интервал сход: $\left(-2-\frac{1}{2};\ -2+\frac{1}{2}\right)=(-2{,}5;\ -1{,}5)$

Проверим граничные точки.

$x=-\frac{5}{2}$: $\sum \frac{2^n}{(-2)^n\, n\ln^2(n+2)} = \sum \frac{(-1)^n}{n\ln^2(n+2)}$

Исследуем по пр. Лейбница:

1) знакочеред.
2) $|a_{n+1}| < |a_n|$
3) $\to 0$

Следовательно, сход. по пр. Лейбница.

$x=-\frac{3}{2}$: $\sum \frac{2^n}{2^n\, n\ln^2(n+2)} = \sum \frac{1}{n\ln^2(n+2)}$ – сход. (по интегральному пр.)

Тогда интервал сход.: $\left[-\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}\right]$

Ответ. $[-2{,}5; -1{,}5]$.

Представление ф. в степенной ряда 07.10.20

№1

$f(x)=\frac{1}{1-x}$ $\quad S_\infty=\frac{b_1}{1-q}$; $b_1=1$, $q=x$

$f(x)=1+x+x^2+\ldots+x^n=\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ для $x\in(-1;1)$

$f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ [$b_1=1$; $q=-x^2$.

$f(x)=1-x^2+x^4+\ldots+(-1)^{n}\cdot x^{2n}+\ldots=$

$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$, для $|x^2|<1$

$|x^2|<1$

$x\in(-1;1)$

Ответ:

№2 $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \ldots + \frac{t^n}{n!} + \ldots =$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}, \quad t \in R$

Задача $ch\,x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\Big(\Big(1 + \cancel{x} + \frac{x^2}{2!} +$

$+ \cancel{\frac{x^3}{3!}} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\Big) + \Big(1 - \cancel{x} + \frac{x^2}{2!} - \cancel{\frac{x^3}{3!}} + \ldots +$

$+ \frac{x^n \cdot (-1)^n}{n!} + \ldots\Big)\Big) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^2}{4!} + \ldots + \frac{(1+(-1)^n)x^n}{2n!} + \ldots$

$= \sum \frac{(1+(-1)^n)\,x^n}{2n!} \underset{n\text{-четное}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in R$

№3 $(1+t)^\alpha = 1 + \sum \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \cdot \ldots \cdot (\alpha-n+1)}{n!} t^n$

$t \in (-1; 1)$

Задача: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \alpha = -\frac{1}{2}, \quad t = -x^2 \qquad \left(-\frac{2n-1}{2}\right)$

$\shortparallel$

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum \frac{-\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(-\frac{1}{2} - n + 1\right)}{n!}$

$\times (-x^2)^n = 1 + \sum \frac{(-1)^n \cdot (2n-1)!! \, (-1)^n \cdot x^{2n}}{2^n \cdot n!} =$

$= 1 + \sum \frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n!} \cdot x^{2n}$

$|-x^2| < 1; \quad |x^2| < 1; \quad -1 < x^2 < 1$

$-1 < x < 1$

$x \in (-1; 1)$

ответ: $\uparrow$

№4 $\frac{1}{1-t} = \sum t^n \; ; \; |t| < 1$

Разложить по степеням $(x-b)$

$$f(x) = \frac{1}{a-x} = [:a] = \frac{\frac{1}{a}}{1-\frac{x}{a}}$$

$$f(x) = \frac{1}{a-x+b-b} = \left[\frac{1}{a+b-(x+b)}\right] = \frac{1}{a-b-(x-b)} =$$

$$= [:(a-b)] = \frac{1}{a-b} \cdot \frac{1}{1-\frac{x-b}{a-b}} = \frac{1}{a-b} \cdot \sum \left(\frac{x-b}{a-b}\right)^n =$$

$$= \cancel{\frac{1}{a-b}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(a-b)^{n+1}} \cdot (x-b)^n$$

$$\left|\frac{x-b}{a-b}\right| < 1 \; ; \; -1 < \frac{x-b}{a-b} < 1$$

$$|x-b| < |a-b|$$

$$\cancel{a+b/x-b/} < x < |a-b|+b$$

$$|a-b|-b$$

№5 $\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \ldots + \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots \; , t \in R.$

$$f(x) = \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \ldots + \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x \overset{[t=2x]}{=} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left(\cancel{1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)!}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(1 - \cancel{t^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{2!} - \frac{t^4}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)!}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$$

