# Programmazione Lineare Intera: Algoritmo Branch and Bound

Daniele Vigo
D.E.I. – Università di Bologna
daniele.vigo@unibo.it

rev. 2.0 – 2023

# Algoritmi generali per PLI

- Metodi esatti tradizionali (anni 60-oggi):
  - Metodo dei piani di taglio (cutting planes)
  - Branch-and-Bound
  - Programmazione Dinamica
- …
- Metodi esatti più avanzati (anni 90-oggi):
  - Branch-and-Bound + Cutting planes = Branch-and-Cut
  - Branch-and-Price/Column generation

# Branch and Bound

- Tecnica generale per la risoluzione di problemi di ottimizzazione combinatoria ($F$ finito)
- Si basa sulla scomposizione del problema in sottoproblemi ("Divide and Conquer")
- Problema da risolvere: $P^0 = (z(\cdot), F(P^0))$
  - Funzione obiettivo: $z(\cdot)$
  - Regione ammissibile: $F(P^0)$
- Soluzione ottima: $z^* = z(P^0) = \min\{z(x) : x \in F(P^0)\}$
- Miglior soluzione ammissibile nota: $z^{Best}$
  (alla fine $z^* = z^{Best}$ )

# Branch and Bound (2)

- Suddivisione di $P^0$ in $K$ sottoproblemi: $P^1$, $P^2$,…, $P^K$ la cui totalità rappresenti $P^0$

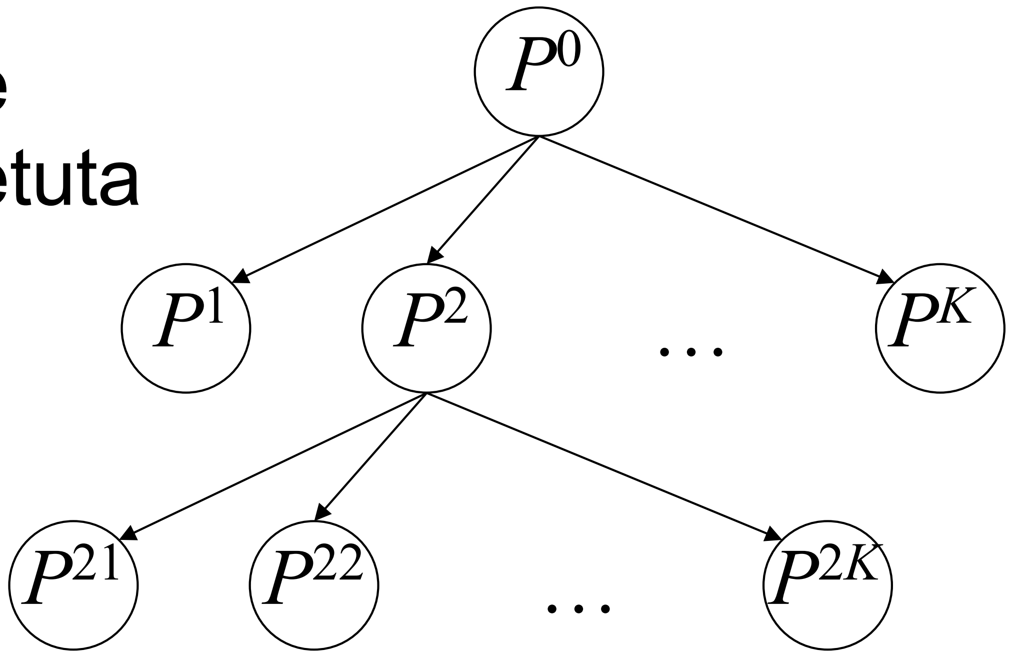
- Ad esempio si ottiene suddividendo $F(P^0)$ in sottoinsiemi $F(P^1)$, $F(P^2)$, …,$F(P^K)$ tali che

$$\bigcup_{k=1}^{K} F\left(P^k\right) = F\left(P^0\right)$$

- preferibilmente la regione ammissibile va partizionata: $F(P^i) \cap F(P^j) = \emptyset \quad \forall\ P^i, P^j: i \neq j$

# Rappresentazione

- Il processo di suddivisione (ramificazione, Branching) si può rappresentare mediante un albero decisionale (Branch Decision Tree)
  - Nodi: problemi, Archi: relazione di discendenza
  - La suddivisione può essere ripetuta ricorsivamente



# Branch and Bound (3)

- La soluzione ottima del sottoproblema $P^k$ è:

  $$z^k = z(P^k) = \min\{z(x) : x \in F(P^k)\}$$

- risolvere $P^0$ equivale a risolvere tutti i $P^k$ generati:

  $$z^* = z(P^0) = \min \{z(P^1), z(P^2), \ldots, z(P^K), \ldots\}$$

- Un sottoproblema $P^k$ è risolto se:
  1. Si determina la soluzione ottima di $P^k$
     (Es. PLI: $P^k \rightarrow C(P^k)$ con soluzione $x^{Ck}$ intera);
  2. Si dimostra che $F(P^k) = \emptyset$ ($P^k$ impossibile);
  3. Si dimostra che $z(P^k) \geq z^{Best}$
     (Es. PLI : se $z^{Ck} \geq z^{Best}$ allora anche $z^k \geq z^{Best}$)
- I sottoproblemi non risolti vanno suddivisi

# Branch and Bound per PLI

- $(P^0)$ min $z^0 = c^T x$

$$Ax = d$$

$$x \geq 0, \text{ intero}$$

Notazione:

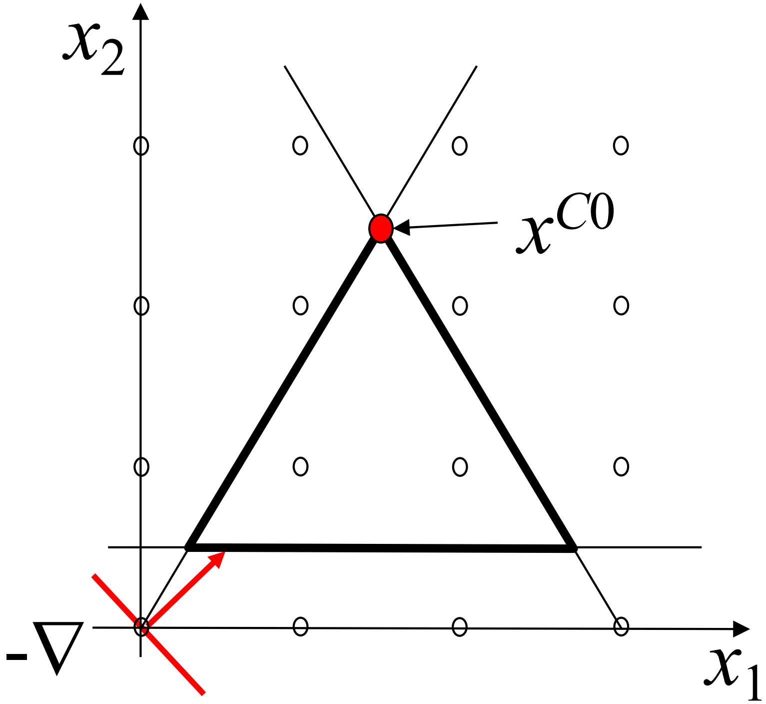
- $x^k$ soluzione ottima di $P^k$ (intera), di valore $z^k$ ($z^0 \equiv z^*$)
- $x^{Ck}$ soluzione ottima di $C(P^k)$, di valore $z^{Ck}$

- Si noti che: $z^{Ck} = c^T x^{Ck} \leq z^k = c^T x^k$
- Se $x^{C0}$ è intera $\Rightarrow x^* = x^0 = x^{C0}$ (soluzione ottima);
- Altrimenti …

# Branch and-Bound per PLI (2)

Esempio di problema PLI:

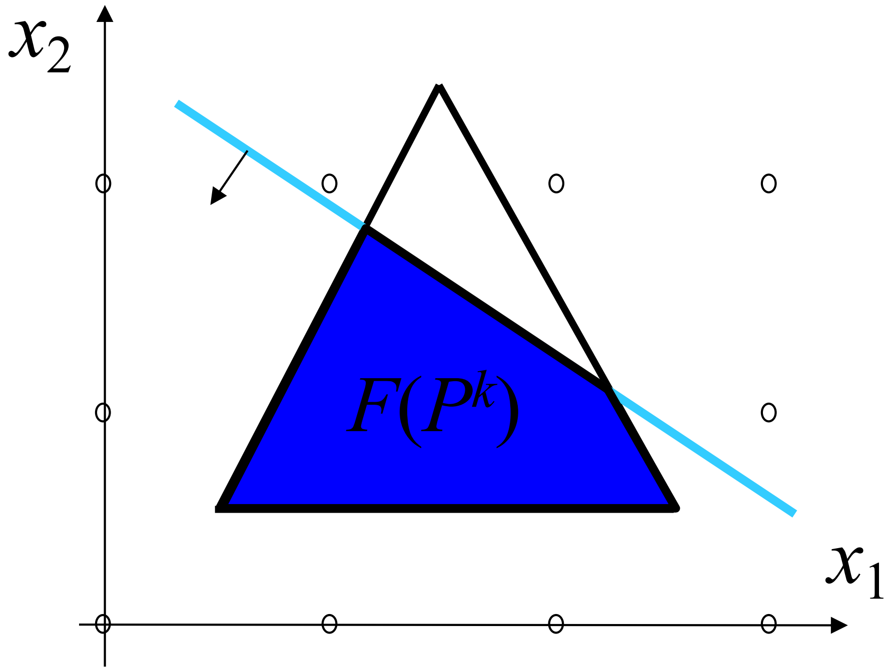
$$
\begin{array}{llllr}
\max z & x_1 & +x_2 & & \\
s.t. & 5x_1 & +3x_2 & \leq 15 \\
 & 5x_1 & -3x_2 & \geq 0 \\
 & & x_2 & \geq 1/2 \\
 & x_1 & , \quad x_2 & \geq 0 \\
 & & & \text{intere}
\end{array}
$$




- $x^{C0} = (3/2, 5/2)$

# Branching

- La soluzione di $C(P^0)$ è frazionaria:
  ➔ suddividi $F(P^0)$ in $K$ parti (Es. $K$=2)
- $F(P^k)$ si può ottenere aggiungendo a $F(P^0)$ un vincolo $\alpha^k x \leq \beta^k$



# Branching (2)

- Scelta una componente $x^{C0}_j$ frazionaria, imponiamo due condizioni mutuamente esclusive ed esaustive, valide per ogni soluzione intera di $P^0$:

$$x_j \leq \lfloor x^{C0}_j \rfloor \quad \text{or} \quad x_j \geq \lfloor x^{C0}_j \rfloor + 1$$

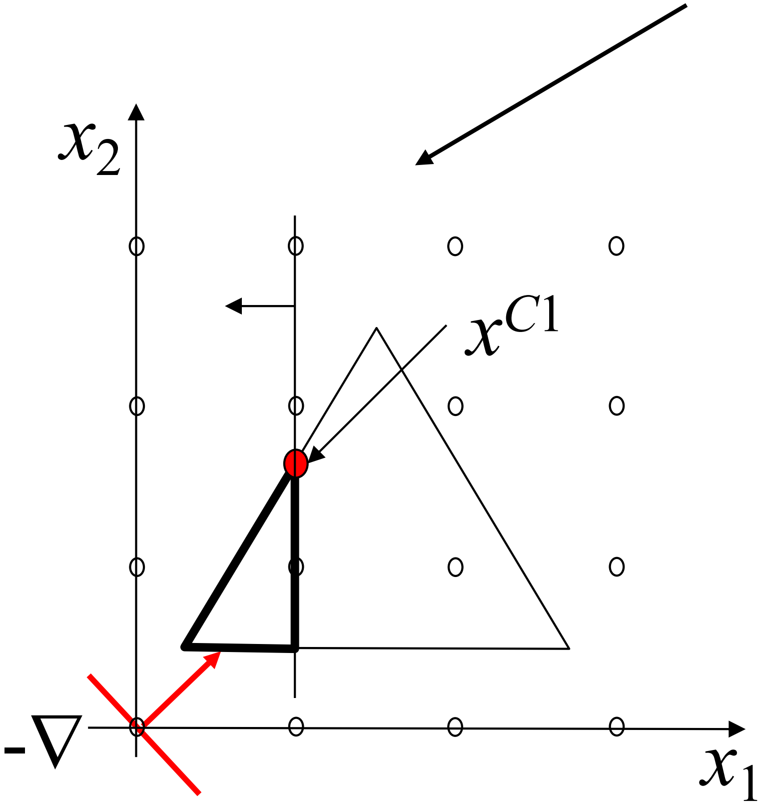
$$(P^1) \min z^1 = c^T x$$
$$Ax = d$$
$$x \geq 0 \text{ ,intero}$$
$$x_j \leq \lfloor x^{C0}_j \rfloor$$

$$(P^2) \min z^2 = c^T x$$
$$Ax = d$$
$$x \geq 0 \text{ ,intero}$$
$$x_j \geq \lfloor x^{C0}_j \rfloor + 1$$

