Сходимость числовых рядов

02.09.20

№1

Доказать сходимость ряда $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n-1}}+\ldots$

~~$1; 1/2; 1/4; 1/8$~~

геом. прогрессия ; $S=b_1\cdot\cancel{q^{n-1}}\,\frac{1-q^n}{1-q}$

$\cancel{q=\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n-1}}/\frac{1}{2}}$; $b_1=1$; $q=-\frac{1}{2}$; $n=+\infty$

$S_n=1\cdot\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1+\frac{1}{2}}=\cancel{1-(-1)^n}\,\frac{1-(-0,5)^{+\infty}}{1+0,5}=$

$=\frac{1-(0,5)^{+\infty}\to 0}{1,5}\Rightarrow\frac{1}{1,5}\Rightarrow\frac{2}{3}$

$\sum\limits_{n=1}a_n$; $a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n-1}}$

$S_n=a_1+\ldots+a_n$ — частичная

№2 $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}+\ldots=$

$S_n=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=$ оставляем одинаковое число

$=\frac{1}{1}-\frac{1}{n+1}\underset{n\to\infty}{=}\frac{n}{n+1}\to1$

№3 $|q|<1; \alpha\in R$

$\underbrace{q\cdot\sin\alpha}+\underbrace{q^2\sin2\alpha}+\ldots+\underbrace{q^n\sin n\alpha}+\ldots$

$z=q\sin\alpha$; $z^2=q^2\sin2\alpha$; … ; $z^n=q^n\sin n\alpha$

$S_n=z+z^2+z^3+\ldots+z^n=z\cdot\frac{1-z^{n-1}}{1-z}=$

$q(\sin\alpha + i\cos\alpha)\cdot(1-$

$$= \frac{q(\cos\alpha + i\sin\alpha)(1 - q\cos\alpha + iq\sin\alpha)}{(1 - q\cos\alpha - i\sin\alpha)(1 + q\cos\alpha + q\sin\alpha)} =$$

$$\left[(a-ib)(a+ib) = a^2 - i^2b^2 = a^2 + b^2\right]$$

$$= \frac{q\cos\alpha - q^2\cos\alpha - q^2\sin^2\alpha}{1 - 2q\cos}$$

Наш ответ: $\frac{q\sin\alpha}{1 - 2q i \sin}$

$\sum a_n ; \sum b_n \quad ; a_n \le b_n$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = q \quad ; q = 0 \Rightarrow a_n \le b_n$

$q = \infty ; \Rightarrow a_n \ge b_n$

№4

$$0{,}001 + \sqrt{0{,}001} + \sqrt[3]{0{,}001} + \ldots + \sqrt[n]{0{,}001} + \ldots$$

Сходится или расходится $\frac{1}{n} \to 0$ $\to 1$

$a_n = \sqrt[n]{0{,}001} \to 1$ $\sqrt[n]{0{,}001} = (0{,}001)^{\frac{1}{n}}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \Rightarrow 1$

Ряд расходится, потому что не выполнено необходимое условие сходимости ряда.

$$1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{8} + \ldots + \right) -$$

$$= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) +$$

$\sum \frac{1}{n}$ – расходится

$\sum \frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} сх, & \alpha > 1 \\ расх, & \alpha \leq 1 \end{cases}$

$\sum \frac{200}{n^2}$

Рассматр. $a_n = \frac{1}{n^2}$; $b_n = \frac{200}{n^2}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{200}$ => ряды ведут себя одинаково

№5

$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{(2n+1)^2} + \ldots$

$b_n = \frac{1}{n^2}$

$a_n = \frac{1}{(2n-1)^2}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{n^2}{(2n-1)^2} = \left(\frac{n}{2n-1}\right)^2 =$

$= \frac{n^2}{4n^2+1-4n} = \frac{1}{4+\frac{1}{n^2}-\frac{4}{n}} \to \frac{1}{4}$

По признаку сравнения отношений, заключаем, что т.к. ряд $\sum\frac{1}{n^2}$ сходится (по степенному признаку), то исходный ряд тоже сходится

№6.

$a_n = a_1 + d(n-1)$

$\sum \frac{1}{a_1+d(n-1)}$ - расходится

Рассмотрим предел:

$a_n = \frac{1}{a+d(n-1)}$; $b_n = \frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{n}{a+d(n-1)} = \frac{1}{\underbrace{\frac{a}{n}}_{\to 0} + d - \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}} = \frac{1}{d}$$

сл. 1: $d \neq 0$ Вывод: исходный ряд расходится (т.к. ...)

