

[ELO313] PROCESAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES Y
APLICACIONES

TAREA #2

**DTFT, DFT y Procesamiento de Señales en
Frecuencia**

Mauricio Aravena Cifuentes
201503001-4

24 de julio de 2021

1. Diseño de Filtros Digitales

2. Ejercicios de DTFT y DFT

2.1.

Considere el siguiente sistema:

$$y[n] = \frac{1}{L+1} \sum_{k=0}^L x[n-k] \quad (1)$$

Aplicando DTFT sobre la ecuación 1:

$$Y(\omega) = \frac{1}{L+1} \sum_{k=0}^L X(\omega) \cdot e^{-j\omega k} = \frac{1}{L+1} \cdot X(\omega) \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^L e^{-j\omega k}}_S \quad (2)$$

Para el término S , se analiza la convergencia de la serie geométrica:

$$S = \sum_{k=0}^L e^{-j\omega k} = \frac{1 - e^{-j\omega(L+1)}}{1 - e^{-j\omega}} = \frac{e^{-j\omega \frac{L+1}{2}}}{e^{-j\omega \frac{1}{2}}} \cdot \left(\frac{e^{j\omega \frac{L+1}{2}} - e^{-j\omega \frac{L+1}{2}}}{e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}} \right) = e^{-j\omega L/2} \left(\frac{\sin\left(\frac{\omega}{2}(L+1)\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \right)$$

$$\therefore S = e^{-j\omega L/2} \cdot pSinc_{L+1}(\omega)$$

Considerando este resultado, se puede expresar la ecuación 2:

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{e^{-j\omega L/2}}{L+1} \cdot pSinc_{L+1}(\omega) \quad (3)$$

De esta forma, se obtiene una expresión compacta para la respuesta en frecuencia (DTFT) del sistema. Graficando la magnitud y fase para la ecuación 2, considerando el valor de $L = 8$, se obtiene lo siguiente:

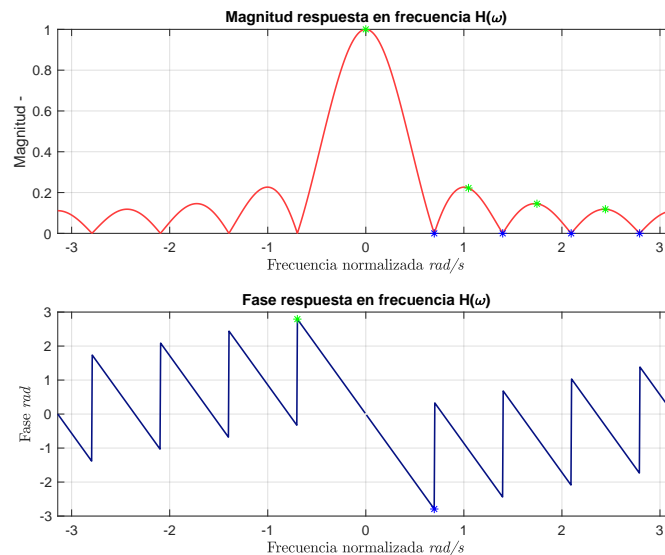


Figura 1: Magnitud y fase para DTFT encontrada: $H(\omega)$. Se marcaron los máximos de los gráficos con un marcador verde y los mínimos con un marcador azul

Para hallar los máximos y mínimos mostrados en los gráficos, es conveniente analizar la expresión de la ecuación 2:

$$H(\omega) = \frac{1}{L+1} \cdot e^{-j\omega L/2} \cdot pSinc_{L+1}(\omega)$$

En el caso de la magnitud, el término exponencial puede ser ignorado, dado que este siempre contribuye con magnitud 1. Por lo que para analizar los máximos y mínimos de magnitud, sólo es conveniente analizar la función $pSinc$. Para esta, el primer máximo, se ubicará en $\omega = 0$, dado que es el punto donde ambas partes de la fracción que definen a la $pSinc$ se indefinen, y el resultado tiende a 1. Luego de este máximo, se tendrán máximos locales de acuerdo a los máximos del término $\sin(9 \cdot \omega/2)$. Analizando la ocurrencia de máximos para el t término:

$$\frac{9\omega}{2} = \frac{\pi i}{2} (1 + 2m) \iff \omega_{max} = \frac{\pi i}{9} (1 + 2m) \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Lo que entrega la posición de los máximos en el gráfico obtenido. Para los mínimos el desarrollo es análogo, considerando que ahora se debe analizar, para el mismo término, cuando este se haga cero:

$$\frac{9\omega}{2} = \pi m \iff \omega_{min} = \frac{2\pi m}{9} \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Por lo que ahora se tiene la posición de los máximos y mínimos para la magnitud de $H(\omega)$. Para analizar los máximos y mínimos de fase, conviene considerar que el término de la $pSinc$, tendrá una contribución de fase cero, dentro de su lóbulo principal. Por lo que únicamente el término exponencial tendrá efecto sobre la fase del sistema. Dentro del lóbulo principal, como se puede ver en la figura 1, existe una fase lineal con pendiente $-L/2$. El máximo y mínimo para la fase, corresponden a los nulos que *encierran* el lóbulo principal:

$$\omega_{min} = \frac{-2\pi}{9}$$

$$\omega_{max} = \frac{2\pi}{9}$$

2.2.

Se considera las señales de largo 6, $x[n]$ y $h[n]$, con sus transformadas discretas de Fourier de 7 puntos, $X^{(7)}(k)$ y $H^{(7)}(k)$. Se define la señal $Y(k) = X^{(7)}(k) \cdot H^{(7)}(k)$ y se calcula la inversa para obtener $y[n]$. Analizando la situación, es evidente que para realizar el cálculo de $Y(k)$ se está realizando una convolución en el tiempo. Sin embargo, como se está calculando en el dominio de la DFT, se está realizando una convolución circular, en la cual dado el largo utilizado aparecerá aliasing temporal. Para clarificar este hecho, es conveniente realizar el cálculo de $y[n]$ mediante convolución lineal, considere:

$$y[n] = \underbrace{x[n] * h[n]}_{\text{Largo 11}} = \{y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8, y_9, y_{10}\} \quad (4)$$

Ahora considere el caso donde se realiza convolución circular de 7 puntos (caso mediante uso de DFT):

$$\hat{y}[n] = x[n] \underset{7}{\circledast} h[n] = \underbrace{\{y_0 + y_7, y_1 + y_8, y_2 + y_9, y_3 + y_{10}, y_4, y_5, y_6\}}_{\text{Aparece solapamiento}} \quad (5)$$

En este caso, como se está usando un *tamaño* inferior al necesario para la convolución lineal, las últimas 4 muestras, se solapan al aparecer la periodicidad de la convolución circular, distorsionando las primeras cuatro muestras. A partir de los resultados obtenidos en las ecuaciones 4 y 5, es claro que para $n = \{4, 5, 6\}$ el resultado de la convolución circular y lineal convergen a lo mismo.

2.3.

Considere la secuencia finita:

$$x[n] = \delta[n - 2] + \delta[n - 4] \quad (6)$$

2.3.1. Cálculo de la DFT de 8 puntos

Sabiendo que un *delay* temporal se traduce en un desfase en frecuencia, se encuentra la DFT de 8 puntos de la secuencia:

$$X^{(8)}(k) = 1 \cdot e^{\frac{-j2\pi k2}{8}} + 1 \cdot e^{\frac{-j2\pi k4}{8}} = e^{-jpik/2} + e^{-jpik} \quad (7)$$

2.3.2. Desfase de la DFT

Considere la siguiente señal:

$$Y^{(8)}(k) = e^{j2\pi k2/8} \cdot X^{(8)}(k) \quad (8)$$

Para encontrar la secuencia que entrega esta transformada, se puede tomar la misma idea que se usó para calcular la DFT de la señal $x[n]$, un retardo en el tiempo se traduce como un desfase en frecuencia, por lo que el término exponencial, lo que hace es desplazar la señal original en dos muestras hacia la izquierda:

$$y[n] = x[n+2] = \delta[n] + \delta[n-2] \quad (9)$$

Note, que se podría haber realizado la multiplicación término a término en la ecuación 8 y luego calcular la inversa del resultado y se habría llegado a la misma expresión.

