Superfici Parametriche

Una superficie è il luogo dei punti visitati da una curva (detta profilo) che si muove attraverso lo spazio secondo la direzione indicata da un'altra curva.

Una superficie parametrica di Bezier si ottiene spostando i punti di controllo di una curva di Bézier lungo altre curve di Bézier.

Supponiamo che la curva che si muove sia una curva di Bezier di grado costante .
La curva in movimento è determinata da un insieme di vertici di controllo.
Ogni vertice di controllo nella curva originale si muove nello spazio secondo un'altra curva.
Facciamo l'ipotesi che anche questa curva sia una curva di Bezier e che le curve lungo cui tutti i vertici di controllo si muovono siano tutte dello stesso grado.
Questo può essere formalizzato nel seguente modo:

Consideriamo la curva di Bezier di grado n, nel parametro u che varia in [0,1]

$$s(u) = \sum_{i=0}^{n} P_i B_{i,n}(u)$$

Ogni vertice di controllo P_i , muovendosi genera una curva di Bezier di grado m , nel parametro v che varia in [0,1]

$$P_i = P_i(v) = \sum_{j=0}^{m} P_{i,j}\, B_{j,m}(v)$$

Combinando queste due equazioni, otteniamo le coordinate del punto sulla superficie:

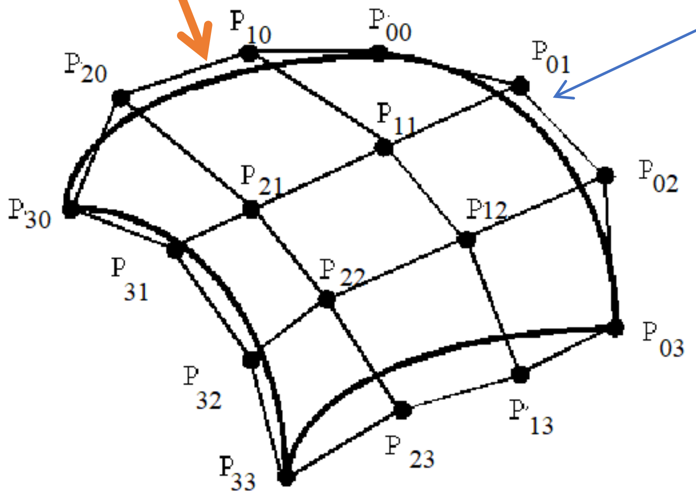
$P_{i,j}$ sono i vertici di controllo

$$s(u,v) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} P_{i,j}\, B_{i,n}(u) B_{j,m}(v)$$

Mesh di controllo (Control mesh) di dimensione $(n+1)\,(m+1)$

$$(u,v) \in [0,1] \times [0,1]$$

Curva in movimento



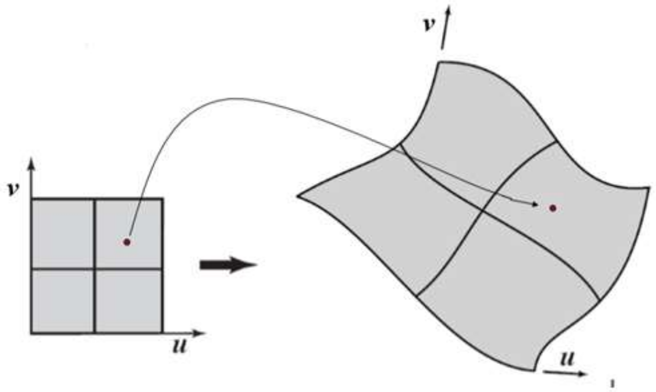
Direzione lungo cui si sposta

Superficie Bicubica di Bezier (bicubica significa che è una funzione cubica sia nel parametro u che nel parametro v).

