**ESERCIZI DI MDP PER IL 10 NOVEMBRE 2021**

(1) Abbiamo tre urne contenenti una pallina bianca e rispettivamente 1,3 e 5 palline rosse. Estraendo una pallina a caso da un'urna, qual è la probabilità che sia bianca?

(2) Una moneta (truccata) dà testa con probabilità 0.6. Qual è la probabilità che lanciandola 5 volte otteniamo più teste che croci?

(3) Avendo a disposizione la moneta dell'esercizio precedente e una regolare, ne scegliamo una a caso e la lanciamo tre volte.
   (a) Qual è la probabilità di ottenere 3 teste?
   (b) Sapendo che il primo lancio ha dato come risultato testa, qual è la probabilità che la moneta sia truccata?
   (c) Stabilire se gli eventi $E_1 =$"testa al primo lancio" ed $E_2 =$"testa al secondo lancio" sono dipendenti o indipendenti.

(4) Un bambino colleziona le figurine di un piccolo album contenente 80 figurine e ne ha già 50. Il nonno gli compra un pacchetto nuovo di 4 figurine (si supponga che un pacchetto contiene sempre 4 figurine diverse tra loro).
   (a) Determinare la probabilità di trovare almeno 3 figurine nuove?.
   (b) Qual è la probabilità di trovare tutte doppie (cioè tutte figurine che il bambino ha già)?
   (c) Se il nonno comprasse 2 pacchetti, quale sarebbe la probabilità di trovare complessivamente 6,7 o 8 nuove figurine?

(5) Consideriamo 4 scatole contenenti 2 palline ciascuna indistinguibili al tatto. La scatola $i$ ha una pallina numerata con 1 e l'altra numerata con $i$ (quindi nella prima entrambe le palline sono numerate 1). Si estrae una pallina per scatola. Determinare
   (a) la probabilità che la somma delle palline estratte sia almeno 7;
   (b) la probabilità di aver estratto la biglia con il 4 sapendo che la somma delle palline estratte è almeno 7;
   (c) la probabilità di aver estratto esattamente tre palline numerate con 1;

Cenni di soluzioni

(1) Usiamo in questo esercizio la formula delle probabilità totali. Chiamiamo $U_i$ l'evento "pallina estratta dall'urna $i$ e $B$ l'evento "estrazione di una pallina bianca". Abbiamo

$$\begin{aligned} P(B) &= P(U_1)P(B|U_1) + P(U_2)P(B|U_2) + P(U_3)P(B|U_3) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{6+3+1}{36} = \frac{5}{18}. \end{aligned}$$

(2) Abbiamo 10 combinazioni di tre teste e due croci ognuna con probabilità $0,6^3 \cdot 0,4^2 = 0,03456$.
Abbiamo 5 combinazioni di quattro teste e una croce ognuna con probabilità $0,6^4 \cdot 0,4 = 0,05184$.
Infine abbiamo una sola combinazioni di cinque teste con probabilità $0,6^5 =$

$0,07776$. la probabilità di aver più teste che croci è quindi

$$10 \cdot 0,03456 + 5 \cdot 0,05184 + 0,07776 = 0,6826$$

cioè il 68,26%.

(3) (a) Utilizziamo la formula delle probabilità totali con $A_1 =$"moneta truccata", $A_2 =$"moneta regolare" ed $E =$"escono 3 teste. Abbiamo

$$P(E) = P(A_1)P(E|A_1) + P(A_2)P(E|A_2) = \frac{1}{2}0,6^3 + \frac{1}{2}0,5^3 = 0,1705.$$

(b) La probabilità di ottenere testa al primo lancio è

$$P(E_1) = P(A_1)P(E_1|A_1) + P(A_2)P(E_1|A_2) = \frac{1}{2}0,6 + \frac{1}{2}0,5 = 0,55.$$

Abbiamo quindi che la probabilità che la moneta sia truccata sapendo che il primo lancio ha dato testa è

$$P(A_2|E_1) = \frac{P(E_1|A_2)P(A_2)}{P(E_1)} = \frac{0,6 \cdot 0,5}{0,55} = 0,5454$$

