Curve razionali

Abbiamo visto e sottolineato più volte che **le curve polinomiali ed in particolare le curve di Bezier e le curve Spline sono invarianti per trasformazioni affini**, più precisamente per traslazione, scalatura, rotazione deformazione e loro combinazione.

Cioè è sufficiente applicare queste trasformazioni ai punti che definiscono il poligono di controllo e poi utilizzare questi nuovi punti per generare la curva.

Tuttavia le curve, e di conseguenza le superfici che possono essere generate da esse (superfici di Berzier o superfici spline) **non sono invarianti per proiezioni di tipo proiettivo**. Poiché queste trasformazioni sono indispensabili quando si deve rappresentare su un piano una scena 3D, la mancanza dell'invarianza rispetto a queste trasformazioni può essere un serio inconveniente delle curve di tipo polinomiale.

Infatti in questo caso è necessario generare effettivamente le curve e le superfici e poi applicare la trasformazione a tutti i punti che sono stati generati. Poiché questo processo è poco efficiente, si sono dovute individuare classi di funzioni base che sono invarianti per trasformazioni di tipo proiettivo.

Inoltre **non permettono di ottenere un'espressione analitica delle coniche, ma solo un'approssimazione**.

Curve parametriche razionali

Si dicono razionali le curve caratterizzate dal fatto che le coordinate dei punti appartenenti ad esse si esprimono come funzioni razionali di un parametro t, (cioè come rapporto tra due polinomi nella variabile t):

$$C(t) = \begin{cases} X(t) = \dfrac{x(t)}{w(t)} \\[2ex] Y(t) = \dfrac{y(t)}{w(t)} \end{cases}$$

dove $w(t)$ è un polinomio non nullo.

Esempio di parametrizzazione razionale della circonferenza con centro l'origine del sistema di riferimento e raggio 1.

$$C(t) = \begin{cases} X(t) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\[2ex] Y(t) = \dfrac{2t}{1+t^2} \end{cases}$$

Infatti, elevando al quadrato entrambe le equazioni e sommano membro a membro si ricava l'equazione della circonferenza con centro l'origine e raggio 1.

$$X^2(t) + Y^2(t) = \frac{(1-t^2)^2 + 4t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{1 - 2t^2 + t^4 \quad + 4t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{(1+t^2)^2}{(1+t^2)^2} = 1$$

Una curva parametrica razionale è **invariante oltre che per trasformazioni affini, anche per trasformazioni proiettive.**

La proiezione di una curva parametrica razionale si ottiene proiettando i suoi vertici di controllo. I punti della curva proiettata si ottengono poi valutando la curva razionale a partire dai vertici proiettati.

Curve di Bezier razionali.

Siano dati i punti $P_i \equiv \binom{x_i}{y_i}$ $i=0,\ldots,n$ e sia $w_i > 0$,

Una curva di Bezier razionale si definisce nel seguente modo:

$$C(t) = \frac{\sum_{i=0}^{n} w_i P_i B_{i,n}(t)}{\sum_{i=0}^{n} w_i B_{i,n}(t)} = \begin{cases} \dfrac{\sum_{i=0}^{n} w_i x_i B_{i,n}(t)}{\sum_{i=0}^{n} w_i B_{i,n}(t)} \\ \\ \dfrac{\sum_{i=0}^{n} w_i y_i B_{i,n}(t)}{\sum_{i=0}^{n} w_i B_{i,n}(t)} \end{cases} \quad 0 \le t \le 1$$

Possiamo scrivere la curva di Bezier Razionale come segue:

$$C(t) = \sum_{i=0}^{n} P_i R_{i,n}(t) \qquad \text{dove} \qquad R_{i,n} = \frac{w_i B_{i,n}(t)}{\sum_{i=0}^{n} w_i B_{i,n}(t)}$$

$R_{i,n}$, i=0,..,n sono le funzioni base delle curve razionali di Bezier. Possiamo studiare le proprietà delle curve razionali studiando le proprietà di queste funzioni base.

Proprietà funzioni base delle curve di Bézier Razionali:

1) Non negatività sul loro supporto, $R_{i,n}(t) \geq 0$.

2) Costituiscono una partizione dell'unità $\sum_{i=0}^{n} R_{i,n}(t)$ =1

3) $R_{0,n}(0) = 1 \qquad R_{n,n}(1) = 1$

4) $Se \quad w_i = 1 \quad i = 0, \dots, n \quad \Rightarrow R_{i,n} = \frac{B_{i,n}(t)}{\sum_{i=0}^{n} w_i B_{i,n}(t)} = B_{i,n}$

Aumentare il peso di un punto w_i, corrispondente ad un punto P_i , equivale a tirare la curva verso quel punto.

I pesi rappresentano un ulteriore strumento di modellazione che influisce notevolmente sulle curve di Bezier.

Siano $P_i \equiv \binom{x_i}{y_i}$ i=0, …, n, $w_i > 0$

Consideriamo i punti 3D

$$P_i^w \equiv \begin{pmatrix} w_i \cdot x_i \\ w_i \cdot y_i \\ w_i \end{pmatrix}$$

I punti $P_i \equiv \binom{x_i}{y_i}$, possono essere considerati come la proiezione sul piano proiettivo (w=1) dei punti $P_i^w \equiv \begin{pmatrix} w_i \cdot x_i \\ w_i \cdot y_i \\ w_i \end{pmatrix}$, infatti proiettando sul piano w=1, cioè dividendo tutte le componenti per w_i, si ottiene $P_i \equiv \binom{x_i}{y_i}$.

Definizione: Una curva di Bezier razionale 2D può essere vista come la proiezione sul piano 2D di una curva di Bezier in 3D.

Consideriamo i punti 3D

$$P_i^w \equiv \begin{pmatrix} w_i \cdot x_i \\ w_i \cdot y_i \\ w_i \end{pmatrix}, \text{ i=0,..n}$$

e la curva di Bezier 3D che ha questi vertici di controllo

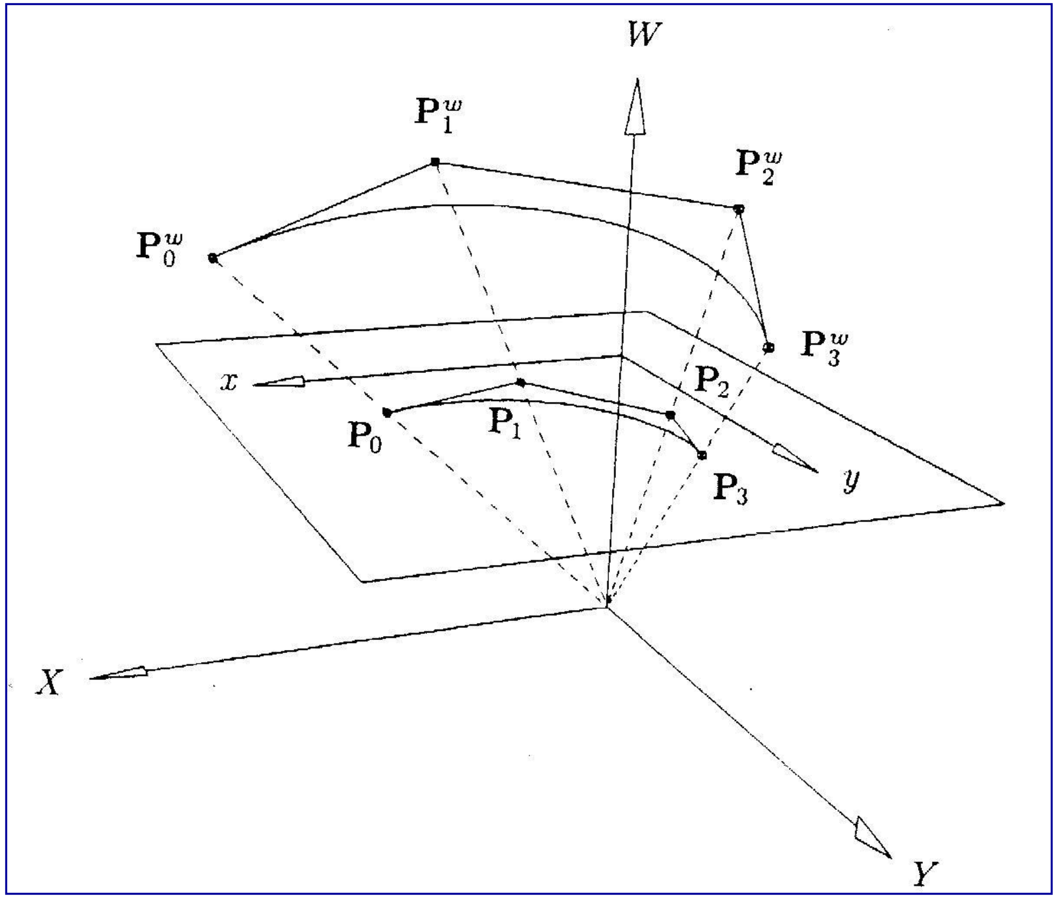
$$C_3(t) = \sum_{i=0}^{n} P_i^w B_{i,n}(t) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{n} w_i x_i B_{i,n}(t) \\ \sum_{i=0}^{n} w_i y_i B_{i,n}(t) \\ \sum_{i=0}^{n} w_i B_{i,n}(t) \end{cases}$$

