Prove scritte di MDP dal 2017

Contents

PROVA SCRITTA DI MDP, 16/01/2017

Esercizio 1 Tre palline rosse e tre blu vengono partizionate in modo casuale in tre urne in modo che nessuna urna rimanga vuota. Scegliamo una urna a caso ed estraiamo una pallina da quest'urna.

a. Verificare che il numero di Stirling $S_{6,3} = 90$.
b. Descrivere uno spazio di probabilitá che modellizza il fenomeno aleatorio. Quanti sono i risultati possibili?
c. Qual é la probabilitá che l'urna scelta contenga una sola pallina?
d. (*) Qual é la probabilitá che l'urna prescelta contenga un'altra pallina dello stesso colore di quella estratta?
e. Siano X e Y il numero di palline rosse e blu rispettivamente contenute nell'urna prescelta. Qual é la densitá di X?
f. Determinare $E[X]$.
g. Stabilire se X e Y sono indipendenti.

Soluzione.

a. Si ha $S_{6,3} = S_{5,2} + 3S_{5,3}$, $S_{5,3} = S_{4,2} + 3S_{4,3} = S_{4,2} + 3 \cdot 6$, $S_{4,2} = S_{3,1} + 2S_{3,2} = 1 + 2 \cdot 3 = 7$ e sostituendo otteniamo $S_{6,3} = 90$.
b. Per quanto riguarda solo il fenomeno della partizione possiamo scegliere Ω come l'insieme delle partizioni delle 6 palline in 3 parti (e quindi $|\Omega| = 90$). Volendo considerare anche l'estrazione della pallina abbiamo bisogno di prendere Ω come l'insieme delle coppie (S, b) dove S èuna partizione come sopra e b è una pallina. La probabilità del risultato (A, b) è dato da $\frac{1}{90 \cdot 3 \cdot k}$ dove k è la cardinalità della parte di S che contiene la pallina b.
c. Sia A l'evento costituito dalle partizioni con sottoinsiemi di cardinalità 4,1,1, B di cardinalità $3, 2, 1$ e C di cardinalità 2,2,2. Abbiamo

$$|A| = \binom{6}{4} = 15, \ |B| = \binom{6}{3}\binom{3}{2} = 60, \ |C| = \binom{6}{2}\binom{4}{2}\frac{1}{6} = 15.$$

Detto E l'evento "scelta di un'urna con una pallina sola" abbiamo

$$P(E) = P(A)P(E|A) + P(B)P(E|B) + P(C)P(E|C) = \frac{15}{90}\frac{2}{3} + \frac{60}{90}\frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{3}.$$

d. (*) Calcoliamo la probabilità di estrarre una rossa da un'urna che contiene almeno due rosse. Quest'urna potrà essere dei seguenti tipi:
– A_1: "l'urna scelta ha 2 rosse e 0 blu"
– A_2: "l'urna scelta ha 2 rosse e 1 blu"
– A_3: "l'urna scelta ha 2 rosse e 2 blu"
– A_4: "l'urna scelta ha 3 rosse e 0 blu"
– A_5: "l'urna scelta ha 3 rosse e 1 blu"

Detto RR l'evento "estrazione di una pallina rossa da un'urna che ne contiene almeno due" abbiamo

$$\begin{aligned}
P(RR) &= P(A_1)P(RR|A_1) + P(A_2)P(RR|A_2) + P(A_3)P(RR|A_3) + P(A_4)P(RR|A_4) + P(A_5)P(RR|A_5) \\
&= \frac{1}{3}\Big(\frac{\binom{3}{2}S_{4,2}}{90} \cdot 1 + \frac{\binom{3}{2}\binom{3}{1}S_{3,2}}{90} \cdot \frac{2}{3} + \frac{\binom{3}{2}\binom{3}{2}S_{2,2}}{90} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\binom{3}{3}S_{3,2}}{90} \cdot 1 + \frac{\binom{3}{3}\binom{3}{1}S_{2,2}}{90} \cdot \frac{3}{4}\Big) \\
&= \frac{1}{270}(21 + 18 + 4.5 + 3 + 2.25) \\
&= \frac{48.75}{270} \\
&= 0,18
\end{aligned}$$

per cui la probabilità richiesta è 36%.

e. f. Ci aspettiamo che le 3 urne contengano mediamente lo stesso numero di palline rosse. E siccome il numero totale di palline rosse è 3 abbiamo che il valore atteso di palline rosse in un'urna è 1 e quindi $E[X] = 1$. Calcoliamo ora la densità:

$$P(X = 3) = P(A_4) + P(A_5) = \frac{2}{90}$$

e

$$P(X = 2) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = \frac{19}{90}.$$

Ora $P(X = 1)$ lo possiamo anche calcolare ricordando che $E[X] = 1$ per cui

$$1 = P(X = 1) + 2\frac{19}{90} + 3\frac{2}{90}$$

da cui

$$P(X = 1) = \frac{49}{90}$$

e infine

$$P(X = 0) = 1 - \frac{46}{90} - \frac{19}{90} - \frac{2}{90} = \frac{23}{90}.$$

g. Le variabili X e Y sono dipendenti in quanto, ad esempio,

$$0 = P(X = 0, Y = 0) \neq P(X = 0)P(Y = 0).$$

Esercizio 2 Consideriamo due variabili aleatorie X e Y indipendenti e definite sullo stesso spazio di probabilitá. X é esponenziale di media 1, Y é continua uniforme di media 1.

a. Scrivere la densitá e la funzione di ripartizione di X.
b. Determinare la densitá di Y sapendo che $P(X > 1, Y < 2) = \frac{1}{5}$.
c. Determinare la densitá di $\max(X, Y)$.

Soluzione

a. Si ha

$$f_X(s) = \begin{cases} e^{-s} & s > 0 \\ 0 & s < 0 \end{cases}$$

e

$$F_X(t) = \begin{cases} 1 - e^{-t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

b. Abbiamo

$$P(X > 1)P(Y < 2) = \frac{1}{5}$$

da cui $P(Y < 2) = \frac{e}{5} \sim 0.544$. Sia $Y \sim U([a, b])$. Abbiamo $a + b = 2$ dal dato sulla media. La funzione di ripartizione di Y è data da $F_Y(t) = \frac{t-a}{b-a}$ se $t \in [a, b]$ e quindi $\frac{e}{5} = F_Y(2) = \frac{2-a}{b-a}$. Sostituendo $b = 2 - a$ e risolvendo otteniamo

$$a = \frac{2e - 10}{2e - 5} \sim -10.45$$

e quindi $b = \frac{2e}{2e-5} \sim 12.45$.

c. La funzione di ripartizione del massimo di due variabili indipendenti è data dal prodotto delle rispettive funzioni di ripartizione. Per cui otteniamo

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ (1 - e^{-t})\frac{t-a}{b-a} & 0 \leq t \leq b \\ (1 - e^{-t}) & t \geq b \end{cases}$$

La densità si ottiene derivando la funzione di ripartizione per cui abbiamo

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ e^{-t}\frac{t-a}{b-a} + (1 - e^{-t})\frac{1}{b-a} & 0 \leq t \leq b \\ e^{-t} & t \geq b \end{cases}$$

Esercizio 3 Un corridore si allena effettuando 10 giri di 400 metri registrando i seguenti tempi (espressi in secondi): 120, 124, 110, 130, 128, 130, 108, 126, 112, 114.

a. Determinare le velocitá ottenute nei 10 giri (espresse in m/s e in min/km).
b. Determinare la velocitá media complessiva (espressa in m/s e in min/km).
c. Determinare la varianza delle velocitá (espresse in min/km).
d. Determinare l'intervallo di confidenza al 95% per il valore atteso della velocitá in un giro di campo di allenamento di questo corridore (espressa in min/km).

Soluzione.

a. Le velocità in m/s sono $\frac{400}{120}, \frac{400}{124}, \frac{400}{110}, \frac{400}{130}, \frac{400}{128}, \frac{400}{130}, \frac{400}{108}, \frac{400}{126}, \frac{400}{112}, \frac{400}{114}$.
Le velocità in min/km sono date da $\frac{t}{400}\frac{1000}{60} = \frac{t}{24}$ per cui sono $\frac{120}{24}, \frac{124}{24}, \frac{110}{24}, \frac{130}{24}, \frac{128}{24}, \frac{130}{24}, \frac{108}{24}, \frac{126}{24}, \frac{112}{24}, \frac{114}{24}$.

b. Per ottenere la velocità media in m/s bisogna fare la media armonica delle singole velocitá. Per ottenere quella in min/km basta farne la media campionaria. Oppure semplicemente considerare tempo totale (1202 secondi) e spazio totale (4000 metri), per cui la velocità media complessiva è $4000/1202 = 3.328 m/s$ e $\frac{1202}{60 \cdot 4} = 5.008 min/km$.

c. Calcoliamo la media (campionaria) dei quadrati delle velocià espresse in min/km. Otteniamo

$$\frac{1}{10}(\frac{120^2 + 124^2 + 110^2 + 130^2 + 128^2 + 130^2 + 108^2 + 126^2 + 112^2 + 114^2}{24^2} = 25.20.$$

per cui la varianza è $\sigma^2 = 25.20 - (5.008)^2 = 0.12\, min^2/km^2$.

d. La semiampiezza dell'intervallo di confidenza è

$$1.96\frac{\sigma}{\sqrt{10}} = 1.96\frac{0.35}{\sqrt{10}} = 0.22$$

per cui l'intervallo di confidenza è

$$[4.79, 5.23]$$

intervallo piuttosto ampio date le piccole dimensioni del campione.

PROVA SCRITTA DI MDP, 31/01/2017

Esercizio 1 (12 punti) La spesa di un cliente casuale di un bar è una variabile esponenziale di media 5 Euro. Ogni 6 Euro di spesa un cliente del bar riceve un biglietto di una lotteria che risulta vincente con probabilità 0.30. (Tutte le probabilità vanno approssimate alla seconda cifra decimale).

a. Determinare la probabilità che il cliente spenda più di 10 Euro.
b. Determinare il valore atteso per il numero di biglietti ricevuti da un cliente casuale.
c. Determinare la probabilità che un cliente riceva esattamente un biglietto vincente.
d. Verificare che se A, B, C sono tre eventi in uno spazio di probabilità allora $P(A \cap B|C) = P(A|B \cap C)P(B|C)$.
e. Calcolare la probabilità che il cliente abbia speso meno di 15 euro sapendo che ha trovato esattamente un biglietto vincente.

Soluzione.

a. Detta X la spesa del cliente casuale si ha $X \sim Exp(1/5)$ e quindi

$$P(X > 10) = e^{-\frac{10}{5}} = 0.14.$$

b. Sia Y la vairiabile "numero di biglietti ricevuti". Abbiamo

$$P(Y = k) = P(6k < X < 6k + 6)$$

per ogni $k \geq 0$. Per cui $P(Y = 0) = P(0 < X < 6) = 1 - e^{-6/5} = 0.70$ e similmente $P(Y = 1) = e^{-6/5} - e^{-12/5} = 0.21$, $P(Y = 2) = 0.06$, $P(Y = 3) = 0.02$, $P(Y = 4) = 0.01$ e $P(Y = k) = 0$ per ogni $k > 4$. Abbiamo quindi

$$E[Y] = 1 \cdot 0.21 + 2 \cdot 0.06 + 3 \cdot 0.02 + 4 \cdot 0.01 = 0.43.$$

c. Sia Z la variabile "numero di biglietti vincenti ricevuti". Abbiamo, usando la formula delle probabilità totale

$$\begin{aligned} P(Z = 1) = {} & P(Z = 1|Y = 1)P(Y = 1) + P(Z = 1|Y = 2)P(Y = 2) \\ & + P(Z = 1|Y = 3)P(Y = 3) + P(Z = 1|Y = 4)P(Y = 4) \\ = {} & 0.30 \cdot 0.21 + 2 \cdot 0.30 \cdot 0.70 \cdot 0.06 + 3 \cdot 0.30 \cdot 0.70^2 \cdot 0.02 + 4 \cdot 0.30 \cdot 0.70^3 \cdot 0.01 \\ = {} & 0.10 \end{aligned}$$

d. Si ha

$$\begin{aligned} P(A \cap B|C) &= \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(C)} \\ &= \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap C)} \frac{P(B \cap C)}{P(C)} \\ &= P(A|B \cap C)P(B|C). \end{aligned}$$

e. Abbiamo

$$\begin{aligned}
P(X<15|Z=1) &= P(6<X<12|Z=1)+P(12<X<15|Z=1)\\
&= P(Z=1|6<X<12)\frac{P(6<X<12)}{P(Z=1)}+P(Z=1|12<X<15)\frac{P(12<X<15)}{P(Z=1)}\\
&= 0.30\frac{e^{-6/5}-e^{-12/5}}{0.10}+2\cdot 0.30\cdot 0.70\frac{e^{-12/5}-e^{-15/5}}{0.10}\\
&= 0.80.
\end{aligned}$$

Esercizio 2 (10 punti) Sia

$$f(s) = \begin{cases} as(s-20) & \text{se } 0 \le s \le 20 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

una funzione dipendente da un parametro reale a.

a. Mostrare che esiste un unico valore a per cui $f(s)$ è la densità di una variabile aleatoria continua X.
b. Determinare il valore atteso $E[X]$.
c. Stabilire se $P(X > 5|X > 4) = P(X > 1)$.

Soluzione

a. Si ha $f(s) \ge 0$ per ogni $s \in \mathbb{R}$ se e solo se $a \le 0$. Inoltre calcoliamo l'integrale su tutto $\mathbb{R}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\,ds = \int_0^{20} as(s-20)\,ds = -\frac{4000}{3}a$$

da cui, per essere 1, otteniamo $a = -\frac{3}{4000}$ che essendo < 0 è accettabile.

b. Osserviamo che il grafico di $f(s)$ è una parabola che si annulla in 0 e 20 ed è quindi simmetrica rispetto all'asse $s = 10$. Deduciamo che $E[X] = 10$. Altrimenti possiamo calcolare

$$E[X] = -\frac{3}{4000}\int_0^{20}(s^3 - 20s^2)ds = -\frac{3}{4000}\left[\frac{s^4}{4} - \frac{20s^3}{3}\right]_0^{20} = 10.$$

c. Abbiamo

$$\begin{aligned} P(X > 5|X > 4) &= \frac{P(X>5)}{P(X>4)} = \frac{-\frac{3}{4000}\int_5^{20}(s^2-20s)\,ds}{-\frac{3}{4000}\int_4^{20}(s^2-20s)\,ds} \\ &= \frac{[s^3/3 - 10s^2]_5^{20}}{[s^3/3 - 10s^2]_4^{20}} \\ &= \frac{3375}{3584} = 0.95. \end{aligned}$$

Invece

$$\begin{aligned} P(X > 1) &= 1 - (-3/4000))\int_0^1 (s^2 - 20s)\,ds \\ &= 1 + \frac{3}{4000}(-29/3) \\ &= \frac{3971}{4000} \\ &= 0.99 \end{aligned}$$

per cui le due probabilità sono diverse.

Esercizio 3 (10 punti) Consideriamo 80 variabili aleatorie indipendenti $X_1, \dots, X_{80}$ uniformi nell'insieme $\{1, 2, 3\}$.

a. Determinare $P(X_1 + \cdots + X_{80} > 122)$.

b. Determinare $P(X_1 - X_2 + X_3 - X_4 \cdots + X_{79} - X_{80} > 3)$.

c. Determinare $P(X_1 + 2X_2 + X_3 + 2X_4 + \cdots + X_{79} + 2X_{80} > 200)$.

Soluzione. a. Le X_i hanno valore atteso $E[X_i] = \frac{1}{3}1 + \frac{1}{3}2 + \frac{1}{3}3 = 2$ per ogni i. Inoltre

$$E[X_i^2] = \frac{1}{3}1 + \frac{1}{3}4 + \frac{1}{3}9 = \frac{14}{3}$$

da cui $\mathrm{Var}(X_i) = \frac{2}{3}$ per ogni i. La variabile $X = X_1 + \cdots + X_{80}$ per il teorema limite centrale è

$$X \sim N(160, \frac{160}{30})$$

per cui

$$P(X > 122) = P\Big(\zeta_0 > \frac{122 - 160}{\sqrt{160/3}}\Big) = P(\zeta_0 > -5.20) = 1$$

b. Poniamo $Y_1 = X_1 - X_2$, $Y_2 = X_3 - X_4$ e così via. Abbiamo $E[Y_1] = 0$ e $\mathrm{Var}(Y_1) = \mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(X_2) = \frac{4}{3}$. Per il teorema limite centrale $Y = Y_1 + \cdots Y_{40}$ soddisfa $Y \sim N(0, \frac{160}{3}$ per cui

$$P(Y > 3) = P\Big(\zeta_0 > \frac{3 - 0}{\sqrt{160/3}}\Big) = P(\zeta_0 > 0.41) = 0.34.$$

c. Poniamo ora $Z_1 = X_1 + 2X_2$, $Z_2 = X_3 + 2X_4$,...Abbiamo $E[Z_1] = 6$ e $\mathrm{Var}(Z_1) = 1\,\mathrm{Var}(X_1) + 4\,\mathrm{Var}(X_2) = \frac{10}{3}$ per cui $Z = Z_1 + \cdots + Z_{40} \sim N(240, \frac{400}{3})$ e quindi

$$P(Z > 200) = P\Big(\zeta_0 > \frac{200 - 240}{\sqrt{400/3}}\Big) = P(\zeta_0 > -3.46) = 1.$$

PROVA SCRITTA DI MDP, 15/02/2017

Esercizio 1 (12 punti) Un corridore effettua una corsa ad ostacoli con un tempo ζ normale di media 100 secondi e varianza 4 secondi^2. Questo corridore abbatte ciascuno dei 3 ostacoli con probabilità $\frac{1}{5}$ indipendentemente l'uno dall'altro. Per ogni ostacolo abbattutto subisce una penalità di 2 secondi e denotiamo con T il tempo complessivo tenendo conto delle eventuali penalità.

a. Determinare il valore atteso per T;
b. Determinare la varianza di T;
c. Determinare $P(T < 98)$;
d. Determinare $E[\zeta T]$.

Esercizio 2 (10 punti) Si considerino le seguenti funzioni

$$f_1(s) = \begin{cases} s^2 - \frac{5}{6}s & \text{se } 0 \leq s \leq 2 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad f_2(s) = \begin{cases} -\frac{1}{2}s^2 + \frac{7}{6}s & \text{se } 0 \leq s \leq 2 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad f_3(s) = \begin{cases} 2s - s^2 & \text{se } 0 \leq s \leq 2 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

a. Stabilire quali tra f_1, f_2, f_3 sono densità continue;
b. Scelto un valore di i per cui f_i è una densità, tracciarne il relativo grafico;
c. Sia X una variabile aleatoria tale che X abbia la densità f_i scelta nel punto precedente. Determinare $P(X > 1|X < \frac{3}{2})$.
d. Calcolare la funzione di ripartizione di $2X + 1$.

Esercizio 3 (10 punti) I voti ottenuti negli scritti di MDP negli scorsi due appelli sono riportati nella seguente tabella:

Voto	Frequenza
0–6	15
7–10	10
11–14	15
15–17	10
18–21	16
22–25	15
26-30	8

a. Determinare media e varianza del campione.
b. Disegnare un istogramma relativo a questi dati.
c. Determinare la mediana, la moda e lo scarto interquartile.

PROVA SCRITTA DI MDP, 12/06/2017

Esercizio 1 Un insieme di 7 amici A,B,C,D,E,F,G viene partizionato in 3 gruppi (non vuoti) in modo casuale.

a. Determinare la probabilità che la partizione ottenuta sia $\{\{A,B\}, \{C,D\}, \{E,F,G\}\}$.
b. Determinare la probabilità che A rimanga da solo.
c. Determinare la probabilità che A sia nello stesso gruppo di B.
d. Determinare la probabilità che A sia nello stesso gruppo di B sapendo che non sta da solo;
e. Determinare mediamente da quante persone è composto il gruppo di A.

a. Il numero di partizioni è $S_{7,3} = S_{6,2} + 3S_{6,3} = ... = 301$ e quindi la probabilità richiesta è 1/301;
b. Il numero di partizioni in 3 gruppi in cui A rimane da solo é il numero di partizioni dei rimanenti 6 amici in due soli gruppi, cioè $S_{6,2} = 2^5 - 1 = 31$. Di conseguenza la probabilità che A rimanga da solo è 31/301.
c. In questo caso possiamo pensare ad A e B come se fossero un solo elemento per cui il numero di partizioni in cui A e B stanno nello stesso gruppo è $S_{6,3} = 90$ per cui la probabilità richiesta è 90/301.
d. Sia E l'evento "A è in gruppo con B" e E' l'evento "A non sta da solo" abbiamo

$$P(E|E') = P(E \cap E')/P(E') = \frac{90/301}{270/301} = \frac{1}{3}.$$

e. Abbiamo $P(X=1) = \frac{31}{301}$
$P(X=2) = 6S_{5,2} = \frac{90}{301}$
$P(X=3) = 15S_{4,2} = \frac{105}{301}$
$P(X=4) = 20S_{3,2} = \frac{60}{301}$
$P(X=5) = 15$. Per cui

$$E[X] = \frac{31 + 2\cdot 90 + 3\cdot 105 + 4\cdot 60 + 5\cdot 15}{301} = \frac{841}{301} = 2.79.$$

Esercizio 2 Sia T il tempo di attesa affinché due bambini A e B nati oggi in Romagna si conoscano. Supponiamo che T sia una variabile esponenziale di media 25 anni.

a. Determinare la probabilità che A e B si conoscano prima di compiere 18 anni;
b. Stimare la probabilità che A e B non si conosceranno mai.
c. Detto C un altro bambino nato oggi in Romagna determinare la probabilità che A conoscerà nei prossimi 50 anni almeno uno tra B e C.

a. Si ha $1 - e^{-\frac{18}{25}} = 51.3\%$; b. Per adattare questa variabile al problema concreto assumiamo che non conoscersi mai corrisponda a non conoscersi per 80 anni (tempo di vita medio). Si ha quindi

$$e^{-\frac{80}{25}} = 4\%.$$

c. In questo caso otteniamo

$$2(1 - e^{-2}) - (1 - e^{-2})^2 = 99\%.$$

Esercizio 3 Consideriamo 80 variabili aleatorie indipendenti $X_1, \dots, X_{80}$ aventi tutte densità continua

$$f(s) : \begin{cases} 3s^2 & \text{se } 0 < s < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

a. Determinare media e varianza delle variabili X_i.
b. Determinare $P(X_1 + X_2 + \cdots + X_{80} > 35)$.
c. Determinare $P(\sqrt{X_1} + \sqrt{X_2} + \cdots + \sqrt{X_{80}} > 40)$.

a. $E[X_i] = \int_0^1 s3s^2\,ds = \frac{3}{4}$ e $E[X_i]^2 = \int_0^1 s^2 3s^2\,ds = \frac{3}{5}$ e quindi

$$\mathrm{Var}(X_i) = \frac{3}{5} - \frac{9}{16} = \frac{3}{80}.$$

Per cui

b. $X_1 + X_2 + \cdots + X_{80} \sim N(60, 3)$ e quindi si ha sicuramente $P(X_1 + X_2 + \cdots + X_{80} > 35) = 1$ (avendo media 60 e varianza 3 assumerà valori compresi tra 55 e 65 circa, e di sicuro ben superiori a 35).

c. $E[\sqrt{X_1}] = \int_0^1 \sqrt{s} 3s^2\,ds = \frac{6}{7}$ e quindi

$$\mathrm{Var}(\sqrt{X_1} = E[X_1] - E[\sqrt{X_1}]^2 = \frac{3}{4} - \frac{36}{49}$$

e si conclude analogamente a prima che la probabilità richiesta è 1.

PROVA SCRITTA DI MDP, 11/07/2017

Esercizio 1 Sei scatole sono numerate da 1 a 6; ogni scatola contiene 2 palline numerate 1 e 2. Tiriamo un dado ed estraiamo senza rimpiazzo un numero di palline corrispondenti al numero uscito nel dado, di volta in volta scegliendo la scatola casualmente e mettendo da parte le scatole eventualmente rimaste vuote. Denotiamo con X il numero uscito dal dado, Y_1 e Y_2 il numero di 1 e 2 estratti rispettivamente, e $Z_1, \ldots, Z_6$ il numero di palline estratte dalle sei scatole rispettivamente.

a. Descrivere un insieme Ω dei possibili risultati di questo fenomeno aleatorio e determinare $|\Omega|$;
b. Determinare i valori attesi per T, X_1 e X_2;
c. Stabilire se X_1 e X_2 sono indipendenti;
d. Stabilire se gli eventi $\{Y_1 = 1\}$ e $\{Z_1 = 1\}$ sono indipendenti;
e. Determinare la densitá di Z_1;
f. Determinare $P(X_1 = 3|T = 5)$;

Esercizio 2 Sia X una variabile continua che assume valori in $[0, 1]$ e tale che $P(X < 0.5) = \frac{2}{3}$.

a. Determinare una possibile densitá e la corrispondente funzione di ripartizione per la variabile X;
b. Determinare il valore atteso di X usando la densitá del punto precedente;
c. Determinare $P(X^2 < 0.5)$.

