Curve parametriche

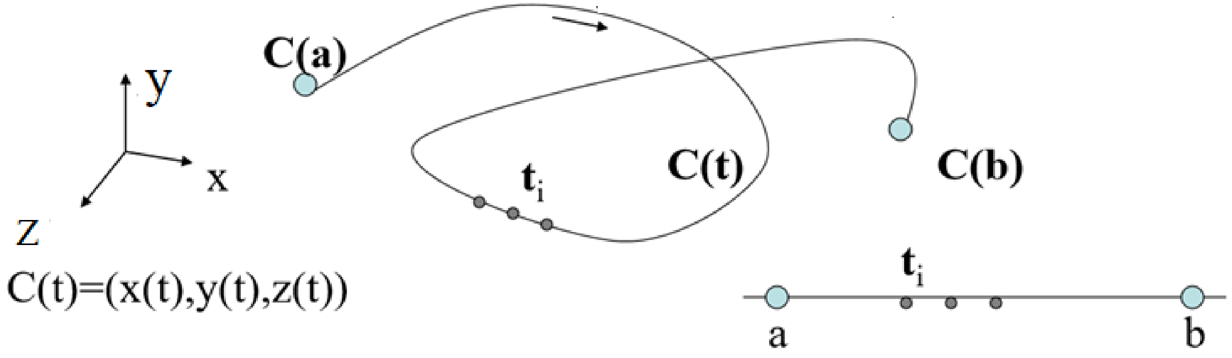
Una curva parametrizzata in $\mathbf{R}^3$, è un'applicazione

$$C(t):\quad I=[a,b]\subseteq R \to R^3$$

$$t \to (x(t), y(t), z(t))$$

dove x(t), y(t), z(t) sono funzioni continue del **parametro** t $\in [a,b] \subseteq R$, dette **componenti parametriche** della curva

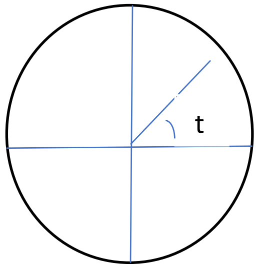
Al variare di *t*, le coordinate (*x*(*t*), *y*(*t*),z(t)) individuano un punto che si sposta sulla curva.



Circonferenza di centro l'origine e raggio r

P =(x(t),y(t))

$$C(t) = \begin{cases} x(t) = r\cos(t) \\ y(t) = r\sin(t) \end{cases} \qquad t \in [0,2\pi]$$

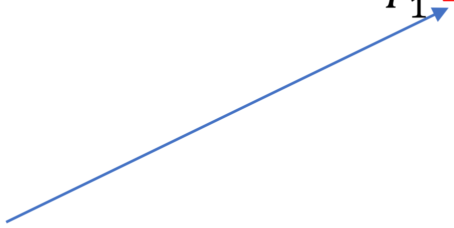


Equazione parametrica del segmento che congiunge due punti P_0 = (x_0, y_0) e P_1 = (x_1, y_1)

$$P(t) = P_0 + t(P_1 - P_0) \qquad t \in [0,1]$$

$$P(t) = \begin{cases} x = x_0 + t(x_1 - x_0) \\ y = y_0 + t(y_1 - y_0) \end{cases}$$

P_1 = (x_1, y_1)



P_0 = (x_0, y_0)

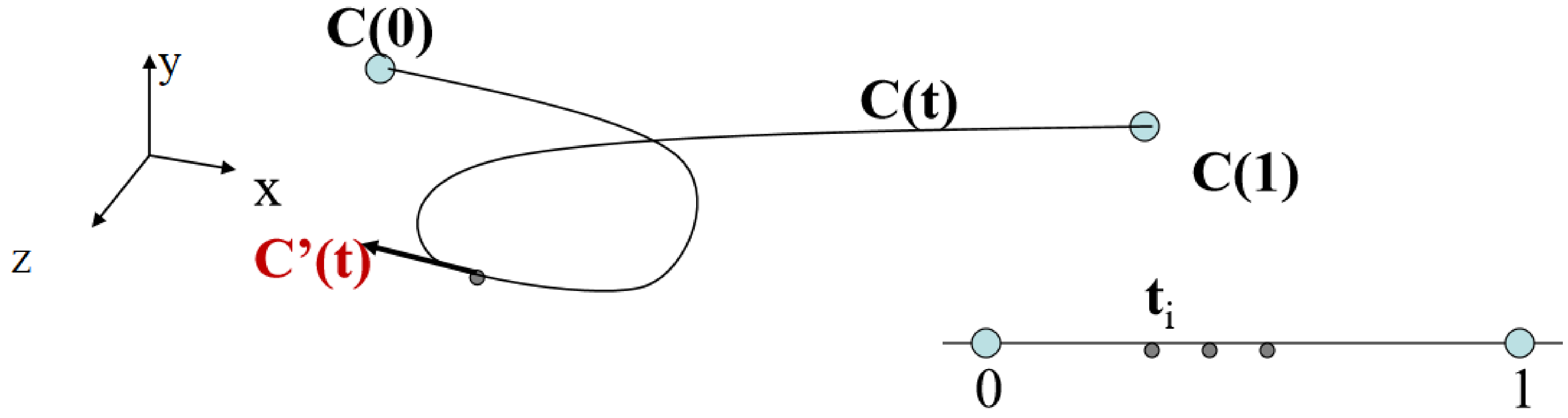
L’intervallo I = [a, b] definisce un insieme di punti in cui si sceglie di visualizzare la curva anche se essa vive anche per valori al di fuori da questo intervallo: $(-\infty,+\infty)$.

L’immagine in R^3 tramite C dell’intervallo I= [a,b]⊆R, C(I), prende il nome di **supporto, sostegno o traiettoria della curva.**

Una curva si dice **regolare** se è **differenziabile per ogni valore di t∈I e se la norma del vettore derivata non è nulla in alcun punto di I.**

Tornando al nostro modello fisico del moto della particella, ad ogni istante t_0, le coordinate (x(t_0), y(t_0)) individuano un punto
che si sposta sulla curva con velocità data dalla tangente alla curva parametrica in t_0 :

$$v(t_0) = \frac{dC(t)}{dt} = C'(t_0) = \begin{bmatrix} \dfrac{dx(t_0)}{dt} \\ \dfrac{dy(t_0)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \end{bmatrix}$$



Il ***modulo del vettore velocità*** rappresenta la velocità istantanea in unità di distanza per unità di tempo con la quale la particella si muove lungo la curva, ed e' dato da:

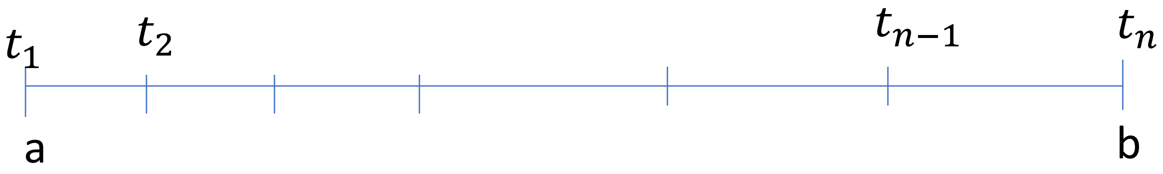
$$\|C'(t_0)\|_2 = \sqrt{x'(t_0)^2 + y'(t_0)^2}$$

- La direzione del vettore velocità è data dal vettore tangente $C'(t_0)$ e punta nel verso delle t crescenti.

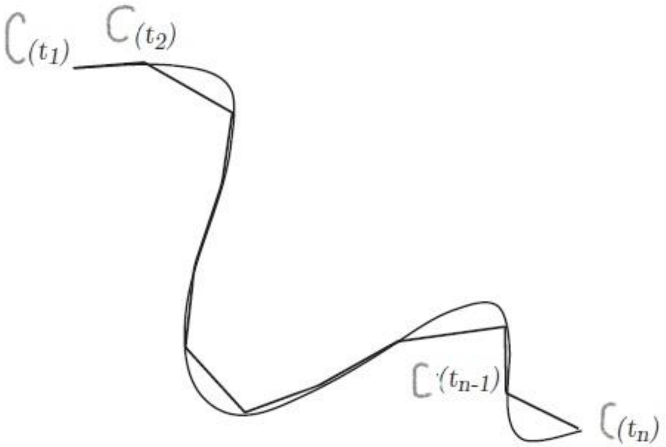
Lunghezza di una curva

Sia $C(t): [a, b] \rightarrow R^3$ una curva regolare.

Consideriamo una suddivisione dell'intervallo $[a, b]$, mediante un insieme di punti $t_1 = a < t_2 < \ldots. < t_{n-1} < t_n = b$.



