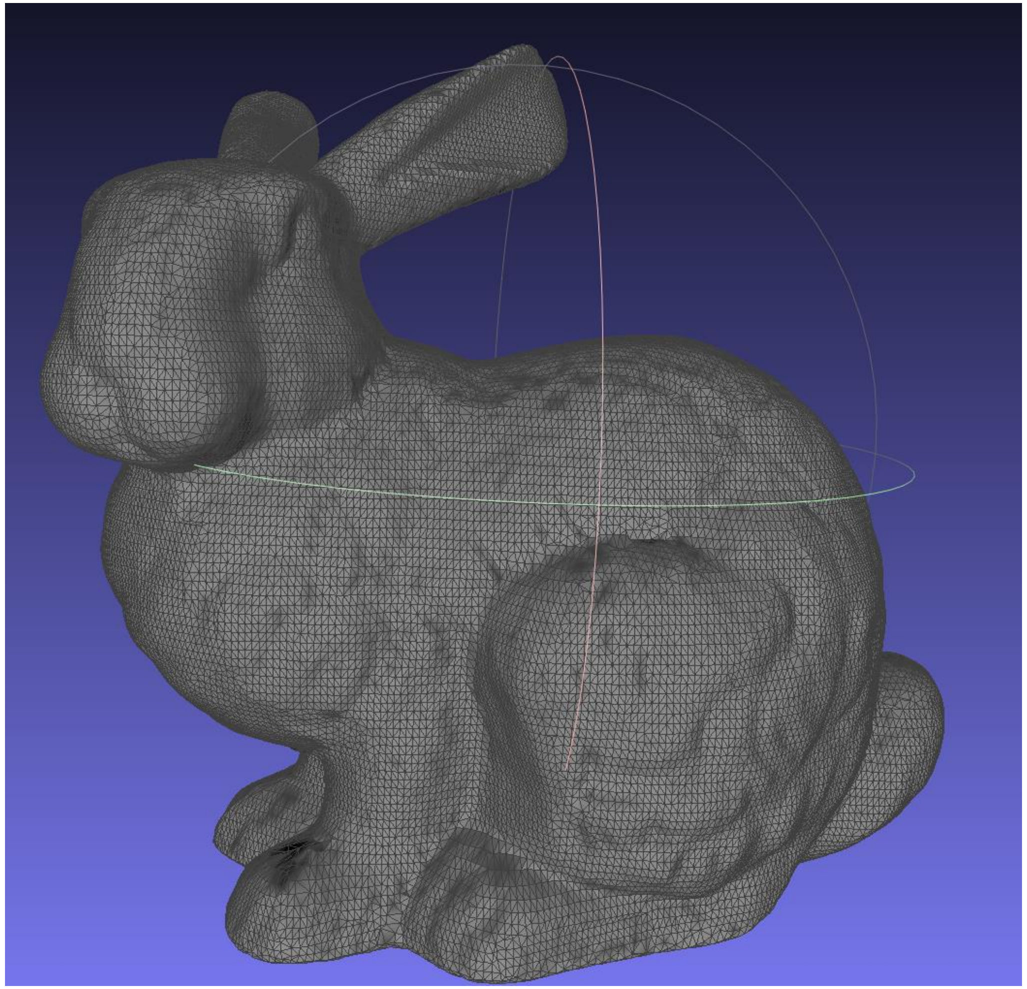
Geometria per la Computer Graphics



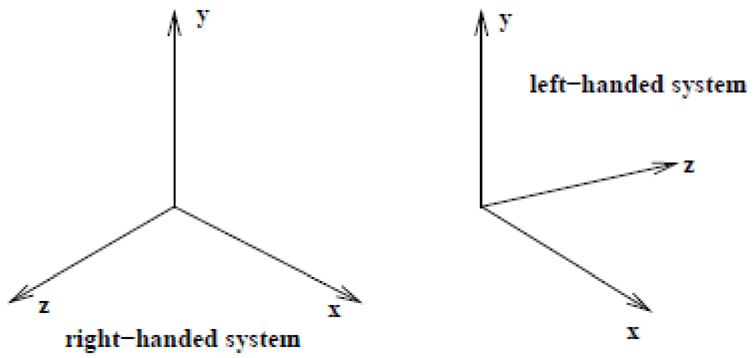
35947 vertici
69451 triangoli

Rappresentiamo gli oggetti usando primitive principalmente lineari:

- punti
- linee, segmenti
- piani, poligoni

Abbiamo bisogno di sapere come trasformare oggetti, calcolare distanze, effettuare cambiamenti sistemi di coordinate...

Sistemi di coordinate utilizzato nella grafica



Destrorso **Sinistrorso**

In computer graphics si utilizza la convenzione dell'asse *z* uscente dallo schermo, l'asse z è perpendicolare alle schermo.

Destrorso: se la rotazione attorno ad ***y*** che porta ***z*** a coincidere con ***x*** è antioraria se vista dalla parte positiva di ***y.***

Nel caso in cui la rotazione sia oraria si dice sinistrorso.

In generale, ci baseremo su di un sistema destrorso nella modellazione e sinistrorso nel rendering.

Spazi

- Per parlare di grafica al calcolatore risultano utili alcuni concetti di geometria elementare e di algebra lineare; in particolare avremo a che fare con due tipi di spazi:

– ***Spazi vettoriali lineari*** che contengono due tipi diversi di oggetti, gli *scalari* ed i *vettori, a cui si aggiunge* il concetto di *prodotto interno* (distanze ed angoli)

– ***Spazi affini,*** che sono spazi vettoriali (con il concetto di *prodotto interno* (distanze ed angoli) definito) a cui si aggiunge il concetto di *punto.*

- Lo spazio Euclideo è un particolare esempio di spazio affine reale

- **Scalare:** specifica quantità
- **Punto**: Entità il cui unico attributo è la sua posizione rispetto ad un sistema di riferimento
- **Vettore**
- Entità i cui attributi sono lunghezza e direzione. Non ha una posizione nello spazio.

Punto ≠ vettore

Spazio vettoriale/lineare

- Sia R^n l'insieme dei vettori ad *n* componenti reali. Gli elementi di R^n sono i vettori e gli scalari.
- L'insieme R^n in cui si definiscono le operazioni di addizione tra due vettori e di moltiplicazione di un vettore per uno scalare è munito di una struttura di **spazio vettoriale sul campo** R.

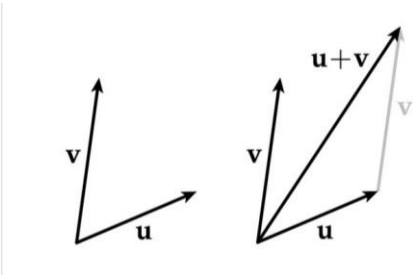
$$u \in R^n \qquad v \in R^n \qquad u+v=\begin{bmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \\ .. \\ \dots \\ u_n+v_n \end{bmatrix} \qquad \lambda u=\begin{bmatrix} \lambda u_1 \\ \lambda u_2 \\ .. \\ \dots \\ \lambda x u_n \end{bmatrix}, \qquad \lambda \in R$$

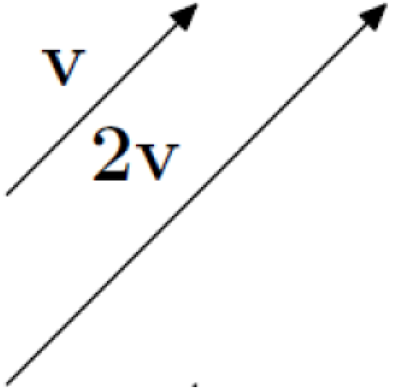
- (Per convenzione gli elementi di R^n sono vettori colonna)

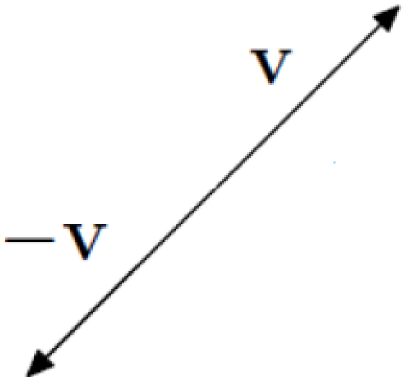
Spazio vettoriale/lineare

- Le entità sono: i vettori e gli scalari
- Operazioni:
- Somma di due vettori

Moltiplicazione di uno scalare per un vettore







segmenti orientati liberi, senza un punto di applicazione specificato.

Il prodotto per uno scalare cambia la lunghezza del vettore;

la somma di due vettori è data dalla regola del parallelogramma ed è commutativa:
u+v=v+u

Dati k vettori, $v_1, v_2, \ldots, v_k \in R^n$ e k scalari $\lambda_1, \lambda_2 \ldots, \lambda_k \in R$, la quantità

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots \lambda_k v_k$$

si dice combinazione lineare dei vettori $v_1, v_2, \ldots, v_k$ con coefficienti $\lambda_1, \lambda_2 \ldots, \lambda_k$

Definizione di lineare indipendenza: *I vettori* $v_1, v_2, \ldots, v_k$ *si dicono linearmente indipendenti se una loro combinazione lineare*

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots \lambda_k v_k = 0$$

se e solo se $\lambda_i = 0 \quad i=1,2,..,k$, cioè se nessuno di essi può essere ottenuto come combinazione lineare degli altri.

Dimensione dello spazio

- In uno spazio vettoriale V, il numero massimo di vettori linearmente indipendenti è fissato ed è chiamato **dimensione** dello spazio.
- In uno spazio ad *n* dimensioni, un qualunque insieme di n vettori linearmente indipendenti forma una base per lo spazio.
- Data una base $v_1, v_2, .., v_n$, un qualunque vettore v in V, può essere scritto come combinazione lineare
- $$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ \ldots + \alpha_n v_n$$
- dove gli α_i sono unici.

Un esempio di base di R^n è la base canonica. Essa è formata dai vettori:

$$e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 1 \\ 0 \\ \dots \end{bmatrix} \leftarrow i \qquad\qquad i=1,\dots n$$

Quando scriviamo un vettore in genere lo pensiamo rappresentato nella base canonica

$$v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \Leftrightarrow x_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots x_n \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Definizione: Siano $x, y \in R^n$, il loro prodotto scalare canonico è definito come:

$$x \cdot y := x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \ldots x_n \cdot y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x^T y$$

Per indicare il prodotto scalare canonico tra due vettori si può utilizzare anche la notazione equivalente <x,y>.

Esempio:

Siano $x = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$, il loro prodotto scalare canonico è dato da:

$$x \cdot y := 3 \cdot (-2) + 0 + (-1) \cdot (-2) + 1 \cdot (-3) = -6 + 2 - 3 = -7$$

In generale, un prodotto scalare sullo spazio vettoriale R^n è un'applicazione da $R^n \times R^n$ a R che gode delle seguenti proprietà:

Proprietà

1) $x \cdot y = y \cdot x \quad \forall x, y \in R^n$

2) $x \cdot (\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 x \cdot y_1 + \lambda_2 x \cdot y_2 \quad \forall x, y_1, y_2 \in R^n, \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in R$

3) $x \cdot x > 0 \quad se \quad x \neq 0$

Ortogonalità di due vettori: Due vettori $x, y \in R^n$ si dicono ortogonali rispetto al prodotto scalare canonico se il loro prodotto scalare è nullo, cioè <x,y>=0

Esempio:

I vettori $x = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $y = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ sono ortogonali rispetto al prodotto scalare canonico.

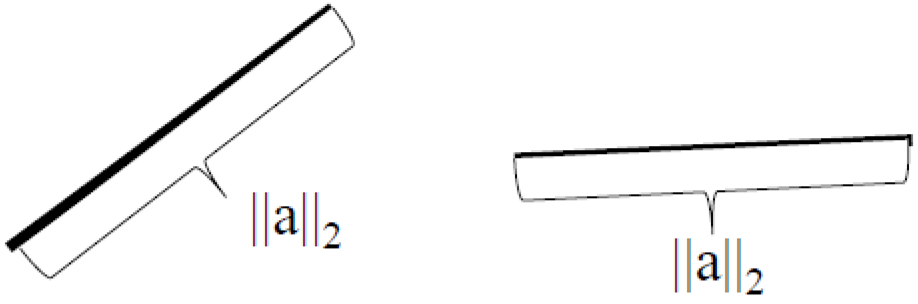
Infatti

$$x \cdot y = 3 + 0 - 3 + 0 = 0$$

- Per misurare la lunghezza di un vettore si utilizza la **norma 2 o la norma euclidea**:

$$\|a\|_2 = \sqrt{< a, a >} = \sqrt{a^T a} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i)^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

La norma euclidea fornisce una nozione di lunghezza che rimane **inalterata per rotazioni/traslazioni e riflessioni del vettore**.



- Un vettore con lunghezza 1 è detto **vettore unitario**.
- Dato un vettore qualsiasi lo si può **normalizzare (per renderlo di lunghezza unitaria)** moltiplicandolo per il reciproco della sua lunghezza:

$$\frac{a}{\|a\|_2}$$

- Un vettore normalizzato si dice anche **versore** e viene usato per individuare una direzione ed un verso;
- ogni vettore si può ottenere come prodotto della sua lunghezza per il versore che ha la stessa direzione e lo stesso verso.

$$a = \frac{a}{\|a\|_2} \|a\|_2$$

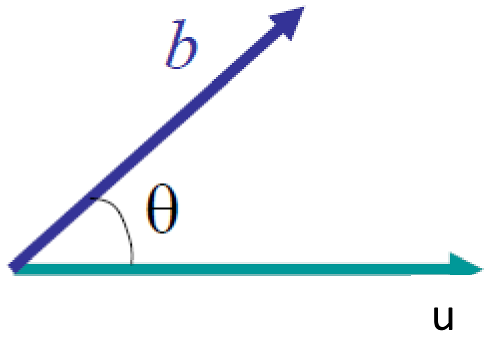
Prodotto scalare (prodotto interno o dot product)

Angolo tra due vettori

$$u \cdot b = \|u\|\|b\|\cos(\theta)$$

$$\cos(\theta) = \frac{u \cdot b}{\|u\|\|b\|}$$

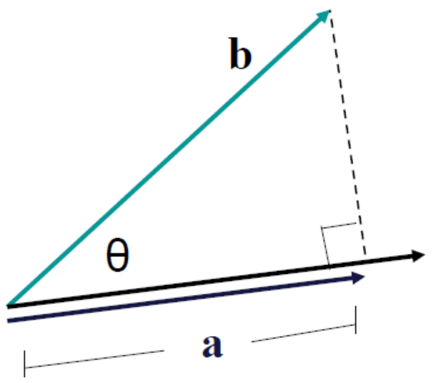
$$\theta \;= arc\,\cos\left(\frac{u \cdot b}{\|u\|\|b\|}\right)$$



Proiezione ortogonale e Interpretazione geometrica del prodotto scalare

Se $\|u\| \neq 1$, calcoliamo la lunghezza $\|a\|$ della proiezione di un vettore b sul vettore u

$\|a\|$: lunghezza della proiezione ortogonale di b su u



$$\|a\| = \|b\| \cos\theta \quad (*)$$

Sostituendo $(*)$ nella formula del prodotto scalare si ha:

$$u \cdot b = \|u\|\|b\| \cos(\theta) = \|u\|\|a\|$$

Il prodotto scalare tra due vettori u e b si può interpretare come il prodotto tra la lunghezza del vettore u e la lunghezza proiezione ortogonale del vettore b su esso.