Esercizio 3 Consideriamo 100 variabili aleatorie $X_1, \ldots, X_{100}$ indipendenti e uniformi nell'intervallo $[-2, 4]$.

a. Determinare $P(X_1 + \cdots + X_{100} > 102)$;
b. Determinare $P(X_1 + \cdots + X_{100} > 102|X_1^2 = 4)$;
c. Determinare $P(\max(X_1, X_2) > 3|\min(X_1, X_2) > 0)$.

PROVA SCRITTA DI MDP, 06/09/2017

Esercizio 1 Una statistica rivela che il 50% dei ragazzi che si iscrivono alle scuole superiori scelgono un liceo, il 30% un istituto tecnico e il 20% un istituto professionale. Consideriamo un campione di 6 ragazzi che chiamiamo 1,2,3,4,5,6 che si devono iscrivere ad una scuola superiore e denotiamo con L_i, T_i, P_i, $i = 1, \dots, 6$ le variabili aleatorie definite da

$$L_i = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ si iscrive ad un liceo} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}, \; T_i = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ si iscrive ad un ist. tecnico} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}, \; P_i = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ si iscrive ad un ist. prof.} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases},$$

Denotiamo inoltre con L il numero di ragazzi del campione che si iscrivono ad un liceo ed analogamente definiamo T e P.

a. Descrivere un insieme Ω dei possibili risultati di questo fenomeno aleatorio e determinare $|\Omega|$;
b. Determinare la probabilità che vadano due ragazzi per ogni tipo di scuola;
c. Determinare la probabilità che vadano due ragazzi per ogni tipo di scuola sapendo che 3 ha già scelto un liceo;
d. Determinare la densità congiunta di (L, T);
e. Stabilire se gli eventi $\{L = 3\}$ e $\{T = 2\}$ sono indipendenti;
f. Determinare $E[L]$;

Esercizio 2 Siano X e Y due variabili aleatorie indipendenti, X esponenziale di media 2 e Y uniforme nell'intervallo $[0, 4]$. Sia inoltre $Z = \min(X, Y)$.

a. Determinare $P(X > 3, Y > 3)$;
b. Determinare $P(Z > 3)$ e $P(Z > 5)$;
c. Determinare la funzione di ripartizione di Z;
d. Determinare $E[Z]$.

Esercizio 3 Consideriamo 100 variabili aleatorie $X_1, \dots, X_{100}$ indipendenti e uniformi nell'intervallo $[-2, 4]$.

a. Determinare $P(X_1 + \cdots + X_{100} > 102)$;
b. Determinare $P(X_1 + \cdots X_{50} - X_{51} - \cdots - X_{100} > 0.2)$;
c. Determinare $P(X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_{100}^2 > 400)$.

PROVA SCRITTA DI MDP, 10/01/2018

Esercizio 1 Nove diverse bottiglie di vino numerate da 1 a 9 devono essere riposte in modo casuale in tre confezioni contenenti rispettivamente 2, 3 e 4 bottiglie ciascuna. Le bottiglie 1,2,3 valgono 10 Euro ciascuna, le altre valgono 5 Euro.

a. Determinare in quanti modi può essere effettuata tale operazione;
Sono le composizioni di tipo $(2,3,4)$ e quindi sono $\binom{9}{2\,3\,4} = 1260$.

b. determinare la probabilità che le bottiglie 1 e 2 finiscano nella stessa confezione; Nella confezione da due ho $\binom{7}{3} = 35$ modi, in quella da 3 $\binom{7}{1\,2\,4} = 105$ modi, in quella da 4 $\binom{7}{2\,3\,2} = 210$ modi e quindi, se A è l'evento "le bottiglie 1 e 2 finiscano nella stessa confezione" abbiamo la probabilità richiesta è

$$P(A) = \frac{35 + 105 + 210}{1260} = \frac{5}{18} = 0.28$$

c. sapendo che le bottiglie 1 e 2 finiscono nella stessa confezione, qual è la probabilità che tale confezione contenga anche la bottiglia numero 3?
La probabilità dell'evento B="le 3 bottiglie nella stessa confezione" si calcola similmente al caso precedente ed è $P(B) = \frac{75}{1260}$. Abbiamo quindi

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{3}{14} = 0.21$$

d. determinare la probabilità che la confezione da 3 bottiglie valga 20 Euro;
È come considerare una variabile ipergeometrica $H(3,3,6)$ e quindi abbiamo, detto E l'evento "la confezione con 3 bottiglie vale 20 Euro"

$$P(E) = \frac{\binom{3}{1}\binom{6}{2}}{\binom{9}{3}} = \frac{15}{28} = 0.53$$

e. stabilire se gli eventi "la confezione con 3 bottiglie vale 20 Euro" e "la confezione con 2 bottiglie contiene la bottiglia numero 1" sono indipendenti.
Sia E' l'evento "la confezione con 2 bottiglie contiene la bottiglia numero 1". Abbiamo

$$P(E') = \frac{\binom{8}{1\,3\,4}}{1260} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 5}{1260}$$

e

$$P(E \cap E') = \binom{2}{1}\binom{6}{2} \cdot 5$$

e si osserva che $P(E)P(E') = P(E \cap E')$ per cui sono indipendenti.

Esercizio 2 Sia $\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ con probabilità uniforme e X la variabile aleatoria su Ω data da

$$X(\omega) = (-1)^{\omega}, \ \ \forall \omega \in \Omega.$$

a. Definire una variabile aleatoria Y su Ω indipendente da X;
Si può ad esempio scegliere

$$Y(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{se } \omega = 1,2,3,4 \\ 1 & \text{se } \omega = 5,6,7,8 \end{cases}$$

È chiaro che sapere il valore di X corrisponde a sapere se il risultato è pari o dispari e questo non altera la probabilità che Y valga 0 o 1.

b. definire una variabile aleatoria Z su Ω dipendente da X;
Basta segliere $Z = X$.

c. calcolare i valori attesi $E[X]$, $E[Y]$, $E[Z]$;
$E[X] = 0$, $E[Y] = 1/2$, $E[Z] = 0$.

d. calcolare la varianza di $X - Y$;
$E[X^2] = 1$ mentre $\mathrm{Var}(Y) = \frac{1}{4}$ per cui, sfruttando l'indipendenza di X e Y abbiamo

$$\mathrm{Var}(X - Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) = \frac{5}{4}$$

e. calcolare la covarianza $\mathrm{Cov}(X, Z)$
Abbiamo $\mathrm{Cov}(X, Z) = E[XZ] - E[X]E[Z] = 1$.

Esercizio 3 Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da

$$f(s) = \begin{cases} \frac{3}{2}(s+1)^2 & \text{se } -1 \leq s \leq 0 \\ \frac{3}{2}(s-1)^2 & \text{se } 0 \leq s \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

a. Verificare che f è una densità continua;
La f è una funzione pari e sempre positiva, nulla fuori dell'intervallo $[-1, 1]$ basta quindi mostrare che

$$\int_0^1 f(s)\, ds = \frac{1}{2}.$$

E infatti

$$\int_0^1 f(s)\, ds = \frac{3}{2}[\frac{(s-1)^3}{3}]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

b. Sia X una variabile aleatoria di densità f. Determinare $E[X]$; Si ha $E[X] = 0$ perché la densità è pari (simmetrica rispetto all'asse y.

c. determinare $\mathrm{Var}(X)$.
è sufficiente calcolare $E[X^2]$ e ancora, sfruttando la simmetrica di f abbiamo

$$E[X^2] = 2\int_0^1 s^2 \frac{3}{2}(s-1)^2\, ds = \frac{1}{10}$$

per cui $\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{10}$.

d. Date 90 variabili aleatorie $X_1, \ldots, X_{90}$ indipendenti di densità f determinare $P(X_1 + \cdots + X_{90} > 1.5)$.
Per il teorme centrale del limite abbiamo $X_1 + \cdots + X_{90} \sim N(0, 9)$ per cui

$$P(X_1 + \cdots + X_{90} > 1.5) = P(\zeta_0 > \frac{1.5}{3}) = 1 - \Phi(0.5) = 0.31$$

PROVA SCRITTA DI MDP, 29/01/2018

Esercizio 1 Nelle ultime elezioni i partiti 1,2,3 e 4 hanno tutti ottenuto il 25% dei voti. Scelti sei elettori a caso consideriamo le variabili aleatorie X_1, X_2, X_3, X_4 date da

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se qualcuno dei sei elettori ha votato il partito } i, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

per $i = 1, 2, 3, 4$.

a. Determinare le densitá delle variabili X_1, X_2, X_3, X_4;
b. stabilire se X_1, X_2, X_3, X_4 sono indipendenti;
c. determinare la probabiliá che almeno uno dei quattro partiti non abbia ricevuto voti da questi sei elettori;
d. determinare il valore atteso per il numero di partiti che hanno ricevuto almeno un voto da questi sei elettori.

Esercizio 2 Un'orchidea che si secca mediamente ogni sette anni é nata sulle pendici di un vulcano che erutta mediamente ogni dieci anni.

a. Determinare la probabilitá il vulcano erutti nei prossimi sette anni;
b. determinare la probabilitá che l'orchidea viva almeno sette anni (l'orchidea muore se si secca o se il vulcano erutta);
c. determinare l'aspettativa di vita di questa orchidea.

Esercizio 3 Consideriamo cinquanta variabili di Poisson $X_1, \ldots, X_{50}$ di parametro $\lambda = 2$ e cinquanta variabili $Y_1, \ldots, Y_{100}$ uniformi in $\{1, 2, 3\}$, tutte indipendenti tra loro.

a. Determinare valore atteso e varianza di $X = X_1 + \cdots + X_{50}$;
b. determinare valore atteso e varianza di $Y = Y_1 + \cdots + Y_{50}$;
c. determinare $P(X_1 = Y_1)$;
d. determinare $P(X > 105))$ e $P(Y > 105)$;
e. determinare $P(X + Y > 210)$.

PROVA SCRITTA DI MDP, 12/02/2018

Esercizio 1 Un insieme S è costituito da 10 palline, 5 rosse, numerate da 1 a 5, e 5 bianche, anch'esse numerate da 1 a 5.

a. Quanti sono i sottoinsiemi di cardinalità 6 di S?
b. Quanti sono i sottoinsiemi di cardinalità 6 di S in cui troviamo almeno una pallina numerata i per ogni $i = 1, 2, 3, 4, 5$?

Consideriamo ora il fenomeno aleatorio dato dall'estrazione di 6 palline da un'urna contenente le palline di S. Sia $X =$"numero di valori distinti estratti" e $Y =$"numero di palline bianche estratte"

c. Descrivere uno spazio di probabilità che modellizzi questo fenomeno aleatorio;
d. Determinare la densità di Y;
e. Determinare la densità di X;
f. Determinare la densità congiunta di X e Y.

Esercizio 2 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da

$$f(t) = \begin{cases} \frac{3}{4}t + 1 & -\frac{4}{3} \leq t \leq 0 \\ (t-1)^2 & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(1) Verificare che $f(t)$ è la densità di una variabile aleatoria continua X.
(2) Determinare $P(X \leq \frac{1}{2})$.
(3) Determinare $P(X \leq \frac{1}{2} | X > 0)$.

Esercizio 3 Sia $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da

$$p(k) = \begin{cases} 2^{-k} & k = 1, 2, \ldots, 5 \\ 2^{-5} & k = 6 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(1) Verificare che $p(k)$ è la densità di una variabile aleatoria discreta X.
(2) Determinare media e varianza di X.
(3) Date 32 variabili aleatorie indipendenti $X_1, \ldots, X_{32}$ tutte aventi densità $p(k)$ determinare

$$P(X_1 + \cdots + X_{32} \geq 65).$$

PROVA SCRITTA DI MDP, 20/06/2018

Esercizio 1 Consideriamo il fenomeno aleatorio dato da una sequenza di 8 lanci di una moneta equilibrata. Sia N_T il massimo numero di lanci consecutivi che hanno dato testa e X il numero di teste ottenute complessivamente.

a. Determinare uno spazio di probabilità Ω che descriva tale fenomeno aleatorio.
b. Determinare $P(N_T = 4)$ e $P(N_T = 6)$.
c. Determinare le probabilità condizionali $P(N_T = 4|X = 8)$ e $P(X = 8|N_T = 4)$.
d. Determinare $P(N_T \leq 1)$;
e. Determinare $P(N_T \leq 2)$.

Esercizio 2 Si consideri la seguente funzione $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 0 \\ -s^4 + 2s^2 & \text{se } 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & \text{se } t \geq 1 \end{cases}$$

a. Verificare che F è una funzione di ripartizione continua.
b. Sia ora X la percentuale (espressa come numero tra 0 e 1) di un percorso ad ostacoli che una persona scelta a caso riesce a superare prima di fermarsi e supponiamo che F sia la funzione di ripartizione di X. Determinare la probabilità che una persona scelta a caso riesca a completare il percorso.
c. Determinare la probabilità che una persona scelta a caso riesca a superare almeno i 2/3 del percorso.
d. Determinare la probabilità che una persona arrivata a metà del percorso riesca a completare il 90% del percorso stesso.
e. Scelte due persone a caso qual è la probabilità che almeno una delle due riesca a completare il 90% del percorso?

Esercizio 3 Consideriamo 80 variabili aleatorie indipendenti $X_1, \ldots, X_{80}$ aventi tutte densità continua

$$f(s) : \begin{cases} 3s^2 & \text{se } 0 < s < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

a. Determinare media e varianza delle variabili X_i.
b. Determinare $P(X_1 + X_2 + \cdots + X_{80} > 62)$.
c. Determinare $P(\sqrt{X_1} + \sqrt{X_2} + \cdots + \sqrt{X_{80}} > 70)$.

PROVA SCRITTA DI MDP, 05/07/2018

Esercizio 1 Lanciamo un dado bilanciato a cinque facce numerate da 1 a 5 e indichiamo con X il risultato ottenuto. Estraiamo poi X carte da una mazzo di 6 carte numerate da 1 a 6 e indichiamo con S la somma delle carte pescate.

a. Determinare la densità di X.
b. Determinare $P(S = 6)$.
c. Determinare la probabilità che S sia pari.
d. Stabilire se gli eventi $\{X = 3\}$ e $\{S \text{ è pari}\}$ sono indipendenti.
e. Stabilire se gli eventi $\{X = 3\}$ e $\{S > 6\}$ sono indipendenti.

Esercizio 2 Sia $X \sim U([1, 3])$ una variabile continua uniforme nell'intervallo $[1, 3]$ e poniamo $Y = \frac{1}{4-X}$.

a. Stabilire per quali valori di t si ha $P(Y < t) = 0$.
b. Determinare la funzione di ripartizione di Y.
c. Determinare $P(Y < \frac{2}{5}|X < 2)$.
d. Determinare $P(Y < \frac{2}{5}|X > 2)$.

Esercizio 3 In una colonia di uccelli 30 mamme condividono il cibo che riescono a procurarsi per i loro 30 neonati pulcini. Supponiamo che quotidianamente le mamme riescano a procurare una quantità di cibo esponenziale di media 19 grammi e i cuccioli mangino ciascuno una quantità di cibo esponenziale di media 20 grammi.

a. Determinare la varianza del cibo totale procurato dalle mamme.
b. Determinare la probabilità che le mamme riescano a procurare complessivamente almeno 600 grammi di cibo.
c. Determinare la probabilità che il cibo procurato riesca a sfamare tutti i pulcini.

PROVA SCRITTA DI MDP, 13/09/2018

Esercizio 1 Lanciamo un dado 3 volte e indichiamo con X_1, X_2, X_3 i risultati dei 3 lanci. Poniamo inoltre $Y_1 = (-1)^{X_1 - X_2}$ e $Y_2 = (-1)^{X_3 - X_2}$.

a. Determinare la densità di X_1, X_2 e X_3.
b. Determinare la densità di Y_1, di Y_2 e di $Y = Y_1 + Y_2$
c. Stabilire se Y_1 e Y_2 sono indipendenti.
d. Stabilire se X_1 e Y_1 sono indipendenti.
e. Determinare $P(X_1 + X_2 + X_3 + Y_1 + Y_2 \geq 17)$

Esercizio 2 Si consideri la funzione

$$f(s) = \begin{cases} 1 + 2s & \text{se } -\frac{1}{2} \leq s \leq 0 \\ 1 - \frac{2}{3}s & \text{se } 0 \leq s \leq \frac{3}{2} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

a. Mostrare che f è la densità continua di una variabile aleatoria X;
b. Determinare la funzione di ripartizione della variabile $-X$;
c. Determinare il valore atteso di $|X|$.

Esercizio 3 Siano $X_1, \ldots, X_{50}$ 50 variabili aleatorie indipendenti la cui funzione di ripartizione è:

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq -1 \\ \frac{1}{4}(-t^2 + 2t + 3) & \text{se } -1 < t < 1 \\ 1 & \text{se } t \geq 1 \end{cases}$$

a. determinare la densità di X_1;
b. determinare media e varianza di X_1;
c. determinare $P(X_1 + \cdots + X_{50} > 0)$.

PROVA SCRITTA DI MDP, 08/01/2019

Esercizio 1 Avendo a disposizione 10 Euro vogliamo fare 6 scommesse da 5 euro ciascuna. Ad ogni puntata abbiamo probabilitá 60% di perdere i 5 Euro puntati e 40% di vincere 5 Euro. Poniamo Y_i = numero di vittorie nelle prime i scommesse e X_i = soldi rimasti dopo le prime i scommesse (con $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$).

a. Determinare la densitá di X_1 e di X_2;
b. Determinare la densitá delle Y_i;
c. Mostrare che $X_i = 10 + 5Y_i - 5(i - Y_i)$;
d. Determinare il valore atteso di X_6;
e. Determinare $P(X_4 > 0)$ e $P(X_6 > 0)$;
f. Determinare $P(X_4 > 0, X_6 > 0)$.

Soluzione.

a. Si ha

$$p_{X_1}(k) = \begin{cases} 0.4 & \text{se } k = 15 \\ 0.6 & \text{se } k = 5 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad \text{e} \qquad p_{X_2}(k) = \begin{cases} 0.16 & \text{se } k = 20 \\ 0.48 & \text{se } k = 10 \\ 0.36 & \text{se } k = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

b. Si ha $Y_i \sim B(i, 0.4)$.

c. Y_i é il numero di vittorie e $i - Y_i$ é il numero di perdite nell prime i scommesse e quindi il risultato segue.

d. Abbiamo dal punto precedente $X_6 = 10Y_6 - 20$ e quindi

$$E[X_6] = 10E[Y_6] - 20 = 10 \cdot 2.4 - 20 = 4.$$

e. Per il punto c abbiamo

$$P(X_4 > 0) = P(Y_4 > 1) = 1 - P(Y_4 = 0) - P(Y_4 = 1) = 1 - 0.6^4 - 40.6^3 \cdot 0.4 = 0.5248$$

e similmente possiamo calcolare $P(X_6 > 0) = 0.4557$.

f. Abbiamo

$$\begin{aligned} P(X_4 > 0, X_6 > 0) &= P(X_4 \geq 20, X_6 > 0) + P(X_4 = 10, X_6 > 0) \\ &= P(X_4 \geq 20) + P(X_4 = 10) \cdot P(X_6 > 0 | X_4 = 10). \end{aligned}$$

Ora $P(X_4 = 10) = 0.3456$ e $P(X_4 \geq 20) = P(X_4 > 0) - P(X_4 = 10) = 0.5248 - 0.3456 = 0.1792$ e quindi possiamo concludere

$$\begin{aligned} P(X_4 > 0, X_6 > 0) &= 0.1792 + 0.3456 \cdot (1 - 0.6^2) \\ &= 0.4004. \end{aligned}$$

Esercizio 2 Consideriamo 3 variabili X, Y, Z la cui densitá congiunta é data da

$$p_{X,Y,Z}(h,k,m) = \begin{cases} 1/9 & \text{se } (h,k,m) = (1,1,1),(1,1,2),(2,1,1),(2,2,1),(2,2,2) \\ 2/9 & \text{se } (h,k,m) = (1,2,1),(1,2,2) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

a. Determinare le densitá marginali delle variabili X, Y, Z;
b. Stabilire se X e Y sono indipendenti;
c. Stabilire se X e Z sono indipendenti;

Soluzione.

a. Abbiamo

$$p_X(h) = \begin{cases} 2/3 & \text{se } h = 1 \\ 1/3 & \text{se } h = 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad p_Y(k) = \begin{cases} 1/3 & \text{se } k = 1 \\ 2/3 & \text{se } k = 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad p_Z(m) = \begin{cases} 5/9 & \text{se } m = 1 \\ 4/9 & \text{se } m = 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

b. Calcoliamo la densitá congiunta di X, Y. Abbiamo

$$p_{X,Y}(h,k) = \begin{cases} 2/9 & \text{se } (h,k) = (1,1),(2,2) \\ 4/9 & \text{se } (h,k) = (1,2) \\ 1/9 & \text{se } (h,k) = (2,1) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Osserviamo quindi che $p_{X,Y}(h,k) = p_X(h)p_Y(k)$ per ogni h, k e quindi X e Y sono indipendenti.

c. Osserviamo che $p_{X,Z}(1,1) = 1/3 \neq p_X(1)p_Z(1)$ e quindi X e Z sono dipendenti.

Esercizio 3 Un certo componente elettrico di una macchina ha durata esponenziale di media 30 giorni e ogni volta che si rompe viene prontamente sostituito.

a. Determinare la probabilitá che un tale componente duri almeno 30 giorni;
b. determinare la probabilitá che i primi 3 componenti durino ciascuno almeno 25 giorni;
c. determinare la probabilitá che 38 componenti siano sufficienti a coprire le necessitá di 3 anni di utilizzo di questa macchina.

Soluzione.

a. Abbiamo $T \sim Exp(1/30)$ e quindi $P(T > 30) = e^{-1} = 0.3679$.
b. Abbiamo $P(T_1 > 25, T_2 > 26, T_3 > 25) = P(T > 25)^3 = e^{-5/2} = 0.0821$.
c. Le T_i hanno media 30 e varianza 900. Usiamo il Teorema centrale del limite: $T_1 + \cdots + T_{38} \sim N(1140, 34200)$ e quindi, considerando che in 3 anni ci sono 1095 giorni abbiamo

$$P(T_1 + \cdots + T_{38} > 1095) = P(\zeta_0 > \frac{1095 - 1140}{\sqrt{34200}} = P(\zeta_0 > -0.24) = \Phi(0.24) = 0.5948.$$

PROVA SCRITTA DI MDP, 29/01/2019

Esercizio 1 Sette coppie marito-moglie in viaggio di nozze vogliono partecipare ad una attività extra in cui però ci sono solo 10 posti disponibili. Vengono pertanto estratte a caso 10 persone che parteciperanno a questa attivitá. Sia X il numero di coppie di cui viene estratto almeno un rappresentante e Y il numero di donne estratte.

a. Qual é la probabilitá di estratte almeno un rappresentante di ogni coppia?
b. Determinare la densitá di X;
c. determinare la densitá di Y;
d. determinare $P(X = 6, Y = 6)$;
e. per ogni $k \geq 0$ determinare $P(Y = k|X = 7)$.

Soluzione.

a.
$$\frac{\binom{7}{3}2^4}{\binom{14}{10}} = \frac{560}{1001} = \frac{80}{143}.$$

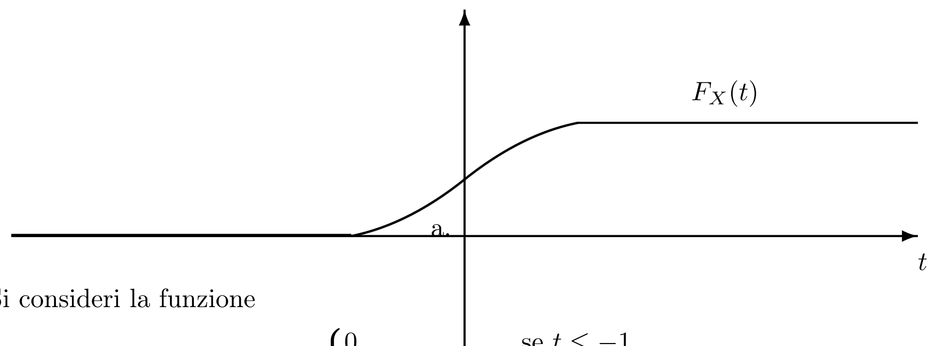
b. $P(X = 7) = \frac{80}{143}$ l'abbiamo già calcolata. $P(X = 6) = \frac{\binom{7}{4}\binom{3}{2}2^2}{\binom{14}{10}} = \frac{420}{1001} = \frac{60}{143}$. L'altro valore possibile per X è 5 e la relativa probabilità può essere calcolata per differenze oppure come $P(X = 5) = \frac{\binom{7}{5}}{\binom{14}{10}} = \frac{3}{143}$. Concludiamo

$$p_X(k) = \begin{cases} \frac{80}{143} & \text{se } k = 7; \\ \frac{60}{143} & \text{se } k = 6; \\ \frac{3}{143} & \text{se } k = 5; \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

c. $Y \sim H(10; 7, 7)$;
d. $P(X = 6, Y = 6) = \frac{\binom{7}{6}\binom{6}{4}}{\binom{14}{10}} = \frac{15}{143}$;
e. gli unici valori possibili con probabilità non nulla sono $k = 3, 4, 5, 6, 7$. Si ha

$$P(Y = k|X = 7) = \begin{cases} \frac{1}{16} & k = 3, 7; \\ \frac{4}{16} & k = 4, 6; \\ \frac{6}{16} & k = 5; \\ = & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

.



