по супремальному кр. $\overset{E}{\rightrightarrows} 0$

Значит, по пр. Дирихле ряд сходится равномерно

Ответ: сходится равномерно

№5 $\sum \underbrace{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+x^2}}}_{a_n(x)} \underbrace{\operatorname{arctg} x^n}_{b_n(x)}$, $E = [1, +\infty)$

Воспользуемся пр. Абеля.

1) ряд $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+x^2}}$ по пр. Лейбница $\overset{E}{\rightrightarrows}$, т.к.

а) (a_n) - монотонна при $\forall$ fix $x \in E$

б) $\frac{1}{\sqrt{n+x^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n+x^2}} \overset{E}{\rightrightarrows} 0$ (пр. Вейерштрасса)

2) $(b_n) = (\operatorname{arctg} x^n)$ - ограничена в совокупности

$|\operatorname{arctg} x^n| \leq \frac{\pi}{2}$, $\forall n \in N$ $\forall x \in [1, +\infty)$

3) $(\operatorname{arctg} x^n)$ монотонна при каждом fix $x \in [1, +\infty)$
убывая послед.

Значит, по пр. Абеля исходный ряд сход. равномерно

Ответ.

Д/з на 05.10.20 №9

Исследовать ф. на непрерывность на множ. ее задания

№3 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^n}$

При $x = 0$ ряд сход. как ряд из нулей.

При $x \neq 0$ имеем сумму геом. прогрессии с $q = \frac{1}{1+x^2} < 1$

Поэтому:

$$S(x) = \frac{b_1}{1-q} = \frac{\frac{x}{1+x^2}}{1-\frac{1}{1+x^2}} = \frac{1}{x}$$

$$S(x) = \begin{cases} 1/x, & \text{если } x \neq 0 \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases}$$

Т.к. члены ряда непрерывны на R, а сумма разрывна, то ряд сходится на R неравномерно

Ответ: неравномерно сходится

№2 $f(x) = \sum \left(x + \frac{1}{n}\right)^n$

Рассмотрим ф. $|f_n(x)| = \left(x + \frac{1}{n}\right)^n$

по пр. Коши:

$$r = \lim \sqrt[n]{|a_n|} = \lim \sqrt[n]{\left(x+\frac{1}{n}\right)^n} = |x + \underbrace{\tfrac{1}{n}}_{\to 0}| = |x|$$

1) $r > 1$ – расход.
$x > 1$ или $x < -1$ – ряд $|u_n(x)|$ – расход.
$(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ – расход. и $u_n(x)$ – расход, т.к. $|a_n(x)| \not\to 0$.

2) $r < 1$ – сход.
$-1 < x < 1$
$x \in (-1; 1)$ – ряд $|u_n(x)|$ – сход. $\Rightarrow$ $u_n(x)$ – сходится абсолютно

3) $r = 1$; $\underline{x = 1}$ или $x = -1$

$$\left|1 + \frac{1}{n}\right|^n \to e \Rightarrow \not\to 0$$

$\Rightarrow$ Множ. задания ф: $(-1; 1)$

По т. Стокса-Зейдля:

1) члены ряда непрерывны.

2) исследуем на равномерную сход.:

Поточечная сход. из пр. коши $\sqrt[n]{(x+\frac{1}{n})^n} \underset{n\to\infty}{\to} x$

$x=1$ - предельная т.

$b_n = \lim (x+\frac{1}{n})^n = (1+\frac{1}{n})^n \to e \Rightarrow \not\to 0 \Rightarrow$

ряд $\sum (1+\frac{1}{n})^n$ расход. $\to$ на $[0;1)$ сход неравномерно.

$\to$ исследуем на локальную равномер. сход.

Пусть $[\alpha, \beta] \subset (-1;1)$

$(\beta + \frac{1}{n})^n \to 0 \Rightarrow$ ряд равномерно сход. по т. С-3. - сход непрерывно

№1 $\lim\limits_{x\to 0} \sum \frac{2x^n+1}{3^n\sqrt{1+x^2n}}$

Рассмотрим ряд на множ. $X=[-1;1]$, т.к.

