Programmazione Lineare: Analisi di Sensitività

Daniele Vigo
D.E.I. – Università di Bologna
daniele.vigo@unibo.it

rev. 1.0 – 2023

Analisi di sensitività

- Studio della variazione della soluzione ottima (base ottima) al variare dei coefficienti del problema:
  - costi
  - termini noti
  - coefficienti della matrice tecnologica
- determinazione del range di variazione nel quale la base ottima non cambia
- si considera la variazione di un solo coefficiente alla volta

Esempio: mix fertilizzanti

- 2 tipi di fertilizzanti (A e B),
- 2 materie prime (Azoto e Potassio)

tipo	q. Azoto	q. Potassio	prezzo (€/q)
A	0.1	0.3	200
B	0.2	0.1	300

- disponibilità: 8 q. di Azoto, 9 q. di Potassio

- determinare il mix che massimizza il ricavo

Modello di PL

- x_1 = q. di fertilizzante A da produrre

  x_2 = q. di fertilizzante B da produrre

$$
\begin{array}{llllllll}
\max & 200x_1 & + & 300\,x_2 & & & \\
 & 0.1\,x_1 & + & 0.2\,x_2 & \leq & 8 & *10 \\
 & 0.3\,x_1 & + & 0.1\,x_2 & \leq & 9 & *10 \\
 & x_1, & & x_2 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

- meglio avere coefficienti interi e piccoli in v. ass.

Forma standard

$$\min -200\,x_1 - 300\,x_2$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 2\,x_2 & + & x_3 & & & = & 80 \\ 3\,x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 90 \\ x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c|cccc|} & & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline z & 0 & -200 & -300 & 0 & 0 \\ \hline x_3 & 80 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ x_4 & 90 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Soluzione (1)

		x_1	x_2	x_3	x_4
z	0	–200	–300	0	0
x_3	80	1	2	1	0
x_4	90	3	1	0	1

$r_0' = r_0 + 200/3 r_2$

$r_1' = r_1 - r_2'$

$r_2' = r_2 / 3$

		x_1	x_2	x_3	x_4
z	6000	0	–700/3	0	200/3
x_3	50	0	5/3	1	–1/3
x_1	30	1	1/3	0	1/3

Soluzione (2)

