Đề thi tuyển sinh
Trại hè Toán học và Ứng dụng 2021

—KIẾN THỨC BỔ SUNG PHẦN TOÁN HỌC—

Đây là file sơ lược kiến thức về đại số tuyến tính và xác suất cho đề kiểm tra năng lực cho trại hè PiMA năm 2021. Ngoài việc đọc tài liệu này, bạn được khuyến khích tìm hiểu thêm bằng cách đọc các nguồn khác nói về các khái niệm và công thức được đề cập sau đây. Một cách tìm kiếm hiệu quả là gõ tên các khái niệm vào thanh tìm kiếm của trang web www.google.com.

Mục lục

1 Làm quen với Đại số Tuyến tính

Ứng dụng của Đại số Tuyến tính trong Machine Learning không quá sâu, nhưng rất quan trọng. Bất cứ ai muốn hiểu cách các mô hình Máy học phổ biến hoạt động đều cần có hiểu biết về các phép tính trong Ma trận. Bạn sẽ được trực tiếp thử sức với các phép tính Ma trận trong phần Đề thi, sau đây sẽ là các khái niệm cơ bản không kèm ví dụ.

1.1 Khái niệm

Định nghĩa 1 (Ma trận) *Cho $m, n \in \mathbb{N}$ và một trường $\mathbb{F}$. Một Ma trận $m \times n$ trên $\mathbb{F}$ là một bảng chữ nhật gồm m dòng, n cột với $m \times n$ hệ số thuộc $\mathbb{F}$ có dạng*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad a_{ij} \in \mathbb{F} \text{ với mỗi } i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Viết tắt: $A = (a_{ij})_{m \times n}$ hay $A = (a_{ij})$.
Trong đó, a_{ij} là phần tử nằm ở dòng i, cột j của ma trận A.

Lưu ý: *Trường* là một khái niệm phức tạp, tuy nhiên bạn có thể hiểu các tập hợp sau đây là những trường: Tập hợp số hữu tỉ $\mathbb{Q}$, tập hợp số thực $\mathbb{R}$. Trong thực tế, đa số thời gian ta chỉ quan tâm đến các ma trận trên trường $\mathbb{R}$.

Định nghĩa 2 (Ma trận vuông) *Ma trận vuông là ma trận có số dòng bằng số cột. Ta nói ma trận vuông cấp n ý chỉ ma trận kích thước $n \times n$. Tập hợp các ma trận vuông cấp n trên trường $\mathbb{F}$ được ký hiệu là $M_n(\mathbb{F}$.*

Như vậy, tập hợp các ma trận vuông cấp n với các hệ sọ thực là $M_n(\mathbb{R})$.

Định nghĩa 3 (Ma trận đường chéo) *Ma trận đường chéo là ma trận vuông với các hệ số nằm ngoài đường chéo bằng 0.*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Định nghĩa 4 (Ma trận đơn vị) *Ma trận đơn vị là ma trận đường chéo có các phần tử trên đường chéo bằng 1.*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}.$$

Định nghĩa 5 *Hai ma trận cùng kích thước $m \times n$: $A = (a_{ij})$ và $B = (b_{ij})$ được xem là* **bằng nhau** *(ký hiệu $A = B$) nếu mọi phần tử của A bằng với phần tử ở vị trí tương ứng của B, hay*

$$a_{ij} = b_{ij}, \quad \text{với mỗi } i \in \{1, 2, \ldots m\}, j \in \{1, 2, \ldots n\}$$

1.2 Phép toán trên Ma trận

Trước tiên ta tìm hiểu về phép chuyển vị, một phép toán đặc trưng chỉ có ở Ma trận.

Định nghĩa 6 (Phép chuyển vị) *Cho $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Ma trận chuyển vị của A, ký hiệu A^T, là ma trận kích thước $n \times m$ sao cho.*

$$(A^T)_{ji} = (A)_{ij},$$

với mọi $i \in \{1, 2, \ldots, m\}, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Bây giờ ta đến với các phép toán mô phỏng các phép toán giữa số thực.