$\left|\frac{2x^n+1}{3^n\sqrt{1+x^2n}}\right| \le \frac{3}{2^n}$, при $\forall n\in N, \forall x\in X$

то ряд сход. равномерно на $[-1;1]$ по пр. Вейерштрасса, т.к. обладает сходящимся числовой мажорантой.

по т. о почленном переходе к пределу: $\left[\frac{b_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}\right]$

$$\lim_{x\to 0}\sum \frac{2x^n+1}{3^n\sqrt{1+x^2n}} = \sum \lim_{x\to 0}\frac{2x^n+1}{3^n\sqrt{1+x^2n}} = \sum \frac{1}{3^n} = 1/2$$

$$\left[\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x)\right]$$

Ответ: 1/2

№3 исследовать дифф ф.

$$f(x) = \sum \frac{(-1)^n}{n+x^2}$$

1) Ряд $\sum \frac{(-1)^n}{n+x^2}$ сходится при $\forall$ fix x, т.к. $x^2 > 0$, по пр. Лейбница.

2) Ф. $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x^2}$ и $u_n'(x) = \frac{(-1)^{n-1} \cdot 2x}{(n+x^2)^2}$ непрерывны

3) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) - \sum \frac{2x(-1)^{n-1}}{(n+x^2)^2}$ сходится равномерно (пр. Вейерштрасса: т.к. $\left|\frac{(-1)^{n-1} \cdot 2x}{(n+x^2)^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$ и ряд $\sum \frac{1}{n^2}$ - сход.)

Тогда по т. о почленном диф. ряда: ф. диф. на $\mathbb{R}$,

Ответ: диф. ф.

№5 $f(x) = \sum \frac{\sin nx}{n^2 \ln^2(n+1)}$

$|u_n(x)| \leq \frac{1}{n^2 \ln^2(n+1)} \leq \frac{1}{n^2 \ln^2 n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ - сход.

1) $|u_n(x)|$ - сход. $\Rightarrow$ $u_n(x)$ - сход. при любых $\forall x \in \mathbb{R}$ абсолютно

$D[f] = \mathbb{R}$

2) $u_n(x) = \frac{\sin nx}{n^2 \ln^2(n+1)}$ - непрерывна, как комбинация непрерывных ф.

2) $\sum u_n'(x) \rightrightarrows$

$u_n'(x) = \frac{\cos nx}{n \ln^2(n+1)}$

Докажем равномерную сходимость по пр. Вейерштрасса:

$\frac{\cos nx}{n \ln^2(n+1)} \leq \frac{1}{n \ln^2 n}$ - сход.

Рассмотрим $f'(x) = \frac{1}{x\ln^2 x}$ – убывающая.

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x} = \int_2^{+\infty} \frac{d\ln x}{\ln^2 x} = \ln^{-1} x = -\frac{1}{\ln x}\Big|_2^{\infty} = -0 + \frac{1}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \sum f \frac{1}{n\ln^2 n}$ сход. по интегральному пр. Коши

по т. Вейерштрасса $\frac{\cos nx}{n\ln^2(n+1)}$ – сход. равномерно.

Значит: $\sum \frac{\sin nx}{n^2\ln^2(n+1)}$ диф. на R.

Ответ: диф. ф.

Множество сходимости степенного ряда 05.10.20.

$\sum a_n x^n$, $\sum a_n (x-x_0)^n$

№1 $\sum 3^n \cdot (x+1)^n$

$x_0 = -1$ – центр сходимости

$R = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{a_n}} = \frac{1}{3}$; $(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3})$ $(-R; R)$

$\left(-1-\frac{1}{3}, -1+\frac{1}{3}\right)$

$x = -\frac{2}{3}$.

$\sum 3^n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n = \sum 1$ – расход.

$x = -\frac{4}{3}$: $\sum 3^n \left(-\frac{1}{3}\right)^n = \sum (-1)^n$ – расход.

внутри – сход., снаружи – расходится.

