



Curve Spline



Curve Spline polinomiali di ordine m a nodi multipli

I difetti delle curve di Bezier consistono nella mancanza di controllo locale della curva e nel fatto che il grado dei polinomi di base di Bernstein è strettamente legato al numero di vertici controllo (se i vertici di controllo sono $n+1$ il grado dei polinomi di base di Bernstein è n).

Le curve spline permettono di superare entrambi i limiti.

Curve Spline.

Dati i vertici di controllo P_i , $i=1, \dots, N$, una curva spline si definisce come:

$$C(t) = \sum_{i=1}^N P_i N_{i,m}(t) \quad t[a, b]$$

dove le funzioni base $N_{i,m}(t)$

- hanno ordine m , molto inferiore rispetto al numero dei vertici di controllo
- ed inoltre è possibile controllare localmente la forma delle curve, in quanto le funzioni base B.spline sono a supporto compatto, sono non sono diverse da zero su tutto l'intervallo $[a, b]$, ma hanno un supporto locale che dipende dal loro ordine.



Spline polinomiali a nodi multipli

Definizione:

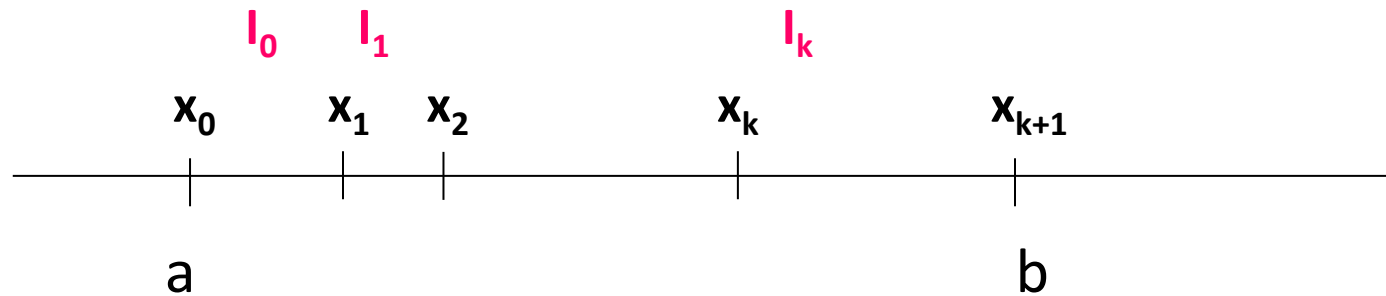
Sia $[a,b]$ un intervallo chiuso e limitato, sia Δ una partizione di $[a,b]$ così definita:

$$\Delta = \{a=x_0 < x_1 < \dots < x_k < x_{k+1}=b\}$$

che induce una partizione di $[a,b]$ in $k+1$ sottointervalli:

$$I_i = [x_i, x_{i+1}) \quad \text{per } i=0, \dots, k-1.$$

$$I_k = [x_k, x_{k+1}]$$





Spline polinomiali a nodi multipli

Definizione:

Sia $[a,b]$ un intervallo chiuso e limitato, sia Δ una partizione di $[a,b]$ così definita:

$$\Delta = \{a=x_0 < x_1 < \dots < x_k < x_{k+1}=b\}$$

che induce una partizione di $[a,b]$ in $k+1$ sottointervalli:

$$\begin{aligned} I_i &= [x_i, x_{i+1}) && \text{per } i=0, \dots, k-1. \\ I_k &= [x_k, x_{k+1}] \end{aligned}$$

Sia $m < k$ un intero positivo e sia $\mathbf{M} = (m_1, m_2, \dots, m_k)$ un vettore di interi positivi tali che $1 \leq m_i \leq m \quad \forall i = 1, \dots, k$

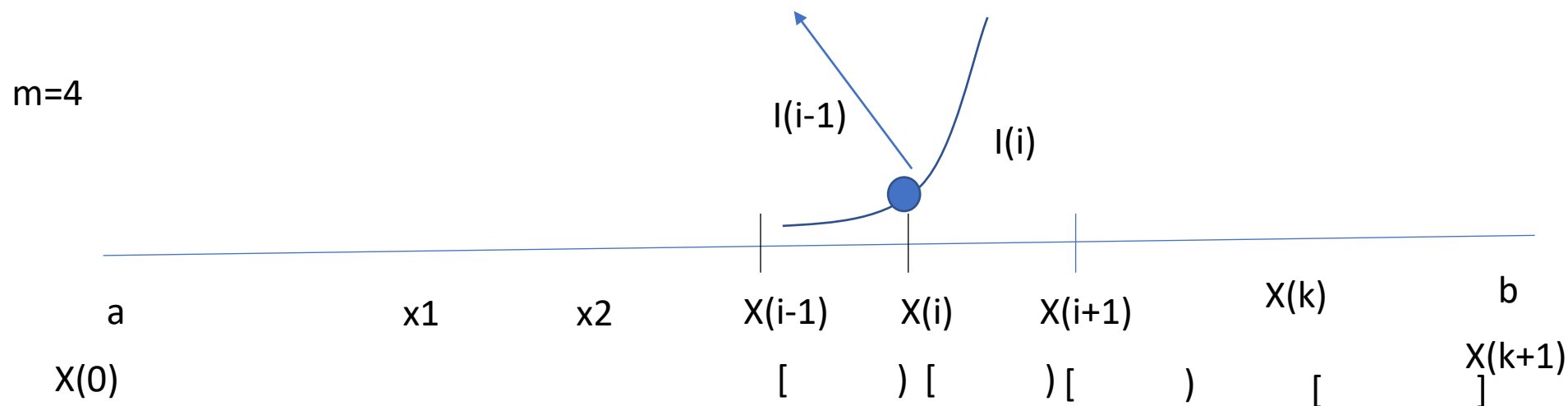
Si definisce funzione spline polinomiale di ordine m con nodi x_1, \dots, x_k di molteplicità m_1, \dots, m_k , una funzione $s(x)$

che in ciascun sotto intervallo I_i $i = 0, \dots, k$ coincide con un polinomio $s_i(x)$ di ordine m e che



e che nei nodi $x_i, i = 1, \dots, k$ soddisfi le condizioni di continuità: Ovvero che la derivata del nodo corrente e quello successivo abbiano la stessa derivata

$$\frac{d^j s_{i-1}(x_i)}{dx^j} = \frac{d^j s_i(x_i)}{dx^j} \quad i = 1, \dots, k \quad j = 0, \dots, m - m_i - 1$$



E' possibile variare il tipo di raccordo in un nodo x_i a seconda del valore di m_i .

In base a questo valore si può decidere sino a quale derivata effettuare il raccordo. Maggiore sarà la molteplicità, minori saranno le condizioni di raccordo sui nodi.



Nota: Se $m_i=1$ $i=1,\dots,k$ otteniamo la spline a nodi semplici, che ha la massima regolarità per essere una funzione spline. In ogni nodo si ha il raccordo dalla derivata 0-esima fino alla derivata $m-2$.

Se $m_i=m$ non abbiamo alcun raccordo nel nodo i -esimo.

Esempi: Sia $m=4$.

Se, per un certo i , $1 \leq i \leq k$, $m_i=1$ il nodo x_i è semplice

$$s_i''(x_i) = s_{i-1}''(x_i)$$

$$s_i'(x_i) = s_{i-1}'(x_i)$$

$$s_i(x_i) = s_{i-1}(x_i)$$

Se $m_i=2$ il nodo x_i è doppio

$$s_i'(x_i) = s_{i-1}'(x_i) \quad s_i(x_i) = s_{i-1}(x_i)$$



Se $m_i=3$ il nodo x_i è triplo

$$s_i(x_i) = s_{i-1}(x_i)$$

Man mano che aumenta la molteplicità dei nodi, si riducono le condizioni di raccordo nei nodi.

Teorema:

Lo spazio delle spline polinomiali di ordine m a nodi multipli con nodi x_1, \dots, x_k di molteplicità

$M = (m_1, \dots, m_k)$, che verrà indicato con $S_m(\Delta, M)$, ha dimensioni pari a $m + K$, dove $K = \sum_{i=1}^k m_i$.

Dimostrazione intuitiva: Per ciascuno dei $k+1$ sottointervalli il polinomio di ordine m ha m gradi di libertà, quindi si hanno $(k+1)m$ gradi di libertà; a queste si devono sottrarre le $m-m_i$ condizioni di raccordo imposte su ogni nodo $x_i, i = 1, \dots, k$. Si ha, quindi:

$$m(k+1) - \sum_{i=1}^k (m - m_i) = mk + m - \sum_{i=1}^k m + \sum_{i=1}^k m_i = mk + m - mk + K = m + K$$



Base dello spazio delle Spline B-spline normalizzate

Una buona base per lo spazio delle spline $S_m(\Delta, M)$ è la base delle B-spline normalizzate .

Funzioni base B-spline caso a nodi semplici

Assegnata una successione di nodi $\dots < x_1 < x_2 < \dots$ semplici si definisce B-spline normalizzata di ordine m relativa al nodo x_i , $N_{i,m}(x)$, $x \in [a, b]$, una funzione che gode delle seguenti proprietà:

$N_{i,m}(x) = 0$ per $x < x_i$ $x > x_{i+m}$. (supporto compatto);

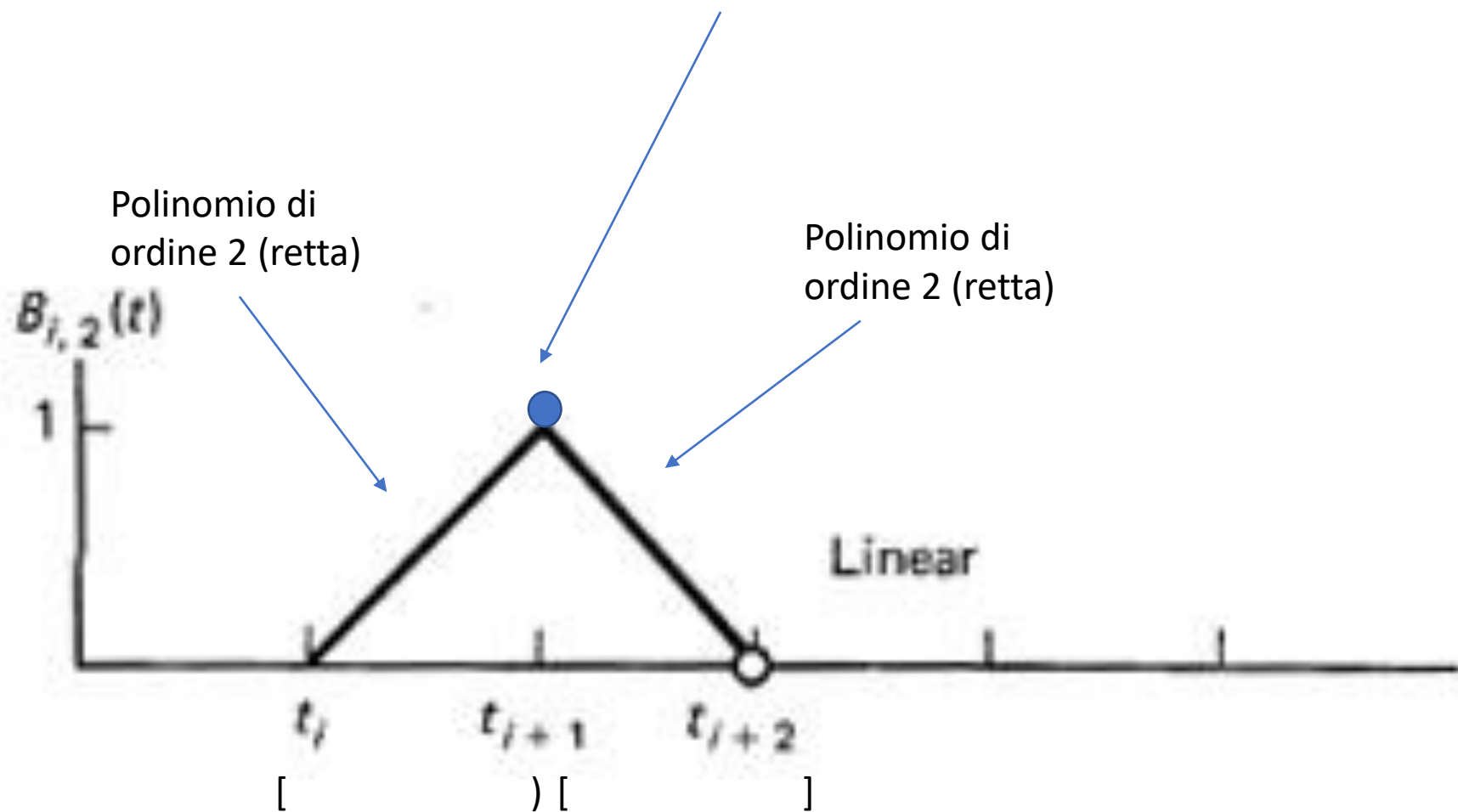
$$\int_{x_i}^{x_{i+m}} N_{i,m}(x) dx = \left(\frac{x_{i+m} - x_i}{m} \right) \text{ (Condizione di normalizzazione);}$$

In ciascun intervallo I_j $j=i, \dots, i+m-1$ coincide con un polinomio di ordine m che si raccorda opportunamente con i vicini, in modo tale che $N_{i,m}(x) \in C^{m-2}[a, b]$



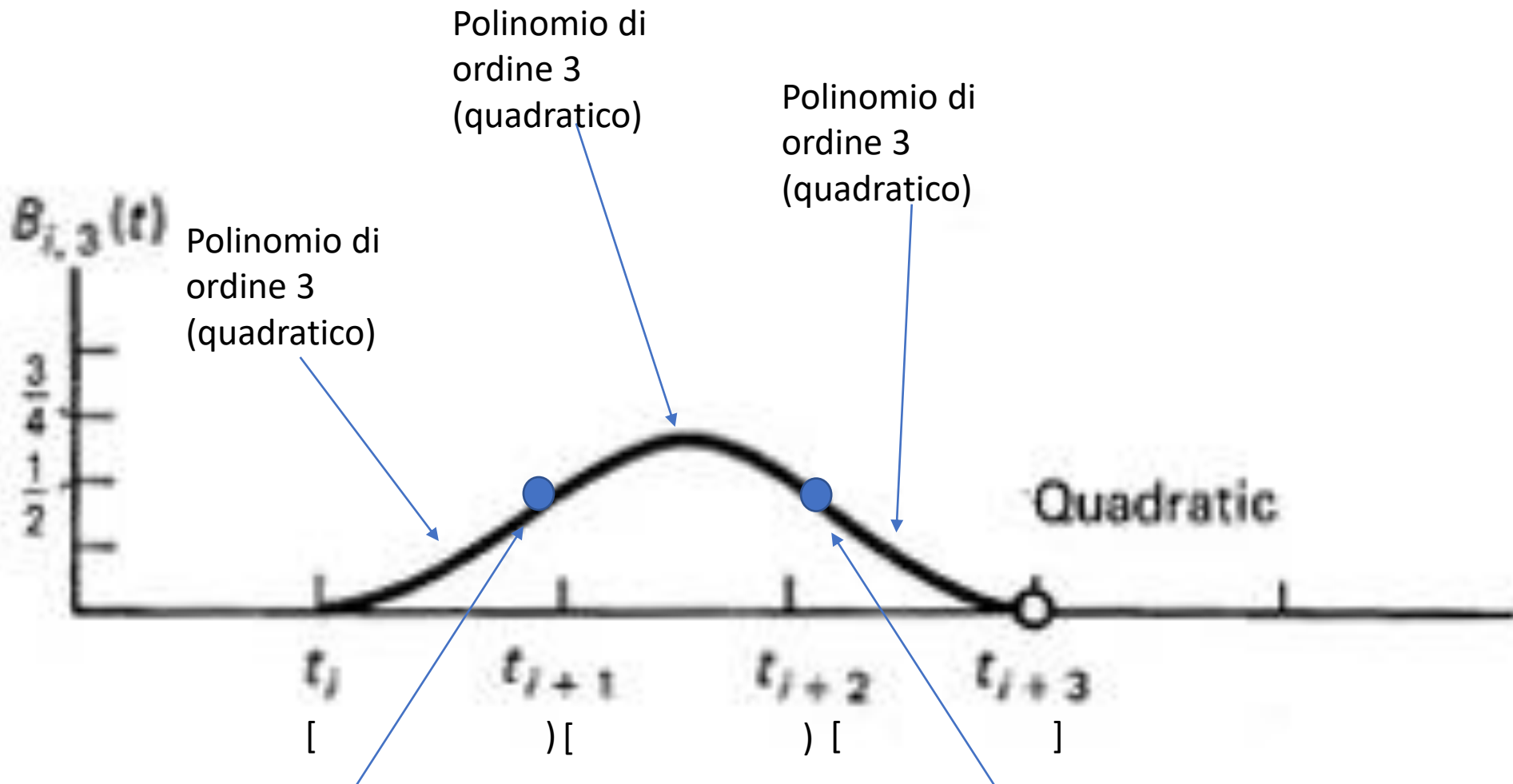
$$m = 2$$

In t_{i+1} i due polinomi coincidono in valore,
continuità di classe C^{m-2} , quindi C^0





$$m = 3$$

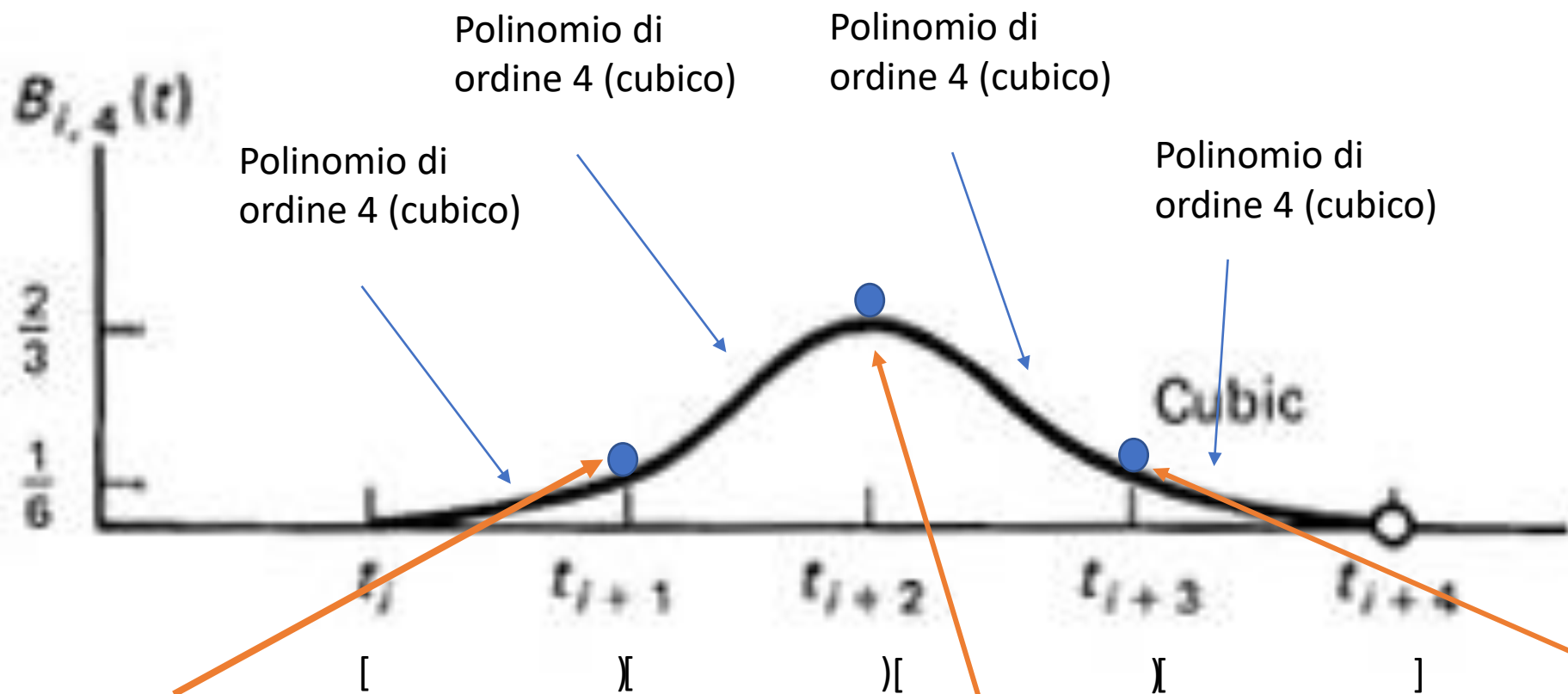


In t_{i+1} i due polinomi coincidono in valore e derivata prima, continuità di classe C^{m-2} , quindi C^1

In t_{i+2} i due polinomi coincidono in valore e derivata prima, continuità di classe C^{m-2} , quindi C^1



$$m = 4$$



In t_{i+1} i due polinomi coincidono in valore, derivata prima e derivata seconda, continuità di classe C^{m-2} , quindi C^2

In t_{i+2} i due polinomi coincidono in valore, derivata prima e derivata seconda, continuità di classe C^{m-2} , quindi C^2

In t_{i+3} i due polinomi coincidono in valore, derivata prima e derivata seconda, continuità di classe C^{m-2} , quindi C^2



Formule di Cox per la valutazione di una B-spline

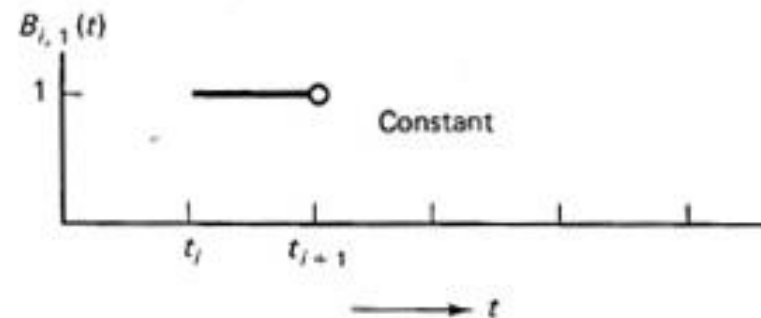
Per calcolare le funzioni base, si utilizzano le formule di Cox, che consentono di calcolare $N_{i,m}(x)$ mediante combinazione di due funzioni base di ordine $m-1$.

