Л. ПЕТРУШЕВ
ИВ. ПРОДАНОВ

ПЪРВИ СТЪПКИ В АНАЛИЗА

1975
СОФИЯ
ДИ „НАРОДНА ПРОСВЕТА"

Ако не познаваме Заблуждението,
не познаваме и Истината.

Рабиндранат Тагор

Учените от седемнадесетия век особено са се интересували от задачи, свързани с движенията на телата. Един от главните обекти на техните изследвания било движението на небесните светила. След революцията, която Коперник и Кеплер извършили в човешките представи за вселената, плеяда учени започнали интензивно да разкриват непознати дотогава закони. Движението на небесните тела, а също и на онези, близко до повърхността на Земята, се оказали доста по-сложни, отколкото се е мислело по-рано. По-специално терминът „равномерно движение" станал означение на една несъществуваща в природата фикция и се разбрало, че скоростите и ускоренията на телата се изменят с течение на времето. Това обстоятелство не позволявало използването на известната дотогава математика за изучаване на движенията. Възникнала необходимост от нови математически методи и те били намерени.

Но потребностите от задълбочаване на познанията за движението не били единствен източник на идеи, предизвикал появата на тези методи. Въвеждайки координатите, Декарт показал как геометрични задачи могат да се решават с алгебрични методи. Разбрало се, че геометричният обект крива и алгебричният обект функция не са съществено различни. Задачата за намиране на тангентите на различните криви се превърнала в задача за намиране на производни на функции.

В резултат на всичко това се получила математическа теория, успяла да обедини изучаването на явления и процеси,

които от пръв поглед изглеждали съвършено различни. Накъсо казано, появил се математическият анализ.

Както и повечето клонове на математиката, анализът е дело на много хора. От учените, които през седемнадесетия век са дали своя принос, ще споменем само Ферма, Декарт, Паскал, Кавалиери, Бароу, Хюйгенс, Нютон, Лайбниц. Последните двама най-често се споменават като създатели на анализа. С името на Нютон обикновено се свързват приложенията към механичните задачи, а с името на Лайбниц — приложенията към геометричните, като например задачата за тангентата към крива.

Анализът не бил завършен през седемнадесетия век. През следващото столетие той получил по-нататъшно развитие в работите на Бернули, Рол, Тейлър, Маклорен, Ойлер, Даламбер, Лагранж.

Основите на тази сграда били построени едва през деветнадесетия век в трудовете на Болцано, Коши, Вайерщрас. Критиката, която те отправили към предшествениците си, станала двигател за по-нататъшното развитие на тази дисциплина.

Първото запознаване с анализа не трябва да започва с изучаване на основите му. Много по-лесно това може да стане, ако се следват мотивите на неговите създатели, защото по този начин се получава възможност да се „види" анализът. Да се „види" анализът е главната цел на тази книга. Но това не е единствената ѝ цел.

Недостигът на подходяща популярна литература по математически анализ е една от главните причини за така наречената „пропаст" между средното и висшето образование по математика. Студентът от първи курс най-осезателно чувствува това. Довчерашният ученик обикновено не е в състояние да вникне така дълбоко в преподаването на математиката във висшето учебно заведение, както това е необходимо. Не са редки случаите, когато първокурсникът загубва вяра в силите си дори когато той е бил отличник в средното училище. Но съществуват и случаи, когато нещата протичат по друг начин, когато „висшата" математика не е създаваща само неприятни емоции бариера, а е удоволствие за онзи, който я изучава. Такъв е студентът, който като ученик не се е задоволявал само с преподаваното му в училище, а е търсил допълнителни източници. Съзнателно или не, по този начин той е изградил мост над пропастта, за която говорихме по-горе.

В какво в същност се състои тя? Широко е разпространено схващането, че съществуват „две математики": елементарна, която се изучава в средните училища, и висша, която се изучава след това. Този възглед е погрешен, защото и в двата случая се използва един и същ начин на мислене — математическият, и следователно не съществува разделителна линия между училищната и университетската математика. Ако все пак повечето първокурсници получават впечатлението, че такава разделителна линия има, то се дължи не на природата на науката математика, а на нейната многоплановост. Математиката е сложно явление. От една страна, тя е стройна логическа система от аксиоми, определения и теореми, която може да се изучава формално, т. е. без да се вниква в конкретното съдържание и практическата приложимост на разглежданите въпроси. Това е, така да се каже, последната степен в развитието на една математическа дисциплина. От друга страна, действителността на всяка крачка заставя човека да мисли математически. Това е необходимост, която не може да избегне никой. От най-ранна възраст всеки среща, макар и в първична форма, и множествата, и функциите, и непрекъснатостта, и производните, и всички основни понятия на анализа, както и фундаменталните им свойства. Така например на всеки е ясно, че ако една частица се движи по права линия, тя минава през всички точки, разположени между началното и крайното ѝ положение. Това очевидно за интуицията твърдение се появява в анализа като едно от главните свойства на непрекъснатите функции. Аналогично

явление имаме и при производните. Известното всекиму понятие скорост не е нищо друго, освен производна на функция. Основната теорема за производните, представляваща база на повечето от техните приложения, е математически аналог на простия факт, че ако скоростта на една частица е нула през цялото време, тази точка се намира в едно и също положение. И така нататък. Виждаме, че математиката има две страни — абстрактно-логическа и нагледно-интуитивна. Всеки ученик владее втората страна, но изглежда, че не всеки е в състояние сам да прозре, че зад строгите абстрактно-логически одежди, в които е облечена лекцията на професора, стои именно тя, тази втора страна. Вече е ясно къде е тази пропаст. Ясно е също така, че за преодоляването ѝ слушателят от аудиторията трябва да умее да идентифицира абстрактните съждения, които лекторът му поднася, с придобитите вече интуитивни представи.

София 21 юни 1974

УВОД

Основното понятие на анализа е понятието функция. Може да се твърди, че фундаменталната роля, която анализът играе в съвременното научно естествознание, се дължи именно на понятието функция. Всеки природен закон е връзка между различни величини или по-точно между числата, които изразяват количествената страна на тези величини. При изучаването на различните процеси в реалния свят често срещаме величини, които се изменят с течение на времето. Ако две величини участвуват в някакъв природен закон, те не се изменят независимо една от друга, защото законът представлява връзка между тях. Така например да разгледаме известно количество идеален газ, който се намира в цилиндър с бутало. Ако през цялото време температурата на газа остава постоянна, обемът V и налягането p на този газ се подчиняват на закона на Бойл — Мариот

$$p \cdot V = \text{const} = c. \tag{1}$$

Ако произволно изменяме обема (движим буталото по произволен начин), налягането p също се изменя и стойността му за произволна стойност V на обема се дава с формулата

$$p = \frac{c}{V}. \tag{2}$$

В този случай казваме, че налягането зависи от обема или че е функция на обема.

Природата дава огромно количество такива примери, много от които са вече известни на читателя. Понятието функция е отражение на общото, което се намира във всички такива примери.

Нека x и y са две променливи величини. *Променливата y се нарича функция на променливата x, ако на всяка стойност на величината x е съпоставена по някакъв закон (правило) по*

една строго определена стойност на величината y. Величината x се нарича *независима променлива* или *аргумент* на функцията y. Да спрем вниманието си на един съществен момент на това определение: законът (правилото), по който на произволна стойност x на аргумента се съпоставя строго определена стойност на функцията, може да бъде съвършено произволен и всеки такъв закон (правило) дава по една функция. Така например ако на един произволен ъгъл е съпоставен неговият синус, с това е определена функцията

$$y = \sin x. \tag{3}$$

Най-просто и естествено този закон се дава с формула или аналитичен израз, както в случаите (2) и (3). Би било обаче неправилно да се мисли, че това е единственият начин за задаване на функция. Например, ако на произволно число x съпоставим най-голямото измежду целите числа, които не надминават x, получаваме функция на x, която не е зададена с формула. Въпреки това ние можем да пресметнем стойността ѝ за всяко зададено x: ако $x=1$, функцията има стойност 1, ако пък $x=2{,}5$, функцията има стойност 2 и т. н.

Функциите означаваме с букви като

$$f,\ \varphi,\ g,\ F,\ \Phi,\ G$$

и т. н., а стойността на произволна функция f за някаква стойност x на аргумента означаваме с $f(x)$.

Да отбележим още, че аргументът не винаги може да приема произволни реални стойности. Така например в (2) аргументът V приема само положителни стойности, които не надминават обема на цилиндъра. Ако аргументът x е дължина на променлива отсечка, той може да приеме само неотрицателни стойности. Множеството на всички стойности на аргумента, на които по дадено правило (закон) е съпоставена стойност на функцията, се нарича *дефиниционна област* на тази функция. Дефиниционната област на функцията (3) е цялата числова права. Когато x е от дефиниционната област на някоя функция f, казваме, че *функцията f е дефинирана* (има смисъл) за тази стойност на x, а в противен случай — че *функцията f не е дефинирана* (няма смисъл) за тази стойност на x. Функцията $\operatorname{tg} x$ е дефинирана само когато $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Функцията

$$y = \frac{x+1}{x^2-5x+6}$$

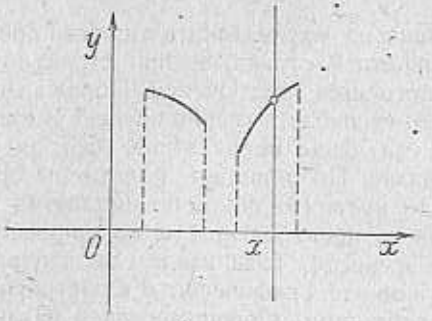
е дефинирана за всяко $x \neq 2, 3$, тъй като при $x=2$ и $x=3$ знаменателят става нула.

Абстрактно-логическата страна на математиката има това предимство пред нагледно-интуитивната ѝ страна, че при стриктното придържане към нея не дава погрешни заключения. Поради това обстоятелство при преподаването се набляга главно на нея. В същност цялата математика може да бъде представена, без да се прибягва до някакво опагледяване. По принцип ролята на зрението може да бъде сведено до нула. Но никой преподавател не прави така, защото не може да се пренебрегне такъв широк информационен канал, какъвто е зрението. Това важи и за централното понятие на анализа — функциите. Графическото илюстриране на функциите е почти винаги необходимо. Обозримостта и нагледността на графиката на една функция правят от нея незаменимо спомагателно средство при изследването и запомянето на свойствата на функциите.

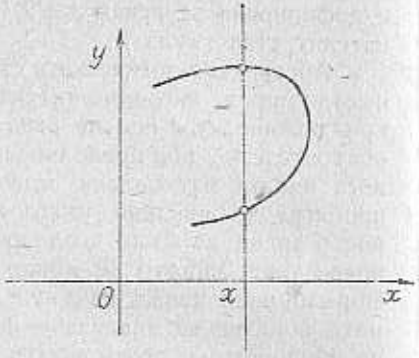
Що е графика на функция? Нека в равнината са зададени две взаимно перпендикулярни оси x и y, а f е някаква функция. *Под графика на функцията f разбираме множеството на всички точки в равнината с координати $(x, f(x))$, където x е произволно число от дефиниционната област на функцията f.* От това определение се вижда най-напред, че абсцисата на всяка точка от графиката на функцията f принадлежи на дефиниционната област на функцията. Ако си мислим, както това обикновено се прави, че дефиниционната област на функцията е изобразена върху оста x, това означава, че проекцията на графиката върху абсцисната ос съвпада с дефиниционната област на функцията. Тъй като функцията f за всяка точка x от дефиниционната си област *има една единствена стойност $f(x)$,* нейната графика притежава и следното свойство: върху всяка вертикална права, пресичаща абсцисната ос в точка от дефиниционната област на функцията, лежи една единствена точка от графика на функцията (черт. 1).

Поради тази причина кривата, изобразена на черт. 2, не е графика на функция.

Кога едно множество от точки в равнината е графика на функция? Очевидно това е така тогава и само тогава, когато всяка вертикална права, имаща обща точка с това множество, има само една обща точка с него. Да означим с Γ едно такова множество. Дефиниционната област на функцията f, чиято графика съвпада с Γ, не е нищо друго освен проекцията на Γ върху абсцисната ос. За произволно x от тази проекция стойността $f(x)$



Черт. 1



Черт. 2

на функцията f, чиято графика е Г, е ординатата на единствената пресечна точка на Г с вертикалната права през x. Може да се каже, че когато е описана точно, графиката на една функция съдържа цялата възможна информация за функцията.

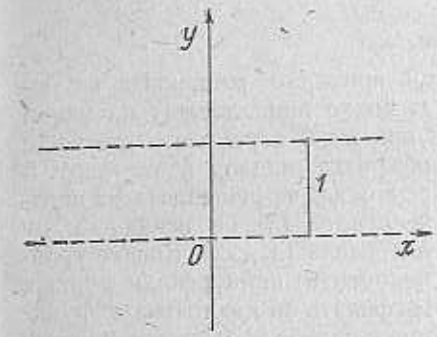
Да разгледаме сега множеството Г от точки в равнината, дефинирано по следния начин: към Г причисляваме точките с рационални абсциси и ордината единица, както и точките с ирационални абсциси и ордината нула. Очевидно всяка вертикална права пресича Г в една единствена точка и следователно множеството Г е графика на функция. Даже приблизителното изобразяване на тази графика на чертеж е трудно (черт. 3). Въпреки това множеството Г е вече описано съвсем точно, поради което функцията f, чиято графика е Г, е определена напълно. Нейната дефиниционна област съвпада с цялата числова права, а стойностите ѝ се дават с равенството

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{когато } x \text{ е рационално число,}\\ 0, & \text{когато } x \text{ е ирационално число.}\end{cases}$$

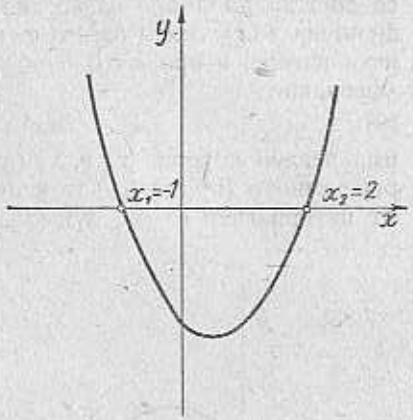
Този пример показва, че съществуват функции, чиито графики не могат да бъдат начертани, т. е. не са криви линии.

Особен интерес за математиката и нейните приложения представляват онези функции, чиито графики са криви линии. Такива са всички функции, които се изучават в средния курс и в началото на университетското обучение по математика. Тяхното изучаване е предмет и на тази книга.

Необходимо е за изучаващия анализ да умее „да чете" графиките на функциите, т. е. да вижда интересуващите го свойства на функцията от нейната графика.



Черт. 3



Черт. 4

Така например от графиката лесно се вижда къде една функция се анулира: това става в пресечните точки на графиката с абсцисната ос (черт. 4). Не по-трудно се вижда и къде функцията приема положителни или отрицателни стойности. Функцията, чиято графика е изобразена на черт. 4, се анулира при $x=x_1$ и при $x=x_2$, приема положителни стойности за всички x, които принадлежат на някой от интервалите $(-\infty, x_1)$, $(x_2\ \infty)$ и приема отрицателни стойности в интервала (x_1, x_2). Вижда се, че графиката на една функция f може да бъде полезна при решаване на някое от неравенствата $f(x)>0$ или $f(x)<0$. За да посочим конкретен пример, да разгледаме неравенството

$$x^2-x-2>0. \tag{4}$$

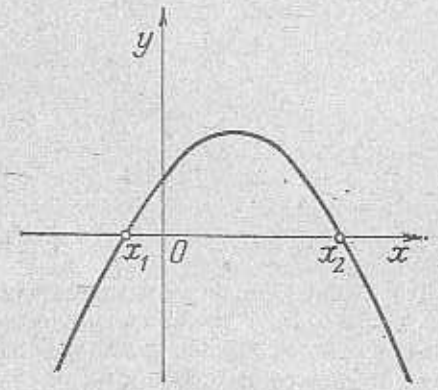
Тук $f(x)=x^2-x-2$, което е една квадратна функция. Тъй като коефициентът пред x^2 е положителен, както е известно на читателя, графиката е парабола, която е обърната нагоре (черт. 4). Точките, в които f се анулира, са решенията на уравнението $x^2-x-2=0$, т. е. $x_1=-1$, $x_2=2$. От графиката се вижда, че неравенството (4) е изпълнено, когато x принадлежи на някой от интервалите $(-\infty,-1)$, $(2,\infty)$. По-общо, изучаването на неравенството

$$ax^2+bx+c>0 \tag{5}$$

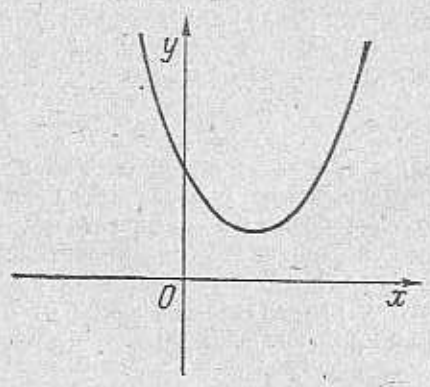
се свежда до добре известния факт, че графиката на квадратната функция $f(x)=ax^2+bx+c$ е парабола, която при $a>0$ е обърната нагоре, а при $a<0$ е обърната надолу. Когато квадратното уравнение

(6) $$ax^2+bx+c=0$$

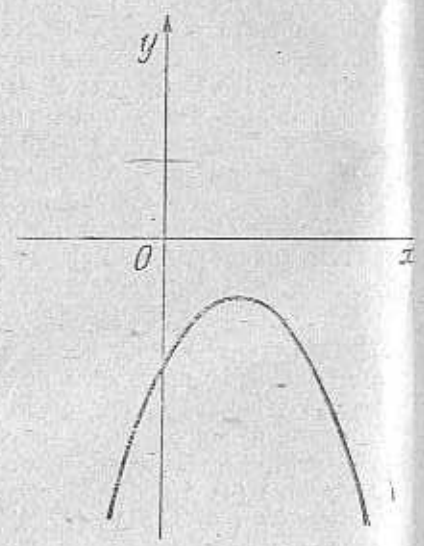
има реални корени x_1 и x_2 $(x_1 \leq x_2)$, при $a>0$ решенията на неравенството (5) ще бъдат всички x, които принадлежат на някой от интервалите $(-\infty, x_1)$, (x_2, ∞); при $a<0$ параболата ще бъде обърната надолу и от черт. 5 се вижда, че решенията на неравенството (5) са всички x от интервала (x_1, x_2). Когато уравнението (6) няма реални корени, графиката на квадратната функция е парабола, която не пресича абсцисната ос, следователно при $a>0$ решенията на неравенството (5) са всички реални числа, а при $a<0$ то няма решение (вж. черт. 6 и черт. 7).



Черт. 5



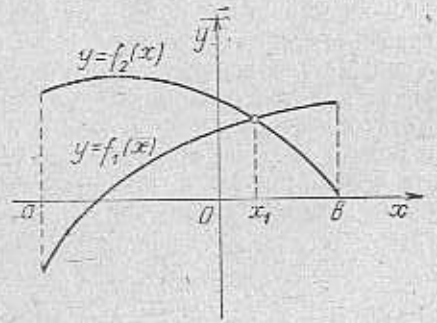
Черт. 6



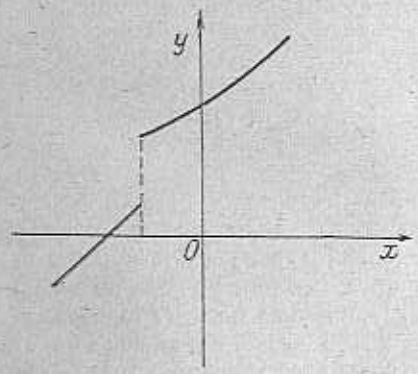
Черт. 7

Горните наблюдения могат да бъдат малко обобщени. Така например от графиките лесно се вижда къде две функции приемат еднакви стойности: това става в пресечните точки на графиките им (черт. 8). Също така лесно се вижда къде стойностите на функцията f_1 са по-големи от съответните стойности на функцията f_2: това е така, когато точката от графиката на функцията f_1 е над съответната точка от графиката на функцията f_2; от черт. 8 се вижда, че неравенството $f_1(x)>f_2(x)$ е изпълнено, когато x е от интервала (x_1, b).

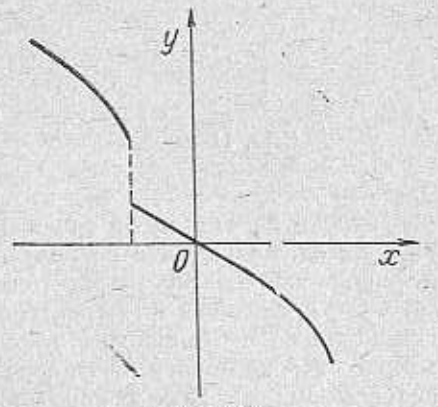
Монотонността на една функция също може лесно да се види от графиката ѝ. Една функция се нарича *растяща*, ако от неравенството $x_1<x_2$ винаги следва неравенството $f(x_1) \leq f(x_2)$. Ако пък от неравенството $x_1<x_2$ винаги следва, че $f(x_1) \geq f(x_2)$, функцията f се нарича *намаляваща*. Функциите от тези два типа имат общото название *монотонни функции*. На черт. 9 е изобразена графиката на растяща функция, а на черт. 10 — на намаляваща.



Черт. 8

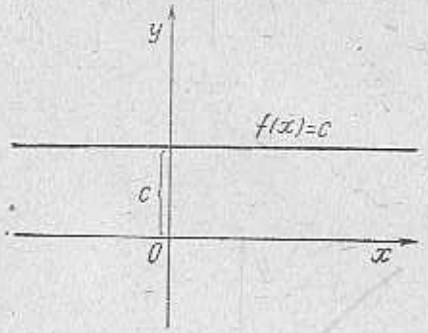


Черт. 9

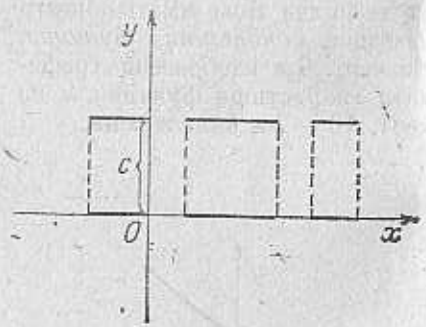


Черт. 10

Образно казано, една функция е растяща, когато при „пробягването“ на дефиниционната ѝ област от ляво на дясно съответната точка от графиката ѝ се изкачва нагоре. Дадените дефиниции позволяват дефиниционната област на функцията да бъде такава, че при пробягването ѝ да се налагат „скокове“, т. е. областта да не бъде интервал; в същото време, независимо от това, каква е дефиниционната област, при пробягването ѝ е възможно съответната точка от графиката на функцията също да прави скокове. Една функция е намаляваща, когато при пробягването на дефиниционната ѝ област от ляво на дясно съответната точка от графиката ѝ слиза надолу. Една функция е и растяща, и намаляваща, когато всичките ѝ стойности съвпадат. Тези функции се наричат константи. Константите ще означаваме a, b, c, const и т. н. Когато дефиниционната област на една такава функция съвпада с цялата числова права, графиката ѝ е една хоризонтална права. На черт. 11 и 12 е представена графиката на константата c. В първия случай дефиниционната област е цялата числова права, а



Черт. 11



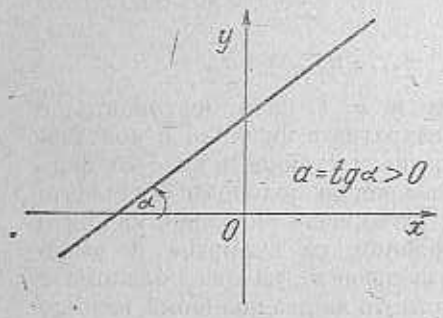
Черт. 12

във втория се състои от три интервала. Образно казано, графиката на една константа се получава, като „повдигнем“ цялата ѝ дефиниционна област на разстояние, равно на тази константа. Когато f е произволна функция, графиката ѝ също се получава чрез повдигане на дефиниционната ѝ област, но това повдигане изобщо зависи от повдиганата точка, поради което дефиниционната област се „деформира“. Тази деформация зависи от функцията и в същото време я определя напълно.

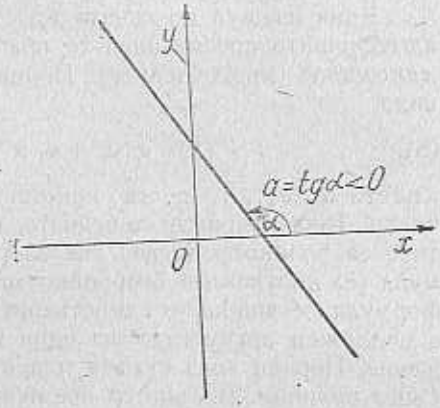
След константите най-простите функции са линейните, т. е. функциите от вида

$$f(x)=ax+b, \tag{7}$$

където a и b са дадени константи. Линейните функции са монотонни. По-точно, при $a>0$ функцията (7) е растяща, а при $a<0$ — намаляваща. Да покажем това, когато $a>0$. Нека $x_1<x_2$. То-



Черт. 13



Черт. 14

гава, понеже $a>0$, ще имаме $ax_1<ax_2$ и като прибавим към двете страни на това неравенство числото b, ще получим $ax_1+b<ax_2+b$, което заедно със (7) дава $f(x_1)<f(x_2)$. С това е показано, че при $a>0$ функцията (7) е растяща. На читателя е известно, че графиката на линейната функция е права линия. На черт. 13 и черт. 14 е изобразена графиката на линейна функция съответно при $a>0$ и $a<0$. Когато изменяме a и b, функцията f, зададена с равенството (7), се мени и следователно правата, представляваща нейна графика, се движи. Геометричният смисъл на тези две константи е твърде прост и е известен на читателя: a е *ъгловият коефициент* на графиката, т. е. тангенсът на ъгъла, който тази права сключва с абсцисната ос; когато a расте, този ъгъл също расте, т. е. графиката става по-стръмна; b е ординатата на пресечната точка на графиката с ординатната ос; графиката минава през началото на координатната система тогава и само тогава, когато $b=0$. Тук следва да отбележим, че вертикалните прави не са гра-

фики на функции, тъй като не удовлетворяват изискването, едно множество да бъде графика на една функция, защото всяка вертикална права пресича себе си в безбройно много точки. Всички други прави са графики на функции, и то на линейните функции.

Горните бележки върху функциите и техните графики имат съществено значение за разбирането на онова, което е изложено в тази книга. Не по-малко съществено е и умението да се правят алгебрични пресмятания, което се предполага у читателя.

Една изящна по своята простота класа от функции, в която алгебричните пресмятания се правят особено леко, е тази на *полиномите* (многочлените). Полином се нарича всяка фунция от вида

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n, \tag{8}$$

където $a_0, a_1, \ldots, a_n$ са константи и n е цяло неотрицателно число. Така например линейната, квадратната функция и константите са полиноми. Освен тях за различни стойности на n от формула (8) получаваме безбройно много видове полиноми. От същата формула се вижда, че единствените алгебрични операции, на които е подложен аргументът на един полином, са събиране и умножение. Поради това сумата и произведението на два полинома е също полином. В същото време частното на два полинома изобщо не е полином.

Функциите, които се представят като частно на два полинома, се наричат *рационални функции*. Общият вид на рационалните функции се дава с формулата

$$R(x)=\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_{m-1}x+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_{n-1}x+b_n}. \tag{9}$$

Така например функцията

$$R(x)=\frac{x+1}{x^2-5x+6} \qquad (x\neq 2,\ x\neq 3) \tag{10}$$

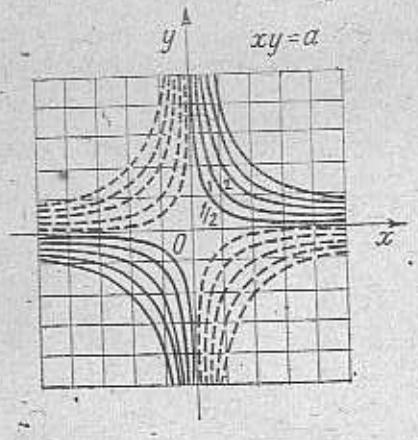
е рационална. Очевидно е, че всеки полином е същевременно и рационална функция. Наистина, ако знаменателят на (9) е константата единица, получаваме полинома $a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_{m-1}x+a_m$. Поради това полиномите често се наричат *цели рационални функции*. От (9) се вижда, че алгебричните операции, на които е подложен аргументът на една цяла рационална функция, са събиране, умножение и деление. Следователно сумата, произведението

и частното на две рационални функции е също рационална функция. Рационалните функции са дефинирани за всяко x, за което знаменателят не се анулира. Така например функцията (10) е дефинирана, когато $x\neq 2$ и $x\neq 3$.

Функцията

$$y=\frac{a}{x}, \tag{11}$$

която изразява наличието на обратна пропорционалност между x и y, е също рационална. Дефиниционната ѝ област се състои от всички точки x, за които $x\neq 0$. При положително a аргументът и стойността на функцията имат винаги еднакъв знак, поради което графиката ѝ е разположена в първия и третия квадрант. При $a<0$ графиката на функцията (11) е разположена във втория и четвъртия квадрант. Когато x е „близко" до нулата, стойността на функцията е „голяма" по абсолютна стойност. Обратно, при големи по абсолютна стойност x стойността на функцията е близка до нулата. На черт. 15 са дадени графиките на функциите, които се получават от (11) при различни стойности на константата a. Всяка от така получените криви се нарича *равнораменна хипербола*. Всяка равнораменна хипербола се състои от два клона, които се приближават неограничено до абсцисната ос, когато x



Черт. 15

се отдалечава неограничено от началото, и се приближават неограничено до ординатната ос, когато x се приближава неограничено към началото. Координатните оси се наричат *асимптоти* на равнораменните хиперболи.

Функциите от вида

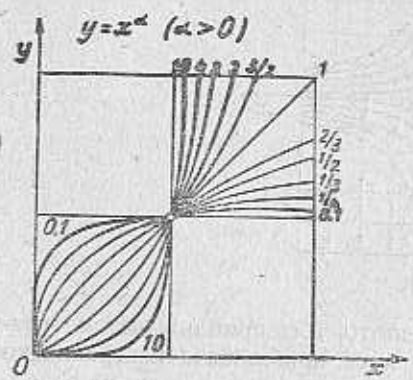
(12) $$y=x^{\alpha},$$

където α е произволна реална константа, се наричат *степенни*. Когато α е цяло, получаваме рационална функция. Така например при $\alpha=3$ получаваме функцията x^3, която очевидно е полином, а при $\alpha=-2$ — функцията $\frac{1}{x^2}$, която е от вида (9). Когато α е дробно рационално число, получаваме корен. Например при $\alpha=\frac{1}{2}$ (12) добива вида $y=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$. По-общо, ако n е естествено число, при $\alpha=\frac{1}{n}$ получаваме $y=x^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{x}$. В този случай винаги се има пред вид аритметичната стойност на корена. Да припомним с няколко примера известното на читателя понятие за аритметичен корен:

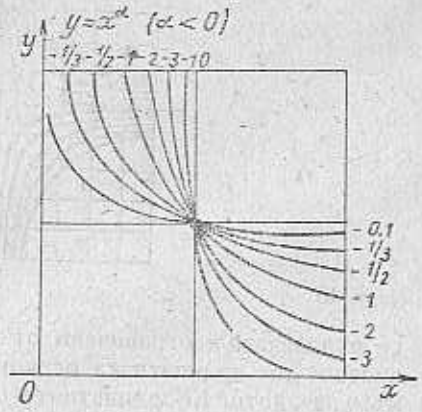
$$\sqrt[2n]{a^{2n}}=|a|,\quad \sqrt{(-5)^2}=|-5|=5,$$

$$\sqrt[2n+1]{a^{2n+1}}=a,\quad \sqrt[3]{(-5)^3}=-5.$$

Дефиниционната област на степенната функция зависи съществено от α. Когато α е някое от числата 1, 2, 3, ..., функцията



Черт. 16



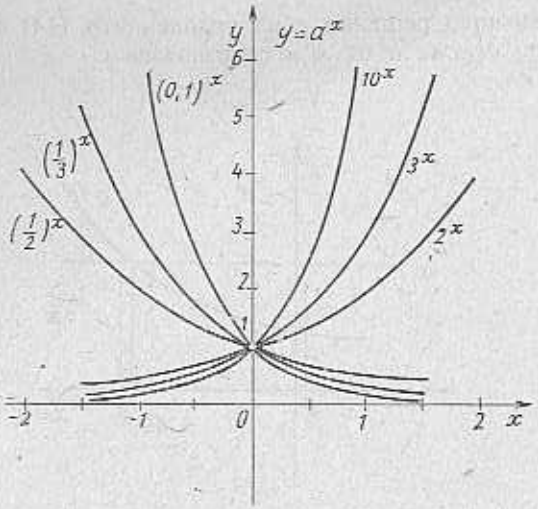
Черт. 17

(12) е дефинирана за всяко x. Когато α е някое от числата $0, -1, -2, \ldots$, тази функция е дефинирана за всяко x, различно от нула. Без да се впускаме в подробно обсъждане на всички случаи за α, ще отбележим още, че степенната функция е дефинирана за всяко $x>0$ независимо от степенния показател α. На черт. 16 и черт. 17 са изобразени графиките на степенната функция при различни α и при $x>0$. При положителни α при $x>1$ кривите се издигат нагоре толкова по-бързо, колкото е по-голямо α, при $0<x<1$ „прилепват" толкова по-плътно към абсцисната ос, колкото е по-голямо α. Функцията x^{α} е очевидно растяща, когато $x>0$ и $\alpha\geq 0$. При отрицателно α тази функция може да се разглежда като дроб $\left(\text{така например вместо } x^{-3} \text{ можем да пишем } \frac{1}{x^3}\right)$; в този случай функцията x^{α} е намаляваща при $x>0$; също както и при равнораменната хипербола, абсцисната и ординатната оси са асимптоти на кривите $y=x^{\alpha}$ при $\alpha<0$.

Функциите

(13) $$y=a^x,$$

където a е произволна положителна константа, се наричат *експоненциални* или *показателни*. Стойностите на показателните функции са винаги положителни, а дефиниционната им област се състои от всички реални числа. При $a>1$ показателната функция е растяща,



Черт. 18

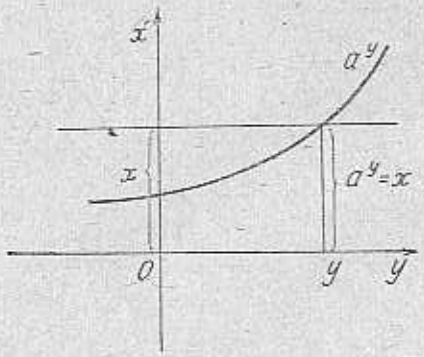
като при неограниченото отдалечаване на x надясно от началото a^x расте неограничено; при неограниченото отдалечаване на x наляво от началото a^x клони към нула, т. е. абсцисната ос е асимптота на кривата $y=a^x$. При $0<a<1$ имаме $a^x=\left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$ и $\frac{1}{a}>1$ и направените бележки за $a>1$ се трансформират в нашия случай по следния начин: при $0<a<1$ показателната функция е намаляваща, като при неограниченото растене на x надясно клони към нула; при неограниченото отдалечаване на x наляво от началото a^x расте неограничено. При $a=1$ имаме $a^x=1^x=1$, т. е. функцията 1^x съвпада с константата единица. Графиките на показателните функции при различни стойности на a са дадени на черт. 18. Забележете, че кривите $y=10^x$ и $y=0{,}1^x$ са симетрични относно ординатната ос (защо?).

Нека a е някое различно от единицата положително число. Не е трудно да се види, че за всяко положително число x уравнението

(14) $$a^y=x$$

има едно единствено решение y (вж. черт. 19), т. е. за всяко положително число x съществува едно единствено реално число y, за което е в сила равенството (14). Така например, ако $a=10$ и $x=100$, решението y на (14) е числото 2, ако пък $a=\frac{1}{2}$ и $x=8$, въпросното решение е $y=-3$. Както читателят знае, единственото решение y на уравнението (14) се нарича *логаритъм при основа* a от x и се означава с

15) $$y=\log_a x.$$

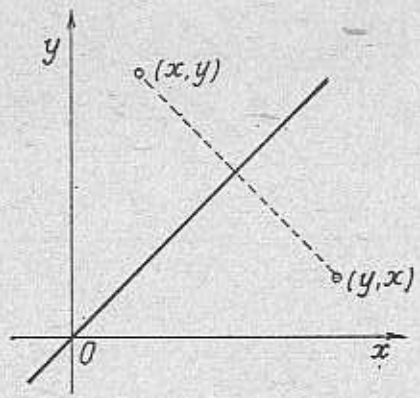


Черт. 19

Така дефинирахме една нова функция $\log_a x$. Тъй като уравнението (14) има решение само при положителни x, дефиниционната област на логаритмичната функция се състои от всички положителни числа; разбира се, решенията y на (14) могат (в зависимост от x) да приемат произволни реални стойности, така че стойностите на логаритмичната функция са произволни реални числа. По силата на определението на $\log_a x$ две числа x и y са свързани с равенството (15) тогава и само тогава, когато са свързани с равенството (14); да се докаже (15) е все едно да се докаже (14) и обратното. От тази бележка следва едно просто правило за построяване на графиката на логаритмичната функция: една точка с координати x и y се намира върху графиката на функцията $\log_a x$ (т. е. удовлетворява уравнението (15)) тогава и само тогава, когато е изпълнено (14); но множеството на точките (x, y), за които е в сила (14), е симетрично относно ъглополовящата на първи и трети квадрант на множеството на точките (x, y), за които е в сила

(16) $$y=a^x,$$

защото точката (x, y) удовлетворява (16), когато точката (y, x) удовлетворява (14), а тези две точки са симетрични относно ъглополовящата на първи и трети квадрант (черт. 20); множеството



Черт. 20

от точки (x, y), за които е в сила (16), не е нищо друго освен графиката на функцията $y=a^x$ и следователно графиката на (15) е симетрична на тази на (16) относно ъглополовящата на първи и трети квадрант. Това наблюдение дава немалка информация за

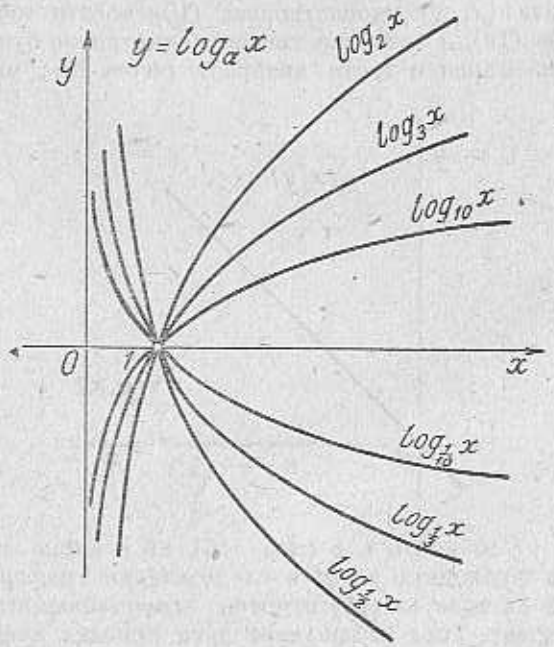
логаритмичната функция (черт. 21). От този чертеж е видно, че: дефиниционната област на $y=\log_a x$ се състои от всички положителни числа (ортогоналната проекция на графиката на $\log_a x$ върху абсцисната ос съвпада с множеството на положителните числа). При $a>1$ логаритмичната функция е растяща, а при $0<a<1$ е намаляваща; при $a>1$ тя е отрицателна, когато $0<x<1$, и положителна, когато $x>1$, а при $0<a<1$ картината се обръща.

Да се спрем сега на четирите основни тригонометрични функции:

$$y=\sin x, \qquad y=\operatorname{tg} x \qquad \left(x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y=\cos x, \qquad y=\operatorname{ctg} x \qquad (x\neq k\pi).$$

За анализа е удобно аргументът x да се изразява в *радиани*, т. е. за единица при измерването на ъглите да се избере централният ъгъл, на който съответствува дъга от окръжността, чиято дължина е равна на тази на радиуса. Тъй като дължината на окръжността е $2\pi r$, радиусът се нанася върху нея 2π пъти, поради



Черт. 21

което ъгълът от 360° е равен на 2π радиана. На читателя е известно, че връзката между градусната и радианната мярка на един ъгъл се дава с формулата

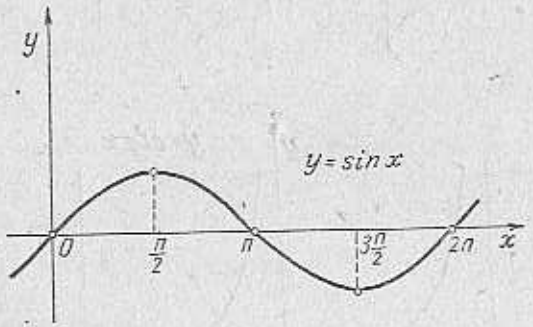
$$\alpha=\frac{2\pi}{360}n=\frac{\pi}{180}n,$$

където α е радианното мерно число на един ъгъл, а n е мерното му число в градуси. От тази формула в частност следва, че 180° са π радиана, 90° са $\frac{\pi}{2}$ радиана, 45° са $\frac{\pi}{4}$ радиана и т. н.

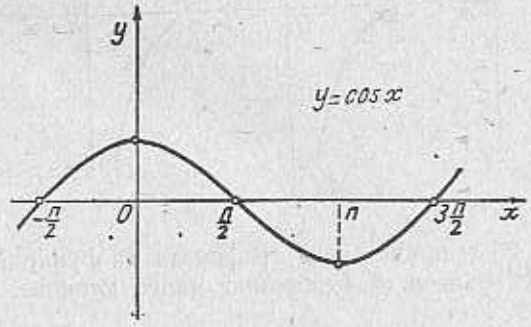
Графиката на функцията $y=\sin x$ е изобразена на черт. 22. Като си послужим с формулата

$$\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right),$$

не е трудно да се убедим, че графиката на функцията $y=\cos x$ (черт. 23) може да се получи от тази на функцията $y=\sin x$ чрез преместване наляво по абсцисната ос на разстояние $\frac{\pi}{2}$.

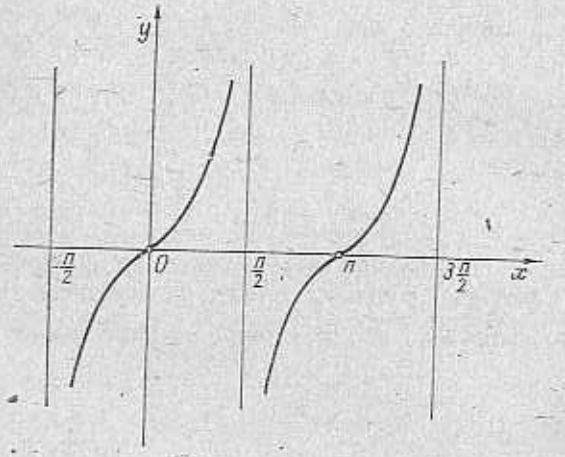


Черт. 22

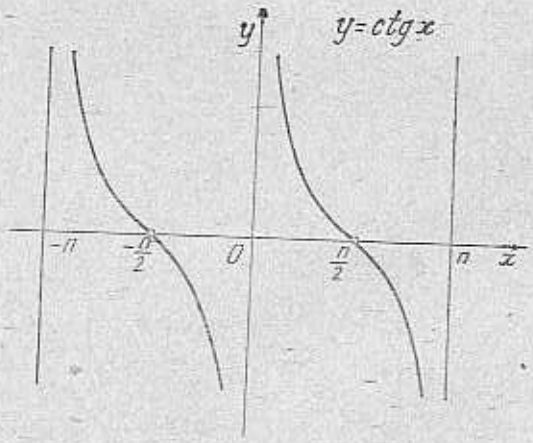


Черт. 23

На черт. 24 е представена графиката на функцията $y=\operatorname{tg} x$. Тя се състои от безбройно много еднакви помежду си клонове. Всеки от тях е разположен във вертикална лента с ширина π и е растяща функция на x, обаче в цялата си дефиниционна област тангенсът не е растяща функция.



Черт. 24



Черт. 25

На черт. 25 е представена графиката на функцията $y=\operatorname{ctg} x$, която също се състои от безбройно много клонове.

При преместването на графиките на функциите $y=\sin x$ и $y=\cos x$ наляво или надясно по оста x на разстояние 2π тези графики съвпадат със себе си, което изразява, че тези функции са *периодични* с период 2π, т. е.

$$\sin(x+2\pi)=\sin x, \quad \cos(x+2\pi)=\cos x$$

за всички x. Аналогично графиките на функциите $y=\operatorname{tg} x$ и $y=\operatorname{ctg} x$ съвпадат със себе си при преместване по абсцисната ос на разстояние π.

Графиките за функциите

$$y=A\sin ax, \quad y=A\cos ax \quad (A>0, a>0) \tag{17}$$

приличат твърде много на графиките на функциите $y=\sin x$ и $y=\cos x$. За да получим например графиката на първата от функциите (17) от графиката на $y=\sin x$, трябва да умножим с A дължините на всичките ординати на последната графика и да променим мащаба върху абсцисната ос по такъв начин, че точката с абсциса x да се изобрази в точката с абсциса $\frac{x}{a}$. Функциите (17) са също периодични, но техният период е равен на $\frac{2\pi}{a}$.

Графиките на по-сложните функции

$$y=A\sin(ax+b), \quad y=A\cos(ax+b) \tag{18}$$

се наричат понякога *прости хармонични криви* и се получават от графиките на функциите (17) чрез преместване по абсцисната ос наляво на разстояние $\frac{b}{a}$. Функциите (18) също имат период $\frac{2\pi}{a}$.

Графиките на по-сложните функции, които са определени чрез равенството

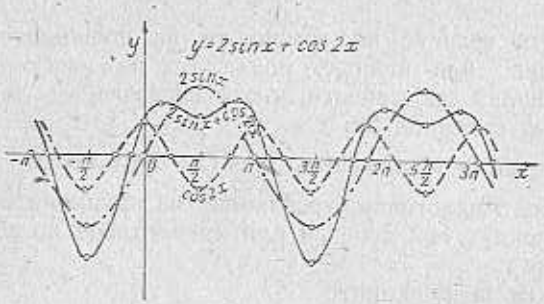
$$y=A_1\sin a_1x+B_1\cos a_1x+A_2\sin a_2x+B_2\cos a_2x$$

и са суми на няколко събираеми от вида (17), могат да се построят, като се събират ординатите на графиките на отделните събираеми. Получените по този начин криви се наричат *хармонични криви*. На черт. 26 е показано построението на графиката на функцията

$$y=2\sin x+\cos 2x.$$

Ще забележим по-нататък, че функцията

$$y=A_1\sin a_1x+B_1\cos a_1x \tag{19}$$



Черт. 26

може да се представи във вида (18). Наистина, да положим

$$m=\frac{A_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}},$$

$$n=\frac{B_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}},$$

$$A=\sqrt{A_1^2+B_1^2}.$$

Очевидно

(20) $$A_1=mA, \quad B_1=nA$$

и освен това

$$m^2+n^2=1,$$

$$|m|\leq 1, \ |n|\leq 1.$$

Както е известно от тригонометрията, може да се намери такъв ъгъл b_1, че

(21) $$\cos b_1=m, \ \sin b_1=n.$$

Заместваме в (19) A_1 и B_1 с техните стойности от (20) и като използуваме (21), ще получим

$$y=A\ (\cos b_1 . \sin a_1 x+\sin b_1 . \cos a_1 x),$$

т. е.

$$y=A \sin (a_1 x+b_1).$$

Разгледаните дотук функции играят централна роля за това, което следва по-нататък. За читателя е необходимо не само да се ориентира във въпросите, свързани с графиките на тези функции,

но и да умее да извършва онези елементарни пресмятания с тях, на които той се е учил в средния курс.

Главното понятие, което читателят ще срещне, е това за производна. Тя се появява като моментна скорост или като ъглов коефициент на тангента на крива и тези две нагледни представи за производната играят съществена роля. В основата на всички приложения на производните в реалната действителност и при изучаването на функциите, които могат да се намерят тук, лежи очевидното наблюдение, че ако скоростта на една, движеща се върху числовата права, точка е неотрицателна, точката се движи надясно. Това е „въздигнато" в принцип. Освен този принцип в посочените приложения по необходимост се появяват пресмятания, някои от които са по-дълги от онези, с които читателят вероятно е свикнал. Но всички те са подробно извършени, с изключение на случаите, когато са съвсем прости или пък читателят би могъл да ги направи сам по аналогия с изчисленията в някаква предшествуваща проблема. Книгата не ще изпълни замисленото предназначение, ползата от четенето й би се свела до минимум, ако учащият се не проследява с нужното внимание срещаните пресмятания и не извършва на свой ред онези, които са му предоставени.

Глава 1

ПОЛИНОМИ

В тази глава ще се запознаем с някои свойства на най-простите функции — полиномите. В §2, §6 и §7 са разгледани някои важни полиноми. На общи теореми, характерни за полиномите, са посветени §3, §4 и §9, а §5 и §8 съдържат някои приложения на тези теореми. В §1 се дава определение на понятието степен на полином.

§1. СТЕПЕН НА ПОЛИНОМ

Да напомним, че функциите от вида

(1) $$P(x)=a_0 x^n+a_1 x^{n-1}+\ldots+a_{n-1} x+a_n,$$

където $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ са константи и n е цяло неотрицателно число, се наричат полиноми. Така например функцията

(2) $$P(x)=2x^3+x^2-x-3$$

е полином. За полинома (1) казваме, че е *най-много от n-та степен* или че степента му не надминава n. Казваме, че този полином е от *степен n*, когато $a_0 \neq 0$. От тези дефиниции следва, че полиномът (2) е полином от трета степен, тъй като коефициентът пред третата степен на x е различен от нула. В същото време той е и полином най-много от n-та степен за $n \geq 3$.

Да видим какво дават тези дефиниции за нулевия полином, т. е. за полинома, всичките коефициенти на който са нули. Той е най-много от n-та степен за всяко цяло неотрицателно число n. От друга страна, той не е от n-та степен за никое n, защото по определение полиномът (1) е от n-та степен, когато $a_0 \neq 0$.

Единствените полиноми от нулева степен са различните от нула константи.

Очевидно е, че сумата на два полинома е полином, чиято степен не надминава по-голямата от степените на събираемите.

Произведението на два полинома е полином, чиято степен е равна на сбора от степените на събираемите.

§ 2. ГЕОМЕТРИЧНА ПРОГРЕСИЯ

Полиномът

(1) $$P(x)=1+x+x^2+\ldots+x^n$$

се нарича *геометрична прогресия*.

Ако умножим двете страни на (1) с $1-x$, ще получим

$$\begin{aligned}(1-x)P(x)&=(1-x)(1+x+x^2+\ldots+x^n)\\&=1+x+x^2+\ldots+x^n\\&\quad-x-x^2-\ldots-x^n-x^{n+1}=1-x^{n+1}.\end{aligned}$$

Следователно

(2) $$1-x^{n+1}=(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^n)$$

за всяко x и

(3) $$1+x+x^2+\cdots+x^n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

за всяко $x \neq 1$.

