Асен Божилов
Пламен Кошлуков
Пламен Сидеров

Задачи по АЛГЕБРА

линейна алгебра

веди

§0. Комплексни числа и полиноми. Метод на Гаус

0.1. Да се намерят реалните числа x и y, за които:
а) $(1-i)x+(2-i)y=5-3i$; б) $2x+(1-i)(x+y)=7-i$.

0.2. Да се запише в алгебричен вид комплексното число ($n \in \mathbb{N}$):
а) $(4-3i)+(-2+i)$; б) $(1-2i)-(3-5i)$; в) $i(2+i)$;
г) $(1+3i)(-7+2i)$; д) $(2+i)^2$; е) $(1-2i)^3$;
ж) $(1-i)^{-1}$; з) i^n; и) $(1+i)^n$;
к) $(2-2i)^n$; л) $\dfrac{2i-3}{1+i}$; м) $\dfrac{(2+i)^2-(1-2i)^3}{(3+2i)^3+(1-i)^2}$.

0.3. Да се намерят модулът и аргументът на комплексното число z, където:
а) $z=1$; б) $z=-\dfrac{1}{2}$; в) $z=i$; г) $z=1+i$; д) $z=1-i$;
е) $z=1-i\sqrt{3}$; ж) $z=\sqrt{3}+i$; з) $z=i\sqrt{2}$; и) $z=(\sqrt{6}+\sqrt{2})+i(\sqrt{6}-\sqrt{2})$.

0.4. Да се определи множеството от точките в равнината, на което съответстват комплексните числа z, за които:
а) $|z|=1$; б) $|z|\leqq 1$; в) $|z|\geqq 2$; г) $1<|z|\leqq 3$;
д) $\arg z=0$; е) $\arg z=\dfrac{\pi}{2}$; ж) $\arg z=\pi$; л) $\operatorname{Re} z=1$;
м) $\operatorname{Im} z\geqq -2$; з) $|z-1|=1$; и) $|z-1-i|=1$; к) $|z-i|+|z+i|=2$;

0.5. Да се запише в тригонометричен вид комплексното число:
а) числата от задача 0.3;
б) $2+\sqrt{3}+i$; в) $1+\cos\varphi+i\sin\varphi$, $\varphi\in(-\pi,\pi]$; г) $(1+i)^{15}$;
д) $\dfrac{(\sqrt{3}-i)^{15}}{(1+i)^8}$; е) $(1-i)^n+(1+i)^n$; ж) $(1+\cos\varphi+i\sin\varphi)^n$.

* * *

Нека n е естествено число. Комплексните числа $\omega_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$, $k=0,1,\dots,n-1$, се наричат *n-ти корени на единицата*.

0.6. Да се запишат в тригонометричен вид n–тите корени на единицата и да се построят съответните им точки в равнината при $n=2,3,4,5,6$.

0.7. Да се докаже, че съответните на $\omega_0,\omega_1,\dots,\omega_{n-1}$ точки в равнината са върхове на правилен n–ъгълник, вписан в единичната окръжност.

0.8. Да се докаже, че:
а) числата $\omega_0,\omega_1,\dots,\omega_{n-1}$ са всичките корени на уравнението $x^n=1$;
б) ако $\alpha=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ е тригонометричният вид на комплексното число α и $\beta=\sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi}{n}+i\sin\frac{\varphi}{n})$ ($\sqrt[n]{r}\in\mathbb{R}$), то $\beta^n=\alpha$;
в) ако $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ и $\beta^n=\alpha$, то числата $\beta\omega_0,\beta\omega_1,\dots,\beta\omega_{n-1}$ са всичките корени на уравнението $x^n=\alpha$.

0.9. Да се докаже, че:
а) $\omega_1^k=\omega_k$, $k=0,1,\dots,n-1$;
б) числата ω_k^j, $j=0,1,\dots,n-1$, са всичките n–ти корени на единицата точно когато числата k и n са взаимно прости.

0.10. Да се докаже, че ако m е цяло число, то

$$\omega_0^m + \omega_1^m + \cdots + \omega_{n-1}^m = \begin{cases} n, & \text{ако } n \text{ дели } m \\ 0, & \text{ако } n \text{ не дели } m \end{cases}$$

0.11. Да се реши уравнението:
а) $x^2 = 1 - i\sqrt{3}$; б) $x^3 = 1 - i$; в) $x^4 = \sqrt{3} + i$; г) $x^6 = -27$; д) $x^2 = i$;
е) $x^n = i$; ж) $x^n = -1$; з) $(x+i)^n + (x-i)^n = 0$; и) $x^2 + 2x + 3 = 0$;
к) $x^2 - (3-2i)x + (5-5i) = 0$; л) $(3-i)x^2 + (1+i)x + 6i = 0$;
м) $x^4 - 3x^2 + 4 = 0$.

* * *

0.12. Да се докаже равенството:

а) $\cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx = \dfrac{\sin\frac{nx}{2} \cdot \cos\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}, \quad x \neq 2k\pi$;

б) $\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx = \dfrac{\sin\frac{nx}{2} \cdot \sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}, \quad x \neq 2k\pi$.

0.13. Нека z е комплексно число, за което е изпълнено $z + \dfrac{1}{z} = 2\cos\varphi$. Да се докаже, че $z^n + \dfrac{1}{z^n} = 2\cos n\varphi$ за всяко цяло число n.

* * *

0.14. Нека $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ е полином с цели коефициенти и $\alpha = \dfrac{p}{q}$ е рационален корен на $f(x)$, където p и q са взаимно прости цели числа. Да се докаже, че:

а) p дели a_n, а q дели a_0; в частност, ако $a_0 = 1$, то α е цяло число и дели a_n;
б) $p - mq$ дели $f(m)$ за всяко цяло число m;
в) $p - q$ дели $f(1)$, а $p + q$ дели $f(-1)$.

0.15. Да се намерят рационалните корени на полинома:
а) $f(x) = 6x^4 + 23x^3 + 19x^2 - 8x - 4$; б) $f(x) = x^5 - 7x^3 - 12x^2 + 6x + 36$;
в) $f(x) = x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 38x - 24$; г) $f(x) = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + 9$;
д) $f(x) = 10x^4 - 13x^3 + 15x^2 - 18x - 24$.

0.16. Да се намерят корените на уравнението:
а) $8x^4 + 6x^2 + 10x + 3 = 0$; б) $6x^4 - x^3 + 2x^2 + 4x + 1 = 0$;
в) $x^6 - 6x^5 + 12x^4 - 7x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0$.

* * *

0.17. Да се реши системата:

а) $\left|\begin{array}{rrrl} x_1 & +2x_2 & +5x_3 & = -9 \\ x_1 & -x_2 & +3x_3 & = 2 \\ 3x_1 & -6x_2 & -x_3 & = 25 \end{array}\right.$; б) $\left|\begin{array}{rrrl} x_1 & +x_2 & +2x_3 & = 4 \\ x_1 & & +x_3 & = 2 \\ x_1 & +2x_2 & +3x_3 & = 7 \end{array}\right.$;

в) $\left|\begin{array}{rrrl} x_1 & & -x_3 & = 2 \\ 2x_1 & +5x_2 & & = 7 \\ 3x_1 & +5x_2 & -x_3 & = 9 \end{array}\right.$; г) $\left|\begin{array}{rrrrl} x_1 & -7x_2 & & +2x_4 & = -11 \\ -x_1 & +11x_2 & +2x_3 & 4x_4 & = 31 \\ 2x_1 & -12x_2 & -5x_3 & -x_4 & = -26 \\ 3x_1 & -17x_2 & -x_3 & +3x_4 & = -15 \end{array}\right.$;

д) $\left|\begin{array}{rrrrl} x_1 & +x_2 & -x_3 & +2x_4 & = 6 \\ -x_1 & +x_2 & +4x_3 & -3x_4 & = -2 \\ & x_2 & +3x_3 & +x_4 & = 5 \\ x_1 & +5x_2 & +5x_3 & & = 14 \end{array}\right.$; е) $\left|\begin{array}{rrrrl} 2x_1 & +3x_2 & -5x_3 & +x_4 & = 2 \\ 2x_1 & +3x_2 & -x_3 & +3x_4 & = 8 \\ 6x_1 & +9x_2 & -7x_3 & +7x_4 & = 18 \\ 4x_1 & +6x_2 & -12x_3 & +x_4 & = 1 \end{array}\right.$.

0.18. Да се реши хомогенната система:

а) $\left|\begin{array}{rrrrl} 2x_1 & -5x_2 & +4x_3 & +3x_4 & = 0 \\ 5x_1 & -9x_2 & +11x_3 & +8x_4 & = 0 \\ 9x_1 & -18x_2 & +19x_3 & +13x_4 & = 0 \\ 3x_1 & -8x_2 & +7x_3 & +8x_4 & = 0 \end{array}\right.$; б) $\left|\begin{array}{rrrrrl} 2x_1 & +3x_2 & -7x_3 & +5x_4 & +2x_5 & = 0 \\ 6x_1 & +3x_2 & -19x_3 & +7x_4 & +8x_5 & = 0 \\ 10x_1 & +22x_2 & -36x_3 & +33x_4 & +23x_5 & = 0 \\ 6x_1 & +8x_2 & -18x_3 & +11x_4 & +37x_5 & = 0 \\ 2x_1 & +13x_2 & -9x_3 & +17x_4 & +14x_5 & = 0 \end{array}\right.$.

0.19. Да се реши системата в зависимост от стойностите на участващите параметри:

а) $\left|\begin{array}{rrrl} x_1 & +x_2 & +\lambda x_3 & = 1 \\ x_1 & +\lambda x_2 & +x_3 & = 1 \\ \lambda x_1 & +x_2 & +x_3 & = 1 \end{array}\right.$; б) $\left|\begin{array}{rrrl} (1+\lambda)x_1 & +x_2 & +x_3 & = \lambda^2+3\lambda \\ x_1 & -(1+\lambda)x_2 & +x_3 & = \lambda^3+3\lambda^2 \\ x_1 & -x_2 & -(1+\lambda)x_3 & = \lambda^4+\lambda^3 \end{array}\right.$;

в) $\left|\begin{array}{rrrrl} x_1 & -2x_2 & -x_3 & +x_4 & = -2 \\ 2x_1 & +7x_2 & +3x_3 & +x_4 & = 6 \\ 11x_1 & +11x_2 & +4x_3 & +8x_4 & = 8 \\ 10x_1 & +2x_2 & & +8x_4 & = \lambda \end{array}\right.$; г) $\left|\begin{array}{rrrrrl} 3x_1 & +x_2 & -4x_3 & +2x_4 & -2x_5 & = 0 \\ x_1 & +2x_2 & -2x_3 & +x_4 & -x_5 & = 1 \\ 7x_1 & +4x_2 & -10x_3 & +5x_4 & -5x_5 & = \lambda-2 \\ 2x_1 & -x_2 & -\mu x_3+ & x_4- & x_5 & = -1 \end{array}\right.$;

д) $\left|\begin{array}{rrrl} (3-2\lambda)x_1 & +(2-\lambda)x_2 & +x_3 & = \lambda \\ (2-\lambda)x_1 & +(2-\lambda)x_2 & +2x_3 & = 1 \\ x_1 & +x_2 & +(2-\lambda)x_3 & = 1 \end{array}\right.$; е) $\left|\begin{array}{rrrrl} \lambda x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +2x_4 & = 3 \\ 2x_1 & +\lambda x_2 & +3x_3 & +2x_4 & = 3 \\ 2x_1 & +3x_2 & +\lambda x_3 & +2x_4 & = 3 \\ 2x_1 & +3x_2 & +2x_3 & +\lambda x_4 & = 3 \\ 2x_1 & +3x_2 & +2x_3 & +3x_4 & = \lambda \end{array}\right.$.

0.20. Да се реши системата в зависимост от стойностите на параметъра a:

а) $\left|\begin{array}{rrl} x_n+ & x_{n+1} & = b_1 \\ x_{n-1}+ & x_{n+1} & = b_2 \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ x_1+ & x_{n+1} & = b_n \\ a(x_1+x_2+\cdots+x_n)- & x_{n+1} & = 0 \end{array}\right.$;

б) $\left|\begin{array}{rrrrrl} ax_1+ & ax_2+ & \cdots + & ax_{n-1}+ & (a+1)x_n & = b_1 \\ ax_1+ & ax_2+ & \cdots + & (a+1)x_{n-1}+ & ax_n & = b_2 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ (a+1)x_1+ & ax_2+ & \cdots + & ax_{n-1}+ & ax_n & = b_n \end{array}\right.$.

Глава I. Детерминанти и матрици

§1. Детерминанти

Да се пресметне детерминантата :

1.1. а) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{vmatrix}$.

1.2. а) $\begin{vmatrix} x & y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \dots & 0 & 0 \\ \hdotsfor{6} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & y \\ y & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \hdotsfor{6} \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 1 & 3 & 3 & 4 & \dots & n \\ 1 & 2 & 5 & 4 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & 7 & \dots & n \\ \hdotsfor{6} \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 2n-1 \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & x_1 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & x_2 & 1 & 1 \\ \hdotsfor{6} \\ x_n & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & x_1y_3 & \dots & x_1y_n \\ x_1y_2 & x_2y_2 & x_2y_3 & \dots & x_2y_n \\ x_1y_3 & x_2y_3 & x_3y_3 & \dots & x_3y_n \\ \hdotsfor{5} \\ x_1y_n & x_2y_n & x_3y_n & \dots & x_ny_n \end{vmatrix}$;

е) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_1 & \dots & a_1 & a_1-b_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 & \dots & a_2-b_2 & a_2 & a_2 \\ \hdotsfor{6} \\ a_n-b_n & a_n & \dots & a_n & a_n & a_n \end{vmatrix}$; ж) $\begin{vmatrix} x_1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ x_1 & x_2 & a_{23} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \hdotsfor{6} \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_{n-1} & a_{n-1,n} \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_{n-1} & x_n \end{vmatrix}$;

з) $\begin{vmatrix} a & 2 & 3 & \dots & n-1 & 1 \\ 2 & a & 3 & \dots & n-1 & 1 \\ 2 & 3 & a & \dots & n-1 & 1 \\ \hdotsfor{6} \\ 2 & 3 & 4 & \dots & a & 1 \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & a \end{vmatrix}$; и) $\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & x & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & x & \dots & a_{n-1} & 1 \\ \hdotsfor{6} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n & 1 \end{vmatrix}$;

к) $\det A$, където $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ и $a_{ij} = \min(i, j)$.

1.3. а) $\begin{vmatrix} a_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_{n-1} & b_n \\ c_1 & a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_2 & 0 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ \hdotsfor{6} \\ c_{n-1} & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & 0 \\ c_n & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} a_1 & x & x & \dots & x & x \\ x & a_2 & x & \dots & x & x \\ x & x & a_3 & \dots & x & x \\ \hdotsfor{6} \\ x & x & x & \dots & a_{n-1} & x \\ x & x & x & \dots & x & a_n \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & \dots & x & x \\ 1 & x & 0 & \dots & x & x \\ \hdotsfor{6} \\ 1 & x & x & \dots & 0 & x \\ 1 & x & x & \dots & x & 0 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & -x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ 1 & x_1 & -x_2 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ \hdotsfor{6} \\ 1 & x_1 & x_2 & \dots & -x_{n-1} & x_n \\ 1 & x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & -x_n \end{vmatrix}$;

д) $\begin{vmatrix} x+1 & x & x & \dots & x \\ x & x+a & x & \dots & x \\ x & x & x+a^2 & \dots & x \\ \hdotsfor{5} \\ x & x & x & \dots & x+a^n \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ -y_1 & x_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -y_2 & x_2 & \dots & 0 & 0 \\ \hdotsfor{6} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -y_n & x_n \end{vmatrix}$;

ж) $\begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \hdotsfor{5} \\ b & b & b & \dots & a \end{vmatrix}$; з) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \hdotsfor{6} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

1.4. $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & 0 \\ \hdotsfor{6} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x \end{vmatrix}$

* * *

1.5. а) $\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \dots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & \dots & a_2+b_n \\ \hdotsfor{4} \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \dots & a_n+b_n \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \dots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \dots & 1+x_2y_n \\ \hdotsfor{4} \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \dots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}$.

1.6. а) $\begin{vmatrix} x_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & x_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 & x_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ \hdotsfor{6} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & x_n \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ x_1 & a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x_2 & x_2 & a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x_3 & x_3 & x_3 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \hdotsfor{7} \\ x_{n-1} & x_{n-1} & x_{n-1} & x_{n-1} & \dots & a_{n-1} & 0 \\ x_n & x_n & x_n & x_n & \dots & x_n & a_n \end{vmatrix}$.

* * *

1.7. а) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 \\ \hdotsfor{5} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \dots & 0 \\ \hdotsfor{5} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 7 & 5 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 7 & 5 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 7 & \dots & 0 \\ \hdotsfor{5} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 7 \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \dots & 0 \\ \hdotsfor{5} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha+\beta \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha & 0 & \dots & 0 \\ \beta & \alpha+\beta & \alpha & \dots & 0 \\ 0 & \beta & \alpha+\beta & \dots & 0 \\ \hdotsfor{5} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha+\beta \end{vmatrix}$.

1.8. *(Детерминанта на Вандермонд)*

$$W = W(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

1.9. а) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n+1 \\ 1 & 2^2 & 3^2 & \dots & (n+1)^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2^n & 3^n & \dots & (n+1)^n \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \sin\alpha_1 & \sin\alpha_2 & \dots & \sin\alpha_n \\ \sin^2\alpha_1 & \sin^2\alpha_2 & \dots & \sin^2\alpha_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sin^{n-1}\alpha_1 & \sin^{n-1}\alpha_2 & \dots & \sin^{n-1}\alpha_n \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1+1 & x_2+1 & x_3+1 & \dots & x_n+1 \\ x_1^2+x_1 & x_2^2+x_2 & x_3^2+x_3 & \dots & x_n^2+x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1}+x_1^{n-2} & x_2^{n-1}+x_2^{n-2} & x_3^{n-1}+x_3^{n-2} & \dots & x_n^{n-1}+x_n^{n-2} \end{vmatrix}.$

1.10. а) $\begin{vmatrix} 1 & f_1(x_1) & f_2(x_1) & \dots & f_{n-1}(x_1) \\ 1 & f_1(x_2) & f_2(x_2) & \dots & f_{n-1}(x_2) \\ 1 & f_1(x_3) & f_2(x_3) & \dots & f_{n-1}(x_3) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & f_1(x_n) & f_2(x_n) & \dots & f_{n-1}(x_n) \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & \binom{x_1}{1} & \binom{x_1}{2} & \dots & \binom{x_1}{n-1} \\ 1 & \binom{x_2}{1} & \binom{x_2}{2} & \dots & \binom{x_2}{n-1} \\ 1 & \binom{x_3}{1} & \binom{x_3}{2} & \dots & \binom{x_3}{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \binom{x_n}{1} & \binom{x_n}{2} & \dots & \binom{x_n}{n-1} \end{vmatrix}.$

($f_i(x) = x^i + a_{i1}x^{i-1} + a_{i2}x^{i-2} + \dots + a_{i,i-1}x + a_{ii}$ са дадени полиноми, а $\binom{x}{k} = \dfrac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{k!}$)

* * *

1.11. а) $\begin{vmatrix} \cos(\alpha_1-\beta_1) & \cos(\alpha_1-\beta_2) & \dots & \cos(\alpha_1-\beta_n) \\ \cos(\alpha_2-\beta_1) & \cos(\alpha_2-\beta_2) & \dots & \cos(\alpha_2-\beta_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \cos(\alpha_n-\beta_1) & \cos(\alpha_n-\beta_2) & \dots & \cos(\alpha_n-\beta_n) \end{vmatrix}$;

б) $\begin{vmatrix} (a_0+b_0)^n & (a_0+b_1)^n & \dots & (a_0+b_n)^n \\ (a_1+b_0)^n & (a_1+b_1)^n & \dots & (a_1+b_n)^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_n+b_0)^n & (a_n+b_1)^n & \dots & (a_n+b_n)^n \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 1^{n-1} & 2^{n-1} & \dots & n^{n-1} \\ 2^{n-1} & 3^{n-1} & \dots & (n+1)^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ n^{n-1} & (n+1)^{n-1} & \dots & (2n-1)^{n-1} \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} \dfrac{1-a_1^nb_1^n}{1-a_1b_1} & \dfrac{1-a_1^nb_2^n}{1-a_1b_2} & \dots & \dfrac{1-a_1^nb_n^n}{1-a_1b_n} \\ \dfrac{1-a_2^nb_1^n}{1-a_2b_1} & \dfrac{1-a_2^nb_2^n}{1-a_2b_2} & \dots & \dfrac{1-a_2^nb_n^n}{1-a_2b_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{1-a_n^nb_1^n}{1-a_nb_1} & \dfrac{1-a_n^nb_2^n}{1-a_nb_2} & \dots & \dfrac{1-a_n^nb_n^n}{1-a_nb_n} \end{vmatrix}$;

д) $\begin{vmatrix} 1 & \cos(\alpha_1-\alpha_2) & \cos(\alpha_1-\alpha_3) & \dots & \cos(\alpha_1-\alpha_n) \\ \cos(\alpha_2-\alpha_1) & 1 & \cos(\alpha_2-\alpha_3) & \dots & \cos(\alpha_2-\alpha_n) \\ \cos(\alpha_3-\alpha_1) & \cos(\alpha_3-\alpha_2) & 1 & \dots & \cos(\alpha_3-\alpha_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \cos(\alpha_n-\alpha_1) & \cos(\alpha_n-\alpha_2) & \cos(\alpha_n-\alpha_3) & \dots & 1 \end{vmatrix}.$

1.12. а) $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & \dots & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & b & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & b & 0 & \dots & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$ (ред $2n$); б) $\begin{vmatrix} h & -1 & 0 & \dots & 0 \\ hx & h & -1 & \dots & 0 \\ hx^2 & hx & h & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ hx^n & hx^{n-1} & hx^{n-2} & \dots & h \end{vmatrix}$.

* * *

1.13. а) $\begin{vmatrix} x & y & y & \dots & y & y \\ z & x & y & \dots & y & y \\ z & z & x & \dots & y & y \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z & z & z & \dots & x & y \\ z & z & z & \dots & z & x \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ y & a_2 & x & \dots & x \\ y & y & a_3 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y & y & y & \dots & a_n \end{vmatrix}$.

1.14. $\Delta_n = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

1.15. а) $\begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \dots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \dots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \dots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} \frac{1}{x_1-a_1} & \frac{1}{x_1-a_2} & \dots & \frac{1}{x_1-a_n} \\ \frac{1}{x_2-a_1} & \frac{1}{x_2-a_2} & \dots & \frac{1}{x_2-a_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{x_n-a_1} & \frac{1}{x_n-a_2} & \dots & \frac{1}{x_n-a_n} \end{vmatrix}$.

1.16. $\det A$, където $A = (a_{ij}) \in M_n(F), a_{ij} = \frac{1}{i+j}$.

1.17. $\begin{vmatrix} 1 & f_1(x_1) & f_2(x_1) & \dots & f_{n-1}(x_1) \\ 1 & f_1(x_2) & f_2(x_2) & \dots & f_{n-1}(x_2) \\ 1 & f_1(x_3) & f_2(x_3) & \dots & f_{n-1}(x_3) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & f_1(x_n) & f_2(x_n) & \dots & f_{n-1}(x_n) \end{vmatrix}$,

където $f_i(x) = x^i + a_{i1}x^{i-1} + a_{i2}x^{i-2} + \dots + a_{i,i-1}x + a_{ii}$ са дадени полиноми.

1.18. Да се докаже, че:

$$\begin{vmatrix} f_0(x_1) & f_0(x_2) & \dots & f_0(x_n) \\ f_1(x_1) & f_1(x_2) & \dots & f_1(x_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n-1}(x_1) & f_{n-1}(x_2) & \dots & f_{n-1}(x_n) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & \dots & a_{0,n-1} \\ a_{10} & a_{11} & \dots & a_{1,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,0} & a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix} W(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

където $f_i(x) = a_{i0} + a_{i1}x + \dots + a_{i,n-1}x^{n-1}$, $1 \leqq i \leqq n$, а $W(x_1, x_2, \dots, x_n)$ е детерминантата на Вандермонд.

1.19. Да се пресметне детерминантата на *циркулантната матрица*

$$C_n = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_0 \end{pmatrix}$$

1.20. Да се пресметне детерминантата:

а) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ -a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ -a_{n-1} & -a_n & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_2 & -a_3 & -a_4 & \dots & a_1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ \mu a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ \mu a_{n-1} & \mu a_n & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu a_2 & \mu a_3 & \mu a_4 & \dots & a_1 \end{vmatrix}$.

1.21. Да се пресметне детерминантата:

а) $\begin{vmatrix} S_0 & S_1 & S_2 & \dots & S_{n-1} \\ S_1 & S_2 & S_3 & \dots & S_n \\ S_2 & S_3 & S_4 & \dots & S_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{n-1} & S_n & S_{n+1} & \dots & S_{2n-2} \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} S_0 & S_1 & S_2 & \dots & S_{n-1} & 1 \\ S_1 & S_2 & S_3 & \dots & S_n & x \\ S_2 & S_3 & S_4 & \dots & S_{n+1} & x^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{n-1} & S_n & S_{n+1} & \dots & S_{2n-2} & x^{n-1} \\ S_n & S_{n+1} & S_{n+2} & \dots & S_{2n-1} & x^n \end{vmatrix}$,

където $S_k = x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k$.

1.22. Нека $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \in M_n(F)$ и $b_{ij} = a_{ij} + x$, $1 \leqq i, j \leqq n$, $x \in F$. Да се докаже, че $\det B = \det A + x \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}$.

1.23. Нека $A = (a_{ij}) \in M_n(F)$. Да се докаже, че:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & x_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & x_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n & z \end{vmatrix} = z \det A - \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j A_{ij}.$$

1.24. Нека $A = (a_{ij}) \in M_n(F)$, където $a_{ij} = 1$, ако i дели j и $a_{ij} = 0$, ако i не дели j. Да се докаже, че $\det A = 1$.

1.25. Нека $A = (a_{ij}) \in M_n(F)$, където a_{ij} е равно на броя на общите делители на i и j. Да се докаже, че $\det A = 1$.

1.26. Нека $A = (a_{ij}) \in M_n(F)$, където $a_{ij} = (i, j)$ е най-големият общ делител на числата i и j. Да се докаже, че $\det A = \varphi(1)\varphi(2)\dots\varphi(n)$, където $\varphi(m)$ е функцията на Ойлер (броят на естествените числа, ненадминаващи m и взаимно прости с m).

1.27. Да се докаже, че ако $A, B \in M_n(F)$, то $\det(E_n + AB) = \det(E_n + BA)$.

1.28. Нека $\dfrac{x}{e^x - 1} = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$. Да се докаже, че

$$b_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{2!} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{4!} & \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{(n+1)!} & \frac{1}{n!} & \frac{1}{(n-1)!} & \frac{1}{(n-2)!} & \dots & \frac{1}{2!} \end{vmatrix}.$$

§2. Матрици

Ако няма други уточнения, участващите в задачите матрици са от $M_n(F)$, където F е фиксирано числово поле.

2.1. Да се пресметне произведението на матриците:

а) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}(2,\ -6,\ 7)$; в) $(1,\ -4,\ 5)\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 5 & 2 & 7 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

2.2. Да се пресметне степента:

а) $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$; б) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n$; в) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n$; г) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^n$;

д) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{71}$; е) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}^n$

2.3. Да се докаже равенството:

а) $(a_1, a_2, \dots, a_n)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{pmatrix} =$

$= a_1(b_{11}, b_{12}, \dots, b_{1m}) + a_2(b_{21}, b_{22}, \dots, b_{2m}) + \dots + a_n(b_{n1}, b_{n2}, \dots, b_{nm})$;

б) $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = b_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + b_2\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \dots b_m\begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix}$

2.4. Да означим с E_{ij} матрицата от $M_n(F)$, която има единица на (i,j)-то място и нули на всички останали места. Тези матрици се наричат *матрични единици*. Да се докаже, че:

$$E_{pq}E_{rs} = \delta_{qr}E_{ps} = \begin{cases} E_{ps}, & \text{ако } q = r \\ O, & \text{ако } q \neq r \end{cases}$$

2.5. Да се докаже, че ако една матрица $C \in M_n(F)$, комутира с всички матрици от $M_n(F)$, то тя е скаларна матрица (т.е. $C = \lambda E$, $\lambda \in F$).

2.6. Нека $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(F)$. Да се докаже, че $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = O$.

2.7. Нека $A, B, C \in M_2(F)$. Да се докаже, че $(AB - BA)^2C = C(AB - BA)^2$.

2.8. Да се намерят всички матрици $A \in M_2(F)$, за които:
а) $A^2 = O$; б) $A^2 = E$.

2.9. Да се докаже, че ако $A \in M_2(F)$ и матриците $A+E$ и $A-E$ са особени, то $A^2 = E$

* * *

2.10. Да се докаже, че елементарните преобразувания на редовете (стълбовете) на една матрица могат да се осъществят чрез умножаване на матрицата отляво (отдясно) със следните неособени матрици:

а) умножаването на i–тия ред (стълб) с число $\lambda \neq 0$ се осъществява с матрицата $A_i(\lambda) = E + (\lambda - 1)\, E_{ii}$;

б) прибавянето на j–тия ред (стълб), умножен с λ, към i–тия ред (стълб), се осъществява с матрицата $B_{ij}(\lambda) = E + \lambda\, E_{ij}$ (съответно с $B_{ji}(\lambda)$);

в) смяната на местата на i–тия и j–тия ред (стълб) се осъществява с помощта на матрицата $C_{ij} = E - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}$.

Матриците $A_i(\lambda)$, $B_{ij}(\lambda)$ и C_{ij} се наричат *матрици на елементарните преобразувания*.

2.11. Да се пресметнат детерминантите и обратните матрици на матриците на елементарните преобразувания.

2.12. Да се докаже, че всяка неособена квадратна матрица A може да се доведе до единичната матрица чрез елементарни преобразувания на редовете (стълбовете).

2.13. Нека дадена неособена матрица A е доведена до единичната матрица чрез елементарни преобразувания само на редовете (или само на стълбовете). Да се докаже, че ако тези преобразувания се извършат в същия ред върху единичната матрица, ще се получи обратната матрица на A.

2.14. Нека A, $B \in M_n(F)$ и A е неособена матрица. Да се докаже, че ако към матрицата B приложим последователно елементарните преобразувания на редовете (стълбовете), които довеждат A до единичната матрица, ще получим матрицата $A^{-1}B$ (съответно $B\,A^{-1}$).

* * *

2.15. Да се намери обратната матрица на матрицата:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; ж) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$;

з) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; и) $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$.

2.16. Да се намери обратната матрица на матрицата:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \hdotsfor{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & \dots & a^{n-1} & a^n \\ 0 & 1 & a & a^2 & \dots & a^{n-2} & a^{n-1} \\ 0 & 0 & 1 & a & \dots & a^{n-3} & a^{n-2} \\ \hdotsfor{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \hdotsfor{6} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \dots & n-3 & n-2 \\ \hdotsfor{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \hdotsfor{6} \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a & \dots & 1 & 1 \\ \hdotsfor{6} \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1+a \end{pmatrix}$;

ж) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 \\ n-1 & n & 1 & 2 & \dots & n-3 & n-2 \\ \hdotsfor{7} \\ 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n & 1 \end{pmatrix}$; з) $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & 0 & 0 \\ \hdotsfor{6} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{pmatrix}$.

2.17. Да се реши матричното уравнение:

а) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 11 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$;

в) $X \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$; г) $X \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 18 & 12 & 12 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{pmatrix}$;

е) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \hdotsfor{5} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 \\ \hdotsfor{5} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{pmatrix}$.

2.18. Да се реши матричното уравнение:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

* * *

2.19. Да се докаже, че всяка матрица $A \in M_n(F)$ може да се представи във вида $A = PRQ$, където P и Q са обратими матрици, а $R = E_{11} + E_{22} + \dots + E_{rr}$ за подходящо естествено число $r \leqq n$. При това, ако A е обратима матрица, то $R = E$.

2.20. Нека $A \in M_n(F)$. Да се докаже, че:

а) съществува обратима матрица X, за която $A = AXA$;

б) съществува матрица Y, за която $AYA = A$ и $YAY = Y$.

2.21. Нека $A \in M_n(F)$. Да се докаже, че A може да се представи във вида:
а) $A = BY$, където $B^2 = B$ и Y е обратима матрица;
б) $A = ZC$, където $C^2 = C$ и Z е обратима матрица.

2.22. Една матрица се нарича *нилпотентна*, ако някоя нейна степен е равна на нулевата матрица. Да се докаже, че ако A е матрица, такава че AX е нилпотентна за всяка матрица X, то A е нулевата матрица.

2.23. Да се докаже, че ако A е нилпотентна матрица, то матриците $A - E$ и $A + E$ са обратими.