Si deduce inoltre che

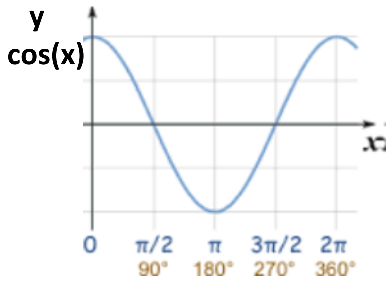
$$\boldsymbol{\|a\| = \frac{< u, b >}{\|u\|}}$$

Se $\|u\| = 1$, si ha $\| a\| =< u, b >$

Prodotto scalare con vettori generici

$$a \cdot b = \|a\|\|b\|\cos(\theta)$$

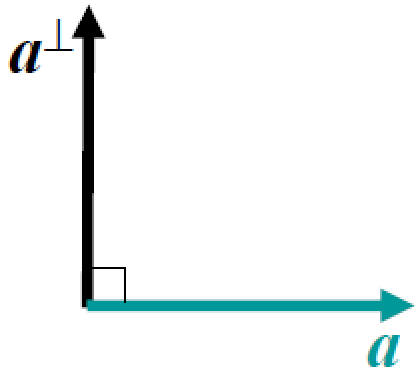
- Il prodotto scalare è un valore scalare che da informazioni sulla relazione tra i due vettori.
- In particolare il suo segno da informazioni sull'angolo che formano i vettori.
- Limitando il dominio a $[0,2\pi]$
- Se $a \cdot b>0$ allora $0\leq \theta<\pi/2$ oppure $3\pi/2 < \theta<\pi/2$
- Se $a \cdot b <0$ allora $\pi/2 <\theta< 3\pi/2$
- Se $a \cdot b =0$ allora $\theta= \pi/2$ oppure $\theta= 3\pi/2$ (oppure uno dei due vettori è (0,0,0)



Vettori perpendicolari

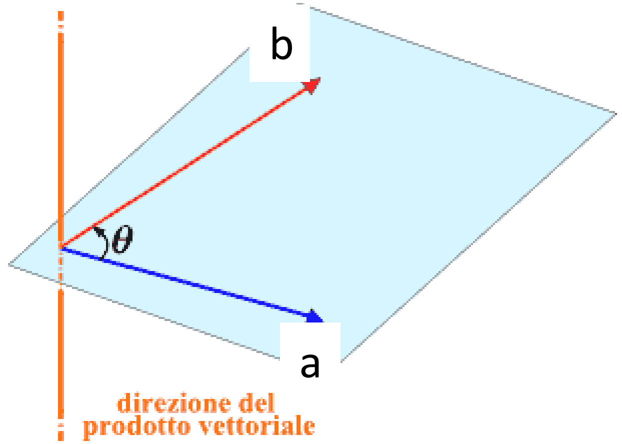
- Dato un vettore $a = (a_x, a_y)$, il vettore ad esso perpendicolare è dato da

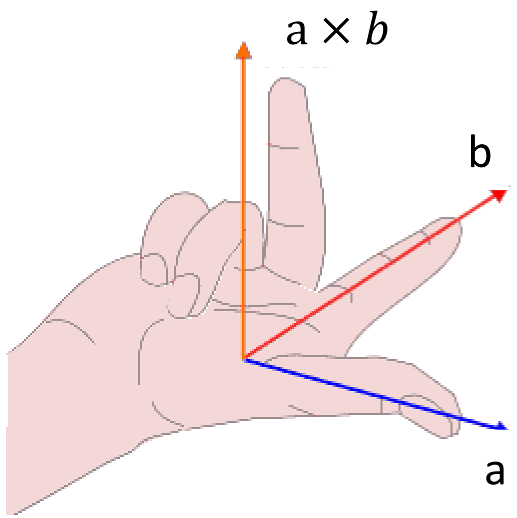
$$a^{\perp} = \pm(-a_y, a_x)$$



Cross Product (Prodotto esterno o prodotto vettoriale)

- $a \times b$ è un vettore perpendicolare ad entrambi a e b ed ha la direzione definita dalla regola della mano destra





Tale regola prevede di utilizzare le dita della mano destra e disporle come segue:

- Il pollice deve seguire il verso del primo vettore del prodotto vettoriale, in questo caso a.
- L'indice segue il percorso del secondo vettore del prodotto vettoriale.
- Il medio andrà disposto perpendicolarmente al palmo della mano e definisce il verso del prodotto vettoriale.

Proprietà del prodotto vettoriale

$$\|a \times b\| = \|a\|\|b\|\sin(\theta)$$

$\|a \times b\|$ Area del parallelogramma individuato dai due vettori

$\|a \times b\|$= 0 se a e b sono paralleli.

Siano $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}$ i vettori della base canonica di R^3.
Per la base canonica (e_1, e_2, e_3) useremo la notazione più classica in meccanica $i = e_1$, $\mathrm{j} = e_2, k = e_3$

$$a = a_x i + a_y j + a_z k\ , \qquad b = b_x i + b_y j + b_z k$$

allora è facile verificare che il prodotto vettoriale $a \times b$ è il determinante della matrice

$$\begin{bmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$a \times b = i\left(a_y b_z - a_z b_y\right) - j\left(a_x b_z - a_z b_x\right) + k\left(a_x b_y - a_y b_x\right)$$

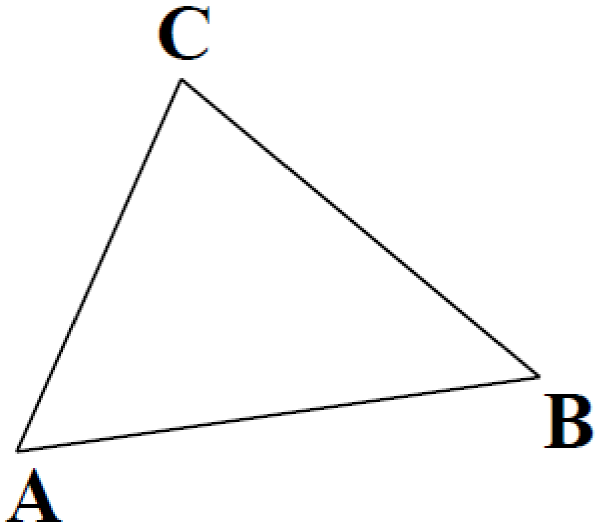
$$a \times b = [a_y b_z - a_z b_y\,,\ -a_x b_z + a_z b_x,\quad a_x\, b_y - a_y b_x]$$

Esempio: normale ad un triangolo (vettore perpendicolare al piano di un triangolo

- Trovare la normale di lunghezza unitaria del triangolo definito da tre punti A,B,C

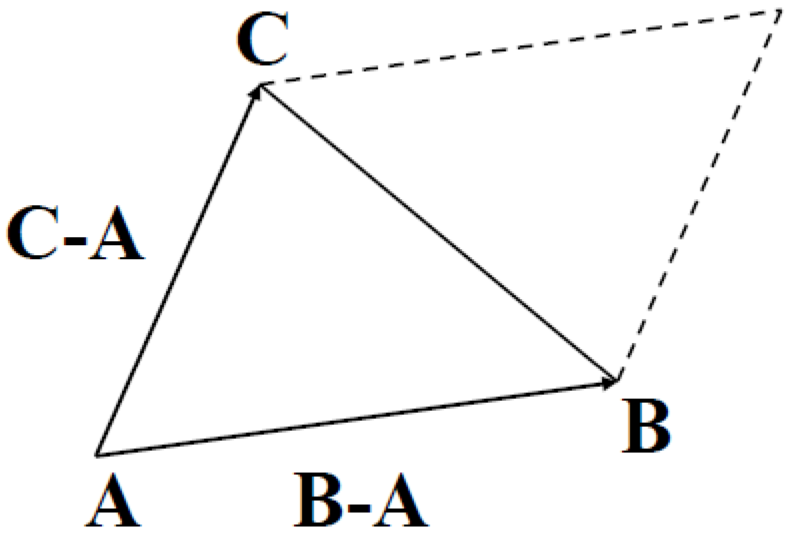
$$\mathbf{n}^* = (B - A) \times (C - A)$$

$$n = \frac{n^*}{\|n^*\|}$$



Area di un triangolo

$$area = \frac{1}{2}\left\|(B-A)\times(C-A)\right\|$$



- I vettori non rappresentano punti nello spazio, ma solo spostamenti.
- Per poter introdurre il concetto di posizione si deve passare agli **spazi affini**
- che sono degli spazi vettoriali a cui si aggiunge il concetto **astratto di punto.**

Spazi affini

Gli spazi affini sono un'estensione dello spazio lineare che include un'ulteriore tipo di entità: i **punti.**

Oltre a somma e moltiplicazione tra scalari, somma tra vettori, e moltiplicazione scalare-vettore, si introducono due nuove operazioni:

la differenza punto-punto che definisce un vettore v=P-Q

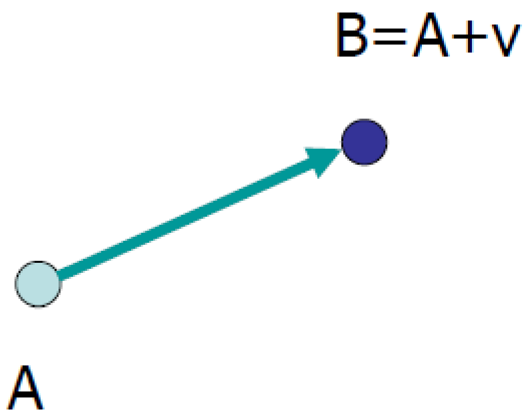
da cui deriva

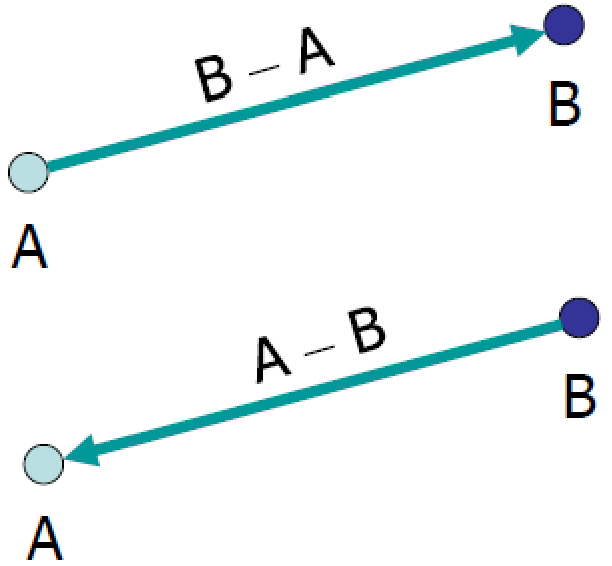
- la **somma punto +vettore**, **P+v, che definisce un nuovo punto:**

Q=P+v

punto+vettore=punto

punto-punto=vettore





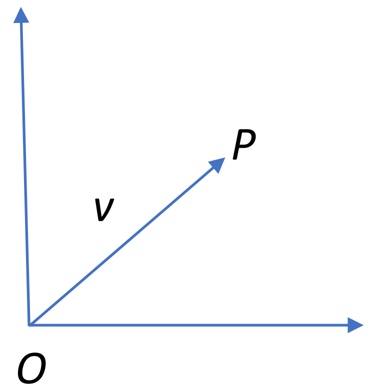
punto+punto è un’operazione non definita.

- L'interpretazione geometrica è immediata;
- i punti sono **locazioni nello spazio** e la differenza di due punti è data dal **vettore che li congiunge**;
- è importante non confondere punti e vettori, sono entità geometriche ben distinte.

Mappare punti in vettori

- Se abbiamo un sistema di coordinate con origine O, possiamo definire una corrispondenza tra punti e vettori:

$$P \rightarrow v = P - O$$
$$v \rightarrow P = O + v$$



Coordinate baricentriche di un punto nello spazio affine

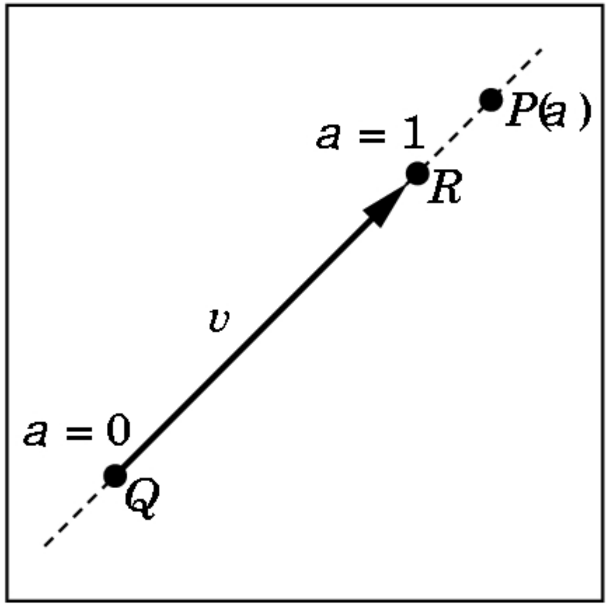
- **Una combinazione affine è una combinazione lineare di punti con coefficienti che hanno somma 1.**

$$P = \alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \ldots \alpha_N P_N \qquad \text{con } \alpha_0 + \alpha_1 + \ldots \alpha_N = 1.$$

I coefficienti $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_N$, sono le coordinate baricentriche (affini) di P nello spazio affine.

- La combinazione affine di due punti distinti descrive la retta passante per i due punti.
- Siano Q e R due punti dello spazio affine reale e sia v il vettore da essi individuato:

$$\boldsymbol{v = R - Q}$$



- *Consideriamo la loro combinazione affine, $\alpha + \beta = 1$,*
- $P = \alpha R + \beta Q, \quad \beta = 1 - \alpha$

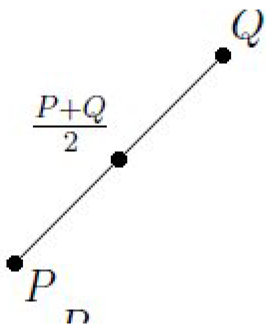
$$P(\alpha) = \alpha R + (1 - \alpha) Q$$

$$P(\alpha) = Q + \alpha(R - Q)$$

$$P = Q + \alpha v$$

Combinazione convessa

- La combinazione convessa è una combinazione **affine con pesi positivi**.
- Nel caso della combinazione convessa di due punti, il punto risultante giace sul segmento che congiunge i due punti. Se i pesi sono entrambi pari a 0.5, il punto risultante si trova a metà tra i due. (In figura la combinazione lineare convessa tra i punti P e Q con pesi $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$, *dà un punto che giace nel punto medio del segmento che congiunge P e Q.)*
- Nel caso di n punti che formano un poligono convesso, il punto risultante si **trova all'interno**

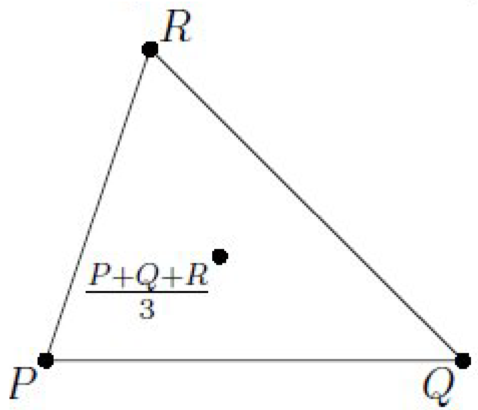


del poligono.

Se tutti i pesi sono uguali a 1/n, il punto risultante si chiama **centroide** dell'insieme dei punti.

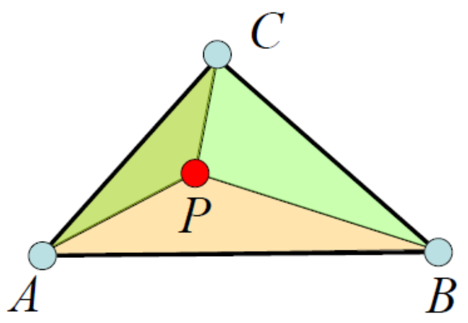
La combinazione lineare convessa dei punti P, Q ed R con pesi $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1/3$

costituisce il centroide del triangolo.



