Introduction

Antonio Falcó

Unités

Comment on peut mesurer le déplacement d'un piston dans une seringue?

- Cela représente le volume que le piston déplace ou expulse dans son mouvement du bas vers le haut du cylindre,
- Le *volume* est une unité physique.
- D'autres sont la longueur, le poids, le temps, la vitesse, la force et la masse.
- Une grandeur physique X est mesurée en la comparant à une norme connue X_0 auparavant.

Mesure physique

Une *mesure* physique X est déclaré par un *nombre* $\mu(X; X_0)$ et une *unité* X_0:

- 1.5 unités de longueur (distance).
- 3.46×10^{-3} unités de longueur^3 (volume).
- 34 unités de temps (temps).

Unités de base et dérivés

Personne n'a jamais trouvé de mesure qui ne puisse pas être exprimée en termes de *[longueur]* $= L$, *[masse]* $= M$, *[temps]* $= T$, *[courant]* $= I$, *[température]* $=$ *Theta*, *[intensité lumineuse]* $= N$ *ou [substance]* $= J$. Donc ces quantités sont appelées *unités de base*, et les autres sont appelées *unités dérivées.*

Unité de base	Symbole pour déterminer la dimension
[longueur]	L
[masse]	M
[temps]	T
[courant]	I
[température]	Θ
[intensité lumineuse]	N
[substance]	J

Définition

La mesure d'une objet physique X est une procédé, noté par μ qui permet la comparaison de X à une autre objet, de même nature, X_0 choisie arbitrairement comme unité; précisément, on effectue le mesure:

$$m_X = \mu(X; X_0)$$

alors

$$X = m_X\, X_0 = \mu(X; X_0)\, X_0$$

Le résultat de la mesure est le nombre m_X, valeur de X, suivi de son unité.

$$1 \text{ m } = 100 \text{ cm } \Rightarrow \mu(1 \text{ m}; \text{cm}) = 100.$$

La science de la mesure est la métrologie. Le BIPM (Bureau International des Poids et Mesures), en France, est chargé de définir les unités pour la communauté scientifique internationale.

Example

Soit X_0 un paquet de serviettes. Alors on nous donne un boîte X avec de paquets de serviettes et quelqu'un nous demande de mesurer la boîte X. Pour mesurer X on compare chaque élément individuelle dans X avec X_0 et on obtient une chiffre x, c'est-à-dire il y a une quantité de x paquets égal à X_0 dans la boîte X. En conséquence on a un mesure $m_X = x\,[X_0] = x$ paquets de serviettes. Ici, le procédé lie à la mesure nous permet de obtenir un chiffre:

$$\mu(X; X_0) := \text{ quantité des individus } X_0 \text{ contenus à } X.$$

ou

$$[X_0] := \text{ unités lies à l'objet physique } X_0.$$

Propriétés

1. Soit X_0 un objet physique, alors $\mu(X_0; X_0) = 1$.
2. Soit $\emptyset$ l'objet physique vide, alors $\mu(\emptyset; X_0) = 0$.
3. Soit X et Y deux objets physiques de la même nature que X_0 et sans éléments en commun, cèst-à-dire $X \cap Y = \emptyset$. Alors, la mesure de tous les deux et qu'on peut noter par $X + Y$ doit satisfaire l'égalité

$$X + Y = \mu(X + Y; X_0)\,[X_0] = \mu(X; X_0)\,[X_0] + \mu(Y; X_0)\,[X_0]$$

4. Soit X et Y deux objets physiques de la même nature que X_0 et X est contenue à Y : $X \subset Y$. Alors on peut mesurer $Y = \mu(Y; X)\,X$ par rapport X et

$$\begin{aligned} Y &= \mu(Y; X_0)\,[X_0] = \mu(\mu(Y; X)X; X_0)\,[X_0] \\ &= \mu(Y; X)\,\mu(X; X_0)\,[X_0]. \end{aligned}$$

