COMPITO DI MDP DEL 30/01/2023

Esercizio 1. Lancio 2 dadi per due volte. Siano X_1, Y_1 i due risultati al primo lancio, e X_2, Y_2 i due risultati al secondo lancio. Siano inoltre $W = X_1 + Y_1$ e

$$Z = |\max(X_1, Y_1) - \max(X_2, Y_2)|.$$

a) Determinare la densità di W.
b) Stabilire se W e Z sono indipendenti.
c) Calcolare $P(W = 2|Z = 0)$.
d) Determinare $P(Z = 4)$.

Soluzione. a) $\{W = n\} = \cup_k \{X_1 = k, Y_1 = n - k\}$, dove k varia tra 1 e $n - 1$. I valori assunti da W sono $2, 3, \ldots, 12$.

Se $n = 2, \ldots 7$ allora

$$P(W = n) = \sum_{k=1}^{n-1} P(X_1 = k, Y_1 = n-k) = \sum_{k=1}^{n-1} P(X_1 = k)P(Y_1 = n-k) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{6^2} = \frac{n-1}{36}$$

Se $n = 8, \ldots 12$ invece

$$P(W = n) = \sum_{k=n-6}^{6} P(X_1 = k, Y_1 = n-k) = \sum_{k=n-6}^{6} P(X_1 = k)P(Y_1 = n-k) = \sum_{k=n-6}^{6} \frac{1}{6^2} = \frac{12-n}{36}$$

La densità di W è descritta dunque dalla seguente tabella

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(W = n)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

b) Le due variabili sono dipendenti. Infatti abbiamo $\{W = 3, Z = 5\} = \emptyset$: se $W = 3$, allora $\max(X_1, Y_1) = 2$, dunque $Z \leq 4$. D'altra parte $P(W = 3)$ e $P(Z = 5)$ sono entrambe non nulle, quindi $P(W = 3, Z = 5) \neq P(W = 3) \cdot P(Z = 5)$.

c) Si vede facilmente che $P(W = 2) = \frac{1}{6^2}$ e $P(W = 2, Z = 0) = \frac{1}{6^4}$. Per calcolare $P(Z = 0)$, osserviamo che su tutti i 36 possibili risultati del lancio di 2 dadi abbiamo

- 1 possibilità affinché il massimo dei risultati sia 1,
- 3 possibilità affinché il massimo dei risultati sia 2,
- 5 possibilità affinché il massimo dei risultati sia 3,
- 7 possibilità affinché il massimo dei risultati sia 4,
- 9 possibilità affinché il massimo dei risultati sia 5,
- 11 possibilità affinché il massimo dei risultati sia 6.

Dunque abbiamo

$$P(Z = 0) = \frac{1 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2 + 11^2}{6^4} = \frac{286}{6^4} > \frac{1}{6^2}$$

Pertanto

$$P(W = 2|Z = 0) = \frac{P(W = 2, Z = 0)}{P(Z = 0)} = \frac{1}{6^4} \cdot \frac{6^4}{286} = \frac{1}{286}$$

d) Supponiamo che il massimo maggiore sia ottenuto nel primo lacio dei due dadi. Allora deve essere $\max(X_1, Y_1) = 5$ e $\max(X_2, Y_2) = 1$, oppure $\max(X_1, Y_1) = 6$ e $\max(X_2, Y_2) = 2$. Ragionando come per determinare la densità di W, vediamo che nel primo caso abbiamo 9 possibilità per (X_1, Y_1) e 1 possibilità per (X_2, Y_2), mentre nel secondo caso abbiamo 11 possibilità per (X_1, Y_1) e 3 possibilità per (X_2, Y_2). Prendendo in considerazione anche il caso in cui il maggiore dei massimi sia ottenuto al secondo lancio, troviamo

$$P(Z = 4) = \frac{2 \cdot 9 \cdot 1 + 2 \cdot 11 \cdot 3}{6^4} = \frac{84}{6^4} = \frac{7}{108} = 0.065$$

e)

$$P(Z = 0) = \tfrac{1+3^2+5^2+7^2+9^2+11^2}{6^4} = \tfrac{286}{6^4} = 0.22$$

$$P(Z = 1) = \tfrac{430}{6^4} = 0,33$$

$$P(Z = 2) = \tfrac{296}{6^4} = 0,23$$

$$P(Z = 3) = \tfrac{178}{6^4} = 0.14$$

$$P(Z = 4) = \tfrac{2 \cdot 11 \cdot 3 + 2 \cdot 9}{6^4} = \tfrac{84}{6^4} = 0.06$$

$$P(Z = 5) = \tfrac{2 \cdot 11}{6^4} = \tfrac{22}{6^4} = 0.02$$

Dunque $E(Z) = \frac{2022}{6^4} = 1,54$, mentre invece

$$Var(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2 = \tfrac{5110}{6^4} - (\tfrac{2022}{6^4})^2 = 3,94 - 2,37 = 1,57$$

Esercizio 2. Sia

$$f(s) = \begin{cases} \frac{1}{5}(s+2) & \text{se } s \in [-2, 0] \\ \frac{2}{15}(3-s) & \text{se } s \in [0, 3] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

a) Mostrare che f è una densità continua astratta.

Sia X una variabile aleatoria continua con densità f.

b) Calcolare $P(X > 0)$.
c) Calcolare il valore atteso e la varianza di X.
d) Calcolare la funzione di ripartizione di X.

Sia Y un'altra variabile aleatoria sullo stesso spazio di probabilità su cui è definita X, discreta uniforme con valori $0, 1, 2$. Supponiamo in aggiunta che X, Y siano indipendenti.

e) Calcolare $P(XY = 0)$.
f) Calcolare la funzione di ripartizione di $P(XY \leq -3)$ e $P(XY \leq 3)$.