Allo stesso modo in cui un punto $P \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ può essere visto come la proiezione sul piano proiettivo (w=1) del punto

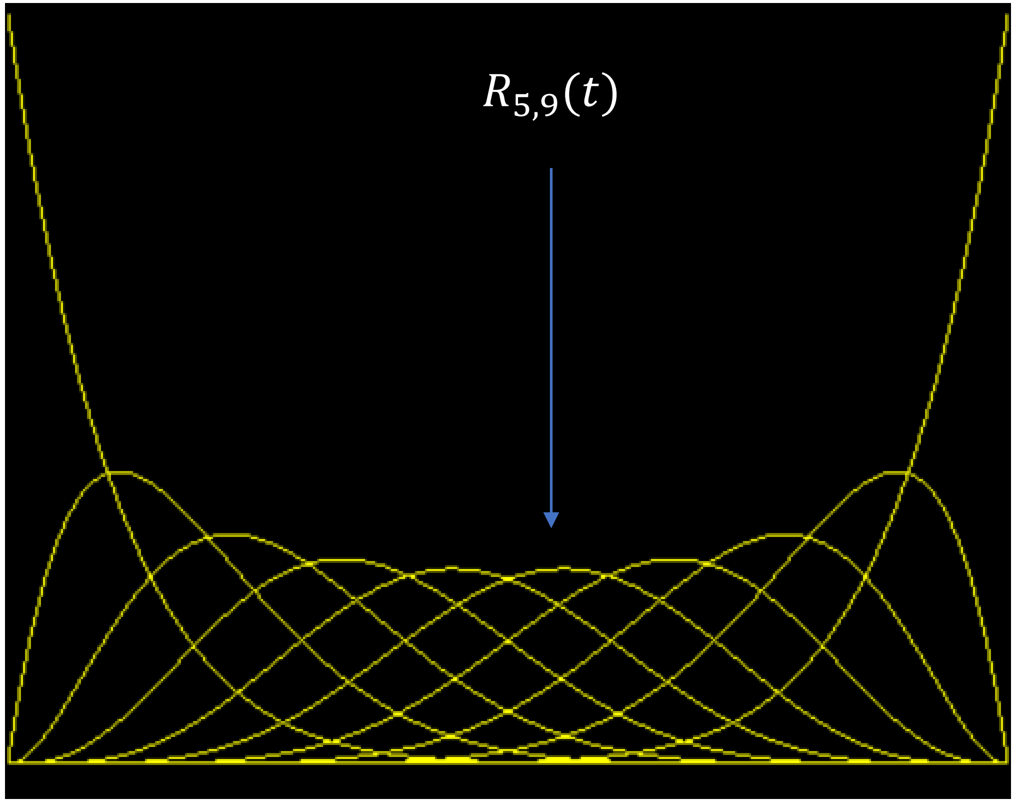
$P^w \equiv \begin{pmatrix} w \cdot x \\ w \cdot y \\ w \end{pmatrix}$, così una curva di Bezier razionale 2D, può essere vista come la proiezione di $C_3(t)$ sul piano proiettivo.

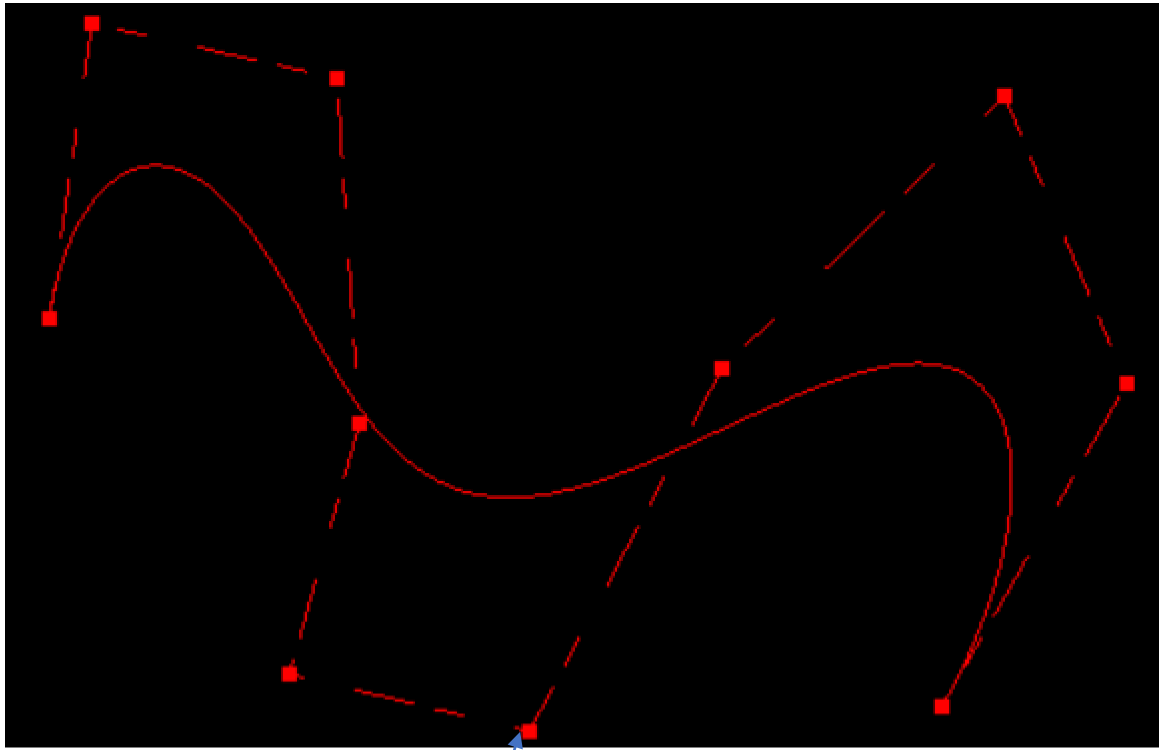
Operativamente, per proiettare la curva 3D sul piano proettivo 2D (w=1) basta dividere le prime due componenti di $C_3(t)$, per la terza.

$$C_2(t) = \begin{cases} \dfrac{\sum_{i=0}^{n} w_i x_i B_{i,n}(t)}{\sum_{i=0}^{n} w_i B_{i,n}(t)} \\ \\ \dfrac{\sum_{i=0}^{n} w_i y_i B_{i,n}(t)}{\sum_{i=0}^{n} w_i B_{i,n}(t)} \end{cases}$$

