MDP

Basi del calcolo combinatorio

• PERMUTAZIONI → sono i raggruppamenti realizzati quando il numero di oggetti è uguale al numero di posti e conta l'ordine con cui si dispongono. Le permutazioni possono essere senza ripetizioni di oggetti o con ripetizione di oggetti.

• DISPOSIZIONI → sono i raggruppamenti realizzati quando il numero di oggetti è diverso dal numero di posti e conta l'ordine con cui si dispongono. Le disposizioni possono essere senza ripetizioni di oggetti o con ripetizione di oggetti.

• COMBINAZIONI → sono i raggruppamenti realizzati quando il numero di oggetti è diverso dal numero di posti e non conta l'ordine con cui si dispongono. Le combinazioni possono essere senza ripetizioni di oggetti o con ripetizione di oggetti.

n = *numero di oggetti* k = *numero di posti*	senza ripetizione di oggetti	con ripetizione r di oggetti
Permutazioni • $n = k$ • *conta l'ordine*	$P_n = n!$	$P^r_n = \dfrac{n!}{r_1!\, r_2! \dots r_k!}$
Disposizioni • $n \neq k$ • *conta l'ordine*	$D_{n,k} = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ $\quad n > k$	$D^r_{n,k} = n^k$
Combinazioni • $n \neq k$ • *non conta l'ordine*	$C_{n,k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$ $\quad n > k$	$C^r_{n,k} = \dfrac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}$

Esempi molto utili [Calcolo combinatorio]

Sti(e)rling (seconda specie come le donne) + (oh) Bell

$$S_{n,k} = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \frac{(k-i)^n}{i!(k-i)!}. \qquad B_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} B_{n-k},$$

Statistica descrittiva

• Popolazione, campione e caratteri → Popolazione = insieme da studiare.

Campione = sottoinsieme della popolazione oggetto effettivo dello studio.

Carattere = aspetto che si vuole studiare (funzione il cui dominio è la popolazione). I caratteri possono essere qualitativi e quantitativi.

• Modalità e frequenza → Modalità = valori che può assumere il carattere.

Frequenza (di una modalità) = numero di volte che si presenta la modalità del campione.

• Moda → Modalità con frequenza massima.

• Media campionaria → Somma degli elementi divisi per il numero di elementi (media classica che conosciamo).

• Cambio di carattere → x è un carattere e y è un carattere legato ad x : y = ax+b, Y = aX+b (X, Y maiuscoli sono le rispettive medie campionarie)

• Media ponderata → Si dà importanza diversa ai vari elementi di un campione, si moltiplica ogni campione per il suo peso e si sommano tutti per poi dividerli per la somma dei pesi

$$\bar{x}_w = \frac{w_1 x_1 + \cdots w_n x_n}{w_1 + \cdots w_n}.$$

• Media geometrica → Radice ennesima del prodotto dei campioni (o elevato alla 1/n)

$$(x_1 \cdots x_n)^{1/n} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$$

• Media armonica → Velocità media (rapporto di altre grandezze)

$$\left(\frac{x_1^{-1}+\cdots+x_n^{-1}}{n}\right)^{-1}.$$

• Indici di dispersione → Gli indici di dispersione servono ad esprimere la compattezza o la rarefazione dei dati. (Ad esempio, i campioni −1, 0, 1 e −100, 50, 50 hanno entrambi media campionaria 0, ma vogliamo trovare un modo per esprimere il fatto che il primo campione è molto più compatto rispetto al secondo).

• Campo di variazione o range (indice di dispersione semplice) → Differenza tra il massimo e il minimo campione.

• Varianza → media dei quadrati delle distanze dei valori assunti rispetto alla loro media.

