Chapitre 04

Le mouvement à deux dimensions

Buts du chapitre

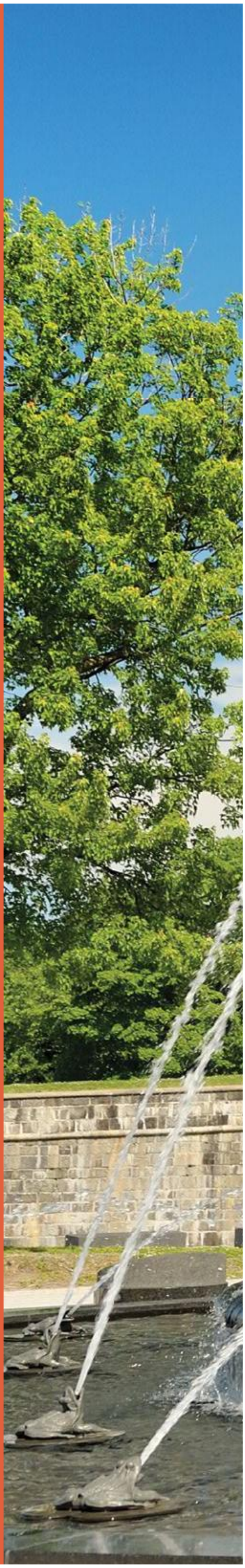
Dans ce chapitre, on fait l'étude du mouvement dans le plan et dans l'espace. Après l'étude de ce chapitre, vous serez en mesure :

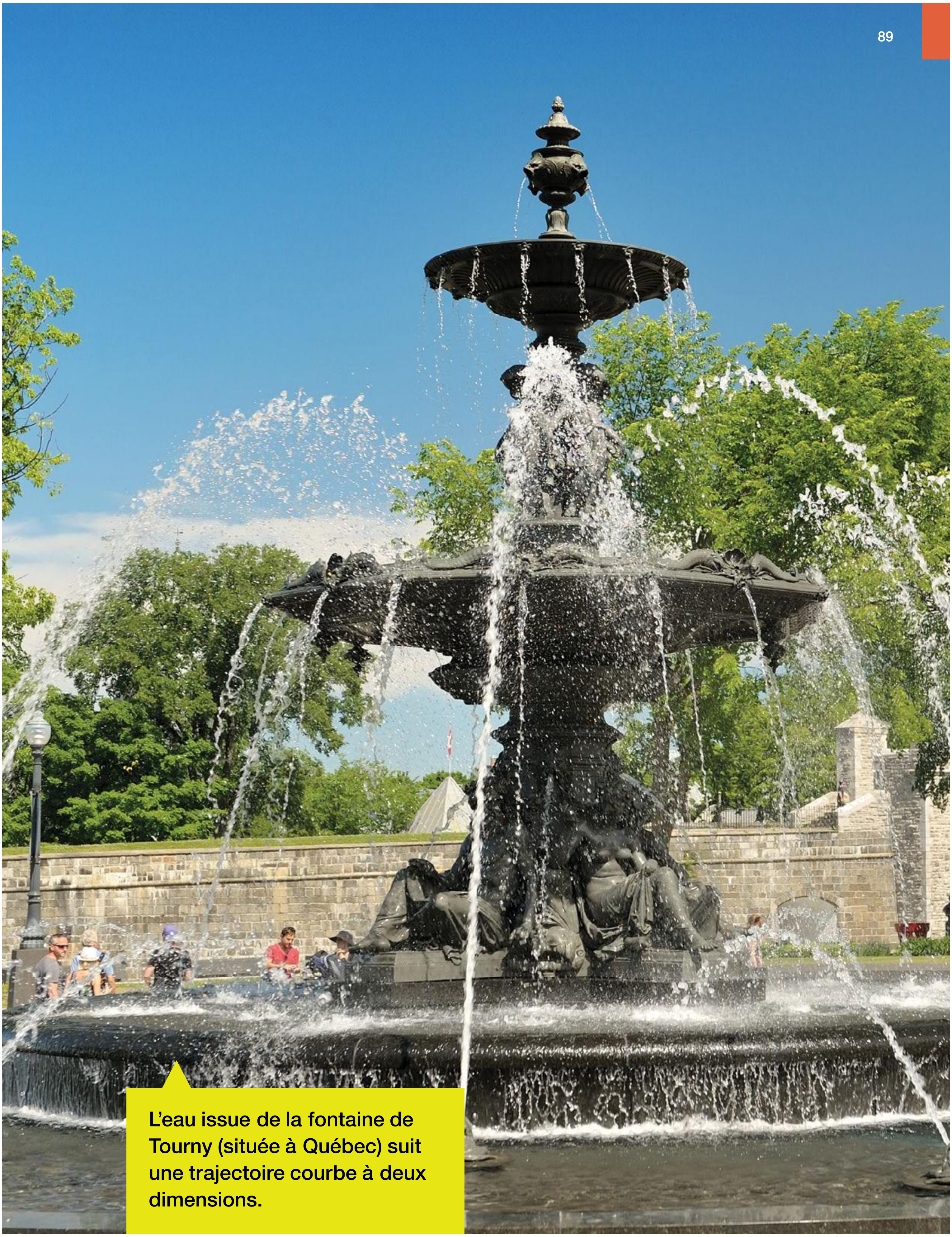
- d'obtenir les relations générales entre la position, la vitesse et l'accélération ;
- d'analyser le mouvement d'un projectile ;
- d'analyser le mouvement circulaire uniforme et le mouvement circulaire non uniforme ;
- d'étudier le mouvement relatif.

Préalables

Ce chapitre permet d'intégrer la plupart des notions abordées dans les chapitres précédents. Revoyez :

- les définitions du déplacement, de la vitesse et de l'accélération, formulées dans les sections 1.3 à 1.6 ;
- les vecteurs, présentés à la section 2.1 ;
- le mouvement uniformément accéléré, étudié à la section 3.7, et la chute libre, étudiée à la section 3.8.





L’eau issue de la fontaine de Tourny (située à Québec) suit une trajectoire courbe à deux dimensions.

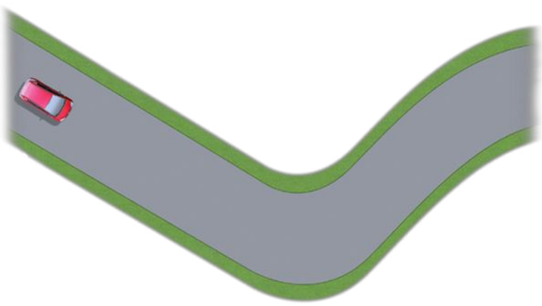
Les mouvements que nous avons analysés au chapitre précédent étaient limités à une dimension. Cela nous a permis d'obtenir les relations entre la position, la vitesse et l'accélération, et de représenter le mouvement à l'aide de graphiques. Ces mouvements à une dimension sont intéressants, mais les mouvements des objets qui nous entourent sont encore plus riches et plus complexes. En général, les objets ont des trajectoires dans un plan (mouvement à deux dimensions) ou dans l'espace (mouvement à trois dimensions). Par exemple, au basketball, lorsqu'on lance un ballon vers un panier, la trajectoire du ballon est une courbe. La même courbe est tracée par un jet d'eau sortant d'une fontaine, comme on le voit sur la photo de la page précédente. Un autre exemple de trajectoire courbe est celui d'un satellite qui tourne autour de la Terre ; sa trajectoire forme un cercle.

Dans ce chapitre, nous généralisons les notions présentées au chapitre 3 pour pouvoir analyser le mouvement à deux dimensions et à trois dimensions. L'ingrédient essentiel est l'algèbre vectorielle, que nous avons vue au chapitre 2. Nous allons décomposer les vecteurs position, vitesse et accélération selon leurs composantes ; un mouvement curviligne complexe sera alors remplacé par la superposition de plusieurs mouvements plus simples.

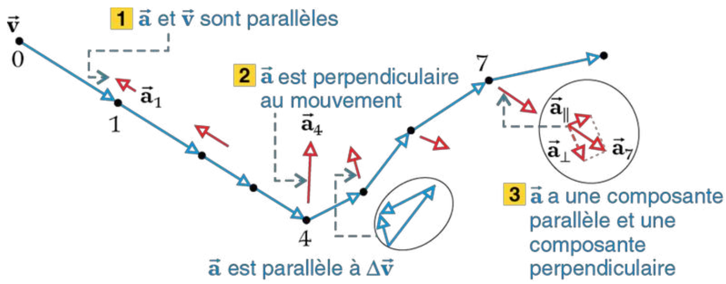
4.1 La cinématique à deux et à trois dimensions

Le diagramme du mouvement

Pour commencer, nous allons étudier le mouvement d'une voiture qui se déplace sur une route de campagne. Celle-ci est horizontale et possède plusieurs virages. Le diagramme du mouvement de la voiture est illustré à la figure 4.1.



(a)



(b)

FIGURE 4.1
(a) La route empruntée par la voiture. (b) Le diagramme du mouvement de la voiture en circuit fermé.

La construction du diagramme du mouvement est décrite à la section 1.6 : chaque point représente la position de l'objet à intervalles réguliers ; en reliant les points, on obtient la vitesse moyenne $\vec{\mathbf{v}}_{\text{moy}}$; l'orientation de l'accélération moyenne $\vec{\mathbf{a}}_{\text{moy}}$ est la même que celle de $\Delta\vec{\mathbf{v}}$. Ce diagramme illustre les trois situations possibles pour l'orientation du vecteur accélération.

TECHNIQUE 4.1 L'orientation de l'accélération

1. Pour un mouvement rectiligne, l'accélération est parallèle à la vitesse. Lorsque $\vec{\mathbf{a}}$ et $\vec{\mathbf{v}}$ ont la même direction, cela indique que le module de la vitesse change. Dans le présent exemple, au point 1, le module de la vitesse diminue, et l'accélération est de sens opposé au sens de la vitesse.

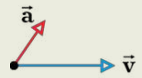
2. Lorsque la vitesse change d'orientation mais ne change pas de module, l'accélération est perpendiculaire au mouvement. Au point 2, le vecteur accélération est orienté vers le centre du virage.

3. Lorsque la vitesse change de module et d'orientation, l'accélération a deux composantes vectorielles $\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}}_{\parallel} + \vec{\mathbf{a}}_{\perp}$, comme au point 7 : la composante $\vec{\mathbf{a}}_{\parallel}$ est parallèle à $\vec{\mathbf{v}}$ et indique la variation du module de la vitesse ; la composante $\vec{\mathbf{a}}_{\perp}$ est perpendiculaire à $\vec{\mathbf{v}}$ et indique la variation de l'orientation de la vitesse.

Ces résultats sont importants pour bien visualiser l'accélération d'un objet lorsque celui-ci se déplace dans le plan ou dans l'espace.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 4.1

La figure ci-dessous illustre la vitesse et l'accélération d'un objet. Comment vont changer sa trajectoire et le module de sa vitesse ?



La position et le déplacement

Le but de la cinématique est de décrire le mouvement des objets. La première étape consiste à donner la position en fonction du temps pour un objet qui nous intéresse. Prenons par exemple une particule (comme un joueur de football) qui décrit la trajectoire horizontale illustrée dans la vue en plongée de la figure 4.2 (en vue de se démarquer et d'attraper une passe). Nous utilisons un système de coordonnées cartésiennes. La *position* à un temps t_1 particulier est

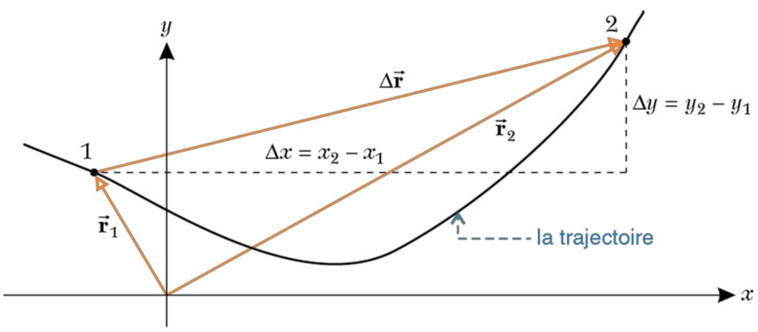


FIGURE 4.2
La trajectoire d'une particule qui passe au point 1 au temps t_1 et au point 2 au temps t_2.

donnée par le vecteur $\vec{\mathbf{r}}_1$. Ce vecteur est construit en reliant l'origine à la position de la particule. Ses composantes sont simplement les coordonnées $(x_1\,;\, y_1)$ du point, ce qui nous permet d'écrire le vecteur position de la façon suivante :

Position

$$\vec{\mathbf{r}}_1 = x_1\vec{\imath} + y_1\vec{\jmath}\ . \tag{4.1}$$

Le vecteur *déplacement* indique le changement de position de la particule. Le vecteur déplacement entre les points 1 et 2 est le vecteur $\Delta\vec{\mathbf{r}}$ qui relie ces points.

Selon l'équation 1.4, on obtient ce vecteur en calculant la différence des vecteurs position :

$$\Delta\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}_2 - \vec{\mathbf{r}}_1 = (x_2\vec{\imath} + y_2\vec{\jmath}) - (x_1\vec{\imath} + y_1\vec{\jmath}) = (x_2 - x_1)\vec{\imath} + (y_2 - y_1)\vec{\jmath}$$

Déplacement

$$\Delta\vec{\mathbf{r}} = \Delta x\,\vec{\imath} + \Delta y\,\vec{\jmath}\ . \tag{4.2}$$

Les composantes cartésiennes du déplacement sont Δx et Δy respectivement. On voit que ces composantes sont indépendantes l'une de l'autre.

La vitesse

La deuxième étape de la cinématique consiste à obtenir la vitesse. Au chapitre 1, nous avons défini la *vitesse moyenne* d'un objet par l'équation 1.5 : on divise le déplacement $\Delta\vec{\mathbf{r}}$ par l'intervalle de temps Δt.

$$\vec{\mathbf{v}}_{\text{moy}} = \frac{\Delta\vec{\mathbf{r}}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{\imath} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{\jmath} = v_{\text{moy},x}\vec{\imath} + v_{\text{moy},y}\vec{\jmath}$$

On définit la *vitesse* de la même façon qu'au chapitre 3, c'est-à-dire en prenant la limite $\Delta t \to 0$:

$$\vec{\mathbf{v}} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{\mathbf{r}}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{r}}}{\mathrm{d}t}\ . \tag{4.3}$$

Lorsqu'on exprime un vecteur selon ses composantes cartésiennes, la dérivée du vecteur se calcule en prenant la dérivée des composantes cartésiennes :

Vitesse

$$\vec{\mathbf{v}} = \lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{\imath} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{\jmath}\right) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{\imath} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{\jmath}\,. \tag{4.4}$$

Étant donné que $\vec{\mathbf{v}} = v_x\vec{\imath} + v_y\vec{\jmath}$, on peut exprimer les composantes de la vitesse ainsi :

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \quad , \quad v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\ . \tag{4.5}$$

Chaque composante se calcule en dérivant la composante correspondante de la position. Les deux composantes de la vitesse sont indépendantes l'une de l'autre.

La vitesse moyenne $\vec{\mathbf{v}}_{\text{moy}}$ est un vecteur parallèle au déplacement $\Delta\vec{\mathbf{r}}$. La figure 4.3 montre qu'à mesure que l'intervalle de temps Δt diminue, $\Delta\vec{\mathbf{r}}$ s'approche de la tangente de la trajectoire. On obtient alors le résultat suivant :

➔ Le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire.

Soit θ l'orientation du vecteur $\vec{\mathbf{v}}$, c'est-à-dire l'angle entre $\vec{\mathbf{v}}$ et la partie positive de l'axe des x. L'angle θ est l'orientation du mouvement à cet instant. Les composantes de la vitesse sont données par les expressions:

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v\cos\theta$$
$$v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v\sin\theta \ . \qquad (4.6)$$

Composantes de la vitesse

La figure 4.4 illustre ce résultat. En combinant ces deux équations, on obtient l'orientation du mouvement de l'objet par rapport à la partie positive de l'axe des x:

$$\theta = \arctan\left(\frac{v_y}{v_x}\right) . \qquad (4.7)$$

Orientation du mouvement

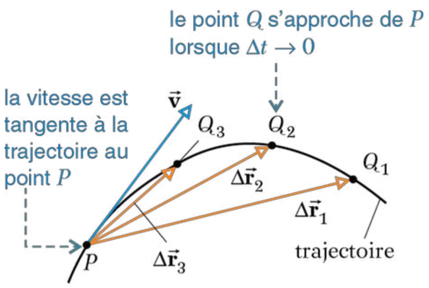


FIGURE 4.3
La vitesse de l'objet au point P est tangente à la trajectoire.

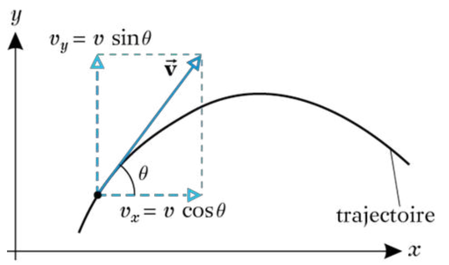


FIGURE 4.4
La vitesse est décomposée selon ses composantes v_x et v_y à l'aide de θ, l'orientation du mouvement.

MISE EN GARDE
La signification de la pente dépend du type de graphique. Au chapitre 3, nous avons vu que la pente du graphique de x en fonction du temps donne la composante v_x. Dans le présent chapitre, les graphiques sont des courbes représentant des trajectoires (y en fonction de x). La pente donne l'orientation du vecteur vitesse. Cette pente ne donne pas le module de la vitesse v.

