$\sup\left|\frac{1}{\sqrt[5]{n^6+x^4}}\right| \le \frac{1}{n^{6/5}} \to 0. \Rightarrow$ равном. сход.

$\sqrt[5]{n^6+x^4}_{T}$ ищем самое большое значение дроби.

по пр. Дирихле: исход. ряд <u>сход. равномерно</u>

Ответ: ...

№4 $\sum \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$ $x \in [0;+\infty)$

<u>пр. Абеля:</u>

1) $\sum a_n(x) = e^{-nx}$

$b_n(x) = \frac{(-1)^n}{n}$ – не зависит от x
– сход. по пр. Лейбница, значит

$\sum \frac{(-1)^n}{n} \xrightarrow{[0;+\infty)}$, т.к. не зависит от x

$\sum a_n(x) = e^{-nx}$

а) $e^{-nx} \le 1 = e^0$, для $\forall x > 0$, $\forall n \in N$. – ограничена

б) $e^{-nx} = a_n$; $a_{n+1} = e^{-(n+1)x}$

$$\frac{a_{n}(x)}{a_{n+1}(x)} = \frac{e^{-nx}}{e^{-(n+1)x}} = e^x \ge 1 \Rightarrow$$

$a_{n+1} \le a_n$ – монотонна при $\forall x$ X.

Итог: по пр. Абеля: $\sum \frac{(-1)^n \cdot e^{-nx}}{n} \rightrightarrows$

по пр. Лейбница тоже можно.

№5 пр. Вейерштрасса.

$$\sum \frac{\sin nx + \cos nx \cdot \cancel{\operatorname{arctg} nx}}{\sqrt{n+x^2} \cdot \cancel{\operatorname{arctg} nx}} \quad ; \quad x \in \left[\frac{\pi}{8}, \frac{15\pi}{8}\right]$$

$$|u_n(x)| = \frac{2 \cdot \frac{\pi}{2}}{n^{1/2}} = \frac{\pi}{\sqrt{n}}$$

J'aime

1) $a_n(x) = \dfrac{\sin nx + \cos nx}{\sqrt{n+x^2}}$

Огр по пр. Абеля: !

$\sum a_n(x) \rightrightarrows (?)$ - сходится равномерно по пр. Дирихле

по пр. Дирихле:

$\overline{a_n} = \sin nx + \cos nx$; $|\sum \overline{a_n}| \le \dfrac{1}{|\sin x/2|} + \dfrac{1}{|\sin x/2|} = \dfrac{2}{|\sin x/2|}$ $\forall x \in E$ ограничена

$\overline{b_n} = \dfrac{1}{\sqrt{n+x^2}}$

$\overline{b_{n+1}} \le \overline{b_n} \Rightarrow$ монотонно

$\sup \left| \dfrac{1}{\sqrt{n^2+x^2}} - 0 \right| = \sup \dfrac{1}{\sqrt{n+x^2}} \le \dfrac{1}{\sqrt{n}} \to 0$

по супр. кр. равномерно стремится к нулю $\rightrightarrows 0$.

2) $|\operatorname{arctg} nx| \le \pi/2$ - ограничена.

3) $\operatorname{arctg} nx$ - монотонная ф., т.к.

пр. fix x nx - монотонно возр. $\Rightarrow$ $\operatorname{arctg} nx$ - мон. возр.

Итог: исходный ряд равномерно сходится

→ Действия над функц. рядами

№1 найти:

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{1+n(n+1)x^2}$$

Условие теоремы почленного ~~предела~~ перехода к пределу

1) равномерно сход. на E

1) ~~[illegible]~~

пр. Вейерштрасса: $x \in R / [-1, 1]$.

$$|u_k(x)| = \frac{x^2}{1 + (n+1)\cdot(n)\cdot x^2} \le \frac{x^2}{n(n+1)x^2} = \frac{1}{n(n+1)} \le \frac{1}{n^2}$$

$\sum \frac{x^2}{1+n(n+1)x^2}$ — сход. по степ. признаку, сход. равномерно по пр. Вейерштрасса.

2) $x_0 = \infty \in R / [-1, 1]$; x_0 — пред. точка.

3) $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{1+n(n+1)x^2} = [:x^2] = \frac{1}{\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0} + n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$$

Значит по т. по предельном переходе:

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{1+n(n+1)x^2} = \sum \lim \frac{x^2}{1+n(n+1)x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

$$= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{(n-1)\cdot n} + \frac{1}{n(n+1)} =$$

$$= \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \ldots + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\to \infty}^{\to 0} \to 1$$

Ответ: 1.