Esercizio 2 Si consideri la funzione

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq -1 \\ \frac{1}{2}(t+1)^2 & \text{se } -1 \leq t \leq 0 \\ -\frac{1}{2}t^2 + t + \frac{1}{2} & \text{se } 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & \text{se } t \geq 1 \end{cases}$$

a. Tracciare un grafico approssimatico di F e mostrare che F é la funzione di ripartizione di una variabile aleatoria continua X;
b. determinare $P(-\frac{1}{2} \leq X < \frac{1}{3})$;
c. determinare la funzione di ripartizione della variabile $Y = (X+1)^2$ e tracciarne un grafico approssimativo.

Soluzione.

a. La funzione $F(t)$ è continua, debolmente crescente e va da 0 a 1 e quindi è una funzione di ripartizone di una variabile continua.
b. $P(-\frac{1}{2} \leq X < \frac{1}{3}) = F_X(\frac{1}{3}) - F_X(-\frac{1}{2}) = \frac{47}{72}$.
c. Y assume valore compresi tra 0 e 4. Abbiamo, osservando che $X+1 \geq 0$,

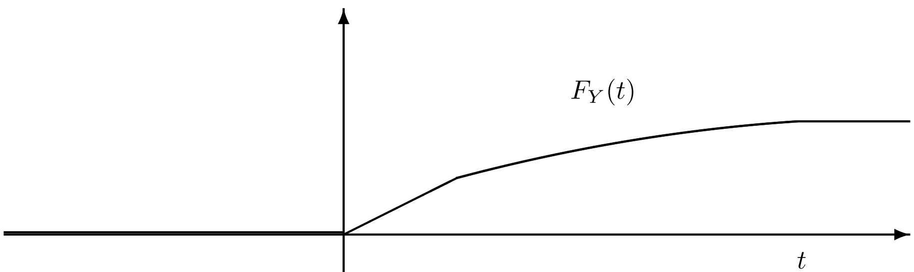
$$F_Y(t) = P((X+1)^2 \leq t) = P(X+1 \leq \sqrt{t}) = P(X \leq \sqrt{t}-1) = F_X(\sqrt{t}-1)$$

e quindi

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ \frac{1}{2}(\sqrt{t}-1+1)^2 = \frac{1}{2}t & \text{se } 0 < t < 1; \\ -\frac{1}{2}t + 2\sqrt{t} - 1 & \text{se } 1 < t < 4 \\ 1 & \text{se } t > 4. \end{cases}$$

Esercizio 3 La concentrazione di PM10 nell'aria non dovrebbe superare per legge il limite di 50 $\mu g/m^3$. A Cesena la concentrazione di PM10 si puó approssimare con una variabile normale di media 44 e varianza 49.

a. Determinare la probabilitá che a Cesena in un determinato giorno venga superato il limite di legge.



b. Determinare la probabilitá che a Cesena tale limite sia superato per almeno 2 giorni di una settimana.

c. Determinare la probabilitá che a Cesena tale limite sia superato per almeno 30 giorni in un anno.

Soluzione.

a. Sia X la concentrazione di PM10 in un giorno casuale. Si ha $X \sim N(44, 49)$ e quindi

$$P(X > 50) = P(7\zeta_0 + 44 > 50) = P(\zeta_0 > \frac{6}{7}) = 1 - \Phi(0.86) = 1 - 0.805 = 19.5\,\%.$$

b. Sia ora Y il numero di giorni di una settimana in cui viene superato tale limite. Abbiamo $Y \sim B(7, 0.195)$ e quindi

$$P(Y \geq 2) = 1 - P(Y = 0) - P(Y = 1) = 1 - (0.805)^7 - 7 \cdot (0.195) \cdot (0.805)^6 = 0.41$$

c. Sia Z il numero di giorni di un anno in cui viene superato tale limite. Per il TCL abbiamo $Z \sim N(365 * 0.195, 365 * 0.195 * 0.805) = N(71.2\,,\, 57.3$ e quindi

$$P(Z \geq 30) = P(Z \geq 29.5) = P(\sqrt{57.3}\zeta_0 + 71.2 > 29.5) = P(\zeta_0 > -5.5) = 1.$$

PROVA SCRITTA DI MDP, 12/02/2019

Esercizio 1 Lanciamo un dado 3 volte. Denotiamo con X_1, X_2, X_3 i risultati dei tre lanci e con $Y = |X_1 - X_2|$.

a. Stabilire se gli eventi $\{X_2 = 2\}$ e $\{Y = 0\}$ sono indipendenti.
b. Stabilire se le variabili Y e X_2 sono indipendenti.
c. Determinare $E[Y]$;
d. Determinare $P(Y = 0 | X_1 + X_2 + X_3 = 7)$.

Esercizio 2 Siano $X \sim U([0, 3])$ e $Y = U([1, 4])$ due variabili aleatorie indipendenti e $Z = \max(X, Y)$.

a. Stabilire quali valori può assumere la variabile Z e determinarne la funzione di ripartizione.
b. determinare $E[Z]$;
c. determinare $\mathrm{Var}(Z)$.

Esercizio 3 La cometa di Halley ha un periodo orbitale di circa 76 anni e quindi ogni 76 anni puó essere avvistata ad occhio nudo dalla Terra. L'ultima avvistamento dalla Terra è accaduto nel 1986. Il tempo di vita di una persona in Italia è una variabile che assumiamo normale di media 82 anni e varianza 49.

a. determinare la probabilità che una persona nata nel 1987 riesca ad avvistare la cometa di Halley ad occhio nudo durante la sua vita.
b. determinare la probabilità che almeno 80 persone su 100 nate nel 1987 scelte a caso riescano ad avvistare la cometa nella loro vita.
c. supponendo che una persona viva esattamente 80 anni (e senza sapere il suo anno di nascita), qual è la probabilità che riesca ad avvistarla per 2 volte?

PROVA SCRITTA DI MDP, 13/06/2019

Esercizio 1 Abbiamo 8 variabili $X_1, \dots, X_8$ indipendenti di Poisson, quattro di parametro 1 e quattro di parametro 2 e sia $X = \max\{X_1, \dots, X_8\}$.

a. Determinare $P(X < 3)$;
b. Determinare la probabilità che almeno 3 delle 8 variabili assumano un valore < 3;
c. Determinare $P(X_1 + X_2 + \cdots + X_8) > 5$;
d. Determinare $E[X_1 + \cdots + X_8]$.

Esercizio 2 Siano $X \sim U([-1, 1])$ e $Y \sim Exp(1)$ due variabili aleatorie indipendenti e $Z = \min(X, Y)$.

a. Stabilire quali valori può assumere la variabile Z;
b. Sia $-1 < t < 0$. Determinare $P(Z < t)$;
c. determinare la funzione di ripartizione di Z e tracciarne un grafico approssimativo;
d. stabilire se le variabili $X - Y$ e $X + Y$ sono indipendenti

Esercizio 3 Scegliamo a caso 80 numeri reali compresi tra -1 e 5 e denotiamo con X la loro somma.

a. determinare media e varianza di X;
b. determinare la probabilità che X sia compreso tra 150 e 190.
c. determinare la probabilità che la metà dei numeri scelti sia maggiore di 2 e l'altra metà minore di 2.
d. determinare la probabilità che almeno la metà dei numeri estratti sia maggiore di 2.

PROVA SCRITTA DI MDP, 17/07/2019

Esercizio 1 In una gara di ippica partecipano quattro cavalli numerati 1,2,3,4 aventi la stessa probabilità di vincere. Cinque amici scommettono su un cavallo ciascuno, senza comunicare agli altri il cavallo su cui hanno puntato.

a. Consideriamo gli eventi $A =$ "qualcuno ha puntato sul cavallo 1" e $B =$ "qualcuno ha puntato sul cavallo 2". Determinare $P(A)$ e $P(B)$ e stabilire se A e B sono indipendenti.
b. Determinare la probabilità che almeno un cavallo non abbia ricevuto scommesse a suo favore.
c. Determinare mediamente quanti cavalli ricevono almeno una scommessa a loro favore in una situazione di questo tipo.
d. Determinare la probabilità che almeno due dei cinque amici vincano la scommessa.

Esercizio 2 Consideriamo due variabili aleatorie X e Y indipendenti e definite sullo stesso spazio di probabilità. La variabile X è continua di densità

$$f_X(s) = \begin{cases} 0 & \text{se } s \leq -1 \text{ oppure } s \geq 1 \\ s+1 & \text{se } -1 < s < 0 \\ 1-s & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Sappiamo inoltre che Y è continua uniforme di media 1.

a. Scrivere la funzione di ripartizione di X e tracciarne un grafico approssimativo.
b. Determinare la densità di Y sapendo che $P(X > 0, Y < 2) = \frac{3}{8}$.
c. Determinare la densitá di $\max(X, Y)$ e tracciarne un grafico approssimativo.

Esercizio 3 In una gara podistica sui 10000 metri partecipano 80 atleti dello stesso livello. Tutti percorrono la distanza mediamente in 40 minuti con uno scarto quadratico medio di 30 secondi.

a. Determinare la probabilità che un atleta scelto a caso finisca la gara in meno di $39'\ 50''$.
b. Determinare la probabilità che il tempo medio degli 80 atleti in gara sia inferiore a $39'\ 50''$.
c. Determinare la probabilità che almeno 3 atleti finiscano la gara in meno di $39'\ 50''$.

PROVA SCRITTA DI MDP, 06/09/2019

Esercizio 1 Un'urna contiene due palline bianche e una pallina rossa. Estraiamo senza rimpiazzo le palline fino ad ottenere una pallina bianca e denotiamo con X il numero di estrazioni effettuate. Dopodiché prendiamo $3X$ carte numerate da 1 a $3X$, estraiamo due carte a caso e denotiamo con Y_1 e Y_2 i valori delle due carte ottenute rispettivamente.

(1) Determinare la densità di X, di Y_1, e di Y_2;
(2) Determinare la probabilità che la prima carta abbia valore piú piccolo della seconda.
(3) Stabilire se X e Y_1 sono indipendenti;
(4) Stabilire se Y_1, Y_2 sono indipendenti;

Esercizio 2 Ci sottoponiamo ad una certa dieta dimagrante di due mesi e sappiamo che il numero di kili che si perdono in questa dieta é una variabile aleatoria di densitá

$$f(s) = \begin{cases} \frac{1}{50}(10-s) & \text{se } s \in [0,10] \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

a. Determinare la probabilitá di dimagrire esattamente 5 kili.
b. Determinare la probabilitá di dimagrire almeno 5 kili.
c. Determinare mediamente quanti chili si perdono con questa dieta.

Esercizio 3 Sia

$$p(k) = \begin{cases} 3/k^2 & \text{se } k = 2,4,8 \\ 1/64 & \text{se } k = 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

a. Mostrare che $p(k)$ é la densitá di una variabile aleatoria discreta X.
b. Determinare media e varianza di X.
c. Determinare la probabilitá che 32 variabili aleatorie indipendenti aventi densitá $p(k)$ valgano mediamente almeno 2.

PROVA SCRITTA DI MDP, 14/01/2020

Esercizio 1 Gli studenti volontari di MDP vengono divisi in sei gruppi. Una volta a settimana, per dieci settimane, viene estratto a sorte un gruppo che deve consegnare gli esercizi assegnati.

a. Determinare la probabilitá che il gruppo 1 non venga mai chiamato.
b. determinare la probabilitá che almeno uno dei sei gruppi non venga mai chiamato.
c. dette $X_1, \dots, X_6$ le variabili date dal numero di volte in cui ciascun gruppo viene chiamato, stabilire se queste variabili sono indipendenti.
d. determinare $p_{X_1,X_2,X_3,X_4,X_5,X_6}(2,1,0,3,1,3)$;
e. determinare $\mathrm{Var}(X_1 + \cdots + X_5)$.

Esercizio 2 In una certa autostrada si registrano mediamente 52 incidenti gravi ogni anno. Sia $X =$ tempo di attesa per il prossimo incidente grave.

a. determinare la densitá di X;
b. determinare la probabilitá che in ciascuna delle prossime tre settimane si verifichi almeno un incidente grave;
c. determinare la probabiltá che non ci siano incidenti nelle prossime due settimane.

Esercizio 3 Sia

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ \frac{t}{140} & 0 \leq t \leq 70 \\ 1 - \frac{1}{2} e^{\frac{70}{3}} e^{-\frac{t}{3}} & t \geq 70 \end{cases}$$

a. Mostrare che $F(t)$ é una funzione di ripartizione continua e tracciarne un grafico approssimativo;
b. Supponiamo che la variabile $X =$ "tempo di vita in anni di un uomo nato oggi" abbia funzione di ripartizione $F(t)$. Determinare la probabilitá che quest'uomo viva almeno 60 anni.
c. Supponendo un uomo viva almeno 50 anni determinare la probabilitá che muoia prima di compiere 80 anni.
d. Determinare $E[X]$.

PROVA SCRITTA DI MDP, 30/01/2020

Esercizio 1 Consideriamo un gruppo di 15 persone di cui 5 maschi e 10 femmine che si mettono in coda ad uno sportello in modo casuale.

a. Determinare la probabilità che non ci siano due maschi vicini tra loro in coda;
b. determinare la probabilità che tra due maschi non ci siano femmine;
c. detta X la posizione della prima femmina in coda determinare la densità di X;
d. detta Y la posizione del primo maschio in coda, stabilire se X ed Y sono indipendenti;
e. detta Z la variabile che vale 1 se al primo posto c'è un maschio e 0 altrimenti determinare la densità di Z.

Esercizio 2 In un piccolo ospedale si registrano mediamente ogni settimana 4 ricoveri.

a. determinare la probabilità che in una settimana si registri un numero di ricoveri compreso tra 3 e 5.
b. determinare la probabilità che in un anno ci siano almeno 180 ricoveri;
c. detto T in tempo di attesa per il prossimo ricovero determinare la funzione di ripartizione della variabile T.

Esercizio 3 Consideriamo 3 variabili X, Y, Z la cui densità congiunta è data da

$$p_{X,Y,Z}(h,k,m) = \begin{cases} 1/9 & \text{se } (h,k,m) = (1,1,0),(1,1,2),(2,1,0),(2,2,0),(2,2,2) \\ 2/9 & \text{se } (h,k,m) = (1,2,0),(1,2,2) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

a. Determinare le densità marginali delle variabili X, Y, Z;
b. Stabilire se X e Y sono indipendenti;
c. Stabilire se X e Z sono indipendenti;
d. Determinare $\mathrm{Var}(X - 2Y + 3)$.
e. Determinare $E[Y - Z]$.

PROVA SCRITTA DI MDP, 18/02/2020

Esercizio 1 Tre urne contengono rispettivamente 4, 5 e 6 palline ciascuna. Ogni urna ha una pallina rossa e le rimanenti blu. Effettuiamo 4 estrazioni da un'urna scelta a caso di volta in volta, senza rimpiazzo. Sia $X =$"numero di urne da cui ŝ stata estratta almeno una pallina" e

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{se la } i\text{-esima estratta è rossa} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

per $i = 1, 2, 3, 4$.

a. Determinare $P(X = 3)$;
b. Determinare la densità delle variabili Y_1, Y_2, Y_3, Y_4;
c. Stabilire se Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 sono indipendenti;
d. Detto Y il numero totale di palline rosse estratte determinare $P(Y = 1|X = 1)$ e $P(X = 1|Y = 2)$;
e. Determinare $E[Y]$;
f. Determinare $E[X]$.

Esercizio 2 Sia

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ \frac{2t}{2t+1} & \text{se } t \geq 0. \end{cases}$$

a. Mostrare che $F(t)$ è una funzione di ripartizione continua;
b. Sia X la variabile "tempo di vita in anni di un certo frutteto". Supponendo che $F(t)$ sia la funzione di ripartizione di X stabilire se X soddisfa la proprietà di mancanza di memoria;
c. Determinare la probabilità che uno di questi smartphone duri almeno un anno e la probabilità che dopo un anno di utilizzo duri ancora per un altro anno;
d. Un'azienda acquista 30 di questi smartphone per i suoi dipendenti. Determinare la probabilità che almeno 15 di questi smartphone durino almeno due anni.

Esercizio 3 È stato misurato il peso in grammi di un campione di 1000 mele prodotte in un certo campo e i dati sono riportati in tabella

Peso	Numero
200–300	110
300–400	400
400–500	440
500–600	50

a. Determinare la media campionaria e lo scarto quadratico medio del campione;
b. scelta una mela a caso di questo frutteto, determinare la probabilità che pesi almeno 370 grammi;
c. scelte 50 mele a caso di questo frutteto, determinare la probabilitá che pesino mediamente più di 370 grammi.

PROVA SCRITTA DI MDP, 18/02/2020

Esercizio 1 Tre urne contengono rispettivamente 4, 5 e 6 palline ciascuna. Ogni urna ha una pallina rossa e le rimanenti blu. Effettuiamo 4 estrazioni da un'urna scelta a caso di volta in volta, senza rimpiazzo. Sia $X =$"numero di urne da cui š stata estratta almeno una pallina" e

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{se la } i\text{-esima estratta è rossa} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

per $i = 1, 2, 3, 4$.

a. Determinare $P(X = 3)$;
b. Determinare la densità delle variabili Y_1, Y_2, Y_3, Y_4;
c. Stabilire se Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 sono indipendenti;
d. Detto Y il numero totale di palline rosse estratte determinare $P(Y = 1|X = 1)$ e $P(X = 1|Y = 2)$;
e. Determinare $E[Y]$;
f. Determinare $E[X]$.

Esercizio 2 Sia

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ \frac{2t}{2t+1} & \text{se } t \geq 0. \end{cases}$$

a. Mostrare che $F(t)$ è una funzione di ripartizione continua;
b. Sia X la variabile "tempo di vita in anni di un certo frutteto". Supponendo che $F(t)$ sia la funzione di ripartizione di X stabilire se X soddisfa la proprietà di mancanza di memoria;
c. Determinare la probabilità che uno di questi smartphone duri almeno un anno e la probabilità che dopo un anno di utilizzo duri ancora per un altro anno;
d. Un'azienda acquista 30 di questi smartphone per i suoi dipendenti. Determinare la probabilità che almeno 15 di questi smartphone durino almeno due anni.

Esercizio 3 È stato misurato il peso in grammi di un campione di 1000 mele prodotte in un certo campo e i dati sono riportati in tabella

Peso	Numero
200–300	110
300–400	400
400–500	440
500–600	50

a. Determinare la media campionaria e lo scarto quadratico medio del campione;
b. scelta una mela a caso di questo frutteto, determinare la probabilità che pesi almeno 370 grammi;
c. scelte 50 mele a caso di questo frutteto, determinare la probabilitá che pesino mediamente più di 370 grammi.

PROVA SCRITTA DI MDP, 08/01/2021

Esercizio 1 Una nonna fa un regalo per Natale a ciascuno dei suoi 6 nipoti. Tuttavia confeziona i regali in pacchetti identici e dimenticandosi di indicare i nomi sui pacchetti, i quali vengono quindi distribuiti casualmente.

a. Determinare la probabilità che ciascun nipote riceva il proprio regalo;
b. determinare la probabilità che nessun nipote riceva il proprio regalo;
c. consideriamo gli eventi $A_1 =$"il nipote 1 riceve il proprio regalo" e $A_2 =$"il nipote 2 riceve il proprio regalo". Stabilire se A_1 e A_2 sono indipendenti;
d. Determinare il valore atteso per il numero di nipoti che ricevono il proprio regalo.

Esercizio 2 Sia

$$f(s) = \begin{cases} 0 & \text{se } s \leq -1 \text{ o } s \geq 1 \\ \frac{1}{2}(s+1) & \text{se } -1 < s < 0 \\ \frac{3}{2}(1-s) & \text{se } 0 \leq s < 1. \end{cases}$$

a. Disegnare un grafico approssimativo di $f(s)$ e mostrare che $f(s)$ è una densità continua astratta;
b. Sia X una variabile aleatoria di densità continua $f(s)$.
Determinare $P(X > 1/2)$ e $P(X > 1/2 \mid X > -1/2)$;
c. Determinare $P(X^2 > 1/4)$.

Esercizio 3 In un appello di MDP con 48 studenti viene assegnato ad ogni studente un voto aleatorio di densità uniforme nell'intervallo [0, 30]. Uno studente viene promosso se il voto assegnato è almeno 18.

a. Determinare la probabilità che un dato studente venga promosso;
b. determinare la probabilità che il voto medio assegnato sia almeno 16;
c. determinare la probabilità che ci siano almeno 20 promossi.

Soluzioni

Esercizio 1

a. Scegliamo la spazio di probabilità Ω dato da tutte le possibili permutazioni di $\{1,2,3,4,5,6\}$ con probabilità uniforme. Abbiamo un solo caso favorevole in questo caso e quindi otteniamo

$$\frac{1}{720} = 0.0014$$

b. i risultati favorevoli in questo caso sono gli scombussolamenti su 6 numeri che sono

$$(6)_4 - (6)_3 + (6)_2 - (6)_1 + (6)_0 = 360 - 120 + 30 - 6 + 1 = 265$$

per cui la probabilità richiesta è

$$\frac{265}{720} = 0.368$$

c. abbiamo $P(A_1) = P(A_2) = \frac{5!}{6!} = \frac{1}{6}$ mentre $P(A_1 \cap A_2) = \frac{4!}{6!} = \frac{1}{30} \neq \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$ e quindi i due aventi sono dipendenti.

d. Consideriamo le variabili

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ riceve il proprio regalo} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

per $i = 1,2,3,4,5,6$. Abbiamo $X_i \sim B(1, 1/6$ e dobbiamo calcolare il valore atteso di $X = X_1 + \cdots + X_6$: utilizzando la linearità del valore atteso abbiamo

$$E[X] = E[X_1] + \cdots + E[X_6] = 1.$$

Dobbiamo quindi aspettarci che uno dei sei nipoti riceva il proprio regalo.

Esercizio 2

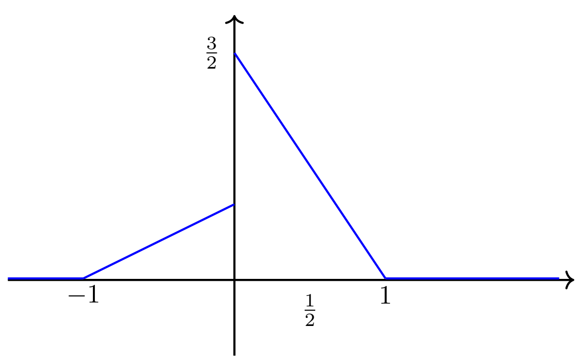


FIGURE 1. La densità $f(s)$.

a. Il grafico è rappresentato in figura. Per mostrare che si tratta si una densità continua basta sommare le aree dei due triangoli rappresentati e osservare che si ottiene 1 (infatti quello a sinistra ha area 1/4 e quello a destra 3/4).

b. $P(X > 1/2)$ è l'area del triangolo da 1/2 in poi che è

$$P(X > 1/2) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}}{2} = \frac{3}{16}.$$

Per l'altro punto abbiamo bisogno di calcolare

$$P(X > -\frac{1}{2}) = 1 - P(X < -\frac{1}{2}) = 1 - \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}}{2} = \frac{15}{16}$$

e quindi

$$P(X > 1/2 \mid X > -1/2) = \frac{P(X > 1/2)}{P(X > -1/2)} = \frac{1}{5}.$$

c. Qui basta calcolare

$$P(X^2 > 1/4) = P(X > 1/2) + P(X < -1/2) = \frac{3}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{4}.$$

Esercizio 3 In un appello di MDP con 48 studenti viene assegnato ad ogni studente un voto aleatorio di densità uniforme nell'intervallo [0, 30]. Uno studente viene promosso se il voto assegnato è almeno 18.

a. Chiamiamo $X_1, \ldots, X_{48}$ i voti assegnati. Ciascuno di essi è una variabile $U([0, 30])$. La probabilità che uno studente venga promosso è

$$\frac{12}{30} = \frac{2}{5} = 40\%.$$

b. Abbiamo $E[X_i] = 15$ e $\text{Var}(X_i) = \frac{30^2}{12}$ per cui la variabile $X = X_1 + \cdots X_{48}$ ha valore atteso

$$E[X] = 48 \cdot 15 = 720$$

e varianza

$$\text{Var}(X) = 48 \frac{30^2}{12} = 60^2.$$

Per il teorema centrale del limite possiamo approssimare la X con una variabile normale di densità $N(720, 60^2)$. Voto medio almeno 16 si ha se $\frac{X}{48} > 16$, cioè se $X > 768$. Abbiamo quindi

$$P(X > 768) = P(60\zeta_0 + 720 > 768) = P(\zeta_0 > 0.80) = 1 - \Phi(0.80) = 1 - 0.788 = 0.212.$$

c. consideriamo le variabili $Y_1, \ldots, Y_48$ che valgono 1 o 0 a seconda che lo studente corrispondente sia promosso o meno. Abbiamo $Y_i \sim B(1, 0.40)$ e quindi $Y = Y_1 + \cdots + Y_{48}$ ="numero di studenti promossi" avrà valore atteso

$$E[Y] = 48 \cdot 0.40 = 19.2$$

e varianza

$$\text{Var}(Y) = 48 \cdot 0.40 \cdot 0.60 = 11.52.$$

Usiamo il teorema centale del limite per la variabile Y con correzione di continuità per cui

$$P(Y \geq 20) = P(Y > 19.5) = P(\sqrt{11.52}\zeta_0 + 19.2 > 19.5) = P(\zeta_0 > 0.09) = 1 - \Phi(0.09) = 1 - 0.536 = 0.464.$$

PROVA SCRITTA DI MDP, 27/01/2021

Nota. Questo compito presenta dei conti più impegnativi del solito per cui sono stati assegnati 3 punti per ogni quesito, per un totale di 39 punti.