Нека сега в (2) положим $x=\frac{b}{a}$:

$$1-\frac{b^{n+1}}{a^{n+1}}=\left(1-\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{b}{a}+\frac{b^2}{a^2}+\cdots+\frac{b^n}{a^n}\right).$$

Ако умножим двете страни на последното равенство с a^{n+1}, ще получим

$$a^{n+1}-b^{n+1}=(a-b)(a^n+a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+\ldots+b^n).$$

Ако, ръководени от формални съображения, в последното равенство заместим n с $n-1$, ще получим

(4) $$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+b^{n-1}).$$

При $n=2$, $n=3$ и $n=4$ равенството (4) се превръща съответно в

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b),$$
$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2),$$
$$a^4-b^4=(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3).$$

Читателят трябва да помни и да умее да прилага формулите (3) и (4). За по-лесното запомняне на формулата (3) ще отбе-

лежим, че числителят на дробта, стояща от дясната страна на равенството, е полином от степен с единица по-висока от степента на полинома, стоящ от лявата страна на същото равенство. За запомняне на формулата (4) е добре да забележим, че сборът от степенните показатели на всяко от събираемите във втория от множителите отдясно на (4) е винаги $n-1$.

§ 3. РАЗЛАГАНЕ НА ПОЛИНОМИТЕ НА МНОЖИТЕЛИ

Едно число x_1 се нарича *нула на полинома* $P(x)$, когато $P(x_1)=0$, т. е. когато полиномът приема стойност нула при $x=x_1$. Това означава още, че x_1 е корен на уравнението $P(x)=0$. Така например числата 1, -1, -2 са нули на полинома

$$x^3+2x^2-x-2.$$

Нулите на един полином са тясно свързани с разлагането му на множители. Да си припомним, че квадратният тричлен

$$a_0 x^2+a_1 x+a_2 \qquad (a_0\neq 0)$$

се разлага на множители по следния начин:

$$a_0 x^2+a_1 x+a_2=a_0 (x-x_1)(x-x_2),$$

където x_1 и x_2 са нулите му.

По-общо, в сила е следното твърдение.

Ако x_1 е нула на полинома

(1) $$P(x)=a_0 x^n+a_1 x^{n-1}+\ldots+a_n \qquad (a_0\neq 0),$$

последният се представя във вида

(2) $$P(x)=(x-x_1)\,Q(x),$$

където $Q(x)$ е полином от степен $n-1$.

За да избегнем при доказателството писането на дълги формули, ще се ограничим със случая $n=4$; общият случай се основава на същата идея, която се състои в използуването на формула (2.4)*. Нека полиномът

$$P(x)=a_0 x^4+a_1 x^3+a_2 x^2+a_3 x+a_4 \qquad (a_0\neq 0)$$

се анулира при $x=x_1$, т. е.

$$P(x_1)=a_0 x_1^4+a_1 x_1^3+a_2 x_1^2+a_3 x_1+a_4=0.$$

* Първата цифра означава номера на параграфа, а втората номера на формула в този параграф.

Понеже $P(x_1)=0$, то

$$\begin{aligned}P(x)&=P(x)-P(x_1)\\&=a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4-(a_0x_1^4+a_1x_1^3+a_2x_1^2+a_3x_1+a_4)\\&=a_0(x^4-x_1^4)+a_1(x^3-x_1^3)+a_2(x^2-x_1^2)+a_3(x-x_1)\end{aligned}$$

и като използуваме формула (2.4), получаваме

$$\begin{aligned}P(x)&=(x-x_1)[a_0(x^3+x^2x_1+xx_1^2+x_1^3)+a_1(x^2+xx_1+x_1^2)\\&\qquad+a_2(x+x_1)+a_3]\\&=(x-x_1)[a_0x^3+(a_0x_1+a_1)x^2+(a_0x_1^2+a_1x_1+a_2)x\\&\qquad+(a_0x_1^3+a_1x_1^2+a_2x_1+a_3)].\end{aligned}$$

С това всичко е доказано, тъй като по условие $a_0\neq 0$ и следователно полиномът в средните скоби е от трета степен.

Пример 1. Да разгледаме полинома

$$P(x)=x^3+x-2.$$

Очевидно $P(1)=0$ и следователно $P(x)$ се разлага на множители по следния начин

$$P(x)=(x-1)\,Q(x),$$

където $Q(x)$ е полином от втора степен. След като вече знаем, че можем да изнесем пред скоби множителя $x-1$, ще подредим с оглед на това членовете на полинома $P(x)$ по следния начин:

$$x^3+x-2=\underbrace{x^3-x^2}+\underbrace{x^2-x}+\underbrace{2x-2},$$

откъдето

$$x^3+x-2=(x-1)(x^2+x+2).$$

Пример 2. Да разгледаме полинома

$$P(x)=x^3-3abx-a^3-b^3.$$

Не е трудно да се забележи, че при $x=a+b$ този полином се анулира. Следователно той се разлага на множители по следния начин:

$$P(x)=(x-a-b)\,Q(x),$$

където $Q(x)$ е полином от втора степен. С оглед на изваждането на множителя $x-a-b$ пред скоби извършваме подреждането

$$\begin{aligned}P(x)&=\underbrace{x^3-(a+b)x^2}+\underbrace{(a+b)x^2-(a+b)^2x}+\underbrace{(a^2-ab+b^2)x-(a^3+b^3)}\\&=(x-a-b)x^2+(x-a-b)x(a+b)+(x-a-b)(a^2-ab+b^2),\end{aligned}$$

откъдето

$$P(x)=(x-a-b)(x^2+(a+b)x+a^2-ab+b^2).$$

Да отбележим на края и едно очевидно следствие от доказаното твърдение: ако $P(x)$ е полином и a е произволно число, функцията

$$\frac{P(x)-P(a)}{x-a} \qquad (a \neq x)$$

е полином на x. Наистина полиномът $P(x)-P(a)$ се анулира при $x=a$ и следователно имаме

$$P(x)-P(a)=(x-a)\,Q(x),$$

с което следствието е доказано.

§ 4. ПРИНЦИП ЗА СРАВНЯВАНЕ НА КОЕФИЦИЕНТИТЕ

Резултатите от предната точка могат да се използват за доказване на следното твърдение.

Нека

(1) $$P(x)=a_0 x^n+a_1 x^{n-1}+\ldots+a_n \quad (a_0 \neq 0)$$

е полином от n-та степен. Тогава $P(x)$ не може да има повече от n различни нули.

Доказателството използва индукция по степента n на полинома $P(x)$.

При $n=1$ твърдението е почти очевидно. Наистина нека $P(x)=a_0 x+a_1$ е един полином от първа степен. Тогава $a_0 \neq 0$ и $P(x)$ се анулира само при $x=-\frac{a_1}{a_0}$ и следователно броят на нулите не превишава степента му.

Нека сега твърдението е вярно за някое n, т.е. нека всеки полином от n-та степен има най-много n нули. Ще докажем, че при това предположение твърдението е вярно и за $n+1$. Нека за тази цел

$$S(x)=b_0 x^{n+1}+b_1 x^n+\ldots+b_{n+1} \quad (b_0 \neq 0)$$

е произволен полином от $n+1$-ва степен. Да допуснем, че този полином има $n+2$ на брой различни нули

$$x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}, x_{n+2}.$$

Трябва да получим противоречие. Съгласно твърдението от предната точка $S(x)$ ще се представи във вида

(2) $$S(x)=(x-x_1)\,Q(x),$$

където $Q(x)$ е полином от n-та степен. Тъй като $x_i \neq x_1$ при $i=2, 3, \ldots, n+2$, от (2) следва, че всяко от числата $x_2, x_3, \ldots, x_{n+2}$ е нула на полинома $Q(x)$. Но тези числа са $n+1$ на брой и са различни, а полиномът $Q(x)$ е от n-та степен. Така получихме противоречие с индуктивното предположение. Полученото противоречие доказва, че $S(x)$ не може да има $n+2$ различни нули, т. е. доказана е верността на твърдението и за $n+1$. Съгласно принципа на математическата индукция твърдението е доказано за всяко n.

Като следствие от току-що доказаното твърдение ще получим следния принцип за сравняване на коефициентите:

Ако два полинома най-много от n-та степен приемат равни стойности поне за $n+1$ различни значения на аргумента си, коефициентите на тези полиноми пред еднаквите степени на x са равни (и следователно полиномите приемат равни стойности за всяко x).

И наистина от равенството

(3) $$a_0 x^n+a_1 x^{n-1}+\ldots+a_n=b_0 x^n+b_1 x^{n-1}+\ldots+b_n$$

следва, че

(4) $$(a_0-b_0)\,x^n+(a_1-b_1)\,x^{n-1}+\ldots+a_n-b_n=0,$$

така че, ако (3) е изпълнено за $n+1$ различни стойности на x, същото ще бъде в сила и за (4). Но тогава полиномът (4) би се анулирал за $n+1$ различни стойности на аргумента си и съгласно доказаното не би могъл да бъде от n-та степен. Следователно

(5) $$a_0-b_0=0.$$

По този начин (4) добива вида

(6) $$(a_1-b_1)\,x^{n-1}+(a_2-b_2)\,x^{n-2}+\ldots+a_n-b_n=0,$$

което равенство трябва да бъде изпълнено при $n+1$ различни стойности на x. Съгласно доказаното полиномът (6) не би могъл да бъде от $n-1$-ва степен, защото се анулира за повече от $n-1$ различни стойности на аргумента си. Следователно

(7) $$a_1-b_1=0.$$

Като продължим тези разсъждения, ще се убедим, че всичките коефициенти на (4) са нули, т.е. че коефициентите пред еднаквите степени на x на полиномите (3) съвпадат. С това твърдението е доказано.

§ 5. НЯКОИ ПРИЛОЖЕНИЯ НА ПРИНЦИПА ЗА СРАВНЯВАНЕ НА КОЕФИЦИЕНТИТЕ

Доказаното в предната точка свойство на полиномите има разнообразни приложения, някои от които ще разгледаме тук.

Задача 1. Да се намерят всички константи A и B, за които

$$\frac{x}{x^2-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1} \qquad (x\neq\pm1). \tag{1}$$

За да решим тази задача, ще се освободим от знаменателя:

$$x=A(x+1)+B(x-1)$$

или, което е все същото,

$$x=(A+B)x+A-B.$$

Следователно за всеки две константи A и B, за които е в сила (1), двата полинома от първа степен x и $(A+B)x+A-B$ приемат равни стойности за всички $x\neq\pm1$, които са безбройно много. Следователно коефициентите пред еднаквите степени на x на тези полиноми трябва да съвпадат, т. е.

$$\left|\begin{array}{l}1=A+B\\0=A-B.\end{array}\right.$$

Като решим тази система, получаваме

$$A=\frac{1}{2},\ B=\frac{1}{2}, \tag{2}$$

с което е доказано, че за никои други константи, освен тези от (2), равенството (1) не може да бъде изпълнено; с това е доказано, че ако съществуват константи A и B, за които е в сила (1) за всички $x\neq\pm1$, те са единствени. Непосредствена проверка ни убеждава, че равенството

$$\frac{x}{x^2-1}=\frac{1}{2}\,\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2}\,\frac{1}{x+1},$$

което се получава от (1) чрез заместване на A и B със стойностите им от (2) е изпълнено за всяко $x\neq\pm1$.

Задача 2. Да се намерят всички константи A и B, за които рационалната функция

$$\frac{x^4+3x^2+Ax+B}{x^2-2Ax+2} \tag{3}$$

е полином.

Очевидно ако частното (3) е полином за някои стойности на

A и B, той ще бъде полином от втора степен, т. е. ще имаме

$$\frac{x^4+3x^2+Ax+B}{x^2-2Ax+2}=ax^2+bx+c,$$

където a, b и c са константи. Като се освободим от знаменателя и подредим по степените на x, ще получим

$$x^4+3x^2+Ax+B$$
$$=ax^4+(b-2Aa)x^3+(c+2Ab+2a)x^2+(2b-2Ac)x+2c,$$

което равенство трябва да бъде изпълнено за всички x, за които (3) има смисъл, които са безбройно много, тъй като знаменателят $x^2-2Ax+2$ на (3) може да се анулира най-много за две стойности на x. Съгласно принципа за сравняване на коефициентите полиномите от двете страни на последното равенство трябва да имат еднакви коефициенти пред съответните степени на x, т. е.

$$\left|\begin{array}{l}1=a,\\0=b-2Aa,\\3=c+2Ab+2a,\\A=2b-2Ac,\\B=2c.\end{array}\right.$$

Като решим тази система, получаваме:

1) $A=0,\ B=2,\ a=1,\ b=0,\ c=1$;

2) $A=\frac{1}{2\sqrt{2}},\ B=1,\ a=1,\ b=\frac{1}{\sqrt{2}},\ c=\frac{1}{2}$;

3) $A=-\frac{1}{2\sqrt{2}},\ B=3,\ a=1,\ b=-\frac{1}{\sqrt{2}},\ c=\frac{3}{2}$.

Задача 3. Нека P е полином от втора степен, а a, b и c са три различни помежду си реални числа. Докажете, че при тези предположения за всяко x е в сила равенството

$$P(a)\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+P(b)\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+P(c)\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=P(x). \tag{4}$$

Да забележим най-напред, че от двете страни на (4) са написани полиноми от втора степен на x. Ако покажем, че тези два полинома приемат равни стойности поне за три различни стойности на x, от принципа за сравняване на коефициентите ще следва, че коефициентите пред еднаквите степени на x на тези полиноми ще съвпадат; но тогава и полиномите ще съвпадат, с което задачата би била решена.

И така достатъчно е да се убедим, че полиномите от двете страни на равенство (4) съвпадат за три различни стойности на x. Да означим за тази цел с Q полинома, фигуриращ от лявата страна на (4). Тогава

$$Q(a)=P(a)\frac{(a-b)(a-c)}{(a-b)(a-c)}+P(b).0+P(c).0=P(a).$$

Аналогично

$$Q(b)=P(b),\quad Q(c)=P(c).$$

Последните три равенства показват, че полиномите Q и P действително приемат еднакви стойности за три различни значения на x и задачата е решена.

След като читателят вече познава свойствата на полиномите от § 4, вероятно е забелязал, че една рационална функция не е дефинирана най-много в краен брой точки.

§ 6. ПОЛИНОМИТЕ $\binom{x}{k}$

Полиномът

$$\binom{x}{k}=\frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-k+1)}{1.2.3\ldots k}, \tag{1}$$

където k е цяло положително число, играе важна роля в редица въпроси. Той се нарича *k-ти биномен коефициент*. Очевидно числителят на k-тия биномен коефициент съдържа k на брой множителя, във всеки от които x влиза с първа степен. Следователно полиномът (1) е от степен k. Така например

$$\binom{x}{1}=\frac{x}{1}=x,$$

$$\binom{x}{2}=\frac{x(x-1)}{1.2}=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x$$

и т. н. Оказва се удобно да дефинираме (1) и при $k=0$. Под $\binom{x}{0}$ ще разбираме константата 1, т. е. $\binom{x}{0}=1$. Тази допълнителна дефиниция естествено се съгласува с дефиницията (1), защото ако формално заместим в (1) k с нула, в числителя и в знаменателя на (1) ще получим произведения от нула на брой множители;

удобно е такива произведения да се приемат равни на единица, както читателят знае от степените с нулев показател.

В тази точка ще се ограничим с извеждането на едно важно равенство. Именно, ще докажем, че

$$\binom{x}{k}+\binom{x}{k+1}=\binom{x+1}{k+1} \tag{2}$$

за всяко x и за всяко $k=0, 1, 2, \ldots$

Съгласно дефиницията за лявата страна на (2) имаме

$$\binom{x}{k}+\binom{x}{k+1}=\frac{x(x-1)\ldots(x-k+1)}{1.2.3\ldots k}+\frac{x(x-1)\ldots(x-k+1)(x-k)}{1.2.3\ldots k.(k+1)}.$$

Ако изнесем пред скоби $\frac{x(x-1)\ldots(x-k+1)}{1.2.3\ldots k(k+1)}$, от първото събираемо в скобите ще остане $k+1$, а от второто $x-k$. Така че

$$\binom{x}{k}+\binom{x}{k+1}=\frac{x(x-1)\ldots(x-k+1)}{1.2.3\ldots k(k+1)}(k+1+x-k)$$

$$=\frac{(x+1)x\ldots(x-k+1)}{1.2.3\ldots(k+1)}=\binom{x+1}{k+1},$$

тъй като

$$\binom{x+1}{k+1}=\frac{(x+1)x(x-1)\ldots[(x+1)-(k+1)+1]}{1.2.3\ldots(k+1)}=\frac{(x+1)x(x-1)\ldots(x-k+1)}{1.2.3\ldots(k+1)}.$$

Читателят сигурно знае, че произведението $1.2.3\ldots k$ обикновено се означава с $k!$ (и се произнася ка факториал). С помощта на този символ k-тия биномен коефициент може да се запише и така:

$$\binom{x}{k}=\frac{x(x-1)\ldots(x-k+1)}{k!}.$$

§ 7. НЮТОНОВ БИНОМ

С името на Нютон е свързана формула, която дава възможност да повдигнем в степен n сумата на две произволни числа. Тук ще се занимаем със случая, когато n е цяло положително число.

Нека a и b са две произволни числа и $n>0$ е цяло. Ще докажем, че е в сила формулата

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\ldots+\binom{n}{n}b^n. \tag{1}$$

При доказателството на (1) ще използуваме индукция относно n.

При $n=1$ формула (1) добива вида

$$(a+b)^1=\binom{1}{0}a^1+\binom{1}{1}b^1=1.\,a+1.\,b=a+b$$

и очевидно е вярна.

Да допуснем сега, че формула (1) е вярна за някое n и да докажем, че тя е вярна и за $n+1$. По-точно, да се убедим, че ако (1) е в сила за някое n, то

$$(2)\ (a+b)^{n+1}=\binom{n+1}{0}a^{n+1}+\binom{n+1}{1}a^nb+\ldots+\binom{n+1}{n}ab^n+\binom{n+1}{n+1}b^{n+1}.$$

Имаме

$$(a+b)^{n+1}=(a+b)(a+b)^n=(a+b)\left[\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{}a^{n-1}b+\right.$$

$$\left.+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\ldots+\binom{n}{n}b^n\right]$$

$$=\binom{n}{0}a^{n+1}+\binom{n}{0}a^nb+\binom{n}{1}a^nb+\binom{n}{1}a^{n-1}b^2$$

$$+\binom{n}{2}a^{n-1}b^2+\ldots+\binom{n}{n-1}ab^n+\binom{n}{n}ab^n+\binom{n}{n}b^{n+1}.$$

Ако подредим от дясната страна на това равенство членовете по степените на a и b, ще получим

$$(3)\qquad (a+b)^{n+1}=\binom{n}{0}a^{n+1}+\left[\binom{n}{0}+\binom{n}{1}\right]a^nb+\left[\binom{n}{1}+\binom{n}{2}\right]a^{n-1}b^2+\ldots$$

$$+\left[\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}\right]ab^n+\binom{n}{n}b^{n+1}.$$

Коефициентите, стоящи в средните скобки, ще преобразуваме с помощта на формула (6.2):

$$\binom{n}{0}-1=\binom{n+1}{0},\ \binom{n}{0}+\binom{n}{1}=\binom{n+1}{1},$$

$$\binom{n}{1}+\binom{n}{2}=\binom{n+1}{2},\ldots,\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=\binom{n+1}{n},\ \binom{n}{n}-1=\binom{n+1}{n+1}.$$

Като поставим така пресметнатите коефициенти в (3), получаваме равенство (2). С това е показано, че за всяко цяло положително

n от (1) следва (2) и съгласно принципа на пълната математична индукция формула (1) е вярна за всяко цяло положително n.

Пример 1. Да се подреди по степените на x полиномът $(2+x)^4$. За да решим тази задача, ще използуваме формула (1) при $a=2$, $b=x$ и $n=4$. Имаме

$$(2+x)^4=\binom{4}{0}2^4+\binom{4}{1}2^3x+\binom{4}{2}2^2x^2+\binom{4}{3}2x^3+\binom{4}{4}x^4.$$

Да пресметнем биномните коефициенти:

$$\binom{4}{0}=1,\ \binom{4}{1}=4,\ \binom{4}{2}=\frac{4.3}{1.2}=6,\ \binom{4}{3}=\frac{4.3.2}{1.2.3}=4,\ \binom{4}{4}=1.$$

Ако сега заместим така получените биномни коефициенти в израза за $(2+x)^4$, след малки опростявания ще получим

$$(2+x)^4=16+32x+24x^2+8x^3+x^4.$$

Пример 2. Да се подреди по степените на x полиномът $(1-x)^5$. Тук $a=1$, $b=-x$ и $n=5$. Като приложим бинома на Нютон

$$\binom{5}{0}1^5+\binom{5}{1}1^4(-x)+\binom{5}{2}1^3(-x)^2+\binom{5}{3}1^2(-x)^3+\binom{5}{4}1.(-x)^4+\binom{5}{5}(-x)^5$$

и като пресметнем биномните коефициенти, ще получим

$$(1-x)^5=1-5x+10x^2-10x^3+5x^4-x^5.$$

§ 8. НЯКОИ ПРИЛОЖЕНИЯ НА БИНОМА НА НЮТОН

Начинът на записване (7.1) на бинома на Нютон създава неудобства, когато трябва да се извършват по-големи пресмятания. Обстоятелството, че отделните събираеми имат еднаква структура може да се използува за въвеждането на едно кратко и обозримо записване. Да отбележим най-напред, че всичките събираеми в (7.1) се получават от израза $\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$, като даваме на k стойностите на $0, 1, 2, \ldots, n$: изразът от дясната страна на (7.1) не е нищо друго освен сумата на всички $\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$, където $k=0, 1, 2, \ldots, n$. Това записваме накратко така:

$$(1)\qquad (a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k.$$

По-общо символът $\sum_{k=1}^{n} a_k$ е кратко означение на сумата $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n$. Така например $\sum_{k=1}^{2} a_k=a_1+a_2$. Също така $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$.

Полиномът

$$P(x)=a_0 x^n+a_1 x^{n-1}+\ldots+a_n$$

може по този начин да се запише кратко така:

$$P(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k}$$

или пък, което е все същото,

$$P(x)=\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} x^k.$$

Означението $\sum_{k=0}^{n} a_k$ (произнася се: сума от a_k k, се мени от нула до n) е удобно, но за използването му е необходимо да се придобие известен навик. Ако някой път се стори на читателя, че краткостта на това означение влиза в разрез с яснотата, той би могъл да се освободи от него, като напише съответните суми в разгънат вид.

Да положим в (1) $a=1$ и $b=x$. Тогава ще получим

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} x^k. \tag{2}$$

Ако пък в (1) положим $a=1$ и $b=-x$, ще получим

$$(1-x)^n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} x^k. \tag{3}$$

Задача 1. Да се докаже формулата

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k},$$

където $n=1, 2, 3, \ldots$ и $k=0, 1, 2, \ldots, n$.

Ще използуваме принципа за сравняване на коефициентите, (2) и формулата

$$(x+1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} x^{n-k}, \tag{4}$$

която се получава от (1), като заместим a с x и b с единица. В левите страни на (2) и (4) стоят едни и същи полиноми и следователно това е така и за десните, поради което коефициентите пред еднаквите степени на x от десните страни на тези две формули ще съвпадат. Но коефициентът пред x^{n-k} в (4) е $\binom{n}{k}$, а коефициентът пред x^{n-k} в (2) очевидно е $\binom{n}{n-k}$, с което задачата е решена.

Задача 2. Да се докаже, че

$$\sum_{k=0}^{l}\binom{m}{k}\binom{n}{l-k}=\binom{m+n}{l}, \tag{5}$$

където m, n и l са произволни цели положителни числа.

Като използуваме (2), очевидното равенство

$$(1+x)^m (1+x)^n=(1+x)^{m+n}$$

може да се запише и така:

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k} x^k \cdot \sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s} x^s=\sum_{p=0}^{m+n}\binom{m+n}{p} x^p. \tag{6}$$

Очевидно коефициентът пред x^l в дясната страна на (6) е $\binom{m+n}{l}$

За да докажем (5), остава само да съобразим какъв е коефициентът пред x^l от лявата страна на (6). Да отбележим най-напред, че отляво на (6) стои сумата на всевъзможните произведения от вида

$$\binom{m}{k} x^k \cdot \binom{n}{s} x^s=\binom{m}{k}\cdot\binom{n}{s} x^{k+s}. \tag{7}$$

Едно такова събираемо има степен l тогава и само тогава, когато $k+s=l$, т. е. когато $s=l-k$. Следователно събираемите, които съдържат x^l, ще бъдат всевъзможните изрази от вида

$$\binom{m}{k}\cdot\binom{n}{l-k}x^l, \tag{8}$$

поради което коефициентът пред x^l от лявата страна на (6) ще бъде $\sum_{k=0}^{l}\binom{m}{k}\cdot\binom{n}{l-k}$, с което задачата е решена.

Задача 3. Да се докаже, че

$$\sum_{k=0}^{l}\binom{x}{k}\cdot\binom{y}{l-k}=\binom{x+y}{l} \tag{10}$$

за всяко $l=1, 2, 3, \ldots$ и за всички реални числа x и y.

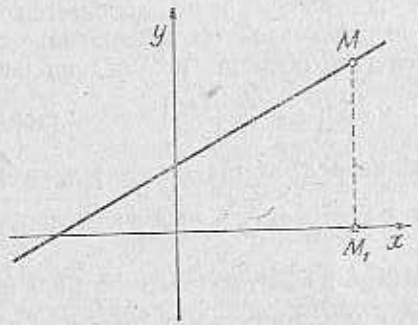
Тази задача е по-обща от задача 2, защото в (10) x и y са произволни. При решението ѝ ще използуваме (5). Да отбележим най-напред, че съгласно (5) равенството (10) е изпълнено за всички цели положителни x и y. Да изберем едно такова цяло положително y по произволен начин и да го фиксираме. Тогава от двете страни на (10) се получават полиноми на x. Съгласно (5) и начина, по който фиксирахме y, тези два полинома приемат равни стойности за всички цели положителни x, които са безбройно много. Съгласно принципа за сравняване на коефициентите тези полиноми ще приемат равни стойности за всички x. По този начин (10) е доказано за всяко x и за всяко цяло положително y. Да изберем сега по произволен начин реалното число x и да го фиксираме. Тогава двете страни на (10) стават полиноми на y. Съгласно току-що доказаното тези два полинома съвпадат за всички цели положителни y, които са безбройно много и следователно те ще съвпадат за всяко y. С това показваме, че (10) е вярно при така фиксираното x за всяко y. Но тъй като x беше фиксирано произволно, (10) е доказано за всички x и y.

§ 9. ПОВЕДЕНИЕ НА ПОЛИНОМИТЕ ПРИ НЕОГРАНИЧЕНО НАРАСТВАНЕ НА АРГУМЕНТА

Полиномът

$$y=a_0x+a_1 \qquad (a_0\neq 0) \tag{1}$$

расте неограничено по абсолютна стойност, когато аргументът му расте неограничено по абсолютна стойност. Грубо казано, това означава, че при „големи" абсолютни стойности на x абсолютната стойност на полинома (1) е също така „голяма". На геометричен език това означава, че когато проекцията на една точка M от графиката на функцията (1) върху абсцисната ос се отдалечава неограничено от началото, точката M се отдалечава неограничено от абсцисната ос (черт. 27).



Черт. 27

За да се разбере по-добре това, ще разгледаме неравенството

$$|2x-8|\geqq N, \tag{2}$$

където N е произволно положително число. Като използуваме неравенството $|a-b|\geqq|a|-|b|$, получаваме

$$|2x-8|\geqq|2x|-|8| \tag{3}$$

за всяко x. Оттук следва, че (2) сигурно ще бъде изпълнено за всички x, за които

$$2|x|-8\geqq N. \tag{4}$$

Последното неравенство се преобразува така: $2|x|\geqq N+8$ и сигурно ще бъде изпълнено, когато

$$|x|\geqq\frac{N}{2}+4. \tag{5}$$

Числата x, за които е изпълнено (5), са решенията на неравенството (4), а както вече видяхме, от (3) следва, че всяко решение на (4) е решение и на (2). Следователно неравенството (2) ще бъде изпълнено за всички x, които удовлетворяват (5).

Така се убедихме, че когато абсцисата на една точка M от графиката на функцията $y=2x-8$ се намира на разстояние, по-голямо или равно на $\frac{N}{2}+4$ от началото, точката M се намира на разстояние по-голямо или равно на *отнапред избраното* произволно положително число N от абсцисната ос.

Да спрем сега нашето внимание върху квадратната функция

(6) $$y=a_0x^2+a_1x+a_2 \qquad (a_0\neq 0).$$

От графиката на тази функция (вж. черт. 4 и черт. 5) се вижда, че тя също расте неограничено по абсолютна стойност, когато аргументът расте неограничено по абсолютна стойност.

Да представим тази функция по следния начин

(7) $$y=x^2\left(a_0+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}\right) \qquad (x\neq 0).$$

Ще забележим най-напред, че при големи x голямо е и x^2 и следователно изразът $a_0+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}$ е приблизително равен на a_0. Това е така, защото a_1 и a_2 са константи и $\frac{a_1}{x}$ и $\frac{a_2}{x^2}$ стават произволно малки, когато x е достатъчно голямо. Тъй като при неограниченото растене на x расте неограничено и x^2, от показаното следва, че функцията (7) също расте неограничено.

По същия начин може да се покаже, че *полиномът*

(8) $$y=\sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k} \qquad (a_0\neq 0)$$

расте неограничено по абсолютна стойност, когато x расте неограничено по абсолютна стойност. Наистина, ако в (8) изнесем x^n пред скоби, ще получим

(9) $$y=x^n\left(a_0+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\ldots+\frac{a_n}{x^n}\right) \qquad (x\neq 0).$$

Както и при квадратната функция се вижда, че изразът в скобите е приблизително равен на a_0, когато x расте неограничено и от (9) следва, че предложението е действително вярно.

Представянето (9) показва и нещо повече. При достатъчно големи положителни x стойностите на полинома (8) имат еднакъв знак с този на a_0. Когато x е отрицателно и достатъчно голямо по абсолютна стойност, картината е малко по-сложна: когато n е четно, x^n е положително и от (9) следва, че знакът на полинома (8) съвпада с този на a_0; когато n е нечетно, x^n е отрицателно и от (9) следва, че знакът на полинома (8) е обратен на този на a_0. С други думи, *полиномите от четна степен приемат стойности с еднакви знаци при големи по абсолютна стойност положителни или отрицателни x, като знакът на тези стойности е еднакъв с този на a_0; когато степента на един полином е нечетна при големи по абсолютна стойност отрицателни x, знакът на стойностите на този полином е противоположен на знака на a_0, а при големи положителни x — съвпада с този на a_0.*

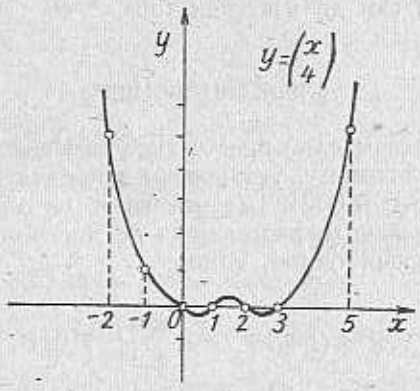
Така например полиномът

$$y=\binom{x}{4}=\frac{1}{24}x(x-1)(x-2)(x-3)$$

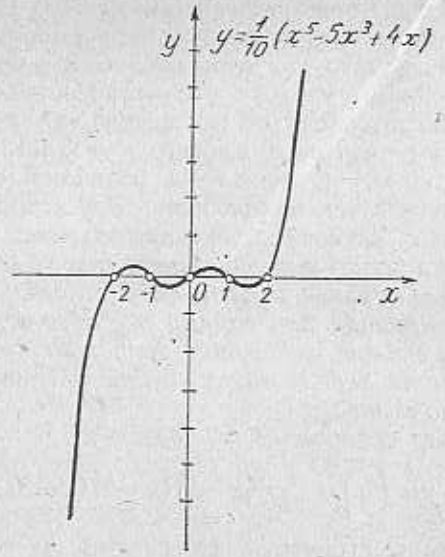
приема положителни стойности при големи по абсолютна стойност x (черт. 28), докато полиномът

$$y=\frac{1}{10}(x^5-5x^3+4x)$$

приема отрицателни стойности при големи по абсолютна стойност отрицателни x и стойностите му са положителни при големи положителни x (черт. 29).



Черт. 28



Черт. 29

Но какво в същност означава това, че една функция f расте *неограничено по абсолютна стойност, когато x расте неограничено по абсолютна стойност?* Това означава, че *за всяко положително N съществува такова α, че винаги когато $|x| \geq \alpha$ да имаме $|f(x)| \geq N$.*

При изучаването на полинома (1) ние следвахме тази точна дефиниция. При изучаването на полиномите (6) и (8) не се придържахме педантично към нея, за да дадем възможност на читателя да се опита сам да извърши това.

§ 10. ЕДИН ПРИМЕР

Тук ще направим едно приложение на Нютоновия бином и на свойствата на полиномите, установени в предната точка.

Да положим $q=1{,}0001$. Ще покажем, че q^n расте неограничено при неограниченото растене на n. За тази цел ще си послужим с Нютоновия бином. Имаме

$$q^n=(1+10^{-4})^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}10^{-4k}. \tag{1}$$

Всички събираеми от дясната страна на това равенство са положителни и следователно, ако запазим само онова, което се получава при $k=1$, ще получим следното неравенство

$$q^n > n.10^{-4},$$

откъдето твърдението следва веднага.

Убедихме се, че q^n расте неограничено. Но тъй като числото q е твърде близко до единицата, може да се остане с впечатлението, че това растене става твърде бавно. Без да се впускаме в обсъждане на последните думи, ще покажем, че $\frac{q^n}{n}$ също расте неограничено. Този път в дясната страна на (1) ще запазим само члена, който се получава при $k=2$, и ще получим неравенството $q^n > \frac{1}{2}n(n-1)10^{-8}$, което след разделяне с n дава

$$\frac{q^n}{n} > \frac{1}{2}(n-1).10^{-8}.$$

От това неравенство се вижда веднага, че $\frac{q^n}{n}$ действително расте неограничено при неограниченото растене на n.

Казаното дотук може значително да се обобщи. *Нека P е произволен полином и q е произволно число, за което $q>1$. Тогава $\frac{q^n}{|P(n)|}$ расте неограничено при неограниченото растене на n.*

За да докажем това твърдение, да положим $q=1+r$, където очевидно $r>0$. Тогава

$$q^n=(1+r)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}r^k. \tag{2}$$

Да означим с m степента на полинома P. Тази степен не зависи, разбира се, от n и когато n расте неограничено, тя остава фиксирана. По-нататък ще разглеждаме (2) само за стойности на n, за които $n>m+1$. Тъй като $r>0$, всичките събираеми от дясната страна на (2) са положителни и ако запазим само онова от тях, което се получава при $k=m+2$, ще получим $q^n > \binom{n}{m+2}r^{m+2}$. Без да ограничаваме общността, можем да считаме, че коефициентът пред m-тата степен на аргумента в P е положителен. Тогава за всички достатъчно големи n, ще имаме $P(n)>0$ и сле-

дователно $|P(n)| = P(n)$ за всички достатъчно големи n. Ако сега разделим двете страни на неравенството $q^n > \binom{n}{m+2} r^{m+2} c P(n)$, ще получим

$$\frac{q^n}{P(n)} > \frac{\binom{n}{m+2} r^{m+2}}{P(n)}.$$

Следователно твърдението ще бъде доказано, ако се убедим, че

$$\frac{\binom{n}{m+2} r^{m+2}}{P(n)} > n$$

за всички достатъчно големи n. Но това неравенство очевидно е еквивалентно със следното

$$\binom{n}{m+2} r^{m+2} - n P(n) > 0. \tag{3}$$

И така всичко ще бъде доказано, ако се убедим, че (3) е изпълнено за всички достатъчно големи n. Да напомним още веднаж, че степента m на полинома P не се изменя при изменението на n. Биномният коефициент $\binom{n}{m+2}$ е един полином от $m+2$ степен на n, а произведението $n\,P(n)$ е полином от $m+1$ степен на n, следователно разликата, която фигурира от лявата страна на (3) е полином от $m+2$ степен на n. За да решим задачата, остава да покажем само, че коефициентът пред $m+2$ степен на полинома (3) е положителен. Но този коефициент е очевидно равен на $\frac{r^{m+2}}{(m+2)!}$ и следователно е положителен, тъй като $r > 0$.

Задачи към глава 1

1. Докажете, че

$$\sum_{k=0}^{n} (k+1)\, x^k = \frac{1-x^{n+1}}{(1-x)^2} - \frac{(n+1)\, x^{n+1}}{1-x} \qquad (x \neq 1).$$

2. Докажете, че

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k = \frac{1+(-1)^n x^{n+1}}{1+x} \qquad (x \neq -1).$$

3. Докажете, че

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \operatorname{tg}^{2k} t = \frac{1+(-1)^n \operatorname{tg}^{2n+2} t}{1+\operatorname{tg}^2 t} \qquad \left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right).$$

4. Разложете полинома x^3+2x-3 на множители. Отг. $(x-1)(x^2+x+3)$.

5. Намерете всички константи A, B и C, за които

$$\frac{x^2+1}{x^3-x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$$

за всички $x \neq 0, 1, -1$. Отг. $A=-1$, $B=1$, $C=1$.

6. Докажете, че

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

7. Докажете, че

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

8. Докажете, че

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1.$$

9. Докажете, че

$$\sum_{k=0}^{l} (-1)^k \binom{n}{l-k} \binom{n-l+k}{k} = 0 \qquad (l=1, 2, \ldots).$$

Упътване: приравнете коефициентите пред x^l в задача 8.

10. Да се докаже, че

$$\sum_{k=0}^{l} (-1)^k \binom{x}{k} \binom{x-k}{l-k} = 0 \qquad (l=1, 2, \ldots).$$

Упътване: използувайте задача 9 и метода на задача (8.3)

11. Докажете, че за всички достатъчно големи n е в сила неравенството

$$\frac{n^4+n^2+1}{n^2+10} > n.$$

Упътване: използвайте резултатите от §9.

12. Докажете, че за всички достатъчно големи n е в сила неравенството

$$3 > \frac{2n^3-n^2+1}{n^3+100n+2} > 1.$$

13. Докажете, че за всички достатъчно големи n е в сила неравенството

$$\frac{1}{n} > \frac{n^2-20n}{2n^3+1} > \frac{1}{3n}.$$

Глава 2

НЕПРЕКЪСНАТИ ФУНКЦИИ

Една важна за математиката и нейните приложения в другите науки класа от функции образуват непрекъснатите функции. В тази глава читателят ще се запознае с нагледно-интуитивния аспект на това понятие. В §1 на всяко движение на точка върху права е съпоставена по една функция — законът на това движение. На тази база в §2 се дава описание на понятието непрекъснатост на функция, след което в §3 са дадени различни примери на непрекъснати функции. На някои приложения на непрекъснатостта са посветени §4, §5 и §6. Най-простото от всички видове движения — равномерното, е въведено в §7, а в §8 е показана връзката между равномерните движения и линейните функции. На края, в §9 и §10 са разгледани известните функционални уравнения на показателната и логаритмичната функции.

§ 1. ДВИЖЕНИЯ И ФУНКЦИИ

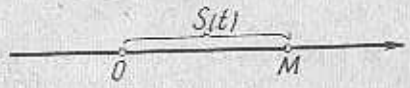
Читателят знае как числата се изобразяват чрез точките на една права — числовата права (черт. 30). Тази нагледна представа за числата лежи в основата на връзката между анализа и геометрията и ще бъде използувана многократно по-нататък.

Черт. 30

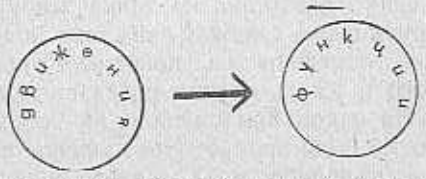
Нека точката M се движи върху някоя права. Не предполагаме, че движението е равномерно нито едноносочно, а най-произволно. Във всеки момент t от времето движещата се точка съвпада с някаква точка $M(t)$ от числовата права. По този начин движението на M ни дава една функция, защото на всеки момент

t от времето можем да съпоставим числото $S(t)$, което съответствува на точката M при изобразяването на числата върху числовата права.

И така за произволно движение на точката M върху числовата права съществува такава функция S на времето, че за всеки момент t имаме $OM(t)=S(t)$ (черт. 31). Тази функция се нарича *закон на разглежданото движение*. Това е изобразено схематично на черт. 32.



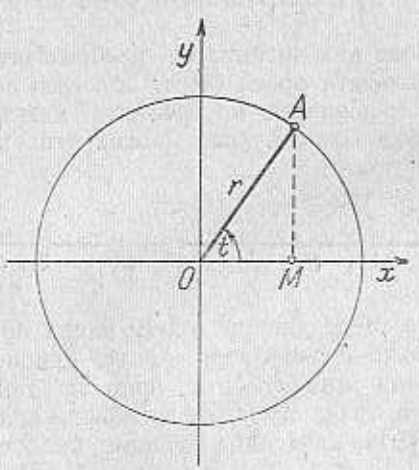
Черт. 31



Черт. 32

Пример 1. Автомобил се движи от точка A към точка B. Очевидно законът на движение на този автомобил е функцията, която в произволен момент t от времето приема стойност, равна на разстоянието между точката A и положението на автомобила в момента t.

Пример 2. Нека една точка A се движи по окръжност (черт. 33) по такъв начин, че в произволен момент t от времето да имаме $\measuredangle xOA=t$. Да разгледаме



Черт. 33

движението на проекцията M на A върху абсцисната ос. Ясно е, че във всеки момент t от времето имаме $OM(t)=r\cos t$. Следователно в този случай законът на движението е $S(t)=r\cos t$.

Пример 3. Нека точката M пада свободно по (насочената вертикално надолу) числова права, като в началния момент се намира в нулата. От физиката е известно, че във всеки момент t от времето имаме $OM(t)=\frac{gt^2}{2}$, където g е земното ускорение. Следователно законът на движението в този случай е $S(t)=\frac{gt^2}{2}$.

Пример 4. Нека точката M през цялото време не изменя положението си, т. е. във всеки момент от времето съвпада с една и съща точка от числовата права. Както е известно, това движение се нарича покой. Ясно е, че законът на движението на всеки покой е константна функция, т. е. $S(t)=\text{const}$.

Пример 5. Нека a е произволно число и точката M се движи по такъв начин, че в произволен момент t от времето да имаме $OM(t)=a.t$. В този случай законът на движението е $S(t)=at$.

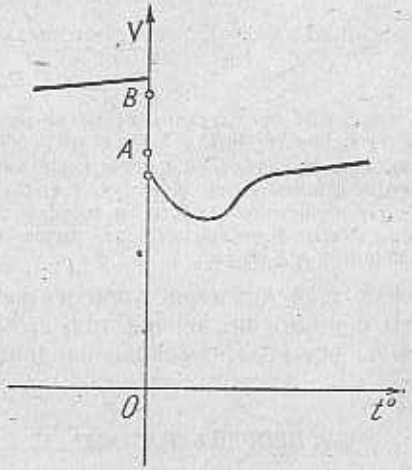
Разбира се, освен тези примери съществуват още безбройно много. Онова, което е общо за всички тях, е, че винаги получаваме една функция на времето — закона на движението.

§ 2. НЕПРЕКЪСНАТОСТ

В предната точка видяхме примери на функции, дадени, така да се каже, от природата. Ето още един такъв пример, добре известен на всички. Става дума за промяната на обема на дадено количество вода, когато температурата се изменя; очевидно този обем е функция на температурата. Една приблизителна графика на тази функция е показана на черт. 34. От тази графика виждаме, че около нулата функцията прави „скок“ или, както се казва в математиката, че е *прекъсната* в нулата (тук приемаме, че при нула градуса обемът е напълно определен). Това означава, че около нулата съществуват произволно близки стойности на температурата, за които съответните обеми не са произволно близки. Например за близки до нулата отрицателна и положителна температура разликата между съответните обеми е по-голяма от отсечката AB. Както ще видим това по-подробно нататък, подобно нещо е невъзможно за функция, която е закон на някое движение.

Да разгледаме най-напред едно основно понятие в анализа. Става дума за нещо сродно с „близост на две точки“ върху числовата права (или с „близост на два момента“). Казваме нещо сродно, защото терминът „близост“ е неизползуваем в матема-

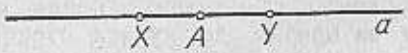
тиката в смисъла (ако въобще има такъв), в който той се употребява в говоримия език. От известно гледище Варна и Търново са близко (ако пътуваме например със самолет), а от друго — далече (ако вървим пеша). Малките разстояния между частиците



Черт. 34

на атомите са огромни в сравнение с размерите на тези частици. Ясно е, че понятия като „близко", „далече", „малко", „голямо" и т. н. са относителни и поради това неизползуваеми в математиката, защото там е нужна яснота. Вместо тях тя използува нещо по-просто — околност на точка.

Що е околност на точка? Това се вижда от черт. 35. Нека A е произволна точка от правата a. Да изберем по произволен начин точките X и Y от a, така че точката A да се намира между



Черт. 35

тях ($X \neq A$, $Y \neq A$). Отсечката XY се нарича *околност на точката* A. Поради произвола при избора на точките X и Y (спазва се само условието A да се намира между X и Y и да не съвпада с някоя от тях), можем да образуваме произволно много околности на точка A. Накратко под околност на точката A разбираме всяка отсечка, която съдържа A във вътрешността си.

Да отбележим, че в определението за околност на точка

въобще не става дума за разстояние. Същественият момент тук е в произвола при избора на точките X и Y. Той дава възможност отсечката XY да бъде избирана както „произволно голяма", така и „произволно малка". Именно свободата да избираме произволно малки околности е главното в това определение. Тя е математическо отражение на интуитивното понятие за близост.

Аналогично се въвежда и понятието околност на един момент t от времето: под околност на t разбираме всеки интервал от време, който съдържа t във вътрешността си.

Сега можем да преминем към едно от основните свойства на движението — неговата непрекъснатост. Да разгледаме отново една движеща се точка M. Нека в момента t_0 подвижната точка M заема положението M_0 и нека XY е произволна околност на M_0. Движението на M може да бъде извънредно сложно (и в частност произволно бързо), но въпреки това освен момента t_0 (в който точката M се намира в положението M_0) ще съществуват и други моменти t, в които M е в околността XY. Нещо повече: ще съществуват безбройно много моменти с това свойство. Но може да се твърди и повече: съществува околност $V = (t', t'')$ на момента t_0 такава, че докато времето пробягва тази околност, точката M да се намира в XY. Това свойство на движението се нарича *непрекъснатост*.

Нека например точката M е автомобил, който пътува по шосето от Търново за Варна. Ако в 13 часа автомобилът е бил в центъра на град Търговище, ясно е, че известно време преди указания час и известно време след това той е бил в града (разбира се, не непременно в центъра му). Интервалът от време между момента, в който автомобилът влиза в града, и момента, в който го напуска, представлява една околност на момента $t_0 = 13$ ч. Очевидно е, че във всеки момент, принадлежащ на тази околност, автомобилът се е намирал в град Търговище.

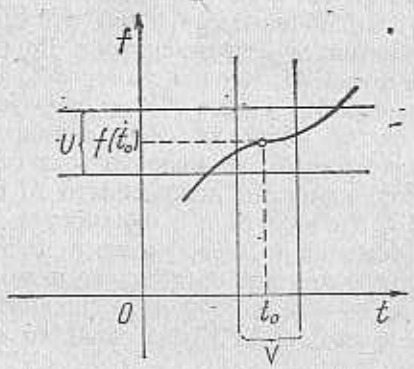
Да разгледаме една по-малка околност на центъра на Търговище — градския площад, през който трябва да мине колата. Всичко казано по-горе, отнасящо се за целия град, може да се пренесе и за неговия площад. Околността на момента $t_0 = 13$ ч, съответствуваща на преминаването на колата през площада, е вече един по-малък интервал.

Да се върнем отново на общия случай. Ако „свием" околността XY, съответно ще се свие и околността V, но твърдението си остава в сила, колкото и малка да е XY.

Нека функцията f е закон на някое движение. Изложеното дотук показва, че функцията f притежава следното свойство:

За всеки момент t_0 и за всяка околност U на $f(t_0)$ съществува такава околност V на t_0, че за всяко t от V функционалната стойност $f(t)$ да принадлежи на U.

Функции с горното свойство се наричат *непрекъснати*. Графиката на една непрекъсната функция не може да прави скок, както тази на черт. 34. Ако една функция е дефинирана в един интервал и е непрекъсната във всяка точка от този интервал, графи-



Черт. 36

ката ѝ прилича на (нескъсан) конец. Вече споменахме, че графиката на една произволна функция се получава от дефиниционната област чрез повдигане на тази област, при което са допустими и деформации. Използувайки отново образен език, можем да кажем, че когато функцията е непрекъсната, при тези деформации не се допуска разкъсване.

