

# SBP-SAT методы горизонтальной аппроксимации уравнений динамики атмосферы на сетках с локальным повышением разрешения

Третьяк И.Д

Институт вычислительной математики им. Г.И. Марчука

19 октября 2023 г.



# Введение

Пути повышения детализации прогноза состояния атмосферы

1. Глобальное повышение разрешения расчетной сетки

- + Повышение эффективного разрешения
- Быстрый рост требуемых вычислительных ресурсов

2. Локальное повышение разрешения расчетной сетки

- + Экономия вычислительных ресурсов
- + Повышение эффективного разрешения в области сгущения
- Численные ошибки на границах блоков



# Уравнения мелкой воды

**Уравнения мелкой воды в векторно-инвариантной форме:**

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -(\xi + f)\mathbf{k} \times \mathbf{v} - \nabla(gh + K) \\ \frac{\partial h}{\partial t} = -\nabla \cdot (\mathbf{v}h) \end{cases}$$

$\mathbf{v}$  – вектор горизонтальной скорости,  $h$  – толщина слоя жидкости,  $\mathbf{k}$  – вертикальный единичный вектор,  $\xi = \mathbf{k} \cdot \nabla \times \mathbf{v}$  – относительная завихренность,  $f$  – параметр Кориолиса,  $K = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}/2$  – плотность кинетической энергии.



## Расчетная сетка

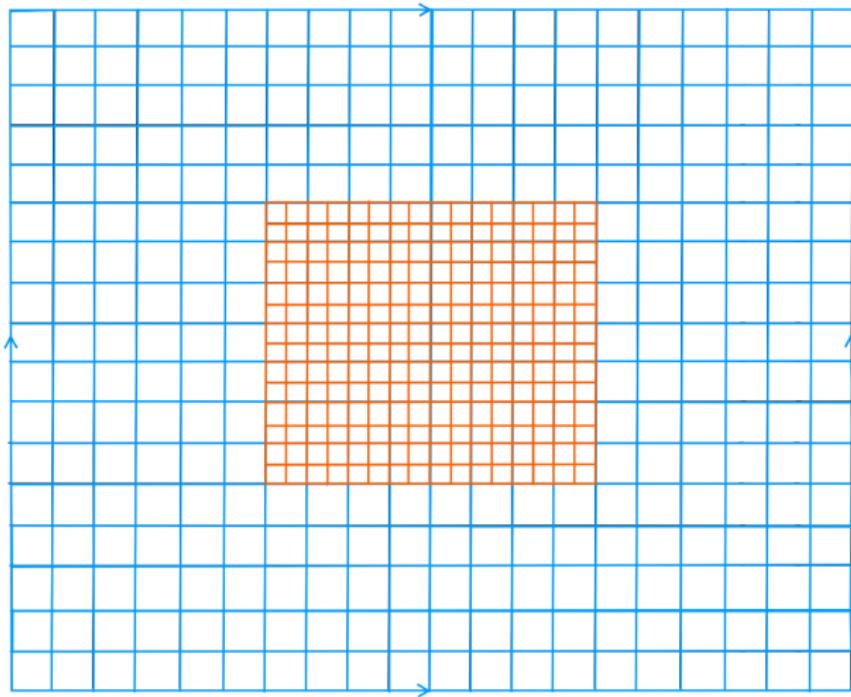


Рис.: Возможная конфигурация расчетной сетки: бипериодические граничные условия, по середине блок с локальным уточнением в 2 раза.



# Метод аппроксимации по пространству: Summation-by-parts finite differences

$$\frac{\partial U}{\partial x} \approx D\mathbf{u}$$

**Свойство суммирования-по-частям (Summation-by-parts или SBP):**

$$\mathbf{u}^T H D \mathbf{v} = (u_N v_N - u_0 v_0) - (D\mathbf{u})^T H \mathbf{v}$$

Дискретный аналог формулы интегрирования по частям:

$$\int_a^b U(x) \frac{\partial V(x)}{\partial x} = U(b)V(b) - U(a)V(a) - \int_a^b V(x) \frac{\partial U(x)}{\partial x}$$

1. Выполнены дискретные аналоги законов сохранения массы и энергии.
2. Теорема об устойчивости для линеаризованной задачи.



