Forces rotationnelles

Antonio Falcó

Le moment de force

La deuxième loi de Newton en rotation

Vitesse et accélération angulaire

Les relations entre variables linéaires et variables angulaires

Équilibre statique

La conservation du quantité de mouvement et du moment cinétique

Applications

Forces rotationnelles

Antonio Falcó

Le moment de force

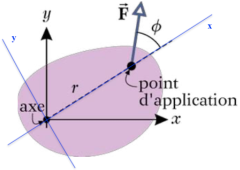
La deuxième loi de Newton en rotation
- Vitesse et accélération angulaire
- Les relations entre variables linéaires et variables angulaires

Équilibre statique
- La conservation du quantité de mouvement et du moment cinétique

Applications

Définition (Le moment de force)

Le moment de force est la capacité d'une force à produire une rotation d'un objet autour d'un axe. Cette quantité dépend du module de la force, de son orientation et de la position de son point d'application.



La force $\mathbf{F} = (F\cos\phi, F\sin\phi, 0)$ et $\mathbf{r} = (r, 0, 0)$. Alors

$$\mathbf{r} \wedge \mathbf{F} = \left(\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ F\sin\phi & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} r & 0 \\ F\cos\phi & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} r & 0 \\ F\cos\phi & F\sin\phi \end{vmatrix} \right)$$
$$= (0, 0, r\,F\,\sin\phi)$$

Forces rotationnelles
Antonio Falcó
Le moment de force
La deuxième loi de Newton en rotation
Vitesse et accélération angulaire
Les relations entre variables linéaires et variables angulaires
Équilibre statique
La conservation du quantité de mouvement et du moment cinétique
Applications

Définition (Le moment de force)

Le moment de force **F** à **r** est note par $\boldsymbol{\tau}$ et on le calcul en utilisant:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{F}$$

Simplification théorique

Si $\mathbf{F} \neq \lambda \mathbf{r}$ (la force n'est pas parallèle au levier) on peut choisir un système de coordonnées telles que

$$\mathbf{F} = (F_x, F_y, 0) \text{ et } \mathbf{r} = (r_x, r_y, 0).$$

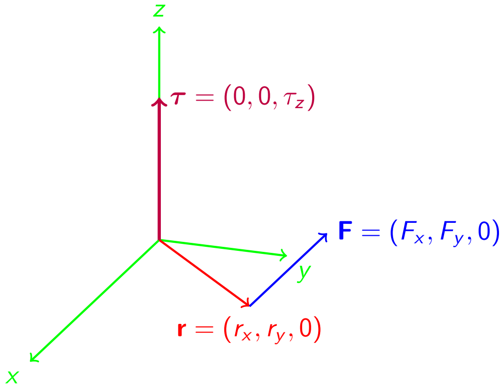
et en conséquence

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{F} &= \left(\begin{vmatrix} r_y & 0 \\ F_y & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} r_x & 0 \\ F_x & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} r_x & r_y \\ F_x & F_y \end{vmatrix} \right) \\ &= (0, 0, r_x\, F_y - r_y\, F_x)\end{aligned}$$

et $\|\boldsymbol{\tau}\| = |\tau_z| = |r_x\, F_y - r_y\, F_x|$.

Forces rotationnelles
Antonio Falcó
Le moment de force
La deuxième loi de Newton en rotation
Vitesse et accélération angulaire
Les relations entre variables linéaires et variables angulaires
Équilibre statique
La conservation du quantité de mouvement et du moment cinétique
Applications

Le moment de force



$$\tau_z = r_x \cdot F_y - r_y \cdot F_x. = F \cdot r \cdot \sin\phi.$$

Forces rotationnelles

Antonio Falcó

Le moment de force

La deuxième loi de Newton en rotation

Vitesse et accélération angulaire

Les relations entre variables linéaires et variables angulaires

Équilibre statique

La conservation du quantité de mouvement et du moment cinétique

Applications

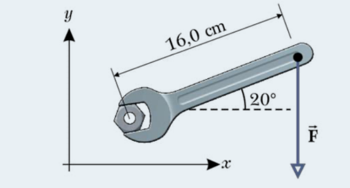
Forces rotationnelles
Antonio Falcó
Le moment de force
La deuxième loi de Newton en rotation
Vitesse et accélération angulaire
Les relations entre variables linéaires et variables angulaires
Équilibre statique
La conservation du quantité de mouvement et du moment cinétique
Applications

Remarque

- Il est important de comprendre que le moment de force est défini par rapport à un axe. Si l'axe change, le moment de force va changer.
- Dans le SI, l'unité du moment de force est le newtonmètre (N · m). Celuici a les mêmes dimensions que le joule, l'unité d'énergie. Cependant, l'unité J est utilisée exclusivement pour l'énergie.

Problème

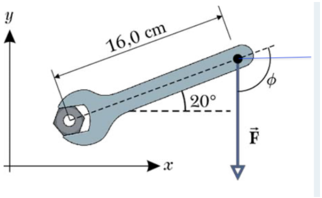
Pour visser un écrou, on applique une force verticale de 150 N sur la clé, comme il est indiqué dans la figure ci-contre. La clé est inclinée à un angle de 20.0° par rapport à l'horizontale. La distance entre le point d'application de la force et le centre de l'écrou est de 16.0 cm. Calculez le moment de force par rapport à un axe qui passe par le centre de l'écrou.



