$\Rightarrow$ Следствие:
Если ряд сходится условно, то он содержит бесконечное число положительных и бесконечное число отрицательных членов.

Действия над числовыми рядами

1. Перестановка членов ряда.

Опр: Пусть (n_k) - последоват., в которой каждое натуральное число встречается ровно 1 раз. Положим $\alpha_k = a_{n_k}$. Ряд $\sum \alpha_k = \sum a_{n_k}$ - назыв. перестановкой ряда $\sum a_n$.

$\Rightarrow$ Теорема:
Если ряд сходится абсолютно, то $\forall$ его перестановка также сходится абсолютно и имеет ту же сумму, что и исходный ряд.
От перестановки слагаемых абсолютно сходящегося ряда сумма не меняется.

◇ 1) Рассмотрим сходящ. полож. ряд
$\sum a_n = S < +\infty$, $a_n \geq 0$
Возьмем какую-то перестановку его $\sum \alpha_k$, где $\alpha_k = a_{n_k}$. Рассмотрим частную сумму перестановки: $\sigma_m = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{n_k}$

Обозначим через $r = \max\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$.
$\sum\limits_{k=1}^{r} a_n$ - частичная сумма исходного ряда.
$\sigma_m = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{n_k} \leq \sum\limits_{k=1}^{r} a_k = S_r \leq S$

на основании критерия сходимости полож. ряда ряд $\sum \alpha_k$ - сход. $\Rightarrow \sum \alpha_k \leq S$

С другой стороны исходный ряд $\sum a_k$ можно получить перестановкой ряда $\sum a_k$

Аналогично можно показать, что $\sum a_k \leq \sum \alpha_k \Rightarrow$
$\sum \alpha_k = S$

2) Пусть исходный ряд – знакопеременный и $\sum |a_k|$ – сходится (по услов. теоремы)
На основании критерия абсолютной сходимости $\sum a_k$ можно представить:

$$\sum a_k = \sum b_k - \sum c_k$$

Перестановка исходного ряда $\sum a_n$ вызывает соответствующ. перестановки в рядах $\sum b_k$ и $\sum c_k$ – положительны, и к ним применимо доказанное в части 1.

Получим, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_{n_k} = \sum\limits_{k=}^{\infty} b_k$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_{n_k} = \sum\limits_{k=}^{\infty} c_k$

Перейдем к пределу:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} = \lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_{n_k} = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} b_{n_k} - \sum_{k=1}^{n} c_{n_k} \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} b_k - \sum_{k=1}^{\infty} c_k = \sum_{k=1}^{\infty} b_{n_k} - \sum_{k=1}^{\infty} c_{n_k}$$

⊠

Теорема (Римана):
Если ряд $\sum a_n$ сходится условно, то для $\forall$ числа A (в том числе $A = \pm\infty$) $\exists$ перестановка $\sum a_{n_k}$, которая имеет наперед заданную сумму A.

◇ Схема доказательства:
У нас есть $\sum b_k$ – полож. члены и
$\sum c_k$ – отриц. члены и оба они расходятся. Будем добавлять элементы $\sum b_k$, пока сумма перестановки не превысит A. Затем будем добавлять отрицательные элем. подряд пока сумма не станет $< A$. И будем ходить вокруг A, все время приближаясь к нему, $a_k \to 0$.

⊠

2. Группировка членов ряда (расстановка скобок)

Опр. Группировкой членов ряда $\sum a_n$ называют объединение членов ряда в группы, при котором не нарушается порядок следования членов.

Другими словами: суммирование рядом стоящих членов.

В общем случае группировка не допускается.
$(1-1)+(1-1)+\dots \neq 1+(-1+1)+(-1+1)+\dots$

Теорема:
Группировка членов сходящегося ряда не нарушает его сходимости и не меняет величины суммы.

◇ Рассмотрим произвольную группировку:

$$\underbrace{(a_1+a_2+\dots+a_{n_1})}_{\alpha_1}+\underbrace{(a_{n_1+1}+\dots+a_{n_2})}_{\alpha_2}+\dots$$

Получим ряд: $\sum \alpha_k$
Последовательность частичных сумм σ_n этого ряда будет подпоследовательностью последовательности частичных сумм исходного ряда S_n. Поэтому она имеет тот же самый предел S. ⊠

Следствие 1:
В абсолютно сходящихся рядах допустима перегруппировка членов ряда, т.е. группировка после перестановки. Это не нарушит абсолютную сходимость ряда и его сумму.

Следствие 2:
Разгруппировка (т.е. раскрытие скобок) допустимо, если полученный ряд сходится.

Следствие 3:
Если сгруппированный ряд сходится и если в каждой слагаемые имеют один и тот же знак, то разгруппировка возможна.

3. Произведение рядов:

Для $\forall$ конечных сумм: $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} b_k\right) = \sum_{k,j=1}^{n} a_k b_j$

Рассмотрим 2 ряда: $\sum a_k = a_1 + a_2 + \dots$

$\sum b_k = b_1 + b_2 + \dots$

Составим таблицу всевозможных сумм:

$$\begin{matrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 & \dots \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{matrix}$$

Получим бесконечную таблицу - матрица с двумя входами.

