Programmazione Lineare: Introduzione

Daniele Vigo
D.E.I. – Università di Bologna
daniele.vigo@unibo.it

rev. 1.0 – 2023

Programmazione Lineare

Def.: (F, φ) è un problema di Programmazione Lineare (LP, PL) se

- la funzione obiettivo φ è lineare

  Es. $\varphi(x) = c^T x = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$

- la regione ammissibile $F \subseteq R^n$ è definita da

  $g_i(x) \leq 0,\ h_j(x) = 0 \ \ (i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, p)$

  con $g_i, h_j : R^n \rightarrow R$ lineare $\forall\, i$ e $\forall\, j$

  Es. $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \geq d_i$

Forma matriciale

- Normalmente il problema si esprime in forma matriciale

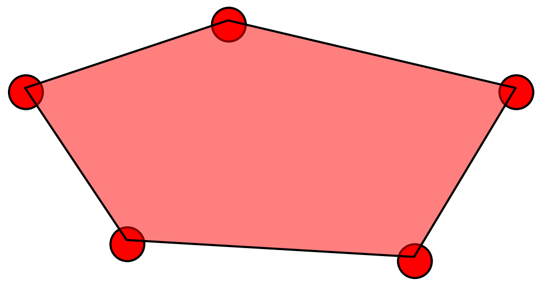
$$\min c^T x$$

$$Ax \geq d$$

$$x \geq 0$$

Regione ammissibile di PL

- *F* è un insieme convesso (poliedro)



- il numero di $x \in F$ da esaminare per determinare x^* è un numero finito ($\equiv$ vertici del poliedro)

  $\Rightarrow$ problema combinatorio

Esempio

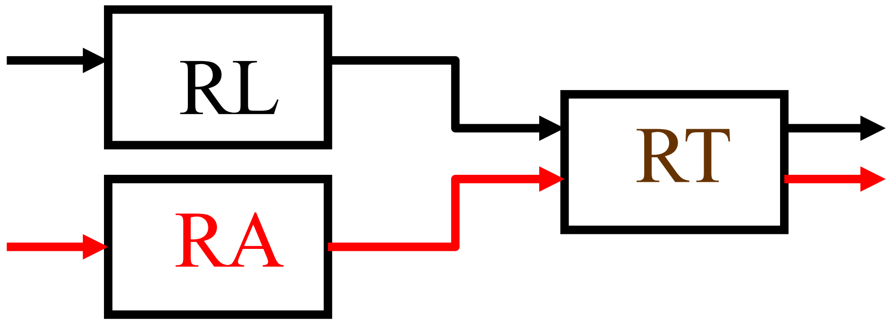
$$
\begin{aligned}
\min\ & 3x_1 - 2x_2 + x_3 \\
\text{s.t.}\ & 2x_1 + x_2 - x_3 \ge 2 \\
& x_1 \phantom{{}+x_2} + 2x_3 \ge 1 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

$$\Downarrow$$

$$n = 3 \quad m = 2 \quad c^T = [3\ {-2}\ 1] \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad d = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

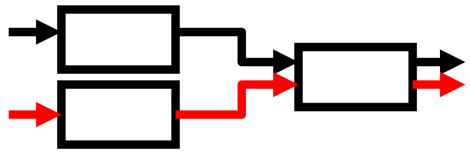
Es. 1: Produzione di sedie (1)

- 2 prodotti:
  - Sedia in Legno (SL)
  - Sedia in Alluminio (SA)
- 3 reparti:
  - Lavorazione parti in Legno (RL)
  - Lavorazione parti in Alluminio (RA)
  - Lavorazione parti in Tessuto (RT)



Produzione di sedie (2)

- Tempi di Produzione (min. per pezzo)
- Ricavo netto (Euro per pezzo)
- Disponibilità reparti (min. per periodo)



	RL	RA	RT	Ricavo
SL	10	-	30	30
SA	-	20	20	50
D.	40	120	180	

Formulazione del problema LP (1)

1. Capire il problema
2. Individuare le variabili decisionali
3. Definire la funzione obiettivo come combinazione delle variabili decisionali
4. Definire i vincoli come combinazione delle variabili decisionali
5. Identificare eventuali upper o lower bound sulle variabili decisionali

1. Definizione e 2. Variabili

- Dati:
  - Tempi di Produzione (min. per pezzo)
  - Disponibilità reparti (min. per periodo)
  - Ricavo netto (Euro per pezzo)

Supponendo di poter vendere tutta la produzione quante sedie di ciascun tipo devono essere prodotte per massimizzare il ricavo ?

- Variabili decisionali:
  - x_1 = n. di sedie di legno prodotte in un periodo
  - x_2 = n. di sedie di alluminio prodotte in un periodo
  - x_1 ed x_2 possono essere frazionarie

3. Funzione obiettivo

- Profitto per unità di prodotto:

SL	SA
30	50

$$\max z = 30\, x_1 + 50\, x_2$$

4. Vincoli

- Consumo tempo per unità di prodotto:

Reparto	SL	SA	Disp.
RL	10	–	40
RA	–	20	120
RT	30	20	180

$$\max z = 30\, x_1 + 50\, x_2$$

$$\begin{array}{lrcrl}
\text{RL)} & 10\, x_1 & & & \leq 40 \\
\text{RA)} & & & 20\, x_2 & \leq 120 \\
\text{RT)} & 30\, x_1 & + & 20\, x_2 & \leq 180
\end{array}$$

5. Upper e lower bound

- valori negativi delle *x* privi di senso
- vincoli di non negatività delle variabili:

$$
\begin{array}{lrcrcr}
 & \max z = & 30\,x_1 & + 50\,x_2 & & \\
\text{RL)} & & 10\,x_1 & & \leq & 40 \\
\text{RA)} & & & 20\,x_2 & \leq & 120 \\
\text{RT)} & & 30\,x_1 & + \; 20\,x_2 & \leq & 180 \\
 & & x_1 & , \quad x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Modello LP completo

- stabilità numerica degli algoritmi:
- coefficienti interi e piccoli in valore assoluto

$$
\begin{array}{lrcrcr}
\max & 3\,x_1 & + & 5\,x_2 & & \\
\text{RL)} & x_1 & & & \leq & 4 \\
\text{RA)} & & & 2\,x_2 & \leq & 12 \\
\text{RT)} & 3\,x_1 & + & 2\,x_2 & \leq & 18 \\
 & x_1 & , & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Es. 2: Produzione di vasche (1)

- Un'azienza produce due tipi di vasche: Blue Tornado e Hot Spring

	BT	HS
Motore	1	1
Lavoro	9 ore	6 ore
Tubazione	12 metri	16 metri
Profitto Unitario	€350	€300

- sono disponibili: 200 motori, 1566 ore di lavoro, e 2880 metri di tubazione

Modello LP

$$
\begin{array}{llcrcl}
\max & 350\,x_1 & + & 300\,x_2 & & \\
s.t. & 1\,x_1 & + & 1\,x_2 & \leq & 200 \\
 & 9\,x_1 & + & 6\,x_2 & \leq & 1566 \\
 & 12\,x_1 & + & 16\,x_2 & \leq & 2880 \\
 & & & x_1 & \geq & 0 \\
 & & & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Problemi di Mix di Produzione

- n prodotti, m risorse (materie prime, macchine …)
- a_{ij} quantità della risorsa i necessaria per produrre 1 unità del prodotto j (i=1,…,m; j=1,…,n)
- d_i quantitativo di risorsa i (i=1,…,m) disponibile
- r_j ricavo per 1 unità del prodotto j (j=1,…,n)
- x_j quantità del prodotto j da produrre (j=1,…,n)

$$\max r^T x$$
$$Ax \leq d$$
$$x \geq 0$$

Es. 3: Problema della dieta

… per cani e gatti

Sostanze	Alimenti (contenuto g/Kg)			Contenuto minimo (g)
	A1	A2	A3	
Proteine	500	300	300	800
Grassi	300	300	100	400
Carboidrati	0	100	200	2000

Costo (€/Kg)	5	2	1
Variabili (Kg)	x_1	x_2	x_3

Modello LP

$x_1, \; x_2, \; x_3$: Kg di A2, A2, A3 da acquistare

$$
\begin{array}{llcl}
\min & z = 5x_1 + 2x_2 + x_3 & & \\
\text{s.t.} & 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 & \geq & 8 \\
& 3x_1 + 3x_2 + x_3 & \geq & 4 \\
& x_2 + 2x_3 & \geq & 20 \\
& x_1, \; x_2, \; x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Problema della dieta (generale)