# Формирование SBP-оператора

$$D = H^{-1}Q$$

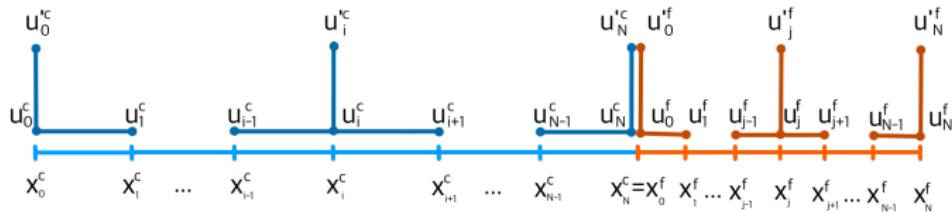


Рис.: Шаблон разностной схемы для формирования матрицы  $Q$

Распространение на случай большей размерности:

$$\mathbf{D}_x = D \otimes I, \quad \mathbf{D}_y = I \otimes D$$

$$\mathbf{H}_x = H \otimes I, \quad \mathbf{H}_y = I \otimes H$$



# Условия на границах блоков: (SAT) Simultaneous Approximation Terms

Формулировка условия неразрывности в слабой форме

SAT-слагаемые:

$$\frac{\partial U}{\partial x} \approx D\mathbf{u} + SAT_0 + SAT_N,$$

$$SAT_0 = \sigma_0(\Delta u^{left}), \quad SAT_N = \sigma_N(\Delta u^{right})$$

Веса  $\sigma_0, \sigma_N$  выбираются исходя из требования глобального сохранения энергии (выполнения SBP-свойства).

