I. КОМПЛЕКСНИ ЧИСЛА. ПОЛЕТА – ЧИСЛОВИ ПОЛЕТА И ПРИМЕР ЗА НЕЧИСЛОВО ПОЛЕ

1. ПОЛЕ: Непразно множество с 4-те осн. операции $(\pm;\cdot;:)$ и
Аксиомите, определящи поле, са:

1) $a+b=b+a$
2) $a+(b+c)=(a+b)+c$
3) $\exists\, 0:\ 0+a=a$ за $\forall a$
4) за $\forall a\ \exists\ -a:\ a+(-a)=0$
5) $ab=ba$
6) $a(bc)=(ab)c$
7) $\exists\, 1\neq 0:\ a.1=a$ за $\forall a$
8) за $\forall a\neq 0\ \exists\ a^{-1}:\ a.a^{-1}=1$
9) $a(b+c)=ab+ac$

Def / Числово поле

Нека $\emptyset\neq F\subset\mathbb{C}$ и $|F|\geq 2$.
F е числово поле, ако за произволни a и b $\left(\begin{smallmatrix}a\in F\\ b\in F\end{smallmatrix}\right)$ числата $a\pm b$, ab и $\frac{a}{b}$ $(b\neq 0)$ също $\in F$.

2. ПРИМЕРИ

нечислово поле $F=\{\bar 0,\bar 1\}$, като $\bar 0$ е нулев елемент, $\bar 1$ е обратен елемент

$(+)$:

$+$	$\bar 0$	$\bar 1$
$\bar 0$	$\bar 0$	$\bar 1$
$\bar 1$	$\bar 1$	$\bar 0$

от симетр. => комутативност

$(\cdot)$:

$\cdot$	$\bar 0$	$\bar 1$
$\bar 0$	$\bar 0$	$\bar 0$
$\bar 1$	$\bar 0$	$\bar 1$

симетр => комут.

$(\bar 1)^{-1}=\bar 1$, защото $\bar 1\cdot\bar 1=\bar 1$

числово поле – $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$

Най-малкото числово поле е $\mathbb{Q}$.

Доказателство:

Нека F е поле. $|F| \geq 2 \Rightarrow \exists\, a \neq 0$.

Тогава $0 = a - a$ и $1 = \frac{a}{a}$ са в F.

Но тогава и $2 = 1+1$; $3 = 2+1 \ldots$ са в F $\Rightarrow \mathbb{N} \subseteq F$.

Също и $-1 = 0-1$; $-2 = -1-1 \ldots$ са в $F \Rightarrow \mathbb{Z} \subseteq F$.

Ако a и b са произволни цели числа и $b \neq 0$, то

$\frac{a}{b} \in F \Rightarrow \mathbb{Q} \subseteq F$. ■

3. КОМПЛЕКСНИ ЧИСЛА

Множеството от наредени двойки от реални числа наричаме множество на комплексните числа.

Нека $z_1 = (a_1; b_1)$ и $z_2 = (a_2; b_2)$ са произволни елементи на $\mathbb{C}$. Дефинираме операциите събиране и умножение:

$(+)$: $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2;\ b_1 + b_2)$

$(\cdot)$: $z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2;\ a_1 b_2 + a_2 b_1)$

Също така $z_1 = z_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$

$\bar{1} = (1,0)$; $\bar{1} \cdot z_1 = z_1 \Rightarrow \bar{1}$ е единичният елемент

$\bar{0} = (0,0)$; $0 + z_1 = z_1 \Leftrightarrow \bar{0}$ е нулевият елемент

Дефинираме $i = (0,1)$

$i^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (0.0 - 1.1,\ 0.1 + 1.0) = (-1, 0)$

$a_1 = Re\, z_1$ (наричаме a_1 реална част)

$b_1 = Im\, z_1$ (наричаме b_1 имагинерна част)

Алгебричен вид: $z = a + ib$, където $a = Re\, z$; $b = Im\, z$

$z = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = a + ib$

Комплексно спрегнато: $\bar{z} = a - ib$

$\bar{z} \cdot z = (a - ib)(a + ib) = a^2 - i^2 b^2 = a^2 + b^2 \geq 0,\ \in \mathbb{R}$

Модул на компл. число: $r = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$

$z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$ - обратен елемент на

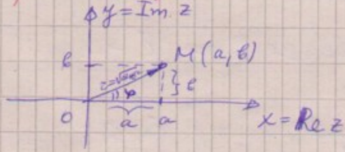
$z \neq \bar{0}$ $(\Rightarrow a^2+b^2 \neq 0)$

$$z\cdot z^{-1} = (a,b)\cdot\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right) = \left(\frac{a^2}{a^2+b^2} - \frac{b(-b)}{a^2+b^2}, \frac{-ab}{a^2+b^2} + \frac{ba}{a^2+b^2}\right) =$$

$$= \left(\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}, \frac{-ab+ab}{a^2+b^2}\right) = (1,0) = \bar{1}$$

Тригонометричен вид: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $r=\sqrt{a^2+b^2}$, $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$

$\varphi\in[0,2\pi]$



$z=(a,b)$

$(\overrightarrow{OM})^2 = a^2+b^2$

$\overrightarrow{OM} = \sqrt{a^2+b^2} = r$ - модул на z

Нека φ е ъгълът, който $\overrightarrow{OM}$ сключва с „+" посока на $\overrightarrow{Ox}$.

$\Rightarrow a = r\cos\varphi$; $b = r\sin\varphi$

$\Rightarrow z = a+ib = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$, Означаваме $\operatorname{Arg} z = \varphi$, наричаме аргумент на z

$\varphi \in [0, 2\pi]$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$$

$$z_1 z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\, r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= r_1 r_2 (\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2) + i^2\sin\varphi_1\sin\varphi_2) =$$
$$= r_1 r_2 (\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)) =$$
$$= r_1 r_2 (\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)), \quad z_2 \neq 0$$

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right), \quad k=0,1,\dots,n-1$$

$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)$; $z_k^n = r(\cos(\varphi+2k\pi) + i\sin(\varphi+2k\pi)) =$

$k=0,1,\dots n-1$

$= r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = z$

$$\omega_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

$\downarrow$

n-ти корен на 1.

Комплексните числа образуват поле.

Наредба за комплексните числа няма.

Доказателство:

Нека $i>0$. Умножаваме по $i>0$

$\Rightarrow i^2>0$ ↯

Нека $i<0$. Умножаваме по $i<0$

$\Rightarrow i^2>0$ ↯

Всеки неконстантен полином с комплексни коефициенти от степен n има n ~~корена~~ комплексни корена (вкл. се и кратността им.)

II. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗА ЛИНЕЙНО ПРОСТРАНСТВО, ОСНОВНИ СВОЙСТВА И ПРИМЕРИ. ПОДПРОСТРАНСТВА И ЛИНЕЙНА ОБВИВКА

1) Линейно пространство.

F – поле, $\emptyset \neq V$ – елементите му са вектори

$(+)$ $a+b \in V$; $(+): V\times V \to V$ /събиране на вектори

$(\cdot)$ $\lambda a \in V$; $(\cdot): F\times V \to V$ /умножение на вектор с число

V е линейно пространство над полето F, ако операциите изпълняват следните свойства:

1) $a+b = b+a$
2) $a+(b+c) = (a+b)+c$
3) $\exists\, \bar{o} \in V: a+\bar{o} = a$ за $\forall a \in V$
4) $\exists\, -a \in V$ за $\forall a \in V: a+(-a) = \bar{o}$
5) $1.a = a$, $1 \in F$!
6) $\lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b$, $\forall a, b \in V, \forall \lambda \in F$
7) $\lambda(\mu a) = (\lambda\mu) a$, $\forall a \in V, \forall \lambda, \mu \in F$
8) $(\lambda+\mu) a = \lambda a + \mu a$, $\forall a \in V, \forall \lambda, \mu \in F$.

2) Следствия от аксиомите.

1) обобщена асоциативност при събиране
$\Rightarrow$ не използваме скоби

2) нулевият вектор е единствен

<u>Д-во</u>: Нека Допускаме, че $\bar{o}' + a = a$ за $\forall a$ и $\bar{o}'' + a = a$ за $\forall a$
$\bar{o}'$ е нулев елемент $\Rightarrow \bar{o}' + \bar{o}'' = \bar{o}'$
$\bar{o}''$ е нулев елемент $\Rightarrow \bar{o}'' + \bar{o}' = \bar{o}''$
$\Rightarrow \bar{o}' = \bar{o}'' \Rightarrow \bar{o}$ е единствен ■

3) единственост на противоположния елемент

<u>Д-во</u>: Нека $a+b_1 = \bar{o}$ и $a+b_2 = \bar{o}$. Тогава $b_1 + (a+b_2) = b_1 + \bar{o}$ и $b_2 + (a+b_1) = b_2 + \bar{o} = b_2 \Rightarrow b_1 = b_2$ ■

4) за $\forall a \in V$ [illegible] и $0 \in F$ е вярно, че
$0a = \bar{0}$

Д-во:

$0a + 1a = (0+1)a = 1a = a$

$\Leftrightarrow 0a + a = a \quad | + (-a)$

$\Leftrightarrow 0a + a + (-a) = a + (-a)$

$\Leftrightarrow 0a = \bar{0}$ ∎

5) за $\forall \lambda \in F$ е вярно, че $\lambda . \bar{0} = \bar{0}$

Д-во: $\lambda . \bar{0} = \lambda . (0 . a) = (\lambda . 0) a = 0a = \bar{0}, \ a \in V$ ∎

6) Ако $\lambda \in F$, $a \in V$ и $\lambda a = \bar{0} \Rightarrow \lambda = 0 \vee a = \bar{0}$

Д-во:

Ако $\lambda = 0 \Rightarrow 0a = \bar{0}$ от 4).

Ако $\lambda \neq 0 \Rightarrow \lambda a = \bar{0} \quad | . \lambda^{-1} \Leftrightarrow (\lambda . \lambda^{-1}) a = \bar{0} . \lambda^{-1}$

$\Leftrightarrow 1a = \bar{0} \Leftrightarrow a = \bar{0}$ ∎

7) Ако $a, b \in V \Rightarrow \exists 1! \, x \in V : a + x = b$

Д-во:

$a + (b + (-a)) = a + (-a + b) = (a + (-a)) + b = \bar{0} + b = b$

$\Rightarrow x = b + (-a) = b - a$

$\Rightarrow \exists$ ~~един~~ вектор с такова свойство

Нека x_2 е друг такъв вектор, $x_2 \neq x$

$a + x_2 = b \quad | + (-a)$

$\underbrace{-a + a}_{\bar{0}} + x_2 = b + (-a) \Leftrightarrow \bar{0} + x_2 = b - a$

$\Leftrightarrow x_2 = b - a \Rightarrow x_2 = x$

$\Rightarrow$ единственост. ∎

8) за $\forall a \in V \quad (-1)a = -a$

Д-во: $a + (-1)a = 1a + (-1)a = (1 + (-1))a = 0a = \bar{0}$

$\Rightarrow (-1)a = -a$ ∎

3. Примери

1) векторите в равнината и пространството
2) n-мерните вектори $-F^n$
множеството от наредени n-орки
$F^n = \{(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n) ; \alpha_i \in F\}$ е лин. п-во
3) Множеството $F_{m\times n}$ от $\forall$ матрици $m\times n$ с елементи от F.

$$F_{m\times n} = \{ (a_{ij})_{m\times n} \mid a_{ij} \in F\}$$ е линейно пространство

4) множеството от $\forall$ полиноми с коефициенти елементи от F, означаване с $F[x]$.
$\Rightarrow F[x]$ е линейно пространство
5) множеството от линейни уравнения с коеф. от F е линейно пространство.

4. Линейна обвивка

Def/ линейна комбинация

V- пространство, F - поле.
Нека $a_1, a_2, \dots, a_n \in V$, а $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in F$.
Векторът $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n$
наричаме линейна комбинация на векторите $a_1, a_2, \dots, a_n$ с коефициенти $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Def/ линейна обвивка

V- пространство, F - поле
Нека $a_1, a_2, \dots, a_n \in V$, а $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in F$.
Тогава множеството от всички линейни комбинации на векторите $a_1, a_2, \dots, a_n$ с коефициенти $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ наричаме линейна обвивка (на V)

$$\ell(a_1, a_2, \dots, a_n) = \{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n \mid \lambda_i \in F, a_j \in V\}$$

Def / линейно подпространство

V - линейно пространство над полето F. $\emptyset \neq M \subset V$. Ако M е линейно пространство над F относно същите операции във V, то M се нарича линейно подпространство на V.
(или ако $\forall$ линейна комбинация на вектори от M принадлежи на V)

$\emptyset \neq M \subset V$ е подпространство на V $\Leftrightarrow$

1) $a+b \in M$ за $\forall\, a, b \in M$ $\Leftrightarrow$ $\lambda a + \mu b \in M$
2) $\lambda a \in M$ за $\forall a \in M$ и $\forall \lambda \in F$

$\forall$ подпространство съдържа нулевия вектор
$\lambda = 0 \Rightarrow 0a = \bar{0} \Rightarrow \bar{0} \in M$

III. ЛИНЕЙНА ЗАВИСИМОСТ И НЕЗАВИСИМОСТ. ОСНОВНА ЛЕМА НА ЛИНЕЙНАТА АЛГЕБРА

1. Линейна зависимост и независимост

Def/ЛЗ

Нека A е множество от векторите $a_1, a_2, \dots, a_n \in V_F$. Казваме, че векторите $a_1, a_2, \dots, a_n$ са линейно зависими, а множеството A е линейно зависима система, ако $\exists\ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in F$, не всички от които равни на нула, но

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n = \bar{0}.$$

Def/ЛНЗ

Нека A е множеството от векторите $a_1, a_2, \dots a_n \in V_F$. Казваме, че векторите са линейно независими, а множеството A е линейно независима система, ако от това, че за някоя линейна комбинация:

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n = \bar{0} \Rightarrow \lambda_i = 0$$ (т.е. $\forall$ коефиц. в комбинацията са нули).

