

ESERCIZI DI MDP PER IL 27 OTTOBRE 2021

- (1) Un bambino di 6 mesi mangia tutti i giorni una pappa di 200 grammi. In una settimana ha registrato i seguenti tempi (espressi in minuti) per consumare il suo pasto: 5,10,4,12,20,10,4.
- (a) Determinare le velocità (espressa in grammi al minuto) registrate dal bambino nel consumare il suo pasto;
 - (b) Determinare la velocità media complessiva nei sette giorni;
- (2) In 25 scatole di 100 viti si sono contati il numero di pezzi difettosi ottenendo i seguenti dati

1, 4, 3, 1, 3, 2, 2, 1, 2, 5, 3, 0, 1, 4, 3, 7, 1, 3, 1, 7, 2, 1, 2, 4, 8.

Determinare le modalità, le frequenze, la media (2.84), i quartili (1,2,4), la moda, la varianza (4.21), e il range.

- (3) Sono state recensite 512 famiglie di 6 figli. Per ognuna è stato osservato il numero di figlie femmine. I dati sono riportati nella tabella seguente.

Numero di figlie	frequenza
0	23
1	64
2	131
3	123
4	107
5	48
6	16

Qual è il numero medio di figlie (2,85)? Calcolare la varianza (2,00) sia usando la definizione che usando la formula vista a lezione.

- (4) Sette adulti scelti a caso hanno peso e altezza (espressi in kilogrammi e centimetri) come nella seguente tabella.

Peso	Altezza
80	175
90	175
75	180
85	190
70	170
100	195
80	170

Disegnare il diagramma a dispersione; stimare il peso di un adulto alto 177 centimetri e l'altezza di un adulto che pesa 80 chili.

- (5) Il PIL in Italia ha fatto registrare le seguenti variazioni percentuali negli ultimi anni

Anno	Variazione
2020	-8.9%
2019	+0.3%
2018	+0.9%
2017	+1.7%
2016	+1.3%

Determinare la variazione percentuale media del PIL in Italia in questi cinque anni.

- (6) Determinare la probabilità che tra 30 persone scelte a caso almeno due festeggino il compleanno lo stesso giorno.

Cenni di soluzioni

- (1) (a) Le velocità in grammi al minuto si ottengono dividendo 200 per i tempi registrati e quindi: 40, 20, 50, 16.66, 10, 20, 50
 (b) Il modo più semplice per ottenere la velocità media è di fare la quantità totale di pappa fratto il tempo totale impiegato: $\frac{1400}{5+10+4+12+20+10+4} = 21.53 \text{ g/min.}$ In alternativa si poteva fare la media armonica delle velocità ottenendo equivalentemente

$$\left(\frac{1}{7}\left(\frac{1}{40} + \frac{1}{20} + \frac{1}{50} + \frac{1}{16.66} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{50}\right)\right)^{-1} = 21.53 \text{ g/min.}$$

- (2) Le modalità sono i valori da 0 a 8 con frequenze rispettive 1, 7, 5, 5, 3, 1, 0, 2, 1.
 (3) Usando la definizione abbiamo che la varianza σ_x^2 è

$$\frac{23(0 - 2.85)^2 + 64(1 - 2.85)^2 + 131(2 - 2.85)^2 + 123(3 - 2.85)^2 + 107(4 - 2.85)^2 + 48(5 - 2.85)^2 + 16(6 - 2.85)^2}{512} = 2.00.$$

Calcolando invece la media dei quadrati abbiamo

$$\overline{x^2} = \frac{64 + 131 \cdot 4 + 123 \cdot 9 + 107 \cdot 16 + 48 \cdot 25 + 16 \cdot 36}{512} = 10.12$$

e quindi

$$\sigma_x^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2 = 10.12 - 8.12 = 2.00.$$

- (4) Siccome dobbiamo stimare il peso rispetto all'altezza scegliamo x =altezza e y =peso. Abbiamo

- $\bar{x} = 180 + 5 \cdot \frac{-1-1+0+2-2+3-2}{7} = 179, 29 \text{ cm.}$
- $\bar{y} = 80 + 5 \cdot \frac{0+2-1+1-2+4+0}{7} = 82, 86 \text{ kg.}$
- $\overline{x^2} = 32225 \text{ cm}^2.$
- $\sigma_x^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2 = 80, 1 \text{ cm}^2.$
- $\overline{y^2} = 6950 \text{ kg}^2$
- $\overline{xy} = 14914 \text{ cm} \cdot \text{kg.}$
- $\sigma_{x,y} = \overline{xy} - \bar{x}\bar{y} = 58, 0306 \text{ cm} \cdot \text{kg.}$
- $\sigma_y^2 = \overline{y^2} - \bar{y}^2 = 84, 22$

L'equazione della retta ai minimi quadrati $y = ax + b$ è quindi data da

$$a = \frac{\sigma_{x,y}}{\sigma_x^2} = 0, 72$$

e

$$b = \bar{y} - a\bar{x} = -47, 03$$

e quindi abbiamo l'equazione

$$y = 0, 72x - 47, 03.$$

Per un'altezza di 177 centimetri possiamo quindi stimare un peso di

$$0, 72 \cdot 177 - 47, 03 = 80, 41$$

kilogrammi.

Invertendo i ruoli di x ed y otteniamo la retta ai minimi quadrati $x = a'y + b'$ con

$$a' = \frac{\sigma_{x,y}}{\sigma_y^2} = 0, 69$$

e $b' = \bar{x} - a'\bar{y} = 179,29 - 0,69 \cdot 82,86 = 122,12$ e abbiamo quindi l'equazione

$$x = 0,69x + 122,12$$

e l'altezza di un adulto che pesa 80 chili viene stimata da

$$0,69 \cdot 80 + 122,12 = 177,32 \text{ cm.}$$

- (5) Consideriamo i fattori moltiplicativi corrispondenti alle variazioni percentuali

Anno	Variazione	Fattore
2020	-8.9%	0.911
2019	+0.3%	1.003
2018	+0.9%	1.009
2017	+1.7%	1.017
2016	+1.3%	1.013

Calcoliamo quindi la media geometrica dei fattori moltiplicativi ottenendo

$$(0.911 \cdot 1.003 \cdot 1.009 \cdot 1.017 \cdot 1.013)^{1/5} = (0,9498)^{1/5} = 0.990$$

La variazione percentuale media è stata quindi del -1.0%

- (6) Consideriamo lo spazio Ω dato da tutte le sequenze di lunghezza 30, nell'insieme dei numeri $\{1, 2, \dots, 365\}$ con probabilità uniforme (assumiamo cioè che tutte le sequenze possibili di compleanni siano equiprobabili). Sia A l'evento almeno due coefficienti sono uguali. Abbiamo allora

$$P(A) = 1 - P(A^C) = 1 - \frac{(365)_{30}}{365^{30}} = 1 - 0,2937 = 0,7063.$$

La probabilità richiesta è quindi 70.63%.