РАЗДЕЛ 1: Числовые ряды

Тема: Сходимость и расходимость рядов

Последовательность (S_n), которая задается
$S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, ..., $S_n = a_1 + ... + a_n$

Последовательность (S_n) запишем в виде бесконечной суммы: $\sum a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – ряд.

Если $a_1, ..., a_n$ – числа, то это числовая послед.
Сами числа $a_1, ..., a_n$ – члены ряда

Величина $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + ... + a_n$ – частичная сумма ряда.

$a_1 = S_1$
$a_2 = S_2 - S_1$; $a_3 = S_3 - S_2$, $a_n = S_n - S_{n-1}$
$S_0 = 0$, $n \in \mathbb{N}$

Опр: Если последовательность частичных сумм S_n имеет конечный предел, то ряд наз. сходящимся

Если предел не сущ. или бесконечен, то ряд наз. расходящимся

Опр: В случае сходимости ряда число $S = \lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$ назыв. суммой ряда $\sum a_n = S$

$\sum a_n = +\infty$ – ряд расходится

Сходимость ряда – сходимость последовательности его частных сумм, сумма ряда – это предел последовательности его частных сумм

Пр: рассмотрим ряд $\sum (-1)^{k-1}$

$k = 1 ; \ \Sigma = 1$

$k = 2 ; \ \Sigma = -1 \qquad 1 ; -1 ; 1 ; -1$

последовательность частичных сумм.

$S_n = 1, 0, 1, 0, \dots \Rightarrow$ ряд расходится

↳ **Теорема:** (необходимое условие сходимости ряда)

Если ряд $\sum a_k$ сходится, то обязательно $a_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

◇ $\sum a_k$ - сходится $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S \Rightarrow$ ← частичных сум

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S$

т.к. $a_n = S_n - S_{n-1}$, то если перейти к пределу:

$a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} S - S = 0$ ☒

Из теорема вытекает: что если $a_n \not\to 0$, то $\sum a_n$ - расходится

Критерий Коши сходимости ряда

(для всех рядов)

↳ **Теорема:**

Для того, чтобы ряд $\sum a_k$ - сходится $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists$ большой номер ν_ε, $\forall n \geq \nu_\varepsilon$ и еще больших номеров $m > n$ выполняется условие:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| \leq \varepsilon \qquad |a_n + a_{n+1} + \dots + a_{n+m}| < \varepsilon$$

◇ сходимость ряда $\Leftrightarrow$ сходимость последовательности его частичных сумм. А для этой последовательности (S_n) есть критерий Коши сходимости последовательности.

(S_n) сходится $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \ \exists \nu_\varepsilon, \ \forall n > \nu_\varepsilon, \ \forall m > n:$

$|S_n - S_m| < \varepsilon$, т.е.

$$|S_m - S_n| = \left| \sum_{k=1}^{m} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k \right| = |a_{n+1} + \dots + a_m| =$$

$$= \left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| \leq \varepsilon$$ ☒

Для сходимости ряда $\sum a_k \Leftrightarrow$ все достаточно далекие отрезки этого ряда могли быть сделаны сколь угодно малыми по модулю.

Опр: ряд $\sum\limits_{k=m+1}^{\infty} a_k = \sum\limits_{k+1}^{\infty} a_{m+k} = a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots = r_m$ назыв. остатком или остатком m-тым.

$$S = \underbrace{a_1 + a_2 + \ldots + a_m}_{S_m} + \underbrace{a_{m+1} + \ldots +}_{r_m\text{-тым}}$$

$\Rightarrow$ **Теорема** (критерий сходимости ряда через остаток)

Для сходимости ряда необходимо, чтобы сходился любой его остаток, и достаточно, чтобы по крайней мере один из его остатков сходился.

◆ $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$ (1) | ряд (2) - остаток ряда (1)

$\sum\limits_{k=m+1}^{\infty} a_k$ (2)

Запишем частичную сумму ряда (1) в виде:

$$S_n = S_m + \underbrace{(a_{m+1} + \ldots + a_n)}_{\tilde{S}_{n-m}}$$

$\tilde{S}_{n-m}$ - частичная сумма ряда (2)

Пусть ряд (1) сходится, тогда частичная сумма $S = S_m + \lim\limits_{n\to\infty} \tilde{S}_{n-m}$, получаем, что $\exists$ предел частичных сумм ряда (2) $\Rightarrow$ по определению означает сходимость ряда (2) ☒

- если ряд сходится, то сходится и любой его остаток
- если сходится какой-либо остаток ряда, то сходится и ряд.
- если расходится какой-либо остаток ряда, то расходится и ряд.