1) Ако $a_1, a_2, \dots, a_n$ са ЛЗ $\Rightarrow a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots a_s$ са ЛЗ

Д-во: $a_1 \dots a_n$ са ЛЗ $\Rightarrow \exists\ \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n = \bar{0} \Rightarrow \lambda_1 \dots \lambda_n \neq 0$
Но може разширим коефициентите с още нули, т.е. $\lambda_1 a_1, \dots \lambda_n a_n, 0 a_{n+1}, \dots, 0 a_s$
Тогава $\exists\ \lambda_1 \dots \lambda_n, \lambda_{n+1}, \dots \lambda_s$, не всички от които са нули, такива, че $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n + \lambda_{n+1} a_{n+1} + \dots + \lambda_s a_s = \bar{0}$.

2) Всяка подсистема на ЛНЗ система е ЛНЗ.

Д-во: Нека $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ е ЛНЗ с-ма и
$B = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, $k \leq n$.
Допускаме, че B е ЛЗ и нека $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k = \bar{0}$,
~~Тогава~~ като $\lambda_1 \neq 0$.
Тогава $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k + 0 \cdot a_{k+1} + \dots + 0 \cdot a_n = \bar{0}$,
като $\lambda_1 \neq 0 \Rightarrow A$ е ЛЗ ↯ ∎

3) $\bar{0}$ е линейно зависим
$1 \cdot \bar{0} = \bar{0}$, ∵ 1 е ненулев скалар
$\Rightarrow \bar{0}$ е ЛЗ ∎

4) Един ~~ненулев~~ вектор е ЛНЗ $\Leftrightarrow$ е ненулев.
$\bar{x} \neq \bar{0}$. $\lambda \bar{x} = \bar{0} \Leftrightarrow \lambda = 0$ (съгласно следствията от аксиомите за линейно пр-во)
$\Rightarrow \bar{x}$ е ЛНЗ. ∎

5) Ако $a_1, a_2, \dots, a_n$ са ЛЗ $\Rightarrow$ поне един от векторите може да се представи като линейна комбинация на останалите.

Д-во: $a_1, a_2, \dots, a_n$ са ЛЗ. Тогава ∃ $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n = \bar{0}$
и нека $\lambda_i \neq 0$
Тогава
$$\lambda_i a_i = -\lambda_1 a_1 - \lambda_2 a_2 - \dots - \lambda_{i-1} a_{i-1} - \lambda_{i+1} a_{i+1} - \dots - \lambda_n a_n$$
$$\Rightarrow a_i = -\frac{\lambda_1}{\lambda_i} a_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_i} a_2 - \dots - \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i} a_{i-1} - \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i} a_{i+1} - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda_i} a_n$$
$\Rightarrow a_i$ е линейна комбинация на останалите. ∎

б) Една система е ЛЗ <=> съдържа $\bar{0}$ или 2 пропорционални вектора.

Нека $A = \{\bar{0}, a_2, a_3, \dots, a_n\}$

Тогава $1.\bar{0} + 0.a_2 + \dots + 0a_n = \bar{0}$ и $1 \neq 0$

=> A е ЛЗ система.

Нека $B = \{a_1, \lambda a_1, a_3, \dots, a_n\}$

Тогава $\lambda a_1 - 1.a_2 + 0.a_3 + \dots + 0a_n = \bar{0}$

=> B е ЛЗ система.

2. Основна лема на линейната алгебра

V – линейно пространство над F и

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ и $B = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$, като ∀ вектор от B е линейна комбинация на векторите от A. Тогава, ако $k > n$, то B е ЛЗ с-ма.

/Ако повече на брой вектори са линейна комбинация на по-малко на брой, то повечето са линейно зав./

Доказателство:

Индукция по n.

База: $n = 1$. Тогава $A = \{a_1\}$ => B съдържа или $\bar{0}$, или 2 пропорционални вектора => B е ЛЗ с-ма.

Нека е вярно за $n+1$ вектора.

Разглеждане за $n+2$ вектора:

Тогава $\exists\ \lambda_{ij}$ $(i = 1, 2, \dots, n+2;\ j = 1, 2, \dots, n)$:

$$b_1 = \lambda_{11} a_1 + \lambda_{12} a_2 + \dots + \lambda_{1n} a_n$$
$$b_2 = \lambda_{21} a_1 + \lambda_{22} a_2 + \dots + \lambda_{2n} a_n$$
$$\dots$$
$$b_{n-1} = \lambda_{n-1,1} a_1 + \lambda_{n-1,2} a_2 + \dots + \lambda_{n-1,n} a_n$$
$$b_n = \lambda_{n1} a_1 + \lambda_{n2} a_2 + \dots + \lambda_{nn} a_n$$
$$b_{n+1} = \lambda_{n+1,1} a_1 + \lambda_{n+1,2} a_2 + \dots + \lambda_{n+1,n} a_n$$
$$b_{n+2} = \lambda_{n+2,1} a_1 + \lambda_{n+2,2} a_2 + \dots + \lambda_{n+2,n} a_n$$

Ако $b_{n+2} = \bar{0}$ => В е ЛЗ с-ма

Нека $b_{n+2} \neq \bar{0}$ и например $\lambda_{n+2,n} \neq 0$

Умножаваме равенството за b_{n+2} с $-\frac{\lambda_{in}}{\lambda_{n+2,n}}$, като $i = 1, 2, \dots, n, n+1$. Така, като прибавим последното равенство към всяко от останалите, елиминираме a_n

Получаваме:

$$b_1 - \frac{\lambda_{1n}}{\lambda_{n+2,n}} b_{n+2} = \left(\lambda_{11} - \frac{\lambda_{n+2,1} \cdot \lambda_{1n}}{\lambda_{n+2,n}}\right) a_1 + \dots + \left(\lambda_{1,n-1} - \frac{\lambda_{n+2,n-1} \lambda_{1n}}{\lambda_{n+2,n}}\right) \cdot a_{n-1}$$

$\dots$

$$b_{n+1} - \frac{\lambda_{n+1,n}}{\lambda_{n+2,n}} b_{n+2} = \left(\lambda_{n+1,1} - \frac{\lambda_{n+2,1} \cdot \lambda_{n+1,n}}{\lambda_{n+2,n}}\right) a_1 + \dots + \left(\lambda_{n+1,n-1} - \frac{\lambda_{n+2,n-1} \cdot \lambda_{n+1,n}}{\lambda_{n+2,n}}\right) a_{n-1}$$

Тогава векторите $b_1 - \frac{\lambda_{1n}}{\lambda_{n+2,n}} b_{n+2}, \dots, b_{n+1} - \frac{\lambda_{n+1,n}}{\lambda_{n+2,n}} b_{n+2}$ са $n+1$ на брой и $\forall$ от тях е линейна комбинация на векторите $a_1, a_2, \dots a_{n-1}$.

По индукционното предположение

=> $b_1 - \frac{\lambda_{1n}}{\lambda_{n+2,n}} b_{n+2}, \dots, b_{n+1} - \frac{\lambda_{n+1,n}}{\lambda_{n+2,n}} b_{n+2}$

са ЛЗ => $\exists\ \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n+1}$, не всички от които равни на 0 и такива, че

$$\mu_1 \left(b_1 - \frac{\lambda_{1n}}{\lambda_{n+2,n}} b_{n+2}\right) + \dots + \mu_{n+1} \left(b_{n+1} - \frac{\lambda_{n+1,n}}{\lambda_{n+2,n}} b_{n+2}\right) = \bar{0}$$

=> $\mu_1 b_1 + \dots + \mu_{n+1} b_{n+1} + M \cdot b_{n+2} = \bar{0}$, като няма значение от коефиц. пред b_{n+2}

=> $b_1, b_2, \dots, b_{n+1}, b_{n+2}$ са ЛЗ,

IV. ~~Линейна зависимост и независимост~~ БАЗИС, РАЗМЕРНОСТ И КООРДИНАТИ. ИЗОМОРФИЗЪМ НА ЛИНЕЙНИ ПРОСТРАНСТВА

1. Базис, размерност и координати

Def/ Крайномерно пространство

Едно пространство е крайномерно, ако $\exists$ краен брой вектори $a_1, \dots, a_n$: цялото пространство може да се представи като линейна обвивка от a_i.

Def/ Безкрайномерно пространство

Ако едно пространство не е крайномерно, то е безкрайномерно.

Def/ Базис

V е линейно пространство, $B \subset V$, $B = \{b_1, \dots, b_n\}$

B е базис на V, ако

1) $\ell(b_1, b_2, \dots, b_n) = V$
2) B е ЛНЗ система

V - крайномерно линейно пространство и $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ и $B = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$ са базиси на V. Тогава $n = k$.

Доказателство:

Допускане, че $k > n$. $b_1, \dots, b_k \in V = \ell(a_1, a_2, \dots, a_n)$, защото $a_1, \dots, a_n$ е базис. Според ОЛЛА $\Rightarrow$ $b_1, \dots, b_k$ са ЛЗ. Но $b_1, \dots, b_k$ е базис ↯ $\Rightarrow k \le n$.

Ако $k < n \Rightarrow a_1, \dots, a_n \in V = \ell(b_1, b_2, \dots, b_k)$, защото $b_1, \dots, b_k$ е базис. Според ОЛЛА $\Rightarrow$ $a_1, \dots, a_n$ са ЛЗ. Но $a_1, \dots, a_n$ е базис ↯

$\Rightarrow k = n$. ◻

Def / Размерност на пространство

Броят на векторите в кой да е базис на ненулевото крайномерно пространство V над полето F наричаме размерност на V над F и бележим $\dim_F V$ или $\dim V$.
Размерността на нулевото пространство е 0, а на безкрайномерното е ∞.

— примери

1) двумерното векторно пространство — базис: $\forall$ 2 неколинеарни вектора

2) $F^n = \{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \mid \alpha_i \in F\}$

$$\bar{x} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (\alpha_1, 0, \dots, 0) + (0, \alpha_2, \dots, 0) + \dots + (0, 0, \dots, \alpha_n) =$$
$$= \alpha_1 \underbrace{(1, 0, \dots, 0)}_{e_1} + \alpha_2 \underbrace{(0, 1, \dots, 0)}_{e_2} + \dots + \alpha_n \underbrace{(0, 0, \dots, 1)}_{e_n}$$

$x \in \ell(e_1, \dots, e_n) \Rightarrow F^n = \ell(e_1, \dots, e_n)$ и $e_1, \dots, e_n$ са ст. базис

3) $$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1k} \\ \alpha_{21} & \dots & \alpha_{2k} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nk} \end{pmatrix} = \sum_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,k}} \alpha_{ij} \cdot \underbrace{\begin{array}{c|c} & j \\ \hline i & \begin{pmatrix} - - - 1 - - - \end{pmatrix} \end{array}}_{E_{ij}}$$

и $$\sum_{\substack{i=1..n \\ j=1..k}} \lambda_{ij} E_{ij} = \bar{0} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \lambda_{ij} = 0 \Rightarrow E_{ij} \text{ е базис } \quad \substack{i=1..n \\ j=1..k}$$

4) $\mathbb{C}$ над $\mathbb{C}$

$\underset{\text{вектор от } \mathbb{C}}{\bar{\alpha}} = \underset{\text{скалар от } \mathbb{C}}{\alpha} \cdot \bar{1}$ - вектор $= (1, 0)$

$\Rightarrow \mathbb{C} = \ell(\bar{1})$

$\Rightarrow \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$; базис: $(1, 0)$

5) $\mathbb{C}$ над $\mathbb{R}$

$\alpha = x + iy = x \cdot \bar{1} + y \cdot i$

$\alpha = \bar{o} \Leftrightarrow x = 0$ и $y = 0 \Rightarrow \bar{1}$ и i са ЛНЗ $\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$ и $\ell(\bar{1}, i)$ са базис

6) $\mathbb{C}$ над $\mathbb{Q}$

π е трансцендентно число, т.е. не е корен на никой полином.

$\Rightarrow \alpha_0 . 1 + \alpha_1 \pi + \alpha_2 \pi^2 + \dots + \alpha_s \pi^s = \bar{0}$

$\Leftrightarrow \alpha_i = 0$

$\Rightarrow \mathbb{C}$ над $\mathbb{Q}$ е безкрайномерно

или $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} = \infty$

7) $V = \{\bar{0}\} \Rightarrow \dim V = 0$.

Лема | V - линейно пространство и $a_1, \dots, a_n$ са ЛНЗ вектори от V. ~~Ако~~ $b \in V$. Тогава ~~Ако~~ $b \notin \ell(a_1, \dots, a_n)$ $\Leftrightarrow a_1, \dots, a_n, b$ са ЛНЗ.

Доказателство:

$\Rightarrow b \notin \ell(a_1, \dots, a_n)$ и нека $\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n + \beta b = \bar{0}$

Ако $\beta \neq 0 \Rightarrow b = -\frac{1}{\beta}(\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n) =$

$= -\frac{\alpha_1}{\beta} a_1 - \dots - \frac{\alpha_n}{\beta} a_n \Rightarrow b \in \ell(a_1, \dots, a_n)$ ↯

$\Rightarrow \beta = 0 \Rightarrow \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n = \bar{0}$ и $a_1, \dots, a_n$ е ЛНЗ система по усл.

$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n \Rightarrow a_1, a_2, \dots, a_n, b$ са ЛНЗ.

$\Leftarrow$ $a_1, \dots, a_n, b$ са ЛНЗ и нека $b = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n$

b е ЛНЗ с $a_1, \dots, a_n \Rightarrow \alpha_i = 0$ Но тогава $\Rightarrow b = \bar{0}$

и $\Rightarrow a_1, \dots, a_n$ са ЛЗ ∎.

Ако V е крайномерно линейно пространство $\neq \{\bar{0}\}$, то V има базис.

Доказателство:

$V \in \ell(a_1, \dots, a_n) \neq \{\bar{0}\}$

$\Rightarrow \exists\, a_i \neq \bar{0}$ Нека $b_1 = a_i \neq \bar{0}$. Тогава $\ell(b_1) \subseteq \ell(a_1, \dots, a_n)$

1сл. $\ell(b_1)=\ell(a_1,\dots,a_n) \Rightarrow b_1$ е базис

2сл. $\ell(b_1)\neq\ell(a_1,\dots,a_n) \Rightarrow \exists a_j \notin \ell(b_1)$. Нека $b_2=a_j$

Тогава b_1 и b_2 са ЛНЗ.