2.24. Ако A е нилпотентна матрица, да се реши матричното уравнение $A + X = AX$.

2.25. Нека $A \in M_n(F)$ е матрица, на която всички елементи са равни на 1. Да се докаже, че матриците $E - A$ и $E + A$ са обратими и да се намерят обратните им.

* * *

2.26. (*Теорема на Хамилтън-Кейли*) Да се докаже, че всяка матрица $A = (a_{ij})_{n\times n}$ анулира характеристичния си полином

$$f_A(x) = \det(A - xE) = \begin{vmatrix} a_{11} - x & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - x & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - x \end{vmatrix}.$$

2.27. Да се докаже, че ако $A \in M_n(F)$ е нилпотентна матрица, то $A^n = O$.

Глава II. Линейни пространства

§3. Линейни пространства

В следващите две глави (ако не е казано друго) F ще бъде фиксирано числово поле, а $\mathbb{V}$ – линейно пространство над F.

3.1. Да се докаже, че комутативността на събирането на вектори в определението за линейно пространство е следствие от останалите аксиоми.

3.2. Да се докаже, че всяко подпространство на $\mathbb{V}$ съдържа нулевия вектор и противоположния на всеки вектор от това подпространство.

3.3. Да се докаже, че:

а) сечение на произволна фамилия от подпространства на $\mathbb{V}$ също е подпространство на $\mathbb{V}$;

б) обединение на две подпространства на $\mathbb{V}$ е подпространство на $\mathbb{V}$ точно когато едното от тях се съдържа в другото.

3.4. Нека A е подмножество на $\mathbb{V}$ и $\ell(A)$ е линейната обвивка на A. Да се докаже, че:

а) $\ell(A)$ е подпространство на $\mathbb{V}$, съдържащо A;

б) $\ell(A)$ съвпада със сечението на всички подпространства на $\mathbb{V}$, съдържащи A;

в) A е подпространство на $\mathbb{V}$ точно когато $\ell(A) = A$.

3.5. Нека X е множество и F^X е множеството от всички функции (изображения), дефинирани в множеството X и приемащи стойности в полето F. Въвеждаме операции събиране на функции и умножение на функция с число по правилото: ако $f, g \in F^X$, $x \in X$, $\lambda \in F$, то $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ и $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$. Да се докаже, че F^X е линейно пространство над F относно така въведените операции. Да се докаже, че пространствата F^n и $F_{m\times n}$ могат да се реализират по този начин чрез подходящ избор на множеството X. (В действителност, всяко линейно пространство над F е подпространство на F^X при подходящ избор на X.)

3.6. Нека $\mathbb{V}$ е множеството от всички положителните реални числа. Въвеждаме операции събиране $\oplus$ на елементи на $\mathbb{V}$ и умножение $\odot$ на елемент на $\mathbb{V}$ с произволно реално число по правилото:

$$a \oplus b = a.b, \qquad \lambda \odot a = a^\lambda \quad \text{за произволни } a, b \in \mathbb{V} \quad \text{и } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Да се докаже, че с така въведените операции $\mathbb{V}$ е линейно пространство над $\mathbb{R}$.

3.7. Нека $\mathbb{V}$ е множеството от всички безкрайни редици с елементи от полето F. Да се докаже, че:

а) $\mathbb{V}$ е линейно пространство над F относно обичайните операции събиране на редици и умножение на редица с число;

б) множеството от всички финитни редици (т.е. редиците, на които само краен брой членове са различни от нула) е подпространство на $\mathbb{V}$;

в) множеството от всички аритметични прогресии е подпространство на $\mathbb{V}$.

3.8. Нека $\mathbb{V}$ е множеството от всички реални функции, дефинирани в даден интервал $[a, b]$. Да се докаже, че:

а) $\mathbb{V}$ е линейно пространство над $\mathbb{R}$ относно обичайните операции събиране на функции и умножение на функция с число;

б) ако $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ са фиксирани числа от $[a, b]$, то множеството от всички функции $f \in \mathbb{V}$, за които $f(\lambda_1) + f(\lambda_2) + \dots + f(\lambda_k) = 0$ е подпространство на $\mathbb{V}$. В частност, множеството от всички функции от $\mathbb{V}$, които се анулират в дадена точка от $[a, b]$ е подпространство на $\mathbb{V}$.

3.9. Да се намерят всички подпространства на линейните пространства $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$. Какъв е геометричният им смисъл?

* * *

3.10. Да се докаже, че векторите $b_1, b_2, \dots, b_n$ образуват базис на линейното пространство $\mathbb{V}$ точно когато $\mathbb{V} = \ell(b_1, b_2, \dots, b_n)$ и нулевият вектор се представя по единствен начин като линейна комбинация на тези вектори.

3.11. Нека $\mathbb{V}$ е крайномерно пространство и $\mathbb{W}$ е подпространство на $\mathbb{V}$. Да се докаже, че $\mathbb{W}$ също е крайномерно и $\dim \mathbb{W} \leqq \dim \mathbb{V}$, като $\dim \mathbb{W} = \dim \mathbb{V}$ точно когато $\mathbb{W} = \mathbb{V}$.

3.12. Да се намери базис на линейното пространство $\mathbb{V}$, където:
а) $\mathbb{V} = F^n$; б) $\mathbb{V} = F_{m \times n}$; в) $\mathbb{V} = F^{n+1}[x]$; г) $\mathbb{V} = F[x]$;
д) $\mathbb{V}$ е пространството от задача 3.7,б), в);
е) $\mathbb{V}$ е пространството от задача 3.6;
ж) $\mathbb{V}$ е пространството от задача 3.5, където X е крайно множество.

3.13. Нека $e_1, e_2, \dots, e_n$ е базис на $\mathbb{V}$,

$$\begin{array}{rcl} a_1 & = & a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + \dots + a_{1n}e_n, \\ a_2 & = & a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + \dots + a_{2n}e_n, \\ \dots & \dots & \dots \\ a_k & = & a_{k1}e_1 + a_{k2}e_2 + \dots + a_{kn}e_n \end{array}$$

и $A = (a_{ij})_{k \times n}$ е матрицата, съставена от координатите на $a_1, a_2, \dots, a_k$ спрямо този базис. Нека матрицата $B = (b_{ij})_{k \times n}$ се получава от A с помощта на елементарни преобразувания само върху редовете на A и

$$\begin{array}{rcl} b_1 & = & b_{11}e_1 + b_{12}e_2 + \dots + b_{1n}e_n, \\ b_2 & = & b_{21}e_1 + b_{22}e_2 + \dots + b_{2n}e_n, \\ \dots & \dots & \dots \\ b_k & = & b_{k1}e_1 + b_{k2}e_2 + \dots + b_{kn}e_n. \end{array}$$

Да се докаже, че $\ell(a_1, a_2, \dots, a_k) = \ell(b_1, b_2, \dots, b_k)$. В частност (при $k = n$), системата вектори $a_1, a_2, \dots, a_n$ е базис на $\mathbb{V}$ точно когато системата вектори $b_1, b_2, \dots, b_n$ е базис на $\mathbb{V}$ (например, ако B е триъгълна матрица с ненулеви елементи по главния диагонал).

3.14. Векторите e_1 и e_2 образуват базис на двумерното пространство $\mathbb{V}$. Да се докаже, че векторите $a_1 = e_1 - e_2$ и $a_2 = e_1 + e_2$ също образуват базис на $\mathbb{V}$ и да се намерят координатите на вектора $v = e_1 - 5e_2$ в базиса a_1, a_2.

3.15. Векторите e_1, e_2, e_3 образуват базис на тримерното пространство $\mathbb{V}$. Да се докаже, че векторите a_1, a_2, a_3 също образуват базис на $\mathbb{V}$ и да се намерят координатите на вектора $v = 2e_1 + 2e_2 + 2e_3$ в този базис, където:

а) $a_1 = e_1 + e_2 + e_3$, $a_2 = e_1 + e_2 + 2e_3$, $a_3 = e_1 + 2e_2 + 3e_3$;

б) $a_1 = 2e_1 + 2e_2 + -e_3$, $a_2 = 2e_1 + -e_2 + 2e_3$, $a_3 = -e_1 + 2e_2 + 2e_3$;

в) $a_1 = e_1 + 5e_2 + 3e_3$, $a_2 = 2e_1 + 7e_2 + 3e_3$, $a_3 = 3e_1 + 9e_2 + 4e_3$;

г) $a_1 = e_1 + 2e_2 + 3e_3$, $a_2 = 2e_1 + 5e_2 + 7e_3$, $a_3 = 3e_1 + 7e_2 + 11e_3$.

3.16. Да се докаже, че системата вектори

а) $a_1 = (-1, 2, 3, -2)$, $a_2 = (2, 1, -4, -3)$, $a_3 = (1, 3, -2, -3)$;

б) $a_1 = (1, -1, 2, 3)$, $a_2 = (2, -2, 1, 1)$;

в) $a_1 = (1, 2, -1, 3)$, $a_2 = (-1, -2, 1, 1)$,

е линейно независима и да се допълни тази система до базис на F^4.

3.17. Да се намерят стойностите на параметъра λ, за които векторът v е линейна комбинация на векторите a_1, a_2, a_3 и да се изрази v чрез тези вектори, където:

а) $a_1 = (1, 2, -1)$, $a_2 = (2, 3, 1)$, $a_3 = (1, 0, 5)$, $\quad v = (2, -3, \lambda)$;

б) $a_1 = (1, 2, 3, 4)$, $a_2 = (7, 14, 20, 27)$, $a_3 = (5, 10, 16, 19)$, $\quad v = (2, \lambda, 5, 5)$.

* * *

3.18. Нека векторите $e_1, e_2, \ldots, e_n$ образуват базис на крайномерното линейно пространство $\mathbb{V}$ и k е произволно естествено число, ненадминаващо n. Ако $\mathbb{V}_1 = \ell(e_1, \ldots, e_k)$, $\mathbb{V}_2 = \ell(e_{k+1}, \ldots, e_n)$, да се докаже, че $\mathbb{V} = \mathbb{V}_1 \oplus \mathbb{V}_2$. Обратно, ако $\mathbb{V} = \mathbb{V}_1 \oplus \mathbb{V}_2$ и $e_1, \ldots, e_k$ е базис на $\mathbb{V}_1$, а $e_{k+1}, \ldots, e_n$ е базис на $\mathbb{V}_2$, то $e_1, \ldots, e_k$; $e_{k+1}, \ldots, e_n$ е базис на $\mathbb{V}$, в частност $\dim \mathbb{V} = \dim \mathbb{V}_1 + \dim \mathbb{V}_2$.

3.19. Да се докаже, че за всяко подпространство $\mathbb{W}$ на крайномерното пространство $\mathbb{V}$ съществува подпространство $\mathbb{U}$ на $\mathbb{V}$, такова че $\mathbb{V} = \mathbb{W} \oplus \mathbb{U}$.

3.20. Да се докаже, че всяко ненулево крайномерно пространство е директна сума на едномерни подпространства.

3.21. Нека $\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2, \ldots, \mathbb{V}_s$ са подпространства на $\mathbb{V}$ и $\mathbb{V} = \mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2 + \cdots + \mathbb{V}_s$. Да се докаже, че:

а) $\mathbb{V} = \mathbb{V}_1 \oplus \mathbb{V}_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{V}_s$ точно когато нулевият вектор се представя по единствен начин като сума на вектори съответно от $\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2, \ldots, \mathbb{V}_s$;

б) $\mathbb{V} = \mathbb{V}_1 \oplus \mathbb{V}_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{V}_s$ точно когато $\mathbb{V}_i \cap (\mathbb{V}_1 + \cdots + \mathbb{V}_{i-1} + \mathbb{V}_{i+1} + \cdots + \mathbb{V}_s) = \{o\}$ за всяко $i = 1, 2, \ldots, s$.

3.22. Нека векторите $e_1, e_2, \ldots, e_n$ образуват базис на $\mathbb{V}$ и

$$\begin{aligned} \mathbb{V}_1 &= \{\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n \mid \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 0\}, \\ \mathbb{V}_2 &= \{\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \cdots + \beta_n e_n \mid \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_n\}. \end{aligned}$$

Да се докаже, че $\mathbb{V}_1$ и $\mathbb{V}_2$ са подпространства на $\mathbb{V}$ и $\mathbb{V} = \mathbb{V}_1 \oplus \mathbb{V}_2$.

3.23. Нека $\mathbb{V} = M_n(F)$ и S е множеството от всички симетричните матрици ($A^t = A$), а T — множеството от всички антисиметричните матрици ($A^t = -A$). Да се докаже, че:

а) S и T са подпространства на $\mathbb{V}$;

б) $\dim S = \dfrac{n(n+1)}{2}$, $\dim T = \dfrac{n(n-1)}{2}$;

в) $\mathbb{V} = S \oplus T$.

3.24. Нека $\mathbb{V} = F[x]$. Да се докаже, че:

а) ако $\mathbb{V}_1$ е множеството от всички четни полиноми $(f(x) = f(-x))$, а $\mathbb{V}_2$ — множеството от всички нечетни полиноми $(f(x) = -f(-x))$, то $\mathbb{V}_1$ и $\mathbb{V}_2$ са подпространства на $\mathbb{V}$ и $\mathbb{V} = \mathbb{V}_1 \oplus \mathbb{V}_2$;

б) ако $f(x)$ е ненулев полином от степен n и $f(x)F[x]$ е множеството от всички полиноми, кратни на $f(x)$, то $f(x)F[x]$ е подпространство на $\mathbb{V}$ и $\mathbb{V} = F^n[x] \oplus f(x)F[x]$.

3.25. Нека $\mathbb{V}$ е пространството от всички реални функции, дефинирани в интервала $[0,1]$, $\mathbb{V}_1$ — множеството от всички константни функции, а $\mathbb{V}_2$ — множеството от всички функции, анулиращи се в дадена точка $x_0 \in [0,1]$. Да се докаже, че $\mathbb{V}_1$ и $\mathbb{V}_2$ са подпространства на $\mathbb{V}$ и $\mathbb{V} = \mathbb{V}_1 \oplus \mathbb{V}_2$.

* * *

3.26. Да се докаже, че всяко ненулево линейно пространство притежава базис.

3.27. Нека $\mathbb{V}$ е линейно пространство и $\mathbb{W} \subsetneq \mathbb{V}$ е собствено подпространство на $\mathbb{V}$. Да се докаже, че:

а) съществува базис на $\mathbb{V}$ от вектори, никой от които не принадлежи на $\mathbb{W}$;

б) ако $\dim \mathbb{W} \geq k$, съществува базис на $\mathbb{V}$, в който точно k вектора принадлежат на $\mathbb{W}$.

§4. Ранг на система вектори. Ранг на матрица

4.1. Нека $r(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \dots, \boldsymbol{c}_t)$ е рангът на системата вектори $\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \dots, \boldsymbol{c}_t$. Да се докаже, че:

а) $r(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \dots, \boldsymbol{c}_t)$ е равен на максималния брой линейно независими вектори в тази система;

б) $r(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \dots, \boldsymbol{c}_t) = \dim \ell(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \dots, \boldsymbol{c}_t)$.

4.2. Да се докаже, че ако системата вектори $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_k$ се получават от системата вектори $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_k$ както в условието на задача 3.13, то $r(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_k) = r(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_k)$. (По-свободно казано: при елементарни преобразувания върху координатите на векторите на дадена система вектори, рангът не се променя.)

4.3. Да се намери рангът на системата вектори $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots$ и максимална линейно независима подсистема на тази система, където:

а) $\boldsymbol{a}_1 = (2,1,-3)$, $\boldsymbol{a}_2 = (3,1,-5)$, $\boldsymbol{a}_3 = (1,0,-7)$, $\boldsymbol{a}_4 = (4,2,-1)$, $\boldsymbol{a}_5 = (1,0,-2)$;

б) $\boldsymbol{a}_1 = (1,1,2)$, $\boldsymbol{a}_2 = (-2,-2,-4)$, $\boldsymbol{a}_3 = (0,3,5)$, $\boldsymbol{a}_4 = (4,1,3)$, $\boldsymbol{a}_5 = (-2,-5,-9)$, $\boldsymbol{a}_6 = (6,6,12)$;

в) $\boldsymbol{a}_1 = (3,5,-13,11)$, $\boldsymbol{a}_2 = (3,-1,3,-3)$, $\boldsymbol{a}_3 = (3,2,-5,4)$, $\boldsymbol{a}_4 = (3,8,-21,18)$;

г) $\boldsymbol{a}_1 = (2,1,-3,1,-2)$, $\boldsymbol{a}_2 = (1,2,1,-2,1)$, $\boldsymbol{a}_3 = (2,-1,1,3,2)$, $\boldsymbol{a}_4 = (1,-1,2,-1,3)$, $\boldsymbol{a}_5 = (1,-1,3,-1,7)$;

д) $\boldsymbol{a}_1 = (0,6,6,1,0)$, $\boldsymbol{a}_2 = (3,1,1,0,0)$, $\boldsymbol{a}_3 = (1,-1,3,1,-2)$, $\boldsymbol{a}_4 = (-2,3,1,0,1)$, $\boldsymbol{a}_5 = (2,3,5,1,-1)$, $\boldsymbol{a}_6 = (1,-6,4,2,-5)$.

4.4. Да се намери рангът на матрицата:

а) $\begin{pmatrix} -1 & 4 & -3 & -2 \\ 3 & -7 & 5 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 8 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 7 & -3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 14 & -27 & -49 & 113 \\ 43 & -82 & -145 & 340 \\ -29 & 55 & 96 & -227 \\ 128 & -245 & -438 & 1017 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i & 1 \end{pmatrix}$.

(Тук $i \in \mathbb{C}$ е имагинерната единица.)

4.5. Да се намери рангът на матрицата в зависимост от стойностите на параметъра λ:

а) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & -3 & 2 & \lambda \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & \lambda & 0 & 9 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 4 & -2 \\ 2 & -1 & -\lambda & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & 1 \\ 1 & \lambda & 2 & 3 & \dots & n-2 & 1 \\ 1 & 2 & \lambda & 3 & \dots & n-2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & \lambda & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & 1 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \lambda & \dots & \lambda & \lambda \\ 1 & \lambda & 0 & \dots & \lambda & \lambda \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \lambda & \lambda & \dots & 0 & \lambda \\ 1 & \lambda & \lambda & \dots & \lambda & 0 \end{pmatrix}$.

(Матриците в д) и е) са от ред n.)

4.6. Да се намери рангът на системата вектори $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \dots, \boldsymbol{a_n}$ в зависимост от стойностите на параметъра λ:

а)
$$\begin{aligned} \boldsymbol{a_1} &= (\lambda+1, \lambda, \lambda, \dots, \lambda, \lambda) \\ \boldsymbol{a_2} &= (\lambda, \lambda+\tfrac{1}{2}, \lambda, \dots, \lambda, \lambda) \\ \boldsymbol{a_3} &= (\lambda, \lambda, \lambda+\tfrac{1}{3}, \dots, \lambda, \lambda) \\ &\vdots \\ \boldsymbol{a_{n-1}} &= (\lambda, \lambda, \lambda, \dots, \lambda+\tfrac{1}{n-1}, \lambda) \\ \boldsymbol{a_n} &= (\lambda, \lambda, \lambda, \dots, \lambda, \lambda+\tfrac{1}{n}) \end{aligned};$$

б)
$$\begin{aligned} \boldsymbol{a_1} &= (1, \lambda, \lambda, \dots, \lambda, \lambda) \\ \boldsymbol{a_2} &= (\lambda-1, 2, \lambda, \dots, \lambda, \lambda) \\ \boldsymbol{a_3} &= (\lambda-2, \lambda, 3, \dots, \lambda, \lambda) \\ &\vdots \\ \boldsymbol{a_{n-1}} &= (\lambda-n+2, \lambda, \lambda, \dots, n-1, \lambda) \\ \boldsymbol{a_n} &= (\lambda-n+1, \lambda, \lambda, \dots, \lambda, n) \end{aligned};$$

в)
$$\begin{aligned} \boldsymbol{a_1} &= (\lambda, \lambda^2, 0, 0, \dots, 0, 0) \\ \boldsymbol{a_2} &= (1, 2\lambda+1, (\lambda+1)^2, 0, \dots, 0, 0) \\ \boldsymbol{a_3} &= (0, 1, 2\lambda+3, (\lambda+2)^2, \dots, 0, 0) \\ &\vdots \\ \boldsymbol{a_n} &= (0, 0, 0, 0, \dots, 1, 2\lambda+2n-3) \end{aligned};$$

г)
$$\begin{aligned} \boldsymbol{a_1} &= (t_1, t_2, t_3, \dots, t_{n-1}, t_n) \\ \boldsymbol{a_2} &= (t_1, \lambda, t_2, \dots, t_{n-2}, t_{n-1}) \\ \boldsymbol{a_3} &= (t_1, t_2, \lambda, \dots, t_{n-2}, t_{n-1}) \\ &\vdots \\ \boldsymbol{a_{n-1}} &= (t_1, t_2, t_3, \dots, \lambda, t_{n-1}) \\ \boldsymbol{a_n} &= (t_1, t_2, t_3, \dots, t_{n-1}, \lambda) \end{aligned}$$

(Числата $t_1, t_2, \dots, t_n$ са две по две различни.)

* * *

4.7. Да се намери фундаментална система решения на хомогенната система:

$$\text{а)}\ \left|\begin{array}{rrrl} x_1- & 2x_2- & x_3 & =0 \\ -2x_1+ & 6x_2+ & 8x_3 & =0 \\ 3x_1+ & 2x_2+ & x_3 & =0 \\ 3x_1+ & 4x_2+ & 7x_3 & =0 \end{array}\right. ; \qquad \text{б)}\ \left|\begin{array}{rrrrl} 2x_1+ & 3x_2+ & 5x_3- & x_4 & =0 \\ x_1+ & 2x_2+ & 2x_3- & 3x_4 & =0 \\ -3x_1- & 8x_2- & 4x_3+ & 13x_4 & =0 \\ 2x_1+ & x_2+ & 7x_3 & & =0 \end{array}\right. ;$$

$$\text{в)}\ \left|\begin{array}{rrrrl} 2x_1+ & x_2+ & x_3- & 2x_4 & =0 \\ -2x_1+ & 5x_2- & 10x_3+ & 5x_4 & =0 \\ 6x_1+ & 7x_2- & 5x_3- & x_4 & =0 \\ 4x_1+ & 4x_2+ & 3x_3- & 9x_4 & =0 \end{array}\right. ; \quad \text{г)}\ \left|\begin{array}{rrrrrl} 3x_1+ & 2x_2+ & x_3+ & 3x_4+ & 5x_5 & =0 \\ 6x_1+ & 4x_2+ & 3x_3+ & 5x_4+ & 7x_5 & =0 \\ 9x_1+ & 6x_2+ & 5x_3+ & 7x_4+ & 9x_5 & =0 \\ 3x_1+ & 2x_2+ & 4x_3- & & 4x_5 & =0 \end{array}\right.$$

4.8. Да се намери хомогенна система, пространството от решенията на която съвпада с $\mathbb{W} = \ell(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots)$, където:

а) $\boldsymbol{a}_1 = (2,1,-1,3)$, $\boldsymbol{a}_2 = (3,1,2,1)$, $\boldsymbol{a}_3 = (1,1,-4,5)$;
б) $\boldsymbol{a}_1 = (1,2,-1,1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (-3,-5,2,1)$, $\boldsymbol{a}_3 = (1,2,3,4)$, $\boldsymbol{a}_4 = (1,3,6,11)$;
в) $\boldsymbol{a}_1 = (2,3,1,2,4)$, $\boldsymbol{a}_2 = (3,4,2,3,-1)$, $\boldsymbol{a}_3 = (6,2,1,-2,-4)$, $\boldsymbol{a}_4 = (1,8,3,9,11)$;
г) $\boldsymbol{a}_1 = (1,1,-2,2)$, $\boldsymbol{a}_2 = (2,1,3,-2)$, $\boldsymbol{a}_3 = (3,4,5,6)$, $\boldsymbol{a}_4 = (3,6,9,12)$;
д) $\boldsymbol{a}_1 = (3,5,-1,2)$, $\boldsymbol{a}_2 = (2,3,3,1)$, $\boldsymbol{a}_3 = (1,1,7,0)$, $\boldsymbol{a}_4 = (1,3,-15,2)$.

4.9. Нека $\mathbb{U}$ и $\mathbb{W}$ са подпространства на F^4, като $\mathbb{U}$ е зададено като линейна обвивка на система вектори, а $\mathbb{W}$ — като пространство от решенията на хомогенна система. Да се намерят базиси на $\mathbb{U} + \mathbb{W}$ и $\mathbb{U} \cap \mathbb{W}$, където:

а) $\mathbb{U} = \ell(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$; $\boldsymbol{a}_1 = (1,1,2,2)$, $\boldsymbol{a}_2 = (1,-1,2,-2)$;

$$W : \left|\begin{array}{lllll} x_1 & +x_2 & +2x_3 & +2x_4 & =0 \\ x_1 & +x_2 & -2x_3 & -2x_4 & =0 \end{array}\right. .$$

б) $\mathbb{U} = \ell(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$; $\boldsymbol{a}_1 = (1,2,1,2)$, $\boldsymbol{a}_2 = (2,1,2,1)$, $\boldsymbol{a}_3 = (1,2,3,4)$;

$$W : \left|\begin{array}{lllll} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & =0 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & -x_4 & =0 \end{array}\right. .$$

в) $\mathbb{U} = \ell(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4)$; $\boldsymbol{a}_1 = (2,8,-3,14)$, $\boldsymbol{a}_2 = (-1,2,3,5)$, $\boldsymbol{a}_3 = (-1,14,6,29)$, $\boldsymbol{a}_4 = (0,12,3,24)$;

$$W : \left|\begin{array}{lllll} & x_2 & +x_3 & & =0 \\ 10x_1 & +7x_2 & & -8x_4 & =0 \end{array}\right. .$$

г) $\mathbb{U} = \ell(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$; $\boldsymbol{a}_1 = (1,2,1,1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (2,3,1,0)$, $\boldsymbol{a}_3 = (3,1,1,-2)$;

$W : |\ 28x_1 \ +4x_2 \ -x_3 \ -5x_4 = 0$.

д) $\mathbb{U} = \ell(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4)$; $\boldsymbol{a}_1 = (1,2,1,1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (1,0,-1,-1)$, $\boldsymbol{a}_3 = (3,4,1,1)$, $\boldsymbol{a}_4 = (1,4,3,3)$;

$$W : \left|\begin{array}{lllll} x_1 & -x_2 & +x_3 & +x_4 & =0 \\ x_1 & -x_2 & +2x_3 & +3x_4 & =0 \\ & & 4x_3 & +7x_4 & =0 \end{array}\right. .$$

* * *

4.10. Нека $A, B \in F_{m \times n}$ и $C = A + B$. Да се докаже, че $r(C) \leq r(A) + r(B)$.

4.11. Нека $A, T \in M_n(F)$ и T е обратима матрица. Да се докаже, че $r(AT) = r(TA) = r(A)$. (Оттук следва, че за матриците A и R дефинирани в задача 2.19 е в сила $r(A) = r(R) = r$.)

4.12. *(Неравенство на Силвестър)* Нека $A, B \in M_n(F)$. Да се докаже, че

$$r(A) + r(B) - n \leqq r(AB) \leqq \min\{r(A), r(B)\}.$$

4.13. Нека $X, Y \in M_n(F)$ и $XY = O$. Да се докаже, че $r(X) + r(Y) \leqq n$.

4.14. Нека $A \in M_n(F)$ и $A^2 = E$. Да се докаже, че $r(A + E) + r(A - E) = n$.

4.15. Дадена е хомогенната система

$$\left| \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \multicolumn{9}{c}{\dotfill} \\ a_{n-1,1}x_1 & + & a_{n-1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n-1,n}x_n & = & 0 \end{array} \right.$$

с $n - 1$ уравнения и n неизвестни, като рангът на матрицата A на системата е равен на $n - 1$. Нека A_i е минорът (от ред $n - 1$) на A, който се получава като се отстрани i-тият стълб на A $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Да се докаже, че наредената n-орка $(A_1, -A_2, A_3, \ldots, (-1)^{n-1}A_n)$ е фундаментална система решения на дадената система.

4.16. Нека $A = (a_{ij})_{n\times n}$, $A^* = (A_{ij})$ е адюнгираната матрица на A и $r(A) = r$, $r(A^*) = r^*$. Да се докаже, че:

а) ако $0 \leqq r \leqq n - 2$, то $r^* = 0$;

б) ако $r = n - 1$, то $r^* = 1$;

в) ако $r = n$, то $r^* = n$.

4.17. Да се докаже, че системата

$$\left| \begin{array}{ccccccccc} \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \cdots & + & \lambda_n & = & 0 \\ \lambda_1^2 & + & \lambda_2^2 & + & \cdots & + & \lambda_n^2 & = & 0 \\ \multicolumn{9}{c}{\dotfill} \\ \lambda_1^n & + & \lambda_2^n & + & \cdots & + & \lambda_n^n & = & 0 \end{array} \right.$$

има единствено решение $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$.

Глава III. Линейни оператори

§5. Линейни оператори

5.1. Да се докаже, че φ е линеен оператор в линейното пространство $\mathbb{V}$ точно когато са изпълнени следните две условия:

1) ако $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \in \mathbb{V}$, то $\varphi(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2) = \varphi(\boldsymbol{a}_1) + \varphi(\boldsymbol{a}_2)$;

2) ако $\boldsymbol{a} \in \mathbb{V}$ и $\lambda \in F$, то $\varphi(\lambda \boldsymbol{a}) = \lambda\, \varphi(\boldsymbol{a})$.

5.2. Нека $\varphi \in \operatorname{Hom} \mathbb{V}$. Да се докаже, че:

а) $\varphi(\mathbf{o}) = \mathbf{o}$;

б) за всеки вектор $\boldsymbol{a} \in \mathbb{V}$ е изпълнено $\varphi(-\boldsymbol{a}) = -\varphi(\boldsymbol{a})$;

в) ако $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_k$ са линейно зависими вектори от $\mathbb{V}$, то $\varphi(\boldsymbol{a}_1), \varphi(\boldsymbol{a}_2), \dots, \varphi(\boldsymbol{a}_k)$ също са линейно зависими.

5.3. Нека $\varphi, \psi \in \operatorname{Hom} \mathbb{V}$, $\lambda \in F$, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{V}$. Дефинираме изображения $\varphi + \psi$ и $\lambda\varphi$ по правилото: $(\varphi + \psi)(\boldsymbol{a}) = \varphi(\boldsymbol{a}) + \psi(\boldsymbol{a})$, $(\lambda\varphi)(\boldsymbol{a}) = \lambda\varphi(\boldsymbol{a})$. Да се докаже, че:

а) изображенията $\varphi + \psi$ и $\lambda\varphi$ са линейни, т.е. принадлежат на $\operatorname{Hom} \mathbb{V}$;

б) с така въведените операции $\operatorname{Hom} \mathbb{V}$ се превръща в линейно пространство над F и ако $\dim \mathbb{V} = n$, то $\dim(\operatorname{Hom} \mathbb{V}) = n^2$.

5.4. Да се докаже, че ако един линеен оператор φ в крайномерно пространство $\mathbb{V}$ комутира с всеки оператор от $\operatorname{Hom} \mathbb{V}$, то φ е скаларен оператор, т.е. $\varphi = \lambda\varepsilon$ за някое $\lambda \in F$.

5.5. Да се докаже, че векторите $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_k$ в ненулевото крайномерно пространство $\mathbb{V}$ са линейно независими точно когато за произволни вектори $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \dots, \boldsymbol{e}'_k \in \mathbb{V}$ съществува линеен оператор $\varphi \in \operatorname{Hom} \mathbb{V}$, такъв че $\varphi(\boldsymbol{e}_i) = \boldsymbol{e}'_i$, $i = 1, 2, \dots, k$.

5.6. Нека $\mathbb{V} = M_n(F)$ и A и B са фиксирани матрици от $\mathbb{V}$. Да се докаже, че изображението $\varphi : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ е линеен оператор, където:

а) $\varphi(X) = X^t$; б) $\varphi(X) = A\,X\,B$; в) $\varphi(X) = A\,X + X\,B$.

При $n = 2$ да се напише матрицата на φ в базиса E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}, където $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

5.7. Нека $\mathbb{V} = F^{n+1}[x]$. Да се докаже, че изображението $\varphi : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ е линеен оператор, където:

а) $(\varphi(f))(x) = f(ax + b)$, $a, b \in F$, $a \neq 0$;

б) $(\varphi(f))(x) = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$, h е фиксиран ненулев елемент от F.

Да се напише матрицата на φ в базиса $1, x, x^2, \dots, x^n$ на $\mathbb{V}$.

