COMPITO DI MDP DEL 16/01/2023

Esercizio 1. Estrazioni senza reinserimento da un'urna con 15 palline di cui 5 rosse, 5 blu e 5 gialle. Sia R l'evento "viene estratta almeno una pallina rossa", e similmente B e G. Sia X il numero di palline rosse estratte, e similmente Y e Z.

Supponiamo che le estrazioni siano 3.

(a) Calcolare $P(R)$.
(b) Stabilire se R e B sono indipendenti.
(c) Calcolare $P(R \cap B \cap G)$.

Supponiamo adesso che le estrazioni siano 6.

(d) Calcolare $E(X)$.
(e) Calcolare $P(R \cap B)$.

Soluzione.

Supponiamo che le estrazioni siano 3, allora X, Y, Z sono tutte di tipo $H(3; 5, 10)$.

(a) Vale

$$P(R) = P(X > 0) = 1 - \frac{\binom{5}{0}\binom{10}{3}}{\binom{15}{3}} = \frac{67}{91} = 73,63\%$$

(b) I due eventi sono dipendenti. Infatti $P(R) = P(B) = \frac{67}{91}$. D'altra parte

$$R \cap B = \{X = 1, Y = 1, Z = 1\} \cup \{X = 2, Y = 1\} \cup \{X = 1, Y = 2\}.$$

Abbiamo

$$P(X = 1, Y = 1, Z = 1) = \frac{5^3}{\binom{15}{3}} = \frac{25}{91}$$

$$P(X = 2, Y = 1) = \frac{\binom{5}{2}\binom{5}{1}}{\binom{15}{3}} = \frac{10}{91}$$

$$P(X = 1, Y = 2) = \frac{\binom{5}{1}\binom{5}{2}}{\binom{15}{3}} = \frac{10}{91}$$

Pertanto $P(R \cap B) = \frac{45}{91} \neq \left(\frac{67}{91}\right)^2 = P(R)P(B)$.

(c) $R \cap B \cap G$ è l'evento in cui viene estratta esattamente una pallina rossa, una gialla e una blu. Dunque

$$P(R \cap B \cap G) = \frac{5^3}{\binom{15}{3}} = \frac{25}{91} = 27,47\%$$

Supponiamo che le estrazioni siano 6, allora X, Y, Z sono tutte di tipo $H(6; 5, 10)$.

(d) Scrivendo X come somma di 6 v.a. di Bernoulli troviamo $E(X) = 6\frac{5}{15} = 2$.

(e) Il complementare di $R \cap B$ è $\{X = 0\} \cup \{Y = 0\}$. Osserviamo che

$$P(X = 0) = P(Y = 0) = \frac{\binom{5}{0}\binom{10}{6}}{\binom{15}{6}} = \frac{6}{143}.$$

D'altra parte $\{X = 0, Y = 0\} = \{Z = 6\} = \emptyset$, pertanto

$$P(R \cap B) = 1 - P(X = 0) - P(Y = 0) = 1 - \frac{12}{143} = \frac{131}{143}.$$

Esercizio 2. E' il 01/01/2000. Tito è un vulcanologo e vive nei pressi di un vulcano che erutta con densità esponenziale in intervalli di tempo di media 7 anni, in attesa di un richiamo in sede che arriverà in data non stabilita. Da regolamento il richiamo avviene sempre il primo dell'anno, e può capitare in modo equiprobabile nel 2006, nel 2007, nel 2008, nel 2009 e nel 2010. Tito lascerà il vulcano solamente quando il vulcano avrà eruttato, oppure quando sarà stato richiamato in sede.

a) Qual'è la probabilità che Tito assista a un'eruzione?
b) Qual'è la probabilità che Tito lascerà il vulcano prima del 2007?
c) Qual'è la probabilità che Tito lascerà il vulcano nell'arco del 2007?

Soluzione.

Sia X il tempo di attesa della prossima eruzione e sia Y l'anno in cui Tito verrà richiamato in sede, traslato per comodità di -2000. Allora X, Y sono variabili aleatorie indipendenti, e abbiamo

$$X \sim Exp(1/7), \qquad Y \sim U(\{6,7,8,9,10\}).$$

(a) Sia A l'evento "Tito assiste a un'eruzione". Allora

$$A = \{X < Y\} = \{X < 6\} \cup \{6 < X < 7, Y \geq 7\} \cup \{7 < X < 8, Y \geq 8\} \cup \\ \cup \{8 < X < 9, Y \geq 9\} \cup \{9 < X < 10, Y = 10\}$$

Essendo l'unione disgiunta abbiamo quindi

$$P(A) = P(X < 6) + P(6 < X < 7, Y \geq 7) + P(7 < X < 8, Y \geq 8) + \\ + P(8 < X < 9, Y \geq 9) + P(9 < X < 10, Y = 10)$$

