NOME E COGNOME:

MATRICOLA:

---

PROVA SCRITTA DI MDP, 17/07/2023

**Riportare sotto ad ogni esercizio il relativo svolgimento in bella copia.**

**Esercizio 1** Una macchina rilascia palline gialle e rosse a intervalli di tempo costanti secondo un meccanismo aleatorio: se la macchina ha rilasciato una pallina di un dato colore, la probabilità che la pallina successiva abbia lo stesso colore è pari a $\frac{3}{4}$.

a. Calcolare la probabilità che la macchina rilasci consecutivamente cinque palline tutte dello stesso colore.

Supponiamo che a un certo punto la macchina rilasci una pallina gialla $p_0$. Raccogliamo le successive cinque palline $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5$ in un'urna, ed estraiamo 2 palline a caso da tale urna. Indichiamo con $X$ il numero di palline gialle presenti nell'urna, e con $Y$ il numero di palline gialle estratte dall'urna. Infine, per $i = 1, 2, 3, 4, 5$, sia $X_i$ la variabile aleatoria che vale 1 se $p_i$ è gialla, e 0 se $p_i$ è rossa.

b. Calcolare $P(X = 1)$ e $P(X = 1|X_1 = 0)$.
c. Calcolare $P(Y = 4)$.
d. Per $i = 1, \ldots, 5$, calcolare $P(X_i = 1)$.
e. Calcolare $E(X)$.

**Soluzione.** a) La probabilità di avere 5 palline consecutive dello stesso colore è $(3/4)^4 = 0.3164$.

b) Indichiamo con $E_i$ l'evento "L'unica pallina gialla tra $p_1, \ldots, p_5$ è $p_i$". Allora $P(X = 1) = \sum_{i=1}^{5} P(E_i)$. D'altra parte

$$\begin{aligned}
P(E_1) &= \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{1}{4} \cdot (\tfrac{3}{4})^3 = \tfrac{3^4}{4^5} \\
P(E_2) &= (\tfrac{1}{4})^3 \cdot (\tfrac{3}{4})^2 = \tfrac{3^2}{4^5} \\
P(E_3) &= \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{3}{4} \cdot (\tfrac{1}{4})^2 \cdot \tfrac{3}{4} = \tfrac{3^2}{4^5} \\
P(E_4) &= \tfrac{1}{4} \cdot (\tfrac{3}{4})^2 \cdot (\tfrac{1}{4})^2 = (\tfrac{1}{4})^3 \cdot (\tfrac{3}{4})^2 = \tfrac{3^2}{4^5} \\
P(E_5) &= \tfrac{1}{4} \cdot (\tfrac{3}{4})^3 \cdot \tfrac{1}{4} = \tfrac{3^3}{4^5}
\end{aligned}$$

Pertanto

$$P(X = 1) = \frac{3^4 + 3^2 + 3^2 + 3^2 + 3^3}{4^5} = \frac{135}{1024} = 0.1318$$

Per calcolare la seconda possiamo ragionare in analogia alla precedente, oppure usare la formula per la probabilità condizionata:

$$P(X = 1|X_1 = 0) = \frac{P(X = 1, X_1 = 0)}{P(X_1 = 0)} = \frac{\sum_{i=2}^{5} P(E_i)}{1/4} = \frac{3^2 + 3^2 + 3^2 + 3^3}{4^4} = \frac{54}{256} = 0.2109$$

c) La probabilità è evidentemente zero.

d) Dal testo abbiamo $P(X_1 = 1) = \frac{3}{4}$. Se $i > 1$, abbiamo

$$\begin{aligned}
P(X_i = 1) &= P(X_i = 1|X_{i-1} = 1)P(X_{i-1} = 1) + P(X_i = 1, |X_{i-1} = 0)P(X_{i-1} = 0) = \\
&= \frac{3}{4} \cdot P(X_{i-1} = 1) + \frac{1}{4} \cdot P(X_{i-1} = 0) = \frac{3}{4} \cdot P(X_{i-1} = 1) + \frac{1}{4} \cdot \big(1 - P(X_{i-1} = 1)\big)
\end{aligned}$$

