IDP = 1812994   Nom = Víctor Martínez Santos

Exercici 1 Apartat a

El primer que farem serà multiplicar C pel seu conjugat per eliminar el nombre i del denominador.

$z = 1 + 3 + 6i \Rightarrow 4 + bi$

$c = \frac{iz}{z-2} \Rightarrow \frac{i\cdot(4+bi)}{(4+bi)-2} = \frac{4i + b\cdot i^2}{2+bi}$

$\frac{4i - b}{(2+bi)} \cdot \frac{(2-bi)}{(2-bi)} = \frac{8i - 4bi^2 - 2b - b^2 i}{4 - 2bi + 2bi + (-b^2)} = \frac{8i - b^2 i + 4b - 2b}{4 - b^2} = \frac{(8-b^2)i - 2b}{4-b^2}$

Separarem la part imaginària de la real

$c = \frac{(8-b^2)i - 2b}{4-b^2} \Rightarrow \frac{8-b^2}{4-b^2}i - \frac{2b}{4-b^2}$

Per a que sigui un nombre imaginari ha de tenir un format $z = bi$

$\frac{0-b^2}{4-b^2}i - \frac{2b}{4-b^2}_{=0}$ Per a que això sigui 0 el numerador ha de ser 0 llavors $b=0$

Un cop sabem el valor de b que satisfà la condició, anem a substituir a z per trobar el valor.

$z = 4 + bi \Rightarrow 4 + 0\cdot i = 4$

$\boxed{\text{Llavors } z = 4}$

Exercici 1 apartat b

$8z^3 + 2^3 = 0 \Rightarrow 8z^3 + 8 = 0 \Rightarrow z^3 = -\frac{8}{8} = -1$

Un cop hem aïllat z, tenim que $z^3 = -1$ això ho podem reescriure com

$z^3 - 1 = e^{\pi i + 2\pi k i} \Rightarrow$ Apliquem l'arrel cúbica als 2 costats de l'equació

$(z^3)^{\frac{1}{3}} = (e^{\pi i + 2\pi k i})^{\frac{1}{3}} \Rightarrow z = e^{\frac{\pi i + 2\pi k i}{3}} = e^{(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3})i}$ Assumim els valors de $K = 0, 1, 2$

Substituim

$K=0 \Rightarrow e^{\frac{\pi i}{3}} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$k=1 \Rightarrow e^{\frac{\pi i + 2\pi i}{3}} = -1$

$K=2 \Rightarrow e^{\frac{\pi i + 4\pi i}{3}} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Passem de binòmica a polar

$x_1 \Rightarrow r = \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = 1$, $\theta = \text{arctg}\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}\right) = -\frac{\pi}{3}$ $\Big\}\ x_1 = 1_{-\frac{\pi}{3}}$

$x_2 \Rightarrow r = \sqrt{(-1)^2 + 0} = 1$, $\theta = \text{arctg}\left(\frac{0}{-1}\right) = 0$ $\Big\}\ x_2 = 1_0$

$x_3 \Rightarrow r = \sqrt{(\frac{1}{2})^2\ (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = 1$, $\theta = \text{arctg}\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1/2}\right) = \frac{\pi}{3}$ $\Big\}\ x_3 = 1_{\frac{\pi}{3}}$

En forma binòmica tenim

$x_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \,//\, x_2 = -1 \,//\, x_3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$x_1 = 1_{-\frac{\pi}{3}} \,//\, x_2 = 1_0 \,//\, x_3 = 1_{\frac{\pi}{3}}$

Exercici 2 apartat a

$M = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 2 & 3 & 8 \end{pmatrix}$

Per saber el rang de la matriu M dels menors d'ordre 2. Si algun d'aquests és no nul llavors el rang serà 2.

