ESERCIZI DI MDP PER IL 20 OTTOBRE 2021

(1) Quante sono le partizioni dell'insieme $\{1, 2, 3, 4\}$?
(2) Quante sono le partizioni dell'insieme $\{1, 2, 3, 4, 5\}$?
(3) Quante sono le partizioni di $\{1, 2, \ldots, 10\}$ in quattro blocchi in cui i blocchi non sono costituiti unicamente da un numero pari?
(4) Mostrare che, per ogni $n \geq 2$, il numero di partizioni di $\{1, 2, \ldots, n\}$ in $n - 1$ blocchi è $\binom{n}{2}$.
(5) Mostrare che per ogni $n \geq 2$ il numero di partizioni di $\{1, 2, \ldots, n\}$ in 2 blocchi è $2^{n-1} - 1$.
(6) Quante sono le partizioni di $\{1, 2, \ldots, 10\}$ in cui ogni blocco contiene almeno un numero pari e un numero dispari?
(7) Quante sono le partizioni di $\{1, 2, \ldots, 10\}$ in cui ogni blocco ha solo numeri pari o solo numeri dispari?
(8) Quante sono le partizioni di $\{1, 2, \ldots, 10\}$ in cui almeno un blocco è costituito da un solo numero pari?
(9) Stabilire in quanti modi 10 persone possono essere suddivise in 3 gruppi (non vuoti).
(10) (difficile) Sia $R_{n,k}$ il numero di partizioni di $\{1, \ldots, n\}$ in k blocchi in cui ogni blocco contiene almeno due elementi. Mostrare che

$$R_{n,k} = (n - 1)R_{n-2,k-1} + kR_{n-1,k}$$

per ogni $n > 1$ dove poniamo per convenzione $R_{0,0} = 1$ e $R_{0,k} = 0$ se $k > 0$.

Cenni si soluzioni.

(1) Abbiamo $B_0 = B_1 = 1$, $B_2 = 2$, $B_3 = 5$ giá calcolati in aula. Per calcolare B_4 usiamo la formula ricorsiva

$$B_4 = B_3 + 3B_2 + 3B_1 + B_0 = 5 + 6 + 3 + 1 = 15.$$

(2) Proseguendo dall'esercizio precedente abbiamo

$$B_5 = B_4 + 4B_3 + 6B_2 + 4B_1 + B_0 = 15 + 20 + 12 + 4 + 1 = 52.$$

In entrambi i casi potremmo anche utilizzare il triangolo di Bell che riportiamo in figura e che abbiamo visto a lezione

$$\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 2 \\
2 \quad 3 \quad 5 \\
5 \quad 7 \quad 10 \quad 15 \\
15 \quad 20 \quad 27 \quad 37 \quad 52 \\
52 \quad 67 \quad 87 \quad 114 \quad 151 \quad 203 \\
203 \quad 255 \quad 322 \quad 409 \quad 523 \quad 674 \quad 877 \\
877 \quad 1080 \quad 1335 \quad 1657 \quad 2066 \quad 2589 \quad 3263 \quad 4140
\end{array}$$

Riportiamo anche il "triangolo di Stirling" costruito utilizzando la formula ricorsiva

$$S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + kS_{n-1,k}$$

e che sarà utile nei prossimi esercizi.

$$\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 7 \quad 6 \quad 1 \\
1 \quad 15 \quad 25 \quad 10 \quad 1 \\
1 \quad 31 \quad 90 \quad 65 \quad 15 \quad 1 \\
1 \quad 63 \quad 301 \quad 350 \\
1 \quad 127 \quad 966 \quad 1701 \\
1 \quad 255 \quad 3025 \quad 7770 \\
1 \quad 511 \quad 9330 \quad 34105
\end{array}$$