L'accélération

Pour compléter l'étude du mouvement, on a besoin de l'accélération. La figure 4.5 montre la trajectoire dans un plan horizontal d'un objet. La vitesse est illustrée aux points 1 et 2: le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire. Ces points sont séparés par un intervalle de temps Δt. L'accélération moyenne $\vec{\mathbf{a}}_{\text{moy}}$ indique la variation de vitesse dans cet intervalle de temps. Selon l'équation 1.7,

$$\vec{\mathbf{a}}_{\text{moy}} = \frac{\vec{\mathbf{v}}_2 - \vec{\mathbf{v}}_1}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{\mathbf{v}}}{\Delta t} \ . \qquad (4.8)$$

Le vecteur $\vec{\mathbf{a}}_{\text{moy}}$ a la même orientation que $\Delta\vec{\mathbf{v}}$; on obtient l'orientation de l'accélération par la soustraction vectorielle de $\vec{\mathbf{v}}_2$ et $\vec{\mathbf{v}}_1$, comme le montre la figure 4.5.

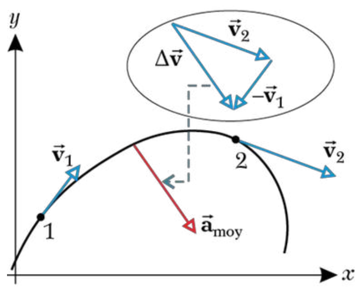


FIGURE 4.5
L'accélération moyenne $\vec{\mathbf{a}}_{\text{moy}}$ entre les points 1 et 2

Pour obtenir l'*accélération instantanée* à un instant précis, on calcule l'accélération moyenne pour un intervalle de temps qui tend vers zéro :

$$\vec{\mathbf{a}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\mathbf{v}}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} \ . \tag{4.9}$$

Contrairement à la vitesse qui est toujours tangente à la trajectoire, l'accélération a une composante $\vec{\mathbf{a}}_{\parallel}$, parallèle à la trajectoire, et une composante $\vec{\mathbf{a}}_{\perp}$, perpendiculaire à la trajectoire :

$$\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}}_{\parallel} + \vec{\mathbf{a}}_{\perp} \ . \tag{4.10}$$

La figure 4.6a illustre cette décomposition. La composante parallèle $\vec{\mathbf{a}}_{\parallel}$ est parallèle à la vitesse et elle indique de quelle façon le module de la vitesse change. La composante $\vec{\mathbf{a}}_{\perp}$ est perpendiculaire à la vitesse et elle indique de quelle façon l'orientation de la vitesse change.

La décomposition de l'accélération donnée à l'équation 4.10 a un désavantage : à mesure que la particule se déplace, les orientations parallèle et perpendiculaire changent. Pour cette raison, dans certaines situations, il est plus simple de décomposer le vecteur $\vec{\mathbf{a}}$ selon ses composantes cartésiennes. En écrivant $\vec{\mathbf{v}} = v_x\vec{\imath} + v_y\vec{\jmath}$, l'équation 4.9 devient

Accélération

$$\boxed{\vec{\mathbf{a}} = \frac{dv_x}{dt}\vec{\imath} + \frac{dv_y}{dt}\vec{\jmath} \ .} \tag{4.11}$$

Les composantes de l'accélération sont obtenues en dérivant les composantes de la vitesse :

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} \quad , \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} \ . \tag{4.12}$$

On remarque de nouveau que les composantes sont indépendantes l'une de l'autre. La figure 4.6b illustre la décomposition du vecteur $\vec{\mathbf{a}}$ selon ses composantes cartésiennes.

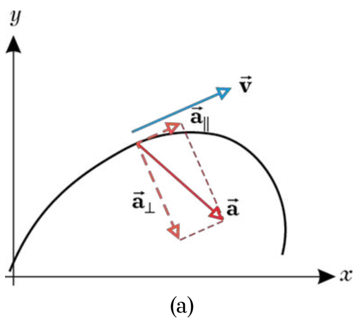


FIGURE 4.6
La décomposition du vecteur $\vec{\mathbf{a}}$: (a) selon les composantes parallèle et perpendiculaire ; (b) selon les composantes cartésiennes.

EXEMPLE 4.1 La vitesse et l'accélération

Un mobile se déplace dans le plan des xy selon le vecteur position :

$$\vec{\mathbf{r}} = (2{,}0 - 4{,}0t)\vec{\imath} + (-3{,}4t + t^3)\vec{\jmath}\,,$$

où le temps est mesuré en secondes et la position, en centimètres. À $t = 2{,}5$ s,

a. calculez la vitesse ;

b. déterminez le module de la vitesse ;

c. donnez l'orientation du mouvement ;

d. calculez l'accélération.

SOLUTION

Décortiquer le problème

Nous décomposons le vecteur position $\vec{\mathbf{r}}$ selon ses composantes cartésiennes.

Connues	Inconnues	
$x(t) = 2{,}0 - 4{,}0t$	$\vec{\mathbf{v}}$	v
$y(t) = -3{,}4t + t^3$	θ	$\vec{\mathbf{a}}$
$t = 2{,}5$ s		

SOLUTION a.

Identifier la clé

La **clé** pour obtenir le vecteur $\vec{\mathbf{v}}$ est de calculer ses composantes à l'aide de l'équation 4.6 :

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(2{,}0 - 4{,}0t) = -4{,}0 \qquad \text{(i)}$$

$$v_y(t) = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(-3{,}4t + t^3) = -3{,}4 + 3t^2\,. \qquad \text{(ii)}$$

Les dérivées ont été calculées à l'aide des équations 3.6 et 3.5 de la page 63.

Résoudre le problème

Nous remplaçons t par sa valeur de 2,5 s :

$$v_x = -4{,}0 = -4{,}0 \text{ m/s}$$
$$v_y = -3{,}4 + 3(2{,}5)^2 = 15{,}4 \text{ m/s}\,.$$

La vitesse est alors

$$\vec{\mathbf{v}} = (-4{,}0\vec{\imath} + 15\vec{\jmath}) \text{ m/s}\,. \qquad \text{(réponse)}$$

SOLUTION b.

Identifier la clé

Nous calculons le module d'un vecteur à l'aide de l'équation 2.4 de la page 31 :

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}\,.$$

Résoudre le problème

Nous obtenons

$$v = \sqrt{(-4{,}0)^2 + (15{,}4)^2} = 16 \text{ m/s}\,. \text{ (réponse)}$$

SOLUTION c.

Identifier la clé

L'orientation du mouvement est donnée par l'orientation de la vitesse, que nous calculons à l'aide de l'équation 4.7 :

$$\theta = \arctan\frac{v_y}{v_x}\,. \qquad \text{(iii)}$$

Résoudre le problème

L'équation mathématique (iii) a deux solutions : un angle θ entre 0° et −90° et un angle θ entre 90° et 180°. Pour choisir la bonne solution, nous traçons le vecteur $\vec{\mathbf{v}}$ à la figure 4.7 ; la composante vectorielle $\vec{\mathbf{v}}_x$ est vers la gauche car $v_x < 0$, et la composante vectorielle $\vec{\mathbf{v}}_y$ est vers le haut car $v_y > 0$. Dans notre cas, il faut choisir la deuxième solution (la composante v_x est négative). Nous ajoutons 180° au résultat obtenu à l'aide d'une calculatrice scientifique :

$$\theta = \arctan\left(\frac{15{,}4}{-4{,}0}\right) + 180° = 105°\,. \text{ (réponse)}$$

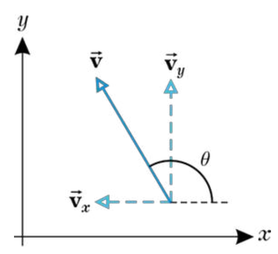


FIGURE 4.7
Nous traçons le vecteur $\vec{\mathbf{v}}$ pour trouver son orientation θ.

SOLUTION d.

Identifier la clé

Nous calculons les composantes de l'accélération en dérivant les composantes de la vitesse données aux équations (i) et (ii) :

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-4{,}0) = 0 \qquad \text{(iv)}$$

$$a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-3{,}4 + 3t^2) = 6t\ . \qquad \text{(v)}$$

Résoudre le problème

Nous insérons ensuite la valeur de t = 2,5 s dans l'équation (v) :

$$a_y = 6 \times 2{,}5 = 15\ \mathrm{m/s^2}\ .$$

Le vecteur accélération est

$$\vec{\mathbf{a}} = 15\ \mathrm{m/s^2}\,\vec{\boldsymbol{j}}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

Nous répondons aux questions : en **a.**, la vitesse est un vecteur. En **d.**, l'accélération est aussi un vecteur. Nous avons arrondi les réponses à deux chiffres significatifs.

La cinématique en trois dimensions

Lorsqu'une particule se déplace dans l'espace, on utilise un système de coordonnées en trois dimensions, comme le système cartésien xyz. Il est plus difficile de visualiser le mouvement, surtout si on veut le tracer sur une feuille. Par contre, du point de vue mathématique, la description reste simple : on ajoute une composante z aux vecteurs. Les vecteurs décrivant le mouvement ont trois composantes.

Prenons une abeille dont la trajectoire est illustrée à la figure 4.8. Au point 1, sa position est donnée par le vecteur $\vec{\mathbf{r}}_1 = x_1\vec{\boldsymbol{\imath}} + y_1\vec{\boldsymbol{j}} + z_1\vec{\boldsymbol{k}}$ et au point 2, sa position est $\vec{\mathbf{r}}_2 = x_2\vec{\boldsymbol{\imath}} + y_2\vec{\boldsymbol{j}} + z_2\vec{\boldsymbol{k}}$. Le déplacement du point 1 au point 2 est

$$\begin{aligned}\Delta\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}_2 - \vec{\mathbf{r}}_1 &= (x_2\vec{\boldsymbol{\imath}} + y_2\vec{\boldsymbol{j}} + z_2\vec{\boldsymbol{k}}) - (x_1\vec{\boldsymbol{\imath}} + y_1\vec{\boldsymbol{j}} + z_1\vec{\boldsymbol{k}}) \\ &= \Delta x\,\vec{\boldsymbol{\imath}} + \Delta y\,\vec{\boldsymbol{j}} + \Delta z\,\vec{\boldsymbol{k}}\ . \end{aligned} \qquad (4.13)$$

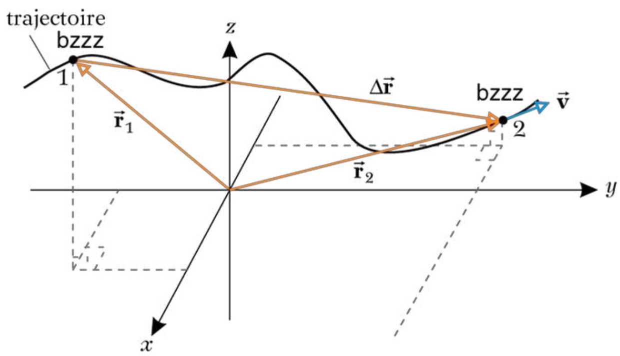


FIGURE 4.8

Une abeille se déplace du point 1 au point 2 le long d'une trajectoire curviligne.

La vitesse de l'abeille en un point est obtenue en dérivant la position :

$$\vec{\mathbf{v}} = \frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{r}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{\boldsymbol{\imath}} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{\boldsymbol{j}} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\vec{\boldsymbol{k}}\ . \qquad (4.14)$$

Cette équation est une généralisation de l'équation 4.4. Étant donné que $\vec{\mathbf{v}} = v_x\vec{\boldsymbol{\imath}} + v_y\vec{\boldsymbol{j}} + v_z\vec{\boldsymbol{k}}$, on obtient les composantes de la vitesse :

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\quad,\quad v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\quad,\quad v_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\ . \qquad (4.15)$$

Chaque composante est la dérivée de la composante correspondante de la position. Comme en deux dimensions, le vecteur $\vec{\mathbf{v}}$ est toujours tangent à la trajectoire. La vitesse de l'abeille au point 2 est tracée sur la figure 4.8.

En dérivant la vitesse, on obtient l'accélération :

$$\vec{\mathbf{a}} = \frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{v}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\vec{\imath} + \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\vec{\jmath} + \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\vec{k}\,. \tag{4.16}$$

L'accélération est aussi un vecteur à trois composantes ; chacune des composantes est calculée par la dérivée par rapport au temps de la composante correspondante de la vitesse :

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} \quad , \quad a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} \quad , \quad a_z = \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\,. \tag{4.17}$$

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 4.2

L'abeille de la situation précédente se déplace du point 1 (2 ; –3 ; 5) au point 2 (–1 ; 6 ; 1), où les coordonnées sont exprimées en mètres. Quel est son déplacement, exprimé en fonction des vecteurs unitaires ?

4.2 Le mouvement uniformément accéléré

Lorsque l'accélération d'un objet a un module et une orientation constants, les composantes cartésiennes de l'accélération sont constantes. Comme on l'a déjà remarqué, les composantes sont indépendantes. Cela permet d'utiliser la stratégie 3.1 de la page 70 pour chaque composante séparément. Les équations 3.14 et 3.15 sont valides pour chaque composante :

composante x	composante y	composante z	
$v_x = v_{0x} + a_x t$	$v_y = v_{0y} + a_y t$	$v_z = v_{0z} + a_z t$	(4.18)
$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$	$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2$	$z = z_0 + v_{0z}t + \frac{1}{2}a_z t^2.$	(4.19)

REMARQUE

Le mouvement se décompose en trois mouvements indépendants : la composante x du mouvement n'a aucune influence sur la composante y du mouvement. Cependant, les trois mouvements se font simultanément, avec le même temps t.

EXEMPLE 4.2 Une fusée miniature

Initialement au repos, un modèle réduit d'une fusée est lancé du sol. Son accélération est constante et elle est égale à $\vec{\mathbf{a}} = (1{,}00\vec{\imath} + 2{,}50\vec{\jmath})$ m/s^2.

a. En combien de temps la fusée atteint-elle une hauteur de 100 m par rapport au sol ?

b. Quelle est alors sa vitesse ?

c. Quelle est l'orientation de son mouvement à cet instant ?

SOLUTION

Illustrer la situation

Le schéma de la situation est illustré à la figure 4.9. Nous utilisons un système de coordonnées cartésiennes. Nous avons indiqué deux points importants : le point initial 0 (à l'origine) et le point 1 (à une hauteur de 100 m), sans nous préoccuper des points intermédiaires.

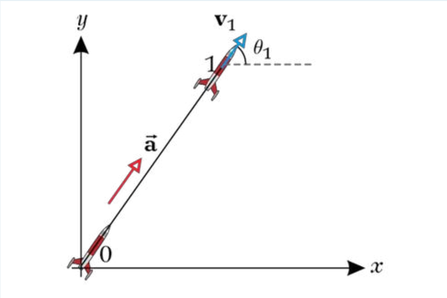


FIGURE 4.9
Le schéma de la situation pour l'exemple 4.2

Décortiquer le problème

On divise le problème selon les composantes x et y :

Connues		Inconnues
En x	En y	t $\vec{v}_1$ θ_1
$x_0 = 0{,}00$ m	$y_0 = 0{,}00$ m	
$v_{0x} = 0{,}00$ m/s	$v_{0y} = 0{,}00$ m/s	
$a_x = 1{,}00$ m/s^2	$a_y = 2{,}50$ m/s^2	
	$y_1 = 100$ m	

SOLUTION a.

Identifier la clé

L'accélération est constante, ce qui nous permet d'utiliser la composante y de l'équation 4.19 pour mettre en relation y_1, a_y et t :

$$y_1 = y_0 + v_{oy}t + \frac{1}{2}a_y t^2$$

$$y_1 = 0 + 0 + \frac{1}{2}a_y t^2 .$$

Résoudre le problème

En isolant t et en remplaçant les valeurs, nous obtenons

$$t = \pm\sqrt{\frac{2y_1}{a_y}} = \pm\sqrt{\frac{2 \times 100 \text{ m}}{2{,}50 \text{ m/s}^2}} = \pm 8{,}944 \text{ s} . \qquad \text{(i)}$$

Le temps doit être positif : la fusée ne peut être à une hauteur de 100 m avant d'être lancée.

$$t = 8{,}94 \text{ s} \qquad \text{(réponse)}$$

SOLUTION b.

Identifier la clé

La vitesse est un vecteur. Nous calculons ses composantes à l'aide de l'équation 4.18 :

$$v_{1x} = v_{0x} + a_x t \quad , \quad v_{1y} = v_{0y} + a_y t . \qquad \text{(ii)}$$

Résoudre le problème

Nous avons calculé le temps t à la partie **a.** Nous obtenons

$$\begin{aligned} v_{1x} &= 0{,}00 \text{ m/s} + (1{,}00 \text{ m/s}^2)(8{,}944 \text{ s}) \\ &= 8{,}944 \text{ m/s} \\ v_{1y} &= 0{,}00 \text{ m/s} + (2{,}50 \text{ m/s}^2)(8{,}944 \text{ s}) \\ &= 22{,}36 \text{ m/s} . \end{aligned}$$

La vitesse au point 1 est

$$\vec{v}_1 = (8{,}94\vec{\imath} + 22{,}4\vec{\jmath})\text{m/s}. \qquad \text{(réponse)}$$

SOLUTION c.

Identifier la clé

L'orientation du mouvement est donnée par l'orientation de la vitesse. On trouve l'angle θ_1 de la vitesse par rapport à l'horizontale à l'aide de l'équation 4.7 :

$$\theta_1 = \arctan\frac{v_{1y}}{v_{1x}} .$$

Résoudre le problème

Nous obtenons

$$\theta_1 = \arctan\left(\frac{22{,}36 \text{ m/s}}{8{,}944 \text{ m/s}}\right) = 68{,}2° . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

Le temps t a une valeur positive, et la vitesse obtenue est un vecteur. L'orientation du mouvement est bien entre 0° et 90°, comme l'indique le schéma de la situation.

