ESERCIZI DI MDP PER IL 13 OTTOBRE 2021

(1) Consideriamo un mazzo di carte da poker contenente le carte numerate 7, 8, 9, 10, J, Q, K, A e contenente quindi 32 carte. Quante sono le mani in cui si ha un punteggio pari o superiore alla scala (cioè o scala, o colore, o full, o poker o scala reale)?

(2) Un'urna contiene 20 palline numerate da 1 a 20. In quanti modi è possibile colorarle di blu o di rosso in modo che ce ne siano esattamente 8 rosse con un numero pari e 3 rosse con un numero dispari?

(3) Un'urna contiene 6 palline rosse, 6 gialle, 6 blu, 6 verdi e 6 arancioni. Determinare in quanti modi si possono pescare 8 palline in modo che queste palline siano esattamente di 3 colori differenti. Risolvere questo esercizio sia supponendo che le palline siano indistinguibili, sia supponendo che siano distinguibili, ad esempio supponendo che siano numerate da 1 a 30.

(4) Fare lo stesso esercizio supponendo che le palline siano 9 anziché 6 per ciascun colore.

(5) Stabilire quante sono le permutazioni di $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ in cui almeno tre numeri rimangono al loro posto.

(6) Stabilire quanti sono gli anagrammi della parola LALLANLA in cui almeno 4 lettere non hanno cambiato posto.

(7) Consideriamo un insieme A di 16 palline, di cui 8 rosse numerate da 1 a 8, e le altre 8 blu, sempre numerate da 1 a 8. Determinare quanti sono i sottoinsiemi di A costituiti da 10 palline in cui c'è almeno una pallina per ogni valore.

    Determinare quanti sono i sottoinsiemi in cui compaiono tutti i valori da 1 a 8 tranne al più un valore.

(8) Lanciamo un dado per 12 volte.
    (a) Determinare quante sono le possibili sequenze di risultati in cui tutti i numeri da 1 a 6 compaiono almeno una volta.
    (b) Determinare quante sono quelle in cui ogni risultato compare esattamente due volte.
    (c) Determinare quante sono quelle in cui 1,2,3,4 compaiono almeno due volte e 5,6 almeno una volta.

Cenni di soluzioni

(1) Chiamiamo A, B, C, D, E le seguenti mani A: cinque valori distinti ordinati, B: 5 carte dello stesso seme, C una coppia e un tris, D un poker e E 5 carte ordinate dello stesso seme. Dobbiamo calcolare $|A \cup B \cup C \cup D \cup E|$. Osservando che $E = A \cap B$ abbiamo

$$|A \cup B \cup C \cup D \cup E| = |A \cup B \cup C \cup D| = |A| + |B| + |C| + |D| - |E|$$

per il principio di inclusione-esclusione. Abbiamo quindi

A: scegliamo il valore più piccolo in 4 modi (7,8,9,10) e una volta effettuata questa scelta abbiamo 4^5 modi di scegliere i semi delle cinque carte: $|A| = 4^6 = 4096$.
B: abbiamo $|B| = \binom{8}{5} = 56$.
C: scelgo il valore del tris (8 modi), poi scelgo il valore della coppia (7 modi), poi i semi delle 3 carte del tris (4 modi) e infine i semi delle due carte della coppia (6 modi). In tutto ho $|C| = 8 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 6 = 1344$.
D: scelgo il valore del poker (8 scelte) e poi scelgo la carte rimanente (28 scelte): $|D| = 224$.
E: scelgo il valore minimo (4 scelte), scelgo il seme delle carte: (4 scelte): $|E| = 16$. Abbiamo quindi in tutto:

$$|A| + |B| + |C| + |D| - |E| = 4096 + 56 + 1344 + 224 - 16 = 6004$$

mani con un punteggio pari o superiore alla scala.

(2) In questo esercizio dobbiamo semplicemente scegliere 8 palline pari ($\binom{10}{8} = 45$ scelte) e 3 palline dispari ($\binom{10}{3} = 120$ scelte). In tutto ho $45 \cdot 120 = 5400$ scelte.

(3) Caso indistinguibili.

Possiamo avere le seguenti possibilità
(a) 6 di un colore, 1 di un altro, 1 di un altro;
(b) 5, 2, 1;
(c) 4, 2, 2;
(d) 4, 3, 1;
(e) 3, 3, 2.

Nei casi (a), (c), (e) possiamo scegliere i colori in 30 modi. Nei casi (b) e (d) possiamo scegliere i colori in 60 modi. Abbiamo in tutto quindi 210 modi.

Caso distinguibili.

