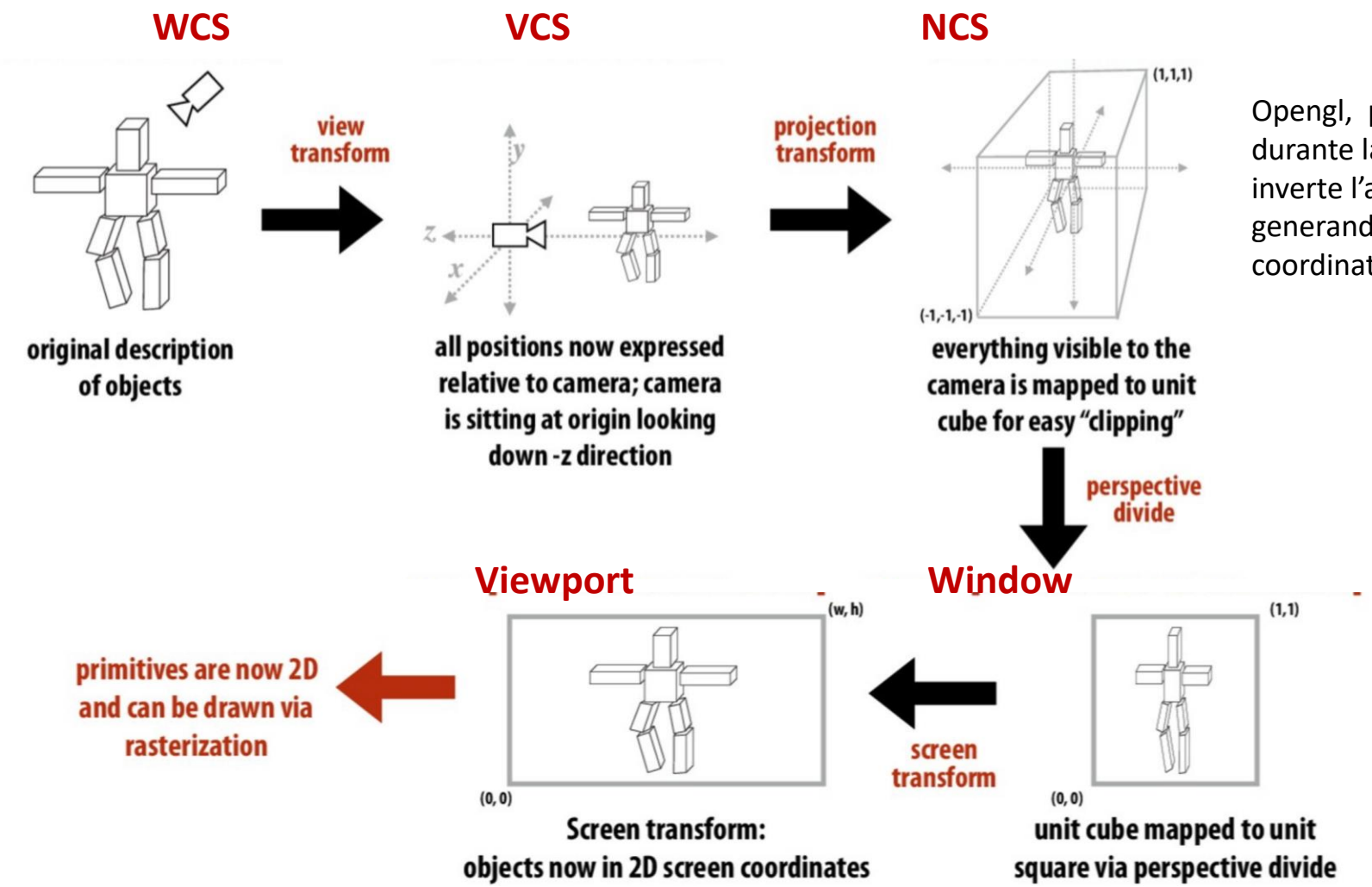
La pipeline di rendering

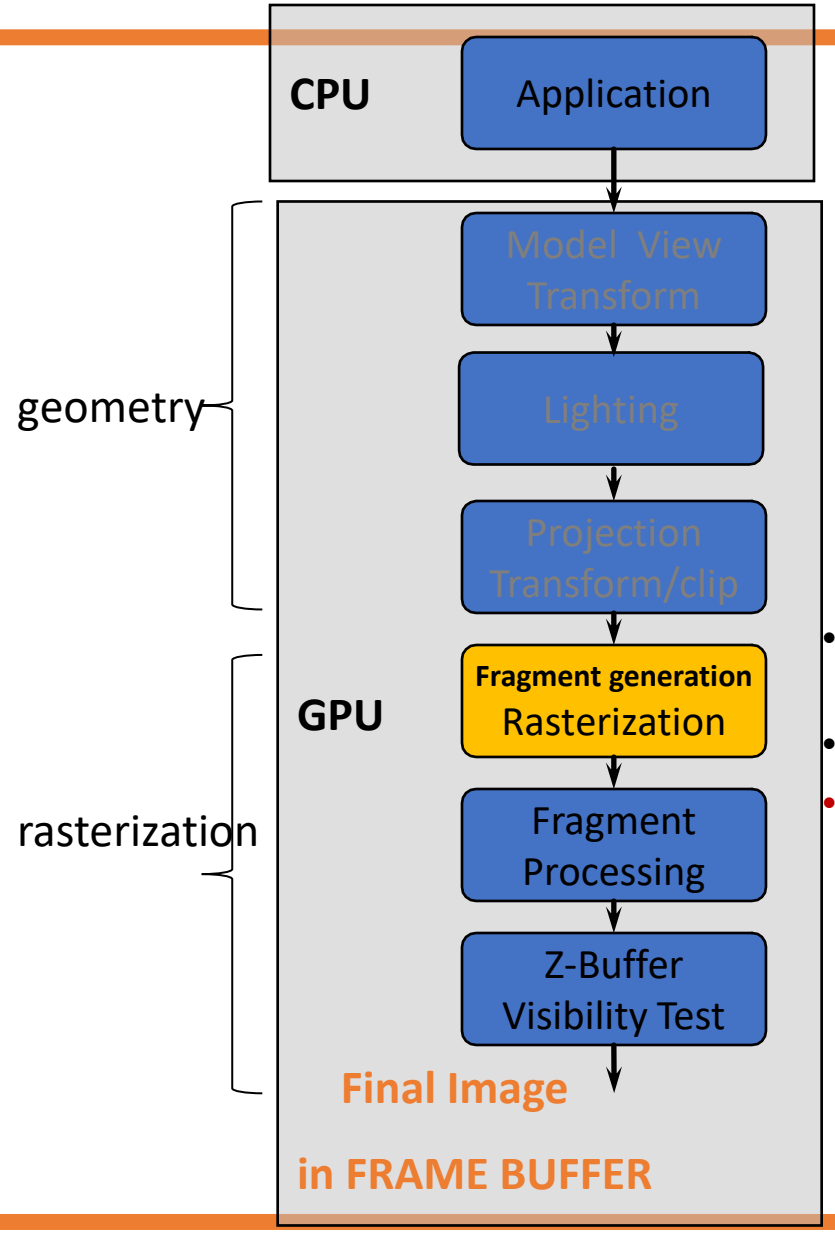
Il sottosistema raster

Geometry stage

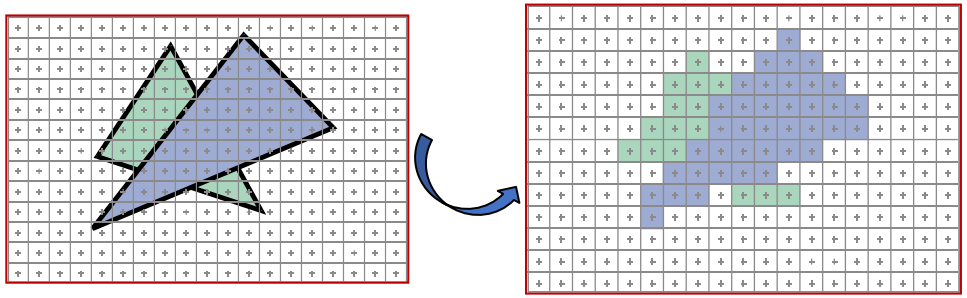


Opengl, per convenzione, durante la proiezione, inverte l'asse z del cuboide generando un left handed coordinate system