		x_1	x_2	x_3	x_4
z	6000	0	–700/3	0	200/3
x_3	50	0	5/3	1	–1/3
x_1	30	1	1/3	0	1/3

$r_0' = r_0 + 700/3\ r_1'$

$r_1' = r_1 * 3/5$

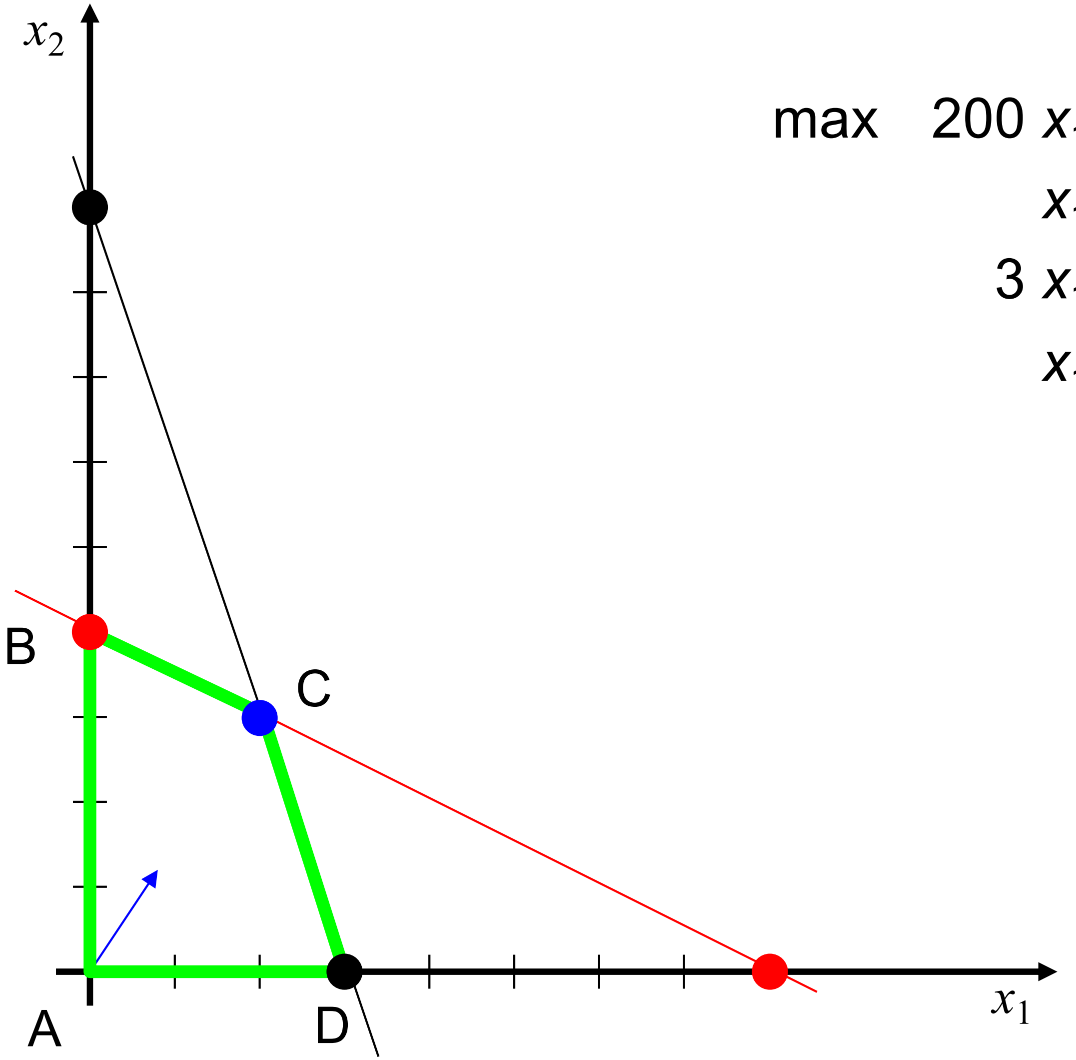
$r_2' = r_2 - r_1/5$

		x_1	x_2	x_3	x_4
z	13000	0	0	140	20
x_2	30	0	1	3/5	–1/5
x_1	20	1	0	–1/5	2/5

STOP

