Д/з №3: на 14.09.20.

Исследовать сходимость знакопеременных рядов.

№1 $\sum \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n+100}$

Применим признак Лейбница:

1) ряд знакочередующийся;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+100} = [:n] = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0}{1+\frac{100}{n} \to 1} = \to 0$

$\Rightarrow$ ряд сходится

Ответ: сходится

№2

$$\sum (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n} = \underbrace{\sum \frac{(-1)^n}{2n}}_{1} - \underbrace{\sum \frac{(-1)^n \cdot \cos 2n}{2n}}_{2}$$

Рассмотрим каждый ряд:

1) $\sum \frac{(-1)^n}{2n}$: по признаку Лейбница:

а) знакочередующийся

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \to 0 \Rightarrow$ члены ряда убывают по модулю.

Следовательно ряд (1) сходится по пр. Лейбница

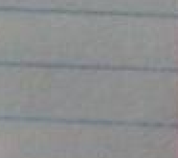
2) $\sum \frac{(-1)^n \cos 2n}{2n}$

По признаку Дирихле:

$\sum a_n = \sum \cos 2n\,(-1)^n$; $\sum b_n = \sum \frac{1}{2n}$

а) $\sum b_n = \frac{1}{2n}$ = монотонно стремится к нулю при $n \to +\infty$

б) $\sum a_n = \cos 2n\,(-1)^n$. Докажем ограниченность



$|\sum (-1)^n \cos 2n| = |\sum \cos \pi n \cdot \cos 2n| = |\sum \cos(\pi n + 2n)|$

но модулю $\Rightarrow (-1)^n$ уходит

$\leq \frac{1}{|\sin\frac{\pi+2}{2}|}$ $\Rightarrow$ ограничен.

$\sqrt{} \; |\sum_{n=1}^{n} \cos kx| = |\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx| = \Big[$ домножим на $\sin\frac{1}{2}$ = const

$= \sum \frac{\cos kx \cdot \sin\frac{1}{2}}{\sin\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sin\frac{1}{2}} \sum \underline{\cos kx \cdot \sin\frac{1}{2}} =$

$= \left[\begin{array}{l} 2\cos A \cdot \sin A = \\ = \sin(A+B) - \sin(A-B) \end{array} \right] = \frac{1}{\sin\frac{1}{2}} \cdot$

$\cdot \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x - \sin(x/2)}{2 \sin(x/2)} \leq \frac{1}{|\sin x/2|}$ при $\forall x \neq 2\pi x$

Таким образом, исходный ряд представлен в виде суммы двух сходящихся рядов $\Rightarrow$ сходится

Ответ: сходится

№3

$\sum (-1)^n \frac{n-1}{n+1} \frac{1}{\sqrt[100]{n}}$

$\frac{1}{\sqrt[100]{n}}$ – расход.

$\frac{n-1}{n+1} = \frac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} \to 1$ $\Rightarrow$ ряд из модулей расходится а сам ряд сходится условно

Применим признак Лейбница:

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

1) знакочередующийся ряд

2) найдем $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$

$\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n+1} \frac{1}{\sqrt[100]{n}} = \frac{n-1}{n \cdot \sqrt[100]{n} + \sqrt[100]{n}} = [: n\sqrt[100]{n}] =$

$= \frac{\frac{1}{\sqrt[100]{n}} - \frac{1}{n\sqrt[100]{n}}}{1 + \frac{1}{n}} \quad \frac{\to 0}{\to 1} \to 0$

Следовательно, исходный ряд сходится!

Ответ: сходится

№5

$$\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \operatorname{arctg}(n^2+n+1)$$

Применим признак Дирихле:

$\sum a_k = \frac{1}{\sqrt{n}}$; $\sum b_k = \operatorname{arctg}(n^2+n+1)$

1) $\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{1/2}}$;

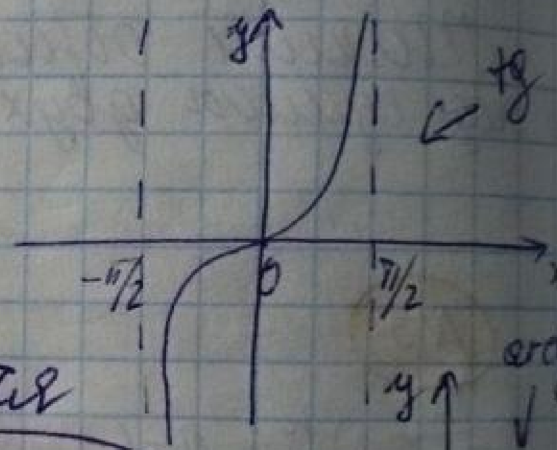
$\frac{1}{k^\alpha}$, $0<\alpha\le 1$, то $\frac{1}{k^\alpha} \downarrow 0$ при $k \to \infty$ =>