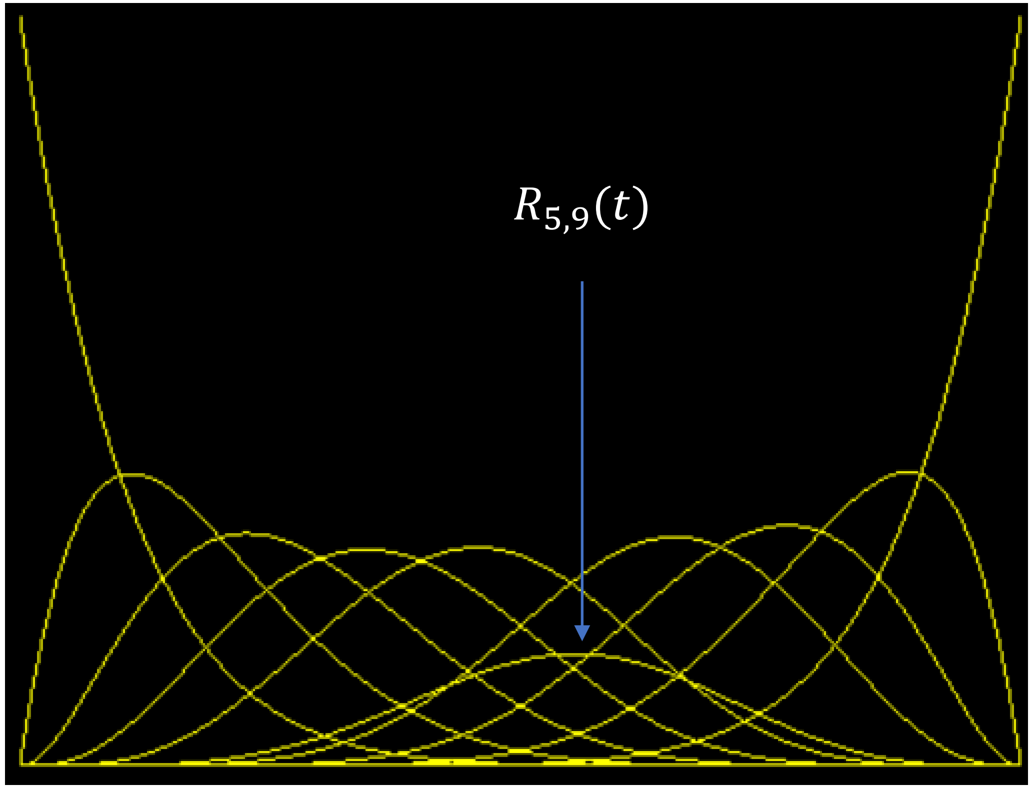


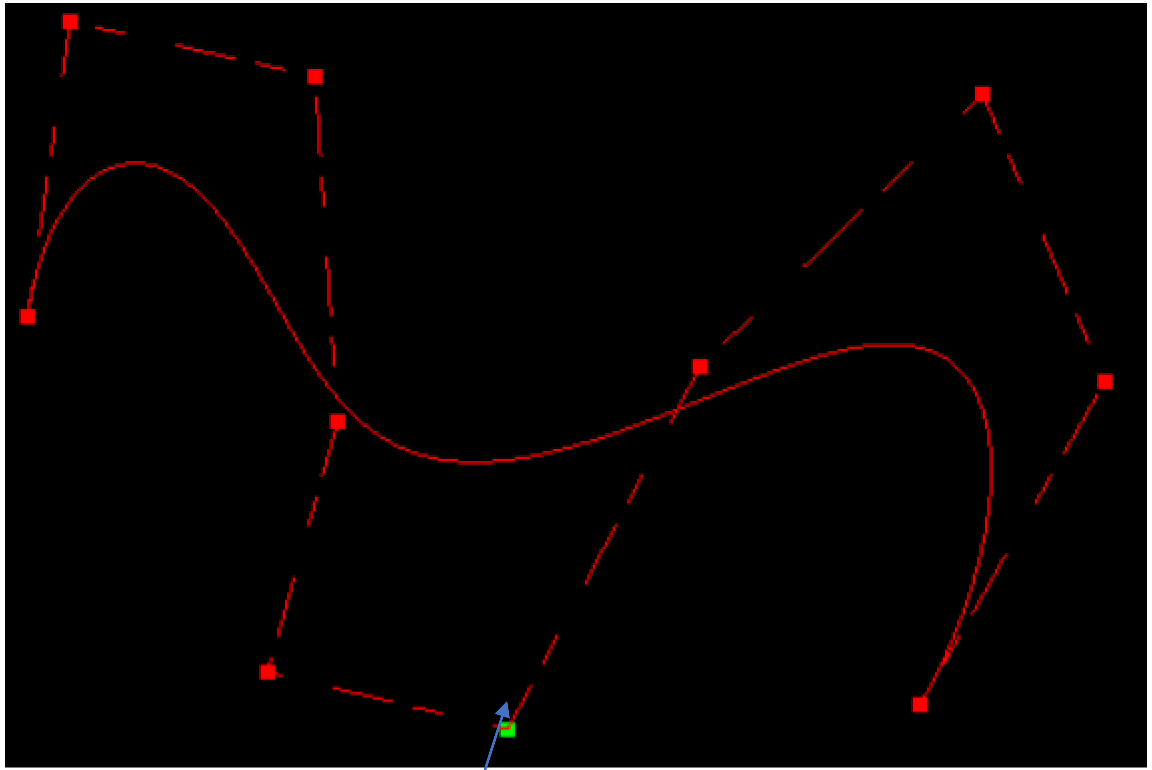
$n = 9, \quad w_i = 1, \; i = 0, \dots, 9$





