

[ELO313] PROCESAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES Y
APLICACIONES

Certamen #3

Mauricio Aravena Cifuentes
201503001-4

13 de agosto de 2021

1. Filtrado de señales

1.1.

Acerca del filtro se tiene la siguiente información:

1. Es un filtro pasa-alto y tiene un polo en cero
2. El polo está ubicado a una distancia $r = 0,9$ del origen en el plano- z
3. Las señales constantes no pasan por el sistema

A partir de los datos, se puede deducir que se tiene un rechazo para DC, por lo que la ubicación del cero en el plano complejo debe cumplir:

$$z - 1 = 0 \iff z = 1$$

Sabiendo que $z = e^{j\omega}$, al evaluar en $\omega = 0$ se tendrá rechazo de la banda DC. Para la ubicación del polo, se sabe conviene que este esté lo más apegado al cero, de esta forma se tendrá un filtro con mayor selectividad, se comportara como un filtro *notch* para DC. Por lo que podemos definir la ubicación del polo en $z_p = 0,9$. De esta forma la función de transferencia queda de la siguiente forma:

$$H(z) = \frac{z - 1}{z - 0,9} \quad (1)$$

Realizando el diagrama de polos y ceros:

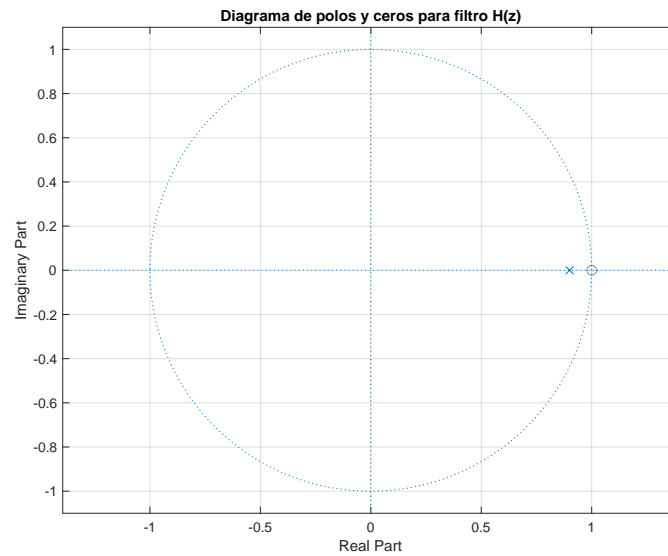


Figura 1: Diagrama de polos y ceros para la función de transferencia 1

Analizando la respuesta en magnitud y fase del filtro:

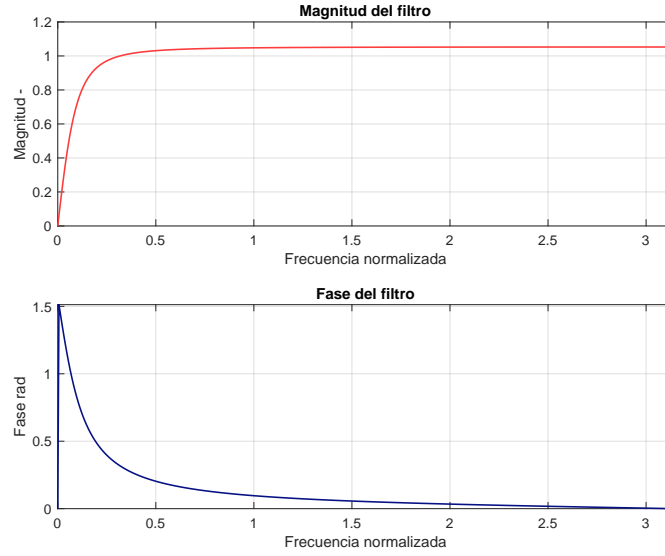


Figura 2: Respuesta en magnitud y fase para el filtro

Se procede a evaluar la función 1, para $\omega = \pi$:

$$H(\pi) = \frac{e^{j\pi} - 1}{e^{j\pi} - 0,9} = \frac{-2}{-1,9} \approx 1,0526 \quad (2)$$

