Physique — Leçon 1 : Mesures et unités & Vecteurs et opérations

Unités SI, ordres de grandeur, analyse dimensionnelle & vecteurs, produits scalaire et vectoriel

Antonio Falcó

Objectifs de la section

- Comprendre ce qu'est une **mesure physique** : valeur numérique, unité, incertitude.
- Différencier les **grandeurs scalaires et vectorielles**.
- Connaître les **unités de base du SI** et les principales unités dérivées.
- Savoir utiliser les **ordres de grandeur** et la notation scientifique.
- Reconnaître et estimer les **erreurs expérimentales** (aléatoires et systématiques).
- Appliquer les règles de **propagation des erreurs**.
- Vérifier la cohérence d'une relation par l'**analyse dimensionnelle**.

Pourquoi mesurer ?

- En physique, **mesurer** signifie comparer une grandeur à une unité de référence.
- Toute mesure doit fournir :
  1. une **valeur numérique**,
  2. une **unité**,
  3. une **incertitude**.

Grandeurs physiques

- **Scalaires** : masse, température, énergie.
- **Vecteurs** : vitesse, force, accélération.
- **Dimension** : nature de la grandeur (longueur, masse, temps...).
- **Unité** : valeur de référence fixée par convention.

Système international d'unités (SI)

- **Longueur** : mètre (m).
- **Masse** : kilogramme (kg).
- **Temps** : seconde (s).
- **Courant électrique** : ampère (A).
- **Température** : kelvin (K).
- **Quantité de matière** : mole (mol).
- **Intensité lumineuse** : candela (cd).

Unités dérivées

- Vitesse : m/s.
- Accélération : m/s^2.
- Force : newton ($N = kg{\cdot}m/s^2$).
- Pression : pascal ($Pa = N/m^2$).
- Énergie : joule ($J = N{\cdot}m$).

Ordres de grandeur

- Utiliser la **notation scientifique** : $a \times 10^n$.
- Exemples :
  - Taille d'un atome : 10^{-10} m.
  - Rayon de la Terre : 6.4×10^6 m.
  - Vitesse de la lumière : 3.0×10^8 m/s.

Conversions d'unités

Exemple : convertir 90 km/h en m/s.

$$90 \text{ km/h} = 90 \times \frac{1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = 25 \text{ m/s}.$$

Erreurs expérimentales

- **Aléatoires** : dues aux fluctuations imprévisibles.
- **Systématiques** : biais de l'appareil ou méthode.
- Toujours donner l'incertitude :

$$g = 9.81 \pm 0.01 \text{ m/s}^2.$$

Chiffres significatifs

- Une mesure ne doit pas afficher plus de précision que l'incertitude.
- Exemple : $L = 12.3 \ \pm 0.1$ cm (3 chiffres significatifs).

Analyse dimensionnelle

- Vérifier la cohérence d'une équation physique en comparant les dimensions.
- Exemple : énergie cinétique $E = \frac{1}{2}mv^2$.

$$[E] = [m][v]^2 = M(LT^{-1})^2 = ML^2T^{-2}.$$

À retenir (mesures)

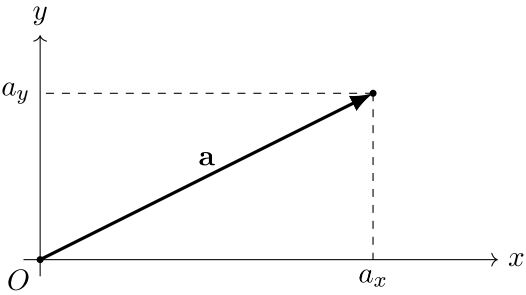
- Toujours préciser unité + incertitude.
- Vérifier les dimensions pour éviter les erreurs.
- Utiliser les ordres de grandeur pour estimer la validité d'un résultat.

Objectifs de la section

- Définir un vecteur et ses composantes dans un repère orthonormé.
- Maîtriser addition, soustraction, multiplication par un scalaire.
- Comprendre et utiliser le **produit scalaire** et le **produit vectoriel**.
- Calculer avec les identités vectorielles classiques.

Qu'est-ce qu'un vecteur ?

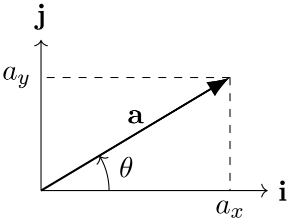
Un vecteur $\mathbf{a}$ possède une **norme** $\|\mathbf{a}\|$ et une **direction**. Il modélise un déplacement, une vitesse, une force, etc.