Forces rotationnelles
Antonio Falcó
Le moment de force
La deuxième loi de Newton en rotation
Vitesse et accélération angulaire
Les relations entre variables linéaires et variables angulaires
Équilibre statique
La conservation du quantité de mouvement et du moment cinétique
Applications

Forces rotationnelles
Antonio Falcó
Le moment de force
La deuxième loi de Newton en rotation
Vitesse et accélération angulaire
Les relations entre variables linéaires et variables angulaires
Équilibre statique
La conservation du quantité de mouvement et du moment cinétique
Applications

Réponse



L'angle $\phi = 20.0^\circ + 90^\circ = 110^\circ$. Alors,

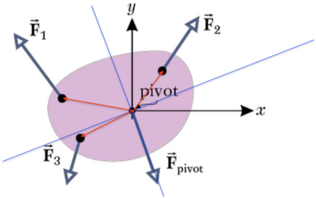
$$\tau_z = r\,F\,\sin\phi = 0.16 \cdot 150 \cdot (-\sin 110^\circ) = -22.6 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

Définition (Le moment de force résultant)

Un objet physique est soumis à plusieurs forces

$$\{\mathbf{F}_1, \ldots, \mathbf{F}_n, \mathbf{F}_{\text{pivot}}\}$$

L'objet peut tourner autour d'un pivot. Le pivot exerce aussi une force $\mathbf{F}_{\text{pivot}}$ afin que l'objet n'ait pas de mouvement de translation.



La force du pivot génère un moment de force nul parce qu'elle est exercée sur l'axe, ce qui implique que son bras de levier est nul $\boldsymbol{\tau}_{\text{pivot}} = \mathbf{r}_{\text{pivot}} \wedge \mathbf{F}_{\text{pivot}} = \mathbf{0} \wedge \mathbf{F}_{\text{pivot}} = \mathbf{0}$.

Forces rotationnelles

Antonio Falcó

Le moment de force

La deuxième loi de Newton en rotation

Vitesse et accélération angulaire

Les relations entre variables linéaires et variables angulaires

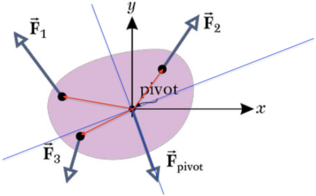
Équilibre statique

La conservation du quantité de mouvement et du moment cinétique

Applications

Forces rotationnelles
Antonio Falcó
Le moment de force
La deuxième loi de Newton en rotation
Vitesse et accélération angulaire
Les relations entre variables linéaires et variables angulaires
Équilibre statique
La conservation du quantité de mouvement et du moment cinétique
Applications

Définition (Le moment de force résultant)



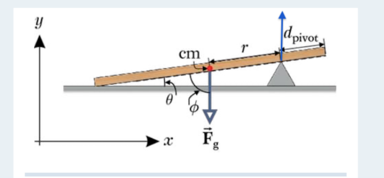
Alors on a un moment $\boldsymbol{\tau}_i$ pour chaque force $\mathbf{F}_i$ à la position $\mathbf{r}_i$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$. En conséquence, le moment de force résultant est

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau} &= \boldsymbol{\tau}_1 + \boldsymbol{\tau}_2 + \cdots + \boldsymbol{\tau}_n \\ &= \mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \wedge \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{r}_n \wedge \mathbf{F}_n.\end{aligned}$$

Forces rotationnelles
Antonio Falcó
Le moment de force
La deuxième loi de Newton en rotation
Vitesse et accélération angulaire
Les relations entre variables linéaires et variables angulaires
Équilibre statique
La conservation du quantité de mouvement et du moment cinétique
Applications

Problème

Un madrier a une longueur de 2.430 m et une masse de 17.6 kg. Il est supporté par un pivot situé à une distance de 40.6 cm de son extrémité droite, et il touche au sol à son extrémité gauche. Il est incliné à 10.0° par rapport à l'horizontale. Calculez le moment de force de la force gravitationnelle par rapport au pivot.

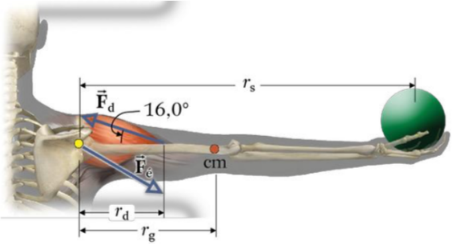


L'angle $\phi = 90^\circ - \theta = 90^\circ - 10^\circ = 80^\circ$. La distance entre le point d'application de $\mathbf{F}_g$ et le pivot est

$$r = \frac{L}{2} - d_{\text{pivot}} = \frac{2.430}{2} - 0.406 = 0.809 \text{ m}$$

Problème

Une femme tient une sphère de 1.36 kg dans la main en tenant le bras horizontalement. Le bras est retenu par l'articulation de l'épaule (qui exerce une force et par le deltoïde, un muscle qui exerce une force de tension La force du deltoïde est exercée à une distance $r_d = 15.0$ cm de l'épaule, à un angle de 16.0° par rapport au bras. Le bras a une masse de 3.34 kg, et son centre de masse est situé à une distance $r_g = 27.8$ cm de l'épaule. La sphère est située à une distance $r_s = 47.0$ cm de l'épaule. **Calculez le moment de force résultante par rapport à l'épaule**.