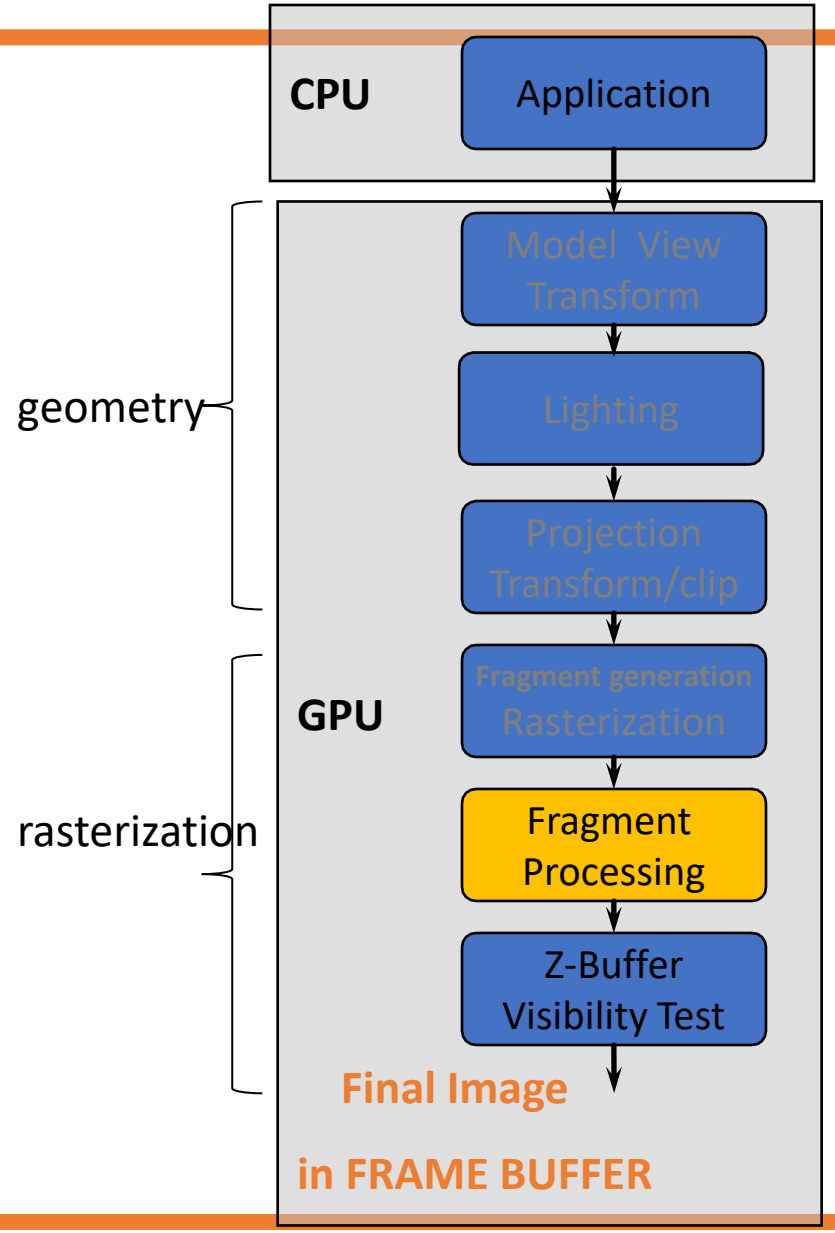
Scan Conversion (Rasterization)



- Determina quali pixels sono interni alla primitiva specificata da un insieme di vertici
- Produce un insieme di frammenti.
- **I Frammenti** hanno una posizione (pixel location) e altri attributi, come colore e coordinate di texture che vengono determinati interpolando i valori sui vertici.

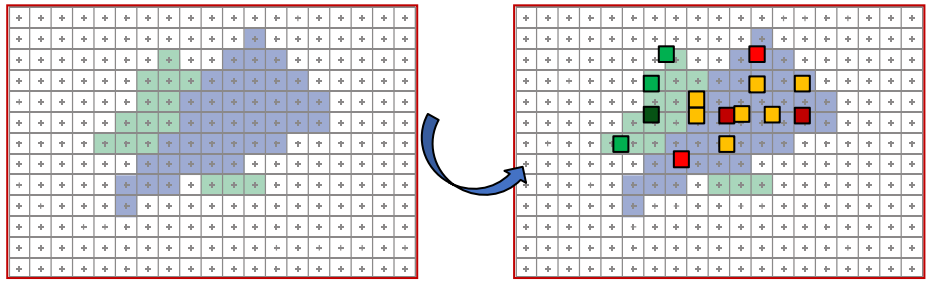


Fragment processing

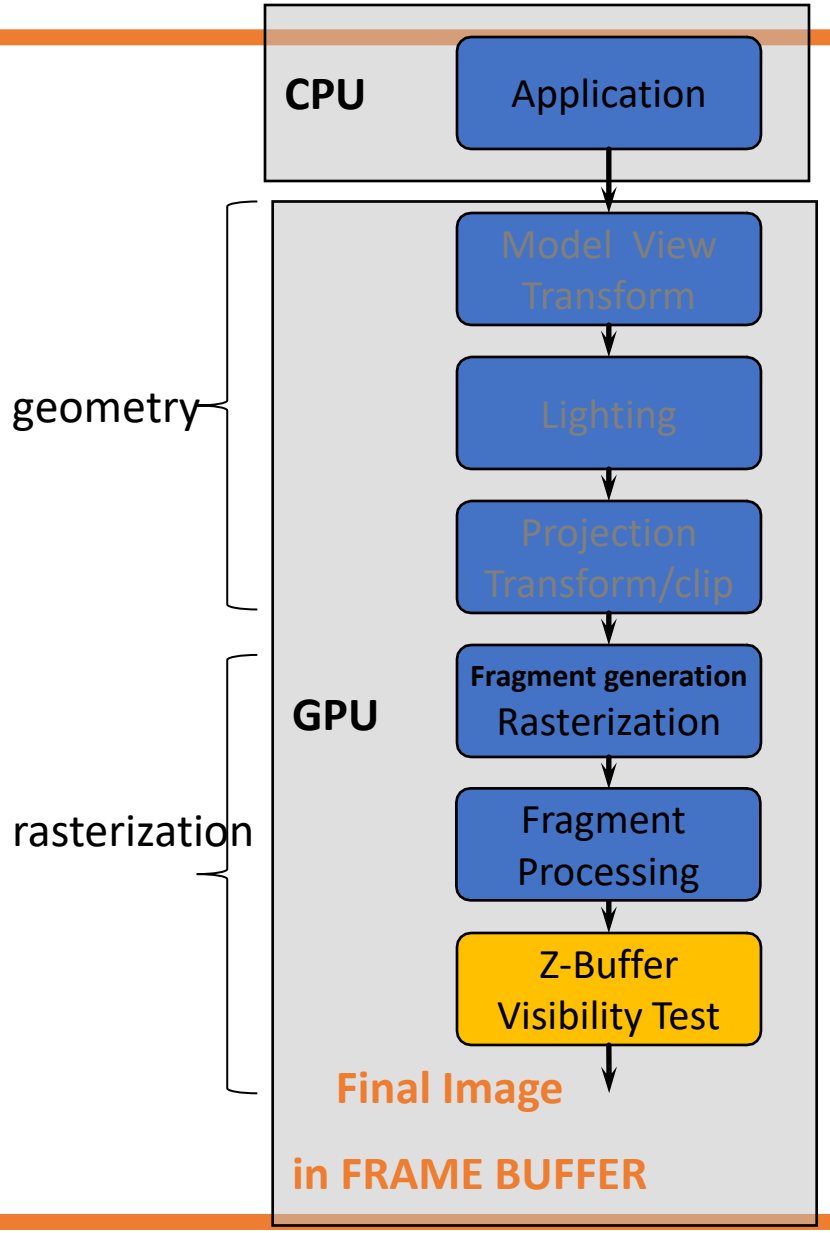


- **Elaborazione dei Frammenti**

I colori dei pixel vengono determinati successivamente usando colori, texture ed altre proprietà dei vertici. (Texture Mapping)



Visibility / Display



Disegna l'oggetto più vicino.