- n alimenti, m sostanze nutritive
- a_{ij} quantità della sostanza i in 1 unità dell'alimento j (i=1,…,m; j=1,…,n)
- d_i fabbisogno della sostanza i (i=1,…,m)
- c_j costo 1 unità dell' alimento j (j=1,…,n)
- x_j quantità dell'alimento j da acquistare (j=1,…,n)

$$\min c^T x$$

$$Ax \geq d$$

$$x \geq 0$$

Es. 4: Lotti minimi di produzione (1)

- Pianificazione della produzione di un prodotto nell'arco di *n* mesi con costi di produzione e stoccaggio variabili

- Per ogni mese $i = 1, \dots, n$

d_i domanda del mese i

m_i capacità di produzione del mese i

c_i costo di produzione unitario del mese i

r_i costo di stoccaggio unitario del mese i

s_0 quantità in magazzino a inizio periodo

Lotti minimi di produzione (2)

- Variabili decisionali:

x_i quantità prodotta nel mese i

s_i quantità stoccata nel mese i

Obiettivo:
minimizzazione del costo totale

$$\min \sum_{i=1,n} c_i x_i + \sum_{i=1,n} r_i s_i$$

Lotti minimi di produzione (3)

- Obiettivo min $\sum_{i=1,n} c_i x_i + \sum_{i=1,n} r_i s_i$

- capacità $x_i \leq m_i \quad (i = 1,\ldots, n)$
- domanda $x_i + s_{i-1} - s_i = d_i \quad (i = 1,\ldots, n)$

- non negatività $x_i, s_i \geq 0 \quad (i = 1,\ldots, n)$

Soluzione LP: Approccio intuitivo

- Blue Tornado (x_1) ha un profitto unitario più alto
  - conviene produrne il maggior numero possibile
  - Ponendo $x_2 = 0$
    - Vincolo 1: $x_1 <= 200$
    - Vincolo 2: $9\ x_1 <= 1566$ o $x_1 <= 174$
    - Vincolo 3: $12\ x_1 <= 2880$ o $x_1 <= 240$
- Il massimo valore di x_1 è 174 e il profitto totale è €350*174 + €300*0 = €60900
- Questa soluzione è ammissibile: è anche ottima?
- No! (x_1= 122, x_2 = 78, è amm. e vale €66100)

Soluzione LP: Approccio Grafico

- I vincoli di un problema LP definiscono la sua regione ammissibile.
- Il punto migliore nella regione ammissibile è la soluzione ottima per il problema.
- Per problemi LP con 2 (o 3) variabili, è possibile disegnare la regione ammissibile e trovare la soluzione ottima.

Interpretazione geometrica di LP

- F è l'intersezione di insiemi convessi associati ai vincoli

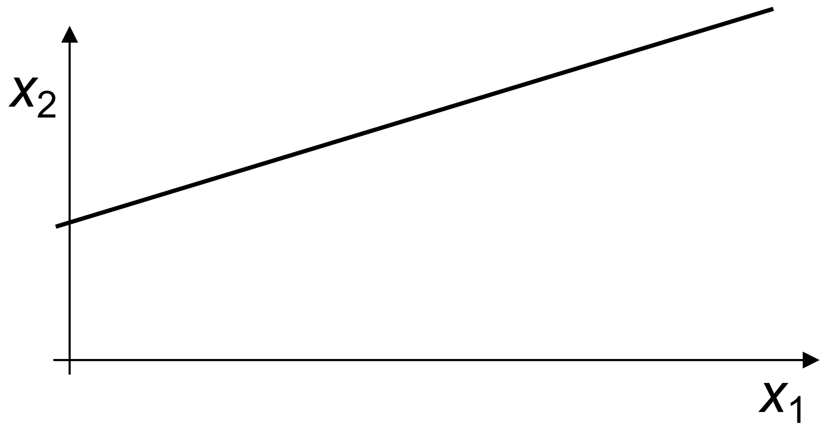
$$H = \{\, x \in R^n : a^T x = d \,\}$$

$$S = \{\, x \in R^n : a^T x \leq d \,\}$$

- F è un insieme convesso intersezione di un numero finito di insiemi convessi definiti dalle relazioni lineari: poliedro convesso (se limitato: politopo)

Equazioni Lineari

$H=\{ x \in R^n : a^T x = d \}$ è un iperpiano

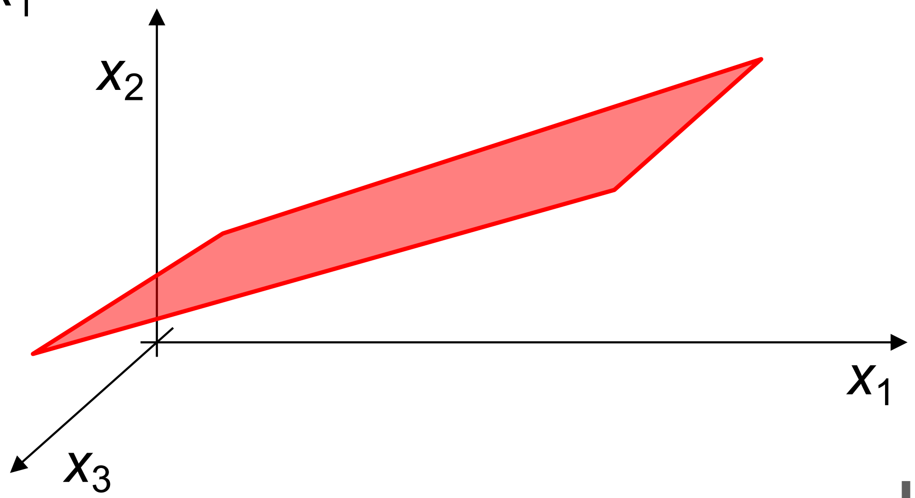


$a_1x_1 + a_2x_2 = d$

in R^2 *è una retta*

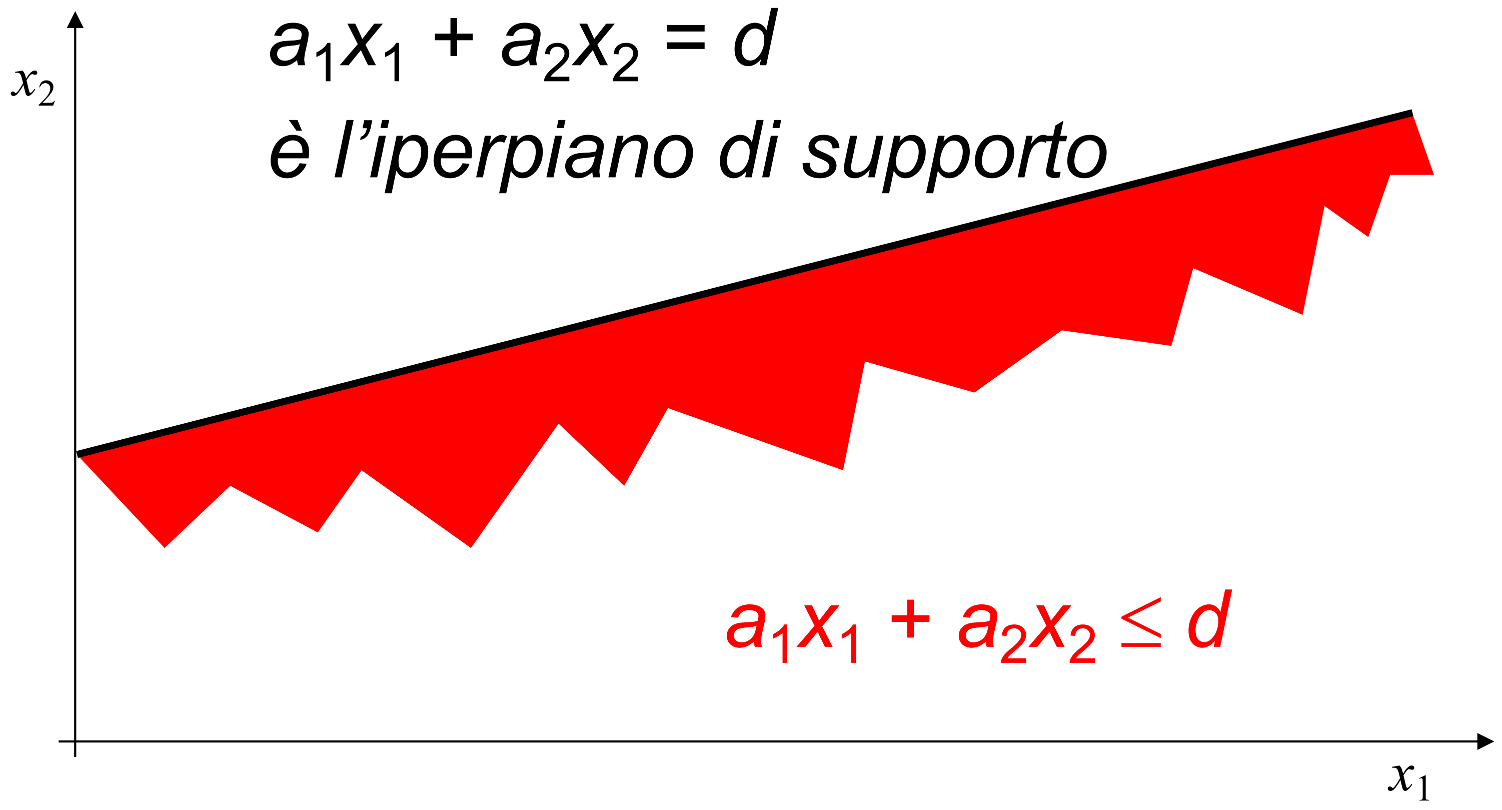
$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = d$

