Programmazione Lineare: Algoritmo del Simplesso in Forma Tableau

Daniele Vigo

D.E.I. – Università di Bologna

daniele.vigo@unibo.it

rev. 2.1 – 2023

Forma Tableau (1)

Tableau – rappresentazione dei dati che semplifica il calcolo manuale (evita il calcolo esplicito di B^{-1})

Se $A = [\underbrace{A_1, \ldots, A_m}_{\textit{in base}} \mid \underbrace{A_{m+1}, \ldots, A_n}_{\textit{fuori base}}] = [B \mid F]$

$$\begin{cases} z = c_B^T x_B + c_F^T x_F \\ d = B x_B + F x_F \end{cases}$$

				z
0	c_B^T	c_F^T		-1
d	B	F		0

Forma Tableau (2)

Operazioni elementari di riga

- Moltiplicazione di una riga per una costante
- Somma ad una riga di un multiplo di un’altra

- Il nuovo sistema è equivalente al precedente

$\Rightarrow$Problema in forma canonica rispetto alla base corrente :

- Matrice identità nelle colonne della base
- Costi ridotti nulli per le variabili in base

Forma Tableau (3)

$$\begin{cases} -c_0^* = \qquad c'^T_F x_F - z \\ B^{-1}d = Ix_B + B^{-1}F x_F \end{cases}$$

$-c^*_0$	0	c'^T_F
$B^{-1}d$	I	$B^{-1}F$

- Il Tableau contiene tutte le informazioni necessarie all'applicazione dell'algoritmo del simplesso
- Cambiando base bisogna riportare il Tableau in forma canonica

Forma Tableau (4)

$$\begin{cases} z = c_B^{\;T} x_B + c_F^{\;T} x_F \\ d = B x_B + F x_F \end{cases}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & c_B^{\;T} & c_F^{\;T} \\ \hline d & B & F \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{c} z \\ \begin{array}{|c|}\hline -1 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

$$\begin{cases} -c_0^* = \qquad c'^{\;T}_F x_F - z \\ B^{-1} d = I x_B + B^{-1} F x_F \end{cases}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline -c^*_0 & 0 & c'^{\;T}_F \\ \hline B^{-1}d & I & B^{-1}F \\ \hline \end{array}$$

Simplesso in Forma Tableau

- Descriviamo l'evoluzione con riferimento alla forma tabellare
- Y = matrice $(m+1) \times (n+1)$ contenente i coefficienti del tableau corrente

1. Si inizializza il tableau con i dati di ingresso:
   a) costi in riga 0:
      $y_{0j} = c_j$ ($j=1, \ldots, n$)
   b) termini noti in colonna 0:
      $y_{i0} = d_i$ ($i=1, \ldots, m$)
   a) matrice tecnologica:
      $y_{ij} = a_{ij}$ ($i=1, \ldots, m; j=1, \ldots, n$)

0	c^T
d	A

Simplesso in Forma Tableau (2)

- Supponiamo Y sia in forma canonica rispetto ad una base $\mathcal{B}$ ={$A_{\beta(1)}$, …, $A_{\beta(m)}$}, B= {$\beta(1)$, …, $\beta(m)$}
- Il tableau contiene tutte le informazioni necessarie per la verifica di ottimalità ed il pivoting:

2. Test di ottimalità:
   se $y_{0j} \geq 0 \ \forall \ j \notin B$ STOP
   altrimenti sia
   h = arg $\min_{j \notin B}$ {$y_{0j} < 0$}

$-c^*_0$	0	c'^T_F
$B^{-1}d$	I	$B^{-1}F$

Simplesso in Forma Tableau (3)

3. Pivoting:

a) scelta dell'elemento cardine (pivot)

   sia l = arg $\min_{i=1,\ldots,m} \{y_{i0}/y_{ih} : y_{ih} > 0\}$

b) aggiornamento del tableau (Y'=nuovo tableau)

riga l : ($y'_{lh} \rightarrow 1$)

$y'_{lj} := y_{lj} / y_{lh}$ (j=0, …, n)

altre righe : ($y'_{ih} \rightarrow 0$, $i \neq l$)

$y'_{ij} := y_{ij} - y'_{lj} * y_{ih}$

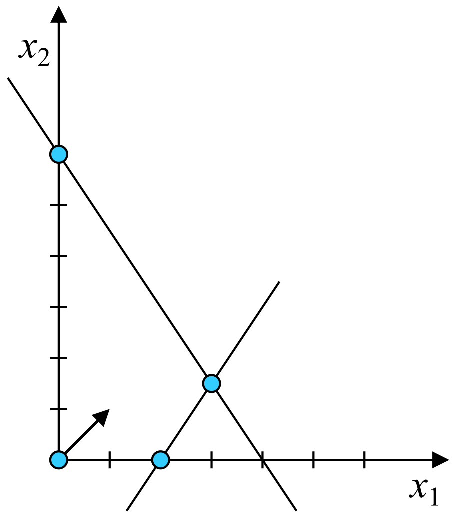
(i=0, …, m: $i \neq l$; j=0, …, n)

		$\beta(l)$			h	
		0		y_{0j}	y_{0h}	
		0				
y_{l0}		1		y_{lj}	y_{lh}	
		0				

Esempio

$$\begin{array}{llllll}
\max z = & x_1 & + x_2 & & & \\
s.t. & 6\,x_1 & + 4\,x_2 & \le 24 & & \\
 & 3\,x_1 & - 2\,x_2 & \le 6 & & \\
 & x_1 & , x_2 & \ge 0 & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lllllll}
\min -z = & -x_1 & -x_2 & & & \\
s.t. & 6\,x_1 & + 4\,x_2 & + x_3 & & = 24 \\
 & 3\,x_1 & - 2\,x_2 & & + x_4 & = 6 \\
 & x_1 & , x_2 & , x_3 & , x_4 & \ge 0
\end{array}$$

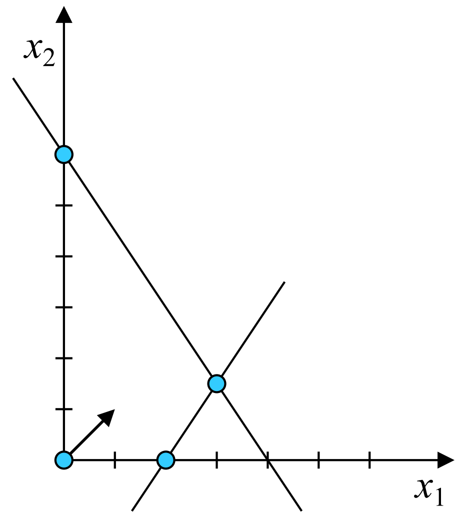


		x_1	x_2	x_3	x_4	
z	$\cancel{0}$ 2	$\cancel{-1}$ 0	$\cancel{-1}$ $-5/3$	0	$\cancel{0}$ 1/3	$+ r'_2$
x_3	$\cancel{24}$ 12	$\cancel{6}$ 0	$\cancel{4}$ 8	1	$\cancel{0}$ -2	$-2\,r_2 = -6\,r'_2$
x_4	$\cancel{6}$ 2	$\cancel{3}$ 1	$\cancel{-2}$ $-2/3$	0	$\cancel{1}$ 1/3	/3