№2 $\sum \frac{(n+1)(x-2)^n}{4^{n+2}}$

$x_0 = 2$ - центр сход.

$R = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{a_n}} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$

интервал сход: $(2-4;\ 2+4) \div (-2;\ 6)$.

$x = -2$

$\sum \frac{(n+1)\cdot(-4)^n}{4^{n+2}}$ - расход.

$\sum \frac{(n+1)(4^n)}{4^{n+2}}$ - расход

инт. $= (-2;\ 6)$

№3 $\sum \frac{5^n+(-3)^n}{n+1} \cdot x^n$

$x_0 = 0$. - центр. сход.

$R = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{\frac{5^n+(-3)^n}{n+1}}} = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{5^n+(-3)^n}} = \frac{1}{5}$

$\lim \sqrt[n]{5^n+(-3)^n} = 5\sqrt[n]{1+\left(\frac{-3}{5}\right)^n} \Rightarrow 5$

$\left(0-\frac{1}{5};\ 0+\frac{1}{5}\right)$

1) $\sum \frac{5^n+(-3)^n}{n+1} \cdot \frac{1}{5^n} = \sum \frac{1}{n+1} + \left(\frac{-3}{5}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1} \to 0$ - сход ряд

- расход. как сумма расход ~~и сход~~ рядов

$$\sum \frac{5^n+(-3)^n}{n+1} \cdot \left(-\frac{1}{5}n\right) = \sum \frac{(-1)^n}{n+1} + \left(\frac{3}{5}\right)^n \frac{1}{n+1}$$

$|a_{n+1}| < |a_n|$ — сход. по пр. Лейбница

абс. сход.

$$X = \left[-\frac{1}{5}; \frac{1}{5}\right)$$

№4 $\sum \frac{(2n-1)!!}{n!} \cdot x^n$

$x_0 = 0$

$$R = \frac{1}{\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \left[\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+1)!!\, n!}{(n+1)!\,(2n-1)!!} = \frac{(2n+1)}{(n+1)} = 2\right.$$

интервал сходимости: $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

1) $x = +\frac{1}{2}$

$$\sum \frac{(2n-1)!!}{n!} \cdot \left(+\frac{1}{2}\right)^n = \sum \frac{(2n)!}{\underbrace{(2n)!!}_{2^n \cdot n!} \cdot n!} = \frac{1}{2^n}$$

$$= \sum \frac{(2n)!}{2^n \cdot n!\, n! \cdot 2^n} =$$

$\sqrt[n]{n!} = \frac{n}{e} \times \sqrt{2\pi n}$

Проведем сходимость ои:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(2n+2)(2n+1)}{n \cdot (n+1)^2} \to 1.$$

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{4} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(n!)^2}} = \frac{1}{4} \frac{\sqrt[n]{(2n)!}}{\sqrt[n]{n!}} \approx \frac{1}{4} \frac{(2n)^2 \cdot \frac{2n^2}{e^2} \sqrt{4\pi n}}{\left(\sqrt{2\pi n} \cdot \frac{n}{e}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{4} \frac{4 \cdot 4}{\cdot 4} = 4/4 = 1$$

$$|a_n| = \frac{(2n)!}{2^{2n}\cdot(n!)^2} = \left[n! \sim \sqrt{2\pi n}\cdot\frac{n^n}{e^n} \right]$$

расход. (по степенному и радикалу.

в т. $\left(-\frac{1}{2}\right)$ - ряд сход по пр. Лейбница.

Д/з: условие: найти множ. сход. степенного ряда.

Д/з №10: найти множ. сход. степенного ряда.

№1 $\frac{|2|^n}{n!}(x+5)^n$

$x_0 = -5$ - центр сходимости.

$$R = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{a_n}} = \frac{1}{\lim \frac{|2|}{\frac{n}{e}}} = \frac{e\cdot|2|}{n} \to \infty$$

Проверим по Д'аламберу:

$$R = \frac{1}{\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}} = \frac{1}{\lim \frac{2^{n+1}\,n!}{(n+1)!\,2^n}} = \frac{n+1}{2} \to \infty$$

интервал сход. $= (-5-\infty; -5+\infty) = (-\infty; +\infty)$

Значит, ряд является сходящимся (абсолютно) при $\forall x \in (-\infty; +\infty)$

Ответ $(-\infty; +\infty)$

№2 $n! \cdot (x-3)^n$

$x_0 = 3$ – центр сходимости.

