Introduzione alla Ricerca Operativa

Parte I
Programmazione Matematica

Lecture Notes, v. 9.0
19 novembre 2023

Daniele Vigo[1]
Marco Antonio Boschetti[2]

Alma Mater Università di Bologna

[1] Dip. di Ingegneria dell'Energia Elettrica e dell'Informazione "Gugliemo Marconi" e CIRI-ICT

[2] Dip. di Matematica

Indice

Capitolo 1

Introduzione alla Ricerca Operativa

1.1 La Ricerca Operativa

La Ricerca Operativa è una disciplina relativamente recente che mette a disposizione metodi scientifici *quantitativi*, basati sulla definizione di strumenti modellistici ed algoritmici, per la formulazione e la risoluzione di *problemi decisionali* per sistemi organizzati complessi. Il termine italiano usato per la denominazione della disciplina non chiarisce molto il suo ambito di applicazione, mentre il termine anglosassone Operations, che significa "attività", specifica con maggiore chiarezza che la disciplina si occupa della ricerca sulla pianificazione delle attività. Per questo motivo la ricerca operativa è anche denominata in vari ambiti Scienza delle Decisioni (Decision Science) o Scienza della Gestione (Management Science). Più recentemente la ricerca operativa è considerata una disciplina fondamentale dell'Intelligenza Artificiale e più in particolare dell'analytics ed è nota come *prescriptive analitics* proprio per la capacità di fornire metodi in grado di prescrivere come ottenere da un sistema il comportamento desiderato.

Le origini della ricerca operativa sono generalmente fatte risalire alla seconda guerra mondiale[1], quando alcuni gruppi di lavoro interdisciplinari, denominati Research on Military Operations (da cui discende il nome anglosassone), furono costituiti per risolvere problemi pratici quali la localizzazione delle stazioni radar o la pianificazione delle attività logistiche. In realtà molti dei metodi della ricerca operativa, quali ad esempio i metodi per la risoluzione dei sistemi lineari, hanno una origine molto precedente ma la loro sistematizzazione e generalizzazione negli strumenti che discuteremo in questo testo è più recente ed è dovuta al lavoro di alcuni studiosi, tra cui George B. Dantzig (1914-2005), che nel secondo dopoguerra hanno gettato le basi della disciplina come la conosciamo.

[1] Per un approfondimento sulle origini di veda `https://www.informs.org/Explore/History-of-O.R.-Excellence/Bibliographies/The-Origins-of-OR`

1.2 Sistemi organizzati e problemi decisionali

Un *sistema organizzato complesso* può essere definito come un insieme di elementi tra loro legati da forme di interazione. Un tipico esempio di tali sistemi è costituito da un reparto produttivo, in cui gli elementi sono le macchine, le stazioni di lavoro o i sistemi di movimentazione e stoccaggio, che interagiscono tra loro attraverso i flussi di materiali e di pezzi nelle varie fasi di lavorazione (vedi figura 1.1).

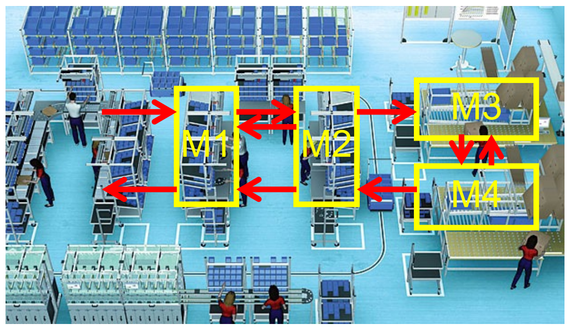


Figura 1.1: Esempio di sistema organizzato complesso: un reparto di produzione.

Un altro esempio tipico di sistema organizzato è rappresentato da un sistema logistico di distribuzione delle merci in cui gli elementi sono le fabbriche i depositi ed i clienti e l'interazione è rappresentata dal flusso delle merci.

Un *problema decisionale* consiste nella scelta, tra diverse alternative, della combinazione di un insieme di decisioni, ossia una soluzione, che consente di ottenere dal sistema le prestazioni desiderate.

Facendo riferimento al reparto di produzione di figura 1.1, gli elementi del sistema sono rappresentati dalle macchine e dai sistemi di movimentazione e stoccaggio che interagiscono per la produzione di pezzi attraverso il flusso di questi. In tale contesto possono essere immaginati diversi tipi di decisioni:

- Decisioni di tipo *strategico*, ossia aventi un orizzonte temporale di applicazione lungo (molti anni): ad esempio, la struttura dell'impianto, la tipologia ed il numero di macchinari da impiegare.

- Decisioni di tipo *tattico*, ossia aventi un orizzonte temporale di applicazione medio (da alcuni mesi ad uno o due anni): ad esempio, la politica di approvvigionamento delle materie prime, la definizione dei periodi di manutenzione, l'assegnazione del personale ai diversi reparti.

- Decisioni di tipo *operativo*, ossia aventi un orizzonte temporale di applicazione breve (da alcuni giorni a pochi mesi): ad esempio, la sequenza di lavorazione dei pezzi sulle macchine, la formazione dei turni di lavoro, la gestione delle scorte per la produzione.

I tipi di decisione sopraelencati richiedono informazioni su cui basare le stesse che hanno natura e qualità molto diverse. Ad esempio, in un problema strategico quale quello della progettazione di un impianto occorre tenere presente della valutazione della domanda potenziale dei beni da produrre in un orizzonte temporale molto lungo affinché il dimensionamento sia adeguato alla domanda futura da soddisfare o sul costo futuro delle materie prime. È evidente che tali informazioni sono frutto di previsioni che per loro natura non hanno carattere deterministico e quindi sono affette da possibili errori anche consistenti. In un problema operativo invece le informazioni sono normalmente disponibili con maggiore precisione ed affidabilità. Ad esempio i quantitativi dei pezzi da produrre sono noti dagli ordinativi dei clienti, le scorte di materie prime ed il personale disponibile sono anch'essi noti con precisione.

Le decisioni da prendere devono considerare un criterio di valutazione che permetta di valutarne l'effetto rispetto ad una misura di prestazione. Le misure di prestazione maggiormente utilizzate riguardano:

- la minimizzazione dei costi (di investimento, di produzione, ecc...);
- la massimizzazione del margine economico;
- la massimizzazione dell'efficienza, ad esempio misurata attraverso il volume di produzione, il tempo di lavorazione, il tempo di soddisfacimento delle richieste dei clienti, ecc...

Spesso i criteri, o *obiettivi*, con cui valutare le decisioni sono molteplici ed a volte sono contrastanti tra loro. Ad esempio nella scelta di un macchinario non è certamente il costo o la velocità di lavorazione il solo criterio che si adotta per la decisione e spesso macchine più veloci sono anche più costose. In tali casi le decisioni da prendere devono trovare un compromesso tra i diversi criteri di scelta adottati. Sebbene esistano metodologie che permettono di trattare problemi che richiedano di tenere conto di diversi obiettivi, noti come *problemi multi-obiettivo*, in pratica spesso questi vengono combinati in una funzione di prestazione complessiva in cui i diversi obiettivi vengono pesati mediante coefficienti di peso che ne riflettono l'importanza per il decisore.

Nel seguito faremo principalmente riferimento a problemi decisionali di tipo operativo, che per la loro definizione possono contare su informazioni di tipo deterministico note con precisione, e caratterizzate dall'ottimizzazione di un singolo obiettivo (problemi *mono-obiettivo*), eventualmente ottenuto combinando tra loro obiettivi contrastanti.

1.3 Problemi, Modelli e Algoritmi

Per sviluppare una soluzione per il supporto alle decisioni per ottenere da un sistema le prestazioni desiderate, sono necessari i seguenti passi:

- modellare matematicamente il problema che si vuole risolvere;
- identificare la sua complessità;

- progettare l'algoritmo più adatto, usando le tecniche di soluzione in relazione al modello e alla complessità del problema.

Nei prossimi capitoli mostreremo come problemi molto semplici da formulare possono risultare molto difficili da risolvere e come problemi molto complessi da descrivere possono essere in realtà molto facili da risolvere.

Prima di proseguire è necessario definire che cos'è un *problema*, un *modello* e un *algoritmo*.

Problema, [pro-blè-ma] s.m. (pl. -mi)
Garzanti: "*quesito con cui si chiede di trovare, con un procedimento di calcolo, uno o più dati sconosciuti, partendo dai dati noti contenuti nell'enunciato del quesito stesso.*"
Coletti: "*in matematica e in altre scienze, domanda con cui si chiede di trovare, sulla base di dati noti ed enunciati, dati non noti, logicamente deducibili dai primi.*"

Figura 1.2: Definizione di problema

In figura 1.2 sono riportate due definizioni fornite da due noti dizionari della lingua italiana. Come si può notare, aldilà delle diverse sfumature, le due definizioni concordano sul fatto che un problema chiede di trovare attraverso un procedimento di calcolo dei *dati non noti* a partire dai *dati noti* e dagli enunciati che lo definiscono. Chiaramente i dati noti corrispondono all'input del problema, i dati non noti all'output atteso, mentre il procedimento di calcolo altro non è che un algoritmo in grado di risolvere il problema.

E' importante sottolineare che i dati noti rappresentano una *istanza* del problema. Per esempio, calcolare l'area di un triangolo è il problema, mentre il triangolo di altezza 20 cm e base 30 cm è una istanza.

Nel nostro contesto per risolvere un problema è necessario costruire un modello e definire un algoritmo di soluzione.

Il concetto di algoritmo è ormai usato quotidianamente, ma vale la pena ricordare la sua definizione. In figura 1.3 è riportata la definizione di algoritmo fornita da Treccani, che ci ricorda che un algoritmo è una procedura definita in modo preciso per risolvere una classe di problemi.

Per determinare il problema e un algoritmo per risolverlo dobbiamo definire un modello. I modelli sono una rappresentazione, spesso semplificata, di concetti, fenomeni, relazioni, strutture, processi, sistemi, etc. In generale, i modelli possono riguardare sia aspetti puramente teorici che del mondo reale e possono essere di tipo verbale, grafico, fisico, matematico, etc. I modelli consentono di perseguire i seguenti obiettivi:

- facilitare la comprensione, identificando le componenti fondamentali e i meccanismi di funzionamento;

- spiegare, controllare e predire eventi, anche sulla base delle osservazioni passate;

Algoritmo (da Treccani):
"*termine, derivato dall'appellativo al-Khuwārizmī ("originario della Corasmia") del matematico Muhammad ibn Mūsà del 9° sec., che designa qualunque schema o procedimento sistematico di calcolo (per es. l'a. euclideo, delle divisioni successive, l'a. algebrico, insieme delle regole del calcolo algebrico ecc.).*
Con un algoritmo si tende a esprimere in termini matematicamente precisi il concetto di procedura generale, di metodo sistematico valido per la soluzione di una certa classe di problemi."

Figura 1.3: Definizione di algoritmo

- supportare i processi decisionali.

Molto spesso ciò che deve essere rappresentato nel modello può essere composto da molte componenti, le cui interrelazioni possono essere anche molto complesse. In questi casi è necessario applicare delle semplificazioni al modello, che però non devono "interferire" con l'utilizzo che se ne vuole fare. Il processo di semplificazione deve identificare le componenti di interesse e definire eventuali approssimazioni.

Lo strumento di modellazione a cui siamo interessati è il *modello matematico*, che consente di rappresentare la realtà di interesse con un alto grado di astrazione per mezzo di simboli, equazioni, etc. Per poter scrivere i modelli matematici e sapere come analizzarli e risolverli è necessario conoscere il linguaggio e i metodi della matematica.

I modelli matematici che utilizzeremo prevedono l'uso di parametri che rappresentano l'input (cioè i dati noti) e di variabili che rappresentano l'output (cioè i dati non noti). Nel caso in cui i parametri possono essere definiti con esattezza a priori parleremo di *modelli deterministici*, mentre nel caso in cui i parametri non sono certi a priori parleremo di *modelli stocastici*. In molte applicazioni, come in economia e finanza, molto spesso i modelli sono di tipo stocastico. I modelli di tipo stocastico sono solitamente difficili da risolvere e spesso ci si riporta a modelli deterministici, ad esempio enumerando sottoinsiemi di scenari rappresentativi della realtà di interesse.

Nella definizione e nell'uso dei modelli non bisogna dimenticarsi dell'aspetto numerico, perché l'approssimazione dei parametri e gli errori nel calcolo possono inficiare la validità dell'output. La matematica permette di prevedere anche la precisione con cui sarà fornito l'output. Di questo argomento se ne occupa l'analisi numerica.

1.4 Approssimazione di un modello

Quando si costruisce un modello è importante considerare dove possono e devono essere applicate delle approssimazioni. In particolare, si devono considerare le seguenti approssimazioni:

- Prima del calcolo:
  - modello;
  - misure empiriche;
  - precedenti calcoli.
- Durante il calcolo:
  - troncamento o discretizzazione;
  - arrotondamento.

L'accuratezza del risultato finale dipenderà da tutte le approssimazioni che sono state applicate e l'errore complessivo sarà dovuto alla combinazione degli effetti delle diverse approssimazioni. L'approssimazione durante il calcolo spesso è inevitabile, ma può essere gestita e mitigata, anche scegliendo opportunamente gli algoritmi e le modalità di implementazione.

L'*errore di troncamento* è dato dalla differenza tra il risultato "esatto" e quello prodotto dall'algoritmo. Per esempio, può essere dovuto alla terminazione di un algoritmo di soluzione di tipo iterativo prima del raggiungimento del valore "finale".

L'*errore di arrotondamento* è dato dalla differenza tra il risultato prodotto da un dato algoritmo usando un'aritmetica esatta e il risultato prodotto dallo stesso algoritmo usando un'aritmetica approssimata. L'aritmetica del "computer" è approssimata a causa dell'inesatta rappresentazione dei numeri reali e dall'applicazione degli operatori aritmetici ad essi.

Esempio 1 Il calcolo della superficie della terra usando la formula $A = 4\pi r^2$ implica le seguenti approssimazioni: la terra viene modellata come una sfera; il valore del raggio r è dato da misure empiriche e precedenti calcoli (come?); il valore di π richiede un troncamento; i valori dei dati in input e i risultati delle operazioni aritmetiche sono arrotondati dal computer.

Nella figura 1.4 è illustrato come Eratostene (Cirene, 276 A.C. – Alessandria d'Egitto, 194 A.C.) riuscì a stimare con buona precisione il raggio terrestre. Nel modello di Eratostene per stimare il raggio della terra furono applicate le seguenti approssimazioni: la terra era una sfera, i raggi del sole erano considerati paralleli, le località di Aswan e Alessandria furono considerate allineate lungo lo stesso meridiano, la distanza tra le due località era una stima fatta con i mezzi del tempo. Nonostante questo la stima fornita da Eratostene era molto prossima alla stima che siamo in grado di calcolare oggi.

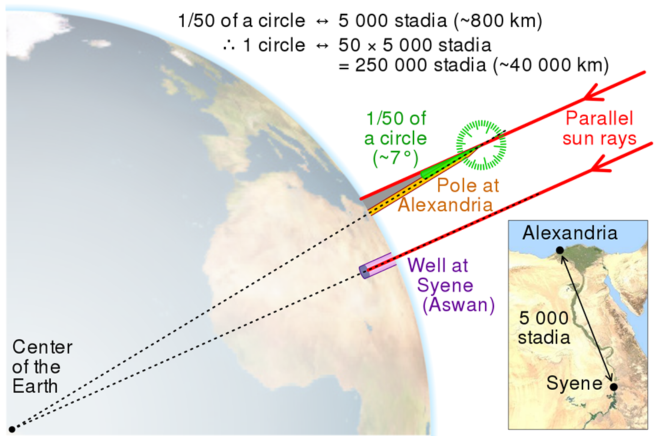


Figura 1.4: Il calcolo del raggio terrestre effettuato da Eratostene (Fonte: https://en.wikipedia.org/wiki/Eratosthenes).

Esempio 2 Gli errori di calcolo possono "propagarsi" in modo inaspettato e a volte disastroso, fino al punto di rendere il risultato inutilizzabile. Un esempio molto semplice può essere ottenuto utilizzando un "foglio elettronico", uno strumento di lavoro molto usato in ambito scientifico/economico. Si può provare a calcolare con Excel (o una applicazione analoga) la seguente "formula ricorsiva":

- Passo base: $x_0 = 0.2$
- Passo ricorsivo: $x_{i+1} = 11x_i - 10x_0$

Per induzione possiamo dedurre analiticamente che $x_i = x_0$ per ogni i:

- Passo base: $x_1 = 11x_0 - 10x_0 = x_0$
- Passo ricorsivo: se è vero fino a i, allora $x_{i+1} = 11x_0 - 10x_0 = x_0$

Ma cosa accade se la formula ricorsiva è calcolata usando Excel? Si riesce ad ottenere che $x_i = x_0 = 0.2$ per ogni i?

Per rispondere a queste domande basta implementare la formula ricorsiva in Excel come mostrato in figura 1.5. Inizialmente non sembrano esserci errori, ma se continuiamo a scorrere i risultati, come illustrato in figura 1.6, scopriamo che la situazione peggiora piuttosto rapidamente fino a raggiungere dei risultati inaccettabili ben prima delle 20 iterazioni.[2]

[2]questo esempio viene proposto da molti anni e tutti gli anni prima di proporlo viene verificato se il comportamento di Excel rimane lo stesso. Con sorpresa, nonostante sia un caso noto, tutti gli anni si conferma il comportamento illustrato.

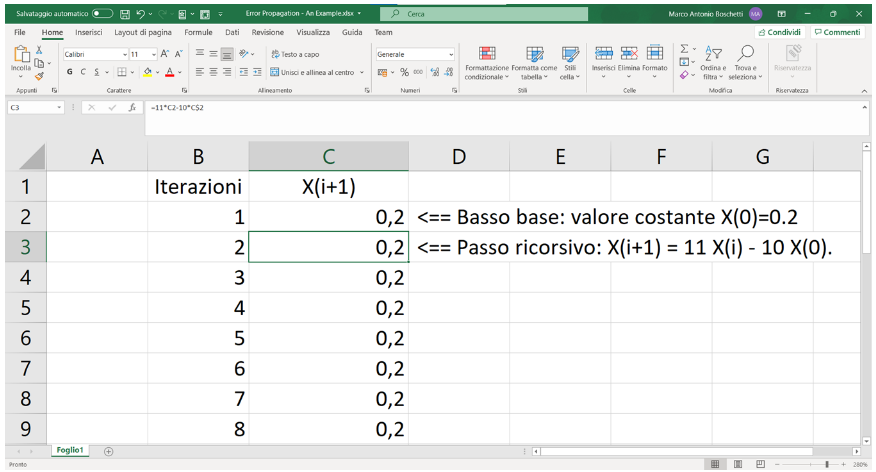


Figura 1.5: Esempio di implementazione della formula ricorsiva in Excel.

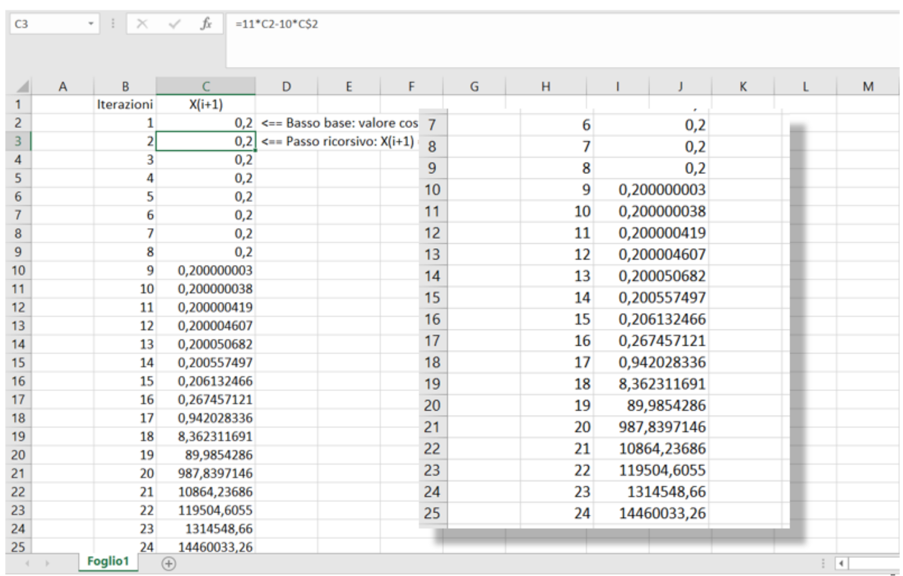


Figura 1.6: Errore generato da Excel nel calcolo della formula ricorsiva.

Esempio 3 Consideriamo il problema della soluzione di un sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Una particolare istanza può essere:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$$

Questo sistema lineare ha un'unica soluzione che rappresenta l'intersezione delle rette rappresentate dalle due equazioni. Questo problema è semplice, ma per alcune istanze può essere difficile ottenere una soluzione sufficientemente accurata.

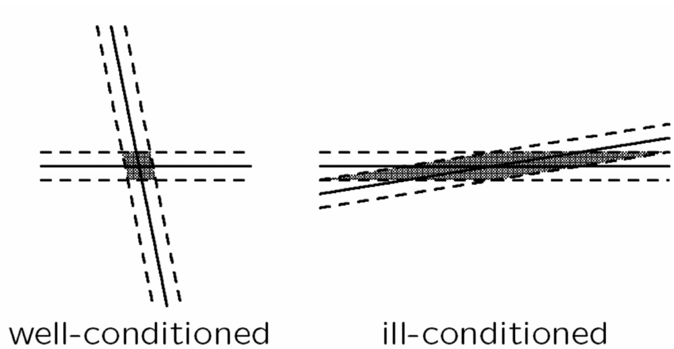


Figura 1.7: Esempio di istanze ben-condizionate e mal-condizionate.

In figura 1.7 è illustrato graficamente come più le rette tendono a essere parallele e più vengono amplificati gli errori. In questo caso, in gergo si dice che peggiora il "condizionamento" dell'istanza del problema.

Il malcondizionamento che si riscontra in alcune istanze nella soluzione dei sistemi lineari potrebbe emergere anche nella soluzione di problemi di programmazione lineare che saranno presentati nei prossimi capitoli.

1.5 Complessità computazionale

Finora si è parlato genericamente di problemi di supporto alle decisioni, ma in realtà è necessario distinguere tra le seguenti tipologie di problemi[3]:

- Problema di "Decisione" (o problema decisionale): data un'istanza si vuole determinare se esiste o meno una certa soluzione;

- Problema di "Ricerca": data un'istanza si vuole determinare una possibile soluzione;

[3]Ulteriori dettagli su questo argomento sono dati nel capitolo 2

- Problema di “Enumerazione”: data un’istanza si vogliono determinare tutte le possibili soluzioni;

- Problema di “Ottimizzazione”: data un’istanza si vuole determinare la “migliore soluzione” possibile rispetto ad una misura fissata.

Esempio Un fattorino che svolge le consegne per un corriere nel rispetto di alcuni vincoli ha bisogno di risolvere:

- un problema di decisione, se deve determinare se può riuscire a fare tutte le consegne assegnate entro la giornata (cioè ha bisogno di sapere se esiste una soluzione);

- un problema di ricerca, se deve determinare un modo per svolgere tutte le consegne entro la giornata senza considerare la qualità del giro di consegne (cioè ha bisogno solo di una soluzione ammissibile);

- un problema di enumerazione, se vuole determinare tutti i modi possibili con cui è possibile svolgere tutte le consegne (cioè ha bisogno di tutte le soluzioni ammissibili);

- un problema di ottimizzazione, se deve determinare il modo migliore per svolgere tutte le consegne (cioè ha bisogno della soluzione migliore).

La teoria della complessità computazionale è un ambito di ricerca della matematica, oggi spesso denotato come “informatica teorica”, che ha l’obiettivo di classificare i problemi secondo la loro intrinseca complessità. Banalizzando, la teoria della complessità consente di determinare se un problema è “facile” o “difficile”.

La difficoltà di un problema è una sua caratteristica generale che non è associata a una particolare istanza. Infatti, si ricordi che un problema è un’entità astratta, mentre un’istanza è un caso particolare. Quindi, un algoritmo risolve un problema se è in grado di generare una soluzione per ogni possibile istanza. Se un problema è semplice si può garantire la sua soluzione in un tempo e una quantità di risorse (e.g., memoria) “ragionevole”. Se un problema è difficile non si può garantire la sua soluzione.

Semplificando un argomento in verità molto complesso, si potrebbe dire che:

- I problemi semplici sono quelli polinomiali (insieme **P**).

- I problemi difficili sono quelli “non-polinomiali”, tra questi vi sono i problemi che si trovano nell’insieme **NP** che a sua volta comprende i problemi **NP**-Completi.

NP significa Nondeterministic Polynomial time, in quanto **NP** è l’insieme dei problemi decisionali in cui se la risposta è “Si” lo si può verificare in tempo polinomiale utilizzando una macchina di Turing deterministica, o in modo equivalente possiamo dire che il problema può essere risolto in tempo polinomiale da una macchina di Turing non-deterministica. Al momento possiamo facilmente dimostrare che $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{NP}$, ma non sappiamo se $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$.

Un problema decisionale $f : I \leftarrow \{0, 1\}$ è *riducibile polinomialmente* a $g : I \leftarrow \{0, 1\}$, i.e. $f \propto g$, se esiste una funzione h, calcolabile in tempo polinomiale, tale che per ogni $x \in I$:

$$f(x) = g(h(x))$$

Un problema decisionale $p : I \leftarrow \{0, 1\}$ è definito **NP**-Completo se e solo se:

- $p \in \mathbf{NP}$;
- per ogni $f \in \mathbf{NP}$ si ha $f \propto p$

Fino ad oggi non è stato dimostrato che l'insieme dei problemi **NP** e l'insieme dei problemi **NP**-Completi sono disgiunti. Se così non fosse, allora $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$. Il Clay Mathematics Institute[4] lo ha incluso tra i 7 problemi matematici del millennio per i quali è previsto un premio di 1,000,000 di dollari per chi fornirà la dimostrazione corretta per primo.

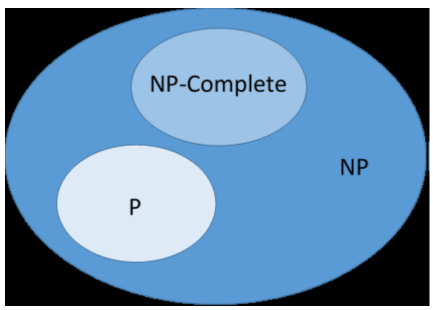


Figura 1.8: Relazione tra problemi **P**, **NP** e **NP**-Completi.

La relazione nota al momento tra problemi **P**, **NP** e **NP**-Completi è rappresentata in figura 1.8.

Un problema di ottimizzazione si definisce **NP**-Hard se esiste un problema **NP**-Completo che può essere ridotto ad esso con trasformazione polinomiale.

1.6 Problemi vs Algoritmi

In letteratura può capitare che per un dato problema siano proposti più algoritmi. Questo è dovuto alla naturale evoluzione delle soluzioni proposte dalla ricerca scientifica, ma anche al fatto che l'algoritmo più adatto dipende dalle istanze e dagli specifici obiettivi dell'applicazione finale in termini di prestazioni.

Le prestazioni di un algoritmo possono essere misurate con:

[4] https://www.claymath.org/millennium-problems/

- il *tempo di calcolo* richiesto per ottenere la soluzione;
- la *qualità della soluzione* (cioè quanto il risultato ottenuto approssima il risultato corretto).

Per ogni istanza di un problema esistono algoritmi che forniscono prestazioni migliori di altri. Inoltre, per i problemi difficili c'è un ulteriore opzione:

- *Algoritmi euristici*, che trovano soluzioni di "buona qualità";
- *Algoritmi esatti*, che trovano le soluzioni "ottime".

Per la scelta dell'algoritmo è determinante definire la complessità computazionale del problema. Infatti, per i problemi polinomiali la scelta naturale dovrebbero essere quella degli algoritmi esatti, a meno che non ci sia l'esigenza di risolvere istanze (per esempio, di grandi dimensioni) in tempi molto ridotti non sufficienti per ottenere una soluzione esatta, anche se il problema è polinomiale. Mentre, nel caso dei problemi non polinomiali non si può garantire l'ottenimento della soluzione migliore per qualsiasi istanza anche se si decide di utilizzare un algoritmo esatto.

Anche il modello scelto per un dato problema ha un impatto determinante sulla scelta dell'algoritmo più adatto per risolverlo. Infatti, si potrebbe scegliere un modello che approssima maggiormente il problema, ma che può essere risolto in modo molto efficiente/efficace. Mentre, modelli che descrivono in modo molto preciso il problema potrebbero essere troppo difficili da risolvere.

La scelta del modello e dell'algoritmo più adatto è condizionata anche dalla qualità della soluzione che viene richiesta dall'applicazione e dal tempo e dalle risorse di calcolo disponibili. Per esempio, un algoritmo di ottimizzazione utilizzato per pianificare le modalità di taglio di una lastra di metallo da parte di un macchinario ha a disposizione il tempo richiesto per eseguire il taglio pianificato precedentemente, perché tempi di calcolo più lunghi implicherebbero un fermo macchina.

La stragrande maggioranza degli algoritmi di soluzione nell'ambito dell'Intelligenza Artificiale (AI) sono classificabili come algoritmi euristici. Nell'ambito dell'ottimizzazione molti modelli possono essere risolti con algoritmi esatti.

1.7 Ottimizzazione non vincolata

Per ottimizzazione non vincolata si intende la ricerca del minimo o massimo di una funzione.

1.7.1 Esempio: Domanda e Ricavo

Una casa editrice prevede che l'equazione della domanda relativa alle vendite del suo ultimo romanzo sia:

$$q = -2000p + 150000 \tag{1.1}$$

dove q è il numero di libri che si prevede di vendere ogni anno se il prezzo di vendita è di p Euro. L'equazione della domanda rappresenta il modello matematico che descrive l'andamento delle vendite in funzione del prezzo scelto.

Se la casa editrice vuole sapere quale prezzo deve applicare per ottenere il massimo del ricavo annuo, deve definire il modello matematico che descrive il ricavo in funzione del prezzo. Siccome il ricavo è dato dal prodotto tra il prezzo e la quantità venduta:

$$R = qp \tag{1.2}$$

se si sostituisce q con l'equazione relativa alla domanda diventa:

$$R = qp = (-2000p + 150000)p = -2000p^2 + 150000p \tag{1.3}$$

Il ricavo è in funzione del prezzo ed è dato da:

$$R(p) = -2000p^2 + 150000p \tag{1.4}$$

Per cui, si deve trovare il prezzo p che massimizza il ricavo $R(p)$.

Si noti che (1.3) corrisponde all'equazione di una parabola e (1.4) è una funzione quadratica. Il coefficiente del termine quadratico è -2000, ossia è negativo, quindi la funzione è concava (vedi figura 1.9). Per trovare l'ottimo possiamo determinare il vertice della parabola o usare il calcolo differenziale applicando le condizioni di ottimalità del primo ordine.

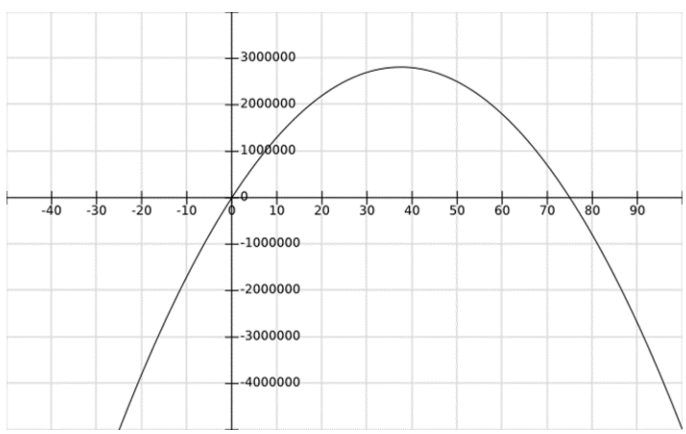


Figura 1.9: Funzione del ricavo.

Applicando le condizioni di ottimalità del primo ordine otteniamo:

$$R'(p) = -4000p + 150000 = 0 \Longrightarrow p = \frac{150000}{4000} = 37.50 \tag{1.5}$$

Per cui, se si vuole massimizzare i ricavi si deve fissare un prezzo di 37.50 Euro per ogni copia del libro, ottenendo un ricavo pari a:

$$R(37.50) = -2000(37.50)^2 + 150000(37.50) = 2812500 \tag{1.6}$$

1.8 Ottimizzazione vincolata

Per ottimizzazione vincolata si intende la ricerca della soluzione di un problema in cui sono previsti dei vincoli che limitano l'insieme delle soluzioni ammissibili.

1.8.1 Esempio: Miscelazione

Un'azienda di bibite produce tre miscele di succo le cui ricette prevedono che per produrre ogni litro sia richiesta la seguente composizione:

- PineOrange: 2 parti di succo d'ananas e 2 parti di succo d'arancia;
- PineKiwi: 3 parti di succo d'ananas e 1 parte di succo di kiwi;
- OrangeKiwi: 3 parti di succo d'arancia e 1 parte di succo di kiwi.

L'azienda dispone ogni giorno di 800 parti di succo d'ananas, 650 parti di succo d'arancia e 350 parti di succo di kiwi. Il responsabile della produzione vuole determinare quanti litri di ciascuna miscela deve produrre per utilizzare tutte le materie prime (per esempio, perché è necessario svuotare tutte le cisterne al termine della giornata lavorativa per poter procedere al loro lavaggio).

Per modellare il problema e risolverlo, il primo passaggio è l'identificazione delle variabili decisionali:

- x_1: numero di litri di PineOrange prodotti in un giorno;
- x_2: numero di litri di PineKiwi prodotti in un giorno;
- x_3: numero di litri di OrangeKiwi prodotti in un giorno.

Le informazioni che abbiamo a disposizione sono le seguenti:

	x_1	x_2	x_3	Totale disponibile
Succo Ananas (parti)	2	3	0	800
Succo Arancia (parti)	2	0	3	650
Succo Kiwi (parti)	0	1	1	350

L'insieme dei vincoli determinato dalle tre ricette e dalla quantità di materia prima disponibile origina il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} 2x_1 & +3x_2 & & = & 800 \\ 2x_1 & & +3x_3 & = & 650 \\ & +x_2 & +x_3 & = & 350 \end{cases}$$

Si può risolvere il sistema lineare con il metodo di eliminazione di Gauss-Jordan oppure uno dei tanti algoritmi alternativi. La soluzione del sistema lineare è:

$$(x_1, x_2, x_3) = (100, 200, 150)$$

che suggerisce di produrre ogni giorno 100 litri di PineOrange, 200 litri di PineKiwi e 150 litri di OrangeKiwi per riuscire a consumare tutte le materie disponibili. In questo caso la soluzione era unica, quindi non è necessario trovare la soluzione più "conveniente" in base a un qualche criterio.

Nel caso in cui venisse rilassato il vincolo di consumare tutte le materie prime, le equazioni sarebbero sostituite da disequazioni:

$$\begin{cases} 2x_1 & +3x_2 & & \leq & 800 \\ 2x_1 & & +3x_3 & \leq & 650 \\ & +x_2 & +x_3 & \leq & 350 \end{cases}$$

Inoltre, bisogna anche garantire che le quantità di prodotto da produrre non siano negative, per cui è necessario aggiungere i cosiddetti vincoli di non negatività delle variabili decisionali, cioè $x_1, x_2, x_3 \geq 0$.

Per risolvere il sistema di disequazioni non si possono applicare direttamente le operazioni elementari previste, per esempio, nel metodo come Gauss-Jordan. Se lo si volesse fare, bisogna prima trasformare le disequazioni in equazioni aggiungendo delle *variabili di scarto* s_i non negative per ogni disequazione $i \in 1, 2, 3$ (cioè $s_i \geq 0$). Nel caso di esempio potremo avere:

$$\begin{cases} 2x_1 & +3x_2 & & +s_1 & & & = & 800 \\ 2x_1 & & +3x_3 & & +s_2 & & = & 650 \\ & +x_2 & +x_3 & & & +s_3 & = & 350 \end{cases}$$

Come si vedrà nel capitolo 4, una volta trasformate le disequazioni in equazioni si potranno usare le operazioni elementari, analoghe a quelle impiegate in metodi come Gauss-Jordan, per trovare le soluzioni del sistema. Si vedrà anche che i vincoli di non negatività applicati alle variabili non complicano la soluzione.

1.8.2 Esempio: Flussi di Traffico

Il traffico che attraversa un quartiere del centro di una cittadina rispetta il sistema di sensi unici descritti nella figura 1.10.

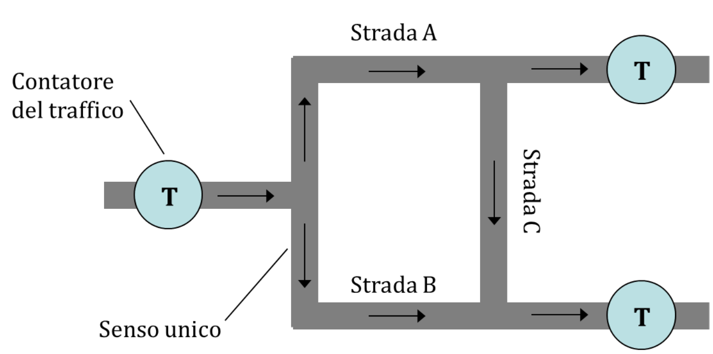


Figura 1.10: Flussi di traffico nel quartiere del centro di una cittadina.

I tre contatori del traffico rilevano i seguenti dati:

- Contatore a Ovest: 200 automobili in entrata ogni ora;
- Contatori a Est: 100 automobili in uscita ogni ora ciascuno.

Si può notare che il numero di automobili entrante nel quartiere (contatore a ovest) è pari al numero di automobili uscenti (somma dei contatori a est). Quindi, si può ipotizzare che il numero di auto che entrano nel quartiere e parcheggiano è compensato dal numero di auto che lasciano i parcheggi ed escono dal quartiere. Inoltre, in una rete stradale si applica il *principio della conservazione del flusso*: il numero di auto entranti in un incrocio e pari al numero delle auto uscenti.

L'amministrazione pubblica della città si chiede se con le informazioni a disposizione è possibile stabilire quante auto transitano ogni ora nelle strade A, B e C rappresentate nella figura 1.10.

Per rispondere al quesito, il primo passaggio è l'identificazione delle variabili decisionali:

- x_A: numero di auto che transitano ogni ora nella Strada A;
- x_B: numero di auto che transitano ogni ora nella Strada B;
- x_C: numero di auto che transitano ogni ora nella Strada C.

Applicando il principio di conservazione del flusso possiamo scrivere le seguenti equazioni che devono essere tutte soddisfatte:

$$\begin{cases} x_A & +x_B & & = & 200 \\ x_A & & -x_C & = & 100 \\ & +x_B & +x_C & = & 100 \end{cases}$$

Se risolviamo il sistema lineare (e.g., con il metodo di eliminazione di Gauss-Jordan) scopriremo che una delle tre equazioni è ridondante (cioè è combinazione lineare delle altre 2). La soluzione del sistema lineare è:

$$\begin{cases} x_A & = & x_C + 100 \\ x_B & = & -x_C + 100 \\ x_C & = & \text{arbitrario} \end{cases}$$

Quindi, i tre contatori non ci permettono di conoscere il flusso esatto sulle tre strade, perché servirebbe conoscere il valore della variabile x_C (cioè il flusso nella strada C).

1.8.3 Esempio: Ridistribuzione auto a noleggio

Un'azienda di noleggio di automobili alla fine di ogni giornata deve ribilanciare le auto disponibili nelle sue sedi per essere in grado di rispondere alle richieste dei clienti il giorno dopo.

L'azienda ha quattro sedi in città (vedi figura 1.11) con la seguente situazione:

- Sede A: che ha 20 auto più del necessario;

- Sede B: che necessita di 10 auto in più di quelle di cui dispone;
- Sede C: che ha 15 auto più del necessario;
- Sede D: che necessita di 25 auto in più di quelle di cui dispone.

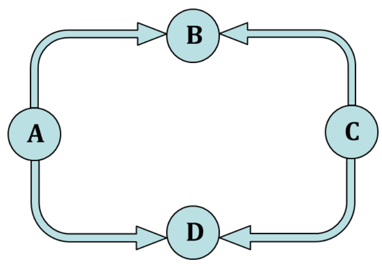


Figura 1.11: Rete per il trasporto di auto tra le diverse sedi.

Per spostare le auto da una sede all'altra si incorre in un costo dovuto al tempo speso da un dipendente alla guida e i costi di carburante e manutenzione per ogni chilometro percorso. I costi per spostare un'auto tra le diverse sedi sono i seguenti:

- Dalla Sede A alla Sede B costa complessivamente 10 Euro;
- Dalla Sede C alla Sede B costa complessivamente 5 Euro;
- Dalla Sede A alla Sede D costa complessivamente 20 Euro;
- Dalla Sede C alla Sede D costa complessivamente 10 Euro.

L'azienda di noleggio ha un budget per gli spostamenti di 475 Euro e vuole sapere se spendendo tutto il budget è possibile spostare le auto tra le 4 sedi come è richiesto.

Per modellare il problema possiamo definire le variabili decisionali:

- x_{AB}: numero di auto spostate dalla Sede A alla sede B;
- x_{AD}: numero di auto spostate dalla Sede A alla sede D;
- x_{CB}: numero di auto spostate dalla Sede C alla sede B;
- x_{CD}: numero di auto spostate dalla Sede C alla sede D;

e la rete dei trasporti può essere rappresentata come in figura 1.12.

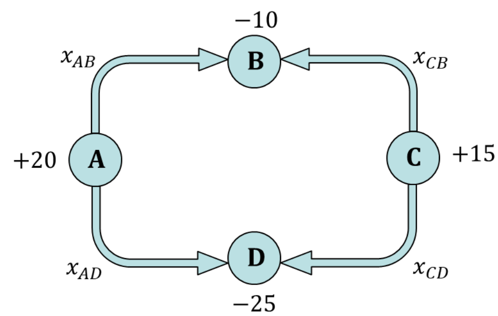


Figura 1.12: Modello della rete per il trasporto di auto tra le diverse sedi.

Le informazioni a disposizione consentono di definire i vincoli del problema che determinano il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x_{AB} & +x_{AD} & & & = & 20 \\ x_{AB} & & +x_{CB} & & = & 10 \\ & & +x_{CB} & +x_{CD} & = & 15 \\ & +x_{AD} & & +x_{CD} & = & 25 \\ x_{AB} & +x_{AD} & +x_{CB} & +x_{CD} & = & 475 \end{cases}$$

Nonostante il sistema lineare abbia 5 equazioni e 4 variabili, ha una soluzione unica perché uno dei vincoli è ridondante e compatibile con le altre equazioni. La soluzione è $(x_{AB}, x_{AD}, x_{CB}, x_{CD}) = (5, 15, 5, 10)$.

La soluzione ottenuta è intera, ma non era scontato e se il budget fosse stato diverso, la soluzione sarebbe cambiata e qualche variabile sarebbe potuta diventare frazionaria o negativa. Nel caso la soluzione fosse stata frazionaria, le auto non possono essere frazionate, per cui la soluzione non sarebbe applicabile. In questo caso sarebbe necessario aggiungere esplicitamente il vincolo di interezza. Nel capitolo 8 vedremo come è possibile farlo.

Se invece di spendere tutto il budget si volesse spostare tutte le auto minimizzando il budget necessario, si dovrebbe eliminare il vincolo di budget (cioè l'ultima equazione) e risolvere il sistema di equazioni lineari così ottenuto. La nuova soluzione sarebbe la seguente:

$$\begin{cases} x_{AB} & = & x_{CD} - 5 \\ x_{AD} & = & 25 - x_{CD} \\ x_{CB} & = & 15 - x_{CD} \\ x_{CD} & = & \text{arbitrario} \end{cases}$$

Chiaramente il valore della variabile x_{CD} non può essere scelto in modo completamente arbitrario, in quanto deve essere intero e non negativo. Inoltre, il valore di x_{CD} incide sul valore delle altre variabili, quindi è necessario scegliere solo quei valori per cui le altre variabile non siano negative. In questo caso, x_{CD} deve essere un intero compreso tra 5 e 15.

Si potrebbe dimostrare che il sistema lineare senza il vincolo di budget, se i termini noti sono interi, ha sempre una soluzione intera. Questa proprietà dipende dalla particolare struttura della matrice dei coefficienti (cioè la matrice è *totalmente unimodulare*). Infatti, scopriremo nel capitolo **??** che il modello usato in questo esempio è un caso particolare del *problema dei cammini di costo minimo*.

Rimane da determinare la soluzione che minimizza il budget speso. Per farlo è necessario scrivere la funzione di costo:

$$c(\mathbf{x}) = 10x_{AB} + 20x_{AD} + 5x_{CB} + 10x_{CD}$$

che può essere scritta in funzione della sola variabile x_{CD} sostituendo la soluzione $\mathbf{x} = (x_{CD} - 5, 25 - x_{CD}, 15 - x_{CD}, x_{CD})$ come segue:

$$\begin{aligned}
c(\mathbf{x}) &= 10x_{AB} + 20x_{AD} + 5x_{CB} + 10x_{CD} \\
c(\mathbf{x}) &= 10(x_{CD} - 5) + 20(25 - x_{CD}) + 5(15 - x_{CD}) + 10x_{CD} \\
c(\mathbf{x}) &= (10 - 20 - 5 + 10)x_{CD} + (-50 + 500 + 75) \\
c(\mathbf{x}) &= -5x_{CD} + 525
\end{aligned}$$

Siccome si ha un risparmio di 5 Euro per ogni auto trasportata dalla sede C alla sede D, cercheremo di inviare il massimo numero di auto possibile, che è pari a 15. Se fissiamo $x_{CD} = 15$ la soluzione sarà $\mathbf{x} = (10, 10, 0, 15)$ e il costo complessivo pari a $c(\mathbf{x}) = 450$ Euro.

Capitolo 2

Elementi di Teoria della Complessità Computazionale NEW: (Ver. 9.0)

La caratterizzazione della difficoltà, o complessità, di un problema computazionale è un passo fondamentale per comprendere l'approccio più appropriato per la sua soluzione. La teoria della complessità, iniziata dal lavoro seminale di [**GarJ79**] è un dominio vasto e articolato la cui presentazione va ben oltre lo scopo di queste dispense. Di seguito, introdurremo, in modo informale e pragmatico, i concetti più importanti che saranno ampiamente utilizzati nei capitoli seguenti.

Un problema computazionale è generalmente definito come una struttura matematica dipendente da variabili e da una domanda su tale struttura. Ad esempio, dato un numero intero positivo K, questo è un numero primo ?

I problemi computazionali sono tipicamente formulati in due possibili versioni. La prima, chiamata *versione riconoscimento* (o *recognition version*) che corrisponde a problemi la cui risposta è "sì" o "no", come nell'esempio dei numeri primi. La seconda è nota come *versione ottimizzazione* (o *optimization version*), che richiede la determinazione di una soluzione che possieda determinate caratteristiche, come i problemi di ottimizzazione di base descritti nei capitoli precedenti. Dato un problema nella versione di ottimizzazione, è facile definire la sua controparte in versione riconoscimento. Ad esempio, dato un problema dello zaino binario e un intero $K > 0$, esiste una soluzione del KP01 avente profitto non inferiore a K ? Si noti che, sebbene un problema nella versione ottimizzazione sembri più complicato della sua controparte di riconoscimento, si può facilmente dimostrare che la complessità dei due problemi è equivalenPertanto, di seguito ci riferiremo principalmente ai problemi di versione riconoscimento.

Infine, un'*istanza* di un problema è un insieme specifico dei suoi dati di input.

La complessità temporale (o complessità in tempo)[1] di un problema viene misurata indirettamente analizzando quella di un algoritmo in grado di risolverlo. Tale analisi viene generalmente eseguita derivando un limite nel caso peggiore sulla crescita del tempo di calcolo necessario per risolvere il problema in funzione della sua dimensione. Più precisamente, la dimensione di un'istanza I di un problema è la lunghezza del vettore di dati di input ad esso associato. Tale quantità, sotto l'ipotesi molto generale che ogni elemento dell'insieme di dati di input possa essere memorizzato utilizzando un numero finito di simboli in un computer, è tipicamente sintetizzata da un valore caratteristico $\mu(I)$ a cui tale lunghezza è proporzionale. Ad esempio, il set di dati di input di un'istanza di KP01 è rappresentato da n, numero di elementi, dai due vettori p e q, ciascuno con n elementi, e dalla capacità dello zaino Q, quindi è un insieme di numeri $2n + 2$. Utilizzando la ben nota notazione *O grande*, che denota le funzioni che hanno lo stesso rapporto di crescita asintotica di una funzione di riferimento, possiamo dire che la lunghezza dell'input di un'istanza KP01 è $O(n)$, quindi $\mu(I) = n$ può essere utilizzato in modo appropriato per definire la dimensione di un'istanza di KP01.

Data la dimensione del problema da risolvere, la complessità temporale di un algoritmo può essere definita come la crescita del tempo di calcolo totale richiesto per risolvere una qualsiasi istanza di dimensione μ, nel peggiore dei casi. L'analisi viene condotta considerando un computer ideale e il risultato è espresso in termini di *operazioni elementari*, che sono operazioni che richiedono un tempo costante per essere eseguite sul computer, come l'accesso alla memoria, le operazioni algebriche e i confronti logici. Inoltre, poiché è chiaramente sufficiente determinare il tasso di crescita asintotico del tempo di calcolo, possiamo limitare l'analisi delle parti ripetitive degli algoritmi e utilizzare la notazione *O grande* per trascurare i coefficienti di proporzionalità e i termini di ordine inferiore. Illustriamo brevemente questi concetti per mezzo di due semplici esempi.

Consideriamo dapprima il problema di trovare un dato numero K in un vettore v di n numeri. Un'istanza del problema è definita da $\{n, v, K\}$, cioè da $n + 2$ numeri. Pertanto, la dimensione dell'input è $O(n)$ e si ha $\mu = n$. Se il vettore non è ordinato, l'algoritmo migliore per risolvere questo problema richiede di esaminare ogni elemento del vettore e confrontarlo con K, se il valore è uguale allora l'algoritmo si ferma e la risposta è "sì", altrimenti l'elemento successivo viene considerato fino a quando non viene esaminato il vettore completo. L'algoritmo consiste quindi in un ciclo ripetuto n volte nel caso peggiore, che contiene una sola operazione elementare, che è un confronto logico. La complessità nel caso peggiore risultante dell'algoritmo è quindi $O(n)$.

Come secondo esempio, dato un vettore v di n consideriamo il calcolo del

[1]Limitiamo la nostra esposizione alla complessità in tempo, ma con un approccio simile si può anche valutare la *complessità spaziale* di un algoritmo, in relazione al suo uso della memoria.

vettore p delle *medie dei predecessori* (o *prefix averages*), dove

$$p_i = \frac{\sum_{j=1}^{i} v_j}{i} \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{2.1}$$

Lo pseudo-codice di un primo algoritmo banale per il calcolo di p è dato nell'algoritmo 1.

Algorithm 1 Un primo algoritmo per il calcolo delle medie dei predecessori di un vettore.

1: **procedure** PREFIX1(n, v)
2:     **for** $i = 1, \ldots, n$ **do**
3:         $s \leftarrow 0$
4:         **for** $j = 1, \ldots, i$ **do**
5:             $s \leftarrow s + v_j$
6:         **end for**
7:         $p_i \leftarrow s/i$
8:     **end for**
9:     **return** p
10: **end procedure**

Per analizzare l'algoritmo 1, prima di tutto osserviamo che l'input include $n + 1 = O(n)$ numeri, quindi $\mu = n$. Quindi, notiamo che il ciclo "for" esterno viene eseguito n volte, mentre quello interno viene eseguito i volte, con $i = 1, \ldots, n$. Pertanto, le istruzioni alle righe 2, 3 e 7 vengono eseguite $n = O(n)$ volte, mentre quelle alle righe 4 e 5, vengono eseguite $1+2+3+\cdots+n = \frac{n \cdot (n-1)}{2} = O(n^2)$ volte. La complessità temporale risultante dell'algoritmo è, quindi, $O(n^2)$.

Un algoritmo migliore può essere ottenuto osservando che, ad ogni iterazione i del ciclo esterno, il valore s non ha bisogno di essere calcolato da zero poiché è effettivamente uguale al valore s calcolato all'iterazione precedente più v_i. Uno pseudo-codice del secondo algoritmo per il calcolo di p è dato nell'algoritmo 2.

Algorithm 2 Un algoritmo migliore per il calcolo delle medie dei predecessori di un vettore.

1: **procedure** PREFIX2(n, v)
2:     $s \leftarrow 0$
3:     **for** $i = 1, \ldots, n$ **do**
4:         $s \leftarrow s + v_i$
5:         $p_i \leftarrow s/i$
6:     **end for**
7:     **return** p
8: **end procedure**

È facile verificare che la complessità temporale dell'algoritmo 2 sia lineare. Infatti, l'istruzione 2 viene eseguita 0(1) (cioè costante) volte, mentre le istruzioni alle righe 3, 4 e 5 vengono eseguite $n = O(n)$ volte e determinano la complessità temporale dell'algoritmo 2.

Ai nostri fini è sufficiente distinguere due classi principali in cui suddividere i problemi computazionali. La prima classe è quella dei problemi *facili* o *trattabili*, che include quelli per i quali la complessità temporale del migliore algoritmo disponibile è *polinomiale* in μ, come $O(\log n), O(n)$, e $O(n^5)$. La seconda è quella dei problemi *difficili* o *intrattabili*, che include quelli per i quali la complessità temporale del migliore algoritmo disponibile è *esponenziale* in μ, come $O(2^n)$. È facile verificare che la crescita temporale di un problema difficile è molto più rapida di quella di uno facile. Quindi, il tempo necessario per risolvere problemi difficili è praticamente infinito già per piccoli valori della loro dimensione μ, motivando così per questi lo sviluppo di algoritmi euristici.

	Dimensione (μ)					
Complessità	10	20	30	40	50	100
$O(n)$	10^{-5}	$2 * 10^{-5}$	$3 * 10^{-5}$	$4 * 10^{-5}$	$5 * 10^{-5}$	10^{-4}
$O(n^2)$	10^{-4}	$4 * 10^{-4}$	$9 * 10^{-4}$	$1.6 * 10^{-3}$	$2.5 * 10^{-3}$	10^{-2}
$O(n^3)$	10^{-3}	$8 * 10^{-3}$	$2.7 * 10^{-2}$	$6.4 * 10^{-2}$	$1.25 * 10^{-1}$	1
$O(n^5)$	10^{-1}	3.2	24.3	102.4	312.5	10^4
$O(2^n)$	$1.02 * 10^{-3}$	1.05	$1.07 * 10^3$	$1.1 * 10^6$	$1.13 * 10^9$	$1.27 * 10^{24}$

Tabella 2.1: Tempi di esecuzione in secondi per algoritmi con complessità diverse in funzione della dimensione del problema nell'ipotesi che un'iterazione richieda $10^{-6}s$.

Capitolo 3

Programmazione Matematica

3.1 Problemi di ottimizzazione matematica

L'ottimizzazione matematica è uno dei principali strumenti messi a disposizione dalla Ricerca Operativa per la formulazione e soluzione di problemi decisionali. In tale contesto il problema decisionale viene formulato attraverso la definizione di un opportuno *problema di ottimizzazione matematica*, o di *programmazione matematica*.

Un problema di ottimizzazione matematica è definito da tre componenti principali.

1. La prima componente è il vettore $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Re^n$ di *variabili decisionali*, ossia incognite il cui valore rappresenta una decisione da prendere nel problema corrente. Ad esempio le variabili possono rappresentare il numero di prodotti da realizzare, gli istanti in cui produrli, i quantitativi di merci o materie prime da immagazzinare o l'istante del loro riordino, il luogo in cui realizzare una infrastruttura o i tratti di strada da scegliere in un percorso. A seconda della natura delle decisioni che rappresentano, le variabili decisionali possono assumere valori continui (ad esempio, se rappresentano i quantitativi di materie prime da inserire in una miscela o una percentuale) o valori discreti o binari (quando, ad esempio, rappresentano il numero di unità da produrre o decisioni del tipo si/no). Si noti che, come sarà ampiamente discusso nel seguito, la natura delle variabili decisionali ha un forte impatto sulla difficoltà di risoluzione del problema di ottimizzazione, essendo i problemi con variabili discrete molto più difficili da risolvere rispetto ai problemi continui.

2. La seconda componente è rappresentata dalla *regione ammissibile* $F \subseteq \Re^n$, ossia l'insieme delle soluzioni ammissibili del problema. La regione ammissibile F può essere definita in modo esplicito, specificando le proprietà

delle soluzioni ammissibili oppure elencando i suoi elementi. Ad esempio $F = [0,1]^2$ oppure $F = \{x$ intere nell'ipercubo di lato $1\}$. Più frequentemente però la regione ammissibile viene definita in modo implicito, servendosi di equazioni e disequazioni, generalmente chiamati *vincoli* del problema. In tal caso la regione ammissibile è il luogo dei punti (cioè vettori dello spazio $\Re^n$) che soddisfano *tutte* le relazioni utilizzate per definirla. In generale, la regione ammissibile può essere descritta nel seguente modo

$$F = \{x \in \Re^n : g_i(x) \leq 0, i = 1, \ldots, m; h_j(x) = 0, j = 1, \ldots, p\}, \qquad (3.1)$$

dove m e p rappresentano il numero di disequazioni e di equazioni, rispettivamente.

In Figura 3.1 è rappresentato un esempio di regione ammissibile definita implicitamente dalle tre disequazioni lineari:

$$F = \{x \in \Re^2 : 5x_1 + 3x_2 \leq 15; 5x_1 - 3x_2 \geq 0; x_2 \geq 1/2\}. \qquad (3.2)$$

Si noti che, come sarà più evidente in seguito, alcune disuguaglianze sono espresse in forma di $\geq$ mentre altre sono scritte nella forma di $\leq$.

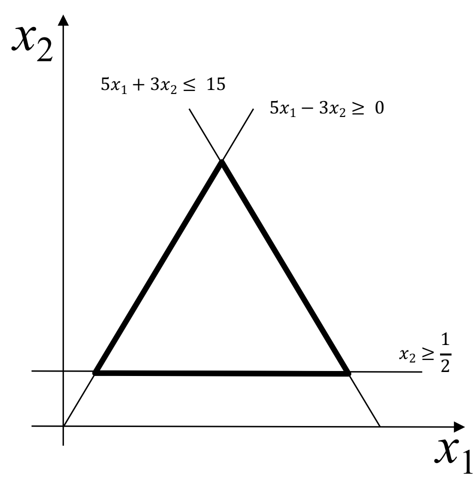


Figura 3.1: Esempio di regione ammissibile definita implicitamente

3. La terza componente è, infine, la funzione obiettivo (o funzione costo), ovvero una funzione $\varphi : F \to R$ che associa ad ogni soluzione ammissibile un valore che ne rappresenta il costo o il profitto.

Un problema di ottimizzazione, in forma di minimizzazione, può dunque essere espresso come:

$$(P) \qquad \min_{x \in F} \varphi(x). \tag{3.3}$$

Risolvere il problema (P) consiste nel determinare il minimo della funzione φ sugli elementi dell'insieme F, ossia identificare un ottimo globale $x^* \in F$ tale che:

$$\varphi(x^*) \leq \varphi(x) \forall x \in F. \tag{3.4}$$

Nel caso generale, la funzione obiettivo e la regione ammissibile sono qualsiasi. Per questo motivo, talvolta la determinazione di un ottimo globale può essere computazionalmente onerosa. In tal caso, spesso ci si accontenta di determinare un ottimo locale

Definizione 3.1. *Un punto $y \in F$ è un ottimo locale se esiste un intorno $N \subseteq F$ tale che $\varphi(y) \leq \varphi(x), \forall x \in N$.*

È noto che, nel caso di funzioni continue, al fine della definizione di ottimo locale, possa essere utilizzato l'*intorno euclideo* di dimensione $\epsilon > 0$, ossia $N_\epsilon = \{x \in F : ||x - y|| \leq \epsilon, \epsilon > 0\}$.

In Figura 3.2 è mostrato un esempio di problema con una variabile decisionale definita in una regione compatta e caratterizzato da una funzione obiettivo nonlineare continua. Per tale problema l'ottimo globale è il punto B, mentre gli altri punti di minimo (A e C) lo è solo localmente e sono pertanto ottimi locali.

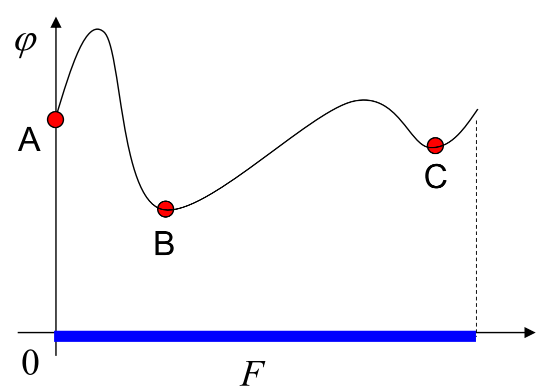


Figura 3.2: Esempio di problema di ottimizzazione

Più precisamente un ottimo globale può essere definito come segue.

Definizione 3.2. *Un ottimo globale è un ottimo locale di valore minimo.*

Definizione 3.3. *Un intorno si dice* esatto *se un ottimo locale rispetto a tale intorno è anche un ottimo globale.*

Si noti che non è detto che l'ottimo globale esista. Questo può accadere in diversi casi; i più comuni sono i seguenti

- la regione ammissibile è vuota ($F = \emptyset$); in questo caso il problema è detto *impossibile* e convenzionalmente si pone $\min\{\varphi(x) : x \in F\} = +\infty$;
- la funzione φ non è limitata inferiormente sull'insieme F. In tal caso si dice che il problema è detto *illimitato* e convenzionalmente si pone $\min\{\varphi(x) : x \in F\} = -\infty$. Questo è quello che accade, ad esempio, quando $F = \{x \in \Re : x \leq 10\}$ e la funzione obiettivo è $\min \varphi(x) = x$.
- non esiste un ottimo globale finito poichè la regione ammissibile non è un insieme compatto. Ad esempio, si consideri il caso in cui $F = \{x \in \Re : 1 < x \leq 10\}$ e la funzione obiettivo è $\min \varphi(x) = x$. In questo caso esiste un limite inferiore al valore assunto dalla funzione, ma non è possibile raggiungere il punto nel quale questo valore viene assunto.

Inoltre, l'ottimo globale può non essere unico, come nel caso di una funzione obiettivo periodica quale una sinusoide. Infine va osservato che possiamo sempre assumere che il problema da trattare richieda la minimizzazione della funzione obiettivo, come nella (3.3). Infatti, nel caso in cui la funzione obiettivo sia da massimizzare, è facile trasformare il problema in un problema di minimizzazione equivalente. A tal fine, basta ricordare che

$$\max_{x \in F} \varphi(x) = -\min_{x \in F} -\varphi(x).$$

Per questo motivo, in seguito faremo generalmente riferimento al solo caso di problemi espressi in forma di minimizzazione.

I problemi di ottimizzazione matematica appena descritti sono spesso chiamati problemi di programmazione matematica. Si noti che tale termine deriva dal fatto che tali problemi sono stati storicamente utilizzati per descrivere problemi di programmazione o pianificazione economica. Nel caso in cui la regione ammissibile sia un insieme discreto e finito o numerabile, tali problemi sono chiamati di ottimizzazione combinatoria.

Vediamo ora alcuni esempi di problemi di programmazione ed esaminiamone le proprietà principali.

3.2 Classificazione dei problemi di ottimizzazione

I problemi di ottimizzazione possono essere raggruppati in classi, a seconda delle caratteristiche delle variabili, dei vincoli, e quindi della regione ammissibile F e della funzione obiettivo φ. In ciascuna classe valgono determinate proprietà che, ad esempio, caratterizzano le soluzioni ottime, e che possono essere sfruttate da algoritmi di soluzione specifici per i problemi di quella classe. Pertanto, conoscere a quale classe appartiene un determinato problema di ottimizzazione non è solamente un esercizio teorico; infatti, tale conoscenza ci permette di prevedere con buona accuratezza se il problema sia risolubile in modo efficiente e, eventualmente, quale sia l'algoritmo più idoneo per risolvere tale problema.

3.2.1 Problemi di Programmazione Non Lineare (PNL)

In tale classe non è presente nessuna restrizione sulla forma di φ e F. È quindi la classe più generale di problemi di ottimizzazione che, come ci si può facilmente aspettare, comprende problemi "difficili" da risolvere. In tali casi è tipicamente possibile soltanto calcolare ottimi locali per il problema.

3.2.2 Problemi di Programmazione Convessa (PC)

I problemi convessi rappresentano un caso speciale dei problemi PNL in cui funzione obiettivo e regione ammissibile hanno proprietà particolari che ne favoriscono la soluzione. Ricordiamo le seguenti definizioni:

Definizione 3.4. *Dati due punti $x, y \in \Re^n$ un punto $z \in \Re^n$ è* combinazione convessa *di x e y se esiste un $\lambda \in [0,1]$ tale che $z = \lambda x + (1-\lambda)y$.*

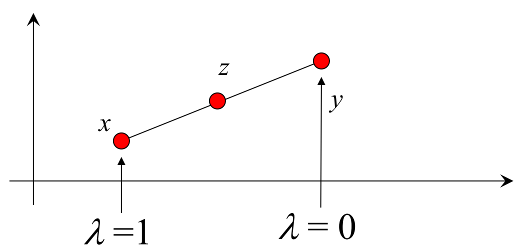


Figura 3.3: Esempio di combinazione convessa di due punti $x, y \in \Re^2$.