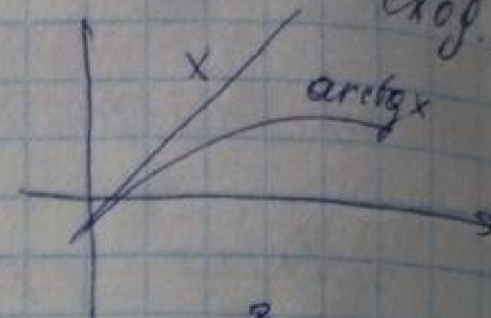
Д/З: №8 исследовать функц. ряд на равномерную сход. на заданн. промеж.

30.09.20 N1 из Д/З.

$\sum \operatorname{arctg}\left(\frac{x^3}{n\sqrt{n}}\right)$; $x \in [2;+\infty)$

исследовать на равномерную сход.

$\operatorname{arctg}\left(\frac{x^3}{n\sqrt{n}}\right) \le \frac{x^3}{n\sqrt{n}}$



$\cancel{S_n(x)}$ $u_n(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x^3}{n\sqrt{n}}\right)$,

предельная ф. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x) \to 0$

$\sup\limits_{[2;+\infty)} \left|\operatorname{arctg}\frac{x^3}{n\sqrt{n}} - 0\right| = \sup\limits_{[2;+\infty)} \left|\operatorname{arctg}\frac{x^3}{n\sqrt{n}}\right| \geqslant$

$\geqslant$ [супремум больше, чем в какой-то фиксированной точке] $= [x_n = \sqrt{n}] =$

$= \operatorname{arctg} 1 \not\to 0$

$\operatorname{arctg}\frac{x^3}{n\sqrt{n}} \not\rightrightarrows_{[2;+\infty)}$

Ответ: ?

Непрерывность ф. на множ. задания

N1 $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n \cdot (\cos^2 nx + 2)}{\sqrt{n^3+x^4}}$

1) найдем множ. задания ф:

$\frac{(x+2)^n \cdot (\cos^2 nx + 2)}{\sqrt{n^3+x^4}}$

Рассмотрим ф. $|u_n(x)| = \frac{|x+2|^n \cdot (\cos^2 nx + 2)}{\sqrt{n^3+x^4}}$

$r = \lim \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|x+2| \cdot \overbrace{\sqrt[n]{\cos^2 nx + 2}}^{\to 1}}{\underbrace{\sqrt[2n]{n^3+x^4}}_{\to 1}} = |x+2|$

I сл: $|x+2| < 1$; $-1 < x+2 < 1$
$-3 < x < -1$ – сходится исход

В этом случае $|u_n(x)|$ – сходится $\Rightarrow$
исходный $u_n(x)$ – сход абсолютно.

II сл. $|x+2| > 1$; $\left[\begin{array}{l} x+2 > 1 \\ x+2 < -1 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x > -1 \\ x < -3 \end{array}\right.$

В этом сл. $|u_n(x)|$ – расход. и при этом $|u_n(x)| \not\to 0 \Rightarrow$ расходится, т.к. не выполнено необх. усл.)

III сл.: $|x+2| = 1$

$x = -3$ или $x = -1$.

$$f(-3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(\cos^2(-3x)+2)}{\sqrt{n^3+3^4}}$$

$$|a_n| \le \frac{3}{\sqrt{n^3+3^4}}$$

$\Sigma|a_n|$ – сход. по степ. признаку $\Rightarrow$

Σa_n – сход. абсолютно.

При $x=-1$ – аналогично

Итог: $[-3; -1]$ – множ. задания Ф.

Применим т. Стокса - Зейделя:

1) $u_n(x) = \dfrac{(x+2)^n(\cos^2 nx+2)}{\sqrt{n^3+x^4}}$ – непрерывна, как арифмет. комбинация непрерывн.функ.

г) Докажем равномерность:

$|u_n(x)| \le \frac{1 \cdot 3}{\sqrt{n^3}}$ - обладает числовой мажорантой.

сход. по степенному признаку

по пр. Вейерштрасса равномерно сход

=> Исходный сход. по т. Стокса-Зейделя.

~~сход~~ сумма непрерывна.

№2

$$f(x) = \sum \frac{x + n(-1)^n}{x^2 + n^2}$$

Рассмотрим 2 ряда: $f_1(x) = \frac{x}{x^2+n^2}$; $f_2(x) = \frac{(-1)^n n}{x^2+n^2}$

сход для $\forall x$

для любых x сход. по пр. Лейбница

Мн-во задания ф. $= \mathbb{R}$;

1) непрерывна как арифм. комбинация непрерывных ф.

