

COMBINATORIA			
Prodotto cartesiano	$A \times B$	insieme delle coppie ordinate di elementi presi da due insiemi	$ A \times B = A \cdot B $
Sequenza o lista	A^n	Elenco ordinato di “n” elementi anche ripetuti presi da un insieme, è come un prodotto cartesiano di un insieme per se stesso n volte	$ A^n = A ^n$
Insieme delle parti	$P(A)$	Insieme di tutti i possibili sottoinsiemi dell’insieme A	$ P(A) = 2^{ A }$
Prodotto condizionato	$A \times B_{(n,m)}$	Sottoinsieme del prodotto cartesiano in cui si selezionano n elementi dal primo e sulla base di quelli m elementi del secondo	$ A \times B_{(n,m)} = n \cdot m$
Fattoriale discendente (disposizione)	$(n)_k$	prodotto di “k” numeri successivi da “n” a discendere	$\frac{n!}{k!}$
Permutazione		disposizione (lista ordinata) di tutti gli elementi di un insieme	tutte le possibili combinazioni di elementi non ripetuti $n!$
Coefficiente binomiale	$\binom{n}{k}$	Numero dei partizionamenti in 2 blocchi di cardinalità “k” e “n-k” di un insieme di “n” elementi	$\frac{n!}{k!(n-k)!}$ (se $k > n \Rightarrow \binom{n}{k} = 0$)
coefficiente trinomiale	$\binom{n}{a \ b \ c}$	Numero delle possibili partizioni di un insieme di “n” elementi in 3 sottoinsiemi di cardinalità “a”, “b”, “c” con a+b+c=n	$\frac{n!}{a!b!c!}$
Anagramma		permutazione (lista ordinata) di un elenco di elementi anche ripetuti	$\frac{(\#a1+\#a2+...+\#an)!}{\#a1! \cdot \#a2! \cdot ... \cdot \#an!}$
Formula di Stifel		calcolo ricorsivo dei coefficienti binomiali, e rappresentazione equivalente nel triangolo di Tartaglia	$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m}$
Numeri di fibonacci		$F(0)=1, F(1)=2$ e $F(n)=F(n-1)+F(n-2)$ $F(n) = \binom{n+1}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n-1}{2} + ... + \binom{1}{n}$	numero di sequenze binarie di lunghezza “n” in cui non ci sono due 1 consecutivi $F(n) = \sum_{k=0}^n \binom{n-k+1}{k}$
Principio di inclusione esclusione		Calcolo della cardinalità dell’unione di due insiemi	
		$ A \cup B = A + B - A \cap B $	
		cardinalità dell’unione di insiemi	
		cardinalità del complementare dell’unione di insiemi	$ A_1 \cup A_2 \cup A_3 \dots \cup A_n = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,2, \dots, n\}} (-1)^{ I +1} \left \bigcap_{i \in I} A_i \right $ $ (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \dots \cup A_n)^c = \sum_{I \subseteq \{1, 2, 3 \dots, n\}} (-1)^{ I } \left \bigcap_{i \in I} A_i^c \right $
Scombussolamento		Permutazione in cui nessun elemento rimane al proprio posto	scambio di coppie, rimescolamento di elementi in modo che nessun elemento rimanga al proprio posto es: $(6)0 + (6)1 - (6)2 + (6)3 - (6)4 + \dots + (-1)^{(n-1)}(n)_i$
Numero di Bel		Bn	numero di partizioni di un insieme di n elementi
Triangolo di Bell		$B_{(n,m)}$	Serve per calcolare facilmente i numeri di bell, perché $Bn = B_{(0,n)} = B_{(n-1,n-1)}$ Con c e r indici in base zero di colonna e riga del triangolo di bell Per calcolare il Bell si fa il numero in alto a sinistra + quello a sinistra (per la colonna a sinistra si riporta direttamente l'ultimo numero)