сл. 2: $d=0$, тогда исходный ряд: $\frac{1}{a}$

Ряд расходится, т.к. не выпол. условие необходимое (a_n ~~не~~ стремится к 0)

№7.

$\sum a_n$, $\sum b_n$ - оба расходятся ($a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$)

1) $\sum_{n=1}^{n=\infty} \max(a_n; b_n)$

т.к. максимум $\max(a_n; b_n)$ - расходи[тся], по признаку сравнения суммы максимумов расходится $\sum \max(a_n; b_n)$

2) $\sum \min(a_n; b_n)$

а) $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ } расходится $\Rightarrow$ min расходится

б) min сходится $\min = \frac{1}{n^2}$

a_n	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3^2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5^2}$
b_n	1	$\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4^2}$	$\frac{1}{5}$

Д/з: ~~2547~~, ~~2570~~, ~~2549~~, ~~2552~~, ~~2560~~ + ~~теор. сходим.~~ ~~2563~~ 06.09.20

№2547 доказать сходимость и найти сумму. №1

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)+\ldots=$$

$$S_n=\underbrace{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)}_{\text{геом. прогрессия (1)}}+\underbrace{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{3^n}\right)}_{\text{геом. прогрессия (2)}}=A$$

$$\left[\begin{array}{l} b_{n+1}=b_n\cdot q;\ b_n=b_1\cdot q^{n-1};\ S_n=\dfrac{b_1(1-q^n)}{1-q} \\ \text{если } |q|<1 \Rightarrow S_n=b_1/(1-q) \end{array}\right]$$

1) $S_{n_1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{\left(1-\frac{1}{2}\right)}$; 2) $S_{n_2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\left(1-\frac{1}{3^n}\right)}{1-\frac{1}{3}}$

$$A=1-\underbrace{\frac{1}{2^n}}_{\to 0}+\frac{1}{2}\left(1-\underbrace{\frac{1}{3^n}}_{\to 0}\right)=1-\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 3^n}=\frac{3}{2}-\underbrace{\frac{1}{2^n}}_{\to 0}-\underbrace{\frac{1}{2\cdot 3^n}}_{\to 0}$$

При $n\to\infty$, $S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{3}{2}$ => имеет конечный предел => сходится $\boxtimes$

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{3}{2}$$

Ответ: $\frac{3}{2}$

№2549

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots=$$

считаем конечное число.

$$S_n=\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\ldots+\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}\right)=$$

$$=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}=[:n]=\frac{1}{1+\underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}}\xrightarrow[n\to\infty]{}1.$$

При $n\to\infty$, $S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ => имеет конечный предел => сходится $\boxtimes$

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=1$$

Ответ: 1

№2552

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)=$$

Запишем ряд, начиная (подставляя значения n):

$$S_n=\underbrace{(\sqrt{3}-2\sqrt{2}+\sqrt{1})}_{n=1}+\underbrace{(\sqrt{4}-2\sqrt{3}+\sqrt{2})}_{n=2}+\underbrace{(\sqrt{5}-2\sqrt{4}+\sqrt{3})}_{n=3}+$$

$$\ldots+(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})=-\sqrt{2}+1+\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}$$

$$=1-\sqrt{2}+\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}=1-\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}\to 0$$

При $n\to\infty$, $S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1-\sqrt{2}$ => имеет конечный предел => сходится ☒

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=1-\sqrt{2}$$

Ответ: $1-\sqrt{2}$

№2560 исследовать на сходимость

$$\frac{1}{1001}+\frac{1}{2001}+\frac{1}{3001}+\ldots+\frac{1}{1000n+1}+\ldots$$

~~Пусть~~ Сравним данный ряд с гармоническим рядом (гармонический ряд расходится)

Пусть $\sum a_k=\frac{1}{1000n+1}$ (1)

$\sum b_k=\frac{1}{n}$ (2)

Применим предельный признак сравнения рядов

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{n}{1000n+1}=[:n]=\frac{1}{1000+\frac{1}{n}}\to\frac{1}{1000}$$

имеет конечный предел => ведут себя одинаково
т.к. гармонический ряд расходится => ряд (1) тоже расходится

Ответ: расходится

№2570

Доказать, что если $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = a \neq 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расход.

