

UNIVERSITÄT HEIDELBERG
Physikalisches Praktikum PAP 2.2
für Studierende der Physik

Elektrizität und Radioaktivität

- 241 Wechselstromeigenschaften von RCL-Gliedern (2-Tages-Versuch)
- 242 Spannungsverstärkung
- 243 Messung der Boltzmannkonstante
 - Teil II Thermisches Rauschen
- 245 Induktion
 - Grundlagen zu den Versuchen der Radioaktivität
- 251 Statistik
- 252 Aktivierung mit thermischen Neutronen
- 253 Absorption von α -, β - und γ -Strahlen
- 255 Röntgenspektrometer
- 256 Röntgenfluoreszenz

Versuch 241

Wechselstromeigenschaften von RLC-Gliedern

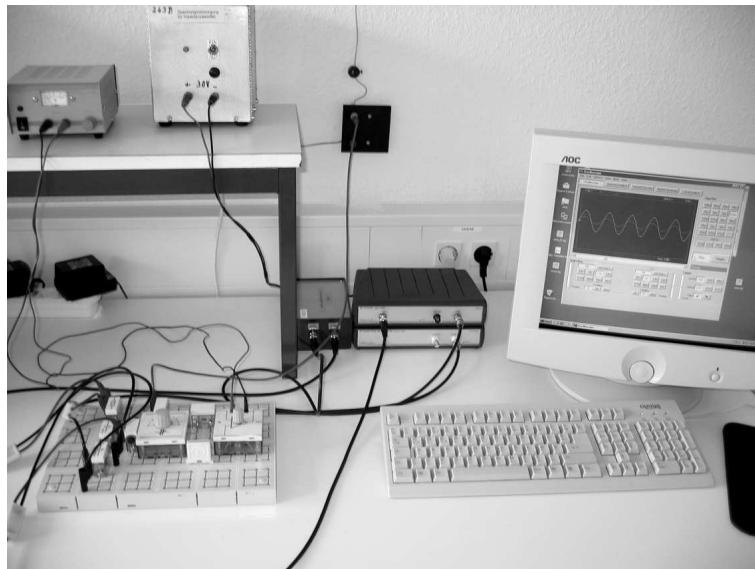


Abbildung 1: Versuchsaufbau.

I Messaufbau

- PC- gesteuerter Funktionsgenerator und Speicheroszilloskop
- Analog- Oszilloskop
- Diverse passive Bauteile: Widerstände, Spulen, Kondensatoren, Diode
- Steckbrett zum Aufbau von Schaltungen
- Impedanzwandler mit Netzteil

- Niederfrequenz- Verstärker mit Netzteil
- Langdrahtantenne, Erdleitung
- Zwei Kopfhörer mit unterschiedlicher Impedanz
- Computer mit Drucker

II Literatur

Alle für diesen Versuch erforderliche theoretische Hintergründe, werden in dieser Anleitung sehr ausführlich im Kapitel **Grundlagen** behandelt. Weiterhin wird dieses Thema von nahezu allen Standardwerken der Physik aufgegriffen: z.B. Gerthsen, Bergmann-Schäfer, Tipler, Demtröder etc.

Für den an allgemeiner Elektronik interessierten Leser, seien auch noch die Bücher von Horowitz/ Hill, *The Art of Electronics* sowie das Buch von Tietze-Schenk, *Halbleiterschaltungstechnik* zu empfehlen.

III Vorbereitung

Mathematische Voraussetzungen: Der Einfachheit wegen werden in diesem Versuch Schwingungsvorgänge mit Hilfe komplexer Zahlen beschrieben. Ihnen muss klar sein, wie man hiermit die realen Schwingungsvorgänge beschreibt und den Betrag und die Phase bestimmt. Zusätzlich sollten Sie mit einfachen Differentialgleichungen, denen Sie bereits in der Mechanik begegnet sind, vertraut sein.

Verständnisfragen:

1. Wie groß ist die Zeikonstante eines RC-Gliedes? Was genau beschreibt Sie?
2. Was versteht man unter der Impedanz? Geben Sie die Impedanz eines ohmschen Widerstands, eines Kondensators und einer Induktivität an.
3. Unter welchen Voraussetzungen verhält sich ein RC-Glied als Integrator bzw. als Differentiator?
4. Skizzieren Sie den Frequenzgang eines Hoch- und Tiefpassfilters. Wie ist die Grenzfrequenz definiert?

5. Wovon hängt bei einem RC-Glied die Phasenverschiebung zwischen Eingangs- und Ausgangsspannung ab? Wie groß ist die Phasenverschiebung bei der Grenzfrequenz sowie bei sehr hohen und sehr kleinen Frequenzen?
6. Stellen Sie eine Analogie zwischen einem elektrischen und einem mechanischen Schwingkreis her. Welchen elektrischen Größen entsprechen der Masse, Auslenkung, Geschwindigkeit, Federkonstante und Reibungskonstante?
7. Wie berechnet sich die Eigenfrequenz eines elektrischen Schwingkreises? Welche Größen bestimmen die Dämpfung des Schwingkreises?
8. Wie groß ist die Impedanz eines LC-Glieds in Serien- und Parallelschaltung?
9. Was ist der Unterschied zwischen einer freien und einer erzwungenen Schwingung? Skizzieren Sie den Frequenzgang eines Serienschwingkreises bei Abgriff über dem Widerstand, Kondensator und Spule. In welchen Fällen tritt eine Resonanzüberhöhung auf?

IV Motivation

Elektrische Schaltungen mit Widerständen (R), Kondensatoren (C) und Spulen (L), sogenannte passiven Bauelemente, stellen in der Wissenschaft und Technik ein elementares Schaltungskonzept dar. So liefern beispielsweise RLC-Glieder die Zeitbasis für viele elektrisch erzeugte Schwingungsabläufe. Ein analoger Funktionsgenerator, mit dem Sie hier im Praktikum häufig arbeiten werden, erhält seine Zeitinformation letztendlich von einem internen RC-Glied. Eine weitere wichtige Anwendung von RC-Gliedern stellen Filter-Schaltungen dar. Die Spannung, die in einer RC-Schaltung über dem Kondensator abfällt, hängt von der Frequenz der eingeprägten Spannung ab. Mit anderen Worten: Der Wechselstromwiderstand (Impedanz) ist frequenzabhängig. Somit lassen sich Schaltungen aufbauen, die nur Tiefe, nur Höhe oder nur einen bestimmten Frequenzbereich durchlassen. Denken Sie beispielsweise an den Verstärker Ihrer Stereoanlage. Auch hier sind Filterschaltungen auf Basis von RC-Gliedern vorhanden, mit denen Sie die Höhen, Mitten und Tiefen des Audiosignals nach Ihrem Musikempfinden durch Filterung einstellen können (Klangregelung, Frequenzweiche des Lautsprechers).

Eine in der Physik wichtige Anwendung von passiven Bauelementen, stellt die Signalformung bzw. die Signalaufbereitung dar. Häufig wird die zu messende physikalische Größe mit Hilfe von Sensoren in eine korrespondierende elektrische Größe (Strom, Spannung etc.) gewandelt. In vielen Fällen ist diese Größe aber nicht ohne zusätzliche Maßnahmen direkt auswertbar. Der eigentlichen Informationen können erhebliche Störanteile wie beispielsweise frequenzabhängiges Rauschen, das 50-Hz Netzbrummen oder elektrisches Übersprechen bzw. Einkopplung von Hochfrequenz-Signalen überlagert sein, die das „direkte Ablesen“ der zu messenden physikalischen Größe unmöglich machen. Die Messsignale müssen daher mit Hilfe von RLC-Schaltungen aufbereitet werden, so dass alle Störanteile so weit wie möglich unterdrückt werden.

Neben solch technisch sehr wichtigen Anwendungen dient das Studium von RLC-Gliedern auch zum Erkennen von parasitären Effekten in der Messtechnik. Jedes Kabel und jedes Messgerät besitzen ohmsche, induktive und kapazitive Eigenschaften, die die Messung einer physikalischen Größe beeinflussen und somit verfälschen können. Sollen z.B. sehr schnelle und schmale Impulse erzeugt bzw. gemessen werden, so können bereits kleinste Kapazitäten (z.B. Kabel, Kapazität des Oszilloskops etc.) die Flankensteilheit der Impulse beeinträchtigen. Es ist daher wichtig diese Einflüsse schon vor einer Messung zu erkennen und entsprechend zu kompensieren.

Es sollte noch erwähnt werden, dass die resonanten Eigenschaften von RLC-Gliedern viele Parallelen zu anderen Bereichen der Physik aufweisen. Die Resonanz, sei es in der Optik, der Quantenmechanik oder in irgendeinem anderen Gebiet der Physik, stellt ein fundamentales Konzept dar. Das exakte mechanische Analogon zum elektrischen RLC-Resonanzkreis haben Sie bereits im Praktikum 1 bei der Durchführung des Versuchs 13, dem Drehpendel, studiert. Auch die Messung der Schallgeschwindigkeit in Versuch 26 mit dem Quinckeschen Rohr basierte auf Resonanzeffekte. Im Bereich der Optik werden Resonanzphänomene ausgenutzt um schmalbandige Filter zu realisieren. Damit lassen sich Spektren von Lichtquellen hochauflösend untersuchen (z.B. Fabry-Perot Interferometer) oder äußerst monochromatische Lichtquellen, wie es beim LASER der Fall ist, erzeugen¹.

Dieser Versuch ist in zwei Teile gegliedert. Im ersten Teil werden Sie die Wechselstromeigenschaften passiver Bauelemente experimentell untersuchen und charakteristische Größen von RC-Filttern bzw. RLC-Schwingkreisen experimentell verifizieren. Der zweite Teil konzentriert sich auf die praktische Anwen-

¹Die Funktion eines LASERS ist nicht allein auf ein Resonanzphänomen zurückzuführen. Allerdings ist ein optischer Resonator Bestandteil jedes Lasersystems.

dung von RLC- Schaltungen. Hier werden Sie z.B. erarbeiten, wie aus einem „gestörten Signal“, das eigentliche Nutzsignal mit Hilfe von Filterschaltungen extrahiert werden kann. Um dies weiter zu vertiefen, sollen Sie anhand eines selbst aufgebauten Empfängers, ein einfaches Mittelwellen-Radio aufbauen. Das von der Antenne empfangene Signal, liefert eine Überlagerung von mehreren Sendern. Durch ein gezieltes Filtern mit (R)LC- Gliedern der entsprechenden Durchlassfrequenz, können Sie den gewünschten Sender von den anderen isolieren.

V Grundlagen

Verhalten eines RC- Gliedes im Zeitbereich

Ein Kondensator C und ein Widerstand R werden über einen Schalter S an eine **Gleichspannungsquelle** U_E angeschlossen (Abbildung 2). Wir interessieren uns für den zeitlichen Verlauf der Spannung am Kondensator U_C : Wird der Schalter geschlossen, so fließt durch den Widerstand ein Strom zum Kondensator. Allerdings können die Ladungen nicht durch den Kondensator fließen, da die beiden Kondensatorelektroden durch ein nichtleitendes Dielektrikum getrennt sind. Es kommt daher zu einer Ansammlung von Ladungsträgern an den Kondensatorelektroden, wodurch sich über dem Kondensator die Spannung U_C aufbaut. Man spricht dabei auch vom „Aufladen eines Kondensators“. Mit zunehmender Aufladung wird der Ladestrom immer geringer, denn die sich am Kondensator aufbauende Spannung, wirkt der Gleichspannungsquelle entgegen, so dass sich pro Zeiteinheit immer weniger Ladungen an den Elektroden ansammeln können. Schließlich ist nach einer gewissen Zeit die Kondensatorspannung genau so groß wie U_E .

Die Spannung am Kondensator erreicht demnach nur allmählich den Wert der Eingangsspannung U_E . Der Ladestrom verhält sich genau umgekehrt. Beim Einschalten fließt ein hoher Ladestrom, der während des Aufladevorgangs immer geringer wird und schließlich auf Null zurückgeht.

Der Ladevorgang eines Kondensators gemäß des Schaltbilds in Abbildung 2 lässt sich mathematisch einfach beschreiben. Nach der Kirchhoff'schen Maschenregel gilt:

$$U_E = U_C + U_R = U_C + RI. \quad (1)$$

Der Strom I lässt sich durch die zeitliche Änderung der Ladung im Kondensator

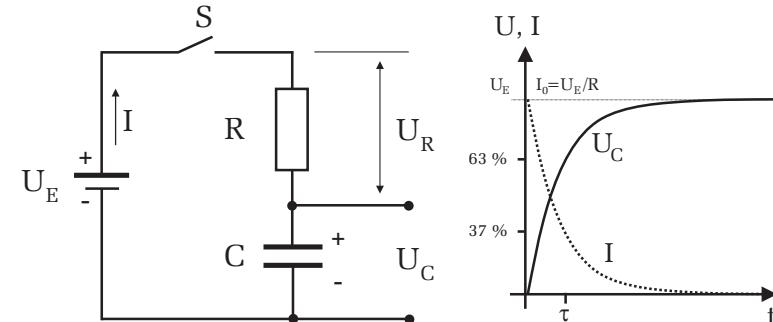


Abbildung 2: Links: Schaltbild. Rechts: Spannungs- und Stromverlauf beim Laden eines Kondensators. $I_0 = U_E/R$ entspricht dem Ladestrom direkt nach dem Schließen des Schalters und U_E ist die Spannung des aufgeladenen Kondensators, die gerade der Eingangsspannung entspricht. Die Zeitkonstante τ entspricht der Zeit, bei der die Kondensatorspannung auf 63% ($(e-1)/e$) des Endwerts U_E angestiegen, bzw. der Ladestrom auf 37% ($1/e$) des Endwerts abgefallen ist.

beschreiben. Hierfür gilt:

$$I = \dot{Q} = C\dot{U}_C. \quad (2)$$

Einsetzen in (1) liefert eine inhomogene Differentialgleichung erster Ordnung

$$U_E = U_C + RC \dot{U}_C \equiv U_C + \tau \dot{U}_C, \quad (3)$$

wobei hier die Zeitkonstante $\tau = RC$ definiert wurde. Diese Differentialgleichung ist elementar lösbar.

Mit der Anfangsbedingung, dass zum Zeitpunkt $t = 0$ der Schalter geschlossen wird, ergibt sich für die Kondensatorspannung

$$U_C(t) = U_E(1 - e^{-t/\tau}). \quad (4)$$

Für die Spannung am Widerstand U_R folgt aus der Kirchhoff'schen Maschenregel: $U_R = U_E - U_C$ und (4):

$$U_R(t) = U_E e^{-t/\tau} \quad (5)$$

Für den Strom gilt nach dem Ohm'schen Gesetz

$$I(t) = U_R(t)/R = I_0 e^{-t/\tau}, \quad (6)$$

wobei I_0 durch U_E/R gegeben ist. Direkt nach dem Einschalten fließt im RC-Kreis ein Maximalstrom I_0 , der den Kondensator auflädt und der mit der Zeitkonstante τ exponentiell auf Null abklingt. Entsprechend steigt die Spannung U_C des Kondensators exponentiell mit der Zeitkonstante τ an, bis schließlich der Endwert, die Eingangsspannung U_E , erreicht wird.

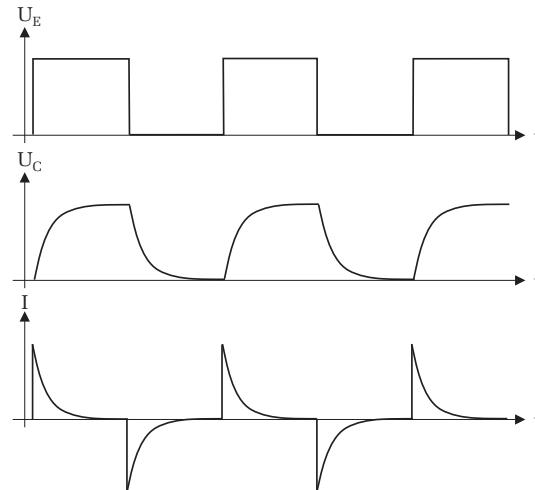


Abbildung 3: Eine rechteckförmige Eingangsspannung U_E bewirkt ein kontinuierliches Laden und Entladen des Kondensators. Beachten Sie, dass sich die Richtung des Ladestroms I beim Entladen umkehrt.

Das zeitliche Verhalten des Ladevorgangs wird allein durch die Zeitkonstante $\tau = RC$ bestimmt. Je größer τ , desto länger dauert es bis der Kondensator aufgeladen ist. Dies ist leicht einzusehen, denn ein hochohmiger Widerstand R bewirkt, dass im Mittel nur ein kleiner Ladestrom fließt. Entsprechend lange dauert es bis der Kondensator vollständig aufgeladen ist. Zudem bedeutet eine große Kapazität ein hohes „Fassungsvermögen“ für Ladungen. Daher benötigt eine große Kapazität bei gegebenem Ladestrom eine längere Ladezeit als eine kleine Kapazität.

Die Zeitkonstante τ kann durch Messung der Halbwertszeit T_{12} der Kondensatorspannung experimentell bestimmt werden. Aus Gleichung (4) folgt für die Halbwertszeit

$$\frac{U_E}{2} = U_E \left(1 - e^{-T_{12}/\tau}\right) \quad (7)$$

und damit

$$\tau = \frac{T_{12}}{\ln 2}. \quad (8)$$

Statt einer Gleichspannungsquelle und eines Schalters wird das RC-Glied nun an eine Rechteckspannung mit der Periodendauer T angeschlossen. Steigt die Spannung von Null auf den Wert U_E , so wird der Kondensator - wie zuvor diskutiert - mit der Zeitkonstante τ aufgeladen. Fällt die Spannung dann wieder auf Null zurück, so wird der Kondensator über den Widerstand R entladen. Der Entladevorgang erfolgt mit der gleichen Zeitkonstante τ wie der Ladevorgang. Der zeitliche Verlauf der Kondensatorspannung und des Ladestroms ist in Abbildung 3 dargestellt.

Impedanz

Wird ein RC-Glied an eine Gleichspannungsquelle angeschlossen, so fließt nur für kurze Zeit ein Ladestrom. Aus (6) lässt sich berechnen, dass nach der Zeit $t \approx 7\tau$ der Kondensator bereits zu 99,9% aufgeladen und der Ladestrom nahezu auf Null abgesunken ist. Da der Strom nach dem Ladevorgang verschwindet, hat nach dem ohmschen Gesetz ein RC-Glied einen unendlich hohen Gleichstromwiderstand. Anders ist die Situation wenn statt einer Gleichspannung eine Wechselspannung an das RC-Glied angeschlossen wird. In diesem Fall ändert sich die Eingangsspannung stetig, so dass stets ein Laden und Entladen des Kondensators erfolgt. Im Folgenden wollen wir die Spannungs- und Stromverhältnisse für ein einzelnes passives Bauelement (d.h. gesondert für R , L , C) im Wechselstromkreis berechnen und nach dem ohmschen Gesetz aus dem Verhältnis $Z = U/I$ den Wechselstromwiderstand d.h. die Impedanz Z bestimmen (Abbildung 4).

Betrachten wir zunächst einen einzelnen **ohmschen Widerstand**, der an eine Wechselspannung $U_E(t) = U_0 e^{i\omega t}$ angeschlossen ist. Dabei steht U_0 für die Amplitude und $\omega = 2\pi f$ für die Kreisfrequenz der Eingangsspannung. Der Strom $I(t) = I_0 e^{i\omega t}$ ist zu allen Zeiten in Phase mit der Spannung und es gilt:

$$Z_R = \frac{U(t)}{I(t)} = \frac{U_0}{I_0} = R. \quad (9)$$

Wie bereits erwähnt, steht Z für den Wechselstromwiderstand, der auch als Impedanz bezeichnet wird. In diesem Fall besitzt die Impedanz Z_R nur einen ohmschen Anteil und ist identisch mit dem Gleichstromwiderstand R .

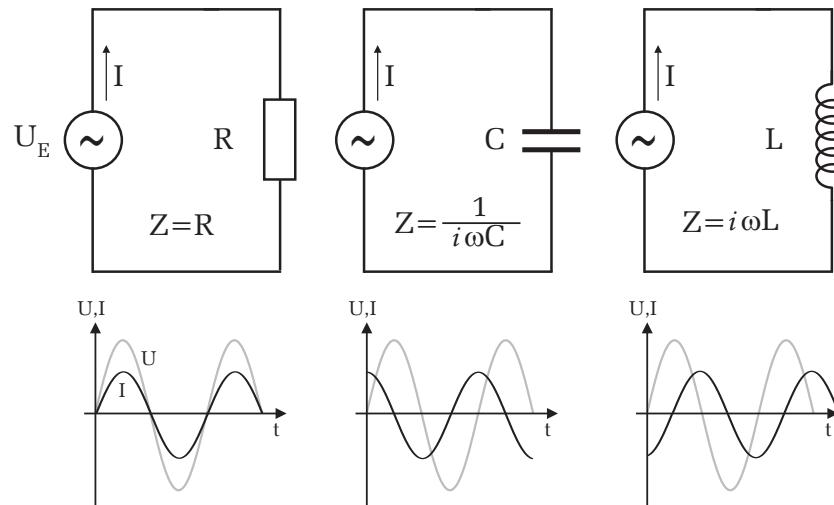


Abbildung 4: Impedanz von Widerstand, Kondensator und Spule.

Bei einer einzelnen Kapazität im Wechselstromkreis gilt:

$$U_E(t) = \frac{Q}{C} \Rightarrow \dot{U}_E(t) = \frac{I(t)}{C} \Rightarrow i\omega U_E(t) = \frac{I(t)}{C} \quad (10)$$

und somit für die Impedanz

$$Z_C = \frac{U_E(t)}{I(t)} = \frac{1}{i\omega C} = -\frac{i}{\omega C}. \quad (11)$$

Die Impedanz eines Kondensators besitzt nur einen Imaginäranteil. Man bezeichnet solch eine rein **imaginäre Impedanz** auch als **Blindwiderstand**. Die Bezeichnung „blind“ röhrt daher, dass dieser, im Gegensatz zu einem ohmschen Widerstand, keine elektrische Leistung verbraucht. Da im Nenner ω auftaucht, ist der Wechselstromwiderstand eines Kondensators frequenzabhängig: Für $\omega \rightarrow 0$, d.h. für Gleichstrom, wird die Impedanz unendlich groß und verschwindet für $\omega \rightarrow \infty$. Ferner lässt sich aus Gleichung (11) ablesen, dass wegen der komplexen Einheit $-i$ im Zähler, zwischen Strom und Spannung eine Phasenverschiebung besteht: Der Strom eilt der Spannung um $\pi/2$ voraus.

Die Impedanz einer Spule berechnet sich entsprechend aus

$$U_E(t) = L\dot{I}(t) = i\omega L I(t) \quad (12)$$

und somit

$$Z_L = \frac{U_E(t)}{I(t)} = i\omega L. \quad (13)$$

Auch hier ist die Impedanz rein imaginär und ebenfalls frequenzabhängig. Die Spannung eilt dem Strom um eine Phasenverschiebung von $\pi/2$ voraus.

Auf der Frequenzabhängigkeit der Impedanz von Spule und Kondensator, bzw. aus zusammengesetzten Systemen aus Spule Kondensator und auch Widerständen basieren elementare Filterschaltungen. Auf diese wollen wir in den nachfolgenden Abschnitten ausführlich eingehen. Zudem werden wir deren Eigenschaften auch im Zeitbereich studieren und auf typische Oszillationsvorgänge eingehen.

Frequenzverhalten von RC-Gliedern

Bisher haben wir nur das Verhalten von RC-Gliedern im Zeitbereich untersucht. Um das Verhalten von Kondensatoren in Wechselstromkreisen zu verstehen, soll im Folgenden untersucht werden, wie ein RC-Glied auf eine sinusförmige Anregung reagiert.

Betrachten wir zunächst die Schaltung in Abbildung 5 links. Zwei in Serie geschaltete Widerstände sind an einer Wechselspannungsquelle $U_E(t) = U_0 e^{i\omega t}$ angeschlossen. Für die Spannung, die am Widerstand R_2 abfällt, folgt nach dem ohmschen Gesetz:

$$U_{R2}(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_E(t). \quad (14)$$

An R_2 fällt demnach eine Spannung ab, die die gleiche Frequenz und Phase aufweist wie die Eingangsspannung $U_E(t)$. Allerdings ist die Amplitude um den Faktor $R_2/(R_1+R_2)$ geringer als U_0 . Sind beispielsweise die Widerstände gleich groß, so misst man an R_2 nur die Hälfte der Amplitude der Eingangsspannung (Spannungsteiler). Die Amplitude hängt aber nicht von der Frequenz ab!

Wir ersetzen nun den Widerstand R_2 durch einen Kondensator der Kapazität C und interessieren uns für die Spannung U_C , die am Kondensator abfällt (Abbildung 5 rechts). Für eine mathematische Behandlung dieses Problems müssen wir lediglich in Gleichung (14) die Impedanz des Widerstands R_2 ($Z_R = R_2$) durch die Impedanz des Kondensators ersetzen ($Z_C = -i/\omega C$):

$$U_C(t) = \frac{Z_C}{R + Z_C} U_E(t) = \frac{-i/\omega C}{R - i/\omega C} U_0 e^{i\omega t} \quad (15)$$

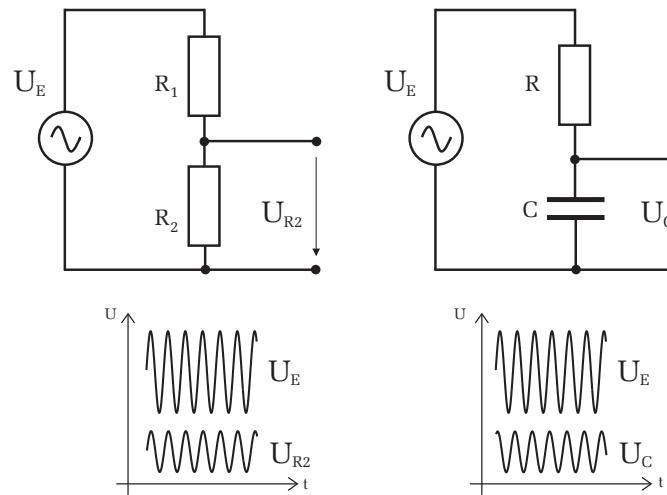


Abbildung 5: Links: Ein- und Ausgangsspannung bei einem rein ohmschen Spannungsteiler. Beide Spannungen sind phasengleich. Die Amplitude der Ausgangsspannung hängt nur von den beiden Widerstanswerten ab. Rechts: Bei einem kapazitiven Widerstand (Kondensator) kommt es zwischen Eingangs- und Ausgangsspannung zu einer Phasenverschiebung. Zudem hängt die Amplitude der Ausgangsspannung von der Frequenz ab.

und hieraus den Betrag und die Phase bestimmen:

$$|U_C| = \frac{|U_E|}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}, \quad (16)$$

$$\tan \varphi = -\omega RC. \quad (17)$$

Im Gegensatz zu der Schaltung mit den beiden Widerständen, ist die Amplitude beim RC-Glied frequenzabhängig. Für kleine Frequenzen, d.h. $\omega \rightarrow 0$, nimmt der Nenner in Gleichung (16) den Wert Eins an. Die Amplitude $|U_C|$ entspricht dann gerade der Amplitude $|U_E|$ des Eingangssignals. Für größere Frequenzen wird die Amplitude immer geringer und geht für $\omega \rightarrow \infty$ schließlich gegen Null. Das RC-Glied verhält sich wie ein **Tiefpassfilter**. Nur **tiefe** Frequenzen können den Filter **passieren**, höhere Frequenzen werden entsprechend stark gedämpft (Abbildung 6 oben).

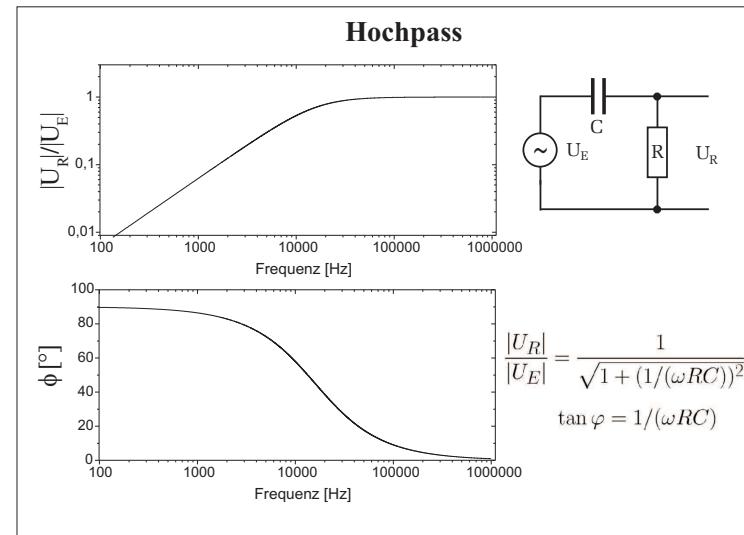
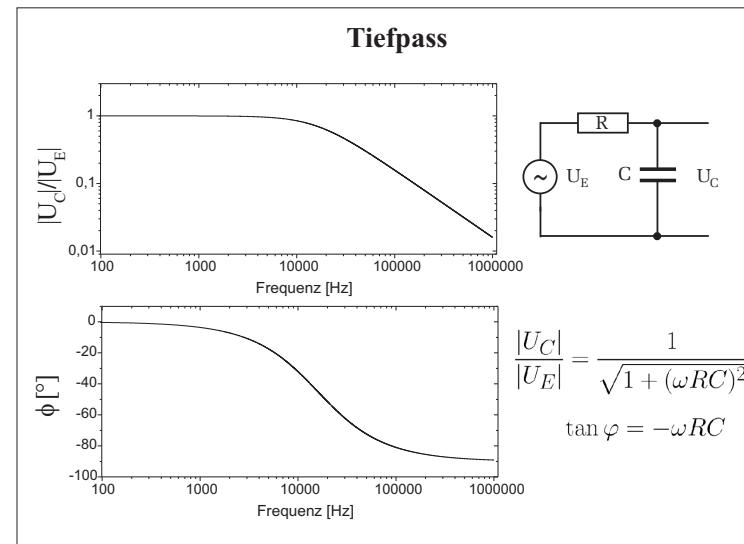


Abbildung 6: Frequenzgang und Phasenverlauf eines Tiefpass- bzw. Hochpassfilters (Bode-Diagramm). Beachten Sie den logarithmischen Maßstab der entsprechenden Achsen.

Bei einem RC-Glied tritt zusätzlich eine Phasenverschiebung φ zwischen Eingangs- und Ausgangssignal auf, die zudem von der Frequenz abhängt (Abbildung 6 oben).

Vertauscht man den Kondensator mit dem Widerstand und misst die Spannung U_R über dem Widerstand, so zeigt das RC-Glied ein Hochpassverhalten:

$$|U_R| = \frac{|U_E|}{\sqrt{1 + (1/(\omega RC))^2}} \quad (18)$$

$$\tan \varphi = 1/(\omega RC) \quad (19)$$

Entsprechend werden beim Hochpassfilter tiefe Frequenzen stark gedämpft, während höhere Frequenzen nicht bzw. nur schwach unterdrückt werden (Abbildung 6 unten).

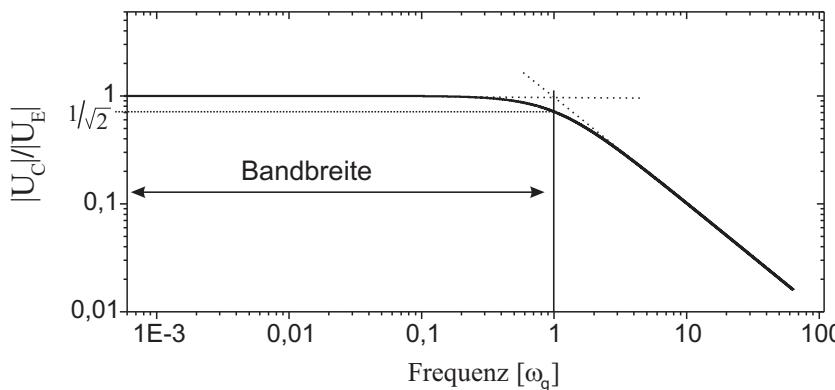


Abbildung 7: Frequenzgang eines Tiefpassfilters. Aufgetragen ist das Verhältnis der Amplitude am Kondensator zur Amplitude der Eingangsspannung über die Frequenz in Einheiten der Grenzfrequenz ω_g . Die Grenzfrequenz ergibt sich in dieser logarithmischen Auftragung aus dem Schnittpunkt der Verlängerung (gepunktete Geraden) der linearen Bereiche bei kleinen und großen Frequenzen (gepunktete Geraden).

Um die Wirkung eines Filters, d.h. dessen Bandbreite zu quantifizieren, definiert man die Grenzfrequenz

$$\omega_g = \frac{1}{RC} = \frac{1}{\tau}. \quad (20)$$

Durch Einsetzen von ω_g in Gleichung (16) bzw. Gleichung (18) erkennt man, dass bei der Grenzfrequenz die Amplitude auf das $1/\sqrt{2}$ -fache abgefallen (Tiefpass), bzw. angestiegen ist (Hochpass).

RC-Glied als Differenzier- und Integrierglied

Unter gewissen Umständen entspricht das Ausgangssignal eines RC-Tiefpasses dem Integral des Eingangssignals. Abbildung 8 zeigt den Spannungsverlauf der Ausgangsspannung U_A für verschiedene RC-Glieder mit unterschiedlichen Zeitkonstanten bei einer eingeprägten Rechteckspannung. Mit größer werdendem τ ähnelt das Ausgangssignal immer mehr dem Integral des Eingangssignals. In unserem Beispiel in Abbildung 8 erfolgt die Integration eines Rechtecksignals, wodurch sich am Ausgang ein dreieckförmiges Signal einstellt. Für $\tau_4 = 2T$ scheint dies bereits gut erfüllt zu sein. Allgemein gilt: **Für $\tau \gg T$ entspricht das Ausgangssignal U_A dem Integral des Eingangssignals U_E .**

Quantitativ lässt sich dies wie folgt ableiten: Der Strom I berechnet sich aus der zeitlichen Änderung der Kondensatorladung

$$Q = CU_A \Rightarrow I = C \frac{dU_A}{dt}. \quad (21)$$

Andererseits gilt auch

$$I = \frac{U_E - U_A}{R} \quad (22)$$

und damit

$$\frac{dU_A}{dt} = \frac{1}{RC} (U_E - U_A). \quad (23)$$

Für den Fall $U_A \ll U_E$, wie es bei einem Tiefpass nach (16) für $\tau \gg T$ der Fall ist, ergibt sich die Näherung

$$\frac{dU_A}{dt} \approx \frac{U_E}{RC}, \quad (24)$$

und somit

$$U_A \approx \frac{1}{RC} \int U_E dt. \quad (25)$$

Für $\tau \gg T$ entspricht demnach das Ausgangssignal des RC-Gliedes dem Integral des Eingangssignals.

Wird der Kondensator mit dem Widerstand vertauscht und die Spannung U_R über dem Widerstand gemessen (Hochpass), so stellt das RC-Glied für $\tau \ll T$

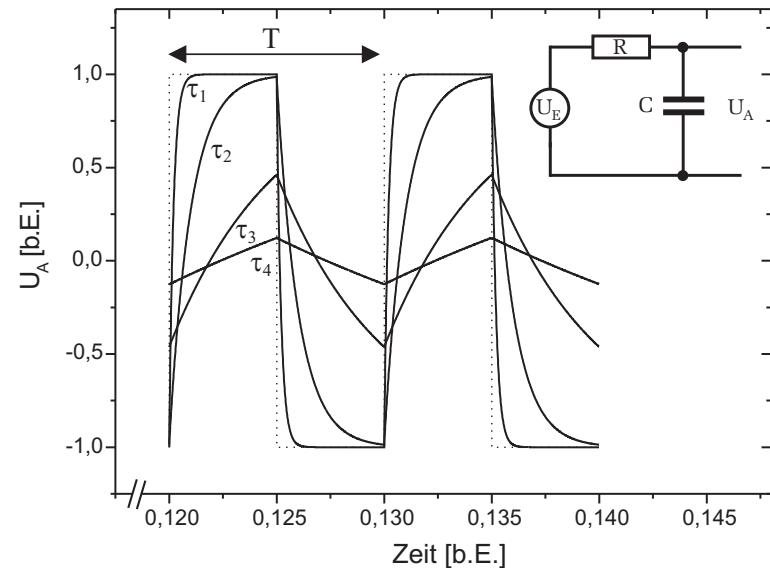


Abbildung 8: Spannungsverlauf U_A eines Integrators (Tiefpass) bei einer rechteckförmigen Eingangsspannung (gestrichene Kurve) für verschiedene Zeitkonstanten τ . Für $\tau \gg T$ entspricht U_A dem Integral der Eingangsspannung: Die Integration eines Rechtecksignals ergibt ein Dreiecksignal. $\tau_1 = 0,02T$, $\tau_2 = 0,5T$, $\tau_3 = 1T$, $\tau_4 = 2T$.

einen **Differentiator** dar. In Abbildung 9 ist dies wieder für ein rechteckförmiges Eingangssignal dargestellt.

Die Eingangsspannung entspricht der Summe der Teilspannungen über R und C :

$$U_E = U_C + U_R \equiv U_C + U_A. \quad (26)$$

Mit $U_C = Q/C$ und $I = \dot{Q}$ ergibt sich

$$U_E = \frac{Q}{C} + U_A = \frac{1}{C} \int I dt + U_A \quad (27)$$

und somit für den Strom

$$I = C \frac{d}{dt} (U_E - U_A). \quad (28)$$

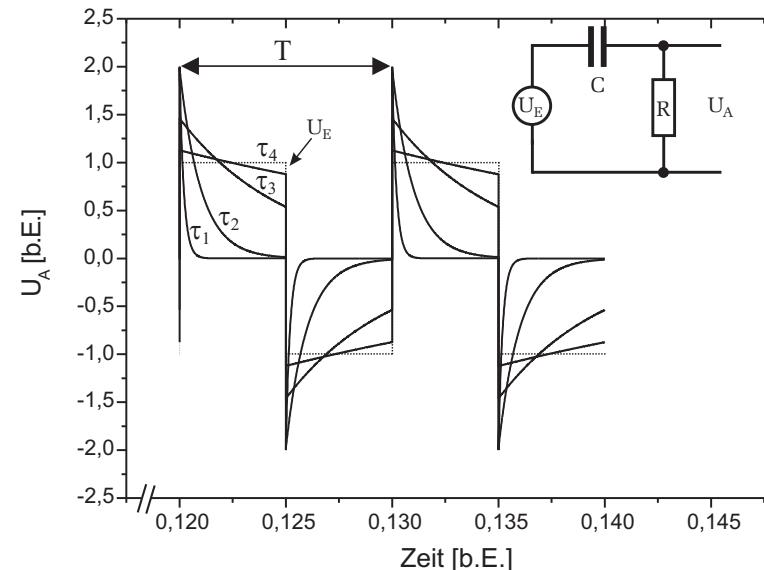


Abbildung 9: Spannungsverlauf U_A eines Differentiators (Hochpass) bei einer rechteckförmigen Eingangsspannung (gestrichelte Kurve) für verschiedene Zeitkonstanten τ . Für $\tau \ll T$ entspricht U_A der Differentiation des Eingangssignals. $\tau_1 = 0,02T$, $\tau_2 = 0,1T$, $\tau_3 = 0,5T$, $\tau_4 = 2T$.

Für den Fall, dass $\tau \ll T$ gilt, d.h. bei einem Hochpass für Frequenzen die viel kleiner sind als die Grenzfrequenz, ist nach Gleichung (18) $U_A \ll U_E$. Somit ergibt sich

$$I \approx C \frac{d}{dt} U_E. \quad (29)$$

Die Ausgangsspannung U_A wird über R abgegriffen. Mit $U_A = RI$ folgt schließlich

$$U_A \approx RC \frac{d}{dt} U_E. \quad (30)$$

Für $\tau \ll T$ entspricht demnach das Ausgangssignal des RC-Gliedes der Differentiation des Eingangssignals.

Die Integration bzw. Differentiation durch ein RC- Glied gilt natürlich nicht nur für ein rechteckförmiges Eingangssignal, sondern für beliebige periodische

Funktionen. In Abbildung 10 ist beispielsweise die Integration eines dreieckförmigen Eingangssignals dargestellt.

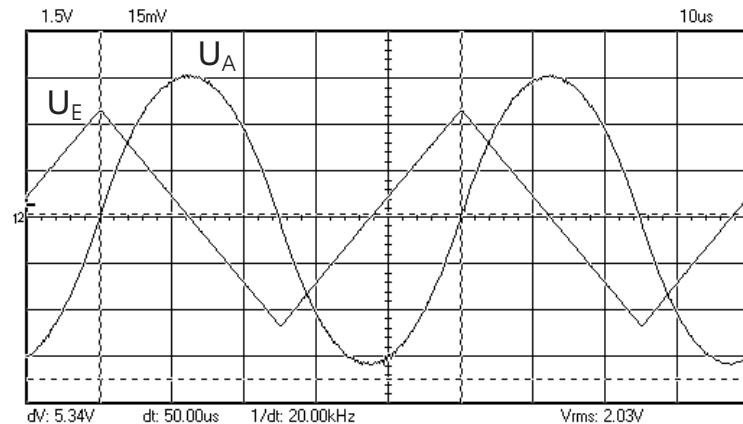


Abbildung 10: Oszilloskopbild eines RC-Gliedes als Integrator. Ein dreieckförmiges Signal ergibt am Ausgang ein parabelförmiges Signal ($\tau \approx 10T$).

Elektrischer Schwingkreis (RLC-Glied)

Eine Schaltung aus einem Kondensator und einer Spule wird als elektrischer Schwingkreis bezeichnet. Wird beispielsweise ein geladener Kondensator über eine Spule entladen, so beobachtet man, dass die Spannung am Kondensator nicht wie bei einem RC-Glied monoton auf Null abfällt, sondern zwischen zwei Extremwerten sinusförmig oszilliert. Daher die Bezeichnung Schwingkreis.

Abbildung 11 verdeutlicht die Vorgänge im Schwingkreis. Der Kondensator sei zunächst vollständig geladen. Schließt man nun parallel zum Kondensator eine Spule an, so sinkt die Spannung am Kondensator und der Entladestrom erzeugt ein Magnetfeld in der Spule. Ist der Kondensator völlig entladen, so ist der Strom maximal. Die gesamte zuvor im Kondensator gespeicherte Energie befindet sich nun in Form von magnetischer Energie in der Spule. Der nun abnehmende Strom bewirkt eine Verringerung des Magnetfeldes in der Spule. Nach dem Induktionsgesetz und der Lenz'schen Regel wird daher eine Spannung induziert, die den Kondensator mit entgegengesetzter Polung wieder

auflädt. Ist der Kondensator schließlich vollständig geladen, so ist der Strom auf Null abgesunken und der Vorgang beginnt wieder von neuem, allerdings jetzt mit umgekehrten Vorzeichen.

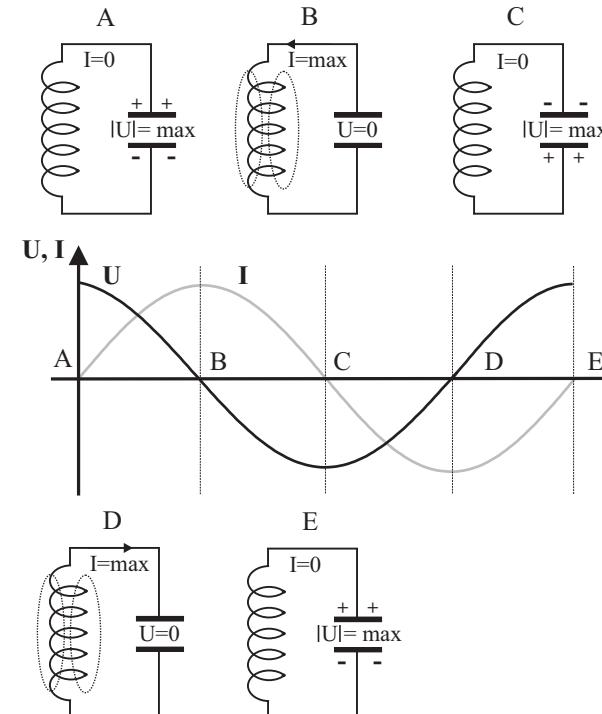


Abbildung 11: Vorgänge in einem Schwingkreis. Elektrische und magnetische Energie werden fortlaufend ineinander umgewandelt. Dies bedingt einen sinusförmigen Spannungs- und Stromverlauf.

Natürlich hält der Schwingungsvorgang nicht unendlich lang an. Jedes reale Bauelement besitzt unter normalen Bedingungen einen ohmschen Widerstand, so dass bei einem Stromfluss Verluste in Form von Wärme auftreten. Zudem weisen Kondensatoren und Spulen, sogenannte dielektrische bzw. magnetische Verluste auf, die ebenfalls ein Teil der im Schwingkreis gespeicherten Energie in Wärme umwandeln. Bei der Analyse eines Schwingkreises muss man daher stets Verluste miteinbeziehen. Ein realer Schwingkreis setzt sich daher immer

aus einer Kombination von Widerständen, Kondensator und Spule zusammen (RLC-Schwingkreis).

Der RLC- Serienschwingkreis

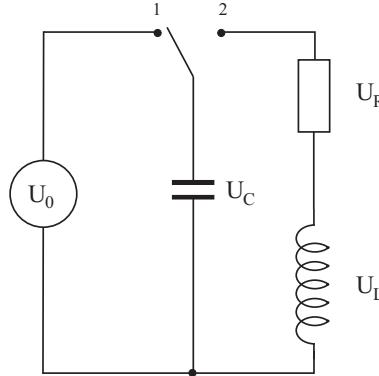


Abbildung 12: Zur Anregung des Serienschwingkreises wird der Kondensator zunächst in der Schalterstellung 1 durch eine Gleichspannungsquelle U_0 geladen. In der Stellung 2 wird der Schwingkreis geschlossen.

Ein Serienschwingkreis besteht aus einer Reihenschaltung von Widerstand, Kondensator und Induktivität. Zur Anregung wird der Kondensator zunächst in der Schalterstellung 1 geladen. Um den Schwingungsvorgang zu starten, wird anschließend, in Schalterstellung 2, der Schwingkreis geschlossen. Nach der Kirchhoff'schen Maschenregel muss die Summe aller Teilspannungen, die an den Bauteilen abfallen, verschwinden:

$$U_R + U_C - U_L = 0. \quad (31)$$

Setzen wir $U_R = RI$, $U_C = Q/C$ und $U_L = -L\frac{d}{dt}I$ in obige Gleichung ein und differenzieren zusätzlich nach der Zeit, so erhalten wir:

$$L\frac{d^2}{dt^2}I + R\frac{d}{dt}I + \frac{1}{C}I = 0. \quad (32)$$

Wir wollen zunächst den Spezialfall diskutieren, bei dem der ohmsche Widerstand verschwindet. Mit $R = 0$ und der Abkürzung $\omega_0^2 = 1/(LC)$ ergibt sich

$$\frac{d^2}{dt^2}I + \omega_0^2 I = 0. \quad (33)$$

Diese Gleichung entspricht der Schwingungsdifferentialgleichung eines harmonischen Oszillators, mit der Lösung

$$I = I_0 e^{i(\omega_0 t + \varphi)}. \quad (34)$$

Der Strom oszilliert sinusförmig mit der Eigenfrequenz

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (\text{Thomson'sche Schwingungsformel}). \quad (35)$$

Kommen wir zurück zum gedämpften Schwingkreis. Die Herleitung der allgemeinen Lösung des gedämpften Oszillators (32) soll hier nicht explizit durchgeführt werden. Sie finden diese Rechnung in nahezu allen Standardwerken der Elektrodynamik.

Die allgemeine Lösung des gedämpften Schwingkreises lautet:

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{R}{2L}t} \left(c_1 e^{\sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}t} + c_2 e^{-\sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}t} \right), \quad (36)$$

wobei c_1 und c_2 Konstanten darstellen, die von den Anfangsbedingungen abhängen. Je nach dem Wert des Arguments der beiden Exponentialfunktionen in der runden Klammer, lassen sich drei Spezialfälle unterscheiden: Schwingfall, aperiodischer Grenzfall und Kriechfall. Wir wollen uns hier auf die Diskussion des Schwingfalls beschränken. Für die beiden anderen Fälle ist kein Schwingvorgang möglich. In diesen Fällen fällt die Amplitude monoton auf Null ab. Nur für

$$\frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC}, \quad (37)$$

d.h. bei einer schwachen Dämpfung, hängt der Strom periodisch von der Zeit ab. In diesem Fall werden die Argumente der beiden Wurzelausdrücke negativ und das Argument der Exponentialfunktionen imaginär. Der Ausdruck in der Klammer beschreibt somit eine harmonische Oszillation. Mit der Abkürzung

$$\omega_f = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \quad (38)$$

ergibt sich für den Strom

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{2L}t} e^{i(\omega_f t + \varphi)}. \quad (39)$$

Diese Gleichung beschreibt eine exponentiell gedämpfte Schwingung (Abbildung 13). Beachten Sie, dass die Frequenz ω_f des gedämpften Schwingkreises

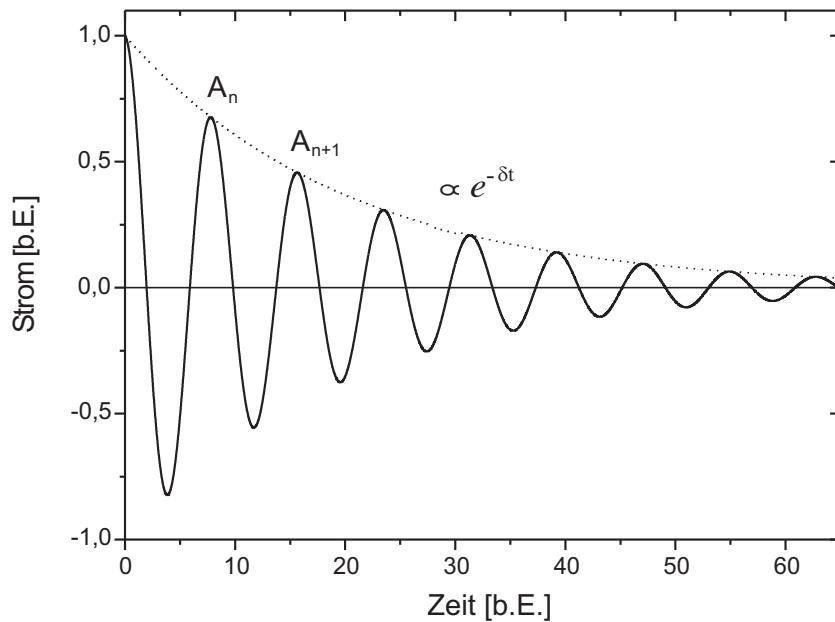


Abbildung 13: Stromverlauf eines LCR- Serienschwingkreises. Die Amplitude ist proportional zu $e^{-\delta t}$.

stets kleiner ist, als die Eigenfrequenz ω_0 des ungedämpften Oszillators in Gleichung (35).

Die Amplitude der Schwingung ist proportional zu $e^{-\delta t}$, wobei hier die Dämpfungskonstante

$$\delta = \frac{R}{2L} \quad (40)$$

definiert wurde. Sie hat die Dimension einer Frequenz. Der Kehrwert der Dämpfungskonstante,

$$\tau_r = \frac{1}{\delta} \quad (41)$$

wird auch als Relaxationszeit oder Abklingzeit τ_r bezeichnet.

Experimentell lässt sich die Dämpfungskonstante leicht bestimmen, indem man das Amplitudenverhältnis zweier benachbarter Schwingungsdurchgänge misst

und dieses logarithmiert. Für dieses, sogenannte **logarithmische Dekrement**, ergibt sich (siehe Abbildung 13):

$$\Lambda = \ln\left(\frac{A_n}{A_{n+1}}\right) = \delta T. \quad (42)$$

Durch Messung der Periodendauer T und des logarithmischen Dekrements Λ , kann so die Dämpfungskonstante δ bestimmt werden.

Frequenzabhängigkeit eines Schwingkreises, Resonanz

Betrachten wir nun die Situation, bei der der Schwingkreis nicht frei schwingt, sondern von außen durch ein Sinussignal angeregt wird. Wie Sie bereits aus der Theorie der erzwungenen mechanischen Schwingungen wissen (Versuch 13), oszilliert der Schwingkreis mit der selben Frequenz wie die Frequenz der Anregung. Allerdings hängen die Amplituden der charakteristischen Größen von der Anregungsfrequenz ab.

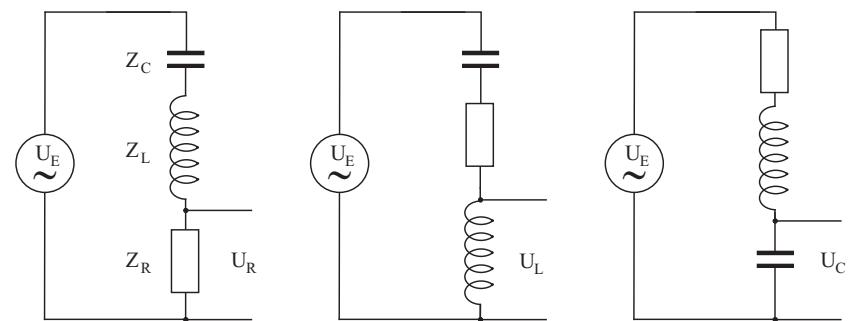


Abbildung 14: Schaltung eines von außen angeregten Serienschwingkreises bei Abgriff über verschiedene Bauelemente.

