Les grandeurs physiques: vecteurs et scalaires

Antonio Falcó

Définition

On appelle **system** (physique) l'ensemble des objets de la nature qui composent l'objectif de l'étude scientifique d'un phénomène naturel.

Définition

En physique, **un espace d'état (state space)** est l'ensemble où les variables d'intérêt prennent leurs valeurs. Par conséquent, cet ensemble permet une description complète du système physique.

Définition

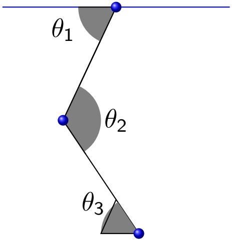
On appelle **observables** à les grandeurs physiques qu'on peut mesurer (distance, vitesse, énergie, ...).

Définition

On appelle **dynamique d'un système** la description de l'évolution temporelle des états du système.

Exemple

Système physique: Cuisse-Jambe-Pied.



Espace d'états: $\underbrace{[-\pi, -\pi/2]}_{\theta_1} \times \overbrace{[\pi/2, -\pi/2]}^{\theta_2} \times \underbrace{[-3.3, -3]}_{\theta_3}$ rad.

Observables: $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$

Grandeurs scalaires

- Les grandeurs physiques qui sont représentées par une valeur unique, c'est-à-dire que leur mesure est représentée par un nombre, sont appelées *grandeurs scalaires*.

Exemple

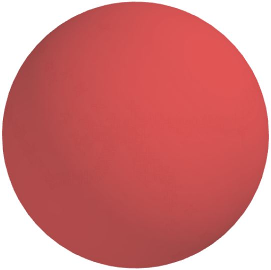
La température, la densité.

Grandeurs vectorielles

- Les grandeurs physiques qui sont représentées par un ensemble ordonnée de valeurs, c'est-à-dire que leur mesure est représentée par un ensemble ordonnée de nombres, sont appelées *grandeurs vectorielles.*

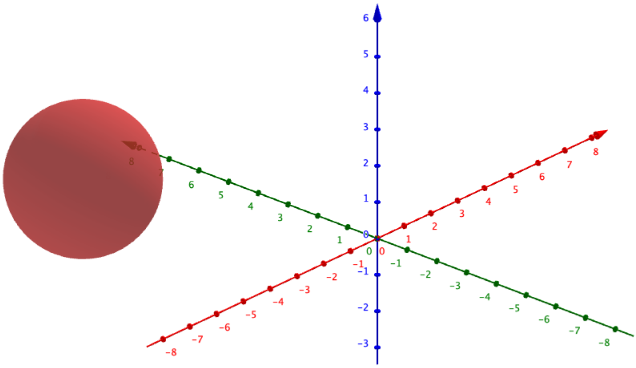
Grandeurs vectorielles

- Comme on peut décrire la position et le déplacement un objet physique?



Les vecteurs

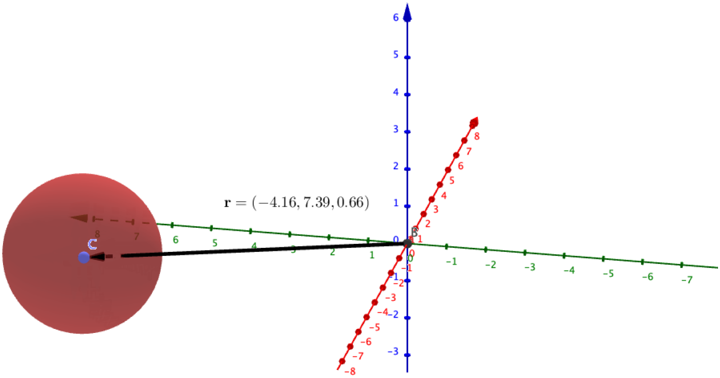
- Comme on peut décrire la position et le déplacement un objet physique? On utilise un système de référence:



Pour le moment on va nous oublier de les unités.

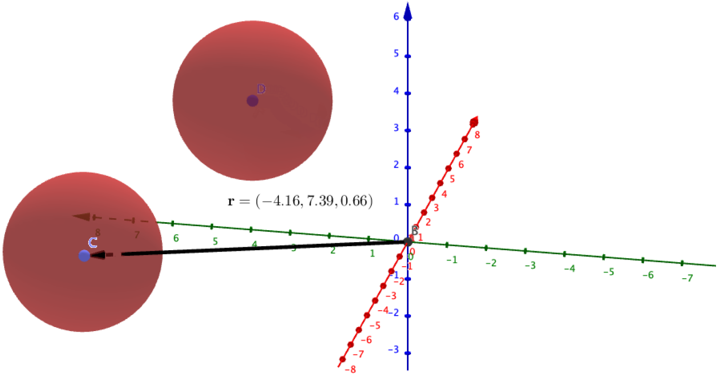
Les vecteurs

- Comme on peut décrire la position et le déplacement un objet physique? On ajoute des coordonnées pour décrire le centre de la boule avec un flèche



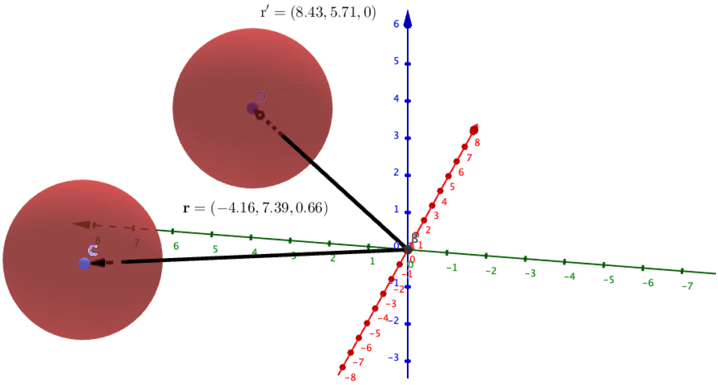
Les vecteurs

- Comme on peut décrire la position et le déplacement un objet physique? Mais on peut aussi observé un déplacement de la boule