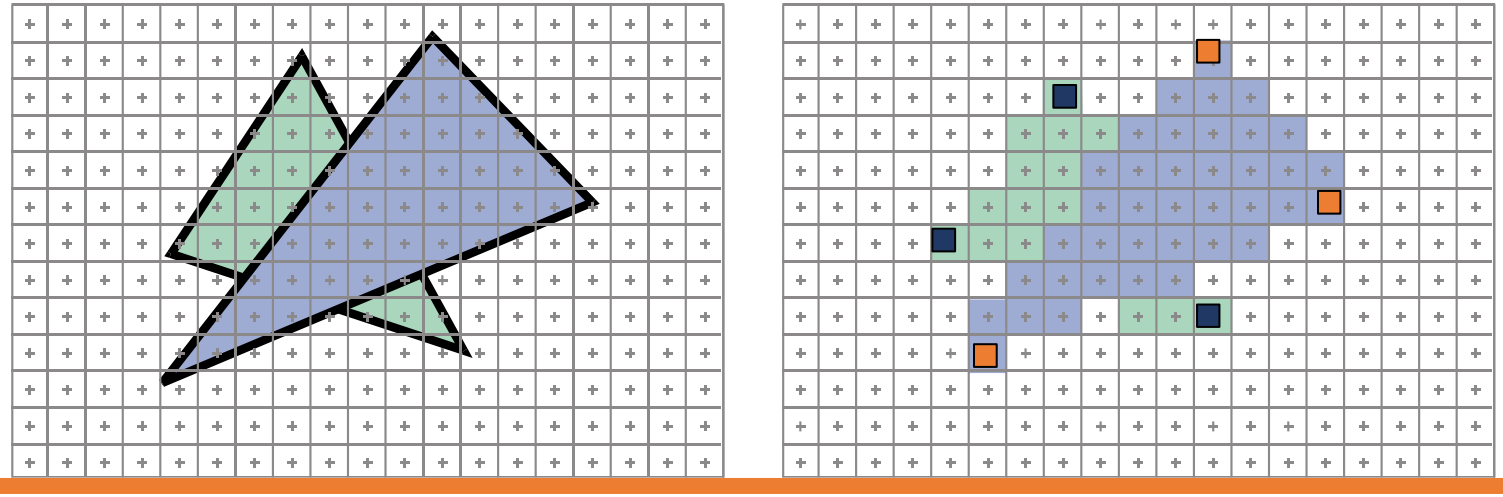
(depth buffer)

Rasterization

- Primitive geometriche

  (punti, line, poligoni, cerchi, etc,)

- Le primitive sono continue, lo schermo è discreto.
- Rasterization: algoritmi per la generazione efficiente dei frammenti occupati da una primitive geometrica.
  - Enumera I frammenti occupati dalla primitiva
    - Interpola I valori, detti attributi, lungo la primitiva.



Rasterizzazione

- Con il termine rasterizzazione si intende propriamente il processo di **discretizzazione** che consente di trasformare una primitiva geometrica definita in uno spazio continuo 2D nella sua rappresentazione discreta, composta da un insieme di pixel di un dispositivo di output.

Drawing

- Tracciare un segmento di retta all'interno di una griglia regolare di pixel che hanno distanza unitaria in ascissa e in ordinata (coordinate schermo)

Casi Speciali

- Linea orizzontale:

Disegna il pixel P e incrementa il valore della coordinata x di 1 per ottenere il pixel successivo.

- Linea verticale:

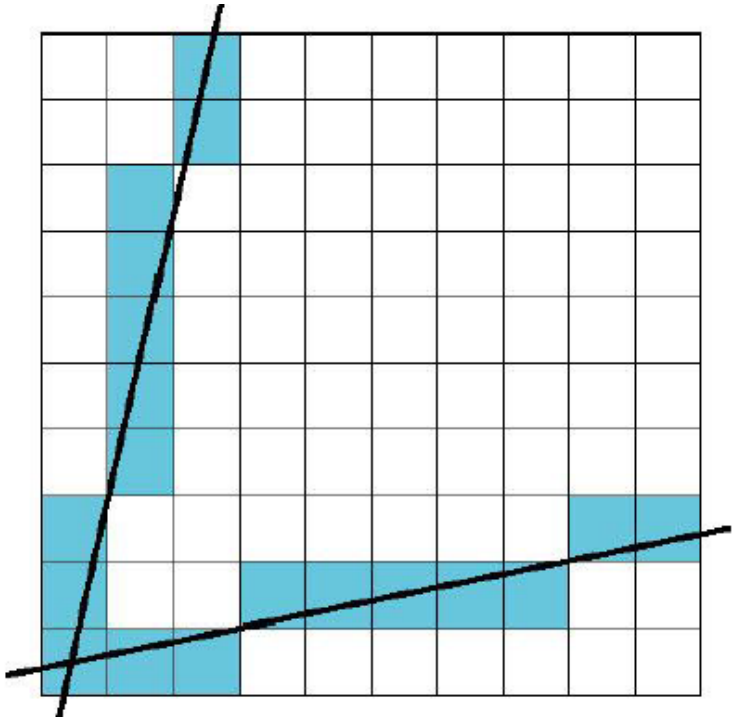
Disegna il pixel P e incrementa il valore della coordinata y di 1 per ottenere il pixel successivo.

- Linea diagonale:

Disegna il pixel P e incrementa entrambe le coordinate x ed y di 1 per ottenere il pixel successivo.

Per coefficienti angolari $|m|>1$
la rasterizzazione presenta un pixel per riga.

$m > 1$



$m < 1$

- Per coefficienti angolari $|m| \leq 1$ la rasterizzazione presenta un pixel per colonna.

Algoritmo DDA (Digital Differential Analyzer)

$$y = mx + q, \quad |m| \leqslant 1 \rightarrow \text{il prossimo pixel si accende per x+1}$$

$$y_{new} = m(x+1) + q = mx + q + m \equiv y + m$$

$$|m| \geqslant 1 \rightarrow \text{il prossimo pixel si accende per y+1}$$

$$x_{new} = \frac{1}{m}(y + 1 - q) = \frac{1}{m}(y - q) + \frac{1}{m} \equiv x + \frac{1}{m}$$

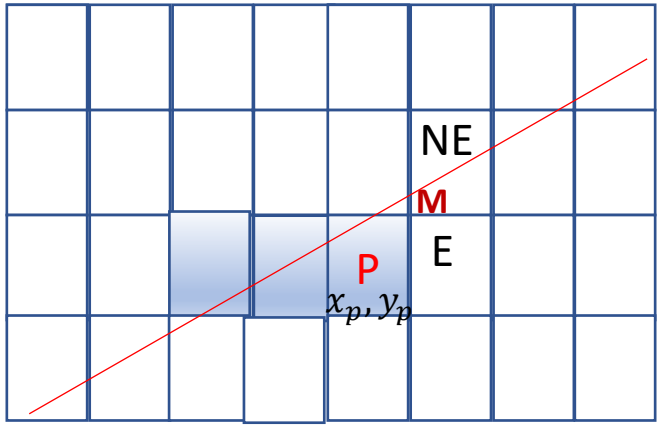
```
Calcola m=(y1-y0)/(x1-x0)
Se |m|<=1 allora
        Poni y=y0
        Ripeti per x=x0; x<=x1; x++
                Accendi il punto (x,round(y))
                y+=m
Altrimenti
        Poni x=x0
        Ripeti per y=y0; y<=y1; y++
                Accendi il punto (round(x), y)
                x+=(1/m)
```

Algoritmo di Bresenham o Mid-Point

- L'algoritmo di Bresenham (detto anche *algoritmo del punto di mezzo*) risolve il problema dell'errore introdotto dall'uso di aritmetica floating point nell'algoritmo DDA;
- L'algoritmo di Bresenham fa uso solo di operazioni in aritmetica intera;
- E' ancora un algoritmo di tipo differenziale; fa uso delle informazioni calcolate per individuare il pixel al passo *i* per individuare il pixel al passo *i+1.*

- Nel seguito, ancora l'ipotesi non restrittiva m<1.