Die Eigenschaften eines von außen angeregten Schwingkreises lassen sich leicht durch Impedanzbetrachtungen berechnen. Betrachten wir dazu die Serienschwingkreise in Abbildung 14. Gesucht ist der Betrag der Ausgangsspannung über den jeweiligen Bauteilen $U_i(\omega)$ als Funktion der Frequenz einer sinusförmigen Eingangsspannung $U_E(t) = U_0 e^{i\omega t}$. Dazu müssen wir zunächst die Gesamtimpedanz und den Strom berechnen:

Die Gesamtimpedanz Z_g bei einer Reihenschaltung ergibt sich aus der Summe

der Teilimpedanzen Z_R, Z_C, Z_L :

$$Z_g = Z_R + Z_C + Z_L = R + i(\omega L - \frac{1}{\omega C}). \quad (43)$$

Für den Strom im Schwingkreis folgt dann aus dem Ohmschen Gesetz

$$I = \frac{U_E}{Z_g} = \frac{1}{R + i(\omega L - \frac{1}{\omega C})} U_0 e^{i(\omega t - \varphi)}, \quad (44)$$

bzw. für den Betrag

$$|I(\omega)| \equiv I_0(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}. \quad (45)$$

Die Amplitude des Stroms I_0 im Serienschwingkreis ist somit eine Funktion der Anregungsfrequenz ω . Es gibt eine ausgezeichnete Frequenz, bei der die Amplitude maximal wird. Bei der sogenannten **Resonanzfrequenz** ω_R

$$\omega_R = \sqrt{\frac{1}{LC}}, \quad (46)$$

die identisch ist mit der Eigenfrequenz ω_0 in Gleichung (35), verschwindet der Klammerausdruck im Nenner von (45) und es folgt:

$$I_0(\omega_R) = \frac{U_0}{R}. \quad (47)$$

Offenbar verhält sich der Serienschwingkreis im Resonanzfall so, als wäre die Schaltung nur aus einem ohmschen Widerstand aufgebaut. Die Gesamtimpedanz des in Serie geschalteten Kondensators und der Spule verschwindet bei der Resonanzfrequenz, so dass nur der ohmsche Widerstand „wirkt“. Merken Sie sich:

Eine in Serie geschaltete Kapazität und Induktivität stellt im Resonanzfall einen Kurzschluss dar. Das elektrische Verhalten wird in diesem Fall allein durch den ohmschen Widerstand bestimmt.

Für die Phasenverschiebung von Strom und Eingangsspannung berechnet sich aus (44):

$$\tan \varphi = \frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R}. \quad (48)$$

Hieraus folgt, dass im Resonanzfall Strom und Spannung in Phase sind.

Aus der Kenntnis des Stroms im Serienschwingkreis, lassen sich gemäß $|U_i| = |Z||I|$ die Amplituden der Spannungen $|U_i|$ an den einzelnen Bauteilen berechnen:

$$|U_R| = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} U_0 \quad (49)$$

$$|U_C| = \frac{1/(\omega C)}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} U_0 \quad (50)$$

$$|U_L| = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} U_0 \quad (51)$$

Die Amplitude über dem Widerstand $|U_R|$ und dessen Phasenverschiebung gegenüber der Eingangsspannung, weist die gleiche Frequenzabhängigkeit wie der Strom auf. In Abbildung 15 sind die Resonanz- und Phasenkurven für drei verschiedenen Widerstände, bei unveränderten Werten für L und C , dargestellt. Die Resonanzkurven weisen eine sogenannte Bandpass-Charakteristik auf. Im Bereich des Maximums, bei der Resonanzfrequenz ω_R , entspricht die Amplitude $|U_R|$ in etwa der Eingangsamplitude U_0 . Außerhalb der Resonanzfrequenz wird dagegen das Eingangssignal mehr oder weniger stark gedämpft. Dies ist auch leicht einzusehen. Erinnern Sie sich? *Im Resonanzfall verschwindet die Gesamtimpedanz von L und C.* Die gesamte Eingangsspannung fällt dann am Widerstand ab. Für von der Resonanzfrequenz abweichende Frequenzen, besitzt das LC-Glied dagegen eine nicht verschwindende Impedanz. In diesem Fall fällt ein Teil der Eingangsspannung über dem LC-Glied ab, so dass die Ausgangsspannung über dem Widerstand entsprechend kleiner ist:

Ein Serienschwingkreis stellt einen Bandpass-Filter dar. Nur ein bestimmtes Frequenz-Band des Eingangssignals kann den Filter passieren. Frequenzen außerhalb dieses Frequenzbandes werden entsprechend stark gedämpft. Offenbar hängt die Breite der Resonanzkurve stark von der Dämpfung, d.h. vom ohmschen Widerstand, ab (Abbildung 15). Je kleiner R , desto schmäler sind die Resonanzkurven und desto steiler verläuft der „Phasensprung“ bei der Resonanzfrequenz.

Die Frequenzen ω_1 und ω_2 , bei denen die Amplitude auf das $\sqrt{2}$ -fache des Maximalwertes abgefallen ist, definieren die **Bandbreite**:

$$\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2 = \frac{R}{L} = 2\delta. \quad (52)$$

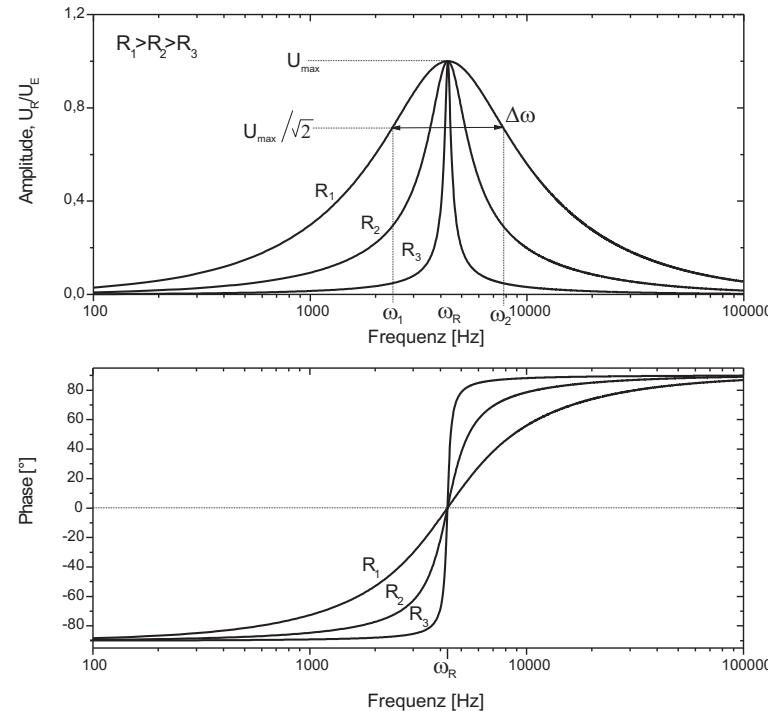


Abbildung 15: Amplituden- und Phasengang eines Serienschwingkreises bei Abgriff über dem Widerstand. Es sind jeweils drei Berechnungen mit unterschiedlichen Widerstandswerten dargestellt.

Die Bandbreite steht in einem direkten Zusammenhang mit der Dämpfungs- konstante δ , die wir bei der Diskussion der freien Schwingung eingeführt haben. Je größer die Dämpfung, d.h. desto schneller die Oszillation der freien Schwingung abklingt, desto breiter ist die dazugehörige Resonanzkurve. Eine weitere, oft verwendete Größe, die die Breite einer Resonanzkurve beschreibt, ist die Güte Q des Schwingkreises:

$$Q = \frac{\omega_R}{\Delta\omega}. \quad (53)$$

In Abbildung 16 sind alle Spannungsverläufe über den einzelnen Bauteilen des Serienschwingkreises in einem Diagramm dargestellt. Alle Kurven zeigen Re-

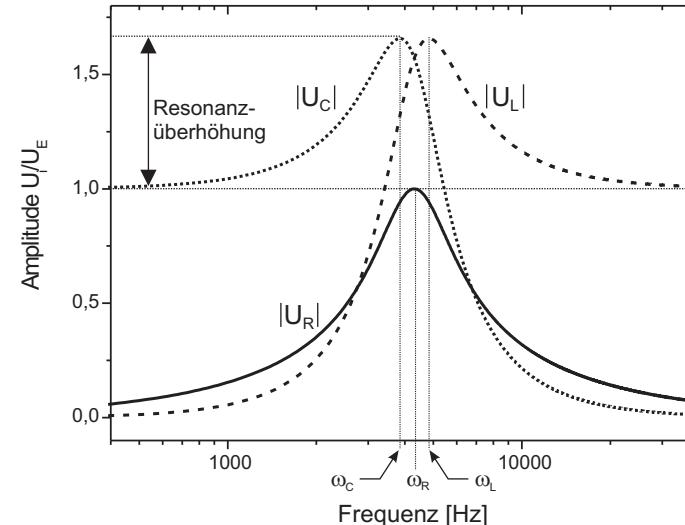


Abbildung 16: Resonanzkurven eines Serienschwingkreises bei Abgriff über dem Widerstand, Kondensator und Spule. Beachten Sie die unterschiedliche Lage der einzelnen Resonanzfrequenzen und die Spannungsüberhöhung am Kondensator und an der Spule.

sonanzeigenschaften, wobei die Resonanzfrequenzen von $|U_C|$ und $|U_L|$ nicht identisch mit ω_R sind. Für diese gilt

$$\omega_C = \sqrt{\omega_R^2 - 2\delta^2} \quad (54)$$

$$\omega_L = \sqrt{\omega_R^2 + 2\delta^2}. \quad (55)$$

Besonders interessant sind in Abbildung 16 die Resonanzkurven bei Abgriff über dem Kondensator und der Spule ($|U_C|, |U_L|$). Offenbar ist die Amplitude über diesen Bauteilen im Resonanzfall deutlich größer, als die Amplitude der Eingangsspannung. Man bezeichnet dieses Phänomen auch als **Resonanzüberhöhung**. Im ersten Moment möchte man glauben, dass dies gar nicht möglich ist. Wie kann, ohne ein verstärkendes Bauteil im Schwingkreis, eine höhere Spannung auftreten als die Eingangsspannung? Allerdings zeigt sich, unter Berücksichtigung der Phase, dass dies in keinem Widerspruch zur Kirch-

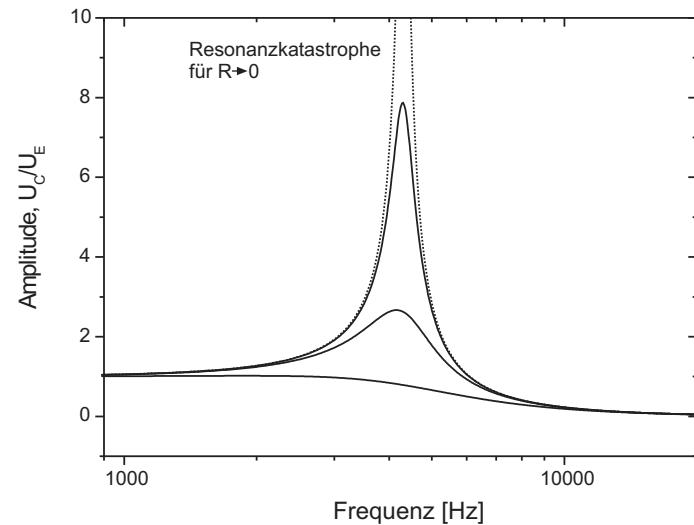


Abbildung 17: Amplituden- und Phasengang eines Serienschwingkreises bei Abgriff über dem Widerstand. Es sind jeweils drei Berechnungen mit unterschiedlichen Widerstandswerten dargestellt.

hoffischen Maschenregel steht. Die Spannungen über L und C sind im Resonanzfall um π phasenverschoben, so dass die Summe der Teilspannungen, stets der Eingangsspannung entspricht. Die Resonanzüberhöhung wird beispielsweise bei sogenannten Tesla-Transformatoren ausgenutzt. Damit lassen sich Spannungen von mehreren MV erzeugen, die meterlange Büschelentladungen hervorrufen. Die Resonanzüberhöhung hängt vom ohmschen Widerstand ab. In Abbildung 17 ist dies für $|U_C|$ für verschiedene Widerstände skizziert. Für $R \rightarrow 0$ wachsen die Teilspannungen $|U_C|, |U_L|$ bei der Resonanzfrequenz ω_R über alle Grenzen, allerdings mit einer gegenseitigen Phasenverschiebung von π (Resonanzkatastrophe). Mit zunehmenden Widerstand wird die Resonanzüberhöhung immer geringer, bis schließlich bei einer hinreichend großen Dämpfung, $|U_C|$ (und auch $|U_L|$) überhaupt kein Maximum mehr aufweisen.

Resonanzkurve eines Parallelschwingkreises

Mit Hilfe von Impedanzberechnungen, lässt sich die Frequenzabhängigkeit

von beliebig verschalteten passiven Bauteilen berechnen. Wir wollen hier noch kurz auf die Eigenschaften eines Parallelschwingkreises eingehen.

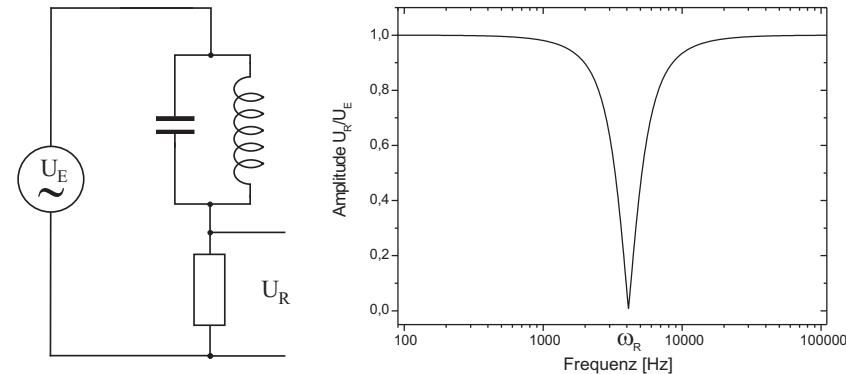


Abbildung 18: Reihenschaltung aus einem ohmschen Widerstand und einem Parallelschwingkreis.

In Abbildung 18 ist eine Reihenschaltung aus einem ohmschen Widerstand und einem Parallelschwingkreis skizziert, sowie im Bild rechts, die Frequenzabhängigkeit der Ausgangsspannung über dem Widerstand.

Der Verlauf der Kurve lässt sich leicht, auch ohne eine komplexe mathematische Analyse, verstehen. Sie müssen sich nur die Frequenzabhängigkeit der einzelnen Bauteile in Erinnerung rufen: Die Impedanz des LC-Parallelkreises ist sowohl für sehr kleine als auch für sehr große Frequenzen niederohmig. In dem einen Fall, bei kleinen Frequenzen, besitzt die Spule eine kleine Impedanz, bei hohen Frequenzen wird dagegen der Kondensator sehr niederohmig. In beiden Fällen fällt über dem LC-Kreis daher nur eine geringe Spannung ab, so dass praktisch die gesamte Eingangsspannung über dem Widerstand liegt. Im Resonanzfall verschwindet dagegen die Spannung über dem Widerstand. Daraus ist zu schließen, dass in diesem Fall der LC-Parallelkreis eine unendlich hohe Impedanz haben muss.

Dies lässt sich leicht beweisen: Die Impedanz des Parallelkreises berechnet sich gemäß

$$\frac{1}{Z_P} = \frac{1}{Z_C} + \frac{1}{Z_L} \quad (56)$$

zu

$$Z_P = \left| \frac{1}{\omega L - \frac{1}{\omega C}} \right|. \quad (57)$$

Bei der Frequenz

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (58)$$

verschwindet der Nenner und die Impedanz wächst über alle Grenzen.

Ein LC-Parallelkreis verhält sich im Resonanzfall wie ein Isolator.

Beachten Sie die „Symmetrie“ zum Serienschwingkreis. Bei diesem ist die Impedanz im Resonanzfall Null!

Die Schaltung in Abbildung 18 wird auch als **Bandsperre** bezeichnet. Frequenzen im Bereich um ω_R werden gesperrt. Alle anderen Frequenzen können das Filter² passieren.

VI Anwendungen von LCR-Gliedern: Radioempfänger

Um Sie mit den Eigenschaften von LC-Filters vertraut zu machen, sollen Sie in diesem Versuch ein einfaches Mittelwellen (MW)- Radio aufbauen. Durch geeignete Abstimmung eines Bandpassfilters im Empfangskreis, können Sie den Empfänger auf eine bestimmte Trägerfrequenz einstellen und den dazu korrespondierenden Sender empfangen.

Aufgabe eines Senders ist die drahtlose Übertragung von Informationen mit Hilfe elektromagnetischer Wellen. Beispielsweise soll von einem Radiosender Information in Form von Musik oder Sprache übertragen werden, d.h. niederfrequente Signale (NF-Signale) in einem typischen Frequenzbereich von 20 Hz bis 20 kHz. Nun lassen sich solche NF-Signale nicht sehr effektiv in Form von elektromagnetischen Wellen abstrahlen. Dies hat mehrere Gründe. Zum Einen müsste die Sendeantenne gigantische Längen aufweisen. Zum Anderen lässt sich zeigen, dass die von einer Antenne abgestrahlte Leistung proportional zur vierten Potenz der Frequenz ist (Stichwort Poynting Vektor, Hertz'scher Dipol). Demnach ist eine effektive Abstrahlung nur für höherfrequente (HF) Signale sinnvoll. Um dennoch niederfrequente Sprachsignale übertragen zu können, müssen diese einem HF-Signal „aufgeprägt“ werden. Dieses Verfahren wird als **Modulation** bezeichnet.

²Kein Rechtschreibfehler. Es heißt wirklich **das Filter**.

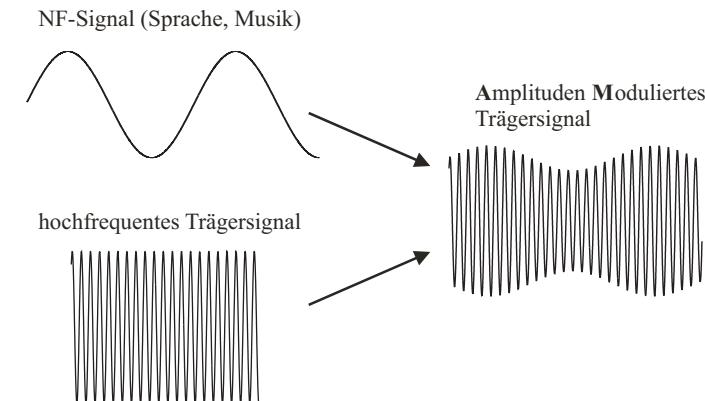


Abbildung 19: Prinzip der Amplitudenmodulation.

Bei der Rundfunkübertragung werden verschiedene Modulationsverfahren eingesetzt. Die im analogen Bereich wichtigsten Verfahren sind die Amplitudemodulation (AM) und die Frequenzmodulation (FM). Wir wollen hier nur auf die Amplitudemodulation eingehen, die z.B. bei Mittelwellen- und Kurzwellen-Sendern eingesetzt wird. Bei diesem Verfahren wird die **Amplitude** eines hochfrequenten Trägersignals (HF-Signals) im „Takt“ des zu übertragenden NF-Signals verändert (moduliert). Das Prinzip ist in Abbildung 19 skizziert. Das resultierende amplitudenmodulierte HF-Signal enthält die gesamte Information des NF-Signals und lässt sich über eine Antenne abstrahlen.

Zum Empfang des von dem Sender abgestrahlten Signals, benötigen wir zunächst nur eine Antenne (Abbildung 20). Das Sendesignal induziert in der Empfangsantenne eine Spannung, die dem amplitudenmodulierten Signal des Senders entspricht. Allerdings lässt sich mit diesem Signal noch nicht allzuviel anfangen. Nehmen wir einmal an, das empfangene Signal wäre stark genug, einen Lautsprecher anzusteuern (dies ist, wie Sie später bei der Versuchsdurchführung sehen werden, durchaus möglich). Wir würden trotzdem nichts hören! Da das empfangene AM-Signal **symmetrisch** zur Nulllinie ist und somit der Mittelwert verschwindet, würde die Lautsprechermembran noch nicht einmal zucken. Um das ursprüngliche NF-Signal zurückzugewinnen, muss das Empfangssignal demoduliert werden. Wir benötigen ein zusätzliches Element, das uns entweder nur die positiven oder nur die negativen Anteile des Empfangssignals liefert (Demodulation). Am einfachsten geschieht dies mit einer

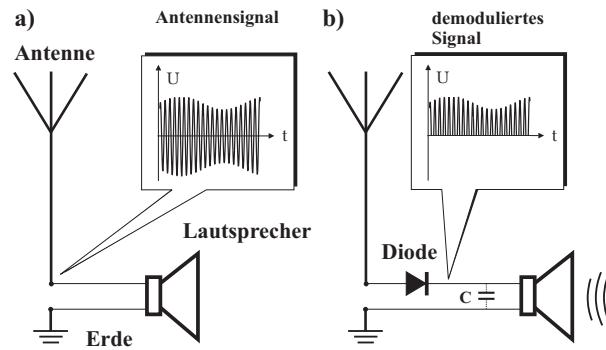


Abbildung 20: a) Ohne Demodulation lässt sich das empfangene Signal nicht mit Hilfe eines Lautsprechers akustisch umwandeln. b) Demodulation mit Hilfe einer Diode.

Diode. Die Diode sperrt beispielsweise nur die negativen Anteile des empfangenen AM-Signals, so dass nur die positiven Signalanteile übrig bleiben (Abbildung 20 b). Da der Mittelwert dieses demodulierten Signal ungleich Null ist, kann dieses direkt von einem Lautsprecher wiedergegeben werden. Der noch vorhandene HF-Anteil der Trägerfrequenz stört dabei nicht. Dies hat zwei Gründe: Zum einen werden diese aufgrund der Trägheit der Lautsprechermembran überhaupt nicht wiedergegeben, zum anderen würden wir diese gar nicht hören, da die Trägerfrequenz außerhalb des menschlichen Hörbereichs liegt³. Prinzipiell ließe sich sogar auch noch der vorhandene HF-Anteil aus dem Signal herausfiltern: Schließt man hinter der Diode einen Kondensator gegen Masse an, so wird der Hochfrequenzanteil kurzgeschlossen. Dies ergibt sich aus der Impedanz eines Kondensators. Die Impedanz des Kondensators sinkt mit zunehmender Frequenz gemäß $1/(\omega C)$. Für hohe Frequenzen verhält sich der Kondensator wie ein Kurzschluss, für sehr kleine Frequenzen dagegen wie ein Isolator. Mit einem zusätzlichen Kondensator erhält man daher „exakt“ das ursprüngliche NF-Signal zurück.

Die eben diskutierte Schaltung besitzt keine Trennschärfe. Werden mehrere Sender empfangen, die auf unterschiedlichen Trägerfrequenzen senden, würde man alle Programme gleichzeitig hören. Wir benötigen daher noch einen Band-

³Ein Lautsprecher und auch das menschliche Ohr verhalten sich wie ein mechanischer Tiefpassfilter. Bei Fledermäusen ist im Vergleich zum Menschen, die Grenzfrequenz zu höheren Frequenzen verschoben!

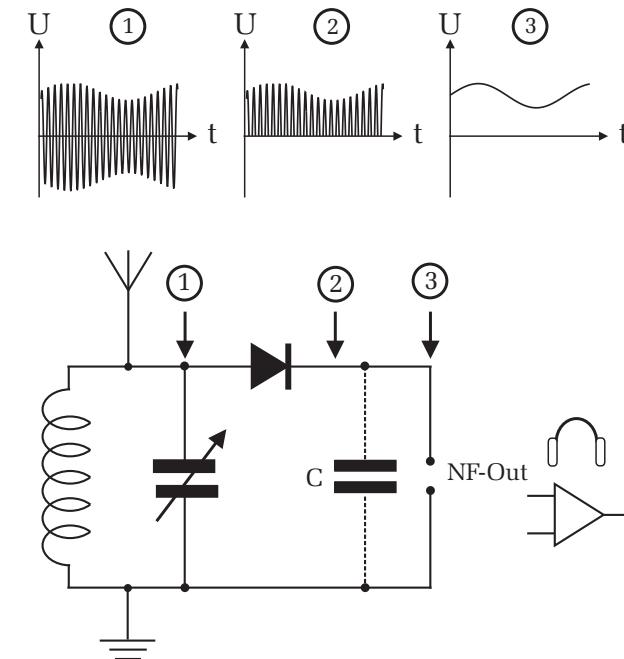


Abbildung 21: Einfacher AM-Empfänger. Die Signalverläufe an den jeweiligen Messpunkten sind im Bild oben skizziert. Wird hinter die Diode noch ein Kondensator eingebaut, so erhält man am Ausgang das ursprüngliche NF-Signal. An dem Ausgang (NF-Out) kann direkt ein hochohmiger Lautsprecher oder zur Weiterverarbeitung des Empfangssignals, ein Verstärker angeschlossen werden.

passfilter, der nur eine Trägerfrequenz aus dem Antennensignal herausfiltert. Solch ein Filter lässt sich z.B. mit einem Parallelkreis⁴ realisieren. Zusammen mit der Antennenimpedanz ergibt sich eine Schaltung nach Abbildung 18. Um einen Bandpassfilter zu erhalten, muss das Ausgangssignal allerdings über dem LC-Glied abgegriffen werden! In Abbildung 21 unten ist die komplette Schaltung dargestellt.

Jedes Radioprogramm wird von einem Sender auf einer anderen Trägerfrequenz ausgestrahlt. Um nur ein Programm zu empfangen, muss die Resonanzfrequenz des LC-Parallelkreises auf die entsprechende Trägerfrequenz abgestimmt wer-

⁴Ein Serienkreis ist natürlich auch möglich.

den. Dies lässt sich zum Beispiel realisieren, indem man den Schwingkreis aus einer veränderlichen Kapazität bzw. Induktivität aufbaut.

Liegen die Trägerfrequenzen zweier Sender dicht beieinander, so muss der Schwingkreis eine hohe Güte bzw. eine geringe Bandbreite besitzen. Nur in diesem Fall lassen sich die Sender voneinander trennen. Da der Bandpass in der Schaltung Abbildung 21 relativ stark belastet wird, besitzt dieser eine schlechte Güte. Dementsprechend schlecht ist die Trennschärfe.

VII Messtechnik

Möchte man den Frequenzgang einer Filterschaltung mit einem analogen Oszilloskop messen, so ist dies in der Regel ein recht zeitraubendes Verfahren: Sie müssen die Frequenz am Funktionsgenerator einstellen und die Amplituden des Eingangs- und Ausgangssignals mit dem Oszilloskop ausmessen. Je nach der gewünschten Genauigkeit, müssen Sie diese Messungen für verschiedene Frequenzen viele Male wiederholen.

Um dies zu vereinfachen steht Ihnen bei der Versuchsdurchführung, ein PC-gesteuertes Speicheroszilloskop und ein programmierbarer Funktionsgenerator zur Verfügung. Die Computersteuerung dieser Geräte bietet den Vorteil, dass Frequenzgangmessungen automatisiert durchgeführt werden können. Das Messsystem stellt die Frequenzen am Funktionsgenerator automatisch ein, misst gleichzeitig die Amplitude und stellt den Frequenzgang grafisch dar. In den folgenden Abschnitten soll auf die Eigenschaften dieser Geräte eingegangen werden. Detaillierte Informationen erhalten Sie vom Assistenten.

Die Bedienung des Oszilloskops ist weitgehend selbsterklärend und sollte Ihnen aus dem Praktikum 1 bekannt sein. Das Speicheroszilloskop bietet noch weitere nützliche Funktionen. Mit Hilfe von Markern können Zeiten und Amplituden des Eingangssignals ausgemessen werden. Zusätzlich berechnet die Software den rms-Wert⁵ und zeigt diesen kontinuierlich an. Die Daten des Eingangssignals können exportiert werden und z.B. mit der Software *Origin* weiter bearbeitet werden.

Neben der zeitaufgelösten Darstellung mit dem Oszilloskop, können Sie Signale auch im Frequenzbereich untersuchen (Schalter *Spectrum Analyzer*). Nach dem Fouriertheorem lässt sich jedes periodische Signal durch eine Summe von Sinusschwingungen unterschiedlicher Amplitude und Phase darstellen. Ein Spektrumanalysator stellt die Amplituden dieser Sinusschwingungen grafisch dar. In

⁵Siehe Anhang.

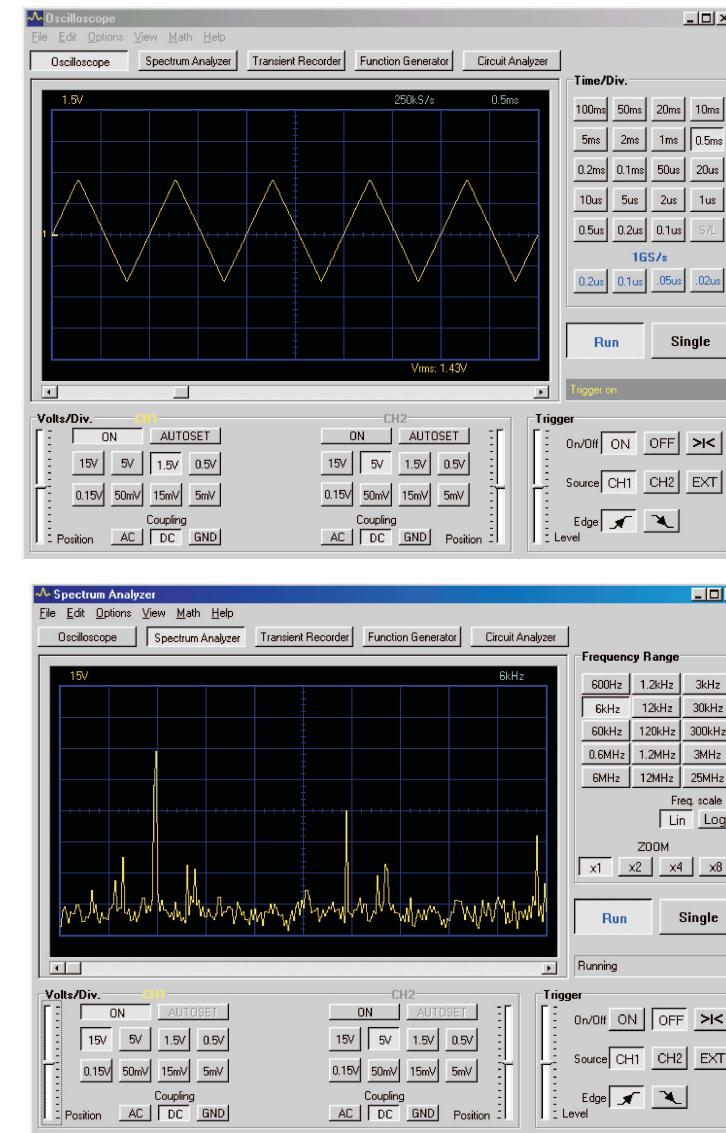


Abbildung 22: Oben: Zweikanal Speicheroszilloskop. Unten: Spektrumanalysator.

Abbildung 22 unten ist beispielsweise das Frequenzspektrum des 1,2 kHz Dreiecksignals aus Abbildung 22 oben zu sehen. Theoretisch erwartet man, dass das Frequenzspektrum dieses Signals, aus ungeraden Vielfachen der Grundschwingung (1,2 kHz) besteht. Diese entsprechen den drei stärksten „Linien“ bei 1,2 kHz, 3,6 kHz und 6 kHz. Beachten Sie, dass die Amplitude im logarithmischen Maßstab aufgetragen ist! Dies hat den Vorteil, dass sich dadurch ein großer Dynamikbereich ergibt. Nach der Fouriertheorie sollten die Amplituden der ersten drei Schwingungen im Verhältnis 1 : 0,11 : 0,04 stehen. Bei einer linearen Auftragung würden Sie die 2. Oberwelle bei 6 kHz gar nicht erkennen. Bei einer logarithmischen Darstellung ist dies problemlos möglich. Falls Sie mit der „logarithmischen Einheit“ dB bzw. dBV nicht vertraut sind, sollten Sie sich den entsprechenden Abschnitt im Anhang anschauen.

Mit dem Frequenzgenerator lassen sich nahezu beliebige Ausgangssignale generieren. Die wichtigsten, wie Rechteck und Sinus, können Sie durch Anklicken der entsprechenden Schalter einstellen. Mit dem Schalter MORE FUNCT und LIB können Sie weitere Signalformen aufrufen. Es ist auch möglich beliebige Signale selbst zu kreieren ([Wave Editor](#) im Menü Tools). Dies ist z.B. dann interessant, wenn Sie das RC-Glied als Differentiator und Integrator untersuchen. Alle anderen Einstellungen sollten selbsterklärend sein.

Messungen von Frequenzgängen lassen sich sehr bequem mit dem *Circuit Analyzer* durchführen. Diese Programm steuert automatisch den Frequenzgenerator an und liest gleichzeitig das Oszilloskop aus. Es werden nacheinander Sinussignale mit unterschiedlicher Frequenz aber stets konstanter Amplitude generiert. Dieses Signal wird der zu untersuchenden Schaltung als Eingangssignal zugeführt. Die Amplitude des Ausgangssignals der Schaltung wird bei jeder Frequenz automatisch mit dem Oszilloskop bestimmt und grafisch als Funktion der Frequenz dargestellt. Die Start- und Stopffrequenz sowie die Frequenzschritte (Menü: Options/ Frequency Step Size) können Sie selbst einstellen. In Abbildung 24 ist beispielsweise der Frequenzgang eines RLC-Bandpassfilters dargestellt.

VIII Durchführung des Versuchs

Vorbemerkungen:

Alle Bauelemente (Widerstände, Kondensatoren etc.) sind in kleine Gehäuse mit Bananensteckern eingebaut. Zur Verdrahtung sind zusätzlich noch Verbindungsstecker vorhanden. Zum Aufbau einer Schaltung müssen die Bauteile

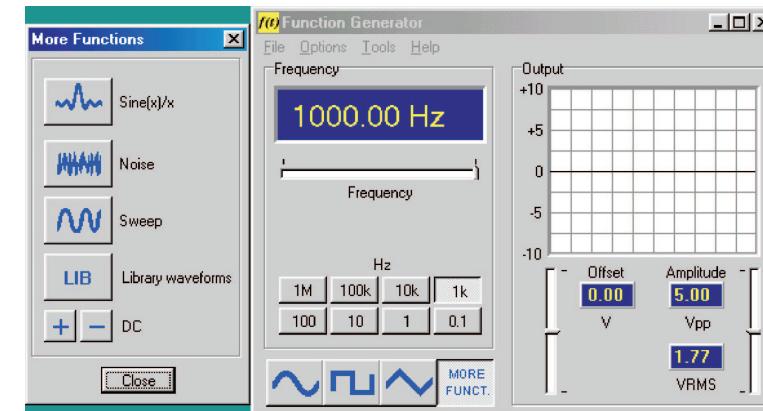


Abbildung 23: Frequenzgenerator.

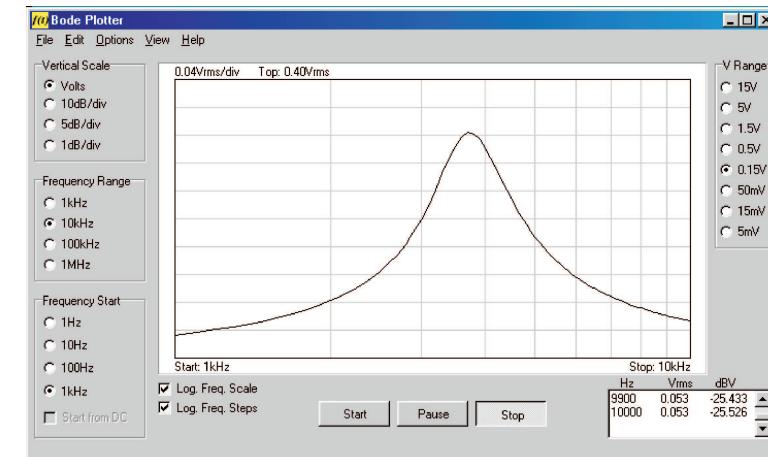


Abbildung 24: Circuit Analyzer.

nur auf ein Steckbrett gesteckt werden. Einige Buchsen des Steckbretts sind bereits intern miteinander elektrisch verbunden. Diese Verbindungen sind auf der Oberfläche des Gehäuses durch schwarze Linien zwischen den Buchsen markiert.

Der Anschluss der Schaltung an das Oszilloskop bzw. an den Funktionsgenerator erfolgt durch BNC/Banane-Kabel. Dabei ist zu beachten, dass das schwarze Kabel mit dem Gehäuse des BNC-Steckers verbunden ist und somit auf Masse liegt. Sie müssen daher das schwarze Kabel immer an Masse anschließen. Andernfalls kommt es zu einem Kurzschluss.

Schließen Sie den Ausgang des Frequenzgenerators nicht direkt an die zu untersuchende Schaltung an, sondern schalten Sie den Impedanzwandler dazwischen. Der Impedanzwandler ist ein Verstärker mit der Verstärkung Eins und besitzt einen sehr kleinen Ausgangswiderstand. Dadurch ist gewährleistet, dass sowohl die Signalhöhe als auch die Signalform des Ausgangssignals des Frequenzgenerators auch bei Belastung (d.h. bei hohen Ausgangströmen) stets stabil bleibt.

1. Bestimmung der Zeitkonstante eines RC-Glieds

Bauen Sie die Schaltung nach Abbildung 25 auf. Die Masseanschlüsse der Verkabelung sind in der Zeichnung nicht eingezeichnet. Achten Sie daher darauf, dass alle schwarzen Anschlüsse des BNC/Banane-Kabel auf Masse liegen (Symbol: \perp). An Kanal 2 des Oszilloskops liegt dann die Eingangsspannung U_E , an Kanal 1 die Ausgangsspannung U_C an.

Stellen Sie am Frequenzgenerator die Signalform Rechteck ein und die Amplitude auf 1 V_{pp} . Bestimmen Sie für folgende RC- Kombinationen die Halbwertszeit $T_{1/2}$.

$$C=470 \text{ nF}, R=1 \text{ k}\Omega$$

$$C=4,7 \text{ nF}, R=10 \text{ k}\Omega$$

$$C=47 \text{ nF}, R=1 \text{ k}\Omega.$$

Wählen Sie die Frequenz des Rechtecksignals für jede RC-Kombination so, dass Sie den Lade- und Entladevorgang des Kondensators vollständig auf dem Oszilloskop erkennen können und notieren Sie den Wert der eingestellten Frequenz. **Benutzen Sie für die Messung der Halbwertszeit die Cursor-Funktionen des Oszilloskops** und nutzen Sie möglichst den gesamten Bildschirmbereich des Oszilloskops aus. Die Fehler sind unter Berücksichtigung der

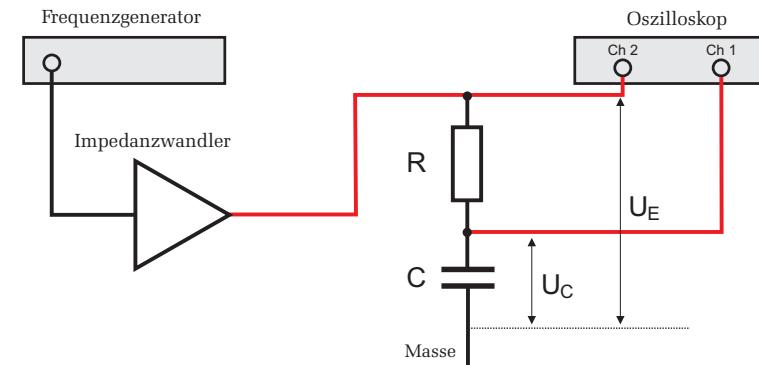


Abbildung 25: Schaltung zur Bestimmung der Zeitkonstante τ eines RC-Glieds.

Ablesegenauigkeit anzugeben. Drucken Sie das Oszilloskopbild für die letzte RC-Kombination aus.

Messung des Stromverlaufs im RC-Glied: Vertauschen Sie den Kondensator mit dem Widerstand ($C=47 \text{ nF}$, $R=1 \text{ k}\Omega$). An Kanal 1 des Oszilloskops liegt dann die Spannung U_R . Wegen $U_R = RI$ entspricht U_R dem Stromverlauf im RC-Glied. Überzeugen Sie sich durch Messung der Halbwertszeit von U_R , dass der Stromverlauf die gleiche Zeitkonstante aufweist wie der Spannungsverlauf am Kondensator. Drucken Sie das Oszilloskopbild aus.

2. RC-Glied als Integrator und Differentiator

Integrator:

Stellen Sie am Frequenzgenerator ein Rechtecksignal von 10 kHz mit maximaler Amplitude ein. Bauen Sie einen Integrator aus einem 47 nF Kondensator und einem Potentiometer ($5 \text{ k}\Omega$) auf (Abgriff über dem Kondensator wird an Kanal 1 des Oszilloskops angeschlossen). Beobachten Sie, wie durch Erhöhung des Widerstands die Ausgangsspannung allmählich dem Integral der Eingangsspannung entspricht.

Schauen Sie sich auch die Integration von anderen Signalen an. Wählen Sie z.B. aus der Funktionsbibliothek des Funktionsgenerators eine Sägezahnspannung aus (Funktionsgenerator: MORE FUNCT. → LIB → ramp_dn.lib). Auch sehr interessant ist die Darstellung der Integration des Signals saw1.lib. Drücken Sie, nachdem sie ein bestimmtes Signal aus der Funktionsbibliothek des Funkti-

onsgenerators eingestellt haben, die Taste **Filter ON**. Dadurch wird das Signal des Funktionsgenerators geglättet, so dass das eingestellte Signal sauber ausgegeben wird.

Versuchen Sie die Integration in den verschiedenen Signalbereichen nachzuvollziehen. Drucken Sie für ein Signal das Oszilloskopbild aus und protokollieren Sie Ihre Beobachtungen in kurzen Sätzen.

Differentiator:

Vertauschen Sie den Widerstand mit dem Kondensator und stellen Sie am Funktionsgenerator ein Dreiecksignal (z.B. 1,5 kHz, 4V_{PP}) ein. Durch Variierung des Widerstands wird das Signal allmählich differenziert und es entsteht ein Rechtecksignal. Untersuchen Sie zusätzlich die Differentiation eines Rechtecksignals und eines gaußförmigen Signals (Funktionsbibliothek des Funktionsgenerators: **gaussian.lib**). Drucken Sie wieder für ein Signal das Oszilloskopbild aus.

3. Frequenz- und Phasengang eines RC-Glied

Nehmen Sie den Frequenzgang eines Hochpass- und eines Tiefpassfilters mit dem *Circuit Analyzer* auf. Falls Ihnen das Messprinzip nicht klar sein sollte, lassen Sie sich es nochmals vom Assistenten erklären.

Damit der Frequenzgang über den gesamten Bereich gut zu erkennen ist, sollten Sie folgende Einstellungen wählen:

- **Funktionsgenerator:** Amplitude 2 V_{pp} Sinus.
- **Circuit Analyzer:** Vertical Scale: 5 dB/div, V-Range: 1,5 V, Frequency Start: 100 Hz, Frequency Range: 100 kHz. Stellen Sie für die Frequenzschritte 20% ein (Menüpunkt **Options** → **Frequency Step Size**). Wählen Sie aus dem Menüpunkt **Options**, die Option **Automatic Voltage Scale** und folgen Sie den Hinweisen des erscheinenden Fensters. Die Bedeutung dieser Einstellungen wird der Assistent mit Ihnen besprechen.

Nehmen Sie zunächst den Frequenzgang eines Tiefpassfilters ($C=47 \text{ nF}$, $R=1 \text{ k}\Omega$) auf. Beobachten Sie während der Messung am Oszilloskop, wie mit zunehmender Frequenz die Amplitude am Ausgang des Tiefpassfilters immer kleiner wird.

Messen Sie mit Hilfe der Cursor (Menüpunkt **View** → **Markers f & dV**) die Grenzfrequenz f_g und notieren Sie den Wert und den Fehler aus der Ablesegenauigkeit. Bei der Grenzfrequenz ist die Amplitude auf das $1/\sqrt{2}$ -fache

des Maximalwertes abgefallen. Bei dem von Ihnen logarithmisch eingestellten Maßstab entspricht dies einer Dämpfung von 3 dB (bei Unklarheiten lesen Sie nochmals im Anhang nach!).

Drucken Sie den Frequenzgang aus. Leider besitzt das Programm keine direkte Druckfunktion. Sie müssen daher die Messung als Bild speichern und mit einem anderen Programm ausdrucken (z.B. Paint).

Wiederholen Sie die Messung für einen Hochpassfilter ($C=47 \text{ nF}$, $R=1 \text{ k}\Omega$).

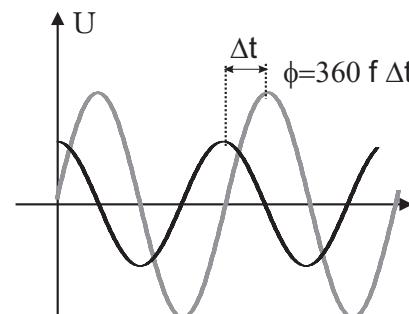


Abbildung 26: Prinzip der Phasenmessung.

Phasenmessung:

Der Phasengang des RC-Gliedes lässt sich mit der Software nicht automatisch messen. Sie müssen diesen „von Hand“ mit dem Oszilloskop messen. Fertigen Sie eine Tabelle mit den Spalten f , Δt und φ an. Es reicht aus, wenn Sie die Phase für den Hochpassfilter im Bereich der Grenzfrequenz (1k Hz bis 10 kHz in Schritten von 1 kHz) bestimmen. Das Messprinzip ist in Abbildung 26 skizziert. Die Messung von Δt lässt sich sehr einfach mit den Cursorfunktionen durchführen!

4. Frequenzgang eines Serienschwingkreises

Bauen Sie aus $C=47 \text{ nF}$, $R=1 \text{ k}\Omega$ und L_1 ein Serienschwingkreis auf. Die Ausgangsspannung wird über dem Widerstand abgegriffen und an Kanal 1 des Oszilloskops angeschlossen. An Kanal 2 wird wieder die Eingangsspannung angeschlossen.

Es empfiehlt sich, folgende Einstellungen für die Messung des Frequenzgangs zu wählen:

- **Funktionsgenerator:** Amplitude 3 V_{pp} Sinus.
- **Circuit Analyzer:** Vertical Scale: Volts, V-Range: 0,5 V, Frequency Start: 1 kHz, Frequency Range: 10 kHz. Stellen Sie für die Frequenzschritte 10% oder kleiner ein. Damit mehrere Messungen in einem Diagramm dargestellt werden können, müssen Sie aus dem Menüpunkt **Options**, die Option **Show Multiple Traces** aktivieren.

Messen Sie den Frequenzgang des Schwingkreises für drei verschiedene Widerstände: $R=1 \text{ k}\Omega$, 220Ω und 47Ω . Alle Kurven sollen in einem Diagramm dargestellt werden.

Beachten Sie, dass entgegen der Darstellung in Abbildung 15, die Amplituden im Resonanzfall unterschiedlich groß sind. Die Ursache hierfür ist auf zusätzliche Verluste zurückzuführen, auf die Sie bei der Auswertung näher eingehen werden.

Aus jeder Kurve ist die Resonanzfrequenz f_R , die Bandbreite Δf und der Effektivwert der Ausgangsspannung und der Eingangsspannung bei der jeweiligen Resonanzfrequenz zu bestimmen. Die Amplitude der Eingangsspannung müssen Sie am Oszilloskop ablesen (Nur Kanal 2 aktivieren und im Menü **View** die Option **RMS Value** anklicken. Der rms- Wert wird dann im Oszilloskopbild rechts unten angezeigt). Drucken Sie das Diagramm mit den drei Frequenzgängen aus.

5. Bestimmung der Dämpfungskonstanten eines freien, gedämpften Schwingkreises

Bauen Sie gemäß Abbildung 14 einen Serienschwingkreis aus $C=47 \text{ nF}$, $R=47 \Omega$ und L_1 auf. Die Ausgangsspannung wird über der Spule abgegriffen und an Kanal 1 des Oszilloskops angeschlossen. Die Eingangsspannung verbinden Sie zusätzlich mit Kanal 2. Am Frequenzgenerator wählen Sie ein Rechtecksignal aus. Die Frequenz müssen Sie so einstellen, dass

der Oszillator frei schwingen kann, d.h. die Frequenz des Rechtecksignals muss viel kleiner sein als die Resonanzfrequenz des Schwingkreises. Stellen Sie die Rechteckfrequenz daher so ein, dass Sie den kompletten Schwingungsvorgang beobachten können, bis die Amplitude aufgrund der Dämpfung auf Null abgefallen ist. Notieren Sie den eingestellten Frequenzwert.

Messen Sie zur Bestimmung des logarithmischen Dekrements Λ die Amplitude A_i von fünf benachbarten „Schwingungen“ (siehe Abbildung 13) und bestimmen Sie aus der Messung mehrerer Amplitudenmaxima die Schwingungsdauer T (Messfehler angeben!).

Beobachten Sie qualitativ den Schwingungsvorgang in Abhängigkeit von der Dämpfung. Ersetzen Sie dazu den 47Ω Widerstand durch das $5 \text{ k}\Omega$ Potentiometer. Ab einer gewissen Dämpfung, sprich ab einem gewissen Widerstandswert, ist keine Schwingung mehr möglich.

6. Resonanzüberhöhung

Messen Sie mit dem *Circuit Analyzer* den Frequenzgang eines Serienschwingkreises bei Abgriff über dem Widerstand, über dem Kondensator und über der Spule ($C=47 \text{ nF}, R=220 \Omega$, L_1). Alle Messungen sollen in einem Diagramm dargestellt werden (Frequenzbereich 1 kHz bis 10 kHz- Schrittweite 10 %, Spannung am Funktionsgenerator: 0,9 V_{pp}). Aus dem Diagramm sind mit Hilfe der Marker die jeweiligen Resonanzfrequenzen auszumessen. Drucken Sie das Diagramm aus.

7. Parallelschwingkreis- Bandsperre

Bauen Sie gemäß Abbildung 18 einen Parallelschwingkreis ($C=47 \text{ nF}, R=1 \text{ k}\Omega$, L_1) auf und schließen Sie die Ausgangsspannung über dem Widerstand an Kanal 1 des Oszilloskops an. Messen Sie den Frequenzgang im Bereich von 100 Hz bis 100 kHz (Schrittweite 10 %). Bestimmen Sie mit dem Marker die Resonanzfrequenz und drucken Sie das Diagramm aus.

Anwendungen

8. Signalformung

Nehmen wir einmal an, ein Sensor liefert ein Signal, das verschiedenartige Störanteile besitzt. Dabei kann es sich z.B. um 50 Hz Netzbrummen oder um Einkopplungen von HF-Signalen handeln. Um nur das zu interessierende Signal zu erhalten, müssen diese Störanteile herausgefiltert werden.

In diesem Versuchsabschnitt werden wir solch ein Signal synthetisch erzeugen. Mit dem Funktionsgenerator lässt sich ein Signal generieren, das einer Überlagerung von drei Sinussignalen unterschiedlicher Frequenz und Amplitude entspricht.

Führen Sie am Signalgenerator folgende Einstellungen durch:

- Wählen Sie aus der Funktionsbibliothek die Datei **Signalformung.lib**
- Amplitude: 5 V_{pp}
- Filter ON einschalten
- Frequenz: 100 Hz

Schauen Sie sich das Signal mit dem Oszilloskop an. Wählen Sie die Zeitablenkung so, dass Sie möglichst alle Frequenzanteile erkennen können und drucken Sie das Bild aus. Schalten Sie auf den Spectrum Analyzer um und messen Sie die Frequenz und Amplitude der drei stärksten Signalanteile (Frequenzbereich 12 kHz). Drucken Sie das Spektrum aus.

Ihre Aufgabe ist es nun, mit Hilfe von verschiedenen Filterschaltungen, das Sinussignal von ungefähr 4 kHz aus dem Signal herauszufiltern und alle anderen Frequenzanteile soweit wie möglich zu unterdrücken. Das 4 kHz Signal soll dabei so wenig wie möglich gedämpft werden.

Drucken Sie für jede der folgenden Filterschaltungen sowohl das Oszilloskopbild als auch das Frequenzspektrum aus und messen Sie die Amplitude der jeweiligen Frequenzanteile. Es reicht aus, den ungefähren Amplitudenwert anzugeben. Eine Fehlerabschätzung ist an dieser Stelle nicht notwendig. Achten Sie darauf, dass Sie die Marker $f \& V$ und nicht $f \& dV$ verwenden.

1. Hochpass- Tiefpassfilter:

Der 100 Hz Anteil ist „weit weg“ von dem interessierenden 4 kHz Signal, so dass dieser Anteil durch einen einfachen Hochpassfilter herausgefiltert

werden kann. Schließen Sie zwischen den Signalgenerator und dem Oszilloskop den Hochpassfilter, den Sie in Aufgabe 3 untersucht haben, an und messen Sie wieder die Amplituden mit dem Spektrum Analyzer.

Man könnte meinen, dass auch das 8 kHz mit einem RC-Tiefpass herausgefiltert werden kann. Dies ist allerdings nur bedingt möglich, da das 4 kHz- und 8 kHz zu dicht beieinander liegen. Überprüfen Sie dies, indem Sie den Kondensator mit dem Widerstand vertauschen.

Um das 4 kHz Signal von dem 8 kHz Signal zu trennen, benötigen wir einen Tiefpassfilter, der einen stärkeren Dämpfungsverlauf zeigt als ein RC-Tiefpass. Dies ist z.B mit einem LC-Tiefpass möglich (vergleiche Abbildung 16). Ersetzen Sie den Widerstand durch die Spule L_1 . Der Abgriff des Ausgangssignals erfolgt über dem 47 nF Kondensator. Messen Sie die Amplituden und drucken Sie die Grafiken wieder aus.

2. Bandpassfilter:

Die Unterdrückung des 100 Hz als auch des 8 kHz Signal ist mit einem Bandpassfilter möglich. Bauen Sie einen Serienschwingkreis aus $C=47 \text{ nF}, R=1 \text{ k}\Omega$ und L_1 auf. Die Trennschärfe (Bandbreite) ist mit dem $1 \text{ k}\Omega$ Widerstand allerdings sehr gering. Führen Sie daher eine weitere Messung mit einem 47Ω Widerstand durch. Bei beiden Messungen sind wieder die Amplituden zu bestimmen und die Oszilloskopbilder sowie die dazugehörigen Frequenzspektren auszudrucken.

9. Aufbau eines einfachen AM-Empfängers

Wir wollen unsere Untersuchungen von Filterschaltungen an einem einfachen AM-Empfänger vertiefen. Bauen Sie aus der Spule L_2 und dem Drehkondensator (500 pF) einen Parallelkreis (Schwingkreis) auf. Solch ein LC-Glied stellt ein Bandpassfilter dar. Innerhalb eines Frequenzbereichs wird ein Signal nur schwach gedämpft. Für höhere und tiefere Frequenzen nimmt dagegen die Dämpfung stark zu.

Verbinden Sie den Schwingkreis mit der Antennenbuchse und schließen Sie die Schaltung an das Oszilloskop an (Abbildung 27 links). Schauen Sie sich das **Frequenzspektrum** an und beobachten Sie die Filterwirkung des Bandpassfilters, in dem Sie die Kapazität und die Induktivität durch Verschieben des Spulenkerns, variieren.

Stellen Sie die Mittenfrequenz des Bandpassfilters so ein, dass das Trägersignal bei ungefähr 1 MHz möglichst stark empfangen wird. Wenn Sie sich nun das

Signal mit dem Oszilloskop anschauen, sehen Sie das amplitudenmodulierte Signal.