Contiamo prima in quanti modi possiamo scegliere 8 palline in modo che siano di colore rosso, giallo e blu, almeno una di ciascun colore. Poniamo $A =$"tutti i sottoinsiemi di 8 palline di colore rosso o giallo;
Poniamo $B =$"tutti i sottoinsiemi di 8 palline di colore rosso o blu;
Poniamo $C =$"tutti i sottoinsiemi di 8 palline di colore blu o giallo;
E poniamo $U =$"tutti i sottoinsiemi di 8 palline di colore rosso, blu o giallo;
Dobbiamo calcolare $|U| - |A \cup B \cup C|$. Per calcolare $|A \cup B \cup C|$ osserviamo che questi tre insiemi sono disgiunti e che abbiamo $|A| = |B| = |C| = \binom{12}{8} = 495$. Abbiamo quindi $\binom{18}{8} - 3 \cdot 495 = 43758 - 1485 = 42273$. Le scelte possibili dei tre colori sono $\binom{5}{3} = 10$ per cui in tutto ho

$$422730$$

possibilitá.

(4)

(5) Contiamo quante sono le permutazioni in cui esattamente tre numeri rimangono al loro posto: scelti questi tre i due rimanenti devono necessariamente essere scambiati tra di loro: abbiamo quindi $\binom{5}{3} = 10$ permutazioni di questo tipo. Permutazioni in cui abbiamo esattamente quattro numeri che rimangono al loro posto non esistono. E abbiamo una sola permutazione in cui tutti i numeri rimangono al loro posto. In tutto tali permutazioni sono quindi 11.

(6) Il numero di lettere fuori posto puó essere 0, 2, 3, 4. Se le lettere fuori posto sono 0, ho chiaramente una sola parola. Se le lettere fuori posto sono 2 queste devono essere necessariamente distinte: sono quindi $4 \cdot 3 + 4 + 3 = 19$. Se le lettere fuori posto sono 3 queste devono essere necessariamente distinte: sono quindi $4 \cdot 3 = 12$: queste tre lettere possono essere scombussolate in 2 modi diversi e quindi ho 24 anagrammi.

Se le lettere fuori posto sono 4 devono essere due L, una A e una N, oppure due A, una L e una N. Abbiamo quindi $6 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 30$ scelte. Effettuata questa scelta abbiamo due modi di scombussolare le 4 lettere e quindi abbiamo 60 anagrammi di questo tipo. In tutto abbiamo $1 + 19 + 24 + 60 = 104$ anagrammi di LALLANLA in cui almeno 4 lettere rimangono al loro posto.

(7) Un insieme di 10 palline in cui compaiono tutti i valori da 1 a 8 é composto da due valori che compaiono sia in rosso che in blu e tutti gli altri valori che compaiono una volta sola. Procediamo quindi scegliendo i due valori sia in rosso che in blu ($\binom{8}{2} = 28$ scelte) e poi il colore per ogni altro valore $2^6 = 64$ scelte. Abbiamo in tutto quindi $28 \cdot 64 = 1792$ possibilitá.

I sottoinsiemi in cui compaiono tutti i valori li possiamo costruire cosí: per ogni valore scegliamo se prendere la carta rossa, la blu, o tutte e due: abbiamo in tutto 3^8 possibili scelte. Se vogliamo tutti i valori tranne uno scegliamo questo valore in 8 modi e poi per ciascuno degli altri abbiamo 3 scelte come sopra e quindi $8 \cdot 3^7$ possibilitá.

In tutto abbiamo $3^8 + 8 \cdot 3^7 = 11 \cdot 3^7 = 24057$.

(8) (a) Questo è dato dal numero di funzioni suriettive da $\{1, 2, \ldots, 12\}$ a $\{1, 2, \ldots, 6\}$. Sono quindi

$$\sum_{k=0}^{6} (-1)^k \binom{6}{k} (6-k)^{12} = 6^{12} - 6 \cdot 5^{12} + 15 \cdot 4^{12} - 20 \cdot 3^{12} + 15 \cdot 2^{12} - 6$$

(b) Queste sono proprio le combinazioni di tipo $(2, 2, 2, 2, 2, 2)$, e sono quindi

$$\binom{12}{2\,2\,2\,2\,2\,2} = \frac{479001600}{2^6} = 7484400.$$

(c) In questo caso abbiamo

$$4 \cdot \binom{12}{4\,2\,2\,2\,1\,1} + 2 \cdot \binom{12}{2\,2\,2\,2\,3\,1} + \binom{4}{2} \binom{12}{3\,3\,2\,2\,1\,1} + \binom{12}{2\,2\,2\,2\,2\,2} + 4 \cdot 2 \cdot \binom{12}{3\,2\,2\,2\,2\,1}$$