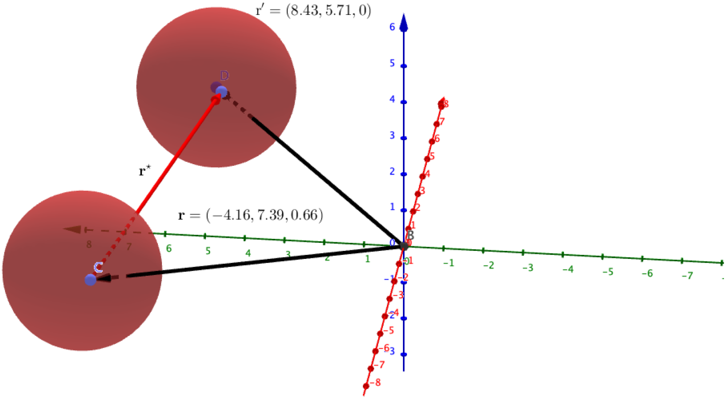
Les vecteurs

- Comme on peut décrire la position et le déplacement un objet physique? On ajoute des nouveaux coordonnés:



Question

Comme on peut mesurer le déplacement?



On connaît que le chemin pour aller de l'origine à C et après à D est équivalent á le chemin pour aller de l'origine à D :

$$\mathbf{r} + \mathbf{r}^{\star} = \mathbf{r}'$$

Opérations arithmétiques

On a de trouver x, y et z telles que

$$(-4.16, 7.39, 0.66) + (x, y, z) = (8.43, 5.71, 0)$$

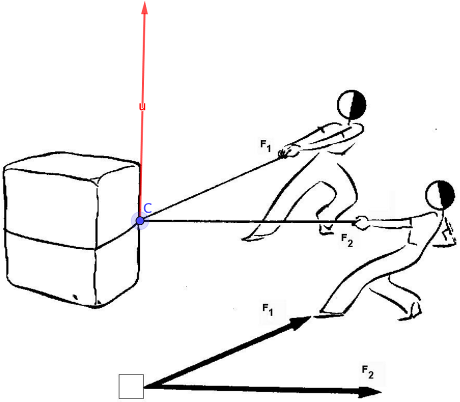
La somme qu'on peut définir est coordonnée par coordonnée:

$$\begin{aligned} -4.16 + x &= 8.43 \\ 7.39 + y &= 5.71 \\ 0.66 + x &= 0 \end{aligned}$$

Alors,

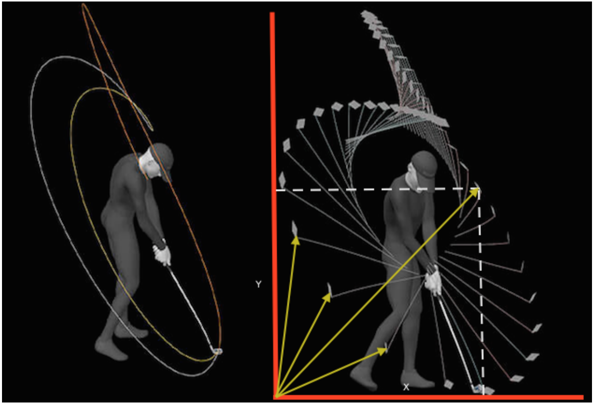
$$\begin{aligned} x &= 12.59 \\ y &= -1.6799999999999997 \\ x &= -0.66 \end{aligned}$$

Forces



Maintenant $\mathbf{F}_1 = (0, F_1, 0)$ et $\mathbf{F}_2 = (F_2, 0, 0)$

Position-Vitesse



Définition

Un vecteur pour un objet X (une grandeur physique) par rapport un système d'unités X_0 est un ensemble de chiffres ordonnées:

$$\mathbf{r} = \mu(X; X_0) = (r_x, r_y, r_z)$$

qui représente la mesure de X en unités X_0 :

$$X = (r_x, r_y, r_z)\,[X_0].$$

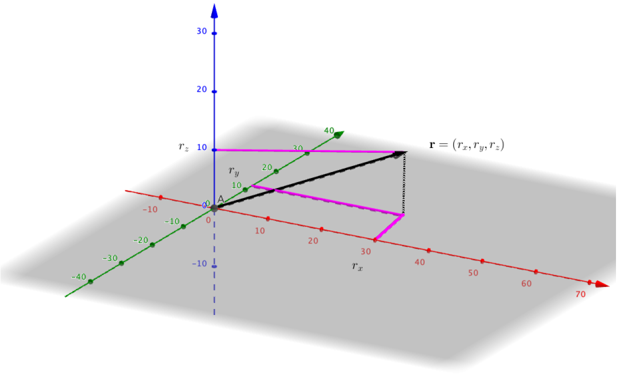
Propriétés

Soit $\mathbf{r} = (r_x, r_y, r_z)$, $\mathbf{s} = (s_x, s_y, s_z)$ deux vecteurs et λ un nombre quelqu'un. Alors

1. $\mathbf{r} + \mathbf{s} = (r_x, r_y, r_z) + (s_x, s_y, s_z) = (r_x + s_x, r_y + r_y, r_z + r_z)$,
2. $\lambda\,\mathbf{r} = \lambda\,(r_x, r_y, r_z) = (\lambda\, r_x, \lambda\, r_y, \lambda\, r_z)$
3. Il existe le vecteur nul $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$ donc $\mathbf{r} + \mathbf{0} = \mathbf{r}$.
4. Il existe le vecteur opposé à $\mathbf{r}$ noté par $-\mathbf{r}$: $\mathbf{r} + (-\mathbf{r}) = \mathbf{0}$.

Au fait $\mathbf{r} + \mathbf{s} = \mu(X + Y; X_0)$ et $\lambda\,\mathbf{r} = \mu(\lambda\, X; X_0)$.