$$s(u,v) = \sum_{i=0}^{3} \sum_{j=0}^{3} P_{i,j}\, B_{i,3}(u) B_{j,3}(v)$$

$$s(u,v) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} P_{i,j}\, B_{i,n}(u)B_{j,m}(v)$$

$$(u,v) \in [0,1] \times [0,1]$$

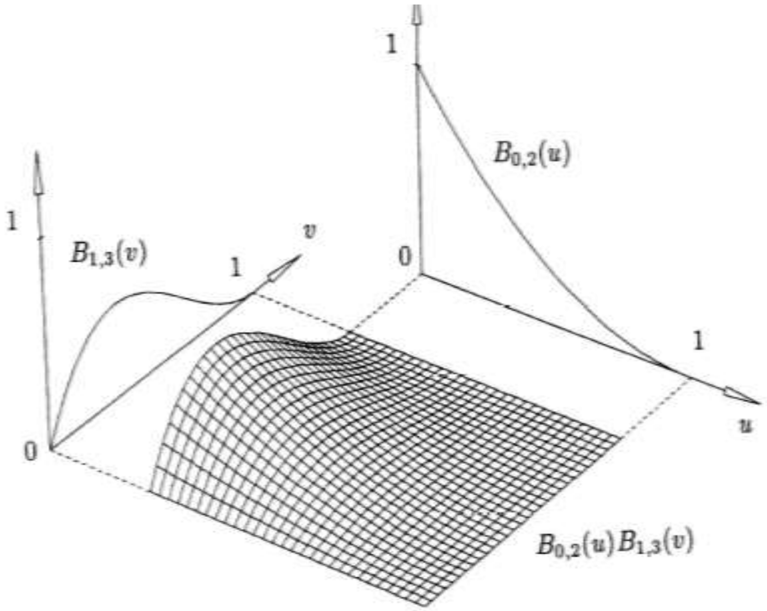


Definiamo $\varphi_{i,j,n,m}(u,v) = B_{i,n}(u)B_{j,m}(v)$

$$i = 0,\dots,n$$
$$j = 0,\dots,m$$

Le funzioni base sono ottenute facendo il prodotto tensoriale tra le funzioni base monovariate $B_{i,n}(u)B_{j,m}(v)$ e sono $(n+1) \times (m+1)$

$$s(u,v) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} P_{i,j}\, \varphi_{i,j,n,m}(u,v)$$



Funzione base di Grado 2 in u e grado 3 in v

$$s(u,v) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} P_{i,j}\, B_{i,n}(u) B_{j,m}(v) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} x_{i,j}\, B_{i,n}(u) B_{j,m}(v) \\ \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} y_{i,j}\, B_{i,n}(u) B_{j,m}(v) \\ \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} z_{i,j}\, B_{i,n}(u) B_{j,m}(v) \end{cases}$$

dove $P_{i,j} \equiv (x_{i,j}, y_{i,j}, z_{i,j})$

Per calcolare i vettori tangenti nella direzione u e v, possiamo procedere nel seguente modo:

$$\frac{\partial s(u,v)}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} P_{ij} B_{i,n}(u) B_{j,m}(v) =$$

$$= n\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} (P_{i+1\,j} - P_{ij}) B_{i,n-1}(u) B_{j,m}(v)$$

$$\frac{\partial s(u,v)}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} P_{ij} B_{i,n}(u) B_{j,m}(v) =$$

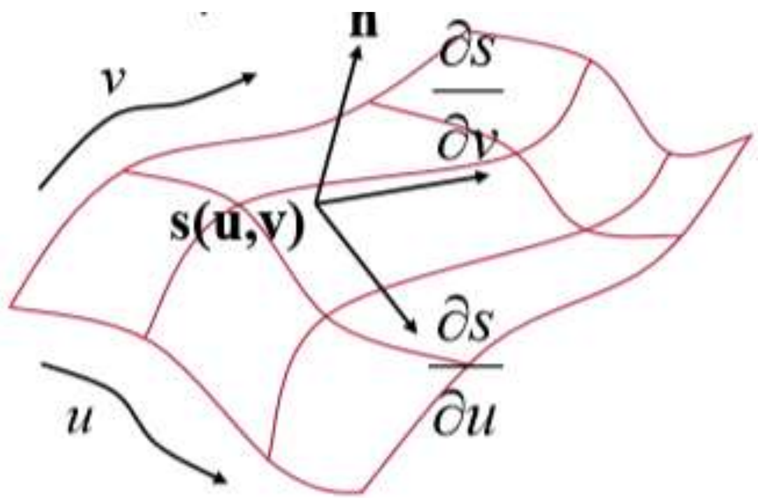
$$= m\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} (P_{ij+1} - P_{ij}) B_{i,n}(u) B_{j,m-1}(v)$$