$\begin{vmatrix} 1 & k \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2K \Rightarrow 3 = 2k = k = \frac{3}{2}$

$\begin{vmatrix} k & 1 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 8k - 3 \Rightarrow 8k = 3 \Rightarrow k = \frac{3}{8}$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 8 - 2 = 6$

Independentment dels valors de k, el rang de la matriu sempre serà 2

Exercici 2 apartat b.

$$\begin{rcases} 1x+ky=1 \\ 2x+3y=8 \end{rcases}$$ Segons el teorema de Rouchè-Fröbenius

$rg\begin{pmatrix}1 & k\\ 2 & 3\end{pmatrix} = \begin{vmatrix}1 & k\\ 2 & 3\end{vmatrix} = 3-2k \Rightarrow k=\frac{3}{2}$ $(rg=1)$

$rg\begin{pmatrix}1 & k & 1\\ 2 & 3 & 8\end{pmatrix} = \begin{vmatrix}k & 1\\ 3 & 8\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}3/2 & 1\\ 3 & 8\end{vmatrix} = 24/2 - 3 \Rightarrow 12-3 = 9 \Rightarrow rg(M)=2$

Per al valor $k=3/2$ el rang de la matriu A és 1, mentre que el rang de M és 2. Per tant, com que $rg(A)<rg(M)$ és un SI, per qualsevol altre valor $rg(A)=rg(M)=n$ és un SCD.
nº d'incògnites

Aplicant Gauss per resoldre l'equació tenim:

$$M=\begin{pmatrix}2 & 3 & 8\\ 1 & k & 1\end{pmatrix} \xRightarrow{2F_2-F_1=F_2} \begin{pmatrix}2 & 3 & 8\\ 0 & 2k-3 & -6\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{rcases}2x+3y=8\\ (2k-3)y=-6\end{rcases} \Rightarrow y=\frac{-6}{2k-3} \Rightarrow 2x+3\left(\frac{-6}{2k-3}\right)=8 \Rightarrow 2x=8-\frac{-18}{2k-3} \Rightarrow x=\frac{8-\frac{-18}{2k-3}}{2}=\frac{8k-3}{2k-3}$$

El resultat final és:

$x=\frac{8k-3}{2k-3}, y=\frac{-6}{k-3}$

Exercici 3 apartat a

La dimensió del subespai generat serà igual al rang obtingut en disposar els vectors en files o columnes. Per trobar el rang de la matriu, buscarem el menor de major ordre no nul. Llavors tenim:

$[v_1, v_2, v_3]$

$$\begin{pmatrix}1 & \lambda & 2\\ \lambda & 1 & \lambda\\ 2 & 3 & 4\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix}1 & \lambda & 2\\ \lambda & 1 & \lambda\\ 2 & 3 & 4\end{vmatrix} = 4+2\lambda^2+6\lambda-[4+3\lambda+4\lambda^2] = -4\lambda^2+2\lambda^2+6\lambda-3\lambda+4-4 \Rightarrow -2\lambda^2+3\lambda$$

Tinguent en compte el càlcul anterior, obtenim:

$-2\lambda^2+3\lambda=0 \Rightarrow \lambda(-2\lambda+3)=0 \Rightarrow \boxed{\lambda_1=0,\ \lambda_2=\frac{3}{2}}$ Per els valors $\lambda=0$ i $\lambda=3/2$ la dimensió del subespai generat és 2 en cas contrari, la dimensió és 3.

Per trobar els vectors independents en cada cas substituirem λ pels valors i seguidament a través de Gauss simplificarem la matriu.

$$\lambda=0 \rightarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 3 & 4\end{pmatrix} \xRightarrow[F_2-2F_1]{F_2 \Leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$ $\rightarrow$ tenim que v_1 i v_3 són linealment dependents

quan $\lambda=0$ $A=\{v_1, v_2\}$

$$\lambda=\frac{3}{2} \quad \begin{pmatrix}1 & 3/2 & 2\\ 3/2 & 1 & 3/2\\ 2 & 3 & 4\end{pmatrix} \xRightarrow{F_3-2F_1} \begin{pmatrix}1 & 3/2 & 2\\ 3/2 & 1 & 3/2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow{F_2-\frac{3}{2}F_1} \begin{pmatrix}1 & 3/2 & 2\\ 0 & -5/4 & 9/2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Per saber si V_3 és linealment dependent calcularem el següent