Д/З №11: на 12.10.2020 ~~1, 2, 3, 4, 5~~

Представить ф. по нужным степеням в степенной ряд

№2 $f(x) = \frac{1}{1+x+x^2}$, по ст. x

$$f(x) = \frac{1}{1+x+x^2} = \frac{1-x}{(1-x)\cdot(1+x+x^2)} = \frac{1-x}{1-x^3} = \frac{1}{1-x^3} - \frac{x}{1-x^3}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} x^{3n} - \underline{\sum_{n=0}^{\infty} x^{3n+1}}, \quad x \in (-1;1)$$

$$\left[\frac{x}{1-x^3} = x\cdot\frac{1}{1-x^3} = x\cdot\sum_{n=0}^{\infty} x^{3n} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{3n+1}\right]$$

Ответ: $\sum_{n=0}^{\infty} x^{3n} - \sum_{n=0}^{\infty} x^{3n+1}$, $x\in(-1;1)$

! $\left[\frac{1}{1-t} = \sum t^n, \ |t|<1\right]$

№5 $f(x) = \sin^4 x$; $(x-\frac{\pi}{4})$

$$\sin^4 x = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1+\cos^2 2x - 2\cos 2x}{4} =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{\cos 2x}{2} + \frac{1+\cos 4x}{8} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 4x}{8}$$

$$\sin^4 x = (\sin(x-\pi/4) + \pi/4))^4 = (\sin(x-\tfrac{\pi}{4})\cdot\cos\tfrac{\pi}{4} +$$

$$+ \cos(x-\tfrac{\pi}{4})\cdot\sin\pi/4)^4 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4\cdot(\sin\underbrace{(x-\tfrac{\pi}{4})}_{\alpha} + \cos\underbrace{(x-\tfrac{\pi}{4})}_{\alpha})^4$$

$$= \frac{1}{4}\cdot(1+\sin 2\alpha)^2 = \frac{1}{4}\cdot(1+\sin^2 2\alpha + 2\sin 2\alpha) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1-\cos 4\alpha}{2} + 2\sin 2\alpha\right) = \frac{3}{8} - \frac{\cos 4\alpha}{8} +$$

$$+ \frac{\sin 2\alpha}{2} = \left[\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} \pm \ldots + \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!}; t\in\mathbb{R}\right]$$

$$\left[\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \dots + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot t^{2n}}{(2n)!}, \quad t \in R\right]$$

$$= \frac{3}{8} - \frac{1}{8}\left(1 - \frac{(4\alpha)^2}{2!} + \frac{(4\alpha)^4}{4!} + \dots + \frac{(-1)^n (4\alpha)^{2n}}{(2n)!}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(2\alpha - \frac{(2\alpha)^3}{3!} + \frac{(2\alpha)^5}{5!} + \dots + \frac{(-1)^n (2\alpha)^{2n+1}}{(2n+1)!}\right) =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\left(\frac{(4\alpha)^2}{2!} - \frac{(4\alpha)^4}{4!} + \dots + \frac{(-1)^n (4\alpha)^{2n}}{(2n)!}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}(-\,''\,-) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^{2n} \cdot (x - \frac{\pi}{4})^{2n}}{(2n)!} +$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{2n+1} \cdot (x - \frac{\pi}{4})^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Ответ: ↑

(N4)

$f(x) = \ln(4 + 3x - x^2)$, по степени: $(x-2)$

$$f(x) = \ln(-(x^2 - 3x - 4)) = \ln(-(x-4)\cdot(x+1)) = [x - 2 = t] =$$

$$= \ln(-(t-2)\cdot(t+3)) = \ln((2-t)\cdot(t+3)) =$$

$$= \ln(2-t) + \ln(t+3) = \ln\left(2\left(1 - \frac{t}{2}\right)\right) + \ln\left(3\left(1 + \frac{t}{3}\right)\right) =$$

$$= \ln 2 + \ln 3 + \ln\left(1 - \frac{t}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{t}{3}\right) =$$

$$= \left[\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot x^n}{n}, \quad x \in (-1, 1]\right]$$

$$= \ln 6 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot (-1)^n \cdot t^n}{2^n \cdot n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot t^n}{3^n \cdot n} =$$

$$= \ln 6 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n-1} \cdot (x-2)^n}{2^n \cdot n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (x-2)^n}{3^n \cdot n}, \quad x \in (1; 3)$$