Естественно считать, произведение рядов - сумма рядов этой бесконечной матрицы.

Опр: Весом произведения $a_k b_j$ назыв. число $(k+j)$; через c_k обозначим сумму элементов:

$$c_k \stackrel{\wedge}{=} a_1 b_{k-1} + a_2 b_{k-2} + \dots + a_{k-1} b_1$$

произведением рядов назыв. ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{k} a_j b_{k-j}\right)$

Введенное таким образом произведение назыв. произведением рядов по Коши.

Z Теорема:

Если ряды $\sum a_k$ и $\sum b_k$ сходятся абсолютно, то произведение $\sum c_{k+1}$ - также сходятся абсолютно и при этом $\sum c_{k+1} = A \cdot B$, где $A = \sum a_k$, $B = \sum b_k$.

◇ Разгруппируем ряд $\sum c_{k+1}$ и рассмотрим ряд из модулей этой разгруппировки:

$$|a_1 b_1| + |a_1 b_2| + |a_2 b_1| + \dots \quad (1)$$

$$A^* = \sum |a_k| \; ; \; B^* = \sum |b_k|$$

$$\sigma_n \le (|a_1| + \dots + |a_k|) \cdot (|b_1| + \dots + |b_m|) =$$
$$= \sigma_k^A \cdot \sigma_m^B \le A^* \cdot B^*$$

Здесь k и m - максимальные номера, присутствующие в σ_n. положит. (1) - сходится

Т.к. разгруппировка ряда произведения $\sum c_{k+1}$ сход. абсолютно (доказано), то и любая его перестановка сходится абсолютно и перегруппировка сходится (абсолютно).

Перегруппируем члены этой разгруппировки ("по квадратам"). Получим:

$$\sigma_n^* = \sum_{k=1}^{n} a_n \cdot \sum_{k=1}^{n} b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} A \cdot B \qquad \boxtimes$$

$\Rightarrow$ Замечание:

Условие теоремы можно ослабить, потребовав, чтобы один из рядов сходился, а второй абсолютно сходился.

$\Rightarrow$ Замечание:

Однако если оба ряда сходятся условно, то произведение может получиться расходящимся, это показывает след. пример.

Пр: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}$ – сходится условно (по пр. Лейбница)

Умножим этот ряд на себя:

$c_2 = 1$

$c_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{1} = -\frac{2}{\sqrt{2}}$

$c_4 = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots$

$$c_{k+1} = 1 \cdot \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{(-1)^{k-2}}{\sqrt{k-1}}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{(-1)^{k-3}}{\sqrt{k-2}} + \dots + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} \cdot 1 = [\text{здесь } k \text{ слагаемых}] =$$

$$= (-1)^{k-1} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{k-1}} + \frac{1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{k-1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k}}\right) -$$

сумма содержит k слагаемых, каждая из которых $\geq \frac{1}{k}$

$$\left[\text{т.к. } \frac{1}{\sqrt{m}\cdot\sqrt{k-m+1}} \geq \frac{1}{\sqrt{k}\cdot\sqrt{k}} = \frac{1}{k}\right]$$

Получим $|c_{k+1}| \geq k \cdot \frac{1}{k} = 1$.

$c_{k+1} \not\to 0 \Rightarrow$ ряд произведения расходится

Бесконечные произведения

Возьмем некоторую числовую последов. (a_n) и построим новую последовательность (p_n) по следующ. правилу:

$p_1 = a_1$; $p_2 = a_1 a_2$; …, $p_n = a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$;

$\prod\limits_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 \cdot \ldots \cdot a_n \cdot \ldots$ – бесконечное произведение

числа $a_1, \ldots, a_n$ – члены бесконечного произвед.
числа $p_1, \ldots, p_n$ – частные произведения

Опр: Бесконечное произведение $\prod\limits_{k=1}^{\infty} a_n$ наз. сходящимся, если частичные произведения p_n имеют конечный и отличный от нуля предел.

$$\prod_{k=1}^{\infty} a_n = p$$

Если предел частных произведений $= 0, \infty$ или не $\exists$, то произведение наз. расходящимся.

Пр1: $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \cos\frac{x}{2^n}$, $x \neq 0$; $\frac{x}{2^n} \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

Рассмотрим частичное произведение:

$$P_n = \cos x/2 \cdot \cos x/4 \cdot \cos x/8 \cdot \ldots \cdot \cos x/2^n \cdot \frac{\sin x/2^n}{\sin x/2^n} =$$

$$= \frac{\sin x \cdot \frac{1}{2^n}}{\sin x/2^n} \longrightarrow \left[\frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1 \right] \to \frac{\sin x}{x}$$

произведение сходится

Пр2: $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)$ – произведение расходится

$$p_n = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{n+1}{n} = n+1 \to \infty$$

Пр3: $\prod \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \prod \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right) = \prod \left(\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}\right)$

Частичное произведение: $P_n = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 3} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 4} \cdot \frac{4 \cdot 6}{5 \cdot 5} \cdot \ldots =$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{n+2}{n+1} \longrightarrow \frac{1}{2}$$

⇒ **Теорема** (необходимое условие сходимости произведения):

Для сходимости произведения $\prod a_k$ необходимо, чтобы $a_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 1$

◇ т.к. $\prod a_k$ - сходится $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} p_n = p \Rightarrow a_n = \frac{p_n}{p_{n-1}} \Rightarrow \frac{p}{p} = 1$ $\boxtimes$

Опр: Бесконечное произведение $\prod\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k = \prod\limits_{k=1}^{\infty} a_{k+n} \equiv$

$\equiv \pi_n$ - остаток бесконечного произведения $\prod a_k$

⇒ **Теорема:**

Для сходимости произведения $\prod a_k \Leftrightarrow$ чтобы сходился хотя бы 1 его остаток.