$C_1 \cdot V_1 + C_2 V_2 = V_3$

$$C_1\begin{pmatrix}1\\ 3/2\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}3/2\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 3/2\end{pmatrix}$$

$$\begin{rcases}c_1+\frac{3}{2}c_2=2\\ \frac{3}{2}c_1+c_2=\frac{3}{2}\end{rcases}$$ Regla de Cramer $|A|=\begin{vmatrix}1 & 3/2\\ 3/2 & 1\end{vmatrix}=1-\frac{9}{4}=-\frac{5}{4}$

$$c_1=\frac{\begin{vmatrix}3/2 & 2\\ 1 & 3/2\end{vmatrix}}{-5/4}=\frac{\frac{9}{4}-2}{-5/4}=\frac{\frac{1}{4}}{-\frac{5}{4}}=\frac{-4}{20}=\boxed{-\frac{1}{5}}$$

$$c_2=\frac{\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3/2 & 3/2\end{vmatrix}}{-5/4}=\frac{\frac{3}{2}-3}{-5/4}=\frac{-\frac{3}{2}}{-\frac{5}{4}}=\frac{12}{10}=\boxed{\frac{6}{5}}$$

Com que V_3 és combinació lineal de V_1 i V_2, sabem que la base és $A=\{V_1, V_2\}$

En qualsevol altre cas com V_1, V_2 i V_3 són linealment independents la base $A=\{v_1, v_2, v_3\}$

Exercici 3 apartat b

$w = (2,-1,4-3\cdot 1) \Rightarrow (2,-1,1)$

si $\lambda = 0$ $w \in F$?

$F = \{(1,0,2),(0,1,3)\}$

$(2,-1,1) = C_1(1,0,2) + C_2(0,1,3)$

$\hookrightarrow \left.\begin{array}{l} C_1 = 2 \\ C_2 = -1 \\ 2C_1 + 3C_2 = 1 \end{array}\right\}$

Com podem veure $w \in F$ ja que el vector és linealment dependent (es pot crear amb combinació lineal)

Exercici 3 apartat c

$$F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Base B ortonormal de F

Matriu canvi base $A \to B$

Per trobar la base ortonormal el primer que farem és transformar la base original en una base ortogonal.

$v_1 = (1,-1,2)$
$v_2 = (-1,1,3)$
$v_3 = (2,-1,4)$

Per calcular la base ortogonal seguirem els següents pasos.
1r: Assignar el primer vector ortogonal
2n: Calcular la resta de vectors amb la següent fórmula: $u_n = v_n - PO(v_n, w_{n-1})$

1r. vector
$w_1 = v_1 = (1,-1,2)$

2n vector

$$\left.\begin{array}{l} v_2 \cdot v_1 = 1(-1) + (-1)1 + 2\cdot 3 = 4 \\ v_1 \cdot v_1 = 1^2 + (-1)^2 + 2^2 = 6 \\ c_1 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \end{array}\right\}$$

$v_2 - c_1 \cdot v_1$

$(-1,1,3) - \frac{2}{3}(1,-1,2) = \left(-1-\frac{2}{3}, 1+\frac{2}{3}, 3-\frac{4}{3}\right) = \left(-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)$

3r vector

Pel següent vector, podríem utilitzar v_2 directament però utilitzarem $v_2' = 3v_2$

Prenem $W_2 = \langle v_1, v_2' \rangle$

$$\underbrace{\begin{array}{ll} v_1 \cdot v_3 = 1\cdot 2 + (-1)(-1) + 2\cdot 4 = 11 & v_3 \cdot v_2' = 2\cdot(-4) + (-1)4 + 4\cdot 5 = -8-4+20 = 8 \\ v_1 \cdot v_1 = 6 & v_2' \cdot v_2' = (-4)^2 + 4^2 + 5^2 = 57 \\ c_1 = \frac{11}{6} & c_2 = \frac{8}{57} \end{array}}$$

$(2,-1,4) - \frac{11}{6}(-1,1,2) - \frac{8}{57}(-4,4,5) = \left(2 + \frac{11}{6} + \frac{8\cdot 4}{57}, -1 - \frac{11}{6} - \frac{8\cdot 4}{57}, 4 - \frac{11\cdot 2}{6} - \frac{8\cdot 5}{57}\right) = \left(\frac{167}{38}, -\frac{14}{38}, -\frac{129}{38}\right)$