Vettore normale ad una superficie parametrica nel punto (u,v)

Il vettore normale **n** ad una superficie parametrica è un vettore normalizzato normale alla superficie in un determinato punto (u, v).
È calcolato **dal prodotto vettoriale di due vettori tangenti alla superficie in quel punto**

$$\mathbf{n}^* = \frac{\partial s(u,v)}{\partial u} \times \frac{\partial s(u,v)}{\partial v}$$

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{n}^*}{\left\|\mathbf{n}^*\right\|}$$



La superficie di Bezier

$$s(u,v) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} P_{i,j}\, B_{i,n}(u) B_{j,m}(v)$$

Interpola i 4 vertici di controllo $P_{0,0}$, $P_{0,m}$, $P_{n,0}$ $eP_{n,m}$

La superficie di Bezier approssima la forma della control-net.

Proprietà delle funzioni base $B_{i,n}(u)B_{j,m}(v)$

- **Partizione dell'unità**:

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} B_{i,n}(u)B_{j,m}(v) = 1 \qquad (u,v) \in [0,1] \times [0,1]$$

- **Non-negatività**

$$B_{i,n}(u)B_{j,m}(v) >= 0 \qquad (u,v) \in [0,1] \times [0,1]$$

- **Proprietà del convex-hull**

$s(u,v) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} P_{i,j}\, B_{i,n}(u)B_{j,m}(v)$ è una combinazione lineare convessa e quindi è contenuta nell'inviluppo della control-net.

- **Invarianza per trasformazioni affine**: Applicare una trasformazione affine ad una superficie di Bezier, equivale ad applicare la trasformazione affine solamente ai vertici di controllo della sua control-net e poi valutarla a partire dai vertici di controllo trasformati.

Valutazione di una superficie di Bezier

$$s(u,v) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} P_{i,j}\, B_{i,n}(u) B_{j,m}(v)$$

Definiamo $Q_j(u) = \sum_{i=0}^{n} P_{i,j}\, B_{i,n}(u)$

La superficie di Bezier si può riscrivere nel seguente modo:

$$s(u,v) = \sum_{j=0}^{m} Q_j(u) B_{j,m}(v)$$

Le quantità $Q_j(u), j = 0,..,n$, possono essere viste come i vertici di controllo di un'altra curva di Bezier di ordine m.

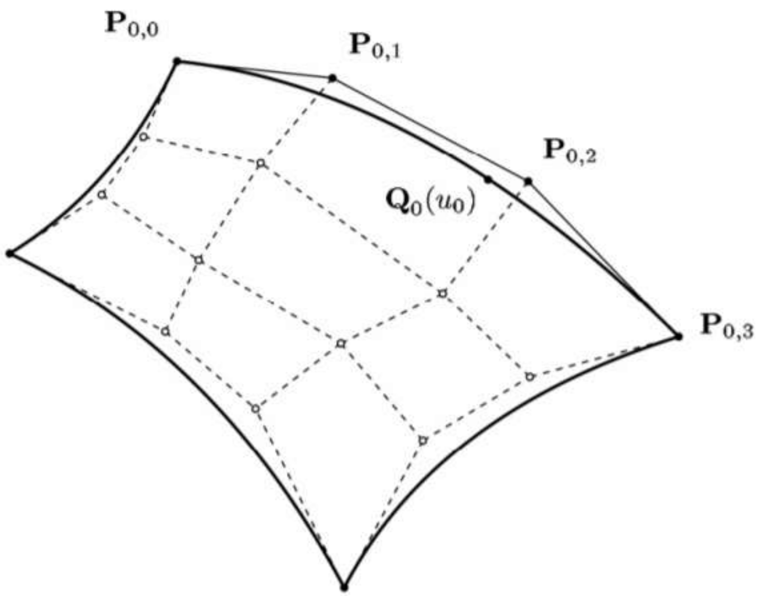
Fissato un valore di $u = u_0$, calcoliamo $Q_j(u_0) = \sum_{i=0}^{n} P_{i,j}\, B_{i,n}(u_0),\ \ j = 0,..,m$, utilizzando $m + 1$ *volte* l'algoritmo di De Casteljau.