$\ell(b_1,b_2)\subseteq\ell(a_1,\dots,a_n)$

1сл. $\ell(b_1,b_2)=\ell(a_1,\dots,a_n) \Rightarrow b_1$ и b_2 са базис

2сл. $\ell(b_1,b_2)\neq\ell(a_1,\dots,a_n) \Rightarrow \exists a_s \notin \ell(b_1,b_2)$. Нека $b_3=a_s$

Тогава b_1, b_2 и b_3 са ЛНЗ.

...

Процесът може да продължи най-много до n. Но ще получим базис, който е подмножество на пораждащите крайномерното пространство вектори. ■

V- крайномерно линейно пространство. $\dim V=n$ $\Leftrightarrow$ 1) $\forall$ $n+1$ вектора са ЛЗ
2) $\exists$ n на брой ЛНЗ вектора

<u>Доказателство:</u>

$\Leftarrow$ Нека $a_1,\dots,a_n$ са ЛНЗ и $b\in V$. Тогава $a_1,\dots,a_n, b$ са ЛЗ $\Leftrightarrow b\in\ell(a_1,\dots,a_n)$

Но b е произволен $\Rightarrow V\subseteq\ell(a_1,\dots,a_n)$ и $a_1,\dots,a_n$ са ЛНЗ $\Rightarrow a_1,\dots,a_n$ са базис $\Rightarrow \dim V=n$.

$\Rightarrow$ Нека $\dim V=n \Rightarrow V$ има базис $a_1,\dots,a_n$ от n ЛНЗ вектора. Нека $b_1,\dots,b_{n+1}$ са произволни $n+1$ вектора от V. Съгласно ОЛЛА $\Rightarrow b_1,\dots,b_{n+1}$ са ЛЗ ■

V- крайномерно линейно пространство и $a_1, a_2,\dots,a_s$ са ЛНЗ. Тогава тази система може да се допълни до базис на пространството V.

<u>Доказателство:</u>

$a_1,\dots,a_n$ са ЛНЗ. Ако $V=\ell(a_1,\dots,a_n) \Rightarrow$ тези вектори са базис на V. В противен случай $\exists a_{s+1}\in V$, $a_{s+1}\notin\ell(a_1,\dots,a_s)$. От Т1 $\Rightarrow a_1,\dots,a_s,a_{s+1}$ са ЛНЗ

Ако $V=\ell(a_1,\dots,a_s,a_{s+1}) \Rightarrow$ тези вектори са базис

В противен случай $\exists\ a_{s+2} \notin \ell(a_1, \dots, a_s, a_{s+1})$
$\Rightarrow a_1, \dots, a_s, a_{s+1}, a_{s+2}$ са ЛНЗ

...

Процесът може да продължи до n (където $n = \dim V$, защото V е крайномерно) и в най-лошия случай ще достигнем до с-мата $a_1, \dots, a_s, a_{s+1}, \dots, a_n$, която е ЛНЗ и $V = \ell(a_1, \dots, a_s, a_{s+1}, \dots, a_n)$
$\Rightarrow$ кои да е ЛНЗ вектори могат да се допълнят до базис ∎

V – крайномерно пространство, $U \subset V$ подпространство
Ако $U \neq V \Rightarrow \dim U < \dim V$.

Доказателство:

Базисът на U е ЛНЗ и във V. Тогава той може да бъде допълнен до базис.

V – ненулево крайномерно линейно пространство; $b_1, \dots, b_n$ е фиксиран базис. Тогава $\forall$ вектор от V се представя по единствен (еднозначен) начин чрез базиса – като линейна комбинация на базисните вектори.

Доказателство:

Нека $x \in V$, $\Rightarrow x = \ell(b_1, \dots, b_n)$
$\Rightarrow \exists\ \alpha_i \in F: \quad x = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots + \alpha_n b_n$
Допускаме, че $\exists\ \beta_i \in F: \ x = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \dots + \beta_n b_n$
$\Rightarrow \quad \bar{0} = (\alpha_1 - \beta_1) b_1 + \dots + (\alpha_n - \beta_n) b_n$
Но $b_1, \dots, b_n$ са ЛНЗ $\Rightarrow \alpha_i = \beta_i$ ∎

Def | координати на вектор във фиксиран базис

Наредената n-орка коефициенти на вектора $x \in V$ ($\dim V = n$; $a_1 \dots a_n$ – фиксиран базис):
$x = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n$, наричаме координати на x в базиса $b_1, \dots, b_n \longrightarrow (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

Наредената n-орка коефициенти е образ на вектора.

$\mu : V \to F^n$

$x = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n$

$\mu(x) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$

μ е биекция (взаимноеднозначно изображение)

$y = \beta_1 b_1 + \dots + \beta_n b_n$

$\mu(x+y) = (\alpha_1+\beta_1, \alpha_2+\beta_2, \dots, \alpha_n+\beta_n)$

$\mu(\lambda x) = (\lambda\alpha_1, \dots, \lambda\alpha_n)$

2. Изоморфизъм на линейни пространства

Def) изоморфни пространства

V_1 и V_2 са линейни пространства над F.

V_1 и V_2 са изоморфни ($V_1 \cong V_2$), когато

$\exists\ \varphi : V_1 \to V_2$:

1) φ е биекция $\left\{ \begin{array}{l} \varphi(x) \neq \varphi(y) \Leftrightarrow x \neq y \\ \text{за } \forall y \in V_2 \text{ и } \forall x \in V_1 \to y = \varphi(x) \end{array} \right\}$

2) $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$

и $\varphi(\lambda x) = \lambda \cdot \varphi(x)$, $\lambda \in F$

– Пример

$\dim_F V = n \Rightarrow V \cong F^n$, защото $\exists\ \varphi : V \to F^n$

$\forall$ крайномерно векторно пространство се представя еднозначно чрез координатите си

Изоморфните пространства са алгебрично еднакви (с еднакви ~~действия~~ свойства)

Две крайномерни линейни пространства на едно поле са изоморфни тогава и само тогава, когато имат еднаква размерност.

Доказателство:

$\Leftarrow$ | Нека $\dim V_1 = \dim V_2 = n$ и
$a_1, \dots, a_n$ е базис на V_1, а $b_1, \dots, b_n$ е базис на V_2

$x \in V_1 \Rightarrow x = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n$
$y = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n$.
$\varphi(x) = \varphi(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n) = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n$
$\varphi: V_1 \to V_2$
$V_1 \ni t \neq x$, $t = \beta_1 a_1 + \dots + \beta_n a_n$
$\beta_1, \dots, \beta_n \neq \alpha_1, \dots, \alpha_n$
$\varphi(t) = \beta_1 b_1 + \dots + \beta_n b_n \neq \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n$
$t \neq x \Rightarrow \varphi(t) \neq \varphi(x) \Rightarrow \varphi$ – инекция
$z \in V_2$, $z = \gamma_1 b_1 + \dots + \gamma_n b_n$
$\Rightarrow z = \varphi(\gamma_1 a_1 + \dots + \gamma_n a_n)$
$\Rightarrow \varphi$ – сюрекция $\Rightarrow \varphi$ е биекция

$\varphi(x+t) = \varphi((\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n) + (\beta_1 a_1 + \dots + \beta_n a_n)) =$
$= \varphi((\alpha_1+\beta_1) a_1 + (\alpha_2+\beta_2) a_2 + \dots + (\alpha_n+\beta_n) a_n) =$
$= (\alpha_1+\beta_1) b_1 + (\alpha_2+\beta_2) b_2 + \dots + (\alpha_n+\beta_n) b_n =$
$= \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots + \alpha_n b_n + \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \dots + \beta_n b_n =$
$= \varphi(x) + \varphi(y)$

$\varphi(\lambda x) = \varphi(\lambda(\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n)) = \varphi(\lambda\alpha_1 a_1 + \dots + \lambda\alpha_n a_n) =$
$= \lambda\alpha_1 b_1 + \dots + \lambda\alpha_n b_n = \lambda(\alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n) = \lambda \cdot \varphi(x)$

$\Rightarrow V_1 \cong V_2$

$\Rightarrow$ | $V_1 \cong V_2 \Rightarrow \exists \varphi: V_1 \to V_2$ – биекция
$a_1, \dots, a_n$ – базис на V_1
$\Rightarrow g_1 = \varphi(a_1), \dots, g_i = \varphi(a_i)$, $i = 1, \dots, n$

от φ-сюрекция

$x \in V_2 \Rightarrow b \in V_1 : x = \varphi(b) = \varphi(\beta_1 a_1 + \dots + \beta_n a_n) =$

$= \beta_1 \varphi(a_1) + \dots + \beta_n \varphi(a_n) = \beta_1 g_1 + \dots + \beta_n g_n$

$\Rightarrow x \in \ell(g_1, \dots, g_n)$

$\Rightarrow V_2 = \ell(g_1, \dots, g_n)$

Доп., че $\lambda_1 g_1 + \dots + \lambda_n g_n = \bar{o}$

$\Leftrightarrow \lambda_1 \varphi(a_1) + \dots + \lambda_n \varphi(a_n) = \bar{o}$

$\Leftrightarrow \varphi(\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n) = \bar{o} = \varphi(0a_1 + 0a_2 + \dots + 0a_n)$

$\Rightarrow \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n = 0a_1 + 0a_2 + \dots + 0a_n$

Но $a_1 \dots a_n$ са базис $\Rightarrow$ са ЛНЗ

Тогава $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$

$\Rightarrow g_1, \dots, g_n$ са ЛНЗ

$\Rightarrow g_1, \dots, g_n$ са базис на V_2

$\Rightarrow \exists$ базис на V_2 със същия брой вектори като базиса на V_1 $\Rightarrow \dim V_1 = \dim V_2$ ∎

V. СУМА И СЕЧЕНИЕ НА ПОДПРОСТРАНСТВА И РАЗМЕРНОСТ НА СУМАТА

V – линейно пространство, U_1 и U_2 са линейни подпространства на V. Тогава
$U_1 \cap U_2$ е подпространство на V, а
$U_1 \cup U_2$ не е подпространство на V.

Def / Сума на подпространства

$$U_1 + U_2 = \{ a+b \mid a \in U_1, b \in U_2 \}$$

$U_1 + U_2$ е подпространство.

1) U_1+U_2 е непразно подмножество на V.

2) Нека x и $y \in U_1+U_2$, а a_1 и $b_1 \in U_1$ и U_2.
$x = a_1 + b_1$, $y = a_2 + b_2$. Тогава

$$x+y = a_1+b_1+a_2+b_2 = \underbrace{(a_1+a_2)}_{\in U_1} + \underbrace{(b_1+b_2)}_{\in U_2}$$

$$\Rightarrow x+y \in U_1+U_2$$

3) $\lambda x = \underbrace{\lambda a_1}_{\in U_1} + \underbrace{\lambda b_1}_{\in U_2} \Rightarrow \lambda x \in U_1+U_2$

$\Rightarrow U_1+U_2$ е подпространство на V

$(U_1 \cup U_2) \subset (U_1+U_2)$

$a \in U_1 \Rightarrow a = a+\bar{0}$ $(a \in U_1, \bar{0} \in U_2)$, $\Rightarrow a = a+\bar{0} \in U_1+U_2$

$b \in U_2 \Rightarrow b = b+\bar{0}$ $(b \in U_2, \bar{0} \in U_1)$, $\Rightarrow b = b+\bar{0} \in U_1+U_2$

$$\Rightarrow (U_1 \cup U_2) \subset U_1+U_2$$

Ако W е подпространство на V : $U_1 \subset W$ и $U_2 \subset W$
$\Rightarrow (U_1+U_2) \subset W$

$U_1 \subset W$, $U_2 \subset W$; $x \in U_1+U_2 \Rightarrow x = \underset{\in U_1}{\overset{\in W}{a}} + \underset{\in U_2}{\overset{\in W}{b}}$

$\Rightarrow x = a+b \in W$

$$\Rightarrow U_1+U_2 \subset W$$

От свойствата $\Rightarrow$ сумата е най-малкото подпространство, съдържащо и двете по отделно, респективно - обединението им.

V-линейно пространство, U_1 и U_2 са крайномерни подпространства. Тогава

$$\dim(U_1+U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2).$$

Доказателство:

Нека $a_1, \dots, a_s$ е базис на $U_1 \cap U_2$, ако $U_1 \cap U_2 \neq \{0\}$.
$a_1, \dots, a_s$ са ЛНЗ от U_1 $\Rightarrow$ може да се допълнят до базис на U_1. Нека $a_1, \dots, a_s, b_1, \dots, b_k$ са базис на U_1 $\Rightarrow \dim U_1 = s+k$.
$a_1, \dots, a_s$ са ЛНЗ от U_2 $\Rightarrow$ може да се допълнят до базис на U_2. Нека $a_1, \dots, a_s, c_1, \dots, c_t$ са базис на U_2 $\Rightarrow \dim U_2 = s+t$.