Soluzione a) f è non negativa e integrabile, e vale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)ds = \int_{-2}^{3} f(s)ds = \int_{-2}^{0} f(s)ds + \int_{0}^{3} f(s)ds = \tfrac{2}{5} \cdot 2 \cdot \tfrac{1}{2} + \tfrac{6}{15} \cdot 3 \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{2}{5} + \tfrac{3}{5} = 1$$

b) $P(X > 0) = \int_0^3 f(s)ds = \frac{3}{5}$.
c)

$$E(X) = \tfrac{1}{5} \int_{-2}^{0} (s^2 + 2s)ds + \tfrac{2}{15} \int_{0}^{3} (3s - s^2)ds = \tfrac{4}{15} + \tfrac{9}{15} = \tfrac{13}{15}$$

d) Integrando troviamo

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } s \leq -2 \\ \frac{1}{5}(\frac{t^2}{2} + 2t + 2) & \text{se } s \in [-2, 0] \\ \frac{2}{15}(3t - \frac{t^2}{2} + 3) & \text{se } s \in [0, 3] \\ 1 & \text{se } t \geq 3 \end{cases}$$

e) Poiché $\{XY = 0\} = \{X = 0\} \cup \{Y = 0\}$, abbiamo

$$P(XY = 0) = P(X = 0) + P(Y = 0) - P(X = 0, Y = 0) = P(Y = 0) = \tfrac{1}{3}.$$

f) Osserviamo che $\{XY \leq -3\} = \{X \leq -1.5, Y = 2\}$. Pertanto

$$P(XY \leq -3) = P(X \leq -1.5, Y = 2) = P(X \leq -1.5)P(Y = 2) = \frac{1}{3}P(X \leq -1.5) =$$
$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}(\tfrac{t^2}{2} + 2t + 2)\big|_{-1.5} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}(\tfrac{9}{8} - 3 + 2) = \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{120}$$

Osserviamo che $\{XY \leq 3\} = \{X \leq 3, Y = 1\} \cup \{X \leq 1.5, Y = 2\}$. Pertanto

$$P(XY \leq 3) = P(X \leq 3, Y = 1) + P(X \leq 1.5, Y = 2) = \frac{1}{3}P(X \leq 3) + \frac{1}{3}P(X \leq 1.5)$$

D'altra parte $P(X \leq 3) = 1$, mentre

$$P(X \leq 1.5) = \frac{2}{15}(3t - \tfrac{t^2}{2} + 3)\big|_{1.5} = \frac{2}{15}(\tfrac{9}{2} - \tfrac{9}{8} + 3) = \frac{2}{15}(\tfrac{27}{8} + \tfrac{24}{8}) = 0.85$$

Quindi otteniamo

$$P(XY \leq 3) = \frac{1}{3} + \frac{0.85}{3} \simeq 0.62.$$

Esercizio 3. Devo installare il battiscopa sulle pareti di un appartamento che ha un perimetro di 50 metri. Volendo risparmiare, dal rivenditore decido di servirmi solamente di pezzi di scarto (che posso eventualmente accorciare ulteriormente), la cui lunghezza varia casualmente tra 10 e 50 centimetri in modo uniforme.

a) Qual'è la probabilità che un singolo pezzo di scarto sia lungo almeno 35 centimetri?
b) Supponiamo di comprare 150 pezzi di scarto. Qual'è la probabilità che mi bastino per coprire tutta la parete?
c) Quanti pezzi devo comprare per avere una probabilità almeno dell'84% di ricoprire tutto il perimetro di casa?

Soluzione. a) $15/40 = 3/8 = 0.375$.

b) Sia X_i la lunghezza in centimetri dell'i-esimo pezzo di scarto acquistato. Allora le variabili X_i sono indipendenti con valore atteso e $\mu = \frac{10+50}{2} = 30$ e varianza $\sigma^2 = \frac{(50-10)^2}{12} \simeq 133.33$. Dunque $\sigma \simeq 11.55$.

Sia $X = X_1 + \ldots + X_{150}$. Per TLC possiamo approssimare X con una variabile normale $\zeta \sim N(150\mu,\ 150\sigma^2) = N(4500,\ 20000)$. Pertanto

$$P(X \geq 5000) \simeq P(\zeta \geq 5000) = P(\zeta_0 \geq \tfrac{5000-4500}{141.42}) \simeq P(\zeta_0 \geq 3.53) =$$
$$= 1 - \Phi(3.53) = 1 - 0.998 = 0.2\%$$

c) Supponiamo di comprare n pezzi di scarto, e sia $X_n = X_1 + \ldots + X_n$. Allora

$$P(X_n \geq 5000) \simeq P(\zeta_0 \geq \tfrac{5000-30n}{11{,}55\cdot\sqrt{n}}) = P(\zeta_0 \leq \tfrac{30n-5000}{11{,}55\cdot\sqrt{n}}) = \Phi(\tfrac{30n-5000}{11{,}55\cdot\sqrt{n}})$$

Affinché $\Phi(\frac{30n-5000}{11,55\cdot\sqrt{n}}) \geq 0.84$ deve essere

$$\frac{30n-5000}{11,55\cdot\sqrt{n}} \geq 1$$

vale a dire

$$30n - 11,55\cdot\sqrt{n} - 5000 \geq 0$$

vale a dire

$$\sqrt{n} \geq \frac{11,55+\sqrt{11,55^2+4\cdot 30\cdot 5000}}{2\cdot 30} = \frac{11,55+774,68}{60} \simeq 13,10$$

vale a dire $n \geq 172$.