Introduction

Antonio Falcó

Méthode Scientifique

Étapes :

1. Observer la nature ,
2. faire une hypothèse sur son fonctionnement qui débouche sur une prédiction,
3. tester expérimentalement cette prédiction. Si ce test expérimental s'avère positif, l'hypothèse devient une "théorie".

Phases

1. La phase d'induction est l'étape qui permet de passer de l'observation à la formulation de l'hypothèse, une partie où l'intuition joue le rôle principal.
2. Le passage de l'hypothèse à la prédiction est une phase de déduction où logique et calcul jouent les rôles principaux.

Évolution historique de la Physique I

Travaux précurseurs

i) Galilée (l'étude de la chute des corps),
ii) Kepler (les lois du mouvement des planètes),
iii) Snell et Descartes (les lois de la réfraction de la lumière),
iv) Torricelli et Pascal (les premières pierres de la mécanique des fluides).
v) Isaac Newton publie ses *Principia* le 8 mai 1686

Évolution historique de la Physique II

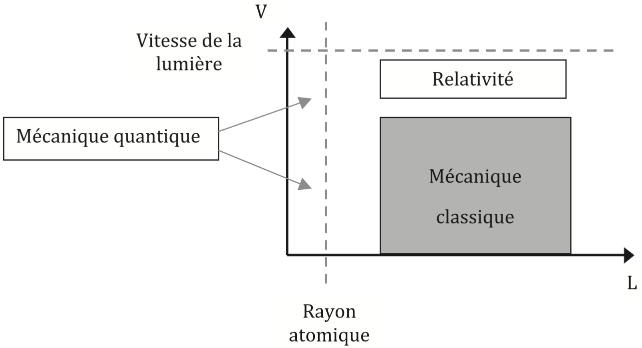
Certes la mécanique de Newton (dite classique) fait faire un bond considérable, mais le début du xxe siècle trouve ses limites d'application quant à la vitesse des objets et à leur taille.

i) Les vitesses doivent en effet être petites devant la vitesse de la lumière dans le vide (3×10^8m s^{-1})
ii) la taille des objets doit être bien supérieure à la dimension des atomes (typiquement $\sim 10^{\breve{}10}$ m)

Deux autres branches de la Physique sont alors apparues,

1. La théorie de la relativité d'Einstein - Poincaré qui rend compte des phénomènes lorsque la vitesse d'un corps s'approche de la vitesse de la lumière.
2. La mécanique quantique pour les objets d'échelle atomique ou moléculaire de Schrödinger, Heisenberg et Dirac pour ne citer que les principaux.

La figure suivante schématise ce lieu d'application de la mécanique classique dans un espace construit sur la vitesse des objets V et leur taille L.



- La mécanique de Newton s'applique donc à des objets macroscopiques qui se déplacent suffisamment lentement.
- La 2e loi de Newton contient toutes les informations nécessaires pour prédire le mouvement d'un corps sous une forme très compacte :

$$\mathbf{Forces} = \text{ masse } \times \mathbf{accélération}$$

(Les caractères gras indiquent que **force** et **accélération** sont des vecteurs, la masse est un scalaire).

  - Les vecteurs sont des entités qui possèdent une intensité mais aussi une orientation dans l'espace et plusieurs nombres sont alors nécessaires pour les caractériser, deux dans le plan, trois dans l'espace, appelés les composantes du vecteur.
  - Un scalaire est parfaitement déterminé par un seul nombre.

$$\textbf{Forces} = \text{masse} \times \textbf{accélération}$$

- La masse mesure la quantité de matière dans le corps.
- La notion d'accélération : une vitesse est un déplacement parcouru en un temps donné. Si l'intervalle de temps devient très petit, la vitesse devient instantanée et s'approche de la dérivée du déplacement par rapport au temps. L'accélération est simplement la variation de cette vitesse durant un temps donné et de façon similaire tend vers la dérivée de la vitesse lorsque l'intervalle de temps devient très petit.
- Les forces : Pour les définir, on peut utiliser la relation $1-1$ et dire que la force est juste la masse fois l'accélération.

Pour sortir de la tautologie $1-1$,

- il faut réaliser qu'un corps ne peut changer sa vitesse que lorsqu'il interagit avec un autre corps.
- Un corps isolé (loin de tout) conservera sa vitesse et la relation $1-1$ dit alors que la force totale sur ce corps est nulle, un résultat qui constitue la 1re loi de la Mécanique due à Galilée.
- Ce n'est qu'en étudiant les interactions entre les corps que l'on peut connaître les forces et si les forces sont connues, alors la deuxième loi de Newton devient prédictive puisqu'elle donne l'**accélération** égale à **force**/masse et se pose alors la question de trouver vitesse et déplacement des corps en interaction.

Soit X la longueur d'un champ mesurée en mètres.

Mathématique

$$X = 25,$$

Physique

$$X = 25 \text{ m}.$$

Cette longueur traduit une comparaison avec la longueur du mètre, gardée quelque part comme standard et que tout le monde s'accorde à utiliser pour mesurer des longueurs de champs. Le champ mesure 25 fois cette longueur standard.

