№2

Th. 1 (Triangle Inequality). For any connected graph $G = (V, E)$

$$\forall x, y, z \in V : dist(x, y) + dist(y, z) \geq dist(x, z)$$

Proof: Докажем от противного.] $dist(x,y) + dist(y,z) < dist(x,z)$

По определению $dist(x,y)$ кратчайший путь из x в y, а $dist(y,z)$ кратчайший путь из y в z, но при этом $dist(x,z)$ – кратчайший путь из x в z, то есть он не может быть больше, чем сумма $dist(x,y)$ и $dist(y,z)$ – противоречие.

Th 2. (Tree) A connected graph $G = (V, E)$ is a tree iff $|E| = |V| - 1$

Proof:

$\Rightarrow$] граф является деревом. Докажем по методу индукции. Пусть дерево состоит из двух вершин, тогда их может связывать только одно ребро и условие $1 = 2 - 1$ соотношения числа рёбер и вершин выполняется.
Пусть дерево состоит из n вершин и для него условие $|E| = |V| - 1$ выполняется. Тогда для графа из $n+1$ вершины мы должны добавить ровно одно ребро, чтобы соединить новую вершину с графом, т.е. $|E'| = |E| + 1$, $|V'| = |V| + 1$, откуда соотношение $|E'| = |V'| - 1$ продолжает соблюдаться и для случая $n+1$; доказано по индукции.

$\Leftarrow$] в связном графе n вершин и m рёбер, причём $m = n - 1$.

Если в графе есть циклы, то удалим из каждого цикла по ребру и получим остовное дерево из n вершин и $m - k$ рёбер, где k – число удалённых рёбер. По доказанному выше свойству, если граф является деревом, то $|E| = |V| - 1$, тогда $n = m - k + 1$, но также $m = n - 1$

откуда $n = n - k \Rightarrow k = 0$ т.е. в исходном графе циклов нет, а следовательно исходный граф – дерево.

Theorem 3 (Whitney). For any graph G: $\kappa(G) \le \lambda(G) \le \delta(G)$

В худшем случае, чтобы граф стал несвязным, мы можем взять вершину с наименьшей степенью и удалить либо все инцидентные с ней рёбра, либо все смежные вершины, то есть больше рёбер или вершин, чем $\delta(G)$, удаление будет не оптимально. $\delta(G) \ge \kappa(G)$; $\delta(G) \ge \lambda(G)$

Рассмотрим разрезающее множество графа. Если все рёбра несмежные, то нам достаточно удалить по одной вершине от каждого ребра, чтобы удалить все эти рёбра и сделать граф несвязным, т.е. $\kappa(G) = \lambda(G)$, но если есть смежные рёбра, то удаление их общей вершины удалит сразу несколько рёбер из разрезающего множества, то есть $\kappa(G) < \lambda(G)$

Получается, что $\kappa(G) \le \lambda(G) \le \delta(G)$

Theorem 4. (Chartrand). For a connected graph G: if $\delta(G) \ge \lfloor |V|/2 \rfloor$, then $\lambda(G) = \delta(G)$

компоненты

Рёберное разрезающее мн-во из λ рёбер делит граф на две компоненты связности. Возьмём меньшую, по числу вершин, из этих компонент или любую из них, если число вершин в обоих компонентах равно и назовём её S.

$|S| \le \frac{|V|}{2}$. Каждая вершина в S была инцидентна с хотя бы с ребром из разрезающего мн-ва, т.к. если это было не так, то эта вершина имела $|S|-1$ рёбер, а $|S|-1 < \frac{|V|}{2}$

Тогда число рёбер в разрезе должно быть не меньше чем $|S| \cdot (\delta(G) - (|S|-1))$, то есть мы удаляем из минимальной степени вершины число рёбер, связывающих вершину с другими вершинами в S и умножаем на количество вершин инцидентных с рёбрами разрезающего множества.

$$\lambda_{min} = |S| \cdot (\delta(G) - |S| + 1)$$

Докажем от противного, пусть $|S|(\delta(G) - |S| + 1) < \delta(G)$

$$|S|\delta(G) - |S|^2 + |S| < \delta(G)$$

$$\delta(G)(|S| - 1) < |S|(|S| - 1)$$

$\delta(G) < |S|$ — противоречие, так как $|S| \le \frac{V}{2}$, $\delta(G) \ge \frac{V}{2}$

$\Rightarrow |S|(\delta(G) - |S| + 1) \ge \delta(G)$. Но из теоремы Whitney $\lambda(G) \le \delta(G) \Rightarrow \lambda(G) = \delta(G)$

Theorem 5 (Menger) For any pair of non-adjacent vertices u and v in an undirected graph the size of the minimum vertex cut is equal to the maximum number of pairwise internally vertex-disjoint paths from u to v.

Докажем по индукции для числа рёбер графа

Для пустого графа теорема Менгера верна.
Для графа с одним ребром (u, v) теорема Менгера верна.
Пусть теорема Менгера верна для всех графов с числом рёбер меньше m. $\exists G$ - граф размера m, а u и v две несмежные вершины в G. Пусть k вершин это минимальный $u \rightsquigarrow v$ вершинный разрез, кол-во вершин, которое необходимо удалить, чтобы u и v перестали быть связными.

Очевидно, что существует не более чем k вершинно непересекающихся $u \rightsquigarrow v$ путей, так как по определению при удалении всех вершин из разреза, между u и v не должно быть путей

Рассмотрим три случая, описывающие всевозможные варианты.