Разглеждаме $a_1, \dots, a_s, b_1, \dots, b_k, c_1, \dots, c_t$

$\rightarrow p \in U_1 + U_2;\ p = x + y,\ x \in U_1,\ y \in U_2$

$$\Rightarrow p = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_s a_s + \beta_1 b_1 + \dots + \beta_k b_k +$$
$$+ \varphi_1 a_1 + \dots + \varphi_s a_s + \gamma_1 c_1 + \dots + \gamma_t c_t =$$
$$= (\alpha_1 + \varphi_1) a_1 + \dots + (\alpha_s + \varphi_s) a_s + \beta_1 b_1 + \dots + \beta_k b_k + \gamma_1 c_1 + \dots + \gamma_t c_t$$
$$\Rightarrow p = l(a_1, \dots, a_s, b_1, \dots, b_k, c_1, \dots, c_t)$$
$$\Rightarrow l(a_1, \dots, a_s, b_1, \dots, b_k, c_1, \dots, c_t) = U_1 + U_2$$

$\rightarrow$ Нека $\exists\ \alpha_1, \dots, \alpha_s, \beta_1, \dots, \beta_k, \gamma_1, \dots, \gamma_t \in F$:

$$\underbrace{\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_s a_s}_{m} + \underbrace{\beta_1 b_1 + \dots + \beta_k b_k}_{p} + \underbrace{\gamma_1 c_1 + \dots + \gamma_t c_t}_{q} = \bar{0}$$

$$m + p + q = \bar{0}$$

$m + p \in U_1$, но $m + p = -q$, а $q \in U_2$

$$\Rightarrow q \in U_1 \cap U_2$$

$\Rightarrow$ $q = \varphi_1 a_1 + \dots + \varphi_s a_s$

Имаме
$$\left.\begin{aligned} q &= \varphi_1 a_1 + \dots + \varphi_s a_s \\ q &= \gamma_1 c_1 + \dots + \gamma_t c_t \end{aligned}\right\} -$$

$$\bar{o} = \varphi_1 a_1 + \dots + \varphi_s a_s - \gamma_1 c_1 - \dots - \gamma_t c_t$$

Но $a_1, \dots, a_s, c_1, \dots, c_t$ са базис на U_2

$\Rightarrow \varphi_1 = \dots = \varphi_s = \gamma_1 = \dots = \gamma_t = 0$

$\Rightarrow \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_s a_s + \beta_1 b_1 + \dots + \beta_k b_k = \bar{o}$

Но $a_1, \dots, a_s, b_1, \dots, b_k$ са базис на U_1 $\Rightarrow$

$\alpha_1 = \dots = \alpha_s = \beta_1 = \dots = \beta_k = 0$

$\Rightarrow a_1, \dots, a_s, b_1, \dots, b_k, c_1, \dots, c_t$ са ЛНЗ

$\Rightarrow$ Тази система вектори е базис на $U_1 + U_2$

Тогава $\dim(U_1 + U_2) = s + k + t = s + k + t + s - s =$

$= \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2)$

■

Def / Директна сума на подпространства

V-линейно пространство, U_1 и U_2 са подпространства на V. V е директна сума на U_1 и U_2, ако

1) $V = U_1 + U_2$

2) $U_1 \cap U_2 = \{\bar{o}\}$

Бележим $V = U_1 \oplus U_2$

Пример: V с базис $g_1, \dots, g_k$ и $s < k$

Тогава $V = \ell(g_1, \dots, g_s) \oplus \ell(g_{s+1}, \dots, g_k)$

VI. РАНГ НА СИСТЕМА ВЕКТОРИ И РАНГ НА МАТРИЦА

Def / ранг на система вектори

V - линейно пространство; $a_1, \dots, a_k \in V$

Рангът на системата вектори е равен на s, ако $\dim l(a_1, \dots, a_k) = s$. Бележим: $r(a_1, \dots, a_k) = s$.

$r(a_1, \dots, a_k) = s \iff \exists$ s вектора $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_s}$, които са ЛНЗ и $\forall$ друг вектор от системата е тяхна линейна комбинация.

Доказателство:

Нека $U = l(a_1, \dots, a_k)$ и $\dim U = s$

Ако $s > 0 \Rightarrow \exists$ поне 1 вектор $a_{i_1} \neq \bar{0}$

Ако $s > 1 \Rightarrow \exists$ поне 1 j: $a_j \notin l(a_{i_1})$. Нека $a_{i_2} = a_j$

...

~~Ако~~ Получаваме $a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_p}$ и нека $s > p$.

$\Rightarrow l(a_{j_1}, \dots, a_{j_p}) \neq l(a_1, \dots, a_k)$

$\Rightarrow \exists m : a_m \notin l(a_{j_1}, \dots, a_{j_p})$ Нека $a_{j_{p+1}} = a_m$

$a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_{p+1}}$ е ЛНЗ

Процедурата свършва до намирането на базис на цялото пространство

...

Като директно следствие от това, че $\dim V = s$ $\iff$ $s+1$ вектора са ЛЗ, а s - ЛНЗ.

Def / максимална линейно независима подсистема (МЛНП)

Ако $r(a_1, \dots, a_k) = s \Rightarrow$

$\exists$ $a_{i_1}, \dots, a_{i_s}$ (s ЛНЗ вектора) и тази система се нарича максимална линейно независима подсистема (МЛНП).

- пример: $a_1=(1,1)$, $a_2=(1,2)$, $a_3=(2,3)$ $\Rightarrow r(a_1,a_2,a_3)=2$ и МЛНП са a_1 и a_2 или a_1 и a_3, или a_2 и a_3

Ако една система вектори има две максимални линейно независими подсистеми (МЛНП), то броят на векторите в тях е равен.

Def/ Елементарни преобразувания по редове

1) Размяна местата на 2 реда

2) Умножение на 1 ред по ненулев скалар и прибавяне към друг ред

3) Умножение на един ред по ненулев скалар

Ако към $A_{k\times n}$ се приложат последователно няколко елементарни преобразувания по ред и се получи $B_{k\times n}$, тогава:

1) r (вектор редове на A) $= r$ (вектор редове на B)

2) r (вектор стълбове на A) $= r$ (вектор стълбове на B)

Доказателство:

Нека
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ - & - & - & - \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nk} \end{pmatrix} = B$$

1) 1. $r(a_1, a_2, \dots, a_k) = r(a_2, a_1, a_3, \dots, a_k)$

$l(a_1, a_2, \dots, a_k) = l(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k})$

$a_{i_1}, \dots, a_{i_k}$ е произволна пермутация на $a_1, \dots, a_k$

2. $l(a_1, a_2, \dots, a_k)$ $\cancel{=}$ и $l(\underbrace{a_1 + \alpha a_s}_{b_1}, a_2, \dots, a_k)$

$$\left.\begin{array}{l} b_1 = l(a_1, \dots, a_k) \\ a_1 = b_1 - \alpha a_s \in l(b_1, a_2, \dots, a_k) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$l(a_1, \dots, a_k) = l(b_1, a_2, \dots, a_k)$

$\Rightarrow r(a_1, \dots, a_k) = r(b_1, a_2, \dots, a_k)$

3. $(a_1, \dots, a_k) \to (\underbrace{\alpha a_1}_{d_1}, a_2, \dots, a_k),\ \alpha \neq 0$

$$\left.\begin{array}{l} d_1 \in l(a_1, \dots, a_k) \\ a_1 = \frac{1}{\alpha} d_1 \Rightarrow a_1 \in l(d_1, a_2, \dots, a_k) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$l(a_1, \dots, a_k) = l(d_1, a_2, \dots, a_k)$$

$$\Rightarrow r(a_1, \dots, a_k) = r(d_1, a_2, \dots, a_k)$$

2) $c_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{k1} \end{pmatrix}, \dots, c_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{kn} \end{pmatrix} \quad A_{n\times k} = (c_1, \dots, c_n)$

$d_1 = \begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{k1} \end{pmatrix}, \dots, d_n = \begin{pmatrix} b_{1n} \\ \vdots \\ b_{kn} \end{pmatrix} \quad B_{n\times k} = (d_1, \dots, d_n)$

Линейна комбинация: $\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n,\ \alpha_i \in F$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{12} + \dots + \alpha_n a_{1n} \\ \dots \\ \alpha_1 a_{k1} + \alpha_2 a_{k2} + \dots + \alpha_n a_{kn} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \alpha_1 b_{11} + \alpha_2 b_{12} + \dots + \alpha_n b_{1n} \\ \dots \\ \alpha_1 b_{k1} + \alpha_2 b_{k2} + \dots + \alpha_n b_{kn} \end{pmatrix}$$

$$s < n$$

$$\alpha_1 c_1 + \dots + \alpha_s c_s = \bar{o}$$

$$\Rightarrow \alpha_1 c_1 + \dots \quad = \bar{o}$$

$$\alpha_1 d_1 + \dots + \alpha_s d_s = \bar{o}$$

Ако $c_1, \dots, c_n$ са ЛЗ/ЛНЗ $\Rightarrow d_1, \dots, d_n$ са съответно ЛЗ/ЛНЗ, а също и подмножествата им.

$a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_p}$ е МЛНП

$$\Rightarrow d_{i_1}, d_{i_2}, \dots, d_{i_p} \text{ е МЛНП}$$

$$\Rightarrow r(c_1, \dots, c_n) = r(d_1, \dots, d_n)$$

Елементарните преобразувания по редовете на 1 матрица не променят нито ранга на редовете, нито ранга на стълбовете.

$A_{k\times n}$ е ненулева матрица. Тогава има последователност от елементарни преобразования по редове и стълбове, които привеждат A до $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ r единици и останалото - нули

Доказателство:

$A \neq \bar{O} \Rightarrow \begin{pmatrix} & * & \dots \\ & \vdots & \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \overset{\alpha}{\overset{\shortparallel}{*_{11}}} & \\ & \end{pmatrix} \xrightarrow{1:\alpha} \begin{pmatrix} 1 & \dots \\ a_{21} & \\ \vdots & \\ a_{k1} & \end{pmatrix}$

ненулев елемент

$\to \begin{pmatrix} 1 & \\ 0 & \\ \vdots & \\ 0 & \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \dots 0 \\ 0 & \\ \vdots & \boxed{A_1} \\ 0 & \end{pmatrix}$

Ако $A_1 = \bar{O} \Rightarrow R$ е получена

Ако $A_1 \neq \bar{O}$ ---- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \boxed{A_2} & \end{pmatrix}$ ---- $\to R$

За произволна матрица рангът на системата вектори от редовете е равен на ранга на системата вектори от стълбовете.

Def / ранг на матрица

Ранг на матрица наричаме ранга на вектор редовете, който е равен на вектор стълбовете.

Ако $r(A_{n\times n}) = n \Rightarrow$ няма нулев ред или стълб, иначе се поражда линейно пространство с $\dim = n$. Ако има нулев вектор $\Rightarrow$ той е ЛЗ $\Rightarrow$ $n-1$ вектора ЛНЗ ↯

VII. СИСТЕМИ ЛИНЕЙНИ УРАВНЕНИЯ. ТЕОРЕМА НА РУШЕ. ХОМОГЕННИ СИСТЕМИ И ФУНДАМЕНТАЛНА СИСТЕМА ОТ РЕШЕНИЯ

$$(*)\left|\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n = b_k \end{array}\right. , \quad a_{ij}, b_s \in F$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ - & - & - & - \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} & b_k \end{array}\right)$$

Def / A – матрица на системата; $\bar{A}$ – разширена матрица на системата

Th (Руше / Кронекер – Капели)

Системата линейни уравнения има решения (е съвместима) $\iff r(A) = r(\bar{A})$.

Доказателство:

$\Rightarrow$ / $c_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{k1} \end{pmatrix}, \dots, c_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{kn} \end{pmatrix}$. Нека има решение $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

$$\Rightarrow \left|\begin{array}{l} a_{11}\alpha_1 + \dots + a_{1n}\alpha_n = b_1 \\ \dots \\ a_{k1} + \dots + a_{kn}\alpha_n = b_k \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \alpha_1 c_1 + \dots + \alpha_n c_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = b \quad \Rightarrow b \in \ell(c_1, \dots, c_n)$$

$\Rightarrow \ell(c_1, \dots, c_n) = \ell(b, c_1, \dots, c_n)$

$\Rightarrow r(c_1, \dots, c_n) = r(b, c_1, \dots, c_n)$

$\Rightarrow r(A) = r(\bar{A})$.

$\Leftarrow$ $r(A)=r(\bar{A}) \Rightarrow r(c_1,\dots,c_n)=r(b,c_1,\dots,c_n)$,
$\ell(c_1,\dots,c_n) \subseteq \ell(b,c_1,\dots,c_n)$ (от ОЛЛА)

$\Rightarrow \ell(c_1,\dots,c_n)=\ell(b,c_1,\dots,c_n)$, защото размерностите им съвпадат
$\Rightarrow b\in \ell(c_1,\dots,c_n) \Rightarrow \exists(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in F$:
$b=\alpha_1 c_1+\dots+\alpha_n c_n$
$\Rightarrow (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ е решение на системата ■

Хомогенни системи

$$(**)\begin{cases} a_{11}x_1+\dots+a_{1n}x_n=0\\ a_{21}x_1+\dots+a_{2n}x_n=0\\ \dots\\ a_{k1}x_1+\dots+a_{kn}x_n=0\end{cases}$$

Ако $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ и $\gamma=(\gamma_1,\dots,\gamma_n)$ са решение на нехомогенната система $(*)$, то $\alpha-\gamma$ е решение на хомогенната $(**)$.

Д-во: $a_{11}(\alpha_1-\gamma_1)+a_{12}(\alpha_2-\gamma_2)+\dots+a_{1n}(\alpha_n-\gamma_n)=$
$=a_{11}\alpha_1+a_{12}\alpha_2+\dots+a_{1n}\alpha_n-a_{11}\gamma_1-a_{12}\gamma_2-\dots-a_{1n}\gamma_n=$
$=b_1-b_1=0$. ■

Решенията на хомогенната система $(**)$ образуват подпространство на F^n
$\Leftrightarrow$ 1) разликата на решения е решение
2) $\lambda\beta$ е решение, където $\lambda\in F$, а β е решение.

Ако $\begin{pmatrix} b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}\neq 0$, то решенията на нехомогенната система $(*)$ НЕ е подпространство

Ако α е решение на хомогенната система (*), а β е решение на нехомогенната система (**), то $\alpha+\beta$ е решение на нехомогенната (**)

Произволно решение на нехомогенната система (*) може да се получи във вида $\alpha+\delta$, където α е фиксирано решение на нехомогенната (*), а δ – произволно решение на хомогенната (**).

ФСР

Def/ Фундаментална система от решения (ФСР)

Фундаментална система от решения за ~~не~~хомогенна система е базисът на пространството на решения на тази система

Нека U е пространството от решенията на хомогенната система ^{A}(**). Тогава:

$\dim U = n - r(A)$.