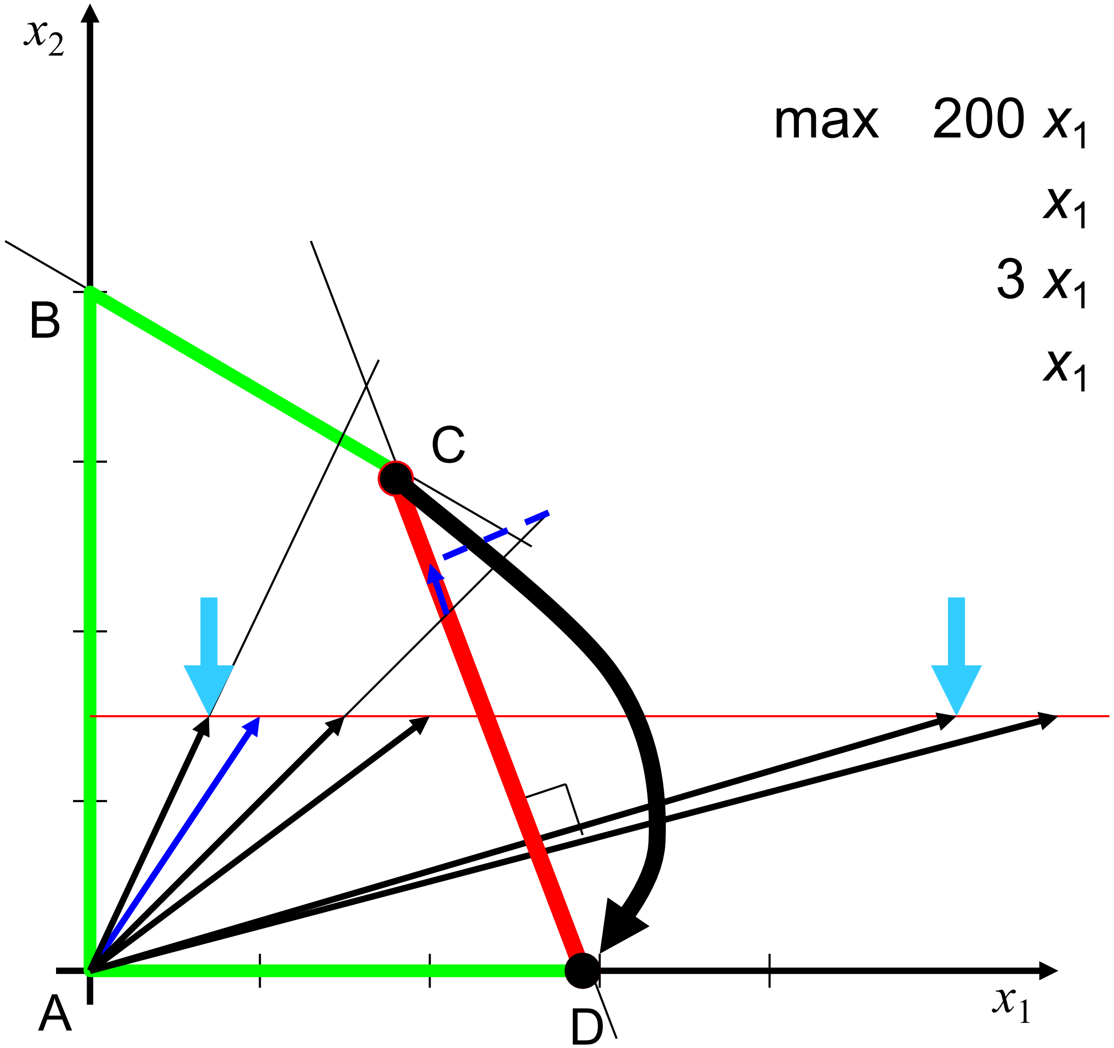
$z = 13 * 10^3$ E

Soluzione grafica



$$
\begin{array}{lrcrcl}
\max & 200\,x_1 & + & 300\,x_2 & & \\
 & x_1 & + & 2\,x_2 & \leq & 80 \\
 & 3\,x_1 & + & x_2 & \leq & 90 \\
 & x_1 & , & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