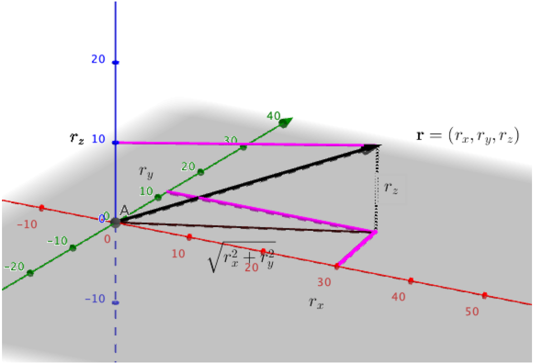
Coordonnées



Au fait toute grandeur vectorielle on peut la décomposée:

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= (r_x, r_y, r_z) = (r_x, 0, 0) + (0, r_y, 0) + (0, 0, r_z)\\ &= r_x\,(1,0,0) + r_y\,(0,1,0) + r_z\,(0,0,1).\end{aligned}$$

Longueur d'un vecteur ou quantité d'une grandeur vectorielle



En utilisant deux fois le théorème de Pythagore on obtient

$$\text{longueur de } \mathbf{r} = \sqrt{\left(\sqrt{r_x^2 + r_y^2}\right)^2 + r_z^2} = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}.$$

Définition (norme ou quantité d'un grandeur vectorielle)

On note la longueur d'un grandeur vectorielle $\mathbf{r} = (r_x, r_y, r_z)$ par

$$\|\mathbf{r}\| = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}.$$

d'où

$$\|\mathbf{r}\|^2 = r_x^2 + r_y^2 + r_z^2.$$

Exemple

Soit $\mathbf{r} = (1, 2, 3)$,

$$\|\mathbf{r}\| = \|(1, 2, 3)\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = 3.7416573867739413$$

et

$$\|\mathbf{r}\|^2 = \|(1, 2, 3)\|^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14.$$

Propriétés

1. Soit $\mathbf{r} = (r_x, r_y, r_z)$. Alors

$$\|\mathbf{r}\| = \|(r_x, r_y, r_z)\| = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2} \geq 0,$$

mais si on suppose que

$$\|\mathbf{r}\| = \|(r_x, r_y, r_z)\| = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2} = 0,$$

comme il est équivalant à écrire

$$r_x^2 + r_y^2 + r_z^2 = 0,$$

on obtient que $r_x = r_y = r_z = 0$, c'est-à-dire $\mathbf{r} = \mathbf{0}$. En conséquence, $\|\mathbf{r}\| = 0$ est équivalent à $\mathbf{r} = \mathbf{0}$.

Propriétés

2. Soit $\mathbf{r} = (r_x, r_y, r_z)$ et $\lambda \neq 0$ un nombre (scalaire). Alors

$$\begin{aligned}
\|\lambda\,\mathbf{r}\| &= \|\lambda\,(r_x, r_y, r_z)\| = \|(\lambda\,r_x, \lambda\,r_y, \lambda\,r_z)\| \\
&= \sqrt{(\lambda\,r_x)^2 + (\lambda\,r_y)^2 + (\lambda\,r_z)^2} \\
&= \sqrt{\lambda^2\,r_x^2 + \lambda^2\,r_y^2 + \lambda^2\,r_z^2} \\
&= \sqrt{\lambda^2\,(r_x^2 + r_y^2 + r_z^2)} = \sqrt{\lambda^2}\,\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2} \\
&= |\lambda|\,\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2} = |\lambda|\,\|\mathbf{r}\|.
\end{aligned}$$

c'est-à-dire $\|\lambda\,\mathbf{r}\| = |\lambda|\,\|\mathbf{r}\|$ est vérifié pour tout scalaire non nul λ.
Si $\|\mathbf{r}\| \neq 0$ et on prend $\lambda = \frac{1}{\|\mathbf{r}\|} > 0$ alors

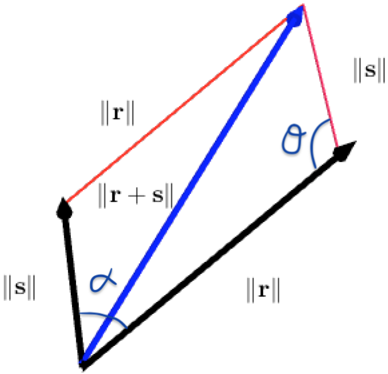
$$\left\|\frac{1}{\|\mathbf{r}\|}\,\mathbf{r}\right\| = \left|\frac{1}{\|\mathbf{r}\|}\right|\,\|\mathbf{r}\| = \frac{1}{\|\mathbf{r}\|}\,\|\mathbf{r}\| = 1.$$

Propriétés

3. Soit $\mathbf{r} = (r_x, r_y, r_z)$ et $\mathbf{s} = (s_x, s_y, s_z)$. Alors

$$\|\mathbf{r} + \mathbf{s}\| \leq \|\mathbf{r}\| + \|\mathbf{s}\|.$$

La quantité employé par la coopération des grandeurs vectorielles est plus petite que la somme de les quantités individuelles de ces grandeurs.



Théorème de Pythagore: Si $\theta = 90^\circ$ alors $\|\mathbf{r}+\mathbf{s}\|^2 = \|\mathbf{r}\|^2 + \|\mathbf{s}\|^2$.
Observez que $\alpha + \theta = 180^\circ$, alors $\theta = 90^\circ$ est équivalent à $\alpha = 90^\circ$.

Propriété

$$
\begin{aligned}
\|\mathbf{r}+\mathbf{s}\|^2 &= \|(r_x, r_y, r_z) + (s_x, s_y, s_z)\|^2 = \|(r_x + s_x, r_y + s_y, r_z + s_z)\|^2 \\
&= (r_x + s_x)^2 + (r_y + s_y)^2 + (r_z + s_z)^2 \\
&= (r_x^2 + 2r_x s_x + s_x^2) + (r_y^2 + 2r_y s_y + s_y^2) + (r_z^2 + 2r_z s_z + s_z^2) \\
&= (r_x^2 + r_y^2 + r_z^2) + (s_x^2 + s_y^2 + s_z^2) + 2(r_x s_x + r_y s_y + r_z s_z) \\
&= \|\mathbf{r}\|^2 + \|\mathbf{s}\|^2 + 2(r_x s_x + r_y s_y + r_z s_z).
\end{aligned}
$$

Alors, on a

$$\|\mathbf{r}+\mathbf{s}\|^2 = \|\mathbf{r}\|^2 + \|\mathbf{s}\|^2 + 2(r_x s_x + r_y s_y + r_z s_z)$$

et en conséquence $\theta = \alpha = 90^\circ$ (c'est-à-dire **r** et **s** sont perpendiculaires) si

$$r_x s_x + r_y s_y + r_z s_z = 0.$$

La découverte de le produit scalaire

On peut définir le **produit scalaire** de deux vecteurs:

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{s} = (r_x, r_y, r_z) \cdot (s_x, s_y, s_z) := r_x \cdot s_x + r_y \cdot s_y + r_z \cdot s_z$$

il existe d'autre notation moins confuse:

$$\langle \mathbf{r}, \mathbf{s} \rangle = \langle (r_x, r_y, r_z), (s_x, s_y, s_z) \rangle := r_x \cdot s_x + r_y \cdot s_y + r_z \cdot s_z.$$

d'où

$$\|\mathbf{r} + \mathbf{s}\|^2 = \|\mathbf{r}\|^2 + 2\langle \mathbf{r}, \mathbf{s} \rangle + \|\mathbf{s}\|^2.$$

On dira que $\mathbf{r}$ et $\mathbf{s}$ sont perpendiculaires ($\mathbf{r} \perp \mathbf{s}$) si leur produit scalaire est nul: $\langle \mathbf{r}, \mathbf{s} \rangle = 0$.

Question

Quelle est la liaison entre le produit scalaire de de deux vecteurs $\langle \mathbf{r}, \mathbf{s} \rangle$ et l'angle α entre les deux.

Remarque

$$\langle \mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle = \langle (r_x, r_y, r_z), (r_x, r_y, r_z) \rangle = r_x^2 + r_y^2 + r_z^2 = \|\mathbf{r}\|^2$$

Théorème (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soit $\mathbf{r} = (r_x, r_y, r_z)$ *et* $\mathbf{s} = (s_x, s_y, s_z)$ *deux vecteurs. Alors*

$$|\langle \mathbf{r}, \mathbf{s} \rangle| \leq \|\mathbf{r}\| \, \|\mathbf{s}\|$$

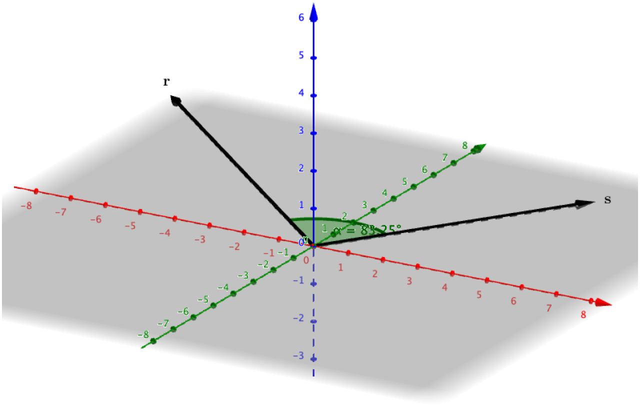
c'est-à-dire si $\|\mathbf{r}\| \neq 0$ *et* $\|\mathbf{s}\| \neq 0$, *l'angle* α *entre les deux vecteurs* $\mathbf{r}$ *et* $\mathbf{s}$ *est déterminé par l'expression*

$$\cos\alpha = \frac{\langle \mathbf{r}, \mathbf{s} \rangle}{\|\mathbf{r}\| \, \|\mathbf{s}\|}.$$

Exemple

Soient $\mathbf{r} = (1, 2, 3)$ et $\mathbf{s} = (4, 5, 6)$. Alors

$$\cos\alpha = \frac{1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}\,\sqrt{4^2 + 5^2 + 6^2}}.$$


r
s
α = 83.25°
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-8
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5
6
7
8

Explication

Si $\|\mathbf{r}\| \neq 0$ et $\|\mathbf{s}\| \neq 0$, alors

$$|\langle \mathbf{r}, \mathbf{s} \rangle| \leq \|\mathbf{r}\| \, \|\mathbf{s}\| \Leftrightarrow \frac{|\langle \mathbf{r}, \mathbf{s} \rangle|}{\|\mathbf{r}\| \, \|\mathbf{s}\|} \leq 1.$$

En conséquence, le rapport satisfait

$$-1 \leq \frac{\langle \mathbf{r}, \mathbf{s} \rangle}{\|\mathbf{r}\| \, \|\mathbf{s}\|} \leq 1,$$

que c'est la même propriété que est vérifié pour les fonctions trigonométriques:

$$-1 \leq \cos \alpha \leq 1 \text{ et } -1 \leq \sin \alpha \leq 1.$$

Comme $\langle \mathbf{r}, \mathbf{s} \rangle = 0$ est équivalent à $\mathbf{r} \perp \mathbf{s}$ et on a $\cos 90^\circ = 0$ et $\sin 90^\circ = 1$. Alors le choix naturelle est le cosinus:

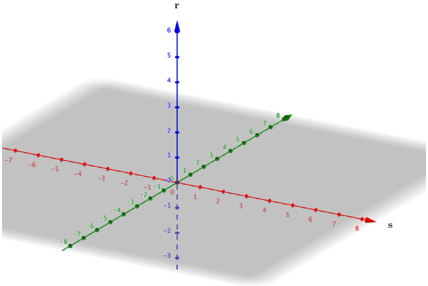
$$\cos \alpha = \frac{\langle \mathbf{r}, \mathbf{s} \rangle}{\|\mathbf{r}\| \, \|\mathbf{s}\|}.$$

Géométrie des grandeurs vectorielles

Si on prend $\mathbf{r} = (0, 0, r_z)$ et $\mathbf{s} = (0, s_y, 0)$ alors

$$\langle \mathbf{r}, \mathbf{s} \rangle = \langle (0, 0, r_z), \mathbf{s} = (0, s_y, 0) \rangle = 0 \cdot 0 + 0 \cdot s_y + r_z \cdot 0 = 0.$$

on obtient $(0, 0, r_z) \perp (0, s_y, 0)$.

