Зафиксируем какой-либо $n \geq \delta(\varepsilon)$ и рассмотрим $|S_n(x) - S_n(x_0)|$, $S_n(x)$ - непрерывна (т.к. это сумма конечного числа непрерывных ф.) $\Rightarrow \exists\, \delta_\varepsilon$, что $\forall x \in E$, $|x - x_0| \leq \varepsilon \Rightarrow |S_n(x) - S_n(x_0)| \leq \varepsilon$ (определение непрерывности)

Таким образом получилось, что для $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta(\varepsilon)$, $\forall x \in E$, $|x - x_0| \leq \delta_\varepsilon$
$|S(x) - S(x_0)| \leq 3\varepsilon \Rightarrow$ по определению $S(x)$ - непрерывна в т. x_0 (x_0 - произвольная т. множ. E)
$S(x)$ - непрерывна на E

$\boxtimes$

$\Rightarrow$ Теорема (Стокса-Зейделя для последовательности):
Предел равномерно сходящейся на множ. E последовательности непрерывных ф. есть непрерывная ф. на множ. E.

$\Rightarrow$ Замечание 1:
Теорема Стокса-Зейделя даёт получить признак неравномерной сходимости:
Если $f(x)$ (сумма ряда) непрерывной ф. есть разрывная на E, то сходимость на этом множестве неравномерная.

$\Rightarrow$ Замечание 2:
Теорема Стокса-Зейделя лишь достаточное условие для непрерывности, но не необходимое

Пр: $\sum 2x\left(n^2 e^{-n^2x^2} - (n-1)^2 \cdot e^{-(n-1)^2x^2}\right)$, $x \in [0;1]$

$$S_n(x) = 2x\left(e^{-x^2} - 0 + 4 \cdot e^{-4x^2} - e^{-x^2} + 9e^{-9x^2} - 4e^{-4x^2} + \ldots\right.$$
$$\left.\ldots + n^2 e^{-n^2x^2} - (n-1)^2 \cdot e^{-(n-1)^2x^2}\right) = 2xn^2 e^{-n^2x^2} \xrightarrow{[0;1]} 0$$

Предельная ф. $S(x) = 0$ - непрерывна
однако, $\sup\limits_{[0;1]} |S_n(x) - S(x)| = \sup\limits_{[0;1]} |2xn^2 e^{-n^2x^2}| \geq \left[x_n = \frac{1}{n}\right] =$
$= 2\frac{1}{n} n^2 e^{-1} = 2e^{-1} \cdot n \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$

Почленный переход к пределу

Теорема:

Пусть ряд $\sum u_k \overset{E}{\rightrightarrows}$, x_0 – предельная т. на множ. E. Пусть $\exists$ у каждой $\lim\limits_{x\to x_0} u_k(x) = b_k$, $\forall k \in N$, $\sum b_k$ – сходится, причем

$$\lim_{x\to x_0} S(x) = \left[\lim_{x\to x_0} \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lim u_k(x)\right] = \sum b_k \quad (1)$$

Др. словами, равномерная сходимость ряда обеспечивает возможность к почленному переходу к пределу при условии, что члены ряда существуют

Покажем, что в условии теоремы $\exists \lim \sum u_k$, т.е. предел суммы ряда $\exists \lim\limits_{x\to x_0} S(x)$. Для этого воспользуемся кр. Коши для существования предела ф. $|S(x_1) - S(x_2)|$, где $x_1, x_2 \in E$.

$|S(x_1) - S(x_2)| = |S_n(x_1) + r_n(x_1) - S_n(x_2) - r_n(x_2)| \leq$
$\leq |S_n(x_1) - S_n(x_2)| + |r_n(x_1)| + |r_n(x_2)|$

Т.к. ряд $\sum u_k \overset{E}{\rightrightarrows}$, то для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \nu_\varepsilon$, $\forall n \geq \nu_\varepsilon$, $\forall x \in E$ $|r_n(x)| \leq \varepsilon$

Зафиксируем $n \geq \nu_\varepsilon$, $|S_n(x_1) - S_n(x_2)|$ при fix n S_n имеет $\exists \lim\limits_{x\to x_0} S_n(x)$. Т.к. $S_n(x)$ – сумма конечного числа слагаемых, каждый из которых имеет предел. Поэтому $S_n(x)$ удовлетворяют кр. Коши о существовании конечного предела, т.е. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \nu_\varepsilon > 0$, $\forall x_1, x_2 \in E$ $|x_2 - x_1| \leq \delta_\varepsilon$, тогда $|S_n(x_1) - S_n(x_2)| \leq \varepsilon$

Поэтому $|S(x_1) - S(x_2)| \leq 3 \cdot \varepsilon$

Это позволяет заключить, что для f $S(x)$ выполнен ~~усло~~ кр. Коши существования конечного предела, т.е $\exists \lim\limits_{x\to x_0} S(x)$ – конечен.

