Übungsblatt 2

Physikalisch-basierte Simulation und Animation

Dr.-Ing. Johannes S. Mueller-Roemer und Stephanie Ferreira, MSc

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2023
Übungsblatt 2

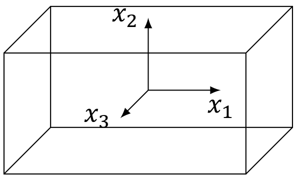
Anmerkung zur Bewertung

Durch das Lösen der unten genannten Aufgaben sind bis zu 13 Punkte erreichbar, jedoch werden je Übungsblatt maximal 10 Punkte gewertet. Durch das Bearbeiten aller Aufgaben können somit Fehler ausgeglichen werden. Bewertet werden Ergebnisse und Herleitungen.

Aufgabe 2.1: Trägheitstensoren

2.1a) Trägheitstensor eines Quaders (2 Punkte)

Berechnen Sie den Trägheitstensor $\mathbf{J}$ eines Quaders mit den Seitenlängen a, b, c bezüglich eines Koordinatensystems im Schwerpunkt des Körpers:



Bei konstanter Dichte ρ, ist der Trägheitstensor bezüglich des Koordinatenursprungs im Schwerpunkt gegeben durch

$$J_{ij} = \rho \iiint_V (||\mathbf{x}||^2 \delta_{ij} - x_i x_j) \mathrm{d}V, \tag{1}$$

wobei $||\cdot||$ die euklidische Norm, $\mathbf{x}$ der Positionsvektor, V das Volumen des Körpers und δ_{ij} das Kronecker-Delta

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{, falls } i = j \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases} \tag{2}$$

ist.

Nutzen Sie die vorhandenen Symmetrien aus.

2.1b) Tensor oder Vektor (2 Punkte)

In dem obigen Beispiel setzt sich der Trägheitstensor aus 3 Diagonaleinträgen zusammen, begründen sie, wieso dies der Fall ist. Zeigen Sie die Bedeutung der Nebendiagonaleinträge, anhand eines um die x_3-Achse um 45° rotierten Quaders. Unter welcher anderen Rotation würden man dieselben Diagonaleinträge trotz unterschiedlicher Nebeneinträge erhalten?

Hinweis: Die Rotation des Trägheitstensors kann mithilfe der Formel $\mathbf{J} = \mathbf{R}\tilde{\mathbf{J}}\mathbf{R}^T$ berechnet werden, wobei $\mathbf{J}$ das globale und $\tilde{\mathbf{J}}$ der lokale Trägheitstensor ist und $\mathbf{R}$ die Rotationsmatrix von lokalen in globale Koordinaten. Definieren Sie hierfür ein geeignetes lokales und globales Koordinatensystem.

2.1c) Pirouetten (1 Punkt)

Eine Eiskunstläuferin dreht Pirouetten mit ausgestreckten Armen. Bringen Sie Winkelgeschwindigkeit, Drehimpuls und Trägheitstensor in Zusammenhang. Was passiert, wenn die Eiskunstläuferin die Arme anzieht, wie verändern sich diese Größen?

Aufgabe 2.2: Transformationen

Neben der in der Vorlesung beschriebenen Darstellung $(s, \mathbf{R})$ der Position und Orientierung eines Festkörpers, gibt es noch weitere Darstellungsformen. Insbesondere spielen in vielen Anwendungsgebieten die Quaternionen und Rotationsvektoren für den Rotationsanteil sowie die Darstellung mithilfe homogener Koordinaten eine wichtige Rolle.