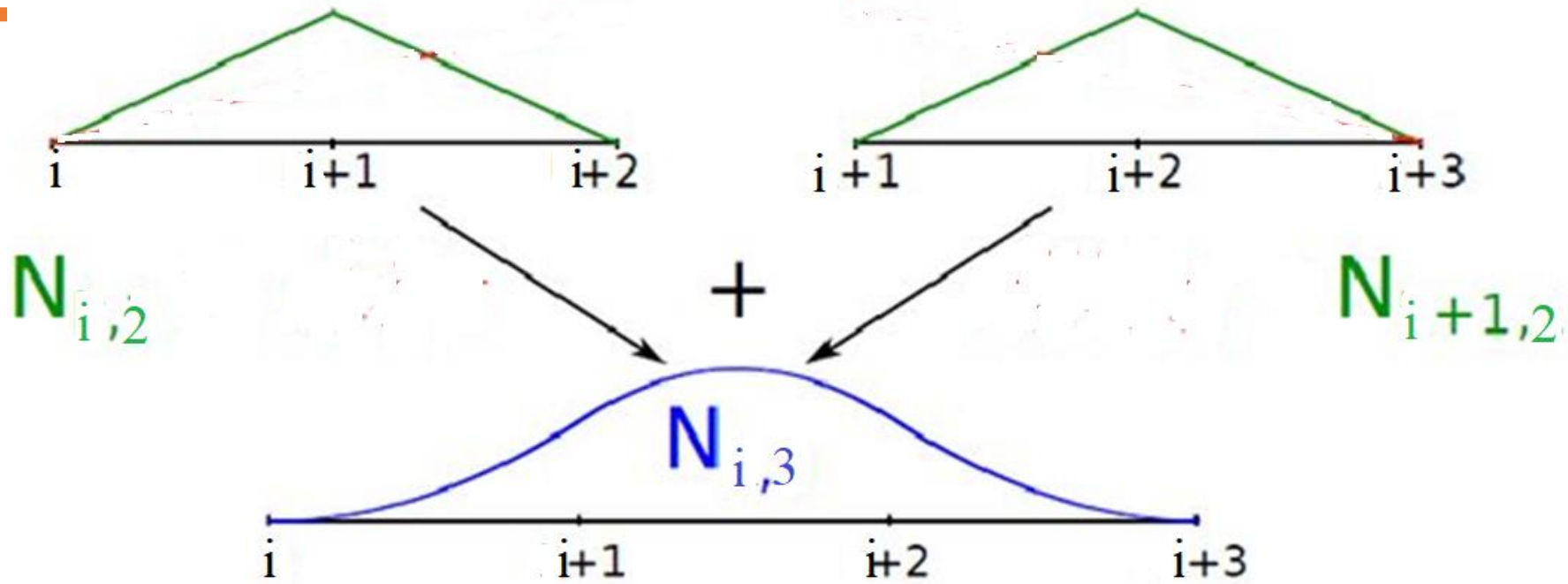
Più precisamente, definita

$$N_{i,1}(x) = \begin{cases} 1 & x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

per $h=2, \dots, m$ si ha

$$N_{i,h}(x) = \left(\frac{x - x_i}{x_{i+h-1} - x_i} N_{i,h-1}(x) + \frac{x_{i+h} - x}{x_{i+h} - x_{i+1}} N_{i+1,h-1}(x) \right)$$





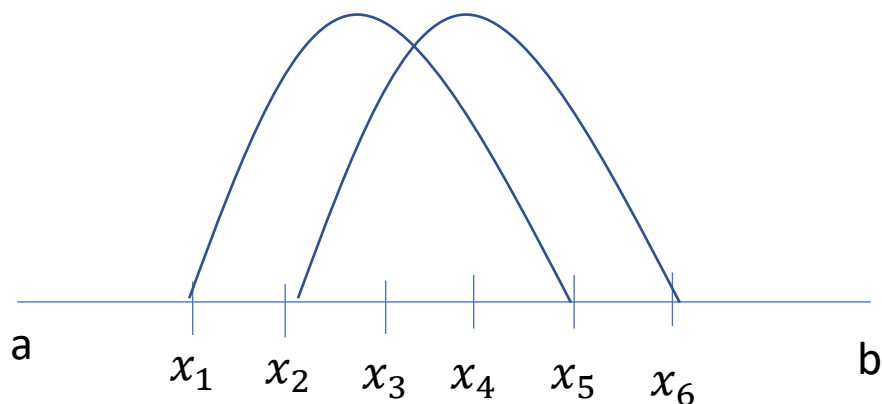
$$N_{i,3}(x) = \left(\frac{x - x_i}{x_{i+3-1} - x_i} N_{i,2}(x) + \frac{x_{i+3} - x}{x_{i+3} - x_{i+1}} N_{i+1,2}(x) \right)$$



Vediamo ora come utilizzare le funzioni B-spline di ordine m per costruire una base per lo spazio delle spline $S_m(\Delta, M)$.

Poiché $S_m(\Delta, M)$ ha dimensione $m+K$, bisogna essere in grado di costruire $m+K$ funzioni base B-spline.

Consideriamo il caso in cui $m=4$ e $k=6$ nodi ognuno con molteplicità 1. Dobbiamo essere in grado di costruire $m+k=10$ funzioni base

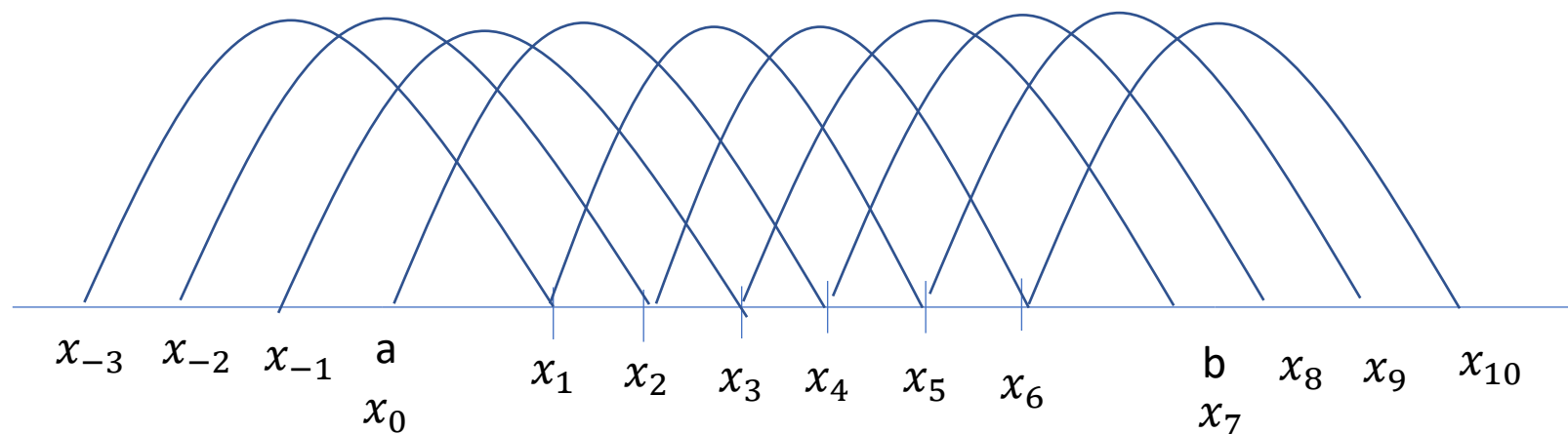


solo con i k nodi $x_i, i = 1, \dots, k$ non è possibile costruire tutte le B-spline necessarie per costruire una base per $S_m(\Delta)$.



È necessario inserire $2m$ nodi fittizi. Di questi, m vengono inseriti prima di x_1 ed altrettanti dopo x_k . La nuova partizione nodale creata si prende il nome di partizione nodale estesa Δ^*

Nel nostro esempio $m=4$ e $k=6$, inseriamo $m=4$ nodi fittizi a sinistra prima di x_1 e $m=4$ nodi fittizi a destra dopo di x_6



Siamo riusciti a costruire tutte le b-spline che formano la base dello spazio delle Spline.



Partizione nodale estesa

Data la partizione nodale $\Delta = \{a=x_0 < x_1 < \dots < x_k < x_{k+1}=b\}$ ed il vettore di molteplicità $M = (m_1, \dots, m_k)$,

si costruisce la partizione nodale estesa $\Delta^* = \{t_i\}_{i=1}^{2m+K}$ con $K = \sum_{i=1}^k m_i$ nel seguente modo:

a) $t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq \dots \leq t_{2m+K}$ i nuovi nodi sono semplici, ma possono coincidere.

b) $t_m \equiv a$ $t_{m+K+1} \equiv b$

c) $t_{m+1} \leq t_{m+2} \leq t_{m+3} \leq \dots \leq t_{m+K}$ sono scelti in modo tale che siano coincidenti con :

$$(x_1 \equiv x_1 \equiv \dots \equiv x_1) < (x_2 \equiv x_2 \equiv \dots \equiv x_2) < \dots (x_k \equiv x_k \equiv \dots \equiv x_k)$$

m_1 volte

m_2 volte

m_k volte

d) $t_i \leq a$ $i = 1, \dots, m-1$ (possono coincidere tutti con a)

$t_i \geq b$ $i = m+K+2, \dots, 2m+K$ (possono coincidere tutti con b)

I punti x_i , $i = 1, \dots, k$ vengono anche chiamati break points.

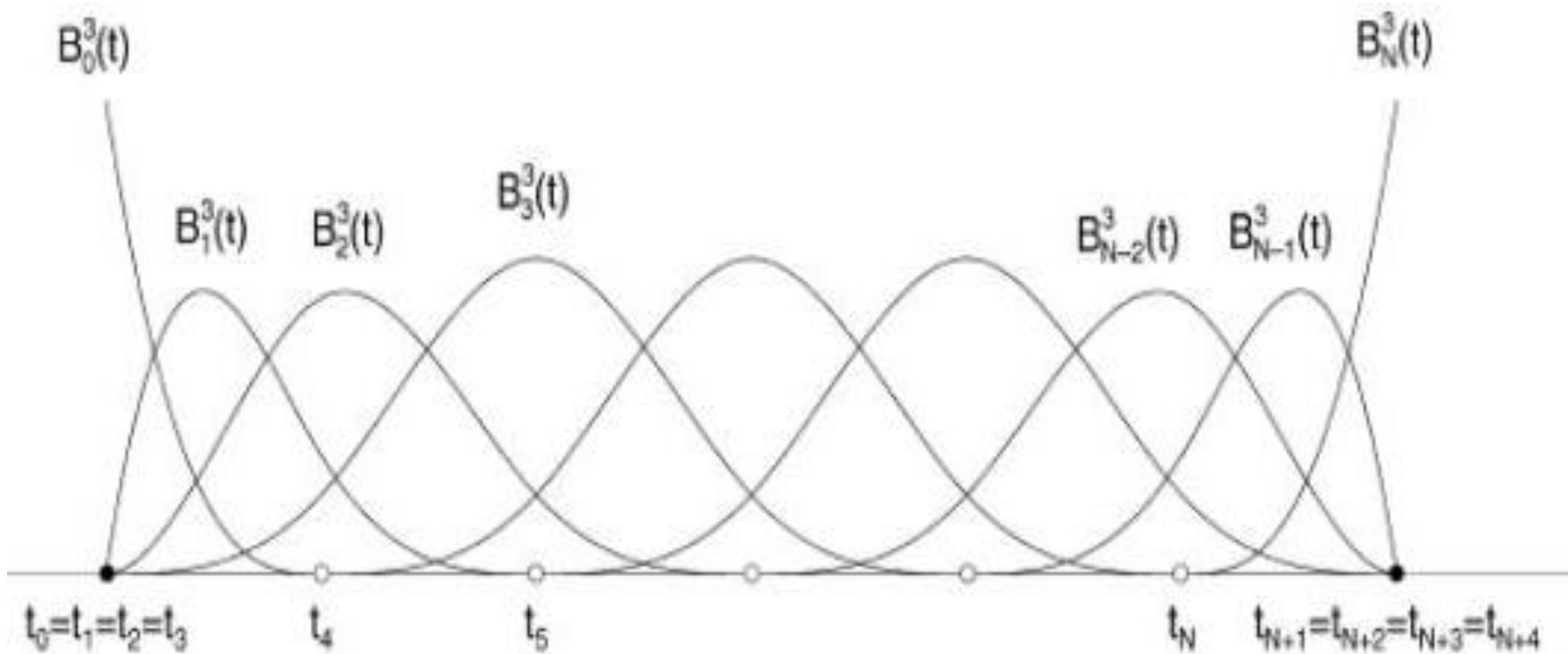


Caso nodi semplici,
molteplicità $m_i=1$, per ogni i

$$\Delta = \{a=x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < \dots < x_k < x_{k+1}=b\}$$

$$M = (m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6), \quad M = (1, 1, 1, 1, 1, 1)$$

$m=4$ Nodi fittizi a sinistra coincidenti con l'estremo a e $m=4$ nodi fittizi a destra, coincidenti con l'estremo b





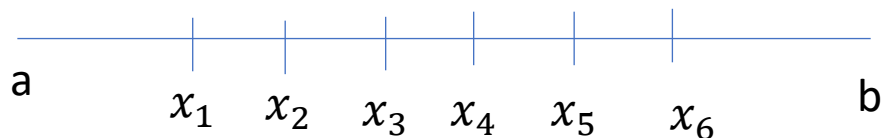
$m=4, \quad k=6$

$$\Delta = \{a=x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 < x_6 < x_7=b\}$$

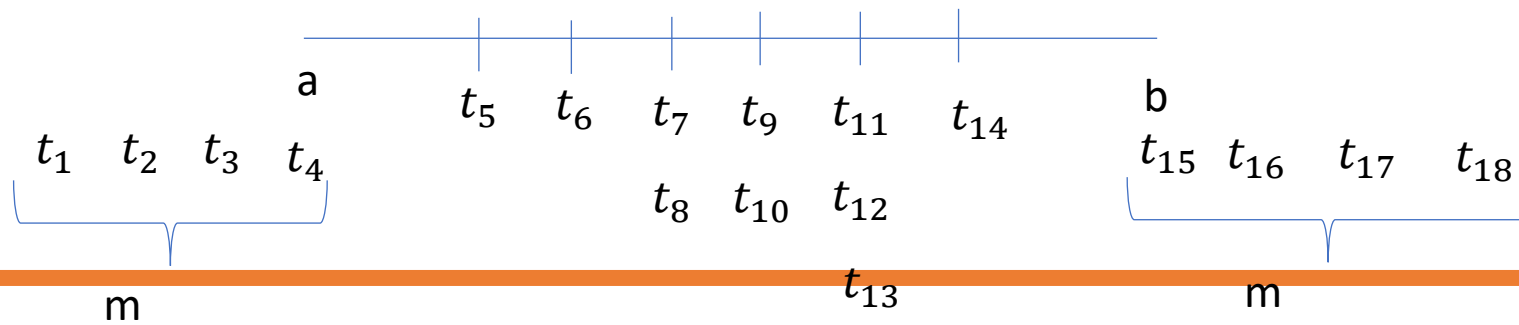
$$M = (m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6), \quad M = (1, 1, 2, 2, 3, 1) \quad \text{con } K = \sum_{i=1}^k m_i = 10$$

La dimensione della base è $m+K$, in questo caso è costituita da 14 funzioni base

Costruiamo la partizione nodale estesa a partire da :



E' costituita da $2m+K$ nodi t_i , nel nostro esempio 18,





Una volta costruita la partizione nodale estesa, l'insieme delle B-spline normalizzate viene definito mediante la seguente formula ricorrente:

per $h=2, \dots, m$

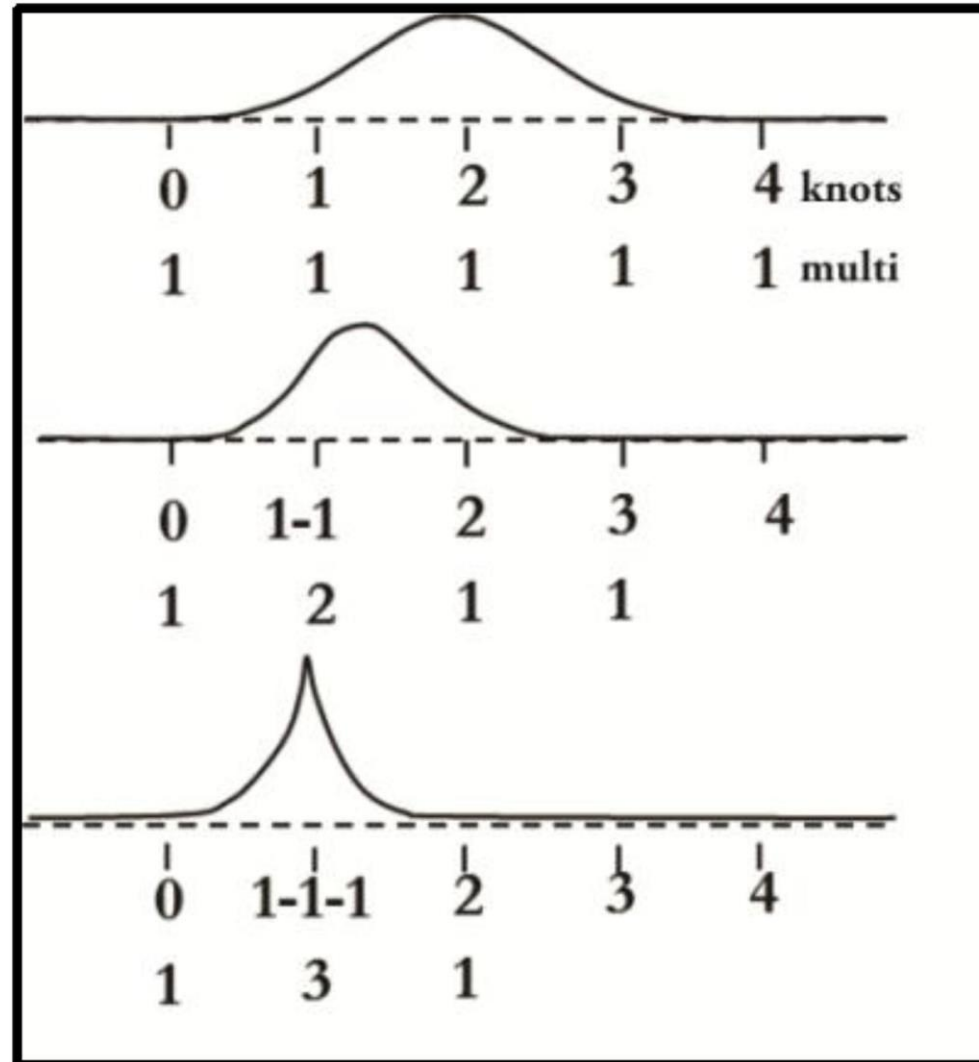
$$N_{i,h}(x) = \begin{cases} \frac{x - t_i}{t_{i+h-1} - t_i} N_{i,h-1}(x) + \frac{t_{i+h} - x}{t_{i+h} - t_{i+1}} N_{i+1,h-1}(x) & t_i \neq t_{i+h} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

con condizione iniziale

$$N_{i,1}(x) = \begin{cases} 1 & t_i \leq x < t_{i+1} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



Effetto dei nodi multipli sulle funzioni B-Spline





$M=(1,1,1,1,1)$



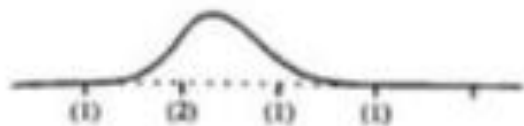
$M=(1,1,1,2)$



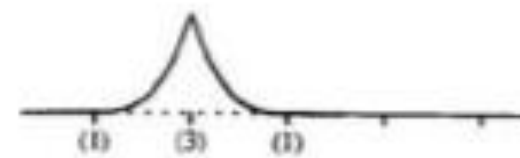
$M=(2,1,1,1)$



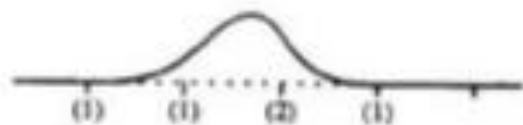
$M=(3,1,1)$



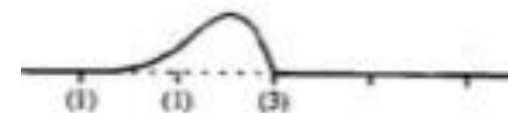
$M=(1,2,1,1)$



$M=(1,3,1)$



$M=(1,1,2,1)$



$M=(1,1,3)$



$M=(4,1)$



$M=(1,4)$

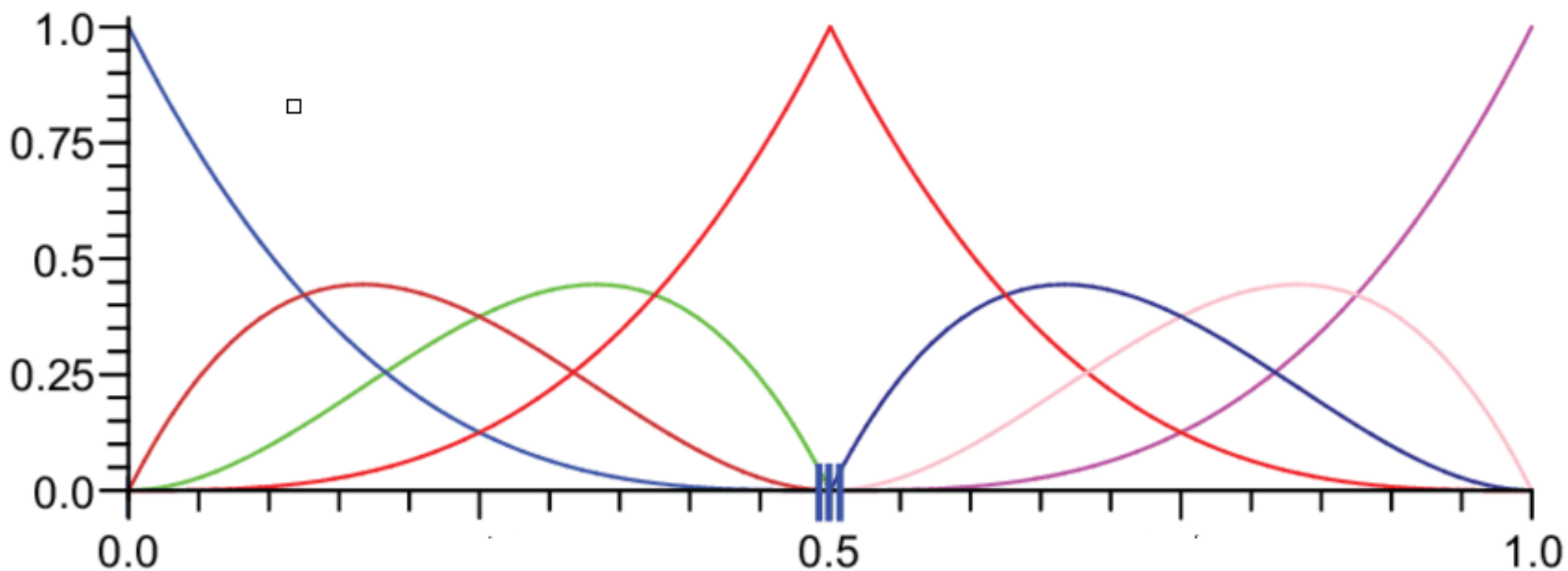


$m=4, k=1$

$$\Delta = \{a=x_0 < x_1 < x_2=b\}$$

$$M = (m_i) \quad M = (3) \quad \text{con } K = \sum_{i=1}^k m_i = 3$$

$m=4$ nodi fittizi a sinistra coincidenti con $a=0$ e $m=4$ nodi fittizi a destra coincidenti con $b=1$. Il numero di funzioni base è $m+K=7$





Proprietà delle funzioni B-spline con nodi multipli normalizzate:

- 1) Formano una base per lo spazio $S_m(\Delta, M)$.