Example

Soit X un paquet de 100 serviettes X_0. Alors on nous donne un boîte Y avec 30 paquets X de serviettes X_0 et quelqu'un nous demande de mesurer les serviettes de la boîte Y. Pour mesurer Y on compare chaque élément individuelle dans Y avec X et on obtient une chiffre 30. Comme chaque paquet X contient 100 serviettes X_0, on a une mesure de

$$Y = \mu(Y;X)\,X = 30\,\mu(X;X_0)\,X_0 = 30 \cdot 100\,X_0 = 3.000\,X_0$$

et

$$Y = \mu(\mu(Y;X)\,X;X_0)\,X_0 = \mu(30\,X;X_0)\,X_0 = 3.000\,X_0.$$

Le opérations arithmétiques à respecter dans le mesure

Soit X et Y des objets physiques mesurable par rapport X_0 :

1. $\mu(X \cup \emptyset, X_0) = \mu(X; X_0) + \mu(\emptyset; X_0) = \mu(X; X_0)$.
2. Si $X \cap Y = \emptyset$, alors
$$\mu(X + Y; X_0) = \mu(X; X_0) + \mu(Y; X_0)$$
3. Si $X \subset Y$ et $Y = \lambda X$ alors
$$\mu(Y; X_0) = \mu(\lambda X; X_0) = \lambda \mu(X; X_0).$$

Conversion des unités

Soit Y un objet physique mesurable par rapport X_0 et X_0'. Suppose que

$$Y = \mu(Y; X_0)\,[X_0] = \mu(Y; X_0')\,[X_0'],$$

alors

$$\frac{[X_0]}{[X_0']} = \frac{\mu(Y; X_0')}{\mu(Y; X_0)}.$$

Exemple

On connaît

$$1 \text{ mile } = 1.60934 \text{ km}$$

alors

$$\frac{\text{mile}}{\text{km}} = 1.60934 \text{ et } \frac{\text{km}}{\text{mile}} = \frac{1}{1.60934} = 0.621372736649807.$$

- En physique, il est souvent nécessaire soit de déduire une expression mathématique ou une équation, soit de vérifier sa validité. Cette procédure est appelée analyse dimensionnelle. Il utilise le fait que les dimensions (unités) peuvent être traitées comme des **quantités algébriques**.
- La dimension de toute objet physique X est représentée par des crochets:

$$[X] := \text{ unités de l'objet physique } X.$$

- **Les nombres n'ont pas de dimension physique** $[\pi] = [\sqrt{2}] = 1.$
- La longueur de la circonférence $\ell = 2\pi \cdot r$ alors

$$[\ell] = [2\pi \cdot r] = [2\pi] \cdot [r] = 1 \cdot [\text{longitud}] = 1 \cdot L$$

unités de longueur.

Exemples

Problème

Déterminer la dimension de l'aire d'un cercle: $A = \pi r^2 = \pi \cdot r \cdot r$.

Response

$$[A] = [\pi] \cdot [r] \cdot [r] = 1 \cdot [\text{longueur}] \cdot [\text{longueur}] = L^2.$$

Problème

Déterminer la dimension de le volume d'une sphère $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Reponse

$$[A] = [\frac{4}{3}\pi \cdot r \cdot r \cdot r] = [\frac{4}{3}\pi] \cdot [r] \cdot [r] \cdot [r] = 1 \cdot L \cdot L \cdot L = L^3.$$

Exemple

Problème

Déterminer la dimension de la vitesse **La vitesse est la distance parcourue par unité de temps**.

Reponse

La [vitesse] = [longueur]/[temps] est une unité derivée

$$[\text{vitesse}] = [\text{longueur}] \times [\text{temps}]^{-1} = L \times T^{-1}.$$

Cohérence dimensionnelle

Théorème

Toute formule doit être dimensionnellement cohérente, c'est-à-dire si X et Y sont deux objets physiques et

$$X = Y \Rightarrow [X] = [Y].$$

Exemple

Soit m la masse, v la vitesse, d la distance parcourue, t le temps et V le volume. Est-ce que la formule

$$m \cdot v^2 = \frac{m}{d \cdot t} \cdot \frac{V}{t}$$

est cohérente? Si on analyse l'expression à droite

$$[m \cdot v^2] = [m] \cdot [v] \cdot [v] = [\text{masse}] \cdot [\text{vitesse}]^2 = M \left(\frac{L}{T}\right)^2,$$

