Programmazione Lineare: Introduzione

Daniele Vigo

D.E.I. – Università di Bologna

daniele.vigo@unibo.it

rev. 1.0 – 2023

Programmazione Lineare

Def.: (F, φ) è un problema di Programmazione Lineare (LP, PL) se

- la funzione obiettivo φ è lineare

  Es. $\varphi(x) = c^T x = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$

- la regione ammissibile $F \subseteq R^n$ è definita da

  $g_i(x) \leq 0,\ h_j(x) = 0 \quad (i = 1,\ldots, m;\ j = 1,\ldots, p)$

  con $g_i, h_j : R^n \to R$ lineare $\forall\, i$ e $\forall\, j$

  Es. $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \geq d_i$

Regione ammissibile di PL

- F è un insieme convesso (poliedro)
- il numero di $x \in F$ da esaminare per determinare x^* è un numero finito ($\equiv$ vertici del poliedro) $\Rightarrow$ problema combinatorio
- Normalmente il problema si esprime in forma matriciale

$$\min c^T x$$

$$Ax \geq d$$

$$x \geq 0$$

Esempio

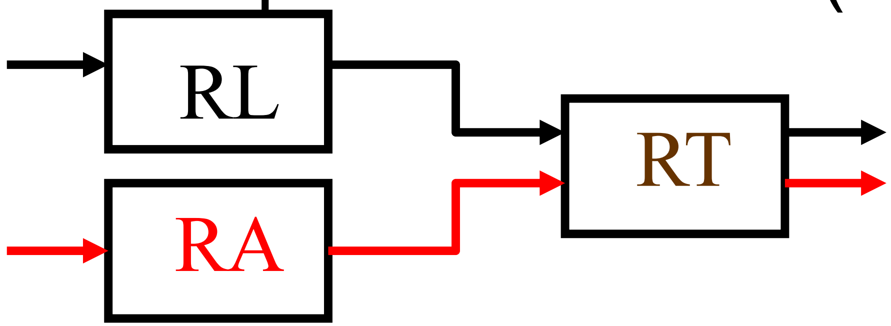
$$
\begin{array}{llllll}
\min & 3x_1 & - \; 2x_2 & + \; x_3 & & \\
\text{s.t.} & 2x_1 + & x_2 & - \; x_3 & \geq & 2 \\
 & x_1 & & +2x_3 & \geq & 1 \\
 & x_1, & x_2, & x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

$$\Downarrow$$

$$n = 3 \quad m = 2 \quad c^T = [3 \; -2 \; 1] \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} d = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

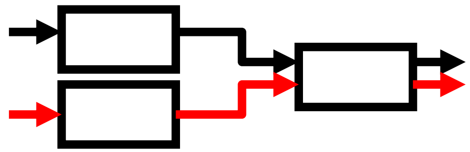
Es. 1: Produzione di sedie (1)

- 2 prodotti:
  - Sedia in Legno (SL)
  - Sedia in Alluminio (SA)
- 3 reparti:
  - Lavorazione parti in Legno (RL)
  - Lavorazione parti in Alluminio (RA)
  - Lavorazione parti in Tessuto (RT)



Produzione di sedie (2)

- Tempi di Produzione (min. per pezzo)
- Ricavo netto (Euro per pezzo)
- Disponibilità reparti (min. per periodo)



	RL	RA	RT	Ricavo
SL	10	-	30	30
SA	-	20	20	50
D.	40	120	180	

Formulazione del problema LP (1)

1. Capire il problema
2. Individuare le variabili decisionali
3. Definire la funzione obiettivo come combinazione delle variabili decisionali
4. Definire i vincoli come combinazione delle variabili decisionali
5. Identificare eventuali upper o lower bound sulle variabili decisionali

1. Definizione e 2. Variabili

- Dati:
  - Tempi di Produzione (min. per pezzo)
  - Disponibilità reparti (min. per periodo)
  - Ricavo netto (Lire per pezzo)

  Supponendo di poter vendere tutta la produzione quante sedie di ciascun tipo devono essere prodotte per massimizzare il ricavo ?

- Variabili decisionali:
  - x_1 = n. di sedie di legno prodotte in un periodo
  - x_2 = n. di sedie di alluminio prodotte in un periodo
  - x_1 ed x_2 possono essere frazionarie

3. Funzione obiettivo

- Profitto per unità di prodotto:

SL	SA
30	50

$$\max z = 30\, x_1 + 50\, x_2$$

4. Vincoli

- Consumo tempo per unità di prodotto:

Reparto	SL	SA	Disp.
RL	10	–	40
RA	–	20	120
RT	30	20	180

$$\max z = 30\,x_1 + 50\,x_2$$

$$
\begin{array}{llr}
\text{RL)} & 10\,x_1 & \leq 40 \\
\text{RA)} & 20\,x_2 & \leq 120 \\
\text{RT)} & 30\,x_1 + 20\,x_2 & \leq 180
\end{array}
$$

5. Upper e lower bound

- valori negativi delle *x* privi di senso
- vincoli di non negatività delle variabili:

$$
\begin{array}{llcl}
 & \max z = 3000\, x_1 + 5000\, x_2 & & \\
RL) & 10\, x_1 & \leq & 40 \\
RA) & 20\, x_2 & \leq & 120 \\
RT) & 30\, x_1 + 20\, x_2 & \leq & 180 \\
 & x_1 \; , \; x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Modello LP completo

- stabilità numerica degli algoritmi:
- coefficienti interi e piccoli in valore assoluto

$$
\begin{array}{lrcrcr}
\max & 3\,x_1 & + & 5\,x_2 & & \\
\text{RL)} & x_1 & & & \leq & 4 \\
\text{RA)} & & & 2\,x_2 & \leq & 12 \\
\text{RT)} & 3\,x_1 & + & 2\,x_2 & \leq & 18 \\
& x_1 & , & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Es. 2: Produzione di vasche (1)

- Blue Ridge Hot Tubs produce due tipi di vasche: Aqua-Spa ed Hydro-Lux

	Aqua-Spa	Hydro-Lux
Motore	1	1
Lavoro	9 ore	6 ore
Tubazione	12 metri	16 metri
Profitto Unitario	\$350	\$300

- sono disponibili: 200 motori, 1566 ore di lavoro, e 2880 metri di tubazione

Modello LP

$$
\begin{array}{lrcrcr}
\max & 350\, x_1 & + & 300\, x_2 & & \\
s.t. & 1\, x_1 & + & 1\, x_2 & \leq & 200 \\
 & 9\, x_1 & + & 6\, x_2 & \leq & 1566 \\
 & 12\, x_1 & + & 16\, x_2 & \leq & 2880 \\
 & & & x_1 & \geq & 0 \\
 & & & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Problemi di Mix di Produzione

- n prodotti, m risorse (materie prime, macchine …)
- a_{ij} quantità della risorsa i necessaria per produrre 1 unità del prodotto j (i=1,…,m; j=1,…,n)
- d_i quantitativo di risorsa i (i=1,…,m) disponibile
- r_j ricavo per 1 unità del prodotto j (j=1,…,n)
- x_j quantità del prodotto j da produrre (j=1,…,n)

$$\max r^T x$$

$$Ax \leq d$$

$$x \geq 0$$

Es. 3: Problema della dieta

… per cani e gatti

Sostanze	Alimenti (contenuto g/Kg)			Contenuto minimo (g)
	Carne	Latte	Soia	
Proteine	500	300	300	800
Grassi	300	300	100	400
Carboidrati	0	100	200	2000

Costo (€/Kg)	5	2	1
Variabili (Kg)	x_1	x_2	x_3

Modello LP

$x_1, \; x_2, \; x_3$: Kg Carne, Latte, Soia da acquistare

$$
\begin{array}{lrcrcrl}
\min \; z = & 5x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \\
\text{s.t.} & 5x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & \geq 8 \\
 & 3x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & \geq 4 \\
 & & & x_2 & + & 2x_3 & \geq 20 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq 0
\end{array}
$$

Problema della dieta (generale)

- n alimenti, m sostanze nutritive
- a_{ij} quantità della sostanza i in 1 unità dell'alimento j (i=1,…,m; j=1,…,n)
- d_i fabbisogno della sostanza i (i=1,…,m)
- c_j costo 1 unità dell' alimento j (j=1,…,n)
- x_j quantità dell'alimento j da acquistare (j=1,…,n)

$$\min c^T x$$
$$Ax \geq d$$
$$x \geq 0$$

Es. 4: Lotti minimi di produzione (1)

- Pianificazione della produzione di un prodotto nell'arco di *n* mesi con costi di produzione e stoccaggio variabili

- Per ogni mese $i = 1, \ldots, n$

  d_i domanda del mese i

  m_i capacità di produzione del mese i

  c_i costo di produzione unitario del mese i

  r_i costo di stoccaggio unitario del mese i

  s_0 quantità in magazzino a inizio periodo

Lotti minimi di produzione (2)