Ciascuna $s(x) \in S_m(\Delta, M)$ può essere espressa come

$$s(x) = \sum_{i=1}^{m+K} c_i N_{i,m}(x) \quad x \in [a, b]$$

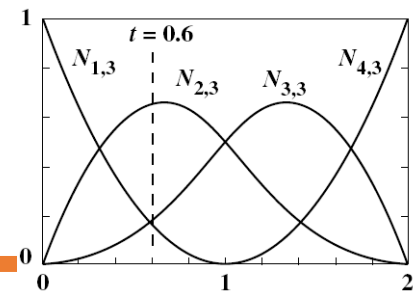
- 2) Hanno supporto compatto;

$$N_{i,m}(x) = 0 \text{ per } x < x_i \text{ } x > x_{i+m}.$$

- 3) Sono non negative sul loro supporto, $N_{i,m}(x) \geq 0 \text{ } x \in [t_i, t_{i+m}]$

- 4) Costituiscono una partizione dell'unità, cioè

$$\sum_{i=1}^{m+K} N_{i,m}(x) = 1$$





Per le proprietà 3) e 4), la spline $s(x) = \sum_{i=1}^{m+K} c_i N_{i,m}(x)$ è una combinazione lineare convessa dei coefficienti c_i e quindi

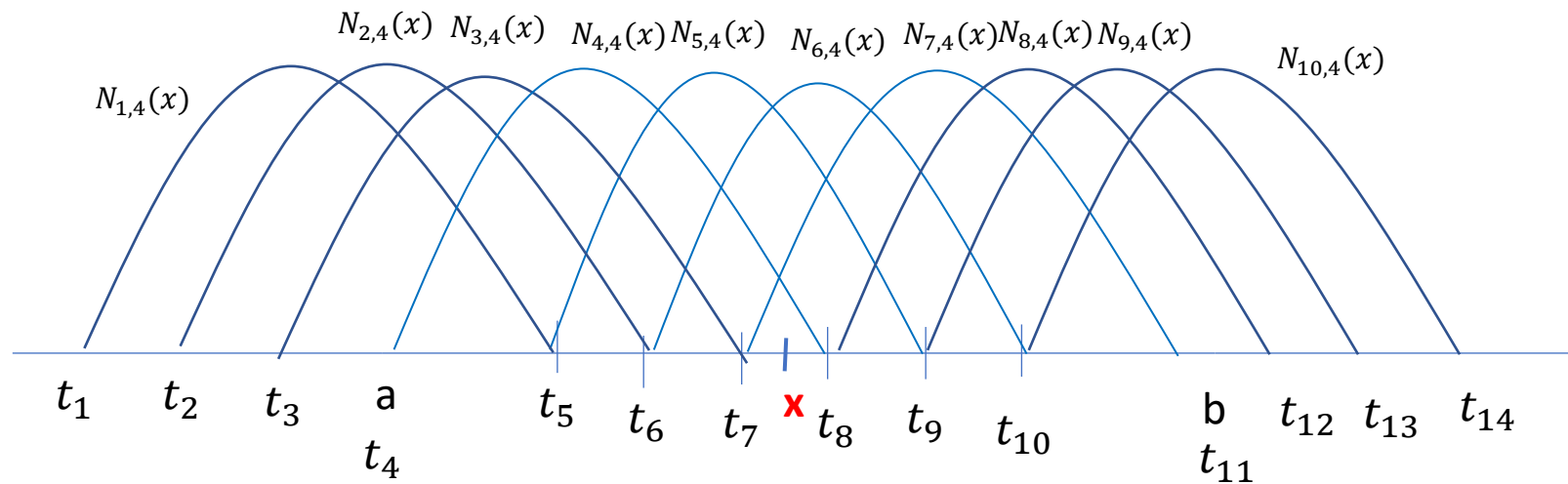
$$\min_{i=1,\dots,m+K} \{c_i\} \leq s(x) \leq \max_{i=1,\dots,m+K} \{c_i\}$$

In più c'è il controllo locale. Per la proprietà di supporto compatto delle b-spline, la valutazione del polinomio in un punto $x \in [t_l, t_{l+1})$ si riduce a

$$s(x) = \sum_{i=l-m+1}^l c_i N_{i,m}(x)$$

in quanto le uniche B-spline diverse da 0 su punto $x \in [t_l, t_{l+1})$ sono

$$N_{l-m+1,m}(x), \dots, N_{l,m}(x),$$

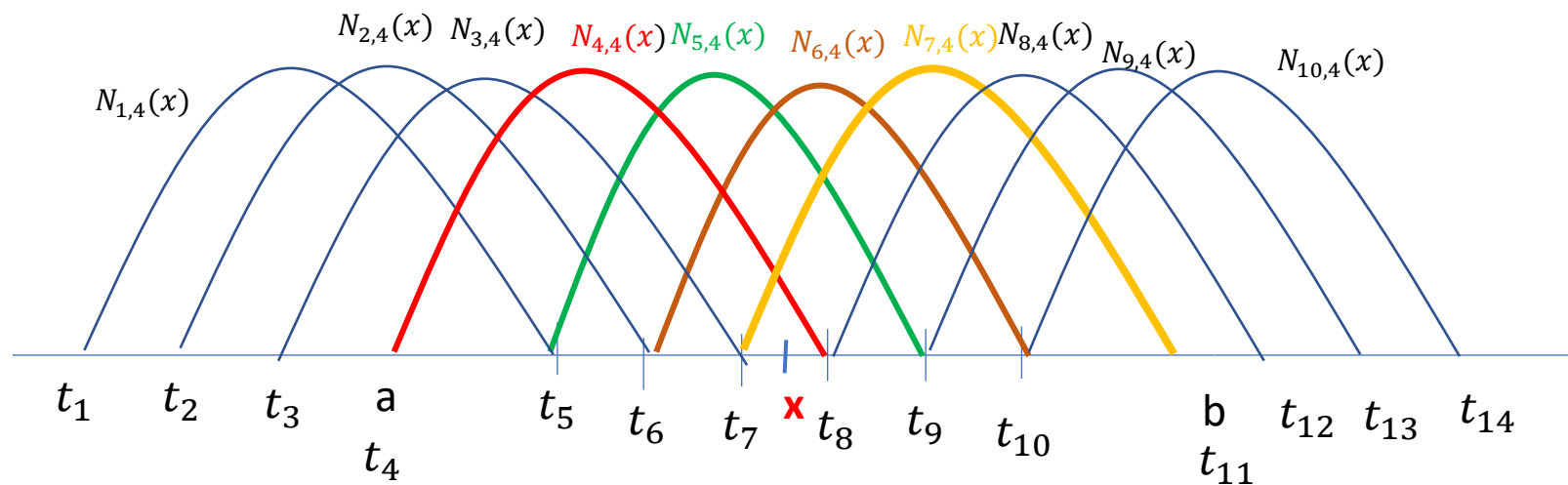


Caso $m=4$, $x \in [t_7, t_8)$, quindi $l=7$, le funzioni base diverse da zero su x sono

$$N_{l-m+1,m}(x), \dots, N_{l,m}(x),$$

e quindi

$$N_{4,4}(x), N_{5,4}(x), N_{6,4}(x), N_{7,4}(x)$$



Caso $m=4$, $x \in [t_7, t_8)$, quindi $l=7$, le funzioni base diverse da zero su x sono

$$N_{l-m+1,m}(x), \dots, N_{l,m}(x),$$

e quindi

$$N_{4,4}(x), N_{5,4}(x), N_{6,4}(x), N_{7,4}(x)$$



Proprietà di variation diminishing.

Sia $s(x) \in S_m(\Delta^*, M)$ e sia rappresentata nella base delle B-spline normalizzate, cioè:

$$s(x) = \sum_{i=1}^{m+K} c_i N_{i,m}(x) \quad x \in [a, b]$$

Allora vale che il numero di variazioni di segno della funzione spline è minore o uguale al numero di variazioni di segno dei coefficienti.



Valutazione di una funzione spline

Abbiamo visto che assegnata la partizione nodale estesa Δ^* , una $s(x) \in S_m(\Delta^*, M)$ può esprimersi come

$$s(x) = \sum_{i=1}^{m+K} c_i N_{i,m}(x)$$

Se $x \in [t_l, t_{l+1})$, si ha

$$s(x) = \sum_{i=l-m+1}^l c_i N_{i,m}(x)$$

Esistono due possibili algoritmi per valutare $s(x)$ in un punto.

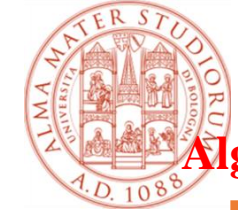


Per calcolare le m funzioni base di ordine m, diverse da zero sul punto x, $N_{l-m+1,m}(x), N_{l-m+2,m} \dots N_{l-1,m}, N_{l,m}$, utilizza le formule di Cox

per $h=2, \dots, m$ si ha

$$N_{i,h}(x) = \left(\frac{x - t_i}{t_{i+h-1} - t_i} N_{i,h-1}(x) + \frac{t_{i+h} - x}{t_{i+h} - t_{i+1}} N_{i+1,h-1}(x) \right)$$

$$\begin{array}{ccccccc}
& & & & & & N_{l,1} \\
& & & & & & \\
& & & & & N_{l-1,2} & N_{l,2} \\
& & & & N_{l-2,3} & N_{l-1,3} & N_{l,3} \\
& & & & & & \\
& & & & & & \\
N_{l-m+1,m} & N_{l-m+2,m} & & & & N_{l-1,m} & N_{l,m}
\end{array}$$



Algoritmo di De Boor per la valutazione di una spline

$$N_{i,h}(x) = \left(\frac{x - t_i}{t_{i+h-1} - t_i} N_{i,h-1}(x) + \frac{t_{i+h} - x}{t_{i+h} - t_{i+1}} N_{i+1,h-1}(x) \right)$$

Il secondo algoritmo, proposto da De-Boor, è l'analogo per le funzioni B-spline, dell'algoritmo di De Casteljau per i polinomi in forma di Bernstein. Si ottiene sostituendo di volta in volta alle B-spline di ordine m la combinazione di due B-spline di ordine inferiore, come stabilito dalle formule ricorrenti.

Più precisamente, data

$$s(x) = \sum_{i=l-m+1}^l c_i N_{i,m}(x)$$

per $x \in [t_l, t_{l+1})$ e sostituendo alla $N_{i,m}(x)$ la sua definizione ricorrente in termini di funzione base di ordine inferiore si ottiene:

$$s(x) = \sum_{i=l-m+1}^l c_i \left(\frac{x-t_i}{t_{i+m-1}-t_i} N_{i,m-1}(x) + \frac{t_{i+m}-x}{t_{i+m}-t_{i+1}} N_{i+1,m-1}(x) \right) =$$

$$= \sum_{i=l-m+1}^l c_i \left(\frac{x-t_i}{t_{i+m-1}-t_i} N_{i,m-1}(x) \right) + \sum_{i=l-m+1}^l c_i \left(\frac{t_{i+m}-x}{t_{i+m}-t_{i+1}} N_{i+1,m-1}(x) \right) =$$



$$= \sum_{i=l-m+1}^l c_i \left(\frac{x-t_i}{t_{i+m-1}-t_i} N_{i,m-1}(x) \right) + \sum_{i=l-m+1}^l c_i \left(\frac{t_{i+m}-x}{t_{i+m}-t_{i+1}} N_{i+1,m-1}(x) \right) =$$

Osserviamo la prima sommatoria, per $i=l-m+1$, in particolare $N_{l-m+1,m-1}(x)$

Se $x \in [t_l, t_{l+1})$, le funzioni base di ordine $m-1$ diverse da 0 su di esso sono quelle che hanno indice che va da $l-m+2$ fino ad l .

Allora la prima sommatoria la possiamo estendere a partire da $i=l-m+2$ fino ad l .

Inoltre, estendiamo anche la seconda sommatoria da $i=l-m+2$ fino ad $l+1$, sostituendo $i-1$ alle occorrenze di i

$$= \sum_{i=l-m+2}^l c_i \left(\frac{x-t_i}{t_{i+m-1}-t_i} N_{i,m-1}(x) \right) + \sum_{i=l-m+2}^{l+1} c_{i-1} \left(\frac{t_{i+m-1}-x}{t_{i+m-1}-t_i} N_{i,m-1}(x) \right) =.$$

e tenendo conto che per $i = l+1$ la funzioni base, $N_{l+1,m-1}(x)$ è nulla su $x \in [t_l, t_{l+1})$.

$$= \sum_{i=l-m+2}^l c_i \left(\frac{x-t_i}{t_{i+m-1}-t_i} N_{i,m-1}(x) \right) + \sum_{i=l-m+2}^l c_{i-1} \left(\frac{t_{i+m-1}-x}{t_{i+m-1}-t_i} N_{i,m-1}(x) \right) =.$$



Raccogliendo:

$$= \sum_{i=l-m+2}^l \left(\frac{c_i(x-t_i) + c_{i-1}(t_{i-1+m}-x)}{t_{i-1+m}-t_i} \right) N_{i,m-1}(x) =$$

Poniamo $c_i^{[1]} = \left(\frac{c_i^{[0]}(x-t_i) + c_{i-1}^{[0]}(t_{i+m-1}-x)}{t_{i+m-1}-t_i} \right).$

$$= \sum_{i=l-m+2}^l c_i^{[1]} N_{i,m-1}(x).$$

La spline ottenuta è di ordine $m-1$

Continuiamo ad iterare il procedimento, al j -esimo passo avremo

$$s(x) = \sum_{i=l-m+j+1}^l c_i^{[j]} N_{i,m-j}(x). \quad \text{dove} \quad c_i^{[j]} = \left(\frac{c_i^{[j-1]}(x-t_i) + c_{i-1}^{[j-1]}(t_{i+m-j}-x)}{t_{i+m-j}-t_i} \right).$$

La spline ottenuta è di ordine $m-1$.



Al passo $j=m-1$

$$s(x) = \sum_{i=l-m+m-1+1}^l c_i^{[m-1]} N_{i,m-(m-1)}(x).$$

$$s(x) = \sum_{i=l}^l c_i^{[m-1]} N_{i,1}(x).$$

Essendo $N_{l,1}(x) = 1$, $s(x) = c_l^{[m-1]}$.

Si è ottenuto che il valore della spline calcolato in x è quello di una spline di ordine uno per un opportuno coefficiente. Lo schema che si ottiene è il seguente:



$$c_{l-m+1}^{[0]} c_{l-m+2}^{[0]} \cdots c_l^{[0]}$$

$$c_{l-m+2}^{[1]} \cdots c_l^{[1]}$$

... ..

$$c_l^{[m-1]}$$

La complessità computazionale è di $3m(m-1)$ moltiplicazioni e divisioni e di $2m(m-1)$ addizioni e sottrazioni.

Posto $c_i^{[0]} = c_i$, $i = l - m + 1, \dots, l$

Come nell'algoritmo di de Casteljaeu, riusciamo a valutare la curva in un punto mediante combinazione dei coefficienti.

per $j=1, \dots, m-1$

per $i=l-m+j+1, \dots, l$

$$c_i^{[j]} = \frac{(x - t_i) c_i^{[j-1]}(x) + (t_{i+m-j} - x) c_{i-1}^{[j-1]}(x)}{t_{i+m-j} - t_i}$$

end for i

end for j



Diversamente dall'algoritmo per le curve di Bézier, che lavorano su tutti i coefficienti, il corrispettivo nelle spline lavora solo con i coefficienti definiti nel supporto: questo grazie alle proprietà delle funzioni base, che sono a supporto compatto, e permettono così di superare il grande problema delle curve di Bézier, le quali non consentivano modifiche a livello locale.



Curve Spline.

Dati i vertici di controllo P_i , $i=1,\dots,N$, una curva spline si definisce come:

$$C(t) = \sum_{i=1}^N P_i N_{i,m}(t) \quad t[a, b]$$

$$C(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^N x_i N_{i,m}(t) \\ \sum_{i=1}^N y_i N_{i,m}(t) \end{cases} \quad t[a, b]$$

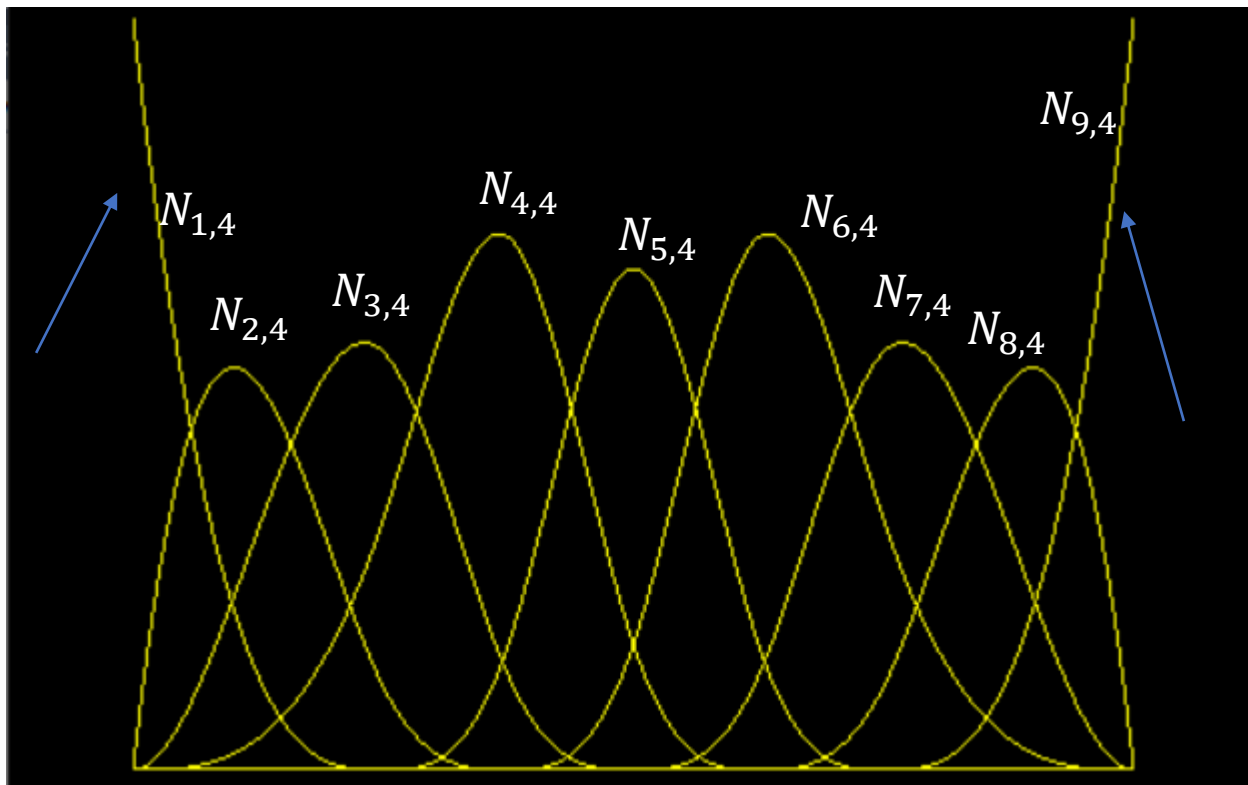
Si deve costruire una partizione nodale estesa in maniera tale che la dimensione dello spazio eguagli il numero dei vertici di controllo

$$N = m + K$$

$$C(t) = \begin{cases} \sum_{i=l-m+1}^l x_i N_{i,m}(t) \\ \sum_{i=l-m+1}^{Nl} y_i N_{i,m}(t) \end{cases} \quad t[a, b]$$



Se i nodi aggiuntivi sono coincidenti con gli estremi dell'intervallo, la curva spline interpola il primo e l'ultimo vertice di controllo.



Il valore della curva nel primo vertice di controllo, equivale al valore della curva per il valore del parametro $t=0$, nell'ultimo equivale al valore della curva per $t=1$.

$$C(0) = \sum_{i=1}^9 P_i N_{i,4}(0) = P_1$$

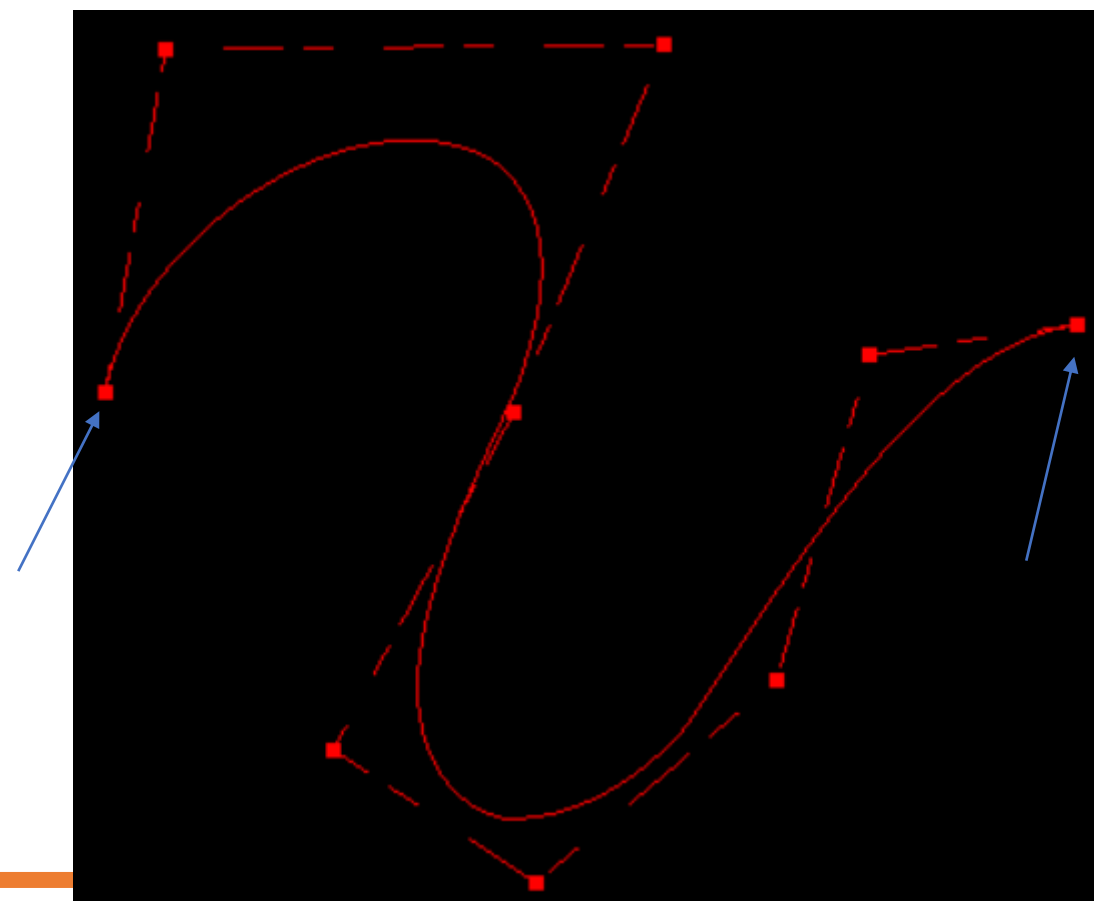
$$C(1) = \sum_{i=1}^9 P_i N_{i,4}(1) = P_9$$

Caso $m=4$,

$N=9$

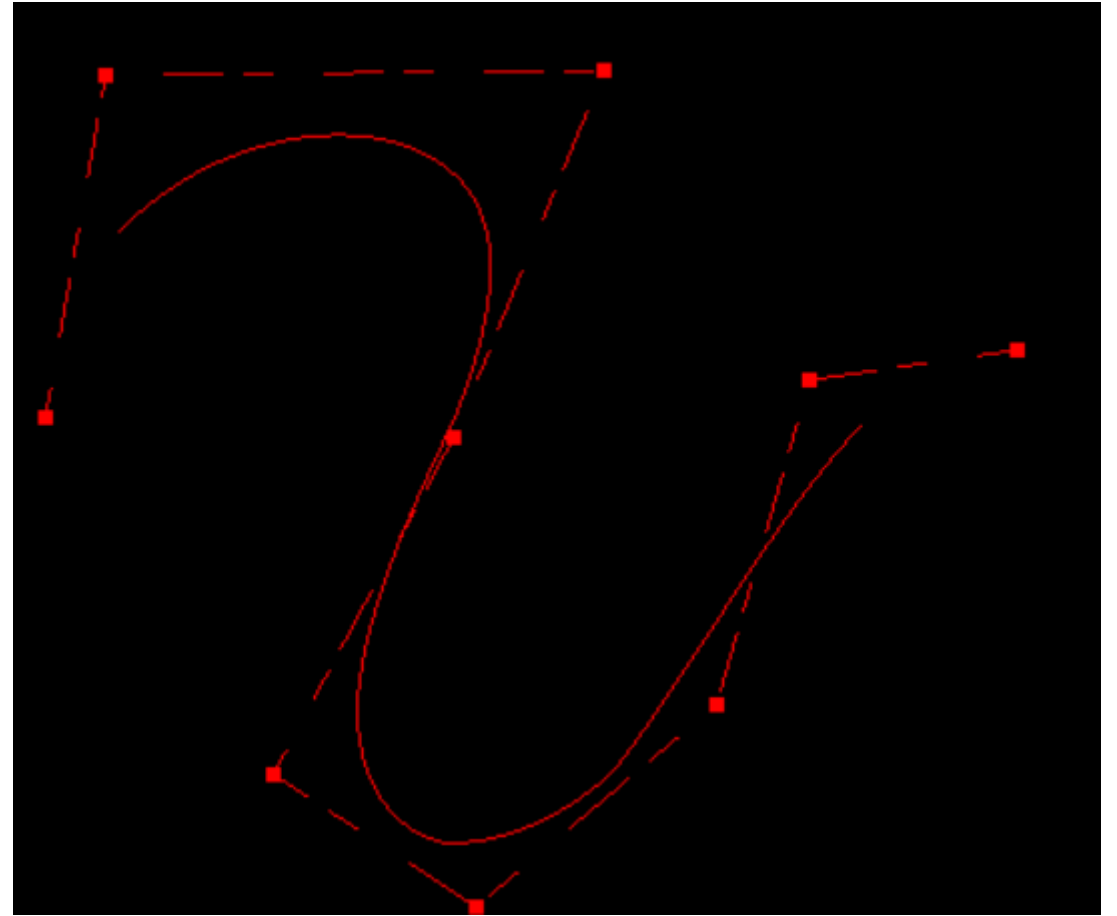
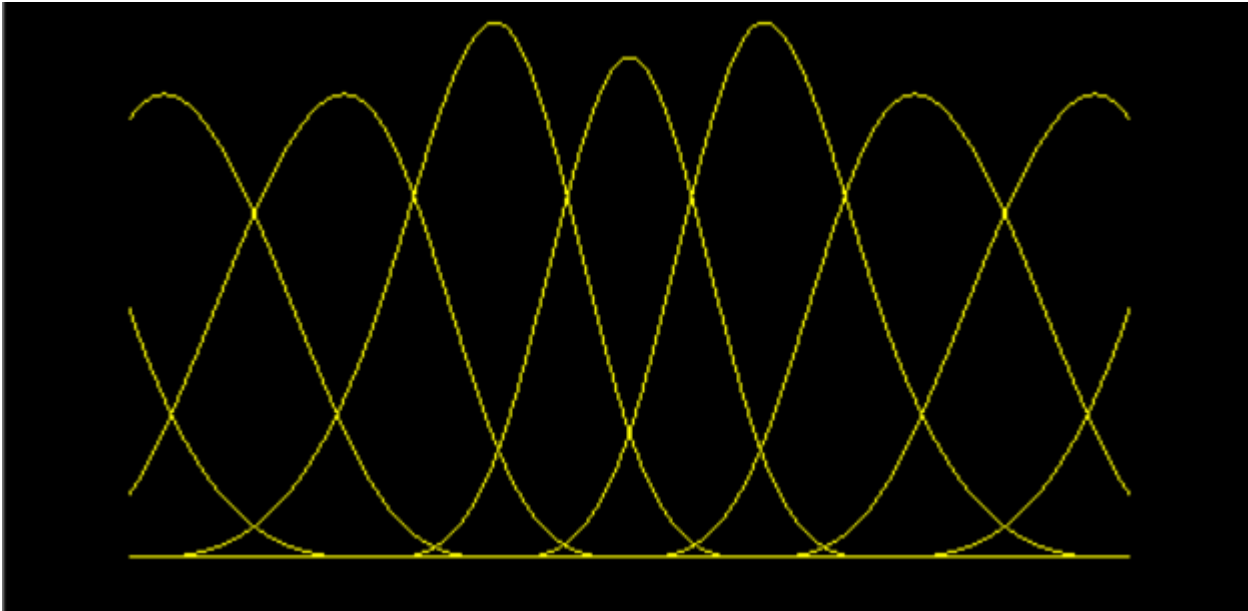
$K=5$ ($k=5$ nodi semplici)

$$C(t) = \sum_{i=1}^9 P_i N_{i,m}(t) \quad t \text{ in } [0,1]$$





i nodi aggiuntivi non sono coincidenti con gli estremi dell'intervallo





Algoritmo inserimento di un nuovo nodo in una partizione nodale già esistente (Knot Insertion- Algoritmo di Boehm) :

