ESERCIZI DI MDP PER IL 3 NOVEMBRE 2021

(1) Costruire uno spazio di probabilità (non uniforme) sull'insieme $\Omega = \{1, 2, a, b\}$.
(2) Sia $\Omega = \{1, 2, 3\}$. Quante sono le famiglie di eventi su Ω (cioé famiglie di sottoinsiemi chiuse rispetto a unione, intersezione e complementare che contengono Ω e $\emptyset$)?
(3) Un'urna contiene 6 palline rosse, 6 gialle, 6 blu, 6 verdi e 6 arancioni. Determinare la probabilitá che pescando 8 palline a caso queste siano di esattamente 3 colori differenti.
(4) Determinare la probabilità che scegliendo un anagramma a caso della parola LALLANLA si ottenga una parola con le tre A in posizioni consecutive
(5) Un insegnante interroga casualmente ogni giorno uno dei suoi sei studenti. Determinare la probabilitè che dopo 10 giorni abbia interrogato almeno una volta tutti i sei studenti.
(6) Una classe di 10 bambini viene divisa in tre gruppi in modo casuale. Determinare la probabilità che il bambino Andrea finisca nello stesso gruppo della bambina Margherita.

Cenni di soluzioni

(1) Basta considerare come insieme di eventi $\emptyset, \Omega, \{1,2\}, \{a,b\}$ e probabilità data da $P(\{1,2\}) = 1/2$ e $P(\{a,b\}) = 1/2$. Questo non è uno spazio di probabilità uniforme perché non tutti i risultati sono eventi. Questo spazio di probabilità potrebbe modellizzare il seguente fenomeno aleatorio. Abbiamo due urne, una contenente palline numerate 1 o 2 , ma non sappiamo quante di ciascun tipo, e una con palline etichettate a o b, ma non sappiamo quante di caiscun tipo ed estraiamo una pallina a caso da un'urna scelta a caso. Non possiamo dire che il risultato 1 sia un evento perché non possiamo calcolarne la probabilità.

(2) In questo caso abbiamo 5 possibili famiglie di eventi: esse sono
- $\Omega, \emptyset$
- $\Omega, \emptyset, \{1\}, \{2,3\}$
- $\Omega, \emptyset, \{2\}, \{1,3\}$
- $\Omega, \emptyset, \{3\}, \{1,2\}$
- $\Omega, \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}$

(3) Consideriamo in questo esempio lo spazio Ω dato da tutte le combinazioni (sottoinsiemi) di lunghezza 8 in un insieme di cardinalità 30 con probabilità uniforme. Abbiamo $|\Omega| = \binom{30}{8} = 5852925$. La cardinalità dell'evento A costituito da tutte le combinazioni di 8 palline in cui compaiono esattamente 3 colori diversi era stata calcolata in un esercizio di due settimane fa ed era $|A| = 422730$. Abbiamo quindi

$$P(A) = \frac{422730}{5852925} = 0,0722$$

La probabilità richiesta è quindi del 7,22%.

(4) In questo caso consideriamo come Ω l'insieme di tutti i possibili anagrammi della parola LALLANLA. Come abbiamo visto tempo fa abbiamo

$$|\Omega| = \binom{8}{4\,3\,1} = 280$$

Dobbiamo ora determinare la cardinalità dell'evento $E = \{$ anagrammi con le 3 A in posizioni consecutive $\}$. Per calcolare la cardinalità di E procediamo per scelte successive: determiniamo prima le posizioni in cui inserire le 3 A: abbiamo 6 scelte. Dopodiché dobbiamo decidere dove scrivere la N: 5 scelte. Abbiamo quindi $|E| = 30$ e di conseguenza abbiamo

$$P(E) = \frac{30}{280} = \frac{3}{28} = 10.7\,\%,$$

(5) L'insieme Ω in questo caso è dato da tutte le sequenze di lunghezza 10 con coefficienti in $\{1,2,3,4,5,6\}$ e quindi $|\Omega| = 6^{10} = 60.466.176$. Dobbiamo calcolare la probabilità dell'evento E costituito da tutte le sequenze in Ω che contengono tutti i numeri da 1 a 6. La cardinalità di E può essere calcolata con la formula per le funzioni suriettive

$$\begin{aligned}|E| &= \sum_{k=0}^{5}(-1)^k\binom{6}{k}(6-k)^{10}\\ &= 6^{10} - 6\cdot 5^{10} + 15\cdot 4^{10} - 20\cdot 3^{10} + 15\cdot 2^{10} - 6\\ &= 16.435.440\end{aligned}$$

e quindi

$$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = 0.272$$

(6) Qui Ω è dato da tutte le partizioni di un insieme di 10 elementi in 3 blocchi e quindi

$$|\Omega| = S_{10,3} = 9330$$

(che si può ottenere dal triangolo di Stirling). I risultati favorevoli si possono pensare come la partizioni di un insieme di 9 elementi in 3 blocchi: basta infatti pensare a Margherita e ad Andrea come se fossero un elemento solo. Abbiamo quindi $|E| = S_{9,3} = 3025$ e quindi

$$P(E) = \frac{3025}{9330} = 0.324$$