En physique, de chaque côté d'une égalité, il faut s'assurer d'avoir des combinaisons de symboles qui aient les mêmes unités.

Scientifique

- La physique s'est développée de façon analogue par cette nécessité fondamentale que les expériences faites par l'un peuvent et doivent être reproduites par un autre afin que les résultats puissent être comparés entre eux.
- Si le résultat d'une expérience ne peut pas être reproduit, on ne peut pas se servir de cette expérience pour avancer.

Social

- Mais pourquoi avoir choisi ces unités et comment s'en servir ? Y a-t-il une signification particulière au choix du mètre tel qu'on le connaît ?
- La réponse est aucune. La seule considération est pratique. Avoir un instrument disponible sous la main pour mesurer a toujours été la raison fondamentale sous-jacente.

La longueur : Contexte historique

- Sous l'Ancien Régime, on utilisait le pouce (~ 2.7 cm), le pied (12 pouces), la toise (6 pieds), l'arpent (220 pieds), la lieue de Paris (12 000 pieds, ~ 3.9 km) et en Angleterre et en Russie encore d'autres unités.
- Le Parlement français décida en 1790 de définir le mètre comme la longueur d'un quadrant du méridien terrestre divisée par 10^7. On fabriqua un étalon gardé aux Archives nationales.
- En 1960, le mètre a été redéfini par un processus physique via un certain nombre de longueurs d'onde d'une ligne d'émission du krypton 86.
- En 1989, la définition a encore changé et le mètre a été relié à la valeur de la vitesse de la lumière et à la seconde : le mètre est la longueur parcourue par la lumière dans le vide pendant $1/299\,792\,458$ seconde.

Le temps :Contexte historique

- La rotation de la Terre autour du Soleil permit de définir l'année et la rotation de la Terre sur elle-même le jour, la subdivision du jour en heure, minute et seconde étant un héritage des Babyloniens qui utilisaient un système de numération sexagésimal (1-60).
- Mais avec les horloges plus précises, on s'aperçut que la durée du jour variait selon la période de l'année et donc on choisit plutôt le jour solaire moyen. Puis on réalisa que sous l'influence des marées lunaires et solaires, la Terre ralentit sa rotation, certes très lentement, mais introduisant un argument philosophiquement gênant pour définir un étalon.
- Aujourd'hui la seconde est donc définie par la fréquence de transition entre deux états d'énergie d'un atome (le césium 133), dont l'inverse est une période bien définie et permet d'asseoir la seconde de façon bien plus précise.

Le temps : Nature physique

Le temps a une nature bien différente de la longueur.

- Le temps s'écoule dans une direction passé, présent, futur.
- Il existe en effet une flèche du temps.
- La vie a un début et une fin. Le temps permet de définir la séquence d'événements reliés entre eux pour appliquer éventuellement le principe de causalité.
- Si l'événement A est la cause de l'événement B, alors A arrive forcément avant B. La condition est nécessaire mais pas suffisante : ce n'est pas parce que A arrive avant B que A est la cause de B, cela reste à prouver.

En physique, les phénomènes sont classés selon qu'ils sont réversibles ou irréversibles par rapport au temps.

- Un phénomène est réversible s'il est possible pratiquement de faire passer le film en arrière. Si par exemple on fait tomber une balle verticalement sur le sol, au point de contact avec le sol le signe des vitesses change et la balle retrace son parcours initial – le phénomène de la chute libre est réversible.
- Si maintenant on fait tomber un œuf qui s'écrase sur le sol, il est impossible de voir se réaliser le parcours inverse : le phénomène est irréversible.
- Si la mécanique classique traite essentiellement de phénomènes réversibles, il faut reconnaître que ce n'est qu'une approximation : la balle qui rebondit sur le sol ne revient pas exactement dans la main de laquelle elle a été lâchée.
- Le frottement introduit de la physique irréversible, quand de l'énergie mécanique est transformée en énergie interne (chaleur), l'énergie des mouvements à l'échelle moléculaire.

La masse : Contexte historique

- La masse a été définie par un kilogramme de matériau, un cylindre de platine, fabriqué en 1889 et également gardé au Bureau des poids et mesures de Sèvres.
- La masse de cet étalon mesurée aujourd'hui diverge de 5 10–7 kg de sa masse initiale.
- depuis le 20 mai 2019 le kilogramme est défini en prenant la valeur numérique fixée de la constante de Planck, $\hbar = 6,62607015 \times 10^{34}$ J $\cdot$ s à partir des définitions du mètre et de la seconde.