⇒ **Следствие 1:**

Если ряд $\sum a_k$ - сходится, то последовательность его остатка = бесконечно малая послед. (БМП)

◇ если ряд сходится, то сумму представим в виде: $S = S_n + r_n \Rightarrow r_n = S - S_n$

переходя к пределу: $S - S_{n \to \infty} = 0$

☒

⇒ **Следствие 2:**

Сходимость или расходимость ряда не изменится, если изменить, дописать или отбросить конечное число членов ряда

◇ Начиная с некоторого номера, остатки измененного ряда будут совпадать с остатками исходного ряда.

☒

Положительные ряды:

Опр: ряд $\sum a_k, a_k \geq 0$ назыв. положит. рядом (или рядом с положительными членами)

Опр: если $a_k > 0$, то $\sum a_k$ - строгополож. ряд

⇒ **Теорема:** (критерий сходимости полож. ряда)

Для сходимости полож. ряда ⇔ чтобы последовательность его частных сумм была ограничена

◇ для положит. рядов: $S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq S_n$ - возрастающая послед.

А для ее сходимости ⇔ чтобы она была ограничена сверху.

☒

Эталонные ряды

① **Геометрический ряд**: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^k = 1+q+q^2+\ldots+q^n$

Частичная сумма: $S_n = 1+q+q^2+\ldots+q^n =$

$$= \frac{(1+q+\ldots+q^n)(1-q)}{(1-q)} = \frac{1+q+\ldots+q^n-q-q^2-\ldots-q^{n+1}}{1-q} =$$

$$= \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

а) $0<q<1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-q}$: ряд сходится, т.к. $\exists$ конечный предел

б) $q \geq 1$, то ряд расходится, т.к. не выполняется необходимое условие сходимости ряда

② **Гармонический ряд**: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$

$\sum \frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} \text{сх}, & \alpha>1 \\ \text{расх}, & \alpha\leq 1 \end{cases}$

$a_n = \frac{1}{n} \to 0$

◇ $1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+(8\text{ слаг.}) \geq$

$\geq 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\ldots = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots \to$

$\to \infty \Rightarrow$

гармонический ряд расходится. ☒

$\frac{1}{k^\alpha}, \underset{k\to\infty}{0<\alpha\leq 1} \Rightarrow \frac{1}{k^\alpha}$ - сходится

Признаки сравнения рядов

Рассмотрим 2 ряда: $\sum a_k\ (1)$, $\sum b_k\ (2)$

1°. Признак сравнения

Пусть $a_k \leq c\cdot b_k$, при всех k, где $c=\text{const}>0$, то

а) из сходимости ряда (2) $\Rightarrow$ сход. ряда (1)

б) из расходимости ряда (1) $\Rightarrow$ расход. ряда (2)

◇ Пусть ряд (2) сходится, тогда S_n^A ← для ряда A $=$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_k \leq \sum_{k=1}^{n} c\cdot b_k = c\sum_{k=1}^{n} b_k = c\cdot S_n^B \leq c\cdot S^B$$

$S_n^A \leq c\cdot S_n^B$

Если ряд (1) расходится, предположив от противного, что ряд (2) сходится, из 1-ой части теоремы получим, что ряд (1) должен сходиться => противоречие ☒

⇒ Замечание:

Признак сравнения остается в силе, если условие $a_k \le c \cdot b_k$ выполняется не для всех k, а только для любого $k \ge n$. Это следует из критерия сходимости ряда через остаток.

Пр: $\sum \frac{\sin^2 n\alpha}{e^n}$; $a_n = \frac{\sin^2 n\alpha}{e^n} \le \frac{1}{e^n}$ — сходится, т.к. $a_n \le \frac{1}{e^n}$, а сумма $\sum \frac{\sin^2 n\alpha}{e^n}$ сходится как геом. сумма.

Пр: $\sum \frac{2+(-1)^n}{n}$

2°. Признак 2: предельный признак сравнения

Если предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell$ ($a_n \ge 0$, $b > 0$), тогда

а) $0 < \ell < +\infty$, то ряд (1) и (2) ведут себя одинаково: или оба сходятся, или оба расходятся.