ряд монотонно стремиться к нулю (сходится)

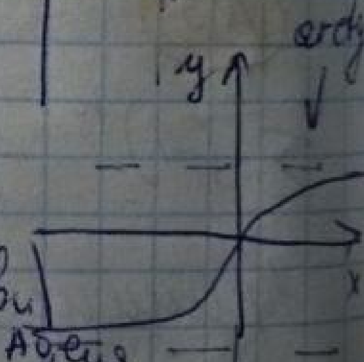
2) $\sum \operatorname{arctg}(n^2+n+1)$

$\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{arctg}(n^2+n+1) \to \pi/2$

ограничен ряд $\sum b_k$



Таким образом ряд сходится



$b_{n+1} = \operatorname{arctg}((n+1)^2+n+2) = \operatorname{arctg}(n^2+3n+3)$

Ответ: сходится

№2 $\operatorname{arctg} x$ - возраст. ф-я $|b_{n+1}|>|b_n|$ сход. по пр. Абеля.

$$\frac{(-1)^n (2n)!!}{(n!)^2 \cdot 4^n} = \frac{(-1)^n \cdot 2^n \cdot n!}{(n!)^2 \cdot 4^n} = \frac{(-1)^n}{n! \cdot 2^n};$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n!\,2^n} = 0 \Rightarrow |a_n| \downarrow \Rightarrow$ ряд сходится по признаку Лейбн.

Условная и абсолютная сходимость 14.09.20

№1 $\sum \frac{(2n+1)\cdot\cos 2n}{\sqrt[3]{n^7+2n+5}}$; полож. ряд

$$|a_n| = \frac{(2n+1)\cdot|\cos 2n|}{\sqrt[3]{n^7+2n+5}} \underset{\cos 2n = 1}{\overset{\text{заменим}}{\le}} \frac{(2n+1)\cdot 1}{\sqrt[3]{n^7+2n+5}}$$

признак сравнения отношений

$$\underset{n\to\infty}{\sim} \frac{2n}{\sqrt[3]{n^7}} = \frac{2}{n^{4/3}}$$

Сумма $\sum\frac{2}{n^{4/3}}$ сходится по степенному признаку ($4/3>1$) по пр. сравнения отношений и признаку сравнения $\sum|a_n|$ сходится, значит $\sum|a_n|$ сход. абсолютно. (по опр.)

№2. $\sum \frac{(-1)^n}{\ln^2(n+1)}\cdot\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

$$|a_n| = \frac{\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\ln^2(n+1)} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{2n\ln^2(n+1)} \sim \frac{1}{2n\ln^2 n}$$

$$\left[\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+\underbrace{\frac{x^4}{4!}+\dots}_{o(x^2)}\right]$$

Интегральный признак Коши:

$f(x)=\frac{1}{2x\ln^2 x}$ - монотонно ↓

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{2x\ln^2 x}dx = \frac{1}{2}\int_2^{+\infty}\frac{1\,dx}{x\ln^2 x} = \frac{1}{2}\int_2^{+\infty}\frac{d(\ln x)}{\ln^2(x)} =$$

$$= -\frac{1}{2}\cancel{(-2)}\cdot\frac{1}{\ln(x)}\Big|_2^{+\infty} = -1\cdot 0+\frac{1}{2\ln 2} = \frac{1}{2\ln 2}$$

ч.с. ряд сходится по интегральному кр. Коши => по пр. сравнения отношений => сход. абсолютно.

№3 $\sum \frac{(-1)^n \cdot 3^n}{n^2 \cdot 2^n}$

$|a_n| = \frac{3^n}{n^2 \cdot 2^n} \leq \frac{4^n}{n^2 \cdot 2^n} = \frac{2^n}{n^2}$ полож. ряд.

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \sqrt[n]{a_n} = \frac{3}{n^{2/n} \cdot 2} = \frac{3}{2 \cdot n^{2/n}} \to 3/2 \Rightarrow a_n \not\to 0$

$3/2 > 1 \Rightarrow \sum |a_n|$ - расходится

исходный ~~условный~~ ряд расходится, т.к. не выполняется необходимое условие сходимости.