$w_5 = 1.0$

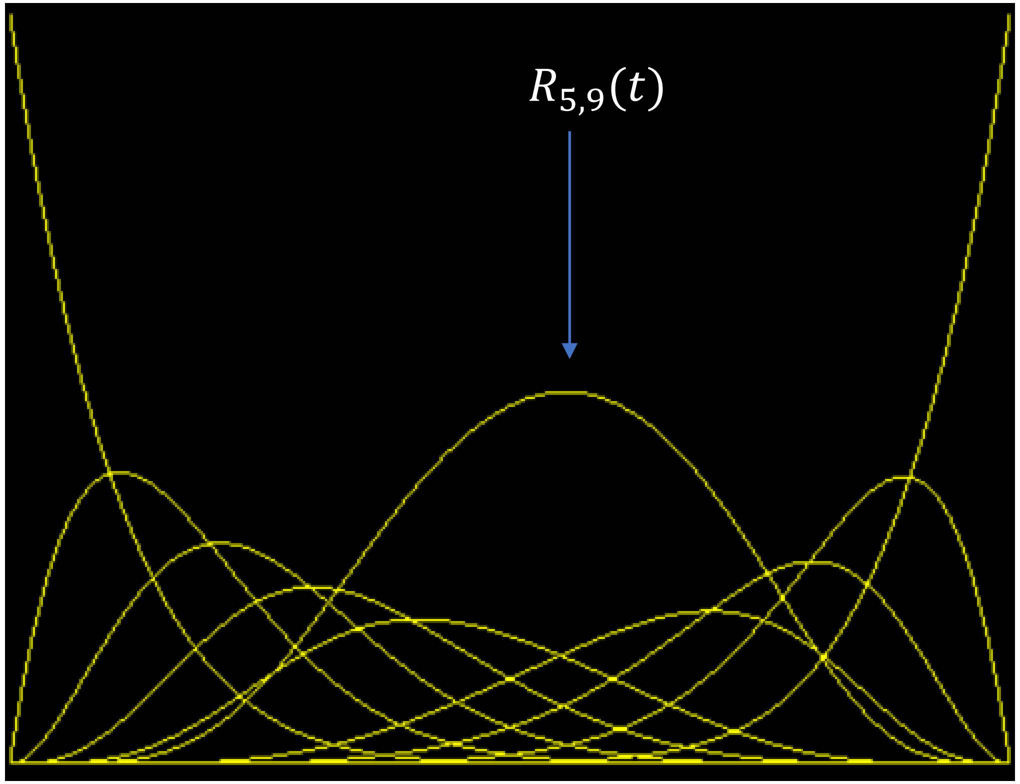


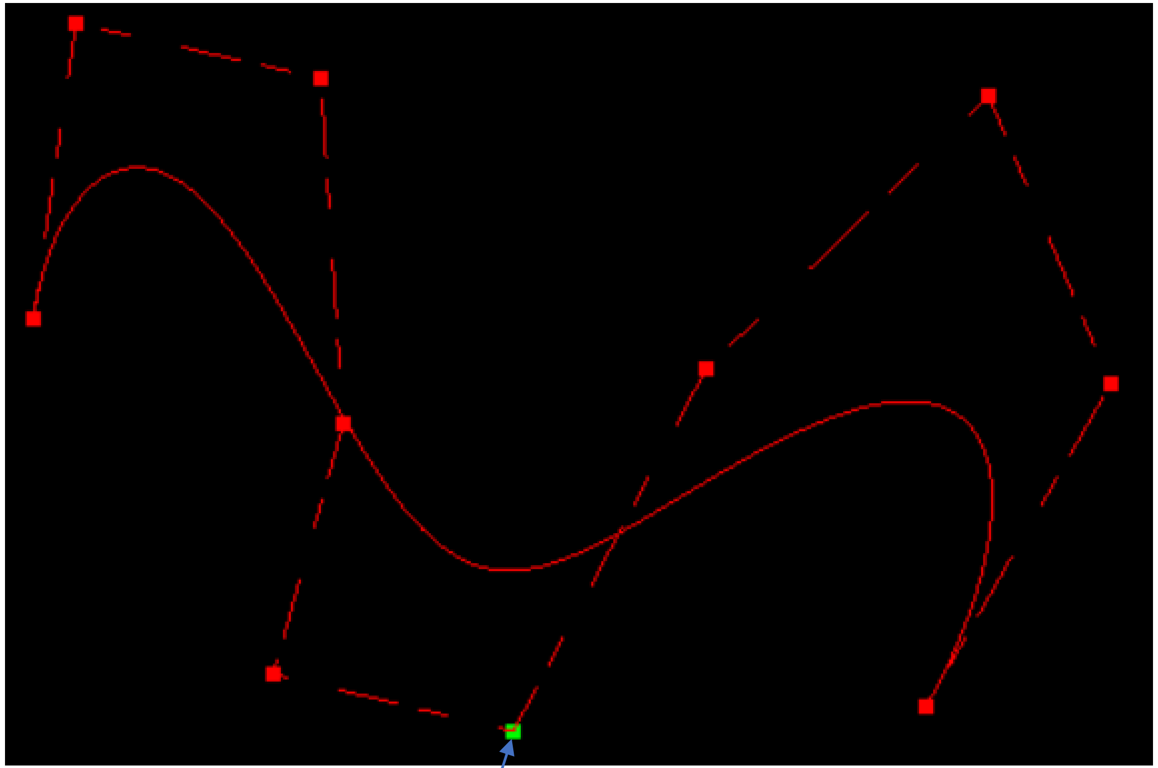


$$R_{i,n} = \frac{w_i B_{i,n}(t)}{\sum_{i=0}^{n} w_i B_{i,n}(t)}$$

$\sum_{i=0}^{n} R_{i,n}(t) = 1$

$w_5 = 0.5$

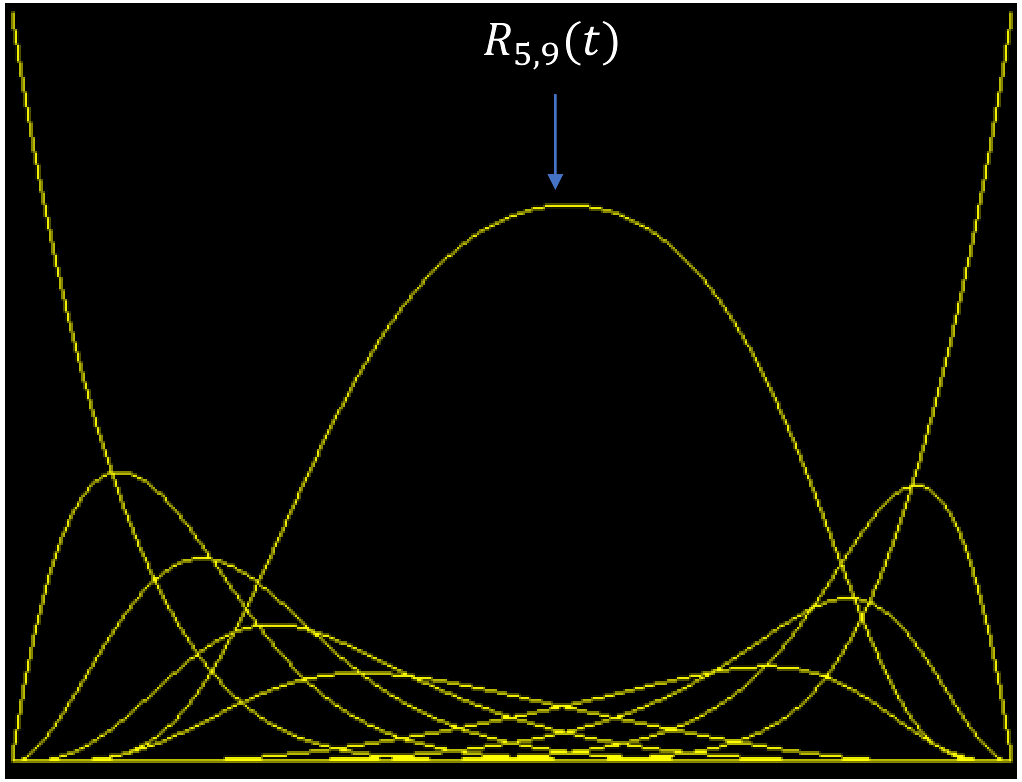


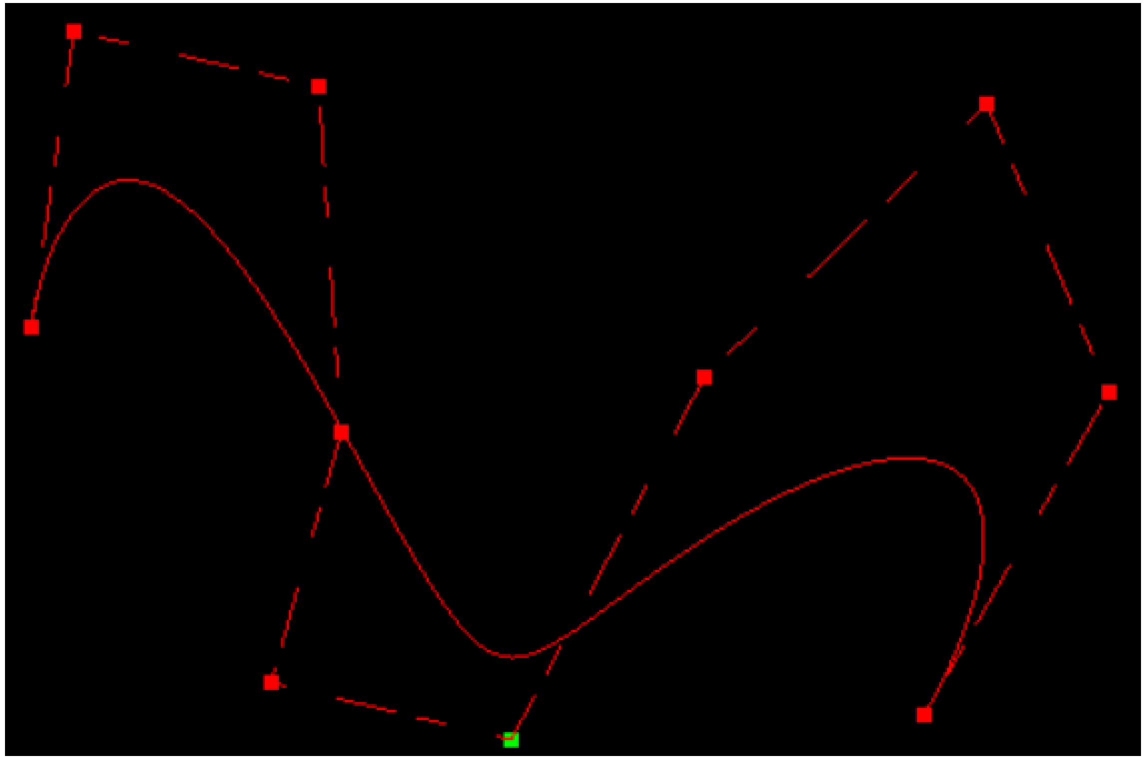


$$R_{i,n} = \frac{w_i B_{i,n}(t)}{\sum_{i=0}^{n} w_i B_{i,n}(t)}$$

$$\sum_{i=0}^{n} R_{i,n}(t) = 1$$

$w_5 = 2.8$





$w_5 = 8.2$

Dati i vertici di controllo $P_i, i = 0, 1, 2$ determinare i pesi $w_i, i = 0, 1, 2$ in maniera tale che la curva di Bezier razionale di grado 2 rappresenti l'espressione analitica di un quarto di circonferenza con centro l'origine e raggio 1.

