NOME E COGNOME:

MATRICOLA:

PROVA SCRITTA DI MDP, 03/07/2023

Riportare sotto ad ogni esercizio il relativo svolgimento in bella copia.

Esercizio 1 Nella roulette appaiono tutti i numeri da 0 a 36. Si possono fare vari tipi di puntate, puntando su un numero singolo, su un insieme di 2 oppure di 3. Se l'insieme di numeri prescelto non contiene il numero vincente si perde la quota puntata, altrimenti si vince $\frac{36}{n} - 1$ volte la quota puntata (oltre alla restituzione della quota stessa), dove n è la cardinalità dell'insieme di numeri prescelto.

a. Supponiamo di puntare alla roulette 1 euro su un numero solo e sia Z l'importo della vincita (eventualmente negativo). Calcolare $E(Z)$ e $Var(Z)$.

Supponiamo adesso di fare 1 giocata di 1 euro alla roulette puntando su un insieme di 3 numeri e poi una di 12 Euro su un insieme di 2 numeri. Infine, se l'importo della vincita ricavata nelle 2 giocate è positivo, facciamo una terza giocata puntando tutto l'importo vinto su un numero singolo.

Indichiamo con X_1, X_2 gli importi (eventualmente negativi) vinti alle prime 2 giocate, poniamo $X = X_1 + X_2$, e indichiamo con Y l'importo totale della vincita (eventualmente negativo) alla fine del gioco.

b. Per $i = 1, 2$, determinare se gli eventi $X > 0$ e $X_i > 0$ sono indipendenti.
c. Calcolare $P(X > 0)$ e calcolare $P(X > 210|X_2 > 0)$.
d. Calcolare $E(X)$.
e. Calcolare la densitá di Y e $E(Y)$.

Soluzione. a) La variabile Z assume valori $-1, 35$, rispettivamente con probabilità $\frac{36}{37}$ e $\frac{1}{37}$. Dunque $E(Z) = -\frac{36}{37} + \frac{35}{37} = -\frac{1}{37}$ e $Var(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2 = 1 \cdot \frac{36}{37} + 35^2 \frac{1}{37} = 34.08$. Più in generale si vede allo stesso modo che, se puntiamo un euro su due o tre numeri (invece che su un numero solo), allora il valore atteso è sempre lo stesso $E(Z) = -\frac{1}{37}$.

b) Chiaramente X_1, X_2 sono variabili indipendenti. D'altra parte abbiamo $X > 0$ se e solo se $X_2 > 0$: perdendo alla seconda giocata perdo 12 euro, ma ben che vada la prima giocata vinco 11 euro. Pertanto gli eventi $X > 0$ e $X_1 > 0$ sono indipendenti, mentre gli eventi $X > 0$ e $X_2 > 0$ sono dipendenti (o meglio, coincidono).

c) Abbiamo già osservato che $X > 0$ se e solo se $X_2 > 0$: pertanto $P(X > 0) = P(X_2 > 0) = \frac{2}{37}$. Per la seconda, osserviamo che vincere alla seconda giocata vuol dire $X_2 = 204$. Pertanto, supponendo di vincere alla seconda giocata, abbiamo che $X > 210$ se e solo se $X_1 > 6$ se e solo se $X_1 = 11$ se e solo se $X_1 > 0$. Pertanto $P(X > 210|X_2 > 0) = P(X_1 > 0) = \frac{3}{37}$.

d) Dal punto a) ricaviamo che $E(X_1) = -\frac{1}{37}$ e $E(X_2) = -\frac{12}{37}$. Dunque $E(X) = E(X_1) + E(X_2) = -\frac{13}{37}$.

e) Osserviamo che Y assume i seguenti valori:

- Se perdo ai primi due giochi, allora $Y = -12 - 1 = -13$
- Se vinco al primo gioco e perdo al secondo, allora $Y = 11 - 12 = -1$,
- Se vinco al secondo gioco e perdo al terzo, allora $Y = X - X = 0$,
- Se perdo al primo gioco, e vinco al secondo e al terzo, allora $Y = (-1 + 12 \cdot 17) \cdot 35 = 7105$,
- Se vinco al primo, al secondo e al terzo gioco, allora $Y = (11 + 12 \cdot 17) \cdot 35 = 7525$.

Pertanto la densità di Y è data dalla funzione

$$p_Y(k) = \begin{cases} \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{37^3} & \text{se } k = 7525 \\ \frac{34 \cdot 2 \cdot 1}{37^3} & \text{se } k = 7105 \\ \frac{2 \cdot 36}{37^2} & \text{se } k = 0 \\ \frac{3 \cdot 35}{37^2} & \text{se } k = -1 \\ \frac{34 \cdot 35}{37^2} & \text{se } k = -13 \end{cases}$$

Il valore atteso di Y è quindi dato da

$$E(Y) = 7525 \cdot \frac{6}{37^3} + 7105 \cdot \frac{78}{37^3} - 1 \cdot \frac{70}{37^2} - 13 \cdot \frac{1190}{37^2} = -0,95$$

Esercizio 2 Studi scientifici mostrano che, tra i bambini in età scolare, l'allergia al latte ha un'incidenza del 2%, mentre l'allergia alla soia ha un'incidenza dello 0.4% (si ritiene che non ci sia relazione tra le due allergie).

a1. Qual'è la probabilità che un bambino in età scolare sia allergico sia al latte che alla soia?
a2. Qual'è la probabilità che un bambino in età scolare sia allergico al latte o alla soia, ma non ad entrambi?

