Die Matrix

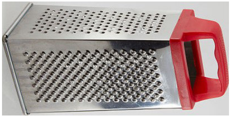
Prof. Dr. Anselm Hudde
hudde@hs-koblenz.de

28.09.2023

HOCHSCHULE KOBLENZ
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

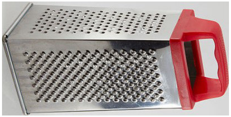
Was ist eine Matrix?

1. Eine neuartige Küchenreibe



Was ist eine Matrix?

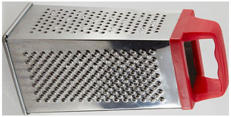
1. Eine neuartige Küchenreibe



2. Die Computersimulation, in der wir uns alle befinden

Was ist eine Matrix?

1. Eine neuartige Küchenreibe

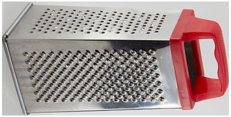


2. Die Computersimulation, in der wir uns alle befinden
3. Eine rechteckige Anordnung von Zahlen wie z.B.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 7 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Was ist eine Matrix?

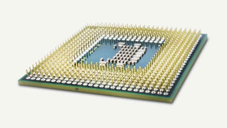
1. Eine neuartige Küchenreibe



2. Die Computersimulation, in der wir uns alle befinden
3. Eine rechteckige Anordnung von Zahlen wie z.B.

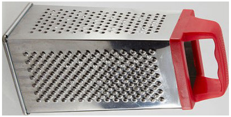
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 7 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

4. Das untere einer CPU



Was ist eine Matrix?

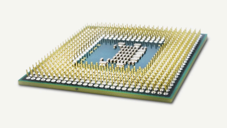
1. Eine neuartige Küchenreibe

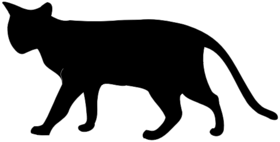


2. Die Computersimulation, in der wir uns alle befinden
3. Eine rechteckige Anordnung von Zahlen wie z.B.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 7 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

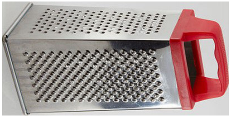
4. Das untere einer CPU





Was ist eine Matrix?

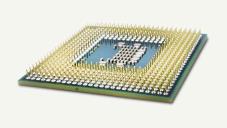
1. Eine neuartige Küchenreibe

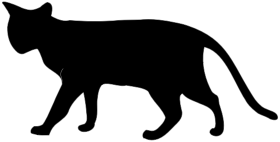


2. Die Computersimulation, in der wir uns alle befinden
3. Eine rechteckige Anordnung von Zahlen wie z.B.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 7 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

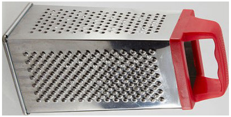
4. Das untere einer CPU





Was ist eine Matrix?

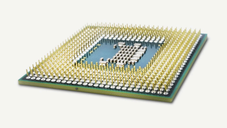
1. Eine neuartige Küchenreibe

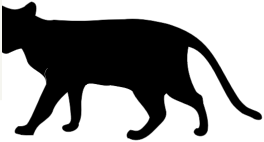


2. Die Computersimulation, in der wir uns alle befinden
3. Eine rechteckige Anordnung von Zahlen wie z.B.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 7 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

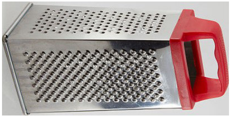
4. Das untere einer CPU





Was ist eine Matrix?

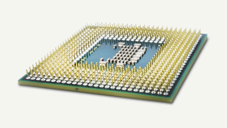
1. Eine neuartige Küchenreibe

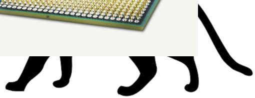


2. Die Computersimulation, in der wir uns alle befinden
3. Eine rechteckige Anordnung von Zahlen wie z.B.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 7 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

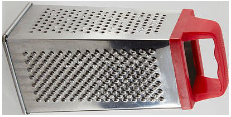
4. Das untere einer CPU





Was ist eine Matrix?

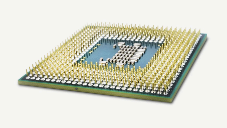
1. Eine neuartige Küchenreibe

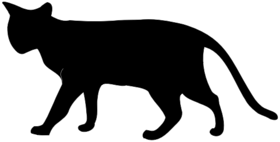


2. Die Computersimulation, in der wir uns alle befinden
3. Eine rechteckige Anordnung von Zahlen wie z.B.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 7 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

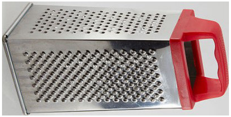
4. Das untere einer CPU





Was ist eine Matrix?