Định nghĩa 7 (Phép nhân vô hướng) *Cho ma trận $A \in \mathbb{R}^{m \times x}$ và $\alpha \in \mathbb{R}$. Ta định nghĩa kết quả của* **phép nhân vô hướng** *giữa α và A là ma trận kích thước $m \times n$ (ký hiệu αA) có được bằng cách nhân mỗi hệ số của A với α.*

$$(\alpha A)_{ij} = \alpha A_{ij},$$

với mọi $i \in \{1, 2, \ldots, m\}, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Ngoài ra, $-A = (-1)A$.

Định nghĩa 8 (Phép cộng) *Cho hai ma trận cùng loại $m \times n$: $A = (a_{ij})$ và $B = (b_{ij})$, ta định nghĩa* **tổng** *hai ma trận A và B (ký hiệu $A + B$) là ma trận $m \times n$ mà các hệ số có được bằng cách lấy tổng của các hệ số tương ứng của A và B, nghĩa là:*

$$(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij},$$

với mọi $i \in \{1, 2, \ldots, m\}, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Ngoài ra, $A - B = A + (-B) = (a_{ij} - b_{ij})_{m \times n}$ là hiệu hai ma trận.

Phép nhân ma trận là phép tính phức tạp hơn hẳn bởi nó không chỉ đơn thuần là nhân hai phần tử cùng vị trí.

Định nghĩa 9 (Phép nhân) *Cho hai ma trận $A = (a_{ij})_{m \times n}$ kích thước $m \times n$ và $B = (b_{ij})_{n \times p}$ kích thước $n \times p$, ta định nghĩa tích hai ma trận A và B, ký hiệu AB, là ma trận C kích thước $m \times p$ mà các hệ số có được theo công thức:*

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj},$$

với mọi $i \in \{1, 2, \ldots, m\}, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Theo định nghĩa trên, để thực hiện được phép nhân, điều kiện cần và đủ là số cột của A phải bằng với số dòng của B.

Định nghĩa 10 (Phép lũy thừa) *Cho ma trận vuông* $A = (a_{ij})_{n\times n}$, *ta định nghĩa lũy thừa bậc* k *của ma trận, kí hiệu* A^k, *là:*

$$A^k = \begin{cases} A, & k = 1 \\ A^{k-1}A, & k > 1 \end{cases}.$$

2 Sơ lược về xác suất

Lưu ý: Nếu bạn đã học về xác suất ở trường lớp hoặc đã làm quen với xác suất, có thể bỏ qua phần sơ lược này để đọc về Xác suất có điều kiện và công thức Bayes ở phần tiếp theo.

Xác suất là những số thực không âm gắn liền với các phép thử ngẫu nhiên, nhằm ước đoán khả năng những kết quả khác nhau xảy ra. Đối với một phép thử ngẫu nhiên, ta lần lượt có các khái niệm: không gian mẫu, biến cố và xác suất của biến cố, biến ngẫu nhiên và phân phối của biến ngẫu nhiên.

2.1 Không gian mẫu

Với một phép thử ngẫu nhiên T, *không gian mẫu* của T, ký hiệu Ω_T, là tập hợp các kết quả có thể của T. **Ví dụ:**

- Nếu T là tung 1 đồng xu và quan sát, $\Omega_T = \{\text{Sấp}, \text{Ngửa}\}$.
- Nếu T là tung đồng xu n lần, Ω_T là tập hợp các dãy n trạng thái Sấp hoặc Ngửa. $\Omega_T = \{\text{Sấp}, \text{Ngửa}\}^n$.
- Nếu T là tung 1 đồng xu liên tục tới khi ra mặt Ngửa và ghi lại số lần tung, $\Omega_T = \mathbb{N}$.
- Nếu T là tung 1 quả bóng theo một hướng ngẫu nhiên và lực ngẫu nhiên, Ω_T là tập hợp các điểm trên mặt phẳng quả bóng rơi xuống.

2.2 Biến cố

Với một phép thử T cho ra kết quả trong không gian mẫu Ω, một *biến cố* được định nghĩa là một tập hợp con của Ω. Trên thực tế, một biến cố A thường là một nhóm các kết quả có cùng một tính chất chung P_A nào đó, và P_A có thể được dùng thay thế cho A. **Ví dụ:**

- Với phép thử tung đồng xu 1 lần, $\{\text{Sấp}\}$ là một biến cố.
- Với phép thử rút một lá bài ngẫu nhiên từ bộ bài Tây, tập hợp các lá bài chất Cơ là một biến cố, có thể được viết tương đương là "Rút được lá Cơ" hoặc $\{\text{Cơ}\}$.