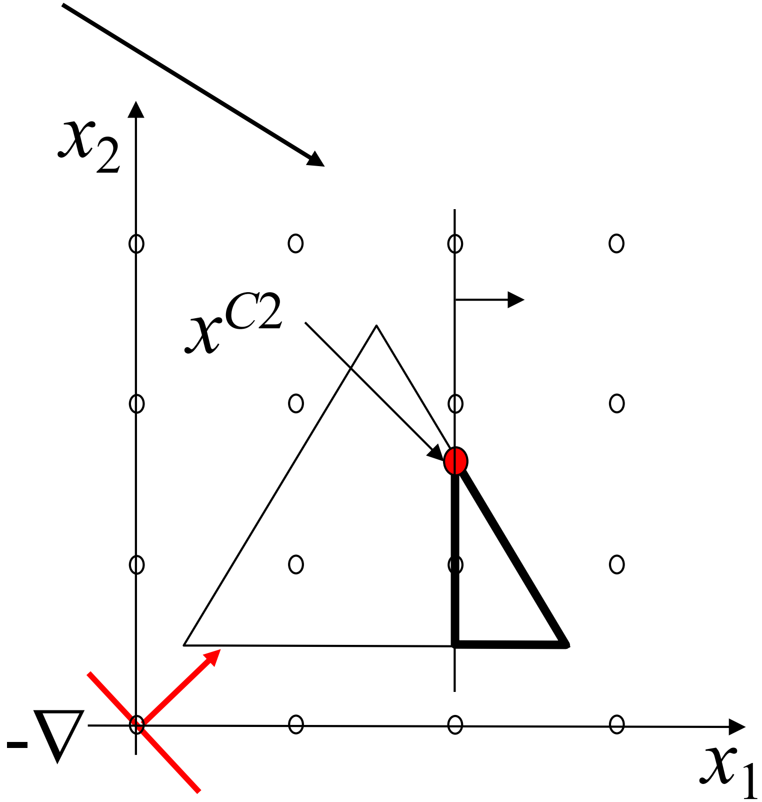
$$\boxed{z^0 = \min ( z^1 , z^2 )}$$

# Prima ramificazione

- Es : $x^{C0}_1 = 3/2 \Rightarrow x_1 \leq 1$ or $x_1 \geq 2$ :




$x^{C1}=(1, 5/3)$




$x^{C2}=(2, 5/3)$

# Branching (3)

- Normalmente $x^{C1}$ e /o $x^{C2}$ non sono interi
  $\Rightarrow$ si continua a ramificare, cioè :
- Da ogni problema $P^i$ si creano due nuovi problemi $P^j$ e $P^k$ a meno che :
  - $x^{Ci}$ sia intero, oppure
  - il rilassamento continuo di $P^i$ sia impossibile
- Quale variabile si sceglie per il Branching ?
  - la prima frazionaria
  - quella con parte frazionaria maggiore
  - …

# Strategia di esplorazione

- Se esiste più di un sottoproblema "in sospeso", qual è il prossimo da esaminare ?
- $z^{C1} = 8/3 \geq z^1$; $z^{C2} = 11/3 \geq z^2$ (problema di max)
- se $c^T$ è intero, allora $z^* = c^T x$ è intera con $x$ intera

  da cui $z^C \geq \lfloor z^C \rfloor \geq z^*$ (upper bound migliore)

  (se problema di minimo: $z^C \leq \lceil z^C \rceil \leq z^*$)
- Prossimo sottoproblema da esaminare:
  - $z^1 \leq \lfloor 8/3 \rfloor = 2$, mentre $z^2 \leq \lfloor 11/3 \rfloor = 3$

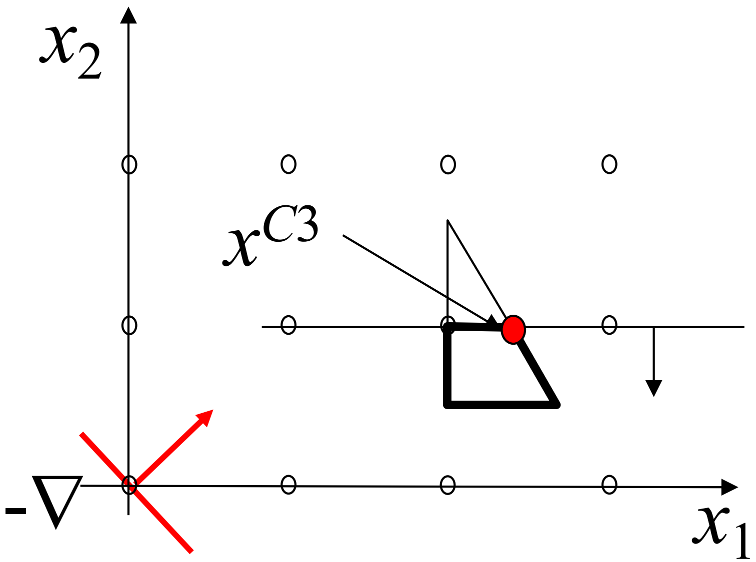
  ➔ meglio $P^2$ !

# Seconda ramificazione

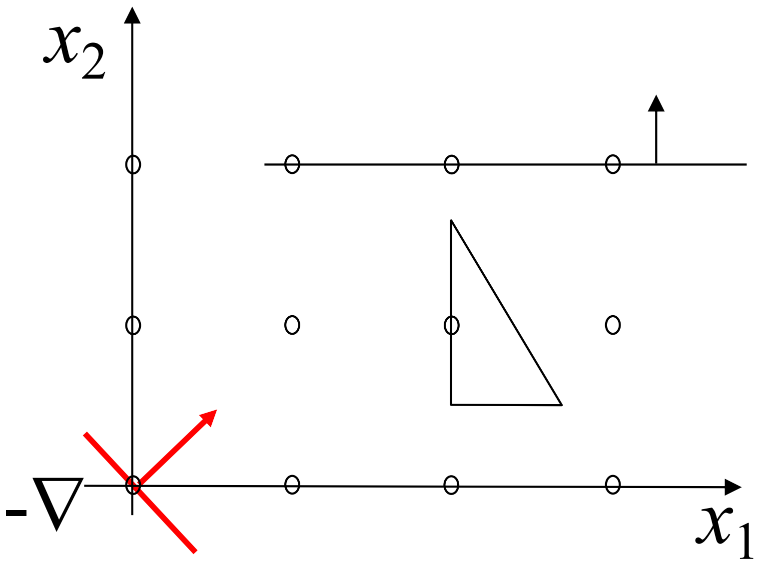
- Es: da $P^2$ : $x^{C2}{}_2 = 5/3$

$(P^3)\ P^2 + x_2 \leq 1$

$(P^4)\ P^2 + x_2 \geq 2$




$x^{C3}$=(12/5, 1)