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2.$$

ancora meglio questa sotto

$$\sigma_x^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2.$$

cambio di carattere con la varianza

$$\sigma_y^2 = a^2\sigma_x^2.$$

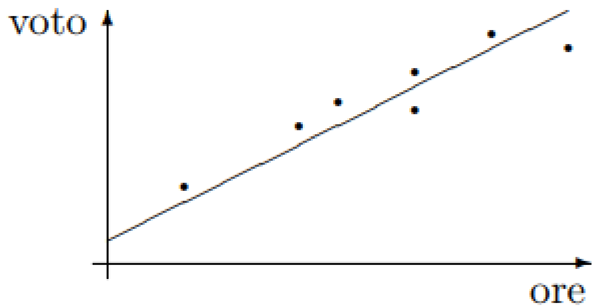
• La retta ai minimi quadrati → La retta ottimale (y = ax+b) passante per i campioni. Il coefficiente angolare "a" è dato dalla formula:

$$a = \frac{\sigma_{x,y}}{\sigma_x^2}.$$

(la covarianza che sarebbe il numeratore è sotto)

mentre la costante "b" è data da

$$b = -a\bar{x} + \bar{y}.$$



• Covarianza → Il segno della covarianza ci fornisce il segno del coefficiente angolare della retta ai minimi quadrati.

$$\sigma_{x,y} = \frac{1}{n}\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}).$$

o meglio (è la media del prodotto meno il prodotto delle medie)

$$\sigma_{x,y} = \overline{xy} - \bar{x}\bar{y}.$$

• Media della somma dei quadrati degli errori →

$$S(a,b) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b)^2.$$

• Indice di correlazione →

$$\rho_{x,y} = \frac{\sigma_{x,y}}{\sigma_x \sigma_y}$$

Probabilità

• Uniforme → Esempio, lancio di un dado. (la seconda formula si usa quando vuoi calcolare la probabilità senza sapere alcuna relazione)

$$\mathbb{P}(E) = \frac{\text{numero di casi favorevoli}}{\text{numero di casi possibili}}$$

$$P(R) = P(R \cap A_1) + P(R \cap A_2) = P(R|A_1)P(A_1) + P(R|A_2)P(A_2)$$

• Condizionale → Probabilità che accada E sapendo F.

$$\mathbb{P}(E|F) = \frac{\mathbb{P}(E \cap F)}{\mathbb{P}(F)} \qquad \text{con } \mathbb{P}(F) \neq 0$$

• Formula Bayes → Ci serve per calcolare A dato B se conosciamo B dato A

$$\mathbb{P}(E|F) = \frac{\mathbb{P}(F|E) \cdot \mathbb{P}(E)}{\mathbb{P}(F)} \quad \text{con } \mathbb{P}(E), \mathbb{P}(F) \neq 0$$

• Eventi indipendenti →

$$E, F \text{ indipendenti} \iff \mathbb{P}(E \cap F) = \mathbb{P}(E) \cdot \mathbb{P}(F)$$

Variabili aleatorie

- Variabile aleatoria → funzione che restituisce un evento per ogni valore reale passato

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq a\}$$

- Funzione di ripartizione →

$$F_X(t) = P(\{\omega : X(\omega) \leq t\}).$$

$$\begin{aligned} F_X : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto P(X \leq t). \end{aligned}$$

- Variabile aleatoria discreta → Una variabile aleatoria X si dice discreta se i valori che assume sono finiti oppure numerabili.

- Densità → Data una variabile aleatoria (discreta) X la funzione pX : R → R data da pX(h) = P(X = h) si dice densità discreta (concreta) della variabile aleatoria X. (Per esempio la densità del lancio di un dado a sei facce sono i 6 possibili risultati).

- Funzione densità astratta → Una funzione p : R → R si dice densità discreta (astratta) se non dipende da una variabile aleatoria.

- Densità uniforme → Se hanno tutti la stessa probabilità. (Esempio lancio del dado = 1/n = 1/6).

$$p_X(h) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{se } h \in \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

• Funzione caratteristica →

$$\chi_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{se } \omega \in A \\ 0 & \text{se } \omega \notin A \end{cases}$$

• Variabile di Bernoulli → Una variabile aleatoria X che assume solo i valori 0 e 1 si dice variabile di Bernoulli.

$$\chi_A \sim B(1, P(A)).$$

• Variabile binomiale → Generalizzazione di una variabile di Bernoulli. (n numero di casi totale, k numero di successi, n-k numero di insuccessi, 1-p complementare di p)

$$p_X(k) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & \text{se } k = 0, 1, 2, \dots, n \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$$X \sim B(n, p)$$

• Variabile ipergeometrica → Variabile aleatoria che serve per regolare gli schemi successo-insuccesso senza rimpiazzo.

$$p_X(k) = \begin{cases} \frac{\binom{b}{k} \cdot \binom{r}{n-k}}{\binom{b+r}{n}} & \text{se } k = \max(0, n-r), \dots, \min(n, b) \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$$X \sim H(n; b, r)$$

<u>Proprietà serie geometrica.</u> $f(x) = \frac{x}{1-x}$ (se $0 < x < 1$).