2.3.3. Encontrar la siguiente secuencia

Sea la señal definida como:

$$Y^{(8)}(k) = X^{(8)}(k) \cdot W^{(8)}(k) \quad (10)$$

Donde se define:

$$w[n] = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq 5 \\ 0 & \text{E.O.C.} \end{cases} \quad (11)$$

Note que en la ecuación 10, se está realizando una convolución circular en el tiempo, sin embargo, no se está respetando el *tamaño* necesario para realizarla (15), por lo que el resultado presentará **aliasing-temporal**. Definiendo convenientemente la señal $w[n]$:

$$w[n] = \{1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0\}$$

Y realizando la convolución circular para obtener la secuencia $y[n]$:

$$y[n] = x[n] \otimes_8 w[n] = \{1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2\} \quad (12)$$

Para comprobar la aparición de este **aliasing-temporal** se puede realizar la convolución lineal de largo 15 de ambas señales:

$$\hat{y}[n] = x[n] * w[n] = \{0, 0, 1, 1, 2, 2, 2, 2, \underbrace{1, 1, 0, 0, 0, 0, 0}_{\text{Señal que se dobla}}\} \quad (13)$$

A partir de este resultado, se puede ver, que en el caso limitado a 8 muestras, las últimas 7 muestras aparecerán al comienzo como doblaje en el tiempo.

2.4.

Se considera la siguiente definición para la ventana de Blackman:

$$w[n] = a_0 - a_1 \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) + a_2 \cos\left(\frac{4\pi n}{N}\right) \quad (14)$$

Con las siguientes constantes:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1 - \alpha}{2} \\ a_1 &= 0,5 \\ a_2 &= \frac{\alpha}{2} \\ \alpha &= 0,16 \end{aligned}$$

Sea la señal buscada:

$$y[n] = x[n] \cdot w[n] \xrightarrow[N]{DFT} Y^{(N)}(k) = X^{(N)}(k) \otimes_N W^{(N)}(k) \quad (15)$$

Calculando la transformada de $w[n]$, utilizando la identidad del coseno:

$$W^{(N)}(k) = N \left(a_o \delta(k) - \frac{a_1}{2} [\delta(k-1) + \delta(k-(N-1))] + \frac{a_2}{2} [\delta(k-2) + \delta(k-(N-2))] \right) \quad (16)$$

Volviendo a la expresión original:

$$Y^{(N)}(k) = N \left(a_o X^{(N)}(k) - \frac{a_1}{2} [X^{(N)}(k-1) + X^{(N)}(k-(N-1))] + \frac{a_2}{2} [X^{(N)}(k-2) + X^{(N)}(k-(N-2))] \right)$$

Dado este resultado, es posible, a partir de la DFT de la señal $x[n]$, encontrar la DFT de la señal $y[n]$.

2.5.

Considere la DFT de $2N$ puntos de una señal $x[n]$, por definición:

$$X^{(2N)}(k) = \sum_{n=0}^{2N-1} x[n] \cdot e^{-j2\pi kn/2N}$$

Considere, que el largo de la señal $x[n]$ cumple la relación $2N = 2^p$, para cierto valor de p . Se puede aplicar el cálculo de la DFT mediante FFT con *Radix-2*. Separando las muestras pares de las impares:

$$\begin{aligned} x_0[m] &= x[2m] & \xleftrightarrow[N]{DFT} & X_0^N(k) \\ x_1[m] &= x[2m+1] & \xleftrightarrow[N]{DFT} & X_1^N(k) \end{aligned}$$

Separando en el cálculo de la DFT:

$$\begin{aligned} X^{(2N)}(k) &= \sum_{m=0}^{N-1} x[2m] \cdot e^{-j2\pi km/N} + \sum_{m=0}^{N-1} x[2m+1] \cdot e^{-j2\pi k(2m+1)/2N} \\ X^{(2N)}(k) &= \sum_{m=0}^{N-1} x[2m] \cdot e^{-j2\pi km/N} + \underbrace{e^{-j2\pi k/2N}}_{W_{(2N)}^{(k)}} \sum_{m=0}^{N-1} x[2m+1] \cdot e^{-j2\pi km/N} \end{aligned}$$

$$\therefore X^{(2N)}(k) = X_0^N(k) + W_{2N}^k \cdot X_1^N \quad k = 0, 1, \dots, 2N-1$$

Separando, dada la periodicidad en N , para corregir el índice k :

$$X^{2N}(k) = X_0^N(k) + W_{2N}^k \cdot X_1^N \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (17)$$

$$X^{2N}(k+N) = X_0^N(k) - W_{2N}^k \cdot X_1^N \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (18)$$

De esta manera, se puede calcular la DFT de una secuencia de $2N$ puntos, mediante el cálculo de FFT de N puntos.

3. Zero-Padding

Sea la señal en tiempo discreto:

$$x[n] = \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi n}{20}\right) & : 0 \leq n \leq 99 \\ 0 & : \text{E.O.C.} \end{cases} \quad (19)$$

A partir de la señal, se calcula la DFT para $N = 100$ y $N = 400$, graficando la magnitud del resultado en el intervalo $[-\pi, \pi]$:

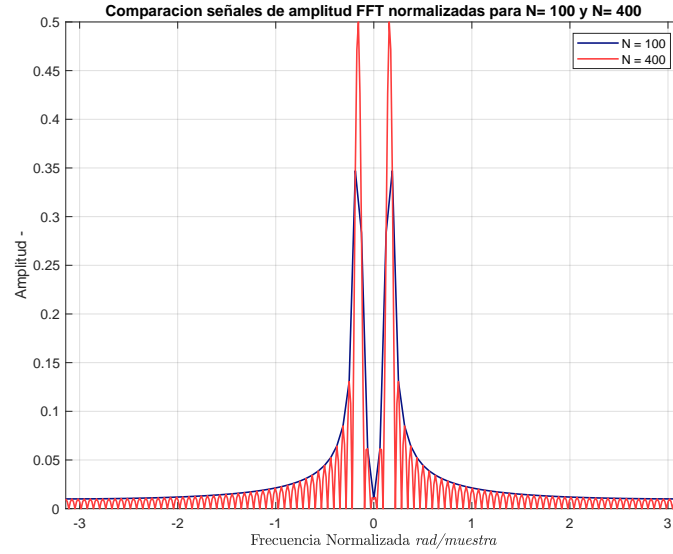


Figura 2: Resultado de la magnitud, para la DFT de la señal para $N = 100$ y $N = 400$.