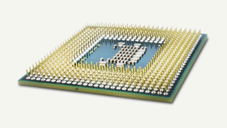
1. Eine neuartige Küchenreibe

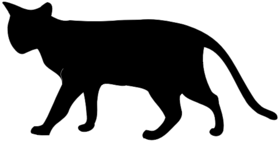


2. Die Computersimulation, in der wir uns alle befinden
3. Eine rechteckige Anordnung von Zahlen wie z.B.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 7 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

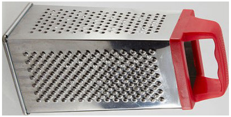
4. Das untere einer CPU





Was ist eine Matrix?

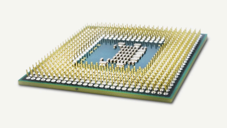
1. Eine neuartige Küchenreibe

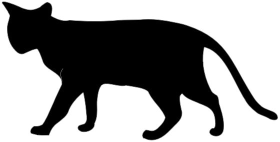


2. Die Computersimulation, in der wir uns alle befinden
3. Eine rechteckige Anordnung von Zahlen wie z.B.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 7 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

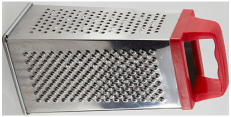
4. Das untere einer CPU





Was ist eine Matrix?

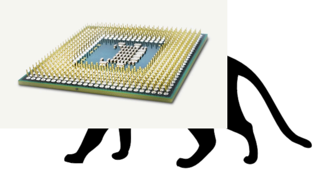
1. Eine neuartige Küchenreibe



2. Die Computersimulation, in der wir uns alle befinden
3. Eine rechteckige Anordnung von Zahlen wie z.B.

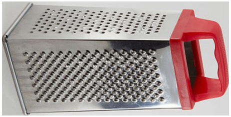
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 7 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

4. Das untere einer CPU



Was ist eine Matrix?

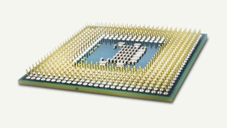
1. Eine neuartige Küchenreibe



2. Die Computersimulation, in der wir uns alle befinden
3. Eine rechteckige Anordnung von Zahlen wie z.B.

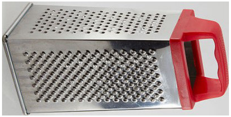
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 7 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

4. Das untere einer CPU



Was ist eine Matrix?

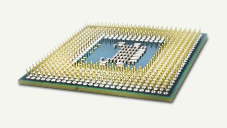
1. Eine neuartige Küchenreibe



2. Eine rechteckige Anordnung von Zahlen wie z.B.

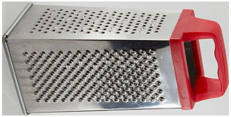
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 7 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

3. Das untere einer CPU



Was ist eine Matrix?

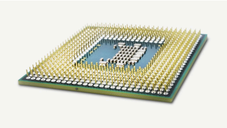
1. Eine neuartige Küchenreibe



2. Eine rechteckige Anordnung von Zahlen wie z.B.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 7 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

3. Das untere einer CPU



Vektoren und Matrizen

Ein n-dimensionaler Vektor ist ein n-Tupel. Ein Beispiel für einen dreidimensionalen (Spalten-)Vektor ist

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ein Beispiel für einen Zeilenvektor ist

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Eine Matrix ist eine Art Tabelle. Ein Beispiel für eine 2×2-Matrix ist:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Somit ist ein n-dimensionaler Vektor lediglich eine $n \times 1$-Matrix (bzw. $1 \times n$ bei einem Spaltenvektor).

