ESERCIZI DI MDP PER IL 17 NOVEMBRE 2021

(1) Stabilire quali delle seguenti funzioni rappresentano una densità discreta astratta.

$$d_1(k) = \begin{cases} 0.2 & \text{se } k = -1, 2, 4 \\ 0,4 & \text{se } k = 8 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$$d_2(k) = \begin{cases} 0.2 & \text{se } k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \\ -0,4 & \text{se } k = 8 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$$d_3(k) = \begin{cases} \frac{2k-1}{2^k} & \text{se } k \geq 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(2) Lanciamo un dado per 4 volte e denotiamo X_1, X_2, X_3, X_4 i risultati dei quattro lanci. Poniamo $Y = |\{i : X_i = 6\}|$, $Z = |X_1 - X_2|$, $W = \min\{|X_i - X_j| : i \neq j\}$. Determinare le densità di Y, Z e W.

(3) Lanciamo una moneta ripetutamente e registriamo i risultati in una sequenza binaria $(a_1, a_2, \ldots)$ in cui inseriamo 0 quando otteniamo testa e 1 quando otteniamo croce. Poniamo $X = \min\{i : a_{i-1} = a_i\}$ e $Y = \min\{i : a_{i-1} = a_i = 1\}$. Ad esempio ottenendo una sequenza 1001011 abbiamo $X = 3$ e $Y = 7$.
   (a) Determinare $P(a_i = a_{i-1})$ per ogni $i > 1$.
   (b) Determinare la probabilità $P(X = k)$ per ogni k (cioè la probabilità che i primi due lanci consecutivi che danno lo stesso risultato siano i lanci $k - 1$ e k)
   (c) Determinare la probabilità $P(Y = k)$ (cioè la probabilità che i primi due lanci consecutivi che danno testa siano i lanci $k - 1$ e k) per ogni $k \leq 8$;
   (d) Dimostrare che $P(Y = k) = \frac{F_{k-3}}{2^k}$ per $k > 3$, dove F_k è il k-esimo numero di Fibonacci.

(4) Organizzando una gita abbiamo a disposizione un pullmino da 28 posti e, confidando nel fatto che la probabilità che una persona a caso che ha comprato il biglietto non si presenti alla partenza è del 10%, decidiamo di vendere 30 biglietti. Qual è la probabilità di essere nei guai (cioè che qualcuno non trovi posto)?

   Quanti biglietti avremmo potuto vendere ammettendo un rischio massimo del 50% di ritrovarci nei guai?

(5) Supponiamo che la probabilità che nessun bambino nato a Cesena in questo mese diventi un dottore di ricerca sia e^{-1}.
   (a) Qual è la probabilità che almeno due bambini nati in questo mese a Cesena diventino dottori di ricerca?
   (b) Qual è la probabilità che in un anno nascano almeno 4 bambini che diventeranno dottori di ricerca?

(6) Lanciamo due dadi, uno rosso e uno blu, per 4 volte e conideriamo le seguenti variabili
   (a) $X=$ numero di volte in cui il rosso ha dato un risultato maggiore del blu. Che densità ha la variabile X?
   (b) $Y=$ numero di volte in cui il rosso ha dato un risultato uguale al lancio precedente. Che densità ha Y?
   (c) $Z=$ il primo lancio in cui la somma di tutti i risultati ottenuti fino a quel momento è almeno 6. Che densità ha Z?

Cenni di soluzioni

(1) d_1 è una densità discreta perché assume tutti valori non negativi con somma 1.
d_2 non è una densità perché assume valore $-0,4$.
d_3 non è una densità perché la somma dei valori che assume è maggiore di 1: infatti già la somma dei primi 4 termini è maggiore di 1.

(2) La variabile Y è binomiale $Y \sim B(4, 1/6)$.
la variabile Z assume valori $0, 1, 2, 3, 4, 5$. Abbiamo

$$d_Z(k) = \begin{cases} \frac{6}{36} & \text{se } k = 0 \\ \frac{10}{36} & \text{se } k = 1 \\ \frac{8}{36} & \text{se } k = 2 \\ \frac{6}{36} & \text{se } k = 3 \\ \frac{4}{36} & \text{se } k = 4 \\ \frac{2}{36} & \text{se } k = 5 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Avendo 4 numeri tra 1 e 6 questi non possono essere tutti a distanza ≥ 2 l'uno dall'altro: avremmo almeno differenza 8 tra il massimo e il minimo. La variabile Y può assumere quindi solo valori 0 e 1 (e quindi è una variabile di Bernoulli). Abbiamo che W vale 1 quindi se i numeri sono tutti distinti e quindi

$$P(W = 1) = \frac{(6)_4}{6^4} = \frac{5}{18}$$

per cui $W \sim B(1, \frac{5}{18})$.