Coordinate baricentriche di un punto appartenente ad un triangolo

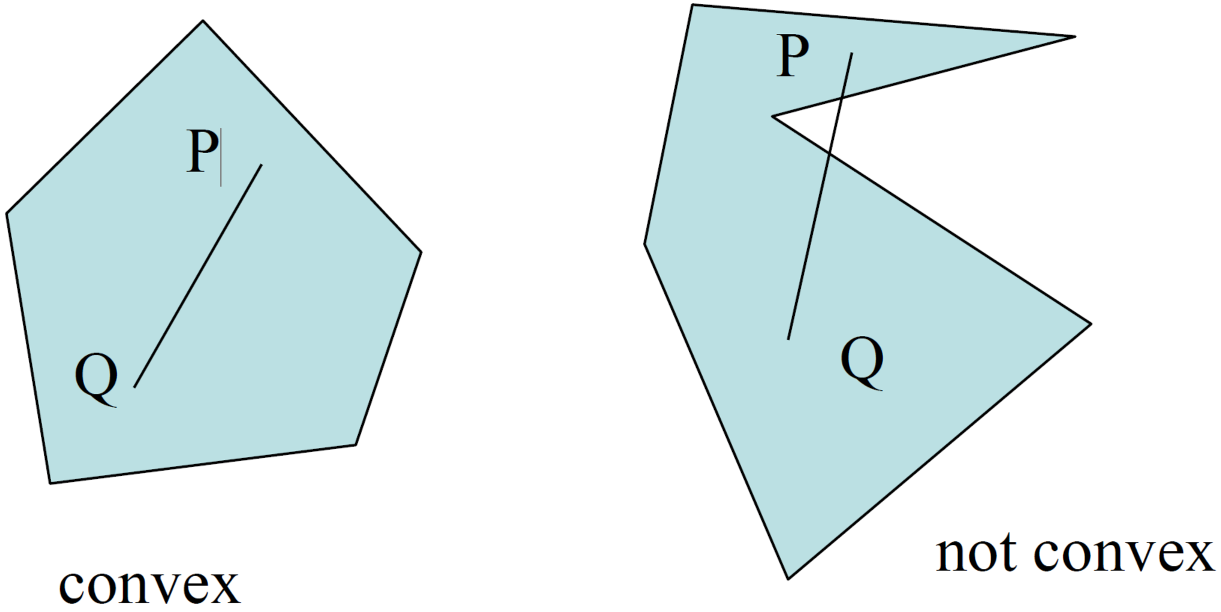
- **P=**$\boldsymbol{\alpha_0 A + \alpha_1 B + \alpha_2 C}$
- $\boldsymbol{\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 1, \alpha_i > 0, i = 0, 1, 2}$



$\alpha_0 = \frac{area(PBC)}{area(ABC)}$ $\alpha_1 = \frac{area(PCA)}{area(ABC)}$ $\alpha_2 = \frac{area(PAB)}{area(ABC)}$

Convessità

- Un oggetto è convesso se e solo se comunque presi due punti nell'oggetto tutti i punti sul segmento di linea tra questi punti sono anche nell'oggetto.

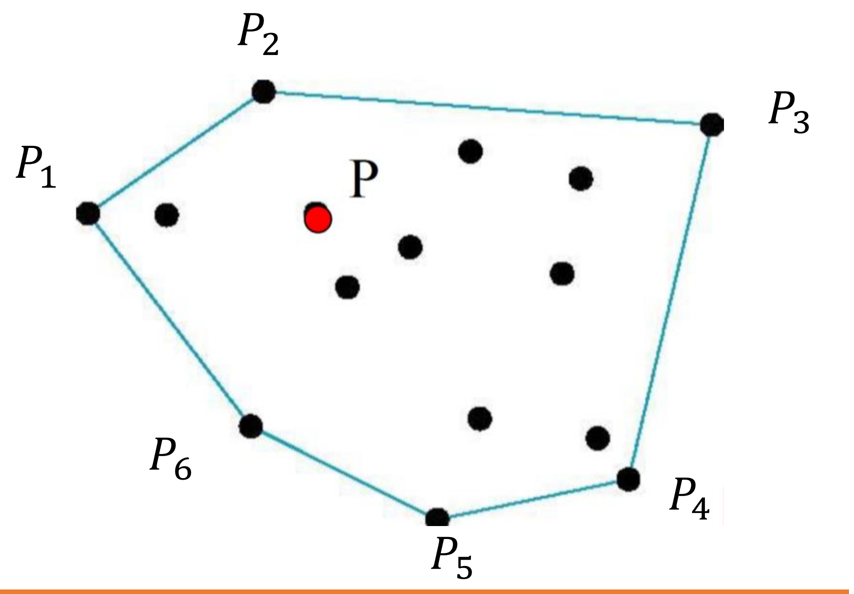


Guscio Convesso

Dato un insieme di punti $P_1, P_2, .., P_n$

• L'insieme di tutti i punti P che possono essere rappresentati come combinazioni convesse è detto inviluppo convesso (guscio convesso) dell'insieme

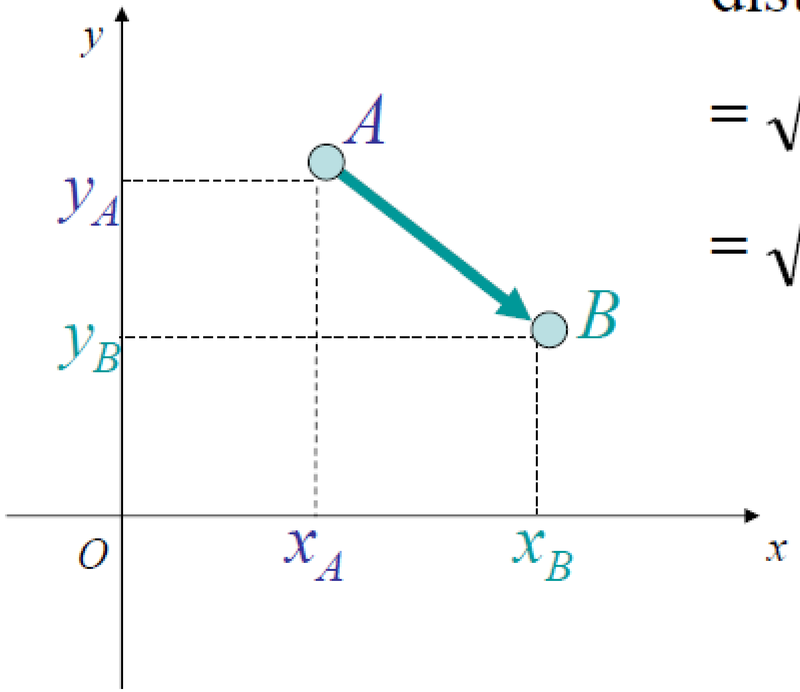
- Il guscio convesso (**convex hull**) di un insieme di punti è la più piccola regione convessa che contiene tutti i punti dati.



P_1

Distanza tra due punti

$$A = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \end{bmatrix}$$



$$\mathrm{dist}(A,B) = \| B - A \| =$$

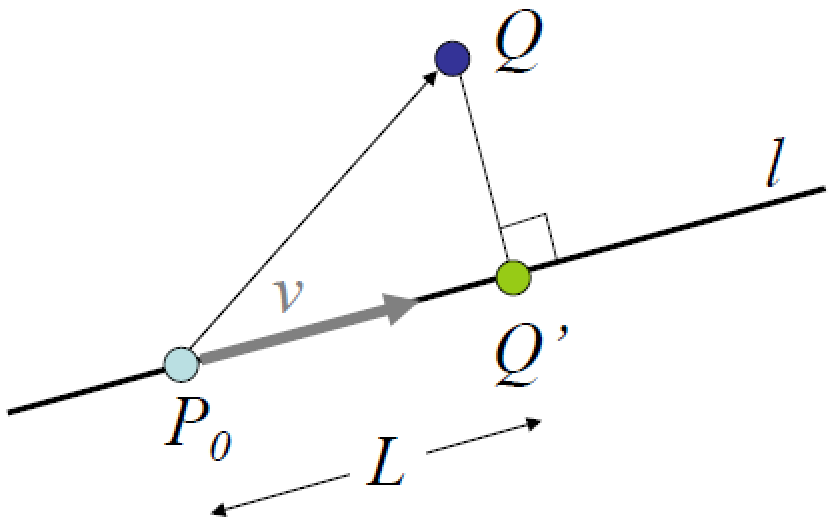
$$= \sqrt{< B - A, B - A >} =$$

$$= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Distanza tra un punto ed una linea

Cercare un punto Q', tale che $(Q - Q') \perp v$

$$dist(Q, l) = \|Q - Q'\|$$



Pitagora :

$$L^2 + \mathrm{dist}(Q, Q')^2 = \| Q - P_0 \|^2$$

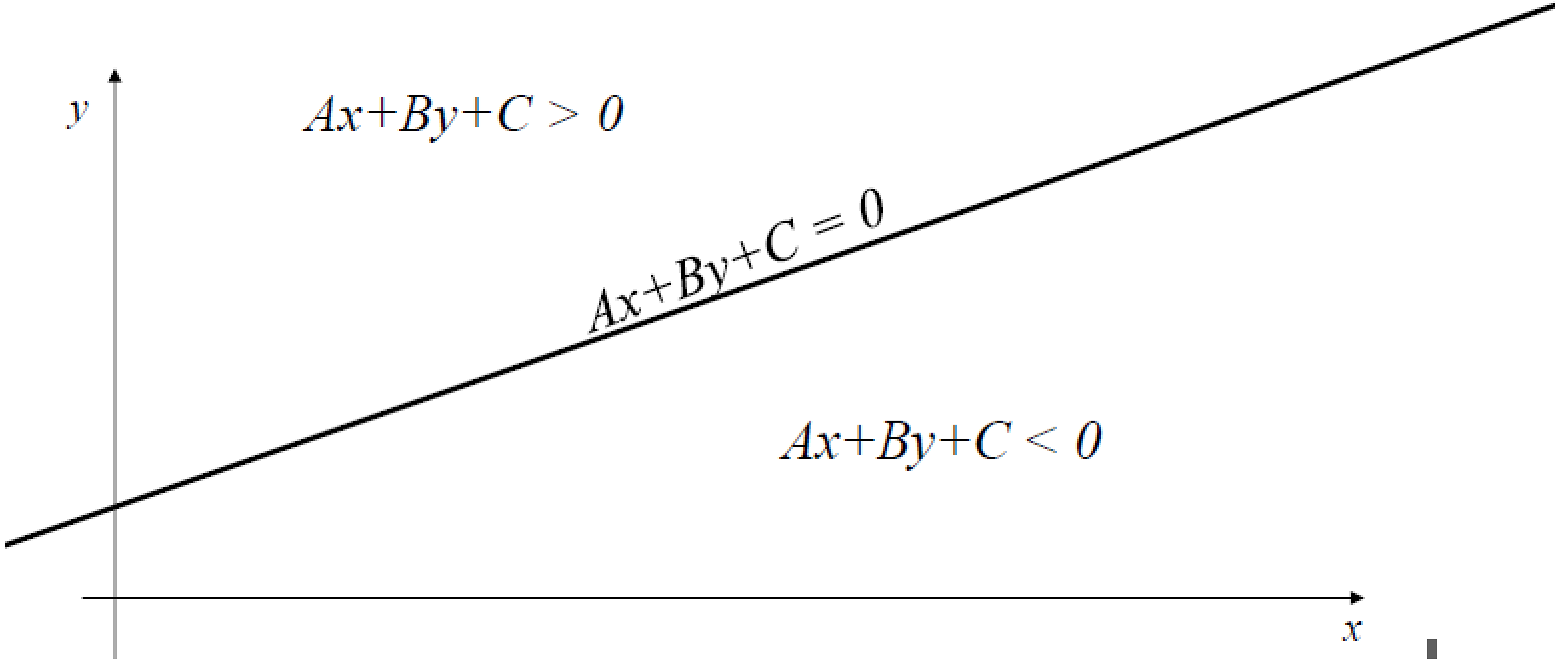
$$L = \frac{< Q - P_0, v >}{\| v \|}$$

Proiezione ortogonale di $Q - P_0$ su v

$$\Rightarrow \quad \mathrm{dist}(Q, Q')^2 = \| Q - P_0 \|^2 - L^2 = \| Q - P_0 \|^2 - \frac{< Q - P_0, v >^2}{\| v \|^2}.$$

Equazione in forma implicita di una linea in 2D

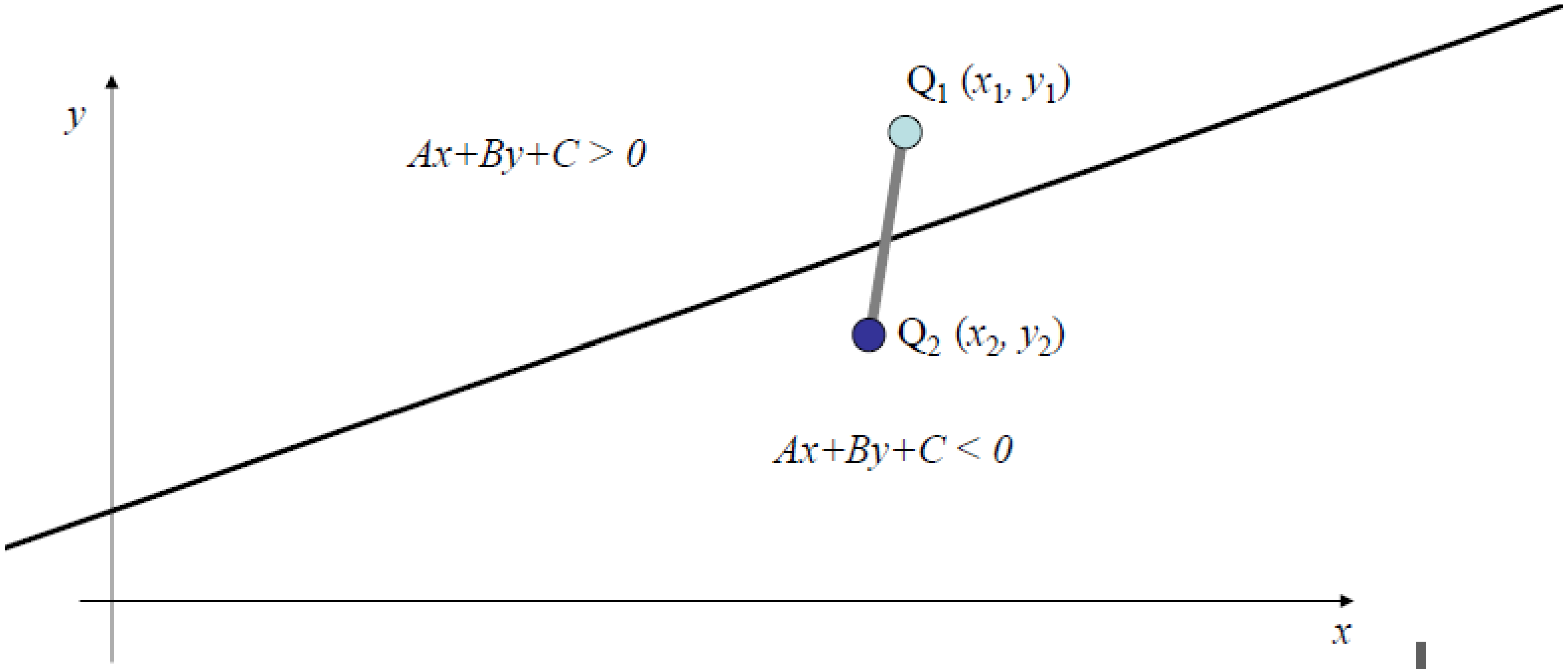
$$\boxed{Ax + By + C = 0, \quad A, B, C \in \mathrm{R},\ AB \neq 0}$$



Intersezione linea-segmento

Il segmento $Q_1\ Q_2$ interseca la linea se e solo se

$$(Ax_1 + By_1 + C)(Ax_2 + By_2 + C) \leq 0$$

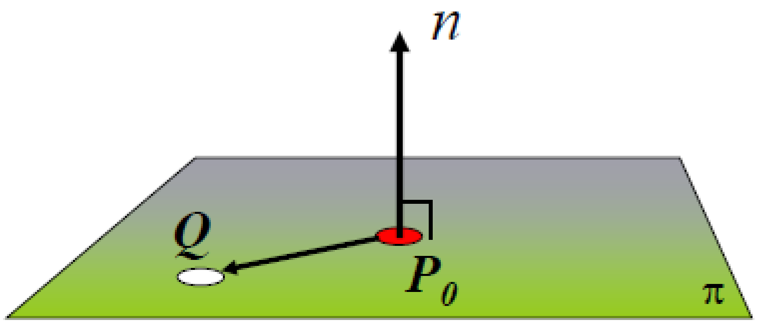


Rappresentazione di un piano nello spazio 3D

Un piano π è definito da una normale n ed un punto sul piano (P_0).