Para normalizar la respuesta del filtro, para $\omega = \pi$, basta con hacer que para esta frecuencia el filtro tenga ganancia unitaria, por lo que se puede definir la ganancia de normalización:

$$G_n = \frac{1,9}{2} = 0,95 \quad (3)$$

Por lo que se puede reescribir la función de transferencia:

$$\hat{H}(z) = G_n \cdot H(z) = 0,95 \cdot \frac{z - 1}{z - 0,9} \quad (4)$$

Llevando la expresión a su forma de ecuación de diferencias:

$$X(z) \cdot 0,95(1 - z^{-1}) = Y(z) \cdot (1 - 0,9z^{-1}) \quad (5)$$

$$y(z) = 0,9 \cdot y[n - 1] + 0,95(x[n - 1] - x[n]) \quad (6)$$

TERMINAR DEMOSTRACIONES - VERIFICAR

Considere ahora, que se tiene como entrada del filtro definido en 4:

$$x[n] = 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}n + \frac{\pi}{4}\right)$$

Como se sabe, la expresión tiene una única frecuencia fundamental en $\pm\pi/6$. De esta forma, para el filtro diseñado en el punto anterior, basta evaluar únicamente el efecto de la atenuación y desfase para la frecuencia de la señal de entrada. De esta forma:

$$|H(\pi/6)| = 0,95 \cdot \left| \frac{e^{j\pi/6} - 1}{e^{j\pi/6} - 0,9} \right| = 0,9812 \quad (7)$$

$$\angle H(\pi/6) = \arctan\left(0,95 \cdot \frac{e^{j\pi/6} - 1}{e^{j\pi/6} - 0,9}\right) = 0,1940 \text{ rad} \quad (8)$$

De esta forma, se puede obtener la salida:

$$y[n] = \sqrt{2} \cdot 0,9812 \cdot \cos\left(\frac{\pi n}{6} + \frac{\pi}{4} + 0,1940\right) \quad (9)$$

1.2. Filtrado señal electrocardiograma

Se pide diseñar un filtro con dos ceros, para el filtrado de una señal ECG muestreada a 200 Hz, con ruido en la banda de 60 Hz. Analizando la señal:

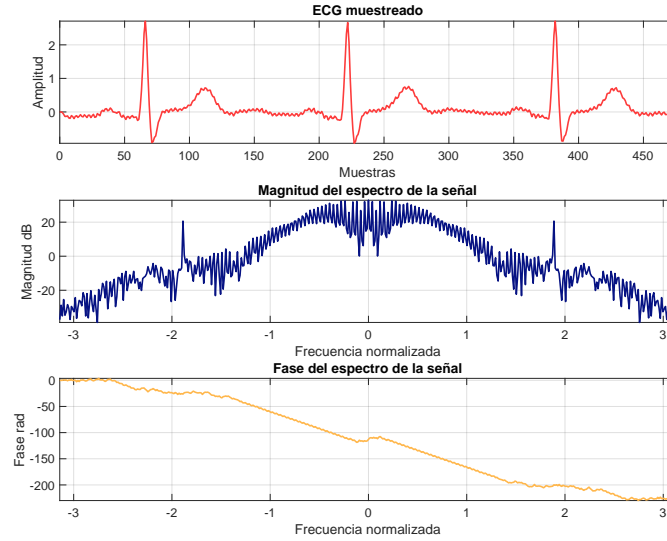


Figura 3: Señal muestreada, en el dominio temporal y de frecuencia

Se puede ver claramente, las bandas de ruido presentes. Se propone la siguiente estructura para el filtro:

$$\omega_r = \frac{2\pi 60}{200} = 0,6\pi \quad (10)$$

$$H(z) = \frac{(z - e^{j\omega_r})(z - e^{-j\omega_r})}{z^2} = \frac{z^2 + 2\cos(\omega_r) + 1}{z^2} \quad (11)$$

Realizando la implementación en MATLAB, se puede obtener la magnitud y fase del filtro:

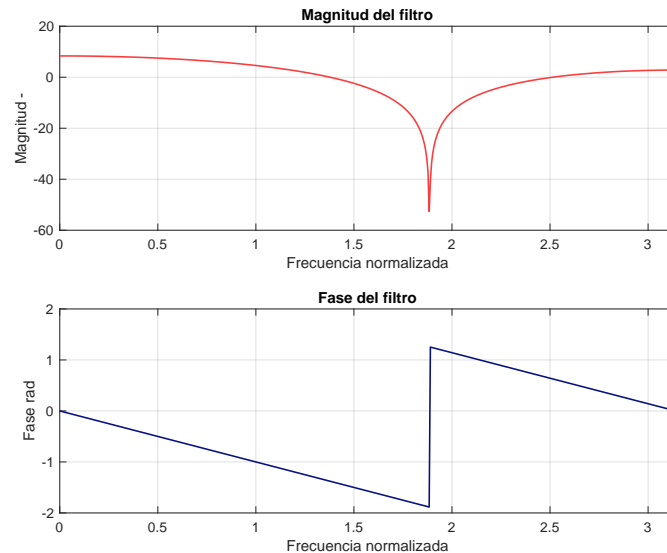


Figura 4: Respuesta en magnitud y fase para el filtro

A partir de las respuestas del filtro, se puede ver que en términos de magnitud, tiene un rechazo relativamente lento, con la banda de paso no plana. En términos de la fase, se puede ver que se tiene un desfase lineal deseable. Aplicando el filtro a la señal:

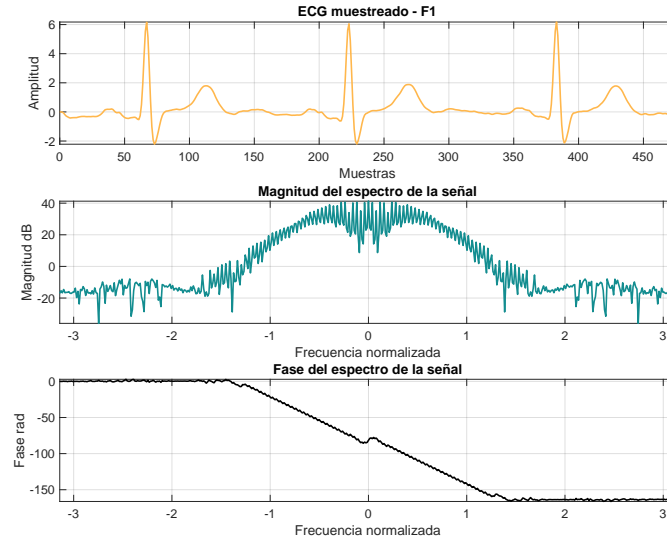


Figura 5: Resultado del filtraje de la señal

Se puede ver que el proceso de filtrado ha sido exitoso, permitiendo remover la banda con ruido de la señal. Se puede ver una cierta *amplificación* de ciertas bandas, dada la forma no plana del filtro, el espectro se tendió a *curvar*. En términos de fase, se puede ver que el efecto del filtro sobre ésta, es el esperado, dada la fase lineal del filtro. Realizando una comparación directa de ambas señales:

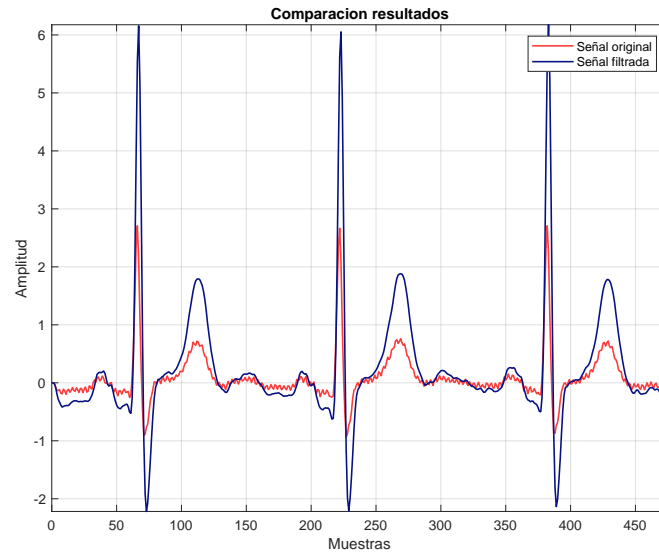
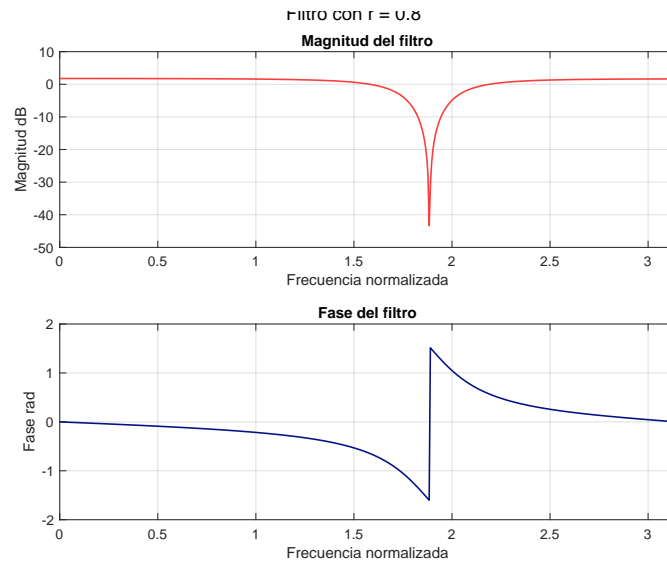
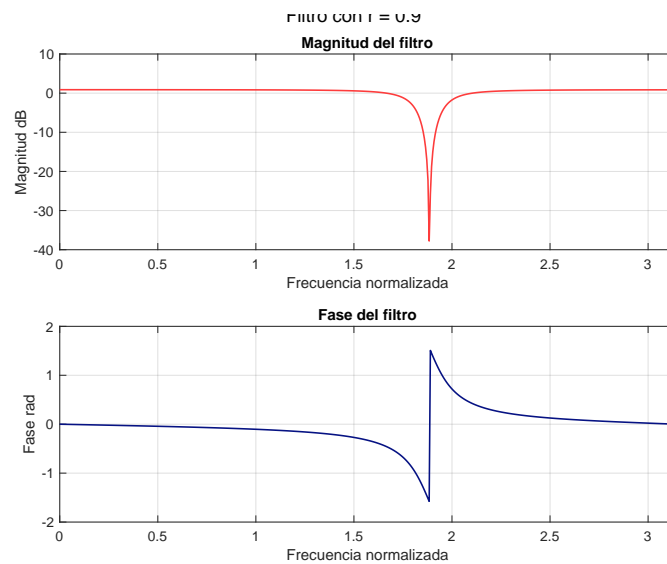


Figura 6: Comparación de las señales

Considere ahora, que se añaden dos polos a la frecuencia de rechazo, con un radio $r \in [0, 8 - 0,99]$. A partir de esto, se escogen tres valores para $r = 0,8, r = 0,9, r = 0,99$. Implementando los filtros y comparando su respuesta en magnitud y frecuencia:

Figura 7: Respuesta del filtro, para $r = 0.8$ Figura 8: Respuesta del filtro, para $r = 0.9$