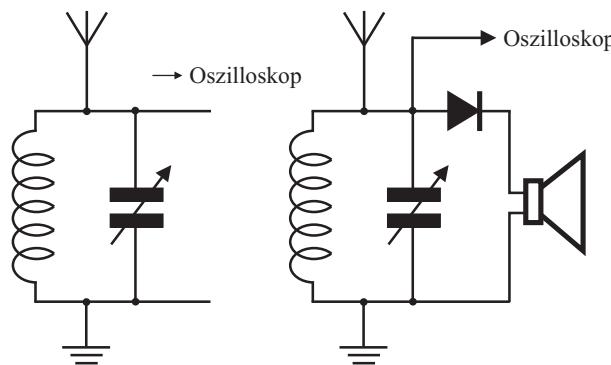


Abbildung 27: Prinzip eines AM-Empfängers. Links: Empfangskreis. Rechts: Empfangskreis mit Demodulator-Diode.

Um ein hörbares NF-Signal zu erhalten, muss das empfangene Signal demoduliert werden. Bauen Sie gemäß Abbildung 27 rechts, eine Diode in die Schaltung ein und schließen Sie an den Ausgang den hochohmigen Kopfhörer an. Durch den Kopfhörer wird der Bandpass ein wenig verstimmt. Sie müssen daher unter Zuhilfenahme des Spektrumanalysators, die Mittenfrequenz etwas nachjustieren. Wenn Sie den Bandpass richtig eingestellt haben, sollten Sie nun das Radioprogramm hören.

Schauen Sie sich mit dem analogen Oszilloskop gleichzeitig das amplitudenmodulierte Signal vor der Diode und das demodulierte Signal hinter der Diode an.

Mit Hilfe eines Verstärkers können Sie unter Umständen weitere Radioprogramme empfangen. Entfernen Sie dazu den hochohmigen Kopfhörer und bauen Sie den NF-Verstärker in Ihre Schaltung ein. Am Verstärkerausgang können Sie zwei der niederohmigen Kopfhörer in Serie schalten. Dadurch können Sie und Ihr Praktikumspartner gleichzeitig das Radioprogramm hören.

IX Auswertung

1. Bestimmung der Zeitkonstante eines RC-Glieds

Berechnen Sie die Zeitkonstante τ der einzelnen RC-Kombinationen. Tragen Sie die Ergebnisse in einer zusammenfassende Tabelle ein. Die Tabelle sollte folgende Größen enthalten: C, R, f, τ_{exp} , τ_{theo} sowie die entsprechenden Fehler. Für die Widerstände betragen die Toleranzen 5 %, für die Kondensatoren 10 %.

2. RC-Glied als Integrator und Differentiator

Diskutieren Sie die Eigenschaften eines RC-Gliedes als Integrator und Differentiator an Hand Ihre Ausdrucke der entsprechenden Oszilloskopbilder.

3. Frequenz- und Phasengang eines RC-Glied

Zeichnen Sie durch die linearen Bereiche der gemessenen Frequenzgänge bei kleinen und großen Frequenzen eine Gerade. Der Schnittpunkt dieser beiden Geraden sollte exakt bei der Grenzfrequenz liegen.

Tragen Sie die Phase über die Frequenz auf einfache-logarithmischem Papier auf (gemäß Abbildung 6). Aus der Phasenverschiebung bei 45° ist die Grenzfrequenz abzulesen und mit dem aus dem Frequenzgang gemessenen Wert zu vergleichen.

Vergleichen Sie die gemessenen Werte der Grenzfrequenz (für den Hoch- und Tiefpassfilter) mit dem theoretischen Wert unter Berücksichtigung der Bauteiltoleranzen und der Messfehler.

4. Frequenzgang eines Serienschwingkreises

Induktivität der Spule:

Berechnen Sie die Induktivität L_1 aus den gemessenen Resonanzfrequenzen.

Verluste im Schwingkreis:

In einem realen Schwingkreis treten zusätzliche Verluste auf, die in der Darstellung in Abbildung 15 nicht berücksichtigt wurden. Diese Verluste führen dazu, dass die Amplitude der Ausgangsspannung im Resonanzfall deutlich kleiner ist als die Eingangsspannung.

Verluste treten sowohl in der Spule als auch im Kondensator auf. Wir wollen allerdings annehmen, dass diese Verluste vor allem in der Spule entstehen (ohmscher Widerstand der Spule, Skineffekt, magnetische Verluste des Spulenkerne etc.). Um diese Spulenverluste zu berücksichtigen, müssen wir einen zusätzlichen, in Serie geschalteten Verlustwiderstand in unsere Berechnungen mit einbeziehen. Der reale Schwingkreis setzt sich somit aus einem ohmschen Wi-

derstand, einer Spule, einem Kondensator und einem „Verlustwiderstand“ R_V zusammen.

Berechnen Sie aus den drei Messungen der 3dB-Breite den Gesamtwiderstand $R+R_V$ des Schwingkreises gemäß (52):

$$\Delta\omega = \frac{R + R_V}{L}. \quad (59)$$

Nur für Studenten mit Hauptfach Physik:

Der Verlustwiderstand lässt sich im Resonanzfall leicht aus dem Maximum der Resonanzkurve bestimmen. Bei einem Serienschwingkreis verschwindet im Resonanzfall die Impedanz des LC-Gliedes. In diesem Fall verhält sich die Schaltung wie ein gewöhnlicher Spannungsteiler aus einem ohmschen Widerstand R und einem Verlustwiderstand R_V . Für die im Resonanzfall über dem Widerstand R gemessene Amplitude gilt daher:

$$U_A = \frac{R}{R + R_V} U_E. \quad (60)$$

Berechnen Sie aus Ihren Messwerten für die drei Schwingkreiskombinationen den Verlustwiderstand R_V und vergleichen Sie diesen mit den zuvor durchgeführten Berechnungen aus der 3dB-Breite. Versuchen Sie eine Erklärung zu finden, warum der Verlustwiderstand nicht konstant ist. Vielleicht können Sie auch qualitativ erklären, warum die gemessenen Resonanzfrequenzen nicht gleich sind, sondern vom ohmschen Widerstand R abhängen. Dazu müssen Sie auf die Verluste des Kondensators eingehen.

5. Bestimmung der Dämpfungskonstanten eines freien, gedämpften Schwingkreises

Berechnen Sie aus der gemessenen Resonanzfrequenz die Induktivität der Spule L_1 .

Bestimmen Sie das logarithmische Dekrement und berechnen Sie hieraus den Gesamtwiderstand $R+R_V$ des Schwingkreises. Vergleichen Sie den Wert mit den Ergebnissen aus Aufgabe 4.

6. Resonanzüberhöhung und 7. Bandsperre

Vergleichen Sie die gemessenen Resonanzfrequenzen mit den theoretischen Werten.

8. Signalformung

Diskutieren Sie die untersuchten Filterschaltungen anhand Ihrer Ausdrucke. Für welche Filterschaltung werden die „Störsignale“ am besten unterdrückt. Wie groß ist in diesem Fall die Dämpfung des 4 kHz Signals im Vergleich zu den anderen Filterschaltungen. Vergleichen Sie beim RC-Glied die Dämpfung des 100 Hz Signals mit Ihrer Messung aus Aufgabe 3.

X Anhang

Es gibt mehrere Möglichkeiten die Amplitude einer Wechselspannung zu quantifizieren. In Abbildung 28 sind drei Definitionen für ein sinusförmiges Spannungssignal $U(t)$ skizziert. Der Scheitelwert \hat{U} , der auch einfach nur als Amplitude bezeichnet wird, beschreibt die Spannung im Maximum. Die Spitze-Spitze-Spannung U_{SS} (engl.: U_{pp} für *peak to peak*) steht für die Differenz der Spannung im Maximum und Minimum. Beide Größen sind einander äquivalent und beschreiben nur einen **Momentanwert** der Wechselspannung.

Häufig ist man jedoch daran interessiert, verschiedene Wechselspannungen (Sinus, Dreieck, Rechteck etc.) miteinander zu vergleichen und daher einen **mittleren** Spannungswert anzugeben. Allerdings lässt sich mit einer einfachen Mittelwertbildung nicht viel anfangen. Bei einer sinusförmigen Wechselspannung ist der Mittelwert stets Null. Die positive Halbwelle ist genau so groß wie die negative! Dies gilt für alle Wechselspannungen mit symmetrischem Nulldurchgang. Um beliebige (periodische) Wechselspannungen miteinander

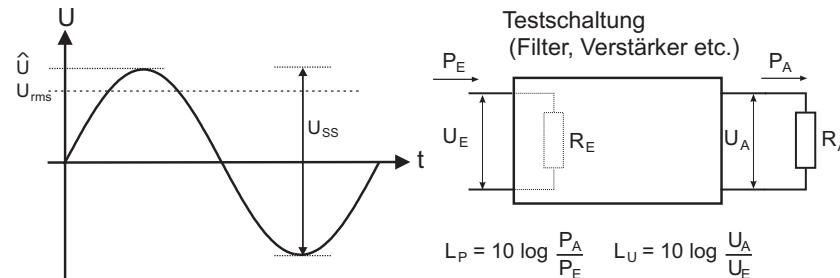


Abbildung 28: Links: Scheitelpunkt, Spitze-Spitze-Spannung und Effektivwert. Rechts: Definition des Dezibels.

zu vergleichen, definiert man daher den **Effektivwert**:

Der Effektivwert einer Wechselspannung erzeugt in einem Ohmschen Widerstand die gleiche mittlere Wärmemenge wie eine gleich große Gleichspannung.

Man vergleicht demnach, die von einer Wechselspannung in einem Widerstand umgesetzte Leistung, mit der Leistung, die von einer entsprechenden Gleichspannung umgesetzt würde. Nach dem Ohm'schen Gesetz gilt für diese Leistung:

$$P(t) = \frac{U^2(t)}{R}. \quad (61)$$

Der Mittelwert dieser Leistung

$$\overline{P(t)} = \frac{\overline{U^2(t)}}{R} = \frac{U_{eff}^2(t)}{R} \quad (62)$$

berechnet sich aus dem Mittelwert des Spannungsquadrates.

Für den Effektivwert einer Sinusspannung $U(t) = \hat{U} \sin \omega t$ folgt z.B.

$$U_{eff} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}}. \quad (63)$$

Der Effektivwert einer Wechselspannung wird häufig auch als RMS-Wert bezeichnet (RMS: Root Mean Square).

\hat{U}, U_{SS}, U_{rms} stellen Absolutgrößen einer Wechselspannung dar. Häufig ist man aber nur an das Verhältnis zweier Wechselspannungen interessiert, d.h. an relativen Größen. Man möchte z.B. eine Aussage machen um wieviel ein Signal bei Durchgang durch einen Filter gedämpft wird.

In der Messtechnik verwendet man hierfür häufig ein logarithmisches Maß, das Dezibel (dB).

Das Dezibel entspricht dem zehnfachen des logarithmischen Verhältnis zweier Leistungen P_A und P_E (Abbildung 28 rechts).

$$L_P[dB] = 10 \log \left(\frac{P_A}{P_E} \right). \quad (64)$$

Das Dezibel lässt sich auch auf Spannungen beziehen. Sind der Eingangswiderstand R_E und der Lastwiderstand R_A gleich groß, so folgt aus

$$P = U^2/R \quad (65)$$

$$L_U[dB] = 20 \log \left(\frac{U_A}{U_E} \right). \quad (66)$$

Die Einheit dB ist dimensionslos und drückt nur das Verhältnis zweier Leistungen oder Spannungen aus. Sollen absolute Werte angegeben werden, müssen diese auf ein Referenzwert bezogen werden. Die Einheit dBm bezieht sich auf 1 mW. Beispielsweise entsprechen 3 dBm 2 mW und 20 dBm 100 mW. Die Einheit dBV bezieht sich auf eine Referenzspannung von 1 V_{rms}:

$$L_P[dBm] = 10 \log \left(\frac{P}{1mW} \right) \quad (67)$$

$$L_U[dBV] = 20 \log \left(\frac{U}{1V_{rms}} \right). \quad (68)$$

242 Spannungsverstärker

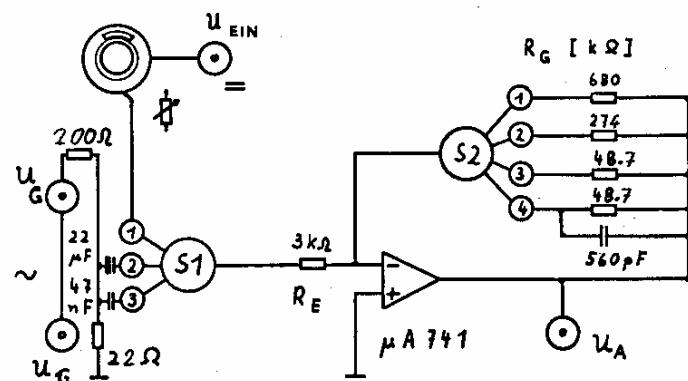
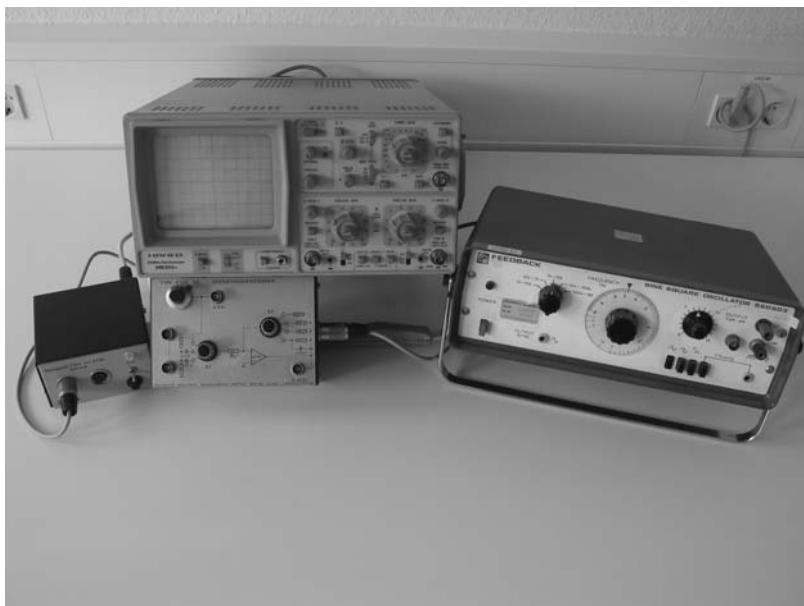


Abb. 1. Aufbau des Schaltkasten

Ziel des Versuchs:

Man soll sich mit den grundlegenden Eigenschaften eines idealen und realen Operationsverstärkers vertraut machen und die Kennlinien des Verstärkers messen.

Nachzulesen unter:

Kirchhoff'sche Gesetze, Ohm'sches Gesetz für Gleich- und Wechselstrom, Operationsverstärker.

Literatur:

Allgemein: Gerthsen oder anderes Lehrbuch der Experimentalphysik. Für Operationsverstärker: Tietze-Schenk, Halbleiter-Schaltungstechnik. (Ein Auszug aus dem Buch liegt zur Vorbereitung in den PR-Räumen aus.) K.H. Rohe: "Elektronik für Physiker" Kapitel 3.3; 3.4; 4.5.

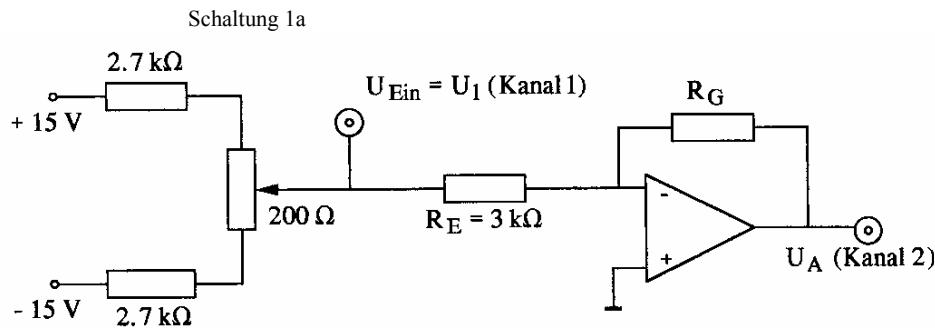
Verständnisfragen:

- Was sind die grundlegenden Eigenschaften eines idealen Operationsverstärkers?
- Was verstärkt der Operationsverstärker?
- Wie funktioniert die Gegenkopplung? Was für eine Verstärkung erwartet man? Wie groß ist die Verstärkung, wenn eine Wechselspannung sehr hoher Frequenz angelegt wird?

Zubehör: 1 Schaltungskästchen mit Operationsverstärker μA 741 (Abb. 1)
1 Sinus-Rechteck-Generator (SRG)
1 Zweikanaloszillograph HM 303 bzw. HM 203-6

Aufgaben:

- Messen Sie die Ausgangsspannung eines Verstärkers in Abhängigkeit von der Eingangsspannung für 2 verschiedene Gegenkopplungen bei Gleich- und Wechselspannung.
- Messen Sie den Frequenzgang des Verstärkungsfaktors im Bereich von 100 Hz bis 300 kHz für verschiedene Gegenkopplungen.
- Beschreiben sie den Einfluss des Frequenzganges auf die Form von Rechtecksignalen.

Durchführung:**Aufgabe 1:****1 a)** μA 741 als Gleichspannungsverstärker:

Messen der Gleichspannungen mit dem Oszilloskop in Stellung "DC".

Messen Sie $U_A = f(U_1)$ bei 8 verschiedenen U_1 ($-0,25 \text{ V} < U_1 < +0,25 \text{ V}$), die Sie mit dem Zehngangpotentiometer ("Helipotentiometer") einstellen; Eingangsschalter S1 in Stellung 1. (Die $\pm 15 \text{ V}$ liegen bereits über das Spannungsversorgungskabel des Operationsverstärkers an, es ist also keine externe Zuführung der Spannung erforderlich.)

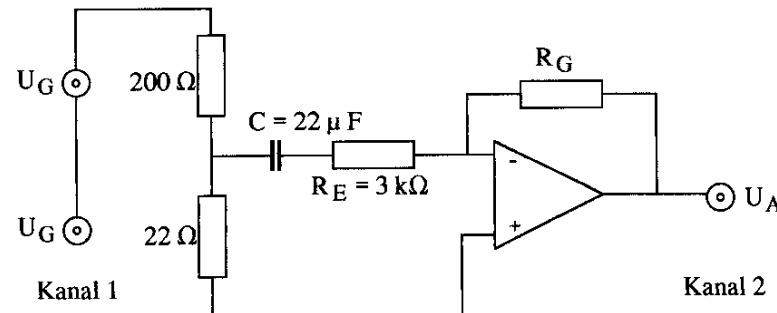
Machen Sie diese Messungen für 2 Gegenkoppelwiderstände:

$$R_G = 48.7 \text{ k}\Omega \text{ (S2 in Stellung 3)}$$

$$\text{und } R_G = 274 \text{ k}\Omega \text{ (S2 in Stellung 2)}$$

1 b) μA 741 als Verstärker für Wechselspannung (Sinus-Spannung):

Schaltung 1b

Messen der Wechselspannungen mit dem Oszilloskop in Stellung "AC", $U_1 = 1/10 U_G$ (U_G : Generatorenspannung), Eingangsschalter S1 in Stellung 2.

Der Kondensator C hält Gleichspannungsschwankungen vom Eingang fern und ist ohne Belang für die bei den Messungen verwendeten Frequenzen.

Die Generatorenspannung wird mit dem Spannungsteiler $200 \Omega / 22 \Omega$ um den Faktor 10 unterteilt und erst dann auf den Verstärker gegeben, da die Eingangsempfindlichkeit des Oszilloskops für die kleinsten Spannungen nicht ausreicht.Messen Sie $U_A = f(U_1) = f(U_G / 10)$ bei 1 kHz für ca. 6 Werte von U_G zwischen 0 und 1 V_{SS}, die Sie am Sinus-Rechteck-Generator einstellen.

Messen Sie bei 2 Gegenkoppelwiderständen

$$R_G = 274 \text{ k}\Omega \text{ (S2 in Stellung 2)}$$

$$\text{und } R_G = 680 \text{ k}\Omega \text{ (S2 in Stellung 1)}$$

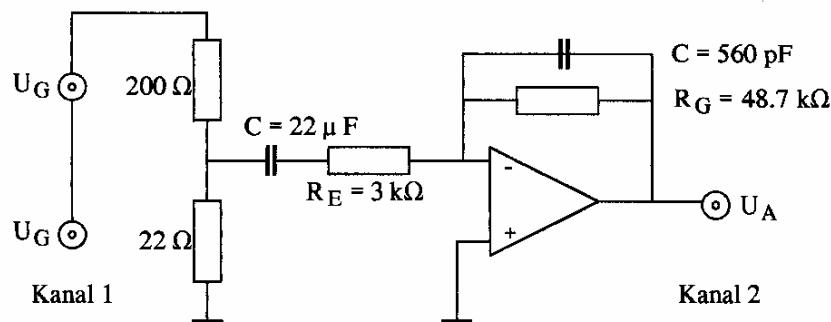
Für beide Teile: Diagramme $U_A = f(U_1)$; Vergleich der berechneten Verstärkung mit der gemessenen Verstärkung.**Aufgabe 2** (Schaltung wie 1b)**2 a)** Nehmen Sie den Frequenzgang des gegengekoppelten Verstärkers zwischen 100 Hz und 300 kHz bei 3 verschiedenen Gegenkopplungen auf (ca. 3 Messpunkte je Dekade): $V' = f(\nu)$ und zeichnen Sie die Messpunkte direkt in ein Diagramm ein. (Ein Diagramm auf doppel-logarithmisches Papier mit 3 auf 4 Dekaden für alle Messungen a) - c) in Aufgabe 2.)

Eingangsspannungen für diese Messungen:

U_G (an der Messbuchse) = 0,3 V_{SS} Sinusspannung für R_G = 680 kΩ und 274 kΩ, und $U_G = 1 V_{SS}$ für $R_G = 48.7$ kΩ . (Da Sie am Verlauf von V interessiert sind: unterschiedliche Eingangsspannung beachten!)

2 b) Nehmen Sie wie in Aufgabe 2a einen Frequenzgang des mit einer Kapazität gegengekoppelten Verstärkers auf; $U_G = 1 V_{SS}$, Schalter S1 in Stellung 2 , Schalter S2 in Stellung 4)

Schaltung 2:



2 c) Wiederholen Sie die Messung 2a mit $R_G = 48.7$ kΩ (S2 in Stellung 3) zwischen 300 Hz und 20 kHz, jedoch mit dem kleinen Kondensator am Eingang ($U_G = 1 V_{SS}$, $C = 47$ nF), Schalter S1 in Stellung 3).

Tragen Sie alle Ergebnisse von Messung 2 in ein gemeinsames Diagramm auf doppel-logarithmisches Papier mit 3 auf 4 Dekaden ein.

Aufgabe 3

Geben Sie jetzt ein Rechtecksignal von ca. 1 kHz auf den Eingang des Verstärkers und beschreiben Sie, wie die Impulsform bei verschiedenen Einstellungen der Gegenkopplung (d.h. also des Frequenzganges) geändert wird.

Für Physiker und Mathematiker: Welche Bedeutung haben hohe Frequenzen für die Anstiegszeit von Impulsen? Wie wirkt sich das Fehlen von hohen bzw. tiefen Frequenzen bei der Verstärkung von Impulsen aus?

Grundlagen:

Das Messen elektrischer Spannungen, die als Gleichspannungen, Wechselspannungen oder Spannungsimpulse vorliegen können, ist eine recht häufige Aufgabe in der naturwissenschaftlichen Messpraxis. Die z.B. von Detektoren oder Elektroden abgegebenen Spannungen müssen aber im allgemeinen verstärkt werden, damit sie einer quantitativen Beobachtung zugänglich sind. Im vorliegenden Versuch sollen grundsätzliche Eigenschaften der hierfür verwendeten Verstärker untersucht werden. Die Kenntnis dieser grundsätzlichen Eigenschaften hilft oft, störende Fremdspannungen (Netzbrumm, Einstrahlung von Radiosendern) soweit zu unterdrücken, dass sie im Vergleich zu dem gewünschten Signal keine Rolle mehr spielen.

Der Aufbau von Verstärkern mit vorgegebenen Eigenschaften erfordert grundsätzliche Kenntnisse in elektronischer Schaltungstechnik. Dem "Nichtelektroniker" stehen heute preisgünstige Mikroschaltkreise zur Verfügung, sog. Verstärkerbausteine, die zwar aus einigen 10 Transistoren, Widerständen etc. bestehen, aber als Ganzes Bauelemente sind, die durch einige wenige Parameter in ihrem Verhalten übersichtlich beschrieben werden können. Die Schaltungskniffe, die zu diesem Ziel führen, braucht der Anwender dann nicht mehr zu kennen. Durch Hinzufügen von wenigen "äußeren" Schaltelementen zum Baustein kann ein Verstärker mit vorgegebenen Daten aufgebaut werden.

Im Versuch werden einfache Grundschaltungen eines linearen Verstärkers untersucht. Als Baustein dient der Operationsverstärker $\mu A 741$ (Der Name Operationsverstärker röhrt daher, dass mit solchen Bauelementen bzw. Baugruppen Rechenoperationen in Analogrechnern durchgeführt werden).

Die meisten Operationsverstärker sind sogenannte Differenzverstärker, d.h. sie verstärken die Spannungsdifferenz zwischen zwei Eingängen. Erdet man einen dieser Eingänge und gibt die zu verstärkende Spannung auf den jeweils anderen, so erhält man entweder einen invertierenden oder einen nicht-invertierenden Verstärker. In dem vorliegenden Versuch soll der $\mu A 741$ nur als invertierender Verstärker betrieben werden.

Die wichtigsten Größen, die einen Operationsverstärker charakterisieren, sind:

$$1.) \text{ Der Eingangswiderstand } R_i = \frac{U_E}{I_E}$$

Dieses Verhältnis aus Eingangsspannung (U_E) und Eingangsstrom (I_E) soll groß sein, damit der Messwertaufnehmer möglichst wenig belastet wird. Beim $\mu A 741$ ist $R_i \approx 10^6 \Omega$.

$$2.) \text{ Der Ausgangswiderstand } R_a = \frac{U_A}{I_A}$$

Das Verhältnis von Ausgangsspannung (U_A) und -strom (I_A) dagegen soll sehr viel kleiner sein, damit die Ausgangsspannung unabhängig von irgendwelchen Belastungen wird: $R_a \approx 50 \Omega$ beim $\mu A 741$.

$$3.) \text{ Die Spannungsverstärkung } V_o = -\frac{U_A}{U_E} \quad (U_E \text{ am invertierenden Eingang!})$$

Diese ist frequenzabhängig, und zwar ist sie umgekehrt proportional zur Frequenz (siehe Abb. 2). Nur unterhalb von ~ 10 Hz nimmt der Verstärkungsfaktor nicht weiter zu. Man vergleiche diesen Frequenzgang mit dem eines Integriergliedes (Versuch 243).

Eine doppeltlogarithmische Darstellung liefert ein sehr übersichtliches Bild dieser Abhängigkeit. Sie wird Bodediagramm genannt (Abb. 2).

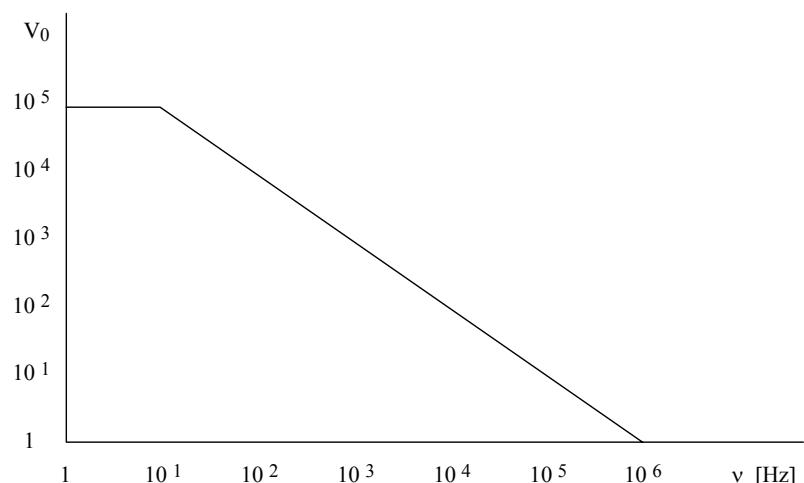
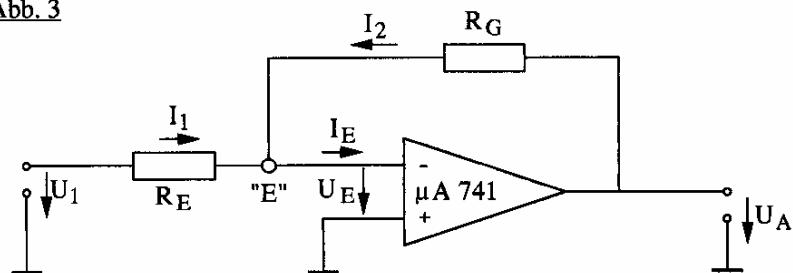


Abb. 2 Frequenzgang des Operationsverstärkers $\mu A 741$

Für praktische Anwendungen ist es meist erforderlich, mit speziellen Verstärker-eigenschaften zu messen. Hierzu müssen die Verstärkungsfaktoren und der Frequenzgang verändert werden. Die gebräuchlichste Möglichkeit dafür ist die sogenannte Gegenkopplung. Mit dem Gegenkopplungswiderstand R_G wird ein Teil der Ausgangsspannung auf den Eingang zurückgekoppelt (Abb. 3):

Abb. 3



Für die Ströme, die zum Punkt E fließen, gilt die Knotenregel (Kirchhoff):
 $I_1 + I_2 - I_E = 0$

Sorgt man dafür, dass R_E und R_G sehr viel kleiner als R_i sind, kann man mit $I_E = 0$ rechnen und erhält

$$I_1 + I_2 = \frac{U_1 - U_E}{R_E} + \frac{U_A - U_E}{R_G} = 0$$

mit $V_o = -\frac{U_A}{U_E}$ erhält man nach Umformungen:

$$\frac{U_1}{U_A} = - \left[\frac{1}{V_o} + \frac{R_E}{R_G} \left(1 + \frac{1}{V_o} \right) \right] \quad (1)$$

Bei genügend niedrigen Frequenzen (s. Bild 2) ist V_o des $\mu A 741$ $\sim 10^5$; d.h.
 $\frac{1}{V_o} = 10^{-5} \ll 1$.

Sorgt man außerdem dafür, dass $\frac{R_E}{R_G}$ groß gegen $\frac{1}{V_o}$ wird, so erhält man:

$$-\frac{U_A}{U_1} = \frac{R_G}{R_E} = V \quad (2)$$

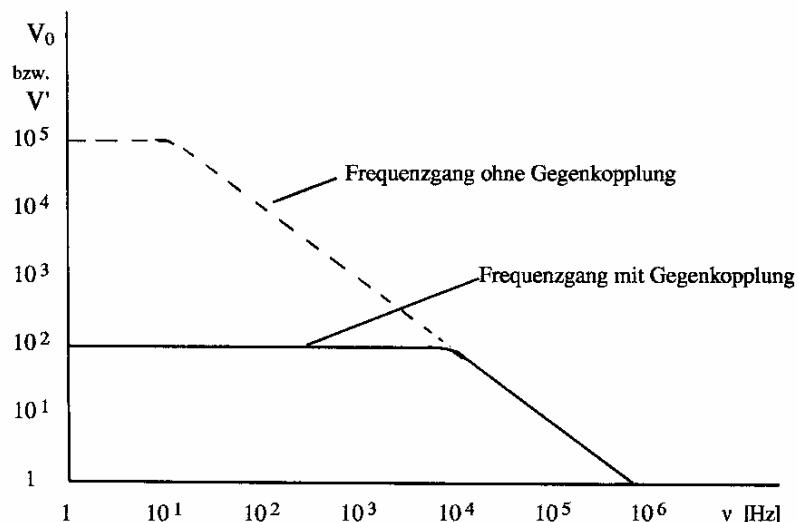
U_A / U_1 ist die Verstärkung des gegengekoppelten Verstärkers nach Bild 3. Sie ist unter den genannten Voraussetzungen unabhängig von den Verstärkerdaten und wird nur durch die Außenbeschaltung bestimmt. (V' heißt Betriebsverstärkung.)

In Aufgabe 1 soll Gleichung (2) für Gleichspannung und eine niedrige Frequenz überprüft werden.

Gleichung (2) gilt nun beim $\mu A 741$ nicht für alle Frequenzen:

V_o sinkt bei hohen Frequenzen und die durch R_G / R_E erhaltenen Werte für die Betriebsverstärkung gehen dann wieder in die vom Verstärker gegebenen Verstärkungsfaktoren über (Abb. 4).

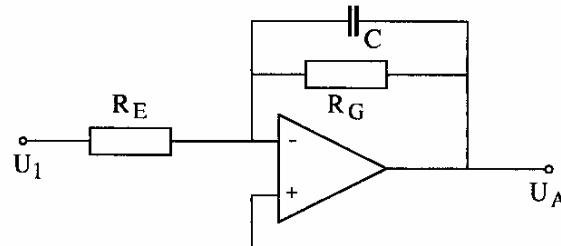
Abb. 4 (Beispiel $R_G / R_E = 100$)



Die Gegenkopplung bewirkt also durch die Ermäßigung des Verstärkungsfaktors eine Linearisierung des Frequenzganges. Dies soll in Aufgabe 2 verifiziert werden.

Fügt man nun in den Gegenkoppelzweig einen Kondensator ein (Abb. 5), so werden hohe Frequenzen stärker gegengekoppelt, d.h. weniger verstärkt. Der Einfluss eines Kondensators parallel zu R_G soll in Aufgabe 2b untersucht werden.

Abb. 5:



$$R_G^* = \frac{R_\Omega}{\sqrt{R_\Omega^2 \omega^2 C^2 + 1}}$$

Will man dagegen tiefe Frequenzen weniger verstärken, so kann man durch einen Hochpass am Eingang (siehe wiederum Versuch 243, RC Glied) dafür sorgen, dass nur die höheren Frequenzen den Verstärker mit der vollen Amplitude erreichen (Aufgabe 2 c)).

In der Messpraxis hat man außer Schwingungen und Gleichspannungen auch oft Impulse zu verstärken. In Aufgabe 3 soll der Einfluss von Verstärkung und Frequenzgang auf die Form und die Höhe von Rechteckimpulsen untersucht werden. Von besonderem Interesse ist dabei, wie Anstiegs- und Abfallzeit eines Impulses durch den Frequenzgang des Verstärkers beeinflusst werden.

Versuch 243

Messung der Boltzmannkonstante Teil II Thermisches Rauschen

Abbildung 1: *Versuchsaufbau.*

I Messaufbau

- Batterienetzteil
- Zimmerthermometer
- Verschiedene ohmsche Widerstände in einem gemeinsamen Gehäuse montiert

- Rauscharmer Verstärker mit 1000-facher Verstärkung (60 dB) und zuschaltbarem Bandpassfilter
- Dämpfungsglied 1/1000-fach (-60dB)
- Beheizbarer Widerstand 4 k Ω bei 0°C (Pt4000-Widerstand)
- Heizungsnetzteil mit integrierter Regelelektronik für den beheizbaren Widerstand
- Oszilloskop mit Spektrumanalysator
- Funktionsgenerator
- Multimeter Agilent HP34401A
- PC mit Drucker

II Literatur

- Homepage des Praktikums
<http://www.physi.uni-heidelberg.de/Einrichtungen/AP/>

III Vorbereitung

Bereiten Sie sich auf die Beantwortung von Fragen zu folgenden Themen vor: Kinetische Theorie der Wärme, Brownsche Bewegung. Grundlagen der Elektrizitätslehre (Falls Sie die Versuche *Spannungsverstärkung* und *Wechselstromeigenschaften von RCL-Gliedern* noch nicht durchgeführt haben, sollten Sie sich den Grundlagenteil der jeweiligen Versuchsanleitung durchlesen).

Verständnisfragen:

1. Was bezeichnet man als thermisches Rauschen? Was ist die Ursache hierfür? Wie lässt sich das Widerstandsrauschen quantitativ beschreiben? Was beschreibt Δf in der Nyquist-Formel?

2. Warum verschwindet der Mittelwert der Rauschspannung einer thermischen Rauschquelle? Durch welche Größe kann die Rauschspannung quantifiziert werden? Berechnen Sie den Effektivwert einer Sinusspannung mit einer Amplitude von 1 V.
3. Was bezeichnet man als „weißes Rauschen“? Wie würden Sie demzufolge die Begriffe „rosa Rauschen“ bzw. „ $1/f$ -Rauschen“ interpretieren?
4. Berechnen Sie aus der Nyquist-Formel (3) die Rauschdichte

$$\frac{U_r}{\sqrt{\Delta f}}$$

für einen $1 \text{ k}\Omega$ Widerstand bei Zimmertemperatur (300 K). Bestimmen Sie hieraus die Rauschspannung bei einer Messbandbreite von 20 kHz und einer Bandbreite von 1 MHz.

Der im Praktikumsversuch verwendete Verstärker enthält den Operationsverstärker OPA637. Im Datenblatt dieses Operationsverstärkers liest man: **VERY LOW NOISE: $4,5 \text{ nV}/\sqrt{\text{Hz}}$** . Was besagt diese Angabe? Vergleichen Sie diese Rauschdichte mit der eines $1 \text{ k}\Omega$ Widerstands bei Zimmertemperatur (300 K).

5. Begründen Sie die Aussage: Rauschreduzierung ist durch Mittelwertbildung, Kühlung und Verkleinerung der Bandbreite möglich. Um wieviel verringert sich das Rauschen eines Verstärkers, wenn dieser mit flüssigem Stickstoff gekühlt wird (im Vergleich zu Zimmertemperatur 300 K)?
6. Über einem ohmschen Widerstand liegt nach der Nyquist-Formel (3) eine Rauschspannung U_r an. Gilt dies auch für einen rein kapazitiven bzw. induktiven Widerstand?
7. Beschreiben Sie den Messaufbau. Welche Aufgabe hat der Verstärker, das Bandfilter, das Dämpfungsglied? Warum werden für die Stromversorgung des Verstärkers Batterien verwendet und nicht ein Netzteil? Wie lässt sich der Frequenzgang des Verstärkers mit nachgeschaltetem Bandfilter bestimmen? Wie das Eigenrauschen des Verstärkers?

IV Aufgaben

1. Messen Sie die Rauschspannung von sechs verschiedenen Widerständen bei Zimmertemperatur sowie das Eigenrauschen des Verstärkers.
2. Bestimmen Sie den Frequenzgang der Messelektronik.
3. Optional: Messen Sie die Rauschspannung eines Widerstands als Funktion der Temperatur.

V Motivation

Der zweite Teil des Versuchs „*Bestimmung der Boltzmannkonstante*“ verfolgt im wesentlichen zwei Ziele. Zum einen werden Sie mit einer weiteren, sehr präzisen Messmethode, die Boltzmannkonstante bestimmen und zum anderen sollen Sie sich mit den physikalischen Ursachen des Rauschens auseinandersetzen.

Die Genauigkeit mit der Sie eine elektrische Größe messen können, wird letztendlich durch das Rauschen begrenzt. Wenn Sie die Ursachen des Rauschens kennen, können Sie den Versuchsaufbau so optimieren, dass das Signal/Rauschverhältnis möglichst groß wird. Dies ist z.B. durch die Verwendung von rauscharmen Verstärkern, durch Mittelwertbildung, durch Kühlung oder durch die Begrenzung der Messbandbreite möglich. Im weiteren Verlauf Ihres Studiums werden Sie sicherlich noch weitere Methoden und Instrumente kennen lernen, mit denen sich äußerst rauscharme Messungen durchführen lassen können (z.B. Lockin-Verstärker).

Obwohl in den meisten Fällen das Rauschen störend auf eine Messung wirkt und daher unerwünscht ist, gibt es aber durchaus auch Anwendungen in Wissenschaft und Messtechnik bei denen das Rauschen gezielt eingesetzt bzw. ausgenutzt wird. Ein Beispiel ist das Rauschthermometer, mit dem sich ein Temperaturbereich von $\approx 1 \text{ mK}$ bis einigen 1000 K abdecken lässt.

VI Grundlagen

Thermisches Rauschen tritt bei allen elektrischen Leitern auf, sofern sie eine Temperatur von über 0 K besitzen. Die Ursache ist die Brownsche Bewegung der Ladungsträger. Ähnlich wie bei den Partikeln im Versuchsteil 1, *Brownsche*

Bewegung, führen auch die Ladungsträger im Leiter eine zufällige „Zick-Zack-Bewegung“ durch. Selbst wenn an einem Leiter (z.B. einem ohmschen Widerstand) keine äußere Spannung anliegt, führt die thermische Bewegung der Ladungsträger, zu einem statistisch variierenden elektrischen Potenzial im Leiter. Misst man mit einem sehr empfindlichen Oszilloskop die Spannung über einen Widerstand, so beobachtet man z.B. einen Verlauf wie er in Abbildung 2 dargestellt ist. Die Rauschspannung U_r schwankt statistisch um einen Mittelwert $\langle U_r \rangle$. Liegt am Widerstand keine äußere Spannung an, so gilt:

$$\langle U_r \rangle = \lim_{t' \rightarrow \infty} \frac{1}{t'} \int_0^{t'} U_r(t) dt = 0. \quad (1)$$

Der verschwindende Mittelwert ist auch sofort einzusehen, da die thermische Bewegung der Ladungsträger ungerichtet ist. Zu einem bestimmten Zeitpunkt wird der Ladungsschwerpunkt der Ladungsträger einmal mehr auf der einen Seite des Widerstands liegen, zu einer anderen Zeit mehr auf der anderen Seite. Im Mittel liegt aber eine Gleichverteilung der Ladungsschwerpunkt vor, so dass der zeitliche Spannungsmittelwert verschwindet. Um dennoch die Rauschspannung quantifizieren zu können, muss man den Effektivwert (engl. *root mean square* oder einfach *rms*) der Rauschspannung messen. Dieser entspricht der Wurzel des quadratischen Mittelwerts (vergleichen Sie die Analogie zum mittleren Verschiebungskreisquadrat beim Versuch „Brown'sche Bewegung“):

$$\sqrt{\langle U_r^2 \rangle} = \sqrt{\lim_{t' \rightarrow \infty} \frac{1}{t'} \int_0^{t'} U_r^2(t) dt}. \quad (2)$$

Untersucht man das Frequenzspektrum einer thermischen Rauschquelle so stellt man fest, dass **alle** Frequenzanteile bis in den THz-Bereich in gleichen Maßen vorhanden sind. Ähnlich wie bei weißem Licht, bei dem alle Frequenzanteile von rot bis blau vertreten sind, sind auch im Spektrum einer thermischen Rauschquelle alle Frequenzen gleichermaßen vertreten. Aus diesem Grund wird das thermische Rauschen in Anlehnung an die Optik auch als weißes Rauschen bezeichnet. Andere Bezeichnungen sind Johnson-Rauschen, Nyquist-Rauschen¹ oder einfach nur Widerstandsrauschen.

¹Benannt nach John Bertrand Johnson und Harry Nyquist. Das thermische Rauschen wurde erstmals 1918 von Walter Schottky beschrieben und von Johnson 1927 experimentell bestätigt. Ebenfalls 1927 hat Harry Nyquist eine Theorie zum thermischen Rauschen entwickelt (Nyquist-Formel).

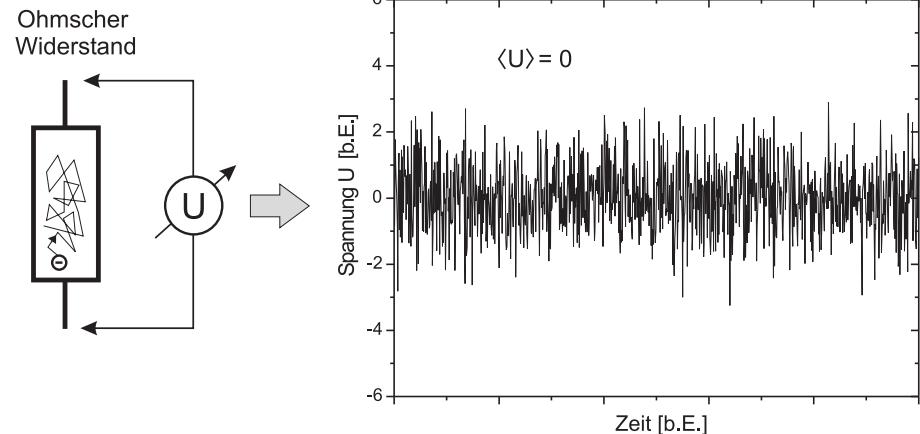


Abbildung 2: Links: Aufgrund der unregelmäßigen thermischen Bewegung der Ladungsträger in einem Leiter (ohmscher Widerstand) liegt an diesem eine fluktuiierende Spannung (Rauschspannung) an. Rechts: Rauschspannung über einem ohmschen Widerstand als Funktion der Zeit. Der zeitliche Mittelwert $\langle U_r \rangle$ verschwindet.

Der quadratische Effektivwert der Rauschspannung $\langle U_r^2 \rangle$ hängt nach Harry Nyquist nur von der Temperatur T , dem ohmschen Widerstand R und der Bandbreite Δf ab:

$$\langle U_r^2 \rangle = 4kTR\Delta f \quad \text{Nyquist-Beziehung,} \quad (3)$$

wobei k die Boltzmannkonstante darstellt.

Die Bandbreite Δf bezieht sich auf die Bandbreite der Messelektronik (Spannungsmessgerät, Verstärker, Filter), mit dem die Rauschspannung detektiert wird. Ein Effektivwert-Voltmeter kann nicht den Effektivwert von Wechselspannungen mit beliebig hoher Frequenz messen, sondern besitzt eine endliche Messbandbreite Δf . Das gleiche gilt für einen Verstärker (siehe Versuch *Spannungsverstärkung*). Frequenzen außerhalb der Bandbreite können entweder gar nicht oder nur mit einem großen Fehler gemessen werden. Da das

Rauschen frequenzunabhängig ist („weißes“ Spektrum) tragen alle Frequenzen gleichermaßen zur Rauschspannung bei. Somit ist verständlich: Je größer der messbare Frequenzbereich Δf der Messelektronik, desto größer ist nach Gleichung (3) die gemessene Rauschspannung.

Messprinzip

Die Bestimmung der Boltzmannkonstante nach Gleichung (3), ist vom Prinzip her denkbar einfach: Wir müssen nur den Effektivwert der Rauschspannung eines Widerstands R bei der Temperatur T messen, diesen quadrieren $\langle U_r^2 \rangle$ und die Messbandbreite Δf bestimmen. Abbildung 3a) verdeutlicht den Messaufbau. So einfach das Prinzip, desto komplizierter ist die Realisierung dieser Messung, denn die auftretenden Rauschspannungen sind extrem klein. Bei Zimmertemperatur (≈ 300 K) beträgt die Rauschspannung eines $5\text{ k}\Omega$ Widerstands bei einer Messbandbreite von 50 kHz nur

$$\sqrt{\langle U_r^2 \rangle} = \sqrt{4 \cdot k \cdot 300\text{K} \cdot 5\text{k}\Omega \cdot 50\text{kHz}} \approx 2\text{ }\mu\text{V}. \quad (4)$$

Solch kleine Spannungen können ohne einen zusätzlichen Verstärker nicht gemessen werden. Aus diesem Grund verwenden wir im Versuch einen Verstärker, der die Rauschspannung um das **1000-fache** (60 dB) verstärkt. Die Rauschspannung im obigen Beispiel erhöht sich dadurch von $2\text{ }\mu\text{V}$ auf 2 mV . Das ist mit einem guten Voltmeter problemlos messbar.

Allerdings ist zu beachten, dass der Verstärker selbst eine Rauschquelle darstellt. Ein Verstärker besteht letztendlich auch nur aus Bauteilen wie Halbleitern und Widerständen die selbst ein Rauschsignal erzeugen. Neben der verstärkten Rauschspannung $\sqrt{\langle U_R^2 \rangle}$ des Widerstands misst man daher einen zusätzlichen Rauschanteil $\sqrt{\langle U_V^2 \rangle}$ der vom Verstärker stammt. Für die insgesamt gemessene Rauschspannung $\sqrt{\langle U_{R+V}^2 \rangle}$ gilt:

$$\sqrt{\langle U_{R+V}^2 \rangle} = \sqrt{\langle (U_R + U_V)^2 \rangle} = \sqrt{\langle U_R^2 \rangle + \langle U_V^2 \rangle + 2\langle U_R \rangle \langle U_V \rangle}. \quad (5)$$

Da die einfachen Mittelwerte nach Gleichung (1) verschwinden, folgt schließlich

$$\langle U_{R+V}^2 \rangle = \langle U_R^2 \rangle + \langle U_V^2 \rangle. \quad (6)$$

Die gemessene quadratische Spannung setzt sich demnach additiv aus den Effektivwerten des verstärkten Widerstandsräuschen und dem Verstärkerrauschen

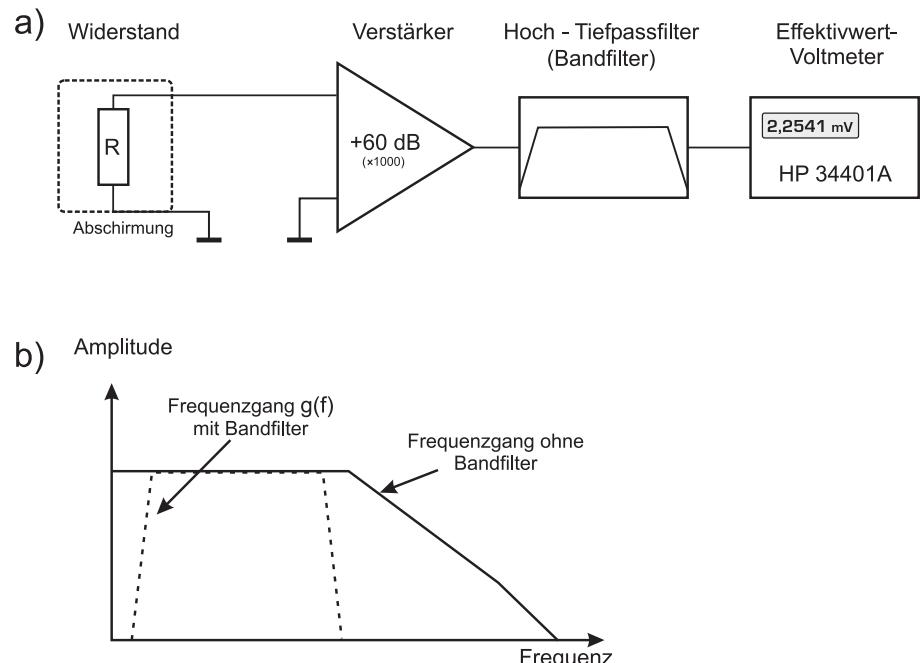


Abbildung 3: a) Messaufbau: Da die Rauschspannung über einem ohmschen Widerstand (Größenordnung $k\Omega$) bei Zimmertemperatur sehr klein ist, wird diese mit einem rauscharmen Verstärker verstärkt. Die Messbandbreite wird durch den nachfolgenden Bandfilter begrenzt und die verstärkte Rauschspannung mit einem Voltmeter gemessen. b) Schematische Darstellung des Frequenzgangs der Messelektronik. Die gestrichelte Linie zeigt den Frequenzgang mit einem zusätzlichen Bandfilter, die durchgezogene Linie ohne den Filter.

zusammen. Das Verstärkerrauschen lässt sich durch eine „Nullmessung“ bestimmen und später von den gemessenen Werten abziehen.

Um die Bandbreite einzuschränken, wird im Versuch ein zusätzlicher Bandfilter verwendet. Jetzt fragen sie sich sicherlich: „Warum einen zusätzlichen Filter? Prinzipiell ist doch kein zusätzlicher Bandfilter notwendig, da der Verstärker und auch dass Messgerät selbst eine begrenzte Bandbreite besitzen?“ Das wir doch einen verwenden hat zwei Gründe: Zum einen ist die Bandbreite des Voltmeters und des Verstärkers bei hohen Frequenzen nicht sehr „scharf“ begrenzt, so dass wir den Frequenzbereich mit einem steil abfallenden Tiefpassfilter nach oben einschränken. Zum anderen können auch Störsignale, wie vor allem das 50 Hz Netzbrummen² und dessen Harmonische in den Verstärker einkoppeln und würden die Messungen verfälschen. Um diese niederfrequenten Störungen zu eliminieren verwenden wir zusätzlich noch einen Hochpassfilter. Die Hintereinanderschaltung solch eines Hoch- und Tiefpassfilters ergibt einen Bandfilter, dessen Charakteristik in Abbildung 3b) dargestellt ist.

Es stellt sich nun die Frage, wie wir aus dem verstärkten und gefiltertem Signal die Boltzmannkonstante bestimmen können. Dazu müssen wir den Frequenzgang der Messelektronik, d.h. des Verstärkers mit nachgeschaltetem Bandfilter kennen. Der Frequenzgang $g(f)$ eines Messsystems ist allgemein definiert als das Verhältnis des Ausgangssignals $U_{aus}(f)$ zum Eingangssignal $U_{ein}(f)$ bei der Frequenz f :

$$g(f) = \frac{U_{aus}}{U_{ein}} \Big|_f. \quad (7)$$

Die Eingangsspannung des Messsystems entspricht der Rauschspannung U_r des Widerstands; die Ausgangsspannung der Spannung am Ausgang des Bandfilters. Für den quadratischen Effektivwert der Ausgangsspannung im Frequenzbereich df folgt dann aus der Nyquist- Beziehung:

$$d\langle U_{aus}^2 \rangle = g(f)^2 d\langle U_r^2 \rangle = 4kTR g(f)^2 df. \quad (8)$$

Integrieren wir über alle Frequenzen, so erhalten wir:

$$\langle U_{aus}^2 \rangle = 4kTR \int_0^\infty g(f)^2 df = 4kTRB. \quad (9)$$

Allerdings kommt durch den Verstärker noch ein zusätzlicher Rauschanteil UV hinzu. Nach Gleichung (6) addiert sich der quadratische Effektivwert des

²Aus diesem Grund erfolgt auch die Stromversorgung des Verstärkers durch ein Batterienetzteil und nicht durch eine netzgebundene Stromversorgung.

Verstärkerrauschen linear zum verstärkten Widerstandsrauschen. Für das Ausgangssignal folgt daher:

$$\langle U_{aus}^2 \rangle = 4kTRB + \langle U_V^2 \rangle. \quad (10)$$

Hieraus folgt für die Boltzmannkonstante:

$$k = \frac{\langle U_{aus}^2 \rangle - \langle U_V^2 \rangle}{4TRB}. \quad (11)$$

Die Größe

$$B = \int_0^\infty g(f)^2 df, \quad (12)$$

wird als äquivalente Rauschbandbreite des Messsystems bezeichnet. Da $g(f)$ nicht bekannt ist, muss der Frequenzgang experimentell bestimmt werden und das Integral numerisch ausgewertet werden.