Un punto Q appartiene al piano $\Leftrightarrow$ $< Q - P_0, n > = 0$.

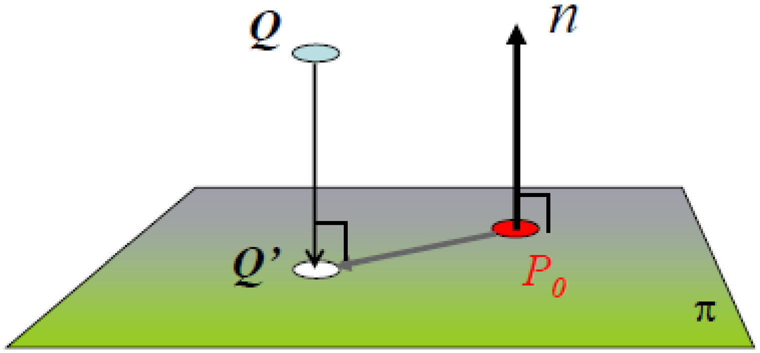
La normale n è normale a tutti i vettori nel piano



Distanza tra un punto Q ed un piano π

- Proiettare il punto Q sul piano nella direzione della normale.

$$\text{dist}(Q, \pi) = ||Q' - Q||$$



$$(Q'-Q) \parallel n \quad \Rightarrow \quad Q'-Q = sn, \quad s \in \mathrm{R} \quad \Rightarrow \quad Q' = Q + sn$$

$$< Q' - P_0, n > = 0$$

$$< Q - P_0 + sn, n > = 0$$

$$< Q - P_0, n > + s < n, n > = 0$$

$$\boxed{s = -\frac{< P_0 - Q, n >}{\| n \|^2}}$$

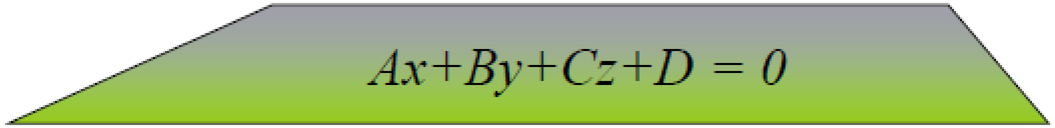
$$\text{dist}^2(Q, \pi) = \| Q' - Q \|^2 = s^2 \| n \|^2 = \frac{< Q - P_0, n >^2}{\| n \|^2}$$

Rappresentazione implicita dei piani in 3D

- *(x, y, z)* sono le coordinate di punto sul piano
- *(A, B, C) sono le coordinate di un vettore normale al piano*

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0, \quad A, B, C, D \in \mathbb{R},\ ABC \neq 0}$$

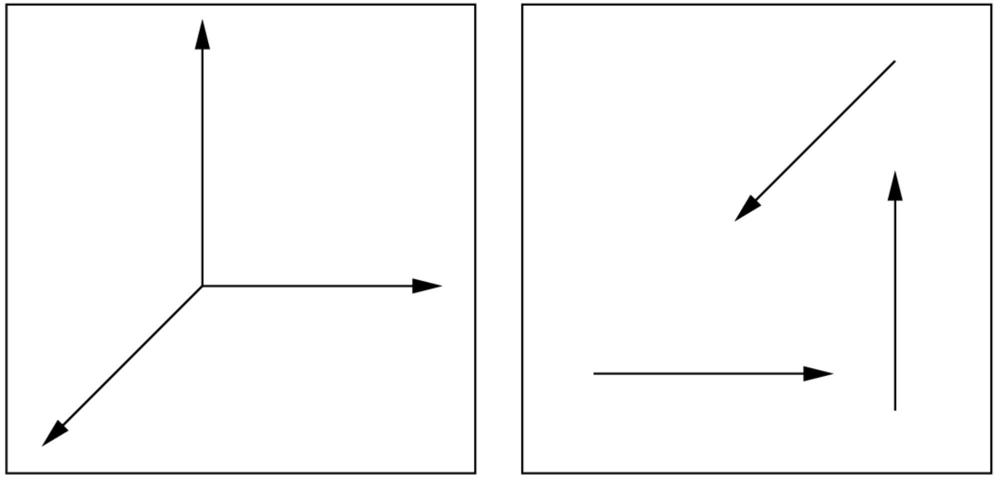
$$Ax+By+Cz+D > 0$$



$$Ax+By+Cz+D < 0$$

Sistemi di riferimento

- Una base (tre vettori, linearmente indipendenti) non basta per definire la posizione di un punto.
- Occorre anche un punto di riferimento, **l'origine del sistema di riferimento**.



(a) (b)

Riferimento o Frame

- Il concetto di **base** (in uno spazio vettoriale lineare) si estende a quello di **riferimento (frame)** in uno spazio affine (o euclideo) specificando, oltre alla base, anche un punto P_0 detto **origine del riferimento**.
- Dato un riferimento F=(***e****1*, ***e****2*, ***e****3* ,P_0), i punti ed i vettori dello spazio saranno esprimibili nel seguente modo:

$$P = P_0 + v = P_0 + v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3$$

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3$$

Gli scalari (v_1, v_2, v_3) sono le coordinate del punto P nel sistema di riferimento (o frame) F=(***e****1*, ***e****2*, ***e****3* ,P_0).

Esempi di frame:

Sistema di riferimento cartesiano in R^2

$$(e_1,e_2,P_0), \quad e_1 \equiv (1,0),\ e_2 \equiv (0,1),\ P_0 \equiv (0,0)$$

Un punto P di coordinate (x,y) nel sistema di riferimento cartesiano (e_1,e_2,P_0) , si esprime come:

$$P=x\cdot(1,0)+y\cdot(0,1)+(0,0)$$

Dato il sistema di riferimento:

$$(e_1,e_2,P_0), \quad e_1 \equiv (1,0),\ e_2 \equiv (0,1),\ P_0 =(4,4)$$

Il punto P di coordinate **(2,2)** in questo sistema di riferimento, può essere scritto, in coordinate cartesiane come:

$$P=2\cdot(1,0)+2\cdot(0,1)+(4,4) = \mathbf{(6,6).}$$

Coordinate omogenee

- Rappresentare sia i vettori che i punti usando tre scalari è ambiguo.
- Un **vettore** è rappresentato mediante la terna (v_1, v_2, v_3) come

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3$$

- Un **punto** P di coordinate (v_1, v_2, v_3) nel frame F=(***e***$_1$, ***e***$_2$, ***e***$_3$,P_0) è rappresentato come

$$P = v_1e_1 + v_2e_2 + v_3e_3 + P_0$$

- Vogliamo trovare un sistema di coordinate che porti ad una rappresentazione univoca per punti e vettori.

- Facciamo la seguente assunzione:

1*P=P e 0*P=0 (vettore nullo)

- Sotto questa ipotesi, un **vettore** è allora dato da

$$v = v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3 + 0 \cdot P_0$$

- Un **punto** è invece dato da

$$P = v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3 + 1 \cdot P_0$$

- L'idea è quindi di aggiungere una dimensione extra.
- Ogni punto/vettore è definito da 4 coordinate
- **Coordinate del punto** $(v_1 v_2\ v_3\ 1)^T$
- **Coordinate del vettore** $(v_1\ v_2\ v_3\ 0)^T$

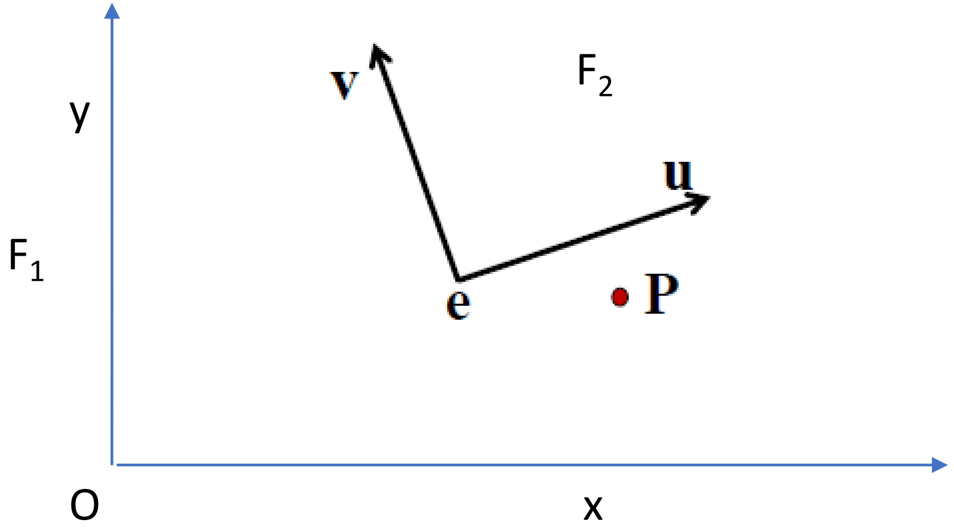
Quindi in uno spazio affine **i punti sono rappresentati come vettori riga con ultima componente 1** e **i vettori sono rappresentati come vettori riga con ultima componente 0 (zero).**

$$P = [v_1\ v_2\ v_3\ 1]\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ P_0 \end{bmatrix}$$

$$v = [v_1\ v_2\ v_3\ 0]\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ P_0 \end{bmatrix}$$

Cambio di sistema di riferimento in 2D

Cambio delle coordinate di un vettore/punto da un sistema ad un altro



Siano F_1= (x,y,**O**) ed F_2= (u,v,**e**) due frame di uno stesso spazio.

Supponiamo di conoscere le coordinate del punto P nel frame F_2 e vogliamo vedere quali sono le sue coordinate nel frame F_1= (x,y,**O**) , Esprimiamo vettori e origine di F_2 in termini di vettori e origine di F_1 :

$$u = x_u x + y_u y + 0 \cdot \boldsymbol{O}$$
$$v = x_v x + y_v y + 0 \cdot \boldsymbol{O}$$
$$\boldsymbol{e} = x_e x + y_e y + 1 \cdot \boldsymbol{O}$$

In forma matriciale

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ \boldsymbol{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_u & y_u & 0 \\ x_v & y_v & 0 \\ x_e & y_e & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ \boldsymbol{O} \end{bmatrix}$$

La matrice $\mathrm{M} = \begin{bmatrix} x_u & y_u & 0 \\ x_v & y_v & 0 \\ x_e & y_e & 1 \end{bmatrix}$ rappresenta il cambiamento del sistema di riferimento da F_1 ad F_2.

Il punto P nel frame F_1= (x,y,**O**) avrà coordinate omogenee $a^T = (x_p, y_p, 1)^T$ e si esprimerà come:

$$P = x_p x + y_p y + 1 \cdot \boldsymbol{O}$$

Il punto P nel frame F_2= (u,v,**e**) avrà coordinate omogenee $b^T = (u_p, v_p, 1)^T$ e si esprimerà come:

$$P = u_p u + v_p v + 1 \cdot \boldsymbol{e}$$

P nel frame F_1= (x,y,**o**) , in termini matriciali, si esprime come

$$P = a^T \begin{bmatrix} x \\ y \\ \boldsymbol{O} \end{bmatrix}$$

P nel frame F_2= (u,v,**e**) si esprime come

$$P = b^T \begin{bmatrix} u \\ v \\ \boldsymbol{e} \end{bmatrix}$$

Chiediamo che le due rappresentazioni di P forniscano lo stesso punto, cioè imponiamo l'uguaglianza:

$$a^T \begin{bmatrix} x \\ y \\ \boldsymbol{O} \end{bmatrix} = b^T \begin{bmatrix} u \\ v \\ \boldsymbol{e} \end{bmatrix}$$

Ma $\begin{bmatrix} u \\ v \\ e \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x \\ y \\ \boldsymbol{O} \end{bmatrix}$, quindi segue

$$a^T \begin{bmatrix} x \\ y \\ \boldsymbol{o} \end{bmatrix} = b^T M \begin{bmatrix} x \\ y \\ \boldsymbol{o} \end{bmatrix}$$

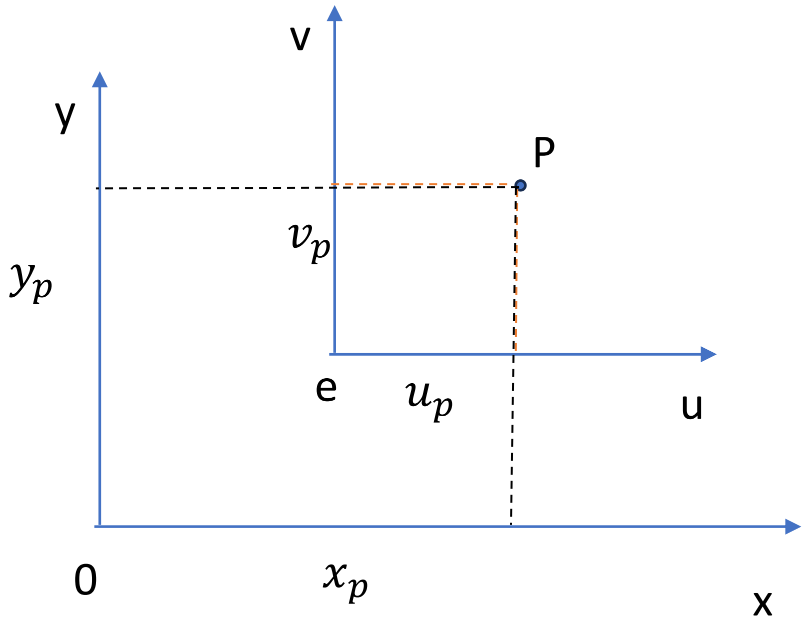
Segue

$a^T = b^T M$ e quindi $a = M^T b$ e $b = (M^T)^{-1} a$

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_u & x_v & x_e \\ y_u & y_v & y_e \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_p \\ v_p \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_p \\ v_p \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_u & x_v & x_e \\ y_u & y_v & y_e \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ 1 \end{bmatrix}$$

Esempio 1



F_1= (x,y,**O**)
F_2= (u,v,**e**)

punto P in F_2= (u,v,**e**) ha coordinate omogenee

$b^T = (u_p, v_p, 1)^T$

Coordinate di P in F_1= (x,y,**o**)
$a^T = (x_p, y, 1)^T$?

$$\begin{cases} u = x + 0 \cdot y + 0 \cdot O \\ v = 0 \cdot x + y + 0 \cdot O \\ e = x_e \cdot x + y_e \cdot y + 1 \cdot O \end{cases}$$

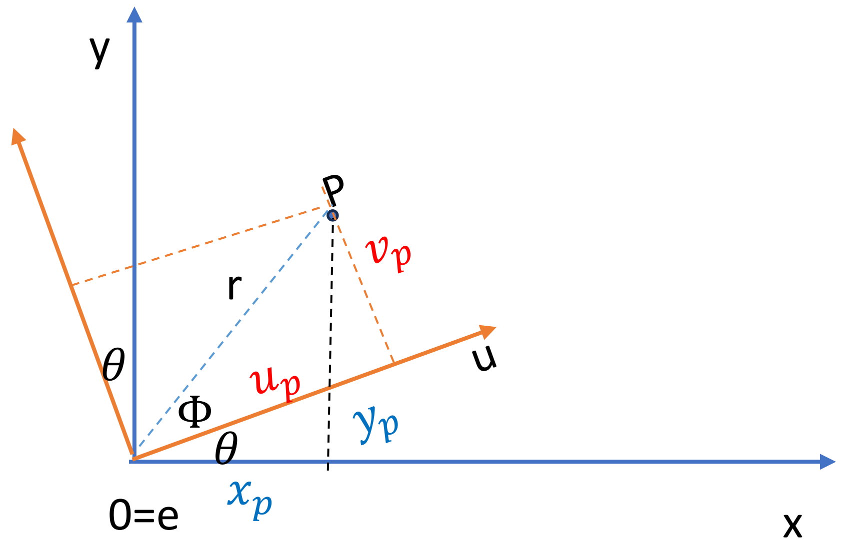
$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x_e & y_e & 1 \end{bmatrix}$$

rappresenta il cambiamento del sistema di riferimento da F1 ad F2.