2) применим пр ~~Вейерштрасса~~ Лейбница для равномерной сходимости.

$$\sup |u_n| = \sup \left| \frac{n}{n^2+x^2} \right| \le \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

по супр. кр. $(u_n(x)) \overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows}$ →

по пр. Лейбница $\sum \frac{(-1)^n \cdot n}{n^2+x^2} \overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows}$

$f_2(x)$ - непрерывна Стокса-Зейделя

Рассмотрим $f_3(x)$

по т. Стокса-Зейделя:

1) $\frac{1}{x^2+n^2}$ непрерывна на $\mathbb{R}$

2) пр. Вейерштрасса: $|u_n(x)| \le \frac{1}{n^2} \to 0$

по пр. Вейерштрасса: $\sum \frac{1}{n^2+x^2} \overset{R}{\rightrightarrows}$ $n\to\infty$

непрерывна $\Rightarrow$ ~~$f_2($~~ $\Rightarrow$ по т. Стокса-З.

$f(x)$ непрерывна на R, как сумма ? -ум непрерывных

№3 $\sum\left(nxe^{-nx}-(n-1)x\cdot e^{-(n-1)x}\right) \overset{[0;1]}{\not\rightrightarrows}$

Явл непрерывной ф. по т. Стокса-Зейделя на $[0;1]$

$S_n(x) = x\cdot e^{-x} + (2x\cdot e^{-2x} - x\cdot e^{-x}) + (3xe^{-3x} - 2xe^{-2x}) \ldots (n-1)x =$

$= nxe^{-nx} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$; $S(x)=0$ - непр. ф. на $[0;1]$:

$\left[\frac{n^k}{e^n} \to 0\right]$ $\left[\in [0;1]\right]$

$\sup\limits_{[0;1]} |nxe^{-nx}| = \left[\frac{n}{e^{n}}\right] = \geqslant \left[x=\frac{1}{n}\right] =$

$\geqslant n\cdot\frac{1}{n}\cdot e^{-n\cdot\frac{1}{n}} = \frac{1}{e} \not\to 0 \Rightarrow$ по супремальному кр. $S_n(x) \overset{[0;1]}{\not\rightrightarrows} 0$

значит ряд сходится неравномерно.

№7 $\int\limits_{\ln 3}^{\ln 4} f(x)\,dx = ?$; $f(x) = \sum\limits_1^\infty n\cdot e^{-nx}$

1) $f(x) = n\cdot e^{-xn}$ - непрерывна на $[\ln 3; \ln 4]$.

2) теперь докажем, что сход. равномерно:

$|n\cdot e^{-nx}| \le \frac{n}{e^{nx}} \le \frac{n}{e^{\ln 3\cdot n}} = \frac{n}{3^n}$

$\sum \frac{n}{3^n}$ по пр. Коши $\left(\frac{1}{3}\right)$

по т. Вейерштрасса сход. равномерно

$\sum n \cdot e^{-nx} \rightrightarrows$ по Т. о почленном интегрировании

$$\int_{\ln 3}^{\ln 4} \sum n e^{-nx} dx = \sum \int_{\ln 3}^{\ln 4} n \cdot e^{-nx} \cdot dx = \sum \cdot n e^{-nx} (-n) \cdot \frac{x^2}{2}$$

Вычислим интеграл и получаем $\sum \left(\frac{1}{3^{-n}} - \frac{1}{4^n} \right) =$

$= \sum \frac{1}{3^n} - \sum \frac{1}{4^n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, $S_n = \frac{b_1}{1-q}$

$$S_{n_1} = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$$

$$S_{n_2} = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

Исследовать ф. на непрерывность на множестве задания

$a_n(x) = 1/n+x$; $b_n(x) = \sin nx$

1) суммы $\sum b_n(x) = \sum \sin nx$ ограничены в совокупности:

$|\sum \sin nx| \leq \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|} \leq \frac{1}{|\sin \pi/32|}$, $\forall x \in [\frac{\pi}{16}; \frac{33\pi}{17}]$

2) $\sum a_n(x)$: $(a_n) = \frac{1}{n+x}$ монотонна, т.к.