2.2a) Homogene Koordinaten (3 Punkte)

Homogene Koordinaten sind Vektoren in $\mathbb{R}^4$. Ein homogener Vektor $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4)^T$ mit $a_4 \neq 0$ kann dabei mithilfe der Formel

$$\mathbf{p}(\mathbf{a}) = \left(\frac{a_1}{a_4}, \frac{a_2}{a_4}, \frac{a_3}{a_4}\right)^T \tag{3}$$

auf die dreidimensionale reelle Ebene projiziert werden. Zwei Vektoren $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ werden als äquivalent angesehen, falls sie auf denselben dreidimensionalen Punkt projiziert werden, also wenn gilt

$$\frac{\mathbf{a}}{a_4} = \left(\frac{a_1}{a_4}, \frac{a_2}{a_4}, \frac{a_3}{a_4}, 1\right)^T = \left(\frac{b_1}{b_4}, \frac{b_2}{b_4}, \frac{b_3}{b_4}, 1\right)^T = \frac{\mathbf{b}}{b_4} \tag{4}$$

Mithilfe dieser beiden Prinzipien, lässt sich ein dreidimensionaler Vektor eindeutig einer Äquivalenzklasse von homogenen Koordinaten zuordnen und umgekehrt. Ein großer Vorteil dieser Schreibweise ist, dass in einer linearen Abbildung (4×4-Matrix) nun nicht nur Rotation und Skalierung, sondern auch Translation und perspektivische Projektion beschrieben werden können. Beschreiben Sie die homogene Abbildung, die einen Punkt

1. 90° um die z-Achse rotiert,
2. 90° um die x-Achse rotiert und anschließend um den Vektor $(0, -2, 1)^T$ verschiebt,
3. um den Vektor $(-1, -1, -2)^T$ verschiebt und anschließend 90° um die z-Achse rotiert,
4. in Blickrichtung $(0, 0, 1)^T$ eine perspektivische Projektion durchführt. (Hinweis: Hierbei wird die Position $(x, y, z)^T$ auf die Position $(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1)^T$ projiziert.)

Führen Sie zu jeder dieser Matrizen eine sinnvolle Vektormultiplikation durch, um deren Korrektheit zu überprüfen.

2.2b) Rotationsvektoren (1 Punkt)

Ein Rotationsvektor $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ beschreibt durch seine Richtung $\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{||\mathbf{r}||}$ die Rotationsachse und durch seine Länge den Rotationswinkel $\theta = ||\mathbf{r}||$ in rad.

Ein Vektor $\mathbf{v}$ kann, mithilfe der Rodrigues-Formel, um $\mathbf{r}$ rotiert werden:

$$\mathbf{v_r} = \mathbf{v} \cos\theta + (1 - \cos\theta)(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{v})\hat{\mathbf{r}} + (\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{v}) \sin\theta \tag{5}$$

Nutzen Sie diese Formel, um die Rotation des Vektors $\mathbf{v} = (1, 0, 3)^T$ um die Achse $\hat{\mathbf{r}} = (0, 1, 0)$ um $\theta = \frac{\pi}{2}$ durchzuführen.

Wie kann mithilfe der Rodrigues-Formel ein Rotationsvektor in eine Rotationsmatrix übertragen werden? (Beschreibung des Ansatzes reicht aus)

2.2c) Quaternionen (1 Punkt)

Eine weitere wichtige Darstellungsform für Rotationen sind Einheitsquaternionen. Diese sind besonders für die Interpolation von Orientierungen geeignet. Die Quaternionen $\mathbb{H}$ sind eine Erweiterung der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ ähnlich den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$, aber mit einem Imaginärteil mit drei Komponenten.

$$q = w + x\mathrm{i} + y\mathrm{j} + z\mathrm{k}, \tag{6}$$

wobei $w, x, y, z \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen sind und i, j, k die Basis der Quaternionen bilden. Addition erfolgt komponentenweise und für die Multiplikation (nicht kommutativ!) gilt

- $\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = -1$
- $\mathrm{ij} = +k$, $\mathrm{jk} = +i$, $\mathrm{ki} = +j$
- $\mathrm{ji} = -k$, $\mathrm{kj} = -i$, $\mathrm{ik} = -j$