Considerate due spline cubiche $s_1(x)$ con 3 nodi semplici e relativa alla partizione nodale estesa

$$\Delta_1^* = \{0,0,0,0, 1/4, 2/4, 3/4, 1,1,1,1\}$$

$$s_1(x) = \sum_{i=1}^7 c_i N_{i,4}(x)$$

e l'altra $s_2(x)$ con 2 nodi semplici e relativa alla partizione nodale estesa

$$\Delta_2^* = \{0,0,0,0, 1/4, 3/4, 1,1,1,1\}$$

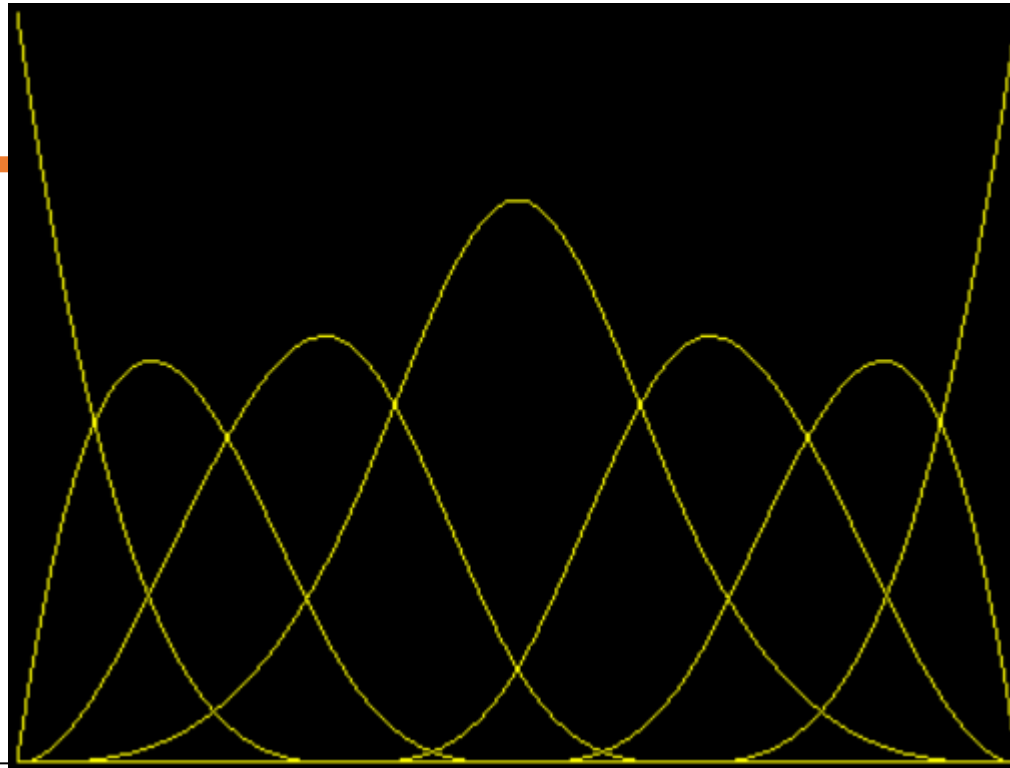
$$s_2(x) = \sum_{i=1}^6 d_i N_{i,4}(x)$$

Non è possibile sommarle direttamente anche se sono entrambe cubiche.



$$\Delta_1^* = \{0,0,0,0, 1/4, 2/4, 3/4, 1,1,1,1\}$$

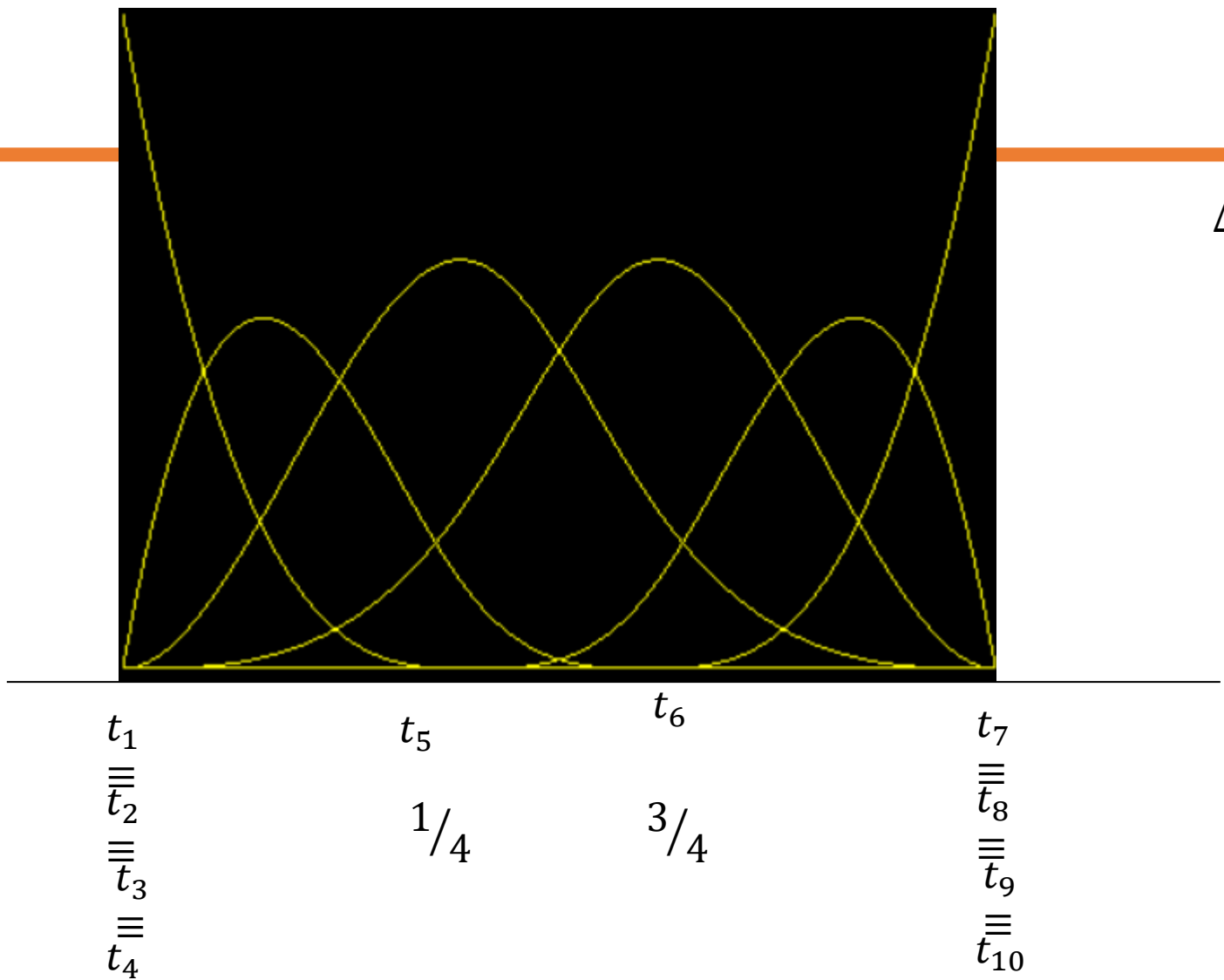
$$s_1(x) = \sum_{i=1}^7 c_i N_{i,4}(x)$$



t_1
 \equiv
 t_2
 \equiv
 t_3
 \equiv
 t_4

t_5 t_6 t_7
 $1/4$ $2/4$ $3/4$

t_8
 \equiv
 t_9
 \equiv
 t_{10}
 \equiv
 t_{11}



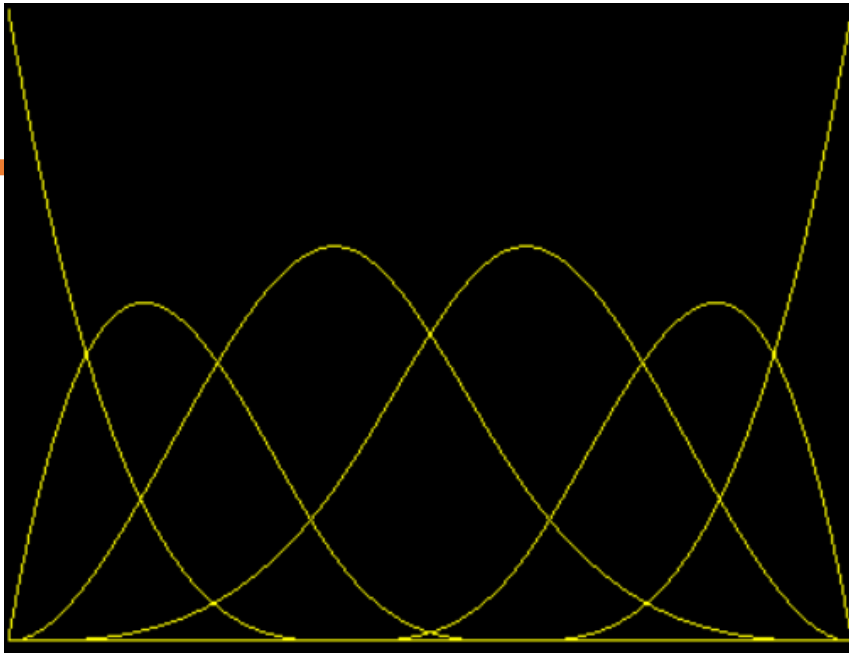
$$\Delta_2^* = \{0,0,0,0, 1/4, 3/4, 1,1,1,1\}$$

$$s_2(x) = \sum_{i=1}^6 d_i N_{i,4}(x)$$



Ricorriamo ad un trucco:

- esprimiamo la $s_2(x)$ come una spline appartenente ad uno spazio che abbia gli stessi nodi dello spazio a cui appartiene $s_1(x)$.
 - Inseriamo un nodo nella rappresentazione di $s_2(x)$ in posizione $\frac{2}{4}$, così i due spazi hanno lo stesso grado di libertà e quindi è possibile sommarle.
 - Una volta inserito il nuovo nodo, $\frac{2}{4}$, cambiano sia le funzioni base di $s_2(x)$ che diventano uguali a quelle di $s_1(x)$, sia i coefficienti.
-



$N_{i,4}, i = 1, \dots, 6$

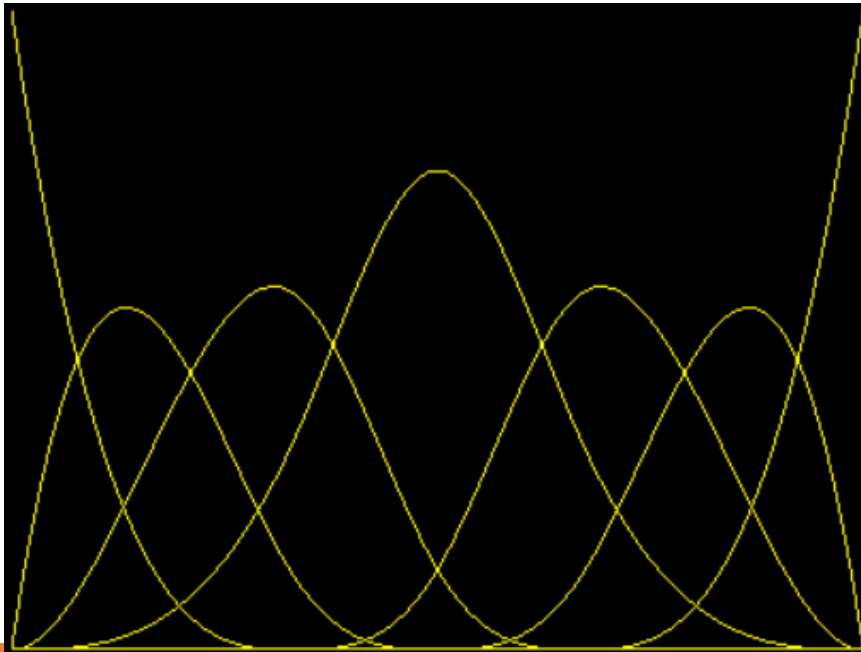
$$\Delta_2^* = \{0, 0, 0, 0, 1/4, 3/4, 1, 1, 1, 1\}$$

$$s_2(x) = \sum_{i=1}^6 d_i N_{i,4}(x)$$

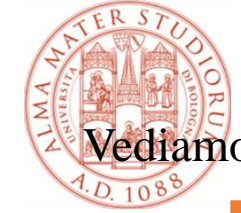
$$\hat{\Delta}_2^* = \{0, 0, 0, 0, 1/4, \frac{2}{4}, 3/4, 1, 1, 1, 1\}$$

$$\hat{s}_2(x) = \sum_{i=1}^7 \hat{d}_i \hat{N}_{i,4}(x)$$

Determino i coefficienti \hat{d}_i , in
maniera tale che $\hat{s}_2(x) = s_2(x)$



$\hat{N}_{i,4}, i = 1, \dots, 7$



Vediamo adesso come possiamo procedere in generale.

Consideriamo una partizione nodale estesa,

$$\Delta^* = \{t_i\}_{i=1}^{2m+K}$$

si vuole conoscere il tipo di relazione che intercorre tra essa e quella che si ottiene aggiungendovi il nodo $\hat{t} \in [t_l, t_{l+1})$.

Partendo dalla partizione nodale $\Delta^* = \{t_i\}_{i=1}^{2m+K}$, si aggiunga il nodo $\hat{t} \in [t_l, t_{l+1})$, si ottiene così la nuova partizione nodale

$$\hat{\Delta}^* = \{t_i\}_{i=1}^{2m+K+1}$$



definita nel seguente modo

$$\hat{t}_i = \begin{cases} t_i & i \leq l \\ \hat{t} & i = l + 1 \\ t_{i-1} & i \geq l + 2 \end{cases}$$



0

$1/4$

$3/4$

1

$$\Delta_2^* = \{0,0,0,0, 1/4, 3/4, 1,1,1,1\}$$

t_5

t_6

t_1

\equiv

t_2

\equiv

t_3

\equiv

t_4

t_7

\equiv

t_8

\equiv

t_9

\equiv

t_{10}

Inseriamo un nodo \hat{t} in $[t_5, t_6)$.

0

$1/4$

$3/4$

1

$$\hat{\Delta}_2^* = \{0,0,0,0, 1/4, \frac{2}{4}, 3/4, 1,1,1,1\}$$

\hat{t}_1

\equiv

\hat{t}_2

\equiv

\hat{t}_3

\equiv

\hat{t}_4

\hat{t}_5

\hat{t}_6

\hat{t}_7

\hat{t}_8

\equiv

\hat{t}_9

\equiv

\hat{t}_{10}

\equiv

\hat{t}_{11}



Il nuovo spazio sarà indicato con $S_m(\hat{\Delta}^*, \hat{M})$

Nessuno vieta di aggiungere un nodo in corrispondenza di un altro nodo già esistente. E' possibile inserire il nodo dove si vuole. Se vogliamo aumentare la molteplicità di un nodo, inseriamo il nodo in corrispondenza di quel nodo.

Si vuole studiare in che relazione stanno le funzioni base $\hat{N}_{i,m}$, $i = 1, \dots, m + K + 1$, del nuovo spazio $S_m(\hat{\Delta}^*, \hat{M})$ con le funzioni base $N_{i,m}$, $i = 1, \dots, m + K$, dello spazio $S_m(\Delta, M)$,

Le funzioni base non cambiano tutte, proprio per la caratteristica di localizzazione delle funzioni base.

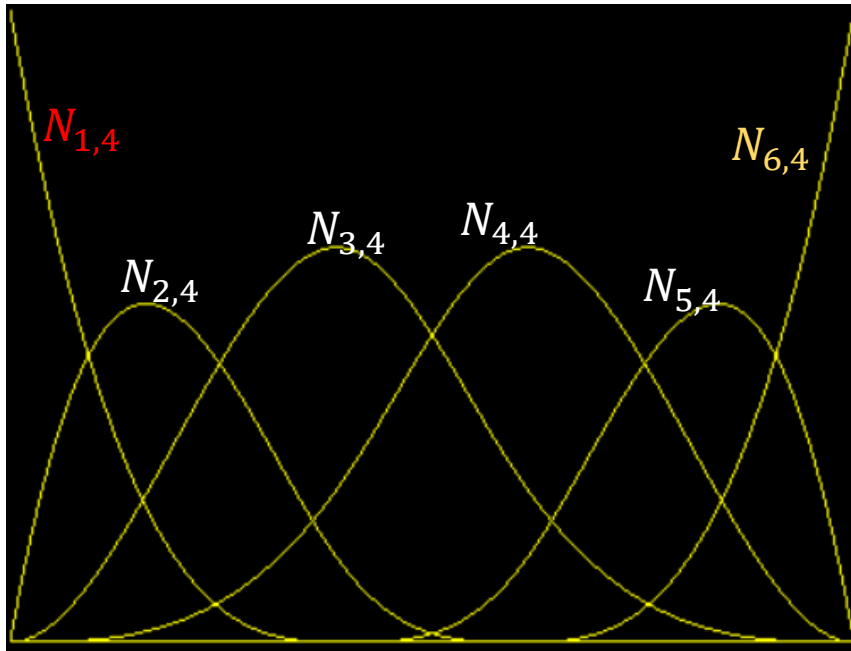


Tra $\hat{N}_{i,m}$ ed $N_{i,m}$ esiste la seguente relazione

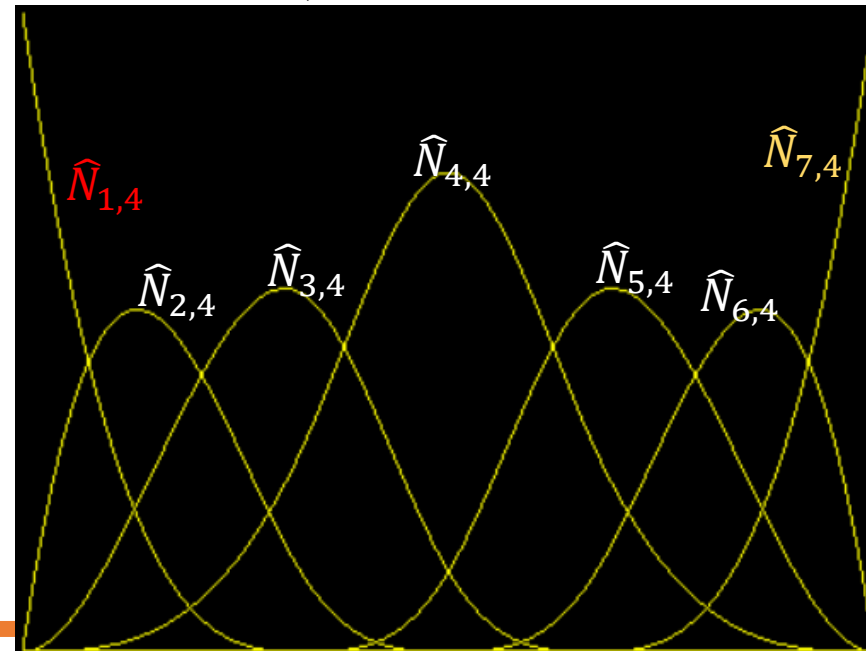
$$N_{i,m}(x) = \begin{cases} \hat{N}_{i,m}(x) & i \leq l - m \\ \frac{\hat{t} - \hat{t}_i}{\hat{t}_{i+m} - \hat{t}_i} \hat{N}_{i,m}(x) + \frac{\hat{t}_{i+m+1} - \hat{t}}{\hat{t}_{i+m+1} - \hat{t}_{i+1}} \hat{N}_{i+1,m}(x) & l - m + 1 \leq i \leq l \\ \hat{N}_{i+1,m}(x) & i \geq l + 1 \end{cases}$$

Nel nostro esempio , $\Delta_2^* = \{0,0,0,0, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 1,1,1,1\}$ abbiamo aggiunto in \hat{t} in $[t_5, t_6)$ **$l = 5$**

$N_{i,4}, i = 1, \dots, 6$



$\hat{N}_{i,4}, i=1, \dots, 7$





Sia

$$s(x) = \sum_{i=1}^{m+K} c_i N_{i,m}(x) \quad (5)$$

si vogliono individuare i coefficienti \hat{c}_i tali che

$$s(x) = \sum_{i=1}^{m+K+1} \hat{c}_i \hat{N}_{i,m}(x)$$

Se $\hat{t} \in [t_l, t_{l+1})$, utilizzando il risultato precedente, avremo

$$\hat{c}_i = \begin{cases} c_i & i \leq l - m + 1 \\ \lambda_i c_i + (1 - \lambda_i) c_{i-1} & l - m + 2 \leq i \leq l \\ c_{i-1} & i \geq l + 1 \end{cases} \quad (6)$$



$$\text{con } \lambda_i = \frac{\hat{t} - \hat{t}_i}{\hat{t}_{i+m} - \hat{t}_i} \quad \text{e} \quad (1 - \lambda_i) = \frac{\hat{t}_{i+m} - \hat{t}}{\hat{t}_{i+m} - \hat{t}_i}$$

I λ_i sono tutti numeri compresi tra 0 ed 1, quindi i \hat{c}_i sono una combinazione convessa dei c_i e il loro calcolo risulta stabile.

L'algoritmo di knot insertion per spline è l'analogo dell'algoritmo di degree elevation per curve di Bezier. La differenza è la localizzazione, in quanto solo i coefficienti da $i=l-m+2$ fino ad l sono modificati per l'inserimento di un nodo nell'intervallo $[t_l, t_{l+1}]$

Questo algoritmo ha molteplici possibilità di utilizzo.