◇ $\Rightarrow$ $\prod a_k = p$ - сход. $\Rightarrow p = \prod\limits_{k=1}^{n} a_k \cdot \prod\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k \Rightarrow$

$\prod\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k = \frac{p}{\prod\limits_{k=1}^{n} a_k} \Rightarrow$ при $n\to\infty$ предел левой части $\exists$ и равен 1.

$\Leftarrow$ $p_n = \frac{p}{\pi_n} \Rightarrow$ из сходимости хотя бы 1 остатка следует сходимость всего произвед. $\boxtimes$

⇒ **Следствие:**

Если бесконечное произведение сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} \pi_n = 1 \Rightarrow \pi_n = p/p_n$

Отметим, что из необходимого условия сходимости вытекает, что у сходящегося произведения все члены, начиная с некоторого, положительны. Поэтому не нарушая общности полагаем, что $a_n > 0$.

→ Связь произведений и рядов

Теорема:

$p = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$

$\ln p = \ln a_1 + \ln a_2 + \ldots + \ln(1+\alpha_1) + \ldots + \underbrace{\ln(1+\underset{\to 0}{\alpha_n})}_{\sim \alpha_n} + \ldots$

$\ln p = S \Rightarrow p = e^S$

→ Произведение Πa_k сходится $\Leftrightarrow$ когда сходится ряд из логарифм. $\Sigma \ln a_k$

При этом значение произведения p и сумма S связаны соотношением $p = e^S$.

◇ Обозначим S_n – частные суммы ряда из логарифмов; p_n – частные произведения, тогда

$p_n = \prod_{n=1}^{n} a_k \Rightarrow \ln p_n = \sum_{k=1}^{n} \ln a_k = S_n \Rightarrow p_n = e^{S_n}$

$p_n \to p$, $S_n \to \ln p_n \to \ln p$ и наоборот

$S_n \to S$, $p_n = e^{S_n} \to e^S$ ⊠

Положим $a_k = 1 + \alpha_k$; $\alpha_k = a_k - 1$,

если предположить, что $\alpha_k > 0$, т.е. $a_k > 1$,

$\Sigma \ln a_n = \Sigma(\ln(1+\alpha_k))$

Имеем $\ln(1+\alpha_k) \underset{k\to\infty}{\sim} \alpha_k$, след. $\Rightarrow$ эти оба ряда или оба сход., или оба расходятся.

Таким образом, обосновали справед. след. теоремы.

Теорема:

Если по крайней мере для больших k, все добавки $\alpha_k > 0$, то для сходимости произведен. $\Pi(1+\alpha_k)$ – (сход.) $\Leftrightarrow$ $\Sigma \alpha_k$ – сходится

Опр: Произведение $\Pi(1+\alpha_k)$ наз. сход. абсолютно, если сходится произведение $\Pi(1+|\alpha_k|)$.

Из абсолютной сходимости вытекает просто сходимость

Опр: Если произвед. $\prod(1+|\alpha_n|)$ - расходится, а само произвед. $\prod(1+\alpha_k)$ - сход., то оно наз. сход. условно.

$\Rightarrow$ **Теорема:**

сл.1) Если (α_n) - знакопеременная послед., то из сходимости рядов $\sum\alpha_n$ и $\sum\alpha_n^2$ вытекает сходимость произведения $\prod(1+\alpha_n)$

сл.2) Если один из рядов $\sum\alpha_n$ и $\sum\alpha_n^2$ сход., а другой расходится, то произведение расход.

сл.3) Если оба ряда $\sum\alpha_n$, $\sum\alpha_n^2$ расходятся, то произведение может как расходится, так и сход.

$\diamond$ 1) Пусть $\sum\alpha_k$, α_k^2 - сход.

Рассмотрим $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\alpha_k - \ln(1+\alpha_k))$

Представим логарифм по форм. Тейлора:

$$\alpha_k - \ln(1-\alpha_n) = \alpha_k - \left(\alpha_n - \frac{\alpha_k^2}{2} + O(\alpha_k^2)\right) =$$

$= \frac{\alpha_k^2}{2} + O(\alpha_k^2) \Rightarrow$ начиная с некоторого номера

$\alpha_n - \ln(1+\alpha_n) \geq 0$

$$\alpha_k - \ln(1+\alpha_k) \underset{k\to\infty}{\sim} \frac{\alpha_k^2}{2}$$

имеет место следущее представление:

$\sum\ln(1+\alpha_k) = \sum\alpha_k - \sum(\alpha_k - \ln(1+\alpha_k))$ или

$\sum\ln(1+\alpha_k) = \sum\alpha_k - \sum\left(\frac{\alpha_k^2}{2} + O(\alpha_k^2)\right)$

В силу сходимости рядов $\sum\alpha_k$ и $\sum\alpha_k^2 \Rightarrow$ $\sum\ln(1+\alpha_n)$ сходится как разность 2-ух сходя рядов, а значит сходится и $\prod(1+\alpha_n)$

2) Если один из $\sum\alpha_k$, $\sum\alpha_k^2$ сход. или расходится, то разность расходится.