Definizione 3.5. *Un insieme $F \subseteq \Re^n$ è* convesso *se continene tutte le combinazioni convesse dei suoi punti, ossia se per ogni $x, y \in F$ e per ogni $\lambda \in [0,1]$, il punto $z = \lambda x + (1-\lambda)y$ appartiene all'insieme F*

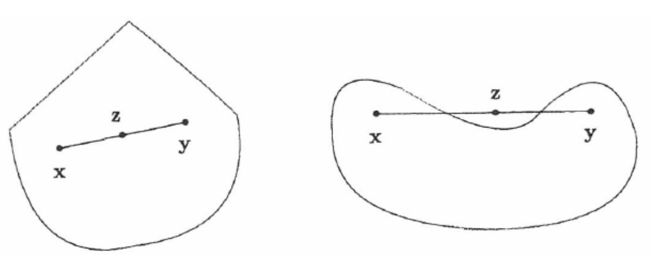


Figura 3.4: Esempio di insieme convesso (sinistra) e di insieme non convesso (destra).

Si noti che $\Re^n$ è ovviamente un insieme convesso e inoltre vale la seguente proprietà:

Teorema 3.1. *Data una collezione di insiemi convessi $F_i, i = 1, \ldots, k$, l'insieme F intersezione di tali insiemi è un insieme convesso.*

Dim.: 3.1. *Consideriamo due punti $x, y \in F$ appartenenti all'insieme intersezione. Per definizione $x, y \in F_i \forall i$. Poiché gli insiemi F_i sono convessi le combinazioni convesse $z = \lambda x + (1 - \lambda)y \in F_i \forall i$ e quindi $z \in F$ da cui discende che F è convesso.*

Si noti che, come illustrato dalla figura 3.5 l'unione di insiemi convessi non è invece necessariamente un insieme convesso.

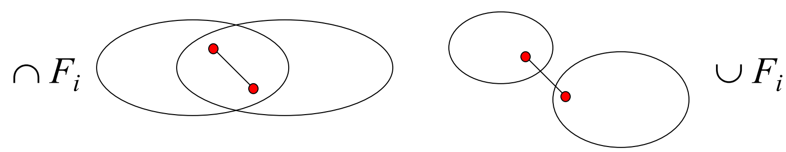


Figura 3.5: Intersezione ed unione di insiemi convessi.

Definizione 3.6. *Sia $F \subseteq \Re^n$ un insieme convesso. Una funzione $f : F \to \Re$ è* convessa *se, per ogni $x, y \in F$ e $\lambda \in [0, 1]$, si ha*

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

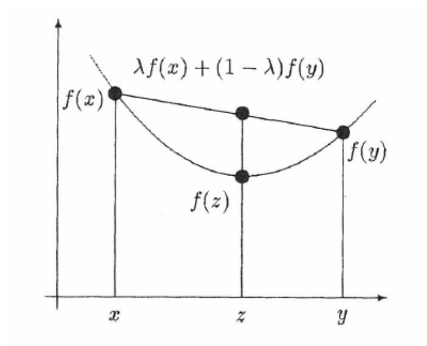


Figura 3.6: Esempio di funzione convessa.

Un problema è di programmazione convessa (PC) se la funzione obiettivo φ è una funzione convessa e la regione ammissibile F è un insieme convesso.

Per i problemi PC vale la seguente proprietà fondamentale:

Teorema 3.2. *Sia $F \subseteq \Re^n$ un insieme convesso e sia $\varphi : F \to \Re$ una funzione convessa. Sia $x \in F$ un ottimo locale, ossia tale che*

$$\varphi(x) \leq \varphi(y) \quad \forall y \in N_\varepsilon(x) = \{y \in F : ||x - y|| \leq \varepsilon\} \quad \textit{per qualche } \varepsilon > 0.$$

Allora x è un ottimo globale per φ su F.

In altre parole il teorema implica che l'intorno euclideo è un intorno esatto per il problemi PC. Il teorema 3.2 può essere facilmente dimostrato per contraddizione:

Dim.: 3.2. *Supponiamo che la tesi del teorema sia falsa. Dato un punto $x \in F$ ottimo locale rispetto ad un intorno euclideo $N_\varepsilon(x)$, esiste un punto $y \in F \setminus N_\varepsilon(x)$ non appartenente a tale intorno che è in realtà ottimo globale, ossia $\varphi(y) \leq \varphi(z) \forall z \in F$.*

Scegliamo, come illustrato in figura 3.7, un punto $z \in N_\varepsilon(x)$ combinazione convessa di x ed y, ossia $z = \lambda x + (1-\lambda)y$ con λ prossimo ad 1. Per la convessità della funzione φ si ha che $\varphi(z) = \varphi(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda\varphi(x) + (1-\lambda)\varphi(y)$ da cui si ricava che.

$$\varphi(y) \geq (\varphi(z) - \lambda\varphi(x))/(1-\lambda).$$

Poiché $z \in N_\varepsilon(x)$ si ha che $\varphi(z) \geq \varphi(x)$, per cui sostituendo nella disequazione precedente $\varphi(x)$ a $\varphi(z)$ questa rimane soddisfatta. Da questo discende che

$$\varphi(y) \geq (\varphi(x) - \lambda\varphi(x))/(1-\lambda) = \varphi(x)$$

che implica che y non possa essere ottimo globale essendo il suo valore non migliore di quello dell'ottimo locale x.

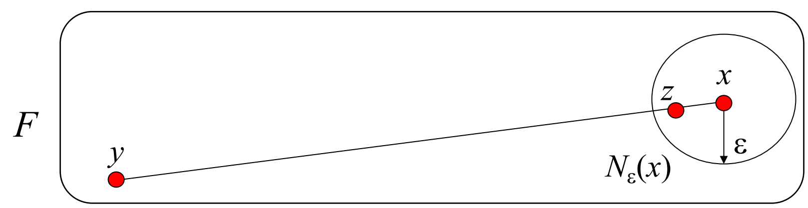


Figura 3.7: Illustrazione del teorema 3.2.

Quindi in un PC un ottimo locale è anche un ottimo globale. I PC sono risolubili in modo efficiente, ossia esistono algoritmi che convergono ad un ottimo globale in modo efficiente.

3.2.3 Problemi di Programmazione Lineare (PL)

Se φ è una funzione lineare e F è definito da vincoli lineari allora il problema è di Programmazione Lineare (PL). Spesso per distinguere i problemi PL da quelli in cui le variabili sono tutte o in parte vincolate ad assumere valori discreti i problemi PL sono anche detti di Programmazione Lineare Continua (PLC). Nel caso di un problema PL si ha dunque:

- $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

- $X = \{x \in \Re^n_+ : \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i \quad (i = 1, \ldots, m)\}$

Si noti che poiché le funzioni lineari sono anche un caso particolare di funzioni convesse i problemi PL sono un caso particolare dei problemi PC e quindi anche per essi un algoritmo che converge ad un ottimo locale determina l'ottimo globale per il problema.

Spesso i problemi PL sono espressi in forma matriciale nel seguente modo:

$$\begin{array}{lc} (PL) & z(PL) = \min c^T x \\ s.t. & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Si consideri il seguente esempio di problema PL con $n = 2$ e $m = 3$:

$$\begin{array}{lrrrrcr} \min & & 4x_1 & - & 7x_2 & & \\ & & x_1 & - & 2x_2 & \geq & 10 \\ & - & 3x_1 & + & 4x_2 & \geq & 2 \\ & & 5x_1 & & & \geq & 8 \end{array}$$

La rappresentazione matriciale del problema è la seguente:

- vettore c di dimensione n (*costi*): $c_1 = 4$, $c_2 = -7$
- matrice A di dimensione $m \times n$ (*matrice dei vincoli*):

$$\begin{array}{ll} a_{11} = 1, & a_{12} = -2, \\ a_{21} = -3, & a_{22} = 4, \\ a_{31} = 5, & a_{32} = 0 \end{array}$$

- vettore b di dimensione m (*termini noti*): $b_1 = 10$, $b_2 = 2$, $b_3 = 8$

3.2.4 Problemi di Programmazione Lineare Intera (PLI)

In molte applicazioni, le variabili decisionali rappresentano delle grandezze che non possono essere frazionate a piacere, ma che devono assumere un valore intero. Questo accade, ad esempio, quando le variabili rappresentano il numero di pezzi da produrre, il numero di persone da assumere, il numero di impianti da costruire. Inoltre esistono delle situazioni nelle quali le variabili decisionali modellano delle scelte logiche da fare, ad esempio "devo fare questa scelta oppure no?", "devo costruire un magazzino in questa posizione oppure no?", "devo servire un certo cliente oppure no¿'. Per gestire tutte queste situazioni, bisogna aggiungere al modello matematico il vincolo che impone che le variabili decisionali assumano valori interi. Se il vincolo di interezza viene aggiunto ad una formulazione PL, il modello derivante è un modello di PLI, che può essere descritto (in forma matriciale) nel seguente modo

$$\begin{array}{lll} (PL) & z(PL) = \min c^T x & \\ s.t. & Ax \geq b & \\ & x \geq 0 \quad \text{intere} & \end{array}$$

3.2.5 Problemi di Programmazione Lineare Mista (PLM)

Se il vincolo di interezza coinvolge solo *alcune* variabili ed il resto del problema è un PL, si ottiene un problema lineare misto, che può essere descritto nel seguente modo

$$\begin{array}{lll} (PL) & z(PL) = \min c^T x & \\ s.t. & Ax \geq b & \\ & x_j \geq 0 \quad \text{intere} & j \in J \\ & x \geq 0, & \end{array}$$

dove J indica l'insieme di variabili che devono assumere un valore intero.

3.2.6 Esempio 1: Problema lineare continuo

Consideriamo il caso illustrato nella Figura 3.8, in cui $F = [0, 3/2]^2 = \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq 3/2; 0 \leq x_2 \leq 3/2\}$ e con funzione obiettivo $\max \varphi(x) = x_1 + x_2$. La regione ammissibile del problema è mostrata nella Figura 3.8(a) ed è costituita da un quadrato di lato 3/2 con un vertice nell'origine. Si noti che tale regione ammissibile è un insieme convesso, più precisamente un poliedro, che contiene infinite soluzioni ammissibili. La funzione obiettivo del problema è lineare e considerando le curve $x_1 + x_2 = c$, dove c è un valore costante arbitrario è possibile individuare la soluzione ottima del problema. Nella Figura 3.8(b) sono mostrati alcuni esempi di tali curve corrispondenti a diversi valori della costante. Queste curve sono dette *curve di livello* e descrivono gli insiemi di punti (x_1, x_2) per i quali la funzione φ assume un valore costante pari a c. Data la linearità della funzione obiettivo è possibile verificare che le curve $x_1 + x_2 = c$ definiscono un fascio di rette parallele. La soluzione ottima del problema considerato è facilmente determinabile come la soluzione ammissibile che giace sulla retta del fascio corrispondente al valore massimo della costante c ossia il punto di coordinate $(3/2, 3/2)$ per il quale il valore della funzione obiettivo è 3. Si noti che in questo caso la soluzione ottima si trova in corrispondenza di uno dei vertici del poliedro e, come vedremo in seguito, tale proprietà è una caratteristica dei problemi di programmazione lineare.

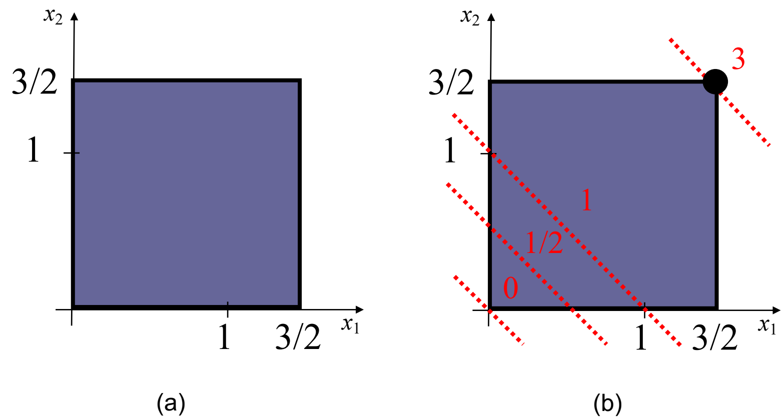


Figura 3.8: Esempio di problema di ottimizzazione lineare continuo.

3.2.7 Esempio 2: Problema lineare intero

Consideriamo il caso illustrato nella Figura 3.9, in cui $F = \{0, 3/2\}^2 = \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq 3/2; 0 \leq x_2 \leq 3/2, \text{intere}\}$ e con funzione obiettivo $\max \varphi(x) = x_1 + x_2$. La regione ammissibile del problema è mostrata nella Figura 3.9(a) ed è costituita dai quattro punti $\{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$. Si noti che in questo caso la regione ammissibile non è un insieme convesso ed è costituita da un insieme finito di soluzioni ammissibili. La funzione obiettivo del problema è lineare e considerando le curve $x_1 + x_2 = c$, dove c è un valore costante arbitrario è possibile individuare la soluzione ottima del problema come nell'esempio precedente. Nella Figura 3.9(b) sono mostrati alcuni esempi di tali curve corrispondenti a diversi valori della costante. Data la linearità della funzione obiettivo è possibile verificare che le curve $x_1 + x_2 = c$ definiscono un fascio di rette parallele. La soluzione ottima del problema considerato è facilmente determinabile come la soluzione ammissibile che giace sulla retta del fascio corrispondente al valore massimo della costante c ossia il punto di coordinate $(1, 1)$ per il quale il valore della funzione obiettivo è 2. Si noti che in questo caso la soluzione ottima si potrebbe determinare più semplicemente per enumerazione, ossia valutando la funzione obiettivo in corrispondenza di ciascuna soluzione intera. Per l'esempio illustrato sarebbero quindi sufficienti quattro valutazioni per determinare la soluzione ottima. Tale metodo però risulta rapidamente inadeguato qualora il numero di variabili decisionali cresca. Infatti in tal caso il numero di punti da valutare cresce in modo estremamente rapido. A tal proposito si consideri il caso più generale in cui $F = \{0, 1\}^n$ per cui le soluzioni ammissibili sono i vertici di un ipercubo di lato unitario, le cui coordinate sono tutti i possibili vettori binari di dimensione n, che sono 2^n. E facile osservare che già per valori relativamente piccoli di n il numero di soluzioni da valutare diventa troppo elevato per essere effettuato in tempi ragionevoli. Ad esempio per $n = 100$ il numero di soluzioni è pari a $2^{100} = 1.27 \cdots 10^{30}$.

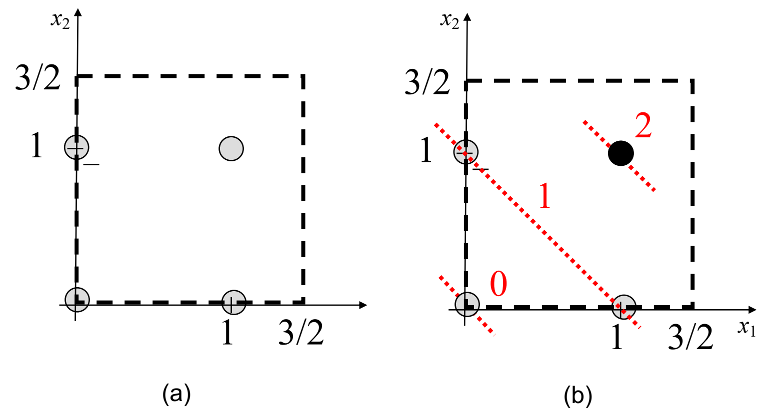


Figura 3.9: Esempio di problema di ottimizzazione lineare intero.

3.2.8 Esempio 3: Problema nonlineare continuo

Consideriamo il caso illustrato nella Figura 3.10, in cui $F = [0,1]^2 = \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq 1; 0 \leq x_2 \leq 1\}$ e con funzione obiettivo $\min \varphi(x) = (x_1 - 1/2)^2 + (x_2 - 1/2)^2$. La regione ammissibile del problema è mostrata nella Figura 3.10(a) ed è costituita da un quadrato di lato unitario con un vertice nell'origine. Si noti che tale regione ammissibile è un insieme convesso, più precisamente un poliedro, che contiene infinite soluzioni ammissibili. La funzione obiettivo del problema è nonlineare e considerando le curve $x_1 + x_2 = c$, dove c è un valore costante arbitrario è possibile individuare la soluzione ottima del problema. Nella Figura 3.10(b) sono mostrati alcuni esempi di tali curve corrispondenti a diversi valori della costante ed è possibile verificare che le curve $\varphi(x) = c$ definiscono un insieme di circonferenze concentriche tutte con centro nel punto $(1/2, 1/2)$. La soluzione ottima del problema considerato è facilmente determinabile come la soluzione ammissibile che giace sulla circonferenza corrispondente al valore minimo della costante c ossia il punto di coordinate $(1/2, 1/2)$ per il quale il valore della funzione obiettivo è 0. Si noti che in questo caso in conseguenza della nonlinearità di una delle componenti del problema, la soluzione ottima si trova in corrispondenza di uno degli infiniti punti all'interno del poliedro e non più di uno dei suoi vertici come nell'esempio della sezione 3.2.6.

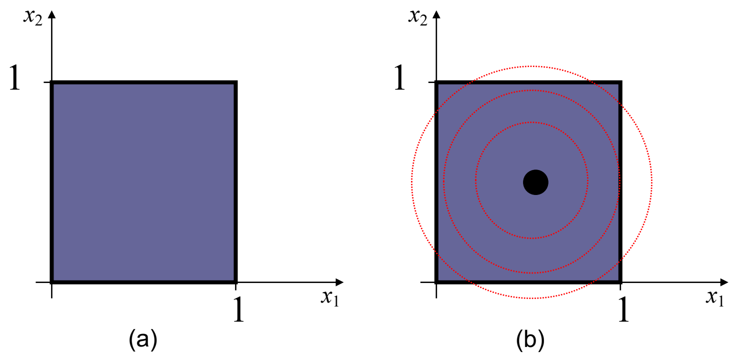


Figura 3.10: Esempio di problema di ottimizzazione non lineare continuo.

Capitolo 4

Programmazione Lineare

In questo capitolo vengono introdotte le proprietà fondamentali dei problemi di programmazione lineare così definiti

Definizione 4.1 (Problema PL.). *(F, φ) è un problema di programmazione lineare (PL, o linear programming, LP) se la funzione obiettivo φ è lineare*

$$\varphi(x) = c^T x = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n$$

e la regione $F \subseteq \Re^n$ è definita da $g_i(x) \leq 0$ e $h_j(x) = 0 (i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, p)$ con $g_i, h_j : \Re^n \to R$ lineare $\forall i, j$

$$g_i(x) : a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \geq d_i$$

$$h_j(x) : a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \ldots + a_{jn}x_n = d_j.$$

Generalmente i problemi PL si esprimono in forma matriciale

$$\begin{aligned}
(PL) \qquad & \min c^T x && (4.1)\\
\text{s.t.} \qquad & Ax \geq d, && (4.2)\\
& x \geq 0 && (4.3)
\end{aligned}$$

Esempio 4.1. *Si consideri il problema PL*

$$\begin{array}{lrrrl}
\min & 3x_1 & -2x_2 & +x_3 & \\
s.t. & 2x_1 & +x_2 & -x_3 & \geq 2 \\
 & x_1 & & +2x_3 & \geq 1 \\
 & x_1, & x_2, & x_3 & \geq 0
\end{array}$$

Tale problema può essere rappresentato nella forma matriciale (8.1)–(8.3) definendo $n = 3$ quale numero delle variabili pari al numero delle colonne della *matrice A, $m = 2$ quale numero dei vincoli pari al numero delle righe della matrice A, da cui si ottiene*

$$c^T = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Si noti che per le proprietà degli insiemi convessi (si veda l'appendice) è facile verificare che la regione ammissibile di un problema PL è un insieme convesso, noto come *poliedro*. Una caratteristica importante dei poliedri è di essere delimitati da iperpiani (associati alle equazioni e disequazioni che lo definiscono) che si intersecano in un numero finito di vertici. Vedremo nel seguito che i vertici della regione ammissibile rivestono un ruolo fondamentale nella risoluzione dei problemi PL.

4.1 Formulazione di problemi PL

La formulazione di un problema PL deve seguire diversi passi.

1. Raccogliere la descrizione del problema, l'obiettivo da perseguire e le informazioni caratteristiche.

2. Individuare le variabili decisionali.

3. Definire la funzione obiettivo come combinazione delle variabili decisionali.

4. Definire i vincoli come combinazione delle variabili decisionali.

5. Identificare eventuali limiti superiori o inferiori (upper o lower bound) per i valori delle variabili decisionali.

Nel seguito forniremo alcuni esempi di problemi formulabili con modelli PL seguendo i passi soparaelencati.

4.1.1 Problema di produzione di sedie

Come primo esempio di problema di programmazione lineare si considere la pianificazione della produzione di un turno di lavoro di una fabbrica di sedie. La fabbrica produce due tipi di sedie: una con telaio in legno (SL) e la seconda con telaio in alluminio (SA). Il flusso di produziuoe è rappresentato nella Figura 4.1. Per ciascun tipo di sedia l'assemblaggio del telaio viene realizzata in un apposito distinto reparto di lavorazione: RL per le sedie in legno ed RA per quelle in alluminio. Entrambe le sedie sono poi rifinite nello stesso reparto per la lavorazione delle parti in tessuto, RT.

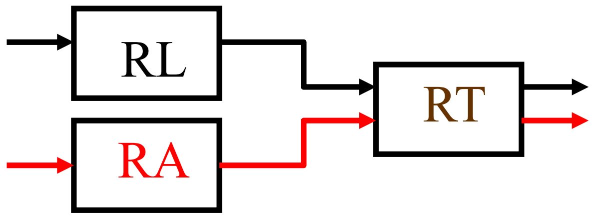


Figura 4.1: Flusso di lavorazione delle sedie attraverso i reparti lavorazione legno (RL), alluminio (RA) e tessuto (RT).

La lavorazione di una sedia in legno richiede 10 minuti nel reparto RL e 30 minuti in RT, mentre una in alluminio richiede 20 minuti in RA e 20 in RT. In ogni turno di lavoro sono disponibili per la lavorazione delle sedie 40 minuti nel reparto RL, 120 minuti in RA e 180 minuti in RT. Infine la vendita di una sedia in legno permette di ottenere un profitto di 30 €mentre quella in aullumino permette un profitto di 50 €. I dati del problema sono quindi

- tempi di lavorazione in minuti per pezzo,
- disponibilità dei reparti in minuti per turno,
- Profitto dalla vendita in €per pezzo,

e sono riassunti nella seguente tabella:

	tempi (min)			
Tipo	RL	RA	RT	Profitto (€)
SL	10	–	30	30
SA	–	20	20	50
Disponibilità	40	120	180	

Supponendo di poter vendere tutta la produzione, il problema consiste nel definire il mix di produzione che massimizza il profitto per le sedie in un generico turno, nel rispetto dei tempi disponibili per la lavorazione nei diversi reparti.

Le variabili decisionali del problema sono quindi associate alla produzione di ciascun tipo di sedia in un turno e sono espresse in unità di sedie prodotte. Utilizzeremo quindi le due variabili decisionali

- x_1: numero di sedie in legno prodotte in un turno,
- x_2: numero di sedie in alluminio prodotte in un turno.

Si noti che le variabili decisionali possono assumere valori frazionari dato che la produzione è relativa ad un singolo turno e si protrarrà per più turni. Un valore frazionario di una variabile decisionale in questo caso significa semplicemente che la frazione di sedia iniziata in un turno sarà completata nel turno successivo. Ad esempio $x_1 = 3.5$ significa che ogni due turni saranno prodotte complessivamente 7 sedie in legno.

Una volta individuate le variabili decisionali è facile definire la funzione obiettivo ed i vincoli del problema. In particolare la funzione obiettivo rappresenta il profitto complessivo della produzione che si desidera massimizzare. Tale profitto è ottenibile sommando il profitto ottenibile dalla produzione di ciascun tipo di sedia. I vincoli del problema impongono il rispetto dei limiti del tempo disponibile in ciascun reparto in un turno e saranno quindi vincoli di tipo $\leq$ il cui termine noto è la disponibilità del reparto in questione. Per ciascun reparto il tempo complessivo utilizzato è rappresentato dal tempo utilizzato dalla produzione di ciascun tipo di sedia. Infine, per ciascuna variabile decisionale è necessario imporre un limite inferiore pari a 0 al suo valore dato che produzioni negative non hanno senso. Il modello completo è quindi

$$
\begin{array}{llll}
\max & 30x_1 & +50x_2 & \qquad (4.4) \\
\text{s.t.} & 10x_1 & & \leq 40 \qquad (4.5) \\
 & & +20x_2 & \leq 120 \qquad (4.6) \\
 & 30x_1 & +20x_2 & \leq 180 \qquad (4.7) \\
 & x_1, & x_2 & \geq 0 \qquad (4.8)
\end{array}
$$

Ai fini della risoluzione è preferibile che i coefficienti del modello siano interi di piccolo valore assoluto per cui il modello può essere riscritto in maniera equivalente dividendo i coefficienti della funzione obiettivo e dei vincoli per 10 e dividendo ulteriormente per 2 il secondo vincolo ottenendo il modello

$$
\begin{array}{llll}
\max & 3x_1 & +5x_2 & \\
\text{s.t.} & x_1 & & \leq 40 \\
 & & x_2 & \leq 120 \\
 & 3x_1 & +2x_2 & \leq 180 \\
 & x_1, & x_2 & \geq 0
\end{array}
$$

4.1.2 Problema di produzione di vasche per idromassaggio

Si consideri ora un altro esempio di problema di produzione, questa volta di vasche per idromassaggio. L'azienda HotBubbles produce due tipi di vasca, denominate Blue Tornado e Hot Spring, la cui produzione rende 350 e 300 €per pezzo, rispettivamente. La produzione di sciascuna vasca richiede un motore ed un certo numero di ore di lavoro e di metri di tubazione riassunti nella seguente tabella:

Tipo	Blue Tornado	Hot Spring
Motore	1	1
lavoro (ore)	9	6
tubi (metri)	12	16
Profitto	350€	300€

In ciascun turno di lavoro l'azienda dispone per la produzione di 200 motori, 1566 ore di lavoro e 2880 metri di tubo. Supponendo di poter vendere tutta la produzione, il problema consiste nel definire il mix di produzione che massimizza il profitto per le sedie in un generico turno, nel rispetto della disponibilità delle risorse.

Le variabili decisionali del problema sono quindi associate alla produzione di ciascun tipo di vasca in un turno e sono espresse in unità prodotte. Utilizzeremo quindi le due variabili decisionali

- x_1: numero di vasche Blue Tornado prodotte in un turno,
- x_2: numero di vasche Hot Spring prodotte in un turno.

Si noti che le variabili decisionali possono assumere valori frazionari dato che la produzione è relativa ad un singolo turno e si protrarrà per più turni. Un valore frazionario di una variabile decisionale in questo caso significa semplicemente che la frazione di vasca iniziata in un turno sarà completata nel turno successivo. Ad esempio $x_1 = 3.5$ significa che ogni due turni saranno prodotte complessivamente 7 vasche di tipo Blue Tornado.

Una volta individuate le variabili decisionali, procedendo come nell'esempio precedente è facile definire la funzione obiettivo ed i vincoli del problema. In particolare la funzione obiettivo rappresenta il profitto complessivo della produzione che si desidera massimizzare. Tale profitto è ottenibile sommando il profitto ottenibile dalla produzione di ciascun tipo di sedia. I vincoli del problema impongono il rispetto dei limiti del tempo disponibile in ciascun reparto in un turno e saranno quindi vincoli di tipo $\leq$ il cui termine noto è la dispoibilià del reparto in questione. Per ciascun reparto il tempo complessivo utilizzato è rappresentato dal tempo utilizzato dalla produzione di ciascun tipo di sedia. Infine, per ciascuna variabile decisionale è necessario imporre un limite inferiore pari a 0 al suo valore dato che produzioni negative non hanno senso. Il modello completo è quindi

$$
\begin{array}{llll}
\max & 350x_1 & +300x_2 & \qquad (4.9) \\
\text{s.t.} & x_1 & +x_2 & \leq 200 \qquad (4.10) \\
 & 9x_1 & +6x_2 & \leq 1566 \qquad (4.11) \\
 & 12x_1 & +16x_2 & \leq 2880 \qquad (4.12) \\
 & x_1, & x_2 & \geq 0 \qquad (4.13)
\end{array}
$$

4.1.3 Problemi di mix di produzione

I due esempi precedenti sono rappresentativi della famiglia di problemi di mix di produzione. In generale tali problemi sono caratterizzati dalla presenza dei seguenti dati:

n prodotti da produrre (in quantità anche frazionaria)

m risorse (macchine, materie prime, ...)

r_j ricavo ottenibile dalla produzione di una unità del prodotto j, $j = 1, \ldots, n$

a_{ij} unità della risorsa i necessarie per la produzione di una unità del prodotto j, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$

d_i unità di risorsa i disponibili, $i = 1, \ldots, m$.

Le variabili decisionali (frazionarie) del problema sono:

x_j unità del prodotto j da produrre, $j = 1, \ldots, n$

Il modello PL del problema, in forma matriciale, risulta essere:

$$
\begin{aligned}
(MixProd) \qquad & \max r^T x && (4.14)\\
\text{s.t.} \qquad & Ax \leq d, && (4.15)\\
& x \geq 0 && (4.16)
\end{aligned}
$$

4.1.4 Problema della dieta

Un altro esempio rilevante di problema di ottimizzazione formulabile con un modello PL è rappresentato dal cosiddetto problema della dieta. In questo caso bisogna definire la dieta ottimale da somministrare agli animali di un allevamento miscelando in modo opportuno dei mangimi. La dieta deve contenere un fabbisogno minimo di un certo numero di elementi nutritivi e per ciascun mangime sono noti il contenuto di ciascun elemento per Kg ed il relativo costo. La segueNte tabella riporta un esempio dei dati di un problema con due mangimi e tre elementi nutritivi (Proteine, Carboidrati e Vitamine):

Elemento	Mangime A	Mangime B	Fabbisogno
Proteine (g/Kg)	300	300	900g
Carboidrati (g/Kg)	600	200	1200g
Vitamine (mg/Kg)	100	500	500mg
Costo (€/Kg)	1	2	

Si desidera determinare la miscela di costo minimo che garantisca il fabbisogno minimo di elementi agli animali. Le variabili decisionali del problema sono quindi associate al quantitativo in Kg di ciascun mangime nella miscela e possono assumere valori frazionari. Utilizzeremo quindi le due variabili decisionali

- x_1: Kg di mangime A nella miscela,
- x_2: Kg di mangime B nella miscela.

Una volta individuate le variabili decisionali, procedendo come nell'esempio precedente è facile definire la funzione obiettivo ed i vincoli del problema. In particolare la funzione obiettivo rappresenta il costo complessivo della miscela, ottenibile sommando il costo di ciascun tipo di mangime moltiplicato per il relativo costo unitario, che si desidera minimizzare. I vincoli del problema impongono il rispetto dei limiti minimi del fabbisolgno di elementi nutritivi nella dieta e saranno quindi vincoli di tipo $\geq$ il cui termine noto è il relativo fabbisogno. Infine, per ciascuna variabile decisionale è necessario imporre un limite inferiore pari a 0 al suo valore dato che quantità negative non hanno senso. Il modello completo, in cui i coefficienti dei vincoli sono stati divisi per 100, è quindi

$$
\begin{array}{lrrl}
\min & x_1 & +2x_2 & \qquad (4.17) \\
\text{s.t.} & 3x_1 & +3x_2 & \geq 9 \qquad (4.18) \\
 & 6x_1 & +2x_2 & \geq 12 \qquad (4.19) \\
 & x_1 & +5x_2 & \geq 5 \qquad (4.20) \\
 & x_1, & x_2 & \geq 0 \qquad (4.21)
\end{array}
$$

In generale i problemi della dieta sono caratterizzati dalla presenza dei seguenti dati:

n alimenti o mangimi da utilizzare (in quantità anche frazionaria)

m sostanze nutritive necessarie

c_j costo di una unità dell'alimento j, $j = 1, \ldots, n$

a_{ij} unità della sostanza i contenute in una unità dell'alimento j, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$

d_i fabbisogno della sostanza i, $i = 1, \ldots, m$.

Le variabili decisionali (frazionarie) del problema sono:

x_j unità dell'alimento j da acquistare, $j = 1, \ldots, n$

Il modello PL del problema, in forma matriciale, risulta essere:

$$
\begin{array}{lr}
(Diet) & \min c^T x \qquad (4.22) \\
\text{s.t.} & Ax \geq d, \qquad (4.23) \\
 & x \geq 0 \qquad (4.24)
\end{array}
$$

4.2 Forme dei Problemi PL

Un problema PL può essere espresso in diverse forme a seconda delle tipologie di vincoli che in esso compaiono. La cosiddetta *forma generale* è evidentemente il caso generico di un problema PL in cui compaiono sia disequazioni sia equazioni e le variabili sono sia vincolate in segno sia libere:

$$\begin{aligned}
\text{Forma Generale} \quad & \min \mathit{or} \max c^T x && && (4.25)\\
\text{s.t.} \quad & a_i^T x = d_i, && i \in M && (4.26)\\
& a_i^T x \geq d_i, && i \in M' && (4.27)\\
& x_j \geq 0 && j \in N && (4.28)\\
& x_j \text{libera} && j \in N' && (4.29)
\end{aligned}$$

Esistono però altre due forme particolari dei problemi PL che assumono un ruolo rilevante nella definizione degli algoritmi risolutivi. La prima è la *forma canonica* in cui il problema è formulato utilizzando unicamente disequazioni e variabili non-negative:

$$\begin{aligned}
\text{Forma Canonica} \quad & \min c^T x && (4.30)\\
\text{s.t.} \quad & Ax \geq d, && (4.31)\\
& x \geq 0 && (4.32)
\end{aligned}$$

La seconda è denominata *forma standard* ed in questo caso il problema è formulato utilizzando solo equazioni e variabili non-negative.

$$\begin{aligned}
\text{Forma Standard} \quad & \min c^T x && (4.33)\\
\text{s.t.} \quad & Ax = d, && (4.34)\\
& x \geq 0 && (4.35)
\end{aligned}$$

La particolare forma in cui un problema PL è inizialmente formulato non è però rilevante perché è facile trasformare la formulazione definendo un problema equivalente che assume la forma desiderata. Nel seguito esaminiamo le trasformazioni equivalenti di un problema PL.

4.2.1 Trasformazione della funzione obiettivo da max a min

È molto frequente che nei problemi PL la funzione obiettivo sia da massimizzare mentre come si è visto nella forma canonica e standard il problema è posto in forma di minimizzazione. La trasformazione in questo caso è molto semplice sfruttando la seguente proprietà illustrata nella figura 4.2:

$$\max c^T x = -\min -c^T x. \tag{4.36}$$

È quindi sufficiente cambiare il segno di tutti i coefficienti della funzione obiettivo. Si noti che risolvendo il problema così trasformato il valore ottenuto come soluzione ottima sarà uguale in valore assoluto a quello del problema originale ma il suo segno sarà cambiato come illustrato nella figura 4.2.

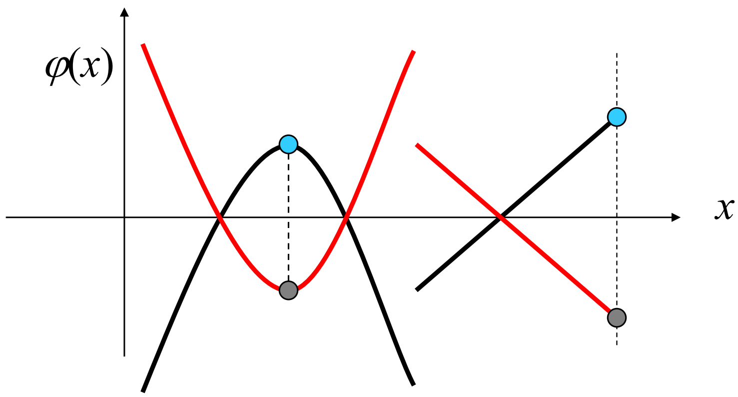


Figura 4.2: Equivalenza tra massimizzazione e minimizzazione di una funzione nel caso non lineare (sinistra) e lineare (destra).

4.2.2 Trasformazione di disequazioni in equazioni

La forma standard richiede che tutti i vincoli propri del problema PL siano espressi come equazioni. Qualora il problema contenga delle disequazioni queste possono facilmente essere trasformate in equazioni equivalenti aggiungendo ad esse una variabile non-negativa che rappresenta la differenza tra il primo membro ed il termine noto. Vanno considerati due casi:

- Disequazioni di tipo $\leq$: si aggiunge una variabile *slack* al primo membro che rappresenta il difetto del valore di x rispetto al termine noto d_i

$$a_i^T x \leq d_i \qquad \Rightarrow a_i^T x + x_s = d_i \tag{4.37}$$

- Disequazioni di tipo $\geq$: si sottrae una variabile *surplus* al primo membro che rappresenta l'eccesso del valore di x rispetto al termine noto d_i

$$a_i^T x \geq d_i \qquad \Rightarrow a_i^T x - x_s = d_i \tag{4.38}$$

Si noti che tutti i valori di x che soddisfano le disequazioni soddisfano anche le corrispondenti equazioni e che le trasformazioni aumentano il numero delle variabili decisionali del problema dovendo aggiungere una variabile slack/surplus per ogni disequazione.

4.2.3 Trasformazione di equazioni in disequazioni

La forma canonica richiede che tutti i vincoli propri del problema PL siano espressi come disequazioni di tipo $\geq$. Ovviamente le disequazioni di tipo $\leq$ possono essere trasformate in disequazioni di tipo $\geq$ moltiplicandole per -1.

Qualora il problema contenga delle equazioni queste possono facilmente essere trasformate in una coppia di disequazioni equivalenti come segue:

$$a_i^T x = d_i \quad \Rightarrow \begin{cases} a_i^T x \geq d_i \\ -a_i^T x \geq -d_i \\ \end{cases} \tag{4.39}$$

Si noti che i valori di x che soddisfano l'equazione sono l'intersezione delle soluzioni delle due disequazioni soddisfano e che le trasformazioni aumentano il numero dei vincoli del problema, dovendo aggiungere una disequazione per ogni equazione da trasformare.

4.2.4 Trasformazione di variabili libere

Le forme canonica e standard prevedono che tutte le variabili decisionali del problema siano non negative. Qualora il problema preveda delle variabili non positive ($x_i \leq 0$) queste possono essere sostituite nella formulazione da variabili non negative e cambiando tutti i segni dei coefficienti ad esse relative nel problema.

Nel caso in cui il problema preveda variabili libere queste possono invece essere sostituite dalla differenza di due variabili non negative

$$x_i \text{ libera} \quad \Rightarrow x_i = x_i^+ - x_i^-. \tag{4.40}$$

Si noti che tale trasformazione aumenta il numero di variabili decisionali dovendo aggiungerne una per ogni variabile libera.

4.2.5 Esempio di trasformazione di forma

Per illustrare le trasformazioni descritte si consideri il seguente esempio in forma generale:

$$\max z = -2x_1 \quad +3x_2 \tag{4.41}$$

$$\text{s.t.} \quad x_1 \quad +2x_2 \quad \leq 4 \tag{4.42}$$

$$2x_1 \quad -x_2 \quad = 2 \tag{4.43}$$

$$x_1 \quad \geq 0 \tag{4.44}$$

$$x_2 \quad \text{libera} \tag{4.45}$$

$$\tag{4.46}$$

Consideriamo dapprima la trasformazione del problema in forma canonica. Trasformiamo innanzitutto la variabile libera $x_2 = x_2^+ - x_2^-$ e sostituiamola in tutto il problema

$$\max z = -2x_1 \quad +3x_2^+ \quad -3x_2^- \tag{4.47}$$

$$\text{s.t.} \qquad x_1 \quad +2x_2^+ \quad -2x_2^- \quad \leq 4 \tag{4.48}$$

$$2x_1 \quad -x_2^+ \quad +x_2^- \quad = 2 \tag{4.49}$$

$$x_1 \quad x_2^+ \quad x_2^- \quad \geq 0 \tag{4.50}$$

A questo punto possiamo modificare la prima disequazione moltiplicandola per -1 e convertire l'equazione in disequazioni come mostrato nel paragrafo 4.2.3. Infine modifichiamo la funzione obiettivo in min come illustrato nel paragrafo 4.2.1. Il problema risultante in forma canonica è:

$$-\min -z = \quad 2x_1 \quad -3x_2^+ \quad +3x_2^- \tag{4.51}$$

$$\text{s.t.} \qquad -x_1 \quad -2x_2^+ \quad +2x_2^- \quad \geq -4 \tag{4.52}$$

$$2x_1 \quad -x_2^+ \quad +x_2^- \quad \geq 2 \tag{4.53}$$

$$-2x_1 \quad +x_2^+ \quad -x_2^- \quad \geq -2 \tag{4.54}$$

$$x_1, \quad x_2^+, \quad x_2^- \quad \geq 0 \tag{4.55}$$

Operiamo ora la trasformazione in forma standard. Dapprima sostituiamo la variabile libera come mostrato per la forma canonica. Poi sostituiamo la disequazione con una equazione aggiungendo la variabile surplus x_3. Il problema in forma standard è:

$$-\min -z = 2x_1 \quad -3x_2^+ \quad +3x_2^- \tag{4.56}$$

$$\text{s.t.} \qquad -x_1 \quad -2x_2^+ \quad +2x_2^- \quad +x_3 \quad = -4 \tag{4.57}$$

$$2x_1 \quad -x_2^+ \quad +x_2^- \quad = 2 \tag{4.58}$$

$$x_1, \quad x_2^+, \quad x_2^-, \quad x_3 \quad \geq 0 \tag{4.59}$$

Si noti che rispetto al problema originale i problemi in forma canonica e standard, pur essendo a questo e tra loro equivalenti, contengono variabili aggiuntive e hanno una funzione obiettivo in forma di minimo. Risolvendo uno di tali problemi per ottenere la soluzione ottima del problema originale in forma generale sarà necessario:

a) definire il valore della variabile libera da quelli delle due variabili ausiliarie, ovvero $x_2 = x_2^+ - x_2^-$,

b) cambiare il segno del valore della funzione obiettivo $-z$ determinato.

I valori delle variabili slack e surplus potranno essere ignorati.

4.3 Interpretazione Geometrica dei Problemi PL

In questo paragrafo esamineremo le proprietà geometriche dei problemi PL e illustreremo la risoluzione per via grafica di problemi PL contenti due o tre variabili decisionali. Nei capitoli successivi saranno invece discussi metodi più generali per la risoluzione di problemi PL di dimensione qualsiasi.

I problemi PL illustrati nei paragrafi precedenti hanno una struttura molto semplice e la loro soluzione potrebbe essere ottenuta anche sulla base di semplici considerazioni intuitive. Consideriamo ad esempio il problema di produzione di sedie del paragrafo 4.1.1. In tale problema le sedie in alluminio hanno un profitto più elevato. Inoltre, nel reparto lavorazione tessuto in cui le sedie sono in concorrenza richiedono un tempo di lavorazione inferiore. È dunque ragionevole pensare di produrre il maggior numero possibile di tali sedie ed impiegare le risorse eventualmente disponibili per la produzione di sedie in legno. Il massimo numero di sedie in alluminio producibili è facilmente ottenibile dalle (4.6)–(4.7) imponendo in queste $x_1 = 0$ e calcolando il valore massimo di x_2 che rispetta tutti i vincoli. Tale valore è $x_2 = 6$ corrispondente al vincolo (4.6) che risulta il più stringente. Successivamente si può ottenere il valore massimo di x_1 compatibile con i vincoli sostituendo in questi il valore $x_2 = 6$ trovato ed ottenendo dal vincolo (4.7) $x_1 = 2$. In tal modo si è ottenuta la soluzione $(2, 6)$ cui corrisponde un valore complessivo di 360€e che, come si vedrà in seguito, corrisponde alla soluzione ottima del problema.

Tali semplici considerazioni permettono in generale di determinare soluzioni ammissibili dei problemi PL ma in generale non permettono di determinare la soluzione ottima o di provarne l'ottimalità. Se consideriamo infatti il problema della produzione di vasche del paragrafo 4.1.2, procedendo in modo analogo a quanto descritto per la produzione di sedie potremmo preferire la produzione di vasche di tipo Blue Tornado che hanno un profitto maggiore. Imponendo $x_2 = 0$ nei vincoli (4.10)–(4.12) si ottiene $x_1 = 174$ in corrispondenza del vincolo (4.11) che risulta essere il più stringente. Si noti che fissato x_1 a tale valore non risultano disponibili risorse sufficienti a produrre vasche di tipo Hot Spring in quanto la produzione determinata utilizza completamente le ore di lavoro disponibili nel turno. La soluzione così determinata risulta essere $(174, 0)$ a cui corrisponde un profitto di 60900€. Tale soluzione, pur essendo ammissibile non è la soluzione ottima del problema che corrisponde invece alla soluzione $(122, 78)$ a cui corrisponde un profitto di 66100€.

Vediamo ora, sempre utilizzando gli esempi precedenti, come rappresentarli geometricamente e determinarne la soluzione per via grafica.

4.3.1 Disegno della Regione Ammissibile di un Problema PL

Prendiamo dapprima in considerazione la regione ammissibile dei problemi PL osservando che questa risulta essere il luogo dei punti che soddisfano tutti i vincoli del problema definiti da equazioni e disequazioni

$$F = \{x \in \Re^n : g_i(x) \leq 0, i = 1, \ldots, m; h_j(x) \leq 0, j = 1, \ldots, p\} \tag{4.60}$$

ossia l'insieme dei punti che costituisce l'intersezione degli insiemi che soddisfano singolarmente ciascun vincolo.

È noto che nello spazio $\Re^n$ una equazione lineare definisce un insieme di punti detto *iperpiano*. Nel caso $\Re^2$ questo risulta essere una retta come illustrato in figura 4.3, mentre in $\Re^3$ questo risulta essere un piano (si veda la figura 4.4. Una disequazione lineare definisce invece un semispazio delimitato dall'equazione lineare di supporto ottenuta sostituendo la disuguaglianza con "=" come illustrato in figura 4.5.

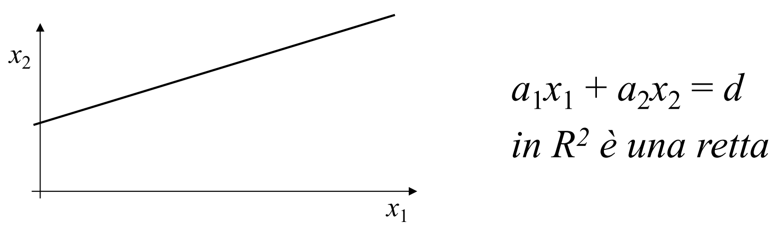


Figura 4.3: Luogo dei punti corrispondenti ad una equazione lineare in $\Re^2$.

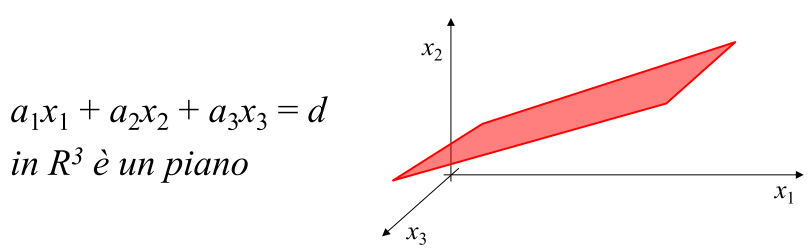


Figura 4.4: Luogo dei punti corrispondenti ad una equazione lineare in $\Re^3$.

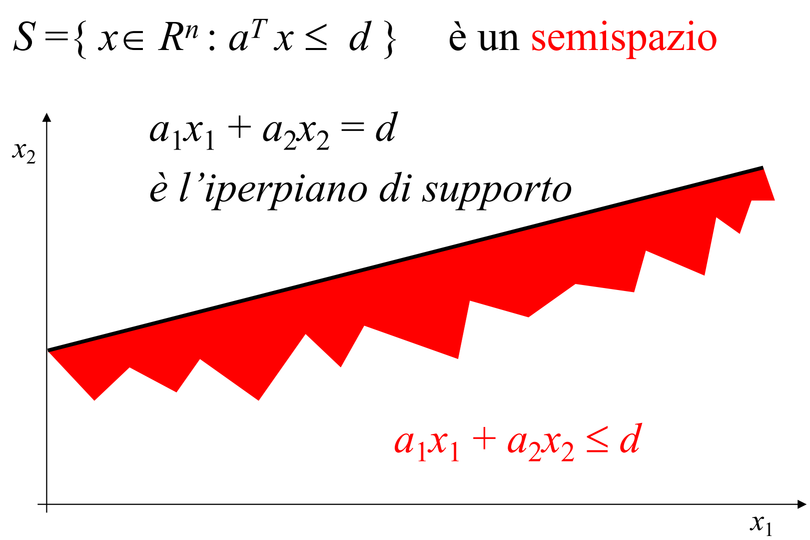


Figura 4.5: Luogo dei punti corrispondenti ad una disequazione lineare in $\Re^2$.

La regione ammissibile di un problema PL risulta quindi essere l'intersezione di un numero finito di iperpiani e di semispazi, ossia quello che viene definito un *poliedro convesso.*

Consideriamo l'esempio della produzione di sedie descritto nel paragrafo 4.1.1 che è definito mediante due variabili decisionali e quindi si presta ad essere rappresentato graficamente nello spazio $\Re^2$. La regione ammissibile di tale problema si trova come intersezione dei 5 vincoli del problema ossia dei 3 vincoli propri associati ai limiti di produzione dei diversi reparti ed i 2 vincoli di non negatività delle variabili. Questi ultimi due restringono la regione ammissibile al primo quadrante del piano cartesiano mentre i tre vincoli rimanenti sono associati a tre disequazioni che complessivamente definiscono la regione ammissibile rappresentata in figura 4.6. Più precisamente, al fine di determinare la regione ammissibile di un problema PL devono essere considerati tutti i vincoli del problema, comprendendo anche gli eventuali vincoli sul segno delle variabili decisionali. Per ciascun vincolo deve essere determinata la corrispondente regione ammissibile. Ad esempio, come già discusso, i vincoli di non negatività delle variabili restringono la regione ammissibile al primo quadrante mentre il vincolo $x_1 \leq 4$ definisce il semispazio alla sinistra della retta $x_1 = 4$. Intersecando le regioni ammissibili di tutti i vincoli si determina la regione ammissibile del problema.

$$
\begin{array}{llll}
\max z = & 3x_1 & +5x_2 & \\
s.t. & x_1 & & \leq 4 \\
& & 2x_2 & \leq 12 \\
& 3x_1 & +2x_2 & \leq 18 \\
& x_1 & , x_2 & \geq 0
\end{array}
$$

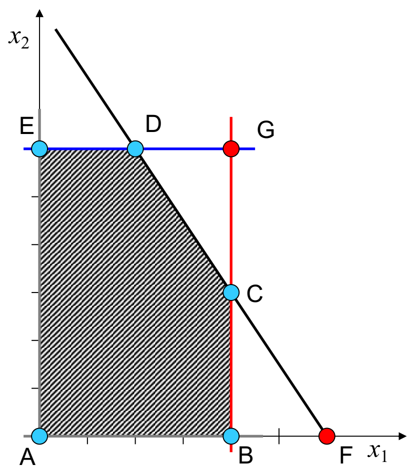


Figura 4.6: Regione ammissibile del problema di produzione di sedie.

4.3.2 Poliedri e vertici

Come già discusso la regione ammissibile definita da equazioni e disequazioni lineari definisce un poliedro convesso. Le facce di tale poliedro sono porzioni di iperpiani che si intersecano in spigoli che a loro volta si intersecano definendone i vertici, come mostrato nella figura 4.6. Si noti che la presenza di equazioni tra i vincoli “riduce” la dimensione della regione ammissibile rispetto a quella dello spazio che lo contiene. Ad esempio, se consideriamo il problema rappresentato in figura 4.6 la sua regione ammissibile è definita solo da disequazioni in $\Re^2$ ed è un poliedro di dimensione 2. Se in tale problema il primo vincolo fosse invece l’equazione $x_1 = 4$ allora la regione ammissibile si ridurrebbe al segmento CB ossia ad un insieme di dimensione 1.

I vertici sono punti particolarmente importanti di un poliedro ed assumeranno un ruolo fondamentale anche nella soluzione dei problemi PL. Informalmente i vertici di un poliedro sono punti ottenibili intersecando tra loro un numero di equazioni di supporto dei vincoli del problema pari alla dimensione dello spazio che contiene la regione ammissibile che, in generale, coincide con il numero delle variabili decisionali. Ad esempio per il problema illustrato in figura 4.6 che ha due variabili decisionali, i vertici si ottengono intersecando due equazioni di supporto dei vincoli. Si noti però che intersecando coppie di equazioni associate ai vincoli si ottengono anche punti esterni alla regione ammissibile come, ad esempio, il punto G della figura 4.6 che si ottiene come intersezione delle equazioni $x_1 = 4$ e $x_2 = 6$. Tali vertici "impropri" del poliedro si definiscono *vertici non ammissibili*. Riassumendo, i vertici A, B, C, D, ed E di figura 4.6 sono vertici ammissibili, mentre F e G sono vertici non ammissibili.

Vediamo ora meglio il ruolo dei vertici nella soluzione dei problemi PL enunciando una proprietà fondamentale di tali problemi.

Definizione 4.2. *Un punto $x \in \Re^n$ è vertice di un insieme convesso $S \subset \Re^n$ se e solo se le sue coordinate non sono esprimibili come combinazione convessa di altri punti di S.*

I vertici sono punti fondamentali di un poliedro convesso. Vale infatti il seguente teorema la cui definizione è omessa per brevità.

Teorema 4.1. *Dati i vertici $\{p_1, ..., p_k\}$ di un poliedro limitato P, detto politopo, si ha il seguente teorema le coordinate di un punto generico $x \in P$ possono essere ottenute come combinazione convessa delle coordinate dei vertici, ossia esiste un vettore $\lambda \geq 0$ di coefficienti non tutti nulli e tali che $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$ da cui si ottiene*

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i p_i \tag{4.61}$$

Possiamo a questo punto introdurre il teorema fondamentale della PL.

Teorema 4.2. *In un problema PL con regione ammissibile F non vuota e limitata esiste sempre almeno un vertice ottimo.*

Per dimostrare il teorema occorre ragionare per assurdo. Consideriamo un problema di minimo e siano $\{x^1, ..., x^k\}$ i vertici della regione ammissibile F e c il vettore dei coefficienti di costo della funzione obiettivo. Supponiamo che la soluzione ottima del problema sia il punto $x^0 \in F$ e che questa non coincida con uno dei vertici di F. Per il teorema 4.1 possiamo esprimere x^0 come

$$x^0 = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i, \quad \text{con} \ \ \lambda_i \geq 0 \text{ e } \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1, \tag{4.62}$$

Sia ora x^j il vertice di costo minimo, ossia $c^T x^j = \min_{1 \leq i \leq k}\{c^T x^i\}$. Il valore della funzione obiettivo nel punto ottimo, $c^T x^0$ può essere espresso come combinazione convessa del valore della funzione obiettivo dei vertici, ossia $c^T x^0 = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i c^T x^i$. Se in tale relazione sostituiamo a ciascun vertice le coordinate del vertice migliore è facile verificare che la quantità al secondo membro diventa in generale più piccola dato che nella combinazione convessa sostituiamo al valore della funzione obiettivo calcolata in ciascun vertice quello della funzione obiettivo nel vertice migliore. Possiamo ottenere le relazioni

$$c^T x^0 = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i c^T x^i \geq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i c^T x^j = c^T x^j \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = c^T x^j \tag{4.63}$$

da cui discende che $c^T x^0 \geq c^T x^j$, ossia esiste un vertice cui corrisponde un valore della funzione obiettivo non peggiore di quella calcolata nel punto x^0. Pertanto si arriva alla contraddizione che o il punto x^0 non è la soluzione ottima o esiste un vertice che rappresenta una soluzione ottima dello stesso valore.

La conseguenza del teorema 4.2 è che per determinare la soluzione ottima di un problema PL è sufficiente considerare i vertici della regione ammissibile.

Considerando che il numero di vertici di un politopo è finito anche se il politopo contiene infiniti punti, dal punto di vista computazionale la proprietà enunciata permette di determinare la soluzione ottima di un problema che ha infinite soluzioni ammissibili limitandosi ad esaminare un numero finito di punti.

4.3.3 Vincoli Ridondanti

La definizione implicita della regione ammissibile attraverso le equazioni e le disequazioni può portare a formulazioni inefficienti del problema ossia che contengono vincoli "inutili". Considerando, ad esempio, il problema della produzione delle sedie se fosse necessario considerare un ulteriore reparto di lavorazione con una disponibilità di 70 minuti di lavoro e per il quale le sedie in legno richiedono 10 minuti di lavorazione e quelle in alluminio 7 minuti, sarebbe necessario aggiungere al problema il vincolo

$$10x_1 + 7x_2 \quad \leq 70. \tag{4.64}$$

Aggiungendo tale vincolo al problema si può però osservare dalla figura 4.7 che tale vincolo non altera in alcun modo la regione ammissibile definita dagli altri vincoli e può essere quindi rimosso dal problema. Lo stesso può dirsi del vincolo $3x_1 + x_2 \leq 15$ indicato in blu nella medesima figura. Si noti che, sebbene la rimozione di vincoli ridondanti sia sicuramente vantaggiosa per la risoluzione di un problema PL, la loro individuazione in modo analitico non è facile e la loro presenza nelle formulazioni di problemi di ottimizzazione è molto frequente.

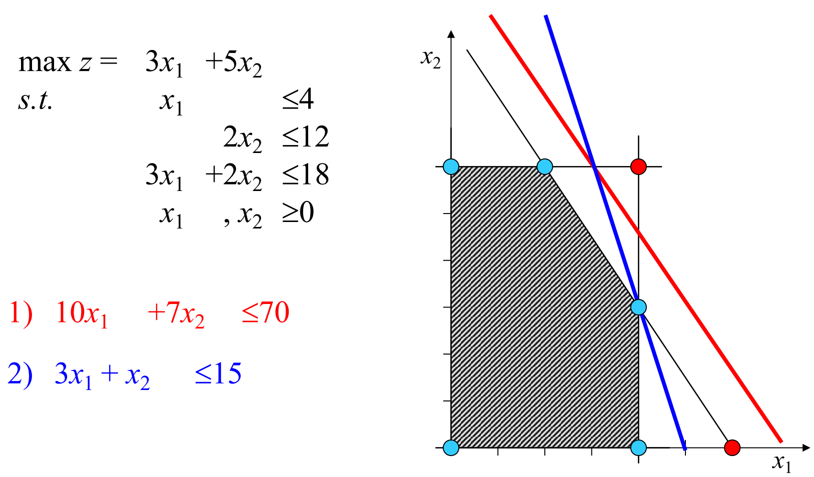


Figura 4.7: Esempi di vincoli ridondanti per un problema PL.

4.3.4 Risoluzione Grafica di un problema PL

Una volta disegnata la regione ammissibile del problema PL per individuare in questa la soluzione ottima occorre prendere in considerazione la funzione obiettivo. A tal fine si osservi che ponendo la funzione obiettivo uguale ad un valore costante, $\varphi(x) = costante$, si ottiene il luogo dei punti che corrispondono ad un valore costante di questa. Osservando che la funzione obiettivo è lineare tali espressioni definiscono un fascio di iperpiani in $\Re^n$ paralleli. Chiaramente i punti della regione ammissibile che giacciono su un iperpiano definito da un particolare valore costante sono soluzioni ammissibili per il problema cui corrisponde tale valore della funzione obiettivo. Per determinare la soluzione ottima del problema è dunque sufficiente individuare la soluzione ammissibile che giace sull'iperpiano di valore minimo (o massimo, a seconda del tipo di problema).

Nel caso del problema delle sedie gli iperpiani $\varphi(x) = costante$ sono delle rette in $\Re^2$. In figura 4.10 sono mostrate le rette equi-costo che intersecano la regione ammissibile corrispondenti ai valori $3x_1 + 5x_2 = 15, 20, 25, \ldots$ è quindi chiaro che trattandosi di un problema di massimizzazione la soluzione ottima corrisponderà ad una retta del fascio che interseca la regione ammissibile ad un valore più elevato della funzione obiettivo. Tale punto è costituito dal vertice di coordinate $(2, 6)$ cui corrisponde il valore 36 della funzione obiettivo.

Si noti che dato che la regione ammissibile è convessa iperpiani di valore più elevato della funzione ammissibile non avranno intersezione con la regione ammissibile pertanto il punto così individuato è la soluzione ottima del problema e corrisponde ad una produzione di 2 sedie in legno e 6 in alluminio garantendo un profitto di 360 €per turno. Si ricordi infatti che i coefficienti della funzione obiettivo erano stati divisi per 10 per cui il valore ottimo determinato con la funzione obiettivo $\max z = 3x_1 + 5x_2$ è espresso in decine di €.

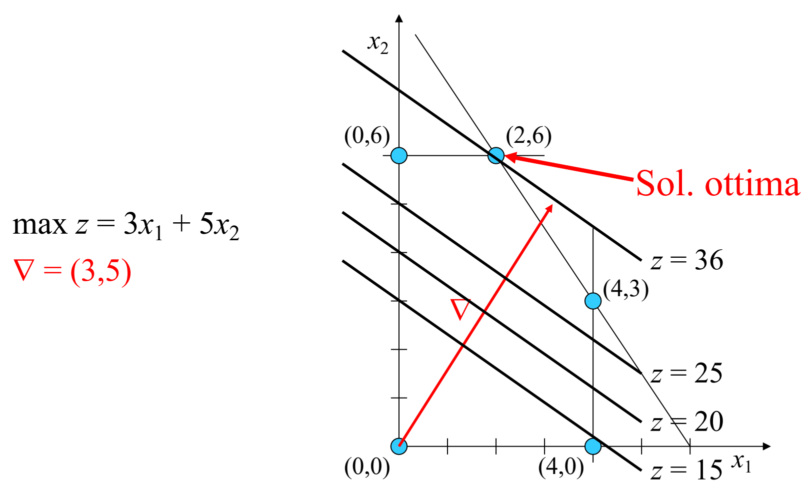


Figura 4.8: Risoluzione per via grafica del problema PL di produzione delle sedie.

In alternativa al calcolo delle rette equi-costo della funzione obiettivo può essere determinato il gradiente ∇ della funzione obiettivo, ossia il vettore che congiunge l'origine con il punto le cui coordinate sono le derivate parziali prime della funzione obiettivo rispetto alle variabili decisionali. Nel caso della funzione obiettivo $\max z = 3x_1 + 5x_2$ si ha che il gradiente, illustrato in figura 4.10 si ottiene congiungendo l'origine con il punto di coordinate $(3, 5)$. È noto che il gradiente di una funzione di più variabili indica per ogni punto la direzione di variazione di tale funzione e nel caso di funzioni lineari tale direzione sia costante e per tale motivo la direzione del gradiente risulta perpendicolare alle rette equi-costo definite dalla funzione obiettivo. Inoltre il verso del gradiente indica la direzione di aumento della funzione e questo è ben illustrato dalla figura 4.10 che mostra le rette equi-costo corrispondenti a valori crescenti della funzione obiettivo. Pertanto una volta determinato il gradiente è sufficiente, con l'aiuto di un righello muoversi perpendicolarmente alla sua direzione ed in verso concorde per problemi di massimizzazione e nel verso opposto per la minimizzazione, finché non si interseca l'ultimo punto della regione ammissibile che corrisponderà alla soluzione ottima cercata.

4.3.5 Considerazioni sulla soluzione ottima di un PL

Si sarà notato dalla soluzione dell'esempio precedente che la soluzione ottima del problema è stata individuata in corrispondenza di un vertice della regione ammissibile del problema. In realtà questo non è un caso fortuito ma una proprietà fondamentale dei problemi PL che, come meglio vedremo in seguito, garantisce che se la soluzione ottima esiste (ossia se il problema PL non risulta impossibile) essa coincide sempre con almeno un vertice della regione ammissibile. Tale proprietà discende direttamente dalla linearità dei vincoli e della funzione obiettivo. Infatti, la prima ha come conseguenza che la regione ammissibile sia un poliedro convesso e la seconda che le superfici equi-costo della funzione obiettivo definiscono un fascio di iperpiani paralleli. Considerando esempi come quello della produzione di sedie che sono rappresentabili graficamente in $\Re^2$ non è difficile osservare che questo si verifichi mentre in un paragrafo successivo proveremo che tale proprietà vale in generale. Si osservi inoltre che se viene a mancare la linearità di una delle componenti del problema tale proprietà viene a cadere come illustrato in figura 4.9 in cui a sinistra è rappresentato il caso in cui non sia lineare la funzione obiettivo mentre a destra quello in cui ad essere non lineare è uno dei vincoli del problema. In entrambi i casi la soluzione ottima non è necessariamente in un vertice ma è luno uno spigolo della regione ammissibile. Si ricordi anche l'esempio illustrato nel paragrafo 3.2.8 in cui la funzione obiettivo è non lineare e la soluzione ottima è un punto all'interno della regione ammissibile.

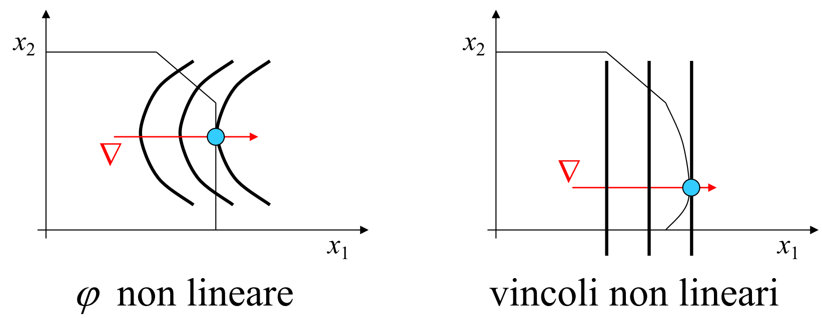


Figura 4.9: Esempio di problemi non lineari e relativa soluzione ottima.

