Programmazione Lineare: Algoritmo del Simplesso

Daniele Vigo

D.E.I. – Università di Bologna

daniele.vigo@unibo.it

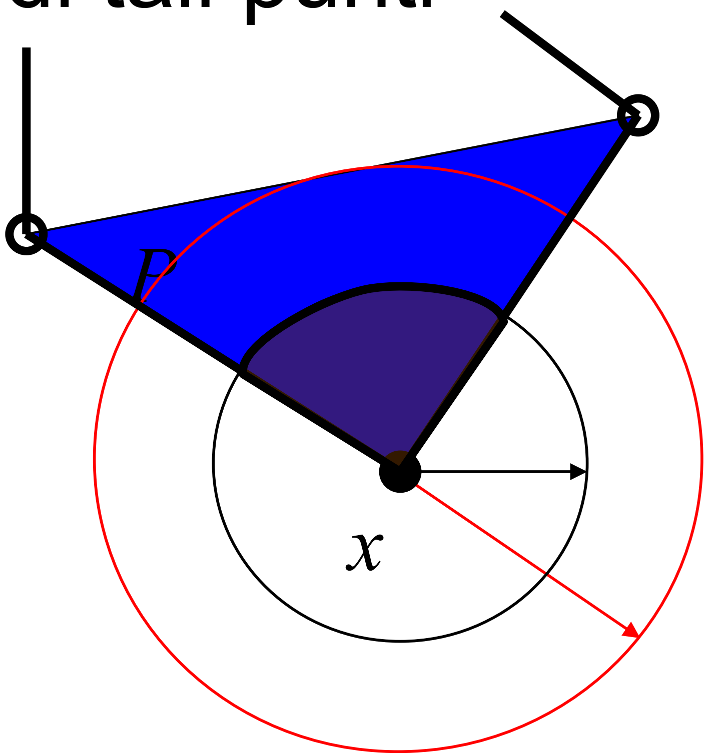
rev. 2.0 – 2023

Algoritmo del Simplesso

- Metodo algebrico per la soluzione di problemi LP (G.B. Dantzig, 1947)
- Se esiste una soluzione ottima, essa coincide con un vertice
- I vertici ammissibili sono in un numero finito, proporzionali a $\binom{n}{m}$
- Per LP l'intorno Euclideo è *esatto* $\forall \varepsilon > 0$
  - È esatto anche l'intorno
  - $N_A(x)$:={vertici ammissibili adiacenti ad x}

Intorni ed LP

- Dato x vertice corrente ed i suoi vertici adiacenti, sia P l'insieme dei punti comb. conv. di tali punti



$\exists\ \varepsilon'$: i punti ammissibili dell'intorno $N_{\varepsilon'}(x)$, appartengono a P

per verificare l'ottimalità e sufficiente farlo rispetto a $N_A(x)$

Algoritmo

1. Inizializzazione: parti da un vertice ammissibile
2. Ottimalità: esamina i vertici ammissibili e non esplorati adiacenti al corrente:

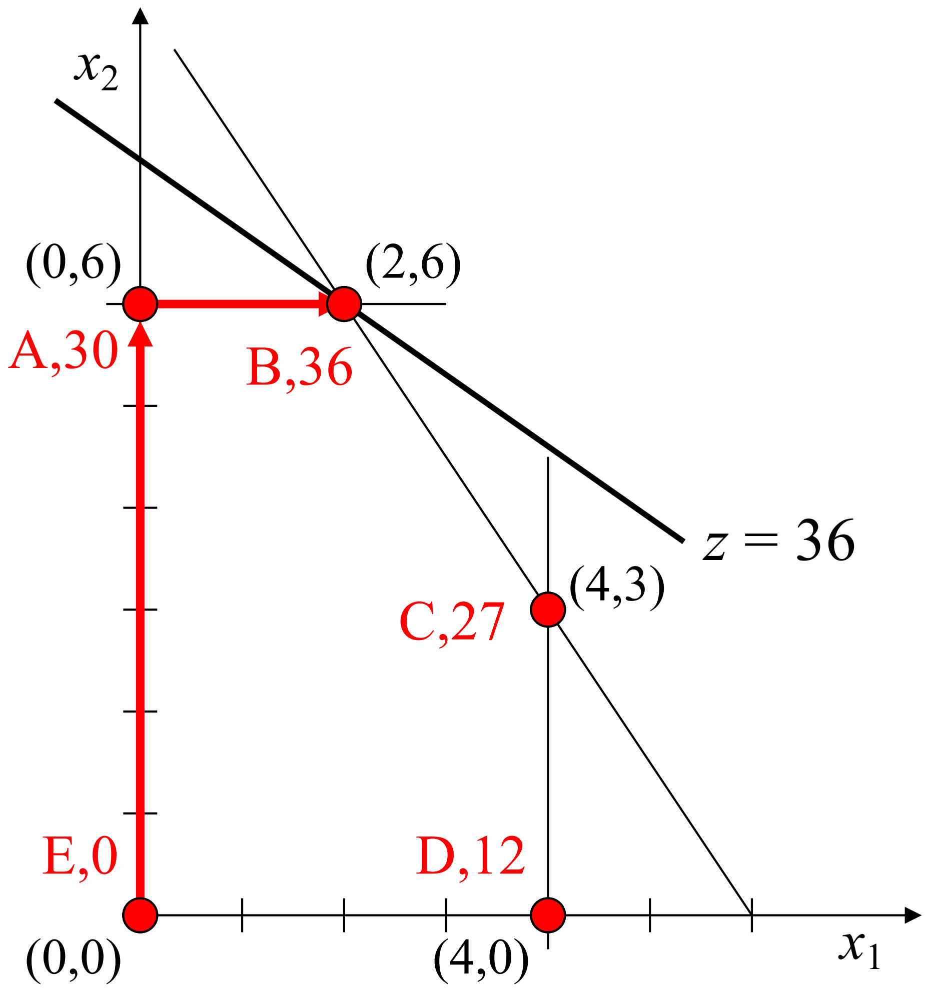
   se non esiste vertice migliore STOP

3. Iterazione: muovi verso un vertice ammissibile migliore e vai al passo 2

Esempio

$$\max z = 3x_1 + 5x_2$$

$$\nabla = (3,5)$$



Versione algebrica

- Per rendere l' algoritmo del simplesso utilizzabile (ad es su computer) è necessario trasformarlo

  da metodo geometrico

  (basato su concetti di vertice ed intorno)

  a metodo algebrico

  (basato sulla soluzione di sistemi di equazioni)

- Definizione di una procedura algebrica:

  disequazioni equazioni forma standard

Esempio

$$
(P)\quad \max z = 3x_1 + 5x_2
$$
$$
\begin{aligned}
s.t.\quad & x_1 & & \leq 4 \\
& & x_2 & \leq 6 \\
& 3x_1 & +2x_2 & \leq 18 \\
& x_1 & , x_2 & \geq 0
\end{aligned}
$$

- si passa da: R^t (f. canonica) a: R^n (f. standard) con *n=t+m*

$$
(P')\quad \min -z = -3x_1 - 5x_2
$$
$$
\begin{aligned}
s.t.\quad & x_1 & & + x_3 & & & = 4 \\
& & x_2 & & + x_4 & & = 6 \\
& 3x_1 & +2x_2 & & & + x_5 & = 18 \\
& x_1 & , x_2 & , x_3 & , x_4 & , x_5 & \geq 0
\end{aligned}
$$

Soluzione aumentata

Def.: Soluzione aumentata: soluzione di (P') corrispondente ad una soluzione di (P)

Si ottiene sostituendo in (P') i valori delle t variabili originarie e ricavando i valori delle m rimanenti

Es. (3,2) $\rightarrow$ x_1=3, x_2=2 $\rightarrow$ (3,2,1,4,5)

$$\begin{array}{rccccccccccc}
\min -z = & -3x_1 & -5x_2 & & & & & & & \\
s.t. & x_1 & & +x_3 & & & =4 & -3 & & =1 \\
 & & x_2 & & +x_4 & & =6 & & -2 & =4 \\
 & 3x_1 & +2x_2 & & & +x_5 & =18 & -9 & -4 & =5 \\
 & x_1 & ,x_2 & ,x_3 & ,x_4 & ,x_5 & \geq 0 & & &
\end{array}$$

Assunzioni

- $n > m$
  (più variabili di vincoli)

- A è di rango m
  (sottomatrici m x m non singolari)

Caratterizzazione dei vertici (1)

$$
\begin{array}{llcccccl}
(P') & \min -z = -3x_1 - 5x_2 & & & & & & \\
& s.t. \quad x_1 & & +x_3 & & & = 4 \\
& & x_2 & & +x_4 & & = 6 \\
& 3x_1 & +2x_2 & & & +x_5 & = 18 \\
& x_1 & , x_2 & , x_3 & , x_4 & , x_5 & \geq 0
\end{array}
$$

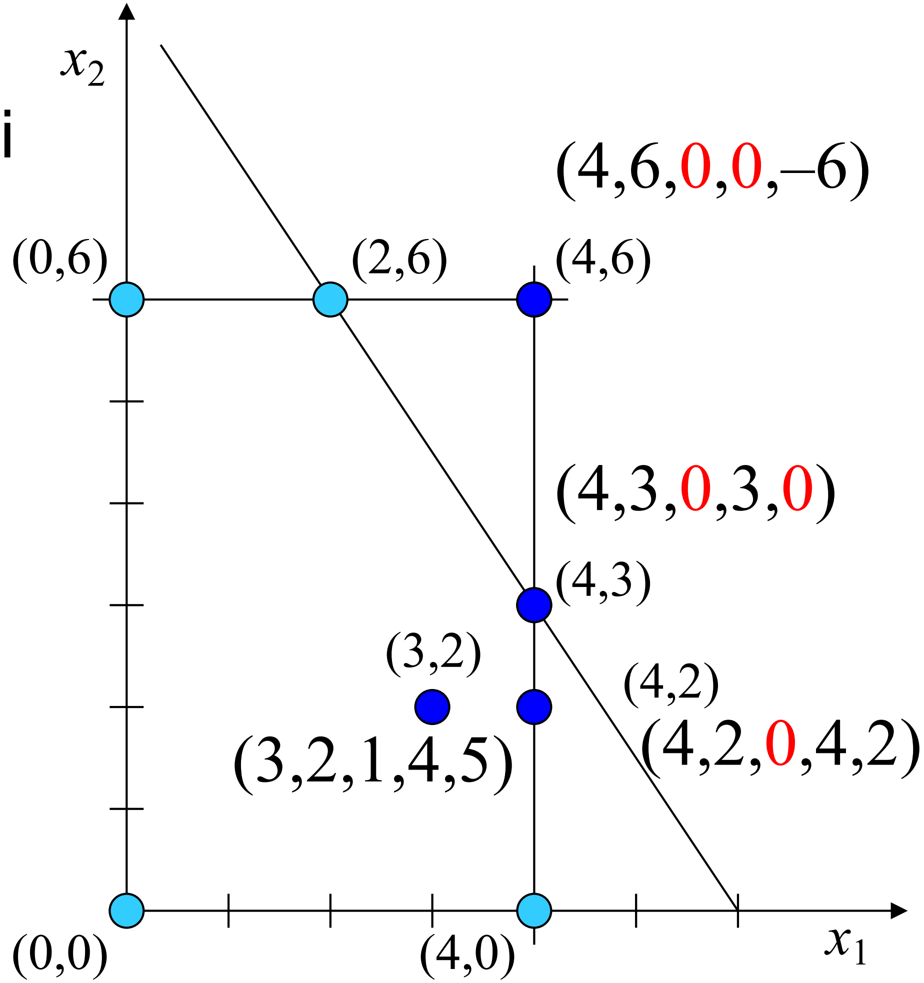
- Soluzione generica di (P'): valori arbitrari a *t* variabili e si ricavano le rimanenti *m*
- Es. $x_4 = 4$, $x_5 = 5 \rightarrow (3,2,1,4,5)$

  $x_3 = 0$, $x_4 = 0 \rightarrow (4,6,0,0,-6)$

Caratterizzazione dei vertici (2)

- Si vuole lavorare su (*P*') ed individuare le soluzioni corrispondenti ai vertici di (*P*):
- le variabili di *P*' sono slack di vincoli di *P*

$$
\begin{array}{llllll}
\min -z = -3x_1 - 5x_2 \\
s.t. & x_1 & + x_3 & & & = 4 \\
 & x_2 & & + x_4 & & = 6 \\
 & 3x_1 + 2x_2 & & & + x_5 & = 18 \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 \geq 0
\end{array}
$$



Caratterizzazione dei vertici (3)

- Si vuole lavorare su (P') ed individuare le soluzioni corrispondenti ai vertici di (P):
  - porre uguali a zero t variabili ($\Rightarrow$ sistema di m equazioni in m incognite : $Bx_B = d$)
  - ricavare le altre m in modo univoco dal sistema

$$B^{-1}Bx_B = B^{-1}d$$

  - Si può dimostrare che in questo modo si costruiscono tutte le soluzioni aumentate corrispondenti ai vertici di P

Soluzioni Base (1)

vincoli $\begin{cases} A\,x = d \\ x \geq 0 \end{cases}$

- Una *base* di *A* è una collezione di *m* colonne linearmente indipendenti:

$$\mathcal{B} = \{ A_{\beta(1)}, \ldots, A_{\beta(m)} \}$$

Soluzioni Base (2)

- E' possibile permutare le colonne di A in modo che le $A_j \in \mathcal{B}$ siano le prime m:

$$A = [\, \underbrace{A_1, \ldots, A_m}_{\boxed{\textit{in base}}} \mid \underbrace{A_{m+1}, \ldots, A_n}_{\boxed{\textit{fuori base}}} \,] = [\, B \mid F \,]$$

con B matrice m x m non singolare, da cui

$$Ax = d \;\Rightarrow [B|F]\begin{bmatrix} x_B \\ x_F \end{bmatrix} = [d] \;\Rightarrow Bx_B + Fx_F = d$$

Soluzioni Base (3)

- È quindi possibile ricavare le x_B a partire dalle x_F (arbitrarie)

$$x_B = B^{-1}d - B^{-1}F\, x_F$$

- Una soluzione base (SB), x' , si ottiene ponendo $[x_F]=[0]$

variabili non base

$$x' := \begin{cases} x_j & = 0 \text{ per } A_j \notin \mathcal{B} \\ x_{\beta(k)} & = k\text{-esima componente di } B^{-1}d \quad (k = 1,\dots,m) \end{cases}$$

variabili base

Esempio (1)

$$
\begin{array}{llcccccl}
\min -z = & -3x_1 & -5x_2 & & & & \\
s.t. & x_1 & & +x_3 & & & =4 \\
 & & x_2 & & +x_4 & & =6 \\
 & 3x_1 & +2x_2 & & & +x_5 & =18 \\
 & x_1 & , x_2 & , x_3 & , x_4 & , x_5 & \geq 0
\end{array}
$$

$$\mathcal{B} = \{ A_1, A_2, A_4 \}$$

$$\boxed{b^{-1}_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} |B_{ji}|}{|B|}}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad d = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 18 \end{bmatrix} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3/2 & 0 & 1/2 \\ 3/2 & 1 & -1/2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = B^{-1}d - B^{-1}Fx_F = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3/2 & 1/2 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

Esempio (2)

$$
\begin{aligned}
\min\ -z = -3x_1 - 5x_2 \\
s.t. \quad x_1 + x_3 &= 4 \\
x_2 + x_4 &= 6 \\
3x_1 + 2x_2 + x_5 &= 18 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Manualmente si poteva procedere anche partendo dal sistema originario:

1. ricavando $x_1 = 4 - x_3$ dalla 1^a equazione
2. sostituendo nella $3^a \Rightarrow x_2 = 3 + (3/2)x_3 - (1/2)\,x_5$
3. sostituendo nella $2^a \Rightarrow x_4 = 3 - 3/2\ x_3 + 1/2\ x_5$

Soluzioni Base Ammissibili

- Una SB, x' , soddisfa $Ax = d$, ma non necessariamente $x \geq 0$
  - SB Ammissibile (SBA) se $x' \geq 0$
  - SB non Ammissibile se $\exists\, x_j' < 0$

Th.:

x è un *vertice* del politopo

$$F=\{ x \in R^n : Ax = d \, , x \geq 0 \}$$

se e solo se x è SBA del sistema $Ax = d$

Algoritmo del Simplesso (1^a versione)

1. Scegli la base $\mathcal{B} = \{ A_{\beta(1)}, \ldots, A_{\beta(m)} \}$ iniziale (corrispondente ad una SBA)
2. Calcola la SBA, x^* , corrispondente a $\mathcal{B}$
3. Se x^* è ottima STOP (test di ottimalità)
4. Aggiorna $\mathcal{B}$ in modo che individui una SBA adiacente e di costo migliore (inferiore)
5. Vai al passo 2