- Variabili decisionali:

x_i quantità prodotta nel mese i

s_i quantità stoccata nel mese i

Obiettivo:
minimizzazione del costo totale

$$\min \sum_{i=1,n} c_i x_i + \sum_{i=1,n} r_i s_i$$

Lotti minimi di produzione (3)

- Obiettivo min $\sum_{i=1,n} c_i x_i + \sum_{i=1,n} r_i s_i$

- capacità $x_i \leq m_i \quad (i = 1,\ldots, n)$
- domanda $x_i + s_{i-1} - s_i = d_i \quad (i = 1,\ldots, n)$

- non negatività $x_i, s_i \geq 0 \quad (i = 1,\ldots, n)$

Soluzione LP: Approccio intuitivo

- Aqua-Spa (x_1) ha un profitto unitario più alto
  - conviene produrne il maggior numero possibile
  - Ponendo $x_2 = 0$
    - Vincolo 1: $x_1 \le 200$
    - Vincolo 2: $9\,x_1 \le 1566$ o $x_1 \le 174$
    - Vincolo 3: $12\,x_1 \le 2880$ o $x_1 \le 240$
- Il massimo valore di x_1 è 174 e il profitto totale è \$350*174 + \$300*0 = \$60,900
- Questa soluzione è ammissibile: è anche ottima?
- No! ($x_1 = 122$, $x_2 = 78$, è amm. e vale \$66,100)

Soluzione LP: Approccio Grafico

- I vincoli di un problema LP definiscono la sua regione ammissibile.
- Il punto migliore nella regione ammissibile è la soluzione ottima per il problema.
- Per problemi LP con 2 (o 3) variabili, è possibile tracciare la regione ammissibile e trovare la soluzione ottima.

Interpretazione geometrica di LP

- F è l'intersezione di insiemi convessi associati ai vincoli

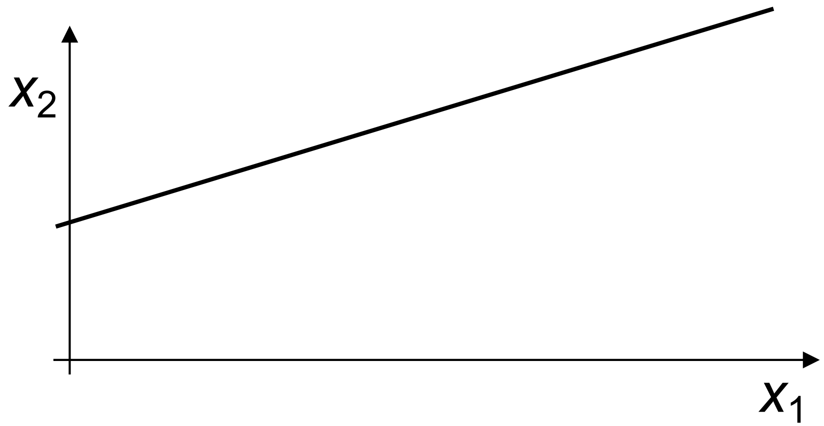
$$H = \{ x \in R^n : a^T x = d \}$$

$$S = \{ x \in R^n : a^T x \leq d \}$$

- F è un insieme convesso intersezione di un numero finito di insiemi convessi definiti dalle relazioni lineari: poliedro convesso (se limitato: politopo)

Equazioni Lineari

$H = \{ x \in R^n : a^T x = d \}$ è un iperpiano

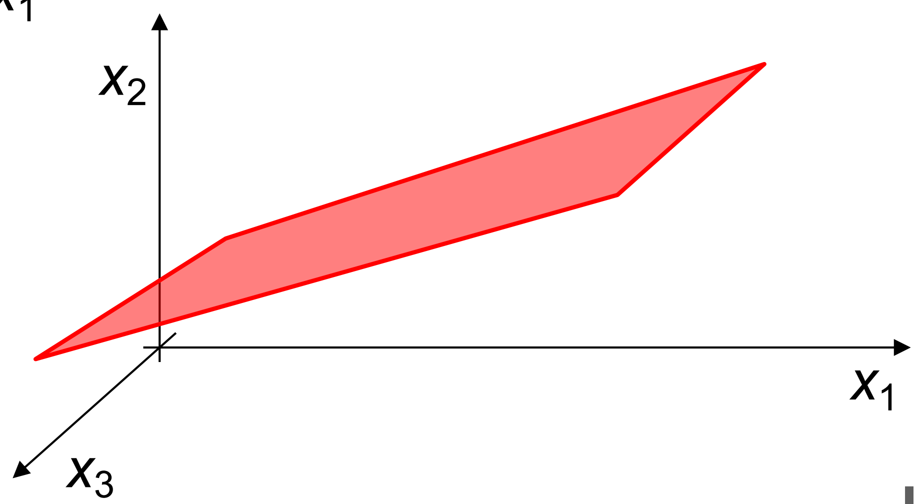


$a_1 x_1 + a_2 x_2 = d$

in R^2 *è una retta*

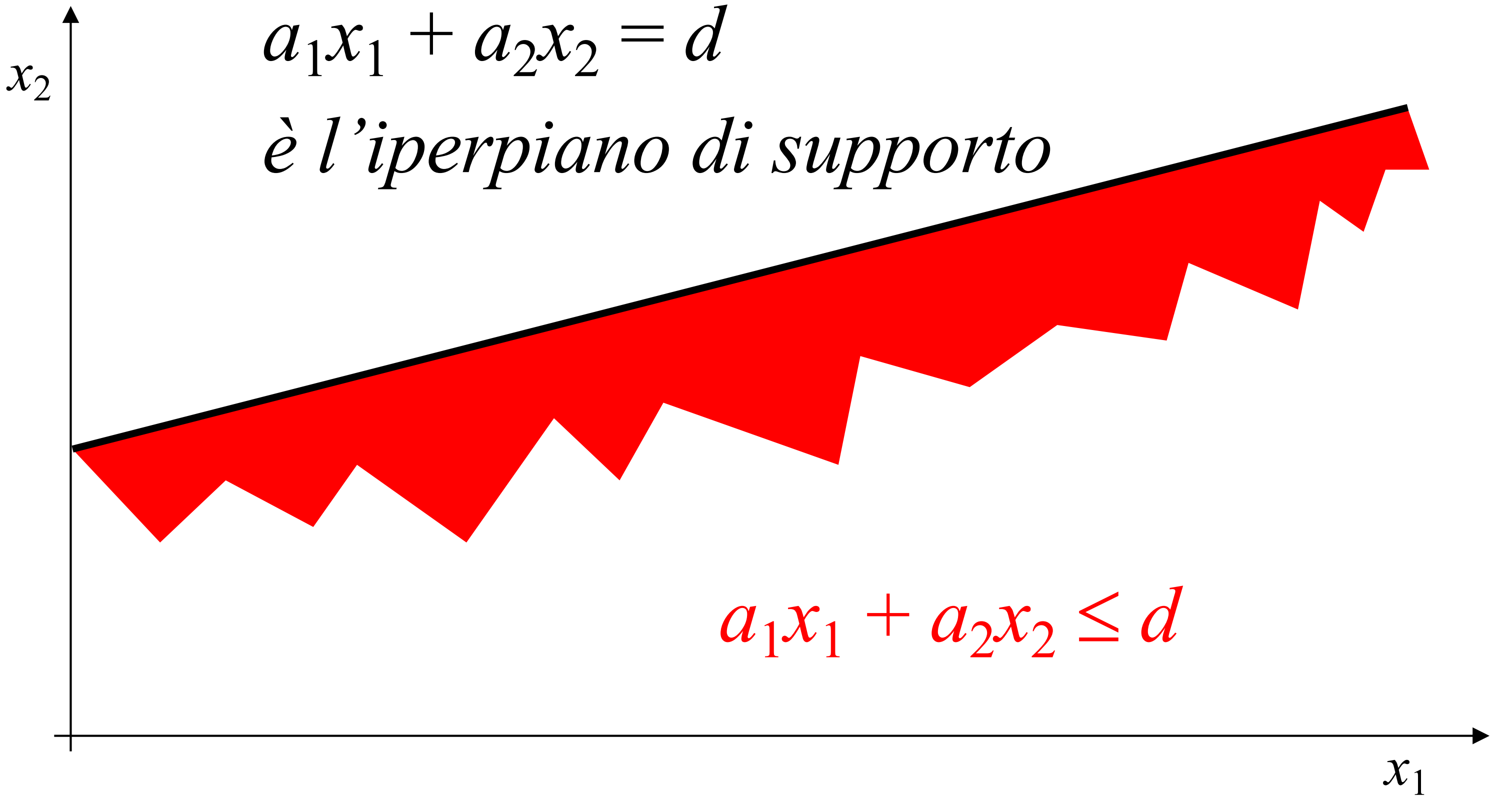
$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = d$