Признак сравнения: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \Rightarrow a_n$ и b_n — ведут себя одинаково

ВНС: a_n и b_n — расходятся

Докажем это для a_n:

$a_n = a_n \; ; \; b_n = \frac{1}{n}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n}}$; т.к. $\frac{1}{n}$ — гармонический ряд $\Rightarrow$ расходится, то a_n — расходится

$\boxtimes$

№2563 исследовать на сходимость

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{n\sqrt{n+1}} + \ldots$$

Используем предельный признак сравнения. Будем сравнивать со сходящимся обобщенным гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$. Находим значение предела:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n\sqrt{n+1}}}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{3/2}}{n\sqrt{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{n+1}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{n}}} \to 1, \quad \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$\Rightarrow$ $\exists$ конечный предел $\Rightarrow$ ряды ведут себя одинаково $\Rightarrow$ исходный ряд сходится

Ответ: сходится

07.09.20. Кр. Коши сходимости.

№2573

$a_0 + \frac{a_1}{10} + \ldots + \frac{a_n}{10^n} + \ldots \quad (|a_n| < 10)$

[$\sum b_n$ - сходится $\iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu_\varepsilon$, что для $\forall n \geq \nu_\varepsilon$ и $\forall m \in \mathbb{N}$: $|b_n + b_{n+1} + \ldots + b_{n+m}| \leq \varepsilon$

Рассмотрим ряд $\sum b_n = \frac{a_n}{10^n}$

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$

Оценим сумму:

$|b_n + b_{n+1} + \ldots + b_{n+m}| \leq |b_n| + |b_{n+1}| + \ldots + |b_{n+m}|$

$|b_n + b_{n+1} + \ldots + b_{n+m}| \leq \frac{|a_n|}{10^n} + \frac{|a_{n+1}|}{10^{n+1}} + \ldots + \frac{|a_{n+m}|}{10^{m+n}} \leq$

$\leq 10\left(\frac{1}{10^n} + \frac{1}{10^{n+1}} + \ldots + \frac{1}{10^{m+n}}\right) \leq \frac{10}{10^n}\left(1 + \frac{1}{10} + \ldots + \ldots\right) \leq$

$\leq \frac{10}{10^n} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{10}{10^n} \cdot \frac{10}{9} = \frac{10}{9} \cdot \frac{1}{10^{n-1}} = \frac{1}{9 \cdot 10^{n-2}} \leq \varepsilon$

$S = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{b_1}{1-q}$

$1 \leq \varepsilon \cdot 9 \cdot 10^{n-2}$; $10^{n-2} \geq \frac{1}{\varepsilon \cdot 9}$

$n \geq \ln \frac{100}{9\varepsilon}$

$(n-2) \ln \varepsilon \geq \ln\left(\frac{1}{\varepsilon \cdot 9}\right)$; , $\nu \geq \left[\lg \frac{100}{9 \cdot n}\right] + 1.$

$n-2 \geq$

Пр: Доказать, что ряд $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$ - расход.

Ряд сумма $\sum b_n$ расходится $\Leftrightarrow \exists \varepsilon>0,\ \forall \nu_\varepsilon,\ \exists n \geq \nu_\varepsilon$ и $\exists m \in N: |b_n+b_{n+1}+\ldots+b_{n+m}| \geq \varepsilon$

Возьмем $\varepsilon=\frac{1}{2}$ берем произвольный достаточно большой номер $\nu_\varepsilon=999$ $\qquad \frac{1}{2^n}$

$$\frac{1}{1024}+\frac{1}{1025}+\ldots+\frac{1}{2047} \geq \underbrace{\frac{1}{2^{11}}+\frac{1}{2^{11}}+\frac{1}{2^{11}}+\ldots+\frac{1}{2^{11}}}_{1024} = \frac{1}{2}$$

$\exists n=1024,\ \exists m=1024;$

$\nu_\varepsilon \leq 2^n; \quad \underline{n \geq [\log_2 \nu_\varepsilon]+1}$

Признаки сходимости

№1 $\frac{(1!)^2}{2!}+\frac{(2!)^2}{4!}+\frac{(3!)^2}{6!}+\ldots+\frac{(n!)^2}{(2n)!}+\ldots$