In generale la soluzione ottima è unica ed ha valore finito come nel caso appena considerato, ma si possono verificare anche alcuni casi particolari. Se, ad esempio, nel problema della produzione di sedie i profitti fossero diversi e la funzione obiettivo corrispondente fosse $\max z = 3x_1 + 2x_2$, risolvendo il problema per via grafica come mostrato precedentemente si otterrebbe che la soluzione ottima non è più unica. Infatti, muovendosi perpendicolarmente al gradiente ed in verso concorde si può vedere che l'ultima intersezione con la regione ammissibile coincide con l'intero spigolo tra il punto di coordinate $(2, 6)$ e quello di coordinate (4.3). In questo caso le soluzioni ottime del problema sono infinite e tutte corrispondenti al valore 18 della funzione obiettivo. Si osservi però che tra queste infinite soluzioni ottime sono presenti anche due vertici della regione ammissibile ossia i punti di coordinate $(2, 6)$ e $(4, 3)$.

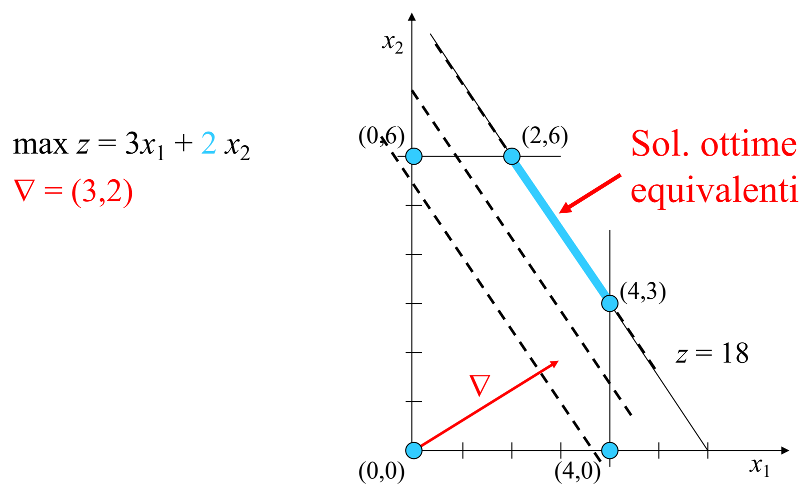


Figura 4.10: Esempio di soluzioni ottime equivalenti.

Nel problema esaminato fin qui la regione ammissibile è un poliedro limitato ma tale situazione non è generalmente sempre verificata nei problemi PL. Sono infatti frequenti i casi di problemi di ottimizzazione in cui la regione ammissibile pur definita da vincoli lineari sia in realtà illimitata. Un esempio di tale situazione è rappresentato dal problema della dieta descritto nel paragrafo 4.1.4 cui i vincoli sono di tipo $\geq$. La regione ammissibile del problema è rappresentata in figura 4.11 ed è costituita dalla parte sopra le rette associate ai vincoli. Procedendo come per gli esempi precedenti si determina la soluzione ottima muovendosi in direzione opposta rispetto al gradiente dato che si tratta di un problema di minimizzazione. La soluzione ottima si trova nel vertice definito dai vincoli $6x_1 + 2x_2 \geq 12$ e $x_1 + 5x_2 \geq 5$. Intersecando le due rette associate ai vincoli si trovano le coordinate del vertice che corrisponde al punto $(\frac{5}{2}, \frac{9}{14})$ ed ha un costo pari a 5.642... €. Si noti che in questo caso pur essendo la regione ammissibile illimitata la soluzione ottima del problema ha valore finito.

Nel caso in cui per lo stesso problema la funzione obiettivo fosse stata da massimizzare risolvendo graficamente il problema si noterebbe che la soluzione ottima del problema è illimitata. Pur essendo questa una soluzione ammissibile per un problema PL, normalmente verificare che il problema è illimitato è indice di un errore nella modellazione del problema dato che questo corrisponde ad un valore infinito di almeno una delle variabili decisionali.

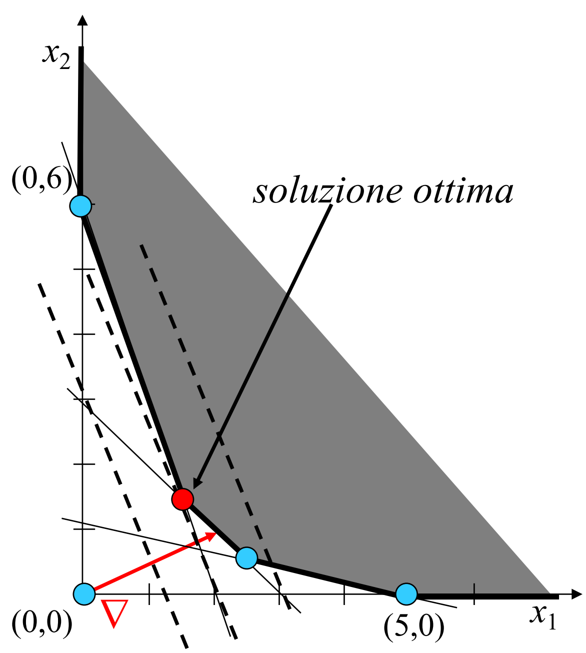


Figura 4.11: Risoluzione grafica del problema della dieta.

4.4 Assunzioni implicite della PL

La costruzione di un modello PL implica diverse assunzioni importanti sulle caratteristiche del problema da modellare che esamineremo brevemente nel seguito.

4.4.1 Proporzionalità

L'uso di funzioni lineari per modellare funzione obiettivo e vincoli del problema implica che l'impatto della decisione associata ad una variabile decisionale x_h :

a) sia *proporzionale*, attraverso un coefficiente costante (c_h nella funzione obiettivo o a_{ih} nell'i-simo vincolo), al valore di tale decisione;

b) tale proporzionalità si mantenga per tutto l'intervallo di variazione della variabile.

Il contributo della variabile x_h alla funzione obiettivo di un problema PL è illustrato nella figura 4.12.

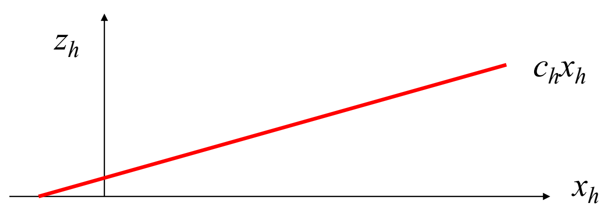


Figura 4.12: Contributo della variabile x_h alla funzione obiettivo in un problema PL.

Tale assunzione in molte situazioni pratiche è difficilmente verificata. Si pensi, ad esempio, alla produzione di beni in grandi quantità per i quali il profitto unitario tende a decrescere al crescere della produzione a causa dei maggiori investimenti in produzione o per la promozione delle vendite, come illustrato in figura 4.13. In maniera analoga tali assunzioni non sono facilmente verificate quando il contributo di una variabile mostra delle discontinuità, ad esempio motivate dagli investimenti aggiuntivi necessari a raggiungere un determinato livello di produzione. Tali fenomeni sono in generale approssimati molto male da una singola funzione lineare che in molti tratti sottostima o sovrastima l'effettivo contributo della variabile. un possibile modo per mitigare tali errori di approssimazione è rappresentato dall'impiego di funzioni lineari a tratti come mostrato in figura 4.14 che però come vedremo in seguito richiedono l'impiego di variabili intere rendendo il modello di PLM.

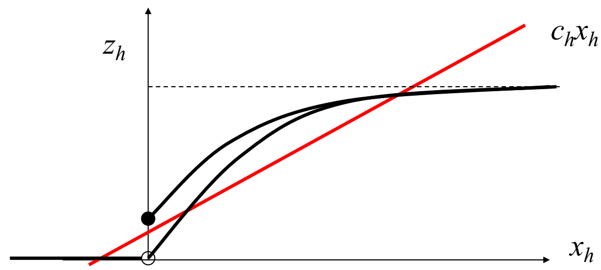


Figura 4.13: Fenomeni di saturazione o discontinuità nel contributo della variabile x_h alla funzione obiettivo.

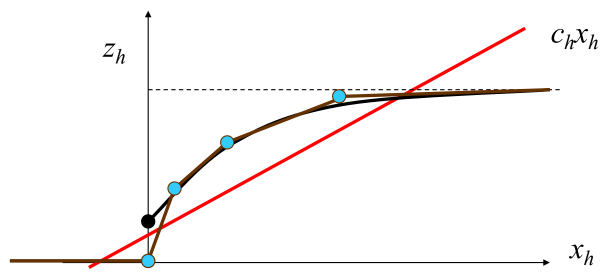


Figura 4.14: Approssimazione di fenomeni di saturazione o discontinuità mediante funzioni lineari a tratti.

4.4.2 Additività

L'uso di funzioni lineari per modellare funzione obiettivo e vincoli del problema implica che la funzione obiettivo e le espressioni al primo membro dei vincoli siano la somma di termini ciascuno dipendente unicamente dalla decisione associata ad una sola variabile decisionale x_h. In altre parole l'impatto su funzione obiettivo e vincoli di una decisione x_h dipende unicamente dal valore di tale decisione e non da quello di altre decisioni del modello.

Tale assunzione in molte situazioni pratiche è difficilmente verificata. Si pensi, ad esempio, alla produzione di beni in concorrenza tra di loro. In molti casi il profitto ottenibile dalla vendita di tali beni non dipende unicamente dalla quantità di questi prodotta ma anche dalla quantità di beni simili che l'azienda produce o sono disponibili sul mercato. Infatti, la disponibilità di prodotti alternativi concorrenti sul mercato potrebbe ridurre la facilità di vendita dei prodotti considerati costringendo a praticare sconti aggiuntivi e riducendone il profitto.

4.4.3 Divisibilità

L'uso di modelli PL implica che le variabili decisionali siano valori continui e quindi potenzialmente frazionari. In molti casi tale assunzione è perfettamente compatibile con il problema da modellare. Ad esempio quando le variabili rappresentano tassi di produzione in un periodo, percentuali sul valore totale o grandezze frazionarie quali i quantitativi di sostanze da acquistare o prevedere in una miscela.

In molti problemi però le decisioni rappresentate dalle variabili hanno senso solo se costituite da valori interi. Ad esempio, le decisioni potrebbero rappresentare un numero di addetti da impiegare in un lavoro o il numero di infrastrutture da costruire. In tali casi le variabili del modello devono necessariamente essere vincolate ad essere intere ed il modello diviene un modello PLM o PLI.

4.4.4 Certezza

L'ultimo aspetto da considerare nell'impiego di modelli PL è rappresentato dal fatto che i coefficienti utilizzati nel definire i dati di ingresso del modello sono costanti e di conseguenza assunti come dati deterministici, ossia noti con certezza. La conseguenza principale di questo è che la soluzione ottima determinata dipende strettamente da tali valori.

Nella maggior parte dei casi i dati del problema sono però il frutto di misure o stime e sono quindi inevitabilmente affetti da approssimazioni ed errori e quindi le soluzioni determinate potrebbero non essere necessariamente ottime se alcuni dati di ingresso variassero rispetto al valore utilizzato come input del modello. Si noti che tale inconvenienti è del tutto generale nell'impiego di modelli in cui si impiegano dati deterministici e quindi anche per modelli PLM e PLI.

In generale, una volta determinata la soluzione ottima del problema è necessario analizzarne la sensibilità alla variazione dei parametri di ingresso e questo spesso richiede l'esecuzione ripetuta della soluzione con insiemi di dati di ingresso differenti che rappresentino le possibili variazioni di questi. Nel caso della PL, come vedremo meglio nel capitolo 6, l'analisi di sensitività alla variazione dei parametri di ingresso può essere condotta in modo piuttosto semplice permettendo di ottenere per ciascun dato di ingresso l'intervallo di variazione rispetto al valore attuale che mantinene ottima la soluzione determinata.

Capitolo 5

L'Algoritmo del Simplesso

L'algoritmo del simplesso[1] è uno strumento fondamentale per la risoluzione dei problemi di programmazione lineare (PL). L'algoritmo è dovuto a G.B. Dantzig che lo ha messo a punto nel 1947 ed è costituito da un procedimento iterativo che esplora i vertici del poliedro fino a determinare la soluzione ottima del problema. Nel seguito esporremo l'algoritmo in modo graduale dapprima esaminando una sua versione intuitiva basata sulle proprietà dei problemi PL da un punto di vista geometrico. Successivamente definiremo un algoritmo algebrico, analogo al metodo proposto da Dantzig basato sulla risoluzione di sistemi di equazioni in modo efficiente per ottenere la soluzione ottima dei problemi PL.

5.1 Versione intuitiva dell'algoritmo del simplesso

Il metodo del simplesso si basa su alcune proprietà dei problemi PL che abbiamo discusso nel capitolo precedente.

La prima di queste è la proprietà fondamentale dei problemi PL enunciata nel teorema 4.1 secondo la quale in un problema PL la soluzione ottima, se esiste, coincide con uno dei vertici del poliedro che costituisce la regione ammissibile. Considerando che in un poliedro limitato (politopo)[2] associato ad un problema PL ha un numero di vertici finito, un algoritmo enumerativo che li esamini tutti potrà quindi determinare la soluzione ottima del problema in un numero finito di iterazioni. Si noti che sebbene finito il numero di vertici del politopo può essere molto grande. Più precisamente in un problema PL in forma canonica con n variabili decisionali ed m disequazioni il numero di vertici è infatti limitato

[1] Un simplesso è un politopo (poliedro limitato) con il minor numero possibile di vertici. In particolare un simplesso di dimensione n è l'inviluppo di $n+1$ vertici.

[2] Per semplicità faremo principalmente riferimento a poliedri limitati ma quanto esposto si può facilmente estendere al caso di poliedri illimitati.

superiormente dal binomio di Newton

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \tag{5.1}$$

La seconda proprietà su cui si basa l’algoritmo del simplesso è rilevante per la verifica dell’ottimalità della soluzione. In particolare si ricordi che i problemi PL sono un caso particolare dei problemi di ottimizzazione convessa per i quali si può dimostrare che l’intorno Euclideo è un intorno esatto. Come ricordato nella definizione 3.3, un intorno è esatto se un ottimo locale rispetto a tale intorno è in realtà un ottimo globale o assoluto per l’intero problema. In altre parole per verificare se il vertice che l’algoritmo sta esaminando sia o meno la soluzione ottima globale del problema è sufficiente verificarne l’ottimalità locale rispetto ad un intorno Euclideo di raggio ε. Nel caso dei problemi PL il problema di verificare computazionalmente l’ottimalità rispetto all’intorno Euclideo è ulteriormente semplificato da una semplice considerazione geometrica. In particolare per i problemi PL la verifica di ottimalità di un vertice può essere effettuata semplicemente confrontando il valore della funzione obiettivo nel vertice corrente con quella calcolata nei vertici adiacenti ad esso. Come mostrato nella figura 5.1 dato il vertice corrente ed i suoi vertici adiacenti questi definiscono un simplesso che contiene al suo interno la porzione ammissibile di un intorno Euclideo centrato nel vertice corrente. Dalla proprietà fondamentale dei problemi PL (Teorema 4.2) è noto che il valore della funzione obiettivo calcolata nel vertice migliore di un poliedro non è peggiore di quello calcolata in qualsiasi altro punto del poliedro. Quindi se il valore della funzione obiettivo calcolata nel vertice corrente risulta essere non peggiore (ossia nel caso di problemi di minimo sia $\leq$) di quello calcolato nei vertici adiacenti allora il vertice corrente è ottimo locale rispetto all’intorno Euclideo essendo ottimo rispetto ad un poliedro che lo contiene e, di conseguenza, è l’ottimo globale del problema.

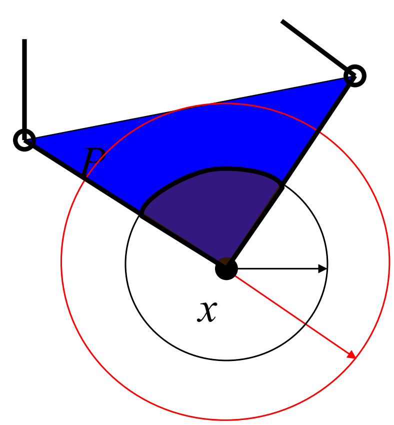


Figura 5.1: Illustrazione dell’intorno definito dai vertici adiacenti al vertice corrente.

Possiamo quindi definire una versione informale dell'algoritmo del simplesso:

Algorithm 3 Versione informale dell'algoritmo del simplesso.

```
1: procedure SIMPLEX((c, A, d))
2:     Inizializzazione: sia x un vertice ammissibile;
3:     ottimo ← false
4:     repeat
5:         if ∄ un vertice x adiacente ad x migliore  then
6:             ottimo ← true
7:         else
8:             Muoviti in un vertice x adiacente migliore
9:             x ← x
10:        end if
11:    until ottimo = true
12:    return x (soluzione ottima)
13: end procedure
```

Consideriamo l'esempio della produzione di sedie che abbiamo introdotto nel paragrafo 4.1.1 e risolto graficamente nel paragrafo 4.3.4. Nella figura 5.2 è riportata una possibile applicazione dell'algoritmo 3 a tale problema in cui le frecce indicano l'evoluzione dell'algoritmo nelle diverse iterazioni. Supponiamo di partire dal vertice ammissibile E, corrispondente alla soluzione $x = (0, 0)$ di valore 0 (riga 2). Entriamo nella fase iterativa dell'algoritmo e verifichiamo l'ottimalità del vertice corrente (riga 5). I vertici adiacenti a tale punto sono $A = (0, 6)$ e $D = (4, 0)$ e sono entrambi migliori di E dato che la funzione obiettivo in tali punti vale rispettivamente 30 e 12. Scegliamo tra tali punti il vertice A e muoviamoci in tale punto definendo $x = (0, 6)$ (riga 8). Ripetendo la verifica di ottimalità per il vertice corrente possiamo vedere che il vertice adiacente $B = (3, 6)$ non è stato ancora esplorato e corrisponde ad un valore migliore della funzione obiettivo pari a 36. Si noti che il vertice E, adiacente ad A è gia stato esplorato precedentemente e quindi ad esso non può corrispondere una soluzione migliore rispetto a quella del vertice corrente. Scegliamo quindi il vertice D e muoviamoci in tale punto definendo $x = (3, 6)$ (riga 8). Verificando l'ottimalità del vertice corrente possiamo stabilire che questo è la soluzione ottima in quanto l'unico vertice adiacente $C = (4, 3)$ corrisponde ad una soluzione peggiore di valore 27. Possiamo quindi terminare l'algoritmo restituendo come soluzione ottima il punto $x = (3, 6)$ corrispondente al vertice B.

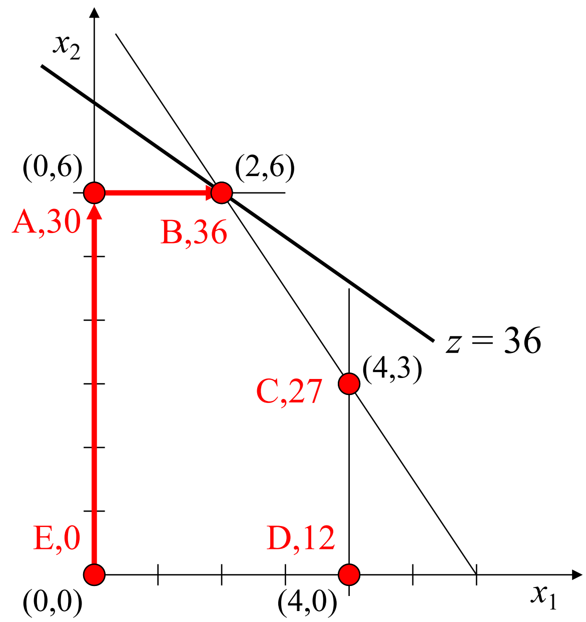


Figura 5.2: Applicazione dell'algoritmo del simplesso al problema della produzione di sedie.

5.2 Versione algebrica dell'algoritmo del simplesso

La versione dell'algoritmo del simplesso illustrata nell'algoritmo 3 è basata sui concetti geometrici di vertice ed intorno che sono sicuramente efficaci per una sua prima comprensione ma più difficilmente generalizzabili per la risoluzione di problemi di maggiore dimensione. A tal fine, sfruttando la disponibilità di metodi efficienti per la risoluzione di sistemi di equazioni lineari è possibile riportarsi ad una versione algebrica dell'algoritmo del simplesso che sarà più facile generalizzare e descrivere per la risoluzione di problemi PL di dimensione qualsiasi.

Per considerare la versione algebrica ci riferiamo quindi ad un problema in cui i vincoli siano tutti espressi sotto forma di equazione, ossia ad un problema espresso in forma standard (si veda il paragrafo 4.2). Considerando, ad esempio, il problema di produzione di sedie

$$\begin{array}{llll}
\max & 3x_1 & +5x_2 & \\
\text{s.t.} & x_1 & & \leq 4 \\
 & & +x_2 & \leq 6 \\
 & 3x_1 & +2x_2 & \leq 18 \\
 & x_1, & x_2 & \geq 0
\end{array}
\begin{array}{r}
(5.2)\\(5.3)\\(5.4)\\(5.5)\\(5.6)
\end{array}$$

la sua espressione in forma standard è

$$\begin{array}{lllllll}
-\min & -3x_1 & -5x_2 & & & & \\
\text{s.t.} & x_1 & & +x_3 & & & = 4 \\
 & & +x_2 & & +x_4 & & = 6 \\
 & 3x_1 & +2x_2 & & & +x_5 & = 18 \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq 0
\end{array}
\begin{array}{r}
(5.7)\\(5.8)\\(5.9)\\(5.10)\\(5.11)
\end{array}$$

Si noti che, dato un problema espresso in forma canonica con t variabili ed m vincoli espressi come disequazioni, il problema corrispondente in forma standard avrà $n = t + m$ variabili. Nell'esempio, il problema originale ha infatti $t = 2$ variabili ed $m = 3$ vincoli mentre il problema in forma standard ha $n = 2+3 = 5$ variabili e lo stesso numero di vincoli.

Lavorando sul problema in forma standard considereremo un problema con più variabili rispetto al problema originale e la regione ammissibile sarà rappresentata in uno spazio di dimensione superiore. Si noti però che la dimensione della regione ammissibile rimane la stessa di quella del problema originale. La presenza delle equazioni infatti proietta la regione ammissibile in uno spazio di dimensione inferiore. Sempre considerando l'esempio precedente, la regione ammissibile del problema originale è un sottoinsieme proprio di $\Re^2$ ed ha quindi dimensione 2. La regione del problema in forma standard pur essendo rappresentata nello spazio $\Re^5$ ha anch'essa dimensione 2 dato che la presenza di tre equazioni proietta tale regione sull'intersezione di tre iperpiani, ossia in un sottospazio di dimensione 2.

5.2.1 Soluzioni del problema PL in forma standard

Per procedere alla definizione della versione algebrica dell'algoritmo del simplesso è importante stabilire una relazione tra le soluzioni del problema originale e le soluzioni del problema in forma standard su cui lavoreremo.

In particolare, data una soluzione ammissibile del problema in forma standard questa è un vettore $x \in \Re^n$ e per ottenere la soluzione corrispondente a questa per il problema originale è sufficiente eliminare le m variabili aggiunte nella trasformazione. Considerando il problema (5.8)-(5.11) è facile verificare che il vettore $x = (3, 2, 1, 4, 5)$ è una soluzione ammissibile delle equazioni (5.8)-(5.10).

Eliminando da tale soluzione le ultime tre componenti, che sono state aggiunte per trasformarlo in forma standard, si ottiene il vettore $x' = (3, 2)$ che è facile verificare sia una soluzione ammissibile del sistema di disequazioni (5.3)-(5.5). Si noti che in tali ragionamenti consideriamo solo i vincoli propri dei problemi tralasciando per il momento i vincoli di non negatività delle variabili decisionali che saranno considerati implicitamente in seguito.

Soluzioni Aumentate

Dovendo lavorare sulla formulazione del problema in forma standard è importante caratterizzare le soluzioni di tale problema che corrispondono alle soluzioni del problema originale. Infatti, nel seguito vedremo come definire le soluzioni del problema in forma standard che corrispondono ai vertici del poliedro che come abbiamo visto assumono un ruolo fondamentale per la soluzione del problema PL. Per comodità faremo riferimento ad un problema originale espresso in forma canonica o comunque con solo disequazioni come vincoli, facendo quindi riferimento ad una formulazione originale del problema che utilizzi il minor numero di variabili).

Definizione 5.1 (**Soluzione Aumentata**). *Dato un problema* $P' = \min\{c'^T x,\ x' \in \Re^t, A'x' \geq d, x' \geq 0\}$ *espresso in forma canonica, con t variabili decisionali ed m vincoli, ed il suo problema equivalente* $P = \min\{c^T x, x \in \Re^n, Ax = d, x \geq 0\}$ *espresso in forma standard, con $n = t + m$ variabili decisionali ed m vincoli, si dice* soluzione aumentata *la soluzione x di P corrispondente ad una soluzione x' di P'.*

Dalla definizione è facile ricavare tutte le componenti di x corrispondenti ad una generica soluzione ammissibile x' di P'. Si osservi che una soluzione x' è un vettore di t componenti per cui al fine di ricavare x è sufficiente ricavare le m componenti di tale vettore ottenute imponendo uguali a quelle di x' le componenti corrispondenti in x. Si noti che nella trasformazione tali componenti sono generalmente le prime t di x dato che le m variabili ausiliarie sono aggiunte in seguito alla trasformazione in forma standard.

Il sistema $Ax = d$ è un sistema di m equazioni in n incognite con $n > m$ ed è noto che tale sistema ammette in generale infinite soluzioni. Ciò non deve sorprendere dato che in effetti le soluzioni del problema originario sono anch'esse in generale infinite. Va però osservato che fissando t degli n valori delle incognite il sistema si riduce ad un sistema di m equazioni in m incognite la cui soluzione è in generale unica. In altre parole risolvendo tale sistema si determinano le rimanenti componenti dell'unico vettore x corrispondente alla soluzione x'.

Per illustrare la trasformazione e la costruzione della soluzione aumentata consideriamo sempre l'esempio del problema della produzione di sedie (5.3)-(5.5)[3], limitandoci come osservato ai soli vincoli propri del problema, e la sua formulazione equivalente in forma standard (5.8)-(5.10). Data una soluzione

[3] Si osservi che la formulazione originale di tale problema non è strettamente in forma canonica ma che comunque tale formulazione contiene solo disequazioni di tipo $\leq$.

ammissibile per il problema originale $x = (3, 2)$ possiamo sostituire tali valori alle variabili x_1 e x_2 nel sistema di equazioni (5.8)-(5.10), ottenendo il sistema

$$\begin{aligned}
3 \quad +x_3 \qquad\qquad &= 4 && (5.12)\\
2 \qquad +x_4 \qquad &= 6 && (5.13)\\
9 + 4 \qquad\qquad +x_5 &= 18 && (5.14)
\end{aligned}$$

da cui si ricava

$$\begin{aligned}
+x_3 \qquad\qquad &= 4 - 3 = 1 && (5.15)\\
+x_4 \qquad &= 6 - 2 = 4 && (5.16)\\
+x_5 &= 18 - 13 = 5 && (5.17)
\end{aligned}$$

risolvendo il quale si ottiene $x = (3, 2, 1, 4, 5)$.

Caratterizzazione dei vertici della regione ammissibile

Avendo definito le soluzioni aumentate vediamo ora come individuare le soluzioni aumentate del problema $P = \min\{c^T x, x \in \Re^n, Ax = d, x \geq 0\}$, che corrispondono ai vertici del poliedro del problema $P' = \min\{c^T x', x' \in \Re^t, A'x' \geq d, x' \geq 0\}$ da risolvere. Si noti che le soluzioni del problema P sono i vettori x che soddisfano il sistema di equazioni $Ax = d$ ed hanno componenti tutte non negative. Chiaramente considerando le sole equazioni le relative soluzioni possono avere anche valori negativi ma solo le soluzioni tutte non negative sono soluzioni ammissibili per P. Nel seguito considereremo in esplicito solo il sistema di equazioni e tratteremo i vincoli non negatività in modo implicito.

Esaminando il sistema di equazioni $Ax = d$ sappiamo che la sua risolubilità dipende strettamente dalle proprietà della matrice A. Nel nostro caso, premetteremo le seguenti assunzioni.

Definizione 5.2. *Dato un problema PL, $P = \min\{c^T x, x \in \Re^n, Ax = d\}$, espresso in forma standard, assumiamo che la matrice A con m righe ed n colonne sia:*

- *rettangolare con $n > m$*
- *di rango m, ossia contenga almeno una sotto-matrice quadrata di dimensione m non singolare.*

La prima di tali assunzioni deriva dal fatto che P essendo ottenuto da un problema P' con m disequazioni avrà necessariamente un numero di variabili superiore al numero di vincoli. Nel caso in cui P' fosse già espresso in forma standard, e quindi $P' = P$ riterremo comunque che tale assunzione sia verificata. Infatti, qualora $n < m$ avremo a che fare con un sistema con più equazioni rispetto alle incognite che in generale non ammette soluzione e questo corrisponderebbe ad un problema sovra-vincolato. Nel caso in cui $n = m$, se la matrice A ha rango

m il sistema ammette una singola soluzione e quindi avremmo a che fare con un problema banale con una sola soluzione. Il caso in cui $n > m$, corrisponde ad un sistema di equazioni che ammette infinite soluzioni e questo è ovviamente il caso che ci interessa considerare per il problemi PL.

La seconda assunzione prevede che il sistema di equazioni ammetta soluzioni. Se il rango di A non è pieno il sistema non ammette soluzioni ed almeno uno dei vincoli risulta essere combinazione lineare degli altri. Vedremo comunque come poter verificare, nel caso in cui il problema non ammetta soluzione, la violazione di tali assunzioni in un problema PL da risolvere.

Le infinite soluzioni del sistema $Ax = d$ possono essere ottenute scegliendo $t = n - m$ variabili ed assegnando a queste dei valori arbitrari. Di conseguenza il sistema si riduce ad un sistema di m equazioni in m incognite $Bx_B = d$, dove x_B è il vettore delle m incognite residue. Se B ha rango m il sistema può essere risolto risolto fornendo il valore delle incognite residue che unite ai valori arbitrari di quelle eliminate restituisce la corrispondente soluzione x. Si osservi che il fatto che scelte le variabili da sostituire a queste assegniamo valori arbitrari e per ciascuna di queste otteniamo una soluzione ha come conseguenza che le soluzioni di $Ax = d$ sono infinite (come del resto lo sono le soluzioni del problema PL originario).

Nel seguito i termini variabile decisionale e colonna del sistema di equazione saranno considerati sinonimi, così come i termini vincolo del problema e riga del sistema di equazioni.

A titolo di esempio consideriamo il sistema

$$x_1 \quad + x_3 \quad = 4 \tag{5.18}$$
$$x_2 \quad + x_4 \quad = 6 \tag{5.19}$$
$$3x_1 + 2x_2 \quad + x_5 = 18 \tag{5.20}$$

Se scegliamo le variabili x_4 e x_5 ed assegniamo a queste i valori 4 e 5, rispettivamente, otteniamo un sistema nelle incognite x_1, x_2 e x_3 che, risolto, fornisce la soluzione $(3, 2, 1)$ da cui ricaviamo la soluzione $x = (3, 2, 1, 4, 5)$. Se invece assegniamo alle incognite x_3 e x_4 il valore 0, la soluzione corrispondente sarà $(4, 6, 0, 0, -6)$. Si noti che questa soluzione viola le condizioni di non negatività delle incognite (infatti $x_5 = -6 < 0$) e non è pertanto soluzione ammissibile di P pur essendo una soluzione del sistema $Ax = d$.

La figura 5.3 riporta alcuni punti del poliedro del problema di produzione di sedie e le relative soluzioni aumentate ottenute sostituendo le coordinate del punto alle variabili x_1 e x_2 in (5.18)–(5.20) risolvendo il sistema di equazioni risultante. Osservando la figura si può notare che:

- punti interni alla regione ammissibile corrispondono a soluzioni aumentate con tutte le componenti strettamente positive (es. $(3, 2) \to (3, 2, 1, 4, 5)$);
- punti esterni alla regione ammissibile corrispondono a soluzioni aumentate con almeno una componente strettamente negativa (es. $(4, 6) \to (4, 6, 0, 0, -6)$);

- punti appartenenti ad un lato della regione ammissibile corrispondono a soluzioni aumentate con una componente uguale a zero (es. $(4, 2) \rightarrow (4, 2, 0, 4, 2)$);

- punti corrispondenti a vertici della regione ammissibile corrispondono a soluzioni aumentate con $t = n - m = 2$ componenti uguale a zero (es. $(4, 3) \rightarrow (4, 3, 0, 3, 0)$).

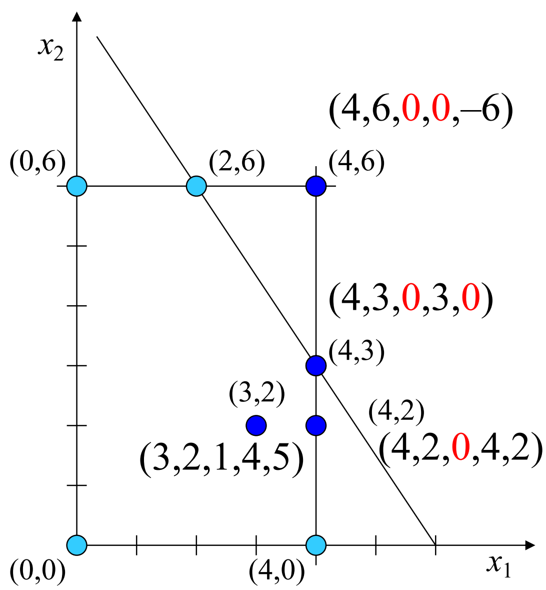


Figura 5.3: Soluzioni aumentate corrispondenti a punti del poliedro per il problema di produzione di sedie.

Le considerazioni precedenti discendono dal ruolo delle variabili nel sistema di vincoli del problema. Infatti ciascuna variabile del problema rappresenta lo slack (ossia la distanza) tra le coordinate di un punto e l'equazione associata al vincolo originario del problema. Ad esempio la variabile x_3 è lo slack del vincolo $x_1 \leq 4$ che in forma standard diventa $x_1 + x_3 = 4$. Dato un punto di coordinate (x_1, x_2) lo slack corrispondente è:

- strettamente positivo se $x_1 < 4$, ossia se il vincolo $x_1 \leq 4$ è rispettato in modo stretto;

- nullo se $x_1 = 4$, ossia se il vincolo $x_1 \leq 4$ è rispettato all'uguaglianza;

- strettamente negativo se $x_1 > 4$, ossia se il vincolo $x_1 \leq 4$ è violato.

Si noti che anche le variabili x_1 e x_2 possono essere interpretate come slack dei rispettivi vincoli di non negatività. Da queste osservazioni consegue che se una soluzione aumentata contiene una variabile uguale a zero allora il punto corrispondente giace sulla equazione di supporto del vincolo di cui tale variabile è lo slack. Ad esempio, essendo x_3 lo slack del vincolo $x_1 \leq 4$ ogni soluzione aumentata con $x_3 = 0$ corrisponde a punti che giacciono sulla retta $x_1 = 4$. Poiché un vertice è un punto della regione ammissibile che si trova all'intersezione di t vincoli di questa, le corrispondenti soluzioni aumentate devono avere t componenti uguali a zero per imporre che le coordinate della soluzione originale si trovino all'intersezione di t vincoli del problema.

Soluzioni Base del problema PL in forma standard

Da quanto discusso precedentemente possiamo ricondurre la definizione delle soluzioni aumentate corrispondenti ai vertici (ammissibili e non ammissibili) della regione ammissibile all'enumerazione delle soluzioni ottenute imponendo a zero t variabili del problema in forma standard. Si può dimostrare che in questo modo si costruiscono tutte le soluzioni aumentate corrispondenti ai vertici di P. In modo del tutto equivalente si possono però scegliere le $m = n - t$ variabili del problema che "sopravvivono" a tale eliminazione. Si noti che ponendo le altre t variabili uguali a zero queste "scompaiono" dal sistema $Ax = d$ lasciando attive solo le m variabili scelte. Compattando il sistema eliminando le colonne corrispondenti alle variabili poste uguali a zero rimane il sistema $Bx_B = d$ dove

- B è la matrice quadrata $m \times m$ ottenuta da A eliminando le colonne corrispondenti alle variabili poste a zero;
- x_B è un vettore di m incognite corrispondente alle variabili rimaste nel problema.

È ben noto che il sistema $Bx_B = d$ è risolubile se la matrice B è invertibile, ossia se le sue colonne sono tra loro linearmente indipendenti. In caso contrario il sistema $Bx_B = d$ non è risolubile e questo è legato al fatto che almeno una delle variabili residue può essere ottenuta come combinazione lineare delle altre e può essere pertanto sostituita nel problema da tale combinazione ed eliminata. Se la matrice B è invertibile si ha infatti

$$B^{-1}Bx_B = B^{-1}d \quad \Rightarrow \quad x_B = B^{-1}d. \tag{5.21}$$

Possiamo quindi introdurre la seguente definizione:

Definizione 5.3 (Base)**.** *Dato un sistema di equazioni $Ax = d$ con m equazioni in n incognite con $n > m$, una base è una collezione $\mathcal{B} = \{A_{\beta(1)}, \ldots, A_{\beta(m)}\}$ di colonne tra loro linearmente indipendenti, dove $\beta(1), \ldots, \beta(m)$ sono gli indici delle colonne scelte.*

Si noti che l'operazione di eliminazione delle colonne che non appartengono alla base scelta comporta in pratica una rinumerazione delle variabili rispetto al problema originario. Infatti delle n colonne della matrice A del problema in forma standard, che hanno quindi indici compresi tra 1 ed n, solo m sono presenti nel problema $Bx_B = d$ e tali colonne nella matrice B hanno indici tra 1 ed m. Ad esempio se consideriamo il sistema (5.18)–(5.20) la corrispondente matrice A è

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{5.22}$$

Scegliendo la base $\mathcal{B} = \{A_1, A_2, A_4\}$ e quindi definendo $\beta(1) = 1, \beta(2) = 2$ e $\beta(3) = 4$ ed imponendo $x_3 = x_5 = 0$, si ottiene la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

di cui è facile verificare la lineare indipendenza delle colonne di B e la cui inversa è

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3/2 & 0 & 1/2 \\ 3/2 & 1 & -1/2 \end{bmatrix}$$

da cui si ricava

$$x_B = B^{-1}d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3/2 & 0 & 1/2 \\ 3/2 & 1 & -1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

La soluzione aumentata corrispondente alla base $\mathcal{B} = \{A_1, A_2, A_4\}$ è quindi $x = (4, 3, 0, 3, 0)$ e corrisponde al vertice $(4, 3)$ del problema originario (si veda la figura 5.3).

Le soluzioni aumentate corrispondenti alle basi del sistema $Ax = d$ sono dette *soluzioni base* e sono definite come segue.

Definizione 5.4 (Soluzione base)**.** *Dato un sistema di equazioni $Ax = d$ con m equazioni in n incognite con $n > m$ e una sua base $\mathcal{B} = \{A_{\beta(1)}, \dots, A_{\beta(m)}\}$ la corrispondente soluzione base è*

$$x_j = \begin{cases} 0 & \textit{se } A_j \notin \mathcal{B} \\ k\textit{-sima componente di } B^{-1}d & \textit{se } j = \beta(k) \end{cases}$$

Si osservi che una soluzione base è soluzione del sistema $Ax = d$ ma non necessariamente rispetta le condizioni di non negatività $x \geq 0$ che sono però parte integrante del problema PL. Possiamo quindi introdurre la seguente ulteriore definizione

Definizione 5.5 (Soluzione base ammissibile)**.** *Dato una soluzione base x questa è una soluzione base ammissibile (SBA) se e solo se $x \geq 0$.*

La relazione tra soluzioni base ammissibili e vertici del politopo sono enunciate nel seguente teorema di cui si omette la dimostrazione per brevità.

Teorema 5.1. *Una soluzione aumentata x è un vertice del politopo $F = \{x \in \Re^n, Ax = d, x \geq 0\}$ se e solo se x è una soluzione base ammissibile del sistema $Ax = d$.*

Vediamo ora con maggiore dettaglio il ruolo delle soluzioni base rispetto al sistema di equazioni $Ax = d$ che definiscono i vincoli del problema PL. Per una maggiore semplicità di notazione, data una base $\mathcal{B}$, possiamo permutare le colonne del sistema in modo che le variabili appartenenti alla base siano le prime m. Tale permutazione in pratica è equivalente ad una rinumerazione delle colone del problema definendo un problema equivalente che avrà una forma più comoda dal punto di vista della notazione. Avremo dunque

$$A = [\underbrace{A_1, \ldots, A_m}_{\text{in base}} \,|\, \underbrace{A_{m+1}, \ldots, A_n}_{\text{fuori base}}] = [B|F] \tag{5.23}$$

dove B è una matrice quadrata $m \times m$ nonsingolare ed F è una matrice rettangolare $m \times n - m$ corrispondente alle variabili fuori base. Il sistema di equazioni può quindi essere riscritto come

$$Ax = d \Rightarrow [B|F] \begin{bmatrix} x_B \\ x_F \end{bmatrix} = d \Rightarrow Bx_B + Fx_F = d, \tag{5.24}$$

in cui x_B ed x_F sono rispettivamente le variabili in base e fuori base. Da tale espressione è possibile riscrivere il sistema in forma canonica rispetto alla base corrente esprimendo le variabili base rispetto alle variabili fuori base. In particolare, portando nell'espressione (5.24) il termine con x_F al secondo membro e moltiplicando ambo i membri per B^{-1} si ottiene

$$x_B = B^{-1}d - B^{-1}Fx_F. \tag{5.25}$$

Si osservi che il sistema in forma canonica è una riscrittura del sistema di equazioni originario esplicitando alcune delle variabili (nel nostro caso quelle base) ed esprimendole in funzione del valore delle variabili rimanenti. Da tale espressione è possibile ricavare il valore delle x_B in funzione dei valori arbitrari che potremmo attribuire alle x_F per costruire una soluzione generica del sistema di equazioni come discusso precedentemente. Nel nostro caso siamo però interessati a costruire le soluzioni base del sistema che corrispondono alla scelta $x_F = 0$ da cui si ottiene $x_B = B^{-1}$. L'espressione (5.25) sarà però utile nel seguito per caratterizzare punti anche diversi dai vertici della regione ammissibile osservando che in questo caso alcune delle variabili fuori base potrebbero assumere valori diversi da zero.

5.2.2 Pseudo-codice dell'algoritmo del simplesso in forma algebrica

Abbiamo ora tutti gli elementi per definire la versione algebrica dell'algoritmo del simplesso che si basa sull'enumerazione delle soluzioni base ammissibili del sistema dei vincoli, che abbiamo visto essere equivalente all'enumerazione dei vertici della regione ammissibile.

Algorithm 4 Versione algebrica dell'algoritmo del simplesso.

1: **procedure** SIMPLEX((c, A, d))
2: sia $\mathcal{B} = \{A_{\beta(1)}, \ldots, A_{\beta(m)}\}$ una base del sistema $Ax = d$ corrispondente ad un vertice ammissibile; ▷ Inizializzazione
3: *ottimo* $\leftarrow false$;
4: **repeat**
5: calcola la SBA, x, corrispondente a $\mathcal{B}$;
6: **if** x è ottimo **then** ▷ Test di ottimalità
7: *ottimo* $\leftarrow true$;
8: **else**
9: Aggiorna $\mathcal{B}$ in modo che corrisponda ad un vertice adiacente migliore; ▷ Spostamento
10: **end if**
11: **until** *ottimo* $= true$
12: **return** x (soluzione ottima)
13: **end procedure**

Si noti che la versione algebrica esposta è ancora definita in modo approssimativo dato che non viene dettagliato come realizzare i passi di Inizializzazione (linea 2), Test di ottimalità (linea 6) e di spostamento ad un'altra SBA (linea 9).

5.3 Test di Ottimalità

Data la base corrente $\mathcal{B} = \{A_{\beta(1)}, \ldots, A_{\beta(m)}\}$ e la corrispondente soluzione base ammissibile x, per verificarne l'ottimalità è sufficiente provare che tale soluzione è un ottimo locale rispetto ad un intorno euclideo, ossia verificare che non esistono in prossimità di tale punto soluzioni ammissibili migliori.

Data la base corrente l'espressione (5.25) ci permette di calcolare il valore delle variabili base in funzione di quelle fuori base. In un vertice le variabili x_F valgono 0 per imporre che la soluzione aumentata si trovi all'intersezione di un certo numero di vincoli che definiscono il vertice. Se una o più variabili x_F assumono valori positivi piccoli, la soluzione aumentata determinata utilizzando la (5.25) corrisponderà a punti ammissibili vicini al vertice. Calcolando il valore di tali soluzioni possiamo verificare se queste siano migliori o peggiori della soluzione associata al vertice e quindi determinare se questo sia la soluzione ottima o meno.

Esaminiamo dapprima l'esempio del problema della produzione di sedie e supponiamo di trovarci ad una iterazione generica dell'algoritmo in cui la base corrente sia $\mathcal{B} = \{A_1, A_2, A_4\}$ corrispondente al vertice $C = (4, 3)$ del problema originale come illustrato nella figura 5.4. Infatti essendo $x_3 = x_5 = 0$ la soluzione base corrisponde all'intersezione dei vincoli di cui tali variabili sono gli slack, ossia il primo ed il terzo vincolo del problema. Il sistema espresso in forma canonica rispetto alla base corrente è

$$x_1 = 4 \quad -x_3 \tag{5.26}$$

$$x_2 = 3 \quad +3/2x_3 \quad -1/2x_5 \tag{5.27}$$

$$x_4 = 3 \quad -3/2x_3 \quad +1/2x_5 \tag{5.28}$$

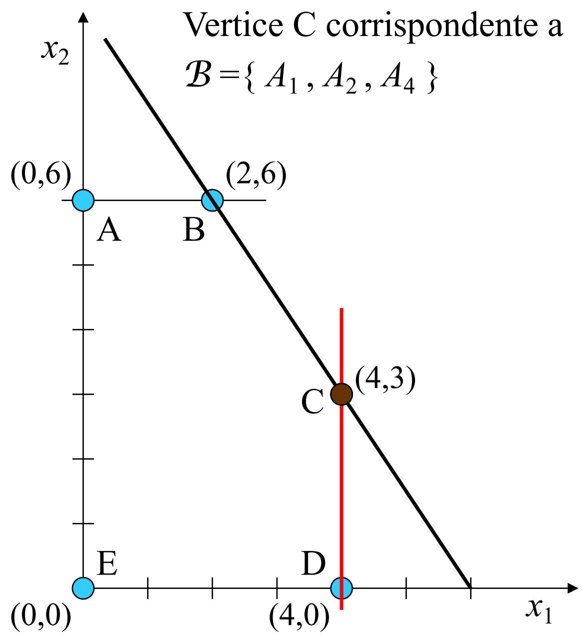


Figura 5.4: Verifica dell'ottimalità del vertice C.

La SBA corrispondente alla base è $x = (4, 3, 0, 3, 0)$ il cui valore data la funzione obiettivo $-\min -z = -3x_1 - 5x_2$ è pari a -27. Se sostituiamo i valori delle variabili base nella funzione obiettivo esprimiamo anche quest'ultima in funzione della base corrente ottenendo

$$\begin{aligned} -z = -3x_1 - 5x_2 = -3(4 - x_3) - 5(3 + 3/2x_3 - 1/2x_5) = \\ = -27 - 9/2x_3 + 5/2x_5. \end{aligned} \tag{5.29}$$

L'espressione (5.29) esprime dunque la funzione obiettivo rispetto alla base corrente. Se poniamo $x_F = (0, 0)$ sappiamo che stiamo imponendo che x_B definisca la soluzione aumentata corrispondente al vertice C e l'espressione (5.29) restituisce correttamente il valore $z = 27$. Se invece aumentiamo[4] una delle

[4] Si osservi che le variabili fuori base non possono assumere valori negativi perché questi corrisponderebbero sicuramente a soluzioni aumentate non ammissibili avendo componenti negative.

variabili fuori base la soluzione aumentata corrisponderà a punti prossimi al vertice e l'espressione (5.29) restituisce il nuovo valore della funzione obiettivo. Se, ad esempio, aumentassimo x_5 mantenendo $x_3 = 0$, ci muoveremmo lungo il primo vincolo, $x_1 + x_3 = 4$, verso il vertice D e dalla (5.29) possiamo ricavare che tali soluzioni hanno valore $z = -27 + 5/2x_5$ e sono quindi peggiori della soluzione corrente (vertice C) qualsiasi sia il valore di $x_5 > 0$. Se viceversa aumentassimo x_3 mantenendo $x_5 = 0$, ci muoveremmo lungo il terzo vincolo verso il vertice B e dalla (5.29) possiamo ricavare che tali soluzioni hanno valore $z = -27 - 9/2x_3$ e sono quindi migliori della soluzione corrente qualsiasi sia il valore di $x_3 > 0$. Queste considerazioni ci portano a due conclusioni:

- il vertice C non è ottimo locale perché esistono punti ammissibili vicini cui corrisponde una soluzione migliore rispetto a quella calcolata nel vertice (ad esempio i punti lungo il lato $\overline{CB}$ della regione ammissibile);
- muovendosi lungo il lato $\overline{CB}$, ossia aumentando x_3 con $x_5 = 0$, incontriamo soluzioni ammissibili via via sempre migliori finché non raggiungiamo il vertice B oltre il quale non possiamo spostarci senza uscire dalla regione ammissibile.

Possiamo ora generalizzare le osservazioni intuitive fin qui fatte esaminando l'esempio. Data la base corrente $\mathcal{B} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ possiamo esprimere il sistema di vincoli $Ax = d$ in forma canonica rispetto alla base esplicitando le variabili base x_B in funzione delle variabili fuori base x_F come indicato nella (5.25). Per valutare l'ottimalità della base corrente dobbiamo prendere in considerazione la funzione obiettivo del problema ed in questa esplicitare il contributo dato dalle variabili base e fuori base. In particolare,

$$c^T x = \begin{bmatrix} c_B^T & c_F^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_B \\ x_F \end{bmatrix} = c_B^T x_B + c_F^T x_F, \tag{5.30}$$

da cui, sostituendo ad x_B l'espressione (5.25), si ottiene

$$c^T x = c_B^T B^{-1} d - c_B^T B^{-1} F x_F + c_F^T x_F = \underbrace{c_B^T B^{-1} d}_{\text{costante}} + \underbrace{(c_F^T - c_B^T B^{-1} F)}_{\text{costo ridotto}} x_F. \tag{5.31}$$

Esaminando la (5.31) si può osservare che il primo termine non è altro che il valore della funzione obiettivo calcolato in corrispondenza del vertice associato alla base corrente. Infatti $c_B^T B^{-1} d$ non è altro che il prodotto del costo delle variabili base moltiplicato per il valore di tali variabili nella soluzione base, ossia $B^{-1}d$. Inoltre, in corrispondenza del vertice le $x_F = 0$ e quindi il secondo termine è nullo. L'espressione (5.31) però fornisce il valore della funzione obiettivo anche in corrispondenza di soluzioni non base, ossia in cui le x_F non sono tutte nulle. In questo caso il segno dei coefficienti del vettore $\tilde{c} = c_F^T - c_B^T B^{-1} F$, che è facile verificare abbia $n - m$ elementi uno per ogni variabile x_F, definisce le conseguenze sul valore di tale funzione dell'aumento delle variabili fuori base. Il vettore $\tilde{c}$ è noto come vettore dei *costi ridotti* o dei *costi residui*. Ricordando che stiamo considerando un problema di minimizzazione possiamo osservare che:

- se esiste una variabile fuori base j con $A_j \notin \mathcal{B}$ il cui costo ridotto $\tilde{c}_j$ è negativo allora il vertice corrispondente alla base corrente non è ottimo e facendo aumentare il valore della variabile j il costo della soluzione migliora (ossia diminuisce).
- se per tutte le variabili fuori base j con $A_j \notin \mathcal{B}$ il costo ridotto $\tilde{c}_j$ è positivo o nullo allora il vertice corrispondente alla base corrente è ottimo dato che facendo aumentare il valore della variabile j il costo della soluzione non migliora (ossia aumenta o rimane uguale).

I costi ridotti possono essere interpretati come derivate direzionali della funzione obiettivo rispetto alla variazione delle variabili fuori base. Considerando infatti la (5.31) e facendone la derivata rispetto ad una generica variabile fuori base x_j si ottiene:

$$\frac{\partial c^T x}{\partial x_j} = \frac{\partial(c_B^T B^{-1} d x_B + (c_F^T - c_B^T B^{-1} F) x_F)}{\partial x_j} = 0 + \tilde{c}_j. \tag{5.32}$$

Possiamo quindi enunciare il seguente

Teorema 5.2 (Condizione di ottimalità)**.** *Dato un problema PL, $P = \min\{c^T x, x \in \Re^n, Ax = d\}$ ed una base $\mathcal{B} = \{A_{\beta(1)}, \ldots, A_{\beta(m)}\}$, la corrispondente soluzione base $(x_B, 0)$ con $x_B = B^{-1} d \geq 0$ è ottima se e solo se i costi ridotti delle variabili fuori base $\tilde{c} = c_F^T - c_B^T B^{-1} F$ sono tutti non negativi.*

Ovviamente se la base corrente non è ottima bisognerà determinare una nuova base ed i costi ridotti danno indicazioni utili al fine di individuare variabili fuori base che sia conveniente sostituire a quelle attualmente nella base. Infatti se una variabile fuori base j a costo ridotto negativo attualmente a 0 aumenta il suo valore fino $x_j = \vartheta > 0$ la funzione obiettivo cambia di $\tilde{c}_j \vartheta < 0$ ossia migliora.

Si noti che il costo ridotto delle variabili base è nullo. Infatti il vettore dei costi ridotti è

$$\tilde{c}^T = c^T - c_B B^{-1} A = [\underbrace{c_B^T - c_B B^{-1} B}_{=0} \,|\, \underbrace{c_F^T - c_B B^{-1} F}_{=\tilde{c}_F^T}]. \tag{5.33}$$

Osserviamo infine che se ad una variabile fuori base x_j corrisponde un costo ridotto nullo questo implica che aumentando il valore di tale variabile il valore della funzione obiettivo non cambia e di conseguenza il vertice che si trova all'estremo del lato della regione ammissibile associato a tale variabile ha lo stesso costo di quello da cui si proviene. Questa situazione è stata introdotta nel paragrafo 4.3.5 in cui sono state discusse le soluzioni ottime equivalenti.

5.4 Spostamento da SBA a SBA (Pivoting)

Nel caso in cui la SBA corrispondente alla base $\mathcal{B} = \{A_{\beta(1)}, \ldots, A_{\beta(m)}\}$ corrente non sia ottima esiste almeno una variabile x_j tale che $A_j \notin \mathcal{B}$ tale che $\tilde{c}_j < 0$. A questo punto l'algoritmo del simplesso prevede di "spostarsi"

Supponiamo per semplicità che x_j sia la sola variabile fuori base in tali condizioni. Esamineremo infatti in seguito come scegliere tale variabile nel caso ci sia più di una variabile a costo ridotto negativo.

Dato che la variabile x_j ha costo ridotto negativo è conveniente farle assumere un valore positivo facendola quindi "entrare in base". Ricordando quanto discusso nel paragrafo 5.2.1, questo renderebbe la soluzione aumentata non più coincidente con un vertice del poliedro dato che avrebbe meno di $n - m$ componenti nulle. Occorre quindi definire una nuova base $\mathcal{B}'$ ottenuta da $\mathcal{B}$ inserendo la colonna A_j al posto di una delle colonne attualmente nella base.

Definizione 5.6 (Basi adiacenti)**.** *Due basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ sono adiacenti se differiscono per una colonna.*

È evidente che dalla base corrente è possibile costruire m basi adiacenti ottenute sostituendo A_j a ciascuna delle m colonne attualmente nella base. Consideriamo, ad esempio il problema delle sedie esaminato nel paragrafo precedente. In questo caso la base corrente è $\mathcal{B} = \{A_1, A_2, A_4\}$ corrispondente al vertice $C = (4, 3)$ del problema originale. Il calcolo dei costi ridotti associati alle variabili fuori base restituisce $\tilde{c}_3 = -9/2 < 0$ e $\tilde{c}_5 = 5/2 > 0$ quindi il vertice corrente non è la soluzione ottima del problema e facendo entrare in base la variabile x_3, ossia muovendosi lungo il lato $\overline{BD}$ si ottengono soluzioni migliori. Nella figura 5.5 sono indicate le tre basi adiacenti alla base corrente ossia:

- $\mathcal{B} = \{A_1, A_2, A_3\}$ corrispondente al vertice ammissibile B,
- $\mathcal{B} = \{A_1, A_3, A_4\}$ corrispondente al vertice non ammissibile F,
- $\mathcal{B} = \{A_3, A_2, A_4\}$ corrispondente al vertice ammissibile G.

Dall'esempio appare evidente che solo una delle tre basi che possono essere costruite a partire dalla base corrente corrisponde ad una SBA mentre le altre corrispondono a soluzioni base non ammissibili (SBnA).

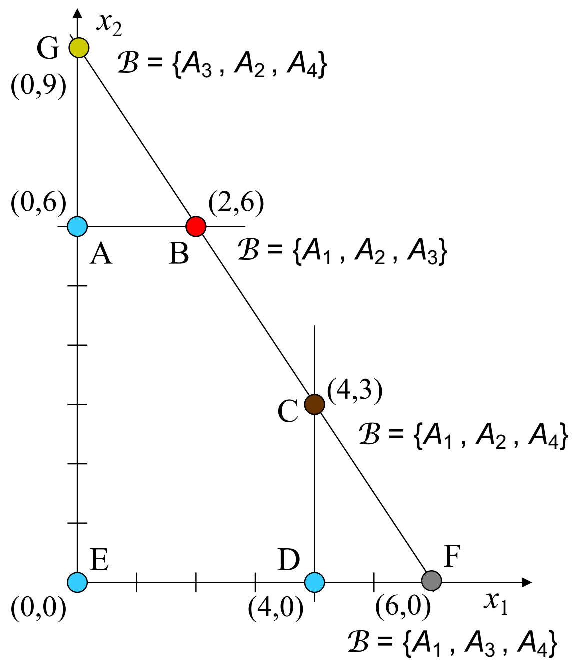


Figura 5.5: Basi Adiacenti.

Chiaramente la costruzione di una base adiacente corrispondente ad un SBnA non è compatibile con l'esecuzione dell'algoritmo del simplesso precedentemente descritto per cui vedremo come, rinunciando alla libertà di scegliere quale variabile abbandona la base, definire una base adiacente alla corrente che corrisponda ad una SBA. Il procedimento che esamineremo è definito *pivoting*.

Data la base corrente $\mathcal{B} = \{A_{\beta(1)}, \dots, A_{\beta(m)}\}$ e la variabile x_j che deve entrare nella base poiché ha $\tilde{c}_{<}0$ la nuova base può essere ottenuta considerando la SBA associata e

- mantenendo uguali a zero tutte le variabili fuori base diverse da x_j
- aumentando x_j il più possibile mantenendo la soluzione base ammissibile.

Per illustrare il procedimento con un esempio concreto riprendiamo la discussione svolta nel paragrafo precedente considerando il problema dell'ottimizzazione della produzione di sedie. A tal proposito ricordiamo che, data la base corrente $\mathcal{B} = \{A_1, A_2, A_4\}$ corrispondente al vertice $C = (4, 3)$, il calcolo dei costi ridotti aveva permesso di stabilire che tale vertice non è la soluzione ottima del problema. Inoltre la variabile fuori base x_3 ha costo ridotto negativo e quindi è vantaggioso far entrare tale variabile nella base. Il sistema di vincoli, in forma canonica rispetto alla base corrente, è dato dalle equazioni (5.26)–(5.28) dalle quali possiamo ricavare le condizioni di ammissibilità della base. Se in tali equazioni poniamo $x_5 = 0$, otteniamo i valori delle variabili attualmente nella base in funzione del valore di x_3. Affinché la soluzione sia ammissibile tutti i valori delle variabili devono essere maggiori o uguali a zero ossia devono valere le seguenti relazioni:

$$x_1 = 4 \quad -x_3 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x_3 \leq \ 4 \tag{5.34}$$
$$x_2 = 3 \quad +3/2x_3 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x_3 \geq -2 \tag{5.35}$$
$$x_4 = 3 \quad -3/2x_3 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x_3 \leq \ 2 \tag{5.36}$$

Da tali relazioni si vede che se x_3 aumenta i valori di x_1 ed X_4 diminuiscono mentre quello di x_4 rimane positivo. Le relazioni (5.34) e (5.36) limitano quindi il massimo aumento di x_3 ed il massimo valore di x_3 compatibile con l'ammissibilità della soluzione è dato dalla relazione (5.36) che impone $x_3 \leq 2$. Infatti per valori maggiori di 2 la variabile x_4 diventerebbe negativa e la soluzione non sarebbe più ammissibile. Si noti poi che imponendo $x_3 = 2$ il valore di x_4 diventa 0 e questo indica che tale variabile "esce" dalla base per effetto dell'ingresso di x_3. In tal caso la nuova base diventa $\mathcal{B} = \{A_1, A_2, A_3\}$. La nuova soluzione base può essere facilmente calcolata dalle relazioni (5.34)–(5.36) ed è $x = (2, 6, 2, 0.0)$ corrispondente al vertice $B = (2, 6)$. Il sistema può essere messo in forma canonica rispetto alla nuova base con semplici operazioni di sostituzione. In particolare dalla relazione (5.28) possiamo ricavare x_3 in funzione delle variabili fuori base x_4 e x_5. Possiamo poi sostituire tale relazione nelle (5.26) e (5.27) e nella (5.29) per ottenere anche x_1 e x_2 e la funzione obiettivo in funzione delle variabili fuori base, ottenendo il sistema

$$-z = -36 \quad +3/2x_4 \quad +x_5 \tag{5.37}$$
$$x_1 = \quad 2 \quad +1/3x_4 \ -1/3x_5 \tag{5.38}$$
$$x_2 = \quad 6 \quad -1/2x_4 \tag{5.39}$$
$$x_3 = \quad 2 \quad -1/3x_4 \ +1/3x_5 \tag{5.40}$$

Osservando i costi ridotti delle variabili fuori base nella (5.37) possiamo verificare che sono entrambi positivi e quindi il vertice corrente $B = (2, 6)$ corrisponde alla soluzione ottima del problema il cui valore è $z = 36$.

Rivediamo ora l'operazione di pivoting con maggiore precisione. Consideriamo il sistema di equazioni in forma canonica rispetto alla base $\mathcal{B} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ espresso dalla (5.25) e supponiamo che la variabile fuori base x_h sia a costo ridotto negativo e quindi sia selezionata per l'ingresso nella base. Ricordando che le altre variabili fuori base rimangono a valore 0, del prodotto $B^{-1}Fx_F$ rimane solo la colonna di $B^{-1}F$ corrispondente alla variabile x_h moltiplicata per tale variabile, ossia

$$x_B = B^{-1}d - B^{-1}Fx_F = B^{-1}d - B^{-1}A_hx_h = \hat{d} - \hat{A}_hx_h \tag{5.41}$$

in cui $\hat{d}$ e $\hat{A}$ indicano rispettivamente il vettore d e la matrice A moltiplicate per l'inversa della matrice di base corrente B^{-1}. Per imporre l'ammissibilità della soluzione corrente occorre quindi per ciascuna variabile base imporre che sia

$$x_{\beta(i)} = \hat{d}_i - \hat{A}_{ih}x_h \geq 0 \qquad i = 1, \ldots, m. \tag{5.42}$$

Nella (5.42) il termine $\hat{d}_i$ è il valore corrente della variabile base $x_{\beta(i)}$ ed è quindi maggiore o uguale a zero. Inoltre la variabile x_h che entra nella base è anch'essa non negativa per cui il soddisfacimento della (5.42) dipende unicamente dal termine $\hat{A}_{ih}$ per il quale abbiamo due casi possibili:

- se $\hat{A}_{ih} \leq 0$ la variabile $x_{\beta(i)}$ rimane positiva qualunque sia il valore di $x_h \geq 0$, ossia la condizione non è restrittiva;

- se $\hat{A}_{ih} > 0$ la condizione è restrittiva e la variabile $x_{\beta(i)}$ rimane positiva solo se $x_h \leq \hat{d}_i/\hat{A}_{ih}$.

Poiché tutte le variabili base devono rimanere ≥ 0 bisogna considerare la condizione (5.42) più restrittiva che corrisponde al valore:

$$\vartheta = \min\left\{\frac{\hat{d}_i}{\hat{A}_{ih}}, i = 1, \ldots, m : \hat{A}_{ih} > 0\right\} = \frac{\hat{d}_\ell}{\hat{A}_{\ell h}}. \tag{5.43}$$

Di conseguenza la variabile x_h entra in base a valore ϑ ed esce dalla base la variabile $x_{\beta(\ell)}$. L'elemento della matrice $\hat{A}$ che si trova in corrispondenza della riga ℓ individuata con la formula (5.43) e della colonna h scelta per l'ingresso nella base si dice *elemento pivot* o *elemento cardine*.

Si noti che se nelle relazioni (5.42) i coefficienti $\hat{A}_{ih}$ sono tutti non positivi, allora qualunque sia il valore di $x_h > 0$ tutte le variabili base rimangono ≥ 0 e quindi x_h può crescere fino a $+\infty$. Tale situazione è quindi indicativa del verificare che il problema da risolvere sia illimitato. Nella figura 5.6 è illustrato un esempio di problema con soluzione ottima illimitata. In tale problema infatti la regione ammissibile F è illimitata ed il gradiente indicato nel caso di funzione obiettivo da massimizzare fa si che la soluzione ottima sia illimitata. Si osservi che nel caso in cui la funzione obiettivo fosse da minimizzare, pur essendo la regione ammissibile illimitata la soluzione ottima sarebbe limitata ed in questo caso coinciderebbe con l'origine.