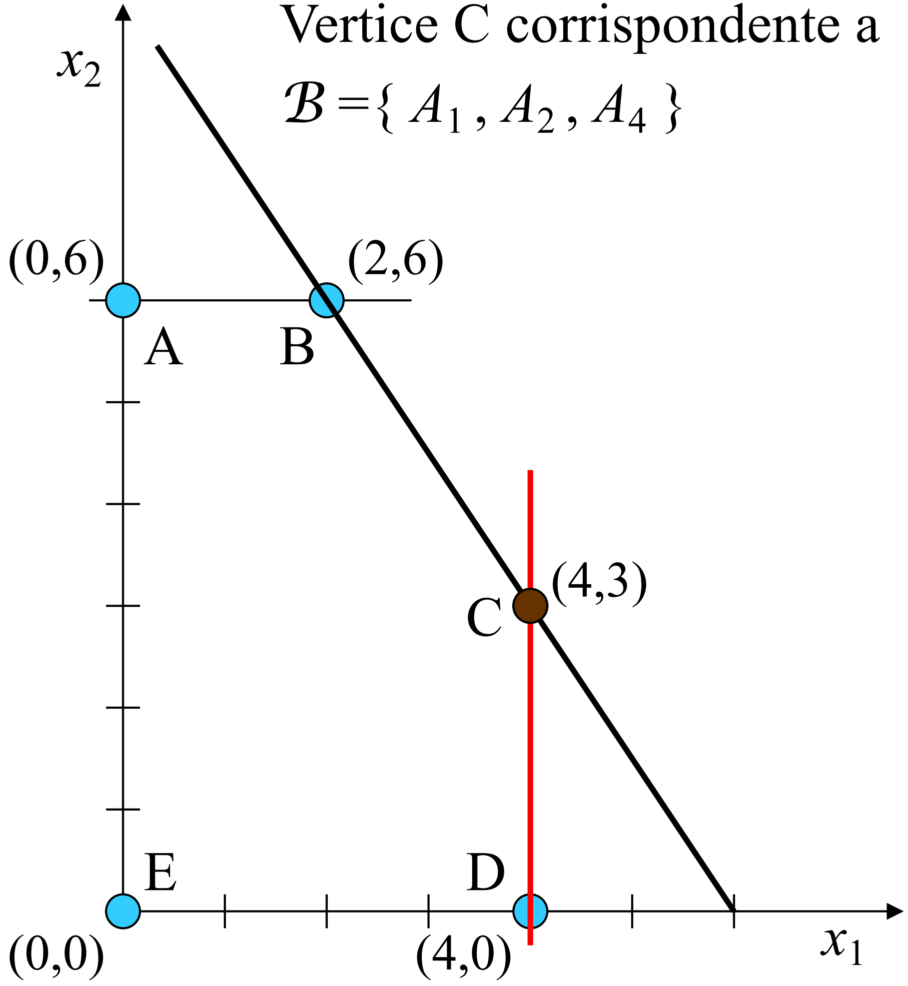
Dobbiamo vedere come realizzare i passi 1,3 e 4

Condizione di Ottimalità (1)

$$\min -z = -3x_1 - 5x_2$$

$$\begin{array}{lllllll} s.t. & x_1 & & +x_3 & & & = 4 \\ & & x_2 & & +x_4 & & = 6 \\ & 3x_1 & +2x_2 & & & +x_5 & = 18 \\ & x_1 & , x_2 & , x_3 & , x_4 & , x_5 & \geq 0 \end{array}$$

Vertice C corrispondente a $\mathcal{B} = \{A_1, A_2, A_4\}$



si ricavano le x_1, x_2, x_4 in funzione di x_3, x_5

$$\begin{aligned} x_1 &= 4 - x_3 \\ x_2 &= 3 + (3/2)\, x_3 - (1/2)\, x_5 \\ x_4 &= 3 - 3/2\, x_3 + 1/2\, x_5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -z &= -c^T x = -3x_1 - 5x_2 \\ &= -3(4 - x_3) - 5(3 + (3/2)\, x_3 - (1/2)\, x_5) \\ &= -27 - (9/2)\, x_3 + (5/2)\, x_5 \end{aligned}$$

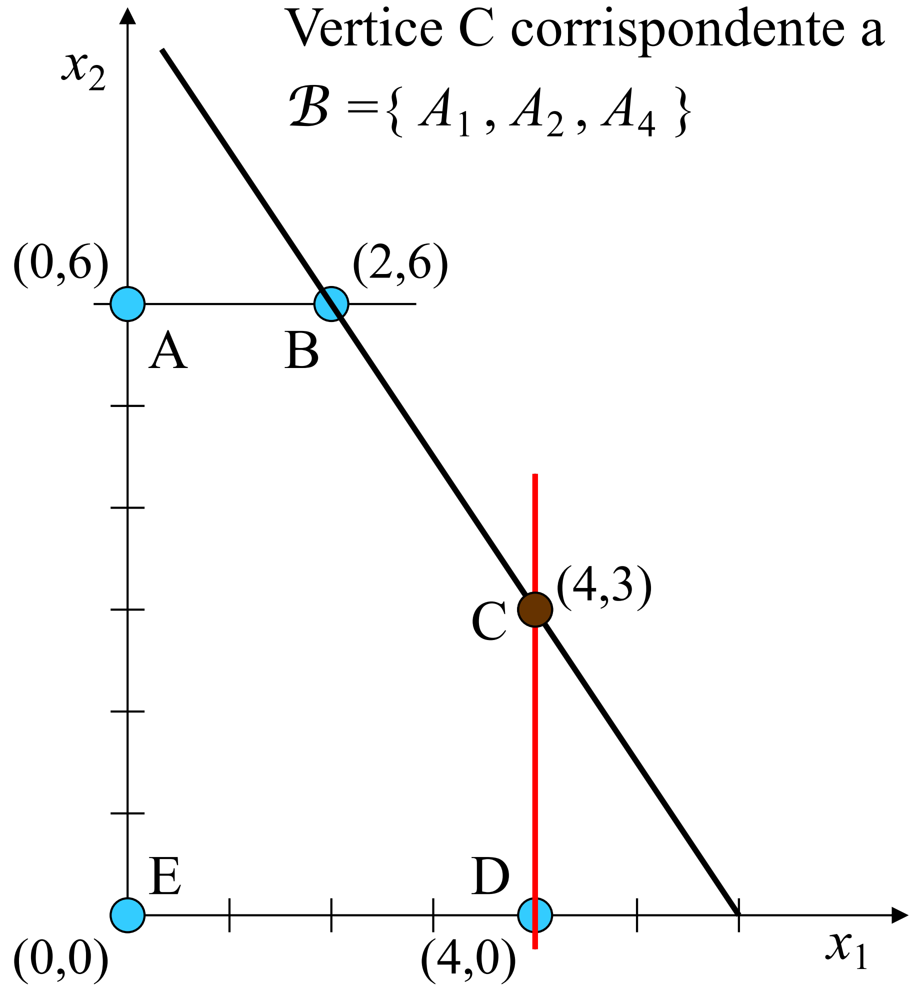
Condizione di Ottimalità (2)

$$
\begin{array}{llllllll}
\min -z = -3x_1 - 5x_2 \\
s.t. & x_1 & & + x_3 & & & = 4 \\
 & & x_2 & & + x_4 & & = 6 \\
 & 3x_1 & + 2x_2 & & & + x_5 & = 18 \\
 & x_1 & , x_2 & , x_3 & , x_4 & , x_5 & \geq 0
\end{array}
$$

- attualmente $x_3 = x_5 = 0$ (fuori base) e $z = 27$
- aumentando x_5 (muovendosi verso D) $-z$ *aumenta*
- aumentando x_3 (muovendosi verso B) $-z$ *diminuisce*

$$
\begin{aligned}
-z &= -c^T x = -3x_1 - 5x_2 \\
&= -3(4 - x_3) - 5(3 + (3/2)\, x_3 - (1/2)\, x_5) \\
&= -27 - (9/2)\, x_3 + (5/2)\, x_5
\end{aligned}
$$

Vertice C corrispondente a $\mathcal{B} = \{ A_1, A_2, A_4 \}$



Condizione di Ottimalità (3)

- Pivoting = ingresso in base di una variabile

Analiticamente (problema di minimo)

- Si sa che $x_B = B^{-1}d - B^{-1}Fx_F$

  da cui

$$c^T x = \begin{bmatrix} c_B{}^T & c_F{}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_B \\ x_F \end{bmatrix} = c_B{}^T x_B + c_F{}^T x_F =$$

$$= c_B{}^T B^{-1} d - c_B{}^T B^{-1} F x_F + c_F{}^T x_F =$$

$$= \underbrace{c_B{}^T B^{-1} d}_{costante} + (c_F{}^T - c_B{}^T B^{-1} F)\, x_F$$

Condizione di Ottimalità (4)

Quindi

$$c^T x = c_0^* + c'^T x_F$$

dove

$$c'^T = [\ \underbrace{c_B{}^T - c_B{}^T B^{-1} B}_{0} \ / \ \underbrace{c_F{}^T - c_B{}^T B^{-1} F}_{c'_F{}^T}\ ]$$

$$c'^T = c^T - c_B^T B^{-1} A$$

è il vettore dei costi ridotti (o residui)

Condizione di Ottimalità (5)

- Se esiste un $c'_j < 0$

  facendo entrare in base x_j , con $x_j = \vartheta > 0$

  $\Rightarrow$ il costo diminuisce di $\vartheta\, c'_j$

- c'_j è la variazione di z conseguente all'ingresso di un'unità di x_j in base
- derivata direzionale di z rispetto alla direzione associata all'ingresso di x_j

Condizione di Ottimalità (6)

Condizione di ottimalità

$x^* = (x^*_B|0)$ è ottimo se $c' \geq 0$

Infatti

$$c^T x = c_0^* + c'^T_F x_F \geq c_0^* = c_B^T x_B^*$$

Per le variabili in base $c'_j = 0$

$\Rightarrow$ *Se esiste più di una colonna con $c'_j < 0$, quale fare entrare in base?*

Spostamento da SBA a SBA (1)

- Se esiste $A_h \notin \mathcal{B}$ tale che $c'_h < 0$ bisogna farla entrare in base

- Basi adiacenti: differiscono per una colonna
  Es. $\{A_1, A_2, A_4\}$ e $\{A_1, A_2, A_3\}$

- Una base adiacente si ottiene dalla attuale:
  - mantenendo $x_j = 0$ ogni $A_j \notin \mathcal{B}$, $j \neq h$
  - aumentando x_h il più possibile mantenendo la soluzione ammissibile

Regole di Pivoting (1)

- Nello spostamento tra basi adiacenti si hanno 2 gradi di libertà:
  1. scelta della variabile che entra in base
  2. scelta della variabile che lascia la base

Se due scelte arbitrarie

$\Downarrow$

possibilità di SB non ammissibili

Esempio

$$\min -z = -3x_1 - 5x_2$$

$$\begin{array}{llllllll} s.t. & x_1 & & +x_3 & & & =4 \\ & & 2x_2 & & +x_4 & & =12 \\ & 3x_1 & +2x_2 & & & +x_5 & =18 \\ & x_1 & ,x_2 & ,x_3 & ,x_4 & ,x_5 & \geq 0 \end{array}$$

Vertice C corrispondente a

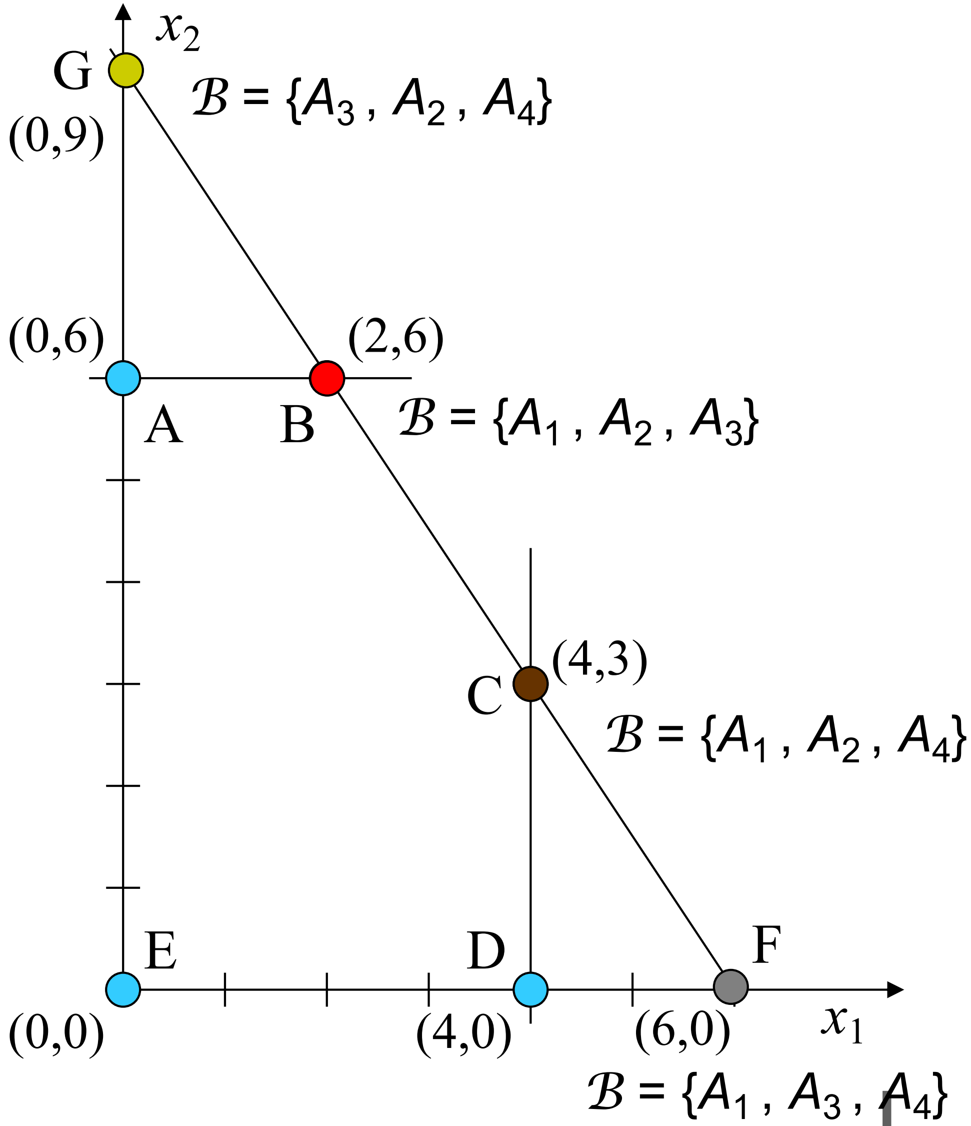
$\mathcal{B} = \{A_1, A_2, A_4\}$

Se entra A_3 ho 3 Basi Adiacenti:

$\mathcal{B}_1 = \{A_1, A_2, A_3\}$ Vertice B

$\mathcal{B}_2 = \{A_1, A_3, A_4\}$ Punto F

$\mathcal{B}_3 = \{A_3, A_2, A_4\}$ Punto G



Regole di Pivoting (2)

Algoritmo del Simplesso

- Entra in base una delle variabili che possono migliorare z $(c'_j < 0)$

- La variabile che esce viene determinata in modo che si ottenga una SBA

Esempio (1)

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 4 && - x_3 \\
x_2 &= 3 && +(3/2)\, x_3 - (1/2)\, x_5 \\
x_4 &= 3 && - 3/2\, x_3 + x_5
\end{aligned}
$$

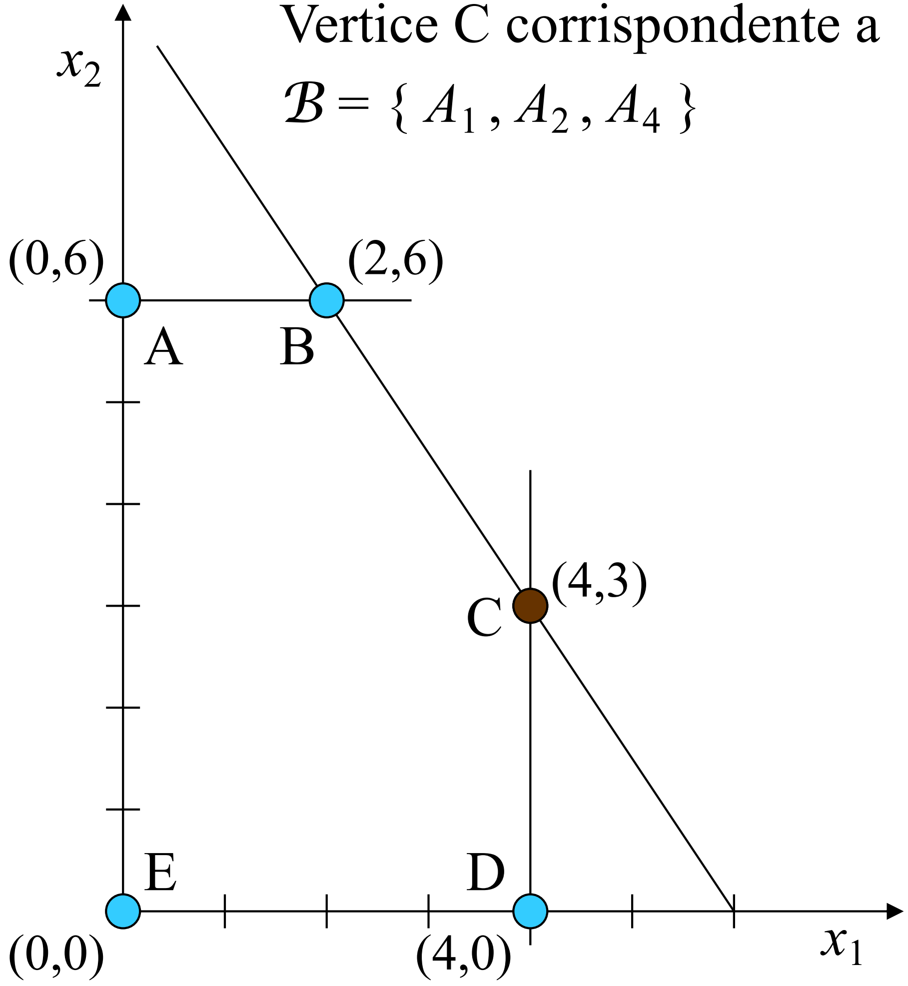
$$
\begin{aligned}
-z &= -c^T x = -3x_1 - 5x_2 \\
&= -27 - (9/2)\, x_3 + (5/2)\, x_5
\end{aligned}
$$