$a_n=\frac{(n!)^2}{(2n)!}$

Пр. Д'Аламбера: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=d$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{((n+1)!)^2\cdot(2n)!}{(2n+2)!\,(n!)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{2n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{2}{n}}\to\frac{1}{2}$$

$d=\frac{1}{2};\ d<1 \Rightarrow$ ряд сходится

$\frac{n^2+2n+1}{2n+2}$; $\Big/ \ \lim \frac{((n+1)!)^2\cdot(2n)!}{(2n+2)!\cdot(n!)^2}=\frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)}=$

$$=\frac{n^2+2n+1}{4n^2+6n+2}=\frac{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{4+\frac{6}{n}+\frac{2}{n^2}}\to\frac{1}{4}$$

№2 Коши:

$$\frac{2\cdot 1!}{1^1}+\frac{2^2\cdot 2!}{2^2}+\frac{2^3\cdot 3!}{3^3}+\ldots+\frac{2^n\cdot n!}{n^n}+\ldots$$

$$\sum a_n=\frac{2^n\cdot n!}{n^n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{\cancel{2n\cdot n!}\,2^n n!}{n^n}}=\lim\frac{2\cdot n}{n\cdot e}=\lim\frac{2}{e}<1$$

по признаку Коши ряд сходится.

№3 $a_n=\dfrac{3+(-1)^n}{2^{n+1}}$

По признаку Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{3+(-1)^n}{2^{n+1}}}=\lim\frac{1}{2}\underbrace{\sqrt[3]{\frac{3+(-1)^n}{2}}}_{\to 1}=\cancel{\lim}\ \frac{1}{2}<1$$

ряд сходится

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(3+(-1)^{n+1})\cdot(2^{n+1})}{2^{n+2}\cdot(3+(-1)^n)}=\frac{1}{2}\,\frac{(3+(-1)^{n+1})}{(3+(-1)^n)}=$$

$$=\begin{cases}1\\1/4\end{cases}$$ => предела нет => пр. Даламбера не работает.

№4 $$\frac{a}{b}+\frac{a\cdot(a+d)}{b(b+d)}+\frac{a(a+d)(a+2d)}{b(b+d)(b+2d)}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{a\cdot(a+d)\cdot\ldots\cdot(a+(n-1)d)}{b(b+d)\cdot\ldots\cdot(b+(n-1)d)}$$

$a,b,d>0$

Пр. Раабе:

$$\lim\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{a(a+d)\cdot\ldots\cdot(a+(n-1)d)}{b(b+d)\cdot\ldots\cdot(a+(n-1)d)}\cdot\frac{b(a+d)\cdot\ldots\cdot(b+nd)}{a(a+d)\ldots(a+nd)}$$

$$=\frac{b+nd}{a+nd}$$

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{b+nd}{a+nd}-1\right) = \lim n\left(\frac{b-a}{a+nd}\right) = \lim \frac{bn-na}{a+nd} =$$

$$= \lim \frac{b-a}{\frac{a}{n}+d} = \lim \frac{b-a}{\underbrace{\frac{a}{n}}_{\to 0}+d} = \frac{b-a}{d}.$$

$\frac{b-a}{d} = 1$ - сделать дома.

Д/з: №2: 2578, 2584, 2586, 2598, 2601

$\frac{b-a}{d} = 1 \Rightarrow$ исследуем по Гауссу.

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{b+nd}{a+nd}$$

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{b+nd}{a+nd}-1\right) = \lim n\left(\frac{b-a}{a+nd}\right) = \lim \frac{bn-na}{a+nd} =$$

$$= \lim \frac{b-a}{nd} = \ldots \frac{b-a}{a+d} = \frac{b-a}{d}$$

$\frac{b-a}{d}$

...на.