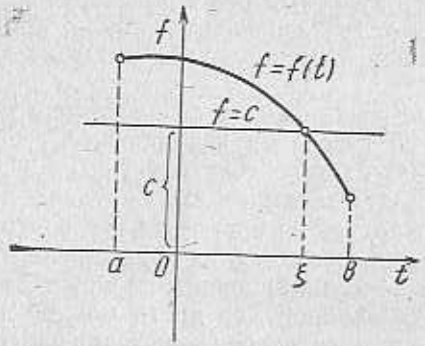
Да спрем сега нашето внимание на точния геометричен смисъл на дефиницията за непрекъснатост на функция. Да изберем една произволна околност U на $f(t_0)$ и да разгледаме хоризонталната лента, която отсича от ординатната ос околността U (черт. 36). Съгласно дефиницията за непрекъснатост съществува такава околност V на t_0, че винаги когато $t \in V$ да имаме $f(t) \in U$. Нека сега точката $(t, f(t))$ от графиката на f принадлежи на вертикалната лента; тогава $t \in V$ и следователно $f(t) \in U$, което означава, че точката $(t, f(t))$ принадлежи на хоризонталната лента. *И така функцията f е непрекъсната в точката t_0, когато за всяка хоризонтална лента, съдържаща точката $(t_0, f(t_0))$ от графиката на f във вътрешността си, съществува такава вертикална лента, че*

а) *точката $(t_0, f(t_0))$ е от вътрешността ѝ* и

б) *всяка точка от графиката, която принадлежи на вертикалната лента, непременно се съдържа и в хоризонталната.*

Вече видяхме, как може да се достигне до понятието непрекъснатост, като се тръгне от най-простите геометрични или механични задачи. На същото това понятие се натъкваме и когато разглеждаме задачата за пресмятане на стойностите на функциите. На практика стойността на аргумента, за която искаме да пресметнем съответната стойност на функцията, обикновено се измерва. Но при измерванията никога не може да се осигури абсолютна точност; най-доброто, на което можем да се надяваме, е при достатъчно щателни и продължителни измервания да си осигурим произволна отнапред зададена точност на стойността на аргумента, така че ако желаем да пресметнем $f(t_0)$, всъщност ще разполагаме със стойности от вида $f(t)$, където t може да се направи произволно близко до t_0. За да бъдем уверени, че при това $f(t)$ ще бъде произволно близко до $f(t_0)$, не остава нищо друго освен да поискаме функцията f да е непрекъсната в точката t_0. *И така функцията f е непрекъсната в точката t_0, когато можем да пресмятаме стойността $f(t_0)$ с произволна отнапред дадена точност, като си служим с достатъчно точни приближения t на аргумента t_0, т.е. когато за всяка отнапред дадена точност $\varepsilon > 0$ съществува такава точност $\delta > 0$, че винаги когато стойността t на аргумента е приближение с точност δ на t_0, фунционалната стойност $f(t)$ да бъде приближение на $f(t_0)$ с точност ε.*

Много трудни на пръв поглед задачи можем да решаваме като използуваме непрекъснати функции. Такива примери ще разгледаме в § 4, § 5 и § 6. Трябва да отбележим обаче, че при решението на тези задачи се използува не дефиницията за непрекъснатост, а едно следствие от нея, което е почти очевидно. На механичен език то може да бъде формулирано така: ако една точка M се движи по права и заема положенията M_1 и M_2 съответно в моментите t_1 и t_2, в интервала (t_1, t_2) тя преминава поне по веднъж през всяка точка на отсечката $M_1 M_2$. На геометричен език това следствие се формулира така: ако една функция е дефинирана и непрекъсната в един интервал и две точки от графиката ѝ са от различни страни на някоя хоризонтална права c, графиката и правата имат обща точка (черт. 37). На аналитичен език въпросното следствие може да се формулира така: ако функцията f е дефинирана и непрекъсната в интервала $[a, b]$ и c



Черт. 37

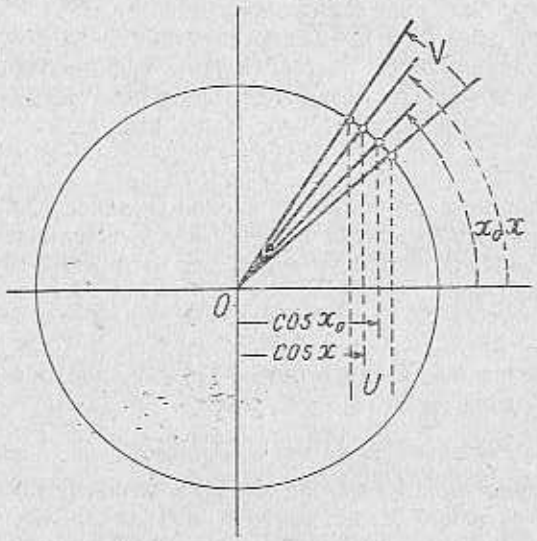
е число, за което $f(a)-c$ и $f(b)-c$ имат противни знаци, непременно съществува точка ξ от интервала $[a, b]$, за която $f(\xi)=c$.

§ 3. ПРИМЕРИ НА НЕПРЕКЪСНАТИ ФУНКЦИИ

Действията събиране, изваждане, умножение и деление притежават едно важно свойство, което лежи в основата на изчислителната техника. Всяко от числата x_0+y_0, x_0-y_0, $x_0 y_0$ и $\frac{x_0}{y_0}$ $(y_0 \neq 0)$ може да бъде пресметнато с произволна отнапред дадена точност, стига вместо x_0 и y_0 да се вземат достатъчно точни техни приближения. Изчислителният опит, който читателят вече има, сигурно го е убедил в това. Интересно е, че от това елементарно наблюдение директно следва, че *всяка рационална функция е непрекъсната* навсякъде в дефиниционната си област. Както вече знаем, пресмятането на стойностите на една рационална функция изисква само горните четири действия, приложени краен брой пъти над определено число константи и над аргумента. Следователно стойността $R(x_0)$ на една рационална функция R в произволна точка x_0 от нейната дефиниционна област може да се пресмята с произволна отнапред дадена точност, стига да си служим с достатъчно точни приближения x на аргумента x_0, поради което рационалните функции са непрекъснати.

Функциите x^α, a^x *и* $\log_a x$ *са също непрекъснати* навсякъде в дефиниционната си област: читателят, разбира се, е правил достатъчно приблизителни пресмятания с тези функции, за да бъде убеден в това.

Непрекъснати са също и тригонометричните функции $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ *и* $\operatorname{ctg} x$. Да се убедим в това за функцията $\cos x$. Нека x_0 е произволен ъгъл и U е произволна околност на $\cos x_0$ (черт. 38). Ясно е, че за всеки ъгъл x от околността V на x_0 $\cos x$ се намира в U. С това е доказана непрекъснатостта на $\cos x$. Аналогични разглеждания ни убеждават, че са непрекъснати и останалите три тригонометрични функции.



Черт. 38

Естествено горните примери далеч не изчерпват множеството на всички непрекъснати функции. Така *сумата, разликата, произведението и частното на две непрекъснати функции са също непрекъснати*; предоставяме на читателя сам да се убеди в това, като използва идеята, с която си послужихме при доказателството на непрекъснатостта на рационалните функции. Например функцията

$$2x\sin x+\frac{\cos x}{1+a^x}$$

е непрекъсната.

Съществува още едно общо правило, което позволява по дадени непрекъснати функции да построяваме нови. Това е правилото за непрекъснатост на функция от функция. Нека всички

стойности на функцията f принадлежат на дефиниционната област на функцията F. Тогава можем да образуваме функцията Φ, дефинирана с

(1) $$\Phi(x)=F(f(x)).$$

Тя има същата дефиниционна област както f и се нарича *функция от функция или съставна функция. Да предположим, че f е непрекъсната в точката x_0 и че F е непрекъсната в точката $f(x_0)$. При тези предположения се твърди, че функцията Φ е също непрекъсната в точката x_0.*

Наистина нека U е произволна околност на $\Phi(x_0)$. Съгласно (1) U ще бъде околност на $F(f(x_0))$ и тъй като функцията F е непрекъсната в точката $f(x_0)$, ще съществува такава околност V на $f(x_0)$, че за всяка точка v от V ще имаме

(2) $$F(v)\in U.$$

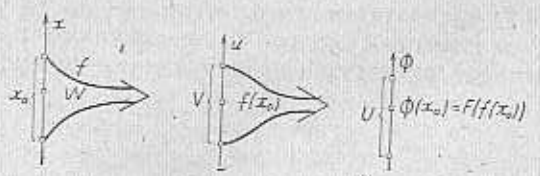
По този начин вече разполагаме с една околност V на $f(x_0)$. Но функцията f е непрекъсната в точката x_0. Следователно ще съществува такава околност W на x_0, че за всяко $x\in W$ да имаме $f(x)\in V$. Нека сега

(3) $$x\in W.$$

Съгласно избора на W ще имаме $f(x)\in V$, което заедно с (2) и избора на V дава

(4) $$\Phi(x)=F(f(x))\in U.$$

И така за всяка околност U на $\Phi(x_0)$ намерихме такава околност W на x_0, че за всяко x, за което е изпълнено (3), да е в сила (4). Съгласно дефиницията за непрекъсната функция това означава, че Φ е непрекъсната в точката x_0. Схематично горното доказателство е представено на черт. 39.



Черт. 39

От доказаното предложение най-напред следва, че ако функциите f и F са непрекъснати навсякъде в дефиниционните си области, функцията Φ е също непрекъсната навсякъде в дефиниционната си област. Понякога това се формулира накратко с думите: *непрекъсната функция от непрекъсната функция е също непрекъсната.*

Да положим сега $f(x)=x^2$, $F(u)=\sin u$. Тогава $\Phi(x)=\sin x^2$ и следователно функцията $\sin x^2$ е непрекъсната. Аналогично се вижда, че функциите $a^{\sin x}$ (където $f(x)=\sin x$ и $F(u)=a^u$), $\sqrt{\operatorname{tg} x}$, (където $f(x)=\operatorname{tg} x$ и $F(u)=\sqrt{u}$), $\frac{1}{\cos^2 x}$ и т. н. са непрекъснати.

Да резюмираме. Функциите x^α, a^x, $\log_a x$, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ $\operatorname{ctg} x$ и рационалните функции са непрекъснати. Освен това сума разлика, произведение и частно на непрекъснати функции, а също така непрекъсната функция от непрекъсната функция, са непрекъснати.

Всевъзможните функции, които се получават от функциите

$$x^\alpha,\ a^x,\ \log_a x,\ \sin x,\ \cos x,\ \operatorname{tg} x,\ \operatorname{ctg} x,$$

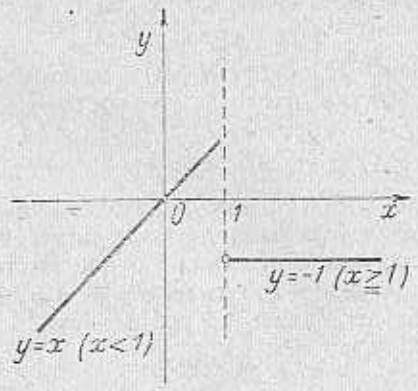
след като върху тях се приложат краен брой пъти действията събиране, изваждане, умножение, деление и образуване на функция от функция, се наричат *елементарни.*

Елементарните функции са непрекъснати. Така например функцията

$$\frac{\cos^3 x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{a^{\operatorname{tg} x}}{1+(\log_a x)^2}\cdot\frac{x^3+2}{x^2+x+\sin x}$$

е елементарна и следователно е непрекъсната. Един от главните обекти на вниманието ни в тази книга е класата на елементарните функции.

След като се запознахме с толкова много непрекъснати функ-



Черт. 40

ции, да разгледаме и един пример на прекъсната. Такава е функцията

$$f(x)=\begin{cases} x & (x<1) \\ -1 & (x\geq 1)\end{cases}$$

Графиката на тази функция е представена на черт. 40. Функцията f е дефинирана за всяко x и е очевидно прекъсната при $x=1$.

§ 4. НЯКОИ ПРИЛОЖЕНИЯ НА НЕПРЕКЪСНАТОСТТА В АЛГЕБРАТА

Задача 1. Нека тричленът

(1) $$P(x)=ax^2+bx+c$$

приема цели стойности само когато x е цяло число. Да се докаже, че при тези предположения имаме $a=0$.

Да допуснем противното, т. е., че $a\neq 0$. Без да ограничаваме общността можем да предполагаме, че $a>0$. Да образуваме разликата $P(n+1)-P(n)$, където n е произволно естествено число. Очевидно

$$P(n+1)-P(n)=a(n+1)^2+b(n+1)+c-(an^2+bn+c)$$
$$=2an+a+b$$

и следователно за всички n, за които

$$2an+a+b>1,$$

ще имаме

$$P(n+1)-P(n)>1.$$

Последното неравенство ни учи, че за всички достатъчно големи n ще съществуват цели числа m, за които

$$P(n+1)>m>P(n).$$

Тъй като функцията P е непрекъсната, от последното неравенство следва, че съществува число ξ, за което са изпълнени неравенствата

(2) $$n<\xi<n+1$$

и в същото време $P(\xi)=m$, което показва, че $P(\xi)$ е цяло. Съгласно условието ξ би трябвало да бъде цяло, което противоречи на (2). С това задачата е решена. На кое място в горните разсъждения бе използувано допускането, че $a\neq 0$?

Задача 2. Да се докаже, че уравнението

(3) $$\operatorname{tg} x=x$$

притежава решение във всеки от интервалите $\delta_k=\left(\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+(k+1)\pi\right)$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Да напомним, че функцията $\operatorname{tg} x$ е дефинирана и непрекъсната във всеки от интервалите δ_k. Нейната графика е представена на черт. 24, от който се вижда, че когато x се приближава към някоя от точките $\frac{\pi}{2}+k\pi$ отляво, $\operatorname{tg} x$ расте неограничено чрез положителни стойности, а когато x се приближава към $\frac{\pi}{2}+k\pi$ отдясно — функцията $\operatorname{tg} x$ расте неограничено чрез отрицателни стойности. По-подробно в това можем да се убедим така

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}+k\pi\right)=\cos(x+k\pi)=\cos x\cos k\pi-\sin x\sin k\pi=(-1)^k\cos x,$$

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}+k\pi\right)=-\sin(x+k\pi)=-\sin x\cos k\pi-\cos x\sin k\pi$$
$$=(-1)^{k+1}\sin x,$$

където е взето пред вид, че $\cos k\pi=(-1)^k$ и $\sin k\pi=0$; тогава

(4) $$\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{2}+k\pi\right)=-\frac{\cos x}{\sin x};$$

ако сега x се приближава към нулата чрез отрицателни стойности, $x+\frac{\pi}{2}+k\pi$ ще се приближава към $\frac{\pi}{2}+k\pi$ отляво и в същото време (4) показва, че действително $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$ расте неограничено чрез положителни стойности, защото поради непрекъснатостта $\cos x$ ще се приближава към $\cos 0=1$, а $\sin x$ ще се приближава към $\sin 0=0$, при което $\sin x<0$; аналогично се вижда, че когато x се приближава към нулата чрез положителни стойности, $x+\frac{\pi}{2}+k\pi$ ще се приближава към $\frac{\pi}{2}+k\pi$ отдясно, а $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$ ще расте неограничено чрез отрицателни стойности.

Сега да разгледаме функцията

(5) $$f(x)=\operatorname{tg} x-x$$

в някой от интервалите δ_k. Тъй като $\frac{\pi}{2}+k\pi<x<\frac{\pi}{2}+(k+1)\pi$, то

(6) $$\operatorname{tg} x-\left(\frac{\pi}{2}+(k+1)\pi\right)<f(x)<\operatorname{tg} x-\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right).$$

Да оставим сега x да се приближава към $\frac{\pi}{2}+k\pi$ отдясно. Тогава $\operatorname{tg} x$ ще расте неограничено чрез отрицателни стойности и второто от неравенствата (6) показва, че ще съществува $x_1 \in \delta_k$, за което

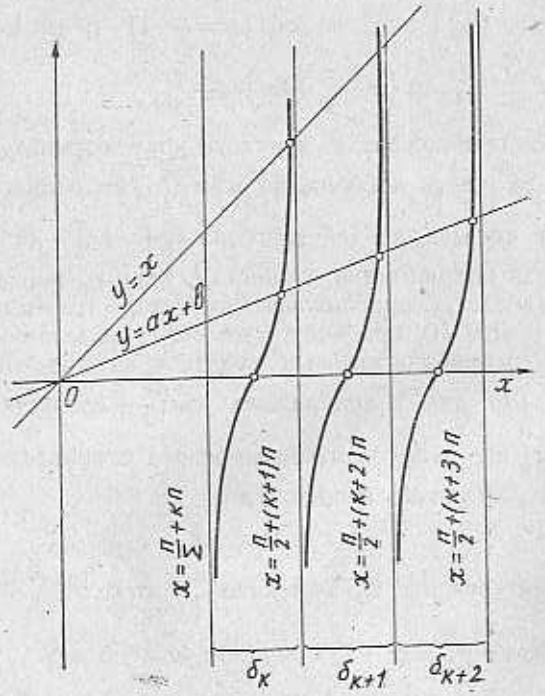
(7) $$f(x_1)<0.$$

Като използуваме първото от неравенствата (6), аналогично се убеждаваме, че съществува такава точка $x_2 \in \delta_k$, за която

(8) $$f(x_2)>0.$$

Тъй като функцията f е непрекъсната в δ_k, от (7) и (8) следва, че съществува такава точка $\xi \in (x_1, x_2)$, за която $f(\xi)=0$, което съгласно (5) показва, че $\operatorname{tg}\xi=\xi$, т. е. че ξ е решение на уравнението (3). За да решим задачата, остава да отбележим, че интервалът (x_1, x_2) се съдържа изцяло в интервала $\left(\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+(k+1)\pi\right)$ и следователно $\xi \in \delta_k$.

Полученият резултат е илюстриран на черт. 41. Този чертеж



Черт. 4

показва и нещо повече: тангенсоидата пресича всяка не вертикална права над кой да е от интервалите δ_k, т. е. уравнението

$$\operatorname{tg} x = ax+b$$

притежава решение във всеки от интервалите δ_k.

Задача 3. Нека P е произволен полином от нечетна степен. Да се докаже, че уравнението

(9) $$P(x)=\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}x^k=0 \quad (n\text{-нечетно})$$

има поне един корен.

Да напомним, че в §9 видяхме, че полиномите от нечетна степен приемат, при големи по абсолютна стойност отрицателни x, стойности със знак противоположен на този на a_0, а при големи по абсолютна стойност положителни x знакът на $P(x)$ съвпада с този на a_0. Без да ограничаваме общността можем да предполагаме, че $a_0>0$. Тогава от казаното следва, че ако x_1 е достатъчно голямо по абсолютна стойност отрицателно число, то

(10) $$P(x_1)<0,$$

а ако x_2 е достатъчно голямо по абсолютна стойност положително число, то

(11) $$P(x_2)>0.$$

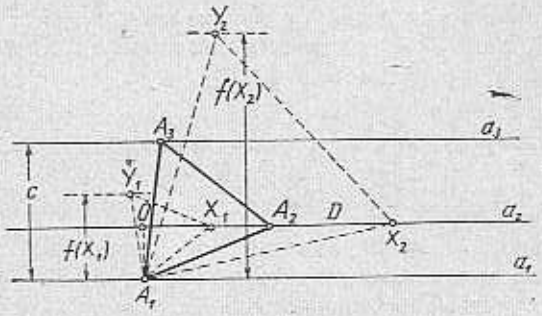
Тъй като полиномите са непрекъснати функции, твърдението следва от (10) и (11).

§ 5. НЯКОИ ПРИЛОЖЕНИЯ НА НЕПРЕКЪСНАТОСТТА В ГЕОМЕТРИЯТА

Задача 1. За всеки три успоредни прави a_1, a_2, a_3 съществува равностранен триъгълник $A_1A_2A_3$, за който A_i лежи върху a_i $(i=1, 2, 3)$.

Тук ще изложим решение, в което се използуват съображения за непрекъснатост. Да изберем по произволен начин точката A_1 върху правата a_1 (черт. 42). Това дава възможност на произволна точка X от правата a_2 да съпоставим по един равностранен триъгълник по следния начин: нека O е петата на перпендикуляра, спуснат от точката A_1 към правата a_2, и D е един от лъчите с начало O, лежащ върху правата a_2 (например този, който е насочен надясно); на произволна точка X от D съпоставяме равностранния триъгълник A_1XY, чийто връх Y лежи от

същата страна на правата $A_1 X$, от която лежи точката O. Очевидно разстоянието $f(X)$ от върха Y до правата a_1 е една непрекъсната функция на X (направете сами необходимите разсъж-



Черт. 42

дения с околности, за да се убедите в това). Да означим с c разстоянието между правите a_1 и a_3. Ясно е, че когато X_1 е достатъчно близко до O, то

(1) $$f(X_1) < c,$$

а когато X_2 е достатъчно далече от O, то

(2) $$f(X_2) > c.$$

Непрекъснатостта на f заедно с неравенствата (1) и (2) показва, че съществува точка A_2 между X_1 и X_2, за която $f(A_2)=c$. Съответният триъгълник $A_1 A_2 A_3$ е решение на задачата.

Задача 2. В пространството са дадени три прави l, m и n, които не лежат в една равнина и минават през една точка O. Нека P е произволна точка, която не лежи в никоя от равнините, определени от коя да е двойка от тези три прави, и правата OP не е перпендикулярна на никоя от правите l, m и n. Да се докаже, че при тези предположения съществува равнина Π през P със следните две свойства:

а) равнината Π пресича правите l, m, n съответно в точки X, Y и Z, различни от O;

б) в сила е равенството

$$PX = PY = PZ.$$

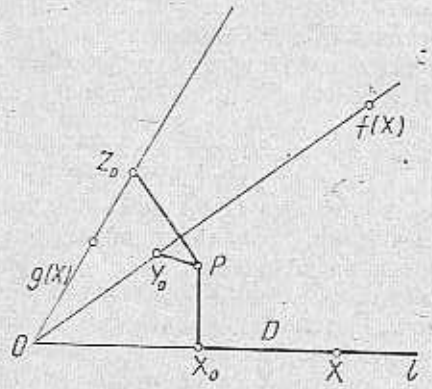
Нека PX_0, PY_0 и PZ_0 са перпендикулярите от P съответно към l, m и n. От условието веднага следва, че

(3) $$X_0 \neq 0,\ Y_0 \neq 0,\ Z_0 \neq 0.$$

Без да ограничаваме общността, можем да предполагаме, че

(4) $$PY_0 \leqq PX_0 \leqq PZ_0.$$

Да означим с D онзи лъч с начало X_0 върху правата l, който не съдържа точката O, а с E — лъча с начало Y_0 върху правата m, който не съдържа точката O.



Черт. 43

Нека сега X е произволна точка от лъча D. Сферата с център P и радиус PX пресича правата m, защото съгласно (4) и дефиницията на X_0 имаме

$$PY_0 \leqq PX_0 \leqq PX.$$

Ясно е, че за всяко $X \in D$ разгледаната сфера пресича лъча E в една единствена точка $f(X)$. Така получаваме една функция f, дефинирана върху лъча D и приемаща стойности върху лъча E. Не е трудно да се види, че тази функция е непрекъсната (направете сами необходимите за това разсъждения). Освен това съгласно дефиницията на f за всяко $X \in D$ имаме

(5) $$PX = Pf(X).$$

Сега ще покажем, че точките X, $f(X)$ и P никога не лежат на една права. Тъй като лъчите D и E не съдържат точката O, за всяко $X \in D$ имаме очевидно

$$X \neq O,\ f(X) \neq O.$$

Но тъй като правите l и m са различни, от последните две неравенства следва, че $X \neq f(X)$ и следователно X и $f(X)$ определят една единствена права, лежаща в равнината на правите l и m; точката P не може да лежи върху тази права, тъй като не лежи в равнината, определена от l и m. С това е доказано, че за всяко $X \in D$ точките X, $f(X)$ и P определят една равнина $\Pi(X)$.

В зависимост от X равнината $\Pi(X)$ ще пресича или пък няма да пресича правата n. Да означим с D' множеството на онези точки $X \in D$, за които $\Pi(X)$ пресича n. Ще дефинираме функция g, която на всяка точка $X \in D'$ съпоставя по една точка $g(X)$ от правата n по следния начин: съгласно дефиницията на D' за всяко $X \in D'$ равнината $\Pi(X)$ има общи точки с правата n; да покажем, че в същност за всяко такова X равнината $\Pi(X)$ и правата n имат само една обща точка; за целта е достатъчно да се убедим, че n не лежи в $\Pi(X)$, което действително е невъзможно, защото в противен случай и точката O би лежала в $\Pi(X)$ и следователно $\Pi(X)$ би съвпадала с равнината, определена от правите l и m, което противоречи на условието, че P не лежи в тази равнина; за произволно $X \in D'$ с $g(X)$ означаваме единствената обща точка на $\Pi(X)$ и n. С това функцията g е дефинирана. Понеже $f(X)$ зависи по непрекъснат начин от X, равнината $\Pi(X)$ също ще се изменя малко, когато X се премества малко, и следователно пресечната точка $g(X)$ на $\Pi(X)$ с n ще бъде непрекъсната функция на X.

Когато точката X се отдалечава неограничено от X_0, движейки се върху лъча D, PX ще расте неограничено и съгласно (5) $Pf(X)$ също ще расте неограничено, поради което $f(X)$ ще се отдалечава неограничено от Y_0, оставайки върху лъча E. Не е трудно да се забележи, че при това положение равнината $\Pi(X)$ ще се стреми да се слее с равнината Π_0, която минава през P и е успоредна на правите l и m. Очевидно правата n пресича Π_0 и следователно n ще пресича $\Pi(X)$ за всички X, които са достатъчно далече от X_0, т. е. всички такива X принадлежат на дефиниционната област D' на функцията g. Освен това когато X е достатъчно далече от X_0, пресечната точка $g(X)$ на $\Pi(X)$ с n ще се намира около пресечната точка Z_1 на Π_0 с n и следователно разстоянието $Pg(X)$ ще остава ограничено. Тъй като в същото време PX може да се направи произволно голямо, ще съществува такава точка $X_1 \in D'$, че

$$PX_1 > Pg(X_1). \tag{6}$$

Твърдим, че в D' съществува и такава точка X_2, че

$$PX_2 \leqq Pg(X_2). \tag{7}$$

За да се убедим в това, необходимо е да разгледаме два случая.

Случай а). Нека D' съвпада с D, т. е. за всяко X от лъча D равнината $\Pi(X)$ пресича правата n. Тогава можем да положим $X_2 = X_0$. Тъй като $g(X_0)$ лежи върху n, съгласно дефиницията на Z_0 и второто от неравенствата (4) ще имаме

$$PX_0 \leqq PZ_0 \leqq Pg(X_0),$$

което показва, че (7) действително е изпълнено при $X_2 = X_0$.

Случай б). Нека D' не съвпада с D, т. е. нека съществуват точки $X \in D$, за които $\Pi(X)$ не пресича n. Да означим с X_3 онази от тях, която е най-близко до X_1. Нека оставим сега точката X да се движи от X_1 към X_3, като й позволим да се приближава неограничено към X_3. Тогава $\Pi(X)$ ще се стреми да се слее с $\Pi(X_3)$, която равнина съгласно избора на X_3 не пресича n. Следователно пресечната точка $g(X)$ на $\Pi(X)$ с n ще се отдалечава неограничено от Z_0, а в същото време X ще се намира около X_3. Ясно е тогава, че PX остава ограничено, докато $Pg(X)$ расте неограничено, поради което ще съществува точка X_2 между X_1 и X_3, за която е в сила (7).

По този начин и в двата случая а) и б) успяхме да посочим точка $X_2 \in D'$, за която е в сила (7). Но ако се вгледаме внимателно в разсъжденията, които направихме, ще се убедим, че и цялата отсечка $X_1 X_2$ се съдържа в D'. И така в интервала $[X_1, X_2]$ имаме две непрекъснати функции PX и $Pg(X)$, за които в краищата на този интервал са изпълнени неравенствата (6) и (7). Тогава разликата

$$H(X) = PX - Pg(X)$$

на тези две функции ще бъде непрекъсната и в краищата на интервала $[X_1, X_2]$ ще приема стойности с противни знаци, което, както знаем, е достатъчно, за да можем да твърдим, че съществува точка $X \in [X_1, X_2]$, за която

$$PX - Pg(X) = 0.$$

Последното равенство и равенството (5) показват, че разстоянията

$$PX,\ Pf(X),\ Pg(X)$$

са равни. Освен това всяка от точките X, $f(X)$, $g(X)$ и P лежи

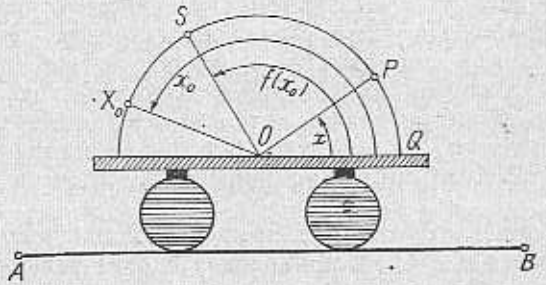
в равнината $\Pi(X)$, поради което, за да решим задачата, остава само да положим $Y=f(X)$, $Z=g(X)$.

§ 6. НЯКОИ ПРИЛОЖЕНИЯ НА НЕПРЕКЪСНАТОСТТА ВЪВ ФИЗИКАТА

Задача 1 (Уитни). Да си мислим един прът OP, закачен шарнирно в точка O от платформата на един вагон, който се движи по хоризонталната ж. п. линия от гара A към гара B. За шарнира O се предполага, че той не позволява на пръта OP да напуска една неподвижно свързана с вагона вертикална равнина през O (равнинен шарнир). Никакви други предположения за шарнира O, и в частност предположение, за отсъствие на триене, не се правят. Краят на пръта P ще се движи върху една полуокръжност с център O и радиус OP. Иска се да се докаже, че за всяка точка X_0 от полуокръжността и за всеки закон на движение на вагона от A до B съществува такова начално положение OP_0 на пръта, че в момента, в който вагонът пристигне в точка B, пръчтът OP да се намира в положението OX_0.

Да отбележим, че ако по време на движението пръчтът падне върху платформата, инерциялните сили няма да са в състояние да го повдигнат от нея, понеже по предположение ж. п. линията е хоризонтална; така че ако това се случи, пръчтът ще остане в положението, в което е паднал, до края на движението; оттук в частност следва, че ако X_0 не лежи върху пръчтът няма да падне и, разбира се, в последния момент ще съвпадне с OX_0. Даже самият факт, че съществува движение на платформата от A до B и начално положение на пръта, за които е в сила твърдението, е интересен; но тук се твърди значително повече, а именно че не само крайното положение OX_0 на пръта се задава произволно, но движението на вагона от A към B е също съвсем произволно (в частност позволени са спирания за известно време, връщания назад и т. н.).

За да докажем верността на твърдението, ще използуваме само съображения за непрекъснатост. Да разгледаме едно произволно движение на влака от A до B. Във всички по-нататъшни разсъждения това движение ще остава фиксирано. Обстоятелството, че вече сме фиксирали движението на вагона, позволява да дефинираме една функция f в интервала $[0,\pi]$, която също приема стойности от нула до π. Нека x е произволен ъгъл, $0 \leq x \leq \pi$. Разглеждаме такова начално положение на пръта, за което $\sphericalangle QOP=x$. След това заставяме вагона да извърши фиксираното движение от A до B. Пръчтът, който в началото на това движение е сключвал ъгъл x с правата OQ, също ще се движи при това движение на вагона (черт. 44) и при пристигането на влака в B ще заеме някакво крайно положение OS. Това крайно поло-



черт. 44

жение зависи само от началното положение OP. Ако сега положим $f(x)=\sphericalangle QOS$, получаваме една функция f, която е дефинирана в интервала $[0,\pi]$ и приема стойности в същия интервал. От физически съображения следва, че функцията f е непрекъсната.

Да пресметнем сега $f(0)$. Когато $x=0$, началното положение OP сключва ъгъл нула с платформата, поради което пръчтът ще остане неподвижен през време на цялото движение; следователно в този случай ще имаме $OS=OP=OQ$ и

(1) $$f(0)=0$$

Аналогично се вижда, че

(2) $$f(\pi)=\pi.$$

Нека сега

$$\sphericalangle QOX_0=x_0.$$

Тогава по силата на (1) и (2) ще имаме

$$f(0)=0 \leq x_0 \leq \pi=f(\pi)$$

и тъй като функцията f е непрекъсната, в интервала $[0,\pi]$ ще съществува такава точка ξ_0, че

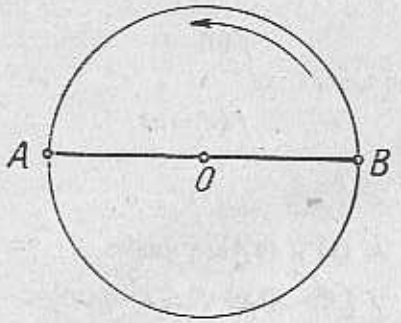
(3) $$f(\xi_0)=x_0.$$

Нека P_0 е такава точка от полуокръжността, че $\sphericalangle QOP_0 = \xi_0$. Съгласно дефиницията на f равенство (3) означава, че ако в началото на движението пръчът заема положението OP_0, в края му той ще заеме положението OX_0. С това задачата е решена.

Задача 2. Да се докаже, че във всеки момент върху земното кълбо има две противоположни точки с еднакви температури.

За да докажем това, ще използуваме съображения за непрекъснатост и два идеални термометъра. Идеален термометър ще наричаме термометър, който моментално отчита температурата; ако движим такъв термометър в някаква среда (например във въздушна) с различни температури в различните точки, върхът на живачния стълб ще се движи, като във всеки момент ще показва точната температура на точката, в която термометърът се намира. Движението на този връх е всъщност движение на точка върху права.

При доказателството ще използуваме един мислен експеримент. Да пресечем земната повърхнина с една равнина, която минава през центъра ѝ. Така получаваме една окръжност. Да изберем две противоположни точки от тази окръжност и да поставим във всяка от тях по един идеален термометър. Ако температурите в тях се окажат еднакви — добре. Ако се окажат различни, единият от термометрите, например A ще показва по-малка температура от другия. Да съединим двете точки с един прът, който е диаметър на окръжността (черт. 45). Нека завъртим пръта на 180° около центъра му, докато краищата му разменят местата



Черт. 45

си (въртене на 180°). При това движение върховете на живачните стълбове на двата термометъра също ще се движат. В края на това движение термометърът A ще показва вече по-висока температура от термометъра B (A ще показва точно онази температура, която B е показвал в началото на движението). Тъй като в началото на движението температурите на термометрите бяха свързани с противоположното неравенство, ще има момент от движението, в който те показват еднакви температури. С това задачата е решена, понеже точките A и B оставаха противоположни по време на цялото движение на пръта.

Понеже равнината, с която пресякохме Земята, беше произволно избрана, вярно е повече от формулираното. Именно върху всяка голяма окръжност от земната сфера във всеки момент съществуват две противоположни точки с еднакви температури. Следователно във всеки момент двойките противоположни точки върху земната повърхнина с еднакви температури са безбройно много.

Съвсем аналогични разсъждения показват, че във всеки момент върху Земята има безбройно много двойки противоположни точки с еднакви барометрични налягания (за да се покаже това, е достатъчно в горните разсъждения термометрите да се заменят с барометри).

И така оказа се, че съществуват, от една страна, безбройно много двойки противоположни точки с еднакви температури и безбройно много такива двойки с еднакви налягания. Като се използуват по-дълбоки от приведените по-горе съображения за непрекъснатост, може да се докаже, че тези две множества имат общи елементи, т. е. че във всеки момент върху земната повърхнина съществуват две противоположни точки, които имат както еднакви температури, така и еднакви налягания.

§ 7. РАВНОМЕРНО ДВИЖЕНИЕ

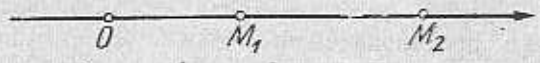
Най-простото от всички движения е равномерното. Всеки е наблюдавал движения на различни обекти, които повече или по-малко се приближават до него. Обикновено равномерното движение се схваща като такова, при което една точка изминава равни пътища за равни интервали от време. Последната фраза съдържа неяснота, тъй като в нея не е указано за кои равни интервали от време точката изминава равни пътища.

Ето точната дефиниция. Казваме, че една точка се движи равномерно, когато за *всеки* два равни интервала от време изминава равни пътища. „Всеки два равни интервала от време" означава в частност, че тези интервали могат да бъдат и *произволно малки*. Всъщност това е най-важният пункт от дефиницията. Ако

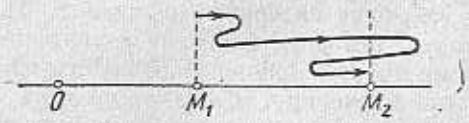
един автомобил се движи и в първия час от своето движение е изминал 50 км, във втория час — също 50 км и т. н., съгласно дефиницията това още не означава, че той се движи равномерно, защото например в първите 30 мин. може да е изминал 20 км, а в следващите 30 мин. — 30 км.

Но какво да разбираме под път? Нека в моментите t_1 и t_2 точката M се е намирала съответно в положенията M_1 и M_2 върху числовата права. Пътят, който е изминала точката M в интервала от време $[t_1, t_2]$, е дължината на насоченатa отсечка $\overline{M_1M_2}$. Следователно той е положителен, ако M_2 е вдясно от M_1 и е отрицателен в противния случай (ако M_1 и M_2 съвпадат, т. е. ако в момента t_2 точката M се е върнала отново в положението, в което е била в момента t_1, изминатият път е нула). От черт. 46 се вижда, че пътят, който точката M е изминала в интервала от време $[t_1, t_2]$, е равен на разликата $\overline{OM_2}-\overline{OM_1}$ на насочените отсечки OM_2 и OM_1. Да отбележим, че ако M е автомобил, съг-

Черт. 46



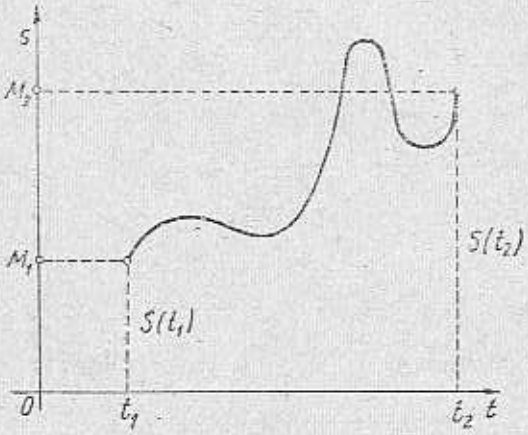
ласно дефиницията пътят, който той е изминал в интервала от време $[t_1, t_2]$, е равен на разликата между показанията на километража в моментите t_2 и t_1. Ако по време на движението автомобилът се е движил и на заден ход и впоследствие е продължил движението си напред, горното твърдение продължава да запазва валидността си, тъй като при движение на заден ход километражът „връща", т. е. измерва отрицателен път. По-общо, ако точката се е движила, както това е показано на черт. 47, пътят, който тя изминава съгласно дефиницията, е равен на дължината на насочената отсечка $\overline{M_1M_2}$, а не на реално изминатия път (изминатите в противоположни посоки пътища се унищожават).



Черт. 47

Ако законът на движението на M е $S=S(t)$, пътят, който тази точка е изминала в интервала от време $[t_1, t_2]$, е $S(t_2)-S(t_1)$.

Понякога движенията се онагледяват по един удобен начин чрез графиките си. Под *графика на едно движение* се разбира графиката на закона на това движение. Графиката на движението, изобразено на черт. 47, е показана на черт. 48.



Черт. 48

Ще разгледаме още един пример на движение, при което за всеки два интервала от време с дължина 2π подвижната точка изминава равни пътища и движението въпреки това не е равномерно. Такова е движението, чийто закон се дава с формулата

(1) $$S(t)=t+\sin t.$$

Наистина ако $[t_1, t_2]$ е произволен интервал с дължина 2π, т. е

(2) $$t_2=t_1+2\pi,$$

за пътя, който точката M изминава в интервала от време $[t_1, t_2]$, съгласно (1) ще имаме

$$S(t_2)-S(t_1)=t_2-t_1+\sin t_2-\sin t_1.$$

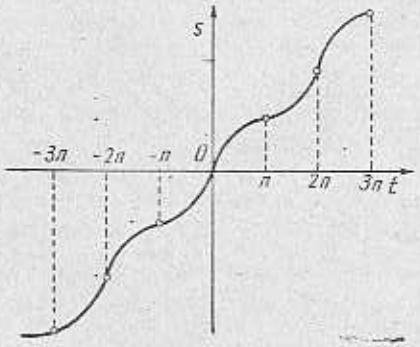
Ако сега използуваме това равенство и (2), ще получим

$$S(t_2)-S(t_1)=2\pi+\sin(t_1+2\pi)-\sin t_1=2\pi,$$

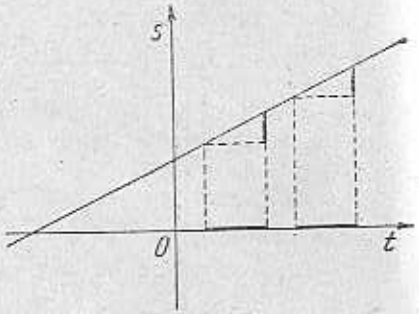
т. е. за всеки интервал от време с дължина 2π подвижната точка изминава път с дължина 2π. Предоставяме на читателя да се убеди, че това движение не е равномерно, като за целта посочи два равни интервала от време (например с дължини π), през които точката изминава различни пътища.

Графиката на това движение, от която директно могат да се видят така изброените особености, е изобразена на черт. 49.

Ако графиката на едно движение е права линия, движението е равномерно. Наистина черт. 50 показва, че за всеки два равни



Черт. 49



Черт. 50

интервала от време подвижната точка изминава равни пътища. Не по-трудно това се вижда и от закона на движението, който в този случай е

$$S(t)=a\,t+b,$$

където a и b са произволни константи.

§ 8. ЕДНА ХАРАКТЕРИСТИКА НА ЛИНЕЙНИТЕ ФУНКЦИИ

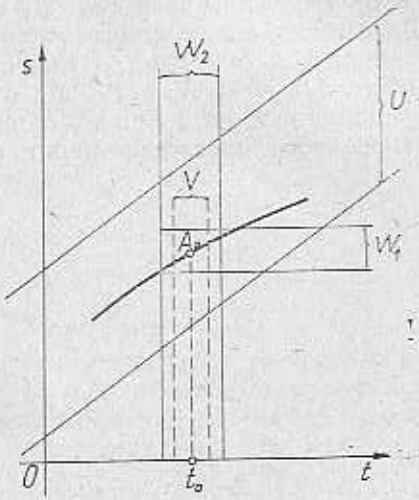
Вече видяхме, че ако графиката на едно движение е права линия, движението е равномерно. Тук ще докажем, че е вярно и обратното, т. е. че графиката на всяко равномерно движение е права линия.

Да отбележим най-напред някои свойства на графиката на равномерното движение.

Свойство 1. Нека A_0 е произволна точка от графиката на едно равномерно движение, t_0 е съответният момент от времето и U е произволна, съдържаща A_0 във вътрешността си, ивица от равнината, определена от две успоредни прави (черт. 51). При тези предположения съществува такава околност V на момента t_0,

че за всеки момент t от околността V съответната точка от графиката се намира в U.

Това свойство е просто следствие от непрекъснатостта на движението. За да се убедим във верността му, е достатъчно



Черт. 51

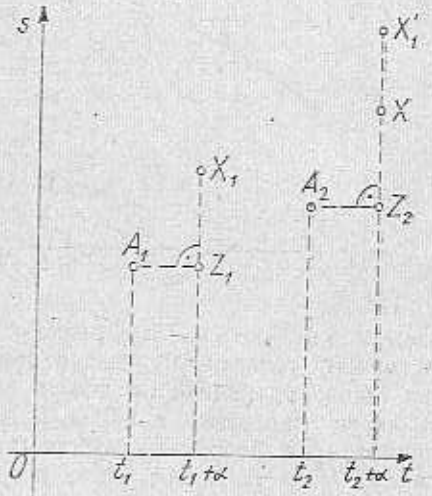
най-напред да вземем хоризонтална и вертикална ленти, които, от една страна, съдържат точката A_0 във вътрешността си, а от друга, са толкова тесни, че общите им точки се съдържат в U; означаваме тези ленти съответно с W_1 и W_2. От геометричния смисъл на дефиницията на непрекъснатостта (вж. §2) следва, че съществува околност V на t_0 такава, че за всяко t от тази околност съответната точка от графиката да принадлежи на W_1. Ако сега се погрижим да изберем околността V на t_0 така, че да се съдържа и в W_2, ясно е, че за всяко t от V съответната точка от графиката ще се съдържа не само в W_1, а и в W_2, с което това свойство е доказано.

Да отбележим изрично, че при доказателството на това свойство предположението, че имаме работа с графика на равномерно движение далеч не бе използувано в цялата му пълнота. Единственото, което използвахме, беше, че работим с графика на непрекъсната функция.

Свойство 2. Нека A_1 и A_2 са две произволни точки от графиката на едно равномерно движение. Ако извършим успоредно

пренасяне по правата $A_1 A_2$, така че A_1 да съвпадне с A_2, цялата графика на движението ще съвпадне със себе си.

При доказателството на това свойство ще използуваме твърде съществено равномерността на движението. Да означим с X_1 произволна точка от графиката на движението. Ще докажем само, че при разглежданото успоредно пренасяне X_1 се пренася в точка от графиката. Да означим с t_1 и t_2 моментите от времето, които съответствуват на A_1 и A_2, а с $t_1+\alpha$, — момента, съответствуващ на точката X_1 (черт. 52). Нека X_2 е точката от графиката, която съответствува на момента $t_2+\alpha$, а Z_1 и Z_2 са определени както на чертежа. При успоредното пренасяне A_1 ще отиде в A_2, Z_1 ще



Черт. 52

отиде в Z_2, а X_1 в някаква точка X_1', лежаща върху вертикалната права през Z_2. Имаме да докажем, че

(1) $$X_1'=X_2,$$

за което е достатъчно да се убедим, че насочените отсечки $\overline{Z_2X_2}$ и $\overline{Z_2X_1'}$ са равни. За тази цел да отбележим най-напред, че

(2) $$\overline{Z_2X_2}=S(t_2+\alpha)-S(t_2),$$

където S е законът на движението; наистина и двете страни на

това равенство представляват пътя, който подвижната точка изминава, докато t пробягва интервала $(t_2, t_2+\alpha)$. Освен това имаме

(3) $$S(t_2+\alpha)-S(t_2)=S(t_1+\alpha)-S(t_1),$$

понеже двете страни на това равенство представляват пътищата, които подвижната точка изминава през равните интервали от време $(t_2, t_2+\alpha)$ и $(t_1, t_1+\alpha)$ и движението е равномерно. От друга страна, очевидно имаме

(4) $$S(t_1+\alpha)-S(t_1)=\overline{Z_1X_1}.$$

Да напомним още, че при успоредното пренасяне Z_1 отива в Z_2, а X_1 — в X_1', поради което

(5) $$\overline{Z_1X_1}=\overline{Z_2X_1'}.$$

От равенствата (2), (3), (4) и (5) получаваме

$$\overline{Z_2X_2}=\overline{Z_2X_1'},$$

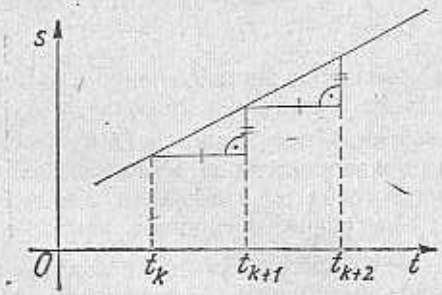
откъдето, както знаем, следва (1) и свойство 2 е доказано.

Свойство 3. Нека t_0 е произволен момент от времето и α е реално число. Тогава точките от графиката на произволно равномерно движение, съответствуващи на моментите

$$t_k=t_0+k\alpha \qquad (k=0,\pm1,\pm2,\ldots),$$

където k е произволно цяло число, лежат на една права.

Твърдението следва непосредствено от обстоятелството, че интервалите (t_k, t_{k+1}) имат равни дължини, и от равномерността на движението (вж. черт. 53).

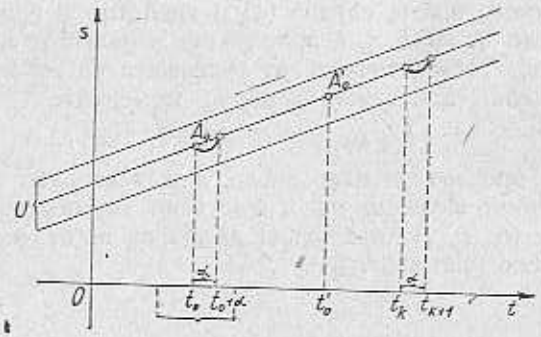


Черт. 53

Да обърнем внимание, че в това свойство не се поставя ограничение за числото α и следователно то може да бъде избирано

съвършено произволно. Колкото и да е малко α, и както и да е избран моментът t_0, винаги получаваме безбройно много точки от графиката, които лежат на една права. За сметка на произвола на избора на α тези безбройно много, лежащи върху една права, точки от графиката могат да се направят колкото си искаме гъсто в нея. Но това все още не е доказателство, че *всичките* точки от графиката лежат върху една права. Нещо повече, може да се докаже, че не е възможно да се даде доказателство на линейността на графиката на равномерното движение, без да се използува непрекъснатостта.

Сега вече сме в състояние да докажем, че графиката на всяко равномерно движение е права линия. Да зафиксираме два момента t_0 и t_0' $(t_0 \neq t_0')$ и да означим с A_0 и A_0' съответните им точки от графиката. Ще докажем, че графиката на разглежданото равномерно движение съвпада с правата $A_0 A_0'$. За тази цел да избе-



Черт. 54

рем най-напред произволна ивица U, която е определена от две прави успоредни на $A_0 A_0'$, и съдържа правата $A_0 A_0'$ във вътрешността си. Тогава точката A_0 ще лежи в U и съгласно свойство 1 ще съществува такава околност V на момента t_0, че за всяко t от V съответната точка от графиката да лежи в U. Разделяме интервала (t_0, t_0') на равни интервали, чиято обща дължина α е толкова малка, че първият от тях да се съдържа изцяло във V. От свойство 3 следва, че точките от графиката, съответствуващи на моментите

$$t_k = t_0 + k\alpha \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots),$$

ще лежат върху правата $A_0 A_0'$. От друга страна, съгласно избора на V всички точки от графиката, които са над V, ще лежат в лентата U (черт. 54). Следователно и всички точки от графиката, които лежат над интервала $(t_0, t_0+\alpha)$, ще лежат в U. Съгласно свойство 2 частта от графиката на движението, която лежи над интервала

$$(t_k, t_{k+1}) \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

ще се получи от тази над $(t_0, t_0+\alpha)$ чрез успоредно пренасяне по правата $A_0 A_0'$ и следователно също ще лежи в U. Понеже k е произволно естествено число, оттук следва, че цялата графика на движението ще лежи в U. Но ивицата U е с произволна ширина (и следователно може да бъде избрана произволно тясна), а това е възможно само когато графиката съвпада с правата $A_0 A_0'$. С това е доказано, че графиката на всяко равномерно движение е права линия.

Преведено на аналитичен език, последното твърдение дава една характеристика на линейните функции. При преводи от механичен на аналитичен език терминът път се замества с термина *нарастване*. Така под нарастване на една функция f в интервала $[x_1, x_2]$ разбираме разликата

$$f(x_2) - f(x_1).$$

Доказаното по-горе може да се формулира и така.

Ако една функция е дефинирана и непрекъсната върху цялата права и за всеки два интервала с равни дължини има еднакви нараствания, тя е линейна.

И наистина при доказателството, че графиката на равномерното движение е права линия, използувахме само неговата непрекъснатост и обстоятелството, че за равни интервали от време точката изминава равни пътища.

Да разгледаме сега една функция f, която е дефинирана и непрекъсната върху цялата числова права и удовлетворява функционалното уравнение

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) \tag{6}$$

при всеки избор на числата x_1 и x_2. Ще докажем най-напред, че за всеки два интервала $[x_1, x_2]$ и $[x_1', x_2']$ с равни дължини функцията f има еднакви нараствания. Наистина равенството на дължините на дадените интервали означава, че $x_2 - x_1 = x_2' - x_1'$, т. е.

$x_2+x_1'=x_2'+x_1$. Последното равенство заедно с (6) дава $f(x_2)+f(x_1')=f(x_2')+f(x_1)$, т. е. $f(x_2)-f(x_1)=f(x_2')-f(x_1')$, което показва действително, че f има еднакви нараствания в интервали с еднакви дължини. Следователно функцията f е линейна, т. е. съществуват две такива константи a и b, че за всяко реално число x да е изпълнено равенството

(7) $$f(x)=ax+b.$$

Тъй като равенството (6) е изпълнено при произволни x_1 и x_2, ще имаме $f(0)=f(0)+f(0)$, т. е. $f(0)=0$. Ако сега заместим в (7) x с нула, ще получим $f(0)=b$, което заедно с последното равенство дава $b=0$, което пък от своя страна заедно със (7) дава

(8) $$f(x)=ax$$

за всяко x.