Esercizio 1 Quattro amici al bar (bei tempi!) possono scegliere tra tre possibili cocktail numerati 1,2,3. Consideriamo le variabili X_1, X_2, X_3, X_4 date da "$X_i = j$ se l'amico i sceglie il cocktail j". Sappiamo che X_1 è uniforme in $\{1, 2, 3\}$ e per ogni $i = 2, 3, 4$ sappiamo che l'amico i sceglie lo stesso cocktail dell'amico $i - 1$ con probabilità $1/2$ e indifferentemente gli altri due con probabilità $1/4$ ciascuno.

a. Determinare la densità di X_2:
b. stabilire se X_1 e X_2 sono indipendenti;
c. stabilire se X_1 e X_3 sono indipendenti;
d. determinare la probabilità che i quattro amici scelgano tutti lo stesso cocktail;
e. determinare mediamente quanti cocktail diversi ordinano i quattro amici.

Esercizio 2 Consideriamo due variabili indipendenti X e Y. Sia

$$f_X(s) = \begin{cases} 1 & \text{se } -\frac{1}{2} < s < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{se } 0 < s < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

la densità (continua) di X e supponiamo che Y sia continua uniforme di media $\frac{1}{2}$.

a. Sapendo che $P(X > 0, Y > 1) = \frac{1}{8}$ determinare la densità di Y.
b. determinare la funzione di ripartizione di X e disegnarne un grafico approssimativo
c. sia $Z = \max(X, Y)$; che valori può assumere Z?
d. Determinare la funzione di ripartizione di Z e disegnarne un grafico approssimativo;

Esercizio 3 Consideriamo 80 variabili aleatorie continue $X_1, \ldots, X_{80}$ indipendenti e aventi tutte densità continua

$$f(s) = \begin{cases} 3(s-1)^2 & \text{se } 1 < s < 2 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

a. Determinare valore atteso e varianza di X_1;
b. determinare $P(X_1 + \cdots + X_{80} < 145)$;
c. determinare la densità della variabile $Y = \sqrt{X_1}$;
d. determinare $P(\sqrt{X_1} + \cdots + \sqrt{X_{80}} < 96)$.

Soluzioni

Esercizio 1

a. Per simmetria del problema tutte le variabili X_1, X_2, X_3, X_4 sono variabili $U(\{1,2,3\})$.

b. Chiaramente le variabili X_1 e X_2 sono dipendenti per come è formulato il problema. Infatti

$$P(X_1 = 1, X_2 = 1) = \frac{1}{6} \neq P(X_1 = 1)P(X_2 = 1) = \frac{1}{9}.$$

c. Anche X_1 e X_3 sono dipendenti: infatti

$$P(X_1 = 1, X_3 = 1) = P(X_1 = X_2 = X_3 = 1) + P(X_1 = 1, X_2 = 2, X_3 = 1) + P(X_1 = 1, X_2 = 3, X_3 = 1) = \frac{1}{12} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{5}{36}$$

che è diverso da $P(X_1 = 1)P(X_3 = 1) = \frac{1}{9}$.

d. Qui abbiamo

$$3 \cdot P(X_1 = X_2 = X_3 = X_4 = 1) = 3 \cdot \frac{1}{24} = \frac{1}{8}.$$

e. Sia Y la variabile numero di cocktail diversi serviti. Abbiamo già calcolato nel punto precedente $P(Y = 1) = \frac{1}{8}$. Calcoliamo $P(Y = 3)$. Chiaramente un cocktail sarà scelto da due amici: possiamo supporre che sia il numero 1 e poi moltiplichiamo il risultato per 3 le altre due possibilità. Abbiamo 12 possibili anagrammi di 1123 da considerare. Di questi 12 ne abbiamo 6 con due 1 consecutivi e 6 che non hanno due 1 consecutivi. I primi hanno probabilità $\frac{1}{96}$ gli altri hanno probabilità $\frac{1}{192}$. Abbiamo quindi in tutto

$$P(Y = 3) = 3 \cdot (6 \cdot \frac{1}{96} + 6 \cdot \frac{1}{192}) = \frac{9}{32}.$$

e per differenza $P(Y = 2) = 1 - \frac{1}{8} - \frac{9}{32} = \frac{19}{32}$. Di conseguenza abbiamo

$$E[Y] = 1 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{19}{32} + 3 \cdot \frac{9}{32} = \frac{4 + 38 + 27}{32} = \frac{69}{32} = 2.16$$

Esercizio 2

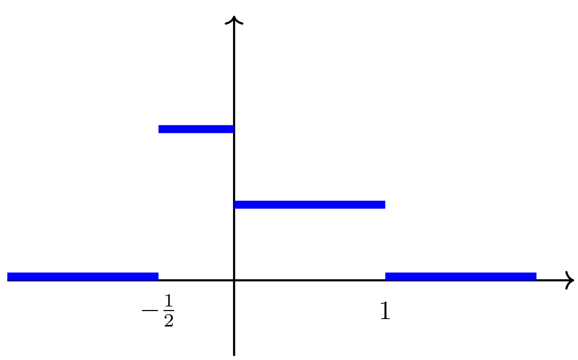


FIGURE 2. La densità $f_X(s)$.

a. Sappiamo $\frac{1}{8} = P(X > 0, Y > 1) = P(X > 0)P(Y > 1) = \frac{1}{2}P(Y > 1)$ per cui $P(Y > 1) = \frac{1}{4}$.

Sappiamo che Y è uniforme in un intervallo $[a, b]$ e che $E[Y] = \frac{a+b}{2} = \frac{1}{2}$ (vedi Figura 2). L'area del rettangolo evidenziato deve essere 1/4 per cui otteniamo

$$(b - 1)\frac{1}{b - a} = \frac{1}{4}$$

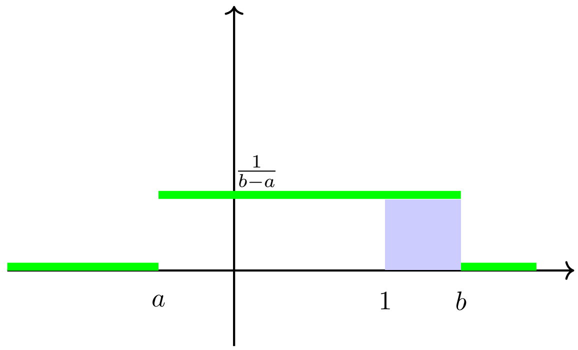


FIGURE 3. La densità $f_Y(s)$.

che con l'equazione precedente fornisce la soluzione $a = -\frac{1}{2}$ e $b = \frac{3}{2}$:

$$Y \sim U([-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]).$$

b. La funzione di ripartizione di X è data da:
se $-1/2 < t < 0$ abbiamo (area del rettangolo tra $-1/2$ e t)

$$F_X(t) = (t + \frac{1}{2}) \cdot 1 = t + 1/2.$$

se $0 < t < 1$ abbiamo

$$F_X(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t$$

per cui concludiamo

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq -\frac{1}{2} \\ t + \frac{1}{2} & \text{se } -\frac{1}{2} \leq t \leq 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t & \text{se } 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & \text{se } t \geq 1 \end{cases}$$

e un suo grafico è rappresentato in Figura 3

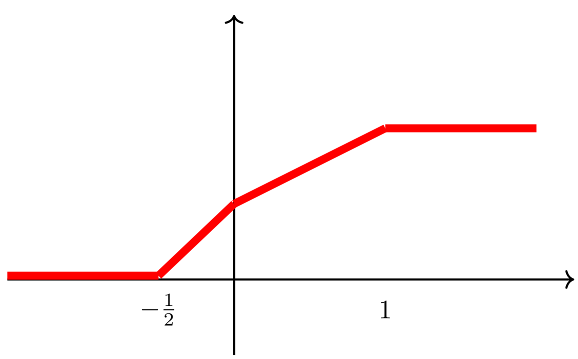


FIGURE 4. La funzione di ripartizione $F_X(t)$.

c. La variabile Z assume valori tra $-1/2$ e $3/2$.

d. La funzione di ripartizione di Z è il prodotto tra le funzioni di ripartizione di X (calcolata nel punto precedente) e la funzione di ripartizione di Y che sappiamo essere data da

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq -1/2 \\ \frac{2t+1}{4} & \text{se } -1/2 \leq t \leq 3/2 \\ 1 & \text{se } t \geq 3/2. \end{cases}$$

in conclusione abbiamo

$$F_Z(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq -\frac{1}{2} \\ (t+\frac{1}{2})\frac{2t+1}{4} & \text{se } -\frac{1}{2} \leq t \leq 0 \\ (\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t)\frac{2t+1}{4} & \text{se } 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{2t+1}{4} & \text{se } 1 \leq t \leq 3/2 \\ 1 & \text{se } t \geq 3/2 \end{cases}$$

e un suo grafico approssimato è rappresntato in Figura 4

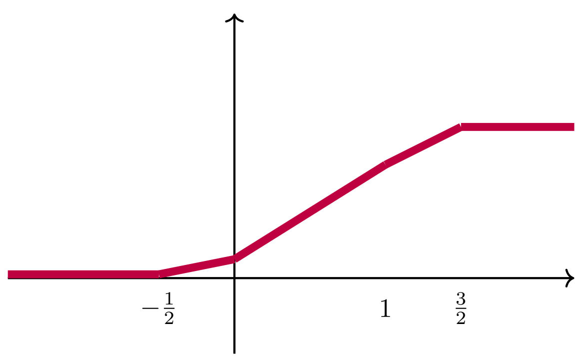


FIGURE 5. La funzione di ripartizione $F_Z(t)$.

Esercizio 3

a. Abbiamo

$$E[X_1] = \int_1^2 3s(s-1)^2\, ds = \frac{7}{4} = 1.75$$

e

$$E[X_1^2] = \int_1^2 3s^2(s-1)^2\, ds = 3.1$$

e quindi

$$\mathrm{Var}(X_1) = E[X_1^2] - E[X_1]^2 = \frac{3}{80} = 0,0375.$$

b. Usiamo il teorema centrale del limite per cui $X_1 + \cdots + X_{80} = \zeta \sim N(140, 3)$ e quindi

$$P(\zeta < 145) = P(140 + \sqrt{3}\zeta_0 < 145) = P(\zeta_0 < 2.88) = 0.998.$$

c. Y assume valori in $[1, \sqrt{2}]$ e per t in questo intervallo abbiamo

$$\begin{aligned} F_Y(t) = P(Y < t) &= P(\sqrt{X_1} < t) = P(X_1 < t^2) \\ &= \int_1^{t^2} 3(s-1)^2 \, ds \\ &= 3 \left[\frac{s^3}{3} - s^2 + s \right]_1^{t^2} \\ &= t^6 - 3t^4 + 3t^2 - 1. \end{aligned}$$

Concludiamo che

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 1 \\ t^6 - 3t^4 + 3t^2 - 1 & \text{se } 1 \leq t \leq \sqrt{2} \\ 1 & \text{se } t \geq \sqrt{2} \end{cases}$$

e quindi la densità di Y è

$$f_Y = \begin{cases} 0 & \text{se } s < 1 \text{ oppure } s > \sqrt{2} \\ 6s^5 - 12s^3 + 6s & \text{se } 1 \leq s \leq \sqrt{2}. \end{cases}$$

In alternativa si poteva calcolare la funzione di ripartizione $F_{X_1}(t)$ e quindi $F_Y(t) = F_{X_1}(t^2)$ usando le osservazioni qui sopra.

d. Dobbiamo calcolare

$$E[Y] = \int_1^{\sqrt{2}} s \, f_Y(s) \, ds = \int_1^{\sqrt{2}} (6s^6 - 12s^4 + 6s^2) \, ds = \frac{44\sqrt{2} - 16}{35} = 1.32$$

Chiaramente $E[Y^2] = E[X_1] = 1.75$ per cui

$$\text{Var}(Y) = E[Y^2] - E[Y]^2 = 1.75 - 1.32^2 = 0.0057$$

Abbiamo quindi per il teorema centrale del limite

$$\zeta = \sqrt{X_1} + \cdots \sqrt{X_{80}} \sim N(105.6, \, 0.456)$$

e quindi

$$P(\zeta < 96) = P(\zeta_0 < \frac{96 - 105.6}{\sqrt{0.456})} = 0$$

PROVA SCRITTA DI MDP, 15/02/2021

Esercizio 1 Consideriamo un mazzo di 20 carte in cui abbiamo le carte dall'1 al 5 dei quattro semi: cuori, quadri, fiori, picche. Mischiamo e giriamo le prime 8.

a. Determinare la probabilità che l'ultima carta girata sia di cuori;
b. qual è la probabilità di aver girato almeno una carta di ogni valore? E almeno una di ogni seme?
c. sia $X =$"numero di valori che non sono stati estratti". Determinare la densità di X.
d. sia $Y =$"numero di carte di cuori estratte". Determinare la densità di Y.
e. stabilire se X e Y sono indipendenti.

Esercizio 2 Consideriamo la funzione $d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da

$$d(k) = \begin{cases} 1/9 & \text{se } k = -1 \\ 2/9 & \text{se } k = -2 \\ 3/9 & \text{se } k = 1, 2 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

a. Stabilire se $d(k)$ è una densità discreta astratta;
b. determinare valore atteso e varianza di una variabile aleatoria avente densità discreta $d(k)$.
c. date 81 variabili indipendenti $X_1, \dots, X_{81}$ di densità discreta $d(k)$ determinare $P(X_1 + \cdots + X_{81} > 37)$;
d. determinare $P(X_1^2 + \cdots + X_{81}^2 < 230)$.

Esercizio 3 Sia b un parametro reale positivo e consideriamo una variabile aleatoria X di densità continua

$$f_X(s) = \begin{cases} (b+1)s^b & \text{se } 0 < s < 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

a. Calcolare la funzione di ripartizione $F_X(t)$ e disegnarne un grafico approssimativo
b. determinare $P(X > -\frac{1}{2})$ e $P(X > \frac{1}{2})$;
c. sia $Y = -\log X$. Che valori può assumere la variabile Y?
d. determinare la funzione di ripartizione di Y. Che variabile è?

Soluzioni

Esercizio 1

a. Per simmetria del problema questa probabilità è 1/4: i quattro semi devono avere la stessa probabilità di essere estratti all'ottava carta.

b. Consideriamo Ω insieme di tutte le possibili combinazioni di 8 carte pescate: abbiamo $|\Omega| = \binom{20}{8} = 125970$ con probabilità uniforme. Detto A_i l'evento "non viene girata neanche una carta di valore i (con $i = 1, 2, 3, 4, 5$) dobbiamo calcolare $P((A_1 \cup \cdots \cup A_5)^C)$ e procediamo quindi con il principio di inclusione-esclusione:

$$|(A_1 \cup \cdots \cup A_5)^C| = |\Omega| - 5|A_1| + \binom{5}{2}|A_1 \cap A_2| - \binom{5}{3}|A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$
$$= \binom{20}{8} - 5\binom{16}{8} + 10\binom{12}{8} - 10 = 66560$$

e quindi la probabilità richiesta è $\frac{66560}{125970} = 0.5284$.

La probabilità che venga girata almeno una carta di ogni seme viene determinata in modo analogo considerando gli eventi B_1, B_2, B_3, B_4 corrispondenti ai casi in cui non vengono girata carte di cuori, quadri, fiori, picche rispettivamente. Abbiamo

$$|(B_1 \cup \cdots B_4)^C| = |\Omega| - 4|B_1| + \binom{4}{2}|B_1 \cap B_2| = \binom{20}{8} - 4\binom{15}{8} + 6\binom{10}{8} = 100500$$

e quindi $P((B_1 \cup \cdots B_4)^C) = \frac{100500}{125970} = 0.7978$

c. Abbiamo già calcolato $P(X = 0) = 0.5284$. Dal problema abbiamo che X può assumere i valori 0,1,2,3. Calcoliamoli:

$$P(X = 3) = \frac{10}{125970} = 0$$
$$P(X = 2) = \frac{\binom{5}{2}\left(\binom{12}{8} - 3\right)}{125970} = 0.0391$$

e quindi per differenza $P(X = 1) = 0.4325$.

d. La variabile Y è una variabile ipergeometrica $Y \sim H(8; 5, 15)$: basta pensare alle carte di cuori come palline bianche e le carte degli altri semi come palline rosse.

e. Le variabili sono dipendenti. Ad esempio

$$0 = P(Y = 5, X = 1) \neq P(Y = 5)P(X = 1).$$

Infatti se $Y = 5$ allora tutti i valori sono stati estratti per cui necessariamente $X = 0$.

Esercizio 2

a. La funzione d è una densità discreta astratta perché è non nulla solo su quattro valori, in questi casi è sempre > 0 e la somma di questi valori:

$$\frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{3}{9} + \frac{3}{9} = 1$$

è uguale a 1.

b. Abbiamo

$$E[X] = -1 \cdot \frac{1}{9} - 2 \cdot \frac{2}{9} + 1 \cdot \frac{3}{9} + 2 \cdot \frac{3}{9} = \frac{4}{9}.$$

e

$$E[X^2] = (-1)^2 \cdot \frac{1}{9} + (-2)^2 \cdot \frac{2}{9} + 1^2 \cdot \frac{3}{9} + 2^2 \cdot \frac{3}{9} = \frac{24}{9} = \frac{8}{3}.$$

e quindi

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{24}{9} - \frac{16}{81} = \frac{200}{81}$$

c. La variabile $X = X_1 + \cdots + X_{81}$ è per il TCL una variabile normale $X \sim N(36, 200)$ e quindi, usando anche la correzione di continuità abbiamo

$$P(X > 37) = P(36 + \sqrt{200}\zeta_0 > 37.5) = P(\zeta_0 > 0.11) = 1 - \Phi(0.11) = 1 - 0.544 = 0.456$$

d. Calcoliamo

$$E[X^4] = (-1)^4 \cdot \frac{1}{9} + (-2)^4 \cdot \frac{2}{9} + 1^4 \cdot \frac{3}{9} + 2^4 \cdot \frac{3}{9} = \frac{84}{9}$$

per cui

$$\mathrm{Var}(X^2) = \frac{84}{9} - \frac{64}{9} = \frac{20}{9}.$$

Usando ancora il TCL abbiamo $Y = X_1^2 + \cdots + X_{81}^2 \sim N(216, 180)$ e quindi

$$P(Y < 230) = P(216 + \sqrt{180}\zeta_0 < 229.5) = P(\zeta_0 < 1.01) = 0.844$$

Esercizio 3

a. Chiaramente X assume valori in $[0, 1]$ e per $t \in [0, 1]$ abbiamo

$$F_X(t) = \int_0^t (b+1)s^b\, ds = [s^{b+1}]_0^t = t^{b+1}.$$

e quindi

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 0 \\ t^{b+1} & \text{se } 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & \text{se } t \geq 1. \end{cases}$$

b. Abbiamo $P(X > -\frac{1}{2}) = 1$ perché X assume solo valori tra 0 e 1 e

$$P(X > \frac{1}{2}) = 1 - F_X(1/2) = 1 - (1/2)^{b+1}.$$

c. Siccome X varia tra 0 e 1 e ricordando che log tra 0 e 1 varia tra $-\infty$ e 0 abbiamo che $Y = -\log X$ varia tra 0 e $+\infty$.

d. Per $t > 0$ abbiamo

$$P(Y < t) = P(-\log X < t) = P(X > e^{-t}) = 1 - (e^{-t})^b + 1 = 1 - e^{-(b+1)t}.$$

Di conseguenza

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 0 \\ 1 - e^{-(b+1)t} & \end{cases}$$

che è la funzione di ripartizione di una variabile $Exp(b+1)$.

PROVA SCRITTA DI MDP, 14/06/2021

Esercizio 1 Tre palline rosse e tre blu vengono inserite in modo casuale e indipendente l'una dall'altra in tre urne numerate 1,2,3.

a. Determinare la probabilità che l'urna 1 contenga esattamente due palline.
b. Determinare la probabilità che l'urna 1 contenga esattamente una pallina rossa e una blu.
c. inseriamo la mano nella prima urna e, se non è vuota, estraiamo una pallina. Determinare la probabilità di estrarre una pallina rossa;
d. determinare la probabilità che ogni urna contenga almeno una pallina;
e. determinare la probabilità che ogni urna contenga una pallina rossa.

Esercizio 2 Consideriamo due variabili indipendenti X e Y definite sullo stesso spazio di probabilità, X uniforme nell'intervallo $[0,2]$ e Y di densità continua

$$f_Y(s) = \begin{cases} 3s^2 & \text{se } s \in [0,1] \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

a. Mostrare che effettivamente f_Y è una densità continua e tracciarne un grafico approssimativo;
b. detto $Z = \max(X,Y)$ determinare la funzione di ripartizione di Z;
c. determinare i valori attesi $E[X]$, $E[Y]$, $E[Z]$;
d. determinare $\mathrm{Var}(X-Y)$.

Esercizio 3 Consideriamo 72 variabili di Poisson $X_1,\dots,X_{72}$ indipendenti tra loro e di media 8.

a. determinare $P(X_1+X_2<5)$;
a. determinare $P(X_1+\cdots+X_{72}<580)$;
b. determinare $P(X_1-2X_2+X_3-2X_4+\cdots+X_{71}-2X_{72})<-285)$;

Soluzioni

Esercizio 1

a. Il numero X di palline nella prima urna è una $B(6, 1/3)$: infatti ogni pallina ha $1/3$ di probabilitè di finire null'urna 1, indipendentemente l'una dall'altra. Per cui abbiamo

$$\binom{6}{2}(1/3)^2(2/3)^4 = 0.329$$

b. Il numero R di palline rosse nella prima urna e il numero B di palline bianche nella prima urna sono $B(3, 1/3)$ per cui

$$P(B = 1, R = 1) = \frac{4}{9}\frac{4}{9} = 0.198$$

c. Calcoliamo la probabilitè che la prima non sia vuota:

$$1 - P(X = 0) = 1 - (2/3)^6 = \frac{665}{729}$$

Sapendo che l'urna non è vuota la probabilità di pescare una rossa è chiaramente $1/2$ per cui

$$P(\text{estrarre rossa}) = P(\text{urna non vuota})P(\text{extrarre rossa}|\text{urna non vuota}) = \frac{1}{2}\frac{665}{729} = 0.456$$

d. Possiamo pensare alle palline come se fossero numerate da 1 a 6 e quindi ogni assegnazione di un'urna ad una pallina è una funzione da $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ a $\{1, 2, 3\}$. I casi in cui non ci sono urne vuote corrispondono alle funzioni suriettive. Abbiamo quindi

$$\frac{3^6 - 3 \cdot 2^6 + 3}{3^6} = \frac{540}{729}$$

e. Qui analogamente e similmente a prima abbiamo

$$\frac{6}{3^3} = \frac{2}{9}.$$

Esercizio 2

a. Basta osservare che $f_Y \geq 0$ e che

$$\int_0^1 3s^2\, ds = [s^3]_0^1 = 1.$$

b. Abbiamo

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ \frac{t}{2} & 0 \leq t \leq 2 \\ 1 & t \geq 2 \end{cases}$$

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ t^3 & 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & t \geq 1 \end{cases}$$

$$F_Z(t) = F_X(t)F_Y(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0; \\ \frac{1}{2}t^4 & 0 \leq t \leq 1 \\ 1\frac{1}{2}t & 1 \leq t \leq 2 \\ 1 & t \geq 2 \end{cases}$$

c. Abbiamo $E[X] = 1$ perché X è uniforme in $[0, 2]$.

$$E[Y] = \int_0^1 s\,3s^2\,ds = \left[\frac{3}{4}s^4\right]_0^1 = \frac{3}{4};$$

Per calcolare $E[Z]$ abbiamo bisogno della sua densità che otteniamo per derivazione della funzione di ripartizione per cui

$$f_Z(s) = \begin{cases} 0 & t < 0 \text{ oppure } t > 2; \\ 2s^3 & 0 < t < 1 \\ \frac{1}{2} & 1 < t < 2 \end{cases}$$

da cui

$$E[Z] = \int_0^1 2s^4\,ds + \int_1^2 \frac{1}{2}s\,ds = \left[2\frac{s^5}{5}\right]_0^1 + \left[\frac{1}{4}s^2\right]_1^2 = \frac{23}{20}.$$

d. Abbiamo $\mathrm{Var}(X) = \frac{2^2}{12} = \frac{1}{3}$. Per calcolare $\mathrm{Var}(Y)$ determiniamo

$$E[Y^2] = \int_0^1 s^2\,3s^2\,ds = \int_0^1 3s^4\,ds = \left[\frac{3s^5}{5}\right]_0^1 = \frac{3}{5}$$

e quindi $\mathrm{Var}(Y) = \frac{3}{5} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{80}$. Concludiamo che

$$\mathrm{Var}(X - Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) = \frac{89}{240}.$$

Esercizio 3

a. Ricordiamo che la somma di variabili di Poisson indipendenti è ancora una variabile di Poisson con parametro somma dei parametri. Per cui $X + Y \sim P(16)$ e quindi

$$P(X + Y < 5) = e^{-16}(1 + 16 + \frac{16^2}{2} + \frac{16^3}{6} + \frac{16^4}{24}) = 0,0004$$

b. Ricordando che le X_i hanno media e varianza 8 deduciamo che

$$X_1 + \cdots + X_{72} \sim N(576, 576)$$

per il teorema centrale del limite e quindi

$$P(X_1 + \cdots + X_{72} < 580) = P(\zeta_0 < \frac{579.5 - 576}{24}) = P(\zeta_0 < 0.15) = 0.55962.$$

c. Chiamando $Y_1 = X_1 - 2X_2$, $Y_2 = X_3 - 2X_4$, ecc abbiamo che le Y_i hanno media

$$E[Y_1] = E[X_1] - 2E[X_2] = -8$$

e varianza

$$\mathrm{Var}(Y_1) = \mathrm{Var}(Y_1) + (-2)^2\,\mathrm{Var}(X_2) = 5\,\mathrm{Var}(X_1) = 40$$

e quindi $Y_1 + \cdots Y_{36} \sim N(-288, 1440)$ e

$$P(Y_1 + \cdots + Y_{36} < -285) = P(\zeta_0 < \frac{-285.5 + 288}{\sqrt{1440}}) = P(\zeta_0 < 0.07) = 0.5279.$$

PROVA SCRITTA DI MDP, 14/07/2021

Esercizio 1 Una statistica rivela che il 50% degli adulti Romagnoli sono vaccinati, il 30% prevede di farlo e il 20% prevede di non farlo. Consideriamo un campione di 6 persone che chiamiamo 1,2,3,4,5,6 V_i, F_i, N_i, $i = 1, \dots, 6$ le variabili aleatorie definite da

$$V_i = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ ̀vaccinato} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}, \quad F_i = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ prevede di vaccinarsi} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}, \quad N_i = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ prevede di non vaccinarsi} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases},$$

Denotiamo inoltre con V il numero persone del campione che si sono vaccinate ed analogamente definiamo F e N.

a. Descrivere un insieme Ω dei possibili risultati di questo fenomeno aleatorio e determinare $|\Omega|$;
b. Determinare la probabilità che due siano vaccinati, due prevedono di farlo e due prevedono di non farlo;
c. Determinare la probabilità che due siano vaccinati, due prevedono di farlo e due prevedono di non farlo sapendo che 3 è vaccinato;
d. Determinare la densità congiunta di (V, F);
e. Stabilire se gli eventi $\{V = 3\}$ e $\{N = 2\}$ sono indipendenti;
f. Determinare $E[V]$;

Esercizio 2 Siano X e Y due variabili aleatorie indipendenti, X esponenziale di media 1 e Y uniforme nell'intervallo $[0, 3]$. Sia inoltre $Z = \min(X, Y)$.

a. Determinare $P(X > 2, Y > 2)$;
b. Determinare $P(Z > 2)$ e $P(Z > 4)$;
c. Determinare la funzione di ripartizione di Z;
d. Determinare $E[Z]$.