№4 $\sum \frac{n+1}{n^2+1} \cdot \sin 2n$

$|a_n| = \frac{n+1}{n^2+1} |\sin 2n| \geq \frac{n+1}{n^2+1} \cdot \sin^2 2n =$

$= \frac{n+1}{n^2+1} \cdot \frac{1 - \cos 4n}{2} = \frac{n+1}{n^2+1} \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 4n}{2}\right) =$

$= \frac{n+1}{2(n^2+1)} - \frac{(n+1)\cos 4n}{2(n^2+1)} = \sum A$

1) $\frac{n+1}{2(n^2+1)}$ ряд расходится по признаку сравнения отношений с гармоническим рядом, $\frac{1}{n}$

2) $\frac{(n+1)\cos 4n}{2(n^2+1)}$,

$\sum a_n = \frac{n+1}{2(n^2+1)}$ - БМП $\to 0$. (стремится ли монотонна $\exists$ взять производную показать, что она < 0)

она монотонна

$\sum |b_n| = \sum |\cos 4n| \leq \frac{1}{|\sin \frac{4n}{2}|}$ - ограничена

$\Rightarrow \sum \frac{(n+1)\cos 4n}{2(n^2+1)}$ - сходится по признаку Дирихле. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ряд $\sum A$ расходится, как сумма сходящегося и расходящегося.

По пр. Дирихле: исходный ряд сходится

$a_n = \frac{n+1}{2(n^2+1)}$ монотонно стремится к нулю, а

$b_n = \sin 2n$; $\left|\sum_{n=1}^{N} b_n\right| \leq \frac{1}{\sin 1}$ - огран.

Итог: <u>исходный ряд сходится условно.</u>

№5

$\sum \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{2\cdot\sqrt[3]{n^2}}\right)$ $\qquad \forall x$ $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$

$\ln(1+\alpha) = \alpha + O(\alpha^2)$

~~$|a_n|$~~ $=$ $a_n = \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2}}\right)$ ~~$\sim \ln(1+$~~ $=$

$= \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2}} + O\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right)$, $\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2}} = A$

сходится по Лейбницу

сумма $\left|\sum O\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right)\right| \leq \sum \frac{1}{n^{4/3}}$

$\left|O\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right)\right| \leq \frac{1}{n^{4/3}} \Rightarrow \sum \left|O\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right)\right|$ - сх. по признаку сравнения со степенным рядом ($4/3 > 1$)

Значит, $\sum O\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right)$ - сх. абсолютно.

~~Зн.~~ исходный ряд и ряд A ведут себя одинаково $\Rightarrow$ ряд исходный сходится условно.

<u>Д/З:</u> исследовать ряды на абсолютную и неабсолютную сходимость.

3) - x - параметр, т. е. при одних сходится, а при других расходится.

Д/з №4 : 16.09.20

Исследовать ряды на абсолютную и неабсолютную сходимость

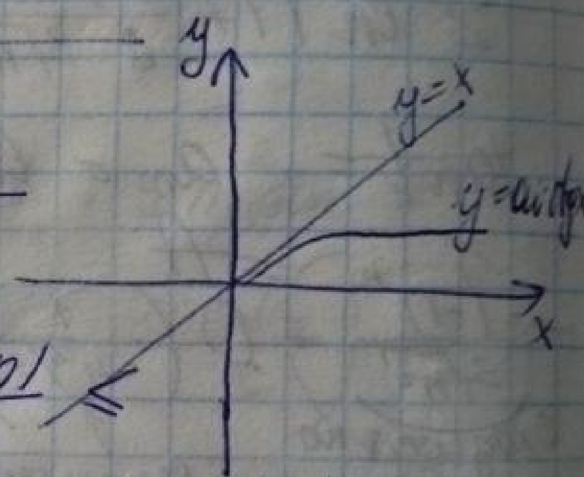
№1 $\cancel{\sum (-1)^{n+1} \frac{2^n}{n} \sin^{2n} x}$ $\to \frac{1}{7}$

$\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt[5]{n}}\right) \cdot \operatorname{arctg} \frac{\sin n}{n} =$

$\left[\ln(1+\underset{\text{нечто малое}}{\alpha}) = \alpha + O(\alpha^2)\right]$

$\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt[5]{n}}\right) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt[5]{n}}\right.$

$\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt[5]{n}}\right) \cdot \operatorname{arctg} \frac{|\sin n|}{n}$