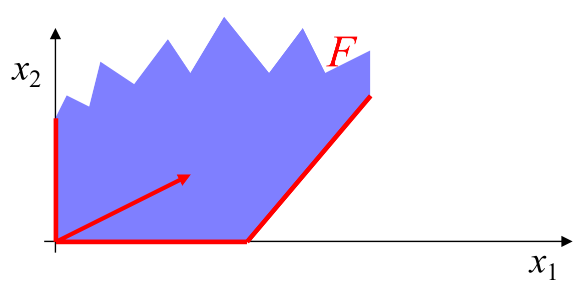


Figura 5.6: Esempio di problema illimitato.

5.5 Soluzioni base degeneri

Quanto discusso nella sezione 5.2.1 sulla costruzione delle soluzioni base implica che una base determini univocamente una soluzione base. Pertanto date due SBA diverse x_a e x_b allora queste sono corrispondenti a due basi $\mathcal{B}^1 \neq \mathcal{B}^2$:

$$x_a \neq x_b \quad \Rightarrow \quad \mathcal{B}_a \neq \mathcal{B}_b. \tag{5.44}$$

Tale implicazione però non vale nel senso opposto ossia date due basi diverse non necessariamente queste corrispondono a SBA diverse

$$\mathcal{B}_a \neq \mathcal{B}_b \quad \not\Rightarrow \quad x_a \neq x_b. \tag{5.45}$$

A titolo di esempio si consideri un problema PL con $n = 5$ variabili e $m = 3$ vincoli, la cui matrice tecnologica A ed il vettore di termini noti d siano i seguenti:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad d = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}. \tag{5.46}$$

Scegliendo la base $\mathcal{B}_a = \{A_1, A_4, A_5\}$ e quindi definendo $\beta(1) = 1, \beta(2) = 4$ e $\beta(3) = 5$ ed imponendo $x_2 = x_3 = 0$, si ottiene la matrice

$$B_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad B_a^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

da cui si ottiene $x_a = B_a^{-1} d = (0, 0, 0, 6, 5)$. Ora, scegliendo una base diversa $\mathcal{B}_b = \{A_3, A_4, A_5\}$ e quindi definendo $\beta(1) = 3, \beta(2) = 4$ e $\beta(3) = 5$ e quindi imponendo $x_1 = x_2 = 0$, si ottiene la matrice

$$B_b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad B_b^{-1} = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

da cui si ottiene $x_b = B_b^{-1} d = (0, 0, 0, 6, 5) = x_a$. Dall'esempio si vede che due basi diverse corrispondono alla stessa soluzione base, in questo case entrambe ammissibili. Esaminando le SBA x_a ed x_b si può osservare che hanno entrambe più di $n - m = 2$ componenti uguali a zero. Le SBA con questa caratteristica sono dette

Definizione 5.7. *SBA degeneri una SBA si dice* degenere *se contiene più di* $n \breve{\ } m$ *componenti uguali a zero*

e vale il seguente teorema

Teorema 5.3. *Se 2 basi distinte* $\mathcal{B}_a$ *e* $\mathcal{B}_b$ *corrispondono alla stessa SBA* x*, questa è degenere.*

Dim.: Poiché x è la SBA corrispondente a $\mathcal{B}_a$ deve avere componenti nulle per le variabili non in tale base e lo stesso deve valere per le variabili fuori base rispetto a $\mathcal{B}_b$. Essendo le due basi diverse esiste almeno una variabile che appartiene ad una base ed è fuori base per l'altra e tale variabile nella SBA deve necessariamente avere valore nullo. □

Dal punto di vista algoritmico la degenerazione della base si verifica quando nella scelta della variabile che entra nella base, effettuato utilizzando la formula (5.43), il valore minimo corrisponde a più di una variabile presente nella base. In tal caso facendo entrare nella base la variabile prescelta a valore ϑ più di una variabile della base precedente diventa uguale a zero. Tali variabili sono tutte candidate per l'uscita dalla base e facendo uscire dalla base una di queste, le altre rimarranno in base a valore zero definendo una condizione di degenerazione della base.

In base a quanto fin qui discusso possiamo osservare che, in presenza di degenerazione della base, cambiando la base non è detto che si cambi SBA e quindi che ci si sposti da un vertice ad un altro del poliedro. Infatti è facile verificare che in presenza di una base degenere, nell'eseguire una operazione di pivoting il valore minimo del rapporto $\frac{\hat{d}_i}{\hat{A}_{ih}}$ della formula (5.43) corrisponderà ad una delle variabili in base a valore zero, ossia con $\hat{d}_i = 0$ e di conseguenza si avrà $\vartheta = 0$ ed il valore della funzione obiettivo non cambierà rispetto all'iterazione precedente. Tale caratteristica è indicativa di una situazione patologica dei problemi PL che può causare un problema di convergenza dell'algoritmo del simplesso, dato che può succedere che l'algoritmo cicli indefinitamente tra le basi degeneri corrispondenti al vertice corrente. In questo caso si è in presenza della cosiddetta "degenerazione ciclante" che fortunatamente può essere evitata con opportuni accorgimenti per la scelta delle variabili coinvolte nell'operazione di pivoting, quali la regola di Bland discussa nel seguito.

5.5.1 Interpretazione geometrica della degenerazione

Dal punto di vista modellistico la degenerazione si verifica quando il vertice corrente risulta essere sovradefinito come illustrato nella figura 5.7 in cui il vertice A risulta essere all'intersezione dei tre vincoli v_1, v_2 e v_3 del problema. Si noti che il problema illustrato ha due variabili decisionali e tre vincoli ed una volta posto in forma standard avrà complessivamente $n = 5$ variabili decisionali, ossia le due originali e le tre variabili slack dei vincoli, e $m = 3$ vincoli, oltre a quelli di non negatività delle variabili. Come già discusso un vertice di tale poliedro in $\Re^2$ si trova in generale all'intersezione di $n - m$ vincoli del problema le cui variabili slack associate avranno valore zero nella corrispondente soluzione aumentata. Nel caso del vertice A della figura le variabili slack che sono a zero nella soluzione aumentata sono in realtà tre e non solo due come per gli altri vertici del poliedro. Due di tali variabili slack saranno fuori base ma la terza rimarrà in base a valore zero e quindi la soluzione base corrispondente è degenere.

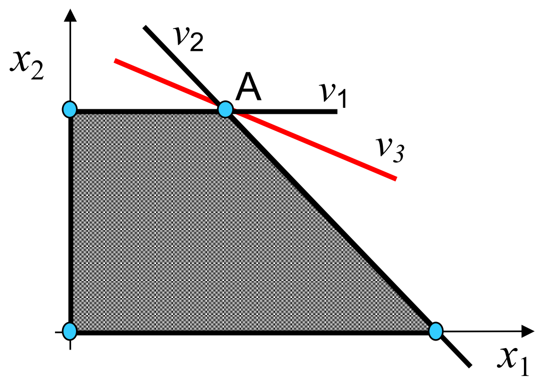


Figura 5.7: Esempio di vertice sovradefinito che causa degenerazione della base.

Come osservato nel paragrafo 4.3.3 il vincolo v_3 è in realtà ridondante e potrebbe essere rimosso senza alterare la regione ammissibile e, di conseguenza, evitando il rischio di degenerazione della base. Purtroppo l'individuazione di vincoli ridondanti, che è immediata dal disegno della regione ammissibile per un problema con due o tre variabili decisionali, non è in generale possibile per problemi generali con molte variabili e vincoli in cui la presenza di vincoli ridondanti è frequente nelle relative formulazioni. In tali casi è quindi spesso inevitabile che in una delle iterazioni dell'algoritmo del simplesso si incontri una base degenere.

5.5.2 Regola di Bland

La regola di Bland stabilisce come scegliere le variabili interessate da una operazione di pivoting in modo che sia evitato il rischio di degenerazione ciclante. In pratica garantisce di esaminare le basi in ordine lessicografico in modo da evitare di esaminare due volte la stessa base e quindi evitando i rischi di cicli in caso di degenerazione della base per l'algoritmo del simplesso. Data la base corrente Una operazione di pivoting è completamente definita individuando la coppia di variabili coinvolte: la prima è la variabile fuori base scelta per l'ingresso nella base e la seconda è la variabile attualmente in base che deve uscirne. La regola di Bland prevede due passi per definire tali variabili:

1. **Scelta della variabile che entra nella base:** si sceglie la variabile a costo ridotto negativo di **indice minimo**.

2. **Scelta della variabile che esce dalla base:** si sceglie la variabile che minimizza il rapporto $\frac{\hat{d}_i}{\hat{A}_{ih}}, i = 1, \ldots, m : \hat{A}_{ih} > 0$ (si veda l'equazione (5.43)). In caso di parità nel calcolo del minimo, **esce dalla base la variabile di indice minimo**.

Più precisamente la variabile $\beta(\ell)$ che esce dalla base è determinata dalla

$$\beta(\ell) = \min\left\{\beta(i) : \hat{A}_{ih} > 0, \frac{\hat{d}_i}{\hat{A}_{ih}} \le \frac{\hat{d}_k}{\hat{A}_{kh}} \quad \forall i,k = 1,\dots,m : \hat{A}_{kh} > 0\right\}. \quad (5.47)$$

5.6 Determinazione della base iniziale: Metodo delle due fasi

Per completare la descrizione dell'algoritmo del simplesso vediamo come determinare la base iniziale ammissibile da cui partire. Negli esempi fin qui visti la base iniziale ammissibile era facile da determinare in quanto i problemi esaminati erano caratterizzati da vincoli sotto forma di disequazioni di tipo minore o uguale e termini noti negativi. In tal caso è facile verificare che la base iniziale costituita dalle variabili slack dei vincoli corrisponde ad una soluzione base ammissibile in cui le variabili slack assumono i valori dei corrispondenti termini noti. In generale però non è detto che il problema offra facilmente una base corrispondente ad una SBA da cui partire, sempre che questa esista ossia che il problema non sia impossibile, per cui occorre un metodo generale in grado di determinare tale base in modo automatico. Il metodo che illustreremo è denominato *metodo delle due fasi* ed in una prima fase risolve un problema ausiliario la cui soluzione è la base iniziale che, nella seconda fase, è utilizzata per inizializzare l'algoritmo del simplesso.

5.6.1 Fase 1

Consideriamo un problema PL di minimizzazione espresso in forma standard $P = \min\{c^T x, x \in \Re^n, Ax = d, x \geq 0\}$, e supponiamo che $d \geq 0$, eventualmente moltiplicando per -1 i vincoli con termine noto negativo. Nella prima fase dell'algoritmo viene cercata una base, ossia un insieme di m colonne di A tra loro linearmente indipendenti, che corrisponda ad una soluzione base ammissibile. Se tale base non è immediatamente disponibile, ad esempio riconoscendo in A delle colonne che formino una matrice identità, viene definito un problema ausiliario in cui vengono inserite m variabili aggiuntive x^a una per ogni vincolo.

$$\begin{cases} Ax = d \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} Ax + Ix^a = d \\ x, x^a \geq 0 \end{cases} \quad (5.48)$$

In tale problema è facile verificare che le variabili x^a costituiscono una base dato che le colonne a queste corrispondenti sono una matrice identità. Inoltre, dato che $d \geq 0$ la soluzione base $x^a = d$ e $x = 0$ è una soluzione base ammissibile. Ovviamente tale soluzione base non contiene nessuna variabile originale x per cui non è un punto di partenza per l'algoritmo del simplesso. È però facile verificare che una soluzione del problema ausiliario in cui $x^a = 0$ e $x \geq 0$ è una soluzione base ammissibile del problema originario.

Per ricercare tale soluzione possiamo utilizzare delle operazioni di pivoting per muoverci dalla soluzione base corrente $x^a = d$ ad una soluzione base che contenga solo le variabili originali, ossia in cui $x^a = 0$. A tal fine per guidare l'algoritmo alla ricerca di una base che non contenga le variabili x^a possiamo utilizzare una funzione obiettivo artificiale da minimizzare e che contenga solo tali variabili. Il problema di Fase 1 è quindi:

$$\begin{cases} \min w = x^a \\ Ax + Ix^a = d \\ x, x^a \geq 0 \end{cases} \tag{5.49}$$

Lo scopo di tale problema di ottimizzazione è proprio quello di rimuovere dalla base le variabili x^a sostituendole con variabili originali x che non comparendo nella funzione obiettivo artificiale non danno contributo. Il problema artificiale è chiaramente un problema PL di cui disponiamo di una SBA iniziale $x^a = d$ e che può essere risolto con l'algoritmo del simplesso. La risoluzione del problema artificiale di Fase 1 può portare a diversi casi che esamineremo nel dettaglio.

Caso 1 ($w > 0$): Se la soluzione ottima del problema di Fase 1 ha un valore della funzione obiettivo positivo, $w > 0$, significa che il sistema a destra nell'equazione (5.48) non è risolubile utilizzando le sole x e quindi il problema originale P è **impossibile**.

Caso 2a ($w = 0$ e base ottima con solo x): Se la soluzione ottima del problema di Fase 1 ha un valore della funzione obiettivo nullo e la base è costituita solo da variabili originali x allora tale base è una SBA del problema originale e possiamo utilizzarla per inizializzare la Fase 2 dell'algoritmo.

Caso 2b ($w = 0$ e base ottima con anche x^a): Se la soluzione ottima del problema di Fase 1 ha un valore della funzione obiettivo nullo e nella base sono ancora presenti delle variabili x^a, tale base è necessariamente degenere dato che le variabili in base devono avere valore nullo affinché la funzione obiettivo w valga zero. Per eliminare tali variabili possiamo fare ulteriori operazioni di pivoting progettate per sostituire le variabili x^a eventualmente presenti in base con variabili originali. A tal fine consideriamo un vincolo del problema in cui sia attualmente in base una variabile x^a. Supponiamo che tale vincolo sia l'i-simo e che la variabile in base su tale vincolo sia x^a_h. La corrispondente riga del sistema in forma canonica rispetto alla base corrente è

$$x^a_h = \hat{d}_i - \hat{A}_{ij} x_j \tag{5.50}$$

in cui per semplicità sono rappresentate solo le colonne corrispondenti alle variabili originali e non quelle corrispondenti alle variabili artificiali x^a che comunque non saranno mai interessate ad ulteriori operazioni di pivoting in questa fase.

Possono presentarsi due ulteriori casi:

Caso 2b$_1$ (pivoting efficace): se sulla riga c'è almeno un coefficiente $\hat{A}_{ij} \neq 0$ allora può essere eseguita una operazione di pivoting facendo entrare in base la variabile x_j corrispondente a tale coefficiente. Al termine di tale operazione di pivoting la variabile x_h^a uscirà dalla base e sarà sostituita dalla variabile x_j. Si noti che, diversamente dalle operazioni di pivoting che si eseguono nell'algoritmo del simplesso, in questo caso possono essere considerati anche elementi cardine $\hat{A}_{ij}$ con valori negativi dato che, essendo la variabile attualmente in base su tale riga uguale a zero questa può anche essere divisa per un valore negativo senza rendere la nuova soluzione base inammissibile (ossia negativa).

Caso 2b$_2$ (vincolo ridondante): se sulla riga tutti i coefficienti $\hat{A}_{ij}$ sono nulli, allora il vincolo corrispondente a tale riga è combinazione lineare degli altri vincoli del problema e la matrice A non ha rango pieno come ipotizzato per l'applicazione dell'algoritmo. In tal caso il vincolo può essere rimosso dal problema eliminando in tal modo la riga e la variabile x_h^a attualmente in base.

In entrambi i casi se tutte le variabili x^a sono uscite dalla base si può procedere con la Fase 2, altrimenti si eseguono ulteriori operazioni di pivoting del Caso 2b.

5.6.2 Fase 2

Nel caso il problema non sia impossibile (Caso 1) e dopo aver eventualmente eliminato le variabili x^a ancora presenti nella base ottima degenere di Fase 1, la base corrente è costituita da sole variabili originale e può quindi essere utilizzata per inizializzare l'algoritmo del simplesso. A questo punto possiamo eliminare dal problema le variabili artificiali x^a aggiunte nella Fase 1, possiamo ripristinare la funzione obiettivo originale del problema e possiamo proseguire con l'esecuzione dell'algoritmo del simplesso sul problema originale.

5.7 Versione completa dell'algoritmo del simplesso

Nel seguito riportiamo lo pseudo-codice dell'algoritmo del simplesso algebrico descritto nei paragrafi precedenti. Per brevità è stata omessa la descrizione della Fase 1 eventualmente necessaria alla definizione della base inziale presentata nel paragrafo 5.6.1.

Algorithm 5 Versione completa dell'algoritmo del simplesso.

1: **procedure** SIMPLEX((c, A, d))
Inizializzazione:
2: sia $\mathcal{B} = \{A_{\beta(1)}, \ldots, A_{\beta(m)}\}$ una base del sistema $Ax = d$ corrispondente ad una SBA, eventualmente determinata con la Fase 1;
3: $ottimo \leftarrow false$;
4: $illimitato \leftarrow false$;
5: **repeat**
6: $B \leftarrow [A_{\beta(1)}, \ldots, A_{\beta(m)}]$
7: $x^* \leftarrow \begin{bmatrix} x_B^* \\ x_F^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1}d \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{d} \\ 0 \end{bmatrix}$ ▷ calcola la SBA
Test di ottimalità:
8: $\tilde{c} \leftarrow c_F^T - c_B^T B^{-1} F$ ▷ calcola i costi ridotti
9: **if** $\tilde{c}_h = c_h^T - c_B^T B^{-1} A_h \geq 0, \quad \forall A_h \notin \mathcal{B}$ **then**
10: $ottimo \leftarrow true$;
11: **else**
Pivoting (con regola di Bland):
12: $h \leftarrow \min\{j : \tilde{c}_j < 0 \quad \forall A_j \notin \mathcal{B}\}$ ▷ entra in base
13: **if** $\hat{A}_{ij} \leq 0 \quad \forall i = 1, \ldots, m$ **then**
14: $illimitato \leftarrow true$
15: **Break** ▷ vai a 22:
16: **end if**
17: $\ell \leftarrow \arg\min \left\{ \frac{\hat{d}_i}{\hat{A}_{i,h}}, i = 1, \ldots, m : \hat{A}_{i,h} > 0 \right\}$ ▷ esce dalla base
in caso di parità ℓ tale che $\beta(\ell)$ variabile in base di indice minimo
$\beta(\ell) \leftarrow \min \left\{ \beta(i) : \hat{A}_{ih} > 0, \frac{\hat{d}_i}{\hat{A}_{ih}} \leq \frac{\hat{d}_k}{\hat{A}_{kh}} \quad \forall i, k = 1, \ldots, m : \hat{A}_{kh} > 0 \right\}$
Aggiornamento base:
18: $\mathcal{B} = \mathcal{B} \setminus A_{\beta(\ell)} \cup A_h$
19: $\beta(\ell) = h$
20: ordina il vettore β per valori crescenti
21: **end if**
22: **until** $ottimo = true$ **or** $illimitato = true$
23: **return** x (soluzione ottima)
24: **end procedure**

5.8 Esempi di Applicazione dell'Algoritmo del Simplesso

5.8.1 Esempio 1

Si consideri il problema

$$\max z = \quad x_1 \quad +x_2 \tag{5.51}$$

$$\text{s.t.} \quad 6x_1 \quad +4x_2 \quad \leq 24 \tag{5.52}$$

$$3x_1 \quad -2x_2 \quad \leq 6 \tag{5.53}$$

$$x_1, \quad x_2 \quad \geq 0 \tag{5.54}$$

la cui espressione in forma standard è

$$-\min -z = \quad -x_1 \quad -x_2 \tag{5.55}$$

$$\text{s.t.} \quad 6x_1 \quad +4x_2 \; +x_3 \quad = 24 \tag{5.56}$$

$$3x_1 \quad -2x_2 \quad +x_4 \quad = 6 \tag{5.57}$$

$$x_1, \quad x_2, \; x_3, \; x_4 \quad \geq 0 \tag{5.58}$$

La regione ammissibile del problema è illustrata in figura 5.8.

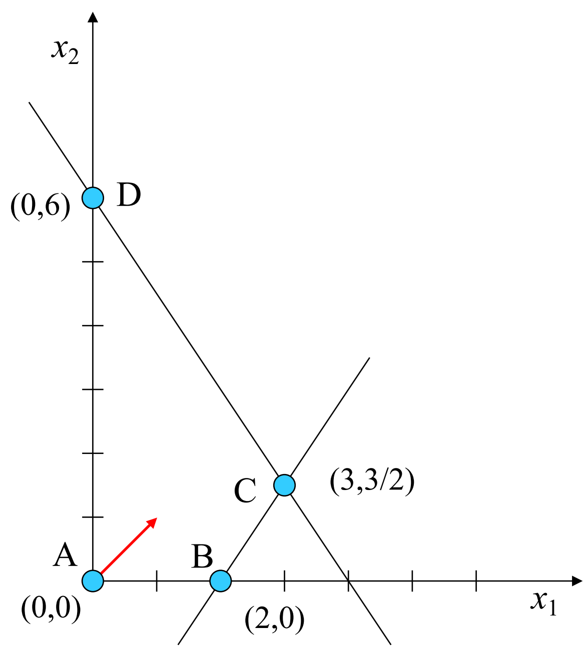


Figura 5.8: Regione Ammissibile del problema PL.

Esaminando il problema in forma standard (5.55)-(5.58) è possibile verificare facilmente che le colonne A_3 e A_4 sono

1. linearmente indipendenti, in quanto costituiscono una matrice identità, e pertanto possono essere una base;

2. corrispondenti ad una soluzione base ammissibile perché i termini noti sono entrambi non negativi.

Pertanto la base $\mathcal{B} = \{A_3, A_4\}$ con $\beta(1) = 3$ e $\beta(2) = 4$ è una base iniziale corretta per l'algoritmo del simplesso e non è necessario applicare la Fase 1 per determinarla.

Iterazione 1

Data la base corrente la matrice di base e quella corrispondente alle variabili fuori base sono:

$$B = [A_3, A_4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = B^{-1} \qquad F = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Utilizzando la formula

$$x^* \leftarrow \begin{bmatrix} x_B^* \\ x_F^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1}d \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{d} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.59}$$

è possibile calcolare le $x_B = B^{-1}d = (24, 6)$ e la SBA completa $x = (0, 0, 24, 6)$ che corrisponde al vertice $A = (0, 0)$ in figura 5.8. La soluzione corrente ha valore $z = 0$.

I costi ridotti sono definiti dalla relazione

$$\tilde{c} = c_F^T - c_B^T B^{-1} F \tag{5.60}$$

che, utilizzando le matrici attuali diventa

$$\tilde{c} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix}$$

da cui è possibile verificare che la SBA corrente non è ottima essendovi almeno una variabile fuori base a costo ridotto negativo.

Utilizzando la regola di Bland per l'operazione di pivoting necessaria all'aggiornamento della base si vede che la variabile che entra nella base è x_1, dato che è quella di indice minimo tra le variabili fuori base a costo ridotto negativo. Per determinare la variabile che esce dalla base si applica la formula

$$\beta(\ell) = \min \left\{ \beta(i) : \hat{A}_{ih} > 0, \frac{\hat{d}_i}{\hat{A}_{ih}} \leq \frac{\hat{d}_k}{\hat{A}_{kh}} \quad \forall i, k = 1, \ldots, m : \hat{A}_{kh} > 0 \right\} \tag{5.61}$$

in cui, essendo $\hat{d} = (24, 6)$ e $\hat{A_1)} = B^{-1}A_1 = A_1 = (6, 3)$, si vede che il rapporto minimo tra $(24/6, 6/3)$ corrisponde al secondo vincolo. Su tale vincolo è in base la variabile $x_{\beta(2)} = x_4$ che esce dalla base.

Iterazione 2

La base corrente è ora $\mathcal{B} = \{A_1, A_3\}$ con $\beta = \{1, 3\}$ e le corrispondenti matrici sono:

$$B = [A_1, A_3] = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \qquad F = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Utilizzando la formula 5.59 è possibile calcolare le $x_B = B^{-1}d = (2, 12)$ e la SBA completa $x = (2, 0, 12, 0)$ che corrisponde al vertice $B = (2, 0)$ in figura 5.8. La soluzione corrente ha valore $z = 2$.

I costi ridotti sono definiti dalla relazione (5.60) che, utilizzando le matrici attuali diventa

$$\tilde{c} = c_F^T - c_B^T B^{-1} F = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1/3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5/2 & 1/3 \end{bmatrix}$$

da cui è possibile verificare che la SBA corrente non è ottima essendovi almeno una variabile fuori base a costo ridotto negativo.

Utilizzando la regola di Bland per l'operazione di pivoting necessaria all'aggiornamento della base si vede che la variabile che entra nella base è x_2, dato che è quella di indice minimo tra le variabili fuori base a costo ridotto negativo. Per determinare la variabile che esce dalla base si applica la formula (5.61) in cui, essendo $\hat{d} = (2, 12)$ e $\hat{A_2)} = B^{-1}A_2 = (-2/3, 8)$, si vede che il rapporto minimo 12/8 corrisponde al secondo vincolo. Su tale vincolo è in base la variabile $x_{\beta(2)} = x_3$ che esce dalla base. Si noti che nel calcolo del rapporto minimo il primo vincolo è stato ignorato dato che il valore $-2/3$ a questo corrispondente non è positivo.

Iterazione 3

La base corrente è ora $\mathcal{B} = \{A_1, A_2\}$ con $\beta = \{1, 2\}$ e le corrispondenti matrici sono:

$$B = [A_1, A_3] = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, \qquad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/12 & 1/6 \\ 1/8 & -1/4 \end{bmatrix}, \qquad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Utilizzando la formula 5.59 è possibile calcolare le $x_B = B^{-1}d = (3, 3/2)$ e la SBA completa $x = (3, 3/2, 0, 0)$ che corrisponde al vertice $C = (3, 3/2)$ in figura 5.8. La soluzione corrente ha valore $z = 9/2$.

I costi ridotti sono definiti dalla relazione (5.60) che, utilizzando le matrici attuali diventa

$$\tilde{c} = c_F^T - c_B^T B^{-1} F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/12 & 1/6 \\ 1/8 & -1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/24 & -1/12 \end{bmatrix}$$

da cui è possibile verificare che la SBA corrente non è ottima essendovi almeno una variabile fuori base a costo ridotto negativo.

Utilizzando la regola di Bland per l'operazione di pivoting necessaria all'aggiornamento della base si vede che la variabile che entra nella base è x_4, dato che è quella di indice minimo tra le variabili fuori base a costo ridotto negativo. Per determinare la variabile che esce dalla base si applica la formula (5.61) in cui, essendo $\hat{d} = (3, 3/2)$ e $\hat{A_4}) = B^{-1}A_4 = (1/6, -1/4)$, si vede che il rapporto minimo $3 * 6$ corrisponde al primo vincolo. Su tale vincolo è in base la variabile $x_{\beta(1)} = x_1$ che esce dalla base. Si noti che nel calcolo del rapporto minimo il secondo vincolo è stato ignorato dato che il valore $-1/4$ a questo corrispondente non è positivo.

Iterazione 4

La base corrente è ora $\mathcal{B} = \{A_2, A_4\}$ con $\beta = \{2, 4\}$ e le corrispondenti matrici sono:

$$B = [A_2, A_4] = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad F = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Utilizzando la formula 5.59 è possibile calcolare le $x_B = B^{-1}d = (6, 18)$ e la SBA completa $x = (0, 6, 0, 18)$ che corrisponde al vertice $D = (0, 6)$ in figura 5.8.

I costi ridotti sono definiti dalla relazione (5.60) che, utilizzando le matrici attuali diventa

$$\tilde{c} = c_F^T - c_B^T B^{-1} F = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}$$

da cui è possibile verificare che la SBA corrente è ottima dato che tutte le variabili fuori base hanno costo ridotto maggiore o uguale a zero. La soluzione ottima determinata ha valore $z = 6$.

5.9 La forma tableau

La forma tableau è una rappresentazione tabellare dei dati di un problema PL che rende più agevole la risoluzione dei problemi con l'algoritmo del simplesso.

Il tableau viene inizializzato con i dati del problema originale come illustrato nella tabella seguente

	0	x_1 x_2 $\dots$ x_n
0	0	c^T
1		
$\dots$	d	A
m		

Nel seguito la prima riga del tableau corrispondente alla funzione obiettivo è indicata come riga 0. Analogamente la prima colonna corrispondente ai termini noti è indicata come colonna 0.

Ora consideriamo che sia data una base del sistema e per semplicità questa coincida con le prime m colonne della matrice A, ossia $\mathcal{B} = \{A_1, \ldots, A_m\}$

$$A = [\underbrace{A_1, \ldots, A_m}_{\text{in base}} \,|\, \underbrace{A_{m+1}, \ldots, A_n}_{\text{fuori base}}] = [B|F]$$

Il problema PL con tutti i dati può essere rappresentato come segue

$$\left\{ \begin{array}{cccc} z & = & c_B^T x_B & + c_F^T x_F \\ d & = & B x_B & + F x_F \end{array} \right. \tag{5.62}$$

Il tableau quindi può essere riscritto esplicitando la base

0	c_B^T	c_F^T
d	B	F

Il medesimo sistema in forma canonica rispetto alla base $\mathcal{B} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ conterrà nella prima riga il valore corrente della SBA e i costi ridotti, e nella parte rimanente i valori delle variabili base rispetto alle variabili fuori base come mostrato nei paragrafi precedenti.

$$\left\{ \begin{array}{cccc} -c_B^T B^{-1} d & = & 0 & + \tilde{c}_F^T x_F \\ B^{-1} d & = & B^{-1} B x_B & + B^{-1} F x_F \end{array} \right. \tag{5.63}$$

Riportando le medesime informazioni nel tableau si ottiene

$-c_B^T B^{-1} d$	0	$\tilde{c}_F^T$
$B^{-1} d$	$B^{-1} B = I$	$B^{-1} F$

(5.64)

Quindi un tableau che contiene i dati del problema in forma canonica rispetto ad una base contiene tutte le informazioni necessarie per eseguire le operazioni richieste dall'algoritmo del simplesso. In particolare:

- Nella prima riga:
  - nella prima colonna il valore corrente della funzione obiettivo, cambiato di segno;
  - nelle colonne delle variabili base dei valori a 0;
  - nelle colonne delle variabili fuori base i corrispondenti costi ridotti.
- Nelle righe corrispondenti ai vincoli:
  - nella prima colonna il valore corrente delle variabili in base $B^{-1}d = \hat{d}$
  - nelle colonne delle variabili base una matrice identità
  - nelle colonne delle variabili fuori base i corrispondenti coefficienti della matrice $B^{-1}F = \hat{F}$

Per ricondurci dal tableau con i dati iniziali ad un tableau che contiene le informazioni del problema in forma canonica è possibile manipolare il tableau stesso mediante operazioni elementari di riga che è ben noto trasformano un sistema in un sistema equivalente. In particolare le operazioni elementari di riga che possiamo utilizzare sono:

- moltiplicazione di una riga per una costante;
- somma algebrica di righe eventualmente moltiplicate per una costante.

Dato il tableau contenente i dati iniziali, note le variabili della base desiderata, possiamo quindi effettuare su di esso operazioni elementari di riga per:

- azzerare i costi delle variabili base nella prima riga
- trasformare i coefficienti della matrice B in una matrice identità.

É possibile verificare che ottenendo tale trasformazione sulle colonne di base del tableau, nelle colonne rimanenti sono presenti le informazioni del sistema in forma canonica come rappresentato nel tableau (5.64).

Per esemplificare tale trasformazione consideriamo ancora il problema di produzione di sedie il cui modello espresso in forma standard è:

$$
\begin{array}{llllllll}
-\min & -3x_1 & -5x_2 & & & & & (5.65)\\
\text{s.t.} & x_1 & & +x_3 & & & = 4 & (5.66)\\
 & & +x_2 & & +x_4 & & = 6 & (5.67)\\
 & 3x_1 & +2x_2 & & & +x_5 & = 18 & (5.68)\\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq 0 & (5.69)
\end{array}
$$

Il tableau iniziale corrispondente è quindi

$$
\begin{array}{c|c|ccccc|}
 & -z & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\
\cline{2-7}
r_0 & 0 & -3 & -5 & 0 & 0 & 0 \\
\cline{2-7}
r_1 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
r_2 & 6 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
r_3 & 18 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \\
\cline{2-7}
\end{array}
\tag{5.70}
$$

Si può osservare che tale tableau è già in forma canonica rispetto alla base $\mathcal{B} = \{A_3, A_4, A_5\}$ ma supponiamo di volerlo mettere in forma canonica rispetto alla base $\mathcal{B} = \{A_1, A_2, A_3\}$. A tal fine possiamo osservare che la colonna corrispondente alla variabile x_3 è già nella forma desiderata, contenendo un 0 nella prima riga e la prima colonna della matrice identità nelle righe successive. Dovremo quindi manipolare le due colonne corrispondenti ad x_1 e x_2 per azzerare i coefficienti nella prima riga e definire le rimanenti colonne della matrice identità.

Per azzerare il coefficiente nella prima riga della colonna x_1, che attualmente vale 3 possiamo sommare a tale riga la riga 3 corrispondente all'ultimo vincolo da cui si ottiene.

$$
\begin{array}{c|c|ccccc|}
 & -z & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\
\cline{2-7}
r_0 & 18 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \\
\cline{2-7}
r_1 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
r_2 & 6 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
r_3 & 18 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \\
\cline{2-7}
\end{array}
\tag{5.71}
$$

e successivamente possiamo sommare la riga 2 moltiplicata per 3 ottenendo

$$
\begin{array}{c|c|ccccc|}
 & -z & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\
\cline{2-7}
r_0 & 36 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\
\cline{2-7}
r_1 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
r_2 & 6 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
r_3 & 18 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \\
\cline{2-7}
\end{array}
\tag{5.72}
$$

In questo modo abbiamo completato il primo passo della trasformazione ed abbiamo portato a zero i coefficienti della riga 0 per le variabili della base desiderata. Di conseguenza nella colonna 0 troviamo il valore della SBA del problema in forma standard cambiato di segno (ossia $-z = 36$) e nelle colonne delle variabili fuori base i corrispondenti costi ridotti.

Trasformiamo ora la parte rimanente del tableau per costruire le colonne della matrice identità mancanti. Osservando che la colonna x_2 contiene uno zero sulla prima riga ed un 1 sulla seconda riga, per completare la trasformazione di tale colona è sufficiente azzerare il coefficiente della terza riga. A tal fine possiamo sottrarre dalla riga 3 la riga 2, moltiplicata per 2, ottenendo

$$\begin{array}{c|c|ccccc|} & -z & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \cline{2-7} r_0 & 36 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ \cline{2-7} r_1 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ r_2 & 6 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ r_3 & 6 & 3 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ \cline{2-7} \end{array} \tag{5.73}$$

Dobbiamo infine trasformare la colonna x_1 azzerando il coefficiente nella riga 1 e portando a 1 quello della riga 3. A tal fine possiamo dapprima dividere per 3 la terza riga, ottenendo

$$\begin{array}{c|c|ccccc|} & -z & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \cline{2-7} r_0 & 36 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ \cline{2-7} r_1 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ r_2 & 6 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ r_3 & 2 & 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \cline{2-7} \end{array} \tag{5.74}$$

e successivamente sottrarre dalla riga 1 la riga 3 ottenendo

$$\begin{array}{c|c|ccccc|} & -z & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \cline{2-7} & 36 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ \cline{2-7} x_3 & 2 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ x_2 & 6 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ x_1 & 2 & 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \cline{2-7} \end{array} \tag{5.75}$$

Esaminando il tableau (5.75) si può verificare che in base alle posizioni degli 1 nella matrice identità si può individuare la riga in cui le variabili base sono esplicitate e quindi la riga nella quale si vede il loro valore attuale in colonna 0. In particolare la colonna in base sulla riga 1 è x_3 che vale quindi 2, la colonna in base sulla riga 2 è x_2 che vale 6 e la colonna in base sulla riga 3 è x_1 che vale 2. La SBA corrente è quindi $(2, 6, 2, 0, 0)$ e vale, per il problema in forma standard, -36. Infine esaminando i costi ridotti delle variabili fuori base si può verificare che a SBA corrente è ottima dato che sono entrambi non negativi.

5.9.1 Inversa della base ricavabile dal tableau NEW: (Ver 5.0)

Ricordando che un tableau in forma canonica rispetto alla base corrente è il tableau iniziale moltiplicato per l'inversa della base stessa, è facile verificare che nelle colonne della base iniziale che corrispondono ad una matrice identità possono essere lette le colonne dell'inversa della base corrente. In particolare in figura 5.9 è illustrato il tableau iniziale in cui le colonne della base iniziale sono una matrice identità e le colonne di una base differente, ad esempio la base ottima, che per comodità sono assunte completamente diverse da quelle della base iniziale. Nella medesima figura è illustrato il tableau finale nel quale è possibile reperire la matrice di base elle colonne della base iniziale.

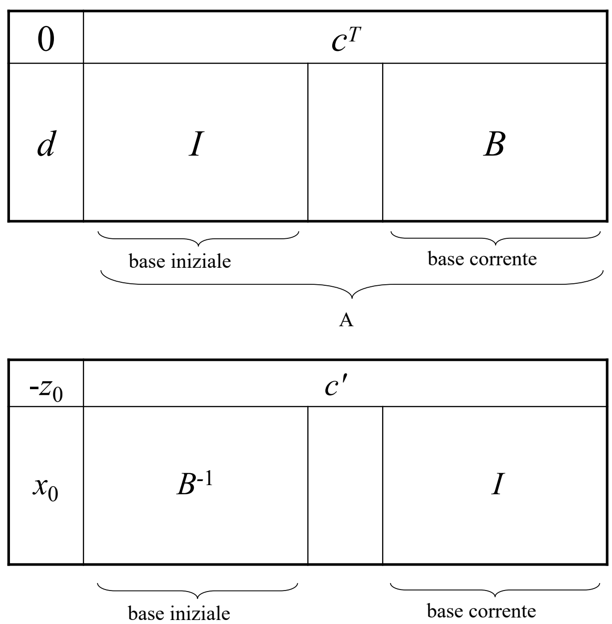


Figura 5.9: Inversa della base corrente nel tableau.

Si osservi che se la base iniziale non fosse disponibile nel problema originale e fosse stato necessario applicare la Fase 1 per determinarla, al fine di ottenere l'inversa è necessario mantenere le colonne delle variabili artificiali anche nella Fase 2 ed eseguire le operazioni di pivoting anche su di esse.

5.9.2 Algoritmo del simplesso in forma tableau

Descriviamo ora l'evoluzione dell'algoritmo del simplesso adottando la rappresentazione in forma tableau. A tal fine definiamo una matrice Y di dimensione $(m+1) \times (n+1)$ che conterrà gli elementi del tableau corrente.

Inizializzazione:

La matrice Y viene inizializzata come segue:

- $y_{00} = 0$;
- costi nella riga 0: $y_{0j} = c_j, j = 1, \ldots, n$;
- termini noti nella colonna 0: $y_i = d_i, i = 1, \ldots, m$;
- coefficienti della matrice tecnologica nel resto della matrice: $y_{ij} = A_{ij}, i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n$;

A questo punto, data la base iniziale $\mathcal{B} = \{A_{\beta(1)}, \ldots, A_{\beta(m)}\}$, poniamo il tableau in forma canonica rispetto a tale base come mostrato precedentemente, ossia azzerando i costi ridotti delle variabili base in riga 0 e definendo una matrice identità nelle colonne della base.

Si ricordi che dato il tableau in forma canonica il contenuto delle diverse parti del tableau è il seguente:

- y_{00} contiene il valore della SBA corrente, cambiato di segno;
- nella colonna 0 si leggono i valori correnti delle variabili base. Per ogni riga la variabile in base su tale riga si determina considerando quale colonna della base corrente abbia il valore ad 1 in corrispondenza di tale riga;
- nella riga 0 in corrispondenza delle variabili fuori base si hanno i relativi costi ridotti;
- nelle rimanenti righe in corrispondenza delle variabili fuori base si hanno i relativi coefficienti della matrice $\hat{F} = B^{-1}F$.

Test di ottimalità:

Se tutti i costi ridotti delle variabili base sono non negativi, ossia se $y_{0j} \geq 0, \forall j \notin B$, la SBA corrente è ottima e l'algoritmo termina. Altrimenti bisogna effettuare l'operazione di pivoting.

Pivoting:

Applicando la regola di Bland, si sceglie la colonna fuori base di indice minimo con costo ridotto negativo

$$h = \arg\min\{j \notin \beta; y_{0j} < 0\}. \tag{5.76}$$

Se $y_{ih} \leq 0, \forall i = 1, \ldots, m$ allora il problema è illimitato e l'algoritmo termina. Altrimenti, la colonna che esce dalla base si determina calcolando il minimo dei rapporti tra i valori correnti delle variabili base ed i valori correnti di $\hat{A}_h$ ossia

$$\ell = \arg\min\{y_{0i}/y_{hi} : y_{hi} > 0, i = 1, \ldots m\}. \tag{5.77}$$

In caso di parità si sceglie ℓ in modo tale che esca dalla base la variabile di indice minimo.

Aggiornamento del tableau:

La nuova base contiene la colonna A_h al posto della colonna $A_{\beta(\ell)}$. Per mettere il tableau in forma canonica rispetto alla nuova base corrente sarà sufficiente trasformare la colonna h nella appropriata colonna di matrice identità, ossia corrispondente alla colonna che esce dalla base. Le altre colonne della base rimarranno indenni dalle operazioni elementari di riga effettuate in questa fase. In particolare:

- Nella riga ℓ bisogna definire $y_{\ell h} = 1$ per cui tale riga va interamente divisa per $y_{\ell h}$: $y_{\ell j} = y_{\ell j}/y_{\ell h}, \forall j = 0, \ldots, n$.
- In tutte le altre righe della colonna h, inclusa la riga 0, gli elementi devono essere annullati. Allo scopo bisogna sottrarre da tale riga la riga ℓ, che in colonna h ora contiene un 1, moltiplicata per il coefficiente in colonna h su tale riga: $y_{ij} = y_{ij} - y_{\ell j} * y_{ih}, \forall i = 0, \ldots, m : i \neq \ell, j = 0, \ldots, n$.

5.9.3 Esempio di risoluzione in forma tableau con solo Fase 2

Consideriamo nuovamente il problema esaminato nel paragrafo 5.8 che riportiamo nel seguito

$$\max z = x_1 + x_2 \tag{5.78}$$

$$\text{s.t.} \quad 6x_1 + 4x_2 \leq 24 \tag{5.79}$$

$$3x_1 - 2x_2 \leq 6 \tag{5.80}$$

$$x_1, \quad x_2 \geq 0 \tag{5.81}$$

la cui espressione in forma standard è

$$-\min -z = -x_1 - x_2 \tag{5.82}$$

$$\text{s.t.} \quad 6x_1 + 4x_2 + x_3 = 24 \tag{5.83}$$

$$3x_1 - 2x_2 + x_4 = 6 \tag{5.84}$$

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4 \geq 0 \tag{5.85}$$

La regione ammissibile del problema è illustrata in figura 5.10.

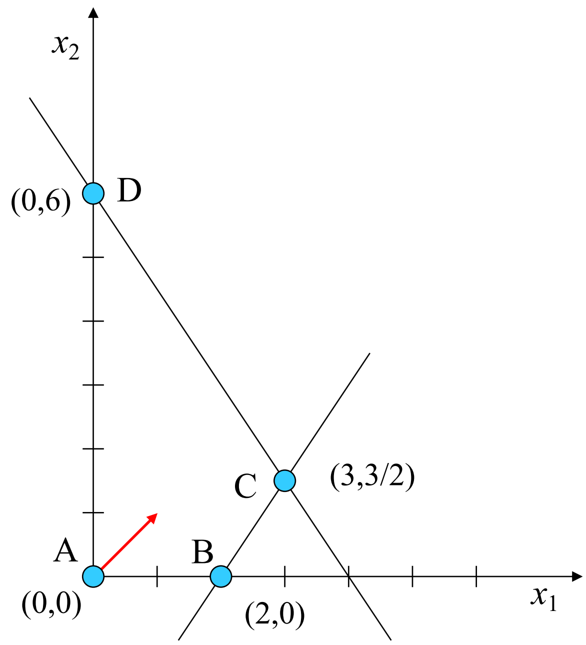


Figura 5.10: Regione Ammissibile del problema PL.

Il tableau iniziale del problema in forma standard è:

$$
\begin{array}{c|c|cccc|}
 & -z & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\
\hline
 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\
\hline
x_3 & 24 & 6 & 4 & 1 & 0 \\
x_4 & 6 & 3 & -2 & 0 & 1 \\
\hline
\end{array}
\tag{5.86}
$$

Anche in questo caso iniziamo dalla base $\mathcal{B} = \{A_3, A_4\}$ ed osserviamo che il tableau (5.86) è già in forma canonica rispetto a tale base che non è ottima dato che i costi ridotti di entrambe le variabili fuori base sono negativi.

Iterazione 1:

Seguendo la regola di Bland scegliamo per il pivoting la colonna 1 e, di conseguenza la riga 2, che corrisponde al minimo dei rapporti $\frac{24}{6}$ e $\frac{6}{3}$. Esce quindi dalla base la colona A_4 che viene sostituita dalla colonna A_1. Il nuovo tableau, in forma canonica rispetto alla nuova base si ottiene con le seguenti operazioni elementari di riga:

- dividendo la riga 2 per 3;

- sommando alla riga 0 la nuova riga 2;
- sottraendo dalla riga 0 la nuova riga 2, moltiplicata per 6.

Il nuovo tableau è

$$
\begin{array}{c|c|cccc|}
 & -z & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\
\cline{2-6}
 & 2 & 0 & -\frac{5}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\
\cline{2-6}
x_3 & 12 & 0 & 8 & 1 & -2 \\
x_1 & 2 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\
\cline{2-6}
\end{array}
\tag{5.87}
$$

La SBA corrente è $(2, 0, 12, 0)$ e vale -2 ma non è ottima in quanto la variabile fuori base x_2 ha costo ridotto negativo. Sarà quindi necessaria una ulteriore operazione di pivoting.

Iterazione 2:

Seguendo la regola di Bland scegliamo per il pivoting la colonna 2 e, di conseguenza la riga 1, che corrisponde al minimo dei rapporti considerando gli elementi positivi in tale colonna. Esce quindi dalla base la colonna A_3 che viene sostituita dalla colonna A_2. Il nuovo tableau, in forma canonica rispetto alla nuova base si ottiene con le seguenti operazioni elementari di riga:

- dividendo la riga 1 per 8;
- sommando alla riga 0 la nuova riga 1 moltiplicata per $\frac{5}{3}$;
- sommando alla riga 2 la nuova riga 1, moltiplicata per $\frac{2}{3}$.

Il nuovo tableau è

$$
\begin{array}{c|c|cccc|}
 & -z & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\
\cline{2-6}
 & \frac{9}{2} & 0 & 0 & \frac{5}{24} & -\frac{1}{12} \\
\cline{2-6}
x_2 & \frac{3}{2} & 0 & 1 & \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} \\
x_1 & 3 & 1 & 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} \\
\cline{2-6}
\end{array}
\tag{5.88}
$$

La SBA corrente è $(3, \frac{3}{2}, 0, 0)$ e vale $-\frac{9}{2}$ ma non è ottima in quanto la variabile fuori base x_4 ha costo ridotto negativo. Sarà quindi necessaria una ulteriore operazione di pivoting.

Iterazione 3:

Seguendo la regola di Bland scegliamo per il pivoting la colonna 4 e, di conseguenza la riga 2, che corrisponde al minimo dei rapporti considerando gli elementi positivi in tale colonna. Esce quindi dalla base la colonna A_1 che viene sostituita dalla colonna A_4. Il nuovo tableau, in forma canonica rispetto alla nuova base si ottiene con le seguenti operazioni elementari di riga:

- dividendo la riga 2 per $\frac{1}{6}$, ossia moltiplicandola per 6;
- sommando alla riga 0 la nuova riga 2, moltiplicata per $\frac{1}{12}$;
- sommando alla riga 1 la nuova riga 2, moltiplicata per $\frac{1}{4}$.

Il nuovo tableau è

$$\begin{array}{c|c|cccc|} & -z & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \cline{2-6} & 6 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \cline{2-6} x_2 & 6 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ x_4 & 18 & 6 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ \cline{2-6} \end{array} \tag{5.89}$$

La SBA corrente è $(0, 6, 0, 18)$ e vale -6 ed è ottima in quanto entrambe le variabili fuori base ha costo ridotto maggiore o uguale a zero. Si noti che il valore della soluzione ottima per il problema originale che era di massimizzazione è uguale a 6.

5.9.4 Esempio di risoluzione in forma tableau con Fase 1

Consideriamo il seguente problema PL

$$\min z = \quad x_1 \qquad\qquad +x_3 \tag{5.90}$$

$$\text{s.t.} \qquad x_1 \quad +2x_2 \qquad\qquad \leq 5 \tag{5.91}$$

$$x_2 \quad +2x_3 \quad = 6 \tag{5.92}$$

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3 \quad \geq 0 \tag{5.93}$$

la cui espressione in forma standard è

$$-\min -z = \quad -x_1 \qquad\qquad +x_3 \tag{5.94}$$

$$\text{s.t.} \qquad x_1 \quad +2x_2 \qquad\qquad +x_4 \qquad = 5 \tag{5.95}$$

$$x_2 \quad +2x_3 \qquad = 6 \tag{5.96}$$

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4 \quad \geq 0 \tag{5.97}$$

Fase 1:

Il tableau iniziale della Fase 1 del problema in forma standard si ottiene considerando due variabili artificiali x_1^a e x_2^a e la relativa funzione obiettivo di Fase 1 ed è:

$$\begin{array}{c|c|cccc|cc|}
 & -z & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_1^a & x_2^a \\
\hline
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
\hline
x_1^a & 5 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
x_2^a & 6 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
\end{array} \tag{5.98}$$

Per procedere con la Fase 1 è necessario porre il tableau in forma canonica rispetto alla base costituita dalle sole variabili artificiali $\mathcal{B} = \{x_1^a, x_2^a\}$. A tal fine dobbiamo azzerare i coefficienti di tali variabili nella riga 0 e questo può essere facilmente ottenuto sottraendo da tale riga le righe 1 e 2 del tableau ottenendo:

$$\begin{array}{c|c|cccc|cc|}
 & -z & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_1^a & x_2^a \\
\hline
 & -11 & -1 & -3 & -2 & -1 & 0 & 0 \\
\hline
x_1^a & 5 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
x_2^a & 6 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
\end{array} \tag{5.99}$$

Iterazione 1:

Seguendo la regola di Bland scegliamo per il pivoting la colonna 1 e, di conseguenza la riga 1, che corrisponde al minimo dei rapporti considerando i soli elementi positivi della colonna. Esce quindi dalla base la colonna x_1^a che viene sostituita dalla colonna A_1. Il nuovo tableau, in forma canonica rispetto alla nuova base si ottiene sommando alla riga 0 la riga 1 per azzerare il costo ridotto. Il resto della colonna è già nel formato desiderato ed il nuovo tableau è

$$\begin{array}{c|c|cccc|cc|}
 & -z & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_1^a & x_2^a \\
\hline
 & -6 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
x_1 & 5 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
x_2^a & 6 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
\end{array} \tag{5.100}$$

La SBA corrente è $(5, 0, 0, 0|0, 6)$ e vale 6 ma non è ottima in quanto esistono variabili originali fuori base a costo ridotto negativo. Sarà quindi necessaria una ulteriore operazione di pivoting.

Iterazione 2:

Seguendo la regola di Bland scegliamo per il pivoting la colonna A_2 e, di conseguenza la riga 1, che corrisponde al minimo dei rapporti, $\frac{5}{2}$ e $\frac{6}{1}$, considerando gli elementi positivi in tale colonna. Esce quindi dalla base la colonna A_1 che viene sostituita dalla colonna A_2. Il nuovo tableau, in forma canonica rispetto alla nuova base si ottiene con le seguenti operazioni elementari di riga:

- dividendo la riga 1 per 2;
- sommando alla riga 0 la nuova riga 1;
- sottraendo dalla riga 2 la nuova riga 1.

Il nuovo tableau è

$$\begin{array}{c|c|cccc|cc|} & -z & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_1^a & x_2^a \\ \hline & -\frac{7}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -2 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ \hline x_2 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ x_2^a & \frac{7}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 2 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ \hline \end{array} \tag{5.101}$$

La SBA corrente è $(0, \frac{5}{2}, 0, 0|0, \frac{7}{2})$ e vale $\frac{7}{2}$ ma non è ottima in quanto la variabile fuori base x_3 ha costo ridotto negativo. Sarà quindi necessaria una ulteriore operazione di pivoting.

Iterazione 3:

Seguendo la regola di Bland scegliamo per il pivoting la colonna A_3 e, di conseguenza la riga 2, che corrisponde al minimo dei rapporti considerando gli elementi positivi in tale colonna. Esce quindi dalla base la colonna x_2^a che viene sostituita dalla colonna A_3. Il nuovo tableau, in forma canonica rispetto alla nuova base si ottiene con le seguenti operazioni elementari di riga:

- dividendo la riga 2 per 2;
- sommando alla riga 0 la nuova riga 2, moltiplicata per 2.

Il nuovo tableau è

$$\begin{array}{c|c|cccc|cc|} & -z & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_1^a & x_2^a \\ \hline & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline x_2 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ x_3 & \frac{7}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \hline \end{array} \tag{5.102}$$

La SBA corrente è $(0, \frac{5}{2}, \frac{7}{4}, 0|0, 0)$ e vale 0 ed è ottima in quanto tutte le variabili fuori base hanno costo ridotto maggiore o uguale a zero. Si noti inoltre che tutte le variabili artificiali sono uscite dalla base che è ora costituita da sole variabili originali. Si può pertanto utilizzare la SBA corrente per inizializzare la Fase 2 dell'algoritmo.

Si noti che nel tableau iniziale di Fase 1 (5.98) la colonna A_4 era già una colonna di matrice identità e quindi adatta per costituire la base iniziale. In questo caso sarebbe quindi stato sufficiente aggiungere la sola variabile artificiale x_2^a per ottenere una base completa ed eseguire la Fase 1.

Fase 2:

Per inizializzare la Fase 2 si rimuovono dal tableau (5.102) le variabili artificiali e si ripristina la funzione obiettivo originale del problema:

$$\begin{array}{c|c|cccc|} & -z & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline x_2 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ x_3 & \frac{7}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 1 & -\frac{1}{4} \\ \hline \end{array} \tag{5.103}$$

Si noti che il tableau non è completamente in forma canonica rispetto alla base $\mathcal{B} = \{A_2, A_3\}$ dato che il costo ridotto della colonna A_3 non è nullo. A tal fine possiamo sottrarre dalla riga 0 la riga 2 ottenendo il tableau:

$$\begin{array}{c|c|cccc|} & -z & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline & -\frac{7}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ \hline x_2 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ x_3 & \frac{7}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 1 & -\frac{1}{4} \\ \hline \end{array} \tag{5.104}$$

Osservando i costi ridotti si può notare che sono tutti non negativi e quindi la base corrente è ottima. La SBA corrente è $(0, \frac{5}{2}, \frac{7}{4}, 0)$ e vale $\frac{7}{4}$.

Capitolo 6

Analisi di sensitività per PL

In un problema PL i coefficienti che lo definiscono sono assunti come valori deterministici noti con precisione. Nella realtà purtroppo i coefficienti che definiscono un problema PL, siano essi i costi delle variabili nella funzione obiettivo o i termini noti dei vincoli sono spesso il risultato di estrazioni di dati da archivi o di misure o stime e quindi sono naturalmente affetti da errori ed imprecisioni.

Da quanto discusso nei capitoli precedenti è evidente che la soluzione ottima di un problema PL è ottenuta mediante l'elaborazione algoritmica dei coefficienti del problema e da questi strettamente dipende. Appare quindi lecito chiedersi quanto la soluzione ottima determinata sia sensibile ad eventuali errori nella valorizzazione dei coefficienti. Tale analisi, detta *analisi di sensitività* è comune nei procedimenti ingegneristici e nel caso della PL può essere condotta in modo agevole permettendo quindi di avere informazioni utili alla valutazione della affidabilità delle soluzioni determinate. In particolare per analisi di sensitività di un problema PL si intende l'analisi della *stabilità della base ottima* (ossia dell'insieme di decisioni attive nella soluzione ottima) determinata con l'algoritmo del simplesso rispetto alla variazione dei parametri del problema. Più precisamente, per ogni coefficiente del problema è possibile calcolare l'intervallo di variazione del suo valore per cui la base ottima determinata dall'algoritmo del simplesso rimane tale. Tali intervalli possono essere agevolmente calcolati per la variazione di

- coefficienti della funzione obiettivo
- termini noti dei vincoli

ma possono essere condotti anche per specifici elementi della matrice tecnologica A del problema. Si noti che gli intervalli determinati sono relativi alla variazione di un singolo coefficiente alla volta del problema, ossia gli altri coefficienti sono fissati ad un valore costante.

Nel caso della PL l'analisi di sensitività è particolarmente agevole dato che le informazioni elaborate nell'algoritmo del simplesso permettono di determinare in modo automatico gli intervalli di variazione dei coefficienti della funzione obiettivo e dei termini noti.

Al fine di illustrare in via intuitiva in cosa consista l'analisi di sensitività per un problema PL consideriamo il problema dell'esercizio 7 relativo alla produzione di due fertilizzanti. Il modello matematico del problema è

$$
\begin{array}{rrrrrl}
\max\ z = & 200\ x_1 & + 300\ x_2 & & \\
 & x_1 & + & 2\ x_2 & \leq & 80 \\
 & 3\ x_1 & + & x_2 & \leq & 90 \\
 & x_1, & & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

in cui i vincoli sono stati moltiplicati per 10. La soluzione grafica del problema è riportata in figura 6.1 da cui si può verificare che la soluzione ottima del problema è associata al vertice C che corrisponde ad $x_1 = 30$ e $x_2 = 40$ ed ha un valore pari 13000 €.

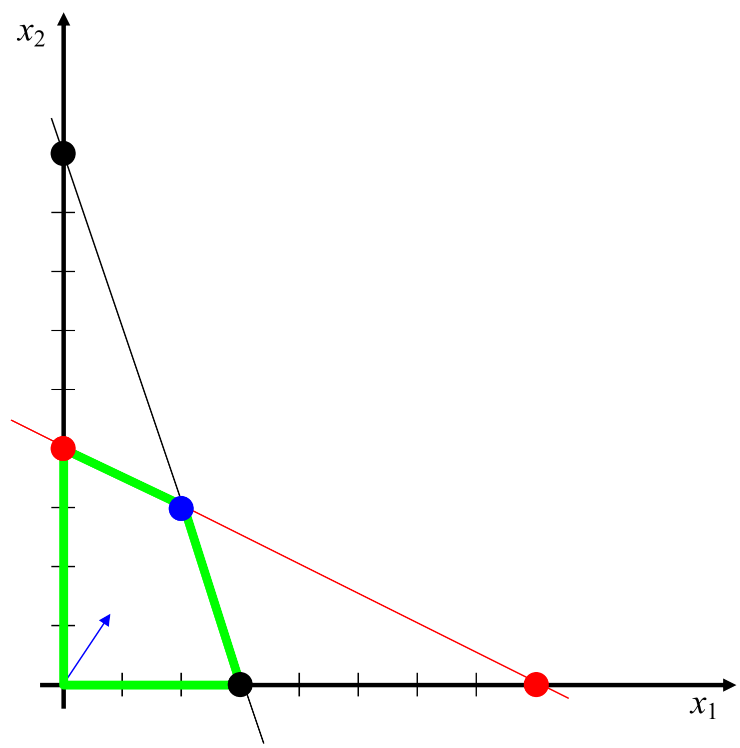


Figura 6.1: Regione ammissibile del problema di produzione fertilizzanti

Esaminiamo dapprima il caso della variazione di un coefficiente della funzione obiettivo. Ad esempio consideriamo il coefficiente c_1 della variabile x_1 che nel problema originario vale 200. È noto che i coefficienti della funzione obiettivo determinano la direzione del gradiente e quindi stabiliscono quale dei vertici della regione ammissibile corrisponda alla soluzione ottima. Nel nostro caso, variando c_1 e mantenendo costanti gli altri coefficienti della funzione obiettivo il gradiente cambierà la propria inclinazione come mostrato in figura 6.2. In particolare, aumentando c_1 rispetto a 200 la direzione del gradiente diventerà più orizzontale e diminuendone il valore questo diventerà più verticale. La soluzione ottima corrente (e di conseguenza la base ottima corrente) rimarrà però tale fintanto che la proiezione del gradiente sul CD della regione ammissibile ha una componente positiva verso il vertice ottimo corrente (vertice C). Tale situazione rimane verificata finché l'aumento di c_1 non sarà tale da rendere il gradiente perpendicolare al vincolo CD. In corrispondenza di tale valore il vertice corrente è ancora ottimo come lo sono tutti i punti del lato CD incluso il vertice D. Con semplici considerazioni grafiche è possibile verificare che il valore di c_1 che rende il gradiente perpendicolare a CD è pari a 900 unità. Aumentando ulteriormente c_1 la soluzione ottima del problema cambia e coincide con il vertice D. Il massimo aumento di c_1 rispetto al valore attuale compatibile con l'ottimalità della base corrente è quindi pari a 700. Con considerazioni analoghe si può determinare la massima diminuzione di c_1 che corrisponde al valore che rende il gradiente perpendicolare al vincolo BC ed è pari a 50 unità.

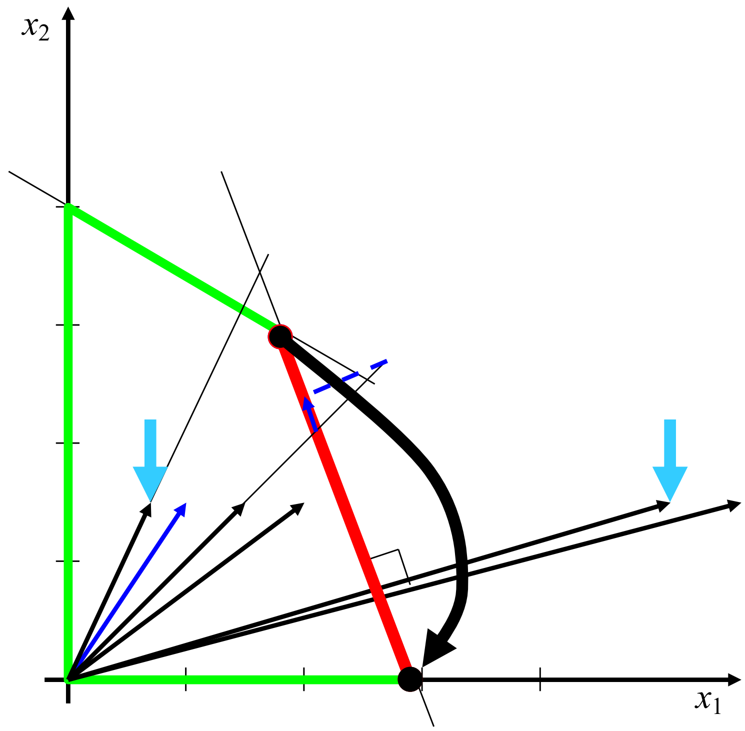


Figura 6.2: Effetto della variazione del coefficiente c_1 sulla soluzione ottima.

Si noti che variando un coefficiente di costo la soluzione ottima non cambia, rimanendo uguale ad $x_1 = 30, x_2 = 40$, ma varia il suo valore z.

Consideriamo ora la variazione di un termine noto, ad esempio b_1 che attualmente vale 80. È noto che la variazione di un termine noto altera la regione ammissibile traslando il corrispondente vincolo parallelamente a se stesso come illustrato nella figura 6.3. Poiché il gradiente rimane immutato aumentando b_1 la soluzione rimane corrispondente al vertice C (e quindi la base ottima rimane la stessa) fintanto che il valore di b_1 non aumenta al punto di far coincidere il vertice C con il vertice B. Da tale valore in poi la base ottima cambia e con considerazioni analoghe si può procedere nel caso della diminuzione di b_1.

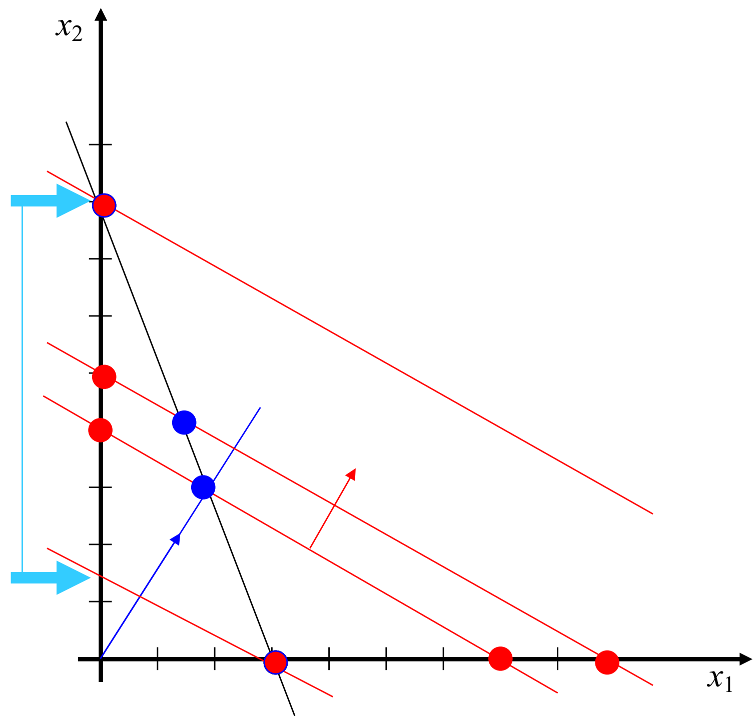


Figura 6.3: Effetto della variazione del termine noto b_1 sulla soluzione ottima.