(3) (a) Abbiamo

$$P(a_i = a_{i-1}) = P(a_i = 1, a_{i-1} = 1) + P(a_i = 0, a_{i-1} = 0) = \frac{1}{2}.$$

(b) Consideriamo come spazio di probabilità l'insieme dei risultati dei primi k lanci, abbiamo quindi 2^k possibili risultati, tutte le sequenzer binarie di lunghezza k. Di questi risultati solo 2 danno come esito $X = k$ per cui

$$P(X = k) = \frac{2}{2^k} = 2^{1-k}$$

(c)

(d) Nello stesso spazio di probabilità del punto precedente, abbiamo chiaramente per $k = 2$, $P(Y = 2) = \frac{1}{2}$, mentre per $k \geq 3$ le sequenze favorevoli sono quelle che terminano con 011 e hanno nei primi $k-3$ posti una qualunque sequenza di Fibonacci, cioè una sequenza binaria in cui non cisono due 1 consecutivi. Abbiamo quindi $P(Y = k) = \frac{F_{k-3}}{2^k}$.

(4) (a) Possiamo assumere che la variabile X = numero di persone che si presentano sia una variabile binomiale $X \sim B(30, \frac{9}{10})$. Trovarsi nei guai vuol dire "$X \geq 29$" per cui la probabilità di trovarsi nei guai è

$$P(X = 29) + P(X = 30) = \binom{30}{29} (0.9)^{29} (0.1)^1 + \binom{30}{30} (0.9)^{30} = 0,1837.$$

(b) Qui bisogna procedere per tentativi: se vendiamo 31 biglietti abbiamo $X \sim B(31, 0.9)$ e quindi

$$\begin{aligned} P(X \geq 29) &= P(X = 29) + P(X = 30) + P(X = 31) \\ &= \binom{31}{29}(0.9)^{29}(0.1)^2 + \binom{31}{30}(0.9)^{30}(0.1)^1 + \binom{31}{31}(0.9)^{31} \\ &= 0,3886 \end{aligned}$$

Vendendo 32 biglietti il rischio si calcola analogamente e in questo caso otteniamo

$$\begin{aligned} P(X \geq 29) &= P(X = 29) + P(X = 30) + P(X = 31) + P(X = 32) \\ &= \binom{32}{29}(0.9)^{29}(0.1)^3 + \binom{32}{30}(0.9)^{30}(0.1)^2 + \binom{32}{31}(0.9)^{31}(0.1) + (0,9)^{32} \\ &= 0,6003. \end{aligned}$$

Possiamo quindi vendere al più 31 biglietti se vogliamo correre un rischio inferiore al 50% di trovarci nei guai.

(5) (a) Sia X il numero di bambini che diventeranno dottori di ricerca nati in un mese. Il dato del problema è $P(X = 0) = e^{-1}$. La variabile X può essere pensata come una variabile di Poisson (tanti tentativi corrispondenti a tutti i bambini nati ognuno dei quali diventerà dottore di ricerca con probabilità senz'altro molot bassa) e quindi $X \sim P(\lambda)$. Per determinare il parametro λ ricordiamo che

$$P(X = 0) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^0}{0!} = e^{-\lambda}$$

per cui abbiamo $\lambda = 1$. Abbiamo quindi

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - e^{-1} - e^{-1} = 1 - 2e^{-1} = 0.264$$

(b) Sia Y il numero di bambini nati in un anno che diventeranno dottori di ricerca. La variabile Y è la somma di 12 variabili di Poisson di parametro 1 e quindi è una variabile di Poisson di parametro 12. In alternativa uno può pensare che la probabilità che non nascano dottori di ricerca in un anno è $(e^{-1})^{12} = e^{-12}$ e procedere come nel primo punto. Abbiamo quindi

$$P(Y \geq 4) = 1 - P(Y \leq 3) = 1 - e^{-12}(1 + \frac{12}{1} + \frac{12^2}{2!} + \frac{12^3}{3!}) = 0,9977.$$

(6) (a) Questo è uno schema successo-insuccesso con 4 prove indipendenti in cui ad ogni tentativo la probabilità di avere successo è $5/12$ per cui

$$X \sim B(4, 5/12).$$

(b) In questo caso abbiamo 3 tentativi ognuno dei quali dà successo con probabilità $1/6$ e quindi

$$Y \sim B(3, 1/6)$$

(c) La variabile Z assume valori 1,2,3: infatti con 3 lanci siamo sicuri ch la somma dei risultati ottenuti sia almeno 6. Abbiamo

$$P(Z = 1) = \frac{5 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1}{36} = 0.722$$

Inoltre $Z = 3$ si verifica esattamente nei casi in cui i primi due lanci abbiano dato quattro 1, oppure tre 1 e un 2 e quindi

$$P(Z = 3) = \frac{1 + 4}{6^4} = 0.004$$

La probabilità $P(Z = 2)$ può a questo punto essere calcolata per differenza e quindi la densità di Z risulta

$$d_Z(k) = \begin{cases} 0.722 & \text{se } k = 1 \\ 0.274 & \text{se } k = 2 \\ 0.004 & \text{se } k = 3 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$