in R^3 *è un piano*



Disequazioni Lineari

$S = \{ x \in R^n : a^T x \leq d \}$ è un semispazio

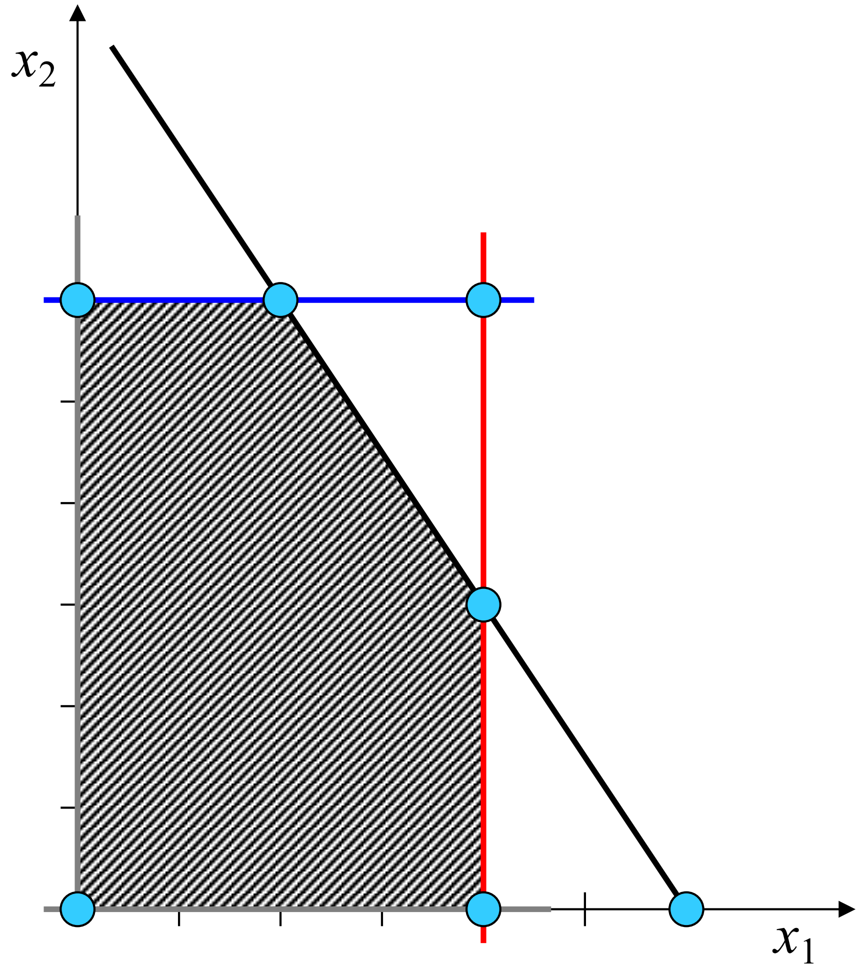


Regione ammissibile

$$\max z = 3x_1 + 5x_2$$

$$\begin{aligned} s.t. \quad x_1 & & \le 4 \\ & 2x_2 & \le 12 \\ 3x_1 & + 2x_2 & \le 18 \\ x_1 & , x_2 & \ge 0 \end{aligned}$$

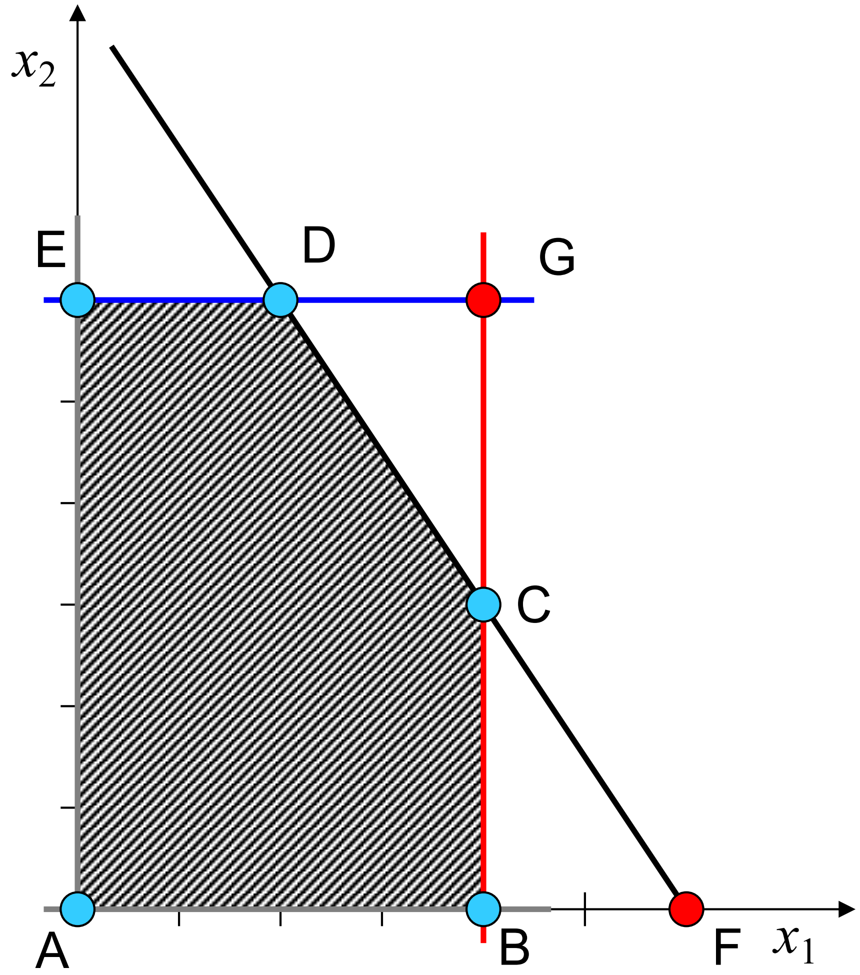
Vertici: intersezione di vincoli o di iperpiani di supporto



Regione ammissibile

$$\max z = 3x_1 + 5x_2$$

$$\begin{aligned} s.t. \quad & x_1 \le 4 \\ & 2x_2 \le 12 \\ & 3x_1 + 2x_2 \le 18 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