in R^3 *è un piano*



Disequazioni Lineari

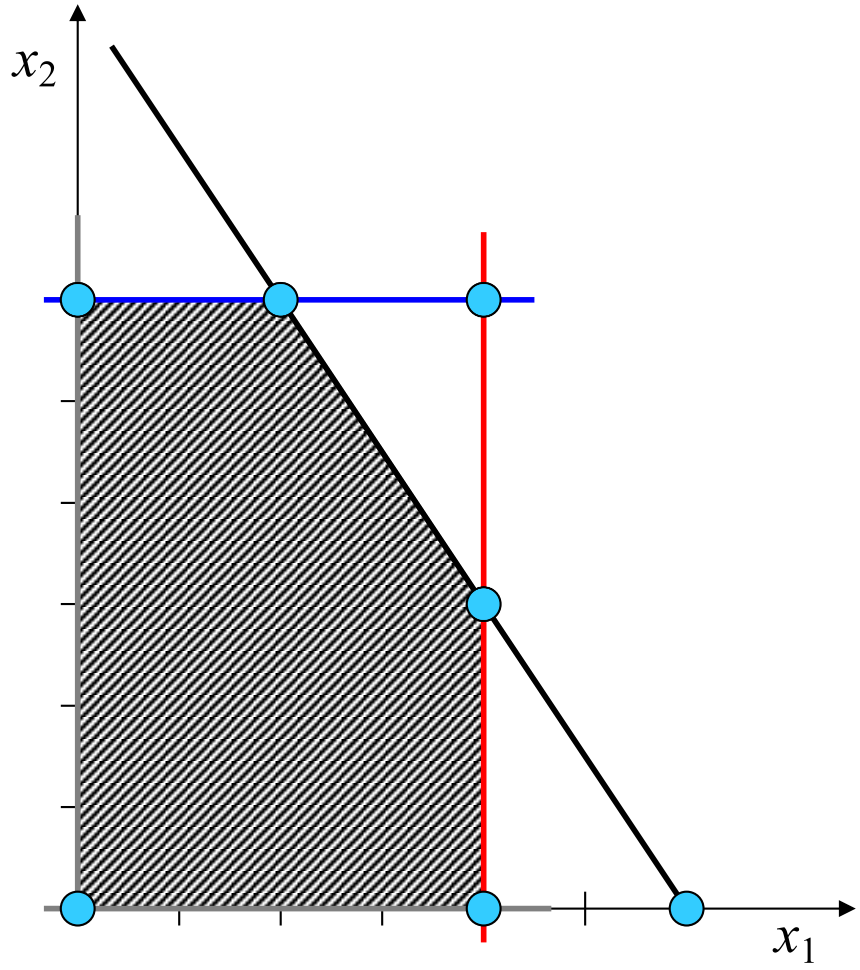
$S = \{ x \in R^n : a^T x \leq d \}$ è un semispazio



Regione ammissibile

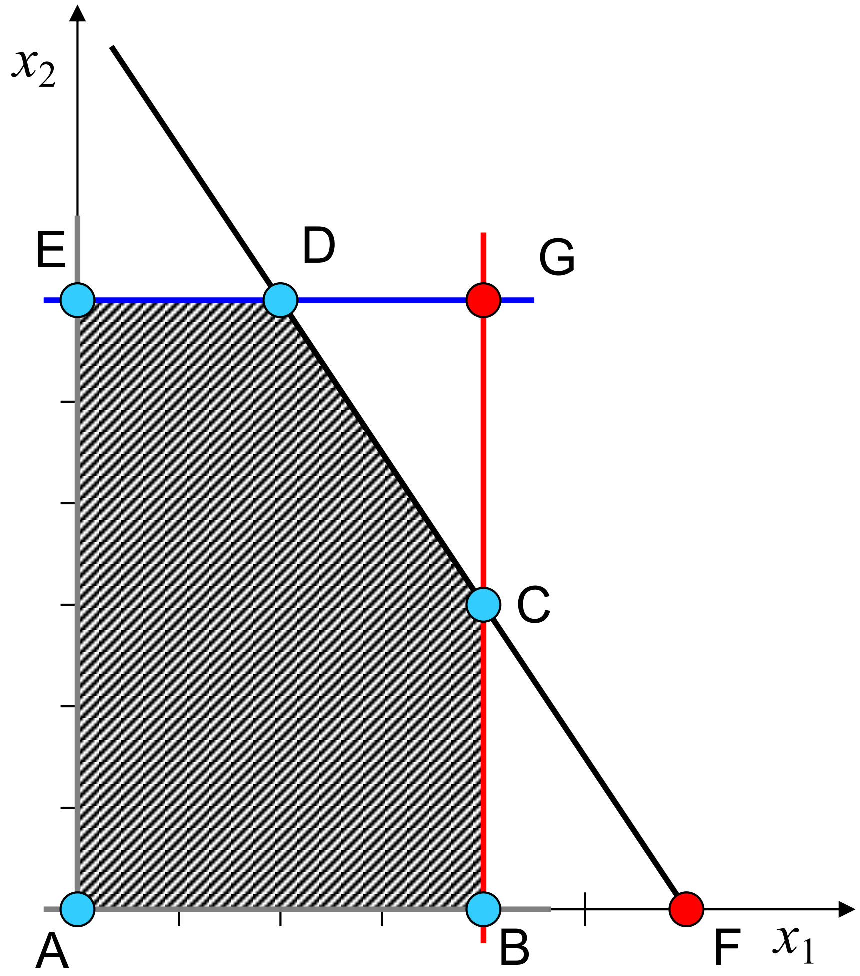
$$\begin{array}{llll} \max z = & 3x_1 & +5x_2 & \\ s.t. & x_1 & & \leq 4 \\ & & 2x_2 & \leq 12 \\ & 3x_1 & +2x_2 & \leq 18 \\ & x_1 & , x_2 & \geq 0 \end{array}$$

Vertici: intersezione di vincoli o di iperpiani di supporto



Regione ammissibile

$$
\begin{array}{llll}
\max z = & 3x_1 & +5x_2 & \\
s.t. & x_1 & & \leq 4 \\
 & & 2x_2 & \leq 12 \\
 & 3x_1 & +2x_2 & \leq 18 \\
 & x_1 & , x_2 & \geq 0
\end{array}
$$

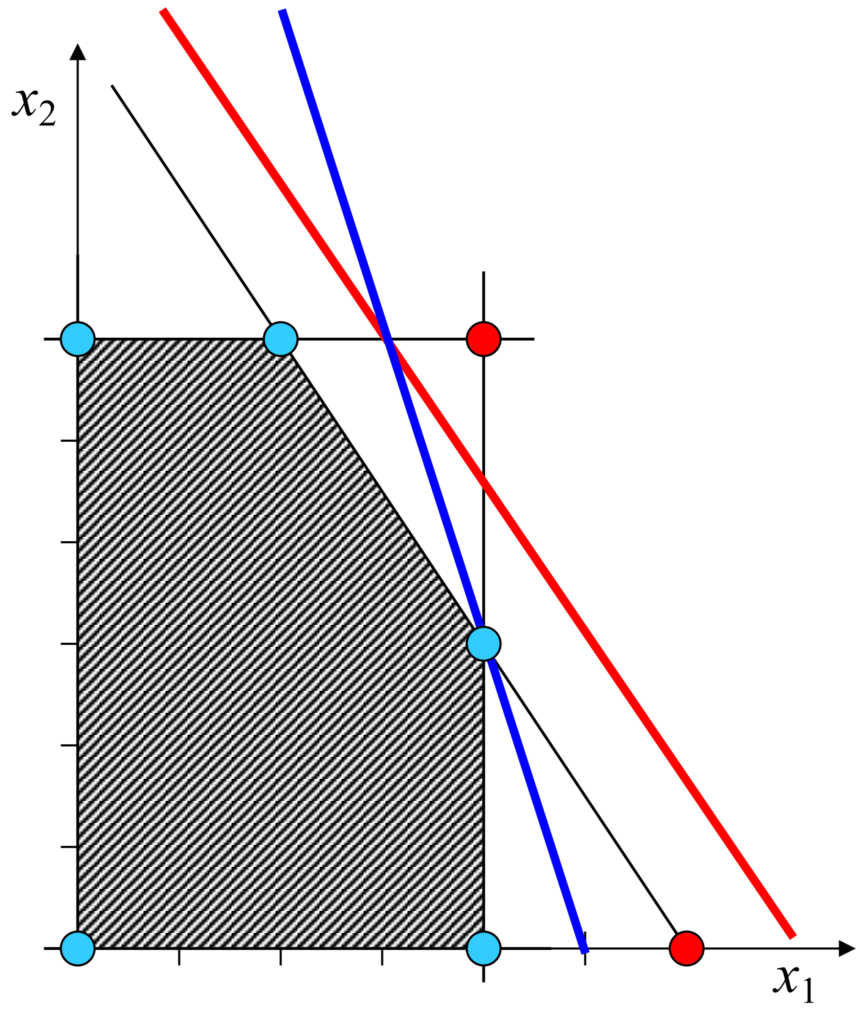


Vincoli ridondanti

$$\begin{aligned}
\max z = \ & 3x_1 + 5x_2 \\
s.t. \quad & x_1 \leq 4 \\
& 2x_2 \leq 12 \\
& 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\
& x_1 , x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