- Với phép thử tung xúc xắc 1 lần, tập hợp $\{2, 4, 6\}$ là một biến cố, có thể được viết tương đương là "Tung được số chẵn" hoặc $\{\text{Chẵn}\}$.

Vì bản chất của biến cố là các tập hợp, ta có các biến cố đặc biệt tương ứng với các tập con đặc biệt của Ω, cũng như có thể thực hiện các phép toán trên biến cố giống như trên tập hợp,. Cho không gian mẫu Ω, và các biến cố A, B và $A_1, A_2, \ldots$, ta có các khái niệm:

Tên gọi	Ký hiệu	Mô tả bằng từ	Dạng tập hợp
Biến cố rỗng	$\varnothing$	Biến cố không thể xảy ra	$\varnothing$ (tập hợp rỗng)
Biến cố đầy đủ	Ω	Biến cố luôn luôn xảy ra	Ω (toàn bộ không gian mẫu)
Biến cố đối ngẫu của A	$\neg A$ hoặc $\overline{A}$	Không xảy ra A	$\{\omega \in \Omega : \omega \notin A\}$
Biến cố giao của A và B	AB hoặc $A \wedge B$	Xảy ra cả A và B	$\{\omega \in \Omega : \omega \in A \wedge \omega \in B\}$
Biến cố giao của $A_1, A_2, \ldots$	$\bigwedge_{i=1}^{\infty} A_i$	Tất cả A_i cùng xảy ra	$\{\omega \in \Omega : \forall i, \omega \in A_i\}$
Biến cố hợp của A và B	$A \vee B$	Ít nhất A hoặc B xảy ra	$\{\omega \in \Omega : \omega \in A \vee \omega \in B\}$
Biến cố hợp của $A_1, A_2, \ldots$	$\bigvee_{i=1}^{\infty} A_i$	Tồn tại i để A_i xảy ra	$\{\omega \in \Omega : \exists i, \omega \in A_i\}$

Bảng 1: Các phép toán trên biến cố

2.3 Xác suất

Xác suất xảy ra của một biến cố A là một số thực thuộc đoạn $[0, 1]$, bằng với tỉ lệ số lần ra được kết quả thuộc A khi thực hiện phép thử T rất nhiều lần. Nói một cách toán học, khi thực hiện phép thử T liên tục, và gọi $x_k \in \Omega$ là kết quả của lần thử thứ k. Đặt $N(A) = \{k \leq n \mid x_k \in A\}$, khi đó:

$$\Pr(A) = \lim_{n \to +\infty} \frac{|N(A)|}{n}$$

Trong đó $\Pr(A)$ là ký hiệu cho xác suất xảy ra A. Ta thừa nhận như một tiên đề rằng giới hạn trên luôn tồn tại với mọi phép thử ngẫu nhiên. **Ví dụ:**

- Khi tung một đồng xu mà 2 mặt nặng như nhau, $\Pr(\text{Sấp}) = \Pr(\text{Ngửa}) = 1/2$.
- Khi tung một viên xúc xắc 6 mặt, $\Pr(i) = 1/6$ với mỗi $i = 1, 2, \ldots 6$.
- Với một tập hợp hữu hạn S bất kì, đồng nhất tập hợp $A \subset S$ với biến cố A, khi đó ứng với việc chọn một phần tử của S ngẫu nhiên sao cho mọi phần tử đều có khả năng được chọn như nhau, ta có $\Pr(A) = \frac{|A|}{|S|}$.

Dựa vào định nghĩa trên hoặc lý luận logic, bạn có thể tự chứng minh các tính chất sau:

- $\Pr(\varnothing) = 0$ và $\Pr(\Omega) = 1$.
- Với mọi biến cố A, $\Pr(\neg A) = 1 - \Pr(A)$.

- Với mọi biến cố A và B, $\Pr(AB) + \Pr(A \vee B) = \Pr(A) + \Pr(B)$.

