COMPITO DI MDP DEL 14/02/2023

Esercizio 1. Un sacchetto contiene 6 palline gialle e 6 palline rosse e 6 palline blu. Riempiamo tre urne U_1, U_2 e U_3 (da fuori indistinguibili) ciascuna con 3 palline estratte dal sacchetto. Per $i = 1, 2, 3$, sia X_i il numero di palline rosse presenti in U_i, sia Y_i il numero di palline gialle presenti in U_i, e indichiamo con U un'urna scelta a caso.

a. Descrivere uno spazio di probabilitá Ω che modellizza questo fenomeno aleatorio e determinare il numero di risultati possibli $|\Omega|$.
b. Stabilire se X_1 e Y_2 sono indipendenti.
c. Qual é la probabilitá che U contenga una pallina blu?
d. Qual é la probabilitá che U contenga palline di tutti i colori?
e. Supponiamo che U_1 contenga 3 palline rosse, che U_2 ne contenga 3 gialle, e che U_3 ne contenga 2 rosse e 1 gialla. Estraiamo una pallina da U, e constatiamo che la pallina é rossa. Qual é la probabilitá che U sia U_1?

Soluzione. a) Possiamo prendere come Ω l'insieme di tutte le triple (A_1, A_2, A_3) dove A_1, A_2, A_3 sono tre insiemi disgiunti di 3 palline estratte dal sacchetto. Dunque Ω ha cardinalità $\binom{18}{3}\binom{15}{3}\binom{12}{3} = 81\ 681\ 600$.

b) Sono dipendenti. Infatti

$$P(X_1 = 0) = \frac{\binom{12}{3}}{\binom{18}{3}} = \frac{55}{204} = 0.2696,$$

$$P(X_1 = 0, Y_2 = 3) = \frac{\binom{6}{3}\binom{9}{3}}{\binom{18}{3}\binom{15}{3}} = \frac{1}{221} = 0.0045$$

$$P(Y_2 = 3) = \frac{\binom{6}{3}}{\binom{18}{3}} = \frac{5}{204} = 0.0245$$

Pertanto

$$P(X_1 = 0 | Y_2 = 3) = \frac{P(X_1 = 0, Y_2 = 3)}{P(Y_2 = 3)} = \frac{\binom{9}{3}}{\binom{15}{3}} = \frac{12}{65} = 0.1846 \neq P(X_1 = 0).$$

c)

$$P(X_1 \geq 1) = 1 - P(X_1 = 0) = 1 - \frac{\binom{12}{3}}{\binom{18}{3}} = \frac{149}{204} = 0.7304$$

d)

$$P(X_1 \geq 1, Y_1 \geq 1, Z_1 \geq 1) = P(X_1 = 1, Y_1 = 1, Z_1 = 1) = \frac{6^3}{\binom{18}{3}} = \frac{9}{34} = 0.2647$$

e)

$$P(\text{scelgo } U_1|\text{estraggo una rossa}) = \frac{P(\text{scelgo } U_1 \text{ed estraggo una rossa})}{P(\text{estraggo una rossa})}$$
$$= \frac{P(\text{scelgo } U_1)}{P(\text{estraggo una rossa})} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{9}} = \frac{3}{5}$$

Esercizio 2. Sia X una variabile aleatoria continua uniforme sull'intervallo $[-1,1]$, sia $Y = X^2 - 1$ e sia Z una variabile aleatoria esponenziale di parametro 2, indipendente con X.

a) Calcolare $P(Y < -\frac{1}{2})$.
b) Determinare la funzione di ripartizione e la densità di Y.
c) Calcolare il valore atteso e la varianza di Y.
d) Determinare l'insieme dei valori assunti dalla variabile YZ e calcolarne il valore atteso.
e) Calcolare la probabilità che $\max(|Y|, Z)$ sia maggiore di $\frac{1}{2}$.

Soluzione.
a) $P(Y < -\frac{1}{2}) = P(X^2 < \frac{1}{2}) = P(-\frac{1}{\sqrt{2}} < X < \frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
b) Y ha valori in $[-1,0]$. Sia $t \in [-1,0]$, allora

$$F_Y(t) = P(Y < t) = P(X^2 < t+1) = P(-\sqrt{t+1} < X < \sqrt{t+1}) = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{t+1} = \sqrt{t+1}.$$

Per calcolare la densità, basta derivare la funzione di ripartizione. Dunque

$$f_Y(t) = \frac{1}{2\sqrt{t+1}}.$$

c) Poiché X è uniforme su $[-1,1]$, ha densità costante $\frac{1}{2}$ in $[-1,1]$ è nulla fuori da tale intervallo. Poiché Y è descritta dalla trasformazione $Y = \phi(X)$ con $\phi(t) = t^2 - 1$, il suo valore atteso è dato dalla formula

$$E(Y) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} (t^2 - 1) dt = \frac{1}{6}[t^3]_{-1}^{1} - 1 = \frac{2}{6} - 1 = -\frac{2}{3}$$