1) $10x_1 + 7x_2 \leq 70$

2) $3x_1 + x_2 \leq 15$

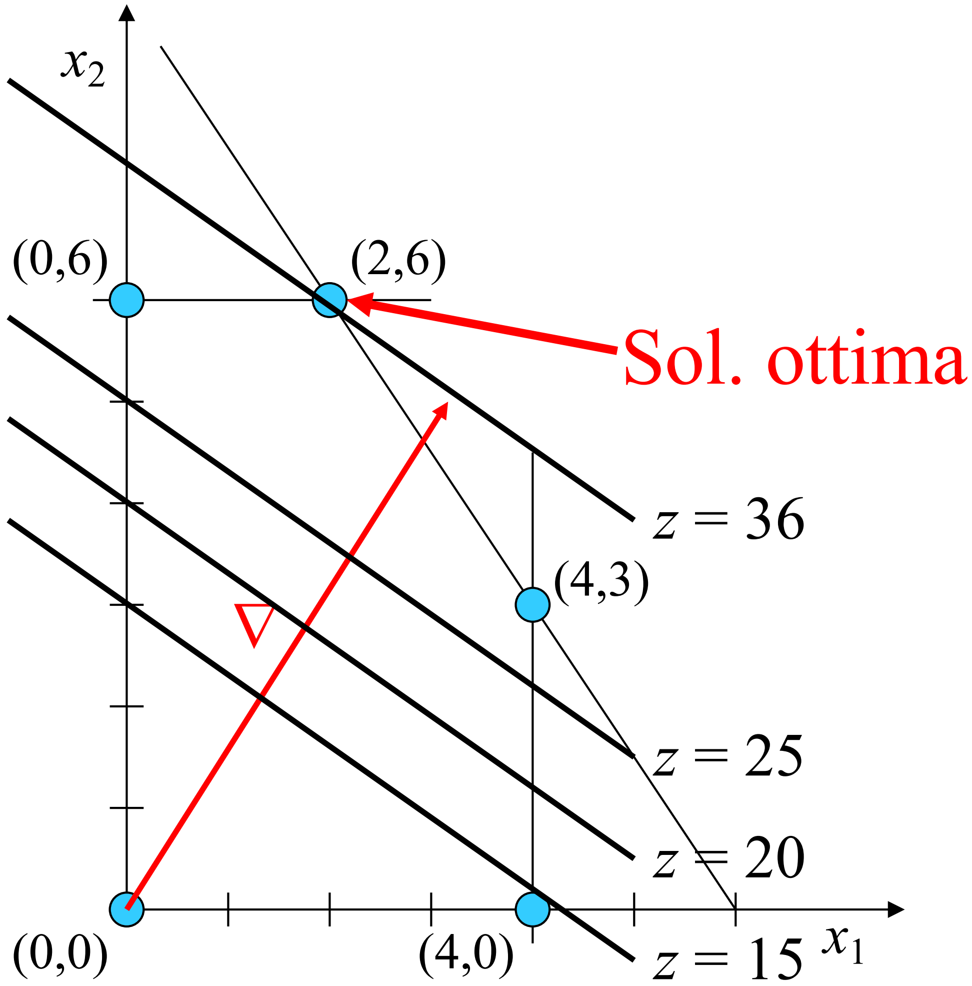


Soluzione grafica (1)

- Si disegnano le rette
  $z = c^T x = costante$
  (perpendicolari al gradiente)
- si cerca l'intersezione tra *F* e la retta con *z* massimo (minimo)

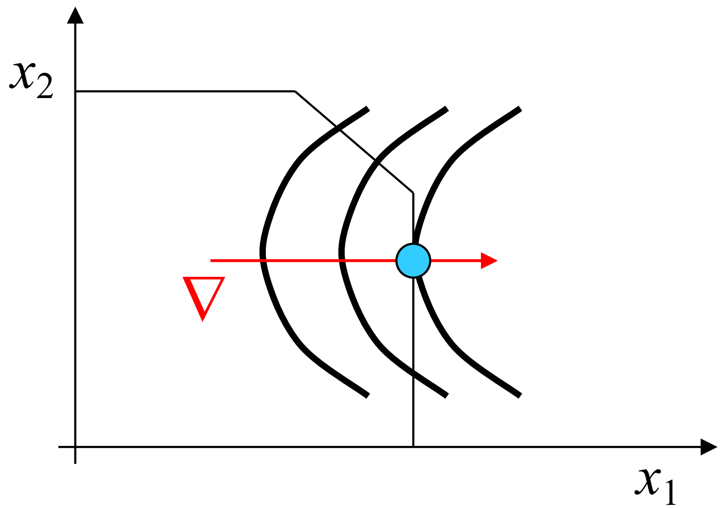
max $z = 3x_1 + 5x_2$

$\nabla = (3,5)$

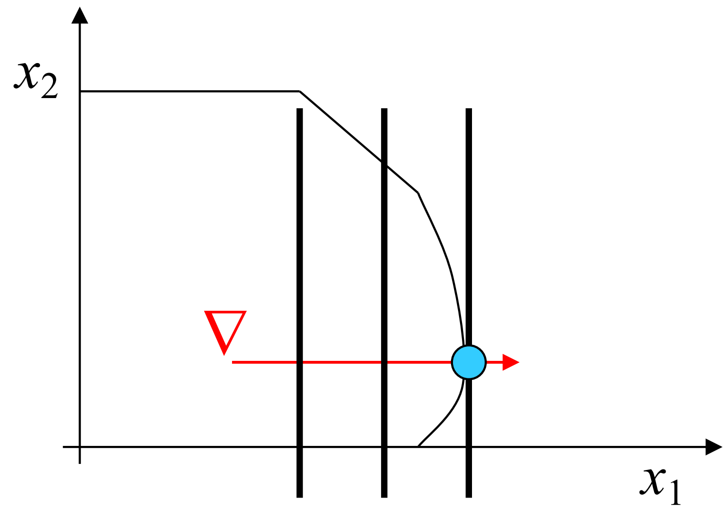


Soluzione grafica (2)

- L'intersezione ottima avviene sempre in corrispondenza di almeno un vertice di *F*
- <u>vero solo per LP</u>