Numero di Stirling		$S_{n,k}$	Numero di partizioni possibili in k sottoinsiemi di un insieme di n elementi

Per calcolare il Stirling si fa il numero in alto * il numero della colonna + il numero a sinistra

STATISTICA			
Media campionaria	\bar{X}	valore medio di un elenco di n caratteri X_i	$\bar{X} = \frac{x_1+x_2+x_3+...+x_n}{n}$
Linearità della media		La media di due caratteri legati da un'equazione di primo grado è legata dalla stessa equazione	$y = a \cdot x + b \Rightarrow \bar{y} = a \cdot \bar{x} + b$
Media ponderata	$\overline{X_w}$	Media di valori con peso (importanza, numero di occorrenze) diverso	$\overline{X_w} = \frac{x_1 \cdot w_1 + x_2 \cdot w_2 + ... + x_n \cdot w_n}{w_1 + w_2 + ... + w_n}$
Varianza	σ_x^2	Importante indice di dispersione, rappresenta il grado di “sparpagliamento”	$\sigma_x^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2$
Deviazione standard	σ_x	Radice quadrata della varianza	$\sigma_x = \sqrt{\overline{x^2} - \bar{x}^2} = \sqrt{\sigma_x^2}$
Covarianza campionaria	$\sigma_{x,y}$	Indica il grado di dipendenza reciproca di due caratteri	
			$\sigma_{x,y} = \overline{x \cdot y} - \bar{x} \cdot \bar{y}$
Indice di correlazione	$\rho_{x,y}$	Indica il grado di dipendenza reciproca di due caratteri, ed è indipendente dall'unità di misura scelta	$\rho_{x,y} = \frac{\sigma_{x,y}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\overline{x \cdot y} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sqrt{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \cdot \sqrt{\overline{y^2} - \bar{y}^2}}$
Retta ai minimi quadrati		Retta che rappresenta al meglio l'andamento della correlazione lineare di due dati campionari	$y = \frac{\overline{x \cdot y} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{(\overline{x^2} - \bar{x}^2)} \cdot x + \bar{y} - a \bar{x}$
Media geometrica		percentuale di incremento medio di una serie di incrementi percentuali successivi. Attenzione se anche solo uno è 0 allora sarà 0 anche la media	$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n}$
Media armonica		velocità media dati i tempi di percorrenza di uno stesso tratto	$1 / \left(\overline{1/x} \right)$

PROBABILITÀ				
Probabilità totale		Calcolo della probabilità di un evento nota la probabilità della sua intersezione con gli altri eventi che partizionano uno spazio di probabilità		$P(B) = P(B A_1) \cdot P(A_1) + P(B A_2) \cdot P(A_2) + \dots + P(B A_n) \cdot P(A_n)$
Probabilità unite	$P(A \cup B)$	Probabilità che avvenga almeno uno di due eventi		$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (incl.-escl.)
Prob. congiunte	$P(A \cap B)$	probabilità che avvengano contemporaneamente due eventi		$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$ $= P(B A) \cdot P(A)$ (Bayes) $= P(A B) \cdot P(B)$ (Bayes)
Prob. condizionale	$P(B A)$	Probabilità che avvenga l'evento B sapendo che è accade l'evento A		$P(B A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ $= \frac{P(A B) \cdot P(B)}{P(A)}$ (Bayes)