Algoritmo di Bresenham



$$NE(x_p + 1, y_p + 1)$$

$$E(x_p + 1, y_p)$$

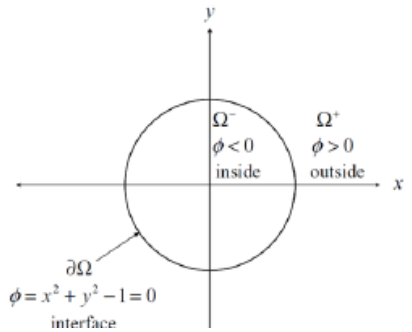
Si assumerà inizialmente di considerare m>0 e, in particolare, $m \in (0,1]$.

La soluzione per le altre pendenze si può ottenere semplicemente per riflessione della geometria illustrata in figura rispetto agli assi principali.

Si consideri di aver già acceso i pixel della primitiva fino al generico punto P di coordinate (x_p , y_p).

Piccolo inciso

La forma implicita di una curva, valutata in un punto P di coordinate (x,y) , ci dà informazioni sulla posizione del punto rispetto alla curva, cioè se il punto appartiene alla curva, è situato sopra la curva o è situato sotto la curva.



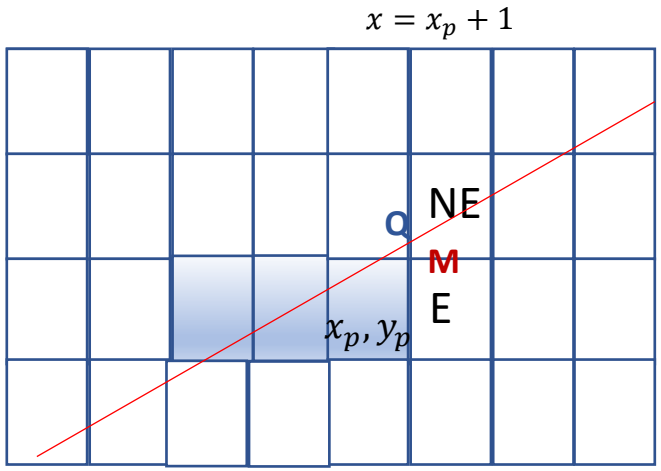
Se F(x,y)=0 il punto è sulla curva
Se F(x,y)<0 il punto è dentro
Se F(x,y)>0 il punto è fuori

Nel caso di una retta, la forma implicita è F(x,y)=ax+by+c;

Se valutiamo F in un punto P (x,y), allora

Se F(x,y)=0 il punto è sulla retta
Se F(x,y)<0 il punto è sopra la retta (la retta passa sotto il punto P(x,y))
Se F(x,y)>0 il punto è sotto la retta. (la retta passa sopra il punto P(x,y))

Algoritmo Midpoint



$NE(x_p + 1, y_p + 1)$

$E(x_p + 1, y_p)$

L'idea di base di questo approccio è quella di individuare, passo dopo passo, il pixel più vicino all'effettivo punto di intersezione Q tra la retta da disegnare e la retta $x = x_p + 1$ corrispondente al successivo punto da accendere.

I candidati, ad ogni passo sono solo i due pixel E (x_p +1, y_p) ovvero NE (x_p +1, y_p +1).

Per far questo si valuterà il passaggio della retta, espressa in forma implicita
$F(x, y) = ax + by + c = 0$, per il punto medio M (x_p +1, y_p +1/2)

Algoritmo Midpoint

L'implementazione è, anche in questo caso, incrementale.

Si consideri l'equazione della retta in forma esplicita:
$y=mx+q=(y_1 - y_0)/(x_1 - x_0)x+q=(dy/dx)x+q$.

Allora la forma implicita si ottiene come: $F(x, y) = dy \cdot x - dx \cdot y + dx \cdot q = ax + by + c = 0$

Si definisce una variabile di decisione *d*

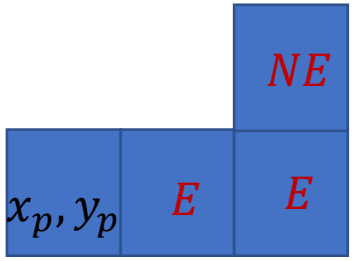
$$d = F(x_M, y_M) = F\left(x_p + 1, y_p + \frac{1}{2}\right) = a(x_p + 1) + b\left(y_p + \frac{1}{2}\right) + c$$

Per $d > 0$ si accenderà NE, mentre per $d \leq 0$ si accenderà E.

L'algoritmo consiste nel calcolare incrementalmente la sola variabile di decisione.

Algoritmo Midpoint

Se ad un certo passo *p+1* si accende il pixel *E*, allora il nuovo valore della variabile d_{new}, noto d_{old} al passo precedente p, si ottiene come:



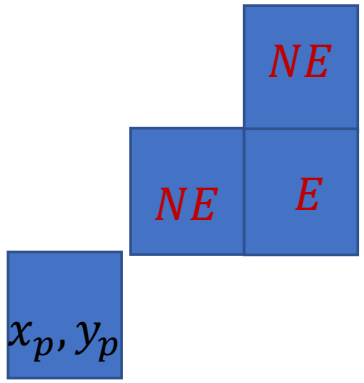
$$M \equiv (x_p + 2, y_p + \frac{1}{2})$$

$$d = F(x_M, y_M) = F\left(x_p + 1, y_p + \frac{1}{2}\right) = a(x_p + 1) + b\left(y_p + \frac{1}{2}\right) + c$$

$$d_{new} = a(x_p + 2) + b\left(y_p + \frac{1}{2}\right) + c = a(x_p + 1) + b\left(y_p + \frac{1}{2}\right) + c + a = d_{old} + a = d_{old} + a = d_{old} + dy$$

Algoritmo Midpoint

Alternativamente, se al passo *p+1* si accende il pixel *NE*, allora:



$$M \equiv (x_p + 2, y_p + \frac{3}{2})$$

$$d_{new} = a\left(x_p + 2\right) + b\left(y_p + \frac{3}{2}\right) + c = a\left(x_p + 1\right) + b\left(y_p + \frac{1}{2}\right) + c + a + b = d_{old} + a + b = d_{old} + \left(dy - dx\right)$$

Algoritmo Midpoint

Il processo si inizializza calcolando il valore di partenza. Partendo da (x_0 , y_0) calcoliamo d_{start}:

$$d_{start} = F\left(x_0 + 1, y_0 + \frac{1}{2}\right) = a\left(x_0 + 1\right) + b\left(y_0 + \frac{1}{2}\right) + c = ax_0 + by_0 + c + a + \frac{b}{2} =$$

$$= F\left(x_0, y_0\right) + a + \frac{b}{2} \equiv a + \frac{b}{2} = dy - \frac{dx}{2}$$

Per eliminare la divisione ed utilizzare solo l'aritmetica intera si può far riferimento alla nuova variabile di decisione 2*d* che deve solamente essere confrontata con il valore 0 ad ogni passo. Quindi:

d_{start}=2*dy*-*dx*
deltaE=2*dy*
deltaNE=2(*dy*-*dx*)