φ non lineare



vincoli non lineari

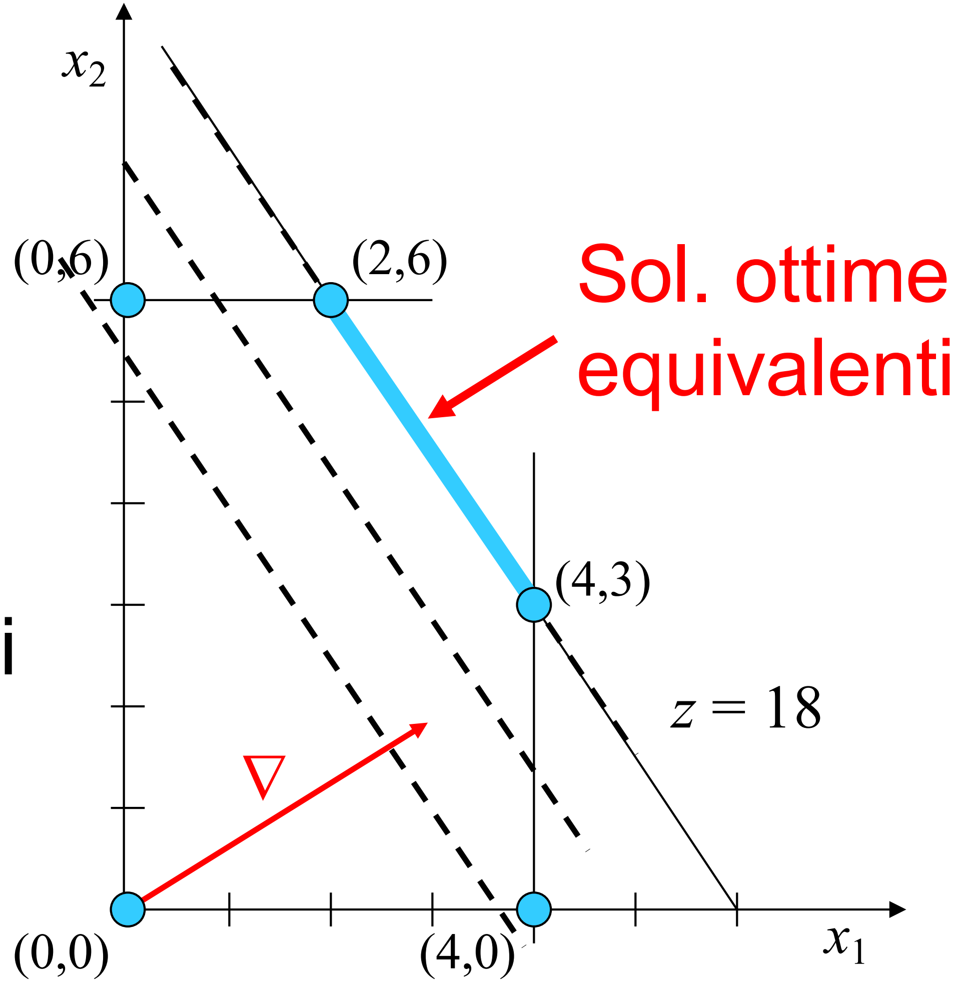
Soluzioni ottime alternative

- Esempio di soluzioni ottime alternative

  max $z = 3x_1 + 2\ x_2$

  $\nabla = (3,2)$

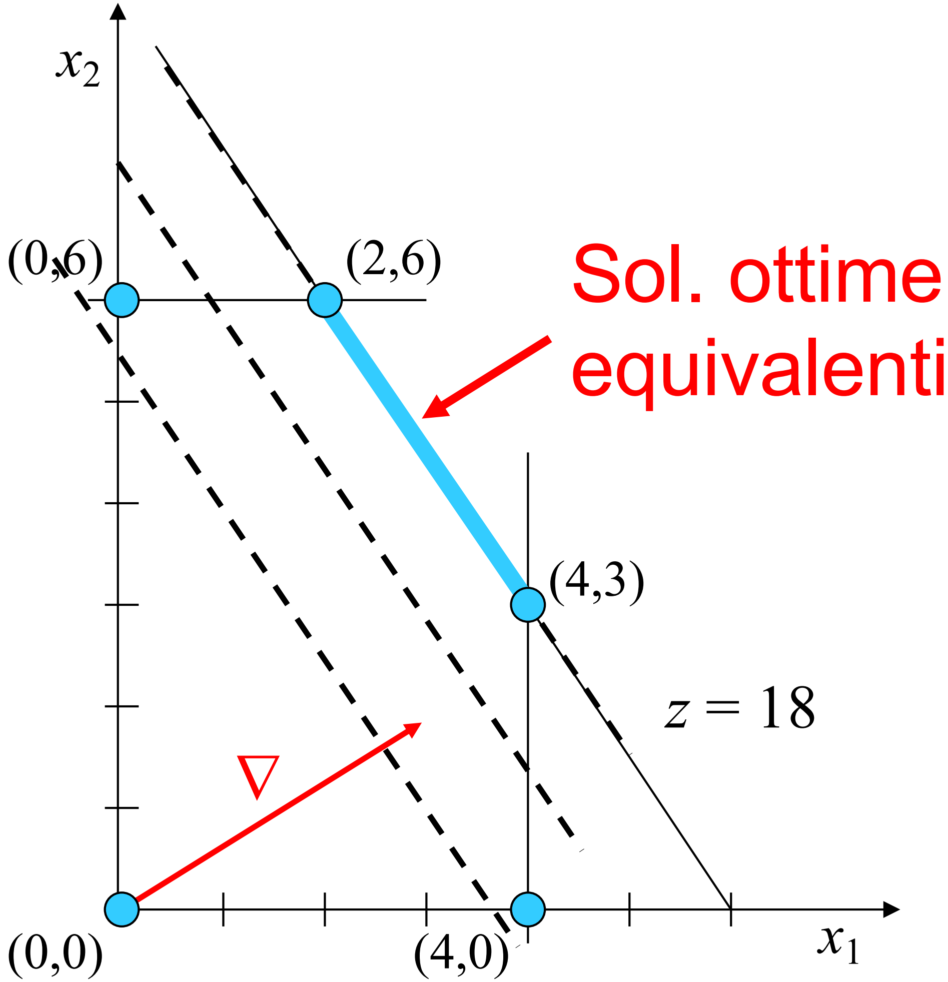
- tra le infinite soluzioni ottime ci sono anche dei vertici