1. Utilizzo dell'algoritmo di Knot-insertion per la valutazione di una spline in un punto.

L'algoritmo di inserimento di un nodo può essere applicato ripetutamente per ottenere la valutazione di una funzione spline in un punto. Infatti se un nodo ha molteplicità $m-1$, solo una funzione base è diversa da zero in quel nodo e vale 1, quindi il coefficiente unico dà anche il valore della spline in quel punto. Si parte inserendo un nodo \hat{t} nel punto \bar{x} dove si vuole valutare la spline ottenendo:

$$s(x) = \sum_{i=1}^{m+K+1} \hat{c}_i \hat{N}_{i,m}(x)$$

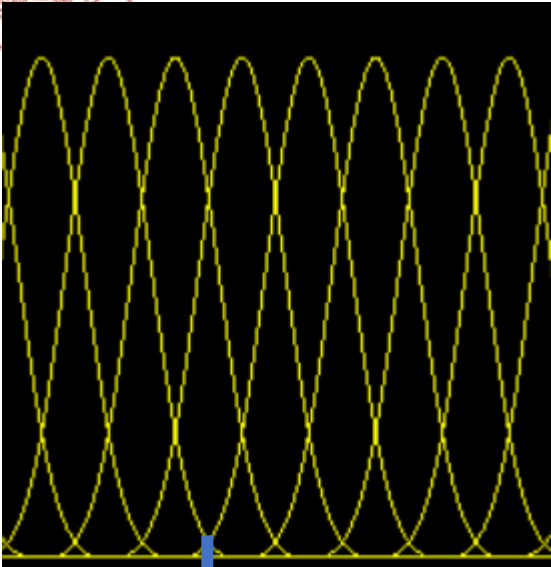
Poi si procede inserendo un secondo nodo in \bar{x} e si ottiene

$$s(x) = \sum_{i=1}^{m+K+2} \hat{c}_i^{[2]} \hat{N}_{i,m}^{[2]}(x)$$

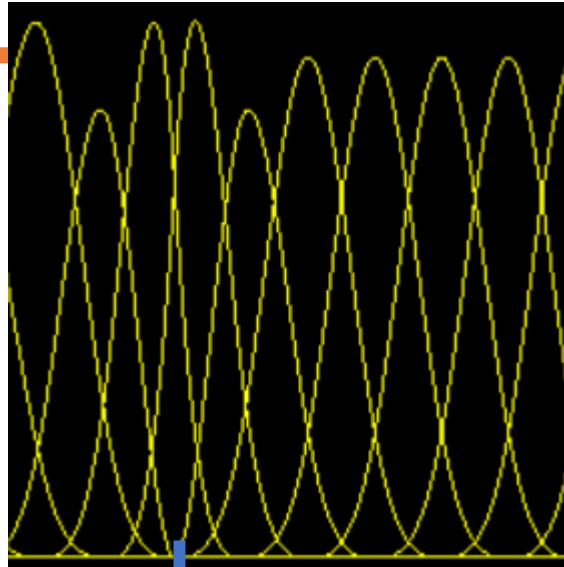


e si va avanti fino ad $m-1$ inserimenti

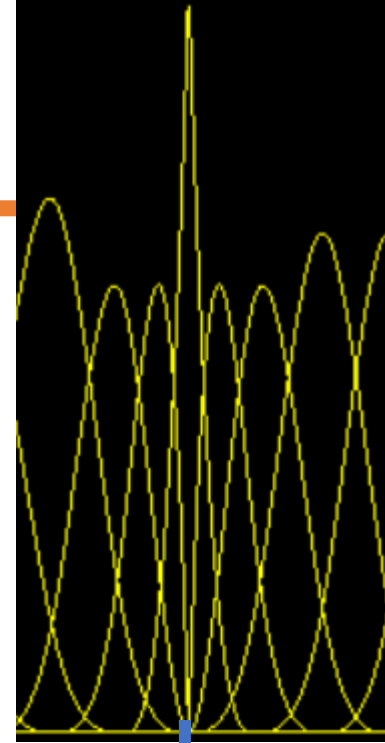
$$s(x) = \sum_{i=1}^{m+K+(m-1)} \hat{c}_i^{[m-1]} \hat{N}_{i,m}^{[m-1]}(x)$$



$$\hat{t} \equiv \bar{x}$$



$$\hat{t} \equiv \hat{t}$$



$$\hat{t} \equiv \hat{t} \equiv \hat{t}$$

Tenendo conto del fatto che man mano che aumenta la molteplicità di un nodo diminuisce il numero di funzioni base diverse da zero in quel punto, l'ultima relazione si riduce a:

$$s(\bar{x}) = \hat{c}_l^{[m-1]} \hat{N}_{l,m}^{[m-1]} = \hat{c}_l^{[m-1]}$$



2. Utilizzo dell'algoritmo di Knot-insertion per la suddivisione di una spline in due funzioni spline.

Questo algoritmo può essere utilizzato anche per spezzare una funzione spline in due funzioni spline, una definita su $[a, \bar{x}]$ l'altra su $[\bar{x}, b]$, cioè:

$$s(x) = \begin{cases} s_1(x) & x \in [a, \bar{x}] \\ s_2(x) & x \in [\bar{x}, b] \end{cases}$$

L'unica differenza è che \bar{x} deve essere un nodo di molteplicità m .

Inserendo un nodo nella partizione nodale, vengono modificate le funzioni base, quindi viene modificata la base dello spazio vettoriale. La curva però non cambia. Modificando la partizione nodale con l'inserimento di fatto la modellazione non cambia.



Algoritmo di Knot-Insertion (caso Curve B-spline)

Sia $C(t) = \sum_{i=1}^N P_i N_{i,m}(t)$, $P_i \equiv \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$, $N=m+K$, la curva spline di ordine m definita sulla partizione nodale estesa $\Delta^* = \{t_i\}_{i=1}^{2m+K}$.

Inseriamo un nodo $\hat{t} \in [t_l, t_{l+1})$, si ottiene una nuova partizione nodale estesa $\hat{\Delta}^* = \{\hat{t}_i\}_{i=1}^{2m+K+1}$. Con questa nuova partizione nodale estesa la curva diventerà:

$$C(t) = \sum_{i=1}^{m+K+1} \hat{P}_i \hat{N}_{i,m}(t)$$

Inserendo un nodo nella partizione nodale estesa, vengono modificate le funzioni base dello spazio vettoriale. La curva non cambia. Modificando la partizione nodale con l'inserimento di fatto non cambia la modellazione, ma cambia il poligono di controllo.



I coefficienti \hat{P}_i rappresentano i vertici del nuovo poligono di controllo. La modifica è solo locale, il poligono cambia solo in parte. Quali sono i punti di controllo che cambiano? Influirà il sottointervallo della partizione nodale in cui viene inserito il nuovo nodo:

$$\hat{P}_i = \begin{cases} P_i & i \leq l - m + 1 \\ \lambda_i P_i + (1 - \lambda_i) P_{i-1} & l - m + 2 \leq i \leq l \\ P_{i-1} & i \geq l + 1 \end{cases} \quad (8)$$

$$\lambda_i = \frac{\hat{t} - \hat{t}_i}{\hat{t}_{i+m} - \hat{t}_i}.$$

I λ_i dipendono dal nodo che vogliamo inserire e dipendono dall'ampiezza della partizione nodale, non dal sotto intervallino $[t_l, t_{l+1})$.

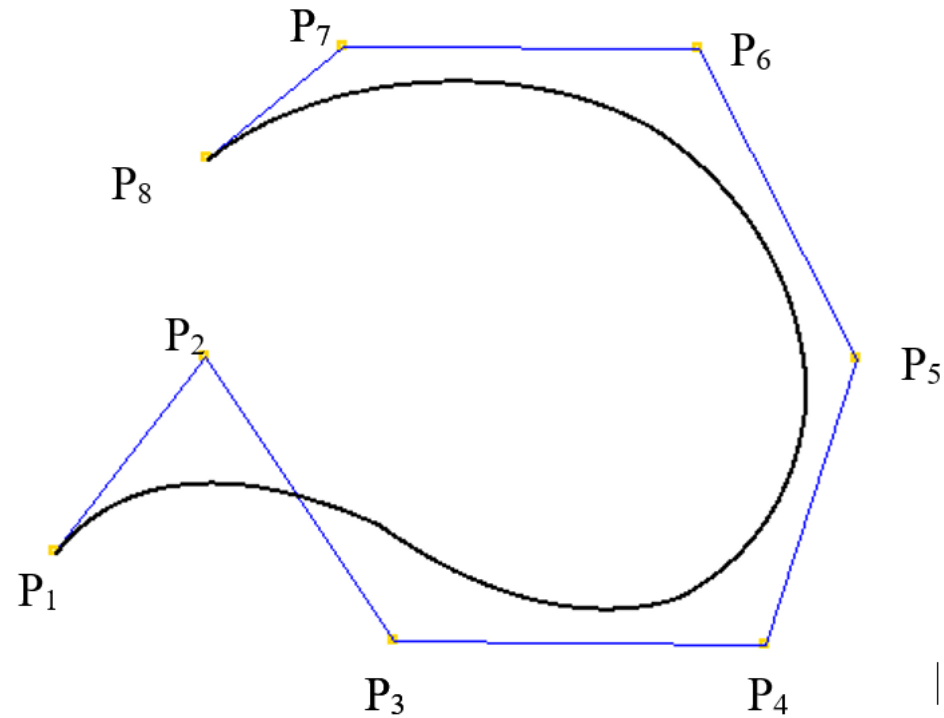


Esempio 1:

Sia $m=4$, $K=4$, $N=8$ e $\hat{t} = \frac{5}{2}$,

$$\Delta^* = \{t_i\}_{i=1}^{2m+K}$$

$$\Delta^* = \{0,0,0,0,1,2,3,4,5,5,5,5\}$$





Inseriamo \hat{t} in $[t_6, t_7)$.

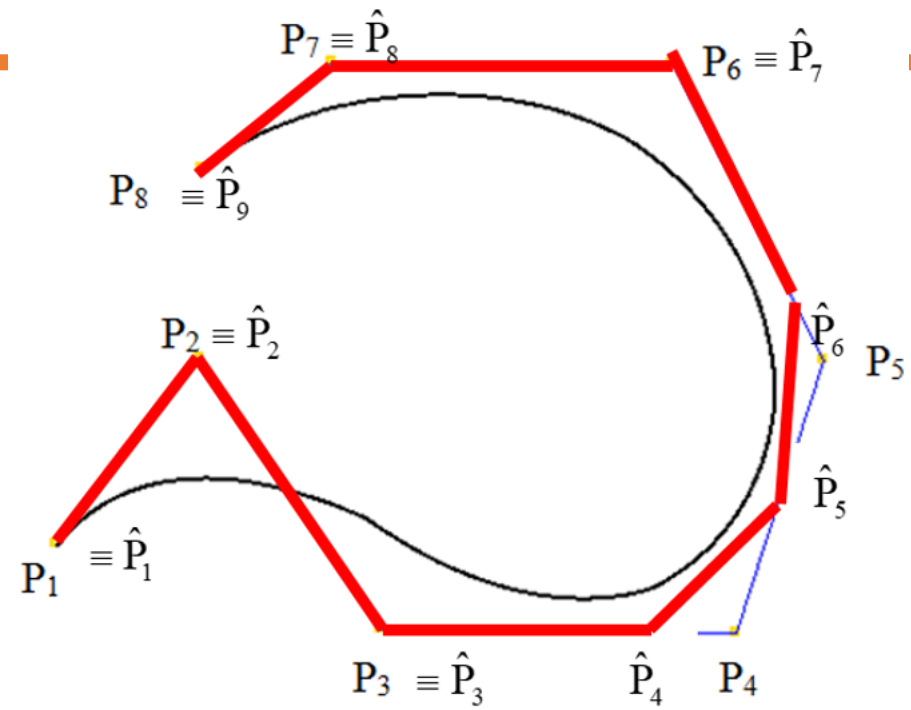
Tenendo conto della (8) si ha che i vertici del poligono di controllo in seguito all'inserimento del nodo \hat{t} in $[t_6, t_7)$ diventano:

$$\hat{P}_1 = P_1, \quad \hat{P}_2 = P_2, \quad \hat{P}_3 = P_3 \qquad \hat{P}_7 = P_6, \quad \hat{P}_8 = P_7, \quad \hat{P}_9 = P_8$$

$$\hat{P}_4 = \lambda_4 \cdot P_4 + (1 - \lambda_4) \cdot P_3 \qquad \lambda_4 = \frac{\hat{t} - \hat{t}_4}{\hat{t}_8 - \hat{t}_4} = \frac{5}{6} \qquad (1 - \lambda_4) = \frac{1}{6}$$

$$\hat{P}_5 = \lambda_5 \cdot P_5 + (1 - \lambda_5) \cdot P_4 \qquad \lambda_5 = \frac{\hat{t} - \hat{t}_4}{\hat{t}_9 - \hat{t}_5} = \frac{1}{2} \qquad (1 - \lambda_5) = \frac{1}{2}$$

$$\hat{P}_6 = \lambda_6 \cdot P_6 + (1 - \lambda_6) \cdot P_5 \qquad \lambda_6 = \frac{\hat{t} - \hat{t}_6}{\hat{t}_{10} - \hat{t}_6} = \frac{1}{6} \qquad (1 - \lambda_6) = \frac{5}{6}$$



La forma della curva rimane inalterata, il poligono di controllo si avvicina di più alla curva localmente.



Esempio 2:

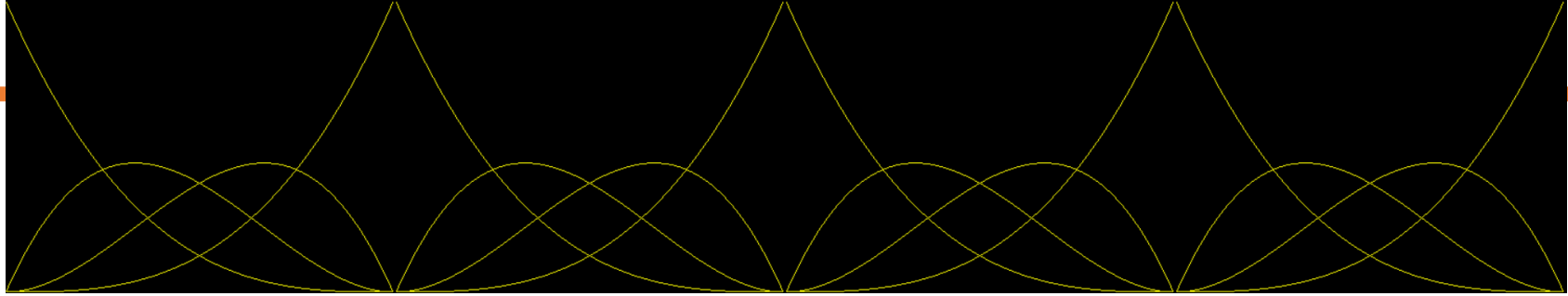
Data una partizione nodale estesa ed un insieme di vertici di controllo

$$\Delta^* = \left\{ 0, 0, 0, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, 1, 1, 1 \right\}$$

diamo molteplicità 4 a ciascuno dei nodi interni

$$\widehat{\Delta}^* = \left\{ 0, 0, 0, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 1, 1, 1, 1 \right\}$$

Si spezza la curva spline in 4 curve di Bezier; la curva non cambia, cambia solo la poligonale.



0

$\frac{1}{4}$

$\frac{1}{3}$

$\frac{2}{3}$

1

$$m_1 = 4$$

$$m_2 = 4$$

$$m_3 = 4$$



L'algoritmo di Knot-Insertion permette di:

- Valutare la curva
- Spezzare la curva; la curva intera viene spezzata in 4 pezzi corrispondenti a 4 curve di Bezier.
- Il poligono di controllo si avvicina di più alla curva.





Derivata prima di una Curva B-spline

Se $t \in [t_l, t_{l+1})$ e $C(t) = \sum_{i=l-m+1}^l P_i N_{i,m}(t)$ allora la derivata prima della curva B-spline si esprime nella seguente forma:

$$C'(t) = \sum_{i=l-m+1}^l P_i N'_{i,m}(t)$$

dove

$$N'_{i,m}(t) = \frac{m-1}{t_{i+m-1}-t_i} N_{i,m-1}(t) - \frac{m-1}{t_{i+m}-t_{i+1}} N_{i+1,m-1}(t)$$

$$C'(t) = \sum_{i=l-m+1}^l P_i N'_{i,m}(t) = (m-1) \sum_{i=l-m+1}^l P_i \left(\frac{N_{i,m-1}}{t_{i+m-1}-t_i} - \frac{N_{i+1,m-1}}{t_{i+m}-t_{i+1}} \right) =$$

$$= (m-1) \sum_{i=l-m+1}^l P_i \frac{N_{i,m-1}}{t_{i+m-1}-t_i} - (m-1) \sum_{i=l-m+1}^l P_i \frac{N_{i+1,m-1}}{t_{i+m}-t_{i+1}} =$$

$$= (m-1) \sum_{i=l-m}^{l-1} P_{i+1} \frac{N_{i+1,m-1}}{t_{i+m}-t_{i+1}} - (m-1) \sum_{i=l-m+1}^l P_i \frac{N_{i+1,m-1}}{t_{i+m}-t_{i+1}} =$$



$$= (m-1) \sum_{i=l-m}^{l-1} P_{i+1} \frac{N_{i+1,m-1}}{t_{i+m} - t_{i+1}} - (m-1) \sum_{i=l-m+1}^l P_i \frac{N_{i+1,m-1}}{t_{i+m} - t_{i+1}} =$$

nella prima sommatoria quando $i=l-m$ $N_{l-m+1,m-1} = 0$ e quando $i=l$ nella seconda sommatoria

$N_{l+1,m-1} = 0$ (in quanto per $t \in [t_l, t_{l+1})$ le uniche B-spline diverse da zero su t sono $N_{l-m+2,m-1}(t), \dots, N_{l,m-1}(t)$,

$$= (m-1) \sum_{i=l-m+1}^{l-1} P_{i+1} \frac{N_{i+1,m-1}}{t_{i+m} - t_{i+1}} - (m-1) \sum_{i=l-m+1}^{l-1} P_i \frac{N_{i+1,m-1}}{t_{i+m} - t_{i+1}} =$$

$$C'(t) = \sum_{i=l-m+1}^{l-1} N_{i+1,m-1}(t) \cdot \frac{(m-1)(P_{i+1} - P_i)}{t_{i+m} - t_{i+1}}$$

La derivata prima di una curva spline non è altro che una curva spline combinazione lineare di funzioni base di ordine $m-1$, i

cui vertici di controllo sono dati dalla combinazione lineare dei vecchi vertici di controllo, $Q_i = (m-1) \cdot \frac{P_{i+1} - P_i}{t_{i+m} - t_{i+1}}$



Proprietà delle curve Spline

Il numero dei punti di controllo N , l'ordine della spline m e la somma delle molteplicità di ogni break-point sono legati dalla relazione

$$N=m+K$$

e ciò permette di poter lavorare con curve di ordine basso, pur potendo lavorare con un numero elevato di punti di controllo.

In una curva spline si possono individuare parti delle parti, dette *spans*, che corrispondono a ciascun intervallo internodale. Infatti, poiché si ha che per $\bar{t} \in [t_l, t_{l+1})$

$$C(t) = \sum_{i=l-m+1}^l P_i N_{i,m}(t)$$

solo i punti di controllo P_i , $i=l-m+1, \dots, l$ influenzano la curva nel valore del parametro \bar{t} .



Esempio: $m=4$ $k=2$, $K=2$

$$C(t) = \sum_{i=1}^6 P_i N_{i,4}(t)$$

S_1

S_2

S_3

$t_1 \equiv t_2 \equiv t_3 \equiv t_4$

t_5

t_6

$t_7 \equiv t_8 \equiv t_9 \equiv t_{10}$

Indichiamo con S_1 la span relativa all'intervallo internodale $[t_4, t_5)$, S_2 la span relativa all'intervallo internodale $[t_5, t_6)$, S_3 la span relativa all'intervallo internodale $[t_6, t_7)$.

$$\text{Se } t \in [t_4, t_5) \quad C(t) = P_1 N_{1,4}(t) + P_2 N_{2,4}(t) + P_3 N_{3,4}(t) + P_4 N_{4,4}(t)$$

$$\text{Se } t \in [t_5, t_6) \quad C(t) = P_2 N_{2,4}(t) + P_3 N_{3,4}(t) + P_4 N_{4,4}(t) + P_5 N_{5,4}(t)$$

$$\text{Se } t \in [t_6, t_7) \quad C(t) = P_3 N_{3,4}(t) + P_4 N_{4,4}(t) + P_5 N_{5,4}(t) + P_6 N_{6,4}(t)$$

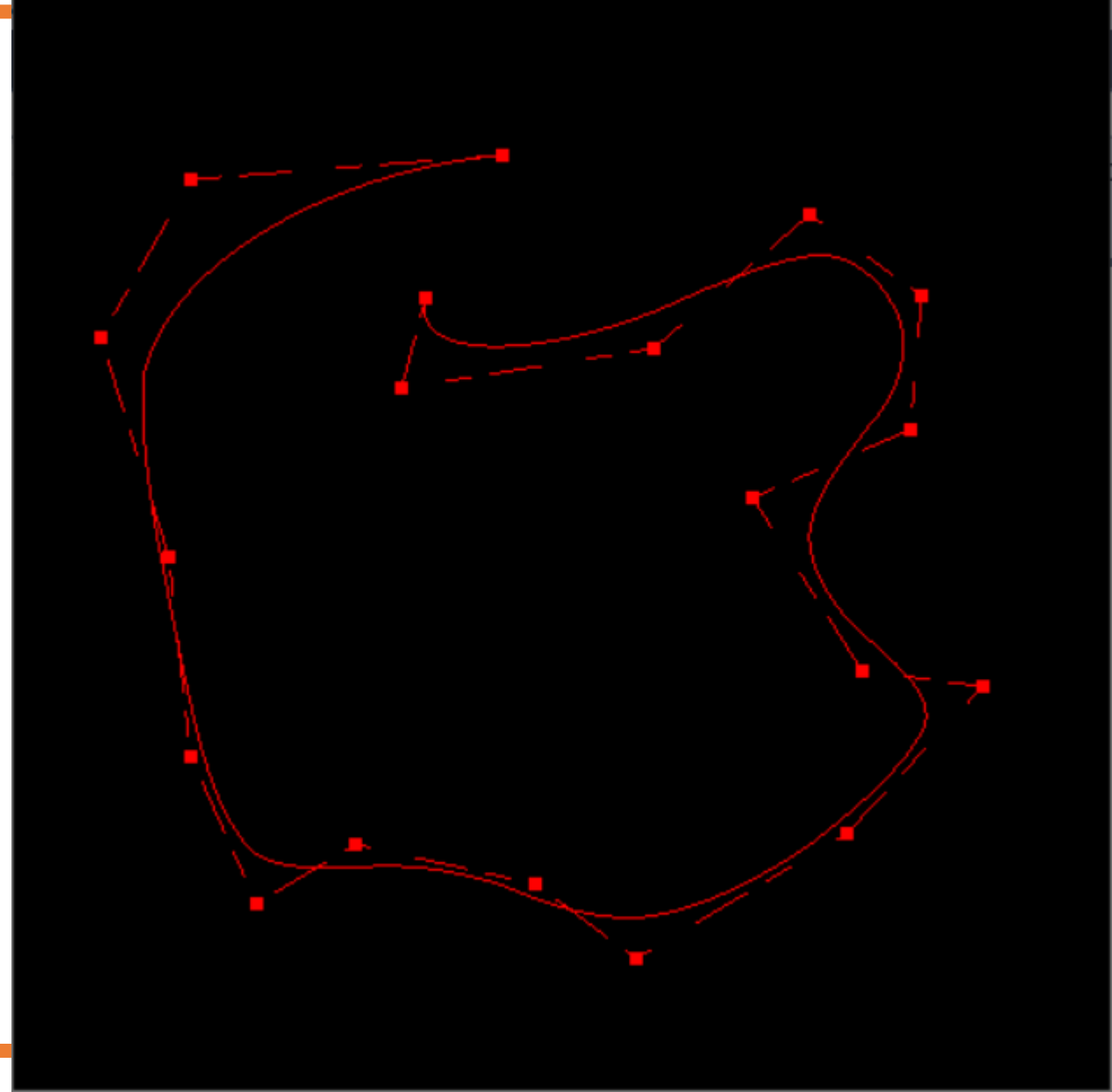


Ciò significa che la span S_1 dipende solo dai punti di controllo P_1, P_2, P_3, P_4 , la span S_2 dipende solo dai punti di controllo P_2, P_3, P_4, P_5 , la span S_3 dipende solo dai punti di controllo P_3, P_4, P_5, P_6 .