- Densità geometrica →

$$p_T(k) = \begin{cases} p(1-p)^{k-1} & \text{se } k = 1, 2, 3, \dots \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$$p(k) = \begin{cases} p(1-p)^{k} & \text{se } k = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

- Mancanza di memoria →

$$P(X \geq k+m | X \geq k) = P(X \geq m).$$

- Densità (astratta) di Poisson (uomo veleno) → Quando il valore binomiale ha calcoli esagerati. (B ~ (n,p) con n grandissimo e p micro).

$$p(k) = \begin{cases} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} & \text{se } k = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases},$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1.$$

$$\begin{aligned} P(X > 5) &= 1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2) - P(X=3) - P(X=4) \\ &= 1 - e^{-5}\left(1 + 5 + \frac{25}{2} + \frac{125}{6} + \frac{625}{24} + \frac{3125}{120}\right) = 0,384. \end{aligned}$$

- Densità marginale → Densità della singola variabile aleatoria

- Densità congiunta → Densità dell'intersezione tra variabili aleatorie (X = primo dado, Y = secondo dado, le densità marginali sono le rispettive densità singole, la densità congiunta è la densità di X e Y totale).

- Variabili aleatorie indipendenti → P(X,Y) = P(X)*P(Y).

• Media o valore atteso o speranza matematica → Sia X una variabile aleatoria, allora:

$$E[X] = \sum_{h \in \mathbb{R}} h\, p(h).$$

ESEMPIO 8.3. Si consideri una variabile X di densità

$$p_X(h) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{se } h = 1, -1, 2 \\ \frac{1}{8} & \text{se } h = -2, 3 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Vogliamo determinare la media di X e di X^2. La media di X è data da

$$E[X] = \frac{1}{4}(1 - 1 + 2) + \frac{1}{8}(-2 + 3) = \frac{5}{8}.$$

Per determinare $E[X^2]$ calcoliamo intanto la densità

$$p_{X^2}(h) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } h = 1 \\ \frac{3}{8} & \text{se } h = 4 \\ \frac{1}{8} & \text{se } h = 9 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

dove abbiamo utilizzato i risultati sulla densità di una variabile trasformata, da cui possiamo ottenere

$$E[X^2] = \sum_{h \in \mathbb{R}} h \cdot p_{X^2}(h) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{3}{8} + 9\frac{1}{8} = \frac{25}{8}.$$

• Media (della somma) → La media della somma di più variabili aleatorie è la somma delle medie delle stesse.

$$E[X] = E[X_1] + E[X_2] + E[X_3] + E[X_4] + E[X_5] + E[X_6] =$$

• Media (del prodotto) → La media del prodotto di due variabili aleatorie indipendenti è il prodotto delle medie delle stesse.

$$E[XY] = E[X]E[Y].$$

• Vari tipi di medie → Media di Bernoulli, Poisson, Ipergeometrica e Geometrica modificata (in ordine alto - basso).

$$X \sim B(n,p). \rightarrow E[X] = np.$$

$$X \sim P(\lambda) \text{ allora } E[X] = \lambda.$$

$$H(n,b,r) \rightarrow n\frac{b}{b+r}.$$

$$Se\ X \sim \tilde{G}(p)\ allora\ E[X] = \frac{1}{p}.$$

• Varianza (variabili aleatorie) → Media dei quadrati meno quadrato delle medie.

$$\mathrm{Var}(X) = E[X^2] - E[X]^2.$$

• Covarianza (variabili aleatorie) → Media del prodotto meno prodotto delle medie.

$$\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = E[X_1X_2] - E[X_1]E[X_2]$$