Soluzioni ottime alternative

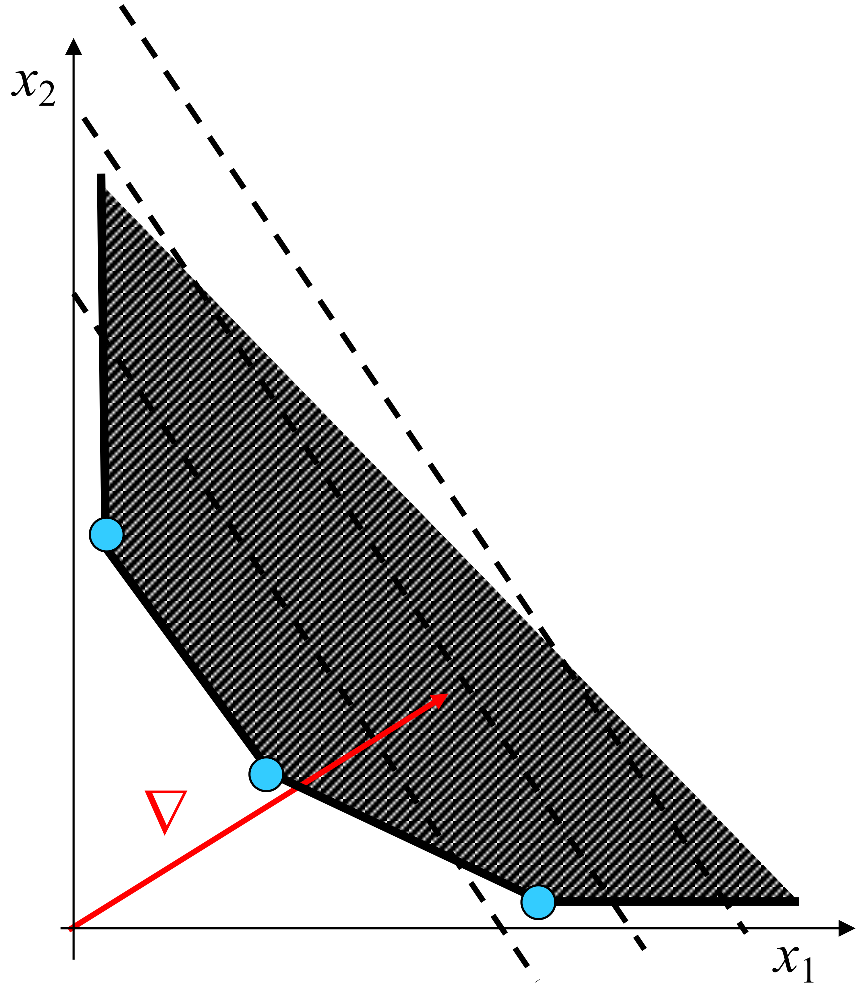
max $z = 3x_1 + 2\ x_2$

$\nabla = (3,2)$

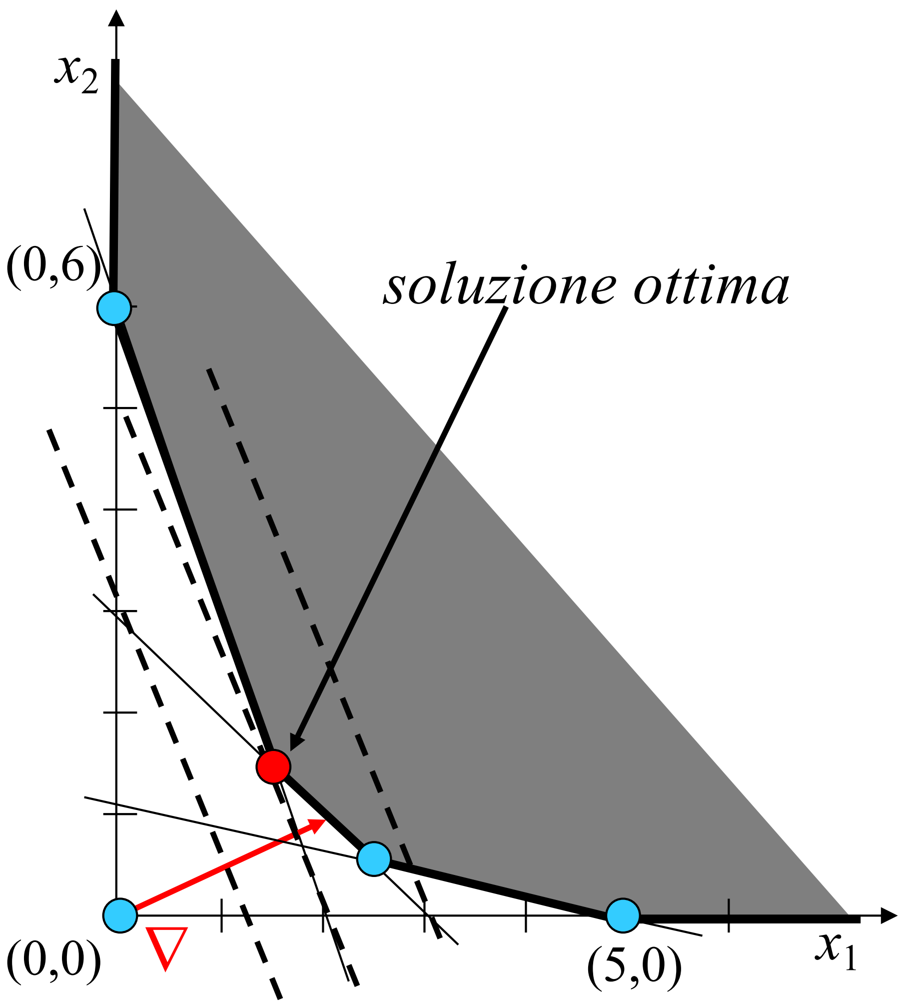


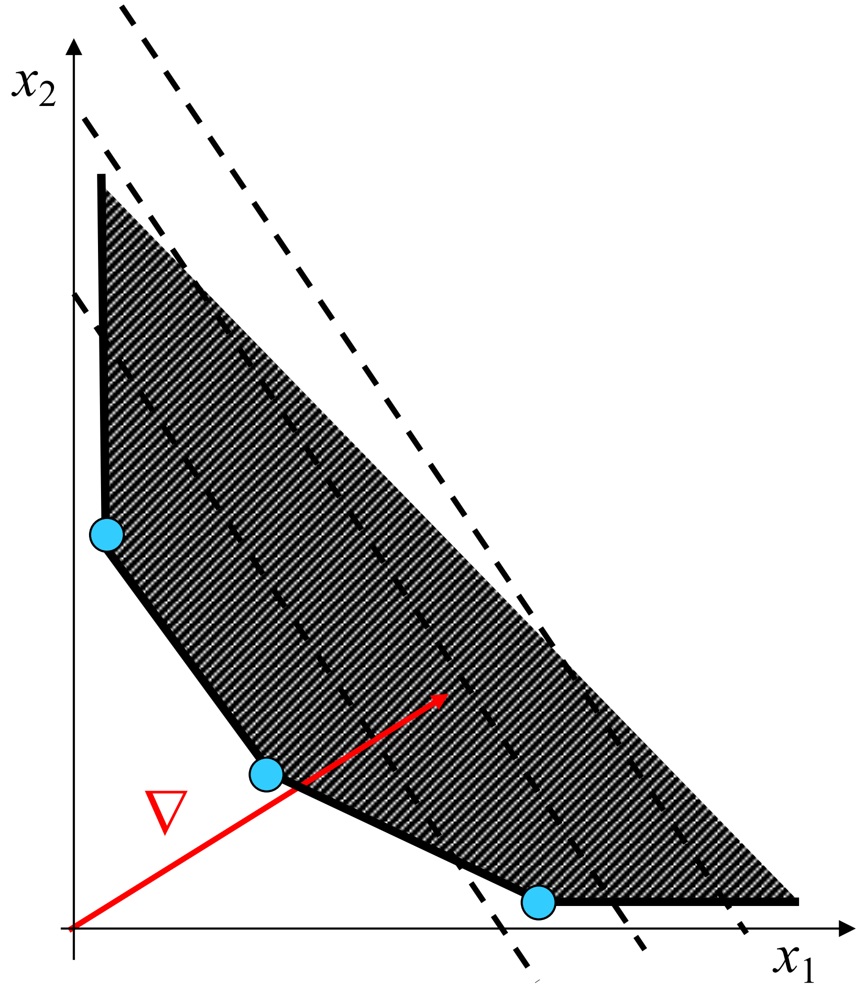
Soluzione ottima illimitata

- La regione ammissibile può essere illimitata
- Es. Dieta
- La soluzione può a sua volta essere illimitata
- Normalmente significa che il modello è "sbagliato"



Soluzione ottima illimitata





Limiti di LP

- Assunzioni implicite nella formulazione di un modello LP:

1) Proporzionalità

2) Additività

3) Divisibilità

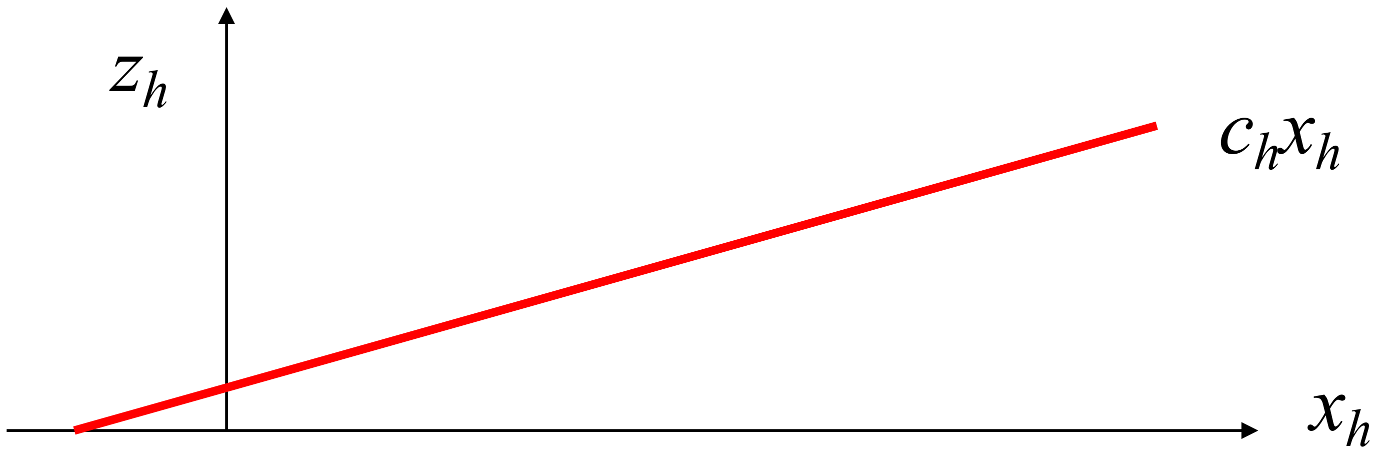
4) Certezza

Proporzionalità

$$z = \ldots + \; c_h x_h \qquad \ldots$$

$$\ldots + \; a_{ih} x_h + \qquad \ldots \leq \; d_i$$

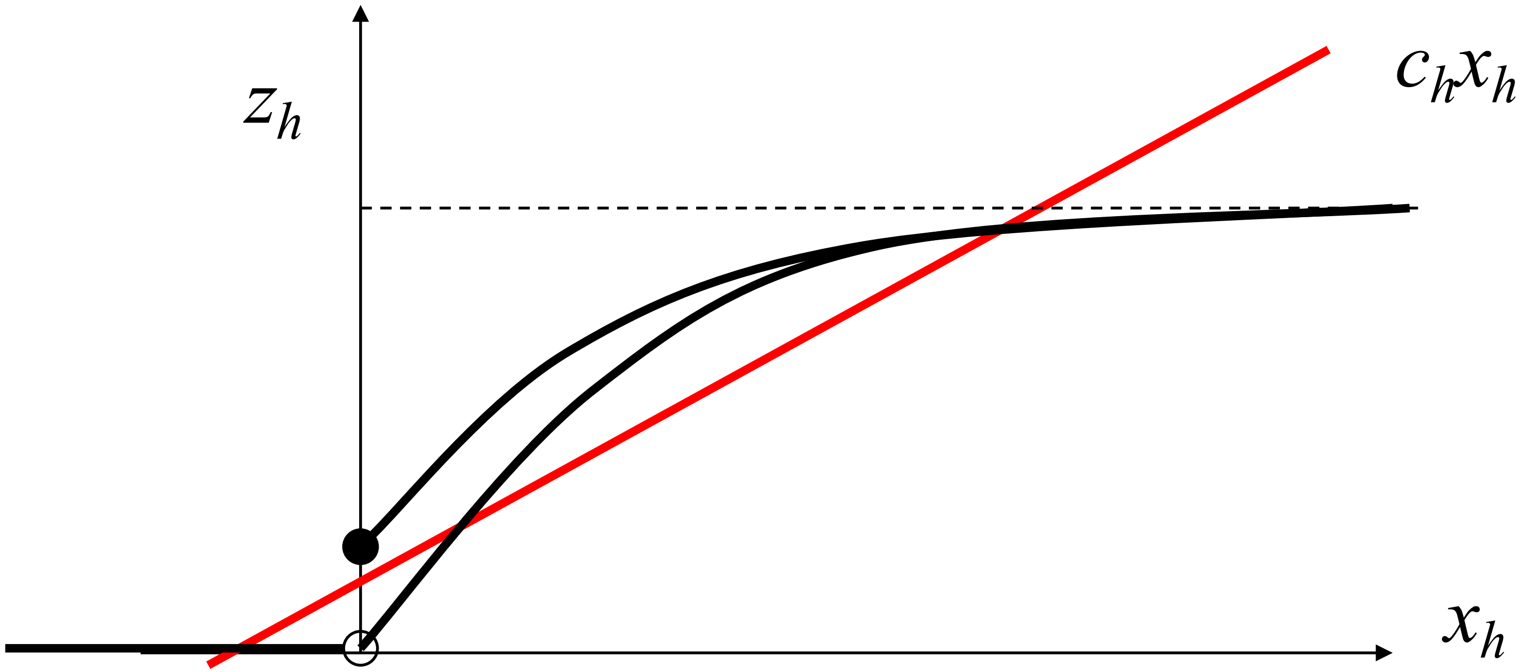
- l'effetto dell'uso della risorsa *h* (f.o., vincoli) è proporzionale al livello x_h impiegato
- la proporzionalità si mantiene in tutto l'intervallo di ammissibilità per x_h