Messung des Frequenzgangs $g(f)$

Zur Messung des Frequenzgangs des Verstärkers und Bandfilters steht ein Funktionsgenerator und ein Oszilloskop zur Verfügung. Das Messprinzip ist in Abbildung 4 dargestellt. Der Funktionsgenerator dient als Signalquelle und liefert ein Sinussignal mit einstellbarer Frequenz und Amplitude. Zwischen Funktionsgenerator und dem Verstärker ist zusätzlich ein Dämpfungsglied geschaltet, welches das Signal des Funktionsgenerators um das 1000-fache (Dämpfung $D=10^{-3}$) abschwächt. Ohne diesen würde der Verstärker wegen der sehr hohen Verstärkung in Sättigung gehen und das Signal verzerrten. Nach dem Verstärker folgt das Bandfilter, dessen Ausgangsspannung mit einem Oszilloskop gemessen wird.

Der Funktionsgenerator und das Oszilloskop werden von einem Rechner angesteuert, so dass die Frequenzgangmessung automatisiert durchgeführt werden kann. Der Computer stellt am Funktionsgenerator ein Sinussignal mit der Frequenz f und mit einer konstanten Effektivspannung $\sqrt{\langle U_{ein}^2 \rangle}$ ein und misst mit dem Oszilloskop die Ausgangsspannung $\sqrt{\langle U_{aus}^2 \rangle}$ hinter dem Bandfilter. Diese Messung wird für mehrere Frequenzen innerhalb des interessierenden Frequenzbereichs nacheinander wiederholt und die Ausgangsspannung $\sqrt{\langle U_{aus}^2 \rangle}$ als

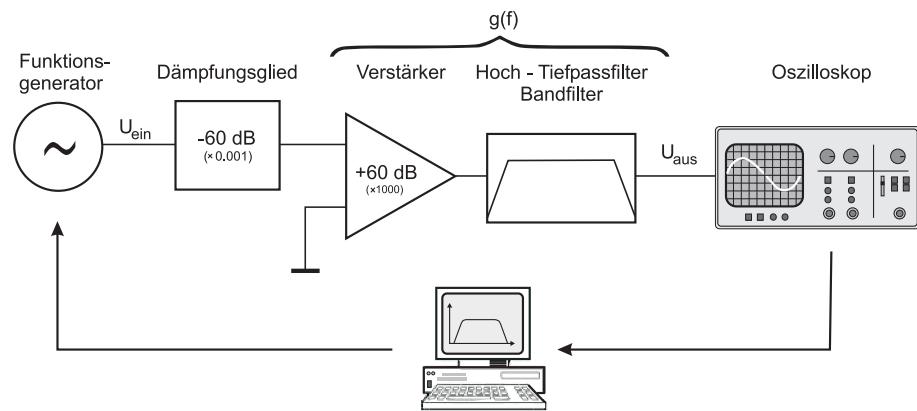


Abbildung 4: Messaufbau zur Messung des Frequenzgangs.

Funktion der Frequenz grafisch dargestellt. In Abbildung 5 ist solch eine Messung dargestellt. Für den Frequenzgang des Verstärkers und des Bandfilters folgt dann:

$$g(f) = \frac{1}{D} \frac{\sqrt{\langle U_{aus}^2 \rangle}}{\sqrt{\langle U_{ein}^2 \rangle}} \quad (13)$$

Die Messdaten $U_{aus}(f)$ können gespeichert werden, so dass Sie mit diesen später das Integral in Gleichung (12) numerisch berechnen können.

Versuchsübersicht

Der Versuch setzt sich aus zwei Teilaufgaben zusammen.

- Im ersten Teil werden Sie die Rauschspannung als Funktion des ohmschen Widerstands messen. Dazu stehen verschiedene Widerstände, die in einem abgeschirmten Gehäuse montiert sind, zur Verfügung. Es handelt sich dabei um gewöhnliche Metallfilmwiderstände. Wenn Sie möchten, können Sie die Rückseite des Gehäuses öffnen und sich diese anschauen. In einer weiteren Messung bestimmen Sie die äquivalente Rauschbandbreite des Messsystems. Dazu müssen Sie zunächst den Frequenzgang $g(f)$ messen und aus

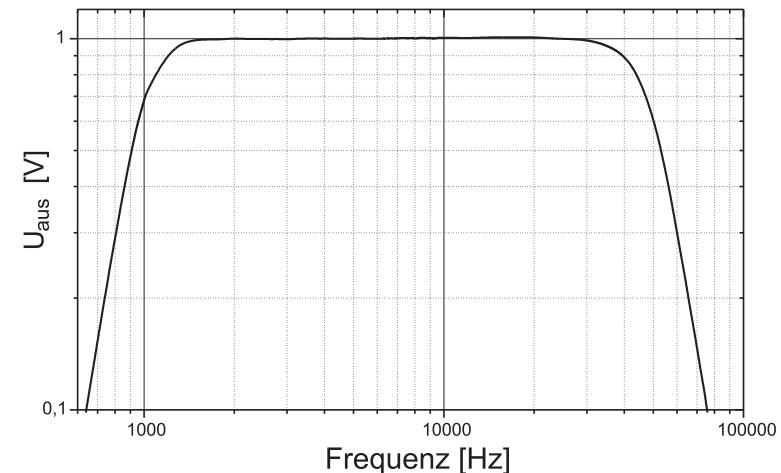


Abbildung 5: Frequenzgang des Verstärkers mit nachgeschaltetem Bandfilter.

diesen Daten das Integral in Gleichung (12) numerisch berechnen. Eine Tabellenkalkulation ist auf dem Messrechner installiert. Aus den Messdaten ist die Boltzmannkonstante zu berechnen.

- Freiwillige Zusatzaufgabe: Nach der Nyquist- Formel, hängt das Widerstandsräuschen auch von der Temperatur der Rauschquelle ab. Dies können Sie im zweiten Versuchsteil experimentell überprüfen. Hierfür steht ein elektrisch beheizbarer Widerstand zur Verfügung. Die Temperatur kann mit Hilfe einer Heizungsregelung zwischen 50°C und 250°C in Schritten von 50°C variiert werden. Da ein Widerstand eine Temperaturabhängigkeit besitzt, ändert sich beim Aufheizen auch der Widerstandswert. Daher muss bei diesem Versuchsteil sowohl der Widerstand als auch dessen Temperatur bestimmt werden. Nun ist es gar nicht so einfach die Temperatur des Widerstands mit einem externen Temperaturfühler mit hoher Präzision zu messen. Aus diesem Grund verwenden wir als „Rauschwiderstand“ ein Widerstandsthermometer (Platinwiderstandsthermometer Pt4000). Dabei handelt es sich um einen ohmschen Widerstand dessen Widerstand nahezu linear mit der Temperatur ansteigt. Die genaue Temperaturabhängigkeit ist sehr genau bekannt. Es ist daher ausreichend nur den Widerstand zu mes-

sen. Die dazu korrespondierende Temperatur kann aus dem Widerstandswert berechnet werden:

Die Temperaturabhängigkeit eines Pt-Widerstands lässt sich mit guter Genauigkeit durch ein Polynom zweiten Grades approximieren:

$$R(T) = R_0(1 + A T + B T^2), \quad (14)$$

mit

R_0 : Widerstand bei 0°C (für ein Pt4000-Thermometer gilt $R_0 = 4000 \Omega$)

$A: 3,908 \times 10^{-3} [\text{ }^\circ\text{C}^{-1}]$

$B: -5,775 \times 10^{-7} [\text{ }^\circ\text{C}^{-2}]$.

Damit kann aus dem gemessenen Widerstand R die Temperatur berechnet werden. Aus Gleichung (14) ergibt sich:

$$T(R) = \frac{-R_0 A + \sqrt{R_0^2 A^2 - 4 R_0 B (R_0 - R)}}{2 R_0 B}. \quad (15)$$

Aus diesen Messungen ist wieder die Boltzmannkonstante zu berechnen. Ferner können Sie durch Interpolation auf die Temperatur, bei der die Rauschspannung verschwindet, den absoluten Temperaturnullpunkt bestimmen.

VII Durchführung

Schalten Sie gleich zu Beginn des Versuchs das Batterienetzteil, das Effektivwert-Multimeter und den Verstärker ein. Der Verstärker muss **mindestens 15 Minuten** „warmlaufen“. Andernfalls tritt während der Messung eine störende Drift auf. **Achtung: Der Verstärker und das Filter sind äußerst empfindliche Instrumente, die bei falscher Verkabelung zerstört werden können. Bitten Sie daher vor Inbetriebnahme den Assistenten den Versuchsaufbau zu überprüfen.**

1. Vorversuch: Qualitative Untersuchung des Rauschspektrums eines ohmschen Widerstands

Stecken Sie das Gehäuse mit den umschaltbaren Widerständen direkt auf

den Verstärkereingang und wählen Sie den kleinsten Widerstandswert. Den Verstärkerausgang schließen Sie an Kanal 1 des Oszilloskops an. Beobachten Sie mit dem Oszilloskop die Rauschspannung für unterschiedliche Widerstandswerte. Schalten Sie anschließend auf den Spektrumanalysator um. Das Spektrum liefert die Information, wie stark welche Frequenzanteile im Rauschsignal vorhanden sind.

Es empfiehlt sich folgende Einstellungen zu wählen:

- Freq. scale: LOG
- Frequency Range: 0,6 MHz
- Coupling: AC
- Volts/Div.: 5 mV
- Schalten Sie im Menu Options → FFT Options die Option Average ein

Die Bedeutung dieser Einstellungen wird der Assistent mit Ihnen besprechen. Zunächst ohne Bandfilter!

Da das thermische Rauschen ein weißes Rauschen ist, sind alle Frequenzen gleich stark vertreten, so dass Sie einen waagrechten Verlauf des Spektrums beobachten sollten. Variieren Sie den Widerstandswert und beobachten Sie die Änderung des Spektrums.

Wenn Sie nun den Frequenzbereich des Spektrumanalysators auf 3 MHz erhöhen, sehen Sie wie der Frequenzgang bei höheren Frequenzen abfällt. Was ist die Ursache hierfür? Schalten Sie nun den Bandfilter dazu, indem Sie den Ausgang des Verstärkers mit dem Eingang des Filters verkabeln und den Filterausgang an das Oszilloskop anschließen. Welche Auswirkungen hat das Filter auf das Spektrum? Drucken Sie das Spektrum zur Dokumentation aus.

2. Messung der Rauschspannung als Funktion des ohmschen Widerstands

- Stecken Sie das Gehäuse mit den Widerständen **direkt**, d.h. ohne ein zusätzliches Kabel zu benutzen, auf die Eingangsbuchse des Verstärkers. Den Ausgang des Verstärkers verbinden Sie mit einem **möglichst kurzen** Kabel mit dem Eingang des Bandfilters und dessen Ausgang mit dem Voltmeter. Schalten Sie den Rechner ein und starten Sie vom Desktop aus das Programm **Effektivwert**. Dieses Programm liest fortwährend die

Messwerte des Voltmeters aus und stellt diese in zwei Diagrammen dar. Das obere Diagramm zeigt die einzelnen Messwerte als Funktion der Zeit, bzw. als Funktion der Messnummer. Zusätzlich wird noch der Mittelwert berechnet und im unteren Diagramm als Funktion der Zeit aufgetragen. Der aktuelle Messwert sowie die Standardabweichung werden ebenfalls angezeigt. Um das Programm zu starten, müssen Sie auf den Pfeil in der linken oberen Ecke klicken.

- Messen Sie die Rauschspannung für sechs Widerstände im Bereich von $5\text{ k}\Omega$ bis $30\text{ k}\Omega$ in Schritten von $5\text{ k}\Omega$. Bei jeder Messung sollten Sie etwa 100 Einzelmessungen aufnehmen und hiervon den Mittelwert und dessen Fehler notieren. Das Messprogramm zeigt die Standardabweichung an. Um den Fehler des Mittelwerts zu erhalten, müssen Sie diese noch durch die Wurzel aus der Anzahl der Messungen dividieren. Der Fehler der Widerstände ist kleiner als 0,5%. Die Messgenauigkeit des Voltmeters liegt bei 0,3%. Notieren Sie die Zimmertemperatur.
- Um das Eigenrauschen des Verstärkers zu bestimmen, müssen Sie die Rauschspannung bei einem kurzgeschlossenen Verstärkereingang messen (d.h. für einen Widerstand von $0\text{ }\Omega$). Entfernen Sie dazu das Gehäuse mit den Widerständen und stecken Sie auf den Verstärkereingang einen Kurzschlussstecker. Ein passender Adapter liegt am Messplatz aus. Führen Sie die Messung der Rauschspannung analog zu der Messung mit den Widerständen durch, d.h. Mittelwert notieren.

3. Messung des Frequenzgangs des Verstärkers und des Bandfilters

Bauen Sie die Schaltung gemäß Abbildung 4 auf. Stecken Sie das Dämpfungsglied (Abschwächung $D = 0,001 \pm 0,2\%$) direkt ohne ein Kabel zu benutzen auf die Eingangsbuchse des Verstärkers. Achten Sie auf die richtige Verschaltung: Der **Ausgang** des Dämpfungsglieds muss mit dem Verstärkereingang verbunden werden und der Ausgang des Bandfilters muss mit **Kanal 1** des Oszilloskops verbunden werden. Starten Sie die Oszilloskopsoftware vom Desktop aus. Falls Sie mit dem Programm noch nicht gearbeitet haben, wird Sie der Betreuer in die Bedienung einweisen. Stellen Sie am Funktionsgenerator ein Sinussignal mit einer Frequenz von 100 Hz und einer Amplitude von **0,2 V_{rms}** ein. Starten Sie als nächstes den *Circuit-Analyser*. Damit der Frequenzgang über den gesamten Bereich gut zu erkennen ist, sollten Sie folgende Einstellungen wählen:

- Vertical Scale: 5 dB/div
- V-Range: 0,3 V
- Frequency Range: 1 MHz
- Frequency Start: 100 Hz
- Stellen Sie für die Frequenzschritte 20% ein (Menupunkt **Options** → **Frequency Step Size**)
- Wählen Sie aus dem Menupunkt **Options**, die Option **Automatic Voltage Scale** und folgen Sie den Hinweisen des erscheinenden Fensters.

Notieren Sie alle Einstellungen sowie die Abschwächung D des Dämpfungsglieds in Ihr Protokollheft. Starten Sie die Frequenzgangmessung und speichern Sie die Messdaten nach Beendigung der Messung unter C:\Messungen unter einem wiederfindbaren Dateinamen ab (Menupunkt **File** → **Save Data...**).

4. Freiwillige Zusatzaufgabe: Messung der Rauschspannung als Funktion der Temperatur

- Bei dieser Aufgabe müssen Sie die Rauschspannung des beheizbaren Widerstands, dessen Widerstandswert als auch dessen Temperatur bestimmen. Da die Temperaturabhängigkeit des Widerstands nach Gleichung (15) bekannt ist, kann die Temperatur des Widerstands aus dem Widerstandswert berechnet werden. Es reicht demnach aus, nur den Widerstand und die Rauschspannung zu messen. Beide Messungen sind mit dem Multimeter möglich. Allerdings nicht gleichzeitig. Sie müssen daher zuerst den beheizbaren Widerstand an das Multimeter anschließen und den Widerstandswert messen und anschließend den Widerstand an den Verstärker anschließen und mit dem Multimeter die Rauschspannung messen. Bei beiden Messungen werden die Daten wieder mit dem Rechner ausgelesen und grafisch dargestellt.

- Lesen Sie bevor Sie mit diesem Teilversuch beginnen, den folgenden Abschnitt vollständig durch. Sollten Sie aufgrund einer Fehlbedienung diesen Versuchsteil wiederholen müssen, kann es sehr lange dauern, bis sich der beheizbare Widerstand wieder abgekühlt hat.

Heizungsregelung noch nicht einschalten! Stellen Sie die Temperatur der Heizungsregelung auf 50°C ein und schalten Sie den Heizstromschalter an der Frontplatte auf die Stellung *Aus*. **Schalten Sie das Gerät erst jetzt ein.** Der Netzschalter befindet sich auf der Rückseite hinten rechts. Schließen Sie den beheizbaren Widerstand an das Multimeter an und öffnen Sie das Programm **Widerstand** vom Desktop aus. Das Programm stellt die Messwerte in zwei Diagrammen dar. Im oberen Diagramm wird der gemessene Widerstandswert als Funktion der Zeit bzw. der Messnummer dargestellt. Aus diesen Widerstandswerten wird gemäß Gleichung (15) die dazugehörige Temperatur berechnet und im unteren Diagramm grafisch dargestellt. Starten Sie das Programm durch einen Klick auf den Pfeil in der linken oberen Ecke. Warten Sie eine kurze Zeit ab und schalten Sie dann den Schalter für den Heizstrom an der Heizungsregelung ein. Die Temperatur des Widerstand steigt nun auf ungefähr 50°C an. Wenn die eingestellte Temperatur erreicht ist, empfiehlt es sich, das Programm zu stoppen und **erneut zu starten**. Dadurch werden die bisher aufgenommenen Daten gelöscht und die neuen Daten mit einer besseren Auflösung angezeigt. Beobachten Sie den Temperaturverlauf. Warten Sie so lange ab, bis die Temperatur über mehrere Minuten eine Stabilität von besser als 0,2°C aufweist. Stoppen Sie dann das Programm und notieren Sie den Widerstandswert und die Temperatur.

Als nächstes müssen Sie die Rauschspannung des Widerstands messen. Dazu müssen Sie den geheizten Widerstand mit einem möglichst **kurzen Kabel** an den Verstärkereingang anschließen und den Ausgang des Bandfilters mit dem Multimeter verbinden. Führen Sie diesen Umbau möglichst schnell durch, da in der Zwischenzeit die Temperatur des Widerstands, trotz der Heizungsregelung, etwas „wegdriften“ kann. Starten Sie zur Messung der Rauschspannung das Programm **Effektivwert** und messen Sie genauso wie in Aufgabe 2 den Effektivwert der Rauschspannung (d.h. den Mittelwert und Standardabweichung von etwa 100 Einzelmessungen notieren).

Bauen Sie den Versuchsaufbau wieder so um, dass Sie mit dem Multimeter den Widerstandswert messen können. D.h. den beheizbaren Widerstand wieder direkt an das Multimeter anschließen. Messen Sie noch einmal bei der eingestellten Temperatur mit dem Programm **Widerstand** den Widerstand und die genaue Temperatur und vergleichen Sie diese mit den zuvor gemessenen Werten. Aus den Abweichungen sind die Fehler für den Widerstand und die Temperatur abzuschätzen (Driftfehler).

Erhöhen Sie nun die Temperatur an der Heizungsregelung auf den nächsten Wert, d.h. 100°C und wiederholen Sie die Messungen genauso wie zuvor.

- Führen Sie die Messungen für alle Temperaturen bis 250°C durch.

Beginnen Sie gleich nach der Versuchsdurchführung mit der Auswertung Ihrer Messdaten. Die Berechnung des Frequenzgangs und der äquivalenten Rauschbandbreite sollten Sie auf jeden Fall noch während des Praktikumsversuch durchführen.

VIII Auswertung in Python mit Jupyter Notebook

VIII.1 Importieren und grafische Darstellung der Messdaten

Führen Sie die Rechnungen in einem vollständig dokumentierten Jupyter Notebook durch und legen Sie es Ihrer schriftlichen Ausarbeitung ausgedruckt bei. Starten Sie das Programm **Jupyter** vom Desktop aus. Es ist sinnvoll zuerst mit der Auswertung des Frequenzgangs zu beginnen. Kopieren Sie die Datei mit der Frequenzgangmessung in den Ordner **data** auf dem Desktop.

Wir benötigen die folgenden Module:

```
%matplotlib inline
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
```

Schauen Sie sich die Datei mit der Frequenzgangmessung an. Die Datei besitzt eine Headerzeile und besteht aus 3 Spalten. Als Dezimaltrennzeichen werden Punkte verwendet. Falls als Trennzeichen Kommas verwendet werden, müssen diese erst durch Punkte ersetzt werden. Die erste Spalte beschreibt die Frequenz und die zweite die Spannung *U_{aus}*. Die dritte Spalte wird nicht benötigt. Zum Importieren verwenden wir die Numpy Funktion `loadtxt()`. Wir müssen den Pfad/Dateiname angeben. Des Weiteren wird die erste Zeile übersprungen und nur die ersten beiden Spalten ausgelesen. Mit der Option `unpack=True` wird jede Spalte getrennt in die Arrays `f`, `Uaus` geschrieben:

```
f, Uaus =np.loadtxt('data/Messung.dat', skiprows=1, usecols=(0,1),
                     unpack=True)
```

Im nächsten Schritt müssen wir den Frequenzgang berechnen:

$$g(f) = \frac{1}{D} \frac{U_{aus}}{U_{ein}}. \quad (16)$$

Dabei ist U_{ein} die angelegte effektive Eingangsspannung und D die Abschwächung des Dämpfungsglieds.

```
D=1e-3
U_ein=0.2
g=U_aus/(U_ein * D)
```

Für U_{ein} müssen Sie natürlich den von Ihnen verwendeten Wert eingeben. Tragen Sie g über f in ein doppeltlogarithmisches Diagramm ein.

```
plt.loglog(f,g, linestyle='None', marker='.')
plt.axis([4E2, 1.5e5, 10, 1.5E3])
plt.xlabel('Frequenz / Hz')
plt.ylabel('g(f)')
plt.title('Frequenzgang')
```

Das Diagramm sollte in etwa wie in Abbildung 6 aussehen. Bei sehr kleinen und sehr großen Frequenzen befindet sich $g(f)$ an der Auflösungsgrenze des verwendeten Oszilloskops. Diese Werte sollen im Folgenden nicht berücksichtigt werden. Der Bereich sollte mit Messwerten die in der linear steigenden Flanke liegen, beginnen und mit Daten, die in der linear fallenden Flanke liegen, enden. Wiederholen Sie den Plot und blenden Sie die unerwünschten Werte aus. Sie können den Arrays g und f in eckigen Klammern mitteilen welche Werte berücksichtigt werden sollen. Z.B. werden durch $f[10:-20]$ nur die Werte adressiert die ab dem Index 10 starten und die letzten 20 Werte werden ausgeblendet. Das Ergebnis von

```
plt.loglog(f[15:-43],g[15:-43], linestyle='None', marker='.')
plt.axis([4E2, 1.5e5, 10, 1.5E3])
plt.xlabel('Frequenz / Hz')
plt.ylabel('g(f)')
plt.title('Frequenzgang')
```

ist in Abbildung 7 dargestellt.

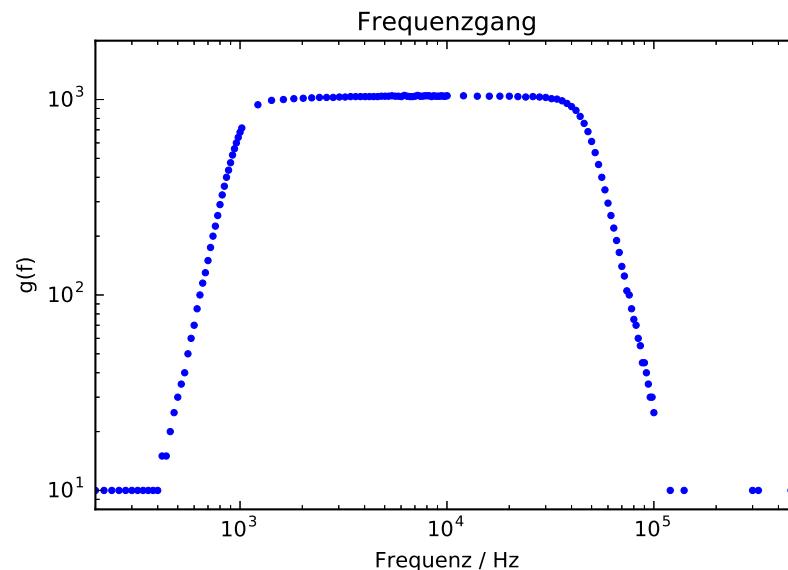


Abbildung 6: Gemessener Frequenzgang.

VIII.2 Funktion anpassen

Der Frequenzgang $g(f)$ lässt sich aus dem Frequenzgang eines Verstärkers³ sowie eines Hochpassfilters mit nachgeschaltetem Tiefpassfilters n-ter Ordnung bestimmen. Hierfür gilt:

$$g(f) = \frac{V}{\sqrt{1 + 1/(f/\Omega_1)^{2n_1}} \sqrt{1 + (f/\Omega_2)^{2n_2}}}. \quad (17)$$

Hier bezeichnen V die Verstärkung, Ω_1 die Grenzfrequenz des Hochpassfilters, Ω_2 die Grenzfrequenz des Tiefpassfilters und n_1, n_2 die jeweiligen Filterordnungen. Fitten Sie diese Funktion an Ihre Messdaten an:

³In dem hier untersuchten Frequenzbereich kann die Frequenzabhängigkeit des Verstärkers vernachlässigt werden und die Verstärkung als konstant angenommen werden.

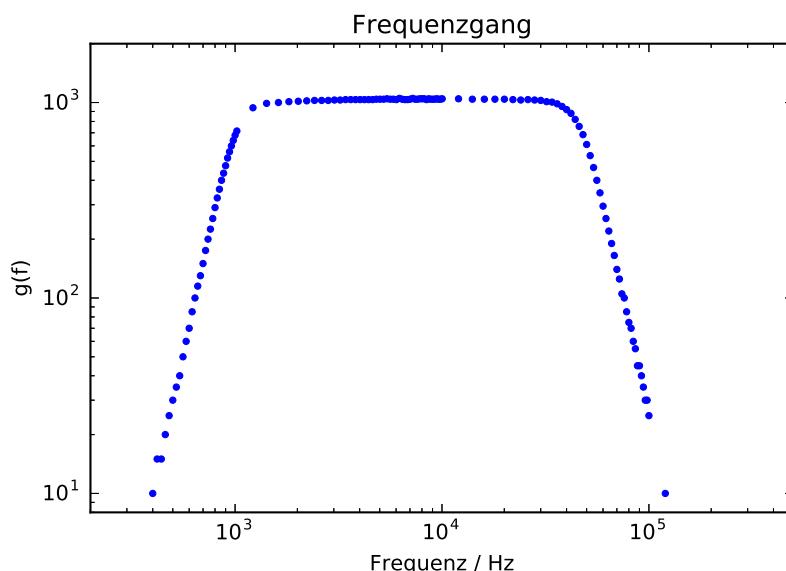


Abbildung 7: Frequenzgang mit eingeschränkten Start und Stopp Bereich.

```
from scipy.optimize import curve_fit
def fit_func(f,V,W1,W2,n1,n2):
    return V/(np.sqrt(1+1/(f/W1)**(2*n1))*np.sqrt(1+(f/W2)**(2*n2)))
```

Wählen Sie folgende Startwerte p0 für die Fitparameter und führen Sie den Fit durch.

- Verstärkung V: 1000
- untere Grenzfrequenz W1: 1000
- obere Grenzfrequenz W2: 50000
- Filterordnung n1, n2: 5.

```
p0 = [1000 , 1000 , 50000 , 5 , 5]
popt, pcov = curve_fit(fit_func, f[15:-43], g[15:-43] ,p0)
```

Achten Sie darauf, dass Sie für die Grenzen der Arrays f, g Ihre Werte eintragen. Die optimalen Parameter befinden sich in dem Array popt. pcov ist die Kovarianzmatrix auf deren Hauptdiagonale sind die Varianzen der Parameter befinden.

popt[0]

entspricht der Verstärkung und

`np.sqrt(pcov[0,0])`

dem 1 σ - Fehler der Verstärkung. Zeichnen Sie die Funktion mit in das Diagramm ein und speichern Sie es (Abbildung 8).

```
plt.loglog(f[15:-43],g[15:-43], linestyle='None', marker='.', label='Messdaten')
plt.loglog(f, fit_func(f, *popt), label='Fit')
plt.axis([4E2, 1.5e5, 10, 1.5E3])
plt.xlabel('Frequenz / Hz')
plt.ylabel('g(f)')
plt.title('Frequenzgang')
plt.legend(loc='best')
plt.savefig('figures/Frequenzgang.pdf',format='pdf')
```

VIII.3 Numerische Integration

Aus dem gemessenen Frequenzgang $g(f)$ ist das Integral

$$B = \int_0^\infty g(f)^2 df, \quad (18)$$

zu berechnen:

```
import scipy.integrate as integrate

def fit_func_square(f,V,W1,W2,n1,n2):
    return fit_func(f,V,W1,W2,n1,n2)**2
```

```
B=integrate.quad(fit_func_square, f[15] , f[-43] , args=tuple(popt))
print('Das Integral betraegt: {value:.4e}'.format(value=B[0]))
```

Achten Sie wieder darauf, dass Sie für die Grenzen von f Ihre Werte eintragen.

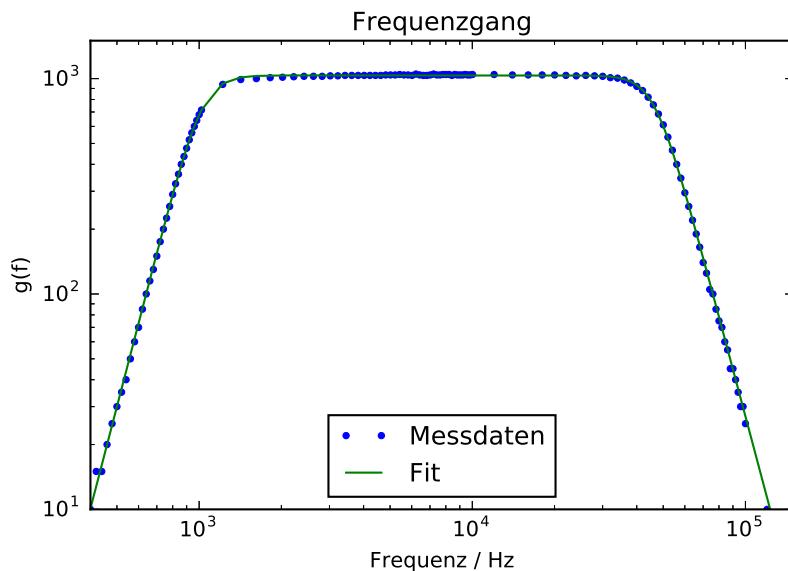


Abbildung 8: Frequenzgang mit eingeschränkten Start und Stopp Bereich.

VIII.4 Bestimmung der Boltzmannkonstante

Tragen Sie Ihre Messwerte für Widerstand R und Rauschspannung U_{aus} und dessen Fehler $\text{fehler}_U_{\text{aus}}$ in Arrays ein und Berechnen Sie zusätzliche die Differenz $D = (U_{\text{aus}}^2 - U_V^2)$ und den zugehörigen Fehler.

```
R=np.array([5e3, 10e3, 15e3, 20e3, 25e3, 30e3])
U_aus=np.array([Ihre Werte])
fehler_U_aus=np.array([Ihre Werte])
U_V=Ihr Wert
D=U_aus**2-U_V**2
fehler_D=np.sqrt(Fehlerformel eintragen)

plt.errorbar(R, D, yerr=fehler_D, fmt='.')
plt.axis([0, 3.2e4, 0, 25])
```

Da die Rauschspannung für $R = 0$ verschwindet, sollten Sie eine Gerade erhalten

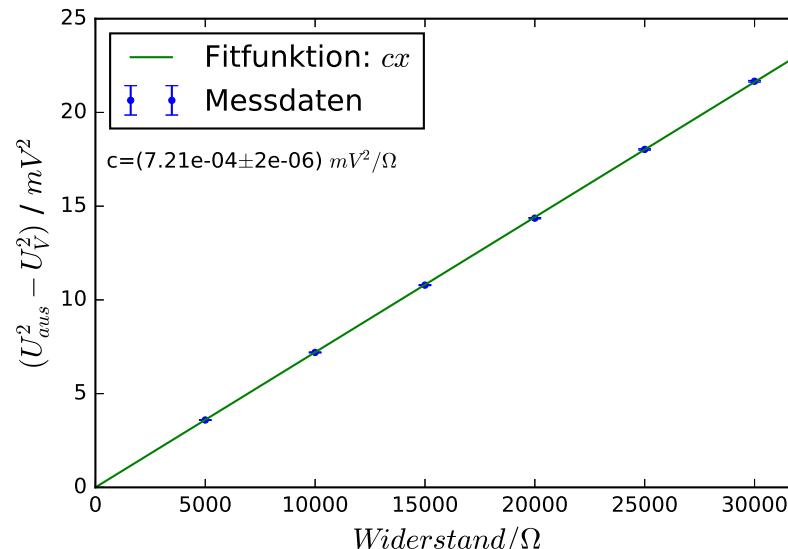


Abbildung 9: Messdaten mit angepasster linearer Funktion. Die angegebenen Zahlenwerte sind nur Beispiele.

die durch den Ursprung geht. Fitten Sie diese Gerade an die Daten an und bestimmen Sie die Steigung c und den dazugehörigen Fehler.

```
def linear(x,c):
    return c*x
```

Geben Sie die Steigung mit Fehler im Diagramm an. Falls Sie wieder das Array mit den Fitparametern mit `popt` und die Kovarianzmatrix mit `pcov` bezeichnet haben, so entspricht `popt[0]` der Steigung und `np.sqrt(pcov[0,0])` dessen Standardfehler. Das Diagramm sollte so ähnlich wie in Abbildung 9 aussehen. Diskutieren Sie die Güte des Fits. Berechnen Sie die χ^2 -Summe:

$$\chi^2 = \sum_i^N \left(\frac{\text{Funktionswert}_i - \text{Messwert}_i}{\text{Fehler}_i} \right)^2 \quad (19)$$

und $\chi^2_{red} = \chi^2 / \text{Freiheitsgrad}$. Der Freiheitsgrad (dof) berechnet sich aus der Anzahl der Messwerte abzüglich der Zahl der Fitparameter.

```
chisquare=np.sum(((linear(R,*popt)-D)**2/fehler_D**2))
dof=5 #degrees of freedom, Freiheitsgrad
chisquare_red=chisquare/dof
print(chisquare)
print(chisquare_red)
```

Berechnen Sie noch die „Fitwahrscheinlichkeit“, das heißt die Wahrscheinlichkeit, dass Sie bei einer Wiederholungsmessung ein χ^2 -Wert erhalten, der größer oder gleich Ihrem χ^2 -Wert ist.

```
from scipy.stats import chi2
prob=round(1-chi2.cdf(chisquare,dof),2)*100
print("Wahrscheinlichkeit="+str(prob)+"%)")
```

Nach der Theorie gilt für die Steigung

$$c = 4kTB. \quad (20)$$

Bestimmen Sie hieraus die Boltzmannkonstante k und den dazugehörigen statistischen Fehler (aus dem Fehler von c). Für T ist die absolute Temperatur und für B die zuvor bestimmte Bandbreite einzusetzen. Es bleibt die Abschätzung des Fehlers von B , der rein systematisch ist und für alle Messungen für verschiedene Widerstände zu 100% korreliert ist. In den Fehler von B gehen ein: Integrationsfehler, Fehler des Untergrunds und Fehler in der Genauigkeit der Messinstrumente und des Verstärkungsfaktors. Um Ihnen das Leben einfacher zu machen können Sie einen systematischen Fehler für B von 2% annehmen und in den systematischen Fehler von k umrechnen. Geben Sie das Resultat in folgender Form an:

$$k = (1,77 \pm 0,003 \text{ stat.} \pm 0,05 \text{ syst.}) \times 10^{-20} \text{ J/K.}$$

Die Zahlenwerte sind nur Beispiele und haben mit den wahren Werten nichts gemeinsam. Statistische und systematische Fehler werden demnach getrennt angegeben. Warum ist das sinnvoll? Drucken Sie das Diagramm mit Fit und das Arbeitsblatt aus und fügen Sie es in Ihr Protokollbuch ein.

Die Auswertung der (optionalen) Messung der Temperaturabhängigkeit erfolgt analog. Dabei empfiehlt es sich die Beziehung

$$(U_{aus}^2 - U_V^2)/R = c'T \quad (21)$$

zu nutzen mit $c' = 4kB$. Stellen Sie diese Beziehung graphisch dar und fitten Sie eine Gerade der Form

$$y = a(T - T_0) \quad (22)$$

an die Daten:

- Zum einen mit Achsenabschnitt Null um die Vorhersage der Theorie zu testen.
- Zum anderen mit Steigung und Temperaturnullpunkt als freie Parameter. Bestimmen Sie aus Fit a) den Wert der Boltzmannkonstante. Zu Fit b): Wie gut haben Sie den absoluten Nullpunkt bestimmt?

Drucken Sie das Arbeitsblatt und die Diagramme aus und heften Sie diese in Ihr Laborbuch.

Versuch 245

Induktion

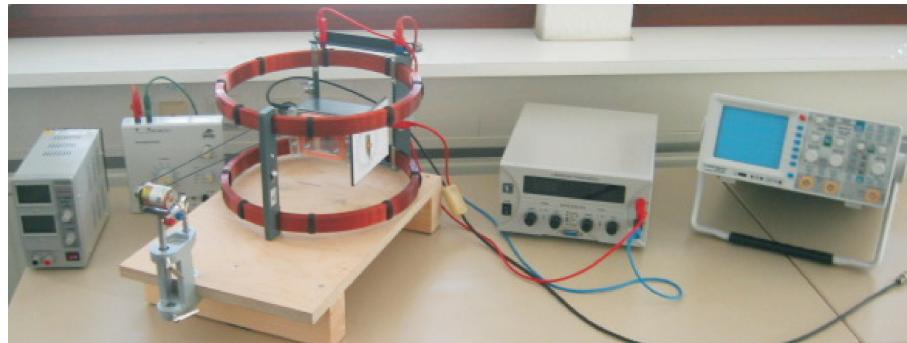


Abbildung 1: Versuchsaufbau.

I Messaufbau

- Oszilloskop
- Leistungsfunktionsgenerator
- Antriebsmotor mit Treibriemen
- Diverse Netzteile
- Multimeter
- Kompass
- RC-Filter
- Helmholtzspule mit einer im Zentrum drehbar gelagerten Induktionspule.
Daten der Helmholtzspule:
 - Durchmesser: 295 mm
 - Abstand der Spulen: 147 mm

- Windungszahl je Spule: 124

Daten der Induktionspule:

- Windungszahl: 4000
- Fläche: 41,7 cm²

II Literatur

- Standardwerke der Physik: Gerthsen, Bergmann-Schäfer, Tipler, Demtröder.

III Vorbereitung

Bereiten Sie sich auf die Beantwortung von Fragen zu folgenden Themen vor: Induktionsgesetz, Feld einer Spule, Helmholtzspule, Induktivität und Impedanz einer Spule, Erdmagnetfeld.

Verständnisfragen:

1. Formulieren Sie das Induktionsgesetz. Von welchen Größen hängt die induzierte Spannung in einer Leiterschleife ab?
2. Erklären Sie die Geometrie einer Helmholtzspule. Was zeichnet diese aus und warum wird diese sehr häufig verwendet? Wie gross ist das B-Feld im Zentrum, wovon hängt es ab?
3. Wie müssen die beiden Einzelspulen elektrisch miteinander verschaltet werden, damit sich im Zentrum ein homogenes Feld einstellt? Beschaffen sie sich die Formel für das zentrale B-Feld und berechnen Sie dieses Feld als Funktion des Stromes I[A].

IV Aufgabe

1. Überprüfung des Induktionsgesetzes mit Hilfe einer rotierenden Flachspule. Messung der induzierten Spannung als Funktion der Drehfrequenz und als Funktion des Magnetfeldes.

2. Messung der Induktionsspannung bei einem periodischem Magnetfeld in Abhängigkeit vom Winkel zwischen Induktionsspule und äußerem Magnetfeld.
3. Messung des Erdmagnetfeldes und Bestimmung des Inklinationswinkels.

V Durchführung des Versuchs

V.1 Vorversuch

Achtung:

Schalten Sie das Netzteil für die Helmholtzspule nicht abrupt aus oder ein sondern drehen Sie erst die Spannung auf Null zurück. Bei Strommessungen immer auf den maximal zulässigen Messbereich des Amperemeters achten. Falls die Größenordnung des zu messenden Stroms unbekannt ist, muss dieser zunächst mit dem größten Messbereich bestimmt werden. Bei Strommessungen muss das Amperemeter in Serie geschaltet werden. Niemals parallel zur Spannungsquelle schalten.

Lesen Sie den ersten Absatz der berühmten Arbeit von Albert Einstein „Über die Elektrodynamik bewegter Körper“ (Abbildung 2) und diskutieren Sie seine Aussagen.

Verbinden sie die Enden einer Spule mit vielen Windungen mit dem Oszilloskop.

- Bewegen Sie einen Stabmagneten in die Spule hinein und wieder heraus. Variieren Sie die Geschwindigkeit. Was beobachten Sie?
- Halten Sie den Stabmagneten fest und bewegen Sie die Spule auf ihn zu und von ihm weg. Was beobachten Sie?

Gibt es einen Unterschied zwischen a) und b)?

Tipp: Besonders schön lässt sich der Effekt (auch quantitativ) sehen, wenn Sie einen kleinen Magneten durch das Zentrum einer Spule fallen lassen (z.B. geführt von einem Plastikrohr) und den induzierten Spannungspuls mit dem Digitaloszillographen aufzeichnen (Triggermodus *single*). Nutzen Sie verschiedene

**3. Zur Elektrodynamik bewegter Körper;
von A. Einstein.**

Daß die Elektrodynamik Maxwell's — wie dieselbe gegenwärtig aufgefaßt zu werden pflegt — in ihrer Anwendung auf bewegte Körper zu Asymmetrien führt, welche den Phänomenen nicht anzuhaften scheinen, ist bekannt. Man denke z. B. an die elektrodynamische Wechselwirkung zwischen einem Magneten und einem Leiter. Das beobachtbare Phänomen hängt hier nur ab von der Relativbewegung von Leiter und Magnet, während nach der üblichen Auffassung die beiden Fälle, daß der eine oder der andere dieser Körper der bewegte sei, streng voneinander zu trennen sind. Bewegt sich nämlich der Magnet und ruht der Leiter, so entsteht in der Umgebung des Magneten ein elektrisches Feld von gewissem Energiewerte, welches an den Orten, wo sich Teile des Leiters befinden, einen Strom erzeugt. Ruht aber der Magnet und bewegt sich der Leiter, so entsteht in der Umgebung des Magneten kein elektrisches Feld, dagegen im Leiter eine elektromotorische Kraft, welcher an sich keine Energie entspricht, die aber — Gleichheit der Relativbewegung bei den beiden ins Auge gefaßten Fällen vorausgesetzt — zu elektrischen Strömen von derselben Größe und demselben Verlaufe Veranlassung gibt, wie im ersten Falle die elektrischen Kräfte.

Abbildung 2: *Annalen der Physik*, 17, 891 (1905)

Fallhöhen und schauen sie sich an, wie sich der Puls mit der Geschwindigkeit mit welcher der Magnet durch die Spule fällt ändert. Was ändert sich- was bleibt gleich?

V.2 Induktionsgesetz

Verbinden Sie die beiden Einzelspulen mit Laborkabeln in der Helmholtzanzordnung. Der Strom durch die Helmholtzspulen darf 5 A nicht überschreiten. Messen Sie daher mit einem Multimeter den Spulenwiderstand und berechnen Sie hieraus die maximal zulässige Betriebsspannung. Schließen Sie das Spulenpaar an ein geeignetes Netzteil an.

Im Zentrum der Helmholtzspule befindet sich eine Induktionsspule (Flachspule) mit 4000 Windungen. Sie ist über Schleifkontakte mit den beiden Anschlussbuchsen verbunden. Verbinden Sie diese an die Eingangsbuchse des Oszilloskops.

Rotiert die Flachspule gleichmäßig im konstanten Magnetfeld B der Helmholtzspule mit der Kreisfrequenz ω , so ändert sich periodisch die vom Magnetfeld durchflossene Fläche der Flachspule. Nach dem Induktionsgesetz gilt dann für die in der Flachspule induzierte Spannung $U_i(t)$:

$$U_i(t) = -\frac{d}{dt}\phi = -BAN\omega \sin(\omega t), \quad (1)$$

wobei ϕ den magnetischen Fluss, A die Spulenfläche und N die Windungszahl der Flachspule beschreiben. Demnach wird eine Sinusspannung induziert, deren Amplitude proportional zur Frequenz und zum Betrag des Magnetfelds ist. Der Drehrahmen der Flachspule wird mit einem Elektromotor angetrieben. Montieren Sie diesen gegebenenfalls auf dem Spulentisch und legen Sie den Treibriemen über die Antriebsscheiben. Die Drehfrequenz können Sie direkt am Oszilloskop ablesen.

Führen Sie zwei Meßreihen durch um die Scheitelspannung U_m der induzierten Spannung zu messen:

1. In Abhängigkeit von der Drehfrequenz f im Bereich von 3 Hz bis 15 Hz in Schritten von 3 Hz. Der Spulenstrom sollte etwa 4 A betragen.
2. In Abhängigkeit vom Magnetfeld B bei konstanter Drehfrequenz von etwa 10 Hz. Variieren Sie dazu den Spulenstrom im Bereich von 0,5 A bis 4,5 A in Schritten von 0,5 A.

V.3 Induktionsspannung bei periodischem Feldstrom (Lufttransformator)

Fließt durch die Helmholtzspule ein Wechselstrom der Kreisfrequenz Ω , so wird in der ruhenden Flachspule die Spannung:

$$U = U_m \sin(\Omega t) \quad (2)$$

mit

$$U_m = BAN\Omega \cos(\alpha) \quad (3)$$

induziert. Der Winkel α ist dabei der Winkel zwischen dem B-Feld der Helmholtzspule und der Flächennormale der Flachspule.

Schließen Sie an die Helmholtzspule den Leistungsfunktionsgenerator an und stellen Sie eine Wechselspannung von etwa 100 Hz ein. Die Amplitude darf nicht zu groß eingestellt werden, damit das Sinussignal nicht verzerrt. Dieses Signal und die induzierte Spannung werden auf die beiden Eingänge eines Zweikanaloszilloskops gelegt.

1. Messen Sie die Abhängigkeit der induzierten Spannung vom Drehwinkel α der Induktionsspule in Schritten von 30° . Die Messung des Winkels geschieht mit dem an der Seite angebrachten Winkelmesser.
2. Messen Sie die induzierte Spannung sowie den Strom und die Spannung der Helmholtzspule als Funktion der Frequenz im Bereich 20 Hz bis 2 kHz. Im Bereich 20 Hz bis 200 Hz in Schritten von 20 Hz, im Bereich darüber in Schritten von 200 Hz.
3. Wenn bei einem Primärwechselstrom hinreichend hoher Frequenz die Sekundärspule noch in langsame Drehung versetzt wird, so hat die induzierte Spannung einen schwebungsartigen Verlauf. Überzeugen Sie sich qualitativ, dass die Schwebungsfrequenz mit der Drehfrequenz übereinstimmt.

V.4 Bestimmung des Erdmagnetfeldes durch Kompensation

Auch wenn kein Strom durch die Helmholtzspule fließt, wird in der rotierenden Flachspule eine Spannung induziert. Die Ursache hierfür ist das Magnetfeld der Erde. Die Bewegung leitender Materie im flüssigen Erdinneren führt in erster Näherung zu einem Dipolfeld. Das Feld ist vergleichbar mit einem Stabmagneten im Zentrum der Erde (Abbildung 3 a). Der Südpol des Magneten ist ungefähr in Richtung des geographischen Nordpols ausgerichtet und der magnetische Nordpol entsprechend zum geographischen Südpol¹.

Die magnetischen Feldlinien verlaufen am Äquator parallel und an den Polen senkrecht zur Erdoberfläche. In unserer Gegend treffen die Feldlinien unter einem Inklinationswinkel von etwa 66° auf die Erdoberfläche.

¹Der Winkel zwischen der Dipolachse und der Rotationsachse der Erde wird als Deklination bezeichnet (Abbildung 3 b) und beträgt $11,5^\circ$.

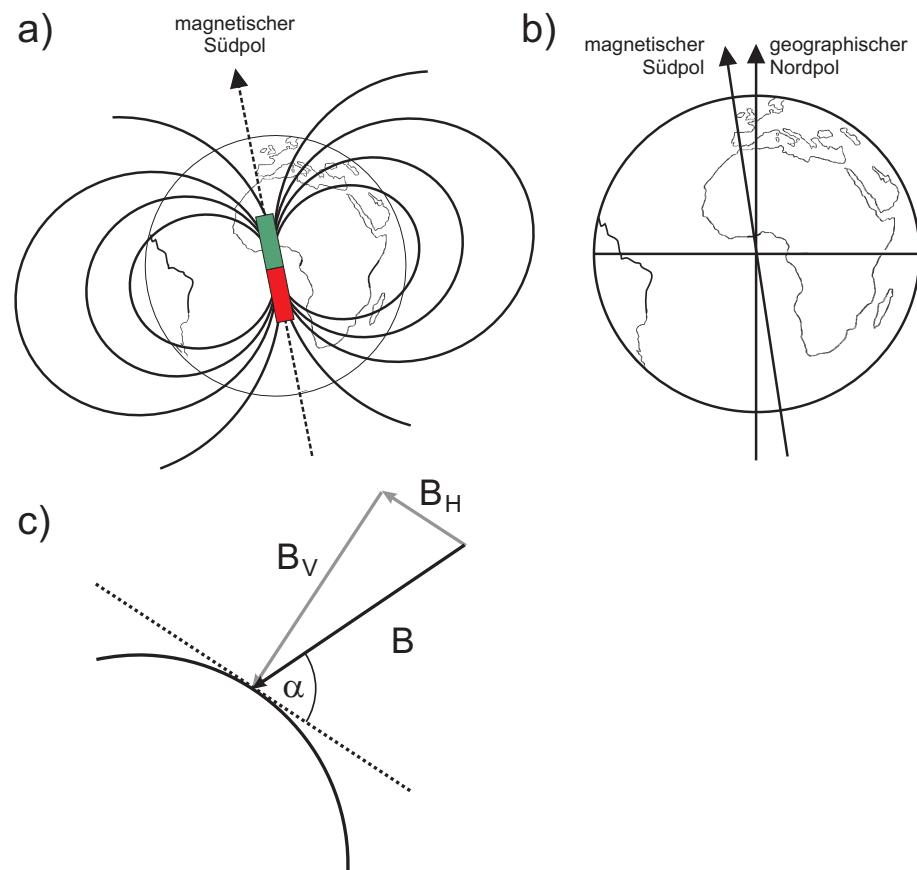


Abbildung 3: a) Schematischer Verlauf des Erdmagnetfelds. b) Die Abweichung von der Dipolachse und der Rotationsachse der Erde wird als Deklination bezeichnet und beträgt $11,5^\circ$. c) Zerlegung des B -Feldes in eine Horizontal und eine Vertikalkomponente. Die Inklination α beträgt in Deutschland etwa 66° .

In diesem Versuchsteil soll zum einen der Betrag des Erdfeldes direkt gemessen werden und zum anderen durch eine Kompensationsmessung separat die Vertikal- und Horizontalkomponente. Aus diesen beiden Anteilen lässt sich dann der Inklinationswinkel berechnen. (Abbildung 3 c).

Richten Sie den Aufbau mit Hilfe des Kompasses in Nord-Süd-Richtung aus. Wird die Flachspule in Drehung versetzt, ohne dass ein Strom durch die Helmholtzspule fließt, so wird eine Spannung induziert, die abhängig von der Größe des äußeren Erdfeldes ist. Die Vertikalkomponente des Erdfeldes kann kompensiert werden, wenn das Feld der Helmholtzspule die entgegengesetzte Richtung, aber den gleichen Betrag wie das Erdfeld aufweist. In diesem Fall hat die Induktionsspannung ein Minimum und „stammt“ nur von der Horizontalkomponente. Lassen Sie die Induktionsspule mit ca. 15 Hz drehen. Schauen Sie sich die induzierte Spannung auf dem Oszilloskop an und schätzen Sie die Spannungsdifferenz Spitze-Spitze ab. Welches Problem sehen Sie? Woher kommt es? Überlegen Sie, wie Sie das hochfrequente „Rauschen“ minimieren können.

1. Messung ohne Kompensation: Führen Sie zunächst eine Messung ohne Kompensation durch und notieren Sie die gemessene Induktionsspannung und die Drehfrequenz.
2. Messung mit Kompensation: Um den Strom durch die Helmholtzspule genauer einstellen zu können, können Sie zwischen Netzteil und der Helmholtzspule ein zusätzliches Potentiometer schalten. Falls Ihnen die Verschaltung nicht klar ist, wenden Sie sich an den Versuchsbetreuer. Beobachten Sie die induzierte Spannung bei drehender Spule und erhöhen Sie langsam den Spulenstrom. Falls die induzierte Spannung nicht kleiner sondern größer wird, müssen Sie den Spulenstrom umpolen. Regeln Sie den Spulenstrom (Kompensationsstrom) so ein, dass das induzierte Signal minimal wird. Registrieren Sie den Kompensationsstrom, die verbleibende Induktionsspannung und die Drehfrequenz.

VI Auswertung

VI.1 Induktionsgesetz

Fertigen Sie zwei Diagramme an und tragen Sie die gemessene Induktionsspannung über die Frequenz und über den Spulenstrom auf. Führen Sie für beide Diagramme eine lineare Anpassung durch. Bestimmen Sie aus der Geradensteigung im $U(f)$ -Diagramm das Magnetfeld B und vergleichen Sie das Ergebnis

mit dem theoretisch zu erwartenden Feld im Zentrum einer Helmholtzspule.
Wie lassen sich eventuelle Abweichungen erklären?

VI.2 Induktionsspannung bei periodischem Feldstrom

1. Tragen Sie die gemessene Spannung als Funktion des Winkels in ein Diagramm auf.
2. Stellen Sie das Verhältnis von induzierter und angelegter Spannung als Funktion der Frequenz graphisch dar². Warum ändert sich der Strom durch die Spule bei gleicher Spannung?
3. Stellen Sie den Widerstand (Verhältnis von Spannung zu Strom) der Spule gegen die Frequenz grafisch dar und bestimmen Sie Induktivität L der Helmholtzspule.

VI.3 Bestimmung des Erdmagnetfeldes durch Kompensation

1. Messung ohne Kompensation: Berechnen Sie aus der induzierten Spannung und der Drehfrequenz den Betrag des Erdmagnetfeldes.
2. Messung mit Kompensation: Berechnen Sie die Vertikalkomponente aus dem gemessenen Kompensationsstrom und die Horizontalkomponente aus der verbliebenen Restspannung. Wie groß ist damit der Inklinationswinkel in Heidelberg? Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit den Literaturwerten.