Per ogni valore del parametro t_i , $i =, \ldots, N, consideriamo\ i\ l\ punto\ \ C(t_i), i = 1, \ldots, N$ sulla curva.

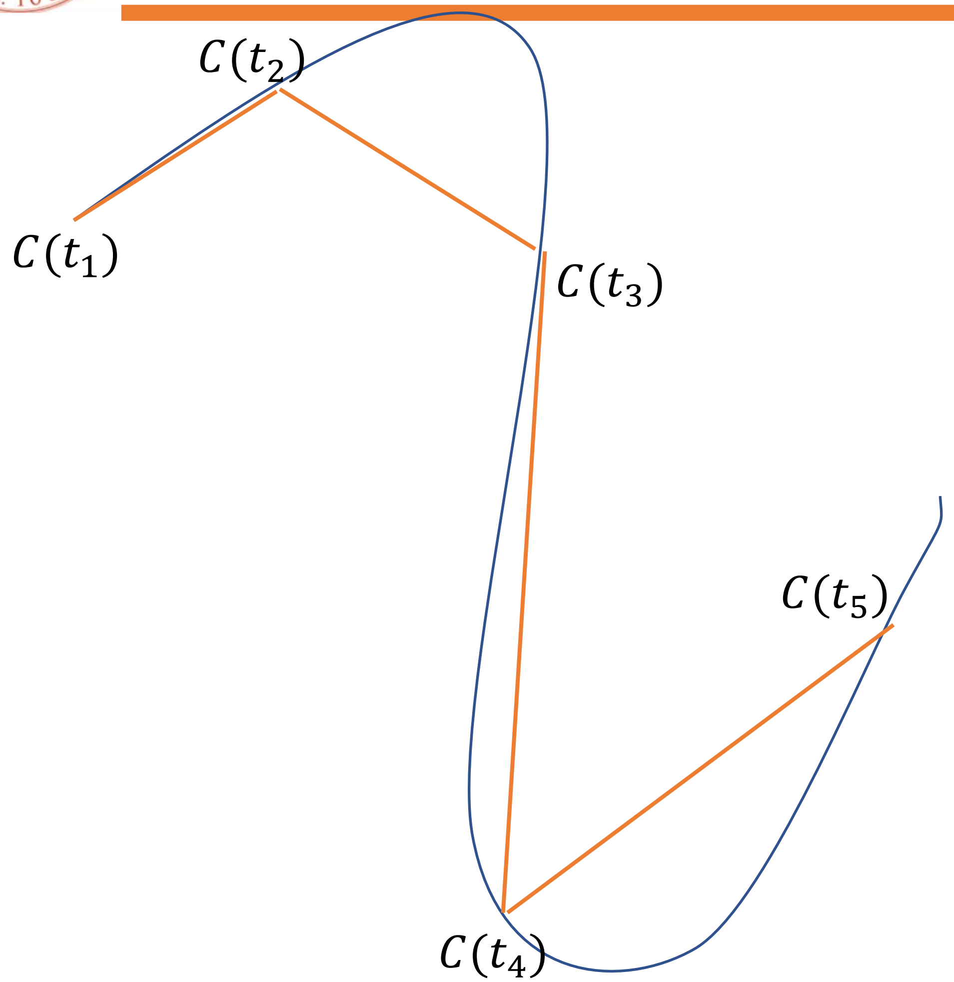


Consideriamo la poligonale P_N che collega i vertici $C(t_i), i = 1, \ldots, N$ sulla curva.

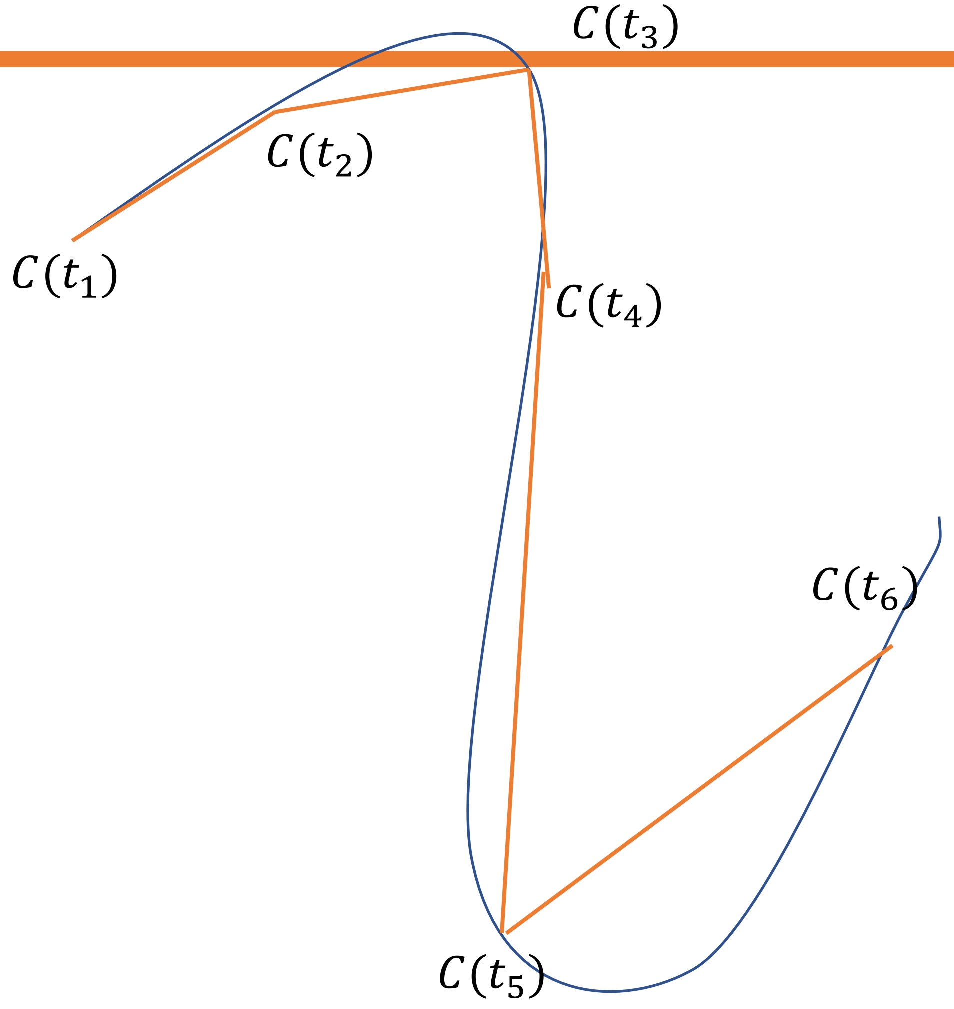
La lunghezza di questa poligonale è data dalla somma delle lunghezze dei suoi lati

$$L(P_N) = \sum_{i=1}^{N-1} \|C(t_{i+1}) - C(t_i)\|$$

Poligonale P_5



Poligonale P_6



Aggiungendo un punto ad una suddivisione dell'intervallo [a,b] , si determina una poligonale P_{N+1} di lunghezza $L(P_{N+1}) \geq L(P_N)$ (per la disuguaglianza triangolare) ed $L(P_{N+1})$ si avvicina alla lunghezza della traiettoria della curva più di $L(P_N)$

Al tendere all'infinito del numero dei punti delle suddivisioni di $[a, b]$ così ottenute, le lunghezze delle poligonali associate formano una successione monotona non decrescente che converge all' integrale , che rappresenta quindi la lunghezza della traiettoria

$$L(C) = \lim_{N\to\infty} \quad L(P_N) = \sum_{i=1}^{N-1} \|C(t_{i+1}) - C(t_i)\| = \int_a^b \|C'(t)\| dt$$

Quindi la lunghezza di una curva si ottiene facendo l'integrale

Siano x'(t), y'(t),z'(t)   continue in $[a, b]$ le derivate prime delle componenti parametriche della curva *C*(t)=(x(t),y(t),z(t)), allora la lunghezza di *C* tra *C*(a) e *C*(b) è definita dalla seguente formula

$$L = \int_a^b \|C'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt$$

Continuità geometrica e continuità parametrica di una curva

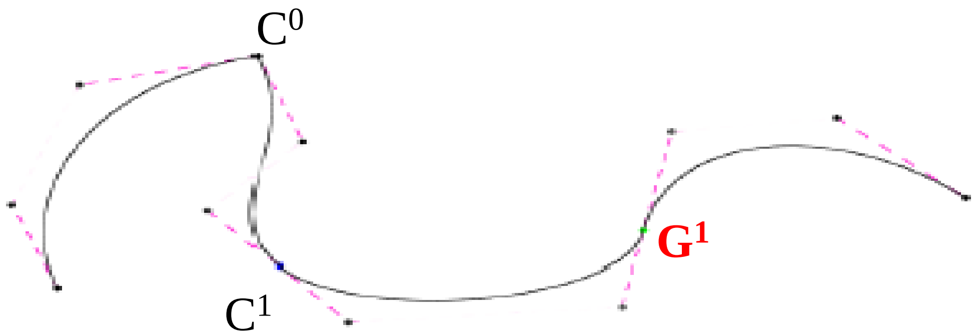
Se due segmenti di curva si uniscono ad un estremo, si dice che tra i due segmenti di curva c'è un raccordo C^0 che assicura l'assenza di salti. Se due tratti di curva si uniscono in un punto P_0 e, inoltre, detti v_1 e v_2 i vettori velocità in P_0 del primo e secondo tratto di curva rispettivamente, si definisce

