بنام خدا　　　　تمرین دوم الگوریتم　　　　یزدان جاهدی　　　　۹۹۲۴۳۰۲۵

۱-

a) $f(n) \in \Theta(g(n))$ and $g(n) \in \Theta(h(n)) \Rightarrow f(n) \in \Theta(h(n))$

$f(n) \in \Theta(g(n)) \Leftrightarrow \exists n > n_0, \exists c, d \in \mathbb{R}^+ \ \forall n : d\,g(n) \leq f(n) \leq c\,g(n)$ (I)

$g(n) \in \Theta \Leftrightarrow \exists n_2 > n_{0_2}, \exists c_2, d_2 \in \mathbb{R}^+ : \forall n_2 \quad d_2 h(n) \leq g(n) \leq c_2 h(n)$

$\rightarrow c\,g(n) \leq c c_2 h(n)$ (II)

$\rightarrow d d_2 h(n) \leq d\,g(n)$

$I, II \rightarrow \underbrace{d d_2}_{d'} h(n) \leq d\,g(n) \leq f(n) \leq c\,g(n) \leq \underbrace{c c_2}_{c'} h(n)$

$\Rightarrow d' h(n) \leq f(n) \leq c' h(n) \Leftrightarrow f(n) \in \Theta(h(n))$　　درست ✓

۱-

b) $f(n) \in \Theta(g(n)) \Leftrightarrow g(n) \in \Theta(f(n))$

$f(n) \in \Theta(g(n)) \Leftrightarrow \exists n > n_0 \in \mathbb{N}, \exists c, d \in \mathbb{R}^+ : \forall n : \ d\,g(n) \leq f(n) \leq c\,g(n)$

$g(n) \leq \frac{1}{d} f(n)$ (I)　　$\frac{1}{c} f(n) \leq g(n)$ (II)

$I, II \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{c}}_{c'} f(n) \leq g(n) \leq \underbrace{\frac{1}{d}}_{d'} f(n) \Leftrightarrow g(n) \in \Theta(f(n))$

درست ✓

۱-

c) $f(n) \in O((f(n))^2)$　　　نادرست ✗

مثال نقض $f(n) = \frac{1}{n}$ در این صورت هر چقدر n را هم بزرگ در نظر بگیریم، همواره $(f(n))^2$ یا $\frac{1}{n^2}$ پایین‌تر از $\frac{1}{n}$ قرار خواهد گرفت.

۱-

d) $f(n) \in O(g(n)) \Rightarrow 3^{f(n)} \in O(3^{g(n)})$

نادرست است. مثال نقض:

$f(n) = \log_3 n \qquad g(n) = \log_4 n \rightarrow f(n) \in O(g(n))$ ✓

اما:

$3^{f(n)} = 3^{\log_3 n} = n$

$3^{g(n)} = 3^{\log_4 n} = 3^{\log_4 3}$ و $n \notin O(3^{\log_4 3})$

$$[\log n]! < \log n^{\log n}$$

$$\log_b n^{\log_b n} = \left(b^{\log_b \log_b n}\right)^{\log_b n} = \left(b^{\log_b n}\right)^{\log_b \log_b n} = n^{\log(\log n)}$$

طبق روابط بالا می‌دانیم که $[\log n]! \in O(n^{\log(\log n)})$ است. و می‌دانیم که مقدار $\log(\log(n))$ در n های بزرگ به نهایت میل می‌کند و بیشتر از هرگونه عدد صحیح c می‌باشد.