- Conviene far entrare in base x_3 (mantenendo $x_5 = 0$)
- Affinchè la soluzione rimanga ammissibile:

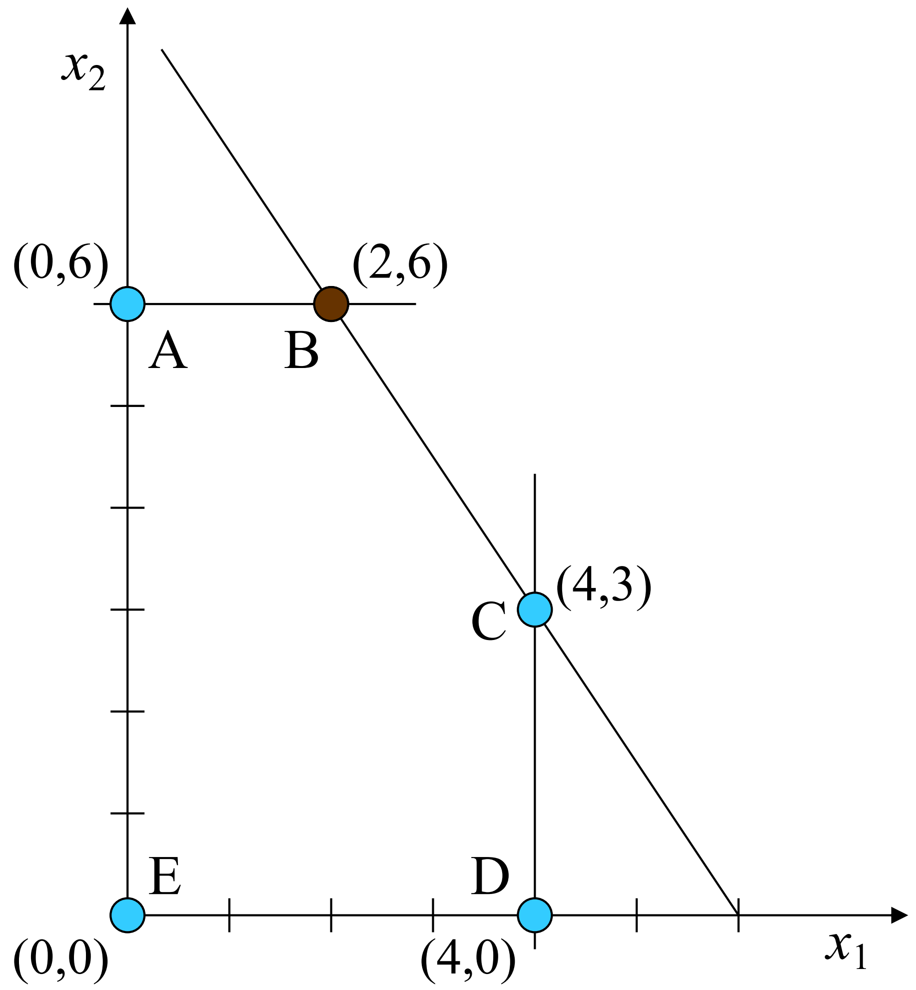
$$
\begin{aligned}
x_1 &= 4 - x_3 \geq 0 \Rightarrow x_3 \leq 4 \\
x_2 &= 3 + (3/2)\, x_3 \geq 0 \Rightarrow x_3 \geq -2 \\
x_4 &= 3 - 3/2\, x_3 \geq 0 \Rightarrow x_3 \leq 2
\end{aligned}
$$

Il massimo aumento ammissibile di x_3 è 2

Vertice C corrispondente a $\mathcal{B} = \{ A_1 , A_2 , A_4 \}$



Esempio (2)



$$
\begin{aligned}
x_1 &= 4 \qquad\qquad\;\; - x_3 = 4 - 2 = 2\\
x_2 &= 3 \;\; +(3/2)\, x_3 = 3 + 3 = 6\\
x_4 &= 3 \quad\;\; - 3/2\, x_3 = 3 - 3 = 0
\end{aligned}
$$

x_4 esce dalla base! $\quad x = (2,6,2,0,0)$

Esempio (3)

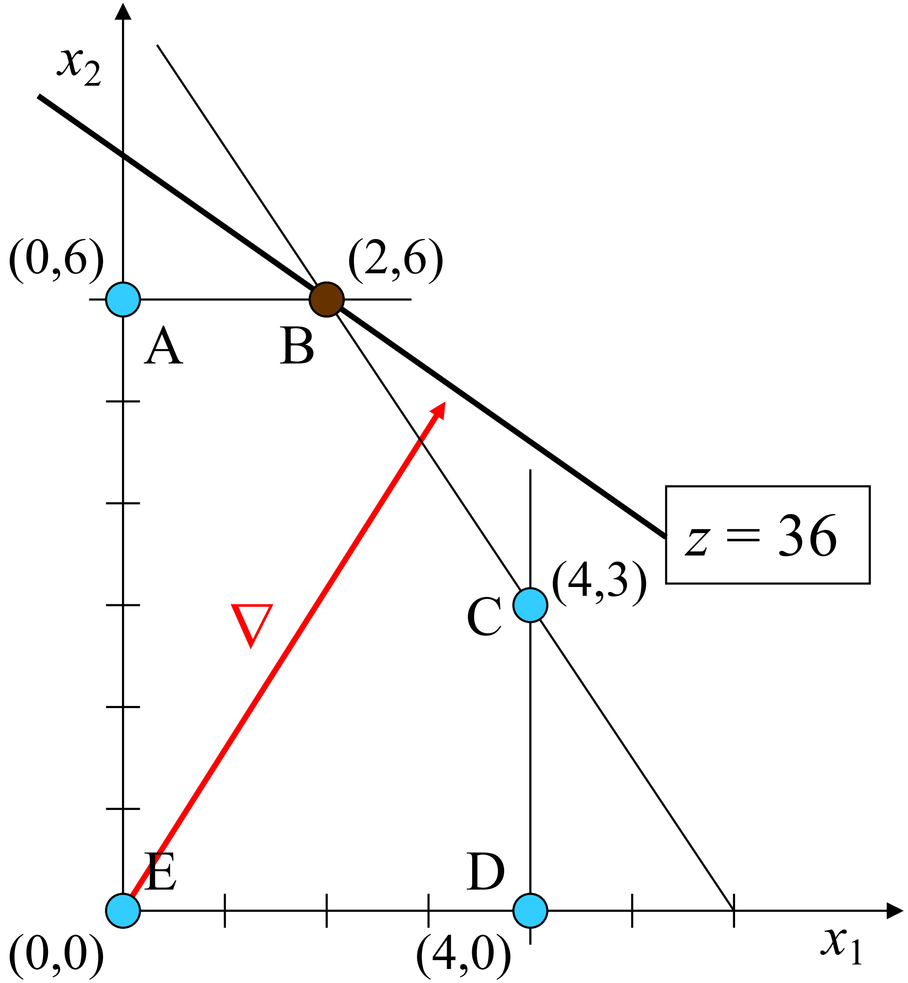
$$\min -z = -3x_1 - 5x_2$$

$$\begin{array}{llllllll} s.t. & x_1 & & + x_3 & & & = 4 \\ & & 2x_2 & & + x_4 & & = 12 \\ & 3x_1 & +2x_2 & & & + x_5 & = 18 \\ & x_1 & , x_2 & , x_3 & , x_4 & , x_5 & \geq 0 \end{array}$$

$$x_1 = 2 + (1/3)\, x_4 - (1/3)\, x_5$$
$$x_2 = 6 - (1/2)\, x_4$$
$$x_3 = 2 - (1/3)\, x_4 + (1/3)\, x_5$$

$$-z = -c^T x = -3x_1 - 5x_2$$
$$= -36 + (3/2)\, x_4 + x_5$$

OTTIMA!!!



Spostamento da SBA a SBA (2)

- Effetto dell' ingresso in base di x_h :

$$x_B = B^{-1}d - B^{-1}Fx_F \Rightarrow \left[x_B\right] = \left[B^{-1}d\right] - \left[B^{-1}\right]\left[\ldots A_h \ldots\right]\begin{bmatrix} \vdots \\ x_h \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Tra le x_F solo x_h è diversa da 0

$$\left[x_B\right] = \left[B^{-1}d\right] - \left[B^{-1}A_h\right]x_h = \left[d'\right] - \left[A'_h\right]x_h$$

La formula di aggiornamento è:

$$x_{\beta(i)} = d'_i - a'_{ih}x_h \qquad i = 1, \ldots, m$$

Spostamento da SBA a SBA (3)

$$x_{\beta(i)} = d'_i - a'_{ih} x_h \qquad i = 1,\dots, m$$

- Si deve mantenere l'ammissibilità

$$\Rightarrow x_{\beta(i)} \geq 0 \quad \forall i = 1,\dots, m$$

$$x_{\beta(i)} = d'_i - a'_{ih} x_h \geq 0 \qquad i = 1,\dots, m$$

- Dato che $x_h > 0$ e $d'_i \geq 0$ si hanno 2 possibilità:
  - $a'_{ih} \leq 0 \quad \Rightarrow x_{b(i)} \geq 0$ qualunque sia $x_h > 0$
  - $a'_{ih} > 0 \quad \Rightarrow x_{b(i)} \geq 0$ solo per $x_h \leq d'_i / a'_{ih}$

Spostamento da SBA a SBA (4)

- x_h può crescere di

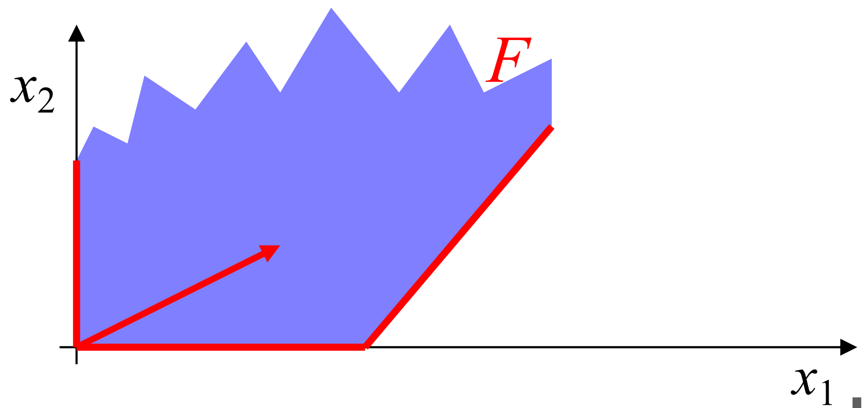
$$\vartheta = \min\left\{ \frac{d'_i}{a'_{ih}},\ i = 1,\dots, m : a'_{ih} > 0 \right\} = \frac{d'_l}{a'_{lh}}$$

x_h entra in base a livello ϑ, ed $x_{\beta(l)}$ esce dalla base (pivoting)

Se $a'_{ih} \leq 0 \quad \forall i$

$x_h \rightarrow +\infty$

problema ILLIMITATO



SBA degeneri (1)

- Una base $\mathcal{B}$ determina univocamente una SBA , per cui

$$\text{SBA}' \neq \text{SBA}'' \quad \Rightarrow \quad \mathcal{B}' \neq \mathcal{B}''$$

Invece:

$$\mathcal{B}' \neq \mathcal{B}'' \nRightarrow \text{SBA}' \neq \text{SBA}''$$

Esempio

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad d = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{B}' = \{A_1, A_4, A_5\} : (B')^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad x' = (0,0,0,6,5)$$

$$\mathcal{B}'' = \{A_3, A_4, A_5\} : (B'')^{-1} = \quad \mathrm{I} \qquad x'' = (0,0,0,6,5)$$

più di $n–m$ zeri

SBA degeneri (2)

- Una *SBA* si dice degenere se contiene più di $n-m$ zeri

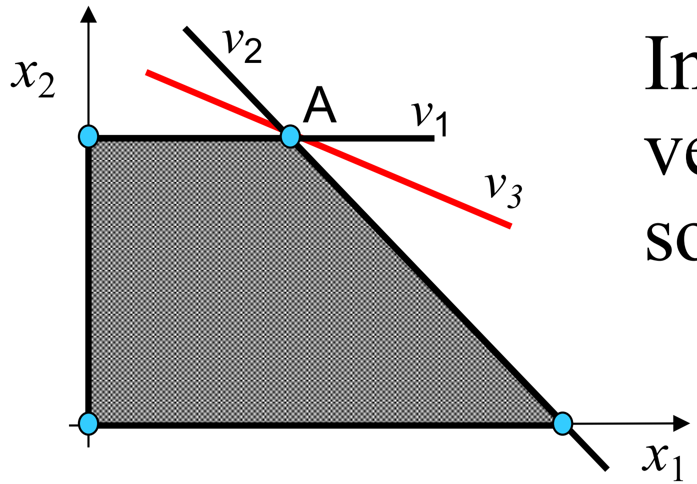
Th. Se 2 basi distinte $\mathcal{B}'$ e $\mathcal{B}''$ corrispondono alla stessa SBA x, questa è degenere

DIM.

x ha $n-m$ zeri nelle colonne che non sono in $\mathcal{B}'$ ed altri zeri nelle colonne di $\mathcal{B}' \setminus \mathcal{B}''$ $(\neq \emptyset)$

SBA degeneri (3)

- Non è detto che cambiando base si cambi anche SBA (vertice) $\Rightarrow$ cicli nell'algoritmo
- La degenerazione si ha quando si verificano parità nella scelta della variabile che esce dalla base (si azzera più di una variabile)



In pratica un vertice è sovradefinito

Algoritmo del Simplesso (1^a versione)

1. Scegli la base $\mathcal{B} = \{ A_{\beta(1)},\ldots, A_{\beta(m)} \}$ iniziale (corrispondente ad una SBA)
2. Calcola la SBA, x^* , corrispondente a $\mathcal{B}$
3. Se x^* è ottima STOP (test di ottimalità)
4. Aggiorna $\mathcal{B}$ in modo che individui una SBA adiacente e di costo migliore (inferiore)
5. Vai al passo 2

Dobbiamo vedere come realizzare i passi 1,3 e 4

Algoritmo del Simplesso (2ª versione)

1) Inizializzazione

Sia $\mathcal{B} = \{ A_{\beta(1)}, \ldots, A_{\beta(m)} \}$ una base iniziale (corrispondente ad una SBA)

2) Definisci $B = [A_{\beta(1)}, \ldots, A_{\beta(m)}]$ e calcola la SBA

$$x^* = \begin{bmatrix} x_B^* \\ x_F^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1}d \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d' \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{con } d' \geq 0$$

Algoritmo del Simplesso (2ª versione)

3) Test di ottimalità

Calcola i costi ridotti delle variabili fuori base

$$c'_F{}^T = c_F{}^T - c_B{}^T B^{-1} F$$

ovvero

$$c'_h{}^T = c_h{}^T - c_B{}^T B^{-1} A_h \quad \forall A_h \notin \mathcal{B}$$

Se $c'_h \geq 0 \ \ \forall A_h \notin \mathcal{B}$ STOP (x^* soluzione ottima)

Algoritmo del Simplesso (2ª versione)

4) Pivoting

Scegli $A_h \notin \mathcal{B}$ tale che $c'_h < 0$ e calcola

$$A'_h = B^{-1} A_h$$

Se $a'_{hi} \leq 0 \ \forall i$ STOP (problema illimitato)

altrimenti calcola

$$l = \arg\min_{i=1,\dots,m} \left\{ \frac{d'_i}{a'_{ih}} : a'_{ih} > 0 \right\}$$

ed inserisci x_h in base al posto di $x_{\beta(l)}$

Algoritmo del Simplesso (2ª versione)

5) Vai al passo 2

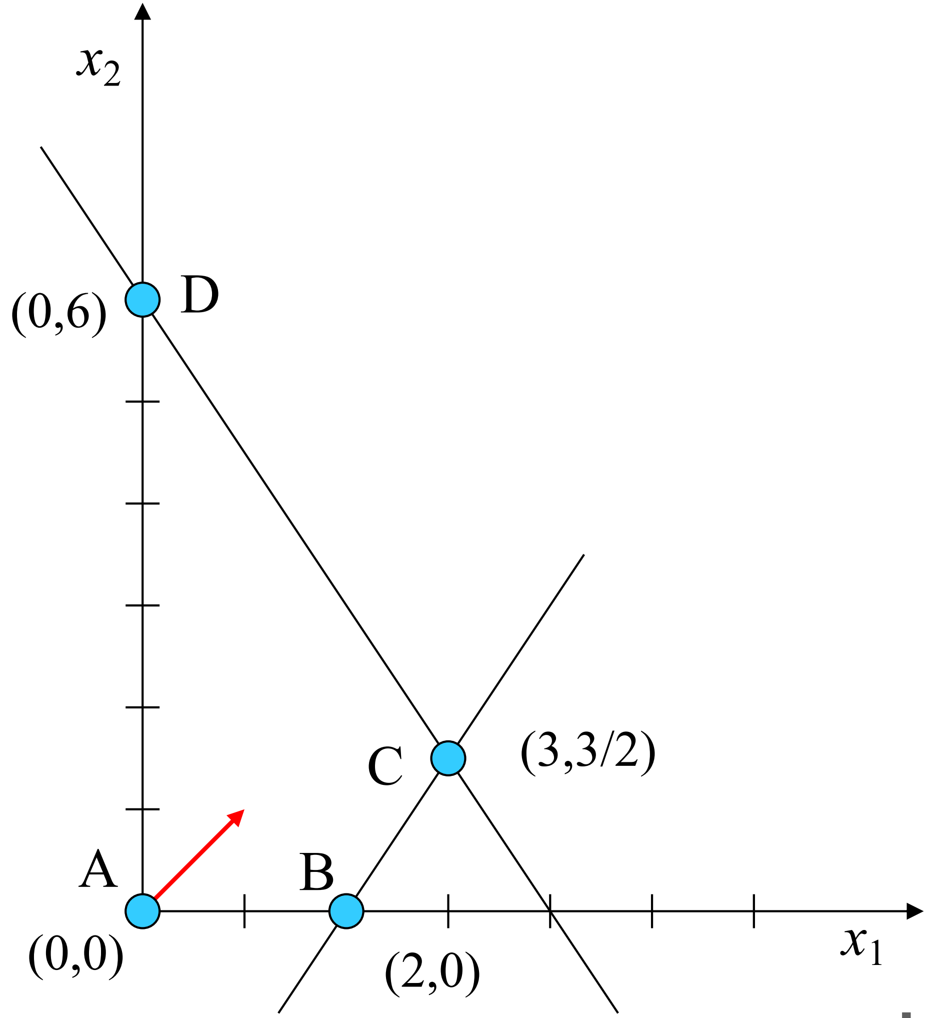
In assenza di degenerazione ad ogni iterazione *z* decresce:

$\Rightarrow$ l'algoritmo converge in un numero finito di passi (nel caso peggiore dopo aver esaminato tutti i vertici)

Esempio

$$\begin{array}{llllll} \max z = & x_1 & + x_2 & & & \\ s.t. & 6\,x_1 & + 4\,x_2 & \le 24 & & \\ & 3\,x_1 & - 2\,x_2 & \le 6 & & \\ & x_1 & , x_2 & \ge 0 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{lllllll} \text{- } \min -z = & -x_1 & -x_2 & & & & \\ s.t. & 6\,x_1 & + 4\,x_2 & + x_3 & & = 24 \\ & 3\,x_1 & - 2\,x_2 & & + x_4 & = 6 \\ & x_1 & , x_2 & , x_3 & , x_4 & \ge 0 \end{array}$$



Inizializzazione

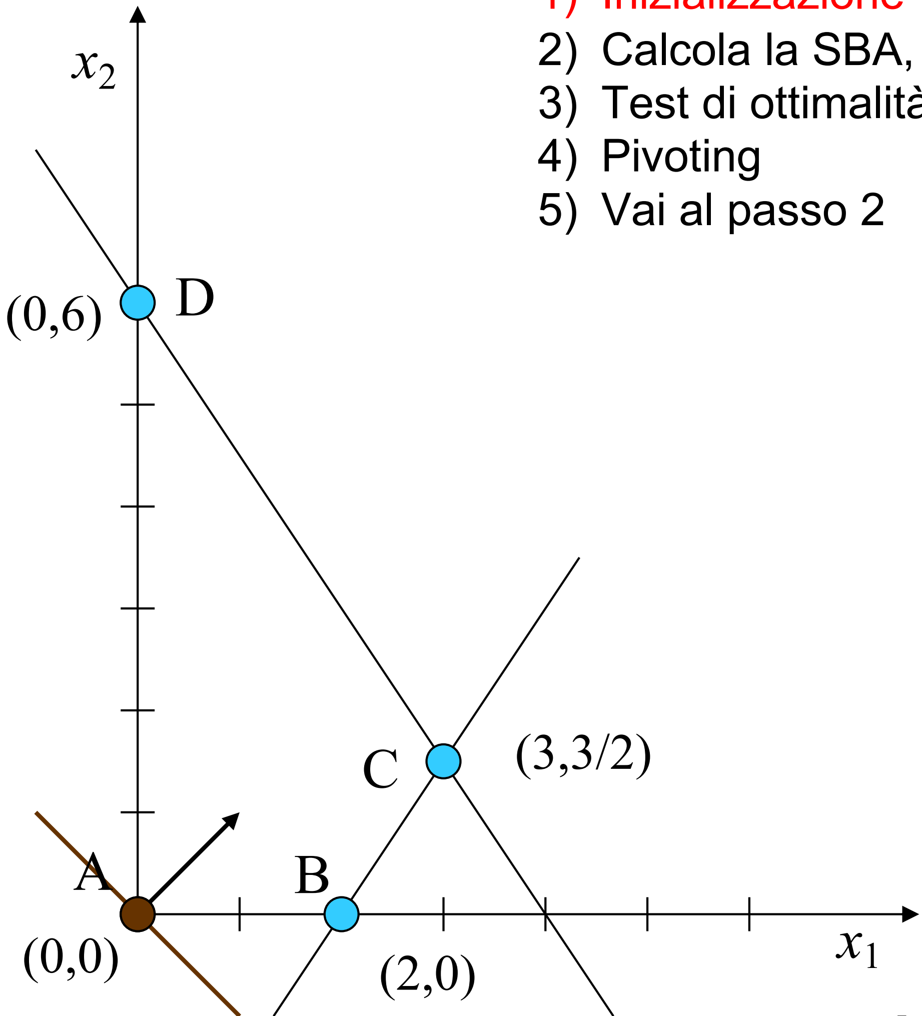
$$\begin{array}{llllll} \max z = & x_1 & + x_2 & & & \\ s.t. & 6\,x_1 & + 4\,x_2 & \le 24 & & \\ & 3\,x_1 & - 2\,x_2 & \le 6 & & \\ & x_1 & , x_2 & \ge 0 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} -\min -z = & -x_1 & -x_2 & & & \\ s.t. & 6\,x_1 & + 4\,x_2 & + x_3 & & = 24 \\ & 3\,x_1 & - 2\,x_2 & & + x_4 & = 6 \\ & x_1 & , x_2 & , x_3 & , x_4 & \ge 0 \end{array}$$

base iniziale $\mathcal{B} = \{A_3, A_4\}$

$$\beta = \{3, 4\}$$

$x^* = (0,0,24,6)$ *punto A*



1) Inizializzazione
2) Calcola la SBA, x^*
3) Test di ottimalità
4) Pivoting
5) Vai al passo 2

1^a iterazione (1)

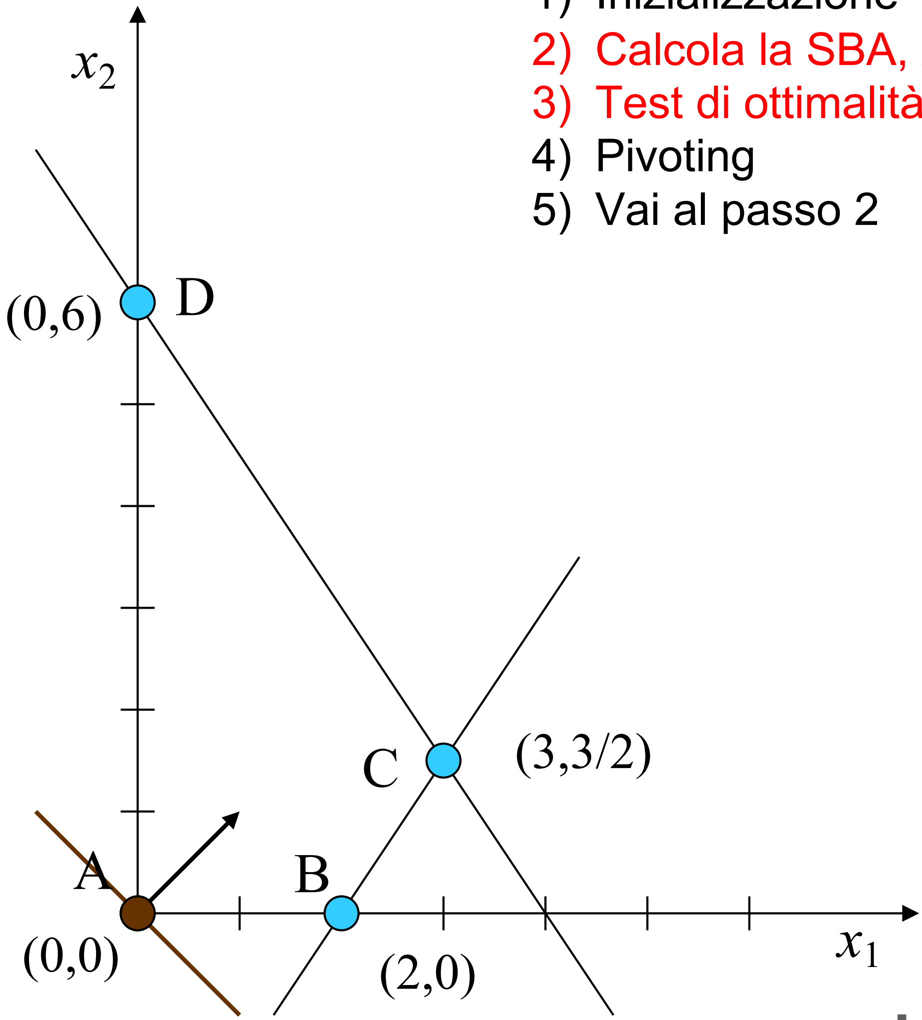
$$\begin{array}{lrrl} \max z = & x_1 & + x_2 & \\ s.t. & 6x_1 & + 4x_2 & \le 24 \\ & 3x_1 & - 2x_2 & \le 6 \\ & x_1 & , x_2 & \ge 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lrrrrl} -\min -z = & -x_1 & -x_2 & & & \\ s.t. & 6x_1 & + 4x_2 & + x_3 & & = 24 \\ & 3x_1 & - 2x_2 & & + x_4 & = 6 \\ & x_1 & , x_2 & , x_3 & , x_4 & \ge 0 \end{array}$$

$$\mathcal{B} = \{A_3, A_4\}$$

$$\begin{cases} -z = c_0^* + c'^T_F x_F \\ x_B = B^{-1}d - B^{-1}F x_F \end{cases}$$

$$\begin{cases} -z = 0 - x_1 - x_2 \\ x_3 = 24 - 6x_1 - 4x_2 \\ x_4 = 6 - 3x_1 + 2x_2 \end{cases}$$



1) Inizializzazione
2) Calcola la SBA, x^*
3) Test di ottimalità
4) Pivoting
5) Vai al passo 2

1^a iterazione (2)

$$\begin{array}{llll} \max z = & x_1 & + x_2 & \\ s.t. & 6\,x_1 & + 4\,x_2 & \le 24 \\ & 3\,x_1 & - 2\,x_2 & \le 6 \\ & x_1 & , x_2 & \ge 0 \end{array}$$

$$\begin{cases} -z = 0 & - x_1 & - x_2 \\ x_3 = 24 & - 6\,x_1 & - 4\,x_2 \\ x_4 = 6 & - 3\,x_1 & + 2\,x_2 \end{cases}$$

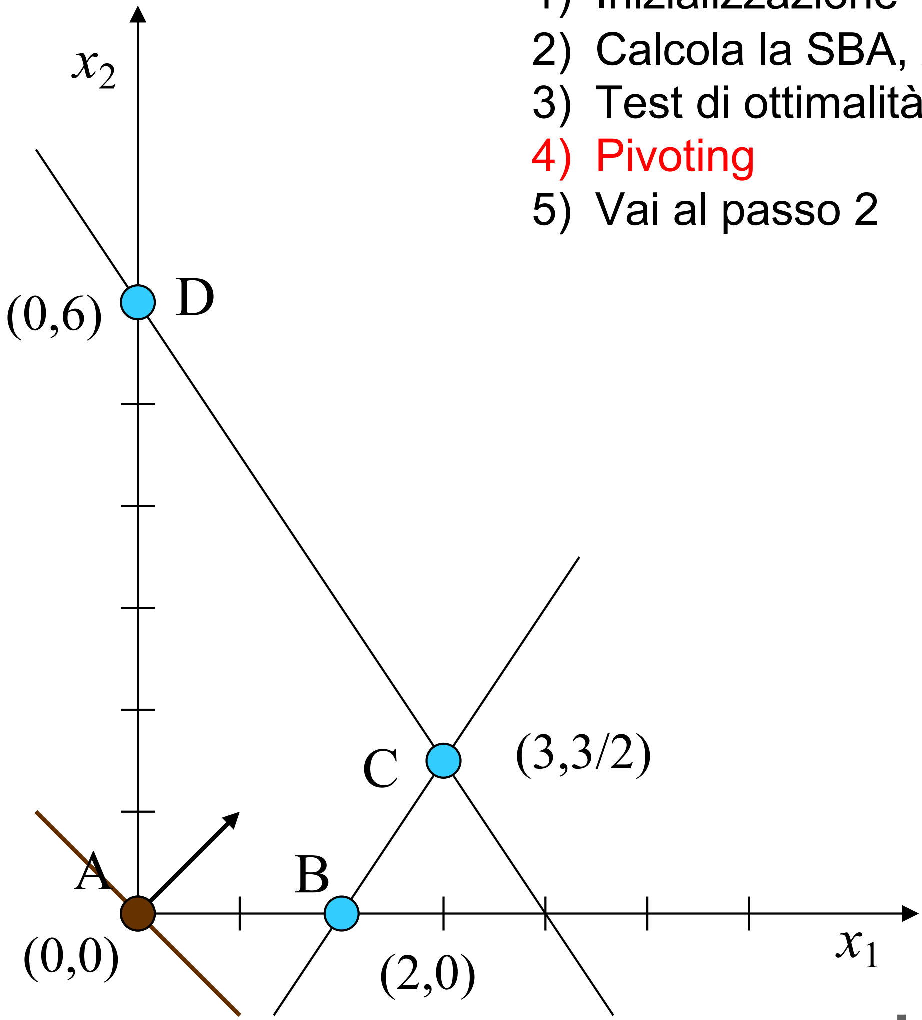
Pivot su x_1

$$x_3 = 24 \quad - 6\,x_1 \quad \ge 0 \Rightarrow x_1 \le 4$$
$$x_4 = 6 \quad - 3\,x_1 \quad \ge 0 \Rightarrow x_1 \le 2$$

x_1 entra in base a livello 2,

esce x_4

1) Inizializzazione
2) Calcola la SBA, x^*
3) Test di ottimalità
4) Pivoting
5) Vai al passo 2



2^a iterazione (1)

$$
\begin{array}{lrrl}
\max z = & x_1 & + x_2 & \\
s.t. & 6\,x_1 & + 4\,x_2 & \le 24 \\
 & 3\,x_1 & - 2\,x_2 & \le 6 \\
 & x_1 & ,\, x_2 & \ge 0
\end{array}
$$

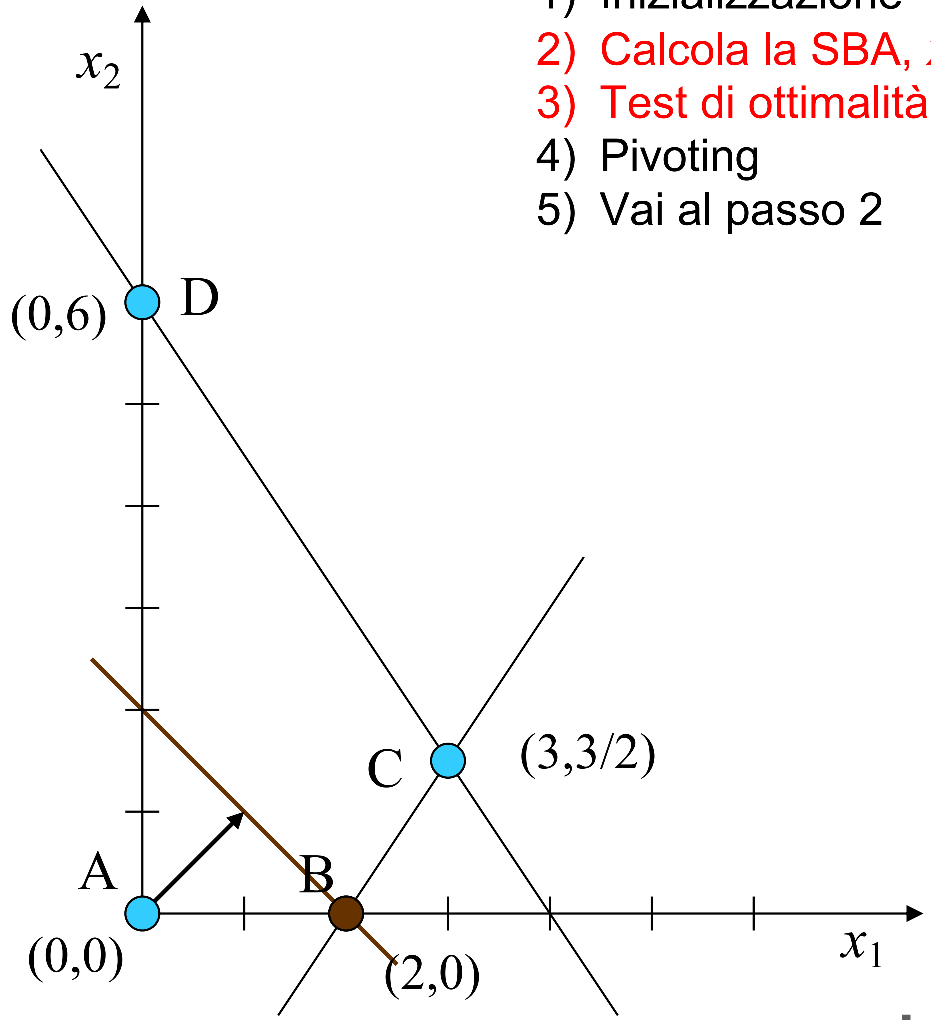
1) Inizializzazione
2) Calcola la SBA, *x**
3) Test di ottimalità
4) Pivoting
5) Vai al passo 2

$$
\begin{cases}
-z = 0 - x_1 - x_2 \\
x_3 = 24 - 6\,x_1 - 4\,x_2 \\
\boxed{x_4 = 6 - 3\,x_1 + 2\,x_2}
\end{cases}
$$

in forma canonica rispetto alla nuova base:

$$
\begin{cases}
-z = -2 - (5/3)\,x_2 + (1/3)\,x_4 \\
x_3 = 12 - 8\,x_2 + 2\,x_4 \\
x_1 = 2 + (2/3)\,x_2 - (1/3)\,x_4
\end{cases}
$$

