Cinématique

Antonio Falcó

Le diagramme du mouvement

Cinématique avec accélération constant

Les équations cinématiques indépendantes du temps

Cinématique angulaire

Cinématique

Antonio Falcó

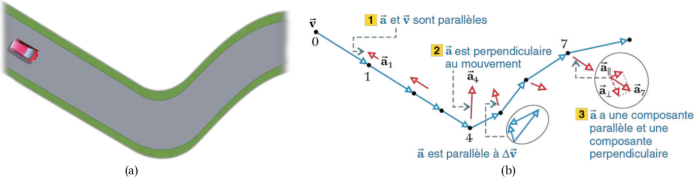
Le diagramme du mouvement

Cinématique avec accélération constant

Les équations cinématiques indépendantes du temps

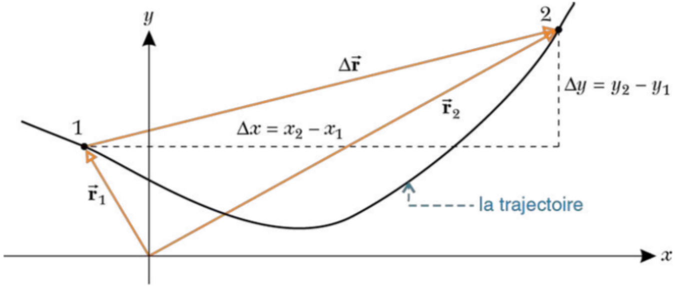
Cinématique angulaire

Cinématique
Antonio Falcó
Le diagramme du mouvement
Cinématique avec accélération constant
Les équations cinématiques indépendantes du temps
Cinématique angulaire



Pour décrire le mouvement on utilise $(\mathbf{r}, v, \mathbf{a})$ la position, la vitesse et l'accélération. En général, on a $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ coordonnées (9 degrés de liberté).

La position et le déplacement



$\mathbf{r}_1 = (x_2, y_2)$ et $\mathbf{r}_2 = (x_2, y_2)$, alors

$$\Delta\mathbf{r} := \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = (x_2, y_2) - (x_2, y_2) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) = (\Delta x, \Delta y)$$

Cinématique

Antonio Falcó

Le diagramme du mouvement

Cinématique avec accélération constant

Les équations cinématiques indépendantes du temps

Cinématique angulaire

Définition (La vitesse approché)

Si la particule se trouve au temps t dans $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ et au temps $t + \Delta t$ à $\mathbf{r}(t + \Delta t) = (x(t + \Delta t), y(t + \Delta t))$, où $\Delta t \approx 0$. Alors la vitesse approché à $[t, t + \Delta t]$ est

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)}{(t+\Delta t) - t} = \frac{\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$$
$$= \left(\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}, \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} \right) = \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t} \right)$$

Définition (La vitesse instantané)

La vitesse instantanée au temps t est définie par

$$\boldsymbol{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} := \frac{d}{dt}\mathbf{r}(t),$$

c'est-à-dire

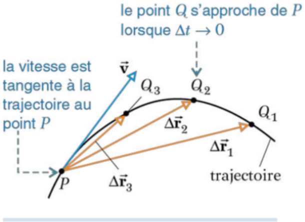
$$v_x(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \text{ et } v_y(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

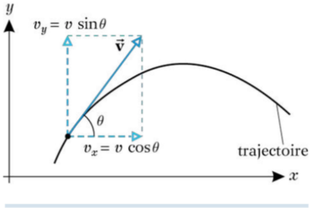
Cinématique
Antonio Falcó
Le diagramme du mouvement
Cinématique avec accélération constant
Les équations cinématiques indépendantes du temps
Cinématique angulaire

Cinématique
Antonio Falcó
Le diagramme du mouvement
Cinématique avec accélération constant
Les équations cinématiques indépendantes du temps
Cinématique angulaire

Propriété

Le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire.