$\sum \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt[5]{n}}\right) \cdot \operatorname{arctg} \frac{\sin n}{n}$

$|a_n| = \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt[5]{n}}\right) \cdot \operatorname{arctg} \frac{|\sin n|}{n} \leq$

$\leq \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt[5]{n}}\right) \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{n} \leq \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt[5]{n}}\right) \cdot \frac{1}{n} \leq$

$\leq \frac{1}{\sqrt[5]{n}} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^{6/5}}$ - сходится абсолютно

№2

$$\sum (-1)^n \frac{\sqrt[3]{2n+3}}{\sqrt{n}+4}$$

$$|a_n| = \frac{\sqrt[3]{2n+3}}{\sqrt{n}+4} \sim \frac{\sqrt[3]{2n}}{\sqrt{n}} = \frac{2^{\frac{1}{3}} \cdot n^{\frac{1}{3}}}{n^{1/2}} = 2^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{n^{\frac{1}{6}}}$$ расходится

$\Rightarrow |a_n|$ расходится по признаку сравнения с гармон.

Проверим, как ведет себя ~~обычнов~~ исходный ряд:

$$a_n = (-1)^n \frac{\sqrt[3]{2n+3}}{\sqrt{n}+4} \to 0$$

Легко увидеть, что данная послед. монотонна. $\Rightarrow$

$|a_{n+1}| \to$ ряд сходится $\Rightarrow$

исходный ряд сходится ~~абсолютно~~ условно.

№3

$$\sum (-1)^{n+1} \frac{2^n}{n} \sin^{2n} x \text{, где } x \text{ - параметр.}$$

$$|a_n| = \frac{2^n}{n} \cdot \sin^{2n} x$$

Применим признак Коши:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n} \cdot \sin^{2n} x} = \frac{2\sin^2 n}{\underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to 1}} = 2\sin^2 x$$

x-параметр, следовательно рассмотрим 2 варианта:

1) $c < 1$, $\sum a_n$ - сходится

$$2\sin^2 x < 1 \text{ , } \sin^2 x < \frac{1}{2} \text{ ; } |\sin x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} < \sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(-1)^{k+1}\frac{\pi}{4} + \pi k < x < (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k, \; k \in \mathbb{Z}$$

Следовательно исходный ряд сходится абсолютно

2) $c>1$, $\sum a_k$ - расходится

$\sin^2 x > \frac{1}{2}$; $|\sin x| > \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}$ или $\sin x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$x > (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k$ | $x < (-1)^{k+1} \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

ряд расходится => исходный ряд тоже

3) $c=1$: $\sin^2 x = 1$; $|\sin x| = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ расходится

$\sum (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ - сходится условно как ряд Лейбница.

№4

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^{n+1}}$$

$$|a_n| = \frac{1}{\sqrt{n} + (-1)^{n+1}} \left[\xrightarrow[n\to\infty]{} 0\right] \text{ - сходится}$$

Проверим, как себя ведет сам ряд:

$$a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^{n+1}} = [\cdot \text{ на сопряженное}] =$$

$$= \frac{(-1)^n(\sqrt{n} - (-1)^{n+1})}{n-1} = (-1)^n \cdot \frac{\sqrt{n} + (-1)^n}{n-1} =$$

$$= \left[\begin{matrix}\text{разбиваем на}\\ \text{две суммы}\end{matrix}\right] = \sum (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n-1} + \sum \frac{1}{n-1} = A$$

[сходится по признаку Лейбница $\frac{\sqrt{n}}{n-1} \to 0$ монотонно] [расходится по пр. сравнения с гармоническим]

=> ряд A - расходится => ряд a_n - расходится

=> исходный ряд расходится.

Ответ: ↗

Бесконечное произведение 16.09.20.

$p = a_1 a_2 \ldots a_n \to 1$

$\ln p = \sum \ln a_n = S$

$p = e^S$

$\ln a_n = \ln(1 + \alpha_n)$

$\prod(1+\alpha_n)$ - сход $\iff$ $\sum \alpha_n$ - сход

$\prod(1+\alpha_n)$ - сход. абсолютно, если сх.

$\prod(1+|\alpha_n|)$ сход.

2) α_n меняет знак $\sum \alpha_n$, $\sum \alpha_n^2$

Если оба $\sum \alpha_n$ и $\sum \alpha_n^2$ - сход, то $\prod(1+\alpha_n)$ - сход. абсолют.