$x^* = (2,0,12,0)$ *punto B*



2^a iterazione (2)

$$\begin{aligned} \max z = & \quad x_1 + x_2 \\ s.t. & \quad 6x_1 + 4x_2 \leq 24 \\ & \quad 3x_1 - 2x_2 \leq 6 \\ & \quad x_1 , x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

1) Inizializzazione
2) Calcola la SBA, x^*
3) Test di ottimalità
4) Pivoting
5) Vai al passo 2

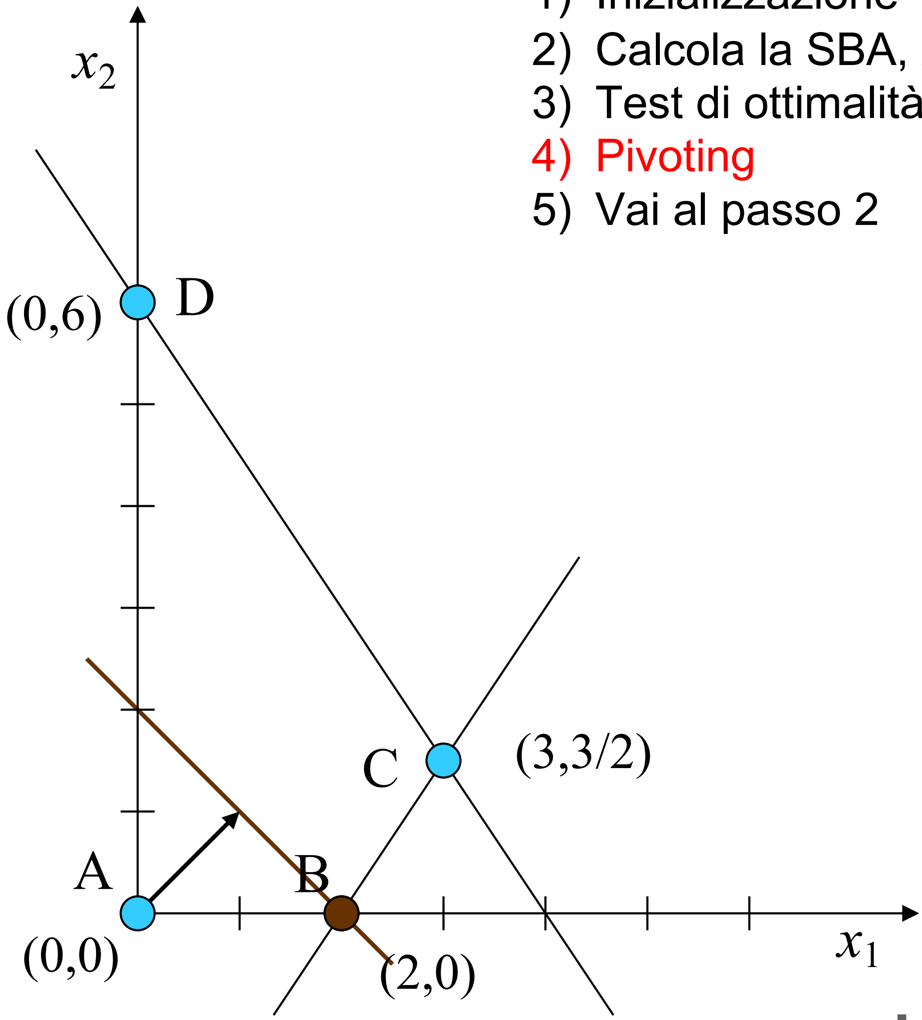
$$\begin{cases} -z = -2 - (5/3)\,x_2 + (1/3)\,x_4 \\ x_3 = 12 - 8\,x_2 + 2\,x_4 \\ x_1 = 2 + (2/3)\,x_2 - (1/3)\,x_4 \end{cases}$$

Pivot su x_2

$$x_1 = 2 + (2/3)\,x_2 \geq 0 \Rightarrow x_2 \geq -3$$
$$x_3 = 12 - 8\,x_2 \geq 0 \Rightarrow x_2 \leq 3/2$$

x_2 entra in base a livello 3/2,

esce x_3



3^a iterazione (1)

$$\max z = x_1 + x_2$$
$$s.t.\quad 6x_1 + 4x_2 \le 24$$
$$3x_1 - 2x_2 \le 6$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

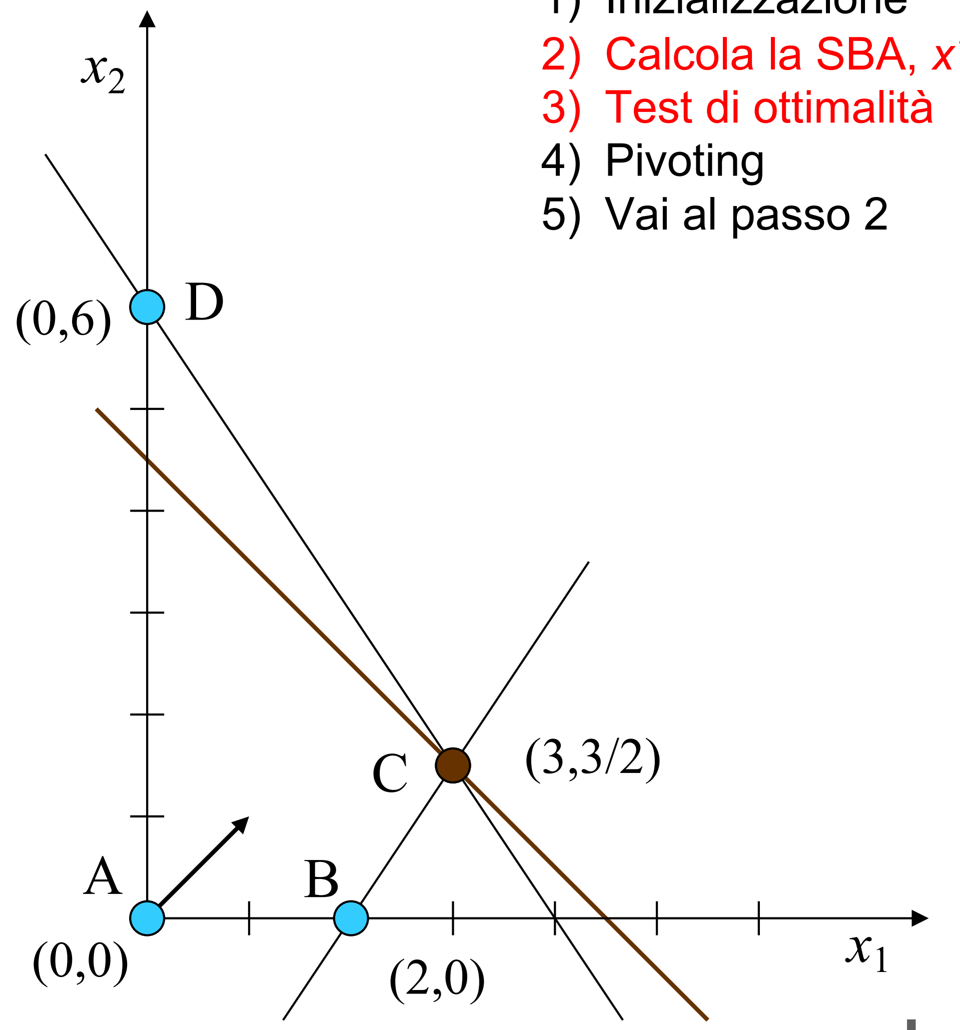
1) Inizializzazione
2) Calcola la SBA, x^*
3) Test di ottimalità
4) Pivoting
5) Vai al passo 2

$$\begin{cases} -z = -2 - (5/3)\,x_2 + (1/3)\,x_4 \\ \boxed{x_3 = 12 - 8\,x_2 + 2\,x_4} \\ x_1 = 2 + (2/3)\,x_2 - (1/3)\,x_4 \end{cases}$$

in forma canonica rispetto alla nuova base:

$$\begin{cases} -z = -(9/2) + (5/24)\,x_3 - (1/12)\,x_4 \\ x_2 = (3/2) - (1/8)\,x_3 + (1/4)\,x_4 \\ x_1 = 3 - (1/12)\,x_3 - (1/6)\,x_4 \end{cases}$$

$x^* = (3,3/2,0,0)$ *punto C*



3ª iterazione (2)

$$\max z = x_1 + x_2$$
$$s.t. \quad 6x_1 + 4x_2 \le 24$$
$$3x_1 - 2x_2 \le 6$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

1) Inizializzazione
2) Calcola la SBA, x^*
3) Test di ottimalità
4) Pivoting
5) Vai al passo 2

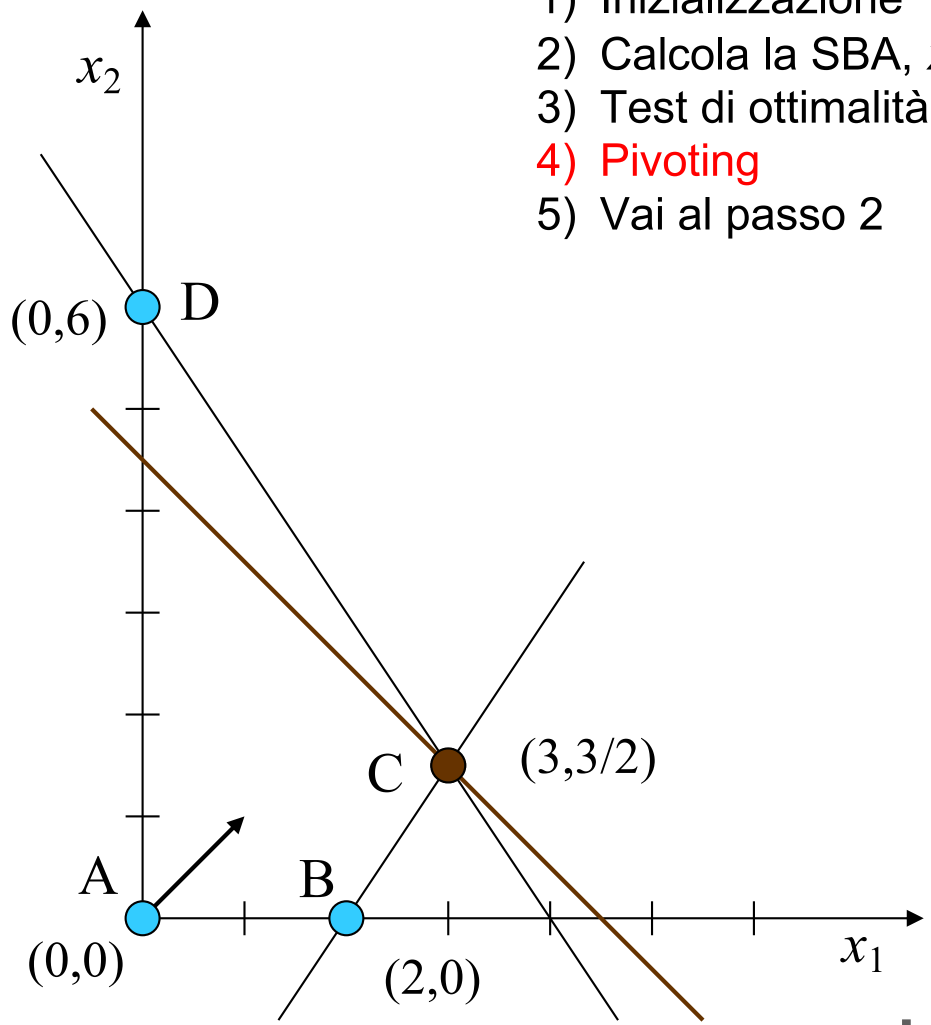
$$\begin{cases} -z = -(9/2) + (5/24)\,x_3 - (1/12)\,x_4 \\ x_2 = (3/2) - (1/8)\,x_3 + (1/4)\,x_4 \\ x_1 = 3 - (1/12)\,x_3 - (1/6)\,x_4 \end{cases}$$

Pivot su x_4

$$x_2 = 3/2 + (1/4)\,x_4 \ge 0 \Rightarrow x_4 \ge -6$$
$$x_1 = 3 - (1/6)\,x_4 \ge 0 \Rightarrow x_4 \le 18$$

x_4 entra in base a livello 18

ed esce x_1



4^a iterazione (1)

$$\begin{array}{llll} \max z = & x_1 & + x_2 & \\ s.t. & 6\,x_1 & + 4\,x_2 & \le 24 \\ & 3\,x_1 & - 2\,x_2 & \le 6 \\ & x_1 & , x_2 & \ge 0 \end{array}$$

1) Inizializzazione
2) Calcola la SBA, x^*
3) Test di ottimalità
4) Pivoting
5) Vai al passo 2

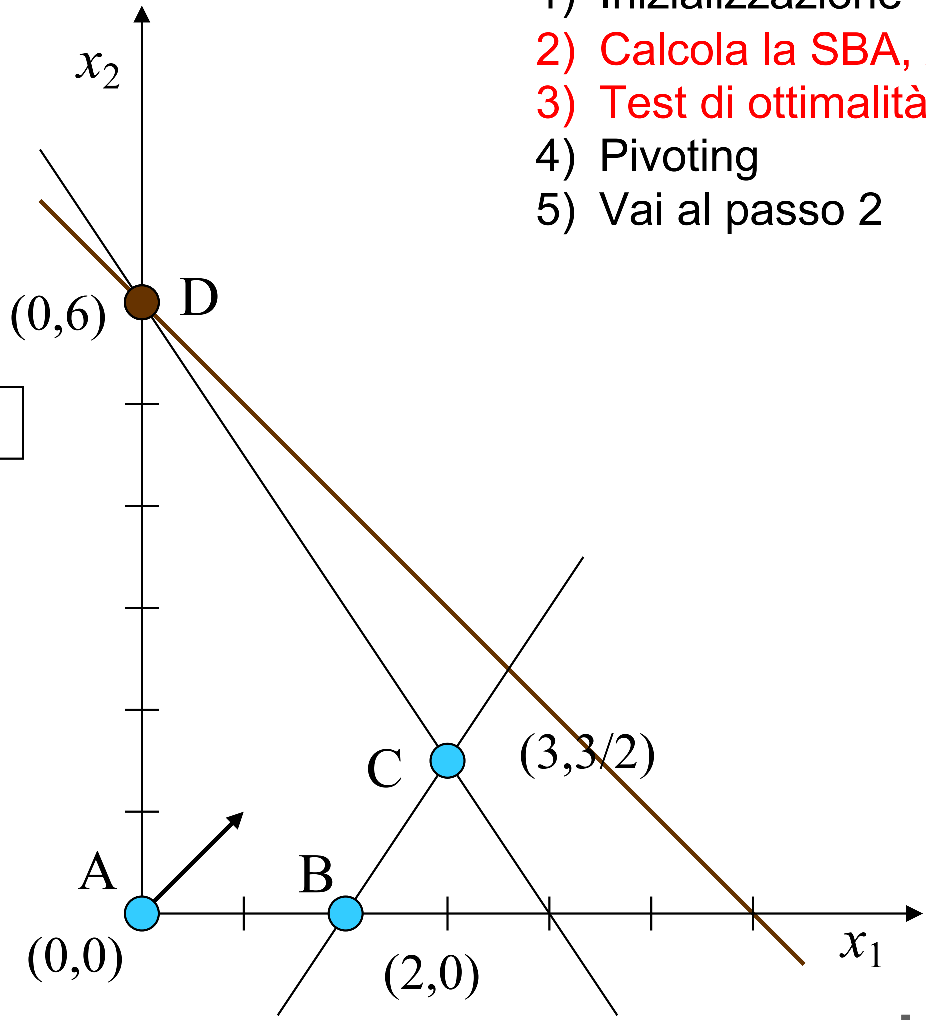
$$\begin{cases} -z = -(9/2) + (5/24)\,x_3 - (1/12)\,x_4 \\ x_2 = (3/2) - (1/8)\,x_3 + (1/4)\,x_4 \\ \boxed{x_1 = 3 - (1/12)\,x_3 - (1/6)\,x_4} \end{cases}$$

in forma canonica rispetto alla nuova base:

$$\begin{cases} -z = -6 + (1/2)\,x_1 + (1/4)\,x_3 \\ x_2 = 6 - (3/2)\,x_1 - (1/4)\,x_3 \\ x_4 = 18 - 6\,x_1 - (1/2)\,x_3 \end{cases}$$

$x^* = (0,6,0,18)$ *punto D*

OTTIMO!!!