Така се убедихме, че *всяка функция f, която е дефинирана и непрекъсната върху цялата числова права и удовлетворява функционалното уравнение* (6), *има вида* (8). Тъй като всяка функция от вида (8) очевидно удовлетворява уравнението (6), това функционално уравнение е една характеристика на функциите от вида (8). В следващите два параграфа ще използуваме (6), за да намерим аналогични функционални уравнения за показателната и логаритмичната функции.

§ 9. ФУНКЦИОНАЛНО УРАВНЕНИЕ НА ПОКАЗАТЕЛНАТА ФУНКЦИЯ

В този параграф ще покажем, че *всяка функция f, която е дефинирана и непрекъсната върху цялата числова права, не е тъждествено нула и удовлетворява функционалното уравнение*

(1) $$f(x_1+x_2)=f(x_1)f(x_2)$$

при всеки избор на x_1 и x_2, е показателна, т. е. съществува такава константа $a>0$, че

(2) $$f(x)=a^x$$

за всяко x.

Чрез логаритмуване уравнението (1) ще сведем към (8.6), но преди това трябва да „узаконим“ логаритмуването. Тъй като дефиниционната област на логаритмичната функция се състои от положителните числа, за тази цел ще покажем, че всяка функция

f с предположените свойства е положителна за всяко x. За тази цел да се убедим най-напред, че f не може да се анулира за никое x. Съгласно условието f не е тъждествено нула и следователно съществува число x_0, за което

(3) $$f(x_0)\neq 0.$$

За да покажем, че $f(x)\neq 0$ за всяко x, да положим в (1) $x_1=x$, $x_2=x_0-x$. Ще получим

$$f(x+x_0-x)=f(x).f(x_0-x),$$

или, което е все същото,

(4) $$f(x)f(x_0-x)=f(x_0)$$

за всяко x, което заедно с (3) дава

(5) $$f(x)\neq 0$$

за всяко x.

За да докажем, че f е положителна за всяка стойност на аргумента си, е достатъчно да покажем, че f не може да приеме отрицателна стойност за никое x. Наистина

$$f(x)=f\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)=f\left(\frac{x}{2}\right)f\left(\frac{x}{2}\right)=\left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2\geq 0.$$

Последното неравенство заедно с (5) дава

(6) $$f(x)>0,$$

което е изпълнено за всяко x. Следователно функцията φ, определена с

(7) $$\varphi(x)=\lg f(x),$$

е дефинирана върху цялата числова права. Лесно се вижда, че φ удовлетворява функционалното уравнение (8.6). Наистина за всеки избор на x_1 и x_2 имаме

$$\varphi(x_1+x_2)=\lg f(x_1+x_2)=\lg f(x_1)f(x_2)=\lg f(x_1)+\lg f(x_2)$$
$$=\varphi(x_1)+\varphi(x_2).$$

От друга страна, тъй като логаритмичната функция е непрекъсната и f по условие е също непрекъсната, от (3.1) следва, че $\lg f(x)$ е непрекъсната. Следователно φ има вида (8.8), т. е. съществува константа p такава, че $\varphi(x)=px$ за всяко x. Последното равенство заедно със (7) дава $\lg f(x)=px$ или като антилогаритмуваме

(8) $$f(x)=10^{xp}.$$

Ако в (8) положим $10^p = a > 0$, ще получим (2), с което предложението е доказано.

Обратно, ако $f(x) = a^x$, очевидно

$$f(x_1 + x_2) = a^{x_1 + x_2} = a^{x_1} a^{x_2} = f(x_1) f(x_2).$$

Ако f е тъждествено нула, тя удовлетворява (1), но не може да бъде представена във вида (2), понеже $a^x > 0$.

Да резюмираме: *като изключим тривиалния случай $f = 0$, няма други непрекъснати функции освен показателната, които да удовлетворяват уравнението (1)*, поради което то се нарича функционално уравнение на показателната функция.

§ 10. ФУНКЦИОНАЛНО УРАВНЕНИЕ НА ЛОГАРИТМИЧНАТА ФУНКЦИЯ

В предния параграф видяхме, че показателната функция се характеризира с уравнението (9.1), което всъщност е правилото за умножение на степени с еднакви основи. При логаритмите такова основно правило е правилото за логаритмуване на произведение. Тук ще покажем, че това правило характеризира логаритмичната функция. По-точно ще покажем, че всяка функция f, дефинирана и непрекъсната в $(0, \infty)$, която не е тъждествено нула и удовлетворява функционалното уравнение

(1) $$f(x_1 x_2) = f(x_1) + f(x_2)$$

за всеки избор на положителните числа x_1 и x_2, е логаритмична, т. е. съществува положителна константа a, такава, че

(2) $$f(x) = \log_a x \qquad (x > 0).$$

За да докажем, че всяка функция f с предположените свойства има вида (2), ще използуваме резултатите от § 8, както направихме при показателната функция. За тази цел ще дефинираме функцията φ посредством равенството

(3) $$\varphi(x) = f(10^x).$$

Ще покажем, че φ е дефинирана и непрекъсната върху цялата числова права и удовлетворява условието за линейност (8.6); от това ще следва, че φ има вида (8.8). Наистина тъй като $10^x > 0$ за всяко x и f е дефинирана за всяка положителна стойност на аргумента си, следва, че $f(10^x) = \varphi(x)$ е дефинирана за всяко x. Понеже 10^x е непрекъсната, f по условие е непрекъсната, съгласно (3.1) φ също е непрекъсната функция. С това е показано, че φ е дефинирана и непрекъсната върху цялата числова права.

За да докажем линейността на φ, да изберем две произволни числа x_1 и x_2 и да образуваме $\varphi(x_1 + x_2)$. Имаме

$$\varphi(x_1 + x_2) = f(10^{x_1 + x_2}) = f(10^{x_1} 10^{x_2}).$$

Съгласно (1) $f(10^{x_1} 10^{x_2}) = f(10^{x_1}) + f(10^{x_2})$. Съгласно (3) $f(10^{x_1}) = \varphi(x_1)$, $f(10^{x_2}) = \varphi(x_2)$. Следователно

$$\varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2)$$

при всеки избор на x_1 и x_2. Така установихме, че φ има вида

(4) $$\varphi(\xi) = p\xi,$$

където p е константа. Като се вземе пред вид (3), равенството (4) добива вида

(5) $$f(10^\xi) = p\xi.$$

Ако сега в (5) положим $10^\xi = x$, или, което е все същото, $\xi = \lg x$, ще получим

(6) $$f(x) = p \lg x,$$

където $p \neq 0$, тъй като по предположение f не е тъждествено нула.

Читателят отлично знае, че всяко реално число, различно от нула, е десетичен логаритъм на едно единствено положително число, различно от единица. Следователно чрез равенството

(7) $$\frac{1}{p} = \lg a$$

на всяко $p \neq 0$ се съпоставя по единствен начин едно положително число $a \neq 1$ (т. е. $\lg a \neq 0$). Като вземем пред вид полагането (7), равенството (6) добива вида

(8) $$f(x) = \frac{\lg x}{\lg a} \qquad (a > 0,\ a \neq 1).$$

Последното равенство е всъщност равенството (2), което се вижда лесно с помощта на формулата

$$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}$$

при $b = 10$ и $N = x$. С това предложението е доказано.

Непосредствено се вижда, че логаритмичната функция удовлетворява (1), т. е. че съществува решение на това функционално уравнение.

Да резюмираме: *общото решение на функционалното уравнение (1) в множеството на непрекъснатите реални функции (като се изключва тривиалният случай $f = 0$) е логаритмичната функция.*

Задачи към глава 2

1. Нека $f(x)=\frac{x}{x+1}$. Да се докаже, че ако положителното число x е приближение на числото 1 с точност 0,2, то $f(x)$ е приближение на $f(1)$ с точност 0,1.

2. Нека $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$ и ε е произволно положително число. Да се докаже, че ако положителното число x е приближение на числото 2 с точност $\frac{3}{2}\varepsilon$, то $f(x)$ е приближение на $f(2)$ с точност ε.

3. Нека $f(x)=x^2$ и ε е число, за което $0<\varepsilon<9$. Да се намерят всички положителни числа δ със следното свойство: за всяко положително число x, което е приближение на числото 3 с точност δ, $f(x)$ е приближение на $f(3)$ с точност ε.

Отг. $0<\delta\leq\sqrt{9+\varepsilon}-3$

4. Нека

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{когато } x \text{ е рационално число,}\\ 0, & \text{когато } x \text{ е ирационално число.}\end{cases}$$

Да се докаже, че функцията f е прекъсната за всяко x.

5. Нека

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{1-x^3}-\frac{1}{3(1-x)}, & x\neq 1,\\ \frac{1}{3} & x=1.\end{cases}$$

Да се докаже, че функцията f е непрекъсната за всяко x.

Упътване. Докажете, че $f(x)=\frac{x+2}{3(x^2+x+1)}$ за всяко x.

6. Нека многочленът $P(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k}$ приема цели стойности само когато x е цяло число. Да се докаже, че при тези предположения имаме $a_i=0$ $(i=0, 1, \ldots, n-2)$.

7. Нека P е произволен полином. Докажете, че уравнението

$$P(x)=\operatorname{ctg} x$$

притежава поне по едно решение във всеки от интервалите $(k\pi, (k+1)\pi)$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

8. В равнината е зададена отсечка CC_1 и точка H от вътрешността ѝ. Да се докаже, че съществува равнобедрен триъгълник ABC, за който CC_1 е височина към основата AB и H е пресечна точка на височините му.

9. Да се докаже, че за всеки четири успоредни равнини $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ съществува правилен тетраедър $A_1A_2A_3A_4$, за който A_i лежи върху α_i $(i=1, 2, 3, 4)$.

10. Да се докаже, че единствените функции f, които са дефинирани и непрекъснати за всички положителни x, не са тъждествено нула и удовлетворяват функционалното уравнение

$$f(xy)=f(x)f(y)$$

са степенните, т. е. функциите от вида x^α, където α е произволна константа.

11. Да се намерят всички двойки от функции S и C, които са дефинирани и непрекъснати върху цялата права и удовлетворяват функционалните уравнения

$$S(x+y)=S(x)C(y)+S(y)C(x),$$
$$C(x+y)=C(x)C(y)+S(x)S(y).$$

Отг.

а) $S(x)=0, \quad C(x)=0;$

б) $S(x)=\frac{a^x}{2}, \quad C(x)=\frac{a^x}{2};$

в) $S(x)=-\frac{b^x}{2}, \quad C(x)=\frac{b^x}{2};$

г) $S(x)=\frac{a^x-b^x}{2}, \quad C(x)=\frac{a^x+b^x}{2}$

Упътване. Докажете, че сумата $C+S$ и разликата $C-S$ удовлетворяват уравнението (9.1).

Глава 3

ПРОИЗВОДНА НА ФУНКЦИЯ

Вече видяхме, че когато една функция е закон на някакво движение, тя е непрекъсната. Но свойството непрекъснатост не характеризира напълно тази класа функции. Наистина освен че е непрекъснато, всяко движение притежава и скорост във всеки момент от времето. На аналитичен език казваме, че функциите, които са закони на движения, притежават производни. Въвеждането на производните, правилата за пресмятането им, както и изучаването на техния механичен и геометричен смисъл са предмета на тази глава. В §1, §2 и §3 е разгледан механичният аспект на понятието производна, а в §4 — геометричния. В §5 и §6 се прави подготовка, необходима за §7, §8 и §9, където са въведени производните, посочени са основните правила за пресмятането им и са намерени производните на някои елементарни функции. Връзката между производна и монотонност на функция е разгледана в §10. С числото на Непер са свързани §11 и §16. В §12 е изучен един аналог на тригонометричните функции. Производните на показателната и логаритмичната функция са пресметнати съответно в §13 и §14, а §15 съдържа таблицата на производните.

§ 1. СКОРОСТ НА РАВНОМЕРНОТО ДВИЖЕНИЕ

Скоростта на едно равномерно движение се дефинира като отношение на пътя към дължината на интервала от време, за който движещата се точка е изминала този път. Лесно се вижда, че тя е постоянна, т. е. не зависи от интервала от време. Наистина от глава 2, §8 знаем, че графиката на всяко равномерно движение е права линия. Следователно законът на произволно равномерно движение има вида

(1) $$S(t)=vt+a,$$

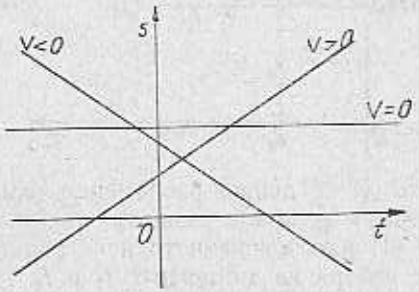
където v и a са константи. Нека t_1 и t_2 са два различни момента от времето. Тогава пътят, изминат в интервала (t_1, t_2), е

$$S(t_2)-S(t_1)=(vt_2+a)-(vt_1+a)=v(t_2-t_1),$$

а дължината на този интервал е t_2-t_1. Тогава съгласно дефиницията скоростта ще бъде

(2) $$\frac{S(t_2)-S(t_1)}{t_2-t_1}=\frac{v(t_2-t_1)}{t_2-t_1}=v,$$

което е действително постоянна величина.



Черт. 55

Горните разсъждения показват също така, че скоростта съвпада с ъгловия коефициент на графиката на движението; скоростта е толкова по-голяма, колкото графиката е по-стръмна. Графиките на праволинейни равномерни движения с положителна, отрицателна и нулева скорост са изобразени на черт. 55.

§ 2. СРЕДНА СКОРОСТ

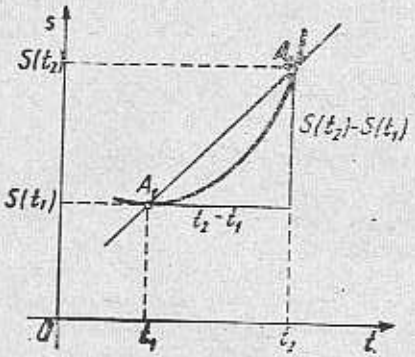
Нека точката M извършва произволно (не непременно равномерно) движение по оста S. Ако законът на движението е $S=S(t)$, а t_1 и t_2 са два различни момента от времето, изминатият път в интервала (t_1, t_2) е

$$S(t_2)-S(t_1).$$

Под *средна скорост* v_{cp} на M в интервала (t_1, t_2) разбираме скоростта, с която една равномерно движеща се точка би изминала същия път в интервала от време (t_1, t_2). Тогава

(1) $$v_{cp}=\frac{S(t_2)-S(t_1)}{t_2-t_1}.$$

Това е изобразено на черт. 56. От него се вижда, че средната скорост в интервала (t_1, t_2) съвпада с ъгловия коефициент на секущата A_1A_2.



Черт. 56

Когато точката M се движи равномерно, средната ѝ скорост в произволен интервал от време съвпада със скоростта ѝ, както тя бе въведена в §1. Ако движението не е равномерно, средната скорост зависи от избора на моментите t_1 и t_2. Нещо повече: даже ако при едно неравномерно движение фиксираме момента t_1, средната скорост ще се променя при изменението на t_2. За да се убедим в това, ще покажем, че ако средните скорости във всички интервали (t_1, t) съвпадат, то M се движи равномерно. Наистина да означим с v общата стойност на всички така споменати средни скорости. Тогава

$$\frac{S(t)-S(t_1)}{t-t_1}=v,$$

т. е. $S(t)-S(t_1)=v(t-t_1)$ и следователно

$$S(t)=vt+a,$$

където v и $a=S(t_1)-vt_1$ са константи, поради което движението е равномерно.

Пример 1. Автомобил се движи по шосето от Търново за Варна и изминава 100-те километра от Търново до Търговище за 2 часа, а 130-те километра от Търговище до Варна — също за 2 часа. Тогава средната скорост в първия участък от пътя е $\frac{100}{2}=50$ км/ч, а в целия път $\frac{230}{4}=57{,}5$ км/ч.

Пример 2. Нека законът на движение на точката M е $S(t)=r\cos t$ (гл. 2, §1, пример 2). Тогава средната скорост в произволен интервал от време (t_1, t_2) $(t_1\neq t_2)$ ще бъде

$$\frac{S(t_2)-S(t_1)}{t_2-t_1}=r\,\frac{\cos t_2-\cos t_1}{t_2-t_1}=-2r\,\frac{\sin\frac{t_2+t_1}{2}\sin\frac{t_2-t_1}{2}}{t_2-t_1}.$$

Пример 3. Ако точката M пада свободно, законът на движението ѝ е $S(t)=\frac{gt^2}{2}$, където g е земното ускорение. В този случай средната скорост се пресмята така

$$S(t_2)-S(t_1)=\frac{g}{2}\left(t_2^2-t_1^2\right)=\frac{g}{2}(t_2-t_1)(t_2+t_1),$$

поради което

$$v_{cp}=\frac{S(t_2)-S(t_1)}{t_2-t_1}=g\,\frac{t_2+t_1}{2}.$$

Пример 4. Нека $S(t)=t^n$, където n е някое от числата 1, 2, 3, ... В този случай

$$S(t_2)-S(t_1)=t_2^n-t_1^n=(t_2-t_1)\left(t_2^{n-1}+t_2^{n-2}t_1+\cdots+t_1^{n-1}\right)$$

съгласно гл. 1, § 2, (4), поради което за средната скорост получаваме

$$v_{cp}=t_2^{n-1}+t_2^{n-2}t_1+\cdots+t_1^{n-1}.$$

§ 3. МОМЕНТНА СКОРОСТ

Нека точката M се движи със закон на движение $S=S(t)$ и t_0 е произволен момент от времето. За произволен момент t, $t\neq t_0$, средната скорост на движението в интервала (t_0, t) се дава от формулата

$$v_{cp}=\frac{S(t)-S(t_0)}{t-t_0}. \tag{1}$$

Можем да скъсяваме интервала (t_0, t), като приближаваме t неограничено към дадения момент t_0 отляво или отдясно (при това изминатият път $S(t)-S(t_0)$ ще става произволно малък). В общия случай средната скорост ще се променя, понеже тя зависи от избора на t. Но колкото е по-къс интервалът (t_0, t), толкова повече движението на M в този интервал ще наподобява равномерното, защото в колкото по-малка околност на t_0 се изменя t, толкова по-малко ще се изменя средната скорост (1). Така се убеж-

даваме, че когато t се приближава неограничено до t_0 (чрез стойности, различни от t_0), средната скорост се приближава неограничено към едно, зависещо само от t_0 число V_0. Това число се нарича *скорост на точката M в момента t_0 (моментна скорост)*.

Пример 1. Нека $S(t)=vt+a$, т. е. движението е равномерно. Както знаем средната скорост v_{cp} в произволен интервал (t_0, t), $t_0 \neq t$ се дава с формулата

$$v_{cp}=v,$$

т. е. не зависи от t. Следователно при неограниченото приближаване на t към t_0 тя ще приема постоянно стойност v, поради което скоростта в момента t_0 съвпада с v. Както трябваше и да се очаква, оказа се, че равномерното движение има една и съща скорост във всеки момент и тя съвпада със скоростта, която бе дефинирана в §1.

Пример 2. Да намерим скоростта при свободното падане. От § 2, пример 3 знаем, че средната скорост в интервала (t_0, t), $t_0 \neq t$ е

$$v_{cp}=g\,\frac{t+t_0}{2}.$$

Ако сега оставим t да се приближава неограничено към t_0, v_{cp} ще се приближава неограничено към $g\,\frac{t_0+t_0}{2}=g\,t_0$, т. е. скоростта на свободно падащо тяло в произволен момент t_0 е

$$v_0=g\,t_0.$$

Пример 3. Да намерим скоростта на движението със закона $S(t)=t^n$. От §2, пример 4 знаем, че средната скорост в интервала (t_0, t) е

$$v_{cp}=t^{n-1}+t^{n-2}t_0+\cdots+t\,t_0^{n-2}+t_0^{n-1}.$$

Тъй като полиномът $P(t)=t^{n-1}+t^{n-2}t_0+\cdots+t_0^{n-1}$ е непрекъсната функция на t, при неограниченото приближаване на t към t_0 $P(t)$ ще се приближава неограничено към

$$P(t_0)=t_0^{n-1}+t_0^{n-2}t_0+\cdots+t_0^{n-1}=n\,t_0^{n-1}$$

и следователно скоростта в момента t_0 е

$$v_0=n\,t_0^{n-1}.$$

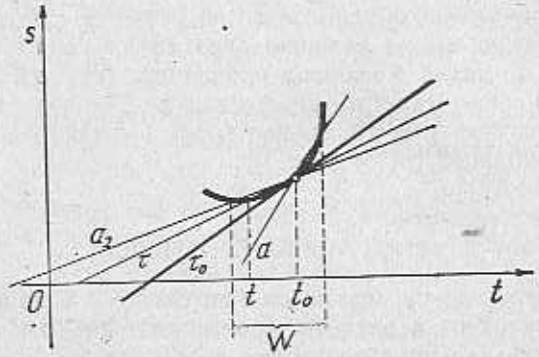
§ 4. ТАНГЕНТА КЪМ КРИВА

В този параграф ще изясним геометричната природа на предните разглеждания. Задачата за скоростите е тясно свързана със задачата за тангентите. Да разгледаме черт. 57. На него е изобразена графиката на движението със закон

(1) $$S=S(t),$$

т. е. графиката на функцията (1). От §2 знаем, че средната ско-

рост на движението в интервала (t_o, t) не е нищо друго освен ъгловия коефициент на секущата τ. Когато t се приближава неограничено към t_o, секущата τ се приближава неограничено към *допирателната (тангента)* τ_o към графиката в точката $(t_o, S(t_o))$.



Черт. 57

Поради това ъгловият коефициент на секущата ще се приближава неограничено към ъгловия коефициент на тангентата. Това означава, че при неограниченото приближаване на t към t_o средната скорост в интервала (t_o, t) ще се приближава неограничено към ъгловия коефициент на тангентата τ_o. Следователно скоростта в момента t_o съвпада с ъгловия коефициент на тангентата τ_o.

Тази геометрична интерпретация на скоростта е обобщение на това, което знаем за равномерното движение. Наистина графиката на равномерното движение е права линия и скоростта му съвпада с ъгловия коефициент на тази права; графиките на по-сложните движения са криви и скоростта на едно такова движение в даден момент t_o съвпада с ъгловия коефициент на тангентата в съответната точка от графиката.

Така посоченият геометричен еквивалент на скоростта дава възможност за по-дълбоко вникване в смисъла на думите: „средната скорост се приближава неограничено до скоростта в момента t_o, когато t се приближава неограничено към t_o". Да означим с τ_o ъгловия коефициент на тангентата τ_o и да разгледаме произволна околност (v_1, v_2) на v_o. Нека a_1 и a_2 са правите, които минават през точката $(t_o, S(t_o))$ и имат ъглови коефициенти съответно v_1 и v_2. От черт. 57 се вижда, че съществува такава околност w на момента t_o, че за всяко t от тази околност секущата τ през съответната точка от графиката да лежи в ъгъла,

заграден от правите a_1 и a_2. Това означава, че ъгловият коефициент на τ се намира между ъгловите коефициенти на a_1 и a_2, т. е.

$$v_1 < \frac{S(t)-S(t_0)}{t-t_0} < v_2. \tag{2}$$

И така за произволна околност (v_1, v_2) на v_0 съществува такава околност w на t_0, че за всяко $t \in w$ да е в сила неравенството (2). Колкото по-малка е избрана околността (v_1, v_2), толкова по-малка изобщо ще бъде и околността w с горното свойство. Същественото тук е, че такава околност w на t_0 съществува за произволна околност (v_1, v_2) на v_0.

§ 5. ГРАНИЦИ НА ФУНКЦИИ

В предните два параграфа се запознахме с механичния и геометричния аналог на понятието производна: избързвайки, можем да кажем грубо, че производната е скоростта, а също така, че тя е ъгловият коефициент на тангентата. При въвеждането на последните две понятия често използувахме думи като: „Стойностите на функцията f се приближават неограничено към числото l, когато аргументът x се приближава неограничено към числото a". Когато това е така, обикновено пишем

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \tag{1}$$

(чете се: лимес $f(x)$, когато x клони към a, е равно на l) и казваме, че функцията f има граница l, когато x клони към a.

Понятието граница е фундаментално. Целият математически анализ се основава върху него. То е необходимо за въвеждането на основното понятие на диференциалното смятане — производната.

Думите „стойностите на функцията f се приближават неограничено към числото l, когато аргументът x се приближава неограничено към числото a" съдържат неяснота. За да разберем това, ще разгледаме един пример. Да изберем няколко стойности на x, по-големи от 2, и да пресметнем съответните стойности на x^2:

x	3	2,5	2,4	2,3	2,2	2,1	2,05	2,04	2,03	2,02
x^2	9	6,25	5,76	5,29	4,84	4,41	4,2025	4,1616	4,1209	4,0804

От тази таблица се вижда, че когато x се приближава към 2, оставайки по-голямо от 2, съответните стойности на x^2 се при-

ближават все повече и повече към 4. Но те се приближават все повече и повече и към 3. При това положение кое от двете числа 3 и 4 следва да бъде наречено граница на x^2, когато x клони към 2?

Интуитивно ясните неща се оказват понякога трудно уловими. И този път яснотата се внася с помощта на понятието околност. Последният абзац на предния параграф показва как може да се направи това.

Казваме, че функцията f има граница l, когато аргументът x клони към a, ако за всяка околност U на l съществува такава околност V на a, че за всяко $x \in V$ да имаме $f(x) \in U$.

В това определение на граница на функция терминът „неограничено приближаване" не фигурира. Въпреки това (а може би тъкмо поради това) то съдържа цялата истина.

Границите са тясно свързани с непрекъснатостта. Да сравним току-що дадената дефиниция за граница на функция с тази за непрекъснатост от стр. 58. Виждаме, че ако функцията f е непрекъсната в някоя точка a, то

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a). \tag{2}$$

Както вече знаем, всички елементарни функции са непрекъснати, поради което за всяка от тях ще бъде в сила равенството (2). Така например

$$\lim_{x \to 2} x^2 = 2^2 = 4,$$

$$\lim_{x \to a} \sin x = \sin a,$$

$$\lim_{x \to a} \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} a \quad (a \neq k\pi),$$

$$\lim_{x \to a} P(x) = P(a),$$

където P е произволен полином и т. н.

По този начин намирането на границата на функция f, която е непрекъсната в точката a, се свежда до равенство (2). Когато функцията f е прекъсната в точката a, границата $\lim_{x \to a} f(x)$ може и да не съществува, но в случай че тя съществува, сигурно е различна от $f(a)$. Наистина, ако в дефиницията на граница положим $l = f(a)$, тя се превръща в тази за непрекъснатост и следовател-

но винаги когато е налице (2), функцията f е непрекъсната в точката a.

За разлика от непрекъснатостта въпросът за съществуване на граница на функция може да се поставя и когато функцията не е дефинирана в точката a. Така например да разгледаме функцията

$$f(x)=\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{2(x-1)}. \tag{3}$$

Тя не е дефинирана за $x=1$. Ако преобразуваме израза за $f(x)$, ще получим

$$f(x)=-\frac{x-1}{2(x-1)(x+1)}=-\frac{1}{2(x+1)}.$$

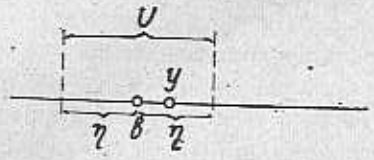
Така се убедихме, че функцията $f(x)$ съвпада с функцията $-\frac{1}{2(x+1)}$. За разлика от f последната е дефинирана и непрекъсната и при $x=1$, поради което

$$\lim_{x\to 1}\left[-\frac{1}{2(x+1)}\right]=-\frac{1}{4}.$$

Оттук следва, че и

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{2(x-1)}\right)=-\frac{1}{4}.$$

Да се върнем отново към дефиницията на граница. Очевидно всяка околност на b съдържа околност на b с център точката b (черт. 58). Всяка такава околност се нарича *симетрична околност* на b. Тези бележки показват, че в дефиницията на граница вместо с произволни околности можехме да си служим



Черт. 58

само със симетрични. Това е удобно, понеже симетричните околности се записват лесно с помощта на неравенства. Да разгледаме произволна симетрична околност w на b и да означим с η

половината от дължината ѝ. Ясно е, че $\eta>0$ и че условието $y\in W$ е еквивалентно с неравенството $|y-b|<\eta$. От всичко това се вижда, че дефиницията на граница на функция може да се прередактира така.

Казваме, че функцията f има граница l, когато аргументът x клони към a, ако за всяко положително число ε съществува такова положително число δ, че за всяко x от дефиниционната област на f, за което е изпълнено неравенството

$$|x-a|<\delta, \tag{4}$$

да имаме

$$|f(x)-l|<\varepsilon. \tag{5}$$

Да обърнем внимание върху обстоятелството, че горното прередактиране може да се извърши, като в дефиницията на граница на функция се направят следните замени:

„околност U на l" $\Rightarrow$ „положително число ε",
„околност на a" $\Rightarrow$ „положително число δ",
„$x\in V$ " $\Rightarrow$ „x за което $|x-a|<\delta$",
„$f(x)\in U$ " $\Rightarrow$ „$|f(x)-l|<\varepsilon$" ".

Последната дефиниция за граница на фуцкция се нарича понякога ε—дефиниция.

За да илюстрираме ε-дефиницията да докажем, че

$$\lim_{x\to 2} x^3=8. \tag{6}$$

Очевидно

$$|x^3-8|=|x-2|\,.\,|x^2+2x+4|.$$

Да се ограничим със стойности на x, за които

$$1<x<3. \tag{7}$$

Тогава

$$|x^2+2x+4|<19$$

и следователно за всяко x, за което са изпълнени неравенствата (7), ще имаме

$$|x^3-8|\leq 19\,|x-2|.$$

Нека сега ε е произволно положително число. Да изберем положителното число δ по такъв начин, че

$$\delta<1 \quad \text{и} \quad \delta<\frac{\varepsilon}{19}. \tag{8}$$

Да разгледаме сега произволно x, за което

$$|x-2|<\delta. \tag{9}$$

От (9) и (8) следва (7), поради което ще имаме

$$|x^3-8| \leqq 19\,|x-2|$$

и като използуваме отново (8) и (9), получаваме

(10) $$|x^3-8| < \varepsilon.$$

И така за всяко положително число ε успяхме да намерим такова положително число δ, че винаги когато е изпълнено неравенството (9), да е изпълнено и неравенството (10). Съгласно ε-дефиницията на граница на функция с това е доказано равенство (6).

По-долу ще дадем три правила за пресмятане на граници, които ще бъдат използувани по-нататък.

Нека функциите f_1 и f_2 имат граници, когато x клони към a и

$$\lim_{x\to a} f_1(x) = l_1, \qquad \lim_{x\to a} f_2(x) = l_2.$$

Тогава

(11) $$\lim_{x\to a}[f_1(x) \pm f_2(x)] = l_1 \pm l_2,$$

(12) $$\lim_{x\to a} f_1(x) f_2(x) = l_1 l_2$$

и ако $l_2 \neq 0$, то

(13) $$\lim_{x\to a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{l_1}{l_2}.$$

Формулите (11), (12) и (13) се свеждат до добре утвърдената вече представа, че $l_1 \pm l_2$, $l_1 l_2$ и $\frac{l_1}{l_2}$, $l_2 \neq 0$ могат да се пресметнат с произволна отнапред зададена точност, стига вместо l_1 и l_2 да се вземат достатъчно точни приближения и на факта, че $f_1(x)$ и $f_2(x)$ могат да се направят произволно близки съответно до l_1 и l_2, когато x е достатъчно близко до a.

§ 6. НЯКОИ ОСНОВНИ ГРАНИЦИ

В този параграф ще намерим някои граници, които ще използуваме по-късно. Най-напред ще докажем, че

(1) $$\lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x-a} = na^{n-1} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

За тази цел ще напомним, че

(2) $$\frac{x^n - a^n}{x-a} = x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + a^{n-1}.$$

От друга страна, полиномът

$$P(x) = x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + a^{n-1}$$

е непрекъсната функция на x и следователно

$$\lim_{x\to a} P(x) = P(a),$$

т. е.

$$\lim_{x\to a}(x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + a^{n-1}) = na^{n-1}.$$

Последното равенство и (2) доказват (1).

Като използуваме (1), ще докажем следното равенство:

(3) $$\lim_{x\to a} \frac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}}{x-a} = \frac{1}{n\sqrt[n]{a^{n-1}}} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

За целта да положим

(4) $$y = \sqrt[n]{x}, \qquad \alpha = \sqrt[n]{a}.$$

Тогава ще имаме

(5) $$\frac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}}{x-a} = \frac{y-\alpha}{y^n - \alpha^n}.$$

От друга страна, $\sqrt[n]{x}$ е непрекъсната функция на x и от (4) следва, че y клони към α, когато x клони към a. При това положение (5) дава

(6) $$\lim_{x\to a} \frac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}}{x-a} = \lim_{y\to\alpha} \frac{y-\alpha}{y^n - \alpha^n}.$$

Като приложим (1) и (5.13), получаваме

(7) $$\lim_{y\to\alpha} \frac{y-\alpha}{y^n - \alpha^n} = \lim_{y\to\alpha} \frac{1}{\left(\frac{y^n - \alpha^n}{y-\alpha}\right)} = \frac{1}{n\alpha^{n-1}},$$

което заедно с (4) дава

(8) $$\lim_{y\to\alpha} \frac{y-\alpha}{y^n - \alpha^n} = \frac{1}{n\sqrt[n]{a^{n-1}}}$$

и (3) следва от (6) и (8).

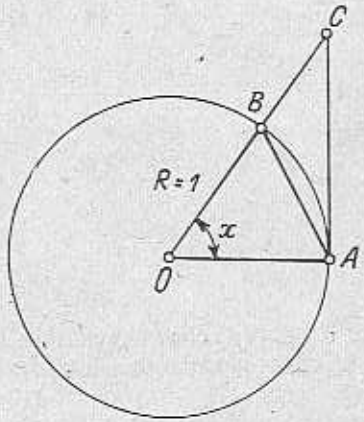
Сега ще спрем нашето внимание на следната формула:

(9) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

За да докажем (9), ще имаме нужда от неравенствата

(10) $$\sin x<x<\operatorname{tg} x \qquad \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right).$$

В кръг с радиус 1 да разгледаме острия ъгъл $\sphericalangle AOB$, хордата AB и тангентата AC към окръжността в точката A (черт. 59). Тогава очевидно лицето на сектора AOB е заключено между лицето на триъгълника AOB и лицето на триъгълника AOC. Да



Черт. 59

означим с x—мерното число на $\sphericalangle AOB$ в радиани. Тогава дъгата $\widehat{AB}$ ще бъде равна на x и неравенствата между лицата могат да се запишат така:

$$\frac{1}{2}\sin x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}\operatorname{tg} x,$$

откъдето след съкращаване на $\frac{1}{2}$ получаваме (10).

Ако $0<x<\frac{\pi}{2}$, то $\sin x>0$ и (10) след делене на $\sin x$ дава

$$1>\frac{\sin x}{x}>\cos x,$$

откъдето

$$0<1-\frac{\sin x}{x}<1-\cos x.$$

Но

$$1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}<2\sin\frac{x}{2}<2\cdot\frac{x}{2}=x$$

(съгласно (10)), така че

$$0<1-\frac{\sin x}{x}<x,$$

откъдето получаваме неравенството

(11) $$\left|\frac{\sin x}{x}-1\right|<x,$$

което очевидно запазва валидността си и след като сменим знака на x, т. е. ще бъде изпълнено за всички $x\neq 0$, за които $|x|<\frac{\pi}{2}$.

Неравенството (11) решава въпроса. Наистина нека ε е произволно положително число, а δ е по-малкото от числата ε и $\frac{\pi}{2}$. Когато

(12) $$|x-0|<\delta,$$

т. е. $|x<\delta$, можем най-напред да приложим неравенството (11) $\left(\text{понеже } \delta\leqq\frac{\pi}{2}\right)$, а от него следва, че

(13) $$\left|\frac{\sin x}{x}-1\right|<\varepsilon,$$

тъй като $\delta\leqq\varepsilon$.

И така за всяко положително число ε намерихме такова положително число δ, че винаги когато е изпълнено неравенството (12), да е изпълнено и неравенството (13). Съгласно ε-дефиницията на граница на функция това означава, че е в сила формула (9).

§ 7. ПРОИЗВОДНИ

Нека функцията f е дефинирана в някаква околност на точката a. *Под производна на функцията f в точката a разбираме границата*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a},$$

когато тя съществува. Производната на функцията f в точката a се означава със символа $f'(a)$, т. е. по определение имаме

(1) $$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Да разгледаме няколко примера, в които се използува непосредствено горната дефиниция.

Пример 1. Нека

$$f(x)=x^2+px+q.$$

За нарастването на f имаме

$$f(x)-f(a)=x^2+px+q-(a^2+pa+q)=x^2-a^2+p(x-a)$$
$$=(x-a)(x+a+p).$$

Следователно

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x+a+p)}{x-a}=\lim_{x\to a}(x+a+p)=2a+p,$$

тъй като $x+a+p$ е непрекъсната функция на x.

Пример 2. Нека

$$f(x)=\frac{1}{x}.$$

За нарастването на f имаме

$$f(x)-f(a)=\frac{1}{x}-\frac{1}{a}=\frac{a-x}{ax}\qquad(a\neq 0).$$

Следователно

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{a-x}{ax(x-a)}=\lim_{x\to a}\left[-\frac{1}{ax}\right]=-\frac{1}{a^2},$$

тъй като $-\frac{1}{ax}$ е непрекъсната функция на x.

Пример 3. Нека

$$f(x)=\sqrt{x}.$$

За нарастването имаме

$$f(x)-f(a)=\sqrt{x}-\sqrt{a}=\frac{x-a}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}.$$

Следователно

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)}{(\sqrt{x}+\sqrt{a})(x-a)}=\frac{1}{2\sqrt{a}}\qquad(a\neq 0),$$

тъй като $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}$ е непрекъсната функция на x.

Точките, в които една функция f има производна, образуват едно множество от числа, което представлява дефиниционна област на една нова функция. Наистина на всяка точка x, в която функцията f има производна, можем да съпоставим стойността $f'(x)$ на производната на f в точката x. Така получената функция се нарича производна на f и се означава с f'.

Да поясним това върху горните примери. Да видим как изглежда горното съпоставяне в пример 1. Вече видяхме, че за всяко a имаме $f'(a)=2a+p$, или, което е все същото, $f'(x)=2x+p$ за всяко x. Това често се записва и така:

$$(x^2+px+q)'=2x+p.$$

Аналогично производните от следващите два примера се записват съответно

$$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}\qquad(x\neq 0),$$

$$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}\qquad(x\neq 0).$$

Не винаги една функция притежава производна във всяка точка от дефиниционната си област. Така например функцията $\sqrt{x}$ не притежава производна при $x=0$. Наистина изразът

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0}=\frac{\sqrt{x}}{x}=\frac{1}{\sqrt{x}}$$

не притежава граница, когато x клони към нула, защото знаменателят клони към нула, поради което $\frac{1}{\sqrt{x}}$ расте неограничено. Да отбележим, че числото 0 е от дефиниционната област на $\sqrt{x}$.

Ако сравним дефиницията на производна с тази на моментна скорост, ще забележим, че *моментната скорост в някой момент t_0 не е нищо друго освен производната на закона на движението в този момент.* Ако си припомним, че скоростта в момента t_0 съвпада с ъгловия коефициент на тангентата, става ясно, че *производната на една функция f в някоя точка a от дефиниционната ѝ област е равна на ъгловия коефициент на тангентата към графиката на функцията f в точката $(a, f(a))$.*

Когато функцията f притежава производна в някоя точка a, казваме, че функцията f е *диференцируема* в тази точка. Поради това търсенето на производните се нарича *диференциране*, а частта от анализа, посветена на този кръг въпроси — *диференциално смятане.*

Почти очевидно е, че ако една функция е диференцируема в някоя точка a, тя е и непрекъсната в тази точка. Наистина, щом отношението (1) притежава граница и знаменателят му $x-a$ клони към нула, числителят $f(x)-f(a)$ също ще клони към нула, когато x клони към a. Тогава ще имаме

$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a),$$

което, както знаем от §5, е достатъчно, за да твърдим, че функцията f е непрекъсната в точката a.

И така видяхме, че всяка диференцируема функция е непре-

късната. Обратното изобщо не е вярно. Например функцията $\sqrt{x}$ е непрекъсната при $x=0$, но както вече се убедихме, не е диференцируема в тази точка. В края на миналия век немският математик Вайерщрас посочи пример на функция, която е дефинирана и непрекъсната върху цялата числова права, но не е диференцируема в никоя точка. Графиката на една такава функция не притежава тангента в никоя своя точка.

§ 8. ПРАВИЛА ЗА ПРЕСМЯТАНЕ НА ПРОИЗВОДНИ

В този параграф ще докажем някои прости правила за пресмятане на производни, които значително улесняват намирането на производните на елементарните функции.

Производната на произведение от константа и функция е равна на произведението на константата и производната на функцията, т. е.

(1) $$(cf)'=cf',$$

където c е константа, а f е функция.

За да докажем формула (1), ще положим

$$\varphi(x)=cf(x).$$

За нарастването на φ имаме

$$\varphi(x)-\varphi(a)=c(f(x)-f(a)).$$

Следователно

$$\varphi'(a)=\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{x-a}=c\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{f(x)-f(a)}=cf'(a),$$

с което формула (1) е доказана.

Пример. Вече знаем, че $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$. Следователно

$$(2\sqrt{x})'=2(\sqrt{x})'=\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Производната на сума на две функции е равна на сумата от производните на функциите, т. е.

(2) $$(f+g)'=f'+g'.$$

За да докажем формула (2), ще положим

$$\varphi(x)=f(x)+g(x).$$

За нарастването на φ имаме

$$\varphi(x)-\varphi(a)=f(x)+g(x)-(f(a)+g(a))=f(x)-f(a)+g(x)-g(a).$$

Следователно

$$\varphi'(a)=\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)+g(x)-g(a)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}+\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=f'(a)+g'(a),$$

с което формула (2) е доказана.

Пример. Като приложим доказаните две правила, можем да получим

$$\left(\sqrt{x}-\frac{1}{x}\right)'=(\sqrt{x})'+\left(-\frac{1}{x}\right)'=(\sqrt{x})'-\left(\frac{1}{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}.$$

Производната на произведението на две функции f и g се дава с формулата

(3) $$(fg)'=f'g+fg'.$$

За да докажем формула (3), ще положим

$$\varphi(x)=f(x)g(x).$$

За нарастването на φ имаме

$$\varphi(x)-\varphi(a)=f(x)g(x)-f(a)g(a)$$

$$=f(x)g(x)-f(a)g(x)+f(a)g(x)-f(a)g(a)$$

$$=(f(x)-f(a))g(x)+f(a)(g(x)-g(a)).$$

Следователно

$$\varphi'(a)=\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(f(x)-f(a))g(x)+f(a)(g(x)-g(a))}{x-a},$$

поради което

(4) $$\varphi'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\lim_{x\to a}g(x)+f(a)\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}.$$

Тъй като функцията g е диференцируема в точката a, тя е непрекъсната в тази точка и следователно $\lim_{x\to a}g(x)=g(a)$, което заедно с (4) дава

$$\varphi'(a)=f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$$

и формула (3) е доказана.

Пример. Като използуваме пример 1 и пример 3 от §7 и приложим правилото за диференциране на произведение, можем да получим

$$((x^2+px+q)\sqrt{x})'=(x^2+px+q)'\sqrt{x}+(x^2+px+q)(\sqrt{x})'$$

$$=(2x+p)\sqrt{x}+(x^2+px+q)\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$=\frac{5}{2}x\sqrt{x}+\frac{3}{2}p\sqrt{x}+\frac{q}{2\sqrt{x}}.$$

Производната на частното на две функции f и g (в точка, в която знаменателят е различен от нула) *се дава с формулата*

(5) $$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}$$

За да докажем формула (5), ще положим

$$\varphi(x)=\frac{f(x)}{g(x)}.$$

За нарастването на φ имаме

$$\varphi(x)-\varphi(a)=\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(a)}{g(a)}=\frac{f(x)g(a)-f(a)g(x)}{g(x)g(a)}$$

$$=\frac{f(x)g(a)-f(a)g(a)+f(a)g(a)-f(a)g(x)}{g(x)g(a)}$$

$$=\frac{(f(x)-f(a))g(a)-f(a)(g(x)-g(a))}{g(x)g(a)}.$$

Следователно

$$\varphi'(a)=\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{x-a}=\frac{\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}g(a)-f(a)\lim\limits_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}{\lim\limits_{x\to a}g(x)g(a)}$$

$$=\frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{(g(a))^2},$$

с което формула (5) е доказана.

Пример.

$$\left(\frac{\sqrt{x}}{x^2+px+q}\right)'=\frac{(\sqrt{x})'(x^2+px+q)-\sqrt{x}(x^2+px+q)'}{(x^2+px+q)^2}$$

$$=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2+px+q)-\sqrt{x}(2x+p)}{(x^2+px+q)^2}$$

$$=\frac{q-px-3x^2}{2\sqrt{x}(x^2+px+q)^2}.$$

Производната на съставната функция

(6) $$\Phi(x)=F(f(x))$$

се дава с формулата

(7) $$(F(f))'=F'(f).f'.$$

За нарастването на функцията (6) имаме

$$\Phi(x)-\Phi(a)=F(f(x))-F(f(a))$$

$$=\frac{F(f(x))-F(f(a))}{f(x)-f(a)}(f(x)-f(a)).$$

Да намерим най-напред

$$\lim_{x\to a}\frac{F(f(x))-F(f(a))}{f(x)-f(a)}.$$

За тази цел да отбележим, че функцията f е диференцируема в точката a и следователно е непрекъсната в тази точка, поради което

(8) $$\lim_{x\to a}f(x)=f(a).$$

Следователно, ако положим $f(x)=u$, ще имаме

$$\lim_{x\to a}\frac{F(f(x))-F(f(a))}{f(x)-f(a)}=\lim_{u\to f(a)}\frac{F(u)-F(f(a))}{u-f(a)},$$

поради което

(9) $$\lim_{x\to a}\frac{F(f(x))-F(f(a))}{f(x)-f(a)}=F'(f(a)).$$

Следователно

$$\Phi'(a)=\lim_{x\to a}\frac{\Phi(x)-\Phi(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{F(f(x))-F(f(a))}{f(x)-f(a)}\cdot\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$
$$=F'(f(a)).f'(a),$$

с което формула (7) е доказана.

Пример. Да положим $F(u)=\sqrt{u}$ и $f(x)=x^2+px+q$. Тогава $\Phi(x)=\sqrt{x^2+px+q}$ и следователно

$$(\sqrt{x^2+px+q})'=\frac{1}{2\sqrt{x^2+px+q}}(x^2+px+q)'$$
$$=\frac{2x+p}{2\sqrt{x^2+px+q}}.$$

§ 9. ПРОИЗВОДНИ НА НЯКОИ ЕЛЕМЕНТАРНИ ФУНКЦИИ

В този параграф ще намерим производните на някои функции, необходими за намирането на производните на голям брой елементарни функции.

Производната на константа е нула, т. е.

(1) $$(c)'=0.$$

Наистина твърдението следва непосредствено от обстоятелството, че нарастването на тази функция е нула.

Производната на функцията x^α, където α е константа, се дава с формулата

(2) $$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1},$$

където α е произволно реално число.

Ще разгледаме най-напред случая, когато показателят е цяло неотрицателно число. При $\alpha=0$ формула (2) е очевидна. Наистина от лявата ѝ страна фигурира производната на константата 1, а от дясната — числото нула. При $\alpha=n$ $(n=1, 2, 3,\ldots)$ производната намираме така. За нарастването на $f(x)=x^n$ имаме

$$f(x)-f(a)=x^n-a^n.$$

Следователно

(3) $$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=na^{n-1}.$$

Тук използувахме основната граница (6.1). По този начин формула (2) е доказана за $\alpha=0, 1, 2,\ldots, n,\ldots$

Нека сега показателят α е цяло отрицателно число, т. е. $\alpha=-n$, където $n=1, 2, 3,\ldots$ Тогава

$$x^\alpha=x^{-n}=\frac{1}{x^n}$$

и като си послужим с формулата за диференциране на частно (8.5) и с доказаната вече за цели положителни стойности на α формула (2), получаваме

$$(x^{-n})'=\left(\frac{1}{x^n}\right)'=\frac{(1)'x^n-1.(x^n)'}{(x^n)^2}=\frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}}=-nx^{-n-1},$$

с което формула (2) е доказана и за цели отрицателни стойности на α.

Сега ще докажем валидността на тази формула, когато α е произволно рационално число. За тази цел да се убедим най-напред в това, когато $\alpha=\frac{1}{m}$ $(m=1, 2, 3,\ldots)$. За нарастването на функцията $f(x)=x^{\frac{1}{m}}$ имаме

$$f(x)-f(a)=\sqrt[m]{x}-\sqrt[m]{a}.$$

Следователно

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\frac{1}{m\sqrt[m]{a^{m-1}}}=\frac{1}{m}a^{\frac{1}{m}-1}$$

Тук използувахме основната граница (6.3). По този начин формула (2) е доказана и за $\alpha=\frac{1}{2}, \frac{1}{3},\ldots$

Нека сега показателят α е произволно рационално число, т. е. $\alpha=\frac{m}{n}$, където m и n са цели и $n>0$. Ще си послужим с правилото (8.7) за диференциране на съставни функции. Нека

(4) $$F(u)=u^{\frac{1}{n}} \text{ и } f(x)=x^m.$$

Тогава

$$\Phi(x)=F(f(x))=\sqrt[n]{x^m}=x^{\frac{m}{n}}$$

и правилото (8.7) дава

(5) $$\left(x^{\frac{m}{n}}\right)'=\Phi'(x)=F'(f(x)).f'(x).$$

Формула (2) е вече доказана при $\alpha=m$ и при $\alpha=\frac{1}{n}$. Като приложим тази формула към функциите (4), ще получим

$$F'(u)=\frac{1}{n}\,u^{\frac{1}{n}-1} \quad \text{и} \quad f'(x)=mx^{m-1}. \tag{6}$$

Ако заместим в първото от равенствата (6) u с $f(x)=x^m$, ще получим

$$F'(f(x))=\frac{1}{n}(x^m)^{\frac{1}{n}-1}=\frac{1}{n}x^{\frac{m}{n}-m},$$

което заедно с второто от равенствата (6) и равенство (5) дава

$$\left(x^{\frac{m}{n}}\right)'=\frac{1}{n}x^{\frac{m}{n}-m}\cdot mx^{m-1}=\frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1},$$

с което е доказана верността на формула (2), когато α е произволно рационално число.

Ще отбележим само, че формула (2) остава в сила и когато α е произволно реално число.