Si noti che variando un termine noto la regione ammissibile si deforma e pertanto la soluzione ottima cambia di valore. Ai nostri fini però è importante che la base ottima rimanga la stessa ossia preveda di produrre entrambi i fertilizzanti.

6.1 Determinazione Analitica degli intervalli NEW: (Ver. 4.0)

Al fine di determinare in maniera analitica gli estremi degli intervalli di variazione dei coefficienti ricordiamo che dato un problema di PL $P = \min\{c^T x, x \in \Re^n, Ax = d\}$ e data una base $\mathcal{B} = \{A_{\beta(1)}, \dots, A_{\beta(m)}\}$ le variabili base x_B in funzione delle variabili fuori base x_F sono date dalla formula

$$x_B = B^{-1}d - B^{-1}Fx_F. \tag{6.1}$$

La soluzione base $x_B = B^{-1}d$ e $x_F = 0$ è ammissibile se $x_B \geq 0$ ed è ottima se $\tilde{c} = c_F^T - c_B^T B^{-1}F \geq 0$.

6.1.1 Variazione di un termine noto

Si noti che la variazione dei termini noti ha effetto solo sul valore delle variabili base e quindi la loro variazione può unicamente avere effetto sull'ammissibilità della base stessa.

Consideriamo il termine noto della k-sima equazione del modello e supponiamo di alterarne il valore $d_k \to (d_k + \varepsilon)$. La soluzione base diviene dunque

$$x_B = B^{-1}(d + I_k\varepsilon), \tag{6.2}$$

dove I_k è la k-sima colonna di una matrice identità, con il coefficiente ad 1 in corrispondenza della riga k. Se indichiamo con b_{ij} gli elementi dell'inversa della matrice di base B^{-1}, dalla (6.2) la generica variabile base è espressa da:

$$x_{\beta(i)} = \sum_{j=1}^{m} b_{ij}d_j + \varepsilon b_{ik}. \tag{6.3}$$

Affinché, per effetto della variazione del valore del termine noto d_k, la base rimanga ammissibile le variabili base espresse dalla (6.3) devono rimanere non negative per $i = 1, \ldots, m$. Si osservi che il primo termine della (6.3) è il valore attuale della variabile base $x_{\beta(i)}$ ed è quindi non negativo per definizione. Pertanto la base rimane ammissibile se anche il termine $\varepsilon_k b_{ik}$ è non negativo. In dipendenza del valore di b_{ik} possono verificarsi tre casi:

a) $b_{ik} = 0$: in tal caso anche $\varepsilon_k b_{ik} = 0$ e la condizione non influenza il valore di ε_k.

b) $b_{ik} > 0$: in tal caso, per l'ammissibilità della base ε_k deve essere tale che

$$\varepsilon_k \geq \frac{-\sum_{j=1}^{m} b_{ij}d_j}{b_{ik}} \qquad \forall i : b_{ik} > 0. \tag{6.4}$$

c) $b_{ik} < 0$: in tal caso, per l'ammissibilità si della base ε_k deve essere tale che

$$\varepsilon_k \leq \frac{-\sum_{j=1}^{m} b_{ij}d_j}{b_{ik}} \qquad \forall i : b_{ik} < 0. \tag{6.5}$$

In base a quanto discusso affinché la base corrente rimanga ottima la variazione del termine noto d_k deve essere compresa nell'intervallo

$$\varepsilon_k^- = \max_{i:b_{ik}>0}\{\frac{-\sum_{j=1}^{m} b_{ij}d_j}{b_{ik}}\} \leq \varepsilon_k \leq \varepsilon_k^+ = \min_{i:b_{ik}<0}\{\frac{-\sum_{j=1}^{m} b_{ij}d_j}{b_{ik}}\}. \tag{6.6}$$

ossia $d_k + \varepsilon_k^- \leq d_k \leq d_k + \varepsilon_k^+$.

6.1.2 Variazione del costo di una variabile fuori base

Variando il costo delle variabili si agisce sui costi ridotti di tali variabili. Supponiamo ora di variare il costo di una variabile fuori base $c_h \to c_h + \varepsilon_h$. Si noti che tale variazione di costo ha effetto unicamente sul costo ridotto di tale variabile.

Il costo ridotto originale della variabile x_h è

$$\tilde{c}_h = c_h - [c_B B^{-1} F]_h$$

dove l'ultimo termine è l'h-sima colonna della matrice $c_B B^{-1} F$. Per effetto della variazione del costo il nuovo costo ridotto diviene

$$c_h + \varepsilon_h - [c_B B^{-1} F]_h = \tilde{c}_h + \varepsilon_h.$$

Pertanto la base rimane ottima se

$$\varepsilon_h \geq -\tilde{c}_h.$$

6.1.3 Variazione del costo di una variabile base

Supponiamo ora di variare il costo di una variabile base $c_h \to c_h + \varepsilon_h$. Si noti che tale variazione di costo ha effetto sul costo ridotto di tutte le variabili fuori base.

Il costo ridotto originale della generica variabile fuori base x_j è

$$\tilde{c}_j = c_j - ([c_B B^{-1} F]_j + \varepsilon_h b_h A_j)$$

dove b_h è l'h-sima colonna della matrice di base. Osservando che i primi due termini di tale espressione costituiscono il costo ridotto attuale della variabile, che per la base ottima è ≥ 0, si ha che il nuovo costo ridotto rimane non negativo se

$$\tilde{c}_j - \varepsilon_h b_h A_j \geq 0$$

In dipendenza del valore di $\tilde{a}_{hj} = b_h A_j$ possono verificarsi tre casi:

a) $\tilde{a}_{hj} = 0$: in tal caso il costo ridotto non cambia e rimane non negativo.

b) $\tilde{a}_{hj} > 0$: in tal caso, ε_h deve essere tale che

$$\varepsilon_h \leq \frac{\tilde{c}_j}{\tilde{a}_{hj}} \qquad \forall j : \tilde{a}_{hj} > 0. \tag{6.7}$$

c) $\tilde{a}_{hj} < 0$: in tal caso, ε_h deve essere tale che

$$\varepsilon_h \geq \frac{\tilde{c}_j}{\tilde{a}_{hj}} \qquad \forall j : \tilde{a}_{hj} < 0. \tag{6.8}$$

In base a quanto discusso affinché i costi ridotti delle variabili fuori base rimangano non negativi e quindi la base corrente rimanga ottima, la variazione del costo c_h deve essere compresa nell'intervallo

$$\varepsilon_h^- = \max_{j:\tilde{a}_{hj}<0} \{\frac{\tilde{c}_j}{\tilde{a}_{hj}}\} \leq \varepsilon_h \leq \varepsilon_h^+ = \min_{j:\tilde{a}_{hj}>0} \{\frac{\tilde{c}_j}{\tilde{a}_{hj}}\}. \tag{6.9}$$

ossia $c_h + \varepsilon_h^- \leq c_h \leq c_h + \varepsilon_h^+$.

6.1.4 Analisi di sensitività dal tableau ottimo

Le informazioni per il calcolo degli intervalli dell'analisi di sensitività sono tutte facilmente reperibili dal tableau ottimo. A tal proposito si consideri il tableau ottimo dell'esercizio 7 e verifichiamo come calcolare gli intervalli relativi ai termini noti. Come illustrato nella figura 6.4 nelle colonne della base iniziale sono reperibili le colonne dell'inversa della base ottima B^{-1} mentre il numeratore delle frazioni che è il valore ottimo delle variabili base è reperibile nella colonna zero. Gli intervalli di variazione, definiti dalla (6.6), sono quindi

d_1: $\varepsilon_1 \geq -30/(3/5) = -50$ e $\varepsilon_1 \leq -20/(-1/5) = 100$, da cui ricordando che $d_1 = 80$ si ottiene $30 \leq d_1 \leq 180$.

d_2: $\varepsilon_2 \geq -20/(2/5) = -50$ e $\varepsilon_2 \leq -30/(-1/5) = 150$, da cui ricordando che $d_2 = 90$ si ottiene $40 \leq d_2 \leq 240$.

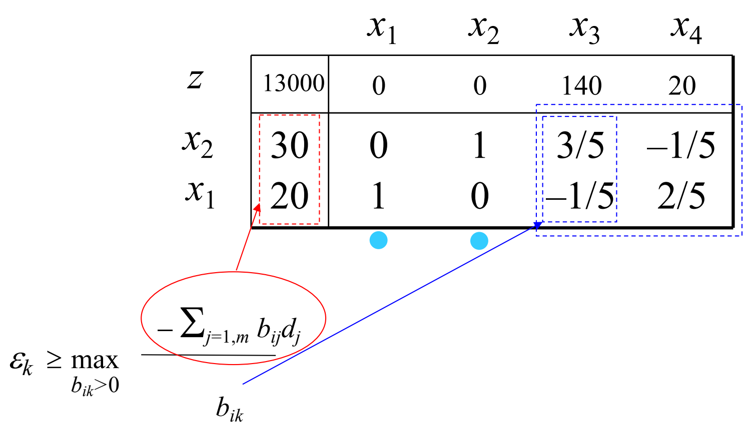


Figura 6.4: Informazioni per l'analisi di sensitività dei termini noti dal tableau

In maniera del tutto analoga si possono reperire le informazioni nel tableau ottimo anche le informazioni per l'analisi di sensitività rispetto ai costi. In particolare come illustrato in figura 6.5 i costi ridotti sono reperibili nella riga 0 mentre i coefficienti $\tilde{a}$ si leggono direttamente dal tableau nelle righe associate ai vincoli. Gli intervalli di variazione per i costi delle variabili x_1 e x_2, definiti dalla (6.9), sono quindi

c_1: la variabile x_1 è in base sulla riga 2, pertanto $\varepsilon_1 \geq 140/(-1/5) = -700$ e $\varepsilon_1 \leq 20/(2/5) = 50$, da cui ricordando che $c_1 = -200$ si ottiene $-900 \leq c_1 \leq -150$.

c_2: la variabile x_2 è in base sulla riga 1, pertanto $\varepsilon_2 \geq 20/(-1/5) = -100$ e $\varepsilon_2 \leq 140/(3/5) = 233.33\ldots$, da cui ricordando che $c_2 = -300$ si ottiene $-400 \leq d_2 \leq -66.66\ldots$.

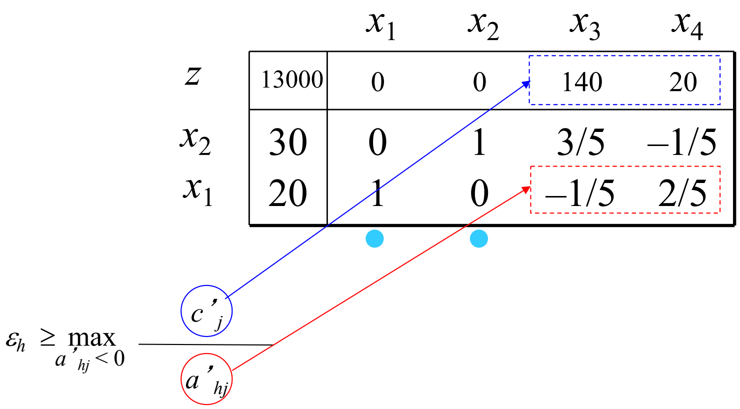


Figura 6.5: Informazioni per l'analisi di sensitività dei costi dal tableau

Capitolo 7

Esercizi di Programmazione Lineare

Esercizio 7.1. Produzione di fertilizzanti.

Un consorzio agrario può produrre due tipi di fertilizzanti. Ogni quintale di fertilizzante di tipo A contiene 0.1 quintali di azoto e 0.3 quintali potassio ed ha un prezzo di vendita di 200€. Ogni quintale di fertilizzante di tipo B contiene 0.2 quintali di azoto e 0.1 quintali di potassio e viene venduto a 300€. Il consorzio dispone di 8 quintali di azoto e di 9 quintali di potassio.

a) Definire il modello di programmazione lineare per determinare le quantità da produrre di fertilizzante di ciascun tipo per massimizzare il ricavo conseguibile.

b) Determinare la soluzione di massimo ricavo mediante l'algoritmo del simplesso e la regola di Bland.

c) Disegnare la regione ammissibile.

Soluzione

a) Vengono utilizzate due variabili x_1 ed x_2, che costituiscono il numero di quintali da produrre di fertilizzante di tipo A e B, rispettivamente. Il modello di programmazione lineare è pertanto

$$
\begin{array}{rrrrl}
\max\ z = & 200\,x_1 & +\ 300\,x_2 & & \\
& 0.1\,x_1 & +\ 0.2\,x_2 & \leq & 8 \\
& 0.3\,x_1 & +\ 0.1\,x_2 & \leq & 9 \\
& x_1, & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

in cui il ricavo totale z è espresso in €. Moltiplicando i vincoli per 10 al fine di ottenere coefficienti interi e ponendo il modello in forma standard, si ottiene

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrl}
\min\ -z = & -\ 200\ x_1 & - & 300\ x_2 & & & & & & & \\
& x_1 & + & 2\ x_2 & + & x_3 & & & = & 80 \\
& 3\ x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 90 \\
& x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0
\end{array}
$$

b) Poichè le ultime due colonne del tableau costituiscono una base iniziale ammissibile, non è necessario applicare la Fase 1.

		x_1	x_2	x_3	x_4
z	0	-200	-300	0	0
x_3	80	1	2	1	0
x_4	90	3	1	0	1

		x_1	x_2	x_3	x_4
z	6000	0	$-\frac{700}{3}$	0	$\frac{200}{3}$
x_3	50	0	$\frac{5}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$
x_1	30	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$

		x_1	x_2	x_3	x_4
z	13000	0	0	140	20
x_2	30	0	1	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$
x_1	20	1	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$

La soluzione ottima consiste dunque nel produrre 20 quintali di fertilizzante di tipo A e 30 quintali di fertilizzante di tipo B; si ottiene in tal modo un ricavo complessivo di 13000€.

c) La regione ammissibile del problema e la direzione del gradiente della funzione obiettivo sono mostrati in figura 7.1.

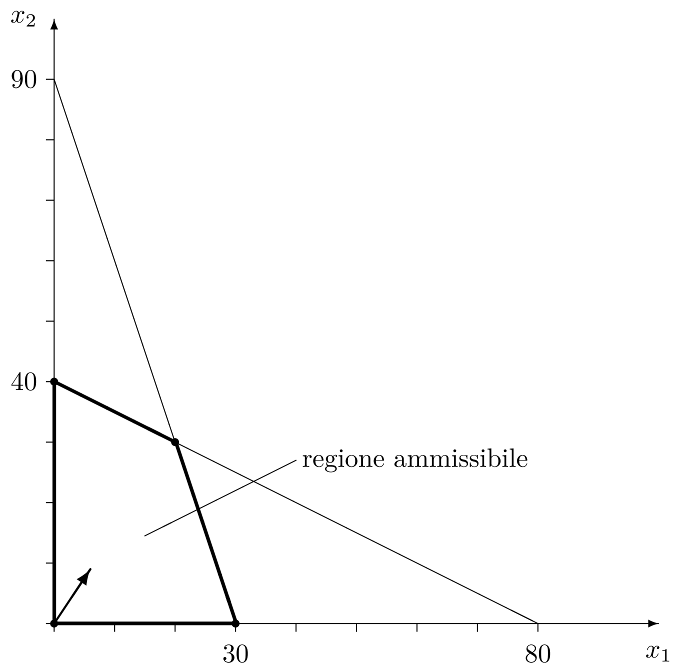


Figura 7.1: Regione ammissibile

Esercizio 7.2. Miscelazione di mangimi.

La dieta alimentare degli animali di un allevamento richiede la presenza di 4 sostanze base: A, B, C e D. La quantità minima giornaliera di cui ogni animale necessita è: 0.4 Kg di A, 0.6 Kg di B, 2 Kg di C ed 1.3 Kg di D. Il cibo è ottenuto mescolando due tipi di mangime: M ed N. Ciascun Kg di M contiene 100 grammi di A, 100 grammi di C, 100 grammi di D e nulla di B; ciascun Kg di N contiene 100 grammi di B, 100 grammi di D, 200 grammi di C e nulla di A. Con una spesa di 30€ è possibile acquistare 15 Kg di mangime M oppure 10 Kg di mangime N.

a) Definire il modello di programmazione lineare per determinare le quantità giornaliere di mangime M ed N (variabili x_1 ed x_2, rispettivamente) da acquistare per alimentare un animale a costo minimo.

b) Disegnare la regione ammissibile e determinare per via grafica i valori ottimi delle variabili x_1 ed x_2.

c) Porre il problema in forma standard e determinare la soluzione base corrispondente alla base costituita da x_1, x_2 e dalle variabili surplus associate ai vincoli relativi alle sostanze C e D.

d) Discutere l'ammissibilità della soluzione ottenuta al punto c).

Soluzione

a) Esprimendo x_1 ed x_2 in Kg, ed osservando che il costo al Kg dei mangimi M ed N è di 2€e 3€, rispettivamente, si ottiene

$$
\begin{array}{lrcrcl}
\min\ z = & 2\,x_1 & + & 3\,x_2 & & \\
 & 100\,x_1 & & & \geq & 400 \\
 & & & 100\,x_2 & \geq & 600 \\
 & 100\,x_1 & + & 200\,x_2 & \geq & 2000 \\
 & 100\,x_1 & + & 100\,x_2 & \geq & 1300 \\
 & x_1, & & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

b) La regione ammissibile (illimitata), la direzione del gradiente della funzione obiettivo e la soluzione ottima sono mostrati in figura 7.2.

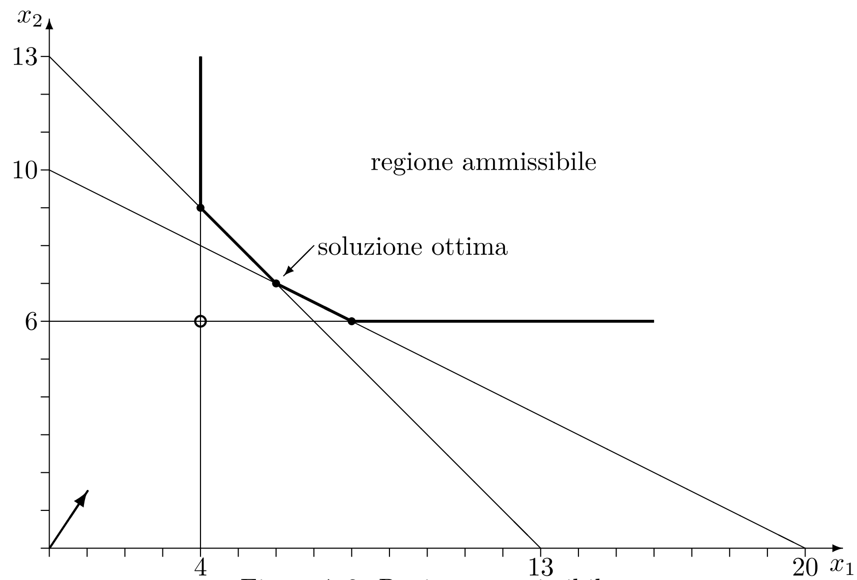


Figura 7.2: Regione ammissibile

I valori ottimi di x_1 ed x_2 sono dati dal sistema definito dalle equazioni corrispondenti agli ultimi due vincoli:

$$\begin{cases} x_1 + 2\,x_2 = 20 \\ x_1 + x_2 = 13 \end{cases}$$

Si ottiene $x_1 = 6$, $x_2 = 7$; il costo della dieta ottima ammonta pertanto a 33 €giornalieri per animale.

c) Dividendo i vincoli per 100 e ponendo il modello in forma standard, si ottiene

$$\begin{array}{lrrrrrrcl}
\min\ z = & 2\,x_1 & +\,3\,x_2 & & & & & & \\
& x_1 & & -\,x_3 & & & & = & 4 \\
& & x_2 & & -\,x_4 & & & = & 6 \\
& x_1 & +\,2\,x_2 & & & -\,x_5 & & = & 20 \\
& x_1 & +\,x_2 & & & & -\,x_6 & = & 13 \\
& x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 & \geq & 0
\end{array}$$

Uguagliando a 0 le variabili fuori base x_3 ed x_4 si ha il sistema

$$\left\{\begin{array}{rrrrcl} x_1 & & & & = & 4 \\ & x_2 & & & = & 6 \\ x_1 & +\,2\,x_2 & -\;x_5 & & = & 20 \\ x_1 & +\;\;x_2 & & -\;x_6 & = & 13 \end{array}\right.$$

da cui si ricava facilmente: $x_1 = 4$, $x_2 = 6$, $x_5 = -4$, $x_6 = -3$. La soluzione base richiesta è quindi $x = (4, 6, 0, 0, -4, -3)$.

d) La soluzione ottenuta non è ammissibile in quanto due variabili hanno valore negativo. Dal punto di vista grafico si nota d'altronde che tale soluzione, indicata con $\bigcirc$ in figura 7.2, si trova al di fuori della regione ammissibile.

Esercizio 7.3.

Sia dato il problema di programmazione lineare

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcr}
\min\ z = & x_1 & - & x_2 & -2\,x_3 & -3\,x_4 & & \\
 & & & x_2 & +2\,x_3 & +3\,x_4 & = & 15 \\
 & & & 2\,x_2 & + \ \ x_3 & +5\,x_4 & = & 20 \\
 & x_1 & + & x_2 & +2\,x_3 & + \ \ x_4 & = & 10 \\
 & x_1, & & x_2, & x_3, & x_4 & \geq & 0
\end{array}
$$

a) Semplificare, mediante un semplice ragionamento la funzione obiettivo.

b) Risolvere il problema con l'algoritmo del simplesso utilizzando il metodo delle due fasi ed introducendo solo le variabili artificiali necessarie. Si scelga per il pivoting la colonna con il costo relativo negativo di massimo valore assoluto.

Soluzione

a) Si osservi che, a causa del primo vincolo, in ogni soluzione ammissibile la somma degli ultimi tre termini della funzione obiettivo vale 15. Pertanto questa può essere semplificata come segue:

$$\min\ z = -15 + \min\ x_1.$$

b) La prima colonna della matrice dei coefficienti del problema è una colonna di matrice identità, per cui è sufficiente aggiungere al problema due sole variabili ausiliarie.

Fase 1:

		x_1^a	x_2^a	x_1	x_2	x_3	x_4
$-w$	0	1	1	0	0	0	0
x_1^a	15	1	0	0	1	2	3
x_2^a	20	0	1	0	2	1	5
x_1	10	0	0	1	1	2	1

		x_1^a	x_2^a	x_1	x_2	x_3	x_4
$-w$	-35	0	0	0	-3	-3	-8
x_1^a	15	1	0	0	1	2	3
x_2^a	20	0	1	0	2	1	5
x_1	10	0	0	1	1	2	1

		x_1^a	x_2^a	x_1	x_2	x_3	x_4
$-w$	-3	0	$\frac{8}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{7}{5}$	0
x_1^a	3	1	$-\frac{3}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{7}{5}$	0
x_4	4	0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	1
x_1	6	0	$-\frac{1}{5}$	1	$\frac{3}{5}$	$\frac{9}{5}$	0

		x_1^a	x_2^a	x_1	x_2	x_3	x_4
$-w$	0	1	1	0	0	0	0
x_3	$\frac{15}{7}$	$\frac{5}{7}$	$-\frac{3}{7}$	0	$-\frac{1}{7}$	1	0
x_4	$\frac{25}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	0	$\frac{3}{7}$	0	1
x_1	$\frac{15}{7}$	$-\frac{9}{7}$	$\frac{4}{7}$	1	$\frac{6}{7}$	0	0

Fase 2:

		x_1	x_2	x_3	x_4
$-z$	0	1	0	0	0
x_3	$\frac{15}{7}$	0	$-\frac{1}{7}$	1	0
x_4	$\frac{25}{7}$	0	$\frac{3}{7}$	0	1
x_1	$\frac{15}{7}$	1	$\frac{6}{7}$	0	0

		x_1	x_2	x_3	x_4
$-z$	$-\frac{15}{7}$	0	$-\frac{6}{7}$	0	0
x_3	$\frac{15}{7}$	0	$-\frac{1}{7}$	1	0
x_4	$\frac{25}{7}$	0	$\frac{3}{7}$	0	1
x_1	$\frac{15}{7}$	1	$\frac{6}{7}$	0	0

		x_1	x_2	x_3	x_4
$-z$	0	1	0	0	0
x_3	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	1	0
x_4	$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	1
x_2	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{6}$	1	0	0

La soluzione ottima è dunque $x_1 = 0, x_2 = x_3 = x_4 = \frac{5}{2}$ e vale -15.

Esercizio 7.4. Mix di Produzione.

Una società produce tre articoli A, B e C i cui prezzi di vendita sono, rispettivamente, 30, 40 e 20 € per pezzo. I pezzi di tipo A producono un profitto pari al 10% del prezzo di vendita, mentre quelli di tipo B e C producono un profitto pari al 5% del prezzo di vendita. La società desidera ottenere un fatturato mensile non inferiore ad 8 milioni di €. La produzione comporta 20 grammi di materiale di scarto per ogni pezzo di tipo A e 10 grammi per ogni pezzo di tipo B o C prodotto. In un mese non è possibile smaltire più di 2 tonnellate di materiale di scarto.

Si definisca il modello di programmazione lineare in grado di determinare i livelli mensili di produzione dei tre articoli in modo da massimizzare il profitto globale. A tal fine si esprimano i livelli di produzione in centinaia di migliaia di pezzi e si assuma che le frazioni di pezzo siano trascurabili ai fini della determinazione della soluzione ottima. Si risolva il problema utilizzando il metodo delle due fasi, introducendo solo le variabili artificiali necessarie ed utilizzando la regola di Bland.

Soluzione

a) Si utilizzano tre variabili x_1, x_2 ed x_3, che costituiscono il numero di pezzi da produrre in un mese (espresso in centina di migliaia) degli articoli A, B e C, rispettivamente. Esprimendo i profitti in centinaia di migliaia di €, il modello di programmazione lineare è

$$\begin{array}{rrrrrr}
\max\ z = & 3\,x_1 & +\,2\,x_2 & +\ \ x_3 & & \\
& 2\,x_1 & +\ \ x_2 & +\ \ x_3 & \leq & 2 \\
& 3\,x_1 & +\,4\,x_2 & +\,2\,x_3 & \geq & 8 \\
& x_1, & x_2, & x_3 & \geq & 0
\end{array}$$

Ponendo il modello in forma standard, si ottiene

$$\begin{array}{rrrrrrrr}
\min\ -z = & -\,3\,x_1 & -\,2\,x_2 & -\ \ x_3 & & & & \\
& 2\,x_1 & +\ \ x_2 & +\ \ x_3 & +\ x_4 & & = & 2 \\
& 3\,x_1 & +\,4\,x_2 & +\,2\,x_3 & & -\ x_5 & = & 8 \\
& x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq & 0
\end{array}$$

La quarta colonna della matrice dei coefficienti del problema è una colonna di matrice identità, per cui è sufficiente aggiungere al problema una sola variabile ausiliaria.

Fase 1:

		x_1^a	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$-w$	0	1	0	0	0	0	0
x_4	2	0	2	1	1	1	0
x_1^a	8	1	3	4	2	0	-1

		x_1^a	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$-w$	-8	0	-3	-4	-2	0	1
x_4	2	0	2	1	1	1	0
x_1^a	8	1	3	4	2	0	-1

		x_1^a	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$-w$	-5	0	0	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	1
x_1	1	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
x_1^a	5	1	0	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	-1

		x_1^a	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$-w$	0	0	5	0	2	4	1
x_2	2	0	2	1	1	1	0
x_1^a	0	1	-5	0	-2	-4	-1

Poichè la variabile artificiale è nella base finale, occorre un ulteriore pivoting. Scegliendo la variabile x_5 (che comporta una minore quantità di calcoli) si ottiene

		x_1^a	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$-w$	0	1	0	0	0	0	0
x_2	2	0	2	1	1	1	0
x_5	0	-1	5	0	2	4	1

Fase 2:

		x_1^a	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
z	0	0	-3	-2	-1	0	0
x_2	2	0	2	1	1	1	0
x_5	0	-1	5	0	2	4	1

		x_1^a	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
z	4	0	1	0	1	2	0
x_2	2	0	2	1	1	1	0
x_5	0	-1	5	0	2	4	1

La soluzione ottima, che prevede la produzione di 200 000 pezzi dell'articolo B e di nessun pezzo degli articoli A e C, consente un profitto di 400 000 €.

Esercizio 7.5.

Un'azienda produce due articoli A e B che consentono un profitto per ogni pezzo venduto di 3€ e 1€, rispettivamente. La lavorazione di ciascun articolo di tipo A richiede due unità di materia prima M e produce sei unità di sottoprodotto P, mentre ciascun articolo di tipo B richiede una unità di M e tre unità di P. In magazzino sono disponibili 4000 unità di M e 10 000 unità di P.

Il 10% delle confezioni dell'articolo A ed il 20% delle confezioni dell'articolo B contengono un omaggio a sorpresa. Il numero degli omaggi inseriti nelle confezioni prodotte non deve essere inferiore a 400.

Si suppongano accettabili soluzioni frazionarie.

a) Definire il modello di programmazione lineare per determinare la produzione di massimo profitto. Si esprimano i quantitativi prodotti in migliaia di articoli ed i profitti in migliaia di €.

b) Risolvere il problema mediante l'algoritmo del simplesso, utilizzando il metodo delle due fasi ed introducendo solo le variabili artificiali necessarie. In entrambe le fasi si scelga per il pivoting la colonna avente il costo relativo negativo con il massimo valore assoluto.

c) Disegnare la regione ammissibile ed indicare le soluzioni distinte corrispondenti ai tableau di entrambe le fasi.

Soluzione

a) Si utilizzano due variabili x_1 ed x_2, che costituiscono le migliaia di articoli A e B, rispettivamente, che debbono essere prodotti:

$$
\begin{array}{rrrrrl}
\max\ z = & 3\,x_1 & + & x_2 & & \\
& 2\,x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\
& -\,6\,x_1 & + & 3\,x_2 & \leq & 10 \\
& x_1 & + & 2\,x_2 & \geq & 4 \\
& x_1, & & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

b) Ponendo il modello in forma standard, si ottiene

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrrl}
\min\ -z = & -\,3\,x_1 & - & x_2 & & & & & & & & \\
& 2\,x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & = & 4 \\
& -\,6\,x_1 & + & 3\,x_2 & & & + & x_4 & & & = & 10 \\
& x_1 & + & 2\,x_2 & & & & & - & x_5 & = & 4 \\
& x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

È sufficiente aggiungere al problema una sola variabile ausiliaria (per il terzo vincolo):

Fase 1:

		x_1^a	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$-w$	0	1	0	0	0	0	0
x_3	4	0	2	1	1	0	0
x_4	10	0	-6	3	0	1	0
x_1^a	4	1	1	2	0	0	-1

		x_1^a	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$-w$	-4	0	-1	-2	0	0	1
x_3	4	0	2	1	1	0	0
x_4	10	0	-6	3	0	1	0
x_1^a	4	1	1	2	0	0	-1

		x_1^a	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$-w$	0	1	0	0	0	0	0
x_3	2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$
x_4	4	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{15}{2}$	0	0	1	$\frac{3}{2}$
x_2	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	0	$-\frac{1}{2}$

Fase 2:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
z	0	-3	-1	0	0	0
x_3	2	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$
x_4	4	$-\frac{15}{2}$	0	0	1	$\frac{3}{2}$
x_2	2	$\frac{1}{2}$	1	0	0	$-\frac{1}{2}$

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
z	2	$-\frac{5}{2}$	0	0	0	$-\frac{1}{2}$
x_3	2	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$
x_4	4	$-\frac{15}{2}$	0	0	1	$\frac{3}{2}$
x_2	2	$\frac{1}{2}$	1	0	0	$-\frac{1}{2}$

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
z	$\frac{16}{3}$	0	0	$\frac{5}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
x_1	$\frac{4}{3}$	1	0	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
x_4	14	0	0	5	1	4
x_2	$\frac{4}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$

La soluzione ottima consiste dunque nel produrre $\frac{4}{3}$ di migliaio di articolo A e $\frac{4}{3}$ di migliaio di articolo B. Tale soluzione determina un profitto complessivo di $\frac{16}{3}$ migliaia di €.

c) La regione ammissibile e la direzione del gradiente della funzione obiettivo sono mostrati in figura 7.3. Le lettere α, β e γ indicano, rispettivamente, le soluzioni corrispondenti al primo, terzo e sesto tableau.

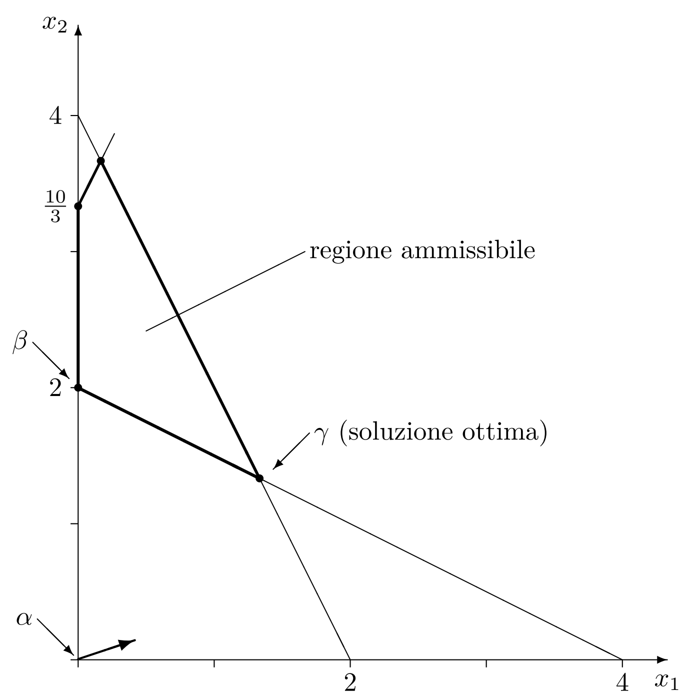


Figura 7.3: Regione ammissibile

Esercizio 7.6.

Sia dato il problema di programmazione lineare

$$\begin{array}{rrcrcl}
\max\ z = & 30\ x_1 & + & 20\ x_2 & & \\
 & & & x_2 & \leq & 4 \\
 & x_1 & + & 2\ x_2 & \leq & 10 \\
 & 2\ x_1 & + & x_2 & \leq & 12 \\
 & x_1, & & x_2 & \geq & 0
\end{array}$$

a) Riscriverlo ponendolo in forma standard.

b) Disegnare la regione ammissibile e determinare per via grafica la soluzione ottima ed il suo valore.

c) Etichettare i vertici del politopo con le lettere $A, B, C, \ldots$ partendo dall'origine e procedendo in senso orario. Mediante semplici considerazioni stabilire, per ciascun vertice del politopo, quali variabili appartengono alla base nella soluzione base ammissibile corrispondente.

d) Considerare la funzione obiettivo parametrica

$$30x_1 + \alpha x_2$$

dove α può assumere qualunque valore positivo. Mediante considerazioni di tipo geometrico determinare per quali valori di α la soluzione base individuata al punto b) rimane ottima.

Soluzione

a) Introducendo le variabili slack x_3, x_4 ed x_5 si ottiene il problema in forma standard

$$\begin{array}{rrcrcrcrcrcl}
\min\ -z = & -\ 30\ x_1 & & -\ 20\ x_2 & & & & & & & & \\
 & & & x_2 & + & x_3 & & & & & = & 4 \\
 & x_1 & + & 2\ x_2 & & & + & x_4 & & & = & 10 \\
 & 2\ x_1 & + & x_2 & & & & & + & x_5 & = & 12 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5 & \geq & 0
\end{array}$$

b) La regione ammissibile del problema e la direzione del gradiente della funzione obiettivo sono mostrate in figura 7.4. La soluzione ottima coincide dunque con il vertice D.

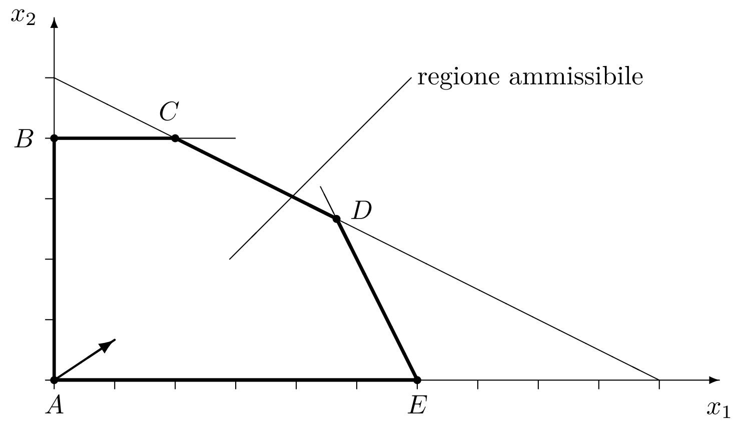


Figura 7.4: Regione ammissibile

Le coordinate del punto D si ricavano dal sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2\,x_2 = 10 \\ 2\,x_1 + x_2 = 12 \end{cases}$$

Si ottiene la soluzione $x_1 = \frac{14}{3}$ ed $x_2 = \frac{8}{3}$. Pertanto il valore della soluzione ottima è $z = \frac{580}{3}$.

c) Si osservi innanzitutto che in corrispondenza di un vertice del politopo la variabile slack associata ad un vincolo non attivo (ossia non verificato con uguaglianza) deve avere valore diverso da zero e pertanto deve far parte della base corrispondente. Fanno ovviamente parte della base anche le variabili del problema originale che assumono in corrispondenza del vertice valore diverso da zero.

Le variabili in base nella soluzione base ammissibile corrispondente a ciascun vertice del politopo sono quindi quelle riportate nella seguente tabella:

vertice	**variabili in base**
A	x_3, x_4, x_5
B	x_2, x_4, x_5
C	x_1, x_2, x_5
D	x_1, x_2, x_3
E	x_1, x_3, x_4

d) Al variare di α varia la direzione del gradiente della funzione obiettivo. Tale direzione, come è noto, è perpendicolare alle rette cui corrisponde valore costante della funzione obiettivo.

Come si è visto, il vertice D corrispondente alla soluzione ottima individuata al punto b) è dato dall'intersezione degli iperpiani

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & +\, 2\, x_2 & = & 10 & \text{(spigolo } CD\text{) e} \\ 2\, x_1 & + \quad x_2 & = & 12 & \text{(spigolo } DE\text{)} \end{array}$$

Pertanto se il valore di α viene aumentato rispetto al valore corrente 20, il vertice D continua a produrre la soluzione ottima fino a quando la famiglia di rette equi-costo non diviene parallela allo spigolo CD, ossia fino a quando il gradiente $(30, \alpha)$ non diviene perpendicolare a tale spigolo.

La condizione limite si ha dunque quando il prodotto tra il gradiente ed il vettore associato alla direzione dello spigolo è nullo, ossia

$$(30 \quad \alpha) \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \end{pmatrix} = 300 - 5\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 60$$

Con analoghe considerazioni si verifica che, diminuendo il valore di α, la condizione limite si ha quando il prodotto tra il gradiente ed il vettore associato alla direzione dello spigolo DE è nullo, ossia

$$(30 \quad \alpha) \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \end{pmatrix} = 180 - 12\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 15$$

Pertanto, come è illustrato nella figura 7.5, il vertice D rimane ottimo per tutti i valori di α compresi tra 15 e 60.

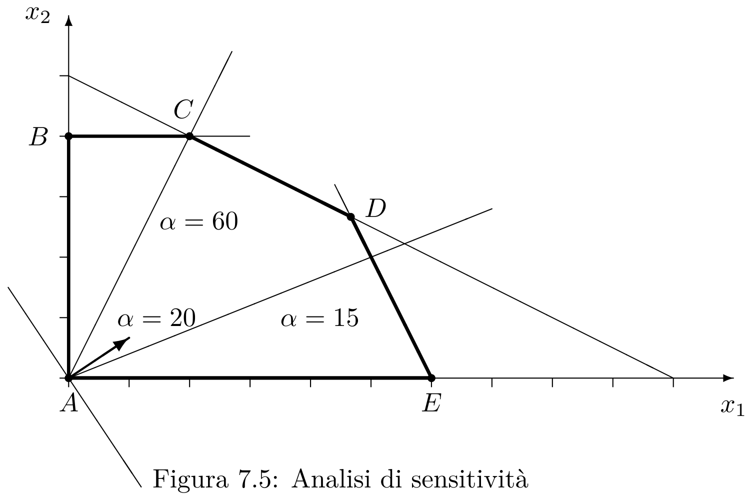


Figura 7.5: Analisi di sensitività

Esercizio 7.7. Miscelazione di caffè.

Una ditta produce miscele di caffè di due diverse qualità (extra ed economica) utilizzando due varietà base (arabica e robusta). Per la miscela extra vengono utilizzate tre parti di arabica e due di robusta, per quella economica due parti di arabica e tre di robusta. La ditta dispone di 12 tonnellate di ciascuna varietà. I prezzi di vendita per tonnellata sono 6000€ per la miscela extra e 4000€ per la miscela economica.

a) Definire il modello di programmazione lineare che massimizza l'introito complessivo e risolverlo con il metodo del simplesso, scegliendo per il primo pivoting la variabile corrispondente alla qualità extra.

b) Per motivi di mercato è preferibile che entrambe le miscele vengano effettivamente prodotte. Nel caso tale condizione non sia verificata nella soluzione trovata, dire, osservando il tableau, se esiste una soluzione che la verifica e produce lo stesso introito. Se la risposta è affermativa, determinare la nuova soluzione agendo direttamente sul tableau ottimo del punto a), senza introdurre ulteriori vincoli.

c) Disegnare la regione ammissibile e commentare, in base a considerazioni di tipo geometrico, il risultato del punto b).

Soluzione

a) Si utilizzano due variabili x_1 ed x_2, che costituiscono il numero di tonnellate da produrre di caffè di qualità extra ed economica, rispettivamente. Il modello è pertanto

$$\begin{array}{rrrrl} \max\ z = & 6\,x_1 & +\ 4\,x_2 & & \\ & \frac{2}{5}\,x_1 & +\ \frac{3}{5}\,x_2 & \leq & 12 \\ & \frac{3}{5}\,x_1 & +\ \frac{2}{5}\,x_2 & \leq & 12 \\ & x_1, & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

in cui il ricavo totale z è espresso in migliaia di €. Moltiplicando i vincoli per 5 (al fine di ottenere coefficienti interi) si ricava il modello in forma standard:

$$\begin{array}{rrrrrrl} \min\ -z = & -\ 6\,x_1 & -\ 4\,x_2 & & & & \\ & 2\,x_1 & +\ 3\,x_2 & +\ x_3 & & = & 60 \\ & 3\,x_1 & +\ 2\,x_2 & & +\ x_4 & = & 60 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

Poichè le ultime due colonne del tableau costituiscono una base iniziale ammissibile, non è necessario applicare la Fase 1.

		x_1	x_2	x_3	x_4
z	0	-6	-4	0	0
x_3	60	2	3	1	0
x_4	60	3	2	0	1

		x_1	x_2	x_3	x_4
z	120	0	0	0	2
x_3	20	0	$\frac{5}{3}$	1	$-\frac{2}{3}$
x_1	20	1	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$

La soluzione ottima consiste dunque nel produrre 20 tonnellate di caffè di qualità extra e nessuna di qualità economica; il relativo ricavo è di 120000 €.

b) La soluzione ottima trovata al punto a) non produce entrambe le qualità di caffè. Esaminando il tableau ottimo, si osserva che la colonna corrispondente alla variabile fuori base x_2 ha costo relativo nullo. È quindi possibile far entrare tale variabile in base con un'operazione di pivoting, ottenendo una soluzione con lo stesso ricavo di quella del punto a).

		x_1	x_2	x_3	x_4
z	120	0	0	0	2
x_2	12	0	1	$\frac{3}{5}$	$-\frac{2}{5}$
x_1	12	1	0	$-\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$

La nuova soluzione prevede di produrre 12 tonnellate di ciascuna qualità di caffè.

c) La regione ammissibile del problema è mostrata in figura. Si osservi che il gradiente della funzione obiettivo è perpendicolare allo spigolo AB. Tutte le soluzioni corrispondenti ai punti di tale spigolo (ed in particolare le soluzioni base corrispondenti ai vertici A e B) sono dunque soluzioni ottime equivalenti del problema.

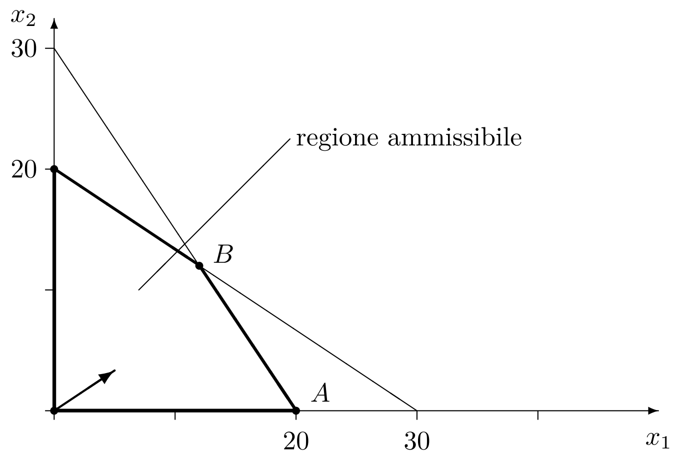


Figura 7.6: Regione Ammissibile

Esercizio 7.8. Mix di produzione parametrico.

Una fabbrica produce 2 tipi di materiale (A e B). La produzione di ogni chilogrammo di materiale A richiede 3 ore di preparazione e 2 di rifinitura, mentre per la produzione di ogni chilogrammo di materiale B sono necessarie 5 ore di preparazione e 2 di rifinitura. I macchinari addetti alla preparazione sono disponibili per non più di 40 ore giornaliere complessive, quelli addetti alla rifinitura per non più di 30. Il profitto dato dal prodotto B è k volte quello dato dal prodotto A, dove k, a seconda del mercato, può assumere qualunque valore compreso tra 1 e 2.

Determinare, servendosi di un modello di programmazione lineare e dell'algoritmo del simplesso con regola di Bland, i quantitativi giornalieri da produrre, a seconda del valore di k, per massimizzare il profitto complessivo.

Soluzione

Si utilizzano due variabili x_1 ed x_2, che costituiscono, rispettivamente, la produzione giornaliera ottima del prodotto A e del prodotto B.

Assumendo che il prodotto A abbia profitto unitario, il modello di programmazione lineare è il seguente:

$$\begin{array}{rrrcl}
\max\ z = & x_1 & + k\, x_2 & & \\
 & 3\, x_1 & + 5\, x_2 & \leq & 40 \\
 & 2\, x_1 & + 2\, x_2 & \leq & 30 \\
 & x_1, & x_2 & \geq & 0
\end{array}$$

che, posto in forma standard, diventa

$$\begin{array}{rrrrrcl}
\min\ -z = & -\ x_1 & - k\, x_2 & & & & \\
 & 3\, x_1 & + 5\, x_2 & +\ x_3 & & = & 40 \\
 & 2\, x_1 & + 2\, x_2 & & +\ x_4 & = & 30 \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq & 0
\end{array}$$

Poichè le ultime due colonne del tableau costituiscono una base iniziale ammissibile, non è necessario applicare la Fase 1.

		x_1	x_2	x_3	x_4
z	0	-1	$-k$	0	0
x_3	40	3	5	1	0
x_4	30	2	2	0	1

		x_1	x_2	x_3	x_4
z	$\frac{40}{3}$	0	$-k+\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	0
x_1	$\frac{40}{3}$	1	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	0
x_4	$\frac{10}{3}$	0	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1

Tutti i coefficienti della riga 0 risultano non negativi, con l'eventuale eccezione di quello dipendente dal parametro k. Occorre pertanto considerare due casi.

Caso 1: $k \leq \frac{5}{3}$
Il costo relativo della colonna 2 risulta non negativo, per cui in questo caso il tableau ottenuto produce la soluzione ottima

$$x_1 = \frac{40}{3} \ , \quad x_2 = 0$$

Il valore di questa soluzione è $z = \frac{40}{3}$, ossia $\frac{40}{3}$ del profitto del prodotto A. Si osservi che tale valore è indipendente dal parametro k.

Caso 2: $k > \frac{5}{3}$
Il costo relativo della colonna 2 risulta negativo, per cui occorre proseguire nell'applicazione dell'algoritmo del simplesso.

		x_1	x_2	x_3	x_4
z	$\frac{40}{3}$	0	$-k+\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	0
x_1	$\frac{40}{3}$	1	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	0
x_4	$\frac{10}{3}$	0	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1

		x_1	x_2	x_3	x_4
z	$8k$	$\frac{3}{5}k-1$	0	$\frac{1}{5}k$	0
x_2	8	$\frac{3}{5}$	1	$\frac{1}{5}$	0
x_4	14	$\frac{4}{5}$	0	$-\frac{2}{5}$	1

Poichè siamo nell'ipotesi $k > \frac{5}{3}$, il costo relativo della colonna 1 risulta non negativo, per cui il tableau produce la soluzione ottima

$$x_1 = 0 \ , \quad x_2 = 8$$

Il valore di questa soluzione è $z = 8k$, ossia $8k$ volte il profitto del prodotto A. Si osservi che tale valore dipende dal parametro k.

Esercizio 7.9. Vincolo ridondante in Fase 1

Un'azienda produce quattro tipi di solvente utilizzando, tra le altre, tre sostanze chimiche altamente tossiche (A, B e C) nelle seguenti percentuali:

solvente	1:	10 % di A,	50 % di B,	30 % di C;
solvente	2:	20 % di A,	50 % di B,	10 % di C;
solvente	3:	10 % di A,	20 % di B;	
solvente	4:	10 % di B,	10 % di C.	

I profitti, in €per quintale, sono 500, 400, 100 e 100 rispettivamente per i solventi 1, 2, 3 e 4. L'azienda dispone di tre serbatoi contenenti rispettivamente una tonnellata di A, tre tonnellate di B ed una tonnellata di C: al termine della produzione si devono pulire tutti i serbatoi, per cui tali sostanze debbono essere completamente utilizzate nella produzione, dato che la loro tossicità non ne consente l'eliminazione in altro modo.

Determinare la produzione ottima mediante metodo delle due fasi e regola di Bland.

Soluzione

Utilizzando quattro variabili x_1, x_2, x_3 ed x_4 (numero di tonnellate da produrre di solvente di tipo 1, 2, 3 e 4, rispettivamente), si ottiene il modello di programmazione lineare

$$\begin{array}{lrcrcrcrcl}
\max\ z = & 5000\,x_1 & + & 4000\,x_2 & + & 1000\,x_3 & + & 1000\,x_4 & & \\
& 0.1\,x_1 & + & 0.2\,x_2 & + & 0.1\,x_3 & & & = & 1 \\
& 0.5\,x_1 & + & 0.5\,x_2 & + & 0.2\,x_3 & + & 0.1\,x_4 & = & 3 \\
& 0.3\,x_1 & + & 0.1\,x_2 & & & + & 0.1\,x_4 & = & 1 \\
& x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0
\end{array}$$

Esprimendo i profitti in milgiaia di €e moltiplicando i vincoli per 10 si ha

$$\begin{array}{lrcrcrcrcl}
\min\ -z = & -5\,x_1 & - & 4\,x_2 & - & x_3 & - & x_4 & & \\
& x_1 & + & 2\,x_2 & + & x_3 & & & = & 10 \\
& 5\,x_1 & + & 5\,x_2 & + & 2\,x_3 & + & x_4 & = & 30 \\
& 3\,x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 10 \\
& x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0
\end{array}$$

Fase 1:

		x_1^a	x_2^a	x_3^a	x_1	x_2	x_3	x_4
$-w$	0	1	1	1	0	0	0	0
x_1^a	10	1	0	0	1	2	1	0
x_2^a	30	0	1	0	5	5	2	1
x_3^a	10	0	0	1	3	1	0	1

		x_1^a	x_2^a	x_3^a	x_1	x_2	x_3	x_4
$-w$	-50	0	0	0	-9	-8	-3	-2
x_1^a	10	1	0	0	1	2	1	0
x_2^a	30	0	1	0	5	5	2	1
x_3^a	10	0	0	1	3	1	0	1

		x_1^a	x_2^a	x_3^a	x_1	x_2	x_3	x_4
$-w$	-20	0	0	3	0	-5	-3	1
x_1^a	$\frac{20}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{5}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$
x_2^a	$\frac{40}{3}$	0	1	$-\frac{5}{3}$	0	$\frac{10}{3}$	2	$-\frac{2}{3}$
x_1	$\frac{10}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$

		x_1^a	x_2^a	x_3^a	x_1	x_2	x_3	x_4
$-w$	0	3	0	2	0	0	0	0
x_2	4	$\frac{3}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	0	1	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$
x_2^a	0	-2	1	-1	0	0	0	0
x_1	2	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{2}{5}$	1	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$

Al termine della Fase 1, pur essendo $w = 0$, la variabile x_2^a è in base sulla riga 2. Poichè tutti i coefficienti della riga 2 corrispondenti alle variabili del problema originale sono nulli, la riga 2 risulta ridondante (infatti essa è ottenibile come combinazione lineare delle righe 1 e 3 con coefficienti 2 ed 1, rispettivamente).

Si elimina pertanto la riga 2, ottenendo così una base iniziale ammissibile, e si applica la Fase 2.

		x_1	x_2	x_3	x_4
z	0	-5	-4	-1	-1
x_2	4	0	1	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$
x_1	2	1	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$

		x_1	x_2	x_3	x_4
z	26	0	0	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$
x_2	4	0	1	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$
x_1	2	1	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$

La soluzione ottima consiste dunque nel produrre 2 tonnellate di solvente di tipo 1 e 4 tonnellate di solvente di tipo 2; il relativo profitto è di 26000€.

Esercizio 7.10. Problema illimitato

Un'azienda produce due prodotti chimici, A e B. Ogni quintale di prodotto A richiede materie prime e mano d'opera per un costo complessivo di 3000€e fornisce come sottoprodotto 3 Kg di acido. La produzione di un quintale di prodotto B richiede invece 4 Kg di acido e non prevede ulteriori costi. L'acido eventualmente necessario può essere acquistato ad un costo di 2000€al Kg, mentre non è possibile produrre acido in eccesso dato che esso non può essere smaltito dall'azienda. Ogni quintale di prodotto A e B viene venduto ad un prezzo di 1000€e 9000€, rispettivamente. Esigenze di mercato richiedono infine che la quantità del prodotto B prodotta non superi quella del prodotto A.

Supponendo che non esistano vincoli tecnologici sui massimi quantitativi producibili, determinare la produzione di massimo profitto, utilizzando non più di due variabili, impiegando il metodo delle due fasi e la regola di Bland.

Commentare il risultato ottenuto.

Soluzione

Vengono utilizzate due variabili x_1 ed x_2, che costituiscono il numero di quintali da produrre di prodotto A e B, rispettivamente.

Il profitto ottenibile producendo un quintale di prodotto A è pari alla differenza tra prezzo di vendita e costo, più il valore dell'acido ottenuto (che altrimenti dovrebbe essere acquistato all'esterno), ossia $1000 - 3000 + 6000 = 4000$. Analogamente il profitto ottenibile producendo un quintale di prodotto B è pari al prezzo di vendita meno il costo dell'acido necessario (indipendentemente dal fatto che questo sia acquistato all'esterno od ottenuto dalla produzione di A), ossia $9000 - 8000 = 1000$. Il modello di programmazione lineare è pertanto il seguente:

$$\begin{array}{rrrrrl}
\max\ z = & 4\,x_1 & + & x_2 & & \\
& -\ x_1 & + & x_2 & \leq & 0 \\
& 3\,x_1 & - & 4\,x_2 & \leq & 0 \\
& x_1, & & x_2 & \geq & 0
\end{array}$$

dove il secondo vincolo esprime la condizione che la soluzione non preveda produzione di acido in eccesso.

Ponendo il modello in forma standard, si ottiene

$$\begin{array}{rrrrrrrl}
\min\ -z = & -\ 4\,x_1 & - & x_2 & & & & \\
& -\ x_1 & + & x_2 & +\ x_3 & & = & 0 \\
& 3\,x_1 & - & 4\,x_2 & & +\ x_4 & = & 0 \\
& x_1, & & x_2, & x_3, & x_4 & \geq & 0
\end{array}$$

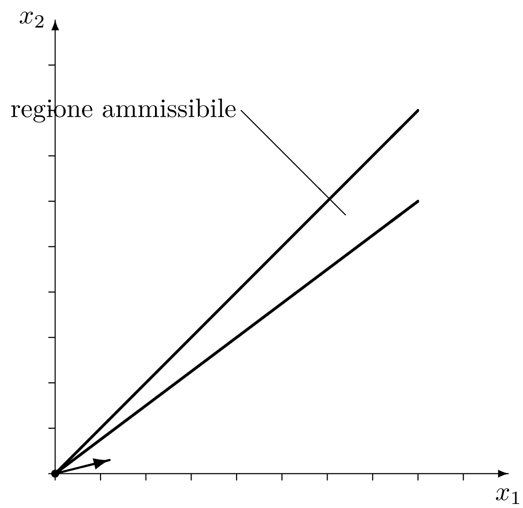
Poichè le ultime due colonne del tableau costituiscono una base iniziale ammissibile, non è necessario applicare la Fase 1.

		x_1	x_2	x_3	x_4
z	0	-4	-1	0	0
x_3	0	-1	1	1	0
x_4	0	3	-4	0	1

		x_1	x_2	x_3	x_4
z	0	0	$-\frac{19}{3}$	0	$\frac{4}{3}$
x_3	0	0	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$
x_1	0	1	$-\frac{4}{3}$	0	$\frac{1}{3}$

Poichè tutti i coefficienti della colonna corrispondente alla variabile x_2, che ha costo relativo negativo, sono minori o uguali a zero, è possibile concludere che la soluzione del problema è illimitata.

La regione ammissibile del problema formulato e la direzione del gradiente della funzione obiettivo sono infatti le seguenti:



Si conclude pertanto che per determinare una produzione effettiva occorrerebbe introdurre nel modello anche vincoli tecnologici sulle capacità produttive dell'azienda.

Esercizio 7.11.

Un'azienda vinicola produce due tipi di vino: DOC e "da tavola". Ogni quintale di vino DOC richiede 2 quintali di uva di prima scelta e mezzo quintale di uva di seconda scelta. Ogni quintale di vino da tavola richiede 80 chili di uva di prima scelta, 80 chili di uva di seconda scelta e 10 litri d'acqua. L'azienda dispone di 800 quintali di uva di prima scelta e di 400 quintali di uva di seconda scelta, oltrechè, ovviamente, di una quantità illimitata di acqua. Ogni quintale di vino DOC dà un profitto di 50€, ogni quintale di vino da tavola un profitto di 30€. L'azienda ritiene di non poter mettere in commercio più di 300 quintali di vino DOC.

a) Definire il modello di programmazione lineare per determinare le quantità da produrre di ciascun tipo di vino per massimizzare il profitto conseguibile.

b) Determinare la soluzione ottima mediante l'algoritmo del simplesso e la regola di Bland.

c) L'azienda apprende che è possibile che vengano intensificati i controlli anti sofisticazione. In tale ipotesi essa dovrebbe rinunciare all'aggiunta di acqua nel vino da tavola, per cui il corrispondente profitto diminuirebbe a 10€per quintale. Partendo dal tableau finale ottenuto al punto b), determinare la nuova soluzione ottima.

d) Disegnare la regione ammissibile ed indicare i vertici corrispondenti alle soluzioni ottime dei punti b) e c).

Soluzione

a) Vengono utilizzate due variabili x_1 ed x_2, che costituiscono il numero di quintali da produrre di vino DOC e da tavola, rispettivamente. Il modello di programmazione lineare è

$$
\begin{array}{lrrrr}
\max\ z = & 5\,x_1 & +\quad 3\,x_2 & & \\
 & 2\,x_1 & +\,0.8\,x_2 & \leq & 800 \\
 & 0.5\,x_1 & +\,0.8\,x_2 & \leq & 400 \\
 & x_1 & & \leq & 300 \\
 & x_1, & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

in cui il profitto totale z è espresso in decine di €. Si noti che ovviamente non occorre introdurre il vincolo relativo all'acqua, che avrebbe la forma $x_2 \leq +\infty$. Moltiplicando il secondo ed il terzo vincolo per 10 (al fine di ottenere coefficienti interi) e ponendo il modello in forma standard, si ottiene

$$
\begin{array}{rrrrrrrl}
\min\ -z = & -\ 5\,x_1 & -\ 3\,x_2 & & & & & \\
& 20\,x_1 & +\ 8\,x_2 & +\ x_3 & & & = & 8000 \\
& 5\,x_1 & +\ 8\,x_2 & & +\ x_4 & & = & 4000 \\
& x_1 & & & & +\ x_5 & = & 300 \\
& x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

b) Poichè le ultime tre colonne del tableau costituiscono una base iniziale ammissibile, non è necessario applicare la Fase 1.

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
z	0	-5	-3	0	0	0
x_3	8000	20	8	1	0	0
x_4	4000	5	8	0	1	0
x_5	300	1	0	0	0	1

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
z	1500	0	-3	0	0	5
x_3	2000	0	8	1	0	-20
x_4	2500	0	8	0	1	-5
x_1	300	1	0	0	0	1

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
z	2250	0	0	$\frac{3}{8}$	0	$-\frac{5}{2}$
x_2	250	0	1	$\frac{1}{8}$	0	$-\frac{5}{2}$
x_4	500	0	0	-1	1	15
x_1	300	1	0	0	0	1

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
z	$\frac{7000}{3}$	0	0	$\frac{5}{24}$	$\frac{1}{6}$	0
x_2	$\frac{1000}{3}$	0	1	$-\frac{1}{24}$	$\frac{1}{6}$	0
x_5	$\frac{100}{3}$	0	0	$-\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	1
x_1	$\frac{800}{3}$	1	0	$\frac{1}{15}$	$-\frac{1}{15}$	0

La soluzione ottima consiste dunque nel produrre $\frac{800}{3}$ di quintale di vino DOC e $\frac{1000}{3}$ di quintale di vino da tavola; si ottiene in tal modo un profitto complessivo di $\frac{70}{3}$ migliaia di €, ossia circa 23300€.

c) Nell'ipotesi considerata i vincoli non cambiano, mentre la funzione obiettivo in forma standard diviene

$$\min\ -z = -5x_1 - x_2$$

Inserendo tale funzione nel tableau finale del punto b) si ottiene

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	0	-5	-1	0	0	0
x_2	$\frac{1000}{3}$	0	1	$-\frac{1}{24}$	$\frac{1}{6}$	0
x_5	$\frac{100}{3}$	0	0	$-\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	1
x_1	$\frac{800}{3}$	1	0	$\frac{1}{15}$	$-\frac{1}{15}$	0

Per azzerare i costi relativi corrispondenti alle variabili in base si sottraggono alla riga 0 la riga 3 moltiplicata per 5 e la riga 1:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
z	$\frac{5000}{3}$	0	0	$\frac{7}{24}$	$-\frac{1}{6}$	0
x_2	$\frac{1000}{3}$	0	1	$-\frac{1}{24}$	$\frac{1}{6}$	0
x_5	$\frac{100}{3}$	0	0	$-\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	1
x_1	$\frac{800}{3}$	1	0	$\frac{1}{15}$	$-\frac{1}{15}$	0

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
z	1750	0	0	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{5}{2}$
x_2	250	0	1	$\frac{1}{8}$	0	$-\frac{5}{2}$
x_4	500	0	0	-1	1	15
x_1	300	1	0	0	0	1

La nuova soluzione ottima prevede di produrre 300 quintali di vino DOC e 250 quintali di vino da tavola; il profitto complessivo scende a 17500€.

d) La regione ammissibile del problema è riportata nella figura 7.7.

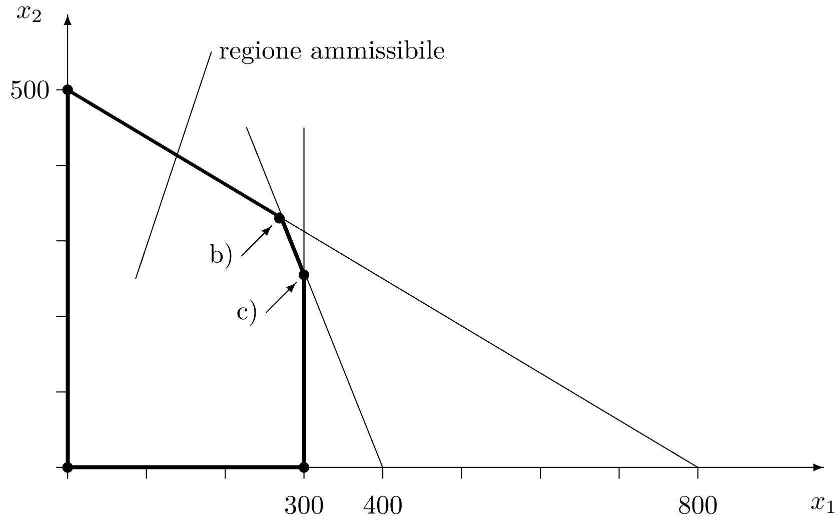


Figura 7.7: Regione ammissibile

Esercizio 7.12.

Sia dato il problema di programmazione lineare

$$\begin{array}{rrrrrr}
\min \; z = & x_1 & -\,2\,x_2 & + \;\; x_3 & & \\
& x_1 & & +\,3\,x_3 & = & 1 \\
& 3\,x_1 & +\,3\,x_2 & - \;\; x_3 & = & 4 \\
& x_1, & x_2, & x_3 & \geq & 0
\end{array}$$

Risolvere il problema mediante l'algoritmo del simplesso, utilizzando il metodo delle due fasi e la regola di Bland. Nella Fase 1 si introducano solo le variabili artificiali necessarie.

Esercizio 7.13.