4.3 Le mouvement du projectile

On appelle *projectile* un objet qui est lancé de façon oblique. Une fois lancé, l'objet décrit une courbe. Le mouvement est en deux ou en trois dimensions. Il est influencé par la force gravitationnelle qu'exercent la Terre et la force de résistance de l'air. Plusieurs sports nous donnent d'autres exemples : au tennis, la balle que s'échangent les joueurs est un projectile. La trajectoire est une courbe plus ou moins arquée, selon la vitesse que la raquette imprime à la balle. Dans les épreuves de lancer du poids et du marteau (*voir la figure 4.10*), l'athlète doit lancer un projectile le plus loin possible.

FIGURE 4.10
Lors du lancer du marteau, le poids décrit le mouvement du projectile.

En général, l'air exerce une force, la *traînée*, opposée à la vitesse du projectile dans l'air. Cette force ralentit le projectile et diminue son déplacement. L'air peut aussi produire une force perpendiculaire à la vitesse, qu'on appelle la *portance*. Cette force augmentera le déplacement du projectile. La portance est la force permettant aux avions de voler. La force résultante de l'air est complexe ; elle dépend de la forme et de la vitesse du projectile.

Pour commencer l'étude du mouvement du projectile, on néglige l'effet de l'air. On étudie seulement l'effet de la force gravitationnelle de la Terre sur le projectile. Cette force s'exerce de la même façon sur tous les objets, quelles que soient la forme ou la vitesse. On obtiendra une approximation du mouvement réel d'un projectile. Cette approximation est bonne lorsque l'effet de l'air demeure petit, c'est-à-dire pour les objets compacts qui se déplacent lentement. Nous étudierons la force de traînée dans le chapitre 5.

La figure 4.11 montre une balle qui a été lancée à une vitesse $\vec{\mathbf{v}}_0$, formant un angle θ_0 avec l'horizontale. On a tracé la balle à des instants réguliers, avec sa vitesse (qui est tangente à la trajectoire). Remarquez que la composante horizontale de la vitesse demeure constante : chaque seconde, la balle parcourt le même déplacement horizontal. Par contre, la composante verticale de la vitesse diminue graduellement. Ceci montre que la balle doit subir une accélération constante orientée vers le bas, sans composante horizontale.

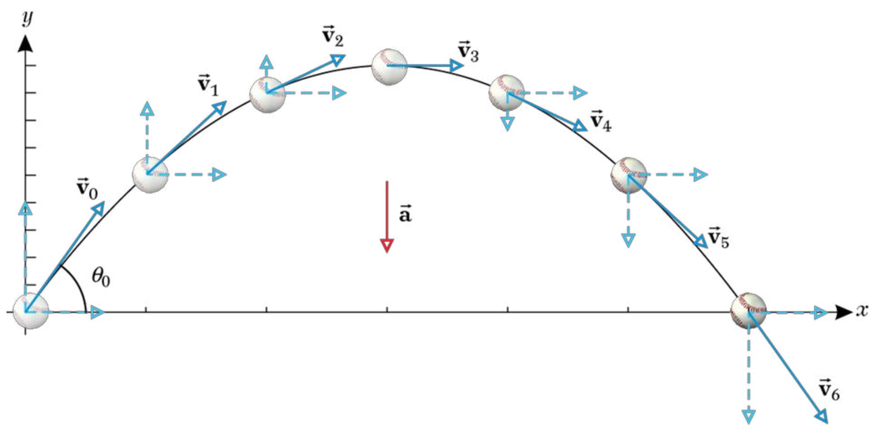


FIGURE 4.11
Une balle est lancée à un angle θ_0. Elle décrit un mouvement parabolique ; la composante v_y varie, mais la composante v_x demeure constante.

Compte tenu du système de coordonnées xy de la figure, l'accélération est

Accélération du projectile

$$\vec{\mathbf{a}} = -g\vec{\boldsymbol{j}} = -9{,}81\ \text{m/s}^2\vec{\boldsymbol{j}}\ . \tag{4.20}$$

C'est la même accélération que celle obtenue à la section 3.8 lors de l'étude de la chute libre. L'analyse du mouvement est simplifiée en décomposant le mouvement selon les composantes décrites ci-après.

Le mouvement du projectile peut être divisé en deux mouvements indépendants :

- la composante horizontale du mouvement est un mouvement uniforme, avec $a_x = 0$;
- la composante verticale du mouvement est un mouvement uniformément accéléré. Lorsque l'axe des y est orienté vers le haut, $a_y = -g = -9{,}81\ \text{m/s}^2$ (un mouvement de chute libre).

Les deux mouvements se déroulent en même temps, avec le même t.

La composante horizontale du mouvement

Pour analyser le mouvement d'un projectile, nous utilisons un système de coordonnées cartésiennes orienté selon la convention habituelle. Le projectile est lancé avec une vitesse initiale $\vec{\mathbf{v}}_0$, comme il est illustré à la figure 4.11. À partir de l'orientation initiale θ_0, on calcule la composante x de la vitesse initiale :

$$v_{0x} = v_0 \cos\theta_0\ . \tag{4.21}$$

Comme le montre la figure 4.11, la composante v_x est constante, car la composante de l'accélération a_x est nulle. On peut dire que la composante x du mouvement est un mouvement uniforme. La position horizontale est donnée par l'équation 3.8 :

$$x = x_0 + v_{0x}t\ . \tag{4.22}$$

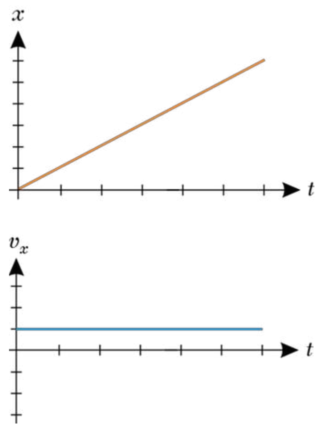


FIGURE 4.12
La composante x du mouvement de la balle est un mouvement uniforme.

La figure 4.12 montre les composantes horizontales de la position et de la vitesse en fonction du temps.

La composante verticale du mouvement

La figure 4.11 montre que la composante y du mouvement est identique au mouvement de la chute libre : la composante v_y diminue graduellement jusqu'à zéro (le point de hauteur maximal), puis en redescendant, la composante v_y devient de plus en plus négative. L'accélération est $a_y = -g = -9{,}81\ \text{m/s}^2$, et la vitesse initiale est

$$v_{0y} = v_0 \sin\theta_0\ . \tag{4.23}$$

On utilise les équations du mouvement uniformément accéléré, données dans la stratégie 3.1 de la page 70 :

$$v_y = v_{0y} + a_y t \tag{4.24}$$

$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \tag{4.25}$$

$$v_y^2 - v_{0y}^2 = 2a_y(y - y_0) \tag{4.26}$$

$$y = y_0 + \left(\frac{v_{0y} + v_y}{2}\right)t \,. \tag{4.27}$$

La figure 4.13 illustre les graphiques de y en fonction du temps et de v_y en fonction du temps pour la balle de la figure 4.11.

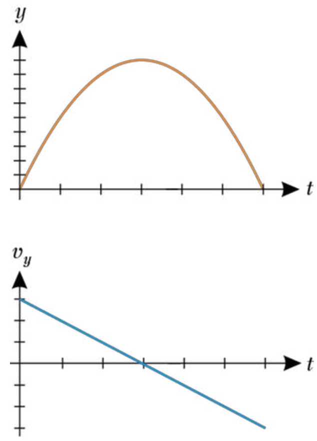


FIGURE 4.13
La composante y du mouvement de la balle est un mouvement de chute libre.

L'équation de la trajectoire

Dans plusieurs situations, on veut connaître la trajectoire de la particule, sans s'intéresser au temps nécessaire. On a alors besoin d'une équation qui met en relation x et y. On peut trouver cette relation en isolant le temps dans l'équation 4.22 :

$$t = \frac{x - x_0}{v_{0x}} = \frac{x - x_0}{v_0 \cos\theta_0} \quad .$$

On insère ensuite ce résultat dans l'équation 4.25 :

$$y = y_0 + v_0 \sin\theta_0 \left(\frac{x - x_0}{v_0 \cos\theta_0}\right) + \frac{1}{2}(a_y)\left(\frac{x - x_0}{v_0 \cos\theta_0}\right)^2$$

$$y = y_0 + \tan\theta_0(x - x_0) + \frac{a_y(x - x_0)^2}{2v_0^2 \cos^2\theta_0} \quad , \tag{4.28}$$

Équation de la trajectoire

avec $a_y = -g$. C'est l'équation d'une parabole concave vers le bas. Cette équation montre que la courbe de la trajectoire présentée à la figure 4.11 est bien une parabole. Dans la plupart des cas, on peut placer l'origine pour que $x_0 = 0$.

Défi animé 4.1
La résistance de l'air est-elle vraiment négligeable pour tous les projectiles ?

Les équations précédentes permettent de résoudre les problèmes relatifs au mouvement d'un projectile lorsque les effets de l'air sont négligeables. La stratégie à utiliser est la suivante :

STRATÉGIE 4.1 Le mouvement d'un projectile

Illustrer la situation
Vous devez dessiner un schéma de la situation en traçant l'objet avec les points importants de sa trajectoire. Numérotez ces points de façon séquentielle. Ajoutez un système de coordonnées cartésiennes, en situant clairement l'origine.

Décortiquer le problème
Créez un tableau dans lequel vous inscrirez les données connues. Séparez le tableau selon les composantes x et y. Lorsque l'axe des y est orienté vers le haut, $a_x = 0{,}00\,\text{m/s}^2$ et $a_y = -g = -9{,}81\,\text{m/s}^2$ pour un projectile. Calculez les composantes de la vitesse initiale ainsi :

$$v_{0x} = v_0 \cos\theta_0$$
$$v_{0y} = v_0 \sin\theta_0 \,.$$

Indiquez aussi les données inconnues.

Identifier la clé

La **clé** figure parmi les équations suivantes :

composante x	composante y
$v_x = v_{0x}$	$v_y = v_{0y} + a_y t$
$x = x_0 + v_{0x}t$	$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2$
	$v_y^2 - v_{0y}^2 = 2a_y(y - y_0)$
	$y = y_0 + \left(\frac{v_{0y} + v_y}{2}\right)t$

Lorsque le temps n'est pas important dans le problème, l'équation de la trajectoire peut être utilisée :

$$y = y_0 + \tan\theta_0(x - x_0) + \frac{a_y(x - x_0)^2}{2v_0^2\cos^2\theta_0}\ .$$

Résoudre le problème

Vous devez résoudre l'équation ou le système d'équations pour trouver les quantités inconnues.

Valider la réponse

Vérifiez si vous répondez bien à la question, si la réponse est sensée, si les unités et le signe sont corrects.

EXEMPLE 4.3 Une bille lancée horizontalement

Une bille est lancée sur une table horizontale, d'une hauteur de 1,10 m par rapport au sol. La bille tombe à une distance horizontale de 2,00 m par rapport au bout de la table.

a. Pendant combien de temps la bille reste-t-elle dans les airs ?

b. Quelle est la vitesse de la bille lorsque celle-ci quitte la table ?

SOLUTION

Illustrer la situation

Le schéma de la situation est illustré à la figure 4.14. L'origine du système de coordonnées est placée au sol, vis-à-vis de la position de la bille lorsque celle-ci perd contact avec la table. La bille effectue un mouvement de projectile.

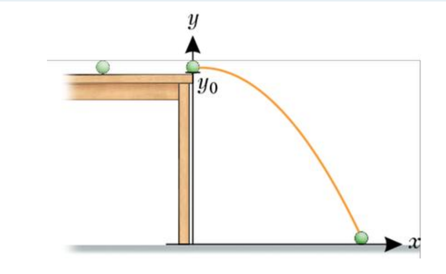


FIGURE 4.14
Le schéma de la situation pour l'exemple 4.3

Décortiquer le problème

La vitesse initiale de la bille a seulement une composante x, car elle roule sur une table horizontale.

Connues selon x	Connues selon y	Inconnues
$x_0 = 0{,}00$ m	$y_0 = 1{,}10$ m	t
$x = 2{,}00$ m	$y = 0{,}00$ m	$\vec{\mathbf{v}}_0$
$a_x = 0{,}00$ m/s^2	$a_y = -9{,}81$ m/s^2	
	$v_{0y} = 0{,}00$ m/s	

SOLUTION a.

Identifier la clé

Le temps apparaît dans la composante x et dans la composante y du mouvement. Ici, nous avons plus d'information dans la composante y. Nous obtenons le temps à partir de l'équation 4.25 :

$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2.$$

Résoudre le problème

Nous pouvons isoler facilement t, étant donné que $v_{0y} = 0{,}00$ m/s :

$$t = \pm\sqrt{\frac{2(y - y_0)}{a_y}}$$

$$t = \pm\sqrt{\frac{2(0{,}00 \text{ m} - 1{,}10 \text{ m})}{-9{,}81 \text{ m/s}^2}} = \pm 0{,}4736 \text{ s}.$$

Nous choisissons la solution positive, car la bille arrive au sol après son départ :

$$t = 0{,}474 \text{ s}. \qquad \text{(réponse)}$$

SOLUTION b.

Identifier la clé

La vitesse initiale est $\vec{\mathbf{v}}_0 = v_{0x}\vec{\imath} + v_{0y}\vec{\jmath}$; nous savons déjà que $v_{0y} = 0{,}00$ m/s. Pour calculer la composante v_{0x}, nous utilisons l'équation 4.22 et le temps calculé précédemment :

$$x = x_0 + v_{0x}t \Rightarrow v_{0x} = \frac{x - x_0}{t}.$$

Résoudre le problème

Nous obtenons

$$v_{0x} = \frac{(2{,}00 \text{ m} - 0{,}00 \text{ m})}{0{,}4736 \text{ s}} = 4{,}22 \text{ m/s}.$$

La vitesse est alors

$$\vec{\mathbf{v}}_0 = 4{,}22 \text{ m/s}\,\vec{\imath}. \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

Nous avons trouvé un temps positif, la vitesse initiale est un vecteur et les unités sont correctes.

La *portée*, symbolisée par la lettre R, est la distance horizontale franchie par le projectile. En général, elle dépend de la vitesse initiale du projectile, mais aussi de la hauteur finale. La figure 4.15 illustre la portée d'une balle.

Défi animé 4.2
L'angle qui permet d'avoir la portée maximale est-il toujours de 45°, peu importe la hauteur initiale à laquelle débute le tir ?

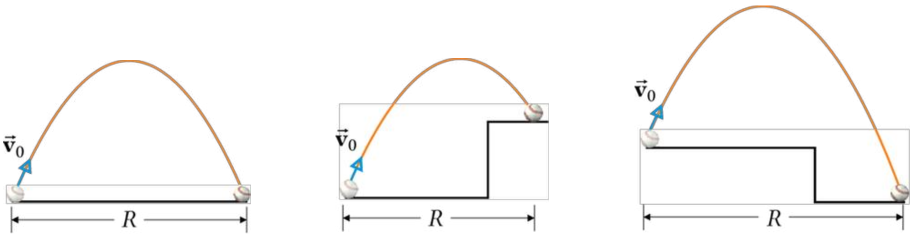


FIGURE 4.15
La portée R est la distance horizontale parcourue par un projectile. Elle dépend de la hauteur finale du projectile.

EXEMPLE 4.4 On a *golfé* sur la Lune

Au cours de la mission Apollo 14 en 1971, Alan Shepard a été le premier golfeur lunaire. La balle a été frappée avec une vitesse dont le module était v_0 et l'orientation, θ_0. L'accélération gravitationnelle sur la Lune est g_L.

a. Calculez la portée en fonction de v_0 et θ_0.

b. Montrez que la portée est maximale pour $\theta_0 = 45{,}0°$.

SOLUTION

Illustrer la situation

Le schéma de la situation est présenté à la figure 4.16.

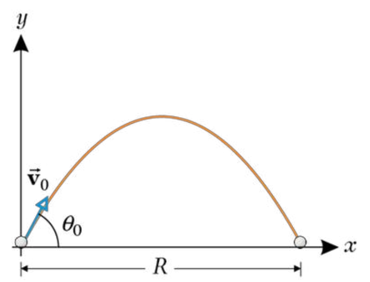


FIGURE 4.16
Le schéma de la situation pour l'exemple 4.4.

Décortiquer le problème

Connues		Inconnues
$x_0 = 0$	$y = y_0 = 0$	$x = R$
$a_x = 0$	$a_y = -g_L$	θ_0^{max}
v_0	θ_0	

SOLUTION a.

Identifier la clé

Comme le temps n'est pas une quantité importante, nous utilisons l'équation de la trajectoire, avec $x = R$:

$$y - y_0 = \tan\theta_0\, R - \frac{g_L}{2v_0^2\cos^2\theta_0}R^2 = 0\,. \qquad \text{(i)}$$

Résoudre le problème

L'équation (i) peut être écrite de la façon suivante :

$$R\left(\tan\theta_0 - \frac{g_L}{2v_0^2\cos^2\theta_0}R\right) = 0\,. \qquad \text{(ii)}$$

L'équation (ii) a deux solutions. $R = 0$ est la solution triviale, c'est-à-dire la position initiale. La solution intéressante est obtenue en rendant l'expression entre parenthèses égale à zéro.

$$0 = \left(\tan\theta_0 - \frac{g_L}{2v_0^2\cos^2\theta_0}R\right)$$

$$R = 2\frac{v_0^2}{g_L}\sin\theta_0\cos\theta_0$$

$$R = \frac{v_0^2}{g_L}\sin(2\theta_0)\,, \qquad \text{(réponse)}$$

où nous avons utilisé l'identité trigonométrique $\sin(2\theta_0) = 2\sin\theta_0\cos\theta_0$.

