$F(\alpha) = \int \frac{\pi}{2(1+\alpha)} = \frac{\pi}{2}\ln(1+\alpha) + C$

$\alpha = 0: \quad F(0) = \int_0^{\pi/2} 0 \cdot dx = C \Big|_0^{\pi/2} = 0$

$\frac{\pi}{2}\ln(1+0) + C = 0$

$C = -\frac{\pi}{2}\ln 1 = 0$

Ответ: $F(x) - \frac{\pi}{2}\ln(1+\alpha)$.

Д/з на 02.11.20 №1,2,3,4,5

№15

№1 Найти предел

$\lim_{\alpha\to 0}\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+\alpha^2}\,dx$

$F(\alpha) = f(x,\alpha) = \int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+\alpha^2}\,dx$

$\lim_{\alpha\to 0} F(\alpha) = F(0) = \int_{-1}^{1}\sqrt{x^2}\,dx = \int_{-1}^{1}|x|\,dx = \cancel{\int_0^1 x\,dx}$

[интегрируем по частям: $u = |x|;\ dv = dx$, $du = \frac{x}{|x|}$, $v = x$] $= \frac{x\cdot|x|}{2}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1$

Ответ: 1

№2 $\lim_{\alpha\to 0}\int_0^2 x^2\cos\alpha x\,dx$

$F(\alpha) = \int_0^2 x^2\cos\alpha x\,dx$

$\lim_{\alpha\to 0} F(\alpha) = F(0) = \int_0^2 x^2\cdot 1\,dx = \int_0^2 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{8}{3}$

Ответ: 8/3

№3 Можно ли сделать предельный переход под знаком интеграла в выражении

$$\lim_{y\to 0}\int_0^1 \frac{x}{y^2}e^{-x^2/y^2}\,dx$$

1) Вычислим сначала предел интеграла:

$$\lim_{y\to 0}\int_0^1 \frac{x}{y^2}e^{-x^2/y^2}\,dx = \lim_{y\to 0}\left(-\frac{1}{2}e^{-x^2/y^2}\Big|_0^1\right) =$$

$$= \lim_{y\to 0}\left(-\frac{1}{2}\underbrace{e^{-\frac{1}{y^2}}}_{\to 0} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

2) Вычислим интеграл предела:

$$\int_0^1\left(\lim_{y\to 0}\frac{x}{y^2}e^{-x^2/y^2}\right)dx = \int_0^1 0\cdot dx = 0$$

Таким образом, видим, что равенство не выполняется, а значит переход к пределу под знаком интеграла недопустим

Ответ: нельзя.

№4 Вычислить

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\,dx, \qquad a, b > 0 \qquad\qquad \frac{x^b - x^a}{\ln x} = \int_a^b x^y\,dy$$

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\,dx = \int_0^1 dx \int_a^b x^y\,dy = \int_a^b dy \int_0^1 x^y\,dx =$$

$$= \int_a^b dy\left(\frac{x^{y+1}}{y+1}\Big|_0^1\right) = \int_a^b dy\,\frac{1}{y+1} = \int_a^b \frac{1}{y+1}\,d(y+1) =$$

$$= \ln(y+1)\Big|_a^b = \ln\left(\frac{b+1}{a+1}\right)$$

Ответ.

№5 Применяя дифференцирование по параметру, вычислить:

$$\int_0^{\pi} \ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)\,dx, \quad |\alpha|<1$$

Дадим оценку: $1-2\alpha\cos x+\alpha^2 \geqslant 1-2|\alpha|+\alpha^2 =$
$= (1-\alpha)^2 > 0$, т.к. $|\alpha|<1$
$\Rightarrow \ln \exists$