Per simplificar càlculs agafarem $v_3' = 38 \cdot v_3$

Tenim una base $B = \{v_1, v_2', v_3'\}$ que és una base ortogonal

Per obtenir una base ortonormal només falta normalitzar els components $\Rightarrow \frac{v_n}{\|v_n\|}$

$$\left.\begin{array}{l} v_1 \Rightarrow \|v_1\| = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{6} \\ v_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}} \\ v_2 \Rightarrow \|v_2'\| = \sqrt{(-4)^2 + 4^2 + 5^2} = \sqrt{57} \\ v_2 = \frac{-4}{\sqrt{57}}, \frac{4}{\sqrt{57}}, \frac{5}{\sqrt{57}} \\ v_3 \Rightarrow \|v_3'\| = \sqrt{(-129)^2 + (-14)^2 + 167^2} = \sqrt{44726} \\ \frac{-167}{\sqrt{44276}}, \frac{-14}{\sqrt{44276}}, -\frac{129}{\sqrt{44276}} \end{array}\right\}$$

Llavors la base ortogonal de F és

$$\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right), \left(\frac{-4}{\sqrt{57}}, \frac{4}{\sqrt{57}}, \frac{5}{\sqrt{57}}\right), \left(\frac{167}{\sqrt{44726}}, \frac{-14}{\sqrt{44726}}, \frac{-129}{\sqrt{44726}}\right)\right\}$$

$$B=\left\{\left(\frac{1}{\sqrt6},-\frac{1}{\sqrt6},\frac{2}{\sqrt6}\right),\left(\frac{-4}{\sqrt{57}},\frac{4}{\sqrt{57}},\frac{5}{\sqrt{57}}\right),\left(\frac{167}{\sqrt{44726}},\frac{-14}{\sqrt{44726}},\frac{-129}{\sqrt{44726}}\right)\right\}$$

$$A=\{(1,-1,2),(-1,1,3),(2,-1,4)\}$$

Per comoditat i simplificar càlculs, $B=\{\sqrt6\cdot v_1,\sqrt{57}\cdot v_2,\sqrt{44726}\cdot v_3\}$

$$A=\{(1,-1,2),(-1,1,3),(2,-1,4)\}$$

$$B=\{(1,-1,2),(-4,4,5),(167,-14,-129)\}$$

La Matriu de canvi de base serà

$$\begin{pmatrix}1 & \frac{-791}{1989} & \frac{-332}{663}\\ 0 & \frac{1385}{1989} & \frac{671}{663}\\ 0 & \frac{2}{153} & \frac{2}{51}\end{pmatrix}$$

El primer que farem és expressar els vectors de la base A com a combinacions lineals de la base B.

$$\left.\begin{aligned}(1,-1,2)&=a_1\cdot(1,-1,2)+a_2\cdot(-4,4,5)+a_3(167,-14,-129)\\(-1,1,3)&=b_1\cdot(1,-1,2)+b_2\cdot(-4,4,5)+b_3(167,-14,-129)\\(2,-1,4)&=c_1\cdot(1,-1,2)+c_2\cdot(-4,4,5)+c_3(167,-14,-129)\end{aligned}\right\}$$

$1=a_1-4a_2+167a_3$ / $-1=-a_1+4a_2-14a_3$ / $2=2a_1+5a_2-129a_3$

$-1=b_1-4b_2+167b_3$ / $1=-b_1+4b_2-14b_3$ / $3=2b_1+5b_2-129b_3$

$2=c_1-4c_2+167c_3$ / $-1=-c_1+4c_2-14c_3$ / $4=2c_1+5c_2-129c_3$

Resolem el sistema

$$\begin{aligned}1&=a_1-4a_2+167a_3\\-1&=-a_1+4a_2-14a_3\\2&=2a_1+5a_2-129a_3\end{aligned}\qquad\begin{aligned}-1&=b_1-4b_2+167b_3\\1&=-b_1+4b_2-14b_3\\3&=2b_1+5b_2-129b_3\end{aligned}\qquad\begin{aligned}2&=c_1-4c_2+167c_3\\-1&=-c_1+4c_2-14c_3\\4&=2c_1+5c_2-129c_3\end{aligned}$$