Pour comparer entre des corps de nature différente on utilise la masse volumique quie est définie par le rapport :

$$\rho = \frac{\text{masse}}{\text{Volume}} = \frac{m}{V}$$

- C'est une unité dérivée des précédentes, le $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ qui permet de comparer entre eux des corps de nature différente.
- La masse volumique de l'eau est autour de 10^3 $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$, et celle de l'air autour de 1 $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$, quantités qui varient avec la température et la pression.
- On appelle *densité* le rapport de la masse volumique à celle d'une référence, souvent l'eau pure aux conditions standard, à savoir 20° C et pression atmosphérique 1 013 hpa (hectopascal).

Incertitudes

Soit

$$X = \text{ mesure d'un champ avec un mètre.}$$

On répète l'expérience

Personne	X
Alice	24.95
Bob	25.12
$\vdots$	$\vdots$

Supposons qu'on obtienne

$$X = \begin{bmatrix} 24.96 & 25.12 & 24.03 & 24.87 & 25.02 & 24.98 & 25.07 \\ 25.15 & 24.94 & 25.09 & 25.06 & & & \end{bmatrix}$$

```python
import numpy as np
X = [24.96, 25.12 , 24.03 , 24.87 , 25.02 ,
24.98 , 25.07, 25.15 , 24.94 , 25.09 , 25.06]
```

On calcule la moyen arithmétique :

$$\overline{X} = \frac{1}{11}\sum_{i=1}^{11} X_i = 24.935454545454544 \text{ m},$$

où X_i représente la composante i de le vecteur des mesures X.

- Si en effet les erreurs sont dues au hasard, cette valeur $\overline{X}$ doit être plus proche de la vraie valeur, car les valeurs par excès vont compenser les valeurs par défaut.
- Plus important encore, on peut estimer l'erreur e autour de cette moyenne.
- Une estimation classique est de considérer la variance, la moyenne quadratique des écarts $X_i - \overline{X}$.

La variance est

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{11}\sum_{i=1}^{11}(X_i - \overline{X})^2 = 0.0883157024793386 \text{ m}^2.$$

L'écart-type ou en anglais "standard deviation" ou encore *rms* pour *root mean square* est juste :

$$\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = 0.2971795795126889 \text{ m}.$$

- Maintenant ces calculs fournissent vraiment beaucoup de chiffres.
- Il ne sert à rien de garder tous les chiffres de l'erreur e et le bon sens dicte de ne garder que deux chiffres significatifs.

Pour cette moyenne et les observateurs concluront que la longueur du champ est

$$X = 24.94 \text{ avec une erreur quadratique moyenne } \sigma = 0.3$$

Definition

Le *ordre de grandeur* d'un nombre est le nombre de zéros avant ou après la virgule décimale

- Ainsi, une plage de huit ordres de grandeur implique cent millions ou 10^8.
- Par exemple, on dit que deux nombres diffèrent de 3 ordres de grandeur si l'un est 1000 fois plus grand que l'autre (10^3).
- Quand on ne considère que les puissances de 10, le calcul est très rapide à faire à la main alors que les erreurs d'entrée à la calculatrice sont nombreuses et peu visibles.
- L'utilisation la plus répandue de la description des ordres de grandeur est d'utiliser *notation scientifique* et *puissances de dix*.

Définition

La **notation scientifique** (ou notation d'index standard) est un moyen rapide de représenter un nombre en utilisant des puissances de base dix. Cette notation est utilisée pour pouvoir exprimer très facilement des nombres très grands ou très petits. Les nombres sont écrits comme un produit :

$$a \times 10^n$$

siendo

- a un nombre réel supérieur ou égal à 1 et inférieur à 10, appelé **mantisse**.
- n un entier qui est appelé **exposant ou ordre de grandeur**.

Notation

- $$\beta \ll \alpha$$
  signifie qu'une quantité β a un ordre de grandeur beaucoup plus petit qu'une autre α.
- $$\beta \approx \alpha$$
  signifie que β est approximativement égal à α compte tenu de l'erreur. associée.
- $$\beta = O(\alpha)$$
  signifie que deux quantités qui varient ont le même ordre de grandeur.
- Lorsqu'elles sont proportionnelles, on utilise le symbole $\propto$ très pratique : $\alpha \propto \beta$ est équivalent à $\alpha = C\beta$ pour un constant de proportionnalité C.

La méthode générale de conversion des unités est simplement de remplacer dans la formule les unités anciennes par leurs valeurs exprimées dans les nouvelles unités.

- En navigation maritime ou aérienne, les vitesses sont mesurées en nœuds (knots).
- Un nœud est un mille marin parcouru en 1 heure.
- Le mille marin est utilisé car il s'agit de la longueur de la minute d'un arc de latitude sur la Terre soit 1 852 mètres (à 45° seulement car la Terre n'est pas sphérique).

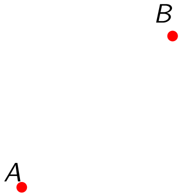
Probléme

Si vous naviguez à 4.5 nœuds, trouvez cette vitesse en mètre/seconde.