Forces rotationnelles
Antonio Falcó
Le moment de force
La deuxième loi de Newton en rotation
Vitesse et accélération angulaire
Les relations entre variables linéaires et variables angulaires
Équilibre statique
La conservation du quantité de mouvement et du moment cinétique
Applications

Forces rotationnelles
Antonio Falcó
Le moment de force
La deuxième loi de Newton en rotation
Vitesse et accélération angulaire
Les relations entre variables linéaires et variables angulaires
Équilibre statique
La conservation du quantité de mouvement et du moment cinétique
Applications

Réponse

Il y a quatre forces au système

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_{\text{main}} &= (0, -1.36 \cdot 10, 0) \text{ N},\\
\mathbf{F}_g &= (0, -3.24 \cdot 10, 0) \text{ N},\\
\mathbf{F}_d &= (-F_d \cos 16^\circ, F_d \sin 16^\circ, 0) \text{ N},\\
\mathbf{F}_e &= (F_x^e, F_y^e, 0) \text{ N}, .
\end{aligned}$$

exercées à (par rapport l'épaule)

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_{\text{main}} &= (0.47, 0, 0) \text{ m},\\
\mathbf{r}_g &= (0.278, 0, 0) \text{ m},\\
\mathbf{r}_d &= (0.15, 0, 0) \text{ m},\\
\mathbf{r}_e &= (0, 0, 0) \text{ m}, .
\end{aligned}$$

alors on va calculé quatre moments de force $\boldsymbol{\tau}_{\text{main}}, \boldsymbol{\tau}_g, \boldsymbol{\tau}_d$ et $\boldsymbol{\tau}_e$.

Forces rotationnelles

Antonio Falcó

Le moment de force

La deuxième loi de Newton en rotation

Vitesse et accélération angulaire

Les relations entre variables linéaires et variables angulaires

Équilibre statique

La conservation du quantité de mouvement et du moment cinétique

Applications

Réponse

On va les calculez

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\tau}_{\text{main}} &= \mathbf{r}_{\text{main}} \wedge \mathbf{F}_{\text{main}} \\
&= (0.47, 0, 0) \wedge (0, -1.36 \cdot 10, 0) \\
&= (0, 0, -6.392) \text{ N m}, \\
\boldsymbol{\tau}_g &= \mathbf{r}_g \wedge \mathbf{F}_g \\
&= (0.278, 0, 0) \wedge (0, -3.24 \cdot 10, 0) \\
&= (0, 0, -9.0072) \text{ N m}, \\
\boldsymbol{\tau}_d &= \mathbf{r}_d \wedge \mathbf{F}_d \\
&= (0.15, 0, 0) \wedge (-F_d \cos 16^\circ, F_d \sin 16^\circ, 0) \\
&= (0, 0, 0.15 \cdot F_d \sin 16^\circ) \text{ N m}, \\
\boldsymbol{\tau}_e &= \mathbf{r}_e \wedge \mathbf{F}_e \\
&= (0, 0, 0) \wedge (F_x^e, F_y^e, 0) = (0, 0, 0) \text{ N m}.
\end{aligned}
$$

Forces rotationnelles
Antonio Falcó
Le moment de force
La deuxième loi de Newton en rotation
Vitesse et accélération angulaire
Les relations entre variables linéaires et variables angulaires
Équilibre statique
La conservation du quantité de mouvement et du moment cinétique
Applications

Réponse

Le moment de force résultante par rapport l'épaule est

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau}_{\text{résultante}} &= \boldsymbol{\tau}_{\text{main}} + \boldsymbol{\tau}_g + \boldsymbol{\tau}_d + \boldsymbol{\tau}_e \\ &= (0,0,-6.392) + (0,0,-9.0072) \\ &+ (0,0,0.15 \cdot F_d \sin 16^\circ) + (0,0,0,0) \\ &= (0,0,-15.3992 + 0.15 \cdot F_d \sin 16^\circ) \text{ N m}.\end{aligned}$$

En conséquence, le moment de force est nul si et seulement si la norme de la force F_d exercé par le deltoïde satisfait l'équation

$$-15.3992 + 0.15 \cdot F_d \sin 16^\circ = 0 \Rightarrow F_d = \frac{15.3992}{0.15 \sin 16^\circ} = 372.45 \text{ N}.$$

La deuxième loi de Newton en rotation

Soit X un objet physique de masse $m > 0$, à l'instant de temps fixé t_0, telle que le moment de force résultant sur X est égal à $\boldsymbol{\tau} = (0, 0, \tau_z)$ avec une accélération angulaire α_z. Alors il existe le moment d'inertie I tel que

$$\tau_z = I \cdot \alpha_z.$$

Le unités sont $[\alpha_z] =$rad/s^2 et $[\tau_z] =$N $\cdot$ m, en conséquence les unités de le moment d'inertie son

$$[I] = \text{ kg } \cdot \text{ m}^2.$$

Alors, pour un disque circulaire de masse m et rayon r on peut calculer le moment d'inertie comme

$$I = \frac{1}{2} m \cdot r^2$$

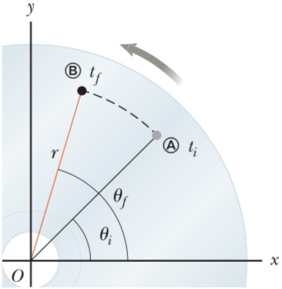
Forces rotationnelles
Antonio Falcó
Le moment de force
La deuxième loi de Newton en rotation
Vitesse et accélération angulaire
Les relations entre variables linéaires et variables angulaires
Équilibre statique
La conservation du quantité de mouvement et du moment cinétique
Applications