Радиус сход. вычислим по формуле Даламбера

$$R = \frac{1}{\lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \lim\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim \frac{1}{n+1} \Rightarrow 0$$

Значит, ряд сходится ~~в исходной~~ только в одной точке $x = 3 = x_0$ и множ. сходимости $\Rightarrow \{3\}$

$(3-0; 3+0)$

Ответ: $\{3\}$.

№3 $\sum \frac{(-1)^n (2n)!}{n \cdot (n!)^2} x^n$

$x_0 = 0$ – центр сходимости.

Радиус сход. по формуле Коши:

$$R = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{|a_n|}}$$

$$\lim \sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n \cdot (n!)^2}} = \frac{\sqrt[n]{(2n)!}}{\underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to 1} \sqrt[n]{(n!)^2}} = \left[\begin{matrix}\text{формула}\\ \text{Стирлинга}\end{matrix}\right]$$

Применим формулу Даламбера:

$$R = \frac{1}{\lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \lim\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim \frac{(2n)!}{n \cdot (n!)^2} \cdot \frac{(n+1) \cdot ((n+1)!)^2}{(2n+2)!} =$$

$$= \lim \frac{(n+1) \cdot (n+1) \cdot (n+1)}{n \cdot (2n+2)(2n+1)} \approx \frac{n^3}{n \cdot 2n \cdot 2n} = \frac{1}{4}$$

Интервал сход.: $\left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right)$

Проверим сходимость на концах интервала

$x = \frac{1}{4}$: $\sum \frac{(-1)^n (2n)!}{n \cdot (n!)^2 \cdot 4^n}$ – сход. по пр. Лейбница

1) знакочеред; члено $\to 0$ (из пр. необх. признака)

$a_{n+1} < a_n$

$x = -\frac{1}{4}$ $\quad \sum \frac{(-1)^n (2n)!}{(-4)^n (n!)^2 \cdot n} = \sum \frac{(2n)!}{n \, 4^n (n!)^2} =$

$= \sum \frac{1}{\sqrt{\pi} \, n^{3/2}}$ — ~~ра~~сход. (по ~~пр. срав. с гармон.~~) степенному признаку.

Тогда интервал сходимости: $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$

Ответ: $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$

№4 $\quad \frac{(n+1)^2}{3^n} \cdot x^{5n}$

$x_0 = 0$ — центр сходимости.

Найдем радиус сходимости по форм. Коши:

$R = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{\lim \sqrt[n]{3^n}}{\lim \underbrace{\sqrt[n]{(n+1)^2}}_{\to 1}} = 3.$

Интервал сход: $(-3; 3)$

Проверим граничные точки:

$x = 3$: $\quad \frac{(n+1)^2 \cdot 3^{5n}}{3^n} = (n+1)^2 \cdot 3^{4n}$ — расход., т.к. $|a_n| \not\to 0$

$x = -3$: $\quad \frac{(n+1)^2 \cdot (-3)^{5n}}{3^n} = (-1)^n (n+1)^2 \cdot 3^{4n}$ — расход, т.к. $|a_n| \not\to 0$.

Тогда интервал сход: $(-3; 3)$

Ответ: $(-3; 3)$

№5 $\quad \frac{2^n (x+2)^n}{n \ln^2 (n+2)}$

$x_0 = -2$ — ~~рас~~ центр сходимости.

Найдем радиус сходимости:

$R = \frac{1}{\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \lim \frac{(n+1) \ln^2(n+3) \, 2^n}{2^{n+1} \, n \cdot \ln^2(n+2)} = \frac{1}{2}$

Интервал сход: $\left(-2-\frac{1}{2}; -2+\frac{1}{2}\right) = (-2,5; -1,5)$

Проверим граничные точки.