2^a iterazione

$$
\begin{array}{llllll}
\max z = & x_1 & + x_2 & & & \\
s.t. & 6\,x_1 & + 4\,x_2 & \le 24 & & \\
 & 3\,x_1 & - 2\,x_2 & \le 6 & & \\
 & x_1 & , x_2 & \ge 0 & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lllllll}
\min -z = & -x_1 & -x_2 & & & \\
s.t. & 6\,x_1 & + 4\,x_2 & + x_3 & & = 24 \\
 & 3\,x_1 & - 2\,x_2 & & + x_4 & = 6 \\
 & x_1 & , x_2 & , x_3 & , x_4 & \ge 0
\end{array}
$$

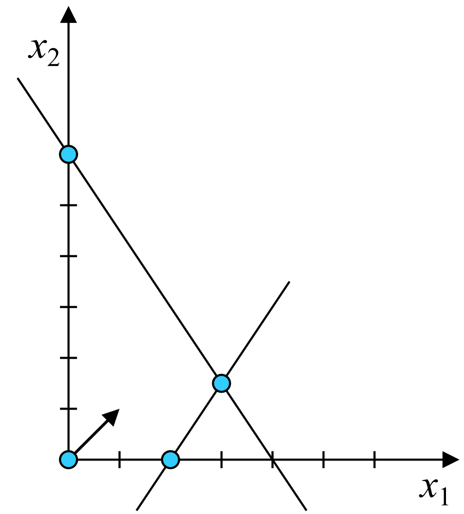


		x_1	x_2	x_3	x_4	
z	$\cancel{2}$ $9/2$	0	$\cancel{-5/3}$ 0	$\cancel{0}$ $5/24$	$\cancel{1/3}$ $-1/12$	$+5/3\ r'_1$
x_3	$\cancel{12}$ $3/2$	0	$\cancel{8}$ 1	$\cancel{1}$ $1/8$	$\cancel{-2}$ $-1/4$	$/8$
x_1	$\cancel{2}$ 3	1	$\cancel{-2/3}$ 0	$\cancel{0}$ $1/12$	$\cancel{1/3}$ $1/6$	$+2/3\ r'_1$

3^a iterazione

$$
\begin{array}{llllll}
\max z = & x_1 & + x_2 & & & \\
s.t. & 6\,x_1 & + 4\,x_2 & \le 24 & & \\
 & 3\,x_1 & - 2\,x_2 & \le 6 & & \\
 & x_1 & , x_2 & \ge 0 & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lllllll}
\min -z = & -x_1 & -x_2 & & & \\
s.t. & 6\,x_1 & + 4\,x_2 & + x_3 & & = 24 \\
 & 3\,x_1 & - 2\,x_2 & & + x_4 & = 6 \\
 & x_1 & , x_2 & , x_3 & , x_4 & \ge 0
\end{array}
$$

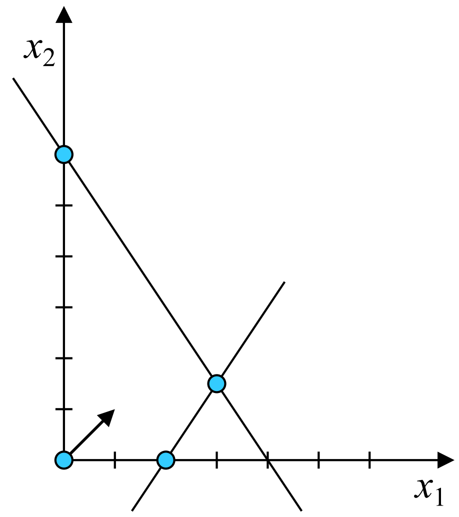


		x_1	x_2	x_3	x_4	
z	$\cancel{9/2}$ 6	$\cancel{0}$ $1/2$	0	$\cancel{5/24}$ $1/4$	$-\cancel{1/12}$ 0	$+1/12\ r'_2$
x_2	$\cancel{3/2}$ 6	$\cancel{0}$ $3/2$	1	$\cancel{1/8}$ $1/4$	$-\cancel{1/4}$ 0	$+1/4\ r'_2$
x_1	$\cancel{3}$ 18	$\cancel{1}$ 6	0	$\cancel{1/12}$ $1/2$	$\cancel{1/6}$ 1	$*6$

4^a iterazione

$$
\begin{array}{llllll}
\max z = & x_1 & + x_2 & & & \\
s.t. & 6\,x_1 & + 4\,x_2 & \leq 24 & & \\
 & 3\,x_1 & - 2\,x_2 & \leq 6 & & \\
 & x_1 & , x_2 & \geq 0 & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lllllll}
-\min - z = & - x_1 & - x_2 & & & \\
s.t. & 6\,x_1 & + 4\,x_2 & + x_3 & & = 24 \\
 & 3\,x_1 & - 2\,x_2 & & + x_4 & = 6 \\
 & x_1 & , x_2 & , x_3 & , x_4 & \geq 0
\end{array}
$$