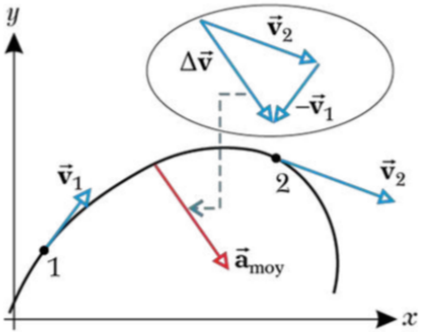




Si on connaît l'angle θ alors et la norme de la vitesse $v = \|\boldsymbol{v}\|$ alors

$$\boldsymbol{v} = (v\cos\theta, v\sin\theta).$$

L'accélération



$\boldsymbol{v}_1 = (v_x^{(1)}, v_y^{(1)})$ et $\boldsymbol{v}_2 = (v_x^{(2)}, v_y^{(2)})$, alors

$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{v} := \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1 &= (v_x^{(2)}, v_y^{(2)}) - (v_x^{(1)}, v_y^{(1)}) \\ &= (v_x^{(2)} - v_x^{(1)}, v_y^{(2)} - v_y^{(1)}) = (\Delta v_x, \Delta v_y)\end{aligned}$$

Cinématique
Antonio Falcó
Le diagramme du mouvement
Cinématique avec accélération constant
Les équations cinématiques indépendantes du temps
Cinématique angulaire

Définition (L'accélération approché)

Si la particule se trouve au temps t avec une vitesse $\boldsymbol{v}(t) = (x(t), y(t))$ et au temps $t + \Delta t$ à $\boldsymbol{v}(t + \Delta t) = (v_x(t + \Delta t), v_y(t + \Delta t))$, où $\Delta t \approx 0$. Alors l'accélération approché à $[t, t + \Delta t]$ est

$$\boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{v}(t+\Delta t) - \boldsymbol{v}(t)}{(t+\Delta t) - t} = \frac{\boldsymbol{v}(t+\Delta t) - \boldsymbol{v}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}$$

$$= \left(\frac{v_x(t+\Delta t) - v_x(t)}{\Delta t}, \frac{v_y(t+\Delta t) - v_y(t)}{\Delta t} \right) = \left(\frac{\Delta v_x}{\Delta t}, \frac{\Delta v_y}{\Delta t} \right)$$

Définition (L'accélération instantané)

L'accélération instantanée au temps t est définie par

$$\mathbf{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{v}(t+\Delta t) - \boldsymbol{v}(t)}{\Delta t} := \frac{d}{dt}\boldsymbol{v}(t),$$

$$a_x(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \text{ et } a_y(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_y}{\Delta t}$$

Cinématique

Antonio Falcó

Le diagramme du mouvement

Cinématique avec accélération constant

Les équations cinématiques indépendantes du temps

Cinématique angulaire

Cinématique
Antonio Falcó
Le diagramme du mouvement
Cinématique avec accélération constant
Les équations cinématiques indépendantes du temps
Cinématique angulaire

Théorème

Si la vitesse reste constant, c'est-à-dire $\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v}(t_0)$ pour tout temps $t \geq t_0$ alors il est équivalent a dire que l'accélération est nulle, c'est à dire $\mathbf{a}(t) = \mathbf{0}$ pour tout temps $t \geq t_0$.

La vitesse reste constant

$$\boldsymbol{v}(t + \Delta t) = \boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v}(t_0)$$

si et seulement si l'accélération reste nulle:

$$\mathbf{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{v}(t + \Delta t) - \boldsymbol{v}(t)}{\Delta t} = \mathbf{0}.$$

Théorème

Si l'accélération reste constant, c'est-à-dire $\mathbf{a}(t) = \mathbf{a}(t_0)$ *pour tout temps* $t \geq t_0$. *Alors la vitesse est linéaire par rapport* t *:*

$$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v}(t_0) + (t - t_0)\mathbf{a}(t_0)$$

et la position est aussi déterminé par

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0) + (t - t_0)\,\boldsymbol{v}(t_0) + \frac{1}{2}(t - t_0)^2\,\mathbf{a}(t_0)$$

pour tout temps $t \geq t_0$.