2.4 Biến ngẫu nhiên - Phân phối

Cho một phép thử T với không gian mẫu Ω. Một hàm số $X : \Omega \to \mathbb{R}$ được gọi là một *biến ngẫu nhiên* trên Ω. Nói nôm na, biến ngẫu nhiên là một số có giá trị phụ thuộc vào một phép thử ngẫu nhiên nào đó. Với mỗi số thực x, biến cố $\{X = x\}$ chính là tập hợp $\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}$. Lưu ý:

- Với một biến ngẫu nhiên X trên một không gian mẫu Ω ứng với phép thử T nào đó, ta chỉ cần biết $\Pr(X = x)$ với mọi x là có thể hoàn toàn xác định các tính chất của X mà không cần quan tâm đến Ω và T. Trong thực tế, người ta thường dùng các biến ngẫu nhiên mà không nhắc đến phép thử và không gian mẫu liên quan.
- Một biến ngẫu nhiên được gọi là *rời rạc* nếu miền giá trị của nó là một tập hợp rời rạc. *Tập hợp rời rạc* là một khái niệm phức tạp, tuy nhiên bạn có thể hiểu một tập hợp hữu hạn, hoặc một tập con của $\mathbb{Z}$ là các ví dụ của tập hợp rời rạc.

Ví dụ:

- Với phép thử tung 1 đồng xu cho tới khi ra mặt Ngửa, số lần cần tung là một biến ngẫu nhiên có giá trị trong $\mathbb{N}$, do đó là một biến ngẫu nhiên rời rạc.
- Số bạn trong friend list của bạn bị biến mất sau cú búng tay của Thanos là một biến ngẫu nhiên rời rạc.
- Một biến ngẫu nhiên X thỏa mãn $X \in \{1, 2, \ldots n\}$ và $\Pr(X = k) = \frac{1}{n}$ với mỗi $k = 1, 2, \ldots, n$ là một biến ngẫu nhiên rời rạc.

Sự tiện lợi của biến ngẫu nhiên nằm ở việc nó có thể được xem xét một cách đầy đủ mà không cần biết phép thử ứng với nó. Trong tài liệu này ta chỉ xem xét đến các biến ngẫu nhiên rời rạc. Với một biến ngẫu nhiên rời rạc X có miền giá trị Ω_X, điều duy nhất ta cần biết là $\Pr(X = x)$ với mỗi $x \in \Omega_X$. Nếu xem xác suất trên như một hàm số theo x, ta có định nghĩa *hàm phân phối của* X như sau:

Cho biến ngẫu nhiên rời rạc X với miền giá trị Ω_X, *hàm phân phối xác suất* của X là một hàm số $p_X : \Omega_X \to [0, 1]$ xác định bởi $p(x) = \Pr(X = x)$ với mỗi $x \in \Omega_X$.

Mọi tính chất của biến ngẫu nhiên có thể được suy ra từ hàm phân phối của nó. Bạn có thể tự chứng minh tính chất quan trọng sau đây của hàm phân phối: *Với mỗi biến ngẫu nhiên rời rạc X có miền giá trị Ω_X và hàm phân phối p_X, $\sum_{x\in\Omega_X} p_X(x) = 1$.* Một số **Ví dụ:**

- Biến ngẫu nhiên X nhận giá trị trong $\{1, 2, \ldots n\}$ và $\Pr(X = k) = \frac{1}{n}$ với mỗi $k = 1, 2, \ldots, n$ có hàm phân phối $p_X(k) = \frac{1}{n}$. Phân phối này còn gọi là *phân phối đều*.
- Biến ngẫu nhiên X nhận giá trị trong $\mathbb{N}_{>0}$ và $\Pr(X = n) = 2^{-n}$ có hàm phân phối $p_X(n) = 2^{-n}$. Phân phối này còn gọi là *phân phối hình học*.

Bạn có thể tự kiểm tra rằng $\sum_{x\in\Omega_X} p_X(x) = 1$ trong 2 ví dụ trên.