Valider la réponse

La réponse est donnée en fonction des données initiales, v_0, θ_0 et g_L. La réponse est positive. Il est intéressant de voir que l'équation de la portée donne le même résultat pour des angles θ_0 complémentaires, comme le montre la figure 4.17.

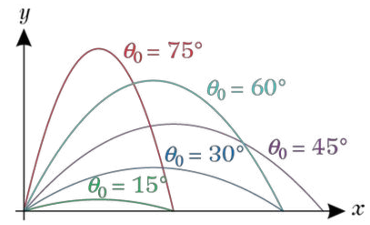


FIGURE 4.17
La portée est la même pour des angles complémentaires.

MISE EN GARDE

L'équation obtenue est une équation valable uniquement lorsque $y = y_0$, dans le cas où le projectile revient à sa hauteur initiale.

SOLUTION b.

Identifier la clé

La portée est maximale lorsque la fonction sinus est égale à 1, c'est-à-dire lorsque l'argument du sinus est égal à 90°. Donc,

$$2\theta_0^{max} = 90° \Rightarrow \theta_0^{max} = 45°\,. \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

Voir la vidéo d'Alan Shepard golfant sur la Lune.

REMARQUE

La portée est maximale à $\theta_0 = 45°$ uniquement lorsque $y = y_0$. Quand la position finale est $y > y_0$, la portée est maximale pour $\theta_0 > 45°$, tandis que lorsque $y < y_0$, la portée est maximale pour $\theta_0 < 45°$.

EXEMPLE 4.5 Un lancer de trois points

Une joueuse de basketball lance le ballon vers le panier, avec une vitesse de 9,28 m/s orientée à un angle de 60,0° par rapport à l'horizontale, et réussit à marquer. Le panier se trouve à une hauteur de 3,05 m du sol. Lors du lancer, la joueuse est à une distance horizontale de 6,80 m du panier.

a. Pendant combien de temps le ballon reste-il dans les airs avant d'entrer dans le panier ?

b. À quelle hauteur par rapport au sol le ballon est-il lancé ?

c. Quelle est la hauteur maximale du ballon par rapport au sol ?

SOLUTION

Illustrer la situation

Le schéma de la situation est illustré à la figure 4.18. Nous avons identifié trois points importants : le point initial (point 0), le point de hauteur maximale (point 1) et le point où le ballon entre dans le panier (point 2).

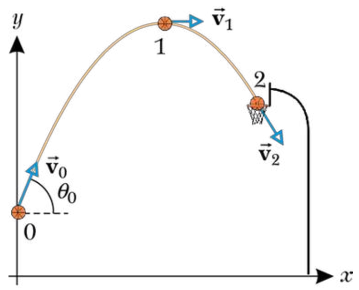


FIGURE 4.18
Le schéma de la situation pour l'exemple 4.5

Décortiquer le problème

Nous décomposons les vecteurs selon leurs composantes. Les composantes de la vitesse initiale sont

$$v_{0x} = 9{,}28\cos(60{,}0°) = 4{,}64 \text{ m/s}$$
$$v_{0y} = 9{,}28\sin(60{,}0°) = 8{,}037 \text{ m/s} .$$

Au point le plus haut, la composante v_{1y} est nulle.

Connues		Inconnues
Composante x	Composante y	t_2
$x_0 = 0{,}00$ m	$y_2 = 3{,}05$ m	y_0
$x_2 = 6{,}80$ m	$a_y = -9{,}81$ m/s^2	y_1
$v_{0x} = 4{,}64$ m/s	$v_{0y} = 8{,}037$ m/s	
$a_x = 0{,}00$ m/s^2	$v_{1y} = 0{,}00$ m/s	

SOLUTION a.

Identifier la clé

Le temps apparaît dans les équations des composantes x et y. Ici, il est possible d'obtenir t à partir de la composante x :

$$x_2 = x_0 + v_{0x}t_2 \Rightarrow t_2 = \frac{x_2 - x_0}{v_{0x}} .$$

Résoudre le problème

Nous remplaçons les valeurs pour obtenir

$$t_2 = \frac{(6{,}80 \text{ m} - 0{,}00 \text{ m})}{4{,}64 \text{ m/s}} = 1{,}466 \text{ s} = 1{,}47 \text{ s} . \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

L'ordre de grandeur a du sens. Nous avons arrondi la réponse à trois chiffres significatifs, selon la convention d'écriture des chiffres significatifs.

SOLUTION b.

Identifier la clé

La composante y de la position initiale se calcule à l'aide de l'équation 4.25 en utilisant le temps t_2 :

$$y_2 = y_0 + v_{0y}t_2 + \frac{1}{2}a_y t_2^2 \Rightarrow y_0 = y_2 - v_{0y}t_2 - \frac{1}{2}a_y t_2^2 .$$

Résoudre le problème

Nous trouvons

$$y_0 = 3{,}05 \text{ m} - (8{,}037 \text{ m/s})(1{,}466 \text{ s}) - \frac{1}{2}(-9{,}81 \text{ m/s}^2)(1{,}466 \text{ s})^2$$
$$y_0 = 1{,}807 \text{ m} = 1{,}81 \text{ m} . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

Cette hauteur a du sens.

SOLUTION c.

Identifier la clé

Au point 1, le temps est inconnu, mais nous connaissons la composante v_{1y}. Nous utilisons alors l'équation 4.26:

$$v_{1y}^2 - v_{0y}^2 = 2a_y(y_1 - y_0)$$
$$\Rightarrow y_1 = \frac{v_{1y}^2 - v_{0y}^2}{2a_y} + y_0 .$$

Nous obtenons

$$y_1 = \frac{(0{,}00 \text{ m/s})^2 - (8{,}037 \text{ m/s})^2}{2(-9{,}81 \text{ m/s})^2} + 1{,}807 \text{ m}$$
$$y_1 = 5{,}10 \text{ m} . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

Nous trouvons une hauteur plus grande que celle du panier.

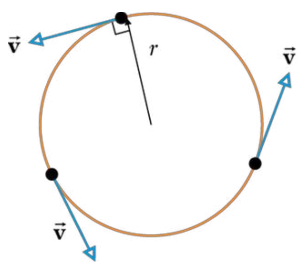


FIGURE 4.19
Une particule se déplace le long d'un cercle de rayon r, avec une vitesse dont le module v est constant.

4.4 Le mouvement circulaire uniforme

Lorsqu'un objet se déplace le long d'un cercle (ou d'un arc de cercle) avec une vitesse dont le module est constant, on dit qu'il décrit un *mouvement circulaire uniforme*. Par exemple, lorsqu'une automobile prend un virage circulaire sans changer le module de sa vitesse, elle décrit un mouvement circulaire uniforme. Certains satellites tournent autour de la Terre sur des orbites circulaires. Les centrifugeuses sont des appareils qui font tourner des objets dans des mouvements circulaires uniformes. On trouve des centrifugeuses autant dans une cuisine (pour essorer la laitue) que dans des laboratoires médicaux (pour séparer le plasma des globules du sang) ou dans les installations nucléaires (pour augmenter la concentration de l'uranium 235, l'isotope qui est fissible).

La période et la fréquence

La figure 4.19 illustre une particule se déplaçant sur un cercle de rayon r, avec une vitesse dont le module est constant et égal à v. La vitesse est toujours tangente à la trajectoire, ce qui implique qu'elle est perpendiculaire au rayon du cercle. La période, symbolisée par la lettre T, représente le temps nécessaire pour que la particule effectue une révolution. Comme une révolution représente une distance d'une circonférence $2\pi r$, la période est obtenue par l'expression:

Période

$$T = \frac{2\pi r}{v} . \qquad (4.29)$$

On définit aussi la *fréquence* f comme le nombre de révolutions effectuées par seconde. Cette quantité est l'inverse de la période:

Fréquence

$$f \equiv \frac{1}{T} = \frac{v}{2\pi r} . \qquad (4.30)$$

Dans le SI, l'unité de la période est la seconde (la période est un intervalle de temps). Pour la fréquence, l'unité du SI est le hertz (Hz), en l'honneur du physicien allemand Heinrich Hertz. Selon l'équation 4.30,

$$1 \text{ Hz} = \frac{1}{1 \text{ s}} = 1 \text{ s}^{-1} . \qquad (4.31)$$

Dans la vie courante, la fréquence est souvent exprimée en révolutions par minute (on utilise parfois l'abréviation anglaise *rpm*). Dans les calculs, il faut habituellement utiliser les unités du SI. On obtient le facteur de conversion :

$$1\ \text{rpm} = \frac{1\ \text{rev}}{\text{min}} \times \frac{1\ \text{min}}{60\ \text{s}} = 0{,}0166667\ \text{Hz}\ .$$

La distance parcourue

Dans le mouvement circulaire, la distance parcourue est une quantité plus intéressante que le déplacement, car lorsque la particule effectue un nombre entier de révolutions, elle revient à son point de départ et son déplacement est nul. Nous allons dénoter par Δs la distance parcourue le long du cercle. Le module de la vitesse étant constant, on calcule la distance parcourue dans un intervalle de temps Δt comme on l'a fait pour obtenir le déplacement dans le mouvement rectiligne uniforme, à l'aide de l'équation 3.8 :

$$\Delta s = v\,\Delta t\,. \tag{4.32}$$

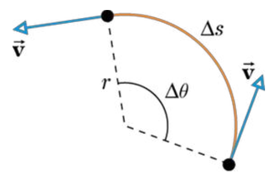


FIGURE 4.20
Une particule se déplace le long d'un arc de cercle et parcourt une distance Δs.

Lorsque la particule se déplace seulement sur un arc de cercle, comme à la figure 4.20, la distance Δs est reliée à l'angle $\Delta\theta$ de l'arc de cercle :

$$\boxed{\Delta s = r\,\Delta\theta\ .} \tag{4.33}$$

MISE EN GARDE

L'équation 4.33 est valide uniquement lorsque l'angle $\Delta\theta$ est mesuré en radians. Si l'angle est exprimé en degrés, vous devez le convertir, avec $1° = 2\pi\ \text{rad}/360$.

L'accélération centripète

Une particule décrivant un mouvement circulaire uniforme subit une accélération, même si le module de la vitesse est constant. En effet, la vitesse change d'orientation. Dans l'exemple 1.4 de la page 16, nous avons tracé le diagramme du mouvement d'une personne dans une grande roue. Le diagramme du mouvement, qui est illustré de nouveau à la figure 4.21a,

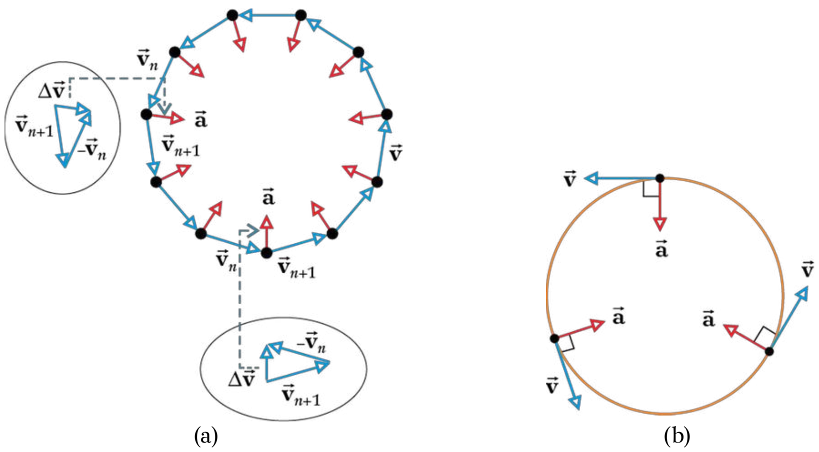


FIGURE 4.21
(a) Le diagramme du mouvement d'une particule qui décrit un mouvement circulaire uniforme.
(b) La vitesse est tangente au cercle, et l'accélération est vers le centre.

montre que l'accélération $\vec{\mathbf{a}}$ est orientée vers le centre du cercle. Pour cette raison, on l'appelle l'*accélération centripète*. Le mot *centripète* veut simplement dire *vers le centre*.

Durant tout le mouvement, l'accélération $\vec{\mathbf{a}}$ est orientée vers le centre du cercle, comme l'indique la figure 4.21b. Le module de l'accélération est constant, et on le dénote par a_c pour indiquer qu'il s'agit d'une accélération centripète.

On peut démontrer que le module de l'accélération centripète est

Accélération centripète

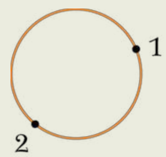
$$a_c = \frac{v^2}{r} \, . \tag{4.34}$$

On peut aussi exprimer l'accélération centripète en fonction de la période, en isolant v dans l'équation 4.29 et en remplaçant dans l'équation 4.34. On obtient

$$a_c = \frac{4\pi^2 r}{T^2} \, . \tag{4.35}$$

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 4.3

La figure ci-dessous montre un objet se déplaçant selon un mouvement circulaire uniforme dans le sens horaire. Tracez la vitesse et l'accélération de l'objet, aux points 1 et 2.



La démonstration de l'équation de l'accélération centripète

Pour démontrer l'équation 4.34, on considère une particule qui décrit un mouvement circulaire uniforme en se déplaçant à vitesse $\vec{\mathbf{v}}$. La trajectoire de l'objet est illustrée à la figure 4.22, avec la vitesse aux instants 1 et 2. L'accélération est donnée par l'équation 4.9 :

$$\vec{\mathbf{a}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\mathbf{v}}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{\mathbf{v}}_2 - \vec{\mathbf{v}}_1}{\Delta t} \, . \tag{4.36}$$

On ajoute un système de coordonnées cartésiennes, de telle sorte que l'axe des x divise en deux parties égales l'arc de cercle entre les points 1 et 2. Dans l'intervalle Δt, la particule décrit un arc de cercle de longueur $\Delta s = r(2\theta)$. Comme $\Delta s = v \, \Delta t$, on peut écrire

$$\Delta t = \frac{\Delta s}{v} = \frac{2r\theta}{v} \, . \tag{4.37}$$

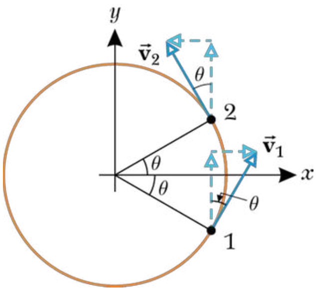


FIGURE 4.22
Les vitesses $\vec{\mathbf{v}}_1$ et $\vec{\mathbf{v}}_2$ qui permettent de calculer l'accélération centripète

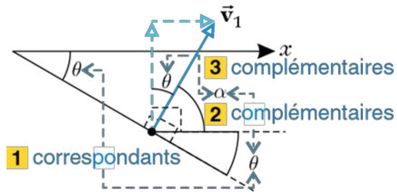


FIGURE 4.23
On montre que l'angle entre le vecteur $\vec{\mathbf{v}}_1$ et la verticale est θ, car α et θ sont complémentaires.

La figure 4.23 montre que le vecteur $\vec{\mathbf{v}}_1$ forme un angle θ par rapport à la verticale. L'angle entre $\vec{\mathbf{v}}_2$ et la verticale est aussi θ. On calcule les composantes des vitesses à l'aide de la figure 4.22 :

composante x	composante y
$v_{1x} = v\sin\theta$	$v_{1y} = v\cos\theta$
$v_{2x} = -v\sin\theta$	$v_{2y} = v\cos\theta$.

On remarque qu'en calculant $\Delta\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}_2 - \vec{\mathbf{v}}_1$, la composante y est nulle, alors que la composante x est $\Delta v_x = -2v\sin\theta$. L'accélération moyenne est

$$\vec{\mathbf{a}}_{\text{moy}} = \frac{\Delta\vec{\mathbf{v}}}{\Delta t} = \frac{2v\sin\theta}{\Delta t}(-\vec{\imath}\,) = \frac{2v\sin\theta}{2r\theta/v}(-\vec{\imath}\,) = \frac{v^2\sin\theta}{r\theta}(-\vec{\imath}\,) \ .$$

Pour obtenir l'accélération, il faut prendre la limite $\Delta t \to 0$. Lorsque $\Delta t \to 0$, le point 1 et le point 2 se rapprochent de l'axe des x et l'angle θ tend vers 0. Comme $\sin\theta \approx \theta$ pour un petit angle, alors $(\sin\theta)/\theta \to 1$ lorsque $\Delta t \to 0$. Le module de l'accélération est

$$a_c = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v^2\sin\theta}{r\theta} = \frac{v^2}{r} \ .$$

Il s'agit bien de l'équation 4.34. L'accélération est orientée en sens opposé de l'axe des x, c'est-à-dire vers le centre du cercle :

$$\vec{\mathbf{a}}_c = \frac{v^2}{r}\,\overrightarrow{\text{vers le centre}} \ . \tag{4.38}$$

Si la particule est ailleurs sur le cercle, on peut de nouveau choisir l'axe des x pour que celui-ci coupe en deux parties égales l'arc de cercle entre deux points rapprochés. Notre démonstration est donc valide de manière générale.

EXEMPLE 4.6 Une petite salade en entrée ?

Pour égoutter la laitue, un cuisinier utilise une essoreuse qui tourne à une fréquence de 7,20 Hz ; le rayon de l'appareil est de 11,3 cm.

a. Calculez le module de la vitesse de rotation de la laitue dans l'essoreuse.

b. Calculez le module de l'accélération centripète de la laitue.