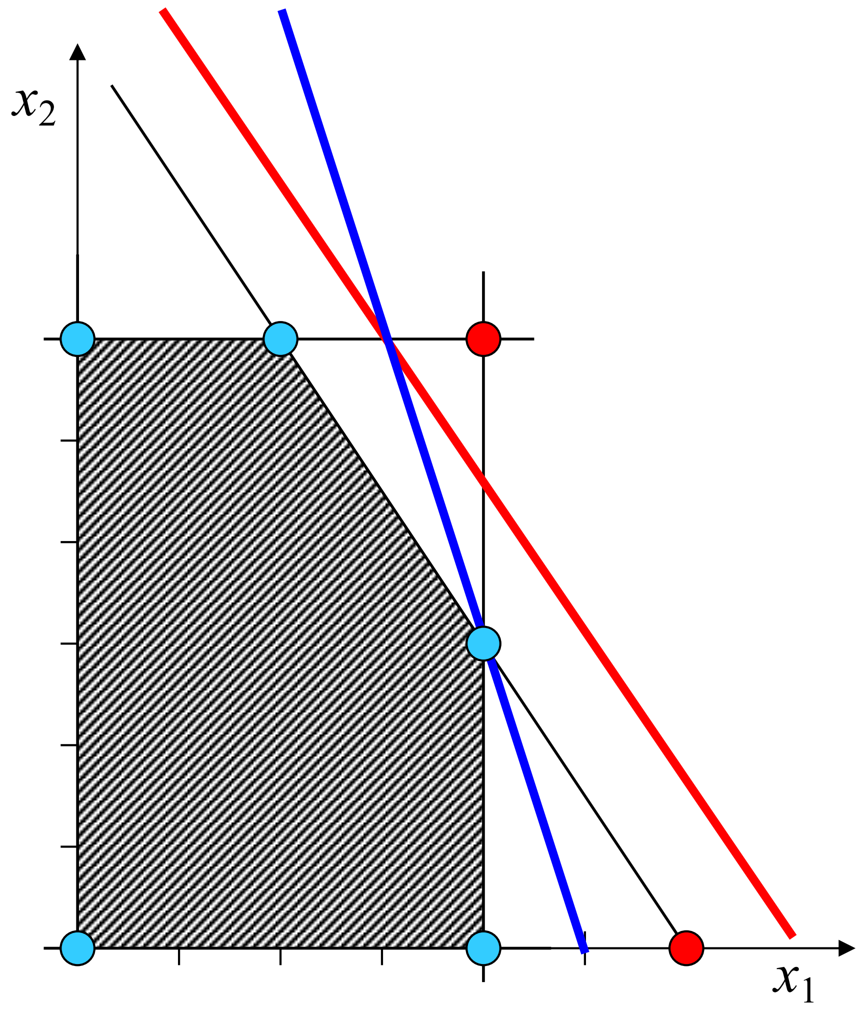


Vincoli ridondanti

$$\begin{aligned} \max z = 3x_1 &+ 5x_2 \\ s.t. \quad x_1 & \quad \le 4 \\ 2x_2 &\le 12 \\ 3x_1 + 2x_2 &\le 18 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

1) $10x_1 + 7x_2 \le 70$

2) $3x_1 + x_2 \le 15$

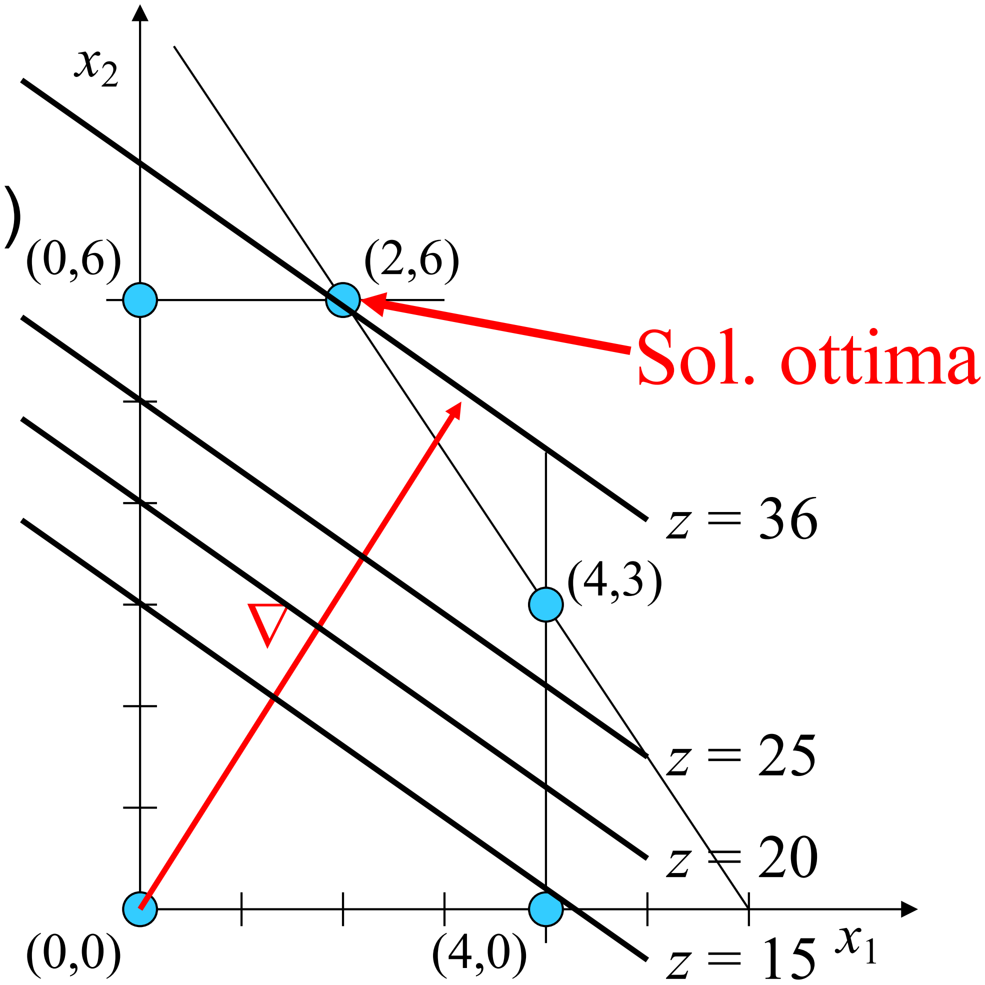


Soluzione grafica (1)

- Si disegnano le rette $z = c^T x = costante$ (perpendicolari al gradiente)
- si cerca l'intersezione tra *F* e la retta con *z* massimo (minimo)

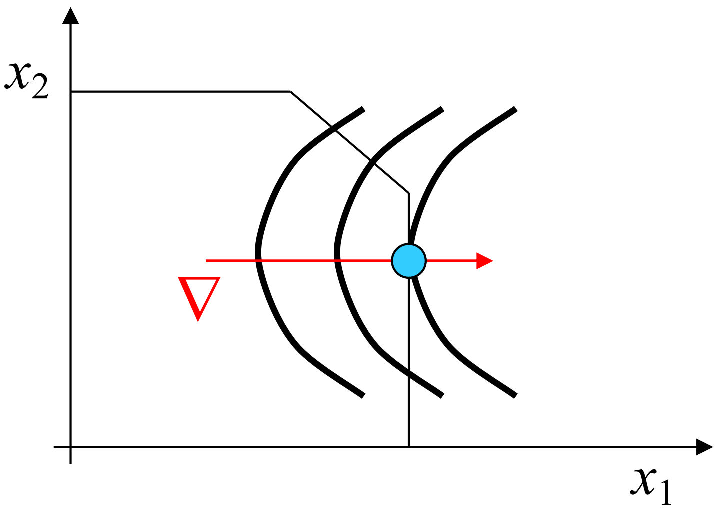
$\max z = 3x_1 + 5x_2$

$\nabla = (3,5)$



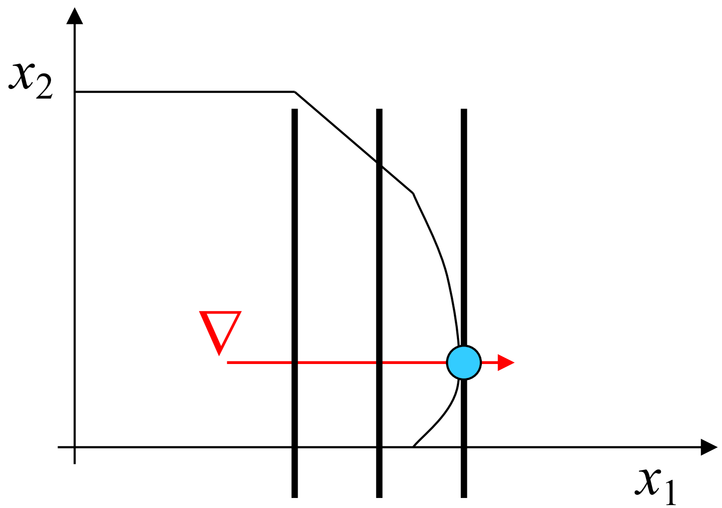
Soluzione grafica (2)