Esercizio 3 Consideriamo 100 variabili aleatorie $X_1, \dots, X_{100}$ indipendenti e uniformi nell'intervallo $[-3, 5]$.

a. Determinare $P(X_1 + \cdots + X_{100} > 101)$;
b. Determinare $P(X_1 + \cdots X_{50} - X_{51} - \cdots - X_{100} > 0.2)$;
c. Determinare $P(X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_{100}^2 > 400)$.

PROVA SCRITTA DI MDP, 14/09/2021

Risolvere i seguenti problemi giustificando tutte le risposte date.

Esercizio 1 Tre urne contengono rispettivamente 3, 5 e 7 palline ciascuna. Ogni urna ha una pallina rossa e le rimanenti blu. Effettuiamo 3 estrazioni da un'urna scelta a caso di volta in volta, senza rimpiazzo. Sia $X =$"numero di urne da cui è stata estratta almeno una pallina" e

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{se la } i\text{-esima estratta è rossa} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

per $i = 1, 2, 3$.

a. Determinare $P(X = 3)$;
b. Determinare la densità delle variabili Y_1, Y_2, Y_3;
c. Stabilire se Y_1, Y_2, Y_3 sono indipendenti;
d. Detto Y il numero totale di palline rosse estratte determinare $P(Y = 1|X = 1)$ e $P(X = 1|Y = 2)$;
e. Determinare $E[Y]$;
f. Determinare $E[X]$.

Esercizio 2 Sia

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ \frac{t}{2-t} & \text{se } 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & \text{se } t \geq 1. \end{cases}$$

a. Mostrare che $F(t)$ è una funzione di ripartizione continua;
b. Sia X la variabile "qualità di una mela prodotto in Italia (espressa come numero tra 0 e 1)". Supponendo che $F(t)$ sia la funzione di ripartizione di X determinare la probabilità che una mela scelta a caso abbia qualità superiore a 0.9;
c. Scegliendo 30 mele a caso determinare la probabilità che almeno 15 di esse abbiano qualità superiore a 0.9.
d. Rispondere alla domanda [c.] sapendo che le mele di qualità inferiore a 0.5 erano state preventivamente scartate.

Esercizio 3 È stato misurato il numero di anticorpi per unità di volume in un campione di 1000 adulti vaccinati

Anticorpi	Frequenza
200–300	110
300–400	400
400–500	440
500–600	50

a. Determinare la media campionaria e lo scarto quadratico medio del campione;
b. scelta una persona a caso in questa popolazione, determinare la probabilità che abbia almeno 370 anticorpi per unità di volume;
c. scelte 50 persone a caso in questa popolazione, determinare la probabilitá che abbiano mediamente almeno 370 anticorpi per unità di volume.

PROVA SCRITTA DI MDP, 11/01/2022

Esercizio 1 Abbiamo un'urna contenente una pallina gialla, una rossa e due blu e un'urna contenente una gialla, una rossa e tre blu. Effettuaiamo tre estrazioni da un'urna scelta a caso di volta in volta, senza rimpiazzo delle palline estratte. Consideriamo le variabili X_1, X_2, X_3 definite da

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se la } i\text{-esima estratta è gialla} \\ 2 & \text{se la } i\text{-esima estratta è rossa} \\ 3 & \text{se la } i\text{-esima estratta è blu} \end{cases},$$

per $i = 1, 2, 3$.

a. Determinare la densità di X_1;
b. determinare la densità di X_2;
c. stabilire se le variabili X_1, X_2, X_3 sono indipendenti;
d. sia $Y =$"numero di volte in cui abbiamo scelto la prima urna, e B il numero di palline blu estratte: determinare $P(B = 0|Y = 1)$ e $P(B = 0, Y = 1)$;
e. determinare la probabilità di non estrarre palline blu;
f. (extra) determinare la probabilità di estrarre una pallina per colore.

Esercizio 2 Una banana è considerata di 1a scelta se non presenta macchie sulla buccia. Il tempo T di attesa dopo il raccolto per la comparsa di una macchia espresso in giorni è una variabili continua di densità

$$f_T(s) = \begin{cases} 0 & \text{se } s < 0 \text{ o } s > 10; \\ \frac{s}{25} & \text{se } 0 < s < 5; \\ \frac{2}{5} - \frac{s}{25} & \text{se } 5 < s < 10. \end{cases}$$

a. determinare la probabilità che una banana sia ancora di 1a scelta ad una settimana dal raccolto;
b. determinare la probabilità che almeno una di due banane sia ancora di 1a scelta dopo una settimana;
c. determinare la probabilità che su 100 banane almeno 50 siano ancora di prima scelta dopo una settimana.

Esercizio 3 Lanciamo due dadi 140 volte. Ad ogni lancio diciamo che abbiamo un successo se abbiamo ottenuto almeno 7.

a. determinare la probabilità di avere successo al 1o tentativo;
b. determinare la probabilità di avere complessivamente almeno 80 successi;
c. chiamiamo Z_i il valore assoluto della differenza dei due dadi al lancio i. Determinare la probabilità che la media di questi valori $\frac{1}{140}(Z_1 + \cdots + Z_{140})$ sia almeno 2.

Cenni di soluzioni

(1) (a) Se indichiamo con U_1 e U_2 rispettivamente la scelta dell'urna 1 e 2 alla prima estrazione abbiamo $P(X_1 = 1) = P(U_1)P(X_1|U_1) + P(U_2)P(X_1 = 1|U_2) = \frac{1}{2}\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\frac{1}{5} = \frac{9}{40}$
La probabilità $P(X_1 = 2)$ è uguale a $P(X_1 = 1)$ perché la probabilità che una pallina sia estratta alla prima o alla seconda estrazione è la stessa. Per differenza $P(X_1 = 3) = 22/40$ e quindi

$$d_{X_1}(k) = \begin{cases} \frac{9}{40} & \text{se } k = 1, 2 \\ \frac{22}{40} & \text{se } k = 3 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(b) La densità di X_2 è uguale a quella di X_1: infatti la probabilità di ogni singola pallina di essere pescata al primo tentativo è uguale alla probabilità di essere pescata al secondo tentativo.

(c) Sono dipendenti. Infatti

$$P(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1) = 0 \neq P(X_1 = 1)P(X_2 = 1)P(X_3 = 1).$$

(d) $P(B = 0|Y = 1) = \frac{2}{4}\frac{1}{10} = \frac{1}{20}$. $P(B = 0, Y = 1) = \frac{1}{20}P(Y = 1) = \frac{3}{160}$.

(e) $P(B = 0) = P(Y = 0)P(B = 0|Y = 0) + P(Y = 1)P(B = 0|Y = 1) + P(Y = 2)P(B = 0|Y = 2) + P(Y = 3)P(B = 0|Y = 3) = 0 + \frac{3}{160} + \frac{1}{40} + 0 = \frac{7}{160}$.

(2) (a) $P(T > 7) = \int_7^{10} f(s)ds = \frac{9}{50} = 0.18$

(b) $P(T_1 > 7) + P(T_2 > 7) - P(T_1 > 7, T_2 > 7) = \frac{9}{50} + \frac{9}{50} - (9/50)^2 = \frac{819}{2500} = 0.328$

(c) Detto X il numero di banane ancora di 1a scelta dopo 7 giorni abbiamo che $X \sim B(100, 0.18)$ e per il TCL la possiamo approssimare con una normale $X \sim N(18, 14.76)$. Abbiamo quindi

$$P(X > 50) = P(\zeta_0 > \frac{32}{\sqrt{14.76}}) = 0$$

(3) (a) $P(X_1 \geq 7) = \frac{7}{12}$

(b) $X_1 + \cdots + X_{140} \sim N(81.67,\ (35/6)^2)$ e quindi

$$P(X_1 + \cdots + X_{140} \geq 80) = P(\zeta_0 > \frac{79.5 - 81.67}{35/6}) = P(\zeta_0 > -0.37) = \Phi(0.37) = 0.644$$

(c) Abbiamo bisogno della densità di Z_1 che è

$$d_{Z_1}(k) = \begin{cases} 3/18 & k = 0 \\ 5/18 & k = 1 \\ 4/18 & k = 2 \\ 3/18 & k = 3 \\ 2/18 & k = 4 \\ 1/18 & k = 5 \end{cases}$$

Abbiamo quindi

$$E[Z_1] = \frac{5 + 8 + 9 + 8 + 5}{18} = \frac{35}{18} = 1.94$$
$$E[Z_1^2] = \frac{5 + 16 + 27 + 32 + 25}{18} = \frac{105}{18} = 5.83$$
$$Var(Z_1) = \frac{665}{18^2} = 2.05$$

Per il TCL abbiamo quindi

$$Z_1 + \cdots + Z_{140} \sim N(272.22,\ 287.3)$$

e quindi

$$P(Z_1 + \cdots + Z_{140} > 280) = P(\zeta_0 > 0.46) = 1 - \Phi(0.46) = 0.323.$$

PROVA SCRITTA DI MDP, 31/01/2022

Esercizio 1 Nelle prossime Olimpiadi invernali ci sono 4 atleti italiani che hanno probabilità 2/3 di vincere una medaglia, e 4 atleti che hanno probabilità 1/3 di vincere una medaglia. La probabilità che gli altri atleti italiani possano vincere una medaglia è trascurabile. Si considerino le seguenti variabili:

$$\begin{aligned} X &= \#\{\text{medaglie vinte dall'Italia nelle prossime Olimpiadi invernali}\} \\ Y &= \begin{cases} 1 & \text{se l'Italia vince almeno 6 medaglie} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \end{aligned}$$

a. Determinare il valore atteso e la varianza di X;
b. Determinare la densità di Y;
c. Supponendo che l'Italia abbia vinto almeno 6 medaglie qual è la probabilità che tutti i quattro atleti più forti abbiano vinto la medaglia?
d. Vi sembra conveniente una scommessa con quota 10:1 (cioè si vincono 10 euro per ogni euro puntato) sul fatto che l'Italia vinca almeno 6 medaglie?

Esercizio 2 Si sa che statisticamente l'Etna erutta mediamente ogni 5 anni.

a. Si determini la probabilità di avere un'eruzione nei prossimi 2 anni.
b. Supponendo di non aver avuto eruzioni nei prossimi 2 anni, si determini la probabilità di avere un'eruzione nei successivi 2 anni.
c. supponendo che la prossima eruzione avverrà nei prossimi 4 anni determinare la probabilità che non ci siano eruzioni nei prossimi due anni.

Esercizio 3 Un esperimento consiste nello scegliere a caso 50 numeri *reali* compresi tra 1 e 3.
Sia X la variabile aleatoria data dalla somma di questi 50 numeri.

a. Determinare il valore atteso e la varianza di X.
b. Determinare la probabilità che X sia compreso tra 95 e 110.
c. Determinare la probabilità che la media dei numeri scelti sia minore di 1.9

Cenni di soluzioni

(1) (a) Numeriamo gli ateleti da 1 a 8, da 1 a 4 quelli più forti, da 5 a 8 gli altri. Sia

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se l'}i\text{-esimo atleta vince una medaglia} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Le X_i sono tutte variabili di Bernoulli. Per $i = 5, 6, 7, 8$ si ha $X_i \sim B(1, \frac{1}{3})$ e per $i = 1, 2, 3, 4$ si ha $X_i \sim B(1, \frac{2}{3})$. Si ha $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_8$ e quindi

$$E[X] = E[X_1] + E[X_2] + \cdots + E[X_8] = 4 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{2}{3} = 4.$$

Inoltre, siccome le X_i si possono assumere indipendenti ed hanno tutte varianza $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}$ si ha

$$Var(X) = Var(X_1) + Var(X_2) + \cdots + Var(X_8) = 8 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{9}.$$

(b) Siccome Y può assumere i soli valori 0 e 1, Y è una variabile di Bernoulli $B(1, p)$. Per determinare il parametro p utilizziamo le variabili ausiliarie $X' = X_5 + X_6 + X_7 + X_8$ e $X'' = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$. Si ha chiaramente $X' \sim B(4, \frac{1}{3})$ e $X'' \sim B(4, \frac{2}{3})$. calcoliamo

$$p = P(Y = 1) \quad = \quad P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8).$$

Ma

$$\begin{aligned} P(X = 6) &= P(X' = 4)P(X'' = 2) + P(X' = 3)P(X'' = 3) + P(X' = 2)P(X'' = 4) \\ &= (\frac{1}{3})^4 \binom{4}{2}(\frac{1}{3})^2(\frac{2}{3})^2 + 4(\frac{1}{3})^3(\frac{2}{3})\ 4(\frac{2}{3})^3(\frac{1}{3}) + \binom{4}{2}(\frac{1}{3})^2(\frac{2}{3})^2\ (\frac{2}{3})^4 \\ &= \frac{24}{3^8} + \frac{256}{3^8} + \frac{384}{3^8} = \frac{664}{3^8}. \end{aligned}$$

Inoltre

$$\begin{aligned} P(X = 7) &= P(X' = 4)P(X'' = 3) + P(X' = 3)P(X'' = 4) \\ &= (\frac{1}{3})^4\ 4(\frac{2}{3})^3(\frac{1}{3}) + 4(\frac{1}{3})^3(\frac{2}{3})\ (\frac{2}{3})^4 \\ &= \frac{32}{3^8} + \frac{128}{3^8} = \frac{160}{3^8}. \end{aligned}$$

Infine

$$\begin{aligned} P(X = 8) &= P(X' = 4)P(X'' = 4) \\ &= (\frac{1}{3})^4\ (\frac{2}{3})^4 \\ &= \frac{16}{3^8} \end{aligned}$$

Concludendo

$$P(Y = 1) = \frac{664}{3^8} + \frac{160}{3^8} + \frac{16}{3^8} = \frac{840}{3^8} = 0.128,$$

e quindi la densità di Y è $B(1, 0.128)$.

(c) La probabilità richiesta è

$$\begin{aligned}
P(X''=4|Y=1) &= \frac{P(X''=4\cap Y=1)}{P(Y=1)}\\
&= \frac{P(X''=4)\Big(P(X'=2)+P(X'=3)+P(X'=4)\Big)}{P(Y=1)}\\
&= \frac{(\frac{2}{3})^4\Big(\binom{4}{2}(\frac{1}{3})^2(\frac{2}{3})^2+4(\frac{1}{3})^3(\frac{2}{3})+(\frac{1}{3})^4\Big)}{\frac{840}{3^8}}\\
&= \frac{22}{35}=0.63.
\end{aligned}$$

(d) Detta T la variabile T=“soldi vinti dopo una scommessa di un euro” si ha:

$$E[T]=10\cdot P(Y=1)+0\cdot P(Y=0)=10\cdot 0.128=1.28.$$

Con una scommessa di 1 euro si vincono mediamente 1.28 euro e quindi la scommessa è conveniente.

(2) (a) La variabile T tempo di attesa per un'eruzione è esponenziale di parametro $\lambda=1/5$. Quindi la funzione di ripartizione di T è data da:

$$F_T(t)=\begin{cases}1-e^{-t/5} & \text{se } t>0\\ 0 & \text{altrimenti.}\end{cases}$$

Si ha quindi

$$P(T<2)=F_T(2)=1-e^{-2/5}=0.33.$$

(b) Ricordando che una variabile esponenziale soddisfa la proprietà della mancanza di memoria si ha

$$P(2<T<4|T>2)=P(0<T<2)=1-e^{-2/5}=0.33.$$

(c) Dobbiamo qui calcolare

$$P(2<T<4|T<4)=\frac{P(2<T<4)}{P(T<4)}=\frac{(1-e^{-4/5})-(1-e^{-2/5})}{1-e^{-4/5}}=\frac{0.55-0.33}{0.55}=0.40$$

(3) (a) Siano $X_1,X_2,\ldots,X_{50}$ i 50 numeri estratti. Le variabili X_i sono indipendenti e uniformi nell'intervallo $[1,3]$. Hanno quindi tutte media 2 e varianza $\frac{(4-2)^2}{12}=\frac{1}{3}$. Ne segue che

$$E[X]=50\cdot E[X_1]=50\cdot 2=100,$$

e

$$Var(X)=50\cdot Var(X_1)=\frac{50}{3}.$$

(b) Determinare la probabilità che X sia compreso tra 95 e 110.
Per il teorema centrale del limite possiamo approssimare X con una variabile normale $\zeta\sim N(100,\frac{50}{3})$. Si ha

$$\begin{aligned}
P(95<\zeta<110) &= P\left(\frac{95-100}{\sqrt{\frac{50}{3}}}<\zeta_0<\frac{110-100}{\sqrt{\frac{50}{3}}}\right)\\
&= P(-1.22<\zeta_0<2.45)\\
&= \Phi(2.45)-(1-\Phi(1.22))\\
&= 0.99286+0.88877-1\\
&= 0.88.
\end{aligned}$$

(c) Dobbiamo calcolare

$$P(\frac{1}{50}(X_1 + \cdots + X_{50}) < 1.9) = P(\zeta < 95) = P(\zeta_0 < -1.22) = 1 - \Phi(1.22) = 1 - 0.88877 = 0.111$$

PROVA SCRITTA DI MDP, 15/02/2022

Esercizio 1 Un'urna contiene 5 palline rosse, 5 gialle e 5 blu. Le palline di ciascun colore sono numerate da 1 a 5. Effettuiamo 5 estrazioni casuali senza rimpiazzo.

a. Determinare il numero atteso di palline rosse estratte;
b. determinare la probabilità di estrarre 5 palline con numeri diversi;
c. determinare la probabilità di estrarre almeno una pallina di ciascun colore;
d. consideriamo gli eventi A="viene estratta esattamente una pallina numerata con 1" e B="vengono estratte esattamente due palline rosse". Determinare $P(A)$ e $P(B)$;
e. Stabilire se gli eventi A e B sono indipendenti.

Esercizio 2 Si considerino una variabile X che può assumere valori 1 e 2 e una variabile Y che può assumere valori 1,2,3, indipendenti tra loro. Sono noti i seguenti valori della densità congiunta:

$$d_{X,Y}(2,1) = \frac{4}{15},\ d_{X,Y}(1,2) = \frac{1}{30},\ d_{X,Y}(2,3) = \frac{2}{5}.$$

a. Detto $t = d_{X,Y}(2,2)$ mostrare che t soddisfa l'equazione $t^2 - \frac{3}{10}t + \frac{1}{45} = 0$.
b. Mostrare che $t = \frac{2}{15}$ oppure $t = \frac{1}{6}$
c. Posto $t = \frac{2}{15}$ determinare la densità congiunta $d_{X,Y}$ e le densità marginali di X e Y;
d. Determinare una densità congiunta $d' : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diversa da $d_{X,Y}$ ma che abbia le stesse densità marginali di $d_{X,Y}$.

Esercizio 3 Un'indagine statistica mostra che a Cesena ci sono mediamente 50 giorni di pioggia ogni anno.

a. Determinare la probabilità che domani piova;
b. determinare la probabilità che l'anno prossimo ci siano esattamente 50 giorni di pioggia;
c. determinare la probabilità che l'anno prossimo ci siano almeno 60 giorni di pioggia;

Cenni di soluzioni

Esercizio 1

a. Detto R il numero di rosse estratte abbiamo $R \sim H(5;5,10)$ per cui $E[R] = 5\frac{5}{15} = \frac{5}{3} = 1.67$

b. Non tenendo in considerazione l'ordine delle estrazioni i casi possibili sono $\binom{15}{5} = 3003$, e i casi favorevoli sono $3^5 = 243$ e quindi la probabilità richiesta è $\frac{243}{3003} = \frac{81}{1001} = 0,081$.

c. Chiamiamo A_1, A_2, A_3 rispettivamente i modi possibili per pescare 5 palline che non rosse, non gialle, non blu. Abbiamo $|A_1| = \binom{10}{5} = 252$. Applicando il principio di inclusione esclusione dobbiamo determinare

$$|(A_1 \cup A_2 \cup A_3)^C| = |U| - 3|A_1| + 3|A_1 \cap A_2| = 3003 - 756 + 3 = 2250$$

e la probabilità richiesta è $\frac{2250}{3003} = \frac{750}{1001} = 0,75$

d.

$$P(A) = \frac{\binom{3}{1}\binom{12}{4}}{\binom{15}{5}} = \frac{3 \cdot 495}{3003} = \frac{45}{91} = 0.495$$

e

$$P(B) = \frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{10}{3}}{\binom{15}{5}} = \frac{10 \cdot 120}{3003} = \frac{400}{1001} = 0,400$$

e. Per calcolare $P(A \cap B)$ dobbiamo considerare due casi: il caso in cui viene estratto l'1 rosso e il caso in cui non viene estratto. Abbiamo quindi

$$P(A \cap B) = \frac{\binom{4}{1}\binom{8}{3} + \binom{4}{2}\binom{2}{1}\binom{8}{2}}{3003} = \frac{560}{3003} = 0,186$$

Siccome $P(A)P(B) = 0,197$ gli eventi sono dipendenti (anche se non molto)

Esercizio 2

a. I dati forniscono $d_X(2) = \frac{4}{15} + t + \frac{2}{5} = t + \frac{2}{3}$ e $d_Y(2) = t + \frac{1}{30}$ la condizione di indipendenza $d_{X,Y}(2,2) = d_X(2)d_Y(2$ diventa

$$t = (t + \frac{2}{3})(t + \frac{1}{30})$$

che ridotta in forma normale si riduce alla formula richiesta.

b. Basta a questo punto risolvere l'equazione del punto precedente che fornisce le due soluzioni

c. La tavola della densità congiunta può a questo punto essere completata in modo unico con i valori $d_{X,Y}(1,1) = \frac{1}{15}$, $d_{X,Y}(1,3) = \frac{1}{10}$. Le densità marginali sono

$$d_X(k) = \begin{cases} 1/5 & k = 1 \\ 4/5 & k = 2 \end{cases} \quad d_Y(k) = \begin{cases} 1/3 & k = 1 \\ 1/6 & k = 2 \\ 1/2 & k = 3 \end{cases}$$

d. Ci sono infiniti modi di rispondere

Esercizio 3

a. Supponiamo che i giorni di pioggia sia una variabile binomiale $X \sim B(365, p)$ dove p à la probabilità che piova in un determinato giorno. Allora $E[X] = 365p = 50$ da cui $p = \frac{50}{365} = 0,137$.

b. Usiamo il teorema centrale del limite con correzione di continuità. Abbiamo $X \sim N(50, 50 \cdot \frac{315}{365}) = N(50, 43, 15)$ per cui

$$P(X = 50) = P(49.5 < X < 50.5) = P(\frac{-0.5}{6,57} < \zeta_0 < \frac{0.5}{6.57}) = P(-0,08 < \zeta_0 < 0,08) = 2\Phi(0,08) - 1 = 2 \cdot 0.532 - 1 = 0,064.$$

c. Analogamente al punto precedente possiamo calcolare

$$P(X \geq 60) = P(\zeta_0 > \frac{59.5 - 50}{6.57}) = P(\zeta_0 > 1,45) = 1 - \Phi(1,45) = 1 - 0,926 = 0,074.$$

PROVA SCRITTA DI MDP, 09/06/2022

Scrivere nome e cognome sulla prima facciata in alto del foglio consegnato.
Motivare (sinteticamente) tutte le risposte date.
Iniziare una nuova facciata del foglio per ogni esercizio, indicando "chiaramente" l'esercizio svolto.