Note que la magnitud de los resultados para ambos casos, han sido normalizados por la duración de la señal ($1/100$). Se puede ver, que el caso de $N = 400$ se acerca más a lo que se espera de la DTFT, esto se puede explicar debido a que se está aumentando la *resolución* de la DFT de forma aparente. Al aumentar el largo total de la señal, aunque no se esté aumentando efectivamente el largo de la información (duración de la señal cosenoidal), la cantidad de puntos que podrá tomar el índice de frecuencias k aumentará cuatro veces. Note que el efecto de aumentar el largo total de la señal no implica que se tenga más información, el efecto de la mejora en la resolución viene del resultado de la interpolación realizada entre los puntos. Tomando esta idea, se podría a priori pensar que aumentar el largo total de la señal, se traduce en una mejor representación de la señal en el dominio de frecuencia, sin embargo, el caso no es así. A continuación se calcula y gráfica la DFT de la misma señal, con largos $N = \{1000, 5000, 10000, 20000\}$:

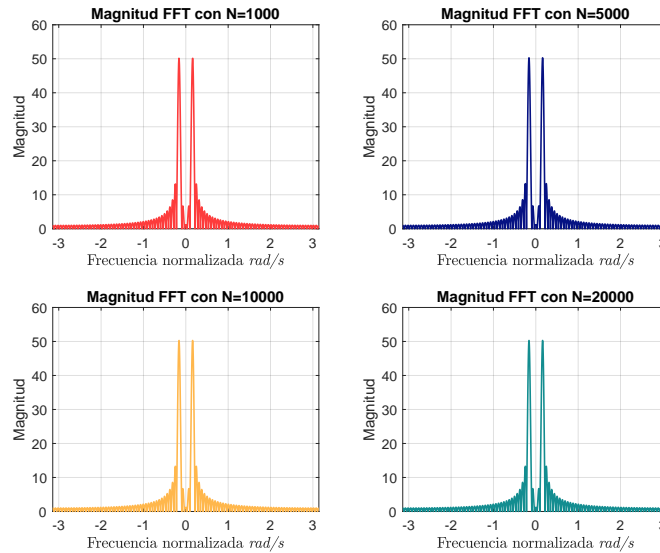


Figura 3: Resultado de la magnitud, para la DFT de la señal para diversos largos N

Como se puede ver, el efecto de seguir aumentando el valor de N no implica directamente una mejora directa de la representación del espectro de la señal. Los gráficos en la figura 3, no muestran una diferencia significativa con los resultados encontrados para el caso de $N = 400$, en la figura 2. Esto se debe al enventanamiento que presenta la señal definida en la ecuación 21, el cual se podría

representar de la siguiente manera:

$$x[n] = \cos(\pi n/20) \cdot w[n] \quad (20)$$

Donde la ventana $w[n]$ se define como:

$$w[n] = \begin{cases} 1 & : 0 \leq n \leq 99 \\ 0 & : \text{E.O.C.} \end{cases} \quad (21)$$

Esta ventana limita la cantidad de información que se utiliza para determinar el espectro, si en vez de aumentar el largo de la señal N , se aumentará la duración de la ventana, permitiendo añadir más muestras de la señal cosenoidal, lo que mejoraría la representación del espectro. Si el ancho de la ventana tendiera a infinito, se lograría obtener la representación obtenido mediante DTFT. Para escoger un valor de N , que permita determinar de buena manera el espectro, un criterio es utilizar **al menos** el largo de la señal muestreada, cualquier valor inferior al propio largo de la señal, implicará que muestras fueron descartadas y la estimación del espectro no será *la mejor* representación de la señal capturada. Formalizando, donde L_N corresponde al largo de la señal muestreada:

$$N \geq L_N \quad (22)$$

Este es el valor mínimo, para poder representar el espectro, cualquier valor sobre esta cota, *mejorará* la interpolación de los puntos obtenidos.

4. Inversión de DFT y Efecto de Ventanas

Considere las señales:

$$x_1(t) = \sin(\omega t) \quad (23)$$

$$x_2(t) = \cos(\omega t) \quad (24)$$

Para ambas señales, se obtiene la DFT e inmediatamente se calcula la inversa de la misma, para recuperar $x_i[n]$. Para la reconstrucción se consideran los siguientes largos: $N = \{256, 800, 4096\}$:

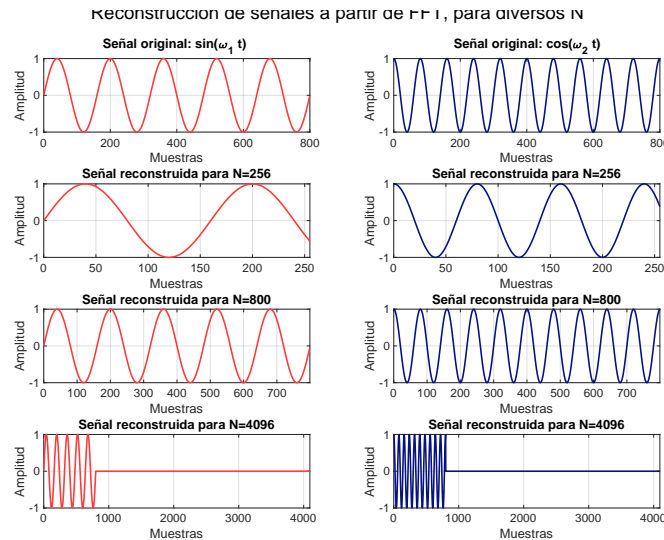


Figura 4: Resultado de la reconstrucción de la señal, para diversos largos N

A partir de los resultados obtenidos, se puede apreciar que para valores de N menores al largo de la señal, la reconstrucción de la misma mediante IDFT, solo es capaz de reconstruir los valores considerados al momento del cálculo de la DFT. Esto se explica, dado que al considerar un largo menor al de la señal, la información que no alcanza a ser cubierta se descarta, lo que conlleva a *distorsionar la señal original*, dando lugar a una nueva señal, la cual posee menos muestras. En el caso donde N sea mayor que el largo de la señal, se utiliza *zero-padding*, para cubrir las muestras

no-existent, dando lugar a la señal original con un soporte de ceros en alguno de sus extremos (en este caso, a la derecha). A continuación se procede a realizar el efecto de eventanar las señales, considerando un largo $N = 800$, utilizando una ventana **Blackman** y una **rectwin**:

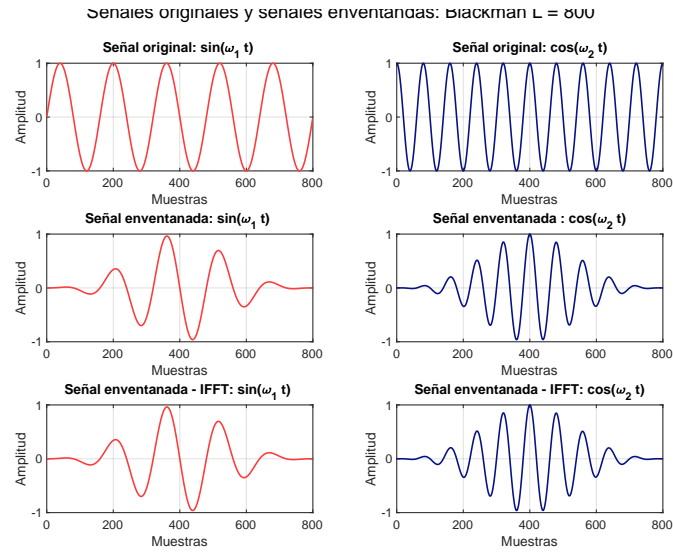


Figura 5: Resultado del eventanamiento de la señal con una ventana **Blackman**, considerando un largo $N = 800$

