№1 $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x^2}\,dx$, $\alpha, \beta > 0$ (по частям => инт. Эйлера - Пуассона)

$$\cancel{I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2}}{x^2}\,dx - \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\beta x^2}}{x^2}\,dx} \qquad I = I_1 - I_2$$

$$I_1 = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2}}{x^2}\,dx = \left[\begin{matrix} u = e^{-\alpha x^2} & du = -2\alpha x e^{-\alpha x^2} \\ dv = \dfrac{dx}{x^2} & v = -\dfrac{1}{x} \end{matrix}\right] =$$

$$= -\frac{e^{-\alpha x^2}}{x}\Bigg|_0^{+\infty} - 2\alpha \int\limits_0^{+\infty} \frac{x e^{-\alpha x^2}}{x}\,dx = -2\alpha \int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2}\,dx =$$

$$= [\text{интеграл Эйлера - Пуассона}] = -2\alpha \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} =$$

$$= -\sqrt{\alpha\pi}$$

Аналогично: $I_2 = -\sqrt{\beta\pi}$

$$I = -\sqrt{\alpha\pi} + \sqrt{\beta\pi} = \sqrt{\pi}\left(\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha}\right)$$

№19

N 2 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x^2}{x} dx$ $\qquad$ ($x^2 = t$ => инт. Дирихле)

$$I = \left[\begin{array}{l} x^2 = t \\ x = \sqrt{t} \end{array} \quad dx = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt \right] = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} dt = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt =$$

$$= [\text{Интеграл Дирихле}] = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(1) = \frac{\pi}{4}$$

N 19

№ 3] $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin(ax^2+2bx+c)\,dx$ (выделить полный квадрат, инт. Френеля

$$I=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sin\left(\left(ax^2+2\sqrt{a}\cdot\frac{b}{\sqrt{a}}\cdot x+\frac{b^2}{a}\right)-\frac{b^2}{a}+c\right)dx=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sin\left(\left(\sqrt{a}x+\frac{b}{\sqrt{a}}\right)^2-\frac{b^2}{a}+c\right)dx=\left[\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\right]=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sin\left(\sqrt{a}x+\frac{b}{\sqrt{a}}\right)^2\cdot\cos\left(\frac{ac-b^2}{a}\right)dx+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cos\left(\sqrt{a}x+\frac{b}{\sqrt{a}}\right)^2\times$$

$$\times\sin\left(\frac{ac-b^2}{a}\right)dx=2\cdot\cos\left(\frac{ac-b^2}{a}\right)\int\limits_{0}^{+\infty}\sin\left(\sqrt{a}x+\frac{b}{\sqrt{a}}\right)^2dx+$$

$$+2\sin\left(\frac{ac-b^2}{a}\right)\int\limits_{0}^{+\infty}\cos\left(\sqrt{a}x+\frac{b^2}{\sqrt{a}}\right)dx=\left[\quad t=\sqrt{a}x+\frac{b}{\sqrt{a}}\qquad x=\frac{t}{\sqrt{a}}-\frac{b}{a}\qquad dx=\frac{1}{\sqrt{a}}\right]=$$

$$=2\cdot\cos\left(\frac{ac-b^2}{a}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{a}}\int\limits_{0}^{+\infty}\sin t\,dt+2\sin\left(\frac{ac-b^2}{a}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{a}}\int\limits_{0}^{+\infty}\cos t\,dt=$$

$$=[\text{интегралы Френеля}]=\frac{1}{\sqrt{a}}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cos\left(\frac{ac-b^2}{a}\right)+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{a}}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sin\left(\frac{ac-b^2}{a}\right)$$

№ 19

№4 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 \alpha x}{x} dx$ $\left(\sin^3 \alpha x = \frac{1}{4}(3\sin\alpha x - \sin 3\alpha x) \Rightarrow \right.$
инт. Дирихле $\left. \right)$

$= \left[\sin^3 \alpha x = \frac{1}{4}(3\sin\alpha x - \sin 3\alpha x)\right] = \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} \frac{3\sin\alpha x - \sin 3\alpha x}{x} dx =$

$= \frac{3}{4}\int_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x}{x} dx - \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} \frac{\sin 3\alpha x}{x} dx = [$ интегралы

Дирихле $] = \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}\alpha - \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} 3\alpha$

N 5 $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin x^2 \cos 2ax \, dx = \Big($ школьн. ф-ла $\sin\alpha \cdot \cos\beta$ => инт. Френеля $\Big) =$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\sin(x^2-2ax)+\sin(x^2+2ax)\right)dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Big(\sin\big(\underbrace{(x-a)}_{t=x-a}{}^2-a^2\big)+$$

$$+\sin\big(\underbrace{(x+a)}_{t=x+a}{}^2-a^2\big)\Big)dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sin(t^2-a^2)\,dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\sin t^2 \cos a^2 -\right.$$

$$\left.-\cos t^2 \cdot \sin a^2\right)dt = 2\cos a^2 \int\limits_0^{+\infty}\sin t^2 \cdot dt - 2\sin a^2 \int\limits_0^{+\infty}\cos t^2\,dt =$$

$$= 2\cos a^2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} - 2\sin a^2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\cos a^2 - \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sin a^2$$

N 19