б) $\ell = 0$, то из сходимости (2) => сход. (1)
из расход. (1) => расход. (2)

в) $\ell = +\infty$, то из сходим. (1) => сход. (2)
расход. (2) => расход. (1)

◇

1 случай $0 < \ell < +\infty$:

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \nu_\varepsilon, \forall n \ge \nu_\varepsilon$:

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \ell\right| \le \varepsilon \Leftrightarrow \ell - \varepsilon \le \frac{a_n}{b_n} \le \ell + \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$b_n(\ell - \varepsilon) \le a_n \le b_n(\ell + \varepsilon)$$

т.к. $\ell > 0$, то выбирая ε так, чтобы ε: $\ell - \varepsilon > 0$. Воспользуемся 1-ым признаком сравнения => ☒

2 случай: $l = 0 \Rightarrow a_n \le b_n \cdot \varepsilon$

3 случай: $l = +\infty \Rightarrow \forall \varepsilon : \left|\frac{a_n}{b_n}\right| \geq \varepsilon \Rightarrow a_n \geq \varepsilon \cdot b_n$

☒

⇒ Следствие:
Если $a_n \sim b_n$ $\left[\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1\right]$, то ряды a_n и b_n либо оба сходятся, либо оба расходятся.

3° Признак: признак сравнения отношений

Если $\frac{a_{k+1}}{a_k} \le \frac{b_{k+1}}{b_k}$, то для $\forall k \in N, a_n, b_n > 0$, то из сходимости ряда (2) → сходим. ряда (1)
расходимости ряда (1) → расход. ряда (2)

◇ $\frac{a_2}{a_1} \le \frac{b_2}{b_1}$; $\frac{a_3}{a_2} \le \frac{b_3}{b_2}$, …, $\frac{a_n}{a_{n-1}} \le \frac{b_n}{b_{n-1}}$

Перемножим эти неравенства:

$$\frac{a_n}{a_1} \le \frac{b_n}{b_1} \Rightarrow a_n \le \frac{a_1}{b_1} b_n$$

по признаку 1 сравнения рядов ⇒ ☒

Раздел: Признаки сходимости рядов

ТЕМА: Признак Д'Аламбера

⇒ Теорема:
Пусть ряд $\sum a_k$ строго полож. $(a_k > 0)$, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = d$

1) Если $d < 1$, то $\sum a_n$ – сходится
2) Если $d > 1$, то $\sum a_n$ – расходится
в) Если $d = 1$, то признак ответа не даст.

◇ а) возьмем произвольное число q: $d < q < 1$, тогда для достаточно больших n имеет место неравенство:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < q = \frac{q^{n+1}}{q^n}$$

Получаем неравенство из признака сравнения отношений (3°) ☒

б) $d>1$: для достаточно больших $a_{n+1} > a_n \Rightarrow$ $(a_n)\uparrow$ и $a_n \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$
ряд $\sum a_n$ расход. т.к. не выполняется необходимое условие сходимости ряда. ☒

Замечание

Если $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, то о сходимости и о расход. по этому признаку сказать определенно нельзя.

Пр: $\sum \frac{1}{n}$ - расход; $\sum \frac{1}{n^2}$ - сходится, но в обоих случаях: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$

Признак Коши

Теорема:

Пусть $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = c$, Если

1) $c < 1$, ряд $\sum a_n$ - сходится
2) $c > 1$, ряд $\sum a_n$ - расходится

◇ 1) $c > 1$. Возьмем число q. $c < q < 1$
то для достаточно больших n: $a_n \leq q^n$
(возведем в степень n)
ряд из q^n - сходится (как геом прогрессия)
поэтому по признаку сравнения 1: a_n - сходится.

2) $c < 1$. Тогда $a_n \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$ и ряд $\sum a_n$ - расходится, т.к. не выполнено необход. условие сходимости ряда. ☒

Замечание 1

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$, то нужно доп. исследования

↝ Замечание 2:

Если ряд исследуется по признаку Д'Аламбера, то его можно исследовать по признаку Коши, причем получим, что $d=c$

Обратное не верно. (Демидович 2593)

↝ Замечание 3:

При работе с признаком Коши, часто используется формула Стирлинга:

$$n! \sim \underbrace{\sqrt{2\pi n}}_{\to 1}\left(\frac{n}{e}\right)^n, \text{ откуда } \sqrt[n]{n!} \sim \frac{n}{e}$$

Признак Раабе

Если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=r$ и $a_n>0$, то при

1) $r>1$, ряд $\sum a_n$ - сходится,
2) $r<1$, ряд $\sum a_n$ - расходится;
3) $r=1$, то исследуем по Гауссу.