5.8. Да се докаже, че изображението $\delta : F^{n+1}[x] \to F^{n+1}[x]$, което на всеки полином $f \in F^{n+1}[x]$ съпоставя производната му f', е линеен оператор (*оператор на диференциране*) и да се напише матрицата на δ в базиса:

а) $1, x, x^2, \dots, x^n$; б) $1, x - c, \dfrac{(x-c)^2}{2!}, \dots, \dfrac{(x-c)^n}{n!}$, $c \in F$.

5.9. Нека $\pi, \eta \in \operatorname{Hom} \mathbb{V}$. Да се докаже, че:

а) $\pi^2 = \pi$ точно когато съществуват подпространства $\mathbb{V}_1$ и $\mathbb{V}_2$ на $\mathbb{V}$, такива че $\mathbb{V} = \mathbb{V}_1 \oplus \mathbb{V}_2$ и $\pi(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}\ \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{V}_1$, $\pi(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{o}\ \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{V}_2$. (Такъв оператор се нарича *проектор*.)

б) $\eta^2 = \varepsilon$ точно когато съществуват подпространства $\mathbb{V}_1$ и $\mathbb{V}_2$ на $\mathbb{V}$, такива че $\mathbb{V} = \mathbb{V}_1 \oplus \mathbb{V}_2$ и $\eta(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}\ \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{V}_1$, $\eta(\boldsymbol{v}) = -\boldsymbol{v}\ \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{V}_2$. (Такъв оператор се нарича *отражение* или *инволюция*.)

Ако $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k$ е базис на $\mathbb{V}_1$, а $\boldsymbol{v}_{k+1}, \dots, \boldsymbol{v}_n$ е базис на $\mathbb{V}_2$, да се напишат матриците на π и η в базиса $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k; \boldsymbol{v}_{k+1}, \dots, \boldsymbol{v}_n$ на $\mathbb{V}$.

5.10. Да се докаже, че ако π е проектор, то $\eta = 2\pi - \varepsilon$ е инволюция и всяка инволюция може да се представи в този вид.

* * *

5.11. Нека $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ е базис на $\mathbb{V}$ и $\varphi \in \operatorname{Hom} \mathbb{V}$ действа по правилото: $\varphi(\xi_1\boldsymbol{e}_1 + \xi_2\boldsymbol{e}_2) = \xi_1\boldsymbol{e}_1 + (-\xi_1 + 2\xi_2)\boldsymbol{e}_2$. Да се намери матрицата на φ в базиса $\boldsymbol{e}_1' = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_2' = -2\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2$ и координатите на образа на вектора $\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{e}_1' + 3\boldsymbol{e}_2'$ спрямо втория базис.

5.12. Нека $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ е базис на $\mathbb{V}$ и $\varphi \in \operatorname{Hom} \mathbb{V}$ има матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$ в базиса $\boldsymbol{a}_1 = -3\boldsymbol{e}_1 + 7\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{e}_1 - 2\boldsymbol{e}_2$, а $\psi \in \operatorname{Hom} \mathbb{V}$ има матрица $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ в базиса $\boldsymbol{b}_1 = 6\boldsymbol{e}_1 - 7\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{b}_2 = -5\boldsymbol{e}_1 + 6\boldsymbol{e}_2$. Да се намери матрицата на оператора $\varphi\psi$ в базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$.

5.13. Нека $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$ и $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n$ са два базиса на линейното пространство $\mathbb{V}$, а $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_n$ е произволна система вектори от $\mathbb{V}$. Нека

$$\begin{array}{lcl} \boldsymbol{a}_1 &=& a_{11}\boldsymbol{e}_1 + a_{21}\boldsymbol{e}_2 + \dots + a_{n1}\boldsymbol{e}_n \\ \boldsymbol{a}_2 &=& a_{12}\boldsymbol{e}_1 + a_{22}\boldsymbol{e}_2 + \dots + a_{n2}\boldsymbol{e}_n \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ \boldsymbol{a}_n &=& a_{1n}\boldsymbol{e}_1 + a_{2n}\boldsymbol{e}_2 + \dots + a_{nn}\boldsymbol{e}_n \end{array} \qquad \begin{array}{lcl} \boldsymbol{b}_1 &=& b_{11}\boldsymbol{e}_1 + b_{21}\boldsymbol{e}_2 + \dots + b_{n1}\boldsymbol{e}_n \\ \boldsymbol{b}_2 &=& b_{12}\boldsymbol{e}_1 + b_{22}\boldsymbol{e}_2 + \dots + b_{n2}\boldsymbol{e}_n \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ \boldsymbol{b}_n &=& b_{1n}\boldsymbol{e}_1 + b_{2n}\boldsymbol{e}_2 + \dots + b_{nn}\boldsymbol{e}_n \end{array}$$

и $A = (a_{ij})_{n\times n}$, $B = (b_{ij})_{n\times n}$. Нека накрая φ е линеен оператор във $\mathbb{V}$, такъв че $\varphi(\boldsymbol{a}_i) = \boldsymbol{b}_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Да се докаже, че в базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$ операторът φ има матрица $C = BA^{-1}$.

5.14. Нека $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ е базис на $\mathbb{V}$ и $\varphi \in \operatorname{Hom} \mathbb{V}$ изобразява векторите $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ съответно във векторите $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$. Да се намери матрицата на φ в дадения базис, ако:

а) $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{a}_2 = 2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3$,
$\boldsymbol{b}_1 = 4\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + 5\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{e}_3$;

б) $\boldsymbol{a}_1 = 2\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2 + 5\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{e}_1$,
$\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{b}_3 = 2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3$;

в) $\boldsymbol{a}_1 = 2\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{a}_2 = 4\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + 5\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{a}_3 = 3\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3$,
$\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{b}_2 = 4\boldsymbol{e}_1 + 5\boldsymbol{e}_2 - 2\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$;

г) $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 - 3\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{a}_2 = 3\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 - 4\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{a}_3 = 2\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2$,
$\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{e}_1 - 3\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{b}_2 = 10\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + 7\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{b}_3 = 10\boldsymbol{e}_1 + 7\boldsymbol{e}_2 + 8\boldsymbol{e}_3$;

д) $\boldsymbol{a}_1 = 5\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 - 5\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{a}_2 = 3\boldsymbol{e}_1 - 3\boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{e}_1 - 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$,
$\boldsymbol{b}_1 = -8\boldsymbol{e}_1 - 5\boldsymbol{e}_2 - 2\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{b}_2 = 3\boldsymbol{e}_1 + 9\boldsymbol{e}_2 + 15\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{o}$.

5.15. Нека $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ и $\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_2$, $\boldsymbol{f}_3$ са два базиса на $\mathbb{V}$. Да се докаже, че съществува единствен линеен оператор $\varphi \in \operatorname{Hom}\mathbb{V}$, който изобразява векторите $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ съответно във векторите $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{b}_3$ и да се намери матрицата на φ в базиса $\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_2$, $\boldsymbol{f}_3$, където:

а) $\boldsymbol{a}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $\boldsymbol{a}_2 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$, $\boldsymbol{a}_3 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3$,
$\boldsymbol{b}_1 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $\boldsymbol{b}_2 = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $\boldsymbol{b}_3 = \mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$,
$\boldsymbol{f}_1 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $\boldsymbol{f}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3$, $\boldsymbol{f}_3 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$;

б) $\boldsymbol{a}_1 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $\boldsymbol{a}_2 = \mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_3$, $\boldsymbol{a}_3 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$,
$\boldsymbol{b}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$, $\boldsymbol{b}_2 = 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3$, $\boldsymbol{b}_3 = 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + 5\mathbf{e}_3$,
$\boldsymbol{f}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $\boldsymbol{f}_2 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3$, $\boldsymbol{f}_3 = \mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3$.

5.16. Нека $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_4$ е базис на $\mathbb{V}$ и линейният оператор $\varphi \in \operatorname{Hom}\mathbb{V}$ има матрица:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

в този базис. Да се намерят базиси на подпространствата $\operatorname{Ker}\varphi$, $\operatorname{Im}\varphi$, $\operatorname{Ker}\varphi \cap \operatorname{Im}\varphi$, $\operatorname{Ker}\varphi + \operatorname{Im}\varphi$.

5.17. Нека $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_4$ е базис на $\mathbb{V}$ и линейните оператори $\varphi, \psi \in \operatorname{Hom}\mathbb{V}$ имат съответно матрици:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -9 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & -1 & 11 \end{pmatrix}$$

в този базис. Да се намерят базиси на подпространствата $\operatorname{Ker}\varphi \cap \operatorname{Im}\psi$, $\operatorname{Ker}\varphi + \operatorname{Im}\psi$.

* * *

5.18. Нека $\mathbb{V}$ и $\mathbb{V}'$ са линейни пространства и $\varphi : \mathbb{V} \to \mathbb{V}'$ е изоморфизъм. Да се докаже, че $\varphi^{-1} : \mathbb{V}' \to \mathbb{V}$ също е изоморфизъм.

5.19. Нека $\varphi \in \operatorname{Hom}\mathbb{V}$. Да се докаже, че следните условия са еквивалентни:

1) $\operatorname{Ker}\varphi = \{\mathbf{o}\}$;

2) ако $\boldsymbol{v}_1 \neq \boldsymbol{v}_2$, то $\varphi(\boldsymbol{v}_1) \neq \varphi(\boldsymbol{v}_2)$.

5.20. Нека $\mathbb{V}_1$ и $\mathbb{V}_2$ са подпространства на крайномерното пространство $\mathbb{V}$ и $\dim\mathbb{V}_1 + \dim\mathbb{V}_2 = \dim\mathbb{V}$. Да се докаже, че съществува линеен оператор $\varphi \in \operatorname{Hom}\mathbb{V}$, за който $\mathbb{V}_1 = \operatorname{Ker}\varphi$, $\mathbb{V}_2 = \operatorname{Im}\varphi$.

5.21. Нека $\mathbb{V} = F[x]$ и $f = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ е произволен полином от $\mathbb{V}$. Нека δ и σ са съответно операторите на диференциране и интегриране във $\mathbb{V}$:

$$\delta(f) = f' = a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1}; \quad \sigma(f) = a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1}.$$

Да се докаже, че $\delta\sigma = \varepsilon$, но $\sigma\delta \neq \varepsilon$. (Така в безкрайномерно пространство може да се случи десният обратен (σ) на един оператор (δ) да не е ляв обратен на този оператор.)

5.22. Формулирайте и докажете за линейни оператори аналози на твърденията на задача 4.11 и задача 4.12.

5.23. (*Лема на Фитинг*) Нека $\mathbb{V}$ е крайномерно пространство и $\varphi \in \operatorname{Hom}\mathbb{V}$. Да се докаже, че съществува естествено число m, такова че $\mathbb{V} = \operatorname{Ker}\varphi^m \oplus \operatorname{Im}\varphi^m$.

§6. Собствени вектори и собствени стойности. Инвариантни подпространства

6.1. Нека $A = (a_{ij}) \in M_n(F)$ и $f_A(x) = \det(A - xE)$ е характеристичният полином на A. Да се докаже, че коефициентът пред $(n-1)$-вата степен и свободният член на $f_A(x)$ са съответно равни на $(-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn})$ и $\det A$.

6.2. Да се докаже, че ако $A = (a_{ij}) \in M_n(F)$ е триъгълна матрица (с нулеви елементи под (или над) главния диагонал), то характеристичният полином на A е $f_A(x) = (a_{11} - x)(a_{22} - x)\dots(a_{nn} - x)$. В частност, характеристичните корени на A са елементите ѝ, стоящи по главния диагонал.

6.3. Нека $\varphi \in \operatorname{Hom}\mathbb{V}$. Да се докаже, че подпространствата $\operatorname{Ker}\varphi^m$ и $\operatorname{Im}\varphi^m$ на $\mathbb{V}$ са φ-инвариантни ($m \in \mathbb{N}$).

6.4. Нека $\varphi \in \operatorname{Hom}\mathbb{V}$ и λ е собствена стойност на φ. Да се докаже, че множеството $\mathbb{U}$, състоящо се от всички собствени вектори на φ, съответстващи на λ, заедно с нулевия вектор (т.е. $\mathbb{U} = \{v \in \mathbb{V} \mid \varphi(v) = \lambda v\}$) е подпространство на $\mathbb{V}$, което е φ-инвариантно (в това подпространство φ действа като хомотетия с коефициент λ).

6.5. Да се намерят характеристичните корени на матрицата:

а) $\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$; б) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

6.6. Нека n е естествено число и $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{n-1}$ са n-тите корени на единицата. Да се намерят характеристичните корени на матриците (съответно от редове n и $n+1$):

а) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$; б) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \omega_0 & 2 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \omega_1 & 1 & 2 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \omega_2 & 1 & 1 & 2 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_{n-2} & 1 & 1 & 1 & \dots & 2 & 1 \\ \omega_{n-1} & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 2 \end{pmatrix}$

6.7. Да се намери характеристичният полином на матрицата

$$A = \begin{pmatrix} -a_{n-1} & -a_{n-2} & -a_{n-3} & \dots & -a_1 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

6.8. Да се намерят собствените стойности и собствените вектори на линейния оператор φ, който в даден базис има матрица:

а) $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 2 & -5 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 15 & 12 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 3+i & -1 \\ 2i & 1-i \end{pmatrix}$;

е) $\begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$; ж) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; з) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; и) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

6.9. Нека $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ е базис на $\mathbb{V}$ и $\varphi \in \operatorname{Hom}\mathbb{V}$. Да се намери базис на $\mathbb{V}$, в който φ има диагонална матрица D, както и тази диагонална матрица, ако φ действа по правилото:

а) $\varphi(\xi_1\boldsymbol{e}_1 + \xi_2\boldsymbol{e}_2 + \xi_3\boldsymbol{e}_3) = (4\xi_1 - \xi_2 - 2\xi_3)\boldsymbol{e}_1 + (2\xi_1 + \xi_2 - 2\xi_3)\boldsymbol{e}_2 + (\xi_1 - \xi_2 + \xi_3)\boldsymbol{e}_3$;

б) $\varphi(\xi_1\boldsymbol{e}_1 + \xi_2\boldsymbol{e}_2 + \xi_3\boldsymbol{e}_3) = (-\xi_1 + 3\xi_2 - \xi_3)\boldsymbol{e}_1 + (-3\xi_1 + 5\xi_2 - \xi_3)\boldsymbol{e}_2 + (-3\xi_1 + 3\xi_2 + \xi_3)\boldsymbol{e}_3$;

в) $\varphi(\xi_1\boldsymbol{e}_1 + \xi_2\boldsymbol{e}_2 + \xi_3\boldsymbol{e}_3) = (2\xi_1 - 2\xi_2 - 4\xi_3)\boldsymbol{e}_1 + (-2\xi_1 + 5\xi_2 - 2\xi_3)\boldsymbol{e}_2 + (-4\xi_1 - 2\xi_2 + 2\xi_3)\boldsymbol{e}_3$.

* * *

6.10. Да се докаже, че ако $A \in M_n(F)$ е неособена матрица, характеристичните корени на матрицата A^{-1} са реципрочните стойности на характеристичните корени на A.

6.11. Нека $\varphi \in \operatorname{Hom}\mathbb{V}$ е обратим линеен оператор и v е собствен вектор на φ, съответстващ на собствена стойност λ. Да се докаже, че v е собствен вектор и на φ^{-1}, съответстващ на собствена стойност λ^{-1}.

6.12. Нека $\varphi \in \operatorname{Hom}\mathbb{V}$ и v е собствен вектор на φ, съответстващ на собствена стойност λ. Да се докаже, че за всеки полином $f(x) \in F[x]$ векторът v е собствен вектор и на оператора $f(\varphi)$, съответстващ на собствена стойност $f(\lambda)$.

6.13. Нека $A \in M_n(F)$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ са характеристичните корени на A и $\varphi(x) \in F[x]$. Да се докаже, че $\det(\varphi(A)) = \varphi(\lambda_1)\varphi(\lambda_2)\dots\varphi(\lambda_n)$.

6.14. Нека $A \in M_n(F)$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ са характеристичните корени на A и $f(x) \in F[x]$. Да се докаже, че характеристичните корени на матрицата $f(A)$ са $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \dots, f(\lambda_n)$. В частност, характеристичните корени на A^k са $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_n^k$ $(k \in \mathbb{N})$.

* * *

6.15. Да се намерят характеристичните корени на ***циркулантната матрица***

$$C_n = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & \dots & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_0 \end{pmatrix}.$$

Като се използва получения резултат, да се пресметне $\det C_n$ (вижте задача 1.19).

6.16. Да се докаже, че характеристичните корени на всяка симетрична матрица A $(A^t = A)$ са реални числа.

6.17. Нека $\dim \mathbb{V} = n$ и $\varphi \in \operatorname{Hom} \mathbb{V}$. Да се докаже, че:

а) ако всяко едномерно подпространство на $\mathbb{V}$ е φ–инвариантно, то φ е скаларен оператор;

б) ако k е фиксирано естествено число, $1 \leqq k < n$ и всяко k–мерно подпространство на $\mathbb{V}$ е φ–инвариантно, то φ е скаларен оператор;

в) ако φ има $n+1$ собствени вектора, всеки n от които са линейно независими, то φ е скаларен оператор.

* * *

В следващите задачи $\mathbb{V}$ ще бъде крайномерно пространство с размерност n. Ако $\varphi \in \operatorname{Hom} \mathbb{V}$, под *следа* на φ (ще я бележим с $\operatorname{tr} \varphi$) ще разбираме сумата от характеристичните корени на φ. Под *следа* на една матрица $A = (a_{ij})_{n \times n}$ ще разбираме числото $\operatorname{tr} A = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$. Ще казваме, че φ е *нилпотентен оператор*, ако съществува естествено число k, такова че $\varphi^k = o$. Най-малкото естествено число с това свойство ще наричаме *степен на нилпотентност* на φ. Под *комутатор* на два оператора φ и ψ ще разбираме оператора $\varphi\psi - \psi\varphi$. Аналогично се дефинира комутатор на две матрици.

6.18. Да се докаже, че следата на един линеен оператор е равна на следата на матрицата му в кой да е базис на $\mathbb{V}$.

6.19. Да се докаже, че следата на комутатора на два линейни оператора е равна на 0.

6.20. Нека $\varphi \in \operatorname{Hom} \mathbb{V}$. Да се докаже, че следните условия са еквивалентни:

1) φ е нилпотентен линеен оператор;

2) съществува верига $\{o\} = \mathbb{V}_0 \lneqq \mathbb{V}_1 \lneqq \ldots \lneqq \mathbb{V}_k = \mathbb{V}$ от подпространства на $\mathbb{V}$, такива че $\varphi(\mathbb{V}_i) \subseteq \mathbb{V}_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, k$;

3) съществува базис на $\mathbb{V}$, в който матрицата на φ е строго триъгълна (т.е. елементите ѝ по и под главния диагонал са равни на 0). В частност, степента на нилпотентност на φ не надминава n (вижте задача 2.27);

4) всички характеристични корени на φ са равни на 0, т.е. характеристичният полином на φ е $f_\varphi(x) = (-1)^n x^n$;

5) за всяко естествено число k е в сила $\operatorname{tr}(\varphi^k) = 0$.

6.21. Да се докаже, че ако комутаторът на два линейни оператора комутира с единия от тях, то този комутатор е нилпотентен.

Глава IV. Евклидови пространства

§7. Евклидови пространства

7.1. Да се намери ъгълът между векторите:
а) $\boldsymbol{a} = (2, 1, 3, 2)$, $\quad \boldsymbol{b} = (1, 2, -2, 1)$;
б) $\boldsymbol{a} = (1, 2, 2, 3)$, $\quad \boldsymbol{b} = (3, 1, 5, 1)$;
в) $\boldsymbol{a} = (1, 1, 1, 2)$, $\quad \boldsymbol{b} = (3, 1, -1, 0)$.

7.2. Нека $\mathbb{V}$ е евклидово пространство и $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{V}$. Да се докаже, че:
а) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2 + |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2 = 2(|\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2)$. Какъв е геометричният смисъл на това равенство?
б) $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}|$ тогава и само тогава, когато векторите $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ са ортогонални;
в) ако $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}|$, то $|\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}| = |\beta\boldsymbol{a} + \alpha\boldsymbol{b}|$.

7.3. Да се провери, че векторите $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \in \mathbb{V}$ са ортогонални и да се допълни системата $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ до ортогонален базис на $\mathbb{V}$, където:
а) $\boldsymbol{a}_1 = (1, -2, 3, 1)$, $\quad \boldsymbol{a}_2 = (2, 1, 1, -3)$;
б) $\boldsymbol{a}_1 = (1, -3, -1, 1)$, $\quad \boldsymbol{a}_2 = (5, 0, 1, -4)$;
в) $\boldsymbol{a}_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $\quad \boldsymbol{a}_2 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$;
г) $\boldsymbol{a}_1 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $\quad \boldsymbol{a}_2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

7.4. Да се докаже, че векторите
а) $\boldsymbol{a}_1 = (1, -1, 1, 1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (3, -1, 2, -2)$, $\boldsymbol{a}_3 = (0, 2, -5, 3)$, $\boldsymbol{a}_4 = (-2, 6, -3, 9)$;
б) $\boldsymbol{a}_1 = (1, -2, 1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (4, -5, 4)$, $\boldsymbol{a}_3 = (-1, -8, -3)$;
в) $\boldsymbol{a}_1 = (2, 1, 1, -1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (5, 0, 3, -1)$, $\boldsymbol{a}_3 = (-3, -10, 3, 8)$, $\boldsymbol{a}_4 = (-1, -1, 1, 5)$;
г) $\boldsymbol{a}_1 = (-2, 1, 1, 2)$, $\boldsymbol{a}_2 = (-3, 4, 4, 3)$, $\boldsymbol{a}_3 = (6, 6, 0, -2)$, $\boldsymbol{a}_4 = (-6, -8, 8, 4)$,
образуват базис на съответното евклидово пространство. Да се ортогонализират тези вектори по метода на Грам и Шмид и да се намерят съответните ортонормирани базиси.

7.5. Да се построи по метода на Грам и Шмид ортогонален базис на линейната обвивка на векторите:
а) $\boldsymbol{a}_1 = (2, 1, 3, -1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (7, 4, 3, -3)$, $\boldsymbol{a}_3 = (1, 1, -6, 0)$, $\boldsymbol{a}_4 = (5, 7, 7, 8)$;
б) $\boldsymbol{a}_1 = (2, 5, 1, 3)$, $\boldsymbol{a}_2 = (5, 11, 1, 4)$, $\boldsymbol{a}_3 = (4, 7, -1, -1)$;
в) $\boldsymbol{a}_1 = (2, 3, -4, -6)$, $\boldsymbol{a}_2 = (1, 8, -2, -16)$, $\boldsymbol{a}_3 = (12, 5, -14, 5)$,
$\boldsymbol{a}_4 = (3, 11, 4, -7)$;
г) $\boldsymbol{a}_1 = (1, 2, 1, 3)$, $\boldsymbol{a}_2 = (4, 1, 1, 1)$, $\boldsymbol{a}_3 = (3, 1, 1, 0)$, $\boldsymbol{a}_4 = (4, 5, 3, 5)$;
д) $\boldsymbol{a}_1 = (1, -2, 2, 2)$, $\boldsymbol{a}_2 = (-1, 9, -5, -5)$, $\boldsymbol{a}_3 = (1, 5, -1, -1)$,
$\boldsymbol{a}_4 = (1, 12, -3, -5)$.

* * *

7.6. Нека векторите $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k \in \mathbb{V}$ са линейно зависими. Да се докаже, че при прилагане на метода на Грам и Шмид към тези вектори на някоя стъпка ще се получи нулев вектор $\boldsymbol{b}_i$, $1 \leqq i \leqq k$.

7.7. Нека векторите $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_k \in \mathbb{V}$ са линейно независими, а $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_k$ и $\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \dots, \boldsymbol{c}_k$ са две ортогонални системи от ненулеви вектори, такива че $\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{c}_i \in \ell(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_i)$ за всяко $i = 1, 2, \dots, k$. Да се докаже, че съществуват числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, всичките различни от нула, за които $\boldsymbol{c}_i = \lambda_i \boldsymbol{b}_i$, $i = 1, 2, \dots, k$.

* * *

7.8. Да се докаже, че всяко подпространство $\mathbb{W}$ на $\mathbb{R}^n$ съвпада с пространството от решенията на подходяща хомогенна система.

7.9. Нека $\mathbb{U}_1$ и $\mathbb{U}_2$ са подпространства на крайномерното евклидово пространство $\mathbb{V}$. Да се докаже, че $(\mathbb{U}_1 + \mathbb{U}_2)^\perp = \mathbb{U}_1^\perp \cap \mathbb{U}_2^\perp$ и $(\mathbb{U}_1 \cap \mathbb{U}_2)^\perp = \mathbb{U}_1^\perp + \mathbb{U}_2^\perp$.

7.10. Нека $\mathbb{U}$ е линейната обвивка на векторите $\boldsymbol{a}_1 = (1,2,0,1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (3,2,1,2)$, $\boldsymbol{a}_3 = (1,-2,1,0)$. Да се намери ортонормиран базис на ортогоналното допълнение $\mathbb{U}^\perp$ на $\mathbb{U}$.

7.11. Нека $\mathbb{U}$ е пространството от решенията на хомогенната система

$$\left| \begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & - & 2x_4 & = & 0 \end{array} \right. .$$

Да се намери ортонормиран базис на ортогоналното допълнение $\mathbb{U}^\perp$ на $\mathbb{U}$.

7.12. Нека $\mathbb{U}$ е линейната обвивка на векторите $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots$ от евклидовото пространство $\mathbb{V}$ и $\boldsymbol{a}$ е вектор от $\mathbb{V}$. Да се намерят ортогоналната проекция $\boldsymbol{a}_0$ на $\boldsymbol{a}$ върху $\mathbb{U}$ и перпендикулярът $\boldsymbol{h}$ от $\boldsymbol{a}$ към $\mathbb{U}$, където:

а) $\boldsymbol{a} = (4,-1,-3,4)$; $\boldsymbol{a}_1 = (1,1,1,1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (1,2,2,-1)$, $\boldsymbol{a}_3 = (1,0,0,3)$;

б) $\boldsymbol{a} = (5,2,-2,2)$; $\boldsymbol{a}_1 = (2,1,1,-1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (1,1,3,0)$, $\boldsymbol{a}_3 = (1,2,8,1)$;

в) $\boldsymbol{a} = (10,-10,8,11)$; $\boldsymbol{a}_1 = (1,-1,2,3)$, $\boldsymbol{a}_2 = (2,-3,1,2)$, $\boldsymbol{a}_3 = (2,-1,7,10)$;

г) $\boldsymbol{a} = (4,-7,7,-6)$; $\boldsymbol{a}_1 = (2,1,3,-1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (3,1,4,2)$, $\boldsymbol{a}_3 = (-1,1,0,-10)$, $\boldsymbol{a}_4 = (1,1,2,-4)$;

д) $\boldsymbol{a} = (14,-3,-6,-7)$; $\boldsymbol{a}_1 = (-3,0,7,6)$, $\boldsymbol{a}_2 = (1,4,3,2)$, $\boldsymbol{a}_3 = (2,2,-2,-2)$, $\boldsymbol{a}_4 = (-5,4,17,14)$;

е) $\boldsymbol{a} = (2,-5,3,4)$; $\boldsymbol{a}_1 = (1,3,3,5)$, $\boldsymbol{a}_2 = (1,3,-5,-3)$, $\boldsymbol{a}_3 = (1,-5,3,-3)$, $\boldsymbol{a}_4 = (-1,13,5,19)$.

7.13. Нека $\mathbb{U}$ е пространството от решенията на хомогенната система

$$\left| \begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 0 \end{array} \right. ,$$

и $\boldsymbol{a} = (-3,0,-5,9)$. Да се намерят векторите $\boldsymbol{a}_0 \in \mathbb{U}$ и $\boldsymbol{h} \in \mathbb{U}^\perp$, за които $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{h}$.

* * *

7.14. Нека векторите $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_k$ са получени от линейно независимите вектори $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_k$ с помощта на ортогонализация по метода на Грам и Шмид. Да се докаже, че:

а) $\Gamma(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_k) = |\boldsymbol{b}_1|^2 |\boldsymbol{b}_2|^2 \dots |\boldsymbol{b}_k|^2$;

б) $\Gamma(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_k) = \Gamma(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_k)$.

7.15. Да се докаже, че $\Gamma(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_k) \leq |\boldsymbol{a}_1|^2 |\boldsymbol{a}_2|^2 \dots |\boldsymbol{a}_k|^2$. Равенство има само когато някое $\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{o}$ или пък векторите $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_k$ са ортогонални.

7.16. Нека $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_k$ са линейно независими вектори и ортогоналните вектори $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_k$ са получени от тях по метода на Грам и Шмид. Да се докаже, че

$$|\boldsymbol{b}_i|^2 = \frac{\Gamma(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_i)}{\Gamma(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_{i-1})}, \quad i = 2, 3, \dots, k.$$

7.17. Да се докаже, че

$$\Gamma(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_l) \leq \Gamma(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_k) \,.\, \Gamma(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_l),$$

като равенство се достига само когато $(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{b}_j) = 0$ при $i = 1, 2, \dots, k$ и $j = 1, 2, \dots, l$ или пък някоя от системите вектори $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_k$ и $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_l$ е линейно зависима. Какъв е геометричният смисъл на това неравенство?

7.18. Нека $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$ са линейно независими вектори, за които $|\boldsymbol{e}_i| = 1$, $i = 1, 2, \dots, n$, и $(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \gamma$ при $i \neq j$. Да се докаже, че $-\dfrac{1}{n-1} < \gamma < 1$.

7.19. Да се докаже, че в евклидовото пространство $\mathbb{R}^n$:

а) не съществуват $n+2$ ненулеви вектора $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_{n+2}$, които сключват помежду си равни ненулеви ъгли;

б) съществуват $n+1$ ненулеви вектора $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_{n+1}$, които сключват помежду си равни ненулеви ъгли.

7.20. Да се докаже, че в n-мерно евклидово пространство не съществуват $n+2$ вектора, всеки два от които сключват тъп ъгъл.

7.21. Нека $\mathbb{V}$ е множеството на всички редици $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \dots)$ с реални елементи, за които редът $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i^2$ е сходящ. Във $\mathbb{V}$ въвеждаме операции събиране на редици, умножение на редица с реално число и скаларно произведение по следните правила. Ако $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \dots)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \dots) \in \mathbb{V}$ и $\lambda \in \mathbb{R}$, полагаме

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots), \quad \lambda \boldsymbol{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots), \quad (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i \,.$$

Да се докаже, че:

а) с така въведените операции $\mathbb{V}$ е безкрайномерно евклидово пространство;

б) ако $\mathbb{U}$ е крайномерно подпространство на $\mathbb{V}$, то $\mathbb{V} = \mathbb{U} \oplus \mathbb{U}^\perp$;

в) ако $\mathbb{W}$ е подпространството на $\mathbb{V}$, състоящо се от всички финитни редици (т.е. редиците, чиито елементи са равни на нула от известно място нататък), то $\mathbb{W}^\perp = \{\boldsymbol{o}\}$. В частност $\mathbb{W} \oplus \mathbb{W}^\perp = \mathbb{W} \neq \mathbb{V}$ и $(\mathbb{W}^\perp)^\perp = \mathbb{V} \neq \mathbb{W}$.

§8. Линейни оператори в евклидови пространства

8.1. Да се докаже, че за всяка ортогонална матрица $A = (a_{ij})_{n\times n}$ е в сила $a_{ij} = \dfrac{1}{\det A} A_{ij}$, където A_{ij} е адюнгираното количество на елемента a_{ij}, $1 \leqq i, j \leqq n$. В частност, $|a_{ij}| = |A_{ij}|$.

8.2. Да се докаже, че:

а) $\varphi \in \operatorname{Hom} \mathbb{V}$ е ортогонален оператор тогава и само тогава, когато $(\varphi(\boldsymbol{a}), \varphi(\boldsymbol{a})) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})$ за всеки вектор $\boldsymbol{a} \in \mathbb{V}$, т.е. когато φ запазва само дължините на векторите от $\mathbb{V}$;

б) ако $\varphi : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ е изображение, за което $(\varphi(\boldsymbol{a}), \varphi(\boldsymbol{b})) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ за произволни вектори $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{V}$, то φ е линеен оператор (и следователно е ортогонален). Вярно ли е това, ако φ запазва само дължините на векторите от $\mathbb{V}$?

8.3. Нека φ е ротацията в положителна посока на даден ъгъл α в равнината $\mathbb{R}^2$ спрямо началото O на фиксирана координатна система. Да се докаже, че φ е ортогонален линеен оператор и да се намери матрицата му спрямо ортонормирания базис на $\mathbb{R}^2$, определен от тази координатна система.

8.4. Нека $\mathbb{V}$ е крайномерно евклидово пространство.

а) Да се докаже, че ако $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ са вектори от $\mathbb{V}$ с равни дължини, съществува ортогонален оператор $\varphi \in \operatorname{Hom} \mathbb{V}$, за който $\varphi(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{b}$.