²Bei dieser Anordnung handelt es sich um einen Luftransformator. Die Sekundärspannung ist in einem weiten Frequenzbereich unabhängig von der Primärspannung. Bei Frequenzen kleiner 100 Hz macht sich der Ohmsche Widerstand der Primärsplele bemerkbar. Dadurch wird die induzierte Spannung kleiner und phasenverschoben gegenüber der Primärspannung.

Grundlagen zu den Versuchen der Radioaktivität

I Das Geiger-Müller Zählrohr

Das Geiger-Müller-Zählrohr ist ein Nachweisgerät für ionisierende Strahlung (α - $, \beta$ - $, \gamma$ und Röntgenstrahlen). Es besteht aus einem Metallzylinder und einem darin axial verlaufenden Anodendraht (Abbildung 1). Das Rohr ist an beiden Enden fest verschlossen und mit einem geeigneten Gasgemisch gefüllt, beispielsweise Argon und Alkoholdampf. Soll mit dem Zählrohr auch α -Strahlung detektiert werden, so benötigt man ein sogenanntes Fensterzählrohr. Bei diesem ist eine Stirnseite mit einem nur schwach absorbierenden Fenster (z.B. Glimmer) versehen, so dass auch α -Teilchen in das Zählrohr eindringen können. Zwischen dem Anodendraht und dem Metallzylinder liegt eine Spannung von einigen 100 bis 1000 Volt, die je nach Gasfüllung und Abmessungen des Zählrohrs eingestellt werden muss.

Das Grundprinzip eines Zählrohrs beruht auf der Ionisation des Füllgases durch ionisierende Strahlung. Gelangt ein schnelles, elektrisch geladenes Teilchen, z.B. ein β -Teilchen, in das Zählrohr, so entstehen durch Ionisation des Zählgases längs der Bahn des Teilchens freie Elektronen und positiv geladene Ionen. Die Elektronen werden aufgrund des elektrischen Feldes in Richtung des Anodendrahtes beschleunigt und können durch Stöße weitere Gasmoleküle ionisieren. Diese freien Elektronen leiten eine Gasentladung ein, die jedoch bei geeigneter Wahl der Spannung und einem entsprechend dimensionierten Vorwiderstand, nach etwa 10^{-5} Sekunden selbst erlischt. Bei dieser Gasentladung fließt für kurze Zeit ein Strom im Zählrohr, der an dem Widerstand einen Spannungsimpuls verursacht. Dieser lässt sich elektronisch verstärken und mit einer Zählerschaltung registrieren.

I.1 Kennlinie eines Zählrohres

Die genauen Vorgänge im Zählrohr sind etwas komplizierter und hängen besonders von der Zählrohrspannung ab:

Dringt ionisierende Strahlung in das Zählrohr ein, so ist die Anzahl der primär erzeugten Ladungsträger stets proportional zur Energie der einfallenden Strahlung. Bei kleinen Zählrohrspannungen erreicht aber nur ein Teil der Primärelektronen den Anodendraht, der Rest geht durch Rekombinationen verloren. Mit

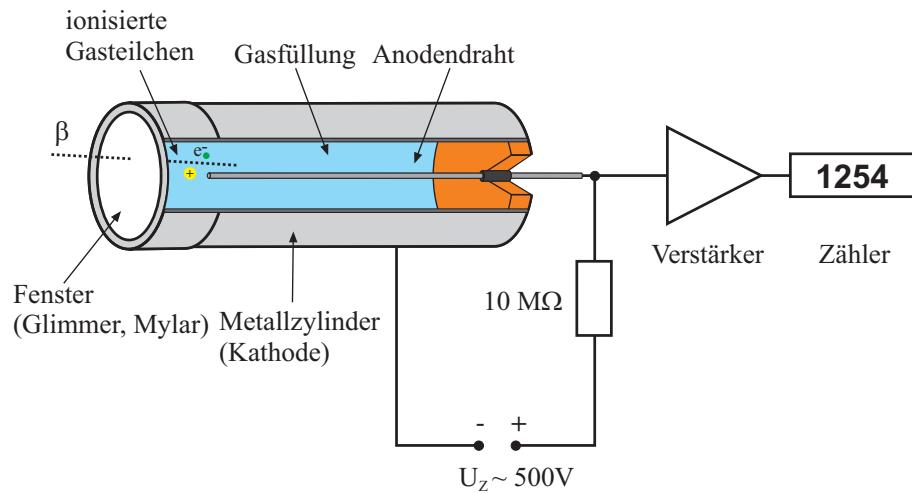


Abbildung 1: Aufbau eines Fensterzählrohrs.

zunehmender Spannung sinkt die Rekombinationswahrscheinlichkeit und nahezu alle Primärelektronen gelangen zur Anode. Der Strom durch das Zählrohr ist in diesem Spannungsbereich proportional zur Energie der einfallenden Strahlung. In diesem Bereich arbeitet beispielsweise eine Ionisationskammer zur Messung der Primärdosisleistung. Im Versuch „Absorption und Dosimetrie von Röntgenstrahlen“ werden Sie sich mit diesem Gerät¹ noch genauer beschäftigen.

Wird die Zählrohrspannung weiter erhöht, so werden die Primärelektronen irgendwann so stark beschleunigt, dass sie in der Lage sind durch Stöße weitere Gasmoleküle zu ionisieren. Es entstehen Sekundärelektronen dessen Anzahl allerdings immer noch proportional zur Zahl der Primärelektronen ist. Dieser Spannungsbereich wird als Proportionalbereich bezeichnet. Bei noch höheren Spannungen werden neben den primär erzeugten Elektronen, auch die Sekundärelektronen so stark beschleunigt, dass diese selbst das Füllgas ionisieren. Die Zahl der erzeugten Elektronen steigt derart an, dass jedes einfallende Teilchen eine Elektronenlawine längs des Anodendrahtes hervorruft. Damit die Gasentladung nach kurzer Zeit wieder abklingt, ist dem Zählrohr ein Lösungsgas

¹Bei diesem Versuch wird allerdings kein Zählrohr eingesetzt, sondern ein Aufbau mit einer anderen Geometrie. Das Grundprinzip entspricht aber den Erläuterungen im Text.

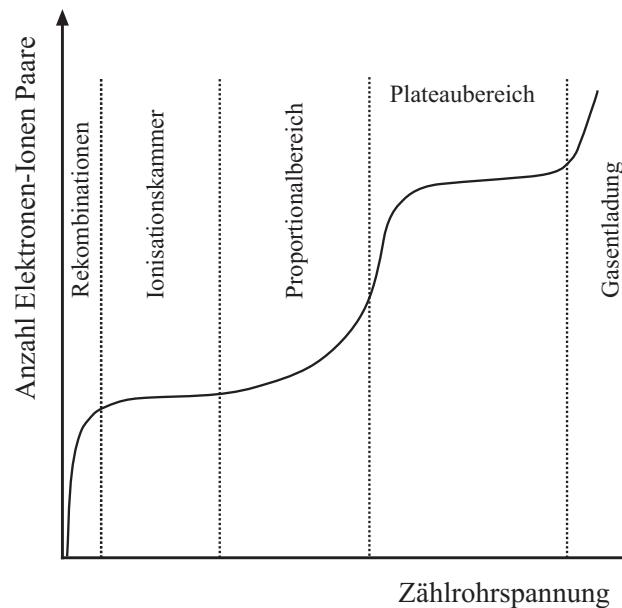


Abbildung 2: Schematische Darstellung der Charakteristik eines Zählrohrs.

(z.B. Alkoholdampf) beigemengt. Dadurch erlischt die Entladung nach einigen 10^{-5} s von selbst. **In diesem sogenannten Plateaubereich (bzw. Geiger-Müller-Bereich oder Auslösebereich) erzeugt jedes einfallende Teilchen, unabhängig von seiner Energie, ein gleich großes Entladungssignal.** Allerdings geht dabei auch jegliche Information der Energie der einfallenden Strahlung verloren. Ein im Auslösebereich betriebenes Zählrohr eignet sich daher nur zur Detektion von ionisierender Strahlung und wird speziell für Zählanwendungen verwendet. Daher der Name Zählrohr. Eine weitere Erhöhung der Zählrohrspannung bewirkt zunächst keine Erhöhung der Zahl der erzeugten freien Elektronen. Jede einfallende ionisierende Strahlung bewirkt ja bereits, dass das Zählrohr von einer Elektronenlawine durchsetzt wird. Die Zählrohrkennlinie verläuft in diesem Bereich daher sehr flach, d.h. plateauartig. Wird die Zählrohrspannung weiter erhöht, so kommt man irgendwann in den Bereich, in dem eine Dauerentladung gezündet wird. Diese klingt nicht mehr selbstständig ab und führt in der Regel zur Zerstörung des Zählrohres.

I.2 Der Plateaubereich

Bei vielen Experimenten zur Radioaktivität ist man nur daran interessiert, bestimmte Ereignisse nachzuweisen. Ein Beispiel ist der radioaktive Zerfall eines instabilen Elements, bei dem man die Zahl der pro Zeiteinheit zerfallenen Atome messen möchte. Ein anderes Beispiel sind Absorptionsmessungen von radioaktiver Strahlung. Hierbei möchte man untersuchen, welcher Bruchteil der einfallenden Strahlung einen Absorber durchdringen kann. All dies sind reine Zählaufgaben, die mit einem Zählrohr im Plateaubereich durchgeführt werden. In diesem Bereich ist der im Zählrohr erzeugte Stromimpuls unabhängig von der Energie der Strahlung. Jedes einfallende ionisierende Teilchen liefert das gleiche Ausgangssignal, welches der nachgeschalteten Elektronik als Triggersignal eines elektronischen Zählers dient und den Zählerstand um Eins erhöht.

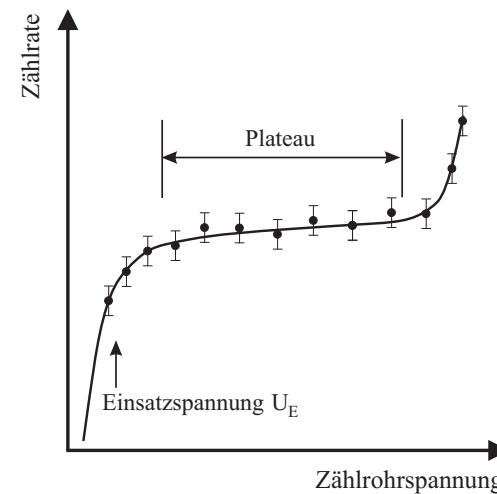


Abbildung 3: Gemessener Plateaubereich eines Geiger-Müller-Zählrohres.

Trägt man die gemessene Zählrate eines radioaktiven Präparates konstanter Aktivität als Funktion der Zählrohrspannung auf, so erhält man einen Verlauf, wie er in Abbildung 3 dargestellt ist. Im Idealfall würde man erwarten, dass die Zählrate mit zunehmender Spannung im Plateaubereich überhaupt nicht steigt. In der Praxis ist jedoch ein gewisser Anstieg zu beobachten. Die Ursachen hierfür sind zum einen auf Inhomogenitäten des elektrischen Feldes zurückzuführen, die zu einer unregelmäßigen Ladungsverteilung längs des Anodendrahtes führen. Zum anderen tragen auch Nachentladungen zum Plateauanstieg bei. Bei guten Zählrohren sollte der Plateaubereich länger als 100 V

sein und nur eine geringe Steigung von wenigen Prozent pro 100 V aufweisen. Beim Betrieb eines Geiger-Müller-Zählrohrs im Auslösebereich, muss die Zählrohrspannung so gewählt werden, dass bei zufälligen Spannungsschwankungen, die Einsatzspannung U_E nicht unterschritten wird. Dazu muss zunächst der Plateaubereich gemäß Abbildung 3 ausgemessen werden. Anschließend wird die Betriebsspannung so eingestellt, dass diese ca. 50 bis 100 V größer ist als die Einsatzspannung.

I.3 Totzeit eines Zählrohrs

Nach jedem Entladungsimpuls ist das Zählrohr für eine gewisse Zeit lang unempfindlich gegen neu eintretende Strahlung. Erst nach Ablauf dieser Totzeit (typischerweise 10^{-4} s) ist das Zählrohr zum Nachweis eines Teilchens erneut bereit. Der Hauptgrund hierfür liegt bei den positiv geladenen Ionen des Zählgases, die das Feld der Anode abschirmen und aufgrund ihrer großen Masse nur langsam driften. Erst wenn die Ionen zur Kathode gedriftet sind und hier entladen werden, ist das Zählrohr wieder einsatzbereit.

Sollen bei einem bestimmten Experiment die Ereignisse nicht nur detektiert sondern auch quantitativ ausgewertet werden, so müssen bereits bei wenigen hundert Ereignissen pro Sekunde Totzeitkorrekturen vorgenommen werden. Dies ist auch der Grund dafür, dass bei dem Versuch „Statistik des radioaktiven Zerfalls“ die Messzeit nicht beliebig klein gewählt werden darf. Bei diesem Versuch messen Sie viele Male hintereinander die Anzahl der Zerfälle eines radioaktiven Präparates innerhalb eines bestimmten Zeitraums und werten diese mit Hilfe statistischer Methoden aus. Um eine gute Statistik zu bekommen, benötigt man in der Regel viele Messwerte, was eine lange Experimentierzeit mit sich bringt. Nun könnte man vermuten, dass die Anzahl der Messwerte in der Weise erhöht werden kann, indem die Messzeit einer Einzelmessung verkleinert und dafür die Ereignissrate erhöht (z.B. das Präparat näher an das Zählrohr bringen) wird. Dies ist aber nur dann möglich, wenn die Zählrate nicht zu groß wird. Bereits bei 200 Impulse/s hat die Totzeit bei diesem Versuch einen solch großen Einfluss, dass die experimentellen Werte erheblich von den theoretischen abweichen.

I.4 Statistische Schwankungen

Die Zahl der Teilchen, die aus einem Präparat in das Zählrohr eindringen, ist statistischen Schwankungen unterworfen. Daher streuen wiederholte Messun-

gen derselben Zählrate um einen Mittelwert. **Der mittlere statistische Fehler einer Zählung von n Teilchen ist gegeben durch \sqrt{n} , der mittlere relative Fehler also $\sqrt{n}/n = 1/\sqrt{n}$.** Werden beispielsweise 1000 Ereignisse gezählt, so beträgt der absolute Fehler 32 Ereignisse bzw. der relative Fehler 3%. Bei 10000 Ereignissen beträgt der relative Fehler nur noch 1%. Bei allen graphischen Darstellungen werden die Messpunkte mit Fehlerbalken entsprechend dem mittleren Fehler versehen. Eine detaillierte Einführung in die Statistik des radioaktiven Zerfalls, erhalten Sie in der Versuchsbeschreibung „Statistik des radioaktiven Zerfalls“ und in dem Aufsatz „Wir wollen richtige Fehler“ zu Beginn dieser Anleitung.

I.5 Nulleffekt

Auch ohne Präparat zählt das Zählrohr eine gewisse Zählrate (ca. 50 Ereignisse pro Minute). Dieser Nulleffekt wird durch die überall in geringer Konzentration vorhandene natürliche Radioaktivität und die Höhenstrahlung verursacht. Falls der Nulleffekt nicht klein gegen den statistischen Fehler des Messwertes ist, muss dieser bei Messungen an einem radioaktiven Präparat abgezogen werden.

II Betriebsanleitung des Zählgerätes BF-SG 11

Inbetriebnahme des Zählgerätes - Einstellung der Einsatzspannung:

1. Kontrollieren Sie, ob die Hochspannung **ausgeschaltet** ist!
2. Falls das Zählrohr noch nicht angeschlossen ist, schließen Sie dieses an die Buchse GM (Geiger-Müller) an. Der Kippschalter daneben, muss in der Stellung GM sein. Im Bedienfeld daneben, lässt sich die Triggerschwelle einstellen. Da wir diese Funktion nicht benötigen, drehen Sie den Regler „Untere Schwelle“ ganz nach links und den Regler „Obere Schwelle“ ganz nach rechts. Anschließend können Sie das Gerät einschalten. Der Netzschalter befindet sich unten rechts.
3. Ziehen Sie den Regler für die Hochspannungseinstellung leicht heraus und stellen Sie diesen auf ca. 40 (entspricht 400 V) ein. Durch Drücken kann dieser Knopf später gegen Verdrehen gesichert werden.
4. Schalten Sie nun die Hochspannung ein. Den genauen Wert können Sie auf dem Anzeige-Instrument ablesen. Dazu müssen die Schalter unter dem Instrument auf „HV“ (**H**igh **V**oltage) und „1 kV“ gestellt werden.

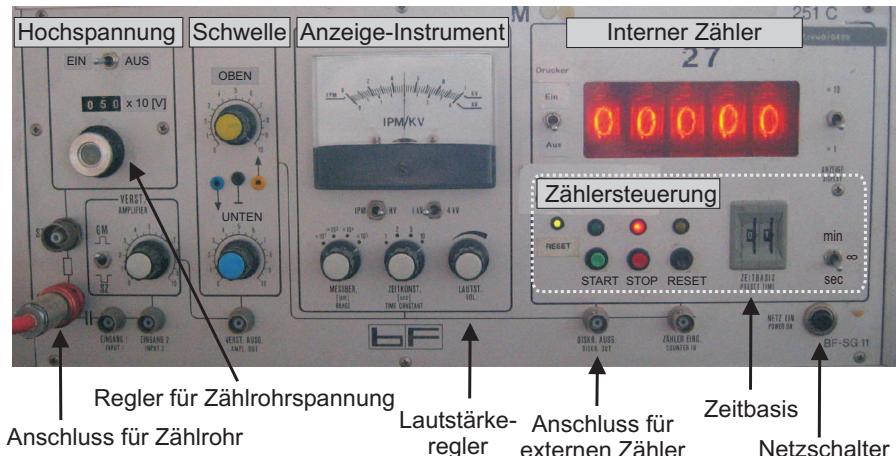


Abbildung 4: Frontplatte des Zählgerätes BF-SG 11.

5. Schrauben Sie das Präparat in die Halterung vor dem Zählrohr.
6. Das Zählgerät besitzt einen integrierten Lautsprecher, mit dem Sie die registrierten Ereignisse akustisch verfolgen können. Drehen Sie dazu den Lautstärkeregler etwa eine halbe Umdrehung nach rechts.
7. Erhöhen Sie nun **langsam** die Zählrohrspannung bis Sie ein sprungartig einsetzendes akustisches Signal hören. Dieser Spannungswert entspricht der Einsatzspannung V_E .

Bedienung des Internen Zählers:

1. Um die Anzahl der registrierten Ereignisse quantitativ festzuhalten, besitzt das Zählgerät einen internen Zähler. Die Zählung wird automatisch nach einer vorgegebenen Zeit (Zeitbasis, Torzeit) gestoppt, die Sie an den beiden Digitalschaltern und dem Umschalter „sec/∞/min“ einstellen können. Dabei steht „sec“ für Sekunden, „∞“ für eine Dauermessung ohne Stopfunktion und „min“ für Minuten.
2. Die Ausgabe des Zählerstandes kann entweder nur an die Anzeige erfolgen oder zusätzlich an einen externen Drucker. Für den Druckerbetrieb muss der Schalter „Drucker“ auf „EIN“ gestellt werden.

3. Drücken Sie die „Start“-Taste um den Zähler zu starten. Der Zählvorgang wird automatisch nach der eingestellten Torzeit gestoppt oder manuell durch Drücken der „Stop“-Taste. Um den Zählerstand auf Null zu setzen, müssen Sie die „Reset“-Taste drücken. Wenn die linke Reset-LED leuchtet (dauert ca. 2 Sekunden) können Sie den Zähler erneut starten.

4. Den Schalter „ $\times 1$ “ bzw. „ $\times 10$ “ neben der Zähleranzeige, sollten Sie stets in der Position „ $\times 1$ “ stehen haben. In der Stellung „ $\times 10$ “ wird nur jeder zehnte Impuls gezählt!

Messung des Zählrohrplateaus:

1. Erhöhen Sie die Zählrohrspannung um 50 V über der Einsatzspannung V_E und bringen Sie das Präparat (^{60}Co oder ^{137}Cs) in einen solchen Abstand, dass ca. 50 bis 100 Ereignisse pro Sekunde gezählt werden.
2. Ausgehend von V_E wird nun ein Teil des Plateaubereichs ausgemessen. Stellen Sie für die Messzeit 30 Sekunden ein und messen Sie bis zu einer Spannung von $V_E + 150 \text{ V}$ in Schritten von 25 V. Tragen Sie die Messwerte sofort in ein Diagramm gemäß Abbildung 3 ein.
3. Stellen Sie nach der Messung die Zählrohrspannung auf die Mitte des gemessenen Plateaubereichs ein.

Versuch 251

Statistik des radioaktiven Zerfalls



Abbildung 1: Versuchsaufbau.

I Messaufbau

- Geiger-Müller Zählrohr mit Betriebsgerät
- externer Impulszähler
- PC mit Drucker
- Präparatehalterung mit Bleiabschirmung
- Radioaktives Präparat (^{60}Co oder ^{137}Cs)

II Literatur

- W. Walcher, *Praktikum der Physik*, B.G.Teubner Stuttgart.

- J. Stiewe, *Wir wollen richtige Fehler*, der PAP1 Praktikumsanleitung beigelegt.
- Homepage des Praktikums
<http://www.physi.uni-heidelberg.de/Einrichtungen/AP/>

III Vorbereitung

Bereiten Sie sich auf die Beantwortung von Fragen zu folgenden Themen vor: Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, Radioaktiver Zerfall, Geiger-Müller-Zählrohr.

Verständnisfragen:

1. Was ist Radioaktivität?
2. Wie lautet das Zerfallsgesetz?
3. Was ist ein Isotop?
4. In welcher Beziehung stehen die Binomial-, Poisson- und Gauß-Verteilung?
5. Wodurch wird die mit einem Zählrohr gemessene Zählrate bestimmt? Warum muss die Messung im Plateaubereich durchgeführt werden?
6. An einer Probe eines langlebigen radioaktiven Materials werde als Mittel einer Reihe von 20 Messungen eine Rate von 23,5 Zerfällen pro 10 s gemessen.
 - a) Wie groß ist die Varianz dieser Verteilung?
 - b) Wie groß ist der Fehler des Mittelwertes?
7. Die Größe von 4402 Studenten sei normalverteilt mit einem Mittelwert von 185 cm und einer Standardabweichung von 3 cm.
 - a) Wie viele dieser Studenten haben eine Größe zwischen 179 cm und 188 cm?
 - b) Wie viele sind größer als 191 cm?

IV Aufgaben

1. Messen Sie ausgehend von der Einsatzspannung bis 100 V darüber die Zählrohrcharakteristik.
2. Untersuchen Sie den Anstieg der Zählrate im Plateau des Zählrohrs unter Berücksichtigung der statistischen Schwankungen.
3. Anhand einer langen Messreihe sind die Schwankungen der Zählrate experimentell zu untersuchen und damit die statistische Natur des radioaktiven Zerfalls zu bestätigen. Die Messdaten sollen mit einer Poisson- und Gauss-Verteilung verglichen werden.
4. Wiederholen Sie die zuvor durchgeführte Messung bei einer sehr niedrigen Zählrate und vergleichen Sie die Messdaten mit einer Poisson- und Gauss-Verteilung.

V Motivation

Radioaktive Atome tragen in sich eine geheimnisvolle innere Statistik-Uhr

„Ein Atom ist zwar bekanntlich nicht unteilbar, doch alles in allem sehr stabil. Die allermeisten Atome in unserer Welt existieren bereits seit Milliarden von Jahren. Sie wurden irgendwann im Inneren eines Sterns erbrütet. Doch es gibt auch instabile Atome, die nicht für die Ewigkeit gemacht sind. Ohne jeden äußeren Einfluss können sie ganz spontan zerfallen. Solche Atome nennt man radioaktiv. Beim Zerfall senden sie Strahlung aus - Heliumatomkerne (Alpha-Strahlung), Elektronen (Beta-Strahlung) oder energiereiche elektromagnetische Wellen (Gamma-Strahlung). Betrachtet man ein einzelnes radioaktives Atom, so kann niemand vorhersagen, auch der beste Physiker nicht, wann dieses Atom zerfallen wird. Das kann in der nächsten Sekunde geschehen, in einem Monat oder in tausend Jahren. Die „innere Uhr“ eines radioaktiven Atoms kennen wir nicht. Und doch gehorcht der Zerfall radioaktiver Atome präzisen Gesetzen der Statistik. So lässt sich genau vorhersagen, wie sich Kollektive aus vielen Atomen verhalten werden, auch wenn das Schicksal jedes Einzelatoms nicht vorhersehbar ist. Nach einer ganz bestimmten Zeit, der so genannten Halbwertszeit, ist stets die Hälfte aller zunächst vorhandenen Atome zerfallen.“

Die Halbwertszeit ist dabei ein für jede Sorte radioaktiver Atome charakteristischer Wert. Das Isotop Jod-131 besitzt zum Beispiel immer eine Halbwertszeit von 8,02 Tagen. Manche Atome sind so instabil, dass ihre Halbwertszeit nur Bruchteile von Sekunden beträgt. Nach nur 1,05 Millionstel Sekunden sind beispielsweise 50 Prozent der Thorium-219-Atome zerfallen. Auch das andere Extrem gibt es. Uran-235, das zum Bau von Atombomben verwendet wird, hat eine Halbwertszeit von mehr als 700 Millionen Jahren.“¹

VI Grundlagen

VI.1 Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Misst man mit einem Zählrohr die von einem radioaktiven Präparat emittierten Teilchen unter unveränderten Versuchsbedingungen, so wird man in der Regel bei jeder Messung eine etwas andere Teilchenzahl erhalten. Der Grund hierfür ist, dass jeweils während der Messzeit nur ein kleiner Bruchteil der radioaktiven Atome zerfällt, und dass die einzelnen Zerfallsprozesse völlig **unabhängig** voneinander stattfinden. Die genaue Anzahl der innerhalb der Messzeit zerfallenden Atome bleibt daher dem Zufall überlassen.

Allerdings lässt sich mit dem Zufall hervorragend experimentieren und rechnen. Der Zufall zeigt Gesetzmäßigkeiten! Zwar ist es unmöglich den Zerfallszeitpunkt eines **einzelnen** Atomkernes vorherzusagen - über **eine große Anzahl** von Kernen lassen sich dagegen durchaus Vorhersagen treffen. Trägt man beispielsweise die mit einem Zählrohr gemessene Zählrate in ein Histogramm ein und wiederholt dieses viele Male, so wird man unter bestimmten Voraussetzungen² stets dieselbe Verteilung erhalten (Vergleiche Abbildung 2). In den folgenden Abschnitten wollen wir untersuchen, welche statistische Verteilungen geeignet sind den radioaktiven Zerfall zu beschreiben.

„Alle Dinge umfaßt eine bestimmte Ordnung und was den ihm angewiesenen Platz verläßt, das tritt damit zwar in den Bereich einer anderen Ordnung ein, aber niemals fällt es völlig aus aller Ordnung heraus, denn Willkür und Zufall sind unbekannt im Reiche der Vorsehung!“

¹Norbert Lossau, Artikel vom 18. August 2004 in der Zeitung „Die Welt“

²Die Halbwertszeit des radioaktiven Isotops muss groß gegenüber der Beobachtungszeit sein.

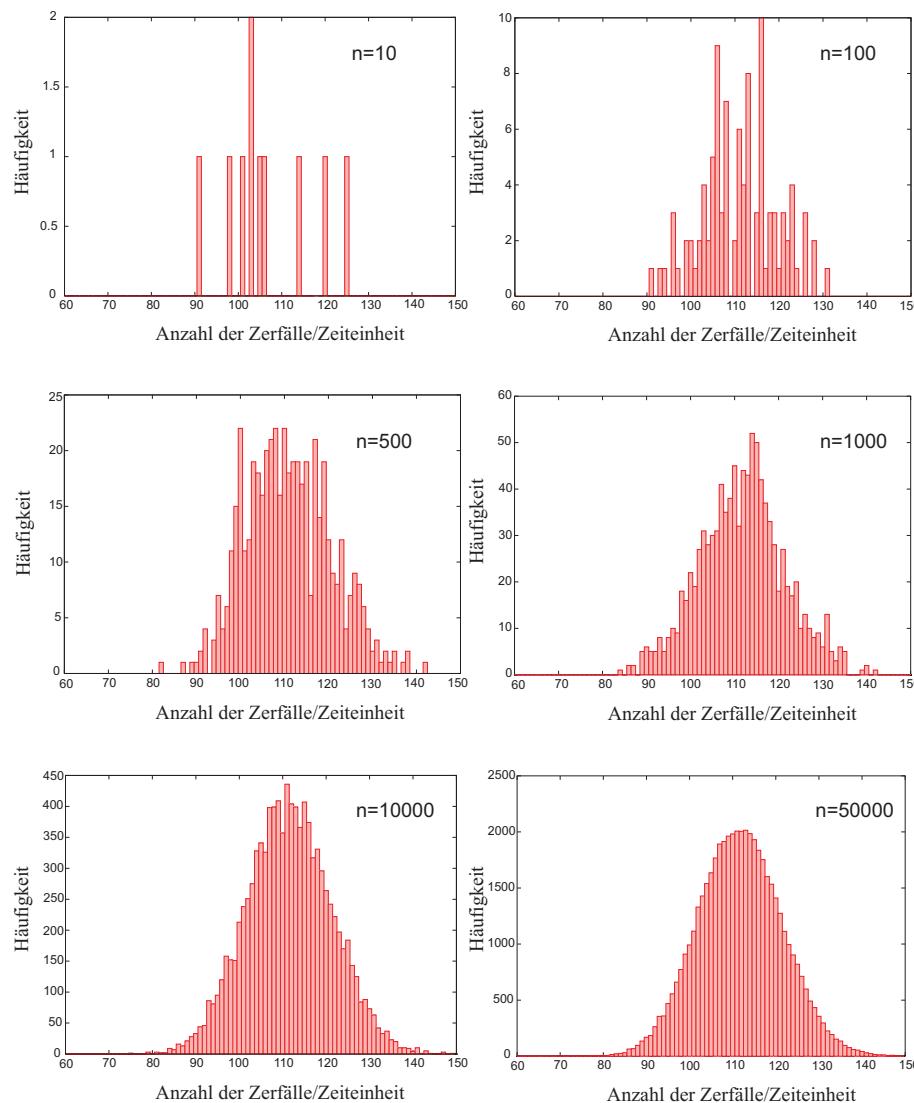


Abbildung 2: Trägt man die pro Zeiteinheit gemessenen radioaktiven Zerfälle einer großen Anzahl von Atomen in ein Histogramm ein, so erhält man nach vielen Messungen stets dieselbe Verteilung. n bezeichnet die Anzahl der Messungen.

Nach: Boethius Anicius Manlius Severinus: Die Tröstungen der Philosophie

VI.1.1 Die Binomial-Verteilung

Die Binomial-Verteilung ergibt sich aus folgender Fragestellung:

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Ereignis A bei n voneinander unabhängigen Versuchen genau k -mal eintritt, wenn p die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses A bei einem Versuch ist und $(1-p)$ die Wahrscheinlichkeit für das Nichteintreten dieses Ereignisses darstellt?

Nehmen wir zunächst an, dass das Ereignis A gerade bei den ersten k Versuchen eintritt, bei den folgenden $n-k$ dagegen nicht. Da die Versuche voneinander statistisch unabhängig sein sollen, müssen die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Versuche multipliziert werden. Somit ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit W dieses konkreten Beispiels:

$$W = p^k (1-p)^{n-k}. \quad (1)$$

Das Ereignis A muss aber nicht unbedingt bei den ersten k Versuchen auftreten. Es muss nur innerhalb von n Versuchen genau k -mal vorkommen. Die Reihenfolge ist dabei beliebig. Nun gibt es aber genau $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten, aus n Elementen k herauszugreifen. Unter Beachtung aller möglichen Permutationen $\binom{n}{k}$ erhalten wir schließlich die Binomial-Verteilung:

$$B(k; n, p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}. \quad (2)$$

Dazu folgendes Beispiel: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei zehnmaligem Würfeln genau dreimal die Zahl „4“ fällt?

aus $p = 1/6$, $n = 10$ und $k = 3$ folgt:

$$B(3; 10, 1/6) = \binom{10}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{10-3} = 15,5\%$$

Die Binomial-Verteilung ist eine diskrete³, zweiparametrische Verteilung mit den Parametern n und p . Als Notation verwenden wir die Bezeichnung

³d.h. $n, k \in \mathbb{N}$

$B(k; n, p)$. Dabei kennzeichnet das Kürzel B , dass es sich um eine Binomial-Verteilung handelt. In der Klammer wird zunächst die Variable angegeben, anschließend - getrennt durch ein Semikolon - die Parameter.

Eigenschaften der Binomial-Verteilung:

$$\text{Normierung: } \sum_{k=0}^n B(k; n, p) = 1 \quad (3)$$

$$\text{Mittelwert: } \langle k \rangle = \sum_{k=0}^n k B(k; n, p) = np \quad (4)$$

$$\text{Varianz: } \sigma^2 = \sum_{k=0}^n k^2 B(k; n, p) - \langle k \rangle^2 = np(1-p) \quad (5)$$

$$\text{Standardabweichung: } \sigma = \sqrt{np(1-p)} \quad (6)$$

Unsere bisherigen Überlegungen zur Binomial-Verteilung lassen sich nun einfach auf den radioaktiven Zerfall übertragen. Auch hier handelt es sich um ein Ereignis mit zwei möglichen Ausgängen: Entweder ein radioaktiver Atomkern zerfällt innerhalb eines gewissen Beobachtungszeitraums oder eben nicht. Stellt p die Zerfallswahrscheinlichkeit eines Atomkerns dar, so beschreibt die Binomial-Verteilung die Wahrscheinlichkeit, dass von n Atomkernen, genau k innerhalb eines bestimmten Zeitraums t zerfallen.

Die Zerfallswahrscheinlichkeit p hängt natürlich vom Beobachtungszeitraum ab. Je länger Sie warten, desto mehr Zerfälle werden Sie beobachten. Es lässt sich leicht zeigen, dass für p gilt:

$$p(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad (7)$$

wobei die Zerfallskonstante λ eine für das Isotop charakteristische Größe darstellt. Sie werden diesen Sachverhalt in dem nächsten Praktikumsversuch, „Aktivierung von Indium und Silber mit langsamen Neutronen“, noch genauer untersuchen. Ist die Zerfallskonstante sehr klein, wie es bei den in diesem Versuch verwendeten radioaktiven Präparaten der Fall ist, so kann die Zerfallswahrscheinlichkeit p für einen festen Beobachtungszeitraum als konstant angenommen werden.

Obwohl die Binomial-Verteilung die Statistik des radioaktiven Zerfalls sehr gut beschreibt, ist sie in der Praxis nur schwer handzuhaben. Stellen sie sich vor,

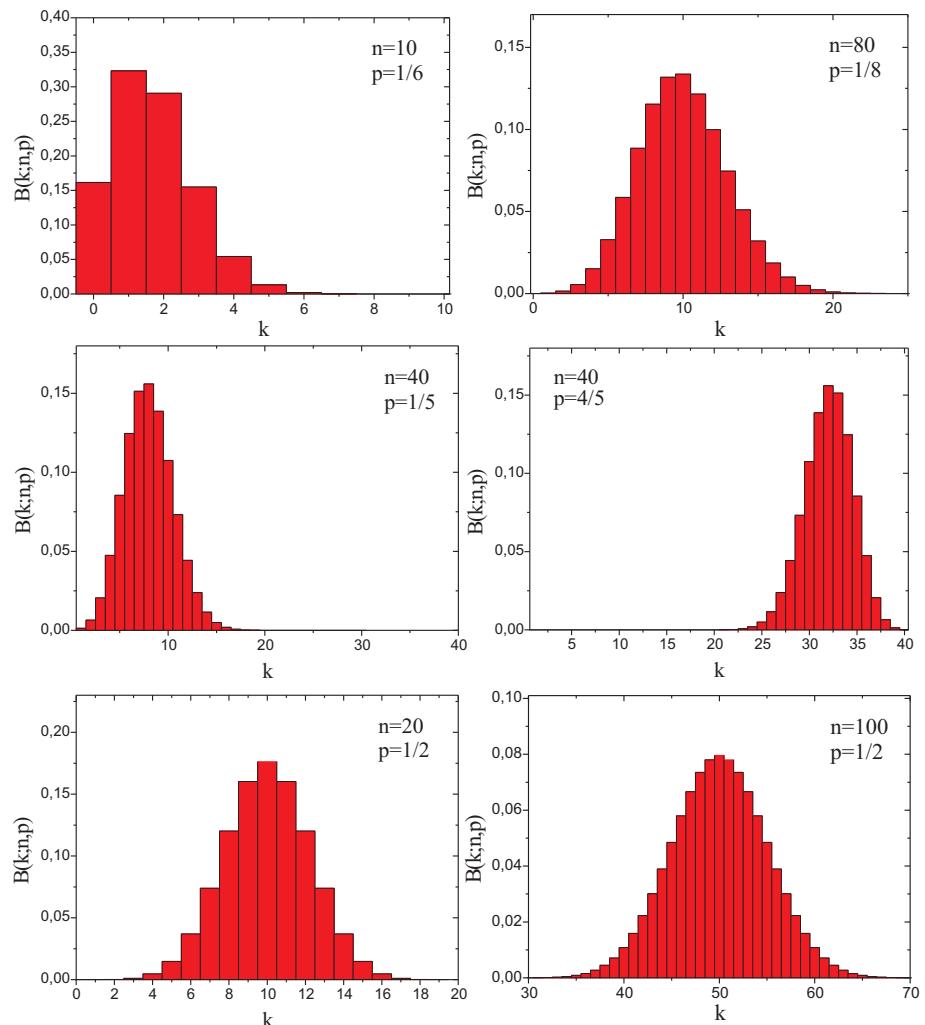


Abbildung 3: Binomial-Verteilung für unterschiedliche Werte von n und p .

sie müssten die Fakultät von $n \approx 10^{23}$ ausrechnen! In vielen Fällen ist aber die Zerfallswahrscheinlichkeit p sehr klein und die Anzahl der Atome n sehr groß. Sofern dies gilt, lassen sich einige mathematische Näherungen anwenden und wir erhalten schließlich aus der Binomial-Verteilung die Poisson-Verteilung.

VI.1.2 Die Poisson-Verteilung

Für kleine Zerfallswahrscheinlichkeiten ($p \rightarrow 0$) und eine große Anzahl von radioaktiven Atomen ($n \rightarrow \infty$) kann die Binomial-Verteilung durch die Poisson-Verteilung angenähert werden. Allerdings müssen wir fordern, dass der Mittelwert $\mu \equiv \langle k \rangle = np$ endlich bleibt. Die Poisson-Verteilung ist also dann gültig, wenn die durchschnittliche Anzahl der Ereignisse (d.h. der Mittelwert) das Ergebnis einer sehr großen Zahl von Ereignismöglichkeiten und einer sehr kleinen Ereigniswahrscheinlichkeit ist. Die mathematische Herleitung dieser Verteilung finden Sie im Anhang. Wir wollen an dieser Stelle nur das Ergebnis angeben:

$$P(k; \mu) = \frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!}. \quad (8)$$

Die Poisson-Verteilung ist wie die Binomial-Verteilung eine diskrete Verteilung ($k \in \mathbb{N}$). Sie ist eine einparametrische Verteilung, die durch den Mittelwert μ vollständig beschrieben wird.

Eigenschaften der Poisson-Verteilung:

Normierung: $\sum_{k=0}^{\infty} P(k; \mu) = 1 \quad (9)$

Mittelwert: $\langle k \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} k P(k; \mu) = \mu \quad (10)$

Varianz: $\sigma^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 P(k; \mu) - \langle k \rangle^2 = \mu \quad (11)$

Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{\mu} \quad (12)$

Beachten Sie, dass der Parameter μ zugleich den Mittelwert als auch die Varianz darstellt. Die Standardabweichung berechnet sich demnach aus der Wurzel des Mittelwertes. Hierauf beruht das \sqrt{N} -Gesetz bei der Fehlerbestimmung von gezählten Größen. Wir werden an späterer Stelle noch darauf zurückkommen.

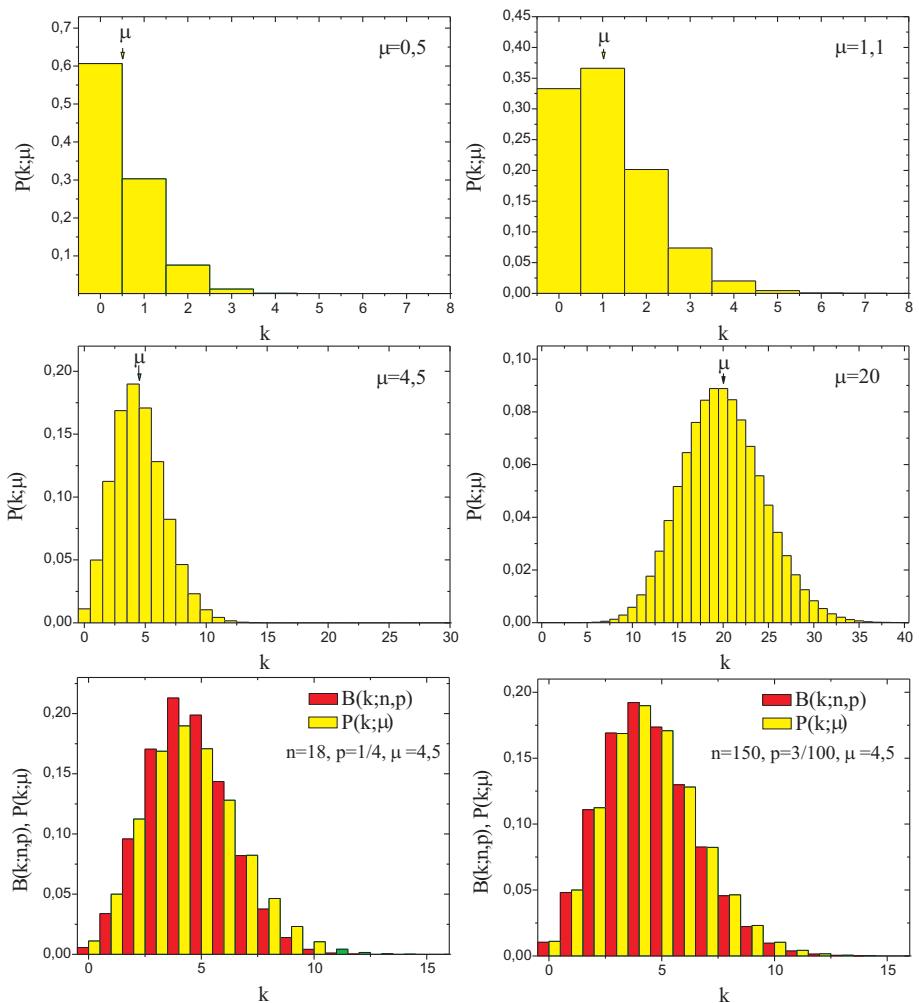


Abbildung 4: Poisson-Verteilung für unterschiedliche Werte von μ . Untere Reihe: Vergleich der Binomial-Verteilung mit der Poisson-Verteilung. Für große Werte von n und kleine Wahrscheinlichkeiten p nähert sich die Binomial-Verteilung der Poisson-Verteilung.

In Abbildung 4 ist die Poisson-Verteilung für verschiedene Werte von μ dargestellt. Für $\mu < 1$ ist der wahrscheinlichste Wert stets Null. Die Verteilung besitzt in diesem Fall kein Maximum und nimmt monoton mit zunehmendem k ab. Für $\mu > 1$ besitzt die Verteilung ein Maximum, dessen Breite allerdings bei gleichem Mittelwert größer ist als die der Binomial-Verteilung (Die Varianz der Poisson-Verteilung entspricht dem Mittelwert $\sigma_P^2 = \mu \equiv np$, während sie bei der Binomial-Verteilung gegeben ist durch $\sigma_B^2 = np(1-p) < \sigma_P^2$). Weiterhin fällt auf, dass die Verteilungen für kleine Mittelwerte stark asymmetrisch sind und für größer werdende Mittelwerte immer symmetrischer werden. In der Tat geht die Poisson-Verteilung für große μ in die symmetrische Gauß-Verteilung über.

VI.1.3 Die Gauß-Verteilung

Für einen großen Mittelwert ($\mu > 30$) lässt sich die Poisson-Verteilung in guter Näherung durch eine Gauß-Verteilung approximieren (Die Herleitung finden Sie wieder im Anhang):

$$G(k; \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu}} e^{-\frac{(\mu-k)^2}{2\mu}}. \quad (13)$$

Gleichung (13) stellt ein Spezialfall der Gauß-Verteilung dar, bei der die Varianz dem Mittelwert entspricht. Die allgemeine Form lautet:

$$G(k; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(k-\mu)^2}{2\sigma^2}}. \quad (14)$$

Eigenschaften der Gauß-Verteilung:

$$\text{Normierung: } \int_{-\infty}^{\infty} G(k; \mu, \sigma) dk = 1 \quad (15)$$

$$\text{Mittelwert: } \int_{-\infty}^{\infty} k G(k; \mu, \sigma) dk = \mu \quad (16)$$

$$\text{Varianz: } \int_{-\infty}^{\infty} k^2 G(k; \mu, \sigma) dk - \langle k \rangle^2 = \sigma^2 \quad (17)$$

Für den Spezialfall einer Zählstatistik (Gleichung (13)) ergibt sich, wie bei der Poissonverteilung, für die Standardabweichung

$$\sigma = \sqrt{\mu}. \quad (18)$$

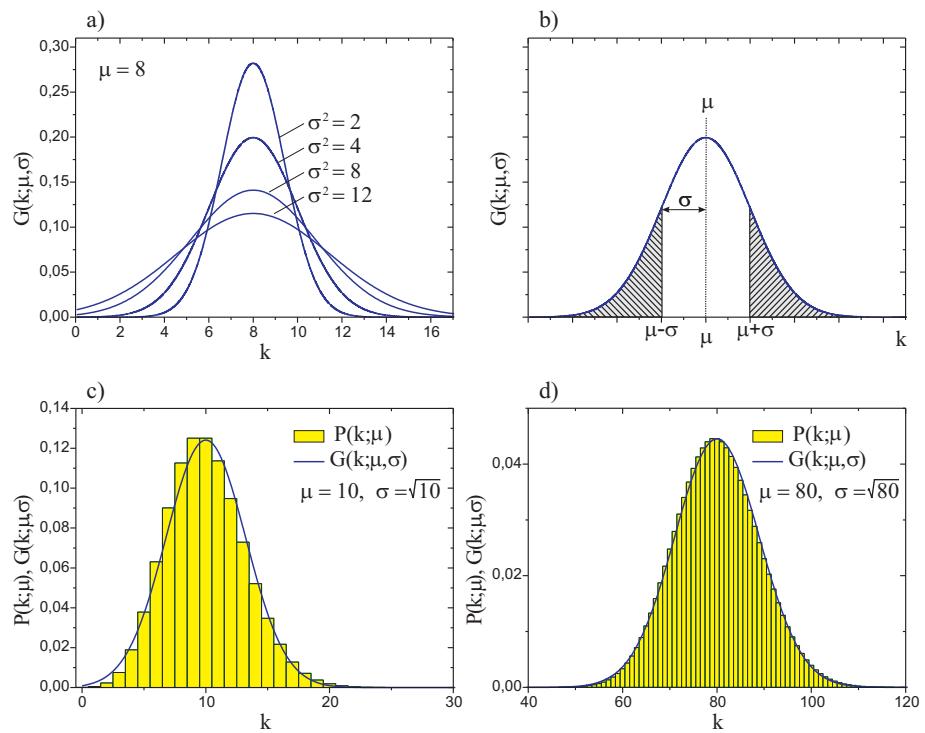


Abbildung 5: a) Gauß-Verteilung für $\mu = 8$ und verschiedene Werte von σ . b) Grafische Darstellung von σ . c) und d) Vergleich der Poisson-Verteilung mit der Gauß-Verteilung.

| Eine Abweichung von μ um mehr als | $\pm\sigma$ | $\pm 2\sigma$ | $\pm 3\sigma$ |
|---------------------------------------|-------------|---------------|---------------|
| hat die Wahrscheinlichkeit | 31,73% | 4,55% | 0,27% |

Tabelle 1: Wahrscheinlichkeiten für unterschiedliche Werte von σ .

Im Gegensatz zur Binomial- und Poissonverteilung, deren Variable k nur diskrete Werte annehmen kann, ist die Gauß-Verteilung kontinuierlich, d.h. $k \in \mathbb{R}$. Sie ist eine zweiparametrische Verteilung, die durch den Mittelwert μ und die Standardabweichung σ eindeutig bestimmt ist. In Abbildung 5a) sind einige Verteilungen mit unterschiedlichen Standardabweichungen dargestellt. Je größer die Standardabweichung σ , desto breiter ist die Verteilung. Die Bilder c) und d) vergleichen die Gauß-Verteilung mit der Poissonverteilung für zwei unterschiedliche Mittelwerte. In Abbildung 5b) ist eine Gauß-Verteilung abgebildet, bei der die Flächen unter der Kurve im Bereich $k > \mu + \sigma$ und $k < \mu - \sigma$ schraffiert dargestellt ist. Diese Fläche gibt die Wahrscheinlichkeit P_σ an, dass k um mehr als eine Standardabweichung vom Mittelwert μ abweicht. P_σ lässt sich gemäß

$$P_\sigma = 1 - \int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} G(k; \mu, \sigma) dk \quad (19)$$

berechnen und beträgt etwa 30 %. Analog erhält man die Wahrscheinlichkeiten für Abweichungen von μ um mehr als $\pm 2\sigma$ und $\pm 3\sigma$ (Tabelle 1).

Um auf einfacher Weise die Standardabweichung aus einer Gaußkurve abzuschätzen, sollten Sie sich folgende Beziehung merken:

$$FWHM \approx 2,4\sigma, \quad (20)$$

wobei $FWHM$ für *full width at half maximum* steht, d.h. für die volle Breite der Kurve auf halber Höhe.

VII.2 Statistik und Messfehler

In der Praxis ist der Mittelwert μ einer sehr langen Messreihe meist nicht gegeben, sondern nur das Resultat k einer einzigen Messung. In diesem Fall kann man das Ergebnis als Schätzung des Mittelwertes interpretieren:

$G(\mu; k)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine sehr lange Messreihe den Mittelwert μ ergeben würde, wobei das Resultat k einer einzigen Messung gegeben ist.

Da k und μ nicht stark voneinander abweichen, können wir aufgrund einer einzigen Messung auch einen Näherungswert für die Standardabweichung angeben:

$$\sigma = \sqrt{k}. \quad (21)$$

Es ist üblich, das Resultat einer solchen Zählung in der Form

$$k \pm \sqrt{k} \quad (22)$$

anzugeben. Dies ist eine Abkürzung für die Sätze: „Ich habe k Ereignisse gezählt. Daraus schließe ich, wegen Abbildung 5b) und Tabelle 1, dass der Mittelwert einer sehr langen Messung mit 68% Wahrscheinlichkeit im Bereich $k \pm \sqrt{k}$ liegt, mit 95% Wahrscheinlichkeit im Bereich $k \pm 2\sqrt{k}$ und nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,3% außerhalb des Bereichs $k \pm 3\sqrt{k}$ “.

Die Betrachtung der statistischen Fehler ist besonders wichtig, wenn man herausfinden will, ob die Differenz zweier Zählergebnisse k_1 und k_2 , allein durch statistische Schwankungen erklärt werden kann oder auf eine Änderung der Versuchsbedingungen zurückzuführen ist. Viele Experimente laufen auf diese Fragestellung hinaus.

Nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz erhält man den mittleren statistischen Fehler einer Differenz durch quadratisches Addieren der Einzelfehler.

Es sei

$$\Delta = k_1 - k_2; \quad \sigma_1 = \sqrt{k_1}; \quad \sigma_2 = \sqrt{k_2}.$$

Dann ist

$$\sigma_\Delta = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = \sqrt{k_1 + k_2}.$$

Man schreibt dies meist in der Form :

$$\Delta = (k_1 - k_2) \pm \sqrt{k_1 + k_2}. \quad (23)$$

Für die Wahrscheinlichkeit, dass Δ allein aufgrund von statistischen Schwankungen von Null um mehr als eine, zwei oder drei Standardabweichungen ($\sigma_\Delta = \sqrt{k_1 + k_2}$) abweicht, gilt wieder Tabelle 1. In der Regel hält man den Einfluss einer Änderung der Versuchsbedingungen für erwiesen, wenn Δ um mehr als drei Standardabweichungen von Null abweicht. In diesem Fall bezeichnet man die Differenz Δ als **signifikant**.

VII Durchführung des Versuchs

1. Skizzieren Sie den Versuchsaufbau.

2. *Messung der Zählrohrcharakteristik*

Messen Sie die Zählrohrcharakteristik mit Hilfe des internen Zählers des Betriebsgerätes. Das Präparat (^{60}Co oder ^{137}Cs) erhalten Sie vom Versuchsbetreuer. Folgen Sie dazu den Anweisungen in den Abschnitten „Inbetriebnahme des Zählgerätes - Einstellung der Einsatzspannung“ und „Messung des Zählrohrplateaus“ in der Beschreibung *Grundlagen zu den Versuchen der Radioaktivität*. Tragen Sie die Messwerte mit den statistischen Fehlern sofort in ein Diagramm ein oder elektronisch mit Python (siehe Kapitel Auswertung). Stellen Sie nach der Messung die Zählrohrspannung auf die Mitte des gemessenen Plateaubereichs ein. Dieser Spannungswert wird im Folgenden als U_0 bezeichnet.

3. *Untersuchung des Plateauanstiegs*

Bringen Sie das Präparat möglichst dicht an das Zählrohr und messen Sie jeweils 1 Minute und 3 Minuten lang die Zählrate bei den Spannungen U_0 und $U_0 + 100 \text{ V}$. Stellen Sie anschließend die Zählrohrspannung wieder auf U_0 ein.