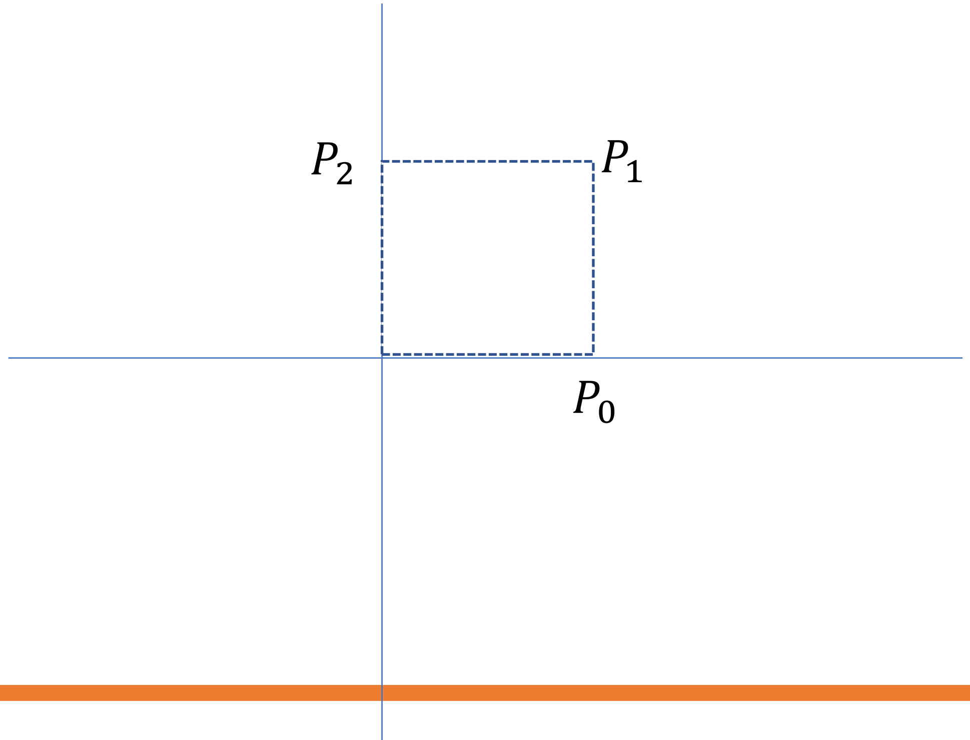
$P_0 \equiv (1,0), P_1 \equiv (1,1), P_2 \equiv (0,1),$

$$C(t) = \frac{\sum_{i=0}^{2} w_i P_i B_{i,n}(t)}{\sum_{i=0}^{2} w_i B_{i,n}(t)} = \begin{cases} X(t) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ Y(t) = \dfrac{2t}{1+t^2} \end{cases}$$

$B_{0,2}(t) = (1-t)^2$

$B_{1,2}(t) = 2t(1-t)$

$B_{2,2}(t) = t^2$



t

0 ½ 1

I pesi w_i, i=0,1,2 devono essere tali che $\sum_{i=0}^{2} w_i B_{i,n}(t)$= $1 + t^2$

$$w_0 B_{0,2}(t) + w_1 B_{1,2}(t) + w_2 B_{2,2}(t) = 1 + t^2$$

Valutiamo in t=0

$$w_0(1-t)^2 + w_1\, 2t(1-t) + w_2 t^2 = 1 + t^2 \qquad \text{per } t=0 \quad \Longrightarrow \quad w_0 = 1$$

Valutiamo in t=1

$$w_0(1-t)^2 + w_1\, 2t(1-t) + w_2 t^2 = 1 + t^2 \qquad \text{per } t=1 \quad \Longrightarrow \quad w_2 = 2$$

Valutiamo in t=$\frac{1}{2}$, utilizzando i valori di w_0=1 e $w_2 = 2$

$$w_0(1-t)^2 + w_1\, 2t(1-t) + w_2 t^2 = 1 + t^2$$

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)^2 + w_1\, 2\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right) + 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + w_1\, 2\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right) + 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\frac{1}{2}\, w_1 = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\frac{1}{2}\, w_1 = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad w_1 = 1$$

$P_0 \equiv (1,0), P_1 \equiv (1,1), P_2 \equiv (0,1), \quad w_0=1, w_1=1 \;\; w_2 = 2$

$B_{0,2}(t) = (1-t)^2 \qquad B_{1,2}(t) = 2t(1-t) \qquad B_{2,2}(t) = t^2$

$$\mathrm{C}(t) = \begin{cases} \dfrac{\sum_{i=0}^{2} w_i x_i B_{i,2}(t)}{\sum_{i=0}^{2} w_i B_{i,n}(t)} \\[2ex] \dfrac{\sum_{i=0}^{2} w_i y_i B_{i,2}(t)}{\sum_{i=0}^{2} w_i B_{i,2}(t)} \end{cases} = \begin{cases} X(t) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\[2ex] Y(t) = \dfrac{2t}{1+t^2} \end{cases}$$

$$\sum_{i=0}^{2} w_i B_{i,n}(t) = (1-t)^2 + 2t(1-t) + 2t^2 = 1 - 2t + t^2 + 2t - 2t^2 + 2\,t^2 = 1 + t^2$$

$$\sum_{i=0}^{2} w_i x_i B_{i,n}(t) = (1-t)^2 + 2t(1-t) = 1 - 2t + t^2 + 2t - 2t^2 = 1 - t^2$$

$$\sum_{i=0}^{2} \boldsymbol{w_i y_i B_{i,n}(t)} = 2t(1-t) + 2t^2 = 2t - 2t^2 + 2\,t^2 = \mathbf{2t}$$

Proprietà delle curve di Bezier razionali

La curva razionale di Bezier interpola il primo ed ultimo vertice del poligono di controllo.

Essa inoltre è tangente al primo ed ultimo lato del poligono di controllo.

Il poligono di controllo rappresenta una approssimazione lineare delle curva di Bézier.

Se $w_i = 1 \ \forall$ i, i=0,…,n, si ricade nel caso delle curve di Bézier intere.

Il numero di intersezioni di una qualsiasi retta con il poligono di controllo è maggiore o uguale al numero di intersezioni della retta con la curva.

La curva consente di realizzare in maniera perfetta figure coniche, circonferenze, etc., se si interviene sui pesi wi dei vertici di controllo

La curva è invariante per trasformazioni proiettive.

Tutti gli algoritmi per le curve di Bézier possono essere utilizzati per lo stesso scopo sulle curve razionali di Bézier; è sufficiente apportare semplici modifiche agli algoritmi per fare in modo che essi possano lavorare su tre componenti.

Le curve di Bézier razionali, pur risolvendo alcuni problemi, preservano i difetti delle curve di Bézier intere.

Il modo più semplice per definire le curve Nurbs 2D è quello di vederle come la proiezione sul piano proiettivo (quello in cui tutti i punti hanno coordinate omogenee (x,y,1)) di una curva spline 3D.

Siano infatti fissati i punti di controllo $P_i^w \equiv \begin{pmatrix} w_i \cdot x_i \\ w_i \cdot y_i \\ w_i \end{pmatrix}$ i=1,…,m+K ottenuti dai punti $P_i=(x_i,y_i)$ e dai pesi w_i tali che $w_i>0$ i=1,…,m+K.