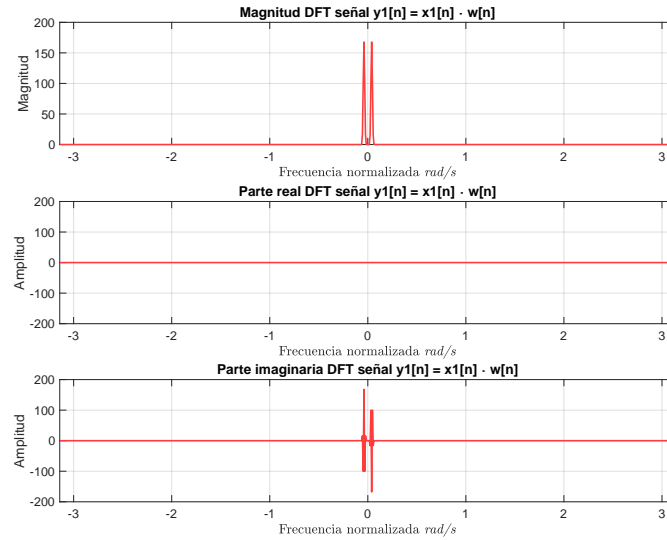


Figura 6: Resultado en frecuencia del eventanamiento de la señal $x_1[n]$ con una ventana **Blackman**, considerando un largo $N = 800$

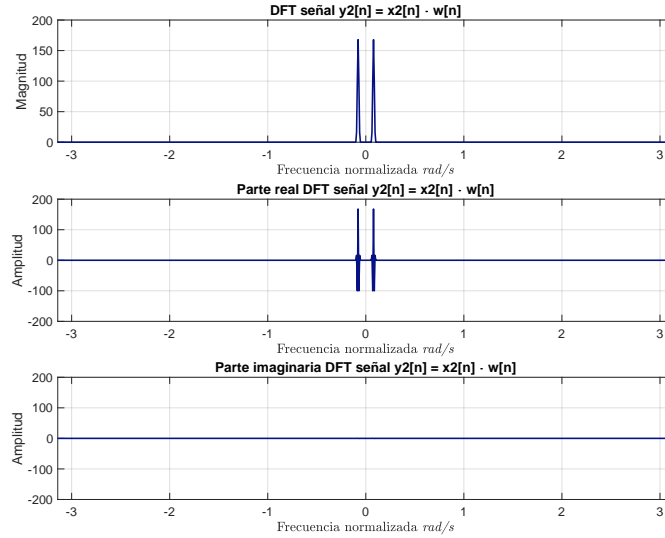


Figura 7: Resultado en frecuencia del enventanamiento de la señal $x_2[n]$ con una ventana Blackman, considerando un largo $N = 800$

Note que para ambos casos, la representación de los espectros resultantes es acorde a lo esperado para cada señal. Repitiendo el mismo procedimiento para las señales, pero considerando un largo $N = 256$, se obtienen los siguientes resultados:

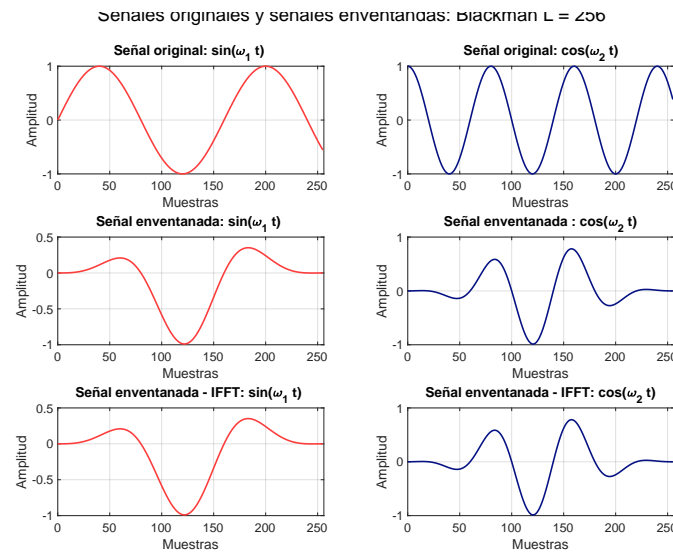


Figura 8: Resultado del enventanamiento de la señal con una ventana Blackman, considerando un largo $N = 256$

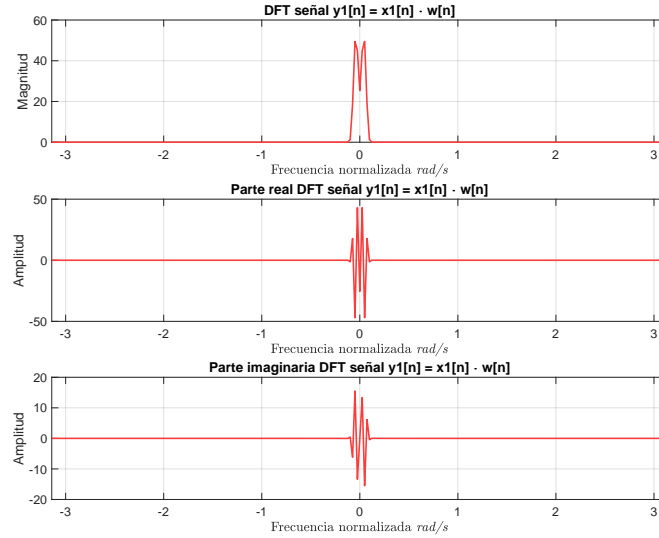


Figura 9: Resultado en frecuencia del enventanamiento de la señal $x_1[n]$ con una ventana Blackman, considerando un largo $N = 256$

De inmediato se puede ver que esta operación de enventanamiento, ha introducido una distorsión a la señal, dado que para una señal sinusoidal no se espera que tenga una componente real en su espectro.

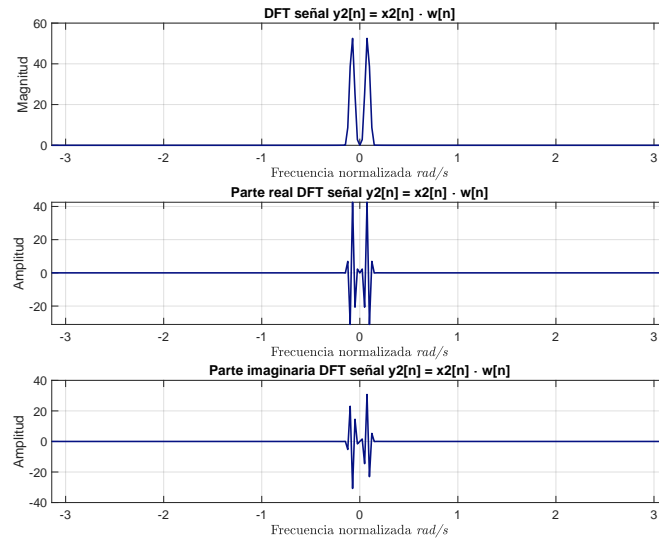


Figura 10: Resultado en frecuencia del enventanamiento de la señal $x_2[n]$ con una ventana Blackman, considerando un largo $N = 256$

Para el caso de la señal cosenoidal, el efecto de distorsión es el mismo, en el espectro aparece una componente imaginaria que no se condice con lo esperado de forma teórica. Repitiendo los casos recién estudiados, para una ventana de tipo `rectwin` de largo $N = 800$:

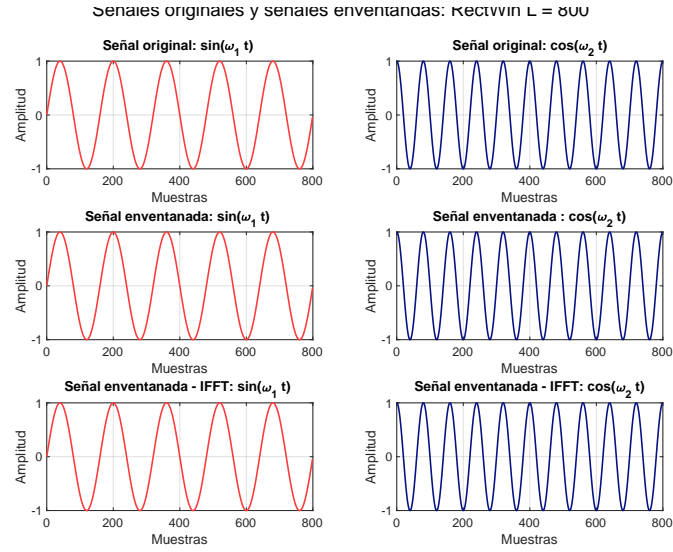


Figura 11: Resultado del enventanamiento de la señal con una ventana **rectwin**, considerando un largo $N = 800$