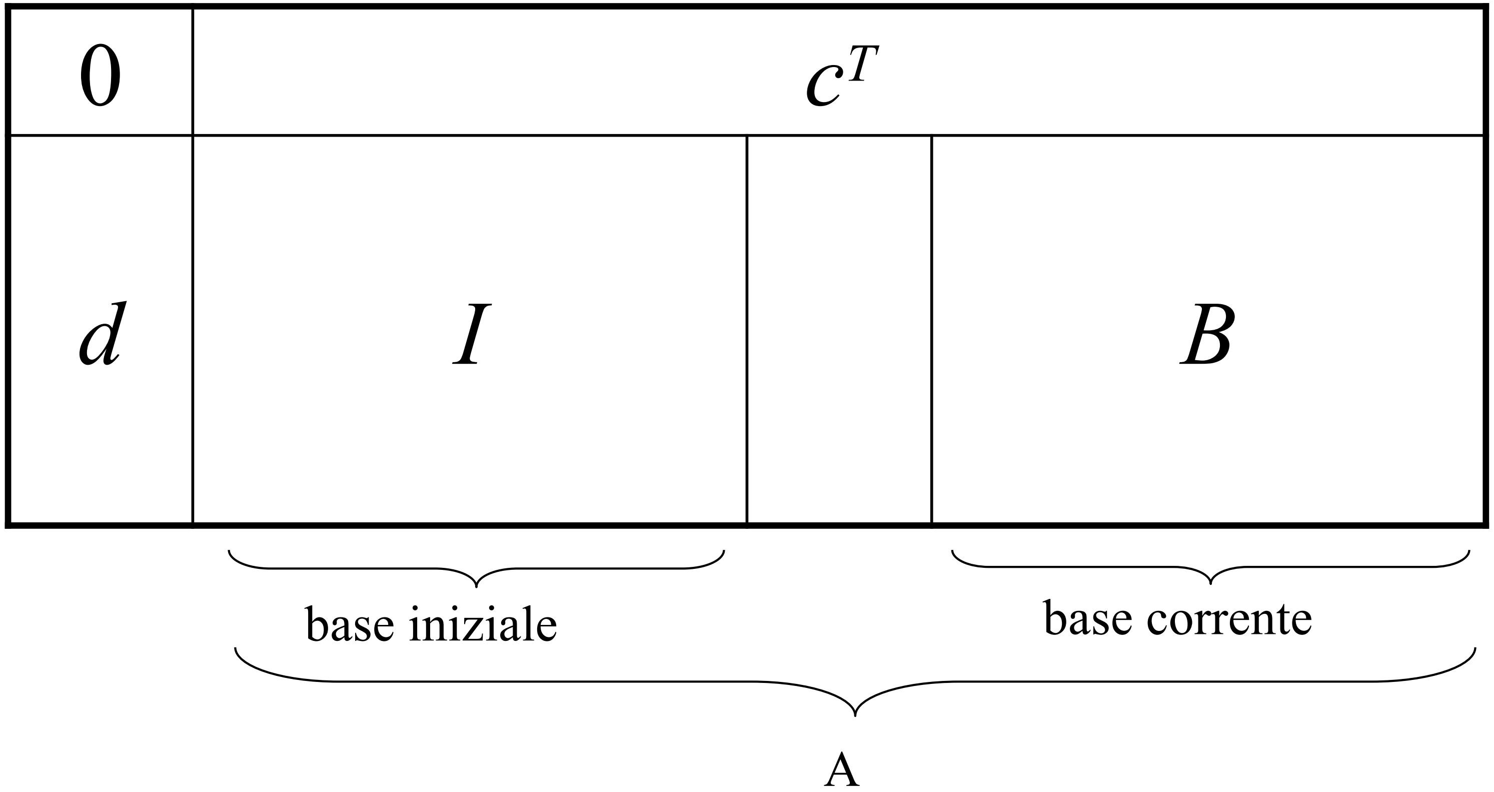


		x_1	x_2	x_3	x_4
z	6	1/2	0	1/4	0
x_2	6	3/2	1	1/4	0
x_4	18	6	0	1/2	1

OTTIMO!!!

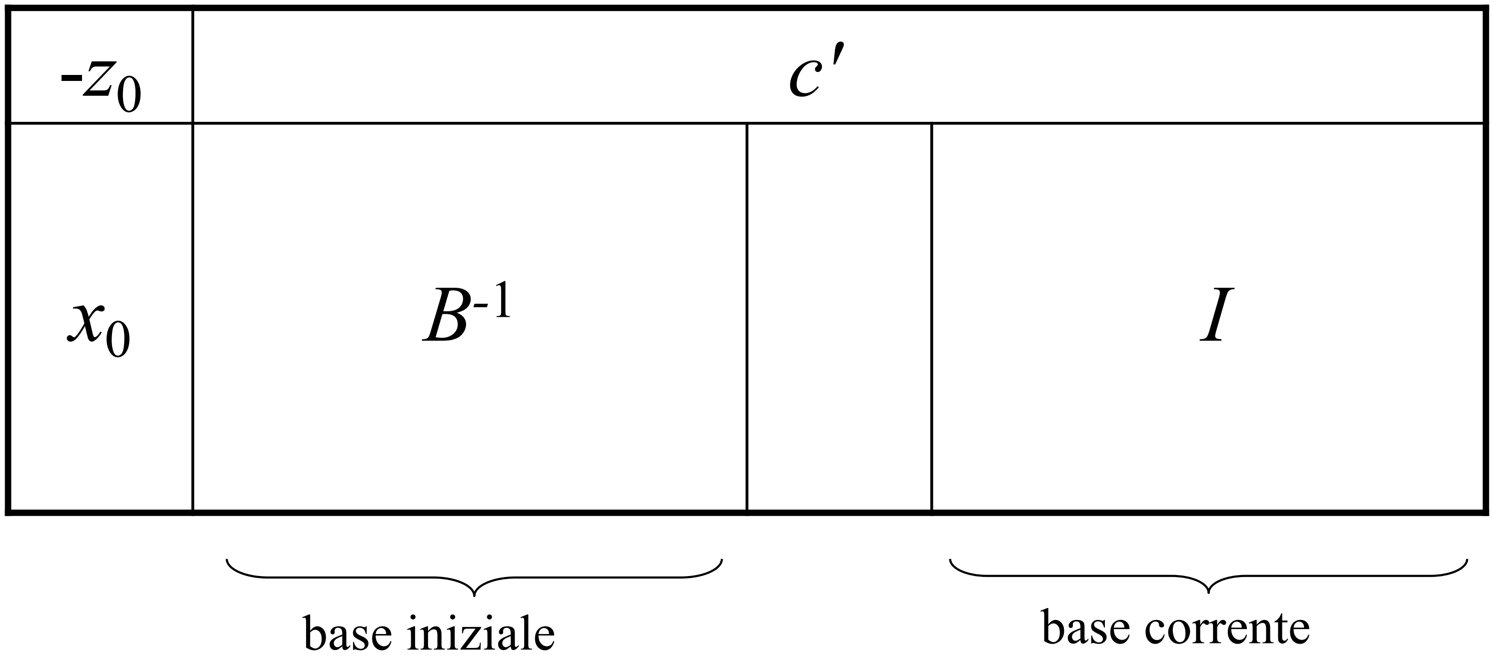
Inversa della base dal tableau

- Supponiamo che il tableau iniziale sia il seguente
- *B*: colonne corrispondenti alla base corrente (per semplicità diverse dalla base iniziale)



Inversa della base corrente

- Quando il tableau è in forma canonica rispetto alla base corrente sulle colonne della base inziale si ha B^{-1}



Esempio 2 fasi

$$
\begin{array}{lcccl}
\min & x_1 & + & x_3 & \\
 & x_1 + 2x_2 & & & \leq 5 \\
 & & x_2 + 2x_3 & & = 6 \\
 & x_1, & x_2, & x_3 & \geq 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|c|cccc|cc}
 & & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_1^a & x_2^a \\
\hline
-w & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
\hline
x_1^a & 5 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
x_2^a & 6 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1
\end{array}
$$

In realtà basta solo la seconda variabile artificiale

Esempio 2 fasi (2)

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_1^a
$-w$	0	0	0	0	0	1
x_1	5	1	2	0	1	0
x_1^a	6	0	1	2	0	1

Mettiamo in forma canonica rispetto alla base

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_1^a	
$-w$	-6	0	-1	-2	0	0	$+r_1'$
x_1	5	1	2	0	1	0	/2
x_1^a	6	0	1	2	0	1	$-r_1'$

Esempio 2 fasi (3)

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_1^a	
$-w$	-7/2	1/2	0	-2	1/2	0	$+r_2$
x_2	5/2	1/2	1	0	1/2	0	
x_1^a	7/2	-1/2	0	2	-1/2	1	/2

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_1^a
$-w$	0	0	0	0	0	1
x_2	5/2	1/2	1	0	1/2	0
x_3	7/4	-1/4	0	1	-1/4	1/2

Esempio 2 fasi (3)

		x_1	x_2	x_3	x_4	
$-z$	0	1	0	1	0	$-r_2$
x_2	5/2	1/2	1	0	1/2	
x_3	7/4	-1/4	0	1	-1/4	

Mettiamo in forma canonica rispetto alla base

$-z$	-7/4	5/4	0	0	1/4
x_2	5/2	1/2	1	0	1/2
x_3	7/4	-1/4	0	1	-1/4

STOP!
Base ottima

Degenerazione ciclante

- Dato il tableau iniziale

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
$-z$	3	–3/4	20	–1/2	6	0	0	0
x_5	0	1/4	–8	–1	9	1	0	0
x_6	0	1/2	–12	–1/2	3	0	1	0
x_7	1	0	0	1	0	0	0	1