- L'intersezione ottima avviene sempre in corrispondenza di almeno un vertice di *F*
- <u>vero solo per LP</u>   LP = Linear Programmation



φ non lineare

Funzione obiettivo o funzione costo



vincoli non lineari

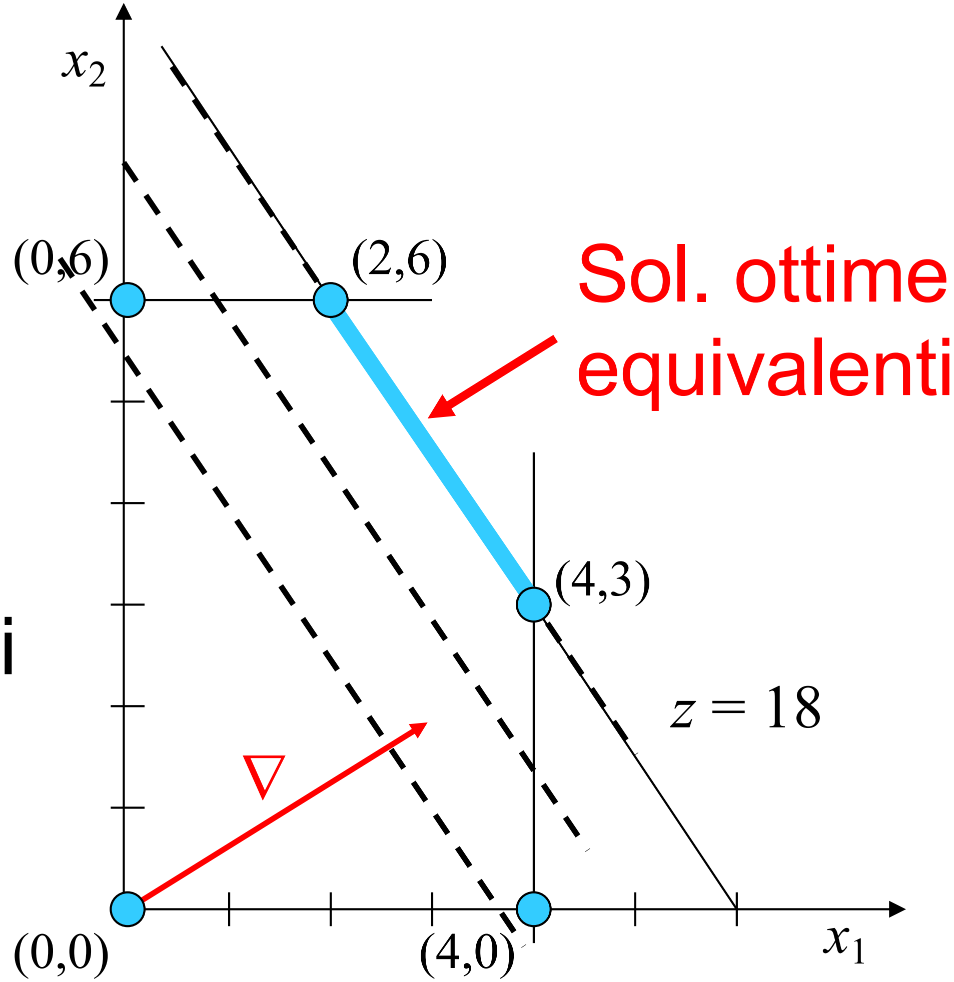
Soluzioni ottime alternative

- Esempio di soluzioni ottime alternative

max $z = 3x_1 + 2\ x_2$

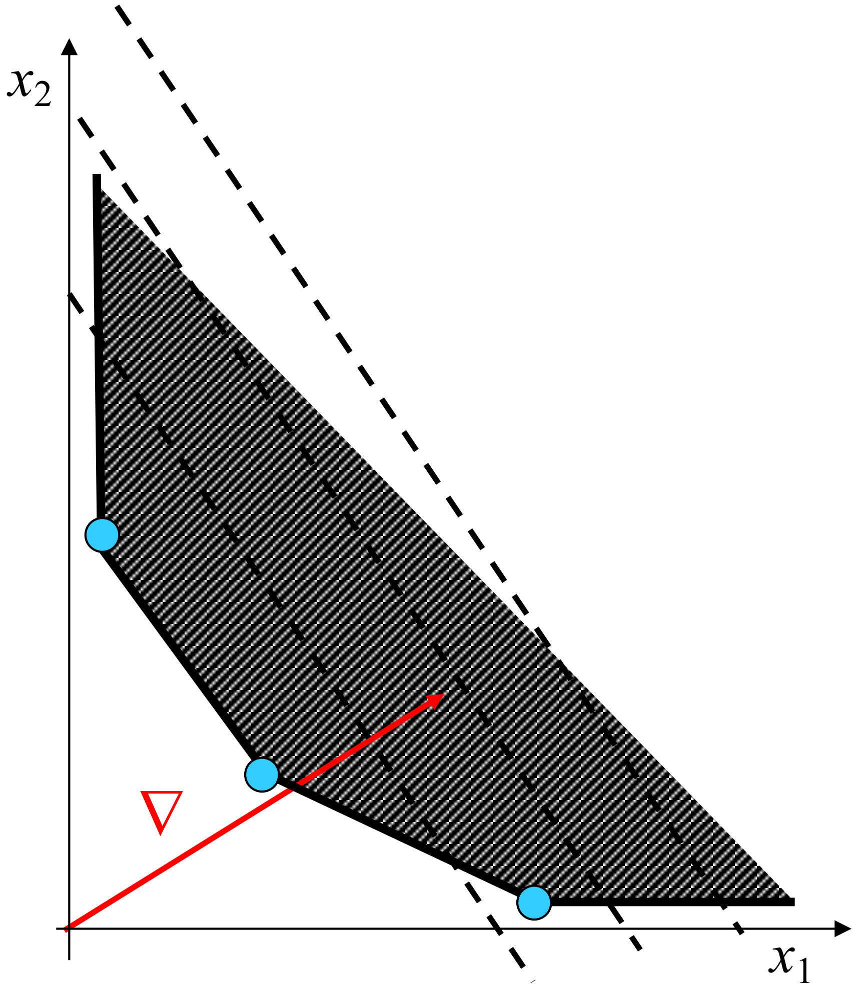
$\nabla = (3,2)$

- tra le infinite soluzioni ottime ci sono anche dei vertici



Soluzione ottima illimitata

- La regione ammissibile può essere illimitata
- Es. Dieta
- La soluzione può a sua volta essere illimitata
- Normalmente significa che il modello è “sbagliato”



Se la soluzione o la regione ammissibile sono illimitate allora il modello è sbagliato

Limiti di LP

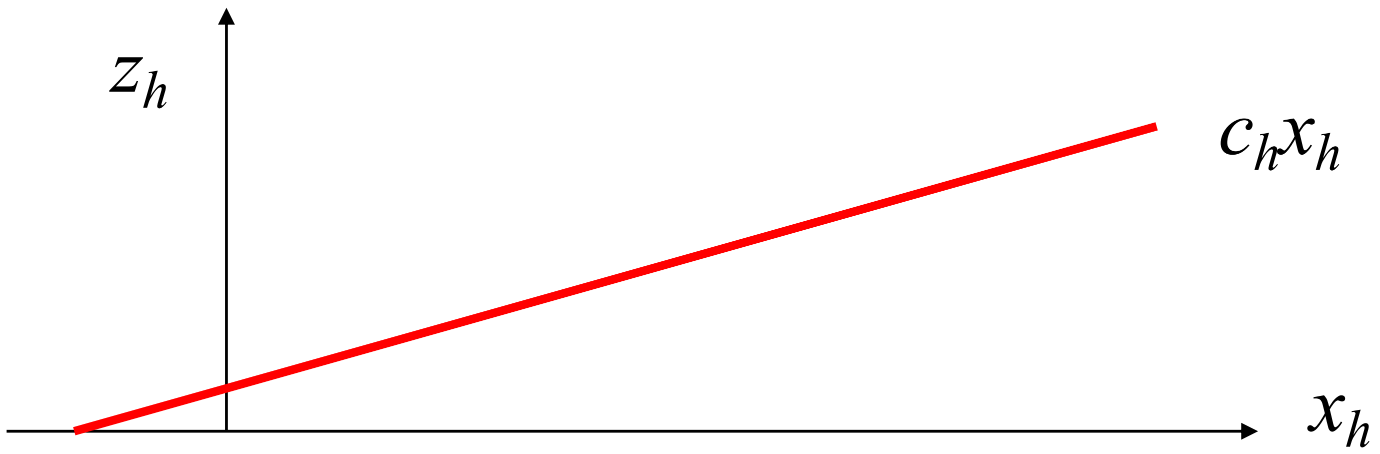
- Assunzioni implicite nella formulazione di un modello LP:

1) Proporzionalità
2) Additività
3) Divisibilità
4) Certezza

Proporzionalità

$$z = \ldots + \; c_h x_h \qquad \ldots$$
$$\ldots + \; a_{ih} x_h + \qquad \ldots \leq \; d_i$$

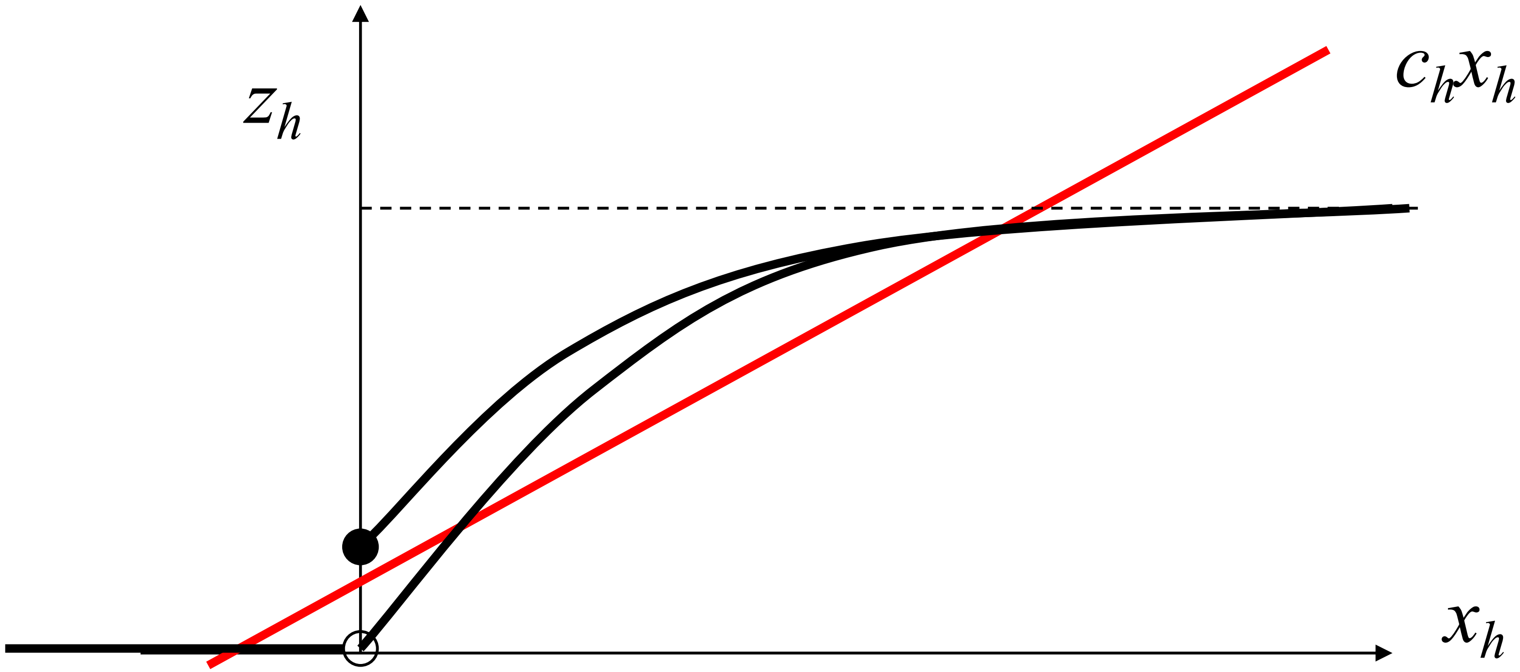
- l'effetto dell'uso della risorsa h (f.o., vincoli) è proporzionale al livello x_h impiegato
- la proporzionalità si mantiene in tutto l'intervallo di ammissibilità per x_h



Proporzionalità (2)

- fenomeni di saturazione (costo marginale decrescente)

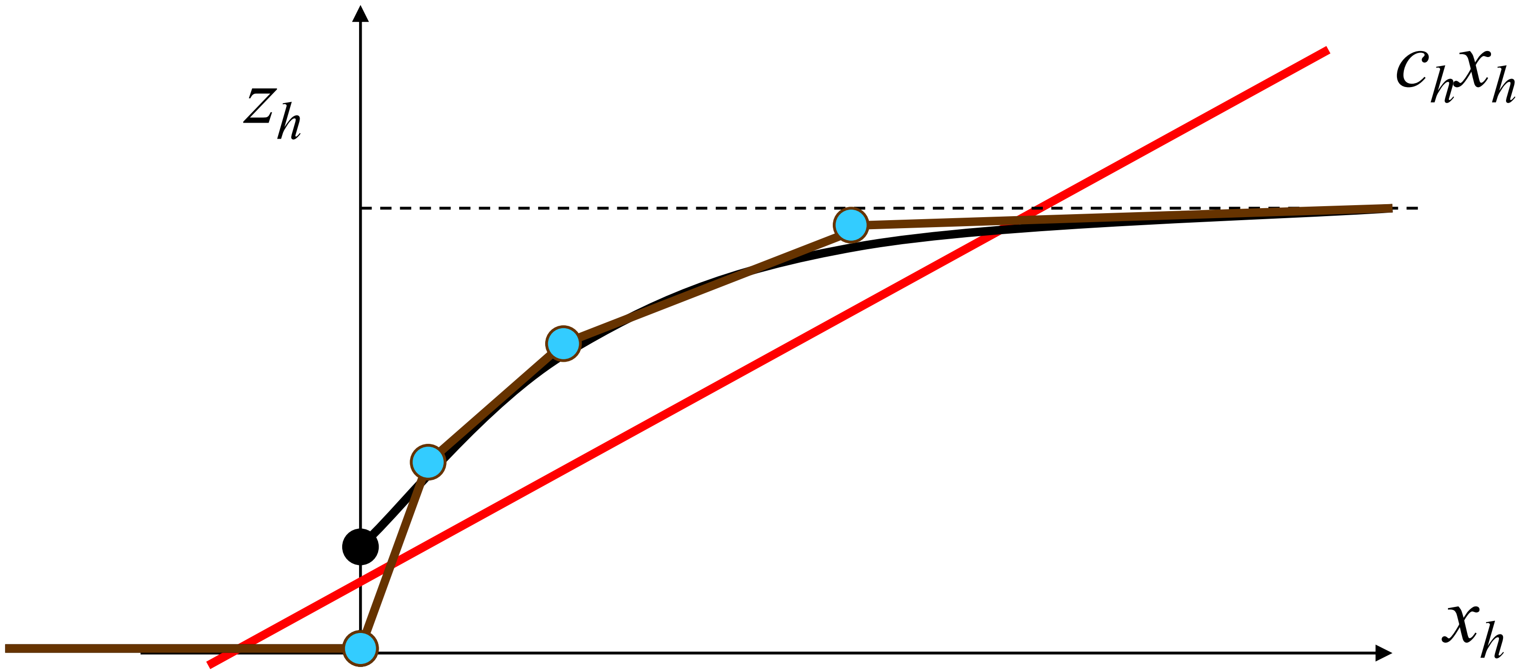
  situazioni di start–up (avviamento)



Proporzionalità (3)

- Migliore approssimazione con funzione lineare a tratti

modello MILP (es. fixed–charge problem)



Additività

- costo soluzione e consumo delle risorse nei vincoli

$$z = \ldots + c_h x_h + c_k x_k \ldots$$

$$\ldots + a_{ih} x_h + a_{ik} x_k \ldots \leq d_i$$

- somma dei termini indipendenti legati alle attività

$\Rightarrow$ Non vi sono interazioni tra le diverse attività che influenzano il costo o i vincoli

$\Rightarrow$ L'effetto dovuto ad una attività non dipende dal livello di produzione delle altre

Divisibilità

- Le variabili decisionali possono essere suddivise ed assumere anche valori non interi
  (Es. tasso di produzione….)
- Spesso solo i valori interi hanno significato
  (Es. n. addetti, n. di pezzi prodotti…):
  - riformulazione con variabili che rappresentano percentuali sul numero totale
    (Es. tasso di produzione….)
  - formulazione con modelli ILP e MILP
  - alcuni LP hanno soluzione ottima sempre intera

Certezza

- Tutti i parametri del modello sono costanti note
- Spesso i parametri sono frutto di stime, previsioni o sono affetti da errori di misura
- se si modifica un costo o un coefficiente la soluzione resta ottima?