• Vari tipi di varianze →

$$X \sim B(1,p) \rightarrow \mathrm{Var}(X) = p - p^2 = p(1-p).$$

$$\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\mathrm{Cov}(X,Y),$$

$$X \sim B(n,p), \rightarrow \mathrm{Var}(X) = np(1-p).$$

$$X \sim P(\lambda) \rightarrow n\frac{\lambda}{n}(1-\frac{\lambda}{n}) \rightarrow \mathrm{Var}(X) = \lambda.$$

• Coefficiente di correlazione (variabili aleatorie) →

$$\rho_{X,Y} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y},$$

• Disuguaglianza di Chebyshev →

$$P(|X - E[X]| > \varepsilon) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{\varepsilon^2}.$$

• Legge dei grandi numeri → Se lanciamo una moneta n volte e otteniamo k volte testa è difficile ottenere k/n = 1/2 . Però l'intuizione ci suggerisce che se n è molto grande (e la moneta non è truccata) il rapporto k/n non debba discostarsi troppo da 1/2.

TEOREMA 8.16 (Legge dei grandi numeri). *Sia X_n, $n \in \mathbb{N}$ una successione di variabili aleatorie discrete indipendenti ed aventi tutte la stessa densità (con media μ e varianza σ^2). Allora posto*

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n),$$

la successione $\bar{X}_n$ converge in probabilità alla variabile aleatoria costante μ.

Variabili aleatorie continue

• Variabile aleatoria continua → Una variabile aleatoria si dice continua se la funzione di ripartizione è continua per ogni valore.

Se una variabile aleatoria X è continua in un intervallo aperto I, allora

$$P(X = t) = 0$$

per ogni $t \in I$.

DEFINIZIONE. Sia X una variabile aleatoria continua su $\mathbb{R}$. Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrabile si dice *densità continua* per X se

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(s)\, ds.$$

• Densità continua astratta → Se rispetta le seguenti proprietà. (l'integrale è l'area geometrica).

$$(1)\ f(s) \geq 0 \text{ per ogni } s \in \mathbb{R}$$

$$(2)\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\, ds = 1.$$

• Funzione di ripartizione astratta →

Osserviamo inoltre che la funzione di ripartizione F di una variabile continua X soddisfa le seguenti proprietà:

(1) F è continua su $\mathbb{R}$;
(2) F è debolmente crescente;
(3) $\lim_{t \to -\infty} F(t) = 0$ e $\lim_{t \to +\infty} F(t) = 1$.

Una funzione che soddisfa queste condizione viene anche detta una funzione di ripartizione astratta.

• Media di una variabile continua di densità f(s) →

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} s f(s)\, ds.$$

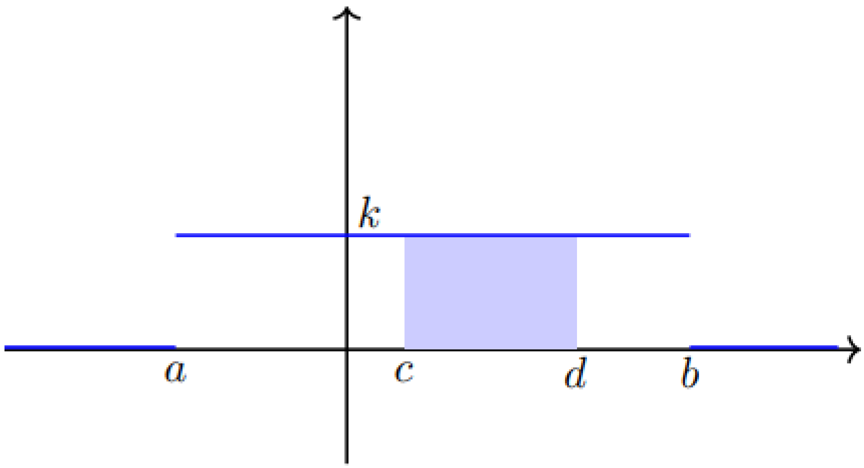
• Varianza → Rimane uguale alle variabili aleatorie non continue.