Proporzionalità (2)

- fenomeni di saturazione (costo marginale decrescente)

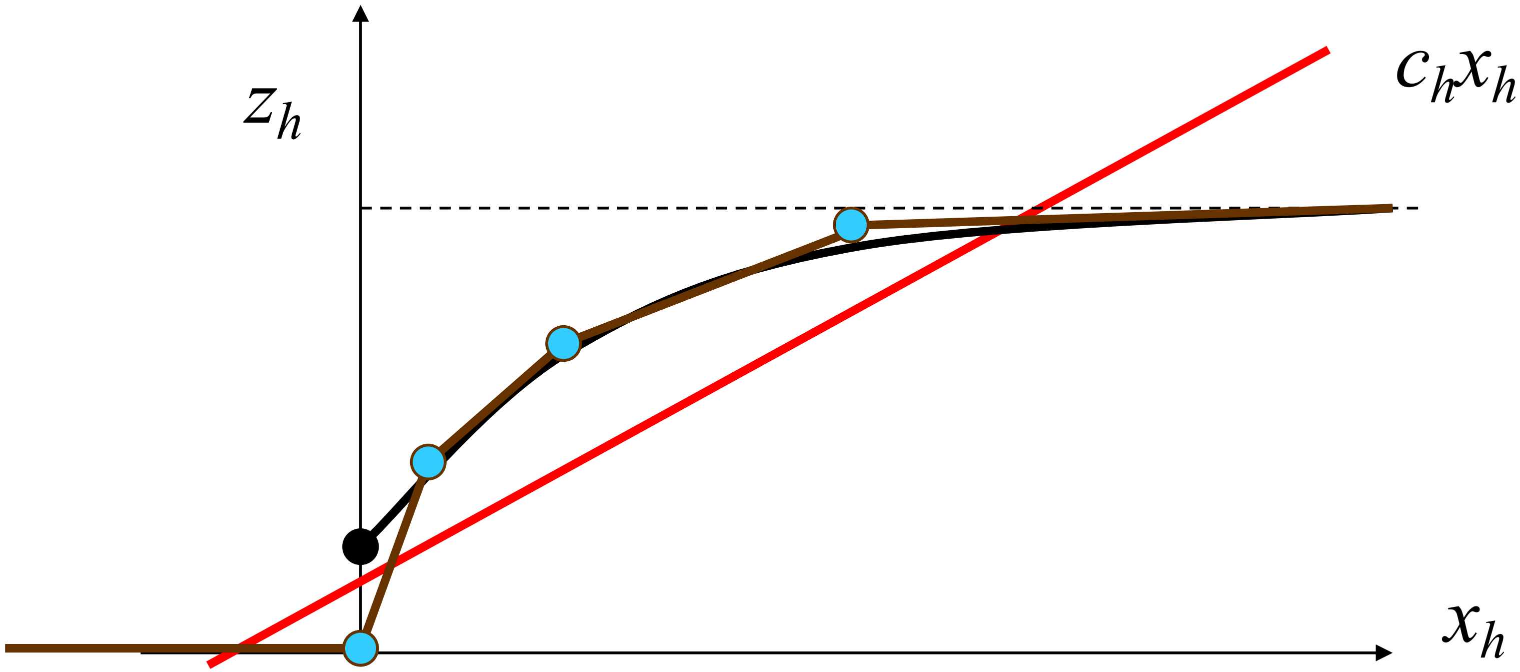
  situazioni di start–up (avviamento)



Proporzionalità (3)

- Migliore approssimazione con funzione lineare a tratti

modello MILP (es. fixed–charge problem)



Additività

- costo soluzione e consumo delle risorse nei vincoli

$$z = \ldots + c_h x_h + c_k x_k \ldots$$

$$\ldots + a_{ih} x_h + a_{ik} x_k \ldots \leq d_i$$

- somma dei termini indipendenti legati alle attività

$\Rightarrow$ Non vi sono interazioni tra le diverse attività che influenzano il costo o i vincoli

$\Rightarrow$ L'effetto dovuto ad una attività non dipende dal livello di produzione delle altre

Divisibilità

- Le variabili decisionali possono essere suddivise ed assumere anche valori non interi (Es. tasso di produzione….)
- Spesso solo i valori interi hanno significato (Es. n. addetti, n. di pezzi prodotti…):
  - riformulazione con variabili che rappresentano percentuali sul numero totale (Es. tasso di produzione….)
  - formulazione con modelli ILP e MILP
  - alcuni LP hanno soluzione ottima sempre intera

Certezza

- Tutti i parametri del modello sono costanti note
- Spesso i parametri sono frutto di stime, previsioni o sono affetti da errori di misura
- se si modifica un costo o un coefficiente la soluzione resta ottima?

- analisi di sensitività della soluzione alla variazione dei parametri

Forme di PL

Programmazione Lineare

Def.: (F, φ) è un problema di Programmazione Lineare (LP, PL) se

- la funzione obiettivo φ è lineare

  Es. $\varphi(x) = c^T x = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$

- la regione ammissibile $F \subseteq R^n$ è definita da

$$g_i(x) \leq 0,\ h_j(x) = 0 \quad (i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, p)$$

con $g_i, h_j : R^n \rightarrow R$ lineare $\forall\, i$ e $\forall\, j$

Es. $a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \ldots + a_{in} x_n \geq d_i$

Regione ammissibile di PL

- *F* è un insieme convesso (poliedro)
- il numero di $x \in F$ da esaminare per determinare x^* è un numero finito ($\equiv$ vertici del poliedro) $\Rightarrow$ problema combinatorio
- Normalmente il problema si esprime in forma matriciale

$$\min c^T x$$
$$Ax \geq d$$
$$x \geq 0$$

Esempio

$$\begin{array}{llllll} \min & 3x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 \\ \text{s.t.} & 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & \geq 2 \\ & x_1 & & & + & 2x_3 & \geq 1 \\ & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq 0 \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$n = 3 \quad m = 2 \quad c^T = [3\ -2\ 1] \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad d = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Forme di PL (1)

- Forma generale

A = matrice intera $m \times n$

d = vettore intero di m elementi

c = vettore intero di n elementi

$$
\begin{array}{llll}
\min & c^T x & & \\
 & a_i^T x = & d_i & i \in M \\
 & a_i^T x \geq & d_i & i \in M' \\
 & x_j \geq & 0 & j \in N \\
 & x_j & \text{libera} & j \in N'
\end{array}
$$

Esempio

$$
\begin{array}{lllll}
\min & x_1 & & +x_3 & \\
 & & x_2 & -2x_3 & = 4 \\
 & x_1 & +x_2 & & \geq 3 \\
 & x_1 & ,x_2 & & \geq 0 \\
 & & & x_3 & \text{libera}
\end{array}
$$

$$M = \{1\} \qquad M' = \{2\}$$

$$N = \{1,2\} \qquad N' = \{3\}$$

$$m = 2 \qquad n = 3$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$d = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Forme di PL (2)

- Forma canonica

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ & Ax \geq d \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