Признак Гаусса

Если $a_n>0$ и $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ представимо в виде

$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\varepsilon}}$, где $\lambda, \mu, \varepsilon$ - постоянные, θ_n - огран. последов., то

1) $\lambda>1 \to$ ряд сходится $\sum a_n$
2) $\lambda<1 \to$ ряд $\sum a_n$ - расходится.
3) $\lambda=1$: а) $\mu>1$, $\sum a_n$ - сходится.
   б) $\mu\leq 1$, $\sum a_n$ - расходится

Пр: исследовать на сходимость:

$$\sum\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p \begin{matrix}\leftarrow \text{нечетные}\\ \leftarrow \text{четные}\end{matrix}$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{(2n+2)!!}{(2n+1)!!}\right)^p = \left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^p =$$

$$= \left[\begin{matrix}\text{выделим}\\ \text{целую часть}\end{matrix}\right] = \left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^p$$

Признаки Д'Аламбера и Коши не работают

Признак Раабе:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^p-1\right) =$$

$$= [(1+\underset{\text{нечто маленькое}}{\alpha})^p = 1+p\alpha] = \lim_{n\to\infty} n\left(1+\overset{\text{нечто маленькое}}{\frac{p}{2n+1}}-1\right) = \frac{p}{2} \Rightarrow$$

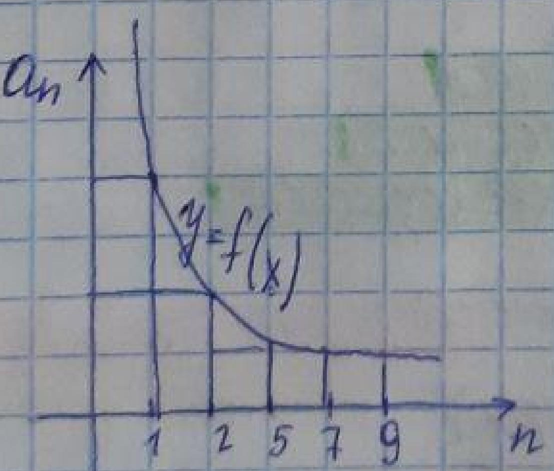
$$\begin{cases} p>2 \text{ – ряд сходится} \\ p<2 \text{ – ряд расходится} \\ \text{если } p=2\text{, то смотрим пр. Гаусса:}\end{cases}$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^2 = 1+\frac{2}{2n+1}+\frac{1}{(2n+1)^2} =$$

$$= 1+\frac{1}{n}+\frac{-n-1}{n(2n+1)^2} = 1+\frac{1}{n}+\frac{-1-\frac{1}{n}}{(2n+1)^2} =$$

$$= 1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\underbrace{\left(\frac{-1-\frac{1}{n}}{(2-\frac{1}{n})^2}\right)}_{\theta_n \text{ – ограничен. величина}} = 1+\frac{1}{n}+\frac{\theta_n}{n^2} \text{ – ряд сход.}$$

Интегральный критерий сходимости ряда



$$S-a_1 < \int_1^{+\infty} f(x)\,dx < S$$

Рассмотрим Σa_k (1)

Опр: ф. $f(x)$ назыв. **производящей ф.** для ряда (1), если для $\forall k = 1, \dots,\ f(x) = a_k$

⇄ Теорема (Коши-Маклорена):

Если производящей ф. $f: [1; +\infty) \to R$ (и отображается в множ. значений) монотонно убывает, то ряд (1) сходится $\Leftrightarrow$ когда $\exists$ конечный

$$\lim_{A\to+\infty} \int_1^A f(x)\,dx = \int_1^{+\infty} f(x)\,dx$$

◇ Если f убывает, то $\forall k \in N$ $\forall x \in [k; k+1]$;

$$a_{k+1} = f(k+1) \leq f(x) \leq f(k) = \int_k^{a+1} a_{k+1}\,dx \leq \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leq \int_k^{k+1} a_k\,dx$$

$$a_{k+1} \leq \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leq a_k$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{k+1} \leq \int_1^{n+1} f(x)\,dx \leq \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Запишем это неравенство в виде:

$$S_{n+1} - a_1 \leq \int_1^{n+1} f(x)\,dx \leq S_n \quad (2)$$

√ именно это неравенство (2) будем использовать в доказательстве теоремы.