Formula di Bayes		Relazione fra le probabilità condizionali e le probabilità di due eventi		$P(B A) = \frac{P(A B) \cdot P(B)}{P(A)}$ $P(B A) \cdot P(A) = P(A B) \cdot P(B)$
Probabilità condizionale di eventi INDIPENDENTI				$P(B A) = P(B)$
Probabilità congiunta di eventi INDIPENDENTI				$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
Verifica se due eventi NON SONO INDIPENDENTI				$P(B A) \neq P(B)$ oppure $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$
densità marginale	somma dei valori di tutte le densità multidimensionali tenendo fermo il valore per la variabile di cui si vuole calcolare la densità marginale e variando i valori delle altre			$d_{x1}(k) = \sum_{k2,k3...kn} d_X(k,k2,k3...kn)$
	Caso di densità congiunta bidimensionale		$d_X(h) = \sum_k d_{X,Y}(h,k)$ $d_Y(k) = \sum_h d_{X,Y}(h,k)$	
densità di trasformazioni di due variabili		$Z = \phi(X, Y)$		$d_Z(k) = \sum_{s,t : \phi(s,t)=k} d_{X,Y}(s,t)$
Teorema sul valore atteso di una trasformazione di 2 variabili aleatorie (anche non indipendenti)				$E[Z] = \sum_{(h,k)} \left(\varphi(h,k) \cdot d_{h,k}(h,k) \right)$
Varianza/covarianza	<div><div>$Var(X) = E[X^2] - E[X]^2$</div><div>$Cov(X,Y) = E[X \cdot Y] - E[X] \cdot E[Y]$</div><div>$Var(n \cdot X) = n^2 \cdot Var(X)$</div><div>$Var(X_1 + X_2) = Var(X_1) + Var(X_2) + 2 \cdot Cov(X_1, X_2)$</div></div>			
Valore atteso della somma di variabili (anche non indipendenti)			$E[X_1 + X_2 + \dots + X_n] = E[X_1] + E[X_2] + \dots + E[X_n]$	
Varianza della somma o sottrazione di variabili indipendenti			$Var(X_1 \pm X_2 \pm \dots \pm X_n) = Var(X_1) + Var(X_2) + \dots + Var(X_n)$	
Valore atteso del prodotto di variabili indipendenti			$E[X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_n] = E[X_1] \cdot E[X_2] \cdot \dots \cdot E[X_n]$	
Somma di variabili di Poisson indipendenti				$Z \sim P(\lambda_1 + \lambda_2) = X \sim P(\lambda_1) + Y \sim P(\lambda_2)$
minimo di due variabili		$Z = \min(X, Y)$		$F_z = 1 - [(1 - F_X(k)) \cdot (1 - F_Y(k))]$
massimo di due variabili		$Z = \max(X, Y)$		$F_z = F_X(k) \cdot F_Y(k)$
teorema del limite centrale per variabili continue	$Sn \sim N(n \cdot \mu, n \cdot \sigma^2)$	dato un numero sufficientemente grande (n≥20) di variabili indipendenti con identica densità e valore atteso <u>media</u> , è possibile approssimare la loro somma ad una variabile normale		$X_1 + X_2 + \dots + X_n \sim N(n \cdot \mu, n \cdot \sigma^2)$ con $\sigma^2 = Var(X)$ e $\mu = E[X]$
	$\overline{S_n}$			$\overline{S_n} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$
corr. di continuità teorema centrale del limite e variabili discrete		Si considerano i valori come uniforme su un intervallo ±0.5 del suo valore	$\min(Sn \text{ corretto}) = \min(Sn) - 0.5$ $P(Sn \text{ corretto} \geq t) = P(Sn \geq k - 0.5)$	$\max(Sn \text{ corretto}) = \max(Sn) + 0.5$ $P(Sn \text{ corretto} \leq t) = P(Sn \leq k + 0.5)$
Disuguaglianza di Chebyshev)				$P(X - E[X] > \epsilon) \leq Var(X) / \epsilon^2$
