TP1 Recherche Opérationelle

Etudiants :
Marwa El Omari
Adrien Davesne

Superviseur :
Noemie Cohen

Table des matières

1 Introduction

Le but de ce TP est de modéliser et de résoudre des problèmes d'optimisation en recherche opérationnelle à l'aide du solveur **GLPK**.

2 Assemblage

Variables de décision :
Nous avons défini comme variables de décision :
— nc : le nombre de vélos cargos produits par semaine.
— ns : le nombre de vélos standards produits par semaine.

Objectif :

$$\text{Maximiser la marge : } Benefice(nc, ns) = 700 * nc + 300 * ns$$

Contraintes :

$$\begin{aligned}
&\text{TempsMaxTravail : } 0.06nc + 0.05ns \leq 60 \\
&\text{SurfaceMax : } 2.5nc + ns \leq 1500 \\
&\text{LimiteCargos : } nc \leq 700
\end{aligned}$$

Pour le format de fichier du modèle, nous avons choisi le format `.lp` car le problème n'est pas très complexe (i.e. il ne possède pas beaucoup de variables ni de contraintes).

Résultats :
Pour la solution PLNE, nous avons obtenu un bénéfice maximal de 438400€. Pour cela, le solveur nous propose de produire 232 vélos cargos et 920 vélos standards. Le résultat semble cohérent et respecte les contraintes imposées : les valeurs de nc et de ns sont strictement positives et ne divergent pas.

Pour l'ensemble des problèmes qui suivent, afin de généraliser les problèmes plus complexes que celui qui précède, nous avons choisi d'utiliser le format **glpm** pour représenter les modèles.

3 Affectation avec prise en compte des préférences

Notations :
Nous posons comme notations :
— P : nombre total des membres de l'équipe
— T : nombre total des tâches

Paramètres :

$note_{ij}$: la note précisant la préférence de la personne i pour la tâche j

où i $\in [\![1 ; \text{P}]\!]$ et j $\in [\![1 ; \text{T}]\!]$

Variables de décision :

a_{ij} : une variable binaire qui vaut 1 si la personne i est affectée à la tâche j, 0 sinon

où i $\in [\![1 ; \text{P}]\!]$ et j $\in [\![1 ; \text{T}]\!]$

Objectif :

Maximiser le contentement des membres : $Contentement(a, note) = \sum_{i=1}^{P} \sum_{j=1}^{T} a_{ij} * note_{ij}$

Contraintes :

Chaque personne doit être affectée à une tâche exactement :

$$\forall i, \quad \sum_{j=1}^{T} a_{ij} = 1$$

Chaque tâche doit être effectuée par exactement une personne :

$$\forall j, \quad \sum_{i=1}^{P} a_{ij} = 1$$

Variables binaires :

$$\forall i, j, \quad a_{ij} \in \{0, 1\}$$

Résultats :

Posons l'exemple suivant :

	$T1$	$T2$	$T3$
$P1$	4	8	6
$P2$	7	1	3
$P3$	5	5	7

Pour cet exemple, nous obtenons les résultats suivants :

$$a_{12} = a_{21} = a_{33} = 1$$

Tous les autres coefficients sont nuls. Ceci est cohérent puisque chaque personne est affectée à la tâche avec sa préférence maximale.

4 Applications en optimisation pour l'e-commerce

4.1 1er cas particulier

Notations :

Pour simplifier la compréhension, nous avons prenons en considération ces notations dans tout le reste du problème :

i : Indice des demandes.
j : Indice des magasins.
k : Indice des fluides.

Paramètres :

$demandes_{i,k}$: Le client i demande le fluide k.
$stocks_{j,k}$: Quantité disponible du fluide k au magasin j.
$couts_{j,k}$: Coût du fluide k au magasin j.

Variables de décision :

$a_{i,j,k}$: Quantité de fluide k pour la demande i provenant du magasin j.

Objectif :

Minimiser le coût total des demandes : $CoutTotal(a) = \sum_i \sum_j \sum_k a_{i,j,k} * couts_{j,k}$

Contraintes :

Satisfaire les demandes des clients :

$$\forall j, k \quad \sum_i a_{i,j,k} = demandes_{i,k}$$

Les stocks des fluides suffisants :

$$\forall j, k \quad \sum_i a_{i,j,k} \leq stocks_{j,k}$$

Quantités positives :

$$\forall i, j, k \quad a_{i,j,k} \in \mathbb{R}^+$$

Cas particulier :

voir sujet de TP

Résolution du cas particulier :

On résout d'abord en suivant une modélisation d'un PL. On obtient un coût minimum de 9.5 avec :

$$a_{111} = 2,\ a_{211} = 0.5,\ a_{212} = 1,\ a_{221} = 0.5,\ a_{222} = 1,\ a_{232} = 1$$

Tous les autres coefficients sont nuls. Ceci est cohérent puisque les fluides les moins chers ont été sélectionnés.