б) Нека $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ и $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ са вектори от $\mathbb{V}$, такива че $|\boldsymbol{a}_1| = |\boldsymbol{b}_1|$, $|\boldsymbol{a}_2| = |\boldsymbol{b}_2|$ и ъгълът между $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ е равен на ъгъла между $\boldsymbol{b}_1$ и $\boldsymbol{b}_2$. Да се докаже, че съществува ортогонален оператор $\varphi \in \operatorname{Hom} \mathbb{V}$, за който $\varphi(\boldsymbol{a}_1) = \boldsymbol{b}_1$ и $\varphi(\boldsymbol{a}_2) = \boldsymbol{b}_2$.

в) Нека $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ и $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_k$ са две системи вектори от $\mathbb{V}$, такива че матрицата на Грам на първата система вектори е равна на матрицата на Грам на втората система вектори. Да се докаже, че съществува ортогонален оператор $\varphi \in \operatorname{Hom} \mathbb{V}$, за който $\varphi(\boldsymbol{a}_i) = \boldsymbol{b}_i$ за всяко $i = 1, 2, \ldots, k$. (Вярно е и обратното твърдение, което е тривиално: ако съществува ортогонален оператор $\varphi \in \operatorname{Hom} \mathbb{V}$, за който $\varphi(\boldsymbol{a}_i) = \boldsymbol{b}_i$ за всяко $i = 1, 2, \ldots, k$, то матриците на Грам на двете системи вектори са равни.)

* * *

8.5. Спрямо стандартния базис на $\mathbb{R}^n$ линейният оператор φ има матрица A. Да се намери ортонормиран базис на $\mathbb{R}^n$, в който матрицата D на φ е клетъчно диагонална, както и тази матрица D, където:

а) $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$; б) $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; в) $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$;

г) $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & -1 \\ 1 & \sqrt{2} & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$; д) $A = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; е) $A = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -\sqrt{6} \\ 1 & 3 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & -\sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$;

ж) $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; з) $A = \dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & -3 & -9 & -1 \\ -3 & 3 & -1 & 9 \\ 9 & 1 & 3 & -3 \\ 1 & 9 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.

* * *

8.6. Спрямо стандартния базис на $\mathbb{R}^n$ линейният оператор φ има матрица A. Да се намери ортонормиран базис на $\mathbb{R}^n$, в който матрицата D на φ е диагонална, както и тази матрица D, където:

а) $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -4 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$; в) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$;

г) $A = \begin{pmatrix} -1 & -8 & 4 \\ -8 & -1 & -4 \\ 4 & -4 & -7 \end{pmatrix}$; д) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; е) $A = \begin{pmatrix} 11 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & 5 \end{pmatrix}$;

ж) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$; з) $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$; и) $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 2 & -6 & 2 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$;

к) $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ -4 & -1 & 4 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}$; л) $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$; м) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

н) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; о) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; п) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \\ -3 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$;

р) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; с) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; т) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(Матрицата от т) е от ред n.)

* * *

8.7. Нека $\mathbb{V}$ е n–мерното евклидово пространство и $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ са фиксирани вектори от $\mathbb{V}$, за които $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}| = 1$, $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0$. Определяме изображение $\varphi : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ по следния начин: $\varphi(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x})\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x})\boldsymbol{a}$ за всеки вектор $\boldsymbol{x} \in \mathbb{V}$.

а) Да се докаже, че φ е симетричен линеен оператор.

б) Да се докаже, че $\varphi^3 = \varphi$.

в) Да се намери φ^{2000}.

г) Да се намери ортонормиран базис на $\mathbb{V}$, в който φ има диагонална матрица, както и тази диагонална матрица.

8.8. Нека $\mathbb{V}$ е крайномерно евклидово пространство и S е множество от симетрични оператори от $\operatorname{Hom}\mathbb{V}$, които комутират помежду си. Да се докаже, че съществува ортонормиран базис на $\mathbb{V}$, в който матриците на всички оператори от S са диагонални.

§9. Квадратични форми

9.1. Да се приведе в каноничен вид квадратичната форма f и да се намери неособена линейна смяна на променливите, която привежда f в каноничен вид, където:

а) $f = x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 + 8x_2x_3 + 6x_3^2$;

б) $f = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1$;

в) $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 10x_3^2 - 8x_1x_2 + 8x_1x_3 - 10x_2x_3$;

г) $f = 3x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 3x_1x_3 - x_2x_3$;

д) $f = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$;

е) $f = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$.

9.2. Да се приведе в каноничен вид квадратичната форма f на променливите $x_1, x_2, \dots, x_n$ и да се изразят новите променливи $y_1, y_2, \dots, y_n$ чрез променливите $x_1, x_2, \dots, x_n$, където:

а) $f = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_ia_jx_ix_j$; $\quad a_1, a_2, \dots, a_n$ са дадени числа;

б) $f = \sum\limits_{i<j} x_ix_j$; $\quad$ в) $f = \sum\limits_{i=1}^{n-1} x_ix_{i+1}$; $\quad$ г) $f = \sum\limits_{i<j} |i-j|\, x_ix_j$.

9.3. Да се намери ортогонална трансформация, която привежда квадратичната форма f в каноничен вид (към главни оси) и да се намери каноничният вид на формата f, където:

а) $f = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;

б) $f = -3x_2^2 + 4x_1x_2 + 10x_1x_3 - 4x_2x_3$;

в) $f = -x_1^2 + x_2^2 - 5x_3^2 + 6x_1x_3 + 4x_2x_3$;

г) $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$;

д) $f = 8x_1^2 - 7x_2^2 + 8x_3^2 + 8x_1x_2 - 2x_1x_3 + 8x_2x_3$;

е) $f = x_1^2 - 5x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$;

ж) $f = -x_1^2 - 4x_2^2 - 4x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$;

з) $f = 2x_1x_4 + 6x_2x_3$;

и) $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 10x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_1x_4 + 6x_2x_3 + 2x_2x_4 - 10x_3x_4$.

9.4. Да се приведе към главни оси квадратичната форма $f = \sum\limits_{i<j} x_ix_j$ на променливите $x_1, x_2, \dots, x_n$ (т.е. да се приведе f в каноничен вид с помощта на ортогонална смяна на променливите).

* * *

Определение. Нека $A \in M_n(\mathbb{R})$ е симетрична матрица и $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{b}$ са n-мерни вектори стълбове:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (a_{ij} = a_{ji}), \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Да разгледаме полинома f, който е от втора степен спрямо променливите $x_1, x_2, \ldots, x_n$: $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \boldsymbol{x}^t A\,\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{x}^t\boldsymbol{b} + c$, където $c \in \mathbb{R}$ е реално число. Множеството от точките $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, чиито координати удовлетворяват уравнението $f(\boldsymbol{x}) = 0$, се нарича (n-мерна) ***повърхнина от втора степен***. Една n мерна повърхнина от втора степен се нарича ***централна***, ако тя притежава поне един център, т.е. ако съществува точка в n-мерното пространство, спрямо която дадената повърхнина е симетрична.

9.5. Нека $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^t A\,\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{x}^t\boldsymbol{b} + c$ е полином, който определя n-мерна повърхнина от втора степен. Да се докаже, че тази повърхнина е централна тогава и само тогава, когато $r(A) = r(A \mid \boldsymbol{b})$. (Матрицата $(A \mid \boldsymbol{b})$ се получава, като към A припишем вектора стълб $\boldsymbol{b}$.)

9.6. Нека $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^t A\,\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{x}^t\boldsymbol{b} + c$ е полином, който определя централна повърхнина от втора степен. Да се докаже, че с помощта на ортогонална смяна на променливите и на транслация уравнението на повърхнината може да се приведе в следния вид:

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 = \lambda.$$

(Този вид на повърхнината се нарича ***каноничен вид***.)

9.7. Нека $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^t A\,\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{x}^t\boldsymbol{b} + c$ е полином, който определя нецентрална повърхнина от втора степен. Да се докаже, че с помощта на транслация и ортогонална смяна на променливите уравнението на тази повърхнина може да се приведе в следния (каноничен) вид: $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_k y_k^2 = 2y_{k+1}$, където $k \leqq n - 1$.

Отговори, упътвания, решения

§0

0.1. а) Даденото равенство записваме във вида $x + 2y - (x + y)i = 5 - 3i$ и, приравнявайки реалните и имагинерните части на двете страни, получаваме системата $\left| \begin{array}{rcr} x + 2y & = & 5 \\ -(x + y) & = & -3 \end{array} \right.$. Оттук намираме $x = 1$, $y = 2$.

б) $x = 3$, $y = -2$.

0.2. а) $2 - 2i$; б) $-2 + 3i$; в) $-1 + 2i$; г) $-13 - 19i$; д) $3 + 4i$; е) $-11 + 2i$; ж) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$; з) 1 при $n = 4k$, i при $n = 4k + 1$, -1 при $n = 4k + 2$, $-i$ при $n = 4k + 3$ $(k \in \mathbb{Z})$;

и) $(\binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \cdots) + (\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \binom{n}{7} + \cdots)i$;

к) $2^n(\binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \cdots) + 2^n(-\binom{n}{1} + \binom{n}{3} - \binom{n}{5} + \binom{n}{7} - \cdots)i$; л) $-\frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$; м) $\frac{122}{149} - \frac{4}{149}i$.

0.3. а) 1, 0; б) $\frac{1}{2}$, π; в) 1, $\frac{\pi}{2}$; г) $\sqrt{2}$, $\frac{\pi}{4}$; д) $\sqrt{2}$, $\frac{7\pi}{4}$; е) 2, $\frac{5\pi}{3}$; ж) 2, $\frac{\pi}{6}$; з) $\sqrt{2}$, $\frac{\pi}{2}$; и) 4, $\frac{\pi}{12}$.

0.5. б) $2 + \sqrt{3} + i = (\sqrt{6} + \sqrt{2})(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}) = (\sqrt{6} + \sqrt{2})(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12})$.

в) $1 + \cos\varphi + i\sin\varphi = 2\cos\frac{\varphi}{2}(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2})$.

г) $(1+i)^{15} = (\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}))^{15} = (\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}))^{15} = 128\sqrt{2}(\cos\frac{15\pi}{4} + i\sin\frac{15\pi}{4}) = 128\sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4})$.

д) Имаме $(\sqrt{3} - i)^{15} = (2(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}))^{15} = (2(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}))^{15} = 2^{15}(\cos\frac{11.15}{6}\pi + i\sin\frac{11.15}{6}\pi) = 2^{15}(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2})$. Също така $(1 + i)^8 = (\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}))^8 = (\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}))^8 = 2^4(\cos 2\pi + i\sin 2\pi) = 2^4$. Сега $\dfrac{(\sqrt{3} - i)^{15}}{(1 + i)^8} = 2^{11}(\cos\dfrac{3\pi}{2} + i\sin\dfrac{3\pi}{2})$.

е) $2(\binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \cdots)$. ж) $2^n\cos^n\frac{\varphi}{2}(\cos\frac{n\varphi}{2} + i\sin\frac{n\varphi}{2})$.

0.8. а) Числата $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}$ са две по две различни (защото аргументите им са различни) и (от формулите на Моавър) $\omega_k^n = \cos 2k\pi + i\sin 2k\pi = 1$ $(k = 0, 1, \ldots, n - 1)$.

0.9. а) Следва от формулите на Моавър.

б) Докажете, че $\omega_k^m = 1$ точно когато n дели km $(m \in \mathbb{Z}, k = 0, 1, \ldots, n - 1)$. След това докажете, че числата $\omega_k^0, \omega_k^1, \omega_k^2, \ldots, \omega_k^{n-1}$ са две по две различни точно когато k и n са взаимно прости.

0.10. Ако n дели m, то $\omega_k^m = 1$ $(k = 0, 1, \ldots, n - 1)$ и $\omega_0^m + \omega_1^m + \cdots + \omega_{n-1}^m = n$. Ако n не дели m, то $\omega_0^m + \omega_1^m + \omega_2^m + \cdots + \omega_{n-1}^m = 1 + \omega_1^m + \omega_1^{2m} + \cdots + \omega_1^{(n-1)m} = \frac{\omega_1^{mn}-1}{\omega_1^m-1} = 0$ (тъй като $\omega_1^m \neq 1$).

0.11. а) $z = \pm\sqrt{2}(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12})$; б) $z = \sqrt[6]{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})\omega_k$, $k = 0, 1, 2$; в) $z = \sqrt[4]{2}(\cos\frac{\pi}{24} + i\sin\frac{\pi}{24})\omega_k$, $k = 0, 1, 2, 3$; г) $z = i\sqrt{3}\omega_k$, $k = 0, 1, \cdots, 6$; д) $z = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$; е) $z = (\cos\frac{\pi}{2n} + i\sin\frac{\pi}{2n})\omega_k$, $k = 0, 1, \cdots, n - 1$; ж) $z = \cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}$, $k = 0, 1, \cdots, n - 1$; з) $z = -\frac{1+\beta}{1-\beta}i$, където $\beta^n = -1$.

0.12. Да означим $z = \cos x + i\sin x$ и $S = z + z^2 + \cdots + z^n$. От една страна имаме $S = z\frac{z^n - 1}{z - 1} = (\cos x + i\sin x)\frac{\cos nx - 1 + i\sin nx}{\cos x - 1 + i\sin x} = (\cos x + i\sin x)\frac{2i\sin\frac{nx}{2}(\cos\frac{nx}{2} + i\sin\frac{nx}{2})}{2i\sin\frac{x}{2}(\cos\frac{x}{2} + i\sin\frac{x}{2})} = (\cos x + i\sin x)\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}(\cos\frac{(n-1)x}{2} + i\sin\frac{(n-1)x}{2}) = \frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}(\cos\frac{(n+1)x}{2} + i\sin\frac{(n+1)x}{2})$. От друга страна $S = \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx + i(\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx)$. Като приравним реалните и имагинерните части в двата израза за S, получаваме а) и б).

0.13. Имаме $z^2 - 2z\cos\varphi + 1 = 0$, откъдето $z = \cos\varphi \pm \sqrt{\cos^2\varphi - 1} = \cos\varphi \pm i\sin\varphi$. Оттук $z^n = \cos n\varphi \pm i\sin n\varphi$, $\frac{1}{z^n} = \cos n\varphi \mp i\sin n\varphi$ и значи $z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos n\varphi$.

0.14. а) Като умножим равенството $a_0(\frac{p}{q})^n + a_1(\frac{p}{q})^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(\frac{p}{q}) + a_n = 0$ с q^n, получаваме $a_0p^n + a_1p^{n-1}q + \cdots + a_{n-1}pq^{n-1} + a_nq^n = 0$. От това равенство е ясно, че $p|a_nq^n$ и тъй като $(p,q) = 1$, то $p|a_n$. Аналогично, $q|a_0$.

0.15. а) $-2, 1/2, -1/3$; б) $-2, 3$; в) $1, 2, 3, -4$; г) $-1, 3$; д) няма рационални корени.

0.16. а) $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1 \pm i\sqrt{5}}{2}$; б) $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$; в) $2, 2, 2, -1, \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

0.17. При практическото решаване на конкретни системи обикновено се работи не със самата система, а с разширената ѝ матрица.

а) Преобразуваме разширената матрица на системата:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -1 & 25 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & -12 & -16 & 52 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & 0 & -8 & 8 \end{array}\right).$$

Получената система е в триъгълен вид и следователно е определена. Единственото ѝ решение е $x_3 = -1$, $x_2 = -3$, $x_1 = 2$, т.е. наредената тройка $(2, -3, -1)$.

б) Преобразуваме разширената матрица на системата:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Системата е несъвместима.

в) Преобразуваме разширената матрица на системата:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 0 & 7 \\ 3 & 5 & -1 & 9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Системата е неопределена. За свободно неизвестно можем да изберем x_3. Нека $x_3 = p$. Тогава от второто уравнение получаваме $x_2 = \frac{3-2p}{5}$ и от първото — $x_1 = 2+p$. Така решенията на системата са всички наредени тройки $(2+p, \frac{3-2p}{5}, p)$, където p е произволно число.

г) $(35, 8, -1, 5)$.

д) Преобразуваме разширената матрица на системата:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 & 6 \\ -1 & 1 & 4 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & 0 & 14 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 6 & -2 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 4 & 6 & -2 & 8 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -6 & -6 & -12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Полагаме $x_4 = p$. Всички решения са $(9-5p, -1+2p, 2-p, p)$.

е) Преобразуваме разширената матрица на системата:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -5 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 3 & 8 \\ 6 & 9 & -7 & 7 & 18 \\ 4 & 6 & -12 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 8 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

За удобство разменяме местата на втория и третия стълб, което е равносилно с нова номерация на неизвестните: x_1, x_3, x_2, x_4. Получаваме $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -5 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. Дадената система е еквивалентна на системата $\left|\begin{array}{lllll} 2x_1 & -5x_3 & +3x_2 & +x_4 & = 2 \\ & 2x_3 & & +x_4 & = 3 \end{array}\right.$. Полагаме $x_2 = p$, $x_4 = q$ и намираме $x_3 = \dfrac{3-q}{2}$, $x_1 = \dfrac{-6p-7q+19}{4}$. Всички решения на изходната система са наредените четворки $(\dfrac{-6p-7q+19}{4}, p, \dfrac{3-q}{2}, q)$, p и q — произволни числа.

0.18. а) Има само нулевото решение; б) $(\dfrac{5p-72q}{2}, \dfrac{-2p-7q}{2}, \dfrac{2p-23q}{2}, p, q)$.

0.19. а) При $\lambda \neq 1$ и $\lambda \neq -2$ системата е определена и решението ѝ е $(\dfrac{1}{\lambda+2}, \dfrac{1}{\lambda+2}, \dfrac{1}{\lambda+2})$. При $\lambda = 1$ системата е неопределена и общото ѝ решение е $(1-p-q, p, q)$. При $\lambda = -2$ системата е несъвместима.

б) При $\lambda \neq 0$ и $\lambda \neq -3$ системата е определена и решението ѝ е $(2-\lambda^2, 2\lambda-1, \lambda^3+2\lambda^2-\lambda-1)$. При $\lambda = 0$ системата е неопределена и общото ѝ решение е $(-p-q, p, q)$. При $\lambda = -3$ системата отново е неопределена и общото ѝ решение е (p, p, p).

в) При $\lambda \neq 0$ системата е несъвместима. При $\lambda = 0$ системата е неопределена и (при свободни неизвестни $x_2 = p$, $x_3 = q$) общото ѝ решение е $(8-9p-4q, p, q, -10+11p+5q)$.

г) При $\lambda \neq 3$ системата е несъвместима. При $\lambda = 3$ и $\mu = 2$ системата е неопределена и решението ѝ е $(3p-2, p, q, r, -3+5p-2q+r)$. При $\lambda = 3$ и $\mu \neq 2$ системата е неопределена и решението ѝ е $(3p-2, p, 0, q, -3+5p+q)$.

д) При $\lambda \neq 1, 3$ системата е определена и решението ѝ е $(-1, \dfrac{\lambda-4}{\lambda-3}, -\dfrac{1}{\lambda-3})$. При $\lambda = 1$ системата е неопределена и решението ѝ е $(1-p-q, p, q)$. При $\lambda = 3$ системата е несъвместима.

е) При $\lambda \neq 2, -3, -10$ системата е несъвместима. При $\lambda = 2$ системата е неопределена и решението ѝ е $(\dfrac{5}{2}-5p, 2p, 2p, -1)$. При $\lambda = -3$ системата отново е неопределена и решението ѝ е $(\dfrac{3}{5}-p, \dfrac{3}{5}-p, p, p)$. При $\lambda = -10$ системата е определена и решението ѝ е $(-1, -1, -1, -1)$.

0.20. а) При $a \neq -\dfrac{1}{n}$ системата е определена и решението ѝ е $(b_n - s, b_{n-1} - s, \ldots, b_1 - s, s)$, където $s = \dfrac{a}{na+1}\sum_{k=1}^{n} b_k$; При $a = -\dfrac{1}{n}$ и $\sum_{k=1}^{n} b_k = 0$ системата е неопределена и решението ѝ е $(b_n - p, b_{n-1} - p, \ldots, b_1 - p, p)$. При $a = -\dfrac{1}{n}$ и $\sum_{k=1}^{n} b_k \neq 0$ системата е несъвместима.

б) При $a \neq -\frac{1}{n}$ системата е определена и решение ѝ е $x_k = b_{n-k+1} - \frac{a}{na+1}\sum_{k=1}^{n} b_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$. При $a = -\frac{1}{n}$ и $\sum_{k=1}^{n} b_k = 0$ системата е неопределена и решението ѝ е $x_k = b_{n-k+1} - b_1 + p$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, $x_n = p$. При $a = -\frac{1}{n}$ и $\sum_{k=1}^{n} b_k \neq 0$ системата е несъвместима.

§1

1.1. а) 1; б) $\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$; в) -1; г) $(b-a)(c-a)(c-b)$; д) $-\lambda^3 + (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2 - \left(\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\right)\lambda + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$; е) $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$.

1.2. а) Развийте по първия ред или първия стълб; $x^n + (-1)^{n+1}y^n$.

б) Изваждаме първия ред от всички останали редове и получаваме детерминанта, която е в триъгълен вид:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}.$$

в) Извадете втория ред от всеки от останалите редове; $(n-1)!$;

г) Извадете втория ред от всеки от останалите редове; $(-1)^{n(n+1)/2}\prod_{i=1}^{n}(x_i - 1)$;

д) Изнасяме общия множител x_1 от първия ред на Δ и изваждаме новополучения първи ред, умножен съответно с $x_2, x_3, \ldots, x_n$, от втория, третия, ..., n–тия редове на Δ:

$$\Delta = x_1 \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \ldots & y_n \\ x_1y_2 - x_2y_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ x_1y_3 - x_3y_1 & x_2y_3 - x_3y_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1y_n - x_ny_1 & x_2y_n - x_ny_2 & x_3y_n - x_ny_3 & \ldots & 0 \end{vmatrix}$$

$$= x_1(-1)^{n+1}y_n \prod_{i=1}^{n-1}(x_iy_{i+1} - x_{i+1}y_i) = x_1y_n \prod_{i=1}^{n-1}(x_{i+1}y_i - x_iy_{i+1}).$$

Ако $x_1 = 0$, то $\Delta = 0$. Това може да не се пресмята отделно, а да се използват съображения за непрекъснатост, или принципа за сравняване на коефициентите.

е) Извадете последния стълб от всеки от останалите стълбове. $(-1)^{n(n+1)/2}\prod_{i=1}^{n} b_i$;

ж) Изнесете множителя x_1 от първия стълб; извадете първия стълб, умножен съответно с $x_2, x_3, \ldots, x_n$, от втория, третия, ..., n–тия стълбове. Накрая развийте по последния ред. $x_1\prod_{i=2}^{n}(x_i - a_{i-1,i})$;

з), и) Извадете последния ред от всеки от останалите редове; з) $\prod_{i=2}^{n-1}(a-i)$; и) $\prod_{i=1}^{n}(x - a_i)$;

к) 1.

1.3. а) Нека първо числата $a_1, a_2, \ldots, a_n$ са различни от нула. Умножаваме последователно втория, третия, …, n–тия ред съответно с $-\dfrac{b_1}{a_1}, -\dfrac{b_2}{a_2}, \ldots, -\dfrac{b_n}{a_n}$ и ги прибавяме към първия ред:

$$\Delta = \begin{vmatrix} * & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ c_1 & a_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ c_2 & 0 & a_2 & \ldots & 0 & 0 \\ \hdotsfor{6} \\ c_{n-1} & 0 & 0 & \ldots & a_{n-1} & 0 \\ c_n & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_n \end{vmatrix},$$

където със $*$ сме означили числото $a_0 - \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{b_i c_i}{a_i}$. Следователно

$$\begin{aligned} \Delta &= a_1 a_2 \cdots, a_n \left(a_0 - \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i c_i}{a_i} \right) \\ &= a_0 a_1 a_2 \cdots a_n - a_0 (b_1 c_1) a_2 \cdots a_n - a_0 a_1 (b_2 c_2) a_3 \cdots a_n - a_0 a_1 a_2 \cdots a_n (b_n c_n)\,. \end{aligned}$$

Нека сега някое от числата $a_1, a_2, \ldots, a_n$, например a_i, е равно на нула. Развиваме Δ по $i+1$–вия ред, а получената детерминанта от n–ти ред — по i–тия стълб. Така получаваме

$$\Delta = (-1)^{i+1+1} c_i \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & \ldots & b_{i-1} & b_i & b_{i+1} & \ldots & b_n \\ \hdotsfor{8} \\ 0 & 0 & \ldots & a_{i-1} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & a_{i+1} & \ldots & 0 \\ \hdotsfor{8} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_n \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{i+2} (-1)^{i+1} c_i b_i \begin{vmatrix} a_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_2 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \hdotsfor{7} \\ 0 & 0 & \ldots & a_{i-1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{i+1} & \ldots & 0 \\ \hdotsfor{7} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & a_n \end{vmatrix}.$$

Така $\Delta = (-1)^{2i+3} a_1 \cdots a_{i-1} (b_i c_i) a_{i+1} \cdots a_n = -a_1 \cdots a_{i-1} (b_i c_i) a_{i+1} \cdots a_n$. е) Развиваме детерминантата по първия ред. Тогава поддетерминантата Δ_{1i} е равна на

$$\Delta_{1i} = \begin{vmatrix} -y_1 & x_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -y_2 & x_2 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \hdotsfor{11} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -y_{i-1} & x_{i-1} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -y_i & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & x_{i+1} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & -y_{i+2} & x_{i+2} & \ldots & 0 & 0 \\ \hdotsfor{11} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & x_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -y_n & x_n \end{vmatrix}.$$

Развиваме последователно i пъти по първия стълб. Получаваме

$$\begin{aligned} \Delta_{1i} &= (-1)^{1+1}(-y_1)\,(-1)^{1+1}(-y_2) \ldots (-1)^{1+1}(-y_i) \begin{vmatrix} x_{i+1} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -y_{i+2} & x_{i+2} & \ldots & 0 & 0 \\ \hdotsfor{5} \\ 0 & 0 & \ldots & -y_n & x_n \end{vmatrix} \\ &= (-1)^i y_1 y_2 \ldots y_i x_{i+1} \ldots x_n\,. \end{aligned}$$

Следователно детерминантата е равна на

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(-1)^{1+(i+1)}\Delta_{1i} = \sum_{i=0}^{n} a_i(-1)^{2+i}(-1)^i y_1 \dots y_i x_{i+1} \dots x_n = \sum_{i=0}^{n} a_i y_1 \dots y_i x_{i+1} \dots x_n$$
$$= a_0 x_1 x_2 \dots x_n + a_1 y_1 x_2 \dots x_n + a_2 y_1 y_2 x_3 \dots x_n + \dots + a_n y_1 y_2 \dots y_n .$$

б) Извадете първия ред от останалите редове: $x\prod_{i=1}^{n}(a_i - x)\left(\frac{1}{x} + \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j - x}\right)$;

в) Извадете първия ред, умножен с подходящи множители, от останалите редове: $(n-1)x^{n-2}$;

г) Извадете първия ред от останалите редове: $(-1)^n 2^{n-1} x_1 x_2 \dots x_n \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}$;

д) $a^{n(n+1)/2}\left(1 + x\frac{a^{n+1}-1}{a^n(a-1)}\right)$.

ж) Прибавяме всички редове към първия и преобразуваме:

$$\begin{vmatrix} a+(n-1)b & a+(n-1)b & \dots & a+(n-1)b \\ b & a & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & \dots & a \end{vmatrix} = [a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & b & \dots & a \end{vmatrix}.$$

Изваждаме първия ред, умножен с b, от останалите редове:

$$[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & a-b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a-b \end{vmatrix} = [a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

з) Умножете първия, втория, ..., предпоследния стълб, съответно с $n, n-1, \dots, 2$, и ги прибавете към последния стълб: $na_1 + (n-1)a_2 + \dots + 2a_{n-1} + a_n$.

1.4. а) Умножаваме първия, втория ..., n-тия ред съответно с $x^n, x^{n-1}, \dots, x$, и ги прибавяме към последния ред. Получаваме:

$$\begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_1 & x & -1 & \dots & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \dots & x & -1 \\ s & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n+2}s\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & -1 \end{vmatrix},$$

където $s = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i}$. Тогава $\Delta = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i}$.

1.5. а) Представяме детерминантата като сума на детерминанти:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_1+b_2 & \dots & a_1+b_n \\ a_2 & a_2+b_2 & \dots & a_2+b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_n+b_2 & \dots & a_n+b_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & a_1+b_2 & \dots & a_1+b_n \\ b_1 & a_2+b_2 & \dots & a_2+b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1 & a_n+b_2 & \dots & a_n+b_n \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_2 & \dots & b_n \\ a_2 & b_2 & \dots & b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & b_2 & \dots & b_n \end{vmatrix} + b_1\begin{vmatrix} 1 & a_1+b_2 & \dots & a_1+b_n \\ 1 & a_2+b_2 & \dots & a_2+b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n+b_2 & \dots & a_n+b_n \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_2 & \dots & b_n \\ a_2 & b_2 & \dots & b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & b_2 & \dots & b_n \end{vmatrix} + b_1\begin{vmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_1 \\ 1 & a_2 & \dots & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n & \dots & a_n \end{vmatrix}.$$

При $n > 2$ и двете детерминанти са равни на нула, следователно $\Delta_n = 0$. При $n \leqq 2$ непосредствено пресмятаме, че $\Delta_1 = a_1 + b_1$ и $\Delta_2 = (a_1 - a_2)(b_2 - b_1)$.

б) Ако $n > 2$, то $\Delta_n = 0$; $\Delta_1 = 1 + x_1 y_1$, $\Delta_2 = (x_2 - x_1)(y_2 - y_1)$.

1.6. а) $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(x_i - a_i)\left(1 + \sum_{j=1}^{n}\frac{a_i}{x_i - a_i}\right)$;

б) Представяме елемента в горния ляв ъгъл като $0 = 1 + (-1)$, а останалите елементи от първия стълб — като $x_i = x_i + 0$. Тогава

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ x_1 & a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x_2 & x_2 & a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x_3 & x_3 & x_3 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \hdotsfor{7} \\ x_{n-1} & x_{n-1} & x_{n-1} & x_{n-1} & \dots & a_{n-1} & 0 \\ x_n & x_n & x_n & x_n & \dots & x_n & a_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x_3 & x_3 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \hdotsfor{7} \\ 0 & x_{n-1} & x_{n-1} & x_{n-1} & \dots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & x_n & x_n & x_n & \dots & x_n & a_n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x_1 & a_1 - x_1 & -x_1 & -x_1 & \dots & -x_1 & -x_1 \\ x_2 & 0 & a_2 - x_2 & -x_2 & \dots & -x_2 & -x_2 \\ x_3 & 0 & 0 & a_3 - x_3 & \dots & -x_3 & -x_3 \\ \hdotsfor{7} \\ x_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} - x_{n-1} & -x_{n-1} \\ x_n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n - x_n \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x_2 & a_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x_3 & x_3 & a_3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x_4 & x_4 & x_4 & a_4 & \dots & 0 & 0 \\ \hdotsfor{7} \\ x_{n-1} & x_{n-1} & x_{n-1} & x_{n-1} & \dots & a_{n-1} & 0 \\ x_n & x_n & x_n & x_n & \dots & x_n & a_n \end{vmatrix} = (a_1 - x_1)(a_2 - x_2)\dots(a_n - x_n) - a_1 a_2 \dots a_n.$$

1.7. Нека Δ_n е детерминанта от ред n. Ако изразим Δ_n като функция на $\Delta_{n-1}, \Delta_{n-2}, \dots, \Delta_1$, получаваме рекурентна връзка за Δ_n.

Ще изложим един метод за определяне на Δ_n, когато рекурентната връзка има вида $\Delta_n = a\Delta_{n-1} + b\Delta_{n-2}$, където a и b са константи, не зависещи от n.

Нека уравнението $t^2 - at - b = 0$ има корени t_1 и t_2. От формулите на Виет следва, че $t_1 + t_2 = a$ и $t_1 t_2 = -b$ Тогава

$\Delta_n = (t_1 + t_2)\Delta_{n-1} - t_1 t_2 \Delta_{n-2}$, т.е. $\Delta_n - t_i\Delta_{n-1} = t_j(\Delta_{n-1} - t_i\Delta_{n-2})$, $\{i, j\} = \{1, 2\}$.

От тук намираме $\Delta_n - t_i\Delta_{n-1} = t_j^{n-2}(\Delta_2 - t_i\Delta_1)$. Решаваме тези две уравнения спрямо Δ_n и Δ_{n-1}.

Ако $t_1 \neq t_2$, то $\Delta_n = \dfrac{t_2^{n-1}(\Delta_2 - t_1\Delta_1) - t_1^{n-1}(\Delta_2 - t_2\Delta_1)}{t_2 - t_1} = C_1 t_1^n + C_2 t_2^n$,

където $C_1 = \dfrac{t_2\Delta_1 - \Delta_2}{t_1(t_2 - t_1)}$, $C_2 = \dfrac{\Delta_2 - t_1\Delta_1}{t_2(t_2 - t_1)}$.