Un'azienda produce lotti di due articoli A e B utilizzando un materiale M, di cui sono disponibili otto quintali. La produzione di ogni lotto richiede un quintale di M: un lotto di A è costituito da materiale M puro, mentre in un lotto di B il materiale M è diluito in un peso uguale di materia inerte. Esigenze produttive impongono che il peso complessivo dei lotti prodotti sia di almeno cinque quintali, mentre per ragioni di mercato il numero dei lotti di A prodotti deve superare quello dei lotti di B prodotti di almeno sei unità. Il profitto ottenibile da un lotto di A è di 2000€, mentre quello ottenibile da un lotto di B è di 4000€.

a) Definire il modello di programmazione lineare per determinare la produzione di massimo profitto.

b) Stabilire, mediante un semplice ragionamento, se uno dei vincoli è superfluo e, in tal caso, eliminarlo.

c) Risolvere il problema risultante mediante l'algoritmo del simplesso, utilizzando il metodo delle due fasi ed introducendo, nella Fase 1, solo le variabili artificiali necessarie. Si scelga per il pivoting la colonna cui corrisponde il costo relativo negativo di massimo valore assoluto.

Esercizio 7.14.

Un'azienda chimica produce due composti diversi (A e B) elaborando un unico elemento base X. Per produrre un quintale di composto A si consumano tre quintali di X, mentre per produrre un quintale di composto B si consumano due quintali di X. Il profitto unitario dato da A è doppio di quello dato da B. L'azienda dispone di sei quintali di X e, a causa di impegni precedentemente assunti con i propri clienti, deve produrre almeno un quintale di ciascun composto.

a) Definire il modello di programmazione lineare per determinare la produzione di massimo profitto.

b) Risolvere il problema mediante l'algoritmo del simplesso, utilizzando il metodo delle due fasi ed introducendo, nella Fase 1, solo le variabili artificiali necessarie. Si scelga per il pivoting la colonna cui corrisponde il costo relativo negativo di massimo valore assoluto.

c) Disegnare la regione ammissibile ed indicarvi le soluzioni corrispondenti a ciascun tableau (di entrambe le fasi).

Capitolo 8

Programmazione Lineare Intera

In questo capitolo vengono introdotte le proprietà fondamentali dei problemi di programmazione lineare così definiti

Definizione 8.1 (Problema PLI). (F, φ) *è un problema di programmazione lineare intera (PLI, o integer linear programming ILP) se la funzione obiettivo* φ *è lineare*

$$\varphi(x) = c^T x = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n,$$

la regione $F \subseteq \Re^n$ *è definita da* $g_i(x) \leq 0$ *e* $h_j(x) = 0 (i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, p)$ *con* $g_i, h_j : \Re^n \rightarrow R$ *lineare* $\forall i, j$

$$g_i(x) : a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \geq d_i$$

$$h_j(x) : a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \ldots + a_{jn}x_n = d_j$$

e le variabili possono assumere solo valori interi.

Nel caso speciale in cui le variabili possano assumere solo valori binari, ossia 0 oppure 1, il problema si dice di programmazione lineare binaria (PLB). Se non tutte le variabili sono vincolate ad essere intere il problema si dice di programmazione lineare mista (PLM).

Generalmente i problemi PLI si esprimono in forma matriciale

$$(PLI) \qquad \min c^T x \tag{8.1}$$

$$\text{s.t.} \qquad Ax \geq d, \tag{8.2}$$

$$x \geq 0 \quad \textbf{intere} \tag{8.3}$$

Per esprimere l'interezza delle variabili decisionali sotto forma di vincolo è possibile utilizzare per le variabili intere, una equazione nonlineare del tipo

$$\sin \pi x_j = 0 \tag{8.4}$$

e per le variabili binarie una equazione quadratica

$$x_j \cdot (x_j - 1) = x_j^2 - x_j = 0 \qquad j = 1, \dots, n. \tag{8.5}$$

I problemi PLI, PLB e PLM sono quindi assimilabili a problemi nonlineare per la presenza dei vincoli di interezza delle variabili. In realtà però la nonlinearità è "concentrata" nella prescrizione di interezza delle variabili mentre tutto il resto del problema è lineare e come vedremo questo permette di mettere a punto algoritmi efficaci per la risoluzione di tali problemi.

8.1 Difficoltà dei problemi PLI

I problemi PLI appartengono ad una classe di problemi computazionalmente difficili nota come classe dei problemi NP-difficili (NP-hard). Per tali problemi non sono noti algoritmi in grado di trovare la soluzione in tempi efficienti, ossia in un tempo di calcolo la cui crescita è limitata da una funzione polinomiale della dimensione del problema. Per tali problemi sono però stati messi a punto algoritmi, principalmente basati sul metodo Branch-and-Boundche sarà illustrato nel seguito. Tali algoritmi negli ultimi anni sono stati oggetto di intensi sforzi di ricerca che ne hanno migliorate le prestazioni al punto che gli attuali codici commerciali per la risoluzione di problemi PLI, quali ad esempio Cplex, Gurobi, Xpress, sono in grado di risolvere in molti casi problemi di grande dimensione in tempi contenuti e compatibili con le applicazioni. La difficoltà computazionale per la risoluzione di tali problemi rimane però un ostacolo insormontabile per problemi di grande scala o per il trattamento di alcuni vincoli che caratterizzano le applicazioni reali. In tali casi, rinunciando alla garanzia di ottimalità vengono messi a punto algoritmi euristici che permettono di determinare soluzioni ammissibili del problema, in generale di buona qualità ed in tempi di calcolo compatibili con le esigenze delle applicazioni. Nel seguito non esamineremo la definizione di algoritmi euristici e ci limiteremo all'illustrazione dei concetti di base della tecnica Branch-and-Boundche sarà esaminata nel Capitolo **??**.

8.1.1 Proprietà dei problemi PLI

Al fine di risolvere i problemi PLI è di grande importanza considerare il problema PL associato, ottenuto rimuovendo il vincolo di interezza delle variabili. Tale problema è detto *rilassamento continuo* del problema PLI.

Definizione 8.2 (Rilassamento continuo). *Dato un problema PLI, $P : z_P = \min\{c^T x, x \in \Re^n, Ax = d, x \geq 0$ intere$\}$ si dice* rilassamento continuo *il problema PL, $C(P) : z_{C(P)} = \min\{c^T x, x \in \Re^n, Ax = d, x \geq 0\}$ ottenuto rimuovendo il vincolo di interezza.*

Il rilassamento continuo ha un ruolo fondamentale nella risoluzione dei problemi PLI perché la sua soluzione ottima è in stretta relazione con quella del problema PLI cui è associato. In particolare, vale il seguente

Teorema 8.1. *Dato un problema PLI* $P : z_P = \min\{c^T x, x \in \Re^n, Ax = d, x \text{ intere}\}$ *ed il rilassamento continuo associato,* $C(P) : z_{C(P)} = \min\{c^T x, x \in \Re^n, Ax = d, x \geq 0\}$ *e detti* z_P *e* $z_{C(P)}$ *i valori delle rispettive soluzioni ottime, si ha che*

$$z_{C(P)} \leq z_P. \tag{8.6}$$

Dim. La regione ammissibile di $C(P)$ contiene la regione ammissibile di P dato che è ottenuta da questa rimuovendo il vincolo di interezza e la funzione obiettivo dei due problemi è la stessa. Pertanto la soluzione ottima di $C(P)$ non può essere peggiore di quella di P. □

La relazione tra problema PLI e rilassamento continuo è illustrata nella figura 8.1 in cui i vincoli $Ax = d$ sono indicati dalle rette che contengono un insieme di punti interi che rappresentano le soluzioni ammissibili del problema PLI. In figura è indicata la soluzione ottima x_P del problema P e la soluzione ottima $x_{C(P)}$ del suo rilassamento continuo. In figura è anche indicata la soluzione $\lfloor x_{C(P)} \rfloor$, ottenuta arrotondando le coordinate del rilassamento continuo che è possibile verificare sia una soluzione ammissibile ma non ottima. In altre parole il rilassamento continuo consente di calcolare una approssimazione (detta anche *bound*) del valore della soluzione ottima del problema PLI: nel caso di problemi di minimo sarà una approssimazione per difetto (*lower bound*) mentre nel caso di problemi di massimo l'approssimazione è per eccesso (*upper bound*).

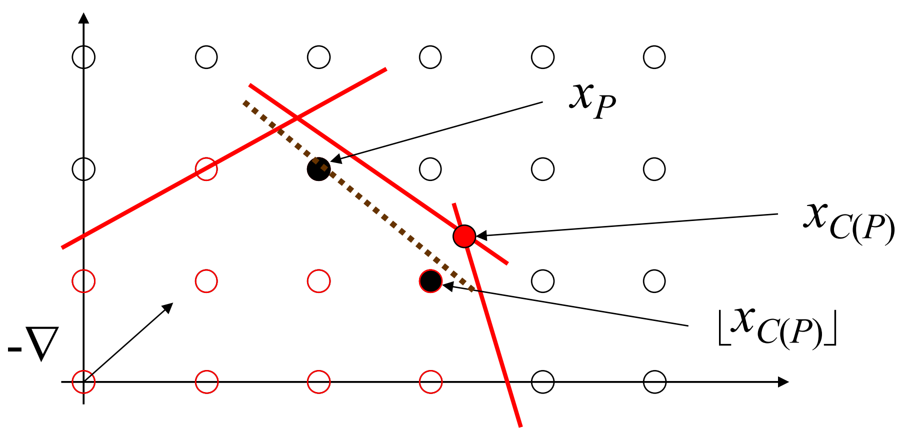


Figura 8.1: Rilassamento continuo di un problema PLI.

Vale inoltre il seguente

Teorema 8.2. *Dato un problema PLI* $P = \min\{c^T x, x \in \Re^n, Ax = d, x \text{ intere}\}$ *ed il rilassamento continuo associato,* $C(P) = \min\{c^T x, x \in \Re^n, Ax = d, x \geq 0\}$ *se la soluzione ottima* $x_{C(P)}$ *è ammissibile per* P*, ossia ha coordinate intere, allora è la soluzione ottima anche di* P *e* $z_{C(P)} = z_P$*.*

Dim. Dal teorema 8.1 sappiamo che La soluzione ottima di $C(P)$ è tale che $z_{C(P)} \leq z_P$. Tale soluzione è però anche soluzione ammissibile per P e quindi il suo valore è maggiore o uguale a quello di z_P. Quindi si ha che $z_P \leq z_{C(P)} \leq z_P$ e quindi i valori delle due soluzioni non possono che coincidere. $\square$

8.2 Formulazioni equivalenti di PLI

A differenza dei problemi PL per cui, a meno dell'introduzione di vincoli ridondanti, la formulazione è univoca, per i problemi PLI la formulazione non è univoca. Infatti, la regione ammissibile di un problema PLI è costituita da un inseme X di punti a coordinate intere che generalmente viene definita "catturando" tali punti con un insieme di vincoli lineari come mostrato nella figura 8.1. Più precisamente dato un problema PLI $P : z_P = \min\{c^T x, x \in X\}$ questo viene formulato mediante un insieme di vincoli lineari come $P : z_P = \min\{c^T x, x \in \Re^n, Ax = d, x \text{ intere}\}$. Dato un insieme X esistono molti modi per "racchiudere" tale insieme con un insieme di vincoli lineari. Come mostrato in figura 8.2 dato un insieme $X = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$ formato da quattro punti interi che rappresentano la regione ammissibile di un problema di massimizzazione, questo può essere delimitato da diverse formulazioni equivalenti che utilizzano 4 disequazioni lineari:

1) $\frac{1}{2} \leq x_1 \leq \frac{3}{2}, \quad \frac{1}{2} \leq x_2 \leq \frac{3}{2};$

2) $1 \leq x_1 \leq \frac{5}{4}, \quad 1 \leq x_2 \leq \frac{5}{4};$

3) $1 \leq x_1 \leq 2, \quad 1 \leq x_2 \leq 2.$

Come è possibile verificare tali formulazioni, così come altre che utilizzano un numero anche maggiore di vincoli, sono tutte equivalenti nel senso che contengono tutte solo i punti interi appartenenti all'insieme X. È però possibile anche verificare che i rilassamenti continui, la cui soluzione ottima è indicata in figura 8.2 non sono tra loro equivalenti e rappresentano approssimazioni via via più accurate della soluzione ottima del problema P fino ad individuarne la soluzione ottima stessa.

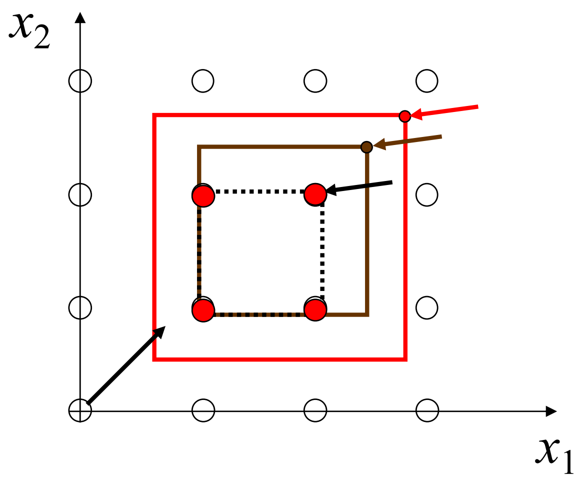


Figura 8.2: Esempi di formulazioni equivalenti di un problema PLI.

Quanto fin qui discusso porta ad individuare un criterio che consente di confrontare fra di loro formulazioni equivalenti al fine di determinare se una sia migliore, o come spesso viene definita più "tight" (attillata) di un'altra ad essa equivalente.

Definizione 8.3 (**Dominanza tra formulazioni**). *Dato un problema PLI e due formulazioni equivalenti $Q^1 = \{A^1x = d^1, x \geq 0\}$ e $Q^2 = \{A^2x = d^2, x \geq 0\}$ del problema, la formulazione Q^1* domina *la formulazione Q^2 se $Q^1 \subset Q^2$. In tal caso se il problema è in forma di minimo si ha che tra le soluzioni ottime dei due rilassamenti continui vale la seguente relazione*

$$z_{C(P^1)} \geq z_{C(P^2)},$$

ossia la formulazione φ_1 produce una stima per difetto (lower bound) migliore rispetto all'altra.

La relazione di dominanza tra le formulazioni appena definita è illustrata nella figura 8.3. A titolo di esempio si consideri il seguente problema KP01 con uno zaino di capacità $W = 6$ e tre oggetti di peso $w = \{4, 3, 2\}$. La regione ammissibile del problema è costituita dall'insieme

$$X = \{(0,0,0), (1,0,0), (1,0,1), (0,1,0), (0,1,1), (0,0,1)\}.$$

Consideriamo due formulazioni valide per tale problema, la prima delle quali è quella naturale con il solo vincolo di capacità

$$Q^1 = \{x\Re^3 : 0 \leq x \leq 1, 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 6\},$$

mentre la seconda include un vincolo che sancisce l'incompatibilità tra i primi due oggetti il cui peso complessivo supera la capacità

$$Q^2 = \{x\Re^3 : 0 \leq x \leq 1, 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 6, x_1 + x_2 \leq 1\}.$$

È facile verificare che $Q^2 \subset Q^1$ e pertanto la formulazione Q^2 domina la formulazione Q^1.

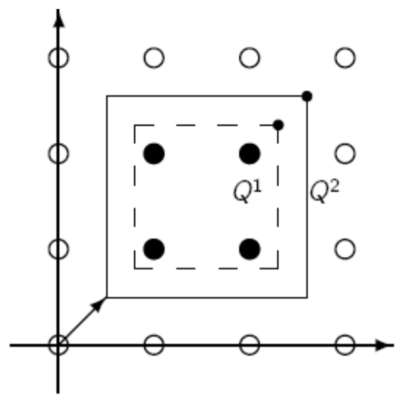


Figura 8.3: Relazione di dominanza tra formulazioni equivalenti di un problema PLI.

Possiamo ora domandarci se dato un problema PLI esista per esso una formulazione "ideale" che risulti migliore delle altre. A tal fine introduciamo la seguente

Definizione 8.4 (**Guscio convesso (Convex hull)**). *Dato un insieme $S \subseteq \Re^n$ si dice* guscio convesso (convex hull) *il più piccolo insieme convesso $conv(S)$ che contiene S.*

Come illustrato in figura 8.4 vale il seguente

Teorema 8.3. *Se S è un insieme di punti a coordinate intere e finite*[1]*, $conv(S)$ è un politopo i cui vertici sono tutti punti a coordinate intere.*

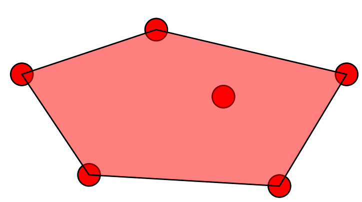


Figura 8.4: Guscio convesso di un insieme di punti.

[1] Il teorema è generalizzabile anche al caso di insiemi S illimitati

Si noti che la conseguenza del teorema 8.3 è che dato un problema PLI e la sua formulazione che corrisponde al guscio convesso della regione ammissibile, dato che tutti i vertici del politopo risultante hanno coordinate intere sarebbe possibile risolvere il problema intero come problema continuo utilizzando l'algoritmo del simplesso. Purtroppo in generale la formulazione del guscio convesso di un insieme di punti richiede un numero di disequazioni molto elevato e che cresce esponenzialmente con la dimensione del problema da formulare. Quindi non è in generale possibile utilizzare direttamente il guscio convesso per formulare e risolvere il problema PLI. In realtà però i metodi risolutivi esistenti utilizzano almeno in parte questi concetti per arrivare alla soluzione del problema PLI in un tempo di calcolo accettabile. Alcuni di questi metodi quali il metodo dei piani di taglio (cutting plane) e le sue generalizzazioni note come branch-and-cut e branch-anc-cut-and-price vanno al di la dello scopo di queste lezioni in cui ci limiteremo ad illustrare alcuni metodi fondamentali quali l'algoritmo branch-and-bound.

Capitolo 9

Modelli di Programmazione Lineare Intera NEW: ((Ver. 6.0))

9.1 Introduzione

Un modello generale di PL mista (PLM) ha la forma:

$$
\begin{array}{lll}
(P) & z(P) = \min c^T x & \\
s.t. & a_i^T x = b_i & i = 1, \ldots, M \\
 & a_i^T x \geq b_i & i = 1, \ldots, \overline{M} \\
 & x_j \geq 0 & j \in N \\
 & x_j \ \mathit{intere} & j \in \overline{N}
\end{array}
$$

e le sue componenti sono:

- Coefficienti:
  - $A = [m, n] = \{a_{ij}\}$, matrice tecnologica di dimensione $(m \times n)$;
  - $b = [m]$, vettore dei termini noti di dimensione m;
  - $c = [n]$, vettore dei costi di dimensione n;
- Variabili decisionali:
  - $x_j = [n]$, vettore di dimensione n.

Le variabili decisionali possono assumere valori sia continui sia discreti (interi), ossia $x_j \in N, x_j \in \overline{N}$. Se l'insieme N è vuoto P è un problema di programmazione lineare intera (PLI), se invece risulta vuoto $\overline{N}$, allora il problema P è un problema di programmazione lineare (continua) (PL). Se entrambi gli insiemi non sono vuoti allora il problema è di programmazione lineare mista (PLM)

I vincoli e la funzione obiettivo sono tutti definiti da funzioni lineari nelle variabili decisionali, ossia combinazioni lineari delle variabili decisionali x_j e dei coefficienti a_{ij} e c_j. In caso contrario il modello è di programmazione non lineare (PNL). Tutti i coefficienti del modello sono valori deterministici noti, in caso contrario il modello è di programmazione stocastica (PS).

9.2 Indagine di Mercato

Un'azienda di marketing deve effettuare una indagine telefonica di mercato intervistando utenti di quattro categorie, A, B, C e D. Le interviste possono essere effettuate al mattino o alla sera, al costo di 1€ ed 1.5€ ciascuna, rispettivamente. Per ciascuna categoria è stato definito il numero minimo di utenti che è necessario contattare ed è nota la probabilità che risponda ad una chiamata al mattino o alla sera, come riportato nella seguente tabella.

Categoria	A	B	C	D	–
n. Contatti	150	110	120	100	
mattino	30%	10%	10%	10%	40%
sera	30%	30%	30%	10%	10%

Si noti che il 40% delle telefonate al mattino e il 10% di quelle alla sera non contattano alcun utente.

Si desidera determinare quante telefonate fare al mattino e quante alla sera in modo tale che il numero di contatti di ciascuna categoria sia raggiunto e sia minimizzato il costo complessivo.

Modello PLI Per modellare il problema, bisogna per prima cosa identificare le variabili decisionali. In questo caso le decisioni da prendere riguardano il numero di telefonate da eseguire in ciascuna fascia oraria. Saranno quindi necessarie due variabili, x_1 e x_2 che rappresentano il numero di telefonate al mattino e alla sera, rispettivamente e che necessariamente dovranno assumere valori interi.

La funzione obiettivo è costituita dalla somma dei dei costi delle telefonate, ossia $x_1 + 1.5x_2$, e dovrà essere minimizzata. I vincoli del problema richiedono che per ciascuna categoria il numero di utenti raggiunti sia almeno pari al valore richiesto per tale categoria.

$$
\begin{array}{llllll}
\min & x_1 & +1.5\ x_2 & & & (9.1) \\
\text{s.t.} & 0.3\ x_1 & +0.3\ x_2 & \geq 150 & & (9.2) \\
 & 0.1\ x_1 & +0.2\ x_2 & \geq 110 & & (9.3) \\
 & 0.1\ x_1 & +0.3\ x_2 & \geq 120 & & (9.4) \\
 & 0.1\ x_1 & +0.1\ x_2 & \geq 100 & & (9.5) \\
 & x_1, & x_2 & \geq 0 & \text{intere} & (9.6)
\end{array}
$$

9.3 Noleggio di Dispositivi

Un'azienda deve deve noleggiare dei dispositivi per coprire la domanda irregolare del reparto di produzione. Il fabbisogno, in numero di dispositivi, per i successivi sei mesi è riportato nella tabella seguente.

Mese	Gen	Feb	Mar	Apr	Mag	Giu
Fabbisogno	9	5	7	9	10	5

I dispositivi possono essere noleggiati per uno, due o tre mesi al seguente costo

- un mese a 400€
- due mesi a 700€ (ossia 350€ al mese)
- tre mesi a 900€ (ossia 300€ al mese).

Si desidera determinare il piano dei noleggi che minimizza il costo complessivo necessario a soddisfare il fabbisogno minimo. Si osservi che, se conveniente alcuni dispositivi possono essere lasciati inutilizzati durante uno o più mesi. Inoltre, nessun dispositivo sarà necessario dopo i sei mesi considerati.

Modello PLI Le decisioni riguardano il numero di dispositivi da noleggiare in ciascun mese e la durata del noleggio scelta. Sarà quindi necessario utilizzare variabili decisionali associate a ciascun mese e durata del noleggio. Per una migliore leggibilità del modello utilizziamo tre gruppi di sei variabili decisionali intere ciascuno e definiti come segue

- x_i = numero di dispositivi noleggiati per un mese nel mese $i = 1, \dots, 6$.
- y_i = numero di dispositivi noleggiati per due mesi nel mese $i = 1, \dots, 6$.
- w_i = numero di dispositivi noleggiati per tre mesi nel mese $i = 1, \dots, 6$.

La funzione obiettivo è costituita dalla somma dei dei costi dei noleggi e dovrà essere minimizzata. I vincoli del problema richiedono che per ciascuna mese sia disponibile, perché noleggiati nel mese stesso o nei mesi precedenti, un numero di dispositivi almeno pari al fabbisogno di quel mese.

$$\begin{array}{llllllllll}
\min & 300\sum_{i=1}^{6} x_i & +700\sum_{i=1}^{6} y_i & +900\sum_{i=1}^{6} w_i & & & & & & (9.7)\\
\text{s.t.} & x_1 & +y_1 & +w_1 & & & & \geq 9 & & (9.8)\\
 & x_2 & +y_2 & +w_2 & +y_1 & +w_1 & & \geq 5 & & (9.9)\\
 & x_3 & +y_3 & +w_3 & +y_2 & +w_2 & +w_1 & \geq 7 & & (9.10)\\
 & x_4 & +y_4 & +w_4 & +y_3 & +w_3 & +w_2 & \geq 9 & & (9.11)\\
 & x_5 & +y_5 & +w_5 & +y_4 & +w_4 & +w_3 & \geq 10 & & (9.12)\\
 & x_6 & +y_6 & +w_6 & +y_5 & +w_5 & +w_4 & \geq 5 & & (9.13)\\
 & x_i, & y_i, & w_i & & & & \geq 0, \text{intere} & & \\
 & & & & & & & (i = 1, \ldots, 6) & & (9.14)
\end{array}$$

Si osservi che nel mese di maggio e giugno non è conveniente noleggiare dispositivi per un periodo che vada oltre il mese di giugno pertanto le variabili w_5, y_6 e w_6 possono essere eliminate dal modello dato che avranno valore uguale a zero nella soluzione ottima.

9.4 Campagna pubblicitaria

Un'agenzia pubblicitaria deve pubblicizzare una nuova iniziativa mediante degli annunci, disponendo di un importo complessivo pari a 150.000€. Per la campagna possono essere utilizzati due tipi di canali: annunci sui giornali e spot presso televisioni locali. L'agenzia prevede di fare al massimo 30 annunci sui giornali, del costo di 1.000€ ciascuno, e 15 spot televisivi del costo di 10.000€ ciascuno. Il numero di nuovi utenti che sono raggiunti da un annuncio o da uno spot dipende in maniera decrescente dal numero di questi come descritto nelle seguenti tabelle ed illustrato, per gli annunci sui giornali in figura 9.1:

Giornali	
N. di annunci	Nuovi utenti raggiunti
1-10	900
11-20	600
21-30	300

Televisione	
N. di spot	Nuovi utenti raggiunti
1-5	10.000
6-10	5.000
11-15	2.000

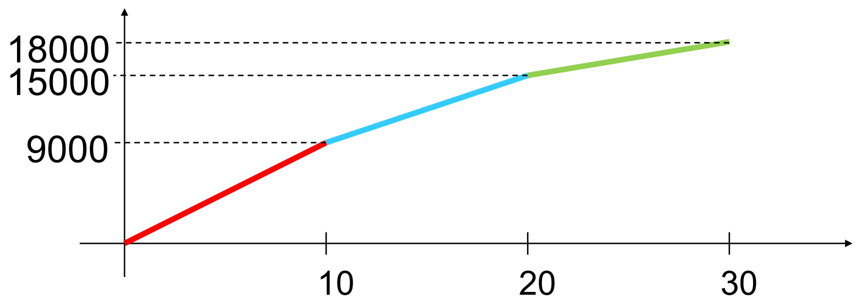


Figura 9.1: Numero di utenti raggiunti in dipendenza del numero di annunci sui giornali fatti.

Si desidera determinare il mix di annunci che massimizza il numero di utenti raggiunti nel rispetto del budget disponibile.

Modello PLI Le decisioni riguardano il numero di annunci e di spot da realizzare. L'andamento non lineare, descritto da una funzione lineare a tratti come illustrato in figura 9.1, del numero di utenti raggiunti richiede però di essere modellato adeguatamente. In generale la modellazione di comportamenti non lineari mediante funzioni lineari è un'attività complessa ma in questo caso si può osservare che l'andamento della pendenza della curva da modellare, ossia il numero di nuovi utenti raggiunti, è non-crescente al crescere del valore delle variabili decisionali. Un possibile modo per modellare questo comportamento è quello di utilizzare per ogni tipo di annuncio una diversa variabile decisionale associata ad ogi intervallo della funzione lineare a tratti che rappresenta il numero di annunci effettuati in tale intervallo. Pertanto utilizzeremo le seguenti variabili decisionali:

- x_1, x_2, x_3: numero di annunci sui giornali negli intervalli 0-10, 11-20 e 21-30, rispettivamente;

- y_1, y_2, y_3: numero di spot televisivi negli intervalli 0-5, 6-10 e 11-15, rispettivamente.

Il numero totale di annunci dei due tipi fatti sarà ovviamente dato dalla somma delle variabili associate ai rispettivi intervalli e la funzione obiettivo utilizzerà come coefficiente per ciascuna variabile il numero di utenti nuovi raggiunti per annuncio in tale intervallo. I vincoli del problema sono unicamente relativi al limite di spesa complessiva per gli annunci ed impongono che le variabili decisionali non eccedano il numero massimo di annunci associati al relativo intervallo.

$$\max \quad 9x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 100y_1 + 50y_2 + 20y_3 \tag{9.15}$$

$$\text{s.t.} \quad x_1 + x_2 + x_3 + 10y_1 + 10y_2 + 10y_3 \leq 150 \tag{9.16}$$

$$x_1 \leq 10 \tag{9.17}$$

$$x_2 \leq 10 \tag{9.18}$$

$$x_3 \leq 10 \tag{9.19}$$

$$y_1 \leq 5 \tag{9.20}$$

$$y_2 \leq 5 \tag{9.21}$$

$$y_3 \leq 5 \tag{9.22}$$

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad y_1, \quad y_2, \quad y_3 \geq 0, \text{intere} \tag{9.23}$$

in cui la funzione obiettivo è espressa in centinaia di utenti raggiunti.

Si noti che non è necessario imporre che una variabile decisionale associata ad un intervallo, ad esempio x_2 possa essere maggiore di zero solo se la variabile associata all'intervallo precedente sia completamente saturata, ossia solo se $x_1 = 10$. Infatti, non sarebbe conveniente utilizzare una unità di x_2 al posto di una di x_1 dato che il profitto x_2 è inferiore a quello di x_1.

9.5 Turnazione del Personale

Un ospedale deve definire i turni degli infermieri per un reparto il cui fabbisogno è variabile nei diversi giorni della settimana come riportato nella seguente tabella.

Giorno	Lu	Ma	Me	Gi	Ve	Sa	Do
Fabbisogno	22	18	13	14	15	18	25

Per la copertura dei turni il personale può iniziare il proprio turno settimanale in ciascun giorno della settimana e lavora per cinque giorni consecutivi e riposa i due giorni successivi. Ad esempio se un infermiere inizia il proprio turno di martedì lavorerà fino a sabato e poi riposa la domenica ed il lunedì.

Si desidera minimizzare il personale necessario alla copertura del fabbisogno.

Modello PLI Le decisioni riguardano il numero di infermieri che iniziano il proprio turno in uno specifico giorno della settimana. Utilizzeremo pertanto sette variabili decisionali $x_1, \ldots, x_7$ che rappresentano il numero di infermieri che iniziano il proprio turno di lavoro nei giorni da lunedì a domenica, rispettivamente.

La funzione obiettivo richiede di minimizzare il numero complessivo di infermieri e sarà quindi uguale alla somma delle variabili decisionali.

I vincoli sul fabbisogno sono uno per ogni giorno della settimana ed impongono che gli infermieri attivi in quel giorno siano almeno pari al fabbisogno stesso. Ad esempio, il fabbisogno di martedì è coperto dagli infermieri che iniziano il turno in tale giorno ma anche da quelli che iniziano il turno nei quattro giorni precedenti.

$$\begin{array}{llllllllll}
\max & x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 & +x_6 & x_7 & & (9.24)\\
\text{s.t.} & x_1 & & & +x_4 & +x_5 & +x_6 & +x_7 & \geq 22 & (9.25)\\
& x_1 & +x_2 & & & +x_5 & +x_6 & +x_7 & \geq 18 & (9.26)\\
& x_1 & +x_2 & +x_3 & & & +x_6 & +x_7 & \geq 13 & (9.27)\\
& x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & & & +x_7 & \geq 14 & (9.28)\\
& x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & x+_5 & & & \geq 15 & (9.29)\\
& & +x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 & +x_6 & & \geq 18 & (9.30)\\
& & & x_3 & +x_4 & +x_5 & +x_6 & +x_7 & \geq 25 & (9.31)\\
& x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6, & x_7 & \geq 0, \text{intere} & (9.32)
\end{array}$$

Varianti Nei problemi reali di turnazione del personale possono essere presenti numerose ulteriori caratteristiche che influenzano la costruzione del modello. Ad esempio, possono essere presenti turni di tipo diverso rispetto al tipo di turno che è stato considerato nell'esercizio (lavora cinque giorni e risposa i due giorni seguenti) e per ciascuno di questi tipi di turno possono essere presenti un numero massimo di addetti che possono utilizzarli.

Il modello descritto in questa sezione considera il personale in modo indistinto ossia considera unicamente il numero di addetti che dovranno seguire un dato turno. In pratica sarà quindi necessario assegnare i turni al personale vero che potrebbe avere propensioni diverse rispetto ai diversi tipi di turno assegnati. Ad esempio alcuni addetti potrebbero preferire lavorare nei fine settimana ed altri no. A tal proposito è possibile provvedere all'assegnazione dei turni al personale reale formulandolo come problema dell'assegnamento, definito nella sezione 9.12, in cui per ogni addetto il costo di assegnamento ad un incarico è modellato come una preferenza da 1 (incarico preferito) a 7 (incarico meno preferito). Risolvendo il problema dell'assegnamento si ottengono in tal modo le assegnazioni dei turni al personale che minimizzano il costo di assegnazione massimizzano le preferenze espresse dagli addetti.

9.6 Problema dello zaino (Knapsack Problem)

Definizione del problema Sono dati

- un insieme N di n oggetti, il j-esimo dei quali caratterizzato da un *profitto* positivo p_j e da un *peso* positivo w_j;
- un contenitore (*zaino* o *knapsack*) di capacità C.

Il problema dello zaino richiede di selezionare un sottoinsieme di oggetti tale che

- la somma dei pesi degli oggetti selezionati non ecceda la capacità dello zaino;
- la somma dei profitti degli oggetti selezionati sia massima.

Modello PLI Per modellare il problema, bisogna per prima cosa identificare le variabili decisionali. Un possibile modello per il problema dello zaino introduce, per ciascun oggetto j, una variable binaria x_j con il seguente significato:

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{se l'oggetto } j \text{ è selezionato} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad (j = 1, \ldots, n) \tag{9.33}$$

Si può osservare che, con questa scelta delle variabili decisionali, il profitto associato a ciascun oggetto j è esprimibile come

$$p_j\, x_j = \begin{cases} p_j & \text{se l'oggetto } j \text{ è selezionato} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

Dato che la funzione obiettivo è costituita dalla somma dei profitti degli oggetti selezionati, la scelta delle variabili dovrà cercare di massimizzare la quantità $\sum_{j=1}^{n} p_j x_j$.
Analogamente, il peso occupato da ciascun oggetto j nella soluzione è esprimibile come $w_j\, x_j$ ed il vincolo di capacità dello zaino imporrà che le variabili soddisfino la condizione $\sum_{j=1}^{n} w_j x_j \leq C$.
Imponendo infine che ciascuna variabile x_j sia binaria, si ottiene il seguente modello di Programmazione Lineare Intera

$$(KP01) \qquad \max \sum_{j=1}^{n} p_j x_j \tag{9.34}$$

$$s.t. \qquad \sum_{j=1}^{n} w_j x_j \leq C \tag{9.35}$$

$$x_j \in \{0, 1\} \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{9.36}$$

Il modello matematico descritto sopra coinvolge n variabili (una per ogni oggetto) ed un solo vincolo, oltre a quelli che descrivono il dominio delle variabili. Si noti che quello proposto è solo un *possibile* modello per il problema dello zaino. In altre parole, esistono modelli alternativi che descrivono esattamente lo stesso problema, ma con variabili e vincoli diversi. La dimensione di questi modelli alternativi, in termini di numero di variabili e vincoli, è in generale diversa dalla dimensione del modello sopra descritto. Più in generale, per qualunque problema di ottimizzazione possono esistere modelli alternativi, che utilizzano variabili e vincoili diversi. Inoltre, la dimensione del problema (numero di oggetti, nel caso del knapsack problem) non definisce univocamente la dimensione del modello matematico che lo descrive.

Esempio numerico Consideriamo il seguente esempio numerico. Sono dati $n = 7$ oggetti ed uno zaino con capacità $C = 100$. I profitti e pesi degli oggetti sono riportati dai seguenti due vettori (p) e (w), ciascuno contenente 7 valori:

$$(p) = (40, 62, 14, 20, 98,\ 5, 73)$$

$$(w) = (18, 33, 12, 24, 21, \ 8, 28)$$

L'insieme di valori numerici per un problema di ottimizzazione costituisce una *istanza* del problema. Per l'istanza numerica sopra specificata, il corrispondente modello di PLI è il seguente

$$\begin{array}{lcccccccccc}
\max & 40x_1 & +62x_2 & +14x_3 & +20x_4 & +98x_5 & +\ 5x_6 & +73x_7 & & \\
 & 18x_1 & +33x_2 & +12x_3 & +24x_4 & +21x_5 & +\ 8x_6 & +28x_7 & \leq & 100 \\
 & x_1 & , \ x_2 & , \ x_3 & , \ x_4 & , \ x_5 & , \ x_6 & , \ x_7 & \in & \{0,1\}
\end{array}$$

Risolvere questa istanza all'ottimo tramite il modello matematico sopra riportato significa determinare il valore (0 oppure 1) da attribuire a ciascuna variabile decisionale $x_1, x_2, \ldots x_7$ in modo da ottimizzare la funzione obiettivo, rispettando tutti i vincoli presenti.

Assunzioni Senza perdita di generalità possiamo fare le seguenti assunzioni sui dati di ingresso di un problema knapsack:

1. La somma dei pesi di tutti gli oggetti eccede la capacità dello zaino, ovvero

$$\sum_{j=1}^{n} w_j > W$$

   Infatti, se questa assunzione fosse violata, sarebbe possibile selezionare tutti gli oggetti in soluzione, e non sarebbe quindi richiesta alcuna ottimizzazione.

2. Ciascun oggetto può essere inserito da solo in soluzione, ovvero

$$w_j \leq W \quad \forall j = 1, \ldots, n$$

   Infatti, immaginiamo che esista un oggetto k il cui peso supera la capacità dello zaino, cioè tale che $w_k > C$. In nessuna soluzione ammissibile del problema è possibile inserire l'oggetto k. Quindi, la soluzione ottima dell'istanza sarà ottenibile risolvendo una nuova istanza di knapsack nella quale l'oggetto k è stato rimosso.

Applicazioni

9.6.1 Varianti del problema

Problema Knapsack con vincolo di uguaglianza In questa variante del problema, bisogna selezionare un sottoinsieme di oggetti che utilizzi *tutta* la capacità a disposizione. Per modellare questo problema è possibile utilizzare le stesse variabili decisionali del problema knapsack, la stessa funzione obiettivo, e rimpiazzare il vincolo di capacità (9.35) con il seguente vincolo

$$\sum_{j=1}^{n} w_j x_j = C \tag{9.37}$$

Tale vincolo impone che la somma dei pesi degli oggetti selezionati sia *esattamente* uguale al valore della capacità dello zaino.

Problema Knapsack in forma di minimo Dati n oggetti, il j-esimo dei quali caratterizzato da un *costo* positivo c_j e da un *peso* positivo w_j, ed peso di riferimento B, il problema dello zaino in forma di minimo richiede di selezionare un sottoinsieme di oggetti tale che

- la somma dei pesi degli oggetti selezionati sia non inferiore a B;
- la somma dei costi degli oggetti selezionati sia minima.

Questa variante del problema è speculare rispetto alla versione base del problema knapsack. Mentre nel caso precedente l'obiettivo era quello di selezionare "tanti" oggetti (in modo da massimizzare il profitto complessivo) senza eccedere un valore massimo di peso complessivo, in questo problema vogliamo selezionare "pochi" oggetti (in modo da minimizzare il costo complessivo), garantendo di occupare un valore minimo di peso complessivo. Nonostante questa differenza, il problema può essere modellato utilizzando ancora le variabili decisionali x_j descritte nella (9.33). Con questa scelta delle variabili, il corrispondente modello matematico risulta essere il seguente

$$(KP - \min) \qquad \min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{9.38}$$

$$s.t. \qquad \sum_{j=1}^{n} w_j x_j \geq B \tag{9.39}$$

$$x_j \in \{0,1\} \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{9.40}$$

Problema del Knapsack Multiple-Choice Consideriamo ora una variante del problema knapsack nella quale gli oggetti hanno un secondo attributo che li caratterizza, ad esempio la dimensione, e che sia possibile classificare ciascun oggetto come grande, medio o piccolo. In base a questo secondo attributo, possiamo partizionare l'insieme di oggetti in 3 diversi sottoinsiemi disgiunti

$$N = N_G \cup N_M \cup N_P$$

dove N_G, N_M e N_P rappresentano gli insiemi di oggetti grandi, medi e piccoli, rispettivamente.

Nel problema del Knapsack Multiple-Choice si vuole determinare una soluzione del problema knapsack che soddisfi questo vincolo aggiuntivo: è possibile selezionare al più un oggetto per ciascuna categoria. Questo vuol dire che, nel nostro esempio, qualunque soluzione ammissibile deve contenere al più un oggetto grande, al più un oggetto medio e al più un oggetto piccolo. Per modellare questo problema, bisognerà aggiungere queste condizioni al modello del problema knapsack (che non richiedeva tale requisito). Utilizzando ancora le variabili x_j descritte nella (9.33), i vincoli aggiuntivi possono essere modellati nel seguente modo

$$\sum_{j \in N_G} x_j \leq 1 \qquad \sum_{j \in N_M} x_j \leq 1 \qquad \sum_{j \in N_P} x_j \leq 1$$

Ciascuna sommatoria sui riferisce ad un particolare sottoinsieme di oggetti e coinvolge le variabili associate a tali oggetti. Dato che ciascuna variabile vale 1 (se il corrispondente ogetto è selezionato) oppure 0 (altrimenti), la somma delle variabili che compare nella parte sinistra del vincolo indica il numero di variabili che assumono il valore 1, ossia il numero di oggetti selezionati nel sottoinsieme. Ciascun vincolo impone quindi che questo numero sia al pi'ù pari a 1 per ciascun sottoinsieme di oggetti.

Più in generale, nel problema del Knapsack Multiple-Choice gli oggetti sono partizionati in k sottoinsiemi: $N = N_1 \cup N_2 \cdots \cup N_k$, ed esiste un vincolo aggiuntivo che impone di selezionare al massimo un oggetto per ogni sottoinsieme N_ℓ $(\ell = 1, \dots, k)$. Si osservi che il numero k di sottoinsiemi e la composizione di ciascun sottoinsieme sono un dato di input, noto a priori, e non dipende quindi dalle scelte da effettuare in fase di ottimizzazione. Per modellare il problema, possiamo utilizzare ancora le variabili x_j ed aggiungere al modello (9.34)–(9.36) i seguenti vincoli

$$\sum_{j \in N_\ell} x_j \leq 1 \quad \ell = 1, \dots, k \tag{9.41}$$

Il termine di sinistra di ciascun vincolo ℓ-esimo corrisponde al numero di oggetti appartenenti al sottoinsieme ℓ che sono selezionati in soluzione (cioè per i quali la variabile associata vale 1). Il vincolo impone che tale numero sia al massimo pari a 1.

Consideriamo ancora l'esempio numerico con $n = 7$ oggetti, uno zaino con capacità $C = 100$ ed i seguenti vettori di profitti e pesi:

$$(p) = (40, 62, 14, 20, 98,\ 5, 73) \quad (w) = (18, 33, 12, 24, 21,\ 8, 28)$$

Gli oggetti sono partizionati nei seguenti $k = 3$ sottoinsiemi

$$N_1 = \{1, 2, 5\}, \quad N_2 = \{3, 6\}, \quad N_3 = \{4, 7\}$$

Il corrispondente modello di PLI per questa istanza è il seguente

$$\begin{array}{lcccccccccc}
\max & 40x_1 & +62x_2 & +14x_3 & +20x_4 & +98x_5 & +\ 5x_6 & +73x_7 & & \\
 & 18x_1 & +33x_2 & +12x_3 & +24x_4 & +21x_5 & +\ 8x_6 & +28x_7 & \leq & 100 \\
 & x_1 & +\ x_2 & & & +\ x_5 & & & \leq & 1 \\
 & & & x_3 & & & +\ x_6 & & \leq & 1 \\
 & & & & x_4 & & & +\ x_7 & \leq & 1 \\
 & x_1 & ,\ x_2 & ,\ x_3 & ,\ x_4 & ,\ x_5 & ,\ x_6 & ,\ x_7 & \in & \{0,1\}
\end{array}$$

Problema del Knapsack Bounded Consideriamo la variante del problema knapsack nella quale ogni oggetto j è disponibile in u_j esemplari identici; ciascun esemplare selezionato porta ad un profitto p_j ed occupa un peso w_j.

In questo problema, la soluzione non deve solo indicare il sottoinsieme di oggetti da selezionare, ma anche il numero di esemplari di ciascun oggetto che conviene selezionare. Per questo motivo, non è possibile scrivere un modello matematico di Programmazione Lineare Intera utilizzando solo n variabili binarie.

Per definire un modello corretto, introduciamo n variabili decisionali a valori interi

$$x_j = \text{numero di esemplari dell'oggetto} j \text{in soluzione} \quad (j = 1, \ldots, n) \tag{9.42}$$

Con questa scelta delle variabili decisionali, il profitto ottenuto selezionando x_j esemplari dell'oggetto j è pari a $p_j x_j$ ed il corrispondente peso occupato è $w_j x_j$. Il modello matematico risultante è il seguente

$$(KP - b) \qquad \max \sum_{j=1}^{n} p_j x_j \tag{9.43}$$

$$s.t. \qquad \sum_{j=1}^{n} w_j x_j \leq C \tag{9.44}$$

$$x_j \leq u_j \qquad j = 1, \ldots, n \tag{9.45}$$

$$x_j \geq 0 \quad \text{intera} \qquad j = 1, \ldots, n \tag{9.46}$$

Consideriamo una istanza con $n = 3$ oggetti, uno zaino con capacità $C = 100$ ed i seguenti vettori di profitti, pesi e numero di esemplari:

$$(p) = (40, 62, 14) \quad (w) = (18, 33, 12) \quad (u) = (4, 2, 3)$$

Il corrispondente modello di PLI per questa istanza è il seguente

$$\begin{array}{lccccrl}
\max & 40x_1 & +62x_2 & +14x_3 & & & \\
 & 18x_1 & +33x_2 & +12x_3 & \leq & 100 & \\
 & x_1 & & & \leq & 4 & \\
 & & x_2 & & \leq & 2 & \\
 & & & x_3 & \leq & 3 & \\
 & x_1 \quad , & x_2 \quad , & x_3 & \geq & 0 & \text{intera}
\end{array}$$

Si osservi che il KP01 è un caso particolare del knapsack bounded che si verifica quando $u_j = 1$ per ogni $j = 1, \ldots, n$. In altre parole, un qualunque strumento di soluzione (modello PLI, algoritmo, ...) per il knapsack bounded può essere utilizzato per risolvere una qualunque istanza di KP01 (cioè, se sappiamo risolvere knapsack bounded siamo in grado di risolvere il K01). È però vero anche il contrario (cioè se sappiamo risolvere KP01 siamo in grado di risolvere il knapsack bounded), ma questo richiede uno sforzo supplementare. Per ricondurre una istanza di knapsack bounded ad una istanza di KP01, bisogna introdurre, per ciascun oggetto j, un numero u_j di esemplari identici, tutti con lo stesso profitto e peso. Per l'esempio numerico descritto sopra, la corrispondente istanza di KP01 è definita nel seguente modo:

- 9 oggetti
- profitti $(p) = (40, 40, 40, 40, 62, 52, 14, 14, 14)$
- pesi $\quad (w) = (18, 18, 18, 18, 33, 33, 12, 12, 12)$
- capacità pari a 100

Problema del Knapsack Unbounded In questa variante del problema, ciascun oggetto j è disponibile in un numero infinito di esemplari identici.

Per modellare il problema, si possono introdurre le variabili x_j definitre in (9.42) e modeificare il modello del knapsack bounded rimuovendo il vincolo (9.45). Il modello risultante è il seguente

$$(KP-u) \qquad \max \sum_{j=1}^{n} p_j x_j \tag{9.47}$$

$$s.t. \qquad \sum_{j=1}^{n} w_j x_j \leq C \tag{9.48}$$

$$x_j \geq 0 \quad \text{intera} \qquad j = 1, \ldots, n \tag{9.49}$$

Si osservi che, anche se il numero di esemplari disponibili per ciascun oggetto j è illimitato, nella pratica esiste sempre un upper bound sul numero massimo di esemplari da considerare. Tale numero deriva dal fatto che la capacità del knapsack è finita e quindi, per ciascun oggetto j, il numero di esemplari che possono essere inseriti in qualunque soluzione ammissibile non può superare $\lfloor \frac{C}{w_j} \rfloor$. In altre parole, qualunque istanza di knapsack unbounded può essere trasformata in una istanza di knapsack bounded che ha la stessa soluzione ottima.

Problema del Subset Sum Questo problema è un caso particolare di KP01 nel quale ogni oggetto ha un profitto che coincide con il suo peso, ovvero $p_j = w_j, \forall j = 1, \ldots, n$. Il modello matematico risultante è quindi il seguente

$$(SSP) \qquad \max \sum_{j=1}^{n} w_j x_j \tag{9.50}$$

$$s.t. \qquad \sum_{j=1}^{n} w_j x_j \leq C \tag{9.51}$$

$$x_j \in \{0, 1\} \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{9.52}$$

Questo problema modella situazioni nelle quali è dato un insieme N di numeri positivi w_j $(j \in N)$ che deve essere partizionato in due sottoinsiemi il più bilanciati possibile. A tal fine si indichi con $C = \frac{\sum_{j \in N} w_j}{2}$ il valore ideale di ciascun sottoinsieme, ed si assegni a ciascun numero j una variabile x_j che vale 1 se e solo se il numero appartiene al primo sottoinsieme. Con queste scelte, il modello (9.50)–(9.52) restituisce un sottoinsieme di massimo valore, senza che tale valore ecceda la metà del valore complessivo degli oggetti.

Problema del Knapsack con due vincoli Si consideri la variante del problema KP01 nella quale ciascun oggetto j è caratterizzato, oltre che dal profitto p_j e dal peso w_j, anche da un volume $v_j > 0$. Coerentemente, il knapsack ha una capacità in peso C ed una capacità in volume pari a V. Utilizzando ancora le variabili x_j, il modello matematico corrispondente è il seguente

$$(2DKP) \qquad \max \sum_{j=1}^{n} p_j x_j \tag{9.53}$$

$$s.t. \qquad \sum_{j=1}^{n} w_j x_j \leq C \tag{9.54}$$

$$\sum_{j=1}^{n} v_j x_j \leq V \tag{9.55}$$

$$x_j \in \{0,1\} \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{9.56}$$

9.7 Problema del Knapsack Multiplo

Definizione del problema Consideriamo ora una variante più complessa del problema KP01 nella quale sono dati m knapsack, l'i-esimo dei quali ha capacità pari a C_i ($i = 1, \ldots, m$). L'obiettivo del problema consiste nel determinare quali oggetti inserire in ciascun knapsack, in modo tale da evitare di eccedere la capacità di ciascun contenitore e da massimizzare il profitto complessivo degli oggetti selezionati.

Modello PLI Per modellare questo problema bisogna identificare le variabili decisionali; si noti che, a differenza del problema KP01, in questo caso non ci basta sapere se ciascun oggetto j è inserito in soluzione oppure no, ma ci serve sapere *in quale knapsack* viene inserito ciascun oggetto selezionato. In altre parole, non è più possibile utilizzare le n variabili x_j, in quanto queste non sono sufficienti a descrivere completamente una soluzione. Un possibile modo di codificare questa informazione è basato sull'utilizzo delle seguenti variabili binarie

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se l'oggetto } j \text{ viene inserito nel knapsack } i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad (i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n) \tag{9.57}$$

In altre parole, per ciascun oggetto j, vengono introdotte m variabili binarie, una per ciascun knapsack (e non una sola, come avveniva in KP01).

Il corrispondente modello di PLI è il seguente

$$(MKP) \qquad \max \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} p_j x_{ij} \tag{9.58}$$

$$s.t. \qquad \sum_{j=1}^{n} w_j x_{ij} \leq C_i \qquad i = 1, \ldots, m \tag{9.59}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq 1 \qquad j = 1, \ldots, n \tag{9.60}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \qquad i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n \tag{9.61}$$

I vincoli (9.59) sono m condizioni, una per ogni knapsack i. Il vincolo associato al generico knapsack i impone che la somma dei pesi degli oggetti inseriti nel knapsack sia non superiore alla caapcità C_i del knapsack.

I vincoli (9.60) sono scritti uno per ogni oggetto j. Il vincolo associato al generico oggetto j impone che l'oggetto venga inserito in al più un knapsack, ovvero che esista al più una variabile che assume il valore 1 tra $x_{1j}, x_{2j}, \ldots, x_{mj}$. Nel caso in cui vi sia una variabile che assume il valore 1, l'oggetto j sarà inserito nel knapsack corrispondente; viceversa, se $x_{1j} = x_{2j} = \ldots = x_{mj} = 0$, allora l'oggetto j non è selezionato in soluzione in nessun knapsack.

Per interpretare la funzione obiettivo, consideriamo il generico oggetto j. Abbiamo visto che il termine di sinistra del corrispondente vincolo (9.60) indica se l'oggetto è stato selezionato in qualche knapsack oppure no. Di conseguenza, il profitto associato all'oggetto j in una soluzione è pari a

$$p_j \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \begin{cases} p_j & \text{se l'oggetto } j \text{ è selezionato in qualche knapsack} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

Sommando il contributo di tutti gli oggetti si ottiene quindi la funzione obiettivo (9.58) da massimizzare.

Esempio numerico Consideriamo il seguente esempio numerico. Sono dati $n = 5$ oggetti e due knapsack, con capacità pari a 50 e 70, rispettivamente. I profitti e pesi degli oggetti sono riportati dai seguenti vettori (p) e (w)

$$(p) = (40, 62, 14, 20, \ 5)$$

$$(w) = (18, 33, 12, 21, \ 8)$$

Il modello di PLI associato a questa istanza prevede l'utilizzo di 10 variabili decisionali $x_{11}, \ldots x_{15}, x_{21}, \ldots, x_{25}$

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrcr}
\max & 40x_{11} & +40x_{21} & +62x_{12} & +62x_{22} & +14x_{13} & +14x_{23} & +20x_{14} & +20x_{24} & +5x_{15} & +5x_{25} & & \\
 & 18x_{11} & & +33x_{12} & & +12x_{13} & & +21x_{14} & & +8x_{15} & & \leq & 50 \\
 & & 18x_{21} & & +33x_{22} & & +12x_{23} & & +21x_{24} & & +8x_{25} & \leq & 70 \\
 & x_{11} & +x_{21} & & & & & & & & & \leq & 1 \\
 & & & x_{12} & +x_{22} & & & & & & & \leq & 1 \\
 & & & & & x_{13} & +x_{23} & & & & & \leq & 1 \\
 & & & & & & & x_{14} & +x_{24} & & & \leq & 1 \\
 & & & & & & & & & x_{15} & +x_{25} & \leq & 1 \\
 & x_{11} & ,x_{21} & ,x_{12} & ,x_{22} & ,x_{13} & ,x_{23} & ,x_{14} & ,x_{24} & ,x_{15} & ,x_{25} & \in & \{0,1\}
\end{array}
$$

Assunzioni Come per il KP01, anche in questo caso possiamo fare delle assunzioni sui dati di ingresso. In particolare, senza perdita faremo le seguenti assunzioni:

1. La somma dei pesi di tutti gli oggetti eccede la capacità di ciascuno zaino, ovvero
$$\sum_{j=1}^{n} w_j > \max_{i=1,\dots,m} C_i$$
Infatti, se questa assunzione fosse violata, sarebbe possibile selezionare tutti gli oggetti in soluzione inserendoli nel contenitore con massima capacità, e non sarebbe quindi richiesta alcuna ottimizzazione.

2. Ciascun oggetto può essere inserito da solo in almeno un knapsack, ovvero
$$w_j \leq \max_{i=1,\dots,m} C_i \quad \forall j = 1, \dots, n$$
Infatti, immaginiamo che esista un oggetto k il cui peso supera la capacità del knapsack più grande. In nessuna soluzione ammissibile è possibile inserire l'oggetto k. Quindi, la soluzione ottima dell'istanza sarà ottenibile risolvendo una nuova istanza di MKP nella quale l'oggetto k è stato rimosso.

3. Ciascun knapsack è sufficientemente grande per contenere almeno un oggetto, ovvero
$$C_i \geq \min_{j=1,\dots,n} w_j \quad \forall i = 1, \dots, m$$
Infatti, immaginiamo che esista un knapsack h la cui capacità è minore del peso di qualunque oggetto. In nessuna soluzione ammissibile è possibile inserire un oggetto nel knapsack h. Quindi, la soluzione ottima dell'istanza sarà ottenibile risolvendo una nuova istanza di MKP nella quale il knapsack h è stato rimosso.

9.8 Problema del Bin Packing

Definizione del problema Sono dati

- un insieme $M = \{1, \dots, m\}$ di contenitori (*bin*) identici, ciascuno con *capacità* C;

- un insieme $N = \{1, \dots, n\}$ di oggetti (*items*); ogni oggetto j è caratterizzato da un peso *peso* $w_j > 0$;

Il problema del bin packing richiede di determinare un impaccamento degli oggetti nei contenitori in modo che

- ciascun oggetto sia inserito in un contenitore;
- la somma dei pesi degli oggetti inseriti in ciascun contenitore non ecceda la capacità C;
- il numero dei contenitori utilizzati sia minimo

Modello PLI Per modellare il problema, occorre introdurre delle variabili decisionali che descrivano il riempimento di ciascun contenitore. Analogamente a quanto fatto nel problema del Multiple Knapsack, introduciamo le seguenti variabili decisionali

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se l'oggetto } j \text{ viene inserito nel bin } i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n) \tag{9.62}$$

Per poter modellare la funzione obiettivo, introduciamo delle variabili decisionali aggiuntive, una per ciascun bin

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{se il bin } i \text{ viene utilizzato} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad (i = 1, \dots, m) \tag{9.63}$$

Con questa scelta delle variabili decisionali, un possibile modello di PLI per il problema è il seguente

$$(BPP) \qquad \min \sum_{i=1}^{m} y_i \tag{9.64}$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j x_{ij} \leq C y_i \qquad i = 1, \dots, m \tag{9.65}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 \qquad j = 1, \dots, n \tag{9.66}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \qquad i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n \tag{9.67}$$

$$y_i \in \{0, 1\} \qquad i = 1, \dots, m \tag{9.68}$$

La funzione obiettivo (9.64) minimizza la somma delle variabili y_i, ovvero il numero di bin utilizzati. I vincoli (9.65) impongono che, per ciascun bin i, la somma dei pesi degli oggetti inseriti nel bin i non ecceda la capacità C, mentre i vincoli (9.66) impongono che ciascun item j sia inserito in un contenitore. Infine, le condizioni (9.67)–(9.68) definiscono il dominio delle variabili.

Si osservi che l'i-esimo vincolo di capacità (9.65) coinvolge la variabile y_i nel termine di destra. Questa cosa non accadeva nei vincoli (9.59) per il problema Multiple Knapsack in quanto, in quel caso, non era previsto nessun costo legato all'utilizzo di un bin, e quindi non serviva introdurre una variabile che indicasse se un certo bin era utilizzato oppure no. Nel caso del Bin Packing, invece, esiste un costo legato all'utilizzo di ciascun bin i, il che viene modellato tramite l'introduzione della variabile y_i associata. I vincili di capacità servono per "legare" le variabili x_{ij} con le variabili y_i in modo che la soluzione rispetti queste condizioni logiche:

- Si consideri un bin h tale che $y_h = 1$. Allora il vincolo di capacità associato impone che $\sum_{j=1}^{n} w_j x_{hj} \leq C y_h = C \cdot 1 = C$; in questo caso, il vincolo è del tutto analogo a quanto visto nel caso del Knapsack Multiplo.

- Viceversa, si consideri un bin h tale che $y_h = 0$. Allora il vincolo di capacità associato impone che $\sum_{j=1}^{n} w_j x_{hj} \leq C y_h = C \cdot 0 = 0$, ovvero $\sum_{j=1}^{n} w_j x_{hj} = 0$. Dato che ciascun $w_j > 0$ e $x_{hj} \geq 0$, allora deve essere $w_j x_{hj} = 0$ per ogni j, ovvero $x_{hj} = 0$ per ogni j. Quindi il vincolo impone la relazione logica $y_h = 0 \Rightarrow x_{hj} = 0 \quad \forall j$, ovvero "non utilizzo il bin h" allora "non posso inserire nessun oggetto dentro al bin h".

In realtà i vincoli (9.65) descrivono anche le seguenti relazioni logiche aggiuntive:

- Si consideri un oggetto k ed bin h tali che $x_{hk} = 1$. Allora il vincolo di capacità associato al bin h impone che $C y_h \geq \sum_{j=1}^{n} w_j x_{hj} \geq w_k$, dove l'ultima disuguaglianza deriva dal fatto che l'oggetto k è inserito nel bin h. Dividendo ambo i membri per C si ottiene la condizione $y_h \geq \frac{w_k}{C} > 0$ dove ancora si è sfruttato il fatto che $w_k > 0$. Questo vincolo impone che la variabile y_h sia *strettamente* positiva;

Ci sono comunque delle relazioni logiche che non vengono modellate dai vincoli (9.65). Si consideri un bin h nel quale non viene inserito nessun item, cioè tale che $x_{hj} = 0$ per ogni j. Allora il vincolo associato diventa $0 = \sum_{j=1}^{n} w_j x_{hj} \leq C \cdot y_h$, ovvero $y_h \geq 0$. Nonostante dal punto di vista logico ci si aspetti $y_h = 0$, dato che il bin h non è utilizzato, esistono delle soluzioni ammissibili anche con $y_h = 1$. A garantire la correttezza del modello contribuisce la funzione obiettivo che, volendo minimizzare la somma delle variabili y, metterà queste variabili a zero, ove possibile. In altre parole, in qualunque soluzione ottima la variabile y_h assumerà il valore zero, come atteso.

Esempio numerico Consideriamo il seguente esempio numerico. Sono dati $n = 5$ oggetti e $m = 5$ bin, ciascuno con capacità pari a 50. I pesi degli oggetti sono riportati dal seguente vettore $(w) = (18, 33, 12, 21, \ 8)$

Il modello di PLI associato a questa istanza prevede l'utilizzo di 30 variabili decisionali

- 5 variabili $y_1, y_2, \ldots, y_5$;

- 25 variabili $x_{11}, \dots, x_{15}, x_{21}, \dots, x_{25}, \dots, x_{51}, \dots, x_{55}$.

$$
\begin{array}{lrrrrrcr}
\min & y_1 & +y_2 & +y_3 & +y_4 & +y_5 & & \\
 & 18x_{11} & +33x_{12} & +12x_{13} & +21x_{14} & +8x_{15} & \leq & 50y_1 \\
 & 18x_{21} & +33x_{22} & +12x_{23} & +21x_{24} & +8x_{25} & \leq & 50y_2 \\
 & 18x_{31} & +33x_{32} & +12x_{33} & +21x_{34} & +8x_{35} & \leq & 50y_3 \\
 & 18x_{41} & +33x_{42} & +12x_{43} & +21x_{44} & +8x_{45} & \leq & 50y_4 \\
 & 18x_{51} & +33x_{52} & +12x_{53} & +21x_{54} & +8x_{55} & \leq & 50y_5 \\
 & x_{11} & +x_{21} & +x_{31} & +x_{41} & +x_{51} & = & 1 \\
 & x_{12} & +x_{22} & +x_{32} & +x_{42} & +x_{52} & = & 1 \\
 & x_{13} & +x_{23} & +x_{33} & +x_{43} & +x_{53} & = & 1 \\
 & x_{14} & +x_{24} & +x_{34} & +x_{44} & +x_{54} & = & 1 \\
 & x_{15} & +x_{25} & +x_{35} & +x_{45} & +x_{55} & = & 1 \\
 & y_1 & ,y_2 & ,y_3 & ,y_4 & ,y_5 & \in & \{0,1\} \\
 & x_{11} & ,x_{21} & ,x_{31} & ,x_{41} & ,x_{51} & \in & \{0,1\} \\
 & x_{12} & ,x_{22} & ,x_{32} & ,x_{42} & ,x_{52} & \in & \{0,1\} \\
 & x_{13} & ,x_{23} & ,x_{33} & ,x_{43} & ,x_{53} & \in & \{0,1\} \\
 & x_{14} & ,x_{24} & ,x_{34} & ,x_{44} & ,x_{54} & \in & \{0,1\} \\
 & x_{15} & ,x_{25} & ,x_{35} & ,x_{45} & ,x_{55} & \in & \{0,1\}
\end{array}
$$

Assunzioni Nel caso del Bin Packing, è possibile fare le seguenti assunzioni sui dati di ingresso

1. Ciascun item può essere inserito singolarmente in un bin, ovvero

$$w_j \leq W \quad \forall j = 1, \dots, n$$

   Infatti, se esistesse un oggetto k il cui peso supera la capacità del bin, non sarebbe possibile definire una soluzione ammissibile per il problema, dato che in qualunque soluzione verrebbe violato il vincolo di capacità di almeno un contenitiore.

2. Il numero dei bin a disposizione è meggiore o uguale al numero degli oggetti, ovvero

$$m \geq n$$

   Seppur questa assunzione sia con perdita di generlità, la sua presenza, assieme all'assunzione precedente, garantisce l'esistenza di almeno una soluzione ammissibile (ad esempio la soluzione che impacca ciascun oggetto j nel bin j-esimo per $j = 1, \dots, n$).

9.8.1 Varianti del problema

Problema del Vector Packing In questa variante del problema, gli oggetti ed i contenitori sono caratterizzati da k dimensioni distinte (peso, volume, ...). Di conseguenza, ogni oggetto $j \in N$ ha associato un valore w_j^t per ogni dimensione $t = 1, \dots, k$, ed ogni bin ha una capacità W^t per ogni dimensione $t = 1, \dots, k$.