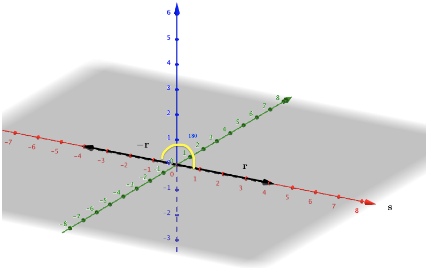


Géométrie des grandeurs vectorielles

Si on connaît que l'angle entre **r** et **s** est de 0 rad. $= 0$ deg. s. ou π rad. $= 180$ deg. s. comme

$$\cos 0 = \cos 0^\circ = 1 \text{ et } \cos \pi = \cos 180^\circ = -1$$

alors le produit scalaire est: $\langle \mathbf{r}, \mathbf{s} \rangle = \pm \|\mathbf{r}\| \, \|\mathbf{s}\|$. On dira que deux vecteurs sont parallèles $\mathbf{r}||\mathbf{s}$ si leur produit scalaire est extrémale: $\langle \mathbf{r}, \mathbf{s} \rangle = \pm \|\mathbf{r}\| \, \|\mathbf{s}\|$. Alors, il existe un nombre (scalaire) $\lambda \neq 0$ telle que $\mathbf{r} = \lambda \mathbf{s}$ et on dit que le deux vecteurs sont **linéairement dépendants**.



Exemple

Soient $\mathbf{r} = (1, 2, 3)$ et $\mathbf{s} = (4, 5, 6)$. Alors

$$\cos\alpha = \frac{1\cdot 4 + 2\cdot 5 + 3\cdot 6}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}\sqrt{4^2+5^2+6^2}} = 0.975,$$

et

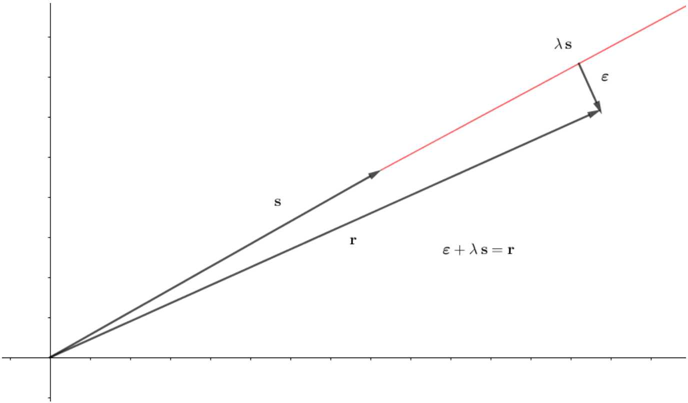
$$\alpha = \arccos(0.975) = 0.226 \text{ rad}$$

ou

$$0.226 \text{ rad } = 12.933 \text{ deg. s.}$$

Comme l'angle est très petit $\cos 0 = 1 \approx 0.975$ est-ce qu'il existe un nombre λ tel que

$$(1, 2, 3) = \lambda\,(4, 5, 6) + \varepsilon?$$



Trouvez λ tel que $\|\mathbf{r} - \lambda\,\mathbf{s}\| = \|\varepsilon\|$ soit le plus petite possible.

Exemple

Observe que le système

$$(1,2,3) = \lambda\,(4,5,6)$$

est équivalent à

$$1 = 4\,\lambda, \quad 2 = 5\,\lambda, \quad 3 = 6\,\lambda$$

et il n'y as pas de solution. Alors on va essayer de trouvez un nombre λ tel que

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \|(1,2,3) - \lambda\,(4,5,6)\|^2 = \|(1-4\,\lambda, 2-5\,\lambda, 3-6\,\lambda)\|^2 \\ &= (1-4\,\lambda)^2 + (2-5\,\lambda)^2 + (3-6\,\lambda)^2 \\ &= 14 - 64\,\lambda + 77\,\lambda^2 \geq 0, \end{aligned}$$

prend sont valeur minimal. La fonction

$$f(\lambda) = \|(1,2,3) - \lambda\,(4,5,6)\|^2 = \|\varepsilon\|^2$$

est la norm au carré de l'erreur d'approximation en fonction de λ.

Exemple

La fonction $f(\lambda) = 14 - 64\,\lambda + 77\,\lambda^2$ prend son valeur minimal quand

$$f'(\lambda) = -64 + 2 \cdot 77\,\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{64}{154}.$$

et

$$f\left(\frac{64}{154}\right) = 14 - 64\,\frac{64}{154} + 77\,\left(\frac{64}{154}\right)^2 = 0.7012987013.$$

En conséquence, la meilleur approximation de $\mathbf{r}$ par $\lambda\,\mathbf{s}$ est

$$(1, 2, 3) = \frac{64}{154}\,(4, 5, 6) + (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z)$$

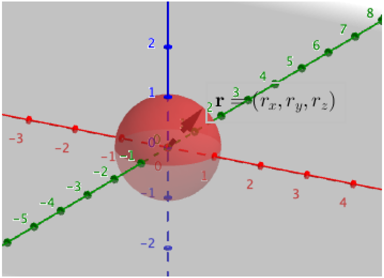
d'où $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z) = (-0.66, -0.07, 0.5)$ et

$$\|(-0.66, -0.07, 0.5)\| = \sqrt{0.7012987013} = 0.837$$

Vecteurs unitaires, la sphère unitaire ou état physique

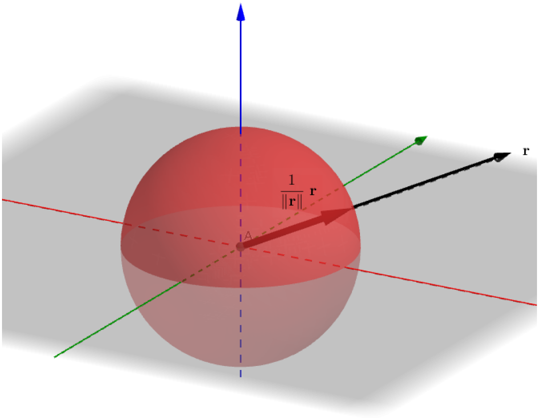
Soit $\mathbf{r} = (r_x, r_y, r_z)$ telle que $\|\mathbf{r}\| = 1$, alors

$$\|\mathbf{r}\|^2 = r_x^2 + r_y^2 + r_z^2 = 1.$$

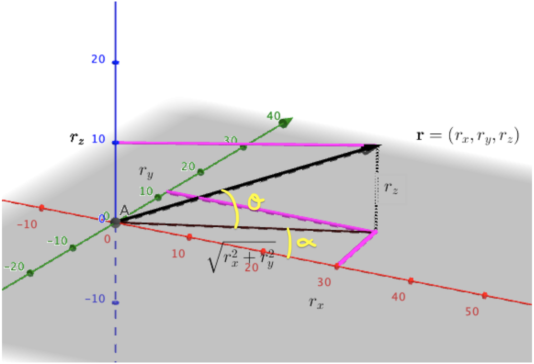


On peut identifier les vecteurs unitaires avec les points sous une sphère de rayon 1 et lie tout vecteur non nul $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$ avec un vecteur unitaire

$$\mathbf{r} = \|\mathbf{r}\| \left(\frac{1}{\|\mathbf{r}\|} \mathbf{r} \right), \quad \mathbf{r}_u := \frac{1}{\|\mathbf{r}\|} \mathbf{r}.$$