SOLUTION

Décortiquer le problème

Connues		Inconnues	
$f = 7{,}20$ Hz	$r = 0{,}113$ m	v	a_c

SOLUTION a.

Identifier la clé

Pour calculer le module de la vitesse, nous utilisons l'équation 4.30 :

$$v = 2\pi r f\,.$$

Résoudre le problème

En remplaçant les valeurs, nous obtenons

$$v = 2\pi(0{,}113\text{ m})(7{,}20\text{ s}^{-1}) = 5{,}11\text{ m/s}\,.\quad\text{(réponse)}$$

SOLUTION b.

Identifier la clé

Le module de l'accélération centripète est donné par l'équation 4.34 :

$$a_c = \frac{v^2}{r}\,.$$

Résoudre le problème

Nous trouvons

$$a_c = \frac{(5{,}11\text{ m/s})^2}{0{,}113\text{ m}} = 231\text{ m/s}^2\,.\quad\text{(réponse)}$$

Valider la réponse

À première vue, l'accélération semble trop élevée pour avoir du sens, mais notre réponse est correcte. En effet, le mouvement circulaire peut produire des accélérations très élevées.

EXEMPLE 4.7 On oublie trop souvent qu'on est en mouvement

À cause de la rotation de la Terre sur elle-même, tous les objets à sa surface décrivent un mouvement circulaire uniforme autour de son axe de rotation. La période de rotation de la Terre est de 23 h 56 min (ce qu'on appelle le *jour sidéral*). Calculez le module de l'accélération des objets situés aux endroits suivants :

a. à l'équateur ;

b. au pôle Nord ;

c. à Saint-François-de-l'Île-d'Orléans, dont la latitude est de 47,0°.

SOLUTION

Illustrer la situation

La figure 4.24 illustre la trajectoire d'un objet quelconque situé à la latitude φ, sur la surface de la Terre. Le rayon de la Terre est R_T, et le rayon du cercle est r.

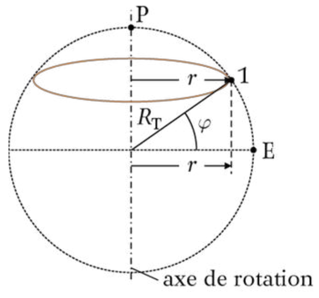


FIGURE 4.24 Le schéma de la situation pour l'exemple 4.7

Décortiquer le problème

Le rayon moyen de la Terre est donné à l'annexe D.

Connues		Inconnues
$T = 23 \text{ h } 56 \text{ min}$	$\varphi_E = 0{,}00°$	$a_c^{(E)}$
$R_T = 6{,}37 \times 10^6 \text{ m}$	$\varphi_{PN} = 90{,}0°$	$a_c^{(PN)}$
	$\varphi_{SF} = 47{,}0°$	$a_c^{(SF)}$

Identifier la clé

Nous calculons le module de l'accélération centripète a_c à l'aide de l'équation 4.35:

$$a_c = \frac{4\pi^2 r}{T^2} \ . \qquad \text{(i)}$$

Le rayon dépend de la latitude φ. Selon la figure 4.24, nous obtenons le rayon en utilisant la trigonométrie:

$$r = R_T \cos\varphi \ . \qquad \text{(ii)}$$

SOLUTION a.

Résoudre le problème

Il faut exprimer la période en secondes:

$$T = \left[\left(23 \text{ h} \times \frac{60 \text{ min}}{\text{h}}\right) + 56 \text{ min}\right] \times \frac{60 \text{ s}}{\text{min}} = 86\,160 \text{ s} \ . \qquad \text{(iii)}$$

À l'équateur, $\varphi_E = 0{,}00°$ et $r = R_T$. En remplaçant les valeurs, nous obtenons

$$a_c = \frac{4\pi^2 \times 6{,}37 \times 10^6 \text{ m}}{(86\,160 \text{ s})^2} = 0{,}0339 \text{ m/s}^2 \ . \qquad \text{(réponse)}$$

SOLUTION b.

Au pôle Nord, la latitude est $\varphi = 90{,}0°$, et le rayon du cercle est nul. Un objet situé exactement à l'un des pôles ne tourne pas du tout, car il est sur l'axe de rotation. Le module de l'accélération centripète est donc nul:

$$a_c = 0{,}00 \text{ m/s}^2 \ . \qquad \text{(réponse)}$$

SOLUTION c.

Résoudre le problème

Le rayon du cercle pour un objet situé à Saint-François-de-l'Île-d'Orléans est

$$r_{SF} = 6{,}37 \times 10^6 \text{ m} \cos(47{,}0°) = 4{,}344 \times 10^6 \text{ m} \ ,$$

ce qui donne une accélération centripète dont le module est

$$a_c = \frac{4\pi^2 \times 4{,}344 \times 10^6 \text{ m}}{(86\,160 \text{ s})^2} = 0{,}0231 \text{ m/s}^2 \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

L'accélération centripète a un module plus grand lorsque la latitude est faible, car le rayon du cercle est alors plus grand et la période est constante. Les accélérations sont orientées vers le centre du cercle, c'est-à-dire vers l'axe de rotation. C'est une des raisons qui font que la Terre n'est pas exactement sphérique, mais qu'elle est légèrement aplatie aux pôles. Nous reviendrons sur ce sujet dans le chapitre 13.

4.5 Le mouvement circulaire non uniforme

Lorsqu'un objet se déplace le long d'un cercle (ou d'un arc de cercle) et que sa vitesse change de module, l'objet décrit un *mouvement circulaire non uniforme*. Par exemple, c'est le cas lorsque vous négociez le virage d'une bretelle d'autoroute et que vous appuyez sur l'accélérateur ou sur le frein. On obtient aussi un mouvement circulaire non uniforme lorsqu'on fait tourner un objet au bout d'une corde en décrivant un cercle vertical. La figure 4.25 montre un autre exemple de mouvement circulaire non uniforme, pour les gens aimant les sensations fortes.

FIGURE 4.25

Dans des montagnes russes, une voiture décrit un mouvement circulaire non uniforme

La figure 4.26a (*voir la page suivante*) illustre un objet qui décrit un mouvement circulaire non uniforme. La vitesse est tangente au cercle, et son module varie. Le système de coordonnées polaires est bien adapté à la description du mouvement circulaire. Nous avons vu ce système de coordonnées à la section 2.1 de la page 30. Les vecteurs unitaires polaires $\vec{\mathbf{u}}_r$ et $\vec{\mathbf{u}}_\theta$ sont aussi illustrés. Remarquez que l'orientation des vecteurs unitaires varie durant le mouvement. La vitesse a uniquement une composante tangentielle:

$$\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}_\theta = v_\theta \vec{\mathbf{u}}_\theta \ . \qquad (4.39)$$

Pour obtenir l'accélération, on doit calculer la dérivée de l'équation 4.39 par rapport au temps. Il faut tenir compte du fait que v_θ varie et que $\vec{\mathbf{u}}_\theta$ varie aussi, car le vecteur unitaire change d'orientation. Le résultat est que l'accélération a deux composantes dans le mouvement circulaire non uniforme :

$$\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}}_\theta + \vec{\mathbf{a}}_r = a_\theta \vec{\mathbf{u}}_\theta + a_r \vec{\mathbf{u}}_r \ . \qquad (4.40)$$

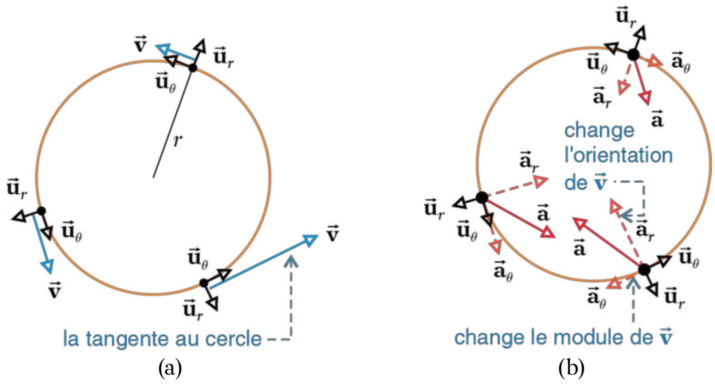


FIGURE 4.26
Le mouvement circulaire non uniforme. (a) La vitesse et les vecteurs unitaires polaires. (b) L'accélération et les vecteurs unitaires polaires.

On a tracé l'accélération et les vecteurs unitaires à la figure 4.26b. L'accélération n'est ni parallèle ni perpendiculaire à la vitesse. Comme on l'a vu à la technique 4.1 de la page 91, la composante de l'accélération $\vec{\mathbf{a}}_{\parallel}$ parallèle à la vitesse est responsable de la variation du module de $\vec{\mathbf{v}}$. Dans le présent cas, cette composante est $\vec{\mathbf{a}}_\theta$, la composante tangentielle de l'accélération. On peut alors écrire

$$\vec{\mathbf{a}}_{\parallel} = \vec{\mathbf{a}}_\theta = \frac{\mathrm{d}v_\theta}{\mathrm{d}t}\vec{\mathbf{u}}_\theta \ . \qquad (4.41)$$

Cette définition est équivalente aux définitions des composantes cartésiennes de l'accélération présentées à l'équation 4.12. Le sens de $\vec{\mathbf{a}}_\theta$ par rapport à celui de $\vec{\mathbf{v}}$ indique si le module de la vitesse augmente ou diminue :

- Le module de la vitesse augmente lorsque $\vec{\mathbf{v}}$ et $\vec{\mathbf{a}}_\theta$ ont le même sens.
- Le module de la vitesse diminue lorsque $\vec{\mathbf{v}}$ et $\vec{\mathbf{a}}_\theta$ ont des sens opposés.

L'autre composante de l'accélération est la composante $\vec{\mathbf{a}}_{\perp}$, perpendiculaire à la vitesse $\vec{\mathbf{v}}$. On voit que c'est la composante radiale $\vec{\mathbf{a}}_r$ qui joue le rôle consistant à faire varier l'orientation de $\vec{\mathbf{v}}$. Cette composante est en fait la composante centripète qu'on a obtenue à la section 4.4. La composante centripète est toujours orientée vers le centre du cercle, et son module est donné par l'équation 4.34. Le vecteur unitaire $\vec{\mathbf{u}}_r$ est défini afin qu'il soit orienté vers l'extérieur plutôt que vers le centre. Il faut alors ajouter un signe négatif pour indiquer que l'accélération radiale (vers le centre) est opposée au vecteur unitaire $\vec{\mathbf{u}}_r$ (orienté vers l'extérieur) :

$$\vec{\mathbf{a}}_\mathrm{c} = \vec{\mathbf{a}}_r = -\frac{v^2}{r}\vec{\mathbf{u}}_r \ . \qquad (4.42)$$

On obtient l'accélération d'un objet décrivant un mouvement circulaire non uniforme en fonction des vecteurs unitaires polaires :

Accélération du mouvement circulaire non uniforme

$$\vec{\mathbf{a}} = a_\theta \vec{\mathbf{u}}_\theta + a_r \vec{\mathbf{u}}_r = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{\mathbf{u}}_\theta - \frac{v^2}{r}\vec{\mathbf{u}}_r \ . \qquad (4.43)$$

Il est aussi possible d'exprimer l'accélération par son module a et son orientation ϕ par rapport à l'orientation tangentielle (qui correspond à l'orientation de la vitesse). À l'aide de la figure 4.27, on obtient

$$a = \sqrt{a_\theta^2 + a_r^2} \qquad (4.44)$$

Module de l'accélération

$$\phi = \arctan\left(\frac{|a_r|}{a_\theta}\right). \qquad (4.45)$$

Orientation de l'accélération (par rapport à la vitesse)

Remarquez que lorsque le module de la vitesse est constant, $a_\theta = 0$ et l'accélération n'a qu'une composante centripète. On se retrouve alors avec les mêmes résultats qu'à la section précédente.

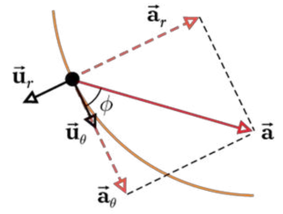
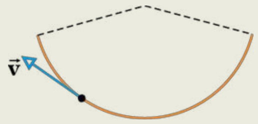


FIGURE 4.27
Le calcul du module et de l'orientation de l'accélération

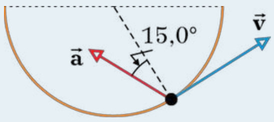
TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 4.4

Le manège Bateau Pirate de la Ronde effectue un mouvement de va-et-vient le long d'un arc de cercle illustré à la figure ci-dessous. Au point identifié, le module de la vitesse diminue. Tracez les composantes tangentielle et radiale de l'accélération. À l'aide des ces composantes, tracez l'accélération.



EXEMPLE 4.8 Un virage en faisant du patin

Une enfant patine sur la glace. Elle effectue un grand virage en se laissant aller. Son accélération durant le virage est illustrée ci-contre. Le module de son accélération est de 1,50 m/s^2, et le rayon de l'arc de cercle est de 10,0 m.



a. Calculez les composantes radiale et tangentielle de son accélération.

b. Quel est le module de sa vitesse ?

SOLUTION

Illustrer la situation

La figure 4.28 illustre la décomposition de l'accélération selon ses composantes vectorielles polaires : $\vec{a}_\theta$ et $\vec{a}_r$.

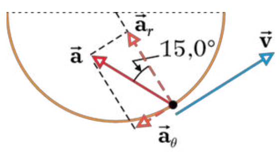


FIGURE 4.28
La décomposition de $\vec{a}$ selon ses composantes polaires

Décortiquer le problème

Connues		Inconnues	
$a = 1{,}50\ \text{m/s}^2$	$\varphi = 15{,}0°$	a_θ	a_r
$r = 10{,}0$ m		v	

SOLUTION a.

Identifier la clé

La **clé** est que l'accélération est un vecteur. Selon la trigonométrie,

$$a_\theta = -a \sin\varphi$$
$$a_r = -a \cos\varphi \ .$$

Un signe négatif a été ajouté à a_θ, car la composante vectorielle $\vec{a}_\theta$ est de sens opposé à $\vec{v}$. En ce qui concerne a_r, la composante est toujours négative, car $\vec{\mathbf{u}}_r$ est orienté vers l'extérieur alors que $\vec{\mathbf{a}}_r$ est toujours orienté vers le centre.

Résoudre le problème

Nous remplaçons les valeurs :

$$a_\theta = -(1{,}50\ \text{m/s}^2)\sin(15{,}0°) = -0{,}388\ \text{m/s}^2 \quad \text{(réponse)}$$

$$a_r = -(1{,}50\ \text{m/s}^2)\cos(15{,}0°) = -1{,}45\ \text{m/s}^2. \quad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

Les composantes sont plus petites que le module de l'accélération. Les signes respectent le sens des composantes vectorielles selon la figure 4.28.

SOLUTION b.

Identifier la clé

La **clé** est donnée par l'équation 4.42. En isolant v, nous obtenons

$$a_r = -\frac{v^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{-ra_r}\ .$$

Résoudre le problème

À partir du résultat précédent, nous obtenons

$$v = \sqrt{-10{,}0\ \text{m}(-1{,}45\ \text{m/s}^2)} = 3{,}81\ \text{m/s}\ . \quad \text{(réponse)}$$

Remarquez que v est positif ; il s'agit d'un module.

Valider la réponse

L'ordre de grandeur est correct.

Le mouvement circulaire à accélération tangentielle constante

Lorsque l'accélération tangentielle est constante, il est possible d'utiliser les équations du mouvement uniformément accéléré pour les composantes tangentielles du mouvement, c'est-à-dire Δs, $v_\theta = v$ et a_θ :

$$v_\theta = v_{0\theta} + a_\theta t \quad (4.46)$$

$$\Delta s = v_{0\theta} t + \frac{1}{2} a_\theta t^2 \quad (4.47)$$

$$v_\theta^2 - v_{0\theta}^2 = 2a_\theta\, \Delta s\, . \quad (4.48)$$

EXEMPLE 4.9 Pour entrer sur la 20

Un automobiliste utilise une bretelle en quart de cercle pour entrer sur l'autoroute. Le module de sa vitesse augmente régulièrement de 12,0 m/s à 25,0 m/s en 5,20 s.

a. Calculez le module de la vitesse de l'automobile au centre du virage.

b. Calculez le module et l'orientation de l'accélération de l'automobile au centre du virage.

SOLUTION

Illustrer la situation

Dans le schéma de la situation de la figure 4.29, nous illustrons trois positions importantes : la position initiale (0), la position au centre du virage (1) et la position à la fin du virage (2).

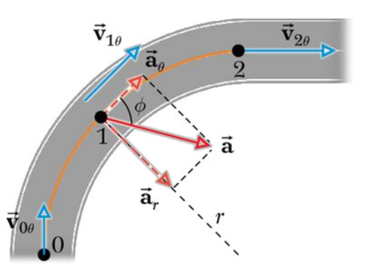


FIGURE 4.29
Le schéma de la situation pour l'exemple 4.9

Décortiquer le problème

Connues		Inconnues
$v_{0\theta} = 12{,}0$ m/s	$v_{2\theta} = 25{,}0$ m/s	v_1
$t_2 = 5{,}20$ s		$a \quad \phi$

SOLUTION a.

Identifier la clé

La **clé** est que la composante tangentielle de l'accélération est constante. Nous pouvons alors utiliser les équations du mouvement uniformément accéléré pour cette composante.