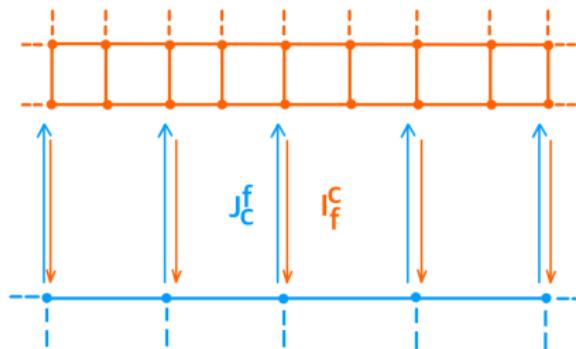


Рис.: Интерполяция между блоками с различным разрешением



# Неустойчивость Кельвина-Гельмгольца

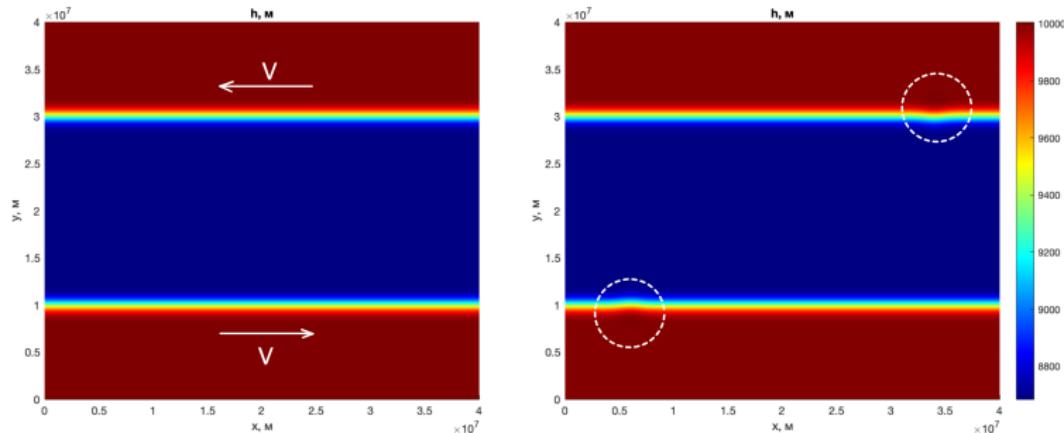


Рис.: Начальные условия для поля толщины слоя жидкости



# Неустойчивость Кельвина-Гельмгольца

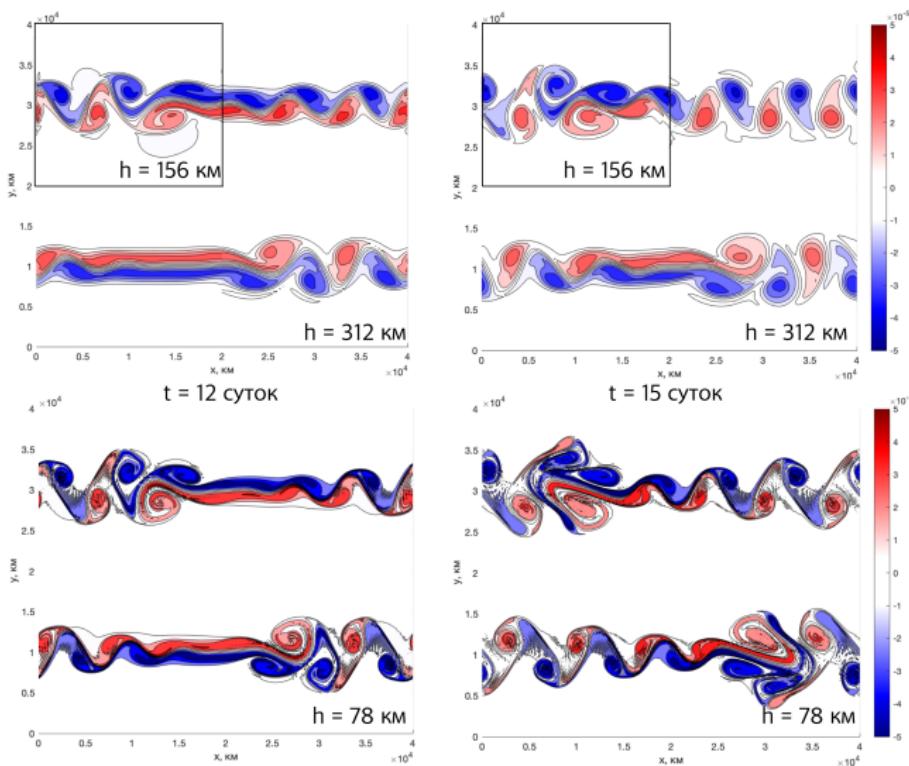


Рис.: Поле относительной завихренности (нижние рисунки - эталонное решение, верхние - решение с локальным сгущением) через 12 и 15 суток



