NOME E COGNOME:

MATRICOLA:

PROVA SCRITTA DI MDP, 07/02/2024

Riportare sotto ad ogni esercizio il relativo svolgimento in bella copia.

Esercizio 1 Un venditore di biciclette vende mediamente una bici a giorno. Supponiamo che il numero di biciclette vendute ogni giorno sia una variabile di Poisson, e che il numero di bici vendute in giorni diversi siano indipendenti.

i) Calcolare la probabilità che nella prima settimana di febbraio siano vendute non più di 5 biciclette.
ii) Calcolare la probabilità che nei primi 5 giorni di febbraio non sia venduta nessuna bicicletta.
iii) Quanti saranno mediamente i giorni di febbraio in cui non è stata venduta nessuna bicicletta? (Attenzione, quest'anno è bisestile!)
iv) Siano $X_1, \ldots, X_{29}$ il numero di biciclette vendute nei vari giorni di febbraio. Calcolare

$$P(X_1 = 1 | X_1 + \ldots + X_{29} = 29).$$

Soluzione. Sia X il numero di bici vendute in un giorno, allora per ipotesi abbiamo $X \sim P(1)$.

i) Sia Y il numero di bici vendute in una data settimana, allora $Y \sim P(7)$. Dunque

$$P(Y \leq 5) = e^{-7} \left(1 + 7 + \frac{7^2}{2!} + \frac{7^3}{3!} + \frac{7^4}{4!} + \frac{7^5}{5!} \right) = 0.3$$

ii) La probabilità che in un giorno non sia venduta nessuna bici è e^{-1}. Dunque la probabilità che per 5 giorni consecutivi non sia stata venduta nessuna bici è $(e^{-1})^5 = 0.0067$.

iii) Sia Z il numero di giorni a febbraio in cui non è stata venduta nessuna bicicletta. Allora Z è una variabile binomiale di parametri $n = 29$, $p = P(X = 0) = e^{-1}$. Dunque il numero medio di giorni a febbraio trascorsi senza aver venduto nessuna bici è dato dal valore atteso

$$E(Z) = n \cdot p = 29e^{-1} = 10.67$$

iv) Abbiamo $X_1 + \ldots + X_{29} \sim P(29)$ e $X_2 + \ldots + X_{29} \sim P(28)$. Dunque

$$P(X_1 + \ldots + X_{29} = 29) = e^{-29} \frac{29^{29}}{29!}$$

$$P(X_1 = 1, X_2 + \ldots + X_{29} = 28) = e^{-1} \left(e^{-28} \frac{28^{28}}{28!} \right)$$

Pertanto

$$P(X_1 = 1 | X_1 + \ldots + X_{29} = 29) = \frac{P(X_1 = 1, X_2 + \ldots + X_{29} = 28)}{P(X_1 + \ldots + X_{29} = 29)} = \left(\frac{28}{29} \right)^{28} = 0.3744$$

Esercizio 2 Si consideri la funzione

$$f(t) = \begin{cases} a(t+1)^2 & \text{se } t \in [-1,0] \\ b(t-1)^2 & \text{se } t \in [0,1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

i) Determinare tutti i valori $a, b \in \mathbb{R}$ per cui f sia una densità continua astratta, e disegnarne un grafico approssimativo.

ii) Determinare $a, b \in \mathbb{R}$ per cui f sia una densità continua astratta per una variabile aleatoria X di media $\frac{1}{12}$.

iii) Per la variabile aleatoria X del punto precedente, calcolare $P(X > \frac{1}{12})$ e $P(X > \frac{1}{12} \,|\, X > -\frac{1}{2})$.

iv) Detta $Y = (X+1)^4$, calcolare $P(Y > \frac{1}{16})$.

Soluzione.

i) Affinché f sia una densità continua astratta deve essere $f(t) \geq 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ e $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$. Abbiamo

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = \int_{-1}^{0} a(t+1)^2 dt + \int_{0}^{1} b(t-1)^2 dt = \left[\frac{a}{3}t^3\right]_0^1 + \left[\frac{b}{3}t^3\right]_{-1}^0 = \frac{a}{3} + \frac{b}{3},$$

pertanto f è una densità continua astratta se e solo se valgono le tre condizioni $a \geq 0$, $b \geq 0$ e $a + b = 3$.

ii) Sia X una variabile aleatoria continua con densità f, per opportuni valori a, b. Allora abbiamo

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt = \int_{-1}^{0} at(t+1)^2 dt + \int_{0}^{1} bt(t-1)^2 dt = \left[\frac{a}{4}t^4 - \frac{a}{3}t^3\right]_0^1 + \left[\frac{b}{4}t^4 + \frac{b}{3}t^3\right]_{-1}^0 = \frac{b-a}{12},$$

Essendo $E(X) = \frac{1}{12}$, vediamo che a, b risolvono il sistema

$$\begin{cases} a + b = 3 \\ b - a = 1 \end{cases}$$

da cui ricaviamo $a = 1, b = 2$ (che sono valori ammissibili).