- Regola di pivoting:
  - colonna con il costo ridotto più negativo
  - in caso di parità si fa uscire dalla base la colonna con indice minore

Degenerazione ciclante (2)

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
$-z$	3	0	-4	$-7/2$	33	3	0	0
x_1	0	1	-32	-4	36	4	0	0
x_6	0	0	4	3/2	-15	-2	1	0
x_7	1	0	0	1	0	0	0	1

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
$-z$	3	0	0	-2	18	1	1	0
x_1	0	1	0	8	-84	-12	8	0
x_2	0	0	1	3/8	$-15/4$	$-1/2$	1/4	0
x_7	1	0	0	1	0	0	0	1

Degenerazione ciclante (3)

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
$-z$	3	1/4	0	0	−3	−2	3	0
x_3	0	1/8	0	1	−21/2	−3/2	1	0
x_2	0	−3/64	1	0	3/16	1/16	−1/8	0
x_7	1	−1/8	0	0	21/2	3/2	−1	1

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
$-z$	3	−1/2	16	0	0	−1	1	0
x_3	0	−5/2	56	1	0	2	−6	0
x_4	0	−1/4	16/3	0	1	1/3	−2/3	0
x_7	1	5/2	−56	0	0	−2	6	1

Degenerazione ciclante (4)

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
$-z$	3	$-7/4$	44	$1/2$	0	0	-2	0
x_5	0	$-5/4$	28	$1/2$	0	1	-3	0
x_4	0	$1/6$	-4	$-1/6$	1	0	$1/3$	0
x_7	1	0	0	1	0	0	0	1

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
$-z$	3	$-3/4$	20	$-1/2$	6	0	0	0
x_5	0	$1/4$	-8	-1	9	1	0	0
x_6	0	$1/2$	-12	$-1/2$	3	0	1	0
x_7	1	0	0	1	0	0	0	1

è il tableau iniziale !

Programmazione Lineare: Esercizi

Esercizio 6.1. Produzione di fertilizzanti.

Un consorzio agrario può produrre due tipi di fertilizzanti. Ogni quintale di fertilizzante di tipo A contiene 0.1 quintali di azoto e 0.3 quintali potassio ed ha un prezzo di vendita di 200€. Ogni quintale di fertilizzante di tipo B contiene 0.2 quintali di azoto e 0.1 quintali di potassio e viene venduto a 300€. Il consorzio dispone di 8 quintali di azoto e di 9 quintali di potassio.

a) Definire il modello di programmazione lineare per determinare le quantità da produrre di fertilizzante di ciascun tipo per massimizzare il ricavo conseguibile.

b) Determinare la soluzione di massimo ricavo mediante l'algoritmo del simplesso e la regola di Bland.

c) Disegnare la regione ammissibile.

a) Vengono utilizzate due variabili x_1 ed x_2, che costituiscono il numero di quintali da produrre di fertilizzante di tipo A e B, rispettivamente. Il modello di programmazione lineare è pertanto

$$
\begin{array}{rrrrl}
\max\ z = & 200\ x_1 & + 300\ x_2 & & \\
& 0.1\ x_1 & +\ 0.2\ x_2 & \leq & 8 \\
& 0.3\ x_1 & +\ 0.1\ x_2 & \leq & 9 \\
& x_1, & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

in cui il ricavo totale z è espresso in migliaia di lire. Moltiplicando i vincoli per 10 al fine di ottenere coefficienti interi e ponendo il modello in forma standard, si ottiene

$$
\begin{array}{rrrrrrl}
\min\ -z = & -\ 200\ x_1 & -\ 300\ x_2 & & & & \\
& x_1 & +\ 2\ x_2 & +\ x_3 & & = & 80 \\
& 3\ x_1 & +\ x_2 & & +\ x_4 & = & 90 \\
& x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq & 0
\end{array}
$$

b) Poichè le ultime due colonne del tableau costituiscono una base iniziale ammissibile, non è necessario applicare la fase 1.

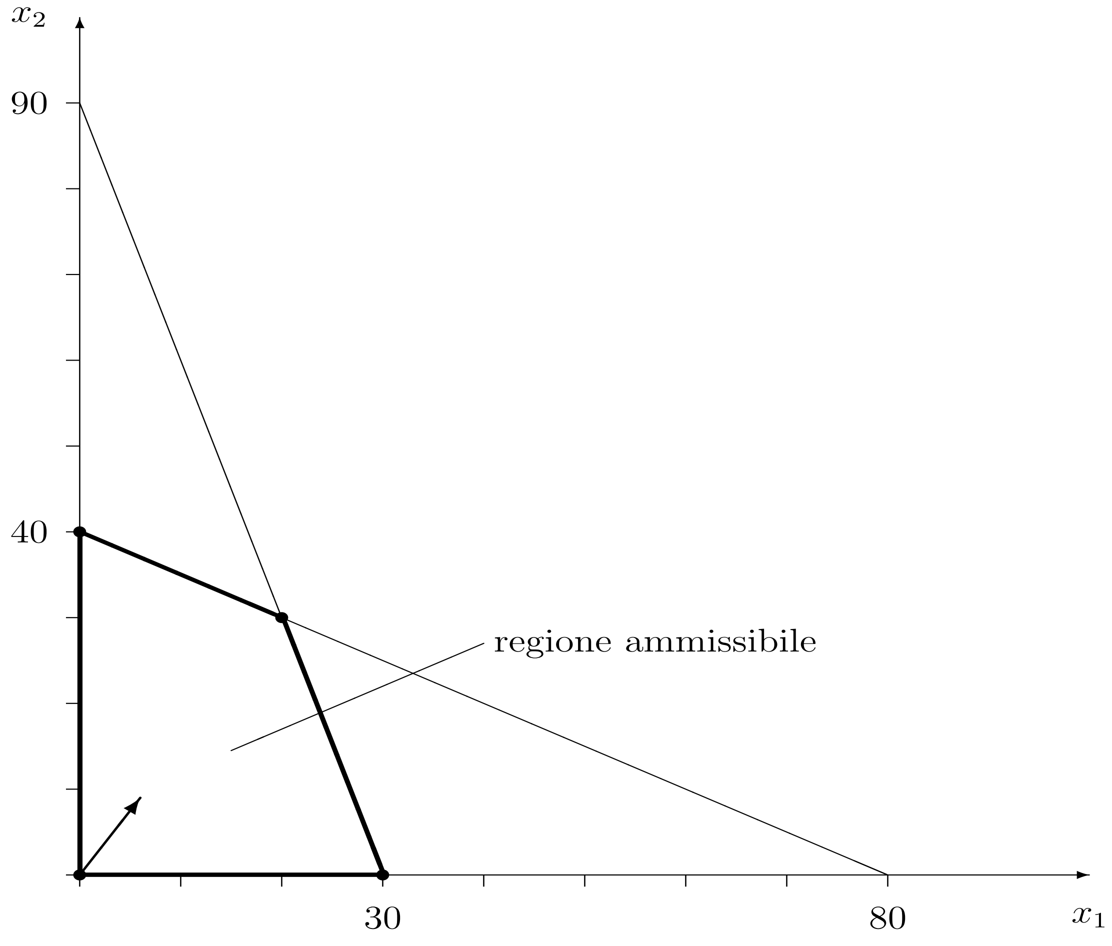
		x_1	x_2	x_3	x_4
z	0	-200	-300	0	0
x_3	80	1	2	1	0
x_4	90	3	1	0	1

		x_1	x_2	x_3	x_4
z	6000	0	$-\frac{700}{3}$	0	$\frac{200}{3}$
x_3	50	0	$\frac{5}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$
x_1	30	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$

		x_1	x_2	x_3	x_4
z	13000	0	0	140	20
x_2	30	0	1	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$
x_1	20	1	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$

La soluzione ottima consiste dunque nel produrre 20 quintali di fertilizzante di tipo A e 30 quintali di fertilizzante di tipo B; si ottiene in tal modo un ricavo complessivo di 13000€.

c) La regione ammissibile del problema e la direzione del gradiente della funzione obiettivo sono mostrati in figura.