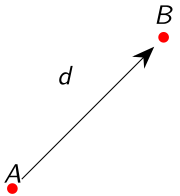
Réponse

$$4.5\frac{\text{mille}}{\text{heure}} = 4.5 \times \frac{1852}{3600}\frac{\text{m}}{\text{s}} = 2.315\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

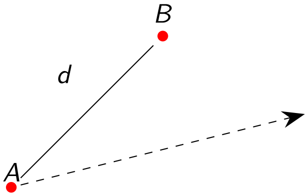
Le premier vecteur que l'on rencontre en mécanique est le vecteur position d'un point B par rapport à un autre point A.

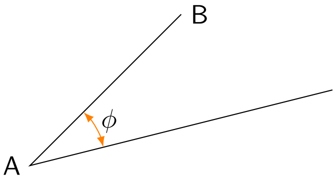


Il faut aussi choisir la direction dans laquelle aller et mesurer la longueur d.

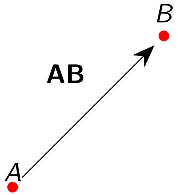


Une direction arbitraire peut être choisie comme référence (en pointillé) et l'angle ϕ entre la droite AB et la droite de référence nous donne cette direction.

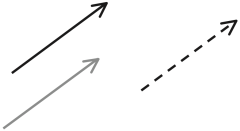




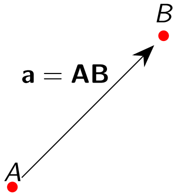
Le vecteur **AB** est entièrement défini dans l'espace par sa longueur d et sa direction par l'angle ϕ.



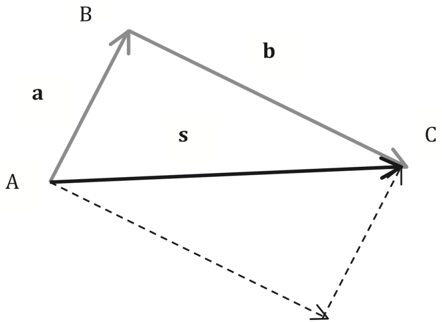
Si on le déplace par translation dans l'espace, il garde la même longueur et la même orientation, de sorte que les vecteurs gris et en pointillé sont identiques au vecteur noir.



On peut déplacer un vecteur par translation comme on veut. Du coup on peut oublier les points A et B et appeler ce vecteur par un symbole qui ne les fait plus intervenir.



L'opération la plus importante sur les vecteurs est l'addition. On peut dire qu'ils ont été inventés pour cela. Imaginons que nous allions de A à B puis de B à C par deux déplacements successifs représentés par les vecteurs en gris.

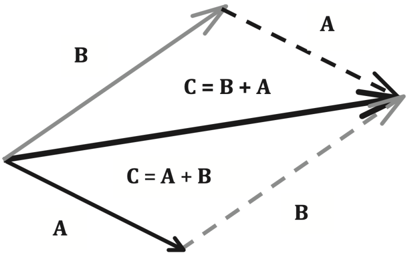


On peut aussi aller directement de A à C par le vecteur noir et c'est lui que l'on va définir comme le vecteur addition (ou somme).

$$\mathbf{s} = \mathbf{a} + \mathbf{b}.$$

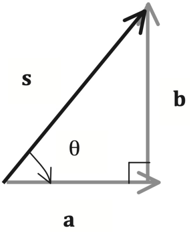
1. commutativité de l'addition : $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$.
2. associativité de l'addition : $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$.

L'ordre des opérations n'a aucune importance



Notation :
Donné un vecteur **a** on note sa longeur par $\|\mathbf{a}\| = |\mathbf{a}| = a \geq 0$.

On sait donc dessiner le vecteur somme **s**, et maintenant connaissant **a** et **b**, il reste à trouver comment calculer sa longueur et sa direction. Supposons que $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$



$$|\mathbf{s}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 \iff 1 = \frac{|\mathbf{a}|^2}{|\mathbf{s}|^2} + \frac{|\mathbf{b}|^2}{|\mathbf{s}|^2} \iff 1 = \cos^2\theta + \sin^2\theta$$

On trouve

$$\cos^2\theta = \frac{|\mathbf{a}|^2}{|\mathbf{s}|^2} \text{ et } \sin^2\theta = \frac{|\mathbf{b}|^2}{|\mathbf{s}|^2},$$

alors

$$\cos\theta = \frac{|\mathbf{a}|}{|\mathbf{s}|} \text{ et } \sin\theta = \frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{s}|}.$$

En conséquence,

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{s}|}}{\frac{|\mathbf{a}|}{|\mathbf{s}|}} = \frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}.$$

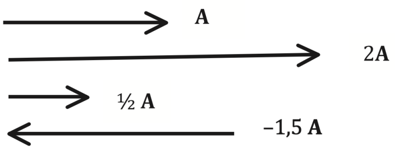
Par exemple la longueur de $|\mathbf{a}| = 3$ et celle de $|\mathbf{b}| = 4$, alors $|\mathbf{s}| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5 \neq 3 = |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$ **On n'additionne donc pas les longueurs des vecteurs pour trouver la longueur de leur somme**.