Производната на функцията $\sin x$ е функцията $\cos x$, т. е.

$$(\sin x)'=\cos x. \tag{7}$$

Наистина производната на $\sin x$ в произволно фиксирана точка a се дава с формулата

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}. \tag{8}$$

Да положим $x-a=h$, т. е. $x=a+h$. Ясно е, че когато x клони към a, числото h клони към нула, поради което границата (8) се преобразува така:

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(a+h)-\sin a}{h}.$$

Ако сега си послужим с формулата

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

получаваме

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim_{h\to 0}\cos\frac{2a+h}{2}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}.$$

Тъй като $\cos x$ е непрекъсната функция, $\lim\limits_{h\to 0}\cos\frac{2a+h}{2}=\cos a$. От друга страна, съгласно (6.9) втората граница е единица и следователно

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\cos a$$

за всяко a, с което формула (7) е доказана.

Производната на функцията $\cos x$ *е функцията* $-\sin x$, *т. е.*

$$(\cos x)'=-\sin x. \tag{9}$$

Доказателството на (9) е аналогично на това на (7), поради к ето ще го предоставим на читателя.

Производната на функцията $\operatorname{tg} x$ *е функцията* $\frac{1}{\cos^2 x}$, *т. е.*

$$(\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x},\ x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}\ (k=0,\pm1,\pm2,\ldots). \tag{10}$$

Наистина, като използуваме (7), (9) и правилото за диференциране на частно, намираме

$$(\operatorname{tg} x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-(\cos x)'\sin x}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x},$$

с което формула (10) е доказана.

Производната на функцията $\operatorname{ctg} x$ *е функцията* $-\frac{1}{\sin^2 x}$, *т. е.*

$$(\operatorname{ctg} x)'=-\frac{1}{\sin^2 x},\ x\neq k\pi\ (k=0,\pm1,\pm2,\ldots). \tag{11}$$

Доказателството на (11) е аналогично на това на (10), поради което го представяме на читателя.

напомним, че ъгълът x се измерва в радиани. Именно на това се дължи простотата на формулите (7), (9), (10) и (11). В противен случай границата (6.9), която лежи в основата на пресмятането на производните на тригонометричните функции, няма да бъде единица; така например, ако x се измерва в градуси, тази граница ще бъде $\frac{\pi}{180}$ (докажете това) и следователно формула (7) ще добие вида

$$(\sin x)'=\frac{\pi}{180}\cdot\cos x.$$

Аналогични изменения ще претърпят и формулите за производните на останалите тригонометрични функции.

Пример 1. Да се намери производната на функцията

$$f(x)=\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,. \tag{12}$$

За да пресметнем $f'(x)$, ще представим (12) във вида

$$f(x)=\left(x\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}=x^{\frac{7}{8}},$$

която е степенна функция, и съгласно (2) при $\alpha=\frac{7}{8}$, имаме

$$f'(x)=\frac{7}{8}x^{-\frac{1}{8}}.$$

Пример 2. Да се намери производната на функцията

$$f(x)=x^{\sqrt{2}}\sin x. \tag{13}$$

За пресмятането на $f'(x)$ ще използуваме правилото за диференциране на произведение, както и формулите (2) и (7). Имаме

$$f'(x)=\left(x^{\sqrt{2}}\right)'\sin x+x^{\sqrt{2}}\left(\sin x\right)'=\sqrt{2}\,x^{\sqrt{2}-1}\sin x+x^{\sqrt{2}}\cos x.$$

Пример 3. Да се намери производната на функцията

$$f(x)=\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}^3x+\frac{3}{5}\operatorname{tg}^5x+\frac{1}{7}\operatorname{tg}^7x. \tag{14}$$

За пресмятане то на $f'(x)$ ще използуваме правилото за диференциране на съставна функция, както и формулите (2), (10). Имаме

$$f'(x)=\frac{1}{\cos^2x}+3\operatorname{tg}^2x\cdot\frac{1}{\cos^2x}+\frac{3}{5}\cdot5\operatorname{tg}^4x\cdot\frac{1}{\cos^2x}+\frac{1}{7}\cdot7\operatorname{tg}^6x\cdot\frac{1}{\cos^2x}$$

и след леки преобразувания получаваме окончателно

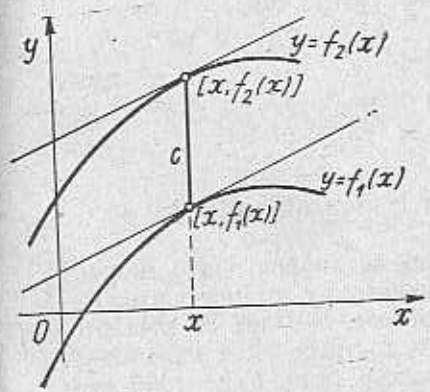
$$f'(x)=\frac{1}{\cos^8x}.$$

§ 10. ФУНДАМЕНТАЛНО СВОЙСТВО НА ПРОИЗВОДНИТЕ

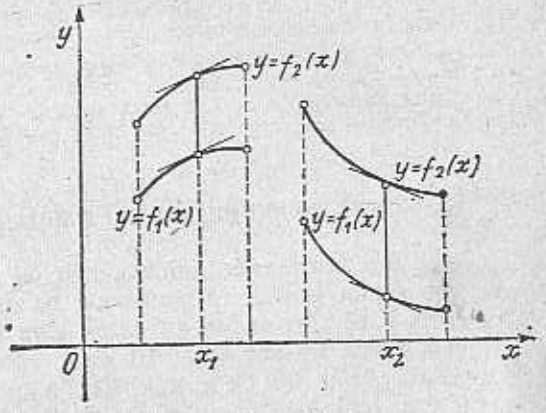
Тази точка е посветена на един общ принцип, част от многобройните приложения на който ще разгледаме по-нататък. Когато е известна скоростта, положението на подвижната точка е до голяма степен определено. Така например, ако два автомобила

се движат по един и същи път и скоростите им във всеки момент съвпадат, разстоянието между тях е постоянна величина, т. е. не се мени с времето; тук се има пред вид най-произволно движение и в частност такова, при което скоростта се мени с времето. Ако в някой момент автомобилите „съвпадат", при направеното предположение за еднаквост на скоростите през време на цялото движение автомобилите ще „съвпадат" през цялото време. Разбира се, тук третираме автомобилите като подвижни точки.

Нека графиките на функциите $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$ са такива, че за всяко x тангентите към тях съответно в точките $(x, f_1(x))$ и $(x, f_2(x))$ са успоредни (или съвпадат). Какво можем да кажем



Черт. 60



Черт. 61

тогава за тези графики? Естествено е да предположим, че „успоредността" ще бъде налице и при кривите (черт. 60), т. е., че

$$f_2(x)-f_1(x)=c, \tag{1}$$

където c е константа. Но това не винаги е така. Да разгледаме функциите, чиито графики са изобразени на черт. 61. Тези две функции имат обща дефиниционна област, която не е интервал, а се състои от два непресичащи се интервала. От чертежа се вижда, че разликата $f_2(x)-f_1(x)$ не е константа. Но тази разлика е константа в кой да е от двата дефиниционни интервала.

Горните наблюдения се формулират с помощта на производни така: *Ако функциите f_1 и f_2 са дефинирани и диференци-*

руеми в един интервал Δ и ако производните им съвпадат във всяка точка от интервала Δ, т. е.

(2) $$f_1'(x)=f_2'(x),$$

то функциите се различават с константа, т. е. изпълнено е равенство (1) *за всяко x от дефиниционния интервал Δ.*

Пример. Ще докажем известното на читателя тъждество

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1,$$

като си послужим с производни. За тази цел ще разгледаме функциите $f_1(x)=0$ и $f_2(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$. За производните очевидно имаме $f_1'(x)=0$ и $f_2'(x)=0$ $2\sin x\cos x-2\sin x\cos x=0$, което показва, че $f_2-f_1=c$, където c е константа. По-подробно последното равенство се записва така:

$$\sin^2 x+\cos^2 x=c.$$

За да докажем, че $c=1$, е достатъчно да пресметнем стойността на лявата част на горното равенство при $x=0$ (или, разбира се, при кое да е x).

§ 11. ФУНКЦИИ, КОИТО СЪВПАДАТ С ПРОИЗВОДНАТА СИ

Да разгледаме движението на един автомобил, чиято скорост във всеки момент е равна на разстоянието му от началото. Когато този автомобил се намира на разстояние 10 км от началото, скоростта му ще бъде 10 км/ч, когато достигне 65-я километър, тя ще бъде 65 км/ч, при 1000-я километър тя ще бъде 1000 км/ч и т. н. Какъв е законът на движение на този автомобил?

И така, да си мислим една функция, която е дефинирана и диференцируема за всяко реално число x и удовлетворява уравнението

(1) $$f'(x)=f(x).$$

Ще докажем, че при това предположение функцията f удовлетворява функционалното уравнение на показателната функция (гл. 2, §9). Да изберем по произволен начин числата x_1 и x_2, да ги фиксираме и да разгледаме функцията

(2) $$f_1(x)=f(x).f(x_1+x_2-x).$$

Като приложим правилото за диференциране на произведение, за производната на f_1 намираме

$$f_1'(x)=f'(x).f(x_1+x_2-x)+f(x)(f(x_1+x_2-x))'.$$

Ако приложим правилото за диференциране на съставна функция и вземем пред вид, че x_1 и x_2 са константи, ще получим

$$(f(x_1+x_2-x))'=f'(x_1+x_2-x).(x_1+x_2-x)'=-f'(x_1+x_2-x),$$

откъдето, като вземем пред вид (1), намираме

$$f_1'(x)=f(x)f(x_1+x_2-x)-f(x)f(x_1+x_2-x)=0,$$

което показва, че производната на f_1 е нула за всяко x. Тъй като производната на константата нула е също нула, то $f_1'(x)=(0)'$ и съгласно фундаменталното свойство на производните ще имаме

(3) $$f_1(x)=c,$$

където c е константа. Тъй като диференцирахме относно x, твърдението, че c е константа, означава, че c не зависи от x, но, разбира се, c може да зависи от избора на x_1 и x_2. Ако запишем равенство (3) по-подробно, ще получим

(4) $$f(x)f(x_1+x_2-x)=c$$

за всяко x. За да пресметнем c в (4), полагаме $x=0$ и получаваме

$$f(0)f(x_1+x_2)=c,$$

поради което (4) добива вида $f(x)f(x_1+x_2-x)=f(0)f(x_1+x_2)$. Да заместим в последното равенство x с x_1. Тогава ще получим

(5) $$f(x_1)f(x_2)=f(0)f(x_1+x_2).$$

Да си припомним сега, че числата x_1 и x_2 бяха избрани произволно. Това означава, че равенство (5) е изпълнено при всеки избор на x_1 и x_2.

За $f(0)$ могат да се представят следните две възможности:

а) $f(0)=0$ и

б) $f(0)\neq 0$.

Да разгледаме най-напред първата от тях. Когато $f(0)=0$, (5) добива вида $f(x_1)f(x_2)=0$ при произволен избор на x_1 и x_2. Ако в това равенство положим $x_1=x_2=x$, ще получим $(f(x))^2=0$, откъдето $f(x)=0$ за всяко x, т. е. в случая а) f е константата 0.

Да разгледаме сега случая $f(0)\neq 0$. Ако разделим двете страни на (5) с $(f(0))^2$, ще получим

(6) $$\frac{f(x_1)}{f(0)}\cdot\frac{f(x_2)}{f(0)}=\frac{f(x_1+x_2)}{f(0)},$$

което показва, че функцията $\varphi(x)=\frac{f(x)}{f(0)}$ удовлетворява функционалното уравнение на показателната функция. Но тъй като тази функция е диференцируема, тя е и непрекъсната и съгласно §9 от гл. 2 ще бъде показателна, т. е. ще съществува такава положителна константа a, че за всяко x да е изпълнено равенството $\varphi(x)=a^x$, т. е.

$$f(x)=f(0)a^x. \tag{7}$$

Формула (7) дава функцията f в случая б), както току-що се убедихме. Не е трудно да се забележи, че същата формула дава f и когато $f(0)=0$. С други думи, всяка функция, която удовлетворява уравнението (1), има вида (7).

Да се върнем отново към механиката; на езика на механиката доказаното означава, че ако при движението на една точка скоростта постоянно е равна на разстоянието на точката до началото, законът на движението е функция от вида (7). Специалният случай $f(0)=0$ съответствува на движение от разглеждания вид, за което в началния момент подвижната точка се е намирала в началото. Но тогава съгласно (1) скоростта и в този момент е нула, поради което движението се редуцира на покой. Да разгледаме сега случая $f(0)=1$ т. е. да предположим, че в началния момент точката се намира на разстояние 1 от началото. Съгласно (1) с това е определена и скоростта ѝ в началния момент. Но не само скоростта в началния момент, а и цялото движение е напълно определено при тези предположения. Наистина в една „безкрайно" малка околност на началния момент точката ще се движи със скорост 1. По-нататък скоростта ѝ съгласно (1) ще продължава да съвпада с разстоянието ѝ до началото и значи движението ѝ в една „безкрайно" малка околност на един „близък" момент също ще бъде еднозначно определено и т. н. Познаването на положението на подвижната точка в някой момент x и уравнението (1) дават възможност да намерим скоростта $f'(x)$ на точката в разглеждания момент. Познаването на скоростта от своя страна определя еднозначно движението „около" този момент. Оттук следва, че е определен еднозначно и законът на движението на тази точка.

Направените наблюдения показват, че измежду функциите, които удовлетворяват уравнението (1), има една единствена, за която

$$f(0)=1. \tag{8}$$

Това следва и от фундаменталното свойство на производните. Наистина нека f_1 и f_2 са две функции, които са дефинирани и диференцируеми навсякъде и удовлетворяват уравненията (1) и (8). Да разгледаме функцията

$$\varphi(x)=\frac{f_1(x)}{f_2(x)}. \tag{9}$$

Производната на тази функция е

$$\varphi'(x)=\frac{f_1'(x)f_2(x)-f_1(x)f_2'(x)}{(f_2(x))^2}=0,$$

тъй като f_1 и f_2 удовлетворяват (1). Следователно $\varphi(x)=c$, където c е константа. Последното равенство и (9) дават

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=c. \tag{10}$$

За да определим c, ще заместим в (10) x с 0; като вземем пред вид (8), получаваме $c=1$, което заедно с (10) дава

$$f_1(x)=f_2(x).$$

Съгласно (7) единствената функция, за която е изпълнено (8), ще има вида

$$f(x)=a^x, \tag{11}$$

където a е еднозначно определена константа.

Така намерената константа се бележи с e и се нарича *неперово число.* Числото e играе важна роля в математиката и приложенията ѝ. Ето първите няколко десетични знака на това число:

$$e=2{,}7182818\ldots$$

С това означение единственото решение на уравнението (1), за което е в сила (8), се записва така:

$$f(x)=e^x, \tag{12}$$

а уравнението (1) — така:

$$(e^x)'=e^x. \tag{13}$$

Да резюмираме. Убедихме се, че *съществува една единствена функция f, която удовлетворява уравненията* (1) *и* (8), *и че тази функция е показателна,* т. е. има вида (11). *Основата a на тази функция означихме с e* и по този начин въве-

дохме една важна константа. *Производната на функцията e^x се дава с формула* (13).

Да се върнем отново на уравнението (1). То беше подробно разгледано, когато $f(0)=0$ и $f(0)=1$, а в общия случай $f(0)\neq 0$ засега знаем само, че решенията му имат вида (7), където a е константа. Не е трудно да се убедим, че тази константа съвпада с неперовото число. Наистина нека f е произволно решение на (1), за което $f(0)\neq 0$. Да разгледаме функцията

(14) $$\psi(x)=\frac{f(x)}{f(0)}.$$

Очевидно $\psi(0)=1$ и $\psi'(x)=\frac{f'(x)}{f(0)}=\frac{f(x)}{f(0)}=\psi(x)$, поради което $\psi(x)=e^x$ и съгласно (14)

(15) $$f(x)=f(0)\,e^x.$$

С това уравнението (1) е решено.

§ 12. ХИПЕРБОЛИЧНИ ФУНКЦИИ

В този параграф ще се запознаем с две функции, наречени хиперболичен косинус и хиперболичен синус. Названията на тези функции не са случайни и се дължат на изящната аналогия, която съществува между тях и тригонометричните функции косинус и синус. Прилагателното „хиперболичен" също не е поставено случайно, но това ще видим по-нататък.

Хиперболичният косинус се дефинира с формулата

(1) $$\operatorname{ch} x=\frac{e^x+e^{-x}}{2},$$

а *хиперболичният синус* — с формулата

(2) $$\operatorname{sh} x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}.$$

Ако в тези равенства поставим $x=0$, получаваме

(3) $$\operatorname{ch} 0=1, \qquad \operatorname{sh} 0=0,$$

които равенства са аналогични на $\cos 0=1$, $\sin 0=0$.

Ако повдигнем (1) и (2) в квадрат и извадим получените резултати, добиваме

$$\operatorname{ch}^2 x-\operatorname{sh}^2 x=\frac{e^{2x}+2e^x e^{-x}+e^{-2x}}{4}-\frac{e^{2x}-2e^x e^{-x}+e^{-2x}}{4}$$
$$=\frac{4e^0}{4}=1,$$

т. е.

(4) $$\operatorname{ch}^2 x-\operatorname{sh}^2 x=1.$$

Последната формула е аналогична на формулата $\cos^2 x+\sin^2 x=1$.

Ако в (1) сменим знака на x, ще получим

$$\operatorname{ch}(-x)=\frac{e^{-x}+e^x}{2}=\operatorname{ch} x,$$

т. е.

(5) $$\operatorname{ch}(-x)=\operatorname{ch} x.$$

Тази формула е аналогична на формулата $\cos(-x)=\cos x$.

По същия начин се доказва, че

(6) $$\operatorname{sh}(-x)=-\operatorname{sh} x,$$

която формула е аналогична на $\sin(-x)=-\sin x$.

Сега да потърсим аналог на формулата $\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$. Тъй като очакваме в резултата да получим произведения на хиперболични косинуси и хиперболични синуси, да пресметнем произведението $\operatorname{ch} x\operatorname{ch} y$:

$$\operatorname{ch} x\operatorname{ch} y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^y+e^{-y}}{2}=\frac{e^{x+y}+e^{x-y}+e^{-x+y}+e^{-x-y}}{4}$$

и произведението $\operatorname{sh} x\operatorname{sh} y$:

$$\operatorname{sh} x\operatorname{sh} y=\frac{e^x-e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^y-e^{-y}}{2}=\frac{e^{x+y}-e^{x-y}-e^{-x+y}+e^{-x-y}}{4}.$$

Като съберем тези равенства, получаваме

$$\operatorname{ch} x\operatorname{ch} y+\operatorname{sh} x\operatorname{sh} y=\frac{e^{x+y}+e^{-(x+y)}}{2}=\operatorname{ch}(x+y),$$

т. е.

(7) $$\operatorname{ch}(x+y)=\operatorname{ch} x\operatorname{ch} y+\operatorname{sh} x\operatorname{sh} y.$$

По същия начин се доказва и формулата

(8) $$\operatorname{sh}(x+y)=\operatorname{sh} x\operatorname{ch} y+\operatorname{ch} x\operatorname{sh} y,$$

която е аналогична на $\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$.

Да намерим производната на $\operatorname{ch} x$:

$$(\operatorname{ch} x)'=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)'=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\operatorname{sh} x,$$

т. е.

(9) $$(\operatorname{ch} x)'=\operatorname{sh} x,$$

която формула е аналогична на $(\cos x)'=-\sin x$.

По същия начин се доказва, че

10) $$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x,$$

която формула е аналогична на $(\sin x)' = \cos x$.

От (1) се вижда, че $\operatorname{ch} x$ не се анулира за никое x и следователно функцията $\operatorname{th} x$, определена чрез равенството

11) $$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$$

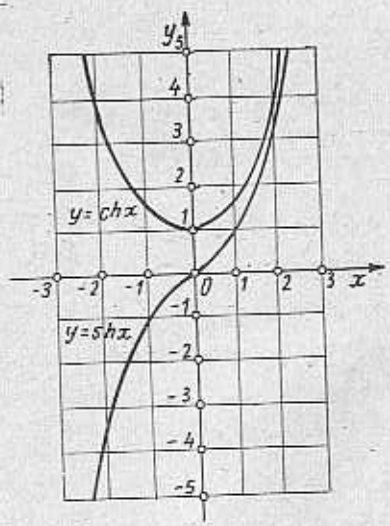
има смисъл за всяко x. Тя се нарича *хиперболичен тангенс*. Като използуваме (9), (10), (11) и правилото за диференциране на частно, намираме

$$(\operatorname{th} x)' = \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)' = \frac{(\operatorname{sh} x)' \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x (\operatorname{ch} x)'}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x},$$

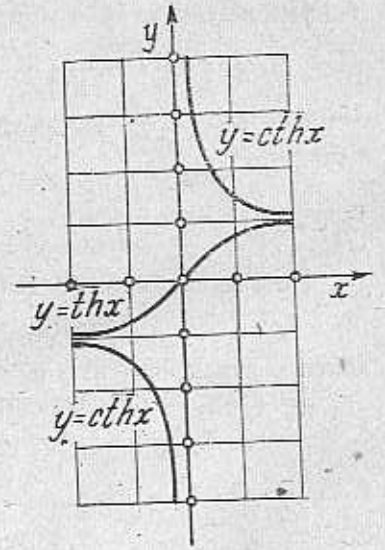
т. е.

12) $$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}.$$

Да потърсим решенията на уравнението $\operatorname{sh} x = 0$. Последното равенство означава, че $e^x - e^{-x} = 0$, т. е. $e^{2x} = 1$, което е изпълнено



Черт. 62



Черт. 63

само когато $x = 0$. Следователно функцията $\operatorname{cth} x$, определена чрез равенството

13) $$\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x},$$

е дефинирана за всяко $x \neq 0$. Производната ѝ се намира аналогично на тази на $\operatorname{th} x$ и се дава от формулата

14) $$(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

Графиките на хиперболичните функции са представени на черт. 62 и черт. 63. Читателят лесно ще съобрази, като си припомни как изглежда графиката на показателната функция, че графиките на хиперболичните функции имат указания на тези чертежи вид.

§ 13. ПРОИЗВОДНА НА ПОКАЗАТЕЛНАТА ФУНКЦИЯ

В параграф 11 видяхме, че функцията e^x се диференцира по формулата $(e^x)' = e^x$. Задачата, която си поставяме в този параграф, е да намерим производната на показателната функция a^x при произволна положителна основа a.

За тази цел ще представим a^x като степен с основа e. Съгласно дефиницията на логаритмите имаме

(1) $$a = e^{\log_e a}.$$

Логаритъмът при основа e на едно число a се нарича натурален логаритъм на a и се бележи със символа ln, т. е.

$$\log_e a = \ln a.$$

Съгласно това равенството (1) се записва още така:

(2) $$a = e^{\ln a}.$$

Ако повдигнем двете страни на (2) в степен x, получаваме равенството

(3) $$a^x = e^{x \ln a},$$

което представя a^x като степен с основа e.

Вече не е трудно да намерим производната на показателната функция. Съгласно формули (3) и (11.13) и правилото за диференциране на съставна функция имаме

$$(a^x)' = (e^{x \ln a})' = e^{x \ln a} (x \ln a)' = e^{x \ln a} \ln a = a^x \ln a,$$

т. е.

(4) $$(a^x)' = a^x \ln a,$$

с което поставената задача е решена.

Ако в частност $a=e$, формула (4) съвпада с (11.13), понеже $e-1$.

§ 14. ПРОИЗВОДНА НА ЛОГАРИТМИЧНАТА ФУНКЦИЯ

Производната на функцията $\ln x$ $(\log_e x)$ *се дава с формулата*

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (x>0).$$

Нека x_0 е произволно положително число. Съгласно дефиницията производната на $\ln x$ в точката x_0 е границата

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\ln x - \ln x_0}{x-x_0}.$$

да пресметнем границата (2), ще положим

$$\ln x = t, \qquad \ln x_0 = t_0.$$

гава

$$x = e^t, \qquad x_0 = e^{t_0}$$

$$\frac{\ln x - \ln x_0}{x-x_0} = \frac{t-t_0}{e^t - e^{t_0}} = \frac{1}{\dfrac{e^t - e^{t_0}}{t-t_0}}.$$

Тъй като логаритмичната функция е непрекъсната от (3), едва, че когато x клони към x_0, числото t ще клони към t_0, ради което (5) дава

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\ln x - \ln x_0}{x-x_0} = \frac{1}{\lim\limits_{t\to t_0} \dfrac{e^t - e^{t_0}}{t-t_0}}.$$

ъгласно дефиницията на производна границата $\lim\limits_{t\to t_0} \dfrac{e^t - e^{t_0}}{t-t_0}$ ще бъ- равна на производната на функцията e^t в точката t_0, която гласно (11.13) е равна на e^{t_0}, т. е.

$$\lim_{t\to t_0} \frac{e^t - e^{t_0}}{t-t_0} = e^{t_0}.$$

следното равенство и (6) дават

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\ln x - \ln x_0}{x-x_0} = \frac{1}{e^{t_0}}$$

като използуваме второто от равенствата (4), получаваме окон- елно

$$\text{(7)} \qquad \lim_{x\to x_0} \frac{\ln x - \ln x_0}{x-x_0} = \frac{1}{x_0},$$

с което формула (1) е доказана.

§ 15. ТАБЛИЦА НА ПРОИЗВОДНИТЕ

Намерените дотук производни и правила за диференциране дават възможност да се напише производната на всяка елементарна функция (вж. гл. 2, § 3). Ето защо ще приведем таблица на намерените дотук производни.

1. $c' = 0$.
2. $(x^a)' = ax^{a-1}$.
3. $(\sin x)' = \cos x$.
4. $(\cos x)' = -\sin x$.
5. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.
6. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.
7. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$.
8. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$.
9. $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$.
10. $(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.
11. $(e^x)' = e^x$, $(a^x)' = a^x \ln a$.
12. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

Ето и таблицата на правилата за диференциране:

1. $(cf)' = cf'$.
2. $(f+g)' = f' + g'$.
3. $(fg)' = f'g + fg'$.

4. $\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}$.

5. $(F(f))'=F'(f)f'$.

Ще приведем няколко примера.

Пример 1. Като приложим формулите 1. и 2. и правилата 1 и 2 за производната на функцията

$$y=2x^3-x^2+3,$$

получаваме

$$y'=6x^2-2x.$$

Пример 2. Като приложим формулите 13 и 3 и правило 5, за производната на функцията

$$y=\ln \sin x$$

получаваме

$$y'=\frac{1}{\sin x}(\sin x)'=\operatorname{ctg} x.$$

Пример 3. Като приложим формулите 13,5,2 и 1 и правила 5 и 1, за производната на функцията

$$y=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\sqrt{2}\operatorname{tg} x+\sqrt{1+2\operatorname{tg}^2 x}\right)$$

получаваме

$$y'=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2\operatorname{tg} x+\sqrt{1+2\operatorname{tg}^2 x}}}\left(\sqrt{2}\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{2\sqrt{1+2\operatorname{tg}^2 x}}\cdot 2.2\operatorname{tg} x\frac{1}{\cos^2 x}\right),$$

откъдето след елементарни преобразувания получаваме

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^4 x}}.$$

Задачи към глава 3

1. Да се пресметне

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10}.$$ Отг. $\frac{1}{3}$.

2. Да се пресметне

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}.$$ Отг. $\frac{2}{3}$

3. Да се пресметне

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x-1}.$$ Отг. n.

4. Да се пресметне

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}.$$ Отг. $\frac{m}{n}$.

5. Да се пресметне

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\operatorname{tg} x}.$$ Отг. 5.

6. Да се пресметне

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}.$$ Отг. $\frac{2}{3}$.

7. Да се пресметне

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}.$$ Отг. $\frac{1}{2}$.

Намерете производните на функциите:

8. $y=2x^3-5x^2+7x-12.$ Отг. $y'=6x^2-10x+7.$

9. $y=x^4-3x^2+18.$ Отг. $y'=4x^3-6x.$

10. $y=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4.$ Отг. $y'=1-x+x^2-x^3.$

11. $y=x^3(x^2-1)^2.$ Отг. $y'=7x^6-10x^4+3x^2.$

12. $y=\frac{x-1}{x+1}.$ Отг. $y'=\frac{2}{(x+1)^2}.$

13. $y=\frac{x}{1-x^2}.$ Отг. $y'=\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}.$

14. $y=\frac{3x-1}{x^5}.$ Отг. $y'=-12x^{-5}+5x^{-6}.$

15. $y=\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}.$ Отг. $y'=\frac{2(1-x^2)}{(x^2-x+1)^2}.$

16. $y=\sqrt{x}.$ Отг. $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$

17. $y=\sqrt[3]{x}.$ Отг. $y'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$

18. $y=\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$. Отг. $y'=\frac{7}{8}x^{-\frac{1}{8}}$.

19. $y=e^x(x^2-2x+2)$. Отг. $y'=x^2e^x$.

20. $y=x\sin x$. Отг. $y'=x\cos x+\sin x$.

21. $y=x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x$. Отг. $y'=x^2\cos x$.

22. $y=x\ln x-x$. Отг. $y'=\ln x$.

23. $y=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{1}{9}x^3$. Отг. $y'=x^2\ln x$.

24. $y=\sqrt{x}+\ln x-\frac{1}{\sqrt{x}}$. Отг. $y'=\frac{(1+\sqrt{x})^2}{2x\sqrt{x}}$.

25. $y=\frac{1}{\sin x}$. Отг. $y'=-\frac{\cos x}{\sin^2 x}$.

26. $y=\frac{1}{\cos x}$. Отг. $y'=\frac{\sin x}{\cos^2 x}$.

27. $y=\frac{1}{\ln x}$. Отг. $y'=-\frac{1}{x\ln^2 x}$.

28. $y=\frac{e^x-1}{e^x+1}$. Отг. $y'=\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$.

29. $y=e^x(\sin x-\cos x)$. Отг. $y'=2e^x\sin x$.

30. $y=(ax+b)^n$. Отг. $y'=na(ax+b)^{n-1}$.

31. $y=\sin^3 x$. Отг. $y'=3\sin^2 x\cos x$.

32. $y=(x^2-1)^5$. Отг. $y'=10x(x^2-1)^4$.

33. $y=\cos^5 x$. Отг. $y'=-5\cos^4 x\sin x$.

34. $y=\sqrt{3x-5}$. Отг. $y'=\frac{3}{2\sqrt{3x-5}}$.

35. $y=\sin 5x$. Отг. $y'=5\cos 5x$.

36. $y=\sqrt{a^2-x^2}$. Отг. $y'=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

37. $y=e^{-x}$. Отг. $y'=-e^{-x}$.

38. $y=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. Отг. $y'=\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

39. $y=\ln\sin x$. Отг. $y'=\operatorname{ctg} x$.

40. $y=-\frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$. Отг. $y'=-\frac{3x}{(1+x^2)^{\frac{5}{2}}}$.

41. $y=\ln\operatorname{tg} x$. Отг. $y'=\frac{2}{\sin 2x}$.

42. $y=x\sqrt{x^2+1}$. Отг. $y'=\frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$.

43. $y=e^{-x^2}$. Отг. $y'=-2xe^{-x}$.

44. $y=\sqrt{x+\sqrt{x}}$. Отг. $y'=\frac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x(x+\sqrt{x})}}$.

45. $y=\ln(x^2+x)$. Отг. $y'=\frac{2x+1}{x^2+x}$.

46. $y=\sqrt[3]{(2x+1)^2}$. Отг. $y'=\frac{4}{3\sqrt[3]{2x+1}}$.

47. $y=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$. Отг. $y'=\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$.

48. $y=\cos ax\cdot\sin bx$. Отг. $y'=b\cos ax\cos bx-a\sin ax\sin bx$.

49. $y=\ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$. Отг. $y'=\frac{1}{x^2-1}$.

50. $y=e^{ax}\cos bx$. Отг. $y'=e^{ax}(a\cos bx-b\sin bx)$.

51. $y=\ln\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$. Отг. $y'=-\frac{1}{\cos x}$.

52. $y=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$. Отг. $y'=\frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}=\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$.

53. $y=\ln\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$. Отг. $y'=\frac{1}{\cos x}$.

54. $y=\frac{x^2}{4}\left[(\ln x)^2-\frac{1}{2}\ln x+\frac{1}{8}\right]$. Отг. $y'=x^3\ln^2 x$.

55. $y=\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$. Отг. $y'=-\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$.

56. $y=\ln\frac{x^2+1+\sqrt{x^4+3x^2+1}}{x}$. Отг. $y'=\frac{x^2-1}{x\sqrt{x^4+3x^2+1}}$.

57. $y=\operatorname{ctg}\pi x+\frac{\cos\pi x}{2\sin^3\pi x}$. Отв. $y'=-\frac{3\pi}{2\sin^4\pi x}$.

58. $y=e^{\sqrt[3]{x}}\left(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+2\right)$. Отв. $y'=\frac{1}{3}e^{\sqrt[3]{x}}$.

59. $y=(x+2a)\sqrt{x^2-a^2}+a^2\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})$. Отв. $y'=2x\sqrt{\frac{x+a}{x-a}}$.

60. $y=\frac{\sin(2\ln x)-\cos(2\ln x)}{x^2}$. Отв. $y'=\frac{4\cos 2\ln x}{x^3}$.

61. $y=\sqrt{x}\ln(\sqrt{x}+\sqrt{x+a})-\sqrt{x+a}$. Отв. $y'=\frac{\ln(\sqrt{x}+\sqrt{x+a})}{2\sqrt{x}}$.

62. $y=\ln\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}-\sqrt{x^2+1}$. Отв. $y'=-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$.

63. $y=\ln\frac{3-x^2}{2-x^2}$. Отв. $y'=\frac{2x}{x^4-5x^2+6}$.

64. $y=\frac{1}{2a}\left[\ln\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a+x}-\frac{a}{a+x}\right]$. Отв. $y'=\frac{x^3}{(x^2+a^2)(x+a)^2}$.

65. $y=\ln\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}$. Отв. $y'=\frac{2x^3}{1-x^4}$.

66. $y=x\operatorname{sh}x$. Отв. $y'=\operatorname{sh}x+x\operatorname{ch}x$.

67. $y=\frac{x^2}{\operatorname{ch}x}$. Отв. $y'=\frac{2x\operatorname{ch}x-x^2\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}^2x}$.

68. $y=\operatorname{th}x-x$. Отв. $y'=-\operatorname{th}^2x$.

69. $y=\frac{3\operatorname{cth}x}{\ln x}$. Отв. $y'=-\frac{3(x\ln x+\operatorname{sh}x\operatorname{ch}x)}{x(\ln^2)\operatorname{sh}^2x}$.

70. $y=\operatorname{sh}^3 2x$. Отв. $y'=6\operatorname{sh}^2 2x\operatorname{ch}^2x$.

71. $y=e^{ax}\operatorname{ch}bx$. Отв. $y'=e^{ax}(a\operatorname{ch}bx+b\operatorname{sh}bx)$.

72. $y=\operatorname{th}^3 2x$. Отв. $y'=6\operatorname{th}^2 2x(1-\operatorname{th}^2 2x)$.

73. $y=\ln\operatorname{sh}2x$. Отв. $y'=2\operatorname{cth}2x$.

74. $y=\frac{1}{2}\operatorname{th}x+\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\frac{1+\sqrt{2}\operatorname{th}x}{1-\sqrt{2}\operatorname{th}x}$. Отв. $y'=\frac{1}{1-\operatorname{sh}^4x}$.

75. $y=\frac{\cos x}{2\sin^2x}+\frac{1}{2}\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Отв. $y'=\frac{1}{\sin^3x}$.

76. $y=\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2x+\ln\cos x$. Отв. $y'=\operatorname{tg}^3x$.

77. $y=\frac{\sin x}{2\cos^2x}-\frac{1}{2}\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$. Отв. $y'=\frac{1}{\cos^3x}$.

78. $y=\operatorname{tg}x\ln\cos x+\operatorname{tg}x-x$. Отв. $y'=\frac{\ln\cos x}{\cos^2x}$.

? 79. $y=\ln\frac{\sqrt{a+be^x}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+be^x}+\sqrt{a}}$. Отв. $y'=\sqrt{\frac{a}{a+be^x}}$.

80. $y=\ln\frac{e^x+2+\sqrt{e^{2x}+4e^x+1}}{e^x+2-\sqrt{e^{2x}+4e^x+1}}$. Отв. $y'=\frac{2e^x}{\sqrt{e^{2x}+4e^x+1}}$.

81. $y=(x-2)\sqrt{1+e^x}-\ln\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}$. Отв. $y'=\frac{xe^x}{2\sqrt{1+e^x}}$.

82. $y=\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\operatorname{ctg}x\ln(1+\sin x)-x$. Отв. $y'=\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin^2x}$.

Глава 4

НЯКОИ ПРИЛОЖЕНИЯ НА ПРОИЗВОДНИТЕ

Производните имат многобройни приложения при изследването на функциите. Едно от най-простите от тях е изучаването на монотонността, на което е посветена тази глава. В §1 се обсъжда връзката между монотонност и производна. Понякога се налага да знаем кога производната на една функция е монотонна; за да отговорим на този въпрос си служим с втора производна, която се въвежда в §2. В §3 и §4 първата и втората производна се използват за намиране на максимумите и минимумите на функциите. В §5 се разглеждат функции с монотонна производна. Резултатите на голяма част от досегашните усилия се проявяват в §6, където читателят може върху конкретни примери да се запознае с методи за изследване на функциите и начертаване на графиките им. В §7, §8 и §9 са доказани някои важни класически неравенства.

§ 1. МОНОТОННИ ФУНКЦИИ

Да напомним, че една функция f се нарича *растяща (монотонно растяща)*, когато за всеки две числа x_1 и x_2 от дефиниционната област на f, които са свързани с неравенството $x_1 < x_2$ е изпълнено неравенството $f(x_1) \leq f(x_2)$. Ако пък от неравенството $x_1 < x_2$ винаги следва, че $f(x_1) \geq f(x_2)$, функцията f се нарича *намаляваща (монотонно намаляваща)*. Растящите и намаляващите функции носят общото название *монотонни функции*.

При изследването на изменението на една функция от първостепенно значение е въпросът в кои интервали от дефиниционната си област функцията расте и в кои намалява. В тази точка ще укажем критерии, с чиято помощ ще можем да намираме интервалите, в които една диференцируема функция е монотонна.

Ако функцията f е монотонно растяща и диференцируема в интервала $[a, b]$, производната ѝ е неотрицателна навсякъде в този интервал.

Наистина, за всяко x с $a \leq x < b$ и за всяко положително h с $a \leq x+h \leq b$ имаме $x < x+h$ и следователно е изпълнено неравенството $f(x) \leq f(x+h)$, тъй като функцията f е монотонно растяща. Понеже h е положително, от последното неравенство следва

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0, \tag{1}$$

поради което

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0 \tag{2}$$

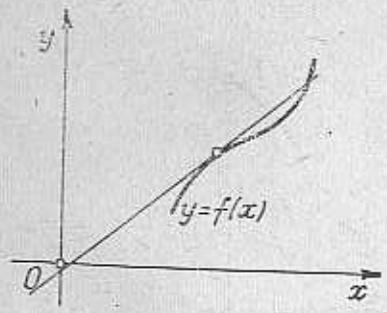
и твърдението е доказано при $a \leq x < b$. За да направим това и когато $x=b$ ще изберем отрицателно h с $a \leq x+h \leq b$. Тогава (1) ще бъде отново в сила, тъй като понеже f е растяща, числителят ще бъде неположителен, а знаменателят е отрицателен съгласно избора на h. Сега (2) отново следва от (1).

Аналогично се доказва, че:

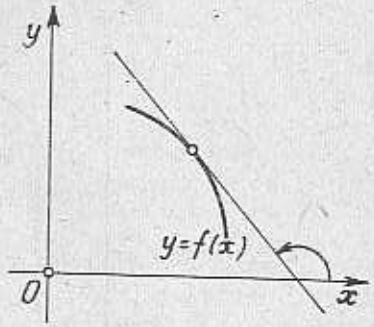
Ако функцията f е монотонно намаляваща и диференцируема в интервала $[a, b]$, производната ѝ е неположителна в този интервал.

Тези две твърдения притежават проста геометрична интерпретация. Ако функцията f е растяща (намаляваща) в един интервал, тангентата към произволна точка от графиката ѝ сочи нагоре (надолу) (вж. черт. 64 и черт. 65).

Не по-малко естествено е и механическото тълкуване на горните твърдения. Законът на едно движение на точка по абсцис-



Черт. 64



Черт. 65

ната ос е растяща функция, когато през цялото време точката се движи надясно. Но когато това е така, скоростта е очевидно неотрицателна през цялото време. Аналогично, ако законът на движението е намаляваща функция, точката се движи наляво и следователно скоростта е неположителна.

На практика се случва твърде рядко да извличаме информация за знака на производната на една функция като предварително изследваме дали тя е монотонна. Най-често се прави обратното, т. е. намира се производната на функцията f, изследва се знака на тази производна и от него се съди за монотонността на f. В основата на тази техника стои следния критерий за монотонност.

Ако функцията f е дефинирана и диференцируема навсякъде в един интервал Δ и производната ѝ е неотрицателна навсякъде в този интервал, функцията f е растяща в Δ.

Ако функцията f е дефинирана и диференцируема навсякъде в един интервал Δ и производната ѝ е неположителна навсякъде в този интервал, функцията f е намаляваща в Δ.

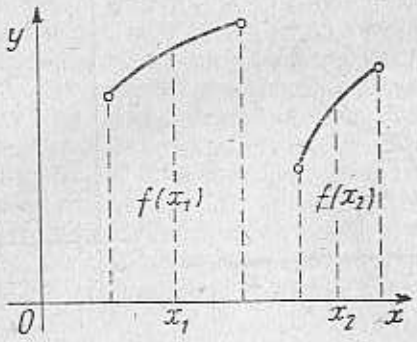
Геометрическият превод на този критерий гласи.

Ако функцията f е дефинирана в някой интервал и тангентата към всяка точка от графиката ѝ сочи нагоре (надолу), функцията е растяща (намаляваща) (вж. черт. 64 и черт. 65).

Ако преведем горния критерий на механически език ще получим:

Ако по време на цялото движение на една точка върху абсцисната ос, скоростта е неотрицателна (неположителна), точката се движи надясно (наляво).

Критерият за монотонност съдържа в себе си като частен



Черт. 66

случай фундаменталното свойство на производните (гл. 3, §10). Наистина, ако производната на една функция е нула в един интервал, тя е както неположителна, така и неотрицателна в този интервал, и съгласно критерия за монотонност функцията ще бъде едновременно растяща и намаляваща, а както знаем това е възможно само когато тя е константа.

Да отбележим още, че предположението дефиниционната област на функцията да е интервал е съществено за валидността на критерия за монотонност. Чертеж 66 посочва пример, когато дефиниционната област на функцията се състои от два интервала, производната е навсякъде положителна, но функцията не е растяща.

Пример 1. Функцията

$$y=x^{2n} \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ldots)$$

е намаляваща при $x\leq 0$ и растяща при $x\geq 0$.

Наистина като диференцираме получаваме

$$y'=2n\,x^{2n-1}.$$

Понеже $2n-1$ е нечетно число при $x\leq 0$ ще имаме $y'\leq 0$, а при $x\geq 0$ — $y'\geq 0$.

Пример 2. Функцията

$$y=x^{2n+1} \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ldots)$$

е растяща върху цялата права.

Наистина като диференцираме получаваме

$$y'=(2n+1)\,x^{2n}.$$

Понеже $2n$ е четно число за всяко x ще имаме $y'\geq 0$.

Пример 3. Функцията

$$y=\frac{\sin x}{x}$$

е намаляваща при $0<x\leq\frac{\pi}{2}$.

Наистина като диференцираме получаваме

$$y'=\frac{x\cos x-1.\sin x}{x^2}=\frac{\cos x\,(x-\operatorname{tg} x)}{x^2}.$$

Понеже $\cos x\geq 0$, $x>0$ и $x<\operatorname{tg} x$ в разглеждания интервал, то $y'<0$.

Пример 4. Да се докаже неравенството

$$\sin x\geq\frac{2}{\pi}x \qquad \left(0\leq x\leq\frac{\pi}{2}\right). \tag{3}$$

Както току-що видяхме функцията $\frac{\sin x}{x}$ е намаляваща в интервала $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ и следователно ще бъде изпълнено неравенството

$$\frac{\sin x}{x} \geq \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} \tag{4}$$

за всяко x с $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$. Не е трудно да се види, че (3) и (4) са еквивалентни.

§ 2. ВТОРА ПРОИЗВОДНА

Производната на една функция f се нарича понякога *първа производна на* f. Производната на първата производна на f се нарича *втора производна на* f и се означава с f''. По друг начин това може да се запише и така

$$f'' = (f')'.$$

По-общо по индукция може да се дифинира и n-та производна като производната на $n-1$-вата производна, или което е все същото

$$f^{(n)} = (f^{(n-1)})'.$$

Втората производна се намира, като се диференцира първата по правилата изучени в гл. 3. За да разгледаме един пример, ще намерим втората производна на функцията $y = \frac{1}{x}$. Очевидно $y' = -\frac{1}{x^2}$ и следователно $y'' = (-x^{-2})' = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3}$.

§ 3. ЕКСТРЕМУМИ НА ФУНКЦИИ

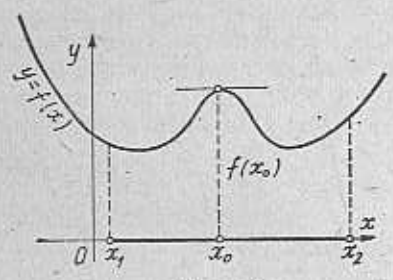
Често максимумите и минимумите на една функция f се наричат екстремуми на f, а задачата за намиране на екстремумите — екстремална задача. Следва да се различават локални и абсолютни екстремуми и по-долу предстои да изучим тези две понятия.

Нека функцията f е дефинирана в интервала (a, b) и x_0 е точка от този интервал, т. е. $a < x_0 < b$. Казваме, че функцията f притежава *локален максимум* в точката x_0, когато съществува

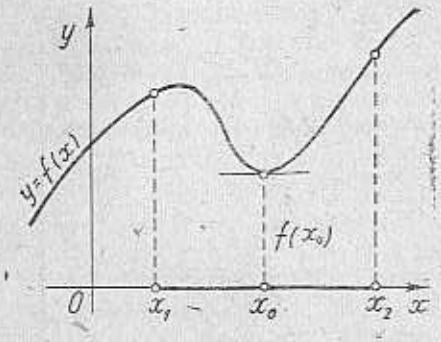
такава околност (x_1, x_2) на x_0, че за всяко x от тази околност да бъде изпълнено неравенството

$$f(x) \leq f(x_0). \tag{1}$$

Това означава, че измежду всички стойности на f в околността (x_1, x_2) на x_0, най-голяма е стойността $f(x_0)$ в точката x_0 (черт. 67).



Черт. 67



Черт. 68

Аналогично се дефинира и понятието локален минимум. Казваме, че функцията f има *локален минимум* в една точка x_0 от вътрешността на дефиниционния си интервал (a, b), когато съществува такава околност (x_1, x_2) на x_0 $(x_1 < x_0 < x_2)$, че за всяко x от околността (x_1, x_2) на x_0 да е в сила неравенството

$$f(x) \geq f(x_0) \tag{2}$$

(черт. 68).

Локалните максимуми и локалните минимуми на една функция се наричат с общото название *локални екстремуми*.

Нека функцията f е дефинирана в интервала (a, b) и е диференцируема в една точка x_0 от интервала (a, b) $(a < x_0 < b)$. Ако при тези предположения функцията f притежава локален екстремум в точката x_0, производната на f в точката x_0 се анулира, т. е.

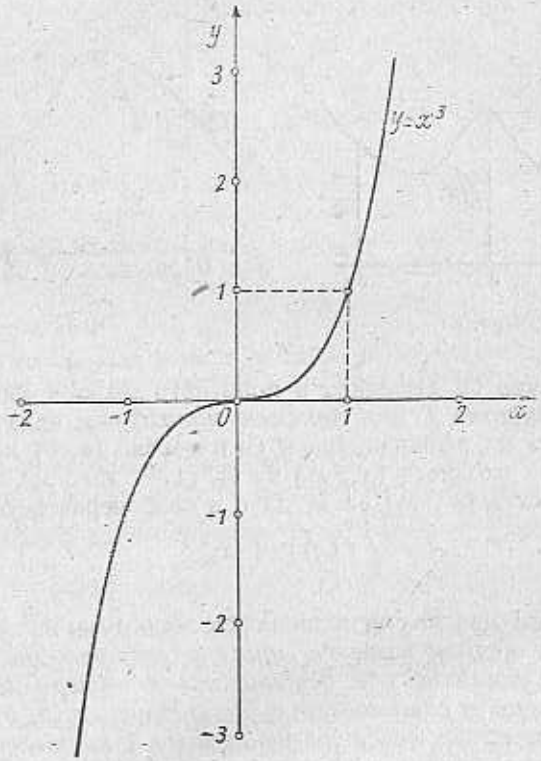
$$f'(x_0) = 0. \tag{3}$$

Наистина черт. 67 и 68 показват, че при направеното предположение, тангентата към графиката на f в точката $(x_0, f(x_0))$ е

хоризонтална, което е възможно само когато нейният ъглов коефициент е нула, т. е. когато е налице (3).

Не е трудно да се убедим чрез конкретни примери, че условието (3) може да бъде налице без функцията f да притежава локален екстремум.

Пример 1. Нека $f(x)=x^3$. Тогава $f'(x)=3x^2$, и равенството $f'(x_0)=0$ е изпълнено при $x_0=0$. Въпреки това функцията не притежава локални екстремуми (черт. 69).



Черт. 69

Понякога се казва, че условието (3) е *необходимо* за съществуването на локален екстремум, което означава, че винаги когато в x_0 е налице локален екстремум и f е диференцируема, условието (3) е в сила. Пример 1 показва, че условието (3) не е *достатъчно* за съществуването на локален екстремум, т. е. има

случаи, когато условието (3) е налице и въпреки това функцията няма локален екстремум.

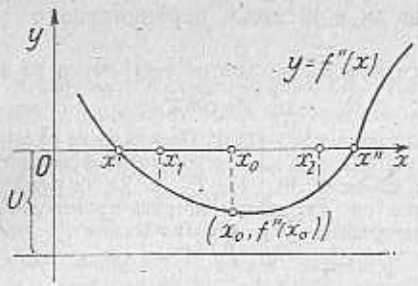
Едно достатъчно условие за съществуването на локален екстремум може да се получи с помощта на критерия за монотонност от §1. Съответното предложение гласи:

Нека функцията f е дефинирана и притежава първа и втора производна навсякъде в интервала (a, b) и x_0 е точка от вътрешността на този интервал, т. е. $a < x_0 < b$. Ако при тези предположения $f'(x_0)=0$, $f''(x_0) \neq 0$ и втората производна f'' е непрекъсната в точката x_0, функцията f сигурно притежава локален екстремум в x_0. Когато $f''(x_0) < 0$ локалният екстремум е максимум, а когато $f''(x_0) > 0$ той е минимум.

