Càlcul de matrius

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+3 & 2+1\\ 2+0 & 1+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 2 & 6\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-3 & 2-1\\ 2-0 & 1-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 2 & -4\end{pmatrix}$$

$$K\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\cdot k & b\cdot k\\ c\cdot k & d\cdot k\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 2+2\cdot 1 & 1\cdot 2+2\cdot 3\\ 3\cdot 2+1\cdot 1 & 3\cdot 2+1\cdot 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 8\\ 7 & 9\end{pmatrix}$$

Important: només es pot multiplicar si les columnes de la matriu A coincideixen amb les files de la matriu B.

Determinants

Matrius quadrada d'ordre 2 o 3

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 4 & 0\\ 3 & 6 & 1\end{vmatrix}=4+2\cdot 0\cdot 3+0\cdot 2\cdot 6-[(0\cdot 4\cdot 3)+(0\cdot 6\cdot 1)+(1\cdot 2\cdot 2)=$$

$$=4+0+0-(0+0+4)=4-4=0$$

$$\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{vmatrix}=4-6=-2$$

Matrius d'ordre 4 o superior

Donada la matriu

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{pmatrix}$$

Format a_{ij}

Anomenarem adjunt d'un element a_{ij}, denotat per A_{ij} el nombre següent

- El determinant que resulta d'eliminar la fila i i la columna j
- Un signe que precedirà el determinant i que serà
  - + si i+j és parell
  - − si i+j és senar

$$\begin{vmatrix}+ & - & + & \cdots\\ - & + & - & \\ + & - & + & \\ - & + & - & \\ \vdots & & & \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{33} & a_{34}\\ a_{41} & a_{43} & a_{44}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{34}\\ a_{4} & a_{42} & a_{44}\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\\ a_{41} & {}_{42} & a_{43}\end{vmatrix}$$

Propietats dels determinants

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow 2 = -2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 8 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

$$2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 2 & 2\cdot 3 \\ 0 & \cdot 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2\cdot 2 & 3 \\ 0 & 2\cdot 0 & 1 \\ 2 & 2\cdot 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+1 & 0 & 1 \\ 2+1 & 1 & 1 \\ 3+1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 4+5 & 3 \\ 0 & 3+3 & 2 \\ 0 & 1+2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2\cdot 1+1 & 1 \\ 2 & 2\cdot 2+6 & 0 \\ 3 & 2\cdot 3+3 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A\times B| = |A|\times|B|$$

$\rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 2$ $|B| = -1 \rightarrow 2\cdot(-1) = -2$

$A\times B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |AB| = 3-5 = -2$

Matriu Inversa

Una matriu quadrada A és invertible si i només si $|A| \neq 0$ (no nul)

$$A^{-1} = \frac{Adj\,(A)}{|A|}$$

Exemple: Donada una matriu $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = -4-0 \neq 0$

1r pas calcular Determinant

2n pas calcular adjacent

$$A_{11} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A_{12} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_{13} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A_{22} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_{23} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{31} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_{32} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad A_{33} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} = Adj\,(A)$$

3r pas calcular $A^{-1} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} -1/-4 & 2/-4 & -2/-4 \\ 1/-4 & 2/-4 & -2/4 \\ 1/-4 & 2/-4 & -2/-4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1/4 & -1/2 & 1/2 \\ -1/4 & -1/2 & 1/2 \\ -1/4 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Rang d'una matriu

El rang d'una matriu es defineix com el nombre de files o columnes linealment independents. El denotarem com a $rg(A)$.

Teorema del rang. El rang d'una matriu no nul·la es determina per l'ordre del major menor no nul que es pugui obtenir a partir d'aquesta

Aplicacions a espais vetorials.

Dimensió d'un subespai generat

Sigui W un subespai generat per aquests vectors. Donada la matriu A composada pels vectors de W.

$$dim(W) = rg(A)$$

Exemple

vectors = $(1,2,3,4)\ (5,6,7,8)\ (4,4,4,4) \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 2 & 6 & 4 \\ 3 & 7 & 4 \\ 4 & 8 & 4 \end{pmatrix}$

$$dim(A) = rg(A) = 2$$