Legge dei grandi numeri				$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\overline{X_n} - \mu > \xi) = 0$
relazione fra densità e ripartizione		La derivata della funzione di ripartizione è la densità		$F_X' = d_X$ $F_X = \int d_X(s) ds$
Densità di una trasformazione di variabile continua		Data Y che è una trasformazione di X, la derivata della funzione di ripartizione di X sulla trasformazione inversa di t è la densità di Y		$Y = \phi(X) \Rightarrow d_Y(t) = F_X'(\phi^{-1}(t))$ con ϕ^{-1} trasformazione inversa

VARIABILI ALEATORIE DISCRETE (* se gode di mancanza di memoria)

Uniforme	$X \sim U(A)$	probabilità uniforme su tutti i possibili valori di un insieme di valori A di cardinalità “n”	qualsiasi estrazione di un numero da un elenco	$d_X(k) = P(X=k)$ $E[X]$ $F_X(k) = P(X \leq k)$ $\sigma_X^2 = \text{Var}(X)$	$1/ A =1/n$ $\bar{X} = (a_1 + a_2 + \dots + a_n)/ A $
Bernoulli	$X \sim B(1,p)$	probabilità di aver successo su un singolo tentativo di probabilità “p”. O valgono 1 (vittoria) o valgono 0 (sconfitta). Si può invertire la logica di vittoria e sconfitta cambiando “p” con “1-p”	Tutti i casi in cui ci sono solo due possibili risultati, lancio di una moneta (p=½), probabilità di avere un certo numero con un dado (p=⅙), di estrarre un certo elemento	$d_X(k) = P(X=k)$ $E[X]$ $F_X(k) = P(X \leq k)$ $\sigma_X^2 = \text{Var}(X)$	p se k=1, (1-p) se k=0 p $p \cdot (1 - p)$
Binomiale	$X \sim B(n,p)$	numero di successi in una serie di “n” tentativi di Bernoulli equiprobabili di probabilità “p”	lanci successivi di dadi o monete, estrazioni con rimpiazzo	$d_X(k) = P(X=k)$ $E[X]$ $F_X(k) = P(X \leq k)$ $\sigma_X^2 = \text{Var}(X)$	$\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{(n-k)}$ $n \cdot p$ $n \cdot p \cdot (1 - p)$
Ipergeometrica	$X \sim H(n;b,r)$	probabilità di estrarre un certo numero “k” di elementi di tipo “b” in una serie di “n” estrazioni senza rimpiazzo da un'urna contenente “b” elementi di tipo “b” e “r” elementi di tipo diverso da “b”	Estrazioni senza rimpiazzo da urna con palline di 2 o più colori	$d_X(k) = P(X=k)$ $E[X]$ $F_X(k) = P(X \leq k)$ $\sigma_X^2 = \text{Var}(X)$	$\binom{b}{k} \cdot \binom{r}{n-k} / \binom{b+r}{n}$ $(n \cdot b) / (b + r)$
Geometrica modificata	$X \sim \hat{G}(p)$	primo tentativo di successo in uno schema di successo insuccesso a prove indipendenti di probabilità “p”	prima testa in una serie di lanci, primo 6 in una serie di lanci di dadi, prima pallina rossa in una serie di estrazioni con rimpiazzo	$d_X(k) = P(X=k)$ $E[X]$ $F_X(k) = P(X \leq k)$ $\sigma_X^2 = \text{Var}(X)$	$p \cdot (1 - p)^{(k-1)}$ $1/p$ $1 - (1 - p)^k$ $(1 - p)/p^2$
Geometrica*	$X \sim G(p)$	numeri di tentativi prima del primo successo in uno schema di successo insuccesso a prove indipendenti di probabilità “p”	numero di croci prima di una testa in una serie di lanci di monete	$d_X(k) = P(X=k)$ $E[X]$ $F_X(k) = P(X \leq k)$ $\sigma_X^2 = \text{Var}(X)$	$p \cdot (1 - p)^k$ $1/p - 1$ $(1 - p)^k$ $\frac{n \cdot b^2 \cdot r}{(b+r)^2 \cdot (b+r-1)}$