روش دوم اثبات: تغییر متغیر $n = b^m$: $[\log n]! \xrightarrow{n=b^m} [\log_b b^m]! = m!$

$n^c \xrightarrow{n=b^m} b^{mc}$ می‌خواهیم ثابت کنیم که n^c ای وجود ندارد که بزرگتر از آن باشد (از یک لحظه به بعد)

$b^{mc} < m!$ $\boxed{\text{حکم}}$ $\xrightarrow{\log_b} mc < \log_b m! \rightarrow mc < \sum_{t=1}^{m} \log t$

برای اثبات کافی است m ای پیدا کنیم که به قدر کافی بزرگ باشد تا عبارت حکم درست باشد. در این صورت، اثبات می‌شود که صورت گفته شده غلط است. اگر $m > 2b^{2c}$ باشد $\leftarrow \log\frac{m}{2} > 2c$

$$\rightarrow \sum_{t=1}^{m} \log t > \frac{m}{2} \times 2c \geq mc$$ اثبات شد! $\Longrightarrow [\log n]! \notin O(n^c)$

قسمت دوم:

$$[\lg \lg n]! \overset{?}{\in} O(n^c)$$

تغییر متغیر: $n = b^{(b^m)}$: $[\lg \lg n]! \longrightarrow [\lg_b \lg_b b^{(b^m)}]! = [\lg_b b^m]! = m!$

$$n^c \longrightarrow (b^{(b^m)})^c$$

$$m! \xrightarrow{\log_b} \log_b m! < \log_b m^m = m \log_b m < m^2 < b^m = \log_b b^{(b^m)} < \log_b b^{(b^m)c}$$

$$\rightarrow \log m! < \log(b^{(b^m)c}) \longrightarrow m! < (b^{(b^m)c})$$

$$\rightarrow [\lg \lg n]! < n^c \longrightarrow [\lg \lg n]! \in O(n^c)$$ درست است!

۳ـ حالت کلی: $T(n) = aT(\frac{n}{b}) + f(n) \qquad f(n) \in \Theta(n^{\log_b^a} \lg^k n) \qquad k > -1$

سه حالت را بررسی می‌کنیم:

I) $0 > k > -1$ در این حالت در n های بزرگ، $\lg^k n$ همواره از 1 کمتر خواهد بود و در نتیجه:

$$n^{\log_b^a} \lg^k n < n^{\log_b^a}$$

و در n های بزرگ داریم:

$$f(n) = O(n^{\log_b^a}) \xRightarrow[\text{theorem}]{\text{master's}} T(n) \in \Theta(n^{\log_b^a})$$

II) اگر $k=0$ باشد:

$$k=0 \rightarrow \lg^k n = 1 \rightarrow f(n) \in \Theta(n^{\log_b^a}) \xRightarrow{\text{master}} T(n) \in \Theta(n^{\log_b^a} \log n)$$

III) اگر $k>0$ باشد: در این صورت $\lg^k n$ بزرگتر از 1 خواهد بود و در نتیجه:

$$n^{\log_b^a} < n^{\log_b^a} \lg^k n \longrightarrow f(n) \in \Omega(n^{\log_b^a}) \rightarrow T(n) \in \Theta(n^{\log_b^a} \lg^k n)$$

پس بطور خلاصه:

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(n^{\log_b^a}) & 0 > k > -1 \\ \Theta(n^{\log_b^a} \log n) & k = 0 \\ \Theta(n^{\log_b^a} \lg^k n) & k > 0 \end{cases}$$

پس برای این مثال خواهیم داشت:

$$T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + n^2 \lg^5 n$$

$$k > 0 \longrightarrow T(n) \in \Theta(n^2 \lg^5 n)$$

۴ـ هر بار ورودی اصلی تابع $\frac{1}{2}$ می‌شود. بقیه دستورات هم $O(1)$ هستند و آنها را عددی مانند a درنظر می‌گیریم.

$$\rightarrow T(n) = T(\frac{n}{2}) + a$$

master's theorem: $n^{\log_b^a} = n^{\log_2^1} = n^0 = 1 \in \Theta(a)$

$$\Rightarrow T(n) \in \Theta(\underbrace{n^{\log_b^a}}_{1} \log n) \Rightarrow T(n) \in \Theta(\log n)$$

