[ELO313] Procesamiento Digital de Señales y Aplicaciones

Certamen #3

Mauricio Aravena Cifuentes
201503001-4

13 de agosto de 2021

1. Filtrado de señales

1.1.

Acerca del filtro se tiene la siguiente información:

1. Es un filtro pasa-alto y tiene un polo en cero
2. El polo está ubicado a una distancia $r = 0{,}9$ del origen en el plano-z
3. Las señales constantes no pasan por el sistema

A partir de los datos, se puede deducir que se tiene un rechazo para DC, por lo que la ubicación del cero en el plano complejo debe cumplir:

$$z - 1 = 0 \iff z = 1$$

Sabiendo que $z = e^{j\omega}$, al evaluar en $\omega = 0$ se tendrá rechazo de la banda DC. Para la ubicación del polo, se sabe conviene que este esté lo más apegado al cero, de esta forma se tendrá un filtro con mayor selectividad, se comportara como un filtro *notch* para DC. Por lo que podemos definir la ubicación del polo en $z_p = 0{,}9$. De esta forma la función de transferencia queda de la siguiente forma:

$$H(z) = \frac{z - 1}{z - 0{,}9} \tag{1}$$

Realizando el diagrama de polos y ceros:

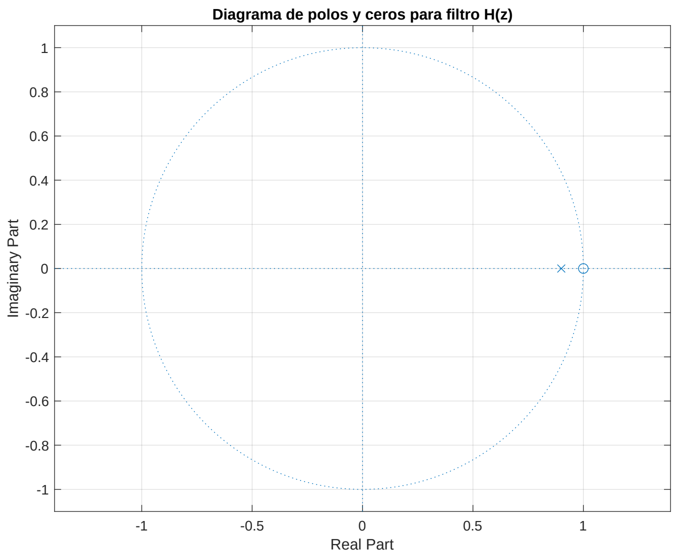

Figura 1: Diagrama de polos y ceros para la función de transferencia 1

Analizando la respuesta en magnitud y fase del filtro:

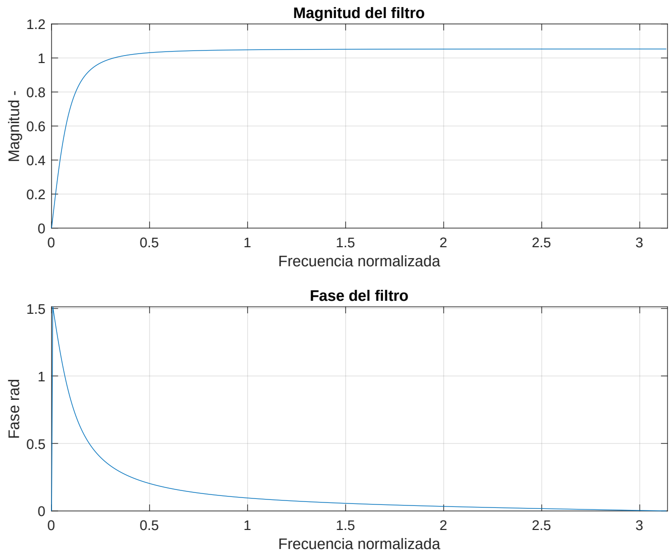

Figura 2: Respuesta en magnitud y fase para el filtro

Se procede a evaluar la función 1, para $\omega = pi$:

$$H(\pi) = \frac{e^{j\pi} - 1}{e^{j\pi} - 0{,}9} = \frac{-2}{-1,9} \approx 1{,}0526 \tag{2}$$