Composantes & norme

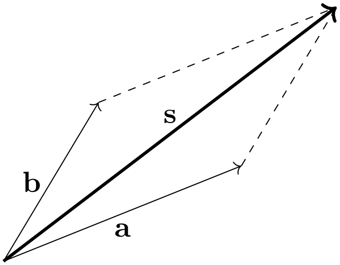
Dans la base $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ du plan,

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j}, \quad \|\mathbf{a}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}, \quad \tan\theta = \frac{a_y}{a_x}.$$



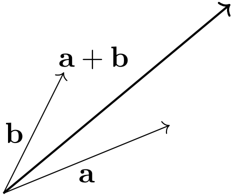
Addition géométrique (parallélogramme)

$$\mathbf{s} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$$



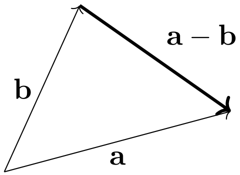
Propriétés algébriques

- Commutativité : $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$.
- Associativité : $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$.
- Neutre : $\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{a}$; opposé : $\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=\mathbf{0}$.
- Homogénéité : $(k\ell)\mathbf{a}=k(\ell\mathbf{a})$; $k(\mathbf{a}+\mathbf{b})=k\mathbf{a}+k\mathbf{b}$.



Soustraction & triangle

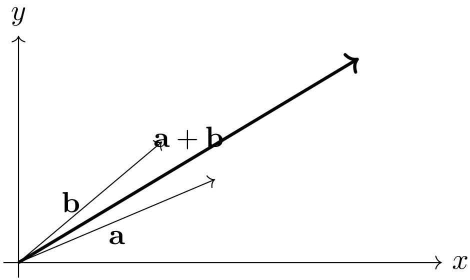
$$\mathbf{d} = \mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$$



Coordonnées : somme composante par composante

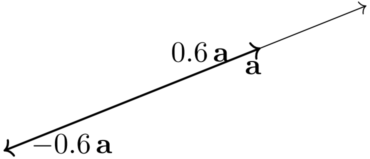
Si $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ et $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$ alors

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_x + b_x,\ a_y + b_y,\ a_z + b_z).$$



Produit par un scalaire

Pour $k \in \mathbb{R}$, $\mathbf{r} = k\,\mathbf{a}$ étire ou contracte la norme et inverse la direction si $k < 0$.



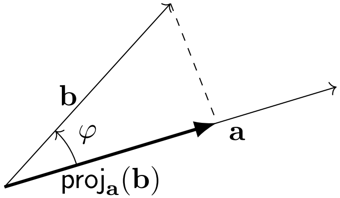
Produit scalaire : définitions

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\| \cos\varphi = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Conséquences : orthogonalité ($\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$), norme ($\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$), linéarité.

Produit scalaire : projection orthogonale

$$\mathrm{proj}_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}) = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\,\mathbf{a}.$$



Inégalités classiques

- **Cauchy–Schwarz** : $\|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|$.
- **Triangle** : $\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|$.
- **Parallélogramme** : $\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|^2 + \|\mathbf{a}-\mathbf{b}\|^2 = 2(\|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2)$.

Produit vectoriel (3D) : définition

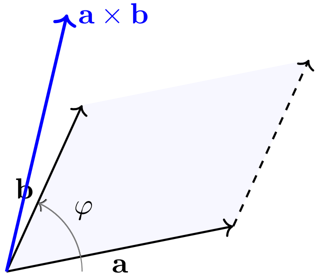
Pour $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \quad \text{tel que} \quad \begin{cases} \|\mathbf{c}\| = \|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\| \, \sin\varphi, \\ \mathbf{c} \perp \mathbf{a}, \; \mathbf{c} \perp \mathbf{b}, \\ \text{orientation par la règle de la main droite.} \end{cases}$$

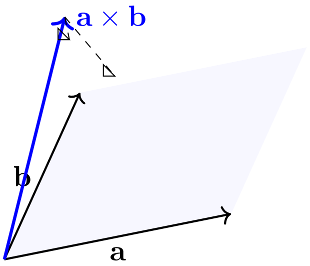
Produit vectoriel : composantes

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} .$$

Règle de la main droite (schéma)



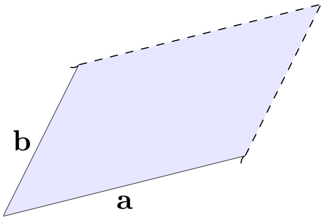
Orthogonalité du produit vectoriel



Toujours $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = 0$ et $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} = 0$.