Esercizio 6.2. Miscelazione di mangimi.

La dieta alimentare degli animali di un allevamento richiede la presenza di 4 sostanze base: A, B, C e D. La quantità minima giornaliera di cui ogni animale necessita è: 0.4 Kg di A, 0.6 Kg di B, 2 Kg di C ed 1.3 Kg di D. Il cibo è ottenuto mescolando due tipi di mangime: M ed N. Ciascun Kg di M contiene 100 grammi di A, 100 grammi di C, 100 grammi di D e nulla di B; ciascun Kg di N contiene 100 grammi di B, 100 grammi di D, 200 grammi di C e nulla di A. Con una spesa di 30€ è possibile acquistare 15 Kg di mangime M oppure 10 Kg di mangime N.

a) Definire il modello di programmazione lineare per determinare le quantità giornaliere di mangime M ed N (variabili x_1 ed x_2, rispettivamente) da acquistare per alimentare un animale a costo minimo.

b) Disegnare la regione ammissibile e determinare per via grafica i valori ottimi delle variabili x_1 ed x_2.

c) Porre il problema in forma standard e determinare la soluzione base corrispondente alla base costituita da x_1, x_2 e dalle variabili surplus associate ai vincoli relativi alle sostanze C e D.

d) Discutere l'ammissibilità della soluzione ottenuta al punto c).

a) Esprimendo x_1 ed x_2 in Kg, ed osservando che il costo al Kg dei mangimi M ed N è di 2€e 3€, rispettivamente, si ottiene

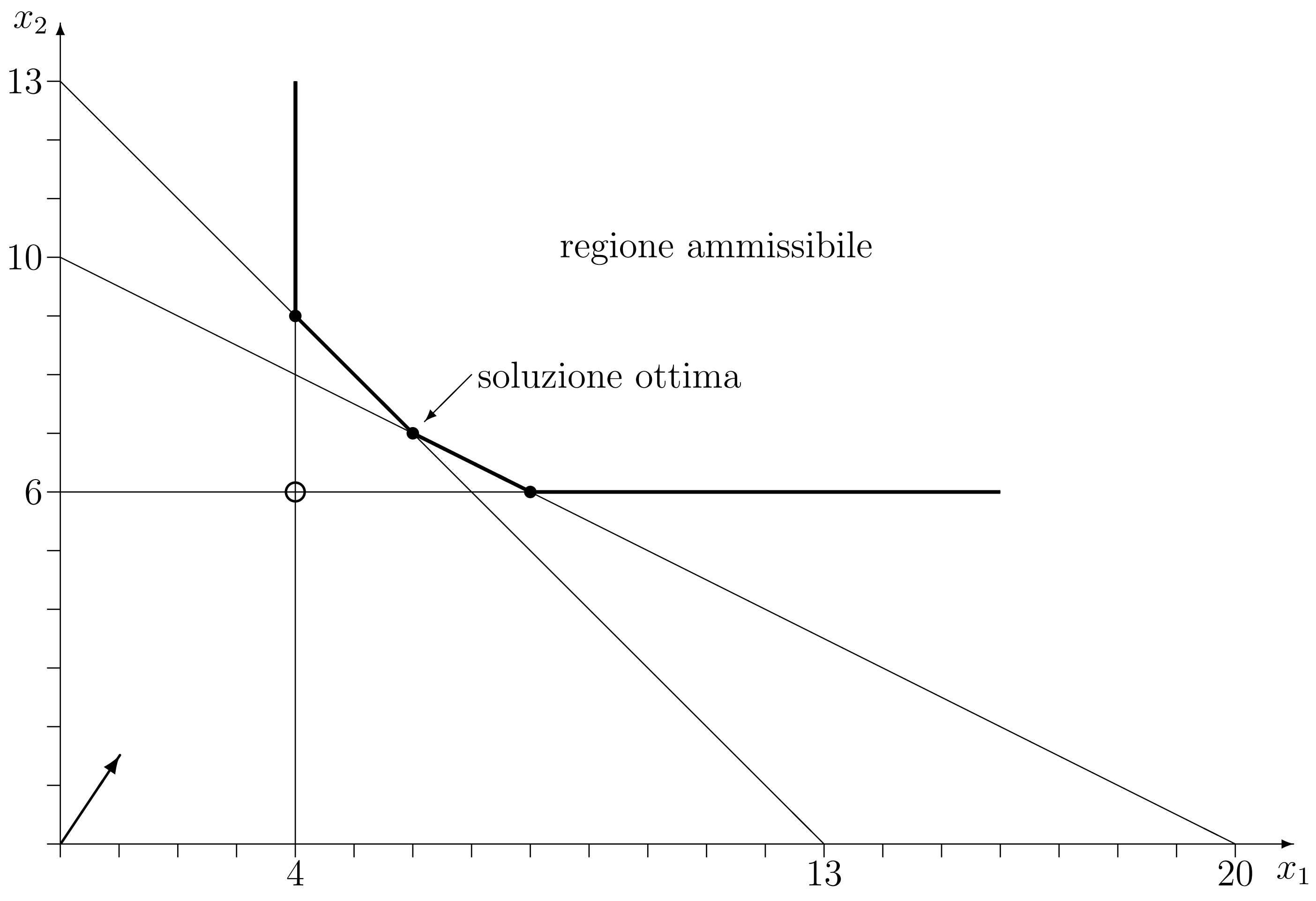
$$
\begin{array}{lrcrcl}
\min \; z = & 2\,x_1 & + & 3\,x_2 & & \\
 & 100\,x_1 & & & \geq & 400 \\
 & & & 100\,x_2 & \geq & 600 \\
 & 100\,x_1 & + & 200\,x_2 & \geq & 2000 \\
 & 100\,x_1 & + & 100\,x_2 & \geq & 1300 \\
 & x_1, & & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

b) La regione ammissibile (illimitata), la direzione del gradiente della funzione obiettivo e la soluzione ottima sono mostrati in figura.