⇒ - необходимость:

Пусть $\sum a_k = \sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ - сход.

От противного предположим, что $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ - расход.

Это означает (т.к. $f(x) > 0$), что

$\lim_{A\to+\infty} \int_1^A f(x)\,dx = +\infty$, т.е. $\Rightarrow \int_1^{n+1} f(x)\,dx \to +\infty$ (на основании критерия Гейне)

натуральные значения

В силу неравенства (2) $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$ (что противоречит условию теоремы) $\Rightarrow \int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ - сходится

⇐ достаточность:

если $\int$ сходится, то ряд сходится. Докажем

$$\lim_{A\to+\infty} \int_1^A f(x)\,dx = C < +\infty$$

т.к. $f(x) > 0$, то $\int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx \le C \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Из неравенства (2) => $S_{n+1} - a \le C \quad \forall n \in \mathbb{N}$ =>
по критерию сходимости положительных рядов:
$\sum a_n$ - сходится (т.к. S_n - ограничена и возрастает) ☒

=> Замечание:

Для вычисления интеграла условие $x \geq 1$ можно заменить на $x \geq a > 1$ и вычислить $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$, в силу сходимости ряда через остаток.

Обобщенный гармонический ряд

Это ряд вида $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$; $\alpha \in \mathbb{R}$

На основании интегрального признака, сходимость этого ряда равносильно сходимости интегралу $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$

Вычислим: $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = [\alpha = -1] = \left.\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right|_1^{+\infty} =$

$$\lim_{A \to +\infty} \left.\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right|_1^{A} = \lim_{A \to +\infty} \left(\frac{A^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{1}{-\alpha+1} \right)$$

сл. 1) $\alpha > 1$, предел конечен => ряд сходится
2) $\alpha < 1$, интеграл расходится => ряд расходится
3) $\alpha = 1$; $\sum \frac{1}{k}$ - гармонический ряд => ряд расход.

На ряду с геометрическим рядом, обобщенный гармонический ряд служит эталоном для сравнения с ним других рядов.

Степенной признак сравнения

⇒ **Теорема:**

Если $a_k \sim \frac{c}{k^\alpha}$, где $c>0$ – константа, то при

1) $\alpha > 1$, $\sum a_n$ – сходится
2) $\alpha < 1$, $\sum a_n$ – расходится

◇ следует из признака 2 сравнения рядов (предельный признак сравнения) ☒

Пр $\sum \frac{k}{\sqrt{k^3+1}}$; $a_k = \frac{k}{\sqrt{k^3+1}} \sim \frac{1}{k^{1/2}}$

т.к. $\frac{1}{2} < 1$, то по степенному признаку сравнени исходный ряд расходится ☒

Знакопеременные ряды

Ранее рассматривали положительные ряды $\sum a_n$, где $a_n \geqslant 0$

Нетрудно видеть, что это все можно перенести и на отрицательные ряды $\sum b_n$, $b_n \leqslant 0$, т.к.

$$\sum b_k = -\sum(-b_k) \; ; \quad (-b_k) \geqslant 0$$

Знакопостоянные ряды обладают свойством, что у них всегда есть сумма (конечная или бесконечная)

У знакопеременных рядов суммы может и не быть.

Пр: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \dots$

$S_1 = 1$, $S_3 = 0$; $S_6 = 1$; $S_{10} = 0$, …..

Опр: ряд $\sum b_n$ - назыв. знакочередующимся, если общий член $b_n = (-1)^n a_n$, где $a_n \geq 0$

Для знакочередующихся рядов имеет место
⇒ Теорема Лейбница (Признак Лейбница)

1) Если последовательность (a_n) монотонно убывает и стремится к 0 (стремится к верху), то знакочередующийся ряд $\sum (-1)^n a_n$ - сходится

2) Если S - сумма этого ряда, а S_n - частичная сумма, то $|S_n - S| \leq a_{n+1}$, т.е. остаток ряда, начиная с $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k a_k\right| \leq a_{n+1}$

◆ 1) Рассмотр

суми ч

ами,

$(S_{2m} = (\underset{\geq 0}{a_1 - a_2})$

$S_{2m} \geq 0$

$S_{2m+2} = S_{2m} +$

$2m$

Таким образо

С другой стороны $S_{2m} = a_1 - (a_2$

$m-1) -$

$- \underset{\geq 0}{a_{2m}} \leq$

Таким обра

возрастает и огр

конечный предел $(\bar{S})$.