Définition (La vitesse angulaire)

On dit qu'un objet physique a une vitesse angulaire ω (prononcez «oméga»). Si la position angulaire est $\theta(t_i)$ au temps t_i et la position angulaire est $\theta(t_f)$ au temps $t_f \geq t_i$, alors la vitesse angulaire moyenne est

$$\frac{1}{2}(\omega(t_f) + \omega(t_i)) = \frac{\theta(t_f) - \theta(t_i)}{(t_f - t_i)}$$

Si $t_f = t = t_i$ on obtient la vitesse angulaire instantanée $\omega(t)$. La vitesse angulaire a des unités $[\omega] = T^{-1}$ dans le S.I.: rad/s.



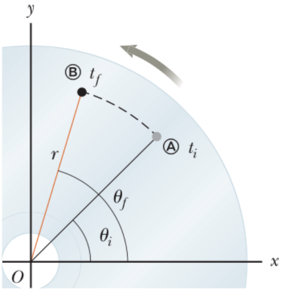
Forces rotationnelles
Antonio Falcó
Le moment de force
La deuxième loi de Newton en rotation
Vitesse et accélération angulaire
Les relations entre variables linéaires et variables angulaires
Équilibre statique
La conservation du quantité de mouvement et du moment cinétique
Applications

Définition (L'accélération angulaire)

Si la vitesse angulaire change, il y a une accélération angulaire α. Lorsque la vitesse angulaire est $\omega(t_i)$ au temps t_i et qu'elle est $\omega(t_f)$ au temps t_f, alors l'accélération angulaire moyenne est

$$\frac{1}{2}(\alpha(t_f) + \alpha(t_i)) = \frac{\omega(t_f) - \omega(t_i)}{(t_f - t_i)}$$

Si $t_f = t = t_i$ on obtient la accélération angulaire instantanée $\alpha(t)$. La accélération angulaire a des unités $[\omega] = T^{-2}$ dans le S.I.: rad/s^2.



Forces rotationnelles
Antonio Falcó
Le moment de force
La deuxième loi de Newton en rotation
Vitesse et accélération angulaire
Les relations entre variables linéaires et variables angulaires
Équilibre statique
La conservation du quantité de mouvement et du moment cinétique
Applications

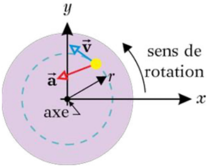
Forces rotationnelles
Antonio Falcó
Le moment de force
La deuxième loi de Newton en rotation
Vitesse et accélération angulaire
Les relations entre variables linéaires et variables angulaires
Équilibre statique
La conservation du quantité de mouvement et du moment cinétique
Applications

Convention

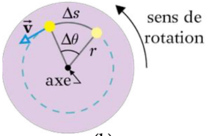
Dans ce cours on prend l'hypothèse que les quantités cinématiques angulaires vectorielles son confinés au axis z :

$$\boldsymbol{\theta}(t) = (0, 0, \theta(t))$$
$$\boldsymbol{\omega}(t) = (0, 0, \omega(t))$$
$$\boldsymbol{\alpha}(t) = (0, 0, \alpha(t))$$

La direction de la quantité vectorielle correspond à la direction du axe de rotation.



(a)



(b)

La figure montre le point jaune à deux instants différents, séparés d'un intervalle de temps Δt. Dans cet intervalle de temps, la table tournante a effectué un déplacement angulaire $\Delta\theta$. Il est possible de relier la distance parcourue Δs par le point jaune et le déplacement angulaire:

$$\Delta s = r|\Delta\theta|.$$

Forces rotationnelles
Antonio Falcó
Le moment de force
La deuxième loi de Newton en rotation
Vitesse et accélération angulaire
Les relations entre variables linéaires et variables angulaires
Équilibre statique
La conservation du quantité de mouvement et du moment cinétique
Applications

On trouve une relation entre le module de la vitesse linéaire et la vitesse angulaire à l'aide d'une dérivée:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = r\frac{|\Delta\theta|}{\Delta t}.$$

et si on prend $\Delta t \approx 0$ on obtient la norme de la vitesse linéaire:

$$v = \|\boldsymbol{v}\| = r\omega.$$

Si $r =$ **constant**, alors on appelle à v vitesse tangentielle et on introduit l'accélération tangentielle (en norme) comme:

$$a_t = \|\mathbf{a}_t\| = r\alpha.$$

La composante perpendiculaire à $\mathbf{a}_t$ et parallèle à $\mathbf{r}$, noté par $\mathbf{a}_c$, on l'appelle accélération centripète.

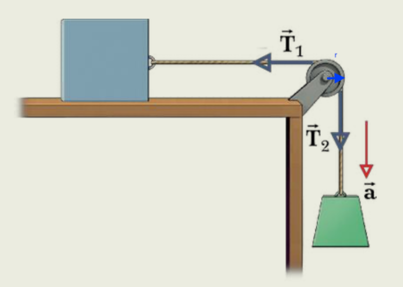
Théorème

Les éléments d'un objet rigide en rotation ont tous la même vitesse (accélération) angulaire; plus ils sont éloignés de l'axe de rotation, plus le module de leur vitesse linéaire est grand.