Detta $q_i = P(X_i = 1)$, per $i > 1$ abbiamo dunque la formula $q_{i+1} = q_i \cdot \frac{3}{4} + (1 - q_i)\frac{1}{4}$. Pertanto possiamo calcolare

$$P(X_1 = 1) = \tfrac{3}{4} = 0.75, \qquad P(X_2 = 1) = \tfrac{5}{8} = 0.625 \qquad P(X_3 = 1) = \tfrac{9}{16} = 0.5625$$
$$P(X_4 = 1) = \tfrac{17}{32} = 0.53125, \qquad P(X_5 = 1) = \tfrac{33}{64} = 0.515625$$

e) Abbiamo $X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5$. Siccome $X_i \sim B(1, q_i)$, abbiamo quindi

$$E(X) = q_1 + \ldots + q_5 = 2.984375.$$

**Esercizio 2** Si considerino due variabili aleatorie $X, Y$ che assumono valori rispettivamente $\{0,1,2,3\}$ e $\{0,1,2\}$. Supponiamo che per la densità congiunta $p_{X,Y}$ valgano le seguenti:

$$p_{X,Y}(0,1) = p_{X,Y}(0,2) = p_{X,Y}(1,0) = p_{X,Y}(2,0) = p_{X,Y}(3,1) = p_{X,Y}(3,2) = 0$$
$$p_{X,Y}(3,0) = p_{X,Y}(1,2) = p_{X,Y}(2,2) = \tfrac{1}{8}$$
$$p_{X,Y}(1,1) = p_{X,Y}(2,1) = \tfrac{2}{8}$$

a. Determinare la densità congiunta e le densità marginali di $X, Y$.
b. Calcolare valore atteso e varianza di $XY$.

Sia adesso $Z$ una terza variabile aleatoria indipendente con $X, Y$, di tipo geometrico con media $1/8$.

c. Calcolare densità, valore atteso e varianza di $\min(|X-Y|, Z)$.

**Soluzione.**

Riorganizzando il dato della probabilità congiunta in tabella, abbiamo

| $X\backslash Y$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 2/8 | 1/8 |
| 2 | 0 | 2/8 | 1/8 |
| 3 | 1/8 | 0 | 0 |

a. Per determinare la densità congiunta, rimane da calcolare $p_{X,Y}(0,0)$. Poiché i valori della tabella devono somare ad 1, otteniamo

$$p_{X,Y}(0,0) = 1 - 2 \cdot \frac{2}{8} - 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$$

Le densità marginali sono quindi

$$p_X(k) = \begin{cases} 1/8 & \text{se } k = 0,3 \\ 3/8 & \text{se } k = 1,2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad p_Y(k) = \begin{cases} 2/8 & \text{se } k = 0,2 \\ 4/8 & \text{se } k = 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

b) Evidentemente le due variabili non sono indipendenti. Possiamo calcolare facilmente la densità di $XY$:

$$p_{XY}(k) = \begin{cases} 1/8 & \text{se } k = 4 \\ 2/8 & \text{se } k = 0,1 \\ 3/8 & \text{se } k = 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Pertanto

$$E(XY) = 1 \cdot \frac{2}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{12}{8} = 1.5$$

Per la varianza, calcoliamo

$$E(X^2Y^2) = 1 \cdot \frac{2}{8} + 4 \cdot \frac{3}{8} + 16 \cdot \frac{1}{8} = \frac{30}{8} = 3.75$$

Pertanto $Var(XY) = E(X^2Y^2) - E(XY)^2 = 1.5$.

c) Posto $Z \sim G(p)$, abbiamo $E(Z) = \frac{1}{p} - 1 = \frac{1}{8}$. Dunque $p = \frac{8}{9}$.