3 Xác suất có điều kiện - Định lý Bayes

Mối quan tâm trọng yếu của ngành Xác suất - Thống kê là tìm mối tương quan giữa các biến cố trong cùng một không gian mẫu. Một cách tìm hiểu mối liên hệ giữa 2 biến cố A và B là tìm hiểu việc A này xảy ra có ảnh hưởng đến xác suất B xảy ra hay không. Xác suất có điều kiện và định lý Bayes cho phép ta tính được sự ảnh hưởng này.

3.1 Phép thử tung xúc xắc

Phép thử sau sẽ được sử dụng nhiều lần làm ví dụ cho các khái niệm và công thức trong phần này. Tung một con xúc xắc, ta có $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Đặt 2 biến cố sau: $A = \{2, 35\}$ (Các mặt là số nguyên tố), $B = \{2, 4, 6\}$ (Các mặt chia hết cho 2). Khi đó $A \wedge B = \{2\}$ và $\Pr(A) = \Pr(B) = 1/2$, $\Pr(A \wedge B) = 1/6$.

3.2 Không gian mẫu con

Cho trước một phép thử T với không gian mẫu Ω và biến cố A. Việc xem xét các kết quả của T *trong điều kiện* A đã xảy ra có thể xem như một phép thử T_A khác. Cụ thể hơn, T_A là phép thử được thực hiện theo 2 bước:

1. Thực hiện phép thử T.
2. Nếu kết quả nằm trong A (tức biến cố A xảy ra), ghi nhận lại kết quả. Nếu không, quay lại bước 1.

Ta gọi T_A là *phép thử con* của T ứng với biến cố A. Dễ thấy không gian mẫu của T_A chính là A. Ta gọi A là một *không gian mẫu con* của Ω.

Như vậy, một biến cố bất kỳ cũng chính là một không gian mẫu con. Việc đổi góc nhìn này giúp ta đến với khái niệm xác suất có điều kiện.

3.3 Xác suất có điều kiện

Cho hai biến cố A và B có cùng không gian mẫu Ω. *Xác suất xảy ra A với điều kiện B*, hoặc *Xác suất xảy ra A biết B*, ký hiệu $\Pr(A|B)$, là xác suất xảy ra biến cố $A \wedge B$ trên không gian mẫu con B. Chú ý rằng $A \wedge B \subset B$, do đó tập hợp $A \wedge B$ có thể được xem như một biến cố của không gian mẫu B. **Ví dụ:**

- Xét phép thử trong ở 3.1. Ta có $\Pr(A|B)$ là xác suất tung được 2 **trong các lần** tung được $2, 4$ hoặc 6. Do các mặt này là như nhau, $\Pr(A|B) = 1/3$.
- Khi rút một quân bài ngẫu nhiên trong bộ bài Tây, Ω là 52 lá có thể. Giả sử $A = \{\text{Rút được quân Át}\}$ và $B = \{\text{Rút được quân thuộc chất Cơ}\}$. Khi đó $A \wedge B = \{\text{Át Cơ}\}$ và $\Pr(A|B) = 1/13$ vì khả năng rút được các quân Cơ là như nhau.

Xác suất có điều kiện là công cụ đắc lực để khảo sát quan hệ giữa các biến cố. Sự có mặt của một biến cố B có thể ảnh hưởng lớn đến xác suất xảy ra một biến cố A khác. Khi điều này xảy ra ta nói A *phụ thuộc* vào B. **Ví dụ:**

- Xét phép thử ở 3.1. $\Pr(A|B) = 1/3$ trong khi $\Pr(A) = 3/6 = 1/2$. Như vậy việc tung được số nguyên tố phụ thuộc vào việc tung được số chẵn.
- Xét cú búng tay của Thanos, xác suất bị biến mất của bạn là khoảng $1/2$. Tuy nhiên nếu tên bạn là Tony Stark, xác suất bị biến mất sẽ là 0. Do đó việc bị biến mất phụ thuộc vào tên bạn.

3.4 Định lý Bayes

Định lý Bayes được phát biểu như sau: Cho hai biến cố A và B có cùng không gian mẫu Ω. Khi đó:

1. $\Pr(A|B)\Pr(B) = \Pr(A \wedge B)$.
2. Nếu $\Pr(B) > 0$, $\Pr(A|B) = \dfrac{\Pr(B|A)\Pr(A)}{\Pr(B)}$.