I valori ottimi di x_1 ed x_2 sono dati dal sistema definito dalle equazioni corrispondenti agli ultimi due vincoli:

$$
\begin{cases}
x_1 + 2\,x_2 = 20 \\
x_1 + x_2 = 13
\end{cases}
$$

Si ottiene $x_1 = 6$, $x_2 = 7$; il costo della dieta ottima ammonta pertanto a 33 €giornalieri per animale.



x_2
13
10
6
regione ammissibile
soluzione ottima
4
13
20
x_1

c) Dividendo i vincoli per 100 e ponendo il modello in forma standard, si ottiene

$$
\begin{array}{lrrrrrrcl}
\min\ z = & 2\,x_1 & +\,3\,x_2 & & & & & & \\
& x_1 & & -\ x_3 & & & & = & 4 \\
& & x_2 & & -\ x_4 & & & = & 6 \\
& x_1 & +\,2\,x_2 & & & -\ x_5 & & = & 20 \\
& x_1 & +\quad x_2 & & & & -\ x_6 & = & 13 \\
& x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 & \geq & 0
\end{array}
$$

Uguagliando a 0 le variabili fuori base x_3 ed x_4 si ha il sistema

$$
\left\{
\begin{array}{rrrrcl}
x_1 & & & & = & 4 \\
& x_2 & & & = & 6 \\
x_1 & +\,2\,x_2 & -\ x_5 & & = & 20 \\
x_1 & +\quad x_2 & & -\ x_6 & = & 13
\end{array}
\right.
$$

da cui si ricava facilmente: $x_1 = 4$, $x_2 = 6$, $x_5 = -4$, $x_6 = -3$. La soluzione base richiesta è quindi $x = (4, 6, 0, 0, -4, -3)$.

d) La soluzione ottenuta non è ammissibile in quanto due variabili hanno valore negativo. Dal punto di vista grafico si nota d'altronde che tale soluzione, indicata con ○ in figura 6.2, si trova al di fuori della regione ammissibile.

Esercizio 6.3

Sia dato il problema di programmazione lineare

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrr}
\min\ z = & x_1 & - & x_2 & -\,2\,x_3 & -\,3\,x_4 & & \\
 & & & x_2 & +\,2\,x_3 & +\,3\,x_4 & = & 15 \\
 & & & 2\,x_2 & + \quad x_3 & +\,5\,x_4 & = & 20 \\
 & x_1 & + & x_2 & +\,2\,x_3 & + \quad x_4 & = & 10 \\
 & x_1, & & x_2, & x_3, & x_4 & \geq & 0
\end{array}
$$

a) Semplificare, mediante un semplice ragionamento la funzione obiettivo.

b) Risolvere il problema con l'algoritmo del simplesso utilizzando il metodo delle due fasi ed introducendo solo le variabili artificiali necessarie. Si scelga per il pivoting la colonna con il costo relativo negativo di massimo valore assoluto.

a) Si osservi che, a causa del primo vincolo, in ogni soluzione ammissibile la somma degli ultimi tre termini della funzione obiettivo vale 15. Pertanto questa può essere semplificata come segue:

$$\min\ z = -15 + \min\ x_1.$$

b) La prima colonna della matrice dei coefficienti del problema è una colonna di matrice identità, per cui è sufficiente aggiungere al problema due sole variabili ausiliarie.

Fase 1:

		x_1^a	x_2^a	x_1	x_2	x_3	x_4
$-w$	0	1	1	0	0	0	0
x_1^a	15	1	0	0	1	2	3
x_2^a	20	0	1	0	2	1	5
x_1	10	0	0	1	1	2	1

		x_1^a	x_2^a	x_1	x_2	x_3	x_4
$-w$	-35	0	0	0	-3	-3	-8
x_1^a	15	1	0	0	1	2	3
x_2^a	20	0	1	0	2	1	5
x_1	10	0	0	1	1	2	1

		x_1^a	x_2^a	x_1	x_2	x_3	x_4
$-w$	-3	0	$\frac{8}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{7}{5}$	0
x_1^a	3	1	$-\frac{3}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{7}{5}$	0
x_4	4	0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	1
x_1	6	0	$-\frac{1}{5}$	1	$\frac{3}{5}$	$\frac{9}{5}$	0

		x_1^a	x_2^a	x_1	x_2	x_3	x_4
$-w$	0	1	1	0	0	0	0
x_3	$\frac{15}{7}$	$\frac{5}{7}$	$-\frac{3}{7}$	0	$-\frac{1}{7}$	1	0
x_4	$\frac{25}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	0	$\frac{3}{7}$	0	1
x_1	$\frac{15}{7}$	$-\frac{9}{7}$	$\frac{4}{7}$	1	$\frac{6}{7}$	0	0

Fase 2:

		x_1	x_2	x_3	x_4
$-z$	0	1	0	0	0
x_3	$\frac{15}{7}$	0	$-\frac{1}{7}$	1	0
x_4	$\frac{25}{7}$	0	$\frac{3}{7}$	0	1
x_1	$\frac{15}{7}$	1	$\frac{6}{7}$	0	0

		x_1	x_2	x_3	x_4
$-z$	$-\frac{15}{7}$	0	$-\frac{6}{7}$	0	0
x_3	$\frac{15}{7}$	0	$-\frac{1}{7}$	1	0
x_4	$\frac{25}{7}$	0	$\frac{3}{7}$	0	1
x_1	$\frac{15}{7}$	1	$\frac{6}{7}$	0	0

$$
\begin{array}{c|c|cccc|}
\multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & x_1 & x_2 & x_3 & \multicolumn{1}{c}{x_4} \\
\cline{2-6}
-z & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
\cline{2-6}
x_3 & \frac{5}{2} & \frac{1}{6} & 0 & 1 & 0 \\
x_4 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \\
x_2 & \frac{5}{2} & \frac{7}{6} & 1 & 0 & 0 \\
\cline{2-6}
\end{array}
$$

La soluzione ottima è dunque $x_1 = 0, x_2 = x_3 = x_4 = \frac{5}{2}$ e vale -15.

Esercizio 6.4. Mix di Produzione.

Una società produce tre articoli A, B e C i cui prezzi di vendita sono, rispettivamente, 30, 40 e 20 € per pezzo. I pezzi di tipo A producono un profitto pari al 10% del prezzo di vendita, mentre quelli di tipo B e C producono un profitto pari al 5% del prezzo di vendita. La società desidera ottenere un fatturato mensile non inferiore ad 8 milioni di €. La produzione comporta 20 grammi di materiale di scarto per ogni pezzo di tipo A e 10 grammi per ogni pezzo di tipo B o C prodotto. In un mese non è possibile smaltire più di 2 tonnellate di materiale di scarto.

Si definisca il modello di programmazione lineare in grado di determinare i livelli mensili di produzione dei tre articoli in modo da massimizzare il profitto globale. A tal fine si esprimano i livelli di produzione in centinaia di migliaia di pezzi e si assuma che le frazioni di pezzo siano trascurabili ai fini della determinazione della soluzione ottima. Si risolva il problema utilizzando il metodo delle due fasi, introducendo solo le variabili artificiali necessarie ed utilizzando la regola di Bland.

a) Si utilizzano tre variabili x_1, x_2 ed x_3, che costituiscono il numero di pezzi da produrre in un mese (espresso in centina di migliaia) degli articoli A, B e C, rispettivamente. Esprimendo i profitti in centinaia di migliaia di €, il modello di programmazione lineare è

$$\begin{array}{rrrrrr}
\max\ z = & 3\,x_1 & +\ 2\,x_2 & +\ \ x_3 & & \\
& 2\,x_1 & +\ \ x_2 & +\ \ x_3 & \leq & 2 \\
& 3\,x_1 & +\ 4\,x_2 & +\ 2\,x_3 & \geq & 8 \\
& x_1, & x_2, & x_3 & \geq & 0
\end{array}$$

Ponendo il modello in forma standard, si ottiene

$$\begin{array}{rrrrrrrr}
\min\ -z = & -\ 3\,x_1 & -\ 2\,x_2 & -\ \ x_3 & & & & \\
& 2\,x_1 & +\ \ x_2 & +\ \ x_3 & +\ x_4 & & = & 2 \\
& 3\,x_1 & +\ 4\,x_2 & +\ 2\,x_3 & & -\ \ x_5 & = & 8 \\
& x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq & 0
\end{array}$$

La quarta colonna della matrice dei coefficienti del problema è una colonna di matrice identità, per cui è sufficiente aggiungere al problema una sola variabile ausiliaria.

