

Lab 5 & 6: Grafy przekątniowe

W ramach laboratorium należy zaimplementować rozpoznawanie grafów przekątniowych i przedziałowych oraz rozwiązywanie dla tej klasy grafów pewnych problemów obliczeniowych. Algoritmy, które zostaną do tego wykorzystane są opisane w następującym artykule:

M. Habib, R. McConnell, C. Paul, L. Viennot *Lex-BFS and partition refinement, with applications to transitive orientation, interval graph recognition and consecutive ones testing* ([tekst artykułu](#))

Zadanie 1

Dany jest graf nieskierowany $G = (V,E)$. Graf G nazywamy grafem przekątniowych (*chordal*), jeśli nie istnieje w nim żaden cykl długości większej niż 3, w którym żadne dwa wierzchołki nie są połączone krawędzią nie należącą do cyklu (taki cykl nazywany jest czasem dziurą – *graph hole*).

Zaimplementuj algorytm sprawdzający, czy zadany graf G jest grafem przekątniowym. Należy wykorzystać w tym celu algorytm LexBFS opisany w dalszej części konspektu, oraz następującą alternatywną definicję grafu przekątniowego:

G jest przekątniowy wtedy i tylko wtedy gdy można uszeregować jego wierzchołki w ciąg v_1, v_2, \dots, v_n taki, że każdy wierzchołek v_i wraz ze swoimi sąsiadami którzy występują w tym ciągu przed v_i tworzą klikę (graf pełny). Takie uporządkowanie wierzchołków nazywamy *kolejnością idealnej eliminacji* (*perfect elimination ordering* – PEO).

Wskazówka

Można pokazać, że dla grafu przekątniowego algorytm LexBFS odwiedza wierzchołki w kolejności PEO. Aby więc sprawdzić, czy graf jest przekątniowy, wystarczy sprawdzić czy ciąg wierzchołków zwrócony przez algorytm LexBFS spełnia definicję PEO (opis jak to zrobić w dalszej części konspektu).

Zadanie 2

Dany jest graf przekątniowy $G = (V,E)$. Zaimplementuj algorytm znajdujący rozmiar największej kliki w G .

Wskazówka

Dla grafu przekątniowego kolejność wierzchołków zwrócona przez LexBFS gwarantuje, że dla każdego wierzchołka v zbiór $RN(v) + \{v\}$ jest kliką (sekcja "Kolejność idealnej eliminacji" niżej). Niech K będzie największą kliką w grafie, a v jej wierzchołkiem odwiedzonym przez LexBFS jako ostatni. Wówczas wszystkie pozostałe wierzchołki K zostały już odwiedzone i są sąsiadami v , zatem K jest podzbiorem $RN(v) + \{v\}$. Ponadto, jako że cały zbiór $RN(v) + \{v\}$ jest kliką i jest rozmiaru co najmniej takiego jak K , to musi być równy K , czyli $K = RN(v) + \{v\}$. Stąd, w celu znalezienia największej kliki w grafie przekątniowym wystarczy wziąć największy ze zbiorów $RN(v) + \{v\}$.

Zadanie 3

Dany jest nieskierowany graf przekątniowy $G = (V,E)$. *Kolorowanie* grafu G to przyporządkowanie każdemu wierzchołkowi koloru tak, by wierzchołki sąsiadujące ze sobą miały różne kolory. *Liczba chromatyczna* grafu G to minimalna ilość kolorów wymagana do pokolorowania grafu G .

Zaimplementuj algorytm znajdujący optymalne (używające minimalnej liczby kolorów) kolorowanie grafu G i tym samym obliczający liczbę chromatyczną G .

Wskazówka

Kolorowanie grafu można zrealizować przy pomocy prostego algorytmu zachłannego:

```
color = tablica przechowująca kolory wierzchołkow jako liczby naturalne, początkowo same 0

for v in V:
    N = zbiór sąsiadow v
    used = {color[u] for u in N}
    c = najmniejszy kolor > 0 który nie występuje w zbiorze used
    color[v] = c
```

W ogólności takie kolorowanie używa większej liczby kolorów, niż jest to konieczne – kolorowanie nie jest optymalne. W przypadku grafów przekątniowych można pokazać, że algorytm ten daje kolorowanie optymalne, jeśli kolorujemy wierzchołki w kolejności idealnej eliminacji (PEO) zwróconej przez LexBFS.