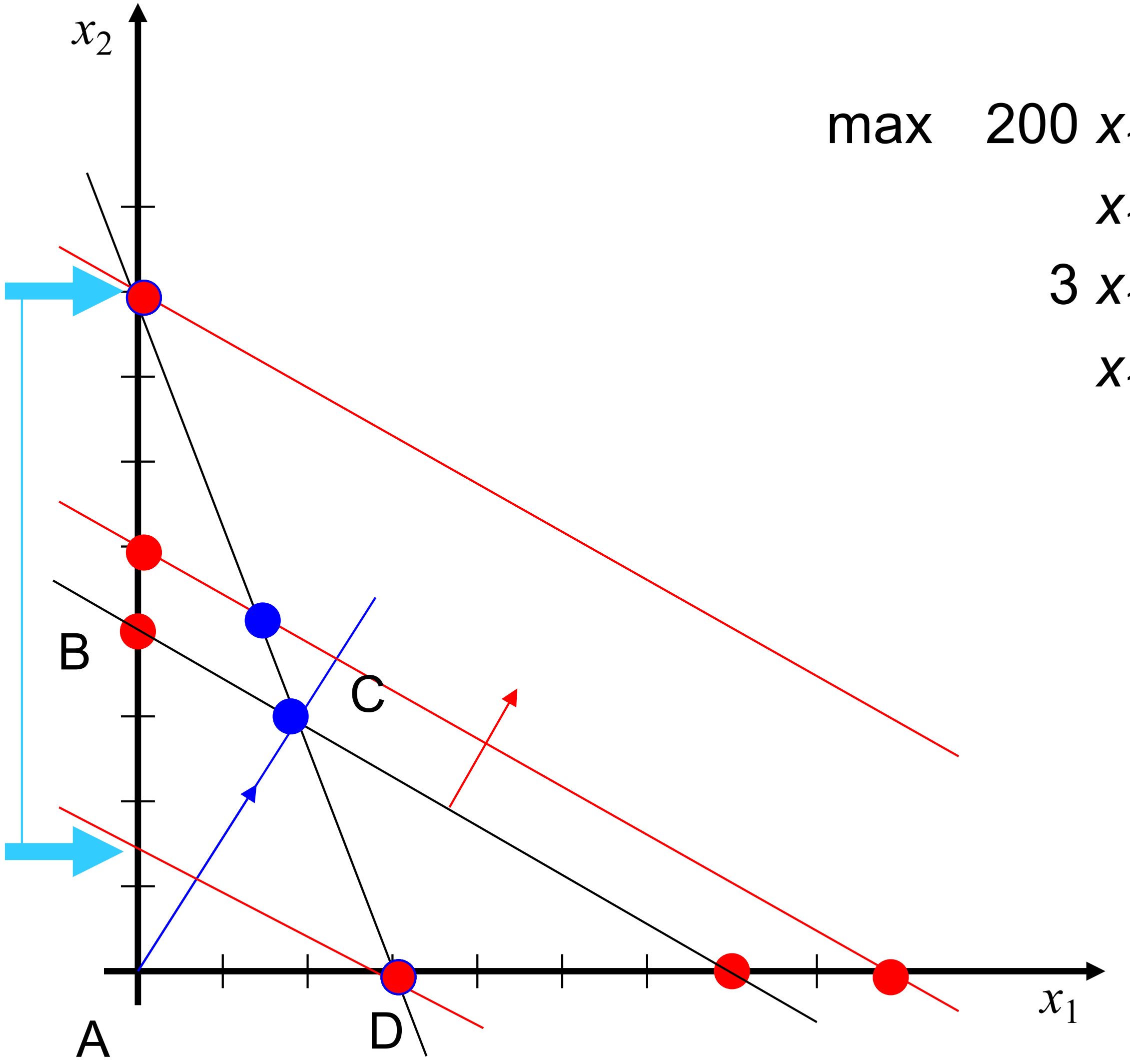
Variazione di un coeff. di costo



$$
\begin{array}{rrrrrl}
\max & 200\,x_1 & + & 300\,x_2 & & \\
 & x_1 & + & 2\,x_2 & \leq & 80 \\
 & 3\,x_1 & + & x_2 & \leq & 90 \\
 & x_1 & , & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Es. c_1

Variazione di un termine noto



$$
\begin{array}{lrcrcl}
\max & 200\,x_1 & + & 300\,x_2 & & \\
 & x_1 & + & 2\,x_2 & \leq & 80 \\
 & 3\,x_1 & + & x_2 & \leq & 90 \\
 & x_1 & , & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Es. $b_1 = 80$

Condizioni di ottimalità

$$\text{(P)} \quad \min \{ c^T x : Ax = d,\ x \geq 0 \}$$

- $x_B = B^{-1}d - B^{-1}F\, x_F$
- soluzione base: $x_B = B^{-1}d \geq 0$, $x_F = 0$
- $z = c_B^T B^{-1}d + (c_F^T - c_B^T B^{-1}F)\, x_F$
- è ottima se: $B^{-1}d \geq 0$, $c' = (c_F^T - c_B^T B^{-1}F) \geq 0$

Variazione di un termine noto (1)

- termine noto della riga k : $d_k \rightarrow (d_k + \varepsilon_k)$

$\Rightarrow \ x_B = B^{-1} (d + \varepsilon_k I_k) \geq 0$

ε_k tale che x_B rimanga ammissibile

definiamo $B^{-1} = [b_{ij}]$

$$x_{\beta(i)} = \sum_{j=1,m} b_{ij} d_j + \varepsilon_k b_{ik} \geq 0 \qquad i = 1, \ldots, m$$

- Tre casi:

a) $b_{ik} = 0 \ \Rightarrow$ sempre verificato

Variazione di un termine noto (2)

b) $b_{ik} > 0 \Rightarrow$ $\varepsilon_k \geq \dfrac{-\sum_{j=1,m} b_{ij} d_j}{b_{ik}} \quad \forall\, i\colon b_{ik} > 0$

c) $b_{ik} < 0 \Rightarrow$ $\varepsilon_k \leq \dfrac{-\sum_{j=1,m} b_{ij} d_j}{b_{ik}} \quad \forall\, i\colon b_{ik} < 0$

$$\boxed{\max_{b_{ik} > 0} \frac{-\sum_{j=1,m} b_{ij} d_j}{b_{ik}} \leq \varepsilon_k \leq \min_{b_{ik} < 0} \frac{-\sum_{j=1,m} b_{ij} d_j}{b_{ik}}}$$