# Неустойчивость Кельвина-Гельмгольца

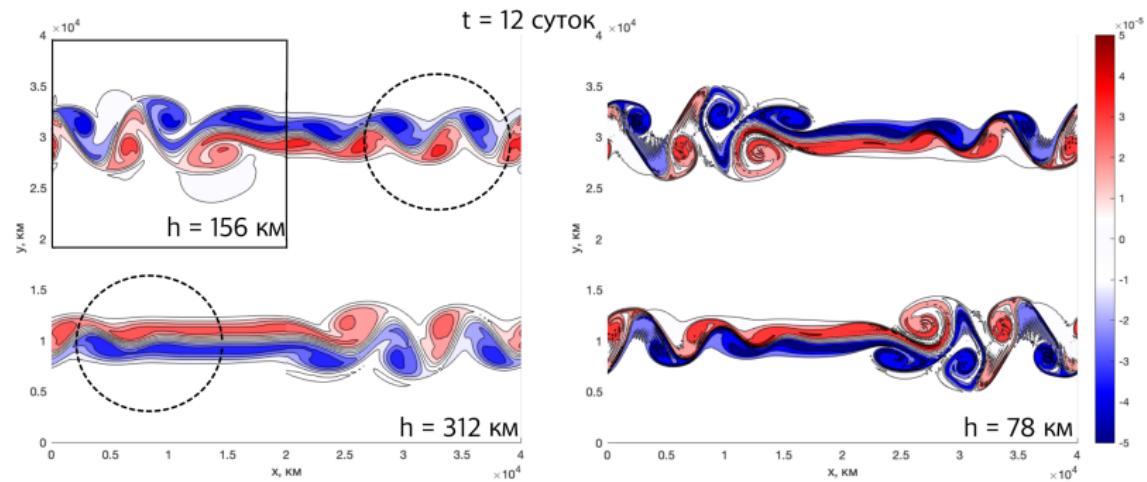


Рис.: Поле относительной завихренности через 12 суток



# Неустойчивость Кельвина-Гельмгольца

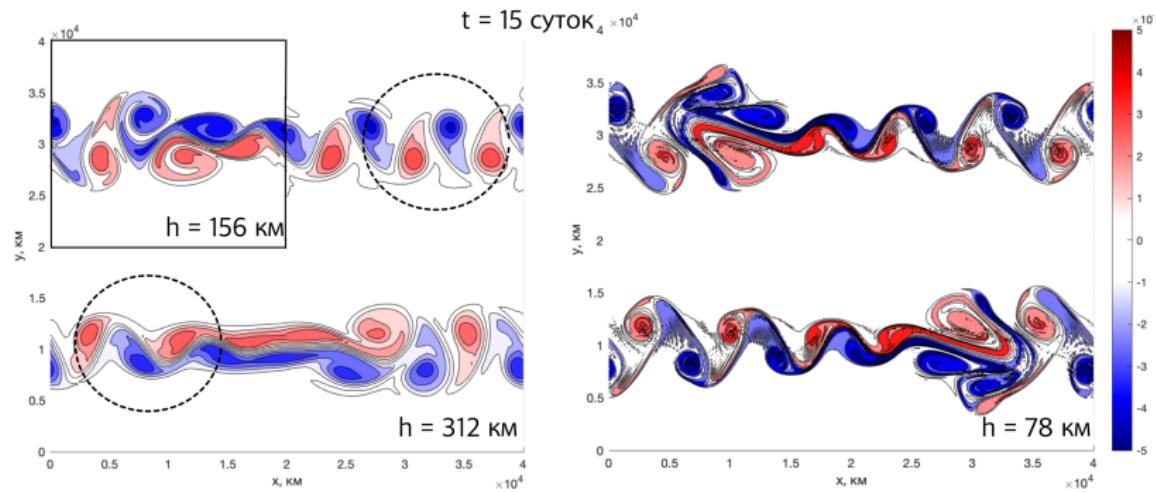


Рис.: Поле относительной завихренности через 15 суток



# Взаимодействующие тропические циклоны

Поведение эталонного решения:

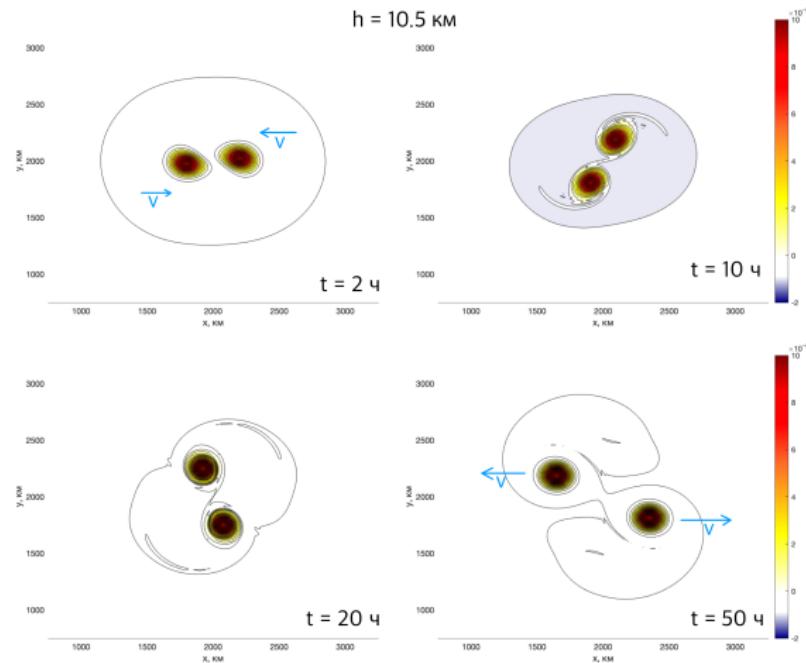


Рис.: Поле относительной завихренности эталонного решения через 2, 10, 20, 50 часов на сетке с шагом  $h = 10.5$  км