4. *Verifizierung der statistischen Natur des radioaktiven Zerfalls*

In dieser Teilaufgabe werden Sie viele Male (mindestens 2000 Mal) die Zerfälle eines radioaktiven Präparats innerhalb eines festen Zeitraums (Torzeit) messen und in ein Histogramm darstellen. Falls sich der radioaktive Zerfall völlig statistisch verhält, sollte das gemessene Histogramm durch eine Poisson-Verteilung, bzw. bei einem großen Mittelwert, durch eine Gauß-Verteilung beschrieben werden können. Überprüfen Sie dies zunächst für einen großen Mittelwert:

Nähern Sie das Präparat durch Verschieben des Reiters dem Zählrohr an, bis etwa 140-150 Zerfälle/Sekunde gezählt werden. Die Zählrate darf auf keinen Fall größer gewählt werden, da sonst die Totzeit des Zählrohrs die Statistik verfälscht! Schalten Sie den Computer und das externe Zählgerät ein und starten Sie das Messprogramm *Statistik* auf dem Desktop. Stellen Sie die Messzeit (Torzeit) auf 500 ms. Starten Sie die Messung durch

Drücken des Pfeilsymbols in der linken oberen Ecke. Die registrierten Zerfälle/Torzeit werden in einem Histogramm dargestellt. Zusätzlich wird aus den Messdaten der Mittelwert und die Standardabweichung berechnet und im Feld „Statistik“ angezeigt. Der theoretisch zu erwartende Wert der Standardabweichung (σ_{theor}) wird aus der Quadratwurzel des Mittelwertes berechnet und ebenfalls angezeigt. Wenn Sie die Option „Gaußkurve“ im Feld „Einstellungen“ einschalten, wird aus dem gemessenen Mittelwert und der Standardabweichung die dazugehörige Gauß-Verteilung berechnet und im Histogramm mitangezeigt. Beachten Sie, dass die angezeigte Gaußkurve nicht angefittet wird, sondern aus den Messdaten berechnet wird! Die Darstellung der Poisson-Verteilung ist nur dann möglich, wenn der Stoppwert der Abszisse kleiner als 34 ist.

Den Abszissenbereich des Histogramms können Sie durch den Start- und Stoppwert in der linken und rechten unteren Ecke einstellen. Warten Sie zunächst etwa 50 Messungen ab und stellen Sie dann diese Werte so ein, dass das Histogramm optimal dargestellt wird.

Insgesamt sind mindestens 2000 Messungen durchzuführen. Während dieser Zeit können Sie mit der Auswertung der Aufgaben 2 und 3 beginnen. Zum Beenden der Messung drücken Sie die Stop-Taste im Feld „Aktuelle Messung“. Notieren Sie die gemessenen Werte (Anzahl der Messungen, Mittelwert und Standardabweichungen) und führen Sie sofort die Auswertung (Teil 4a im Kapitel Auswertung) durch.

5. *Vergleich der Poisson- und Gauß-Verteilung bei sehr kleinen Zählraten*

Stellen Sie das abgeschirmte Präparat so in die Nähe des Zählrohrs, dass etwa 40 - 50 Teilchen/Sekunde gezählt werden. Stellen Sie die **Messzeit auf 100 ms ein** und starten Sie die Messung. **Insgesamt sind mindestens 5000 Messungen durchzuführen.** Notieren Sie nach Beendigung der Messung die gemessenen Werte (Anzahl der Messungen, Mittelwert und Standardabweichungen) und führen Sie sofort wieder die Auswertung durch.

VIII Auswertung in Python mit Jupyter Notebook

VIII.1 Importieren und grafische Darstellung der Messdaten

Führen Sie die Rechnungen in einem vollständig dokumentierten Jupyter Notebook durch und legen Sie es Ihrer schriftlichen Ausarbeitung ausgedruckt bei. Starten Sie das Programm **Jupyter** vom Desktop aus. Wir benötigen die folgenden Module:

```
%matplotlib inline
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
```

Tragen Sie Ihre Messwerte in Arrays ein und berechnen Sie den Fehler der gezählten Ereignisse. Die folgenden Zahlenwerte sind nur Beispiele.

```
#Zählrohrspannung:
U=np.array([450,470,490,510,530,550,570,590,610])
#gezählte Ereignisse
N=np.array([1906,2131,2177,2198,2203,2197,2262,2303,2220])
Fehler_N=np.sqrt(N)
```

Tragen Sie Ihre Messwerte in ein Diagramm ein.

```
plt.errorbar(U, N, Fehler_N, fmt=". ")
plt.xlabel('Spannung / V')
plt.ylabel('Ereignisse')
plt.title('Zählrohrcharakteristik')
```

Fitten Sie durch den Plateaubereich eine Gerade. Dazu müssen Sie die Funktion `curve_fit()` importieren und Ihre Gerade definieren. Der erste Messwert liegt in diesem Beispiel noch nicht im Plateaubereich (Abbildung 6) und darf nicht berücksichtigt werden. Dieser Wert kann durch die Indexierung `[1:]` der Arrays ausgeblendet werden. Die Fitparameter werden im Array `popt` abgelegt, deren Fehler im Array `pcov`.

```
from scipy.optimize import curve_fit
```

```
def linear(x,a,b):
    return a*x+b

popt, pcov=curve_fit(linear, U[1:], N[1:])

Tragen Sie die Fitkurve mit in das Diagramm ein und speichern Sie es. Mit *popt werden die Fitparameter automatisch in Ihre zuvor definierte Gerade entpackt. Drucken Sie das Diagramm aus und fügen Sie es in Ihr Protokollbuch ein.

plt.errorbar(U, N, Fehler_N, fmt=". ")
plt.xlabel('Spannung / V')
plt.ylabel('Ereignisse')
plt.title('Zählrohrcharakteristik')
plt.plot(U, linear(U,*popt))
plt.savefig("figures/Zählrohrcharakteristik.pdf", format="pdf")
```

Das Diagramm sollte so ähnlich aussehen wie in Abbildung 6.

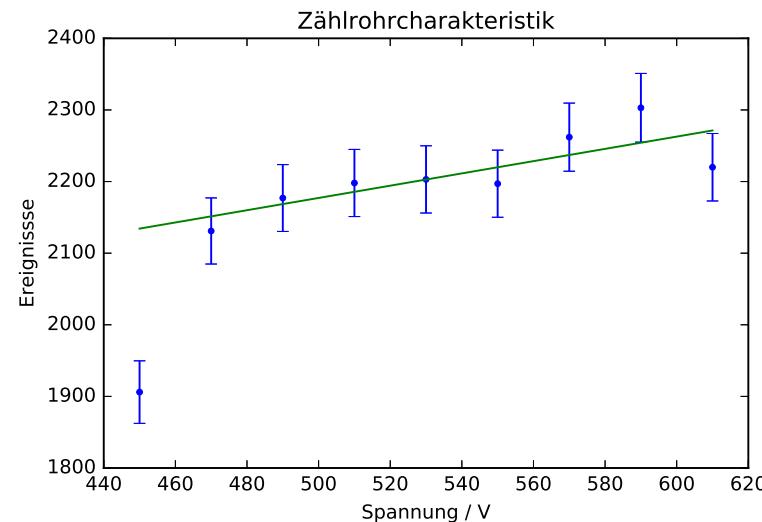


Abbildung 6: Zählrohrcharakteristik.

VIII.2 Plateaubereich des Zählrohrs

Führen Sie die folgenden Rechnungen in Ihrem Laborbuch durch. Werten Sie die Plateauanstiege ($n(U_0 + 100 V) - n(U_0)$) bei den jeweiligen Messzeiten aus und berechnen Sie für beide Zeitintervalle den prozentualen Anstieg $(n(U_0 + 100 V) - n(U_0))/n(U_0)$ der Zählrate pro 100 V mit den dazugehörigen statistischen Fehlern:

- Sind die gemessenen Anstiege signifikant (siehe Gleichung 23)?
- Wie lange müssten Sie messen um den Plateauanstieg auf 1% genau zu kennen?
- Welche prozentuale Variation der Zählrate ist bei einer Spannungserhöhung um 100 V möglich bei einem Vertrauensniveau von ca. 68% und von ca. 95%?

VIII.3 Auswertung der Daten mit hoher mittlerer Ereigniszahl

Kopieren Sie Ihre Messdaten in den Ordner `data` auf dem Desktop. Der Datensatz besteht aus zwei Spalten, der Anzahl der Zerfälle/Zeiteinheit und deren Häufigkeit. Zum Importieren verwenden wir die Numpy Funktion `loadtxt()`. Wir müssen den Pfad/Dateiname angeben. Mit der Option `unpack=True` wird jede Spalte getrennt in die Arrays `anzahl`, `haeufigkeit` geschrieben. Der statistische Fehler der Häufigkeiten entspricht der Wurzel der gemessenen Ereignisse.

```
anzahl, haeufigkeit=np.loadtxt('data/Dateiname.dat', unpack=True)
fehler=np.sqrt(haeufigkeit)
```

Tragen Sie die Messwerte mit Fehlern in ein Diagramm ein (Abbildung 7).

```
plt.errorbar(anzahl, haeufigkeit, fehler, fmt=".")
plt.xlabel('Anzahl der Zerfaelle pro Zeiteinheit / 1/s ')
plt.ylabel('Haeufigkeit')
plt.title('Statistik des radioaktiven Zerfalls')
```

An die Messdaten soll nun eine Gaußfunktion angepasst werden. Dazu importieren wir zunächst einige Funktionen und definieren anschließend die Fitfunktion.

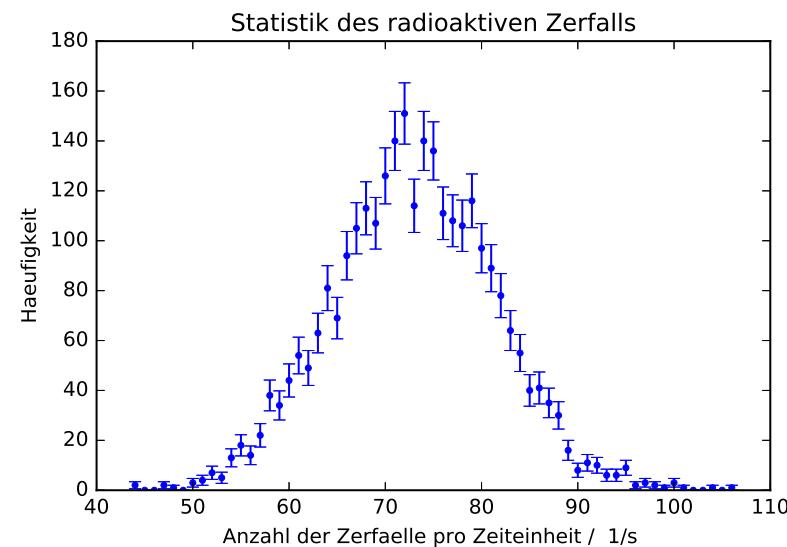


Abbildung 7: Verteilung der Zählraten bei hoher mittlerer Ereigniszahl.

```
from numpy import exp, pi, sqrt
def gaussian(x, A, mu, sig): #A: Flaeche der Gaussfunktion
    return A/(sqrt(2*pi)*sig)*exp(-(x-mu)**2/2/sig**2)
```

Der χ^2 -Fit funktioniert nur, wenn die Fehler „gaussverteilt“ sind. Das ist in hinreichendem Maße nur dann der Fall, wenn die Häufigkeit mindestens zehn beträgt. Dies werden Sie u.a. in diesem Versuch lernen. Die Häufigkeiten unsere Messwerte bei sehr kleinen und sehr großen Raten sind allerdings zu gering. Würden wir diese bei der Anpassung mitberücksichtigen, würde der Fit nicht konvergieren. Wir werden daher diese Werte bei der Anpassung ausblenden, indem wir die entsprechenden Arrays indizieren. Mit dem Index [-12:12] werden die ersten und letzten 12 Werte in den Arrays nicht berücksichtigt. Den Index müssen Sie natürlich entsprechend Ihrer Messwerte anpassen. Zusätzlich sollten wir die Fitparameter initialisieren, d.h. Startwerte für den Fitalgorithmus angeben. Mit `p0=[2000, 75, 8]` werden die Parameter in der Reihenfolge wie sie in der Funktion definiert wurden initialisiert, d.h. `A=2000`, `mu=75` und `sig=8`.

Auch diese Werte müssen Sie an Ihrer Messung anpassen.

```
popt, pcov=curve_fit(gaussian,anzahl[12:-12], haeufigkeit[12:-12],
                      p0=[2000,75,8], sigma=fehler[12:-12])
```

Falls Sie keine Fehlermeldung erhalten haben, war der Fit erfolgreich. Falls doch müssen Sie die Startwerte solange ändern bis der Fit konvergiert.

Wiederholen Sie die Fitprozedur indem Sie jetzt eine Poissonverteilung anpassen. Hierzu müssen Sie wieder eine neue Fitfunktion definieren und mit dieser Funktion die Anpassung durchführen. Zur Unterscheidung zum Gaußfit sind hier die Parameter mit dem Index p versehen.

```
from scipy.special import gamma
def poisson(x, A_p, mu_p):
    return A_p*exp(-mu_p)*mu_p**x/gamma(x+1)

popt_p, pcov_p = curve_fit(poisson, anzahl[12:-12],
                            haeufigkeit[12:-12], p0=[2000, 75], sigma=fehler[12:-12])
```

Tragen Sie die Messdaten und die beiden Funktionen in ein gemeinsames Diagramm ein (Abbildung 8).

```
plt.errorbar(anzahl, haeufigkeit, fehler, fmt=". ", label='Messung')
plt.xlabel('Anzahl der Zerfaelle pro Zeiteinheit 1/s ')
plt.ylabel('Haeufigkeit')
plt.title('Statistik des radioaktiven Zerfalls')
x=np.linspace(40,110, 100)
plt.plot(x, gaussian(x,*popt), label='Gauss')
plt.plot(x, poisson(x,*popt_p), label='Poisson', linestyle=':')
plt.legend()
plt.savefig("figures/poisson_vs_gaussian.pdf", format="pdf")
```

Speichern und drucken Sie das Diagramm aus und fügen Sie es in Ihr Laborbuch ein.

Lassen Sie sich nun alle Fitparameter ausgeben. Die Fitparameter finden Sie in den Arrays popt bzw. popt_p und deren Varianzen auf der Diagonalen in den Arrays pcov bzw. pcov_p.

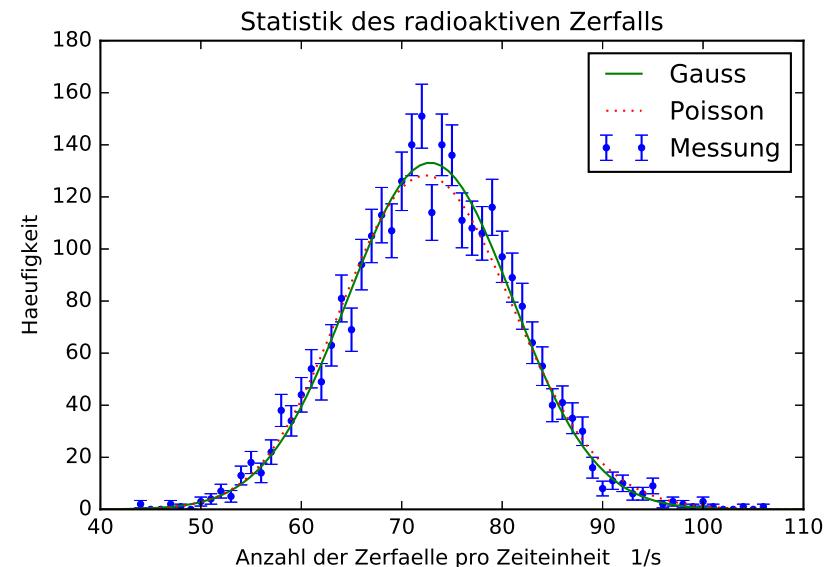


Abbildung 8: Verteilung der Zährlaten bei hoher mittlerer Ereigniszahl. Zusätzlich wurde eine Gauß- bzw. Poissonverteilung an die Daten angepasst.

```
print("Gaussfit:")
print("A=",popt[0], ", Standardfehler=", np.sqrt(pcov[0][0]))
print("mu=",popt[1], ", Standardfehler=", np.sqrt(pcov[1][1]))
print("sig=",popt[2], ", Standardfehler=", np.sqrt(pcov[2][2]))
print("Poissonfit:")
print("A_p=",popt_p[0], ", Standardfehler=", sqrt(pcov_p[0][0]))
print("mu_p=",popt_p[1], ", Standardfehler=", sqrt(pcov_p[1][1]))
```

Diskutieren Sie die Güte des Fits. Berechnen Sie die χ^2 -Summe:

$$\chi^2 = \sum_i^N \left(\frac{\text{Funktionswert}_i - \text{Messwert}_i}{\text{Fehler}_i} \right)^2 \quad (24)$$

und $\chi^2_{red} = \chi^2 / \text{Freiheitsgrad}$. Der Freiheitsgrad berechnet sich aus der Anzahl der Messwerte abzüglich der Zahl der Fitparameter (`len(anzahl[12:-12])-3`). Im

folgenden Code sind alle Größen die sich auf den Gauss beziehen mit g indiziert und Größen die sich auf den Poisson beziehen mit p.

```
#Gauss:
chi2_g=np.sum((gaussian(anzahl[12:-12],*popt)
               -haeufigkeit[12:-12])**2/fehler[12:-12]**2)
dof_g=len(anzahl[12:-12])-3 #dof: degrees of freedom, Freiheitsgrad
chi2_red_g=chi2_g/dof_g
print("chi2_g=", chi2_g)
print("chi2_red_g=",chi2_red_g)
#Poisson:
chi2_p=np.sum((poisson(anzahl[12:-12],*popt_p)
               -haeufigkeit[12:-12])**2/fehler[12:-12]**2)
dof_p=len(anzahl[12:-12])-2 #poisson hat nur 2 Parameter
chi2_red_p=chi2_p/dof_p
print("chi2_p=", chi2_p)
print("chi2_red_p=",chi2_red_p)
```

Berechnen Sie noch die „Fitwahrscheinlichkeit“, das heißt die Wahrscheinlichkeit, dass Sie bei einer Wiederholungsmessung ein χ^2 - Wert erhalten, der größer oder gleich Ihrem χ^2 - Wert ist.

```
from scipy.stats import chi2
#Gauss:
prob_g=round(1-chi2.cdf(chi2_g,dof_g),2)*100
#Poisson:
prob_p=round(1-chi2.cdf(chi2_p,dof_p),2)*100
print("Wahrscheinlichkeit Gauss=", prob_g, "%")
print("Wahrscheinlichkeit Poisson=", prob_p, "%")
```

Drucken Sie das Arbeitsblatt aus und heften Sie es in Ihr Laborbuch.

VIII.4 Auswertung der Daten mit kleiner mittlerer Ereigniszahl

Diese Auswertung können Sie mit demselben Code durchführen wie zuvor. Machen Sie eine Kopie von der zuletzt verwendeten Arbeitsmappe und ändern Sie den Namen der zur importierenden Datei. Führen Sie die einzelnen Befehle sukzessiv aus und modifizieren Sie an den entsprechenden

Stellen den Code. Da Sie bei dieser Messungen höhere Häufigkeiten haben, müssen Sie nicht oder höchstens bei höheren Raten die Arrays beschneiden. Ferner müssen Sie in den Diagrammen den Abszissenbereich modifizieren (`x=np.linspace(start,stop,steps)`). Um besser die Unterschiede zwischen Gauss und Poisson zu erkennen, sollten Sie für die Ordinate eine Logarithmische Skalierung wählen. Das geht mit dem Befehl:

```
plt.yscale('log')
```

Den y-Bereich können Sie mit

```
plt.ylim((y_min,y_max))
```

einstellen. Das Diagramm sollte so ähnlich aussehen wie in Abbildung 9. Drucken

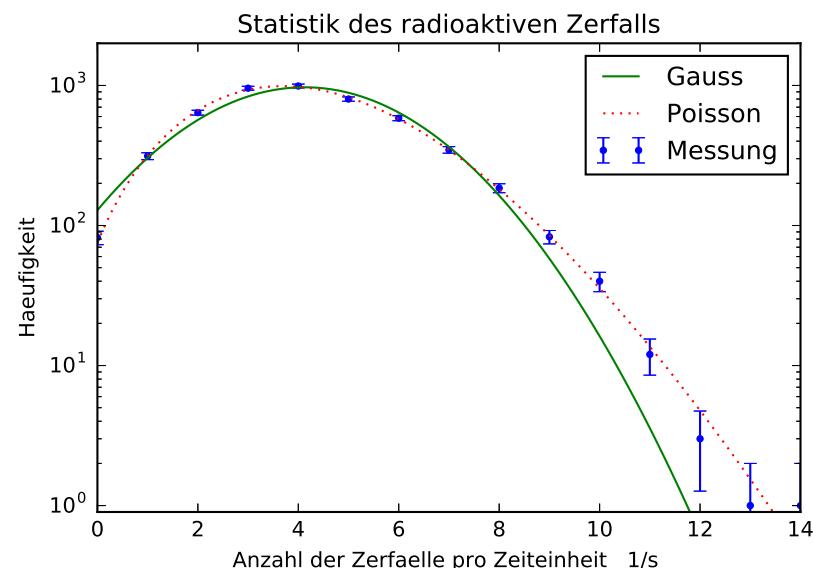


Abbildung 9: Verteilung der Zährlaten bei kleiner mittlerer Ereigniszahl. Zusätzlich wurde eine Gauß- bzw. Poissonverteilung an die Daten angepasst.

Sie das Arbeitsblatt und das Diagramm aus und heften Sie es in Ihr Laborbuch.

IX Anhang

IX.1 Die Poisson-Verteilung als Grenzfall der Binomial-Verteilung

Bezeichnen wir den Mittelwert von k mit $\mu \equiv np$, so lässt sich die Binomial-Verteilung

$$B(k; n, p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad (25)$$

$$= \frac{n!}{k! (n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \quad (26)$$

wie folgt umformen. Mit $p=\mu/n$ ergibt sich

$$B(k; n, p) = \frac{n!}{k! (n-k)!} \frac{\mu^k}{n^k} \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^{n-k} \quad (27)$$

$$= \left\{ \frac{n!}{(n-k)!} \frac{1}{n^k} \right\} \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^{-k} \frac{\mu^k}{k!} \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^n. \quad (28)$$

Führen wir nun den Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ und $p \rightarrow 0$ durch, mit der Forderung das $\mu = np$ endlich bleibt, so konvergieren die ersten beiden Faktoren gegen Eins. Für den zweiten Faktor ist dies sofort einzusehen. Für den ersten Ausdruck in der geschweiften Klammer gilt für $n \gg k$:

$$\frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1) \approx n^k \quad (29)$$

und somit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{n!}{(n-k)!} \frac{1}{n^k} \right\} = 1. \quad (30)$$

Der letzte Faktor in Gleichung (28) konvergiert gegen die Exponentialfunktion mit dem Argument $-\mu$. Somit erhalten wir schließlich die Poisson-Verteilung:

$$P(k; \mu) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}. \quad (31)$$

IX.2 Die Gauß- Verteilung als Grenzfall der Poisson- Verteilung

Für große Mittelwerte ($\mu > 30$) geht die Poisson- Verteilung in eine Gauß-Verteilung über. Ersetzen wir die Fakultät in der Poisson- Verteilung durch die Stirling'sche Näherungsformel

$$k! = \sqrt{2\pi k} k^k e^{-k}, \quad (32)$$

so ergibt sich

$$P(k; \mu) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} \rightarrow \frac{\mu^k e^{-\mu}}{\sqrt{2\pi k} k^k e^{-k}} = \frac{e^{-(\mu-k)}}{\sqrt{2\pi\mu}} \left(\frac{\mu}{k}\right)^{k+\frac{1}{2}} \quad (33)$$

$$= \frac{e^{-(\mu-k)}}{\sqrt{2\pi\mu}} \left(1 + \frac{\mu-k}{k}\right)^{k+\frac{1}{2}} \quad (34)$$

$$= \frac{e^{-(\mu-k)}}{\sqrt{2\pi\mu}} \exp \left\{ \left(k + \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 + \frac{\mu-k}{k}\right) \right\} \quad (35)$$

Entwickeln wir den Logarithmus nach Taylor

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad (36)$$

und brechen nach dem quadratischen Glied ab, so erhalten wir

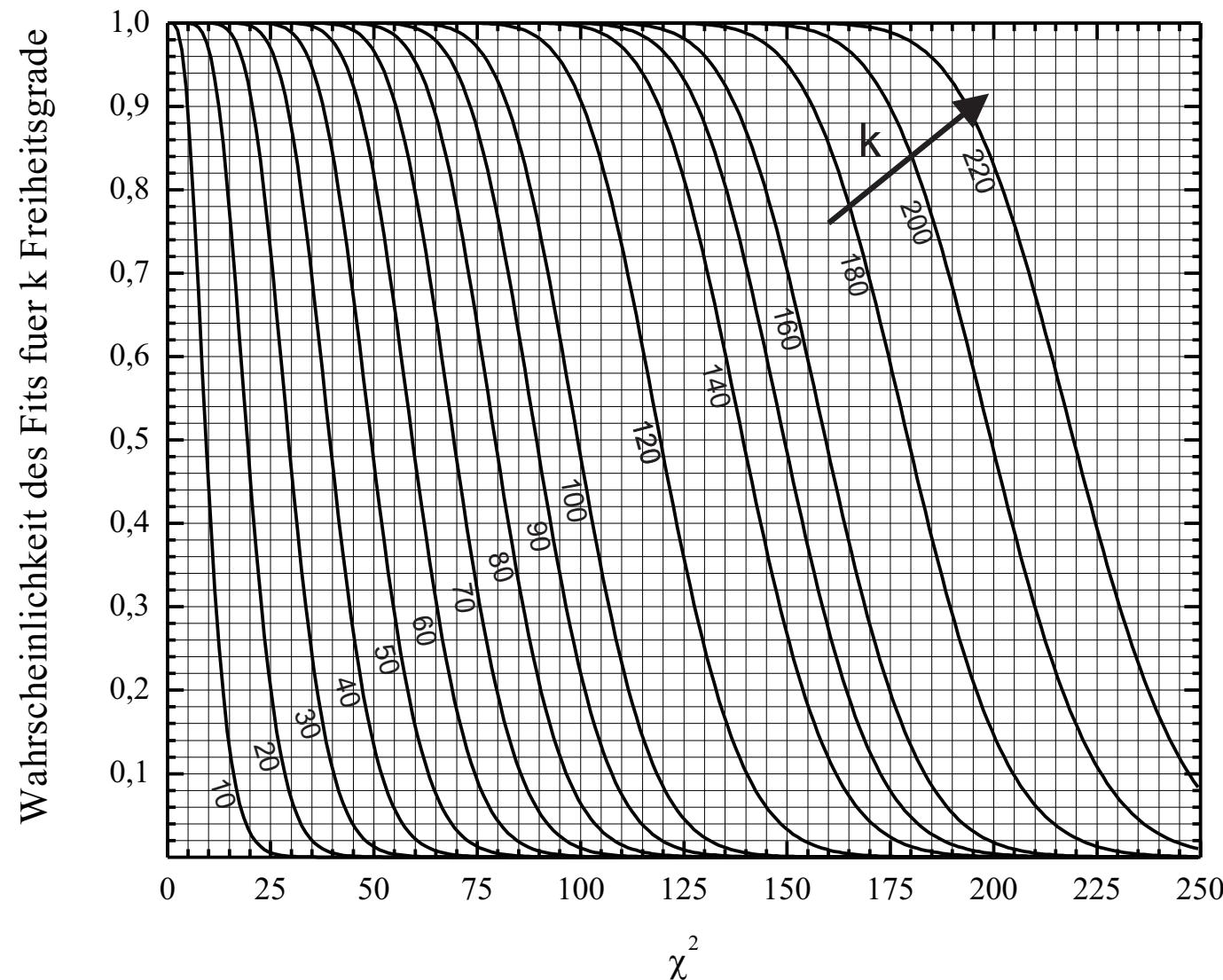
$$P(k; \mu) \rightarrow \frac{e^{-(\mu-k)}}{\sqrt{2\pi\mu}} \exp \left\{ \left(k + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{\mu-k}{k} - \frac{1}{2} \frac{(\mu-k)^2}{k^2}\right) \right\}. \quad (37)$$

Bei hinreichend großem k können wir $k + 1/2$ durch k ersetzen und erhalten damit

$$P(k; \mu) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu}} e^{-\frac{(\mu-k)^2}{2k}}. \quad (38)$$

Da $(\mu - k)/k \ll 1$ können wir im Nenner des Exponenten k durch μ ersetzen und erhalten schließlich einen Spezialfall der Gauß- Verteilung mit $\sigma = \sqrt{\mu}$:

$$G(k; \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu}} e^{-\frac{(\mu-k)^2}{2\mu}}. \quad (39)$$

Abbildung 10: Fitwahrscheinlichkeiten. Der Parameter k gibt die Anzahl der Freiheitsgrade an.

Versuch 252

Aktivierung von Indium und von Silber mit thermischen Neutronen

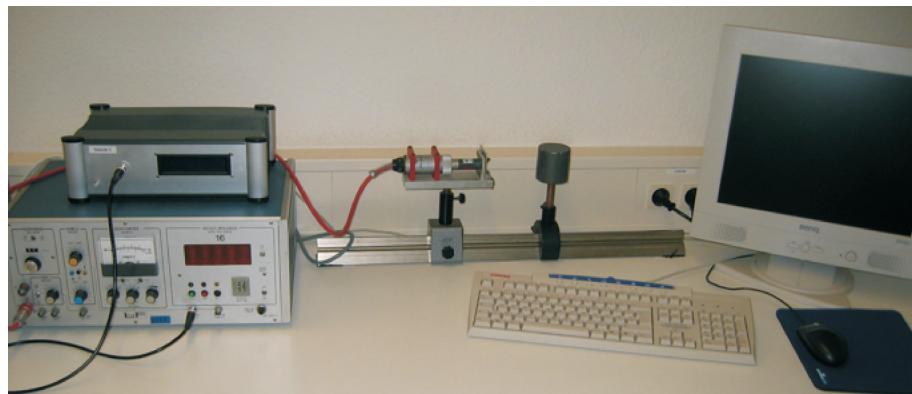


Abbildung 1: Oben: Versuchsaufbau. Unten: Neutronenquelle.

I Messaufbau

- Geiger-Müller Zählrohr mit Betriebsgerät
- Externer Impulszähler
- PC mit Drucker
- Neutronenquelle
- Präparatehalterung
- Indium- und Silberbleche

II Vorbereitung

Bereiten Sie sich auf die Beantwortung von Fragen zu folgenden Themen vor:
Radioaktiver Zerfall, Zerfallsarten, Nuklide, Geiger-Müller-Zählrohr.

Verständnisfragen:

1. Was ist ein Neutron?
2. Was passiert, wenn ein Atomkern ein langsames Neutron einfängt?
3. Wie ist der Zusammenhang zwischen Aktivierung und Zerfall?
4. Was ist die Halbwertszeit, wie kann man sie messen?
5. Wie sieht das Spektrum eines β -Strahlers aus? Warum handelt es sich um ein kontinuierliches Spektrum?

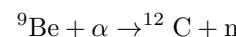
III Aufgaben

1. Bestimmung der Halbwertszeit von ^{116}In .
2. Bestimmung der Halbwertszeiten von ^{108}Ag und ^{110}Ag

IV Grundlagen

Zur Herstellung einer radioaktiven Quelle werden stabile Isotope durch Kernreaktionen aktiviert. Besonders geeignet hierfür sind Neutronen, da diese nicht der Coulomb-Wechselwirkung ausgesetzt sind und daher vom Kern leicht eingefangen werden können. In diesem Versuch werden die Isotope ^{115}In bzw. ^{107}Ag / ^{109}Ag mit Hilfe thermischer Neutronen aktiviert.

Die Neutronenquelle besteht aus einem Präparat, das Berylliumspäne und einen α -Strahler (^{241}Am) enthält. Durch die Kernreaktion



entstehen Neutronen mit einer Energie von 1 - 10 MeV. Diese schnellen Neutronen werden in dem die Neutronenquelle umgebenden Paraffinblock durch elastische Stöße mit den Wasserstoffkernen abgebremst, bis sie nahezu thermische Energie erreicht haben. Stöße gegen die Kohlenstoffkerne bremsen die Neutronen nur wenig ab. Bei einem elastischen Stoß gegen eine gleich schwere Masse (nämlich gegen ein Proton) verliert dagegen das Neutron im Mittel die Hälfte der Energie. Viele Atomkerne haben einen großen Wirkungsquerschnitt für den Einfang langsamer Neutronen. Dabei entsteht ein Isotop des bestrahlten Elements mit einer um eins erhöhten Massenzahl. Wenn dieser Kern radioaktiv ist, stellt die Aktivierung durch langsame Neutronen die bequemste Möglichkeit zur Erzeugung dieses radioaktiven Isotops dar. Bei Bestrahlung von Indium wird aus dem stabilen Isotop ^{115}In der β -Strahler ^{116}In gebildet. Allerdings werden dabei zwei sogenannte Isomere erzeugt. Dabei handelt es sich um Nuklide, die jeweils die gleiche Anzahl von Neutronen und Protonen besitzen, sich aber in einem unterschiedlichen Energiezustand befinden. Zum einen wird ^{116}In gebildet welches sich im Grundzustand befindet, zum anderen der metastabile Zustand ^{116m}In . Beide Nuklide sind β^- -Strahler die mit unterschiedlichen Halbwertszeiten in das stabile Isotop ^{116}Sn zerfallen. Die Halbwertszeiten finden Sie in der Nuklidkarte im Anhang.

Bei der Aktivierung wird pro Sekunde eine bestimmte Zahl von radioaktiven Kernen erzeugt. Die Zahl der pro Sekunde zerfallenden Kerne ist aber der Anzahl der jeweils vorhandenen radioaktiven Kerne proportional (Zerfallsgesetz). Daher nimmt die Aktivität A (d.h. die Zahl der Zerfälle pro Sekunde) als Funktion der Bestrahlungsdauer t nach dem Gesetz

$$A(t) = A_\infty(1 - \exp\{-\lambda t\}) \quad (1)$$

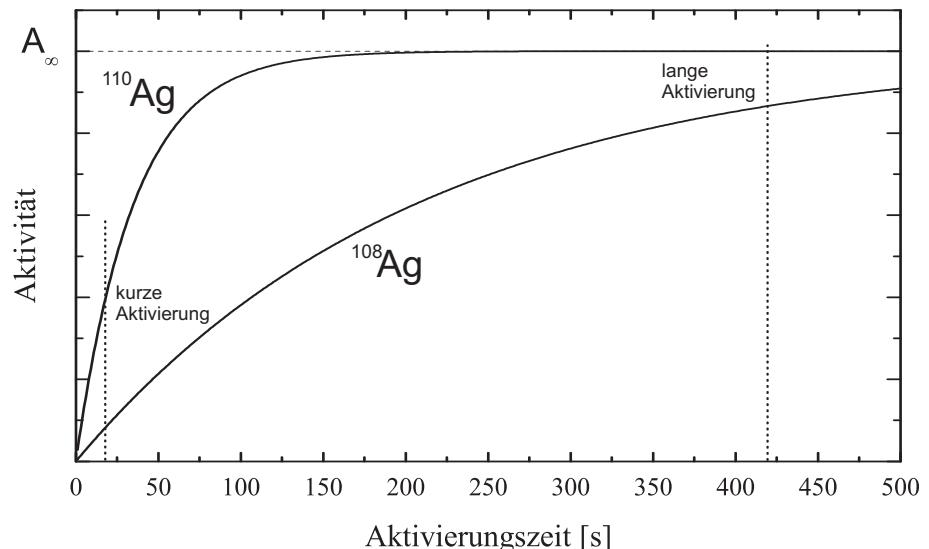


Abbildung 2: Aktivität von ^{108}Ag und ^{110}Ag bei unterschiedlichen Aktivierungszeiten. Es wurde angenommen, dass der Wirkungsquerschnitt bei beiden Isotopen identisch ist.

zu, bis ein Gleichgewicht eintritt, bei dem pro Sekunde gleichviel Kerne des radioaktiven Isotops neu gebildet werden wie pro Sekunde zerfallen. Nach Ende der Aktivierung tritt dann nur noch der Zerfall nach dem radioaktiven Zerfallsge setz

$$A(t) = A_0 \exp(-\lambda t) \quad (2)$$

auf. Für die Halbwertszeit gilt

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}. \quad (3)$$

Da natürliches Silber aus 51% ^{107}Ag und 49% ^{109}Ag besteht, werden bei der Aktivierung zwei unterschiedliche Isotope erzeugt. Es entstehen die radioaktiven Silberisotope ^{108}Ag und ^{110}Ag . Sie zerfallen durch β -Zerfall in ^{108}Cd und ^{110}Cd . Da die Halbwertszeiten dieser Silber-Isotope sich um etwa einen Faktor 6 unterscheiden, kann durch unterschiedlich lange Aktivierungszeiten das

Isotopenverhältnis variiert werden. Wird nur kurz aktiviert (20 s), entsteht vor allem ^{110}Ag . Mit zunehmender Aktivierungszeit wird vermehrt ^{108}Ag erzeugt während ^{110}Ag in Sättigung geht (Abbildung 2).

V Durchführung des Versuchs

1. Halbwertszeit von Silber

Achtung: Die bereits aktivierte Indiumpräparate dürfen während dieser Messung nicht aus der Neutronenquelle entfernt werden! Für die Aktivierung der Silberpräparate sind genügend freie Steckplätze vorhanden.

Stellen Sie am Betriebsgerät die Zählrohrspannung zwischen 500 V bis 550 V ein. Bestimmen Sie zunächst den Untergrund. Entfernen Sie alle Quellen aus dem Raum. Stellen Sie im Messprogramm `zerfall.exe` die Torzeit des Zählers auf 10 Sekunden und messen Sie über einen Zeitraum von 8 Minuten den Untergrund. Speichern Sie die Messdaten unter einem geeigneten Namen, z.B. `UntergrundAgxx.dat` wobei Sie für `xx` Ihre Initialen wählen.

Für die Silbermessung wird wieder eine Torzeit von 10 Sekunden eingestellt. Lassen Sie sich vom Assistenten zeigen, wie man die Träger mit den Silberblechen (blaue Kennzeichnung) in die Neutronenquelle einlegt. Das Silberblech wird mindestens 7 Minuten lang aktiviert und dann **so schnell wie möglich** vor das Zählrohr gebracht. Stecken Sie das Präparat mit der Silberseite zum Zählrohr hin in die vorgesehene Aussparung und fixieren Sie es mit dem Aluminiumblech. Starten Sie sofort das Messprogramm durch einen Mausklick auf den Pfeil im linken oberen Bereich des Programmfensters. Die gesamte Messzeit sollte 400 Sekunden betragen. **Wiederholen Sie die Aktivierung und die Messung mit der gleichen Probe dreimal. Insgesamt sollen die Zählraten für vier Aktivierungszyklen gemessen werden.** Speichern Sie jedes Mal die Messdaten und drucken Sie das Protokoll aus.

2. Halbwertszeit von Indium

Stellen Sie im Messprogramm das Messintervall auf 120 s und stecken Sie das aktivierte Indium- Präparat (rote oder grüne Kennzeichnung) in die

Halterung. Die Messung sollte über einen Zeitraum von 50 Minuten gehen. Speichern Sie am Ende der Messung die Daten und drucken Sie das Protokoll aus. Während die Indiummessung läuft, können Sie bereits mit der Auswertung der Silbermessung beginnen.

VI Auswertung in Python mit Jupyter Notebook

Führen Sie die Rechnungen in einem vollständig dokumentierten Jupyter Notebook durch und legen Sie es Ihrer schriftlichen Ausarbeitung ausgedruckt bei. Starten Sie das Programm Jupyter vom Desktop aus.

1. Zerfall der Silberisotope:

Untergrundbestimmung:

Kopieren Sie Ihre Messdaten in den Ordner `data` auf dem Desktop. Wir benötigen die folgenden Module:

```
%matplotlib inline
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
```

Zum Importieren der Untergrundsmessung verwenden wir die Numpy Funktion `loadtxt()`. Geben Sie hier Ihren Dateiname an. Mit der Option `usecols=[1]` wird nur die zweite Spalte (gemessene Ereignisse) ausgelesen:

```
unterg = np.loadtxt('data/Messung.dat', usecols=[1])
```

Wir brauchen im Weiteren den Mittelwert der Untergrundrate und dessen Fehler. Da wir später die vier Messreihen addieren, muss der Untergrund um den Faktor vier angehoben werden.

```
mittelw_unterg=np.mean(4*unterg)
fehler_unterg=np.std(4*unterg)/np.sqrt(len(unterg))
print('Mittelwert:', mittelw_unterg, 'Fehler:', fehler_unterg)
```

Bestimmung der Zerfallskonstanten:

Importieren Sie die Daten der vier Zerfallsmessungen in die Arrays n1, n2, n3, n4 und berechnen Sie die Summe N und den Fehler.

```
n1 =np.loadtxt('data/Messung.dat', usecols=[1])
...
N=n1+n2+n3+n4
Fehler_N=np.sqrt(N)
```

Wir benötigen noch die Zerfallszeiten jedes Intervalls. Da die Zeitintervalle jedesmal 10 s betragen, können wir diese Werte leicht mit der Numpy Funktion arange() generieren:

```
t=np.arange(5,405,10)
```

Tragen Sie Ihre Messwerte in ein Diagramm ein.

```
plt.errorbar(t,N, Fehler_N, linestyle='None')
plt.xlabel('Zeit / s')
plt.ylabel('Zerfaelle')
plt.title('Zerfall von Silber mit Untergrund')
plt.yscale('log')
```

Im nächsten Schritt soll die Zerfallsfunktion an die Daten gefittet werden.

```
y0=mittelw_unterg #Untergrund
def fit_func(x, A1,l1,A2,l2):
    return A1*np.exp(-x*l1) + A2*np.exp(-x*l2) + y0
```

Zusätzlich sollten wir die Fitparameter initialisieren, d.h. Startwerte für den Fitalgorithmus angeben. Mit p0=[500,0.02,50,0.001] werden die Parameter in der Reihenfolge wie sie in der Funktion definiert wurden initialisiert. Diese Werte müssen Sie an Ihrer Messung anpassen. Falls Sie keine Fehlermeldung erhalten haben, war der Fit erfolgreich. Falls doch müssen Sie die Startwerte solange ändern bis der Fit konvergiert. Eventuell müssen Sie auch die Zahl der Iterationen erhöhen. Tragen Sie dazu in der Funktion curve_fit() die Option maxfev=5000 ein.

```
from scipy.optimize import curve_fit
popt, pcov=curve_fit(fit_func,t,N, p0=[500,0.02,50,0.001],
                      sigma=Fehler_N)
```

Tragen Sie Ihre Messwerte und die angepasste Funktion in ein Diagramm ein. Mit *popt werden die Fitparameter automatisch in Ihre zuvor definierte Funktion entpackt. Das Diagramm sollte so ähnlich wie in Abbildung 3 aussehen.

```
plt.errorbar(t,N, Fehler_N, linestyle='None')
plt.xlabel('Zeit / s')
plt.ylabel('Zerfaelle')
plt.title('Zerfall von Silber mit Untergrund')
plt.yscale('log')
plt.plot(t,fit_func(t,*popt))
plt.savefig('figures/Silber.pdf',format='pdf')
```

Lassen Sie sich nun alle Fitparameter ausgeben. Die Fitparameter finden Sie im Array popt und deren Varianzen auf der Diagonalen im Array pcov.

```
print("A1=",popt[0], ", Standardfehler=", np.sqrt(pcov[0][0]))
print("l1=",popt[1], ", Standardfehler=", np.sqrt(pcov[1][1]))
print("A2=",popt[2], ", Standardfehler=", np.sqrt(pcov[2][2]))
print("l2=",popt[3], ", Standardfehler=", np.sqrt(pcov[3][3]))
```

Diskutieren Sie die Güte des Fits. Berechnen Sie die χ^2 -Summe:

$$\chi^2 = \sum_i^N \left(\frac{\text{Funktionswert}_i - \text{Messwert}_i}{\text{Fehler}_i} \right)^2 \quad (4)$$

und $\chi^2_{red} = \chi^2 / \text{Freiheitsgrad}$. Der Freiheitsgrad berechnet sich aus der Anzahl der Messwerte abzüglich der Zahl der Fitparameter (`len(N)-4`).

```
chi2_=np.sum((fit_func(t,*popt)-N)**2/Fehler_N**2)
dof=len(N)-4 #dof: degrees of freedom, Freiheitsgrad
chi2_red=chi2_/dof
print("chi2=", chi2_)
print("chi2_red=",chi2_red)
```

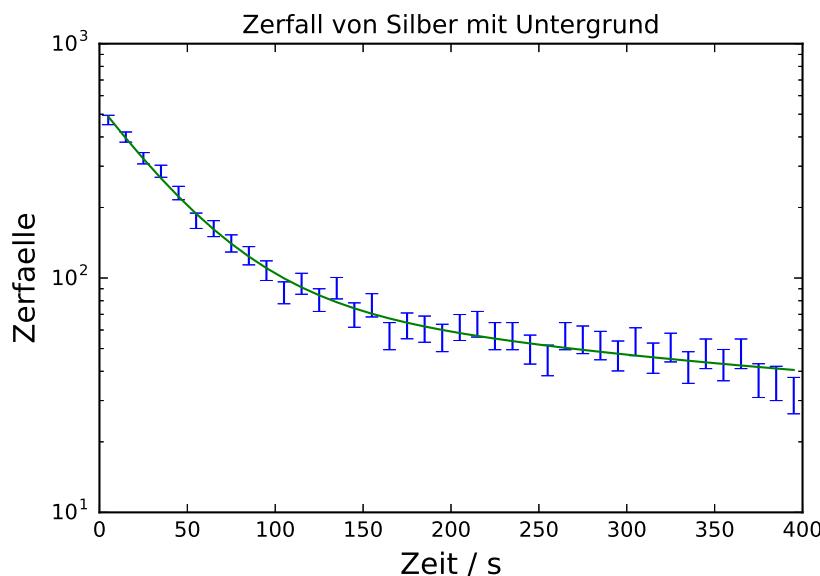


Abbildung 3: Zerfall von Silber

Berechnen Sie noch die „Fitwahrscheinlichkeit“, das heißt die Wahrscheinlichkeit, dass Sie bei einer Wiederholungsmessung ein χ^2 -Wert erhalten, der größer oder gleich Ihrem χ^2 -Wert ist.

```
from scipy.stats import chi2
prob=round(1-chi2.cdf(chi2_,dof),2)*100
print("Wahrscheinlichkeit=", prob, "%")
```

Der Fehler des Untergrunds wurde in dieser Fitroutine nicht berücksichtigt. Dies sollen Sie nun im letzten Schritt durchführen. Wiederholen Sie dazu den Fit zweimal:

- Subtrahieren Sie vom gemessenen Untergrund den $1-\sigma$ Fehler des Untergrunds. Wählen Sie diesen Wert als Fitparameter y_0 .
- Wiederholen Sie dies, indem Sie nun zum gemessenen Untergrund den $1-\sigma$ Fehler des Untergrunds hinzufügen.

Sie erhalten so zusätzlich zwei unterschiedliche Werte li^- , li^+ für die jeweiligen Zerfallskonstanten. Berechnen Sie aus diesen Werten die Differenzen $|li - li^-|$ und $|li - li^+|$ wobei li die ursprünglich bestimmte Zerfallskonstante darstellen. Der Fehler der jeweiligen Zerfallskonstante erhalten Sie nun, indem Sie den Mittelwert der berechneten Differenzen quadratisch zum Fehler aus dem ersten Fit addieren. Drucken Sie am Ende das Diagramm und Arbeitsblatt aus und geben Sie die Lebensdauern und Halbwertszeiten der beiden Silberatome mit Fehler an. Vergleichen Sie diese mit den Literaturwerten (aus der Nuklidkarte). Diskutieren Sie die Fitwahrscheinlichkeit aus dem Wert von χ^2 .

2. Indiumzerfall:

Die Auswertung der Indiummessung erfolgt analog zu der Silbermessung. Den Untergrund müssen Sie für ein zwei Minuten Intervall bestimmen. Als Fitfunktion wählen Sie eine einfache Exponentialfunktion. Hinweis: Sie werden im Diagramm vermutlich festgestellt haben, dass der erste Messwert deutlich über der Fitkurve liegt, auch wenn das nicht unbedingt signifikant sein muss. Schauen Sie bei Ihren Kollegen nach. Falls dies dort auch der Fall ist, sollten Sie sich überlegen ob es eine systematische Ursache dafür gibt. Schauen Sie sich die Zerfallsdaten von ^{116}In in der Nuklidkarte nochmals an. Falls Sie einen Grund finden, dann sollten Sie den ersten Messwert bei der Anpassung nicht benutzen.

VII Anhang

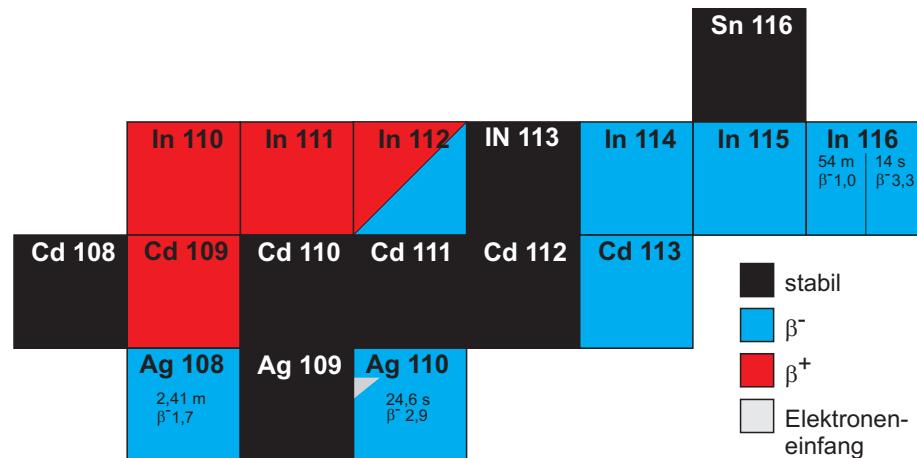


Abbildung 4: Ausschnitt Nuklidkarte. Die Farben symbolisieren die verschiedenen Zerfallsarten. Bei den hier interessierende Isotopen ist zusätzlich noch die Halbwertszeit, sowie die Energie der emittierten Strahlung angegeben (in MeV).

Versuch 253

Absorption von α -, β - und γ - Strahlung

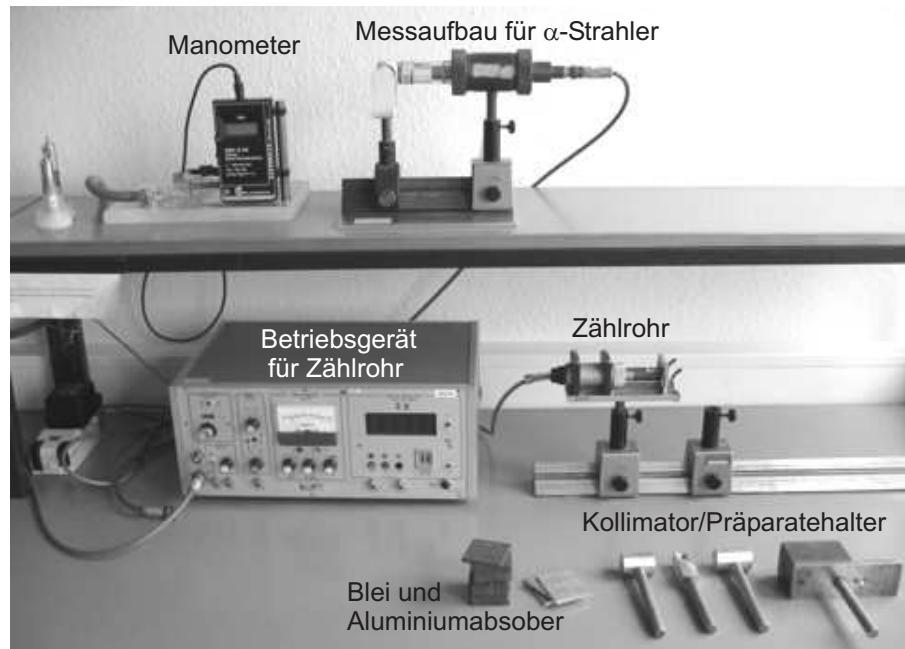


Abbildung 1: Aufbau des Versuchs Absorption von α -, β - und γ - Strahlung.

I Messaufbau

- Geiger-Müller Zählrohr
- Zählgerät
- Evakuierbarer Glaszylinder mit eingebautem Zählrohr und ^{241}Am -Präparat
- β -Präparat ($^{90}\text{Sr}/^{90}\text{Y}$)

- γ -Präparat (^{60}Co)
- diverse Präparatehalter und Kollimatoren
- Aluminium- und Bleiabsorber
- Vakuumpumpe

II Literatur

- Standardwerke der Physik: Gerthsen, Bergmann-Schäfer, Tipler, Demtröder.

III Vorbereitung

1. Was ist Radioaktivität?
2. Was ist α -, β - und γ -Strahlung? Wie sehen die Zerfallsprozesse aus?
3. Wie sehen die Emissions-Energiespektren der verschiedenen Strahlungen aus? Woher kommt der Unterschied?
4. Wie werden α -, β - und γ -Strahlung detektiert? (Zählrohr, Szintilator,etc.)
5. Wie wird α - und β -Strahlung in Materie absorbiert? Durch welche Prozesse verlieren die Teilchen ihre Energie? Wie sehen die Absorptionskurven aus? Wie groß sind die typischen Reichweiten?
6. Wie wird γ -Strahlung in Materie absorbiert? Erläutern Sie das Beer'sche Gesetz. Durch welche Prozesse verlieren die Teilchen ihre Energie? Wie sieht die Absorptionskurve aus?
7. Was beschreibt die Aktivität? Wie ändert sich die Aktivität einer Quelle mit der Zeit?

IV Aufgaben

Es ist die Absorption von β -Strahlen ($^{90}\text{Sr}/^{90}\text{Y}$), von γ -Strahlen (^{60}Co) und von α -Strahlen (^{241}Am) zu messen. Aus den Absorptionskurven sind die Maximalenergie der β -Strahlung bzw. die Energie der α - und γ -Strahlung zu bestimmen. Die Aktivität des γ -Strahlers ist abzuschätzen.

V Grundlagen

Radioaktivität ist die Eigenschaft instabiler Atomkerne spontan unter Energieabgabe in einen energetisch günstigeren Zustand überzugehen. Die freiwerdende Energie wird in Form von geladenen Teilchen (α -, β -Strahlung) oder elektromagnetischer Strahlung (γ -Quanten) abgegeben. Die Aktivität eines radioaktiven Stoffes beschreibt dabei die pro Sekunde auftretenden Zerfälle. Dabei gilt das Zerfallsgesetz:

$$n = n_0 \cdot e^{-\lambda t}, \quad (1)$$

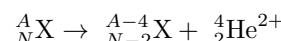
wobei λ die Zerfallskonstante darstellt. Sie lässt sich aus der Halbwertszeit $T_{1/2}$ gemäß

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \quad (2)$$

bestimmen.

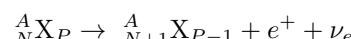
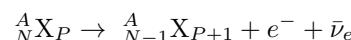
Je nach Art des entstehenden Zerfallsproduktes unterscheidet man drei verschiedene Zerfallsarten. Bei den folgenden Zerfallsarten bezeichnen A die Massenzahl (Anzahl der Nukleonen), N die Neutronenzahl und P die Anzahl der Protonen eines Nuklids X.