La multiplication par un scalaire

Soit k un scalaire c'est-à-dire un nombre réel $\mathbb{R}$: on dit $k \in \mathbb{R}$.
Alors, la multiplication du vecteur **a** par un scalaire k est définie :

$$\mathbf{r} = k\,\mathbf{a}$$

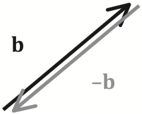
Si $k > 0$, le vecteur **r** a la même direction que **a** mais une direction opposée si $k < 0$.



La longueur de **r** donné par son module où norme est

$$|\mathbf{r}| = \|\mathbf{r}\| = |k|\|\mathbf{a}\| = |k||\mathbf{a}|.$$

Si $k = -1$, le vecteur opposé $-\mathbf{b}$ est donc le vecteur de même longueur que $\mathbf{b}$ mais de direction opposée.

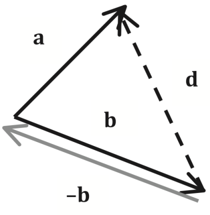


Cet aller-retour définit le vecteur nul :

$$\mathbf{b} + (-\mathbf{b}) = \mathbf{0}$$

et permet de trouver comment faire des soustractions de vecteurs.

Soustractions de vecteurs



- Supposons que l'on veuille trouver le vecteur différence $\mathbf{d} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$,
- Ceci se réécrit $\mathbf{d} = (-\mathbf{b}) + \mathbf{a}$, qui est une addition que l'on sait faire !
- En additionnant le vecteur gris $-\mathbf{b}$ et le vecteur noir $\mathbf{a}$, on trouve le vecteur différence $\mathbf{d}$ en pointillé.

Autres propriétés

1. Commutativité de la multiplication par un scalaire :

$$k\mathbf{A} = \mathbf{A}k,$$

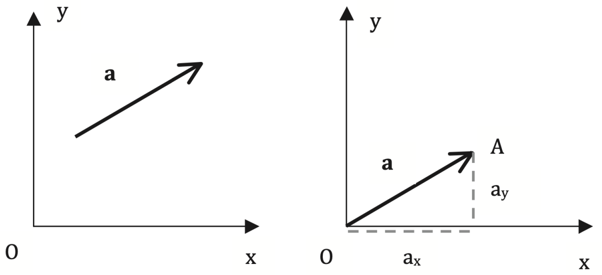
2. Associativité de la multiplication par un scalaire :

$$k(m\mathbf{A}) = m(k\mathbf{A}),$$

3. Distributivité de la multiplication par un scalaire :

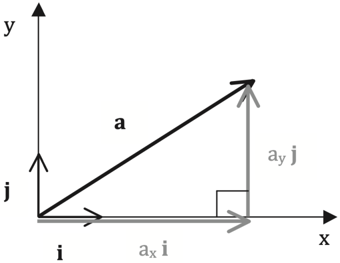
$$k(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = k\mathbf{A} + k\mathbf{B} \text{ et } (k + m)\mathbf{A} = k\mathbf{A} + m\mathbf{A}.$$

- Pour l'instant nous n'avons fait que dessiner, mais l'introduction des composantes d'un vecteur va permettre de calculer facilement la somme de deux vecteurs quelconques.



Soit **a** un vecteur quelconque :

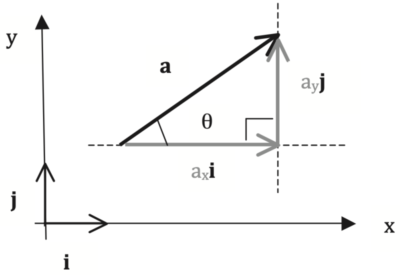
1. On choisit un repère orthonormé Oxy (les axes Ox et Oy sont perpendiculaires et on choisit la même unité pour mesurer les longueurs sur les axes).
2. On déplace le vecteur **a** jusqu'à mettre son origine en O.
3. Les composantes du vecteur **a** sont simplement les coordonnées (a_x, a_y) du point A, extrémité de la flèche du vecteur **a**.



1. On peut maintenant définir deux vecteurs unitaires $\mathbf{i}$ selon Ox de composantes $(1, 0)$ et $\mathbf{j}$ selon Oy de composantes $(0, 1)$.
2. On voit tout de suite d'après les règles précédentes que :

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= (a_x, a_y) = (a_x + 0, 0 + a_y) = (a_x, 0) + (0, a_y)\\ &= a_x(1, 0) + a_y(0, 1) = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j}.\end{aligned}$$

La figure suivante précise le lien entre géométrie (longueur et orientation) et composantes :