Ако пък $t_1 = t_2 = t_0$, то $\Delta_n - t_0\Delta_{n-1} = t_0^{n-2}(\Delta_2 - t_0\Delta_1)$. Следователно

$$\sum_{k=2}^{n} t_0^{n-k}(\Delta_k - t_0\Delta_{k-1}) = \sum_{k=2}^{n} t_0^{n-2}(\Delta_2 - t_0\Delta_1) = (n-1)t_0^{n-2}(\Delta_2 - t_0\Delta_1).$$

От друга страна, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} t_0^{n-k}(\Delta_k - t_0\Delta_{k-1}) = \Delta_n - t_0^{n-1}\Delta_1$.

Следователно $\Delta_n = C_1 t_0^n + nC_2 t_0^n$, където $C_1 = \dfrac{2t_0\Delta_1 - \Delta_2}{t_0^2}$, $C_2 = \dfrac{\Delta_2 - t_0\Delta_1}{t_0^2}$.

Константите C_1 и C_2 могат да се определят, като се запише общата формула за Δ_n при $n = 1$ и 2.

а) $n+1$; б) $2^{n+1} - 1$; в) $\frac{1}{3}(5^{n+1} - 2^{n+1})$.

г) Развиваме детерминантата Δ_n по първия стълб:

$$\Delta_n = (\alpha+\beta)\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha+\beta \end{vmatrix}_{n-1} - \begin{vmatrix} \alpha\beta & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha+\beta \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$= (\alpha+\beta)\Delta_{n-1} - \alpha\beta\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha+\beta \end{vmatrix}_{n-2}.$$

Следователно $\Delta_n = (\alpha+\beta)\Delta_{n-1} - \alpha\beta\Delta_{n-2}$.

Уравнението $t^2 - (\alpha+\beta)t + \alpha\beta = 0$ има корени $t_1 = \alpha$ и $t_2 = \beta$.

Ако $\alpha \neq \beta$, намираме $\Delta_n = \dfrac{1}{\alpha-\beta}(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1})$.

Ако $\alpha = \beta$, аналогично пресмятаме $\Delta_n = (n+1)\alpha^n$.

д) Ако $\alpha = \beta$, то $\Delta_n = (n+1)\alpha^n$; ако $\alpha \neq \beta$, то $\Delta_n = \dfrac{1}{\alpha-\beta}(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1})$.

1.8. От всеки ред изваждаме предишния, умножен с x_1, като започваме от последния ред:

$$W = W(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \dots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2^2 - x_2x_1 & x_3^2 - x_3x_1 & \dots & x_n^2 - x_nx_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & x_2^{n-1} - x_2^{n-2}x_1 & x_3^{n-1} - x_3^{n-2}x_1 & \dots & x_n^{n-1} - x_n^{n-2}x_1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \dots & x_n - x_1 \\ x_2^2 - x_2x_1 & x_3^2 - x_3x_1 & \dots & x_n^2 - x_nx_1 \\ x_2^3 - x_2^2x_1 & x_3^3 - x_3^2x_1 & \dots & x_n^3 - x_n^2x_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_2^{n-1} - x_2^{n-2}x_1 & x_3^{n-1} - x_3^{n-2}x_1 & \dots & x_n^{n-1} - x_n^{n-2}x_1 \end{vmatrix}$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\dots(x_n - x_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \dots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\dots(x_n - x_1)W(x_2, x_3, \dots, x_n).$$

Така получихме, че $W(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=2}^{n}(x_i - x_1)W(x_2, x_3, \dots, x_n)$.

Аналогично $W(x_2, x_3, \dots, x_n) = \prod_{j=3}^{n}(x_j - x_2)W(x_3, x_4, \dots, x_n)$ и по индукция

$$W(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{k=1}^{n-1}\prod_{i=k+1}^{n}(x_i - x_k) = \prod_{i>k}(x_i - x_k).$$

1.9. а) $1!\,2!\,3!\dots n! = 1^n 2^{n-1} 3^{n-2}\dots(n-1)^2 n$;

б) $2^{n(n-1)/2}\prod_{i>k}\cos\dfrac{\alpha_i + \alpha_k}{2}\sin\dfrac{\alpha_i - \alpha_k}{2}$;

в) От всеки ред извадете предишния, като започнете от втория ред. $\prod_{i>k}(x_i - x_k)$.

1.10. а) Задачата се решава подобно на задача 1.9, в). $W(x_1, x_2, \dots, x_n)$.
б) $\dfrac{1}{1!2!\dots(n-1)!}\prod\limits_{i>k}(x_i - x_k)$.

1.11. Използвайте: а), д) $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$; б), в) Формулата за нютоновия бином; г) $\dfrac{1-a^nb^n}{1-ab} = 1 + ab + (ab)^2 + \dots + (ab)^{n-1}$.
а) 0 при $n > 2$; $\sin(\alpha_1-\alpha_2)\sin(\beta_1-\beta_2)$ при $n = 2$; $\cos(\alpha_1-\beta_1)$ при $n = 1$;
б) $\binom{n}{1}\binom{n}{2}\dots\binom{n}{n}\prod\limits_{i>k}(a_k-a_i)(b_i-b_k)$;
в) $(-1)^{n(n-1)/2}[(n-1)!]^n$;
г) $\prod\limits_{i>k}(a_i-a_k)(b_i-b_k)$;
д) 0 при $n > 2$; $\sin^2(\alpha_1-\alpha_2)$ при $n = 2$; 1 при $n = 1$.

1.12. а) Развийте по първия стълб, а след това по първия ред; $(a^2-b^2)^n$;
б) Развийте по първия ред и получете рекурентната връзка $\Delta_n = h\Delta_{n-1} + x\Delta_{n-2}$. $h(x+h)^n$.

1.13. а), б) Получете две рекурентни връзки за детерминантата. За целта представете първия ред (или стълб) като сума на два реда (или стълба). Решете системата от две уравнения с две неизвестни;
а) $\dfrac{z(x-y)^n - y(x-z)^n}{z-y}$;
б) $\dfrac{1}{z-y}\left(z\prod\limits_{k=1}^{n}(a_k-y) - y\prod\limits_{k=1}^{n}(a_k-z)\right)$.

1.14. Получете рекурентната връзка $\Delta_n = 3\Delta_{n-1} - 3\Delta_{n-2} + \Delta_{n-3}$ и я преобразувайте, за да получите
$\Delta_n - 2\Delta_{n-1} + \Delta_{n-2} = \Delta_{n-1} - 2\Delta_{n-2} + \Delta_{n-3} = \dots = 1$.
От тук $\Delta_n - \Delta_{n-1} = \Delta_{n-1} - \Delta_{n-2} + 1 = \dots = \Delta_2 - \Delta_1 + (n-2) = n+1$.
$\Delta_n = (n+1)(n+2)/2$.

1.15. а) $\prod\limits_{i<k}[(a_i-a_k)(b_i-b_k)]\prod\limits_{j=1}^{n}\prod\limits_{s=1}^{n}(a_j+b_s)^{-1}$; б) $\prod\limits_{i<k}[(x_i-x_k)(a_k-a_i)]\prod\limits_{j=1}^{n}\prod\limits_{s=1}^{n}(x_j-a_s)^{-1}$.

1.16. $\dfrac{[1!2!\dots(n-1)!]^3}{n!(n+1)!\dots(2n-1)!}$.

1.17. Задачата се решава подобно на задача 15, б). $W(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

1.19. Нека $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ са корените на уравнението $x^n = 1$. Те са два по два различни, следователно $W = W(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) \neq 0$. Разглеждаме произведението на детерминантите Δ_n и W: $\Delta_n W = \det(a_{ij})$, където $A = (a_{ij})$ е съответната матрица от ред n. Тогава

$$a_{ij} = a_{n-i+1} + a_{n-i+2}\varepsilon_j + \dots + a_{n-1}\varepsilon_j^{i-2} + a_0\varepsilon_j^{i-1} + \dots + a_{n-i}\varepsilon_j^{n-1},$$

където $1 \leqq i, j \leqq n$. Следователно

$$a_{ij} = \varepsilon_j^{i-1}(a_0 + a_1\varepsilon_j + \dots + a_{n-i}\varepsilon_j^{n-i} + a_{n-i+1}\varepsilon_j^{1-i} + a_{n-i+2}\varepsilon_j^{2-i} + \dots + a_{n-1}\varepsilon_j^{-1}).$$

Означаваме $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1}$. Тъй като $\varepsilon_j^n = 1$, то $\varepsilon_j^{-k} = \varepsilon_j^{n-k}$ за всяко цяло число k. Така получаваме

$$a_{ij} = \varepsilon_j^{i-1}(a_0 + a_1\varepsilon_j + \dots + a_{n-i}\varepsilon_j^{n-i} + a_{n-i+1}\varepsilon_j^{n-i+1} + a_{n-i+2}\varepsilon_j^{n-i+2} + \dots + a_{n-1}\varepsilon_j^{n-1}),$$

откъдето $a_{ij} = \varepsilon_j^{i-1} f(\varepsilon_j)$. Тогава

$$\det A = W(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) \begin{vmatrix} f(\varepsilon_1) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & f(\varepsilon_2) & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & f(\varepsilon_n) \end{vmatrix} = W(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) f(\varepsilon_1) f(\varepsilon_2) \ldots f(\varepsilon_n).$$

Следователно $\Delta_n W(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) = W(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) f(\varepsilon_1) f(\varepsilon_2) \ldots f(\varepsilon_n)$.
Като разделим на $W(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) \neq 0$, получаваме $\Delta_n = f(\varepsilon_1) f(\varepsilon_2) \ldots f(\varepsilon_n)$.

1.20. Използвайте решението на предната задача, като вместо ε_j разгледате корените на уравнението $x^n = -1$ за а), и $x^n = \mu$ за б).

$\prod_{k=0}^{n-1} (a_1 + a_2\rho_k + \cdots + a_n\rho_k^{n-1})$, където:

а) ρ_k, $0 \leq k \leq n-1$, са n-тите корени от -1;

б) ρ_k, $0 \leq k \leq n-1$, са n-тите корени от μ.

1.21. а) Умножете детерминантата на Вандермонд с транспонираната ѝ; $\prod_{i>k} (x_i - x_k)^2$;

б) Разгледайте произведението:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n & x \\ x_1^2 & x_2^2 & \ldots & x_n^2 & x^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^n & x_2^n & \ldots & x_n^n & x^n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \ldots & x_1^{n-1} & 0 \\ 1 & x_2 & \ldots & x_2^{n-1} & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$\prod_{j=1}^{n} (x - x_j) \prod_{i>k} (x_i - x_k)^2$.

1.27. Използвайте матричните равенства:

$$\begin{pmatrix} E_m & O \\ B & E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_m & A \\ -B & E_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_m & A \\ O & E_n + BA \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} E_m & A \\ -B & E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_n & O \\ B & E_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_m + AB & A \\ O & E_n \end{pmatrix}.$$

§2

2.1. а) $\begin{pmatrix} -1 & 21 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 6 & -18 & 21 \\ -2 & 6 & -7 \\ 4 & -12 & 14 \end{pmatrix}$; в) (-18); г) $\begin{pmatrix} 10 & -8 & -6 \\ 25 & 4 & -7 \\ 5 & 0 & -4 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} -11 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$.

2.2. а) $\begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ при четно n и $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ при нечетно n;

г) $\begin{pmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; е) O.

2.5. Нека $C = (c_{ij})_{n\times n} = \sum_{i,j} c_{ij}E_{ij}$. Нека $1 \leqq p,\ q \leqq n$ и $p \neq q$. От условието на задачата и правилото за умножение на матрични единици следва $E_{pp}CE_{qq} = CE_{pp}E_{qq} = O$. От друга страна, $E_{pp}CE_{qq} = E_{pp}(\sum_{i,j} c_{ij}E_{ij})E_{qq} = E_{pp}(c_{pq}E_{pq})E_{qq} = c_{pq}E_{pp}E_{pq}E_{qq} = c_{pq}E_{pq}$. Следователно $c_{pq} = 0$ при $p \neq q$, т.е. $C = c_{11}E_{11} + c_{22}E_{22} + \dots + c_{nn}E_{nn}$. По-нататък, за всяко $k = 1, 2, \dots, n$, имаме $E_{1k}CE_{k1} = CE_{1k}E_{k1} = CE_{11} = c_{11}E_{11}$, а от друга страна $E_{1k}CE_{k1} = E_{1k}(c_{kk}E_{kk})E_{k1} = c_{kk}E_{1k}E_{kk}E_{k1} = c_{kk}E_{11}$. Следователно $c_{kk} = c_{11}$ и значи C е скаларна матрица.

2.8. а) Матриците от вида $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$, за които $\det A = -a^2 - bc = 0$.

б) Матриците $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и матриците от вида $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$, за които $\det A = -a^2 - bc = -1$.

2.9. Нека $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. От условието получаваме $\left| \begin{array}{lcl} (ad-bc) & + & (a+d) = -1 \\ (ad-bc) & - & (a+d) = -1 \end{array} \right.$, откъдето $ad - bc = -1$, $a + d = 0$. Сега от задача 2.6 (или директно) следва $A^2 = E$.

2.11. $\det(A_i(\lambda)) = \lambda$, $(A_i(\lambda))^{-1} = E + (\lambda^{-1} - 1)E_{ii}$; $\det(B_{ij}(\lambda)) = 1$, $(B_{ij}(\lambda))^{-1} = E - \lambda E_{ij}$ (при $i \neq j$); $\det(C_{ij}) = -1$ (при $i \neq j$), $C_{ij}^{-1} = C_{ij}$.

2.12. Проследете внимателно метода на Гаус, приложен само върху редовете на A, като използвате, че $\det A \neq 0$. Получаваме $PA = E$, където P е произведение от матрици на елементарните преобразувания.

2.13. Следва от решението на задача 2.12, като се вземе предвид,че $P = A^{-1}$.

2.14. Вижте упътването на предишната задача.

2.15. а) $-\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 6^{-1} \end{pmatrix}$;

г) $-\frac{1}{27}\begin{pmatrix} -6 & -6 & 3 \\ -6 & 3 & -6 \\ 3 & -6 & -6 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; е) $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

ж) $-\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; з) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; и) $\frac{1}{a^2+b^2+c^2+d^2}\begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{pmatrix}$.

2.16. а) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & \dots & (-1)^{n-2} & (-1)^{n-1} \\ 0 & 1 & -1 & 1 & \dots & (-1)^{n-3} & (-1)^{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \dots & (-1)^{n-4} & (-1)^{n-3} \\ \hdotsfor{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a & \dots & 0 & 0 \\ \hdotsfor{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a^2 & -a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -a^3 & a^2 & -a & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \hdotsfor{7} \\ (-a)^{n-2} & (-a)^{n-3} & (-a)^{n-4} & (-a)^{n-5} & \dots & 1 & 0 \\ (-a)^{n-1} & (-a)^{n-2} & (-a)^{n-3} & (-a)^{n-4} & \dots & -a & 1 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \hdotsfor{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} 2-n & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix}$;

е) $\dfrac{-1}{a(n+a)} \begin{pmatrix} 1-n-a & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1-n-a & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-n-a & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1-n-a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1-n-a \end{pmatrix}$;

ж) $\dfrac{1}{ns} \begin{pmatrix} 1-s & 1+s & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1-s & 1+s & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-s & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1-s & 1+s \\ 1+s & 1 & 1 & \dots & 1 & 1-s \end{pmatrix}$, където $s = \dfrac{n(n+1)}{2}$;

з) $\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{1}{a^2} & \frac{1}{a^3} & \dots & \frac{(-1)^{n-2}}{a^{n-1}} & \frac{(-1)^{n-1}}{a^n} \\ 0 & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a^2} & \dots & \frac{(-1)^{n-3}}{a^{n-2}} & \frac{(-1)^{n-2}}{a^{n-1}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{a} & \dots & \frac{(-1)^{n-4}}{a^{n-3}} & \frac{(-1)^{n-3}}{a^{n-2}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a^2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$

2.17. а)$(3,1,1)^t$; б)$(-2,2,-3,3)^t$; в) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & -2 \\ -5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} \alpha & 2-\alpha & \alpha \\ \beta & -\beta & \beta \\ \gamma & 6-\gamma & \gamma \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$;

е) Използвайте задача 2.16 ,б) при $a = 1$. $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2.19. Докажете, че с помощта на елементарни преобразувания върху редовете и върху стълбовете A може да се приведе във вида $R = E_{11} + E_{22} + \dots + E_{rr}$ $(r \leqq n)$. Това означава, че $R = P_1 A Q_1$, където P_1 и Q_1 са произведения от матрици на елементарни преобразувания. Тогава $A = PRQ$, където $P = P_1^{-1}$, $Q = Q_1^{-1}$.

2.20. а) Ако $A = PRQ$ (задача 2.19), положете $X = Q^{-1}P^{-1}$ и използвайте, че $R^2 = R$.
б) Положете $Y = XAX$, където $AXA = A$.

2.21. а) В означенията на задача 2.20 ,а), положете $B = AX$, $Y = X^{-1}$.

2.22. Нека X е матрицата от задача 2.20 ,а). Тогава $(AX)^2 = AX$ и оттук $(AX)^k = AX$ за всяко естествено число k. Следователно $AX = O$ и $A = AXA = O$.

2.23. Следва от равенствата $(A-E)(-E-A-A^2-A^3-\cdots) = E$ и $(A+E)(E-A+A^2-A^3+\cdots) = E$.

2.24. Имаме $X(E-A) = -A$, откъдето $X = -A(E-A)^{-1} = -A(E+A+A^2+\cdots)$.

2.25. Проверете равенството $A^2 = nA$, а след това и равенствата $(E - A)(E - \frac{1}{n-1}A) = E$ и $(E + A)(E - \frac{1}{n+1}A) = E$.

2.26. Нека $f_A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$. Искаме да покажем, че $f_A(A) = a_0E + a_1A + a_2A^2 + \cdots + a_nA^n = O$.

Да означим с $A_{ij} = A_{ij}(x)$ адюнгираното количество на елемента, стоящ на (i, j)-то място в $\det(A - xE)$ и нека

$$T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

От правилото за умножение на матрици и от свойствата на детерминантите следва

$$\begin{aligned}(A - xE)T &= \begin{pmatrix} \det(A - xE) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det(A - xE) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \det(A - xE) \end{pmatrix} = \\ &= f_A(x)E = a_0E + a_1xE + a_2x^2E + \cdots + a_nx^nE.\end{aligned}$$

Елементите на матрицата T са полиноми (с числови коефициенти) на x от степен, най-много $n - 1$. Тогава T може да се представи като полином на x (от степен, най-много $n - 1$) с матрични коефициенти, т.е.

$$T = L_0 + L_1x + L_2x^2 + \cdots + L_{n-1}x^{n-1}, \quad L_i \in M_n(F), i = 0, 1, \dots, n - 1.$$

Сега горното равенство приема вида

$$(A - xE)(L_0 + L_1x + L_2x^2 + \cdots + L_{n-1}x^{n-1}) = a_0E + a_1xE + a_2x^2E + \cdots + a_nx^nE.$$

Като приравним матричните коефициенти пред съответните степени на x, получаваме равенствата

$$\begin{aligned} AL_0 &= a_0E, \\ AL_1 - L_0 &= a_1E, \\ AL_2 - L_1 &= a_2E, \\ &\dots\dots \\ AL_{n-1} - L_{n-2} &= a_{n-1}E, \\ -L_{n-1} &= a_nE. \end{aligned}$$

Като умножим тези равенства отляво съответно с $E, A, A^2, \dots, A^n$ и ги съберем, получаваме

$$O = a_0E + a_1A + a_2A^2 + \cdots + a_nA^n,$$

което и трябваше да се докаже.

2.27. От задача 2.26 следва, че A удовлетворява равенство от вида

$$A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1A + a_0E = O.$$

Нека $A \neq O$ и $k > 1$ е най-малкото естествено число, за което $A^{k-1} \neq O$, но $A^k = A^{k+1} = \cdots = O$. Ще докажем, че $k \leq n$, с което задачата ще бъде решена.

Да допуснем, че $k > n$. Тогава поне един от коефициентите $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ е различен от 0 (иначе $A^n = O$, противоречие с избора на k). Нека t е най-малкото число, за което $a_t \neq 0$ $(0 \leq t \leq n-1)$. Като умножим горното равенство с A^{k-1-t}, получаваме $a_tA^{k-1} = O$, откъдето $A^{k-1} = O$, противоречие. Следователно $k \leq n$.

§3

3.1. Нека $a, b \in \mathbb{V}$. От равенството $a + b + (-(a+b)) = o$ последователно получаваме:
$$a + b + (-1)(a+b) = o,\ \ a + b + (-1)a + (-1)b = o,\ \ a + b - a - b = o.$$
Като прибавим отдясно на това равенство първо b, а след това a, получаваме $a + b = b + a$.

3.2. Нека $\mathbb{W}$ е подпространство на $\mathbb{V}$ и $a \in \mathbb{W}$. Тогава $o = a - a \in \mathbb{W}$ и $-a = o - a \in \mathbb{W}$.

3.3. б) Нека $\mathbb{W}_1$ и $\mathbb{W}_2$ са подпространства на $\mathbb{V}$ и $\mathbb{W} = \mathbb{W}_1 \cup \mathbb{W}_2$. Ако $\mathbb{W}_1 \subseteq \mathbb{W}_2$ или $\mathbb{W}_2 \subseteq \mathbb{W}_1$, то $\mathbb{W} = \mathbb{W}_2$ или $\mathbb{W} = \mathbb{W}_1$ и значи $\mathbb{W}$ е подпространство на $\mathbb{V}$. Обратно, нека $\mathbb{W}_1 \nsubseteq \mathbb{W}_2$ и $\mathbb{W}_2 \nsubseteq \mathbb{W}_1$ и нека $v_1 \in \mathbb{W}_1 \backslash \mathbb{W}_2$, $v_2 \in \mathbb{W}_2 \backslash \mathbb{W}_1$. Тогава $v_1, v_2 \in \mathbb{W}$, но $v = v_1 + v_2 \notin \mathbb{W}$ (ако допуснем, че $v_1 + v_2 \in \mathbb{W}_1$, то (тъй като $v_1 \in \mathbb{W}_1$) $v_2 \in \mathbb{W}_1$, противоречие; аналогично $v_1 + v_2 \notin \mathbb{W}_2$). Следователно $\mathbb{W}$ не е подпространство на $\mathbb{V}$.

3.4. б) Нека $\mathbb{W}$ е сечението на всички подпространства на $\mathbb{V}$, съдържащи A. Тогава $\mathbb{W}$ съдържа всички линейни комбинации на елементи от A, т.е. $\mathbb{W} \supseteq \ell(A)$. Обратно, тъй като $\ell(A)$ е подпространство на $\mathbb{V}$, съдържащо A, то $\ell(A) \supseteq \mathbb{W}$. Следователно $\ell(A) = \mathbb{W}$.

3.6. Директно се проверяват всички аксиоми от определението за линейно пространство. Например:
$$(a \oplus b) \oplus c = (ab) \oplus c = (ab)c = a(bc) = a \oplus (bc) = a \oplus (b \oplus c)$$
или
$$(\lambda\mu) \odot a = a^{\lambda\mu} = a^{\mu\lambda} = (a^{\mu})^{\lambda} = \lambda \odot (a^{\mu}) = \lambda \odot (\mu \odot a).$$
Нулевият вектор е числото 1, а противоположният вектор на a е a^{-1}.

3.10. Ако $b_1, b_2, \dots, b_n$ е базис на $\mathbb{V}$, то $\mathbb{V} = \ell(b_1, b_2, \dots, b_n)$ и всеки вектор, а значи и нулевият, се представя по единствен начин като тяхна линейна комбинация. За обратното трябва да докажем само, че $b_1, b_2, \dots, b_n$ са линейно независими вектори. Нека $\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_n b_n = o$. От друга страна , очевидно, $0b_1 + 0b_2 + \dots + 0b_n = o$. От единствеността на представянето на нулевия вектор като линейна комбинация на $b_1, b_2, \dots, b_n$ следва $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$, т.е. тези вектори са линейно независими.

3.11. Нека $\dim \mathbb{V} = n$. Ако $\dim \mathbb{V} > n$, то в $\mathbb{W}$, а значи и във $\mathbb{V}$, има повече от n линейно независими вектора, противоречие. Следователно $\mathbb{W}$ е крайномерно и $\dim \mathbb{W} \leqq \dim \mathbb{V}$. При това, ако $\mathbb{W}$ е (ненулево) подпространство, съдържащо се строго във $\mathbb{V}$ и $e_1, e_2, \dots, e_s$ е базис на $\mathbb{W}$, то съществува вектор $u \in \mathbb{V}$, който не лежи в $\mathbb{W} = \ell(e_1, e_2, \dots, e_s)$. Тогава векторите $e_1, e_2, \dots, e_s; u$ са линейно независими, откъдето следва, че $\dim \mathbb{V} > s = \dim \mathbb{W}$.

3.12. Един базис на $\mathbb{V}$ са следните вектори:
а) наредените n-орки $e_1 = (1,0,0,\dots,0), e_2 = (0,1,0,\dots,0), \dots, e_n = (0,0,0,\dots,1)$;
б) матричните единици E_{ij}, $1 \leqq i \leqq m$, $1 \leqq j \leqq n$;
в) полиномите $1, x, x^2, \dots, x^n$;
г) полиномите $1, x, x^2, \dots$;
д)редиците $e_1 = (1,0,0,\dots), e_2 = (0,1,0,\dots), \dots$ за пространството от задача 3.7 ,б) и прогресиите $(1,1,1,\dots)$ и $(0,1,2,\dots)$ за пространството от задача 3.7 ,в);
е) всяко положително реално число $a \neq 1$;
ж) ако $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, функциите $f_1, f_2, \dots, f_n$, за които $f_i(x_i) = 1$, $f_i(x_j) = 0$ при $i \neq j$.

3.14. От равенствата $a_1 = e_1 - e_2$, $a_2 = e_1 + e_2$ (след последователното им събиране и изваждане) намираме $e_1 = \frac{1}{2}(a_1 + a_2)$, $e_2 = \frac{1}{2}(-a_1 + a_2)$. Следователно $\ell(a_1, a_2) = \ell(e_1, e_2) = \mathbb{V}$, откъдето следва, че a_1, a_2 е базис на $\mathbb{V}$. Имаме $v = e_1 - 5e_2 = \frac{1}{2}(a_1 + a_2) - 5.\frac{1}{2}(-a_1 + a_2) = 3a_1 - 2a_2$.

3.15. а)За да докажете, че векторите $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ са базис на $\mathbb{V}$, приложете задача 3.13. По-нататък, търсим числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ такива, че $\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \lambda_3\mathbf{a}_3 = \mathbf{v}$. Приравнявайки коефициентите пред $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$ в това равенство, получаваме системата

$$\left|\begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 2 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 2 \\ \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & + & 3\lambda_3 & = & 2 \end{array}\right.$$

Решението ѝ е $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ и значи $\mathbf{v} = 2\mathbf{a}_1$.

б) $\mathbf{v} = \frac{2}{3}\mathbf{a}_1 + \frac{2}{3}\mathbf{a}_2 + \frac{2}{3}\mathbf{a}_3$;

в) $\mathbf{v} = \frac{2}{3}\mathbf{a}_1 - \frac{16}{3}\mathbf{a}_2 + 4\mathbf{a}_3$;

г) $\mathbf{v} = 8\mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_3$.

3.16. Използвайте задача 3.13.

3.17. а) Нека $\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \lambda_3\mathbf{a}_3 = \mathbf{v}$. Приравнявайки съответните координати на векторите от двете страни на това равенство, получаваме системата

$$\left|\begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 2 \\ 2\lambda_1 & + & 3\lambda_2 & & & = & -3 \\ -\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & 5\lambda_3 & = & \lambda \end{array}\right. .$$

Задачата се свежда до намирането на тези λ, за които системата е съвместима и след това до решаването ѝ . Отговор: $\lambda = 19$, $\mathbf{v} = (-12+3p)\mathbf{a}_1 + (7-2p)\mathbf{a}_2 + p\mathbf{a}_3$, $\quad p \in F$.

б) $\lambda = 4$, $\mathbf{v} = -17\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3$.

3.18. Имаме $\mathbb{V} = \ell(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k; \mathbf{e}_{k+1}, \dots, \mathbf{e}_n) = \ell(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k) + \ell(\mathbf{e}_{k+1}, \dots, \mathbf{e}_n) = \mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2$. По-нататък, нека $\mathbf{v} \in \mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2$. Тогава $\mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{e}_1 + \dots + \lambda_k\mathbf{e}_k = \lambda_{k+1}\mathbf{e}_{k+1} + \dots + \lambda_n\mathbf{e}_n$, откъдето $\lambda_1\mathbf{e}_1 + \dots + \lambda_k\mathbf{e}_k - \lambda_{k+1}\mathbf{e}_{k+1} - \dots - \lambda_n\mathbf{e}_n = \mathbf{o}$. От линейната независимост на векторите $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ следва $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ и $\mathbf{v} = \mathbf{o}$. Следователно $\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2 = \{\mathbf{o}\}$ и значи $\mathbb{V} = \mathbb{V}_1 \oplus \mathbb{V}_2$. За обратното твърдение имаме $\mathbb{V} = \mathbb{V}_1 \oplus \mathbb{V}_2 = \ell(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k) \oplus \ell(\mathbf{e}_{k+1}, \dots, \mathbf{e}_n) = \ell(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k; \mathbf{e}_{k+1}, \dots, \mathbf{e}_n)$ и остава да докажем, че тези вектори са линейно независими. Нека $\lambda_1\mathbf{e}_1 + \dots + \lambda_k\mathbf{e}_k + \lambda_{k+1}\mathbf{e}_{k+1} + \dots + \lambda_n\mathbf{e}_n = \mathbf{o}$ и да означим $\mathbf{v}_1 = \lambda_1\mathbf{e}_1 + \dots + \lambda_k\mathbf{e}_k \in \mathbb{V}_1$, $\mathbf{v}_2 = \lambda_{k+1}\mathbf{e}_{k+1} + \dots + \lambda_n\mathbf{e}_n \in \mathbb{V}_2$. Тогава $\mathbf{v}_1 = -\mathbf{v}_2 \in \mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2$ и значи $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 = \mathbf{o}$. Но $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k$ е базис на $\mathbb{V}_1$ и следователно $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$. Аналогично $\lambda_{k+1} = \dots = \lambda_n = 0$. Следователно $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ са линейно независими вектори и значи образуват базис на $\mathbb{V}$.

3.19. Ако $\mathbb{W} = \{\mathbf{o}\}$ или $\mathbb{W} = \mathbb{V}$, полагаме $\mathbb{U} = \mathbb{V}$, съответно $\mathbb{U} = \{\mathbf{o}\}$. Нека $\{\mathbf{o}\} \subsetneqq \mathbb{W} \subsetneqq \mathbb{V}$ и $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k$ е базис на $\mathbb{W}$. Допълваме тези вектори до базис $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k; \mathbf{e}_{k+1}, \dots, \mathbf{e}_n$ на $\mathbb{V}$ и полагаме $\mathbb{U} = \ell(\mathbf{e}_{k+1}, \dots, \mathbf{e}_n)$. Според задача 3.18 е в сила $\mathbb{V} = \mathbb{W} \oplus \mathbb{U}$.

3.20. Ако $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ е базис на $\mathbb{V}$, докажете, че $\mathbb{V} = \ell(\mathbf{e}_1) \oplus \ell(\mathbf{e}_2) \oplus \dots \oplus \ell(\mathbf{e}_n.)$

3.22. Директно се проверява, че $\mathbb{V}_1$ и $\mathbb{V}_2$ са подпространства на $\mathbb{V}$. По-нататък, нека $\mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{e}_1 + \dots + \lambda_n\mathbf{e}_n \in \mathbb{V}$ и да положим $\lambda = \frac{1}{n}(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)$. Тогава $\mathbf{v} = ((\lambda_1 - \lambda)\mathbf{e}_1 + \dots + (\lambda_n - \lambda)\mathbf{e}_n) + (\lambda\mathbf{e}_1 + \dots + \lambda\mathbf{e}_n)$, като $(\lambda_1 - \lambda)\mathbf{e}_1 + \dots + (\lambda_n - \lambda)\mathbf{e}_n \in \mathbb{V}_1$, $\lambda\mathbf{e}_1 + \dots + \lambda\mathbf{e}_n \in \mathbb{V}_2$. Следователно $\mathbb{V} = \mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2$. Накрая, ако $\mathbf{v} \in \mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2$, то $\mathbf{v} = \lambda\mathbf{e}_1 + \dots + \lambda\mathbf{e}_n$ (защото $\mathbf{v} \in \mathbb{V}_2$) и $n\lambda = 0$ (защото $\mathbf{v} \in \mathbb{V}_1$). Така $\lambda = 0$, откъдето $\mathbf{v} = \mathbf{o}$ и значи $\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2 = \{\mathbf{o}\}$. Следователно $\mathbb{V} = \mathbb{V}_1 \oplus \mathbb{V}_2$.