$a = M^T b$

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_e \\ 0 & 1 & y_e \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_p \\ v_p \\ 1 \end{bmatrix}$$

Esempio 2



F_1= (x,y,**O**)
F_2= (u,v,**e**)

punto P in F_2= (u,v,**e**) ha coordinate omogenee

$b^T = (u_p, v_p, 1)^T$

Coordinate di P in F_1= (x,y,**o**)
$a^T = (x_p, y, 1)^T$?

Esprimiamo P in coordinate polari nel sistema di riferimento F_1= (x,y,**O**)

$u_p = r \cos \phi$ $\quad$ $y_p = r \sin \phi$

r : lunghezza del vettore che congiunge P con l'origine,
Φ: angolo che il vettore PO forma con l'asse x

Esprimiamo P in coordinate polari nel sistema di riferimento F_2= (u,v,**e**)

$$x_p = r\cos(\phi+\theta) = r\cos\phi\cos\theta - r\sin\phi\sin\theta$$

$$y_p = r\sin(\phi+\theta) = r\sin\phi\cos\theta + r\cos\phi\sin\theta$$

Poiché vale che

$$u_p = r\cos\phi \qquad y_p = r\sin\phi$$

le due formule precedenti diventano:

$$x_p = u_\mathrm{p}\cos\theta - y_p\sin\theta$$

$$y_p = \mathrm{y_p}\cos\theta + u_p\sin\theta$$

ed in termini matriciali si possono scrivere come:

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_p \\ v_p \\ 1 \end{bmatrix}$$

Cambio di sistema di riferimento in 3D

Siano F_1= (x,y,z,**O**) ed F_2= (u,v,w,**e**) due frame di uno stesso spazio.

Il punto P nel frame F_1= (x,y,z,**O**) avrà coordinate omogenee a= $(x_p, y_p, z_p, 1)^T$ e si esprimerà come:

$$P = x_p x + y_p y + z_p z + 1 \cdot \boldsymbol{O}$$

Il punto P nel frame F_2= (u,v,w,**e**) avrà coordinate omogenee b= $(u_p, v_p, w_p, 1)^T$ e si esprimerà come:

$$P = u_p u + v_p v + w_p w + 1 \cdot \boldsymbol{e}$$

Relazione che lega le coordinate del punto P nel frame F_1 alle coordinate nel frame F_2.

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_u & x_v & x_w & x_e \\ y_u & y_v & y_w & y_e \\ z_u & z_v & z_w & z_e \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_p \\ v_p \\ w_p \\ 1 \end{bmatrix}$$

Coordinate del vettore u rispetto al sistema di riferimento F_1

Trasformazioni geometriche in 2D

- Ogni trasformazione geometrica complessa può essere decomposta in una concatenazione di trasformazioni geometriche elementari quali traslazione, scala e rotazione.
- Queste trasformazioni modificano le coordinate di un oggetto per ottenerne un altro simile, ma differente per posizione, orientamento e dimensione.
- Modificano la geometria, ma non la topologia degli oggetti.

Sono usate per

- Posizionare gli oggetti nella scena (modeling)
- Cambiare la forma degli oggetti
- Creare copie multiple degli oggetti
- Animazioni

Trasformazioni affini

- Le trasformazioni geometriche sono lo strumento che consente di manipolare **punti** e **vettori** all'interno del mondo dell'applicazione grafica;
- Le trasformazioni geometriche sono **funzioni** che mappano un punto in un altro punto ;
- La trasformazione di una primitiva geometrica si riduce alla trasformazione dei punti caratteristici (vertici) che la identificano nel rispetto della connettività originale.

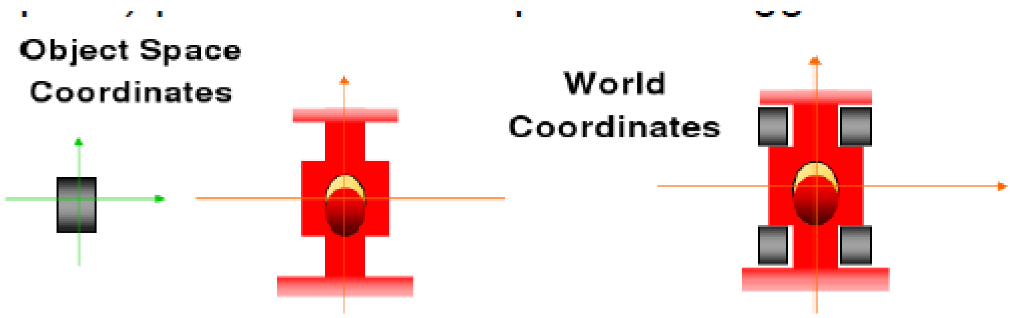
- Una **trasformazione geometrica affine** è una trasformazione ***lineare***

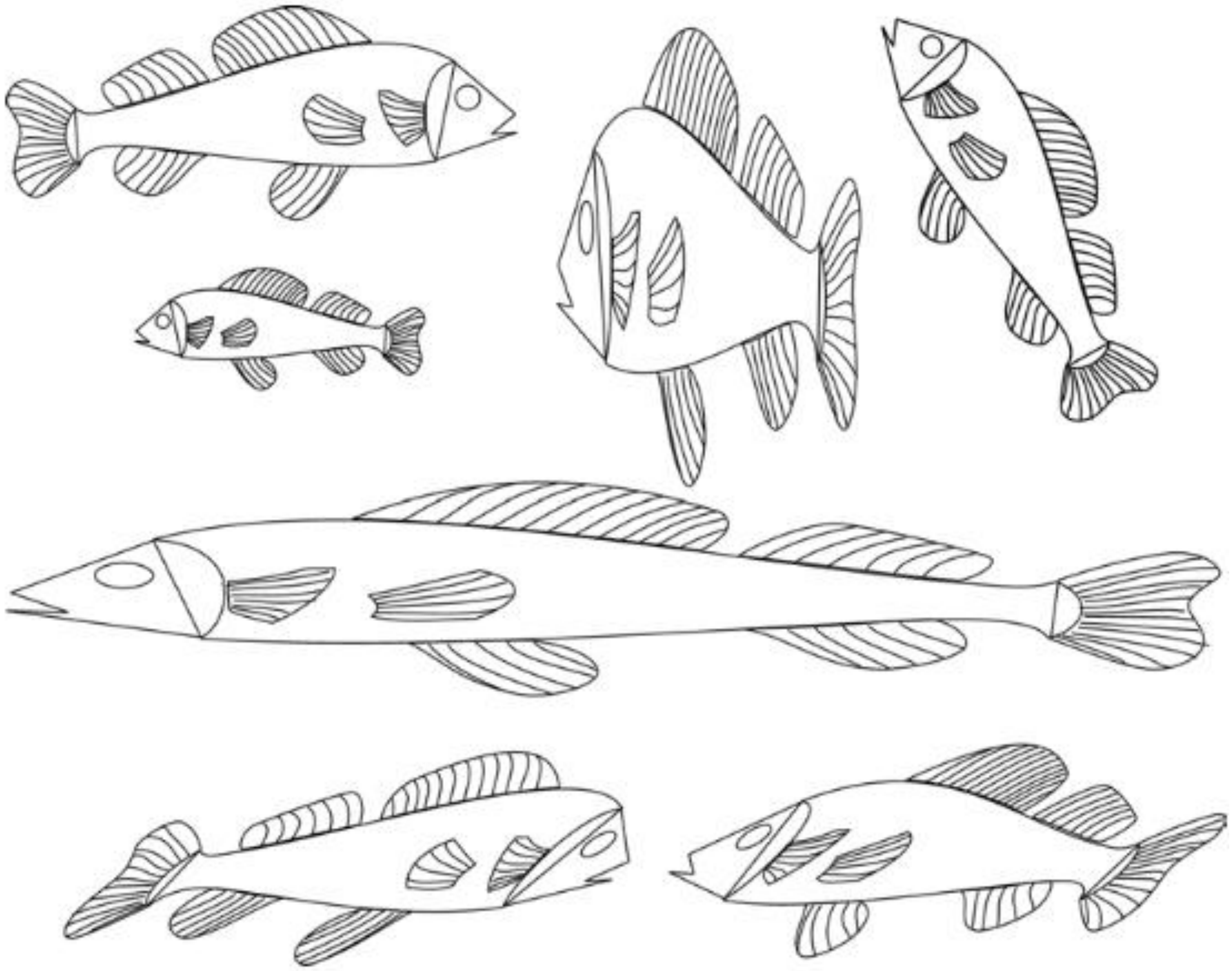
$$f(aP+bQ)=af(P)+bf(Q)$$

- L'importanza della proprietà di linearità sta nel fatto che, note le trasformazioni dei vertici, si possono ottenere le trasformazioni di combinazioni lineari dei vertici combinando linearmente le trasformazioni dei vertici. Non dobbiamo ricalcolare le trasformazioni per ogni combinazione lineare.
- Esse preservano:
  - *collinearità* (I punti di una linea giacciono ancora su di una linea dopo la trasformazione);
  - *rapporto tra le distanze* (Il punto medio di un segmento rimane il punto medio di un segmento anche dopo la trasformazione).

- Le trasformazioni geometriche permettono di traslare, ruotare, scalare o deformare oggetti che siano stati modellati nel loro spazio di coordinate del modello permettendo di istanziarli con attributi (posizione, orientamento, fattori di scala) diversi nello spazio di coordinate del mondo (permettono il *passaggio dal sistema di coordinate locali al sistema di coordinate del mondo*)

- Ogni oggetto, a partire dal proprio sistema di riferimento (object space), viene trasformato
- opportunamente in un sistema di riferimento comune (world space) per andare a far parte dell’oggetto finale.





Trasformazioni geometriche nel piano

- Le trasformazioni geometriche di base sono:
  - Traslazione;
  - Scalatura;
  - Rotazione.

- Altre trasformazioni geometriche comuni (ma derivabili dalle precedenti) sono:
  - Riflessione rispetto ad un asse;
  - Riflessione rispetto ad un punto;
  - Deformazione.

Trasformazione di Traslazione

- Traslare una primitiva geometrica nel piano significa muovere ogni suo punto $P(x,y)$ di d_x unità lungo l'asse x e di d_y unità lungo l'asse y fino a raggiungere la nuova posizione $P'(x', y')$ dove:

$$x' = x + d_x, \quad y' = y + d_y$$

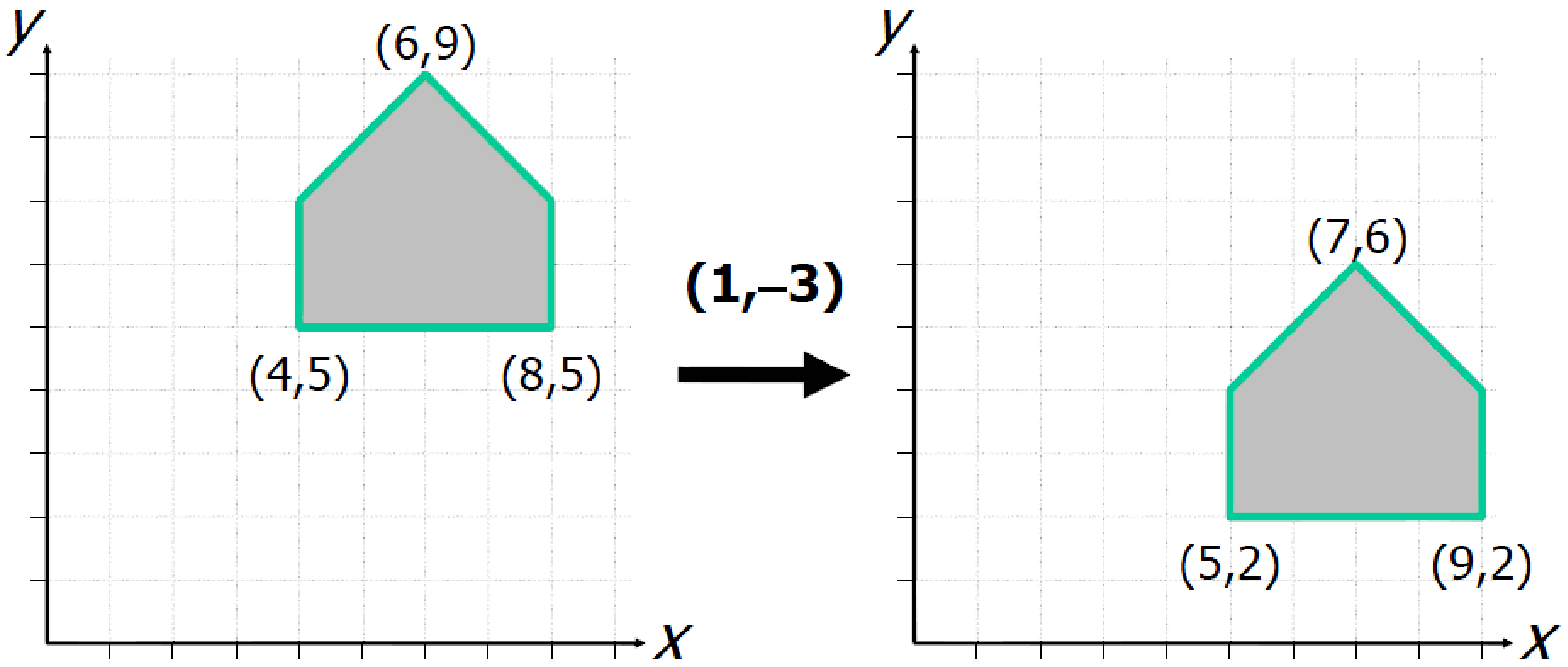
- In notazione matriciale:

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}; \quad P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}; \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \end{bmatrix};$$

$$P' = P + \mathbf{T}$$

- Con $\mathbf{T}$ *vettore traslazione*

Esempio di traslazione con vettore di traslazione **T**=(1,–3)



Trasformazione di scalatura

Scelto un punto C (punto fisso) di riferimento, scalare una primitiva geometrica significa riposizionare rispetto a C tutti i suoi punti in accordo ai fattori di scala s_x (lungo l'asse x) e s_y (lungo l'asse y) scelti.