La valutazione della superficie nel valore del parametro (u_0, v_0), si otterrà quindi, utilizzando l'algoritmo di De Casteljau nel seguente modo:

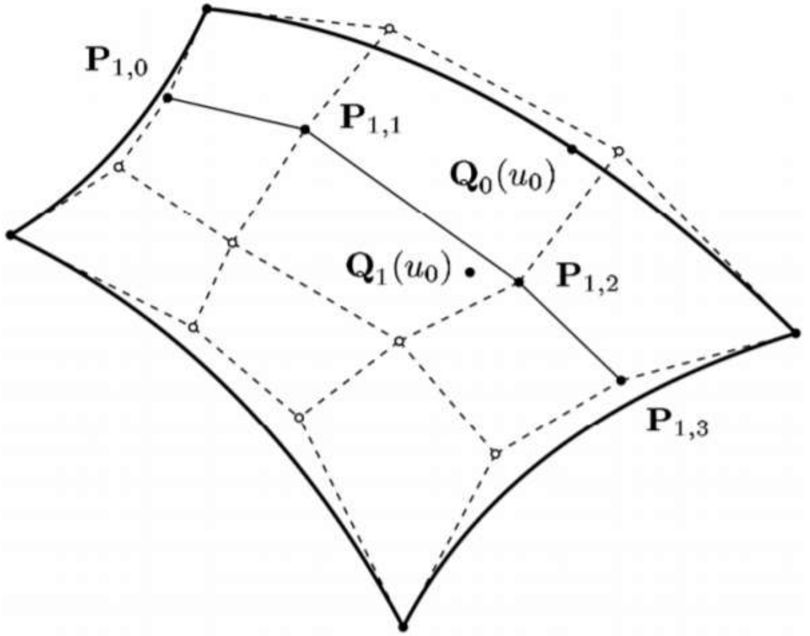
$$s(u_0, v_0) = \sum_{j=0}^{m} Q_j(u_0) B_{j,m}(v_0)$$

Esempio di valutazione di una superficie di Bezier bicubica m=n=3 per la coppia di valori del parametro (u_0, v_0)

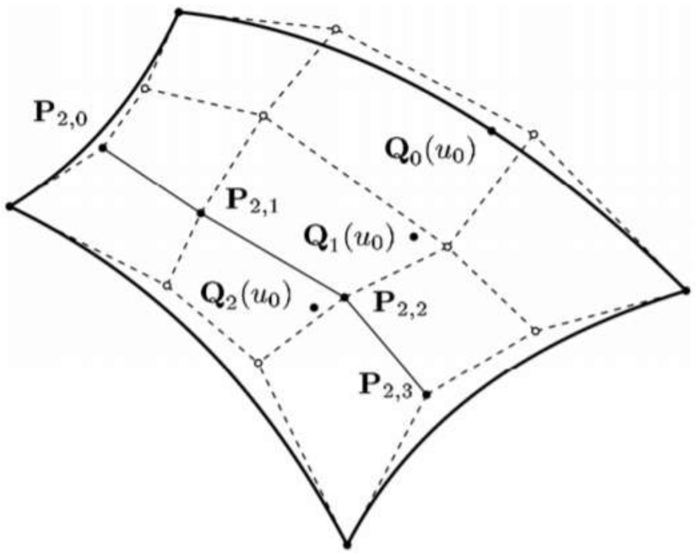
Il punto $Q_0(u_0)$ viene calcolato come un punto sulla curva di Bezier definita dai vertici di controllo $P_{0,0}$, $P_{0,1}$, $P_{0,2}$ $P_{0,3}$