$x = -\frac{5}{2}$: $\sum \frac{2^n}{(-2)^n \, n \ln^2(n+2)} = \sum \frac{(-1)^n}{n \ln^2(n+2)}$

Исследуем по пр. Лейбница:

1) знакочеред.
2) $|a_{n+1}| < |a_n|$
3) $\to 0$

Следовательно, сход. по пр. Лейбница.

$x = -\frac{3}{2}$: $\sum \frac{2^n}{2^n \, n \ln^2(n+2)} = \sum \frac{1}{n \ln^2(n+2)}$ – сход. (по интегральному пр.)

Тогда интервал сход.: $\left[-\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}\right]$

Ответ: $[-2,5; -1,5]$.

Представление ф. в степенной ряда 07.10.20

№1

$f(x) = \frac{1}{1-x}$ $\quad S_\infty = \frac{b_1}{1-q}$; $b_1 = 1$, $q = x$

$f(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ для $x \in (-1; 1)$

$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ $\quad [\ b_1 = 1;\ q = -x^2.$

$f(x) = 1 - x^2 + x^4 + \ldots + (-1)^{n+1} \cdot x^{2n} + \ldots =$

$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$, для $|x^2| < 1$

$|x^2| < 1$

$x \in (-1; 1)$

Ответ:

№2 $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \ldots + \frac{t^n}{n!} + \ldots =$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}, \quad t \in R$

<u>Задача</u> $ch\,x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\Big(\Big(1 + \cancel{x} + \frac{x^2}{2!} +$

$+ \cancel{\frac{x^3}{3!}} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\ldots\Big) + \Big(1 - \cancel{x} + \frac{x^2}{2!} - \cancel{\frac{x^3}{3!}} + \ldots +$

$+ \frac{x^n \cdot (-1)^n}{n!} + \ldots\Big)\Big) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^2}{4!} + \ldots + \frac{(1+(-1)^n)x^n}{2n!} + \ldots$

$= \sum \frac{(1+(-1)^n)\,x^n}{2n!} \overset{n\text{-четное}}{=\!=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in R$

№3 $(1+t)^\alpha = 1 + \sum \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!} t^n$

$t \in (-1; 1)$

Задача: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $\alpha = -\frac{1}{2}$; $t = -x^2$ $\quad \left(-\frac{2n-1}{2}\right)$

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum \frac{-\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) \ldots \cdot \left(-\frac{1}{2} - n + 1\right)}{n!}$

$\times (-x^2)^n = 1 + \sum \frac{(-1)^n \cdot (2n-1)!! \, (-1)^n \cdot x^{2n}}{2^n \cdot n!} =$

$= 1 + \sum \frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n!} \cdot x^{2n}$

$|-x^2| < 1$; $|x^2| < 1$; $-1 < x^2 < 1$

$-1 < x < 1$

$x \in (-1; 1)$

Ответ: ↑

№4 $\frac{1}{1-t} = \sum t^n$; $|t|<1$

Разложить по степеням $(x-b)$

$f(x) = \frac{1}{a-x} = [:a] = \frac{\frac{1}{a}}{1-\frac{x}{a}}$

$f(x) = \frac{1}{a-x+b-b} = \left[\frac{1}{a+b-(x+b)}\right] = \frac{1}{a-b-(x-b)} =$

$= [:(a-b)] = \frac{1}{a-b} \cdot \frac{1}{1-\frac{x-b}{a-b}} = \frac{1}{a-b} \cdot \sum \left(\frac{x-b}{a-b}\right)^n =$

$= \cancel{\frac{1}{a-b}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(a-b)^{n+1}} \cdot (x-b)^n$

$\left|\frac{x-b}{a-b}\right| < 1$; $-1 < \frac{x-b}{a-b} < 1$

$|x-b| < |a-b|$

$\cancel{a+b|x-b|} < x < |a-b|+b$

$|a-b|-b$

№5 $\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \ldots + \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$, $t \in R$

$f(x) = \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$

$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \ldots + \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!}$

