Д/З №12: на 14.10.2020

№1 Представить ф. $f(x)$ рядом по степеням x

$f(x) = \arcsin x$, ст. x. $\quad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$\left[(1+t)^m = 1 + mt + \frac{m(m-1)}{2!}t^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n)}{n!}, \; t \in (-1;1) \right.$$

$[m = -\frac{1}{2},\ t = -x^2] \Rightarrow$

$$= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{(-\frac{1}{2})\cdot(-\frac{3}{2})}{2!}x^4 + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\cdot(-\frac{5}{2})}{3!}x^6 +$$

$$+ \dots = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}\cdot x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}\cdot x^6 + \dots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}(2n-1)!!}{2^n \cdot n!}$$

$$f(x) = \int f'(x) = \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n\cdot n!}\cdot x^{2n} \right) dx =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int \frac{(2n-1)!!}{2^n\cdot n!}\cdot x^{2n}\, dx \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n\cdot n!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}$$

$-1 < t < 1$; $\quad -1 < -x^2 < 1 \Rightarrow x \in (-1;1)$

Ответ: ↑

№2 представить ф. $f(x)$ рядом по степеням x

$$f(x) = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x, \text{ ст. } x$$

Рассмотрим слагаемые ф. отдельно

$$1)\ f_1^*(x) = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{1}{2}\cdot\underbrace{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}_{f_2(x)} =$$

Д/З №12: на 14.10.2020 ~~1~~ ~~2~~ ~~3~~ ~~4~~ ~~5~~

№1 Представить ф. $f(x)$ рядом по степеням x

$f(x) = \arcsin x$, ст. x. $\quad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$\left[(1+t)^m = 1 + mt + \frac{m(m-1)}{2!} t^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} \right.$$
$$t \in (-1; 1)$$

$$[m = -\tfrac{1}{2},\ t = -x^2] \Rightarrow$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{(-\frac{1}{2})\cdot(-\frac{3}{2})}{2!} x^4 + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\cdot(-\frac{5}{2})}{3!} \cdot x^6 +$$
$$+ \dots = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!} \cdot x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!} \cdot x^6 + \dots =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}(2n-1)!!}{2^n \cdot n!}$$

$$f(x) = \int f'(x) = \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n!} \cdot x^{2n} \right) dx =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int \frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n!} \cdot x^{2n} dx \right) = \underline{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n!} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}}$$

$$-1 < t < 1 ; \quad -1 < -x^2 < 1 \Rightarrow \underline{x \in (-1; 1)}$$

Ответ: ↑

№2 представить ф. $f(x)$ рядом по степеням x

$$f(x) = \frac{1}{4} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x \text{ , ст. } x$$

Рассмотрим слагаемые ф отдельно.

$$1)\ f_1^*(x) = \frac{1}{4} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}_{f^*(x)} =$$

$\cancel{f_1'(x) = \left(\frac{1}{2}\ln(\right.}$

$$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{1}{2}\ln(1+x) - \frac{1}{2}\ln(1-x)$$

$$f_1'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{1+x} + \frac{1}{2}\frac{1}{1-x} = \frac{1}{2}\frac{1+x+1-x}{1-x^2} = \frac{1}{1-x^2} =$$

$$\left[\frac{1}{1-t} = \sum t^n,\ t \in (-1;1)\right]$$

$$[\text{ВНС}\quad t = x^2 : \quad x \in (-1;1)]$$

$$= \frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$$

$$f_1(x) = \int f_1'(x) = \int\left(\sum x^{2n}\right)dx = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int x^{2n}\right)dx =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in (-1;1)$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

2) $f_2(x) = \operatorname{arctg} x$

$$f_2'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \quad (-1<x<1)$$

$$f_2(x) = \int f_2'(x) = \int\left(\sum (-1)^n x^{2n}\right)dx = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int (-1)^n x^{2n}\right)dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot x^{2n+1}, \quad x \in (-1,1)$$

3) $f(x) = \frac{1}{2}f_1(x) + \frac{1}{2}f_2(x) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot x^{2n+1}\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\cancel{x}\frac{1}{2n+1} + \frac{(-1)^n}{2n+1}\right) \cdot x^{2n+1} =$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+(-1)^n)}{2^n(2n+1)} \cdot x^{2n+1}, \quad x \in (-1;1)$$

Ответ:

№3 Вычислить сумму ряда

$$f(x)=\frac{x}{1\cdot 2}+\frac{x^2}{2\cdot 3}+\frac{x^3}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{x^n}{n(n+1)}+\ldots$$

Найдем $f'(x)$:

$$f'(x)=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}\cdot x+\frac{1}{4}x^2+\ldots+\frac{1}{n+1}x^{n-1}+\ldots=$$ $x\neq 0$ (*)

[для ln разложения не хватает $\cdot x^2$] $\Rightarrow$ [домножим и разделим на x^2]

$$=\frac{1}{x^2}\cdot\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4+\ldots+\frac{1}{n+1}x^{n+1}+\ldots\right)=$$

= [до ln разложения следует добавить слагаемое x].