Der Imaginärteil $\mathrm{Im}(q) = x\mathrm{i} + y\mathrm{j} + z\mathrm{k}$ wird dabei auch als Vektorteil bezeichnet. Analog zu komplexen Zahlen kann für Quaternionen auch die Konjugation berechnet werden:

$$\bar{q} = \mathrm{Re}(q) - \mathrm{Im}(q) \tag{7}$$

Quaternionen können genutzt werden, um Rotationen zu beschreiben. Rotationsquaternionen sind Einheitsquaternionen ($q\bar{q} = 1$), mit folgender Form

$$q = \cos\frac{\varphi}{2} + (e_x\mathrm{i} + e_y\mathrm{j} + e_z\mathrm{k}) \sin\frac{\varphi}{2}, \tag{8}$$

wobei φ der Rotationswinkel und $\mathbf{e} = (e_x, e_y, e_z)^T$ die normierte Rotationsachse ist. Die Rotation kann auf einen Vektor $\mathbf{v}$ angewendet werden:

$$v' = qv\bar{q},$$

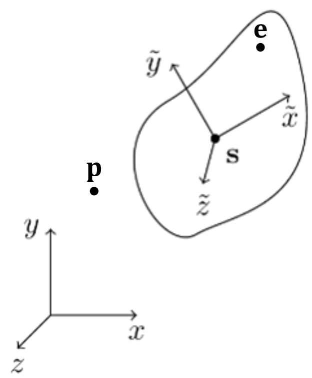
wobei der Vektor $\mathbf{v}$ als Vektorteil eines Quaternions v dargestellt wird (Skalarteil $w = 0$).

Stellen Sie ein Rotationsquaternion für eine Rotation um $\varphi = 60°$ um die Achse $\mathbf{e} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})^T$ auf und wenden Sie dieses auf den Vektor $\mathbf{v} = (-1, 2, 0)$ an.

Ist die Darstellung eindeutig?

Aufgabe 2.3: Koordinatensysteme

Für die Simulation von Starrkörpern ist es notwendig ein lokales Koordinatensystem zu definieren, das fest mit dem Starrkörper verbunden ist. Hiermit können alle Punkte innerhalb des Körpers eindeutig beschrieben werden. Das lokale Koordinatensystem bewegt sich mit dem Starrkörper, die Darstellung bezüglich des globalen Koordinatensystems kann durch Koordinatentransformation berechnet werden.



2.3a) Bestimmung globaler Koordinaten (0,5 Punkte)

Zur Beschreibung der Bewegung innerhalb der globalen Szene müssen Punkte des Starrkörpers in das globale Koordinatensystem transformiert werden. Eine solcher Punkt sei durch die lokalen Koordinaten $\tilde{\mathbf{e}} \in \mathbb{R}^3$ beschrieben. Bestimmen Sie die globalen Koordinaten $\mathbf{e}$ dieses Punktes.

2.3b) Bestimmung lokaler Koordinaten (0,5 Punkte)

Gerade bei der Interaktion mit anderen Körpern kann der umgekehrte Fall interessant sein. Zum Beispiel um Kollisionserkennung durchzuführen kann es von Vorteil sein, Abstandsberechnungen innerhalb des lokalen Koordinaten durchzuführen. Bestimmen Sie für einen gegebenen Punkt $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ im globalen Koordinatensystem die zugehörigen lokalen Koordinaten.

2.3c) Drehmoment transformierter Starrkörper (2 Punkte)

Ein Starrkörper soll simuliert werden. Hierfür wird ein lokales Koordinatensystem mit Ursprung im Masseschwerpunkt definiert. Die initiale Orientierung des Starrkörpers und damit auch des lokalen Koordinatensystems ist gegeben durch R.

Der Trägheitstensor $\tilde{\mathbf{J}}$ wurde zu Beginn der Simulation bezüglich des lokalen Koordinatensystems berechnet.

Zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ befindet sich der Starrkörper in Ruhelage ($\mathbf{l}(t_0) = 0$ und $\omega(t_0) = 0$) und es wird eine Kraft $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^3$ an dem Punkt $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^3$ angebracht. Bestimmen Sie, das durch die Kraft resultierende Drehmoment τ. Berechnen Sie, die durch die Kraft entstehende Winkelgeschwindigkeit zum Zeitpunkt $t_1 = t_0 + \Delta t$ des Körpers. Diskretisieren Sie hierfür den Drehimpuls und die Rotation mittels explizitem Euler und der Schrittweite Δt.