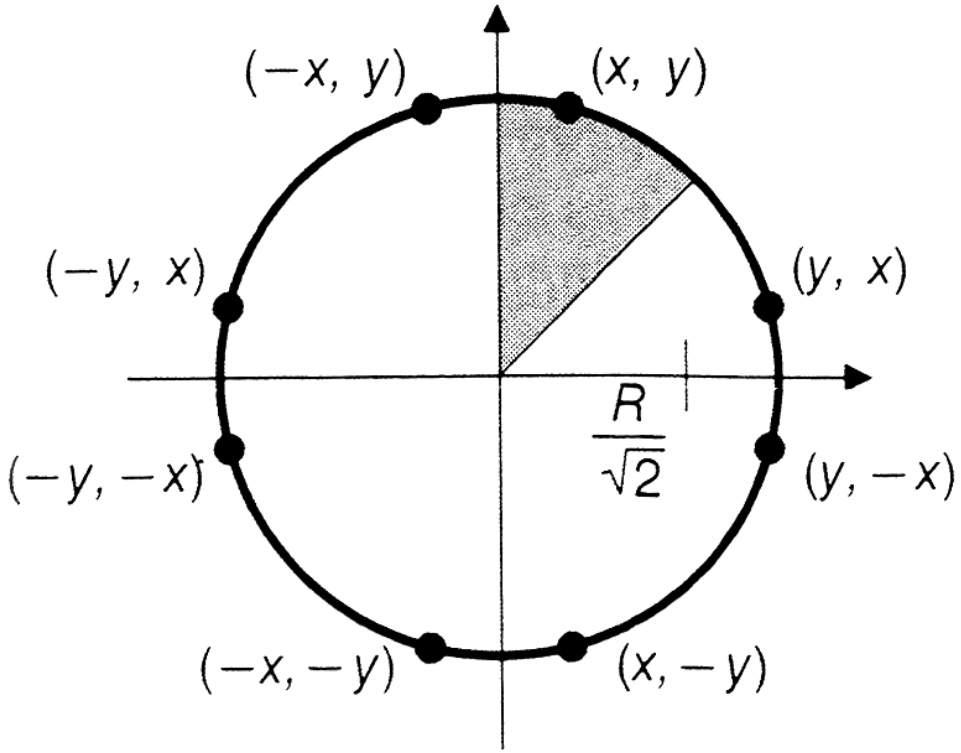
Algoritmo Midpoint

```
Calcola dx=x1-x0;
Calcola dy=y1-y0;
Calcola dstart=2dy-dx;
Calcola deltaNE=2(dy-dx);
Calcola deltaE=2dy;
x=x0; y=y0; d=dstart;
Ripeti finché x<x1
        Se d<=0 allora
                d+=deltaE;
                x++;
        Altrimenti
                d+=deltaNE;
                x++;
                y++;
        Accendi il pixel (x,y)
```

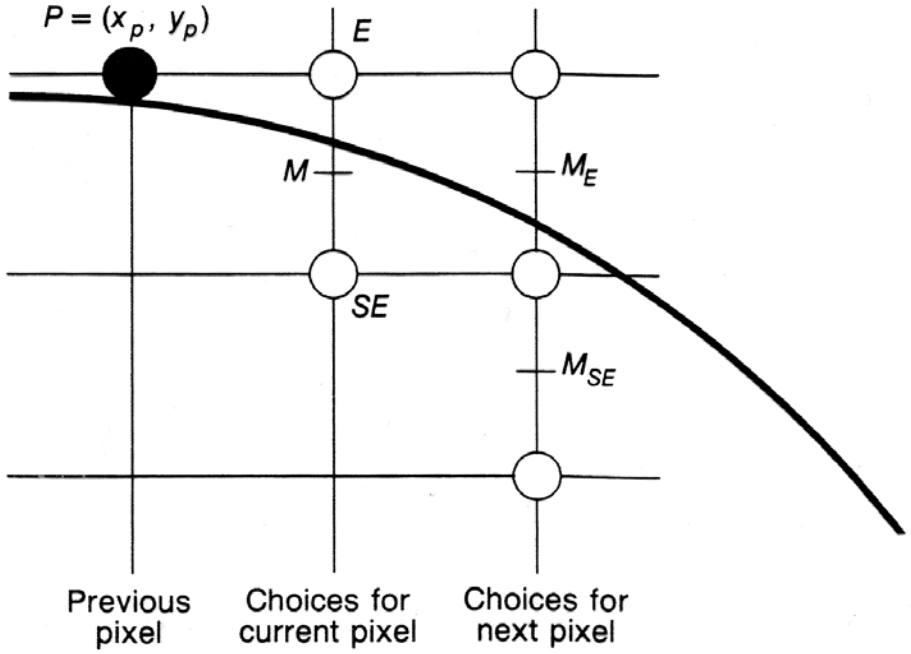
Midpoint per circonferenze

- L'equazione implicita di una circonferenza $F(x,y)=x^2+y^2-R^2=0$ fornisce 2 valori di y per dato x.

- Si calcola il midpoint per il primo ottante $x \in [0, R/\sqrt{2}]$ e poi si replica per gli altri



Midpoint per circonferenze



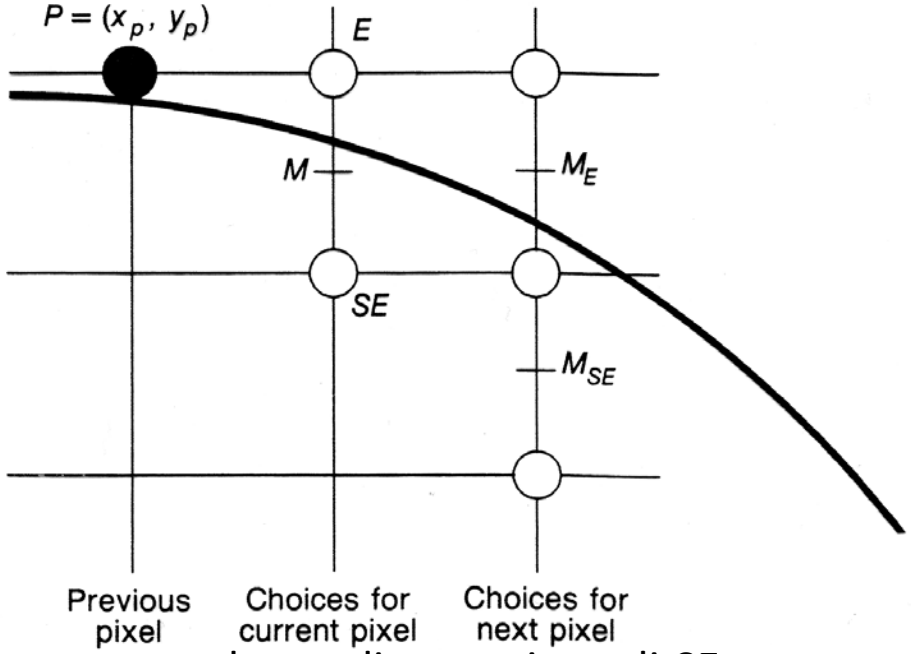
Partendo dal punto di valutazione della circonferenza $P=(x_p,y_p)$ si sceglie il successivo pixel da accendere sulla base dell'analisi del punto medio
M $(x_p+1, y_p - 1/2)$ tra i pixel E ed SE di P.

La variabile di decisione sarà definita come l'equazione implicita della circonferenza valutata in M.

$$d = F(x_M, y_M) = (x_p + 1)^2 + \left(y_p - \frac{1}{2}\right)^2 - R^2$$

```
Se F(M)>=0 // M giace o è esterno alla circonferenza
        Accendi SE
Altrimenti // F(M)<0 cioè M è interno alla circonferenza
        Accendi E
```

Midpoint per circonferenze



Procedendo in maniera analoga a quanto fatto per il tracciamento delle rette, si possono calcolare i due incrementi della variabile di decisione al generico passo *p+1*, noto il valore d_{old} della variabile di decisione al passo *p* nei due casi in cui venga acceso il pixel *E* o *SE*.

Nel caso di accensione, al passo p, di E:

$$d_{new} = F\left(x_P + 2, y_P - 1/2\right) = d_{old} + \left(2x_P + 3\right)$$

mentre, nel caso di accensione di *SE*:

$$d_{new} = F\left(x_P + 2, y_P - 3/2\right) = d_{old} + 2\left(x_P - y_P\right) + 5$$

d_{start} si valuta nel punto (0, *R*) che è la sommità dell'ottante.

$$d_{start} = F\left(0+1, R - \frac{1}{2}\right) = F\left(1, R - \frac{1}{2}\right) =$$

$$= 1 + \left(R - \frac{1}{2}\right)^2 - R^2 = 1 + R^2 - R + \frac{1}{4} - R^2 = \frac{5}{4} - R$$

Per mantenere l'uso dell'aritmetica intera, si considera $h=d-1/4 \rightarrow h_{start}=1-R$
h si confronta sempre con 0