$\frac{1}{\|\mathbf{r}\|}\mathbf{r}$
$\mathbf{r}$
A

Les angles internes d'un vecteur



$$\cos\alpha = \frac{r_x}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2}}, \ \sin\alpha = \frac{r_y}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2}}, \ \sin\theta = \frac{r_z}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}}.$$

et $\cos\theta = \frac{\sqrt{r_x^2+r_y^2}}{\sqrt{r_x^2+r_y^2+r_z^2}}$

Exemple

Soit $\mathbf{r} = (1, 2, 3)$,

$$\cos\alpha = \frac{r_x}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2}} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = 0.447$$

et

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{r_x^2 + r_y^2}}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}} = \frac{\sqrt{1^2 + 2^2}}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{14}} = 0.598.$$

Alors,

$$\alpha = \arccos 0.447 = 63.435 \text{ deg. s.}$$

et

$$\theta = \arccos 0.598 = 53.301 \text{ deg. s.}$$

Petit calcul

Pour un vecteur $\mathbf{r} = (r_x, r_y, r_z)$ on a

$$r_x = \sqrt{r_x^2 + r_y^2}\cos\alpha,\ r_y = \sqrt{r_x^2 + r_y^2}\sin\alpha,\ r_z = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}\sin\theta.$$

On connaît que $\|\mathbf{r}\| = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}$ et de la troisième égalité au carré on obtient:

$$r_z^2 = (r_x^2 + r_y^2 + r_z^2)\sin^2\theta = (r_x^2 + r_y^2 + r_z^2)(1 - \cos^2\theta),$$

d'où

$$r_z^2 = (r_x^2 + r_y^2 + r_z^2) - (r_x^2 + r_y^2 + r_z^2)\cos^2\theta$$

qui est équivalent à

$$0 = (r_x^2 + r_y^2) - (r_x^2 + r_y^2 + r_z^2)\cos^2\theta \Rightarrow r_x^2 + r_y^2 = (r_x^2 + r_y^2 + r_z^2)\cos^2\theta.$$

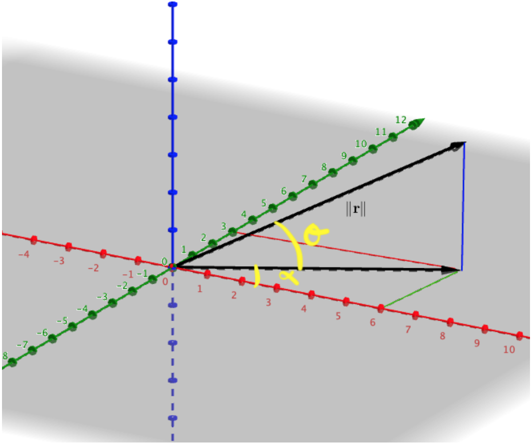
Alors, si on prend la racine carré:

$$\sqrt{r_x^2 + r_y^2} = \sqrt{(r_x^2 + r_y^2 + r_z^2)\cos^2\theta} = \|\mathbf{r}\|\,|\cos\theta|.$$

Conclusion (a)

Soit $\mathbf{r} = (r_x, r_y, r_z)$ avec angles internes α et θ. Alors

$$\begin{aligned}\mathbf{r} = (r_x, r_y, r_z) &= (\|\mathbf{r}\|\,|\cos\theta|\ \cos\alpha, \|\mathbf{r}\|\,|\cos\theta|\ \sin\alpha, \|\mathbf{r}\|\ \sin\theta) \\ &= \|\mathbf{r}\|\,(|\cos\theta|\ \cos\alpha, |\cos\theta|\ \sin\alpha, \sin\theta).\end{aligned}$$

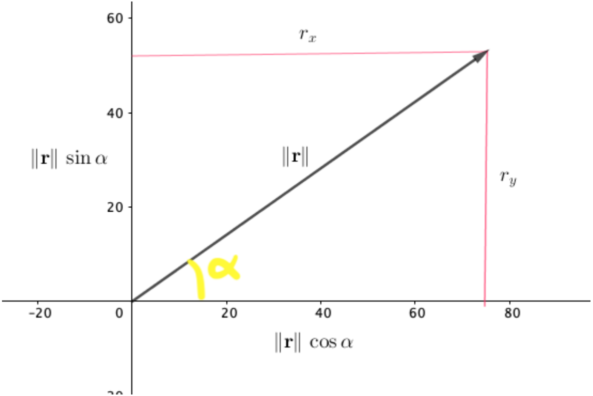


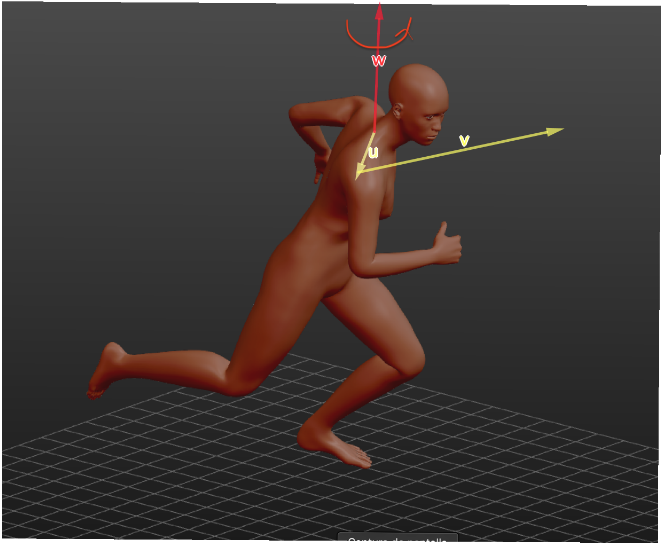
Conclusion (b)

Si $\theta = 0$ on a

$$\mathbf{r} = \|\mathbf{r}\| \left(|\cos 0| \cos\alpha, |\cos 0| \sin\alpha, \sin 0\right) = \|\mathbf{r}\| \left(\cos\alpha, \sin\alpha, 0\right),$$

c'est-à-dire $r_z = 0$, $r_x = \|\mathbf{r}\| \cos\alpha$ et $r_y = \|\mathbf{r}\| \sin\alpha$.