Fase 1:

		x_1^a	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$-w$	0	1	0	0	0	0	0
x_4	2	0	2	1	1	1	0
x_1^a	8	1	3	4	2	0	-1

		x_1^a	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$-w$	-8	0	-3	-4	-2	0	1
x_4	2	0	2	1	1	1	0
x_1^a	8	1	3	4	2	0	-1

		x_1^a	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$-w$	-5	0	0	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	1
x_1	1	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
x_1^a	5	1	0	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	-1

		x_1^a	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$-w$	0	0	5	0	2	4	1
x_2	2	0	2	1	1	1	0
x_1^a	0	1	-5	0	-2	-4	-1

Poichè la variabile artificiale è nella base finale, occorre un ulteriore pivoting. Scegliendo la variabile x_5 (che comporta una minore quantità di calcoli) si ottiene

		x_1^a	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$-w$	0	1	0	0	0	0	0
x_2	2	0	2	1	1	1	0
x_5	0	-1	5	0	2	4	1

Fase 2:

		x_1^a	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
z	0	0	-3	-2	-1	0	0
x_2	2	0	2	1	1	1	0
x_5	0	-1	5	0	2	4	1

		x_1^a	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
z	4	0	1	0	1	2	0
x_2	2	0	2	1	1	1	0
x_5	0	-1	5	0	2	4	1

La soluzione ottima, che prevede la produzione di 200 000 pezzi dell'articolo B e di nessun pezzo degli articoli A e C, consente un profitto di 400 000 €.

Esercizio 6.9. Vincolo ridondante in Fase 1

Un'azienda produce quattro tipi di solvente utilizzando, tra le altre, tre sostanze chimiche altamente tossiche (A, B e C) nelle seguenti percentuali:

solvente	1:	10 % di A,	50 % di B,	30 % di C;
solvente	2:	20 % di A,	50 % di B,	10 % di C;
solvente	3:	10 % di A,	20 % di B;	
solvente	4:	10 % di B,	10 % di C.	

I profitti, in €per quintale, sono 500, 400, 100 e 100 rispettivamente per i solventi 1, 2, 3 e 4. L'azienda dispone di tre serbatoi contenenti rispettivamente una tonnellata di A, tre tonnellate di B ed una tonnellata di C: al termine della produzione si devono pulire tutti i serbatoi, per cui tali sostanze debbono essere completamente utilizzate nella produzione, dato che la loro tossicità non ne consente l'eliminazione in altro modo.

Determinare la produzione ottima mediante metodo delle due fasi e regola di Bland.

Utilizzando quattro variabili x_1, x_2, x_3 ed x_4 (numero di tonnellate da produrre di solvente di tipo 1, 2, 3 e 4, rispettivamente), si ottiene il modello di programmazione lineare

$$
\begin{array}{rrrrrcl}
\max\ z = & 5000\,x_1 & +\ 4000\,x_2 & +\ 1000\,x_3 & +\ 1000\,x_4 & & \\
& 0.1\,x_1 & +\ 0.2\,x_2 & +\ 0.1\,x_3 & & = & 1 \\
& 0.5\,x_1 & +\ 0.5\,x_2 & +\ 0.2\,x_3 & +\ 0.1\,x_4 & = & 3 \\
& 0.3\,x_1 & +\ 0.1\,x_2 & & +\ 0.1\,x_4 & = & 1 \\
& x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq & 0
\end{array}
$$

Esprimendo i profitti in milgiaia di €e moltiplicando i vincoli per 10 si ha

$$
\begin{array}{rrrrrcl}
\min\ -z = & -5\,x_1 & -\ 4\,x_2 & -\ x_3 & -\ x_4 & & \\
& x_1 & +\ 2\,x_2 & +\ x_3 & & = & 10 \\
& 5\,x_1 & +\ 5\,x_2 & +\ 2\,x_3 & +\ x_4 & = & 30 \\
& 3\,x_1 & +\ x_2 & & +\ x_4 & = & 10 \\
& x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq & 0
\end{array}
$$

Fase 1:

		x_1^a	x_2^a	x_3^a	x_1	x_2	x_3	x_4
$-w$	0	1	1	1	0	0	0	0
x_1^a	10	1	0	0	1	2	1	0
x_2^a	30	0	1	0	5	5	2	1
x_3^a	10	0	0	1	3	1	0	1

		x_1^a	x_2^a	x_3^a	x_1	x_2	x_3	x_4
$-w$	-50	0	0	0	-9	-8	-3	-2
x_1^a	10	1	0	0	1	2	1	0
x_2^a	30	0	1	0	5	5	2	1
x_3^a	10	0	0	1	3	1	0	1

		x_1^a	x_2^a	x_3^a	x_1	x_2	x_3	x_4
$-w$	-20	0	0	3	0	-5	-3	1
x_1^a	$\frac{20}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{5}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$
x_2^a	$\frac{40}{3}$	0	1	$-\frac{5}{3}$	0	$\frac{10}{3}$	2	$-\frac{2}{3}$
x_1	$\frac{10}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$

		x_1^a	x_2^a	x_3^a	x_1	x_2	x_3	x_4
$-w$	0	3	0	2	0	0	0	0
x_2	4	$\frac{3}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	0	1	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$
x_2^a	0	-2	1	-1	0	0	0	0
x_1	2	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{2}{5}$	1	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$

Al termine della Fase 1, pur essendo $w = 0$, la variabile x_2^a è in base sulla riga 2. Poichè tutti i coefficienti della riga 2 corrispondenti alle variabili del problema originale sono nulli, la riga 2 risulta ridondante (infatti essa è ottenibile come combinazione lineare delle righe 1 e 3 con coefficienti 2 ed 1, rispettivamente).

Si elimina pertanto la riga 2, ottenendo così una base iniziale ammissibile, e si applica la Fase 2.

		x_1	x_2	x_3	x_4
z	0	-5	-4	-1	-1
x_2	4	0	1	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$
x_1	2	1	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$

		x_1	x_2	x_3	x_4
z	26	0	0	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$
x_2	4	0	1	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$
x_1	2	1	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$

La soluzione ottima consiste dunque nel produrre 2 tonnellate di solvente di tipo 1 e 4 tonnellate di solvente di tipo 2; il relativo profitto è di 26000€.