N1) $\exists$ наименьшее вершинно-разрезающее мн-во W в G, содержащее в себе вершину x смежные и вершине u и v

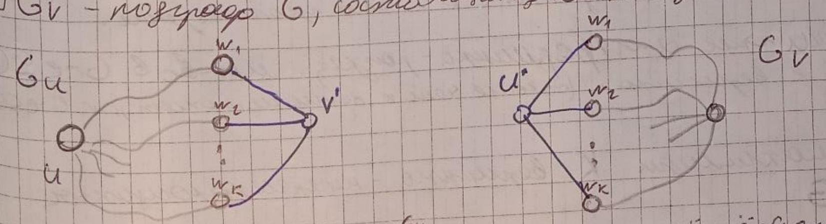
$|W| = k$, тогда $G - x$ имеет число рёбер $< m$, а $W - \{x\}$ - наименьшее $u \rightsquigarrow v$ вершинно-разрезающее мн-во в $G - x$

$|W - \{x\}| = k - 1$ наибольшее количество вершинно непересекающих-ся путей $u \rightsquigarrow v$ в $G - X$ (в силу наименьших покрытий, индукции)

Таким образом $k-1$ вершинно-непересекающихся путей $u \rightsquigarrow v$ $G - X$ вместе с путём $P = (u, x, v)$, объединяются в k-вершинно-непересекающихся путей $u \rightsquigarrow v$ в графе G

N2) $\exists$ наименьшее $u \rightsquigarrow v$ вершинно-разрезающее мн-во W в G, содержащее вершины не смежные обоим вершинам u и v

$W = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$. $\exists G_u$ - подграф G состоящий из всех $u \rightsquigarrow w_i$ путей;
$\exists G_v$ - подграф G, состоящий из всех путей $v \rightsquigarrow w_i$



Добавим новую вершину в G_u v' и соединим её рёбрами со всеми w_i для графа G_u, новый граф G'_u содержит рёбер $< m$, так как вершина w_i были не смежные с v, а значит между каждой w_i и v было как минимум два ребра.

Откуда получаем, что существует максимум k вершинно-непересекающихся путей $u \rightsquigarrow v'$ в G'_u, каждый из которых состоит из ~~рео~~ пути $u \rightsquigarrow w_i = P_i$ с последующим ребром $w_i v'$

Аналогично добавляем в граф G_v вершину u' и связываем её рёбрами с $\forall w_i$, новый граф G'_v имеет число рёбер $< m$, так как вершины w_i не смежные с u и для $\forall w_i$ существовало в G хотя бы по два ребра на $w_i \rightsquigarrow u$.

Откуда получаем, что существует максимум k вершинно-непересекающихся путей $v \rightsquigarrow u'$ в G'_v, каждый из которых состоит из пути $v \rightsquigarrow w_i = Q_i$ с последующим ребром $w_i u'$

Таким образом k путей состоящих из P_i переходящих в Q_i для $1 \leq i \leq k$ составляют k вершинно-непересекающихся путей в G.

N3) Для каждого наименьшего вершинно-разрезающего множества W в G, либо каждая вершина в W смежна с u и не смежна с v, либо каждая вершина в W смежна с v и не смежна с u.

$\exists P = (u, x, y, \ldots, v)$ – $u \rightsquigarrow v$ кратчайший путь

$e = \{x, y\}$ ребро между вершинами x и y

Любое наименьшее вершинно-разрезающее множество $u \rightsquigarrow v$ для $G - e$ состоит из не менее $k-1$ вершин

Докажем от противного, пусть $\forall$ наименьшее вершинно-разрезающее множество $u \rightsquigarrow v$ для $G - e$ состоит из $k-1$ вершин.

$\exists S = \{S_1, S_2, \ldots, S_{k-1}\}$ наименьшее вершинно-разрезающее мн-во в $G - e$

Тогда $S \cup \{x\}$ – наименьшее u-v вершинно-разрез. мн-во в G откуда все вершины в S смежны с u

Но также $S \cup \{y\}$ – наименьшее u-v верши.-разрез. мн-во в G,
т.к. у тоже добавит ребро e

$\Longrightarrow$ y – смежна с u, что является противоречием, так как путь P – кратчайший, то x не должен был бы принадлежать P – это противоречие. и если $\exists$ путь $u \rightsquigarrow y$ в обход x,

$\Rightarrow$ Тогда каждое наименьшее $u \rightsquigarrow v$ вершинно-разрез. мн-во в $G - e$ содержит ровно k вершин. (больше чем k быть не может, т.к. $G - e \subseteq G$)

По индукции $\exists$ максимум k вершинно-непересекающихся пути $u \rightsquigarrow v$ в G

Theorem 6 (Harrary) Every block of a block graph is a clique.

$\Rightarrow$] $H = B(G)$; Допустим, что $\exists H_i$ - блок $\in H$, не являющийся полным графом. Тогда в H_i найдётся пара несмежных вершин, лежащих на простом цикле Z длина которого не менее 4. Значит объединение блоков графа G соответствующих вершинам в Z является двусвязным графом, ~~не содержащим точек~~ сочленения, что противоречит условию о максимальности блока.

$\Leftarrow$] H - граф, где каждый блок полный. Сделаем граф $B(H)$, а затем новый граф G, добавляя к вершине H_i графа $B(H)$ висячие рёбра, количеством равным числу вершин блока H_i, не являющихся точками сочленения графа H. Заметим, что граф $B(G)$ изоморфен H.