Complessità computazionale

Daniele Vigo
D.E.I. – Università di Bologna
daniele.vigo@unibo.it

rev. 1.1 – 2023

Indagine di Mercato

- Mix di utenti da intervistare telefonicamente:

	Categoria				
	A	B	C	D	
	150	110	120	100	
mattina	30%	10%	10%	10%	40%
sera	30%	20%	30%	15%	5%

- Telefonate in 2 fasce orarie:
  - Mattina: 1 € per telefonata (almeno il 50%)
  - Sera: 1.5 € per telefonata
- *minimizzare il costo complessivo delle telefonate*

Modello matematico (PLI)

- x_1 : numero di telefonate alla mattina
- x_2 : numero di telefonate alla sera

$$
\begin{array}{lrcrl}
 & \min \quad x_1 & + & 1.5\, x_2 & \\
\text{A1:} & 0.3\, x_1 & + & 0.3\, x_2 & \geq 150 \\
\text{A2:} & 0.1\, x_1 & + & 0.2\, x_2 & \geq 110 \\
\text{B1:} & 0.1\, x_1 & + & 0.3\, x_2 & \geq 120 \\
\text{B2:} & 0.1\, x_1 & + & 0.15\, x_2 & \geq 100 \\
 & x_1 & - & x_2 & \geq 0 \\
 & x_1 & , & x_2 & \geq 0 \quad \text{INTERE}
\end{array}
$$

Noleggio di macchinari

- Un ente pubblico deve noleggiare dei macchinari

Mese	Gennaio	Febbraio	Marzo	Aprile	Maggio	Giugno
Fabbisogno	9	5	7	9	10	5

- Noleggi possibili per 3 periodi diversi:
  - 1 mese: 400 €
  - 2 mesi: 700 € (= 350 €/mese)
  - 3 mesi: 900 € (= 300 €/mese)
- *minimizzare il costo complessivo di noleggio*

Modello PLI

- Non basta sapere quanti macchinari noleggiare
  - quando (gennaio, febbraio, …)
  - per quanto tempo (1,2 o 3 mesi)

GE1, GE2, GE3 = n. macch. affittati a Gennaio per 1, 2 e 3 mesi.

….

GI1, GI2, GI3 = n. macch. affittati a Giugno per 1, 2 e 3 mesi.

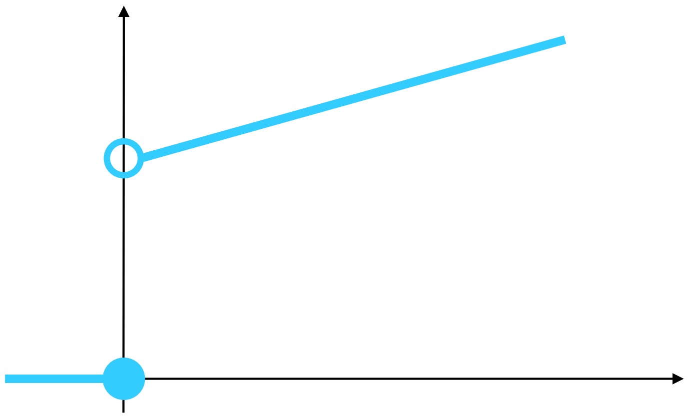
Modello PLI

$$
\begin{array}{ll}
\min & 400\,GE1 + 400\,FE1 + \ldots + 400\,GI1 + \\
 & 700\,GE2 + 700\,FE2 + \ldots + 700\,GI2 + \\
 & 900\,GE3 + 900\,FE3 + \ldots + \cancel{900\,GI3}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
GE1 + GE2 + GE3 & \geq & 9 \\
FE1 + FE2 + FE3 + GE2 + GE3 & \geq & 5 \\
MA1 + MA2 + MA3 + FE2 + FE3 + GE3 & \geq & 7 \\
AP1 + AP2 + AP3 + MA2 + MA3 + FE3 & \geq & 9 \\
MG1 + MG2 + \cancel{MG3} + AP2 + AP3 + MA3 & \geq & 10 \\
GI1 + \cancel{GI2} + \cancel{GI3} + MG2 + \cancel{MG3} + AP3 & \geq & 5 \\
GE1, GE2, \ldots, GI2, GI3 & \geq & 0 \ \text{INTERE}
\end{array}
$$