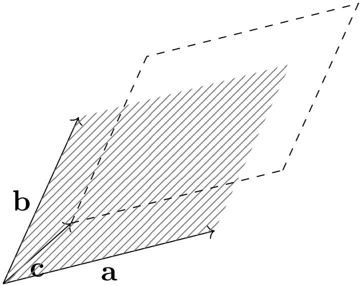
Aire du parallélogramme

$$\text{Aire}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|.$$



Produit mixte (triple scalaire)

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \det[\mathbf{a}\ \ \mathbf{b}\ \ \mathbf{c}] \quad \text{(volume signé du parallélépipède).}$$



Identités vectorielles (I)

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= -\mathbf{b} \times \mathbf{a}, \\ \mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) &= \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}, \\ (\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b} &= \lambda (\mathbf{a} \times \mathbf{b}). \end{aligned}$$

Identités vectorielles (II) : BAC–CAB

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}).$$

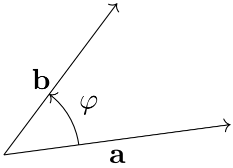
(utile pour simplifier des expressions dynamiques et électromagnétiques)

Identités vectorielles (III) : produit double

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}).$$

Angles via produit scalaire

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|}.$$



Orthogonalisation (Gram–Schmidt) — idée

À partir de $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$, construire $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ orthonormés :

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|}, \quad \tilde{\mathbf{u}}_2 = \mathbf{u}_2 - \mathrm{proj}_{\mathbf{e}_1}(\mathbf{u}_2), \quad \mathbf{e}_2 = \frac{\tilde{\mathbf{u}}_2}{\|\tilde{\mathbf{u}}_2\|}.$$

Exemple numérique (2D)

Soient $\mathbf{a} = (3, 2)$, $\mathbf{b} = (1, 4)$.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 4 = 11, \quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} = (0, 0, 3 \cdot 4 - 2 \cdot 1) = (0, 0, 10).$$

Exemple numérique (3D)

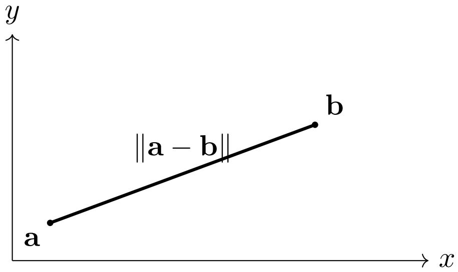
$\mathbf{a} = (1, 2, 3), \ \mathbf{b} = (4, -1, 2).$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 1 \cdot 4 + 2(-1) + 3 \cdot 2 = 4 - 2 + 6 = 8.$$

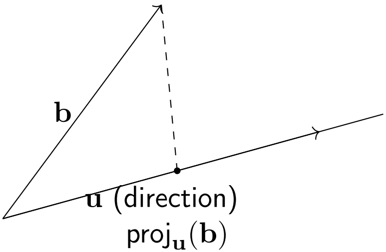
$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 - 3(-1) \\ 3 \cdot 4 - 1 \cdot 2 \\ 1(-1) - 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 + 3 \\ 12 - 2 \\ -1 - 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

Normes et distances

$$\|\mathbf{a}\|_2 = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \quad \text{distance } d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|_2.$$

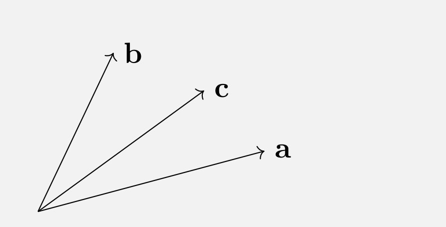


Projection sur une droite (visualisation)



Coplanarité

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 0 \iff \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \text{ coplanaires.}$$



Exercices rapides

1. Calculer l'angle entre $\mathbf{a} = (2, 1, 2)$ et $\mathbf{b} = (1, 0, 2)$.
2. Trouver l'aire du parallélogramme défini par $\mathbf{a} = (1, 3, 0)$ et $\mathbf{b} = (2, 1, 1)$.
3. Vérifier l'identité BAC–CAB pour $\mathbf{a} = (1, 0, 1)$, $\mathbf{b} = (0, 2, 1)$, $\mathbf{c} = (1, 1, 0)$.

À retenir

- Produit scalaire $\to$ angles, projections, orthogonalité.
- Produit vectoriel (3D) $\to$ aires, orthogonalité, orientation.
- Identités (BAC–CAB, doubles produits) pour simplifier les calculs.