$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x \overset{[t=2x]}{=} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left(\cancel{1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)!}\right) =$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(1 - \cancel{t^2} \ldots + \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)!}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{2!} - \frac{t^4}{4!} + \ldots\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$

Д/З №11: на 12.10.2020 $\cancel{1}\ \cancel{2}\ \cancel{3}\ \cancel{4}\ \cancel{5}$

Представить ф. по нужным степеням в степенной ряд

№2 $f(x) = \frac{1}{1+x+x^2}$, по ст. x

$$f(x) = \frac{1}{1+x+x^2} = \frac{1-x}{(1-x)\cdot(1+x+x^2)} = \frac{1-x}{1-x^3} = \frac{1}{1-x^3} - \frac{x}{1-x^3}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} x^{3n} - \underline{\sum_{n=0}^{\infty} x^{3n+1}}, \quad x \in (-1;1)$$

$$\left[\frac{x}{1-x^3} = x \cdot \frac{1}{1-x^3} = x \sum_{n=0}^{\infty} x^{3n} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{3n+1} \right]$$

Ответ: $\sum_{n=0}^{\infty} x^{3n} - \sum_{n=0}^{\infty} x^{3n+1}$, $x \in (-1;1)$

! $\left[\frac{1}{1-t} = \sum t^n, \ |t| < 1 \right]$

№5 $f(x) = \sin^4 x \quad ; \quad (x - \frac{\pi}{4})$

$$\sin^4 x = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1+\cos^2 2x - 2\cos 2x}{4} =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{\cos 2x}{2} + \frac{1+\cos 4x}{8} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 4x}{8}$$

$$\sin^4 x = \left(\sin\left(x - \pi/4\right) + \pi/4\right)\big)^4 = \left(\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\cdot \cos\frac{\pi}{4} + \right.$$

$$\left. + \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\cdot \sin \pi/4\right)^4 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 \cdot \left(\sin\underbrace{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}_{\alpha} + \cos\underbrace{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}_{\alpha}\right)^4 =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\left(1 + \sin 2\alpha\right)^2 = \frac{1}{4}\cdot\left(1 + \sin^2 2\alpha + 2\sin 2\alpha\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1-\cos 4\alpha}{2} + 2\sin 2\alpha\right) = \frac{3}{8} - \frac{\cos 4\alpha}{8} +$$

$$+ \frac{\sin 2\alpha}{2} = \left[\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \ldots + \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!}; \ t \in \mathbb{R}\right]$$

$$\left[\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \dots + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot t^{2n}}{(2n)!}, \quad t \in R\right]$$

$$= \frac{3}{8} - \frac{1}{8}\left(1 - \frac{(4\alpha)^2}{2!} + \frac{(4\alpha)^4}{4!} + \dots + \frac{(-1)^n (4\alpha)^{2n}}{(2n)!}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(2\alpha - \frac{(2\alpha)^3}{3!} + \frac{(2\alpha)^5}{5!} + \dots + \frac{(-1)^n (2\alpha)^{2n+1}}{(2n+1)!}\right) =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\left(\frac{(4\alpha)^2}{2!} - \frac{(4\alpha)^4}{4!} + \dots + \frac{(-1)^n (4\alpha)^{2n}}{(2n)!}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}(- n -) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^{2n} \cdot (x - \frac{\pi}{4})^{2n}}{(2n)!} +$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{2n+1} \cdot (x - \frac{\pi}{4})^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Ответ: ↑

N4

$f(x) = \ln(4 + 3x - x^2)$, по степеням: $(x-2)$

$$f(x) = \ln(-(x^2 - 3x - 4)) = \ln(-(x-4)\cdot(x+1)) = [x - 2 = t] =$$

$$= \ln(-(t-2)\cdot(t+3)) = \ln((2-t)\cdot(t+3)) =$$

$$= \ln(2-t) + \ln(t+3) = \ln\left(2\left(1 - \frac{t}{2}\right)\right) + \ln\left(3\left(1 + \frac{t}{3}\right)\right) =$$

$$= \ln 2 + \ln 3 + \ln\left(1 - \frac{t}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{t}{3}\right) =$$

$$= \left[\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot x^n}{n}, \quad x \in (-1, 1]\right]$$

$$= \ln 6 + 1\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot (-1)^n \cdot t^n}{2^n \cdot n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot t^n}{3^n \cdot n} =$$

$$= \ln 6 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n-1} \cdot (x-2)^n}{2^n \cdot n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (x-2)}{3^n \cdot n}, \quad x \in (1, 3)$$