- **Continuità parametrica C^1**

Le direzioni e i moduli dei vettori tangenti v_1, v_2 dei due segmenti curvi nel punto di contatto P0 sono uguali. Le derivate prime dei due segmenti di curva hanno la stessa direzione e stesso modulo

- **Continuità geometrica G^1**

Le direzioni dei vettori tangenti v1, v2 dei due segmenti curvi nel punto di contatto sono uguali, i moduli possono essere diversi. Le derivate prime dei due segmenti di curva hanno la stessa direzione ma moduli diversi



- **Continuità parametrica C^n**

Le derivate fino a quella di ordine n dei due segmenti di curva C_1 e C_2 nel punto di contatto P0 sono uguali.

$$\left.\frac{d^n C_1(t)}{dt^n}\right|_{P_0} = \left.\frac{d^n C_2(t)}{dt^n}\right|_{P_0}$$

Curvatura Ciò che vogliamo definire e calcolare è la misura matematica di quanto una curva devii dall'essere retta nell'intorno di un punto. Poiché la curvatura di una curva in generale cambia da punto a punto, si calcola come la variazione del versore tangente rispetto ad una variazione nella posizione.

Sia C una curva regolare di classe C^k, k>=2.

definiamo il versore della tangente:

$$T(t) = \frac{C'(t)}{\|C'(t)\|}$$

Vettore tangente

La sua lunghezza

Sia C una curva regolare di classe C^k, k>=2.
La **curvatura** è la funzione

$$k(t):\ I \to R^+$$

di classe C^{k-2}, che calcola la variazione del versore tangente rispetto ad una variazione nella posizione.

Definizione di curvatura: $$k(t) = \frac{\|T'(t)\|}{\|C'(t)\|}$$

Sia $C(t)$ una circonferenza di raggio R,

$$C(t)=\begin{bmatrix} R\cos(t) \\ R\sin(t) \end{bmatrix}, C'(t)=\begin{bmatrix} -R\sin(t) \\ R\cos(t) \end{bmatrix}, \quad \|C'(t)\|_2=\sqrt{R^2(\sin^2(t)+\cos^2(t))}=R$$

Calcoliamo il versore della normale:

$$T(t)=\frac{C'(t)}{\|C'(t)\|_2}=\frac{\begin{bmatrix} -R\sin(t) \\ R\cos(t) \end{bmatrix},}{\|C'(t)\|_2}=\begin{bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix}$$

Curvatura

$$k(t)=\frac{\|T'(t)\|}{\|C'(t)\|}=\frac{\left\|\begin{bmatrix} -\cos t \\ -\sin t \end{bmatrix}\right\|}{R}=\frac{\sqrt{\cos^2 t+\sin^2 t}}{R}=\frac{1}{R}$$

Quindi cerchi di grande raggio hanno piccola curvatura mentre cerchi di piccolo raggio avranno grande curvatura, come intuibile.

Curve interpolanti di Hermite

Curve Interpolanti

Dati i punti del piano $P_i, i = 0, .. N$, dove possiamo pensare che le coordinate del punto P_i possano essere considerate come valutazione di due funzioni parametriche x(t) ed y(t) nel valore del parametro t_i

$$p_i \equiv \begin{pmatrix} x_i = x(t_i) \\ y_i = y(t_i) \end{pmatrix}$$

Vogliamo costruire la curva interpolante i punti P_i, i=0,..N:

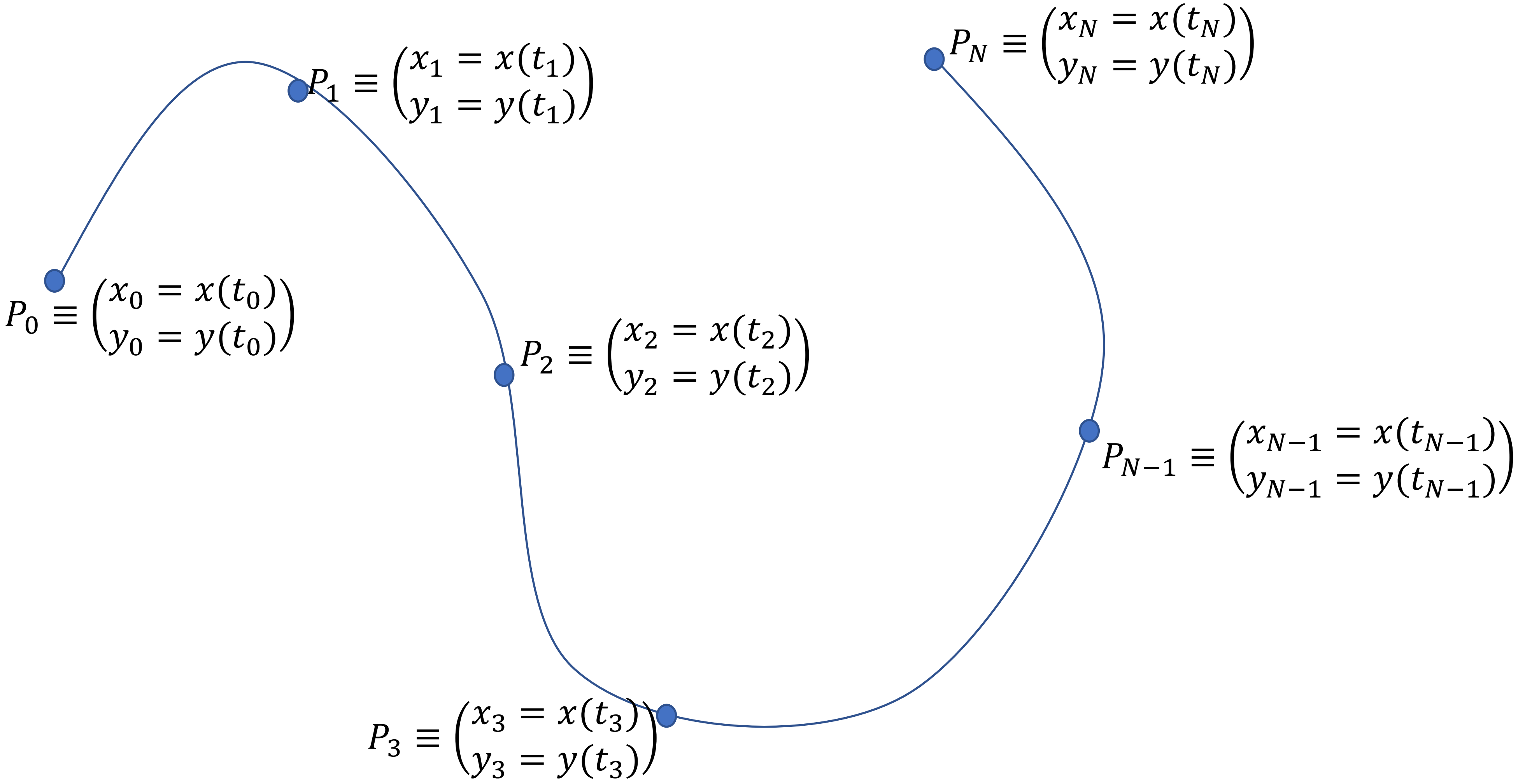
$$C(t_i) = p_i \equiv \begin{pmatrix} x_i = x(t_i) \\ y_i = y(t_i) \end{pmatrix}$$

Questo equivale a risolvere due problemi di interpolazione, uno per la funzione parametrica x e l'altro per la funzione parametrica y. Scegliamo una base di funzioni φ per lo spazio in cui vogliamo costruire le funzioni interpolanti

Interpoliamo quindi le coppie (t_i, x_i), i =0,..,N $\Rightarrow$ $X_N(t) = \sum_{j=0}^{N} \alpha_j \varphi_j(t)$ tale che $X_N(t_i) = x_i$