donc l'expression à gauche

$$\left[\frac{m}{d \cdot t} \cdot \frac{V}{t}\right] = \frac{[m]}{[d] \cdot [t]} \cdot \frac{[V]}{[t]} = \frac{[\text{masse}]}{[\text{longueur}] \times [\text{temps}]} \times \frac{[\text{volume}]}{[\text{temps}]}$$
$$= \frac{M}{LT}\frac{L^3}{T} = M\left(\frac{L^3}{LT^2}\right) = M\left(\frac{L^2}{T^2}\right) = M\left(\frac{L}{T}\right)^2.$$

Il est cohérente parce les dimensions à droite et à gauche sont la même.

Expressions algébriques

Notez que nous utilisons des expressions algébriques avec les variables L M et T (qui représentent respectivement la longueur, la masse et le temps). L'argument précédant a été:

$$\frac{L^3}{L\,T^2} = L^3\,\frac{1}{L^1\,T^2} = L^3\,\left(L^{-1}\,T^{-2}\right)$$

$$\text{on utilise } \frac{1}{L^1\,T^2} = L^{-1}\,T^{-2}$$

$$= L^3\,L^{-1}\,T^{-2} = L^{3-1}\,T^{-2}$$

$$\text{on utilise } L^3\,L^{-1} = L^{3-1}$$

$$= L^2\,T^{-2} = L^2\,\frac{1}{T^2} = \frac{L^2}{T^2} = \left(\frac{L}{T}\right)^2.$$

Le système international d'unités

Le Système international d'unités (abrégé en SI), inspiré du système métrique, est le système d'unités le plus largement employé au monde ; mais il n'est pas officiellement utilisé aux États-Unis, au Liberia et en Birmanie. Il s'agit d'un système décimal (on passe d'une unité à ses multiples ou sous-multiples à l'aide de puissances de 10) sauf pour la mesure du temps et des angles. C'est la Conférence générale des poids et mesures, rassemblant des délégués des États membres de la Convention du Mètre, qui décide de son évolution, tous les quatre ans, à Paris. L'abréviation de « Système international » est SI, quelle que soit la langue utilisée.

Grandeur	Symbole de la grandeur	Symbole de la dimension	Unité SI	Symbole associé à l'unité
Masse	m	M	kilogramme	kg
Temps	t	T	seconde	s
Longueur	$l, x, r\ldots$	L	mètre	m
Température	T	Θ	kelvin	K
Intensité électrique	I, i	I	ampère	A
Quantité de matière	n	N	mole	mol
Intensité lumineuse	I_v	J	candela	cd

Unités de base de longueur et temps

- Le mètre est la longueur du trajet parcouru dans le vide par la lumière pendant une durée de 1/299 792458 seconde. Cette définition est issue de la convention, adoptée en 1983 par la communauté internationale, qui consiste à fixer la vitesse de la lumière dans le vide c à exactement 299792458 m s^{-1}. Cette vitesse est une constante fondamentale de la nature, si bien qu'il est préférable de la désigner par constante d'Einstein, ce que nous ferons désormais.
- La seconde est la durée de 9192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium 133. Précisons que ces niveaux hyperfins sont des niveaux énergétiques particuliers de l'atome dont l'énergie est déterminée avec une excellente précision. En outre, cette définition se réfère à un atome de césium immobile.

$$c = 2.99792458 \times 10^8 = 299\,792\,458 \text{ m/s}.$$

La taille des objets

Dans les sciences de la santé et la biologie, nous étudions les êtres vivants ou avec une grande disparité dans leurs tailles. On peut dire, par exemple, qu'une baleine mesure environ 10 mètres ou qu'une cellule a une longueur d'environ 0.000001 mètre.