- analisi di sensitività della soluzione alla variazione dei parametri

Forme di PL

Programmazione Lineare

Def.: (F, φ) è un problema di
Programmazione Lineare (LP, PL) se

- la funzione obiettivo φ è lineare

  Es. $\varphi(x) = c^T x = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$

- la regione ammissibile $F \subseteq R^n$ è definita da

$$g_i(x) \leq 0,\ h_j(x) = 0 \quad (i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, p)$$

con $g_i, h_j : R^n \to R$ lineare $\forall\, i$ e $\forall\, j$

Es. $a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \ldots + a_{in} x_n \geq d_i$

Regione ammissibile di PL

- F è un insieme convesso (poliedro)
- il numero di $x \in F$ da esaminare per determinare x^* è un numero finito ($\equiv$ vertici del poliedro) $\Rightarrow$ problema combinatorio
- Normalmente il problema si esprime in forma matriciale

$$\min c^T x$$
$$Ax \geq d$$
$$x \geq 0$$

Esempio

$$
\begin{aligned}
\min\ & 3x_1 - 2x_2 + x_3 \\
\text{s.t.}\ & 2x_1 + x_2 - x_3 \geq 2 \\
& x_1 \qquad\quad + 2x_3 \geq 1 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

$$\Downarrow$$

$$n = 3 \quad m = 2 \quad c^T = [3\ {-2}\ 1] \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad d = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Forme di PL (1)

- Forma generale

  A = matrice intera $m \times n$

  d = vettore intero di m elementi

  c = vettore intero di n elementi

$$
\begin{array}{llll}
\min & c^T x & & \\
 & a_i^T x = d_i & & i \in M \\
 & a_i^T x \geq d_i & & i \in M' \\
 & x_j \geq 0 & & j \in N \\
 & x_j \ \text{libera} & & j \in N'
\end{array}
$$

Esempio

$$
\begin{array}{llllll}
\min & x_1 & & + x_3 & & \\
 & & x_2 & - 2x_3 & = 4 & \\
 & x_1 & + x_2 & & \geq 3 & \\
 & x_1 & , x_2 & & \geq 0 & \\
 & & & x_3 & \text{libera} &
\end{array}
$$

$M = \{1\}$

$M' = \{2\}$

$N = \{1,2\}$ $N' = \{3\}$

$m = 2$

$n = 3$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$d = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Forme di PL (2)

- Forma canonica

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ & Ax \geq d \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

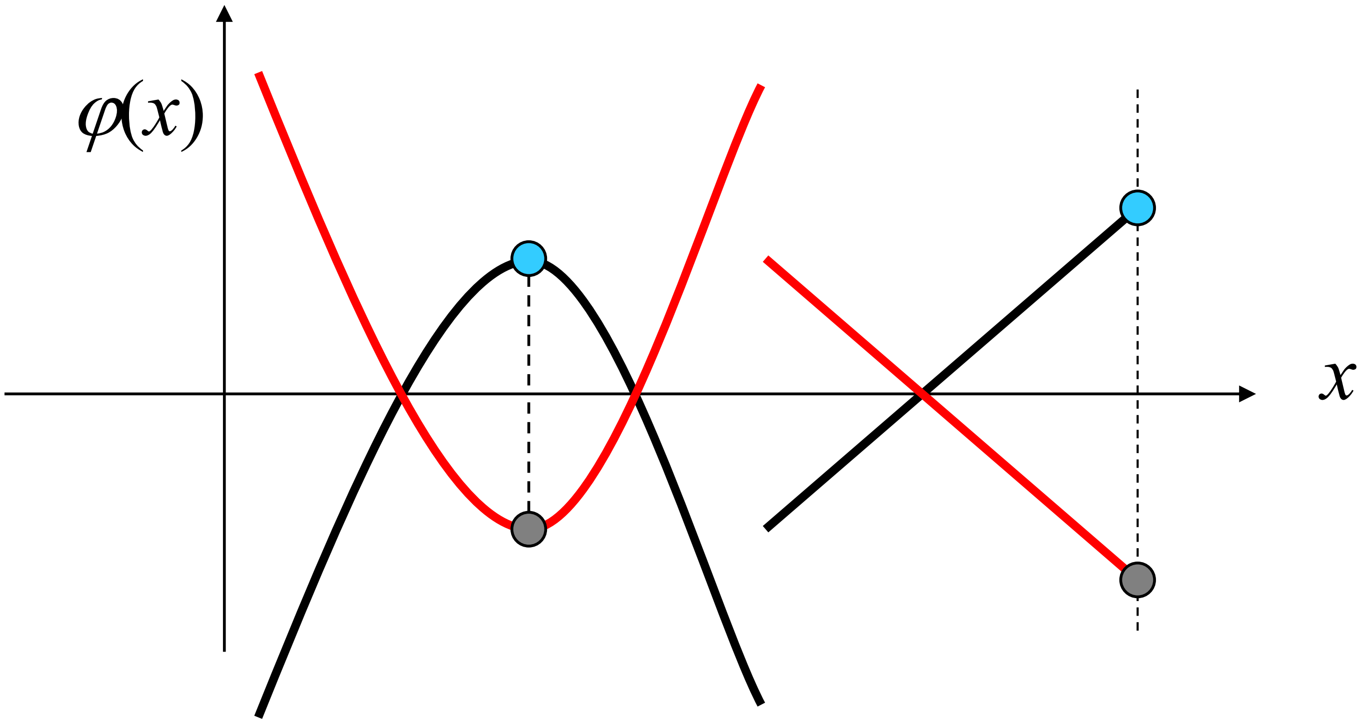
- Forma standard

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ & Ax = d \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Le 3 forme sono equivalenti (1)

a) Funzione obiettivo:

$$\max c^T x = -\min(-c^T x)$$



Le 3 forme sono equivalenti (2)

b) Trasformazione di disequazioni in equazioni:

b1) $x_1 \le d_1 \quad \Rightarrow x_1 + x_s = d_1$

$x_s \ge 0$ variabile slack

In ogni soluzione ammissibile (x_1, x_s):

se $x_s = 0 \;\Rightarrow x_1 = d_1$; se $x_s > 0 \;\Rightarrow x_1 < d_1$

b2) $x_1 \ge d_1 \quad \Rightarrow x_1 - x_s = d_1$

$x_s \ge 0$ variabile surplus

Le 3 forme sono equivalenti (3)

c) Trasformazione di equazioni in disequazioni:

$$a_i^T x = d_i \Rightarrow \begin{cases} a_i^T x & \geq & d_i \\ -a_i^T x & \geq & -d_i \end{cases}$$

d) Variabili libere

x_i libera $\Rightarrow$ $x_i = x_i^+ - x_i^-$ con $x_i^+, x_i^- \geq 0$

b), d) *aumentano* *n*

c) *aumenta* *m*

Esempio

$$
\begin{array}{rrcl}
\max z = & -2x_1 + 3x_2 & & \\
& x_1 + 2x_2 & \leq & 4 \\
& 2x_1 - x_2 & = & 2 \\
& & & \\
& x_1 & \geq & 0 \\
& x_2 & & \text{libera}
\end{array}
$$

Forma generale $\rightarrow$ F. canonica (1)

$$
\begin{array}{rrcl}
\max z = & -2x_1 + 3x_2 & & \\
 & x_1 + 2x_2 & \leq & 4 \\
 & 2x_1 - x_2 & = & \cancel{2} \quad \geq 2 \\
 & -2x_1 + x_2 & \geq & -2 \\
 & x_1 & \geq & 0 \\
 & x_2 & & \text{libera}
\end{array}
$$

Studiare su internet

Forma generale $\rightarrow$ F. canonica (2)

$$
\begin{array}{rllll}
\max z = -2x_1 & \cancel{+3x_2} & +3x_2^+ - 3x_2^- & & \\
x_1 & \cancel{+2x_2} & +2x_2^+ - 2x_2^- & \leq & 4 \\
2x_1 & \cancel{-x_2} & -x_2^+ + x_2^- & \geq & 2 \\
-2x_1 & \cancel{+x_2} & +x_2^+ - x_2^- & \geq & -2 \\
x_1 & & ,\ x_2^+,\ x_2^- & \geq & 0 \\
 & \cancel{x_2} & & & \text{libera}
\end{array}
$$