Zadanie 4

Dany jest nieskierowany graf przekątniowy $G = (V,E)$. *Pokrycie wierzchołkowe* grafu G to zbiór wierzchołków S taki, że każda krawędź w E jest incydentna z jakimś wierzchołkiem z S , tj. co najmniej jeden z jej końców leży w S . Zbiór wierzchołków I jest *niezależny*, jeśli żadne dwa wierzchołki w I nie są połączone krawędzią. Zbiór I jest niezależny wtedy i tylko wtedy, gdy jego dopełnienie $V \setminus I$ jest pokryciem wierzchołkowym.

Zaimplementuj algorytm znajdujący rozmiar najmniejszego pokrycia wierzchołkowego w zadaym grafie G .

Wskazówka

Żeby znaleźć najmniejsze pokrycie wierzchołkowe, wystarczy znaleźć największy zbiór niezależny – szukane pokrycie będzie jego dopełnieniem. Zbiór niezależny można znaleźć przy pomocy prostego algorytmu zachłannego:

```
I = zbiór pusty

for v in V:
    N = zbiór sąsiadow v
    if I oraz N sa rozłączne:
        dodaj v do I
```

Podobnie jak w przypadku poprzedniego zadania, w ogólności taki algorytm nie znajduje *największego* zbioru niezależnego, ale jest tak w przypadku grafów przekątniowych, jeśli przeglądamy wierzchołki w kolejności **odwrotnej** do kolejności idealnej eliminacji (PEO) zwróconej przez LexBFS.

Algoritmy potrzebne do wykonania zadań

Algorytm LexBFS

Algorytm LexBFS działa podobnie jak zwykły BFS – przegląda wierzchołki grafu wszzer, przy czym kolejność w jakiej wierzchołki są odwiedzane spełnia pewien dodatkowy warunek. O ile BFS przez użycie kolejki jako następny do odwiedzenia wybiera dowolny nieodwiedzony wierzchołek którego poprzednik był odwiedzony najwcześniej, LexBFS dodatkowo rozstrzyga "remisy" porównując dla każdego nieodwiedzony w zbioru wszystkich jego poprzedników (tj. wierzchołków połączonych z v które zostały już odwiedzone) i wybiera ten, którego zbiór poprzedników jest "leksykograficznie najmniejszy".

Konkretnie – niech u , v będą nieodwiedzonymi jeszcze wierzchołkami, $P(u)$, $P(v)$ będą ich zbiorami poprzedników. Jeśli najwcześniej odwiedzony wierzchołek z $P(u)$ był odwiedzony wcześniej niż najwcześniej odwiedzony wierzchołek z $P(v)$, to $P(u)$ jest leksykograficznie mniejszy niż $P(v)$. Jeśli najwcześniej odwiedzone wierzchołki w obu zbiorach są równe, porównujemy drugie najwcześniej odwiedzone itd. Jeśli dojdziemy do momentu w którym jeden ze zbiorów się "skończy", to ten drugi jest leksykograficznie mniejszy.

Realizacja

Algorytm odwiedzający wierzchołki w kolejności LexBFS (algorytm 2 z artykułu, lekko zmodyfikowany) działa następująco. Przechowujemy nieodwiedzone wierzchołki w liście zbiorów zbudowanej w taki sposób, że wierzchołki w dalszych zbiorach mają leksykograficznie mniejsze zbiory poprzedników. W każdej iteracji wybieramy do odwiedzenia dowolny wierzchołek v z ostatniego zbioru, usuwamy go z tego zbioru i uaktualniamy listę zbiorów.

Aby uaktualnić listę zbiorów, po kolei dla każdego zbioru X dzielimy go na dwa podzbiory – Y , który zawiera te elementy X które są sąsiadami nowo odwiedzzonego wierzchołka v , oraz K – reszta X , tj. $K = X - Y$. Nowo stworzone zbiory wstawiamy do listy zamiast X w kolejności K , Y (czyli wierzchołki sąsiadujące z v będą odwiedzone wcześniej).

Na początku działania algorytmu zaczynamy od listy zawierającej jeden element – zbiór wszystkich wierzchołków. Aby zacząć przeglądanie grafu od wybranego wierzchołka v , wystarczy zamiast tego zacząć od listy z dwoma elementami – $V - \{v\}$ oraz $\{v\}$.

Przykład

Prześledzimy działanie LexBFS na grafie poniżej (Fig. 5 z podlinkowanego artykułu).