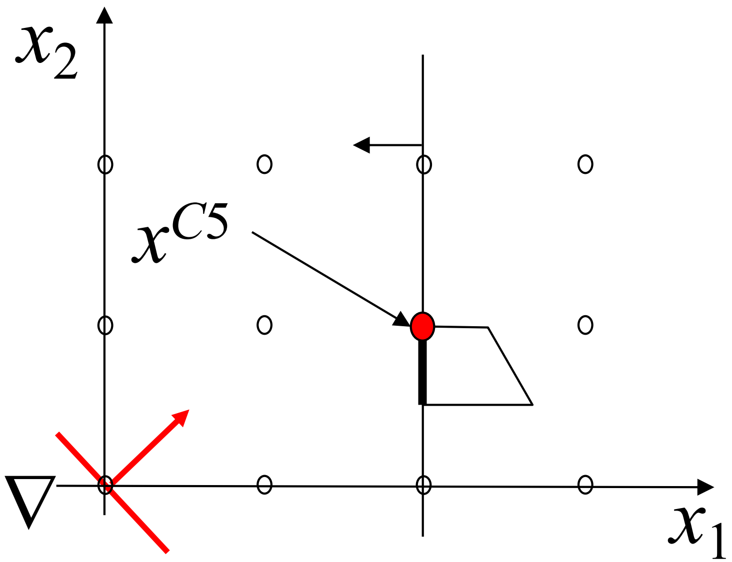

impossibile

# Terza ramificazione

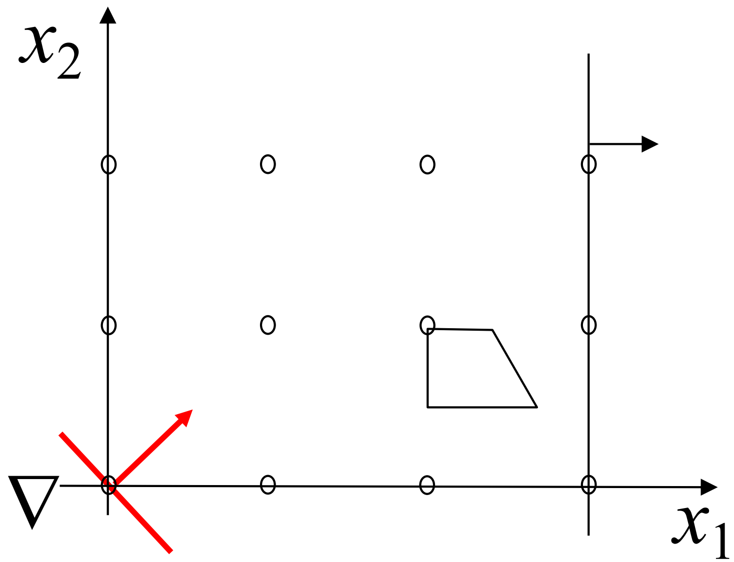
- Es: da $P^3$ : $x^{C3}_1 = 12/5$

$(P^5)\ P^3 + x_1 \leq 2$

$(P^6)\ P^3 + x_1 \geq 3$

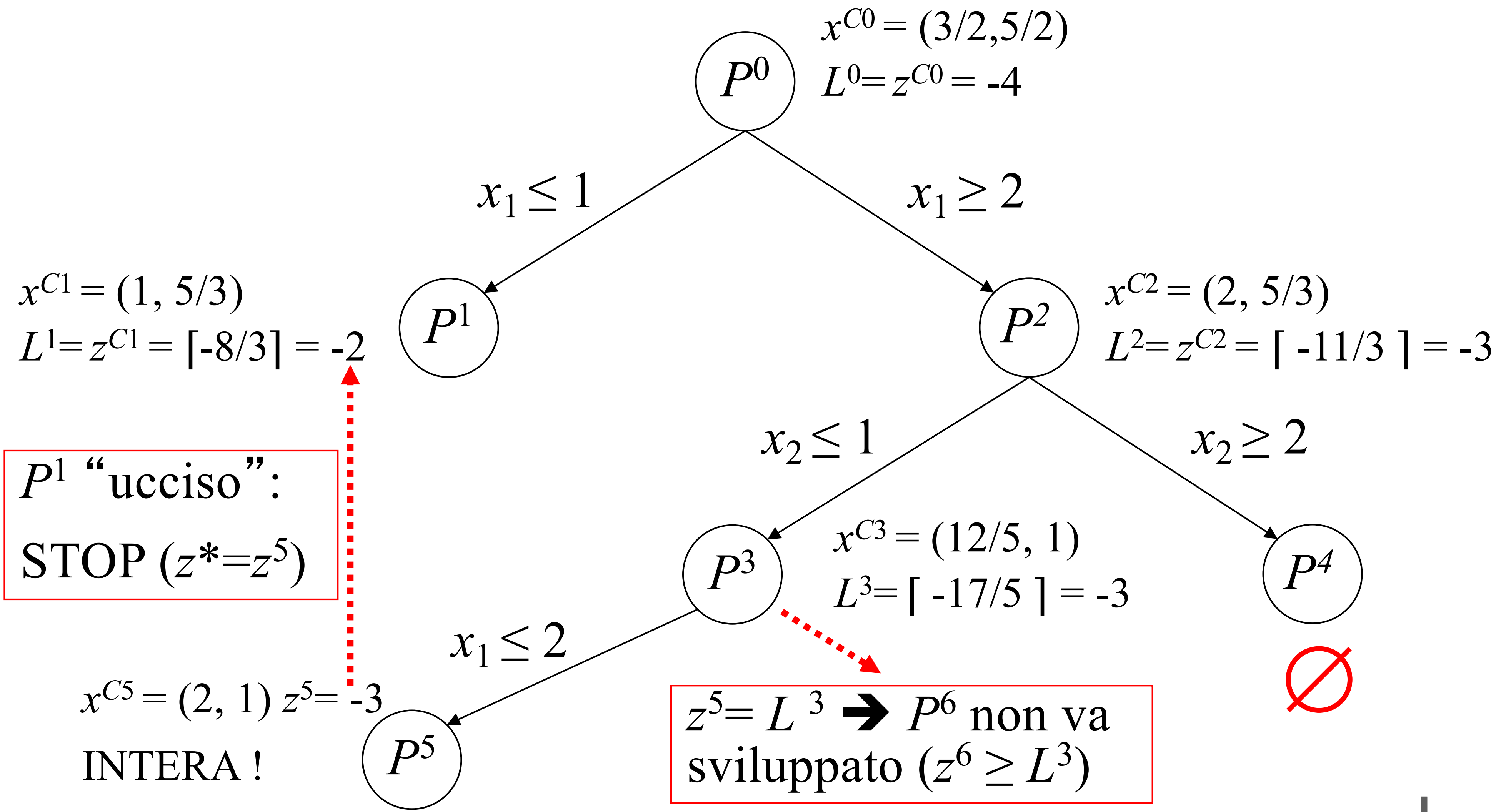



$x^{C5}$=(2, 1) INTERA !



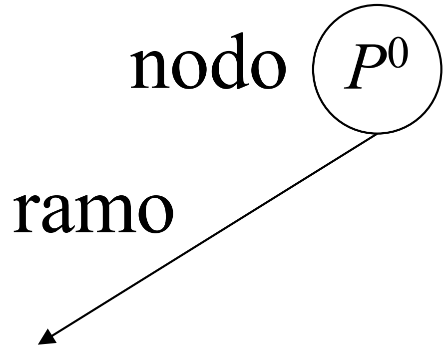

impossibile

# Albero decisionale



# Terminologia

- 0 (o $P^0$) nodo radice
- 4, 5, … nodi "foglia"
- 2 "padre" di 3 e 4
- 3 e 4 "figli" di 2
- 2 "progenitore" di 3, 4 e 5
- 3, 4, 5 "discendenti" di 0 e 2




- Si continua il branching finché esistono nodi attivi
- Soluzione di $P^0$ = sol. della foglia di costo massimo

# Inserimento dei vincoli nel tableau

- Sia $x_{\beta(i)} = a$ frazionaria in base

1. vincolo $x_{\beta(i)} \le \lfloor a \rfloor \rightarrow x_{\beta(i)} + x_s = \lfloor a \rfloor$

| | | | $\beta(i)$ | | | | | | | $s$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $-z_0$ | 0 | 0 | 0 | … | 0 | | $c'_j$ | | 0 |
| | | 1 | 0 | 0 | … | … | | | | 0 |
| $x_{\beta(i)}$ | $a$ | 0 | 1 | 0 | 0 | … | … | $y_{ij}$ | … | 0 |
| | | … | … | 1 | … | … | | | | … |
| | | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | | | | 0 |
| | | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | | | | 0 |
| $x_s$ | $\lfloor a \rfloor$ | 0 | 1 | 0 | … | 0 | … | 0 | 0 | 1 |

- in questo modo la vecchia base viene "distrutta"

si sottrae la riga $i$

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $r$ | 0 | 0 | 0 | … | 0 | … | $-y_{ij}$ | 1 |

$r = \lfloor a \rfloor - a < 0$ !!

# Inserimento dei vincoli nel tabl. (2)

2. vincolo $x_{\beta(i)} \geq \lfloor a \rfloor + 1 \rightarrow -x_{\beta(i)} + x_s = -\lfloor a \rfloor - 1 = t$

| | | $\beta(i)$ | | | | | | | | $s$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $-z_0$ | 0 | 0 | 0 | … | 0 | $c'_j$ | | | 0 |
| $x_{\beta(i)}$ | $a$ | 1 | 0 | 0 | … | … | | | | 0 |
| | | 0 | 1 | 0 | 0 | … | … | $y_{ij}$ | … | 0 |
| | | … | … | 1 | … | … | | | | … |
| | | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | | | | 0 |
| | | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | | | | 0 |
| $x_s$ | $t$ | 0 | $-1$ | 0 | … | 0 | … | 0 | 0 | 1 |
| | $r'$ | 0 | 0 | 0 | … | 0 | … | $y_{ij}$ | | 1 |

- in questo modo la vecchia base viene "distrutta"

si somma la riga $i$

$r' = a - \lfloor a \rfloor - 1 < 0$

in entrambi i casi si prosegue con il simplesso duale

# Esempio

$$
\begin{array}{llll}
\min & x_1 & +2x_2 & \\
 & x_1 & +x_2 & \leq 4 \\
 & x_1 & +4x_2 & \geq 6 \\
 & 8x_1 & -8x_2 & \geq 3 \\
 & x_1, & x_2, & \geq 0 \text{ interi}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lllllll}
\min & x_1 & +2x_2 & & & & \\
 & x_1 & +x_2 & +x_3 & & & = 4 \\
 & x_1 & +4x_2 & & -x_4 & & = 6 \\
 & 8x_1 & -8x_2 & & & -x_5 & = 3 \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq 0 \text{ interi}
\end{array}
$$

# Esempio (1)

| | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x^a{}_1$ | $x^a{}_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-w$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| $x_3$ | 4 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $x^a{}_1$ | 6 | 1 | 4 | 0 | –1 | 0 | 1 | 0 |
| $x^a{}_2$ | 3 | 8 | –8 | 0 | 0 | –1 | 0 | 1 |

| | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x^a{}_1$ | $x^a{}_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-w$ | –9 | –9 | 4 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| $x_3$ | 4 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $x^a{}_1$ | 6 | 1 | 4 | 0 | –1 | 0 | 1 | 0 |
| $x^a{}_2$ | 3 | 8 | –8 | 0 | 0 | –1 | 0 | 1 |

# Esempio (2)

| | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x^a{}_1$ | $x^a{}_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-w$ | –45/8 | 0 | –5 | 0 | 1 | –1/8 | 0 | 9/8 |
| $x_3$ | 29/8 | 0 | 2 | 1 | 0 | 1/8 | 0 | –1/8 |
| $x^a{}_1$ | 45/8 | 0 | 5 | 0 | –1 | 1/8 | 1 | –1/8 |
| $x_1$ | 3/8 | 1 | –1 | 0 | 0 | –1/8 | 0 | 1/8 |

| | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x^a{}_1$ | $x^a{}_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-w$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| $x_3$ | 11/8 | 0 | 0 | 1 | 2/5 | 3/40 | –2/5 | – 3/40 |
| $x_2$ | 9/8 | 0 | 1 | 0 | –1/5 | 1/40 | 1/5 | – 1/40 |
| $x_1$ | 3/2 | 1 | 0 | 0 | –1/5 | –1/10 | 1/5 | 1/10 |

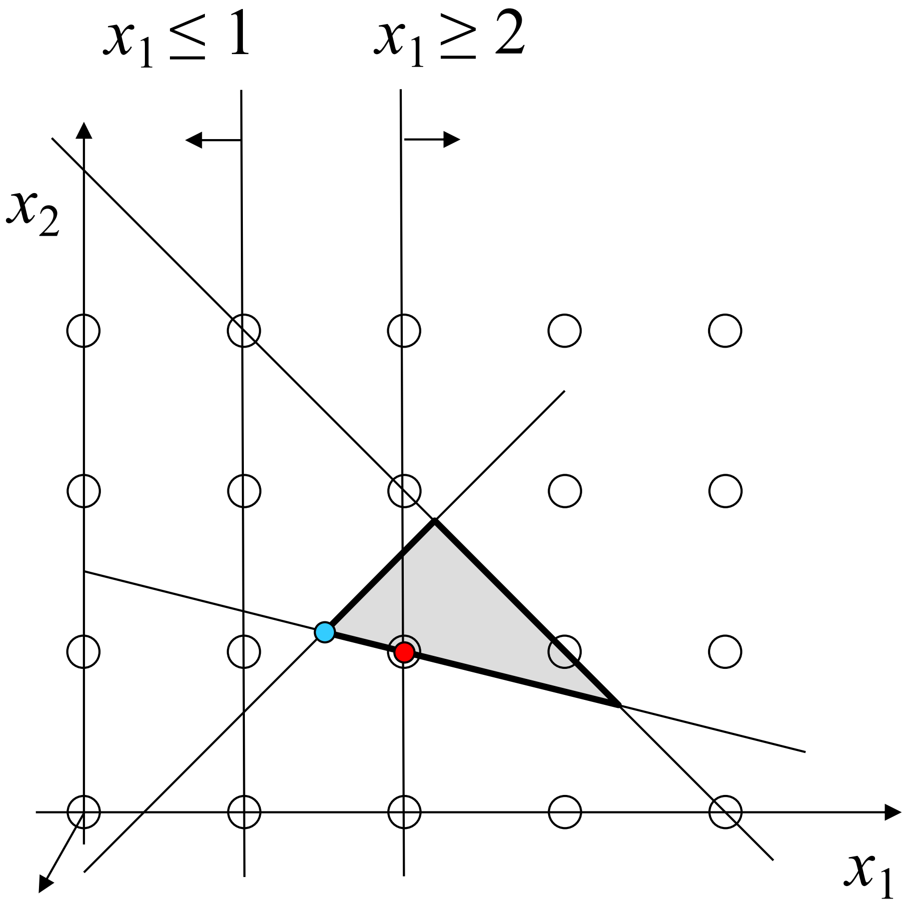
# Esempio (3)

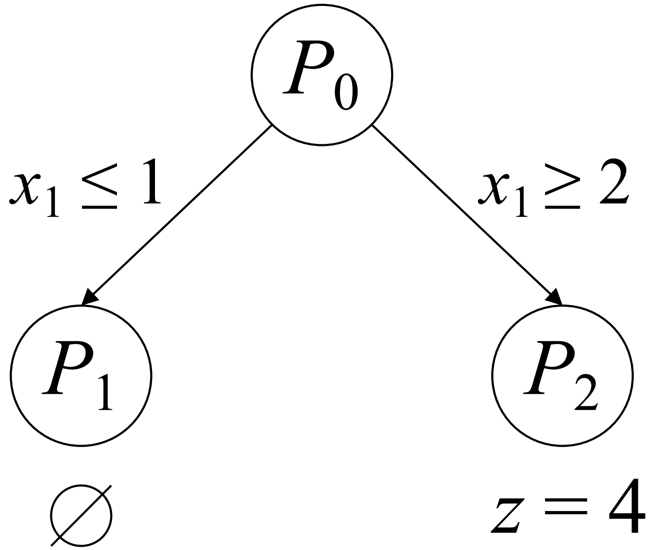
| | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $-z$ | 0 | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 |
| $x_3$ | 11/8 | 0 | 0 | 1 | 2/5 | 3/40 |
| $x_2$ | 9/8 | 0 | 1 | 0 | –1/5 | 1/40 |
| $x_1$ | 3/2 | 1 | 0 | 0 | –1/5 | –1/10 |

| | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $-z$ | –15/4 | 0 | 0 | 0 | 3/5 | 1/20 |
| $x_3$ | 11/8 | 0 | 0 | 1 | 2/5 | 3/40 |
| $x_2$ | 9/8 | 0 | 1 | 0 | –1/5 | 1/40 |
| $x_1$ | 3/2 | 1 | 0 | 0 | –1/5 | –1/10 |

- soluzione ottima non intera
- branching su $x_1$

# Esempio (7)



# Esempio B&B

Un'azienda produce due tipi di pezzi meccanici denominati C e D in lotti indivisibili da 1000 pezzi. Il profitto di vendita di un lotto di D è doppio rispetto a quello ottenibile da un lotto di C. La produzione di un lotto di C richiede 8000 unità di elementi M mentre quella di D ne richiede 14000. Sono disponibili complessivamente 56000 unità di M.