Esercizio 6.10. Problema illimitato

Un'azienda produce due prodotti chimici, A e B. Ogni quintale di prodotto A richiede materie prime e mano d'opera per un costo complessivo di 3000€e fornisce come sottoprodotto 3 Kg di acido. La produzione di un quintale di prodotto B richiede invece 4 Kg di acido e non prevede ulteriori costi. L'acido eventualmente necessario può essere acquistato ad un costo di 2000€al Kg, mentre non è possibile produrre acido in eccesso dato che esso non può essere smaltito dall'azienda. Ogni quintale di prodotto A e B viene venduto ad un prezzo di 1000€e 9000€, rispettivamente. Esigenze di mercato richiedono infine che la quantità del prodotto B prodotta non superi quella del prodotto A.

Supponendo che non esistano vincoli tecnologici sui massimi quantitativi producibili, determinare la produzione di massimo profitto, utilizzando non più di due variabili, impiegando il metodo delle due fasi e la regola di Bland.

Commentare il risultato ottenuto.

Vengono utilizzate due variabili x_1 ed x_2, che costituiscono il numero di quintali da produrre di prodotto A e B, rispettivamente.

Il profitto ottenibile producendo un quintale di prodotto A è pari alla differenza tra prezzo di vendita e costo, più il valore dell'acido ottenuto (che altrimenti dovrebbe essere acquistato all'esterno), ossia $1000 - 3000 + 6000 = 4000$. Analogamente il profitto ottenibile producendo un quintale di prodotto B è pari al prezzo di vendita meno il costo dell'acido necessario (indipendentemente dal fatto che questo sia acquistato all'esterno od ottenuto dalla produzione di A), ossia $9000 - 8000 = 1000$. Il modello di programmazione lineare è pertanto il seguente:

$$\begin{array}{rrrrrl} \max\ z = & 4\,x_1 & + & x_2 & & \\ & -\ \ x_1 & + & x_2 & \leq & 0 \\ & 3\,x_1 & - & 4\,x_2 & \leq & 0 \\ & x_1, & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

dove il secondo vincolo esprime la condizione che la soluzione non preveda produzione di acido in eccesso.

Ponendo il modello in forma standard, si ottiene

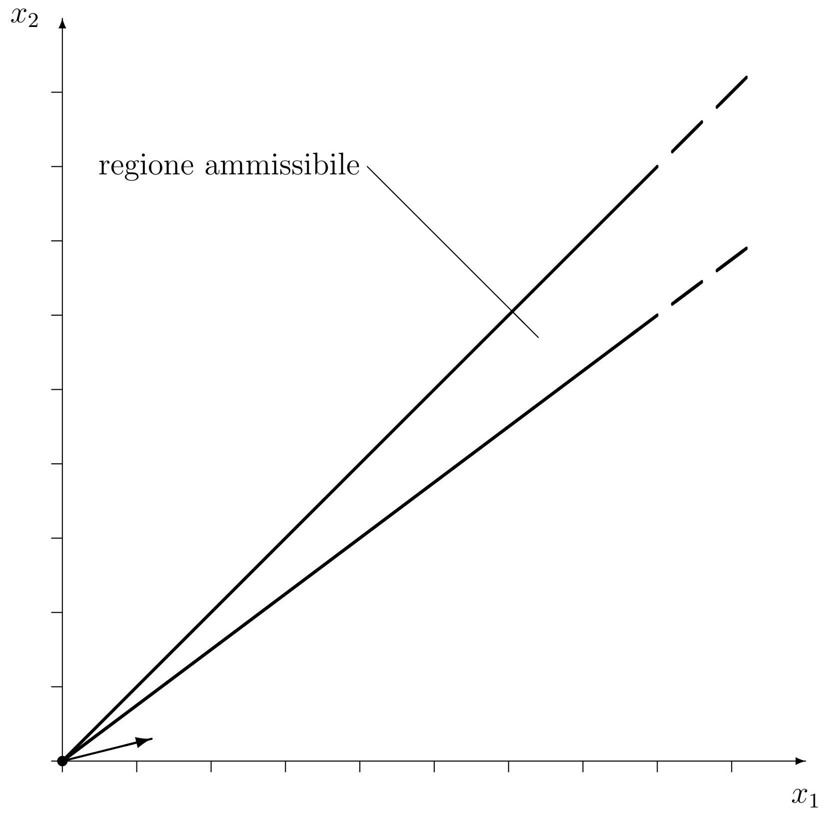
$$\begin{array}{rrrrrrrrrl} \min\ -z = & -\ 4\,x_1 & - & x_2 & & & & & & \\ & -\ \ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & 0 \\ & 3\,x_1 & - & 4\,x_2 & & & + & x_4 & = & 0 \\ & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

Poichè le ultime due colonne del tableau costituiscono una base iniziale ammissibile, non è necessario applicare la Fase 1.

		x_1	x_2	x_3	x_4
z	0	-4	-1	0	0
x_3	0	-1	1	1	0
x_4	0	3	-4	0	1

		x_1	x_2	x_3	x_4
z	0	0	$-\frac{19}{3}$	0	$\frac{4}{3}$
x_3	0	0	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$
x_1	0	1	$-\frac{4}{3}$	0	$\frac{1}{3}$

Poichè tutti i coefficienti della colonna corrispondente alla variabile x_2, che ha costo relativo negativo, sono minori o uguali a zero, è possibile concludere che la soluzione del problema è illimitata.



Si conclude pertanto che per determinare una produzione effettiva occorrerebbe introdurre nel modello anche vincoli tecnologici sulle capacità produttive dell'azienda.

Esercizio 6.12

Sia dato il problema di programmazione lineare

$$
\begin{array}{rrrrrrrrr}
\min \ z = & x_1 & - & 2\,x_2 & + & x_3 & & \\
& x_1 & & & + & 3\,x_3 & = & 1 \\
& 3\,x_1 & + & 3\,x_2 & - & x_3 & = & 4 \\
& x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Risolvere il problema mediante l'algoritmo del simplesso, utilizzando il metodo delle due fasi e la regola di Bland. Nella fase 1 si introducano solo le variabili artificiali necessarie.

FASE I

		x_1	x_2	x_3	x_1^a	x_2^a
$-\xi$	-5	-4	-3	-2	0	0
x_1^a	1	1	0	3	1	0
x_2^a	4	3	3	-1	0	1

		x_1	x_2	x_3	x_1^a	x_2^a
$-\xi$	-1	0	-3	10	4	0
x_1	1	1	0	3	1	0
x_2^a	1	0	3	-10	-3	1

		x_1	x_2	x_3	x_1^a	x_2^a
$-\xi$	0	0	0	0	1	1
x_1	1	1	0	3	1	0
x_2	$\frac{1}{3}$	0	1	$-\frac{10}{3}$	-1	$\frac{1}{3}$

FASE II

		x_1	x_2	x_3	x_1^a	x_2^a
$-z$	$-\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{26}{3}$	-3	$\frac{2}{3}$
x_1	1	1	0	3	1	0
x_2	$\frac{1}{3}$	0	1	$-\frac{10}{3}$	-1	$\frac{1}{3}$

		x_1	x_2	x_3	x_1^a	x_2^a
$-z$	$\frac{23}{9}$	$\frac{26}{9}$	0	0	$-\frac{1}{9}$	$\frac{2}{3}$
x_3	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1	$\frac{1}{3}$	0
x_2	$\frac{13}{9}$	$\frac{10}{9}$	1	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$

volendo si poteva dividere il secondo vincolo per 3 ed aggiungere solo la prima v.a.