(3) Prendiamo come insieme universo U tutte le partizioni di $\{1, 2, \dots, 10\}$ in 4 blocchi per cui $|U| = S_{4,10} = 34105$Chiamiamo A_2 le partizioni in quattro blocchi che hanno un blocco formato dal solo numero 2 e similmente definiamo A_4, A_6, A_8, A_{10}. L'insieme considerato é il complementare di $A_2 \cup A_4 \cup A_6 \cup A_8 \cup A_{10}$ Abbiamo $|A_2| = S_{9,3} = 3025$ e similmente gli altri (un blocco é formato dal solo 2 e gli altri numeri devono essere partizionati in 3 blocchi.
Abbiamo $|A_2 \cap A_4| = S_{8,2} = 127$.
Abbiamo $|A_2 \cap A_4 \cap A_6| = 1$ Usando il principio di inclusione esclusione abbiamo quindi

$$|(A_2 \cup A_4 \cup \cdots \cup A_{10})^C| = 34105 - 5 \cdots 3025 + 10 \cdot 127 - 10 \cdot 1 = 20240.$$

(4) L'unico modo per partizionare n elementi in $n - 1$ blocchi e quello di fare un blocco da 2 e tutti gli altri da 1. Questo corrisponde quindi a scegliere i due elementi nel blocco da 2 tra gli n disponibili e quindi abbiamo proprio $\binom{n}{2}$.

(5) Per formare due blocchi possiamo procedere come segue: consideriamo il blocco che contiene n: oltre ad n puó contenere un qualunque sottoinsieme di $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ tranne tutto l'insieme perché in questo caso l'altro blocco rimarrebbe vuoto e questo non é accettabile. Abbiamo quindi $2^{n-1} - 1$ scelte.

(6) Se ho una partizione di questo tipo in k blocchi eliminando i numeri pari ottengo una partizione dei dispari in k blocchi e viceversa. Possiamo quindi ottenere una partizione di questo tipo considerando una partizione dei numeri pari e una dei numeri dispari nello stesso numero di blocchi, per poi combinarle in tutti i modi possibili. Abbiamo quindi

$$S_{5,1}^2 \cdot 1! + S_{5,2}^2 \cdot 2! + S_{5,3}^2 \cdot 3! + S_{5,4}^2 \cdot 4! + S_{5,5}^2 \cdot 5!$$
$$= 1 + 15^2 \cdot 2 + 25^2 \cdot 6 + 10^2 \cdot 24 + 1^2 \cdot 120 = 6721.$$

(7) Ogni partizione di questo tipo si ottiene partizionando i pari e separatamente i dispari per cui otteniamo esattamente

$$B_5^2 = 52^2 = 2704$$

(8) Questo è simile al precedente esercizio (4): qui chiamiamo A_2 le partizioni che hanno un blocco formato dal solo numero 2 e similmente definiamo A_4, A_6, A_8, A_{10}. L'insieme considerato è $A_2 \cup A_4 \cup A_6 \cup A_8 \cup A_{10}$ Abbiamo $|A_2| = B_9 = 21147$ e similmente gli altri (un blocco é formato dal solo 2 e gli altri numeri devono essere partizionati.
Abbiamo $|A_2 \cap A_4| = B_8 = 4140$.
Abbiamo $|A_2 \cap A_4 \cap A_6| = B_7 = 877$
Abbiamo $|A_2 \cap A_4 \cap A_6 \cap A_8| = B_6 = 203$
Abbiamo $|A_2 \cap A_4 \cap A_6 \cap A_8 \cap A_{10}| = B_5 = 52$. Usando il principio di inclusione esclusione abbiamo quindi per il principaio di inclusione-esclusione

$$|(A_2 \cup A_4 \cup \cdots \cup A_{10})| = 5 \cdot 21147 - 10 \cdot 4140 + 10 \cdot 877 - 5 \cdot 203 + 1 \cdot 52 = 72142.$$

(9) Questo è semplicemente $S_{10,3} = 9330$.

(10) In questo esercizio contiamo queste partizioni dividendole in due casi
1 caso: n sta in un blocco con esattamente 2 elementi. In questo caso abbiamo $n-1$ modi di scegliere il "compagno" di n e poi gli altri $n-2$ elementi li dobbiamo partizionare in $k-1$ blocchi con la stessa proprietà: abbiamo in questo caso $(n-1)R_{n-2,k-1}$ possibili scelte.
2 caso: n sta in un blocco con almeno 3 elementi. In questo caso possiamo provedere scegliendo prima un partizione di questo tipo su $n-1$ elementi e poi scegliere uno dei k blocchi per aggiungergli n. Totale $R_{n-1,k}k$.