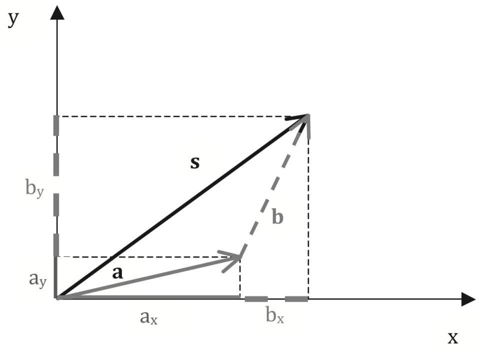


$$a_x = |\mathbf{a}| \cos\theta \Rightarrow a_x^2 = |\mathbf{a}|^2 \cos^2\theta$$
$$a_y = |\mathbf{a}| \sin\theta \Rightarrow a_y^2 = |\mathbf{a}|^2 \sin^2\theta$$

donc

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$
$$\tan\theta = \frac{a_y}{a_x}.$$

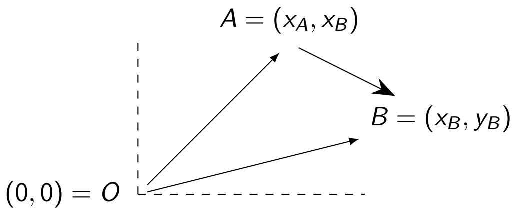
- **Ces relations permettent de passer de la longueur et de l'orientation d'un vecteur aux composantes et réciproquement.**



1. On a $\mathbf{a} = (a_x, a_y)$ et $\mathbf{b} = (b_x, b_y)$,
2. Et

$$\mathbf{s} = (a_x + b_x, a_y + b_y) = (a_x, a_y) + (b_x, b_y) = \mathbf{a} + \mathbf{b}.$$

Supposons maintenant que l'on cherche les composantes d'un vecteur **AB** connaissant les coordonnées (x_A, y_A) du point A et (x_B, y_B) du point B par rapport le point $O = (0, 0)$:



1. L'addition des vecteurs permet d'écrire

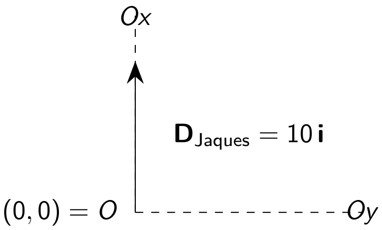
$$\begin{aligned} \mathbf{OA} + \mathbf{AB} = \mathbf{OB} &\iff \\ (x_A, y_A) + \mathbf{AB} = (x_B, y_B) &\iff \\ \mathbf{AB} = (x_B, y_B) - (x_A, y_A), \end{aligned}$$

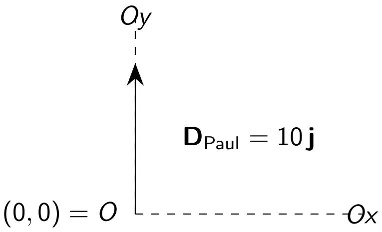
2. ce qui donne les composantes

$$\mathbf{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$$

Le choix du repère ?

1. Un vecteur désignera une force, un déplacement, une vitesse et c'est donc quelque chose de bien défini concrètement.
2. En revanche, le choix du repère Oxy est lui complètement arbitraire, de sorte que si on change de repère, les composantes du vecteur vont changer ! ! !


Ox
$\mathbf{D}_{\text{Jaques}} = 10\,\mathbf{i}$
$(0,0) = O$
Oy


Oy
$\mathbf{D}_{\text{Paul}} = 10\,\mathbf{j}$
$(0,0) = O$
Ox

- Comme on peut le voir, le même déplacement a des coordonnées différentes d'un système à l'autre.
- **Les composantes changent, mais le module et la direction du vecteur restent les mêmes**.
- C'est la raison profonde pour laquelle on écrit les lois de la physique sous forme vectorielle, car sous cette forme elles sont indépendantes du choix du repère.
- Évidemment, pour calculer, on est bien obligé de projeter les équations sur les axes d'un repère.
- Mais la liberté est complète quant à son choix pour se simplifier au maximum le travail.

Il existe deux façons de multiplier des vecteurs entre eux. La première est le produit scalaire.

Definition

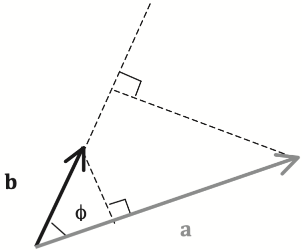
Pour deux vecteurs **a** et **b**, le produit scalaire est défini comme :

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\,\cos\phi,$$

où ϕ est l'angle entre **a** et **b**.

On l'appelle produit scalaire car ce n'est qu'un nombre donc un scalaire.

- On voit tout de suite que le produit scalaire est nul si les deux vecteurs sont perpendiculaires car $\cos \pm \frac{\pi}{2} = 0$.



Autres propriétés

Rappel : $\cos\theta = \cos -\theta$.