Questo è il grosso vantaggio delle curve B-spline, per cui si può parlare di controllo locale. Viceversa se si muove un punto di controllo P_k , la modifica della curva riguarderà solo le spans che corrispondono agli intervalli nodali su cui vive $N_{k,m}$,

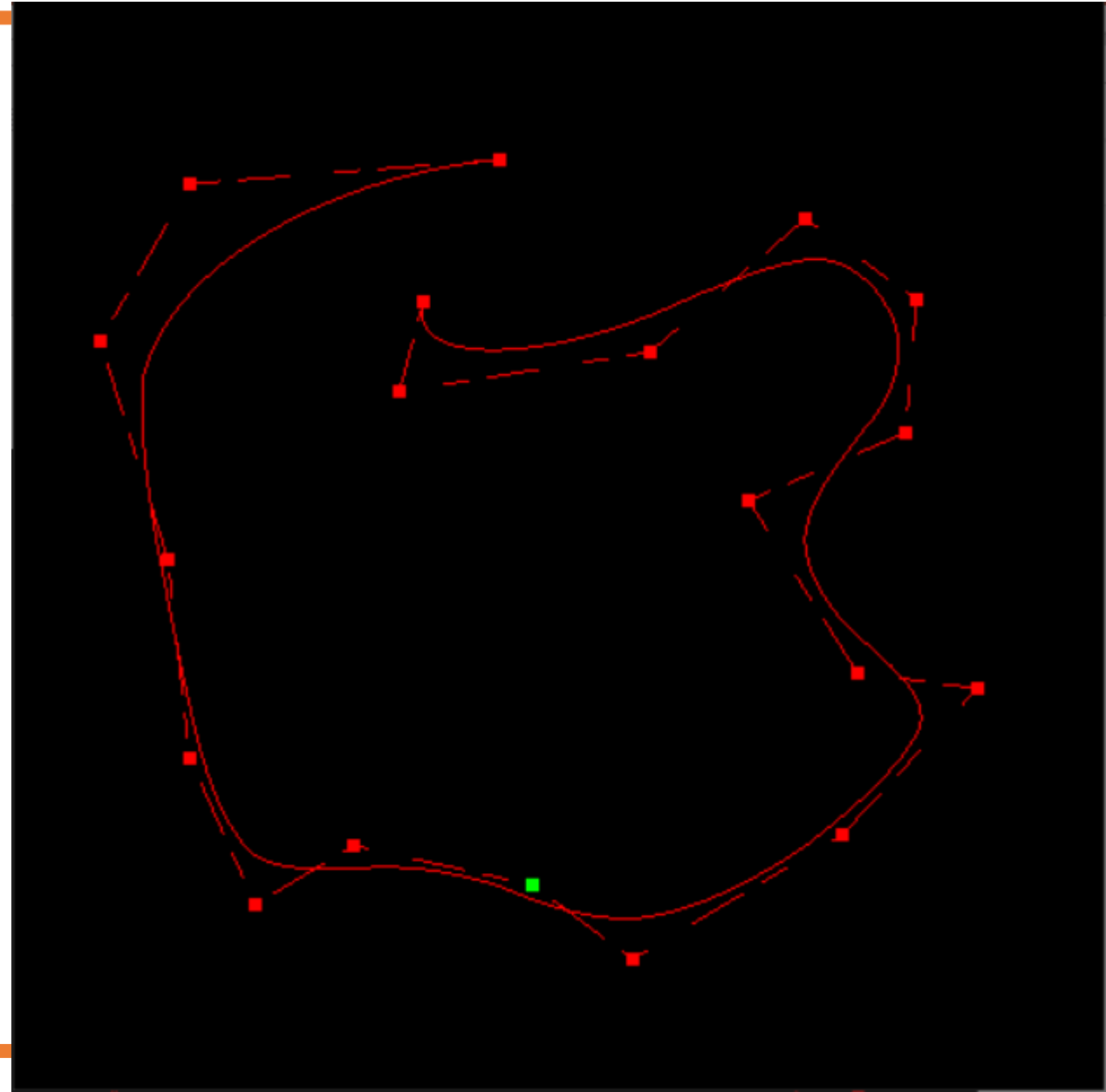


Controllo locale



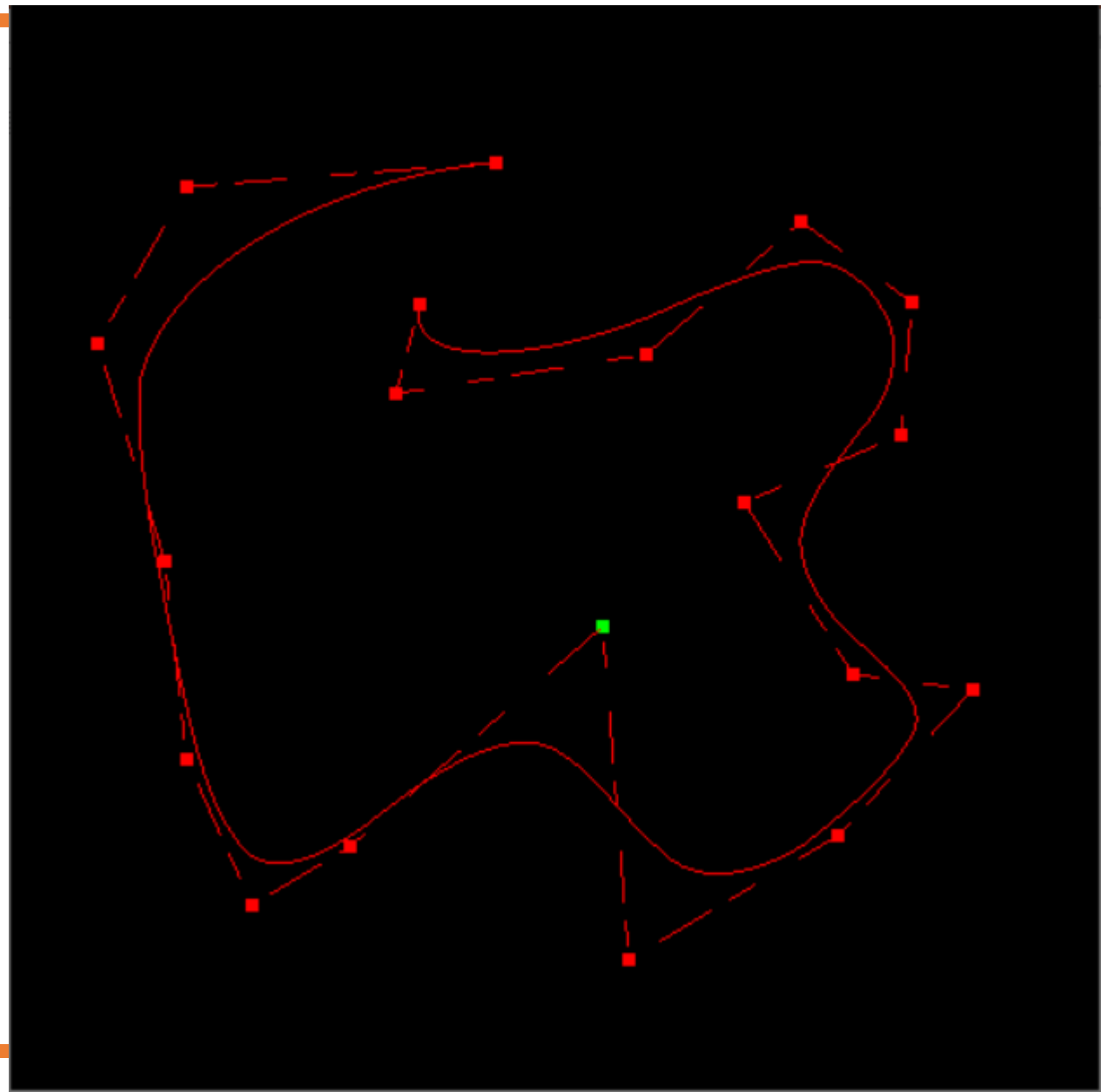


Sposto il vertice selezionato in verde





Muove il punto di controllo P_k , la modifica della curva riguarderà solo le spans che corrispondono agli intervalli nodali su cui vive $N_{k,m}$,





$N=14$ vertici di controllo; $m=4$

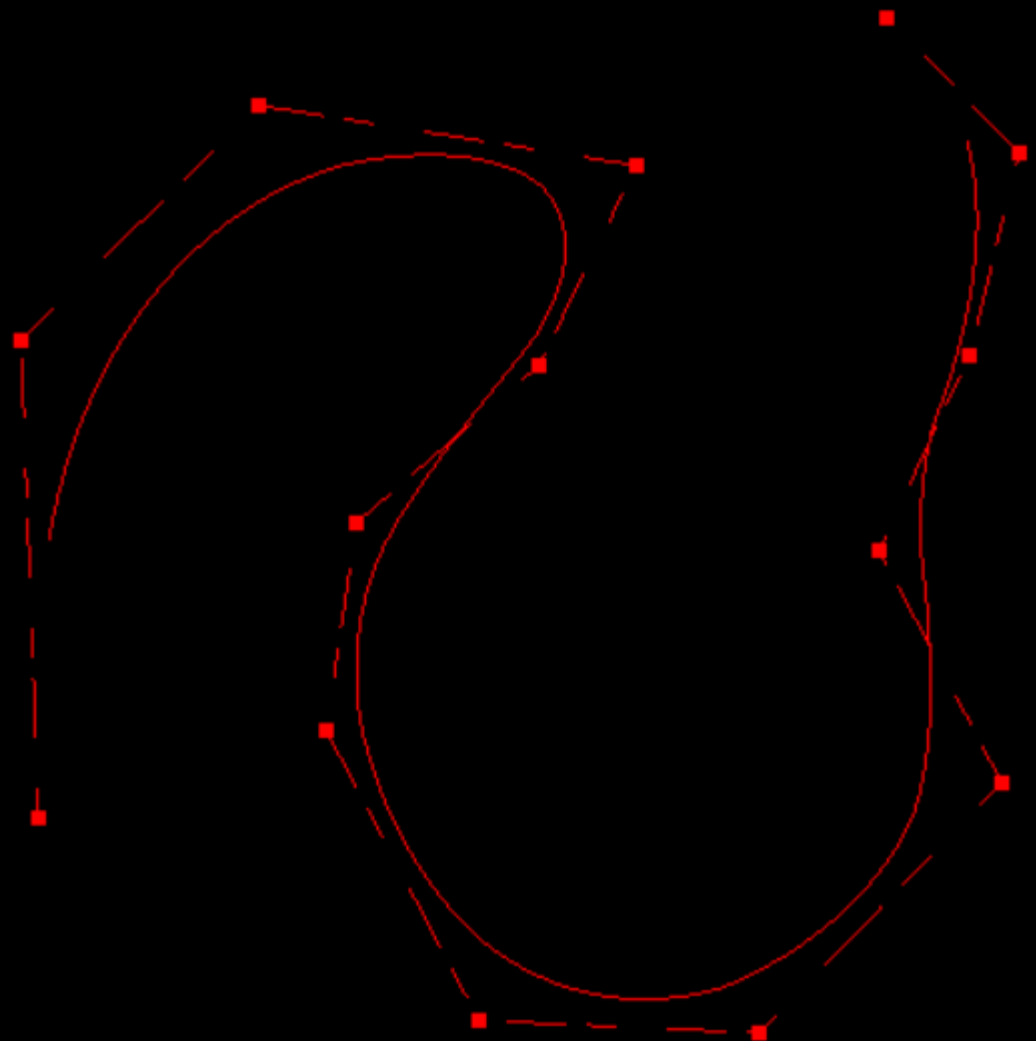
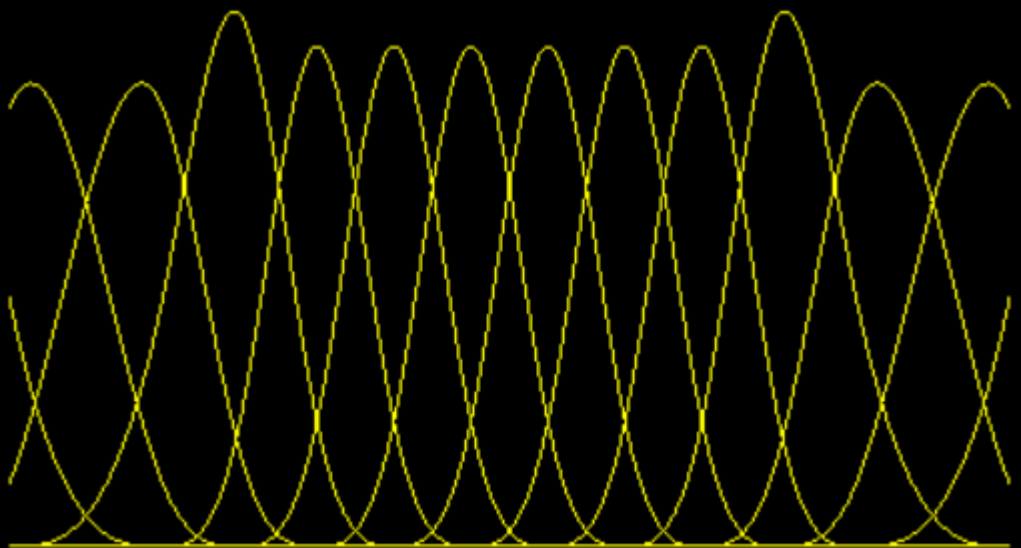
$m+K=14$

Ogni nodo ha molteplicità 1

$k=10$ $m_i=1, i=1,..,k$

I primi 3 nodi fittizi a sinistra non coincidono con l'estremo a

gli ultimi 3 nodi fittizi a destra non coincidono con l'estremo a





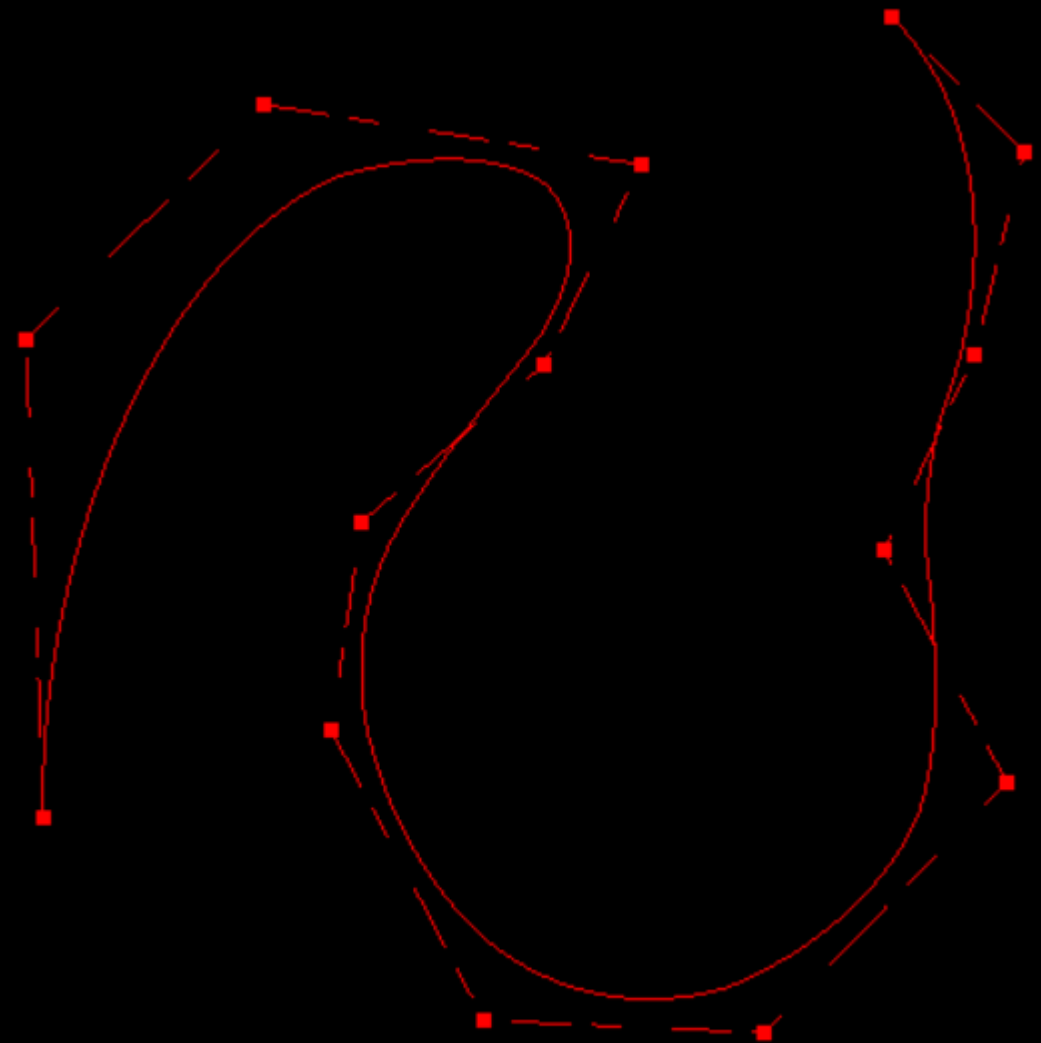
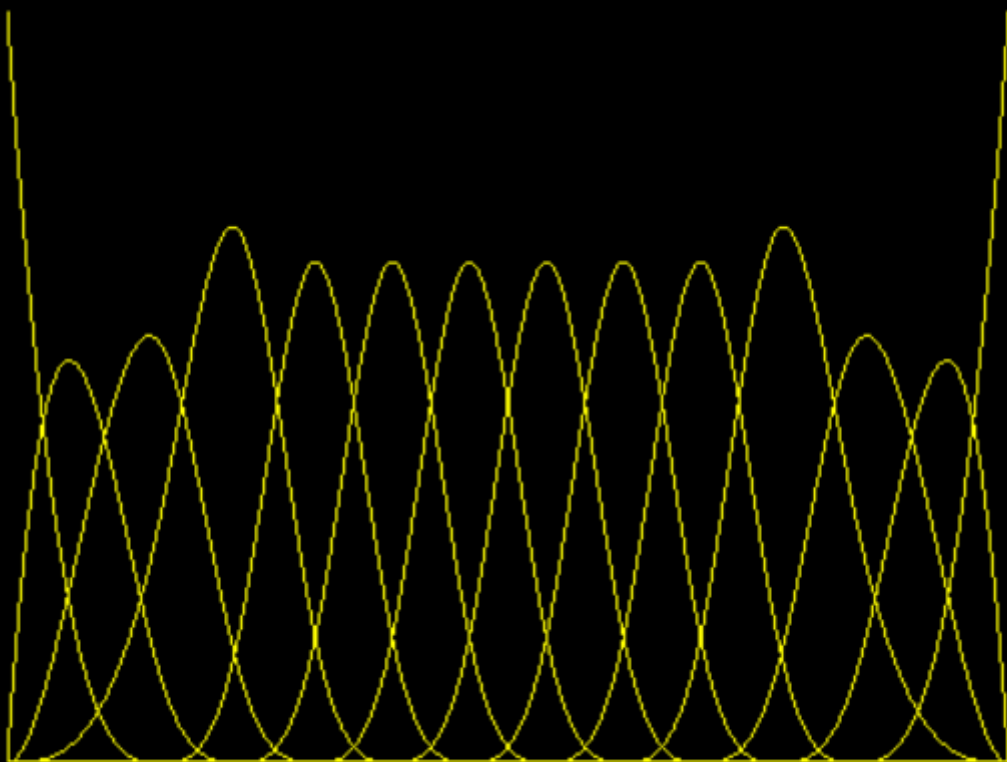
$N=14$ vertici di controllo; $m=4$

$m+K=14$

Ogni nodo ha molteplicità $m_i = 1$

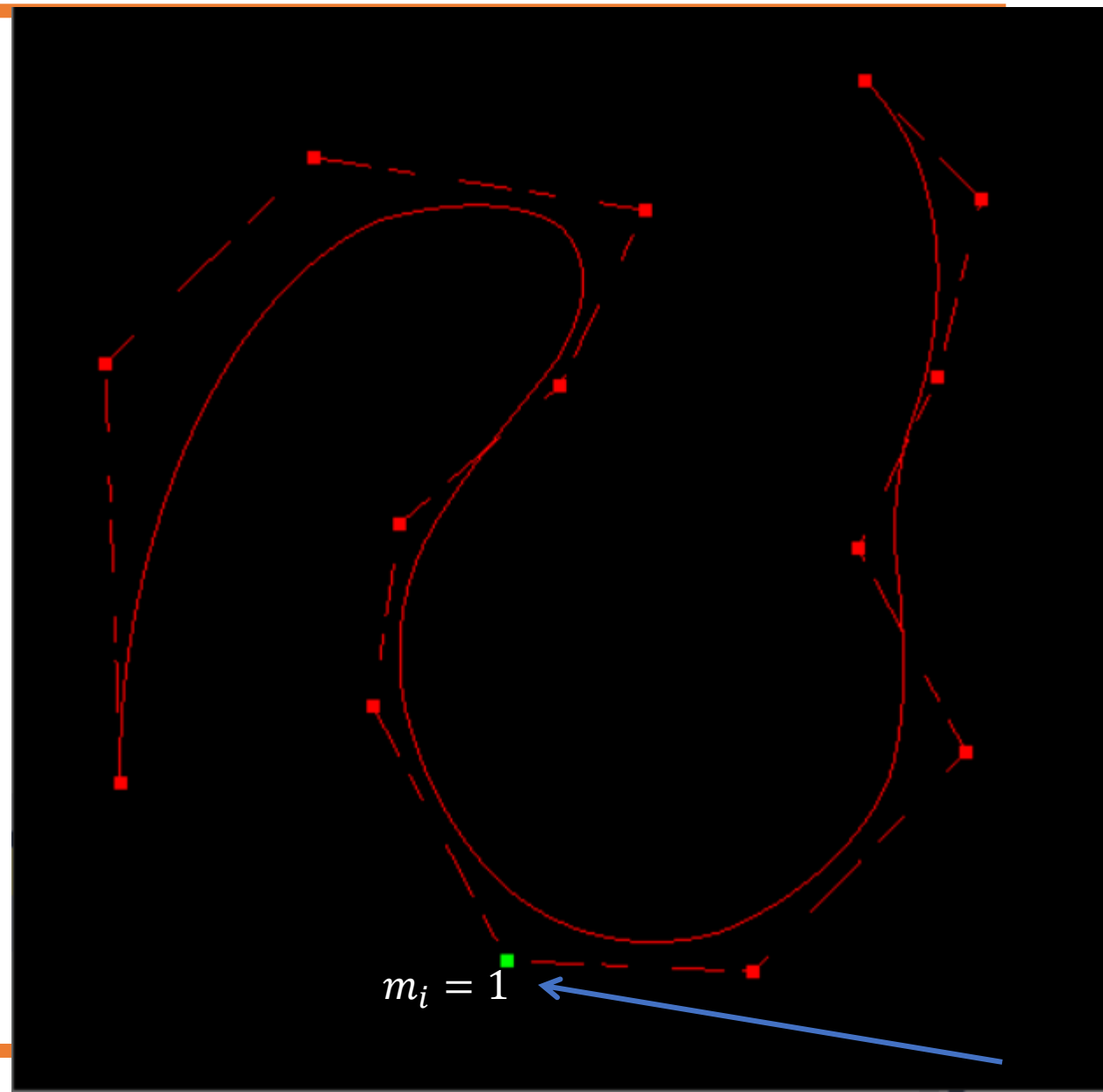
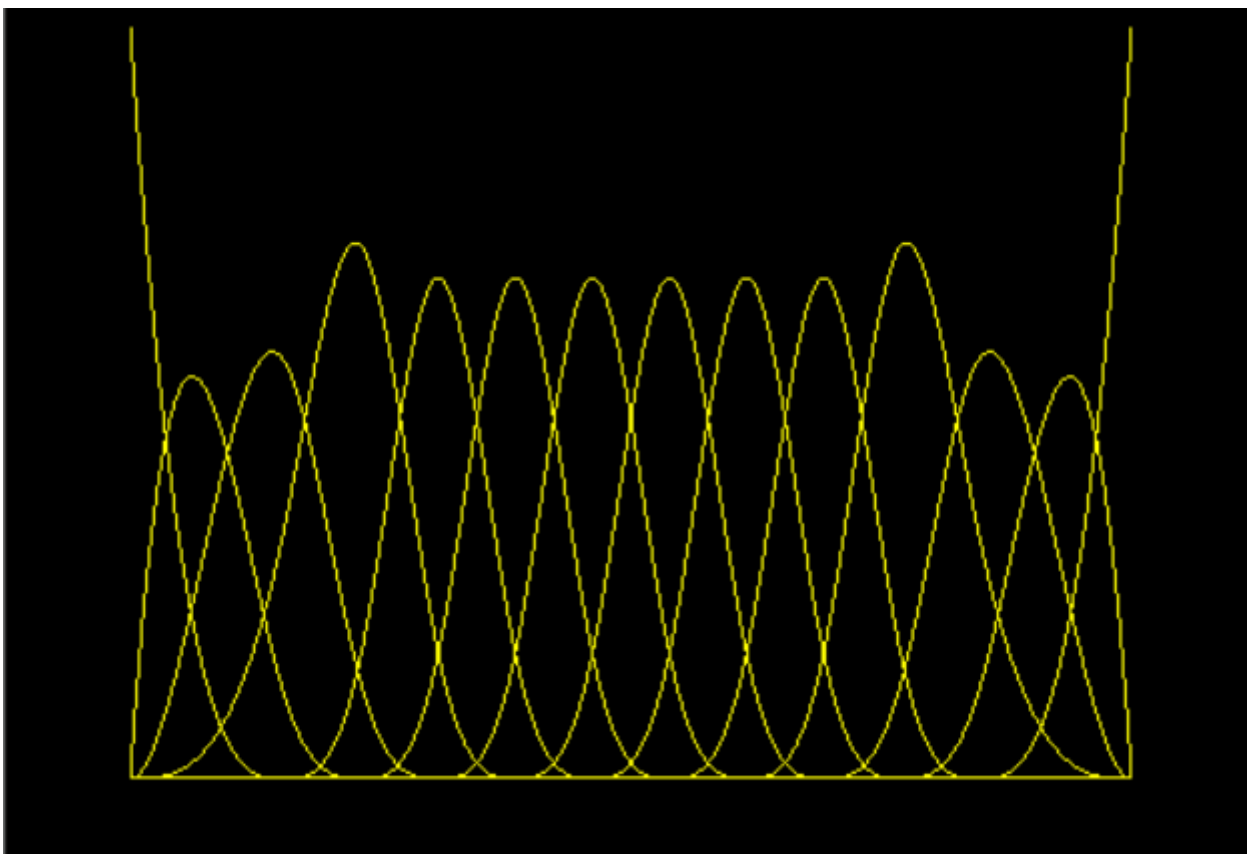
1 primi 3 nodi fittizi a sinistra coincidono con
l'estremo a