3) Если $\sum\alpha_k$ и $\sum\alpha_k^2$ расходится, то сход. $\sum\ln(1+\alpha_n)$

$\boxtimes$

Пр 1: $\Pi\left(1+\frac{1}{k^{\alpha}}\right) \Leftrightarrow \Sigma\left(\frac{1}{k^{\alpha}}\right) - \begin{cases} сх, & \alpha > 1 \\ расх, & \alpha \le 1 \end{cases}$

Пр 2: $\Pi\left(1-\frac{1}{\sqrt{k^{\alpha}+1}}\right) \Leftrightarrow \Sigma \frac{1}{\sqrt{k^{\alpha}+1}} - \begin{cases} сх, & \alpha > 2 \\ расх, & \alpha < 2 \end{cases}$

Пр 3. Знакочередующийся.

$\Pi\left(1-\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)$: $\Sigma\alpha_k = \Sigma \frac{(-1)^k}{k}$ - сход. по пр. Лейбница

$\Sigma\alpha_k^2 = \Sigma \frac{1}{k^2}$ - сход. по степ. признаку

=> исход. произвед. сход.

Пр. 4: $\Pi\left(1+\frac{\sin kx}{k}\right)$; $\Sigma\alpha_k = \Sigma \frac{\sin kx}{k}$ - сход.

$\Sigma\alpha_k^2 = \Sigma \frac{\sin^2 kx}{k^2}$ - сход. по приз. сравн. с рядом $\Sigma \frac{1}{k^2}$

=> исход. произвед. сходится, но оно сход. условно, т.к. $\Sigma|\alpha_k| = \Sigma\left|\frac{\sin kx}{k}\right|$ - расходится

Функциональные последовательности и ряды

→ Поточечная сходимость:

Будем рассматривать последов. ф. $(f_n(x))$

$(f_n(x))$, $f_n: E \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $E \subset \mathbb{R}$

При каждом фиксированном значении x_0 из E, получаем числовую последовательность $(f_n(x_0))$

Рассмотрим также рядов из этих ~~последов.~~ ф. $\Sigma u_k(x)$, где $u_k: E \to \mathbb{R}$. При каждом фиксированном $x_0 \in E$ получаем числовой ряд $\Sigma u_k(x_0)$

Опр: Последовательность ф. (f_n) называется сходящ. на множ. E, если для каждой т. x_0 из E сходится числовая последовательность $(f_n(x))$

Опр: Предельной ф., или пределом сходящ. последов. (f_n) называется ф. f, которая определена на множ. E и задается равенством

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

Др. словами (на языке ε/δ):
для $\forall \varepsilon > 0$, $\forall$ точки $x \in E$ можно найти такой номер $\nu = \nu(x, \varepsilon)$ (зависящий) : $\forall n \geq \nu$ выполнялось бы

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Опр: Ряд ф. $\sum u_k(x)$ называется сход. на множ. E, если для каждой т. $x \in E$ сходится числовой ряд $\sum u_k(x)$

Опр: Суммой ряда $\sum u_k(x)$ называется новая ф. $S(x) = \sum u_k(x)$
Др. словами (на языке ε/δ):

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall x \in E,\ \exists \nu = \nu(x, \varepsilon),\ \forall n \geq \nu :$$

фиксированная

$$|S_n(x) - S(x)| \leq \varepsilon.$$

данное неравенство можно записать в форме через остаток:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)\right| \leq \varepsilon \quad \text{или} \quad |r(x)| \leq \varepsilon$$

r_n - остаток функционального ряда.

Введенная таким образом сходимость функцион. последовательности и функцион. ряда называется поточечной сходимостью

Опр: Сумма $S(x)$ сходящегося функцион. ряда есть предел функциональной последовательности его частных сумм $(S_n(x))$:

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$$

Каждому ряду ф. можно поставить в соответствие последовательность частных сумм и наоборот: для ∀ произвольной функциональн. последов. (f_n) можно построить функц. ряд, члены которого определяются однозначно:
$u_1 = f_1$; $u_2 = f_2 - f_1$; $u_3 = f_3 - f_2$

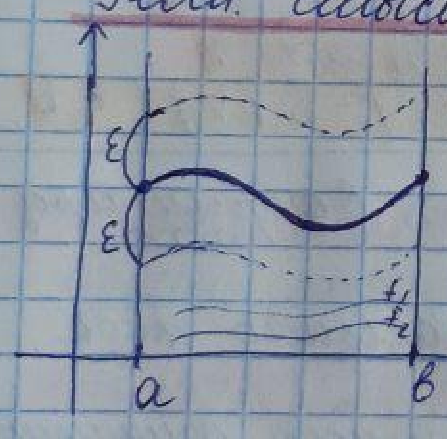
Это дает возможность перефразировать всякую теорему, доказанную для послед., в теорему для рядов.