Zaczniemy od wierzchołka 1 – w wyniku jego odwiedzenia pozostałe wierzchołki mają następujące zbiory poprzedników:

```
odwiedzone - 1
6 - {1}
2,3,4,5,7,8 - {}
lista - [{2,3,4,5,7,8}, {6}]
```

Tylko jeden element ma poprzednika, więc jego zbiór poprzedników jest leksykograficznie najmniejszy. Stąd, jako następny odwiedzimy wierzchołek 6:

```
odwiedzone - 1, 6
7,8,3 - {6}
2,4,5 - {}
lista - [{2,4,5}, {7,8,3}]
```

Następny zostanie odwiedzony zatem któryś z wierzchołków 7, 8, 3. Tutaj możemy wybrać dowolny – LexBFS nie narzuca kolejności w przypadku równych zbiorów poprzedników. Wybierzmy np. wierzchołek 8:

```
odwiedzone - 1, 6, 8
7,3 - {6,8}
2,5,4 - {8}
lista - [{2,4,5}, {7,3}]
```

Jako następny wierzchołek odwiedzony zostać musi 7 lub 3. Wybierzmy 3:

```
odwiedzone - 1, 6, 8, 3
7 - {6,8}
2,4,5 - {8}
lista - [{2,4,5}, {7}]
```

Kolejno odwiedzić należy 7:

```
odwiedzone - 1, 6, 8, 3, 7
2 - {8}
5 - {8, 7}
4 - {8, 7}
lista - [{2}, {4,5}]
```

Wierzchołki 2, 4 i 5 mają takiego samego najwcześniej występującego poprzednika, ale tylko 4 i 5 mają drugiego w kolejności poprzednika, ponadto jest on taki sam – stąd, odwiedzić musimy albo 4, albo 5. Wybierzmy 4:

```
odwiedzone - 1, 6, 8, 3, 7, 4
2 - {8}
5 - {8, 7}
lista - [{2}, {5}]
```

Jak wyżej, najwcześniejszy poprzednik jest taki sam, ale 5 ma drugiego poprzednika, zostanie zatem odwiedzony jako pierwszy:

```
odwiedzone - 1, 6, 8, 3, 7, 4, 5
2 - {8}
lista - [{2}]
```

W przypadku ostatniego wierzchołka nie mamy wyboru, ostateczna kolejność to

```
1, 6, 8, 3, 7, 4, 5, 2
```

Warto zauważyć, że LexBFS nie ustala kolejności odwiedzania wierzchołków jednoznacznie.

Kolejność idealnej eliminacji (Perfect Elimination Ordering)

Dla danego uporządkowania wierzchołków $O = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ możemy sprawdzić, czy jest to kolejność idealnej eliminacji w następujący sposób (algorytm 3 w podlinkowanym artykule). Niech $RN(v)$ będzie zbiorem sąsiadow w pojawiających się w O wcześniej niż v , zaś $parent(v)$ niech będzie najpóźniej pojawiającym się elementem $RN(v)$. Z definicji kolejności idealnej eliminacji, zbiór $RN(v) + \{v\}$ powinien być kliką, więc w szczególności $RN(v)$ poza $parent(v)$ powinien zawierać się w $RN(parent(v))$.

Można pokazać, że jest to również warunek wystarczający. Jeśli v jest pierwszym wierzchołkiem dla którego zbiór $RN(v) + \{v\}$ nie jest kliką, to istnieją w $RN(v)$ wierzchołki x i y nie połączone krawędzią. Jako że $parent(v)$ jest najpóźniejszym elementem $RN(v)$, co najmniej jeden z nich – powiedzmy, że x – musi pojawiać się przed $parent(v)$ (drugi albo pojawia się przed $parent(v)$, albo jest to $parent(v)$). Jeśli x jest elementem $RN(parent(v))$, to x , y leżą w $RN(parent(v)) + \{parent(v)\}$ które z założenia jest kliką (v jest pierwszym wierzchołkiem który łamie to założenie), więc muszą być połączone – sprzeczność. Stąd, x nie jest sąsiadem $parent(v)$, ale jest sąsiadem v , a zatem $RN(v) - \{parent(v)\}$ nie jest podzbiorem $RN(parent(v))$.

Żeby sprawdzić więc, czy zadany porządek jest kolejnością idealnej eliminacji, wystarczy dla każdego wierzchołka v policzyć $RN(v)$ oraz $parent(v)$, i sprawdzić czy zbiór $RN(v) - \{parent(v)\}$ jest zawarty w $RN(parent(v))$.