• Densità uniforme → Attribuisce la stessa probabilità a tutti i punti appartenenti ad un dato intervallo [a, b].

$$f(s) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & s \in [a, b] \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

- Probabilità che un certo evento accada in un sottoinsieme →

$$P(X \in [c,d]) = \int_c^d k\, ds = k(d-c)$$



- Media di una variabile uniforme in un intervallo [a,b] →

$$E[X] = \int_a^b s\frac{1}{b-a}ds = \frac{1}{b-a}\left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right) = \frac{a+b}{2}.$$

$$E[X^2] = \int_a^b s^2\frac{1}{b-a}ds = \frac{1}{b-a}\frac{b^3-a^3}{3} = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

- Varianza di una variabile uniforme in un intervallo [a,b] →

$$\mathrm{Var}(X) = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

• Cenni pre densità esponenziale →

primitiva della funzione e^{-at} è data da $-\frac{1}{a}e^{-at}$

$$\int_0^{+\infty} e^{-at}dt = \frac{1}{a}.$$

• Densità esponenziale →

$$f(s) = \begin{cases} ae^{-as} & se\ s \geq 0 \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

$$X \sim \mathrm{Exp}(a).$$

Lo stesso calcolo mostra che la funzione di ripartizione di una variabile $X \sim \mathrm{Exp}(a)$ è data da

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 0 \\ 1 - e^{-at} & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$$

• Media di una variabile esponenziale →

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_0^{\infty} sae^{-as}ds \\ &= \Big[-se^{-as} \Big]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-as}ds \\ &= \frac{1}{a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \int_0^{\infty} s^2ae^{-as}ds \\ &= \Big[-s^2e^{-as} \Big]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 2se^{-as}ds \\ &= 0 + \frac{2}{a}\int_0^{\infty} sae^{-as}ds \\ &= \frac{2}{a}\frac{1}{a} \\ &= \frac{2}{a^2} \end{aligned}$$

• Varianza di una variabile esponenziale →

$$\mathrm{Var}(X) = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{2}{a^2} - \frac{1}{a^2} = \frac{1}{a^2}.$$

• Densità e variabili normali →

Sia $\zeta \sim N(\mu, \sigma^2)$ *una variabile normale. Allora*

$$E[\zeta] = \mu,$$

$$\mathrm{Var}[\zeta] = \sigma^2.$$

$$\zeta_0 = \frac{\zeta - \mu}{\sigma}$$

Esempio, qual'è la probabilità che un singolo pezzo di scarto sia lungo almeno 35 cm (il pezzo può essere lungo tra 10 e 50 cm).

$X \sim U([10,50])$

$P(X \geq 35) = 1 - P(X < 35) = 1 - \left(\frac{35-10}{40}\right) = 0{,}375$

- Teorema del limite centrale →

Teorema 9.10 (del limite centrale). *Sia $X_1, X_2, \dots$ una seccessione di variabili aleatorie indipendenti aventi tutte la stessa densità (discreta o continua) di media μ e varianza σ^2. Allora per n abbastanza grande si ha con buona approssimazione*

$$\begin{aligned} E[S_n] &= n\mu \\ \mathrm{Var}(S_n) &= n\sigma^2 \\ E[\bar{X}_n] &= \mu \\ \mathrm{Var}(\bar{X}_n) &= \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned}$$

$$S_n \sim N(n\mu, n\sigma^2)$$

$$\bar{X}_n \sim N(\mu, \sigma^2/n).$$

Esempio:

$$P(170 < \zeta < 180) = P(-0,33 < \zeta_0 < 0.78) = \Phi(0,78) - \Phi(-0,33) = \Phi(0,78) - 1 + \Phi(0,33)$$
$$= 0,78230 - 1 + 0.62930 = 0,4116$$

Φ(0,78) si toglie la cifra 0,0x e si cerca 0,x quindi si andrà nella colonna di sinistra a cercare la riga con valore 0.7 prendendo il valore con scarto 0.08 (colonna), infatti sarà 0.78230.

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

	N positivo	N negativo
>	1-Φ(x)	Φ(x)
<	Φ(x)	1-Φ(x)

- Come calcolare min e max di due variabili →

MIN: bisogna fare 1 - Fz(funzione di ripartizione) = 1- ((1 - Fx)(1 - Fy))

MAX: bisogna fare Fx * Fy (una funzione di ripartizione per l'altra)