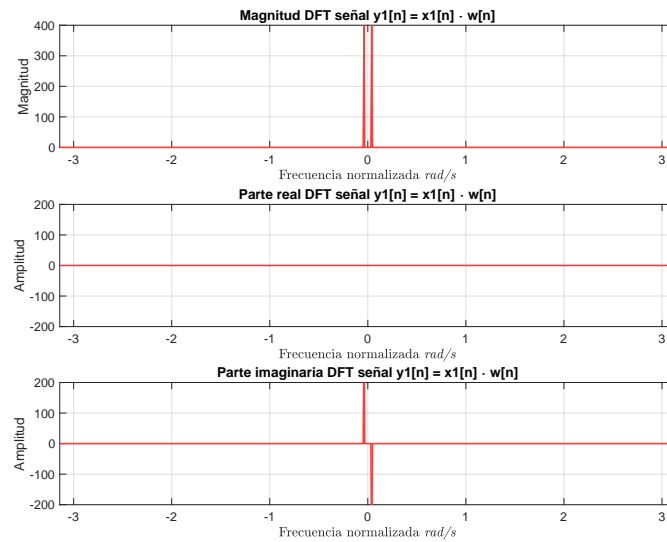


Figura 12: Resultado en frecuencia del enventanamiento de la señal $x_1[n]$ con una ventana **rectwin**, considerando un largo $N = 800$

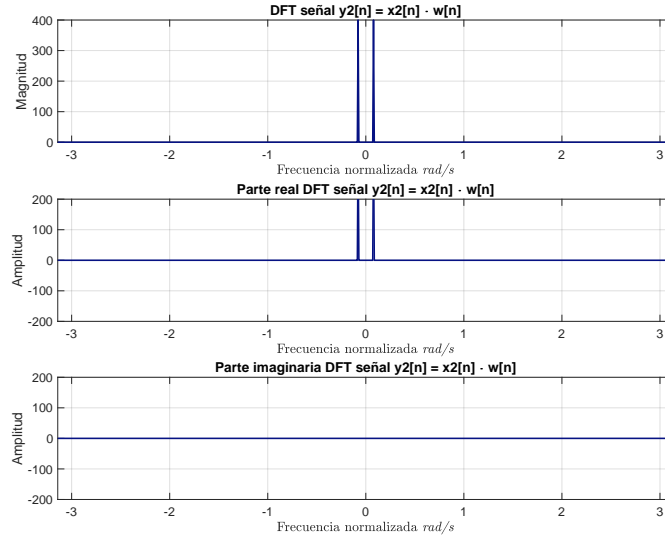


Figura 13: Resultado en frecuencia del enventanamiento de la señal $x_2[n]$ con una ventana **rectwin**, considerando un largo $N = 800$

Note que los resultados obtenidos con esta ventana, se acercan **bastante** a lo esperado de forma teórica, para una señal infinita. El *ancho* real que deben poseer los deltas, son más angostos que en el caso de la ventana de **Blackman**. Repitiendo, para la misma ventana, pero $N = 256$:

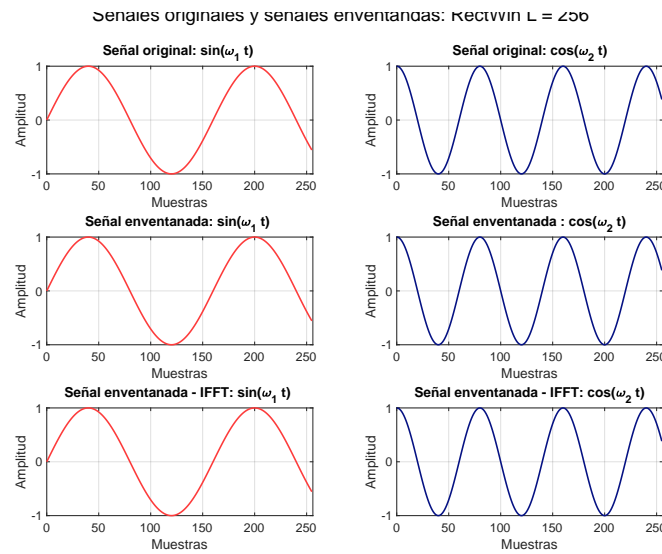


Figura 14: Resultado del enventanamiento de la señal con una ventana **rectwin**, considerando un largo $N = 256$

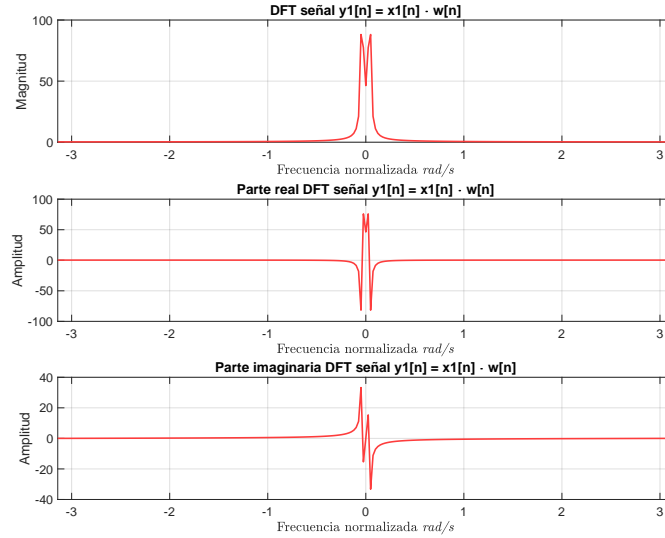


Figura 15: Resultado en frecuencia del enventanamiento de la señal $x_1[n]$ con una ventana **rectwin**, considerando un largo $N = 256$

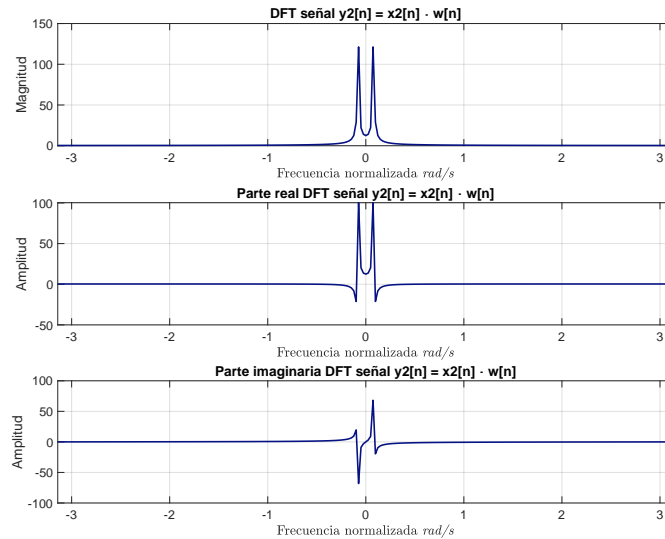


Figura 16: Resultado en frecuencia del enventanamiento de la señal $x_2[n]$ con una ventana **rectwin**, considerando un largo $N = 256$

Note que para este caso, nuevamente aparece distorsión en ambas señales, sin embargo, también para el caso de esta ventana se puede notar que existe más *leakage* de las frecuencias aledañas en la distorsión, que en el caso de la ventana de **Blackman**. Se ha perdido resolución. A partir de lo observado, se puede llegar a las siguientes conclusiones. En el caso de tener $N = 800$, lo que permite tener una buena resolución de la señal, convendría utilizar una ventana rectangular dado que permite tener un espectro que se asemeja más a la DTFT de las señales. Por otro lado, si se trabaja con $N = 256$, la ventana de **Blackman** es más robusta al *leakage*, permitiendo compensar la pérdida de resolución al disminuir la cantidad de puntos.