Esercizio 1 Un tram passa alla fermata da orario ogni 10 minuti. Tuttavia in una giornata di sciopero c'è un rischio del 20% che un tram non passi. Supponiamo di andare alla fermata in un istante casuale e chiamiamo T il tempo di attesa e X il numero di corse consecutive saltate dal momento in cui arriviamo in fermata.

a. Determinare la densità di X;
b. mostrare che $T = 10X + Y$, dove Y è una variabile continua uniforme. Che densità ha Y?
c. Determinare il valore atteso di T
d. determinare $P(T < 60|X > 3)$

Esercizio 2 Sia T il tempo di attesa affinché in Italia ci sia un incidente aereo mortale. Supponiamo che mediamente ci sia un incidente mortale ogni 2 anni.

a. Determinare la densità di T.
b. Determinare la probabilità che ci sia almeno un incidente mortale nel prossimo anno;
c. determinare la probabilità che in almeno uno dei prossimi due anni ci sia almeno un incidente mortale
d. determinare la probabilità che in almeno 30 dei prossimi 50 anni ci sia almeno un incidente mortale;

Esercizio 3 Consideriamo 100 variabili aleatorie $X_1, \dots, X_{100}$ indipendenti e uniformi nell'intervallo $[-1, 3]$.

a. Determinare $P(X_1 + \cdots + X_{100} > 102)$;
b. Determinare $P(X_1 + \cdots + X_{100} > 102|X_1 + \cdots + X_{100} > 90)$;
c. Determinare $P(\max(X_1, X_2) > 2| \min(X_1, X_2) > 0)$.

Cenni di soluzioni

(1) (a) X è geometrica standard $X \sim G(4/5)$ perché conta il numeri di insuccessi prima di aver un successo

(b) $T = 10X + Y$: infatti $10X$ è il tempo di attesa dovuto alle corse saltate, mentre $Y \sim U([0,10])$ è il tempo di attesa standard senza sciopero

(c) Ricordando che $X+1$ è una variabile geometrica modificata il cui valore atteso è $5/4$ abbiamo che $E[X] = 1/4$ per cui

$$E[T] = 10E[X] + E[Y] = 10 \cdot \frac{1}{4} + 5 = 7.5\, min$$

(d) Il dato $X > 3$ o equivalentemente $X \geq 4$ vuol dire che sono saltate le prime quattro corse e la probabilità richiesta è quindi equivalente a

$$P(T < 20) = P(X \leq 1) = \frac{4}{5} + \frac{1}{5}\frac{4}{5} = \frac{24}{25}.$$

In alternativa abbiamo

$$P(T < 60|X > 3) = \frac{P(T < 60, X > 3)}{P(X > 3)}$$

e

$$P(T < 60, X > 3) = P(T < 60, X = 4) + P(T < 60, X = 5) = P(X = 4) + P(X = 5)$$

e poi si può concludere con i conti.

(2) (a) La variabile T è un tempo di attesa che evidentemente gode di mancanza di memoria. Siccome il suo valore atteso è 2 anni abbiamo che $T \sim Exp(1/2)$

(b) Avere almeno un incidente in un anno vuol dire che il tempo di attesa è minore di un anno per cui

$$P(T < 1) = 1 - e^{-\frac{1}{2}} = 0.393$$

(c) Si sta chiedendo la probabilità che ci sia almeno un incidente nei prossimi due anni per cui abbiamo

$$P(T < 2) = 1 - e^{-\frac{2}{2}} = 0.632$$

(d) La variabile $X=$ numero di anni nei prossimi 50 in cui si verificano incidenti è un a variabile binomiale $X \sim B(50, 0.393)$ che approssimiamo quindi con una normale $N(19.67, 11.94)$. Abbiamo quindi

$$P(X \geq 30) = P(\zeta_0 > \frac{29.5 - 19.67}{\sqrt{11.94}}) = P(\zeta_0 > 2.84 = 1 - \Phi(2.84) = 1 - 0.998 = 0.002$$

(3) (a) Siccome $E[X_1] = 1$ e $Var(X_1) = \frac{4}{3}$ abbiamo $\zeta = X_1 + \cdots + X_{100} \sim N(100, \frac{400}{3})$ da cui

$$P(\zeta > 102) = P(\zeta_0 > \frac{102 - 100}{\frac{20}{\sqrt{3}}}) = P(\zeta_0 > 0.17) = 0.433.$$

(b) Abbiamo

$$P(\zeta > 90) = P(\zeta_0 > -0.87) = 0.807$$

$$P(\zeta > 102|\zeta > 90) = \frac{P(\zeta > 102)}{P(\zeta > 90)} = 0.535$$

(c) Abbiamo

$$P(\min(X_1, X_2) > 0) = P(X_1 > 0, X_2 > 0) = \frac{9}{16}.$$

e

$$P(\max(X_1, X_2) > 2, \min(X_1, X_2) > 0) = P(X_1 > 2, X_2 > 0) + P(0 < X_1 < 2, X_2 > 2) = \frac{3}{16} + \frac{1}{8} = \frac{3}{16}$$

per cui

$$P(\max(X_1, X_2) > 2 | \min(X_1, X_2) > 0) = \frac{P(\max(X_1, X_2) > 2, \min(X_1, X_2) > 0)}{P(\min(X_1, X_2) > 0)} = \frac{1}{3}.$$

PROVA SCRITTA DI MDP, 04/07/2022

Esercizio 1 Angelo, Bruno e Carlo vanno in un centro estivo insieme ad altri 9 bambini. Per fare un gioco vengono divisi in modo casuale in 3 squadre da 4

a. Determinare in quanti modi si puó effettuare tale operazione;
b. determinare la probabilitá che Angelo e Bruno finiscano nella stessa squadra.
c. sapendo che Angelo e Bruno sono nella stessa squadra, qual é la probabilitá che anche Carlo sia in squadra con loro?
d. determinare la probabilitá che Angelo, Bruno e Carlo finiscano in squadre diverse.

Esercizio 2 Sia $\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ con probabilità uniforme e consideriamo le tre variabili aleatorie X, Y, Z su Ω date da

$$X(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1,2,3 \\ 2 & \text{se } n = 4,5,6 \\ 3 & \text{se } n = 7,8,9 \end{cases} \quad Y(n) = \begin{cases} 3 & \text{se } n = 1,4,7 \\ 2 & \text{se } n = 2,5,8 \\ 1 & \text{se } n = 3,6,9 \end{cases} \quad Z(n) = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 2,4,6,8 \\ 1 & \text{se } n = 1,3,5,7,9 \end{cases}$$

a. Stabilire se X e Y sono indipendenti;
b. stabilire se X e Z sono indipendenti;
c. determinare $E[X+Y]$ e $\mathrm{Var}(X+Y)$;
d. determinare $E[X-Z]$.

Esercizio 3 Consideriamo la funzione

$$f(s) = \begin{cases} (s+1)^2 & \text{se } -1 < s < 0 \\ 1 - s^2 & \text{se } 0 < s < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

a. Tracciare un grafico approssimativo della funzione $f(s)$ e mostrare che $f(s)$ è una densità continua astratta.
b. Date 50 variabili indipendenti $X_1, \ldots, X_{50}$ aventi tutte densità $f(s)$ determinare il loro valore atteso
c. Determinare $\mathrm{Var}(X_1)$;
d. detta $\overline{X}_{50} = \frac{1}{50}(X_1 + \cdots + X_{50})$ determinare $P(\overline{X}_{50} < 18)$

Cenni di soluzioni

(1) (a) Si possono considerare le combinazioni di tipo (4,4,4) facendo attenzione peró che l'ordine non é importante in questo caso. Abbiamo quindi

$$\frac{1}{6}\binom{12}{4\,4\,4} = 5775$$

(b) Ho $\binom{10}{2} = 45$ modi di scegliere gli altri compagni di A e B. I rimanenti 8 si possono dividere in $\frac{1}{2}\binom{8}{4} = 140$. I risultati favorevoli sono quindi $140 \cdot 45 =$

PROVA SCRITTA DI MDP, 08/09/2022

(1) In un gioco di carte si pescano 3 carte a caso da un mazzo di 40 carte italiane. Si fanno 8 punti se le tre carte sono uguali e si fanno 2 punti se la somma delle carte è minore di 7 (e non sono tutte e tre uguali). Sia X la variabile aleatoria "punti fatti in una partita"
  (a) determinare la densitá di X;
  (b) determinare la media e la varianza di X;
  (c) determinare la probabilità di fare almeno 18 punti in 117 partite.

(2) Si consideri la seguente funzione

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ -t^2 + 2t & \text{se } 0 \leq t < 1 \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

  (a) Verificare che $F(t)$ è la funzione di ripartizione di una variabile aleatoria continua X.
  (b) Deteminare la densitá di X.
  (c) Determinare il valore atteso di X.

(3) Un esperimento consiste nello scegliere a caso 50 numeri reali compresi tra 1 e 3.
Sia X la variabile somma di questi 50 numeri.
  (a) Determinare la media e la varianza di X.

  (b) Determinare la probabilità che X sia compreso tra 95 e 110.
  (c) Determinare la probabilitá di aver scelto almeno 20 volte un numero maggiore di 2

PROVA SCRITTA DI MDP, 16/01/2023

Esercizio 1. Estrazioni senza reinserimento da un'urna con 15 palline di cui 5 rosse, 5 blu e 5 gialle. Sia R l'evento "viene estratta almeno una pallina rossa", e similmente B e G. Sia X il numero di palline rosse estratte, e similmente Y e Z.

Supponiamo che le estrazioni siano 3.

(a) Calcolare $P(R)$.
(b) Stabilire se R e B sono indipendenti.
(c) Calcolare $P(R \cap B \cap G)$.

Supponiamo adesso che le estrazioni siano 6.

(d) Calcolare $E(X)$.
(e) Calcolare $P(R \cap B)$.

Soluzione.

Supponiamo che le estrazioni siano 3, allora X, Y, Z sono tutte di tipo $H(3; 5, 10)$.

(a) Vale

$$P(R) = P(X > 0) = 1 - \frac{\binom{5}{0}\binom{10}{3}}{\binom{15}{3}} = \frac{67}{91} = 73,63\%$$

(b) I due eventi sono dipendenti. Infatti $P(R) = P(B) = \frac{67}{91}$. D'altra parte

$$R \cap B = \{X = 1, Y = 1, Z = 1\} \cup \{X = 2, Y = 1\} \cup \{X = 1, Y = 2\}.$$

Abbiamo

$$P(X = 1, Y = 1, Z = 1) = \frac{5^3}{\binom{15}{3}} = \frac{25}{91}$$

$$P(X = 2, Y = 1) = \frac{\binom{5}{2}\binom{5}{1}}{\binom{15}{3}} = \frac{10}{91}$$

$$P(X = 1, Y = 2) = \frac{\binom{5}{1}\binom{5}{2}}{\binom{15}{3}} = \frac{10}{91}$$

Pertanto $P(R \cap B) = \frac{45}{91} \neq \left(\frac{67}{91}\right)^2 = P(R)P(B)$.

(c) $R \cap B \cap G$ è l'evento in cui viene estratta esattamente una pallina rossa, una gialla e una blu. Dunque

$$P(R \cap B \cap G) = \frac{5^3}{\binom{15}{3}} = \frac{25}{91} = 27,47\%$$

Supponiamo che le estrazioni siano 6, allora X, Y, Z sono tutte di tipo $H(6; 5, 10)$.

(d) Scrivendo X come somma di 6 v.a. di Bernoulli troviamo $E(X) = 6\frac{5}{15} = 2$.

(e) Il complementare di $R \cap B$ è $\{X = 0\} \cup \{Y = 0\}$. Osserviamo che

$$P(X = 0) = P(Y = 0) = \frac{\binom{5}{0}\binom{10}{6}}{\binom{15}{6}} = \frac{6}{143}.$$

D'altra parte $\{X = 0, Y = 0\} = \{Z = 6\} = \emptyset$, pertanto

$$P(R \cap B) = 1 - P(X = 0) - P(Y = 0) = 1 - \frac{12}{143} = \frac{131}{143}.$$

Esercizio 2. E' il 01/01/2000. Tito è un vulcanologo e vive nei pressi di un vulcano che erutta con densità esponenziale in intervalli di tempo di media 7 anni, in attesa di un richiamo in sede che arriverà in data non stabilita. Da regolamento il richiamo avviene sempre il primo dell'anno, e può capitare in modo equiprobabile nel 2006, nel 2007, nel 2008, nel 2009 e nel 2010. Tito lascerà il vulcano solamente quando il vulcano avrà eruttato, oppure quando sarà stato richiamato in sede.

a) Qual è la probabilità che Tito assista a un'eruzione?
b) Qual è la probabilità che Tito lasci il vulcano prima del 2007?
c) Qual è la probabilità che Tito lasci il vulcano nell'arco del 2007?

Soluzione.

Sia X il tempo di attesa della prossima eruzione e sia Y l'anno in cui Tito verrà richiamato in sede, traslato per comodità di -2000. Allora X, Y sono variabili aleatorie indipendenti, e abbiamo

$$X \sim Exp(1/7), \qquad Y \sim U(\{6, 7, 8, 9, 10\}).$$

(a) Sia A l'evento "Tito assiste a un'eruzione". Allora

$$A = \{X < Y\} = \{X < 6\} \cup \{6 < X < 7, Y \geq 7\} \cup \{7 < X < 8, Y \geq 8\} \cup \\ \cup \{8 < X < 9, Y \geq 9\} \cup \{9 < X < 10, Y = 10\}$$

Essendo l'unione disgiunta abbiamo quindi

$$P(A) = P(X < 6) + P(6 < X < 7, Y \geq 7) + P(7 < X < 8, Y \geq 8) + \\ + P(8 < X < 9, Y \geq 9) + P(9 < X < 10, Y = 10)$$

D'altra parte abbiamo

$$P(X < 6) = 1 - e^{-6/7} = 0,5756$$
$$P(6 < X < 7, Y \geq 7) = P(6 < X < 7)P(Y \geq 7) = \tfrac{4}{5}(e^{-6/7} - e^{-1}) = \tfrac{4}{5} \cdot 0.0565 = 0.0452$$
$$P(7 < X < 8, Y \geq 8) = P(7 < X < 8)P(Y \geq 8) = \tfrac{3}{5}(e^{-1} - e^{-8/7}) = \tfrac{3}{5} \cdot 0.0490 = 0.0294$$
$$P(8 < X < 9, Y \geq 9) = P(8 < X < 9)P(Y \geq 9) = \tfrac{2}{5}(e^{-8/7} - e^{-9/7}) = \tfrac{2}{5} \cdot 0.0425 = 0.0170$$
$$P(9 < X < 10, Y = 10) = P(9 < X < 10)P(Y = 10) = \tfrac{1}{5}(e^{-9/7} - e^{-10/7}) = \tfrac{1}{5} \cdot 0.0368 = 0.0074$$

Pertanto $P(A) = 0,6746 = 67,46\%$.

(b) Sia B l'evento "Tito lascia il vulcano prima del 2007". Allora

$$B = \{X < 7\} \cup \{Y = 6\},$$

pertanto

$$P(B) = P(X < 7) + P(Y = 6) - P(X < 7, Y = 6) = P(X < 7) + P(Y = 6) - P(X < 7)P(Y = 6).$$

D'altra parte abbiamo

$$P(X < 7) = 1 - e^{-1} = 0.6321$$
$$P(Y = 6) = \tfrac{1}{5},$$

da cui $P(B) = 0,7057 = 70,57\%$.

(c) Sia C l'evento "Tito lascerà il vulcano nell'arco del 2007". Allora

$$C = \{X > 7, Y = 7\} \cup \{7 < X < 8, Y \geq 8\}.$$

Essendo l'unione disgiunta abbiamo quindi

$$\begin{aligned} P(A) &= P(X > 7, Y = 7) + P(7 < X < 8, Y \geq 8) = \\ &= P(X > 7)P(Y = 7) + P(7 < X < 8)P(Y \geq 8) \end{aligned}$$

D'altra parte

$$\begin{aligned} &P(X > 7) = e^{-1} = 0,3679 \\ &P(7 < X < 8) = e^{-1} - e^{-8/7} = 0,0490 \\ &P(Y = 7) = \tfrac{1}{5} \\ &P(Y \geq 8) = \tfrac{3}{5} \end{aligned}$$

da cui $P(C) = 0,1030 = 10,3\%$.

Esercizio 3. Una fabbrica produce fiammiferi in scatole da 150, e mediamente un fiammifero su 25 risulta essere difettoso. Scegliamo a caso 100 fiammiferi da una scatola.

a) Qual è la probabilità che il primo fiammifero scelto sia difettoso?
b) Qual è la probabilità che tra i fiammiferi scelti ve ne siano non più di 5 difettosi?
c) Supponiamo che tra i primi 10 fiammiferi scelti ce ne siano 5 difettosi e 5 non difettosi. Qual è la probabilità che gli altri 90 fiammiferi scelti non siano difettosi?

Soluzione.
(a) La probabilità che un fiammifero scelto a caso sia difettoso è $1/25$.

(b) Sia X il numero di fiammiferi difettosi in 100 fiammiferi presi a caso. Allora $X \sim B(100, 1/25)$, pertanto

$$P(X \leq 5) = \sum_{k=0}^{5} \binom{100}{k} \left(\frac{1}{25}\right)^k \left(\frac{24}{25}\right)^{100-k} = 0,7884 = 78,84\%$$

Possiamo calcolare un'approssimazione di tale probabilità utilizzando il teorema del limite centrale. Per $i = 1, \ldots, 100$, sia X_i la variabile aleatoria di Bernoulli che vale 1 se il fiammifero i-esimo è difettoso, e 0 altrimenti, e sia $X = X_1 + \ldots + X_{100}$. Allora vogliamo calcolare la probabilità dell'evento $X \leq 5$.

Le variabili X_i sono tutte indipendenti. Essendo $P(X_i = 1) = 1/25$, abbiamo che hanno tutte valore atteso $\mu = 1/25$ e varianza $\sigma^2 = 24/25^2$. Pertanto per il teorema del limite centrale possiamo approssimare X con una variabile normale $\zeta \sim N(100\mu, 100\sigma^2)$. Usando la correzione di continuità troviamo

$$\begin{aligned} P(X \leq 5) \simeq P(\zeta \leq 5,5) = P(\zeta_0 \leq \tfrac{5,5-100\mu}{10\sigma}) = \Phi(\tfrac{5,5-100\mu}{10\sigma}) = \Phi(\tfrac{1,5}{1,9596}) = \\ = \Phi(0,77) = 0,77935 = 77,94\% \end{aligned}$$

(c) La probabilità di non trovare fiammiferi difettosi su 90 fiammiferi scelti a caso è $(24/25)^{90} = 0,0254 = 2,54\%$.

PROVA SCRITTA DI MDP, 30/01/2023

Esercizio 1. *Lancio 2 dadi per due volte. Siano X_1, Y_1 i due risultati al primo lancio, e X_2, Y_2 i due risultati al secondo lancio. Siano inoltre $W = X_1 + Y_1$ e*

$$Z = |\max(X_1, Y_1) - \max(X_2, Y_2)|.$$

a) *Determinare la densità di W.*
b) *Stabilire se W e Z sono indipendenti.*
c) *Calcolare $P(W = 2|Z = 0)$.*
d) *Determinare $P(Z = 4)$.*

Soluzione. a) $\{W = n\} = \cup_k \{X_1 = k, Y_1 = n - k\}$, dove k varia tra 1 e $n - 1$. I valori assunti da W sono $2, 3, \dots, 12$.

Se $n = 2, \dots 7$ allora

$$P(W = n) = \sum_{k=1}^{n-1} P(X_1 = k, Y_1 = n - k) = \sum_{k=1}^{n-1} P(X_1 = k)P(Y_1 = n - k) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{6^2} = \frac{n-1}{36}$$

Se $n = 8, \dots 12$ invece

$$P(W = n) = \sum_{k=n-6}^{6} P(X_1 = k, Y_1 = n - k) = \sum_{k=n-6}^{6} P(X_1 = k)P(Y_1 = n - k) = \sum_{k=n-6}^{6} \frac{1}{6^2} = \frac{12-n}{36}$$

La densità di W è descritta dunque dalla seguente tabella

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(W = n)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

b) Le due variabili sono dipendenti. Infatti abbiamo $\{W = 3, Z = 5\} = \emptyset$: se $W = 3$, allora $\max(X_1, Y_1) = 2$, dunque $Z \leq 4$. D'altra parte $P(W = 3)$ e $P(Z = 5)$ sono entrambe non nulle, quindi $P(W = 3, Z = 5) \neq P(W = 3) \cdot P(Z = 5)$.

c) Si vede facilmente che $P(W = 2) = \frac{1}{6^2}$ e $P(W = 2, Z = 0) = \frac{1}{6^4}$. Per calcolare $P(Z = 0)$, osserviamo che su tutti i 36 possibili risultati del lancio di 2 dadi abbiamo

- 1 possibilità affinché il massimo dei risultati sia 1,
- 3 possibilità affinché il massimo dei risultati sia 2,
- 5 possibilità affinché il massimo dei risultati sia 3,
- 7 possibilità affinché il massimo dei risultati sia 4,
- 9 possibilità affinché il massimo dei risultati sia 5,
- 11 possibilità affinché il massimo dei risultati sia 6.