Без ограничаване на общността можем да се спрем само на случая, когато $f''(x_0) < 0$. От последното неравенство и от непрекъснатостта на f'' в точката x_0 следва, че неравенството

$$f''(x) < 0 \tag{4}$$

ще бъде изпълнено за всички x от една достатъчно малка околност (x_1, x_2) на x_0. Наистина, ако вземем произволна хоризонтална лента U, която съдържа точката $(x_0, f''(x_0))$ във вътрешността си и лежи изцяло под абсцисната ос (такава лента сигурно има понеже $f''(x_0) < 0$), съгласно дефиницията на непрекъснатостта ще съществува такава околност (x_1, x_2) на x_0, че за всяко x от тази околност точката $(x, f''(x))$ да принадлежи на лентата U; тъй като лентата беше избрана изцяло под абсцисната ос от-



Черт. 70

тук следва, че за всяко x от (x_1, x_2) точката $(x, f''(x))$ ще се намира под абсцисната ос, т. е. ще бъде налице (4) (вж. черт. 70).

Съгласно критерия за монотонност от (4) следва, че първата производна ще бъде намаляваща в интервала (x_1, x_2). От друга страна, по условие имаме $f'(x_0)=0$, поради което ще бъдат из-

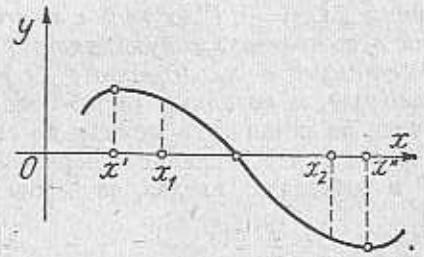
пълнени неравенствата

(5) $$f'(x) \geqq f'(x_0) = 0 \text{ при } x_1 < x \leqq x_0$$

и

(6) $$f'(x) \leqq f'(x_0) = 0 \text{ при } x_0 \leqq x < x_2$$

(черт. 71).



Черт. 71

Съгласно критерия за монотонност от (5) следва, че функцията f е монотонно растяща, когато $x_1 < x \leqq x_0$. Следователно

(7) $$f(x) \leqq f(x_0) \quad \text{при} \quad x_1 < x \leqq x_0.$$

Аналогично от (6) следва, че

(8) $$f(x) \leqq f(x_0) \quad \text{при} \quad x_0 \leqq x < x_2.$$

Сега неравенствата (7) и (8) показват, че за всяко x от околността (x_1, x_2) на x_0 е в сила неравенството (1). (вж. черт. 67).

Пример 2. Да се намерят локалните екстремуми на функцията

$$y = \cos x.$$

За производната имаме $y' = -\sin x$. Очевидно тя се анулира, когато $\sin x = 0$ т. е. когато $x = k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots)$. Следователно функцията може да има локални екстремуми само при $x = k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. За да разберем за кои от посочените точки това е така, ще изследваме втората производна. Като диференцираме първата производна получаваме $y'' = -\cos x$. Тогава

$$y''(k\pi) = -\cos k\pi = -(-1)^k = (-1)^{k+1}$$

и следователно при $x = 2k\pi$ функцията има локален максимум, а при $x = (2k+1)\pi$ — локален минимум.

Пример 3. Да се намерят локалните екстремуми на функцията

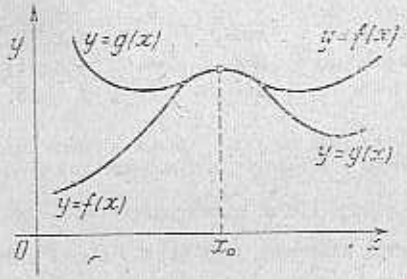
$$y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x - 1.$$

За производната имаме $y' = x^2 - 5x + 6$. Очевидно тя се анулира, когато $x^2 - 5x + 6 = 0$, т. е. когато $x = 2, 3$ и следователно функцията може да има локални екстремуми само при $x = 2, 3$. За да разберем в кои от посочените точки това е така, ще изследваме втората производна. Като диференцираме първата производна, получаваме $y'' = 2x - 5$ и

$$y''(2) = -1 < 0, \quad y''(3) = 1,$$

поради което функцията има локален максимум при $x = 2$ и — локален минимум при $x = 3$.

Да отбележим, че съгласно дефиницията въпросът дали функцията f има локален екстремум в някоя точка x_0 зависи само от поведението на f в произволно малка околност на точката x_0. По-точно, ако две функции f и g съвпадат в някоя околност на точката x_0 и f притежава локален екстремум в x_0, същото е вярно и за g (черт. 72). Това е причината, поради която разглежданите екстремуми се наричат локални.



Черт. 72

Най-голямата и най-малката стойности на една функция в един интервал се наричат съответно *абсолютен максимум* и *абсолютен минимум* на функцията в разглеждания интервал. Накратко те се наричат *абсолютни екстремуми* на функцията. Очевидно, ако абсолютният екстремум се достига във вътрешността на интервала, той е локален. Но, разбира се, абсолютните екстремуми могат да се достигат и в крайните точки на интервала, а може да се случи въобще да няма такива.

Пример 4. Функцията $f(x) = x$ няма абсолютни екстремуми в интервала $0 < x < 1$.

Наистина за всяко x с $0 < x < 1$ може да се избере $x' > x$, за което $0 < x' < 1$. Тогава $f(x) < f(x')$ и следователно $f(x)$ не е най-голямата стойност на f в интервала. Аналогично се вижда, че f няма и най-малка стойност в този интервал.

Пример 5. Да се намерят абсолютните екстремуми на функцията

$$f(x)=2x^3+3x^2-12x-9$$

в интервала $-\frac{5}{2}\leq x\leq 3$.

За да решим задачата, ще намерим интервалите, в които дадената функция е монотонна. За това ще си послужим с критерии за монотонност от §1. Като диференцираме f получаваме $f'(x)=6x^2+6x-12$, или като разложим квадратния тричлен на множители

$$f'(x)=6(x+2)(x-1). \tag{9}$$

От (9) лесно следва, че са изпълнени неравенствата

$$\begin{array}{lll} f'(x)\geq 0 & \text{при} & -5/2\leq x\leq -2, \\ f'(x)\leq 0 & \text{при} & -2\leq x\leq 1, \\ f'(x)\geq 0 & \text{при} & 1\leq x\leq 3. \end{array}$$

Оттук намираме, че функцията f е

$$\begin{array}{lll} \text{растяща} & \text{при} & -5/2\leq x\leq 2, \\ \text{намаляваща} & \text{при} & -2\leq x\leq 1, \\ \text{растяща} & \text{при} & 1\leq x\leq 3. \end{array} \tag{10}$$

Намерените свойства (10) на f до голяма степен позволяват да намерим абсолютните екстремуми на f. Наистина, от първите две от свойствата (10) следва, че за всяко x с $-\frac{5}{2}\leq x\leq 1$ е в сила неравенството $f(x)\leq f(-2)$, а от последното от тези свойства намираме, че $f(x)\leq f(3)$, когато $1\leq x\leq 3$. И така, за всяко x от интервала $\left[-\frac{5}{2}, 3\right]$ числото $f(x)$ не надминава поне едно от числата $f(-2)$ и $f(3)$ (направете чертеж). Следователно, за да намерим най-голямата стойност на f в интервала $\left[-\frac{5}{2}, 3\right]$ остава само да проверим кое от числата $f(-2)$ и $f(3)$ е по-голямо. Но $f(-2)=21$ и $f(3)=36$, поради което абсолютният максимум на f в интервала се достига в точката $x=3$ и е равен на 36.

Аналогично от (10) намираме, че $f(x)\geq f\left(-\frac{5}{2}\right)$ за всяко x с $-\frac{5}{2}\leq x\leq -2$ и $f(x)\geq f(1)$ за всяко x с $-2\leq x\leq 3$. Но $f\left(-\frac{5}{2}\right)=\frac{17}{2}$ и $f(1)=-16$, поради което най-малката стойност на f в интервала $\left[-\frac{5}{2}, 3\right]$ се достига при $x=1$ и е равна на -16.

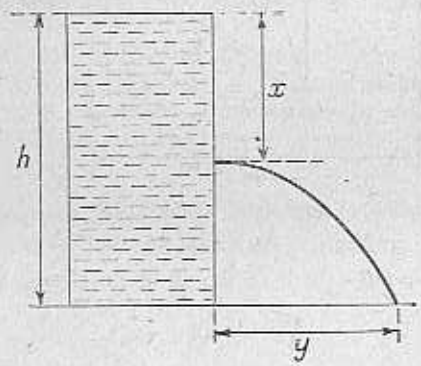
§ 4. НЯКОИ ЗАДАЧИ ЗА ЕКСТРЕМУМ

В този параграф ще разгледаме някои задачи за намиране на най-големи и най-малки стойности на функции в интервали. Това са задачи за абсолютни екстремуми. Понякога от геометрични или физични съображения се вижда, че търсеният екстремум не може да се достигне в крайните точки на интервала и следователно намирането му се свежда до това на локален екстремум.

Задача 1. *Един съд, чиято вертикална стена има височина h е поставен върху хоризонтална равнина. На кое място в стената трябва да се пробие отвор, така че струята да пресича хоризонталната равнина възможно най-далеч от съда.*

Най-напред да отбележим, че от физически съображения е ясно, че такова екстремно положение действително съществува. Освен това въпросният максимум не може да се достигне, ако отворът се пробие в най-горната или пък в най-долната точка на съда, понеже тогава струята ще пресича равнината на разстояние нула от съда. Следователно става дума за локален максимум.

Да пробием на разстояние x от горната основа на съда отвор и да намерим на какво разстояние от съда струята ще пресича хоризонталната равнина (черт. 73). Произволна капка от струята трябва да измине „по вертикалата" разстояние $h-x$. Ако означим с t времето на падането, съгласно закона за свободното падане на телата ще имаме $h-x=\frac{gt^2}{2}$, откъдето $t=\sqrt{\frac{2(h-x)}{g}}$. През така намереното време капката ще се движи „по хоризонталата" със скоростта на



Черт. 73

изтичането, която съгласно закона на Торичели е $V=\sqrt{2gx}$ и следователно търсеното разстояние ще бъде

$$y=vt=2\sqrt{x(h-x)}. \tag{1}$$

По този начин всичко се сведе до намирането на локалните екстремуми на функцията (1), които очевидно се достигат в точките, в които функцията $y=x(h-x)$ притежава локални екстремуми. Но $y'=h-x-x$ и очевидно y' е нула само когато $x=\frac{h}{2}$. Следователно търсеният максимум може да се представи само когато $x=\frac{h}{2}$.

Задача 2. *В чаша с форма на полусфера с радиус a е пусната пръчка с дължина $l>2a$. Да се намери равновесното положение на пръчката.*

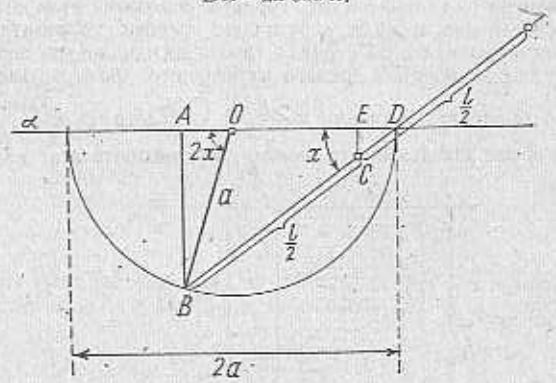
От механически съображения е ясно, че когато $l>4a$, равновесно положение не съществува, поради което ще се ограничим само със случая $l<4a$. *Въпросното равновесно положение ще се представи, когато центърът на тежестта на пръчката заема най-ниското възможно положение и следователно отново имаме задача за екстремум.*

Да изразим разстоянието y на средата на пръчката (центъра на тежестта ѝ) до равнината α, в която лежи горният ръб на чашата като функция на ъгъла, който тази пръчка сключва с α (черт. 74). Нека C е средата на пръчката. Триъгълниците DAB и DEC са очевидно подобни и следователно

(2) $$\frac{EC}{AB}=\frac{DC}{DB}.$$

От равнобедреността на триъгълника DOB следва, че

3) $$DB=2a\cos x,$$



Черт. 74

а като използуваме правоъгълния триъгълник OAB, получаваме

(4) $$AB=a\sin 2x.$$

От друга страна, $DC=DB-CB$ и по силата на (3) получаваме

(5) $$DC=2a\cos x-\frac{l}{2}.$$

Тъй като $y=EC$ равенствата (2), (3), (4) и (5) дават

(6) $$y=\frac{a\sin 2x\left(2a\cos x-\frac{l}{2}\right)}{2a\cos x}=\sin x\left(2a\cos x-\frac{l}{2}\right).$$

По този начин решението на задачата се свежда до намирането на абсолютния максимум на функцията (6) с дефиниционна област $0\leq x\leq\frac{\pi}{2}$. От механически съображения следва, че въпросният максимум не може да се достигне в границата на дефиниционния интервал, поради което ще бъде локален.

Като диференцираме (6), получаваме

(7) $$y'=\cos x\left(2a\cos x-\frac{l}{2}\right)-2a\sin^2 x=4a\cos^2 x-\frac{l}{2}\cos x-2a$$

и производната ще се анулира, когато ъгълът x удовлетворява условието

(8) $$16a\cos x=l+\sqrt{l^2+128a^2}.$$

Следователно пръчката ще бъде в равновесие, когато се постави в чашата така, че сключеният от нея ъгъл x с равнината α да удовлетворява условията (6).

На края ще отбележим изрично, че при решаването на горните две задачи не се наложи да използуваме достатъчното условие за съществуване на локален екстремум от §3, защото наличието на желания екстремум следваше от физически съображения. Оставаше да се намери само къде този екстремум се достига, а за това е достатъчно да се използува само необходимото условие за екстремум от §3.

§ 5. ИЗПЪКНАЛИ ФУНКЦИИ

Една функция, която е дефинирана в интервал се нарича *изпъкнала (конвексна)*, когато множеството от точките в равнината, разположени над графиката на функцията е изпъкнало (черт. 75). Това означава, че каквито и две точки от графиката на тази функция и да изберем, отсечката, която ги съединява, лежи изцяло над графиката.

За да изразим това условие на аналитичен език, да означим най-напред с f дадената функция, а с $[a, b]$ дефиниционния ѝ интервал. Ако x и y са произволни точки от $[a, b]$, общият вид на точките ζ от абсцисната ос, които са между x и y, се дава с формулата

(1) $$\zeta=px+(1-p)y,$$

където p пробягва интервала $[0,1]$, а условието за изпъкналост означава, че

(2) $$\zeta D\leq\zeta D'.$$

От друга страна, съгласно (1) ще имаме

(3) $$\zeta D=f(\zeta)=f(px+(1-p)y)$$

и за да запишем по друг начин (2), остава да изразим $\zeta D'$ чрез f и p. За тази цел ще си послужим с подобните триъгълници ABC и $A'B'C'$ и ще получим

$$B'C'=BC\frac{AB'}{AB},$$

откъдето

(4) $$\zeta C'=\zeta B'+B'C'=f(x)+(f(y)-f(x))\frac{\zeta-x}{y-x}.$$

Ако сега заместим в (4) ζ с равното му от (1), ще получим

(5) $$\zeta C' = f(x) + (f(y) - f(x))(1-p) = pf(x) + (1-p)f(y).$$

Сега (5), (3) и (2) дават

(6) $$f(px + (1-p)y) \leq pf(x) + (1-p)f(y).$$

И така функцията f е изпъкнала в интервала $[a, b]$, когато за всеки две точки x и y от този интервал и за всяко p с $0 \leq p \leq 1$ е в сила неравенството (6).

От геометрически съображения е ясно, че ако една диференцируема функция е изпъкнала, когато се движим надясно по абсцисната ос, тангентата става по-стръмна. Това означава, че първата ѝ производна е растяща. Съгласно изученото в §1, оттук следва, че ако освен това разглежданата функция притежава и втора производна, втората производна ще бъде неотрицателна. По интересно е, че е вярно и обратното, т. е.

Ако функцията f е дефинирана и притежава първа и втора производна в интервала $[a, b]$ и ако втората производна приема неотрицателни стойности навсякъде в $[a, b]$, функцията е изпъкнала в интервала $[a, b]$.

Геометрическо твърдението е ясно: щом производната на първата производна е неотрицателна, съгласно критерия за монотонност от §1, първата производна ще бъде растяща. С други думи, при движение надясно по абсцисната ос тангентата ще се върти в посока обратна на часовниковата стрелка, откъдето се вижда, че частта от равнината, разположена над графиката на f, е изпъкнала.

Ще приведем още едно доказателство. Да изберем по произволен начин y от $[a, b]$ и p от $[0,1]$ и да разгледаме функцията на x

(7) $$\varphi(x) = pf(x) - f(px + (1-p)y),$$

където x се променя в интервала $[a, y]$. Като диференцираме, получаваме

(8) $$\varphi'(x) = pf'(x) - f'(px + (1-p)y) \cdot p$$

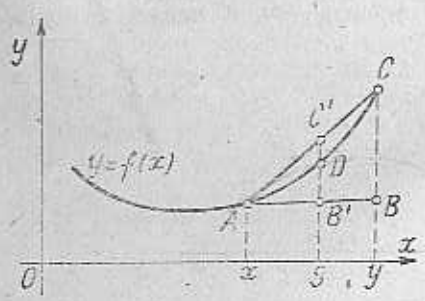
(тук бе използувана и теоремата за диференциране на функция от функция). Тъй като $x \leq y$, то $x \leq px + (1-p)y$ и понеже първата производна е растяща, от (8) получаваме

(9) $$\varphi'(x) \leq 0,$$

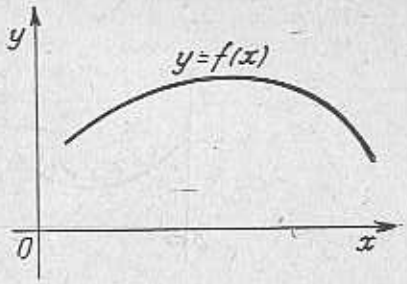
поради което функцията φ е намаляваща в интервала $[a, y]$. Следователно $\varphi(x) \geq \varphi(y)$, което съгласно (7) дава

$$pf(x) - f(px + (1-p)y) \geq pf(y) - f(y)$$

или което е все същото — неравенството (6). По този начин неравенството (6) е доказано, когато $a \leq x \leq y$. Аналогично доказателство може да се даде и в случая, когато $y \leq x \leq b$.



Черт. 75



Черт. 76

По аналогичен начин се въвежда и понятието *вдлъбната (конюавна) функция*. Функцията f се нарича вдлъбната в интервала $[a, b]$, когато частта от равнината, която е разположена под графиката на f е изпъкнала (черт. 76). Аналитически това означава, че при всеки избор на x и y от $[a, b]$ и на p от $[0,1]$ е в сила неравенството

(10) $$f(px + (1-p)y) \geq pf(x) + (1-p)f(y).$$

Също както при изпъкналите функции може да се види, че ако една функция f е два пъти диференцируема в интервала $[a, b]$, тя е вдлъбната тогава и само тогава, когато $f(x) \geq 0$ за всяко x от $[a, b]$.

Да отбележим още, че функцията f е вдлъбната тогава и само тогава, когато функцията $-f$ е изпъкнала.

Пример 1. Да се докаже, че функцията $y = x^2$ е изпъкнала.

Наистина, като диференцираме два пъти, ще получим $y'' = 2 > 0$.

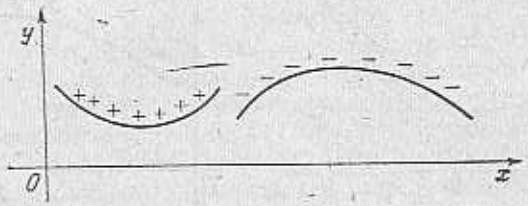
Пример 2. Да се изследва къде функцията $y = x^3$ е изпъкнала и къде е вдлъбната.

Като диференцираме два пъти, ще получим $y'' = 6x$, откъдето намираме, че

$$y''(x) \leq 0 \text{ при } x \leq 0,$$
$$y''(x) \geq 0 \text{ при } x \geq 0$$

и следователно функцията е вдлъбната в интервала $(-\infty, 0]$ и изпъкнала в интервала $[0, \infty)$.

Връзката между знака на втората производна и изпъкналостта се запомня лесно с помощта на следното „правило за чашата“ (черт. 77). Ако при наливане на течност, тя се задържа в графиката (+), втората производна е неотрицателна, ако пък течността не се задържа (−), втората производна е неположителна.



Черт. 77

На края ще се спрем на едно обобщение на неравенството (6), като ще представим на читателя сам да направи аналогичните разглеждания за (10).

Ако функцията f е изпъкнала в интервала $[a, b]$, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ са произволни точки от този интервал и $p_1, p_2, \ldots, p_n$ са произволни точки от интервала $[0, 1]$ с $\sum_{\nu=1}^{n} p_i=1$, в сила е неравенството

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) \leqq \sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i). \tag{11}$$

Доказателството използва индукция по n. При $n=2$ твърдението следва от (6). Да предположим сега, че (11) е вярно при някое n и да докажем верността му за $n+1$, т. е. да докажем неравенството

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} p_i x_i\right) \leqq \sum_{i=1}^{n+1} p_i f(x_i), \tag{12}$$

където $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$ са произволни точки от интервала $[a, b]$, а $p_1, p_2, \ldots, p_n, p_{n+1}$ са произволни числа от интервала $[0, 1]$ за които

$$\sum_{i=1}^{n+1} p_i = 1. \tag{13}$$

Ако $p_{n+1}=1$, от (13) и от обстоятелството, че всички p_i са неотрицателни следва, че $p_1=p_2=\ldots=p_n=0$ и (12) е очевидно вярно. Следователно без ограничение на общността може да се приеме, че $0 \leqq p_{n+1} < 1$. Тогава можем да положим

$$q_i = \frac{p_i}{1-p_{n+1}} \qquad (i=1, 2, \ldots, n). \tag{14}$$

От (13) най-напред получаваме

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1 - p_{n+1}$$

и следователно

$$\sum_{i=1}^{n} q_i = \frac{1}{1-p_{n+1}} \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \tag{15}$$

Освен това очевидно $q_i \geqq 0$ и от (15) следва, че $q_i \in [0,1]$, поради което съгласно индукционното предположение ще имаме

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} q_i x_i\right) \leqq \sum_{i=1}^{n} q_i f(x_i). \tag{16}$$

Да положим сега $p=p_{n+1}$, $x=x_{n+1}$ и $y=\sum_{i=1}^{n} q_i x_i$

Тогава (6) и (16) дават

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} p_i x_i\right) = f\left((1-p_{n+1}) \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{1-p_{n+1}} x_i + p_{n+1} x_{n+1}\right)$$

$$= f\left((1-p)y + p\,x\right) \leqq (1-p_{n+1})\, f\left(\sum_{i=1}^{n} q_i x_i\right) + p_{n+1} f(x_{n+1})$$

веднъж получаваме $y''=\frac{6x}{10}$ и $y''(\sqrt{3})=\frac{6\sqrt{3}}{10}>0$, откъдето съгласно §4 при $x=\sqrt{3}$ ще имаме локален минимум. Стойността на този минимум е $y(\sqrt{3})=\frac{3\sqrt{3}-9\sqrt{3}}{10}=\frac{-6\sqrt{3}}{10}\approx-1{,}02$.

След като познаваме производната и точките, в които тя се анулира, не е трудно да изследваме знака на тази производна. Да отбележим най-напред, че между две последователни нули знакът не може да се изменя, поради което производната ще има постоянен знак в интервалите $(-\infty,-\sqrt{3})$ и $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$, и $(\sqrt{3},\infty)$. Понеже числата $f'(-2)=\frac{3}{10}$ $f'(0)=-\frac{9}{10}$ и $f'(2)=\frac{3}{10}$ имат съответно положителен, отрицателен и положителен знак, същото ще бъде вярно и за знака на производната в съответните интервали. Следователно функцията е растяща в интервала $(-\infty,-\sqrt{3})$, намаляваща в $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$ и отново расте в $(\sqrt{3},\infty)$. Това условно може да се изобрази в следната диаграма

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$		$+\infty$
y	$-\infty$	↗	max	↘	min	↗	$+\infty$

Да пристъпим сега към изследване знака на самата функция. Както и при изследване знака на производната, най-напред е удобно да намерим нулите на функцията, т. е. да решим уравнението $x^3-9x=0$. Като направим това, ще получим $x_1=-3$, $x_2=0$ и $x_3=3$ и при неотрицателни x функцията ще запазва постоянен знак в интервалите $[0,3]$ и $[3,\infty)$. Понеже, както вече знаем, $y(\sqrt{3})=-1{,}02<0$, знакът на y в интервала $(0,3)$ е минус. От друга страна, вече видяхме, че при големи x функцията клони към ∞ и следователно знакът на y в интервала $(3,\infty)$ ще бъде плюс. Това условно може да се изобрази в следната диаграма

x	0		3		∞
y	0	$-$	0	$+$	∞

При чертаенето на графиката трябва да имаме пред вид, че точките от нея, които са над интервала $(0,3)$ са под абсцисната ос, а онези, които са над интервала $(3,\infty)$—над абсцисната ос.

Вече имаме немалко информация за функцията, но за да добием възможност по-точно да представим общия вид на графиката ѝ, ще изследваме къде функцията е изпъкнала и къде вдлъбната. За тази цел разглеждаме втората производна. Понеже $y''=\frac{3x}{5}$, то $y''(x)\leq 0$ при $x\leq 0$ и $y''(x)\geq 0$ при $x\geq 0$ и следователно функцията е вдлъбната при $x\geq 0$ и изпъкнала при $x\geq 0$. Това условно може да се изобрази в следната диаграма

x	$-\infty$		0		∞
y		⌒		⌣	

Понеже началото на координатната система е център на симетрия на графиката, желателно е да разполагаме с повече информация за тази точка. Да намерим например ъгловия коефициент на тангентата в тази точка, или което е все същото, да намерим стойността на производната при $x=0$. Очевидно $y'(0)=-0{,}9$ и следователно вече сме в състояние да построим тази тангента.

Сега ще намерим стойностите на функцията в някои отделно взети точки и ще получим следната таблица

x	0	1	2	3	4	∞
y	0	$-0{,}8$	-1	0	2,8	∞

Като вземем пред вид цялата така получена информация, можем да начертаем приблизително графиката на функцията (черт. 78).

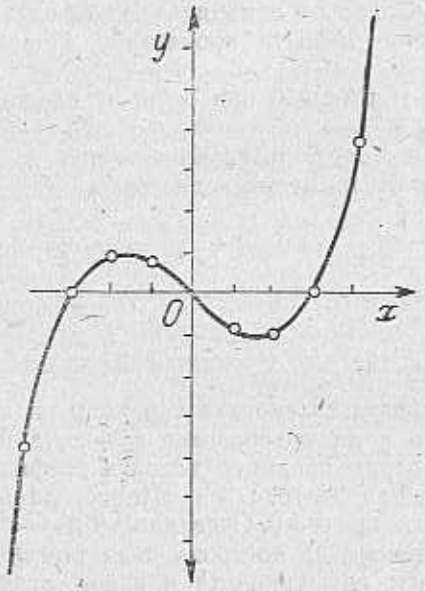
Пример 2. Да се изследва функцията

$$y=\frac{1}{1-x^2}.$$

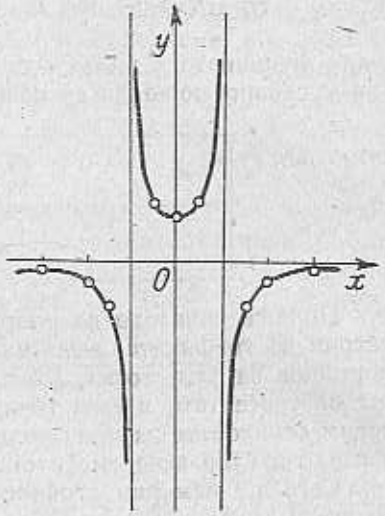
Очевидно тази функция не е дефинирана, когато знаменателят се анулира, т. е. при $x=-1$ и $x=1$. Следователно дефини-

ционната ѝ област се състои от следните интервали $(-\infty,-1)$, $(-1, 1)$ и $(1, \infty)$.

Краищата на дефиниционната област са $-\infty, -1$, 1, и ∞. Но тук не се налага да изследваме поведението на y около



Черт. 78



Черт. 79

всичките така изброени точки, защото отново е налице симетрия. Този път графиката на функцията е симетрична относно ординатната ос. Това означава, че винаги когато точката (x,y) принадлежи на графиката на функцията, точката $(-x,y)$ също принадлежи. В нашия случай това е така, понеже

$$y(-x)=\frac{1}{1-(-x)^2}=\frac{1}{1-x^2}=y(x).$$

Функции със симетрична относно началото дефиниционна област и със свойството $y(-x)=y(x)$ се наричат *четни*. Графиката на всяка четна функция е симетрична относно ординатната ос. Четни функции са например всички рационални функции, в които x участвува само с четни степени, функцията $\cos x$ и т. н.

Поради симетрията ще се ограничим с изследване на поведението на y около $x=1$ и $x=\infty$. Когато x клони към 1 отляво, $1-x^2$ клони към нула чрез положителни стойности, поради което $y\to\infty$. Когато x клони към 1 отдясно, $1-x^2$ клони към нула чрез отрицателни стойности и следователно $y\to-\infty$. Когато x клони към ∞, съгласно свойствата на полиномите $1-x^2$ клони към $-\infty$, поради което y клони към нула чрез отрицателни стойности, което понякога накратко се отбелязва така $y\to-0$. Така получените резултати могат накратко да се запишат в следната таблица

x	0	1	1	∞
y	1	$+\infty$	$-\infty$	-0

Като диференцираме y, получаваме

$$y'=\frac{2x}{(1-x^2)^2}$$

и единствената точка, в която първата производна се анулира, е $x=0$. За да си изясним дали в $x=0$ има или няма локален екстремум и за да определим вида на този екстремум, няма нужда да изследваме втората производна, понеже знакът на първата производна се изследва лесно. Наистина знакът на y' съвпада със знака на x, поради което малко преди нулата функцията намалява, а малко след тази точка расте и следователно при $x=0$ е налице локален минимум.

Поради симетрията при определяне на интервалите, в които функцията расте и тези, в които тя намалява, ще се ограничим само с положителни x. За всички такива x, за които y има смисъл, важи неравенството $y'(x)>0$, но тъй като дефиниционната област на y не е интервал, от това не следва, че y расте за всички $x>0$ (вж. §1, черт. 66). Единственото, което може да се твърди, е, че функцията y е растяща във интервалите $[0,1)$ и $(1,\infty)$. Интервалите на монотонност могат условно да се изобразят в следната диаграма

x	0	1	∞
y	↘ min	↗	↗

Да пристъпим сега към изследване знака на самата функция. Очевидно функцията не се анулира, но въпреки това мени знака си, защото дефиниционната ѝ област не е интервал. Знакът на y съвпада с този на $1-x^2$, който израз, както това не е трудно да се съобрази, е положителен при $0 \leqq x < 1$ и отрицателен при $x > 1$. Това условно може да се изобрази в следната диаграма

x	0		1		∞
y	1	+		−	

За да определим къде функцията е изпъкнала или вдлъбната, трябва да изследваме знака на втората производна. Като диференцираме първата производна, получаваме

$$y'' = \frac{6x^2+2}{(1-x^2)^3}$$

и знакът на y'' зависи само от знака на знаменателя, който пък съвпада със знака на $1-x^2$. Следователно функцията е изпъкнала между -1 и 1 и е вдлъбната в интервала $(1, \infty)$. Това условно може да се изобрази по следния начин

x	-1		1		∞
y		⌣		⌢	

Сега ще намерим стойностите на функцията в някои отделно взети точки и ще получим следната таблица

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	2	4
y	1	$\frac{4}{3}$	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{15}$

Като вземем пред вид всичко гореизложено, можем да начертаем приблизително графиката на функцията (черт. 79).

Пример 3. Да се изследва функцията

$$y = e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

Очевидно y има смисъл само когато $x \neq 0$ и следователно дефиниционната област се състои от интервалите $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$. В случая краищата на дефиниционната област са $x = -\infty$, $x = 0$ и $x = \infty$. Но и тук не се налага да изследваме поведението на y около всички така изброени точки, защото функцията е четна и следователно графиката ѝ е симетрична относно ординатната ос, поради което можем да се ограничим с изследване само при $x = 0$ и $x = \infty$. Когато x клони към нула отляво, $-\frac{1}{x^2}$ клони към $-\infty$. Ето защо $y \to +0$. Аналогично, когато x клони към нула отдясно $-\frac{1}{x^2} \to -\infty$ и $e^{-\frac{1}{x^2}} \to +0$. Тук наблюдаваме един интересен феномен: при $x = 0$ функцията не е дефинирана, но лявата и дясната граници на y при x клонящо към нула съществуват и съвпадат. Това позволява при желание да дефинираме y и при $x = 0$ по такъв начин, че получената функция да се окаже непрекъсната; за тази цел е достатъчно да положим $y(0) = 0$. При чертането на графиката на y около нулата ще считаме, че y е дефинирано и в нулата, и то именно по този начин.

Остава да изучим поведението на y около точката ∞. Когато $x \to \infty$, очевидно $-\frac{1}{x^2} \to -0$ и $y = e^{-\frac{1}{x}} \to 1-0$. Така получените резултати могат да се запишат накратко така

x	0	0		∞
y		0		$1-0$

Като диференцираме y, получаваме

$$y' = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

Понеже при $x > 0$ имаме $y' > 0$, функцията е растяща в интервала. Тъй като освен това е налице симетрия относно ординатната ос, при $x = 0$ функцията ще има минимум $y(0) = 0$.

Заслужава изследване и въпросът дали в точката $x = 0$ крива-га има тангента или няма. За да се отговори на този въпрос,

трябва да се види производната y' има или няма граница, когато x клони към нула. Може да се покаже, че тази граница действително съществува и е нула. Следователно кривата действително има тангента при $x=0$ и тази тангента е хоризонтална.

Интервалите на монотонност и локалните екстремуми могат да се запишат в следната таблица

x		0		∞
y	$\searrow$	0	$\nearrow$	$1-0$

Знакът на самата функция се изследва така: понеже $e^u>0$ за всяко u, то $y>0$ за всяко $x\neq 0$; освен това по дефиниция имаме $y(0)=0$ при $x=0$. И така функцията е неотрицателна, като се анулира само при $x=0$.

Като диференцираме първата производна, получаваме

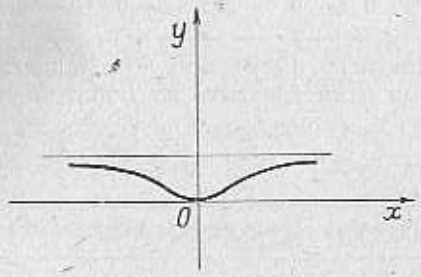
$$y''=\frac{2}{x^6}e^{-\frac{1}{x^2}}(2-3x^2),$$

откъдето виждаме, че знакът на y'' съвпада със знака на $2-3x^2$. Последният квадратен тричлен се анулира при $x=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$, отрицателен е в интервалите $\left(-\infty,-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ и $\left(\sqrt{\frac{2}{3}},\infty\right)$ и е положителен в $\left(-\sqrt{\frac{2}{3}},\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$. Ето защо функцията е изпъкнала в интервала $\left(-\sqrt{\frac{2}{3}},\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ и е вдлъбната в $\left(-\infty,-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ и в $\left(\sqrt{\frac{2}{3}},\infty\right)$. Това може да се запише, по-нагледно така

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{2}{3}}$		$\sqrt{\frac{2}{3}}$		∞
y		$\frown$		$\smile$		$\frown$	

Да намерим стойността на функцията в точките, в които графиката от изпъкнала става вдлъбната. Тези точки се наричат *инфлексни*. Като заместим x с $\sqrt{\frac{2}{3}}\approx 0{,}82$, получаваме с помощта на логаритмични таблици $y\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=e^{-\frac{3}{2}}\approx 0{,}22$ (тук вземаме пред вид, че $e\approx 2{,}72$, както това ще видим в гл. 5, § 1.). За да се ориентираме повече, бихме могли да пресметнем и ъгловия коефициент на тангентата в едната от инфлексните точки. Като заместим x с $\sqrt{\frac{2}{3}}$ в израза за y', получаваме $y'\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\approx 0{,}8$.

Гореизложеното дава възможност да начертаем приблизително графиката на функцията (черт. 80).



Черт. 80

Пример 4. Да се изследва функцията

$$y=\sin^3 x+\cos^3 x.$$

Очевидно дефиниционната област съвпада с цялата числова права и краищата ѝ са точките $x=-\infty$ и $x=\infty$. Но тук не се налага да изследваме толкова много поради периодичността на y. Очевидно $y(x+2\pi)=y(x)$ и функцията е периодична с период 2π. Това позволява да се ограничим само с изследването на функцията в произволен интервал с дължина 2π, например в интервала $[-\pi,\pi]$.

Като диференцираме y, получаваме

$$y'=3\sin x\cos x(\sin x-\cos x).$$

Производната се анулира за онези и само онези x, за които е в

сила поне едно от равенствата $\sin x=0$, $\cos x=0$, $\sin x=\cos x$. Като намерим решенията на тези уравнения, лежащи в интервала $[-\pi, \pi]$, получаваме, че производната се анулира, когато

$$x=-\pi,\ -3\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2},\ 0,\ \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2},\ \pi.$$

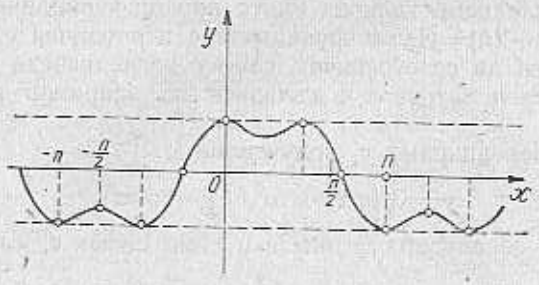
Понеже дефиниционната област е интервал, между две последователни нули производната не може да си мени знака. Непосредствено преди $-\pi$ имаме $\sin x>0, \cos x<0$ и $\sin x>\cos x$, поради което на това място ще бъде изпълнено неравенството $y'<0$. Непосредствено след $-\pi$ ще бъдат изпълнени неравенствата $\sin x<0$, $\cos x<0$ и $\sin x>\cos x$, и следователно ще имаме $y'>0$. Като продължим по същия начин, ще получим следната таблица:

x	$-\pi$		$-3\frac{\pi}{4}$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		π
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

откъдето непосредствено получаваме и следната таблица за локалните екстремуми и интервалите на монотонност на y

x	$-\pi$		$-3\frac{\pi}{4}$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		π
y		$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

Да изследваме знака на y. За тази цел най-напред ще намерим къде y се анулира, т. е. ще решим уравнението $\sin^3 x+\cos^3 x=0$. Онези негови решения, които лежат в интервала $[-\pi, \pi]$ са $x=-\frac{\pi}{4}$, $3\frac{\pi}{4}$. Аналогично, както и при производната, можем да



Черт. 81

изследваме знака на y и да получим следната таблица

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{4}$		$3\frac{\pi}{4}$		π
y		$-$	0	$+$	0	$-$	

Сега ще намерим стойностите на y за някои стойности на x и ще получим следната таблица

x	$-\pi$	$-3\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$3\frac{\pi}{4}$	π
y	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	0	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	0	-1

Вече сме готови да начертаем графиката (черт. 81)

§ 7. НЕРАВЕНСТВО НА КОШИ МЕЖДУ СРЕДНАТА АРИТМЕТИЧНА И СРЕДНАТА ГЕОМЕТРИЧНА

В тази точка ще докажем неравенството

(1) $$a_1^{p_1} a_2^{p_2} \dots a_n^{p_n} \leq p_1 a_1+p_2 a_2+\dots+p_n a_n,$$

където $a_1, a_2, \dots, a_n$ са произволни неотрицателни числа, а $p_1, p_2, \dots, p_n$ са произволни неотрицателни числа, за които е в сила равенството

$$p_1+p_2+\dots+p_n=1.$$

Това неравенство е просто следствие от неравенството (5.11), което е изпълнено за произволна изпъкнала функция.

Да положим $\ln a_i=x_i$ или, което е все същото,

(2) $$a_i=e^{x_i}.$$

Втората производна на функцията $f(x)=e^x$ е $f''(x)=e^x$ и следователно е неотрицателна. Ето защо функцията f е изпъкнала. Тогава съгласно (5. 11) ще имаме

$$e^{p_1x_1+p_2x_2+\dots+p_nx_n} \leq p_1e^{x_1}+p_2e^{x_2}+\dots p_ne^{x_n}$$

и като вземем пред вид (2) ще получим (1).

Ако в (1) положим $p_1=p_2=\dots=p_n=\frac{1}{n}$, ще получим неравенството

(3) $$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leqq \frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n},$$

което се нарича неравенство на Коши между средната аритметична и средната геометрична.

§ 8. НЕРАВЕНСТВО НА ХЬОЛДЕР

Ако в неравенството (7.1) положим $n=2$ ще получим

(1) $$a_1^{p_1} a_2^{p_2} \leqq p_1 a_1 + p_2 a_2,$$

където $a_1 \geqq 0$, $a_2 \geqq 0$, $p_1 \geqq 0$, $p_2 \geqq 0$ и $p_1+p_2=1$. В този параграф ще си послужим с неравенството (1), за да докажем следното неравенство на Хьолдер

(2) $$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leqq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \qquad \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right),$$

където $x_i \geqq 0$, $y_i \geqq 0$ $(i=1, 2, \dots, n)$, $p \geqq 0$, $q \geqq 0$.

За да докажем (2), ще положим

(3) $$X=\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad Y=\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

и

(4) $$\xi_i=\frac{x_i^p}{X^p}, \qquad \eta_i=\frac{y_i^p}{Y^p} \qquad (i=1, 2, \dots, n).$$

Тогава

(5) $$\sum_{i=1}^{n} \xi_i = 1 \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{n} \eta_i = 1.$$

Неравенството (1) дава

$$\xi_i^{\frac{1}{p}} \eta_i^{\frac{1}{q}} \leqq \frac{1}{p}\xi_i + \frac{1}{q}\eta_i.$$

Като съберем последните неравенства и вземем пред вид (5) ще получим

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i^{\frac{1}{p}} \eta_i^{\frac{1}{q}} \leqq \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n} \xi_i + \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{n} \eta_i = \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,$$

т. е.

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i^{\frac{1}{p}} \eta_i^{\frac{1}{q}} \leqq 1.$$

Ако в последното неравенство заместим ξ_i и η_i с равните им от (4) и се освободим от знаменателя ще получим

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leqq XY,$$

което съгласно (3) е неравенството на Хьолдер.

§ 9. НЕРАВЕНСТВО НА МИНКОВСКИ

В този параграф ще докажем неравенството

(1) $$\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i+b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

където $a_i \geqq 0$, $b_i \geqq 0$ $(i=1, 2, \dots, n)$ и $p \geqq 1$.

За да докажем (1), ще се възползуваме от неравенството на Хьолдер. За тази цел най-напред ще преобразуваме основата на лявата страна на (1) по следния начин

(2) $$\sum_{i=1}^{n} (a_i+b_i)^p = \sum_{i=1}^{n} (a_i+b_i)(a_i+b_i)^{p-1} = \sum_{i=1}^{n} a_i (a_i+b_i)^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} b_i (a_i+b_i)^{p-1}.$$

Ако определим q от равенството

(3) $$\frac{1}{q}=1-\frac{1}{p}$$

и приложим неравенството на Хьолдер ще получим

$$\sum_{i=1}^{n} a_i (a_i+b_i)^{p-1} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} (a_i+b_i)^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

и тъй като съгласно (3) $(p-1)q=p$, то

$$\sum_{i=1}^{n} a_i (a_i+b_i)^{p-1} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} (a_i+b_i)^p\right)^{1-\frac{1}{p}}. \tag{4}$$

Аналогично получаваме

$$\sum_{i=1}^{n} b_i (a_i+b_i)^{p-1} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} (a_i+b_i)^p\right)^{1-\frac{1}{p}}. \tag{5}$$

Ако сега съберем (4) и (5) и като използуваме (2), ще получим

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i+b_i)^p \leq \left[\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\right] \left(\sum_{i=1}^{n} (a_i+b_i)^p\right)^{1-\frac{1}{p}},$$

откъдето неравенството (1) следва чрез съкращаване на

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i+b_i)^p\right)^{1-\frac{1}{p}}.$$

Задачи към глава 4

1. Да се докаже, че $e^x \geq ex$ при $x \geq 1$.
2. Да се докаже, че $\varepsilon e\, x^{\delta} \ln x \geq -1$ при $x>0$.
3. Да се намерят локалните екстремуми на функциите:

а) $y=(x-4)^4(x+3)^3$;

б) $y=x+\dfrac{1}{x}$;

в) $y=x^2 \ln x$;

г) $y=e^{-x}-e^{-2x}$.

4. Да се начертаят графиките на функциите:

а) $y=\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+1}$;

б) $y=\dfrac{x}{3-x^2}$;

в) $y=\sin x^2$;

г) $y=\dfrac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x}$.

5. Да се докаже неравенството

$$\frac{x^{n+1}-1}{x-1} \geq (n+1)\, x^{\frac{n}{2}}.$$

Упътване. Послужете си с неравенството на Коши.

Глава 5

ПРЕСМЯТАНЕ СТОЙНОСТИТЕ НА ФУНКЦИИТЕ

Това, което видяхме в гл. 4, не изчерпва кръга от въпроси, към които може да се прилага критерият за монотонност от §1 на предната глава. Тук ще приложим този критерий за пресмятане стойностите на някои елементарни функции.

От всички функции най-леснодостъпни за пресмятане са полиномите. Ето защо пресмятането на стойностите на по-сложните функции се свежда най-често до това за полиноми. За тази цел, когато е дадена някаква функция f, търсим полином P, който е приближение на f с отнапред дадена точност ε. Последното означава, че за всяко x от дефиниционната област на f е изпълнено неравенството

$$|f(x)-P(x)|<\varepsilon.$$

Положителното число ε се избира в зависимост от желаната точност, а полиномът P — в зависимост от ε. Главната трудност се състои в „напипването" на този полином, но тук няма да разглеждаме общите методи, с помощта на които се прави това. След като полиномът P е вече известен, доказателството на горното неравенство се извършва чрез просто прилагане на критерия за монотонност. По-нататък, за да пресметнем $f(a)$ с точност ε, не остава нищо друго, освен да пресметнем $P(a)$. По тази обща схема са построени отделните параграфи.

В §1 е показано как могат да се пресмятат стойностите на функцията e^x и в частност на числото e. Естествените и десетичните логаритми на числата се пресмятат по методи, указани в §2 и §3. На пресмятането стойностите на бинома $(1+x)^\mu$, където показателят μ е произволно реално число, е посветен §4. Пресмятането на числото π и стойностите на тригонометричните функции е предмет на §5 и §6.

§ 1. ПРЕСМЯТАНЕ НА ЧИСЛОТО e

Пресмятането на стойностите на функцията e^x става с помощта на полинома

$$P_n(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}. \tag{1}$$

Ще направим оценка на грешката, която правим, когато вместо стойността e^x вземаме стойността $P_n(x)$. За тази цел да докажем най-напред неравенството

$$e^x\geq P_n(x) \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ldots,\ x\geq 0). \tag{2}$$

Ще си послужим с метода на *математичната индукция*. При $n=0$ неравенството (2) добива вида

$$e^x\geq 1. \tag{3}$$

За да се убедим във верността на (3), ще разгледаме функцията $\varphi(x)=e^x-1$ при $x\geq 0$. Тъй като $\varphi'(x)=e^x>0$ и следователно, съгласно критерия за монотонност функцията φ е монотонно растяща. Тогава за всяко $x\geq 0$ ще имаме

$$\varphi(x)\geq\varphi(0). \tag{4}$$

Като вземем пред вид, че $\varphi(x)=e^x-1$ и $\varphi(0)=e^0-1=0$, виждаме, че неравенствата (3) и (4) са едно и също. С това е доказана верността на неравенството (2) при $n=0$.

Да предположим сега, че (2) е вярно за някое n. Като използуваме това предположение, трябва да докажем, че (2) е вярно и за следващото го число $n+1$, т. е.

$$e^x\geq P_{n+1}(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\ (x\geq 0). \tag{5}$$

За да докажем (5), ще разгледаме функцията

$$\varphi(x)=e^x-P_{n+1}(x).$$

За производната на φ получаваме

$$\varphi'(x)=e^x-P'_{n+1}(x)=e^x-\left(1+\frac{2x}{2!}+\frac{3x^2}{3!}+\ldots+\frac{nx^{n-1}}{n!}\right.$$
$$\left.+\frac{(n+1)x^n}{(n+1)!}\right)=e^x-P_n(x)$$

и съгласно (2) е неотрицателна при $x \geqq 0$. Следователно φ е монотонно растяща и за $x \geqq 0$ ще имаме

$$\varphi(x) \geqq \varphi(0), \tag{6}$$

което е неравенството (5), тъй като $\varphi(0) = e^0 - P_{n+1}(0) = 1 - 1 = 0$. С това неравенството (2) е доказано.

Вече разполагаме с едно приближение на e^x отляво. Сега ще покажем, че функцията

$$P_{n-1}(x) + \frac{x^n}{n!} e^x \quad (x \geqq 0)$$

е приближение на e^x отдясно, т. е.

$$e^x \leqq 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!} e^x \quad (x \geqq 0). \tag{7}$$

За да се убедим във верността на (7), ще си послужим пак с метода на *математичната индукция*. При $n = 0$ неравенство (7) добива вида $e^x \leqq e^x$, което очевидно е вярно. Да предположим сега, че (7) е вярно за някое n. Като използуваме това предположение, трябва да докажем, че то е вярно и за $n+1$, т. е.

$$e^x \leqq 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^x = P_n(x) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^x. \tag{8}$$

За да докажем (8), ще разгледаме функцията

$$\varphi(x) = P_n(x) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^x - e^x.$$

За производната на φ имаме

$$\varphi'(x) = \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!} e^x - e^x\right) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^x.$$

Тъй като $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^x \geqq 0$ при $x \geqq 0$ и, от друга страна, изразът в скобите съгласно (7) е неотрицателен, то $\varphi'(x) \geqq 0$. Последното неравенство показва, че φ е растяща и следователно за $x \geqq 0$ ще имаме

$$\varphi(x) \geqq \varphi(0), \tag{9}$$

което е неравенството (8), тъй като $\varphi(0) = P_n(0) + 0 . e^0 - e^0 = 1 + 0 - 1 = 0$. С това неравенството (7) е доказано за всяко n и за всяко $x \geqq 0$.

Неравенствата (2) и (7) сега могат да се запишат така:

$$P_n(x) \leqq e^x \leqq P_n(x) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^x$$

или, което е все същото,

$$0 \leqq e^x - P_n(x) \leqq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^x. \qquad (x \geqq 0). \tag{10}$$

Неравенството (10) не е удобно за пресмятане стойностите на e^x, защото от дясната му страна фигурира числото e, за големината на което в момента не знаем нищо. За да избегнем този недостатък, най-напред ще намерим една груба оценка отгоре за e. Ако в (10) поставим $x = 1$ и $n = 2$, ще получим

$$0 \leqq e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\right) \leqq \frac{1}{3!} e,$$

откъдето

$$e \leqq 3. \tag{11}$$

Тогава от (10) и (11) следва

$$0 \leqq e^x - P_n(x) \leqq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} 3^x, \tag{12}$$

което вече може да се използува за пресмятане стойностите на e^x.