$\frac{n+1+x}{n+x}$; $\underline{a_{n+1} < a_n}$

3) $(a_n) = \frac{1}{n+x} \overset{[\frac{\pi}{16}; \frac{33\pi}{17}]}{\rightrightarrows} 0$

значит, по пр. Дирихле ряд $\sum a_n b_n$ равномерно сходится

$\sum a_n b_n \overset{E}{\rightrightarrows} 0$

Ответ. $\overset{E}{\rightrightarrows} 0$

№4 $\sum \frac{\sin nx}{2n + n^2x^2}$; $E = [\frac{1}{2}; \frac{3}{2}]$

Применим пр Дирихле, обозначим:

$b_n(x) = \sin nx$, $a_n(x) = \frac{1}{2n+n^2x^2}$

1) $\sum b_n(x)$ - ограничены в совокупности:

$|\sin nx| \leq \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|} \leq \frac{1}{|\sin \frac{1}{4}|}$, $\forall x \in [0,5; 1,5]$

2) $\frac{1}{2n+n^2x^2} = \left[\cancel{\frac{1}{n^2(\frac{2}{n}+x^2)}} \right.$ (?) $\Rightarrow \frac{2n+2+(n+1)^2x^2}{2n+n^2x^2} =$

$= \frac{2n+2+x^2n^2+2nx^2+x^2}{2n+n^2x^2}$ - монотонна.

3) $\frac{1}{2n+n^2x^2} = c_n$

Применим супремальный кр:

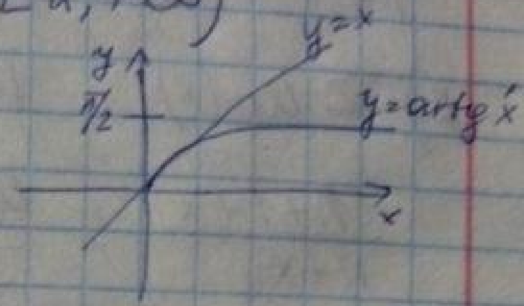
1) $f \to 0$; 2) $\sup |\frac{1}{2n+n^2x^2}| \Rightarrow [x = \frac{3}{2}] = \frac{1}{2n+\frac{9}{4}n^2} \to 0$

Д/з №8. на 30.09.20

Исследовать функциональный ряд на равномерную сходимость на заданном промежутке

№1 $\sum \operatorname{arctg}\frac{x^3}{n+\sqrt{n}}$ — ; $[2,+\infty)$

$\operatorname{arctg}\frac{x^3}{n+\sqrt{n}} \le \underbrace{\frac{x^3}{n+\sqrt{n}}}\to 0$ [т.к. →



$\sup_{[2,+\infty)} \left|\operatorname{arctg}\frac{x^3}{n+\sqrt{n}} - 0\right| =$

$= \sup \frac{x^3}{n+\sqrt{n}} \big| \ge$ [т.к. супремум => больше, чем в каком-то фиксированной точк] => [$x_n=\sqrt{n}$]

$\ge \operatorname{arctg} 1 \not\to 0$ —

По супремальному кр. $\operatorname{arctg}\frac{x^3}{n+\sqrt{n}} \overset{[2;+\infty)}{\not\rightrightarrows}$

Ответ: неравномерно сходится

№2 $\sum \frac{(-1)^n}{x+2^n}$, $(-2;+\infty)$

Применим пр. Лейбница: $\sum a_k(x) = \sum \frac{1}{x+2^n}$

1) $\frac{x+2^{n+1}}{x+2^n} \approx 2$; $\{a_k(x)\}$ - монотонна

2) по супремальному кр. равномерно стремится к 0, следовательно, равномерно сходится

Значит $(-1)^n/x+2^n \overset{E}{\rightrightarrows}$ (по пр. Вейерштрасса)

Ответ: равномерно сход.

№3 $\sum \frac{\sin nx}{n+x}$; $E=\left[\frac{\pi}{16}; \frac{33\pi}{17}\right]$

Воспользуемся пр. Дирихле, полагая, что

$= \left[\text{т.к. } x \in (0;1) \text{, то мы можем взять в качестве фиксированного } x_n = \frac{1}{n} \right]$

$= \frac{n \cdot \frac{1}{n}}{1+1} = \frac{1}{2} \not\to 0$

Следовательно, по суприм. кр.: $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{(0;1)}{\not\rightrightarrows}} 0$

Ответ: сходится неравномерно

№4 $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$; $x \in [0;2]$

1) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^n}{1+x^n} \to 1$ $\left[\frac{x^n}{1+x^n} \sim \frac{x^n}{x^n} = 1 \right]$