Fissata una partizione nodale associata Δ di [a,b] ed una partizione nodale estesa Δ* consideriamo la curva spline 3D che ha P_i^w i=1,…,m+K come punti di controllo, cioè considerando:

$$C^w(t) = \sum_{i=1}^{m+K} P_i^w N_{i,m}(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{m+K} w_i x_i N_{i,m}(t) \\ \sum_{i=1}^{m+K} w_i y_i N_{i,m}(t) \\ \sum_{i=1}^{m+K} w_i N_{i,m}(t) \end{cases}$$

Consideriamone la proiezione sul piano proiettivo (w=1), dividendo ciascuna componente parametrica per la terza:

$$C(t) = \frac{\sum_{i=1}^{m+K} w_i P_i N_{i,m}(t)}{\sum_{i=1}^{m+K} w_i N_{i,m}(t)} = \begin{cases} \dfrac{\sum_{i=1}^{m+K} w_i x_i N_{i,m}(t)}{\sum_{i=1}^{m+K} w_i N_{i,m}(t)} \\ \\ \dfrac{\sum_{i=1}^{m+K} w_i y_i N_{i,m}(t)}{\sum_{i=1}^{m+K} w_i N_{i,m}(t)} \end{cases}$$

Se si definiscono le funzioni base,

$$R_{i,m(t)} = \frac{w_i N_{i,m}(t)}{\sum_{i=1}^{m+K} w_i N_{i,m}(t)}$$

si ottiene quindi che:

$$C(t) = \sum_{i=1}^{m+K} P_i\, R_{i,m}(t)$$

dove $R_{i,m}(t)$ sono funzioni Nurbs di base, cioè la base delle b-spline razionali. Queste funzioni base dipendono dalla partizione nodale e dai pesi w_i i=1,…,m+K.

La valutazione di una curva Nurbs può essere effettuata mediante l'algoritmo di De-Boor applicato ai punti P_i^w i=1,…,m+K, similarmente si può realizzare l'algoritmo di knot insertion. Si tratta quindi di utilizzare le coordinate dei punti P_i^w e alla fine di effettuare la proiezione della curva sul piano proiettivo w=1.

Le proprietà delle curve Nurbs sono sicuramente quelle delle curve b-spline, con in più l'invarianza rispetto alle proiezioni prospettiche.

Le proprietà infatti sono mantenute, in quanto le basi delle b-spline razionali $R_{i,m}(t)$ godono delle medesime proprietà della b-spline classica.

Proprietà delle funzioni base delle Nurbs $R_{i,m}(t)$:

$R_{i,m}(t)$ sono positive su tutto il loro supporto, $R_{i,m}(t) \geq 0$ per $t \in [t_l, t_{l+1})$.

Sono a supporto compatto, il che significa che sono diverse da 0 per $t \in (t_i, t_{i+m})$.

Costituiscono una partizione dell'unità $\sum_{i=1}^{m+K} R_{i,m}(x) = 1$.

La valutazione in un punto $t \in [t_l, t_{l+1})$ è ridotta a

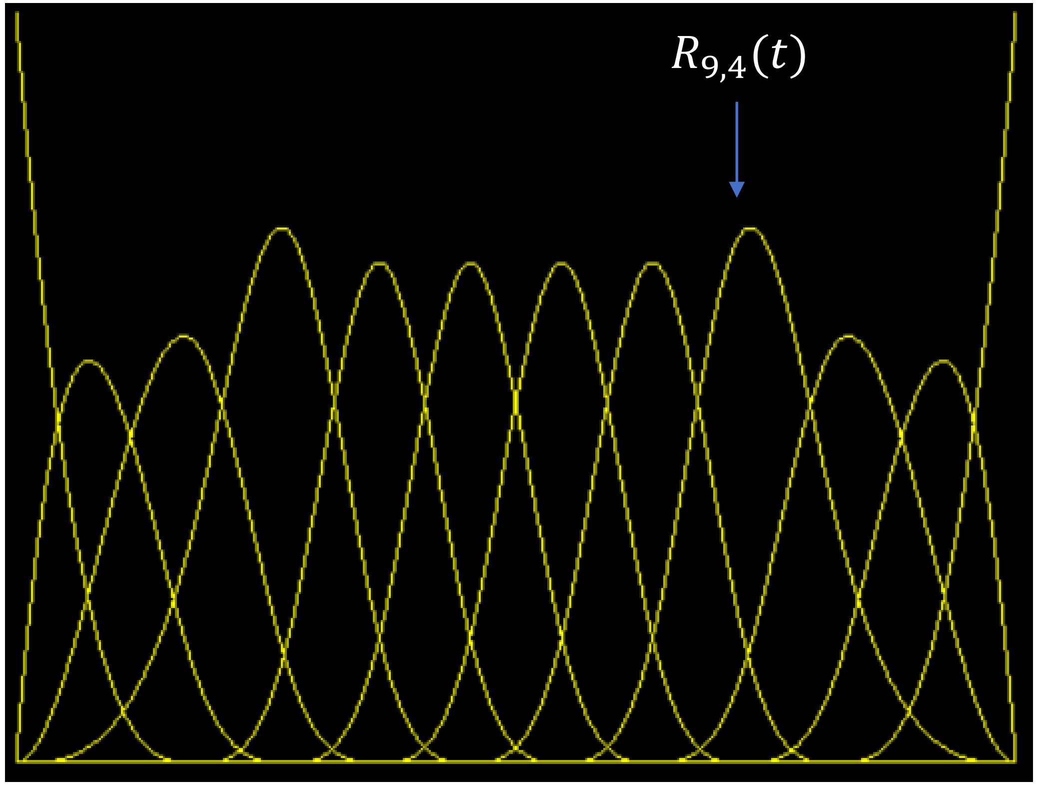
$$c(t) = \sum_{i=l-m+1}^{l} c_i R_{i,m}(t).$$

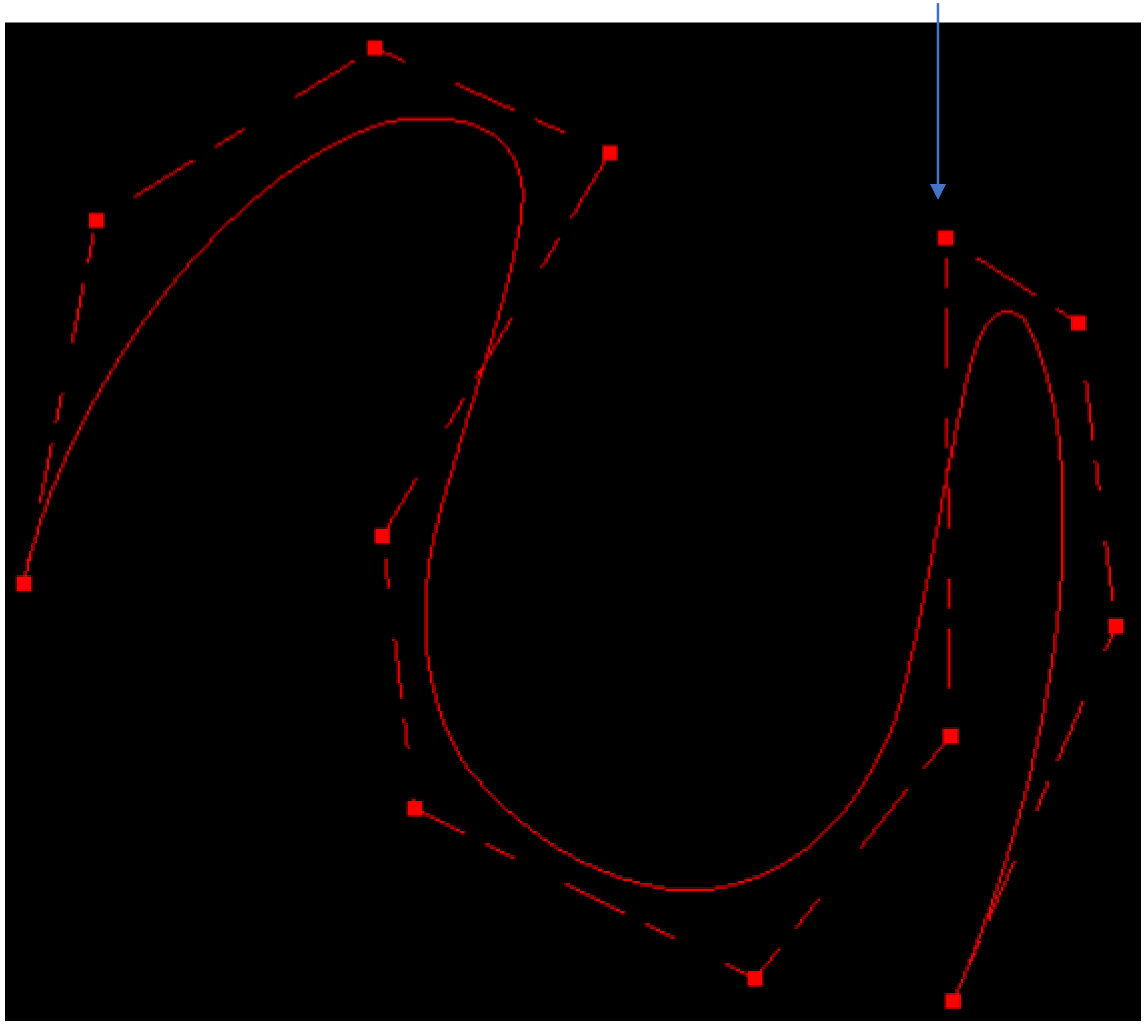
Il passaggio dalla curva omogenea 3D C(t) alla sua proiezione C(t) può creare qualche problema riguardo alla nozione si continuità sia parametrica che geometrica, che abbiamo visto sino a questo momento.