Forces rotationnelles
Antonio Falcó
Le moment de force
La deuxième loi de Newton en rotation
Vitesse et accélération angulaire
Les relations entre variables linéaires et variables angulaires
Équilibre statique
La conservation du quantité de mouvement et du moment cinétique
Applications

Exemple

Un bloc est relié à un poids par une corde idéale qui passe par une poulie de rayon r dont la masse m est non négligeable, comme à la figure suivante. Le poids accélère vers le bas $\mathbf{a}_t = (0, -a_t, 0)$, et la corde ne glisse pas sur la poulie.



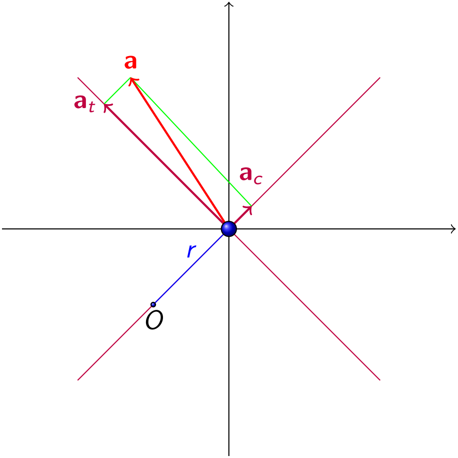
On connaît l'accélération tangentielle a_t alors l'accélération angulaire est $\alpha_z = r \cdot a_t$. En conséquence, le moment de la force est

$$\tau_z = I \cdot \alpha_z = \frac{1}{2} m \cdot r^2 \cdot (r \cdot a_t) = \frac{1}{2} m \cdot r^3 \cdot a_t.$$

Forces rotationnelles
Antonio Falcó
Le moment de force
La deuxième loi de Newton en rotation
Vitesse et accélération angulaire
Les relations entre variables linéaires et variables angulaires
Équilibre statique
La conservation du quantité de mouvement et du moment cinétique
Applications

La décomposition de l'accélération linéaire

Soit X un objet rigide avec accélération linéaire $\mathbf{a} = (a_x, a_y, 0)$ constant et angulaire α aussi constant.



$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_c \text{ et } a = \|\mathbf{a}\| = \sqrt{a_t^2 + a_c^2}.$$

Forces rotationnelles

Antonio Falcó

Le moment de force

La deuxième loi de Newton en rotation

Vitesse et accélération angulaire

Les relations entre variables linéaires et variables angulaires

Équilibre statique

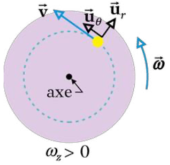
La conservation du quantité de mouvement et du moment cinétique

Applications

Forces rotationnelles
Antonio Falcó
Le moment de force
La deuxième loi de Newton en rotation
Vitesse et accélération angulaire
Les relations entre variables linéaires et variables angulaires
Équilibre statique
La conservation du quantité de mouvement et du moment cinétique
Applications

Remarque

Le système de coordonnées cartésiennes n'est pas bien adapté au mouvement circulaire, car la vitesse change continuellement d'orientation.



On utilise plutôt le système de coordonnées polaires:

$$(x, y, 0)_c = (r\cos\theta, r\sin\theta, 0) \text{ coordonnées cartésiennes}$$

$$(r, \theta, 0)_p = (\sqrt{x^2+y^2}, \arctan\frac{y}{x}, 0) \text{ coordonnées polaires.}$$

Conséquences de la deuxième loi de Newton en rotation

Comme le moment d'inertie $I \neq 0$ (il joue le rôle de la masse), on a deux situations possibles pour

$$\alpha_z = \begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha \neq 0 \end{cases}$$

La accélération angulaire constant α quand la vitesse angulaire en t_0 est $\omega(t_0)$ et la vitesse angulaire pour tout temps $t > t_0$ est noté par $\omega(t)$ est définie par

$$\alpha = \frac{\omega(t) - \omega(t_0)}{(t - t_0)}$$

Si $\alpha = 0$ alors $\omega(t) = \omega(t_0)$ la vitesse angulaire reste constant au contraire

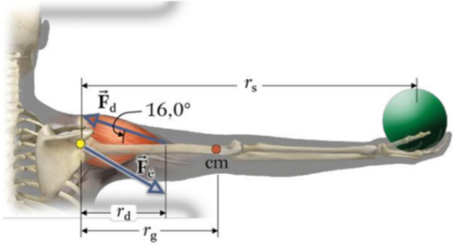
$$\omega(t) = \omega(t_0) + \alpha\,(t - t_0),$$

et l'objet rigide à une vitesse angulaire que change en fonction du temps.

Forces rotationnelles
Antonio Falcó
Le moment de force
La deuxième loi de Newton en rotation
Vitesse et accélération angulaire
Les relations entre variables linéaires et variables angulaires
Équilibre statique
La conservation du quantité de mouvement et du moment cinétique
Applications

Problème

Une femme tient une sphère de 1.36 kg dans la main en tenant le bras horizontalement. Le bras est retenu par l'articulation de l'épaule (qui exerce une force et par le deltoïde, un muscle qui exerce une force de tension La force du deltoïde est exercée à une distance $r_d = 15.0$ cm de l'épaule, à un angle de 16.0° par rapport au bras. Le bras a une masse de 3.34 kg, et son centre de masse est situé à une distance $r_g = 27.8$ cm de l'épaule. La sphère est située à une distance $r_s = 47.0$ cm de l'épaule. **En supposant que la vitesse angulaire initiale est nulle, discutez en utilisant le moment de force résultante par rapport l'épaule quelle sont toutes les situations physiques possibles**.