D'altra parte abbiamo

$P(X < 6) = 1 - e^{-6/7} = 0,5756$

$P(6 < X < 7, Y \geq 7) = P(6 < X < 7)P(Y \geq 7) = \frac{4}{5}(e^{-6/7} - e^{-1}) = \frac{4}{5} \cdot 0.0565 = 0.0452$

$P(7 < X < 8, Y \geq 8) = P(7 < X < 8)P(Y \geq 8) = \frac{3}{5}(e^{-1} - e^{-8/7}) = \frac{3}{5} \cdot 0.0490 = 0.0294$

$P(8 < X < 9, Y \geq 9) = P(8 < X < 9)P(Y \geq 9) = \frac{2}{5}(e^{-8/7} - e^{-9/7}) = \frac{2}{5} \cdot 0.0425 = 0.0170$

$P(9 < X < 10, Y = 10) = P(9 < X < 10)P(Y = 10) = \frac{1}{5}(e^{-9/7} - e^{-10/7}) = \frac{1}{5} \cdot 0.0368 = 0.0074$

Pertanto $P(A) = 0,6746 = 67,46\%$.

(b) Sia B l'evento "Tito lascia il vulcano prima del 2007". Allora

$$B = \{X < 7\} \cup \{Y = 6\},$$

pertanto

$P(B) = P(X < 7) + P(Y = 6) - P(X < 7, Y = 6) = P(X < 7) + P(Y = 6) - P(X < 7)P(Y = 6).$

D'altra parte abbiamo

$$P(X < 7) = 1 - e^{-1} = 0.6321$$
$$P(Y = 6) = \frac{1}{5},$$

da cui $P(B) = 0,7057 = 70,57\%$.

(c) Sia C l'evento "Tito lascerà il vulcano nell'arco del 2007". Allora

$$C = \{X > 7, Y = 7\} \cup \{7 < X < 8, Y \geq 8\}.$$

Essendo l'unione disgiunta abbiamo quindi

$$\begin{aligned} P(A) &= P(X > 7, Y = 7) + P(7 < X < 8, Y \geq 8) = \\ &= P(X > 7)P(Y = 7) + P(7 < X < 8)P(Y \geq 8) \end{aligned}$$

D'altra parte

$$\begin{aligned} &P(X > 7) = e^{-1} = 0,3679 \\ &P(7 < X < 8) = e^{-1} - e^{-8/7} = 0,0490 \\ &P(Y = 7) = \tfrac{1}{5} \\ &P(Y \geq 8) = \tfrac{3}{5} \end{aligned}$$

da cui $P(C) = 0,1030 = 10,3\%$.

Esercizio 3. Una fabbrica produce fiammiferi in scatole da 150, e mediamente un fiammifero su 25 risulta essere difettoso. Scegliamo a caso 100 fiammiferi da una scatola.

a) Qual'è la probabilità che il primo fiammifero scelto sia difettoso?
b) Qual'è la probabilità che tra i fiammiferi scelti ve ne siano non più di 5 difettosi?
c) Supponiamo che tra i primi 10 fiammiferi scelti ce ne siano 5 difettosi e 5 non difettosi. Qual'è la probabilità che gli altri 90 fiammiferi scelti non siano difettosi?

Soluzione.
(a) La probabilità che un fiammifero scelto a caso sia difettoso è 1/25.

(b) Sia X il numero di fiammiferi difettosi in 100 fiammiferi presi a caso. Allora $X \sim B(100, 1/25)$, pertanto

$$P(X \leq 5) = \sum_{k=0}^{5} \binom{100}{k} \left(\frac{1}{25}\right)^k \left(\frac{24}{25}\right)^{100-k} = 0,7884 = 78,84\%$$

Possiamo calcolare un'approssimazione di tale probabilità utilizzando il teorema del limite centrale. Per $i = 1, \ldots, 100$, sia X_i la variabile aleatoria di Bernoulli che vale 1 se il fiammifero i-esimo è difettoso, e 0 altrimenti, e sia $X = X_1 + \ldots + X_{100}$. Allora vogliamo calcolare la probabilità dell'evento $X \leq 5$.

Le variabili X_i sono tutte indipendenti. Essendo $P(X_i = 1) = 1/25$, abbiamo che hanno tutte valore atteso $\mu = 1/25$ e varianza $\sigma^2 = 24/25^2$. Pertanto per il teorema del limite centrale possiamo approssimare X con una variabile normale $\zeta \sim N(100\mu, 100\sigma^2)$. Usando la correzione di continuità troviamo

$$\begin{aligned} P(X \leq 5) \simeq P(\zeta \leq 5,5) = P(\zeta_0 \leq \tfrac{5,5-\mu}{\sigma}) = \Phi(\tfrac{5,5-100\mu}{10\sigma}) = \Phi(\tfrac{1,5}{1,9596}) = \\ = \Phi(0,77) = 0,77935 = 77,94\% \end{aligned}$$

(c) La probabilità di non trovare fiammiferi difettosi su 90 fiammiferi scelti a caso è $(24/25)^{90} = 0,0254 = 2,54\%$.