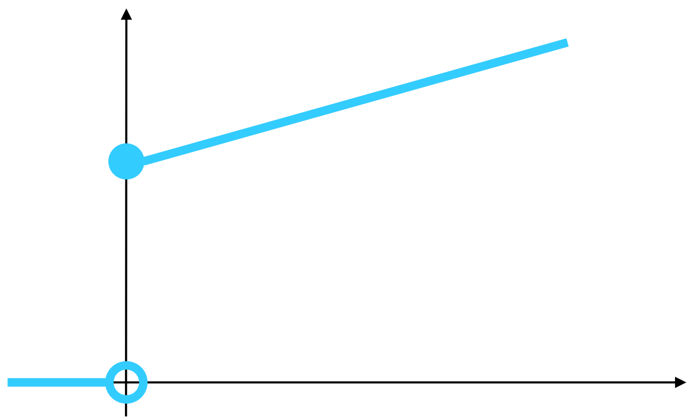
Costo fisso di produzione

- Problema di mix di produzione (tipo dieta)
- Contributo prodotto *j* alla funzione obiettivo:
  - 0, se non prodotto ($x_j = 0$)
  - $F_j + p_j x_j$ se prodotto ($x_j > 0$)



- F_j = costo fisso (macchinari)
- p_j = costo di produzione
- discontinuità nell'origine

Costo fisso di produzione (2)



$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{se } x_j > 0 \\ 0 & \text{se } x_j = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \min \sum_{j=1}^{n} F_j y_j + p_j x_j & \\ Ax \quad \geq \quad & b \\ x \quad \geq \quad & 0 \\ y \quad \in \quad & \{0,1\} \end{aligned}$$

- vincoli di tipo logico (*if …*)
- occorre legare tra loro le *x* e le *y* con vincoli lineari

Costo fisso di produzione (3)

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{se } x_j > 0 \\ 0 & \text{se } x_j = 0 \end{cases} \qquad \square \qquad x_j \leq M y_j$$

con $M >> 1$ ($\cong +\infty$)

- validità del vincolo:
  - se $x_j > 0$ y_j deve essere $=1$ ($x_j \leq +\infty$)
  - se $x_j = 0$ y_j può essere $= 0$ o 1 ($0 \leq 0$ o $+\infty$)

oppure

  - se $y_j = 0$ x_j deve essere $= 0$ ($x_j \leq 0$)
  - se $y_j = 1$ x_j può essere $= 0$ o >0 ($x_j \leq +\infty$)
- il vincolo impone solo parte della relazione logica

Costo fisso di produzione (4)

$$\min \sum_{j=1}^{n} F_j y_j + p_j x_j$$

$$\begin{array}{rcl} Ax & \geq & b \\ x_j & \leq & My_j \\ x & \geq & 0 \qquad y \in \{0,1\} \end{array}$$

- non è necessario imporre anche l'altra metà della relazione logica
- una soluzione con $x_j = 0$ ed $y_j = 1$ non può essere ottima (ne esiste una equivalente che costa meno)