Forces rotationnelles
Antonio Falcó
Le moment de force
La deuxième loi de Newton en rotation
Vitesse et accélération angulaire
Les relations entre variables linéaires et variables angulaires
Équilibre statique
La conservation du quantité de mouvement et du moment cinétique
Applications

Réponse

Le moment de force résultante par rapport l'épaule est

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau}_{\text{résultante}} &= \boldsymbol{\tau}_{\text{main}} + \boldsymbol{\tau}_g + \boldsymbol{\tau}_d + \boldsymbol{\tau}_e \\ &= (0, 0, -6.392) + (0, 0, -9.0072) \\ &+ (0, 0, 0.15 \cdot F_d \sin 16^\circ) + (0, 0, 0, 0) \\ &= (0, 0, -15.3992 + 0.15 \cdot F_d \sin 16^\circ) \text{ N m.}\end{aligned}$$

En conséquence, le moment de force résultante dépends de

$$\tau_z = -15.3992 + 0.15 \cdot F_d \sin 16^\circ \begin{cases} > 0 \\ = 0 \\ < 0. \end{cases}$$

Comme le moment d'inertie du bras $I_{\text{bras}} > 0$ et $\tau_z = I_{\text{bras}} \cdot \alpha$ on obtient:

- $\alpha > 0$ est équivalent à $-15.3992 + 0.15 \cdot F_d \sin 16^\circ > 0$,
- $\alpha = 0$ est équivalent à $-15.3992 + 0.15 \cdot F_d \sin 16^\circ = 0$,
- $\alpha < 0$ est équivalent à $-15.3992 + 0.15 \cdot F_d \sin 16^\circ < 0$.

Forces rotationnelles
Antonio Falcó
Le moment de force
La deuxième loi de Newton en rotation
Vitesse et accélération angulaire
Les relations entre variables linéaires et variables angulaires
Équilibre statique
La conservation du quantité de mouvement et du moment cinétique
Applications

Forces rotationnelles
Antonio Falcó
Le moment de force
La deuxième loi de Newton en rotation
Vitesse et accélération angulaire
Les relations entre variables linéaires et variables angulaires
Équilibre statique
La conservation du quantité de mouvement et du moment cinétique
Applications

Réponse

Si

- $\alpha > 0$ est équivalent à $-15.3992 + 0.15 \cdot F_d \sin 16^\circ > 0$,
- $\alpha = 0$ est équivalent à $-15.3992 + 0.15 \cdot F_d \sin 16^\circ = 0$,
- $\alpha < 0$ est équivalent à $-15.3992 + 0.15 \cdot F_d \sin 16^\circ < 0$.

et on connaît que $\alpha = 0$ si et seulement si $F_d = 372.45$ N, on obtient

- $\alpha > 0$ est équivalent à $F_d > 372.45$ N, dans ce cas le bras tourne en haut,
- $\alpha = 0$ est équivalent à $F_d = 372.45$ N, dans ce cas le bras reste immobile,
- $\alpha < 0$ est équivalent à $F_d < 372.45$ N, dans ce cas le bras tourne en bas.

Définition (Équilibre statique)

Soit X un corps rigide au repos (la vitesse linéaire initiale $v(t_0) = \mathbf{0}$ m/s et la vitesse angulaire initiale $\omega(t_0) = 0$ rad/s). On dit que X est en équilibre statique si la accélération linéaire est nulle

$$\mathbf{a} = \mathbf{0}$$

et la accélération angulaires est nulle

$$\alpha = 0.$$

Il est équivalent à dire que la force résultante

$$\mathbf{F} = \mathbf{0}$$

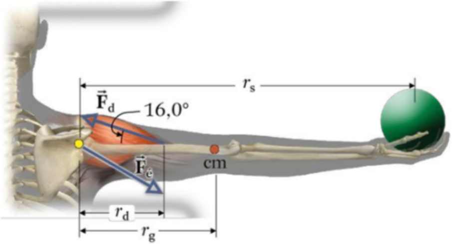
et le moment de force résultante est aussi nul

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}.$$

Forces rotationnelles
Antonio Falcó
Le moment de force
La deuxième loi de Newton en rotation
Vitesse et accélération angulaire
Les relations entre variables linéaires et variables angulaires
Équilibre statique
La conservation du quantité de mouvement et du moment cinétique
Applications

Problème

Une femme tient une sphère de 1.36 kg dans la main en tenant le bras horizontalement. Le bras est retenu par l'articulation de l'épaule (qui exerce une force et par le deltoïde, un muscle qui exerce une force de tension La force du deltoïde est exercée à une distance $r_d = 15.0$ cm de l'épaule, à un angle de 16.0° par rapport au bras. Le bras a une masse de 3.34 kg, et son centre de masse est situé à une distance $r_g = 27.8$ cm de l'épaule. La sphère est située à une distance $r_s = 47.0$ cm de l'épaule. **En supposant que le bras est en équilibre statique, trouvez la norme de la force au deltoïde et la force exercée par l'articulation de l'épaule sur le bras**.



