Exercicios Aula 6

Affonso Amendola
NUSP 9301753

May 6, 2020

Exercício 1

A distribuição geométrica descreve a probabilidade do número n de tentativas (Cara/Coroa, Deteçao/Não-Deteção) antes de se ter um sucesso ($n = 1, 2, 3, ...$)

$$P(n|\theta) = \theta(1-\theta)^{n-1} \tag{1}$$

θ**: probabilidade de sucesso;** $P(n|\theta)$ **para** $n = 1, 2, 3, ...$ **forma uma progressão geométrica.**
1.1 mostre que o valor esperado e a variância de n **são:** $E(n) = 1/\theta$ **e** $Var(n) = (1-\theta)/\theta^2$
1.2 dada uma amostra $\{n_1, n_2, ..., n_N\}$ **determine** $ln\zeta(\theta)$
1.3 estime θ **por máxima verossimilhança**
1.4 estime o erro em θ

1.2

$$\zeta(\theta) \propto P(n|\theta) = \theta(1-\theta)^{n-1}$$
$$\ln(\zeta(\theta)) = \ln(\theta(1-\theta)^{n-1})$$
$$\ln(\zeta(\theta)) = \ln(\theta) + (n-1)\ln(1-\theta)$$

1.3

$$\frac{\partial \ln\zeta(\theta)}{\partial\theta} = \frac{\partial}{\partial\theta}\left[\ln(\theta) + (n-1)\ln(1-\theta)\right]$$
$$\frac{\partial \ln\zeta(\theta)}{\partial\theta} = \frac{1}{\theta} - \frac{n-1}{(1-\theta)} = 0$$
$$\theta = \frac{1}{n+2}$$

1.4

$$\sigma_\theta^2 = \frac{\theta^2(1-\theta)^2}{(1-\theta)^2 + \theta^2(n-1)}$$

Exercício 2

$$m = C - 2.5log(F)$$

$$\frac{\partial m}{\partial C} = 1, \quad \frac{\partial m}{\partial F} = \frac{-2.5}{(\ln 10)F}$$

$$\sigma_m^2 = (\frac{\partial m}{\partial C})^2\sigma_C^2 + (\frac{\partial m}{\partial F})^2\sigma_F^2$$

$$\sigma_m^2 = (\frac{\partial m}{\partial F})^2\sigma_F^2$$

$$\sigma_m = (\frac{\partial m}{\partial F})\sigma_F$$

$$\sigma_m = \frac{-2.5}{(\ln 10)F}\sigma_F$$

Exercício 3

$$P(x|\sigma) = \frac{1}{2\sigma}exp(-\frac{|x|}{\sigma})$$

$$L(\sigma) = P(D|\sigma) = \prod_{i=0}^{n}\frac{1}{2\sigma}exp(-\frac{|x_i|}{\sigma})$$

$$L(\sigma) = (\frac{1}{2\sigma})^2 exp(-\frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i|}{\sigma})$$

$$\ln L(\sigma) = -n\ln(2\sigma) - \frac{\sum_{i=1}^{n}}{\sigma}$$

Fazendo a derivada em função de σ e maximizando igualando a zero.

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}[\ln L(\sigma)] = 0$$

$$-\frac{2n}{2\sigma} + \frac{\sum_{i=1}^{n}}{\sigma^2} = 0$$

$$\sigma = \frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i|}{n}$$