Interpoliamo quindi le coppie (t_i, y_i), i =0,..,N $\Rightarrow$ $Y_N(t) = \sum_{j=0}^{N} \beta_j \varphi_j(t)$ tale che $Y_N(t_i) = y_i$

$$C(t) = \begin{cases} X_N(t) \\ Y_N(t) \end{cases} \Rightarrow C(t_i) = p_i \equiv \begin{pmatrix} x_i = x(t_i) \\ y_i = y(t_i) \end{pmatrix}$$


$P_0 \equiv \begin{pmatrix} x_0 = x(t_0) \\ y_0 = y(t_0) \end{pmatrix}$
$P_1 \equiv \begin{pmatrix} x_1 = x(t_1) \\ y_1 = y(t_1) \end{pmatrix}$
$P_2 \equiv \begin{pmatrix} x_2 = x(t_2) \\ y_2 = y(t_2) \end{pmatrix}$
$P_3 \equiv \begin{pmatrix} x_3 = x(t_3) \\ y_3 = y(t_3) \end{pmatrix}$
$P_{N-1} \equiv \begin{pmatrix} x_{N-1} = x(t_{N-1}) \\ y_{N-1} = y(t_{N-1}) \end{pmatrix}$
$P_N \equiv \begin{pmatrix} x_N = x(t_N) \\ y_N = y(t_N) \end{pmatrix}$

Dati N+1 punti da interpolare

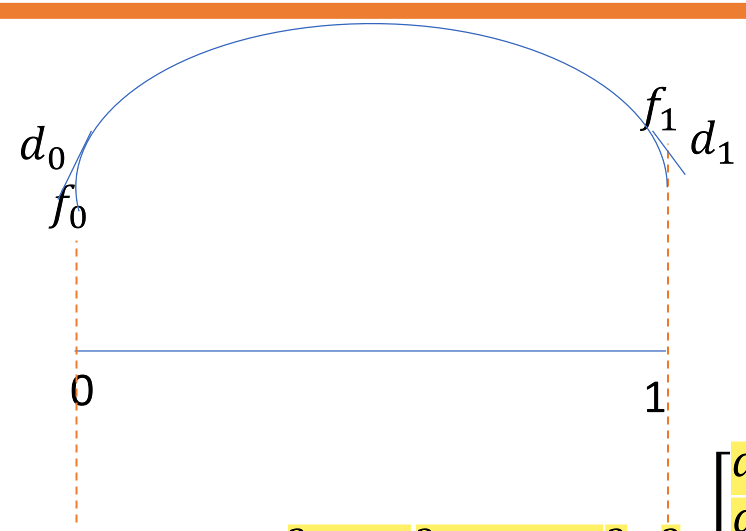
$$p_i \equiv \begin{pmatrix} x_i = x(t_i) \\ y_i = y(t_i) \end{pmatrix} \qquad i=0,\dots,N$$

costruire N segmenti di curve costruite a partire da polinomi cubici, tali che che nei punti di giunzione abbiano lo stesso valore e la stessa derivata prima.

Affrontiamo questo problema nel caso più semplice di dati che descrivono una funzione

cioè date le coppie (x_i, y_i) , dove $y_i=f(xi)$, i=0,N, costruire N segmenti di polinomi cubici che nei punti di giunzione si raccordino in valore e derivata prima.

Assegnati agli estremi dell'intervallo [0,1] i valori f_0 ed f_1 della funzione ed i valori d_0 ed d_1 della derivata prima



Il polinomio cubico $P_3(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 = [1\ t\ t^2\ t^3] \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ che interpola questi

dati, cioè tale che $\quad P_3(0) = f_0 \qquad P_3(1) = f_1$

Bisogna sostituire a P3(t) e mettere a matrice $\quad P_3'(0) = d_0 \qquad P_3'(1) = d_1$

Si calcola imponendo le condizioni di interpolazione:

$$\begin{matrix} P_3(0) \\ P_3(1) \end{matrix} \qquad \begin{cases} a_0 = f_0 \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = f_1 \\ a_1 = d_0 \\ a_1 + 2a_2 + 3a_3 = d_1 \end{cases} \qquad \begin{matrix} P_3'(0) \\ P_3'(1) \end{matrix}$$

$P'_3(t) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2$

Hermite dimostra che il polinomio $P_3(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$ che interpola questi dati, cioè tale che

$$P_3(0) = f_0 \qquad P_3(1) = f_1$$
$$P_3'(0) = d_0 \qquad P_3'(1) = d_1$$

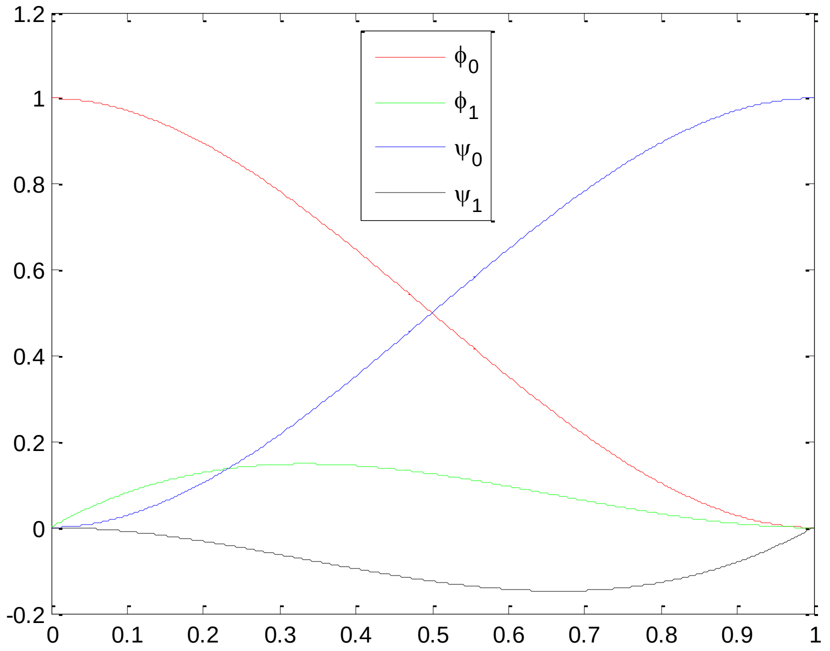
si può esprimere come:

Vuole dimostrare questo:

$$P_3(t) = f_0 \cdot \phi_0(t) + d_0 \cdot \phi_1(t) + f_1 \cdot \psi_0(t) + d_1 \cdot \psi_1(t)$$

dove

$$\varphi_0(t) = 2 \cdot t^3 - 3 \cdot t^2 + 1$$
$$\varphi_1(t) = t^3 - 2 \cdot t^2 + t \qquad 0 \le t \le 1$$
$$\psi_0(t) = -2 \cdot t^3 + 3 \cdot t^2$$
$$\psi_1(t) = t^3 - t^2$$



Dimostrazione:

Il sistema lineare

$$\begin{cases} a_0 = f_0 \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = f_1 \\ a_1 = d_0 \\ a_1 + 2a_2 + 3a_3 = d_1 \end{cases}$$

In termini matriciale si può scrivere come

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ d_0 \\ d_1 \end{bmatrix}$$

da cui si ricava la soluzione

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ d_0 \\ d_1 \end{bmatrix}$$

Poiché si ha

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Risulta

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ d_0 \\ d_1 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

Sappiamo che $P_3(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 = [1\ t\ t^2\ t^3] \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$

Sostituiamo in quest'ultima relazione la (1), otterremo:

$$P_3(t) = [1\ t\ t^2\ t^3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ d_0 \\ d_1 \end{bmatrix} =$$

$$= [1 - 3t^2 + 2t^3, 3t^2 - 2t^3, t - 2t^2 + t^3, -t^2 + t^3] \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ d_0 \\ d_1 \end{bmatrix}$$

Sostituiamo con fi e psi

Poniamo:

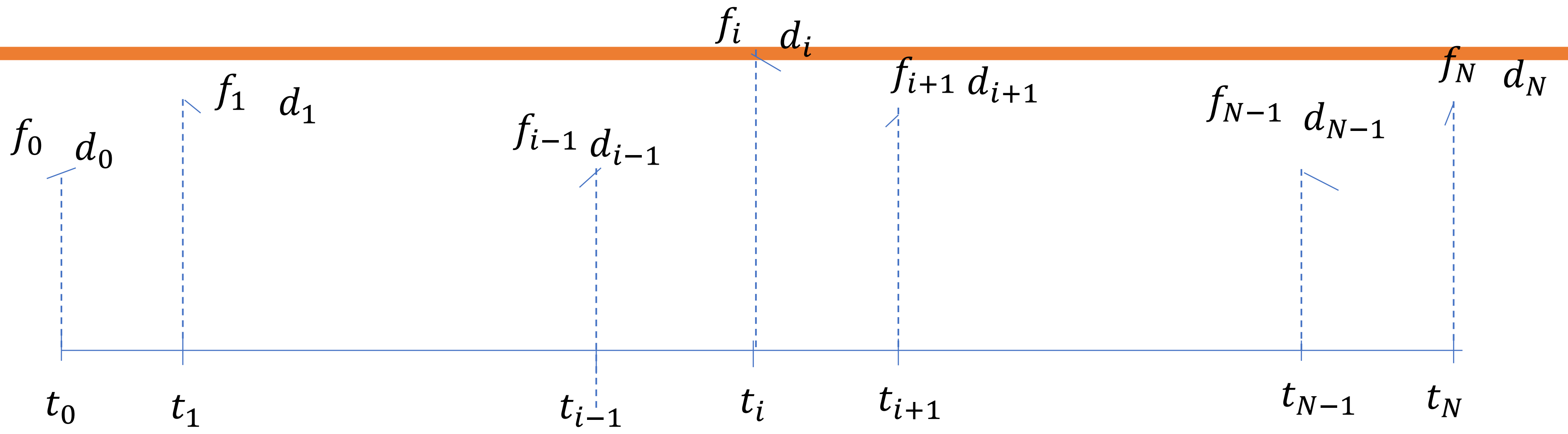
$$\phi_0(t) = 2 \cdot t^3 - 3 \cdot t^2 + 1$$
$$\phi_1(t) = t^3 - 2 \cdot t^2 + t \qquad 0 \leq t \leq 1$$
$$\psi_0(t) = -2 \cdot t^3 + 3 \cdot t^2$$
$$\psi_1(t) = t^3 - t^2$$

Si ha quindi

$$P_3(t) = [\phi_0(t), \psi_0(t), \phi_1(t), \psi_1(t)] \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ d_0 \\ d_1 \end{bmatrix}$$

$$P_3(t) = f_0 \cdot \phi_0(t) + f_1 \cdot \psi_0(t) + d_0 \cdot \phi_1(t) + d_1 \cdot \psi_1(t)$$

Noti i valori $(t_i, f_i, d_i), i = 0, \dots, N$



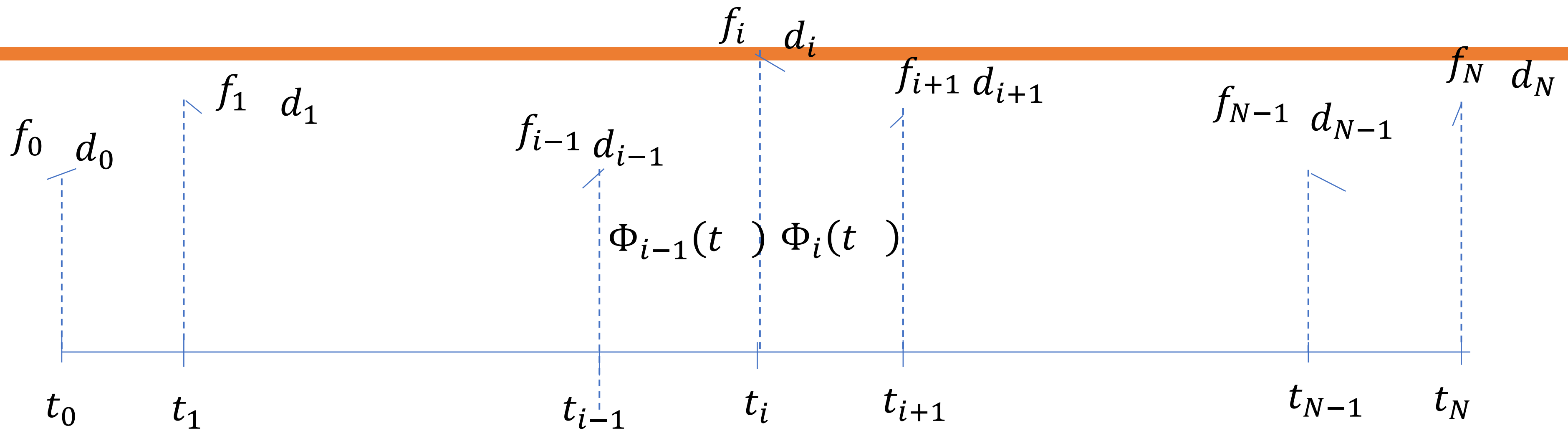
il polinomio interpolatore di Hermite $P_H(t)$ tale che $P_H(t_i) = f_i$ e $P'_H(t_i) = d_i$, , $i = 0, \dots, N$
si esprime come:

$$P_H(t) = \sum_{i=0}^{N} \Phi_i(t) \qquad (1)$$

dove

Versione generalizzata non solamente nell'intervallo [0,1]

$$\Phi_i(t) = f_i \cdot \varphi_{0,i}(t) + d_i \cdot \varphi_{1,i}(t) + f_{i+1} \cdot \psi_{0,i}(t) + d_{i+1} \cdot \psi_{1,i}(t) \qquad (2)$$



Si può verificare facilmente che il polinomio espresso nella forma (2) in ogni sottointervallo coincide con un polinomio cubico che soddisfa le seguenti proprietà:

$$\Phi_i(t_i) = \Phi_{i-1}(t_i) = f_i$$

$$\Phi'_i(t_i) = \Phi'_{i-1}(t_i) = d_i$$

$P_H(t)$ È formato da N segmenti di polinomi cubici che nei punti di giunzione si raccordano in valore e derivata prima.

Poiché le 4 funzioni $\varphi_{0,i}(t)$, $\varphi_{1,i}(t)$, $\psi_{0,i}(t)$, $\psi_{1,i}(t)$ sono definite analiticamente nell'intervallo [0,1], **è necessario applicare una trasformazione affine che mappi il punto $\boldsymbol{t} \in [\boldsymbol{t_i}, \boldsymbol{t_{i+1}}]$ in $\boldsymbol{t} \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$**

Consideriamo la trasformazione affine che a $t \in [t_i, t_{i+1}]$ faccia corrispondere $\hat{t} \in [0,1]$

$$\hat{t} = \frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i} \qquad (3)$$

Vale il seguente risultato

$\varphi_{0,i}(t)\ e\ \ \psi_{0,i}(t)$ Sono invarianti per trasformazioni affini

$$\Downarrow$$

$$\varphi_{0,i}(\hat{t}) = \varphi_{0,i}(t) \qquad \psi_{0,i}(\hat{t}) = \psi_{0,i}(t)$$

$\varphi_{1,i}(t)\ e\ \ \psi_{1,i}(t)$ Non sono invarianti per trasformazioni affini

$$\Downarrow$$

$$\varphi_{1,i}(t) = \varphi_{1,i}(\hat{t})(t_{i+1} - t_i) \qquad \psi_{1,i}(t) = \psi_{1,i}(\hat{t})(t_{i+1} - t_i)$$

Per la valutazione del polinomio

$$P_H(t) = \sum_{i=0}^{N} \Phi_i(t)$$

per ogni valore di t, bisogna fare la seguente osservazione.

Fissato un qualsiasi valore di $t \in [0,1]$, bisogna valutare ognuna delle Φ_i in t e poi farne la somma. Ma, una volta individuato l'intervallo $[\, t_{\bar{\iota}}\, , t_{\bar{\iota}+1}]$, a cui appartiene il valore di t , la sommatoria si riduce a valutare il solo contributo $\Phi_{\bar{\iota}}(t)$, poiché su quel valore di t ∈ $[\, t_{\bar{\iota}}\, , t_{\bar{\iota}+1}]$ è definita e diversa da zero solo la funzione $\Phi_{\bar{\iota}}(t)$.