Forma generale → F. canonica (3)

$$
\begin{array}{rrrrrrl}
\max z = & -2x_1 & + & 3x_2^+ & - & 3x_2^- & \\
& -\,x_1 & \overset{-}{\cancel{+}} & 2x_2^+ & \overset{+}{\cancel{-}} & 2x_2^- & \cancel{\le 4} \ \ge -4 \\
& 2x_1 & - & x_2^+ & + & x_2^- & \ge 2 \\
& -2x_1 & + & x_2^+ & - & x_2^- & \ge -2 \\
& x_1 & , & x_2^+ & , & x_2^- & \ge 0
\end{array}
$$

Forma generale $\rightarrow$ F. canonica (4)

$$\cancel{\max z} = \overset{+}{\cancel{-}}\, 2x_1 \overset{-}{\cancel{+}}\, 3x_2^+ \overset{+}{\cancel{-}}\, 3x_2^-$$

$$-\min -z =$$

$$\begin{array}{rcl}
-x_1 - 2x_2^+ + 2x_2^- & \geq & -4 \\
2x_1 - x_2^+ + x_2^- & \geq & 2 \\
-2x_1 + x_2^+ - x_2^- & \geq & -2 \\
x_1 \;,\; x_2^+ \;,\; x_2^- & \geq & 0
\end{array}$$

Forma generale → F. canonica (5)

$$
\begin{array}{rl}
-\min -z = & 2x_1 - 3x_2^+ + 3x_2^- \\
& -x_1 - 2x_2^+ + 2x_2^- \geq -4 \\
& 2x_1 - x_2^+ + x_2^- \geq 2 \\
& -2x_1 + x_2^+ - x_2^- \geq -2 \\
& x_1 \ , x_2^+ \ , x_2^- \geq 0
\end{array}
$$

Forma generale $\rightarrow$ Forma standard

$$
\begin{aligned}
-\min -z = \quad & 2x_1 - 3x_2^+ + 3x_2^- \\
& x_1 + 2x_2^+ - 2x_2^- \quad {\color{red}+\, x_3} \quad = 4 \\
& 2x_1 \; - x_2^+ \; + x_2^- \qquad\qquad = 2 \\
\\
& x_1 \quad , x_2^+ \quad , x_2^- \quad , x_3 \; \geq \; 0
\end{aligned}
$$

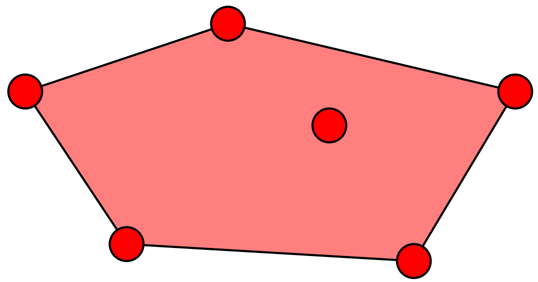
Studiare su internet

Vertici ed Insiemi Convessi

Def.: z è vertice di un insieme convesso S

$\Leftrightarrow$ non è esprimibile come combinazione convessa di altri punti di S

Def.: Dato un insieme di punti $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_K\} \subset R^n$ si dice chiusura convessa di P, $conv$(P) il più piccolo insieme convesso che contiene P.



Teoremi

Th. 1:

Ogni punto di un politopo (poliedro limitato) è combinazione convessa dei vertici del politopo

Th. 2:

In un problema PL con *F* non vuoto e limitato esiste sempre almeno un vertice ottimo

Dimostrazione (probl. di minimo)

c = vettore costo;

$x^{(0)}$ = soluzione ottima (non vertice)

$x^{(1)},\ldots,x^{(p)}$ = vertici di F

$$x^{(0)} \in F \;\Rightarrow\; x^{(0)} = \sum_{i=1,p} \lambda_i\, x^{(i)} \;\text{ con } \sum_{i=1,p} \lambda_i = 1,\; \lambda_i \geq 0 \;\forall i$$

sia $x^{(j)}$ il vert. di costo min.: $c^T x^{(j)} = \min_{1 \leq i \leq p} \{c^T x^{(i)}\}$

$$c^T x^{(0)} = c^T \sum_{i=1,p} \lambda_i\, x^{(i)} \geq c^T x^{(j)} \sum_{i=1,p} \lambda_i = c^T x^{(j)}$$

$$\Rightarrow c^T x^{(0)} \geq c^T x^{(j)}$$

Esiste un vertice $x^{(j)}$ cui corrisponde una soluzione non peggiore di $x^{(0)}$!!!

Esercizi su modelli PL

Es.6.1. Produzione di fertilizzanti

- Un consorzio agrario può produrre due tipi di fertilizzanti. Ogni quintale di fertilizzante di tipo A contiene 0.1 quintali di azoto e 0.3 quintali potassio ed ha un prezzo di vendita di 200€. Ogni quintale di fertilizzante di tipo B contiene 0.2 quintali di azoto e 0.1 quintali di potassio e viene venduto a 300€. Il consorzio dispone di 8 quintali di azoto e di 9 quintali di potassio.

a) Definire il modello di programmazione lineare per determinare le quantità da produrre di fertilizzante di ciascun tipo per massimizzare il ricavo conseguibile.

b) Disegnare la regione ammissibile e risolvere il problema per via grafica.

Es. 6.2. Miscelazione di mangimi

- La dieta alimentare degli animali di un allevamento richiede la presenza di 4 sostanze base: A, B, C e D. La quantità minima giornaliera di cui ogni animale necessita è: 0.4Kg di A,0.6 Kg di B,2 Kg di C e 1.3 Kg di D. Il cibo è ottenuto mescolando due tipi di mangime: M ed N. Ciascun Kg di M contiene 100 grammi di A, 100 grammi di C, 100 grammi di D e nulla di B; ciascun Kg di N contiene 100 grammi di B, 100 grammi di D, 200 grammi di C e nulla di A. Con una spesa di 30AC è possibile acquistare 15 Kg di mangime M oppure 10 Kg di mangime N.

a) Definire il modello di programmazione lineare per determinare le quantità giornaliere di mangime M ed N (variabili x_1 ed x_2, rispettivamente) da acquistare per alimentare un animale a costo minimo.

b) Disegnare la regione ammissibile e determinare per via grafica i valori ottimi delle variabili x_1 ed x_2.

Es. 6.5.

- Un'azienda produce due articoli A e B che consentono un profitto per ogni pezzo venduto di 3€ e 1€, rispettivamente. La lavorazione di ciascun articolo di tipo A richiede due unità di materia prima M e produce sei unità di sottoprodotto P, mentre ciascun articolo di tipo B richiede una unità di M e tre unità di P. In magazzino sono disponibili 4000 unità di M e 10000 unità di P .
- Il 10% delle confezioni dell'articolo A ed il 20% delle confezioni dell'articolo B contengono un omaggio a sorpresa. Il numero degli omaggi inseriti nelle confezioni prodotte non deve essere inferiore a 400.
- Si suppongano accettabili soluzioni frazionarie.

a) Definire il modello di programmazione lineare per determinare la produzione di massimo profitto. Si esprimano i quantitativi prodotti in migliaia di articoli ed i profitti in migliaia di €.

b) Disegnare la regione ammissibile e risolvere il problema per via grafica.

Es. 6.11

- Un'azienda vinicola produce due tipi di vino: DOC e “da tavola". Ogni quintale di vino DOC richiede 2 quintali di uva di prima scelta e mezzo quintale di uva di seconda scelta. Ogni quintale di vino da tavola richiede 80 chili di uva di prima scelta, 80 chili di uva di seconda scelta e 10 litri d'acqua. L'azienda dispone di 800 quintali di uva di prima scelta e di 400 quintali di uva di seconda scelta, oltre a una quantità illimitata di acqua. Ogni quintale di vino DOC dà un profitto di 50€, ogni quintale di vino da tavola un profitto di 30€. L'azienda ritiene di non poter mettere in commercio più di 300 quintali di vino DOC.

a) Definire il modello di programmazione lineare per determinare le quantità da produrre di ciascun tipo di vino per massimizzare il profitto conseguibile.

b) Disegnare la regione ammissibile e e risolvere il problema per via grafica.