Также это новый способ задания ф. элементарной и неэлементарной.

→ ## Равномерная сходимость

Опр: (f_n) назыв. равномерно сходящейся на множ. E к предельной ф. $f(x)$:
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \nu(\varepsilon),\ \forall n \geq \nu(\varepsilon),\ \forall x \in E:\ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$

Геом. смысл:



$E = [a, b]$

$f(x)$ - предельная ф.

Начиная с большого номера, все ф. соберутся в этом промежутке.

Геометрически равномерная сходимость означает, что графики всех допредельных ф. $f_n(x)$ с достаточно большими номерами соберутся ε-окрестностями графика $f(x)$.

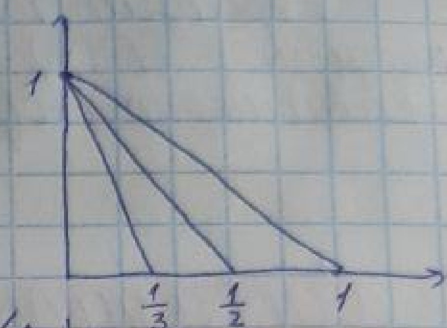
Обозначения: $f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{E} f$ (последовательность (f_n) равномерно сходится к ф. f на множестве E)

$f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{E} f$ (послед. (f_n) сходится ...)

Нетрудно видеть, что из равномерной сход. следует поточечная сход.
Обратное неверно. След. пример показывает это.

Пр: $f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx, & 0 \le x \le \frac{1}{n} \\ 0, & \frac{1}{n} \le x \le 1 \end{cases}$

$f_n(x) \underset{n\to\infty}{=} \begin{cases} 0, & 0 < x \le 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$



Покажем, что эта последов. (f_n) не сходится равномерно к $f(x)$; $f_n \overset{[0,1]}{\not\rightrightarrows} f(x) = 0$

Для этого докажем, $\exists \varepsilon > 0$: $|f_n(x_0) - f(x_0)| > \varepsilon$
Возьмем $\exists \varepsilon = \frac{1}{2}$ $\forall \nu_\varepsilon$; $\exists n > \nu(\varepsilon)$: $x_0 = \frac{1}{3n}$
$f_n(x_0) = f_n\left(\frac{1}{3n}\right) = 2/3$
$f(x_0) = f\left(\frac{1}{3n}\right) = 0$
$|f_n(x_0) - f(x_0)| = 2/3 > \frac{1}{2} = \varepsilon$
по опр. послед. не является равномерно сход.

Критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности.

Теорема.
Для того, чтобы функциональная последоват. $f_n \underset{n\to\infty}{\overset{E}{\rightrightarrows}} f \iff$ чтобы $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \nu_\varepsilon$, $\forall n \ge \nu_\varepsilon$, $\forall p \ge 0$ $\forall x \in E$: $|f_n(x) - f_{n+p}(x)| \le \varepsilon$

$\Rightarrow$ $f_n \underset{n\to\infty}{\overset{E}{\rightrightarrows}} f$, тогда по определению:
$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \nu_\varepsilon$, $\forall n \ge \nu_\varepsilon$: $|f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon \Rightarrow$
$\forall p \ge 0$: $|f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon \Rightarrow |f_{n+p} - f_n| =$
$= |f_{n+p} - f + f - f_n| \le |f_{n+p} - f| + |f - f_n| \le \varepsilon + \varepsilon \le 2\varepsilon$

$\Leftarrow$ Если выполнено условие Коши $|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \le \varepsilon$, то при каждом фиксированном $\forall x \in \exists (f_n(x))$ - числовая последовательность и для неё выполнено условие Коши, т.е. она фундаментальна. Поэтому при каждом $x \in E$ $(f_n(x))$ - сход.

Обозначим ее предел через $f(n)$;

$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$, $p \to +\infty$

Перейдем теперь в этом неравенстве к пределу: $|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$ при $\forall n \geq \nu_\varepsilon$ и $\forall x \in E$ => равномерно сходится по определению $\boxtimes$

Супримальный критерий равномерной сходимости последовательности

Теорема:

Функциональная последовательность $f_n \underset{n \to +\infty}{\overset{E}{\rightrightarrows}} f \Longleftrightarrow$ $\sup\limits_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

◇ Обозначим $M_n = \sup\limits_{E} |f_n(x) - f(x)|$

(=>) $f_n \overset{E}{\rightrightarrows} f \Rightarrow |f_n - f| \leq \varepsilon, \forall x \in E, \forall n \geq \nu_\varepsilon \Rightarrow$
$M_n \leq \varepsilon \Rightarrow M_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