Si l'accélération reste constant

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{a}(t_0)$$

on a

$$\mathbf{a}(t_0) = \frac{\boldsymbol{v}(t_0 + \Delta t) - \boldsymbol{v}(t_0)}{\Delta t}.$$

Si on prend $\Delta t = t - t_0$ on a

$$\mathbf{a}(t_0) = \frac{\boldsymbol{v}(t) - \boldsymbol{v}(t_0)}{t - t_0}.$$

Cinématique
Antonio Falcó
Le diagramme du mouvement
Cinématique avec accélération constant
Les équations cinématiques indépendantes du temps
Cinématique angulaire

Alors,

$$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v}(t_0) + (t - t_0)\mathbf{a}(t_0)$$

pour tout $t \geq t_0$. On considère la vitesse moyenne entre t et t_0 :

$$\frac{\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)}{t - t_0} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{v}(t) + \boldsymbol{v}(t_0)\right)$$

c'est-à-dire

$$\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0) = \frac{1}{2}\left(t - t_0\right)\left(\boldsymbol{v}(t) + \boldsymbol{v}(t_0)\right).$$

Alors,

$$\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0) = \frac{1}{2}\left(t - t_0\right)\left(\boldsymbol{v}(t_0) + (t - t_0)\mathbf{a}(t_0) + \boldsymbol{v}(t_0)\right)$$

d'où

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0) + \left(t - t_0\right)\boldsymbol{v}(t_0) + \frac{1}{2}(t - t_0)^2\,\mathbf{a}(t_0)$$

pour tout temps $t \geq t_0$.

Cinématique

Antonio Falcó

Le diagramme du mouvement

Cinématique avec accélération constant

Les équations cinématiques indépendantes du temps

Cinématique angulaire

Coordonnées des quantités cinématiques

Soit $t = t_0 + \Delta t$ où $\Delta t \geq 0$ (alors, $\Delta t = t - t_0$) et on suppose que

$$(\mathbf{r}(t_0); \boldsymbol{v}(t_0); \mathbf{a}(t_0)) = ((r_x(t_0), r_y(t_0)); (v_x(t_0), v_y(t_0)); (a_x, a_y)).$$

sont connues. L'équation

$$\boldsymbol{v}(t_0 + \Delta t) = (r_x(t_0 + \Delta t), r_y(t_0 + \Delta t)) = \boldsymbol{v}(t_0) + \Delta t\, \mathbf{a}(t_0)$$

est équivalent à

$$v_x(t_0 + \Delta t) = v_x(t_0) + a_x\, \Delta t,$$
$$v_y(t_0 + \Delta t) = v_y(t_0) + a_y\, \Delta t.$$

et

$$\mathbf{r}(t_0 + \Delta t) = \mathbf{r}(t_0) + \Delta t\, \boldsymbol{v}(t_0) + \frac{1}{2}\Delta t^2\, \mathbf{a}(t_0)$$

est équivalent à

$$r_x(t_0 + \Delta t) = r_x(t_0) + v_x(t_0)\, \Delta t + \frac{a_x}{2}\, \Delta t^2,$$
$$r_y(t_0 + \Delta t) = r_y(t_0) + v_y(t_0)\, \Delta t + \frac{a_y}{2}\, \Delta t^2.$$

Cinématique

Antonio Falcó

Le diagramme du mouvement

Cinématique avec accélération constant

Les équations cinématiques indépendantes du temps

Cinématique angulaire

Cinématique

Antonio Falcó

Le diagramme du mouvement

Cinématique avec accélération constant

Les équations cinématiques indépendantes du temps

Cinématique angulaire

Exemple

Si on travaille avec un modèle dans le quel on considère uniquement l'accélération de la gravité

$$\mathbf{a}(t_0) = \mathbf{a}(t_0 + \Delta t) = (0, -g)$$

où $g = 9.81 \approx 10$ m/s^2 pour tout $\Delta t \geq 0$. Les équations cinématiques sont pour tout $\Delta t \geq 0$

$$\begin{aligned} \upsilon_x(t_0 + \Delta t) &= \upsilon_x(t_0), \\ \upsilon_y(t_0 + \Delta t) &= \upsilon_y(t_0) - 10\,\Delta t, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} r_x(t_0 + \Delta t) &= r_x(t_0) + \upsilon_x(t_0)\,\Delta t, \\ r_y(t_0 + \Delta t) &= r_y(t_0) + \upsilon_y(t_0)\,\Delta t - 5\Delta t^2, \end{aligned}$$