Esempio fertilizzanti

		x_1	x_2	x_3	x_4
z	13000	0	0	140	20
x_2	30	0	1	3/5	–1/5
x_1	20	1	0	–1/5	2/5

$$\varepsilon_k \geq \max_{b_{ik}>0} \frac{-\sum_{j=1,m} b_{ij} d_j}{b_{ik}}$$

$$\varepsilon_k \leq \min_{b_{ik}<0} \frac{-\sum_{j=1,m} b_{ij} d_j}{b_{ik}}$$

$k = 1$

$\varepsilon_k \geq -30 / (3/5) = -50$

$\varepsilon_k \leq -20 / (-1/5) = 100$

$80 - 50 = 30 \leq d_1 \leq 80 + 100 = 180$

Esempio fertilizzanti

		x_1	x_2	x_3	x_4
z	13000	0	0	140	20
x_2	30	0	1	3/5	–1/5
x_1	20	1	0	–1/5	2/5

$$\varepsilon_k \ge \max_{b_{ik}>0} \frac{-\sum_{j=1,m} b_{ij} d_j}{b_{ik}}$$

Variazione di un costo (1)

- Caso 1: variabile non in base
- costo colonna *h* (> *m*) : $c_h \rightarrow (c_h + \varepsilon_h)$
- determinare ε_h tale che x_B rimanga ottima

$$c'_h = c_h - [c_B B^{-1} F]_h$$

$$c'_h \rightarrow (c_h + \varepsilon_h) - [c_B B^{-1} F]_h =$$

$$c'_h + \varepsilon_h \geq 0$$

$$\text{da cui } \varepsilon_h \geq -c'_h$$

Variazione di un costo (2)

- Caso 2: variabile in base
- costo colonna h $(\leq m)$: $c_h \rightarrow (c_h + \varepsilon_h)$
- sia b_h = h-sima riga di B^{-1}

$$c'_j \rightarrow c_j - ([c_B B^{-1} F]_j + \varepsilon_h b_h A_j) \geq 0 \quad j = m+1, \ldots, n$$

$$c'_j - \varepsilon_h b_h A_j = c'_j - \varepsilon a'_{hj} \geq 0 \quad j = m+1, \ldots, n$$

- Tre casi:

a) $a'_{hj} = 0 \Rightarrow$ sempre verificato

Variazione di un costo (3)

b) $a'_{hj} > 0 \Rightarrow \quad \varepsilon_h \leq \dfrac{c'_j}{a'_{hj}} \quad \forall j : a'_{hj} > 0$

c) $a'_{hj} < 0 \Rightarrow \quad \varepsilon \geq \dfrac{c'_j}{a'_{hj}} \quad \forall j : a'_{hj} < 0$

$$\boxed{\max_{a'_{hj} < 0} \frac{c'_j}{a'_{hj}} \leq \varepsilon_h \leq \min_{a'_{hj} > 0} \frac{c'_j}{a'_{hj}}}$$

Esempio fertilizzanti

		x_1	x_2	x_3	x_4
z	13000	0	0	140	20
x_2	30	0	1	3/5	–1/5
x_1	20	1	0	–1/5	2/5

$$\varepsilon_h \geq \max_{a'_{hj} < 0} \frac{c'_j}{a'_{hj}}$$

$$\varepsilon_h \leq \min_{a'_{hj} > 0} \frac{c'_j}{a'_{hj}}$$

$k = 1$

$\varepsilon_h \leq 20 / (2/5) = 50$

$\varepsilon_h \geq 140 / (-1/5) = -700$

$-200-700 = -900 \leq c_1 \leq -200+50 = -150$

Esempio fertilizzanti

		x_1	x_2	x_3	x_4
z	13000	0	0	140	20
x_2	30	0	1	3/5	–1/5
x_1	20	1	0	–1/5	2/5

$$\varepsilon_h \geq \max_{a'_{hj} < 0} \frac{c'_j}{a'_{hj}}$$

Esempio 2: Mix di produzione

- 2 tipi di prodotti (A e B),
- 2 materie prime (P e Q)

tipo	Kg P/q	Kg Q/q	prezzo (€/q)
A	6	4	100
B	5	8	100

- produzione di B ≤ 1.5 volte produzione di A
- disponibilità: 30 t di P, 32 t di Q
- determinare il mix che massimizza il ricavo