5. Alteraciones de Fase en Señales Discretas

Considere la siguiente respuesta a impulso para el filtro:

$$h[n] = \frac{1}{16} \left(\sum_{k=0}^{15} (-1)^k \delta[n - k] \right) \quad (25)$$

Utilizando MATLAB para calcular la DFT del filtro, se obtienen los siguientes gráficos:

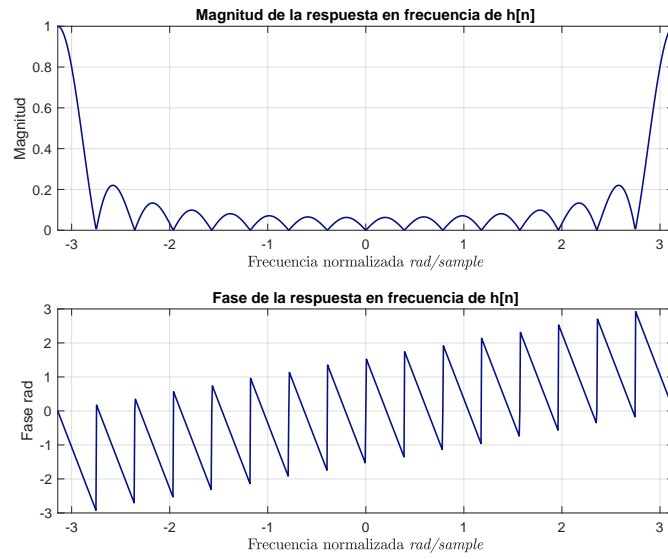


Figura 17: Magnitud y fase de la respuesta en frecuencia del filtro, entre $\pm\pi$.

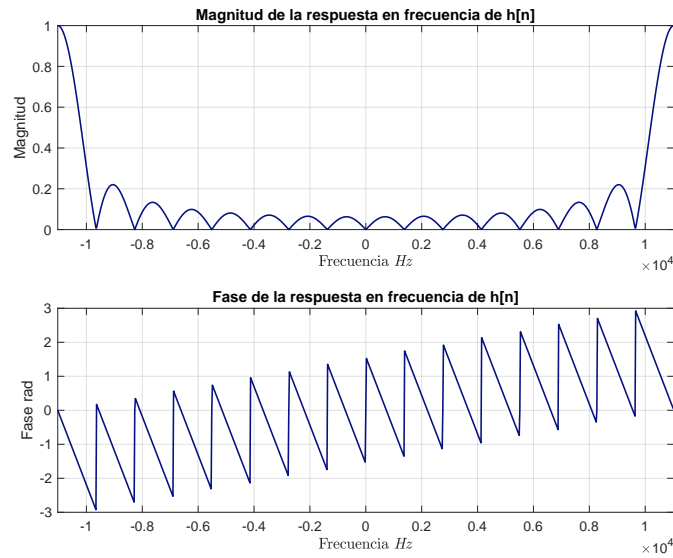


Figura 18: Magnitud y fase de la respuesta en frecuencia del filtro, entre $\pm f_s/2$.

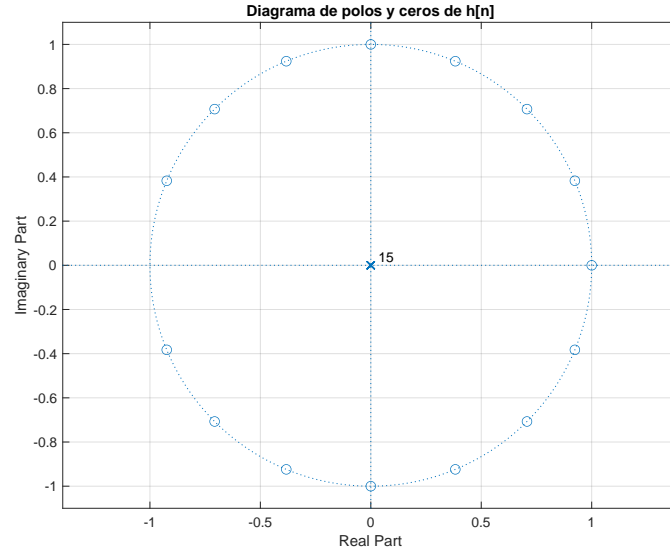


Figura 19: Diagrama de polos y ceros del filtro

A partir del gráfico 18, se puede ver que el filtro se comporta como un pasa-altos. Utilizando el filtro, para filtrar la señal `music.wav`, mediante un filtrado de fase cero, este filtrado se aplicará utilizando el comando implementado en MATLAB: `filtfilt`, que realiza la siguiente operación equivalente:

$$y[n] = x[n] * h[n] * h[-n] \quad (26)$$

Que corresponde a la convolución de la señal, con la respuesta a impulso del filtro y luego con la respuesta a impulso de tiempo inverso del filtro. Analizando esto en el dominio de la frecuencia:

$$Y(k) = X(k) \cdot H(k) \cdot H'(k) = X(k) \cdot \underbrace{|H(k)|^2}_{\text{Con fase cero}} \quad (27)$$

Realizando el filtraje, sobre la señal se obtiene:

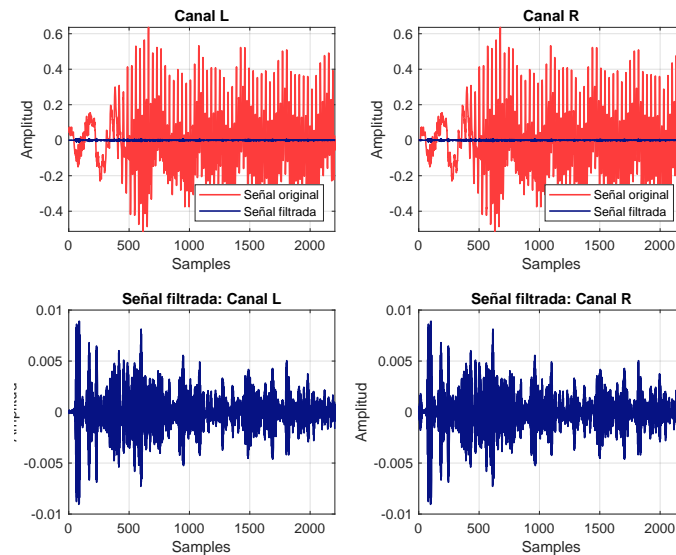


Figura 20: Resultado filtraje de fase cero, sobre la señal. Se desglosa por canal

Realizando la comparación entre el resultado obtenido para el filtraje de fase cero y una implementación del filtro utilizando convolución y ecuación de diferencias:

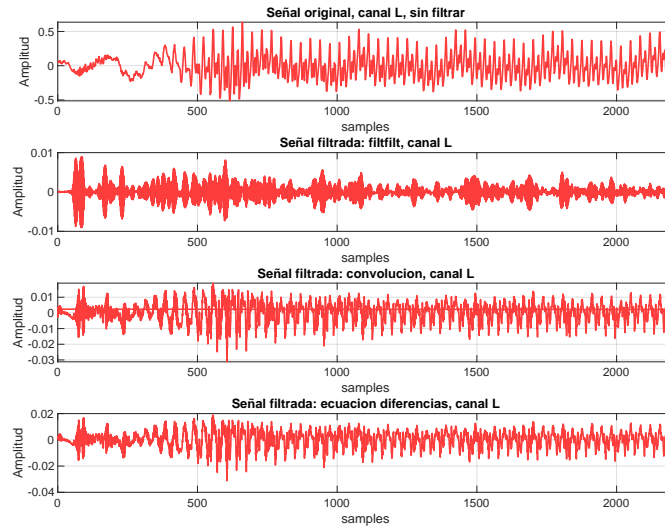


Figura 21: Comparación entre implementaciones del filtro

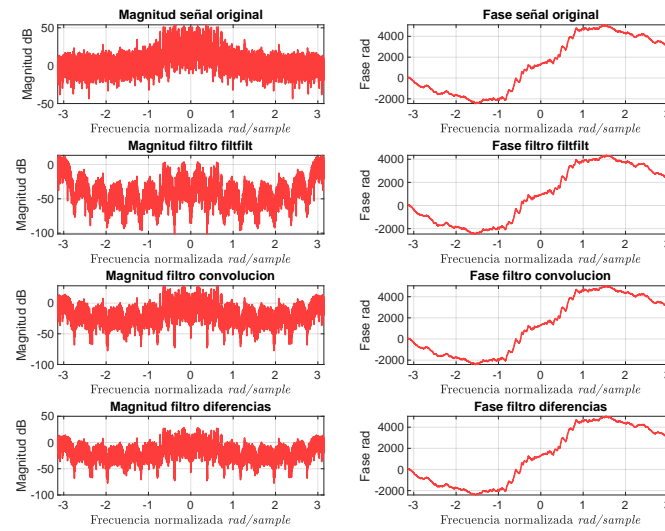


Figura 22: Comparación entre implementaciones del filtro, en el dominio de la frecuencia

A partir de los resultados obtenidos, se puede ver que para todos los casos implementados, no existe un desfase añadido por el filtro. En términos de magnitud, se puede ver que todos los casos son bastante similares, sin embargo, el caso donde se utilizó el comando `filtfilt` (filtraje con fase cero), se aprecia con atenuaciones más intensas sobre ciertas bandas en comparación a los resultados obtenidos mediante convolución o ecuación de diferencias. Observando el gráfico de la figura 21 con resultados en el dominio del tiempo, se puede comprobar que efectivamente el filtraje de fase cero, ha sido más agresivo con las componentes de alta frecuencia, lo que permite obtener una señal *más limpia*. Para los casos donde se utilizó convolución y ecuación de diferencias el resultado es prácticamente igual. Se pide generar la señal de tiempo invertido de $x[n]$, para realizar esta operación se puede utilizar la siguiente idea. Sea $X(k)$ la DFT de la señal $x[n]$:

$$X(k) = |X(k)| \cdot e^{j\angle H(k)} \quad (28)$$

Por lo tanto, si se quiere obtener $x[n]$:

$$x[-n] \xrightarrow[N]{DFT} |X(k)| \cdot e^{-j\angle H(k)} \quad (29)$$

Implementando en MATLAB y graficando:

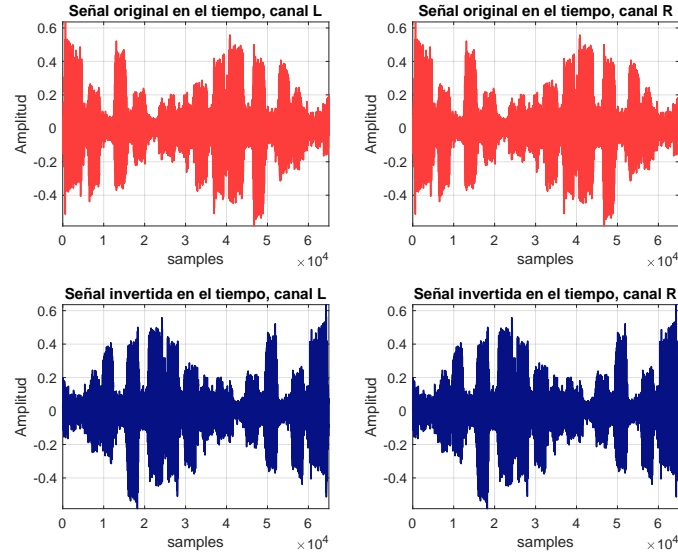


Figura 23: Señal de tiempo inverso, comparación con señal original en el dominio temporal.

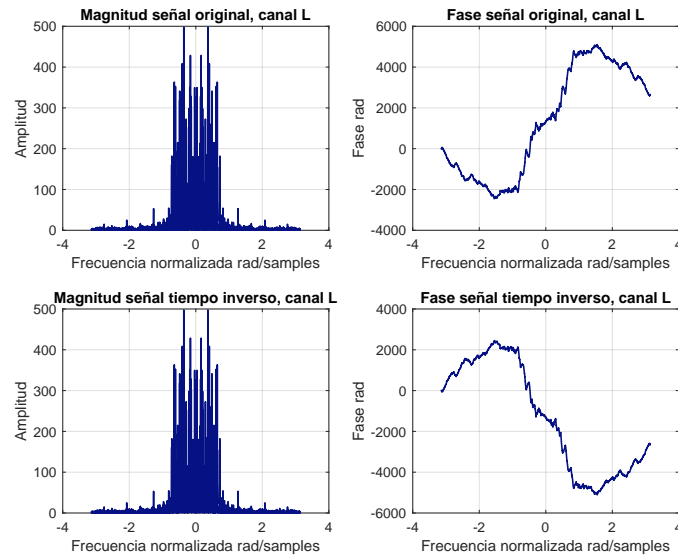


Figura 24: Señal de tiempo inverso, comparación con señal original en el dominio de la frecuencia.

A partir del gráfico de fase, se puede concluir que la inversión de fase fue correctamente aplicada y observando el resultado en el tiempo, se aprecia claramente el resultado. El archivo, con la señal generada se encuentra en los archivos de entrega en la carpeta `audio_out`, bajo el nombre de `reverse_time_signal.wav`. Modificando la señal, para obtener una fase aleatoria:

$$X(k) = |X(k)| \cdot e^{j2\pi r} \quad (30)$$

Donde r es un número aleatorio, entre 1 y -1. Se obtienen los siguientes resultados:

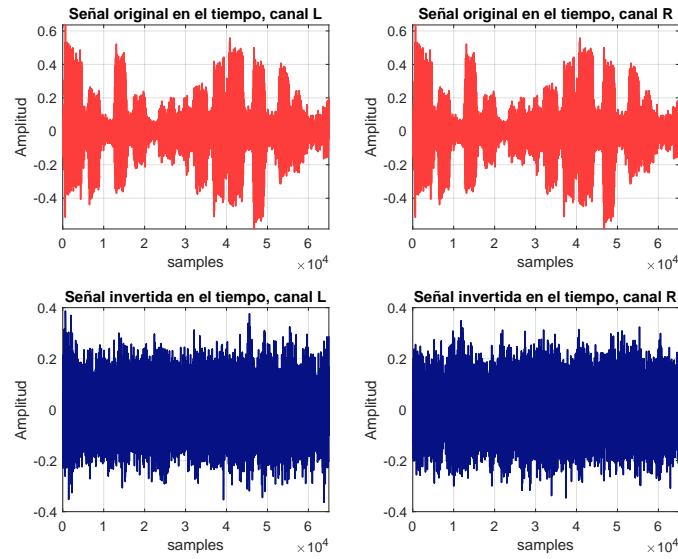


Figura 25: Señal de fase aleatoria, comparación con señal original en el dominio temporal.