gli ultimi 3 nodi fittizi a destra coincidono con
l'estremo b



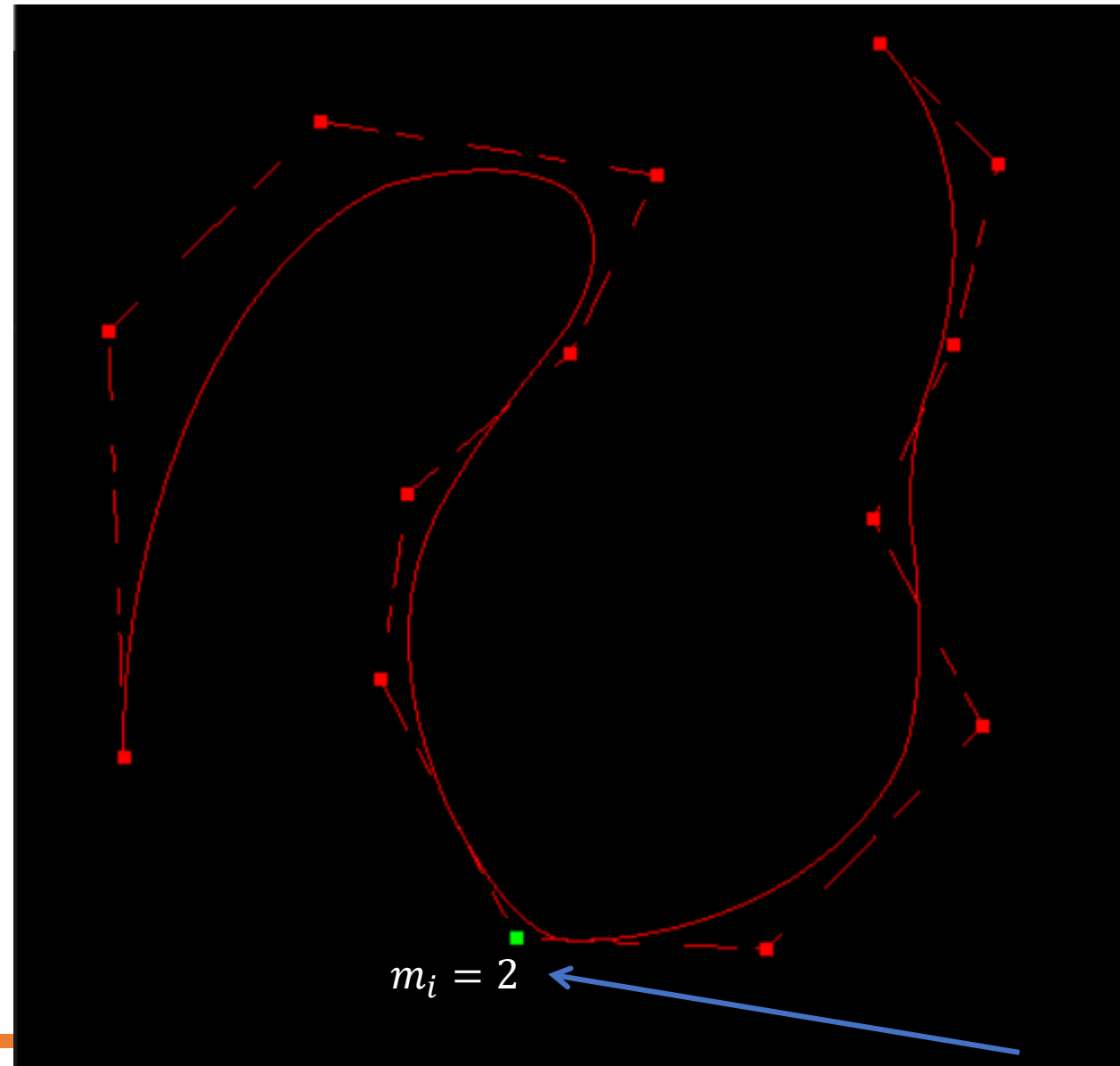
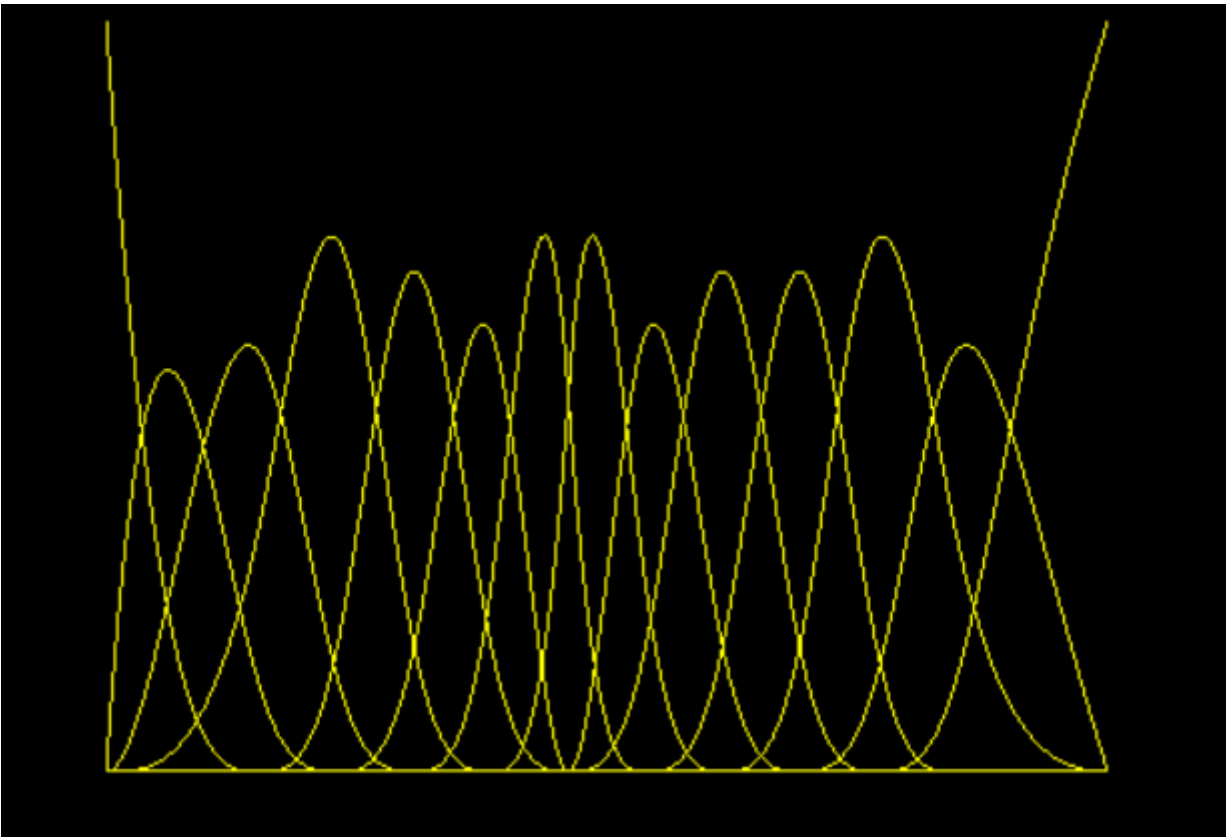


Modifico la molteplicità del nodo
corrispondente al vertice di controllo
selezionato in verde:

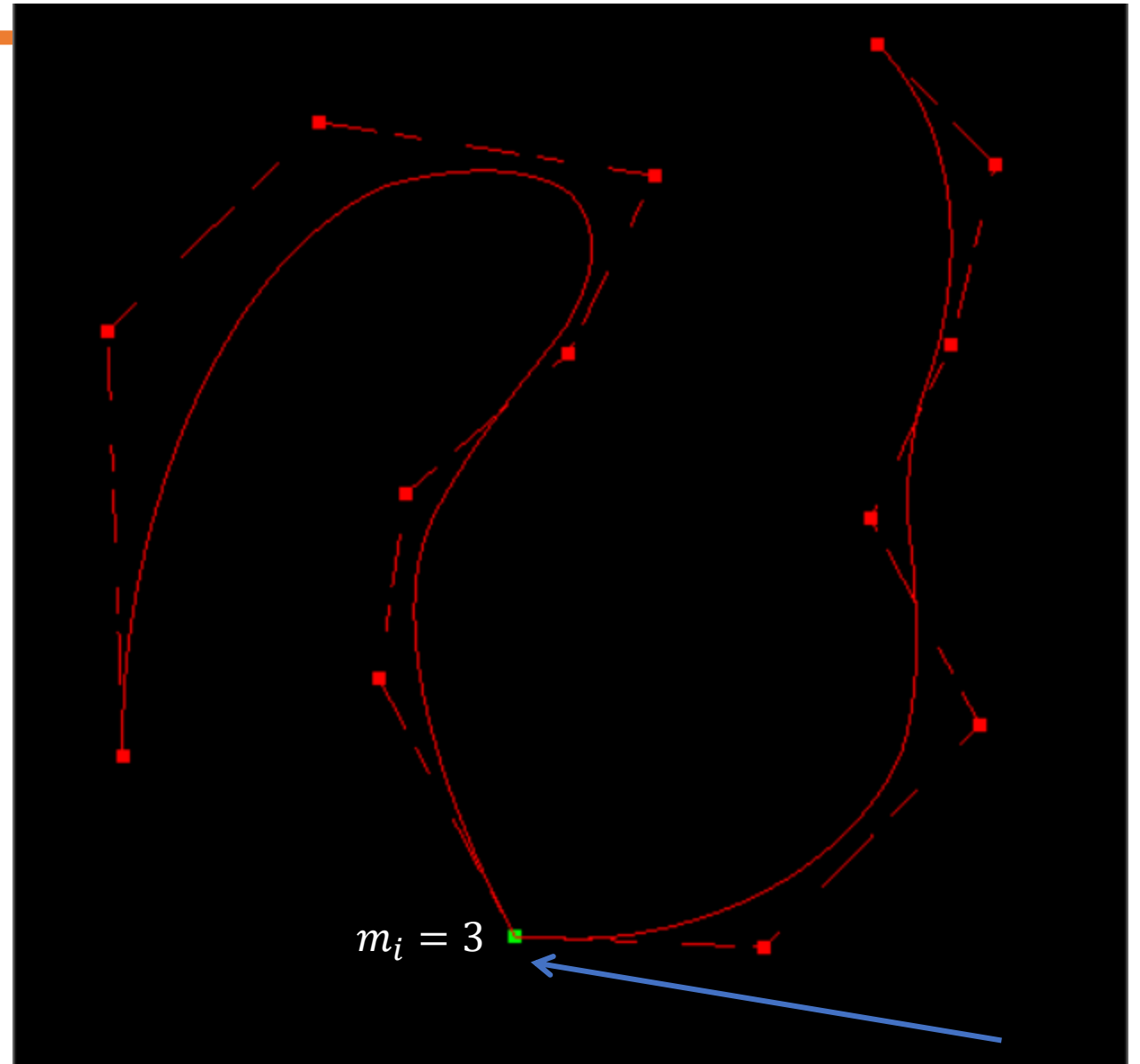
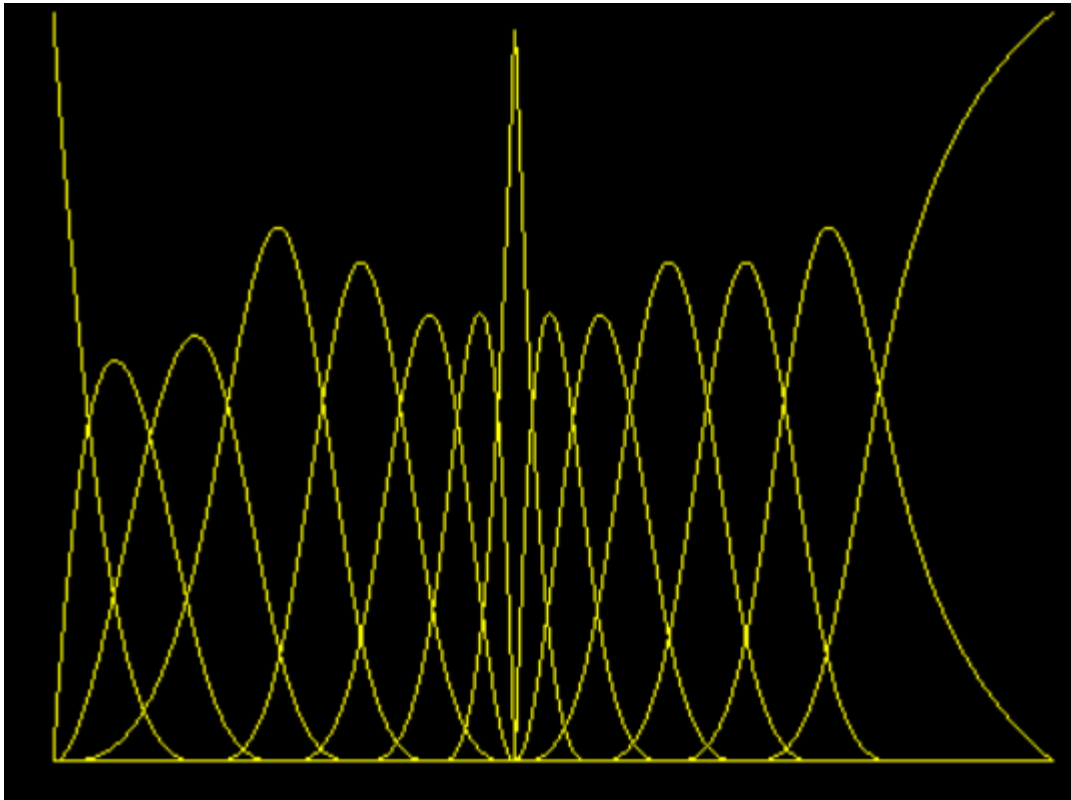




La pongo uguale a 2

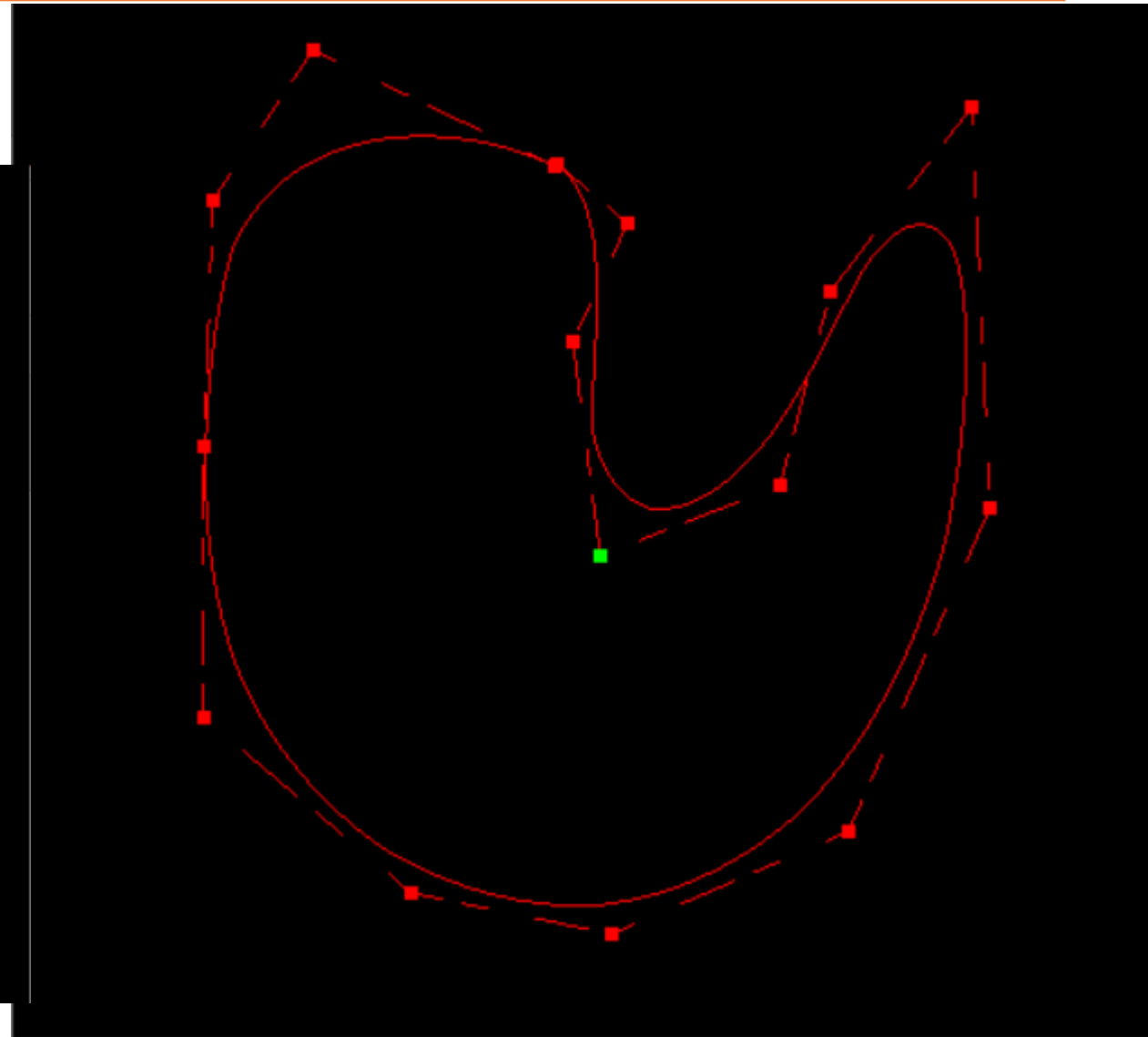
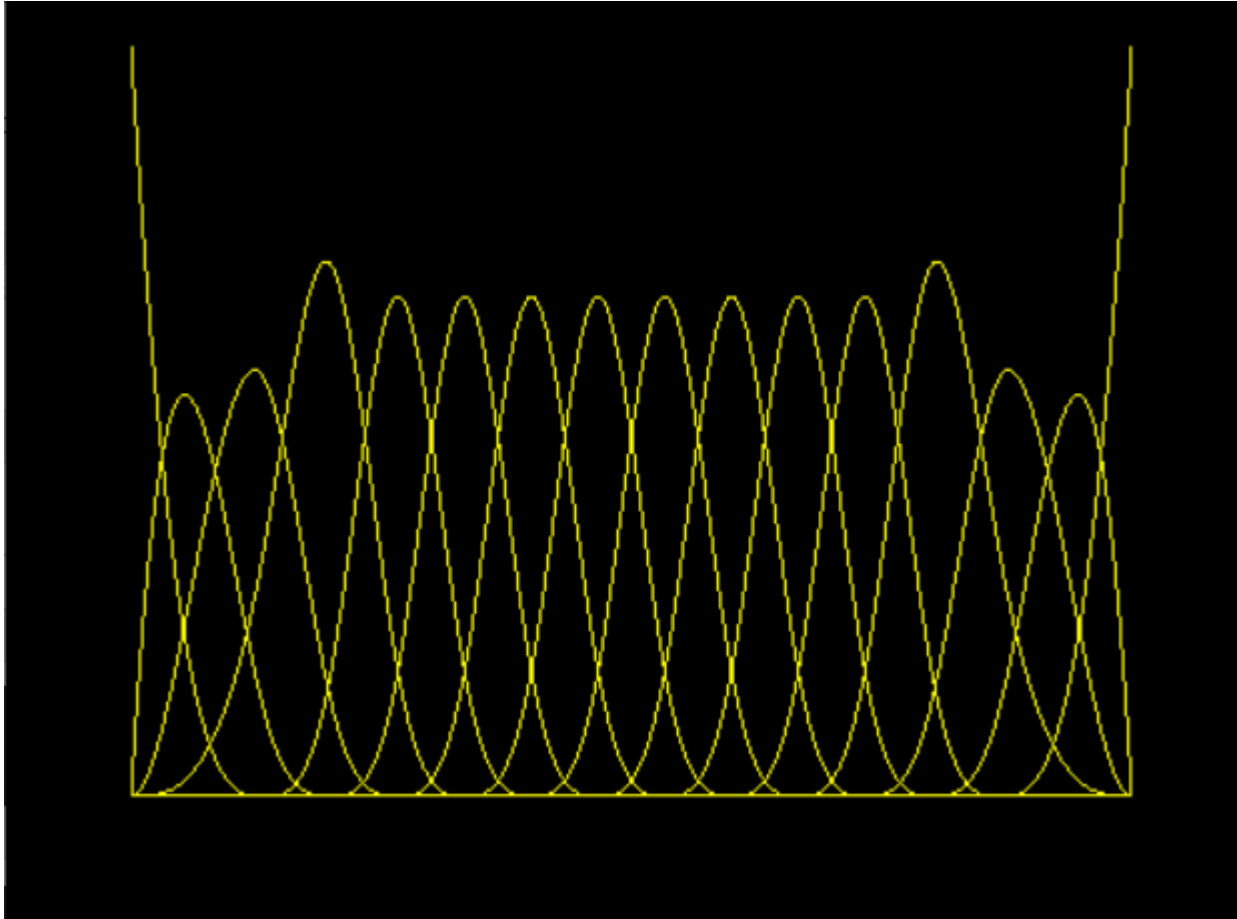


