Übungsblatt 2

Alexander Zieschang

2.1 Trägheitstensoren

a) Trägheitstensor eines Quaders $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \left[-\frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right] \times \left[-\frac{b}{2}; \frac{b}{2}\right] \times \left[-\frac{c}{2}; \frac{c}{2}\right]$

$$J_{11} = \rho \int_V \left(\|\vec{x}\|^2 - x_1 x_1 \right) dV$$

$$= \rho \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left(\cancel{x_1^2} + x_2^2 + x_3^2 - \cancel{x_1^2} \right) dx_1\, dx_2\, dx_3$$

$$(*) \quad \frac{1}{3}\frac{b^3}{8} + \frac{1}{3}\frac{b^3}{8} = \frac{b^3}{12}$$

$$= \rho a \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \left[\frac{1}{3} x_2^3 + x_2 x_3^2 \right]_{-\frac{b}{2}}^{x_2 = \frac{b}{2}} dx_3 \overset{(*)}{=} \rho a \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \left(\frac{b^3}{12} + b x_3^2 \right) dx_3$$

$$= \rho a \left(\frac{cb^3}{12} + \left[\frac{b}{3} x_3^3 \right]_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \right) = \rho a \left(\frac{cb^3}{12} + \frac{bc^3}{12} \right)$$

$$= \frac{\rho abc}{12} \left(b^2 + c^2 \right) = \frac{m}{12} \left(b^2 + c^2 \right)$$

Analog:

$$J_{22} = \rho \int_V \left(x_1^2 + x_3^2 \right) dV = \frac{m}{12} \left(a^2 + c^2 \right)$$

$$J_{33} = \rho \int_V \left(x_1^2 + x_2^2 \right) dV = \frac{m}{12} \left(a^2 + b^2 \right)$$

Nicht-Diagonaleinträge:

$$\underset{i \neq j}{J_{ij}} = \rho \int_V -x_i x_j \, dV = -\rho \int_A \frac{1}{2} \left[x_i^2 \right]_{\frac{I}{2}}^{-\frac{I}{2}} x_j \, dA = -\frac{1}{2} \rho \int_A \left(\frac{I^2}{4} - \frac{I^2}{4} \right) x_j \, dA = 0, \quad x_i \in \left[-\frac{I}{2}; \frac{I}{2} \right]$$

Also

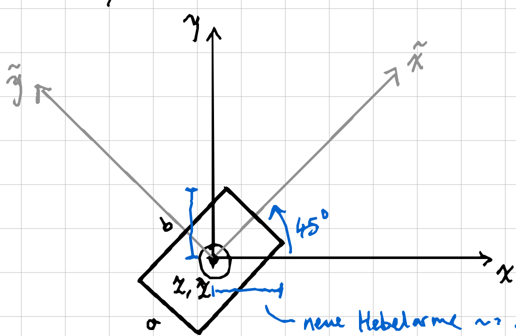
$$J = \frac{m}{12} \begin{pmatrix} b^2+c^2 & & \\ & a^2+c^2 & \\ & & a^2+b^2 \end{pmatrix}$$

b) Bedeutung der Einträge

- Die Diagonaleinträge sind die Trägheitsmomente bezüglich der Rotation um die jeweilige Koordinatenachse
- In den Nebendiagonaleinträge stehen die Deviationsmomente, welche die für die zur Rotation notwendigen Hebelarme darstellen.

Rotation um 45° um x_3-Achse: $R = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Koordinatensystem:



$$\tilde{J} = \frac{m}{12} \begin{pmatrix} b^2+c^2 & & \\ & a^2+c^2 & \\ & & a^2+b^2 \end{pmatrix}$$

neue Hebelarme ⇝ Deviationsmomente nötig

Trägheitstensor in globalen Koordinaten:

$$J = R \tilde{J} R^T = \frac{m}{24} \begin{pmatrix} a^2+b^2+2c^2 & b^2-a^2 & 0 \\ b^2-a^2 & a^2+b^2+2c^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2a^2+2b^2 \end{pmatrix}$$

Bei einer Rotation um 135° oder um −45° erhält man dieselben Diagonaleinträge bei unterschiedlichen Nebendiagonalen.

c) Eiskunstläuferin

Der Drehimpuls $I = J\omega$ muss erhalten bleiben.

Wenn die Eiskunstläuferin die Arme einzieht, verringert sich ihr Masseträgheitsmoment (die Diagonaleinträge im Trägheitstensor J) verkleinern sich, wodurch sich dementsprechend die Winkelgeschwindigkeit ω vergrößern muss, damit der Drehimpuls I konstant bleibt.

2.2 Homogene Koordinaten

a) 1. $90°$-Rotation um z-Achse

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. $90°$-Rotation um x-Achse und Versch. $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Verschiebung um $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und Rotation um $90°$ um z-Achse:

$$R_3 = R_1 \begin{pmatrix} 1 & & & -1 \\ & 1 & & -1 \\ & & 1 & 2 \\ & & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Perspektivische Projektion in Richtung $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$R_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{z} & 1 \end{pmatrix}$$

(Rechenbeispiele übersprungen)

b) $$\vec{v}_r' = \begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}\cos\frac{\pi}{2} + \left(1-\cos\frac{\pi}{2}\right)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}\sin\frac{\pi}{2}$$

$$= 0 + 0 + \begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}$$

Die Rotationsmatrix erhält man, indem die Rodriguez-Formel auf alle Basisvektoren angewendet wird.
In den Spalten der Rotationsmatrix stehen die Bilder der Basisvektoren.

c) $$q = \cos 30° + \begin{pmatrix}\sqrt{2}/2\\0\\\sqrt{2}/2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}i\\j\\k\end{pmatrix}\sin 30° = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{4}i + \frac{\sqrt{2}}{4}k$$

$$v' = \left(\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{4}i + \frac{\sqrt{2}}{4}k\right)\cdot(-i + 2j)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{4}i - \frac{\sqrt{2}}{4}k\right)$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{4}i + \frac{\sqrt{2}}{4}k\right)\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}i + \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}j + \frac{2\sqrt{3}}{3}j + \frac{\sqrt{2}}{2}k - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{4}i + \frac{\sqrt{2}}{4}k\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{6}i + \frac{8\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{12}j + \frac{\sqrt{2}}{2}k\right)$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{12} - \frac{2+\sqrt{6}}{6}i + \frac{8-\sqrt{6}}{12}j + \frac{\sqrt{6}}{6}k$$

$$+ \frac{1}{8}i + \frac{2\sqrt{6}+6}{6} + \frac{8\sqrt{6}-6}{48}k - \frac{1}{4}j$$

$$+ \frac{1}{8}k - \frac{2\sqrt{6}+6}{6}j - \frac{8\sqrt{6}-6}{48}i - \frac{1}{4}$$

$$\approx 1.77 - 0.90\,i - 1.60\,j + 0.82\,k$$

Die Darstellung ist nicht eindeutig, da es wegen dem Skalarteil w mehrere Quaternionen gibt, die auf einen Vektor führen.

2.3

Sei R die Transformationsmatrix von globalen auf lokale Koordinaten. Dann ist der Punkt e gegeben durch

a) $e = R\tilde{e}$

b) $\tilde{p} = R^{-1} p$

c) $\vec{\tau} = \vec{f} \times \vec{e}$

$$\vec{I}(t_1) = \underbrace{\vec{I}(t_0)}_{=0} + \Delta t \cdot \vec{\tau}$$

$$J = R \tilde{J} R^{-1}$$

$$\rightsquigarrow \omega(t_1) = J^{-1} I(t_1)$$