$\prod(1+\alpha_n)$ - расход.

№1

$$\prod_{n=3}^{\infty} \frac{n^2-4}{n^2-1} = \prod_{n=3}^{\infty} \frac{(n-2)(n+2)}{(n-1)(n+1)}$$

$$\frac{(n-3)\cdot(n+1)}{(n-2)\cdot n}$$

$$P_{n-2} = \frac{1\cdot 5}{2\cdot 4} \cdot \frac{2\cdot 6}{3\cdot 5} \cdot \frac{3\cdot 7}{4\cdot 6} \cdot \frac{4\cdot 8}{5\cdot 7} \cdot \frac{5\cdot 9}{6\cdot 8} \cdots \frac{(n-2)\cdot(n+2)}{(n-1)\,(n+1)}$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{(n+2)}{(n-1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{4}$$

произведение $\to$ к $\frac{1}{4}$.

№2

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+2n+1}{n(n+2)}\right) = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$$

$$\prod_{n=1}^{\infty} p_n = \left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{8}\right)\cdot\left(\right.$$

$$P_n = \frac{2\cdot2}{1\cdot3}\cdot\frac{3\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{4\cdot4}{3\cdot5}\cdot\frac{4\cdot4}{4\cdot6}\cdot\frac{5\cdot5}{5\cdot7}\cdot\frac{n^2}{(n-1)\cdot(n+1)}\cdot\frac{(n+1)^2}{n(n+2)} =$$

$$= 2\cdot\frac{n+1}{n+2}\xrightarrow[n\to\infty]{}2$$

№3

$$\prod_{n=0}^{\infty}\left(1+x^{2^n}\right)$$

$$P_n = (1+x)\cdot(1+x^2)\cdot(1+x^4)\cdot(1+x^8)\cdot\ldots\cdot$$

$$\cdot\left(1+x^{2^n}\right) = [\text{домножим и разделим на } (1-x)]$$

$$= \left(\frac{\left(1-\left(x^{2^n}\right)^2\right)}{(1-x)}\right) = \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{1-x}\text{, если } |x|<1 \text{ — сходится}$$

если $|x|\geq 1$ — P_n — расход

$\prod\frac{1}{n^2}$ — расходится, т.к. $\frac{1}{n^2}\not\to 1$

№4

$$\prod_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n+2}{n+3}}$$

$$P_n = \sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{\frac{3}{4}}\cdot\sqrt{\frac{4}{5}}\cdot\ldots\sqrt{\frac{n+2}{n+3}} = \sqrt{\frac{2}{n+3}}\to 0 \text{ расход.}$$

Сходимость произведения: возьмем логарифм от произвед.

$$\sum\frac{1}{2}\ln\frac{n+2}{n+3} = \frac{1}{2}\sum\left(1-\frac{1}{n+3}\right)$$

$$\ln\left(1-\frac{1}{n+3}\right)\sim\frac{1}{n+3} \text{ — расходится}$$

№5

$$\prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{1+n}$$

Возьмем логарифм от произведения, это будет равно сумме логарифмов.

$$\sum \ln (1+n)^{\frac{1}{n}} = \sum \frac{1}{n} \ln (1+n)$$

$$a_n = \frac{1}{n} \ln (1+n) \sim \frac{\ln n}{n} \geqslant \frac{1}{n}$$

Сумма $\sum \frac{1}{n}$ - расходится как гармонический

по пр. сравнения $\sum \frac{\ln}{n}$ - расход.

по пр. сравн. отнош:

$\sum \ln (1+n)^{\frac{1}{n}}$ - расходится. => исходное произвед. тоже расходится.

№6 исследовать на абсолютную и условн. сходимость.

$$\prod \left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$$

Рассмотрим $\prod (1+|\alpha_n|) = \prod \left(1+\frac{1}{n}\right)$

Так как ряд $\sum \frac{1}{n}$ - расходится, то $\prod \left(1+\frac{1}{n}\right)$ - расход. $\prod (1+|\alpha_n|)$

Рассмотрим ряд ~~$\sum |\alpha_n|$~~ $\sum \alpha_n^2 = \sum \frac{1}{n^2}$ - сходится по степенному признаку

ряд $\sum \alpha_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ - сход. по признаку (условно) Лейбница

Т.к. $\sum \alpha_n^2$ и $\sum \alpha_n$ сходятся, то исходное произведение сходится условно

№7

$$\prod \left(1+\frac{1}{n^p}\right)$$

$\alpha_n = \frac{1}{n^p} > 0$, значит сходимость произведения <=> сходимость $\sum \alpha_n$

$$\sum a_n = \sum \frac{1}{n^p} = \begin{cases} \text{сходится, если } p > 1 \\ \text{расходится, если } p \le 1 \end{cases}$$

Д/З: №5 1) найти значен.

$$\prod_{n=2}^{\infty} n^2 - 1$$

2) исследовать сходимост

x - параметр

3) исследовать П на абсолютную и неабсолютную сход.