Valutazione di un polinomio interpolante di Hermite, che interpola $(t_i, f_i, d_i), i = 0, .., n$

For t in [0,1]

- Individuare l'intervallo $[\, t_{\bar{\imath}}\, , t_{\bar{\imath}+1}]$ a cui t appartiene
- Mappare il valore di t ∈ $[\, t_{\bar{\imath}}\, , t_{\bar{\imath}+1}]$ in $[0,1]$ (usando la formula 1)
- Valutare l'ordinata del punto sul polinomio interpolante corrispondente al valore t :

$$P = \Phi_{\bar{\imath}}(t) = f_{\bar{\imath}} \cdot \varphi_{0,\bar{\imath}}(t) + d_{\bar{\imath}} \cdot \varphi_{1,\bar{\imath}}(t)(t_{\bar{\imath}+1} - t_{\bar{\imath}}) + f_{\bar{\imath}+1} \cdot \psi_{0,\bar{\imath}}(t) + d_{\bar{\imath}+1} \cdot \psi_{1,\bar{\imath}}(t)(t_{\bar{\imath}+1} - t_{\bar{\imath}})$$

Curve interpolanti di Hermite

Nel caso di curve, dati N+1 punti da interpolare

$$p_i \equiv \begin{pmatrix} x_i = x(t_i) \\ y_i = y(t_i) \end{pmatrix} \qquad i = 0,..N$$

in cui sono noti i valori delle derivate $d_i \equiv \begin{pmatrix} d^x{}_i \\ d^y{}_i \end{pmatrix}$

dove d^x è la derivata prima della componente parametrica in x e d^y è la derivata prima della componente parametrica in y della curva, la curva cubica di Hermite si esprime come:

$$C(t) = \begin{cases} C_x(t) = \sum_{i=0}^{N-1} \phi_i^X(t) \\ C_y(t) = \sum_{i=0}^{N-1} \phi_i^Y(t) \end{cases}$$

$$\phi_i^X(t) = x_i \cdot \varphi_{0,i}(t) + d^x{}_i \cdot \varphi_{1,i}(t) + x_{i+1} \cdot \psi_{0,i}(t) + d^x{}_{i+1} \cdot \psi_{1,i}(t)$$

$$\phi_i^Y(t) = y_i \cdot \varphi_{0,i}(t) + d^y{}_i \cdot \varphi_{1,i}(t) + y_{i+1} \cdot \psi_{0,i}(t) + d^y{}_{i+1} \cdot \psi_{1,i}(t)$$

Valutazione di una curva interpolante di Hermite

For t in [0,1]

- Individuare l'intervallo $[\, t_{\bar{\imath}}\, , t_{\bar{\imath}+1}]$ a cui t appartiene
- Mappare il valore di t ∈ $[\, t_{\bar{\imath}}\, , t_{\bar{\imath}+1}]$ in $[0,1]$ (usando la formula 1)
- Valutare le coordinate x ed y del punto che appartiene alla curva interpolante mediante le formule:

$$x = \Phi_{\bar{\imath}}^{X}(t) = x_{\bar{\imath}} \cdot \varphi_{0,\bar{\imath}}(t) + d_{\bar{\imath}}^{X} \cdot \varphi_{1,\bar{\imath}}(t)(t_{\bar{\imath}+1} - t_{\bar{\imath}}) + x_{\bar{\imath}+1} \cdot \psi_{0,\bar{\imath}}(t) + d_{\bar{\imath}+1}^{X} \cdot \psi_{1,\bar{\imath}}(t)(t_{\bar{\imath}+1} - t_{\bar{\imath}})$$

$$y = \Phi_{\bar{\imath}}^{Y}(t) = y_{\bar{\imath}} \cdot \varphi_{0,\bar{\imath}}(t) + d_{\bar{\imath}}^{Y} \cdot \varphi_{1,\bar{\imath}}(t)(t_{\bar{\imath}+1} - t_{\bar{\imath}}) + y_{\bar{\imath}+1} \cdot \psi_{0,\bar{\imath}}(t) + d_{\bar{\imath}+1}^{Y} \cdot \psi_{1,\bar{\imath}}(t)(t_{\bar{\imath}+1} - t_{\bar{\imath}})$$

Valutazione delle derivate

Se i dati a disposizione sono solo i valori della funzione, è necessario trovare un criterio per determinare i valori delle derivate.

Esistono due classi di metodi:

- Metodi numerici per il calcolo delle derivate
- Metodi di minimizzazione

Tra questi ultimi ricordiamo:

Minimizzazione di un funzionale che tiene conto della curvatura globale.

Minimizzazione di un funzionale che tiene conto della lunghezza della funzione interpolante.

Minimizzazione di un funzionale combinazione lineare dei due precedenti.

Metodi numerici per il calcolo della derivata prima

Dati N+1 punti da interpolare mediante N segmenti di curva cubica di Hermite, per ogni curva abbiamo un punto inziale p_i ed un punto finale p_{i+1} con tangenti d_i e d_{i+1}

Rapporto incrementale

$$d_i = \frac{p_{i+1} - p_i}{t_{i+1} - t_i} \qquad i = 0, \ldots, N-1$$

Differenze finite: (media tra due rapporti incrementali successivi)

$$d_i = \frac{1}{2}(d_i + d_{i-1}) = \frac{p_{i+1} - p_i}{2(t_{i+1} - t_i)} + \frac{p_i - p_{i-1}}{2(t_i - t_{i-1})}$$

Cardinal spline

$$d_i = (1-c)\,\frac{p_{i+1} - p_{i-1}}{2(t_{i+1} - t_{i-1})}$$

c=parametro di tensione → agisce sulla lunghezza della tangente

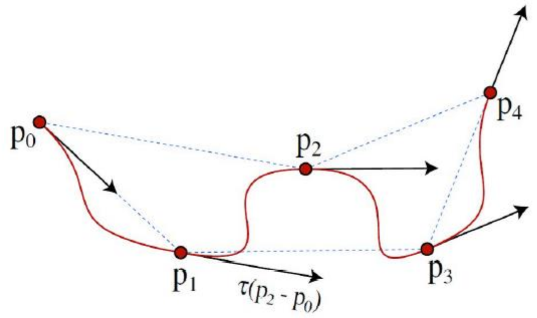
c=1 → tangente lunga zero

c=0 → spline di tipo Catmull Rom

Spline di Catmull Rom

$$d_i = \frac{p_{i+1} - p_{i-1}}{2(t_{i+1} - t_{i-1})}$$

La tangente nel punto p_i è parallela al segmento che congiunge il punto precedente ed il punto successivo.



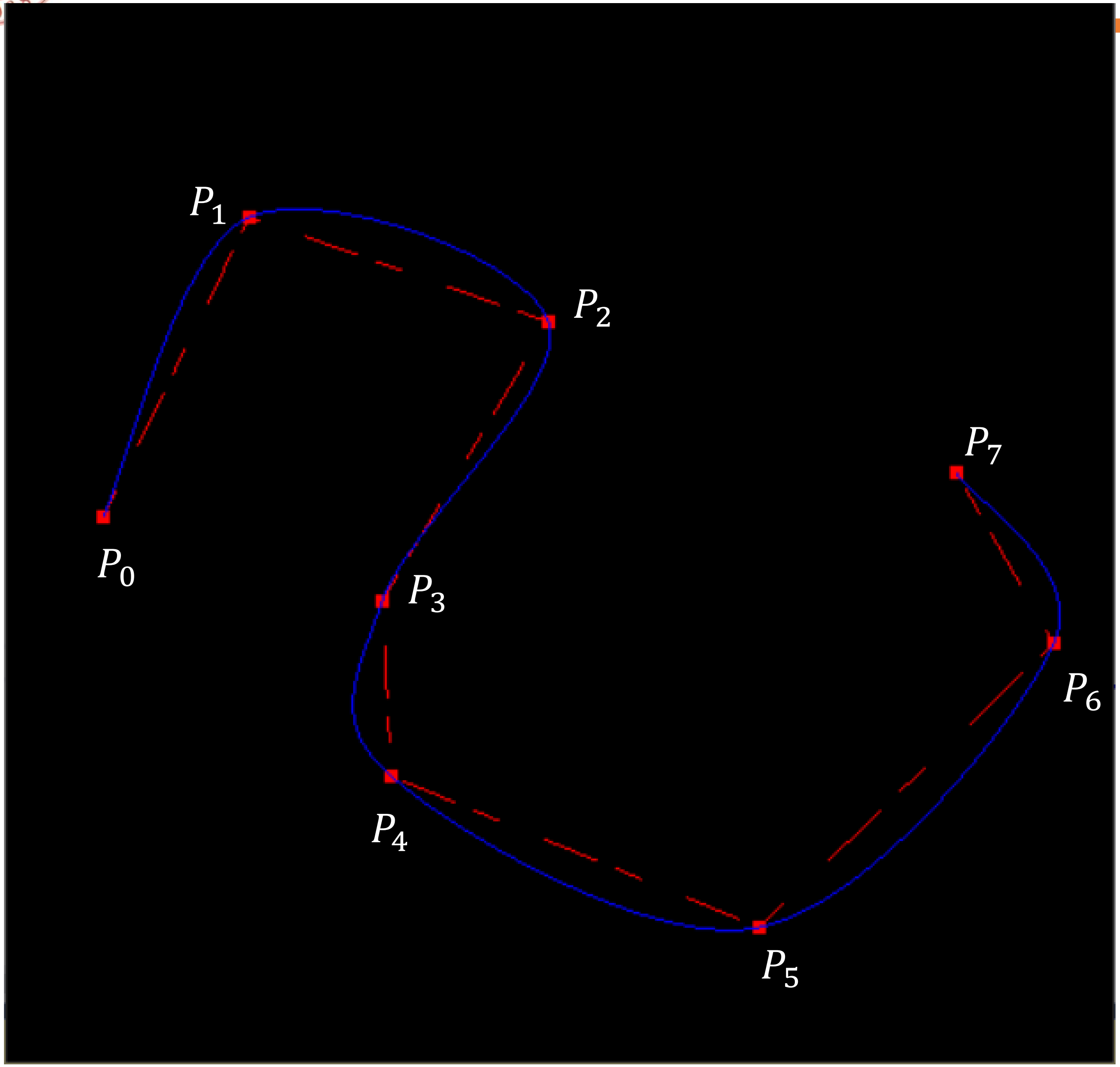
Spline di Kochanek-Bartles (note anche come **TBC Splines**) spline cubiche di Hermite in cui sono definiti tre parametri, detti **T=tensione, B=bias, C=continuity**