$-1 < \overbrace{x-2}^{t} < 1; \quad 1 < x < 3$

Ответ ↑

№1 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1-2x}}$, по ст. x

$$f(x)=x\cdot(1-2x)^{-\frac{1}{2}}=\left[m=-\frac{1}{2};\ x'=-2x\right];$$

$$\left[(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)\cdot(m-2)}{3!}x^3+\ldots\right.$$

$$\left.+\frac{m(m-1)\ldots(n-n+1)}{n!}x^n\right];\ x=(-1;1)$$

$$=x\cdot\left(1+x+\frac{1\cdot3\cdot x^2}{2!}+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot x^3}{3!}+\ldots\right)=$$

$$=x+\frac{1}{1!}x^2+\frac{1\cdot3}{2!}\cdot x^3+\frac{1\cdot3\cdot5}{3!}\cdot x^4=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{n!}x^{n+1}$$

$x\in\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$

Ответ.

№3 $f(x)=\frac{3x-8}{(2x+3)(x^2+4)}$, по ст. x

Разложим на простейшие дроби:

$$\frac{3x-8}{(2x+3)(x^2+4)}=\frac{A}{(2x+3)}+\frac{Bx+C}{x^2+4}=\text{Ђ}$$

$$3x-8=\cancel{A(x^2+4)+B(2x+3)}+A(x^2+4)+(Bx+C)(2x+3)$$

$$3x-8=Ax^2+4A+2Bx^2+3Bx+2xC+3C$$

$$3x-8=x^2(A+2B)+x(3B+2C)+1\cdot(4A+3C)$$

Решим систему:

$$\begin{cases}A+2B=0\\3B+2C=3\\4A+3C=-8\end{cases}\quad\begin{cases}A=-2B\\-8B+3C=-8\\3B+2C=3\end{cases}\quad\begin{cases}A=-2\\B=1\\C=0\end{cases}$$

Получаем:

$$f = \frac{-2}{(2x+3)} + \frac{x}{x^2+4} = -\frac{1}{x+3/2} + x\cdot\frac{1}{1+(3+x^2)} =$$

$$\left[\frac{1}{1-t} = \sum t^n, \quad t\in(-1;1)\right]$$

$$= -\frac{1}{1-(\underbrace{-0,5-x}_{a})} + x\cdot\frac{1}{1-(\underbrace{-3-x^2}_{b})} = -\frac{1}{1-a} + x\,\frac{1}{1-b} =$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} a^n + x\cdot\sum_{n=0}^{\infty} b^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{(x+\frac{1}{2})^n(-1)^n}{1} +$$

$$+ x\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(3+x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(x+\frac{1}{2}\right)^n \leftarrow$$ по не тем степеням

$$= -\frac{2}{3(1+\frac{2}{3}x)} + x\cdot\frac{1}{4}\,\frac{1}{1+\frac{x^2}{4}} = -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{2}{3}x} + \frac{x}{4}\,\frac{1}{1+x^2/4} =$$

$$= -\frac{2}{3}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-2}{3}\right)^n\cdot x^n + \frac{x}{4}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{4}\right)^n\cdot x^{2n} =$$

$$= \cancel{-\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot 2^{n+1}\cdot x^n}{3^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^{n+1}}\cdot x^{2n+1}$$

$$* \begin{cases} -1 < -\frac{2}{3}x < 1 \\ -1 < -\frac{1}{4}x < 1 \end{cases} \quad \begin{cases} -3 < -2x < 3 \\ -4 < -x < 4 \end{cases} \quad \begin{cases} -3/2 < x < 3/2 \\ -4 < x < 4 \end{cases}$$

$$x \in (-3/2;\ 3/2)$$

Ответ: $\nearrow$