4)

Д/З № 5: 20.09.2020 + спросить про з/нд из прошлой д/з

№1 найти значение:

$$\prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^3-1}{n^3+1} = \frac{2}{3}$$

$$P = \frac{2^3-1}{2^3+1} \cdot \frac{3^3-1}{3^3+1} \cdot \frac{4^3-1}{4^3+1} \cdot \frac{5^3-1}{5^3+1} \cdot \ldots \cdot \frac{(n-1)^3-1}{(n-1)^3+1} \cdot$$

$$\cdot \frac{n^3-1}{n^3+1} = \frac{(2-1)\cdot(2^2+2+1)}{(2+1)\cdot(2^2-2+1)} \cdot \frac{(3-1)\cdot(3^2+3+1)}{(3+1)\cdot(3^2-3+1)} \cdot$$

$$\cdot \frac{(4-1)\cdot(4^2+4+1)}{(4+1)\cdot(4^2-4+1)} \cdot \frac{(5-1)(5^2+5+1)}{(5+1)\cdot(5^2-5+1)} \cdot \ldots \cdot \frac{(n-2)((n-1)^2+n)}{(n)\cdot((n-1)^2-n+2)}$$

$$\cdot \frac{(n-1)\cdot(n^2+n+1)}{(n+1)\cdot(n^2-n+1)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{n^2+n+1}{n(n+1)} = [:n^2] = A$$

$$= \left[\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (n-2)\cdot(n-1)}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot n \cdot (n+1)} = \frac{1 \cdot 2}{n(n+1)} \right]$$

$$\left[\frac{7 \cdot 13 \cdot 21 \cdot 31 \cdot \ldots (n^2+n+1)}{3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 21 \cdot \ldots \cdot (n^2-n+1)} = \frac{n^2+n+1}{3} \right]$$

$$A = \frac{2}{3} \cdot \frac{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{2}{3}$$

Ответ: 2/3

№2 исследовать сходимость:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)\cdot e^{-x/n}$$, где x – параметр

$e^{-x/n}$: разложим в ряд Тейлора $\left(e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)\right)$

$$e^{-x/n} = 1-\frac{x}{n}+\frac{x^2}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$p_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{x}{n}+\frac{x^2}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = 1\underbrace{-\frac{x^2}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{\alpha_k}$$

По т.: ~~если~~ для сходимости $\Pi(1+\alpha_k) \Leftrightarrow \sum \alpha_k$ – сход.

Значит, рассмотрим $\sum \alpha_k$.

$$p_n = 1\underbrace{-\frac{x^2}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{\alpha_k} = 1+\alpha_k$$

$$\sum \alpha_k = \sum\left(-\frac{x^2}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) < 0$$

x не влияет (?) сходится по степенному признаку (?)

тогда ряд сходится => $1+\alpha_k$ – сход => исход. произв. сход.

$\sum o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ – сходится по степенному признаку

$\sum\left(-\frac{x^2}{2n^2}\right)$: в данном случае значение параметра x не имеет значение. $\sum\frac{1}{n^2}$ – сходится => $\sum\left(-\frac{x^2}{2n^2}\right)$ сходится (по сравнению с $\frac{1}{n^2}$) => $1+\alpha_k$ – сходится

=> исходный ряд сходится => исходное произведение сходится

Ответ: сходится при любом значении параметра x

3092 №3 исследовать на абсолютную и неабсолютную сходимость

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+(-1)^n}\right)$$

$$p_n=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+(-1)^n}=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+(-1)^n}+1-1=1+\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}+(-1)^n}$$

1) По теореме: (α_k) - знакочеред. послед., если один из рядов $\sum\alpha_k$ или $\sum\alpha_k^2$ сход., а другой расходится, то произведение расходится.

Значит рассмотрим ряды $\sum\alpha_k$ и $\sum\alpha_k^2$

$p_n=1+\alpha_k$ ~~сходится по пр. Лейбница~~

$\sum\alpha_k=\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ - расход. ~~(из прошлого д/з)~~ (?)