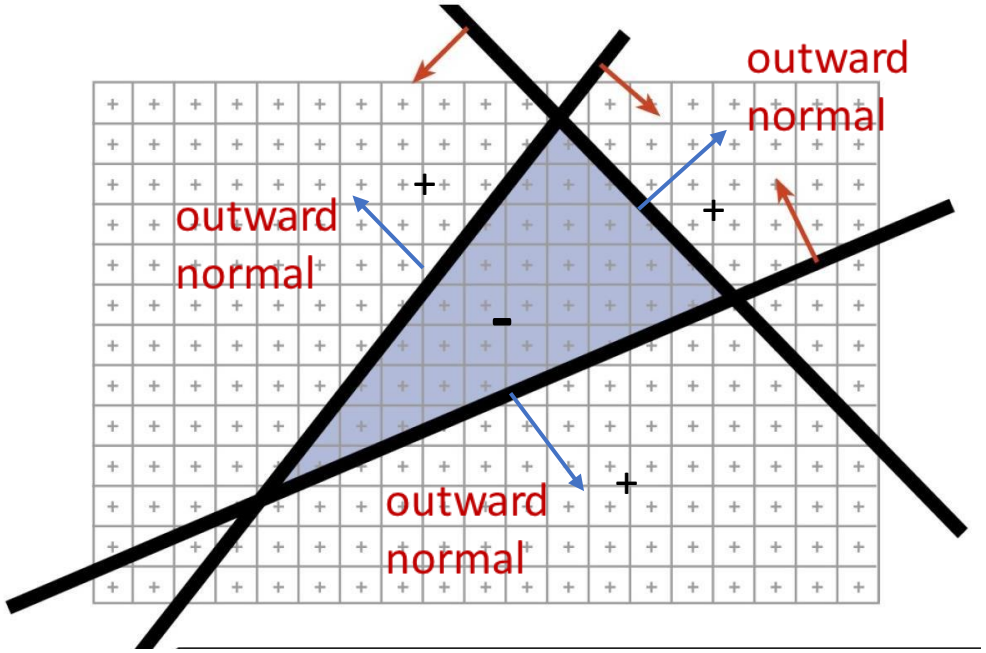
Midpoint per circonferenze

```
void MidpointCircle (int radius, int value)
/* Assumes center of circle is at origin. Integer arithmetic only */
{
    int x = 0;
    int y = radius;
    int d = 1 - radius;
    CirclePoints (x, y, value);

    while (y > x) {
        if (d < 0)              /* Select E */
            d += 2 * x + 3;
        else {                  /* Select SE */
            d += 2 * (x - y) + 5;
            y--;
        }
        x++;
        CirclePoints (x, y, value);
    } /* while */
} /* MidpointCircle */
```

Rasterizzazione di un triangolo

- Gli edge 3D del triangolo vengono proiettati su un piano.
- L'interno del triangolo è l'insieme di punti che si trova all'interno di tutti e tre i semispazi negativi definiti da queste linee



Inside Triangle Test

- Un punto è all'interno di un triangolo se si trova nel semispazio negativo di tutte e tre gli edge di confine, ciò implica che siano soddisfatte le seguenti condizioni:
- I vertici del triangolo sono ordinati in senso antiorario
- Il punto deve trovarsi a sinistra di ogni edge di confine

1) Ricavare la forma implicita dell'equazione dell'edge tra i vertici

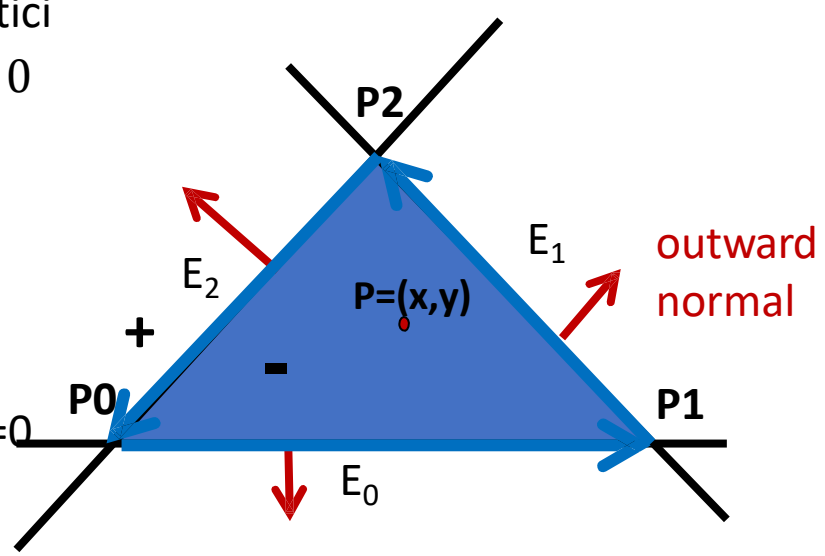
$P_0 \equiv (x_0, y_0)$ e $P_1 \equiv (x_1, y_1)$ $E_0(x, y) = ax + by + c = 0$

a partire dalla forma esplicita $\frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} = \frac{(y - y_0)}{(y_1 - y_0)}$

$$(x - x_0)(y_1 - y_0) - (x_1 - x_0)(y - y_0) = 0$$

$$x(y_1 - y_0) + y(x_0 - x_1) - x_0(y_1 - y_0) + y_0(x_1 - x_0) = 0$$

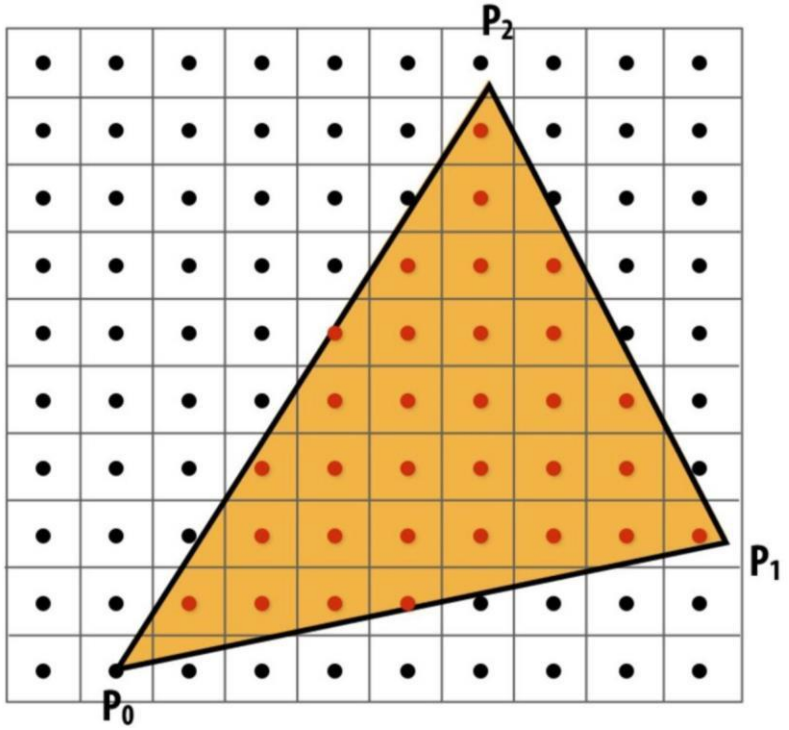
a b c



Il metodo triangolo funziona solo per i poligoni convessi!

(x, y) interno al triangolo $\Leftrightarrow E_i(x, y) \leq 0, \forall i = 0,1,2$

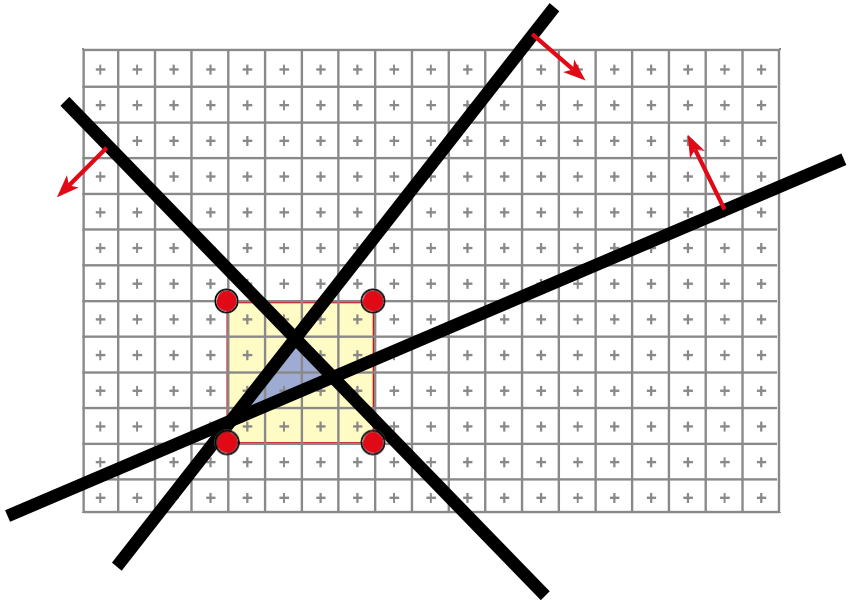
- I punti campionati interni al triangolo sono rossi