...2586, 2598, 2601

...Гауссу.

$$\frac{-n-1}{n(2n+1)^2} + \frac{1}{n}$$

$$= \frac{-n^2-n+(2n+1)^2}{n(2n+1)^2} = -\frac{1}{(2n+1)^2}$$

$$= \frac{(n+1)(3n+1)}{n(2n+1)^2} - \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{3n}{(2n}$$

$$\frac{2}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{4n+2+1}{(2n+1)^2} =$$

$$\frac{1}{n} + \frac{-n-1}{n(2n+1)^2} = \frac{(2n+1)^2-(n+1)}{n(2n+1)^2}$$

$$= \frac{4n^2+3n}{n(2n+1)^2} = \frac{4n+3}{(2n+1)^2}$$

$$\frac{2n-2n-}{n(2n+1)}$$

$4n^2+3n$

$2n$

n

Д/З №2: на 09.09.20

~~2578~~, ~~2584~~, ~~2586~~, ~~2598~~, ~~2601~~

№2578 Коши / Даламбер

$$\frac{1000}{1!}+\frac{1000^2}{2!}+\frac{1000^3}{3!}+\ldots+\frac{1000^n}{n!}+\ldots$$

Найдем $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=d$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1000^{n+1}\cdot n!}{(n+1)!\cdot 1000^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1000}{n+1}\to 0<1 \Rightarrow$$

исходный ряд сходится

Ответ: сходится

№2584

$$\frac{4}{2}+\frac{4\cdot 7}{2\cdot 6}+\frac{4\cdot 7\cdot 10}{2\cdot 6\cdot 10}+\ldots+\frac{4\cdot 7\cdot 10\cdot\ldots\cdot(3n+4)}{2\cdot 6\cdot 10\cdot\ldots\cdot(4n+2)}+$$

Даламбер:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{4\cdot 7\cdot 10\cdot\ldots\cdot(3n+7)\cdot 2\cdot 6\cdot 10\cdot\ldots\cdot(4n+2)}{2\cdot 6\cdot 10\cdot\ldots\cdot(4n+6)\cdot 4\cdot 7\cdot 10\cdot\ldots\cdot(3n+4)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+7}{4n+6}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{7}{n}}{4+\frac{6}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{4}\to\frac{3}{4}<1\Rightarrow \text{сходится}$$

№2586 признак Коши

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}=$$

Найдем $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{2/n}}{\left(2+\frac{1}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}\cdot\sqrt[n]{n}}{2+\frac{1}{n}}=A$$

$=\infty^0$

Рассмотрим $n^{2/n}$.

получаем неопределенность типа ∞^0. Тогда перейдем к экспоненте: $x = e^{\ln x}$

$$\lim_{n\to\infty} (n^{\frac{1}{n}}) = \left[e^{\lim \frac{\ln n}{n}}\right] = \lim_{n\to\infty} e^{\ln n^{\frac{1}{n}}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\ln n}{n}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n}}$$

Рассмотрим $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n}$ ($\frac{\infty}{\infty}$ => раскрываем данную неопределенность по правилу Лопиталя)

[Пр. Лопиталя: предел отношения равен пределу отношения их производных]

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\ln n)'}{n'} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n \cdot 1} \to 0$$

Следовательно, $e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n}} \to e^0 = 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} \to 1$.

$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{2/n} \to 1}{1 + \frac{1}{n} \to 0} \to \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$$ данный ряд сходится

Ответ: сходится

№2598 пр. Раабе и Гаусса

$$\left(\frac{1}{2}\right)^p + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^p + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^p \cdots \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right) \cdots$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)^p - 1\right) =$$

$$= [(\underset{\text{бесконечно малое}}{\alpha} + 1)^p = 1 + p\alpha] = \lim_{n\to\infty} n\left(1 + \frac{p}{2n+1} - 1\right) = \frac{p}{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \begin{cases} p > 2 \text{ - ряд сходится} \\ p < 2 \text{ - ряд расходится} \end{cases}$, если $p = 2$, то пр. Гаусса:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)^2 = \left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^2 = \frac{(2n+2)^2}{(2n+1)^2} = \frac{(2n+1+1)^2}{(2n+1)^2} =$$

$$= \frac{(2n+1)^2+2(2n+1)+1}{(2n+1)^2} = 1+\frac{2}{2n+1}+\frac{1}{(2n+1)^2} =$$

$$= 1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n}+\frac{2}{2n+1}+\frac{1}{(2n+1)^2} = 1+\frac{1}{n}+\frac{-2n-1+2n}{(2n+1)\cdot n}+$$

$$+\frac{1}{(2n+1)^2} = 1+\frac{1}{n}+\frac{-1}{n(2n+1)}+\frac{1}{(2n+1)^2} =$$

$$= 1+\frac{1}{n}+\frac{-2n-1+n}{n(2n+1)^2} = 1+\frac{1}{n}+\frac{-n-1}{n(2n+1)^2} =$$

$$= 1+\frac{1}{n}+\frac{-1-\frac{1}{n}}{(2n+1)^2} = 1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\underbrace{\left(\frac{-1-\frac{1}{n}}{\left(2-\frac{1}{n}\right)^2}\right)}_{\text{2n - огран. выш.}} =$$

$$= 1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\theta_n \Rightarrow \lambda=1,\ \mu=1 \Rightarrow \text{расходится}$$