Доказателство:

Нека $r = r(A)$. Тогава има r ЛНЗ реда. Нека това са първите r реда, а останалите са ЛЗ.

$$r\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{pmatrix} = r$$

$$\left|\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = -a_{1,r+1} - \ldots - a_{1n}x_n \\ \ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rr}x_r = -a_{r,r+1} - \ldots - a_{2n}x_n \end{array}\right.$$

Системата има квадратна матрица $r\times r$ с ранг r. С елементарни преобразувания по редове тя може да се приведе до матрица с 1 по диаг. и нули.

$$\begin{cases} x_1 = c_{1,r+1}x_{r+1} + \dots + c_{1n}x_n \\ x_2 = c_{2,r+1}x_{r+1} + \dots + c_{2n}x_n \\ \dots \\ x_r = c_{r,r+1}x_{r+1} + \dots + c_{rn}x_n \end{cases}$$ ~~еквивалентна~~

$\varphi_1 = (c_{1,r+1}; c_{2,r+1}; \dots; c_{r,r+1}; 1; 0; 0; \dots; 0)$

$\varphi_2 = (c_{1,r+2}; c_{2,r+2}; \dots; c_{r,r+2}; 0; 1; 0; \dots; 0)$

$\vdots$

$\varphi_{n-r} = (c_{1n}; c_{2n}, \dots, 0, 0, \dots, 1)$ – хомогенна

$\varphi_1, \dots, \varphi_{n-r}$ са $n-r$ решения на системата.

Тези вектори са ЛНЗ.

Нека $\beta = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ е произволно решение на системата.

$\gamma = -\alpha_{r+1}\varphi_1 - \alpha_{r+2}\varphi_2 - \dots - \alpha_n\varphi_{n-r}$

γ също е решение на системата

$\gamma = (\underbrace{\dots\dots}_{r \text{ елемента}}, \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n)$

$\Rightarrow \forall$ решение е линейна комбинация на $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-r} \Rightarrow \varphi_1, \dots, \varphi_{n-r}$ образуват базис на решението.

$\Rightarrow \dim U = n - r(A)$. ■

Една нехомогенна система:

1) НЯМА решение, когато $r(A) \neq r(\bar{A})$

2) има $1!$ решение, когато $r(A) = r(\bar{A})$ и $n = r(A)$

3) има повече от решение, когато $r(A) = r(\bar{A})$ и $r(A) < n$, като има $n - r(A)$ параметъра

U е подпространство на F^n. Тогава ∃ хомогенна система, чието множество от решения е U.

Доказателство:

1) Ако $U = \{\bar{0}\}$ => $\begin{cases} x_1 = 0 \\ \vdots \\ x_n = 0 \end{cases}$ множеството от решения ~~е реш~~ на тази система е U.

2) $U \neq \{\bar{0}\}$. Тогава ∃ базис, $g_i \in F^n$

$g_i = (g_{i_1}, g_{i_2}, \dots, g_{i_n})$

$$W: \begin{cases} g_{11}x_1 + g_{12}x_2 + \dots + g_{1n}x_n = 0 \\ \dots \\ g_{k1}x_1 + g_{k2}x_2 + \dots + g_{kn}x_n = 0 \end{cases}$$

Нека $r(A) = k$, $\dim W = n-k$

$a_1, a_2, \dots, a_{n-k}$ са базис на W, т.е. ФСР на с-мата за W

Разглеждане

$$W': \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{n-k,1}x_1 + a_{n-k,2}x_2 + \dots + a_{n-k,n}x_n = 0 \end{cases}$$

g_1 е решение на W'

g_2 е решение на W' (∀a са решения на 2ро у-ие)

$\vdots$

g_k е решение на W' (∀a са решение на k-то у-ие)

=> k ЛНЗ решения

$r(a_1, \dots, a_{n-k}) = n-k$

$\dim W' = n-(n-k) = k$ => $g_1, \dots g_k$ образуват базис на решенията на W'

=> $W = W'$

=> Намерихме система със същото пространство за решение и тя е W'.

VIII. ДЕТЕРМИНАНТА – ИНВЕРСИИ НА ПЕРМУТАЦИИ, ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ТРАНСПОНИРАНА ДЕТЕРМИНАНТА

Def/ детерминанта

функция, която на всяка квадратна матрица съпоставя число. Записване det.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}, \quad A = \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\, x_1 = b_1 a_{22} - a_{12} b_2 \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\, x_2 = a_{11} b_2 - b_1 a_{21} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = \frac{\det\begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}$$

$$x_2 = \frac{a_{11} b_2 - b_1 a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = \frac{\det\begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}$$

$$\Rightarrow \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Свойства на пермутациите. Инверсии на пермутацийте

~~Def/ пермутация: ↔ подреждане на числа в определен ред~~

1) $P_n = n!$

Def/ инверсия на пермутация

Нека $i_1, \dots, i_n = P_n$.

i_k и i_s са в инверсия, ако $i_k > i_s$, но $k < s$.
Броят на всички инверсии в пермутация означаваме чрез $[i_1, \dots, i_n]$

Def/ четност на пермутация

Една пермутация е четна, ако броят на инверсиите е четно число и нечетна – в противен случай.

2) При разместване на 2 съседни елемента в една пермутация броят на инверсиите се увеличава или намалява точно с 1, т.е. пермутацията сменя четността си.

Доказателство:

Нека $\sigma = i_1, \dots, i_k, i_{k+1}, \dots, i_n$, а

$\tau = i_1, \dots, i_{k+1}, i_k, \dots, i_n$

Разглеждаме i_s и i_t; $s, t < n$; $s, t \neq k, k+1$

1сл. Ако i_s и i_t са били в инверсия в σ, то те са в инверсия и в τ (респективно са в инверсия в σ, когато и в τ)

2сл. ~~Ако~~ i_s и i_k са в инверсия в σ $\Leftrightarrow$ когато са в инверсия в τ.

3сл. Ако i_k и i_{k+1} са в инверсия в $\sigma \Rightarrow$ не са в инверсия в τ

$\Rightarrow$ броят на инверсиите нараства/намалява точно с 1.

3) Ако ~~променим~~ заменим местата на 2 числа в пермутация, тогава тя си сменя четността.

Доказателство:

$\sigma = i_1, i_2, \dots, i_k, i_{k+1}, \dots, i_{k+s}, \dots, i_n$

$\tau = i_1, i_2, \dots, i_{k+s}, i_{k+1}, \dots, i_k, \dots, i_n$

1. сменяме мястото на i_k

$\dots i_k, i_{k+1}, \dots, i_{k+s}, \dots$

$\dots i_{k+1}, i_k, \dots, i_{k+s}, \dots$

$\dots$

$\dots i_{k+1}, i_{k+2}, \dots, i_{k+s}, i_k, \dots$

До момента сме направили s смени $\Rightarrow$ s пъти пермутацията си сменя четността.

2. сменяме мястото на i_{k+s}

$\ldots, i_{k+1}, i_{k+2}, \ldots, i_{k+s}, i_k, \ldots$

$\ldots, i_{k+1}, i_{k+2}, \ldots, i_{k+s}, i_{k+s-1}, i_k, \ldots$

$\ldots$

$\ldots, i_{k+s}, i_{k+1}, \ldots, i_{k+s-1}, i_k, \ldots \Big] \; s-1$ $= \tau$

имаме $s-1$ смени $\Rightarrow$ $s-1$ пермутацията сменя четността си.

$\Rightarrow$ Общо $s+s-1 = 2s-1$ смени правим в пермутацията и тя сменя $2s-1$ пъти четността

$\Rightarrow$ τ е с различна четност от тази на σ. ■

Def / Детерминанта от n-ти ред

$n \in \mathbb{N}$ и $A_{n\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n\times n}$

Детерминантата на $A_{n\times n}$ е изразът

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1,\ldots,i_n} (-1)^{[i_1,\ldots,i_n]} \cdot a_{1i_1} a_{2i_2} \ldots a_{ni_n},$$

където $i_1, \ldots i_n$ са $\forall$ пермутации на n,

а $[i_1, \ldots, i_n]$ е четността на съответната пермутация.

Следствия от def

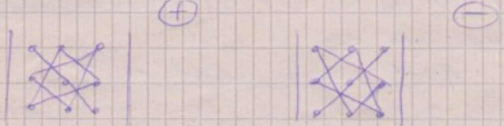
1) $n!$ събираеми за $\det A_{n\times n}$

2) $\frac{1}{2}$ от събираемите са с положителен знак, а другата половина – с отрицателен (защото броят на четните пермутации е равен на нечетните.

3) $\forall$ събираемо е произведение на n на брой елемента от матрицата, като всеки елемент е в ~~[illegible]~~ различен ред и стълб

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Може да сметне по правилото на Сарос:



Def / транспонирана матрица

Ако A е матрица и запишем редовете като стълбове, казваме, че сме транспонирали A. Новата е A^t - транспонирана.

или ако $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n\times n}$, то $A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n\times n}$

~~При транспониране det не се променя~~

На събираемото $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}a_{i_3j_3}\dots a_{i_nj_n}$ в det от ред n съответства знакът $(-1)^{[i_1,\dots,i_n]+[j_1,\dots,j_n]}$

Доказателство:

Ако разменим местата на 2 множителя пермутацията на първите индекси променя четността, също така и вторите индекси.

$(i_1 j_1)\ (i_2 j_2)\ \dots\ (i_n j_n)$

$(i_2 j_2)\ (i_1 j_1)\ \dots\ (i_n j_n)$

$i_1, i_2, \dots, i_n \to i_2, i_1, \dots, i_n$ – сменя

$j_1, j_2, \dots, j_n \to j_2, j_1, \dots, j_n$ – сменя

Но тогава четността на $(i_2 j_2)(i_1 j_1)\dots(i_n j_n)$ се

се запазва.
Тогава с краен брой ~~преобразования~~ разместания може да подредим първите индекси така, че да са в растящ ред. Това не променяме четността.
Получаваме
$a_{1j_1}, a_{2j_2}, \dots, a_{nj_n}$
Този множител участва със знак
$(-1)^{[j_1,\dots,j_n]} = (-1)^{0+[j_1,\dots,j_n]} = (-1)^{[1,\dots,n]+[j_1,\dots,j_n]} =$
$= (-1)^{[i_1,\dots,i_n]+[j_1,\dots,j_n]}$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & */0 \\ & a_{22} & \\ & \ddots & \\ 0/* & & a_{nn} \end{vmatrix}_{n\times n} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$$

$$\det = \sum_{i_1,\dots,i_n} (-1)^{[i_1,\dots,i_n]} a_{1i_1}\dots a_{ni_n}$$

В този случай $i_1,\dots,i_n = 1,2,\dots,n$ и броят на пермутациите е $0 \Rightarrow$ знакът пред този множител е „+". В следния момент във всички останали $n!-1$ множителя от сумата ще участва $0 \Rightarrow$ другите $n!-1$ суми се нулират
$\Rightarrow \det = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$ ■

$$\begin{vmatrix} 0/* & & a_{1n} \\ & a_{2,n-1} & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ a_{n1} & */0 & \end{vmatrix}_{n\times n} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\dots a_{n1}$$

Аналогично на горните разсъждения остава само множителят $a_{1n}, a_{2,n-1}\dots a_{n1}$. Остава да определим знака му. Пермутацията му е $n, n-1, \dots, 1$

n числа
- n е в инверсия с останалите $n-1$ числа $\Rightarrow$ $n-1$ смени на четността
- $n-1$ е в инверсия с останалите $n-2$ числа $\Rightarrow$ $n-2$ смени на четн.
- ...
- 2 е в инверсия с $1 \Rightarrow 1$ смяна на четността
- 1 не е в инверсия с нищо $\Rightarrow$ 0 смени на четността

сумиране смените на четността: $\underbrace{(n-1)+(n-2)+\dots+1+0}$ $=$
$= 1+2+\dots+(n-2)+(n-1) = \frac{(n-1)(n-1+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

$\Rightarrow$ знакът пред множителя е $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

При транспониране det не се променя.

<u>Доказателство:</u>

$$(-1)^{[i_1,\dots,i_n]} a_{1i_1} a_{1i_2} \dots a_{ni_n} = \det A$$

$$(-1)^{[i_1,\dots,i_n]+[1,\dots,n]} \underset{a_{1i_1}}{\underset{\parallel}{b_{i_1 1}}} \; \underset{a_{2i_2}}{\underset{\parallel}{b_{i_2 2}}} \dots \underset{a_{ni_n}}{\underset{\parallel}{b_{i_n n}}} = \det A^t$$

$\Rightarrow \det A = \det A^t$

Следствие/ Каквито свойства има за редовете, такива са и за стълбовете.

IX. ДЕТЕРМИНАНТА - ОСНОВНИ СВОЙСТВА

1) На събираемото $a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \dots a_{i_n j_n}$ съответства знакът $(-1)^{[i_1,\dots,i_n]+[j_1,\dots,j_n]}$

2) $\det A = \det A^t$

3) Ако в редовете на A има нулев ред $\Rightarrow \det A = 0$.
От дефиницията за детерминанта $\Rightarrow$ във $\forall$ сума участва като множител елемент на нулевия ред.

4) Ако елементите на един ред се умножат по k, тогава новата det е увеличена k пъти или

$$\det \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ ka_{s1} & \dots & ka_{sn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A'} = k.\det \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & \dots & a_{sn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A}$$

~~det~~

$$\det A' = \sum_{i_1,\dots,i_n} (-1)^{[i_1,\dots,i_n]} a_{1i_1} \dots (ka_{si_s}) \dots a_{ni_n} =$$

$$= k.\sum_{i_1,\dots,i_n} (-1)^{[i_1,\dots,i_n]} a_{1i_1} \dots a_{si_s} \dots a_{ni_n} = k \det A.$$

5) Ако разменим местата на 2 реда, новата det си сменя знака или

$$\det \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & \dots & a_{sn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A'} = -\det \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & \dots & a_{sn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A}$$

$$\det A' = (-1)^{[i_1,\dots,i_k,\dots,i_s,\dots,i_n]}\, a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ki_k} \dots a_{si_s} \dots a_{ni_n}$$

$$\det A = (-1)^{[i_1,\dots,i_s,\dots,i_k,\dots,i_n]}\, a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{si_s} \dots a_{ki_k} \dots a_{ni_n}$$

$\Rightarrow$ има промяна само в степента на (-1).
Но ние разменяме местата на i_k и i_s в пермутациите $\Rightarrow$ променяме четността на пермутацията, а оттам и знака на $\det A$

$\Rightarrow \det A' = -\det A$.

6) Ако в матрица има 2 равни реда, $\Rightarrow \det = 0$
Нека равните редове са k и s.
Разменяме местата им. Матрицата не се променя.
Тогава $\det \Delta = -\det \Delta \Rightarrow \det \Delta = 0$

7) Ако в матрица има 2 пропорционални реда $\Rightarrow \det = 0$.
Нека тези редове са k и s. С умножението и на двата по дадени скалари те се свеждат до матрица с 2 равни реда.
Имаме $\det \Delta = \lambda\mu . \det \Delta'$, но $\det \Delta' = 0$.