Bạn có thể tự chứng minh rằng vế 1 có thể suy ra vế 2. Ngoài ra, trong trường hợp Ω là hữu hạn, bạn hoàn toàn có thể chứng minh được vế 1. **Gợi ý:** Xét trường hợp các kết quả trong Ω có xác suất đạt được như nhau, và viết công thức của $\Pr(B)$, $\Pr(A|B)$ và $\Pr(AB)$ dựa trên số phần tử của các tập hợp này và Ω. Một số **Ví dụ:**

- Lại xét phép thử 3.1. Như đã biết, $\Pr(A) = \Pr(B) = 1/2$. Hơn nữa, $A \wedge B = \{2\}$, do đó $\Pr(A \wedge B) = 1/6$. Như vậy:

  $$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(A \wedge B)}{\Pr(B)} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3},$$

  đúng với tính toán ở phần trước.
- Một biến ngẫu nhiên X nhận giá trị trong $\mathbb{N}_{>0}$ có phân phối $p(n) = 2^{-n}$. Khi đó

  $$\Pr(X = 3 \mid X > 1) = \frac{\Pr(X = 3 \wedge X > 1)}{\Pr(X > 1)} = \frac{\Pr(X = 3)}{1 - \Pr(X = 1)} = \frac{1/8}{1 - 1/2} = \frac{1}{4}$$

Một số tính chất của xác suất có điều kiện mà bạn có thể tự chứng minh:

- Nếu $\Pr(A) > 0$, $\Pr(\varnothing|A) = 0$ và $\Pr(\Omega|A) = 1$.
- Nếu $\Pr(B) > 0$, mọi phép toán ở phần 2.3 đều đúng khi đặt dưới điều kiện B.
- Với mọi biến cố A và B, $\Pr(A) = \Pr(A|B)\Pr(B) + \Pr(A|\neg B)\Pr(\neg B)$.

3.5 Tính phụ thuộc và độc lập

Như đã nhắc đến, biến cố A phụ thuộc vào biến cố B nếu $\Pr(A|B) \neq \Pr(A)$. Từ vế 2, có thể thấy nếu A phụ thuộc vào B thì điều ngược lại cũng đúng, do đó ta có thể nói A và B phụ thuộc lẫn nhau. Đối lại, nếu $\Pr(A|B) = \Pr(A)$ và $\Pr(B) > 0$, ta nói A *độc lập* với B. Dễ thấy $\Pr(B|A) = \Pr(B)$ cũng đúng do vế 2.

Để giải quyết tình huống $\Pr(B) = 0$, ta có thể "giảm nhẹ" biểu thức $\Pr(A|B) = \Pr(B)$ bằng cách dùng vế 1. Định nghĩa chính thức của tính độc lập:

Công thức nhân: A và B độc lập với nhau nếu và chỉ nếu $\Pr(A \wedge B) = \Pr(A)\Pr(B)$.

Bạn có thể tự chứng minh điều này tương đương với việc $\Pr(A|B) = \Pr(A)$ nếu $\Pr(B) > 0$.

Tính chất cơ bản của tính độc lập là *hai biến cố độc lập nếu chúng đến từ hai phép thử độc lập nhau*. Cụ thể hơn, nếu phép thử T là hợp của 2 phép thử tách biệt nhau T_1 và T_2 với không gian mẫu lần lượt là Ω_1 và Ω_2, T sẽ có không gian mẫu $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$. Khi đó với mỗi $A_1 \subset \Omega_1$ và $A_2 \subset \Omega_2$, $A_1 \times \Omega_2$ và $\Omega_1 \times A_2$ độc lập với nhau.

Ngược lại, 2 biến cố vẫn có thể độc lập nếu chúng đến từ cùng một phép thử. Việc chứng minh chúng độc lập khi đó thường dựa vào công thức nhân ở trên. Trong thực tế, ta thường biết được các biến cố là độc lập dựa vào lý luận logic (ví dụ như chúng phụ thuộc vào các yếu tố độc lập nhau), sau đó áp dụng công thức nhân để tìm xác suất chúng cùng xảy ra.