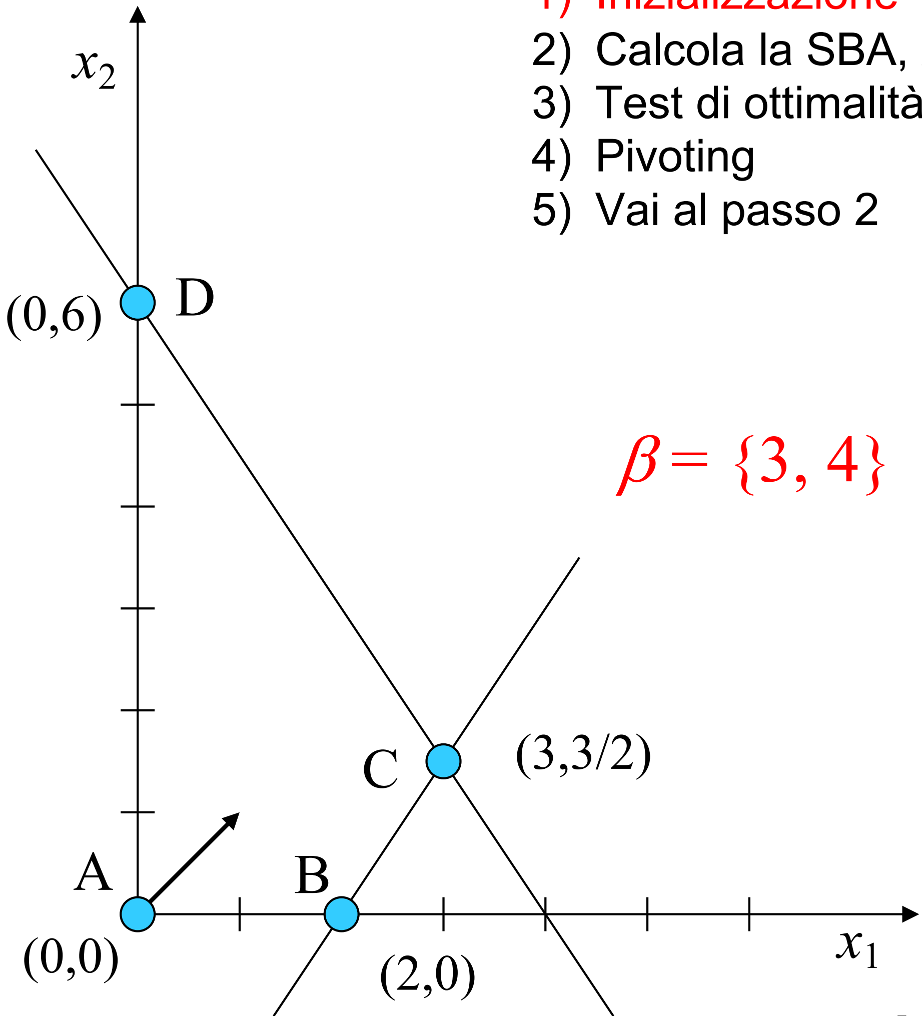
Inizializzazione

$$\begin{array}{llllll}
\max z = & x_1 & + x_2 & & & \\
s.t. & 6\,x_1 & + 4\,x_2 & \le 24 & & \\
 & 3\,x_1 & - 2\,x_2 & \le 6 & & \\
 & x_1 & , x_2 & \ge 0 & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lllllll}
\min -z = & -x_1 & -x_2 & & & \\
s.t. & 6\,x_1 & + 4\,x_2 & + x_3 & & = 24 \\
 & 3\,x_1 & - 2\,x_2 & & + x_4 & = 6 \\
 & x_1 & , x_2 & , x_3 & , x_4 & \ge 0
\end{array}$$

base iniziale $\mathcal{B} = \{A_3, A_4\}$

1) Inizializzazione
2) Calcola la SBA, x^*
3) Test di ottimalità
4) Pivoting
5) Vai al passo 2



$\beta = \{3, 4\}$

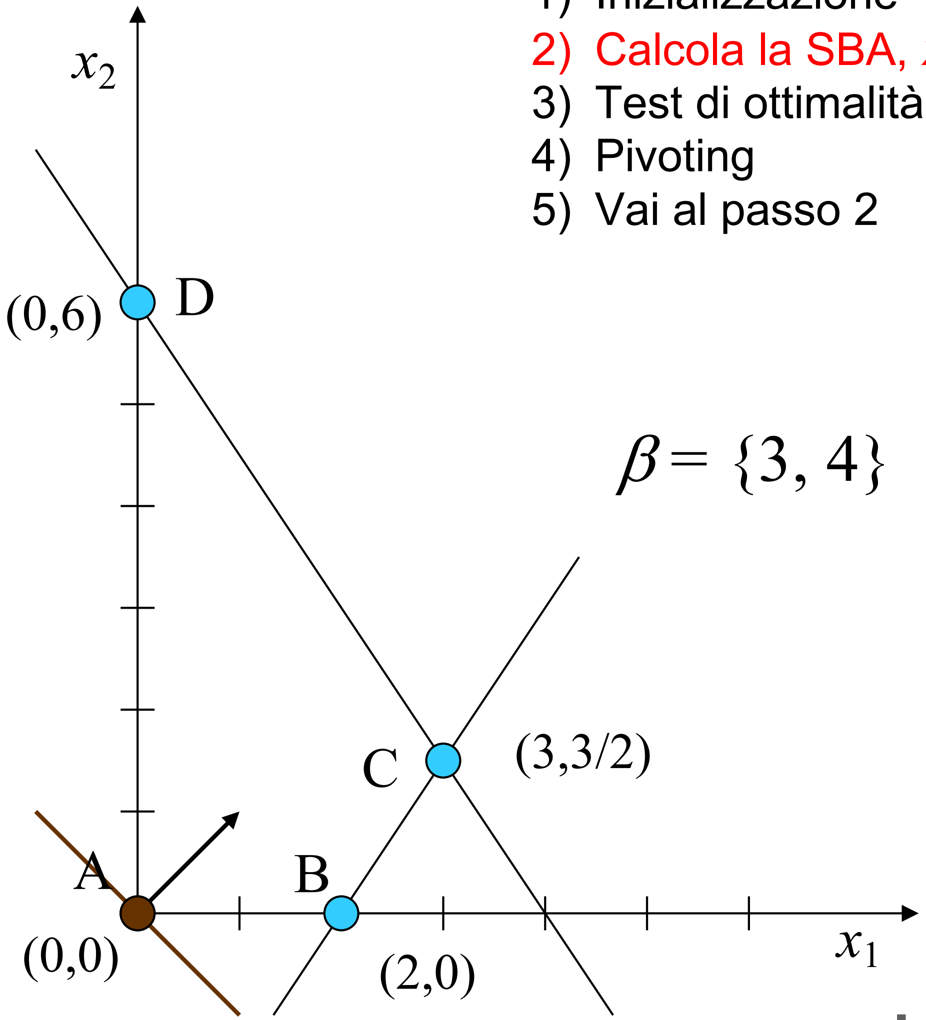
1^a iterazione (1)

$$
\begin{array}{llllll}
\max z = & x_1 & + x_2 & & & \\
s.t. & 6x_1 & + 4x_2 & \le 24 & & \\
 & 3x_1 & - 2x_2 & \le 6 & & \\
 & x_1 & , x_2 & \ge 0 & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llllll}
\min -z = & -x_1 & -x_2 & & & \\
s.t. & 6x_1 & + 4x_2 & + x_3 & & = 24 \\
 & 3x_1 & - 2x_2 & & + x_4 & = 6 \\
 & x_1 & , x_2 & , x_3 & , x_4 & \ge 0
\end{array}
$$

$$x^* = \begin{bmatrix} x_B^* \\ x_F^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1}d \\ 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = B^{-1}$$

$$x^* = (0,0,24,6) \; punto \; A$$



1) Inizializzazione
2) Calcola la SBA, x^*
3) Test di ottimalità
4) Pivoting
5) Vai al passo 2

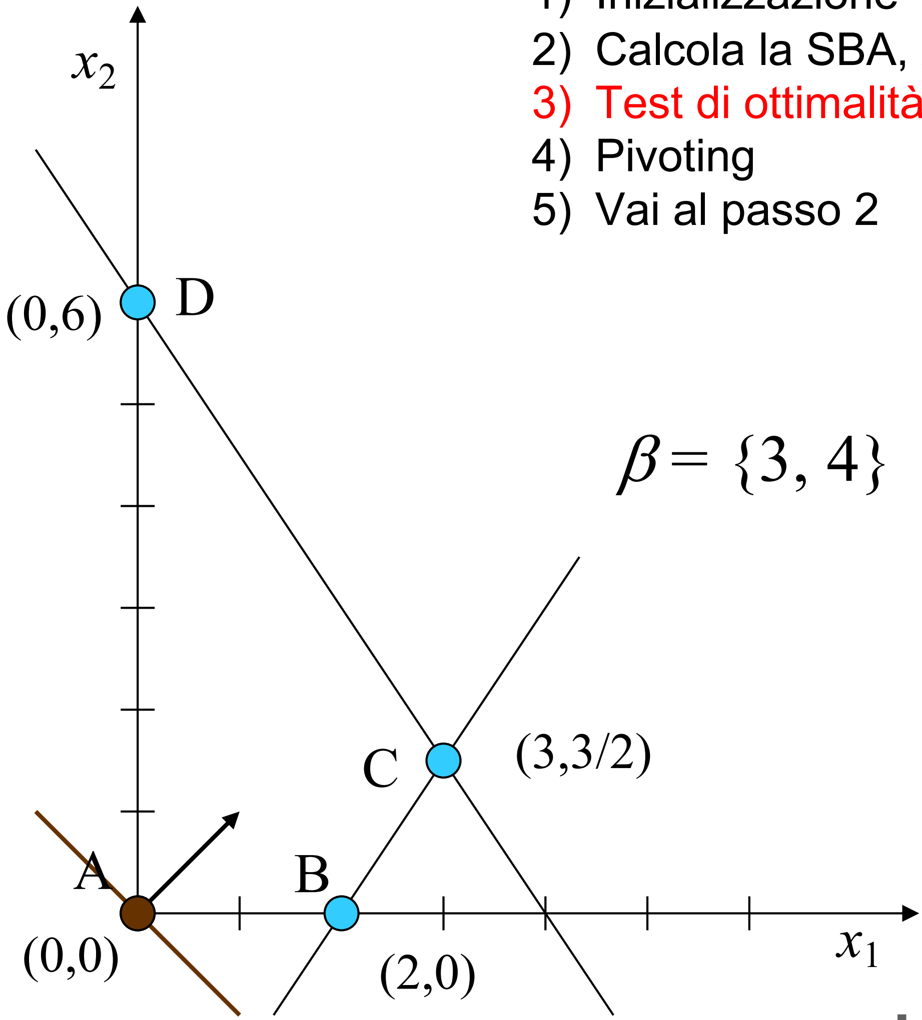
$$\beta = \{3, 4\}$$

1^a iterazione (2)

$$\max z = x_1 + x_2$$
$$s.t.\quad 6x_1 + 4x_2 \leq 24$$
$$3x_1 - 2x_2 \leq 6$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\min -z = -x_1 - x_2$$
$$s.t.\quad 6x_1 + 4x_2 + x_3 = 24$$
$$3x_1 - 2x_2 + x_4 = 6$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

1) Inizializzazione
2) Calcola la SBA, x^*
3) Test di ottimalità
4) Pivoting
5) Vai al passo 2



$$\beta = \{3, 4\}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = B^{-1}$$

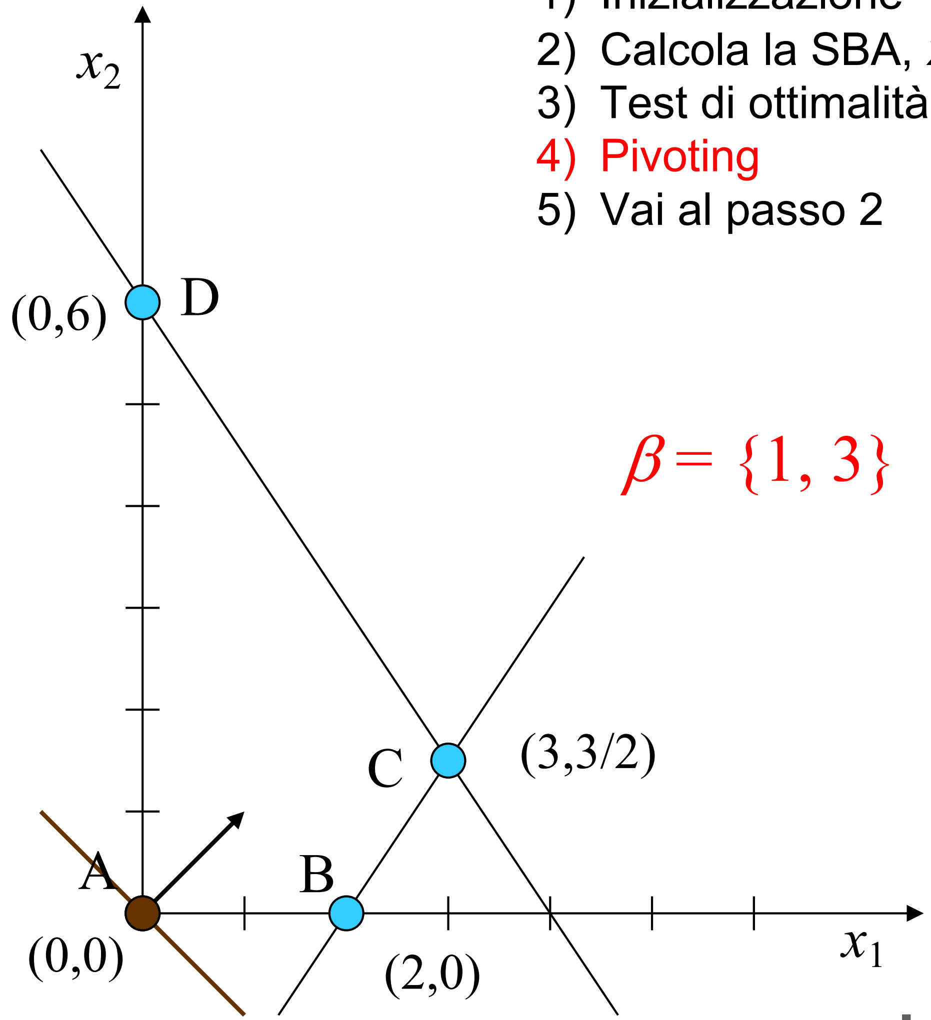
$$c_F'^T = c_F^T - c_B^T B^{-1} F$$
$$= \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot B^{-1} F = \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix}$$

1^a iterazione (3)

$$\begin{array}{llll} \max z = & x_1 & + x_2 & \\ s.t. & 6\,x_1 & + 4\,x_2 & \leq 24 \\ & 3\,x_1 & - 2\,x_2 & \leq 6 \\ & x_1 & , x_2 & \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} \min -z = & -x_1 & -x_2 & & & \\ s.t. & 6\,x_1 & + 4\,x_2 & + x_3 & & = 24 \\ & 3\,x_1 & - 2\,x_2 & & + x_4 & = 6 \\ & x_1 & , x_2 & , x_3 & , x_4 & \geq 0 \end{array}$$

1) Inizializzazione
2) Calcola la SBA, x^*
3) Test di ottimalità
4) Pivoting
5) Vai al passo 2



Pivot su x_1

$$A_1' = B^{-1} A_1 = A_1$$

l=arg min { (24/6) , (6/3) } = 2

$\vartheta = 2$

esce $\beta(2) = 4$

2^a iterazione (1)

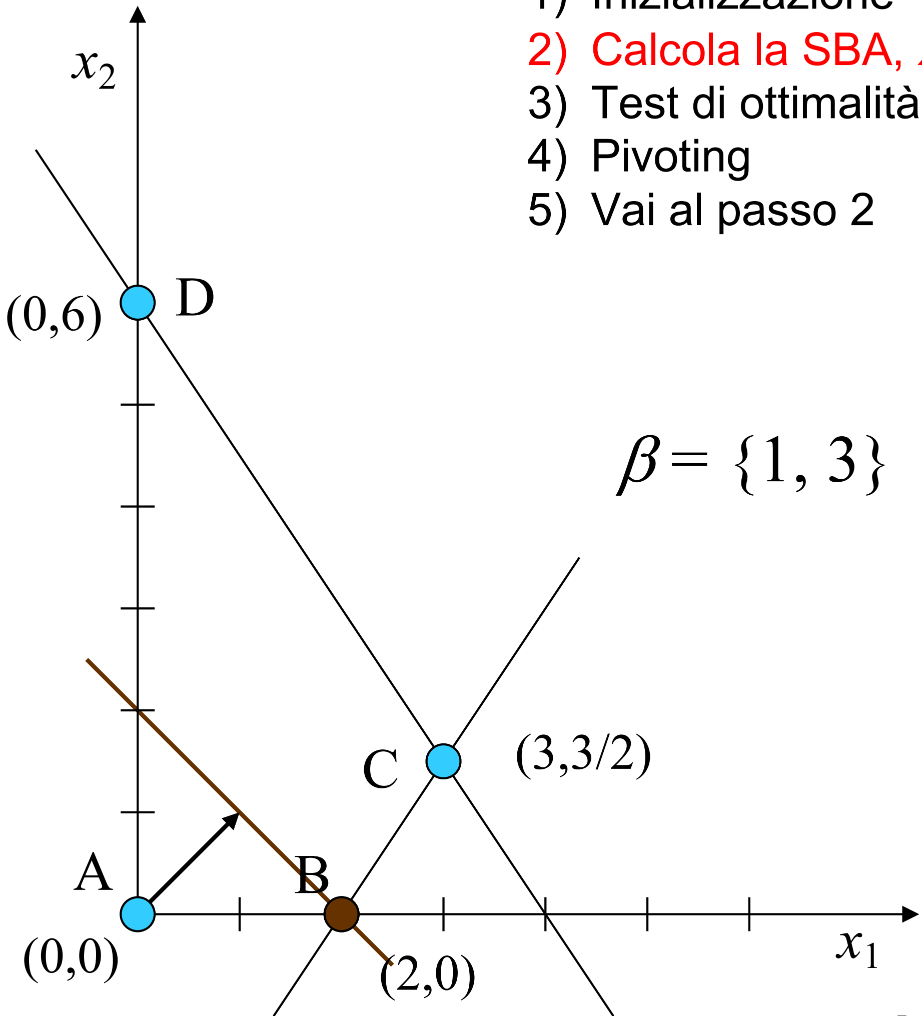
$$
\begin{array}{llllll}
\max z = & x_1 & + x_2 & & & \\
s.t. & 6\,x_1 & + 4\,x_2 & \leq 24 & & \\
 & 3\,x_1 & - 2\,x_2 & \leq 6 & & \\
 & x_1 & , x_2 & \geq 0 & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lllllll}
\min -z = & -x_1 & -x_2 & & & \\
s.t. & 6\,x_1 & + 4\,x_2 & + x_3 & & = 24 \\
 & 3\,x_1 & - 2\,x_2 & & + x_4 & = 6 \\
 & x_1 & , x_2 & , x_3 & , x_4 & \geq 0
\end{array}
$$

$$x^* = \begin{bmatrix} x_B^* \\ x_F^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1}d \\ 0 \end{bmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$x^* = (2,0,12,0)$ *punto B*