Cinématique

Antonio Falcó

Le diagramme du mouvement

Cinématique avec accélération constant

Les équations cinématiques indépendantes du temps

Cinématique angulaire

Exemple

Si on travaille avec un modèle dans le quel on considère uniquement l'accélération de la gravité et un vent horizontale contraire au mouvement avec accélération a_x constant:

$$\mathbf{a}(t_0) = \mathbf{a}(t_0 + \Delta t) = (-a_x, -g)$$

où $g = 9.81 \approx 10$ m/s^2 pour tout $\Delta t \geq 0$. Les équations cinématiques sont pour tout $\Delta t \geq 0$

$$\begin{aligned} \upsilon_x(t_0 + \Delta t) &= \upsilon_x(t_0) - a_x \, \Delta t, \\ \upsilon_y(t_0 + \Delta t) &= \upsilon_y(t_0) - 10 \, \Delta t, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} r_x(t_0 + \Delta t) &= r_x(t_0) + \upsilon_x(t_0) \, \Delta t - \frac{a_x}{2} \, \Delta t^2, \\ r_y(t_0 + \Delta t) &= r_y(t_0) + \upsilon_y(t_0) \, \Delta t - 5\Delta t^2, \end{aligned}$$

Exemple

Si on travaille avec un modèle dans le quel on considère uniquement l'accélération de la gravité et un vent horizontale avec le même direction du mouvement et avec accélération a_x constant:

$$\mathbf{a}(t_0) = \mathbf{a}(t_0 + \Delta t) = (a_x, -g)$$

où $g = 9.81 \approx 10$ m/s^2 pour tout $\Delta t \geq 0$. Les équations cinématiques sont pour tout $\Delta t \geq 0$

$$\upsilon_x(t_0 + \Delta t) = \upsilon_x(t_0) + a_x \,\Delta t,$$
$$\upsilon_y(t_0 + \Delta t) = \upsilon_y(t_0) - 10\,\Delta t,$$

et

$$r_x(t_0 + \Delta t) = r_x(t_0) + \upsilon_x(t_0)\,\Delta t + \frac{a_x}{2}\,\Delta t^2,$$
$$r_y(t_0 + \Delta t) = r_y(t_0) + \upsilon_y(t_0)\,\Delta t - 5\Delta t^2,$$

Cinématique

Antonio Falcó

Le diagramme du mouvement

Cinématique avec accélération constant

Les équations cinématiques indépendantes du temps

Cinématique angulaire

Théorème

Si l'accélération reste constant, c'est-à-dire

$$\mathbf{a}(t_0 + \Delta t) = \mathbf{a}(t_0) = (a_x, a_y)$$

pour tout $\Delta t \geq 0$. *Alors*

$$\Delta t = \frac{\upsilon_x(t_0 + \Delta t) - \upsilon_x(t_0)}{a_x} = \frac{\upsilon_y(t_0 + \Delta t) - \upsilon_y(t_0)}{a_y}.$$

Observez que les équations cinématiques pour la vitesse nous donne pour tout $\Delta t \geq 0$ que

$$\begin{aligned}
\upsilon_x(t_0 + \Delta t) &= \upsilon_x(t_0) + a_x\,\Delta t,\\
\upsilon_y(t_0 + \Delta t) &= \upsilon_y(t_0) + a_y\,\Delta t,
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
\upsilon_x(t_0 + \Delta t) - \upsilon_x(t_0) &= a_x\,\Delta t,\\
\upsilon_y(t_0 + \Delta t) - \upsilon_y(t_0) &= a_y\,\Delta t.
\end{aligned}$$

Cinématique

Antonio Falcó

Le diagramme du mouvement

Cinématique avec accélération constant

Les équations cinématiques indépendantes du temps

Cinématique angulaire

Cinématique

Antonio Falcó

Le diagramme du mouvement

Cinématique avec accélération constant

Les équations cinématiques indépendantes du temps

Cinématique angulaire

En utilisant les équations cinématiques pour la position

$$
\begin{aligned}
r_x(t_0 + \Delta t) &= r_x(t_0) + \upsilon_x(t_0)\,\Delta t + \frac{a_x}{2}\,\Delta t^2, \\
r_y(t_0 + \Delta t) &= r_y(t_0) + \upsilon_y(t_0)\,\Delta t + \frac{a_y}{2}\,\Delta t^2,
\end{aligned}
$$

avec

$$
\Delta t = \frac{\upsilon_x(t_0 + \Delta t) - \upsilon_x(t_0)}{a_x} = \frac{\upsilon_y(t_0 + \Delta t) - \upsilon_y(t_0)}{a_y}.
$$

on obtient les équations cinématiques indépendantes du temps Δt.