Per ragioni di mercato il quantitativo di lotti di C prodotti deve essere superiore di almeno una unità rispetto alla metà del quantitativo di lotti di D prodotti.

Si richiede di determinare la produzione di massimo profitto compatibile con i vincoli descritti.

# Esempio B&B

In particolare si richiede di:

a) Definire il modello di ottimizzazione lineare intera per la determinazione della soluzione, utilizzando coefficienti **interi e piccoli** in valore assoluto.

b) Supponendo inizialmente accettabili soluzioni frazionarie si risolva il rilassamento del problema del punto a) con l'algoritmo del simplesso primale (utilizzando, se necessario, il Metodo delle due Fasi aggiungendo le sole variabili artificiali necessarie a completare la base e la regola di Bland).

c) Si disegni con cura la regione ammissibile (3 quadretti per unità) e si riporti su di essa con chiarezza la soluzione ottima (continua) del problema. (Punti 5)

d) Determinare la produzione ottima del problema **intero** definito al punto a) mediante l'impiego dell'algoritmo del Branch and Bound (Punti 10). A tal fine:
   - Si utilizzi per il nodo radice la soluzione del rilassamento continuo determinata al punto b).
   - Si risolvano **per via grafica** gli eventuali ulteriori rilassamenti continuo associati agli altri nodi dell'albero decisionale. Si disegni con cura la regione ammissibile (3 quadretti per unità) e si riportino su di essa le soluzioni corrispondenti ai diversi nodi esplorati ed i tagli richiesti dal Branch and Bound.
   - Si esegua il branching utilizzando la variabile frazionaria di indice MASSIMO e si generi per primo il nodo corrispondente alla condizione ≤
   - Si disegni l'albero decisionale esaminato e si riporti in corrispondenza di ogni nodo la soluzione ed il valore del bound corrispondente.

# Modello

a) Modello

X1, X2 = n. di lotti di C e D prodotti

$$
\begin{array}{llllll}
\text{Max} & X1 & +2X2 & & & \\
\text{s.t.} & 2X1 & -X2 & \geq & 2 & \\
 & 4X1 & +7X2 & \leq & 28 & \\
 & X1 & X2 & \geq & 0, \text{ intere} &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lllllll}
\text{Min} & -X1 & -2X2 & & & & \\
\text{s.t.} & 2X1 & -X2 & -X3 & & = & 2 \\
 & 4X1 & +7X2 & & +X4 & = & 28 \\
 & X1 & X2 & X3 & X4 & \geq & 0 \quad \text{intere}
\end{array}
$$

•

# Simplesso

**FASE I**

| | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_1^a$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $-\xi$ | -2 | -2 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| $x_1^a$ | 2 | 2 | -1 | -1 | 0 | 1 |
| $x_4$ | 28 | 4 | 7 | 0 | 1 | 0 |

Tableau iniziale di Fase I in forma canonica rispetto alla base x4 x1a

| | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_1^a$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $-\xi$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| $x_1$ | 1 | 1 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ |
| $x_4$ | 24 | 0 | 9 | 2 | 1 | -2 |

Fine Fase I la base ottima x1 x4 è una base ammissibile per la partenza della Fase II. Si rimuove la variabile artificiale x1a si ripristina la funzione obiettivo originaria e si mette il tableau in forma canonica rispetto alla base x1, x4.

# Fase II

**FASE II**

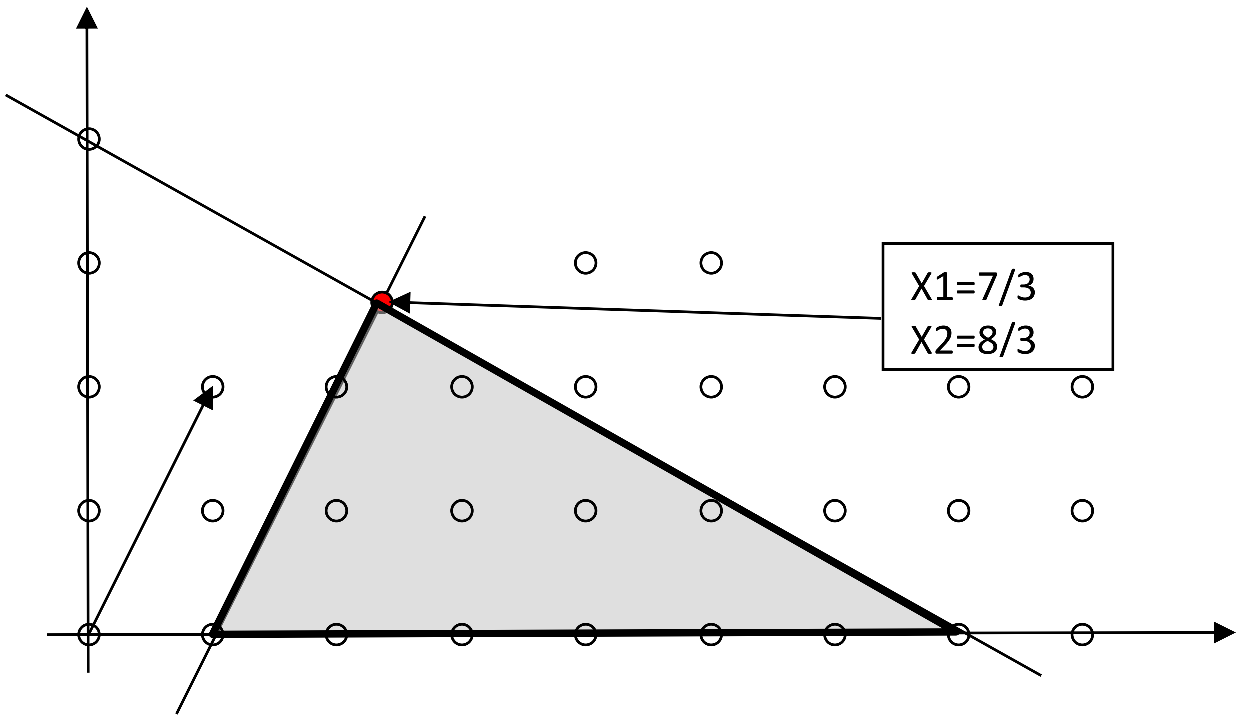
| | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_1^a$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $-z$ | 1 | 0 | $-\frac{5}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ |
| $x_1$ | 1 | 1 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ |
| $x_4$ | 24 | 0 | 9 | 2 | 1 | -2 |

Tableau iniziale di Fase II in forma canonica rispetto alla base x1, x4. La variabile x1a può essere rimossa

| | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_1^a$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $-z$ | $\frac{23}{3}$ | 0 | 0 | $\frac{1}{18}$ | $\frac{5}{18}$ | $-\frac{1}{18}$ |
| $x_1$ | $\frac{7}{3}$ | 1 | 0 | $-\frac{7}{18}$ | $\frac{1}{18}$ | $\frac{7}{18}$ |
| $x_2$ | $\frac{8}{3}$ | 0 | 1 | $\frac{2}{9}$ | $\frac{1}{9}$ | $-\frac{2}{9}$ |

Stop. Soluzione ottima del rilassamento continuo iniziale: X1= 7/3, X2=8/3, z= 23/3

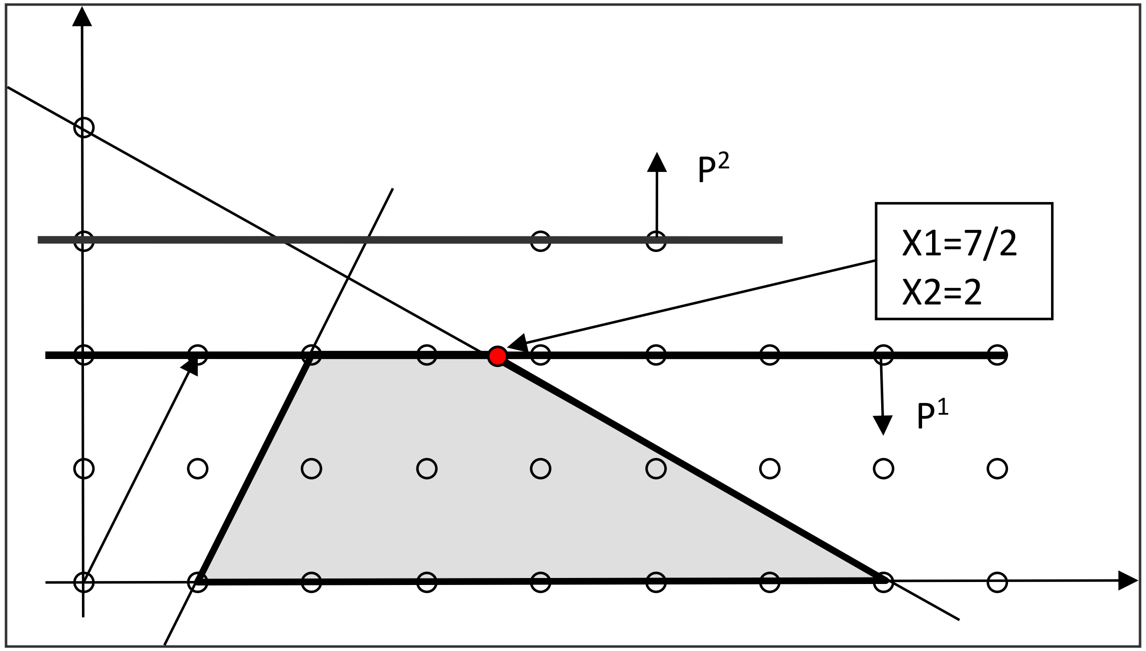
# Regione ammissibile

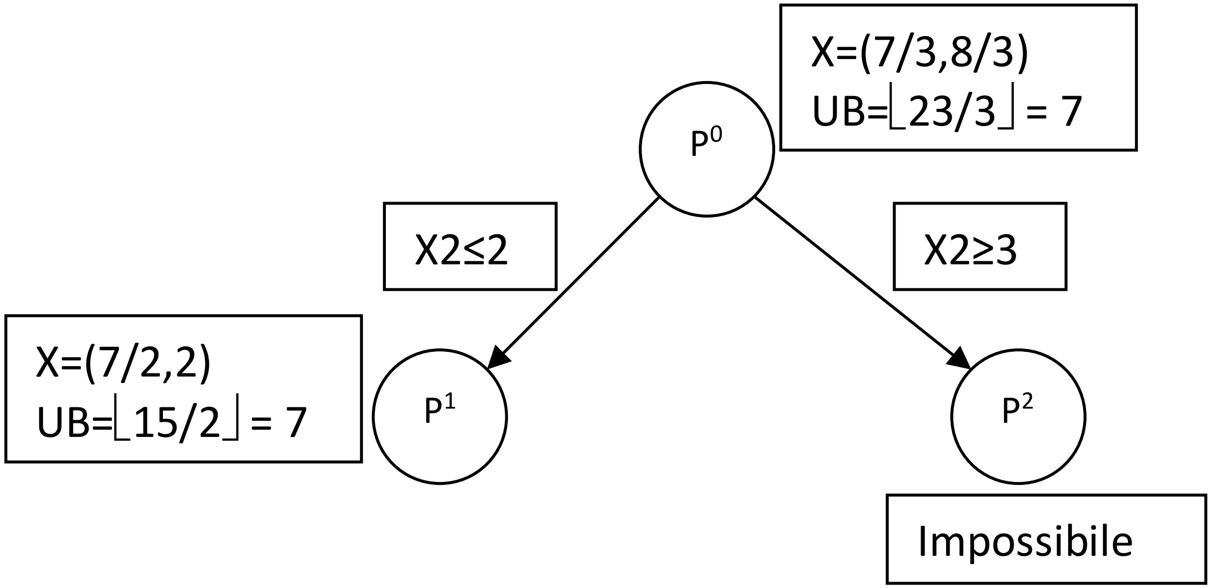


# Branch and Bound

- La soluzione del rilassamento continuo del problema originale (nodo P0) è stata determinata al punto b). La soluzione frazionaria è : X1= 7/3, X2=8/3, z= 23/3. Branching sulla variabile frazionaria di indice MASSIMO (X2):