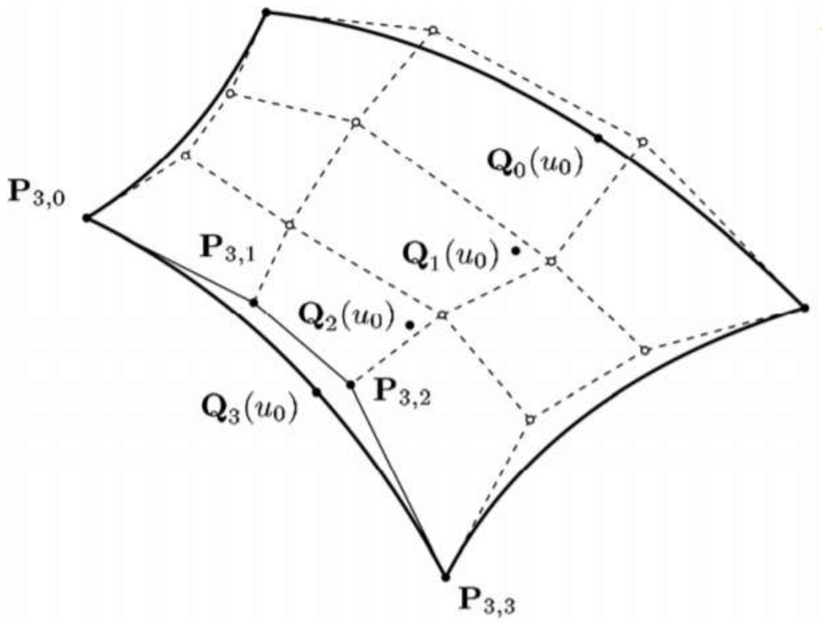
Il punto $Q_1(u_0)$ viene calcolato come un punto sulla curva di Bezier definita dai vertici di controllo $P_{1,0}$, $P_{1,1}$, $P_{1,2}$ $P_{1,3}$



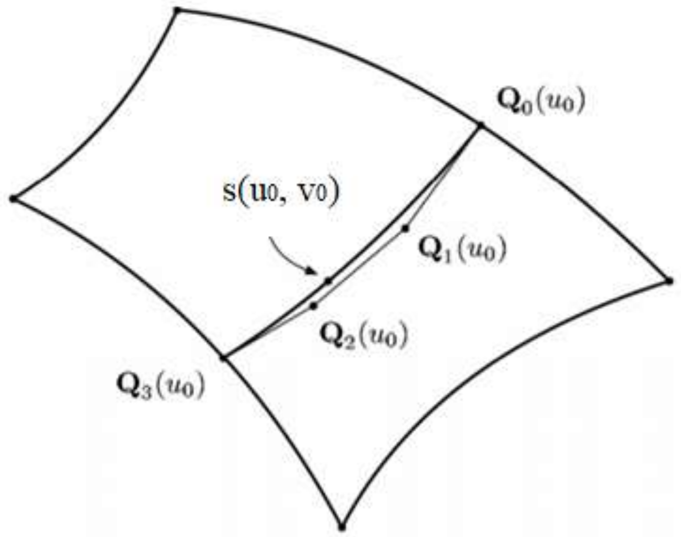
Il punto $Q_2(u_0)$ viene calcolato come un punto sulla curva di Bezier definita dai vertici di controllo $P_{2,0}$, $P_{2,1}$, $P_{2,2}$ $P_{2,3}$



Il punto $Q_3(u_0)$ viene calcolato come un punto sulla curva di Bezier definita dai vertici di controllo $P_{3,0}$, $P_{3,1}$, $P_{3,2}$ $P_{3,3}$



Il punto $s(u_0, v_0)$ sulla superficie viene calcolato come un punto sulla curva di Bezier definita dai vertici di controllo $Q_0(u_0)$, $Q_1(u_0)$, $Q_2(u_0)$, $Q_3(u_0)$



Superfici Spline

Sia u un parametro in [0,1] e sia $\Delta_1 = \{x_i\}_{i=1,\dots,h}$ una partizione nodale di [0,1]. Sia M un vettore di molteplicità dei nodi x_i, $M = (m_1, m_2, \dots, m_h)$, sia $H = \sum_{i=1}^{h} m_i$.
Fissato l'ordine $n < h$, lo spazio $S(\Delta_1{}^*, M)$ ha dimensione $n + H$.

