# Physikalisch basierte Simulation und Animation

**Alexander Zieschang**
**Gruppe 4**

Sommersemester 2024
Übungsblatt 1

## 1.1 Zeitintegration

Abbildung 1 stellt die Schwingung eines Pendels einmal approximiert mit der Kleinwinkelnäherung und mit drei verschiedenen Einschrittverfahren dar. Bei der Simulation mit dem expliziten Euler gewinnt das System an Energie dazu,

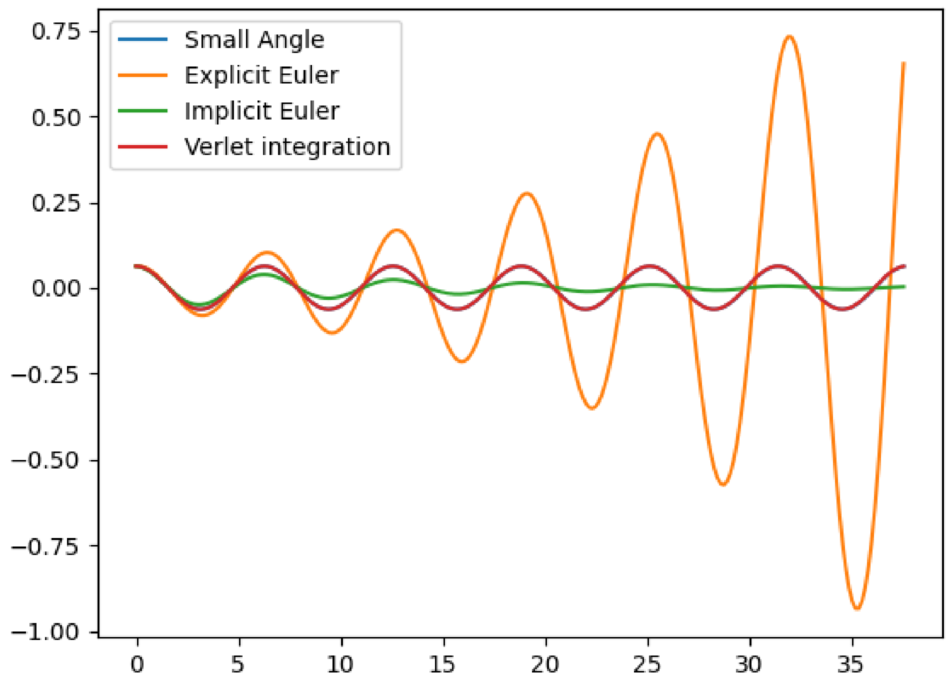


Abbildung 1: Simulation der Bewegung eines Pendels mit drei verschiedenen Einschrittverfahren.

während es beim impliziten Euler welche verliert. Die Verlet-Integration erhält die Energie. Der Verlauf ist Deckungsgleich mit dem der Kleinwinkelnäherung.

## 1.2 Eigenschaften von linearen Gleichungssystemen

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 4 \\ 6 & 4 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 21 & 35 & 42 \\ 27 & 45 & 54 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -2 \\ 4 & 8 & 3 \\ -2 & 3 & 6 \end{pmatrix},$$
$$E = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -3 \\ 3 & 6 & 3 \\ -3 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

### 1.2.1 Symmetrie

Die Matrizen $D$, $E$, $F$ und $G$ sind offensichtlich symmetrisch, da sie Invariant hinsichtlich der Transponierung sind.

### 1.2.2 Diagonaldominanz

Die Matrizen $B$, $D$, $E$ und $G$ sind strikt diagonaldominant, weil für jede Zeile der Diagonaleintrag betragsmäßig größer ist, als der Betrag der Summe der restlichen Elemente der Zeile. Dies sei beispielhaft für die Matrix $B$ dargestellt.

$$\begin{aligned} |6| &\geq |-3| + |2| = 5 \\ |5| &\geq |3| + |1| = 4 \\ |4| &\geq |-2| + |1| = 3 \end{aligned}$$

Die Matrix $F$ ist lediglich schwach diagonaldominant, da die Diagonaleinträge nur betragsmäßig gleich der Summe der Beträge der restlichen Elemente der Zeile ist.

