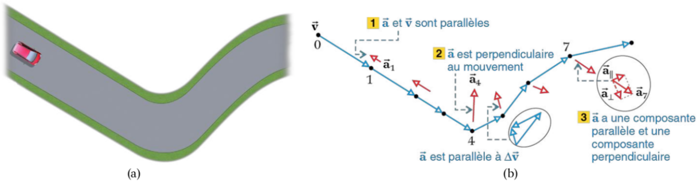
Cinématique

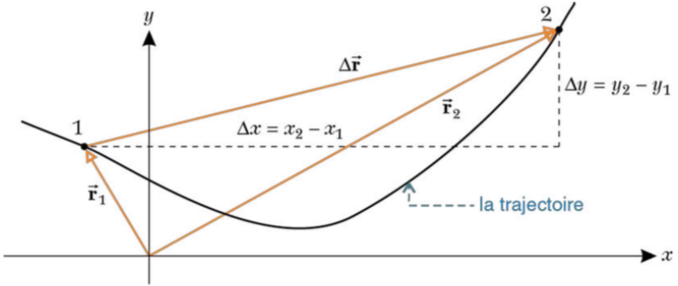
Antonio Falcó

Le diagramme du mouvement



Pour décrire le mouvement on utilise $(\mathbf{r}, v, \mathbf{a})$ la position, la vitesse et l'accélération. En général, on a $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ coordonnées (9 degrés de liberté).

La position et le déplacement



$\mathbf{r}_1 = (x_2, y_2)$ et $\mathbf{r}_2 = (x_2, y_2)$, alors

$$\Delta \mathbf{r} := \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = (x_2, y_2) - (x_2, y_2) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) = (\Delta x, \Delta y)$$

Définition (La vitesse approché)

Si la particule se trouve au temps t dans $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ et au temps $t + \Delta t$ à $\mathbf{r}(t + \Delta t) = (x(t + \Delta t), y(t + \Delta t))$, où $\Delta t \approx 0$. Alors la vitesse approché à $[t, t + \Delta t]$ est

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{v} &= \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{(t + \Delta t) - t} = \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \\
&= \left(\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}, \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} \right) = \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t} \right)
\end{aligned}
$$

Définition (La vitesse instantané)

La vitesse instantanée au temps t est définie par

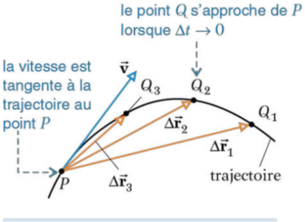
$$
\boldsymbol{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} := \frac{d}{dt} \mathbf{r}(t),
$$

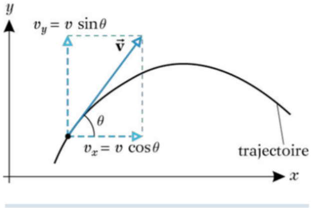
c'est-à-dire

$$
v_x(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \text{ et } v_y(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}
$$

Propriété

Le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire.

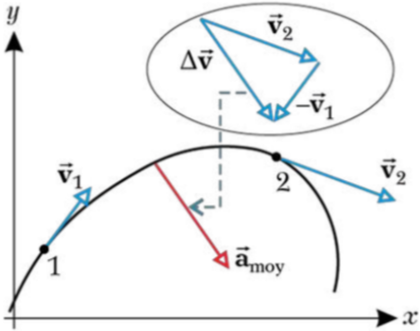




Si on connaît l'angle θ alors et la norme de la vitesse $v = \|\boldsymbol{v}\|$ alors

$$\boldsymbol{v} = (v\cos\theta, v\sin\theta).$$

L'accélération



$\boldsymbol{v}_1 = (v_x^{(1)}, v_y^{(1)})$ et $\boldsymbol{v}_2 = (v_x^{(2)}, v_y^{(2)})$, alors

$$\begin{aligned}\Delta \boldsymbol{v} := \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1 &= (v_x^{(2)}, v_y^{(2)}) - (v_x^{(1)}, v_y^{(1)}) \\ &= (v_x^{(2)} - v_x^{(1)}, v_y^{(2)} - v_y^{(1)}) = (\Delta v_x, \Delta v_y)\end{aligned}$$

Définition (L'accélération approché)

Si la particule se trouve au temps t avec une vitesse $\boldsymbol{v}(t) = (x(t), y(t))$ et au temps $t + \Delta t$ à $\boldsymbol{v}(t + \Delta t) = (v_x(t + \Delta t), v_y(t + \Delta t))$, où $\Delta t \approx 0$. Alors l'accélération approché à $[t, t + \Delta t]$ est

$$\boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{v}(t + \Delta t) - \boldsymbol{v}(t)}{(t + \Delta t) - t} = \frac{\boldsymbol{v}(t + \Delta t) - \boldsymbol{v}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}$$

$$= \left(\frac{v_x(t + \Delta t) - v_x(t)}{\Delta t}, \frac{v_y(t + \Delta t) - v_y(t)}{\Delta t} \right) = \left(\frac{\Delta v_x}{\Delta t}, \frac{\Delta v_y}{\Delta t} \right)$$

Définition (L'accélération instantané)

L'accélération instantanée au temps t est définie par

$$\mathbf{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{v}(t + \Delta t) - \boldsymbol{v}(t)}{\Delta t} := \frac{d}{dt} \boldsymbol{v}(t),$$

$$a_x(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \text{ et } a_y(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_y}{\Delta t}$$

Théorème

Si la vitesse reste constant, c'est-à-dire $\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v}(t_0)$ *pour tout temps* $t \geq t_0$*. Alors l'accélération est nulle, c'est à dire* $\mathbf{a}(t) = \mathbf{0}$ *pour tout temps* $t \geq t_0$*.*

Si la vitesse reste constant

$$\boldsymbol{v}(t + \Delta t) = \boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v}(t_0)$$

et en conséquence

$$\mathbf{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{v}(t + \Delta t) - \boldsymbol{v}(t)}{\Delta t} = \mathbf{0}.$$

Théorème

Si l'accélération reste constant, c'est-à-dire $\mathbf{a}(t) = \mathbf{a}(t_0)$ *pour tout temps* $t \geq t_0$*. Alors la vitesse est linéaire par rapport* t *:*

$$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v}(t_0) + (t - t_0)\mathbf{a}(t_0)$$

et la position est aussi déterminé par

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0) + (t - t_0)\,\boldsymbol{v}(t_0) + \frac{1}{2}(t - t_0)^2\,\mathbf{a}(t_0)$$

pour tout temps $t \geq t_0$*.*

Si l'accélération reste constant

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{a}(t_0)$$

on a

$$\mathbf{a}(t_0) = \frac{\boldsymbol{v}(t_0 + \Delta t) - \boldsymbol{v}(t_0)}{\Delta t}.$$

Si on prend $\Delta t = t - t_0$ on a

$$\mathbf{a}(t_0) = \frac{\boldsymbol{v}(t) - \boldsymbol{v}(t_0)}{t - t_0}.$$