Dunque abbiamo

$$P(Z = 0) = \frac{1 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2 + 11^2}{6^4} = \frac{286}{6^4} > \frac{1}{6^2}$$

Pertanto

$$P(W=2|Z=0)=\frac{P(W=2,Z=0)}{P(Z=0)}=\frac{1}{6^4}\cdot\frac{6^4}{286}=\frac{1}{286}$$

d) Supponiamo che il massimo maggiore sia ottenuto nel primo lacio dei due dadi. Allora deve essere $\max(X_1,Y_1)=5$ e $\max(X_2,Y_2)=1$, oppure $\max(X_1,Y_1)=6$ e $\max(X_2,Y_2)=2$. Ragionando come per determinare la densità di W, vediamo che nel primo caso abbiamo 9 possibilità per (X_1,Y_1) e 1 possibilità per (X_2,Y_2), mentre nel secondo caso abbiamo 11 possibilità per (X_1,Y_1) e 3 possibilità per (X_2,Y_2). Prendendo in considerazione anche il caso in cui il maggiore dei massimi sia ottenuto al secondo lancio, troviamo

$$P(Z=4)=\frac{2\cdot 9\cdot 1+2\cdot 11\cdot 3}{6^4}=\frac{84}{6^4}=\frac{7}{108}=0.065$$

e)

$$P(Z=0)=\tfrac{1+3^2+5^2+7^2+9^2+11^2}{6^4}=\tfrac{286}{6^4}=0.22$$
$$P(Z=1)=\tfrac{430}{6^4}=0,33$$
$$P(Z=2)=\tfrac{296}{6^4}=0,23$$
$$P(Z=3)=\tfrac{178}{6^4}=0.14$$
$$P(Z=4)=\tfrac{2\cdot 11\cdot 3+2\cdot 9}{6^4}=\tfrac{84}{6^4}=0.06$$
$$P(Z=5)=\tfrac{2\cdot 11}{6^4}=\tfrac{22}{6^4}=0.02$$

Dunque $E(Z)=\frac{2022}{6^4}=1,54$, mentre invece

$$Var(Z)=E(Z^2)-E(Z)^2=\tfrac{5110}{6^4}-(\tfrac{2022}{6^4})^2=3,94-2,37=1,57$$

Esercizio 2. *Sia*

$$f(s)=\begin{cases}\frac{1}{5}(s+2) & se\ s\in[-2,0]\\ \frac{2}{15}(3-s) & se\ s\in[0,3]\\ 0 & altrimenti\end{cases}$$

a) *Mostrare che f è una densità continua astratta.*

Sia X una variabile aleatoria continua con densità f.

b) *Calcolare $P(X>0)$.*
c) *Calcolare il valore atteso e la varianza di X.*
d) *Calcolare la funzione di ripartizione di X.*

Sia Y un'altra variabile aleatoria sullo stesso spazio di probabilità su cui è definita X, discreta uniforme con valori $0,1,2$. Supponiamo in aggiunta che X,Y siano indipendenti.

e) *Calcolare $P(XY=0)$.*
f) *Calcolare la funzione di ripartizione di $P(XY\le -3)$ e $P(XY\le 3)$.*

Soluzione a) f è non negativa e integrabile, e vale

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(s)ds=\int_{-2}^{3}f(s)ds=\int_{-2}^{0}f(s)ds+\int_0^3 f(s)ds=\tfrac{2}{5}\cdot 2\cdot\tfrac{1}{2}+\tfrac{6}{15}\cdot 3\cdot\tfrac{1}{2}=\tfrac{2}{5}+\tfrac{3}{5}=1$$

b) $P(X>0)=\int_0^3 f(s)ds=\frac{3}{5}$.
c)

$$E(X)=\tfrac{1}{5}\int_{-2}^{0}(s^2+2s)ds+\tfrac{2}{15}\int_0^3(3s-s^2)ds=\tfrac{4}{15}+\tfrac{9}{15}=\tfrac{13}{15}$$

d) Integrando troviamo

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } s \leq -2 \\ \frac{1}{5}(\frac{t^2}{2} + 2t + 2) & \text{se } s \in [-2, 0] \\ \frac{2}{15}(3t - \frac{t^2}{2} + 3) & \text{se } s \in [0, 3] \\ 1 & \text{se } t \geq 3 \end{cases}$$

e) Poiché $\{XY = 0\} = \{X = 0\} \cup \{Y = 0\}$, abbiamo

$$P(XY = 0) = P(X = 0) + P(Y = 0) - P(X = 0, Y = 0) = P(Y = 0) = \tfrac{1}{3}.$$

f) Osserviamo che $\{XY \leq -3\} = \{X \leq -1.5, Y = 2\}$. Pertanto

$$P(XY \leq -3) = P(X \leq -1.5, Y = 2) = P(X \leq -1.5)P(Y = 2) = \frac{1}{3}P(X \leq -1.5) =$$

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}(\tfrac{t^2}{2} + 2t + 2)\big|_{-1.5} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}(\tfrac{9}{8} - 3 + 2) = \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{120}$$

Osserviamo che $\{XY \leq 3\} = \{X \leq 3, Y = 1\} \cup \{X \leq 1.5, Y = 2\}$. Pertanto

$$P(XY \leq 3) = P(X \leq 3, Y = 1) + P(X \leq 1.5, Y = 2) = \frac{1}{3}P(X \leq 3) + \frac{1}{3}P(X \leq 1.5)$$

D'altra parte $P(X \leq 3) = 1$, mentre

$$P(X \leq 1.5) = \frac{2}{15}(3t - \tfrac{t^2}{2} + 3)\big|_{1.5} = \frac{2}{15}(\tfrac{9}{2} - \tfrac{9}{8} + 3) = \frac{2}{15}(\tfrac{27}{8} + \tfrac{24}{8}) = 0.85$$

Quindi otteniamo

$$P(XY \leq 3) = \frac{1}{3} + \frac{0.85}{3} \simeq 0.62.$$

Esercizio 3. *Devo installare il battiscopa sulle pareti di un appartamento che ha un perimetro di 50 metri. Volendo risparmiare, dal rivenditore decido di servirmi solamente di pezzi di scarto (che posso eventualmente accorciare ulteriormente), la cui lunghezza varia casualmente tra 10 e 50 centimetri in modo uniforme.*

a) *Qual è la probabilità che un singolo pezzo di scarto sia lungo almeno 35 centimetri?*
b) *Supponiamo di comprare 150 pezzi di scarto. Qual è la probabilità che mi bastino per coprire tutta la parete?*
c) *Quanti pezzi devo comprare per avere una probabilità almeno dell'84% di ricoprire tutto il perimetro di casa?*

Soluzione. a) $15/40 = 3/8 = 0.375$.

b) Sia X_i la lunghezza in centimetri dell'i-esimo pezzo di scarto acquistato. Allora le variabili X_i sono indipendenti con valore atteso e $\mu = \frac{10+50}{2} = 30$ e varianza $\sigma^2 = \frac{(50-10)^2}{12} \simeq 133.33$. Dunque $\sigma \simeq 11.55$.

Sia $X = X_1 + \ldots + X_{150}$. Per TLC possiamo approssimare X con una variabile normale $\zeta \sim N(150\mu,\ 150\sigma^2) = N(4500,\ 20000)$. Pertanto

$$P(X \geq 5000) \simeq P(\zeta \geq 5000) = P(\zeta_0 \geq \tfrac{5000-4500}{141.42}) \simeq P(\zeta_0 \geq 3.53) =$$
$$= 1 - \Phi(3.53) = 1 - 0.998 = 0.2\%$$

c) Supponiamo di comprare n pezzi di scarto, e sia $X_n = X_1 + \ldots + X_n$. Allora

$$P(X_n \geq 5000) \simeq P(\zeta_0 \geq \tfrac{5000-30n}{11{,}55\cdot\sqrt{n}}) = P(\zeta_0 \leq \tfrac{30n-5000}{11{,}55\cdot\sqrt{n}}) = \Phi(\tfrac{30n-5000}{11{,}55\cdot\sqrt{n}})$$

Affinché $\Phi(\frac{30n-5000}{11{,}55\cdot\sqrt{n}}) \geq 0.84$ deve essere

$$\frac{30n - 5000}{11{,}55 \cdot \sqrt{n}} \geq 1$$

vale a dire

$$30n - 11,55 \cdot \sqrt{n} - 5000 \geq 0$$

vale a dire

$$\sqrt{n} \geq \frac{11,55 + \sqrt{11,55^2 + 4 \cdot 30 \cdot 5000}}{2 \cdot 30} = \frac{11,55 + 774,68}{60} \simeq 13,10$$

vale a dire $n \geq 172$.

PROVA SCRITTA DI MDP, 14/02/2023

Esercizio 4. *Un sacchetto contiene 6 palline gialle e 6 palline rosse e 6 palline blu. Riempiamo tre urne U_1, U_2 e U_3 (da fuori indistinguibili) ciascuna con 3 palline estratte dal sacchetto. Per $i = 1, 2, 3$, sia X_i il numero di palline rosse presenti in U_i, sia Y_i il numero di palline gialle presenti in U_i, e indichiamo con U un'urna scelta a caso.*

a. *Descrivere uno spazio di probabilitá Ω che modellizza questo fenomeno aleatorio e determinare il numero di risultati possibli $|\Omega|$.*
b. *Stabilire se X_1 e Y_2 sono indipendenti.*
c. *Qual é la probabilitá che U contenga una pallina blu?*
d. *Qual é la probabilitá che U contenga palline di tutti i colori?*
e. *Supponiamo che U_1 contenga 3 palline rosse, che U_2 ne contenga 3 gialle, e che U_3 ne contenga 2 rosse e 1 gialla. Estraiamo una pallina da U, e constatiamo che la pallina é rossa. Qual é la probabilitá che U sia U_1?*

Soluzione. a) Possiamo prendere come Ω l'insieme di tutte le triple (A_1, A_2, A_3) dove A_1, A_2, A_3 sono tre insiemi disgiunti di 3 palline estratte dal sacchetto. Dunque Ω ha cardinalità $\binom{18}{3}\binom{15}{3}\binom{12}{3} = 81\ 681\ 600$.

b) Sono dipendenti. Infatti

$$P(X_1 = 0) = \frac{\binom{12}{3}}{\binom{18}{3}} = \frac{55}{204} = 0.2696,$$

$$P(X_1 = 0, Y_2 = 3) = \frac{\binom{6}{3}\binom{9}{3}}{\binom{18}{3}\binom{15}{3}} = \frac{1}{221} = 0.0045$$

$$P(Y_2 = 3) = \frac{\binom{6}{3}}{\binom{18}{3}} = \frac{5}{204} = 0.0245$$

Pertanto

$$P(X_1 = 0 | Y_2 = 3) = \frac{P(X_1 = 0, Y_2 = 3)}{P(Y_2 = 3)} = \frac{\binom{9}{3}}{\binom{15}{3}} = \frac{12}{65} = 0.1846 \neq P(X_1 = 0).$$

c)

$$P(X_1 \geq 1) = 1 - P(X_1 = 0) = 1 - \frac{\binom{12}{3}}{\binom{18}{3}} = \frac{149}{204} = 0.7304$$

d)

$$P(X_1 \geq 1, Y_1 \geq 1, Z_1 \geq 1) = P(X_1 = 1, Y_1 = 1, Z_1 = 1) = \frac{6^3}{\binom{18}{3}} = \frac{9}{34} = 0.2647$$

e)

$$P(\text{scelgo } U_1|\text{estraggo una rossa}) = \frac{P(\text{scelgo } U_1 \text{ed estraggo una rossa})}{P(\text{estraggo una rossa})}$$
$$= \frac{P(\text{scelgo } U_1)}{P(\text{estraggo una rossa})} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{9}} = \frac{3}{5}$$

ESERCIZIO 5. *Sia X una variabile aleatoria continua uniforme sull'intervallo $[-1, 1]$, sia $Y = X^2 - 1$ e sia Z una variabile aleatoria esponenziale di parametro 2, indipendente con X.*

a) *Calcolare $P(Y < -\frac{1}{2})$.*
b) *Determinare la funzione di ripartizione e la densità di Y.*
c) *Calcolare il valore atteso e la varianza di Y.*
d) *Determinare l'insieme dei valori assunti dalla variabile YZ e calcolarne il valore atteso.*
e) *Calcolare la probabilità che $\max(|Y|, Z)$ sia maggiore di $\frac{1}{2}$.*

Soluzione.
a) $P(Y < -\frac{1}{2}) = P(X^2 < \frac{1}{2}) = P(-\frac{1}{\sqrt{2}} < X < \frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
b) Y ha valori in $[-1, 0]$. Sia $t \in [-1, 0]$, allora

$$F_Y(t) = P(Y < t) = P(X^2 < t + 1) = P(-\sqrt{t+1} < X < \sqrt{t+1}) = \tfrac{1}{2} \cdot 2\sqrt{t+1} = \sqrt{t+1}.$$

Per calcolare la densità, basta derivare la funzione di ripartizione. Dunque

$$f_Y(t) = \tfrac{1}{2\sqrt{t+1}}.$$

c) Poiché X è uniforme su $[-1, 1]$, ha densità costante $\frac{1}{2}$ in $[-1, 1]$ è nulla fuori da tale intervallo. Poiché Y è descritta dalla trasformazione $Y = \phi(X)$ con $\phi(t) = t^2 - 1$, il suo valore atteso è dato dalla formula

$$E(Y) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(t^2 - 1)dt = \tfrac{1}{6}[t^3]_{-1}^{1} - 1 = \tfrac{2}{6} - 1 = -\tfrac{2}{3}$$

La varianza di Y è data dalla formula $E(Y^2) - E(Y)^2$. D'altra parte $Y^2 = (X^2 - 1)^2 = X^4 - 2X^2 + 1$, dunque

$$E(Y^2) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(t^4 - 2t^2 + 1)dt = \tfrac{1}{10}[t^5]_{-1}^{1} - \tfrac{1}{3}[t^3]_{-1}^{1} + 1 = \tfrac{2}{10} - \tfrac{2}{3} + 1 = \tfrac{16}{30}$$

Pertanto

$$Var(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = \tfrac{16}{30} - \tfrac{4}{9} = \tfrac{48-40}{90} = \tfrac{4}{45}$$

d) La variabile Z assume valori nella seminretta $[0, +\infty)$. Pertanto YZ assume valori nella semiretta$(-\infty, 0]$. La variabile Z, essendo indipendente con X, è anche indipendente con Y. Abbiamo $E(Z) = 1/2$, quindi

$$E(YZ) = E(Y)E(Z) = -1/3.$$

e)

$$P(\max(|Y|, Z) > \tfrac{1}{2}) = 1 - P(\max(|Y|, Z) < \tfrac{1}{2}) = 1 - P(Y > -\tfrac{1}{2},\ Z < \tfrac{1}{2}) =$$
$$1 - P(Y > -\tfrac{1}{2})P(Z < \tfrac{1}{2}) = 1 - (1 - \tfrac{1}{\sqrt{2}})(1 - e^{-1}) = 0.815$$

ESERCIZIO 6. *Una società di assicurazioni per auto ha 300 000 clienti, di cui il 60% sono maschi e il 40% femmine. Un terzo degli assicurati (indipendentemente dal sesso) possiede un'auto di grossa cilindrata.*

Ricerche statistiche hanno mostrato che la probabilità di avere un incidente grave in un anno è del 2% per i maschi e del 1% per le femmine, e che tali probabilità raddoppiano per chi possiede un'auto di grossa cilindrata.

a) *Qual è la probabilità che un assicurato a caso abbia un incidente grave nel prossimo anno?*

b) *Supponiamo che un dato assicurato abbia avuto un incidente grave. Qual è la probabilità che sia un maschio con un'auto di grossa cilindrata?*

c) *Calcolare la probabilitá che il numero di assicurati maschi con un'auto di grossa cilindrata che avrá un incidente grave nel corso dell'anno sia maggiore di 2500.*

Soluzione. (a) Sia E l'evento "l'assicurato ha un incidente nel prossimo anno", M l'evento "l'assicurato è maschio", F l'evento "l'assicurato è femmina", C l'evento "l'auto dell'assicurato è di grossa cilindrata". Allora

$$\begin{aligned} P(E) = P(E|M\cap C)P(M\cap C) + P(E|M\setminus C)P(M\setminus C) + \\ + P(E|F\cap C)P(F\cap C) + P(E|F\setminus C)P(F\setminus C) \end{aligned}$$

D'altra parte

$$\begin{aligned} &P(E|M\cap C) = 0.04 \\ &P(E|M\setminus C) = P(E|F\cap C) = 0.02 \\ &P(E|F\setminus C) = 0.01 \end{aligned}$$

mentre

$$\begin{aligned} &P(M\cap C) = \tfrac{6}{10}\tfrac{1}{3} = \tfrac{6}{30} = 0.2 \\ &P(M\setminus C) = \tfrac{6}{10}\tfrac{2}{3} = \tfrac{12}{30} = 0.4 \\ &P(F\cap C) = \tfrac{4}{10}\tfrac{1}{3} = \tfrac{4}{30} = 0.133 \\ &P(F\setminus C) = \tfrac{4}{10}\tfrac{2}{3} = \tfrac{8}{30} = 0.267 \end{aligned}$$

Pertanto $P(E) = 0.021$.

(b) Nelle notazioni di prima, abbiamo

$$P(M\cap C|E) = P(E|M\cap C)\frac{P(M\cap C)}{P(E)} = 0.04\cdot\frac{0.2}{0.021} = 0.38$$

(c) Il numero di assicurati maschi con auto di grossa cilindrata è

$$n = \frac{1}{3}\cdot\frac{6}{10}\cdot 300\ 000 = 60\ 000$$

Per $i = 1, \dots, n$, sia X_i la variabile aleatoria di Bernoulli che vale 1 se l'i-esimo assicurato maschio con auto di grossa cilindrata ha un incidente e 0 altrimenti, e sia $S = \sum_{i=1}^n X_i$. Abbiamo che X_i ha media $\mu = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}$ e varianza $\sigma^2 = \frac{24}{625}$. Quindi S ha media $n\mu = 2400$ e varianza $n\sigma^2 = 2304$. Pertanto dal TLC abbiamo

$$\begin{aligned} P(S > 2500) &= P(S > 2500.5) = P(\zeta_0 > \tfrac{2500.5-2400}{\sqrt{2304}}) = P(\zeta_0 > \tfrac{100.5}{48}) \\ &= P(\zeta_0 > 2.09) = 1 - \Phi(2.09) = 1 - 0.9817 = 1.83\% \end{aligned}$$

PROVA SCRITTA DI MDP, 13/06/2023

Esercizio 1 Il numero N di fratelli/sorelle di una persona scelta a caso è una variabile geometrica $N \sim G(p)$ di media 1.5. Lanciamo un dado e scegliamo un numero di persone a caso corrispondente al numero uscito. Denotiamo con X il valore uscito dal dado e Y la variabile "numero di persone scelte che hanno esattamente 1 fratello/sorella".

a. Mostrare che $p = 2/5$.
b. Determinare la probabilità che una persona abbia esattamente un fratello/sorella.
c. Stabilire se X e Y sono indipendenti.
d. Determinare $P(Y = 1|X = 2)$ e $P(X = 2|Y = 1)$.
e. Determinare $E[Y]$.

Soluzione. a) Sappiamo che il valore atteso di una variabile geometrica modificata di parametro p è $1/p$. D'altra parte una variabile geometrica e una geometrica modificata differiscono di una traslazione di 1: o meglio, nel nostro caso, $N + 1 \sim \tilde{G}(p)$ è una variabile geometrica modificata di parametro p. Pertanto

$$E(N) = E(\tilde{G}(p)) - 1 = \tfrac{1}{p} - 1$$

Nel nostro caso, segue che il parametro della variabile geometrica che definisce il numero di fratelli/sorelle è definito dall'equazione $\frac{1}{p} - 1 = \frac{3}{2}$, quindi $\frac{1}{p} = \frac{5}{2}$ e otteniamo $p = \frac{2}{5} = 0.4$.

b) N è una variabile geometrica di parametro $p = 0.4$, dunque $P(N = 1) = (1 - p)p = \frac{6}{25} = 0.24$.

c) Le due variabili sono evidentemente dipendenti: se $X = k$ allora $Y \leq k$.

d) $P(Y = 1|X = 2)$ è la probabilità che su due persone scelte a caso ve ne sia esattamente una che abbia esattamente un fratello/sorella. Dunque

$$P(Y = 1|X = 2) = 2P(N = 1)P(N \neq 1) = 2 \cdot \tfrac{6}{25} \cdot \tfrac{19}{25} = \tfrac{228}{625} = 2 \cdot 0.24 \cdot 0.76 = 0.3648.$$

Osserviamo più in generale che se $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ allora

$$P(Y = 1|X = n) = nP(N = 1)P(N \neq 1)^{n-1} = n \cdot 0.24 \cdot (0.76)^{n-1}$$

Pertanto abbiamo

$$P(Y = 1) = \sum_{n=1}^{6} P(Y = 1, X = n) = \sum_{n=1}^{6} P(Y = 1|X = n)P(X = n) = \sum_{n=1}^{6} \frac{n}{6} \cdot 0.24 \cdot (0.76)^{n-1} = 0.3679$$

e con la formula di Bayes possiamo calcolare

$$P(X = 2|Y = 1) = P(X = 2) \cdot \frac{P(Y = 1|X = 2)}{P(Y = 1)} = \frac{1}{6} \cdot \frac{0.3648}{0.3679} = 0.1653$$

e) La variabile aleatoria Y assume valori in $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Abbiamo

$$P(Y = k) = \sum_{n=1}^{6} P(Y = k, X = n) = \sum_{n=1}^{6} P(Y = k|X = n)P(X = n) = \frac{1}{6} \sum_{n=1}^{6} \binom{n}{k} \cdot (0.24)^k \cdot (0.76)^{n-k}$$

da cui ricaviamo

$$P(Y=1)=0.36793 \qquad P(Y=2)=0.15494 \qquad P(Y=3)=0.04284$$
$$P(Y=4)=0.00745 \qquad P(Y=5)=0.00074 \qquad P(Y=6)=0.00003$$

Pertanto otteniamo il valore atteso

$$E(Y)=\sum_{k=0}^{6} kP(Y=k)=0.84$$

In alternativa, facendo meno conti, possiamo arrivare al risultato utilizzando le proprietà del valore atteso. Pensiamo ogni risultato del fenomeno aleatorio in questione come un elenco ordinato $(n;p_1,\dots,p_6)$, dove $n\le 6$ è il risultato del lancio del dado e dove $p_1,\dots,p_6$ sono 6 persone prese come segue: le prime n persone $p_1,\dots,p_n$ sono scelte a caso e tutte diverse, e se $n<6$ allora le rimanenti persone nell'elenco $p_{n+1},\dots,p_6$ sono tutte prese uguali a p_n. Se $\omega=(n;p_1,\dots,p_6)$ è un risultato, indichiamo $X(\omega)=n$ il risultato del dado e con $p_i(\omega)=p_i$ la i-esima persona nell'elenco. Se $i\le 6$, poniamo infine

$$X_i(\omega)=\begin{cases}1 & \text{se } i\le X(\omega)\\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases} \qquad Y_i(\omega)=\begin{cases}1 & \text{se } p_i(\omega) \text{ ha esattamente un fratello/sorella}\\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$$

Allora $X_i\sim B(1,\frac{i}{6})$, mentre $Y_i\sim B(1,0.24)$. Inoltre X_i e Y_i sono variabili aleatorie indipendenti. Osserviamo che

$$Y=\sum_{i=1}^{6} X_iY_i$$

Per le proprietà del valore atteso troviamo quindi

$$E(Y)=\sum_{i=1}^{6}E(X_iY_i)=\sum_{i=1}^{6}E(X_i)E(Y_i)=\sum_{i=1}^{6}\tfrac{i}{6}\cdot 0.24=0.24\cdot\sum_{i=1}^{6}\frac{i}{6}=0.24\cdot E(X)=0.24\cdot 3.5=0.84.$$

Esercizio 2 Dato un parametro reale $a > 0$, sia

$$f(s) = \begin{cases} \frac{2}{3}(s+1) & \text{se } s \in [-1, 0] \\ a - s^2 & \text{se } s \in [0, \sqrt{a}] \\ 0 & \text{se } s \notin [-1, \sqrt{a}] \end{cases}$$

a. Disegnare un grafico approssimato di $f(s)$.
b. Mostrare che l'unico valore di $a > 0$ per cui f è la densità di una variabile aleatoria continua X è $a = 1$.
c. Calcolare $P(X > 0)$.
d. Calcolare la funzione di ripartizione di X.
e. Calcolare il valore atteso di X.

Soluzione. b) Abbiamo

$$\int_{-1}^{\sqrt{a}} f(s)ds = \int_{-1}^{0} \tfrac{2}{3}(s+1)ds + \int_{0}^{\sqrt{a}} (a - s^2)ds = \tfrac{1}{3} + [as - \tfrac{1}{3}s^3]_0^{\sqrt{a}} = \tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{3}a\sqrt{a}$$

Affinché f sia la densità di una variabile aleatoria deve essere $\frac{1}{3} + \frac{2}{3}a\sqrt{a} = 1$. Pertanto $\sqrt{a}^3 = 1$, da cui $a = 1$.

c) $P(X > 0) = 1 - P(X < 0) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

d) Abbiamo $a = 1$. Se $t < 0$ allora vale $F_X(t) = 0$, mentre se $t > 1$ vale $F_X(t) = 1$.

Se $t \in [-1, 0]$ abbiamo

$$F_X(t) = \int_{-1}^{t} \tfrac{2}{3}(s+1)ds = \tfrac{1}{3}(t+1)^2$$

Se $t \in [0, 1]$ infine abbiamo

$$F_X(t) = \tfrac{1}{3} + \int_{0}^{t} (1 - s^2)ds = \tfrac{1}{3} + t - \tfrac{1}{3}t^3$$

e) Abbiamo

$$E(X) = \int_{-1}^{1} sf(s)ds = \int_{-1}^{0} \tfrac{2}{3}(s^2 + s)ds + \int_{0}^{1} (s - s^3)ds = (\tfrac{2}{9} - \tfrac{1}{3}) + (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}) = \frac{5}{36}$$

Esercizio 3 Il peso di una pigna ha densità normale di media 130 gr e scarto quadratico medio 20 gr. Sappiamo che 30 kg di pigne producono mediamente 1 kg di pinoli.

a. Quanti grammi di pinoli producono mediamente 8 kg di pigne?
b. Qual è la probabilità che una pigna pesi più di 120 gr?
c. Quante pigne bisogna raccogliere per avere una probabilità di almeno il 90% che il loro peso totale sia di almeno 30 kg?

Soluzione. a) Sia X la variabile aleatoria che indica i grammi di pinoli contenuti in un dato chilogrammo di pigne, sia Y la variabile aleatoria che indica i grammi di pinoli contenuti in dati 30 chilogrammi di pigne, e sia Z la variabile aleatoria che indica i grammi di pinoli contenuti in dati 8 chilogrammi di pigne. Allora possiamo scrivere

$$Y = Y_1 + \ldots + Y_8, \qquad Z = Z_1 + \ldots + Z_{30}$$

con $Y_i \sim Z_j \sim X$ per tutti gli indici i, j. Pertanto abbiamo $E(Y) = 8E(X)$ e $E(Z) = 30E(X)$. D'altra parte sappiamo che $E(Z) = 1000$, pertanto troviamo $E(X) = \frac{1000}{30}$ e $E(Y) = \frac{8000}{30} = 266.66$. Dunque deduciamo che mediamente 8 kg di pigne producono 266.66 gr di pinoli.

b) Sia X il peso di una data pigna, allora

$$P(X > 120) = P(\zeta_0 > \frac{120 - 130}{20}) = P(\zeta_0 > -0.5) = 0.6915$$

c) Sia n il numero di pigne raccolte, sia X_i il peso della pigna e sia $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Allora $S_n \sim N(130n, 400n)$. Dunque

$$P(S_n > 30000) = P(\zeta_0 > \frac{30000 - 130n}{20\sqrt{n}}).$$

Abbiamo $P(\zeta_0 > \lambda) \geq 0.9$ se e solo se $1 - \Phi(\lambda) > 0.9$ se e solo se $\Phi(\lambda) \leq 0.1$ se e solo se $\Phi(-\lambda) \geq 0.9$ se e solo se e solo se $-\lambda \leq 1.29$. Pertanto affinché $P(S_n > 30000)$ deve essere

$$\frac{30000 - 130n}{20\sqrt{n}} \leq -1.29,$$

vale a dire

$$130n - 25.8\sqrt{n} - 30000 \geq 0$$

L'unica radice positiva della precedente equazione in $\sqrt{n}$ è 15.29. Pertanto deve essere $n \geq 234$.