Introducendo ancora le variabili binarie x_{ij} e y_i, si ottiene il seguente modello PLI

$$(VPP) \qquad \min \sum_{i=1}^{m} y_i \tag{9.69}$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j^t x_{ij} \leq W^t y_i \qquad i = 1, \ldots, m; t = 1, \ldots, k \tag{9.70}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 \qquad j = 1, \ldots, n \tag{9.71}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \qquad i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n \tag{9.72}$$

$$y_i \in \{0, 1\} \qquad i = 1, \ldots, m \tag{9.73}$$

9.9 Problema del Set Covering

Definizione del problema Sono Dati

- una matrice A con m righe e n colonne e coefficienti binari $[a_{ij}]$;
- un vettore di dimensione n di costi $[c_j]$;

Il problema del set covering richiede di selezionare un sottoinsieme $S \subseteq \{1, \ldots, n\}$ di colonne in modo che:

- per ogni riga $i = 1, \ldots, m$, esista *almeno* una colonna $j \in \{1, \ldots, n\}$ tale che
  - $a_{ij} = 1$ (la colonna j "copre" la riga i);
  - $j \in S$ (ossia j è selezionata)
- il costo complessivo delle colonne selezionate sia minimo.

Modello PLI Per modellare il problema occorre definire quali sono le colonne selezionate in soluzione. Pertanto la scelta più naturale è quella di introdurre, per ogni colonna j, una variabile binaria che indichi se la colonna è selezionata in soluzione oppure no, ossia

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{se la colonna } j \text{ è selezionata} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad (j = 1, \ldots, n) \tag{9.74}$$

Con questa scelta delle variabili decisionali, un possibile modello di PLI per il problema è il seguente

$$(SCP) \qquad \min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{9.75}$$

$$s.t. \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq 1 \qquad i = 1, \ldots, m \tag{9.76}$$

$$x_j \in \{0, 1\} \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{9.77}$$

I vincoli (9.76) impongono che, per ciascuna riga i, esista almeno una colonna j che (i) abbia $a_{ij} = 1$ e (ii) sia selezionata (ossia abbia $x_j = 1$). Si noti che il problema richiede di garantire che la proprietà di copertura di ciascuna riga sia soddisfatta, ma non di soecificare quale colonna copre ciascuna riga.

Esempio numerico Consideriamo l'esempio numerico definito dalla seguente matrice A con $m = 3$ righe e $n = 6$ colonne

$$(a_{ij}) = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

e da un vettore dei costi delle colonne $(c) = [9, 3, 2, 4, 6, 3]$.

Per l'istanza numerica sopra specificata, si ottiene il seguente modello di PLI con 6 variabili e 3 vincoli

$$\begin{array}{lcccccccc}
\min & 9x_1 & +3x_2 & +2x_3 & +4x_4 & +6x_5 & +3x_6 & & \\
 & x_1 & & +x_3 & & +x_5 & & \geq & 1 \\
 & & & x_3 & +x_4 & & +x_6 & \geq & 1 \\
 & & x_2 & & & +x_5 & +x_6 & \geq & 1 \\
 & x_1 & , x_2 & , x_3 & , x_4 & , x_5 & , x_6 & \in & \{0, 1\}
\end{array}$$

Una possibile soluzione ammissibile consiste nel selezionare le colonne {1, 3, 5}, ed ha costo = 17, mentre una soluzione ottima è costituita dall'insieme $S = \{2, 3\}$ ed ha costo = 5.

Assunzioni Senza perdita di generalità possiamo fare le seguenti assunzioni sui dati di ingresso:

1. Per ogni riga i esiste almeno una colonna j che può coprire la riga i, ossia tale che $a_{ij} = 1$.
   È facile vedere che, se questa assunzione non è verificata, non è possibile coprire la riga i ed il problema non ammette nessuna soluzione ammissibile. Viceversa, se questa assunzione è soddisfatta, il problema ha almeno una soluzione ammissibile, ad esempio la soluzione che seleziona tutte le colonne.

2. Per ogni colonna j, esiste almeno una riga i che può essere coperta dalla colonna j, ossia tale che $a_{ij} = 1$.
   Infatti, se esistesse una colonna j che non copre nessuna riga, questa colonna non farebbe mai parte di una soluzione ottima del problema (se $c_j > 0$) oppure farebbe sempre parte di una soluzione ottima (se $c_j \leq 0$). Quindi, la soluzione ottima dell'istanza sarebbe ricavabile risolvendo una nuova istanza di set covering nella quale la colonna j è stata rimossa.

3. Tutte le colonne hanno costi positivi, ossia

$$c_j > 0 \quad \forall j = 1, \ldots, n$$

   Immaginiamo infatti che questa assunzione sia violata ed esista una colonna j con costo negativo (o nullo). È facile vedere che esiste una soluzione ottima nella quale la colonna j è selezionata. Pertanto, la soluzione ottima dell'istanza sarebbe ottenibile risolvendo una nuova istanza di set covering nella quale la colonna j è stata selezionata.

Applicazioni Si consideri la seguente applicazione in ambito urbanistico, nella quale l'amministrazione locale di una città deve definire dove posizionare le nuove stazioni dei vigili del fuoco. La mappa della città è suddivisa in n aree (es. i quartieri) in ciascuna delle quali può essere localizzata una stazione; in tal caso, l'amministrazione incorre in un costo specifico dell'area, in funzione, ad esempio, del diverso valore del terreno edificabile nelle diverse aree. Se una stazione viene edificata in un'area essa può gestire le chiamate di emergenza nella propria area ed in quelle adiacenti. L'obiettivo dell'amministrazione è determinare un sottoinsieme di stazioni da costruire, in modo che

- in caso di emergenza, ogni zona possa essere servita da una stazione dei vigili del fuoco;
- il costo complessivo di costruzione sia il più basso possibile

Il requisito di adiacenza tra le zone può essere modellato definendo in modo opportuno i coefficienti di una matrice A di dimensione $n \times n$. In particolare $a_{ij} = 1$ se la stazione localizzata nell'area j può servire le richieste dell'area i, e $a_{ij} = 0$ in caso contrario. Un esempio di città suddivisa in aree è mostrato nella figura 9.2 e la relativa matrice A è illustrata nella figura 9.3.

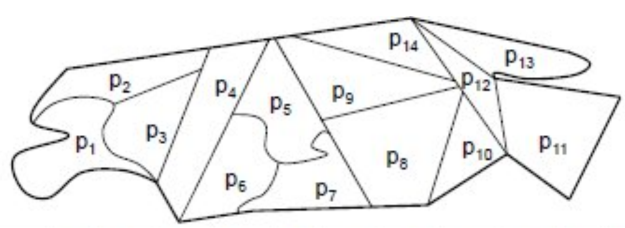


Figura 9.2: Esempio di applicazione del set covering per la localizzazione di stazioni dei pompieri in una regione suddivisa in aree.

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}	S_{11}	S_{12}	S_{13}	S_{14}
p_1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
p_2	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
p_3	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
p_4	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
p_5	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
p_6	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
p_7	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0
p_8	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	1	0	0
p_9	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1
p_{10}	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0
p_{11}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0
p_{12}	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
p_{13}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0
p_{14}	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1

Figura 9.3: Matrice dei coefficienti del problema di set covering che modella il problema di localizzazione delle stazioni dei pompieri.

Per ogni area $j = 1, \dots, n$ viene introdotta una variabile decisionale x_j che assume valore 1 se in tale area viene costruita una stazione e 0 altrimenti.

Si osservi noti che non è richiesto specificare, tramite variabili decisionali, quale stazione viene utilizzata per gestire le emergenze di una certa area, in quanto il problema richiede solamente di garantire che esista una stazione adeguata (cioè posizionata in una area adiacente a quella di interesse). Infine, si noti che la matrice A consente di definire qualsiasi tipo di compatibilità tra duee aree i e j. Ad esempio, è possibile modellare la possibilità per una stazione posizionata nell'area j di coprire una emergenza nell'area i ponendo $a_{ij} = 1$ indipendentemente dalla adiacenza delle due aree. Inoltre, la matrice non deve necessariamente essere simmetrica, ossia si può avere $a_{ij} = 1$ e $a_{ji} = 0$.

9.10 Problema del Set Partitioning

Definizione del problema Sono Dati

- una matrice A con m righe e n colonne e coefficienti binari $[a_{ij}]$;
- un vettore di dimensione n di costi $[c_j]$;

Il problema del set partitioning richiede di selezionare un sottoinsieme $S \subseteq \{1, \dots, n\}$ di colonne in modo che:

- per ogni riga $i = 1, \dots, m$, esista *esattamente* una colonna $j \in \{1, \dots, n\}$ tale che

  - $a_{ij} = 1$ (la colonna j "copre" la riga i);
  - $j \in S$ (ossia j è selezionata)
- il costo complessivo delle colonne selezionate sia minimo.

Questo problema è analogo al problema del set covering, salvo per il fatto che ogni riga deve essere coperta da una ed una sola colonna selezionata (e non da *almeno* una colonna selezionata, come era nel set covering.

Modello PLI Il modello PLI del set partitioning utilizza le stesse variabili decisionali x_j definite per il modello del set covering, e differisce da quest'ultimo solo per i vincoli di copertura (9.79), che sono imposti come uguaglianza invece che come disuguaglianza.

$$(SPP) \qquad \min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{9.78}$$

$$s.t. \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq 1 \qquad i = 1, \ldots, m \tag{9.79}$$

$$x_j \in \{0, 1\} \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{9.80}$$

Esempio numerico Riprendendo l'esempio numerico della sezione 9.9, il modello corrispondente è il seguente:

$$\begin{array}{lcccccccc}
\min & 9x_1 & +3x_2 & +2x_3 & +4x_4 & +6x_5 & +3x_6 & & \\
 & x_1 & & +x_3 & & +x_5 & & = & 1 \\
 & & & x_3 & +x_4 & & +x_6 & = & 1 \\
 & & x_2 & & & +x_5 & +x_6 & = & 1 \\
 & x_1 & , x_2 & , x_3 & , x_4 & , x_5 & , x_6 & \in & \{0,1\}
\end{array}$$

Assunzioni Nonostante il set partitioning sia molto simile al set covering, non tutte le assunzioni che si possono fare sui dati di ingresso dei due problemi sono uguali.

1. Per ogni riga i esiste almeno una colonna j che può coprire la riga i, ossia tale che $a_{ij} = 1$.
   Questa assunzione è identica a quella vista per il set covering. Nonostante questo, non è possibile affermare che, quando questa assunzione è vericata, il problema ha almeno una soluzione ammissibile, come avveniva nel caso del set covering. Si consideri ad esempio un problema con 3 righe e 3 colonne e matrice A definita in questo modo: $(a_{ij}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

   È evidente che selezionando due delle tre colonne si ottiene una soluzione di set covering, mentre non esiste nessuna soluzione di set partitioning.

2. Per ogni colonna j, esiste almeno una riga i che può essere coperta dalla colonna j, ossia tale che $a_{ij} = 1$.
   Questa assunzione è identica a quella vista per il set covering.

Nota: nel problema del Set Partitioning non è possibile fare l'assunzione

$$c_j > 0 \quad \forall j = 1, \dots, n$$

in quanto selezionare una colonna a costo negativo potrebbe coprire alcune righe, con conseguente perdita di alcune soluzioni ammissibili (eventualmente anche della soluzione ottima).

9.11 Problema del Set Packing

Definizione del problema Sono Dati

- una matrice A con m righe e n colonne e coefficienti binari $[a_{ij}]$;
- un vettore di dimensione n di profitti $[p_j]$;

Il problema del set packing richiede di selezionare un sottoinsieme $S \subseteq \{1, \dots, n\}$ di colonne in modo che:

- per ogni riga $i = 1, \dots, m$, esista *al massimo* una colonna $j \in \{1, \dots, n\}$ tale che
  - $a_{ij} = 1$ (la colonna j “copre” la riga i);
  - $j \in S$ (ossia j è selezionata)
- il profitto complessivo delle colonne selezionate sia massimo.

Questo problema è speculare rispetto al problema del set covering, nel senso che si vuole coprire ogni riga al massimo una volta (invece che almeno una volta) massimizzando il profitto delle colonne scelte (invece che minimizzando il costo).

Modello PLI Il modello PLI del set packing utilizza le stesse variabili decisionali x_j definite per il modello del set covering, e differisce da quest'ultimo solo per la funzione obiettivo e per i vincoli di copertura.

$$(SPkP) \qquad \max \sum_{j=1}^{n} p_j x_j \tag{9.81}$$

$$s.t. \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq 1 \qquad i = 1, \dots, m \tag{9.82}$$

$$x_j \in \{0, 1\} \qquad j = 1, \dots, n. \tag{9.83}$$

Esempio numerico Riprendendo l'esempio numerico della sezione 9.9, immaginando che il vettore $[c]$ descriva i profitti delle colonne, il modello corrispondente è il seguente:

$$
\begin{array}{lccccccccc}
\max & 9x_1 & +3x_2 & +2x_3 & +4x_4 & +6x_5 & +3x_6 & & \\
 & x_1 & & +x_3 & & +x_5 & & \leq & 1 \\
 & & & x_3 & +x_4 & & +x_6 & \leq & 1 \\
 & & x_2 & & & +x_5 & +x_6 & \leq & 1 \\
 & x_1 & , \; x_2 & , \; x_3 & , \; x_4 & , \; x_5 & , \; x_6 & \in & \{0,1\}
\end{array}
$$

Applicazioni Un'amministrazione regionale deve decidere la localizzazione degli inceneritori nelle province della regione. Nelle 8 province della regione sono state individuate in totale 10 aree opportune in cui localizzare gli inceneritori e nella tabella di figura 9.4 per ciascuna area sono indicate le province adiacenti a tale area. Nella figura è anche indicata la capacità di trattamento (in milioni di tonnellate di rifiuti) ed il costo di costruzione (in milioni di Euro) di un inceneritore in ciascuna area.

Il problema di localizzazione consiste nell'individuare in quali aree costruire gli inceneritori in modo tale che la capacità di trattamento sia massimizzata e ciascuna provincia sia adiacente al più ad un inceneritore costruito. Eventualmente al problema può essere aggiunto un vincolo sul costo complessivo che impone che il costo totale degli inceneritori costruiti non superi il limite del budget disponibile.

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8	p_9	p_{10}
c_1	1			1		1				1
c_2		1			1		1		1	
c_3	1				1		1		1	
c_4	1		1			1				1
c_5		1				1	1		1	
c_6		1		1		1				
c_7		1			1			1	1	1
c_8			1	1		1		1		
CAP	460	774	129	499	345	997	321	159	721	640
COST	7	11	3	7.5	6.5	12.2	5.1	3.2	10.7	8.8

Figura 9.4: Esempio di applicazione del set packing per la localizzazione di inceneritori a servizio delle 8 province di una regione.

9.12 Problema dell'Assegnamento

Definizione del problema Data una matrice C con n righe e n colonne, e coefficienti di costo $[c_{ij}]$, il problema dell'assegnamento richiede di determinare un assegnamento delle colonne alle righe in modo che:

- ogni colonna $j = 1, \dots, n$ sia assegnata ad una riga;
- ogni riga $i = 1, \dots, n$ sia assegnata ad una colonna;
- il costo complessivo dell'assegnamento sia minimo.

Modello PLI Una possibile soluzione per modellare il problema consiste nell'introdurre le seguenti variabili decisionali x_{ij} per ogni riga i e colonna j.

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se la riga } i \text{ è assegnata alla colonna } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad (i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n) \tag{9.84}$$

Con tale scelta delle variabili, si ottiene il seguente modello di PLI

$$(AP) \qquad \min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \tag{9.85}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad j = 1, \dots, n \tag{9.86}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad i = 1, \dots, n \tag{9.87}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \qquad i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n \tag{9.88}$$

I vincoli (9.86) impongono che ciascuna colonna j sia assegnata ad una sola riga. Analogamente i vincoli (9.87) impongono di assegnare ciascuna riga i ad una colonna. Infine, la funzione obiettivo minimizza il costo degli assegnamenti selezionati.

Si noti che, nel formulare il problema, non è stata fatta nessuna asunzione per quel che riguarda il segno dei coefficienti c_{ij}.

9.12.1 Problema dell'Assegnamento Generalizzato

Sono dati

- un insieme $N = \{1, \dots, n\}$ di oggetti;
- un insieme $M = \{1, \dots, m\}$ di risorse;
- ogni risorsa $i \in M$ ha una disponibilità b_i

- per ogni oggetto $j \in N$ e risorsa $i \in M$:
  - la richiesta r_{ij} dell'oggetto j se assegnato alla risorsa i;
  - il costo c_{ij} di assegnamento dell'oggetto j alla risorsa i

Il problema dell'assegnamento generalizzato richiede di assegnare gli oggetti alle risorse in modo che:

- ogni oggetto $j \in N$ sia assegnato ad una risorsa;
- per ogni risorsa $i \in M$, la richiesta complessiva degli oggetti assegnati alla risorsa non ecceda la disponibilità b_i;
- il costo complessivo dell'assegnamento sia minimo

Come suggerisce il nome, questo problema generalizza il problema dell'assegnamento al caso in cui il numero di righe da assegnare differisce dal numero di colonne. In questo contesto, identifichiamo le righe come *risorse*, che hanno una certa disponibilità e a cui devono essere assegnati degli *oggetti*, identificati dalle colonna. Utilizzando ancora le variabili di assegnamento x_{ij} $(i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n)$, il problema può essere modellato nel seguente modo

$$(GAP) \qquad \min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \tag{9.89}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 \qquad j = 1, \ldots, n \tag{9.90}$$

$$\sum_{j=1}^{n} r_{ij} x_{ij} \le b_i \qquad i = 1, \ldots, m \tag{9.91}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \qquad i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n \tag{9.92}$$

9.13 Problemi di facility location

Definizione del problema Dati

- un insieme $N = \{1, \ldots, n\}$ di risorse (*facilities*) che possono essere attivate; ciascuna facility j ha associato un costo fisso f_j di installazione;
- un insieme $M = \{1, \ldots, m\}$ di clienti da servire;
- una matrice C di dimensione $m \times n$ il cui generico elemento c_{ij} rappresenta il costo richiesto per servire il cliente i dalla facility j;

Problema: determinare un sottoinsieme di facilities $S \subseteq N$ da attivare e l'assegnamento dei clienti alle facilities attivate in modo che

- ciascun cliente sia servito da una facility;
- il costo complessivo (=costo fisso + costo di servizio) sia il più piccolo possibile.

Modello PLI In questo problema bisogna operare due tipi di scelte: da un lato, occorre definire l'insieme di facilities da attivare. Dall'altro, occorre assegnare ciascun cliente ad una facility attivata. Il primo insieme di decisioni è analogo a quanto visto nei problemi di tipo knapsack (selezione), e quindi richiede l'utilizzo delle seguenti variabili decisionali

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{se la facility } j \text{ è attivata} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad (j = 1, \dots, n) \tag{9.93}$$

Viceversa, l'assegnamento dei clienti alle facilities può essere modellato utilizzando le variabili di assegnamento

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se il cliente } i \text{ è assegnato alla facility } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n) \tag{9.94}$$

Il modello risultante è il seguente

$$(UFLP) \qquad \min \sum_{j=1}^{n} f_j y_j + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \tag{9.95}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad i = 1, \dots, m \tag{9.96}$$

$$x_{ij} \leq y_j \qquad i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n \tag{9.97}$$

$$y_j \in \{0, 1\} \qquad j = 1, \dots, n \tag{9.98}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \qquad i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n \tag{9.99}$$

La funzione obiettivo minimizza la somma dei costi di apertura delle facilities e dei costi di assegnamento. I vincoli (9.96) sono i classici vincoli di assegnamento per ciascun cliente i, mentre i vincoli (9.97) impongono che un cliente i possa essere assegnato ad una facility j solo se tale facility è stata attivata. Si noti che, in questo problema, ciascuna facility attivata può gestire un numero arbitrario di clienti, ovvero non esiste nessun limite alla capacità della facility di servire dei clienti. Per questo motivo, questa variante del problema è nota come Uncapacitated Facility Location Problem (UFLP).

Facility Location capacitato Consideriamo ora una variante del problema nella quale ciascuna facility j ha associato un costo fisso f_j di installazione ed una capacità b_j, e ciascun cliente i ha una richiesta pari a d_i. Il problema richiede ancora di assegnare i clienti alle facilities attivate, minimizzando i costi e garantendo che ciasscuna facility abbia capacità sufficiente per servire tutti i clienti che le sono stati assegnati.

Il problema in questione viene detto Capacitated Facility Location Problem (CFLP). Un modello PLI di questo problema che utilizza le stesse variabili viste prima è il seguente

$$(CFLP) \quad \min \sum_{j=1}^{n} f_j y_j + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \tag{9.100}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad i = 1, \ldots, m \tag{9.101}$$

$$\sum_{i=1}^{m} d_i x_{ij} \leq b_j y_j \qquad j = 1, \ldots, n \tag{9.102}$$

$$y_j \in \{0, 1\} \qquad j = 1, \ldots, n \tag{9.103}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \qquad i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n \tag{9.104}$$

Facility Location capacitato con splitting Infine, consideriamo una variante del probelma CFLP nella quale la richiesta di ogni cliente possa essere servita da più risorse (caso "splittable"). Questa possibilità permette, in generale, di ottenere soluzioni di costo inferiore e quindi potrebbe essere preferibile in alcune applicazioni reali.
Per modellare questa variante, utilizziamo ancora le variabili y_j di attivazione delle facilities. Quando alle variabili x_{ij}, immaginiamo che queste siano variabili continue nel dominio $[0, 1]$ e che ciascuna variabile rappresenti la frazione della domanda del cliente i che viene servita dalla facility j. Con tale convenzione, il modello che si ottiene è il seguente

$$(CFLPs) \quad \min \sum_{j=1}^{n} f_j y_j + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \tag{9.105}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad i = 1, \ldots, m \tag{9.106}$$

$$\sum_{i=1}^{m} d_i x_{ij} \leq b_j y_j \qquad j = 1, \ldots, n \tag{9.107}$$

$$y_j \in \{0, 1\} \qquad j = 1, \ldots, n \tag{9.108}$$

$$x_{ij} \in [0, 1] \qquad i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n \tag{9.109}$$

Seppur il significato delle variabili x_{ij} sia diverso dal precedente, il modello ottenuto risulta essere molto simile a quello che descrive CFLP. In particolare, i vincoli (9.106) impongono che ciascun cliente i sia servito al 100% considerando l'insienme di facilities che lo servono.

9.14 Problemi di scheduling

Definizione del problema Dati

- un insieme $N = \{1, \dots, n\}$ di jobs;
- un insieme $M = \{1, \dots, m\}$ di macchine identiche, ciascuna delle quali può processare un solo lavoro alla volta;
- per ogni job $j \in N$ e macchina $i \in M$ è noto il tempo di processamento p_{ij} del lavoro j sulla macchina i.

Problema: assegnare ogni lavoro ad una macchina in modo che

- ogni lavoro sia assegnato ad una sola macchina;
- il tempo totale di processamento della macchina che termina per ultima (*makespan*) sia il più piccolo possibile.

Esempio numerico Si consideri il seguente esempio numerico, nel quale sono dati $n = 6$ jobs e $m = 2$ macchine. I tempi di processamento dei job sulle macchine sono i seguenti

$$p_{11} = 3;\ p_{12} = 8;\ p_{13} = 2;\ p_{14} = 4;\ p_{15} = 10;\ p_{16} = 5$$

$$p_{21} = 2;\ p_{22} = 6;\ p_{23} = 6;\ p_{24} = 5;\ p_{25} = 8;\ p_{26} = 6$$

Ad esempio, assegnando alla prima macchina i task 1,2 e 3, tale macchine richiede 3+8+2 = 13 unità di tempo, mentre assegnando alla seconda macchina i restanti task, questa impiegherebbe 5+8+6 = 19 unità di tempo. Il valore di questa soluzione sarebbe quindi $\max\{13, 19\} = 19$.
La soluzione che assegna alla prima macchina i task 3, 4, 5 e alla seconda macchina i task 1, 2, 6 ha invece valore $\max\{2+4+10, 19, 2+6+6\} = \max\{16, 14\} = 14$.

Modello PLI Per modellare questo problema occorre anzitutto osservare che il tempo di processamento di una macchina non dipende dall'ordine con il quale la macchina processa i suoi lavori, ma solo dall'insieme di lavori che le vengono assegnati. Pertanto, sembra naturale introdurre le seguenti variabili di assegnamento di lavori a macchine

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se il lavoro } j \text{ è assegnato alla macchina } i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n) \tag{9.110}$$

Per comodità, possiamo introdurre le seguenti variabili decisionali

$$C_i = \text{tempo totale di processamento della macchina} i \quad (i = 1, \dots, m) \tag{9.111}$$

Con questa scelta delle variabili decisionali, non è però possibile esprimere la funzione obiettivo utilizzando vincoli lineari. Per ottenere un modello lineare (intero), occorre lavorare in uno spazio delle variabili a dimensionalità superiore, ottenuto aggiungendo una ulteriore variabile decisionale

$$z = \text{makespan} \tag{9.112}$$

Il corrispondente modello matematico è il seguente

$$\begin{aligned}
&\min z && && (9.113)\\
&\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 && j = 1, \ldots, n && (9.114)\\
&C_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} x_{ij} && i = 1, \ldots, m && (9.115)\\
&z \geq C_i && i = 1, \ldots, m && (9.116)\\
&x_{ij} \in \{0, 1\} && i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n && (9.117)
\end{aligned}$$

I vincoli (9.114) imnpongono l'assegnamento di ciascun task j ad una macchina, mentre le equazioni (9.115) definiscono il tempo totale di processamento di ciascuna macchina. Infine, la funzione obiettivo minimizza il makespan (rappresentato dalla variabile z) che, per via dei vincoli (9.116), risulta essere almeno pari al tempo totale di processamento di ciascuna macchina.

Il modello PLI associato all'esempio numerico introdotto in precedenza è il seguente

$$\begin{aligned}
\min z\\
x_{11} + x_{21} = 1\\
x_{12} + x_{22} = 1\\
x_{13} + x_{23} = 1\\
x_{14} + x_{24} = 1\\
x_{15} + x_{25} = 1\\
x_{16} + x_{26} = 1\\
C_1 = 3x_{11} + 8x_{12} + 2x_{13} + 4x_{14} + 10x_{15} + 5x_{16}\\
C_2 = 2x_{21} + 6x_{22} + 6x_{23} + 5x_{24} + 8x_{25} + 6x_{26}\\
z \geq C_1\\
z \geq C_2\\
x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{16}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{25}, x_{26} \in \{0, 1\}
\end{aligned}$$

Si noti che le variabili C_i non sono strettamente indispensabili, ed è possibile eliminarle sostituendo i vincoli (9.115)-(9.116) con i seguenti vincoli

$$z \geq \sum_{j=1}^{n} p_{ij} x_{ij} \qquad i = 1, \ldots, m \tag{9.118}$$

9.15 Problema del lot sizing

Definizione del problema Dati

- un orizzonte temporale suddiviso in n periodi; ogni periodo i ($i = 1, \ldots, n$) ha associate
  - il numero d_i di prodotti (identici) richiesti dal mercato nel periodo;
  - il costo unitario di produzione c_i nel periodo;
  - il costo di stoccaggio unitario r_i nel periodo;
- un magazzino, con capacità di stoccaggio pari a M unità di prodotto;
- la giacenza iniziale s_0 presente all'interno del magazzino all'inizio dell'orizzonte temporale in esame.

Problema: determinare la quantità di prodotti da realizzare e da stoccare in ogni periodo in modo che

- in ogni periodo, il numero di prodotti disponibili sia sufficiente per soddisfare la richiesta del mercato;
- il costo complessivo sostenuto (=costi di produzione + costi di stoccaggio) sia il più basso possibile.

Modello PLI Per definire una soluzione del problema occorre determinare il numero di prodotti da realizzare ed il numero di prodotti da stoccare in ogni periodo. Questo suggerisce l'introduzione delle seguenti variabili decisionali
x_i = numero di prodotti realizzati nell'i-esimo periodo ($i = 1, \ldots, n$)
s_i = num. di prodotti nel magazzino alla fine dell'i-esimo periodo ($i = 1, \ldots, n$)

Il corrispondente modello matematico è quindi

$$\min \sum_{i=1}^{n} c_i\, x_i + \sum_{i=1}^{n} r_i\, s_i \tag{9.119}$$

$$s_i \leq M \qquad i = 1, \ldots, n \tag{9.120}$$

$$x_i + s_{i-1} - s_i = d_i \qquad i = 1, \ldots, n \tag{9.121}$$

$$x_i, s_i \geq 0 \qquad i = 1, \ldots, n \tag{9.122}$$

La funzione obiettivo minimizza il costo complessivo, dati dai costi di produzione e da quelli di stoccaggio. I vincoli (9.120) garantiscono che il numero di prodotti stoccati in ciascun periodo non ecceda la capacità del magazzino, mentre i vincoli (9.121) definiscono la quantità stoccata alla fine di ciascun periodo: tale quantità risulta essere pari alla quantità presente a inizio periodo (=presente alla fine del periodo precedente), cui viene sommata la quantità prodotta e detratta la quantità destinata al mercato.

Si noti infine che questo problema non coinvolge variabili intere ed è pertanto un modello di LP.

9.16 Problema del Costo Fisso (Fixed Charge)

Definizione del problema

- Produzione di un singolo prodotto

- esiste una variabile decisionale

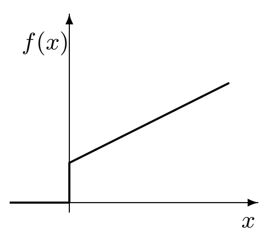
$$x = \text{numero di prodotti da realizzare}$$

  che permette di gestire facilmente il costo unitario;

- bisogna tener conto anche dell'eventuale costo fisso k;

- la funzione di costo dipende dalla variabile x in modo *non lineare*

$$f(x) = \begin{cases} k + c\,x & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$



Modello PLI

- per derivare una formulazione MILP introduciamo una variabile aggiuntiva con il seguente significato

$$y := \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \text{ (viene prodotta una quantità non nulla di prodotto)} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- **funzione obiettivo** $\min k\,y + c\,x$

- **vincoli aggiuntivi** $\begin{array}{r} x \leq M\, y \\ y \in \{0, 1\} \end{array}$
  dove M è un numero "grande a piacere";
- il vincolo modella le relazioni

$$\begin{array}{rcl} x > 0 & \Rightarrow & y = 1 \\ y = 0 & \Rightarrow & x = 0 \end{array}$$

Esempio numerico

Considerazioni

- Il procedimento può essere esteso al caso in cui la stessa variabile binaria y sia associata alla produzione di n prodotti diversi;
- per ogni prodotto j, indichiamo con M_j il massimo numero di prodotti che possono essere realizzati ($j = 1, \ldots, n$);
- **vincoli aggiuntivi**

$$\begin{array}{rl} x_j \leq M_j\, y & \quad j = 1, \ldots, n \\ y \in \{0, 1\} & \end{array}$$

- il primo vincolo modella le relazioni

$$\begin{array}{rcl} x_j > 0 \text{ per qualche } j \in \{1, \ldots, n\} & \Rightarrow & y = 1 \\ y = 0 & \Rightarrow & x_j = 0 \quad \forall j = 1, \ldots, n \end{array}$$

9.17 Disattivazione di vincoli

- In alcune situazioni si vuole modellare la possibilità che un vincolo

$$\alpha^T x \geq b$$

  sia attivo solo sotto certe condizioni;
- immaginiamo che questo debba accadere quando $y = 0$, dove y è una variabile binaria;
- in tal caso è possibile imporre l'implicazione logica

$$y = 0 \Rightarrow \alpha^T x \geq b$$

  tramite i seguenti vincoli

$$\begin{array}{r} \alpha^T x \geq b - My \\ y \in \{0, 1\} \end{array}$$

- Analogamente: l'implicazione $y = 1 \Rightarrow \alpha^T x \geq b$
  viene imposta dai vincoli $\alpha^T x \geq b - M(1-y)$ e $y \in \{0,1\}$

- Supponiamo di avere i due seguenti vincoli

$$\begin{aligned} \alpha_i^T x &\geq b_i \\ \alpha_k^T x &\geq b_k \end{aligned}$$

  e di voler imporre che *almeno* uno dei due sia soddisfatto;

- introducendo due variabili binarie y_i e y_k è possibile riscrivere i vincoli nella seguente forma

$$\begin{aligned} \alpha_i^T x &\geq b_i - My_i \\ \alpha_k^T x &\geq b_k - My_k \\ y_i + y_k &\leq 1 \\ y_i, y_k &\in \{0,1\} \end{aligned}$$

- imporre che la somma delle variabili y sia 1 corrisponde a permettere ad uno solo dei due vincoli di essere disattivato.

Capitolo 10

Algoritmi per Problemi di Programmazione Lineare Intera

10.1 Introduzione

Per la soluzione esatta dei problemi PLI sono stati messi a punto numerosi algoritmi. In questo capitolo saranno esaminati i due approcci storicamente più importanti lasciando a corsi più avanzati la descrizione di tecniche più moderne. In particolare saranno esaminati l'algoritmo basato sui piani di taglio (noto come algoritmo cutting plane) proposto da Ralph Gomory e l'algoritmo branch-and-boundproposto da Alisa Land and Alison Doig.

10.2 Algoritmo Cutting Plane NEW: (Ver. 6.0)

L'algoritmo cutting plane, proposto da Gomory [**Gom58CP**], è una tecnica generale per la risoluzione di problemi PLI. L'algoritmo si basa sulla risoluzione di una serie di rilassamenti continui ciascuno associato ad una formulazione valida del problema PLI ottenuta aggiungendo un vincolo alla formulazione originaria che la renda migliore rispetto alla precedente.

Sia $P = \{\min c^T x : Ax = d, x \geq 0, \text{intere}\}$ il problema PLI da risolvere e sia $C(P)$ il corrispondente rilassamento continuo di P, ottenuto rimuovendo il vincolo di interezza, la cui soluzione ottima è x^C. Se x^C è intera allora è la soluzione ottima di P e l'algoritmo termina, altrimenti tale soluzione deve essere eliminata dalla regione ammissibile di P mediante l'aggiunta di un opportuno vincolo.

Definizione 10.1 (cutting plane)**.** *Dato un problema PLI P e la soluzione x^C del corrispondente rilassamento continuo $C(P)$, una disequazione $\alpha x \geq \alpha_0$ è un* piano di taglio (cutting plane) *valido se:*

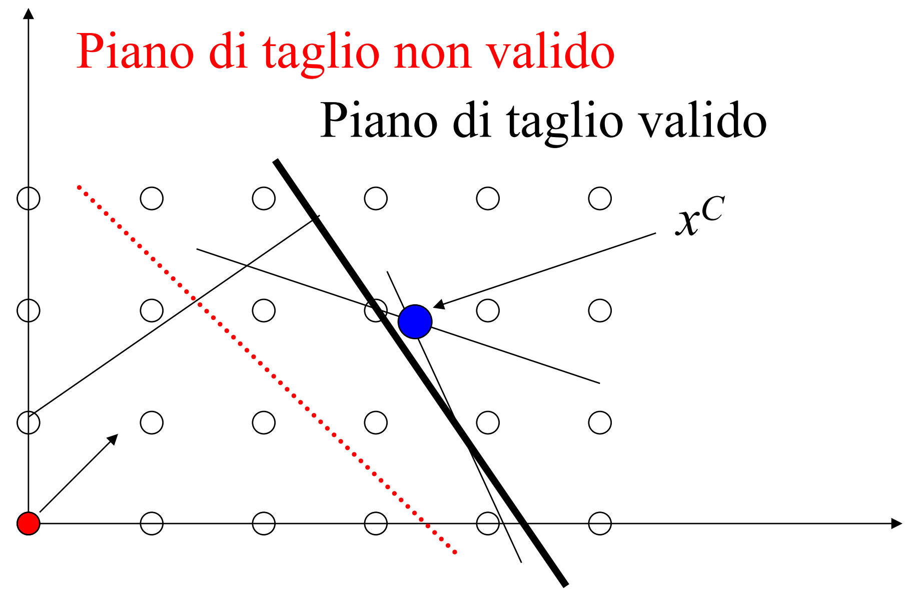


Figura 10.1: Esempio di piano di taglio.

a) x^C *viola tale disequazione, ossia* $\alpha x^C < \alpha_0$*, e*

b) è soddisfatta da tutti i punti interi in P*, ossia* $\alpha x \geq \alpha_0 \forall x \in P$

La figura 10.1 illustra un piano di taglio valido ed uno non valido per un problema P.

Aggiungendo alla formulazione corrente un piano di taglio si ottiene una nuova formulazione valida per P che domina quella corrente dato che la regione ammissibile della nuova formulazione è contenuta nella precedente. L'algoritmo procede nell'aggiunta di piani di taglio alla formulazione finché non si ottiene una formulazione il cui rilassamento continuo ha soluzione intera.

Algorithm 6 Algoritmo Cutting Plane.

procedure CuttingPlane((c, A, d))
  risolvi il rilassamento continuo $C(P)$ ottenendo x^C;
  while x^C non è intero **do**
    determina un cutting plane $\alpha x \geq \alpha_0$ ed aggiungilo a P;
    risolvi il rilassamento continuo $C(P)$ ottenendo x^C;
    if $C(P)$ impossibile **then**
      stop
    end if
  end while
  return $x^* = x^C$ (soluzione ottima)
end procedure

L'algoritmo cutting plane determina la soluzione ottima del problema P dato che ad ogni iterazione:

- $C(P)$ contiene tutte e sole le soluzioni intere di P (più altre non intere);
- I tagli aggiunti non eliminano soluzioni intere;
- $C(P)$ e P hanno la stessa funzione obiettivo.

Il procedimento è molto efficace quando la soluzione ottima del problema $C(P)$ non è troppo diversa da quella del problema P. Gli svantaggi dell'algoritmo sono però rappresentati dal fatto che il numero di iterazioni del ciclo while necessarie alla determinazione della soluzione intera nel caso peggiore non è polinomiale nella dimensione del problema P. Inoltre, ad ogni iterazione il rilassamento continuo da risolvere diventa sempre più grande per effetto dell'aggiunta del piano di taglio e questo può portare a tempi di calcolo elevati per la soluzione.

Il problema principale nell'implementazione dell'algoritmo cutting plane è rappresentato dalla definizione in modo automatico del piano di taglio da aggiungere a ciascuna iterazione. A questo scopo può essere utilizzata il procedimento proposto da Gomory per definire, direttamente dalla soluzione del rilassamento continuo corrente, un piano di taglio basato sull'arrotondamento dei coefficienti ottenibili dal tableau ottimo.

Sia Y il tableau ottimo del rilassamento continuo corrente, corrispondente alla base ottima $\mathcal{B}$ che comprende le variabili $x_{\beta(1)}, \ldots, x_{\beta(m)}$. Sia i una riga in cui sia in base una variabile a valore frazionario. Dall'espressione del sistema di vincoli in forma canonica rispetto alla base si ha che

$$x_{\beta(i)} + \sum_{A_j \notin \mathcal{B}} y_{ij} x_j = y_{i0}. \tag{10.1}$$

Poiché in qualunque soluzione ammissibile di P si ha che $x \geq 0$ sostituendo in (10.1) a y_{ij} il corrispondente arrotondamento verso il basso $\lfloor y_{ij} \rfloor$ si ha che

$$x_{\beta(i)} + \sum_{A_j \notin \mathcal{B}} \lfloor y_{ij} \rfloor x_j \leq y_{i0} \tag{10.2}$$

Tale disequazione è valida per ogni soluzione frazionaria in P. Se consideriamo però le sole soluzioni intere in P il primo membro della disequazione avrà valore intero e possiamo quindi arrotondare verso il basso anche il secondo membro, ottenendo l'espressione del taglio di Gomory:

$$x_{\beta(i)} + \sum_{A_j \notin \mathcal{B}} \lfloor y_{ij} \rfloor x_j \leq \lfloor y_{i0} \rfloor \tag{10.3}$$

È facile verificare che l'espressione (10.3) è violata dalla soluzione frazionaria corrente dato che $x_{\beta(i)} = y_{i0} > \lfloor y_{i0} \rfloor$ ed è quindi un piano di taglio valido che può essere aggiunto al problema corrente.

Per aggiungere il taglio di Gomory al problema corrente è conveniente esprimerlo nella cosiddetta *forma frazionaria*, ottenibile sottraendo dalla (10.1) la (10.3):

$$\sum_{A_j \notin \mathcal{B}} (y_{ij} - \lfloor y_{ij} \rfloor) x_j \geq (y_{i0} - \lfloor y_{i0} \rfloor) \tag{10.4}$$

in cui i coefficienti rappresentano le parti frazionarie dei coefficienti delle variabili nella soluzione base corrente. Definendo $f_{ij} = y_{ij} - \lfloor y_{ij} \rfloor$, moltiplicando il vincolo per -1 (al fine di renderlo di tipo $\leq$) e ponendolo in forma standard per poterlo inserire nel tableau corrente si ha

$$\sum_{A_j \notin \mathcal{B}} -f_{ij} x_j + x_s = -f_{i0} \tag{10.5}$$

Si osservi che inserendo tale vincolo nel tableau ottimo del rilassamento continuo corrente il problema corrente diventa più grande per effetto di tale inserimento: viene infatti aggiunta una riga al tabelau ed una colonna associata alla variabile x_s. Il tableau corrente contiene, in corrispondenza alla base ottima corrente, m colonne di matrice identità dato che i coefficienti delle variabili attualmente in base sono uguali a zero in (10.5). La colonna corrispondente alla variabile slack x_s costituisce una colonna di matrice identità che completa la base ottima precedente ottenendo così una base per il problema. Si noti però che tale base non corrisponde ad una soluzione base ammissibile per il problema dato che $x_s = -f_{i0} < 0$. In effetti la soluzione ottima del rilassamento continuo precedente, cui corrisponde tale SB, viola il taglio di Gomory appena aggiunto al problema. In tale situazione il problema richiederebbe di essere riottimizzato ricercando una base iniziale ammissibile utilizzando il metodo delle due fasi. In pratica però può essere utilizzata allo scopo una variante dell'algoritmo del simplesso qui descritto, nota come algoritmo del simplesso duale, la quale è in grado di ottimizzare in modo efficiente un problema in queste condizioni partendo dalla SB non ammissibile determinata.

10.2.1 Esempio di applicazione del metodo cutting plane NEW: (Ver. 9.0)

Al fine di illustrare l'applicazione del metodo Cutting Plane si consideri il seguente problema PLI la cui regione ammissibile è illustrata in figura 10.2:

$$\begin{array}{llllll}
- \min -z = & & -x_2 & & & (10.6) \\
\text{s.t.} & 3x_1 & +2x_2 & \leq 6 & & (10.7) \\
 & -3x_1 & +2x_2 & \leq 0 & & (10.8) \\
 & x_1, & x_2 & \geq 0 & \text{intere} & (10.9)
\end{array}$$

Una volta posto il problema in forma standard questo può essere risolto con l'algoritmo del simplesso senza la necessità della fase 1 dato che le variabili slack,

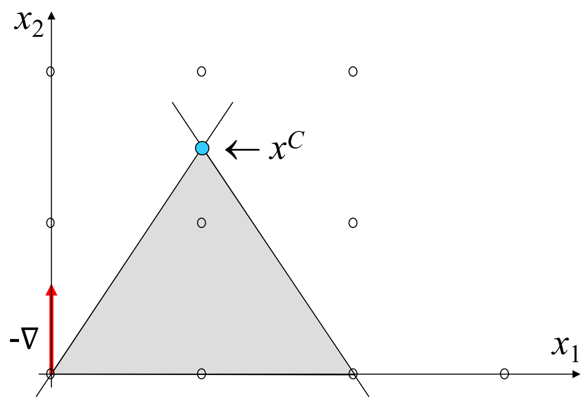


Figura 10.2: Regione ammissibile dell'esempio

x_3 e x_4, costituiscono una base iniziale cui corrisponde un SBA.

$$-\min -z = \quad -x_2 \tag{10.10}$$

$$\text{s.t.} \quad 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \tag{10.11}$$

$$-3x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \tag{10.12}$$

$$x_1, \; x_2, \; x_3, \; x_4 \geq 0 \quad \text{intere} \tag{10.13}$$

		x_1	x_2	x_3	x_4
$-z$	0	0	-1	0	0
x_3	6	3	2	1	0
x_4	0	-3	2	0	1

		x_1	x_2	x_3	x_4
$-z$	0	$-\frac{3}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$
x_3	6	6	0	1	-1
x_2	0	$-\frac{3}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$

		x_1	x_2	x_3	x_4
$-z$	$\frac{3}{2}$	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
x_1	1	1	0	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$
x_2	$\frac{3}{2}$	0	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

La soluzione ottima determinata con l'algoritmo del simplesso è $x_1 = 1, x_2 = \frac{3}{2}$

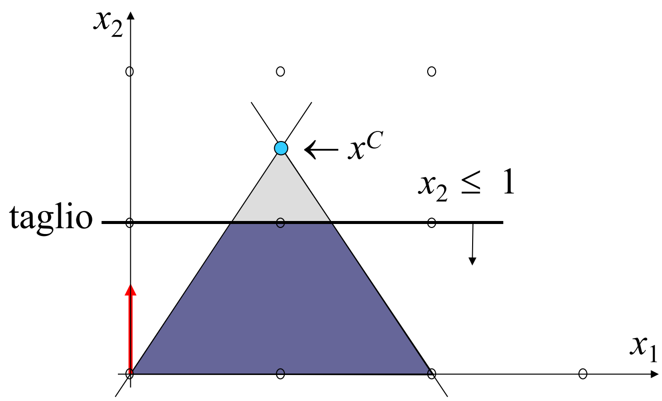


Figura 10.3: Regione ammissibile dopo l'aggiunta del primo taglio di Gomory.

ed è frazionaria. Possiamo quindi determinare dal tableau ottimo finale i tagli di Gomory. Questi possono essere ricavati dalla riga 0 e dalla riga 2 che riportano valori frazionari in colonna 0[1]. Il taglio di Gomory associato alla riga 0 ed alla riga 2 del tableau ottimo è $\frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 \geq \frac{1}{2}$. Ricavando x_3 in funzione di x_1 e x_2 dalla (10.11) e x_4 in funzione di x_1 e x_2 dalla (10.12) si può ottenere l'espressione del taglio di Gomory nelle variabili originali che è $x_2 \leq 1$. Il nuovo problema ottenuto aggiungendo tale taglio ha la regione ammissibile illustrata in figura 10.3.

Ponendo il taglio di Gomory in forma standard ed aggiungendolo al tableau ottimo si ottiene il nuovo problema. Risolvendo tale problema con l'algoritmo del simplesso ed il metodo delle due fasi (o con l'algoritmo del simplesso duale) si ottiene la nuova soluzione ottima corrispondente al tableau ottimo sotto riportato:

		x_1	x_2	x_3	x_4	s_1
$-z$	1	0	0	0	0	1
x_1	$\frac{2}{3}$	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
x_2	1	0	1	0	0	1
x_3	2	0	0	1	1	-4

La soluzione del secondo rilassamento continuo è ancora frazionaria e dal tableau ottimo è possibile ricavare il taglio di Gomory associato alla riga 1 che ha in colonna 0 un valore frazionario. Il taglio così determinato è $\frac{2}{3}x_4 + \frac{2}{3}s_1 \geq \frac{2}{3}$. Operando per sostituzione come fatto in precedenza, si può ottenere il taglio in funzione di x_1 e x_2, ovvero $x_1 - x_2 \geq 0$, illustrato in figura 10.4.

[1]Si noti che anche la riga 0 può essere utilizzata per ricavare un taglio di Gomory valido. La funzione obiettivo può essere infatti considerata una equazione a tutti gli effetti del modello.

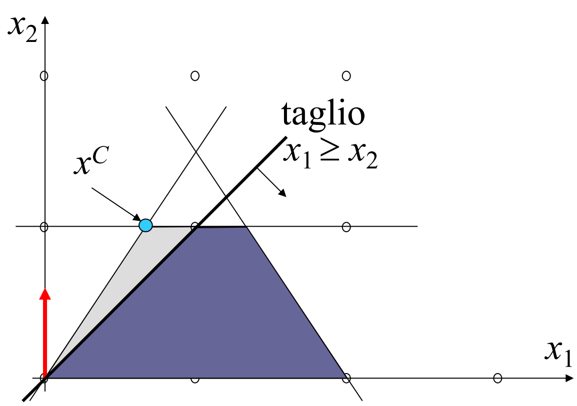


Figura 10.4: Regione ammissibile dopo l'aggiunta del secondo taglio di Gomory.

Ponendo il taglio di Gomory in forma standard ed aggiungendolo al tableau ottimo si ottiene il nuovo problema. Risolvendo tale problema con l'algoritmo del simplesso ed il metodo delle due fasi (o con l'algoritmo del simplesso duale) si ottiene la nuova soluzione ottima corrispondente al tableau ottimo sotto riportato:

		x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2
$-z$	1	0	0	0	0	1	0
x_1	1	1	0	0	0	1	$-\frac{1}{2}$
x_2	1	0	1	0	0	1	0
x_3	1	0	0	1	0	-5	$\frac{3}{2}$
x_4	1	0	0	0	1	1	$-\frac{3}{2}$

La soluzione del terzo rilassamento continuo è intera ed è quindi la soluzione ottima del problema. Tale soluzione è $x_1 = x_2 = 1$ ed ha valore $z = -1$.

10.3 Algoritmo Branch-and-Bound

L'algoritmo branch-and-bound, dovuto a Land e Doig [**LandD60BB**], è una tecnica generale per la risoluzione di problemi di ottimizzazione combinatoria, ossia problemi di ottimizzazione la cui regione ammissibile sia un insieme F finito. Il metodo si basa sulla scomposizione del problema da risolvere in sottoproblemi più semplici adottoando quindi il principio "Divide and Conquer".

L'algoritmo è in grado di risolvere problemi molto generali in cui sia la regione ammissibile sia la funzione obiettivo sono nonlineari ma al fine di descriverlo ci limiteremo al caso di problemi PLI. A tal fine indichiamo il problema PLI da

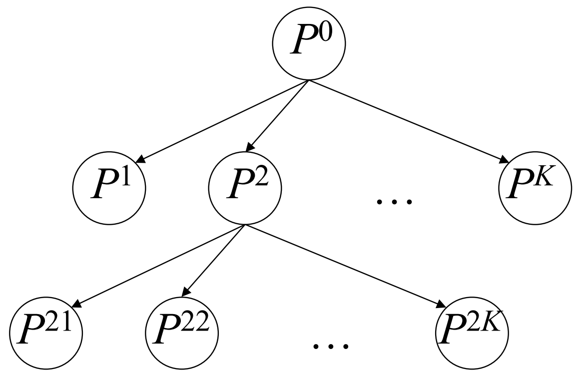


Figura 10.5: Esempio di albero decisionale

risolvere con ${}^P0 = (z(\cdot), F(P^0))$ dove $z(\cdot)$ indica la funzione obiettivo lineare del problema e $F(P^0)$ indica la regione ammissibile del problema, nel nostro caso definita da vincoli lineari. La soluzione ottima del problema è indicata come $z^* = z(P^0) = \min\{z(x) : x \in F(P^0)\}$. Inoltre durante l'esecuzione dell'algoritmo indichiamo con z^{Best} la miglior soluzione ammissibile nota per il problema, osservando che al termine dell'esecuzione si avrà $z^* = z^{Best}$.

Dato il problemi P^0 da risolvere, che per semplicità considereremo come problema di minimizzazione, il metodo branch-and-boundlo suddivide in K sottoproblemi $P^1, \ldots, P^K$ tali che la loro totalità rappresenti P^0. Tale suddivisione può essere ad esempio operata suddividendo la regione ammissibile $F(P^0)$ in sottoinsiemi $F(P^1), \ldots, F(P^K)$ tali che

$$\bigcup_{i=1}^{K} F(P^i) = F(P^0).$$

Normalmente tali sottoinsiemi costituiscono una partizione di $F(P^0)$, ossia $F(P^i) \cap F(P^j) = \emptyset,\ \forall i \neq j, i, j = 1, \ldots, K$, ma ciò non è strettamente necessario.

Il processo di suddivisione è spesso denominato di "ramificazione" (branching) e può essere iterato ricorsivamente suddividendo nello stesso modo i problemi via via generati. L'insieme dei problemi generati dal processo di suddivisione può essere efficacemente rappresentato graficamente da un albero decisionale (branch-decision tree), di cui un esempio è dato in figura 10.5. Nell'albero decisionale i nodi rappresentano i sottoproblemi generati e gli archi rappresentano le relazioni di discendenza tra i sottoproblemi. Il primo nodo dell'albero rappresenta il problema originale e viene generalmente chiamato *nodo radice* mentre tenendo conto delle relazioni di discendenza i nodo possono essere nodi *padre* (o genitore) da cui discendono nodi *figli*.

Data la suddivisione di P^0 nei K sottoproblemi è evidente che la risoluzione di P^0 può essere ottenuta dalla risoluzione di tutti i sottoproblemi generati. In particolare definendo come $z(P^i) = \min\{z(x) : x \in F(P^i)\}$ si ha che

$$z(P^0) = \min\{z(P^1), \ldots, z(P^K)\}.$$

Un generico sottoproblema P^i è *risolto* se:

a) si può dimostrare che il sottoproblema è *impossibile*, ossia $F(P^i) = \emptyset$;

b) si è ottenuta la soluzione ottima $z(P^i)$, ad esempio nel caso di un problema PLI risolvendo il rilassamento continuo $C(P^i)$ si ha che $z(C^i)$ è intera;[2]

c) si può dimostrare che risolvendo P^i non si migliorerebbe la miglior soluzione nota z^{Best}. Ad esempio nel caso di un problema PLI se $z(C^i) \geq z^{Best}$ dato che in questo caso anche $z(P^i) \geq z^{Best}$.

Se un problema viene risolto, la ramificazione di tale problema viene interrotta e nel caso b) viene eventualmente anche aggiornato il valore di z^{Best}. Se il problema non è risolto invece deve essere ulteriormente suddiviso in sottoproblemi. Il problema P^0 è risolto quando tutti i sottoproblemi via via generati sono stati risolti ricadendo in uno dei tre casi sopraelencati. Al termine dell'esecuzione il valore della soluzione ottima è z^{Best}.

Vediamo ora in dettaglio una semplice implementazione dell'algoritmo branch-and-boundnel caso dei problemi PLI. In particolare facciamo riferimento ad un problema $P^0 = \min\{c^T x \in \Re^n : Ax = d, x \geq 0,\ \text{intere}\}$, ed indichiamo con x^k la soluzione ottima di un generico sottoproblema P^k di valore z^k. Inoltre, x^{Ck} indicherà la soluzione ottima del rilassamento continuo del problema P^k, di valore z^{Ck}. Si noti che per le proprietà dei rilassamenti continui descritte nel capitolo precedente si ha che

$$z^{C^k} = c^T x^{C^k} \leq z^k = c^T x^k.$$

Dato il problema originale P^0 se ne risolve il rilassamento continuo C^0, se la soluzione di tale rilassamento è intera allora è la soluzione ottima di P^0 e ci si può fermare. Altrimenti tale soluzione contiene almeno una componente $x_j^{C^0}$ frazionaria che può essere utilizzata per la suddivisione di P^0 in sottoproblemi.

In generale la suddivisione di un problema in sottoproblemi può essere effettuata suddividendone la regione ammissibile in sottoinsiemi mediante l'aggiunta di opportuni vincoli al problema stesso come illustrato in figura 10.6. In tale figura un sottoproblema è ottenuto aggiungendo al problema P^0 la cui regione ammissibile è un triangolo, un vincolo del tipo $\alpha^k x \leq \delta^k$.

[2] Per brevità nel seguito, ove non altrimenti necessarion, indicheremo con C^i e non con $C(P^i)$ il rilassamento continuo del sottoproblema P^i.

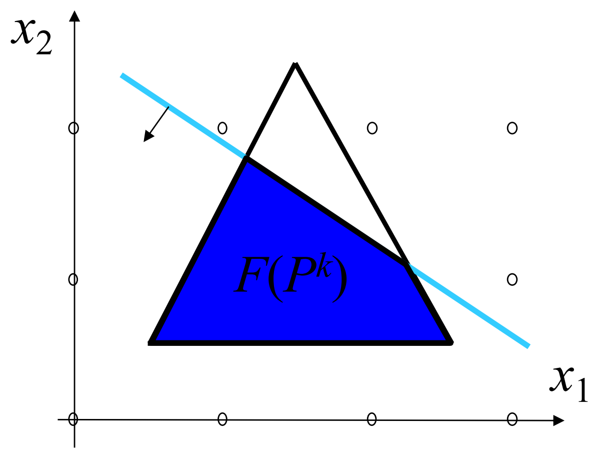


Figura 10.6: Esempio di suddivisione della regione ammissibile di un problema mediante l'aggiunta di un vincolo.

In una semplice implementazione del branch-and-boundper PLI si può ottenere una suddivisione di un problema in due sottoproblemi, detta branching binario, operando nel seguente modo. Scelta una componente x_j^{C0} frazionaria, imponiamo due condizioni mutuamente esclusive ed esaustive, valide per ogni soluzione intera di P^0:

$$x_j \leq \lfloor x_j^{C^0} \rfloor \qquad \text{e} \qquad x_j \geq \lfloor x_j^{C^0} \rfloor + 1.$$

È facile verificare che tutti i punti interi contenuti in $F(P^0)$ soddisfano una di queste disequazioni mentre la soluzione del rilassamento continuo non soddisfa nessuna di tali relazioni. Il branching binario descritto è illustrato graficamente nella figura 10.7 in cui sono indicate le regioni ammissibili dei due problemi associati al brancing sulla variabile frazionaria $x_j^{C^0}$. Si noti che la soluzione del rilassamento continuo non soddisfa nessuno dei due vincoli imposti.

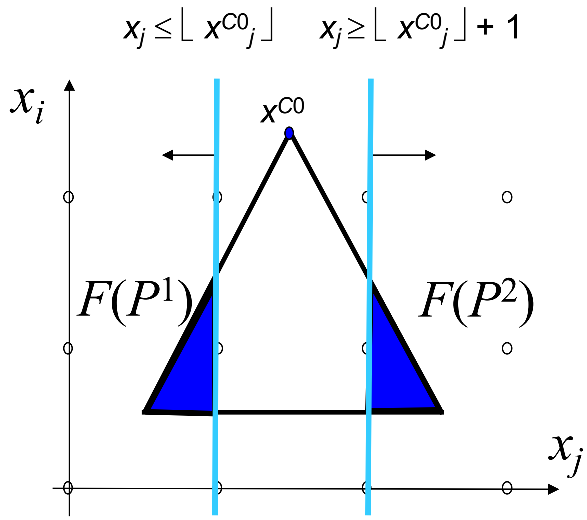


Figura 10.7: Esempio di branching binario basato una componente frazionaria della soluzione del rilassamento continuo.

Dalla suddivisione operata nel modo precedentemente descritto si originano due problemi:

- $P^1 = \min\{c^T x \in \Re^n : Ax = d, x_j \leq \lfloor x_j^{C^0} \rfloor, x \geq 0, \text{ intere}\}$, e
- $P^2 = \min\{c^T x \in \Re^n : Ax = d, x_j \geq \lfloor x_j^{C^0} \rfloor + 1, x \geq 0, \text{ intere}\}$.

per i quali sarà possibile calcolare il rilassamento continuo e decidere se questi devono essere eliminati o ulteriormente suddivisi.

Per illustrare meglio il procedimento consideriamo il seguente esempio:

$$
\begin{array}{lrrl}
-\min -z = & -x_1 & -x_2 & \qquad (10.14) \\
\text{s.t.} & 5x_1 & +3x_2 & \leq 15 \qquad (10.15) \\
 & 5x_1 & -3x_2 & \geq 0 \qquad (10.16) \\
 & & x_2 & \geq \frac{1}{2} \qquad (10.17) \\
 & x_1, & x_2 & \geq 0 \qquad (10.18)
\end{array}
$$

la cui regione ammissibile è illustrata in figura 10.8 nella quale è anche indicata la soluzione ottima del rilassamento continuo del nodo radice corrispondente al problema P^0 in cui le variabili decisionali valgono $x^{C0} = (\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$. Il valore di tale rilassamento è $-z = -4$ e rappresenta un lower bound sul valore della soluzione ottima $z^* = z^0$ di P^0.

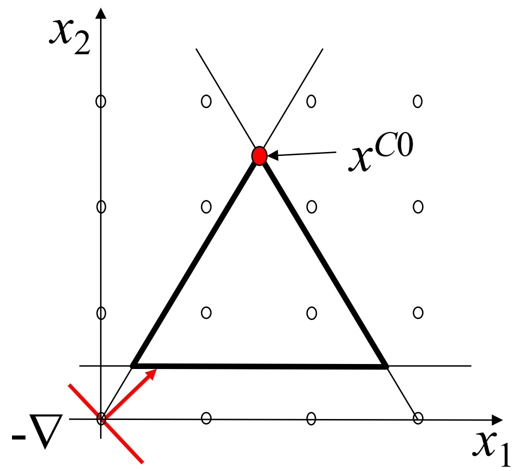


Figura 10.8: Regione ammissibile e soluzione del rilassamento continuo del nodo radice.

Branching da P^0: All'inizio dell'algoritmo non è nota nessuna soluzione intera del problema per cui il valore di $-z^{Best}$ può essere inizializzato ad un valore convenzionale che garantisca di aggiornarlo non appena si trovi una soluzione intera. In questo caso poniamo $-z^{Best} = +\infty$.

La soluzione del rilassamento continuo del nodo radice è frazionaria $x^{C^0} = (\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$ e vale $-z = -4$, quindi nella migliore delle ipotesi $-z^* = -4$. Poichè nessuna delle tre condizioni a)-c) elencate precedentemente ci permette di considerare il problema come risolto dobbiamo effettuare una suddivisione del problema (branching).

Scelta della variabile per il branching. Esistono molti criteri per la scelta della variabile frazionaria da utilizzare per il branching. Ad esempio, questa può essere scelta casualmente o può essere selezionata quella la cui parte frazionaria è maggiormente prossima ad $\frac{1}{2}$. Nel seguito useremo una semplice regola deterministica in base alla quale sceglieremo la variabile frazionaria di indice minimo. Nel nostro caso scegliamo quindi la variabile $x_1 = \frac{3}{2}$ e generiamo i due sottoproblemi:

- $P^1 = P^0 + x_1 \leq 1$,

- $P^2 = P^0 + x_1 \geq 2$,

In figura 10.9 sono rappresentate le regioni ammissibili dei due problemi generati e sono indicate le soluzioni ottime dei rilassamenti continui corrispondenti. I valori dei bound calcolati dai rilassamenti continui sono riportati in figura 10.10.

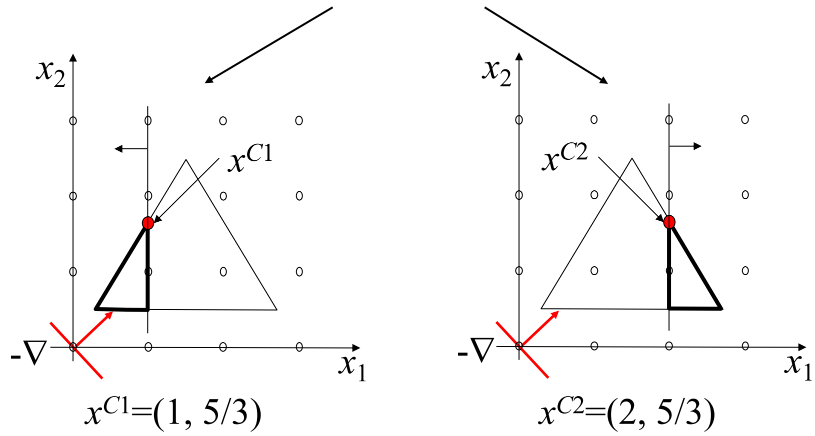


Figura 10.9: Regione ammissibile e soluzione del rilassamento continuo dei due sottoproblemi generati.

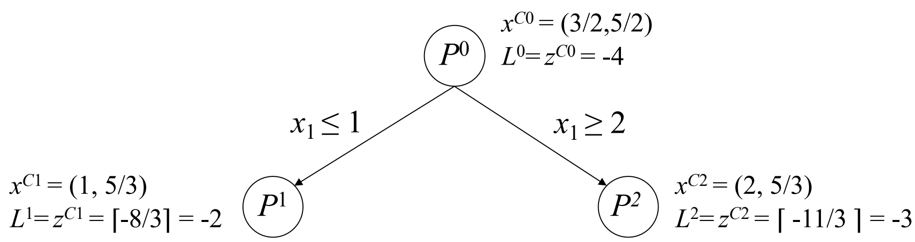


Figura 10.10: Albero decisionale dopo il primo branching.

Possibile arrotondamento dei bound: Qualora la funzione obiettivo sia caratterizzata da coefficienti interi, è evidente che il valore di qualsiasi soluzione intera avrà a sua volta valore intero. In generale la soluzione del rilassamento continuo x^C è frazionaria e di conseguenza anche il valore z^C di tale rilassamento potrà avere valore frazionario. È noto che, nel caso di problemi di minimo, z^C approssima per difetto il valore della soluzione ottima del problema intero z^*, ma se il valore di z^* è sicuramente intero allora anche l'arrotondamento all'intero superiore di z^C è un lower bound valido. Analogamente per problemi di massimo gli upper bound frazionari possono essere arrotondati all'intero inferiore. Pertanto, se i coefficienti della funzione obiettivo sono tutti interi:

- per problemi di minimo i lower bound possono essere arrotondati per eccesso: $L = \lceil z^C \rceil$;
- per problemi di massimo gli upper bound possono essere arrotondati per difetto: $U = \lfloor z^C \rfloor$.