$\boxed{b}$ $$T(n) - 4T(n-1) + 5T(n-2) - 2T(n-3) = 0$$ ۵-

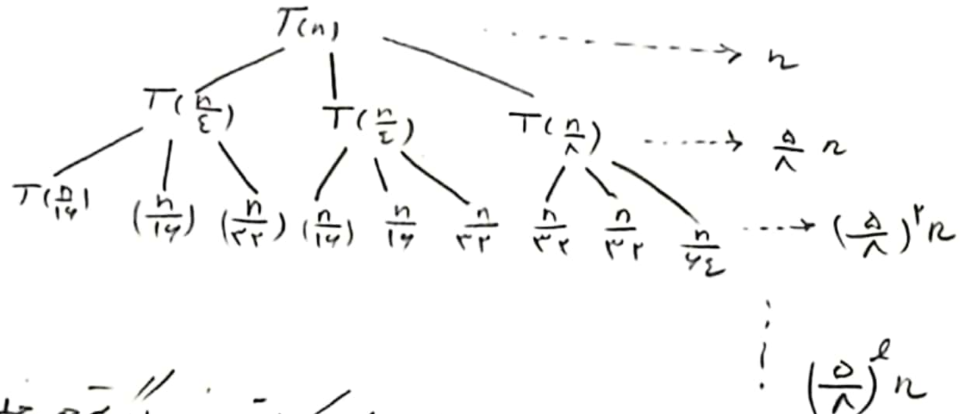
$$p(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0 \rightsquigarrow (x-1)^2(x-2) = 0 \begin{cases} \to r_1, r_2 = 1 \\ \to r_3 = 2 \end{cases}$$

$$t(n) = c_1 + c_2 n + c_3 2^n$$

برای ادامه حل این سوال نیازمند به داشتن تعدادی مقدار اولیه هستیم ولی از آنجا که گفته شد فرض شود که همه ضرایب مثبت هستند. فرض می‌کنیم c_3 عددی مثبت است و در نتیجه داریم:

$$t(n) \in O(2^n)$$

$\boxed{a}$ $$T(n) = 2T\left(\frac{n}{4}\right) + T\left(\frac{n}{8}\right) + n$$ ۵-



از شاخه‌ای که تقسیم بر ۴ می‌شود، دیرتر به برگ می‌رسیم پس $l = \log_4 n$ که البته مبنای لگاریتم هم چندان مهم نیست!

پس:

$$T(n) \leqslant n \Big(\underbrace{1 + \left(\tfrac{5}{8}\right)^1 + \left(\tfrac{5}{8}\right)^2 + \dots \left(\tfrac{5}{8}\right)^{\log n}}_{\text{عدد صحیح}} \Big)$$

$$\Rightarrow T(n) \leqslant cn \longrightarrow T(n) \in O(n)$$

ه-

$\boxed{C}$ $T(n) = 4\sqrt{n}\,T(\sqrt{n}) + n\log_2^2 n \cdot \lg^3(\lg n)$

$$\xrightarrow{\div n} f(n) = \frac{T(n)}{n} = 4\underbrace{\frac{T(\sqrt{n})}{\sqrt{n}}}_{f(\sqrt{n})} + \lg^2 n \; \lg^3(\lg n)$$

$$\xrightarrow{n=2^m} f(2^m) = 4f(2^{m/2}) + m^2\log^3 m$$

$$S(m) = f(2^m) \longrightarrow S(m) = 4S\left(\frac{m}{2}\right) + m^2 \lg^3 m$$

$$m^{\log_2 4} = m^2 \in O(m^2 \lg^3 m) \xrightarrow[\text{اصلی}]{\text{قضیه}} S(m) \in \Theta(m^2 \lg^3 m)$$

$$\to f(2^m) \in \Theta(m^2 \lg^3 m) \xrightarrow[m=\lg n]{n=2^m} f(n) = \Theta(\lg^2 n \; \lg^3 \lg n)$$

$T(n) = n\,f(n)$

$$\longrightarrow \underline{T(n) \in \Theta(n \lg^2 n \; \lg^3 \lg n)}$$