \frac{\sigma_{x,y}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\overline{x \cdot y} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sqrt{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \cdot \sqrt{\overline{y^2} - \bar{y}^2}}$
Retta ai minimi quadrati		Retta che rappresenta al meglio l'andamento della correlazione lineare di due dati campionari	$y = \frac{\overline{x \cdot y} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{(\overline{x^2} - \bar{x}^2)} \cdot x + \bar{y} - a \bar{x}$
Media geometrica		percentuale di incremento medio di una serie di incrementi percentuali successivi. Attenzione se anche solo uno è 0 allora sarà 0 anche la media	$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n}$
Media armonica		velocità media dati i tempi di percorrenza di uno stesso tratto	$1 / \left(\overline{1/x} \right)$

PROBABILITÀ									
Probabilità totale		Calcolo della probabilità di un evento nota la probabilità della sua intersezione con gli altri eventi che partizionano uno spazio di probabilità		$P(B) = P(B A_1) \cdot P(A_1) + P(B A_2) \cdot P(A_2) + \dots + P(B A_n) \cdot P(A_n)$					
Probabilità unite	$P(A \cup B)$	Probabilità che avvenga almeno uno di due eventi		$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (incl.-escl.)					
Prob. congiunte	$P(A \cap B)$	probabilità che avvengano contemporaneamente due eventi		$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$ $= P(B A) \cdot P(A)$ (Bayes) $= P(A B) \cdot P(B)$ (Bayes)					
Prob. condizionale	$P(B A)$	Probabilità che avvenga l'evento B sapendo che è accade l'evento A		$P(B A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ $= \frac{P(A B) \cdot P(B)}{P(A)}$ (Bayes)					
Formula di Bayes		Relazione fra le probabilità condizionali e le probabilità di due eventi		$P(B A) = \frac{P(A B) \cdot P(B)}{P(A)}$ $P(B A) \cdot P(A) = P(A B) \cdot P(B)$					
Probabilità condizionale di eventi INDIPENDENTI				$P(B A) = P(B)$					
Probabilità congiunta di eventi INDIPENDENTI				$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$					
Verifica se due eventi NON SONO INDIPENDENTI				$P(B A) \neq P(B)$ oppure $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$					
densità marginale	somma dei valori di tutte le densità multidimensionali tenendo fermo il valore per la variabile di cui si vuole calcolare la densità marginale e variando i valori delle altre			$d_{x1}(k) = \sum_{k2,k3...kn} d_X(k,k2,k3...kn)$					
	Caso di densità congiunta bidimensionale		$d_X(h) = \sum_k d_{X,Y}(h,k)$ $d_Y(k) = \sum_h d_{X,Y}(h,k)$						
densità di trasformazioni di due variabili		$Z = \phi(X, Y)$		$d_Z(k) = \sum_{s,t : \phi(s,t)=k} d_{X,Y}(s,t)$					
Teorema sul valore atteso di una trasformazione di 2 variabili aleatorie (anche non indipendenti)				$E[Z] = \sum_{(h,k)} \left(\varphi(h,k) \cdot d_{h,k}(h,k) \right)$					
Varianza/covarianza	<table><tr><td>$Var(X) = E[X^2] - E[X]^2$</td><td>$Cov(X,Y) = E[X \cdot Y] - E[X] \cdot E[Y]$</td><td>$Var(n \cdot X) = n^2 \cdot Var(X)$</td><td colspan="2">$Var(X_1 + X_2) = Var(X_1) + Var(X_2) + 2 \cdot Cov(X_1, X_2)$</td></tr></table>				$Var(X) = E[X^2] - E[X]^2$	$Cov(X,Y) = E[X \cdot Y] - E[X] \cdot E[Y]$	$Var(n \cdot X) = n^2 \cdot Var(X)$	$Var(X_1 + X_2) = Var(X_1) + Var(X_2) + 2 \cdot Cov(X_1, X_2)$	
$Var(X) = E[X^2] - E[X]^2$	$Cov(X,Y) = E[X \cdot Y] - E[X] \cdot E[Y]$	$Var(n \cdot X) = n^2 \cdot Var(X)$	$Var(X_1 + X_2) = Var(X_1) + Var(X_2) + 2 \cdot Cov(X_1, X_2)$						
Valore atteso della somma di variabili (anche non indipendenti)			$E[X_1 + X_2 + \dots + X_n] = E[X_1] + E[X_2] + \dots + E[X_n]$						
Varianza della somma o sottrazione di variabili indipendenti			$Var(X_1 \pm X_2 \pm \dots \pm X_n) = Var(X_1) + Var(X_2) + \dots + Var(X_n)$						
Valore atteso del prodotto di variabili indipendenti			$E[X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_n] = E[X_1] \cdot E[X_2] \cdot \dots \cdot E[X_n]$						
Somma di variabili di Poisson indipendenti				$Z \sim P(\lambda_1 + \lambda_2) = X \sim P(\lambda_1) + Y \sim P(\lambda_2)$					
minimo di due variabili		$Z = \min(X, Y)$		$F_z = 1 - [(1 - F_X(k)) \cdot (1 - F_Y(k))]$					
massimo di due variabili		$Z = \max(X, Y)$		$F_z = F_X(k) \cdot F_Y(k)$					
teorema del limite centrale per variabili continue	$Sn \sim N(n \cdot \mu, n \cdot \sigma^2)$	dato un numero sufficientemente grande (n≥20) di variabili indipendenti con identica densità e valore atteso <u>media</u> , è possibile approssimare la loro somma ad una variabile normale		$X_1 + X_2 + \dots + X_n \sim N(n \cdot \mu, n \cdot \sigma^2)$ con $\sigma^2 = Var(X)$ e $\mu = E[X]$					
	$\overline{S_n}$			$\overline{S_n} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$					
corr. di continuità teorema centrale del limite e variabili discrete		Si considerano i valori come uniforme su un intervallo ±0.5 del suo valore	$\min(Sn \text{ corretto}) = \min(Sn) - 0.5$ $P(Sn \text{ corretto} \geq t) = P(Sn \geq k - 0.5)$	$\max(Sn \text{ corretto}) = \max(Sn) + 0.5$ $P(Sn \text{ corretto} \leq t) = P(Sn \leq k + 0.5)$					
Disuguaglianza di Chebyshev)				$P(X - E[X] > \epsilon) \leq Var(X) / \epsilon^2$					
Legge dei grandi numeri				$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\overline{X_n} - \mu > \xi) = 0$					
relazione fra densità e ripartizione		La derivata della funzione di ripartizione è la densità		$F_X' = d_X$ $F_X = \int d_X(s) ds$					
Densità di una trasformazione di variabile continua		Data Y che è una trasformazione di X, la derivata della funzione di ripartizione di X sulla trasformazione inversa di t è la densità di Y		$Y = \phi(X) \Rightarrow d_Y(t) = F_X'(\phi^{-1}(t))$ con ϕ^{-1} trasformazione inversa					