(<=) $M_n \to 0 \Rightarrow \forall \varepsilon \geq 0, \exists \nu_\varepsilon, \forall n \geq \nu_\varepsilon : |M_n - \overset{\text{предел}}{0}| \leq \varepsilon$,
т.е. $M_n \leq \varepsilon \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon, \forall x \in E$
самое большое отклон. → 0
по опр. получаем: $f_n \overset{E}{\rightrightarrows} f$ $\boxtimes$

Следствие 1:

Если $|f_n(x) - f(x)| \leq \overset{\text{константа}}{a_n}$; $\forall x \in E$, $\forall n$, и $a_n \to 0$, то $f_n \overset{E}{\rightrightarrows} f$

Следствие 2:

Если $f_n \to f$ и $\exists (x_n)$: $- x_n \in E, \forall n$, $|f_n(x_n) - f(x_n)| = b_n$ и $b_n \not\to 0$, то последов. f_n сходится к f неравномерно ($f_n \overset{E}{\not\rightrightarrows} f$)

◇ $\sup\limits_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \geq b_n \to 0 \Rightarrow$ по супримальному критерия нет равномерной сходимости $\boxtimes$

Равномерная сходимость функциональных рядов

Опр: Ряд функц. $\sum u_n(x)$ наз. равномерно сходящимся на множ. E, если на этом множ. равномерно сходится последовательность его частичных сумм, т.е. $S_n(x) \overset{E}{\rightrightarrows} S(x)$

Обознач $\sum u_n(x) \rightrightarrows S(x)$, $\sum u_n(x) \overset{E}{\rightrightarrows}$.

Др. словами: (на ε/δ)

$\sum u_n(x) \overset{E}{\rightrightarrows} S \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \nu_\varepsilon, \forall n \geq \nu_\varepsilon, \forall x \in E:$ —

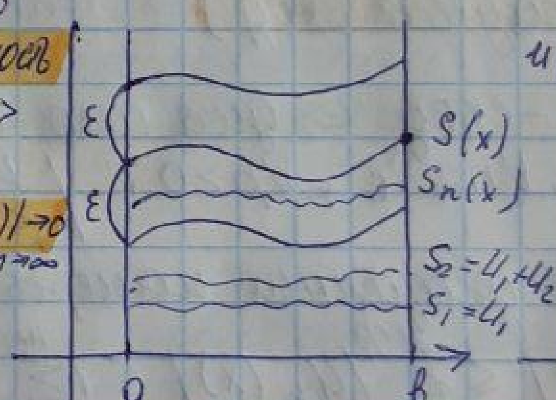
$\underbrace{|S_n(x) - S(x)|}_{r_n(x)} \leq \varepsilon \quad (|r_n(x)| \leq \varepsilon)$

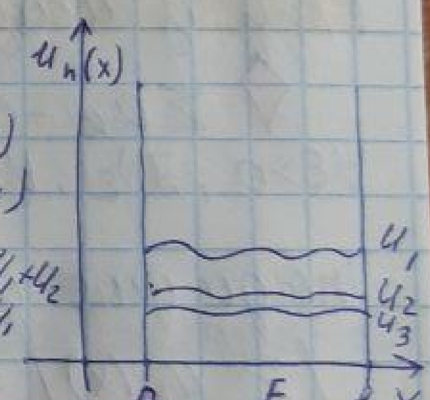
очень близко расположенный от $S(x)$

Отсюда вытекает, что равномерная сходимость ряда на множ. $E \Longleftrightarrow$ выполнению усл.:

$r_n(x) \overset{E}{\rightrightarrows} 0 \overset{\Longleftrightarrow}{\text{или}} \sup\limits_{E} |r_n(x)| \underset{n\to\infty}{\to} 0$

точн. сама





Теорема: (кр. Коши сходимости равномерной ряда)

Для того, чтобы ряд ф. $\sum u_k$ сход. равномерно на множ. $E \Longleftrightarrow$ чтобы для $\forall \varepsilon > 0, \exists \nu(\varepsilon), \forall n \geq \nu_\varepsilon$,

$\forall p \geq 0 \ \forall x \in E:$ $\left| \sum\limits_{k=n}^{n+p} u_k(x) \right| \leq \varepsilon$

номер после n кусок ряда

◇ следует из кр. Коши равномерной сходимости послед. (S_n) частичных сумм ряда $\sum u_k(x)$ $\boxtimes$

Следствие (необходимое усл. равномерной сход. ряда)

Если $\sum u_n(x) \overset{E}{\rightrightarrows}$ ___ $\Rightarrow u_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{E}{\rightrightarrows}} 0$

мал. ф.

◇ Положим в необходимости кр. Коши $p=0$

$\sum u_k(x) \overset{E}{\rightrightarrows}$ ___ $\Rightarrow |u_k(x)| \leq \varepsilon, \forall x \in E \Longleftrightarrow$ [по опр. равномерн. сход. функц. послед.] $u_n(x) \overset{E}{\rightrightarrows} 0$ $\boxtimes$

$\Rightarrow$ **Замечание:**

Если ряд $\sum u_k$ сходится и $u_n(x) \overset{E}{\not\rightrightarrows} 0$ (функция), то ряд $\sum u_k \overset{E}{\not\rightrightarrows}$. (сход. не равномерно)

Признак Вейерштрасса (признак сходимости)

Опр: числовой ряд $\sum a_k$ (полож. ряд: $a_k \geq 0$) наз. числовой мажорантой для функц. $\sum u_k(x)$ на множ. E, если $|u_k(x)| \leq a_k$, $\forall k \in N$.