Сега ще видим как може да бъде пресметнато числото e с произволна отнапред зададена точност ε. За тази цел ще използуваме неравенството (12). Ако в (12) положим $x = 1$, ще получим

$$0 \leqq e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right) \leqq \frac{3}{(n+1)!}. \tag{13}$$

Числото $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$ се нарича n-то приближение на e. Неравенството (13) показва, че ако вместо e вземем неговото n-то приближение, грешката няма да надмине $\frac{3}{(n+1)!}$. Ако $\varepsilon > 0$ е точността, с която искаме да пресметнем e, ще трябва да изберем естественото число n по такъв начин, че да бъде изпълнено неравенството

$$\frac{3}{(n+1)!} < \varepsilon. \tag{14}$$

Да пресметнем e при $\varepsilon=0{,}000001$, т. е. с точност до шестия знак. Неравенството (14) в този случай добива вида $\frac{3}{(n+1)!}<10^{-6}$, т. е. $(n+1)!>3.10^6$. Тъй като $9!=362880<3.10^6<10!=3628800$, желаната точност ще се достига, когато $1+n\geq 10$, т. е. при $n\geq 9$. Естествено е да изберем $n=9$. Съответното приближение е

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\frac{1}{7!}+\frac{1}{8!}+\frac{1}{9!}.$$

Пресмятането на това число ще извършим, като разположим събираемите в следната таблица:

$$\left.\begin{array}{ll}
\frac{1}{} & =1{,}00000000 \\
\frac{1}{1!}=1 & =1{,}00000000 \\
\frac{1}{2!}=\frac{1}{2} & =0{,}50000000 \\
\frac{1}{3!}=\frac{1}{6} & =0{,}16666667 \\
\frac{1}{4!}=\frac{1}{24} & =0{,}04166667 \\
\frac{1}{5!}=\frac{1}{120} & =0{,}00833333 \\
\frac{1}{6!}=\frac{1}{720} & =0{,}00138889 \\
\frac{1}{7!}=\frac{1}{5040} & =0{,}00019841 \\
\frac{1}{8!}=\frac{1}{40320} & =0{,}00002480 \\
\frac{1}{9!}=\frac{1}{362880} & =0{,}00000276 \\
\hline
 & e=2{,}718281\ldots
\end{array}\right\}+$$

Съобразно избраната точност трябва да се вземат под внимание само първите шест знака след десетичната запетая, като последният се закръгли. И така, ако вместо числото e вземем числото 2,718282, няма да допуснем грешка по-голяма от 0,000001.

Да пресметнем сега $\sqrt{e}$. За тази цел ще се възползуваме от

неравенството (12) при $x=\frac{1}{2}$. В този случай (12) добива вида

$$0\leq\sqrt{e}-P_n\left(\frac{1}{2}\right)\leq\frac{\sqrt{3}}{(n+1)!\,2^{n+1}}.$$

За $P_n\left(\frac{1}{2}\right)$ имаме

$$P_n\left(\frac{1}{2}\right)=1+\frac{\frac{1}{2}}{1!}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2!}+\ldots+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{n!}=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!\,2^k}.$$

Нека желаната точност е $\varepsilon=0{,}00001$. Понеже читателят може да пресметне $\sqrt{3}$ с произволна точност, не е трудно да се убеди, че

$$\frac{\sqrt{3}}{7!\,2^7}<0{,}00001<\frac{\sqrt{3}}{6!\,2^6}.$$

Следователно, за да извършим пресмятането на $\sqrt{e}$ с указаната точност, трябва $n+1\geq 7$. Да изберем $n=6$. Тогава

$$P_6\left(\frac{1}{2}\right)=1+\frac{1}{1!\,2}+\frac{1}{2!\,2^2}+\frac{1}{3!\,2^3}+\frac{1}{4!\,2^4}+\frac{1}{5!\,2^5}+\frac{1}{6!\,2^6}=1{,}64872,$$

където е извършено и необходимото закръгляне. И така, ако вместо числото $\sqrt{e}$ вземем числото 1,64872, грешката няма да надмине 0,00001.

Читателят е разбрал вече, че колкото по-голяма точност желаем, толкова повече събираеми трябва да пресмятаме, т. е. колкото по-малко е ε, толкова по-голямо е n.

На края да кажем няколко думи и за избора на полинома (1). Без да се впускаме в подробности, ще посочим една формула, по която той се получава.

Нека f е произволна функция, която може да бъде диференцирана безбройно много пъти, т. е. допуска производни от произволно висок ред. Тогава полиномът P_n, съответствуващ на функцията f, се намира по формулата

$$P_n(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Да приложим тази формула в случая, когато $f(x)=e^x$. Тъй като

$$f(x)=f'(x)=f''(x)=\ldots=f^{(x)}(x)=e^{(x)},$$

то

$$f(0)=f'(0)=f''(0)=\ldots=f^{(x)}(0)=e^0=1.$$

Като заместим тези стойности във формулата, получаваме точно полинома (1).

§ 2. ПРЕСМЯТАНЕ НА ЕСТЕСТВЕНИТЕ ЛОГАРИТМИ НА ЧИСЛАТА

Пресмятането на стойностите на функцията

(1) $$f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$$

става с помощта на полинома

(2) $$P_n(x)=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right).$$

Ще оценим грешката, която правим, когато вместо стойността $f(x)$ вземаме стойността $P_n(x)$. За тази цел да докажем най-напред неравенството

(3) $$f(x)\geqq P_n(x),$$

където $n=0, 1, 2,\ldots$ и $0\leqq x<1$. За да докажем (3), разглеждаме функцията

(4) $$\varphi(x)=f(x)-P_n(x).$$

Производната на φ е

$$\varphi'(x)=f'(x)-P_n'(x)=\frac{2}{1-x^2}-2\left(1+\frac{3x^2}{3}+\frac{5x^4}{5}+\ldots+\frac{(2n+1)x^{2n}}{2n+1}\right)$$

$$=\frac{2}{1-x^2}-2(1+x^2+x^4+\ldots+x^{2n}).$$

Изразът в скобите е геометрична прогресия с частно x^2, следователно

$$\varphi'(x)=\frac{2}{1-x^2}-2\,\frac{1-x^{2n+2}}{1-x^2}=\frac{2x^{2n+2}}{1-x^2}$$

Понеже $0\leqq x<1$, то $1-x^2>0$ и следователно

$$\varphi'(x)\geqq 0.$$

Последното неравество показва, че φ е растяща функция за $0\leqq x<1$, следователно

(5) $$\varphi(x)\geqq\varphi(0).$$

Тъй като

$$\varphi(0)=f(0)-P_n(0)=\ln\frac{1+0}{1-0}-0=\ln 1-0=0,$$

неравенството (5), в съгласие с (4), може да бъде записано така:

$$f(x)-P_n(x)\geqq 0,$$

което не е нищо друго, освен неравенството (3).

Вече разполагаме с едно приближение на функцията f отляво. Сега ще покажем, че функцията

$$P_n(x)+\frac{2x^{2n+3}}{(2n+3)(1-x^2)}\qquad(0\leqq x<1),$$

е приближение на f отдясно, т. е.

(6) $$f(x)\leqq P_n(x)+\frac{2x^{2n+3}}{(2n+3)(1-x^2)}.$$

За да докажем (6), разглеждаме функцията

(7) $$\varphi(x)=P_n(x)+\frac{2x^{2n+3}}{(2n+3)(1-x^2)}-f(x).$$

Производната на φ е

$$\varphi'(x)=P_n'(x)+\frac{2[(2n+3)x^{2n+3}(1-x^2)+x^{2n+3}2x]}{(2n+3)(1-x^2)^2}-f'(x)$$

$$=\frac{4x^{2n+4}}{(2n+3)(1-x^2)^2}\geqq 0.$$

Тъй като $\varphi'(x)\geqq 0$, то функцията φ е растяща, следователно за $x\geqq 0$ имаме

(8) $$\varphi(x)\geqq\varphi(0)$$

Ако в (7) поставим $x=0$, ще получим

$$\varphi(0)=P_n(0)+0-f(0)=0.$$

Тогава неравенството (8) може да бъде записано така:

$$P_n(x)+\frac{2x^{2n+3}}{(2n+3)(1-x^2)}-f(x)\geqq 0,$$

което не е нищо друго, освен (6).

От неравенствата (3) и (6) следва, че

$$P_n(x)\leqq f(x)\leqq P_n(x)+\frac{2x^{2n+3}}{(2n+3)(1-x^2)},$$

или, което е все същото,

(9) $$0\leqq\ln\frac{1+x}{1-x}-2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)\leqq\frac{2x^{2n+3}}{(2n+3)(1-x^2)},$$

където $n=0, 1, 2, \ldots$ и $0 \leq x < 1$. Неравенството (9) лежи в основата на пресмятането на логаритмите на положителните цели числа.

Нека k е някое от числата $1, 2, 3, \ldots$ Да намерим най-напред онова x, за което

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{k+1}{k} \tag{10}$$

Като решим (10) по отношение на x, получаваме

$$x = \frac{1}{2k+1}. \tag{11}$$

Ясно е, че така полученото x лежи в интервала $[0,1)$. Понеже $k \geq 1$, то

$$\frac{1}{(2k+1)^2} \leq \frac{1}{(2.1+1)^2} = \frac{1}{9}.$$

Следователно

$$\frac{1}{1-\left(\frac{1}{2k+1}\right)^2} \leq \frac{1}{1-\frac{1}{9}} = \frac{9}{8},$$

т. е.

$$\frac{1}{1-\left(\frac{1}{2k+1}\right)^2} \leq \frac{9}{8} \quad (k=1, 2, 3, \ldots). \tag{12}$$

Ако сега заместим в (9) x с равното му от (11), като вземем пред вид (10) и (12), ще получим

$$0 \leq \ln\frac{k+1}{k} - 2\left(\frac{1}{2k+1} + \frac{1}{3(2k+1)^3} + \ldots + \frac{1}{(2n+1)(2k+1)^{2n+1}}\right) \tag{13}$$

$$\leq \frac{9}{4(2n+3)(2k+1)^{2n+3}}.$$

където $n=0, 1, 2, 3, \ldots$, $k=1, 2, 3, \ldots$.

Сега ще покажем как с помощта на неравенството (13) могат да бъдат пресметнати логаритмите на целите числа с произволна отнапред зададена точност $\varepsilon > 0$. Да отбележим, че грешката,

която ще направим, ако вместо стойността

$$\ln\frac{k+1}{k}$$

вземем стойността

$$2\left(\frac{1}{2k+1} + \frac{1}{3(2k+1)^3} + \ldots + \frac{1}{(2n+1)(2k+1)^{2n+1}}\right),$$

няма да надмине

$$\frac{9}{4(2n+3)(2k+1)^{2n+3}}. \tag{14}$$

Следователно, ако искаме да извършим пресмятането с точност ε, трябва да изберем n по такъв начин, че да бъде изпълнено

$$\varepsilon \geq \frac{9}{4(2n+3)(2k+1)^{2n+3}}. \tag{15}$$

Тъй като изразът (14) клони към нула при $n \to \infty$, следва, че колкото и малко да е положителното число ε, винаги можем да намерим естествено число n, за което да бъде изпълнено (15).

Сега ще направим някои приложения на горните резултати. Да пресметнем най-напред $\ln 2$. За тази цел да положим в (13) $k=1$. Ще получим

$$0 \leq \ln 2 - 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} + \ldots + \frac{1}{(2n+1)3^{2n+1}}\right)$$

$$\leq \frac{9}{4(2n+3).3^{2n+3}}.$$

Нека желаната точност е $\varepsilon = 10^{-7}$. Като вземем пред вид, че $k=1$, неравенството (15) добива вида

$$10^{-7} \geq \frac{9}{4(2n+3).3^{2n+3}},$$

което, както това лесно може да се види, е изпълнено за всяко $n \geq 6$. Съгласно избора на ε и за да намалим обема на пресмятанията, ще изберем $n=6$. Тогава числото

$$2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} + \frac{1}{7.3^7} + \frac{1}{9.3^9} + \frac{1}{11.3^{11}} + \frac{1}{13.3^{13}}\right) \tag{16}$$

ще бъде едно приближение на $\ln 2$ с точност 10^{-7}. Пресмятането ще запишем във вид на таблица:

$$
+\left\{\begin{array}{ll}
\frac{1}{3} & =0{,}333333333\\
\frac{1}{3.3^3} & =0{,}012345679\\
\frac{1}{5.3^5} & =0{,}000823045\\
\frac{1}{7.3^7} & =0{,}000065321\\
\frac{1}{9.3^9} & =0{,}000005645\\
\frac{1}{11.3^{11}} & =0{,}000000513\\
\frac{1}{13.3^{13}} & =0{,}000000048\\
\hline
 & \quad 0{,}346573584
\end{array}\right.
$$

За да намерим търсеното приближение трябва да удвоим получения резултат и да вземем под внимание само първите 6 знака, като последният съответно се закръгли. Така получаваме числото 0,6931472, което е приближение на ln 2 с точност 10^{-7}.

Да пресметнем сега ln3 със същата точност. За тази цел да положим в (13) $k=2$. Ще получим

$$0\leq \ln\frac{3}{2}-2\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{3.5^3}+\frac{1}{5.5^5}+\dots+\frac{1}{(2n+1)\,5^{2n+1}}\right)\leq\frac{9}{4(2n+3)5^{2n+3}}$$

Избора на естественото число n ще направим пак въз основа на неравенството (15), което в този случай добива вида

$$10^{-7}\geq\frac{9}{4\,(2n+3)\,5^{2n+3}}.$$

Не е трудно да се види, че последното неравенство е изпълнено за всяко $n\geq 4$ При $n=4$ и $k=2$ (13) добива вида

$$0\leq\ln\frac{3}{2}-2\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{3.5^3}+\frac{1}{5.5^5}+\frac{1}{7.5^7}+\frac{1}{9.5^9}\right)\leq\frac{9}{4.\,11.\,5^{13}}$$

следователно числото

$$2\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{3.5^3}+\frac{1}{5.5^5}+\frac{1}{7.5^7}+\frac{1}{9.5^9}\right)$$

е едно приложение на $\ln\frac{3}{2}$ с точност 10^{-7}. Съответните пресмятания също ще запишем във вида на таблица:

$$
+\left\{\begin{array}{ll}
\frac{1}{5} & =0{,}200000000\\
\frac{1}{3.5^3} & =0{,}002666667\\
\frac{1}{5.5^5} & =0{,}000064000\\
\frac{1}{7.5^7} & =0{,}000001829\\
\frac{1}{9.5^9} & =0{,}000000057\\
\hline
 & \quad 0{,}202732553
\end{array}\right.
$$

Като удвоим последния резултат ще намерим едно приближение на $\ln\frac{3}{2}$ с точност 10^{-7}. Тъй като последните две цифри могат да бъдат използувани само за закръгляне, това приближение е 0,4054651. За да пресметнем търсеното приближение на ln 3, ще се възползуваме от очевидното равенство $\ln 3=\ln\frac{3}{2}+\ln 2$ и от това, че знаем приближенията с желаната точност на логаритмите от дясната страна: $0{,}4054651+0{,}6931472=1{,}0986123$, т. е.

$$\ln 3=1{,}0986123\dots$$

По този начин могат да бъдат пресметнати логаритмите на простите числа, а от там и на целите. Така например, за да пресметнем ln 10, ще ни потрябва да пресметнем ln5, тъй като $\ln 10=\ln 2+\ln 5$. За да пресметнем ln 5 с точност 10^{-7} ще се възползуваме от неравенството (13) при $k=4$ и $n=2$. В този случай то добива вида:

$$0\leq\ln\frac{5}{4}-2\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3.9^3}+\frac{1}{5.9^5}\right)\leq\frac{9}{4.\,7.\,9^7}.$$

Да пресметнем най-напред сумата в скобите:

$$
+\left\{\begin{array}{ll}
\frac{1}{9} & =0{,}111111111\\
\frac{1}{3.9^3} & =0{,}000457247\\
\frac{1}{5.9^5} & =0{,}000003387\\
\hline
 & \quad 0{,}111571745
\end{array}\right.
$$

Като удвоим получения резултат, ще получим приближение с желаната точност за числото $\ln\frac{5}{4}$. Тъй като последните две цифри използуваме само за закръгляне, това приближение е числото 0,2231435. Като вземем пред вид, че $\ln\frac{5}{4}=\ln 5-2\ \ln 2$, за приближение на ln5 получаваме числото 1,6094379.

Пресмятането на едно приближение на ln 10 ще направим с помощта на очевидното равенство $\ln 10=\ln\frac{5}{4}+3\ln 2$. Като заместим в дясната му страна пресметнатите вече приближения получаваме

$$\ln 10=2{,}3025851\ldots$$

Да отбележим, че като се продължи по този начин пресмятането на логаритмите на целите числа се натрупва грешка, която трябва да се вземе пред вид, за да се получи приближение с желаната точност.

§ 3. ПРЕСМЯТАНЕ НА ДЕСЕТИЧНИТЕ ЛОГАРИТМИ НА ЧИСЛАТА

Ако знаем естествения логаритъм на дадено число, можем да пресметнем неговия десетичен логаритъм. Наистина за всяко $x>0$ е в сила равеството $x=10^{\lg x}$, което чрез логаритмуване при основа e дава $\ln x=\lg x\ \ln 10$. Ето защо

(1) $$\lg x=M\ln x,$$

където $M=\frac{1}{\ln 10}$. Понякога M се нарича *модул на прехода* от естествените към десетичните логаритми. Като използуваме намереното в предния параграф приближение на ln10, за модула M получаваме

$$M=\frac{1}{\ln 10}=\frac{1}{2{,}3025851}=0{,}4342945$$

с точност 10^{-7}. Да пресметнем например lg2 с точност 10^{-5}. За тази цел ще си послужим с формула (1) и с намереното вече приближение на ln2 и ще получим за търсеното приближение $\lg 2=0{,}30103$.

Десетичните логаритми на числата могат да се пресмятат и без предварителното пресмятане на техните естествени логаритми.

Достатъчно е да умножим неравенствата (2.13) с положителното число M. По този начин като вземем пред вид (1) ще получим

(2) $$0\leqq\lg\frac{k+1}{k}-2M\left(\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{3(2k+1)^3}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)(2k+1)^{2n+1}}\right)\leqq$$
$$\leqq\frac{9M}{4(2n+3)(2k+1)^{2n+3}}.$$

§ 4. ПРЕСМЯТАНЕ НА СТОЙНОСТИТЕ НА $(1+x)^\mu$

Ако в бинома на Нютон

$$(a+b)^n=a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\ldots+\binom{n}{n}b^n$$

положим $a=1$, $b=x$, ще получим

(1) $$(1+x)^n=1+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\ldots+\binom{n}{n}x^n.$$

Знаем, че това представяне е валидно, когато n е произволно естествено число. Формулата (1) позволява да се пресметне степента на числото $1+x$ посредством степените на x. Естествено е да си поставим въпроса как може да се пресметне степента $(1+x)^\mu$, когато степенния показател не е цяло положително число.

Ще покажем, че стойностите на функцията

(2) $$f(x)=(1+x)^\mu,$$

където μ е произволно реално число, могат да бъдат пресметнати с произволна отнапред зададена точност с помощта на полинома

(3) $$S_{n,\mu}(x)=1+\binom{\mu}{1}x+\binom{\mu}{2}x^2+\ldots+\binom{\mu}{n}x^n\quad(n=1,2,\ldots).$$

Задачата ще бъде да оценим грешката $(1+x)^\mu-S_{n,\mu}(x)$, която допускаме, когато вместо стойността $(1+x)^\mu$ вземем стойността на полинома $S_{n,\mu}(x)$. Ще решим тази задача в зависимост от това, какво е числото x.

Нека най-напред $0\leqq x<1$. За да оценим грешката, ще си послужим с неравенството

(4) $$\binom{\mu}{n+1}\left[(1+x)^\mu-S_{n,\mu}(x)\right]\geqq 0.$$

Ще докажем, че това неравенство е изпълнено за всяко μ, за всяко $x\geqq 0$ и за всяко $n=0, 1, 2,\ldots$.

За тази цел да положим

$$\varphi_{n,\mu}(x)=\binom{\mu}{n+1}\left[(1+x)^{\mu}-S_{n,\mu}(x)\right]. \tag{5}$$

Тогава неравенството (4) може да се запише по-накратко по следния начин

$$\varphi_{n,\mu}(x)\geqq 0. \tag{6}$$

Доказателството ще извършим с индукция по n.

При $n=0$ (4) добива вида

$$\varphi_{0,\mu}(x)=\mu\,[(1+x)^{\mu}-1]\geqq 0. \tag{7}$$

В зависимост от μ при доказателството на (7) възникват два случая:

а) $\mu\geqq 0$; б) $\mu<0$.

Случай а). Тъй като $\mu\geqq 0$, за да докажем (7) е достатъчно да покажем, че $(1+x)^{\mu}\geqq 1$, което е очевидно, защото $x\geqq 0$ и $\mu\geqq 0$.

Случай б). Тъй като $\mu<0$, за да докажем (7) е достатъчно да покажем, че $(1+x)^{\mu}\leqq 1$, което е очевидно, защото $x\geqq 0$ и $\mu<0$. С това неравенството (4) е доказано при $n=0$.

Да предположим сега, че (4) или, което е все също (6), е изпълнено за някое n, за всяко $x\geqq 0$ и за всяко μ. Ще докажем, че то е изпълнено и за $n+1$, т. е.

$$\varphi_{n+1,\mu}(x)\geqq 0, \tag{8}$$

където μ е произволно реално число $x\geqq 0$.

Ако в (5) заместим n с $n+1$, ще получим

$$\varphi_{n+1,\mu}(x)=\binom{\mu}{n+2}[(1+x)^{\mu}-S_{n+1,\mu}(x)]=\binom{\mu}{n+2}\left[(1+x)^{\mu}-\left(1+\binom{\mu}{1}x+\cdots+\binom{\mu}{n}x^{n}+\binom{\mu}{n+1}x^{n+1}\right)\right]. \tag{9}$$

Да диференцираме това равенство относно x:

$$\varphi'_{n+1,\mu}(x)=\binom{\mu}{n+2}\left[\mu(1+x)^{\mu-1}-\left(\mu+\frac{\mu(\mu-1)}{2!}2x+\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{3!}3x^{2}+\cdots+\frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1)}{n!}n\,x^{n-1}+\frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n)}{(n+1)!}(n+1)\,x^{n}\right)\right].$$

Като изнесем μ пред скоби и направим необходимите съкращения, получаваме

$$\varphi'_{n+1,\mu}(x)=\mu\binom{\mu}{n+2}\left[(1+x)^{\mu-1}-\left(1+\binom{\mu-1}{1}x+\binom{\mu-1}{2}x^{2}+\cdots+\binom{\mu-1}{n}x^{n}\right)\right]. \tag{10}$$

Тъй като

$$\mu\binom{\mu}{n+2}=\mu\,\frac{\mu(\mu-1)\cdots[\mu-(n+2)+1]}{(n+2)!}=\frac{\mu^{2}}{n+2}\cdot\frac{(\mu-1)\cdots[\mu-1-(n+1)+1]}{(n+1)!}=\binom{\mu-1}{n+1}\frac{\mu^{2}}{n+2},$$

равенството (10) добива вида

$$\varphi'_{n+1,\mu}(x)=\frac{\mu^{2}}{n+2}\binom{\mu-1}{n+1}\left[(1+x)^{\mu-1}-\left(1+\binom{\mu-1}{1}x+\cdots+\binom{\mu-1}{n}x^{n}\right)\right]=\frac{\mu^{2}}{n+2}\binom{\mu-1}{n+1}\left[(1+x)^{\mu-1}-S_{n,\mu-1}(x)\right]. \tag{11}$$

Но съгласно (5)

$$\binom{\mu-1}{n+1}[(1+x)^{\mu-1}-S_{n,\mu-1}(x)]=\varphi_{n,\mu-1}(x)$$

и равенство (11) добива вида

$$\varphi'_{n+1,\mu}(x)=\frac{\mu^{2}}{n+2}\varphi_{n,\mu-1}(x). \tag{12}$$

Съгласно индукционното предположение неравенство (6) е изпълнено за всяко μ и за всяко $x\geqq 0$. Ако сега в (6) на мястото на μ поставим $\mu-1$, ще получим

$$\varphi_{n,\mu-1}(x)\geqq 0 \tag{13}$$

за всяко $x\geqq 0$. Понеже $\frac{\mu^{2}}{n+2}\geqq 0$, (12) и (13) дават

$$\varphi'_{n+1,\mu}(x)\geqq 0 \tag{14}$$

за всяко μ и за всяко $x\geqq 0$. От (14) следва, че $\varphi_{n+1,\mu}(x)$ е растяща при $x\geqq 0$. Следователно при $x\geqq 0$ ще имаме

$$\varphi_{n+1,\mu}(x)\geqq\varphi_{n+1,\mu}(0). \tag{15}$$

Но ако в (9) положим $x=0$, ще получим

$$\varphi_{n+1,\mu}(0)=\binom{\mu}{n+2}\left[(1+0)^{\mu}-\left(1+\binom{\mu}{1}\cdot 0+\cdots+\binom{\mu}{n+1}\cdot 0\right)\right]=0,$$

и (15) добива вида

$$\varphi_{n+1,\mu}(x) \geqq 0,$$

което е неравенство (8). С това е доказано, че от верността на (6) за някое n следва верността му и за $n+1$. Съгласно принципа на пълната математична индукция неравенство (6), или което е все същото неравенство (4), е доказано.

Ако сега изберем естественото число n така, че

$$n > \mu - 1, \tag{16}$$

от неравенството (4) ще следва, че

$$|(1+x)^\mu - S_{n,\mu}(x)| \leqq \left|\binom{\mu}{n+1}\right| x^{n+1} \quad (x \geqq 0). \tag{17}$$

Очевидно е, че с помощта на последното неравенство можем да оценим (по абсолютна стойност) грешката, която ще направим, ако вместо стойността $(1+x)^\mu$ вземем стойността на полинома (3).

За да докажем (17) ще използуваме това, че (4) е вярно за всяко $n\,(x \geqq 0)$. Тогава е вярно и неравенството

$$\binom{\mu}{n+2}[(1+x)^\mu - S_{n+1,\mu}(x)] \geqq 0, \tag{18}$$

което се получава от (4) чрез заместването на n с $n+1$.

От условието (16) следва, че $\binom{\mu}{n+1}$ и $\binom{\mu}{n+2}$ имат различни знаци. За да покажем това е достатъчно да се убедим, че произведението на тези две числа е отрицателно. Наистина

$$\binom{\mu}{n+1}\cdot\binom{\mu}{n+2} = \frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n)}{(n+1)!}\cdot\frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n)(\mu-n-1)}{(n+2)!}$$

$$= \left[\frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n)}{((n+1)!)^2}\right]^2\cdot\frac{\mu-n-1}{n+2} < 0.$$

Ако сега заменим в неравенството (18) множителя $\binom{\mu}{n+2}$ с $\binom{\mu}{n+1}$, ще получим

$$\binom{\mu}{n+1}[(1+x)^\mu - S_{n+1,\mu}(x)] \leqq 0.$$

Но съгласно равенство (3), с което е определен полинома $S_{n,\mu}$ имаме:

$$S_{n+1,\mu}(x) = 1 + \binom{\mu}{1}x + \binom{\mu}{2}x^2 + \cdots + \binom{\mu}{n}x^n + \binom{\mu}{n+1}x^{n+1}$$

$$= S_{n,\mu}(x) + \binom{\mu}{n+1}x^{n+1}.$$

Следователно последното неравенство може да се запише така

$$\binom{\mu}{n+1}\left[(1+x)^\mu - S_{n,\mu}(x) - \binom{\mu}{n+1}x^{n+1}\right] \leqq 0$$

или, което е все същото

$$\binom{\mu}{n+1}[(1+x)^\mu - S_{n,\mu}(x)] \leqq \left\{\binom{\mu}{n+1}\right\}^2 x^{n+1}. \tag{19}$$

Съгласно (4) лявата страна на това неравенство е неотрицателна (а значи и дясната). Тъй като по определение абсолютната стойност на едно реално неотрицателно число съвпада с това число, неравенството

$$\left|\binom{\mu}{n+1}\right|\cdot[(1+x)^\mu - S_{n,\mu}(x)] \leqq \left|\binom{\mu}{n+1}\right|^2\cdot x^{n+1} \tag{20}$$

при $x \geqq 0$ и $n > \mu - 1$ е еквивалентно с (19). Ако сега разделим двете страни на (20) на положителното число $\left|\binom{\mu}{n+1}\right|$, посоката на неравенството ще се запази, и в резултат ще получим неравенството (17).

С помощта на (17) вече можем да правим пресмятания, като вместо стойността $(1+x)^\mu$ вземем стойността $S_{n,\mu}(x)$, при което грешката няма да надмине $\left|\binom{\mu}{n+1}\right|\cdot x^{n+1}$. Следователно, ако ε е точността, с която искаме да пресметнем $(1+x)^\mu$ при фиксирани $x \geqq 0$ и μ, естественото число n ще определим от неравенството

$$\left|\binom{\mu}{n+1}\right|\cdot x^{n+1} \leqq \varepsilon. \tag{21}$$

Сега ще илюстрираме получените резултати с един пример. Да се пресметне $\sqrt[3]{68}$ с точност $\varepsilon = 10^{-5}$.

Най-близкото до 68 число, което е третата степен на някое естествено число, е $64 = 4^3$. Тъй като $68 = 64 + 4 = 64\cdot\left(1 + \frac{1}{16}\right)$, то

$$\sqrt[3]{68} = \sqrt[3]{64\left(1+\frac{1}{16}\right)} = 4\left(1+\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

По този начин задачата се сведе до пресмятането на стойността на $(1+x)^\mu$ за $x = \frac{1}{16}$ и $\mu = \frac{1}{3}$; точността на последното следва да изберем по-висока от 10^{-5}, за да получим приближение на $4\cdot\left(1+\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{3}}$ при $\varepsilon = 10^{-5}$. Тогава n трябва да удовлетворява нера-

венството (21) при $x=\frac{1}{16}$, $\mu=\frac{1}{3}$ и $\varepsilon=10^{-6}$, т. е.

$$\left|\binom{\frac{1}{3}}{n+1}\right|\cdot\left(\frac{1}{16}\right)^{n+1}\leq 10^{-6}.$$

С опитване намираме, че лявата страна на последното неравенство при $n=2$ е близко до $1{,}5.10^{-6}$, а при $n=3$ — до $0{,}6.10^{-6}$, т. е. трябва да изберем $n=3$. Очевидно условието (16) е изпълнено, и неравенството (17) за разглеждания пример добива вида

$$\left|\left(1+\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{3}}-S_{3,\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{16}\right)\right|\leq 10^{-6},$$

т. е. числото $S_{3,\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{16}\right)$ е едно приближение на $\frac{1}{4}\sqrt[3]{68}$ с точност 10^{-6}. От (8) при $n=3$, $\mu=\frac{1}{3}$ и $x=\frac{1}{16}$ получаваме

$$S_{3,\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{16}\right)=1+\binom{\frac{1}{3}}{1}\cdot\frac{1}{16}+\binom{\frac{1}{3}}{2}\cdot\left(\frac{1}{16}\right)^2+\binom{\frac{1}{3}}{3}\cdot\left(\frac{1}{16}\right)^3$$

$$=1+\frac{1}{3.16}-\frac{1}{9.16^2}+\frac{5}{81.16^3}.$$

За удобство при пресмятането ще сумираме поотделно положителните и отрицателните числа и получените два резултата ще извадим:

$$+\begin{cases}1 & =1{,}0000000\\ \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{16} & =0{,}0208333\\ \frac{5}{81}\cdot\frac{1}{16^3} & =0{,}0000151\end{cases}\qquad \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{16^2}=0{,}0004340$$

$$1{,}0208484 \qquad\qquad 0{,}0004340$$

$$-\begin{cases}1{,}0208484\\ 0{,}0004340\end{cases}$$

$$1{,}0204144$$

Като умножим последният резултат с 4 и закръглим петата цифра след десетичната запетая, получаваме числото 4,081666, което е

търсеното приближение на $\sqrt[3]{68}$ с точност 10^{-5}.

Ако $-1<x\leq 0$ стойността $(1+x)^\mu$ може да бъде пресметната с произволна отнапред дадена точност пак с помощта на полинома (3), но неравенство (17) няма да бъде в сила. Оценката на грешката в този случай можем да направим с помощта на неравенството

$$(22)\qquad (1+x)^\mu-S_{n,\mu}(x)\leq\left|(\mu-n)\binom{\mu}{n}x^{n+1}\right|.(1+x)^{\mu-1},$$

където μ е произволно реално число.

Да пресметнем числото $(7901)^{-\frac{1}{2}}$. Тъй като $88^2<7901<89^2$ и числото 7901 е по-близо до числото $89^2=7921$, ще представим подкорената величина така: $7901=7921-20=89^2-20$. Тогава

$$(7901)^{-\frac{1}{2}}=(89^2-20)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{89}\left(1-\frac{20}{7921}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

и задачата се свежда до пресмятането на $\left(1-\frac{20}{7921}\right)^{-\frac{1}{2}}$. За да извършим това пресмятане ще използуваме неравенство (22) при $\mu=-\frac{1}{2}$ и $x=\frac{20}{7921}$. Нека желаната точност е 10^{-7}. Тогава за конкретния пример съгласно (22) имаме

$$\frac{1.3.5\ldots(2n+1)}{2^{n+1}.n!}\left(\frac{20}{7921}\right)^{n+1}<10^{-7},$$

което се удовлетворява за $n>1$. Да изберем $n=2$. Тогава

$$S_{2,-\frac{1}{2}}\left(-\frac{20}{7921}\right)=1-\frac{1}{2}\left(-\frac{20}{7921}\right)+\frac{1}{8}\left(-\frac{20}{7921}\right)^2=1{,}0012632\ldots$$

Следователно числото $1{,}0012632.89^{-1}=0{,}0112502$ е приближение на $\frac{1}{\sqrt{7901}}$ с точност 10^{-7}.

§ 5. ПРЕСМЯТАНЕ НА ЧИСЛОТО π

В този параграф ще покажем как може да се пресметне числото π с произволна отнапред дадена точност. За тази цел ще си послужим с неравенството

$$(1)\qquad \left|x-\left(\operatorname{tg}x-\frac{\operatorname{tg}^3x}{3}+\cdots+(-1)^n\frac{(\operatorname{tg}x)^{2n+1}}{2n+1}\right)\right|\leq\frac{(\operatorname{tg}x)^{2n+3}}{2n+3},$$

където $n=0, 1, 2, \ldots$ и $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$. Ще извършим доказателство на (1) с помощта на монотонни функции.

Да покажем най-напред, че функцията S_n, дефинирана посредством равенството

$$(2) \qquad S_n(x) = (-1)^{n+1}\left[x - \left(\operatorname{tg} x - \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{(\operatorname{tg} x)^{2n+1}}{2n+1}\right)\right],$$

където $n=0, 1, 2, \ldots$ и $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$, е растяща. За производната ѝ получаваме

$$S_n'(x) = (-1)^{n+1}\left[1 - \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x} + \cdots + (-1)^n \frac{(\operatorname{tg} x)^{2n}}{\cos^2 x}\right)\right]$$

$$= (-1)^{n+1}\left[1 - \frac{1}{\cos^2 x}\left(1 - \operatorname{tg}^2 x + \cdots + (-1)^n (\operatorname{tg} x)^{2n}\right)\right]$$

или, като използуваме формулата за сума на геометрична прогресия с частно $q = -\operatorname{tg}^2 x$, получаваме

$$S_n'(x) = (-1)^{n+1}\left[1 - \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{1-(-\operatorname{tg}^2 x)^{n+1}}{1-(-\operatorname{tg}^2 x)}\right] = \operatorname{tg}^{2n+2} x,$$

т. е.

$$S_n'(x) \geq 0.$$

Следователно за $x \geq 0$ ще имаме $S_n(x) \geq S_n(0)$. Но съгласно (2) $S_n(0) = 0$, следователно

$$(3) \qquad S_n(x) \geq 0$$

за всяко n. От друга страна, като заместим в (2) n с $n+1$, ще получим

$$S_{n+1}(x) = (-1)^{n+2}\left[x - \left(\operatorname{tg} x - \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{(\operatorname{tg} x)^{2n+1}}{2n+1} + (-1)^{n+1} \frac{(\operatorname{tg} x)^{2n+3}}{2n+3}\right)\right] = -(-1)^{n+1}\left[x - \left(\operatorname{tg} x - \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{(\operatorname{tg} x)^{2n+1}}{2n+1}\right)\right] + \frac{\operatorname{tg}^{2n+3} x}{2n+3} = -S_n(x) + \frac{(\operatorname{tg} x)^{2n+3}}{2n+3}$$

и съгласно (3) ще имаме

$$0 \leq S_{n+1}(x) = -S_n(x) + \frac{(\operatorname{tg} x)^{2n+3}}{2n+3},$$

т. е.

$$(4) \qquad S_n(x) \leq \frac{(\operatorname{tg} x)^{2n+3}}{2n+3} \quad \left(0 \leq x < \frac{\pi}{2}\right).$$

Тъй като $S_n(x) \geq 0$, съгласно дефиницията за абсолютна стойност на число имаме

$$S_n(x) = |S_n(x)| = \left|x - \left(\operatorname{tg} x - \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{\operatorname{tg}^{2n+1} x}{2n+1}\right)\right|$$

и следователно неравенството (4) съвпада с неравенството (1). С това неравенство (1) е доказано.

Ако сега в (1) положим $x = \frac{\pi}{4}$, като използуваме, че $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$ ще получим

$$(5) \qquad \left|\frac{\pi}{4} - \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}\right)\right| \leq \frac{1}{2n+3}.$$

Това неравенство вече може по принцип да се използува за приблизително пресмятане на $\frac{\pi}{4}$. Наистина то показва, че ако вместо $\frac{\pi}{4}$ вземем сумата $1 - \frac{1}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}$, грешката няма да надминава $\frac{1}{2n+3}$. Така например, за да пресметнем $\frac{\pi}{4}$ с точност 0,001, трябва да изберем n така, че $\frac{1}{2n+3} \leq 0{,}001$. Най-малкото естествено число, което удовлетворява последното неравенство е 499. Този пример показва, че неравенството (5) е твърде неудобно за поставената цел, понеже пресмятанията са много големи.

За да получим възможност да пресмятаме π без отчайващи със своя обем изчисления, да разгледаме ъгъла α, за който

$$(6) \qquad \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{5}, \qquad 0 < \alpha < \frac{\pi}{4}.$$

Тогава

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2 \cdot \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{25}} = \frac{5}{12} < 1$$

и следователно $0 < 2\alpha < \frac{\pi}{4}$. Аналогично пресмятане показва, че $\operatorname{tg} 4\alpha = \frac{120}{119} > 1$ и следователно $\frac{\pi}{4} < 4\alpha < \frac{\pi}{2}$.

Да пресметнем $\operatorname{tg}\left(4\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$. Имаме

$$\operatorname{tg}\left(4\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg} 4\alpha - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}}{1 + \operatorname{tg} 4\alpha \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{120}{119} - 1}{1 + \frac{120}{119}} = \frac{1}{239},$$

т. е.

$$\operatorname{tg}\left(4\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{239}. \tag{7}$$

Ако сега в (1) заместим x с α и използуваме (6), ще получим

$$|\alpha-a_n|\leqq\frac{1}{(2n+3)\,5^{2n+3}}, \tag{8}$$

където сме положили

$$a_n=\frac{1}{5}-\frac{1}{3\,.\,5^3}+\frac{1}{5\,.\,5^5}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n+1)\,5^{2n+1}}. \tag{9}$$

Нека сега в (1) заместим x с $4\alpha-\frac{\pi}{4}$. Като използуваме (7) и неравенството $0<4\alpha-\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}$, ще получим

$$\left|\left(4\alpha-\frac{\pi}{4}\right)-b_k\right|\leqq\frac{1}{(2k+3)\,239^{2k+3}}, \tag{10}$$

където сме положили

$$b_k=\frac{1}{239}-\frac{1}{3\,.\,239^3}+\cdots+(-1)^k\frac{1}{(2k+1)\,239^{2k+1}}. \tag{11}$$

Неравенството (10) може да се запише още и така

$$\left|\frac{\pi}{4}+b_k-4\alpha\right|\leqq\frac{1}{(2k+3)\,239^{2k+3}}. \tag{12}$$

Ако сега умножим (8) с 4 и полученото неравенство прибавим към (12), ще получим

$$\left|4\alpha-4a_n\right|+\left|\frac{\pi}{4}+b_k-4\alpha\right|\leqq\frac{4}{(2n+3)\,5^{2n+3}}+\frac{1}{(2k+3)\,239^{2k+3}},$$

от което, съгласно неравенството $|A|+|B|\geqq|A+B|$ следва, че

$$\left|\frac{\pi}{4}-(4a_n-b_k)\right|\leqq\frac{4}{(2n+3)\,5^{2n+3}}+\frac{1}{(2k+3)\,239^{2k+3}}. \tag{13}$$

Неравенството (13) е удобно за пресмятането на $\frac{\pi}{4}$. Например при $n=3$ и $k=0$ то добива вида

$$\left|\frac{\pi}{4}-(4a_3-b_0)\right|\leqq\frac{4}{9.5^9}+\frac{1}{3.\,239^3}=0{,}00000025\ldots$$

или като вземем пред вид (9) и (11), получаваме

$$\left|\frac{\pi}{4}-\left(4\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3.5^3}+\frac{1}{5.5^5}-\frac{1}{7.5^7}\right)-\frac{1}{239}\right)\right|<0{,}00000025. \tag{14}$$

Като извършим необходимите пресмятания и закръглим, получаваме числото 3,14159, което е приближение на π с точност 10^{-5}.

Да пресметнем сега $\frac{\pi}{4}$ с точност 10^{-7}. За тази цел трябва да изберем n и k по такъв начин, че да бъде изпълнено неравенството

$$\frac{4}{(2n+3)\,5^{2n+3}}+\frac{1}{(2k+3)\,239^{2k+3}}<0{,}0000001.$$

Това неравенство се удовлетворява за всяко $n\geqq4$ и всяко $k\geqq0$. Да изберем $n=4$ и $k=0$. Като поставим тези стойности на n и k в (13), ще получим

$$\left|\frac{\pi}{4}-(4\,a_4-b_0)\right|\leqq\frac{4}{11.5^{11}}+\frac{1}{3.239^3}=0{,}0000000\,319\ldots,$$

т. е., че числото

$$4a_4-b_0=4\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3.5^3}+\frac{1}{5.5^5}-\frac{1}{7.5^7}+\frac{1}{9.5^9}\right)-\frac{1}{3.239^3}$$

е една приблизителна стойност на $\frac{\pi}{4}$, при това грешката няма да бъде по-голяма от 10^{-8}. Да пресметнем това приближение, като за удобство групираме събираемите съобразно знаците им:

$$+\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{5}=0{,}200000000\\ \frac{1}{5.5^5}=0{,}000064000\\ \frac{1}{9.5^9}=0{,}000000057\\ \hline\quad 0{,}200064057\end{array}\right.\qquad +\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{3.5^3}=0{,}002666667\\ \frac{1}{7.5^7}=0{,}000001829\\ \hline\quad 0{,}002668496\end{array}\right.$$

$$-\left\{\begin{array}{l}0{,}200064057\\ 0{,}002668496\end{array}\right.$$

$$a_4=0{,}197395561$$

$$b_0=\frac{1}{239}=0{,}004184100$$

$$4.a_4-b_0=4.0{,}197395561-0{,}004184100=0{,}785398144.$$

Като умножим последното число с 4 (а следователно с 4 ще умножим и направената грешка), ще получим едно приближение на π с точност 10^{-7}. Това приближение е 3,1415926.

§ 6. ПРЕСМЯТАНЕ СТОЙНОСТИТЕ НА $\sin x$ и $\cos x$

Пресмятането на стойностите на функцията $\sin x$ се извършва с помощта на полинома

$$S_n(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \tag{1}$$

а тези на функцията $\cos x$ — с помощта на полинома

$$C_n(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}. \tag{2}$$

Грешката, която допускаме, когато вместо стойността $\sin x$ вземем стойността $S_n(x)$ се оценява с неравенството

$$|\sin x-S_n(x)|\leqq\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}\qquad(x\geqq 0), \tag{3}$$

а тази, която допускаме, когато вместо стойността $\cos x$ вземем стойността на $C_n(x)$ се оценява с помощта на неравенството

$$|\cos x-C_n(x)|\leqq\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}. \tag{4}$$

За да докажем неравенствата (3) и (4) ще въведем две функции f_n и g_n, дефинирани чрез равенствата

$$\begin{aligned} f_n(x)&=(-1)^{n+1}[\sin x-S_n(x)],\\ g_n(x)&=(-1)^{n+1}[\cos x-C_n(x)]. \end{aligned} \tag{5}$$

Ще докажем, че $f_n(x)\geqq 0$ и $g_n(x)\geqq 0$ за $x\geqq 0$. При $n=0$ очевидно имаме

$$f_0(x)=-[\sin x-S_0(x)]=x-\sin x\geqq 0$$

и аналогично

$$g_0(x)=-[\cos x-C_0(x)]=1-\cos x\geqq 0.$$

Да допуснем, че за някое n е изпълнено неравенството $f_n(x)\geqq 0$

$(x\geqq 0)$. Следвайки метода на пълната математична индукция трябва да образуваме f_{n+1}. Ако в равенствата (5) поставим на мястото на n числото $n+1$, ще получим

$$f_{n+1}(x)=(-1)^{n+2}[\sin x-S_{n+1}(x)]=(-1)^{n+2}\left[\sin x-\left(x-\frac{x^3}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}\right]\right.$$

За производната на f_{n+1} намираме:

$$f'_{n+1}(x)=(-1)^{n+2}\left[\cos x-\left(1-\frac{x^2}{2!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\right)\right]=g_{n+1}(x).$$

Ако диференцираме още веднаж, за втората производна на f_{n+1} получаваме

$$\begin{aligned} f''_{n+1}(x)=g'_{n+1}(x)&=(-1)^{n+2}\left[-\sin x-\left(-x+\frac{x^3}{3!}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)\right]\\ &=(-1)^{n+1}\left[\sin x-\left(x-\frac{x^3}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)\right]=f_n(x). \end{aligned}$$

Съгласно допускането $f_n(x)\geqq 0$ следователно $g'_{n+1}(x)=f_n(x)\geqq 0$, което показва, че функцията $g_{n+1}(x)$ е растяща за $x\geqq 0$ и следователно $g_{n+1}(x)\geqq g_{n+1}(0)=0$. Последното неравенство от своя страна показва, че $f'_{n+1}(x)=g_{n+1}(x)\geqq 0$, т. е. функцията $f_{n+1}(x)$ е също така растяща за $x\geqq 0$ и следователно $f_{n+1}(x)\geqq f_{n+1}(0)=0$ С това е доказана верността на неравенствата (5) за всяко n.

За да докажем (3) ще представим f_{n+1} по следния начин:

$$f_{n+1}(x)=-(-1)^{n+1}\left[\sin x-\left(x-\frac{x^3}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)\right]+\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}=-f_n(x)+\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}.$$

Тъй като $f_{n+1}(x)\geqq 0$ за $x\geqq 0$ то

$$f_n(x)\leqq\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}.$$

От друга страна, съгласно първото от неравенствата (5) и дефиницията за абсолютна стойност $|f_n(x)| = f_n(x)$. Тогава последното неравенство може да се запише така

$$|f_n(x)| \leqq \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!},$$

което не е нищо друго, освен (3). По аналогичен начин се извършва и доказателството на неравенството (4).

По-долу ще направим приложение на неравенствата (3) и (4) върху конкретни примери. Преди това обаче нека напомним, че ъгълът x се измерва в радиани. В противен случай неравенствата (3) и (4) не са валидни.

Пример 1. Да се пресметне $\sin 22^\circ$ с точност 10^{-5}.

Тъй като е дадена градусната мярка α на ъгъла, трябва да пресметнем неговата радианна мярка ρ по формулата

$$\rho = \alpha \frac{\pi}{180}. \tag{6}$$

В §5 намерихме едно приближение на π, което ще използуваме сега. Да приемем $\pi = 3{,}1415926$. Тогава

$$22 \frac{\pi}{180} = \frac{11 \cdot 3{,}1415926}{90} = 0{,}3839724.$$

За пресмятането на $\sin 22^\circ$ ще използуваме неравенството (3) при $x = 0{,}3839724$. Тъй като грешката не трябва да надмине 10^{-5}, естественото число n съгласно (3) ще удовлетворява неравенството

$$\frac{(0{,}3839724)^{2n+3}}{(2n+3)!} < 0{,}00001.$$

Можем да изберем $n=2$, понеже

$$\frac{(0{,}3839724)^7}{7!} = 0{,}0000002 < 0{,}00001.$$

Тогава търсеното приближение е стойността на полинома (1) при $n=2$ и $x=0{,}3839724$, т. е. числото

$$0{,}3839724 - \frac{(0{,}3839724)^3}{3!} + \frac{(0{,}3839724)^5}{5!}.$$

Да направим пресмятанията:

$$\left.\begin{array}{ll} 0{,}3839724 & = 0{,}3839724 \\ \dfrac{(0{,}3839724)^5}{5!} & = 0{,}0000696 \end{array}\right\} + \frac{(0{,}3839724)^3}{3!} = 0{,}0094352$$

$$- \left\{\begin{array}{l} \overline{0{,}3840420} \\ 0{,}0094352 \end{array}\right.$$

$$\overline{0{,}3746068}$$

Като направим закръгляне на последното число на 5-я знак, получаваме приближение на $\sin 22^\circ$ с желаната точност, а именно, числото 0,37461.

Пример 2. Да се пресметне $\cos 60^\circ$ с точност 10^{-4}.

Съгласно (6) радианната мярка на 60° е $\frac{\pi}{3}$ или превърнато в десетична дроб

$$\frac{\pi}{3} = \frac{3{,}1415926}{3} = 1{,}0471975.$$

Ще използуваме неравенството (4) при $x = 1{,}0471975$. Числото n определяме от неравенството

$$\frac{(1{,}0471975)^{2n+2}}{(2n+2)!} < 0{,}0001$$

т. е. $n=3$ понеже

$$\frac{(1{,}0471975)^8}{8!} = 0{,}0000359 < 10^{-4}.$$

Тогава търсеното приближение е стойността на полинома (2) при $n=3$ и $x=1{,}0471975$, т. е. числото

$$1 - \frac{(1{,}0471975)^2}{2!} + \frac{(1{,}0471975)^4}{4!} - \frac{(1{,}0471975)^6}{6!}.$$

Да направим пресмятанията

$$\left.\begin{array}{ll} 1 & = 1{,}0000000 \\ \dfrac{(1{,}0471975)^4}{4!} & = 0{,}0501075 \\ \hline & \ 1{,}0501075 \end{array}\right\} + \left.\begin{array}{ll} \dfrac{(1{,}0471975)^2}{2!} & = 0{,}5483113 \\ \dfrac{(1{,}0471975)^6}{6!} & = 0{,}0018316 \\ \hline & \ 0{,}5501429 \end{array}\right\} +$$

$$-\begin{cases}1{,}0501075\\0{,}5501429\end{cases}$$

$$0{,}4999646$$

Като направим закръгляне съобразно желаната точност, получаваме $\cos 60^\circ = \cos 1{,}047\ldots = 0{,}5000$, което както знаем е точната стойност на $\cos 60^\circ$.