Résoudre le problème

Nous calculons d'abord l'acc élération tangentielle à l'aide de l'équation 4.46 :

$$a_\theta = \frac{v_{2\theta} - v_{0\theta}}{t_2} = \frac{25{,}0 \text{ m/s} - 12{,}0 \text{ m/s}}{5{,}20 \text{ s}} = 2{,}50 \text{ m/s}^2. \quad \text{(i)}$$

Nous ne connaissons ni le temps pour que l'automobile se rende au centre du virage (ce n'est pas la moitié du temps total) ni la distance parcourue Δs_1. Cependant, cette distance est la moitié de la distance totale Δs_2. La distance totale parcourue se calcule à l'aide de l'équation 4.47 :

$$\begin{aligned} \Delta s_2 &= v_{0\theta} t_2 + \frac{1}{2} a_\theta t_2^2 \\ &= (12{,}0 \text{ m/s})(5{,}20 \text{ s}) + \frac{1}{2}(2{,}50 \text{ m/s}^2)(5{,}20 \text{ s})^2 \\ \Delta s_2 &= 96{,}2 \text{ m}\,. \end{aligned} \quad \text{(ii)}$$

Nous obtenons le module de la vitesse au point 1, en utilisant l'équation 4.48, avec $\Delta s_1 = \Delta s_2/2 = 48{,}1$ m. Nous trouvons

$$\begin{aligned} v_{1\theta} &= \sqrt{v_{0\theta}^2 + 2a_\theta \, \Delta s_1} \\ &= \sqrt{(12{,}0 \text{ m/s})^2 + 2(2{,}50 \text{ m/s}^2)(48{,}1 \text{ m})} \\ v_{1\theta} &= 19{,}61 \text{ m/s}\,. \end{aligned} \quad \text{(réponse)}$$

SOLUTION b.

Identifier la clé

La **clé** est qu'on calcule le module de l'accélération à partir de l'équation 4.44 et de son orientation par rapport à la vitesse avec l'équation 4.45 :

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2} \quad \text{(iii)}$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{|a_r|}{a_\theta}\right). \quad \text{(iv)}$$

Résoudre le problème

Nous avons besoin des composantes tangentielle et radiale de l'accélération. Pour calculer a_r au point 1, nous utilisons l'équation 4.34 :

$$a_c = |a_r| = \frac{v_{1\theta}^2}{r}\,. \quad \text{(v)}$$

Nous avons besoin du rayon du virage et de la vitesse au point 1. Pour trouver le rayon, nous remarquons qu'un quart de cercle correspond à un angle de $\pi/2$. L'équation 4.33 nous donne une relation entre le rayon et la distance parcourue Δs_2 :

$$\begin{aligned} \Delta s_2 = r\,\Delta\theta \Rightarrow r &= \frac{\Delta s_2}{\Delta \theta} = \frac{\Delta s_2}{\pi/2} \\ &= \frac{2 \times 96{,}2 \text{ m}}{\pi} = 61{,}24 \text{ m}\,. \end{aligned} \quad \text{(vi)}$$

Nous calculons la composante radiale de l'accélération à l'aide des équations (iv) et (v) ainsi que de la réponse obtenue à la partie a. :

$$|a_r| = \frac{(19{,}61 \text{ m/s})^2}{61{,}24 \text{ m}} = 6{,}28 \text{ m/s}^2. \quad \text{(vii)}$$

Nous pouvons finalement calculer le module de l'accélération :

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{(6{,}28 \text{ m/s}^2)^2 + (2{,}50 \text{ m/s}^2)^2} \\ &= 6{,}76 \text{ m/s}^2, \end{aligned} \quad \text{(réponse)}$$

et l'orientation par rapport à l'orientation tangentielle :

$$\phi = \arctan\left(\frac{6{,}28 \text{ m/s}^2}{2{,}50 \text{ m/s}^2}\right) = 68{,}3°\,. \quad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

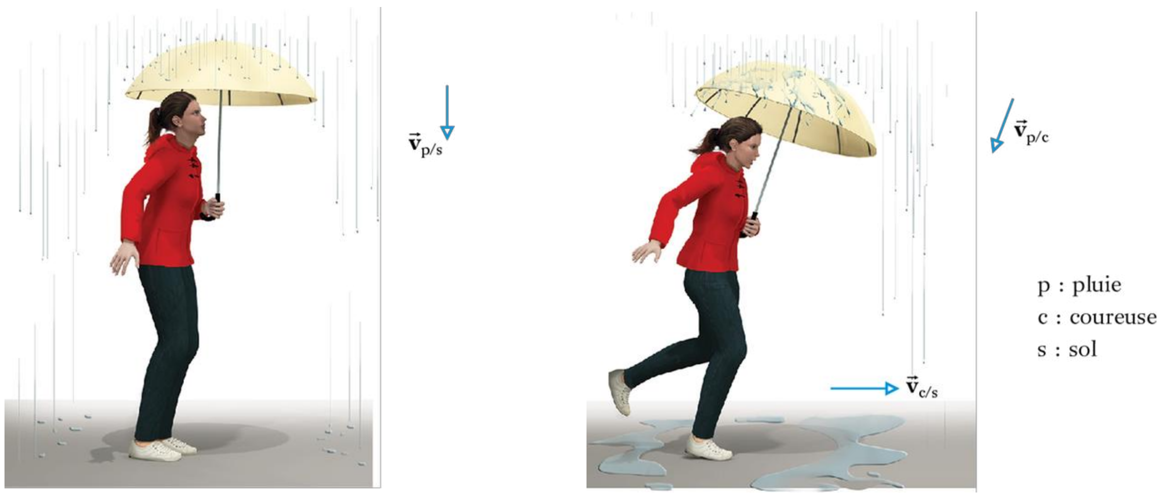
Le module est plus grand que les composantes. L'angle ϕ est supérieur à 45°, car la composante radiale est plus grande que la composante tangentielle.

4.6 Le mouvement relatif

Jusqu'à présent, nous avons analysé le mouvement des objets à l'aide de systèmes de coordonnées immobiles. Cela signifie que nous avons observé des objets en mouvement, mais que notre point d'observation était toujours immobile. Il est aussi possible d'observer des objets lorsque nous sommes en mouvement. Par exemple, supposons que vous vous déplacez à bicyclette l'automne et que vous apercevez une volée de canards. Le mouvement que vous observez est différent de celui d'un ornithologue immobile. Dans cette section, nous voulons établir un lien entre les mesures de position et de vitesse que peuvent prendre des observateurs en mouvement uniforme l'un par rapport à l'autre.

Qu'on soit en mouvement ou immobile, on a besoin d'un point de référence pour décrire le mouvement d'un objet. On rattache donc un système de coordonnées à ce point de référence. Un *référentiel* est constitué d'un point de référence et d'un système de coordonnées. Chaque observateur qui mesure le mouvement d'un objet a besoin d'un référentiel pour y parvenir. Un *référentiel inertiel* ou *référentiel de Galilée* est un référentiel qui se déplace à vitesse constante. Dans cette section, on suppose que tous les référentiels sont des référentiels inertiels.

Pour bien illustrer le phénomène, voici un exemple de la vie de tous les jours. Durant une petite averse, vous utilisez un parapluie, comme à la figure 4.30a. La vitesse de la pluie est verticale. Vous décidez de courir. Dans votre référentiel, la vitesse de la pluie n'est plus verticale mais oblique, et vous devez incliner le parapluie pour ne pas être mouillé (*voir la figure 4.30b*). La vitesse de la pluie dépend du référentiel.



(a) (b)

FIGURE 4.30

(a) La personne est immobile. La pluie a une vitesse verticale par rapport au sol $\vec{v}_{p/s}$. (b) Lorsque la personne court à une vitesse par rapport au sol $\vec{v}_{c/s}$, elle doit incliner le parapluie, car la pluie a une vitesse oblique $\vec{v}_{p/c}$ par rapport à la personne.

Supposons que deux personnes, Ariane et Benoît, observent un pigeon qui vole. Ariane est assise sur un banc de parc, alors que Benoît se déplace à bicyclette sur une piste cyclable (il n'est pas recommandé d'avoir la tête dans les nuages à vélo, particulièrement à l'heure de pointe parmi les voitures). Ariane utilise le référentiel A immobile, et Benoît utilise le référentiel B en mouvement pour décrire le mouvement du pigeon P. La figure 4.31 illustre la situation. Selon cette figure, on voit que les trois vecteurs position forment un triangle, ce qui représente une somme vectorielle :

$$\vec{\mathbf{r}}_{P/A} = \vec{\mathbf{r}}_{P/B} + \vec{\mathbf{r}}_{B/A} \; . \tag{4.49}$$

L'ordre des indices utilisé ici est important : $\vec{\mathbf{r}}_{P/A}$ veut dire « la position de P par rapport à A ». Le premier indice représente l'objet et le deuxième, le point de référence. Remarquez aussi l'ordre des indices dans l'équation 4.49 : $P/A = P/B + B/A$. Cette équation est valide si les indices respectent cet ordre.

MISE EN GARDE

Lorsqu'on inverse les indices, on obtient le vecteur opposé : $\vec{\mathbf{r}}_{B/A} = -\vec{\mathbf{r}}_{A/B}$, comme le montre la figure 4.32. Par exemple, si le professeur est devant le tableau, alors le tableau est derrière lui.

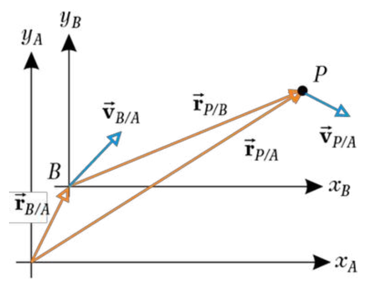


FIGURE 4.31
Le point P est observé à l'aide du référentiel A immobile et du référentiel B qui se déplace à une vitesse $\vec{\mathbf{v}}_{B/A}$ par rapport au référentiel A.

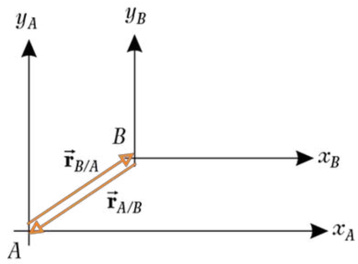


FIGURE 4.32
Lorsque les indices sont inversés, le vecteur est inversé ($\vec{\mathbf{r}}_{A/B} = -\vec{\mathbf{r}}_{B/A}$).

On obtient la relation entre les vitesses en dérivant l'équation 4.49 par rapport au temps :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{\mathbf{r}}_{P/A}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{\mathbf{r}}_{P/B}) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{\mathbf{r}}_{B/A}) \; .$$

Comme la dérivée de la position est la vitesse, on obtient l'équation

$$\vec{\mathbf{v}}_{P/A} = \vec{\mathbf{v}}_{P/B} + \vec{\mathbf{v}}_{B/A} \; . \tag{4.50}$$

Transformation des vitesses

Il est important de respecter l'ordre des indices dans l'équation 4.50. Cette équation étant une équation vectorielle, on doit utiliser la méthode graphique ou la méthode des composantes.

On peut aussi trouver une relation entre les accélérations du pigeon mesurées par Ariane et Benoît en dérivant l'équation 4.50 par rapport au temps :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{\mathbf{v}}_{P/A}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{\mathbf{v}}_{P/B}) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{\mathbf{v}}_{B/A}) \; .$$

Cette fois-ci, la dérivée de la vitesse donne l'accélération. De plus, on suppose que les référentiels sont des référentiels inertiels, c'est-à-dire que $\vec{\mathbf{v}}_{B/A}$ est une constante. On obtient

Transformation des accélérations

$$\vec{\mathbf{a}}_{P/A} = \vec{\mathbf{a}}_{P/B}\,. \tag{4.51}$$

On peut donc formuler le principe suivant :

L'accélération d'un objet en mouvement est la même, quel que soit le référentiel inertiel.

Nous reviendrons sur ce résultat au chapitre 5 lorsque nous étudierons la relation entre les forces appliquées sur un objet et son accélération.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 4.5

Le tableau ci-dessous présente les composantes des vitesses mesurées par Ariane et Benoît lorsqu'ils ont observé le pigeon. Complétez le tableau.

	$\vec{\mathbf{v}}_{P/A}$	$\vec{\mathbf{v}}_{A/B}$	$\vec{\mathbf{v}}_{P/B}$	$\vec{\mathbf{v}}_{B/A}$
composante x	3 m/s		5 m/s	
composante y		–1 m/s	3 m/s	

EXEMPLE 4.10 La petite traversée

Simon veut traverser la rivière des Prairies en kayak, de façon perpendiculaire aux rives, de Montréal à Laval. La largeur de la rivière est de 275 m, et la vitesse du courant est de 1,20 m/s. Simon se déplace par rapport au courant à une vitesse ayant un module de 3,20 m/s.

a. À quel angle par rapport à l'orientation du courant d'eau Simon doit-il orienter son kayak ?

b. Combien de temps dure la traversée ?

SOLUTION

Illustrer la situation

Le schéma de la situation est illustré à la figure 4.33. Nous ajoutons un système de coordonnées cartésiennes avec l'axe des x orienté dans le sens de la vitesse de l'eau par rapport au sol $\vec{\mathbf{v}}_{e/s}$, et l'axe des y est orienté perpendiculairement aux rives.

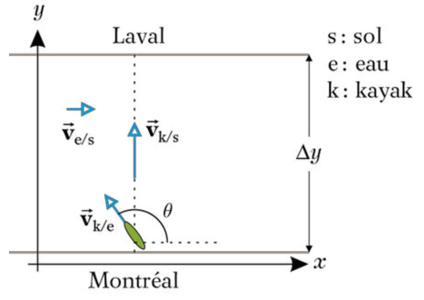


FIGURE 4.33
Le schéma de la situation pour l'exemple 4.10

Décortiquer le problème

Nous décomposons les vecteurs selon leurs composantes cartésiennes. Pour que Simon se déplace perpendiculairement aux rives, il faut que sa vitesse par rapport au sol ait une composante $v_{k/s,x} = 0$.

Connues		Inconnues
$v_{e/s,x} = 1{,}20$ m/s	$v_{e/s,y} = 0{,}00$ m/s	θ
$v_{k/s,x} = 0{,}00$	$v_{k/e} = 3{,}20$ m/s	Δt
$\Delta y = 275$ m		

SOLUTION a.

Identifier la clé

La **clé** est l'équation 4.50, car l'angle du kayak est le même que la vitesse de celui-ci par rapport à l'eau $\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{k/e}}$. On décompose cette équation selon les composantes. Selon le schéma de la situation, l'orientation de $\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{k/e}}$ est θ:

$$\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{k/s}} = \vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{k/e}} + \vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{e/s}} \;.$$

L'ordre des indices est respecté :

$$v_{\mathrm{k/s},x} = v_{\mathrm{k/e}} \cos\theta + v_{\mathrm{e/s},x} = 0{,}00 \text{ m/s} \qquad \text{(i)}$$

$$v_{\mathrm{k/s},y} = v_{\mathrm{k/e}} \sin\theta + v_{\mathrm{e/s},y} \;. \qquad \text{(ii)}$$

Il s'agit d'un système d'équations à deux inconnues (θ et $v_{\mathrm{k/s},y}$).

Résoudre le problème

Nous pouvons isoler θ à partir de l'équation (i) :

$$\theta = \arccos\left(\frac{v_{\mathrm{e/s},x}}{-v_{\mathrm{k/e}}}\right) = \arccos\left(\frac{1{,}20 \text{ m/s}}{-3{,}20 \text{ m/s}}\right)$$

$$\theta = 112^\circ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

L'angle se situe bien entre 90° et 180°, comme le montre le schéma de la situation. Simon pagaie légèrement contre le courant pour se rendre directement en face de son point de départ.

SOLUTION b.

Identifier la clé

La **clé** est que l'accélération de Simon est nulle. Son déplacement est parallèle à l'axe des y. Nous utilisons alors l'équation du mouvement rectiligne uniforme, obtenue à partir de l'équation 3.8 de la page 65 :

$$\Delta y = v_y \, \Delta t \;. \qquad \text{(iii)}$$

La largeur de la rivière Δy est une mesure faite dans le référentiel du sol. Ceci implique que la composante de la vitesse qui apparaît dans l'équation (iii) est $v_{\mathrm{k/s},y}$, qui est déterminée à l'aide de l'équation (ii).

Résoudre le problème

À l'aide des équations (iii) et (ii), nous trouvons

$$\Delta t = \frac{\Delta y}{v_{\mathrm{k/s},y}} = \frac{275 \text{ m}}{(3{,}20 \text{ m/s})\sin(112^\circ)}$$

$$\Delta t = 92{,}7 \text{ s} \;. \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

Nous répondons bien aux questions. L'ordre de grandeur du temps Δt a du sens.

RÉSUMÉ

Dans ce chapitre, nous avons étudié le mouvement curviligne, incluant le mouvement du projectile, le mouvement circulaire uniforme, le mouvement circulaire non uniforme, ainsi que le mouvement relatif.

LES DÉFINITIONS

Dans le mouvement à deux ou à trois dimensions :

- Le déplacement $\Delta\vec{r}$ indique le changement de position.

$$\Delta\vec{r} = \Delta x\,\vec{\imath} + \Delta y\,\vec{\jmath} + \Delta z\,\vec{k}$$

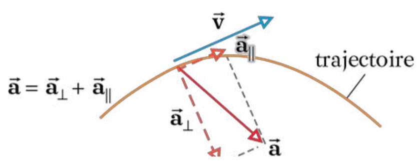
- La vitesse est toujours tangente à la trajectoire.

$$\vec{\mathbf{v}} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = v_x\vec{\imath} + v_y\vec{\jmath} + v_z\vec{k}$$

- L'accélération indique la variation de vitesse.

$$\vec{\mathbf{a}} = \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\vec{\imath} + \frac{dv_y}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k} = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k}$$

$\vec{\mathbf{a}}_{\parallel}$ indique si le module de la vitesse change et $\vec{\mathbf{a}}_{\perp}$, si l'orientation de la vitesse change.