Ответ: при $p>2$ - сходится
при $p\leq 2$ - расходится

№2601

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}!}{\underbrace{(2+\sqrt{1})\cdot(2+\sqrt{2})\ldots}_{\alpha}(2+\sqrt{n})}$$

Исследуем (Проверим) по признаку Раабе

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\sqrt{n}!\cdot\alpha\,(2+\sqrt{n})\cdot(2+\sqrt{n+1})}{\alpha\cdot(2+\sqrt{n})\cdot\sqrt{(n+1)}!}\right.$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\sqrt{n}!\,(2+\sqrt{n+1})}{\sqrt{(n+1)}!}-1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{2+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}}-1\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n+n\sqrt{n+1}-\cancel{n\sqrt{n+1}}}{\sqrt{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n\sqrt{n+1}}{n+1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2\sqrt{n+1}\ \to\infty}{1+\frac{1}{n}\ \to 1} \to +\infty \Rightarrow +\infty > 1 \Rightarrow \text{ряд сходится}$$

Ответ: сходится

Знакопеременные ряды

09.09.20

$$\frac{1}{n} \quad ? \quad \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$$

$\to$ ряд расходится

$\sum \frac{1}{n \ln n}$; $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$;

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \int_2^{+\infty} \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln \ln x \Big|_2^{+\infty} = +\infty$$

Исследовать ряд: $\sum \frac{1}{n \ln^2 n}$ – ряд сходится

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x} = \int_2^{+\infty} \frac{d(\ln x)}{\ln^2 x} = \frac{-1}{\ln x} \Big|_2^{+\infty} = 0 - \left(\frac{1}{\ln 2}\right)$$

Следовательно.

$$\frac{1}{n} \quad \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$$

$$\frac{1}{n \ln n} \quad \Bigg| \quad \frac{1}{n \cdot \ln^{1+\varepsilon} n}$$

$$\frac{1}{n \ln n \ln \ln n} \quad \Bigg| \quad \frac{1}{n \ln n \ln \ln n \cdot \ln \ln \ln n} \dots \qquad (\ln \ln \ln n)^{1+\varepsilon}$$

Признак Абеля

$\sum a_n \cdot b_n$

1) Если $\sum b_n$ – сходится, а $\sum a_n$ – монотонна и ограничена $\Rightarrow$

$\sum a_n \cdot b_n$ – сходится

Признак Дирихле:

1) $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right| \leq C \quad \forall N$

2) $a_n \downarrow 0$

$\left|\sum\limits_{k=1}^{N} \sin k\alpha\right| \leq \frac{1}{|\sin\frac{\alpha}{2}|}$, $\alpha \neq 2\pi n$

$\left|\sum\limits_{k=1}^{n} \cos k\alpha\right| \leq \frac{1}{|\sin\alpha/2|}$

N1 исследовать сходимость ряда.

$\sum \frac{(-1)^n}{n^2+n}$ по пр. Лейбницу

$|a_n| = \frac{(-1)^n}{n^2+n} = \frac{1}{n^2+n} \geq |a_{n+1}|$; $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$|a_{n+1}| = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2+(n+1)} = \frac{1}{(n+1)^2+(n+1)}$

по пр. Лейбница ряд сходится

N2

$\sum (-1)^n \cdot \frac{2+(-1)^n}{n}$

1) ряд знакочередующийся

2) Последовательность $|a_n|$ не является монотонной

$n=1$; $-\frac{1}{1} \neq$

$-\frac{1}{1}$; $+\frac{3}{2} - \frac{1}{3} + \frac{3}{4} =$

Представим исходный ряд в виде суммы двух других

, $-\frac{1}{1}$;

$a_n = (-1)^n \cdot \frac{2}{n}$ – сход. по признаку Лейбница

$b_n = (-1)^n \cdot (-1)^n \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n}$ – расходится (как гармон.)