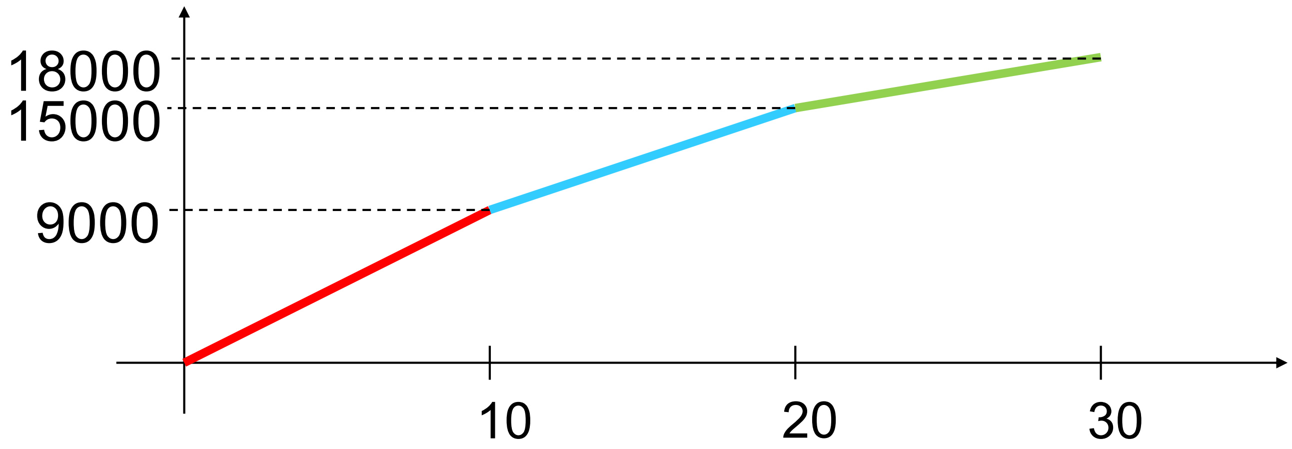
Mix di pubblicità

- Budget di 150 K € per pubblicizzare una nuova iniziativa.
- Due possibili canali pubblicitari:
  - Giornali: 1 K€ per annuncio
  - TV: 10 K€ per annuncio
- Al massimo 30 annunci su giornali e 15 annunci su TV
- Il numero di utenti raggiunti dipende in modo non lineare dal numero di annunci inviati.
- *massimizzare il numero totale di utenti raggiunti*

Mix di pubblicità (2)

Giornali	
n. annunci	Nuovi utenti per annuncio
1−10	900
11−20	600
21−30	300

TV	
n. annunci	Nuovi utenti per annuncio
1−5	10000
6−10	5000
11−15	2000



Modello PLI

- si possono usare variabili binarie per indicare se le variabili decisionali sono nella 1ª, 2ª o 3ª fascia
- Vincoli di tipo logico come per il costo fisso

Modello PLI

G1, G2, G3 = n. annunci su giornali nelle 3 fasce
T1, T2, T3 = n. annunci su TV nelle 3 fasce

$$\max \quad 900\ G1 + 600\ G2 + 300\ G3 + 10000\ T1 + 5000\ T2 + 2000\ T3$$

$$G1 + G2 + G3 + 10\ T1 + 10\ T2 + 10\ T3 \leq 150$$

$$G1, G2, G3 \leq 10$$

$$T1, T2, T3 \leq 5$$

$G1, G2, G3, T1, T2, T3 \geq 0$, INTERE

Turnazione del personale

- personale richiesto per giorno della settimana:

Lu	Ma	Me	Gi	Ve	Sa	Do
22	18	13	14	15	18	25

- ogni persona
  - lavora 5 giorni consecutivi
  - i 2 giorni successivi sono di riposo
- *minimizzare il numero di persone necessarie*
- altri vincoli possibili in problemi reali:
  - turni diversi
  - preferenze

Modello matematico (PLI)

x_1 : numero di persone che iniziano il turno Lun

x_2 : numero di persone che iniziano il turno Mar …

$$
\begin{array}{lccccccccl}
 & \min & x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 & +x_6 & +x_7 & \\
\text{Lu:} & & x_1 & & & +x_4 & +x_5 & +x_6 & +x_7 & \geq 22 \\
\text{Ma:} & & x_1 & +x_2 & & & +x_5 & +x_6 & +x_7 & \geq 18 \\
\text{Me:} & & x_1 & +x_2 & +x_3 & & & +x_6 & +x_7 & \geq 13 \\
\text{Gi:} & & x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & & & +x_7 & \geq 14 \\
\text{Ve:} & & x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 & & & \geq 15 \\
\text{Sa:} & & & +x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 & +x_6 & & \geq 18 \\
\text{Do:} & & & & +x_3 & +x_4 & +x_5 & +x_6 & +x_7 & \geq 25
\end{array}
$$