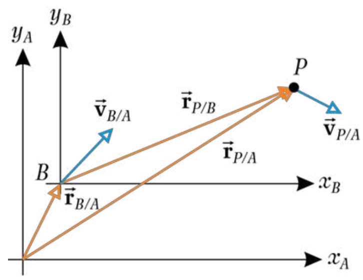


Un **référentiel** est un point de référence avec un système de coordonnées.

Un **référentiel inertiel** est un référentiel qui se déplace à vitesse constante.

La position, la vitesse et l'accélération d'un point P mesurées dans les référentiels inertiels A et B sont reliées par

$$\vec{\mathbf{r}}_{P/A} = \vec{\mathbf{r}}_{P/B} + \vec{\mathbf{r}}_{B/A}$$
$$\vec{\mathbf{v}}_{P/A} = \vec{\mathbf{v}}_{P/B} + \vec{\mathbf{v}}_{B/A}$$
$$\vec{\mathbf{a}}_{P/A} = \vec{\mathbf{a}}_{P/B}\,.$$



LES RÉSULTATS

Un **mouvement uniformément accéléré** est un mouvement pour lequel l'accélération $\vec{\mathbf{a}}$ est constante.

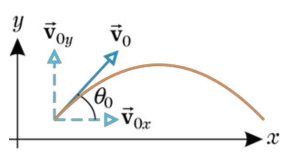
$$v_x = v_{0x} + a_x t \qquad v_y = v_{0y} + a_y t \qquad v_z = v_{0z} + a_z t$$

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \qquad y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \qquad z = z_0 + v_{0z}t + \frac{1}{2}a_z t^2$$

LES APPLICATIONS

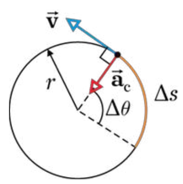
Le **mouvement du projectile**

$$y = y_0 + \tan\theta_0 (x - x_0) + \frac{a_y (x - x_0)^2}{2v_0^2 \cos^2\theta_0}$$



- Le mouvement horizontal est un mouvement uniforme, avec $a_x = 0$.
- Le mouvement vertical est un mouvement uniformément accéléré avec $a_y = -g = -9{,}81$ m/s².
- Les deux mouvements sont simultanés, avec le même temps t.

Le **mouvement circulaire uniforme** (Le module de la vitesse est constant.)



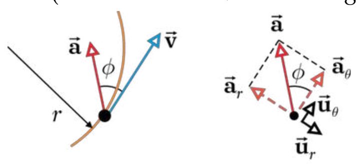
La période T est le temps requis pour effectuer une révolution. La fréquence f est le nombre de révolutions par seconde.

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{1}{f}$$

$$\Delta s = r\,\Delta\theta = v\,\Delta t$$

$$\vec{\mathbf{a}}_c = \frac{v^2}{r}\ \overrightarrow{\text{vers le centre}}$$

Un **mouvement circulaire non uniforme** (Le module de la vitesse change.)



L'accélération a deux composantes :

$$\vec{\mathbf{a}}_r = -\frac{v^2}{r}\vec{\mathbf{u}}_r$$
$$\vec{\mathbf{a}}_\theta = \frac{dv}{dt}\vec{\mathbf{u}}_\theta$$
$$\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}}_r + \vec{\mathbf{a}}_\theta$$
$$a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2}$$
$$\phi = \arctan\frac{|a_r|}{a_\theta}\,.$$

QUESTIONS, EXERCICES ET PROBLÈMES

Q questions qualitatives • **E** exercices simples • **P** problèmes • solution disponible

À moins d'avis contraire, l'axe des x est horizontal et orienté vers la droite, et l'axe des y est vertical et orienté vers le haut.

Section 4.1 La cinématique à deux et à trois dimensions

Q1 La figure 4.34 montre trois situations où la vitesse et l'accélération d'un objet sont illustrées. Dans quelle situation:

a. le module de la vitesse augmente-t-il?

b. le module de la vitesse diminue-t-il?

c. la direction de la vitesse change-t-elle?

d. la direction de la vitesse demeure-t-elle constante?

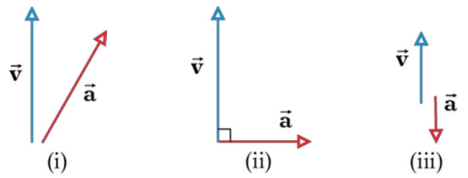


FIGURE 4.34 • Question 1

E2 Un train roule 50 km à 20° au nord de l'est pendant 30 min. Il roule ensuite 80 km à 40° à l'est du sud pendant 40 min. Quelle est la vitesse moyenne du train?

E3 À $t = 0$, un objet se trouve à la position $\vec{r}_i = (4{,}0\vec{\imath} + 2{,}0\vec{\jmath})$ m et se déplace à une vitesse $\vec{v}_i = (-0{,}50\vec{\imath} - 0{,}20\vec{\jmath})$ m/s. Après 3,2 s, il se trouve à la position $\vec{r}_f = (3{,}0\vec{\imath} - 2{,}0\vec{\jmath})$ m, et sa vitesse est $\vec{v}_f = (-0{,}80\vec{\imath} + 0{,}40\vec{\jmath})$ m/s.

a. Calculez la vitesse moyenne; exprimez votre réponse en fonction du module et de l'orientation.

b. Calculez l'accélération moyenne; exprimez votre réponse en fonction du module et de l'orientation.

E4 À $t = 0$, un objet se trouve à la position $\vec{r}_i = (2{,}0\vec{\imath} - 4{,}0\vec{\jmath} + 3{,}0\vec{k})$ m et se déplace à une vitesse $\vec{v}_i = (-0{,}30\vec{\imath} + 0{,}20\vec{\jmath} + 0{,}50\vec{k})$ m/s. Après 10,5 s, il se trouve à la position $\vec{r}_f = (3{,}0\vec{\imath} + 2{,}0\vec{\jmath} - 5{,}0\vec{k})$ m, et sa vitesse est $\vec{v}_f = (-0{,}50\vec{\imath} + 0{,}30\vec{\jmath} + 0{,}50\vec{k})$ m/s.

a. Calculez sa vitesse moyenne.

b. Quel est le module de la vitesse moyenne?

c. Calculez l'accélération moyenne.

d. Quel est le module de l'accélération moyenne?

P5 La position d'une particule se déplaçant horizontalement est donnée par $\vec{r} = (1{,}50 - 1{,}00t^2)\vec{\imath} + (-3{,}20t + 0{,}500t^2)\vec{\jmath}$, où les distances sont exprimées en mètres, et le temps est en secondes.

a. Quel est le déplacement entre 0,00 s et 2,40 s?

b. Quelle est la vitesse moyenne entre 0,00 s et 2,40 s?

c. Calculez la vitesse à 1,20 s.

d. Calculez le module de l'accélération à 1,20 s.

P6 Un objet se déplace parallèlement au plan des xy. Sa position en fonction du temps est $\vec{r} = (-1{,}5t)\vec{\imath} + (0{,}80 + 2{,}0t^2)\vec{\jmath}$, où les distances sont en mètres, et le temps est en secondes.

a. Quelle est sa vitesse initiale?

b. Quelle est l'orientation de son mouvement à $t = 0{,}50$ s?

c. Quelle est son accélération?

P7 Pour $t > 0$, une poussière se déplace dans l'atmosphère avec une vitesse donnée par $\vec{v} = (-1{,}4 + 2{,}0t^2)\vec{\imath} + (-5{,}0 + 1{,}2t)\vec{\jmath} + (-0{,}50t^2)\vec{k}$; la vitesse est mesurée en millimètres par seconde, et le temps est mesuré en secondes.

a. Donnez l'expression de l'accélération en fonction du temps.

b. Quelle est l'accélération lorsque la composante v_x est nulle?

Section 4.2 Le mouvement uniformément accéléré

E8 Un voilier, se déplaçant à une vitesse de 3,5 m/s orientée à 10° au sud de l'est, subit une brusque accélération constante causée par une rafale de vent. Si l'accélération est égale à 2,3 m/s^2 orientée à 40° au nord de l'est et qu'elle dure 0,80 s, quelle est la nouvelle vitesse du bateau?

E9 Un objet se trouve à l'origine et il est immobile à $t = 0{,}0$ s. Son accélération est $\vec{a} = (3{,}0\vec{\imath} + 1{,}0\vec{\jmath})$ m/s^2.

a. Quelle est sa position à $t = 4{,}0$ s?

b. Quelle est sa vitesse à $t = 4{,}0$ s?

c. Tracez sa trajectoire entre $t = 1{,}0$ s et $t = 4{,}0$ s.

E10 Une particule quitte l'origine à $t = 0$ avec une vitesse de $(4{,}0\vec{\imath} + 2{,}8\vec{\jmath})$ m/s. Son accélération constante est de $(-3{,}0\vec{\imath} + 1{,}1\vec{\jmath})$ m/s^2. Après un temps t, la particule croise l'axe des y.

a. Calculez le temps t (autre que le temps initial).

b. Quelle est sa coordonnée y à cet instant?

c. Quelle est sa vitesse à cet instant?

P11 Au temps initial, une particule se trouve à $(-3{,}0\vec{\imath} + 5{,}0\vec{\jmath} - 7{,}0\vec{k})$ m et elle a une vitesse de $(3{,}9\vec{\imath} - 1{,}7\vec{\jmath} - 4{,}0\vec{k})$ m/s. Elle subit une accélération constante de $(0{,}90\vec{\imath} + 0{,}70\vec{\jmath} + 0{,}40\vec{k})$ m/s^2.

a. Quelle est sa coordonnée y minimale?

b. Quelle est sa position à cet instant?

c. Quel est le module de sa vitesse à cet instant?

P12 Un objet quitte l'origine au temps initial avec une vitesse $\vec{\mathbf{v}}_0 = 3{,}50\vec{\jmath}$ et une accélération constante $\vec{\mathbf{a}} = (1{,}50\vec{\imath} - 2{,}40\vec{\jmath})$ m/s^2.

a. Calculez le temps nécessaire pour que l'objet atteigne une position y maximale.

b. À cet instant, quelle est sa position ?

c. À cet instant, quelle est sa vitesse ?

d. Tracez la trajectoire de l'objet entre $t = 0{,}0$ s et $t = 4{,}0$ s.

Section 4.3 Le mouvement du projectile

Dans cette section, négligez les effets de la résistance de l'air, même si ce n'est pas justifiable physiquement. Vos réponses seront des approximations.

Q13 Vous lancez une balle avec un angle θ_0. Après un certain temps, sa vitesse est $\vec{\mathbf{v}} = (3\vec{\imath} + \vec{\jmath})$ m/s. La balle a-t-elle atteint sa hauteur maximale ?

Q14 On lance un caillou avec une vitesse $\vec{\mathbf{v}}$ orientée à un angle θ_0, avec $0° < \theta_0 < 90°$.

a. Dans sa trajectoire ascendante, il passe devant deux fenêtres identiques, comme le montre la figure 4.35. Vis-à-vis de quelle fenêtre le temps de passage est-il plus long ?

b. Dans sa trajectoire descendante, le caillou passe devant deux autres fenêtres identiques. Vis-à-vis de quelle fenêtre le temps de passage est-il plus long ?

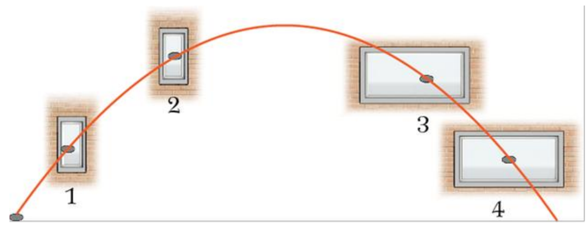


FIGURE 4.35 • Question 14

Q15 Trois balles sont lancées successivement vers un mur situé à une distance d inconnue. Les vitesses initiales sont : $\vec{\mathbf{v}}_{(1)} = (2\vec{\imath} + 5\vec{\jmath})$ m/s, $\vec{\mathbf{v}}_{(2)} = (2\vec{\imath} + 4\vec{\jmath})$ m/s et $\vec{\mathbf{v}}_{(3)} = (2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath})$ m/s. Les trois balles frappent le mur à une hauteur h différente.

a. Classez les trois balles par ordre croissant du temps de vol.

b. Classez les trois balles par ordre croissant de la hauteur h.

E16 On lance une fléchette avec une vitesse horizontale $\vec{\mathbf{v}}_0 = 8{,}00\vec{\imath}$ m/s sur une cible. La fléchette prend 0,150 s pour atteindre la cible.

a. Calculez le déplacement vertical de la fléchette.

b. À quelle distance se trouve la cible de la position initiale ?

E17 Au baseball, le lanceur lance la balle avec une vitesse horizontale dont le module est égal à 155 km/h. Le frappeur est situé à une distance de 18,4 m.

a. En combien de temps la balle se rend-elle jusqu'au frappeur ?

b. Quel est le déplacement vertical de la balle entre le lanceur et le frappeur ?

E18 Un ballon de soccer est frappé à une vitesse dont le module est de 15,0 m/s et l'orientation, de 25,0° au-dessus de l'horizontale.

a. Calculez le déplacement après 0,50 s.

b. Calculez le déplacement après 1,00 s.

P19 Au cours de la mission Apollo 14 en 1971, Alan Shepard a été le premier golfeur lunaire. Supposez que la balle franchit 200 m, alors qu'elle était frappée à une vitesse formant un angle de 30,0° par rapport à l'horizontale. L'accélération gravitationnelle est six fois plus petite sur la Lune que sur la Terre.

Voir la vidéo d'Alan Shepard golfant sur la Lune.

a. Quel était le module de la vitesse initiale de la balle ?

b. Combien de temps après avoir été frappée, la balle a-t-elle touché le sol lunaire ?

P20 On lance un projectile à partir du sol avec une vitesse dont le module est v_0, et son orientation par rapport à l'horizontale est θ_0. Trouvez la hauteur maximale du projectile.

P21 On lance, à partir du sol, un projectile avec une vitesse dont le module est de 7,50 m/s et l'orientation, de 35,0°. Calculez la hauteur maximale du projectile.

P22 Un ballon est frappé à partir du sol à $t = 0{,}0$ s. La figure 4.36 illustre le module de sa vitesse en fonction du temps.

a. Quelle est la vitesse initiale du ballon ?

b. Quelle est la portée du ballon ?

c. Quelle est la hauteur maximale atteinte par le ballon ?

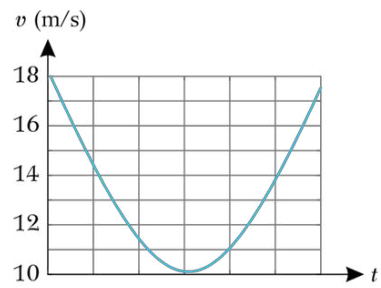


FIGURE 4.36 • Problème 22

P23 Un enfant s'amuse à lancer un ballon sur le mur de son école. Il se place à 6,50 m du mur et il lance le ballon à une vitesse de 9,50 m/s, formant un angle de 41,0° au-dessus de l'horizontale. Le ballon quitte la main de l'enfant à une hauteur de 1,00 m au-dessus du sol.

a. À quelle hauteur le ballon frappe-t-il le mur ?

b. Quelle est la vitesse du ballon lorsque celui-ci frappe le mur ?

c. Le ballon a-t-il atteint sa hauteur maximale ?

P24 Une balle a besoin de 3,50 s pour effectuer un déplacement dont la composante horizontale est égale à 35,0 m et la composante verticale, à 15,0 m. Quelle est la vitesse initiale ? Exprimez votre réponse en fonction du module et de l'orientation.

P25 Un ballon est lancé à partir du sol avec une vitesse de 20,0 m/s selon un angle de 60,0° par rapport à l'horizontale. Quelle est sa vitesse lorsque sa hauteur est de 8,00 m ?

P26 Un avion luttant contre un feu de forêt doit larguer de l'eau près des flammes. L'avion vole à 90 km/h à une altitude constante de 180 m. L'eau doit être larguée lorsque le pilote voit le début de l'incendie à un angle ϕ sous l'horizontale (*voir la figure 4.37*). Calculez l'angle ϕ.

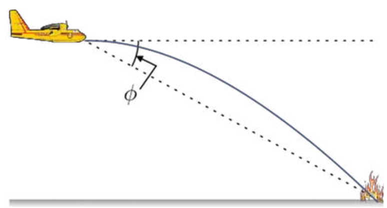


FIGURE 4.37 • Problème 26

P27 Au volleyball, le filet a une hauteur de 2,43 m et il est situé à une distance de 9,00 m du serveur. Ce dernier frappe le ballon à une vitesse de 12,4 m/s, formant un angle de 24,0° au-dessus de l'horizontale et à une hauteur de 2,20 m.

a. À quelle hauteur au-dessus du filet le ballon passe-t-il ?

b. Donnez le module et l'orientation de la vitesse à ce moment.

c. À quelle distance du filet le ballon frappe-t-il le sol ?

P28 Au football canadien, le botteur tente un placement de la ligne de 50 verges. Pour réussir, il doit frapper le ballon à partir du sol, et le ballon doit passer au-dessus d'une barre horizontale d'une hauteur de 3,05 m et à une distance de 50 verges (45,72 m). Le ballon quitte le sol avec un angle de 48,0°.

a. Quel est le module de la vitesse minimum pour que le placement soit réussi ?

b. Si le ballon est plutôt frappé à 45,0°, avec le même module de vitesse, à quelle hauteur de la barre le ballon passe-t-il ?

c. Si le ballon est plutôt frappé à 60,0°, avec le même module de vitesse, à quelle hauteur de la barre le ballon passe-t-il ?