Si consideri una scuola di 1000 bambini.

b1. Calcolare la probabilità che nella scuola vi sia almeno un bambino allergico sia al latte che alla soia.
b2. Calcolare la probabilità che nella scuola vi siano non più di due allergici sia al latte che alla soia.
b3. Mediamente, quanti bambini ci saranno nella scuola allergici sia al latte che alla soia?

Soluzione. a1) Siccome le due allergie non hanno relazione, la probabilità che un bambino sia allergico sia latte che alla soia è $\frac{2}{100} \cdot \frac{4}{1000} = \frac{8}{10^5}$

a2) La probabilità che un bambino sia allergico al latte oppure alla soia (e non ad entrambi) è $\frac{2}{100} \cdot \frac{996}{1000} + \frac{4}{1000} \cdot \frac{98}{100} = \frac{2384}{10^5}$.

b1) Sia X il numero di bambini presenti nella scuola allergici sia al latte che alla soia. Allora $X \sim B(1000, \frac{8}{10^5})$, dunque

$$P(X > 0) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1 - \tfrac{8}{10^5})^{1000} = 1 - 0.9231 = 0.0769 = 7.69\%$$

b2) Conviene approssimare X con una variabile di Poisson di parametro $\lambda = \frac{8}{100}$. Allora

$$P(X \leq 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = e^{-\lambda}(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!}) = 0.99992$$

b3) Il numero di bambini nella scuola allergici sia al latte che alla soia è in media $\frac{8}{100}$.

Esercizio 3 Siano $X_1, \ldots, X_{120}$ variabili aleatorie indipendenti, tutte quante aventi distribuzione uniforme sull'intervallo $[-1, 2]$.

a. Calcolare la funzione di ripartizione e la densità di X_1^2.
b. Calcolare $P(X_1 + \ldots + X_{120} > 50)$.
c. Calcolare $P(X_1 + \ldots + X_{80} - X_{81} - \ldots - X_{120} < 25)$.
d. Calcolare $P(X_1^2 + \ldots + X_{120}^2 > 120)$.

Soluzione. a) Sia $G(t)$ la funzione di ripartizione di X_i^2. Poiché X_i^2 ha valori in $[0, 4]$, segue che $G(t) = 0$ se $t < 0$ e $G(t) = 1$ se $t > 4$. Sia $t \geq 0$, allora

$$G(t) = P(X_i^2 \leq t) = P(-\sqrt{t} \leq X_i \leq \sqrt{t})$$

Se $t \in [0, 1]$, allora $G(t) = \frac{2\sqrt{t}}{3}$. Se invece $t \in [1, 4]$ allora $G(t) = \frac{\sqrt{t}+1}{3}$. Pertanto

$$G(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ \frac{2\sqrt{t}}{3} & \text{se } t \in [0,1] \\ \frac{\sqrt{t}+1}{3} & \text{se } t \in [1,4] \\ 1 & \text{se } t > 4 \end{cases}$$

Per trovare la densità di X_i^2, è sufficiente derivare la funzione di ripartizione trovata negli intervalli in cui è derivabile. Troviamo dunque la densità

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 0 \\ \frac{1}{3\sqrt{t}} & \text{se } t \in (0,1] \\ \frac{1}{6\sqrt{t}} & \text{se } t \in (1,4] \\ 0 & \text{se } t > 4 \end{cases}$$

b) Le X_i hanno valore atteso $\mu = 1/2$ e varianza $\sigma^2 = 3^2/12 = 3/4$.
Detto $S_{120} = X_1 + \ldots + X_{120}$, per il teorema del limite centrale abbiamo $S_{120} \sim N(60, 90)$. Dunque

$$P(S_{120} > 50) = P(\zeta_0 > \frac{50 - 60}{\sqrt{90}}) = P(\zeta_0 > -\frac{10}{3\sqrt{10}}) = P(\zeta_0 > -1.05) = \Phi(1.05) = 0.8531$$

c) Per $i = 1, \ldots, 40$, poniamo $Y_i = X_i + X_{40+i} - X_{80+i}$. Allora $X_1 + \ldots + X_{80} - X_{81} - \ldots - X_{120} = Y_1 + \ldots + Y_{40}$.
Le variabili aleatorie Y_i sono ancora indipendenti, e dalle proprietà di valore atteso e varianza vediamo che hanno valore atteso $\mu = 1/2$ e varianza $\sigma^2 = 3/4$.
Detto $S_{40} = Y_1 + \ldots + Y_{40}$, per il teorema del limite centrale abbiamo $S_{40} \sim N(20, 30)$. Dunque

$$P(S_{40} < 25) = P(\zeta_0 < \frac{25 - 20}{\sqrt{30}}) = P(\zeta_0 < \frac{5}{\sqrt{30}}) = P(\zeta_0 < 0.91) = \Phi(0.91) = 0.8186$$

d) Sia $Z_{120} = X_1^2 + \ldots + X_{120}^2$. Le variabili aleatorie X_i^2 sono ancora indipendenti, e dalle proprietà di valore atteso e varianza vediamo che hanno valore atteso $\mu = E(X_i^2) = Var(X_i) + E(X_i)^2 = 1$. Detta σ^2 la varianza delle X_i^2, abbiamo quindi $Z \sim N(120, 120\sigma^2)$. Poiché il grafico della densità di una variabile gaussiana è simmetrico rispetto all'asse verticale dato dal suo valor medio, segue che $P(Z_{120} > 120) = 0.5$.