$\sum a_n + \sum b_n$ – расходится как сумма сходящ. и расход.

№3 $\sum \frac{\ln^{100} n}{n} \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)$

$a_n = \frac{\ln^{100} n}{n}$; $b_n = \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)$

$a_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$

Покажем, что последовательность (a_n) монотонно убывает.

$a_{n+1} =$

$f(x) = -x^{-2} \ln^{100} x + 100 \ln^{99} x \cdot x^{-2} = \frac{\ln^{99} x}{x^2}(100 - \ln x)$

$f(x) < 0$, при $\cancel{x}$ $100 \ln x < 0$

$\ln x > 100$; $x > e^{100}$, при таких x ф. убывает, т. е. $a_n \downarrow 0$

2) $\left|\sum_{k=1}^{N} \sin\frac{\pi n}{4}\right| \le \frac{1}{\sin\frac{\pi n}{4}}$ – частичные суммы ограничены => ряд сходится по признаку Дирихле.

№4

$\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{\ln n}}$

1) знаки чередуются

2) $a_n = \frac{\cancel{(-1)}\ 1}{\sqrt[n]{\ln n}}$

2) условие должно монотонно стремиться к нулю

$\sqrt[n]{n} \to 1$.

Рассмотрим $\sqrt[n]{\ln n} = (\ln n)^{\frac{1}{n}} =$

$\sqrt[n]{\ln n} < \underset{\to 1}{\sqrt[n]{n}} \Rightarrow \sqrt[n]{\ln n} \not\to 0 \Rightarrow$ ряд расходится, т.к. не выполняется условие сходимости ряда

№4 $\sum \frac{\sin n}{n}\left(12-\frac{3}{2n+1}\right)$.

$\sum a_n = \frac{\sin n}{n}$

$\sum b_n = 12-\frac{3}{2n+1}$ - монотон., возрастает и $\sum b_n \to 12$

по пр. Дирихле или Абеля: (т.к. произведен.)

$\sum a_n$ - сходится: 1) $\sin n$ - ограниченная $\left|\sum_{k=1}^{n} \sin k\right| \leq \frac{1}{\sin\frac{n}{2}}$

2) $\frac{1}{n} \downarrow 0$

Ответ: сходится по пр. Абеля.

№5

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \frac{(-1)^n\cdot(\sqrt{n}-(-1)^n)}{\underbrace{(\sqrt{n}+(-1)^n)\cdot(\sqrt{n}-(-1)^n)}_{n-(-1)^{2n} = n-1^n = n-1}} =$$

$\frac{1}{\sqrt{2}+1}$;

$$= \frac{(-1)^n\sqrt{n}-1}{n-1} = \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{(n-1)} - \frac{1}{n-1}$$ расход как гарм. (обобщенный) (по признаку сравн. с гармоническим)

Рассмотрим $\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{(n-1)}$

пр. Лейбница:
1) знакочередующийся
2) $|a_n| = \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{(n-1)} \Rightarrow |a_{n+1}| = \frac{(-1)^{n+1}\sqrt{n+1}}{n} = \frac{\sqrt{n+1}}{n}$

$= \frac{\sqrt{n}}{n-1}$

Сравним a_n и a_{n+1}

$$\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \frac{\sqrt{n}}{(n-1)}\cdot\frac{n}{\sqrt{n+1}} = \cancel{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n+}}$$

Рассмотрим $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1}$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x-1) - \sqrt{x}}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{(x-1) - 2x}{(x-1)^2 \cdot 2\sqrt{x}} = -\frac{x+1}{(x-1)^2 \cdot 2\sqrt{x}} < 0 \Rightarrow$$ a_n - монотонно убывает $\Rightarrow$

$\sum (-1)^n$

Исходный ряд расходится как сумма сходящ. и расходящ.

№В

Д/З: исследовать сходимость знакочередующихся рядов

+ 1) $\sum \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n+100}$ 2669

2) $\sum (-1)^n \cdot \frac{(2n)!!}{(n!)^2 \cdot 4^n}$

+ 3) $\sum (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n}$ - в учебнике + №2668

+ 4) $\sum (-1)^n \frac{n-1}{n+1} \frac{1}{\sqrt[100]{n}}$ №2683

+ 5) $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} (\operatorname{arctg}(n^2+n+1))$