È infatti necessario introdurre il concetto di continuità parametrica razionale e di continuità geometrica razionale, che sono generalizzazione di concetti che già conosciamo.

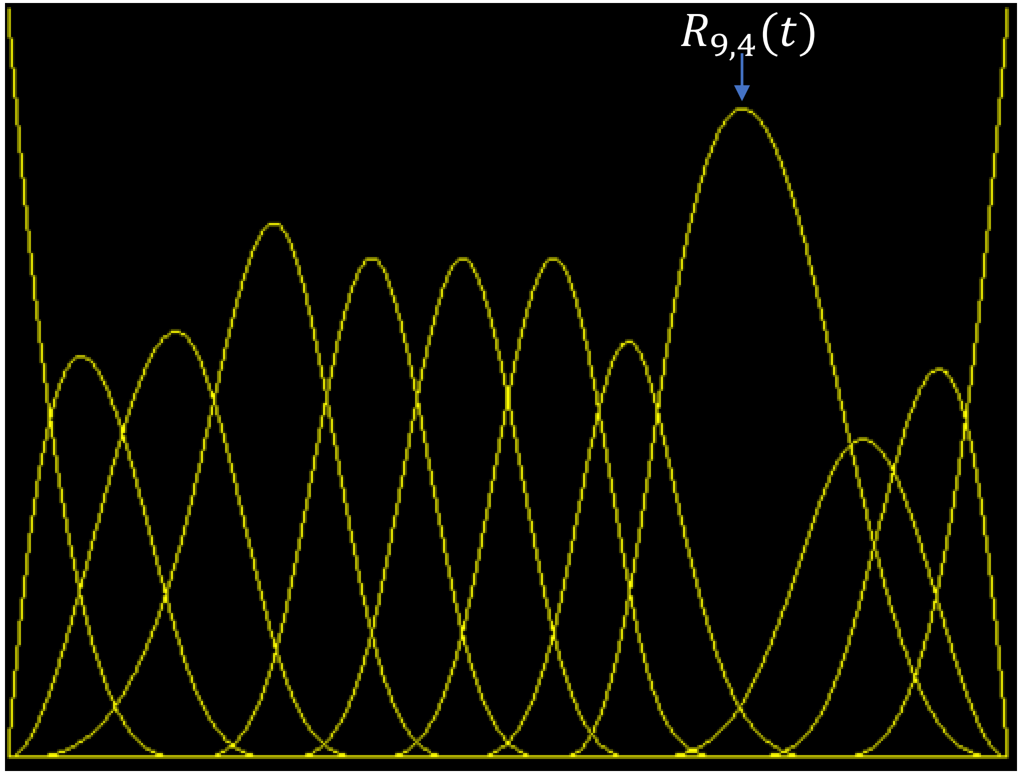
N=12 m=4 k=8

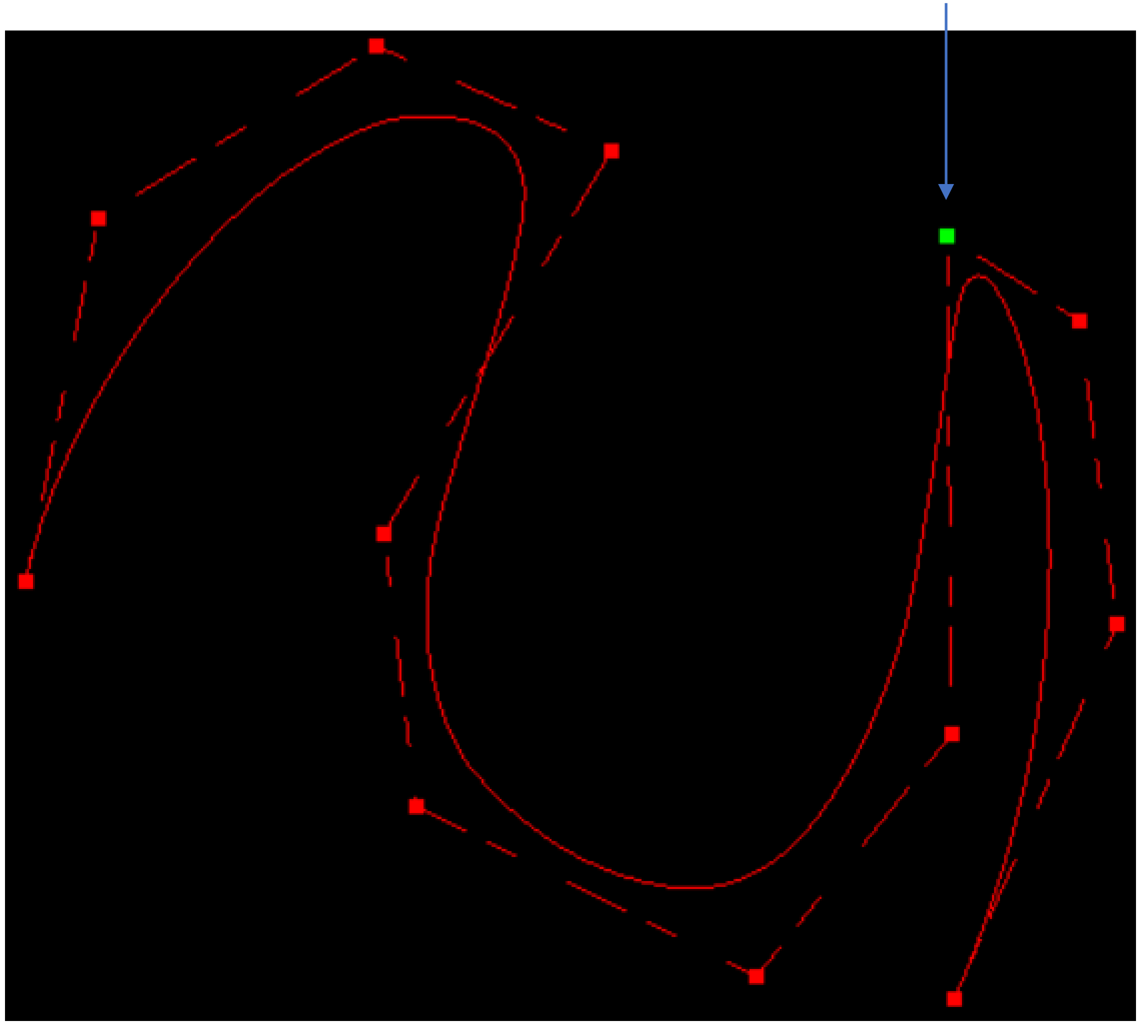
$w_9 = 1$





$w_9 = 2.6$

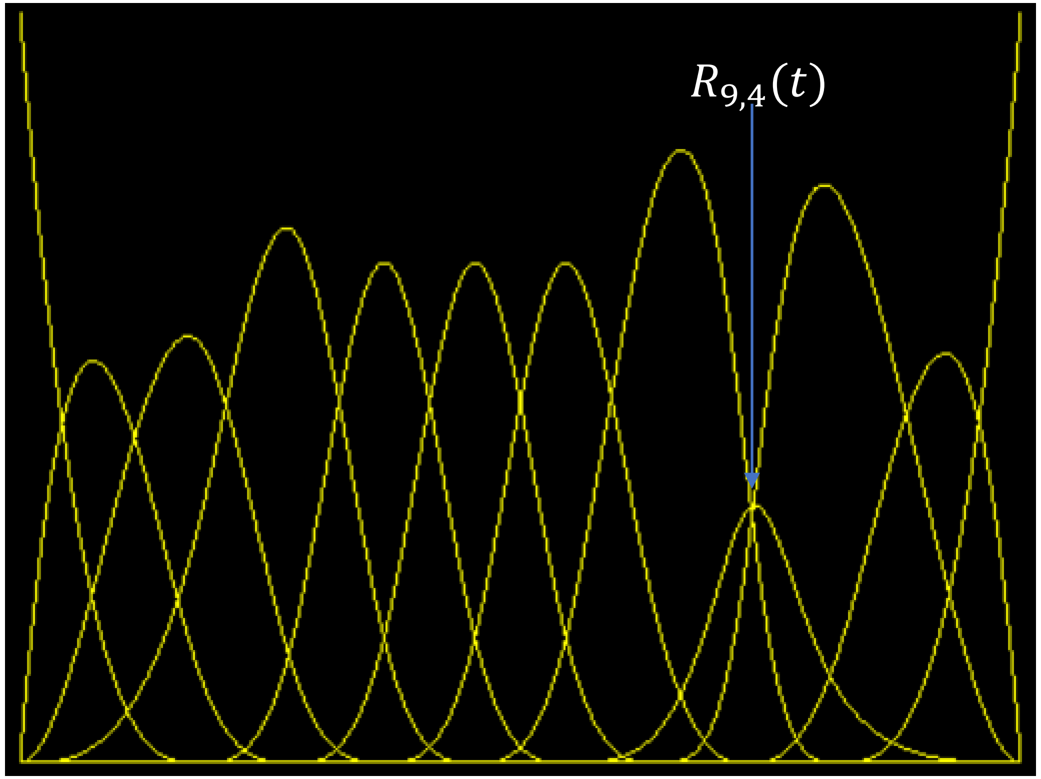


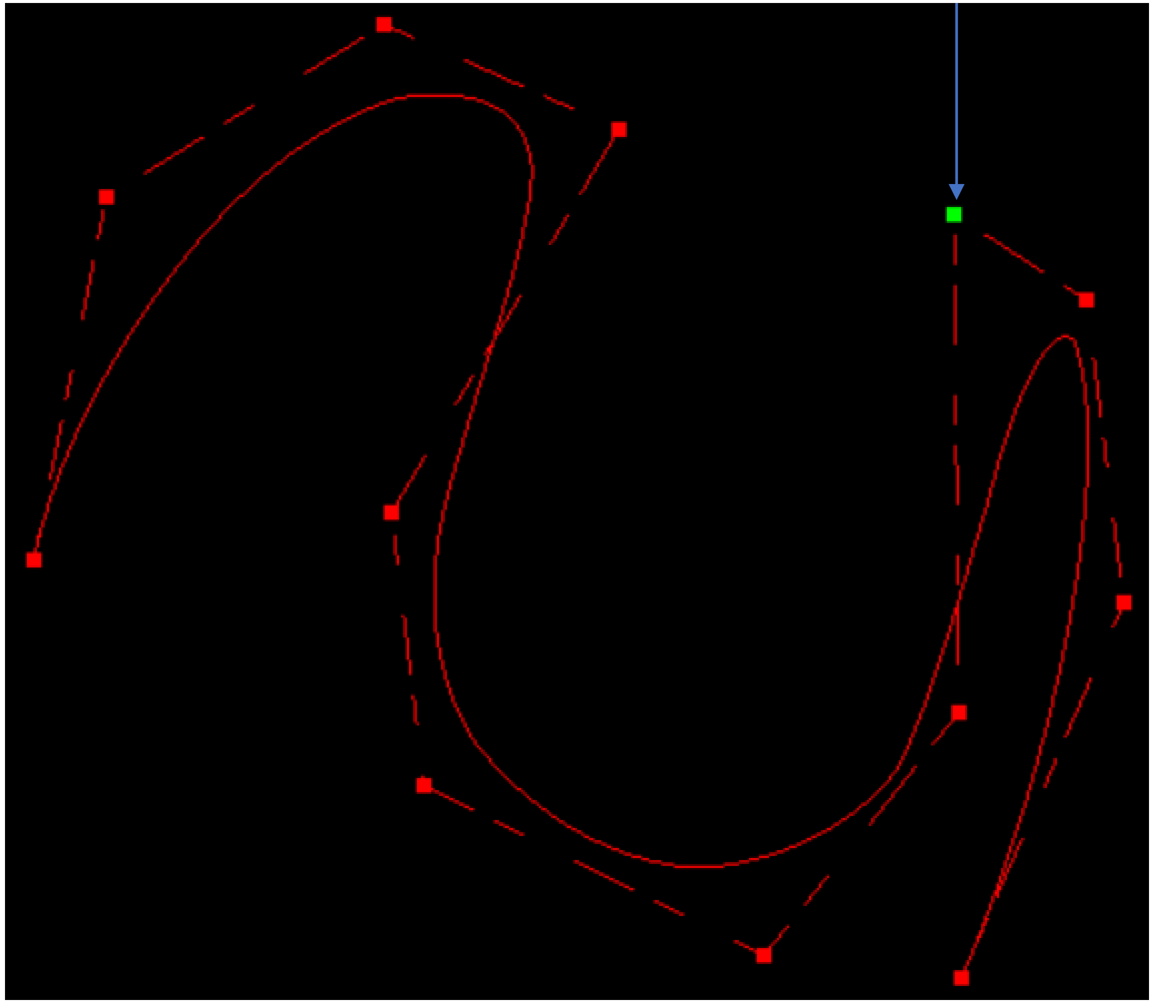


$\sum_{i=1}^{m+K} R_{i,m}(t) = 1$

$$R_{i,m(t)} = \frac{w_i N_{i,m}(t)}{\sum_{i=1}^{m+K} w_i N_{i,m}(t)}$$

$w_9 = 0.2$





$$R_{i,m(t)} = \frac{w_i N_{i,m}(t)}{\sum_{i=1}^{m+K} w_i N_{i,m}(t)} \qquad \sum_{i=1}^{m+K} \mathrm{R}_{\mathrm{i,m}}(\mathrm{t}) = 1$$

Le curve Nurbs rappresentano un'unica entità matematica che permette sia di costruire in maniera analitica le sezioni di figure coniche, sia di effettuare modellazioni libere.

Esse sono fornite di algoritmi veloci ed efficienti (si tratta degli stessi algoritmo delle spline a nodi multipli, con qualche specifico accorgimento al fine di poter operare su 3 coordinate, x y e w).

Se K = 0, nella partizione nodale con nodi aggiunti agli estremi coincidenti e senza nodi veri, N=m, la curva Nurbs coincide con una curva di Bezier razionale.

Le curve Nurbs godono delle proprietà di controllo locale: alla modifica di un punto P_i o di un peso, si modificano solo gli span relativi a quel vertice di controllo.

Esse godono delle proprietà di strong convex-hull: se $t \in [t_l, t_{l+1})$