8) Ако към един ред прибавим друг ред, умножен по скалар, det не се променя

$$\det \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1}+\lambda a_{s1} & \dots & a_{kn}+\lambda a_{sn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & \dots & a_{sn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A'} = \det \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & \dots & a_{sn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A}$$

$$\det A' = \sum_{i_1,\dots,i_n} (-1)^{[i_1,\dots,i_n]} a_{1i_1} \dots (a_{ki_k} + \lambda a_{si_s}) \dots a_{ni_n} =$$

$$= \sum_{i_1\dots i_n} (-1)^{[i_1\dots i_n]} [a_{1i_1} \dots a_{ki_k} \dots a_{ni_n} + \lambda (a_{1i_1} \dots a_{si_s} \dots a_{si_s} \dots a_{ni_n})] =$$

$$= \sum_{i_1\dots i_n} (-1)^{[i_1\dots i_n]} a_{1i_1} \dots a_{ni_n} + \lambda \sum_{i_1\dots i_n} (-1)^{[i_1\dots i_n]} a_{1i_1} \dots a_{si_s} \dots a_{si_s} \dots a_{ni_n} =$$

$$= \det A + 0 = \det A$$

9)
$$\underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a'_{k1} + a''_{k1} & \dots & a'_{kn} + a''_{kn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a'_{k1} & \dots & a'_{kn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{A_1} + \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a''_{k1} & \dots & a''_{kn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{A_2}$$

$$\det A = \sum_{i_1\dots i_n} (-1)^{[i_1\dots i_n]} a_{1i_1} \dots (a'_{ki_k} + a''_{ki_k}) \dots a_{ni_n} =$$

$$= \sum_{i_1\dots i_n} (-1)^{[i_1\dots i_n]} a_{1i_1} \dots a'_{ki_k} \dots a_{ni_n} + \sum_{i_1\dots i_n} (-1)^{[i_1\dots i_n]} a_{1i_1} \dots a''_{ki_k} \dots a_{ni_n} =$$

$$= \det A_1 + \det A_2$$

10) Ако матрица има ЛЗ редове $\Rightarrow \det = 0$.

Нека $a_1, \dots, a_n$ са редовете на матрицата и нека $a_n = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_{n-1} a_{n-1}$

$$\begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_{n-1} a_{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ \alpha_1 a_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ \alpha_2 a_2 \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} a_{n-1} \end{vmatrix} = 0 + 0 + \dots + 0 = 0$$

11) $\begin{vmatrix} a_{11} & & *\!/0 \\ & a_{22} & \\ & \ddots & \\ 0/* & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$

12) $\begin{vmatrix} 0/* & & a_{1n} \\ & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & \\ a_{n1} & & *\!/0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\dots a_{n1}$

Th. det = 0 <=> редовете са ЛЗ

det ≠ 0 <=> редовете са ЛНЗ

det ≠ 0 <=> $r(M_{n\times n}) = n$ и det е от n-ти ред.

Нека A е матрица n×n с ЛНЗ редове
=> $r(A) = n$.

∃ крайна последователност от елемент. преобразования: $A \to E$
При тези преобразования det може да смени знак, да се умножи по число или да не се промени.

$$A \longrightarrow E$$
$$\det A \sim \det E = 1 \Rightarrow \det A \neq 0.$$

X. РАЗВИТИЕ НА ДЕТЕРМИНАНТА ПО РЕД И ПО СТЪЛБ, ФАЛШИВО РАЗВИТИЕ. ФОРМУЛИ НА КРАМЕР. ДЕТЕРМИНАНТА НА ВАНДЕРМОНД

1. Развиване на детерминанта по ред и по стълб

Лема/

$$\begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n-1} \end{matrix}}^{\,\Delta_{nn}} & \begin{matrix} a_{1n} \\ \dots \\ a_{n-1,n} \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & \dots & 0 \end{matrix} & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{nn}\Delta_{nn}$$

$$\det A = \sum_{i_1 \dots i_n} (-1)^{[i_1 \dots i_n]} a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n}$$

при $i_n < n \Rightarrow a_{ni_n} = 0$

$$\Rightarrow \det A = \sum_{i_1 \dots i_{n-1}} (-1)^{[i_1 \dots i_{n-1}]} a_{1i_1} \dots a_{n-1,i_{n-1}} a_{nn} =$$

$$= a_{nn} \sum_{i_1 \dots i_{n-1}} (-1)^{[i_1 \dots i_{n-1}]} a_{1i_1} \dots a_{n-1,i_{n-1}} = a_{nn}\Delta_{nn}$$

Def/ С Δ_{ij} се означава детерминантата след премахване на i-я ред и j-я стълб.

Def./ Адюнгирано количество

Адюнгираното количество на елемента $a_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$

Лема/

$$\underbrace{\begin{array}{c|c} & j \\ i & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{ij} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{array}}_{\Delta} = A_{ij}\, a_{ij}$$

$$\det A = (-1)^{n-i} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ 0 & a_{ij} & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & & & \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \\ 0 & 0 \ldots & a_{ij} & \ldots 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{n-i} (-1)^{n-j} \begin{vmatrix} a_{11} & & & a_{1j} \\ & * & & a_{2j} \\ & \Delta_{ij} & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{ij} \end{vmatrix} \overset{n-j}{=}$$

$$= (-1)^{n-i} (-1)^{n-j} a_{ij} \Delta_{ij} = (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij} = A_{ij} \cdot \Delta_{ij}$$

Th

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ - - & - - & - - \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ - - & - - & - - \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \ldots + a_{in} A_{in}$$

dem

$$\Delta = \begin{vmatrix} - - - \\ a_{i1} \cdots a_{in} \\ - - - \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} - - - \\ a_{i1}\ 0 \cdots 0 \\ - - - \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} - - - \\ 0\ a_{i2} \cdots 0 \\ - - - \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} - - - \\ 0\ 0 \cdots a_{in} \\ - - - \end{vmatrix} =$$

$$= a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \cdots + a_{in} A_{in}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & - a_{1i} - & a_{1n} \\ - - & - & - - \\ a_{i1} & - a_{ii} - & a_{in} \\ - - & - & - - \\ a_{n1} & - a_{ni} - & a_{nn} \end{vmatrix}_{i} = \begin{vmatrix} a_{11} & - - - & a_{n1} \\ - - & - - & - - \\ a_{1i} & - - & a_{ni} \\ - - & - - & - - \\ a_{1n} & - - - & a_{nn} \end{vmatrix}^{t} = a_{1i} A_{1i} + a_{2i} A_{2i} + \cdots + a_{ni} A_{ni}$$

по i стълб

2. Фалшиво развитие на детерминанта

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \dots + a_{in}A_{jn} = 0$$
за $i \neq j$

Това е все едно j-ят ред да се подмени на i-я.

$$\begin{array}{c} \\ \\ i \to \\ j \to \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow$ има 2 равни реда
$\Rightarrow \det = 0$.

3. Формули на Крамер

$$\left|\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}\right.$$

има 1 решение $\Leftrightarrow$

$\Delta = \det A \neq 0$

и $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$,

където Δ е det на матрицата на системата,

а Δ_k е det на матрицата на системата със заменен k-ти стълб със стълба $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

$$\left|\begin{array}{ll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 & \mid \cdot A_{1k} \\ \dots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n & \mid \cdot A_{nk} \end{array}\right.$$

~~Нека~~ Нека $k < n$. За x_k умножаване

i ред по A_{ik}, където i е номерът на реда

Събиране уравненията:

$$\overbrace{(a_{11}A_{1k}+\dots+a_{n1}A_{nk})}^{\text{фалшиво развитие}}x_1+\dots+(\overbrace{a_{1k}A_{1k}+\dots+a_{nk}A_{nk}}^{\det A})x_k+\dots+$$

$$+(\underbrace{a_{1n}A_{1k}+\dots+a_{nn}A_{nk}}_{\text{фалшиво развитие по стълб}})x_n=\underbrace{b_1A_{1k}+b_2A_{2k}+\dots+b_nA_{nk}}_{\text{развитие на дет. по k-ти стълб}}$$

$$\Leftrightarrow 0+\dots+\Delta.x_k+\dots+0=\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n}\\ \vdots & & & & \vdots\\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}=\Delta_k$$

k ред

$$\Rightarrow x_k=\frac{\Delta_k}{\Delta},\quad \Delta\neq 0$$

4. Детерминанта на Вандермонд

Def/ Детерминанта на Вандермонд

$$W(x_1,\dots,x_n)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1\\ x_1 & x_2 & \dots & x_n\\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{n\geq i>j\geq 1}(x_i-x_j)$$

Занулявяване последния стълб, като от i вадим x_n пъти $i-1$ ред, докато стигнем до втори ред, от който ще извадим x_n пъти 1 ред.

$$\Rightarrow W(x_1,\dots,x_n)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1\\ x_1-x_n & x_2-x_n & \dots & x_{n-1}-x_n & 0\\ x_1(x_1-x_n) & x_2(x_2-x_n) & \dots & x_{n-1}(x_{n-1}-x_n) & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ x_1^{n-3}(x_1-x_n) & x_2^{n-3}(x_2-x_n) & \dots & x_{n-1}^{n-3}(x_{n-1}-x_n) & 0\\ x_1^{n-2}(x_1-x_n) & x_2^{n-2}(x_2-x_n) & \dots & x_{n-1}^{n-2}(x_{n-1}-x_n) & 0\end{vmatrix}=$$

$$=1(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} x_1-x_n & x_2-x_2 & \dots & x_{n-1}-x_n\\ x_1(x_1-x_n) & x_2(x_2-x_n) & \dots & x_{n-1}(x_{n-1}-x_n)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ x_1^{n-2}(x_1-x_n) & x_2^{n-2}(x_2-x_n) & \dots & x_{n-1}^{n-2}(x_{n-1}-x_n)\end{vmatrix}$$

Забелязваме, че i-ти стълб е умножен по числото $x_i - x_n$ за $\forall i \in \{1, \dots, n-1\}$ => множителите могат да бъдат изнесени от съответните стълбове

$$\Rightarrow W(x_1,\dots,x_n) = (-1)^{n+1}\overbrace{(x_1-x_n)(x_2-x_n)\dots(x_{n-1}-x_n)}^{n-1}\,W(x_1,\dots,x_{n-1}) =$$

$$= (-1)^{n+1+n-1}(x_n-x_1)(x_n-x_2)\dots(x_n-x_{n-1})\,W(x_1,\dots,x_{n-1}) =$$

$$= \left(\prod_{i=1}^{n-1}(x_n-x_i)\right) W(x_1,\dots,x_{n-1})$$

Хипотеза: $W(x_1,\dots,x_n) = \prod\limits_{n\ge i>j\ge 1}(x_i-x_j)$

Индукция: База: $n = 2$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1$$

Нека е ок за k. Доказваме за $k+1$:

$$W(x_1,\dots,x_{k+1}) = \left(\prod_{i=1}^{k}(x_n-x_i)\right) W(x_1,\dots,x_k) = \prod_{k+1\ge i>j\ge 1}(x_i-x_j)$$

■

XI. ДЕЙСТВИЯ С МАТРИЦИ. ОСНОВНИ СВОЙСТВА НА ПРОИЗВЕДЕНИЕТО НА МАТРИЦИ

Def/ Умножение на матрици

Нека $A = (a_{ij})_{n\times k}$, а $B = (b_{ij})_{k\times s}$. Под произведение на A и B разбираме матрицата $C = (c_{ij})_{n\times s}$, като

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ik}b_{kj} = \sum_{t=1}^{k} a_{it}b_{tj}$$

Умножението на матрици не е комутативно, т.е. $AB \neq BA$.

Нека $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0+1.0 & 0.0+1.1 \\ 0.0+0.0 & 0.0+0.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0+0.0 & 0.1+0.0 \\ 0.0+1.0 & 0.1+1.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \overline{0}$$

Възможно е произведението на 2 ненулеви матрици да е $\overline{0}$.

$$(\alpha A)B = \alpha(AB)$$
$$A(\alpha B) = \alpha(AB)$$

Ако $A_{n\times k}$, $T_{n\times k}$ и $B_{k\times n}$ са матрици

$$\Rightarrow (A+T)B = AB + TB$$

$$d_{ij} = (a_{i1}+t_{i1})b_{1j} + (a_{i2}+t_{i2})b_{2j} + \dots + (a_{ik}+t_{ik})b_{kj} =$$

$$= (a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ik}b_{kj}) + (t_{i1}b_{1j} + \dots + t_{ik}b_{kj}) = AB + TB$$

Нека $A_{n\times k}$, $B_{k\times s}$ и $C_{s\times t}$ са матрици. Тогава
$$(AB)C = A(BC)$$

$$A.B = D_{n\times s} \Rightarrow d_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \dots + a_{ik}b_{kj} = \sum_{u_1=1}^{k} a_{iu_1} b_{u_1 j}$$

$$(AB)C = DC = T_{n\times t} \Rightarrow t_{ij} = d_{i1}c_{1j} + \dots + d_{is}c_{sj} = \sum_{u_2=1}^{s} d_{iu_2} c_{u_2 j} =$$
$$= \sum_{u_2=1}^{s}\left(\sum_{u_1=1}^{k} a_{iu_1} b_{u_1 u_2}\right) c_{u_2 j} = \sum_{u_2=1}^{s}\sum_{u_1=1}^{k} a_{iu_1} b_{u_1 u_2} c_{u_2 j}$$

$$B.C = L_{k\times t} \Rightarrow l_{ij} = b_{i1}c_{1j} + \dots + b_{is}c_{sj} = \sum_{u_3=1}^{s} b_{iu_3} c_{u_3 j}$$
$$A(BC) = AL = M_{n\times t} \Rightarrow m_{ij} = a_{i1}l_{1j} + \dots + a_{ik}l_{kj} =$$
$$= \sum_{u_4=1}^{k} \left(a_{iu_4} l_{u_4 j}\right) = \sum_{u_4=1}^{k} a_{iu_4}\left(\sum_{u_3=1}^{s} b_{u_4 u_3} c_{u_3 j}\right) =$$
$$= \sum_{u_4=1}^{k}\sum_{u_3=1}^{s} a_{iu_4} b_{u_4 u_3} c_{u_3 j} = \sum_{\substack{u_4=1\dots k\\ u_3=1\dots s}} a_{iu_4} b_{u_4 u_3} c_{u_3 j} =$$
$$= \sum_{u_2=1}^{s}\sum_{u_1=1}^{k} a_{iu_1} b_{u_1 u_2} c_{u_2 j} \Rightarrow (AB)C = A(BC) \quad \blacksquare$$

Сл.) Може да разместваме скобите в $(\dots((A_1.A_2)A_3)\dots)A_n$

Def / A^k

$$A^k = A.A^{k-1} = A^2.A^{k-2} = \cdots$$

$$A^k.A^m = A^{k+m} \quad \text{но} \quad (AB)^k \neq A^k B^k$$
$$(A^k)^s = A^{ks}$$

$$AE = A$$
$$EA = A$$

$(AB)^t = B^t A^t$

Нека $C = AB$, $C^t = D$, $\overset{A_{m\times k}}{}$ $B^t = L$, $\overset{B_{k\times n}}{}$ $A^t = M$

$c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + \dots + a_{ik} b_{kj}$

$\downarrow t$

$d_{ij} = b_{1j} a_{i1} + \dots + b_{kj} a_{ik} =$
$= l_{j1} m_{1i} + \dots + l_{jk} m_{kj}$

$\Rightarrow (AB)^t = B^t A^t$

XII. ПРОИЗВЕДЕНИЕ НА ДЕТЕРМИНАНТА. ОБРАТИМА МАТРИЦА И НАМИРАНЕ НА ОБРАТНА МАТРИЦА

1. Произведение на детерминанти

Лема

$$\det A_{(k+s)\times(k+s)} = \begin{vmatrix} C_{k\times k} & * \\ 0 & D_{s\times s} \end{vmatrix} = \det C \cdot \det D$$

Доказателство: Индукция по k.