Mix di produzione (2)

- x_1 = tonnellate di A da produrre
  x_2 = tonnellate di B da produrre

$$
\begin{array}{llrrcr}
z = \text{Max} & & 100\,x_1 & +100\,x_2 & & \\
\text{s.t.} & & 6\,x_1 & +5\,x_2 & \leq & 30 \\
 & & 4\,x_1 & +8\,x_2 & \leq & 32 \\
 & & -3\,x_1 & +2\,x_2 & \leq & 0 \\
 & & x_1 & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

- z è espressa in decine di Euro

Mix di produzione (3)

$$-z = -\text{ Min } -100\,x_1 - 100\,x_2$$

s.t.

$$\begin{array}{rrrrrcl}
6\,x_1 & +5\,x_2 & +\,x_3 & & & = & 30 \\
4\,x_1 & +8\,x_2 & & +\,x_4 & & = & 32 \\
-3\,x_1 & +2\,x_2 & & & +\,x_5 & = & 0 \\
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \geq & 0
\end{array}$$

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$-z$	0	–100	–100	0	0	0
x_3	30	6	5	1	0	0
x_4	32	4	8	0	1	0
x_5	0	–3	2	0	0	1

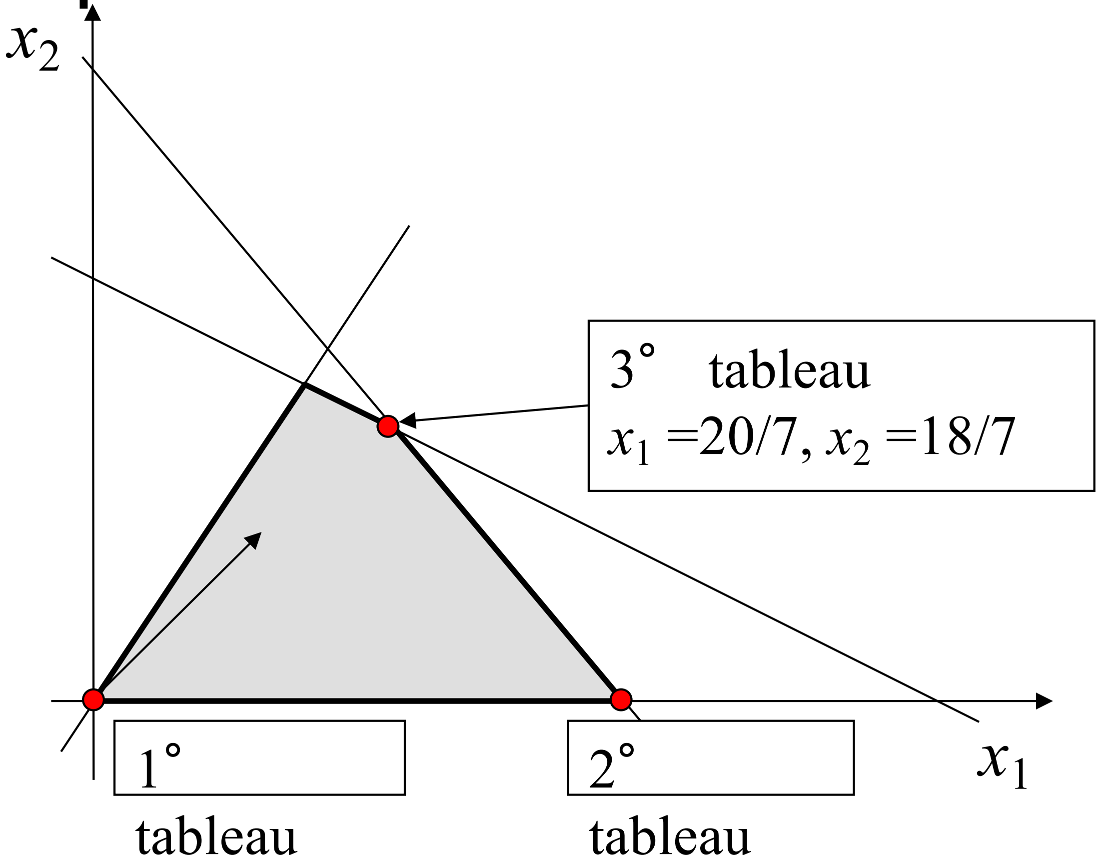
Mix di produzione (4)