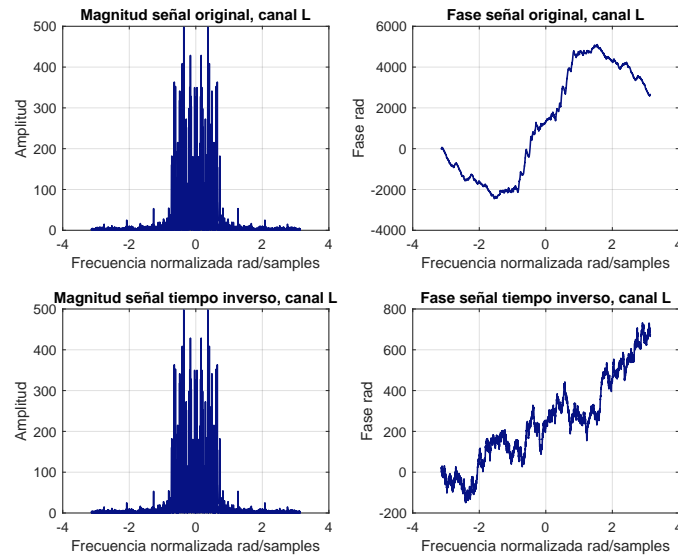


Figura 26: Señal de fase aleatoria, comparación con señal original en el dominio de la frecuencia.

El archivo, con la señal generada se encuentra en los archivos de entrega en la carpeta `audio_out`, bajo el nombre de `random_phase_signal.wav`.

6. Filtrado en Frecuencia y Convolución Rápida

Utilizando la señal `acc.wav`, se realiza un filtrado en frecuencia utilizando el filtro definido en la ecuación 25. Graficando el resultado:

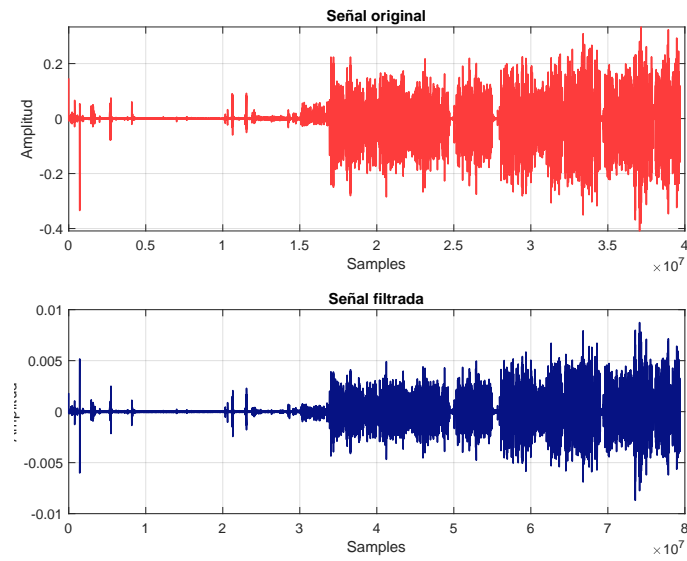


Figura 27: Resultado de filtraje de la señal por multiplicación en frecuencia.

Realizando la comparación, con filtros implementados a través de ecuación de diferencias y convolución:

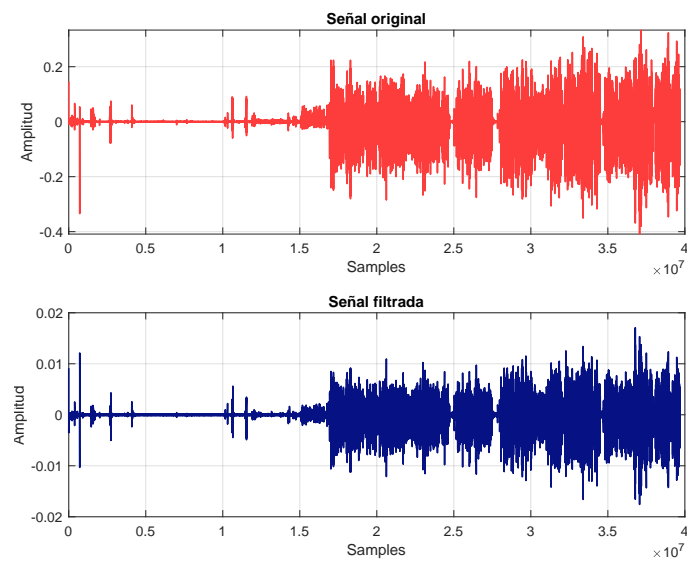


Figura 28: Resultado de filtraje de la señal mediante ecuación de diferencias.

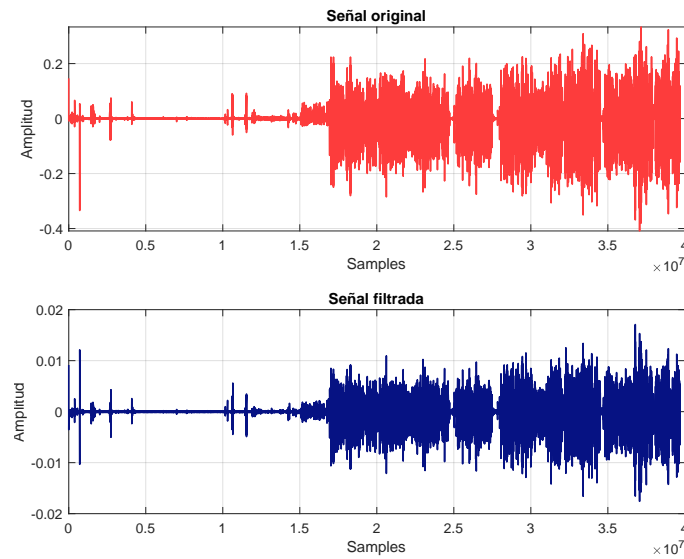


Figura 29: Resultado de filtraje de la señal mediante convolución.

Tabulando los tiempos registrados para el cálculo de cada método:

Método	Tiempo s
FFT	3.35
Ec.Diferencias	6.6
Convolución	0.17

Graficando el error entre el resultado obtenido mediante multiplicación en frecuencia y convolución:

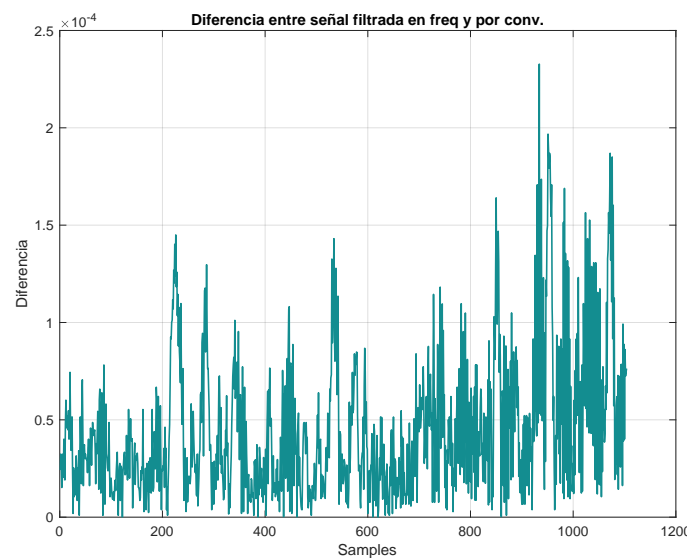


Figura 30: Error entre señal obtenida mediante multiplicación en frecuencia y señal obtenida mediante convolución

Se puede ver que el error es del orde de 10^{-4} por lo que puede considerarse despreciable.