La curva spline appartenente allo spazio $S(\Delta_1{}^*, M)$ ed approssimante la forma del poligono di controllo individuato dai vertici $P_i, i = 1, \dots, n + H$ è data da:

$$s(u) = \sum_{i=1}^{n+H} P_i N_{i,n}(u)$$

Sia v un parametro in [0,1] e sia $\Delta_2 = \{y_i\}_{i=1,\dots,k}$ una partizione nodale di [0,1]. Sia N un vettore di molteplicità dei nodi y_i, $N = (n_1, n_2, \dots, n_k)$, sia $K = \sum_{i=1}^{k} n_i$.
Fissato l'ordine $m < k$, lo spazio $S(\Delta_2{}^*, N)$ ha dimensione $m + K$.

Supponiamo che ogni vertice di controllo P_i della curva

$$s(u) = \sum_{i=1}^{n+H} P_i N_{i,n}(u)$$

Si muova descrivendo una curva spline appartenente allo spazio $S(\Delta_2{}^*, N)$

$$P_i(v) = \sum_{j=1}^{m+K} P_{ij}\, N_{j,m}(u)$$

Combinando queste due equazioni, otteniamo le coordinate del punto sulla superficie spline :

$$s(u,v) = \sum_{i=1}^{n+H} \sum_{j=1}^{m+K} P_{i,j}\, N_{i,n}(u) N_{j,m}(v) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n+H} \sum_{j=1}^{m+K} x_{i,j}\, N_{i,n}(u) N_{j,m}(v) \\ \sum_{i=1}^{n+H} \sum_{j=1}^{m+K} y_{i,j}\, N_{i,n}(u) N_{j,m}(v) \\ \sum_{i=1}^{n+H} \sum_{j=1}^{m+K} z_{i,j}\, N_{i,n}(u) N_{j,m}(v) \end{cases}$$

dove $P_{i,j} \equiv (x_{i,j}, y_{i,j}, z_{i,j})$

$(n+H)(m+K)$ funzioni base date dal prodotto tensoriale $N_{i,n}(u)N_{j,m}(v), \mathrm{i} = 1, \dots, \mathrm{n}+\mathrm{H},\ \mathrm{j} = 1, \dots \mathrm{m}+\mathrm{K}$

Le proprietà delle funzioni base $N_{i,n}(u)N_{j,m}(v)$ seguono dalle proprietà delle corrispondenti delle funzioni di base univariate (**non negatività, partizione di unità, ..**)

Supporto locale:

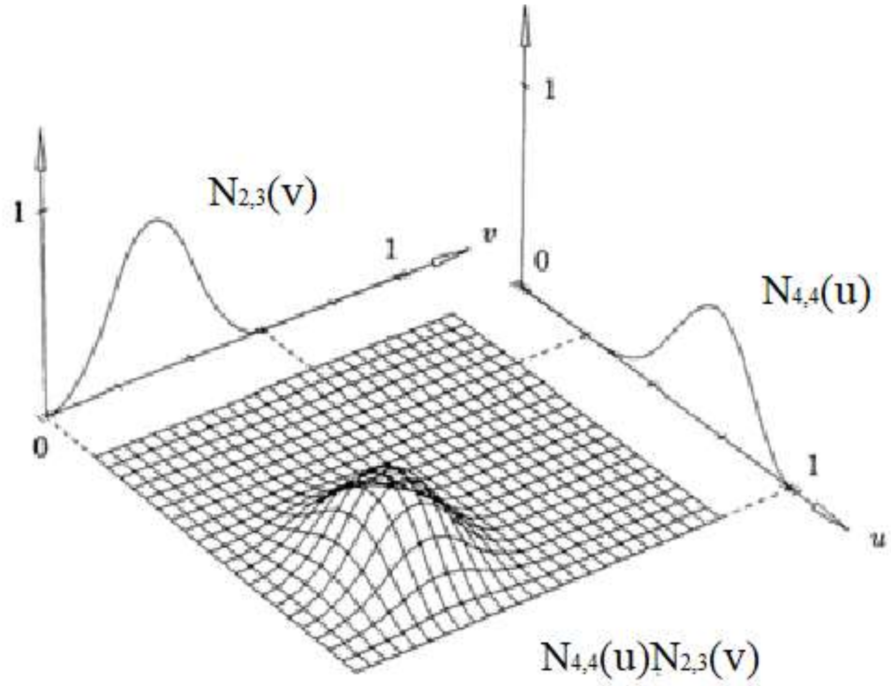
$\boldsymbol{N_{i,n}(u)N_{j,m}(v) \neq 0}$ **se** $\boldsymbol{(u,v) \in (x_i, x_{i+n}) \times (y_j, y_{j+m})}$