$$C(t) = \sum_{i=l-m+1}^{l} P_i R_{i,m}(t)$$

la curva è contenuta nell'inviluppo convesso individuato dai vertici di controllo $P_{l-m+1}, \ldots, P_l$. Se m-1 vertici coincidono, la curva passerà per questo punto che sarà di tipo angoloso; se m vertici sono allineati, la curva si adagerà sul segmento da essi creato.

Se la partizione nodale estesa Δ^* ha nodi aggiuntivi coincidenti, la curva Nurbs interpola il primo ed ultimo punto del poligono di controllo e sarà tangente al primo ed ultimo lato del poligono di controllo.

Il numero di intersezioni di una qualsiasi retta con il poligono di controllo è maggiore o uguale al numero di intersezioni della retta con la curva.

Il poligono di controllo rappresenta una approssimazione lineare delle curva Nurbs, approssimazione che può essere migliorata introducendo dei nodi.

Le curve Nurbs sono invarianti per trasformazioni affini.

Esse consentono di realizzare circonferenze o altre figure geometriche intervenendo sul valore dei pesi w_i.

Le curve Nurbs sono un ottimo strumento adatto alla modellazione che non ha alcun difetto.

Inoltre a seconda dei casi è possibile ricadere nelle curve di Bézier razionali, curve di Bézier intere, curve spline di ordine m a nodi multipli e curve spline di ordine m a nodi semplici.

Tali curve sono alla base di tutti i moderni software di modellazione e consentono ai designer di realizzare qualunque tipo di curva e forma.