L'ordre de grandeur

Donc n'a pas beaucoup de sens d'ajouter des chiffres de différents ordres de grandeur

$$10 + 0.000001 = 10.000001$$

Cause du problème

Le choix pour représenter les nombres:

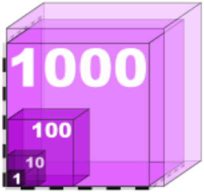
$$
\begin{aligned}
&1234.567\\
&= 1000 + 200 + 30 + 4 + 0.5 + 0.06 + 0.007\\
&= 1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0 + 5 \cdot 10^{-1} + 6 \cdot 10^{-2} + 7 \cdot 10^{-3}
\end{aligned}
$$

Exemple

$$
\begin{aligned}
&12.78 + 25.53 = 38.31\\
&1 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0 + 7 \cdot 10^{-1} + 8 \cdot 10^{-2}\\
&2 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 5 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2}\\
=&(1+2) \cdot 10^1 + (2+5) \cdot 10^0 + (7+5) \cdot 10^{-1} + (8+3) \cdot 10^{-2}\\
=&3 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 + 12 \cdot 10^{-1} + 11 \cdot 10^{-2}\\
=&3 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^{-1} + 1 \cdot 10^{-2}
\end{aligned}
$$

L'ordre de grandeur

Le *ordre de grandeur* d'un nombre est le nombre de zéros avant ou après la virgule décimale; Ainsi, une plage de huit ordres de grandeur implique cent millions ou 10^8. Par exemple, on dit que deux nombres diffèrent de 3 ordres de grandeur si l'un est 1000 fois plus grand que l'autre (10^3). L'utilisation la plus répandue de la description des ordres de grandeur est d'utiliser *notation scientifique* et *puissances de dix*.



Préfixes courants utilisés dans le système métrique

Préfixe	Abréviation	Multiplier par
giga	G	10^9
mega	M	10^6
kilo	k	10^3
mili	m	10^{-3}
micro	μ	10^{-6}
nano	n	10^{-9}
pico	p	10^{-12}
femto	f	10^{-15}
atto	a	10^{-18}

Observez qu'ils sont séparés par trois ordres de grandeur, sauf le pas de kilo à milli, qui est de 6.

Tailles approximatives des objets biologiques

Objet	Taille
Proto-zoos	100 μm
Cellules	10 μm
Bactéries	1 μm
Virus	100 nm
Macromolécules	10 nm
Molécules	1 nm
Atomes	100 pm

Définition

La **notation scientifique** (ou notation d'index standard) est un moyen rapide de représenter un nombre en utilisant des puissances de base dix. Cette notation est utilisée pour pouvoir exprimer très facilement des nombres très grands ou très petits. Les nombres sont écrits comme un produit:

$$a \times 10^n$$

siendo

- a un nombre réel supérieur ou égal à 1 et inférieur à 10, appelé **mantisse**.
- n un entier qui est appelé **exposant ou ordre de grandeur**.

Exemple

- $0.345 = 3.45 \times 10^{-1}$.
- $40000 = 4 \times 10^{4}$.
- $0.000345 = 3.45 \times 10^{-4}$.
- $1 = 1 \times 10^{0}$.
- $-0.345 = -3.45 \times 10^{-1}$.
- 2.71828×10^{-2} représente le nombre réel 0.0271828
- 2.71828×10^{-1} représente le nombre réel 0.271828
- 2.71828×10^{0} représente le nombre réel 2.71828 (l'exposant zéro indique que la virgule ne se décale pas).
- $2.71828x10^{1}$ représente le nombre réel 27.1828.
- $2.71828x10^{2}$ représente le nombre réel 271.828.

Quelques règles utiles

- $10^3 \times 10^4 = 10^{3+4} = 10^7$.
- $10^4/10^7 = 10^4 \times 1/10^7 = 10^4 \times 10^{-7} = 10^{4-7} = 10^{-3}$.
- $10^4/10^{-7} = 10^4 \times 1/10^{-7} = 10^4 \times 10^7 = 10^{4+7} = 10^{11}$.
- En général, $1/10^m = 10^{-m}$ ou m est un entier.
- $4 = 4 \times 10^{-5} \times 10^5 = 0.00004 \times 10^5$.
- $4 = 4 \times 10^5 \times 10^{-5} = 400000 \times 10^{-5}$.
- On peut écrire

$$4 = 0.4 \times 10^1 = 0.04 \times 10^2 = 0.004 \times 10^3 = \cdots$$

et

$$4 = 40 \times 10^{-1} = 400 \times 10^{-2} = 4000 \times 10^{-3} = \cdots$$

Somme et reste

Tant que les puissances de 10 sont les mêmes, les coefficients doivent être ajoutés, laissant la puissance de 10 au même degré. Dans le cas où ils n'ont pas le même exposant, vous devez convertir le coefficient en le multipliant ou en le divisant par 10 pour obtenir le même exposant.