Докажем теперь формулу 1:
Функциональный ряд $\sum u_k \overset{E}{\rightrightarrows}$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \nu_\varepsilon$, $\forall n \geq \nu_\varepsilon$, $\forall x \in E$: $|S_n(x) - S(x)| \leq \varepsilon$ (2)

S_n^B – частичная сумма $\sum b_n$

В неравенстве (2) перейдем к пределу. Получаем, S_n – частичная сумма

$|S_n^{B} - \lim\limits_{x \to x_0} S(x)| \le \varepsilon$

Это значит, что последов. (S_n^{B}) - сходится и её предел $\lim\limits_{x \to x_0} S(x)$, т.е. $\sum B_n = \lim\limits_{x \to x_0} S(x)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to x_0} u_n(x) = \lim_{x \to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \quad \boxtimes$$

⇒ Замечание 1:

Для последов. ф теорема имеет такой вид:
Если $f_n \overset{E}{\underset{n \to \infty}{\rightrightarrows}} f$, x_0 - предельная т. E и $\exists \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$ $\forall n$,

то $\lim\limits_{x \to x_0} \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = \lim\limits_{n \to \infty} \lim\limits_{x \to x_0} f_n(x)$

⇒ Замечание 2:

Т. x_0 может быть и бесконечностью.

⇒ Замечание 3:

Теорема Стокса-Зейделя является следствием доказанной теоремы.

◇ Действительно, $u_k(x)$ непрерывна на E, то в $\forall x_0 \in E$ $\exists \lim\limits_{x \to x_0} u_k(x)$:

$$B_k = \lim_{x \to x_0} u_k(x) = u_k(x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0} S(x) = \lim_{x \to x_0} \sum u_k(x) = \sum \lim u_k(x) = \sum B_k = \sum u_k(x_0) = S(x_0) \quad \boxtimes$$

Интегрирование рядов функций

$\sum u_k(x)$, $\sum u_k(x) = S(x)$, $x \in [a; b]$

Предположим, что члены ряда-функции, интегрируемые по Риману.

1) существует ли $\int_a^b \sum u_k(x)\,dx$?

2) сходится ли $\sum \int_a^b u_k(x)\,dx$?

3) Если 1) и 2) выполняются, верно ли, что

$$\int_a^b \sum u_k(x)\,dx = \sum \int_a^b u_k(x)\,dx \quad (*) \quad ?$$

Если для ряда выполняется $(*)$, то говорят, что этот ряд можно почленно проинтегрировать.

Частичный ответ на данный вопрос даёт след. теорема.

Теорема:

Если $u_k(x)$ – непрерывна на $[a,b]$ и $\sum u_k(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows}$, то его можно почленно интегрировать на $[a,b]$.

◇ Т.к. члены ряда непрерывны, то они интегрируемы, т.к. $\exists \int_a^b u_k(x)\,dx$, $\forall k \in N$

$S(x)$ – непрерывна по Стоксу-Зейделю $\Rightarrow \int_a^b S(x)\,dx$, т.е. $\exists \int_a^b \sum u_k(x)\,dx$.

С др. стороны рассмотрим $\sum \int_a^b u_k(x)\,dx$; обозначим $\sigma_n \equiv \sum_{k=1}^{n} \int_a^b u_k(x)\,dx$.

Оценим разность:

$$\left|\sigma_n - \int_a^b S(x)\,dx\right| = \left|\int_a^b \sum_{k=1}^{n} u_k(x)\,dx - \int_a^b \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\right)dx\right| =$$

$$= \left|\int_a^b S_n(x)\,dx - \int_a^b S(x)\,dx\right| \le \left|\int_a^b (S_n(x) - S(x))\,dx\right| \le$$

$$\le \int_a^b |S_n(x) - S(x)| \le \left[\begin{array}{l} \text{т.к. } \sum u_k(x) \rightrightarrows S(x), \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \nu_\varepsilon,\ \forall n \ge \nu_\varepsilon \\ \forall x \in [a,b] : |S_n(x) - S(x)| \le \varepsilon \end{array}\right] \le$$

$$\le \int_a^b \varepsilon\,dx = \varepsilon x \Big|_a^b = \varepsilon(b-a)$$

Таким образом, для $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \nu_\varepsilon$, $\forall n \ge \nu_\varepsilon \Rightarrow$

$$\left|\sigma_n - \int_a^b S(x)\,dx\right| \le \varepsilon \Rightarrow \sigma_n \to \int_a^b S(x)\,dx, \text{ т.е.}$$

$$\sum \int \ldots = \int \sum$$

⊠