$\Rightarrow$ **Теорема** (пр. Вейерштрасса равномерной сходимости функцион. ряда)

Если ряд ф. $\sum u_k(x)$ обладает сходящейся числовой мажерантой (т.е. $\sum a_n$ - сход.), то на этом множ. он сходится абсолютно и равномерно (ряд из модулей сход.)

◇ $\sum a_k$ - сход. $\Rightarrow$ для него имеет место кр. Коши:

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \nu_\varepsilon$, $\forall n \geq \nu_\varepsilon$, $\forall p > 0$: $\left|\underbrace{\sum_{k=n}^{n+p} a_k}_{\text{кусок ряда}}\right| \leq \varepsilon$

тогда для указанных номеров n и p нас интересует

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p} u_k(x)\right| \leq \sum_{k=n}^{n+p} |u_k(x)| \leq \sum_{k=n}^{n+p} |u_k(x)| \leq \sum_{n=n}^{n+p} a_k < \varepsilon$$

по кр. Коши равномерной сход. функц. ряда:

$\sum u_k(x) \overset{E}{\rightrightarrows}$ $\boxtimes$

Пр: $\sum \frac{\sin(nx+x^2)}{n\sqrt{n}+1}$, $x \in R$

$\sum \overset{R}{\rightrightarrows}$, потому что $\frac{|\sin(nx+x^2)|}{n\sqrt{n}+1} \overset{\forall x \in R}{\leq} \frac{1}{n^{3/2}+1} \leq$

$\leq \frac{1}{n^{3/2}}$, т.к. $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ - сходится, то по пр. Вейерштр. исходный $\sum \overset{R}{\rightrightarrows}$

Замечание:

Пр. Вейерш. дает лишь достаточное условие абсолютной и равномерной сходимости.

Если $a_n = \sup\limits_E |u_n(x)|$ - самая точная мажоранта, то отсутствие сходящейся мажоранты еще не говорит о том, что ряд сходится неравномерно или вообще расходится

Признаки Абеля и Дирихле равномерной сходимости функционального ряда

(для знакопеременных рядов)

Теорема (пр. Абеля):

Если
1) $\sum a_n(x)$ сход. равномерно на множ. E ($\sum a_n(x) \overset{E}{\rightrightarrows}$)
2) $(b_n(x))$ - ограничена в совокупности, т.е. $\exists M = const: |b_n(x)| \le M, \forall n \in N, \forall x \in E$
3) При каждом фиксированном $x \in E$ $(b_n(x))$ - монотонная последоват.

Тогда $\sum a_n(x) \cdot b_n(x) \overset{E}{\rightrightarrows}$

◇ Проводится с использованием оценки Абеля и кр. Коши и дословно повторяет док-во пр. Абеля для числовых рядов ☒

Теорема (Пр. Дирихле):

Если
1) частичные суммы $\sum a_n(x)$ ограничены в совокупности, т.е. $\exists M = const: |\sum\limits_{k=1}^{n} a_n(x)| \le M, \forall n \in N, \forall x \in E$
2) При $\forall$ фиксированном $x \in E$ последов. вторых кусочков $(b_n(x))$ - монотонна
3) $b_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{E}{\rightrightarrows}} 0$ ← ф. $y=0$

Тогда $\sum a_n(x)\, b_n(x) \overset{E}{\rightrightarrows}$

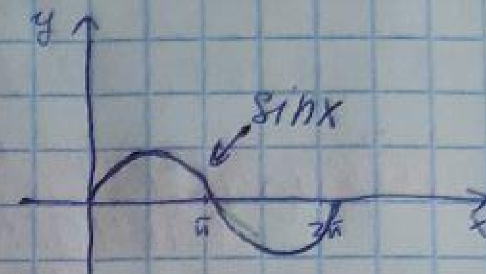
◇ Повторяется как у пр. Дирихле для числовых рядов ☒

Пр: исследовать на равномерную сходимость ряд
$\sum \frac{\sin nx}{n+x^2} \overset{[\mu;2\pi-\mu]}{\rightrightarrows}$ (по пр. Дирихле), $x \in [\mu, 2\pi-\mu]$

Применим пр. Дирихле:

1) $\left|\sum\limits_{n=1}^{n} \sin kx\right| \leq \frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|} \leqslant \frac{1}{\sin\frac{\mu}{2}}$

2) $b_n = \frac{1}{n+x^2}$ – монотонна при каждом фиксир. x.