Exemple

$$2 \times 10^5 + 3 \times 10^5 = 5 \times 10^5$$

$$3 \times 10^5 - 1.2 \times 10^5 = 1.8 \times 10^5$$

Exemple

$$
\begin{aligned}
& 2 \times 10^4 + 3 \times 10^5 - 6 \times 10^3 \\
& = \text{(on prend l'exposant 5 comme à référence)} \\
& = 0.2 \times 10^5 + 3 \times 10^5 - 0.06 \times 10^5 = 3.14 \times 10^5
\end{aligned}
$$

On utilise

$$2 = 0.2 \times 10^1,$$

$$2 \times 10^4 = 0.2 \times 10^1 \times 10^4 = 0.2 \times 10^{1+4} = 0.2 \times 10^5,$$

et $6 = 0.06 \times 10^2$. Alors

$$6 \times 10^3 = 0.06 \times 10^2 \times 10^3 = 0.06 \times 10^{2+3} = 0.06 \times 10^5.$$

Multiplication

Pour multiplier quantités en notation scientifique, les coefficients sont multipliés et les exposants sont ajoutés.

Exemple

$(4 \times 10^{12}) \times (2 \times 10^{5}) = 8 \times 10^{17}$

Division

Pour diviser les quantités en notation scientifique, les coefficients sont divisés et les exposants sont soustraits.

Exemple

$(48 \times 10^{-10})/(12 \times 10^{-1}) = 4 \times 10^{-9}$. Pour rester les exposants : $-10 - (-1) = -10 + 1 = -9$.

Puissance

Augmentez le coefficient à la puissance et multipliez les exposants.

Exemple

$(3 \times 10^6)^2 = 9 \times 10^{12}$.

Racine

Vous devez extraire la racine du coefficient et diviser l'exposant par l'indice de la racine.

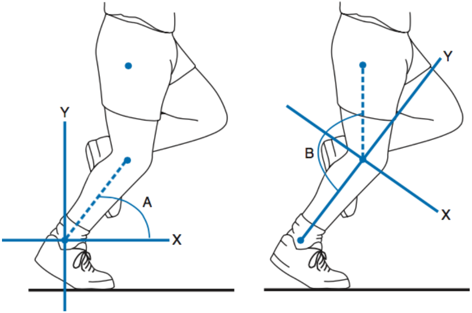
Exemple

$\sqrt{4 \times 10^8} = \sqrt{4} \times \sqrt{10^8} = 2 \times 10^{8/2} = 2 \times 10^4$.

On utilise: $\sqrt{a} = a^{1/2}$.

Question

Comme on peut **mesurer** un virage?

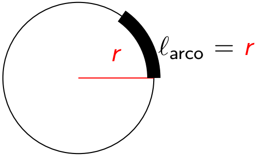


Définition

La mesure de l'angle d'un secteur angulaire est le nombre réel positif qui mesure la proportion du plan occupée par le secteur angulaire. Les unités utilisées pour le quantifier sont le radian, le quadrant et ses subdivisions, le degré, ses sous-unités et le grade.

Définition

- Le radian (symbole : rad) est l'unité dérivée du Système international qui mesure les angles plans.
- **Un angle d'un radian intercepte sur la circonférence de ce cercle un arc d'une longueur égale au rayon. Un cercle complet représente un angle de 2π radians, appelé angle plein.**.