База: $k=1$

$$\begin{vmatrix} c_{11} & & * & \\ 0 & d_{11} & \dots & d_{1s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & d_{s1} & \dots & d_{ss} \end{vmatrix} = c_{11}(-1)^{1+1}\Delta_{11} = c_{11}\det D = \det C \cdot \det D$$

Нека е вярно за $\forall$ матрици с размерност $k-1$.

Проверяване за k:

(Развиване по 1 стълб)

$$\begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1k} & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & & * & \\ c_{k1} & \dots & c_{kk} & & & \\ 0 & \dots & 0 & d_{11} & \dots & d_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & d_{s1} & \dots & d_{ss} \end{vmatrix} = c_{11}(-1)^{1+1}\tilde{\Delta}_{11} + c_{21}(-1)^{2+1}\tilde{\Delta}_{21} + \dots + c_{k1}(-1)^{k+1}\tilde{\Delta}_{k1} =$$

$$= c_{11}(-1)^2\Delta_{11}^{(c)}\det D + c_{21}(-1)^3\Delta_{21}^{(c)}\det D + \dots + c_{k1}(-1)^{k+1}\Delta_{k1}^{(c)}\det D =$$

$$= \left(c_{11}(-1)^2\Delta_{11}^{(c)} + \dots + c_{k1}(-1)^{k+1}\Delta_{k1}^{(c)}\right)\det D = \det C \cdot \det D$$

∎

Th $\det(AB) = \det A \cdot \det B$

$$\det D = \begin{vmatrix} A_{n\times n} & 0 \\ -E_{n\times n} & B_{n\times n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & & & & \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & & & & \\ -1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

$1 \cdot a_{11}$ ~~[illegible]~~

$1 \cdot a_{12}$

$\vdots$

$1 \cdot a_{1n}$

+ + +

Умножаваме последните $n+1$ реда с a_{11}, $n+2$ — с a_{12} и т.н. до $n+n$ ред с a_{1n}, след което прибавяме тези редове към първия. det не се променя, но 1 ред на северозападната матрица се занулява.

$$\left|\begin{array}{cccc:cccc}
0 & 0 & \dots & 0 & a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\dots+a_{1n}b_{n1} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+\dots+a_{1n}b_{n2} & \dots & a_{1n}b_{n1}+\dots \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\hdashline
 & -E & & & & B & & \\
\end{array}\right|$$

За да нулираме 2 ред умножаваме от $n+1$ до $n+n$-ти ред с $a_{21}, a_{22}, \dots a_{2n}$ ~~правилно~~, след което събираме тези редове с 2.

Въобще: За да занулим i ред от северозападната подматрица умножаваме от $n+1$ до n ред съответно с $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$, след което събираме i ред с умножените.

След тези действия det не се променя. Получаваме:

$$\left|\begin{array}{c:cccc}
 & a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\dots+a_{1n}b_{n1} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+\dots+a_{1n}b_{n2} & \dots & a_{1n}b_{n1}+\dots+a_{nn}b_{nn} \\
0 & a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+\dots+a_{2n}b_{n1} & \dots & & \\
 & - & - & - & - \\
\hdashline
-E & & B & & \\
\end{array}\right|$$

За В североизточна подматрица получихме матрицата $C = AB$. Получаваме $\Rightarrow$

$$\det D = \begin{vmatrix} A & 0 \\ -E & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & AB \\ -E & B \end{vmatrix} = (-1)^n \begin{vmatrix} -E & B \\ 0 & AB \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^n \det(-E)\det(AB) = (-1)^n(-1)^n \det(AB) = \det(AB).$$

Но $\det D = \begin{vmatrix} A & 0 \\ -E & B \end{vmatrix} = (-1)^n \begin{vmatrix} 0 & A \\ B & -E \end{vmatrix} =$

$$= (-1)^n(-1)^n \begin{vmatrix} B & -E \\ 0 & A \end{vmatrix} = \det A . \det B$$

$$\Rightarrow \det(AB) = \det A . \det B$$

2. Обратима матрица и намиране на обратната матрица

Def/ Обратима матрица (квадратна)

Матрицата $A_{n\times n}$ е обратима, ако $\exists\ B_{n\times n}$: $AB = BA = E$

Def/ Неособена матрица

Матрица с ненулева det.

- свойства

1) E е обратима $\quad E.E = E$

2) A е обратима $\Rightarrow \exists\, 1!\ B$: $AB = E = BE$

Допускане, че $\exists\ B_1$ и B_2: $B_1A = AB_1 = E$ и $B_2A = AB_2 = E$

$$B_1 = B_1E = B_1(AB_2) = (B_1A)B_2 = EB_2 = B_2$$

$$\Rightarrow \exists\, 1!\ B : B = A^{-1} \text{ и } AB = BA = E$$

3) A^{-1} е обратима $(A^{-1})^{-1} = A$; $AA^{-1} = A^{-1}A = E$

4) A, B - обратими
$\Rightarrow AB$ е обратима $\Rightarrow (AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$

$AB \cdot B^{-1} = A$
$AB \cdot B^{-1} \cdot A^{-1} = A \cdot EA^{-1} = E$
$B^{-1}A^{-1} \cdot AB = E$ ■

Th] Нека $A \in M_{n\times n}(F)$. A е обратима $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

и $$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$ - ад. кол. на 1 стълб

Доказателство: ад.к. на 1 ред
A - обратима $\Rightarrow AA^{-1} = E \Rightarrow \det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1}) = 1$,
$\det A \neq 0 \Rightarrow \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$. Нека $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\cdot B$

$$\underbrace{\frac{1}{\det A}\cdot A\cdot B}_{A^{-1}\Leftarrow A\cdot A^{-1}} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{1i}A_{1i} & \sum_{i=1}^{n} a_{1i}A_{2i} & \dots & \sum_{i=1}^{n} a_{1i}A_{ni} \\ \sum_{i=1}^{n} a_{2i}A_{1i} & \sum_{i=1}^{n} a_{2i}A_{2i} & \dots & \sum_{i=1}^{n} a_{2i}A_{ni} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} a_{ni}A_{1i} & \sum_{i=1}^{n} a_{ni}A_{2i} & \dots & \sum_{i=1}^{n} a_{ni}A_{ni} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} \det A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det A & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \det A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = E$$

Освен по диагонала, развитията на det са фалшиви

$$\overbrace{\frac{1}{\det A}\cdot B}^{A^{-1} \Leftarrow A^{-1}\cdot A}\cdot A = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{i1}A_{i1} & \sum_{i=1}^{n} a_{i2}A_{i1} & \dots & \sum_{i=1}^{n} a_{in}A_{i1} \\ \sum_{i=1}^{n} a_{i1}A_{i2} & \sum_{i=1}^{n} a_{i2}A_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^{n} a_{in}A_{i2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} a_{i1}A_{in} & \sum_{i=1}^{n} a_{i2}A_{in} & \dots & \sum_{i=1}^{n} a_{in}A_{in} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} \det A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det A & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \det A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = E$$

по диагонал – развиване по i-ти стълб

Th] Всяко елементарно преобразование по редовете на матрица може да се реализира чрез умножаване отляво по подходяща матрица на преобразованието.

- <u>Умножение на ред по скалар</u>

$$M = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ -k \\ \\ \end{array} \end{array}$$

$\det M = \lambda$

M е единичната матрица, като вместо 1 има λ на a_{kk}.
$\Rightarrow$ k-ти ред е умножен по λ.

- <u>Разменяне на k-ти и i-ти ред</u>

$$M = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ & & & 0 & & 1 & & \\ & & & 1 & & 0 & & \\ 0 & 0 & \dots & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ i \\ k \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{cccccccc} \quad & & & i & & k & & \end{array} & \end{array}$$

- Умножение на k-ти ред по λ и прибавяне към i-ти ред

$$M = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots 1 & \cdots \lambda & \cdots & 0 \\ & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & & \cdots & 1 \end{pmatrix} \\ \quad\quad\quad k \end{array} \rightarrow i$$

$\det = 1$

Ако A е неособена матрица, тя може да се приведе до E само с елементарни преобразования по редове. Ако същите преобразования в същия ред се приложат към E, тогава ще се получи обратната на изходната матрица A.

A - неособена $\exists$ елем. преобр. по редове:

$$A \rightarrow E \quad \text{или} \quad B_t(\cdots(B_2(\underset{\substack{\text{матрица на} \\ \text{1 преобраз.}}}{B_1} A))) = E$$

$$\underbrace{(B_t \cdots B_2 B_1)}_{B} A = E$$

$$BA = E \quad | \cdot A^{-1}$$

$$BAA^{-1} = EA^{-1}$$

$$\Rightarrow B = A^{-1}$$

$$BE = B = B_t(\cdots B_2(B_1 E)\cdots) = A^{-1}$$

Метод:

$$(A|E) \xrightarrow{\text{елем. преобр.}} (E|A^{-1})$$

Матр. у-ие: $AX = B$, метод

$$(A|B) \longrightarrow (E|X)$$

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

$$EX = A^{-1}B$$

$$X = A^{-1}B$$

$$XA = B$$

$$XAA^{-1} = BA^{-1}$$

$$X = BA^{-1}$$

$$(A^t|B^t) \rightarrow (E|X^t)$$

61

XIII. ДЕЛИМОСТ ПРИ ЦЕЛИТЕ ЧИСЛА, НОД, ПРОСТИ ЧИСЛА И ОСНОВНА ТЕОРЕМА НА АРИТМЕТИКАТА. ФУНКЦИЯ НА ОЙЛЕР

1. Делимост при целите числа

Def / a дели b

a / b, ако $\exists\, c \in \mathbb{Z} : b = ac$

Свойства:

1) $a / 0$
2) a / a за $\forall a \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$
3) a / b и $b / c \Rightarrow a / c$
4) a / b и $b / a \Rightarrow b = \pm a$
5) $a / b \Rightarrow a / kb$ за $\forall k \in \mathbb{Z}$
6) a / b_1 и $a / b_2 \Rightarrow a / k_1 b_1 + k_2 b_2$ за $\forall k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$
7) $a / b \Rightarrow \pm a / \pm b$
8) $a / b \Leftrightarrow sa / sb$ за $\forall s \in \mathbb{Z}$
9) $a / b \Rightarrow |a| \leq |b|$

2. Теорема за деление с частно и остатък

Нека $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$

Тогава $\exists\, 1!\ q$ и $r \in \mathbb{Z} : b = aq + r$, като $0 \leq r < |a|$

Доказателство:

1) Нека $M = \{ b - at \mid t \in \mathbb{Z} \}$

Нека r е минималното неотрицателно число в M.

Ако $r \geq |a| \Rightarrow r - |a| \geq 0$

Но $r - |a| = b - aq \pm a$, $\Rightarrow r - |a| \in M$

↯ с това, че r е минимално.

$\Rightarrow 0 \leq r < |a|$

$b = aq + r$

1'.) Нека $aq_1+r_1 = aq_2+r_2 = b$; $r_1, r_2 < |a|$

$$-\begin{array}{l} b = aq_1+r_1 \\ b = aq_2+r_2 \end{array}$$

$a(q_1-q_2) = r_2-r_1$

$\Rightarrow a / r_2-r_1$, но $|r_2-r_1| \le |a|$

$\Rightarrow r_2-r_1=0$

$\Rightarrow r_2=r_1$ и $q_1=q_2$

Сл. (Представяне на числата в бройна система)

Нека $a\in\mathbb{N}, q\in\mathbb{N}, q>1$

$\Rightarrow \exists! n\in\mathbb{N} : a = a_n q^n + a_{n-1}q^{n-1} + \dots + a_1 q + a_0$

и $0\le a_i < q$

Записване $a = \overline{a_n a_{n-1}\dots a_0}_{(q)}$

Доказателство:

Индукция по **a**. База: $a=1, n=0, a_0=1$

Нека е ОИ за всяко число по-малко от a.