Признак Лейбница:

I вариант: Если члены знакочередующего ряда монотонно убывают по модулю, то ряд сходится.

II вариант:

1) ряд знакочередующийся
2) члены ряда убывают по модулю: $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$ (убывают монотонно)

III вариант:

1) $a_{n+1} < a_n$ для $\forall n$
2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Рассмотрим последовательность $S_{2m+1} =$
$= \underset{\geq 0}{(a_1 - a_2)} + \underset{\geq 0}{(a_3 - a_4)} + \ldots + \underset{\geq 0}{(a_{2m-1} - a_{2m})} + \underset{\geq 0}{a_{2m+1}} \geq 0$

$S_{2m+1} = S_{2m-1} - (a_{2m} - a_{2m+1}) \leq S_{2m-1}$

Последовательность (S_{2m+1}) убывает и ограничена снизу, поэтому имеет конечный предел $(S_{2m+1}) \to \underline{S}$

$$\underset{\underset{\underline{S}}{\downarrow}}{S_{2m+1}} - \underset{\underset{\bar{S}}{\downarrow}}{S_{2m}} = \underset{\underset{0}{\downarrow}}{a_{2m+1}}$$

следует, что $\underline{S} = \bar{S} = S$

как у чётных сумм с чётными номерами, так и с нечётными есть один и тот же предел

$(S_n) \to S \Rightarrow \sum (-1)^n a_n$ – сходится

2) Отметим, что из предыдущего вытекает

$$S_{2m} \le S \le S_{2m+1} \quad | -S_{2m} \quad | -S$$

$$S - S_{2m} \le S_{2m+1} - S_{2m} = a_{2m+1} \quad (1)$$

$$S_{2m+1} - S \le S_{2m+1} - S_{2m+2} = a_{2m+2} \quad (2)$$

Эти два неравенства можно объединить в одно.

$$|S - S_n| \le a_{n+1}$$ ☒

↯ Замечание:

Из доказательства следует, что остаток знакочередующего ряда не превосходит по модулю своего первого члена и совпадает с ним по знаку.

Пр. $\sum \frac{(-1)^k}{\ln k}$ – знакочеред. $\frac{1}{\ln k} \downarrow 0 \Rightarrow$

ряд сходится по признаку Лейбница

Признак Абеля

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k \beta_k = \alpha_1 \beta_1 + \ldots + \alpha_m \beta_m \quad ; \quad \alpha_k, \beta_k \in \mathbb{C}$$

$$B_k = \beta_1 + \ldots + \beta_k \Rightarrow \beta_k = B_k - B_{k-1}$$

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k \beta_k = \alpha_1 B_1 + \alpha_2 (B_2 - B_1) + \alpha_3 (B_3 - B_2) + \ldots + \alpha_m (B_m - B_{m-1}) =$$

$$= (\alpha_1 - \alpha_2) B_1 + (\alpha_2 - \alpha_3) B_2 + \ldots + (\alpha_{m-1} - \alpha_m) B_{m-1} + \alpha_m B_m$$

Таким получаем образом:

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k \beta_k = \sum_{k=1}^{m-1} (\alpha_k - \alpha_{k-1}) B_k + \alpha_m B_m \quad (*)$$

эта формула назыв. преобразованием Абеля

⇒ **Лемма**

Если $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ – монотонный набор действительных чисел и $|B_k| \le B$, $B_k \in C$, то справедливо

$$\left|\sum_{k=1}^{m} \alpha_k \beta_k\right| \le B(|\alpha_1| + 2|\alpha_m|)$$

Это неравенство назыв. оценкой Абеля

◇ $\left|\sum_{k=1}^{m} \alpha_k \beta_k\right| \overset{(*)}{\le} |\alpha_2 - \alpha_1| \cdot |B_1| + |\alpha_3 - \alpha_2| \cdot |B_2| + \dots + |\alpha_{m-1} - \alpha_m| \cdot |B_{m-1}| + |\alpha_m| \, |B_m| \le |\alpha_2 - \alpha_1| + \dots + |\alpha_{m-1} - \alpha_m| + |\alpha_m|) \cdot B$

