$D^2x - 3Dx + 2x = \sin t$

№2

$D^2x - 3Dx + 2x = \sin t$

Метод Коши:

Найдем общее решение

$\nu^2 - 3\nu + 2 = 0$, $\nu_{1,2} = 1, 2$

$x_{oo} = c_1 e^t + c_2 e^{2t}$

$\cancel{x'_{oo} = c_1 e^t + 2c_2 e^{2t}}$

Построим базис Коши:

$\varphi_0(t) = Ae^t + Be^{2t}$

$$\begin{cases} D^0\varphi_0(0) = 1 \\ D^1\varphi_0(0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} Ae^t + Be^{2t} = 1 \\ Ae^t + 2Be^{2t} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} A + B = 1 \\ A + 2B = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B = -1 \\ A = 2 \end{cases}$$

$\varphi_1(t) = Ce^t + De^{2t}$

$$\begin{cases} D^0\varphi_1(0) = 0 \\ D^1\varphi_1(0) = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} C + D = 0 \\ C + 2D = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} D = 1 \\ C = -1 \end{cases}$$

базис Коши: $\varphi_0(t) = 2e^t - e^{2t}$

$\Rightarrow \varphi_1(t) = -e^t + e^{2t}$

функцией Коши, т.к. последнее в базисе

т.к. ну

$x_{чн} = \int_0^t$

Т.к. нужно найти частное решение:

$$x_{чн} = \int_0^t \psi_{n-1}(t-\tau)\, f(\tau)\, d\tau = \int_0^t \left(1 - e^{(t-\tau)} + e^{2(t-\tau)}\right) \cdot \sin\tau\, d\tau$$

последняя базисная ф-ия

Метод Лагранжа ★

$\psi_1 \qquad \psi_2$

Общее решение: $x_{оо} = C_1 e^{t} + C_2 e^{2t}$

$x_{чн} = C_1(t)\cos t + C_2(t)\sin t$

$$\begin{cases} C_1(t)'\psi_1 + C_2(t)'\psi_2 = 0 \\ C_1(t)'\psi_1' + C_2(t)'\psi_2' = \sin t \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1'(t)e^{t} + C_2'(t)e^{2t} = 0 \\ C_1'(t)e^{t} + 2C_2'(t)e^{2t} = \sin t \end{cases}$$

$C_2'(t)e^{2t} = \sin t$

$C_2'(t) = \dfrac{\sin t}{e^{2t}}$; $\Rightarrow C_1'(t) = -\dfrac{\sin t}{e^{2t}} \cdot \dfrac{e^{2t}}{e^{t}} = -\dfrac{\sin t}{e^{t}}$

$C_2(t) = \int \dfrac{\sin t}{e^{2t}}\, dt = \left[\begin{matrix}\text{интегрирование} \\ \text{по частям}\end{matrix}\right] = -\dfrac{1}{5}e^{-2t}(2\sin t + \cos t)$

$C_1(t) = \int -\dfrac{\sin t}{e^{t}}\, dt = \dfrac{1}{2}e^{-t}(\sin t + \cos t)$

$x_{чн} = e^{t} \cdot \dfrac{1}{2}e^{-t}(\sin t + \cos t) + e^{2t} \cdot \left(-\dfrac{1}{5}e^{-2t}(2\sin t + \cos t)\right) =$

$= \dfrac{1}{2}(\sin t + \cos t) - \dfrac{1}{5}(2\sin t + \cos t)$

$$D^2x - 3Dx + 2x = \sin t \quad : \quad f(t) = (R(t)\cos\beta t + H(t)\sin\beta t)\, e^{\alpha t}$$

$$x_{част.} = t^r (M(t)\cos\beta t + N(t)\sin\beta t)\, e^{\alpha t}$$

γ - контр. $\tau = i$ $\quad$ $\deg R, H = 0 \Rightarrow \deg M, N = 0 \Rightarrow M(t) = A,\ N(t) = B$

$$\gamma^2 - 3\gamma + 2 = 0$$

$$\gamma_1 = 1, \quad \gamma_2 = 2 \Rightarrow r = 0 \Rightarrow t^0 = 1$$

$$x_{ч} = A\cos t + B\sin t$$

$$Dx_{ч} = -A\sin t + B\cos t$$

$$D^2 x_{ч} = -A\cos t - B\sin t$$

$$-A\cos t - B\sin t + 3A\sin t - 3B\cos t + 2A\cos t + 2B\sin t = \sin t \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -A - 3B + 2A = 0 \\ -B + 3A + 2B = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} A - 3B = 0 \\ 3A + B = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} A = 3B \\ 9B + B = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} A = \frac{3}{10} \\ B = \frac{1}{10} \end{cases}$$

Ответ: $x_{ч} = \frac{3}{10}\cos t + \frac{1}{10}\sin t$