3) $|b_n| = \frac{1}{n+x^2} \overset{x\in[\mu;2\pi-\mu]}{\leq} \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$,
значит по супремальн. кр.
$b_n(x) \rightrightarrows 0$

→ Следствие (Пр. Лейбница равномерной сходимости)

Если ф. $a_n(x) \geq 0$, $\forall x \in E$, $(a_n(x))$ - монотонна при каждом фиксированном $x \in E$ и $a_n(x) \overset{E}{\rightrightarrows} 0$

$(-1)^k a_k(x) \overset{E}{\rightrightarrows}$ ___

◇ Следует из признака Дирихле:

1) $\sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k \leq 1$

2) $a_n(x)$ - монотонна

3) $a_n(x) \overset{E}{\rightrightarrows} 0$

⊠

→ Равномерная сходимость положительных рядов

Рассмотрим ряды полож. ф. $\sum u_n(x)$, $x \in E$, $u_n(x) \geqslant 0$

$\Rightarrow$ **Теорема (Дини)**

Если члены ряда $\sum u_n(x)$ непрерывны и положительны на $[a,b]$ и если его сумма $S(x)$ непрерывна $\in [a;b]$, то ряд $\sum u_n(x) \xrightarrow{[a,b]} S(x)$

$\diamond$ Рассмотрим остатки ряда $\sum u_n(x)$, т.е. $r_n(x)$. Эти ф. обладают след. свойствами:

1) $r_n(x)$ непрерывна для $\forall n$, т.к. $r_n(x) = S(x) - S_n(x)$

непрерывна; непрерывна как сумма конечного числа непрерывных ф.

2) $r_1(x) \geq r_2(x) \geq r_3(x) \geq \dots$ для $\forall$ фиксированного $x \in [a,b]$

монотонность последов. остатков $\Rightarrow$ из полож. членов ряда.

3) $r_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, при $\forall x \in [a,b]$

по свойству остатков любого ряда сходящегося ф.

Перейдем к доказательству теорема методом от противного: $\sum u_k(x)$ сходится неравномерно.

$\exists \varepsilon_0 > 0$, $\forall n$, $\exists x_n \in [a,b]$, $r_n(x) > \varepsilon_0$

последовательность (x_n) ограничена, т.к. все $x_n \in [a,b]$

На основании принц. выбора из (x_n) можно выбрать (x_{n_k}), $x_{n_k} \to x_0 \in [a,b]$, $r_{n_k}(x_{n_k}) > \varepsilon_0$

Возьмем произвольное натур. m, $\exists n_k > m$

из свойства 2 об остатках $\Rightarrow$ что $r_m(x_{n_k}) \geq r_{n_k}(x_{n_k}) > \varepsilon_0$

$n_k \to \infty$, тогда в силу непрерывности остатков по свойству 1 остатков: $r_m(x_{n_k}) \to r_m(x_0) \geq \varepsilon_0$

В качестве m можно взять любое натур. число и тогда получается, что в $r_m(x_0) \geq \varepsilon_0$, $\forall m$

Противоречие по свойству 3 об остатках;

$r_m(x_0) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$

Значит, предположение неверно и ряд $\sum u_k(x)$ — сходится равномерно $\sum u_k(x) \xrightarrow{[a,b]}$

$\boxtimes$

$\Rightarrow$ **Теорема: (т. Дини для последовательности)**

Если члены последов. (f_n) - непрерывны на $[a, b]$ и при каждом fix $x \in [a, b]$ образуют монотонную последовательность, а $f(x)$ - непрерывна на $[a, b]$ $\Rightarrow$

$$f_n \xrightarrow{[a,b]} f(x)$$

Пр: $f_n(x) = x^n$, $x \in [0; 1]$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1) \\ 1, & x = 1 \end{cases} \text{ - разрывна}$$

т.к. $f_n(x)$ - непрерывна на $[0; 1] \Rightarrow f_n(x) \not\rightrightarrows f(x)$

Непрерывность суммы ряда

Пр: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (x^n - x^{n+1})$, $x \in [-1; 1]$

непрерывны

$S_n(x) = (1-x) + (x - x^2) + \ldots + (x^n - x^{n+1}) = 1 - x^{n+1} \rightarrow$

разрывна

$$\rightarrow S_n = \begin{cases} 1, & x \in (-1, 1) \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ **Теорема: (Стокса - Зейделя)**

Если члены ряда $\sum u_k(x)$ непрерывны на множ. E и на этом множестве ряд сходится равномерно, то его сумма непрерывна на множ. E

$\Diamond$ $S(x) = \sum u_k(x)$. Возьмем произвольное $x_0 \in E$ и покажем, что $S(x)$ непрерывна в x_0

Зададим $\varepsilon > 0$, ф. $S(x)$ представим в виде:

$S(x) = S_n + r_n$

$$|S(x) - S(x_0)| = |S_n(x) + r_n(x) - S_n(x_0) - r_n(x_0)| \leq$$
$$\leq |S_n(x) - S_n(x_0)| + |r_n(x) - r_n(x_0)| \leq$$
$$\leq |S_n(x) - S_n(x_0)| + |r_n(x) + r_n(x_0)|$$

Поскольку $\sum u_k \xrightarrow{E}$, то по определению $\forall \varepsilon > 0$, в том числе и для нашего ε, то $\exists \nu(\varepsilon)$, $\forall n \geq \nu(\varepsilon)$, $\forall x \in E$ будет выполнено $|r_n(x)| \leq \varepsilon$ и $|r_n(x_0)| \leq \varepsilon$