Vektoren und Matrizen

Matrizen lassen sich addieren, dabei wird einfach elementweise addiert:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Zudem kann man Matrizen mit Skalaren multiplizieren, die geschieht ebenfalls punktweise:

$$2.3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.6 & 6.9 \\ 2.3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vektoren und Matrizen

Matrizen haben Spalten und Zeilen. Die erste Zeile der Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ist

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix},$$

und die zweite Spalte ist

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vektoren und Matrizen

Matrizen lassen sich auch miteinander multiplizieren. Ein ganz einfaches Beispiel ist:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2 \cdot 3) + (3 \cdot 4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \end{pmatrix}$$

Vektoren und Matrizen

Matrizen lassen sich auch miteinander multiplizieren. Ein ganz einfaches Beispiel ist:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2 \cdot 3) + (3 \cdot 4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \end{pmatrix}$$

Ein einfaches Beispiel ist.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2 \cdot 4) + (3 \cdot 5) \\ (1 \cdot 4) + (0 \cdot 5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Matrizenrechnung Geometrisch

Besuchen Sie meine Shiny-App:
https://anselmhudde.shinyapps.io/Matrixmultiplikation/

Beispiel: Verkleinerung um 50%

$$M = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Beispiel: Punktspiegelung um der Ursprung

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Beispiel: Spiegelung an der x-Achse

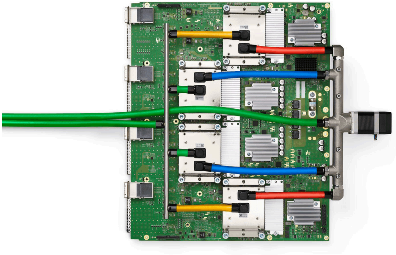
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Beispiel: Drehung um α

$$M = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

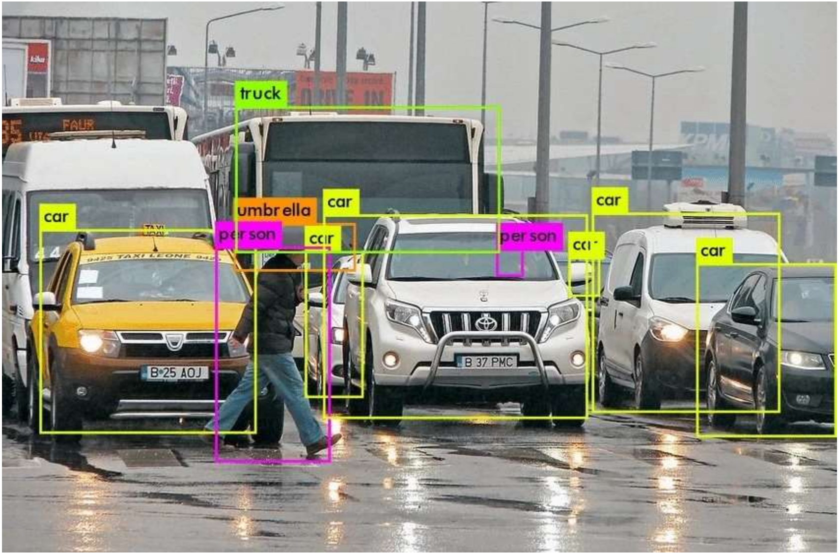
Anwendungsbeispiel: KI

Zum Training von neuronalen Netzen sind viele Matrixmultiplikationen sehr großer Matrizen nötig.



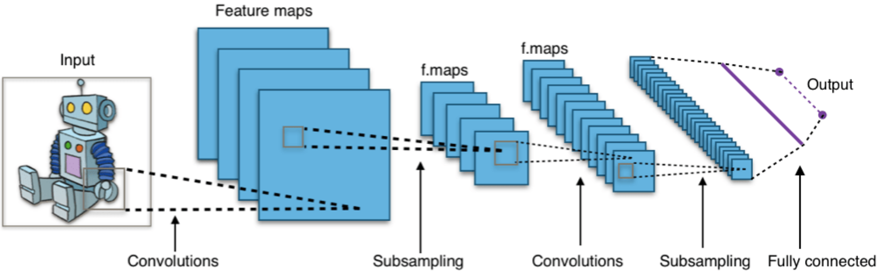
Google hat hierfür sogar eigene Chips, sogenannte TPU (tensor processing units), entwickelt.

Konkretes Beispiel: Bilderkennung



Quelle: https://viso.ai/wp-content/uploads/2021/05/yolo-example-object-detection-in-a-dense-scene.jpg

Konkretes Beispiel: Bilderkennung



Quelle: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/63/Typical_cnn.png

Faltungsmatrizen

Besuchen Sie meine Shiny-App:
https://anselmhudde.shinyapps.io/Faltungsmatrizen/

Faltungsmatrizen (convolution matrices)

$$M * K = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{nn} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{pmatrix}$$

$$:= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} m_{1+i,1+j} k_{n-i,n-j}.$$