Se il punto fisso è l'origine O degli assi, la trasformazione di P in P' si ottiene con:

$$x' = s_x \cdot x, \quad y' = s_y \cdot y$$

In notazione matriciale:

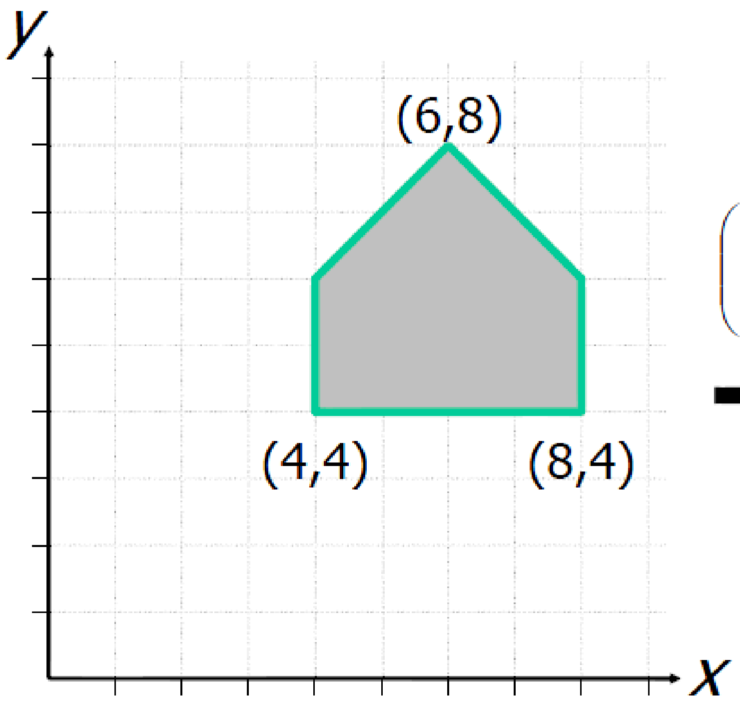
$$P' = \mathbf{S} \cdot P$$

dove

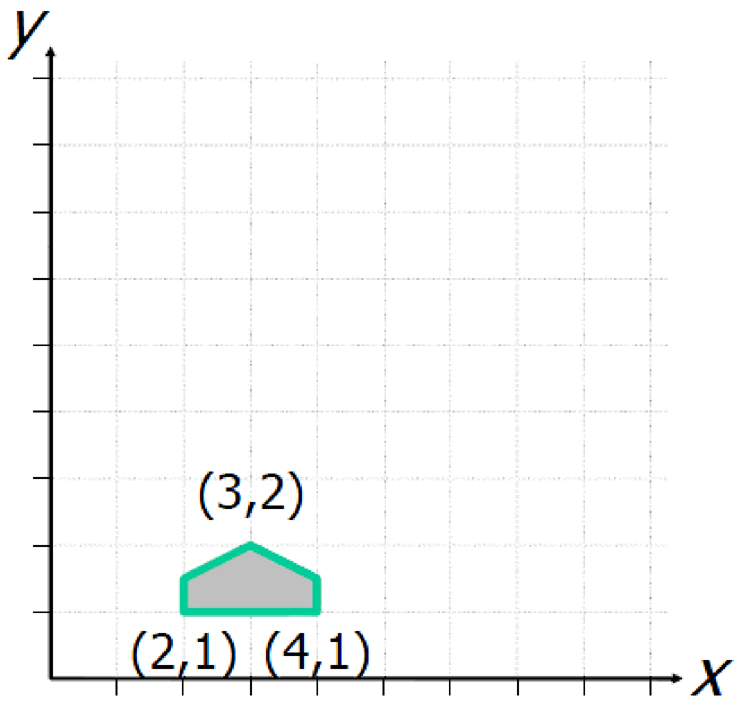
$$P = \left[\begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right]; \quad P' = \left[\begin{array}{c} x' \\ y' \end{array} \right]; \quad \mathbf{S} = \left[\begin{array}{cc} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{array} \right].$$

$\mathbf{S}$ pre-moltiplica P in quanto P è definito come vettore colonna

Esempio di scalatura di ½ lungo l'asse x e di ¼ lungo l'asse y



$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$



- Osservazioni:
  - Fattori di scala inferiori a 1 avvicinano l'oggetto al punto fisso di riferimento (origine);
  - Fattori di scala maggiori di 1 lo allontanano;
  - Se $s_x \neq s_y$ le proporzioni dell'oggetto non sono mantenute e si parla di *scalatura non uniforme;*
  - Se $s_x = s_y$ le proporzioni sono mantenute e si ha una *scalatura uniforme;*

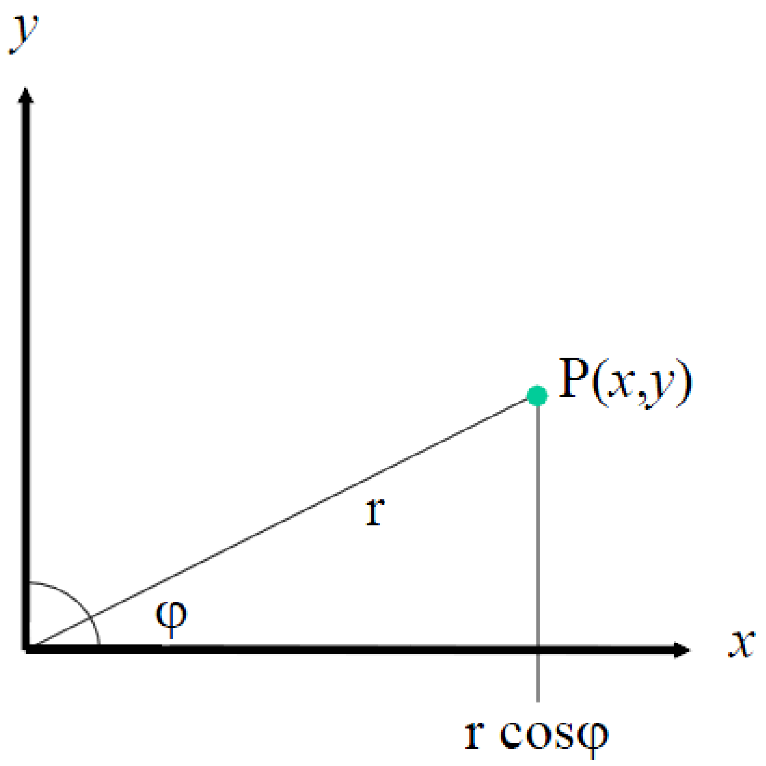
Trasformazione di rotazione

Fissato un punto C (pivot) di riferimento ed un verso di rotazione (orario, antiorario), ruotare una primitiva geometrica attorno a C significa muovere tutti i suoi punti nel verso assegnato in maniera che si conservi, per ognuno di essi, la **distanza** da C;

Una rotazione di θ attorno all'origine O degli assi è definita come:

$$x' = x \cdot \cos\theta - y \cdot \operatorname{sen}\theta, \quad y' = x \cdot \operatorname{sen}\theta + y \cdot \cos\theta$$

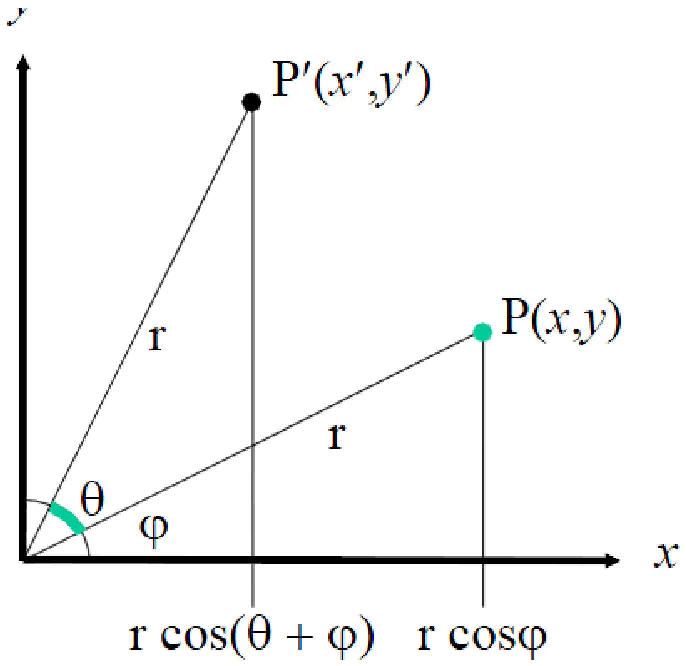
- La relazione tra P' e P si ricava trigonometricamente;



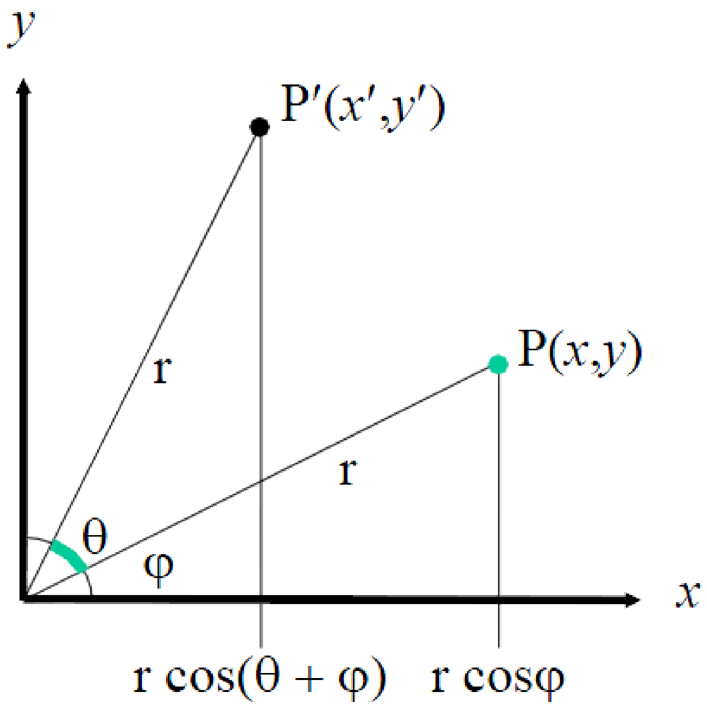
- Le coordinate di P possono essere espresse in coordinate polari:

$$x = r \cdot \cos\phi; \quad y = r \cdot \sin\phi.$$

$$
\begin{aligned}
x' &= r \cdot \cos(\theta + \phi) \\
&= r \cdot \cos\theta \cdot \cos\phi - r \cdot \sin\theta \cdot \sin\phi \\
&= r \cdot \cos\theta \cdot \frac{x}{r} - r \cdot \sin\theta \cdot \frac{y}{r} \\
&= x \cdot \cos\theta - y \cdot \sin\theta;
\end{aligned}
$$



$$
\begin{aligned}
y' &= r \cdot \sin(\theta + \phi) \\
&= r \cdot \sin\theta \cdot \cos\phi + r \cdot \cos\theta \cdot \sin\phi \\
&= r \cdot \sin\theta \cdot \frac{x}{r} + r \cdot \cos\theta \cdot \frac{y}{r} \\
&= x \cdot \sin\theta + y \cdot \cos\theta.
\end{aligned}
$$



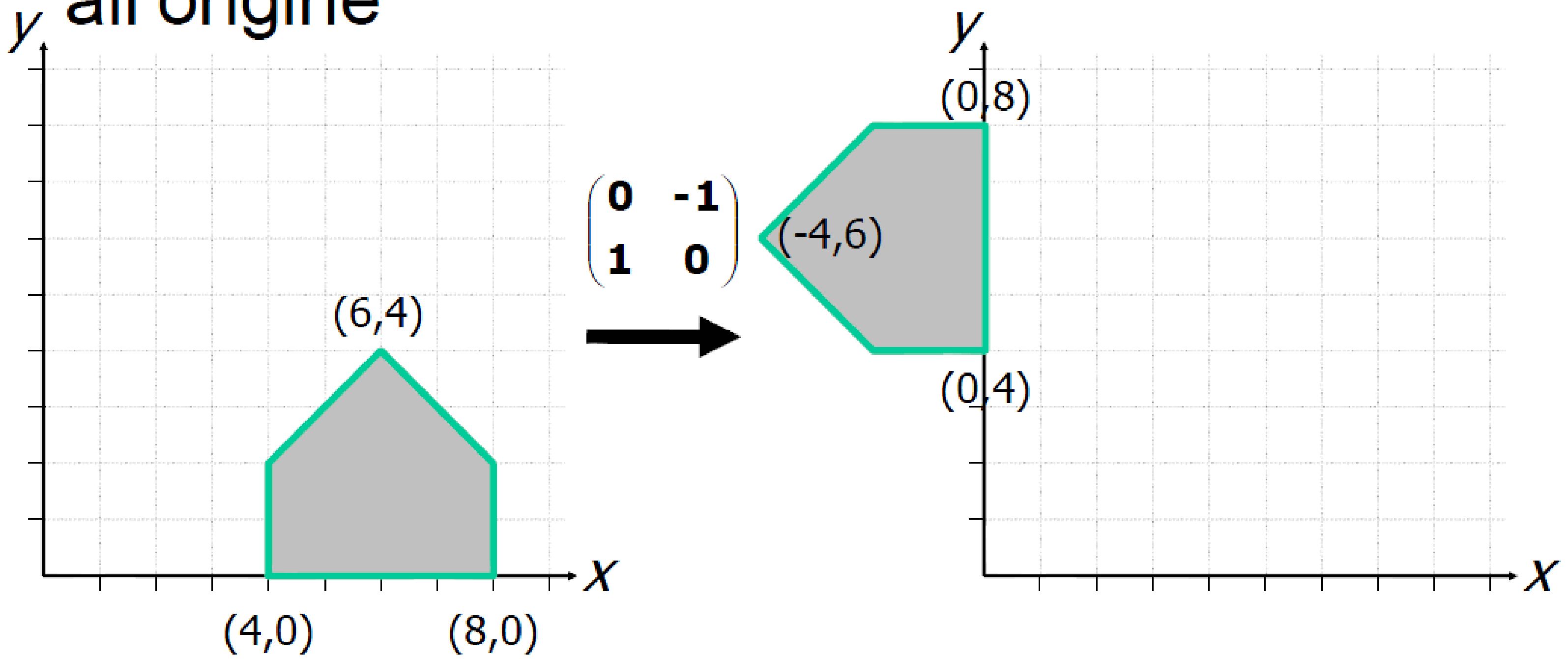
- In notazione matriciale abbiamo:

$$P' = \mathbf{R} \cdot P$$

- dove:

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}; \quad P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}; \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

- Esempio di rotazione di $\pi/2$ attorno all'origine



- Osservazioni:
  - Gli angoli sono considerati positivi quando misurati in senso antiorario;
  - Per le rotazioni di angoli negativi (senso orario) si ricorre alle identità:

$$\cos(-\theta) = cos(\theta); \quad \sin(-\theta) = -sin(\theta).$$

Le coordinate omogenee

L'ordine in cui si eseguono le trasformazioni è importante e funziona come uno stack: primo che entra è l'ultimo ad essere eseguito

- Le trasformazioni geometriche possono essere applicate in sequenza; la presenza di una

  somma di un punto con vettore

$$P' = P + \mathbf{T}$$

- e di *moltiplicazioni* (scalatura e rotazione):

$$P' = \mathbf{S} \cdot P$$

$$P' = \mathbf{R} \cdot P$$

- rende disomogenea la concatenazione di trasformazioni. P`=S(R(P+T))+T’

Trasformazioni e coordinate omogenee

- Nella notazione in coordinate omogenee possiamo riscrivere le trasformazioni geometriche di base come:
- *Trasformazione di traslazione*:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Concatenazione di due traslazioni

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & d_{x1} \\ 0 & 1 & d_{y1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_{x2} \\ 0 & 1 & d_{y2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_{x1} + d_{x2} \\ 0 & 1 & d_{y2} + d_{y2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- *Trasformazione di scalatura*:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

- *Trasformazione di rotazione*:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Altre trasformazioni: riflessione

Riflessione rispetto all'asse x:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Riflessione rispetto all'asse y:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Riflessione rispetto all'origine degli assi:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Deformazione (shear)

- Deformazione rispetto all'asse x:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Deformazione rispetto all'asse y:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

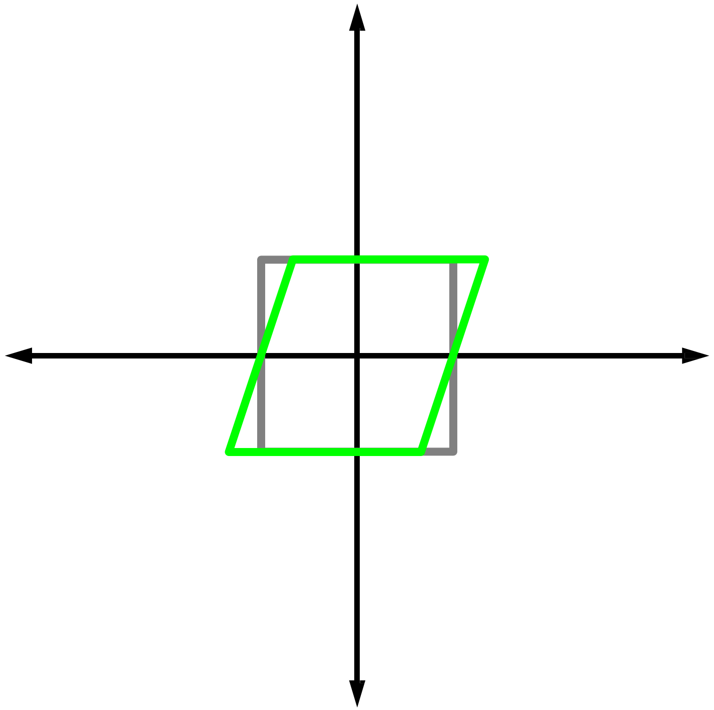
- Riflessione rispetto entrambi gli assi:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

