ДЗ №:15

Найти предел

1. $\lim\limits_{\alpha\to0}\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+\alpha^2}\,dx$

2. $\lim\limits_{\alpha\to0}\int_0^2 x^2\cos\alpha x\,dx$

3. Можно ли сделать предельный переход под знаком интеграла в выр-нии

$\lim\limits_{y\to0}\int_0^1 \frac{x}{y^2}e^{-\frac{x^2}{y^2}}\,dx$?

4. Вычислить $\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}\,dx$, $a,b>0$ $\left[\frac{x^b-x^a}{\ln x} = -\int_a^b x^y\,dy\right]$

5. Применяя дифф. по параметру вычислить

$\int_0^{\pi}\ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)\,dx$, $|\alpha|<1$

№:1

или 2сп. $\varphi(x)=\sqrt{x^2}=|x|$

$\sup\left|\sqrt{x^2+\alpha^2}-|x|\right| \xrightarrow[\alpha\to0]{} 0 \Rightarrow f\rightrightarrows\varphi$

$$\lim_{\alpha\to0}\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+\alpha^2}\,dx = 2\int_0^1\sqrt{x^2+\alpha^2}\,dx$$, По т. о пред. перех. $=2\int_0^1|x|dx = 2\frac{x^2}{2}\Big|_0^1=1$

λ из окр 0

Поскольку $f(x,\alpha)=\sqrt{x^2+\alpha^2}$ непр. на мн-ве $[-1;1]\times[-1;1]$,

то $I(\alpha)=\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+\alpha^2}\,dx$ также непр. ф-ция $\Rightarrow \lim\limits_{\alpha\to0}I(\alpha)=I(0)$

$$I(0)=2\int_0^1\sqrt{x^2}\,dx = 2\int_0^1|x|\,dx = 2\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = 1$$

№:2

$\varphi(x)=\lim\limits_{\alpha\to0}x^2\cos^2\alpha = x^2$

$\sup|x^2\cos\alpha x - x^2| \xrightarrow[\alpha\to0]{} 0 \Rightarrow f\rightrightarrows\varphi$

$\lim\limits_{\alpha\to0}\int_0^2 x^2\cos\alpha x\,dx$ По т. о перех. $\int_0^2 x^2\cos\alpha x\,dx = \int_0^2 x^2dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^2=\frac{8}{3}$

Т.к. $x^2\cos\alpha x$ непр. на $[0;2]\times[-1;1]$, то

$$\lim_{\alpha\to0}I(\alpha)=I(0)=\int_0^2 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{8}{3}$$

№3

$\lim\limits_{y\to 0}\int_0^1 \frac{x}{y^2} e^{-\frac{x^2}{y^2}}\,dx$

Должно выполняться равенство:

$$\lim_{y\to y_0}\int f(x,y)\,dx = \int\left(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right)dx$$

п.ч. $\lim\limits_{y\to 0}\int_0^1 \frac{x}{y^2} e^{-\frac{x^2}{y^2}}\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x}{y^2} e^{-\frac{x^2}{y^2}}\,d\left(-\frac{x^2}{y^2}\right) = \lim\limits_{y\to 0}\frac{1}{2y^2}\left(e^{-\frac{x^2}{y^2}}\right)\Big|_0^1 =$

$\cancel{= \lim\limits_{y\to 0}\left(\frac{1}{y^2}\left(e^{-\frac{1}{y^2}}-1\right)\right) = \lim\limits_{y\to 0}\frac{1}{2y^2 e^{-\frac{1}{y^2}}} - \lim\limits_{y\to 0}\frac{1}{2y^2}}$

$= \lim\limits_{y\to 0} -\frac{1}{2}\left(e^{-\frac{x^2}{y^2}}\right)\Big|_0^1 = \lim\limits_{y\to 0}\left(e^{-\frac{1}{y^2}}-1\right)\left(-\frac{1}{2}\right) = \lim\limits_{y\to 0}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(e^{-\frac{1}{y^2}}-1\right) =$

$= \frac{1}{2}$

л.ч.

$\int_0^1\left(\lim\limits_{y\to 0}\frac{x}{y^2} e^{-\frac{x^2}{y^2}}\right)dx$

$\int_0^1 0\,dx = 0$

Переход к пределу недопустим.

№4 Интегрирование ф-ции

$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\,dx,\ (a,b>0) = -\int_0^1\left(\int_a^b x^y\,dy\right)dx$

$\cancel{f(x,y) = \frac{x^b - x^a}{\ln x} \quad x\in[0,1)}$

т.к. $\int_a^b x^y\,dy$ непр. на $[0;1]$, $[a,b]$, то можно применить т-му об интегрировании ИЗОИ

$$-\int_0^1 \left(\int_a^b x^y dy\right) dx = -\int_a^b dy \int_0^1 x^y dx = -\int_a^b \left(\frac{x^{y+1}}{y+1}\right)\Big|_0^1 dy =$$

$$= -\int_a^b \left(\frac{1}{y+1}\right) dy = -\ln|y+1|\Big|_a^b = -\ln(b+1) + \ln(a+1) =$$

$$= \ln\frac{a+1}{b+1}$$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

№15 ф-ла Лейбница $1-2\alpha\cos x+\alpha^2 \neq 0$ $D = 4\cos^2 x - 4 = 0$

$$\int_0^\pi \ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)dx \qquad |\alpha|<1$$

$= 4(\cos^2 x - 1) =$
$= -4\sin^2 x$
$= \frac{2\cos x \pm 2i\sin x}{2} =$
$= \cos x \pm i\sin x$

$$F(\alpha) = \int_0^\pi \ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)dx$$

$$\cancel{F'(\alpha) = \int_0^\pi \frac{2\alpha\sin x}{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}dx}$$

$$F'(\alpha) = \int_0^\pi \left(\ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)\right)'_\alpha dx = \int_0^\pi \frac{-2\cos x+2\alpha}{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}dx =$$

$$= -2\int_0^\pi \left(\frac{\cos x-\alpha}{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}\right)dx = \cancel{2\int_0^\pi \frac{\cos x-\alpha}{1}}$$

$$= \int_0^\pi \frac{2\alpha-2\cos x}{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}dx = 2\int_0^\pi \frac{\alpha\, dx}{1-2\alpha\cos x+\alpha^2} + 0$$

перемножение аргумент. кос и они сокращ.

$R(\sin x, \cos x)$

1) $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то вносим под зн. диф. $\sin x$

2) $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то вносим $\cos x$

3) $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то вносим $\operatorname{tg} x$

Если ничего не сработало, то исп. универсальную тригонометрич. постановку

$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ $\cos x \ldots$

$dx \ldots$