W
u
v

On considère deux vecteurs $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ et $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$. Ici $\mathbf{u}$ es la distance entre entre la colonne vertébrale et l'épaule et $\mathbf{v}$ représente la force exercée par l'athlète pendent la carrière. Pour décrire la rotation qu'on observe autour la colonne vertébrale on utilise un vecteur $\mathbf{w} = (w_x, w_y, w_z)$ produit par l'action de $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{w} := \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$$

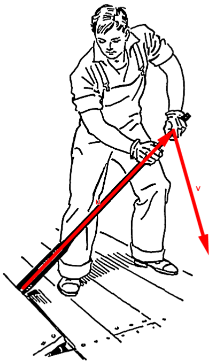
et tel que il est perpendiculaire à $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0.$$

Alors $\|\mathbf{w}\|$ est la quantité de rotation produit par l'action de $\mathbf{v}$ à $\mathbf{u}$.

Intuition

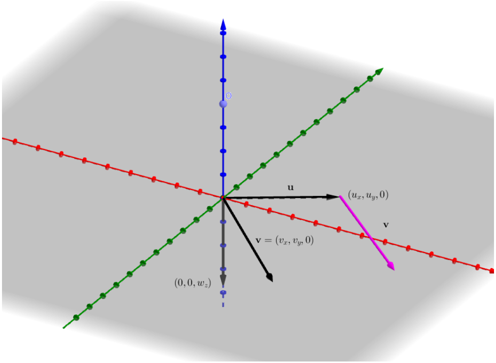
On peut nous imaginer que **u** est un levier et **v** est un force exercé sur l'extrême du levier



et aussi un peut imaginer l'effet physique rotationnelle qu'on observe avec un porte **u** et la force **v** que on utilise pour l'ouvrir.

En particulier, si $\mathbf{u} = (u_x, u_y, 0)$ et $\mathbf{v} = (v_x, v_y, 0)$, alors il s'est vérifie

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = (u_x, u_y, 0) \wedge (v_x, v_y, 0) = \mathbf{w} = (0, 0, w_z).$$



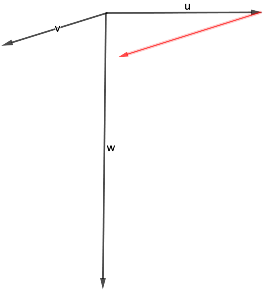
$$w_z := u_x v_y - v_x u_y$$

d'où $w_z = 0$ est équivalent à $u_x v_y = v_x u_y$ et aussi à $\frac{u_x}{u_y} = \frac{v_x}{v_y}$

Les tourbillons

Soient $\mathbf{u} = (u_x, u_y, 0)$, $\mathbf{v} = (v_x, v_y, 0)$. Alors, le produit vectorielle $\wedge$ représente la direction d'un rotation produit pour l'interaction entre le "levier" $\mathbf{u}$ et l'action $\mathbf{v}$ sur l'extrême du "levier":

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}.$$



L'invention de le produit vectorielle

Soit $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ et $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$, on a trois décompositions:

$$\left\{ \begin{array}{c} (u_x, u_y, 0) \\ \wedge \\ (v_x, v_y, 0) \end{array} \right. = \quad (0, 0, w_z) \quad w_z = u_x v_y - v_x u_y$$

$$\left\{ \begin{array}{c} (u_x, 0, u_z) \\ \wedge \\ (v_x, 0, v_z) \end{array} \right. = \quad (0, w_y, 0) \quad w_y = -(u_x v_z - v_x u_z)$$

$$\left\{ \begin{array}{c} (0, u_y, u_z) \\ \wedge \\ (0, v_y, v_z) \end{array} \right. = \quad (w_x, 0, 0) \quad w_x = u_y v_z - v_y u_z$$

En conséquence,

$$(u_x, u_y, u_z) \wedge (v_x, v_y, v_z) := (u_y v_z - v_y u_z, -(u_x v_z - v_x u_z), u_x v_y - v_x u_y).$$

Exemple

$$(1,2,3)\wedge(4,5,6) = (2\cdot6-5\cdot3, -(1\cdot6-4\cdot3), 1\cdot5-4\cdot2) = (-3,6,-3).$$

Une petite aide

$$\begin{aligned}(1,2,3)\wedge(4,5,6) &= \left(\underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}}_{\text{sans } x}, -\overbrace{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}}^{\text{sans } y}, \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}}_{\text{sans } z} \right) \\ &= (2\cdot6-5\cdot3, -(1\cdot6-4\cdot3), 1\cdot5-4\cdot2) \\ &= (-3,6,-3)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\langle(1,2,3),(-3,6,-3)\rangle &= 1\cdot(-3)+2\cdot6+3\cdot(-3) = 0 \\ \langle(4,5,6),(-3,6,-3)\rangle &= 4\cdot(-3)+5\cdot6+6\cdot(-3) = 0.\end{aligned}$$

