

Esercizi del 29/09/2021

Gli esercizi di questa settimana vanno risolti con le mani, possibilmente senza utilizzare alcuna formula.

1. Devo regalare due biglietti per uno spettacolo a due tra dieci miei amici. In quanti modi posso fare questa scelta?
2. Quante sono le possibili classifiche finali in un torneo a tre squadre (considerando anche possibili parimerito)?
3. Quanti sono i possibili lanci di tre dadi in cui il risultato più grande è almeno 5, il secondo è almeno 4, il terzo almeno 3?
4. Mostrare che i sottoinsiemi di cardinalità pari di un insieme con 11 elementi sono tanti quanti quelli di cardinalità dispari.
5. Quattro coppie moglie-marito di scambisti decidono di scambiarsi i propri partner per una serata. In quanti modi possono effettuare questa scelta (in modo che ogni uomo passi la serata con la moglie di un altro)?
6. Sia $A=\{1,2,3,4\}$. Quante sono le sequenze in A di lunghezza 6 in cui ogni elemento di A compare un numero pari di volte? E quante quelle in cui ogni elemento di A compare un numero dispari di volte?

Cenni di soluzioni

1. In questo esercizio l'ordine con cui scelgo i miei due amici non è importante. Se li regalo a Luca e Aldo oppure a Aldo e Luca è chiaramente la stessa cosa. Possiamo rispondere in questo modo: chiamiamo $1, 2, 3, \dots, 10$ i miei amici. Conto quante sono le scelte in cui 1 riceve il biglietto: sono 9. Conto ora quelle in cui 1 non riceve il biglietto e procedo similmente a prima: inizio contando quelle in cui 2 riceve il biglietto (e 1 no): sono 8 e poi conto quelle in cui né 1, né 2 ricevono il biglietto. Proseguendo in questo modo le possibili scelte sono:

$$9+8+7+6+5+4+3+2=45.$$

2. Chiamiamo A,B,C le tre squadre.

Abbiamo una possibile classifica in cui le 3 squadre finiscono a parimerito.

Contiamo le classifiche in cui due squadre finiscono a parimerito e la terza no.

Abbiamo 3 possibili scelte per le due squadre a parimerito: AB,AC,BC. Contiamo quelle in cui AB sono a parimerito. Abbiamo AB prime e C terza, oppure C prima e AB seconde, quindi due possibilità. In tutto abbiamo quindi 6 classifiche con due squadre a parimerito.

Infine le classifiche in cui non ci sono parimerito sono 6.

In tutto abbiamo quindi 13 classifiche.

3. Bisogna contare con ordine tutte le possibilità. Se i dadi danno risultati distinti i valori possibili sono 345, 346,356,456. Se ho due valori uguali questi devono essere almeno 4: abbiamo quindi 445,446,553,554,556,663,664,665, Se ho tre valori uguali ho solo 555 e 666. In tutto 14 possibilità. Si osservi come in questo caso l'ordine non sia importante.

4. La funzione che associa ad ogni sottoinsieme il suo complementare è una corrispondenza biunivoca tra i sottoinsiemi di cardinalità pari e quelli di cardinalità dispari.

5. Ogni scelta la possiamo pensare come una permutazione dei numeri da 1 a 4 in cui non ci sono numeri che rimangono al loro posto: ad esempio 2341 sta ad indicare che i mariti 1,2,3,4 si accompagnano alle mogli 2,3,4,1.

Per simmetria possiamo supporre che il marito 1 vada con la moglie 2 e poi moltiplicheremo il risultato per tre per considerare le altre possibili scelte (moglie 3 e moglie 4)

Abbiamo 2341, 2143, 2413 e quindi in tutti 9 possibili scelte.