# Взаимодействующие тропические циклоны

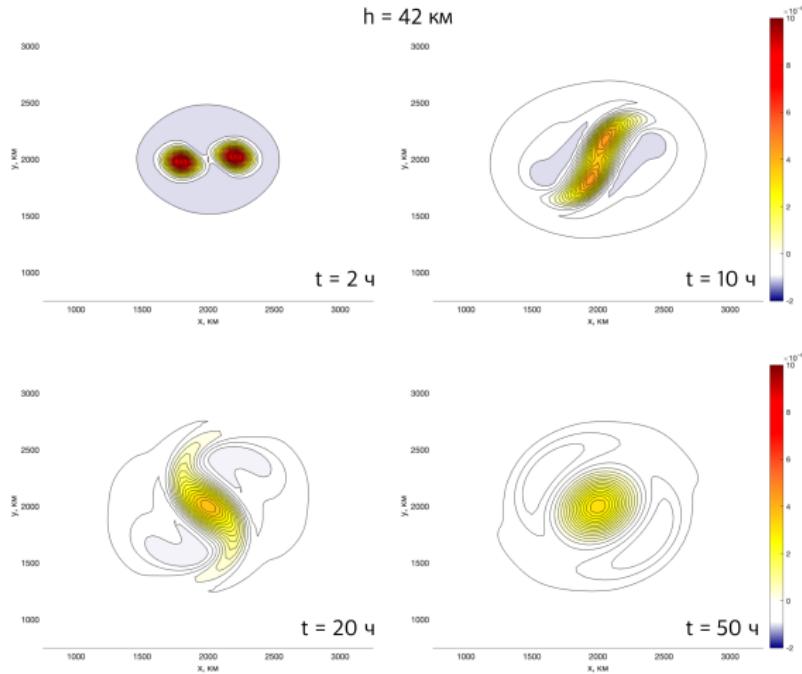


Рис.: Поле относительной завихренности решения через 2, 10, 20, 50 часов на сетке с шагом  $h = 42$  км



# Взаимодействующие тропические циклоны

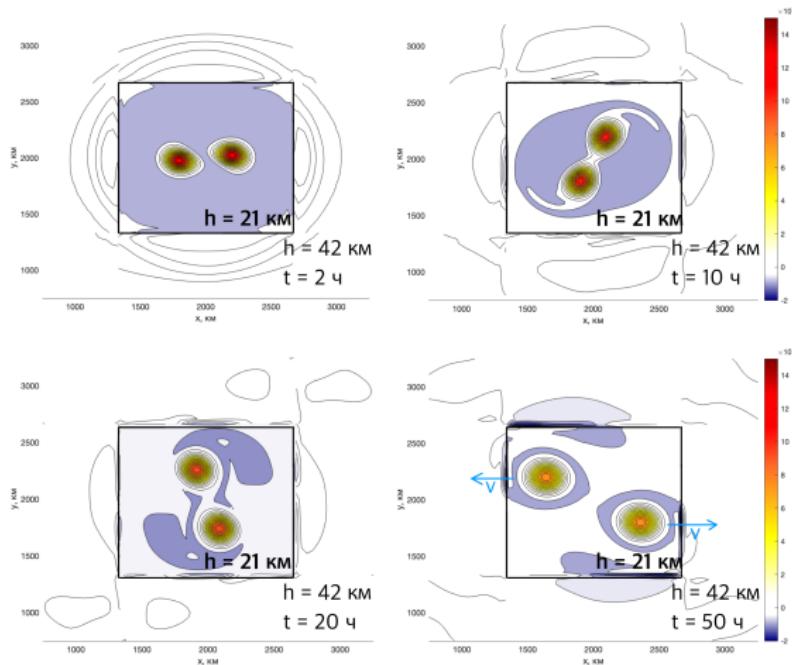


Рис.: Поле относительной завихренности решения через 2, 10, 20, 50 часов на сетке с шагом  $h = 42$  км и локальным уточнением до  $h = 21$  км



# Заключение

Предложен подход на основе SBP-SAT метода для аппроксимации уравнений мелкой воды на сетках с локальным повышением разрешения.