$-1 < \underbrace{x-2}_{t} < 1; \quad 1 < x < 3$

Ответ ↑

№1 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1-2x}}$, по ст. x

$f(x)=x\cdot(1-2x)^{-\frac{1}{2}}=\left[m=-\frac{1}{2};\ x'=-2x\right];$

$\left[(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)\cdot(m-2)}{3!}x^3+\ldots\right.$

$\left.+\frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(n-n+1)}{n!}x^n\right];\ x=(-1;1)$

$=x\cdot\left(1+x+\frac{1\cdot3\cdot x^2}{2!}+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot x^3}{3!}+\ldots\right)=$

$=x+\frac{1}{1!}x^2+\frac{1\cdot3}{2!}\cdot x^3+\frac{1\cdot3\cdot5}{3!}\cdot x^4=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{n!}x^{n+1}$

$x\in\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$

Ответ.

№3 $f(x)=\frac{3x-8}{(2x+3)(x^2+4)}$, по ст. x

Разложим на простейшие дроби:

$\frac{3x-8}{(2x+3)(x^2+4)}=\frac{A}{(2x+3)}+\frac{Bx+C}{x^2+4}=\mathcal{D}$

$3x-8=\cancel{A(x^2+4)+B(2x+3)}\ A(x^2+4)+(Bx+C)(2x+3)$

$3x-8=Ax^2+4A+2Bx^2+3Bx+2xC+3C$

$3x-8=x^2(A+2B)+x(3B+2C)+1\cdot(4A+3C)$

Решим систему:

$\begin{cases}A+2B=0\\3B+2C=3\\4A+3C=-8\end{cases}\quad\begin{cases}A=-2B\\-8B+3C=-8\\3B+2C=3\end{cases}\quad\begin{cases}A=-2\\B=1\\C=0\end{cases}$

Получаем:

$$\mathfrak{D} = \frac{-2}{(2x+3)} + \frac{x}{x^2+4} = -\frac{1}{x+3/2} + x \cdot \frac{1}{1+(3+x^2)} =$$

$$\left[\frac{1}{1-t} = \sum t^n, \quad t \in (-1; 1)\right]$$

$$= -\frac{1}{1-(\underbrace{-0{,}5-x}_{a})} + x \cdot \frac{1}{1-(\underbrace{-3-x^2}_{b})} = -\frac{1}{1-a} + x\frac{1}{1-b} =$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} a^n + x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(x+\frac{1}{2})^n (-1)^n}{1} +$$

$$+ x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (3+x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (x+\frac{1}{2})^n \leftarrow$$ по не тем степеням

$$= -\frac{2}{3(1+\frac{2}{3}x)} + x \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1+\frac{x^2}{4}} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1+\frac{2}{3}x} + \frac{x}{4} \cdot \frac{1}{1+x^2/4} =$$

$$= -\frac{2}{3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-2}{3}\right)^n \cdot x^n + \frac{x}{4} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{4}\right)^n \cdot x^{2n} =$$

$$= \cancel{-\frac{2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 2^{n+1} \cdot x^n}{3^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}} \cdot x^{2n+1}$$

$$* \begin{cases} -1 < -\frac{2}{3}x < 1 \\ -1 < -\frac{1}{4}x < 1 \end{cases} \quad \begin{cases} -3 < -2x < 3 \\ -4 < -x < 4 \end{cases} \quad \begin{cases} -3/2 < x < 3/2 \\ -4 < x < 4 \end{cases}$$

$$x \in \left(-3/2; \ 3/2\right)$$

Ответ.