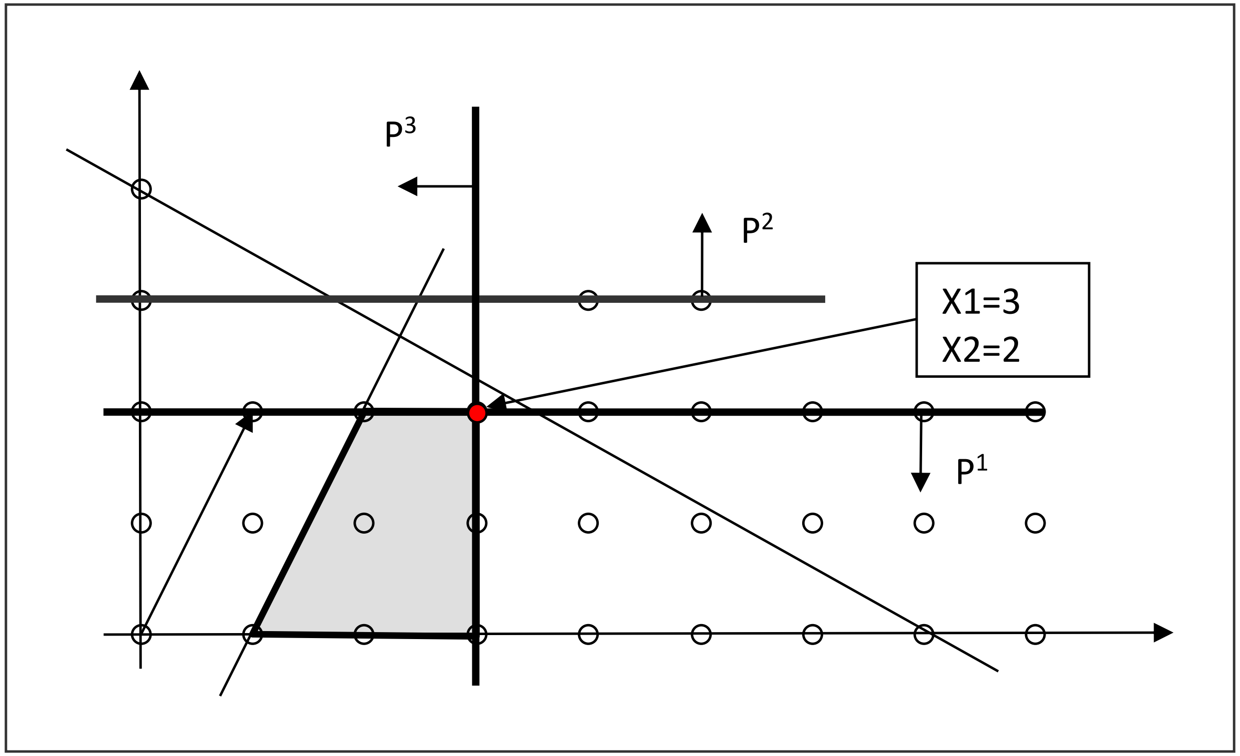
- $P^1$: problema associato al taglio X2 ≤ 2 ➔ x1=7/2, x2= 2, z= 15/2 ➔ 7
- $P^2$: problema associato al taglio X2 ≥ 3 ➔ Problema impossibile

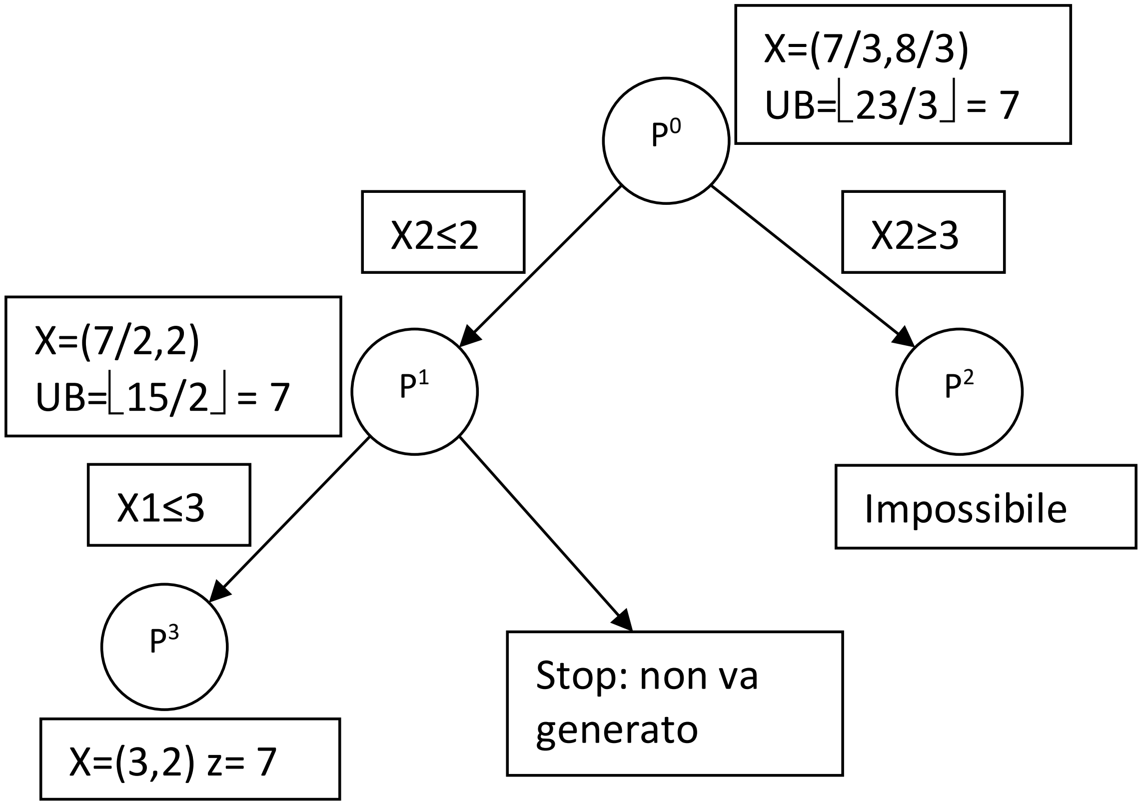



X=(7/3,8/3)
UB=⌊23/3⌋ = 7
P0
X2≤2
X2≥3
X=(7/2,2)
UB=⌊15/2⌋ = 7
P1
P2
Impossibile

Si passa ad esplorare il nodo $P^1$ : la variabile frazionaria è $X1=7/2$

- $P^3$: problema associato al taglio $X1 \leq 3$ ➔Soluzione intera: $X1= 3$, $X2=2$, $z=7$
- $P^4$: il nodo non va generato dato che la soluzione di $P^3$ ha lo stesso valore del bound del nodo padre $P^1$.






Soluzione ottima X1=3, X2=2, z= 7

# Esempio 2

Un’azienda deve determinare il mix ottimale per la produzione oraria di due nuovi fertilizzanti denominati A e B, che richiedono Azoto come prima di base. Produrre una unità del primo composto richiede 2 unità di Azoto, mentre una unità del secondo ne richiede 4. Complessivamente, ogni ora sono disponibili per la produzione 8 unità di Azoto. La lavorazione dei due composti A e B produce inoltre due sostanze, denominate P e Q, importanti per una successiva fase di lavorazione. Una unità del composto A produce 1 unità di P e 3 di Q, mentre una unità di B produce 6 unità di P ed 1 di Q. E’ necessario che le quantità di A e B prodotte siano tali da far ottenere almeno 6 unità di P e 3 di Q per ogni ora.

Il guadagno della vendita dei due composti è uguale a 1000 Euro per unità ed essi possono essere prodotti in qualsiasi quantità, anche frazionaria.

Si richiede:

a) Scrivere il modello di programmazione lineare che permette di determinare il mix che permette di massimizzare il guadagno orario

b) Si risolva il problema con l'algoritmo del simplesso, utilizzando il metodo delle due fasi e la regola di Bland.

c) Si disegni con cura la regione ammissibile utilizzando almeno 4 quadretti per unità e vi si indichino con chiarezza le soluzioni corrispondenti a ciascun tableau (di ENTRAMBE le fasi) esaminato al punto precedente.

d) Supponendo ora di poter variare il guadagno unitario del secondo composto, si effettui l'analisi di sensitività determinando il MASSIMO VALORE di tale guadagno orario compatibile con l'ottimalità della soluzione determinata al punto b). (suggerimento: si determini tale valore per via grafica indicando con chiarezza il valore massimo in un NUOVO disegno della regione ammissibile)

# Modello

X1, X2 = quantità dei composti A e B da produrre

$$
\begin{array}{llrrcl}
\text{Max} & X1 & + X2 & & & \\
\text{s.t.} & 2X1 & + 4X2 & \leq & 8 \\
& X1 & + 6X2 & \geq & 6 \\
& 3X1 & + X2 & \geq & 3 \\
& X1 & X2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Il guadagno è espresso in migliaia di Euro

$$
\begin{array}{llrrrrcl}
\text{Min} & -X1 & -X2 & & & & & \\
\text{s.t.} & 2X1 & + 4X2 & +X3 & & & = & 8 \\
& X1 & + 6X2 & & - X4 & & = & 6 \\
& 3X1 & + X2 & & & - X5 & = & 3 \\
& X1 & X2 & X3 & X4 & X5 & \geq & 0
\end{array}
$$

E' necessario eseguire la Fase 1, aggiungendo almeno due colonne per completare la base

**FASE I**

| | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_1^a$ | $x_2^a$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-\xi$ | -9 | -4 | -7 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| $x_3$ | 8 | 2 | 4 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $x_1^a$ | 6 | 1 | 6 | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 |
| $x_2^a$ | 3 | 3 | 1 | 0 | 0 | -1 | 0 | 1 |

SBA (0,0 …) punto A

| | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_1^a$ | $x_2^a$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-\xi$ | -5 | 0 | $-\frac{17}{3}$ | 0 | 1 | $-\frac{1}{3}$ | 0 | $\frac{4}{3}$ |
| $x_3$ | 6 | 0 | $\frac{10}{3}$ | 1 | 0 | $\frac{2}{3}$ | 0 | $-\frac{2}{3}$ |
| $x_1^a$ | 5 | 0 | $\frac{17}{3}$ | 0 | -1 | $\frac{1}{3}$ | 1 | $-\frac{1}{3}$ |
| $x_1$ | 1 | 1 | $\frac{1}{3}$ | 0 | 0 | $-\frac{1}{3}$ | 0 | $\frac{1}{3}$ |

SBA (1,0 …) punto B

| | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_1^a$ | $x_2^a$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-\xi$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $1$ | $1$ |
| $x_3$ | $\frac{52}{17}$ | $0$ | $0$ | $1$ | $\frac{10}{17}$ | $\frac{8}{17}$ | $-\frac{10}{17}$ | $-\frac{8}{17}$ |
| $x_2$ | $\frac{15}{17}$ | $0$ | $1$ | $0$ | $-\frac{3}{17}$ | $\frac{1}{17}$ | $\frac{3}{17}$ | $-\frac{1}{17}$ |
| $x_1$ | $\frac{12}{17}$ | $1$ | $0$ | $0$ | $\frac{1}{17}$ | $-\frac{6}{17}$ | $-\frac{1}{17}$ | $\frac{6}{17}$ |