1. Commutativité :

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\,\cos \pm\phi = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$$

2. Distributivité par rapport à l'addition :

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$$

Exemples

1. $(1,0)\cdot(1,0) = \langle(1,0),(1,0)\rangle = |(1,0)|^2\cos 0 = 1.$
2. $(0,1)\cdot(0,1) = \langle(0,1),(0,1)\rangle = |(0,1)|^2\cos 0 = 1.$
3. $(1,0)\cdot(0,1) = \langle(1,0),(0,1)\rangle = |(1,0)||(0,1)|\cos\frac{\pi}{2} = 0.$
4. $(0,1)\cdot(1,0) = \langle(0,1),(1,0)\rangle = |(1,0)||(0,1)|\cos-\frac{\pi}{2} = 0.$

En conséquence, on a

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = 1$$

et

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{i} = 0.$$

Propriété

$$
\begin{aligned}
(a_x, a_y) \cdot (b_x, b_y) &= (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j}) \cdot (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j}) \\
&= a_x \mathbf{i} \cdot b_x \mathbf{i} + a_x \mathbf{i} \cdot b_y \mathbf{j} + a_y \mathbf{j} \cdot b_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} \cdot b_y \mathbf{j} \\
&= a_x b_x \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} + a_x b_y \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} + a_y b_x \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} + a_y b_y \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} \\
&= a_x b_x + a_y b_y .
\end{aligned}
$$

et

$$(a_x, a_y) \cdot k\,(b_x, b_y) = k\, a_x b_x + k\, a_y b_y = k((a_x, a_y) \cdot (b_x, b_y)).$$

En conséquence,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = (a_x, a_y) \cdot (a_x, a_y) = a_x^2 + a_y^2 = |\mathbf{a}|^2$$

et

$$\mathbf{a} \cdot (k\,\mathbf{b}) = k(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (k\,\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}$$

Definition

On dit que $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ "$\mathbf{a}$ est perpendiculaire à $\mathbf{b}$ " si $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0$.

Definition

Pour deux vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$, on dit que le vecteur

$$\widehat{\mathbf{b}} = \frac{(\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} \mathbf{a} = \frac{(\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})}{|\mathbf{a}|^2} \mathbf{a},$$

est la projection orthogonal de $\mathbf{b}$ sur la droite généré par $\mathbf{a}$

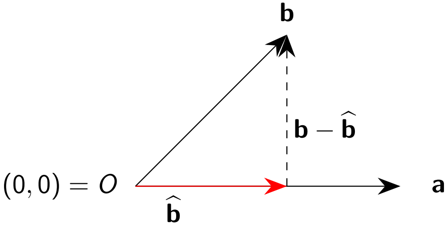
Observez que

$$\widehat{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{a} = \left(\frac{(\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})}{|\mathbf{a}|^2} \mathbf{a} \right) \cdot \mathbf{a} = \left(\frac{(\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})}{|\mathbf{a}|^2} \right) (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) = \left(\frac{(\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})}{|\mathbf{a}|^2} \right) |\mathbf{a}|^2 = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a},$$

alors

$$(\mathbf{b} - \widehat{\mathbf{b}}) \cdot \mathbf{a} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} - \widehat{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{a} = 0,$$

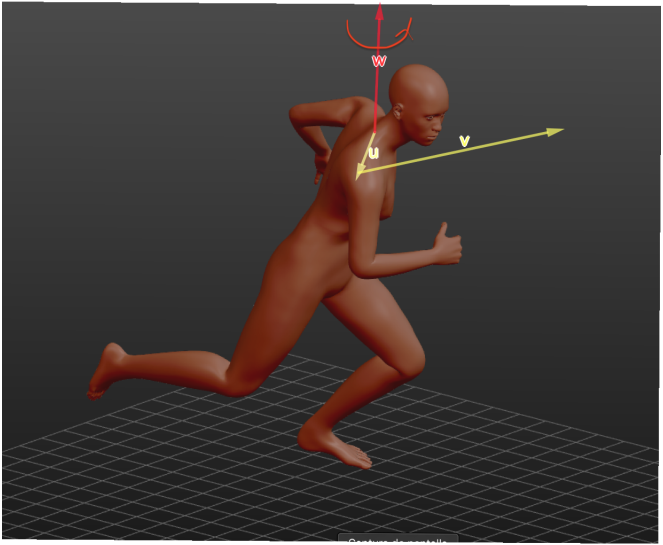
c'est-à-dire $\mathbf{b} - \widehat{\mathbf{b}} \perp \mathbf{a}$.



$$|\mathbf{b} - \widehat{\mathbf{b}}| = \min_{k \in \mathbb{R}} |\mathbf{b} - k\,\mathbf{a}|$$

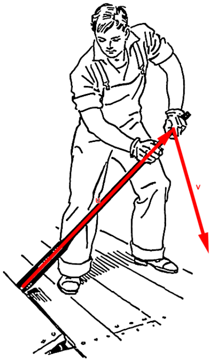
le scalaire optimal est

$$k = \frac{(\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})}{|\mathbf{a}|^2}.$$


W
u
v

Intuition

On peut nous imaginer que **u** est un levier et **v** est un force exercé sur l'extrême du levier



et aussi un peut imaginer l'effet physique rotationnelle qu'on observe avec un porte **u** et la force **v** que on utilise pour l'ouvrir.