iii) Abbiamo

$$P(X > \tfrac{1}{12}) = \int_{1/12}^{1} 2(t-1)^2 dt = \int_{-11/12}^{0} 2s^2 ds = \frac{2}{3}\left[s^3\right]_{-11/12}^{0} = \frac{2}{3}\left(\frac{11}{12}\right)^3 = \frac{1331}{2592} = 0.5135$$

$$P(X > -\tfrac{1}{2}) = \int_{-1/2}^{0} (t+1)^2 dt + \int_{0}^{1} 2(t-1)^2 dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_{-1/2}^{1} + \frac{2}{3} = \frac{7}{8}$$

$$P(X > \tfrac{1}{12} | X > -\tfrac{1}{2}) = \frac{P(X > \frac{1}{12})}{P(X > -\frac{1}{2})} = \frac{1331}{2592} \cdot \frac{8}{7} = \frac{1331}{2268} = 0.5869$$

iv) Abbiamo

$$P(Y > \tfrac{1}{16}) = P(-\tfrac{1}{2} < X + 1 < \tfrac{1}{2}) = P(X < -\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{8}$$

P(X > -3/2) è 1 quindi non si conta

Esercizio 3 Una coppia decide di fare figli fino alla nascita della prima figlia femmina, fermandosi ad un massimo di 4 figli. Sia X la variabile aleatoria data dal numero di figli maschi nati dalla coppia, e Y la variabile aleatoria data dal numero di figlie femmine.

i) Calcolare la densità di X e la densità di Y, e calcolarne il valore atteso.

ii) Calcolare la densità e il valore atteso di $|X-Y|$.

iii) Supponendo che 100 coppie decidano di comportarsi allo stesso modo, calcolare la probabilità che la differenza tra il numero di figli maschi e il numero di figlie femmine nate dalle 100 coppie sia al più 3, in valore assoluto.

Soluzione. i) La variabile X è il minimo tra 4 e una variabile geometrica di parametro 1/2. Quindi

$$P(X=n)=\begin{cases}1/2^{n+1} & \text{se } n=0,1,2,3\\ 1/2^4 & \text{se } n=4\\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$$

vale a dire

$$P(X=0)=1/2, \qquad P(X=1)=1/4, \qquad P(X=2)=1/8, \qquad P(X=3)=P(X=4)=1/16$$

La variabile Y invece è una variabile di Bernoulli di parametro

$$P(Y=1)=1-P(X=4)=1-\frac{1}{2^4}=15/16.$$

Quindi troviamo $E(Y)=\frac{15}{16}$, che coincide anche con

$$E(X)=\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{8}+3\cdot\frac{1}{16}+4\cdot\frac{1}{16}=\frac{15}{16}.$$

ii) La variabile $|X-Y|$ assume valori $0,1,2,4$. Abbiamo

$$P(|X-Y|=0)=P(X=1)=\frac{1}{4}$$
$$P(|X-Y|=1)=P(X=0)+P(X=2)=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}=\frac{5}{8}$$
$$P(|X-Y|=2)=P(X=3)=\frac{1}{16}$$
$$P(|X-Y|=4)=P(X=4)=\frac{1}{16}$$

Dunque

$$E(|X-Y|)=\frac{5}{8}+2\cdot\frac{1}{16}+4\cdot\frac{1}{16}=1$$

iii) Siano $X_1,\dots,X_{100}$ e $Y_1,\dots,Y_{100}$ rispettivamente il numero di figli maschi e di figlie femmine nati dalle varie coppie. Poniamo

$$Z_{100}=X_1+\ldots+X_{100}-(Y_1+\ldots+Y_{100})$$

Allora per il Teorema del limite centrale possiamo approssimare $Z_{100}\sim N(100\mu,100\sigma^2)$ dove $\mu=E(X_1-Y_1)$ e dove $\sigma^2=Var(X_1-Y_1)$.

Per quanto detto al punto i) abbiamo

$$E(X-Y)=E(X)-E(Y)=0$$

Dunque

$$\sigma^2=Var(X-Y)=E(|X-Y|^2)=\frac{5}{8}+4\cdot\frac{1}{16}+16\cdot\frac{1}{16}=\frac{30}{16}$$

vale a dire $\sigma=1.3693$. - (E(X-Y))^2 che è uguale a 0 quindi sottraendo non succede niente

Nel nostro caso troviamo

$$P(|Z_{100}|\le 3)=P(-3.5<Z_{100}<3.5)=P(-3.5<\sigma\zeta_0<3.5)=P(-2.57<\zeta_0<2.57)=2\Phi(2.57)-1=2\cdot 0.9949-1=0.9898$$

Correzione di continuità -0.5 + 0.5 Divide sigma a destra e sinistra Destra meno quello a sinistra