SBA (12/17,15/17 …)
punto C

**FASE II**

| | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_1^a$ | $x_2^a$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-z$ | $\frac{27}{17}$ | $0$ | $0$ | $0$ | $-\frac{2}{17}$ | $-\frac{5}{17}$ | $\frac{2}{17}$ | $\frac{5}{17}$ |
| $x_3$ | $\frac{52}{17}$ | $0$ | $0$ | $1$ | $\frac{10}{17}$ | $\frac{8}{17}$ | $-\frac{10}{17}$ | $-\frac{8}{17}$ |
| $x_2$ | $\frac{15}{17}$ | $0$ | $1$ | $0$ | $-\frac{3}{17}$ | $\frac{1}{17}$ | $\frac{3}{17}$ | $-\frac{1}{17}$ |
| $x_1$ | $\frac{12}{17}$ | $1$ | $0$ | $0$ | $\frac{1}{17}$ | $-\frac{6}{17}$ | $-\frac{1}{17}$ | $\frac{6}{17}$ |

| | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_1^a$ | $x_2^a$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-z$ | $\frac{11}{5}$ | 0 | 0 | $\frac{1}{5}$ | 0 | $-\frac{1}{5}$ | 0 | $\frac{1}{5}$ |
| $x_4$ | $\frac{26}{5}$ | 0 | 0 | $\frac{17}{10}$ | 1 | $\frac{4}{5}$ | -1 | $-\frac{4}{5}$ |
| $x_2$ | $\frac{9}{5}$ | 0 | 1 | $\frac{3}{10}$ | 0 | $\frac{1}{5}$ | 0 | $-\frac{1}{5}$ |
| $x_1$ | $\frac{2}{5}$ | 1 | 0 | $-\frac{1}{10}$ | 0 | $-\frac{2}{5}$ | 0 | $\frac{2}{5}$ |

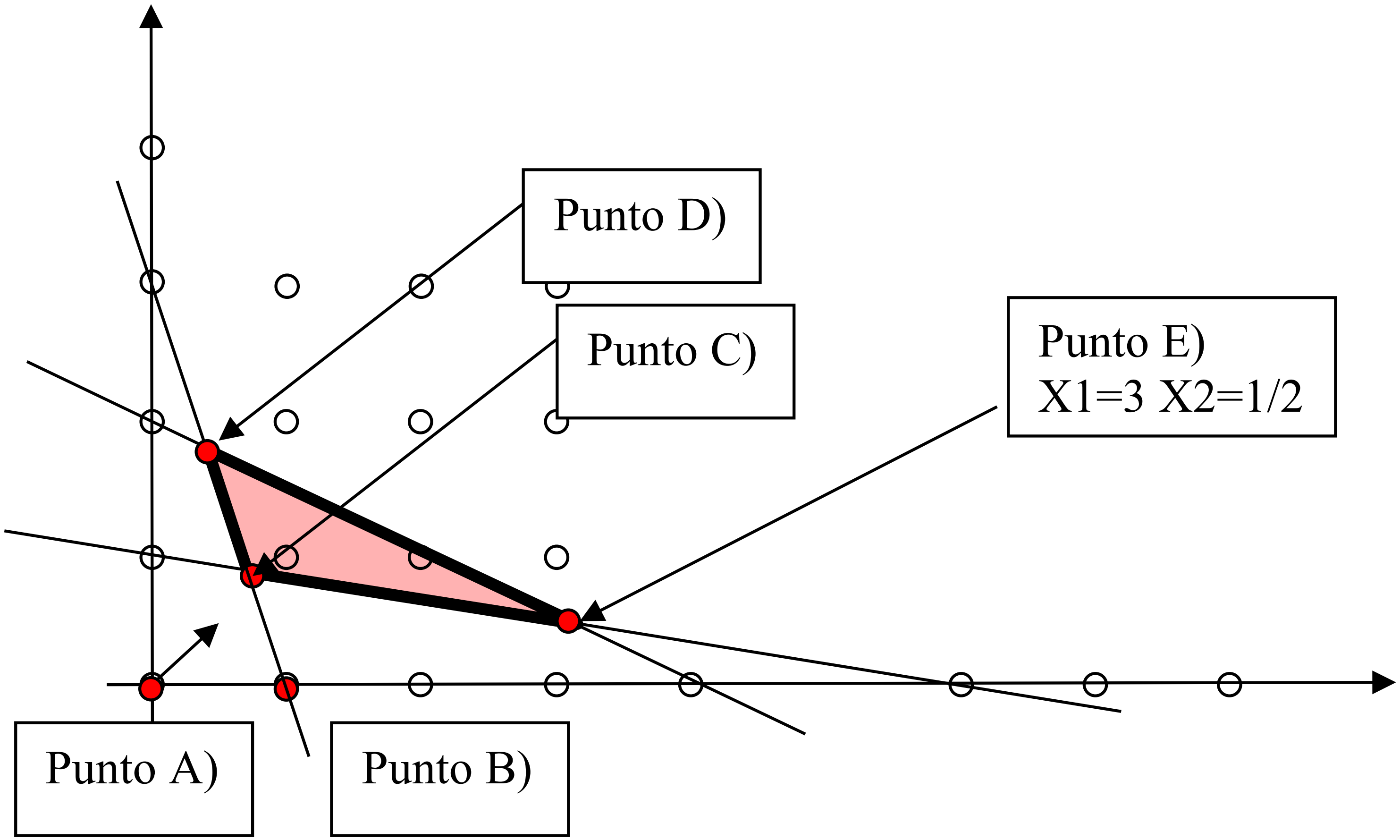
SBA (2/5,9/5 …)
punto D

| | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_1^a$ | $x_2^a$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-z$ | $\frac{7}{2}$ | 0 | 0 | $\frac{5}{8}$ | $\frac{1}{4}$ | 0 | $-\frac{1}{4}$ | 0 |
| $x_5$ | $\frac{13}{2}$ | 0 | 0 | $\frac{17}{8}$ | $\frac{5}{4}$ | 1 | $-\frac{5}{4}$ | -1 |
| $x_2$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | 1 | $-\frac{1}{8}$ | $-\frac{1}{4}$ | 0 | $\frac{1}{4}$ | 0 |
| $x_1$ | 3 | 1 | 0 | $\frac{3}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | $-\frac{1}{2}$ | 0 |

SBA (3,1/2 …) punto E

Soluzione ottima : X1= 3, X2 = 1/2, z = 7/2=3,5

# Regione ammissibile



# Sensitività

- Il massimo aumento del profitto di A compatibile con l'ottimalità si ottiene in corrispondenza del valore del profitto che rende il gradiente perpendicolare al vincolo 2X1 + 4X2 =8 ossia il valore di tale coefficiente che annulla il prodotto scalare dei versori associati al gradiente ed al vincolo: è facile determinare che tale valore è 2.

# Esempio 3

Il gestore di un allevamento desidera determinare il mix ottimale di mangimi da aggiungere al frumento per la dieta giornaliera degli animali. Nell'hard discount di fiducia sono disponibili due tipi di mangimi A e B, un etto dei quali costa, rispettivamente, 50 e 65 Cent. Un etto di mangime A contiene 25 grammi di proteine ed una unità di vitamine, mentre un etto di B contiene 40 grammi di proteine ed una unità di vitamine. Ogni giorno gli animali necessitano complessivamente di 100 grammi di proteine e di tre unità di vitamine.

a) Definire il modello di programmazione lineare per la determinazione del mix ammissibile di minimo costo.

b) Risolvere il problema mediante l'algoritmo delle due fasi utilizzando la regola di Bland.

c) Disegnare con cura la regione ammissibile (6 quadretti per unità) e riportarvi le soluzioni base associate ai diversi tableau.

d) Si imponga ora il vincolo di interezza per le variabili e si determini la soluzione del problema con il metodo Branch and Bound. Si risolvano gli ulteriori rilassamenti continui **per via grafica** e si scelga per il branching la variabile frazionaria di indice **minimo**. Si utilizzi un disegno per ogni nodo padre dell'albero e si riporti l'albero decisionale esplorato.

# Modello

X1, X2 = n. di etti di mangimi A e B acquistati

| | | | |
|---|---|---|---|
| Min | 50X1 | +65X2 | |
| s.t. | 25X1+40X2 | $\geq$ | 100 |
| | X1+X2 | $\geq$ | 3 |
| | X1 X2 | $\geq$ | 0 |

Forma standard

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Min | 50X1 | +65X2 | | | | |
| t. | 25X1 | +40X2 | -X3 | | = | 100 |
| | X1 | +X2 | | -X4 | = | 3 |
| | X1 | X2 | X3 | X4 | $\geq$ | 0 |

# Fase I

E' necessaria la Fase 1, aggiungendo 2 variabili artificiali.

I)

| | | X1 | X2 | X3 | X4 | Y1 | Y2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -z | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| Y1 | 100 | 25 | 40 | -1 | 0 | 1 | 0 |
| Y2 | 3 | 1 | 2 | 0 | -1 | 0 | 1 |

II=I)

| | | X1 | X2 | X3 | X4 | Y1 | Y2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -z | -103 | -26 | -41 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| Y1 | 100 | 25 | 40 | -1 | 0 | 1 | 0 |
| Y2 | 3 | $\boxed{1}$ | 2 | 0 | -1 | 0 | 1 |

III)

| | | X1 | X2 | X3 | X4 | Y1 | Y2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -z | -25 | 0 | -15 | 1 | -25 | 0 | 26 |
| Y1 | 25 | 0 | $\boxed{15}$ | -1 | 25 | 1 | -25 |
| X1 | 3 | 1 | 1 | 0 | -1 | 0 | 1 |

IV)

| | | X1 | X2 | X3 | X4 | Y1 | Y2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -z | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| X2 | 5/3 | 0 | 1 | -1/15 | 5/3 | 1/15 | -5/3 |
| X1 | 4/3 | 1 | 0 | 1/15 | -8/3 | -1/15 | 8/3 |

# Fase 2

Rimuoviamo le variabili artificiali e ripristiniamo la funzione obiettivo originaria

| | | X1 | X2 | X3 | X4 |
|---|---|---|---|---|---|
| -z | 0 | 50 | 65 | 0 | 0 |
| X2 | 5/3 | 0 | 1 | -1/15 | 5/3 |
| X1 | 4/3 | 1 | 0 | 1/15 | -8/3 |

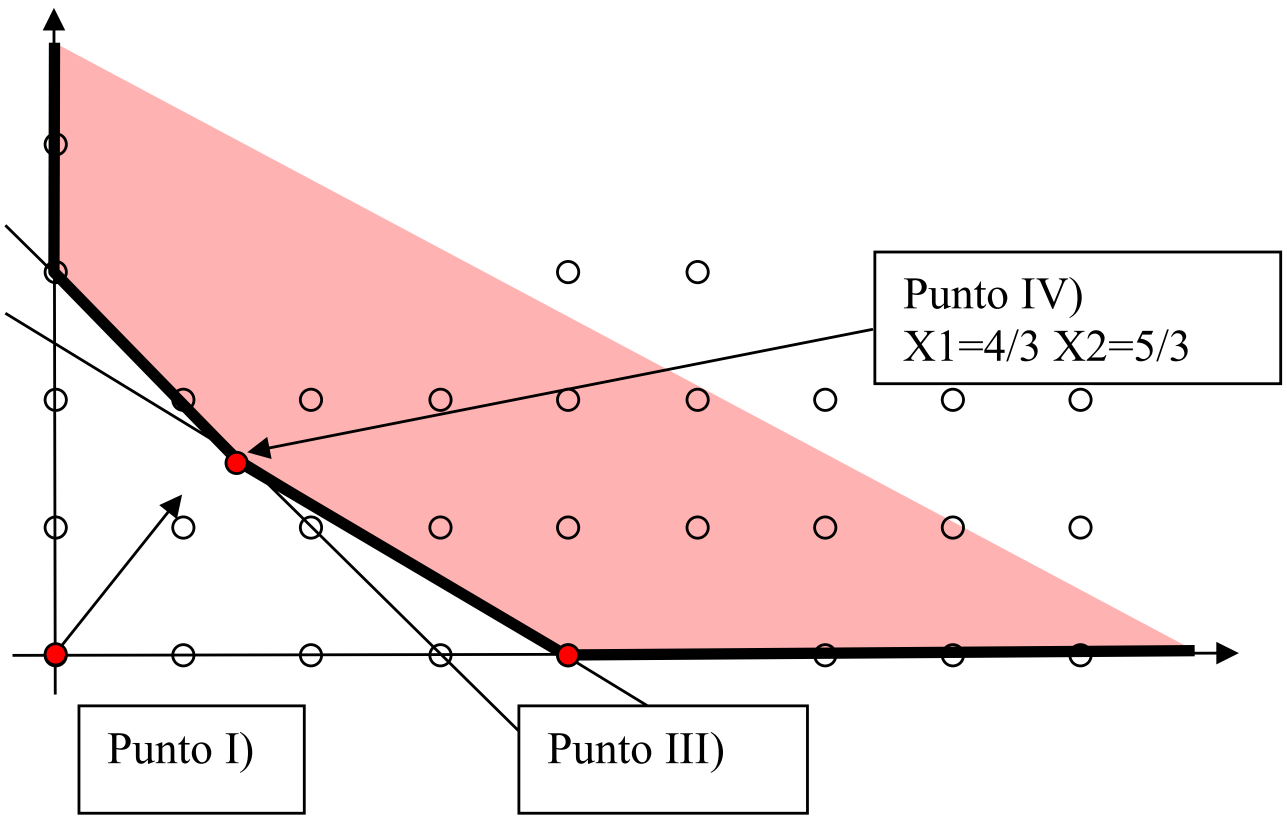
Poniamo il tableau in forma canonica rispetto alla base ottima di fase I (X1,X2)