$x_1 \quad \ldots \ x_7 \geq 0$ INTERE

Turnazione personale: varianti

- Una volta stabiliti il numero di persone necessarie per turno, i turni vanno attribuiti alle persone
- Ogni persona esprime una preferenza per il turno (7=prima, 1=ultima scelta)
- Assegnare le persone ai turni massimizzando la preferenza espressa
- Idem tenendo conto dell'anzianità di servizio: punteggio di assegnazione=preferenza*anzianità

Assegnazione di incarichi

n persone ed *n* incarichi

c_{ij} tempo/costo ass. incarico *j* alla pers. *i*

- *determinare l'assegnamento delle persone agli incarichi di costo complessivo minimo*
- Es. $n = 2$

	lavoro	
pers.	1	2
1	20	40
2	30	20

Assegnazione di incarichi (2)

- $n = 3$

		lavoro	
pers.	1	2	3
1	20	60	30
2	80	40	90
3	50	70	80

N. soluzioni = $n\ (n-1)\ (n-2)\ \ldots = n!$

se $n = 20 \rightarrow\ n! \cong 2.4 * 10^{18}$

enumerazione su PC (1 Gflop/sec.): 4.6K anni !

Variabili decisionali

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se la persona } i \text{ esegue l'incarico } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

	lavoro		
pers.	1	2	3
1	20	60	30
2	80	40	90
3	50	70	80

	variabili		
	1	2	3
1	0	0	1
2	0	1	0
3	1	0	0

Matrice di permutazione: un solo 1 ∀ riga e colonna

Modello matematico (PLI)

- Funzione obiettivo (min. costo)

$$\min \quad \sum_{i=1,n} \sum_{j=1,n} c_{ij}\, x_{ij}$$

	variabili		
	1	2	3
1	0	0	1
2	0	1	0
3	1	0	0

- Un solo lavoro per persona:

$$\sum_{j=1,n} x_{ij} \quad = \quad 1 \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

- Una sola persona per lavoro:

$$\sum_{i=1,n} x_{ij} \quad = \quad 1 \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

$$x_{ij} \quad \in \{0, 1\} \qquad (i,j = 1, \ldots, n)$$

Assegnazione di incarichi (bis)

- Una compagnia desidera assegnare n =14 impiegati ai suoi m=10 uffici, che hanno una richiesta r_j

Ufficio	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Richiesta	1	1	1	1	2	1	2	2	2	1

  - Ogni impiegato ha espresso la propria preferenza p_{ij} per uno specifico ufficio (1=prima …10=ultima)
  - *Assegnare gli impiegati agli uffici massimizzando la soddisfazione per l'ufficio ottenuto (= minimizzazione preferenze assegnate)*

Modello matematico

- Funzione obiettivo (min. preferenze assegnate)

$$\min \quad \sum_{i=1,n} \sum_{j=1,m} p_{ij}\, x_{ij}$$

- Un solo ufficio per impiegato:

$$\sum_{j=1,m} x_{ij} \quad = \quad 1 \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

- Il numero richiesto di impiegati per ufficio :

$$\sum_{i=1,n} x_{ij} \quad = \quad r_j \qquad (j = 1, \ldots, m)$$

$$x_{ij} \quad \in \{0, 1\} \qquad (i,=1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, m)$$

Riorganizzazione del personale

- Un’azienda prevede la necessità di migliorare nel breve periodo la preparazione del suo personale
- Tre categorie: inesperto, addestrato ed esperto

	Costo licenziamento	Costo assunzione	Assumibili per anno
Esperti	700 €	250 €	500
Addestrati	500 €	150 €	800
Inesperti	350 €	100 €	1200

Riorganizzazione del personale (2)

- Costo di riaddestramento:
  - inesperti $\Rightarrow$ addestrati : 400 €
  - addestrati $\Rightarrow$ esperti : 500 €
- Stima impiegati necessari

	Attuale	Anno 1	Anno 2	Anno 3
Esperti	800	1200	1500	2000
Addestrati	1500	1500	2000	2500
Inesperti	2000	1600	1000	0

Riorganizzazione del personale (3)