$$=-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\Big(\underbrace{x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\ldots+\frac{1}{n+1}x^{n+1}+\ldots}_{-\ln(1-x)}\Big)=$$

$$=-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\cdot(-\ln(1-x))=$$

$=\cancel{\frac{1}{x^2}(1+\ln(1-x))}$; $\begin{cases} x\neq 0 \ (*) \\ |x|<1 \end{cases}$

по частям: $\int u\,dv=uv-\int v\,du$

$$f(x)=\int f'(x)=-\int\frac{1}{x}dx-\int\frac{1}{x^2}\cdot\ln(1-x)=$$ $v=-\frac{1}{x}$, $dv=\frac{1}{x^2}dx$

$$=\overset{\ln x}{\cancel{\frac{1}{x}}}+\ln\frac{(1-x)1}{x}-\int\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1-x}dx=\overset{\ln x}{\cancel{\frac{1}{x}}}+\ln(1-x)\cdot\frac{1}{x}-$$

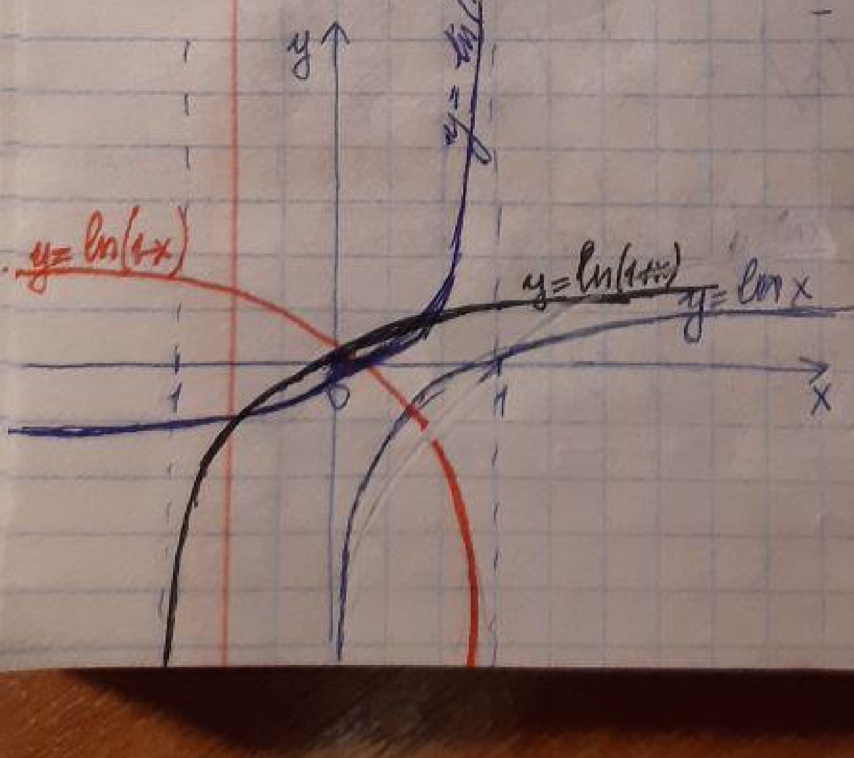
на простейшие

$$-\int\frac{1}{x}dx-\int\frac{1}{1-x}dx=\overset{\ln x}{\cancel{\frac{1}{x}}}+\ln(1-x)\frac{1}{x}-$$

$$-\ln x-\ln(1-x)=$$

$$\overset{\ln x}{\cancel{\frac{1}{x}}}-\ln x+\ln(1-x)\left(\frac{1}{x}-1\right)+C$$

Ответ: $x\in[-1,0)\cup(0,1)$



№4 Вычислить сумму ряда:

$$x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + n\cdot x^n + \ldots = ?$$

$$f(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + nx^n + \ldots$$

Возьмем интеграл от $f(x)$:

$$\int f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{4}x^4 + \ldots + \frac{n}{n+1}x^{n+1} + \ldots =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(1 - \frac{1}{3}\right)x^3 + \left(1 - \frac{1}{4}\right)x^4 + \ldots + \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)x^{n+1} + \ldots$$

$$= \underbrace{\left(x^2 + x^3 + x^4 + \ldots + x^{n+1} + \ldots\right)}_{\text{геом. ряд}} - \underbrace{\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \ldots + \frac{1}{n+1}x^{n+1} + \ldots\right)}_{\text{разложение логарифма, не хватает } x}$$

$$= [\text{добавляем } x \text{ и убираем}] = \underbrace{\left(x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots + x^{n+1} + \ldots\right)}_{\text{геом. ряд: } b_1 = x,\ q = x,\ b_1/1-q} -$$

$$- \underbrace{\left(x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \ldots + \frac{1}{n+1}x^{n+1} + \ldots\right)}_{\text{разложение логарифма (без чередования знаков)}} = [-\ln(1-x)]$$

$$= \frac{x}{1-x} + \ln(1-x), \quad x \in (-1;1)$$

$$f(x) = \left(\int f(x)\right)' = \left(\frac{x}{1-x} + \ln(1-x)\right)' = \frac{1-x+x}{(1-x)^2} + \frac{-1}{1-x} =$$

$$= \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{1-x} = \frac{1-1+x}{(1-x)^2} = \boxed{\frac{x}{(1-x)^2}}, \quad x \in (-1;1)$$

Ответ: ↑

№5 Вычислить сумму ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(n+1)}{n!} = ?$$