$\Downarrow$

F_3+F_1

F_2-2F_1

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&-4&167&1\\2&5&-129&2\\-1&4&-14&-1\end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc|c}1&-4&167&-1\\2&5&-129&3\\-1&4&-14&1\end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc|c}1&-4&167&2\\2&5&-129&4\\-1&4&-14&-1\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&-4&167&1\\0&13&-463&0\\0&0&153&0\end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc|c}1&-4&167&-1\\0&13&-463&5\\0&0&153&0\end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc|c}1&-4&167&2\\0&13&-463&0\\0&0&153&0\end{array}\right)$$

$a_1=1/a_2=0/a_3=0$ $\quad b_1=\frac{-791}{1989}$, $b_2=\frac{1385}{1989}$, $b_3=\frac{2}{153}$ $\quad c_1=\frac{-332}{663}$ $c_2=\frac{671}{663}$ $c_3=\frac{2}{51}$

Exercici 4 apartat a

$$\left.\begin{aligned}f(x,y)&=(2x+y,\ x-y)\\h(x,y)&=(x+y,kx)\end{aligned}\right\}\ \mathbb{R}^2\ //\ k\in\mathbb{R}$$

$$C=\{(1,0),(0,1)\}$$

Calcularem les imatges de $f(x,y)$ i $h(x,y)$ per a C

$$\left.\begin{aligned}f(1,0)&=(2\cdot1+1\cdot0,1\cdot1-1\cdot0)=(2,1)\\f(0,1)&=(0+1,0-1)=(1,-1)\end{aligned}\right\}M(f|C,C)=\begin{pmatrix}2&1\\1&-1\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned}h(1,0)&=(1+0,k\cdot1)=(1,k)\\h(0,1)&=(0+1,k\cdot0)=(1,0)\end{aligned}\right\}M(h|C,C)=\begin{pmatrix}1&1\\k&0\end{pmatrix}$$

Exercici 4 apartat b

La nova aplicació lineal és $h\circ f$ per trobar la Matriu associada podem fer-ho a través de es matrius computes anteriors

$$M_f=\begin{pmatrix}2&1\\1&-1\end{pmatrix}\ i\ M_h=\begin{pmatrix}1&1\\k&0\end{pmatrix}$$

A través del producte de matrius

$$M_h\cdot M_f=\begin{pmatrix}1&1\\k&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&1\\1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot2+1\cdot1&1\cdot1+1\cdot(-1)\\k\cdot2+0&1\cdot k+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2\\2k&k\end{pmatrix}$$

Exercici 4 apartat c i d

$$M=\begin{pmatrix}3&2\\2k&k\end{pmatrix}$$

Calculem el polinomi caracteristic

$\det(M-\lambda I)$

$$\begin{vmatrix}3-\lambda&2\\2k&k-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)(k-\lambda)-4k=3k-k\lambda-3\lambda+\lambda^2-4k=\lambda^2-3\lambda-k\lambda-k=\boxed{\lambda^2-\lambda(3-k)-k}$$

Per trobar els valors propis (VAP), ho farem a través de $x=\frac{-b\pm\sqrt{b-4ac}}{2a}$

$$\left.\begin{aligned}\lambda_1&=\frac{3-k+\sqrt{k^2-2k+9}}{2}\\\lambda_2&=\frac{3-k-\sqrt{k^2-2k+9}}{2}\end{aligned}\right\}$$

Com pot ser que l'arrel quadrada tingui una sola resposta (0), ens assegurarem d'incloure únicament valors que facin que l'arrel sigui positiva i diferent de 0, per tant $\sqrt{k^2-2k+9}>0$.

Exercici 4 apartat e

$$M=\begin{pmatrix}3&2\\2k&k\end{pmatrix}$$

$$\dim(M)=rg(M)=|M|=\begin{vmatrix}3&2\\2k&k\end{vmatrix}=3k-4k\to-k$$

El nucli depend de la dimensió de la matriu, quan la dimensió sigui 1 $k=0$ pel que tindrem

Per $k=0$

$$f\circ h=\{3x+2y,2\overset{0}{\cancel{k}}x+\overset{0}{\cancel{ky}}\}=3x+2y=0\Rightarrow x=-\frac{2}{3}y\ //\ 3\cdot\left(-\frac{2}{3}y\right)+2y\to y=1$$

El nucli de la matriu quan $k=0$ és

$$Ker(A)=\begin{bmatrix}-2/3\\1\end{bmatrix}$$