-

$$s(u,v) = \sum_{i=1}^{n+H} \sum_{j=1}^{m+K} P_{i,j}\, N_{i,n}(u)N_{j,m}(v)$$

Se $(\mathrm{u},\mathrm{v}) \in (x_l, x_{l+1}) \times (y_q, y_{q+1})$

$$s(u,v) = \sum_{i=l-n+1}^{l} \sum_{j=q-m+1}^{q} P_{i,j}\, N_{i,n}(u)N_{j,m}(v)$$



La superficie della spline ha le seguenti proprietà:

- **Invarianza affine** –

Proprietà locale dell' inviluppo

- **Modifica locale:** se P_{ij} viene spostato influisce sulla superficie solo nel rettangolo $(x_i, x_{i+n}) \times (y_j, y_{j+m})$ -

- **Non vale la proprietà del variation diminishing**.

Valutazione di una superficie Spline

Se $(\mathrm{u}, \mathrm{v}) \in (x_l, x_{l+1}) \times (y_q, y_{q+1})$, $\qquad s(u,v) = \sum_{i=l-n+1}^{l} \sum_{j=q-m+1}^{q} P_{i,j}\, N_{i,n}(u) N_{j,m}(v)$

Definiamo $Q_j(u) = \sum_{i=l-n+1}^{l} P_{i,j}\, N_{i,n}(u)$

La superficie spline si può riscrivere nel seguente modo:

$$s(u,v) = \sum_{j=q-m+1}^{q} Q_j(u) N_{j,m}(v)$$

Le quantità $Q_j(u), j = 0,..,n$, possono essere viste come i vertici di controllo di un'altra curva spline di ordine m.

Fissato un valore di $u = u_0$, calcoliamo $Q_j(u_0) = \sum_{i=l-n+1}^{l} P_{i,j}\, N_{i,n}(u_0)$, $\; j = q-m+1,..,q$, utilizzando m *volte* l'algoritmo di De Boor.

La valutazione della superficie nel valore del parametro (u_0, v_0), si otterrà quindi utilizzando la formula di De Boor

$$s(u_0, v_0) = \sum_{j=q-m+1}^{q} Q_j(u_0) N_{j,m}(v_0)$$

Superfici NURBSs

$$s(u,v) = \frac{\sum_{i=1}^{n+H} \sum_{j=1}^{m+K} w_{i,j}\, P_{i,j}\, N_{i,n}(u) N_{j,m}(v)}{\sum_{i=1}^{n+H} \sum_{j=1}^{m+K} w_{i,j}\; N_{i,n}(u) N_{j,m}(v)} \qquad w_{i,j} > 0, \qquad \mathrm{i} = 1,..\mathrm{n}+\mathrm{H}, \qquad \mathrm{j} = 1, \dots, \mathrm{m}+\mathrm{K}$$

Se definiamo le funzioni base

$$R_{ij}(u,v) = \frac{w_{i,j}\, N_{i,n}(u) N_{j,m}(v)}{\sum_{i=1}^{n+H} \sum_{j=1}^{m+K} w_{i,j}\; N_{i,n}(u) N_{j,m}(v)}$$

Allora la superficie NURBss può essere scritta come:

$$s(u,v) = \sum_{i=1}^{n+H} \sum_{j=1}^{m+K} P_{i,j}\, R_{ij}(u,v)$$

- **Oltre le superfici Nurbss**
- Le superfici parametriche (Bézier patch e NURBS) mappano un dominio parametrico rettangolare o triangolare nello spazio 3D, determinando patch di superfici solitamente con quattro curve di bordo. Poiché le forme complesse non sono rappresentabili con un’unica superficie è necessaria la composizione di più parti per mantenere un’appropriata continuità tra gli elementi costituenti.
-

- **T-spline**