La varianza di Y è data dalla formula $E(Y^2) - E(Y)^2$. D'altra parte $Y^2 = (X^2 - 1)^2 = X^4 - 2X^2 + 1$, dunque

$$E(Y^2) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} (t^4 - 2t^2 + 1) dt = \frac{1}{10}[t^5]_{-1}^{1} - \frac{1}{3}[t^3]_{-1}^{1} + 1 = \frac{2}{10} - \frac{2}{3} + 1 = \frac{16}{30}$$

Pertanto

$$Var(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = \frac{16}{30} - \frac{4}{9} = \frac{48-40}{90} = \frac{4}{45}$$

d) La variabile Z assume valori nella seminretta $[0, +\infty)$. Pertanto YZ assume valori nella semiretta$(-\infty, 0]$. La variabile Z, essendo indipendente con X, è anche indipendente con Y. Abbiamo $E(Z) = 1/2$, quindi

$$E(YZ) = E(Y)E(Z) = -1/3.$$

e)

$$P(\max(|Y|, Z) > \tfrac{1}{2}) = 1 - P(\max(|Y|, Z) < \tfrac{1}{2}) = 1 - P(Y > -\tfrac{1}{2},\ Z < \tfrac{1}{2}) =$$
$$1 - P(Y > -\tfrac{1}{2})P(Z < \tfrac{1}{2}) = 1 - (1 - \tfrac{1}{\sqrt{2}})(1 - e^{-1}) = 0.815$$

Esercizio 3. Una società di assicurazioni per auto ha 300 000 clienti, di cui il 60% sono maschi e il 40% femmine. Un terzo degli assicurati (indipendentemente dal sesso) possiede un'auto di grossa cilindrata.

Ricerche statistiche hanno mostrato che la probabilità di avere un incidente grave in un anno è del 2% per i maschi e del 1% per le femmine, e che tali probabilità raddoppiano per chi possiede un'auto di grossa cilindrata.

a) Qual'è la probabilità che un assicurato a caso abbia un incidente grave nel prossimo anno?
b) Supponiamo che un dato assicurato abbia avuto un incidente grave. Qual'è la probabilità che sia un maschio con un'auto di grossa cilindrata?
c) Calcolare la probabilitá che il numero di assicurati maschi con un'auto di grossa cilindrata che avrá un incidente grave nel corso dell'anno sia maggiore di 2500.

Soluzione. (a) Sia E l'evento "l'assicurato ha un incidente nel prossimo anno", M l'evento "l'assicurato è maschio", F l'evento "l'assicurato è femmina", C l'evento "l'auto dell'assicurato è di grossa cilindrata". Allora

$$P(E) = P(E|M \cap C)P(M \cap C) + P(E|M \setminus C)P(M \setminus C)+ \\ + P(E|F \cap C)P(F \cap C) + P(E|F \setminus C)P(F \setminus C)$$

D'altra parte

$$\begin{aligned} &P(E|M \cap C) = 0.04 \\ &P(E|M \setminus C) = P(E|F \cap C) = 0.02 \\ &P(E|F \setminus C) = 0.01 \end{aligned}$$

mentre

$$\begin{aligned} &P(M \cap C) = \tfrac{6}{10}\tfrac{1}{3} = \tfrac{6}{30} = 0.2 \\ &P(M \setminus C) = \tfrac{6}{10}\tfrac{2}{3} = \tfrac{12}{30} = 0.4 \\ &P(F \cap C) = \tfrac{4}{10}\tfrac{1}{3} = \tfrac{4}{30} = 0.133 \\ &P(F \setminus C) = \tfrac{4}{10}\tfrac{2}{3} = \tfrac{8}{30} = 0.267 \end{aligned}$$

Pertanto $P(E) = 0.021$.

(b) Nelle notazioni di prima, abbiamo

$$P(M \cap C|E) = P(E|M \cap C)\frac{P(M \cap C)}{P(E)} = 0.04 \cdot \frac{0.2}{0.021} = 0.38$$

(c) Il numero di assicurati maschi con auto di grossa cilindrata è

$$n = \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{10} \cdot 300\ 000 = 60\ 000$$

Per $i = 1, \dots, n$, sia X_i la variabile aleatoria di Bernoulli che vale 1 se l'i-esimo assicurato maschio con auto di grossa cilindrata ha un incidente e 0 altrimenti, e sia $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Abbiamo che X_i ha media $\mu = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}$ e varianza $\sigma^2 = \frac{24}{625}$. Quindi S ha media $n\mu = 2400$ e varianza $n\sigma^2 = 2304$. Pertanto dal TLC abbiamo

$$\begin{aligned} P(S > 2500) = P(S > 2500.5) &= P(\zeta_0 > \tfrac{2500.5-2400}{\sqrt{2304}}) = P(\zeta_0 > \tfrac{100.5}{48}) \\ &= P(\zeta_0 > 2.09) = 1 - \Phi(2.09) = 1 - 0.9817 = 1.83\% \end{aligned}$$