3.23. б) Проверете, че матриците $E_{11}, E_{22}, \dots, E_{nn}$ и $E_{ij} + E_{ji}$ при $i < j$ образуват базис на S, а матриците $E_{ij} - E_{ji}$ при $i < j$ образуват базис на T.

в) Нека $A = (a_{ij}) \in M_n(F)$. Дефинираме матрици $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij}) \in M_n(F)$ по следното правило: $b_{ij} = \dfrac{a_{ij} + a_{ji}}{2}$; $c_{ij} = \dfrac{a_{ij} - a_{ji}}{2}$ $(i, j = 1, 2, \dots, n)$. Тогава $B \in S$, $C \in T$ и $A = B + C$. Следователно $V = S + T$. Ясно е също, че ако една матрица е едновременно симетрична и антисиметрична, то тя е нулевата матрица, т. е. $S \cap T = \{O\}$. Следователно $\mathbb{V} = S \oplus T$.

3.24. б) Използвайте теоремата за деление с остатък за полиноми: ако $g \in F[x]$, то съществуват еднозначно определени полиноми $q, r \in F[x]$, такива че $g = fq + r$ и степента на r е по-малка от n.

3.25. Директно се проверява, че $\mathbb{V}_1$ и $\mathbb{V}_2$ са подпространства на $\mathbb{V}$. По-нататък, нека $f \in \mathbb{V}$ и $f(x_0) = c$. Тогава $f = c + (f - c)$, като $c \in \mathbb{V}_1$, $f - c \in \mathbb{V}_2$ и значи $\mathbb{V} = \mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2$. Ясно е също, че $\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2 = \{o\}$, следователно $\mathbb{V} = \mathbb{V}_1 \oplus \mathbb{V}_2$.

3.26. Нека χ е множеството, елементите на което са всички линейно независими системи вектори от $\mathbb{V}$ (т.е. такива системи вектори, крайните подсистеми, на които са линейно независими). Проверете, че χ удовлетворява условията на лемата на Цори, т.е., че всяка растяща (относно включването) верига от елементи на χ има горна граница (тяхното обединение). Тогава χ притежава максимални (относно включването) елементи. Нека B е максимален елемент на χ. Ако допуснем, че съществува вектор $v \in \mathbb{V} \setminus \ell(B)$, проверете, че системата вектори $\{B, v\}$ продължава да е линейно независима, т.е. принадлежи на χ, което е противоречие с избора на B. Следователно $\ell(B) = \mathbb{V}$ и значи B е базис на $\mathbb{V}$.

§4

При решаването на задачи 4.3—4.6 използвайте задача 4.2.

4.3. (Посочените максимални линейно независими системи в общия случай не са еднозначно определени.)

а) $r = 3$; a_1, a_2, a_5; б) $r = 2$, a_1, a_3; в) $r = 2$, a_1, a_2 ; г) $r = 5$, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5; д) $r = 3$, a_2, a_3, a_4.

4.4. а) 2; б) 3; в) 2; г) 4; д) 3; е) 4.

4.5. а) $\lambda \neq 0$, $r = 3$; $\lambda = 0$, $r = 2$; б) $\lambda \neq 3$, $r = 3$; $\lambda = 3$, $r = 2$; в) $\lambda = 1$, $r = 2$; $\lambda \neq 1$, $r = 4$; г) $\lambda = 2$, $r = 1$; $\lambda = -2$, $r = 3$; при всички останали стойности на λ, $r = 4$; д) При $\lambda = 1, 2, \ldots, n-1$, $r = n - 1$; при всички останали стойности на λ, $r = n$; е) При $\lambda = 0$, $r = 2$; при $\lambda \neq 0$, $r = n$.

4.6. а) При $\lambda = -\dfrac{2}{n(n+1)}$, $r = n - 1$; при $\lambda \neq -\dfrac{2}{n(n+1)}$, $r = n$.

б) При $\lambda = 2, 3, \ldots, n, \dfrac{1}{1-n}$, $r = n - 1$; при $\lambda \neq 2, 3, \ldots, n, \dfrac{1}{1-n}$, $r = n$.

в) При $\lambda = 0, -1, -2, \cdots, -(n-1)$, $r = n - 1$; при $\lambda \neq 0, -1, -2, \cdots, -(n-1)$, $r = n$.

г) Ако $\lambda \neq t_i$, $i = 2, 3, \ldots, n$, то $r = n$ при $t_1 \neq 0$ и $r = n - 1$ при $t_1 = 0$. Ако $\lambda = t_i$ за някое $i \geqq 2$, то $r = n - 2$ при $t_1 = 0$ и $r = n - 1$ при $t_1 \neq 0$.

4.7. а) Преобразуваме последователно по метода на Гаус матрицата на системата:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & 8 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 8 & 4 \\ 0 & 10 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -20 \\ 0 & 0 & -20 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Системата е определена, следователно притежава само нулевото решение и няма фундаментална система решения.

г) Преобразуваме последователно матрицата на системата:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 6 & 4 & 3 & 5 & 7 \\ 9 & 6 & 5 & 7 & 9 \\ 3 & 2 & 4 & 0 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рангът на матрицата на системата е равен на 2, следователно всяка фундаментална система решения се състои от $5-2=3$ решения. За свободни неизвестни можем да изберем x_2, x_4, x_5. Полагаме последователно:

—$x_2 = 1$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$ и получаваме решение $c_1 = (-\frac{2}{3}, 1, 0, 0, 0)$;

—$x_2 = 0$, $x_4 = 1$, $x_5 = 0$ и получаваме решение $c_2 = (-\frac{4}{3}, 0, 1, 1, 0)$;

—$x_2 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 1$ и получаваме решение $c_3 = (-\frac{8}{3}, 0, 3, 0, 1)$.

Векторите c_1, c_2, c_3 са една фундаментална система решения на дадената хомогенна система.

4.8. а) Намираме (както в задача 4.7) фундаментална система решения на хомогенната система с коефициенти — координатите на векторите a_1, a_2, a_3:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Избираме x_3 и x_4 за свободни неизвестни. При $x_3 = 1$, $x_4 = 0$ получаваме решение $c_1 = (-3, 7, 1, 0)$, а при $x_3 = 0$, $x_4 = 1$ получаваме решение $c_2 = (2, -7, 0, 1)$. Търсената в задачата хомогенна система е с коефициенти — координатите на векторите c_1, c_2, а именно, това е системата

$$\left| \begin{array}{l} -3x_1 + 7x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 7x_2 + x_4 = 0 \end{array} \right.$$

б) $31x_1 - 19x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0$; в) $\left| \begin{array}{l} 7x_1 - 8x_2 - 8x_3 + 9x_4 = 0 \\ 7x_1 - 44x_2 + 82x_3 + 9x_5 = 0 \end{array} \right.$;

г) $7x_1 - 11x_2 + x_3 + 3x_4 = 0$; д) $\left| \begin{array}{l} -18x_1 + 11x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 0 \end{array} \right.$.

4.9. За намиране на базис на сумата на две подпространства е удобно всяко едно от тях да бъде зададено като линейна обвивка на дадена система вектори. За намиране на сечението на две подпространства е удобно всяко едно от тях да бъде зададено като пространство от решенията на дадена хомогенна система.

а) За да намерим базис на $\mathbb{U} + \mathbb{W}$ постъпваме по следния начин. Първо намираме базис на $\mathbb{W}$, т.е. фундаментална система решения на хомогенната система, задаваща $\mathbb{W}$ (работим както в задача 4.7):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Избираме за свободни неизвестни x_2 и x_4. При $x_2 = 1$, $x_4 = 0$ получаваме вектора $c_1 = (-1, 1, 0, 0)$, а при $x_2 = 0$, $x_4 = 1$ получаваме вектора $c_2 = (0, 0, -1, 1)$. Така $\mathbb{W} = \ell(c_1, c_2)$. По-нататък имаме $\mathbb{U} + \mathbb{W} = \ell(a_1, a_2) + \ell(c_1, c_2) = \ell(a_1, a_2, c_1, c_2)$. Търсения базис намираме, използвайки задача 3.13:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Базис на $\mathbb{U} + \mathbb{W}$ са векторите $\boldsymbol{f_1} = (1, 1, 2, 2)$, $\boldsymbol{f_2} = (0, 1, 0, 2)$ и $\boldsymbol{f_3} = (0, 0, 1, -1)$.

За да намерим базис на $\mathbb{U} \cap \mathbb{W}$ постъпваме по следния начин. Първо намираме хомогенна система, пространството от решения на която съвпада с $\mathbb{U}$ (работим както в задача 4.8):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

При $x_3 = 1$, $x_4 = 0$ получаваме $\boldsymbol{d_1} = (-2, 0, 1, 0)$, а при $x_3 = 0$, $x_4 = 1$ получаваме $\boldsymbol{d_2} = (0, -2, 0, 1)$. Тогава хомогенната система, задаваща $\mathbb{U}$ е системата с коефициенти — координатите на векторите $\boldsymbol{d_1}$ и $\boldsymbol{d_2}$, т.е. системата $\left| \begin{array}{rrrrl} -2x_1 & & +x_3 & & = 0 \\ & -2x_2 & & +x_4 & = 0 \end{array} \right.$. По-нататък, $\mathbb{U} \cap \mathbb{W}$ е пространството от решенията на хомогенната система, получена чрез „сглобяване“ от двете системи, задаващи съответно $\mathbb{U}$ и $\mathbb{W}$, т.е. пространството от решенията на системата

$$\left| \begin{array}{rrrrl} -2x_1 & & +x_3 & & = 0 \\ & -2x_2 & & +x_4 & = 0 \\ x_1 & +x_2 & +2x_3 & +2x_4 & = 0 \\ x_1 & +x_2 & -2x_3 & -2x_4 & = 0 \end{array} \right.$$

Намираме фундаментална система решения на тази система (още в началото сме разместили местата на първия и третия ред):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

При $x_4 = 1$ получаваме вектора $\boldsymbol{f} = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1, 1)$, който е базис на $\mathbb{U} \cap \mathbb{W}$.

4.10. Нека $D = (A|B)_{m \times 2n}$ е матрицата, която се получава като вдясно от A напишем матрицата B. За всяко $k = 1, 2, \ldots, n$ прибавяме $(n+k)$-ия стълб на D към k-ия стълб на D и получаваме матрицата $D_1 = (C|B)_{m \times 2n}$. Сега остава да съобразим, че $r(C) \leqq r(D_1) = r(D) \leqq r(A) + r(B)$.

4.11. От задача 2.12 следва,че всяка обратима матрица е произведение от матрици на елементарни преобразувания само на редовете (или само на стълбовете). Тогава матрицата AT (TA) се получава от A с помоща на елементарни преобразования върху стълбовете (редовете) на A (задача 2.10). Следователно рангът на AT (TA) е равен на ранга на A.

4.12. От задача 2.3 ,а) следва, че редовете на матрицата AB са линейна комбинация на редовете на B. Тогава $r(AB) \leqq r(B)$. Аналогично (задача 2.3 ,б)) стълбовете на AB са линейна комбинация на стълбовете на A и $r(AB) \leqq r(A)$. Следователно $r(AB) \leqq \min\{r(A), r(B)\}$.

За неравенството $r(A) + r(B) - n \leqq r(AB)$ ще използваме задача 2.19 и задача 4.11. Нека $r(A) = r_1$, $r(B) = r_2$ и $A = P_1 R_1 Q_1$, $B = P_2 R_2 Q_2$, където P_1, Q_1, P_2, Q_2 са обратими матрици, а $R_1 = E_{11} + E_{22} + \cdots + E_{r_1 r_1}$, $R_2 = E_{11} + E_{22} + \cdots + E_{r_2 r_2}$. Имаме

$$r(AB) = r(P_1 R_1 Q_1 P_2 R_2 Q_2) = r(R_1 Q_1 P_2 R_2) = r(R_1 T R_2),$$

където $T = Q_1 P_2$ е обратима матрица, т.е. $r(T) = n$. Умножаването на една матрица отляво с R_1 е еквивалентно на анулирането на последните ѝ $n - r_1$ реда и тогава рангът ѝ намалява най-много с $n - r_1$. Аналогично, при умножаване отдясно на една матрица с R_2, се анулират последните ѝ $n - r_2$ стълба и рангът ѝ намалява най-много с $n - r_2$. Следователно

$$r(AB) = r(R_1 T R_2) \geqq r(T) - (n - r_1) - (n - r_2) = n - (n - r(A)) - (n - r(B)) = r(A) + r(B) - n.$$

4.13. От неравенството на Силвестър имаме $r(X) + r(Y) - n \leqq r(XY) = 0$, т.е. $r(X) + r(Y) \leqq n$.

4.14. Тъй като $(A+E)(A-E) = A^2 - E = O$, от задача 4.13 следва $r(A+E) + r(A-E) \leqq n$. За обратното неравенство приложете задача 4.10 за матриците $A+E$ и $E-A$.

4.15. Всяка фундаментална система решения на дадената система се състои от $n - r(A) = n-(n-1) = 1$ решение. Освен това векторът $(A_1, -A_2, A_3, \dots, (-1)^{n-1}A_n)$ е ненулев, защото $r(A) = n-1$ и $A_1, A_2, \dots, A_n$ са всички минори на A от ред $n-1$. Ще докажем, че този вектор е решение на хомогенната система, с което задачата ще бъде решена.

Нека i е произволно естествено число между 1 и $n-1$. Да означим с B_i квадратната матрица от ред n, която се получава от A като добавим на първо място i-ия ред на A, т.е.

$$B_i = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \end{pmatrix}.$$

Тъй като B_i има два равни реда, то $\det B_i = 0$. Развивайки $\det B_i$ по първия ред, получаваме

$$a_{i1}A_1 - a_{i2}A_2 + a_{i3}A_3 - \cdots + (-1)^{n-1}a_{in}A_n = 0.$$

Това равенство показва, че наредената n-орка $(A_1, -A_2, A_3, \dots, (-1)^{n-1}A_n)$ удовлетворява i-тото уравнение на дадената система за всяко $i = 1, 2, \dots, n-1$, което и трябваше да се докаже.

4.16. а) Ако $r \leqq n-2$, то всички минори на A от ред $n-1$, а значи и всички елементи A_{ij} на матрицата A^*, са равни на 0. Следователно $A^* = O$ и $r^* = 0$.

б) В този случай $A^* \neq O$ и значи $r^* \geqq 1$. За обратното неравенство, докажете, че всеки ред на матрицата A^* е решение на хомогенната система $AX = O$. Пространството от решенията на тази система има размерност $n - r(A) = n - (n-1) = 1$. Оттук следва $r^* \leqq 1$. Следователно $r^* = 1$.

в) В този случай A е обратима матрица и $A^* = \det A (A^{-1})^t$ също е обратима, т.е. $r^* = n$.

4.17. Да допуснем, че твърдението на задачата не е вярно, т.е. дадената система притежава ненулево решение $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Нека $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ са ненулеви и две по две различни $(1 \leqq s \leqq n)$, а всяко едно от останалите числа (ако има такива) е равно на някое от тях или е равно на нула.

След групиране на равните помежду си числа, получаваме, че $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ удовлетворяват равенства от вида:

$$\left| \begin{array}{ccccccccc} k_1\lambda_1 & + & k_2\lambda_2 & + & \cdots & + & k_s\lambda_s & = & 0 \\ k_1\lambda_1^2 & + & k_2\lambda_2^2 & + & \cdots & + & k_s\lambda_s^2 & = & 0 \\ \cdots & & \cdots & & & & \cdots & & \\ k_1\lambda_1^n & + & k_2\lambda_2^n & + & \cdots & + & k_s\lambda_s^n & = & 0 \end{array} \right. , \qquad (*)$$

където $k_i \geqq 1$ са естествени числа $(i = 1, 2, \dots, s)$. Да разгледаме хомогенната система (с s уравнения и s неизвестни):

$$\left| \begin{array}{ccccccccc} \lambda_1 x_1 & + & \lambda_2 x_2 & + & \cdots & + & \lambda_s x_s & = & 0 \\ \lambda_1^2 x_1 & + & \lambda_2^2 x_2 & + & \cdots & + & \lambda_s^2 x_s & = & 0 \\ \cdots & & \cdots & & & & \cdots & & \\ \lambda_1^s x_1 & + & \lambda_2^s x_2 & + & \cdots & + & \lambda_s^s x_s & = & 0 \end{array} \right.$$

Равенствата (*) показват, че ненулевата s-орка $(k_1, k_2, \dots, k_s)$ е решение на тази система (защото удовлетворява първите s уравнения от (*)). От друга страна, детерминантата на системата е

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_s \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_s^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_1^s & \lambda_2^s & \cdots & \lambda_s^s \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_s \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_s \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_1^{s-1} & \lambda_2^{s-1} & \cdots & \lambda_s^{s-1} \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_s \prod_{s \geqq i > j \geqq 1} (\lambda_i - \lambda_j) \neq 0$$

и значи системата има само нулевото решение, противоречие. Следователно първоначалното допускане не е вярно и дадената система има единствено решение $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$.

§5

5.3. б) Нека $e_1, e_2, \ldots, e_n$ е базис на $\mathbb{V}$. За всяка фиксирана двойка естествени числа i, j между 1 и n дефинираме изображение $\varepsilon_{ij} \in \operatorname{Hom}\mathbb{V}$, което върху базисните вектори действа по правилото:

$\varepsilon_{ij}(e_k) = \delta_{ik} e_j,\ k = 1, 2, \ldots, n$,

т.е.

$\varepsilon_{ij}(e_i) = e_j,\ \varepsilon_{ij}(e_k) = o$ при $k \neq i$.

Докажете, че линейните оператори ε_{ij} образуват базис на $\operatorname{Hom}\mathbb{V}$. (Матрицата на ε_{ij} в лаления базис на $\mathbb{V}$ е матричната единица E_{ji}.)

5.4. От задача 2.5 следва, че матрицата на φ в произволен базис на $\mathbb{V}$ е скаларна и значи φ е скаларен оператор.

5.5. Нека векторите $e_1, \ldots, e_k$ са линейно независими и $e_1, \ldots, e_k; e_{k+1}, \ldots, e_n$ е базис на $\mathbb{V}$. Тогава за произволни вектори $e'_1, \ldots, e'_k, e'_{k+1}, \ldots, e'_n \in \mathbb{V}$, съществува линеен оператор $\varphi \in \operatorname{Hom}\mathbb{V}$, за който $\varphi(e_i) = e'_i, i = 1, \ldots, k; k+1, \ldots, n$. Обратно, нека векторите $e_1, \ldots, e_k$ са линейно зависими и (например) $e_1, \ldots, e_r$ образуват базис на $l(e_1, \ldots, e_k)$ (ако всички тези вектори са нулеви, твърдението е тривиално). От линейната зависимост на $e_1, \ldots, e_k$ следва, че $r < k$. Нека $e_{r+1} = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_r e_r$. Избираме вектори $e'_1, \ldots, e'_k$ по следния начин: $e'_1 = e_1, \ldots, e'_r = e_r$, $e'_{r+1} = \mu_1 e'_1 + \ldots + \mu_r e'_r$, където $(\mu_1, \ldots, \mu_r) \neq (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$, а $e'_{r+2}, \ldots, e'_k$ са произволни. Докажете, че не съществува линеен оператор $\varphi \in \operatorname{Hom}\mathbb{V}$, за който $\varphi(e_i) = e'_i, i = 1, 2, \ldots, k$.

5.6. Търсената матрица е : а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & 6 & 4 & 8 \\ 3 & -3 & 4 & -4 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

5.7. Търсената матрица е:

а) $\begin{pmatrix} 1 & b & b^2 & \ldots & \binom{n}{0} b^n \\ 0 & a & 2ab & \ldots & \binom{n}{1} a b^{n-1} \\ 0 & 0 & a^2 & \ldots & \binom{n}{2} a^2 b^{n-2} \\ \hdotsfor{5} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \binom{n}{n-1} a^{n-1} b \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \binom{n}{n} a^n \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & h & h^2 & \ldots & \binom{n}{0} h^{n-1} \\ 0 & 0 & 2 & 3h & \ldots & \binom{n}{1} h^{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \ldots & \binom{n}{2} h^{n-3} \\ \hdotsfor{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \binom{n}{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$.

5.8. Търсената матрица е: а) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \ldots & 0 & 0 \\ \hdotsfor{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \hdotsfor{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5.9. а) Докажете, че $\mathbb{V} = \mathbb{V}_1 \oplus \mathbb{V}_2$, където $\mathbb{V}_1 = \operatorname{Im}\pi$, $\mathbb{V}_2 = \operatorname{Ker}\pi$ (използвайте равенството $v = \pi(v) + (v - \pi(v))$ и докажете, че $\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2 = \{o\}$). Търсената матрица е: $\left(\begin{array}{c|c} E_k & O \\ \hline O & O_{n-k} \end{array}\right)$.

б) Проверете, че множествата $\mathbb{V}_1 = \{v \in \mathbb{V} | \eta(v) = v\}$ и $\mathbb{V}_2 = \{v \in \mathbb{V} | \eta(v) = -v\}$ са подпространства на $\mathbb{V}$ и докажете, че $\mathbb{V} = \mathbb{V}_1 \oplus \mathbb{V}_2$ (използвайте равенството $v = \frac{1}{2}((v + \eta(v)) + \frac{1}{2}(v - \eta(v))$ и докажете, че $\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2 = \{o\}$). Търсената матрица е: $\left(\begin{array}{c|c} E_k & O \\ \hline O & -E_{n-k} \end{array}\right)$.

5.10. Имаме $\eta^2 = (2\pi - \varepsilon)^2 = 4\pi^2 - 4\pi + \varepsilon = 4\pi - 4\pi + \varepsilon = \varepsilon$, т.е. η е инволюция. Обратно, ако η е инволюция, полагаме $\pi = \frac{1}{2}(\eta + \varepsilon)$. Тогава $\pi^2 = \frac{1}{4}(\eta^2 + 2\eta + \varepsilon) = \frac{1}{4}(\varepsilon + 2\eta + \varepsilon) = \frac{1}{2}(\eta + \varepsilon) = \pi$, т.е. π е проектор и очевидно $\eta = 2\pi - \varepsilon$.

5.11. Имаме $\varphi(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2$, $\varphi(\boldsymbol{e}_2) = 2\boldsymbol{e}_2$ и тогава матрицата на φ в базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ е $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Матрицата на прехода от първия към втория базис е $T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Сега матрицата на φ във втория базис е $B = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Нека $\eta = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ е стълбът от координатите на вектора $\boldsymbol{v}$ спрямо базиса $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2$. Тогава стълбът от координатите на $\varphi(\boldsymbol{v})$ спрямо същия базис е $B\eta = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$, т. е. $\varphi(\boldsymbol{v}) = 8\boldsymbol{e}'_1 + 6\boldsymbol{e}'_2$.

5.12. Матрицата на прехода от базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ към базиса $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ е $T = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$, а от базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ към базиса $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$ е $S = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -7 & 6 \end{pmatrix}$. Тогава спрямо базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ φ и ψ имат съответно матрици $A_1 = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ и $B_1 = SBS^{-1} = \begin{pmatrix} -143 & -122 \\ 177 & 151 \end{pmatrix}$. Накрая, матрицата на $\varphi\psi$ спрямо базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ е $A_1B_1 = \begin{pmatrix} 109 & 93 \\ 34 & 29 \end{pmatrix}$.

5.13. Нека $\tau, \sigma \in \operatorname{Hom} \mathbb{V}$ и $\tau(\boldsymbol{e}_i) = \boldsymbol{a}_i$, $\sigma(\boldsymbol{e}_i) = \boldsymbol{b}_i$, $i = 1, \ldots, n$. Проверете, че $\varphi\tau = \sigma$, откъдето $\varphi = \sigma\tau^{-1}$. Оттук следва $C = BA^{-1}$. Разсъжденията могат да се илюстрират със следната диаграма (не забравяйте, че $\varphi\tau$ означава, че първо прилагаме τ, а след това φ):

$$\begin{tikzcd} & e \arrow[dl, "\tau"'] \arrow[dr, "\sigma"] & \\ a \arrow[rr, "\varphi"'] & & b \end{tikzcd}$$

5.14. Проверете, че $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ е базис на $\mathbb{V}$ и приложете задача 5.13.
а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & -11 & 6 \\ 1 & -7 & 4 \\ 2 & -6 & 3 \end{pmatrix}$; в) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -6 & 11 & 5 \\ -12 & 13 & 10 \\ 6 & -5 & -5 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

5.15. Проверете, че векторите $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ са базис на $\mathbb{V}$. В означенията на задача 5.13 φ има матрица $C = BA^{-1}$ в базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$. Сега, ако T е матрицата на прехода от базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ към базиса $\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_2$, $\boldsymbol{f}_3$, то търсената матрица е $T^{-1}CT$.
а) $\begin{pmatrix} -12 & -7 & -15 \\ 5 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

5.16. Нека $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ са векторите стълбове на матрицата A. Тогава $\operatorname{Im}\varphi = \ell(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{e}_4)$, а $\operatorname{Ker}\varphi$ е пространството от решенията на хомогенната система $AX = O$. По-нататък работете както в решението на задача 4.9, а). (В отговорите по-долу е даден по един възможен базис от търсените и координатите на векторите са спрямо базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_4$ на $\mathbb{V}$.)

а) Базис на $\operatorname{Ker}\varphi$ са векторите $(-2, 1, 0, 0)$ и $(1, 0, -1, 1)$, а на $\operatorname{Im}\varphi$ — векторите $(1, 0, -1, 1)$ и $(0, 1, -1, 1)$. Базис на $\operatorname{Ker}\varphi \cap \operatorname{Im}\varphi$ е векторът $(1, 0, -1, 1)$, а на $\operatorname{Ker}\varphi + \operatorname{Im}\varphi$ — векторите $(1, 0, -1, 1)$, $(0, 1, -2, 2)$ и $(0, 0, -1, 1)$.

б) Базис на $\operatorname{Ker}\varphi$ е векторът $(-2, 1, 0, 0)$, а на $\operatorname{Im}\varphi$ — векторите $(-1, 1, -1, 1)$, $(0, 0, 1, -1)$ и $(0, 0, 0, 2)$. В този случай $\operatorname{Ker}\varphi \cap \operatorname{Im}\varphi = \{\boldsymbol{o}\}$, $\operatorname{Ker}\varphi + \operatorname{Im}\varphi = \mathbb{V}$.

5.17. Нека $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_4$ са векторите стълбове на матрицата B. Тогава $\operatorname{Im}\psi = \ell(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_4)$, а $\operatorname{Ker}\varphi$ е пространството от решенията на хомогенната система $AX = O$. Базис на $\operatorname{Ker}\varphi$ е векторът $(3, 0, -2, 1)$, а на $\operatorname{Im}\psi$ — векторите $(1, 0, 1, 2)$, $(0, 1, 1, 0)$ и $(0, 0, 0, 1)$; $\operatorname{Ker}\varphi \cap \operatorname{Im}\psi = \{\mathbf{o}\}$, $\operatorname{Ker}\varphi + \operatorname{Im}\psi = \mathbb{V}$.

5.19. 1) $\Rightarrow$ 2). Нека $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in \mathbb{V}$ и $\varphi(\boldsymbol{v}_1) = \varphi(\boldsymbol{v}_2)$. Тогава $\varphi(\boldsymbol{v}_1) - \varphi(\boldsymbol{v}_2) = \mathbf{o}$, $\varphi(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2) = \mathbf{o}$, т.е. $\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 \in \operatorname{Ker}\varphi$ и значи $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2$. Следователно, ако $\boldsymbol{v}_1 \neq \boldsymbol{v}_2$, то $\varphi(\boldsymbol{v}_1) \neq \varphi(\boldsymbol{v}_2)$.

2) $\Rightarrow$ 1). Нека $\boldsymbol{v} \in \operatorname{Ker}\varphi$. Тогава $\varphi(\boldsymbol{v}) = \varphi(\mathbf{o})$ и значи $\boldsymbol{v} = \mathbf{o}$ (в противен случай $\varphi(\boldsymbol{v}) \neq \varphi(\mathbf{o})$). Следователно $\operatorname{Ker}\varphi = \{\mathbf{o}\}$.

5.20. Нека $\dim\mathbb{V} = n$, $\dim\mathbb{V}_1 = n_1$, $\dim\mathbb{V}_2 = n_2$. По условие $n_1 + n_2 = n$. Нека $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_{n_1}$ е базис на $\mathbb{V}_1$. Да допълним тази система вектори до базис $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_{n_1}; \boldsymbol{f}_1, \dots, \boldsymbol{f}_{n_2}$ на $\mathbb{V}$. Нека накрая $\boldsymbol{g}_1, \dots, \boldsymbol{g}_{n_2}$ е произволен базис на $\mathbb{V}_2$ (ако $n_1 \doteq 0$ или $n_2 = 0$, някои от горните системи вектори просто липсват). Дефинираме линеен оператор φ посредством равенствата: $\varphi(\boldsymbol{e}_i) = \mathbf{o}$, $i = 1, \dots, n_1$; $\varphi(\boldsymbol{f}_i) = \boldsymbol{g}_i$, $i = 1, \dots, n_1$. Проверете, че $\operatorname{Ker}\varphi = \mathbb{V}_1$, $\operatorname{Im}\varphi = \mathbb{V}_2$.

5.21. Имаме

$$\delta\sigma(f) = \delta(a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1}) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = f,$$

$$\sigma\delta(f) = \sigma(a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1}) = a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \neq f.$$

Оттук следва $\delta\sigma = \varepsilon$, но $\sigma\delta \neq \varepsilon$.

5.23. Очевидни са включванията $\mathbb{V} \supseteq \operatorname{Im}\varphi \supseteq \operatorname{Im}\varphi^2 \dots$. Тъй като $\mathbb{V}$ е крайномерно пространство, само краен брой от тези включвания могат да са строги. Следователно съществува естествено число m, такова че $\operatorname{Im}\varphi^m = \operatorname{Im}\varphi^{m+1} = \cdots$. В частност $\operatorname{Im}\varphi^m = \operatorname{Im}\varphi^{2m}$.

Нека $\boldsymbol{v}$ е произволен вектор от $\mathbb{V}$. Имаме $\varphi^m(\boldsymbol{v}) \in \operatorname{Im}\varphi^m$, а значи и $\varphi^m(\boldsymbol{v}) \in \operatorname{Im}\varphi^{2m}$. Следователно съществува вектор $\boldsymbol{w} \in \mathbb{V}$, такъв че $\varphi^m(\boldsymbol{v}) = \varphi^{2m}(\boldsymbol{w})$ или $\varphi^m(\boldsymbol{v} - \varphi^m(\boldsymbol{w})) = \mathbf{o}$. Това означава, че $\boldsymbol{v} - \varphi^m(\boldsymbol{w}) \in \operatorname{Ker}\varphi^m$. Очевидно е равенството $\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v} - \varphi^m(\boldsymbol{w})) + \varphi^m(\boldsymbol{w})$. При това $\boldsymbol{v} - \varphi^m(\boldsymbol{w}) \in \operatorname{Ker}\varphi^m$, а $\varphi^m(\boldsymbol{w}) \in \operatorname{Im}\varphi^m$. Така получихме $\mathbb{V} = \operatorname{Ker}\varphi^m + \operatorname{Im}\varphi^m$. За да докажем, че тази сума е директна, остава да проверим, че $\operatorname{Ker}\varphi^m \cap \operatorname{Im}\varphi^m = \{\mathbf{o}\}$. Имаме
$\dim\mathbb{V} = \dim(\operatorname{Ker}\varphi^m + \operatorname{Im}\varphi^m) = \dim\operatorname{Ker}\varphi^m + \dim\operatorname{Im}\varphi^m - \dim(\operatorname{Ker}\varphi^m \cap \operatorname{Im}\varphi^m)$.
От друга страна, теоремата за ранга и дефекта ни дава $\dim\mathbb{V} = \dim\operatorname{Ker}\varphi^m + \dim\operatorname{Im}\varphi^m$. Като сравним десните страни на двете равенства, получаваме $\dim(\operatorname{Ker}\varphi^m \cap \operatorname{Im}\varphi^m) = 0$, т.е. $\operatorname{Ker}\varphi^m \cap \operatorname{Im}\varphi^m = \{\mathbf{o}\}$.

§6

6.3. Нека $\boldsymbol{v} \in \operatorname{Ker}\varphi^m$, т.е. $\varphi^m(\boldsymbol{v}) = \mathbf{o}$. Тогава $\varphi^m(\varphi(\boldsymbol{v})) = \varphi(\varphi^m(\boldsymbol{v})) = \varphi(\mathbf{o}) = \mathbf{o}$, което означава, че и $\varphi(\boldsymbol{v}) \in \operatorname{Ker}\varphi^m$. Нека сега $\boldsymbol{u} \in \operatorname{Im}\varphi^m$, т.е. съществува вектор $\boldsymbol{w} \in \mathbb{V}$, такъв че $\boldsymbol{u} = \varphi^m(\boldsymbol{w})$. Тогава $\varphi(\boldsymbol{u}) = \varphi(\varphi^m(\boldsymbol{w})) = \varphi^m(\varphi(\boldsymbol{w}))$, което означава, че и $\varphi(\boldsymbol{u}) \in \operatorname{Im}\varphi^m$.