Pomocne fragmenty kodu

Zbiory w Pythonie

Implementacja zbiorów w bibliotece standardowej Pythona pozwala na proste wykonywanie operacji teoriomnogościowych przy użyciu operatorów.

```
A = set() # zbiór pusty
B = {1, 2, 3} # zbiór z elementami 1, 2, 3
C = {2, 4, 5}

if A: ... # zbiór pusty jest traktowany jako False
if B: ... # zbiór niepusty - jako True

B | C # suma zbiorów - {1, 2, 3, 4, 5}
B & C # przecięcie zbiorów - {2}
B - C # różnica zbiorów - {1, 3}

A |= B, A &= B ... # modyfikacja zbioru w miejscu

2 in B, 5 not in B # przynależność do zbioru
{1, 3} <= B # zawieranie - True
```

Więcej przykładów można znaleźć w [dokumentacji](#).

Reprezentacja grafu

Wszystkie grafy używane w tym laboratorium są nieskierowane. Bardzo pomocna w implementacji będzie reprezentacja oparta o listy, bądź zbiory sąsiedztwa – w wielu miejscach konieczne jest wykonanie pewnych operacji teoriomnogościowych (suma, przecięcie) z użyciem zbioru sąsiadow danego wierzchołka.

```
class Node:
    def __init__(self, idx):
        self.idx = idx
        self.out = set() # zbiór sąsiadow

    def connect_to(self, v):
        self.out.add(v)

    ...

(G, L) = loadWeightedGraph(name)

V = [None] + [Node(i) for i in range(1, V+1)] # żeby móc indeksować numerem wierzchołka

for (u, v, w) in L:
    G[u].connect_to(v)
    G[v].connect_to(u)
```

Testowanie porządku LexBFS

Jeśli v_1, v_2, \dots, v_n jest jedną z możliwych kolejności, z jaką odwiedził wierzchołki grafu algorytm LexBFS, to spełniony jest następujący warunek:

Jeśli $k < i < j$ są takie, że vk jest sąsiadem vj , ale nie jest sąsiadem vi , to istnieje również $m < k$ takie, że vm jest sąsiadem vi , ale nie jest sąsiadem vj .

Można tej własności użyć do skonstruowania prostej funkcji sprawdzającej, czy kolejność zwrócona przez implementację LexBFS jest poprawna:

```
def checkLexBFS(G, vs):
    n = len(G)
    pi = [None] * n
    for i, v in enumerate(vs):
        pi[v] = i

    for i in range(n-1):
        for j in range(i+1, n-1):
            Ni = G[vs[i]].out
            Nj = G[vs[j]].out

            if pi[v] == [pi[v] for v in Ni - Ni if pi[v] < i]
                viable = [pi[v] for v in Ni - Ni if pi[v] < j]
                if not viable or min(Ni) <= min(Nj) (gdzie n to rozmiar danych wejściowych; pierwsza impementacja, o ile opiera się na zbiorach i listach z Pythona, działa w czasie  $O(n^2 \log n)$  albo  $O(n^2)$ )
                    return False
    return True
```

Proponowana kolejność prac

- zaimplementuj algorytm LexBFS
- upewnij się, że działa poprawnie używając sposobu opisanego wyżej – jeśli LexBFS jest zaimplementowany źle, nic innego nie będzie działać poprawnie
- zaimplementuj algorytm sprawdzający, czy kolejność wierzchołków zwrócona przez LexBFS jest *kolejnością idealnej eliminacji* (PEO) – jeśli tak, graf jest przekątniowy
- Zaimplementuj zachłanny algorytm kolorowania wierzchołków odwiedzając je w kolejności zwróconej przez LexBFS
- Zaimplementuj algorytm znajdowania największej kliki w grafie przekątniowym
- Zaimplementuj zachłanny algorytm znajdowania niezależnego zbioru wierzchołków w kolejności odwrotnej do tej zwróconej przez LexBFS – najmniejsze pokrycie wierzchołkowe to zbiór pozostałych wierzchołków
- Zaimplementuj algorytm LexBFS tak, żeby działał w czasie $O(n \log n)$ (gdzie n to rozmiar danych wejściowych; pierwsza impementacja, o ile opiera się na zbiorach i listach z Pythona, działa w czasie $O(n^2 \log n)$ albo $O(n^2)$)
- Zaimplementuj algorytm LexBFS tak, żeby działał w czasie $O(n)$ (gdzie n to rozmiar danych wejściowych)