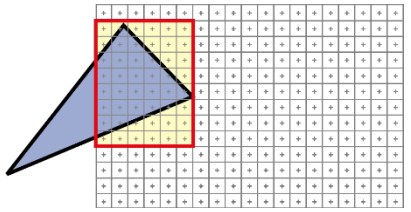


- Tutte le GPU sono fornite di hardware special-purpose hardware per realizzare in maniera efficiente **inside triangle test.**

Rasterization Pseudocode

```
Per ogni triangolo
    Calcola la proiezione dei vertici, calcola gli Ei  (ai, bi, ci)
    Calcola il bounding box (bbox) sullo schermo, taglia il bbox
    rispetto ai limiti dello schermo
     Per ogni pixel (x,y) nel bbox
        Valuta le funzioni edge Ei, i=1,2,3 nel centro del pixel
        If all Ei < 0    % il pixel è interno
            Framebuffer[x,y ] = triangleColor
```

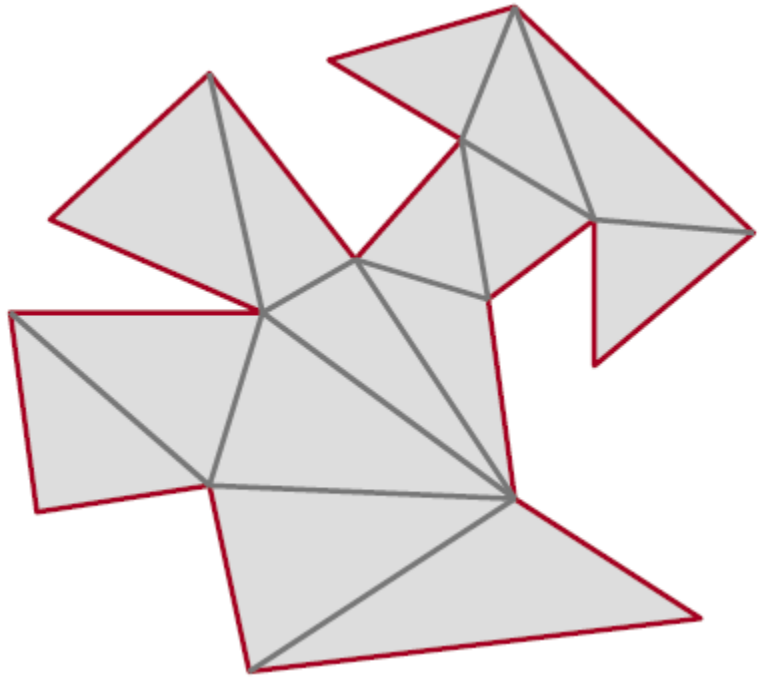




Come selezionare il bounding box?
Xmin, Xmax, Ymin, Ymax dei vertici del triangolo proiettato.

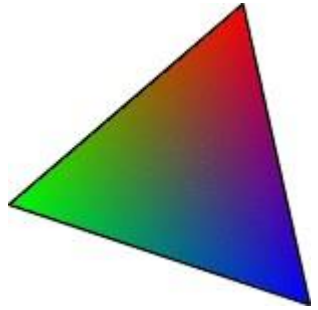
Rasterizzazione per poligoni concavi: tessellator

Converte ogni cosa in triangoli e poi fa la scan-conversion dei triangoli



Framebuffer[x,y] = Color(?)

- Memorizziamo i dati (come il colore, ecc.) sui vertici dei triangoli e successivamente utilizziamo l'interpolazione per calcolare i valori di questi dati all'interno del triangolo



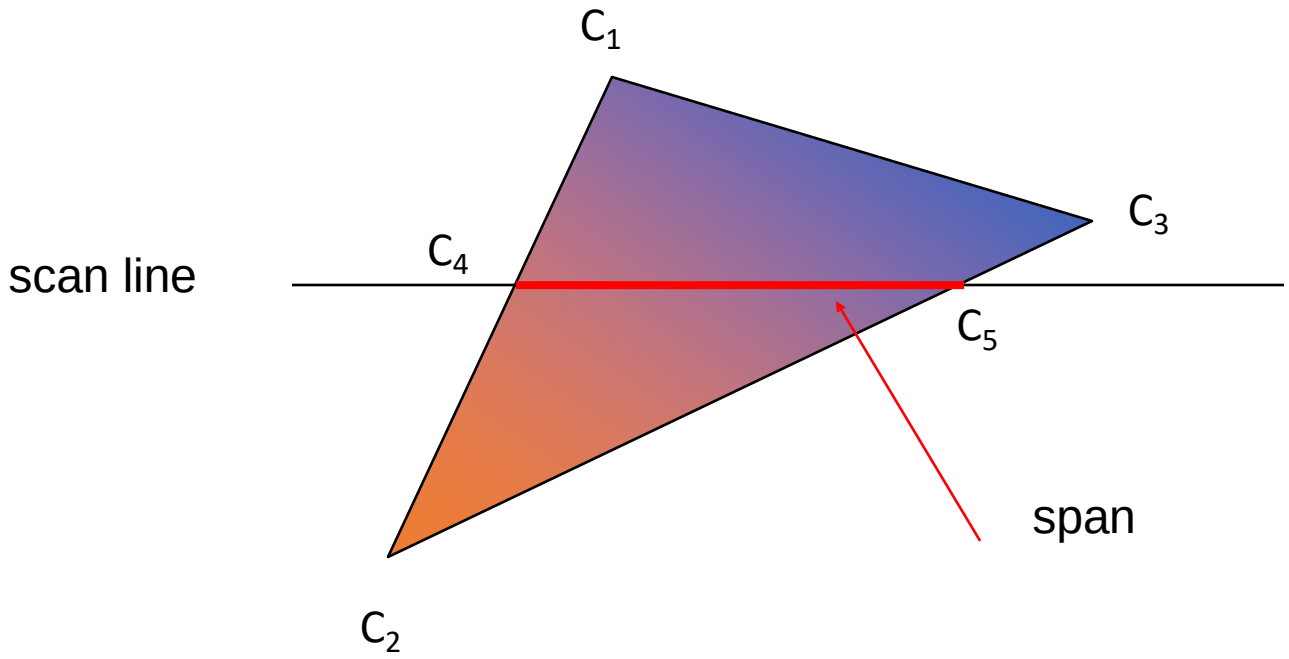
Per esempio:

- Specifichiamo un colore (R,G,B) su ognuno dei vertici di un triangolo
- Per ogni pixel interno al triangolo, calcoliamo le coordinate di intepolazione per quel pixel.
- Usiamo queste coordinate interpolate, per calcolare un colore interpolato (R,G,B) per quel pixel.