6.4. Нека $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_k \in \mathbb{U}$ (т.е. $\varphi(\boldsymbol{u}_i) = \lambda\boldsymbol{u}_i$) и $\mu_1, \dots, \mu_k \in F$. Тогава $\varphi(\mu_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + \mu_k\boldsymbol{u}_k) = \mu_1\varphi(\boldsymbol{u}_1) + \cdots + \mu_k\varphi(\boldsymbol{u}_k) = \mu_1\lambda\boldsymbol{u}_1 + \cdots + \mu_k\lambda\boldsymbol{u}_k = \lambda(\mu_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + \mu_k\boldsymbol{u}_k)$, което означава, че $\mu_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + \mu_k\boldsymbol{u}_k \in \mathbb{U}$ и следователно $\mathbb{U}$ е подпространство на $\mathbb{V}$. По-нататък, ако $\boldsymbol{u} \in \mathbb{U}$, то $\varphi(\varphi(\boldsymbol{u})) = \varphi(\lambda\boldsymbol{u}) = \lambda\varphi(\boldsymbol{u})$, което означава, че и $\varphi(\boldsymbol{u}) \in \mathbb{U}$.

6.5. а) $\pm i\alpha$; б) $\cos\alpha \pm \sin\alpha$; в) $\pm i$, $1 \pm i$.

6.6. а) $\omega_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$.
б) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = n+1$, $\lambda_3 = \lambda_4 = \dots = \lambda_{n+1} = 1$.

6.7. $(-1)^n(x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1x + a_0)$.

6.8. а) Характеристичният полином на φ е $\det(A - xE) = -x^3 + 12x^2 - 45x + 54$ и корените му са $\lambda_{1,2} = 3$, $\lambda_3 = 6$.

При $\lambda = 3$ решаваме хомогенната система с матрица $A - 3E = \begin{pmatrix} -1 & -5 & -3 \\ -1 & -5 & -3 \\ 3 & 15 & 9 \end{pmatrix}$. Една фундаментална система са векторите $\mathbf{g_1} = (-5, 1, 0)$ и $\mathbf{g_2} = (-3, 0, 1)$. Всички собствени вектори на φ, съответстващи на собствената стойност 3 са векторите от вида $\mu_1\mathbf{g_1} + \mu_2\mathbf{g_2}$, $(\mu_1, \mu_2) \neq (0, 0)$.

Аналогично, при $\lambda = 6$ решаваме хомогенната система с матрица $A - 6E = \begin{pmatrix} -4 & -5 & -3 \\ -1 & -8 & -3 \\ 3 & 15 & 6 \end{pmatrix}$.
Една фундаментална система е векторът $\mathbf{g_3} = (1, 1, -3)$. Всички собствените вектори на φ, съответстващи на собствената стойност 6 са векторите от вида $\mu\mathbf{g_3}$, $\mu \neq 0$.

б) $\lambda_{1,2} = 1$, $\mathbf{g_1} = (1, 1)$; в) $\lambda_1 = 6$, $\mathbf{g_1} = (1, 1, -3)$; $\lambda_{2,3} = 3$, $\mathbf{g_2} = (-5, 1, 0)$, $\mathbf{g_3} = (-3, 0, 1)$; г) $\lambda_1 = -6$, $\mathbf{g_1} = (1, 2, -2)$; $\lambda_{2,3} = 3$, $\mathbf{g_2} = (-2, -1, 0)$, $\mathbf{g_3} = (2, 4, 5)$; д) $\lambda_{1,2} = 2$, $\mathbf{g_1} = (1, 1+i)$; е) $\lambda_{1,2,3} = 2$, $\mathbf{g_1} = (-2, 1, 0)$, $\mathbf{g_2} = (1, 0, 1)$; ж) $\lambda_{1,2} = 1$, $\mathbf{g_1} = (0, 0, 0, 1)$; $\lambda_{3,4} = 0$, $\mathbf{g_2} = (0, 1, 0, 0)$, $\mathbf{g_3} = (0, 0, 1, 0)$; з) $\lambda_{1,2} = 1$, $\mathbf{g_1} = (1, 0, 1, 0)$, $\mathbf{g_2} = (0, 0, 0, 1)$; $\lambda_{3,4} = 0$, $\mathbf{g_3} = (0, 1, 0, 0)$, $\mathbf{g_4} = (0, 0, 1, 0)$; и) $\lambda_{1,2,3,4} = 2$, $\mathbf{g_1} = (1, 1, -1, 0)$, $\mathbf{g_2} = (1, 1, 0, 1)$.

6.9. Намерете базис на V, състоящ се от собствени вектори на φ.

а) $\mathbf{g_1} = \mathbf{e_1} + \mathbf{e_2} + \mathbf{e_3}$, $\mathbf{g_2} = \mathbf{e_1} + \mathbf{e_3}$, $\mathbf{g_3} = \mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}$; $\quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

б) $\mathbf{g_1} = \mathbf{e_1} + \mathbf{e_2} + \mathbf{e_3}$, $\mathbf{g_2} = \mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}$, $\mathbf{g_3} = \mathbf{e_1} - 3\mathbf{e_3}$; $\quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

в) $\mathbf{g_1} = 2\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2} + 2\mathbf{e_3}$, $\mathbf{g_2} = \mathbf{e_1} - \mathbf{e_3}$, $\mathbf{g_3} = \mathbf{e_1} - 4\mathbf{e_2} + \mathbf{e_3}$; $\quad D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

6.10. Използвайте, че $\det(A^{-1} - xE) = \dfrac{(-x)^n}{\det A}\det(A - \dfrac{1}{x}E)$.

6.11. Имаме $\lambda\mathbf{v} = \varphi(\mathbf{v})$, $\mathbf{v} = \lambda^{-1}\varphi(\mathbf{v})$, $\mathbf{v} = \varphi(\lambda^{-1}\mathbf{v})$. Прилагаме към последното равенство оператора φ^{-1} и получаваме $\varphi^{-1}(\mathbf{v}) = \lambda^{-1}\mathbf{v}$, което и трябваше да се докаже.

6.12. Докажете и използвайте, че $\varphi^k(\mathbf{v}) = \lambda^k\mathbf{v}$.

6.13. Нека $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ са корените на $\varphi(x)$ и $\varphi(x) = a_0(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\dots(x - \alpha_k)$. Ще използваме, че ако α е произволно число, то

$$\det(A - \alpha E) = f_A(\alpha) = (-1)^n(\alpha - \lambda_1)(\alpha - \lambda_2)\dots(\alpha - \lambda_n) = (\lambda_1 - \alpha)(\lambda_2 - \alpha)\dots(\lambda_n - \alpha).$$

Имаме $\varphi(A) = a_0E(A - \alpha_1 E)(A - \alpha_2 E)\dots(A - \alpha_k E)$, откъдето

$$\begin{aligned}
\det(\varphi(A)) &= a_0^n \det(A - \alpha_1 E)\det(A - \alpha_2 E)\dots\det(A - \alpha_k E) = \\
&= a_0^n(\lambda_1 - \alpha_1)(\lambda_2 - \alpha_1)\dots(\lambda_n - \alpha_1)\times \\
&\times\ (\lambda_1 - \alpha_2)(\lambda_2 - \alpha_2)\dots(\lambda_n - \alpha_2)\times \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\times\ (\lambda_1 - \alpha_k)(\lambda_2 - \alpha_k)\dots(\lambda_n - \alpha_k) = \\
&= a_0(\lambda_1 - \alpha_1)(\lambda_1 - \alpha_2)\dots(\lambda_1 - \alpha_k)\times \\
&\times\ a_0(\lambda_2 - \alpha_1)(\lambda_2 - \alpha_2)\dots(\lambda_2 - \alpha_k)\times \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\times\ a_0(\lambda_n - \alpha_1)(\lambda_n - \alpha_2)\dots(\lambda_n - \alpha_k) = \\
&= \varphi(\lambda_1)\varphi(\lambda_2)\dots\varphi(\lambda_n),
\end{aligned}$$

което и трябваше да се докаже.

6.14. Да положим $\varphi(x) = f(x) - \lambda$. Тогава равенството в предната задача приема вида $\det(f(A) - \lambda E) = (f(\lambda_1) - \lambda)(f(\lambda_2) - \lambda)\dots(f(\lambda_n) - \lambda)$. Това показва, че характеристичният полином на матрицата $f(A)$ се анулира при $\lambda = f(\lambda_1)$, $\lambda = f(\lambda_2)$, …, $\lambda = f(\lambda_n)$.

6.15. Използвайте задача 6.14 и равенството $C_n = f(A)$, където $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1}x^{n-1}$, а A е матрицата от задача 6.6, а). Характеристичните корени на C_n са $f(\omega_0)$, $f(\omega_1)$, …, $f(\omega_{n-1})$, където $\omega_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$. Детерминантата на една матрица е равна на произведението на характеристичните ѝ корени. Тогава $\det C_n = f(\omega_0)f(\omega_1)\dots f(\omega_{n-1})$.

6.16. Нека $A = (a_{ij})_{n\times n}$ и λ е (изобщо казано комплексен) характеристичен корен на A. Ще докажем, че λ е реално число.

Имаме $f_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = 0$. Следователно хомогенната система с матрица $A - \lambda E$ има ненулево решение $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{C}^n$, т.е. в сила са равенствата

$$\left|\begin{array}{ccccccc}
(a_{11} - \lambda)\xi_1 & + & a_{12}\xi_2 & + \dots + & a_{1n}\xi_n & = & 0 \\
a_{21}\xi_1 & + & (a_{22} - \lambda)\xi_2 & + \dots + & a_{2n}\xi_n & = & 0 \\
\dots & & \dots & & \dots & & \\
a_{n1}\xi_1 & + & a_{n2}\xi_2 & + \dots + & (a_{nn} - \lambda)\xi_n & = & 0
\end{array}\right.$$

или

$$\left|\begin{array}{ccccccc}
a_{11}\xi_1 & + & a_{12}\xi_2 & + \dots + & a_{1n}\xi_n & = & \lambda\xi_1 \\
a_{21}\xi_1 & + & a_{22}\xi_2 & + \dots + & a_{2n}\xi_n & = & \lambda\xi_2 \\
\dots & & \dots & & \dots & & \\
a_{n1}\xi_1 & + & a_{n2}\xi_2 & + \dots + & a_{nn}\xi_n & = & \lambda\xi_n
\end{array}\right.$$

Като умножим първото равенство с $\overline{\xi}_1$, второто с $\overline{\xi}_2$ и т.н., n-тото с $\overline{\xi}_n$ и ги съберем, получаваме

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_j\overline{\xi}_i = \lambda\sum_{i=1}^{n}\xi_i\overline{\xi}_i = \lambda\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2.$$

Да означим $u = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_j\overline{\xi}_i$, $v = \sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2$. Числото v е реално и различно от 0 (по-точно, $v > 0$). Като използвате, че A е симетрична матрица, т.е. $a_{ij} = a_{ji}$, проверете, че $\overline{u} = u$, т.е. и u е реално число. Тогава $\lambda = \dfrac{u}{v}$ е реално число.

6.17. а) Условието означава, че за всеки вектор $\boldsymbol{v} \in \mathbb{V}$ съществува число $\mu \in F$, такова че $\varphi(\boldsymbol{v}) = \mu\boldsymbol{v}$. Нека $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$ е базис на $\mathbb{V}$, $e = \boldsymbol{e}_1 + \cdots + \boldsymbol{e}_n$ и $\varphi(\boldsymbol{e}_i) = \lambda_i\boldsymbol{e}_i$, $(i = 1, \dots, n)$, $\varphi(e) = \lambda e$. Така от една страна имаме $\varphi(e) = \lambda_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + \lambda_n\boldsymbol{e}_n$, а от друга — $\varphi(e) = \lambda(\boldsymbol{e}_1 + \cdots + \boldsymbol{e}_n)$. Като извадим тези две равенства, получаваме $(\lambda_1 - \lambda)\boldsymbol{e}_1 + \cdots + (\lambda_n - \lambda)\boldsymbol{e}_n = \mathbf{o}$ и следователно $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = \lambda$. Оттук следва, че $\varphi = \lambda\varepsilon$.

б) Нека $k > 1$ и $\mathbb{W}$ е произволно $(k-1)$-мерно подпространство на $\mathbb{V}$ с базис $\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_{k-1}$. По условие $k < n$ и значи $k - 1 \leqq n - 2$. Тогава съществуват вектори $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \in \mathbb{V}$, такива че системата вектори $\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_{k-1}; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ е линейно независима. Да означим $\mathbb{W}_1 = \ell(\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_{k-1}; \boldsymbol{e}_1)$, $\mathbb{W}_2 = \ell(\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_{k-1}; \boldsymbol{e}_2)$. Проверете, че $\dim \mathbb{W}_1 = \dim \mathbb{W}_2 = k$ и $\mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2 = \mathbb{W}$. По условие $\mathbb{W}_1$ и $\mathbb{W}_2$ са φ-инвариантни подпространства на $\mathbb{V}$ и тогава тяхното сечение $\mathbb{W}$ също е φ-инвариантно. Така доказахме, че ако $k > 1$, то всяко $(k-1)$-мерно подпространство на $\mathbb{V}$ е φ-инвариантно. Продължавайки по същия начин, ще получим, че всяко едномерно подпространство на $\mathbb{V}$ е φ-инвариантно. Сега от а) следва, че φ е скаларен оператор.

в) Нека $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{v}_{n+1}$ са собствени вектори на φ, всеки n от които са линейно независими (и значи образуват базис на $\mathbb{V}$) и $\varphi(\boldsymbol{v}_i) = \lambda_i\boldsymbol{v}_i$ $(i = 1, \dots, n+1)$. Тъй като векторите $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ са базис на $\mathbb{V}$, то $\boldsymbol{v}_{n+1}$ е тяхна линейна комбинация:

$$\boldsymbol{v}_{n+1} = \mu_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \mu_n\boldsymbol{v}_n. \tag{1}$$

Ако допуснем, че за някое i $(1 \leqq i \leqq n)$ $\mu_i = 0$, би следвало, че векторите $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_{i-1}, \boldsymbol{v}_{i+1}, \dots, \boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{v}_{n+1}$ са линейно зависими, противоречие. Следователно всичките числа $\mu_1, \dots, \mu_n$ са различни от нула. Като приложим оператора φ към равенството (1) (и вземем предвид, че $\varphi(\boldsymbol{v}_i) = \lambda_i\boldsymbol{v}_i$), получаваме

$$\lambda_{n+1}\boldsymbol{v}_{n+1} = \mu_1\lambda_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \mu_n\lambda_n\boldsymbol{v}_n. \tag{2}$$

Да умножим равенството (1) с λ_{n+1} и да го извадим от (2). Получаваме $\mu_1(\lambda_1 - \lambda_{n+1})\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \mu_n(\lambda_n - \lambda_{n+1})\boldsymbol{v}_n = \mathbf{o}$. Тъй като числата $\mu_1, \dots, \mu_n$ са различни от нула, то $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = \lambda_{n+1}$. Оттук следва, че φ е скаларен оператор.

6.19. Преведете твърдението на матричен език, докажете го и използвайте задача 6.18.

6.20. Ще докажем еквивалентността на петте твърдения по схемата

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small]
 & 1) \arrow[dl] & \\
2) \arrow[dr] & & 4) \leftrightarrow 5) \arrow[ul] \\
 & 3) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

1) → 2). Ако $\varphi^k = o$, положете $\mathbb{V}_k = \mathbb{V}$, $\mathbb{V}_{k-1} = \operatorname{Im}\varphi$, $\mathbb{V}_{k-2} = \operatorname{Im}\varphi^2, \dots, \mathbb{V}_0 = \operatorname{Im}\varphi^k = \{\mathbf{o}\}$. (Ще отбележим, че ако k е степента на нилпотентност на φ, то включванията в построената верига от подпространства на $\mathbb{V}$ са строги.)

2) → 3). Изберете произволен базис на $\mathbb{V}_1$ (ако $\mathbb{V}_1 \neq \{\mathbf{o}\}$) и го допълнете (ако е необходимо) до базис на $\mathbb{V}_2$. Така получените вектори допълнете до базис на $\mathbb{V}_3$ и т.н., докато получите базис на $\mathbb{V}_k = \mathbb{V}$. Проверете, че в този базис на $\mathbb{V}$ матрицата на φ е строго триъгълна.

3) → 4). Използвайте, че всички характеристични корени на строго триъгълна матрица са равни на 0.

4) → 1). Използвайте, че всеки линеен оператор анулира характеристичния си полином (задача 2.26, преведена на операторен език).

4) ↔ 5). Използвайте задача 6.14 (преведена на операторен език) и задача 4.17.

6.21. Нека $\varphi, \psi \in \operatorname{Hom}\mathbb{V}$, $\eta = \varphi\psi - \psi\varphi$ и $\varphi\eta = \eta\varphi$. Имаме $\eta^2 = (\varphi\psi - \psi\varphi)\eta = \varphi\psi\eta - \psi\varphi\eta = \varphi\psi\eta - \psi\eta\varphi = \varphi(\psi\eta) - (\psi\eta)\varphi$. Така η^2 е комутатор на операторите φ и $\psi\eta$. По индукция получаваме, че за всяко естествено число k операторът η^k е комутатор на операторите φ и $\psi\eta^{k-1}$. Според задача 6.19 е в сила $\operatorname{tr}(\eta^k) = 0$ и сега от задача 6.20 следва, че η е нилпотентен оператор.

§7

7.1. а) За ъгъла φ между векторите $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ имаме

$$\cos\varphi = \frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} = \frac{2.1+1.2+3.(-2)+2.1}{\sqrt{2^2+1^2+3^2+2^2}\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2+1^2}} = 0, \text{ откъдето } \varphi = \frac{\pi}{2};$$

б) $\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$;

в) $\cos\varphi = \frac{3}{\sqrt{77}}$, $\varphi = \arccos\frac{3}{\sqrt{77}}$.

7.3. а) Първи начин. Допълнете дадената система вектори до произволен базис на $\mathbb{R}^4$ и ортогонализирайте този базис по метода на Грам и Шмид.

Втори начин. Да намерим всички вектори $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$, за които $(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{x}) = 0$. Тези две равенства означават, че координатите на $\boldsymbol{x}$ са решения на хомогенната система

$$\left| \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \end{array} \right.$$

Общото решение на системата има вида $\boldsymbol{x} = (-p+q, p+q, p, q)$, $p, q \in \mathbb{R}$. При $p = 1$, $q = 0$ получаваме вектора $\boldsymbol{a_3} = (-1, 1, 1, 0)$, който е ортогонален на $\boldsymbol{a_1}$ и $\boldsymbol{a_2}$. Търсим вектор $\boldsymbol{a_4} = (-p+q, p+q, p, q)$ с условието $(\boldsymbol{a_3}, \boldsymbol{a_4}) = 0$, което дава $p = 0$. Сега при $q = 1$ получаваме вектора $\boldsymbol{a_4} = (1, 1, 0, 1)$, който е ортогонален на $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$ и $\boldsymbol{a_3}$.

б) $\boldsymbol{a_3} = (1, 2, -5, 0)$, $\boldsymbol{a_4} = (11, 7, 5, 15)$.

в) $\boldsymbol{a_3} = (2, -2, 1)$.

г) $\boldsymbol{a_3} = (1, 1, 1, 1)$, $\boldsymbol{a_4} = (1, 1, -1, -1)$.

7.4. а) Полагаме $\boldsymbol{b_1} = \boldsymbol{a_1}$. Търсим вектор $\boldsymbol{b_2}$ във вида $\boldsymbol{b_2} = \boldsymbol{a_2} + \lambda\boldsymbol{b_1}$, като λ определяме така, че $\boldsymbol{b_2}$ да е ортогонален на $\boldsymbol{b_1}$, т.е. $0 = (\boldsymbol{b_2}, \boldsymbol{b_1}) = (\boldsymbol{a_2} + \lambda\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_1}) = (\boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{b_1}) + \lambda(\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_1})$. Оттук пресмятаме $\lambda = -\frac{(\boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{b_1})}{(\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_1})} = -1$ и $\boldsymbol{b_2} = \boldsymbol{a_2} - \boldsymbol{b_1} = \boldsymbol{a_2} - \boldsymbol{a_1} = (2, 0, 1, -3)$.

По-нататък, търсим $\boldsymbol{b_3}$ във вила $\boldsymbol{b_3} = \boldsymbol{a_3} + \mu\boldsymbol{b_1} + \nu\boldsymbol{b_2}$, като μ и ν определяме от условията $(\boldsymbol{b_3}, \boldsymbol{b_1}) = 0$ и $(\boldsymbol{b_3}, \boldsymbol{b_2}) = 0$. Получаваме $\mu = -\frac{(\boldsymbol{a_3}, \boldsymbol{b_1})}{(\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_1})} = 1$ и $\nu = -\frac{(\boldsymbol{a_3}, \boldsymbol{b_2})}{(\boldsymbol{b_2}, \boldsymbol{b_2})} = 1$. Оттук намираме $\boldsymbol{b_3} = \boldsymbol{a_3} + \boldsymbol{b_1} + \boldsymbol{b_2} = (3, 1, -3, 1)$.

Накрая, търсим $\boldsymbol{b_4}$ във вида $\boldsymbol{b_4} = \boldsymbol{a_4} + \xi\boldsymbol{b_1} + \eta\boldsymbol{b_2} + \theta\boldsymbol{b_3}$ и от условията $(\boldsymbol{b_4}, \boldsymbol{b_1}) = (\boldsymbol{b_4}, \boldsymbol{b_2}) = (\boldsymbol{b_4}, \boldsymbol{b_3}) = 0$ последователно пресмятаме $\xi = -\frac{(\boldsymbol{a_4}, \boldsymbol{b_1})}{(\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_1})} = \frac{1}{2}$, $\eta = -\frac{(\boldsymbol{a_4}, \boldsymbol{b_2})}{(\boldsymbol{b_2}, \boldsymbol{b_2})} = \frac{17}{7}$ и $\theta = -\frac{(\boldsymbol{a_4}, \boldsymbol{b_3})}{(\boldsymbol{b_3}, \boldsymbol{b_3})} = -\frac{9}{10}$. Сега $\boldsymbol{b_4} = \boldsymbol{a_4} + \frac{1}{2}\boldsymbol{b_1} + \frac{17}{7}\boldsymbol{b_2} - \frac{9}{10}\boldsymbol{b_3} = \frac{46}{70}(1, 7, 4, 2)$.

След нормиране на векторите $\boldsymbol{b_1}$, $\boldsymbol{b_2}$, $\boldsymbol{b_3}$, $\boldsymbol{b_4}$, получаваме търсения ортонормиран базис:

$$\boldsymbol{e_1} = \frac{1}{|\boldsymbol{b_1}|}\boldsymbol{b_1} = \frac{1}{2}(1, -1, 1, 1), \quad \boldsymbol{e_2} = \frac{1}{|\boldsymbol{b_2}|}\boldsymbol{b_2} = \frac{1}{\sqrt{14}}(2, 0, 1, -3),$$

$$\boldsymbol{e_3} = \frac{1}{|\boldsymbol{b_3}|}\boldsymbol{b_3} = \frac{1}{2\sqrt{5}}(3, 1, -3, 1), \quad \boldsymbol{e_4} = \frac{1}{|\boldsymbol{b_4}|}\boldsymbol{b_4} = \frac{1}{\sqrt{70}}(1, 7, 4, 2).$$

б) $\boldsymbol{e_1} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1)$, $\boldsymbol{e_2} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$, $\boldsymbol{e_3} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)$.

в) $\boldsymbol{e_1} = \frac{1}{\sqrt{7}}(2, 1, 1, -1)$, $\boldsymbol{e_2} = \frac{1}{\sqrt{7}}(1, -2, 1, 1)$, $\boldsymbol{e_3} = \frac{1}{\sqrt{7}}(-1, 1, 2, 1)$, $\boldsymbol{e_4} = \frac{1}{\sqrt{7}}(1, 1, -1, 2)$.

г) $\boldsymbol{e_1} = \frac{1}{\sqrt{10}}(-2, 1, 1, 2)$, $\boldsymbol{e_2} = \frac{1}{\sqrt{10}}(1, 2, 2, -1)$, $\boldsymbol{e_3} = \frac{1}{\sqrt{26}}(2, 3, -3, 2)$, $\boldsymbol{e_4} = \frac{1}{\sqrt{26}}(3, -2, 2, 3)$.

7.5. Първо намерете произволен базис на линейната обвивка на дадените вектори и след това го ортогонализирайте по метода на Грам и Шмид.

а) $\boldsymbol{b_1} = (2,1,3,-1)$, $\boldsymbol{b_2} = (3,2,-3,-1)$, $\boldsymbol{b_3} = (1,5,1,10)$.

б) $\boldsymbol{b_1} = (2,5,1,3)$, $\boldsymbol{b_2} = (1,1,-1,-2)$.

в) $\boldsymbol{b_1} = (2,3,-4,-6)$, $\boldsymbol{b_2} = (-3,2,6,-4)$, $\boldsymbol{b_3} = (4,6,2,3)$.

г) $\boldsymbol{b_1} = (1,2,1,3)$, $\boldsymbol{b_2} = (10,-1,1,-3)$, $\boldsymbol{b_3} = (19,-87,-61,72)$.

д) $\boldsymbol{b_1} = (1,-2,2,2)$, $\boldsymbol{b_2} = (2,3,1,1)$, $\boldsymbol{b_3} = (0,0,1,-1)$.

7.6. Ако допуснем, че всички вектори $\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}, \dots, \boldsymbol{b_k}$ са ненулеви, то те (бидейки ортогонални) са линейно независими и тогава $k = \dim \ell(\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}, \dots, \boldsymbol{b_k}) = \dim \ell(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \dots, \boldsymbol{a_k})$, противоречие с линейната зависимост на $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \dots, \boldsymbol{a_k}$.

7.7. Първо съобразете, че можем да считаме векторите $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \dots, \boldsymbol{a_k}$ два по два ортогонални. След това докажете, че векторите $\boldsymbol{b_i}$ и $\boldsymbol{c_i}$ са пропорционални на $\boldsymbol{a_i}$ за всяко $i = 1, 2, \dots, k$.

7.8. Нека векторите $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \dots, \boldsymbol{a_k}$ образуват базис на ортогоналното допълнение $\mathbb{W}^\perp$ на $\mathbb{W}$. Разгледайте хомогенната система с коефициенти — координатите на $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \dots, \boldsymbol{a_k}$ и използвайте, че $(\mathbb{W}^\perp)^\perp = \mathbb{W}$.

7.10. Разгледайте хомогенната система с коефициенти — координатите на $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$, $\boldsymbol{a_3}$. Намерете фундаментална система решения, ортогонализирайте получените вектори по метода на Грам и Шмид и ги нормирайте.

7.11. Използвайте, че ако $\mathbb{U}$ е пространството от решенията на хомогенната система

$$\left| \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ \multicolumn{9}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{array} \right. ,$$

то $\mathbb{U}^\perp$ е линейната обвивка на векторите $\boldsymbol{a_1} = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$, $\dots$, $\boldsymbol{a_m} = (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn})$.
Отговор $\boldsymbol{e_1} = \frac{1}{2}(1,1,1,1)$, $\boldsymbol{e_2} = \frac{1}{2\sqrt{17}}(3,5,-3,-5)$.

7.12. Нека $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a_0} + \boldsymbol{h}$, където $\boldsymbol{a_0}$ е ортогоналната проекция на $\boldsymbol{a}$ върху $\mathbb{U}$, а $\boldsymbol{h}$ е перпендикулярът от $\boldsymbol{a}$ към $\mathbb{U}$. Първо намираме ортогонален базис $\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}, \dots, \boldsymbol{b_k}$ на $\mathbb{U}$. Вектора $\boldsymbol{a_0}$ търсим във вида $\boldsymbol{a_0} = \lambda_1\boldsymbol{b_1} + \lambda_2\boldsymbol{b_2} + \dots + \lambda_k\boldsymbol{b_k}$. Коефициентите $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ определяме от изискването векторът $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a_0}$ да е ортогонален на всички вектори $\boldsymbol{b_i}$, $i = 1, 2, \dots, k$, т.е. $0 = (\boldsymbol{h}, \boldsymbol{b_i}) = (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a_0}, \boldsymbol{b_i}) = (\boldsymbol{a} - \lambda_1\boldsymbol{b_1} - \lambda_2\boldsymbol{b_2} - \dots - \lambda_k\boldsymbol{b_k}, \boldsymbol{b_i}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b_i}) - \lambda_i(\boldsymbol{b_i}, \boldsymbol{b_i})$. Оттук намираме $\lambda_i = \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b_i})}{(\boldsymbol{b_i}, \boldsymbol{b_i})}$.

Ще отбележим, че по аналогичен начин можем да намерим $\boldsymbol{a_0}$ и $\boldsymbol{h}$, ако работим с произволен базис на $\mathbb{U}$.

а) $\boldsymbol{a_0} = (1,-1,-1,5)$, $\boldsymbol{h} = (3,0,-2,-1)$.

б) $\boldsymbol{a_0} = (3,1,-1,-2)$, $\boldsymbol{h} = (2,1,-1,4)$.

в) $\boldsymbol{a_0} = (8,-11,7,12)$, $\boldsymbol{h} = (2,1,1,-1)$.

г) $\boldsymbol{a_0} = (3,2,5,-5)$, $\boldsymbol{h} = (1,-9,2,-1)$.

д) $\boldsymbol{a_0} = (5,2,-9,-8)$, $\boldsymbol{h} = (9,-5,3,1)$.

е) $\boldsymbol{a_0} = (0,-3,5,2)$, $\boldsymbol{h} = (2,-2,-2,2)$.

7.13. $\boldsymbol{a_0} = (1,2,-5,1)$, $\boldsymbol{h} = (-4,-2,0,8)$.