PROVA SCRITTA DI MDP, 03/07/2023

Esercizio 1 Nella roulette appaiono tutti i numeri da 0 a 36. Si possono fare vari tipi di puntate, puntando su un numero singolo, su un insieme di 2 oppure di 3. Se l'insieme di numeri prescelto non contiene il numero vincente si perde la quota puntata, altrimenti si vince $\frac{36}{n} - 1$ volte la quota puntata (oltre alla restituzione della quota stessa), dove n è la cardinalità dell'insieme di numeri prescelto.

a. Supponiamo di puntare alla roulette 1 euro su un numero solo e sia Z l'importo della vincita (eventualmente negativo). Calcolare $E(Z)$ e $Var(Z)$.

Supponiamo adesso di fare 1 giocata di 1 euro alla roulette puntando su un insieme di 3 numeri e poi una di 12 Euro su un insieme di 2 numeri. Infine, se l'importo della vincita ricavata nelle 2 giocate è positivo, facciamo una terza giocata puntando tutto l'importo vinto su un numero singolo.

Indichiamo con X_1, X_2 gli importi (eventualmente negativi) vinti alle prime 2 giocate, poniamo $X = X_1 + X_2$, e indichiamo con Y l'importo totale della vincita (eventualmente negativo) alla fine del gioco.

b. Per $i = 1, 2$, determinare se gli eventi $X > 0$ e $X_i > 0$ sono indipendenti.
c. Calcolare $P(X > 0)$ e calcolare $P(X > 210|X_2 > 0)$.
d. Calcolare $E(X)$.
e. Calcolare la densitá di Y e $E(Y)$.

Soluzione. a) La variabile Z assume valori $-1, 35$, rispettivamente con probabilità $\frac{36}{37}$ e $\frac{1}{37}$. Dunque $E(Z) = -\frac{36}{37} + \frac{35}{37} = -\frac{1}{37}$ e $Var(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2 = 1 \cdot \frac{36}{37} + 35^2 \frac{1}{37} = 34.08$. Più in generale si vede allo stesso modo che, se puntiamo un euro su due o tre numeri (invece che su un numero solo), allora il valore atteso è sempre lo stesso $E(Z) = -\frac{1}{37}$.

b) Chiaramente X_1, X_2 sono variabili indipendenti. D'altra parte abbiamo $X > 0$ se e solo se $X_2 > 0$: perdendo alla seconda giocata perdo 12 euro, ma ben che vada la prima giocata vinco 11 euro. Pertanto gli eventi $X > 0$ e $X_1 > 0$ sono indipendenti, mentre gli eventi $X > 0$ e $X_2 > 0$ sono dipendenti (o meglio, coincidono).

c) Abbiamo già osservato che $X > 0$ se e solo se $X_2 > 0$: pertanto $P(X > 0) = P(X_2 > 0) = \frac{2}{37}$. Per la seconda, osserviamo che vincere alla seconda giocata vuol dire $X_2 = 204$. Pertanto, supponendo di vincere alla seconda giocata, abbiamo che $X > 210$ se e solo se $X_1 > 6$ se e solo se $X_1 = 11$ se e solo se $X_1 > 0$. Pertanto $P(X > 210|X_2 > 0) = P(X_1 > 0) = \frac{3}{37}$.

d) Dal punto a) ricaviamo che $E(X_1) = -\frac{1}{37}$ e $E(X_2) = -\frac{12}{37}$. Dunque $E(X) = E(X_1) + E(X_2) = -\frac{13}{37}$.

e) Osserviamo che Y assume i seguenti valori:

- Se perdo ai primi due giochi, allora $Y = -12 - 1 = -13$
- Se vinco al primo gioco e perdo al secondo, allora $Y = 11 - 12 = -1$,
- Se vinco al secondo gioco e perdo al terzo, allora $Y = X - X = 0$,
- Se perdo al primo gioco, e vinco al secondo e al terzo, allora $Y = (-1 + 12 \cdot 17) \cdot 35 = 7105$,
- Se vinco al primo, al secondo e al terzo gioco, allora $Y = (11 + 12 \cdot 17) \cdot 35 = 7525$.

Pertanto la densità di Y è data dalla funzione

$$p_Y(k) = \begin{cases} \frac{3\cdot 2\cdot 1}{37^3} & \text{se } k = 7525 \\ \frac{34\cdot 2\cdot 1}{37^3} & \text{se } k = 7105 \\ \frac{2\cdot 36}{37^2} & \text{se } k = 0 \\ \frac{3\cdot 35}{37^2} & \text{se } k = -1 \\ \frac{34\cdot 35}{37^2} & \text{se } k = -13 \end{cases}$$

Il valore atteso di Y è quindi dato da

$$E(Y) = 7525 \cdot \frac{6}{37^3} + 7105 \cdot \frac{78}{37^3} - 1 \cdot \frac{70}{37^2} - 13 \cdot \frac{1190}{37^2} = -0,95$$

Esercizio 2 Studi scientifici mostrano che, tra i bambini in età scolare, l'allergia al latte ha un'incidenza del 2%, mentre l'allergia alla soia ha un'incidenza dello 0.4% (si ritiene che non ci sia relazione tra le due allergie).

a1. Qual è la probabilità che un bambino in età scolare sia allergico sia al latte che alla soia?

a2. Qual è la probabilità che un bambino in età scolare sia allergico al latte o alla soia, ma non ad entrambi?

Si consideri una scuola di 1000 bambini.

b1. Calcolare la probabilità che nella scuola vi sia almeno un bambino allergico sia al latte che alla soia.

b2. Calcolare la probabilità che nella scuola vi siano non più di due allergici sia al latte che alla soia.

b3. Mediamente, quanti bambini ci saranno nella scuola allergici sia al latte che alla soia?

Soluzione. a1) Siccome le due allergie non hanno relazione, la probabilità che un bambino sia allergico sia latte che alla soia è $\frac{2}{100} \cdot \frac{4}{1000} = \frac{8}{10^5}$

a2) La probabilità che un bambino sia allergico al latte oppure alla soia (e non ad entrambi) è $\frac{2}{100} \cdot \frac{996}{1000} + \frac{4}{1000} \cdot \frac{98}{100} = \frac{2384}{10^5}$.

b1) Sia X il numero di bambini presenti nella scuola allergici sia al latte che alla soia. Allora $X \sim B(1000, \frac{8}{10^5})$, dunque

$$P(X > 0) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1 - \tfrac{8}{10^5})^{1000} = 1 - 0.9231 = 0.0769 = 7.69\%$$

b2) Conviene approssimare X con una variabile di Poisson di parametro $\lambda = \frac{8}{100}$. Allora

$$P(X \leq 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = e^{-\lambda}(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!}) = 0.99992$$

b3) Il numero di bambini nella scuola allergici sia al latte che alla soia è in media $\frac{8}{100}$.

Esercizio 3 Siano $X_1, \dots, X_{120}$ variabili aleatorie indipendenti, tutte quante aventi distribuzione uniforme sull'intervallo $[-1, 2]$.

a. Calcolare la funzione di ripartizione e la densità di X_1^2.
b. Calcolare $P(X_1 + \dots + X_{120} > 50)$.
c. Calcolare $P(X_1 + \dots + X_{80} - X_{81} - \dots - X_{120} < 25)$.
d. Calcolare $P(X_1^2 + \dots + X_{120}^2 > 120)$.

Soluzione. a) Sia $G(t)$ la funzione di ripartizione di X_i^2. Poiché X_i^2 ha valori in $[0, 4]$, segue che $G(t) = 0$ se $t < 0$ e $G(t) = 1$ se $t > 4$. Sia $t \geq 0$, allora

$$G(t) = P(X_i^2 \leq t) = P(-\sqrt{t} \leq X_i \leq \sqrt{t})$$

Se $t \in [0, 1]$, allora $G(t) = \frac{2\sqrt{t}}{3}$. Se invece $t \in [1, 4]$ allora $G(t) = \frac{\sqrt{t}+1}{3}$. Pertanto

$$G(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ \frac{2\sqrt{t}}{3} & \text{se } t \in [0, 1] \\ \frac{\sqrt{t}+1}{3} & \text{se } t \in [1, 4] \\ 1 & \text{se } t > 4 \end{cases}$$

Per trovare la densità di X_i^2, è sufficiente derivare la funzione di ripartizione trovata negli intervalli in cui è derivabile. Troviamo dunque la densità

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 0 \\ \frac{1}{3\sqrt{t}} & \text{se } t \in (0, 1] \\ \frac{1}{6\sqrt{t}} & \text{se } t \in (1, 4] \\ 0 & \text{se } t > 4 \end{cases}$$

b) Le X_i hanno valore atteso $\mu = 1/2$ e varianza $\sigma^2 = 3^2/12 = 3/4$.

Detto $S_{120} = X_1 + \dots + X_{120}$, per il teorema del limite centrale abbiamo $S_{120} \sim N(60, 90)$. Dunque

$$P(S_{120} > 50) = P(\zeta_0 > \frac{50 - 60}{\sqrt{90}}) = P(\zeta_0 > -\frac{10}{3\sqrt{10}}) = P(\zeta_0 > -1.05) = \Phi(1.05) = 0.8531$$

c) Per $i = 1, \dots, 40$, poniamo $Y_i = X_i + X_{40+i} - X_{80+i}$. Allora $X_1 + \dots + X_{80} - X_{81} - \dots - X_{120} = Y_1 + \dots + Y_{40}$.

Le variabili aleatorie Y_i sono ancora indipendenti, e dalle proprietà di valore atteso e varianza vediamo che hanno valore atteso $\mu = 1/2$ e varianza $\sigma^2 = 3/4$.

Detto $S_{40} = Y_1 + \dots + Y_{40}$, per il teorema del limite centrale abbiamo $S_{40} \sim N(20, 30)$. Dunque

$$P(S_{40} < 25) = P(\zeta_0 < \frac{25 - 20}{\sqrt{30}}) = P(\zeta_0 < \frac{5}{\sqrt{30}}) = P(\zeta_0 < 0.91) = \Phi(0.91) = 0.8186$$

d) Sia $Z_{120} = X_1^2 + \dots + X_{120}^2$. Le variabili aleatorie X_i^2 sono ancora indipendenti, e dalle proprietà di valore atteso e varianza vediamo che hanno valore atteso $\mu = E(X_i^2) = Var(X_i) + E(X_i)^2 = 1$. Detta σ^2 la varianza delle X_i^2, abbiamo quindi $Z \sim N(120, 120\sigma^2)$. Poiché il grafico della densità di una variabile gaussiana è simmetrico rispetto all'asse verticale dato dal suo valor medio, segue che $P(Z_{120} > 120) = 0.5$.

PROVA SCRITTA DI MDP, 17/07/2023

Esercizio 1 Una macchina rilascia palline gialle e rosse a intervalli di tempo costanti secondo un meccanismo aleatorio: se la macchina ha rilasciato una pallina di un dato colore, la probabilità che la pallina successiva abbia lo stesso colore è pari a $\frac{3}{4}$.

a. Calcolare la probabilità che la macchina rilasci consecutivamente cinque palline tutte dello stesso colore.

Supponiamo che a un certo punto la macchina rilasci una pallina gialla p_0. Raccogliamo le successive cinque palline p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 in un'urna, ed estraiamo 2 palline a caso da tale urna. Indichiamo con X il numero di palline gialle presenti nell'urna, e con Y il numero di palline gialle estratte dall'urna. Infine, per $i = 1, 2, 3, 4, 5$, sia X_i la variabile aleatoria che vale 1 se p_i è gialla, e 0 se p_i è rossa.

b. Calcolare $P(X = 1)$ e $P(X = 1|X_1 = 0)$.
c. Calcolare $P(Y = 4)$.
d. Per $i = 1, \dots, 5$, calcolare $P(X_i = 1)$.
e. Calcolare $E(X)$.

Soluzione. a) La probabilità di avere 5 palline consecutive dello stesso colore è $(3/4)^4 = 0.3164$.

b) Indichiamo con E_i l'evento "L'unica pallina gialla tra $p_1, \dots, p_5$ è p_i". Allora $P(X = 1) = \sum_{i=1}^{5} P(E_i)$. D'altra parte

$$
\begin{aligned}
P(E_1) &= \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{1}{4} \cdot (\tfrac{3}{4})^3 = \tfrac{3^4}{4^5} \\
P(E_2) &= (\tfrac{1}{4})^3 \cdot (\tfrac{3}{4})^2 = \tfrac{3^2}{4^5} \\
P(E_3) &= \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{3}{4} \cdot (\tfrac{1}{4})^2 \cdot \tfrac{3}{4} = \tfrac{3^2}{4^5} \\
P(E_4) &= \tfrac{1}{4} \cdot (\tfrac{3}{4})^2 \cdot (\tfrac{1}{4})^2 = (\tfrac{1}{4})^3 \cdot (\tfrac{3}{4})^2 = \tfrac{3^2}{4^5} \\
P(E_5) &= \tfrac{1}{4} \cdot (\tfrac{3}{4})^3 \cdot \tfrac{1}{4} = \tfrac{3^3}{4^5}
\end{aligned}
$$

Pertanto

$$P(X = 1) = \frac{3^4 + 3^2 + 3^2 + 3^2 + 3^3}{4^5} = \frac{135}{1024} = 0.1318$$

Per calcolare la seconda possiamo ragionare in analogia alla precedente, oppure usare la formula per la probabilità condizionata:

$$P(X = 1|X_1 = 0) = \frac{P(X = 1, X_1 = 0)}{P(X_1 = 0)} = \frac{\sum_{i=2}^{5} P(E_i)}{1/4} = \frac{3^2 + 3^2 + 3^2 + 3^3}{4^4} = \frac{54}{256} = 0.2109$$

c) La probabilità è evidentemente zero.

d) Dal testo abbiamo $P(X_1 = 1) = \frac{3}{4}$. Se $i > 1$, abbiamo

$$P(X_i = 1) = P(X_i = 1 | X_{i-1} = 1) P(X_{i-1} = 1) + P(X_i = 1, | X_{i-1} = 0) P(X_{i-1} = 0) =$$

$$= \frac{3}{4} \cdot P(X_{i-1} = 1) + \frac{1}{4} \cdot P(X_{i-1} = 0) = \frac{3}{4} \cdot P(X_{i-1} = 1) + \frac{1}{4} \cdot \big(1 - P(X_{i-1} = 1)\big)$$

Detta $q_i = P(X_i = 1)$, per $i > 1$ abbiamo dunque la formula $q_{i+1} = q_i \cdot \frac{3}{4} + (1 - q_i)\frac{1}{4}$. Pertanto possiamo calcolare

$$P(X_1 = 1) = \tfrac{3}{4} = 0.75, \qquad P(X_2 = 1) = \tfrac{5}{8} = 0.625 \qquad P(X_3 = 1) = \tfrac{9}{16} = 0.5625$$

$$P(X_4 = 1) = \tfrac{17}{32} = 0.53125, \qquad P(X_5 = 1) = \tfrac{33}{64} = 0.515625$$

e) Abbiamo $X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5$. Siccome $X_i \sim B(1, q_i)$, abbiamo quindi

$$E(X) = q_1 + \ldots + q_5 = 2.984375.$$

Esercizio 2 Si considerino due variabili aleatorie X, Y che assumono valori rispettivamente $\{0,1,2,3\}$ e $\{0,1,2\}$. Supponiamo che per la densità congiunta $p_{X,Y}$ valgano le seguenti:

$$p_{X,Y}(0,1) = p_{X,Y}(0,2) = p_{X,Y}(1,0) = p_{X,Y}(2,0) = p_{X,Y}(3,1) = p_{X,Y}(3,2) = 0$$

$$p_{X,Y}(3,0) = p_{X,Y}(1,2) = p_{X,Y}(2,2) = \tfrac{1}{8}$$

$$p_{X,Y}(1,1) = p_{X,Y}(2,1) = \tfrac{2}{8}$$

a. Determinare la densità congiunta e le densità marginali di X, Y.

b. Calcolare valore atteso e varianza di XY.

Sia adesso Z una terza variabile aleatoria indipendente con X, Y, di tipo geometrico con media $1/8$.

c. Calcolare densità, valore atteso e varianza di $\min(|X-Y|, Z)$.

Soluzione.

Riorganizzando il dato della probabilità congiunta in tabella, abbiamo

$X\backslash Y$	0	1	2
0		0	0
1	0	2/8	1/8
2	0	2/8	1/8
3	1/8	0	0

a. Per determinare la densità congiunta, rimane da calcolare $p_{X,Y}(0,0)$. Poiché i valori della tabella devono somare ad 1, otteniamo

$$p_{X,Y}(0,0) = 1 - 2 \cdot \frac{2}{8} - 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$$

Le densità marginali sono quindi

$$p_X(k) = \begin{cases} 1/8 & \text{se } k = 0,3 \\ 3/8 & \text{se } k = 1,2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad p_Y(k) = \begin{cases} 2/8 & \text{se } k = 0,2 \\ 4/8 & \text{se } k = 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

b) Evidentemente le due variabili non sono indipendenti. Possiamo calcolare facilmente la densità di XY:

$$p_{XY}(k) = \begin{cases} 1/8 & \text{se } k = 4 \\ 2/8 & \text{se } k = 0,1 \\ 3/8 & \text{se } k = 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Pertanto

$$E(XY) = 1 \cdot \frac{2}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{12}{8} = 1.5$$

Per la varianza, calcoliamo

$$E(X^2Y^2) = 1 \cdot \frac{2}{8} + 4 \cdot \frac{3}{8} + 16 \cdot \frac{1}{8} = \frac{30}{8} = 3.75$$

Pertanto $Var(XY) = E(X^2Y^2) - E(XY)^2 = 1.5$.

c) Posto $Z \sim G(p)$, abbiamo $E(Z) = \frac{1}{p} - 1 = \frac{1}{8}$. Dunque $p = \frac{8}{9}$.

Poniamo $W = \min(|X-Y|, Z)$. Osserviamo che $|X-Y|$ ha densità

$$p_{|X-Y|}(k) = \begin{cases} 1/2 & \text{se } k = 0 \\ 3/8 & \text{se } k = 1 \\ 1/8 & \text{se } k = 3 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Quindi W assume valori $0,1,2,3$, e la densità di W è calcolata come segue

$$P(W=0) = P(|X-Y|=0) + P(Z=0) - P(|X-Y|=Z=0) = \tfrac{1}{8} + \tfrac{2}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{8}{9} - \tfrac{4}{9} = \tfrac{17}{18} = 0.9444$$

$$P(W=1) = P(|X-Y|=1, Z \geq 1) + P(|X-Y|>1, Z=1) = \tfrac{3}{8} \cdot \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{8} \cdot \tfrac{8}{9} \cdot \tfrac{1}{9} = \tfrac{35}{648} = 0.0540$$

$$P(W=2) = P(|X-Y|=3, Z=2) = \tfrac{1}{8} \cdot \tfrac{8}{9} \cdot \tfrac{1}{9} = \tfrac{1}{81} = 0.0123$$

$$P(W=3) = P(Z \geq 3, |X-Y| = 3) = (1 - \tfrac{8}{9} - \tfrac{8}{9^2} - \tfrac{8}{9^3}) \cdot \tfrac{1}{8} = \tfrac{1}{9^3} = 0.0014$$

Pertanto

$$E(W) = 1 \cdot 0.0540 + 2 \cdot 0.0123 + 3 \cdot 0.0014 = 0.0828$$
$$E(W^2) = 1 \cdot 0.0540 + 4 \cdot 0.0123 + 9 \cdot 0.0014 = 0.1158$$
$$Var(W) = E(W^2) - E(W)^2 = 0.1089$$

Esercizio 3 Siano $X_1, \ldots, X_{240}$ variabili aleatorie esponenziali indipendenti di parametro 3.

a. Calcolare $P(X_1 + \ldots + X_{240} > 85)$.
b. Mostrare, calcolandone la funzione di ripartizione, che $\min(X_1, X_2)$ è una variabile esponenziale di parametro 6.
c. Calcolare $P(\min(X_1, X_2) + \ldots + \min(X_{239}, X_{240}) > 24)$.

Soluzione. a) Abbiamo $E(X_i) = \frac{1}{3}$, $Var(X_i) = \frac{1}{9}$. Sia $S_{240} = X_1 + \ldots + X_{240}$. Dal TLC abbiamo $S_{240} \sim N(80, \frac{240}{9})$, pertanto

$$P(S_{240} > 85) = P(\zeta_0 > \frac{85 - 80}{\sqrt{240}/3}) = P(\zeta_0 > \frac{5}{5.164}) = P(\zeta_0 > 0.97) = 1 - \Phi(0.97) = 1 - 0.83398 = 0.16602$$

b) Abbiamo

$$P(\min(X_1, X_2) < t) = 1 - P(\min(X_1, X_2) > t) = 1 - P(X_1 > t)P(X_2 > t) = 1 - e^{-3t}e^{-3t} = 1 - e^{-6t}$$

c) Abbiamo $E(\min(X_i, X_{i+1}) = \frac{1}{6}$, $Var(\min(X_i, X_{i+1}) = \frac{1}{36}$. Sia $T_{120} = \min(X_1, X_2) + \ldots + \min(X_{239}, X_{240})$, dal TLC abbiamo $T_{120} \sim N(20, \frac{120}{36})$. Pertanto

$$P(T_{120} > 24) = P(\zeta_0 > \frac{24 - 20}{\sqrt{120}/6}) = P(\zeta_0 > \frac{4}{1.826}) = P(\zeta_0 > 2.19) = 1 - \Phi(2.19) = 1 - 0.0.98574 = 0.01426$$

PROVA SCRITTA DI MDP, 13/09/2023

Esercizio 1 Un'urna contiene 5 palline numerate da 1 a 5. Estraiamo un numero casuale di palline e indichiamo con X="numero di palline estratte", Y ="media dei numeri estratti", Z ="numero di palline dispari estratte".

a. Determinare la densitá di X;
b. determinare $P(X = 2, Y = 3)$;
c. determinare la densitá di Z;
d. stabilire se X e Y sono indipendenti;
e. stabilire se gli eventi "$Y = 3$" e "$Z = 2$" sono indipendenti

Soluzione.
$X \sim U(1, 2, 3, 4, 5)$;
$P(X = 2, Y = 3) = \frac{1}{25}$
$d_Z(k) = \frac{3}{10}$ per $k = 1, 2, 3$ e $d_Z(0) = \frac{1}{10}$
X e Y sono dipendenti;
sono dipendenti

Esercizio 2 Alice e Bruno fanno una festa, a cui invitano rispettivamente X e Y persone. Supponiamo di sapere che X e Y siano variabili aleatorie di Poisson indipendenti di media 30 e 40. Supponiamo anche di sapere che gli amici di Alice si presentano con probabilità 1/2, mentre quelli di Bruno con probabilità 3/4.

a. Calcolare la probabilità che alla festa siano invitate almeno 10 persone.
b. Calcolare la probabilità che Alice inviti esattamente 40 persone, e che esattamente 20 di loro si presentino alla festa.
c. Sia U il numero di amici di Alice che si presentano alla festa, e sia V il numero di amici di Bruno che si presentano alla festa. Mostrare U è una variabile di Poisson di media 15, e che V è una variabile di Poisson di media 30.
d. Calcolare in media quante persone parteciperanno alla festa.

Esercizio 3 Prima di ogni olimpiade, la torcia olimpica viene trasportata da Olimpia alla capitale del paese ospitante l'evento mediante una lunga staffetta, i cui partecipanti sono detti *tedofori*. Supponiamo che il numero dei tedofori sia 720. Indichiamo con T_i il tempo (espresso in ore) impiegato dal i-esimo tedoforo a percorrere il relativo percorso ed assumiamo che le variabili T_i siano tutte indipendenti con la stessa distribuzione, di media 3 ore e scarto quadratico medio 10 (espresso in minuti).

a. Qual è la probabilità che la torcia olimpica arrivi a destinazione in meno di 89 giorni?
b. Gli organizzatori vorrebbero comunicare alla stampa il giorno di arrivo della fiaccola. Quanti giorni impiegherà mediamente la fiaccola ad arrivare a destinazione?
c. Qual è il massimo scarto ammissibile σ affinché la probabilità che la fiaccola arrivi con un anticipo o un ritardo superiore a 5 ore rispetto all'istante previsto sia minore dello 0.1%?