- Determinare il piano di assunzioni, licenziamenti ed addestramenti per i prossimi tre anni.
- Obiettivi:
  - minimizzazione dei costi
  - minimizzazione dei licenziamenti

Localizzazione infrastrutture

- apertura centri CUP in una città divisa in 6 zone
- 1 sito per quartiere
- tempi di trasferimento tra i quartieri (in minuti):

	1	2	3	4	5	6
1	0	10	20	30	30	20
2	10	0	25	35	20	10
3	20	25	0	15	30	20
4	30	35	15	0	15	25
5	30	20	30	15	0	15
6	20	10	20	25	15	0

Localizzazione infrastrutture (2)

- massimo tempo di trasferimento 15 minuti

	1	2	3	4	5	6
1	0	10	–	–	–	–
2	10	0	–	–	–	10
3	–	–	0	15	–	–
4	–	–	15	0	15	–
5	–	–	–	15	0	15
6	–	10	–	–	15	0

- *minimizzare il numero di centri aperti*

Modello matematico (PLI)

x_i : 1 se si attiva il sito nel quartiere *i*, 0 altrimenti

$$
\begin{array}{lrrrrrrcl}
\min & x_1 & + x_2 & + x_3 & + x_4 & + x_5 & + x_6 & & \\
1: & x_1 & + x_2 & & & & & \geq & 1 \\
2: & x_1 & + x_2 & & & & + x_6 & \geq & 1 \\
3: & & & + x_3 & + x_4 & & & \geq & 1 \\
4: & & & + x_3 & + x_4 & + x_5 & & \geq & 1 \\
5: & & & & + x_4 & + x_5 & + x_6 & \geq & 1 \\
6: & & + x_2 & & & + x_5 & + x_6 & \geq & 1
\end{array}
$$

$x_1 \; \ldots \; x_6 \geq 0$ INTERE

Problema del set covering (SCP)

- Matrice binaria A con m righe e n colonne: se A_{ij} =1 si dice che la colonna j "copre" la riga i
- C_j "costo" della colonna j (j=1,…,n)

- *determinare un sottoinsieme di colonne avente costo minimo e tale che ogni riga sia coperta da <u>almeno</u> una colonna selezionata*

Modello PLI

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{se la colonna } j \text{ viene selezionata} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\min \quad \sum_{j=1,n} C_j \, x_j$$

$$\sum_{j=1,n} A_{ij} \, x_j \geq 1 \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

$$x_j \in \{0, 1\} \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

Variante: set partitioning (SPP)

- *determinare un sottoinsieme di colonne avente costo minimo e tale che ogni riga sia coperta da <u>esattamente</u> una colonna selezionata.*

$$\sum_{j=1,n} A_{ij}\, x_j = 1 \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

Problema dello zaino (KP01)

- Problema di selezione:
- n oggetti
- P_j profitto dell'oggetto j (j=1,…,n)
- W_j peso dell'oggetto j (j=1,…,n)
- 1 contenitore (zaino) di capacità K

- *determinare un <u>sottoinsieme</u> di oggetti avente massimo profitto e peso complessivo non superiore alla capacità K dello zaino*

Modello PLI

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{se l'oggetto } j \text{ viene inserito nel contenitore} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\max \quad \sum_{j=1,n} P_j \, x_j$$

$$\sum_{j=1,n} W_j \, x_j \le K$$

$$x_j \in \{0, 1\} \quad (j = 1, \ldots, n)$$

oppure $\quad 0 \le x_j \le 1$ INTERA $(j = 1, \ldots, n)$

Variante: KP−bounded

- Il generico oggetto j è disponibile in c_j esemplari
- può essere scelto c_j volte

$$\max \quad \sum_{j=1,n} P_j\, x_j$$

$$\sum_{j=1,n} W_j\, x_j \leq K$$

$$x_j \in \{0, 1\} \quad (j = 1, \ldots, n)$$

oppure $\quad 0 \leq x_j \leq c_j$ INTERA $(\, j = 1, \ldots, n)$

Variante: subset sum problem

- Il generico oggetto j ha profitto P_j e peso $W_j = P_j$.
  dato un insieme di n numeri, selezionarne un sottoinsieme di somma massima e non eccedente una data soglia K
- Taglio di barre e minimizzazione scarto

$$\max \quad \sum_{j=1,n} P_j x_j$$

$$\sum_{j=1,n} P_j x_j \leq K$$

$$x_j \in \{0, 1\} \qquad (j = 1, \dots, n)$$

oppure $\qquad 0 \leq x_j \leq 1$ INTERA $\quad (j = 1, \dots, n)$

Problema KP multiplo (MKP01)