Per-pixel color: linear Interpolation

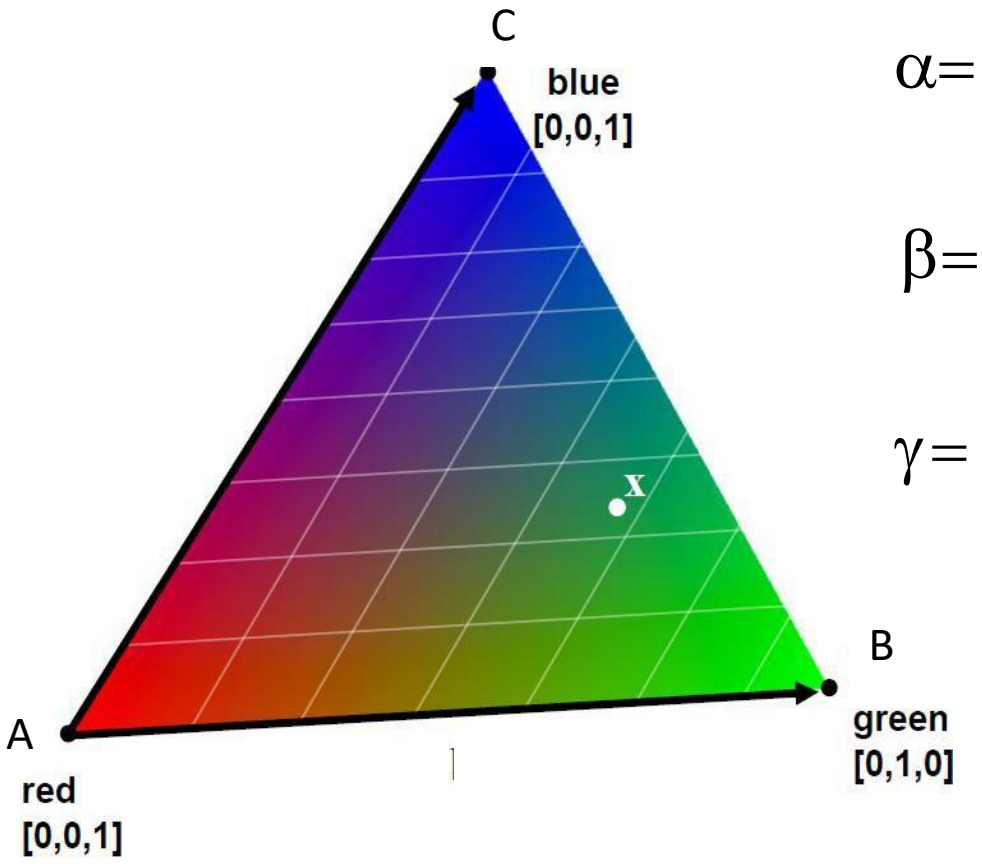
C_1 C_2 C_3 specificano il colore per vertice

C_4 viene determinato per interpolazione tra C_1 e C_2
C_5 viene determinato per interpolazione tra C_2 e C_3
Interpoliamo i valori tra C_4 e C_5 lungo una span,



Per-Pixel color: barycentric interpolation

Il colore di un triangolo in un punto?



$$\alpha = \frac{area_{xBC}}{area_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}E_{BC}(\mathrm{x})}{\frac{1}{2}E_{BC}(\mathrm{A})} = \frac{E_{BC}(\mathrm{x})}{E_{BC}(\mathrm{A})}$$

$$\beta = \frac{E_{CA}(\mathrm{x})}{E_{CA}(\mathrm{B})}$$

$$\gamma = \frac{E_{AB}(\mathrm{x})}{E_{AB}(\mathrm{C})}$$

Il colore in **x è** la combinazione affine dei colori sui tre vertici dei triangoli

$$\mathrm{x}_{color} = \alpha A_{color} + \beta B_{color} + \gamma C_{color}$$

Per-pixel attributes

Interpoliamo i colori

- $R = \alpha_0 R_0 + \alpha_1 R_1 + \alpha_2 R_2$
- $G = \alpha_0 G_0 + \alpha_1 G_1 + \alpha_2 G_2$
- $B = \alpha_0 B_0 + \alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2$

Interpoliamo i vettori normali

- $N = \alpha_0 N_0 + \alpha_1 N_1 + \alpha_2 N_2$

Interpoliamo I valori di profondità

- $z = \alpha_0 z_0 + \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2$

Interpoliamo le coordinate di texture.

- $u = \alpha_0 u_0 + \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$
- $v = \alpha_0 v_0 + \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$

Coordinate baricentriche di un punto nello spazio affine

- **Una combinazione affine è una combinazione lineare di punti con coefficienti che hanno somma 1.**

$$P = \alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \ldots \alpha_N P_N \qquad \text{con } \alpha_0 + \alpha_1 + \ldots \alpha_N = 1.$$

I coefficienti $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_N$, sono le coordinate baricentriche (affini) di P nello spazio affine.

- La combinazione affine di due punti distinti descrive la retta passante per i due punti.
- Siano Q e R due punti dello spazio affine reale e sia v il vettore da essi individuato:

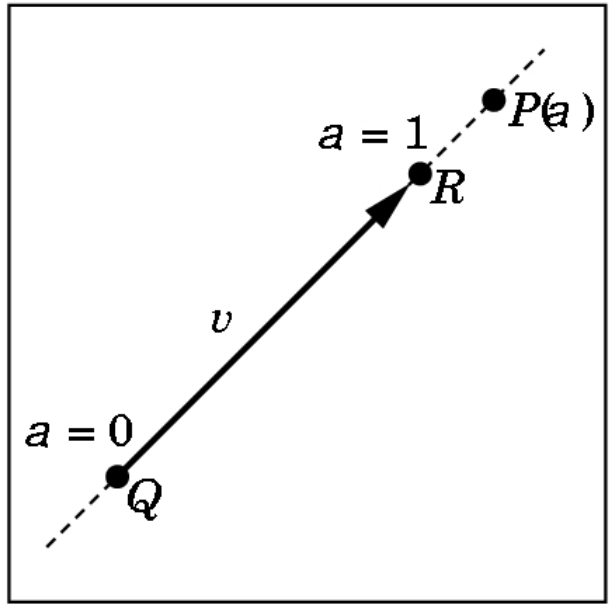
$$\boldsymbol{v = R - Q}$$

- *Consideriamo la loro combinazione affine,* $\alpha + \beta = 1$,
- $P = \alpha R + \beta Q, \quad \beta = 1 - \alpha$

$$P(\alpha) = \alpha R + (1 - \alpha)Q$$

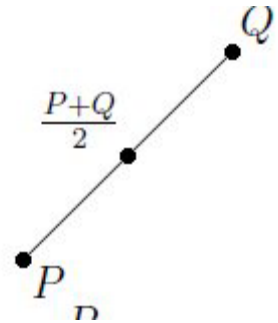
$$P(\alpha) = Q + \alpha(R - Q)$$

$$P = Q + \alpha v$$



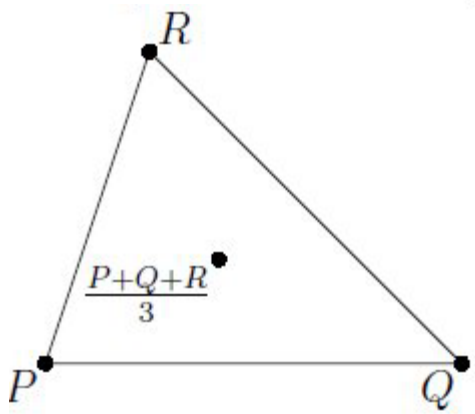
Combinazione convessa

- La combinazione convessa è una combinazione **affine con pesi positivi**.
- Nel caso della combinazione convessa di due punti, il punto risultante giace sul segmento che congiunge i due punti. Se i pesi sono entrambi pari a 0.5, il punto risultante si trova a metà tra i due. (In figura la combinazione lineare convessa tra i punti P e Q con pesi $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$, *dà un punto che giace nel punto medio del segmento che congiunge P e Q.)*
- Nel caso di n punti che formano un poligono convesso, il punto risultante si **trova all'interno del poligono.**



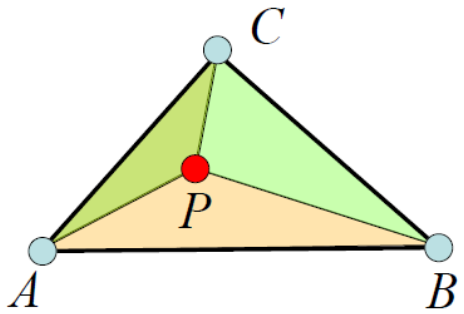
Se tutti i pesi sono uguali a 1/n, il punto risultante si chiama **centroide** dell'insieme dei punti.

La combinazione lineare convessa dei punti P, Q ed R con pesi $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1/3$ costituisce il centroide del triangolo.



Coordinate baricentriche di un punto appartenente ad un triangolo

- $P=\alpha_0 A + \alpha_1 B + \alpha_2 C$
- $\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2 = 1, \alpha_i > 0, i = 0,1,2$



$$\alpha_0 = \frac{area(PBC)}{area(ABC)} \qquad \alpha_1 = \frac{area(PCA)}{area(ABC)} \qquad \alpha_2 = \frac{area(PAB)}{area(ABC)}$$