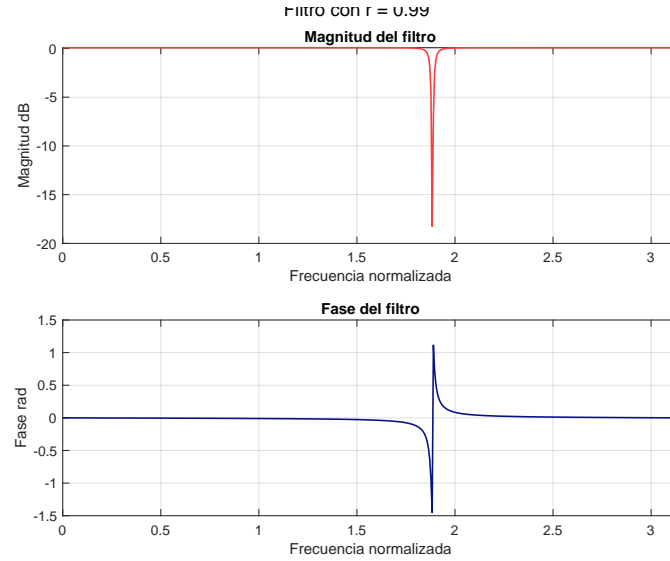


Figura 9: Respuesta del filtro, para $r = 0.99$

A partir de estos resultados, se puede comprobar que a medida que el valor de r , se acerca al círculo unitario, la banda de rechazo se hace mas angosta, acercándose lo más posible a la respuesta ideal de un filtro *notch*, sin embargo, esta mejora en el rechazo del filtro, trae consigo que la fase, que inicialmente era “perfectamente” lineal, se empieza a curvar en torno a la banda de rechazo. Por lo tanto al construir el filtro, se debe tener en cuenta la aplicación final, dado que determinará si es factible tener un mejor rechazo a costa de una fase no lineal. La mejora en el rechazo del filtro, se puede explicar, si consideramos que un cero anula la función de transferencia, mientras que un polo la *indefine*, por lo que entre mas cerca esté el polo del cero, la recuperación de la anulación en el espectro será mejor y más rápida, dando un filtro más selectivo. Otro punto a destacar, es que a medida que el valor de r se acerca al círculo unitario, la respuesta en magnitud se hace más plana, eliminando la curvatura del espectro que se tenía para el filtro con polos en cero, figura 4. Tomando el caso para $r = 0.99$, se filtra la señal ECG entregada, obteniéndose el siguiente resultado:

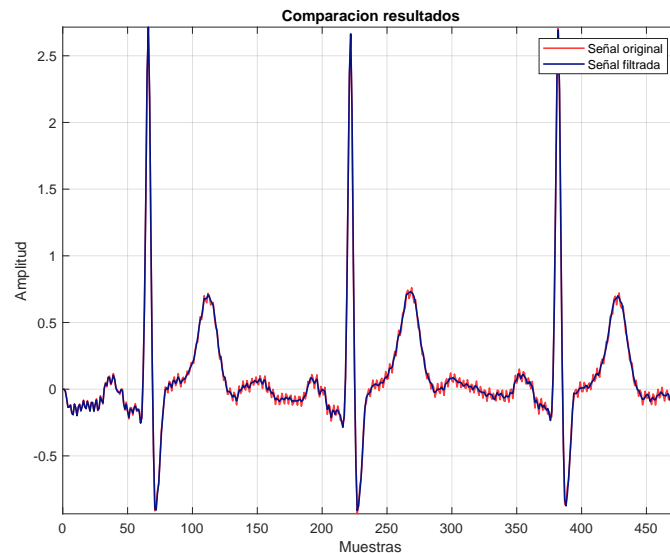


Figura 10: Resultado de filtraje, para $r = 0.99$

A partir de esto, se puede comprobar, que se tiene un mejor filtrado de la señal, y que el efecto causado por la fase no lineal, no es apreciable. La respuesta más plana en frecuencia, permite que el filtro siga de manera más cercana la señal original, sin tener efectos de amplificación, como en el caso de polos en cero. Por lo que para esta aplicación el filtro diseñado para $r = 0.99$ es una buena solución.

1.3. Filtrado de ECG con variación DC

A partir de la señal `ecg_lfn`, se deben construir filtros de orden $n = \{2, 8\}$ con frecuencias $f = \{0,5 \quad 5\}$ Hz. Se procede a implementar los filtros pedidos y analizar su respuesta en frecuencia:

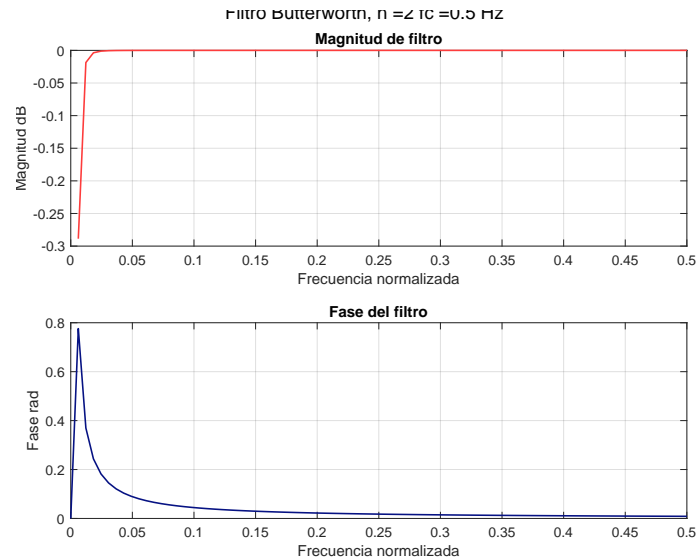


Figura 11: Respuesta en frecuencia de filtro de orden $n = 2$, $f_c = 0.5$

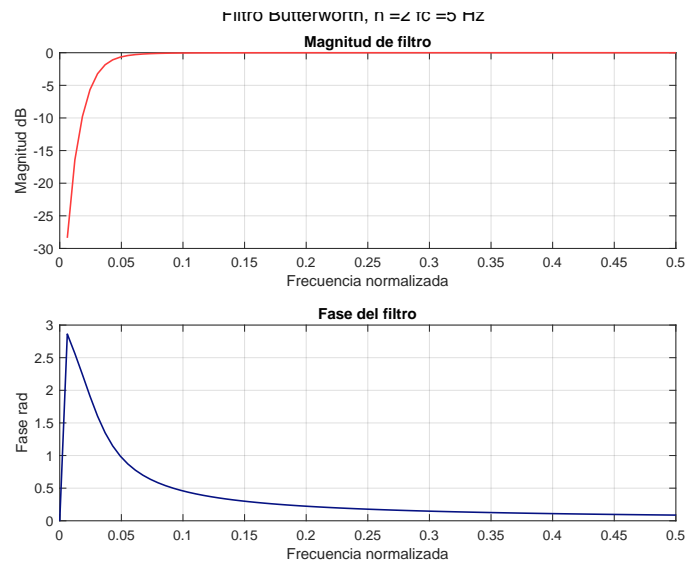


Figura 12: Respuesta en frecuencia de filtro de orden $n = 2$, $f_c = 5$

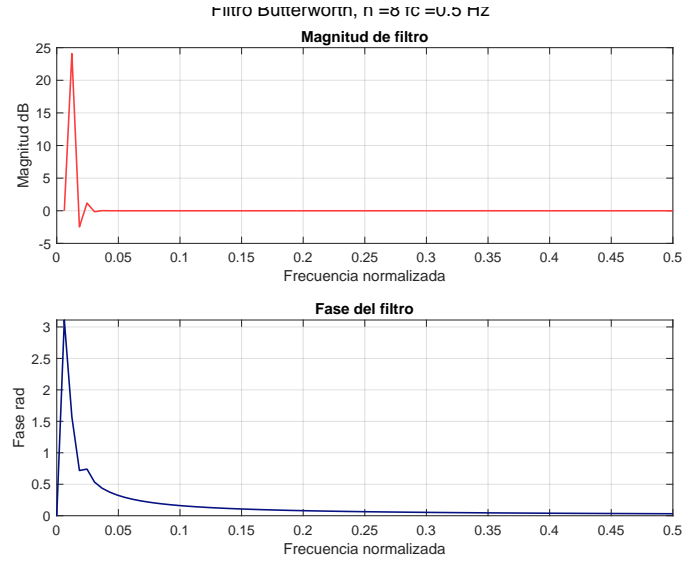


Figura 13: Respuesta en frecuencia de filtro de orden $n = 8$, $f_c = 0.5$

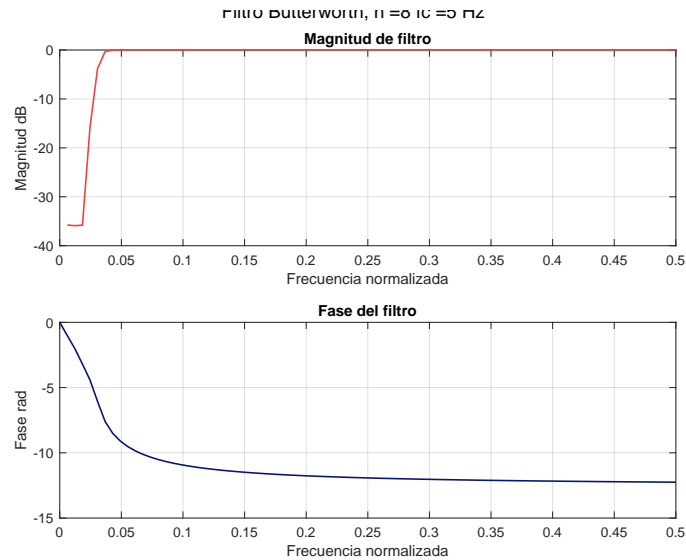


Figura 14: Respuesta en frecuencia de filtro de orden $n = 8$, $f_c = 5$

Con la respuesta de los filtros, se puede identificar que para orden pequeño $n = 2$, mover la frecuencia de corte más cerca o lejos de cero, impacta en la capacidad del filtro de rechazar la banda DC, para el caso de $f_c = 0.5$, la respuesta es muy similar a un filtro *notch* figura 11, sin embargo, la atenuación alcanza aproximadamente 0.3 dB , lo cual no es un rechazo considerable. Al mover la frecuencia a $f_c = 5$, el filtro es más capaz de rechazar la banda DC figura 12, alcanzando un rechazo de 30 dB , aproximadamente 100 veces mejor que en el primer caso. Esto, a su vez, trae consigo que la curva de desfase, se extienda, por lo que el filtro con $f_c = 5$ tiene un sector de fase no lineal mayor que en el caso de $f_c = 0.5$. Para orden mayor, $n = 8$, cuando la frecuencia de corte, es muy cercana a la banda de rechazo, $f_c = 0.5$, se tiene que el filtro se vuelve inestable, teniendo una respuesta la cual no es de un filtro rechaza banda, como se ve en la figura 13, donde se puede ver que la respuesta del filtro es un overshoot del espectro en una banda cercana a los 0 Hz. Para una frecuencia mayor, $f_c = 5$, se tiene que la respuesta es muy similar que el filtro de orden $n = 2$ y $f_c = 0.5$, sin embargo, este tiene la ventaja de tener una zona de fase no lineal con una pendiente mas suave, lo que implicaría cambios menos abruptos en la fase para las bandas cercanas a la de rechazo, como se ve en la figura 14. Analizando los resultados de filtrado para cada filtro:

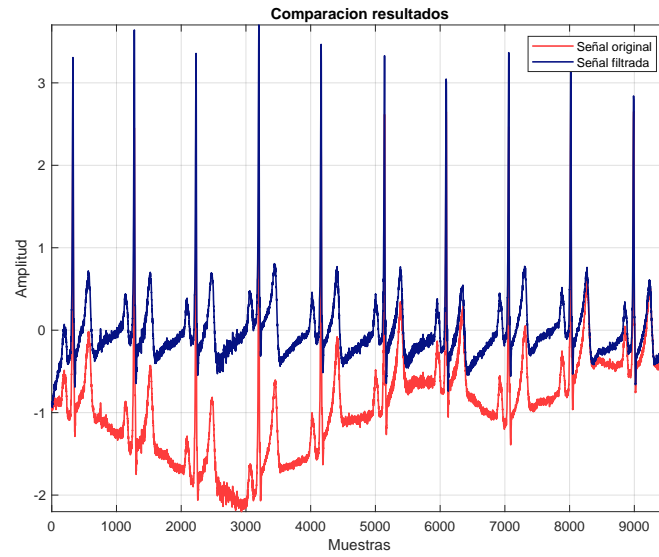


Figura 15: Resultado para filtro de orden $n = 2$, $f_c = 0.5$

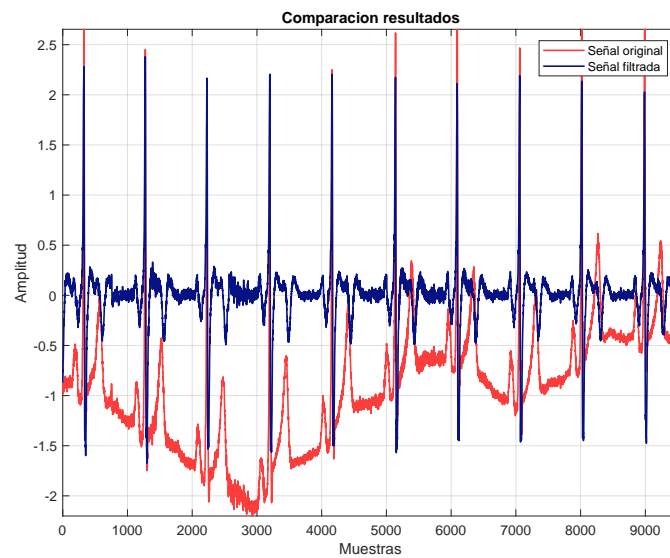


Figura 16: Resultado para filtro de orden $n = 2$, $f_c = 5$

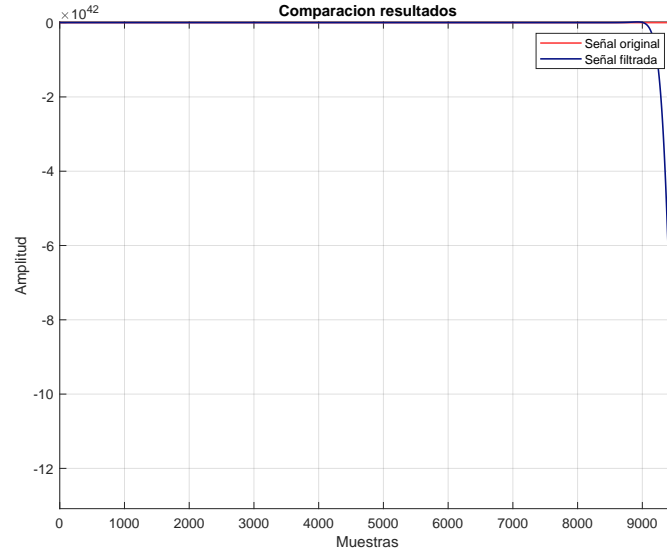


Figura 17: Resultado para filtro de orden $n = 8$, $fc = 0.5$

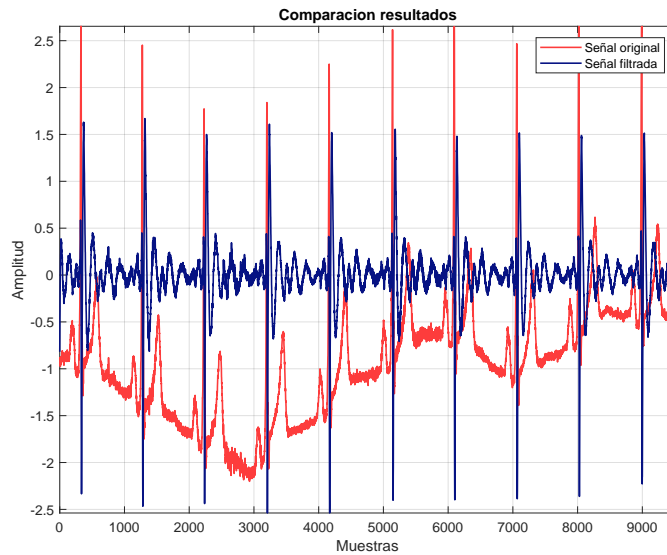


Figura 18: Resultado para filtro de orden $n = 8$, $fc = 5$

A partir de estos resultados, se puede confirmar lo expuesto anteriormente el mejor resultado de filtrado, se obtiene para $n = 2$, y $fc = 0,5$, como se ve en la figura 15, dado que es el que mejor permite recuperar la señal sin causar distorsión evidente a la señal. Si bien el resultado obtenido en la figura 18, pareciera ser bueno, el segundo peak esperado para la señal ECG, se ve bastante atenuado en comparación a la señal original. Para el caso de la figura 16, se puede ver una evidente distorsión del segundo peak de la señal. Finalmente como se esperaba, para el filtro $n = 8$ y $fc = 0,5$, hay completa destrucción de la señal, figura 17. Por lo que podemos concluir que para esta señal, lo más importante es preservar la fase de la señal original, y no tanto la atenuación de la banda DC, lo que concuerda con el filtro, de la figura 15.

2. Maybe later

Aplicando la propiedad de la suma en el coseno, se puede descomponer esta expresión:

$$x[n] = 2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}n\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6}n\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right)$$

Con $\cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$:

$$x[n] = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}n\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6}n\right) \right)$$

Note