Cinématique

Antonio Falcó

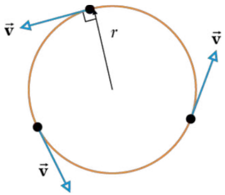
Le diagramme du mouvement

Cinématique avec accélération constant

Les équations cinématiques indépendantes du temps

Cinématique angulaire

La période et la fréquence



La figure illustre une particule se déplaçant sur un cercle de rayon r, avec une vitesse dont le module est constant et égal à v. La vitesse est toujours tangente à la trajectoire, ce qui implique qu'elle est perpendiculaire au rayon du cercle.

Définition (Période)

La période, symbolisée par la lettre T, représente le temps nécessaire pour que la particule effectue une révolution. Comme une révolution représente une distance d'une circonférence $2\pi r$, la période est obtenue par l'expression:

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$

Définition (Fréquence)

On définit aussi la fréquence f comme le nombre de révolutions effectuées par seconde. Cette quantité est l'inverse de la période:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{v}{2\pi r}$$

Dans le SI, l'unité de la période est la seconde (la période est un intervalle de temps). Pour la fréquence, l'unité du SI est le hertz (Hz), en l'honneur du physicien allemand Heinrich Hertz.

Cinématique

Antonio Falcó

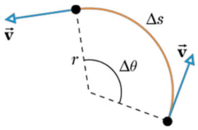
Le diagramme du mouvement

Cinématique avec accélération constant

Les équations cinématiques indépendantes du temps

Cinématique angulaire

La distance parcourue



Dans le mouvement circulaire, la distance parcourue est une quantité plus intéressante que le déplacement, car lorsque la particule effectue un nombre entier de révolutions, elle revient à son point de départ et son déplacement est nul. Lorsque la particule se déplace seulement sur un arc de cercle, comme à la figure, la distance Δs est reliée à l'angle $\Delta\theta$ de l'arc de cercle:

$$\Delta s = r\,\Delta\theta.$$

Cinématique

Antonio Falcó

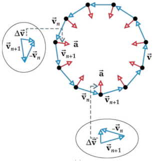
Le diagramme du mouvement

Cinématique avec accélération constant

Les équations cinématiques indépendantes du temps

Cinématique angulaire

L'accélération centripète



Une particule décrivant un mouvement circulaire uniforme subit une accélération, même si le module de la vitesse est constant. En effet, la vitesse change d'orientation et on peut montré que l'accélération est orientée vers le centre du cercle. Pour cette raison, on l'appelle l'accélération centripète. *Le mot centripète veut simplement dire vers le centre*. Le module de l'accélération centripète est

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2}.$$

Cinématique

Antonio Falcó

Le diagramme du mouvement

Cinématique avec accélération constant

Les équations cinématiques indépendantes du temps

Cinématique angulaire

On peut décomposé l'accélération **a** comme:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_c + \mathbf{a}_t$$

où l'accélération centripète est

$$\mathbf{a}_c = a_c \, \frac{\mathbf{r}(t)}{\|\mathbf{r}(t)\|}$$

et l'accélération tangentielle

$$\mathbf{a}_t = a_t \, \frac{\boldsymbol{v}(t)}{\|\boldsymbol{v}(t)\|}$$

avec $\langle \mathbf{r}(t), \boldsymbol{v}(t) \rangle = 0$ pour tout temps t. Alors,

$$a = \sqrt{a_c^2 + a_t^2}.$$

Cinématique

Antonio Falcó

Le diagramme du mouvement

Cinématique avec accélération constant

Les équations cinématiques indépendantes du temps

Cinématique angulaire