Forces rotationnelles
Antonio Falcó
Le moment de force
La deuxième loi de Newton en rotation
Vitesse et accélération angulaire
Les relations entre variables linéaires et variables angulaires
Équilibre statique
La conservation du quantité de mouvement et du moment cinétique
Applications

Forces rotationnelles

Antonio Falcó

Le moment de force

La deuxième loi de Newton en rotation

Vitesse et accélération angulaire

Les relations entre variables linéaires et variables angulaires

Équilibre statique

La conservation du quantité de mouvement et du moment cinétique

Applications

Réponse

Il y a quatre forces au système

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_{\text{main}} &= (0, -1.36 \cdot 10, 0) \text{ N}, \\
\mathbf{F}_g &= (0, -3.24 \cdot 10, 0) \text{ N}, \\
\mathbf{F}_d &= (-F_d \cos 16^\circ, F_d \sin 16^\circ, 0) \text{ N}, \\
\mathbf{F}_e &= (F_x^e, F_y^e, 0) \text{ N}, .
\end{aligned}$$

exercées à (par rapport l'épaule)

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_{\text{main}} &= (0.47, 0, 0) \text{ m}, \\
\mathbf{r}_g &= (0.278, 0, 0) \text{ m}, \\
\mathbf{r}_d &= (0.15, 0, 0) \text{ m}, \\
\mathbf{r}_e &= (0, 0, 0) \text{ m}, .
\end{aligned}$$

Forces rotationnelles
Antonio Falcó
Le moment de force
La deuxième loi de Newton en rotation
Vitesse et accélération angulaire
Les relations entre variables linéaires et variables angulaires
Équilibre statique
La conservation du quantité de mouvement et du moment cinétique
Applications

Réponse

Le moment de force résultante par rapport l'épaule est

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau}_{\text{résultante}} &= \boldsymbol{\tau}_{\text{main}} + \boldsymbol{\tau}_g + \boldsymbol{\tau}_d + \boldsymbol{\tau}_e \\ &= (0, 0, -6.392) + (0, 0, -9.0072) \\ &+ (0, 0, 0.15 \cdot F_d \sin 16^\circ) + (0, 0, 0, 0) \\ &= (0, 0, -15.3992 + 0.15 \cdot F_d \sin 16^\circ) \text{ N m.}\end{aligned}$$

et la force résultante

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{\text{résultante}} &= \mathbf{F}_{\text{main}} + \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_d + \mathbf{F}_e \\ &= (0, -13.6, 0) + (0, -32.4, 0) + (-F_d \cos 16^\circ, F_d \sin 16^\circ, 0) \\ &+ (F_x^e, F_y^e, 0) \\ &= (-F_d \cos 16^\circ + F_x^e, -46 + F_d \sin 16^\circ + F_y^e, 0) \text{ N.}\end{aligned}$$

Forces rotationnelles
Antonio Falcó
Le moment de force
La deuxième loi de Newton en rotation
Vitesse et accélération angulaire
Les relations entre variables linéaires et variables angulaires
Équilibre statique
La conservation du quantité de mouvement et du moment cinétique
Applications

Réponse

Si le système est en équilibre statique:

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{résultante}} = (0, 0, -15.3992 + 0.15 \cdot F_d \sin 16^\circ) = (0, 0, 0)$$

et

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{\text{résultante}} &= \mathbf{F}_{\text{main}} + \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_d + \mathbf{F}_e \\ &= (-F_d \cos 16^\circ + F_x^e, -46 + F_d \sin 16^\circ + F_y^e, 0) = (0, 0, 0).\end{aligned}$$

En conséquence,

$$-15.3992 + 0.15 \cdot F_d \sin 16^\circ = 0, \tag{1}$$

$$-F_d \cos 16^\circ + F_x^e = 0, \tag{2}$$

$$-46 + F_d \sin 16^\circ + F_y^e = 0. \tag{3}$$

Avec (1) on obtient $F_d = 372.45$, $F_d \sin 16^\circ = 102.66$ et $F_d \cos 16^\circ = 358.02$.

Réponse

C'est-à-dire:

$$-358.02 + F_x^e = 0, \tag{4}$$
$$-46 + 102.66 + F_y^e = 0. \tag{5}$$

d'où

$$F_d = 372.45 \text{ N},$$
$$F_x^e = 358.02 \text{ N},$$
$$F_y^e = -56.66 \text{ N}.$$

et la force exercée par l'articulation de l'épaule sur le bras est $\mathbf{F}_e = (358.02, -56.66, 0)$ N.

Forces rotationnelles
Antonio Falcó
Le moment de force
La deuxième loi de Newton en rotation
Vitesse et accélération angulaire
Les relations entre variables linéaires et variables angulaires
Équilibre statique
La conservation du quantité de mouvement et du moment cinétique
Applications

Forces rotationnelles

Antonio Falcó

Le moment de force

La deuxième loi de Newton en rotation

Vitesse et accélération angulaire

Les relations entre variables linéaires et variables angulaires

Équilibre statique

La conservation du quantité de mouvement et du moment cinétique

Applications

Définition (quantité de mouvement)

Soit X une particule de masse m avec une vitesse $\boldsymbol{v}(t)$ pour $t \geq t_0$ alors la quantité de mouvement est le vecteur

$$\mathbf{p}(t) = m\,\boldsymbol{v}(t) = (m\,v_x(t), m\,v_y(t), m\,v_z(t)).$$

En supposant accélération linéaire $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ constant, la deuxième lois de Newton nous dis:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{p}(t) = \mathbf{F} = m\,\mathbf{a}.$$

Si la force résultante est nulle, alors

$$\frac{d}{dt}\mathbf{p}(t) = \mathbf{0}$$

et $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}(t_0)$ pour tout $t \geq 0$, cést-à-dire la quantité de mouvement est préservé.