Al termine del primo branching abbiamo quindi generato due sottoproblemi:

- P^1 la cui soluzione del rilassamento continuo è frazionaria $x^{C1} = (1, \frac{5}{3})$ a cui corrisponde un lower bound $L^1 = \lceil -\frac{8}{3} \rceil = -2$;

- P^2 la cui soluzione del rilassamento continuo è frazionaria $x^{C2} = (2, \frac{5}{3})$ a cui corrisponde un lower bound $L^2 = \lceil -\frac{11}{3} \rceil = -3$.

Entrambi questi sottoproblemi non sono risolti e quindi dovremo effettuare il branching da uno di essi.

Scelta del sottoproblema (strategia di esplorazione): Ad una iterazione generica dell'algoritmo branch-and-boundpossono essere "attivi" diversi sottoproblemi che sono stati generati e che non sono stati risolti e quindi devono essere ulteriormente suddivisi. Anche per la strategia di esplorazione esistono diverse possibilità ma ci limiteremo qui ad esporre una regola piuttosto efficace nota come "best bound first" (o "lowest first").

Se consideriamo la situazione attuale dell'esempio i due problemi attivi sono P^1 a cui è associato un lower bound pari a -2 e P^2 a cui è associato un lower bound pari a -3. È quindi chiaro che se risolvessimo all'ottimo P^1, sviluppando l'intero sottoalbero originato da tale nodo, la miglior soluzione intera che potremmo trovare varrebbe al più -2. Viceversa, risolvendo all'ottimo P^2 potremmo trovare una soluzione che vale -3 e quindi migliore. La regola da adottare nel scegliere il prossimo problema da cui effettuare il branching è

Definizione 10.2 ((Regola di Branching))**.** *Dato l'insieme dei sottoproblemi attivi $\mathcal{A}$ si sceglie per il branching il sottoproblema con il bound migliore. Nel caso di problemi di minimizzazione questo è il sottoproblema con il lower bound di valore minimo. Nel caso di problemi di massimizzazione è il sottoproblema con l'upper bound di valore massimo.*

Secondo branching. Seguendo la regola best bound first viene scelto per il branching il sottoproblema P^2. La soluzione del rilassamento continuo $x^{C^2} = (2, \frac{5}{3})$ ha una sola variabile frazionaria che quindi verrà usata per il branching generando due ulteriori sottoproblemi:

- $P^3 = P^2 + x_2 \leq 1, = P^0 + x_1 \geq 2 + x_2 \leq 1,$

- $P^4 = P^2 + x_2 \geq 2, = P^0 + x_1 \geq 2 + x_2 \leq 2,$

In figura 10.11 sono rappresentate le regioni ammissibili dei due problemi generati e sono indicate le soluzioni ottime dei rilassamenti continui corrispondenti. I valori dei bound calcolati dai rilassamenti continui sono riportati in figura 10.12.

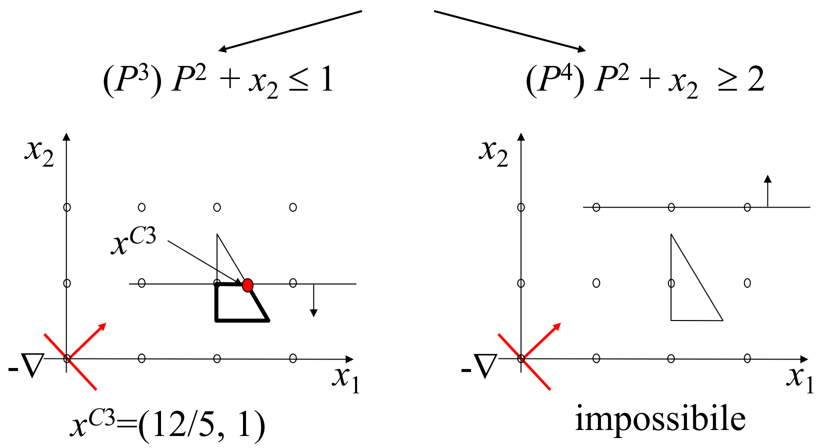


Figura 10.11: Regione ammissibile e soluzione del rilassamento continuo dei due sottoproblemi generati.

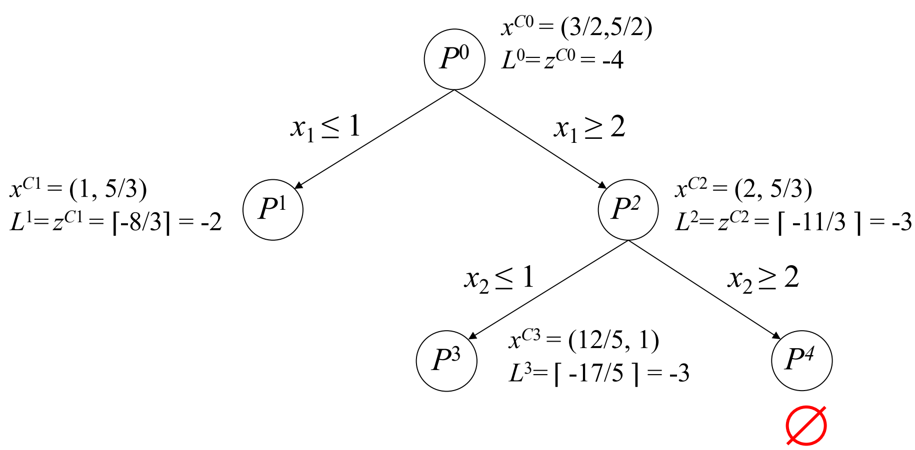


Figura 10.12: Albero decisionale dopo il secondo branching.

Al termine del secondo branching abbiamo quindi generato due sottoproblemi:

- P^3 la cui soluzione del rilassamento continuo è frazionaria $x^{C3} = (\frac{12}{5}, 1)$ a cui corrisponde un lower bound $L^3 = \lceil -\frac{17}{5} \rceil = -3$;
- P^4 la cui soluzione del rilassamento continuo è impossibile e quindi tale problema non andrà ulteriormente sviluppato.

Al termine del secondo branching sono ancora attivi i problemi P^1 e P^3 e quindi dovremo effettuare il branching da uno di essi.

Terzo branching. Seguendo la regola best bound first viene scelto per il branching il sottoproblema P^3. La soluzione del rilassamento continuo $x^{C^3} = (\frac{12}{5}, 1)$ ha una sola variabile frazionaria che quindi verrà usata per il branching generando due ulteriori sottoproblemi:

- $P^5 = P^3 + x_1 \leq 2, = P^0 + x_1 \geq 2 + x_2 \leq 1 + x_1 \leq 2,$

- $P^6 = P^3 + x_1 \geq 3, = P^0 + x_1 \geq 2 + x_2 \leq 1 + x_1 \geq 3,$

In figura 10.13 sono rappresentate le regioni ammissibili dei due problemi generati e sono indicate le soluzioni ottime dei rilassamenti continui corrispondenti. I valori dei bound calcolati dai rilassamenti continui sono riportati in figura 10.14.

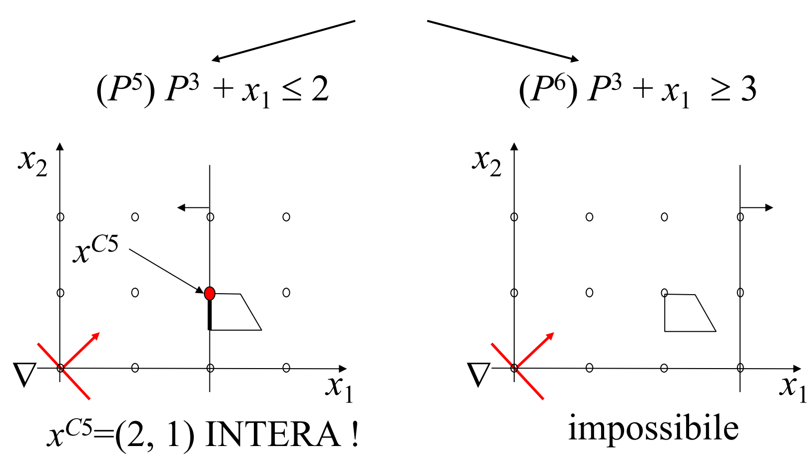


Figura 10.13: Regione ammissibile e soluzione del rilassamento continuo dei due sottoproblemi generati.

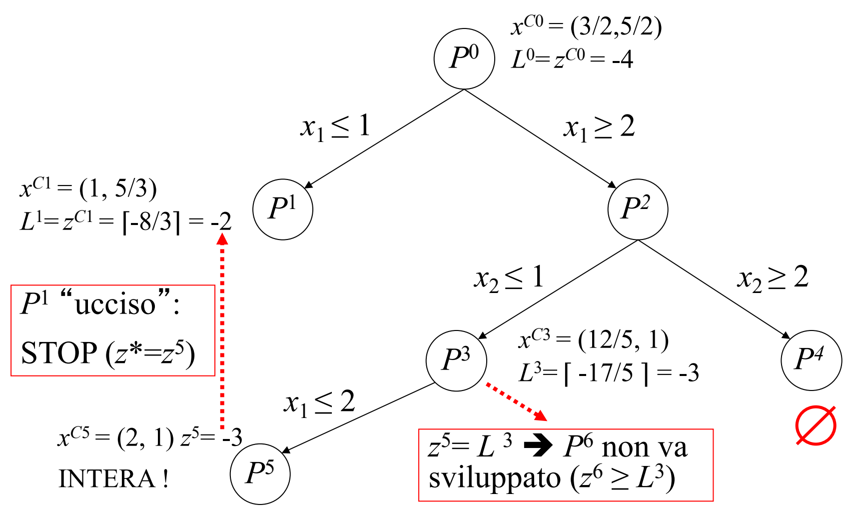


Figura 10.14: Albero decisionale dopo il terzo branching.

Al termine del terzo branching abbiamo quindi generato due sottoproblemi:

- P^5 la cui soluzione del rilassamento continuo è intera $x^{C^5} = (2, 1)$ a cui corrisponde una soluzione $z^5 = -3$ che ci permette di aggiornare $z^{Best} = z^5 = -3$ (e salvare la soluzione corrente $x^{Best} = x^5 = (2, 1)$);

- P^6 la cui soluzione del rilassamento continuo è impossibile e quindi tale problema non andrà ulteriormente sviluppato.

Al termine del terzo branching è ancora attivo il solo sottoproblema P^1 che però può essere eliminato poiché $L^1 \geq z^{Best}$ ed è quindi "ucciso" dal bound. Non essendovi più nodi attivi il problema è risolto e la soluzione ottima è la soluzione $x^{Best} = (2, 1)$ di valore -3 corrispondente a z^{Best}.

A commento dell'ultimo branching si può infine notare che il problema P^6 poteva anche non essere esaminato dato che il bound del problema padre (ossia P^3) era pari a -3 e sviluppando il nodo fratello P^5 abbiamo trovato una soluzione intera di tale valore. Pertanto anche sviluppando P^6 non avremmo potuto trovare una soluzione migliore di quella già trovata.

10.4 Pseudo-codice dell'algoritmo branch-and-bound NEW: (Ver. 9.0)

Algorithm 7 Algoritmo Branch-and-Bound(problema di minimo).

```
procedure Branch-and-Bound(($P^0$))
    risolvi il rilassamento continuo $C^0$ di $P^0$ ottenendo $x^0$ di valore $z^0$;
    if $C^0$ impossibile o $C^0$ illimitato then
        Stop                                  ▷ $P^0$ impossibile o illimitato
    end if
    if $x^0$ intera then
        Stop                                  ▷ $x^0$ soluzione ottima
    end if
    $k = 0$;
    $\Pi = \{P^0\}$;                          ▷ insieme dei problemi attivi
    $z^{Best} = +\infty$;                     ▷ miglior soluzione intera trovata
    while $\Pi \neq \emptyset$ do
        Scegli $P^h$ in $\Pi$ e rimuovilo da $\Pi$;
        Scegli una $x_j^h$ frazionaria in $x^h$ per il branching;
        $k = k + 1$;                          ▷ primo figlio
        Definisci $P^k = P^h + x_j \leq \lfloor x_j^h \rfloor$;
        risolvi il rilassamento continuo $C^k$ ottenendo $x^{C^k}$ di valore $z^{C^k}$;
        if $C^k$ ha soluzione e $z^{C^k} < z^{Best}$ then
            if $x^{C^k}$ frazionaria then
                $\Pi = \Pi \cup P^k$
            else                              ▷ soluzione intera migliorante
                $z^{Best} = z^{C^k}; x^{Best} = x^{C^k}$;
                Rimuovi da $\Pi$ tutti i $P^j$ tali che $z^{C^j} \geq z^{Best}$
                if $z^{C^h} \geq z^{Best}$ then
                    Loop                      ▷ il secondo figlio non va generato
                end if
            end if
        end if
        $k = k + 1$;                          ▷ secondo figlio
        Definisci $P^k = P^h + x_j \geq \lfloor x_j^h \rfloor + 1$;
        risolvi il rilassamento continuo $C^k$ ottenendo $x^{C^k}$ di valore $z^{C^k}$;
        if $C^k$ ha soluzione e $z^{C^k} < z^{Best}$ then
            if $x^{C^k}$ frazionaria then
                $\Pi = \Pi \cup P^k$
            else                              ▷ soluzione intera migliorante
                $z^{Best} = z^{C^k}; x^{Best} = x^{C^k}$;
                Rimuovi da $\Pi$ tutti i $P^j$ tali che $z^{C^j} \geq z^{Best}$
            end if
        end if
    end while
    return $x^* = x^{Best}$ (soluzione ottima)
end procedure
```

Capitolo 11

Esercizi di Programmazione Lineare Intera

Esercizio 11.1.

Si consideri il problema di programmazione lineare intera

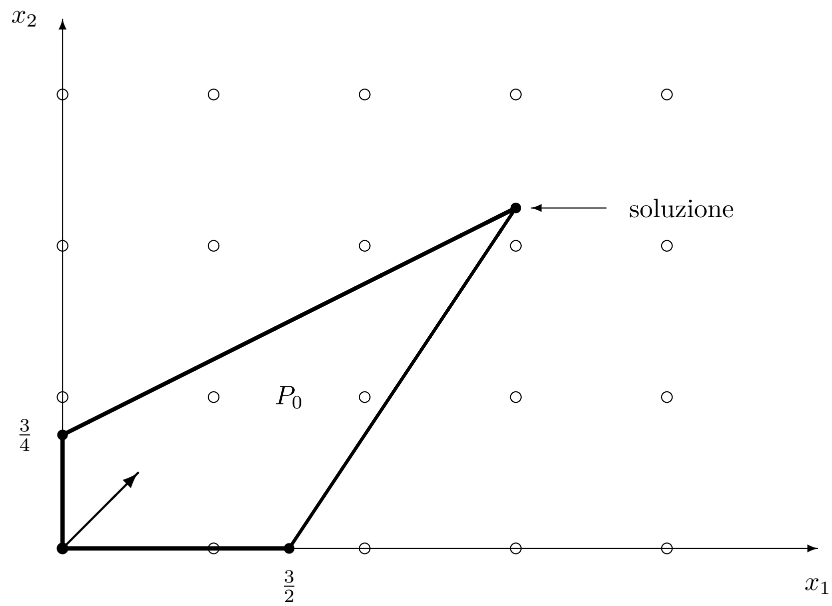
$$
\begin{array}{rrrrrl}
\max\ z = & x_1 & + & x_2 & & \\
& -\,6\,x_1 & +\,12 & x_2 & \leq & 9 \\
& 6\,x_1 & -\ \ 4 & x_2 & \leq & 9 \\
& x_1, & & x_2 & \geq & 0,\quad \text{interi}
\end{array}
$$

a) Risolvere mediante branch-and-bound, determinando per via grafica le varie soluzioni dei rilassamenti continui. Si dia l'albero decisionale, disegnando il politopo associato a ciascun nodo.

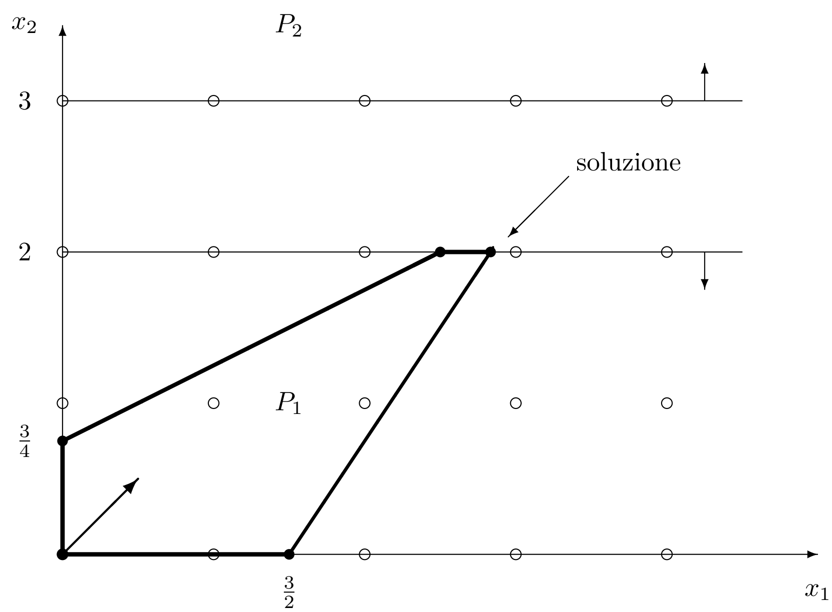
b) Eseguire la prima iterazione dell'algoritmo di Gomory, determinando e disegnando almeno un piano di taglio.

Soluzione

a) La regione ammissibile del problema è la seguente:

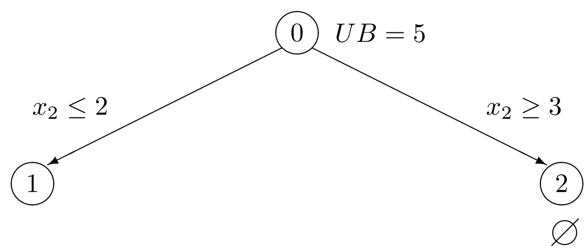


La soluzione ottima del rilassamento continuo è $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{9}{4}$ ed ha valore $\frac{21}{4}$. Pertanto l'upper bound corrispondente vale $\lfloor \frac{21}{4} \rfloor = 5$. La variabile x_2 ha valore non intero compreso tra 2 e 3. La ramificazione corrispondente divide il politopo mediante intersezione con i semipiani $x_2 \leq 2$ ed $x_2 \geq 3$. Si ottengono quindi i politopi P_1 e P_2 di figura.

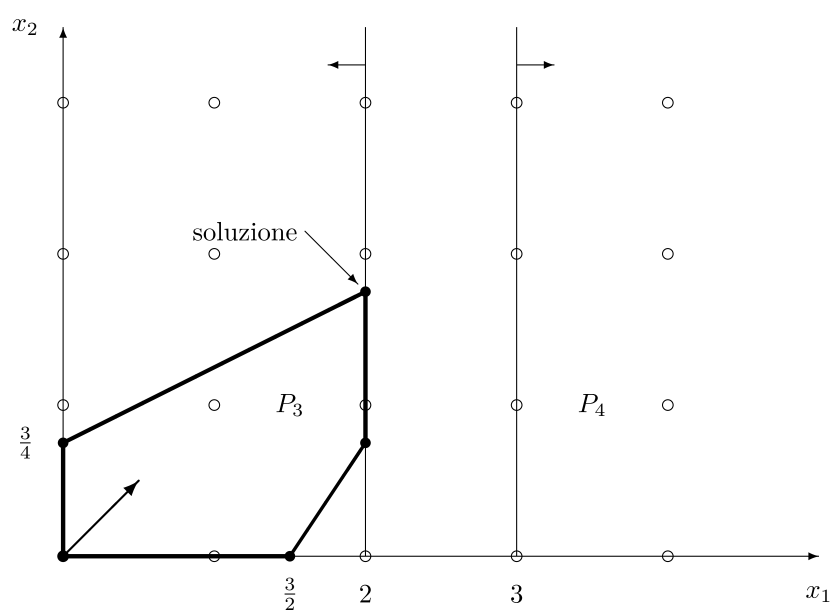


L'albero decisionale attuale è il seguente (al nodo i corrisponde il politopo

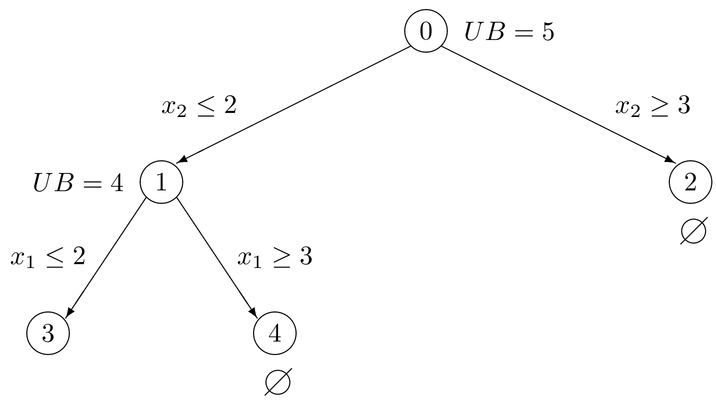
P_i):



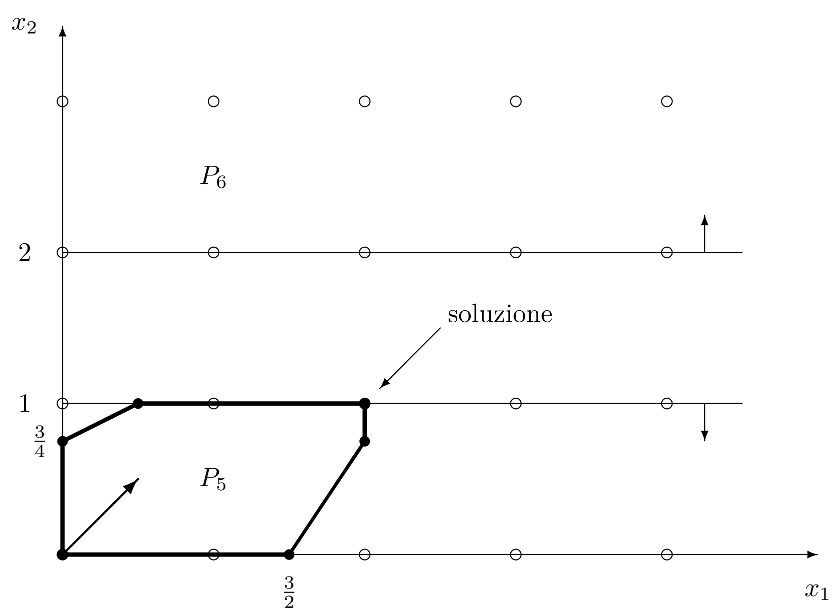
La soluzione ottima del rilassamento continuo del sottoproblema 1 è $x_1 = \frac{17}{6}$, $x_2 = 2$ e vale $\frac{29}{6}$; l'upper bound corrispondente vale dunque $\lfloor \frac{29}{6} \rfloor = 4$. La variabile x_1 ha valore frazionario compreso tra 2 e 3. Ramificando mediante i semipiani $x_1 \leq 2$ ed $x_1 \geq 3$ si ottengono i politopi P_3 e P_4 di figura.

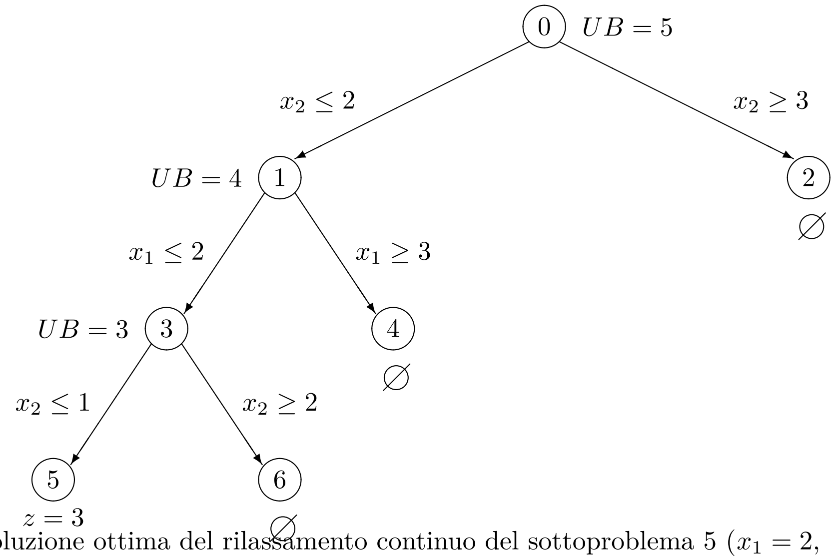


e l'albero decisionale



La soluzione ottima del rilassamento continuo del sottoproblema 3 è $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{7}{4}$ e vale $\frac{15}{4}$; l'upper bound corrispondente vale dunque $\lfloor \frac{15}{4} \rfloor = 3$. La variabile x_2 ha valore frazionario compreso tra 1 e 2. Ramificando mediante i semipiani $x_2 \leq 1$ ed $x_2 \geq 2$ si ottengono i politopi P_5 e P_6 e l'albero decisionale mostrati in figura.





La soluzione ottima del rilassamento continuo del sottoproblema 5 ($x_1 = 2$, $x_2 = 1$) è intera e vale 3. Poichè non si ha nessun nodo attivo da cui ramificare, tale soluzione è quella ottima.

Esercizio 11.2.

Un agricoltore deve preparare il mangime per i suoi polli miscelando due tipi di semi, A e B, disponibili in dosi preconfezionate. Il contenuto energetico dei semi A è doppio di quello dei semi B. Una dose di semi A contiene 4 unità di vitamina Q, mentre una dose di semi B ne contiene 5. La dieta non può contenere più di 20 unità in totale di tale vitamina. L'agricoltore, inoltre, vuole somministrare almeno 4/5 di dose di semi B e non più di 4 dosi di semi di tipo A.

a) Scrivere il modello di programmazione lineare intera che permette di determinare la miscelazione che massimizza il contenuto energetico del mangime.

b) Supponendo inizialmente accettabili soluzioni frazionarie si risolva il problema con l'algoritmo del simplesso, utilizzando il metodo delle due fasi e la regola di Bland.

c) Si disegni con cura la regione ammissibile e vi si indichino con chiarezza le soluzioni corrispondenti a ciascun tableau esaminato al punto precedente.

d) Si commenti la soluzione ottima determinata e se ne giustifichino le proprietà rilevate.

e) Si supponga ora necessario determinare una soluzione intera. Risolvere il problema mediante il metodo branch and bound. A tal fine:

   e.1) Si risolvano gli eventuali rilassamenti continui necessari PER VIA GRAFICA, utilizzando un disegno diverso per ogni problema ed indicandovi con chiarezza la regione ammissibile del sottoproblema (tagli generati dal Branch and bound) e la relativa soluzione ottima.

   e.2) Per il Branching si selezioni la variabile frazionaria di indice MINIMO e si sviluppi il nodo relativo al problema più promettente.

   e.3) Si disegni l'albero decisionale sviluppato indicando per ciascun nodo il valore del bound e la soluzione ottenuta.

   e.4) Si indichi la soluzione ottima complessiva trovata.

Soluzione

a) Si utilizzano due variabili decisionali x_1 e x_2 che rappresentano il numero di dosi di semi A e B acquistate, rispettivamente. Il modello PLI del problema è

$$
\begin{array}{rrrrl}
\max\ z = & 2\,x_1 & + \ \ x_2 & & \\
 & 4\,x_1 & +\,5\,x_2 & \leq & 20, \\
 & x_1 & & \leq & 4, \\
 & & x_2 & \geq & \frac{4}{5}, \\
 & x_1, & x_2 & \geq & 0, \quad \text{intere.}
\end{array}
$$

b) Rimuovendo il vincolo di interezza e ponendo il modello in forma standard si ottiene

$$
\begin{array}{rrrrrrrl}
-\min\ -z = & -2\,x_1 & - \ \ x_2 & & & & & \\
 & 4\,x_1 & +\,5\,x_2 & +\ x_3 & & & = & 20, \\
 & 4\,x_1 & & & +\ x_4 & & = & 4, \\
 & & x_2 & & & -\ x_5 & = & \frac{5}{4}, \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq & 0.
\end{array}
$$

Soluzione del rilassamento continuo

E' necessaria la Fase 1, aggiungendo una sola variabile artificiale (associata al secondo vincolo)

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1
$-w$	0	0	0	0	0	0	1
x_3	20	4	5	1	0	0	1
x_4	4	4	0	0	1	0	0
y_1	$\frac{5}{4}$	0	1	0	0	-1	0

Poniamo il tableau in forma canonica rispetto alla base formata dalle colonne associate alle variabili x_3, x_4 ed y_1 sottraendo la riga 3 dalla funzione obiettivo.

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1
$-w$	$-\frac{5}{4}$	-1	0	0	1	0	0
x_3	20	4	5	1	0	0	1
x_4	4	4	0	0	1	0	0
y_1	$\frac{5}{4}$	0	1^*	0	0	-1	0

Eseguiamo il pivot sulla colonna associata alla variabile x_2 e di conseguenza sulla riga 3 che corrisponde al minimo dei rapporti considerando le sole righe con elementi positivi in tale colonna. Esce quindi dalla base la variabile y_1.

Poniamo il tableau in forma canonica rispetto alla base formata dalle colonne associate alle variabili x_2, x_3 ed x_4. A tal fine:

- sommiamo la riga 3 alla funzione obiettivo;
- sottraiamo dalla riga 1 la riga 3 moltiplicata per 5.

Il nuovo tableau è

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1
$-w$	0	0	0	0	0	0	1
x_3	16	4	0	1	0	5	-5
x_4	4	4	0	0	1	0	0
x_2	$\frac{4}{5}$	0	1	0	0	-1	1

La soluzione ottima di Fase 1 vale 0 ed è relativa alla base associata alle colonne x_2, x_3 e x_4 possiamo quindi passare alla Fase 2 rimuovendo le variabili artificiali e ripristinando la funzione obiettivo originale del problema.

Il nuovo tableau è

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$-z$	0	-2	-1	0	0	0
x_3	16	4	0	1	0	5
x_4	4	1	0	0	1	0
x_2	$\frac{4}{5}$	0	1	0	0	-1

Poniamo il tableau in forma canonica rispetto alla base sommando la riga 3 alla funzione obiettivo

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
z	0	-2	0	0	0	-1
x_3	16	4*	0	1	0	5
x_4	4	1	0	0	1	0
x_2	$\frac{4}{5}$	0	1	0	0	-1

Eseguiamo il pivot sulla colonna associata alla variabile x_1. Nel calcolo dei rapporti relativi alle righe con elementi positivi in tale colonna si ottiene una partità tra i valori nella riga 1, ossia $\frac{16}{4}$, e nella riga 2, ossia $\frac{4}{1}$. Di conseguenza, seguendo la regola di Bland si esegue il pivot scegliendo di far uscire dalla base la variabile di indice minimo. In questo caso eseguendo il pivot sulla riga 1 uscirebbe la variabile x_3 mentre sulla riga 2 uscirebbe la variabile x_4. Si esegue pertanto il pivot sulla riga 1 ed esce la variabile x_3.

Poniamo il tableau in forma canonica rispetto alla base formata dalle colonne associate alle variabili x_2, x_3 ed x_4. A tal fine:

- dividiamo la riga 1 per 4;
- sommiamo la nuova riga 1 moltiplicata per 2 alla funzione obiettivo;
- sottraiamo dalla riga 2 la nuova riga 1.

Il nuovo tableau è

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
z	$\frac{44}{5}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$
x_1	4	1	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{5}{4}$
x_4	0	0	0	$-\frac{1}{4}$	1	$-\frac{5}{4}$
x_2	$\frac{4}{5}$	0	1	0	0	-1

Poiché tutte le variabili fuori base hanno costi ridotti non negativi la base corrente è ottima. La soluzione ottima è pertanto $x_1 = 4$, $x_2 = \frac{4}{5}$, $x_3 = x_4 = x_5 = 0$ ed il suo valore è, $-z = -\frac{44}{5}$. Rispetto alla funzione obiettivo originale del problema in forma di massimizzazione il valore della soluzione è pertanto $z = \frac{44}{5} = 8.8$.

c) Il disegno della regione ammissibile del problema originale in due variabili decisionali è riportata in figura 11.1 in cui i punti interi sono rappresentati da pallini vuoti.

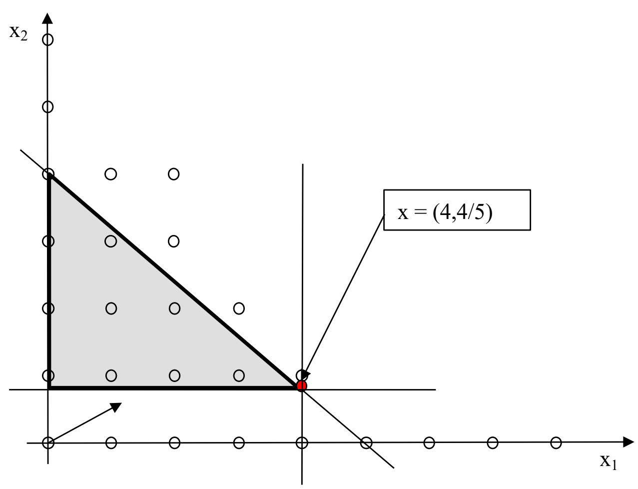


Figura 11.1: Regione ammissibile del problema.

La soluzione corrispondente al tableau iniziale di Fase 1 è l'origine. La soluzione corrispondente al tableau finale di Fase 1 è il punto di coordinate $(0, \frac{4}{5})$. La soluzione corrispondente al tableau finale di Fase 2 è la soluzione ottima di coordinate $(4, \frac{4}{5})$.

d) Esaminando la regione ammissibile si può notare che il vertice ottimo del rilassamento continuo è sovradefinito. Infatti il vincolo $x_1 \leq 4$ è chiaramente ridondante e passa per tale vertice. Come discusso nel paragrafo 5.5 la conseguenza di tale sovradefinizione di un vertice è la degenerazione della base a questo associata. Infatti la base ottima determinata al termine della Fase 2 è degenere dato che la variabile base x_4 è in base sulla riga 2 a valore zero.

e) Soluzione del probelma intero mediante Branch-and$_B$*ound*.

Branching da P^0: COnsideriamo il problema originale in forma di massimizzazione la cui funzione obiettivo è $\max z = 2x_1 + x_2$. All'inizio dell'algoritmo non è nota nessuna soluzione intera del problema per cui si pone $z^{Best} = -\infty$.

La soluzione del rilassamento continuo del nodo radice è frazionaria $x^{C0} = (4, \frac{4}{5})$ e vale $z^{C0} = \frac{44}{5} = 8.8$, che può essere arrotondato all'intero inferiore dato che i coefficienti della funzione obiettivo sono interi. Per cui $UB^0 = \lfloor 8.8 \rfloor = 8$. Poichè nessuna delle tre condizioni a)-c) elencate nel capitolo **??** ci permette di considerare il problema come risolto dobbiamo effettuare una suddivisione del problema (branching).

Scegliendo la variabile frazionaria di indice minimo effettuiamo il branching sulla variabile $x_2 = \frac{4}{5}$ e generiamo i due sottoproblemi:

- $P^1 = P^0 + x_2 \leq 0$,
- $P^2 = P^0 + x_2 \geq 1$,

In figura 11.2 sono rappresentate le regioni ammissibili dei due problemi generati e sono indicate le soluzioni ottime dei rilassamenti continui corrispondenti. I valori dei bound calcolati dai rilassamenti continui sono riportati in figura 11.3.

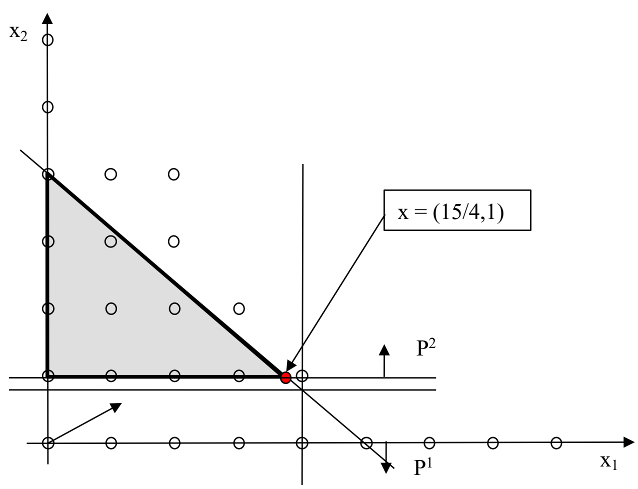


Figura 11.2: Regione ammissibile e soluzione del rilassamento continuo dei due sottoproblemi generati.

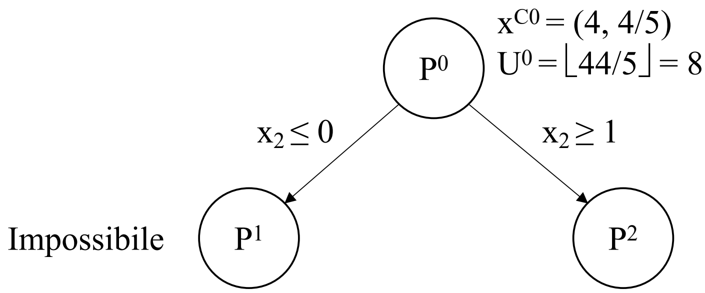


Figura 11.3: Albero decisionale dopo il primo branching.

Al termine del primo branching abbiamo quindi generato due sottoproblemi:

- P^1 la cui soluzione del rilassamento continuo è impossibile e quindi tale problema non andrà ulteriormente sviluppato;

- P^2 la cui soluzione del rilassamento continuo è frazionaria $x^{C2} = (\frac{15}{4}, 1)$ a cui corrisponde un upper bound $U^2 = \lfloor \frac{17}{2} \rfloor = 8$.

Il sottoproblema P^1 è chiuso ma il sottoproblema P^2 non è risolto e quindi dovremo effettuare un ulteriore branching da questo.

Secondo branching. Seguendo la regola best bound first viene scelto per il branching il sottoproblema P^2 che è comunque l'unico attivo. La soluzione del rilassamento continuo $x^{C2} = (\frac{15}{4}, 1)$ ha una sola variabile frazionaria che quindi verrà usata per il branching generando due ulteriori sottoproblemi:

- $P^3 = P^2 + x_1 \leq 3, = P^0 + x_2 \geq 1 + x_1 \leq 3,$

- $P^4 = P^2 + x_1 \geq 4, = P^0 + x_2 \geq 1 + x_1 \geq 4,$

In figura 11.4 sono rappresentate le regioni ammissibili dei due problemi generati e sono indicate le soluzioni ottime dei rilassamenti continui corrispondenti. I valori dei bound calcolati dai rilassamenti continui sono riportati in figura 11.5.

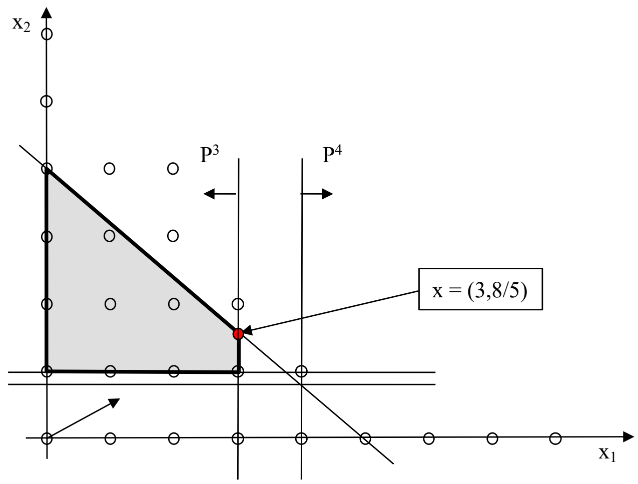


Figura 11.4: Regione ammissibile e soluzione del rilassamento continuo dei due sottoproblemi generati.

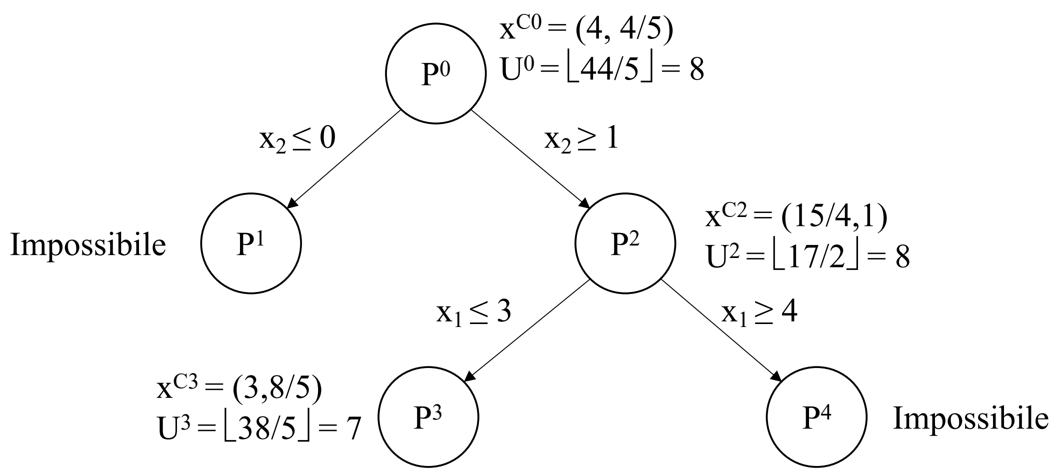


Figura 11.5: Albero decisionale dopo il secondo branching.

Al termine del secondo branching abbiamo quindi generato due sottoproblemi:

- P^3 la cui soluzione del rilassamento continuo è frazionaria $x^{C3} = (3, \frac{8}{5})$ a cui corrisponde un upper bound $U^3 = \lfloor \frac{38}{5} \rfloor = 7$;
- P^4 la cui soluzione del rilassamento continuo è impossibile e quindi tale problema non andrà ulteriormente sviluppato.

Al termine del secondo branching è ancora attivo il solo problema P^3 e quindi dovremo effettuare il branching da questo.

Terzo branching. Seguendo la regola best bound first viene scelto per il branching il sottoproblema P^3. La soluzione del rilassamento continuo $x^{C3} = (3, \frac{8}{5})$ ha una sola variabile frazionaria che quindi verrà usata per il branching generando due ulteriori sottoproblemi:

- $P^5 = P^3 + x_2 \leq 1, = P^0 + x_2 \geq 1 + x_1 \leq 3 + x_2 \leq 1,$

- $P^6 = P^3 + x_2 \geq 2, = P^0 + x_2 \geq 1 + x_1 \leq 3 + x_2 \geq 2,$

In figura 11.6 sono rappresentate le regioni ammissibili dei due problemi generati e sono indicate le soluzioni ottime dei rilassamenti continui corrispondenti. I valori dei bound calcolati dai rilassamenti continui sono riportati in figura 11.7.

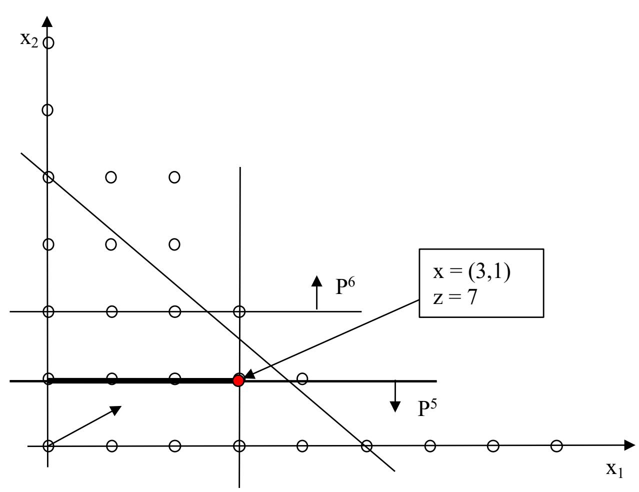


Figura 11.6: Regione ammissibile e soluzione del rilassamento continuo dei due sottoproblemi generati.

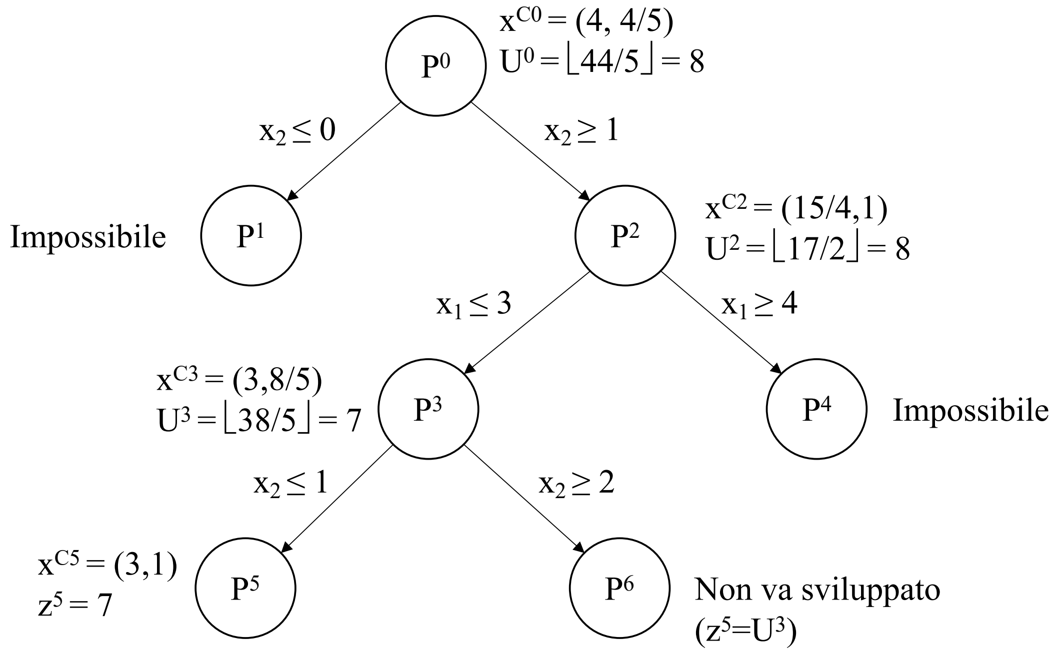


Figura 11.7: Albero decisionale dopo il terzo branching.

Al termine del terzo branching abbiamo quindi generato due sottoproblemi:

- P^5 la cui soluzione del rilassamento continuo è intera $x^{C5} = (3, 1)$ a cui corrisponde una soluzione $z^5 = 7$ che ci permette di aggiornare $z^{Best} = z^5 = 7$ (e salvare la soluzione corrente $x^{Best} = x^5 = (3, 1)$);
- P^6 che non andrà sviluppato dato che il valore della soluzione intera di P^5 è uguale al bound del nodo padre P^3.

Al termine del terzo branching nessun ulteriore sottoproblema è attivo e quindi il problema è risolto e la soluzione ottima è la soluzione $x^{Best} = (3, 1)$ di valore 7 corrispondente a z^{Best}.

Capitolo 12

Risoluzione di problemi con Excel

I fogli elettronici, quali ad esempio Microsoft Excel, sono uno strumento di lavoro molto diffuso e si prestano in modo naturale alla rappresentazione dei problemi di PL e PLI. Infatti, molti modelli per foglio elettronico hanno una struttura simile a quella dei modelli matematici, consentendo di implementare la trasformazione di valori di input $(x_1, \ldots, x_n)$ in valori di output (y) mediante l'applicazione di funzioni matematiche $y = f(x_1, \ldots, x_n)$. Inoltre in molti casi sono disponibili delle funzioni aggiuntive che consentono la risoluzione di tali problemi mediante implementazioni dell'algoritmo del simplesso e dell'algoritmo Branch and Bound descritti nei capitoli precedenti. Nel seguito illustreremo brevemente come utilizzare il risolutore di PL/PLI disponibile in Microsoft Excel, facendo principalmente riferimento alla versione per Windows. Maggiori dettagli su tale risolutore, realizzato da Frontline Systems, sono disponibili online tra le risorse di Microsoft Excel (si veda, ad esempio, `https://appsource.microsoft.com/it-it/product/office/wa104100404?tab=overview`).

Il risolutore è un componente aggiuntivo che non è necessariamente attivo in Excel. Per attivarlo è sufficiente selezionare i componenti aggiuntivi di Excel (disponibili nel menu File > Opzioni) ed attivare la casella per il Componente aggiuntivo Risolutore. Dopo l'attivazione nel menu Dati comparirà il pulsante Risolutore che permette di accedere alla finestra di definizione del problema di ottimizzazione di cui discuteremo in seguito.

Al fine di illustrare in via intuitiva in cosa consista l'analisi di sensitività per un problema PL consideriamo il problema della produzione di vasche per idromassaggio descritto nel paragrafo 4.1.2. Il modello matematico del problema è:

$$
\begin{array}{rrrcl}
\max\ z = & 350\ x_1 & +\ 300\ x_2 & & \\
& x_1 & +\quad x_2 & \leq & 200 \\
& 9\ x_1 & +\quad 6\ x_2 & \leq & 1566 \\
& 12\ x_1 & +\quad 16\ x_2 & \leq & 2880 \\
& x_1, & x_2 & \geq & 0.
\end{array}
$$

Per implementare un modello PL/PLI sul foglio Excel è necessario seguire alcuni passi preliminari. In particolare, come illustrato in Figura 12.1:

1. Inserire i dati del problema in apposite celle del foglio, una per ogni singolo dato:

   - coefficienti della funzione obiettivo ($c_i, i = 1, \ldots, n$);
   - termini noti dei vincoli ($b_j, j = 1, \ldots, m$);
   - coefficienti dei vincoli ($a_{i,j}, i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m$).

2. Riservare un insieme appropriato di celle per contenere i valori delle variabili decisionali ($x_i, i = 1, \ldots, n$).

3. Inserire in una apposita cella la funzione che permette di calcolare il valore della funzione obiettivo a partire dai coefficienti di costo e dai valori delle variabili decisionali ($z = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$).

4. Per ogni vincolo inserire in una apposita cella la funzione che permette di calcolare il valore primo membro del vincolo a partire dai relativi coefficienti e dai valori delle variabili decisionali ($l_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} x_i, j = 1, \ldots, m$).

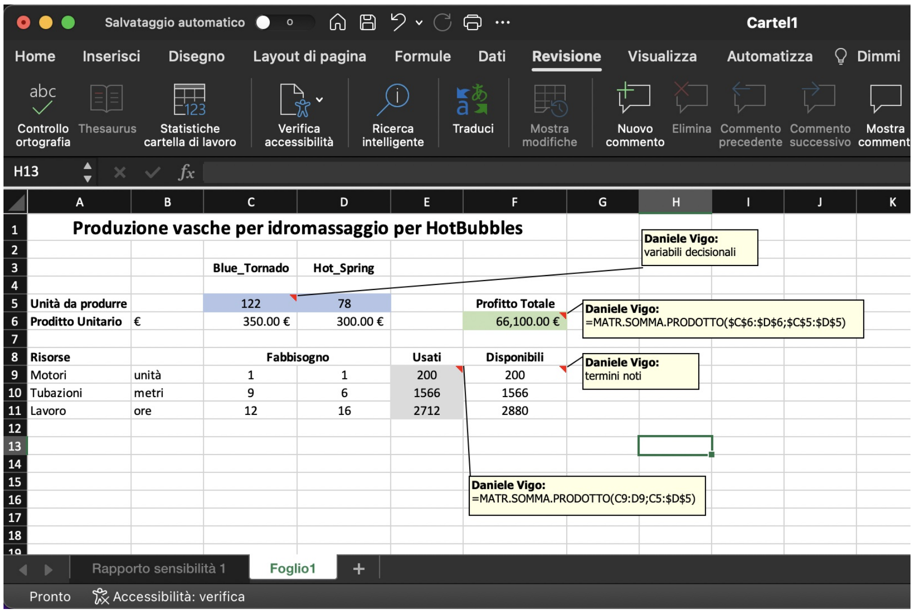


Figura 12.1: Impostazione su Excel del modello PL di produzione delle vasche per idromassaggio.

Si noti che per l'inserimento della funzione obiettivo e dei vincoli è opportuno servirsi della funzione Excel MATR.SOMMAPRODOTTO() che restituisce la somma dei prodotti di elementi corrispondenti di due insiemi di celle. Si ricordi inoltre l'utilità del simbolo $ per bloccare in un range di valori uno o più indici quando una formula viene copiata in celle diverse. Infine è possibile indicare in celle opportune delle didascalie che specificano le varie componenti del modello ed il significato di variabili e vincoli. Tali didascalie hanno lo scopo di aumentare la leggibilità del modello ed in alcuni casi sono utilizzati automaticamente dal risolutore nella produzione dei report.

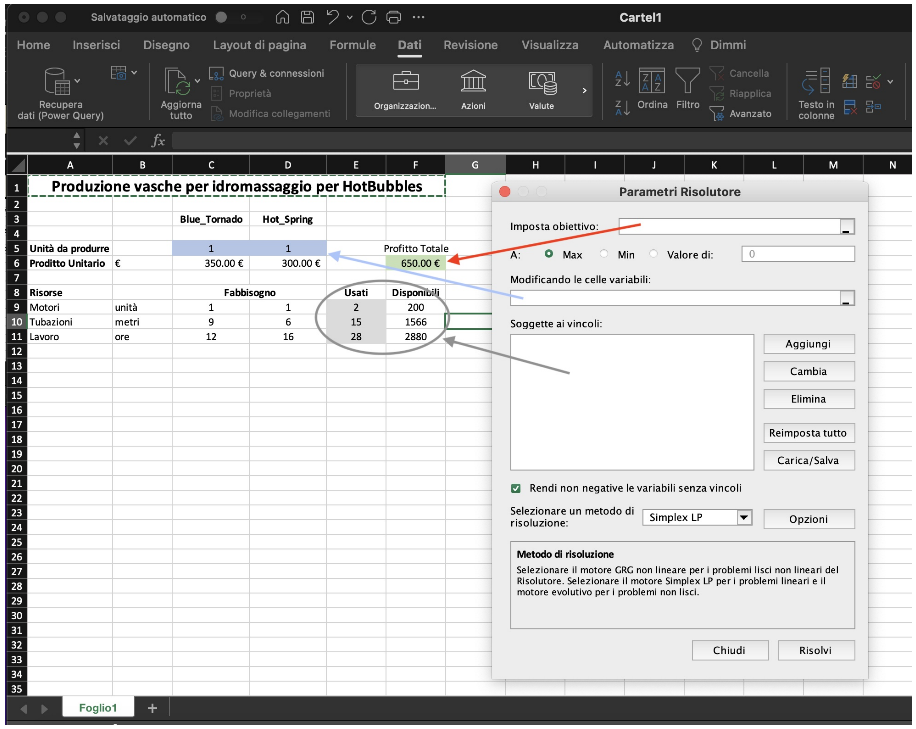
Una volta predisposto il foglio con i dati, le variabili e le funzioni è possibile accedere alla finestra di configurazione del modello disponibile nel menu Dati premendo il tasto Risolutore. Compare a questo punto la finestra illustrata in Figura 12.2 in cui è possibile definire:

- L'indirizzo della cella che contiene la formula che calcola il valore della funzione obiettivo (Cella Obiettivo).

- Il tipo di ottimizzazione desiderata (max o min).

- Gli indirizzi delle celle che contengono le variabili decisionali (XXXX).

- La definizione dei vincoli e dei tipi di variabili del problema (YYYY).



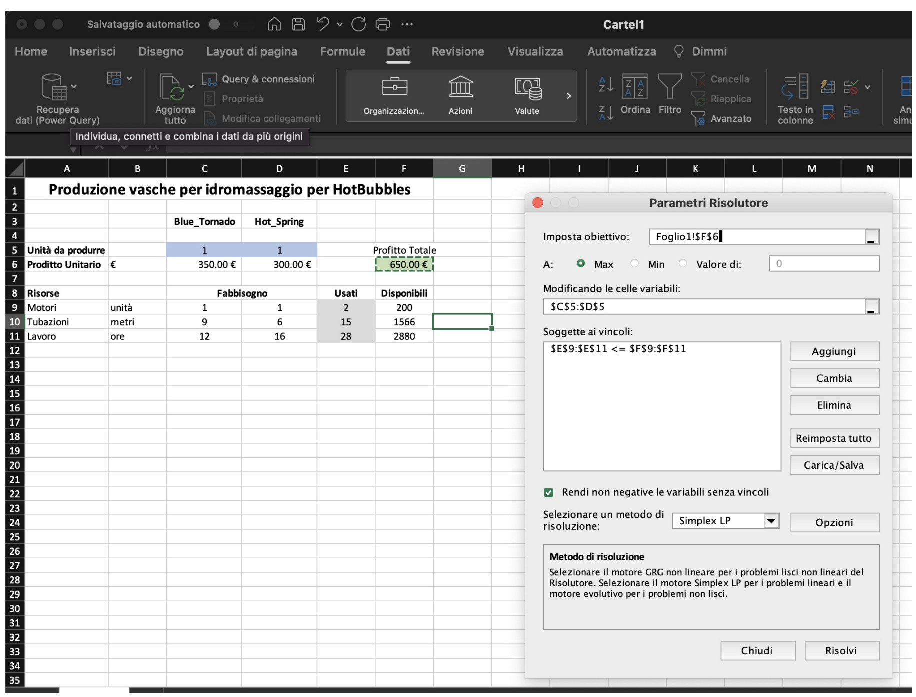


Figura 12.2: Finestra di impostazione delle componenti del del modello PL/PLI (da rifare in italiano)

La definizione dei vincoli e delle variabili avviene attraverso un'apposita ulteriore finestra in cui per ogni vincolo è necessario inserire:

- L'indirizzo della cella che contiene la formula che calcola il valore del primo membro del vincolo.
- Il tipo di vincolo (<=, = o >=).
- L'indirizzo della cella che contiene il valore del termine noto del vincolo.

Si noti che vincoli dello stesso tipo possono essere inseriti assieme specificando i range opportuni dei primi membri e dei termini noti di tali vincoli.

La stessa finestra permette inoltre di definire il tipo di variabili del problema. In tal caso nella prima tendina è possibile impostare il range delle variabili interessate e nella seconda è possibile specificare se si tratti di variabili intere (int), binarie (bin) o libere in segno (free). Si noti che non è necessario inserire esplicitamente i vincoli di non negatività delle variabili dato che è possibile attivare la spunta alla casella "Assumere tutte le variabili non negative".

L'ultima impostazione necessaria è la scelta del risolutore da utilizzare e nel nostro caso questo è costituito da "Simplex LP".

Una volta terminata l'impostazione del problema è possibile richiederne la risoluzione premendo il pulsante Risolvi. Se la terminazione dell'algoritmo è positiva compare una finestra (illustratain Figura 12.3) che segnala il buon fine della risoluzione e chiede se depositare nelle celle delle variabili i valori ottimi determinati. In caso il problema sia impossibile, illimitato o la convergenza dell'algoritmo non sia verificata per problemi di instabilità numerica tali condizioni vengono segnalate in apposite finestre che permettono di individuare l'esito della risoluzione.

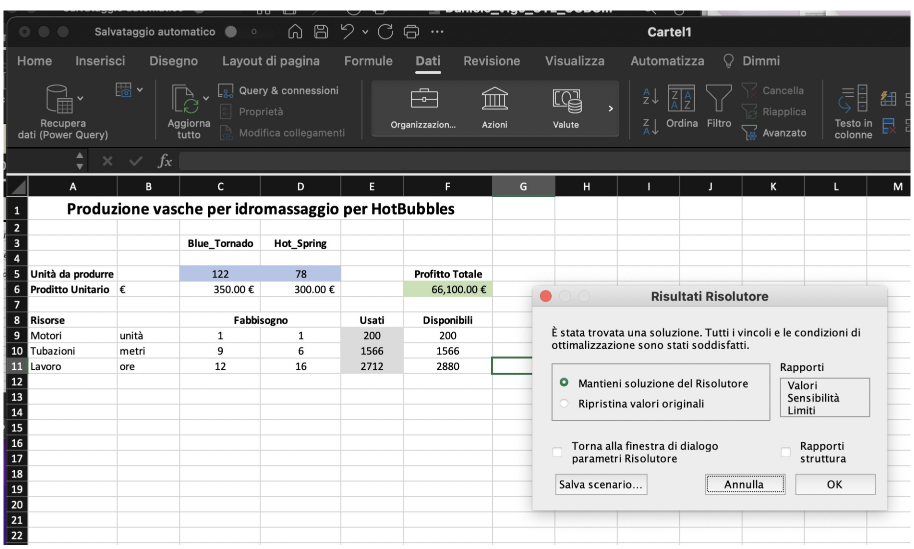
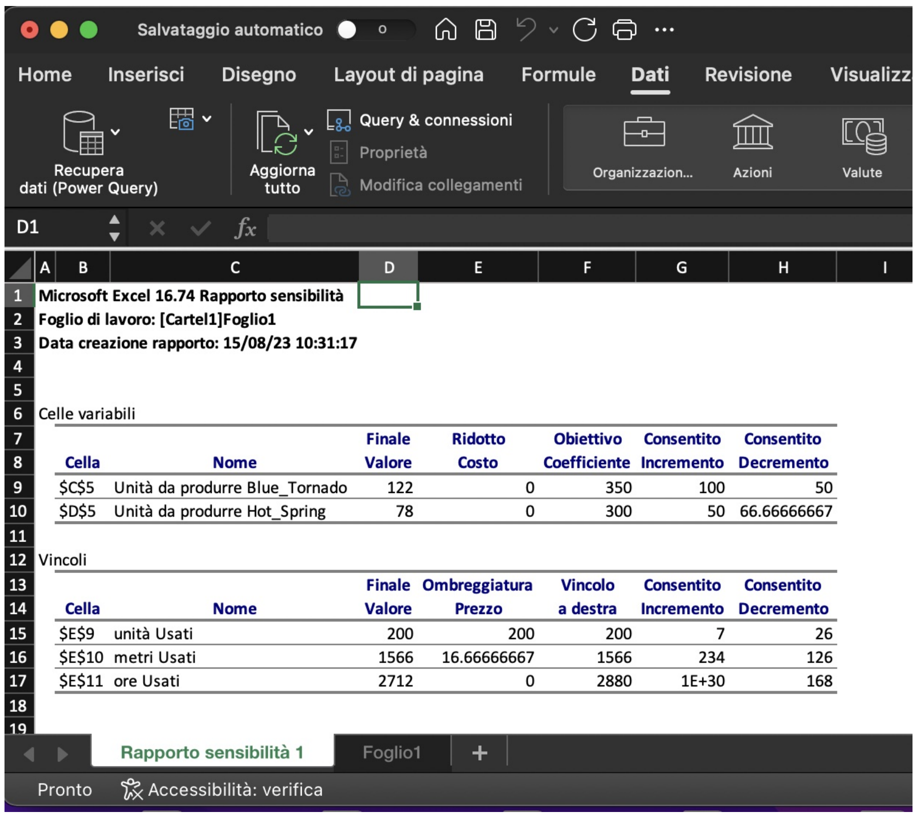


Figura 12.3: Esito positivo della soluzione di un problema PL/PLI.

Nella finestra che comunica l'esito della risoluzione è possibile richiedere la produzione del "Report Sensitività' che attiva la costruzione automatica di un foglio che riporta l'analisi di sensitività per i coefficienti della funzione obiettivo e dei termini noti dei vincoli del problema. Si noti che le traduzioni italiane di alcune componenti sono approssimative o scorrette. L'esito dell'analisi di sensitività del modello è illustrato nella Figura 12.4.



Microsoft Excel 16.74 Rapporto sensibilità
Foglio di lavoro: [Cartel1]Foglio1
Data creazione rapporto: 15/08/23 10:31:17

Celle variabili

Cella	Nome	Finale Valore	Ridotto Costo	Obiettivo Coefficiente	Consentito Incremento	Consentito Decremento
C5	Unità da produrre Blue_Tornado	122	0	350	100	50
D5	Unità da produrre Hot_Spring	78	0	300	50	66.66666667

Vincoli

Cella	Nome	Finale Valore	Ombreggiatura Prezzo	Vincolo a destra	Consentito Incremento	Consentito Decremento
E9	unità Usati	200	200	200	7	26
E10	metri Usati	1566	16.66666667	1566	234	126
E11	ore Usati	2712	0	2880	1E+30	168

Figura 12.4: Report di sensitività per un modello PL.

Aggiungere spigazione delle opzioni

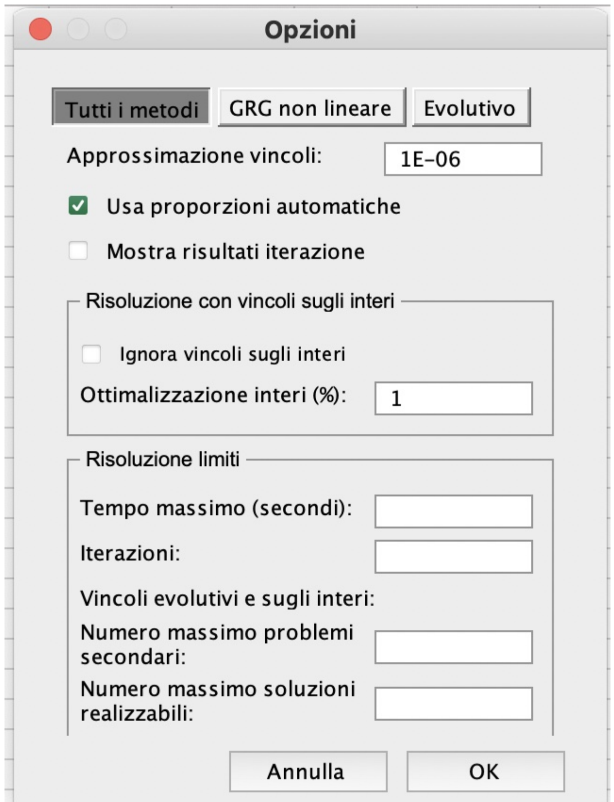


Figura 12.5: Opzioni del solver Excel per un modello PL.