### 1.2.3 Definitheit symmetrischer Matrizen

Für die Matrix $D$ lässt sich das Hauptminorenkriterium anwenden.

$$\begin{aligned} \det(7) &= 7 > 0 \\ \det\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} &= 40 > 0 \\ \det\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} &= 97 > 0 \end{aligned}$$

Da alle Hauptminoren positiv sind, ist die Matrix **positiv definit**.

An der Matrix $E$ lassen sich die Eigenwerte 8, -1 und 7 wegen der Diagonalform direkt ablesen. Da sie sowohl positiv als auch negativ sind, ist die Matrix **indefinit**.

Da $F$ diagonaldominant ist, lässt sich wegen der ausschließlich positiven Diagonaleinträge auf **positive Definitheit** schließen.

Gleiches gilt für $G$. Hier lässt sich aufgrund von rein negativen Diagonaleinträgen auf **negative Definitheit** schließen.

## 1.3 Partielle Differenzialgleichungen

Abbildung 2 zeigt die Simulation der Wärmeleitungsgleichung in einer Raumdimension mit einer punktuellen Irritation als Anfangsbedingung. Dargestellt sind die Verläufe von 4 Zeitpunkten. Für die Raumdiskretisierung wurden finite Elemente und für die Zeitdiskretisierung das implizite Eulerverfahren genutzt.

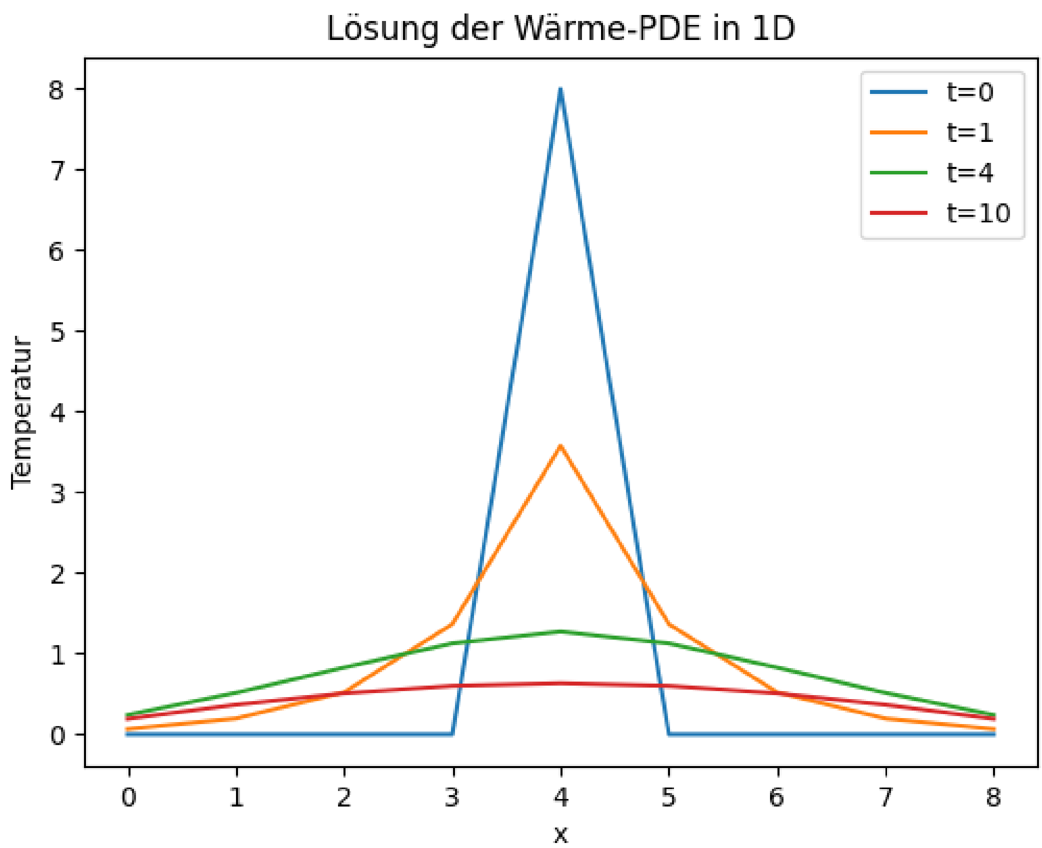


Abbildung 2: Simulation der Wärmeleitungsgleichung in 1D.