Produit no-commutatif

Observez que en utilisant la formule on obtient

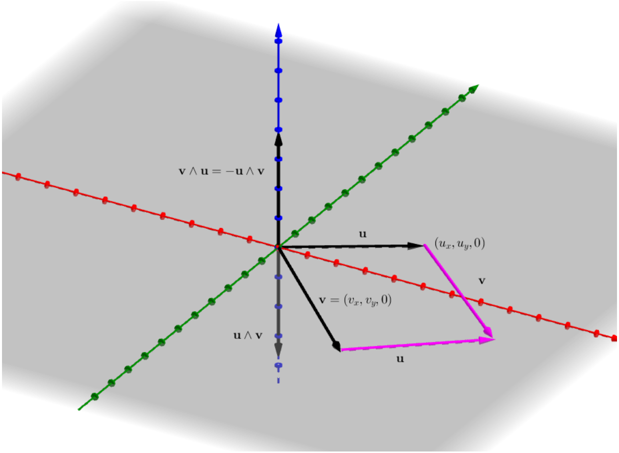
$$(u_x, u_y, u_z) \wedge (v_x, v_y, v_z) = (u_y v_z - v_y u_z, -(u_x v_z - v_x u_z), u_x v_y - v_x u_y),$$

et

$$(v_x, v_y, v_z) \wedge (u_x, u_y, u_z) = (v_y u_z - u_y v_z, -(v_x u_z - u_x v_z), v_x u_y - u_x v_y).$$

Alors,

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = (u_x, u_y, u_z) \wedge (v_x, v_y, v_z) = -(v_x, v_y, v_z) \wedge (u_x, u_y, u_z) = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}.$$


$\mathbf{v} \wedge \mathbf{u} = -\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$
$\mathbf{u}$
$(u_x, u_y, 0)$
$\mathbf{v}$
$\mathbf{v} = (v_x, v_y, 0)$
$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$
$\mathbf{u}$

L'identité de Jacobi

Pour $\mathbf{r}, \mathbf{s}$ et $\mathbf{t}$ il est vérifié que

$$\mathbf{r} \wedge (\mathbf{s} \wedge \mathbf{t}) + \mathbf{s} \wedge (\mathbf{t} \wedge \mathbf{r}) + \mathbf{t} \wedge (\mathbf{r} \wedge \mathbf{s}) = \mathbf{0}.$$

Remarque

Le choix de les signes dans la définition:

$$(r_x, r_y, r_z) \wedge (s_x, s_y, s_z) := (r_y s_z - s_y r_z, -(r_x s_z - s_x r_z), r_x s_y - s_x r_y).$$

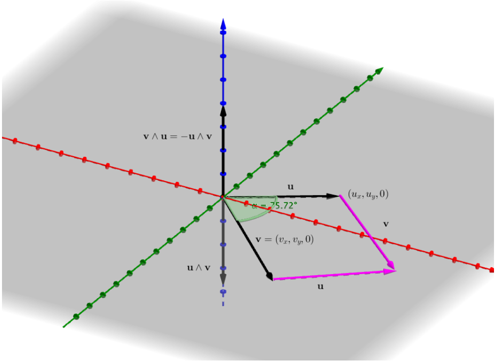
est pour vérifié le produit est non-commutatif et l'identité de Jacobi.

Théorème

Soit **u** *et* **v** *alors,*

$$\|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\| \sin \alpha,$$

ici α *est l'angle entre les vecteurs* **u** *et* **v**.



Remarque

En supposant que l'angle α entre **u** et **v** est 0° ou 180° c'est-à-dire:

$$\mathbf{u} = \lambda\,\mathbf{v} \text{ ou } \mathbf{u} = -\lambda\,\mathbf{v}$$

pour un nombre $\lambda > 0$. Comme

$$\sin 0^\circ = \sin 180^\circ = 0$$

alors

$$\|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}\| = 0 \Rightarrow \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Si **u** est parallèle à **v** alors l'effet rotationnelle est nul. Vous pouvez penser que si vous exercé une force parallèle a une porte elle restera immobile.

Définition

Les grandeurs vectorielles avec la même dimension chez la physique classique sont représentées, un fois on a fixé un point de référence et qu'on appelle le vecteur nul $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$, par des quantités vectorielles

$$\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z).$$

Au fait $\mathbf{u}$ est un élément de l'espace physique de trois dimensions qu'on note par

$$\mathbb{R}^3 = \{(u_x, u_y, u_z) : u_x, u_y, u_z \text{ des nombres réelles: } \mathbb{R}\}.$$

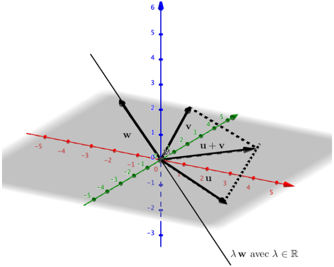
Le déplacement $(+)$ à $\mathbb{R}^3$

Soient $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$, $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$, $\mathbf{w} = (w_x, w_y, w_z)$ et λ un nombre réel. Alors, la somme $+$ représente la translation des grandeurs

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_x, u_y, u_z) + (v_x, v_y, v_z) = (u_x + v_x, u_y + v_y, u_z + v_z).$$

et la multiplication par une scalaire représente le déplacement par rapport une direction fixé:

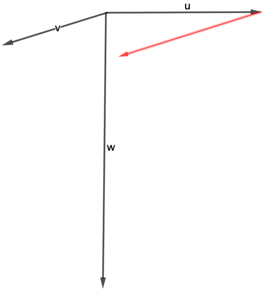
$$\lambda\,\mathbf{w} = \lambda\,(w_x, w_y, w_z) = (\lambda\,w_x, \lambda\,w_y, \lambda\,w_z).$$



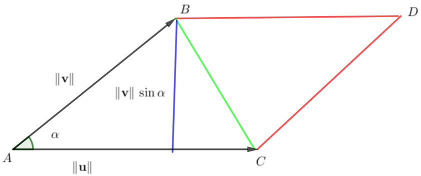
Les tourbillons ($\wedge$) à $\mathbb{R}^3$

Soient $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$, $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$. Alors, le produit vectorielle $\wedge$ représente la direction d'un rotation produit pour l'interaction entre le "levier" $\mathbf{u}$ et l'action $\mathbf{v}$ sur l'extrême du "levier":

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = (u_x, u_y, u_z) \wedge (v_x, v_y, v_z).$$



Aire d'un parallélogramme



L'aire de le parallélogramme $ABCD = 2\times$ l'aire du triangle ABC et
L'aire du triangle $ABC = \frac{1}{2}\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\ \sin\alpha$. Alors
L'aire de le parallélogramme $ABCD = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\ \sin\alpha = \|\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}\|$.