В силу монотонности α_k все разности $(\alpha_k - \alpha_{k-1})$ имеют один и тот же знак

Поэтому $|\alpha_2 - \alpha_1| + |\alpha_3 - \alpha_2| + \dots + |\alpha_{m-1} - \alpha_m| \le |(\alpha_2 - \alpha_1) + \dots + (\alpha_{m-1} - \alpha_m)| = |\alpha_1 - \alpha_m| \le |\alpha_1| + |\alpha_m|$

Таким образом получим оценку Абеля ⊠

Признаки Абеля и Дирихле

Рассмотрим $\sum a_k b_k$

⇒ **Теорема: (признак Дирихле):**

1) Если все частные суммы $\sum b_k$ ограничены, т.е. ∃ такое C, что $\left|\sum_{k=1}^{N} b_k\right| \le C$, $C = const$, $\forall N$

2) последовательность a_n монотонно стремится к 0

тогда ряд сходится

◇ По условию имеем: $\left|\sum_{k=1}^{n} b_k\right| \le C$, значит для $\forall\, n, p \Rightarrow$

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p} b_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{n+p} b_k - \sum_{k=1}^{n} b_k\right| \le |\Sigma| + |\Sigma| \le C + C = 2C$$

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$, т.к. по условию $(a_n) \to 0$, $\exists \nu_c$, $\forall n \ge \nu_\varepsilon : |a_n| \le \varepsilon$

Применим оценку Абеля к такой сумме

$$\sum_{k=n}^{n+p} a_k b_k = \sum_{k=1}^{p+1} \underbrace{a_{n+k-1}}_{\alpha_k} \underbrace{b_{n+k-1}}_{\beta_k}$$

Считая, что $n \ge \nu_\varepsilon$, $p \in N$, получим

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p} a_k b_k\right| \le 2C(|a_n| + 2|a_{n+p}|) \le 2C(\varepsilon + 2\varepsilon) = 6C\cdot\varepsilon$$

По критерию Коши получаем, что $\Sigma a_n b_n$ сходится ☒

Замечание:

Признак Лейбница является частным случаем признака Дирихле $(a_n = (a_n)$; $b_k = (-1)^k)$

Теорема: (признак Абеля):

1) Если Σb_k сходится
2) последовательность (a_n) монотонна и ограничена

тогда $\Sigma a_k b_k$ – сходится

◇ Т.к. последовательность (a_n) – монотонна и ограничена, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

Тогда $a_n = a + \alpha_n$, где α_n –

$$\Sigma a_k b_k = \Sigma(a + \alpha_k) b_k = a \underset{\uparrow}{\Sigma b_k} + \underset{\uparrow}{\Sigma \alpha_k b_k}$$

сходится по условию теорем; сходится по признаку Дирихле. ☒

Пр: $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin\frac{k\pi}{4}}{\ln k} \cdot \frac{k-1}{k+1}$

$a_k = \frac{k-1}{k+1} \to 1$ (монотонна, ограничена)

$b_k = \frac{\sin\frac{k\pi}{4}}{\ln k}$, Σb_k – сходится по признаку Дирихле. ⇒

исходный ряд сходится по признаку Абеля

Абсолютная сходимость

ряд $\sum C_k$, $C_k \in R$ назыв. абсолютно сходящимся, если сходится ряд, составленный из модулей ($\sum |C_k|$ - сходится)

⇒ **Теорема:**

Если ряд сходится абсолютно, то он сходится (Если сходится ряд из модулей, то исходный тоже сходится)

◇ $\sum |C_k|$ - сходится, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \nu_\varepsilon$, $\forall n \geq \nu_\varepsilon$, $\forall p$ выполнено такое условие:

$$\sum_{k=n}^{n+p} |C_k| \leq \varepsilon$$

Для этих же самых n и p мы имеем такую оценку:

$$\left|\sum_{n=n}^{n+p} C_k\right| \leq \sum_{k=n}^{n+p} |C_k| \leq \varepsilon \Rightarrow \text{по критерию Коши}$$

$\sum C_k$ сходится ☒

Заметим, что обратное утверждение неверно

Например: $\sum \frac{(-1)^k}{k}$ - сходится по признаку Лейбница, а ряд из модулей $\sum \frac{1}{k}$ - расходится как гармонический