2) $\sup\limits_{[0;2]} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{[0;2]} \left| \frac{x^n}{1+x^n} - 1 \right| = \sup\limits_{[0;2]} \left| \frac{-1}{1+x^n} \right| =$

$= \sup\limits_{[0;2]} \frac{1}{1+x^n} \leq \frac{1}{x^n}$

Рассмотрим $\frac{1}{x^n}$: 1) $0 \leq x \leq 1$: $\frac{1}{x^n} \to \infty$

2) $1 \leq x \leq 2$: $\frac{1}{x^n} \to 0$

Тогда, следовательно по супримальному критерию имеем:

I сл: $0 \leq x \leq 1$, тогда $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{[0;1]}{\not\rightrightarrows}} 1$

II сл: $1 \leq x \leq 2$, тогда $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{[1;2]}{\rightrightarrows}} 1$

Ответ: сходится равномерно

№1 $f_n(x) = \dfrac{\operatorname{arctg}(n+x)}{\sqrt{n+x}+2}$, $x>0$

1) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\operatorname{arctg}(n+x) \to \pi/2}{\sqrt{n+x}+2 \to \infty} \to 0$

2) $\sup\limits_{x>0} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{x>0} \dfrac{|\operatorname{arctg}(n+x)|}{\sqrt{n+x}+2} \leq \dfrac{\pi/2}{\sqrt{n+x}+2} = 0$ $\quad \dfrac{\pi/2}{\sqrt{n}} \to$

$f_n(x) \underset{\text{co;}}{\overset{x>0}{\rightrightarrows}} f(x)$

Ответ: сходится равномерно

№5

$\ln\left(5 + \dfrac{n^2 e^x}{n^4 + e^{2x}}\right) =$

1) $\lim \ln\left(5 + \dfrac{n^2 e^x}{n^4 + e^{2x}}\right) = \ln 5.$

2) $\sup \left|\ln\left(5 + \dfrac{n^2 e^x}{n^4 + e^{2x}}\right) - \ln 5\right| =$

$= \sup \ln\left(1 + \dfrac{n^2 e^x}{5(n^4 + e^{2x})}\right) \geq \left[e^{x_n} = n^2; \; x = 2\ln n; \; \cancel{x=2}\right]$

$\geq \ln\left(1 + \dfrac{n^2 n^2}{5(n^4 + n^4)}\right) = \ln\left(1 + \dfrac{n^4}{10 n^4}\right) = \ln \dfrac{11}{10} \not\to 0$

по супр. критерию сходится неравномерно.

23.09.20. Равномерная сходимость функциональных рядов.

№1 $\sum \left(\dfrac{n}{n^2+4}\right)\left(\dfrac{x+2}{2x+1}\right)^n$ абсолют. и неабсолют. сход.

x-параметр

$|a_n| = \frac{n}{n^2+4} \cdot \left|\frac{x+2}{2x+1}\right|^n =$

$\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \sqrt[n]{\frac{n}{n^2+4}} \cdot \left|\frac{x+2}{2x+1}\right| = \lim \frac{\overset{\to 1}{\sqrt[n]{n}}}{\sqrt[n]{n^2+4}} \cdot \left|\frac{x+2}{2x+1}\right| \sim$

$= \frac{1}{\overset{\to 1}{n^{2/n}}} \cdot \left|\frac{x+2}{2x+1}\right| = \left|\frac{x+2}{2x+1}\right|$

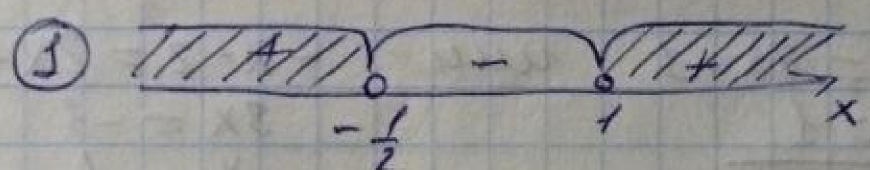
рассматрим несколько случаев по пр. Коши:

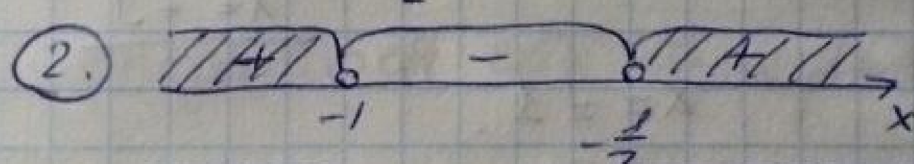
√ случай 1: $c < 1$

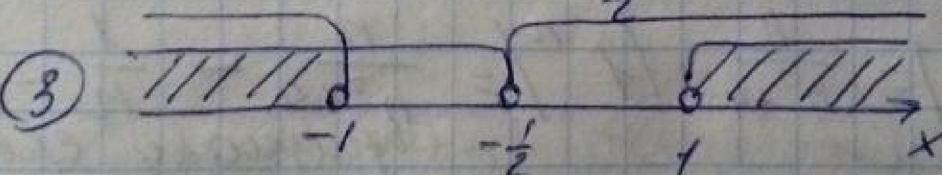
$\left|\frac{x+2}{2x+1}\right| < 1$; $\begin{cases} \frac{x+2}{2x+1} < 1 \\ \frac{x+2}{2x+1} > -1 \end{cases}$; $\begin{cases} \frac{x-1}{2x+1} > 0 \quad (1) \\ \qquad\qquad (3) \\ \frac{x+1}{2x+1} > 0 \quad (2) \end{cases}$

I способ.

$\begin{cases} x-1>0 \\ \cancel{2x+1>0} \end{cases}$







$(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$

При $x \in \nearrow$ ряд $\Sigma|a_n|$ - сходится

II способ реш.

$\left(\frac{x+2}{2x+1}\right)^2 < 1$

$(x+2)^2 < (2x+1)^2$

$x^2 + 4 + \cancel{4x} < 4x^2 + \cancel{4x} + 1$

$3x^2 - 3 > 0$; $\boxed{|x| > 1}$ ← реш.

ряд расходится

II случай: $\left|\frac{x+2}{2x+1}\right| > 1.$

$x \neq -\frac{1}{2}$

$\left(\frac{x+2}{2x+1}\right)^2 > 1$; $-1 < x < 1$

$x \in (-1; -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}; 1)$

Итог 1: При $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ ряд исходный $|a_n|$ сходится, исходный ряд сходится абсолютно.

при $x \in (-1; -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}; 1)$ ряд $|a_n|$ расходится и т.к. $\sqrt[n]{|a_n|} > 0$, то $a_n \not\to 0 \Rightarrow$ следовательно исходный ряд расходится

III случай:

Если $\left|\frac{x+2}{2x+1}\right|^2 = 1$; $|x+2| = |2x+1|$

$x+2 = 2x+1$ или $-x-2 = 2x+1$,

$x = 1$; $3x = -3$, $x = -1$

$x = \pm 1.$

$|a_n| = \frac{n}{n^2+4} \cdot |1^n| = \frac{n}{n^2+4} \sim \frac{1}{n}$ – расходится, по признаку сравнения с гармоническим.

$a_n = \sum (-1)^n \cdot \frac{n}{n^2+4}$ – сходится, по признаку Лейбница

Исходный ряд сходится условно.

№2 $\sum x^n = S(x)$ $\quad x \in (-q; q)$; $q\ (0;1)$

$S_n(x) = (\underset{=1}{x^0} + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{n-1}) \cdot \left(\frac{1-x}{1-x}\right) =$

$= \frac{1-x}{1-x} + \frac{x-x^2}{1-x} + \frac{x^2-x^3}{1-x} + \ldots + \frac{x^{n-1}-x^n}{1-x} = \frac{1-\overset{\to 0}{x^n}}{1-x} \to \frac{1}{1-x} = S(x)$

$\sup |S_n(x) - S(x)| = \sup \left| \frac{1-x^n}{1-x} - \frac{1}{1-x} \right| =$

$= \sup\limits_{(-q;q)} \frac{|x^n|}{1-x} \leq \frac{q^n}{1-q} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

по супремальному кр. $S_n \overset{(-q;q)}{\rightrightarrows} S(x)$

т. е. на исходный ряд $\sum x^n \overset{(-q;q)}{\rightrightarrows} \frac{1}{1-x}$

$\sup |S_n(x) - S(x)| = \sup \frac{|x^n|}{1-x} = [x_n = 1 - \frac{1}{n}] =$

$= \sup \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}{+\frac{1}{n}} = \left(1 + -\frac{1}{n}\right)^{-n\cdot(-1)} = n e^{-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

на $(-1; 1)$ сходимост есть не равномерная

№3 $\sum \frac{1}{(x+n)(x+n+1)} = \sum \left(\frac{1}{(x+n)} - \frac{1}{(x+n+1)}\right)$ $x \in (0; +\infty)$ члены ряда

$S_n(x) = \frac{1}{(x+1)} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} + \ldots + \left(\frac{1}{x+n-1} - \frac{1}{x+n}\right) =$

$= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+n} \to \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+n}$

$\sup |S_n(x) - S(x)| = \sup\limits_{(0;+\infty)} \frac{1}{x+n} \leq \frac{1}{n} \to 0$ — равномерно сходится

Д/З: признак Абеля Дирихле Вейерштрасса.