Para normalizar la respuesta del filtro, para $\omega = \pi$, basta con hacer que para esta frecuencia el filtro tenga ganancia unitaria, por lo que se puede definir la ganancia de normalización:

$$G_n = \frac{1{,}9}{2} = 0{,}95 \tag{3}$$

Por lo que se puede reescribir la función de transferencia:

$$\hat{H}(z) = G_n \cdot H(z) = 0{,}95 \cdot \frac{z - 1}{z - 0{,}9} \tag{4}$$

Llevando la expresión a su forma de ecuación de diferencias:

$$X(z) \cdot 0{,}95(1 - z^{-1}) = Y(z) \cdot (1 - 0{,}9z^{-1}) \tag{5}$$
$$y(z) = 0{,}9 \cdot y\,[n-1] + 0{,}95\,(x\,[n-1] - x\,[n]) \tag{6}$$

TERMINAR DEMOSTRACIONES - VERIFICAR

Considere ahora, que se tiene como entrada del filtro definido en 4:

$$x[n] = 2 \cdot cos\left(\frac{\pi}{6}n + \frac{\pi}{4}\right)$$

Como se sabe, la expresión tiene una única frecuencia fundamental en $\pm\pi/6$. De esta forma, para el filtro diseñado en el punto anterior, basta evaluar únicamente el efecto de la atenuación y desfase para la frecuencia de la señal de entrada. De esta forma:

$$|H(\pi/6)| = 0{,}95 \cdot \left|\frac{e^{j\pi/6} - 1}{e^{j\pi/6} - 0{,}9}\right| = 0{,}9812 \tag{7}$$
$$\angle H(\pi/6) = arctan\left(0{,}95 \cdot \frac{e^{j\pi/6} - 1}{e^{j\pi/6} - 0{,}9}\right) = 0{,}1940 \text{ rad} \tag{8}$$

De esta forma, se puede obtener la salida:

$$y[n] = \sqrt{(}2) \cdot 0{,}9812 \cdot cos\left(\frac{\pi n}{6} + \frac{\pi}{4} + 0{,}1940\right) \tag{9}$$

1.2. Filtraje señal electrocardiograma

Se pide diseñar un filtro con dos ceros, para el filtraje de una señal ECG muestreada a 200 Hz, con ruido en la banda de 60 Hz. Analizando la señal:

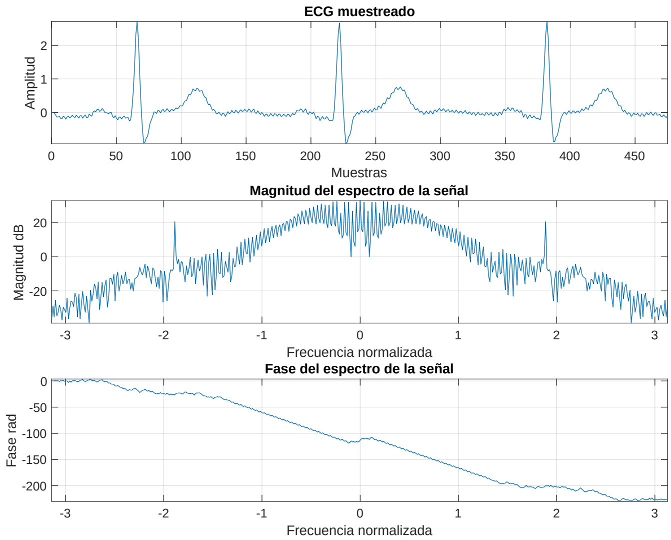

Figura 3: Señal muestreada, en el dominio temporal y de frecuencia

Se puede ver claramente, las bandas de ruido presentes. Se propone la siguiente estructura para el filtro:

$$\omega_r = \frac{2\pi 60}{200} = 0{,}6\pi \tag{10}$$

$$H(z) = \frac{(z - e^{j\omega_r})(z - e^{-j\omega_r})}{z^2} = \frac{z^2 + 2cos(\omega_r) + 1}{z^2} \tag{11}$$

Realizando la implementación en MATLAB, se puede obtener la magnitud y fase del filtro:

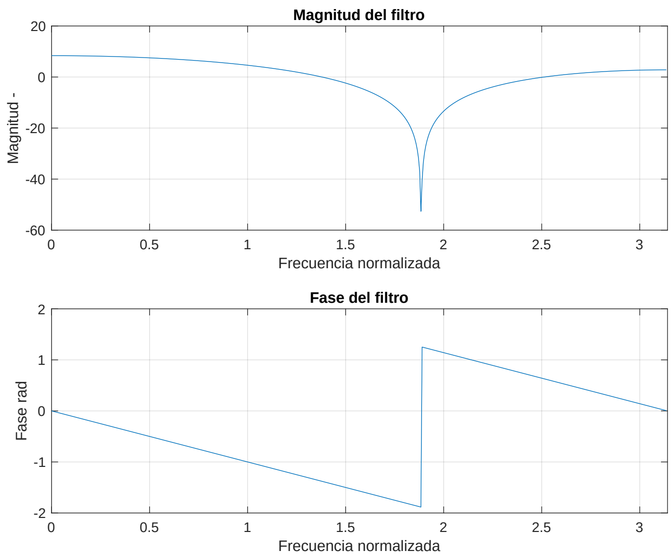

Figura 4: Respuesta en magnitud y fase para el filtro

A partir de las respuestas del filtro, se puede ver que en términos de magnitud, tiene un rechazo relativamente lento, con la banda de paso no plana. En términos de la fase, se puede ver que se tiene un desfase lineal deseable. Aplicando el filtro a la señal:

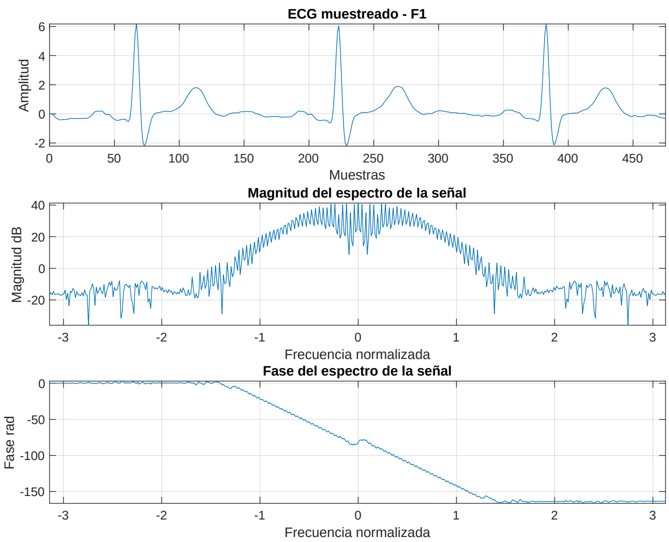

Figura 5: Resultado del filtraje de la señal

Se puede ver que el proceso de filtrado ha sido exitoso, permitiendo remover la banda con ruido de la señal. Se puede ver una cierta *amplificación* de ciertas bandas, dada la forma no plana del filtro, el espectro se tendió a *curvar*. En términos de fase, se puede ver que el efecto del filtro sobre ésta, es el esperado, dada la fase lineal del filtro. Realizando una comparación directa de ambas señales:

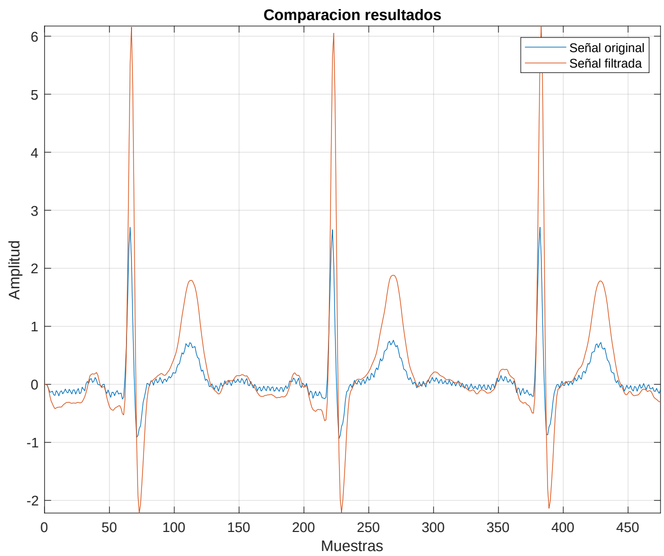

Figura 6: Comparación de las señales

Considere ahora, que se añaden dos polos a la frecuencia de rechazo, con un radio $r \in [0,8-0,9]$. A partir de esto, se escogen los casos extremos para analizar:

2. Maybe later

Aplicando la propiedad de la suma en el coseno, se puede descomponer esta expresión:

$$x[n] = 2\left(cos(\frac{\pi}{6}n) \cdot cos(\frac{pi}{4}) - sin(\frac{\pi n}{6} \cdot sin(\frac{\pi}{4}\right)$$

Con $cos(\pi/4) = \sqrt(2)/2$:

$$x[n] = \sqrt{2}\left(cos(\frac{\pi n}{6} - sin(\frac{\pi n}{6})\right)$$

Note