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$-z$	500	0	–50/3	50/3	0	0
x_1	5	1	5/6	1/6	0	0
x_4	12	0	14/3	2/3	1	0
x_5	15	0	9/2	1/2	0	1

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$-z$	3800/7	0	0	100/7	25/7	0
x_1	20/7	1	0	2/7	–5/28	0
x_2	18/7	0	1	–1/7	3/14	0
x_5	24/7	0	0	8/7	–27/28	1

Mix di produzione (4)

- Soluzione Ottima : x_1 = 20/7 ton, x_2 =18/7 ton; profitto complessivo 38.000/7 Euro



Mix di produzione (5)

- Analisi di sensitività rispetto a d_1
  - (colonna x_3 in base su riga 1 nel tableau iniziale)

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$-z$	3800/7	0	0	100/7	25/7	0
x_1	20/7	1	0	2/7	–5/28	0
x_2	18/7	0	1	–1/7	3/14	0
x_5	24/7	0	0	8/7	–27/28	1

- $\varepsilon \geq \max\{-(20/7)/(2/7), -(24/7)/(8/7)\} = -3$,
- $\varepsilon \leq -(18/7)/-(1/7) = 18$
- $30-3 \leq d_1 \leq 30 + 18 \rightarrow 27 \leq d_1 \leq 48$

Mix di produzione (6)

- Analisi di sensitività rispetto a d_2
  - (colonna x_4 in base su riga 2 nel tableau iniziale)

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$-z$	3800/7	0	0	100/7	25/7	0
x_1	20/7	1	0	2/7	–5/28	0
x_2	18/7	0	1	–1/7	3/14	0
x_5	24/7	0	0	8/7	–27/28	1

- $\varepsilon \geq -(18/7)/(3/14) = -12,$
- $\varepsilon \leq \min\{-(20/7)/-(5/28), -(24/7)/-(27/28)\} = 32/9$
- $32-12 \leq d_2 \leq 32 + 32/9 \Rightarrow 20 \leq d_2 \leq 35.55\ldots$

Mix di produzione (7)

- Analisi di sensitività rispetto ai costi
- Dal tableau si ottengono gli intervalli rispetto ai costi del problema in forma standard (c')
- In questo caso siccome il problema originale è in forma di massimo si ha che $c' = -c$
- Gli intervalli ottenuti rispetto ai c' vanno quindi moltiplicati per –1 per ottenere quelli rispetto ai c

Mix di produzione (8)

- Analisi di sensitività rispetto a c_1
  - (colonna x_1 in base su riga 1 nel tableau finale)

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$-z$	3800/7	0	0	100/7	25/7	0
x_1	20/7	1	0	2/7	–5/28	0
x_2	18/7	0	1	–1/7	3/14	0
x_5	24/7	0	0	8/7	–27/28	1

- $\varepsilon \geq (25/7)/-(5/28) = -20$; $\varepsilon \leq (100/7)/(2/7) = 50$
- $-100-20 \leq c_1' \leq -100 + 50 \rightarrow -120 \leq c_1' \leq -50$
- $50 \leq c_1 \leq 120$

Mix di produzione (9)

- Analisi di sensitività rispetto a c_2
  - (colonna x_2 in base su riga 2 nel tableau finale)

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$-z$	3800/7	0	0	100/7	25/7	0
x_1	20/7	1	0	2/7	–5/28	0
x_2	18/7	0	1	$\boxed{-1/7}$	$\boxed{3/14}$	0
x_5	24/7	0	0	8/7	–27/28	1

- $\varepsilon \geq (100/7)/-(1/7) = -100$; $\varepsilon \leq (25/7)/(3/14) = 50/3$
- $-100-100 \leq c_2' \leq -100 + 50/3$
- $83.333\ldots \leq c_2 \leq 200$