Introduction

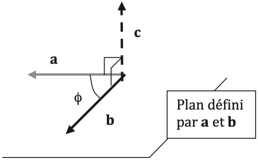
- La deuxième façon de multiplier les vecteurs est le produit vectoriel.
- Il intervient dans les situations où la rotation est présente, le vecteur vitesse dans une rotation, le moment d'une force, la force de Coriolis. . . .
- Cette notion demande des vecteurs dans un espace à trois dimensions.
- À la différence du précédent, **le résultat du produit vectoriel est un vecteur.**

Definition

Soit deux vecteurs **a** et **b**, le produit vectoriel **c** s'écrit :

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$$

et il est défini de la façon suivante



- module : $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\,\sin\phi$, avec ϕ l'angle entre **a** et **b**. On prendra le plus petit des angles entre **a** et **b** pour que $\sin\phi$ soit positif ;
- direction perpendiculaire au plan formé par les deux vecteurs **a** et **b**. Son sens par rapport au plan est tel que quand votre main droite est alignée sur **c** et que votre paume de la main est tournée vers **a**, alors votre pouce est dirigé vers **b**,

Propriétés

1. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$ et $\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$, c'est-à-dire $\mathbf{a} \perp (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ et $\mathbf{b} \perp (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$.
2. Si $\mathbf{a}$ est parallèle à $\mathbf{b}$ alors $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ (puisque $\phi = 0, \pi$).
3. L'ordre des vecteurs est important :

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$$

4. Distributivité du produit vectoriel par rapport à l'addition :

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}.$$

On peut choisir un repère 3D : $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ tel que

1. $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1$,
2. $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = 0$, et
3. $\mathbf{k} = \mathbf{i} \times \mathbf{j}$.

Alors on a les propriétés suivantes :

1. $\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = |\mathbf{k}|^2 = (|\mathbf{i}||\mathbf{j}| \sin \pi/2)^2 = 1$,
2. $\mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{j} = 0$,

On peut définir le produit vectoriel en utilisant la table suivante :

$\times$	$\mathbf{i}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{k}$
$\mathbf{i}$	$\mathbf{0}$	$-\mathbf{k}$	$\mathbf{j}$
$\mathbf{j}$	$\mathbf{k}$	$\mathbf{0}$	$-\mathbf{i}$
$\mathbf{k}$	$-\mathbf{j}$	$\mathbf{i}$	$\mathbf{0}$

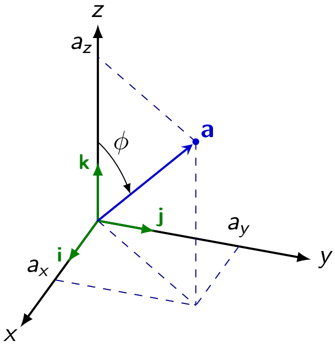
La regle est **pos. horizontal** $\times$ **pos. vertical** .

Un vecteur **a** a des coordonnées en utilisant la repère 3D $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= (a_x, a_y, a_z) = a_x\,(1,0,0) + a_y\,(0,1,0) + a_z\,(0,0,1) \\ &= a_x\,\mathbf{i} + a_y\,\mathbf{j} + a_z\,\mathbf{k}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathbf{b} &= (b_x, b_y, b_z) = b_x\,(1,0,0) + b_y\,(0,1,0) + b_z\,(0,0,1) \\ &= b_x\,\mathbf{i} + b_y\,\mathbf{j} + b_z\,\mathbf{k}\end{aligned}$$



Alors, si on utilise la table :

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (a_x\,\mathbf{i} + a_y\,\mathbf{j} + a_z\,\mathbf{k}) \times (b_x\,\mathbf{i} + b_y\,\mathbf{j} + b_z\,\mathbf{k}) \\
&= (a_x b_y)\mathbf{k} + a_x b_z(-\mathbf{j}) + a_y b_x(-\mathbf{k}) + a_y b_z\mathbf{i} + a_z b_x\mathbf{j} + a_z b_y(-\mathbf{i}) \\
&= (a_y b_z - a_z b_y)\mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\mathbf{k} \\
&= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \mathbf{i}
\end{aligned}$$

où on utilise la notation :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} := ad - bc.$$

Extension 3D produit scalaire et module

Soit

$$\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z) = a_x\,\mathbf{i} + a_y\,\mathbf{j} + a_z\,\mathbf{k}$$

et

$$\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z) = b_x\,\mathbf{i} + b_y\,\mathbf{j} + b_z\,\mathbf{k}.$$

Alors, le produit scalaire est

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\,\cos\phi,$$

où les modules sont

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2},$$

et

$$|\mathbf{b}| = \sqrt{\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}} = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}.$$

Theorem

Le le plus général déplacement du corps rigide peut être produit par une translation par rapport d'une ligne (appelée axe de vis ou axe du Mozzi) suivi (ou précédé) d'une rotation autour d'un axe parallèle à cette ligne.