| | | X1 | X2 | X3 | X4 |
|---|---|---|---|---|---|
| -z | -175 | 0 | 0 | 1 | 25 |
| X2 | 5/3 | 0 | 1 | -1/15 | 5/3 |
| X1 | 4/3 | 1 | 0 | 1/15 | -8/3 |

Soluzione ottima : X1=4/3, X2 = 5/3 , z = 175 centesimi

# Regione Ammissibile

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Min | 50X1 | +65X2 | | |
| s.t. | 25X1 | +40X2 | ≥ | 100 |
| | X1 | +X2 | ≥ | 3 |
| | X1 | X2 | ≥ | 0 |

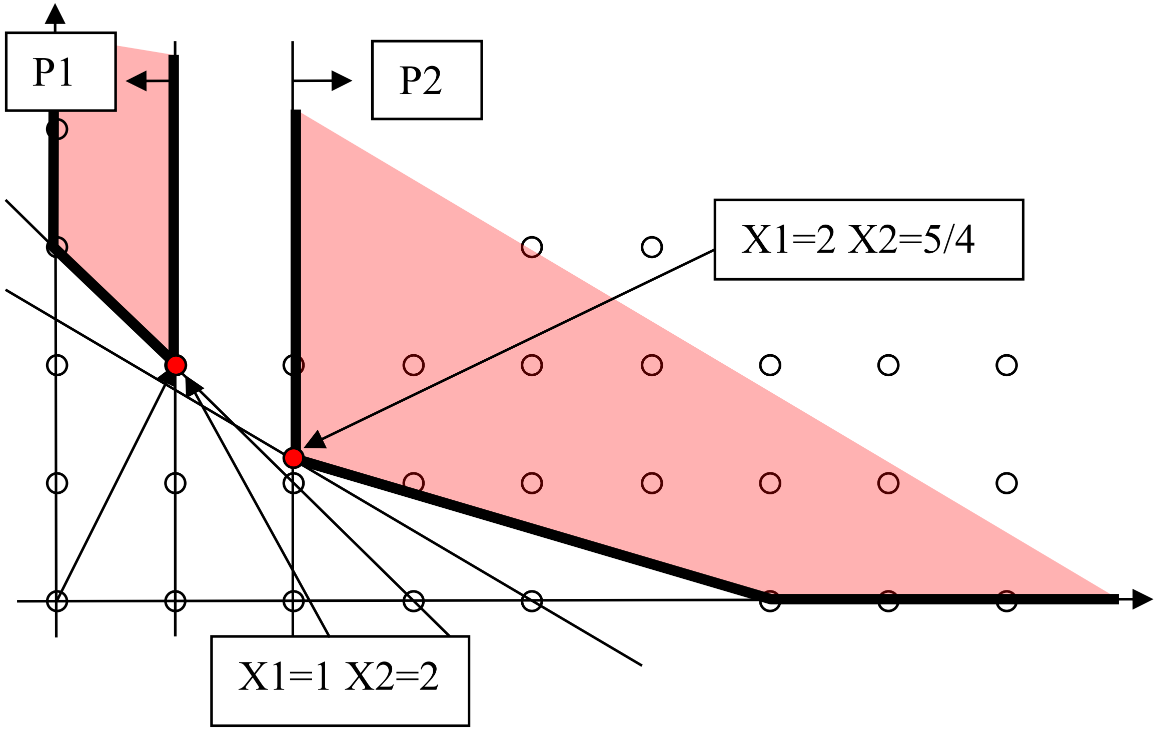


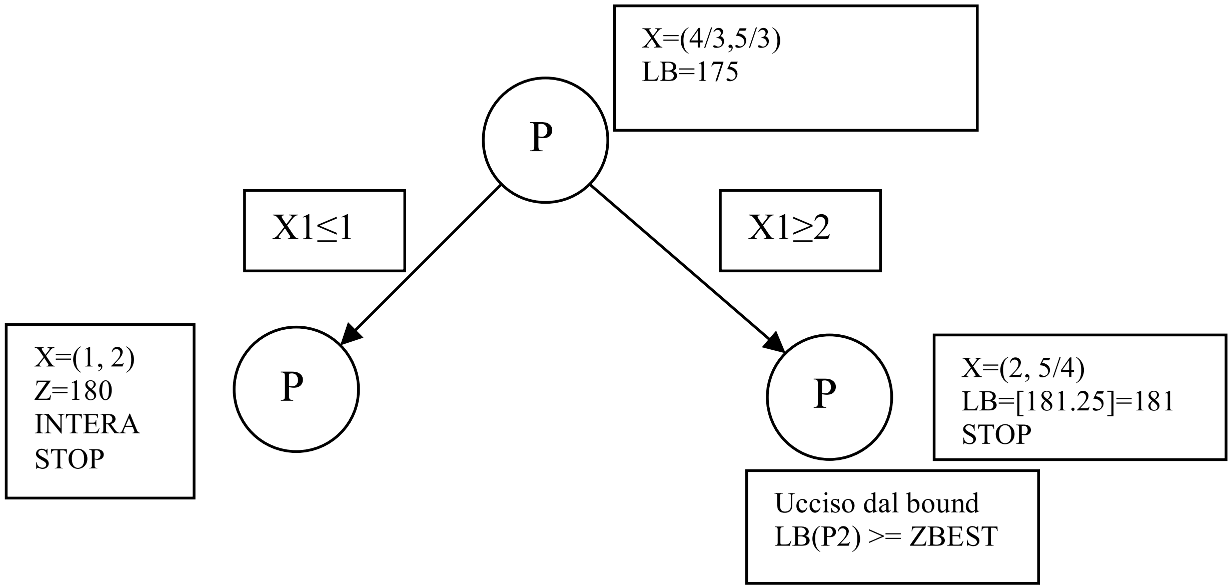
# Branch and Bound

Branching sulla variabile frazionaria di indice MINIMO (X1=4/3):

P1: problema associato al taglio X1 ≤ 1
P2: problema associato al taglio X1 ≥ 2

Disegno della regione ammissibile






La soluzione ottima trovata è quindi X1=1, X2 = 2 ed il costo totale è pari a 180 cent

# Esempio 4

Un’azienda produce due tipi di panettone, Normale (N) e Super (S). Il panettone N rende 1 Euro al pezzo mentre quello S rende 3 Euro. Il quantitativo di lievito da utilizzare per un panettone N è di 3 grammi mentre per quelli di tipo S è di 6 grammi. Per ogni infornata sono disponibili 21 grammi di lievito. Ogni panettone S **consuma** 5 grammi di aromi mentre ogni panettone di tipo N **ne produce** 1 grammo. Per ogni informata non si possono usare più di 5 grammi di aromi.

- Si richiede la determinazione del mix ottimale di panettoni da inserire in una informata.

# Esempio 4

Si richiede la determinazione del mix ottimale di panettoni da inserire in una informata. In particolare si richiede:

a) Definire il modello di ottimizzazione lineare intera per la determinazione della soluzione, utilizzando coefficienti interi e piccoli in valore assoluto.

b) Supponendo inizialmente ammissibili soluzioni frazionarie, determinare la produzione ottima mediante l'impiego dell'algoritmo del simplesso, utilizzando il metodo delle due fasi (se necessario ed aggiungendo sole le variabili artificiali indispensabili) e la regola di Bland.

c) Si disegni con cura la regione ammissibile (3 quadretti per unità) e si riporti su di essa le soluzioni base esaminate ad ogni iterazione della risoluzione.

d) Si supponga ora necessario determinare una soluzione intera. Risolvere il problema mediante il metodo branch and bound. A tal fine:
   a. Si risolvano gli eventuali rilassamenti continui necessari PER VIA GRAFICA, utilizzando un disegno diverso per ogni problema ed indicandovi con chiarezza la regione ammissibile del sottoproblema (tagli generati dal branch and bound) e la relativa soluzione ottima.
   b. Per il Branching si selezioni la variabile frazionaria di indice MINIMO e si sviluppi il nodo relativo al problema più promettente.
   c. Si disegni l'albero decisionale sviluppato indicando per ciascun nodo il valore del bound e la soluzione ottenuta.
   d. Si indichi la soluzione ottima complessiva trovata.

# Modello

| | |
|---|---|
| X1 | panettoni N in una infornata |
| X2 | panettoni S in una informata |

Z in Euro

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Z = Max | 1 X1 | + 3 X2 | | |
| s.t. | | | | |
| | 3X1 | +6X2 | $\leq$ | 21 |
| | -X1 | +5X2 | $\leq$ | 5 |
| | X1 | X2 | $\geq$ | 0 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Z = Min | -1 X1 | - 3 X2 | | | | |
| s.t. | | | | | | |
| | 3X1 | +6X2 | +X3 | | = | 21 |
| | -X1 | +5X2 | | +X4 | = | 5 |
| | X1 | X2 | X3 | X4 | $\geq$ | 0 |

Essendo presente una base iniziale costituita dalle variabili slack non è necessaria la Fase 1.

| | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-z$ | 0 | -1 | -3 | 0 | 0 |
| $x_3$ | 21 | 3 | 6 | 1 | 0 |
| $x_4$ | 5 | -1 | 5 | 0 | 1 |