1. α -Strahlung besteht aus zweifach positiv geladenen Heliumkernen.



Die bei einem Zerfall emittierte α -Strahlung ist monoenergetisch (diskrete Quantenzustände im Kern). Die Energie ist charakteristisch für den emittierenden Stoff. Der Restkern erhält dabei eine Rückstoßenergie, die ausreichend ist auf die umgebenden Moleküle ionisierend zu wirken.

2. β -Teilchen sind entweder negativ geladene Elektronen (β^- -Zerfall) oder positiv geladene Positronen (β^+ -Zerfall).



Da neben dem Elektron (Positron) zusätzlich noch ein Antineutrino (Neutrino) emittiert wird und sich somit die beim Zerfall freiwerdende Energie auf drei verschiedene Teilchen verteilt, ist das Energiespektrum des β -Zerfalls nicht monoenergetisch sondern kontinuierlich. Das Elektron (Positron) kann jede Energie zwischen 0 und der maximal beim Zerfall freiwerdenden Energie E_{max}^β annehmen. E_{max}^β ist wieder charakteristisch für

den emittierenden Stoff. Das zusätzlich emittierte Antineutrino (Neutrino) ist nahezu masselos, ungeladen und hat die Energie, die dem β -Teilchen fehlt. Der Restkern erfährt auch beim β -Zerfall einen Rückstoß, der jedoch aufgrund der geringen Masse des Elektrons wesentlich kleiner ist als beim α -Zerfall.

3. Bei der γ -Strahlung handelt es sich um elektromagnetische Strahlung. Sie entsteht als Nebenprodukt beim α - und β -Zerfall, wenn der Mutterkern in einen angeregten Zustand des Tochterkerns zerfällt. Beim Übergang in den Grundzustand (oder einen energetisch niedrigeren Zustand) wird ein Photon mit einer charakteristischen Energie emittiert. Somit besteht das Energiespektrum der γ -Strahlung aus diskreten Energiewerten, die für den emittierenden Stoff charakteristisch ist.

Geladene Teilchen (α - und β -Strahlung) werden in Materie überwiegend durch Stöße und Wechselwirkung mit den Elektronen der Atomhüllen gebremst. Dabei geben sie ihr Energie nahezu kontinuierlich in kleinen Portionen ab. Der Energieverlust ist umgekehrt proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit. D.h. schnelle Teilchen geben weniger Energie ab, als langsame. Die abgegebene Energie wird in Ionisierung angelegt. α -Strahlung hat in Materie eine bestimmte Reichweite die proportional zur Energie der Teilchen ist. Durch Variation der Absorberdicke kann die Reichweite der Strahlung bestimmt werden. Bei den monoenergetischen α -Teilchen bleibt die Zählrate hinter dem Absorber dabei nahezu konstant bis zum Erreichen einer kritischen Dicke, danach fällt sie rasch auf Null ab (siehe Abbildung 2).

Elektronen sind sehr viel leichter und damit schneller als α -Teilchen gleicher Energie. Sie haben daher eine viel größere Reichweite. Elektronen werden wegen ihrer kleinen Masse und großen Reichweite durch Streuung im Absorber vielfach abgelenkt, und die wahre Bahnlänge im Absorber kann z.B. doppelt so groß wie die Absorberdicke sein. Dies führt selbst bei monoenergetischen Elektronen zu einer Verwaschung der gemessenen Absorptionskurve. Das kontinuierliche Energiespektrum der β -Strahlen erschwert weiterhin eine genaue Auswertung der Absorptionskurve bezüglich der Energie-Reichweite-Beziehung.

γ -Quanten werden in Materie nach dem Lambert-Beer-Gesetz absorbiert:

$$n = n_0 e^{-\mu x}, \quad (3)$$

wobei μ der Schwächungskoeffizient des jeweiligen Absorbermaterials ist. Bei der Absorption und Streuung tragen die Elektronen der Atomhülle mehr bei,

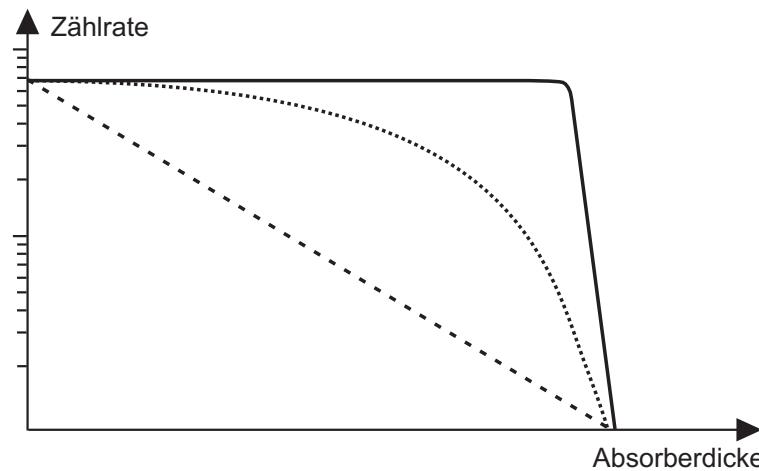


Abbildung 2: Schematische Darstellung der Reichweite von α - (durchgezogene Linie), β - (gepunktete Linie) und γ -Strahlung (gestrichelte Linie) in Materie.

als der Atomkern. Die wichtigsten Schwächungsmechanismen sind Photoeffekt, Comptonstreuung und Paarbildung:

1. Photoeffekt: Ein γ -Quant gibt seine Energie an ein Elektron in der Atomhülle ab und schlägt dieses aus der Hülle. Durch Nachrücken äußerer Elektronen, kommt es zu charakteristischer Strahlung. Jedesmal wenn die Energie der γ -Quanten ausreicht, um eine tiefer gelegene Schale zu ionisieren, steigt die Absorption schlagartig an. Diese charakteristischen Linien sitzen auf einem kontinuierlichen Absorptionsspektrum (Abbildung 4). Durch die Abschirmung der Außenelektronen kann die Energiedifferenz zwischen den unbesetzten Außenelektronen und der Ionisierungsenergie vernachlässigt werden und die Elektronen können alle Energien oberhalb $13,6 \text{ eV} \cdot (Z - 1)^2$ annehmen.
2. Comptonstreuung: Ein γ -Quant wird inelastisch an einem Hüllenelektron gestreut und verliert dadurch einen Teil seiner Energie.
3. Paarbildung: Sobald die Energie des γ -Quants größer ist als $1,022 \text{ MeV}$, kann das γ -Quant in ein Elektron-Positron-Paar zerfallen. Die überschüssige Energie, die nicht bei der Erzeugung der Ruheenergie der beiden Teil-

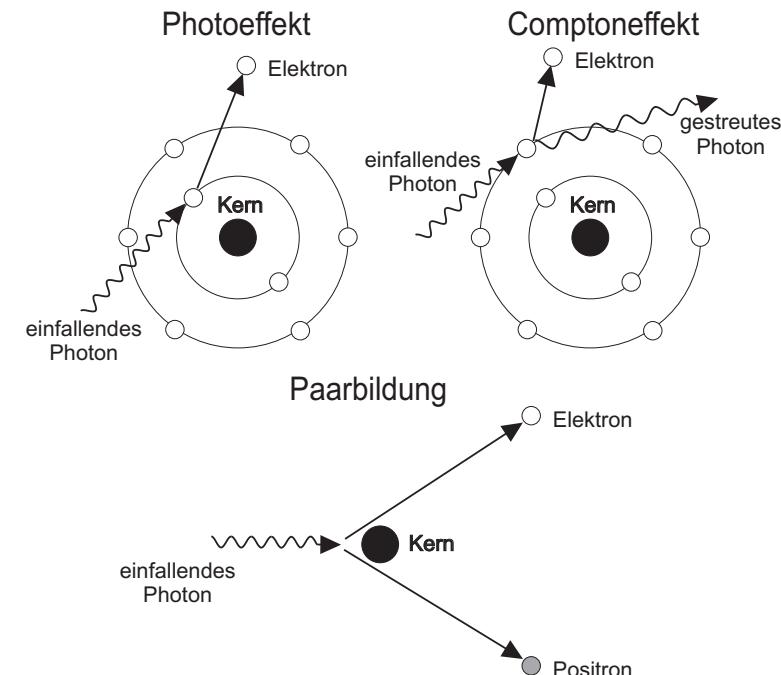


Abbildung 3: Absorption von γ -Strahlung durch Photoeffekt, Comptoneffekt und Paarbildung.

chen verbraucht wird, wird als kinetische Energie auf die beiden Teilchen aufgeteilt. Zur Impulserhaltung muss noch ein weiteres Teilchen, bevorzugt ein Kern, beteiligt sein, das den verbleibenden Impuls aufnimmt.

Für kleine Energien dominiert der Photoeffekt den Schwächungskoeffizienten, welcher mit steigender Energie rasch abnimmt bis die Comptonstreuung dominiert. Bei großen Energien überwiegt Paarbildung und der Schwächungskoeffizient steigt wieder an (Abbildung 4).

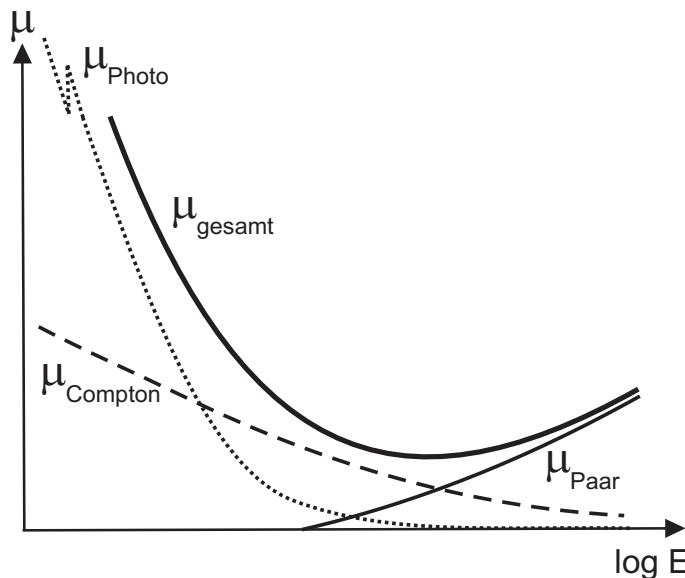


Abbildung 4: Beitrag des Photoeffekt, Comptoneffekt und Paarbildung zum Schwächungskoeffizient für γ -Strahlung.

VI Durchführung des Versuchs

VI.1 Inbetriebnahme des Zählrohrs

Das Zählrohr wird wie unter *Grundlagen zu den Versuchen der Radioaktivität, II Betriebsanleitung des Zählgerätes BF-SG 11* beschrieben, in Betrieb genommen. Dabei ist vor allem darauf darauf zu achten, dass die Schwellen richtig gesetzt sind! Die Betriebsspannung des Zählrohrs sollte im Bereich von 500 - 550 V liegen. Notieren sie die Betriebsspannung U und für später auch gleich den Radius r des Zählrohrs. Dieser Wert ist im Versuchsräum angegeben.

VI.2 Messung des Nulleffekts n_0

Zunächst wird 5 Minuten lang der Nulleffekt n_0 gemessen. Bei dieser Messung dürfen keine Strahlungsquellen im Raum sein! Der gemessene Nulleffekt dient bei der folgenden Absorptionsmessung von β -Strahlung als Anhalts-

punkt, wann die maximale Absorption erreicht ist. Er ist außerdem bei der Absorptionsmessung für γ -Strahlung und der Bestimmung der Aktivität zu berücksichtigen.

Bei den folgenden Messungen ist darauf zu achten, dass die jeweils richtigen Präparat-Halterungen verwendet werden und das Präparat in Höhe und Richtung genau auf die Mitte des Zählrohrs ausgerichtet ist!

VI.3 Absorption von β -Strahlung in Aluminium

Notieren sie die Kennnummer ihres Präparats.

Der runde Aluminium-Kollimator (kleine Öffnung auf einer Seite) wird in einem Abstand $d \approx 6$ cm (Messung d : Rille am Präparathalter – **Anfang** Zählrohr) in den Strahlengang des Zählrohrs gebracht und das $^{90}\text{Sr}/^{90}\text{Y}$ -Präparat in die Öffnung gesteckt.

Zunächst wird eine Messung ohne Abschirmung durchgeführt, anschließend werden in Schritten von 0,3 mm Aluminiumplatten direkt vor dem Zählrohr angebracht (damit auch im Absorber gestreute β -Teilchen noch detektiert werden) und jeweils die Zählrate n gemessen. Nach jeder Messung muss der Zähler durch Drücken der Taste **Reset** auf Null zurückgesetzt werden! Die Messdauer beträgt 30 s, bei kleineren Zählraten 2 Minuten. Nach Erreichen des Nulleffekts n_0 wird noch eine Messung mit zusätzlich 1 mm Aluminium durchgeführt bei einer Messzeit von 5 Minuten. Diese Messung liefert den Nulleffekt einschließlich der Zählrate, die durch die Bremsstrahlung der β -Teilchen im Al-Absorber und durch etwaige γ -Strahlung verursacht wird. Bei der Auswertung der Absorption von β -Strahlung ist dieser Wert als Nulleffekt n_0^β zu berücksichtigen.

VI.4 Absorption von γ -Strahlung in Blei

Notieren sie die Kennnummer ihres Präparats.

Der rechteckigen Bleikollimator (mit Absorberhalter) wird sorgfältig im Strahlengang des Zählrohrs justiert und das ^{60}Co -Präparat in die Halterung eingeschraubt. Messen sie den Abstand $d \approx 15$ cm zwischen Zählrohr und Präparat (Rille am Kollimator – **Anfang** Zählrohr).

Führen Sie zunächst eine Messung ohne Abschirmung durch. Anschließend werden in Schritten von 0,5 cm Bleiplatten auf die Halterung platziert. Stellen Sie die Bleiplatten direkt vor den Kollimator, damit die durch Comptoneffekt gestreuten Quanten möglichst nicht das Zählrohr treffen. Variieren Sie die Ab-

sorberdicke bis 5 cm. Die Messzeit beträgt jeweils 1 Minute.

VI.5 Bestimmung der Aktivität des γ -Strahlers

Zur Bestimmung der Aktivität des γ -Strahlers wird das ^{60}Co -Präparat in den dafür vorgesehene Bleizylinder mit kegelförmiger Öffnung eingeschraubt und im Abstand $d \approx 5\text{ cm}$ (Präparat-Ende – **Anfang** Zählrohr) im Strahlengang des Zählrohrs justiert. Die Zählrate n wird einmal 1 Minute lang gemessen. Anschließend werden nochmals Messungen bei Abständen von 10 cm und 20 cm durchgeführt.

VI.6 Absorptionsmessung und Energiebestimmung von α -Strahlung

Die Reichweite von α - Strahlen in Materie ist so gering, dass man am besten Luft als variablen Absorber verwendet. In einem evakuierbaren Glasrohr ist eine α -Quelle und ein Zählrohr eingebaut. Zur Beseitigung von energiearmen Elektronen, die neben den α -Teilchen aus dem Präparat kommen, befindet sich das Glasrohr zusätzlich zwischen den Polschuhen eines Magneten.

Für die Auswertung benötigen Sie die Dicke (bzw. Flächendichte) des Zählrohrfensters aus Glimmer. Sie ist auf dem Zählrohr angegeben. Notieren Sie diesen Wert in Ihr Protokollheft.

Verbinden Sie den Zählrohranschluss mit dem Zählgerät und evakuieren Sie das Glasrohr auf etwa 20 mbar. Messen Sie für verschiedene Drücke (Schrittweite 100 mbar) jeweils 1 Minute lang die Zählrate. In dem Bereich, in dem die Zählrate stark variiert sollten Sie zusätzlich einige Zwischenwerte messen.

VII Auswertung

VII.1 Absorption von β -Strahlung

$(n - n_0^\beta)$ wird über der Absorberdicke x im halblogarithmischen Diagramm aufgetragen. Aus diesem Diagramm wird die maximale Reichweite von β -Strahlung in Aluminium bestimmt, indem man auf diejenige Absorberdicke extrapoliert, bei der die Absorptionskurve nahezu senkrecht verlaufen würde. Der Fehler der Maximalreichweite wird durch eine Fehlerkurve abgeschätzt.

Aus der Maximalreichweite lässt sich die Flächendichte R^β in g/cm^2 bestimmen. Dabei ist die Fensterdicke der Präparatkapsel aus 0,15 mm Edelstahl und

Silber (entsprechend einer Flächendichte $R_{ES}^\beta = 0,130\text{ g/cm}^2$) zusätzlich zu berücksichtigen (Vergleiche Präparatebeschreibung im Anhang). Mit Hilfe des Diagramms in Abbildung 8 kann nun die Maximalenergie der β -Teilchen ermittelt werden.

Vergleichen sie den bestimmten Energiewert mit dem zu erwartenden Wert.

VII.2 Absorption von γ -Strahlung

Auch hier wird $(n - n_0)$ [s^{-1}] über der Absorberdicke x [mm] im halblogarithmischen Diagramm aufgetragen. Aus der Steigung der Geraden ergibt sich der Schwächungskoeffizienten μ für γ -Strahlung in Blei, aus dem sich der materialunabhängige Massenschwächungskoeffizient μ/ρ bestimmen lässt und mit Hilfe von Diagramm 9 die Energie der emittierten γ -Quanten.

Vergleichen Sie den gemessenen Energiewert mit dem zu erwartenden Wert.

VII.3 Bestimmung der Aktivität

Die Aktivität A eines radioaktiven Präparats beschreibt die Zerfälle pro Sekunde in alle Raumrichtungen, d.h. um die Aktivität eines Präparats zu bestimmen müssten Sie die Anzahl der pro Sekunde emittierten Teilchen der gesamten Kugeloberfläche ($= 4\pi$) messen. Tatsächlich wird die Strahlung jedoch nur in einem kleinen Teil der Kugeloberfläche, nämlich im sogenannten Raumwinkel Ω , detektiert.

Da der Abstand d zwischen Präparat und Zählrohr groß gegen den Zählrohrradius r ist, gilt in erster Näherung für den Raumwinkel

$$\Omega = \frac{\pi r^2}{d^2}. \quad (4)$$

Für die auf die gesamte Kugeloberfläche hochgerechnete Aktivität gilt dann:

$$A = \frac{4\pi n}{\epsilon \Omega} = \frac{4n}{\epsilon} \frac{d^2}{r^2}, \quad (5)$$

wobei n für die Anzahl der Zerfälle pro Sekunde steht. Die Größe ϵ stellt die Ansprechwahrscheinlichkeit des Zählrohrs dar. Für β -Strahlung ist diese praktisch 1, für γ -Quanten mit Energien von einigen 100 keV bis einigen MeV etwa 4%.

Berechnen Sie aus den gemessenen Zählraten die Aktivität des γ -Strahlers.

Vergleichen Sie ihre Berechnungen unter Berücksichtigung des Alters der Quelle und der Halbwertszeit $T_{1/2}$ mit der Aktivität gemäß den Herstellerangaben. Diskutieren Sie die Unterschiede der Aktivitäten des γ -Strahlers für verschiedene Abstände d . Wie verhalten sich die drei Aktivitäten im Vergleich zum Erwartungswert?

Achtung: Die drei gemessenen Aktivitäten dürfen auf keinen Fall gemittelt werden! Warum nicht?

VII.3.1 Raumwinkel-Korrektur

Die oben gemachte Näherung für Ω beinhaltet die Annahme, dass die Strahlung direkt am Zählrohreingang detektiert wird. Da das Zählrohr jedoch auf seiner gesamten Länge $l = 4$ cm detektiert, folgt, dass ein Teil der in Ω emittierten Strahlung das Zählrohr undetektiert durchdringen kann und in der Zählrohrwand absorbiert wird oder das Zählrohr verlässt. Somit ergibt sich eine Überschätzung des Raumwinkels und damit eine Unterschätzung der bestimmten Aktivität. Alternativ könnte man den minimalen Raumwinkel als $\Omega = \frac{\pi r^2}{(d+l)^2}$ in diesem Fall wird der Raumwinkel jedoch unterschätzt und die Aktivität wird zu groß. Die beiden Extremfälle sind in Abbildung 5 dargestellt.

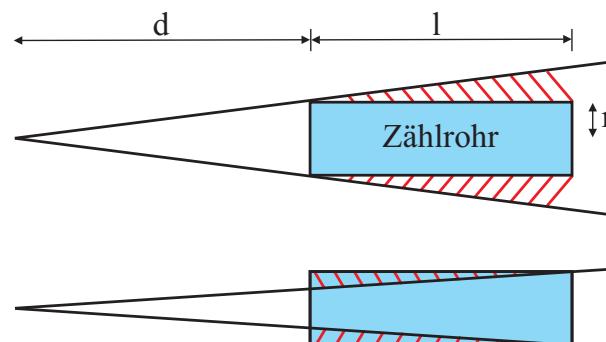


Abbildung 5: Extremfälle des Raumwinkels.

Wie lässt sich das beobachtete Verhalten der drei Aktivitäten mit wachsendem Abstand erklären, unter der Berücksichtigung, dass die berechnete Aktivität eine Überschätzung des Raumwinkels $\Omega(d)$ beinhaltet? Machen Sie sich dies anhand einer Skizze klar.

Um den Fehler zu korrigieren muss der Raumwinkel so gewählt werden, dass sich der überschätzte und der unterschätzte Bereich aufheben. Eine einfache Abschätzung wäre z.B. die Berücksichtigung der halben Zählrohrlänge:

$$\Omega = \frac{\pi r^2}{(d + l/2)^2}. \quad (6)$$

Damit ergibt sich für die Aktivität:

$$A_{\text{korr}} = \frac{4n(d + l/2)^2}{\epsilon r^2} = A k_1 \quad (7)$$

Wie sieht der Korrekturfaktor aus? Diskutieren sie wie sich der Korrekturfaktor mit wachsendem Abstand d verhält. Diskutieren sie die korrigierten Aktivitäten untereinander und im Vergleich zum Erwartungswert.

VII.3.2 Absorptions-Korrektur

Um die Absorption in der Präparatkapsel (Dicke: 1,4 mm, Dichte: 7,9 g/cm³) zu berücksichtigen, muss für den γ -Strahler eine zusätzliche Korrektur durchgeführt werden. Es gilt:

$$A_{\text{abgeschirmt}} = A_{\text{offen}} e^{-\mu x} = A_{\text{offen}} k_2 \quad (8)$$

μ ist der Schwächungskoeffizient für γ -Strahlung im Absorbermaterial. Er kann gemäß $\frac{\mu}{\rho_{\text{PB}}} \rho_{\text{Absorber}}$ bestimmt werden. μ/ρ_{PB} kann dabei entweder aus Teil 1 übernommen werden, oder aus dem Diagramm in Abbildung 9 abgelesen werden ($E^\gamma = 1,174$ MeV oder 1,333 MeV).

Berechnen sie die Aktivitäten unter Berücksichtigung beider Korrekturen neu und diskutieren sie die erhaltenen Werte. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Erwartungswert.

VII.4 Absorption von α -Strahlung

Tragen Sie die Messwerte in ein Diagramm auf und bestimmen Sie den Druck, bei dem die Zählrate auf die Hälfte abgefallen ist. Der Abstand Präparat – Zählrohr beträgt $s_0 = (3,95 \pm 0,05)$ cm. Für die Reichweite s_1 der α -Strahlung beim Druck p gilt

$$s_1 = \frac{p}{p_0} s_0, \quad (9)$$

wobei p_0 der Normaldruck von $p_0 = 1013$ mbar darstellt.

Zusätzlich müssen Sie noch zwei Korrekturen durchführen. Zum einen müssen Sie die Dicke des Zählrohrfensters aus Glimmer berücksichtigen. Das Bremsvermögen von $1,43 \text{ mg/cm}^2$ Glimmer entspricht dem von 1 cm Luft unter Normalbedingungen. Ist ρ_{G1} die Flächendichte des Zählrohrfensters, so erhöht sich die zuvor berechnete Reichweite um

$$s_2 = \frac{\rho_{\text{G1}}}{1,43 \text{ mg/cm}^2} \cdot 1 \text{ cm.} \quad (10)$$

Zum anderen ist die ^{241}Am -Quelle mit einer $3 \mu\text{m}$ dicken Schutzschicht aus Gold bedampft. Diese Schicht ist vom Absorptionsvermögen einer $s_3 = 0,68 \text{ cm}$ dicken Luftsicht äquivalent.

Bestimmen Sie aus der berechneten Gesamtreichweite mit Hilfe des Diagramms in Abbildung 8 die Energie der α -Strahlung und vergleichen Sie diese mit dem Literaturwert ($E=5,48 \text{ MeV}$).

VIII Anhang

VIII.1 Strontium 90, Kobalt 60

Das Strontium 90 ist in eine Silberfolie eingewalzt und dadurch mit ca. $50 \mu\text{m}$ Silber abgedeckt. Diese Folie ist zusätzlich in dem Strahlerhalter (Abbildung 6 oben) mit einer Edelstahlfolie geschützt. Dadurch muss die austretende Strahlung einen Absorber der Dicke $d = 0,15 \text{ mm}$ mit der Flächendichte von etwa 130 mg/cm^2 passieren. Die energiearmen β -Teilchen des Strontium 90 werden in den beiden Abdeckschichten total absorbiert, so dass nur die energiereichen β -Teilchen des Tochternuklids Yttrium 90 austreten (Abbildung 6 unten).

Strontium 90 / Yttrium 90

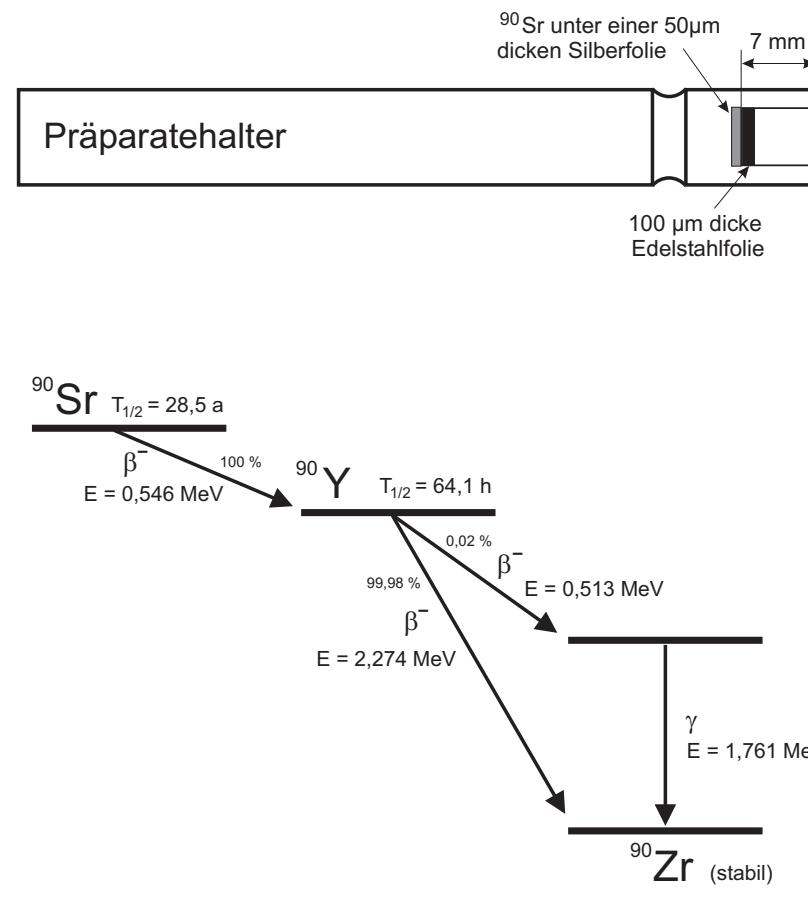


Abbildung 6: Oben: Aufbau des Strontium 90 Präparats. Unten: Zerfallsschema von Strontium 90 / Yttrium 90. Angegeben sind die Halbwertszeiten $T_{1/2}$, die Zerfallssart (β , γ), die Energie der emittierten Strahlung sowie die Übergangswahrscheinlichkeiten in Prozent.

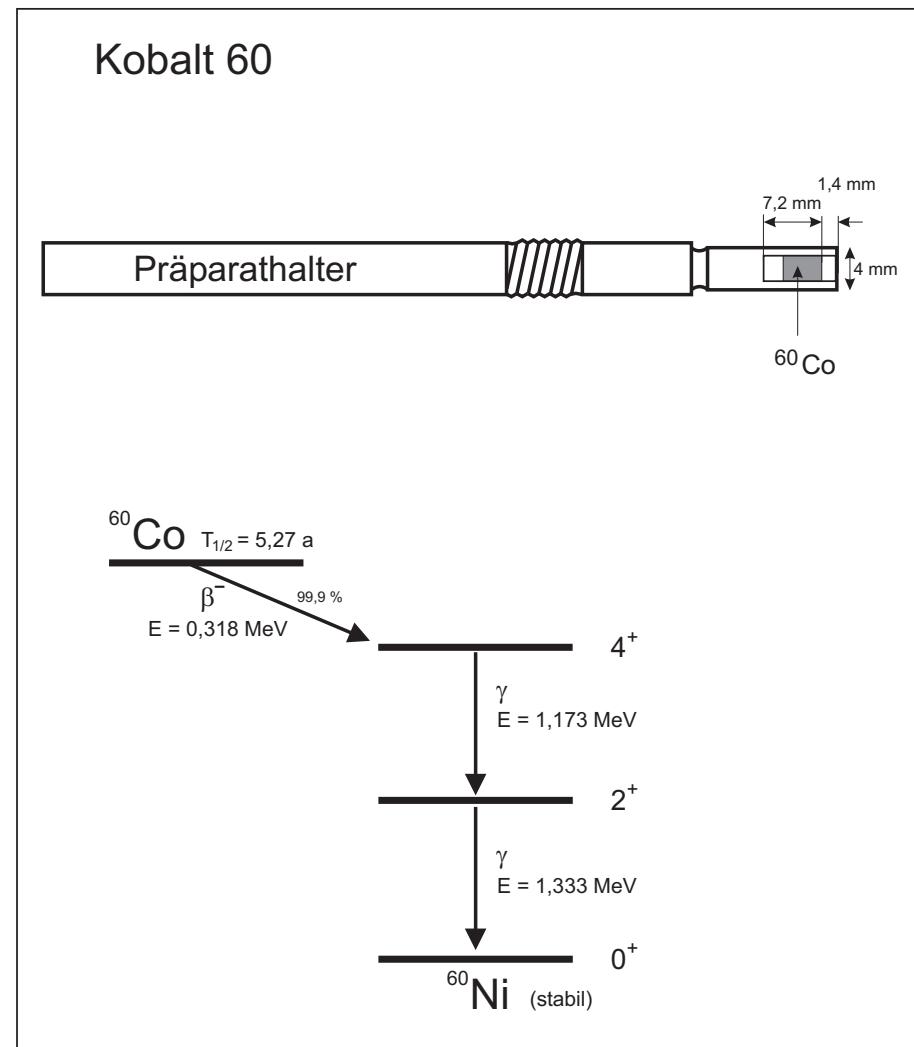
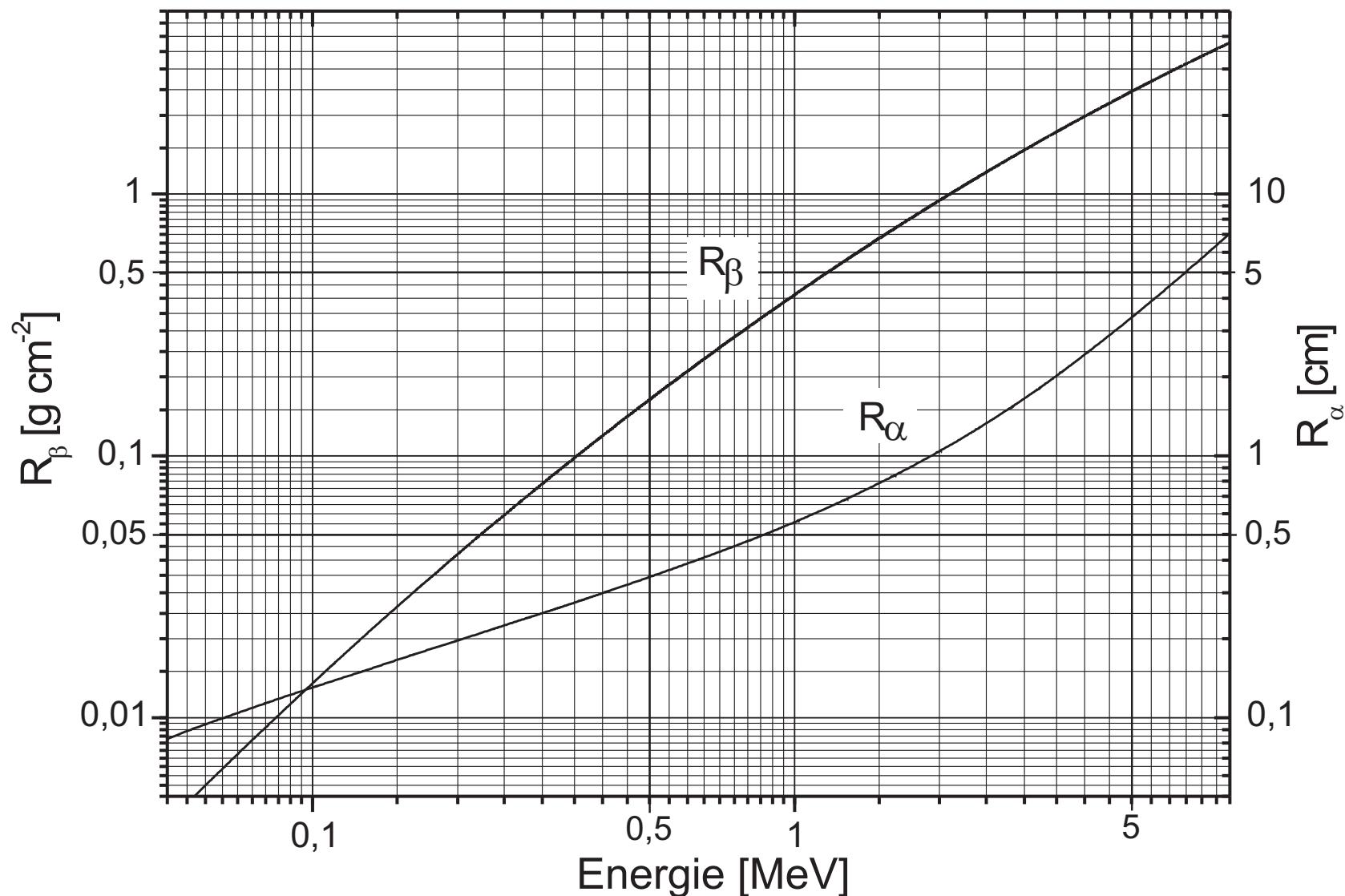


Abbildung 7: Oben: Aufbau des Kobalt 60 Präparats. Unten: Zerfallsschema von Kobalt 60.

Abbildung 8: Reichweite von β -Strahlung in Aluminium und α -Strahlung in Luft.

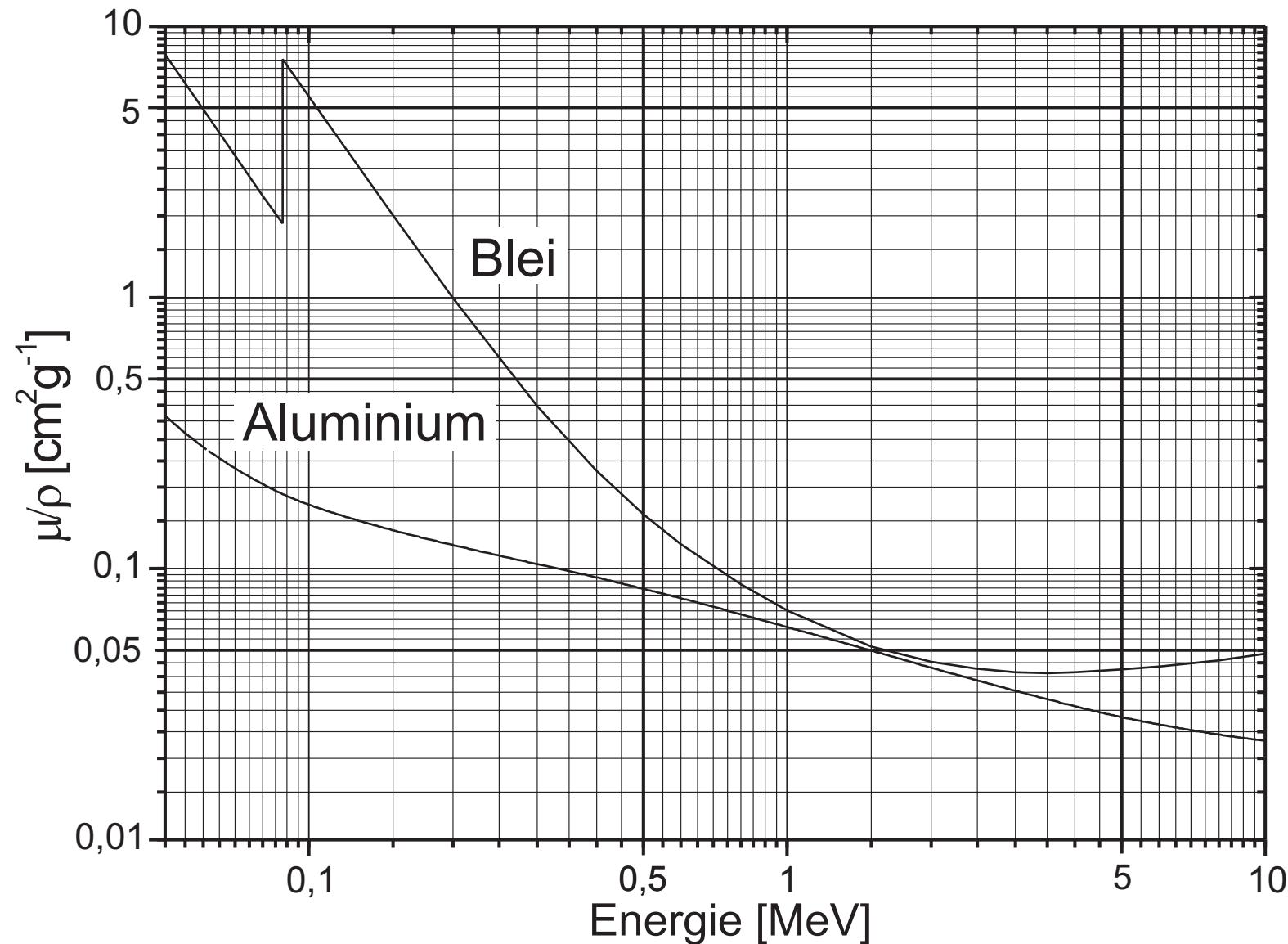


Abbildung 9: Schwächungskoeffizient von γ -Strahlung in Blei und Aluminium. Nach: E. Storm, H.I. Israel, Photon Cross Section from 1 keV to 100 MeV for elements Z=1 to 100, NUCLEAR DATE TABLES A7, 565-681 (1970).

Versuch 255

Röntgenspektrometer



Abbildung 1: Versuchsaufbau.

I Messaufbau

- Röntgengerät mit Röntgenröhre (Molybdän-Anode)
- Goniometer
- Zählrohr
- LiF-Kristall

- NaCl-Kristall
- Computer mit Drucker
- Leuchtschirm mit CCD-Kamera (nur ein Aufbau vorhanden)

II Literatur

- Standardwerke der Physik: Gerthsen, Bergmann-Schäfer, Tipler.

III Vorbereitung

Bereiten Sie sich auf die Beantwortung von Fragen zu folgenden Themen vor: Röntgenröhre, Bragg-Reflexion, Röntgenspektren (Bremsstrahlung, charakteristische Röntgenstrahlung), Moseley'sches Gesetz, Balmer Formel.

Verständnisfragen:

1. Erklären Sie den Aufbau und das Funktionsprinzip einer Röntgenröhre. In welchem Bereich liegt die Beschleunigungsspannung? Welche Größe bestimmt die Intensität der Röntgenstrahlung?
2. Das Spektrum einer Röntgenröhre ist eine Überlagerung aus einem Bremspektrum und einem charakteristischen Spektrum. Erläutern Sie das Zustandekommen dieser beiden Spektren. Wovon hängt das charakteristische Spektrum ab?
3. Wie hoch ist die Geschwindigkeit eines Elektrons, wenn es eine Beschleunigungsspannung von 30 kV durchlaufen hat?
4. Wie kann man die Planck-Konstante aus dem Bremsstrahlungsspektrum abschätzen?
5. Was besagt das Moseley'sche Gesetz? Wie hoch muss die Beschleunigungsspannung einer Röntgenröhre mit Molybdänanode mindestens sein, damit die K_{α} -Strahlung angeregt wird?
6. Wie lautet das Braggsche Gesetz? Beschreiben Sie, wie man mit Hilfe der Röntgenbeugung das Spektrum einer Röntgenquelle messen kann.

7. Wie kann man mittels der Bragg-Reflexion die Gitterkonstante eines Festkörpers bestimmen?

IV Aufgaben

1. Messungen mit dem LiF-Kristall

- Nehmen Sie bei einer Röhrenspannung von 35 kV das Röntgenspektrum einer Molybdän-Anode auf. Aus dem kurzwelligen Ende ist die Planck'sche Konstante h abzuschätzen.
- Messen Sie die Reflexionswinkel der K_{α} - und K_{β} -Linien für die erste und zweite Ordnung und bestimmen Sie daraus die Wellenlängen dieser Linien.
- Messen Sie bei einem festem Braggwinkel von ca. $7,5^{\circ}$ die Intensität der Röntgenstrahlung als Funktion der Hochspannung. Aus der Einsatzspannung können Sie wieder die Planck'sche Konstante h bestimmen.

2. Messung mit dem NaCl-Kristall: Aus den Reflexionswinkeln K_{α} - und K_{β} -Linien (erste und zweite Ordnung) ist die Gitterkonstante von NaCl zu bestimmen und aus dieser, sowie der Dichte und dem Molekulargewicht von NaCl, die Avogadro-Zahl N_A .

3. Ein Versuchsaufbau ist zusätzlich mit einem Leutschirm und einer CCD-Kamera ausgestattet. Wenn Sie noch Lust und Zeit haben, können Sie mit diesem Aufbau Röntgenaufnahmen von verschiedenen Objekten anfertigen.

V Grundlagen

Eine Röntgenröhre besteht aus einem evakuierten Glaskolben und zwei Elektroden. An der Kathode werden durch Glühemission freie Elektronen erzeugt. Zwischen Kathode und Anode liegt eine Beschleunigungsspannung von typischerweise 10 kV bis 100 kV an. Dadurch werden die Elektronen in Richtung Anode beschleunigt und beim „Aufprall“ durch das Coulombfeld der Atome des Anodenmaterials abgebremst. Die dabei verlorene Energie wird teilweise in Form von elektromagnetischen Wellen abgestrahlt. Da der Energieverlust der

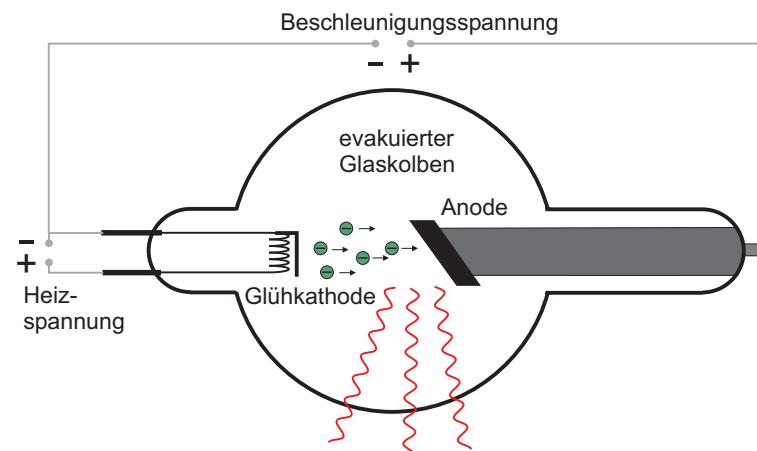


Abbildung 2: Aufbau einer Röntgenröhre.

Elektronen beim Abbremsen unterschiedlich groß ist, entsteht ein kontinuierliches Spektrum, welches als Bremsspektrum bezeichnet wird (Abbildung 3). Auf der kurzwelligen Seite setzt das Bremsspektrum erst oberhalb einer Grenzwellenlänge λ_{gr} ein. Dies folgt unmittelbar aus der Energieerhaltung: Haben die Elektronen die Spannung U durchlaufen, so besitzen sie eine Energie $E = eU$. Wird nun ein Elektron in einem einzigen Prozess abgebremst, so wird diese Energie vollständig in Röntgenstrahlung der Energie $h\nu$ umgewandelt. Für die Grenzwellenlänge λ_{gr} ergibt sich dann:

$$E = eU = h\nu_{gr} = h \frac{c}{\lambda_{gr}} \quad \Rightarrow \quad \lambda_{gr} = \frac{hc}{eU}, \quad (1)$$

wobei h das Planck'sche Wirkungsquantum und c die Lichtgeschwindigkeit darstellen.

Bei entsprechend hohen Beschleunigungsspannungen ist dem kontinuierlichen Bremsspektrum zusätzlich noch ein diskretes Linienspektrum überlagert. Da dieses vom Anodenmaterial der Röntgenröhre abhängt wird es auch als charakteristisches Spektrum bezeichnet. Die in der Röntgenröhre beschleunigten Elektronen können ihre Energie auch durch Ionisation des Anodenmaterials verlieren. Wird ein Elektron aus den innersten Elektronenschalen herausgeschlagen, so kann die entstehende Lücke durch ein Elektron aus einer höher

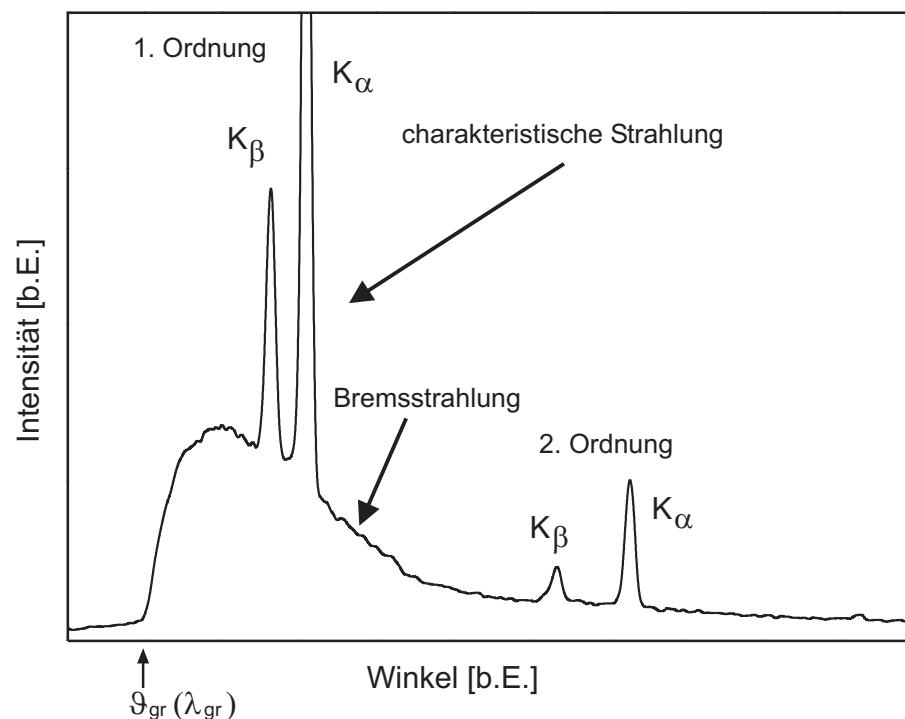


Abbildung 3: Röntgenspektrum

liegenden Schale gefüllt werden. Dabei wird die freiwerdende Bindungsenergie in Form eines Röntgenquants abgestrahlt.

Je nachdem von welcher und auf welche Schale der Elektronenübergang stattfindet, gibt es mehrere mögliche Übergänge die sich zu Serien zusammenfassen lassen können. Erfolgt der Übergang stets auf die innerste Schale, die K-Schale, so spricht man von Übergängen der K-Serie: Beim Übergang eines Elektrons von der L-Schale auf die K-Schale wird K_{α} -Strahlung emittiert, beim Übergang von der M-Schale auf K-Schale handelt es sich um K_{β} -Strahlung. In Abbildung 4 links, sind mögliche Übergänge anhand des Termschemas von Molybdän dargestellt.

Die Energie der charakteristischen Linien, lässt sich mit Hilfe des Moseley'schen

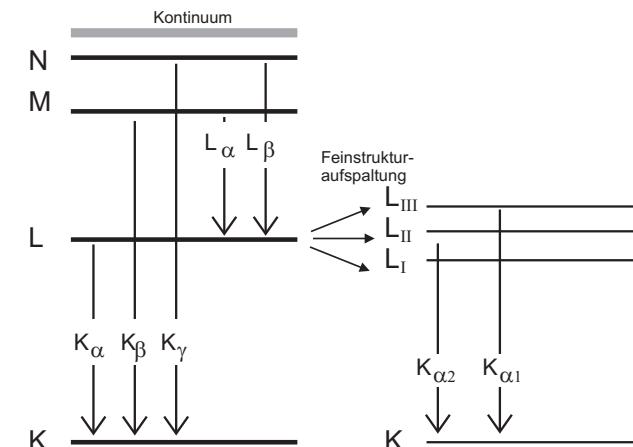


Abbildung 4: Energieniveaus von Molybdän

Gesetz abschätzen. Für den Übergang von der n -ten auf die m -te Schale gilt:

$$E_{n \rightarrow m} = h c R_\infty (Z - A)^2 \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad (2)$$

wobei h das Planck'sche Wirkungsquantum, c die Lichtgeschwindigkeit, R_∞ die Rydbergkonstante ($R_\infty = 1,097 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$), Z die Kernladungszahl und n bzw. m die jeweiligen Hauptquantenzahlen darstellen. Bei der Größe A handelt es sich um eine Abschirmungskonstante, die die Abschirmung der Kernladung durch Elektronen berücksichtigt. Bei der K_α -Strahlung wird der Kern nur von einem Elektron abgeschirmt. Hierfür gilt in guter Näherung $A \approx 1$:

$$K_{\alpha}\text{-Strahlung : } E_{2 \rightarrow 1} = h c R_{\infty} (Z - 1)^2 \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2^2} \right) = \frac{3}{4} h c R_{\infty} (Z - 1)^2. \quad (3)$$

Für die Energie der K_{α} -Strahlung von Molybdän erhält man aus dem Moseley'schen Gesetz $E = 17,2 \text{ keV}$. Dies ist eine gute Übereinstimmung mit dem Literaturwert von $E = 17,4 \text{ keV}$.

Das Moseley'schen Gesetz liefert nur eine Abschätzung der Energie der charakteristischen Strahlung. Tatsächlich besitzen alle Energieniveaus bis auf das K-Niveau noch eine Feinstruktur dessen Energie neben der Hauptquantenzahl

auch von der Drehimpulsquantenzahl und von der Spinquantenzahl abhängt (Abbildung 4 rechts). So ist beispielsweise das L-Niveau dreifach entartet. Dadurch ergeben sich zwei verschiedene K_{α} -Übergänge. Der Übergang $L_{III} \leftrightarrow K$ wird als $K_{\alpha 1}$ und $L_{II} \leftrightarrow K$ als $K_{\alpha 2}$ bezeichnet. Der Übergang $L_I \leftrightarrow K$ ist unter Berücksichtigung von Erhaltungssätzen nicht möglich. Diese zusätzlichen Niveaus führen dazu, dass die K_{α} -Linie eine Doppellinie darstellt. Allerdings sind diese so dicht zusammen, dass das Spektrometer mit dem Sie im Praktikum arbeiten werden, diese nicht auflösen kann.

V.1 Bragg-Reflexion

Zur Untersuchung des Spektrums einer Strahlungsquelle greift man in der Regel auf zwei verschiedene physikalische Prinzipien zurück: Die Dispersion und die Beugung, die im sichtbaren Bereich Anwendung im Prismenspektrometer bzw. im Gitterspektrometer finden. Für Röntgenstrahlung kann die Dispersion nicht ausgenutzt werden, da der Brechungsindex von Materie in diesem Wellenlängenbereich kaum von Eins abweicht. Auch die Ausnutzung von Beugungseffekten ist für Röntgenstrahlung komplizierter. Da Beugungerscheinung nur dann auftreten, wenn die Größe des beugenden Objekts etwa der Größenordnung der Wellenlänge ($\lambda \approx 0,1 \text{ pm}$ bis 10 nm) entspricht, benötigt man ein Gitter mit äußerst kleinen Strukturen. Solche Dimensionen sind technisch kaum realisierbar.

1912 hat Max von Laue einen Kristall mit Röntgenstrahlung durchleuchtet. Dabei beobachtete er ein gleichförmiges Beugungsmuster, woraus er schloss, dass die Atome im Kristall regelmäßig angeordnet sind. Da die Atomabstände im Kristall von der gleichen Größenordnung wie die Wellenlänge sind, eignen sich solche Kristalle als Beugungsgitter für Röntgenstrahlen. 1913 gelang es schließlich William Henry Bragg und seinem Sohn William Lawrence Bragg den Zusammenhang zwischen der Kristallstruktur und den entstehenden Beugungsmustern zu erklären. Die Röntgenbeugung an Kristallen wird daher auch als Bragg-Reflexion bezeichnet.