## Достоинства подхода

1. Сохранение массы и энергии
2. Устойчивость, доказанная теоремой
3. Высокий порядок аппроксимации
4. Локальное повышение разрешения оказывает положительное влияние на все решение в целом
5. Удобство программной реализации

## Недостатки подхода

1. Снижение порядков аппроксимации вблизи границ блоков

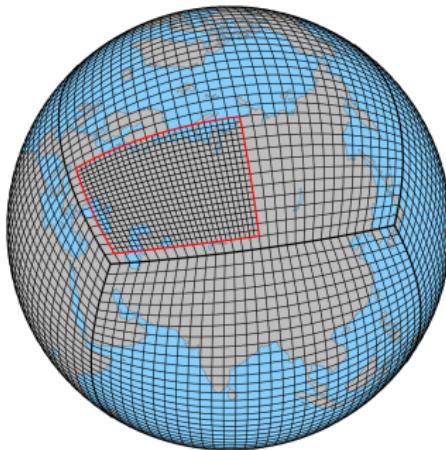


# Направления для дальнейших исследований

1. Шаг по времени для устойчивости должен соответствовать самому мелкому разрешению
2. Реализация подхода в рамках сферической геометрии
3. Реализация подхода для трехмерных уравнений динамики атмосферы
4. Сравнение с другими методами



Спасибо за внимание



# Построение SBP-операторов

$$\frac{\partial U}{\partial x} \approx D\mathbf{u}, \quad H D\mathbf{u} = Q\mathbf{u}$$

1.  $H = H^T > 0$ , задает норму и скалярное произведение в пространстве сеточных функций

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_H = \mathbf{u}^T H \mathbf{v}, \quad \|\mathbf{u}\|_H^2 = \mathbf{u}^T H \mathbf{u}$$

2.  $Q + Q^T = diag(-1, 0, \dots, 1)$

$H, Q$  выбираются из условия удовлетворения SBP-свойству.



## Следствия SBP-свойства

Если исходная задача обладает инвариантами:

$$L_1(t) = \int U(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}, \quad L_2(t) = \int |U(\mathbf{x}, t)|^2 d\mathbf{x}$$

Тогда дискретизованная задача сохраняет их дискретные аналоги:

$$l_1(t) = \mathbf{1}^T H \mathbf{u}, \quad l_2(t) = \mathbf{u}^T H \mathbf{u}$$

На бипериодической области выражаются дискретные аналоги законов сохранения массы и энергии.



# Теоремы о SBP-операторах

**Теорема 1:** Пусть  $H$  и  $Q$  матрицы, выбранные в соответствии с SBP-свойством.  $D = H^{-1}Q$  SPB-оператор  $2p$  порядка аппроксимации  $\frac{d}{dx}$  внутри области. Тогда для  $U \in C^{2p}(\Omega)$

$$\mathbf{1}^T H \mathbf{u} = \int_{\Omega} U dx + O(h^{2p})$$

и для  $V \frac{dU}{dx} \in C^{2p}(\Omega)$

$$\mathbf{v}^T H D \mathbf{u} = \int_{\Omega} V \frac{dU}{dx} dx + O(h^{2p})$$



# Численный фильтр

## Искусственная диссипация:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\kappa^2 \Delta^2 \psi$$

$\kappa$  - коэффициент диссипации

1. Дискретизация по пространству SBP-SAT подход.
2. Интегрирование про времени по явной схеме Эйлера.

Используется для подавления пилообразных волн.