On résout ensuite en suivant une modélisation d'un PLNE. Cela revient à considérer qu'on livre maintenant des colis, qu'on ne peut pas diviser. On obtient alors un coût minimum de 10 avec :

$$a_{111} = 1,\ a_{211} = 1,\ a_{212} = 1,\ a_{121} = 1,\ a_{222} = 1,\ a_{232} = 1$$

Ceci semble cohérent puisque la valeur qu'on obtient en PLNE est plus élevée qu'en PL, mais elle ne diverge pas.

4.2 2ème cas particulier

Rajoutons maintenant au problème précédent de nouvelles données : un coût supplémentaire fixe d'expedition, et un coût d'expedition variable par rapport à la quantité du fluide pris du magasin.

Paramètres :

$demandes_{i,k}$: Le client i demande le fluide k.
$stocks_{j,k}$: Quantité disponible du fluide k au magasin j.
$couts_{j,k}$: Coût du fluide k au magasin j.
$coutFix_{i,j}$: Coût fixe de l'expedition de la commande i depuis le magasin j.
$coutVar_{i,j}$: Coût variable de l'expedition de la commande i depuis le magasin j.
M : Nous avons définit ce paramètre afin de pouvoir valider le respect de la définition de b.

En discutant avec d'autres étudiants, nous avons constaté qu'il y avait une ambiguîté en ce qui concerne la différence entre le prix d'un fluide dans un magasin ainsi que le coût variable de l'expedition. Il nous paraissait plus logique de différencier les deux, nous avons donc choisit de les séparer. Cependant, cela ne change pas beaucoup la modélisation.

Variables de décision :

$a_{i,j,k}$: Quantité de fluide k pour la demande i provenant du magasin j.
$b_{i,j}$: Variable binaire valant 1 si l'un des fluides a été sélectionné dans le magasin j pour la demande i, 0 sinon

Objectif :

Minimiser le coût total des demandes :

$$CoutTotal(a,b) = \sum_i \sum_j \sum_k a_{i,j,k} * (couts_{j,k} + coutVar_{i,j}) + \sum_i \sum_j b_{i,j} * coutFix_{j,k}$$

En ce qui concerne le choix du paramètre M, il suffit de prendre un nombre assez grand (plus précisemment supérieur à la somme maximale des quantités de fluide qu'une demande puisse commander), nous avons donc choisit dans notre cas $M = 10$ pour ce qui suit.

Contraintes :

Satisfaire les demandes des clients :

$$\forall j,k \quad \sum_i a_{i,j,k} = demandes_{i,k}$$

Les stocks des fluides suffisants :

$$\forall j,k \quad \sum_i a_{i,j,k} \leq stocks_{j,k}$$

Si aucun fluide n'était pris du magasin j pour la demande i, $b_{i,j} == 0$

$$\forall i,j \quad b_{i,j} \leq \sum_k a_{i,j,k}$$

Si l'un des fluides était pris du magasin j pour la demande i, $b_{i,j} == 1$

$$\forall i,j \quad b_{i,j} * M \geq \sum_k a_{i,j,k}$$

Quantités positives et b binaire :

$$\forall i,j,k \quad a_{i,j,k} \in \mathbb{R}^+$$

$$\forall i,j \quad b_{i,j} \in \{0,1\}$$

4.3 3ème cas particulier

On s'intéresse maintenant à un problème analogue au problème du voyageur de commerce. Un livreur doit partir d'un magasin ALPHA livrer une seule fois chaque client.

Paramètres :

$distances_{i,j}$: Indique la distance entre deux sommets i et j.

$nb\_Clients$: Nombre de clients.

Variables de décision :

$AParcourir_{i,j}$: Variable binaire qui indique si le trajet du sommet i au sommet j a été fait.

$OrdreLivraison_i$: L'ordre de livraison du client i.

Objectif :

Minimiser la distance parcourue :

$$DistanceParcourue = \sum_i \sum_j (distances_{i,j} * AParcourir_{i,j})$$

Contraintes :

A partir de n'importe quel sommet i, on ne peut aller qu'à un seul sommet :

$$\forall i \quad \sum_j AParcourir_{i,j} = 1$$

Tous les sommets n'ont qu'un seul prédecesseur :

$$\forall j \quad \sum_i AParcourir_{i,j} = 1$$

Non existence de boucle, ie trajet d'un point à lui même :

$$\forall i \quad \sum_i AParcourir_{i,i} = 0$$

Respect de l'ordre de livraison :

$$\forall i, j \quad OrdreLivraison_i + (nb\_Clients - 1) \geq OrdreLivraison_j + nb\_Clients * AParcourir_{i,j}$$

L'ordre de livraison d'un sommet i est compris entre 1 et nb_Clients :

$$\forall i \quad OrdreLivraison_i \geq 1$$

$$\forall i \quad OrdreLivraison_i \leq nb\_Clients$$

Cas particulier :

Voir sujet de TP

Résolution du cas particulier :

Nous avons résolu le problème en supposant que le livreur doit revenir au magasin après les livraisons. On obtient alors que la plus petite distance que le livreur doit parcourir est 22. Elle est atteinte avec le chemin suivant :

ALPHA C1 C4 C5 C3 C2 ALPHA

Cela semble cohérent puisque la distance n'est pas nulle et les contraintes sont respectées.