VARIABILI ALEATORIE DISCRETE (* se gode di mancanza di memoria)

Uniforme	$X \sim U(A)$	probabilità uniforme su tutti i possibili valori di un insieme di valori A di cardinalità “n”	qualsiasi estrazione di un numero da un elenco	$d_X(k) = P(X=k)$ $E[X]$ $F_X(k) = P(X \leq k)$ $\sigma_X^2 = \text{Var}(X)$	$1/ A =1/n$ $\bar{X} = (a_1 + a_2 + \dots + a_n)/ A $
Bernoulli	$X \sim B(1,p)$	probabilità di aver successo su un singolo tentativo di probabilità “p”. O valgono 1 (vittoria) o valgono 0 (sconfitta). Si può invertire la logica di vittoria e sconfitta cambiando “p” con “1-p”	Tutti i casi in cui ci sono solo due possibili risultati, lancio di una moneta (p=½), probabilità di avere un certo numero con un dado (p=⅙), di estrarre un certo elemento	$d_X(k) = P(X=k)$ $E[X]$ $F_X(k) = P(X \leq k)$ $\sigma_X^2 = \text{Var}(X)$	p se k=1, (1-p) se k=0 p $p \cdot (1 - p)$
Binomiale	$X \sim B(n,p)$	numero di successi in una serie di “n” tentativi di Bernoulli equiprobabili di probabilità “p”	lanci successivi di dadi o monete, estrazioni con rimpiazzo	$d_X(k) = P(X=k)$ $E[X]$ $F_X(k) = P(X \leq k)$ $\sigma_X^2 = \text{Var}(X)$	$\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{(n-k)}$ $n \cdot p$ $n \cdot p \cdot (1 - p)$
Ipergeometrica	$X \sim H(n;b,r)$	probabilità di estrarre un certo numero “k” di elementi di tipo “b” in una serie di “n” estrazioni senza rimpiazzo da un'urna contenente “b” elementi di tipo “b” e “r” elementi di tipo diverso da “b”	Estrazioni senza rimpiazzo da urna con palline di 2 o più colori	$d_X(k) = P(X=k)$ $E[X]$ $F_X(k) = P(X \leq k)$ $\sigma_X^2 = \text{Var}(X)$	$\binom{b}{k} \cdot \binom{r}{n-k} / \binom{b+r}{n}$ $(n \cdot b) / (b + r)$
Geometrica modificata	$X \sim \hat{G}(p)$	primo tentativo di successo in uno schema di successo insuccesso a prove indipendenti di probabilità “p”	prima testa in una serie di lanci, primo 6 in una serie di lanci di dadi, prima pallina rossa in una serie di estrazioni con rimpiazzo	$d_X(k) = P(X=k)$ $E[X]$ $F_X(k) = P(X \leq k)$ $\sigma_X^2 = \text{Var}(X)$	$p \cdot (1 - p)^{(k-1)}$ $1/p$ $1 - (1 - p)^k$ $(1 - p)/p^2$
Geometrica*	$X \sim G(p)$	numeri di tentativi prima del primo successo in uno schema di successo insuccesso a prove indipendenti di probabilità “p”	numero di croci prima di una testa in una serie di lanci di monete	$d_X(k) = P(X=k)$ $E[X]$ $F_X(k) = P(X \leq k)$ $\sigma_X^2 = \text{Var}(X)$	$p \cdot (1 - p)^k$ $1/p - 1$ $(1 - p)^k$ $\frac{n \cdot b^2 \cdot r}{(b+r)^2 \cdot (b+r-1)}$
Poisson	$X \sim P(\lambda)$	Legge degli eventi rari, rappresenta la probabilità che avvenga un certo numero “k” di eventi in uno schema di successo insuccesso di “n” tentativi di probabilità “p”, con $\lambda = n \cdot p$ (quindi $p = \lambda/n$). Lambda è il numero medio di successi nel numero di eventi considerato	Approssimazione di variabile di binomiale con numero di tentativi alto ($n > 50$) e probabilità bassa ($p < 0.02$). Nr. di accadimenti di un evento che accade in media λ volte ogni “n” intervalli di tempo (4 volte al mese ad esempio)	$d_X(k) = P(X=k)$ $E[X]$ $F_X(k) = P(X \leq k)$ $\sigma_X^2 = \text{Var}(X)$	$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ λ λ