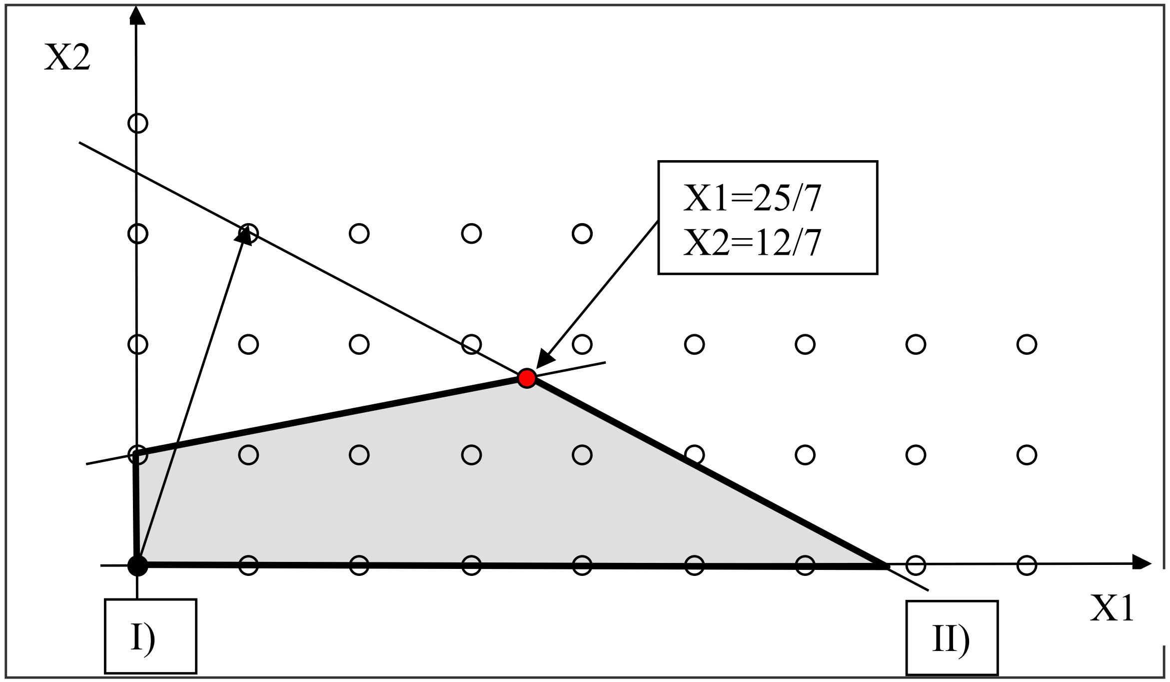
| | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-z$ | 7 | 0 | -1 | $\frac{1}{3}$ | 0 |
| $x_1$ | 7 | 1 | 2 | $\frac{1}{3}$ | 0 |
| $x_4$ | 12 | 0 | 7 | $\frac{1}{3}$ | 1 |

| | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-z$ | $\frac{61}{7}$ | 0 | 0 | $\frac{8}{21}$ | $\frac{1}{7}$ |
| $x_1$ | $\frac{25}{7}$ | 1 | 0 | $\frac{5}{21}$ | $-\frac{2}{7}$ |
| $x_2$ | $\frac{12}{7}$ | 0 | 1 | $\frac{1}{21}$ | $\frac{1}{7}$ |

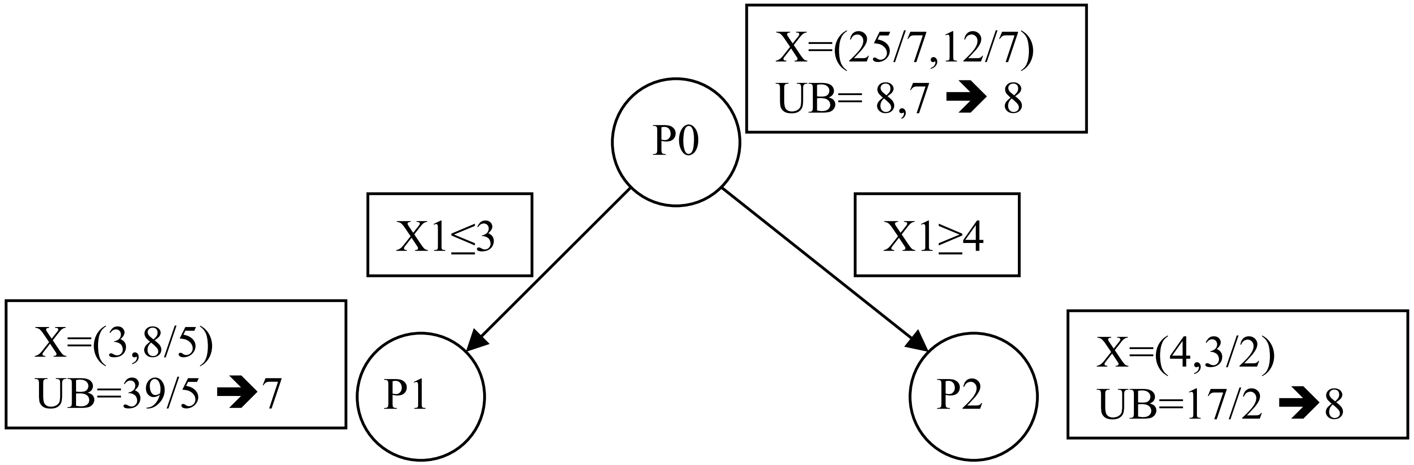
Soluzione ottima X1=25/7, X2= 12/7, z= 61/7 = 8,71…

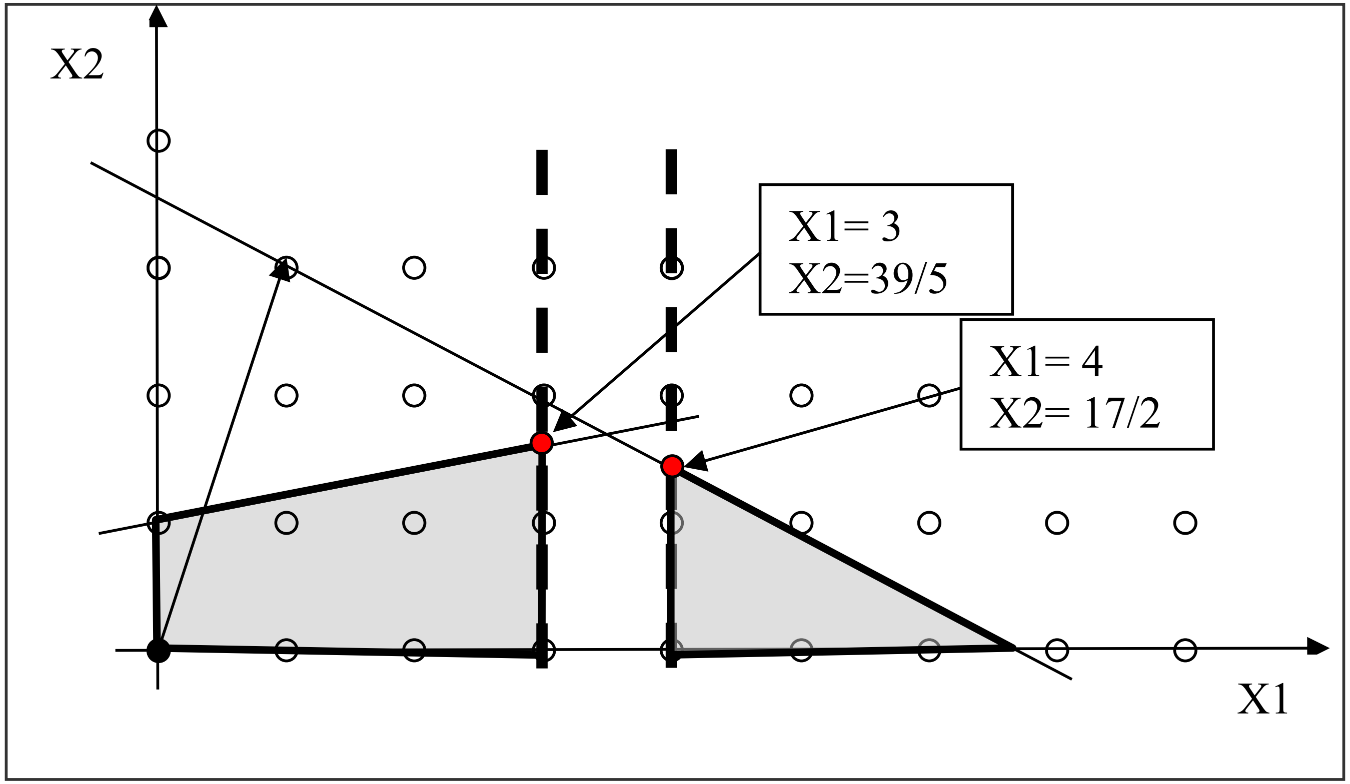
# Regione ammissibile

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Z = Max | 1 X1 | + 3 X2 | | |
| s.t. | | | | |
| | 3X1 | +6X2 | ≤ | 21 |
| | -X1 | +5X2 | ≤ | 5 |
| | X1 | X2 | ≥ | 0 |

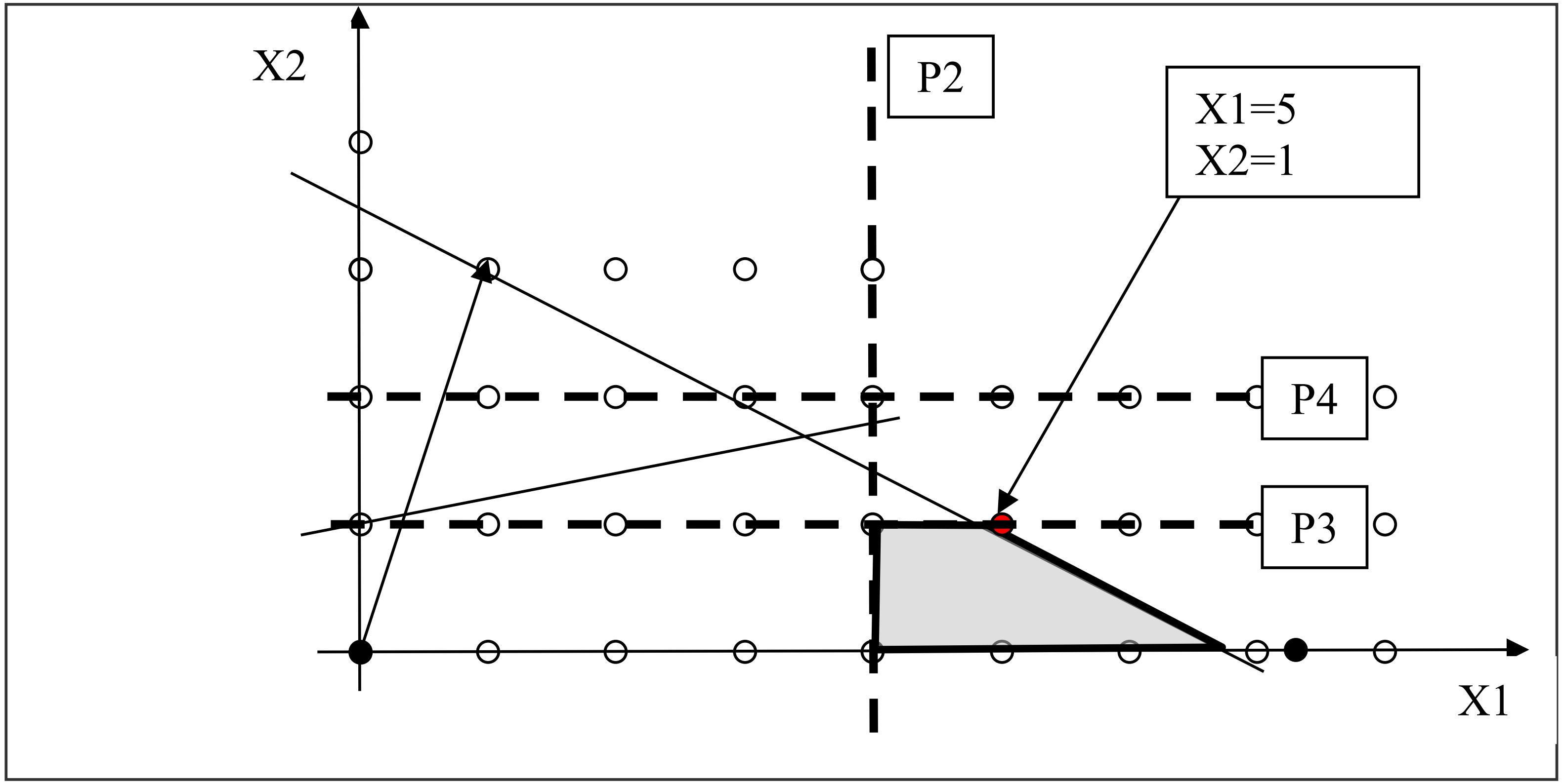


Il problema richiede di effettuare il branch sulla variabile di indice minimo pertanto si sceglie X1=25/3




X2
X1= 3
X2=39/5
X1= 4
X2= 17/2
X1

Proseguo lo sviluppo del nodo P2 cui è associato il bound migliore. La variabile frazionaria è X2=4/3.



La soluzione ottima è pertanto X1=5, X2=1 e vale z= 8. Si noti che il nodo P4 non va sviluppato in quanto il bound del nodo padre P2 è uguale al valore della soluzione intera ottenuta al nodo P3. Inoltre il nodo P1 viene eliminato dal bound.