Доказване за a:

$a = tq+r$, $r \le r < q$, $t<a$

$t / a-r$

От индукт. предположение $\Rightarrow$

$t = a_s q^s + \dots + a_1 q + a_0$, $0\le a_i<q$

$\Rightarrow a = a_s q^{s+1} + \dots a_1 q^2 + a_0 q + r$

А от Т. на аритм. $\Rightarrow$ ч е единствено

3. НОД

Def / НОД

$a,b\in\mathbb{Z}$; $d = НОД(a,b)$ или само $d=(a,b)$, ако

1) d/a и d/b

2) d е най-голямото число с това свойство

или ако d_1/a и $d_1/b \Rightarrow d_1/d$.

Ако $a, b \in \mathbb{Z}$ и поне едното от тях $\neq 0$
$\Rightarrow \exists$ НОД(a,b) и $\exists\ u, v \in \mathbb{Z}$:
$d = ua + vb$ (тъждество на Безу)

Доказателство:

Нека $M = \{xa + yb \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$
Нека d е минималното положително число от M ($\neq 0$)
$d = x_0 a + y_0 b$
$t = xa + yb \in M$
Но $t = qd + r$, $0 \leq r < d$ съгласно Тн на аритм.
$\Rightarrow xa + yb = q(x_0 a + y_0 b) + r$
$r = (x - qx_0)a + (y - qy_0)b \Rightarrow q \in M$
Но $0 \leq r < d$, а d е $\min$
$\Rightarrow r = 0 \Rightarrow d / t$ за $\forall t$ и d е $\min$
Нека $a, b \in M$ (с x и $y = 1$) $\Rightarrow d / a$ и d / b
Ако d_1 / a и $d_1 / b \Rightarrow d_1 / x_0 a + y_0 b$, т.е. d_1 / d
$\Rightarrow d$ е този общ делител, който дели $\forall$ друг
$\Rightarrow d = (a, b)$ ■

Алгоритъм на Евклид

Нека $a = bq_1 + r_1$, $0 \leq r_1 < |b|$ и нека $d = (a, b)$
Тогава $d = (b, r_1)$

Нека $t = (b, r_1)$ а $d = (a, b)$
$\Rightarrow d / a - bq_1$ и d / b
d / r_1 и $d / b \Rightarrow d / t$
t / b и $t / r_1 \Rightarrow t / a \Rightarrow t / d$
$\Rightarrow t = d$ ■

Алгор.)
1) $a = bq_1 + r_1$, $0 \leq r_1 < |b|$
Ако $r_1 = 0 \Rightarrow$ НОД$(a,b) = b = (b, 0)$
Ако $r_1 \neq 0 \Rightarrow b = r_1 q_2 + r_2$, $0 \leq r_2 < r_1$
2) $b = r_1 q_2 + r_2$, $0 \leq r_2 < r_1$

Ако $r_2 = 0 \Rightarrow (a, b) = r_1 = (r_1, 0)$

⋮

НОД) $r_k = r_{k+1} q_{k+2} + r_{k+2}$

$r_{k+1} = r_{k+2} q_{k+3} + \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{r_{k+3}}$

$\Rightarrow$ НОД $(a, b) = (b, r_1) = (r_1, r_2) = \ldots = \underline{\underline{r_{k+2}}}$

последният ненулев остатък

<u>Коеф. от тъжд. на Безу</u>/

$r_i = u_i a + v_i b$, $r_1 = 1 . a - q_1 b$

. . .

$\left| \begin{array}{l} r_k = u_k a + v_k b \\ r_{k+1} = u_{k+1} a + v_{k+1} b \end{array} \right.$

$\Rightarrow r_{k+2} = r_k - r_{k+1} q_{k+2} = u_k a + v_k b - (u_{k+1} a + v_{k+1} b) =$
$= (u_k - u_{k+1} q_{k+2}) a + (v_k - v_{k+1} q_{k+2}) b = u_{k+2} a + v_{k+2} b$

4. Взаимнопрости числа. Прости числа

<u>Def/ взаимнопрости числа</u>

Ако $(a, b) = 1 \Rightarrow$ казваме, че a и b са взаимно прости.

Ако a / bc и $(a, b) = 1 \Rightarrow a / c$

От тъжд. на Безу $\Rightarrow 1 = ua + vb \;|\; . c$

$\Rightarrow c = uac + vbc$

a / uac и a / vbc - по усл. $\Rightarrow a / c$ ■

Ако a / c и b / c и $(a, b) = 1 \Rightarrow ab / c$

$a / c \Rightarrow c = aq$; $b / c \Rightarrow b / aq$. ~~[illegible]~~

Но b / q [$(a, b) = 1$ и от $a \Rightarrow$] . $q = bs$

$\Rightarrow c = abs \Rightarrow ab / c$ ■

Def) просто число

$p \in \mathbb{Z}$ е просто число, ако
$p \neq \pm 1$ и се дели само на ± 1 и $\pm p$.

– Свойства на простите числа

1) $\forall\ n > 1$ се дели на просто число
~~еднозначно~~ => основна Т-а аритм.

2) Има ∞ много прости числа
Допускаме, че са краен брой: $p_1, p_2, \dots, p_s$
Но тогава числото $a = 1 + p_1 p_2 \dots p_s$ не се дели на нито едно от числата $p_1, p_2, \dots, p_s$ => a е просто ↯

3) Могат да се определят чрез решето на Ератостен
~~1~~ 2 3 ~~4~~ 5 ~~6~~ 7 ~~8~~ ~~9~~ ~~10~~ 11 ~~12~~ 13 ~~14~~ ~~15~~ ~~16~~ 17 ~~18~~ 19
При проверка дали число n е просто е достатъчно да проверим дали се дели на числата от 1 до $[\sqrt{n}]$.

4) p – просто, $n \in \mathbb{N}$
$$(p, n) = \begin{cases} 1, & p \nmid n \\ p, & p \mid n \end{cases}$$

5. Основна теорема на аритметиката

$n \in \mathbb{N}, n > 1$. Тогава $n = p_1 p_2 \dots p_m$, p_i – прости и представянето е единствено с точност до реда на множителите

Доказателство:

$\boxed{7}$ Индукция по n. За $n = 2$ е изпълнено.
Нека е вярно за $\forall$ число $< n$.
Разглеждаме n.
1сл. n – просто => ок
2сл. n – съставно => $n = ab$, като $a, b < n$ и $a, b > 1$
Но от индукт. предп. => $a = p_1 \dots p_r$ и $b = q_1 \dots q_t$
=> $n = ab = p_1 \dots p_r q_1 \dots q_t$

[!] Нека $p_1 \cdots p_s = n = q_1 \cdots q_r$, p_i и q_j са прости

$q_1 / p_1 \cdots p_s$, т.е. $p_1 / n \Rightarrow p_1 / q_1 \cdots q_r$

Но $(p_1, q_i) = 1 \Rightarrow \exists j : (p_1, q_i) \neq 1$, т.е. $p_1 = q_j$

Преподреждане $q_j = q_1$

$$\cancel{p_1} \cdots p_s = q_1 \cdots q_r = \cancel{p_1} \cdots q_r$$

$$\Rightarrow p_2 \cdots p_s = q_2 \cdots q_r$$

Продължавайки по същия начин, получаваме

$s = r$ ($p_2 = q_2, \dots, p_s = q_s$ - евент. преномерирана) ■

Def / каноничен вид на число

$$n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_t^{k_t}, \quad p_i \neq p_j, \ i \neq j, \ 1 \le k_i$$

Нека $a = p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}$ и $b = p_1^{s_1} \cdots p_r^{s_r}$

$\Rightarrow (a, b) = p_1^{m_1} \cdots p_r^{m_r}$, $m_i = \min\{k_i, s_i\}$

6. Функция на Ойлер

$$\varphi(n) = \left| \{ k \mid k \in \mathbb{N}, k < n, (k, n) = 1 \} \right|$$

Нека p е просто число. Тогава

1) $\varphi(p) = p - 1$

2) $\varphi(p^n) = p^n - p^{n-1}$

→ Махаме $p, 2p, 3p, \dots, p^{n-1}, p^n$ за $\varphi(p^n)$

Нека $(a, b) = 1$. Тогава $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$

Доказателство:

Записваме числата $1, 2, \dots, ab$ в матрица:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & a \\ a+1 & a+2 & \cdots & 2a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (b-1)a+1 & (b-1)a+2 & \cdots & ba \end{pmatrix}_{a\times b}$$

$\varphi(a)$ числа са взаимно прости с a. (в първи ред)
Ако първото число в стълб е взаимно просто с a, то $\forall$ от числата в стълба също са взаимно прости с a:

$$\begin{pmatrix} r \\ a+r \\ 2a+r \\ \vdots \\ (b-1)a+r \end{pmatrix}$$

Възможните остатъци при деление на b в стълб:

$$\begin{pmatrix} bq_1+r_1 \\ bq_2+r_2 \\ \vdots \\ bq_b+r_b \end{pmatrix} \qquad 0\le r_i < b \quad \forall i$$

Тогава при $i\neq j$ имаме

$$r_i - r_j = (a(i-1) - bq_i) - (a(j-1) - bq_j)$$

Ако $\exists\, i,j : i\neq j$ и $r_i = r_j$

$$\Rightarrow a(i-j) = b(q_i - q_j)$$

$$\Rightarrow a \mid b(q_i-q_j)$$

$$b \mid a(i-j)$$

Но $(a,b)=1 \Rightarrow b \mid i-j$, но $i-j<b$, защото индексите са до b

$$\Rightarrow i-j=0 \Rightarrow i=j \ \text{↯}$$

$\Rightarrow \forall$ остатъци при деление на b в първи стълб са различни.

$\{r_1, \dots, r_b\} = \{0, 1, \dots, b-1\}$

$\Rightarrow$ Във всеки стълб има точно $\varphi(b)$ числа, които са взаимно прости с b

$\Rightarrow$ Общият брой на числата, взаимнопрости с ab

е $\varphi(a)\cdot\varphi(b) = \varphi(ab)$ ■

$\varphi(n) = n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{p_s}\right)$, ако $n = p_1^{k_1}\dots p_s^{k_s}$

Доказателство: $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_s^{k_s}$, $p_i \neq p_j$ за $i \neq j$

$$\begin{aligned}\varphi(n) &= \varphi(p_1^{k_1})\varphi(p_2^{k_2})\dots\varphi(p_s^{k_s}) = \\ &= (p_1^{k_1} - p_1^{k_1-1})(p_2^{k_2} - p_2^{k_2-1})\dots(p_s^{k_s} - p_s^{k_s-1}) = \\ &= p_1^{k_1-1} p_2^{k_2-1}\dots p_s^{k_s-1}(p_1-1)(p_2-1)\dots(p_s-1) = \\ &= p_1^{k_1} p_2^{k_2}\dots p_s^{k_s}\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{p_s}\right) = n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\dots\left(1-\frac{1}{p_s}\right)\end{aligned}$$ ■

69

XIV СРАВНЕНИЯ ПРИ ЦЕЛИТЕ ЧИСЛА. ОСТАТЪЦИ ПО МОДУЛ n. ПРЪСТЕНЪТ ОТ КЛАСОВЕТЕ ОСТАТЪЦИ $\mathbb{Z}_n$

1. Сравнения при целите числа

Def | $a \equiv b \pmod{n} \Leftrightarrow n / a-b$

свойства

1) $a \equiv a \pmod{n}$
2) $a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow b \equiv a \pmod{n}$
3) $a \equiv b \pmod{n}$ и $b \equiv c \pmod{n} \Rightarrow a \equiv c \pmod{n}$
4) $\left.\begin{array}{l} a_1 \equiv b_1 \pmod{n} \\ a_2 \equiv b_2 \pmod{n} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a_1 \pm a_2 \equiv b_1 \pm b_2 \pmod{n} \\ a_1 a_2 \equiv b_1 b_2 \pmod{n} \end{array}$
5) ако $am \equiv bm \pmod{n}$ и $(m,n)=1 \Rightarrow a \equiv b \pmod{n}$

2. Остатъци по модул n

Множеството на целите числа $\mathbb{Z}$ се разбива на непресичащи се класове от сравними помежду си числа по модул n - елементите на пръстена $\mathbb{Z}_n$

$\bar{0} = \{kn \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$\bar{1} = \{1+kn \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$\bar{2} = \{2+kn \mid k \in \mathbb{Z}\}$

...

$\overline{n-1} = \{n-1+kn \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$$\mathbb{Z} = \bar{0} \cup \bar{1} \cup \bar{2} \cup \ldots \cup \overline{n-1}$$

3. Пръстенът от класовете остатъци $\mathbb{Z}_n$

$\bar{k} = \{k+ns \mid s \in \mathbb{Z}\}$

$\mathbb{Z}_n = \{\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{n-1}\}$ - класове

$\bar{a} + \bar{b} = \overline{a+b}$

$\bar{a}\,\bar{b} = \overline{ab}$

$\bar{0} \neq \bar{a} \in \mathbb{Z}_n$. Тогава

1) $\bar{a}$ е обратим $\Leftrightarrow (a, n) = 1$

2) $\bar{a}$ е делител на $\bar{0}$ $\Leftrightarrow (a, n) > 1$

Доказателство:

1) $d = 1 = au + nv$ (от тъжд. на Безу)

$au - 1 \equiv 0 \pmod{n}$

$au \equiv 1 \pmod{n}$

$\bar{u}\bar{a} = \bar{a}\bar{u} = \bar{1} \Rightarrow \bar{u} = \bar{a}^{-1}$

2) $d > 1$ $\quad a = a_1 d;\ n = n_1 d$, $\quad 0 < n_1 < n$

$\bar{n}_1 \neq \bar{0}$, $\bar{a}\bar{n}_1 = \overline{a_1 d} \cdot \bar{n}_1 \equiv \bar{a}_1 \bar{d}\, \bar{n}_1 = \bar{a}_1 \bar{n}$ ■

Пример

В $\mathbb{Z}_{12}$: обратими са $\bar{1}, \bar{5}, \bar{7}, \overline{11}$

делители са $\bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{9}, \overline{10}$

$\boxed{\text{Сл.}}$ Броят на обратимите елементи в $\mathbb{Z}_n$ е $\varphi(n)$

$\mathbb{Z}_p$ е поле (p – просто)

поле е комут. пръстен с $\bar{1}$, в който $\forall$ ненулев елемент е обратим.

$\Rightarrow \mathbb{Z}_n$ е поле, когато $\forall$ числа $< n$ са взаимнопрости с $n \Rightarrow n$ трябва да е просто