(c) Abbiamo, similmente al punto (a)

$$P(E_1 \cap E_2) = P(A_1)P(E_1 \cap A_2|A_1) + P(A_2)P(E_1 \cap E_2|A_2) = \frac{1}{2}0,6^2 + \frac{1}{2}0,5^2 = 0,305$$

che è diverso da $P(E_1)P(E_2) = 0,55^2 = 0,3025$ per cui gli eventi sono dipendenti. Ciò poteva anche essere intuito dal punto (b): infatti sapere che il primo lancio ha dato testa fa diventare 0,5454 la probabilità che la moneta sia truccata e quindi aumenta la probabilità che il secondo lancio sia come risultato testa.

(4) (a) L'acquisto di un pacchetto può essere visto come l'estrazione di 4 palline di un'urna contenente 30 figurine blu (corrispondenti alla figurine che il bambino non ha) e 50 palline blu (corrispondenti alle figurine che già ha). la variabile $X=$ numero di figurine che non ha già nell'album è una variabile $X \sim H(4; 30, 50)$. Abbiamo quindi

$$P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) = \frac{\binom{30}{3}\binom{50}{1}}{\binom{80}{4}} + \frac{\binom{30}{4}}{\binom{80}{4}} = 0,1457$$

(b) Analogamente al punto precedente abbiamo:

$$P(X = 0) = \frac{\binom{50}{4}}{\binom{80}{4}} = 0,1456$$

(c) Consideriamo la variabile $Y =$ numero di figurine nuove nel secondo pacchetto. Chiaramente la densità di $Y$ dipende da quante figurine nuove sono state trovate nel primo pacchetto: usiamo quindi la formula della probabilità totali e abbiamo

$$P(X + Y = 8) = P(X = 4)P(Y = 4|X = 4) = \frac{\binom{30}{4}}{\binom{80}{4}} \cdot \frac{\binom{26}{4}}{\binom{80}{4}} = 0,0002$$

$$P(X + Y = 7) = P(X = 3)P(Y = 4|X = 3) + P(X = 4)P(Y = 3|X = 4)$$
$$= \frac{\binom{30}{3}\binom{50}{1}}{\binom{80}{4}} \cdot \frac{\binom{27}{4}}{\binom{80}{4}} + \frac{\binom{30}{4}}{\binom{80}{4}} \cdot \frac{\binom{26}{3}\binom{54}{1}}{\binom{80}{4}} = 0,0029$$

Infine,

$$P(X+Y=6) = P(X=4)P(Y=2|X=4) + P(X=3)P(Y=3|X=3) + P(X=2)P(Y=4|X=2)$$
$$= \frac{\binom{30}{4}}{\binom{80}{4}} \cdot \frac{\binom{26}{2}\binom{54}{2}}{\binom{80}{4}} + \frac{\binom{30}{3}\binom{50}{1}}{\binom{80}{4}} \cdot \frac{\binom{27}{3}\binom{53}{1}}{\binom{80}{4}} + \frac{\binom{30}{2}\binom{50}{2}}{\binom{80}{4}} \cdot \frac{\binom{28}{4}}{\binom{80}{4}}$$
$$= 0,0220.$$

(5) In questo caso questo caso possiamo considerare uno spazio di probabilità uniforme costituito da 8 possibili risultati e cioè:

$$\Omega = \{(1,1,1,1),(1,2,1,1),(1,1,3,1),(1,1,1,4),(1,2,3,1),(1,2,1,4),(1,1,3,4),(1,2,3,4)\}$$

(a) La somma delle palline estratte è almeno 7 in 5 casi su 8 per cui la probabilità è $\frac{5}{8}$;

(b) Sia $A$ l'insieme dei risultati in cui la somma é almeno 7 e $B$ l'insieme dei risultati in cui viene estratto il 4 abbiamo
$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{4/8}{5/8} = \frac{4}{5}$$

(c) Abbiamo 3 risultati in cui compaiono esattamente tre palline numerate con 1 e quindi la probabilità è $3/8$.