7.14. б) От метода на Грам и Шмид следват равенства от вида

$$\begin{array}{rcccccccccc} \boldsymbol{a_1} & = & & & & & & & & & \boldsymbol{b_1} \\ \boldsymbol{a_2} & = & & & & & & \boldsymbol{b_2} & + & & *\boldsymbol{b_1} \\ \multicolumn{11}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ \boldsymbol{a_{k-1}} & = & & & \boldsymbol{b_{k-1}} & + \cdots + & & *\boldsymbol{b_2} & + & & *\boldsymbol{b_1} \\ \boldsymbol{a_k} & = & \boldsymbol{b_k} & + & *\boldsymbol{b_{k-1}} & + \cdots + & & *\boldsymbol{b_2} & + & & *\boldsymbol{b_1} \end{array} . \tag{1}$$

(Тук и по-долу със * сме означили подходящи реални числа, които няма да изписваме.) Да означим $e_i = \frac{1}{|b_i|}b_i$, $a'_i = \frac{1}{|b_i|}a_i$, $i = 1, 2, \dots, k$. Като умножим първото от равенствата (1) с $\frac{1}{|b_1|}$, второто — с $\frac{1}{|b_2|}$ и т.н., последното — с $\frac{1}{|b_k|}$, получаваме равенства от вида

$$\begin{array}{rcl} a'_1 & = & e_1 \\ a'_2 & = & e_2 + *e_1 \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ a'_{k-1} & = & e_{k-1} + \dots + *e_2 + *e_1 \\ a'_k & = & e_k + *e_{k-1} + \dots + *e_2 + *e_1 \end{array} \qquad (2)$$

Да означим с δ детерминантата, чиито елементи са коефициентите от дясната страна на равенствата (2), т.е.

$$\delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & * & * \\ 1 & * & \dots & * & * \end{vmatrix}.$$

Имаме $\delta = (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}$ и $\delta^2 = 1$. От друга страна, като умножим δ със себе си по правилото „ред по ред" и вземем предвид, че векторите $e_1, e_2, \dots, e_k$ са ортогонални и единични, получаваме $\delta^2 = \Gamma(a'_1, a'_2, \dots, a'_k)$. Следователно $\Gamma(a'_1, a'_2, \dots, a'_k) = 1$. По-нататък, докажете,че $\Gamma(a'_1, a'_2, \dots, a'_k) = \frac{\Gamma(a_1, a_2, \dots, a_k)}{|b_1|^2|b_2|^2 \dots |b_k|^2}$. От последните две равенства следва

$$\Gamma(a_1, a_2, \dots, a_k) = |b_1|^2|b_2|^2 \dots |b_k|^2 = \Gamma(b_1, b_2, \dots, b_k)$$

7.15. Нека векторите $b_1, b_2, \dots, b_k$ са получени от $a_1, a_2, \dots, a_k$ по метода на Грам и Шмид. Тогава са в сила равенства от вида $b_i = a_i + \xi_{i-1}b_{i-1} + \dots + \xi_1 b_1$, $i = 1, 2, \dots, k$. Като умножим това равенство скаларно с b_i, получаваме $|b_i|^2 = (b_i, b_i) = (a_i, b_i) \leq |a_i||b_i|$. От тук следва, че $|b_i| \leq |a_i|$. Сега от задача 7.14 получаваме

$$\Gamma(a_1, a_2, \dots, a_k) = \Gamma(b_1, b_2, \dots, b_k) = |b_1|^2|b_2|^2 \dots |b_k|^2 \leq |a_1|^2|a_2|^2 \dots |a_k|^2$$

7.16. Използвайки задача 7.14, а), б), получаваме

$$|b_i|^2 = \frac{\Gamma(b_1, b_2, \dots, b_i)}{\Gamma(b_1, b_2, \dots, b_{i-1})} = \frac{\Gamma(a_1, a_2, \dots, a_i)}{\Gamma(a_1, a_2, \dots, a_{i-1})}.$$

7.17. Нека по метода на Грам и Шмид се получава съответно:
— от системата вектори $a_1, \dots, a_k$ — векторите $c_1, \dots, c_k$,
— от системата вектори $b_1, \dots, b_l$ — векторите $d_1, \dots, d_l$,
— от системата вектори $a_1, \dots, a_k; b_1, \dots, b_l$ — векторите $c_1, \dots, c_k; e_1, \dots, e_l$.
От метода на Грам и Шмид следват равенства от вида $b_i = d_i + f'_i$, където $f'_i \in \ell(b_1, \dots, b_{i-1})$ и $e_i = b_i + f''_i$, където $f''_i \in \ell(a_1, \dots, a_k; b_1, \dots, b_{i-1})$. От тези равенства следва $e_i = d_i + f_i$, където $f_i = f'_i + f''_i \in \ell(a_1, \dots, a_k; b_1, \dots, b_{i-1}) = \ell(c_1, \dots, c_k; e_1, \dots, e_{i-1})$. Като умножим това равенство скаларно с e_i, получаваме $|e_i|^2 = (e_i, e_i) = (d_i, e_i) + (f_i, e_i) = (d_i, e_i) \leq |d_i||e_i|$. Оттук следва $|e_i| \leq |d_i|$. Накрая, използвайки задача 7.14, получаваме

$$\begin{array}{rcl} \Gamma(a_1, \dots, a_k; b_1, \dots, b_l) & = & |c_1|^2 \dots |c_k|^2 |e_1|^2 \dots |e_l|^2 \\ & \leq & |c_1|^2 \dots |c_k|^2 |d_1|^2 \dots |d_l|^2 \\ & = & \Gamma(a_1, \dots, a_k)\Gamma(b_1, \dots, b_l). \end{array}$$

7.18. При $i \neq j$ имаме $\Gamma(e_i, e_j) > 0$, т.е. $\gamma^2 < 1$ и значи $\gamma < 1$. По-нататък, пресметнете, че $\Gamma(e_1, e_2, \dots, e_n) = (1 + (n-1)\gamma)(1-\gamma)^{n-1}$. Сега от $\Gamma(e_1, e_2, \dots, e_n) > 0$ и $\gamma < 1$ следва, че $\gamma > -\dfrac{1}{n-1}$

7.19. а) Допускаме, че съществуват такива вектори, като можем да считаме, че $|e_i| = 1$, $i = 1, 2, \dots, n+2$. Тогава $(e_i, e_i) = 1$, $(e_i, e_j) = \gamma < 1$ при $i \neq j$. Тъй като $\dim \mathbb{R}^n = n$, и двете детерминанти на Грам $\Gamma(e_1, e_2, \dots, e_{n+1})$ и $\Gamma(e_1, e_2, \dots, e_{n+2})$ са равни на 0. Пресмятаме ги и намираме съответно $\gamma = -\dfrac{1}{n}$ и $\gamma = -\dfrac{1}{n+1}$, което е противоречие.

б) Такива са например векторите

$$
\begin{array}{rcllllllll}
e_1 & = & (1 & ,0 & ,0 & ,0 & ,\dots & ,0 & ,0) \\
e_2 & = & (-\frac{1}{n} & ,\alpha & ,\alpha & ,\alpha & ,\dots & ,\alpha & ,\alpha) \\
e_3 & = & (-\frac{1}{n} & ,\beta & ,\gamma & ,\gamma & ,\dots & ,\gamma & ,\gamma) \\
e_4 & = & (-\frac{1}{n} & ,\gamma & ,\beta & ,\gamma & ,\dots & ,\gamma & ,\gamma) \\
e_5 & = & (-\frac{1}{n} & ,\gamma & ,\gamma & ,\beta & ,\dots & ,\gamma & ,\gamma) \\
\multicolumn{10}{c}{\dotfill} \\
e_n & = & (-\frac{1}{n} & ,\gamma & ,\gamma & ,\gamma & ,\dots & ,\beta & ,\gamma) \\
e_{n+1} & = & (-\frac{1}{n} & ,\gamma & ,\gamma & ,\gamma & ,\dots & ,\gamma & ,\beta),
\end{array}
$$

където $\alpha = \dfrac{\sqrt{n+1}}{n}$, $\beta = -\dfrac{(n-2)\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n+1}}{n(n-1)}$, $\gamma = \dfrac{\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n+1}}{n(n-1)}$.

(Проверете, че $(e_i, e_i) = 1$ и $(e_i, e_j) = -\dfrac{1}{n}$ при $i \neq j$.)

7.20. Да допуснем, че съществуват вектори $a_1, \dots, a_{n+2}$, всеки два от които сключват тъп ъгъл , т.е. $(a_i, a_j) < 0$ при $i \neq j$. Първите $n+1$ вектора са линейно зависими и значи един от тях, например a_{n+1}, е линейна комбинация на останалите. Нека

$$a_{n+1} = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n.$$

Като умножим това равенство скаларно с a_{n+2}, получаваме

$$(a_{n+1}, a_{n+2}) = \lambda_1 (a_1, a_{n+2}) + \dots + \lambda_n (a_n, a_{n+2}) < 0.$$

Оттук следва, че поне един от коефициентите $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ е положителен. Като умножим същото равенство скаларно с a_{n+1}, получаваме

$$|a_{n+1}|^2 = (a_{n+1}, a_{n+1}) = \lambda_1 (a_1, a_{n+1}) + \dots + \lambda_n (a_n, a_{n+1}) > 0.$$

Сега следва, че поне един от коефициентите $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ е отрицателен. Тогава (след евентуално преномериране на векторите) можем да запишем a_{n+1} във вида

$$a_{n+1} = \mu_1 a_1 + \dots + \mu_k a_k - \mu_{k+1} a_{k+1} - \dots - \mu_t a_t,$$

където $1 \leqq k < t \leqq n$ и всички коефициенти $\mu_1, \dots, \mu_t$ са положителни. Това равенство е еквивалентно на

$$a_{n+1} + \mu_{k+1} a_{k+1} + \dots + \mu_t a_t = \mu_1 a_1 + \dots + \mu_k a_k.$$

Нека $c = a_{n+1} + \mu_{k+1} a_{k+1} + + \dots + \mu_t a_t$, $d = \mu_1 a_1 + \dots + \mu_k a_k$. Сега, като умножим равенството $c = d$ скаларно с c, получаваме $|c|^2 = (c, d)$. Но $|c|^2 \geqq 0$, докато (както лесно се вижда) $(c, d) < 0$, което е противоречие.

§8

8.1. За ортогонална матрица A е в сила $A^{-1} = A^t$, а от друга страна (за всяка обратима матрица), $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}(A_{ij})^t$. Следователно $A^t = \dfrac{1}{\det A}(A_{ij})^t$, откъдето $a_{ij} = \dfrac{1}{\det A}A_{ij}$. Тъй като $\det A = \pm 1$, то $|a_{ij}| = |A_{ij}|$.

8.2. а) Използвайте, че за всеки два вектора $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{V}$ е в сила равенството $(\varphi(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}), \varphi(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})) = (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.

б) Нека $\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_n} \in \mathbb{V}$ и $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Положете $\boldsymbol{c} = \varphi(\lambda_1\boldsymbol{a_1} + \dots + \lambda_n\boldsymbol{a_n}) - \lambda_1\varphi(\boldsymbol{a_1}) - \dots - \lambda_n\varphi(\boldsymbol{a_n})$ и проверете, че $(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}) = 0$. Оттук следва $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{o}$, което означава, че φ е линеен оператор. Ако изображението φ запазва само дължините на векторите, не следва, че φ е линеен оператор. Разгледайте например изображението $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ дефинирано с равенството $\varphi((a_1, a_2, \dots, a_n)) = (|a_1|, a_2, \dots, a_n)$.

8.3. $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

8.4. в) За по-голяма яснота на ситуацията ще разгледаме само частния случай, когато двете системи вектори са линейно независими. (Общият случай се третира по аналогичен начин, но допълнително са необходими някои досадни технически уточнения, които предоставяме на читателя.) Нека ортогоналната система вектори $\boldsymbol{a}'_1, \dots, \boldsymbol{a}'_k$ е получена от системата вектори $\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_k}$ по метода на Грам и Шмид. Аналогично, от $\boldsymbol{b_1}, \dots, \boldsymbol{b_k}$ получаваме $\boldsymbol{b}'_1, \dots, \boldsymbol{b}'_k$. Докажете, че за всяко $i = 1, \dots, k$ е в сила следното твърдение: ако векторът $\boldsymbol{a_i}$ е линейна комбинация на векторите $\boldsymbol{a}'_1, \dots, \boldsymbol{a}'_k$ съответно с коефициенти $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, то $\boldsymbol{b_i}$ е линейна комбинация на $\boldsymbol{b}'_1, \dots, \boldsymbol{b}'_k$ със същите коефициенти $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. По-нататък, разгледайте двете системи вектори $\boldsymbol{e_i} = \dfrac{\boldsymbol{a}'_i}{|\boldsymbol{a}'_i|}$ и $\boldsymbol{f_i} = \dfrac{\boldsymbol{b}'_i}{|\boldsymbol{b}'_i|}$ $(i = 1, \dots, k)$ и допълнете тези системи до два ортонормирани базиса $\mathbb{V}$: съответно $\boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_k}; \dots, \boldsymbol{e_n}$ и $\boldsymbol{f_1}, \dots, \boldsymbol{f_k}; \dots, \boldsymbol{f_n}$. Накрая разгледайте ортогоналния оператор $\varphi \in \operatorname{Hom}\mathbb{V}$, за който $\varphi(\boldsymbol{e_i}) = \boldsymbol{f_i}$, $i = 1, \dots, n$.

8.5. Ще отбележим, че алгоритъмът за решаването на тази задача (както е прието да се казва) „следва от теорията“. Накратко, този алгоритъм е следният.

1. Намираме всички (комплексни) характеристични корени на φ.

2. Ако λ е реален характеристичен корен на φ (т.е. $\lambda = \pm 1$), намираме собствен вектор на φ, съответстващ на λ, нормираме го и получаваме вектор $\boldsymbol{e_1}$. По-нататък работим по аналогичен начин в ортогоналното допълнение на $\ell(\boldsymbol{e_1})$, което е φ-инвариантно.

3. Ако $\lambda = \alpha + i\beta$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ е комплексен характеристичен корен на φ, който не е реално число, намираме вектори $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$, за които $\varphi(\boldsymbol{a}) = \alpha\boldsymbol{a} - \beta\boldsymbol{b}$, $\varphi(\boldsymbol{b}) = \beta\boldsymbol{a} + \alpha\boldsymbol{b}$. (Тези вектори са ортогонални и с равни дължини.) Нормираме тези вектори и получаваме вектори $\boldsymbol{f_1}$ и $\boldsymbol{f_2}$. По-нататък работим по аналогичен начин в ортогоналното допълнение на $\ell(\boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{f_2})$, което е φ-инвариантно.

4. Търсеният ортонормиран базис се състои от намерените групи вектори $\boldsymbol{e_1}, \dots; \boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{f_2}, \dots$. По главния диагонал на търсената матрица D стоят клетки от първи ред от вида (± 1) или клетки от втори ред от вида $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$, където $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.

а) Характеристичните корени на A са 1 и $\pm i$. Един нормиран собствен вектор на φ, съответстващ на $\lambda = 1$ е векторът $\boldsymbol{e_1} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$. Нека $\lambda = i = 0 + 1.i$. Търсим вектори $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и

$b = (b_1, b_2, b_3)$, такива че $\varphi(a) = 0.a - 1.b = -b$ и $\varphi(b) = 1.a + 0.b = a$. Записани покоординатно, тези равенства дават системата

$$\left|\begin{array}{lllllll} \frac{1}{2}(a_1 & + & a_2 & - & \sqrt{2}a_3) & = & -b_1 \\ \frac{1}{2}(a_1 & + & a_2 & + & \sqrt{2}a_3) & = & -b_2 \\ \frac{1}{2}(\sqrt{2}a_1 & - & \sqrt{2}a_2 & &) & = & -b_3 \\ \frac{1}{2}(b_1 & + & b_2 & - & \sqrt{2}b_3) & = & a_1 \\ \frac{1}{2}(b_1 & + & b_2 & + & \sqrt{2}b_3) & = & a_2 \\ \frac{1}{2}(\sqrt{2}b_1 & - & \sqrt{2}b_2 & &) & = & a_3 \end{array}\right.$$

Едно решение на тази система е $a = (0, 0, \sqrt{2})$, $b = (1, -1, 0)$. След нормиране на тези вектори, получаваме векторите $f_1 = (0, 0, 1)$, $f_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1, -1, 0)$. (Ще отбележим, че ако бяхме работили с характеристичния корен $\lambda = -i$, щяхме просто да получим друг ортонормиран базис на $\ell(f_1, f_2)$.) Сега търсеният базис е e_1; f_1, f_2 и за него имаме $\varphi(e_1) = e_1$, $\varphi(f_1) = -f_2$, $\varphi(f_2) = f_1$. Търсената клетъчно диагонална матрица е $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, а матрицата на прехода от стандартния базис на $\mathbb{R}^3$ към намерения базис е $T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. В сила е равенството $T^{-1}AT = D$.

б) $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\quad e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$; $e_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)$

в) $D = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{3} \\ 0 & -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$, $\quad e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,-1)$; $e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1)$

г) $D = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{2}-1 & \sqrt{7+4\sqrt{2}} \\ 0 & -\sqrt{7+4\sqrt{2}} & 2\sqrt{2}-1 \end{pmatrix}$, $\quad e_1 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{10-4\sqrt{2}}}(1-\sqrt{2}, 1, -1)$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)$; $e_3 = \frac{1}{\sqrt{10-4\sqrt{2}}}(-2, 1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2})$

д) $D = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\quad e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,1,1)$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0,0)$; $e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,1,-1)$, $e_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0,0)$

е) $D = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{3} \\ 0 & -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$, $\quad e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$; $e_3 = (0,0,1)$

ж) $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\quad e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1,0)$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1,0)$; $e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,1)$, $e_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,0,1)$

з) $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/5 & 4/5 \\ 0 & 0 & -4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$, $\quad e_1 = \frac{1}{2}(1,1,1,1)$, $e_2 = \frac{1}{2}(1,1,-1,-1)$. $e_3 = \frac{1}{2}(1,-1,1,-1)$, $e_4 = \frac{1}{2}(1,-1,-1,1)$

8.6. Алгоритъмът за решаването на тази задача е следният.

1. Намираме характеристичните корени на φ (те са реални числа). По главния диагонал на търсената матрица D стоят намерените корени, като всеки от тях участва толкова пъти, колкото е кратността му.

2. За всеки характеристичен корен λ на φ намираме ортонормиран базис на пространството $\mathbb{V}_\lambda = \{a \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(a) = \lambda a\}$. (Първо намираме фундаментална система решения на хомогенната система с матрица $A - \lambda E$, след това ортогонализираме получените вектори по метода на Грам и Шмид и накрая ги нормираме.)

3. Търсеният ортонормиран базис на $\mathbb{R}^n$ се състои от така намерените групи вектори, съответстващи на различните характеристични корени на φ.

а) Характеристичните корени на A са $\lambda_1 = 6$, $\lambda_{2,3} = -3$. Търсената диагонална матрица е $D = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$. Един нормиран собствен вектор, съответстващ на $\lambda = 6$ е векторът $e_1 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$. При $\lambda = -3$ решаваме хомогенната система с матрица $A + 3E$. Една фундаментална система образуват векторите $a_2 = (-2, 1, 0)$ и $a_3 = (2, 0, 1)$ Ортогонализираме ги по метода на Грам и Шмид:

$$b_2 = a_2, \quad b_3 = a_3 - \frac{(a_3, b_2)}{(b_2, b_2)} b_2 = a_3 + \frac{4}{5} b_2 = (\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, 1).$$

След нормиране на тези вектори, получаваме векторите $e_2 = (-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0)$, $e_3 = (\frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{4}{3\sqrt{5}}, \frac{5}{3\sqrt{5}})$. Сега търсеният базис е e_1, e_2, e_3, а матрицата на прехода от стандартния базис на $\mathbb{R}^3$ към този базис е $T = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix}$. В сила е равенството $T^{-1}AT = D$.

б) $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, $\quad e_1 = \frac{1}{3}(1, -2, 2)$, $\quad e_2 = \frac{1}{3}(2, 2, 1)$, $\quad e_3 = \frac{1}{3}(-2, 1, 2)$;

в) $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $\quad e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1)$, $\quad e_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$;

г) $D = \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$, $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$, $\quad e_2 = \frac{1}{3\sqrt{2}}(1, -1, -4)$, $\quad e_3 = \frac{1}{3}(2, -2, 1)$;

д) $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\quad e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$, $\quad e_2 = (0, 1, 0)$, $\quad e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)$;

е) $D = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}$, $e_1 = \frac{1}{3}(2, 2, 1)$, $\quad e_2 = \frac{1}{3}(1, -2, 2)$, $\quad e_3 = \frac{1}{3}(-2, 1, 2)$;

ж) $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $e_1 = \frac{1}{3}(2, -2, -1)$, $\quad e_2 = \frac{1}{3}(2, 1, 2)$, $\quad e_3 = \frac{1}{3}(1, 2, -2)$;

з) $D = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $e_1 = \frac{1}{3}(2, 1, 2)$, $\quad e_2 = \frac{1}{3}(1, 2, -2)$, $\quad e_3 = \frac{1}{3}(-2, 2, 1)$;

и) $D = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $e_1 = \frac{\sqrt{2}}{6}(3, 2\sqrt{2}, 1)$, $\quad e_2 = \frac{\sqrt{2}}{6}(-3, 2\sqrt{2}, 1)$, $\quad e_3 = \frac{\sqrt{2}}{6}(0, \sqrt{2}, -4)$;

к) $D = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $e_1 = \frac{1}{3}(1,-2,2)$, $\quad e_2 = \frac{1}{3}(-2,1,2)$, $\quad e_3 = \frac{1}{3}(2,2,1)$;

л) $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $\quad e_1 = \frac{1}{2}(1,1,1,1)$, $\quad e_2 = \frac{1}{2}(1,1,-1,-1)$, $e_3 = \frac{1}{2}(1,-1,1,-1)$, $\quad e_4 = \frac{1}{2}(1,-1,-1,1)$;

м) $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\quad e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0,1)$, $\quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1,0)$, $e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0,-1)$, $\quad e_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1,0)$;

н) $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $\quad e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0,0)$, $\quad e_2 = \frac{1}{2}(1,-1,1,1)$, $e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,1,-1)$, $\quad e_4 = \frac{1}{2}(-1,1,1,1)$;

о) $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\quad e_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{2},0,1,1)$, $\quad e_2 = \frac{1}{2}(0,\sqrt{2},1,-1)$, $e_3 = \frac{1}{2}(0,\sqrt{2},-1,1)$, $\quad e_4 = \frac{1}{2}(\sqrt{2},0,-1,-1)$;

п) $D = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\quad e_1 = \frac{1}{2}(-1,1,-1,1)$, $\quad e_2 = \frac{1}{2}(1,1,1,1)$, $e_3 = \frac{1}{2}(1,1,-1,-1)$, $\quad e_4 = \frac{1}{2}(1,-1,-1,1)$;

р) $D = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $\quad e_1 = \frac{1}{2}(1,1,-1,-1)$, $\quad e_2 = \frac{1}{2}(1,-1,-1,1)$, $e_3 = \frac{1}{2}(1,-1,1,-1)$, $\quad e_4 = \frac{1}{2}(1,1,1,1)$;

с) $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\quad e_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(0,1,0,1)$, $\quad e_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(0,1,0,-1)$, $e_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1,0,1,0)$, $\quad e_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1,0,-1,0)$;

т) $D = \begin{pmatrix} n-1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}$, $\quad e_1 = \frac{\sqrt{n}}{n}(1,1,\dots,1)$, $e_2 = (t_{12}, t_{22}, \dots, t_{n2})$, $\dots\dots\dots$ $e_n = (t_{1n}, t_{2n}, \dots, t_{nn})$,

където векторите $t_i = (t_{1i}, t_{2i}, \dots, t_{ni})$, $i = 2,3,\dots,n$, образуват ортонормирана фундаментална система решения на хомогенната система (с едно уравнение) $\quad x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$.

8.7. б) Проверете, че $\varphi(a) = b$, $\varphi(b) = a$, откъдето следва $\quad \varphi^2(x) = (a,x)\,a + (b,x)\,b$ и $\varphi^3(x) = (a,x)\,b + (b,x)\,a = \varphi(x)$.

в) От $\varphi^3 = \varphi$ следва $\varphi^{3^k} = \varphi$, $k \in \mathbb{N}$. Сега имаме $2000 = 2.3^6 + 2.3^5 + 2.3^3 + 2$ и $\varphi^{2000} = \varphi^2\varphi^2\varphi^2\varphi^2 = (\varphi^3)^2\varphi^2 = \varphi^2\varphi^2 = \varphi^3\varphi = \varphi^2$.

г) Нека $a, b, e_3, \dots, e_n$ е ортонормиран базис на V. Разгледайте ортонормирания базис $e_1 = \frac{1}{2}(a + b)$, $e_2 = \frac{1}{2}(a-b)$, $e_3, \dots, e_n$ и проверете, че в този базис матрицата на φ е $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

8.8. Нека φ е оператор от S, който не е скаларен (ако всички оператори от S са скаларни, разглеждаме произволен ортонормиран базис на V). Нека λ е собствена стойност на φ и $V_\lambda = \{a \in V \mid \varphi(a) = \lambda a\}$. Тогава $V = V_\lambda \oplus V_\lambda^\perp$ и $\dim V_\lambda < \dim V$, $\dim V_\lambda^\perp < \dim V$. Докажете, че подпространствата V_λ и $V_\lambda^\perp$ са инвариантни относно всички оператори от S и използвайте индукция по $\dim V$.

§9

9.1. а) Имаме

$$\begin{aligned} f &= (x_1^2 + 2x_1x_2) + 3x_2^2 + 8x_2x_3 + 6x_3^2 \\ &= (x_1 + x_2)^2 - x_2^2 + 3x_2^2 + 8x_2x_3 + 6x_3^2 \\ &= (x_1 + x_2)^2 + 2(x_2 + 2x_3)^2 - 2x_3^2 \\ &= y_1^2 + 2y_2^2 - 2y_3^2. \end{aligned}$$

Тук смяната на променливите е

$$\left| \begin{array}{l} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = x_2 + 2x_3 \\ y_3 = x_3 \end{array} \right. , \quad \text{откъдето} \quad \left| \begin{array}{l} x_1 = y_1 - y_2 + 2y_3 \\ x_2 = y_2 - 2y_3 \\ x_3 = y_3 \end{array} \right. .$$

Ако A е матрицата на f спрямо променливите x_1, x_2, x_3, B — матрицата на f спрямо y_1, y_2, y_3 и T е матрицата на прехода, то

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и $B = T^t A T$.

б) Тук коефициентите пред квадратите са равни на нула и първо правим смяната

$$\left| \begin{array}{l} x_1 = z_1 - z_2 \\ x_2 = z_1 + z_2 \\ x_3 = z_3 \\ x_4 = z_4 \end{array} \right. ,$$

Последователно получаваме

$$\begin{aligned} f &= z_1^2 - z_2^2 + z_1z_3 + z_2z_3 + z_3z_4 + z_1z_4 - z_2z_4 \\ &= (z_1 + \tfrac{1}{2}z_3 + \tfrac{1}{2}z_4)^2 - z_2^2 + z_2z_3 - z_2z_4 - \tfrac{1}{4}z_3^2 - \tfrac{1}{4}z_4^2 + \tfrac{1}{2}z_3z_4 \\ &= (z_1 + \tfrac{1}{2}z_3 + \tfrac{1}{2}z_4)^2 - (z_2 - \tfrac{1}{2}z_3 + \tfrac{1}{2}z_4)^2 \\ &= y_1^2 - y_2^2, \end{aligned}$$

където

$$\left| \begin{array}{l} y_1 = z_1 + \frac{1}{2}z_3 + \frac{1}{2}z_4 \\ y_2 = z_2 - \frac{1}{2}z_3 + \frac{1}{2}z_4 \\ y_3 = z_3 \\ y_4 = z_4 \end{array} \right. .$$

Последователно намираме

$$\left|\begin{array}{lrrrr} z_1 = & y_1 & & -\frac{1}{2}y_3 & -\frac{1}{2}y_4 \\ z_2 = & & y_2 & +\frac{1}{2}y_3 & -\frac{1}{2}y_4 \\ z_3 = & & & y_3 & \\ z_4 = & & & & y_4 \end{array}\right. \quad \text{и} \quad \left|\begin{array}{lrrrr} x_1 = & y_1 & -y_2 & -y_3 & \\ x_2 = & y_1 & +y_2 & & -y_4 \\ x_3 = & & & y_3 & \\ x_4 = & & & & y_4 \end{array}\right.$$

Тук матриците A, B и T са следните:

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

в) $2y_1^2 - 3y_2^2 + 5y_3^2$
$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

г) $3y_1^2 - 30y_2^2 + 530y_3^2$
$$T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 20 \end{pmatrix};$$

д) $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$
$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

е) $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 - \frac{3}{4}y_4^2$
$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1/2 \\ 1 & -1 & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

9.2. а) $f = 0$, ако всички a_i са равни на 0. Ако $a_1 \neq 0$, то $f = y_1^2$; новите променливи са $y_1 = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$, $y_i = x_i$ при $i = 2, 3, \dots, n$;

б) $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 - \sum_{i=4}^{n} \frac{i-1}{2(i-2)} y_i^2$,

$y_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) + x_3 + x_4 + \cdots + x_n$, $y_2 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)$,

$y_3 = x_3 + \frac{1}{2}(x_4 + x_5 + \cdots + x_n), \dots, y_i = x_i + \frac{1}{i-1}(x_{i+1} + x_{i+2} + \cdots + x_n)$
при $i = 4, 5, \dots, n-1$, $y_n = x_n$;

в) Ако n е четно число, то $f = y_1^2 - y_2^2 + y_3^2 - \cdots + y_{n-1}^2 - y_n^2$,

$$y_i = \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1} + x_{i+2}) \quad i = 1, 3, 5, \dots, n-3, \quad y_{n-1} = \frac{1}{2}(x_{n-1} + x_n),$$
$$y_i = \frac{1}{2}(x_{i-1} - x_i + x_{i+1}), \quad i = 2, 4, 6, \dots, n-2, \quad y_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} - x_n).$$

Ако n е нечетно число, то $f = y_1^2 - y_2^2 + y_3^2 - \cdots + y_{n-2}^2 - y_{n-1}^2$,

$$y_i = \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1} + x_{i+2}), \quad i = 1, 3, 5, \dots, n-2,$$
$$y_i = \frac{1}{2}(x_{i-1} - x_i + x_{i+1}), \quad i = 2, 4, 6, \dots, n-1, \quad y_n = x_n.$$

г) $(n-1)(y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 - \cdots - y_n^2)$,

$$y_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n), \qquad y_2 = \frac{1}{2}(-x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n),$$
$$y_3 = \frac{1}{2}(-x_1 - x_2 + x_3 + \cdots + x_n), \dots, \quad y_n = \frac{1}{2}(-x_1 - x_2 - x_3 - \cdots - x_{n-1} + x_n).$$

9.3. а) Матрицата на f е $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Характеристичните корени на A са $\lambda_{1,2} = 1$, $\lambda_3 = 4$. Тогава каноничният вид на f е $y_1^2 + y_2^2 + 4y_3^2$ и матрицата на f спрямо новите променливи е $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Както в задача 8.6, намираме ортонормиран базис на $\mathbb{R}^3$, в който линейният оператор с матрица A спрямо стандартния базис на $\mathbb{R}^3$ има диагонална матрица D. Един такъв базис образуват векторите

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0), \qquad \mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2), \mathbf{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1).$$

Матрицата на прехода T от стандартния базис на $\mathbb{R}^3$ към този базис и съответната смяна на променливите са:

$$T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{|l} x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}y_3 \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}y_3 \\ x_3 = -\frac{2}{\sqrt{6}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}y_3 \end{array}$$

В сила е равенството $D = T^{-1}AT$.

б) $5y_1^2 - y_2^2 - 7y_3^2$

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix};$$

в) $-7y_1^2 + 2y_2^2$

$$T = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{21}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{3}{\sqrt{14}} \\ \frac{1}{\sqrt{21}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{14}} \\ -\frac{4}{\sqrt{21}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{14}} \end{pmatrix};$$

г) $y_1^2 + y_2^2 + 7y_3^2$

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix};$$

д) $9y_1^2 + 9y_2^2 - 9y_3^2$

$$T = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{4}{3\sqrt{2}} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix};$$

е) $3y_1^2 - 6y_2^2$

$$T = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3} & -\frac{4}{3\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix};$$

ж) $-9y_1^2$

$$T = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

з) $y_1^2 + 3y_2^2 - y_3^2 - 3y_4^2$

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

и) $4y_2^2 + 8y_3^2 - 8y_4^2$

$$T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix};$$

9.4. $f = (1 - \frac{1}{n})\, y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2 - \cdots - \frac{1}{2}y_n^2$,

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad a_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{j(j-1)}}, & j < i \\ -\sqrt{\frac{i-1}{i}}, & i = j \\ 0, & j > i \end{cases}$$

9.5. Ако $\boldsymbol{d} = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ е център на повърхнината, покажете, че е в сила равенството $f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{d}) = f(-\boldsymbol{x} + \boldsymbol{d})$, откъдето $\boldsymbol{d}^t A\,\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^t A\,\boldsymbol{d} + 2\boldsymbol{x}^t \boldsymbol{b} = 0$. Тъй като A е симетрична матрица, то $\boldsymbol{d}^t A\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^t A\,\boldsymbol{d}$, следователно $\boldsymbol{x}^t(A\boldsymbol{d} + \boldsymbol{b}) = 0$. Покажете, че последното равенство е еквивалентно на $A\boldsymbol{d} + \boldsymbol{b} = 0$ и използвайте теоремата на Руше.

9.6. Покажете, че ако транслираме началото на координатната система в център на повърхнината, уравнението ѝ няма да има линейна част. След това приведете квадратната част (тя е квадратична форма) към главни оси.

9.7. Използвайте, че $r(A) < n$. Нека φ е симетричният оператор, чиято матрица е A. Покажете, че $\mathbb{R}^n = \operatorname{Im}\varphi \oplus \operatorname{Ker}\varphi$, и че $b \notin \operatorname{Im}\varphi$. Тогава $b = b' + b''$, $b' \in \operatorname{Im}\varphi$, $b'' \in \operatorname{Ker}\varphi$ и $b'' \neq o$. Изберете прообраз d' на b': $\varphi(d') = b'$, и покажете, че ако направим транслация на координатната система по вектора d', уравнението на повърхнината се записва във вида $x^t A x + 2x^t b'' + c' = 0$. Извършете още една транслация, с която да анулирате свободния член (това е възможно, тъй като $b'' \neq o$). След това направете ортогонална смяна, като новите базисни вектори са ортонормираните собствени вектори на оператора φ, и един от тях е векторът $-\frac{b''}{|b''|}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пл. Сидеров, *Записки по алгебра. Линейна алгебра*, София, Веди, 1997.
2. А. Божилов, Пл. Кошлуков, *Задачи по алгебра. Линейна алгебра*, София, Веди, 1995.
3. К. Дочев, Л. Димитров, Т. Кирпикова, *Ръководство за упражнения по висша алгебра. Линейна алгебра*, София, Наука и Изкуство, 1974.
4. Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский, *Сборник задач по высшей алгебре*, Москва, Наука, 1977.
5. И. В. Проскуряков, *Сборник задач по линейной алгебре*, Москва, Наука, 1984.
6. Х. Д. Икрамов, *Задачник по линейной алгебре*, Москва, Наука, 1975.

СЪДЪРЖАНИЕ