1) на абсолютную / неабсолютную сходимость

Исследовать функциональные ряды на равномерную сходимость на заданном множ.

Д/з №7: на 28.09.20

№1 исследовать на абсолютную/неабсолютную сходимость

$\sum \frac{x^n}{1+x^{2n}}$, x - параметр

$|a_n| = \sum \left|\frac{x^n}{1+x^{2n}}\right| \sim \left|\frac{x^n}{x^{2n}}\right| \sim \left|\frac{1}{x^n}\right|$

Применим кр. Коши.

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{1}{x}\right| = c$

Рассмотрим случаи.

1) Случай 1: $c > 1$.

$\left|\frac{1}{x}\right| > 1$, $\frac{1}{x^2} > 1$; $\frac{1-x^2}{x^2} > 0$ $\begin{cases} x \neq 0 \\ x^2 < 1 \end{cases}$

$x \in \underline{(-1; 0) \cup (0; 1)}$

Тогда при ↑ ряд $|a_n|$ расходится

$a_n = \frac{x^n}{1+x^{2n}} \sim \frac{1}{x^n}$ - расходится (???)

Следовательно, исходный расходится (???)

2) $c < 1$: $\underline{x \in (-\infty; -1) \cup (1, +\infty)}$

Тогда при ↑, $|a_n|$ сходится

Следовательно, исходный сходится абсолютно (?)

3) $c = 1$: $x \in 1$ или $x = -1$

$|a_n|$ = сходится ; a_n

№2 Исследовать функциональный ряд на равномерную сход. на заданном множ.

$$\sum \left(\frac{x^{n-1}}{n} - \frac{x^n}{n+1}\right) \qquad x \in [-1;1].$$

1) $S_n(x) = \left(\frac{x^0}{1} - \frac{x}{2}\right) + \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{3}\right) + \left(\frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{x^{n-1}}{n} - \frac{x^n}{n+1}\right) =$

$= \left(1 - \frac{x^n}{n+1}\right) \to 0$, $\quad S(x) = \lim S_n(x) \to 1.$

2) $\sup\limits_{[-1,1]\, n\to\infty} |S_n(x) - S(x)| = \sup \left|1 - \frac{x^n}{n+1} - \cancel{\frac{x^n}{n+1}} - 1 + \cancel{\frac{x^n}{n+1}}\right| =$

$= \sup\limits_{[-1,1]} \left|\frac{x^n}{n+1}\right| = \sup\limits_{[-1,1]} \left|\frac{x^n}{n+1}\right| = \frac{|x|^n}{n+1} \le \frac{1}{n+1} \le \frac{1}{n} \to 0$ сходится

$S_n(x) \overset{[-1,1]}{\rightrightarrows} 1$

Ответ: равномерно сходится

№3 Исследовать на равномерную сход.

$$\sum \frac{x}{n^2} e^{-n^2/x} = \frac{x}{n^2 \cdot e^{n^2/x}} \qquad x \in (0; +\infty)$$

Рассмотрим данный ряд, как произведение 2-ух:

1) $\sum a_n = \frac{x}{n^2}$ — сходится равномерно.

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x}{n^2} \to 0$ (как гармонический)

2) $\sup\limits_{(0,+\infty)} \frac{x}{n^2}$ ← макс ← мин $[\Rightarrow 0] = [x_n = n] = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \to 0.$

Следовательно, по супремальному кр. $f_n(x) \overset{(0,+\infty)}{\rightrightarrows} f(x)$

2) $\sum b_n = e^{-n^2/x}$

$$\left[e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)\right]$$

$e^{n^2/x} = 1 + \frac{n^2}{x} + \frac{n^4}{x^2} + o(n^4) \ge \frac{n^4}{x^2}$, тогда

$$e^{-n^2/x} < \frac{x^2}{n^4} \to 0$$

№4 исследовать на равномерную сходимость

$$\sum \frac{x}{1+n^4x^2}, \quad x \in [0;+\infty)$$

Выделим полный квадрат в знаменателе:

$$\cancel{\sum \frac{x}{1+(n^2x)^2}} \quad 1+n^4x^2 = 1+(n^2x)^2+2n^2x = (1+n^2x)^2-2n^2x$$

$$\sum \frac{x}{1+n^4x^2} = \sum \frac{x}{(1+n^2x)^2-2xn^2}$$

$$\frac{x}{(1+n^2x)^2-2xn^2} \le \frac{x}{2xn^2} = \frac{1}{2n^2} \to 0 \text{ (сходится)}$$