- n oggetti
- P_j profitto dell'oggetto j (j=1,…,n)
- W_j peso dell'oggetto j (j=1,…,n)
- m contenitori, ciascuno di capacità K_i (i=1,…,m)
- un oggetto può al più andare in un solo contenitore

- *impaccare nei contenitori un sottoinsieme di oggetti avente massimo profitto in modo che la somma dei pesi degli oggetti inseriti in ogni contenitore non superi la corrispondente capacità* K_i

Modello PLI

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se l'oggetto } j \text{ viene inserito nel contenitore } i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\max \sum_{j=1,n} P_j \left(\sum_{i=1,m} x_{ij}\right)$$

$$\sum_{j=1,n} W_j x_{ij} \leq K_i \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

$$\sum_{i=1,m} x_{ij} \leq 1 \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad (i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n)$$

Bin Packing (1BP)

- n oggetti
- W_j peso dell'oggetto j (j=1,…,n)
- n contenitori (bin), ciascuno di capacità K

- *impaccare tutti gli oggetti nel minor numero possibile di contenitori in modo che la somma dei pesi degli oggetti inseriti in ogni contenitore non superi la capacità K*

Modello PLI

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se l'oggetto } j \text{ viene inserito nel contenitore } i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{se il contenitore } i \text{ viene utilizzato} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Modello PLI

$$\min \quad \sum_{i=1,n} y_i$$

$$\sum_{j=1,n} W_j x_{ij} \leq K y_i \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

$$\sum_{i=1,n} x_{ij} = 1 \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

$$y_i \in \{0, 1\} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \qquad (i, j = 1, \ldots, n)$$

Variante: Vector Packing (VPP)

- Il generico oggetto j ha un volume V_j ed ogni contenitore ha anche una capacità in volume T

impaccare <u>tutti</u> gli oggetti nel minor numero possibile di contenitori in modo da rispettare, in ogni contenitore, sia il vincolo di peso che quello di volume

$$\sum_{j=1,n} W_j x_{ij} \leq K_i y_i \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

$$\sum_{j=1,n} V_j x_{ij} \leq T_i y_i \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

In generale: ogni oggetto j ha m dimensioni…

Variante: Bin con capacità variabile

- Il generico contenitore *i* ha capacità K_i (e costo C_i)

  impaccare <u>tutti</u> gli oggetti in un insieme di contenitori di costo minimo in modo che la somma dei pesi degli oggetti inseriti in ogni contenitore i non superi la capacità K_i

$$\min \sum_{i=1,n} C_i y_i$$

$$\sum_{j=1,n} W_j x_{ij} \le K_i y_i \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