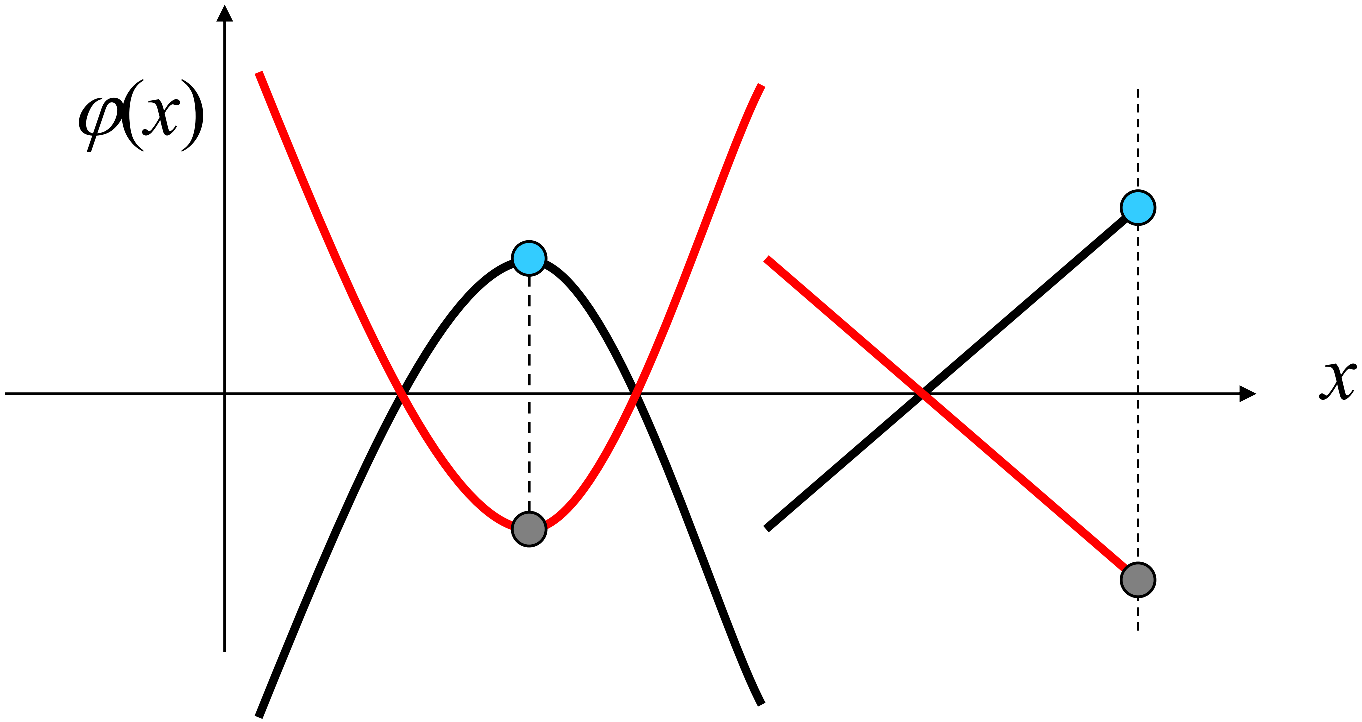
- Forma standard

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ & Ax = d \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Le 3 forme sono equivalenti (1)

a) Funzione obiettivo:

$$\max c^T x = -\min(-c^T x)$$



Le 3 forme sono equivalenti (2)

b) Trasformazione di disequazioni in equazioni:

b1) $x_1 \leq d_1 \quad \Rightarrow x_1 + x_s = d_1$

$x_s \geq 0$ variabile slack

In ogni soluzione ammissibile (x_1, x_s):

se $x_s = 0 \;\Rightarrow x_1 = d_1$; se $x_s > 0 \;\Rightarrow x_1 < d_1$

b2) $x_1 \geq d_1 \quad \Rightarrow x_1 - x_s = d_1$

$x_s \geq 0$ variabile surplus

Le 3 forme sono equivalenti (3)

c) Trasformazione di equazioni in disequazioni:

$$a_i^T x = d_i \Rightarrow \begin{cases} a_i^T x & \geq & d_i \\ -a_i^T x & \geq & -d_i \end{cases}$$

d) Variabili libere

x_i libera $\Rightarrow x_i = x_i^+ - x_i^-$ con $x_i^+, x_i^- \geq 0$

b), d) *aumentano* *n*

c) *aumenta* *m*

Esempio

$$
\begin{array}{rcll}
\max z = -2x_1 & + & 3x_2 & \\
x_1 & + & 2x_2 & \leq 4 \\
2x_1 & - & x_2 & = 2 \\
 & & & \\
x_1 & & & \geq 0 \\
 & & x_2 & \text{libera}
\end{array}
$$

Forma generale $\rightarrow$ F. canonica (1)

$$
\begin{array}{rrll}
\max z = & -2x_1 + 3x_2 & & \\
& x_1 + 2x_2 & \leq 4 & \\
& 2x_1 - x_2 & = \cancel{2} & \geq 2 \\
& -2x_1 + x_2 & \geq -2 & \\
& x_1 & \geq 0 & \\
& x_2 & \text{libera} &
\end{array}
$$

Forma generale $\rightarrow$ F. canonica (2)

$$
\begin{array}{rl}
\max z = -2x_1 + \cancel{3x_2} + 3x_2^{+} - 3x_2^{-} & \\
x_1 + \cancel{2x_2} + 2x_2^{+} - 2x_2^{-} & \leq 4 \\
2x_1 - x_2 - x_2^{+} + x_2^{-} & \geq 2 \\
-2x_1 + \cancel{x_2} + x_2^{+} - x_2^{-} & \geq -2 \\
x_1, x_2^{+}, x_2^{-} & \geq 0 \\
\cancel{x_2} & \text{libera}
\end{array}
$$

Forma generale $\rightarrow$ F. canonica (3)

$$
\begin{array}{rcl}
\max z = -2x_1 + 3x_2^+ - 3x_2^- & & \\
\overset{-}{} x_1 \overset{-}{\cancel{+}} 2x_2^+ \overset{+}{\cancel{-}} 2x_2^- & \cancel{\leq 4} & \geq -4 \\
2x_1 - x_2^+ + x_2^- & \geq & 2 \\
-2x_1 + x_2^+ - x_2^- & \geq & -2 \\
x_1 \;,\; x_2^+ \;,\; x_2^- & \geq & 0
\end{array}
$$

Forma generale → F. canonica (4)

-min – z =

$$
\begin{array}{rcl}
\cancel{\max z} = \overset{+}{\cancel{-}}\,2x_1 \overset{-}{\cancel{+}}\,3x_2^+ \overset{+}{\cancel{-}}\,3x_2^- & & \\
-\,x_1 - 2x_2^+ + 2x_2^- & \geq & -4 \\
2x_1 \;-\; x_2^+ \;+\; x_2^- & \geq & 2 \\
-\,2x_1 \;+\; x_2^+ \;-\; x_2^- & \geq & -2 \\
x_1 \;,\; x_2^+ \;,\; x_2^- & \geq & 0
\end{array}
$$

Forma generale $\rightarrow$ F. canonica (5)

$$
\begin{array}{rrrrrl}
-\min -z = & 2x_1 & -3x_2^+ & +3x_2^- & & \\
 & -x_1 & -2x_2^+ & +2x_2^- & \geq & -4 \\
 & 2x_1 & -x_2^+ & +x_2^- & \geq & 2 \\
 & -2x_1 & +x_2^+ & -x_2^- & \geq & -2 \\
 & x_1 & ,\ x_2^+ & ,\ x_2^- & \geq & 0
\end{array}
$$

Forma generale $\rightarrow$ Forma standard

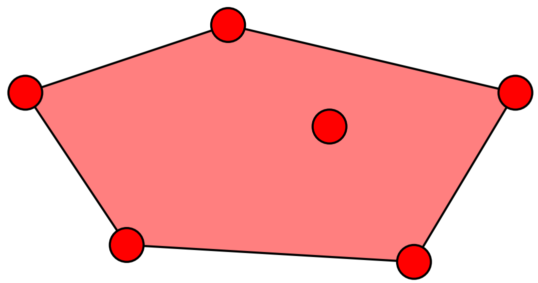
$$
\begin{array}{lrrrrl}
-\min -z = & 2x_1 & -\,3x_2^+ & +\,3x_2^- & & \\
& x_1 & +\,2x_2^+ & -\,2x_2^- & +\,x_3 & = 4 \\
& 2x_1 & -\,x_2^+ & +\,x_2^- & & = 2 \\
& & & & & \\
& x_1 & ,\,x_2^+ & ,\,x_2^- & ,\,x_3 & \geq\; 0
\end{array}
$$

Vertici ed Insiemi Convessi

Def.: z è vertice di un insieme convesso S

$\Leftrightarrow$ non è esprimibile come combinazione convessa di altri punti di S

Def.: Dato un insieme di punti $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_K\} \subset R^n$ si dice chiusura convessa di P, $conv$(P) il più piccolo insieme convesso che contiene P.



Teoremi

Th. 1:

Ogni punto di un politopo (poliedro limitato) è combinazione convessa dei vertici del politopo

Th. 2:

In un problema PL con *F* non vuoto e limitato esiste sempre almeno un vertice ottimo

Dimostrazione (probl. di minimo)

c = vettore costo;

$x^{(0)}$ = soluzione ottima (non vertice)

$x^{(1)},\ldots,x^{(p)}$ = vertici di F

$x^{(0)} \in F \Rightarrow x^{(0)} = \sum_{i=1,p} \lambda_i x^{(i)}$ con $\sum_{i=1,p} \lambda_i = 1,\ \lambda_i \geq 0\ \forall i$

sia $x^{(j)}$ il vert. di costo min.: $c^T x^{(j)} = \min_{1 \leq i \leq p} \{c^T x^{(i)}\}$

$$c^T x^{(0)} = c^T \sum_{i=1,p} \lambda_i x^{(i)} \geq c^T x^{(j)} \sum_{i=1,p} \lambda_i = c^T x^{(j)}$$

$$\Rightarrow c^T x^{(0)} \geq c^T x^{(j)}$$

Esiste un vertice $x^{(j)}$ cui corrisponde una soluzione non peggiore di $x^{(0)}$!!!