2-D Shear (Horizontal)

s (positivo per la figura sotto)

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & s & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$



$$x' = x + sy$$

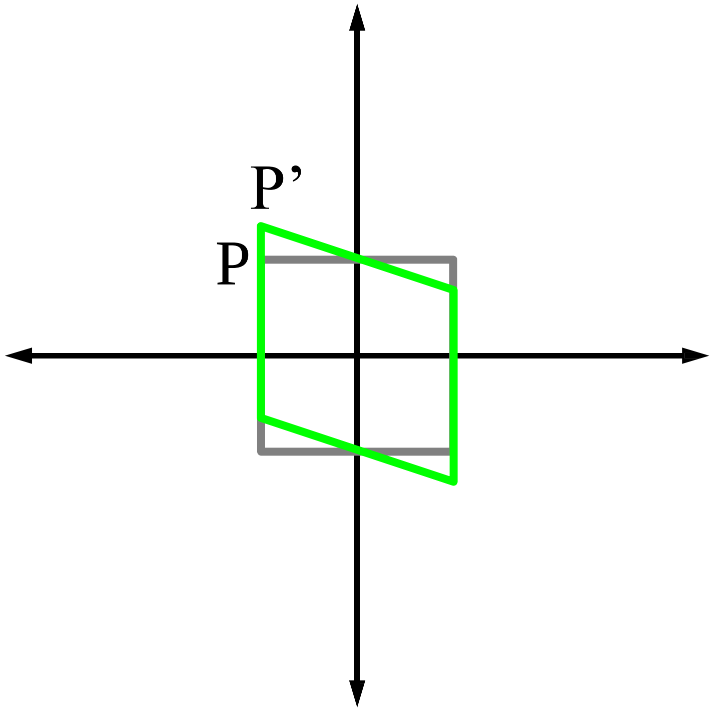
$$y' = y$$

Spostamento orizzontale proporzianel alla posizione verticale

2-D Shear (Verticale)

S (negativo per la figura sotto)

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ S & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$



$$x' = x$$

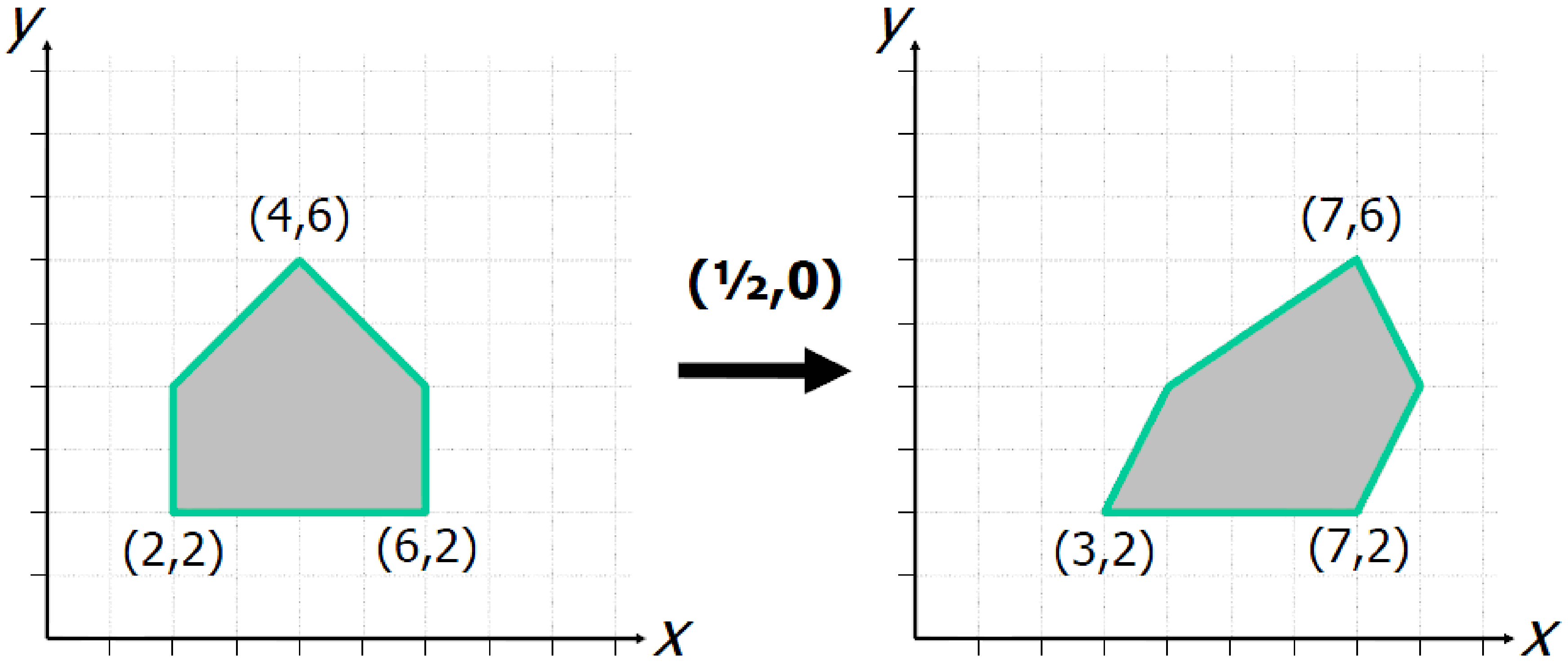
$$y' = y + sx$$

- Dalle relazioni:

$$x' = x + ay \quad y' = y + bx$$

risulta evidente come la deformazione lungo l'asse x sia linearmente dipendente dalla coordinata y e la deformazione in y sia strettamente correlata all'ascissa del punto.

Esempio di deformazione con: $a=\frac{1}{2}$ e $b=0$



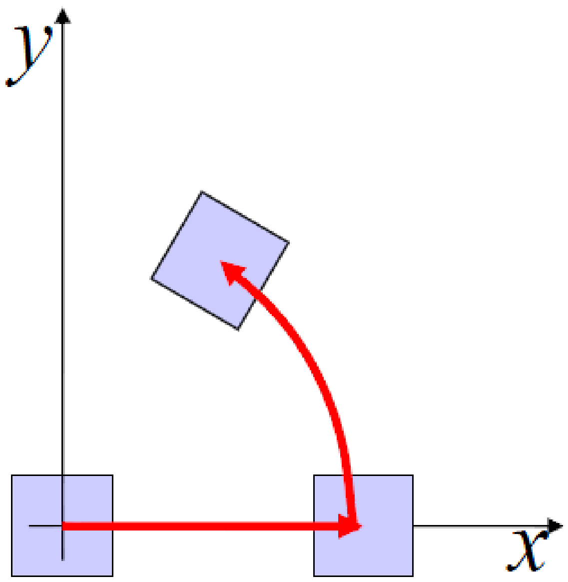
Composizione di Trasformazioni

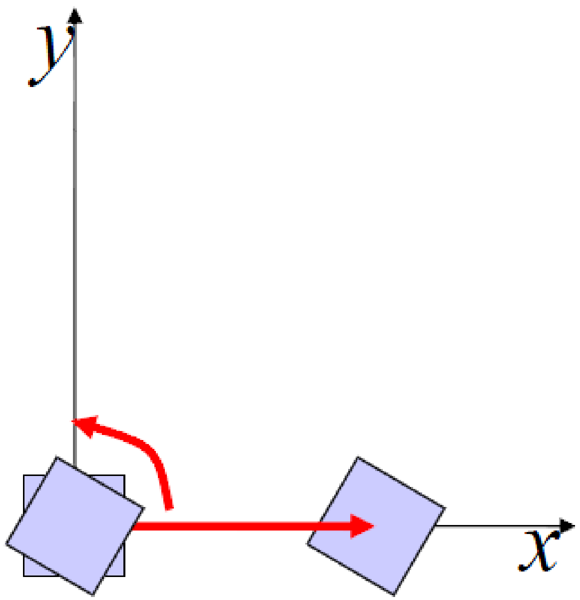
- La rappresentazione in coordinate omogenee permette la concatenazione di trasformazioni;
- L'ordina di concatenazione è importante perché le trasformazioni geometriche sono associative ma non sono (in generale) commutative;
- La corretta sequenza delle trasformazioni T_1, T_2, T_3 e T_4 si ottiene componendo T come:

$$T = T_4 \cdot T_3 \cdot T_2 \cdot T_1$$

L'ordine in cui si eseguono le trasformazioni è importante e funziona come uno stack: primo che entra è l'ultimo ad essere eseguito

Non commutatività della composizione di trasformazioni: traslazione seguita da rotazione attorno all'origine (sinistra) e rotazione intorno all'origine seguita da traslazione (destra).

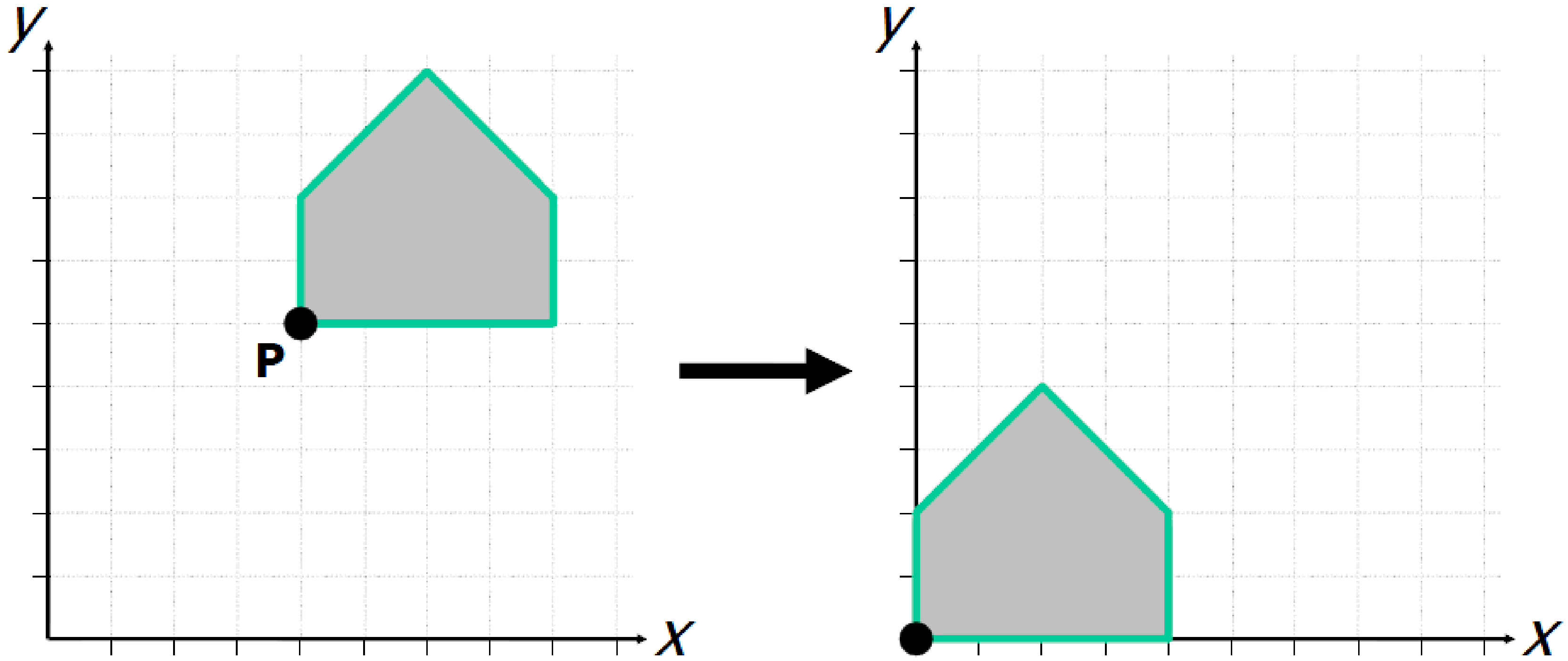




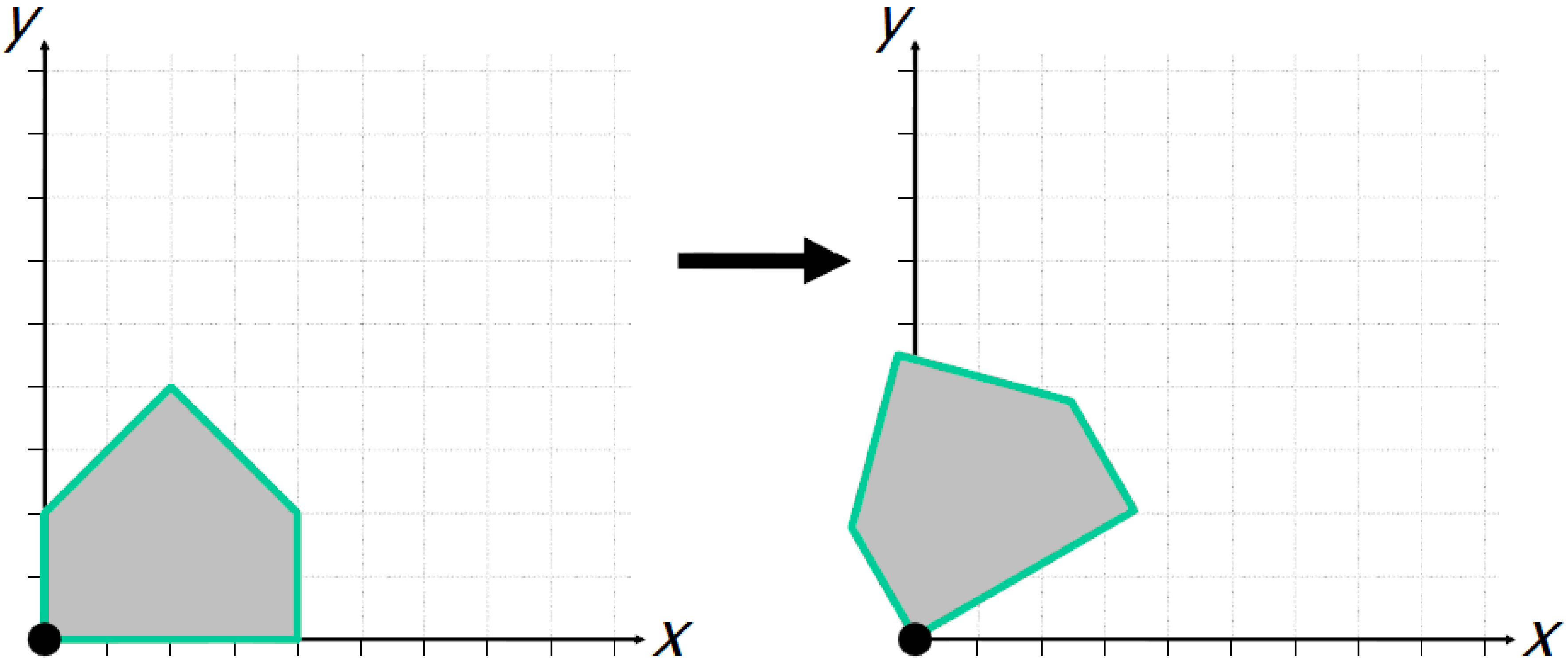
- Rotazione oraria di un angolo θ attorno ad un punto P generico:
  - Traslazione che muove P nell'origine degli assi;
  - Rotazione attorno all'origine;
  - Traslazione opposta alla precedente che riporta P nella sua posizione originale.