- La longueur ℓ d'une circonférence de rayon r est $\ell = 2\pi r$. Alors tout circonférence représente un angle de 2π radians. Ce définition établie une propriété "canonique" pour la circonférence

$$\frac{\ell}{r} = 2\pi.$$

Définition

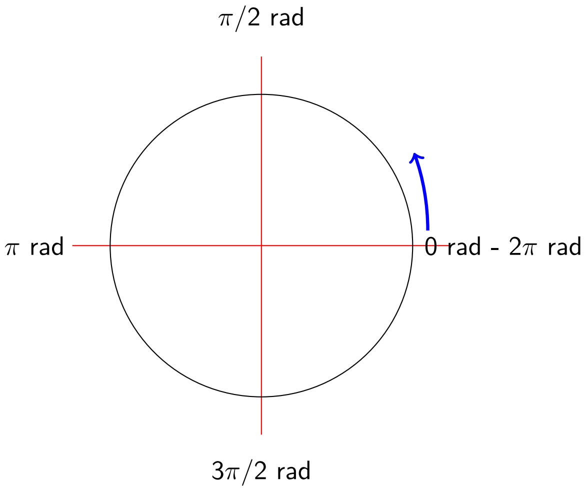
Un degré (symbole : deg. s.) est équivalent à 1/360 part d'une circonférence. Le degré, divisé en minutes et secondes qui sont des soixantièmes, vient des Babyloniens, qui comptaient en base 60 (sexagésimale)

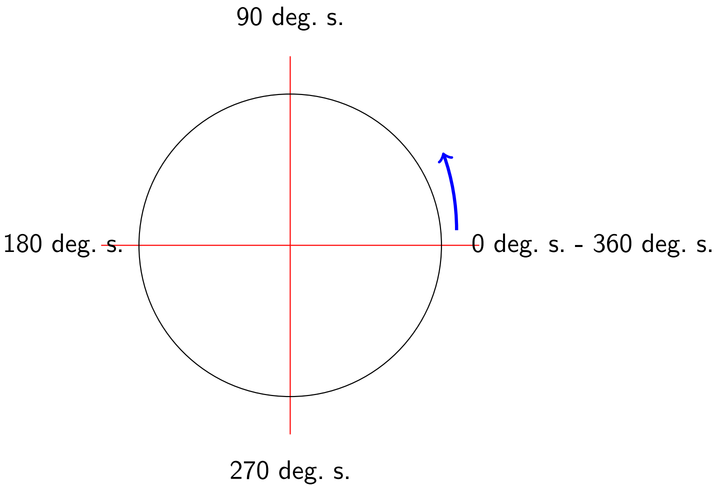
- Angle droite $= 90^\circ$ (degré sexagésimale).
- 1 degré sexagésimale $= 60'$ (minutes sexagésimale).
- 1 minute sexagésimale $= 60''$ (secondes sexagésimales).

$$360 \text{ deg. s. } = 2\pi \text{ rad.}$$

ou

$$180 \text{ deg. s. } = \pi \text{ rad.}$$


$\pi/2$ rad
π rad
0 rad - 2π rad
$3\pi/2$ rad


90 deg. s.
180 deg. s.
0 deg. s. - 360 deg. s.
270 deg. s.

Facteur de conversion

Comme 180 deg. s. $= \pi$ rad. on a

$$\frac{\pi}{180} \cdot \frac{\text{rad.}}{\text{deg. s.}} = 1 = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{\text{deg. s.}}{\text{rad.}}$$

Si on a X deg. s, pour les transformer en Y rad. on utilise:

$$Y \text{ rad.} = X \text{ deg. s} \cdot 1 = X \text{ deg. s} \cdot \frac{\pi}{180} \cdot \frac{\text{rad.}}{\text{deg. s.}},$$

en conséquence

$$Y \text{ rad.} = X \frac{\pi}{180} \text{ rad.} \Rightarrow Y = X \frac{\pi}{180}.$$

Au contraire, si on a X rad. , pour les transformer en Y deg. s. on utilise:

$$Y \text{ deg. s.} = X \text{ rad.} \cdot \frac{180}{\pi} \cdot \frac{\text{deg. s.}}{\text{rad.}} \Rightarrow Y = X \frac{180}{\pi}$$

Exemple

$X = 90$ deg. s. sont

$$Y = 90 \times \frac{\pi}{180} \text{ rad.} \; = 90 \times \frac{\pi}{90 \times 2} \text{ rad.} \; = \frac{\pi}{2} \text{ rad.}$$