Dati n+1 punti da interpolare mediante n segmenti di curva cubica di Hermite, per ogni curva abbiamo un punto inziale p_i ed un punto finale p_{i+1} con tangenti d_i e d_{i+1}

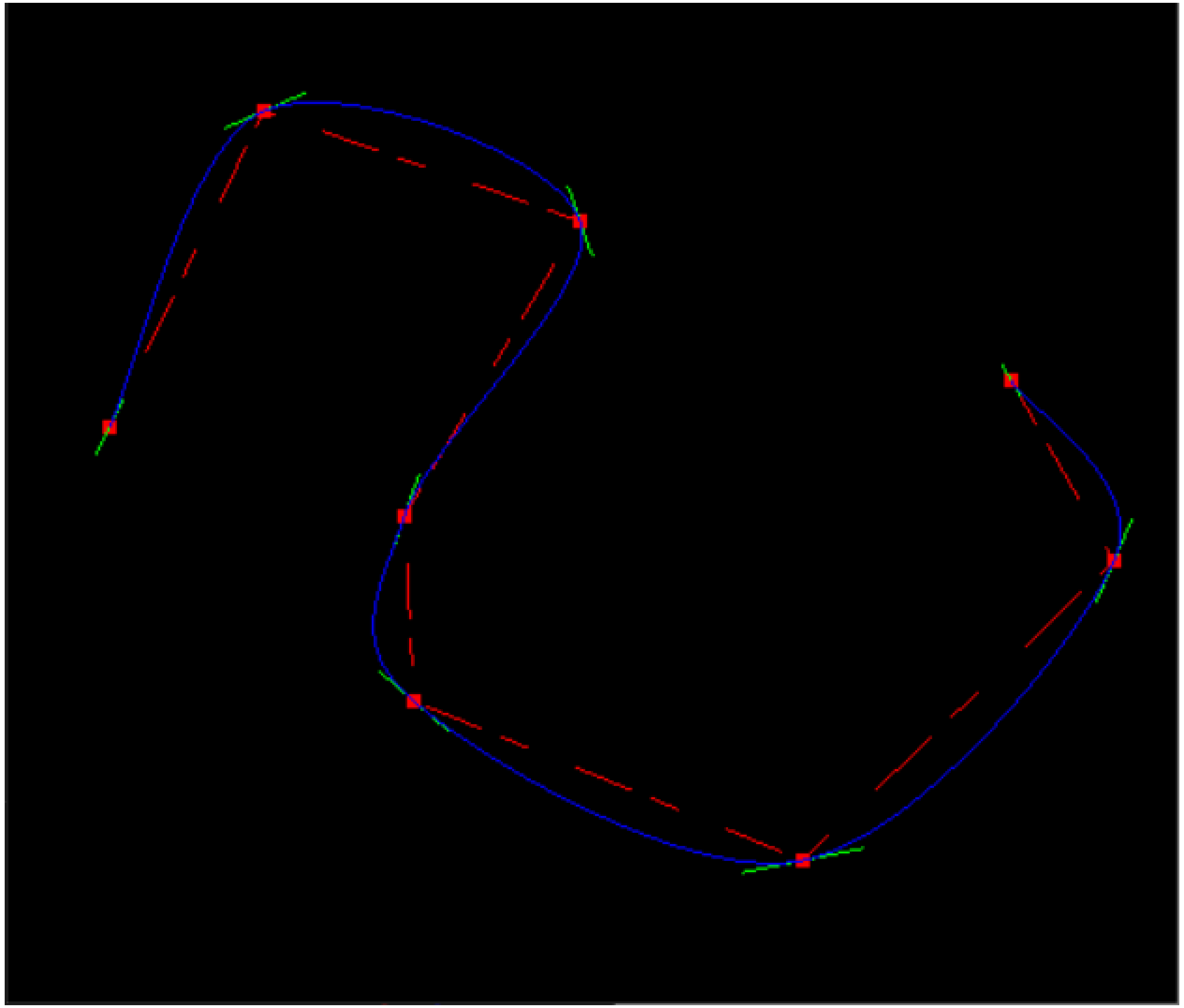
$$d_i = (1-T)(1+B)(1+C)\frac{p_i - p_{i-1}}{2(t_i - t_{i-1})} + (1-T)(1-B)(1-C)\frac{p_{i+1} - p_i}{2(t_{i+1} - t_i)}$$

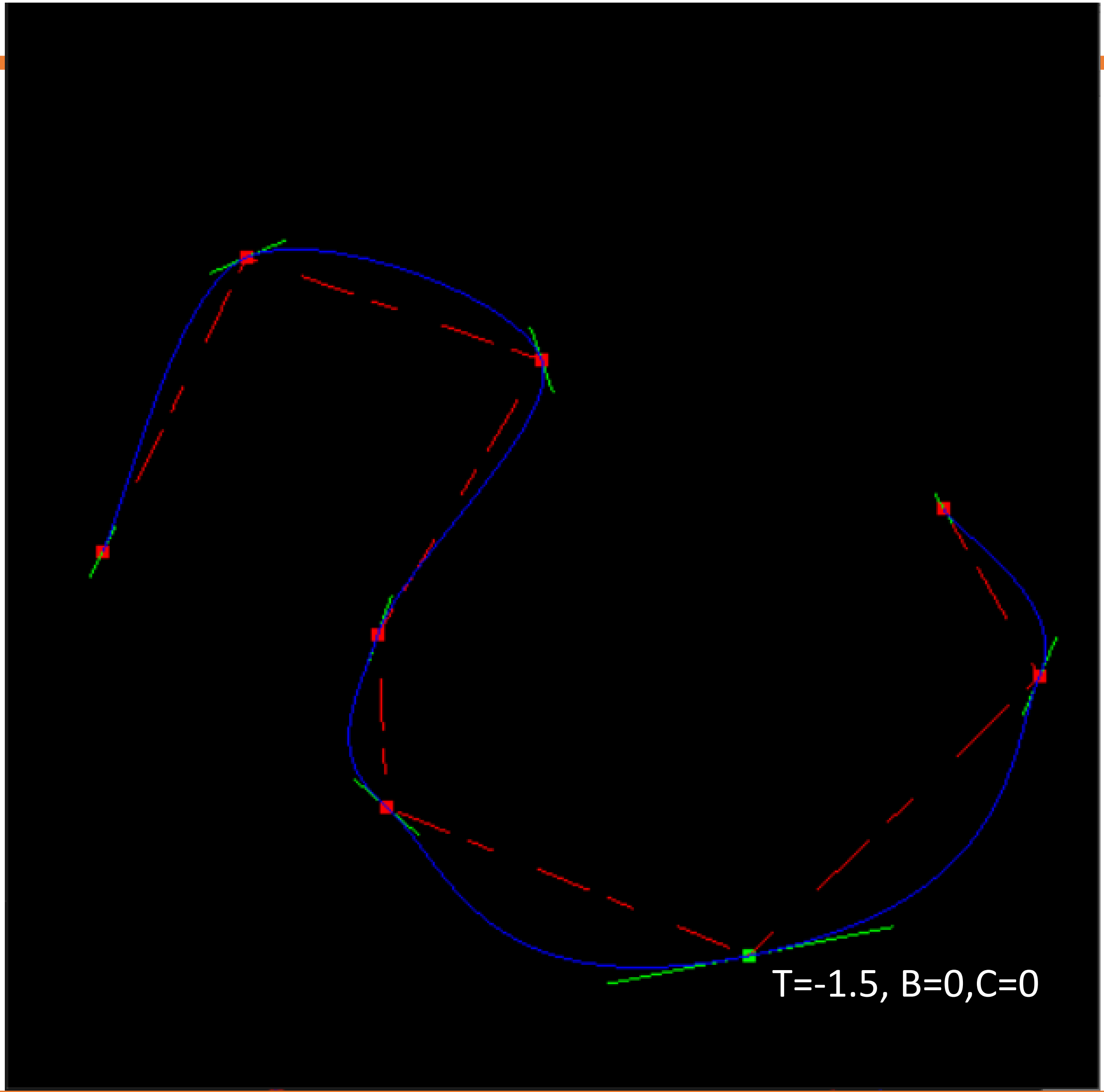
$$d_{i+1} = (1-T)(1+B)(1-C)\frac{p_i - p_{i-1}}{2(t_i - t_{i-1})} + (1-T)(1-B)(1-C)\frac{p_{i+1} - p_i}{2(t_{i+1} - t_i)}$$

Il parametro tension T varia la lunghezza del vettore tangente, il parametro bias, B, cambia la direzione del vettore di tangente e il valore continuity C, varia la continuità.