1) Inizializzazione
2) Calcola la SBA, x^*
3) Test di ottimalità
4) Pivoting
5) Vai al passo 2

$\beta = \{1, 3\}$

2ª iterazione (2)

$$\begin{array}{llllll} \max z = & x_1 & + x_2 & & & \\ s.t. & 6\,x_1 & + 4\,x_2 & \le 24 & & \\ & 3\,x_1 & - 2\,x_2 & \le 6 & & \\ & x_1 & , x_2 & \ge 0 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{lllllll} \min -z = & -x_1 & -x_2 & & & & \\ s.t. & 6\,x_1 & + 4\,x_2 & + x_3 & & = 24 \\ & 3\,x_1 & - 2\,x_2 & & + x_4 & = 6 \\ & x_1 & , x_2 & , x_3 & , x_4 & \ge 0 \end{array}$$

1) Inizializzazione
2) Calcola la SBA, *x**
3) Test di ottimalità
4) Pivoting
5) Vai al passo 2

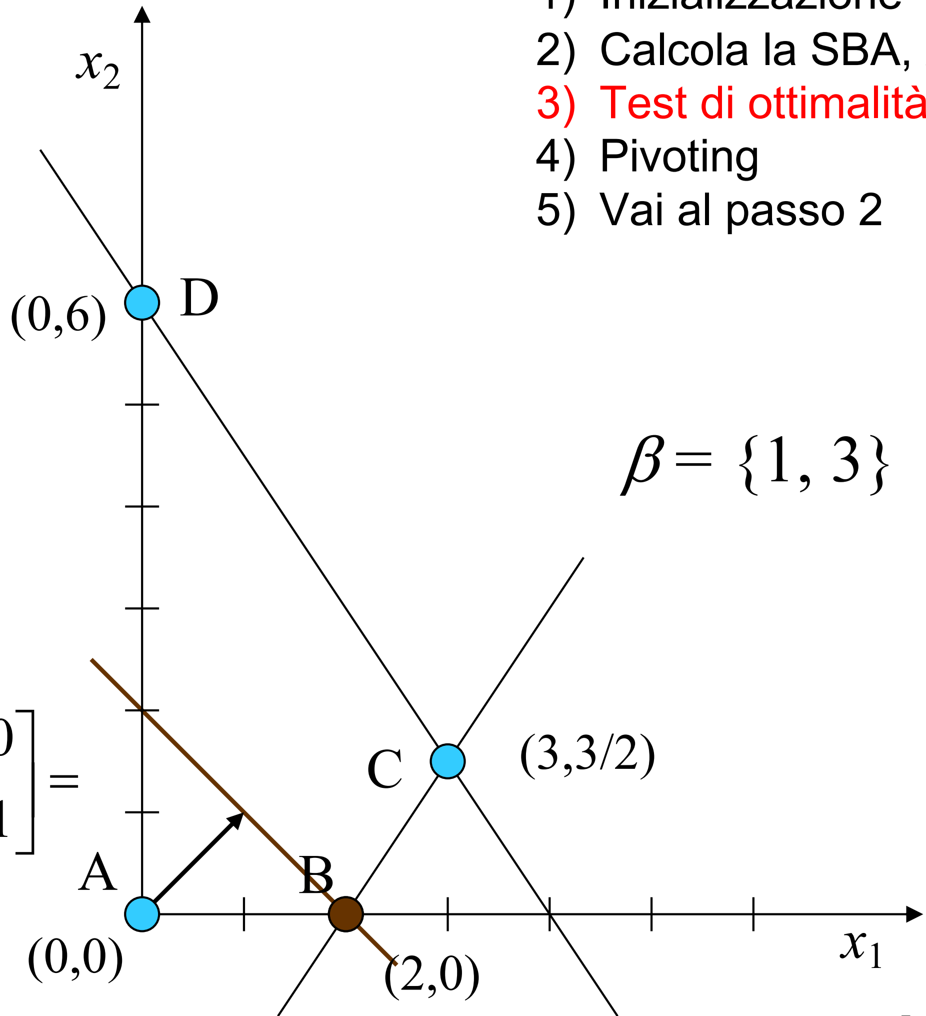
$$\beta = \{1, 3\}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$c'^{T}_{F} = c_F^{\,T} - c_B^{\,T} B^{-1} F$$

$$c'^{T}_{F} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1/3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -5/2 & 1/3 \end{bmatrix}$$

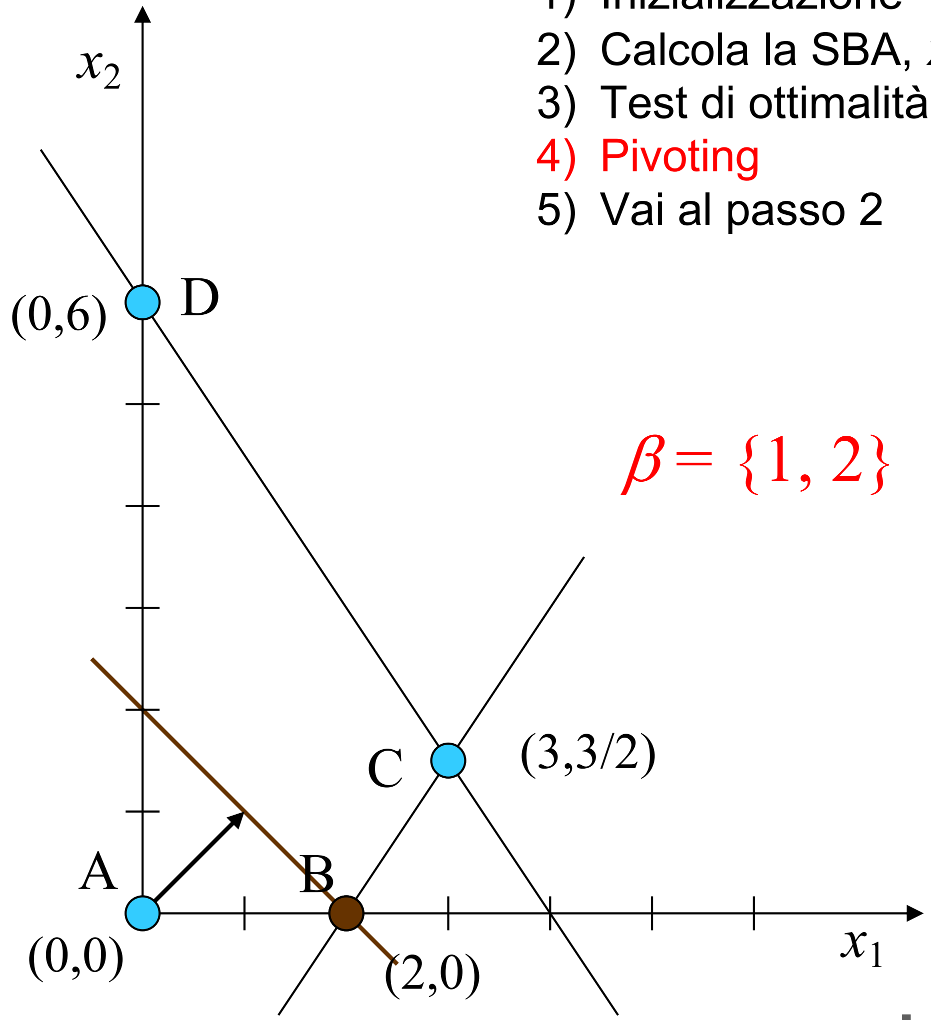


2^a iterazione (3)

$$\begin{array}{llll} \max z = & x_1 & + x_2 & \\ s.t. & 6x_1 & + 4x_2 & \le 24 \\ & 3x_1 & - 2x_2 & \le 6 \\ & x_1 & , x_2 & \ge 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lllllll} \min -z = & -x_1 & -x_2 & & & \\ s.t. & 6x_1 & + 4x_2 & + x_3 & & = 24 \\ & 3x_1 & - 2x_2 & & + x_4 & = 6 \\ & x_1 & , x_2 & , x_3 & , x_4 & \ge 0 \end{array}$$

1) Inizializzazione
2) Calcola la SBA, x^*
3) Test di ottimalità
4) Pivoting
5) Vai al passo 2



$\beta = \{1, 2\}$

Pivot su x_2

$$A'_2 = B^{-1} A_2 = \begin{bmatrix} -2/3 \\ 8 \end{bmatrix}$$

l=arg min { (12/8) } = 2

$\vartheta = 3/2$

esce $\beta(2) = 3$

3ª iterazione (1)

$$\begin{array}{llllll} \max z = & x_1 & + x_2 & & & \\ s.t. & 6\,x_1 & + 4\,x_2 & \leq 24 & & \\ & 3\,x_1 & - 2\,x_2 & \leq 6 & & \\ & x_1 & , x_2 & \geq 0 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} \min -z = & -x_1 & -x_2 & & & \\ s.t. & 6\,x_1 & + 4\,x_2 & + x_3 & & = 24 \\ & 3\,x_1 & - 2\,x_2 & & + x_4 & = 6 \\ & x_1 & , x_2 & , x_3 & , x_4 & \geq 0 \end{array}$$

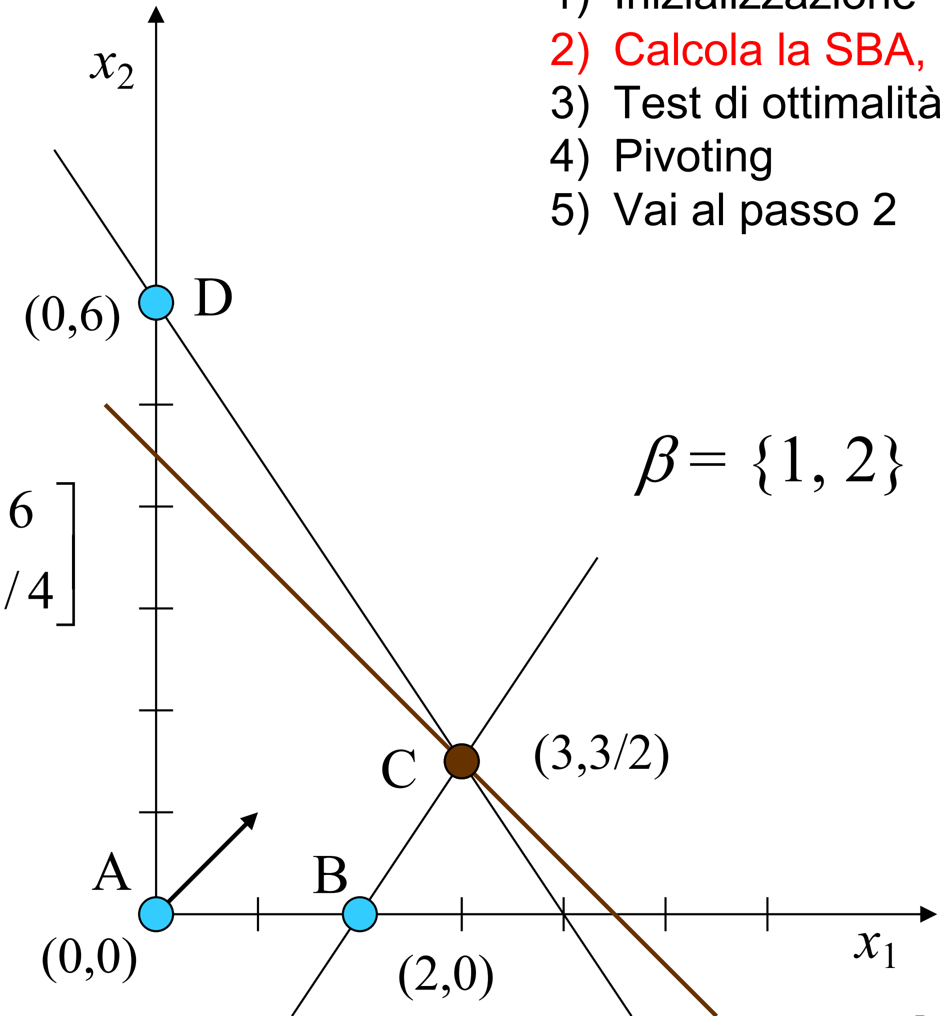
1) Inizializzazione
2) Calcola la SBA, x^*
3) Test di ottimalità
4) Pivoting
5) Vai al passo 2

$$x^* = \begin{bmatrix} x_B^* \\ x_F^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1}d \\ 0 \end{bmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/12 & 1/6 \\ 1/8 & -1/4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\beta = \{1, 2\}$$

$x^* = (3,3/2,0,0)$ *punto C*

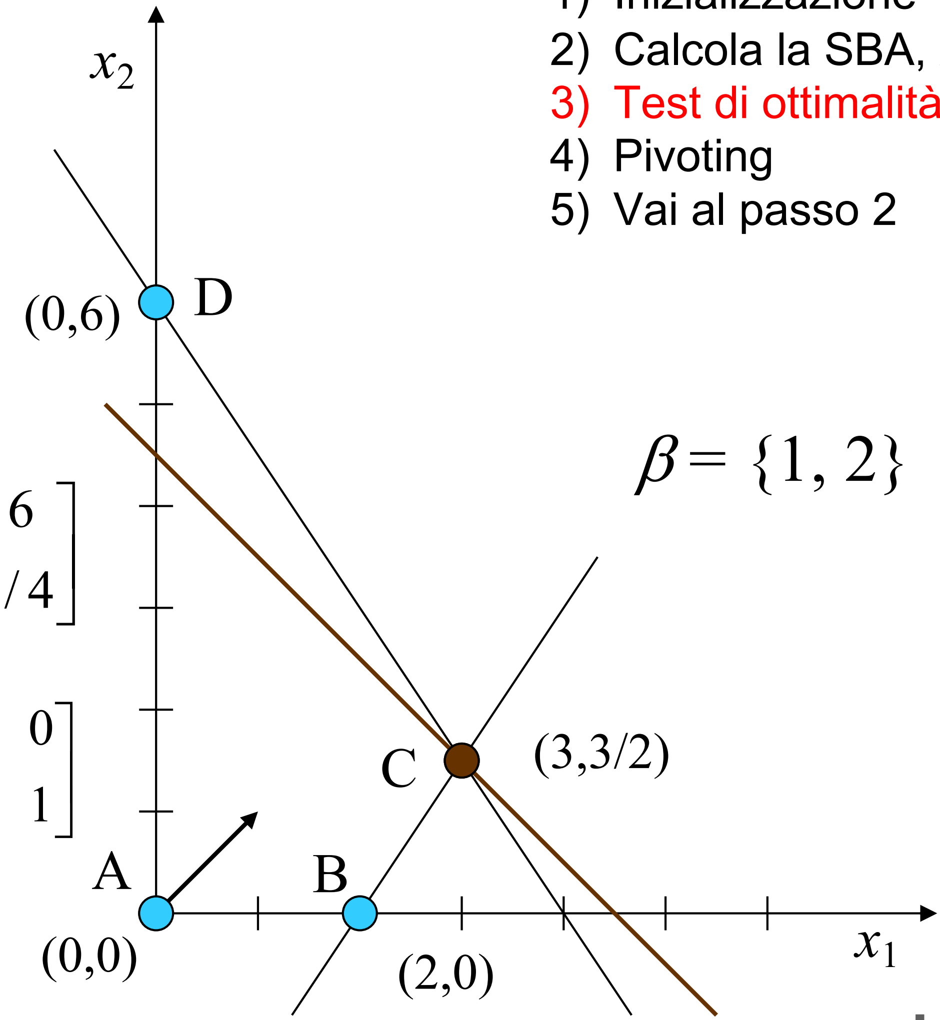


3ª iterazione (2)

$$\begin{array}{llllll}
\max z = & x_1 & + x_2 & & & \\
s.t. & 6\,x_1 & + 4\,x_2 & \le 24 & & \\
 & 3\,x_1 & - 2\,x_2 & \le 6 & & \\
 & x_1 & , x_2 & \ge 0 & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{llllll}
\min -z = & -x_1 & -x_2 & & & \\
s.t. & 6\,x_1 & + 4\,x_2 & + x_3 & & = 24 \\
 & 3\,x_1 & - 2\,x_2 & & + x_4 & = 6 \\
 & x_1 & , x_2 & , x_3 & , x_4 & \ge 0
\end{array}$$

1) Inizializzazione
2) Calcola la SBA, x^*
3) Test di ottimalità
4) Pivoting
5) Vai al passo 2



$$\beta = \{1, 2\}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/12 & 1/6 \\ 1/8 & -1/4 \end{bmatrix}$$

$$c_F'^{\,T} = c_F^{\,T} - c_B^{\,T} B^{-1} F$$

$$c_F'^{\,T} = [0 \quad 0] - [-1 \quad -1] \begin{bmatrix} 1/12 & 1/6 \\ 1/8 & -1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= [5/24 \quad -1/12]$$

3ª iterazione (3)

$$\begin{array}{llllll}
\max z = & x_1 & + x_2 & & & \\
s.t. & 6\,x_1 & + 4\,x_2 & \le 24 & & \\
 & 3\,x_1 & - 2\,x_2 & \le 6 & & \\
 & x_1 & , x_2 & \ge 0 & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{llllll}
\min -z = & -x_1 & -x_2 & & & \\
s.t. & 6\,x_1 & + 4\,x_2 & + x_3 & & = 24 \\
 & 3\,x_1 & - 2\,x_2 & & + x_4 & = 6 \\
 & x_1 & , x_2 & , x_3 & , x_4 & \ge 0
\end{array}$$