Poniamo $W = \min(|X-Y|, Z)$. Osserviamo che $|X-Y|$ ha densità

$$p_{|X-Y|}(k) = \begin{cases} 1/2 & \text{se } k = 0 \\ 3/8 & \text{se } k = 1 \\ 1/8 & \text{se } k = 3 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Quindi $W$ assume valori $0,1,2,3$, e la densità di $W$ è calcolata come segue

$$P(W=0) = P(|X-Y|=0) + P(Z=0) - P(|X-Y| = Z = 0) = \tfrac{1}{8} + \tfrac{2}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{8}{9} - \tfrac{4}{9} = \tfrac{17}{18} = 0.9444$$
$$P(W=1) = P(|X-Y|=1, Z \geq 1) + P(|X-Y| > 1, Z = 1) = \tfrac{3}{8} \cdot \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{8} \cdot \tfrac{8}{9} \cdot \tfrac{1}{9} = \tfrac{35}{648} = 0.0540$$
$$P(W=2) = P(|X-Y|=3, Z=2) = \tfrac{1}{8} \cdot \tfrac{8}{9} \cdot \tfrac{1}{9} = \tfrac{1}{81} = 0.0123$$

$$P(W=3)=P(Z\geq 3,|X-Y|=3)=(1-\tfrac{8}{9}-\tfrac{8}{9^2}-\tfrac{8}{9^3})\cdot\tfrac{1}{8}=\tfrac{1}{9^3}=0.0014$$

Pertanto

$$E(W)=1\cdot 0.0540+2\cdot 0.0123+3\cdot 0.0014=0.0828$$
$$E(W^2)=1\cdot 0.0540+4\cdot 0.0123+9\cdot 0.0014=0.1158$$
$$Var(W)=E(W^2)-E(W)^2=0.1089$$

**Esercizio 3** Siano $X_1, \ldots, X_{240}$ variabili aleatorie esponenziali indipendenti di parametro 3.

a. Calcolare $P(X_1 + \ldots + X_{240} > 85)$.

b. Mostrare, calcolandone la funzione di ripartizione, che $\min(X_1, X_2)$ è una variabile esponenziale di parametro 6.

c. Calcolare $P(\min(X_1, X_2) + \ldots + \min(X_{239}, X_{240}) > 24)$.

**Soluzione.** a) Abbiamo $E(X_i) = \frac{1}{3}$, $Var(X_i) = \frac{1}{9}$. Sia $S_{240} = X_1 + \ldots + X_{240}$. Dal TLC abbiamo $S_{240} \sim N(80, \frac{240}{9})$, pertanto

$$P(S_{240} > 85) = P(\zeta_0 > \frac{85 - 80}{\sqrt{240}/3}) = P(\zeta_0 > \frac{5}{5.164}) = P(\zeta_0 > 0.97) = 1 - \Phi(0.97) = 1 - 0.83398 = 0.16602$$

b) Abbiamo

$$P(\min(X_1, X_2) < t) = 1 - P(\min(X_1, X_2) > t) = 1 - P(X_1 > t)P(X_2 > t) = 1 - e^{-3t}e^{-3t} = 1 - e^{-6t}$$

c) Abbiamo $E(\min(X_i, X_{i+1}) = \frac{1}{6}$, $Var(\min(X_i, X_{i+1}) = \frac{1}{36}$. Sia $T_{120} = \min(X_1, X_2) + \ldots + \min(X_{239}, X_{240})$, dal TLC abbiamo $T_{120} \sim N(20, \frac{120}{36})$. Pertanto

$$P(T_{120} > 24) = P(\zeta_0 > \frac{24 - 20}{\sqrt{120}/6}) = P(\zeta_0 > \frac{4}{1.826}) = P(\zeta_0 > 2.19) = 1 - \Phi(2.19) = 1 - 0.0.98574 = 0.01426$$