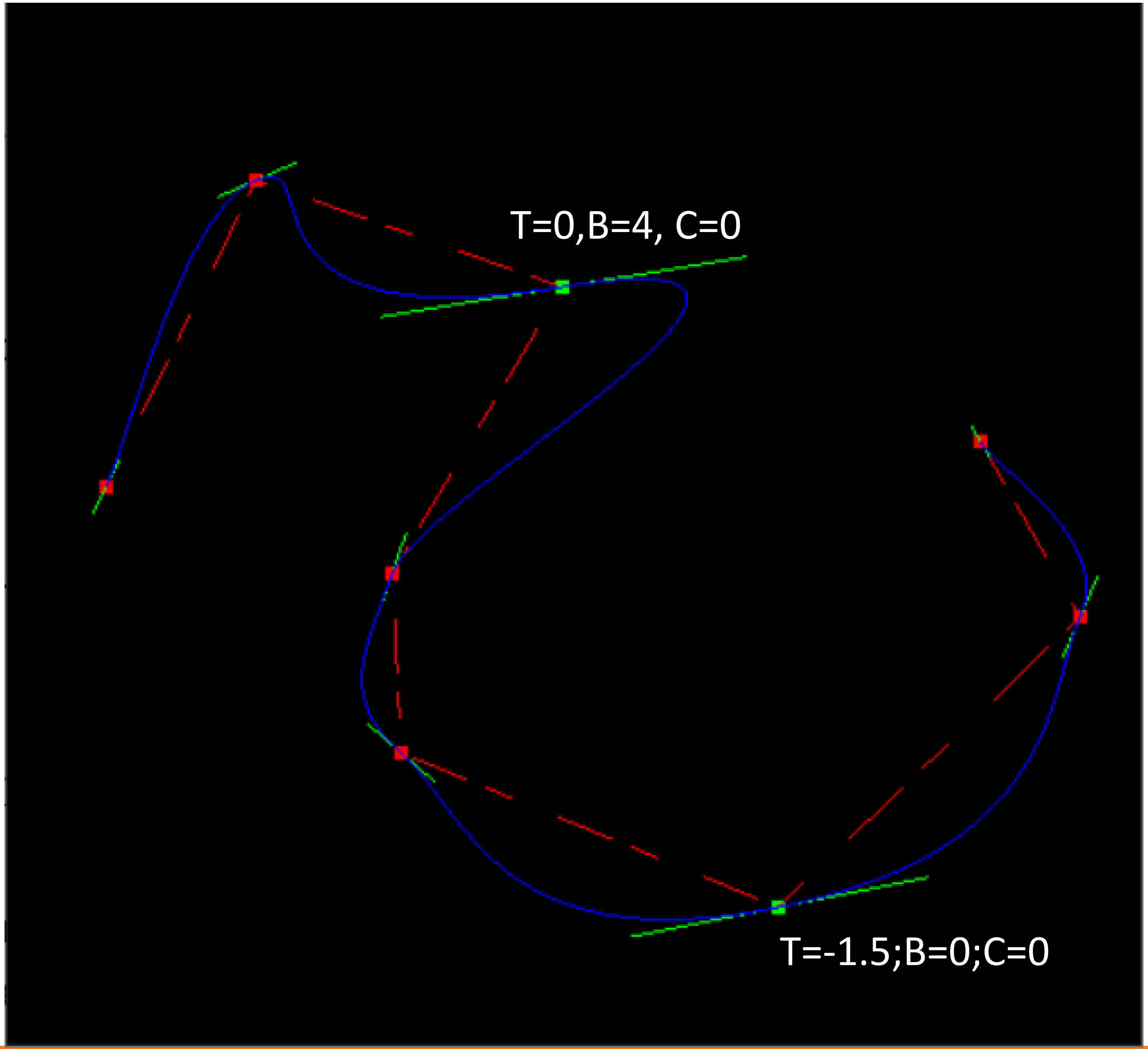
Derivate nei punti Pi calcolate mediante Rapporto incrementale





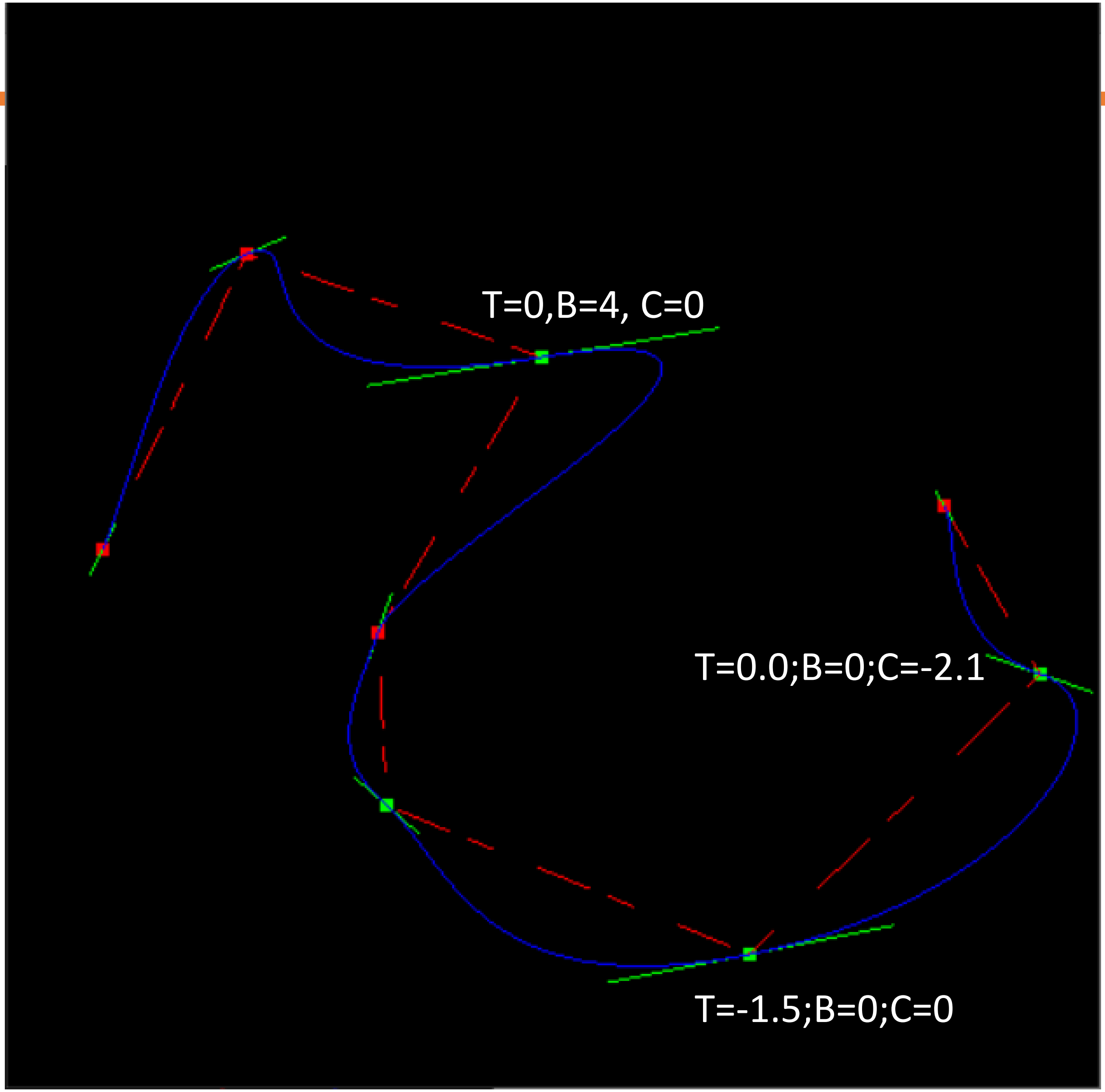
Stima derivate

TBC Spline



Stima derivate

TBC Spline



Stima derivate

TBC Spline