$\sum\alpha_k^2=\frac{1}{(\sqrt{n}+(-1)^n)^2}\sim\frac{1}{n}$ - расходится

~~1 сход, 2 расходится ⇒ исходный расходится~~

$\sum\alpha_k$ и $\sum\alpha_k^2$ - расходятся - произведение может и сх. и расход.

2) По теореме: произвед. сход. ⇔ ряд из логарифмов сход. ⇒ ⇒ $\prod(1+\alpha_k)$ - сход ⇔ $\sum\alpha_k$ сход.

$p_n=1-\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$

$\alpha_k=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ - расходится (из прошлого д/з) ⇒

изходный ряд расходится ⇒ исходное произведение расходится

Ответ: расходится

№4 исследовать на абсолютную и неабсолютную сходимость

$\prod\left(1+\frac{\sin n}{\ln n}\right)$ – расходится

$\prod(1+\alpha_k)$ рассмотрим $\alpha_k = \frac{\sin n}{\ln n}$

знак у нее меняется $\Rightarrow$ рассматриваем α_k и α_k^2

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{\ln n}$ $\leftarrow$ ограничено, $\leftarrow$ монотонно $\to 0$ – сход. по пр. Дирихле

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{\ln^2 n} = \frac{1-\cos 2n}{2\ln^2 n} = \frac{1}{2\ln^2 n} - \frac{\cos 2n}{2\ln^2 n}$

$\sum\frac{\cos 2n}{2\ln^2 n}$ – сход. по Дирихле

$\sum\frac{1}{2\ln^2 n}$ – расходится $\left(\geq \sum\frac{1}{n}\right) \Rightarrow$

$\sum\alpha_k^2$ – расходится как сумма сход. и расход. $\Rightarrow$

исходное произвед. расходится.

Ответ.

Равномерная сходимость функц. рядов 21.09.20.

№1 $f_n(x) = \frac{2n^2}{2n^2+3x^2}$, $x\in[-1;1]$

исследовать на сходимость равномерную.

$f(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2}{2n^2+3x^2} = 1$, при $x\in[-1;1]$.

Супримальный пр.: $\sup\limits_{[-1,1]}\left|\frac{2n^2}{2n^2+3x^2}-1\right| =$

$= \sup\limits_{[-1,1]}\left|\frac{-3x^2}{2n^2+3x^2}\right| = \sup\limits_{[-1,1]}\frac{3x^2}{2n^2+3x^2} \leq \frac{3}{2n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

самый большой

самый маленький

по супремальному критерию $f_n(x) \overset{[-1;1]}{\rightrightarrows} 1$

Ответ: $\Rightarrow$

№2

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n+x} \qquad x \in [0;1]$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{nx}{1+n+x} = \frac{nx}{n} = x$$

$$\sup_{[0;1]} \left| \frac{nx}{1+n+x} - x \right| = \sup_{[0;1]} \left| \frac{\cancel{nx} - x - \cancel{nx} - x^2}{1+n+x} \right| =$$

$$= \sup_{[0;1]} \frac{x+x^2}{1+n+x} \leq \frac{2}{n+1} \leq \frac{2}{n} \to 0 \Rightarrow \text{и } \sup \to 0 \Rightarrow$$

$$f_n(x) \overset{[0;1]}{\rightrightarrows} x$$

$\boxed{\text{случай}}$ $x \in [1;+\infty)$

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \frac{nx}{1+n+x} = x$$

в точке n $x_n = n$

$$\sup_{[1;+\infty)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{[1;+\infty)} \frac{x^2+x}{1+n+x} \geq \frac{n^2+n}{1+2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty;$$

по супремальному критерию $f_n(x) \overset{[1;+\infty)}{\not\rightrightarrows} x$

Ответ: $\not\Rightarrow$

№3

$$f_n(x) = x^n - x^{2n}, \quad x \in [0;1].$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}(x^n - x^{2n}) \Rightarrow 0$$

$$\sup_{[0;1]} |x^n - x^{2n}| = \sup_{[0;1]} (x^n - x^{2n}) = \frac{1}{4} \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$$