Forces rotationnelles
Antonio Falcó
Le moment de force
La deuxième loi de Newton en rotation
Vitesse et accélération angulaire
Les relations entre variables linéaires et variables angulaires
Équilibre statique
La conservation du quantité de mouvement et du moment cinétique
Applications

Définition (moment cinétique)

Soit X une particule de masse m avec une quantité de mouvement $\mathbf{p}(t) = (p_x(t), p_y(t), 0)$ à la position $\mathbf{r}(t) = (r_x(t), r_y(t), 0)$. Alors on défini le moment cinétique

$$\ell(t) = \mathbf{r}(t) \wedge \mathbf{p}(t) = (0, 0, r_x(t)p_y(t) - r_y(t)p_x(t))$$

En supposant accélération angulaire α constant, on peut montrer que

$$\frac{d}{dt}\ell(t) = \mathbf{r}(t) \wedge \frac{d}{dt}\mathbf{p}(t) = \mathbf{r}(t) \wedge \mathbf{F} = \boldsymbol{\tau} = (0, 0, I \cdot \alpha).$$

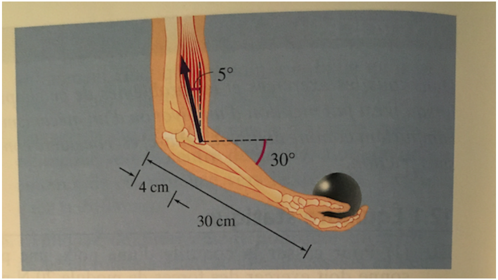
Si le moment de force résultante est nulle, alors

$$\frac{d}{dt}\ell(t) = \mathbf{0}$$

et $\ell(t) = \ell(t_0)$ pour tout $t \geq 0$, cést-à-dire la moment cinétique est préservé.

Problème

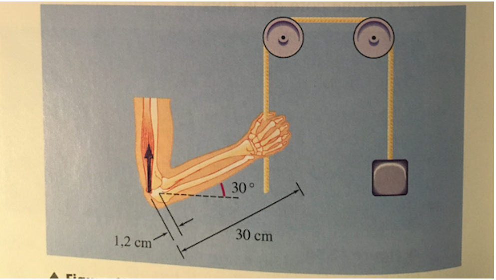
Une personne tient dans la main une masse de 5 kg son avant bras faisant un angle de 50° vers le bas par rapport l'horizontale. Le biceps (muscle fléchisseur du coude) est fixé à 4 cm de l'articulation et agit à 5° par rapport la verticale. On assimile l'avant-bras à une barre homogène d'épaisseur négligeable, de masse 2 kg et de longueur 30 cm. (a) Quel est le module (norme) de la tension dans le muscle? et (b) Déterminez le module des forces horizontale et verticale exercées par le coude.



Forces rotationnelles
Antonio Falcó
Le moment de force
La deuxième loi de Newton en rotation
Vitesse et accélération angulaire
Les relations entre variables linéaires et variables angulaires
Équilibre statique
La conservation du quantité de mouvement et du moment cinétique
Applications

Problème

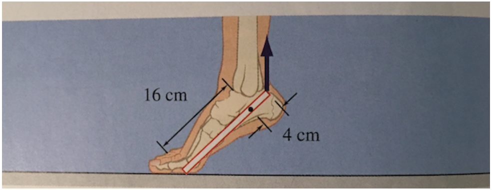
La figure représente une personne en train de tirer vers le bas sur une corde en exerçant une force de 50 N. L'avant bras est dirigé à 30° par rapport l'horizontale. Le triceps (muscle qui déplie le coude) est fixé à 1.2 cm de l'articulation et exerce une force verticale. On suppose l'avant bras est une barre homogène d'épaisseur négligeable, de masse 2 kg et de longueur 30 cm. (a) Quel est le module de la tension dans le muscle? et (b) Déterminez le module des forces horizontale et verticale exercées par le coude.



Forces rotationnelles
Antonio Falcó
Le moment de force
La deuxième loi de Newton en rotation
Vitesse et accélération angulaire
Les relations entre variables linéaires et variables angulaires
Équilibre statique
La conservation du quantité de mouvement et du moment cinétique
Applications

Problème

Une personne de 60 kg se tient sur la pointe des pieds et son poids est également distribué entre ses deux pieds. Le muscle qui provoque la rotation du pied est fixé à 4 cm de l'articulation de la cheville et exerce un force verticale. Quel est le module de la tension dans le muscle?



Forces rotationnelles
Antonio Falcó
Le moment de force
La deuxième loi de Newton en rotation
Vitesse et accélération angulaire
Les relations entre variables linéaires et variables angulaires
Équilibre statique
La conservation du quantité de mouvement et du moment cinétique
Applications