Công thức nhân tổng quát: $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *độc lập lẫn nhau* nếu và chỉ nếu

$$\Pr\left(\bigwedge_{i\in S} A_i\right) = \prod_{i\in S} \Pr(A_i) \text{ với mọi } S \subset \{1, 2, \ldots n\}$$

Ví dụ: Khi $n = 3$, A_1, A_2 và A_3 độc lập lẫn nhau khi và chỉ khi chúng *đôi một độc lập*, tức là

$$\begin{aligned}\Pr(A_1 \wedge A_2) &= \Pr(A_1)\Pr(A_2)\\ \Pr(A_2 \wedge A_3) &= \Pr(A_2)\Pr(A_3)\\ \Pr(A_3 \wedge A_1) &= \Pr(A_3)\Pr(A_1)\end{aligned}$$

và

$$\Pr(A_1 \wedge A_2 \wedge A_3) = \Pr(A_1)\Pr(A_2)\Pr(A_3).$$

4 Bài tập tự luyện

Bạn có thể thử sức với các bài tập sau để tự kiểm tra lại độ hiểu biết của mình. **Lưu ý:** Chúng **không phải** là đề thi và sẽ không được tính điểm nếu các bạn nộp lời giải cho chúng mình.

1. Chứng minh tính chất $\Pr(A) + \Pr(B) = \Pr(A \vee B) + \Pr(A \wedge B)$ nếu Ω là hữu hạn.
2. Chứng minh định lý Bayes nếu Ω là hữu hạn.
3. Chứng minh tính chất $\Pr(A) = \Pr(A|B)\Pr(B) + \Pr(A|\neg B)\Pr(\neg B)$.
4. Rút ngẫu nhiên 2 lá bài từ một bộ bài Tây. Các tập hợp nào sau đây có thể là biến cố?
   (A) $\{3\heartsuit, 4\clubsuit, 5\spadesuit, 6\diamondsuit, 7\clubsuit\}$. (**Không**).
   (B) $\{(3\diamondsuit, 5\spadesuit), (4\heartsuit, 6\diamondsuit), (5\spadesuit, 7\diamondsuit), (-1\heartsuit, 2\clubsuit)\}$. (**Không**).
   (C) $\{(3\clubsuit, 5\spadesuit), (4\diamondsuit, 6\heartsuit), (5\spadesuit, 7\heartsuit)\}$. (**Có**).

(D) $\{(3\clubsuit, 5\heartsuit), (4\diamondsuit, 4\diamondsuit), (K\spadesuit, A\clubsuit)\}$. (**Không**).

5. Tính xác suất $\Pr(C)$ với biến cố C ở câu trên. (**Đáp số:** $\frac{1}{442}$).

6. Tung 2 con xúc xắc 4 mặt (bạn có thể thấy xúc xắc 4 mặt trong các board game như *Dungeons & Dragons, Shadows Hunters*) độc lập với nhau, gọi X_1 và X_2 là kết quả. Các cặp biến cố nào sau đây độc lập?

   (A) $\{X_1 = 1\}$ và $\{X_2 = 2\}$. (**Có**).

   (B) $\{X_1 = 2\}$ và $\{X_1 = 3\}$. (**Không**).

   (C) $\{X_1 = 4\}$ và $\{X_1 = 5\}$. (**Có**).

   (D) $\{X_1 = 1\}$ và $\{X_1 + X_2 = 5\}$. (**Có**).

7. Xét việc tung 2 con xúc xắc 4 mặt với kết quả X_1 và X_2 như trên. Đặt $A = \{X_1 = 2\}$, $B = \{X_1 + X_2 = 5\}$, $C = \{X_2 - X_1 \equiv 1 \mod 4\}$. Chứng minh rằng:

   (A) A và B độc lập.

   (B) A và C độc lập.

   (C) A và $B \wedge C$ phụ thuộc.

8. Xét việc tung 2 con xúc xắc 4 mặt với kết quả X_1 và X_2. Đặt $A = \{X_1 \equiv 0 \mod 2\}$, $B = \{X_2 \equiv 1 \mod 2\}$, $C = \{X_1 \equiv X_2 \mod 2\}$. Chứng minh rằng A, B và C đôi một độc lập nhưng không độc lập lẫn nhau.