Исследовать последовательность на равномерную сходимость на заданном множестве

$$f_n(x) = n \cdot \sin\frac{1}{nx}, \quad x \in [1; +\infty)$$

1) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} n \cdot \sin\frac{1}{nx} = \left[\begin{matrix}\text{приведем}\\ \text{к замеч.}\\ \text{пределу}\end{matrix}\right] \lim \frac{\sin t}{t} \underset{t\to 0}{\to} 1$,

$$= \lim_{n\to\infty} \cancel{n} \cdot \frac{1}{\cancel{n} \cdot x} \cdot \frac{\sin\frac{1}{nx}}{\frac{1}{nx}} = \lim \frac{1}{x}$$

$\frac{1}{nx} \to 0$, $\frac{\sin\frac{1}{nx}}{\frac{1}{nx}} \to 1$

2) $\sup\limits_{[1;+\infty)} \left| n \cdot \sin\frac{1}{nx} - \frac{1}{x} \right| = \sup\limits_{[1;+\infty)} \left| n \cdot \left(\frac{1}{nx} - \frac{\sin(\tau)}{2} \cdot \frac{1}{n^2x^2} \right) - \frac{1}{x} \right| =$

$$\left[\sin t = t + \frac{-\sin(\tau)}{2!} \cdot t^{n+1} \right]$$

$= \sup\limits_{[1;+\infty)} \left| \left(\cancel{\frac{1}{x}} - \frac{\sin(\tau)}{2n x^2} - \cancel{\frac{1}{x}} \right) \right| = \sup\limits_{[1;+\infty)} \frac{\sin(\tau)}{2n x^2} \leq \frac{1}{2n} \underset{n\to\infty}{\to} 0$

Следовательно, по супримальному критерию

$$f_n \overset{[1;+\infty)}{\rightrightarrows} \frac{1}{x}$$

Ответ: сходится равномерно

Рассмотрим $y(x) = x^n - x^{2n}$

$y'(x) = nx^{n-1} - 2nx^{2n-1} = n(x^{n-1} - 2x^{2n-1}) =$

$= n\cdot x^{n-1}(1 - 2x^n) = 0$

$x^{n-1} = 0$; ~~x=0 n-1~~ ; $x = 1$;

$1 - 2x^n = 0$; $x^n = \frac{1}{2}$; $x = \sqrt[n]{\frac{1}{2}}$

$y(0) = 0$; $y(1) = 0$; $y(\sqrt[n]{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{4}$

По супр. пр. $(x^n - x^{2n}) \overset{[0,1]}{\not\rightrightarrows} 0$

№4

$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$, $x \in R$

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{x^2 + \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\to 0}} \to |x|$

$\sup\limits_{R} \left| \sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}} - |x| \right| = \sup\limits_{R} \frac{\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}} - x^2}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}} + |x|} =$

$= \sup\limits_{R} \frac{\frac{1}{n^2} \to 0}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}} + |x|} \leq \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\to} 0$

По супр. пр. $\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}} \overset{R}{\rightrightarrows} |x|$

Д/з №6.

исследовать последов. на равномерную сходимость на заданном множ.

Д/з №6: 23.09.20 ~~№1~~, ~~2~~, ~~3~~, ~~4~~, 5

Исследовать последовательность на равномерную сходимость на заданном множестве.

№3 $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$, $x \in [0;1]$

1) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty}(x^n - x^{n+1}) \to 0$

2) $\sup\limits_{[0;1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{[0;1]} |x^n - x^{n+1}| = A$

Рассмотрим $y(x) = x^n - x^{n+1} = x^n(1-x)$

$y'(x) = nx^{n-1} - (n+1)\cdot x^n = x^{n-1}(n - (n+1)\cdot x) = 0$

$x^{n-1} = 0$ или $(n+1)\cdot x = n$

$x = 0$ $\qquad x = n/n+1$

$y_1(0) = 0$ $\qquad y_2(n/n+1) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) =$

$y_2 > y_1 \Rightarrow$ $\qquad = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1}$

$A = \sup\limits_{[0;1]} |x^n - x^{n+1}| = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Следовательно, по супремальному кр.

$f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{[0;1]}{\rightrightarrows}} 0$

Ответ: сходится равномерно

№2 $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2\cdot x^2}$, $x \in (0;1)$

1) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{nx}{1+n^2x^2} \longrightarrow 0$ $\left[\sim \frac{nx}{n^2x^2} = \frac{1}{nx} \to 0\right]$

2) $\sup\limits_{x\in(0;1)} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{(0;1)} \left|\frac{nx}{1+n^2x^2} - 0\right| = \sup\limits_{(0;1)} \frac{nx}{1+n^2x^2} =$