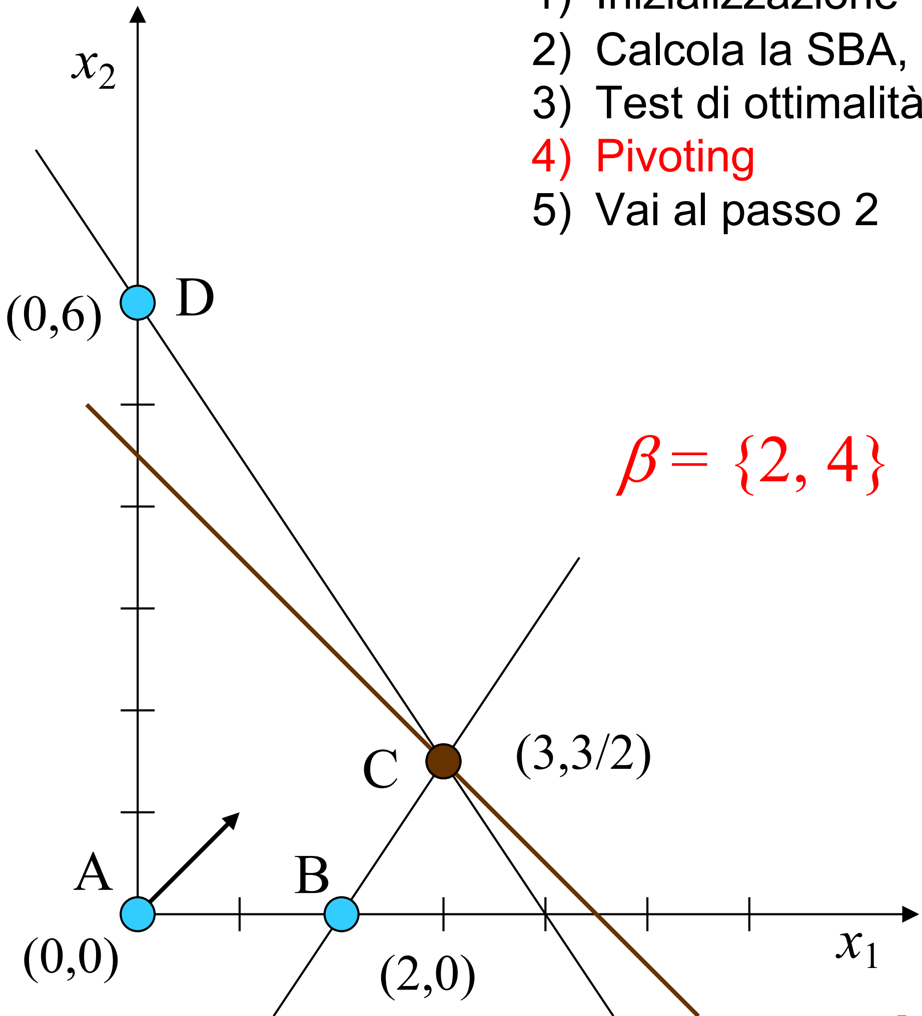
Pivot su x_4

$$A'_4 = B^{-1} A_4 = \begin{bmatrix} 1/6 \\ -1/4 \end{bmatrix}$$

l=arg min { $3 \cdot 6$ } = 1

$\vartheta = 18$

esce $\beta(1) = 1$



1) Inizializzazione
2) Calcola la SBA, x^*
3) Test di ottimalità
4) Pivoting
5) Vai al passo 2

$\beta = \{2, 4\}$

4ª iterazione (1)

$$\max z = x_1 + x_2$$
$$s.t. \quad 6x_1 + 4x_2 \le 24$$
$$3x_1 - 2x_2 \le 6$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

$$\min -z = -x_1 - x_2$$
$$s.t. \quad 6x_1 + 4x_2 + x_3 = 24$$
$$3x_1 - 2x_2 + x_4 = 6$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$$

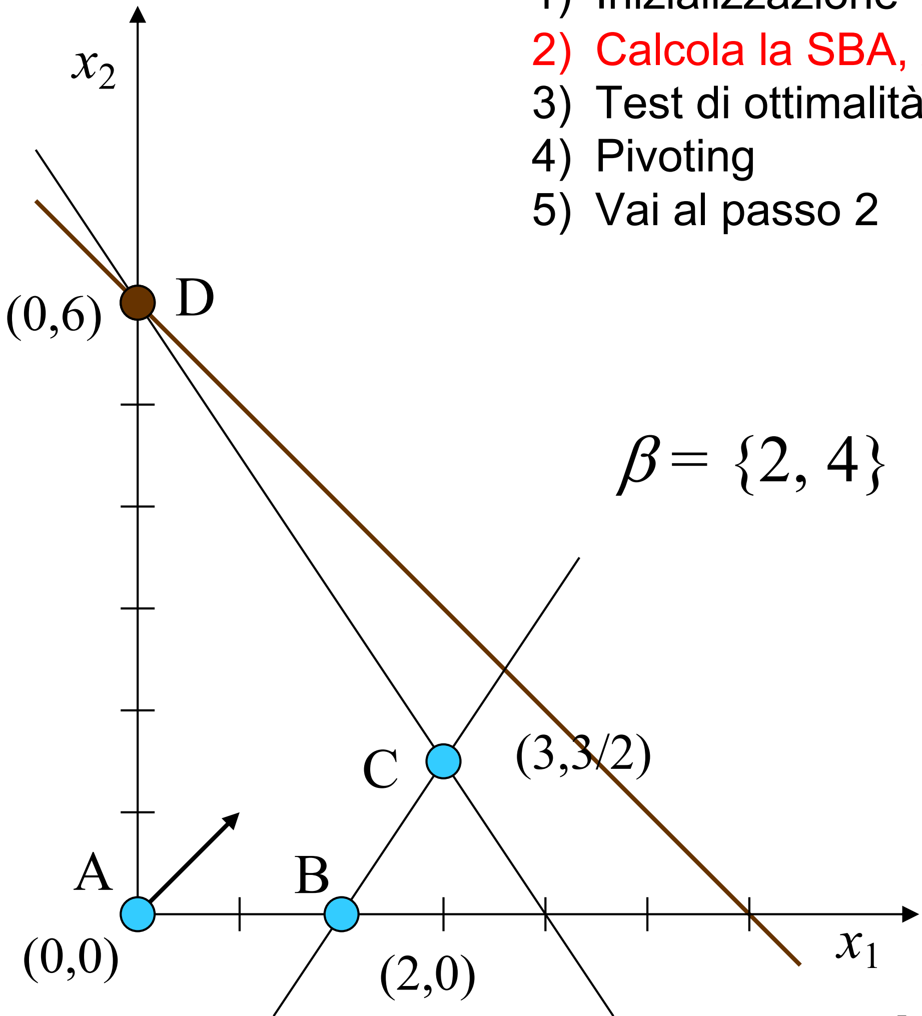
1) Inizializzazione
2) Calcola la SBA, *x**
3) Test di ottimalità
4) Pivoting
5) Vai al passo 2

$$x^* = \begin{bmatrix} x_B^* \\ x_F^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1}d \\ 0 \end{bmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\beta = \{2, 4\}$$

$x^* = (0,6,0,18)$ *punto D*

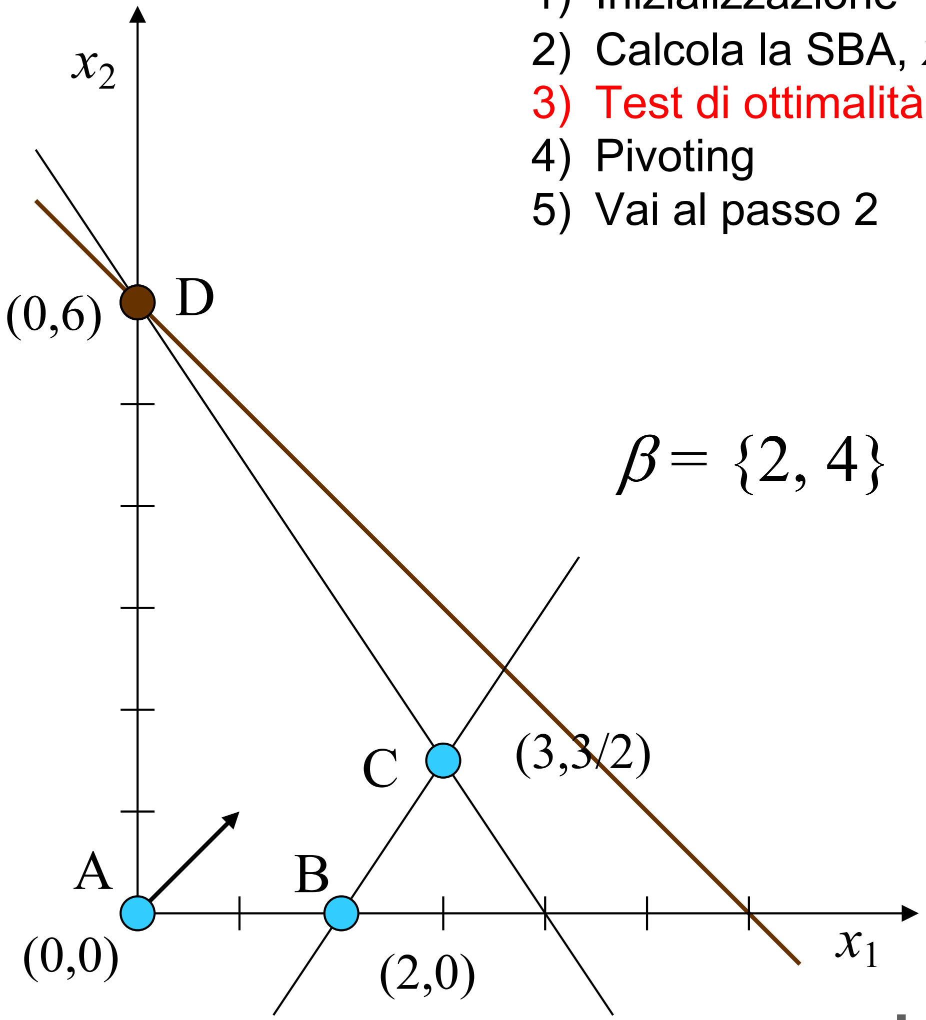


4ª iterazione (2)

$$\max z = x_1 + x_2$$
$$s.t. \quad 6x_1 + 4x_2 \le 24$$
$$3x_1 - 2x_2 \le 6$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

$$\min -z = -x_1 - x_2$$
$$s.t. \quad 6x_1 + 4x_2 + x_3 = 24$$
$$3x_1 - 2x_2 + x_4 = 6$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$$

1) Inizializzazione
2) Calcola la SBA, x^*
3) Test di ottimalità
4) Pivoting
5) Vai al passo 2



$$\beta = \{2, 4\}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c_F'^{\,T} = c_F^{\,T} - c_B^{\,T} B^{-1} F$$

$$c_F'^{\,T} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 \end{bmatrix}$$ *OTTIMO!!!*

Regole di Pivoting (3)

- Ad una generica iterazione:
  quale tra le x_j con $c'_j < 0$ far entrare in base ?
  - la prima con c'_j negativo $\leq n - m$
  - quella con c'_j più negativo $= n - m$
  - quella con $|\vartheta_j \; c'_j|$ massimo $= (n-m)\, m$
  - ……
- Se SBA corrente degenere

$$\vartheta = \min_{i=1,\ldots,m} \left\{ \frac{d'_i}{a'_{ih}} : a'_{ih} > 0 \right\} = 0$$

$\Rightarrow$ z non diminuisce

$\Rightarrow$ rischio di cicli (degenerazione ciclante)

Regola di Bland

Consente di evitare la degenerazione ciclante

a) Entra la colonna favorevole di indice minimo

$$j = \min\left\{ j : c'_j < 0 \right\}$$

b) In caso di parità nella determinazione di ϑ, esce la colonna di indice minimo

$$\beta(i) = \min\left\{ \beta(i) : a'_{ij} > 0 \; e \; \frac{d'_i}{a'_{ij}} \le \frac{d'_k}{a'_{kj}} \quad \forall k : a'_{kj} > 0 \right\}$$

Determinazione SBA iniziale (1)

- Se la base iniziale non è data occorre un metodo per determinarla

- Assumiamo che $d_i \geq 0 \quad \forall\ i$

- Si vuole determinare una soluzione ammissibile per

$$\begin{cases} Ax = d \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Determinazione SBA iniziale (2)

- Il problema equivale a trovare una soluzione ammissibile di

$$\begin{cases} Ax + I\,y = d \\ x,\ y \geq 0 \end{cases}$$

(x, y) in cui $y = 0$ (y variabili artificiali)

- Il secondo problema ha una SBA iniziale ovvia

$$(\, x = 0, y = d \,)$$

Metodo delle due fasi (1)

1) Si determina la SBA iniziale risolvendo il problema

$$\begin{cases} \min \quad w = \quad \mathbf{1}^{\mathrm{T}} y \\ \qquad Ax + I\,y = d \\ \qquad x, \quad y \geq 0 \end{cases}$$

- se alla fine $w > 0$ STOP (problema inammissibile)
- se $w = 0$ normalmente tutte le y sono fuori base e sono in base alcune x ($\Rightarrow$ SBA iniziale)

Metodo delle due fasi (2)

2) Si eliminano le variabili artificiali y

si ripristina la funzione obiettivo originaria

$$\min z = c^T x$$

e si prosegue con il simplesso partendo dalla SBA corrente

Casi "patologici"

- se $w = 0$ ma esiste y_h in base (ad es. sulla riga i)
- la soluzione deve essere degenere y_h=0

1. se esiste almeno un $a'_{ij} \neq 0$ in corrispondenza di una variabile originale
   - si può fare una operazione di pivot su tale a'_{ij} per portare in base x_j al posto di y_h
2. se tutti gli $a'_{ij} = 0$ (la riga è tutta di 0)
   - è comb. lineare di altre righe della matrice A
   - A non è di rango massimo e la riga può essere rimossa (rimuovendo in tal modo anche la y_h)

Algoritmo del Simplesso (3ª versione)

1) Inizializzazione (Fase 1)

Definisci il problema artificiale ottenuto aggiungendo m variabili artificiali y

$$\begin{cases} \min \; w = \mathbf{1}^{T} y \\ Ax + I\,y = d \\ x, \; y \geq 0 \end{cases}$$

1.1) Definisci la base iniziale $\mathcal{B} = \{ y_1, \ldots, y_m \}$ e $B = I$

Algoritmo del Simplesso (3ª versione)

1.2) Applica l'algoritmo del simplesso (passi 2-5 seguenti) al problema artificiale e sia $\mathcal{B}'$ la base ottima e w il valore della soluzione ottima di Fase 1

1.3) Se $w > 0$ STOP (problema impossibile)

1.4) Se $w = 0$ e $\mathcal{B}'$ non contiene variabili y,

a) elimina le variabili y

b) ripristina la funzione obiettivo originale e prosegui con l'algoritmo del simplesso partendo dalla base $\mathcal{B}'$

Algoritmo del Simplesso (3^a versione)

1.5) Se $w = 0$ e $\mathcal{B}'$ contiene variabili y (a valore 0) applica i passi successivi fino all'eliminazione di tutte le y dalla base e vai al passo 1.4)

Sia $y_h \in \mathcal{B}'$

a) se $\exists\, x_i \notin \mathcal{B}'$ tale che $a'_{hi} \neq 0$ esegui una operazioni di pivoting sostituendo x_i a y_h in $\mathcal{B}'$

b) altrimenti ($a'_{hi} = 0\ \forall x_i \notin \mathcal{B}'$) elimina la riga h (vincolo ridondante) dal problema (e di conseguenza la y_h da $\mathcal{B}'$)

Algoritmo del Simplesso (3^a versione)

2) Sia $\mathcal{B} = \{ A_{\beta(1)},\ldots, A_{\beta(m)} \}$ la base iniziale determinata con la Fase 1

Definisci $B = [A_{\beta(1)},\ldots, A_{\beta(m)}]$ e calcola la SBA

$$x^* = \begin{bmatrix} x_B^* \\ x_F^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1}d \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d' \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{con } d' \geq 0$$

Algoritmo del Simplesso (3ª versione)

3) Test di ottimalità

Calcola i costi ridotti delle variabili fuori base

$$c'_F{}^T = c_F{}^T - c_B{}^T B^{-1} F$$

ovvero

$$c'_h{}^T = c_h{}^T - c_B{}^T B^{-1} A_h \quad \forall A_h \notin \mathcal{B}$$

Se $c'_h \geq 0 \ \ \forall A_h \notin \mathcal{B}$ STOP (x^* soluzione ottima)

Algoritmo del Simplesso (3ª versione)

4) Pivoting

Scegli $A_h \notin \mathcal{B}$ tale che $c'_h < 0$ e calcola

$$A'_h = B^{-1} A_h$$

Se $a'_{hi} \leq 0 \ \forall i$ STOP (problema illimitato)

altrimenti calcola

$$l = \arg\min_{i=1,\ldots,m} \left\{ \frac{d'_i}{a'_{ih}} : a'_{ih} > 0 \right\}$$

ed inserisci x_h in base al posto di $x_{\beta(l)}$

Algoritmo del Simplesso (3ª versione)

5) Vai al passo 2

In assenza di degenerazione ad ogni iterazione *z* decresce:

$\Rightarrow$ l'algoritmo converge in un numero finito di passi (nel caso peggiore dopo aver esaminato tutti i vertici)