$$\mathbf{R}_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & P_x \\ 0 & 1 & P_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\,\theta & 0 \\ sen\,\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -P_x \\ 0 & 1 & -P_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

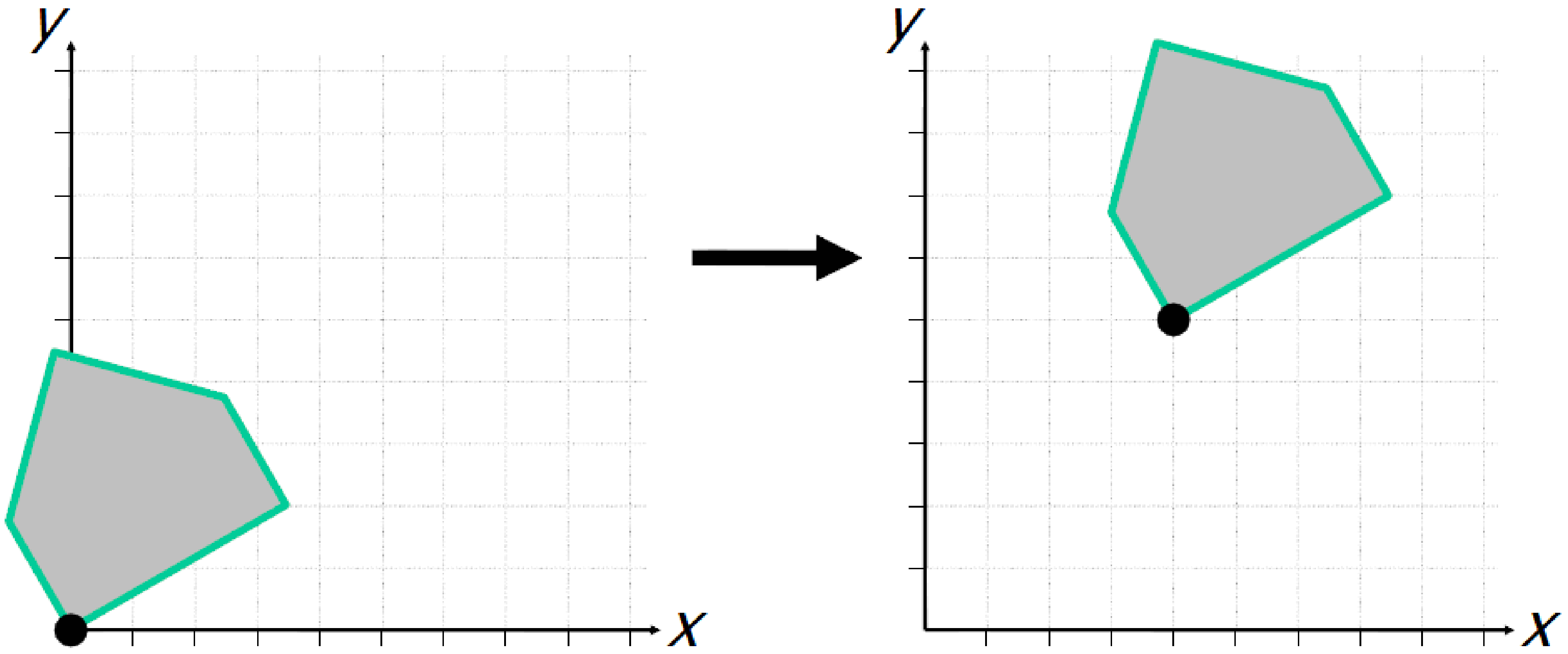
- Rotazione θ attorno ad un punto P.
  - *Passo 1:* Traslazione di P nell'origine degli assi



- Rotazione θ attorno ad un punto P.
  - *Passo 2:* Rotazione attorno all'origine ($\theta = \pi/6$)



- Rotazione θ attorno ad un punto P.
  - *Passo 3:* Traslazione opposta alla precedente



- Trasformazione di scalatura attorno ad un punto P generico:
  - Traslazione che muove P nell'origine degli assi;
  - Trasformazione di scala attorno all'origine;
  - Traslazione opposta alla precedente che riporta P nella sua posizione originale.

$$\mathbf{R}_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & P_x \\ 0 & 1 & P_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -P_x \\ 0 & 1 & -P_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Invertibilità delle trasformazioni

Sia M, una trasformazione tra quelle che abbiamo visto (traslazione,scalatura, rotazione,etc).

Poiché M é non singolare, allora esiste la matrice inversa M^{-1} tale che

$$MM^{-1} = I,$$

dove I rappresenta la matrice identità.

Allora applicare ad un punto P', trasformato di P mediante M, la matrice inversa della matrice di trasformazione M equivale a riottenere P.

Se $P' = MP$, allora moltiplicando a destra e sinistra per M^{-1} otteniamo $P = M^{-1}P'$.

Fortunatamente per le trasformazioni viste le matrici inverse sono particolarmente semplici da calcolare.

Infatti, **l'inversa della matrice di trasformazione di rotazione R** di un angolo ϑ è data dalla matrice di rotazione di un angolo $-\vartheta$:

$$\boldsymbol{R(-\vartheta) = R^T(\vartheta) = R^{-1}(\vartheta)}$$

(R è infatti una matrice ortogonale).

- **L'inversa della trasformazione di traslazione T di un vettore *t*:**
- $\boldsymbol{T^{-1}(t) = T(-t)}$.
- **L'inversa della trasformazione di scala S:**
- $\boldsymbol{S^{-1}(s) = S(1/sx, 1/sy)}$.

Trasformazioni 3D

- Se tutte le trasformazioni nel piano possono essere rappresentate (in coordinate omogenee) da matrici 3×3, le trasformazioni nello spazio possono essere rappresentate da matrici 4×4
- Nello spazio un punto in coordinate omogenee è rappresentato da una quadrupla: (X, Y, Z, W)

Traslazione 3D

- La matrice di traslazione in 3D è una semplice estensione della matrice 2D

$$\mathbf{T}(d_x, d_y, d_z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Scalatura 3D

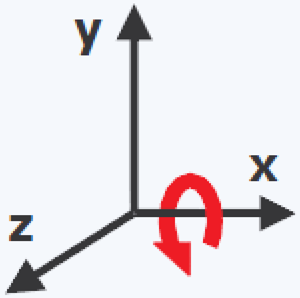
- Anche la matrice di scalatura è una semplice estensione della matrice 2D

$$\mathbf{S}(s_x, s_y, s_z) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotazione 3D

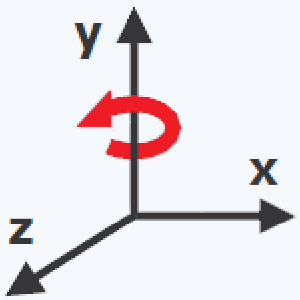
- La matrice che descrive la rotazione generica nello spazio (dove generica significa attorno ad un asse qualsiasi) è invece molto più complessa
- Ci viene in aiuto la proprietà che qualunque rotazione 3D si può ottenere come composizione di 3 rotazioni attorno agli assi coordinati

Rotazione intorno all'asse x



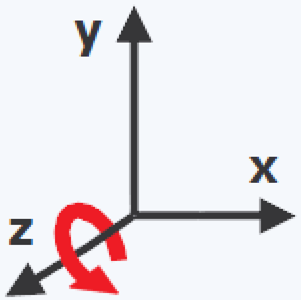
$$\mathbf{R}_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotazione intorno all'asse y



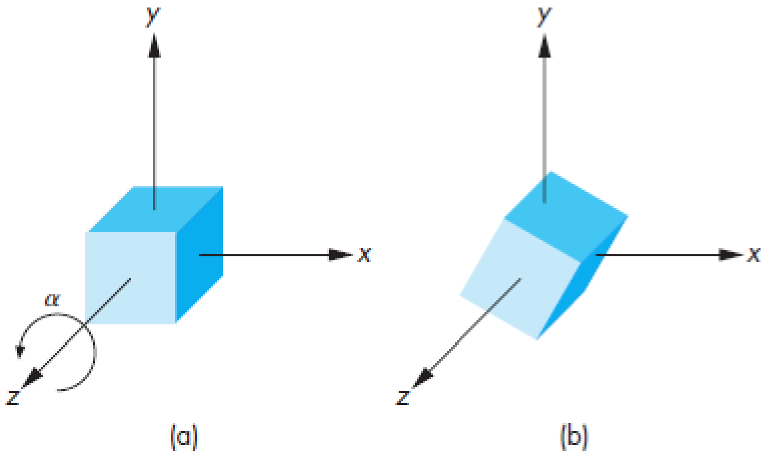
$$\mathbf{R}_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotazione intorno all'asse z

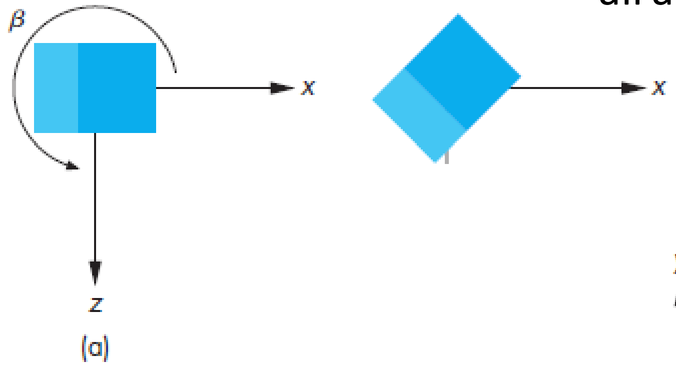


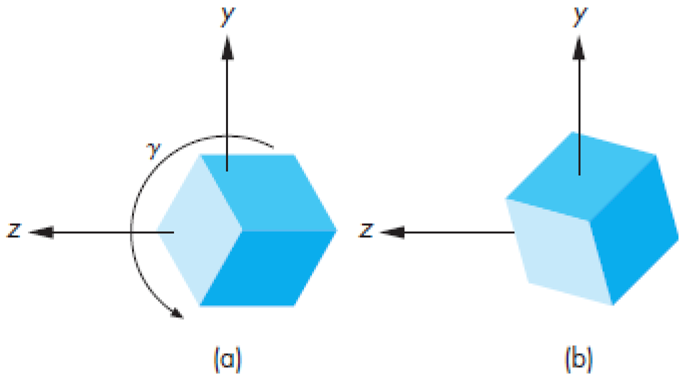
$$\mathbf{R}_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotazione intorno all’asse z

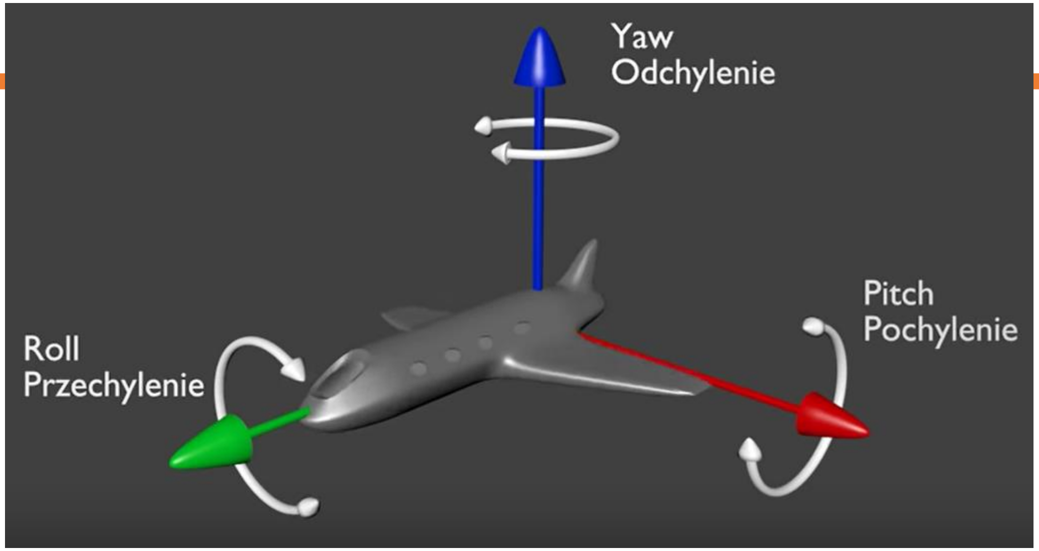


Rotazione intorno all’asse y



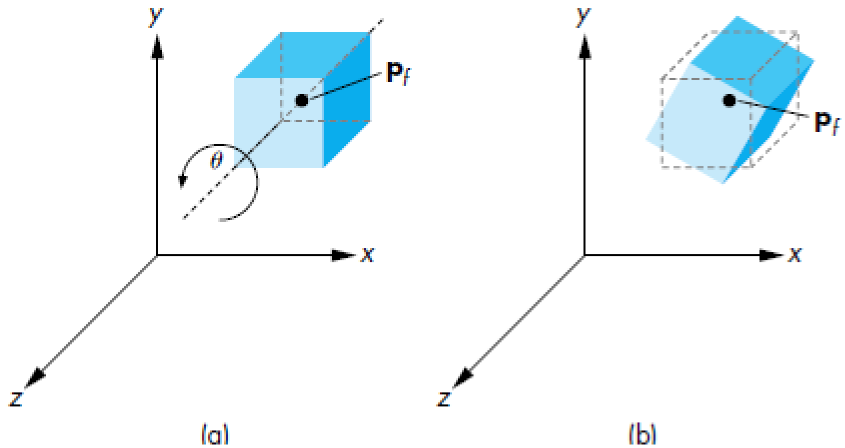


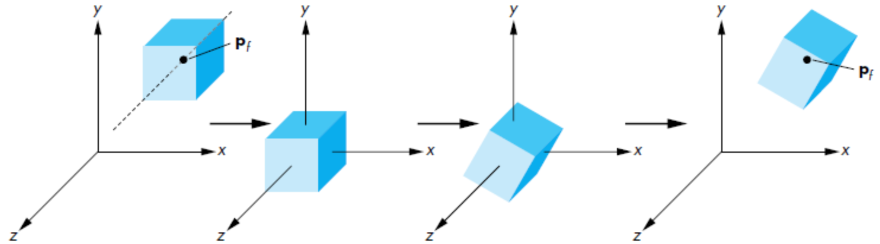
Rotazione intorno all’asse x



Rollio (Roll)= rotazione intorno all’asse Z
Beccheggio (Pitch)= rotazione intorno all’asse X
Imbardata (Yaw) = rotazione intorno all’asse Y

Rotazione di un cubo intorno al suo centro di un angolo theta intorno all'asse z



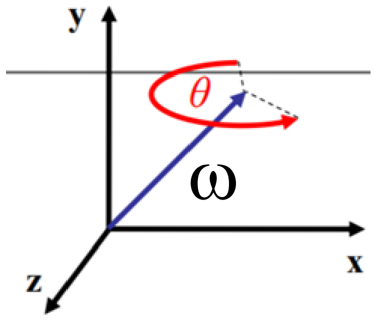


$$M = T(P_f)R_z(\theta)T(-P_f)$$

Rotazione di un angolo θ intorno ad un asse generico ω. Formule di Rodrigues

- Sia ω il versore di un generico asse di rotazione, ω= $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ e θ un angolo di rotazione

Ruotare rispetto ad un asse di un altro sistema di riferimento



$$\begin{bmatrix} \cos\theta + \omega_x^2(1-\cos\theta) & \omega_x\,\omega_y(1-\cos\theta) - \omega_z\sin\theta & \omega_y\sin\theta + \omega_x\,\omega_z(1-\cos\theta) \\ \omega_z\sin\theta + \omega_x\,\omega_y(1-\cos\theta) & \cos\theta + \omega_y^2(1-\cos\theta) & -\omega_x\sin\theta + \omega_y\,\omega_z(1-\cos\theta) \\ -\omega_y\sin\theta + \omega_x\,\omega_z(1-\cos\theta) & \omega_x\sin\theta + \omega_y\,\omega_z(1-\cos\theta) & \cos\theta + \omega_z^2(1-\cos\theta) \end{bmatrix},$$