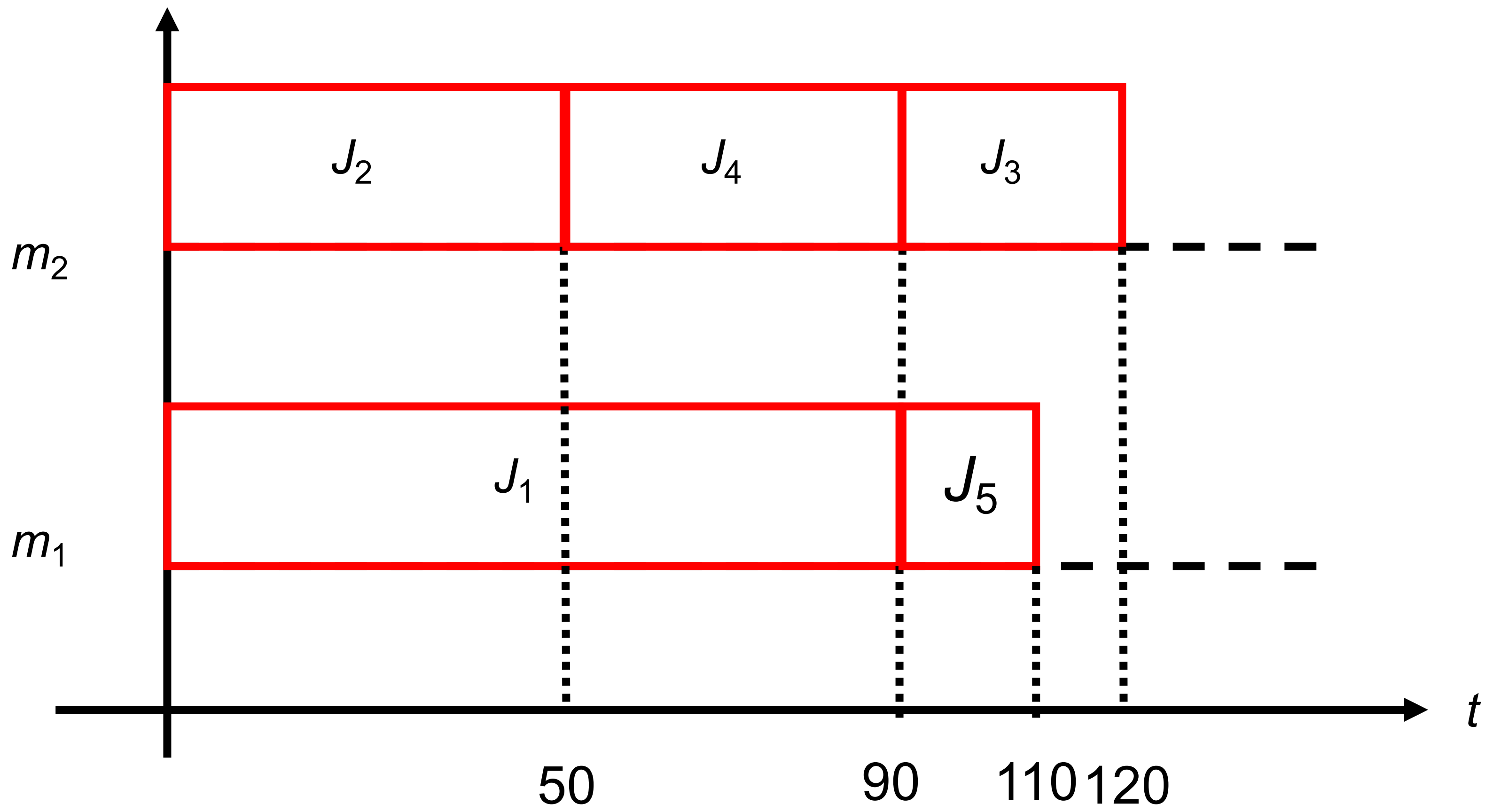
Sequenziamento di lavorazioni

- *n* lavorazioni
- p_j tempo di processamento lavorazione *j*
- no preemption = una volta iniziata la lavorazione non può essere interrotta
- *m* macchine identiche
- una sola lavorazione alla volta per ogni macchina

- *assegnare le lavorazioni alle macchine in modo tale che il tempo totale di processamento sia minimo*

Sequenziamento di lavorazioni (2)

- $n = 5$, $m = 2$, $p_j = \{90, 50, 30, 40, 20\}$



Variabili decisionali

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se la macchina } i \text{ esegue lavorazione } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

	lavorazioni				
macch.	1	2	3	4	5
1	1	0	0	0	1
2	0	1	1	1	0

z = massimo tempo di lavorazione (makespan)

Modello matematico (PL mista)

- Funzione obiettivo (min. makespan)

$$\min \quad z$$

- definizione makespan:

$$\sum_{j=1,n} p_j x_{ij} \leq z \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

- Ogni lavorazione su una sola macchina:

$$\sum_{i=1,m} x_{ij} = 1 \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \qquad (i, j = 1, \ldots, n)$$

$$z \geq 0$$