Следовательно, по пр. Вейерштрасса: исходный ряд обладает сходящейся числовой мажорантой ($\sum a_n$ - сход) $\Rightarrow$ ряд сходится абсолютно и равномерно

Ответ: сход равномерно

№5 исследовать на равном. сходимость

$$\sum \frac{\cos\frac{2\pi n}{3}}{\sqrt{n^2+x^2}}, \quad x \in R$$

сход равномерно (?)

Применим пр. Вейерштрасса:

$$\frac{\cos\frac{2\pi n}{3}}{\sqrt{n^2+x^2}} \le \frac{1}{\sqrt{n^2+x^2}} \le \left[\text{при фиксиров. } x\text{, получаем}\right] \le \frac{1}{\sqrt{n^2}} \le \frac{1}{n}$$

по пр. Дирихле:

1) $\sum a_n = \cos\frac{2\pi n}{3} \leq \frac{1}{|\sin\frac{\pi}{3}|} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ – ограничена

2) $\sum b_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+x^2}} \leq \frac{1}{n} \rightrightarrows 0$ (равномерно сходится и монотонна)

Следовательно по пр. Дирихле сходится равномерно

Ответ: ↑

№1 $\frac{(-1)^n n}{n^2x^2+4}$, $x \in [\cancel{0}\,1; +\infty)$. 28.09.20.

пр. Лейб:

1) знакочеред.

2) фиксируем x;

$a_n = \frac{n}{n^2x^2+4}$; $a_{n+1} = \frac{n+1}{(n+1)^2x^2+4}$

$\cancel{\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n}{}}$, $a_n - a_{n+1} = \frac{n}{n^2x^2+4} - \frac{n+1}{(n+1)^2x^2+4} =$

$= \frac{n(n+1)^2x^2 + \cancel{4n} - (n+1)n^2x^2 - \cancel{4n} - 4}{(n^2x^2+4)((n+1)^2x^2+4)} =$

$= \frac{x^2n(n+1)(\cancel{n}+1-\cancel{n}) - 4}{(n^2x^2+4)((n+1)^2x^2+4)} \geq 0$ при больших n (доказали монотонность)

Докажем равномерность:

$\sup\limits_{[1,+\infty)}\left|\frac{n}{n^2x^2+4} - 0\right| = \sup \frac{n}{n^2x^2+4} \leq \frac{n}{n^2+4} \leq \frac{1}{n} \to 0$

при $x=1$

по супремальному к/р.:

$\sum a_n \overset{[1,+\infty)}{\rightrightarrows} 0 \Rightarrow$ исходный ряд сход равномерно

№2 $\sum \frac{1}{x^2+n^2}$ $x \in R$

$\sum \frac{1}{(x^2+n^2+2xn)-2xn} = \sum \frac{1}{(x+n)^2-2xn} \le \frac{1}{2xn}$

$|u_n(x)| = \frac{1}{x^2+n^2} \le \frac{1}{n^2}$ — сход по степен. пр. $\forall x \in R$

Значит, по пр. Вейерштрасса $\sum \frac{1}{x^2+n^2} \overset{x \in R}{\rightrightarrows}$

Ответ: $\rightrightarrows$

№3 $\sum \frac{\sin nx}{\sqrt[5]{n^6+x^4}}$, $x \in R$.

I в $|u_n(x)| = \sum \frac{|\sin nx|}{\sqrt[5]{n^6+x^4}} \le \frac{1}{\sqrt[5]{n^6}} = \frac{1}{n^{6/5}}$ — ~~сходится~~

$\sum \frac{1}{n^{6/5}}$ — сход. по степ. признаку.

По пр. Вейерштрасса: исход. ряд сходится

II в

$\sum a_n(x) = \sin nx$,

$b_n(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{n^6+x^4}}$

1) $|\sum \sin nx| \le \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|}$; $x \ne 2\pi k$, $k \in Z$

Если $x = 2\pi k$, ~~если~~ то $\sum \frac{0}{\dots} = 0$, — сходится.

2) $b_n(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{n^6+x^4}}$

При fix x монотонна, т.к. знаменатель дроби будет увеличиваться

3) по супремальному кр. докажем, что равномерно сход.