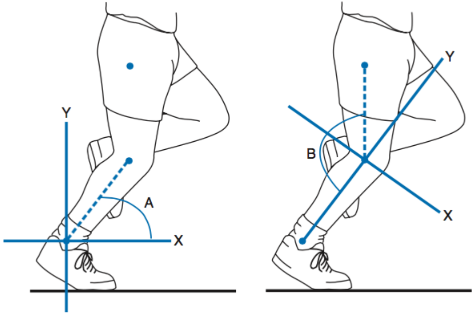
Exemple

$X = \pi/4$ rad. sont

$$Y = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{180}{\pi} \text{ deg. s.} \; = \frac{180}{4} \text{ deg. s.} \; = 45 \text{ deg. s.}$$

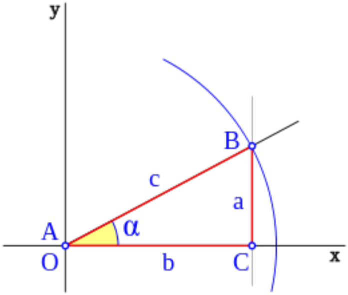
Définition

Les *fonctions trigonométriques* sont utilisées pour relier les angles avec les longueurs.



Rapports trigonométriques

Le triangle ABC est un triangle rectangle en C; Nous allons l'utiliser pour introduire les rapports *sinus, cosinus et tangente*, de l'angle α, correspondant au sommet A, situé au centre du cercle.



$$\sin\alpha = \frac{\overline{CB}}{\overline{AB}} = \frac{a}{c}$$
$$\cos\alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{b}{c}$$
$$\tan\alpha = \frac{\overline{CB}}{\overline{AC}} = \frac{a}{b}$$

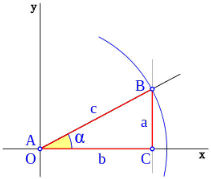
Théorème (Théorème de Pythagore)

Le carré de la longueur de l'hypoténuse, qui est le côté opposé à l'angle droit, est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

En divisent par c^2, on obtient

$$\frac{c^2}{c^2} = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2, \quad 1 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha.$$



Quelques conséquences importantes de $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

- La valeur maximale est égal à 1 et la valeur minimale égal à -1.

$$-1 \leq \sin\alpha \leq 1, \quad -1 \leq \cos\alpha \leq 1.$$

On peut le déduire en supposant que $\cos\alpha < -1$, alors

$$\begin{aligned} \cos^2\alpha &> 1 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha \\ \cos^2\alpha &> \sin^2\alpha + \cos^2\alpha \text{ (nous soustrayons } \cos^2\alpha) \\ \cos^2\alpha - \cos^2\alpha &> \sin^2\alpha + \cos^2\alpha - \cos^2\alpha \\ 0 &> \sin^2\alpha \text{ (c'est contradictoire)} \end{aligned}$$

Tout nombre réel au carré est toujours supérieur ou égal à zéro.

Equations avec expressions trigonométriques

Quelque fois, nous trouverons que pour résoudre un problème, nous devons déterminer la valeur de l'angle α comme par exemple: Trouvez α tel que

$$\begin{aligned}\sin\alpha = 0.5 \Rightarrow \alpha &= \sin^{-1}(0.5) \\ &= \arcsin 0.5 = 0.5235987755982988 \text{ rad.}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}0.5235987755982988 \text{ rad.} &= 0.5235987755982988\,\frac{180}{\pi} \text{ deg. s.} \\ &= 30 \text{ deg. s.}\end{aligned}$$

Fonctions trigonométriques inverses

Ils sont définis:

$$\alpha = \arcsin x, \text{ tel que } \sin \alpha = x,$$
$$\alpha = \arccos x, \text{ tel que } \cos \alpha = x,$$
$$\alpha = \arctan x, \text{ tel que } \tan \alpha = x.$$