VARIABILI ALEATORIE CONTINUE (* se gode di mancanza di memoria)

Uniforme	$X \sim U([a,b])$	Evento con probabilità di avvenire costante in un certo intervallo finito	tempo di attesa dell'autobus arrivando alla fermata in un momento casuale	$d_X(t) = P(X=t)$ $E[X]$ $F_X(t) = P(X \leq t)$ $\sigma_X^2 = \text{Var}(X)$	$1/(b-a)$ se $a \leq t \leq b$ $(b+a)/2$ $(t-a)/(b-a)$ $(b-a)^2/12$
Esponenziale*	$X \sim \text{Exp}(a)$ o $X \sim \text{Esp}(a)$	Rappresenta il tempo di attesa per un evento che accade una volta ogni “m” tempo in media, il parametro “a” vale 1/m	tempo di attesa di un singolo evento che accade in media ogni “m” tempo	$d_X(t) = P(X=t)$ $E[X]$ $F_X(t) = P(X \leq t)$ $\sigma_X^2 = \text{Var}(X)$	$a \cdot e^{-at}$ se $t > 0$, 0 se $t \leq 0$ $1/a = m$ $1 - e^{-at}$ $1/a^2$
Normale standard	$\zeta_0 \sim N(0,1)$	E' una variabile astratta che descrive la famosa campana di Gauss. Sostanzialmente usata solo per calcolare la normale usando i valori tabellati per la normale standard		$d_\zeta(s) = P(\zeta_0=s)$ $E[\zeta_0]$ $F_{\zeta_0}(s) = P(\zeta_0 \leq s)$ $\sigma_\zeta^2 = \text{Var}(\zeta_0)$	$(e^{-s^2/2})/\sqrt{2 \cdot \pi}$ 0 $0 \leq s \leq 4 \Rightarrow$ tabella, $s \geq 4 \Rightarrow 1$, $s \leq 0 \Rightarrow 1 - P(\zeta_0 \leq -s)$ 1
Normale	$\zeta \sim N(\mu, \sigma^2)$	E' una trasformazione della normale standard tale che $\zeta = \mu + \sigma \zeta_0$, dove μ è il valore medio della misura è σ è la radice della varianza	Si usa valori di misurazione di un carattere in una popolazione (altezza, peso, larghezza ecc ecc) o per approssimare una serie >50 eventi equiprobabili	$d_\zeta(s) = P(\zeta=s)$ $E[\zeta]$ $F_\zeta(s) = P(\zeta \leq s)$ $\sigma_\zeta^2 = \text{Var}(\zeta)$	 μ $P(\zeta_0 \leq (s-\mu)/\sigma)$ σ^2
Teorema centrale del limite	$X_1 + X_2 + \dots + X_n$ (con $n \geq 20$)	$X_1 + X_2 + \dots + X_n \approx S_n(X) \sim N(n \cdot \mu, n \cdot \sigma^2)$ $\approx S_n(X) \sim N(n \cdot E[X_i], n \cdot \text{Var}(X_i))$ (con $\sigma^2 = \text{Var}(X_i)$ e $\mu = E[X_i]$ e $n \geq 20$)	Somma di un numero elevato (≥ 20) di variabili indipendenti tutte con uguale densità	$d_{S_n}(s) = P(S_n=s)$ $E[S_n]$ $F_{S_n}(s) = P(S_n \leq s)$ $\sigma_{S_n}^2 = \text{Var}(S_n)$	 $n \cdot E[X_i] = n \cdot \mu$ $P\left(\zeta_0 \leq \frac{(s - n \cdot E[X_i])}{\sqrt{n \cdot \text{Var}(X_i)}}\right)$ $n \cdot \text{Var}(X_i)$