P29 Au baseball, la balle est frappée d'une hauteur de 90,0 cm à une vitesse de 30,0 m/s, formant un angle de 70,5° au-dessus de l'horizontale. La balle se dirige vers un joueur se trouvant à une distance de 85,0 m de la balle lorsque celle-ci est frappée.

a. Quelle est la distance horizontale parcourue par la balle lorsque celle-ci arrive au sol ?

b. À quelle vitesse moyenne doit courir le joueur pour pouvoir attraper la balle au niveau du sol ?

P30 Un ballon est frappé à partir du sol. À une hauteur de 3,70 m, sa vitesse est $\vec{\mathbf{v}} = (8{,}50\vec{\imath} + 1{,}50\vec{\jmath})$ m/s.

a. Quelle est la vitesse initiale du ballon ?

b. Quelle est la hauteur maximale du ballon ?

c. Quelle est la portée du ballon ?

d. À quel angle le ballon frappe-t-il le sol ?

P31 Un bloc de glace initialement immobile se met à glisser le long d'un toit, comme le montre la figure 4.38. Le bloc glisse sans frottement sur une distance $d = 5{,}00$ m avant de quitter la bordure du toit, qui se trouve à une hauteur $h = 3{,}50$ m.

a. Quelle est la vitesse du bloc lorsque celui-ci quitte le toit ?

b. À quelle distance horizontale de la maison touche-t-il le sol ?

c. Quelle est l'orientation du mouvement du bloc juste avant que celui-ci touche le sol ?

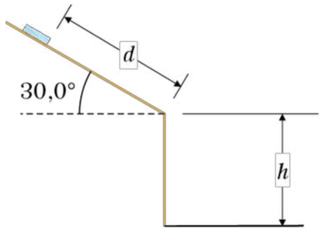


FIGURE 4.38 • Problème 31

P32 Une fusée miniature est lancée du sol. Le moteur de la fusée fonctionne pendant 5,00 s avant de tomber en panne. Lorsque le moteur est en marche, l'accélération de la fusée est de 2,25 m/s^2 à 75,0° par rapport à l'horizontale. Après la panne, la fusée poursuit un mouvement de projectile jusqu'au sol.

a. Quelle est la vitesse de la fusée après 2,00 s ?

b. Quelle est la hauteur maximale atteinte par la fusée ?

c. Combien de temps la fusée reste-t-elle dans les airs ?

d. À quelle distance de son point de départ la fusée frappe-t-elle le sol ?

P33 Au football canadien, un botteur tente un placement de 53 verges ou 48,46 m. Le ballon est frappé à partir du sol et doit passer au-dessus d'une barre horizontale, située à une hauteur de 3,05 m. Le botteur frappe le ballon avec une vitesse dont le module est de 23,0 m/s. Quel intervalle d'angles θ_0 du botté, par rapport à l'horizontale, permet de réussir le placement ? (Indice : Utilisez l'identité trigonométrique $\tan^2\theta + 1 = 1/[\cos^2\theta]$.)

P34 Un sauteur à ski arrive au bout du tremplin à une vitesse dont le module est de 25,0 m/s. Comme le montre la figure 4.39, la fin du tremplin est horizontale et la pente suivant le tremplin est inclinée à 30,0°. En négligeant la résistance de l'air, calculez la distance horizontale parcourue par le sauteur lorsque celui-ci touche le sol. (En réalité, l'air a un effet important; les sauteurs placent leurs skis *en V* pour mieux flotter dans l'air.)

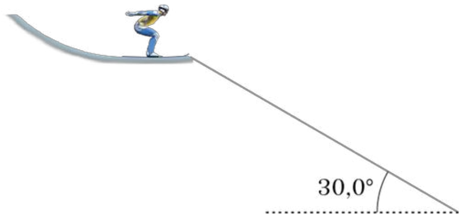


FIGURE 4.39 • Problème 34

Section 4.4 Le mouvement circulaire uniforme

Q35 Trois objets a, b et d décrivent des mouvements circulaires uniformes différents.

a. Si $v_a = 2v_b$ et $r_a = 2r_b$, quel est le rapport a_{ca}/a_{cb} ?

b. Si $T_a = 2T_d$ et $r_a = 2r_d$, quel est le rapport a_{ca}/a_{cd} ?

E36 Le London Eye est une grande roue permettant de voir la ville de Londres d'un point de vue différent (*voir la figure 4.40*). Inaugurée le 31 décembre 1999, cette grande roue est la plus grande d'Europe avec un diamètre de 135 m, et sa vitesse de rotation a un module de 26 cm/s.

a. Quelle est la période de rotation ?

b. Quel est le module de l'accélération d'un point sur la circonférence ?

FIGURE 4.40 • Exercice 36

E37 Un cycliste roulant à 20,0 km/h prend un virage de 55,0 m de rayon. Quel est le module de son accélération centripète ?

E38 La Lune tourne autour de la Terre sur une orbite circulaire dont le rayon est égal à 384×10^3 km et la période, de 27,3 j.

a. Calculez le module de la vitesse de la Lune.

b. Calculez le module de son accélération centripète.

E39 Un coureur parcourt un demi-cercle d'une longueur de 100 m en 21,5 s. Quel est le module de son accélération centripète ?

P40 Une table tournante tourne dans le sens antihoraire avec une période de 12,0 s. Un petit objet est placé à une distance de 15,0 cm du centre. À $t = 0$, l'objet passe par l'origine O, ce qui est illustré à la figure 4.41. Exprimez les vecteurs suivants selon leur module et leur orientation par rapport à la partie positive de l'axe des x.

a. Quelle est la position à $t = 2{,}0$ s ?

b. Quelle est la position à $t = 3{,}0$ s ?

c. Quelle est la position à $t = 6{,}0$ s ?

d. Quel est le déplacement entre $t = 6{,}0$ s et $t = 12{,}0$ s ?

e. Quelle est la vitesse moyenne entre $t = 6{,}0$ s et $t = 12{,}0$ s ?

f. Quelle est la vitesse à $t = 6{,}0$ s ?

g. Quelle est la vitesse à $t = 12{,}0$ s ?

h. Quelle est l'accélération à $t = 6{,}0$ s ?

i. Quelle est l'accélération à $t = 12{,}0$ s ?

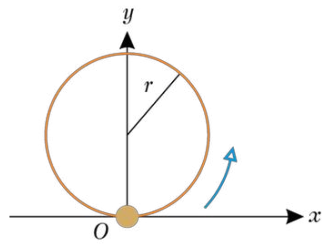


FIGURE 4.41 • Problème 40

P41 Une automobile, se déplaçant à 18,0 m/s, franchit un virage en arc de cercle en 5,00 s. Le virage sous-tend un angle de 30,0°, comme le montre la figure 4.42, et la vitesse a un module constant. Quelle est l'accélération au centre du virage ? (Utilisez les vecteurs unitaires cartésiens.)

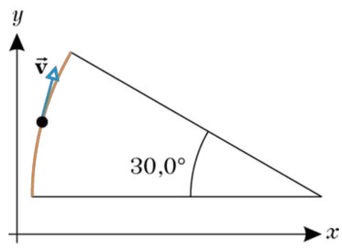


FIGURE 4.42 • Problème 41

P42 Une pierre est attachée à une corde de 45,0 cm de longueur. Un enfant fait tourner la corde au-dessus de sa tête, de telle sorte que la pierre effectue un mouvement circulaire uniforme horizontal à une fréquence de 2,30 Hz. Lorsque l'enfant lâche la corde, la pierre devient un projectile avec une vitesse initiale horizontale. Si la pierre a une hauteur initiale de 1,60 m, quel est le déplacement horizontal de la pierre quand celle-ci touche le sol ?

P43 Une table tournante effectue un mouvement circulaire dans le sens horaire avec une fréquence de 45,0 tr/min. Une pièce de monnaie est placée à une distance de 25,0 cm du centre de la table tournante. À $t = 0$, la vitesse de la pièce de monnaie est $\vec{\mathbf{v}}_0 = -v\vec{\boldsymbol{j}}$. Pour $t = 0{,}50$ s, calculez :

a. la distance parcourue ;

b. la vitesse ;

c. l'accélération.

Section 4.5 Le mouvement circulaire non uniforme

Q44 Vous roulez en automobile sur l'autoroute. Que pouvez-vous faire pour accélérer ?

Q45 On attache un objet au bout d'une corde et on le fait tourner selon un cercle vertical. Le module de la vitesse est maximal au point le plus bas et minimal au point le plus haut du cercle.

a. Quelle est l'accélération tangentielle au point le plus bas ?

b. Quelle est l'accélération tangentielle au point le plus haut ?

c. Quelle est l'orientation de l'accélération au point le plus bas ?

d. Quelle est l'orientation de l'accélération au point le plus haut ?

E46 L'accélération et la vitesse d'un objet décrivant un mouvement circulaire sont données à la figure 4.43. Le module de l'accélération est égal à 2,45 m/s^2, et le rayon du cercle est égal à 5,00 m.

a. Calculez le module de l'accélération centripète.

b. Calculez le module de l'accélération tangentielle.

c. Calculez le module de la vitesse.

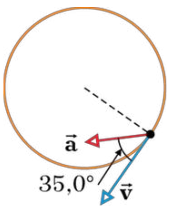


FIGURE 4.43 • Exercice 46

E47 À un certain instant dans un virage de 75,0 m de rayon, une automobile se déplace à une vitesse de 11,5 m/s en freinant, et le module de son accélération centripète est 1,75 fois plus grand que le module de son accélération tangentielle.

a. Quel est le module de son accélération ?

b. Quelle est l'orientation de son accélération ?

c. Si le module de l'accélération tangentielle est constant, quel sera le module de sa vitesse après 0,850 s ?

P48 Une particule initialement immobile est accélérée le long d'un cercle de 12,3 m de rayon. Le module de la vitesse augmente à un taux constant de 0,350 m/s^2, et la particule effectue plusieurs révolutions.

a. À partir du départ, combien de temps faut-il pour que la particule effectue deux révolutions ?

b. Quel est le module de la vitesse après deux révolutions ?

c. Quelle est l'accélération après deux révolutions ? (Utilisez les vecteurs unitaires polaires.)

P49 Une automobiliste accélère graduellement de 30 km/h à 70 km/h dans un virage, formant un angle de 80,0° ; le rayon est de 80,0 m.

a. Calculez le module de l'accélération au milieu du virage.

b. Quelle est l'orientation de l'accélération au milieu du virage ?

Section 4.6 Le mouvement relatif

Q50 Un jeune garçon lance une bille vers le haut lorsqu'il est dans un train se déplaçant à une vitesse constante. Pour une personne à côté de la voie ferrée, à quoi va ressembler la trajectoire de la bille ?

E51 La pluie tombe doucement à une vitesse de 1,20 m/s verticalement vers le bas. Vous marchez à une vitesse horizontale dont le module est de 1,50 m/s. À quel angle devez-vous incliner votre parapluie pour éviter d'être mouillé ?

E52 Un nageur traverse une rivière en nageant à une vitesse de 0,500 m/s vers le nord. La rivière a une largeur de 30,0 m et elle coule à une vitesse de 1,50 m/s vers l'est.

a. Combien de temps faut-il au nageur pour traverser la rivière ?

b. Quel est alors son déplacement ?

P53 Un pêcheur veut traverser une rivière en bateau et se rendre directement à l'ouest de son point de départ. La rivière a une largeur de 500 m, et son courant a une vitesse de 4,0 m/s vers le nord. La vitesse du bateau par rapport à l'eau a un module de 12,0 m/s.

a. Quelle est l'orientation de la vitesse du bateau par rapport à l'eau ?

b. Combien de temps dure la traversée ?

P54 Un pilote d'avion veut se rendre en 80,0 min de la ville a à la ville b, située à 150 km au nord de la ville a. Le vent souffle à une vitesse de 50,0 km/h à 25,0° au sud de l'ouest. Quelle est la vitesse de l'avion par rapport à l'air ?

P55 Sur un rail, un chariot a et un chariot b sont lancés l'un vers l'autre, comme on peut le voir à la figure 4.44 à la page suivante. Jeanne est immobile ; selon ses mesures, le chariot a se déplace à 1,5 m/s et le chariot b, à 2,0 m/s. Durant cet expérience, Nicolas se déplace par rapport à Jeanne à une vitesse constante de $\vec{\mathbf{v}}_{N/J} = -2{,}0\vec{\boldsymbol{\imath}}$ m/s.

a. Quelle est la vitesse du chariot a pour Nicolas ?

b. Quelle est la vitesse du chariot b pour Nicolas ?

Les deux chariots entrent en collision. Après la collision, Nicolas, qui n'a pas changé de vitesse, observe que la vitesse du chariot *a* est de $-2{,}1\vec{\imath}$ m/s et que la vitesse du chariot *b* est de $1{,}4\vec{\imath}$ m/s.

c. Quelle est la vitesse du chariot *a* après la collision, selon Jeanne ?

d. Quelle est la vitesse du chariot *b* après la collision, selon Jeanne ?

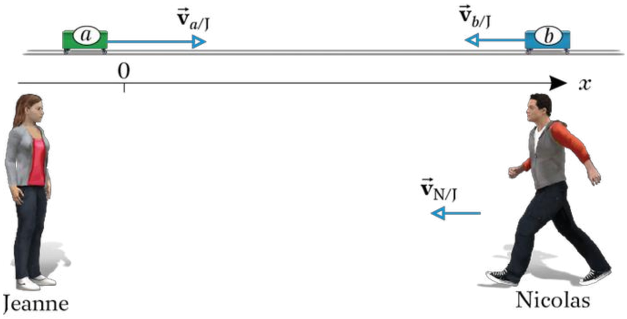


FIGURE 4.44 • Problème 55

P56 Une personne veut traverser une rivière de 260 m de largeur en bateau. Elle veut se rendre en un point situé à 110 m en aval (*voir la figure 4.45*). Pour ce faire, elle doit orienter le bateau à 40,0° par rapport à la direction perpendiculaire aux rives. La vitesse du bateau par rapport à la rivière est de 8,00 km/h.

a. Calculez le module de la vitesse du courant.

b. Combien de temps va durer la traversée ?

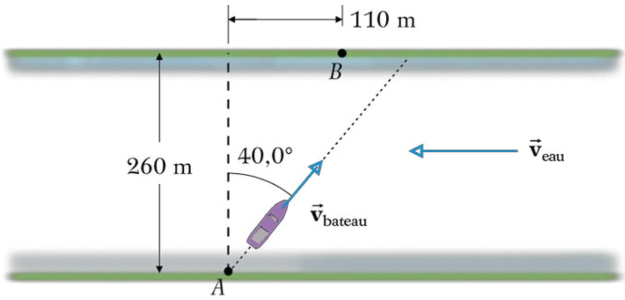


FIGURE 4.45 • Problème 56

SOLUTIONS AUX TESTS DE COMPRÉHENSION

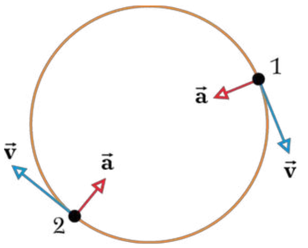
4.1 La particule se déplace plus rapidement, et sa trajectoire courbe vers le haut.

L'accélération a une composante $\vec{\mathbf{a}}_{\parallel}$ dans le même sens que $\vec{\mathbf{v}}$, ce qui fait augmenter le module de la vitesse. De plus, la composante $\vec{\mathbf{a}}_{\perp}$ est vers le haut, ce qui indique que la trajectoire va se courber vers le haut.

4.2 $\Delta\vec{\mathbf{r}} = (-3\vec{\imath} + 9\vec{\jmath} - 4\vec{k})$ m

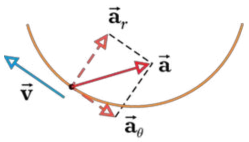
Les composantes du vecteur $\Delta\vec{\mathbf{r}}$ sont obtenues en calculant la variation des coordonnées : $\Delta x = -1$ m $-$ 2 m $= -3$ m, $\Delta y = 6 - (-3$ m$) = 9$ m et $\Delta z = 1$ m $-$ 5 m $= -4$ m.

4.3



La vitesse est tangente au cercle, et son sens indique une rotation horaire. L'accélération est vers le centre du cercle.

4.4



La composante tangentielle $\vec{\mathbf{a}}_\theta$ est dans le sens opposé à la vitesse $\vec{\mathbf{v}}$, car le module de la vitesse diminue. La composante radiale $\vec{\mathbf{a}}_r$ est toujours vers le centre du cercle. L'accélération $\vec{\mathbf{a}}$ est obtenue avec la méthode du parallélogramme.

4.5

	$\vec{\mathbf{v}}_{P/A}$	$\vec{\mathbf{v}}_{A/B}$	$\vec{\mathbf{v}}_{P/B}$	$\vec{\mathbf{v}}_{B/A}$
x	3 m/s	2 m/s	5 m/s	–2 m/s
y	4 m/s	–1 m/s	3 m/s	1 m/s

En respectant l'ordre des indices, on peut écrire l'équation 4.50 de la façon suivante : $\vec{\mathbf{v}}_{P/B} = \vec{\mathbf{v}}_{P/A} + \vec{\mathbf{v}}_{A/B}$. Pour la dernière colonne du tableau, lorsqu'on inverse les indices, on multiplie le vecteur par -1 : $\vec{\mathbf{v}}_{B/A} = -\vec{\mathbf{v}}_{A/B}$.