La pongo uguale a 3



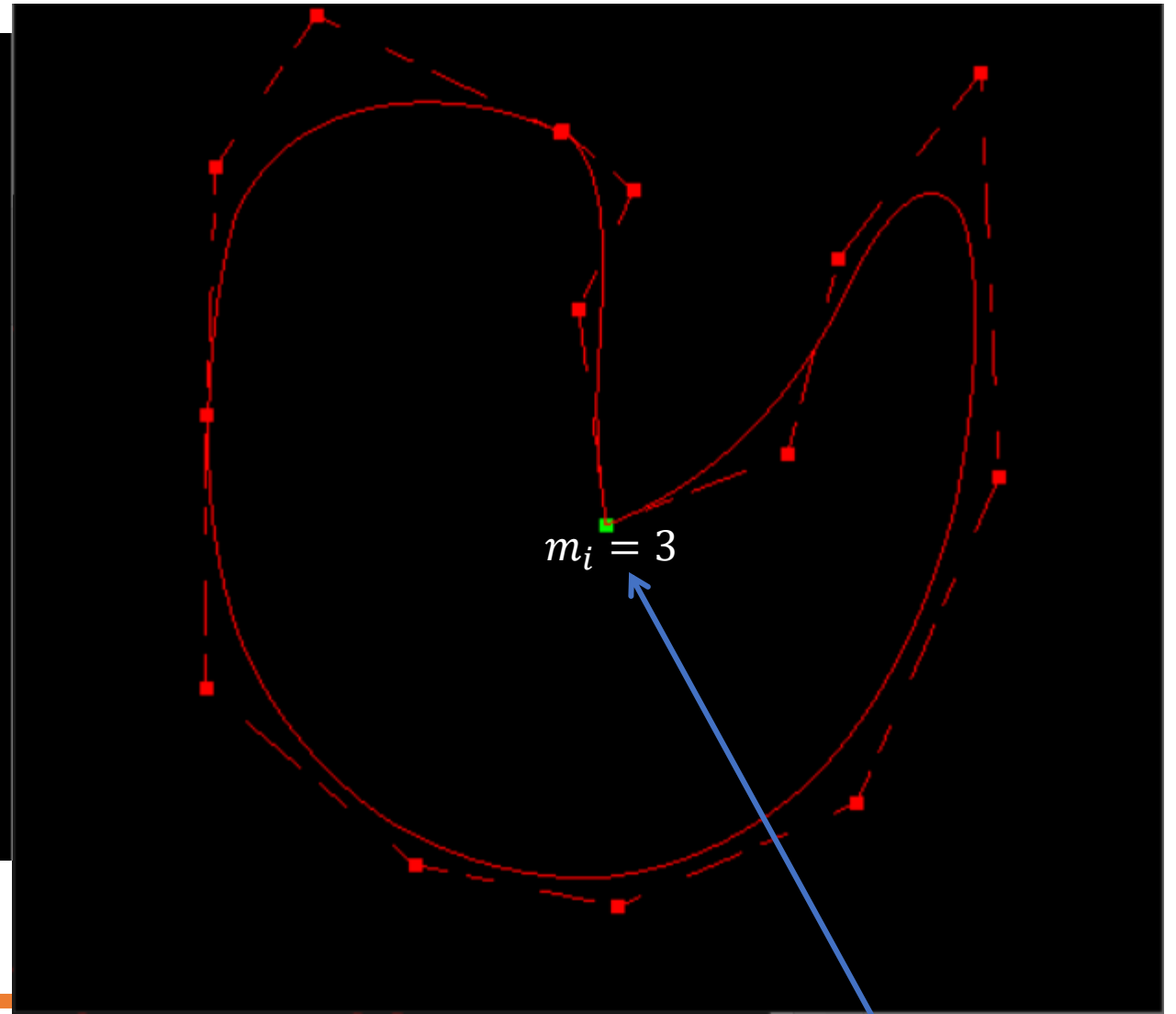
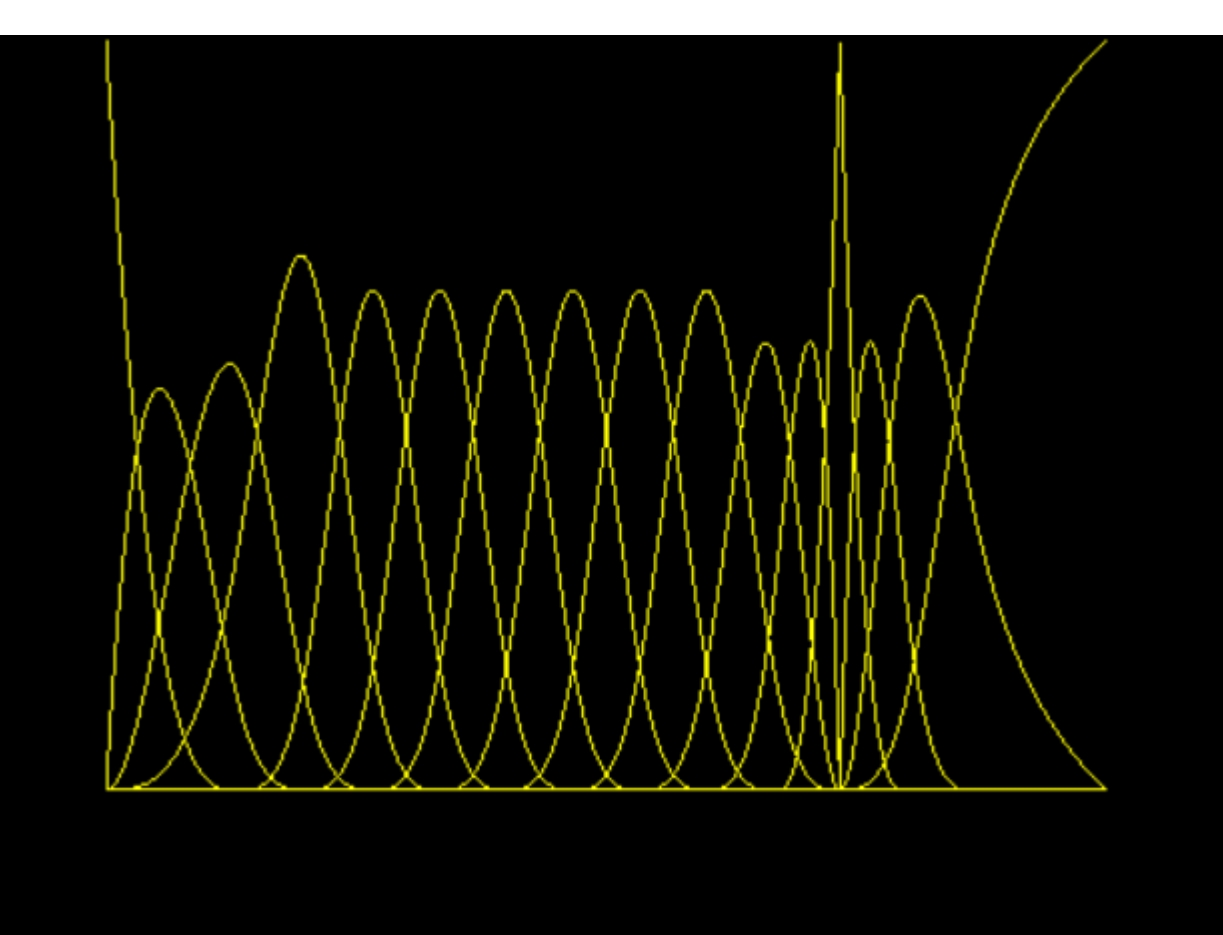


16 Vertici di controllo; nodi semplici





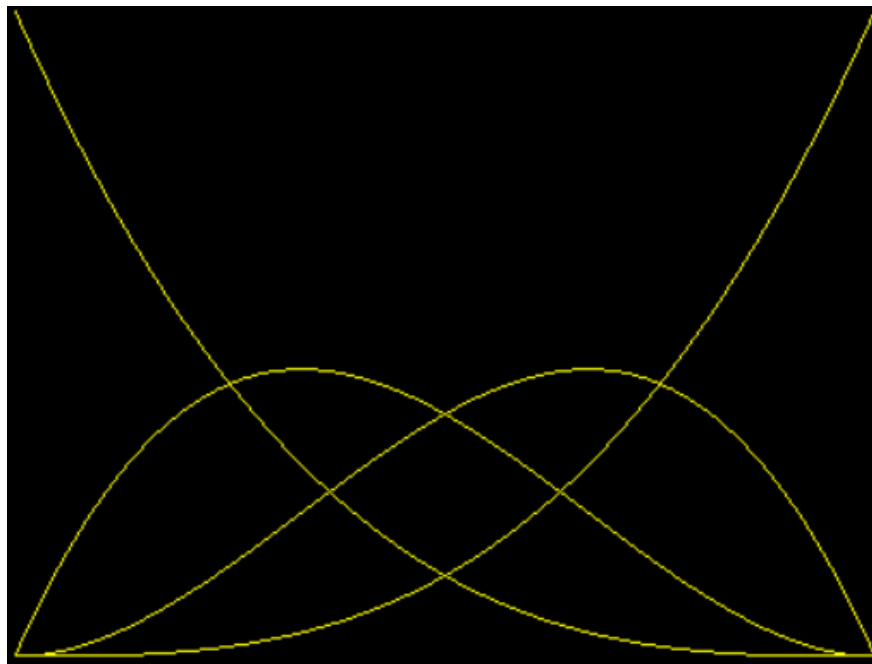
Modifico la molteplicità del nodo
corrispondente al vertice di controllo
selezionato





Le curve di Bezier sono un caso speciale delle curve B-spline.

Se i punti di controllo P_i sono N e si considera una spline di ordine $m=N$, poiché deve valere la condizione $N=m+K$, significa che non si possono avere nodi interni e quindi $K=0$. Ne segue quindi che la partizione nodale estesa è data da N nodi coincidenti con il primo estremo dell'intervallo, N nodi coincidenti con il secondo estremo dell'intervallo e quindi la curva B-spline di ordine m coincide con la curva di Bezier di grado $m-1$.



$$m = 4 \quad k = 0$$



Invarianza per trasformazioni affini

La curva B-spline è invariante per trasformazioni affini. Ciò implica che se bisogna traslare, ruotare o deformare una curva, è sufficiente applicare la trasformazione solo ai punti di controllo e poi costruire la curva sui punti trasformati. La curva quindi subirà la trasformazione desiderata come se la trasformazione fosse applicata a tutti i punti della curva.

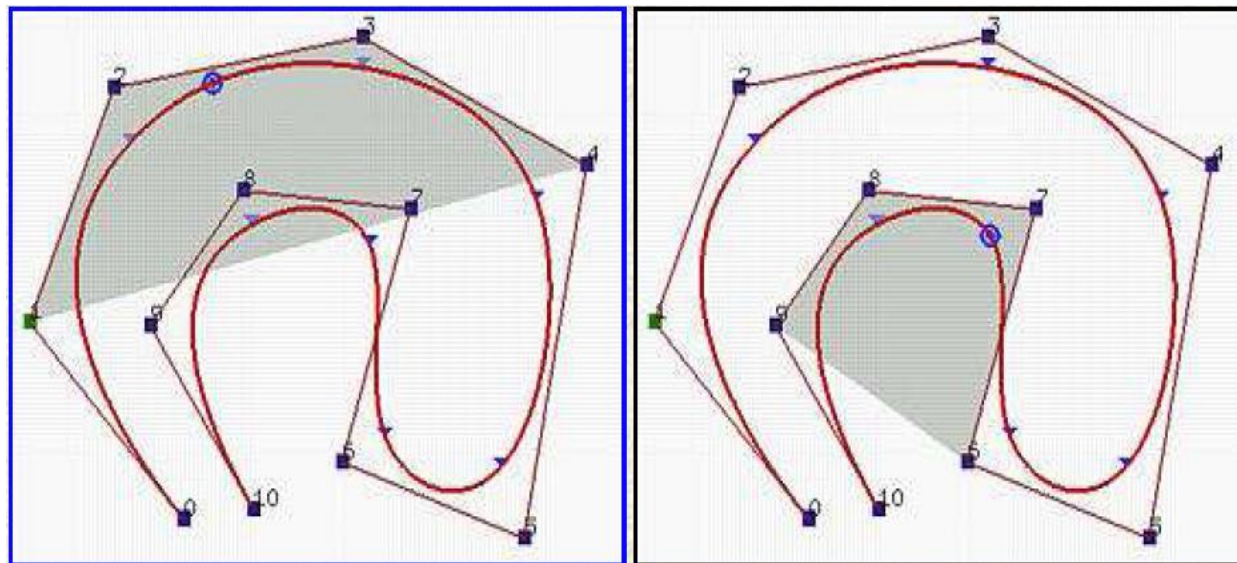


Proprietà forte del guscio convesso (strong convex hull property)

Se $t \in [t_l, t_{l+1})$, allora

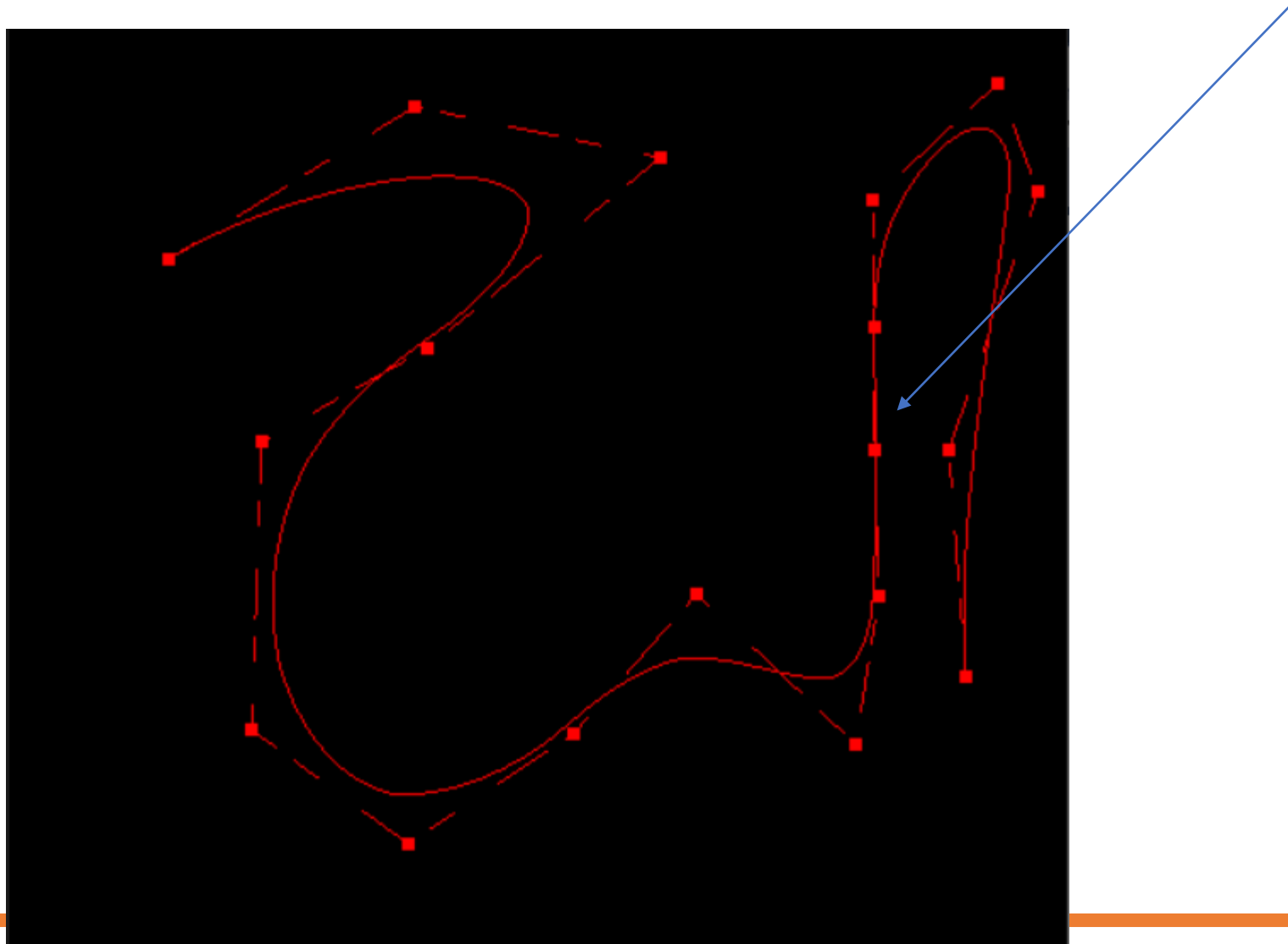
$$C(t) = \sum_{i=l-m+1}^l P_i N_{i,m}(t)$$

è contenuta nell'involuppo convesso dei punti di controllo $P_i, i = l - m + 1, \dots, l$.





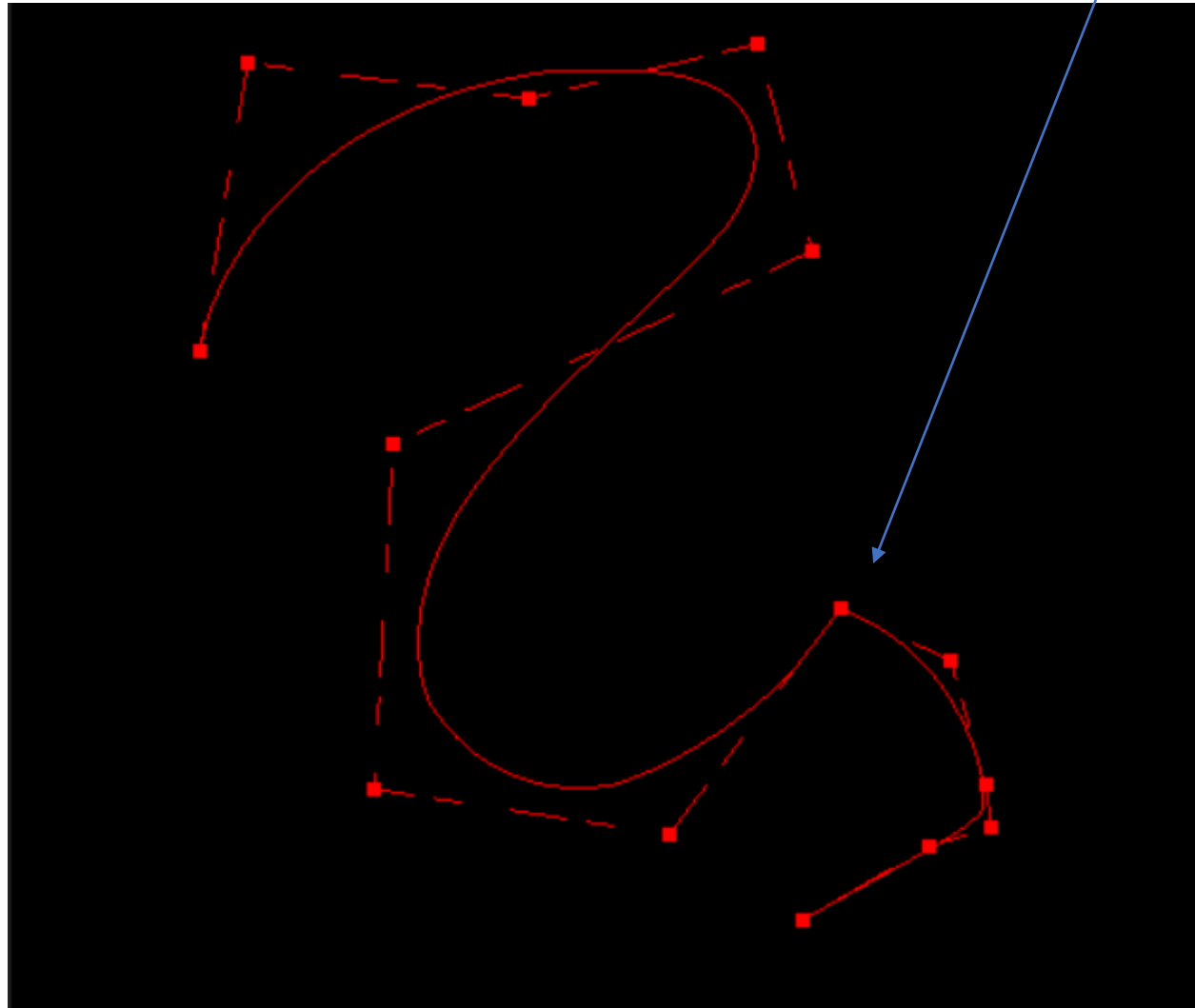
Da questa proprietà, segue che se questi m punti di controllo sono allineati, allora la curva coincide con una retta;





se $m-1$ di questi punti di controllo sono coincidenti allora la
curva passa per il punto multiplo

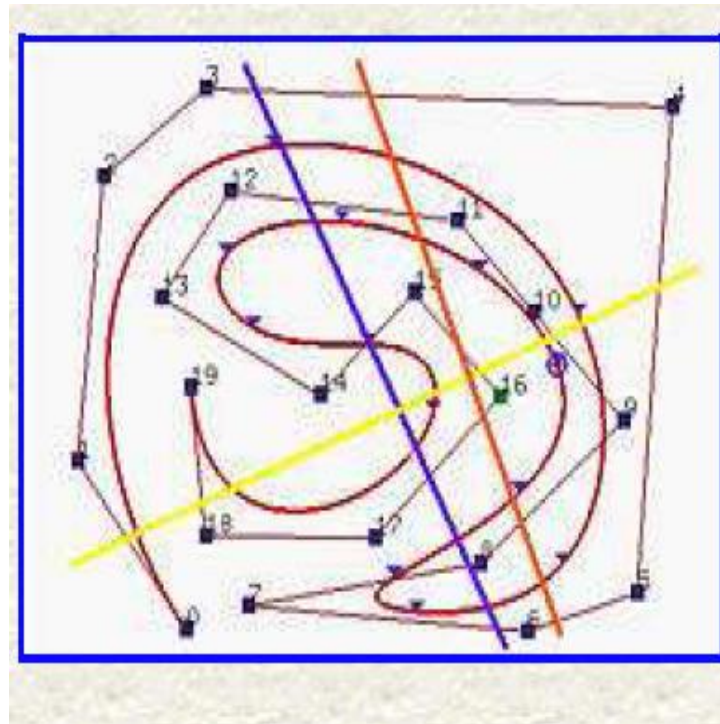
3 vertici di controllo coincidenti





Proprietà di variation diminishing

Il numero di intersezioni di una qualsiasi retta con il poligono di controllo è maggiore del numero di intersezioni della stessa retta con curva B-spline.





Il vantaggio di utilizzare Curve B-spline

Le curve B-spline richiedono più informazioni (cioè, il grado della curva, il vettore dei nodi (o break-points) e delle rispettive molteplicità) e una teoria più complessa rispetto alle curve di Bézier.

Ma, i maggiori vantaggi compensano questo inconveniente.

Primo, una curva B-spline può essere una curva di Bézier. Secondo, le curve B-spline soddisfano tutte le proprietà importanti che hanno le curve di Bézier.

Terzo, le curve B-spline forniscono più flessibilità di controllo rispetto a ciò che possono fare le curve di Bézier.

Per esempio, possiamo utilizzare curve di grado più basso e mantenere ancora un gran numero di punti di controllo.

Possiamo cambiare la posizione di un punto di controllo senza cambiare globalmente la forma dell'intera curva (proprietà di modifica locale).

Poichè le curve B-spline soddisfano la proprietà strong convex hull, esse hanno un maggiore controllo della forma. Inoltre, ci sono altre tecniche per disegnare ed editare la forma di una curva cambiando i break-points.

Comunque, va ricordato che le curve B-spline sono ancora curve polinomiali e le curve polinomiali non possono rappresentare molte utili curve semplici come cerchi e le elissi. Inoltre non godono dell'invarianza per trasformazioni proiettive. Quindi è richiesta, una generalizzazione delle B-spline, NURBS.