Remarque

En général x est un nombre réel et l'angle α est exprimé en radians, donc si nous voulons l'exprimer en degrés sexagésimales, nous devons procéder

$$\alpha \cdot \frac{180}{\pi} \text{ deg. s.}$$

- La physique est une science dans laquelle les formules mathématiques sont vérifiées par l'expérimentation.
- Aucune quantité physique ne peut être déterminée avec une précision totale car nos sens sont limités, même lorsque nous les étendons à l'aide d'appareils de mesure avancés (tels que des microscopes électroniques ou d'autres appareils similaires).
- Par conséquent, il est important de développer des méthodes pour déterminer la précision des mesures.
- **La précision d'une mesure dépend de la sensibilité de l'appareil, de l'habileté de la personne qui la prend et du nombre de fois qu'elle est répétée.**

Exemple

Considérons que dans un laboratoire la surface d'une plaque rectangulaire est mesurée avec une règle. Supposons que la précision à laquelle une dimension particulière de la plaque peut être mesurée est de $\pm 0,1$ cm.

- Si la longueur ℓ mesuré est de 16.3 cm, il est possible de dire qu'il ne se trouve qu'entre $16.2 = 16.3 - 0.1$ y $16.4 = 16.3 + 0.1$ cm, c'est-à-dire

$$16.2 \leq \ell \leq 16.3 \Leftrightarrow \ell \in [16.2, 16.3].$$

- Dans ce cas, nous dirons que la valeur observée a trois chiffres significatifs.

Chiffres significatifs

- Les mesures physiques sont approximatives et le dernier chiffre significatif est supposé avoir été calculé par une estimation quelconque.
- Lors de l'écriture de tels nombres, des zéros sont souvent inclus pour indiquer la position correcte du point décimal. À l'exception de ces zéros, tous les autres chiffres sont considérés comme *chiffres significatifs*.

Exemple

- 76 000 m. a deux chiffres significatifs, utilisant la notation scientifique, 7.6×10^4 m.
- 4.003 cm, a quatre chiffres significatifs, utilisant la notation scientifique 3.4×10^{-1} cm.
- 60 400 cm, a trois chiffres significatifs, utilisant la notation scientifique 6.04×10^4 cm.

Règle 1

Lorsque des nombres approximatifs sont multipliés ou divisés, le nombre de chiffres significatifs dans la réponse finale contient le même nombre de chiffres significatifs que la valeur *moindre précision*. Par " moindre précision ", nous entendons le facteur qui contient le moins de chiffres représentatifs.

Exemple

$$\underbrace{9.54}_{\text{3 chiffres}} \text{ cm} \times \underbrace{3.4}_{\text{2 chiffres}} \text{ cm} = \underbrace{32.436}_{\text{5 chiffres}} \text{ cm}^2 \approx 3.2 \times 10^1 \text{ cm}^2 = \underbrace{32}_{\text{2 chiffres}} \text{ cm}^2$$

Règle 2

Lors de l'ajout ou de la soustraction de nombres approximatifs, le nombre de décimales dans le résultat doit être égal au plus petit nombre de décimales de tout terme ajouté.

Exemple

$$9.54 \text{ cm } + 3.4 \text{ cm } + 9.54 \text{ cm } + 3.4 \text{ cm } = 25.88 \text{ cm } \approx 25.9 \text{ cm}$$

Définition (Erreur absolue)

On appelle **erreur absolue** à la valeur absolue de la différence entre la valeur exacte X qu'elle prend une quantité physique et la valeur approchée $\widehat{X}$:

$$\text{Erreur absolue} := |X - \widetilde{X}|.$$

Exemple

Si $X = 25.88$ cm et la valeur mesurée est $\widehat{X} = 25.9$ cm alors l'erreur absolue commis
$|25.88 - 25.9| = |-0.02| = 0.02 = 2 \times 10^{-2}$ cm.

Définition (Erreur relative)

On appelle **erreur relative** à la valeur absolue de le quotient entre l'erreur absolue $|X - \widetilde{X}|$ divisé par la valeur absolu de le vrai valeur X :

$$\text{Erreur relative} := \left| \frac{X - \widetilde{X}}{X} \right|.$$

Exemple

Si $X = 25.88$ cm et la valeur mesuré est $\widehat{X} = 25.9$ cm alors l'erreur relative commis est

$$\frac{|25.88 - 25.9|}{|25.88|} = \frac{|-0.02|}{25.88} = 0.00078 = 7.8 \times 10^{-4}.$$