Ecole Supérieure d'Ingénierie **2010-11**
en Sciences Appliquées

Examen de rattrapage d'Analyse Numérique 2
-S5- Durée: 2h

Exercice 1:

Ecrire le programme Maple de l'algorithme:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - \dfrac{f\ (x_n)}{f\ '(x_n)} \\ x_0 = \alpha \end{cases}$$

avec $f\ (x) = 4\ x^3 + 2\ x^2 + 3$. Le test d'arrêt sera $|x_{n+1} - x_n| < \epsilon$.

Exercice 2:

On se propose de résoudre numériquement le problème physique de conditions aux limites:

$$(1) \quad \begin{cases} -\ y''(x) + y'(x) + y(x) = f(x)\ , & x \in\ ]0,\ 1[\\ y(0) = y(1) = 1 \end{cases}$$

avec f une fonction continue sur $[0,\ 1]$.

1) Montrer que si $y \in C^4\ ([0,\ 1])$ alors on a:

$$y''(x) = \frac{y(x + h) - 2\ y(x) + y(x - h)}{h^2} + o(h^2)$$
$$y'(x) = \frac{y(x\ ) - y(x - h)}{h} + o(h)$$

2) Etant donné un entier $N \geq 1$. On pose $h = \dfrac{1}{N + 1}$. On définit un maillage uniforme de pas h de $[0,\ 1]$, avec: $x_i = i\,h \quad 0 \leq i \leq N+1$, $y(x_i) = y_i$ et $f(x_i) = f_i \quad 1 \leq i \leq N$.
Ecrire le problème (1) sous forme d'un problème discret de N équations à N inconnues.
Ecrire le système sous la forme matricielle $A_h\ y_h = b_h$ avec A_h et b_h à déterminer.

Exercice 3:

1) On considére la méthode itérative $x^{(k+1)} = A\ x^{(k)} + b$ (2)

avec $A = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 & 2 \\ 3 & 2/3 & 0 \\ 1 & 3 & 1/2 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) Calculer la matrice de Jacobi et de Gauss-Seidel.
b) Montrer que la méthode itérative (2) est convergente.
2) Montrer que la matrice suivante est définie positive

$$B = \begin{pmatrix} 2 & c & 0 \\ c & 2 & c \\ 0 & c & 2 \end{pmatrix}$$

3) Soient $v_1, ..., v_n$ une base formée de vecteurs propres d'une matrice A d'ordre n, et soit $\lambda_1 > \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_n$ les vecteurs propres associés aux valeurs propres $v_1, ..., v_n$.
Soit w un vecteur quelconque non nul.
a) Exprimer $w_p = A^p\ w$ en fonction de $v_1, ..., v_n$.
b) En déduire la limite des quantités $\dfrac{w_{p+1,\ j}}{w_{p,\ j}}$ $j = 1, ..., n$ quand p tend vers ∞.