Trifft Röntgenstrahlung unter dem Winkel ϑ (Abbildung 5a) auf die Oberfläche eines Kristalls, so wird dieser gemäß des Reflexionsgesetzes reflektiert. Da die Strahlung tief in den Kristall eindringen kann, finden zusätzliche Reflexionen an tiefer gelegenen Netzebenen statt. Die Intensität der reflektierten Gesamtstrahlung hängt vom Gangunterschied Δs der teilreflektierten Strahlung ab. Beträgt dieser für zwei benachbarte Teilbündel ein Vielfaches der Wellenlänge λ , so interferieren diese konstruktiv. Ist dies nicht der Fall, so löschen die teil-

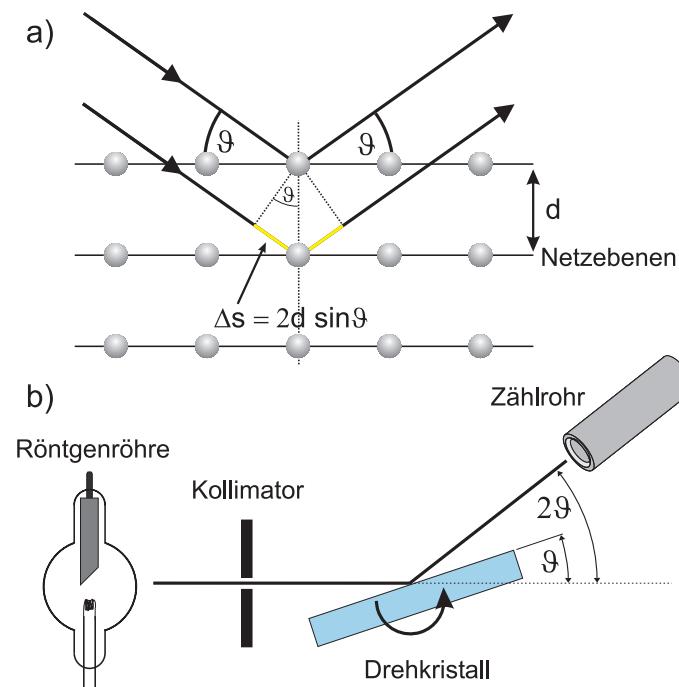


Abbildung 5: a) Bragg-Reflexion von Röntgenstrahlung an einem Kristall. b) Drehkristallmethode zur Messung des Spektrums einer Röntgenröhre.

reflektierten Strahlen aus (Vielstrahlinterferenz). Ist d der Netzebenenabstand, so folgt aus Abbildung 5a) für den Gangunterschied Δs :

$$\Delta s = 2d \sin \vartheta \quad (4)$$

und damit das Bragg'sche Gesetz:

$$2d \sin \vartheta = n \lambda, \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{Bragg'sches Gesetz.} \quad (5)$$

Die unter dem Winkel ϑ reflektierte Strahlung hängt demnach von der Wellenlänge der Röntgenstrahlung sowie von der Kristallstruktur (Netzebenenabstand) ab. Somit eignet sich die Bragg-Reflexion zur Monochromatisierung von

Röntgenstrahlung und damit zur Messung des Spektrums einer Röntgenquelle. Bei der Drehkristallmethode (Abbildung 5b) wird der Einfallsinkel ϑ variiert, in dem der Kristall um eine Achse senkrecht zur einfallenden Strahlung gedreht wird. Bei jeder Winkelstellung besitzt die reflektierte Röntgenstrahlung eine bestimmte Wellenlänge dessen Intensität z.B. mit einem Zählrohr gemessen werden kann. Das Spektrum in Abbildung 3 wurde nach diesem Verfahren gemessen.

Weiterhin kann bei bekannter Wellenlänge (z.B. K_α -Linie) die Kristallstruktur von Kristallen bestimmt werden (Röntgenstrukturanalyse).

Kristalle haben die Eigenschaft, dass sie streng periodisch aufgebaut sind. Die kleinste, sich periodisch wiederholende Struktureinheit, wird als Elementarzelle bezeichnet. Sie wird durch einen Satz von drei Basisvektoren aufgespannt dessen Beträge die Gitterkonstanten darstellen. Sowohl NaCl als auch LiF besitzen eine kubische Elementarzelle (Abbildung 6a). Bei diesem Kristalltyp sind die drei Gitterkonstanten a gleich groß. Bei der Bragg-Reflexion an einem Kristall ist es wichtig den Kristallschnitt, d.h. die Orientierung der Netzebenen zum einfallenden Röntgenstrahl, zu kennen. Bei den im Praktikum verwendeten Kristallen ist die Kristalloberfläche parallel zur Seitenfläche der Elementarzelle ausgerichtet, d.h. der Netzebenenabstand entspricht der halben Gitterkonstante (Abbildung 6b).

Mit Hilfe der Röntgenbeugung an Kristallen ist es möglich, die Avogadrokonstante mit großer Genauigkeit zu bestimmen. Dazu muss man lediglich das Volumen der Elementarzelle kennen und sich überlegen, wie viele Atome einer Elementarzelle angehören. Das Volumen lässt sich bei bekanntem Kristallschnitt aus der Gitterkonstante bestimmen. Um die Anzahl der Atome die einer Elementarzelle angehören zu bestimmen, muss man beachten, dass die einzelnen Atome auch in benachbarten Elementarzellen liegen. Aus Abbildung 6c) ist ersichtlich, dass nur das zentrale Natrium (Lithium)- Atom einer einzelnen Zelle angehört. Alle Atome die an den Ecken einer Elementarzelle liegen, sind zusätzlich die Eckatome von sieben weiteren Zellen. Rechnerisch sind diese daher nur zu 1/8 Bestandteil einer einzigen Elementarzelle. Atome die an der Kante liegen, befinden sich insgesamt in vier Elementarzellen und Atome die im Zentrum der Stirnfläche liegen, sind in einer weiteren Elementarzelle vertreten. In einer Elementarzelle befinden sich somit:

- 8 Chlor (Fluor) Atome an den Ecken die jeweils zu 1/8 einer Zelle angehören.
- 6 Chlor (Fluor) Atome im Zentrum der Seitenflächen die jeweils zu 1/2

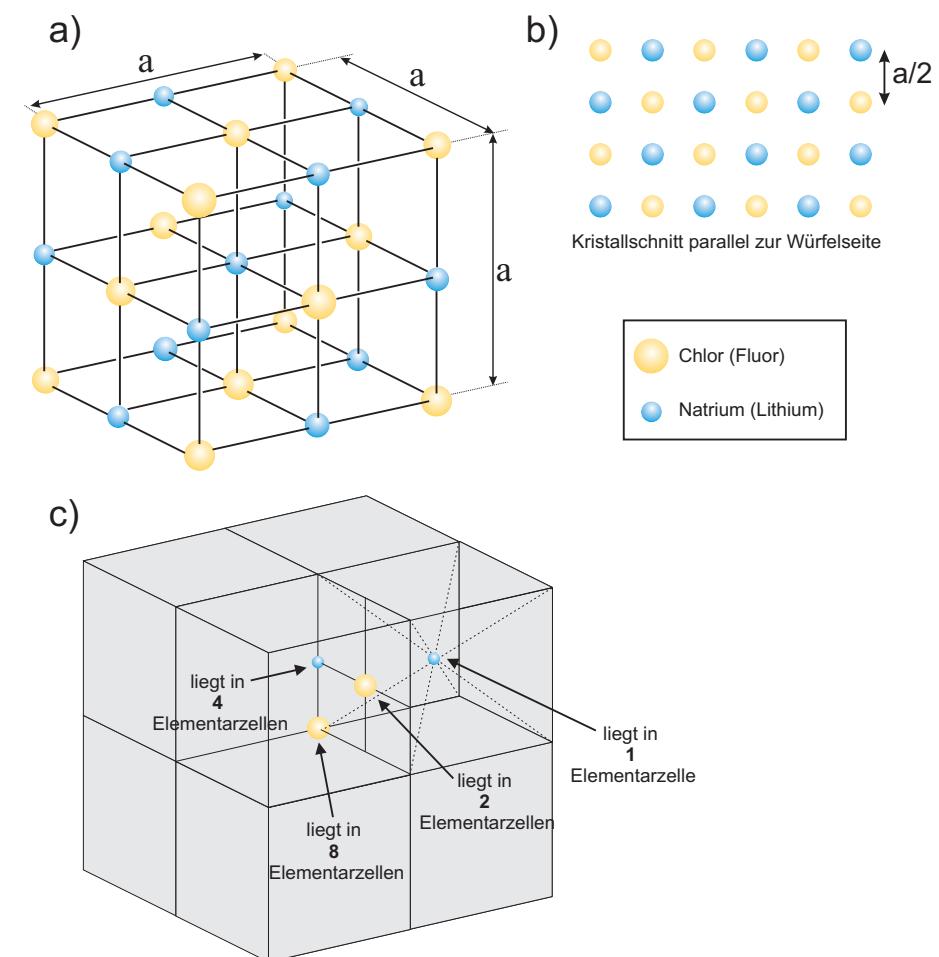


Abbildung 6: a) Elementarzelle von NaCl (LiF). b) Netzebenen bei unterschiedlichen Kristallschnitten c) Aufbau eines Kristalls durch Aneinandereien von Elementarzellen.

einer Zelle angehören.

- 12 Natrium (Lithium) Atome an den Kanten die jeweils zu 1/4 einer Zelle angehören.
- 1 Natrium (Lithium) Atom in der Mitte einer Zelle welches dieser allein angehört.

Für die Gesamtanzahl der Atome einer Elementarzelle folgt dann:

$$\text{Chlor (Fluor): } 8 \times 1/8 + 6 \times 1/2 = 4$$

$$\text{Natrium (Lithium): } 12 \times 1/4 + 1 = 4,$$

d.h. 4 NaCl (LiF) pro Elementarzelle.

Die Avogadrokonstante berechnet sich wie folgt:

$$N_A = 4 \frac{V_{Mol}}{V}, \quad (6)$$

wobei V_{Mol} das Molvolumen und V das Volumen einer Elementarzelle ist. Der Faktor Vier berücksichtigt, dass in einer Elementarzelle vier NaCl-Moleküle (LiF-Moleküle) vorhanden sind. Das Volumen lässt aus dem Netzebenenabstand d berechnen. Bei dem im Praktikum verwendeten Kristall entspricht dieser der halben Gitterkonstante $d = a/2$:

$$N_A = 4 \frac{V_{Mol}}{(2d)^3} = 4 \frac{M_{Mol}}{\rho (2d)^3} = \frac{1}{2} \frac{M_{Mol}}{\rho d^3}, \quad (7)$$

mit dem Molgewicht M_{Mol} und der Dichte ρ . Die Zahlenwerte dieser Größen finden Sie im Anhang.

V.2 Gerätebeschreibung

Das im Praktikum eingesetzte Röntgengerät ist als Zählrohr-Goniometer (Abbildung 7) ausgeführt, mit schwenkbarem Messarm und einem Probenträger in der Drehachse. Die Drehwinkel von Messarm und Probenträger können im Verhältnis 2:1 gekoppelt werden, so dass beim Nachweis der Bragg-Reflexe und bei der Aufnahme von Röntgenspektren das auf dem Messarm befestigte Zählrohr immer die richtige Position zum Auffangen der Reflexe hat, d.h. die Probennormale halbiert stets den Winkel zwischen Primär-Strahlrichtung und der Richtung der reflektierten Strahlung. Die Röntgenröhre (Molybdänanode,

maximal 35 kV, 1 mA) ist in einem separaten Röhrenraum untergebracht, der zur Abschirmung - wie auch der Experimenterraum mit dem Goniometer - mit einer Bleiglas-Schiebetür verschlossen wird. Am Übergang zum Experimenterraum ist ein Kollimator eingesetzt. Die Kristalle werden auf den Probenträger gelegt und dieser mit einer Rändelschraube fixiert. Die Abstände im Goniometer (also die Längen des Probenarms und des Messarms) sind variabel, sollen aber für diesen Versuch nicht verstellt werden. Lediglich die Rändelschraube am Probentisch muss gelockert werden, wenn der Kristall gewechselt wird. Beide Goniometerarme sind unabhängig voneinander durch Schrittmotoren zu schwenken, die kleinste mögliche Schrittweite beträgt 0,1°. Weiterhin ist es möglich, dass Goniometer im gekoppelten Modus (coupled) zu betreiben, so dass der Winkel des Messarms immer das Doppelte des Winkels des Targetarms beträgt. Dieser Modus ist für die Messungen der Bragg-Reflexion zu wählen. Die reflektierte Strahlung wird mit einem am Messarm befestigten Geiger-Müller-Zählrohr nachgewiesen. Die Spannungsversorgung des Zählrohrs und der Impulszähler sind, genau wie die Steuerung des Goniometers, in das Röntgengerät integriert und über das Bedienfeld links von der Röntgenröhre zu steuern. Über das dort platzierte Display lassen sich auch die Messwerte anzeigen.

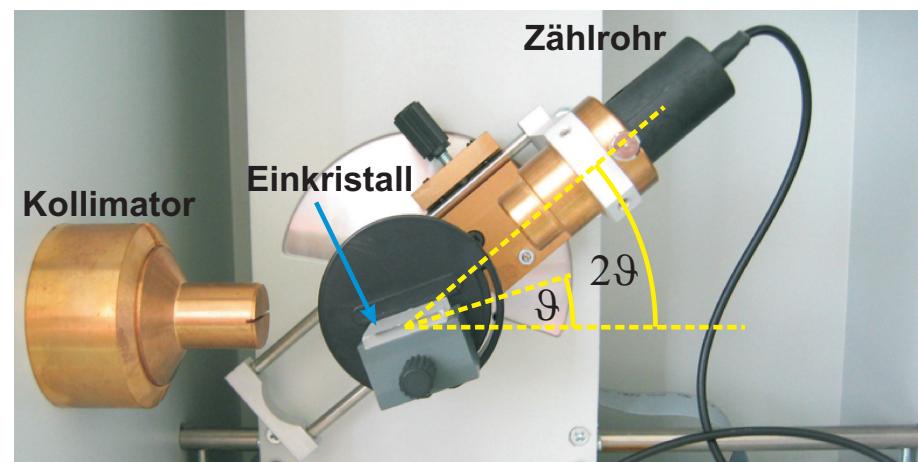


Abbildung 7: Aufbau des Goniometers.

Alle einstellbaren Parameter werden mit dem Drehschalter **ADJUST** geregelt. Zuvor muss mit den Tastern rechts davon der gewünschte Parameter gewählt

werden. Der aktuell angewählte Parameter wird im Display angezeigt.

- U: Hochspannung der Röntgenröhre. Möglich sind Werte zwischen 0 und 35 kV (Schrittweite 0,1 kV)
- I: Emissionstrom der Röntgenröhre. Möglich sind Werte zwischen 0 und 1 mA (Schrittweite 0,01 mA)
- t: Messzeit. Möglich sind Werte zwischen 0 und 9999 s (Schrittweite 1 s)
- β : Winkelschrittweite für den Modus „automatischer Scan“. Möglich sind Werte zwischen 0° und 20° (Schrittweite 0,1°).

Mit dem Taster **LIMITS** wird der Winkelbereich für den Modus „automatischer Scan“ festgelegt. Nach dem ersten Drücken erscheint im Display das Symbol \downarrow und die untere Grenze kann eingegeben werden. Nach dem zweiten Drücken erscheint \uparrow für die Eingabe der oberen Grenze. Die Anzeige blinkt, wenn ungültige Werte eingestellt sind, d.h. wenn die untere Grenze über der oberen liegt. Wird das Symbol \downarrow angezeigt, ist $\Delta\beta = 0$ eingestellt und der Modus „automatischer Scan“ deaktiviert. Unter dem **ADJUST**-Regler befinden sich die Taster zur Auswahl des Scanverfahrens. Hier ist immer der **COUPLED**-Modus zu wählen, bei dem Target- und Sensorarm im Verhältnis 2:1 gekoppelt werden. Der **ZERO**-Taster fährt das Goniometer in die Nullposition.

Im unteren Teil des Bedienfeldes befinden sich die Befehlstaster:
RESET: Löscht den Datenspeicher, fährt das Goniometer in die Nullstellung und stellt alle Parameter auf die Werkseinstellung zurück

REPLAY: Aktiviert das Auslesen des Messwertespeichers. Die einzelnen Werte können über den **ADJUST**-Regler abgerufen werden. Im Display erscheint jeweils der Winkel und die über die Zeit t gemittelte Zählrate.

SCAN: Startet einen Scan. Hierzu muss ein Scanverfahren (**COUPLED**) gewählt sein. Die Messwerte werden gespeichert und können anschließend mit **REPLAY** abgefragt werden. Achtung: Der Start eines neuen Scans löscht die Daten des vorherigen.

Lautsprecher: Schaltet den Lautsprecher für die akustische Impulsanzeige ein oder aus.

HV ON/OFF: Schaltet die Röhrehochspannung ein oder aus.

Für die Befehle **SCAN** und **HV ON** müssen die Bleiglasscheiben geschlossen sein.

Alle Messungen können entweder manuell oder mit Hilfe eines Computers automatisiert durchgeführt werden. Das Messprogramm **Roentgenspektrum.exe** stellt die Messwerte in einem Diagramm dar und generiert nach Beendigung der Messung eine HTML-Datei mit den Messdaten; welche Sie ausdrucken können. Die Datei **data.htm** befindet sich im Ordner **Report** auf dem Desktop.

VI Durchführung

Achtung: Kristalle nur an den Stirnseiten berühren! Vorsicht, zerbrechlich! Nur mit trockenen Fingern oder Handschuhen berühren!

Testen Sie zunächst die korrekte Funktion der Sicherheitskreise: Schalten Sie das Gerät am Netzschatzler ein, wählen Sie $I = 1 \text{ mA}$ und $U = 5 \text{ kV}$ aus und schließen Sie die Bleiglasfenster von Röhren- und Experimenterraum. Schalten Sie die Hochspannung (Taster **HV ON/OFF**) ein und überprüfen Sie, ob die Kontrollleuchte über dem Taster blinks und die Kathode der Röntgenröhre aufleuchtet. Drücken Sie jetzt den Verriegelungstaster einer Bleiglasscheibe nach unten. Die Kathodenheizung muss dabei abschalten. Öffnen Sie ein Bleiglasfenster und testen Sie, ob die HV-Kontrollleuchte dabei erlicht.

1. Messung des Röntgenspektrums mit einem LiF-Kristall

- a) Messen Sie das Röntgenspektrum der Molybdän-Anode. Montieren Sie hierzu den LiF-Kristall auf dem Targethalter. Wählen Sie $U = 35 \text{ kV}$, $I = 1 \text{ mA}$, $t = 5 \text{ s}$, $\Delta\beta = 0,2^\circ$, und scannen Sie im Bereich zwischen 3° und 22° . Führen Sie diese Messung mit dem Computer durch. Dazu müssen Sie erst die eben aufgeführten Parameter am Röntgengerät eingeben, anschließend das Programm **Roentgenspektrum.exe** vom Desktop aus starten und den Pfeil in der linken oberen Ecke anklicken. Den Scavorgang starten Sie dann durch Drücken der Taste **SCAN ON/OFF**. Drücken Sie nach Beendigung der Messung den **Stopp**-Taster im Messprogramm. Das Messprotokoll wird automatisch im Internet-Explorer angezeigt. Sollte dort noch eine alte Messung erscheinen, so drücken Sie zum aktualisieren die F5-Taste. Drücken Sie das Messprotokoll sofort aus, da sonst beim nächsten Scavorgang die Daten überschrieben werden. Im Internet Explorer müssen Sie vorher die Seitenorientierung ändern: *Datei → Seite einrichten... → Option Querformat* auswählen. Zusätzlich werden die Messdaten noch in einer Textdatei im Ordner **Data** auf dem Desktop gespeichert. Der Dateiname entspricht

- dem Datum und der Uhrzeit der Messung. Falls Sie einen USB-Stick dabei haben, können Sie sich diese Datei kopieren.
- b) Bestimmen Sie aus der vorhergehenden Messung grob die Lage der Linien K_{α} und K_{β} der ersten und zweiten Ordnung. Wiederholen Sie die Messung aus a) in diesen Bereichen mit $\Delta\beta = 0,1^\circ$ und $t = 20$ s.

- c) Messen Sie die Zählrate bei einem festen Winkel β von $7,5^\circ$ für unterschiedliche Spannungen im Bereich von 20 bis 35 kV (1 kV-Schritte, Messzeit 20 s). Den Computer benötigen Sie in dieser Teilaufgabe nicht. Da das Röntgengerät nur bei einem Scan größere Messzeiten als 1 s berücksichtigt, müssen Sie auch bei dieser Messung einen Winkelbereich eingeben. Stellen Sie am Röntgengerät einen Scanspektrum von $7,5^\circ$ bis $7,6^\circ$ ein. Nachdem die Messung für die $7,5^\circ$ -Stellung beendet ist können Sie die Messung abbrechen und die Zählrate mit Hilfe der REPLAY-Taste auslesen.

2. Messung des Röntgenspektrums mit einem NaCl-Kristall

Wiederholen Sie die Messung aus 1a) mit dem NaCl-Kristall. Verwenden Sie einen Winkelbereich von 3° bis 18° .

3. Röntgenaufnahmen

Bei diesem Teilversuch muss der Kollimator und der Kristallhalter ausgebaut werden. Das Zählrohr muss so positioniert werden, daß es keinen „Schatten“ auf den Leuchtschirm wirft. Führen Sie diesen Umbau gemeinsam mit Ihrem Betreuer durch.

Platzieren Sie das zu untersuchende Objekt (z.B. Taschenrechner, Armbanduhr aus Kunststoff) im Experimentieraum des Röntgengeräts möglichst dicht vor dem Leuchtschirm. Stellen Sie eine Röhrenspannung von 35 kV und einen Röhrenstrom von 1 mA ein. Der Leuchtschirm wird von außen mit einer CCD-Kamera abgefilmt, welche sich in einem lichtdichten Kasten an der rechten Seite des Röntgengeräts befindet. Achten Sie darauf, dass dieser Kasten plan an der Seitenwand des Röntgengeräts anliegt und somit kein Fremdlicht in das Gehäuse gelangt. Schalten Sie die Röhrenspannung mit der Taste HV ON/OFF ein und starten Sie das Programm „Röntgenkamera.exe“ vom Desktop aus. Zur Verbesserung der Bildqualität können Sie den Mittelwert von mehreren Bildern bilden. Dadurch kann das Bildrauschen nahezu vollständig eliminiert werden. Geben Sie in das Feld Mittelwert die Anzahl der Bilder ein, die für

die Mittelwertbildung aufgenommen werden. Gute Ergebnisse erhalten Sie bereits ab 20 Bilder. Zusätzlich müssen Sie den Knopf darunter auf Ein stellen. Das resultierende Bild wird anschließend in einem separaten Fenster angezeigt (Abbildung 8).

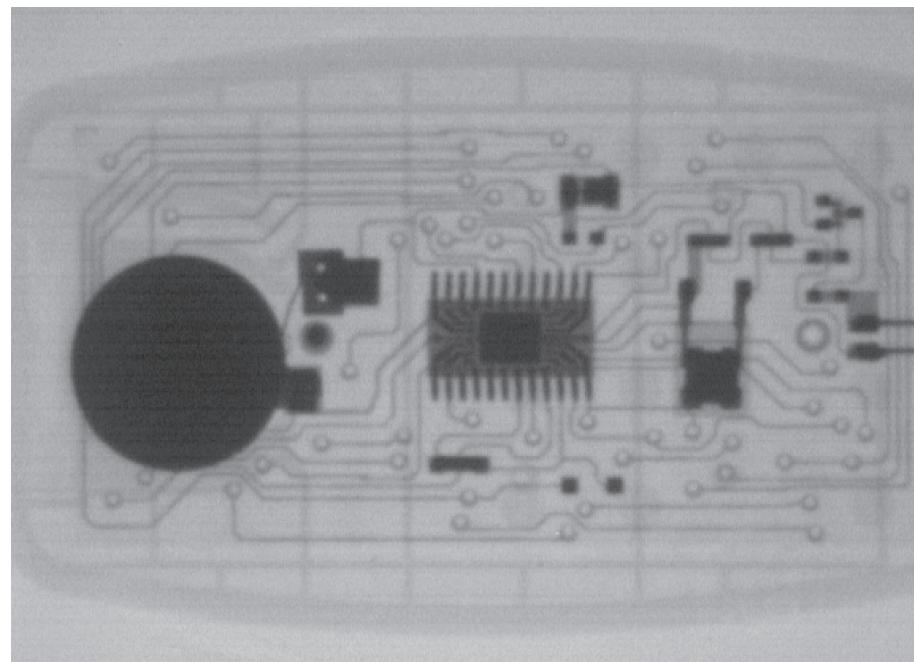


Abbildung 8: Röntgenaufnahme einer Fernbedienung.

VII Auswertung

1.

- a) Extrapolieren Sie den einigermaßen geraden Anstieg am kurzwelligen Ende bis zum Untergrund. Versehen Sie die betreffenden Punkte mit statistischen Fehlern. Bestimmen Sie so die Grenzwellenlänge des Bremsspektrums von 35 kV und daraus die Plank'sche Konstante h . Berechnen Sie

aus der Stelle des Beginns des Spektrums, ab welchen Winkel das Spektrum zweiter Ordnung einsetzt.

- b) Tragen Sie die Zählrate als Funktion des Winkels β für die vier Linien auf und bestimmen sie die Wellenlänge von K_α und K_β aus den Messungen in beiden Ordnungen. Bestimmen Sie für K_α in erster Ordnung die Halbwertsbreite (Breite der Linie in halber Höhe).
- c) Bestimmen Sie durch Extrapolation die Einsatzspannung, d.h. die Spannung, oberhalb der es Quanten gibt, deren Wellenlänge zu $\beta = 7,5^\circ$ gehört. Berechnen Sie aus diesem Wert wieder h . Theoretisch ist diese sog. Isochromatenmethode, die hier zur h Bestimmung benutzt wird, der Extrapolation des kurzwelligen Endes des Spektrums in Aufgabe 2a) äquivalent. Die Spektrumsextrapolation ist aber in der Praxis ungenauer, da dort Messpunkte unterschiedlicher Wellenlänge benutzt werden, die individuell z.B. auf Eigenabsorption in der Anode, dem Röhrenfenster usw. sowie auf das unterschiedliche Reflexionsvermögen des Kristalls korrigiert werden müssten.

2.

Ermitteln Sie aus dem Spektrum die Lage der K_α und K_β -Linien und berechnen Sie mit den in 1b) gewonnenen Wellenlängen für K_α und K_β die Gitterkonstante von NaCl sowie die Avogadro Zahl.

VIII Anhang

- Allgemeine Konstanten¹:

| | |
|----------------------|--|
| Avogadrozahl | $N_A = 6,0221 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ |
| Elementarladung | $e = 1,6022 \times 10^{-19} \text{ C}$ |
| Lichtgeschwindigkeit | $c = 2,9979 \times 10^8 \text{ m/s}$ |
| Planck-Konstante | $h = 6,6261 \times 10^{-34} \text{ Js}$ |
| Rydberg-Konstante | $R_\infty = 3,2898 \times 10^{15} \text{ Hz}$ |

(8)

¹nach „Fundamentalkonstanten 1999“, Physikalische Blätter, März 2000

Der jeweilige Fehler ist kleiner als die halbe Einheit der letzten Ziffer.

- Daten von LiF:

| | |
|-------------------|-------------------------------|
| Dichte | $\rho = 2,635 \text{ g/cm}^3$ |
| Molekulargewicht | $M = 25,94 \text{ g}$ |
| Netzebenenabstand | $a/2 = 201,4 \text{ pm}$ |

(9)

- Daten von NaCl:

| | |
|------------------|-------------------------------|
| Dichte | $\rho = 2,164 \text{ g/cm}^3$ |
| Molekulargewicht | $M = 58,44 \text{ g}$ |

(10)

- K-Linien² von Molybdän:

$K_\alpha : \lambda = 71,1 \text{ pm}, E = 17,4 \text{ keV}$
 $K_\beta : \lambda = 63,1 \text{ pm}, E = 19,6 \text{ keV}$

²die K-Linien besitzen eine Feinstrukturaufspaltung. Die Angaben sind daher Mittelwerte.

Versuch 256

Röntgenfluoreszenz



Abbildung 1: Aufbau des Versuchs Röntgenfluoreszenz.

I Messaufbau

- Röntgengerät mit Röntgenröhre (Molybdän-Anode)
- Röntgenenergiedetektor
- Vielkanalanalysator
- Metallproben

- Computer mit Drucker

II Literatur

- X-Ray Data Booklet
<http://xdb.lbl.gov>
- Homepage des Praktikums
<https://www.physi.uni-heidelberg.de/Einrichtungen/AP/>

III Vorbereitung

Bereiten Sie sich auf die Beantwortung von Fragen zu folgenden Themen vor:
Erzeugung von Röntgenstrahlung, Wechselwirkung von Röntgenstrahlung mit Materie, Röntgenfluoreszenz, Halbleiterdetektor, Mosley'sches Gesetz.

Verständnisfragen:

1. Was versteht man unter Röntgenfluoreszenz?
2. Wie lässt sich die Energie der Fluoreszenzstrahlung berechnen? Formulieren Sie das Mosley'sche Gesetz. Wieso kann man für die Abschirmungskonstante der K_{α} - Strahlung in guter Näherung den Wert Eins annehmen?
3. Wie funktioniert ein Halbleiterdetektor (PIN-Diode)?
4. Welche Funktion hat ein Vielkanalanalysator?

IV Aufgaben

1. Kalibrierung des Röntgenenergiedetektors.
2. Bestimmen Sie die Energien der K_{α} - und K_{β} - Strahlung für verschiedene Elemente und überprüfen Sie hiermit das Mosley'sche Gesetz.
3. Bestimmen Sie die Elementzusammensetzung verschiedener Legierungen.

V Grundlagen

Trifft Röntgenstrahlung auf Materie, so können Elektronen der inneren Schalen aus den Atomen herausgelöst werden. Die Fehlstellen werden von Elektronen aus höheren Schalen aufgefüllt. Die dabei abgestrahlte sekundäre Röntgenstrahlung ist charakteristisch für die bestrahlte Probe und wird als Röntgenfluoreszenz bezeichnet (Abbildung 2).

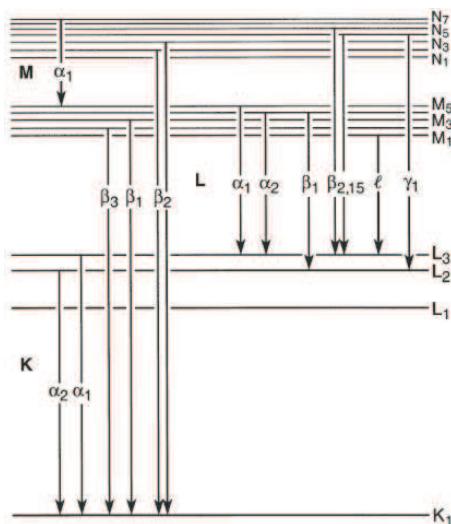


Abbildung 2: *Elektronische Übergänge in einem Atom.* Quelle: X-RAY DATA BOOKLET.

Die Energie der Fluoreszenzstrahlung lässt sich aus dem Bohr'schen Atommodell approximieren. Erfolgt der Elektronenübergang von der Schale mit der Hauptquantenzahl n_2 auf die Schale n_1 , so gilt für die Energie ΔE der emittierten Strahlung:

$$\Delta E = E_2 - E_1 = c h R_\infty \left(\frac{(Z - \sigma_{n1})^2}{n_1^2} - \frac{(Z - \sigma_{n2})^2}{n_2^2} \right), \quad (1)$$

wobei c die Lichtgeschwindigkeit, h das Planck'sche Wirkungsquantum, Z die Kernladungszahl und R_∞ die Rydberg-Konstante beschreiben. Bei den Größen

σ_i handelt es sich um Abschirmkonstanten. Sie berücksichtigen, dass weitere Hüllenelektronen den positiven Kern teilweise abschirmen. Führen wir für σ_{n1} und σ_{n2} eine mittlere Abschirmkonstante σ_{12} ein, so erhalten wir:

$$\Delta E = E_2 - E_1 = c h R_\infty (Z - \sigma_{12})^2 \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right). \quad (2)$$

Mit der Rydberg- Energie $E_R = h c R_\infty \approx 2,18 \times 10^{-18} \text{ J}$ ($E_R \approx 13,6 \text{ eV}$) ergibt sich

$$\sqrt{\frac{E}{E_R}} = (Z - \sigma_{12}) \sqrt{\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right)}. \quad (3)$$

Diese Gleichung wird auch als Moseleysche Gesetz bezeichnet.

Für die K_α -Strahlung, d.h. der Übergang eines Elektrons von der L-Schale ($n_2=2$) in die K-Schale ($n_1=1$), kann für nicht zu schwere Kerne ($Z \approx 30$) für die Abschirmungskonstante der Wert $\sigma_{12} \approx 1$ angenommen werden. Für die Energie der K_α - Strahlung ergibt sich somit:

$$\sqrt{\frac{E}{E_R}} = (Z - 1) \sqrt{\frac{3}{4}}. \quad (4)$$

V.1 Röntgenenergiedetektor

Zur Bestimmung der Energie der Fluoreszenzstrahlung wird ein Halbleiterdetektor verwendet. Dieser entspricht im wesentlichen einem in Sperrrichtung betriebenen pn- Übergang (Diode). Ein n- Halbleiter weist eine hohe Zahl von frei beweglichen negativen Ladungsträgern (Elektronen) auf während der p- Halbleiter eine hohe Zahl von Fehlstellen, d.h. Stellen an denen ein Elektron fehlt, besitzt. Die Fehlstellen oder auch Löcher genannt können von negativen Ladungsträgern besetzt werden weshalb sich diese wie positive Ladungsträger verhalten. Wird ein n-Halbleiter mit einem p-Halbleiter in Kontakt gebracht entsteht ein pn-Übergang. Da die Ladungsträgerdichten in den beiden Halbleitern unterschiedlich sind kommt es zur Diffusion. Elektronen diffundieren vom n-Halbleiter in den p-Halbleiter und Löcher vom p-Halbleiter in den n-Halbleiter. Trifft ein Elektron auf ein Loch kommt es zur Rekombination. Durch diese Rekombination entsteht um die Grenzschicht ein Bereich in dem keine freien Ladungsträger vorhanden sind. Dieser Bereich wird als Verarmungszone bezeichnet. Die Verarmungszone kann nicht beliebig groß werden. Durch die Diffusion kommt es zu einer Verschiebung der Ladungsträger wodurch sich ein elektrisches Feld aufbaut

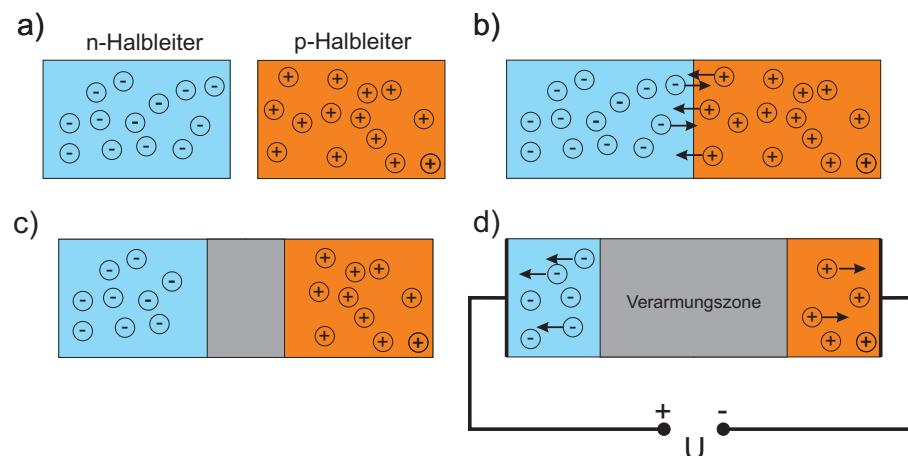


Abbildung 3: a) p- und n- Halbleiter. b)pn- Übergang. Elektronen diffundieren vom n- Halbleiter in den p- Halbleiter und Löcher vom p- Halbleiter in den n- Halbleiter. c) im Bereich der Grenzschicht rekombinieren Elektronen und Löcher. In diesem Bereich gibt es keine freien Ladungsträger. d) In Sperrrichtung betriebener pn- Übergang. Die Verarmungszone wird durch die anliegende Spannung verbreitert.

welches der Diffusion entgegenwirkt. Wird zusätzlich an den pn- Übergang eine äußere Spannung angelegt, so dass sich der p-Halbleiter auf negativen Potential gegenüber dem n- Halbleiter befindet, so werden die jeweiligen frei beweglichen Ladungsträger zusätzlich nach außen abgesaugt. Die Verarmungszone vergößert sich dadurch. In dieser Beschaltung arbeitet der Röntgenenergiedetektor¹: Der pn- Übergang wird in Sperrrichtung betrieben. Trifft nun ein Röntgenphoton auf die Verarmungszone, so kann dieses unter Aussenden eines Photoelektrons (Photoeffekt) absorbiert werden. Das Photoelektron verliert seine Energie durch Stöße mit den Kristallatomen wodurch Elektronen- Loch Paare entstehen. Die entstandene Ladung ist proportional zur Energie des einfallenden Röntgenquants. Die Ladungen werden durch das anliegende Feld abgesaugt und können mit einem ladungsempfindlichen Verstärker (Integrator) gemessen werden (Abbil-

¹Der hier verwendete Energiedetektor ist kein einfacher pn-Übergang. Um ein möglichst großes Detektionsvolumen nutzen zu können, befindet sich zwischen dem n- und p- Halbleiter noch eine undotierte, intrinsische Schicht (PIN- Diode).

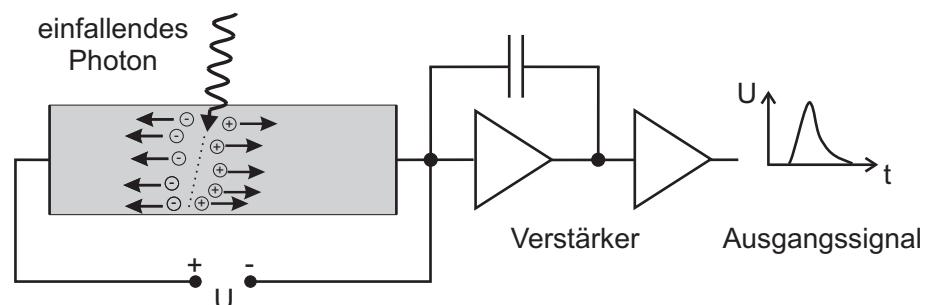


Abbildung 4: Funktionsprinzip des Röntgenenergiedetektors.

dung 4).

Die vom Röntgenenergiedetektor generierten Signale sind proportional zur Energie der Röntgenphotonen. Je größer deren Energie desto größer ist die Zahl der im pn- Übergang freigesetzten Ladungen und damit um so größer der Ausgangsimpuls. Die Impulse werden mit einem Vielkanalanalysator ausgewertet. In Abbildung 5 oben ist eine typische Impulsfolge wie sie der Röntgenenergiedetektor liefert dargestellt. Jeder Impuls entspricht einem detektierten Röntgenphoton. Der Vielkanalanalysator stellt die Verteilung der Pulshöhen dar. Dazu werden die möglichen Signalhöhen in Kanäle unterteilt und gezählt, wieviele Impulse in den entsprechenden Kanälen vorkommen. Diese Häufigkeiten werden als Histogramm dargestellt. Auf der Abszisse ist die Kanalnummer aufgetragen die ein Maß der Energie ist und auf der Ordinate die Anzahl der registrierten Pulse innerhalb des entsprechenden Kanals. Um die Kanäle in die entsprechende Energie umzurechnen muss eine Energiekalibrierung durchgeführt werden. Dazu nimmt man das Energiespektrum eines bekannten Elements auf. In diesem Versuch wird die Energiekalibrierung an den K_α-Linien von Eisen und Molybdän durchgeführt.

VI Durchführung

Schalten Sie das Röntgengerät ein. Um das Rauschen zu reduzieren wird der Energiedetektor mit einem Peltierelement gekühlt. Wenn der Detektor seine Betriebstemperatur erreicht hat, leuchtet die LED des Detektors grün und ist betriebsbereit. Montieren Sie das Eisenplättchen auf den Kunststoffhalter im

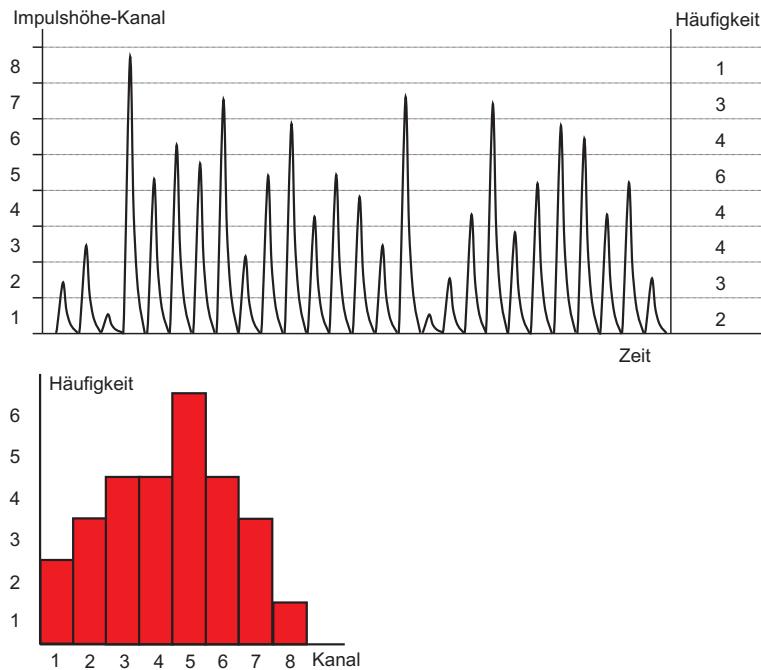


Abbildung 5: Funktionsprinzip des Vielkanalanalysators.

Röntgengerät und positionieren sie diesen auf einen Winkel von 45° . Dazu die Taste **Target** im Bedienfeld des Röntgengeräts drücken und mit dem Regler **Adjust** den Winkel einstellen. Den Röntgenenergiedetektor positionieren Sie mit der Taste **Sensor** auf 90° . Starten Sie das Programm **CASSY Lab**. Klicken Sie im Dialogfenster auf **Messparameter anzeigen** und nehmen Sie die folgende Einstellung vor:

- 512 Kanäle
- negative Pulse
- Verstärkung = $-2,5$
- Messdauer = 180 s.

Wählen Sie am Röntgengerät für die Röhrenspannung 35 kV, für den Strom 1 mA und schalten Sie die Hochspannung ein. Starten Sie die Messung in dem Sie im Programm auf das Symbol klicken. Wiederholen Sie die Messung für alle Metallplättchen im gleichen Diagramm. Merken Sie sich die Reihenfolge der verwendeten Metalle. Messen Sie im Anschluss noch die Spektren der nummerierten Proben.

Energiekalibrierung:

Wählen Sie nur das gemessene Eisenspektrum aus. Drücken Sie dazu die Taste F5. Unter **Darstellung** können Sie alle y- Datensätze bis auf den Datensatz von Eisen ausschalten. Wählen Sie den x- Bereich so, dass das Spektrum möglichst groß dargestellt wird. An den K_α - Peak soll eine Gaußkurve angepasst werden. Klicken Sie dazu rechts mit der Maus auf das Spektrum und wählen Sie unter **Weitere Auswertungen** die Option **Gausskurven gleicher Breite**. Klicken Sie mit der linken Maustaste links neben dem Peak auf den Untergrund und fahren Sie bei gedrückter linker Maustaste den Peak bis zum Beginn des K_β - Peaks. Der K_β - Peak darf nicht markiert werden. Die Kanalnummer des Peakschwerpunkts (μ_1) wird links unten angezeigt. Notieren Sie diesen Wert und wiederholen Sie dies mit dem Molybdän Spektrum. Mit diesen beiden Werten können Sie jetzt die Energiekalibrierung durchführen. Drücken Sie die Tasten Alt+E, aktivieren Sie die Option **globale Energiekalibrierung** und tragen Sie in den Kanalfeldern Ihre gemessenen Werte der Peakschwerpunkte ein. In den beiden Energiefeldern tragen Sie die Energien der K_α - Strahlung der jeweiligen Elemente ein. Die Werte finden Sie in Abbildung 8. Die Abszisse zeigt nun die Energie in der Einheit keV an. Passen Sie nun für jedes Element

eine Gaußkurve an die K_{α} - und K_{β} - Linien an und notieren Sie sich den Peakschwerpunkt (μ_1) und die Peakbreite (σ_1). Die Werte werden links unten angezeigt. Beschriften Sie die einzelnen Linien mit dem dazugehörigen Element. Mit der Tastenkombination Alt+T können Sie im Diagramm ein Textfeld einfügen. Drucken Sie das Spektrum mit allen eingeblendeten Elementen aus (ohne die Legierungen).

Bestimmen Sie die chemische Zusammensetzung der Legierungen. Schalten Sie dazu alle Datensätze bis auf eine Legierung aus. Wenn Sie die Tasten Alt+X drücken wird ein Periodensystem eingeblendet. Durch einen Klick auf das entsprechende Element, werden die jeweiligen Energien im Spektrum eingeblendet. Versuchen Sie so die Zusammensetzung der Legierungen zu analysieren. Beschriften Sie die Spektren mit den zugeordneten Elementen und drucken Sie diese aus. Um welche Materialien handeln es sich?

VII Auswertung in Python mit Jupyter Notebook

Führen Sie die Rechnungen in einem vollständig dokumentierten Jupyter Notebook durch und legen Sie es Ihrer schriftlichen Ausarbeitung ausgedruckt bei. Starten Sie das Programm **Jupyter** vom Desktop aus. Wir benötigen die folgenden Module:

```
%matplotlib inline
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
```

Tragen Sie folgende Werte in Arrays ein.

- Kernladungszahl Z.
- Energie der K_{α} - Strahlung E_{α} .
- Peakbreite der K_{α} - Strahlung (ΔK_{α}).
- Die Größe $\sqrt{E_{\alpha}}$ und dessen Fehler.

Die folgenden Zahlenwerte sind nur Beispiele.

```
Z=np.array([22,26,28,29,30,40,42,47])
#K_alpha (Ti, Fe, Ni, Cu, Zn, Zr, Mo, Ag) in keV:
```

```
K_alpha=np.array([4.88,7.06,7.88,8.90,9.56,17.43,19.27,24.22])
Delta_K_alpha=np.array([0.21,0.24,0.22,0.22,0.21,0.24,0.26,0.28])
sqrt_K_alpha=np.sqrt(K_alpha)
Delta_sqrt_K_alpha= #Ihre Fehlerberechnung
```

Tragen Sie $\sqrt{E_{\alpha}}$ mit Fehlern grafisch über Z auf.

```
plt.errorbar(Z, sqrt_K_alpha, Delta_sqrt_K_alpha, fmt=". ")
plt.xlabel('Kernladungszahl Z')
plt.ylabel(r'$\sqrt{E_{\alpha}}/\sqrt{\text{keV}}$ ', fontsize=14)
plt.title(r'$\sqrt{E_{\alpha}}$' + ' als Funktion von Z')
plt.savefig("figures/K_alpha_vs_Z.pdf", format="pdf")
#fuer figures ihr Verzeichnis waehlen
```

Das Diagramm ist in Abbildung 6 dargestellt.

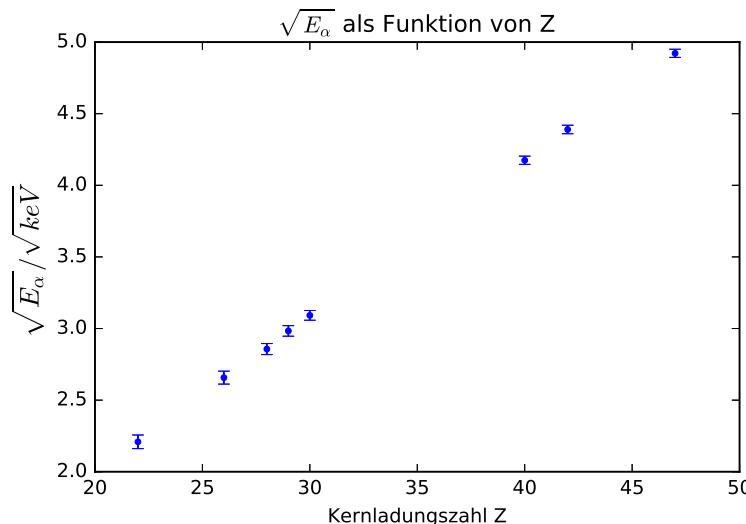


Abbildung 6: $\sqrt{E_{\alpha}}$ als Funktion von Z.

Passen Sie die Funktion $\sqrt{E_{\alpha}} = \sqrt{E_R}(Z - \sigma_{12})\sqrt{\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right)}$ an. Für n_1 und n_2

müssen Sie die passenden Hauptquantenzahlen wählen. E_R und σ_{12} sind freie Fitparameter. Definition der Fitfunktion:

```
#sqrt_Er, sig12 sind Fitparameter
n1=1
n2=2
def fit_func(x, sqrt_Er, sig12):
    return sqrt_Er*(x-sig12)*np.sqrt(1/n1**2-1/n2**2)
```

Durchführung der Anpassung:

```
from scipy.optimize import curve_fit
popt, pcov=curve_fit(fit_func, Z, sqrt_K_alpha,
                      sigma=Delta_sqrt_K_alpha)
```

Mit der Funktion `curve_fit()` wird die Anpassung durchgeführt. Das Ergebnis, d.h. die Parameter werden im Array `popt` gespeichert und deren Varianzen befinden sich auf der Diagonalen der Kovarianzmatrix `pcov`.

```
popt[0]
```

entspricht dem Wert von $\sqrt{E_R}$ und

```
np.sqrt(pcov[0,0])
```

dem 1σ - Fehler von $\sqrt{E_R}$. Analog sind `popt[1]` und `np.sqrt(pcov[1,1])` die Werte für σ_{12} .

Zeichnen Sie die Fitfunktion in das Diagramm ein. *`popt` über gibt die gefundenen Fitparameter der Fitfunktion.

```
plt.errorbar(Z, sqrt_K_alpha, Delta_sqrt_K_alpha, fmt=". ")
plt.xlabel('Kernladungszahl Z')
plt.ylabel(r'$\sqrt{E_\alpha}/\sqrt{\text{keV}}$ ', fontsize=14)
plt.title(r'$\sqrt{E_\alpha}$' + ' als Funktion von Z')
plt.plot(Z, fit_func(Z,*popt))
plt.savefig("figures/K_alpha_vs_Z_fit.pdf", format="pdf")
#fuer figures ihr Verzeichnis waehlen
```

Das Diagramm sollte so ähnlich aussehen wie in Abbildung 7.

Lassen Sie sich die Fitergebnisse ausgeben:

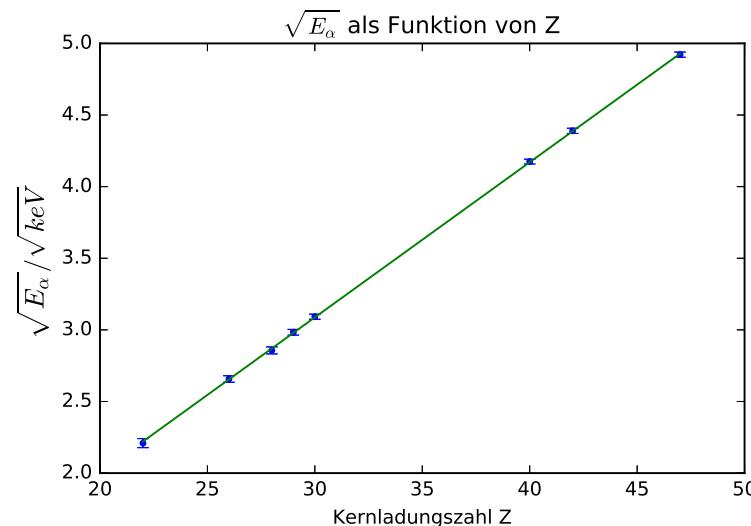


Abbildung 7: $\sqrt{E_\alpha}$ als Funktion von Z.

```
print("sqrt_Er=",popt[0], ",Standardfehler=",np.sqrt(pcov[0][0]))
print("sig12=",popt[1], ",Standardfehler=",np.sqrt(pcov[1][1]))
```

Berechnen Sie hieraus E_R in eV und σ_{12} und vergleichen Sie die Werte mit den Literaturwerten bzw. Ihren Erwartungen. Wiederholen Sie die Auswertung für die K_β - Strahlung.

Ordnungszahl
↓
Atomgewicht
↓

Röntgenenergien (keV) {

| | |
|---|---|
| 1 1.008 H | 2 4.003 He |
| 3 6.941 Li K α 0.054 | 4 9.012 Be K α 0.109 |
| 11 22.99 Na K α 1.041 | 12 24.31 Mg K α 1.254 |
| 19 39.10 K K α 3.314 K β 3.590 | 20 40.08 Ca K α 3.692 K β 4.013 L α 0.341 |
| 37 85.47 Rb K α 13.40 K β 14.96 L α 1.694 | 38 87.62 Sr K α 14.17 K β 15.84 L α 1.807 |
| 55 132.9 Cs K α 30.97 K β 34.97 L α 4.287 L β 4.620 | 56 137.3 Ba K α 32.19 K β 36.38 L α 4.466 L β 4.828 |
| 87 (223) Fr L α 12.03 L β 14.77 M α 2.743 | 88 (226) Ra L α 12.34 L β 15.24 M α 2.825 |
| Mo ↓ K α 17.48 K β 19.61 L α 2.293 L β 2.395 | |
| 58 140.1 Ce L α 4.840 L β 5.262 M α 0.883 | 59 140.9 Pr L α 5.034 L β 5.489 M α 0.929 |
| 60 144.2 Nd L α 5.230 L β 5.722 M α 0.978 | 61 (145) Pm L α 5.433 L β 5.961 M α 1.029 |
| 62 150.4 Sm L α 5.636 L β 6.205 M α 1.081 | 63 152.0 Eu L α 5.846 L β 6.456 M α 1.131 |
| 64 157.3 Gd L α 6.057 L β 6.713 M α 1.185 | 65 158.9 Tb L α 6.273 L β 6.978 M α 1.240 |
| 66 162.5 Dy L α 6.495 L β 7.248 M α 1.293 | 67 164.9 Ho L α 6.720 L β 7.525 M α 1.348 |
| 68 167.3 Er L α 6.949 L β 7.811 M α 1.406 | 69 168.9 Tm L α 7.180 L β 8.101 M α 1.462 |
| 70 173.0 Yb L α 7.416 L β 8.402 M α 1.581 | 71 175.0 Lu L α 7.656 L β 8.709 M α 1.581 |
| 90 232.0 Th L α 12.97 L β 16.20 M α 2.996 | 91 231.0 Pa L α 13.29 L β 16.70 M α 3.082 |
| 92 238.0 U L α 13.61 L β 17.22 M α 3.171 | 93 (237) Np L α 13.94 L β 17.75 M α 3.260 |
| 94 (244) Pu L α 14.62 L β 18.85 M α 3.351 | 95 (243) Am L α 14.62 L β 18.85 M α 3.443 |
| 96 (247) Cm L α 14.96 L β 19.43 M α 3.537 | 97 (247) Bk L α 15.31 L β 20.02 M α 3.632 |
| 98 (251) Cf L α 15.66 L β 20.56 M α 3.727 | 99 (252) Es L α 16.02 L β 21.17 M α 3.824 |
| 100 (257) Fm L α 16.38 L β 21.78 M α 3.923 | 101 (258) Md |
| 102 (259) No | 103 (262) Lr |

Abbildung 8: Periodensystem der Elemente.