Poisson	$X \sim P(\lambda)$	Legge degli eventi rari, rappresenta la probabilità che avvenga un certo numero “k” di eventi in uno schema di successo insuccesso di “n” tentativi di probabilità “p”, con $\lambda = n \cdot p$ (quindi $p = \lambda/n$). Lambda è il numero medio di successi nel numero di eventi considerato	Approssimazione di variabile di binomiale con numero di tentativi alto ($n > 50$) e probabilità bassa ($p < 0.02$). Nr. di accadimenti di un evento che accade in media λ volte ogni “n” intervalli di tempo (4 volte al mese ad esempio)	$d_X(k) = P(X=k)$ $E[X]$ $F_X(k) = P(X \leq k)$ $\sigma_X^2 = \text{Var}(X)$	$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ λ λ

VARIABILI ALEATORIE CONTINUE (* se gode di mancanza di memoria)

Uniforme	$X \sim U([a,b])$	Evento con probabilità di avvenire costante in un certo intervallo finito	tempo di attesa dell'autobus arrivando alla fermata in un momento casuale	$d_X(t) = P(X=t)$ $E[X]$ $F_X(t) = P(X \leq t)$ $\sigma_X^2 = \text{Var}(X)$	$1/(b-a)$ se $a \leq t \leq b$ $(b+a)/2$ $(t-a)/(b-a)$ $(b-a)^2/12$
Esponenziale*	$X \sim \text{Exp}(a)$ o $X \sim \text{Esp}(a)$	Rappresenta il tempo di attesa per un evento che accade una volta ogni “m” tempo in media, il parametro “a” vale 1/m	tempo di attesa di un singolo evento che accade in media ogni “m” tempo	$d_X(t) = P(X=t)$ $E[X]$ $F_X(t) = P(X \leq t)$ $\sigma_X^2 = \text{Var}(X)$	$a \cdot e^{-at}$ se $t > 0$, 0 se $t \leq 0$ $1/a = m$ $1 - e^{-at}$ $1/a^2$
Normale standard	$\zeta_0 \sim N(0,1)$	E' una variabile astratta che descrive la famosa campana di Gauss. Sostanzialmente usata solo per calcolare la normale usando i valori tabellati per la normale standard		$d_\zeta(s) = P(\zeta_0=s)$ $E[\zeta_0]$ $F_{\zeta_0}(s) = P(\zeta_0 \leq s)$ $\sigma_\zeta^2 = \text{Var}(\zeta_0)$	$(e^{-s^2/2})/\sqrt{2 \cdot \pi}$ 0 $0 \leq s \leq 4 \Rightarrow$ tabella, $s \geq 4 \Rightarrow 1$, $s \leq 0 \Rightarrow 1 - P(\zeta_0 \leq -s)$ 1
Normale	$\zeta \sim N(\mu, \sigma^2)$	E' una trasformazione della normale standard tale che $\zeta = \mu + \sigma \zeta_0$, dove μ è il valore medio della misura e σ è la radice della varianza	Si usa valori di misurazione di un carattere in una popolazione (altezza, peso, larghezza ecc ecc) o per approssimare una serie >50 eventi equiprobabili	$d_\zeta(s) = P(\zeta=s)$ $E[\zeta]$ $F_\zeta(s) = P(\zeta \leq s)$ $\sigma_\zeta^2 = \text{Var}(\zeta)$	 μ $P(\zeta_0 \leq (s-\mu)/\sigma)$ σ^2
Teorema centrale del limite	$X_1 + X_2 + \dots + X_n$ (con $n \geq 20$)	$X_1 + X_2 + \dots + X_n \approx S_n(X) \sim N(n \cdot \mu, n \cdot \sigma^2)$ $\approx S_n(X) \sim N(n \cdot E[X_i], n \cdot \text{Var}(X_i))$ (con $\sigma^2 = \text{Var}(X_i)$ e $\mu = E[X_i]$ e $n \geq 20$)	Somma di un numero elevato (≥ 20) di variabili indipendenti tutte con uguale densità	$d_{S_n}(s) = P(S_n=s)$ $E[S_n]$ $F_{S_n}(s) = P(S_n \leq s)$ $\sigma_{S_n}^2 = \text{Var}(S_n)$	 $n \cdot E[X_i] = n \cdot \mu$ $P\left(\zeta_0 \leq \frac{(s - n \cdot E[X_i])}{\sqrt{n \cdot \text{Var}(X_i)}}\right)$ $n \cdot \text{Var}(X_i)$