Если ряд сумма модулей $\sum |C_k|$ - расходится, а исходный ряд $\sum C_k$ - сходится, то $\sum C_k$ - условно сходящийся ряд (неабсолютно сходящийся)

Пр: $\sum \frac{(-1)^k}{k^\alpha}$ - $\begin{cases} \text{сходится абсолютно: } \alpha > 1 \\ \text{сходится условно: } 0 < \alpha \leq 1 \\ \text{расходится: } \alpha < 0 \end{cases}$

Пр $\sum \frac{\sin kx}{k^{\alpha}}$, $x \neq \pi m$ $\begin{cases} \text{сходится абсолютно}, \alpha > 1 \\ \text{сходится условно}, 0 < \alpha \leq 1 \\ \text{расходится}, \alpha \leq 0 \end{cases}$

Пр: $\sum \frac{\sin kx}{\sqrt{k}}$

Исходный ряд сходится по признаку Дирихле
Ряд из модулей: $\left| \frac{\sin kx}{\sqrt{k}} \right| \geq \frac{\sin^2 kx}{\sqrt{k}} = \underset{\nearrow}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} - \underset{\nearrow}{\frac{\cos 2kx}{2\sqrt{k}}}$

Σ расходится по степенному признаку

сходится по признаку Дирихле

Следовательно, ряд из модулей расходится. сам ряд сходится условно.

Структура абсолютно и условно сходящихся рядов с действительными членами

Рассмотрим Σa_k с действительными слагаемыми. Для каждого a_k возьмем

$b_k = \frac{a_k + |a_k|}{2}$, $c_k = \frac{|a_k| - a_k}{2}$

Заметим, что все b_k и $c_x \geq 0$

$b_k = \begin{cases} 0, & a_k \leq 0 \\ a_k, & a_k \geq 0 \end{cases}$, $c_k = \begin{cases} 0, & a_k \geq 0 \\ a_k, & a_k \leq 0 \end{cases}$

Оказывается, что $b_k + c_k = |a_k|$, $b_n - c_k = a_k$

Изучим Σb_k, Σc_k

Если числовая последовательность имеет конечный предел, то она ограничена

Монотонная последователь- последовательность, ~~которая~~ элементы которой с увеличением номера не убывают, или, наоборот, не возрастают

Критерий абсолютной сходимости

↯ **Теорема:** (кр. абсолютной сходимости)

Для абсолютной сходимости $\Sigma a_n \Leftrightarrow$ чтобы сходились $\Sigma b_k, \Sigma c_k$. Причем в случае сходимости, $\Sigma a_k = \Sigma b_k - \Sigma c_k$

◇ Для указанных рядов $a_k = b_k - c_k$, $|a_n| = b_k + c_k$, $\forall k$ $(\Rightarrow)$ $\Sigma |a_n|$ - сходится, $b_k \le |a_k|$, $c_k \le |a_k|$

Это по признаку сравнения рядов 1° Σb_k - сходится и Σc_k - сходится.

$(\Leftarrow)$ $\Sigma b_k, \Sigma c_k$ - сходятся, тогда сходится и $\Sigma (b_k + c_k) = \Sigma |a_k|$, т.е. Σa_k - сходится абсолютно

В обоих случаях $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k - \sum\limits_{k=1}^{n} c_k$

Переходя к пределу в этом равенстве (это возможно, потому что все 3 ряда сходятся), получаем требуемый результат. ⊠

Необходимое условие необсолютной сходимости

↯ **Теорема:**

Если ряд Σa_k - сходится условно, то $\Sigma b_k = \Sigma c_k = +\infty$

◇ 1) Пусть Σa_k - сходится условно, $\Sigma b_k < +\infty$ и $\Sigma c_k < +\infty$ ($\Sigma c_k, \Sigma b_k$ - сходятся), Σa_n - сход абсолютно, что противоречит условию теоремы

2) $\Sigma b_k = +\infty$, $\Sigma c_k < +\infty$, то $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k - \sum\limits_{k=1}^{n} c_k$.

Σa_n - расходится, что противоречит условию теоремы. Аналогично доказывается $\Sigma b < +\infty$, $\Sigma c_k = +\infty$

Остается, что $\Sigma b_n = \Sigma c_k < +\infty$ ⊠