Задачи към глава 5

1. Да се пресметне e^{-1} с точност 10^{-3}. Отг. 0,367 ...
2. Да се пресметне ch 3 с точност 10^{-3}. Отг. 10,067 ...

Глава 6

НЯКОИ ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ ОТ ПЪРВИ РЕД

Диференциално уравнение от първи ред се нарича всяко уравнение от вида

$$F(x, y, y') = 0,$$

където функцията F е дадена, а $y = y(x)$ е функция, която се търси. Всяка функция $y = y(x)$, за която горното уравнение се превръща в тъждество по отношение на x, се нарича *решение* на даденото диференциално уравнение. Така например, функцията $y = x$ е решение на диференциалното уравнение $yy' - x = 0$, защото имаме $yy' - x = x(x)' - x = x - x = 0$; лесно може да се провери, че това уравнение се удовлетворява и от функцията $y = \sqrt{x^2 + c}$, където c е произволна константа. Наличието на произволна константа в решението на това диференциално уравнение не е случайно. Такава константа се появява, когато търсим всички решения на диференциално уравнение.

Теорията на диференциалните уравнения от първи ред е обширна част на математическия анализ с многобройни приложения. Но по понятни съображения тук ще се ограничим само с разглеждането на най-елементарни въпроси от този кръг. В §1, §2, §3 и §4 са разгледани уравнения от вида $y' = f(x)$. Те са обект на така нареченото *интегрално смятане*. В §5, §6 и §7 се изучава линейното диференциално уравнение от първи ред. Някои геометрични приложения са дадени в §8.

§ 1. ИНТЕГРАЛНО СМЯТАНЕ

Действието интегриране е обратно на диференцирането. При диференцирането по дадена функция се търси производната ѝ, а при интегрирането се прави обратното, т. е. по дадена производна

се търси функцията. И така задачата на интегралното смятане е по дадена функция $f(x)$ да се намери функция $F(x)$, за която

(1) $$F'(x)=f(x).$$

Всяка функция F, за която е изпълнено (1), се нарича *неопределен интеграл или примитивна функция* на f. Тъй като производната на всяка константа е нула, не е трудно да се съобрази, че ако F е примитивна на функцията f и c е произволна константа, функцията $F+c$ е също примитивна на f (от тази неопределеност на примитивната идва и названието „неопределен интеграл"). Обратното е също вярно, т. е.

Ако функцията f е дефинирана в интервал и F е произволен неопределен интеграл на f, всеки друг неопределен интеграл F_1 на f се получава от F чрез прибавяне на подходяща константа, т. е

(2) $$F_1=F+c.$$

Наистина по условие имаме $F'(x)=f(x)$ и $F_1'(x)=f(x)$. Следователно $(F(x)-F_1(x))'=f(x)-f(x)=0$, т. е. производната на $F-F_1$ се анулира навсякъде в дефиниционния интервал на f. Ето защо фундаменталното свойство на производните (гл. 3, §10) дава $F-F_1=c$, където c е константа и (2) е доказано.

Произволен неопределен интеграл $F(x)$ на функцията $f(x)$ се означава със символа

$$\int f(x)\,dx.$$

Следователно съгласно дефиницията на примитивна ще имаме

(3) $$\left(\int f(x)\,dx\right)'=f(x),$$

т. е. по определение $\int f(x)\,dx$ е функция, чиято производна съвпада с $f(x)$. Така например, не е трудно да се съобрази, че

$$\int x\,dx=\frac{x^2}{2}+c,$$

където c е произволна константа. Наистина, $\left(\frac{x^2}{2}+c\right)'=\frac{2x}{2}=x$. По-общо, таблицата на производните (гл. 3, §15) дава очевидно следната таблица на неопределените интеграли:

1. $\int 0\,dx=c$
2. $\int x^a\,dx=\frac{x^{a+1}}{a+1}+c \qquad (a\neq-1),$
3. $\int \cos x\,dx=\sin x+c,$
4. $\int \sin x\,dx=-\cos x+c,$
5. $\int \frac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg} x+c,$
6. $\int \frac{dx}{\sin^2 x}=-\operatorname{ctg} x+c,$
7. $\int \operatorname{ch} x\,dx=\operatorname{sh} x+c,$
8. $\int \operatorname{sh} x\,dx=\operatorname{ch} x+c,$
9. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x}=\operatorname{th} x+c,$
10. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x}=-\operatorname{cth} x+c,$
11. $\int e^x\,dx=e^x+c,$
12. $\int a^x\,dx=\frac{a^x}{\ln a}+c \qquad (a\neq 1),$
13. $\int \frac{dx}{x}=\ln x+c \qquad (x>0).$

Но не само таблицата на производните може да се запише като таблица на неопределените интеграли, а и правилата за диференциране могат да се запишат като правила за интегриране.

Ето и таблицата на правилата за интегриране

1. $\int c\,f(x)\,dx=c\int f(x)\,dx$ (c — константа),
2. $\int (f(x)+g(x))\,dx=\int f(x)\,dx+\int g(x)\,dx,$
3. $\int f(x)\,g'(x)\,dx=f(x)\,g(x)-\int g(x)\,f'(x)\,dx,$

4. $\int f(x)\frac{g'(x)}{g^2(x)}dx=-\frac{f(x)}{g(x)}+\int\frac{f'(x)}{g(x)}dx,$

5. Ако $\int F(u)\,du=\Gamma(u)$, то $\int F(f(x))\,f'(x)\,dx=\Gamma(f(x))$.

За да се докаже коя да е от горните формули, достатъчно е да се диференцира дясната страна и да се забележи, че след диференцирането се получава точно функцията, която стои под интеграла от лявата страна на формулата.

Ето доказателството на правилото 3 за интегриране.

$$\left(f(x)g(x)-\int g(x)f'(x)\,dx\right)'$$

$$=(f(x)g(x))'-g(x)f'(x)$$

$$=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)-g(x)f'(x)=f(x)g'(x).$$

Да докажем и правилото 5. Тъй като $\Gamma(u)$ е примитивна на $F(u)$, то $\Gamma'(u)=F(u)$. Тогава съгласно правилото за диференциране на функция от функция ще имаме
$(\Gamma(f(x)))'=\Gamma'(f(x)).f'(x)=F(f(x)).f'(x)$,
с което правило 5 е доказано.

Правилата 3 и 4 се наричат понякога правила за *интегриране по части*. Да отбележим преди всичко, че правилото 4 е следствие от 3. Наистина, тъй като $\frac{g'(x)}{g^2(x)}=-\left(\frac{1}{g(x)}\right)'$, лявата страна на 4 може да се запише и така:

$$\int f(x)\frac{g'(x)}{g^2(x)}dx=-\int f(x)\left(\frac{1}{g(x)}\right)'dx. \tag{4}$$

От друга страна, правилото 3 дава

$$\int f(x)\left(\frac{1}{g(x)}\right)'dx=\frac{f(x)}{g(x)}-\int\frac{f'(x)}{g(x)}dx. \tag{5}$$

Равенствата (4) и (5) дават правилото 4.

Срънчото прилагане на таблиците на неопределените интеграли и на правилата за интегриране дава възможност да се пресмятат многобройни неопределени интеграли. На тази тема са посветени обемисти книги (вж. например А. Ф. Тимофеев, Интегрирование функций, 1948). Тук ще разгледаме само най-простите интеграли.

Ето няколко примера, в които освен таблицата на неопределените интеграли се използват само правилата 1 и 2.

Пример 1. Да се пресметне

$$\int\frac{dx}{\sin^2x\cos^2x}$$

Решение.

$$\int\frac{dx}{\sin^2x\cos^2x}=\int\frac{\sin^2x+\cos^2x}{\sin^2x\cos^2x}dx$$

$$=\int\frac{dx}{\cos^2x}+\int\frac{dx}{\sin^2x}=\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x+c.$$

Пример 2. Да се пресметне

$$\int\frac{x^2+3x+1}{\sqrt[3]{x}}dx.$$

Решение.

$$\int\frac{x^2+3x+1}{\sqrt[3]{x}}dx=\int\left(x^{\frac{5}{3}}+3x^{\frac{2}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}\right)dx$$

$$=\int x^{\frac{5}{3}}dx+3\int x^{\frac{2}{3}}dx+\int x^{-\frac{1}{3}}dx$$

$$=\frac{x^{\frac{5}{3}+1}}{\frac{5}{3}+1}+3\frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1}+\frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1}=\frac{3}{8}\sqrt[3]{x^8}+\frac{9}{5}\sqrt[3]{x^5}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}.$$

Пример 3. Да се пресметне

$$\int(2^x+1)^2dx.$$

Решение.

$$\int(2^x+1)^2dx=\int(2^{2x}+2.2^x+1)\,dx$$

$$=\int 4^x\,dx+2\int 2^xdx+\int x^0dx=\frac{4^x}{\ln 4}+2\frac{2^x}{\ln 2}+x+c.$$

Следват няколко приложения на правилата за интегриране по части.

Пример 4. Да се пресметне

$$\int x^2 \ln x \, dx.$$

Решение. Като вземем пред вид, че $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$, търсеният интеграл може да се запише и така:

(6) $$\int x^2 \ln x \, dx = \int \ln x \left(\frac{x^3}{3}\right)' dx.$$

Сега прилагаме правилото 3 за интегриране по части и получаваме

$$\int \ln x \left(\frac{x^3}{3}\right)' dx = \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{1}{3}\int x^3 (\ln x)' dx$$

$$= \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{1}{3}\int x^2 dx = \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{x^3}{9},$$

което заедно с (6) дава

$$\int x^2 \ln x dx = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{9} x^3.$$

Пример 5. Да се пресметне

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx.$$

Решение. Тук ще си послужим с правилото 4, като ще положим $f(x) = \cos^2 x$ и $g(x) = \sin x$. Очевидно

(7) $$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx = \int \cos^2 x \frac{(\sin x)'}{\sin^2 x} dx.$$

Но

$$\int \cos^2 x \frac{(\sin x)'}{\sin^2 x} dx = -\frac{\cos^2 x}{\sin x} + \int \frac{(\cos^2 x)'}{\sin x} dx$$

$$= -\frac{\cos^2 x}{\sin x} - 2\int \frac{\cos x \sin x}{\sin x} dx = -\frac{\cos^2 x}{\sin x} - 2 \sin x.$$

Последното заедно със (7) дава

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx = -\frac{\cos^2 x}{\sin x} - 2\sin x.$$

Понякога се налага да се интегрира по части повече от веднъж.

Пример 6. Да се пресметне

$$\int x^2 e^x dx.$$

Решение.

$$\int x^2 e^x dx = \int x^2 (e^x)' dx = x^2 e^x - \int e^x (x^2)' dx$$

$$= x^2 e^x - 2\int x e^x dx = x^2 e^x - 2\int x (e^x)' dx$$

$$= x^2 e^x - 2x e^x + 2\int e^x (x)' dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x.$$

Вече имахме случай да се убедим в значението на правилото за диференциране на функция от функция за диференциалното смятане. Аналогична е ролята на правилото 5 в интегралното смятане. Най-напред ще посочим някои от най-простите приложения на това правило. Това са случаите, когато функцията f е линейна, т. е. $f(x) = ax + b$.

Пример 7. Да се пресметне

$$\int \sin(2x+1) dx.$$

Решение. Очевидно търсеният интеграл може да се запише и така:

(8) $$\int \sin(2x+1) dx = \frac{1}{2}\int \sin(2x+1)(2x+1)' dx.$$

Съгласно правило 5, за да пресметнем интеграла, който стои отляво на последното равенство, е достатъчно да пресметнем $\int \sin u \, du$ и след това в получената примитивна да заместим u с $2x+1$. Но $\int \sin u \, du = -\cos u$ и следователно $\int \sin(2x+1)(2x+1)' dx = -\cos(2x+1)$. Последното равенство заедно с (8) дава

$$\int \sin(2x+1) dx = -\frac{1}{2}\cos(2x+1).$$

Разбира се, читателят би могъл да съобрази последния резултат и директно. Да отбележим още, че аналогично на пример 7 може да се процедира с всички таблични интеграли. Така например

$$\int \frac{dx}{\cos^2 2x} = \frac{1}{2}\operatorname{tg} 2x, \quad \int \operatorname{ch}(ax+b) dx = \frac{1}{a}\operatorname{sh}(ax+b)$$

и т. н.

Посочените дотук приложения на правило 5 не са типични. Ето няколко по-типични приложения на това правило.

Пример 8. Да се пресметне

$$\int \frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}\,dx$$

Решение.

$$\int \frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}\,dx=\int \frac{(\cos x+\sin x)'}{\cos x+\sin x}\,dx$$

$$=\int \frac{du}{u}=\ln u=\ln(\cos x+\sin x),$$

където с u беше означено $\cos x+\sin x$.

Пример 9. Да се пресметне

$$\int \frac{dx}{e^x+1}.$$

Решение.

$$\int \frac{dx}{e^x+1}=\int \frac{e^x+1-e^x}{e^x+1}\,dx=\int dx-\int \frac{(e^x+1)'}{e^x+1}\,dx$$

$$=x-\int \frac{du}{u}=x-\ln u=x-\ln(e^x+1),$$

където с u беше означено e^x+1.

Пример 10. Да се пресметне

$$\int \frac{dx}{\sin x\cos x}.$$

Решение.

$$\int \frac{dx}{\sin x\cos x}=\int \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos x}\,dx=\int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx+\int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx$$

$$=-\int \frac{(\cos x)'}{\cos x}\,dx+\int \frac{(\sin x)'}{\sin x}\,dx=-\ln\cos x+\ln\sin x$$

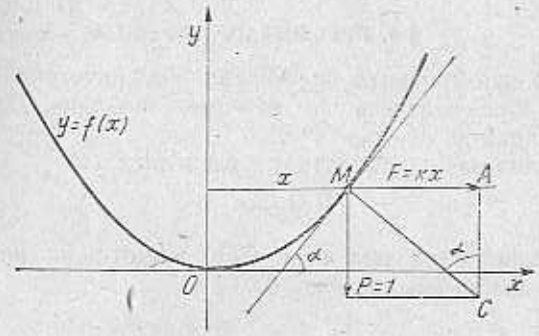
$$=\ln \operatorname{tg} x.$$

Естествено е да се запитаме каква е ролята на знака dx в означението на $\int f(x)dx$. При по-систематично построяване на интегралното смятане този знак се използува за по-удобно манипулиране с правилото 5.

Накрая ще разгледаме едно просто хидравлично приложение на интегрирането. *Да си мислим цилиндричен съд, който се върти с постоянна ъглова скорост около оста си, която е вертикална. Пита се, ако в този съд налеем*

известно количество течност, каква ще бъде формата, която тази течност ще заеме.

Ясно е преди всичко, че течността ще се завърти след известно време със същата ъглова скорост, с която се върти цилиндъра, като при това горният ѝ пласт ще приеме формата на никаква ротационна повърхнина. Задачата е да се намери тази ротационна повърхнина. Разбира се, поради симетрията е достатъчно да намерим кривата, по която произволна равнина, минаваща през оста на цилиндъра, пресича ротационната повърхнина (черт. 82).



Черт. 82

След като течността приеме окончателната си форма, една произволна точка M от най-горния ѝ пласт ще се върти равномерно около оста на цилиндъра със същата ъглова скорост, с която се върти и цилиндърът. От една страна, върху M действува теглото ѝ P, което без ограничение на общността можем да считаме 1, а от друга—центробежната сила F. Тъй като точката M през цялото време остава върху един и същи хоризонтал, резултантата R на силите P и F трябва да бъде ортогонална на повърхнината. Тази бележка е достатъчна, за да се намери видът на ротационната повърхнина.

В следващата глава ще покажем, че силата F е пропорционална на радиуса x с коефициент на пропорционалност, който зависи от масата на M и от ъгловата скорост, т. е. $F=kx$.

Да означим с α ъгъла, който тангентата в точката M сключва с абсцисната ос. От триъгълника AMC намираме

$$\operatorname{tg}\alpha=kx. \tag{9}$$

Но, ако означим с $y=f(x)$ уравнението на кривата, по която произволна равнина през оста на цилиндъра пресича ротационната повърхнина, то

$$\operatorname{tg}\alpha=f'(x)$$

и съгласно (9) ще имаме $f'(x)=kx$, т. е.

$$f(x)=\int kx\,dx=\frac{k}{2}x^2$$

и следователно уравнението на търсената крива е

(10) $$y=\frac{k}{2}x^2,$$

което показва, че кривата е парабола. Повърхността, която се получава от въртенето на една парабола около оста ѝ, се нарича *ротационен параболоид.*

И така при дадените условия горният пласт на течността ще приеме формата на ротационен параболоид.

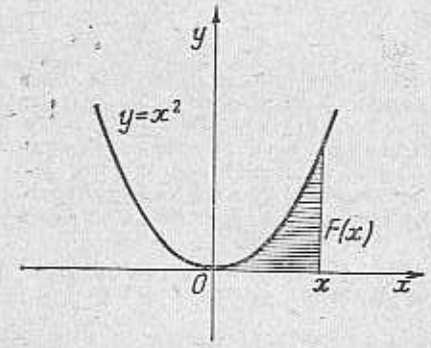
§ 2. ПРЕСМЯТАНЕ НА ЛИЦА

Едно от най-хубавите приложения на интегралното смятане е свързано със задачата за намиране на лица. Да започнем с един прост пример.

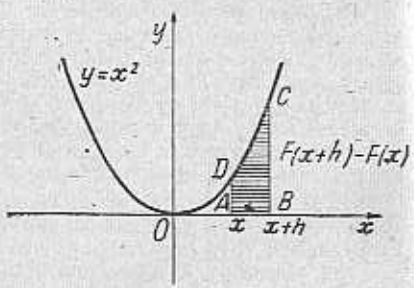
Да разгледаме параболата с уравнение

(1) $$y=x^2$$

и за произволно x да означим с $F(x)$ лицето на криволинейния триъгълник, изобразен на черт. 83.



Черт. 83



Черт. 84

Да намерим производната на функцията. Очевидно нарастването

$$F(x+h)-F(x)$$

не е нищо друго освен лицето на криволинейния трапец $ABCD$ от черт. 84. Но тогава

$$AD.\,h\leq F(x+h)-F(x)\leq BC.\,h,$$

т. е.

$$x^2.\,h\leq F(x+h)-F(x)\leq(x+h)^2.\,h$$

и следователно

(2) $$x^2\leq\frac{F(x+h)-F(x)}{h}\leq(x+h)^2.$$

Когато h клони към нула, дясната страна на (2) клони към x^2, т. е. към лявата страна. От това следва, че

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=x^2,$$

т. е.

$$F'(x)=x^2,$$

и следователно

(3) $$F(x)=\int x^2\,dx=\frac{x^3}{3}+c.$$

За да намерим константата c, в (3) ще положим $x=0$ и съгласно дефиницията на $F(x)$ ще получим $0=0+c$, откъдето

(4) $$F(x)=\frac{x^3}{3}.$$

Така намерената формула (4) дава възможност да се намери лицето на криволинейния триъгълник от черт. 83 за всяко x.

Специалният резултат (4) е интересен, тъй като елементарната геометрия не ни дава средства за намиране на разглежданото лице. Значително по-интересен е методът, с който (4) беше намерено, защото той е общ, т. е. позволява по аналогичен начин да се пресмятат лица и в много други случаи.

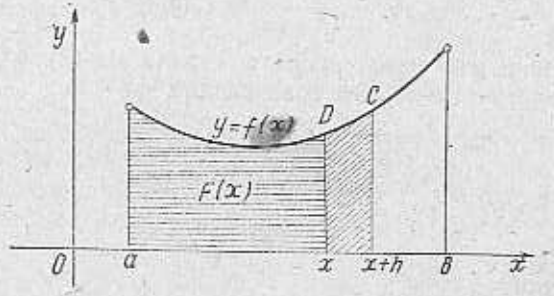
Нека функцията f е дефинирана и непрекъсната в интервала $[a, b]$ и нека $f(x)\geq 0$ за всяко x от този интервал. Да означим с T множеството на всички точки с координати (x, y) от равнината, за които са изпълнени неравенствата (черт. 85)

(5) $$a\leq x\leq b,\qquad 0\leq y\leq f(x).$$

При тези предположения се твърди, че ако Φ е произволна примитивна (неопределен интеграл) на f в $[a, b]$, то лицето S на множеството T се дава с формулата

(6) $$S=\Phi(b)-\Phi(a).$$

Доказателството на (6) е аналогично на това на (4). За произволно x от $[a, b]$ да означим с $F(x)$ лицето на частта от множеството T, която лежи вляво от вертикалната права през точ-



Черт. 85

ката $(x, 0)$. Ще докажем най-напред, че F е една примитивна на f. Очевидно нарастването

$$F(x+h)-F(x)$$

съвпада с лицето на криволинейния трапец $ABCD$ от черт. 85. Следователно

(7) $$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=y_{cp},$$

където y_{cp} е средната височина на трапеца $ABCD$. Понеже функцията f е непрекъсната, когато h клони към нула, y_{cp} ще клони към $f(x)$. Ето защо от (7) следва, че

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(x),$$

т. е. $F'(x)=f(x)$, което показва, че F е примитивна на f.

От друга страна, Φ е също примитивна на f и следователно ще имаме

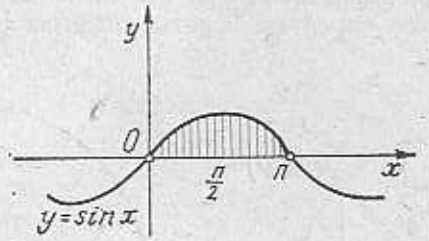
(8) $$F(x)=\Phi(x)+c.$$

За да намерим стойността на константата c, в (8) ще положим $x=a$ и ще получим $0=\Phi(a)+c$, откъдето $c=-\Phi(a)$. Сега заместваме получения резултат в (8) и получаваме $F(x)=\Phi(x)-\Phi(a)$. В последната формула заместваме x с b и получаваме $F(b)=\Phi(b)-\Phi(a)$. Но по определение $F(b)=S$ и формула (6) е доказана.

И така, за да намерим лицето на криволинейния трапец

T, е достатъчно да интегрираме f и след това да намерим разликата между стойностите на получения интеграл в точките b и a.

Пример 1. Да се намери лицето S, заградено от синусоидата $y=\sin x$ $0\leq x\leq\pi$ и абсцисната ос (черт. 86).



Черт. 86

Очевидно множеството, чието лице се търси, е определено от неравенствата

$$0\leq x\leq\pi,$$
$$0\leq y\leq\sin x$$

и следователно, за да намерим лицето му, ще трябва да пресметнем разликата $\Phi(\pi)-\Phi(0)$, където $\Phi(x)$ е някаква примитивна на $\sin x$. Но $\int\sin x\,dx=-\cos x$. Ето защо $S=(-\cos\pi)-(-\cos 0)=2$.

Пример 2. Да се намери лицето на частта от равнината, заградена от хиперболата $y=\frac{1}{x}$, вертикалните прави $x=1$ и $x=2$ и абсцисната ос.

Очевидно $\int\frac{1}{x}\,dx=\ln x$ и следователно

$$S=\ln 2-\ln 1=\ln 2.$$

Пример 3. Да се намери лицето на кръга.

За удобство ще разгледаме кръг с радиус a и център в началото на координатната система (черт. 87). Достатъчно е да намерим лицето само на онази негова част, която е разположена в първия квадрант.

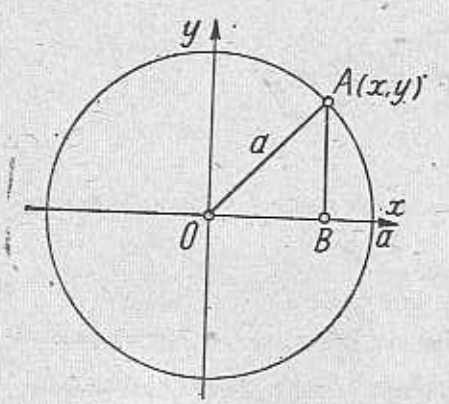
Ако $A(x, y)$ е произволна точка от окръжността, от триъгълника OAB намираме $x^2+y^2=a^2$, откъдето $y=\pm\sqrt{a^2-x^2}$. Следователно уравнението на частта от окръжността, която е над абсцисната ос, е

(9) $$y=\sqrt{a^2-x^2}.$$

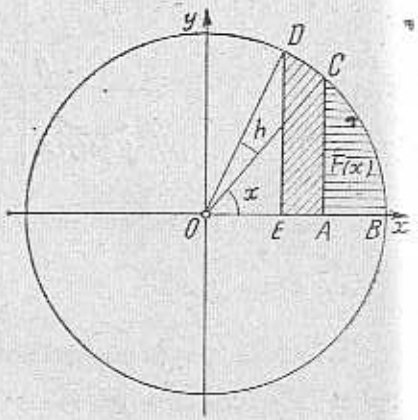
Ако Φ е някаква примитивна на функцията (9), лицето S на частта от кръга, която се намира в първия квадрант, се дава от формулата

$$S=\Phi(a)-\Phi(0). \tag{10}$$

Но така написаната формула не може да се използува за намиране на лицето на кръга, понеже средствата, изучени в тази



Черт. 87



Черт. 88

книга, не дават възможност да се намери примитивната Φ. Ето защо ще изберем друг път, който също използува интеграли, но такива, които сме в състояние да пресмятаме.

За произволен ъгъл x, $0\leq x\leq\frac{\pi}{2}$, означаваме с $F(x)$ лицето на полусегмента ABC (черт. 88). Очевидно нарастването $F(x+h)-F(x)$ съвпада с лицето на криволинейния трапец $EACD$, т. е.

$$F(x+h)-F(x)=EA\,.\,y_{cp}, \tag{11}$$

където y_{cp} е „средната" височина на криволинейния трапец. Тъй като $EA=a(\cos x-\cos(x+h))$ от (11) получаваме

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=-a\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}\,.\,y_{cp}. \tag{12}$$

Но $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=(\cos x)'=-\sin x$ и $\lim\limits_{h\to 0}y_{cp}=a\sin x$. Следователно

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=-a(-\sin x)\,.\,a\sin x=a^2\sin x,$$

т. е. $F'(x)=a^2\sin x$. Последното равенство показва, че $F(x)$ е една примитивна на $a^2\sin x$. Ето защо

$$F(x)=a^2\int\sin^2 x\,dx=a^2\int\frac{1-\cos 2x}{2}\,dx$$
$$=\frac{a^2}{2}\int dx-\frac{a^2}{2}\int\cos 2x\,dx=\frac{a^2x}{2}-\frac{a^2\sin 2x}{4}+c.$$

За да намерим константата c, ще положим $x=0$ и ще получим $0=0+c$, поради което

$$F(x)=\frac{a^2x}{2}-\frac{a^2\sin 2x}{4}. \tag{13}$$

Съгласно дефиницията на F, търсеното лице S е равно на $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$ и следователно $S=\frac{\pi a^2}{4}$. Тъй като лицето σ на кръга е четири пъти по-голямо от S, последното равенство дава познатата формула

$$\sigma=\pi a^2. \tag{14}$$

Нека $a>0$ и $b>0$ са произволни константи. Множеството на всички точки (x, y) в равнината, координатите на които удовлетворяват уравнението

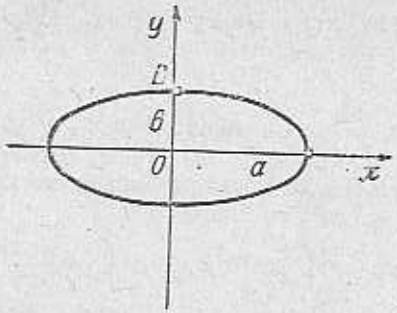
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{15}$$

се нарича *елипса с полуоси* a и b. Както ще видим по-късно, това е симетрична относно координатните оси затворена крива (черт. 89). Частта от равнината, която е заградена от елипсата, също се нарича *елипса*.

Пример 4. Да се намери лицето на елипсата.

Като решим (15) относно y, ще получим $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$. Следователно уравнението на частта от елипсата, която е над абсцисната ос, е

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}. \tag{16}$$



Черт. 89

Нека Φ е примитивна на функцията (8). Тогава съгласно правилата за интегриране функцията $\frac{b}{a}\Phi$ ще бъде примитивна на (16). Следователно за лицето S_1 на частта от елипсата, която е разположена в първия квадрант, ще имаме $S_1=\frac{b}{a}\Phi(a)-\frac{b}{a}\Phi(0)$, което заедно с (10) дава $S_1=\frac{b}{a}S$. Но, както вече знаем, $S=\frac{\pi a^2}{4}$ и следователно $S_1=\frac{\pi}{4}ab$. Лицето σ_1 на елипсата е четири пъти по-голямо от S_1 и последното равенство дава

(17) $$\sigma_1=\pi ab.$$

Да отбележим изрично, че формула (17) беше получена без ефективно намиране на примитивна на функцията (16). Вместо това използувахме познатото вече лице на кръга и приликата между уравненията (16) и (9).

§ 3. ПРЕСМЯТАНЕ НА ОБЕМИ

Интегралното смятане може да се използува с успех при решаване на задачата за намиране на обеми. Начинът, по който това става, е аналогичен на това, което видяхме в § 2.

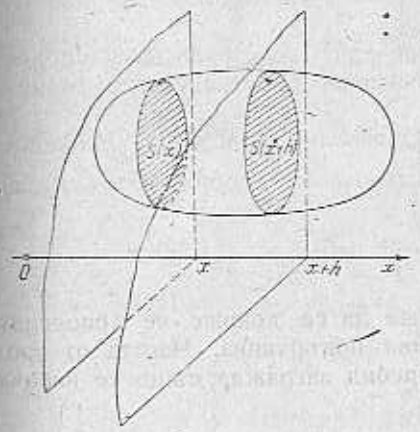
Ето общия подход към тази задача. *Нека M е тяло, чиято проекция върху някоя ос Ox съвпада с интервала $[a, b]$. Нека освен това за всяко x от този интервал равнината $\alpha(x)$, която минава през x и е перпендикулярна на оста Ox, пресича тялото в сечение с лице $S(x)$ (черт. 90). При тези предположения се твърди, че ако $\Phi(x)$ е произволна примитивна на $S(x)$, обемът V на тялото M се дава с формулата*

(1) $$V=\Phi(b)-\Phi(a).$$

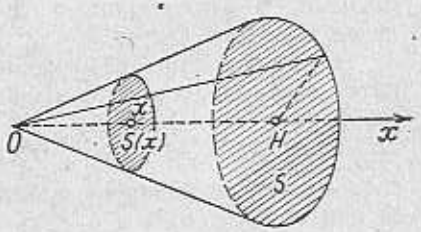
Доказателството на (1) е аналогично на това на (2.6). За произволно x от $[a, b]$ да означим с $F(x)$ обема на частта от множеството M, която лежи вляво от $\alpha(x)$. Най-напред ще се убедим, че $F(x)$ е примитивна на $S(x)$. Нарастването $F(x+h)-F(x)$ съвпада с обема на частта от тялото M, която се намира между равнините $\alpha(x)$ и $\alpha(x+h)$. Следователно

(2) $$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=S_{\text{ср}},$$

където $S_{\text{ср}}$ е лицето на „средното" напречно сечение. Но когато h клони към нула, $S_{\text{ср}}$ клони към $S(x)$, поради което $F'(x)=S(x)$. Следователно $F(x)=\Phi(x)+c$. От друга страна, по определение $F(a)=0$. Ето защо $c=-\Phi(a)$ и $F(x)=\Phi(x)-\Phi(a)$. Формула (1) се получава, след като в последното равенство заместим x с b.



Черт. 90



Черт. 91

Пример 1. Да се намери обемът на конуса.

Разсъжденията, които ще направим, важат за конус с произволна основа с лице S (черт. 91). По този начин едновременно ще намерим обемите на правия и наклонен кръгов конус, на различните видове пирамиди и т. н.

Нека височината на конуса е H. Разглеждаме ос Ox, успоредна на височината му. За произволно x от интервала $[0, H]$ означаваме с $\alpha(x)$ равнината, минаваща през точката x и успоредна на основата на конуса. Ясно е, че за лицето $S(x)$ на сечението на $\alpha(x)$ с конуса ще имаме

$$\frac{S(x)}{S}=\frac{x^2}{H^2},$$

откъдето $S(x)=\frac{x^2}{H^2}S$. Следователно

$$\Phi(x)=\int S(x)\,dx=\frac{S}{H^2}\int x^2\,dx=\frac{Sx^3}{3H^2}$$

и

$$V=\Phi(H)-\Phi(0)=\frac{SH^3}{3H^2}=\frac{SH}{3}.$$

Нека в пространството са зададени три взаимно перпендикулярни оси Ox, Oy и Oz, които минават през една точка O. През произволна точка A от пространството да прекараме равнините ξ, η и ζ, перпендикулярни съответно на Ox, Oy и Oz. Нека пресечната точка на ξ с Ox е x, тази на η с Oy е y и онази на ζ с Oz е z. По такъв начин на произволна точка A от пространството съпоставихме по една наредена тройка от числа (x, y, z). Те се наричат *координати на точката* A (x се нарича *абсциса*, y — *ордината*, а z — *апликата*) *относно координатната система* $Oxyz$.

Основното предназначение на една пространствена координатна система е свеждането на различни пространствени геометрични задачи към алгебрични.

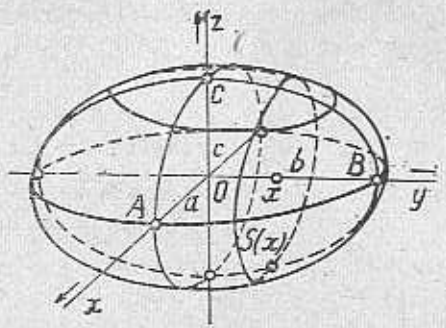
Нека $a>0$, $b>0$ и $c>0$ са произволни константи. Множеството на всички точки от пространството с кооординати (x, y, z), за които

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{3}$$

се нарича *триосен елипсоид*. Може да се докаже, че триоснният елипсоид е ограничена и затворена повърхнина. Частта от пространството, която триоснният елипсоид загражда, също се нарича *триосен елипсоид* (черт. 92).

Пример 2. Да се намери обемът на триосния елипсоид.

За произволна точка x от абсцисната ос да означим с $\alpha(x)$ равнината, която минава през x и е ортогонална на Ox. Най-напред ще намерим сечението на $\alpha(x)$ с елипсоида. Очевидно всичките точки на това сечение имат една и съща абсциса x. Следователно единствените координати, които могат да се изменят, когато една точка описва сечението, са y и z. Тяхното изменение трябва да става по такъв начин, че да е изпълнено уравнението (3). Очевидно проекцията на сечението върху равнината Oyz ще бъде крива, еднаква със сечението. Следователно достатъчно е да намерим тази проекция. Тъй като ординатата и апликатата на произволна точка A са равни съответно на ординатата и апликатата на проекцията ѝ A_1 върху равнината Oyz, координатите (y, z) на проекцията върху Oyz на произволна точка (x, y, z) от сечението ще удовлетворяват (3) при фик-



Черт. 92

сираното я началото на абсцата x. Ето защо уравнението на проекцията на сечението върху равнината Oyz ще бъде

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x^2}{a^2}. \tag{4}$$

Когато $|x|>a$, дясната страна на това уравнение е отрицателна и понеже лявата страна може да приема само неотрицателни стойности (тя е сума от квадрати), за такива x равнината $\alpha(x)$ няма да пресича елипсоида. При $|x|=a$ отдясно получаваме 0 и (4) е изпълнено само когато $y=z=0$, т. е. при $x=a$ и при $x=-a$ сечението се състои само от една точка. Най-после при $|x|<a$, дясната страна на (4) е положителна и (4) може да се запише и така

$$\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^2}+\frac{z^2}{\left(c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^2}=1, \tag{5}$$

откъдето се вижда, че сечението е елипса с полуоси $b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ и $c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$. Следователно лицето на това сечение е $S(x)=\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$. Ето защо

$$\Phi(x)=\int S(x)\,dx=\pi bc\int\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\pi bcx-\frac{\pi bcx^3}{3a^2}.$$

Тогава
$$V=\Phi(a)-\Phi(-a)=\pi bca-\frac{\pi bca}{3}-\left(-\pi bca+\frac{\pi bca}{3}\right)$$
$$=\frac{4}{3}\pi abc.$$

На края ще приложим разгледаните методи за намиране обема на ротационно тяло.

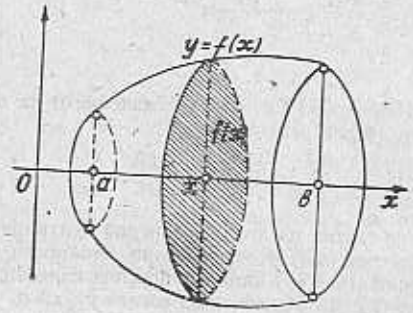
Нека функцията f е дефинирана и непрекъсната в интервала $[a, b]$ и нека $f(x)\geq 0$ за всяко x от този интервал. Да означим

с T множеството на всички точки с координати (x, y) от равнината, за които са изпълнени неравенствата (черт. 85)

$$a \leq x \leq b, \tag{6}$$

$$0 \leq y \leq f(x)$$

и да означим с M тялото, което се получава от въртенето на T около абсцисната ос (черт. 93). Очевидно за произволно x от



Черт. 93

$[a, b]$ сечението на $\alpha(x)$ с M е кръг с радиус $f(x)$. Ето защо $S(x) = \pi f^2(x)$ и следователно

$$\Phi(x) = \int S(x)\,dx = \pi \int f^2(x)\,dx.$$

Както вече знаем, обемът V може да се пресметне по формулата

$$V = \Phi(b) - \Phi(a). \tag{7}$$

И така, *за да намерим обема на ротационното тяло T можем да използуваме формула (7), където Φ е произволна примитивна на функцията $\pi f^2(x)$.*

Пример 3. Да се намери обемът на тялото, получено от въртенето на синусоидата $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$ около абсцисната ос.

Очевидно

$$\Phi(x) = \pi \int \sin^2 x\,dx = \pi \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}$$

и

$$V = \Phi(\pi) - \Phi(0) = \frac{\pi^2}{2}.$$

§ 4. ИЗТИЧАНЕ НА ТЕЧНОСТИ

Тук ще разгледаме някои хидродинамични приложения на интегралното смятане.

Да се спрем най-напред на въпроса за скоростта на изтичане. Нека от един съд с височина H изтича течност (черт. 94). Както е известно на читателя от физиката, ако оставим една точка свободно да пада, докато измине височина H, скоростта ѝ ще бъде $\sqrt{2gH}$, където g е земното ускорение.

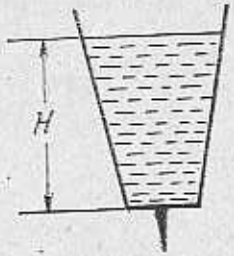
За читателя, свикнал с механичните принципи за запазване, не ще бъде трудно да съобрази, че и скоростта на изтичане на течността от разглеждания съд ще се дава с формулата

$$V = \sqrt{2gH}. \tag{1}$$

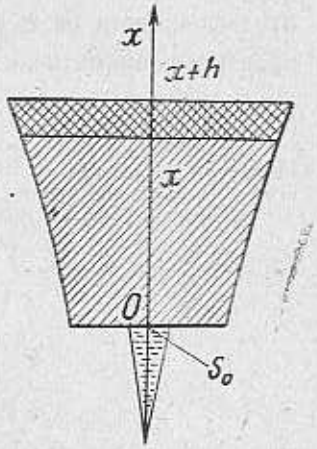
Да отговорим и на въпроса какво количество течност μ ще изтече през отвор с лице S_0, ако времето на изтичане е t, а скоростта на изтичане е постоянно равна на V. Не е трудно да се съобрази, че това количество течност изпълва цилиндър с височина Vt и лице на основата S_0. Следователно

$$\mu = Vt\,S_0. \tag{2}$$

Да разгледаме сега съд с отвор с лице S_0 на дъното, през който изтича течност. Въпросът, от който се интересуваме, е *за колко време съдът ще се изпразни.* За да отговорим на този въпрос, най-напред ще означим с $F(x)$ времето, необходимо за изтичането на течност с височина x (черт. 95). Ще намерим про-



Черт. 94



Черт. 95

изводната на $F(x)$. Съгласно дефиницията на F, времето, необходимо за изтичането на пласта течност с височина h, ще бъде $F(x+h)-F(x)$. Ето защо тоза количество течност ще се даде с формулата

(3) $$\mu = S_0 V_{ср} (F(x+h)-F(x),$$

където $V_{ср}$ е средната скорост на изтичането в интервала от време $[F(x), F(x+h)]$, а S_0 е лицето на отвора. От друга страна, μ не е нищо друго освен обема на този пласт, който е

(4) $$\mu = S_{ср} h,$$

където $S_{ср}$ е лицето на „средното" хоризонтално сечение на пласта. Като приравним десните страни на (3) и (4) и разделим двете страни на полученото равенство с h, добиваме

(5) $$S_0 V_{ср} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = S_{ср}.$$

Когато h клони към нула, $S_{ср}$ очевидно клони към лицето $S(x)$ на сечението на съда с хоризонталната равнина през x, а $V_{ср}$ клони към скоростта на изтичане, отговаряща на височината x, която съгласно (1) е $\sqrt{2gx}$. Ето защо, ако в (5) оставим h да клони към нула, ще получим $S_0 \sqrt{2gx}$. $F'(x) = S(x)$, откъдето

$$F'(x) = \frac{S(x)}{S_0 \sqrt{2gx}}$$

и следователно $F(x)$ е примитивна на $\frac{S(x)}{S_0 \sqrt{2gx}}$. В същото време от дефиницията на F следва, че $F(0)=0$. Следователно, ако Φ е произволна примитивна на $\frac{S(x)}{S_0 \sqrt{2gx}}$, то

(6) $$F(x) = \Phi(x) - \Phi(0).$$

Пример 1. На дъното на цилиндричен съд с лице на основата S е пробит отвор с лице S_0. За колко време съдът ще се изпразни, ако височината му е H.

Очевидно $S(x)=S$ и следователно

$$\Phi(x) = \int \frac{S}{S_0 \sqrt{2gx}} dx = \frac{S}{S_0 \sqrt{2g}} \int x^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$= \frac{S}{S_0 \sqrt{2g}} \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = \frac{2S\sqrt{x}}{S_0 \sqrt{2g}}$$

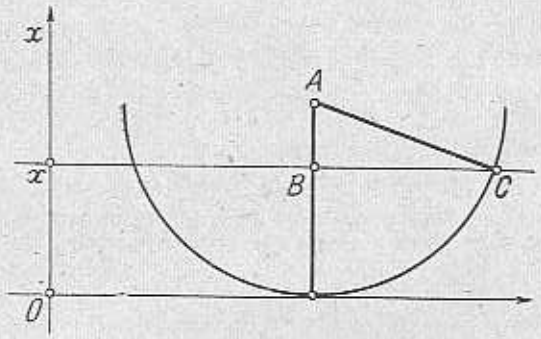
откъдето съгласно (6)

$$F(x) = \frac{2S\sqrt{x}}{S_0 \sqrt{2g}}.$$

Тъй като според дефиницията на F времето T, необходимо за изпразване на цилиндъра, е $F(H)$, последното равенство при $x=H$ дава

(7) $$T = \frac{2S\sqrt{H}}{S\sqrt{2g}}.$$

Пример 2. Полусфера с радиус R е напълнена с течност. На дъното на полусферата е пробит отвор с радиус r. Да се намери времето T, необходимо за изтичане на течността от полусферата.



Черт. 96

Сечението на полусферата с хоризонталната равнина през x е кръг с радиус BC (черт. 96). От триъгълника ABC намираме

$$BC^2 = R^2 - (R-x)^2 = 2Rx - x^2,$$

откъдето $F'(x) = \frac{\pi(2Rx-x^2)}{\pi r^2 \sqrt{2gx}}$ и следователно

$$\Phi(x) = \frac{1}{r^2\sqrt{2g}} \int \frac{2Rx-x^2}{x^{\frac{1}{2}}} dx = \frac{1}{r^2\sqrt{2g}} \left(2R\int x^{\frac{1}{2}} dx - \int x^{\frac{3}{2}} dx\right)$$

$$= \frac{1}{r^2\sqrt{2g}} \left(\frac{4}{3} R x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}}\right).$$

Сега (6) дава

$$F(x) = \frac{1}{r^2\sqrt{2g}} \left(\frac{4}{3} Rx^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}}\right)$$

и тъй като времето T, необходимо за изпразване на полусферата, е $F(R)$, последното равенство при $x=R$ дава

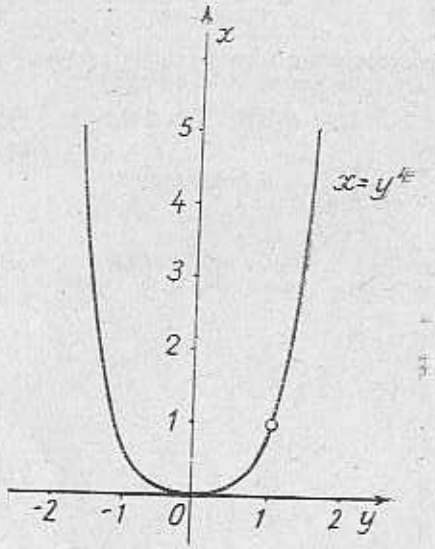
$$T=\frac{14\,R^{\frac{5}{2}}}{15\,r^2\sqrt{2g}}. \tag{8}$$

Пример 3. Да се намери формата на ротационна чаша по такъв начин, че спадането на нивото при изтичането на течност през отвор на дъното ѝ да става равномерно.

Иска се времето, необходимо за изтичане на течност с височина x, да е пропорционално на x, т. е. $F(x)=kx$, където k е константа. Следователно $F'(x)=k$ и формулата $F'(x)=\frac{S(x)}{S_0\sqrt{2gx}}$ дава $k=\frac{S(x)}{S_0\sqrt{2gx}}$, откъдето $S(x)=\pi\gamma^2\sqrt{x}$, където $\gamma>0$ е константа. Ако означим с $y(x)$ радиуса на сечението $S(x)$ от последното равенство, ще получим $\pi y^2(x)=\pi\gamma^2\sqrt{x}$ и

$$y=\gamma\sqrt[4]{x}. \tag{9}$$

Графиката на функцията $y=\sqrt[4]{x}$ е изобразена на черт. 97. Чаша с желаното свойство може да се получи, ако завъртим намерената крива около оста Ox. Такава чаша може да се използува за пясъчен часовник.



Черт. 97

В последните три параграфа често имахме случай за някаква функция f да образуваме разликата $\Phi(b)-\Phi(a)$, където Φ е произволна примитивна на f. Тъй като всеки две примитивни на f се различават с константа, разликата $\Phi(b)-\Phi(a)$ не зависи от конкретния избор на примитивната Φ, а само от функцията f и от точките a и b. Тази разлика се нарича *определен интеграл от f в интервала* $[a, b]$ и се бележи с $\int_a^b f(x)\,dx$. По силата на тази дефиниция имаме

$$\int_a^b f(x)\,dx=\Phi(b)-\Phi(a), \tag{9}$$

където Φ е произволна примитивна на f.

Определените интеграли създават редица принципиални и технически удобства. С помощта на това понятие формула (2.6) се записва така: $S=\int_a^b f(x)\,dx$, формула (3.1)—така: $V=\int_a^b S(x)\,dx$, а формула (4.6)—така: $T=\int_0^H \frac{S(x)}{S_0\sqrt{2gx}}\,dx$, където T е времето, необходимо за изтичане на течността от съда, а H е височината ѝ.

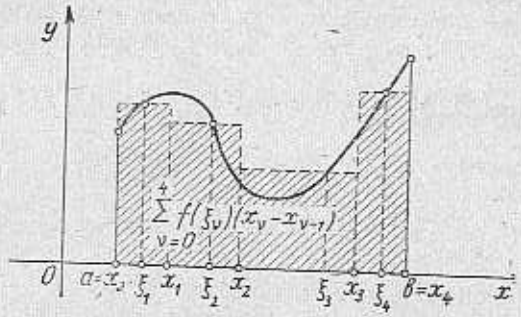
От дефиницията (9) веднага следва и един начин за пресмятане на определените интеграли. Именно, пресмятаме определения интеграл като неопределен и след това намираме разликата между стойността на така получената функция при $x=b$ и стойността ѝ при $x=a$. Графически това изглежда например така:

$$\int_0^{\pi}\sin x\,dx=-\cos x\Big|_0^{\pi}=-\cos\pi+\cos 0=2.$$

Ако анализираме внимателно формула (2.6) (а също така, разбира се, формули (3.1) и (4.6)), ще получим увереност, че поне когато подинтегралната функция f е неотрицателна, $\int_a^b f(x)\,dx$ може да се представи като граница на суми от вида

$$\sum_{\nu=1}^{n} f(\xi_\nu)\,(x_\nu-x_{\nu-1}),$$

където $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b$, а ξ_ν е произволна точка от интервала $[x_{\nu-1}, x_\nu]$ (за случая $n=3$ вж. черт. 98); за да получим границата, оставяме дължината на най-големия от интервалите



Черт. 98

$[x_{\nu-1}, x_\nu]$ да клони към нула (при което, разбира се, броят n на интервалите ще трябва да расте неограничено). Може да се покаже, че това действително е така, и то за произволна непрекъсната функция f.

§ 5. УРАВНЕНИЕТО $y'=ay$

В природата понякога се срещат величини, скоростта на изменение на които е пропорционална на стойността на величината. На тях съответстват функции $y=y(x)$, за които е изпълнено уравнението

(1) $$y'=ay \qquad (a \text{ — константа})$$

за всяко x.

Веднага се вижда, че функцията $y=e^{ax}$ е решение на това уравнение. Нещо повече, решения на (1) са и всички функции

(2) $$y=ce^{ax},$$

където c е произволна константа.

Задачите, които изникват от приложенията, често изглеждат така. За функцията y, описваща някое явление или процес, се убеждаваме, че удовлетворява уравнението (1). Познаването на н я к о и решения на уравнението не носи особена полза за задачата, която решаваме, защото освен посочените решения уравнението може да има и други и търсената функция може евентуално да се окаже измежду тях. Следователно трябва да се намерят в с и ч к и решения на това уравнение.

Ще покажем, че всяко решение на (1) е функция от вида (2). За тази цел за произволна функция y, за която е в сила (1), ще разгледаме функцията

(3) $$z=\frac{y}{e^{ax}}=ye^{-ax}.$$

Забележете, че ако действително е вярно, че всички решения на (1) са функции от вида (2), функцията (3) би следвало да бъде константа. За да проверим дали това е така, ще намерим производната на z:

$$z'=y'e^{-ax}-yae^{-ax}=(y'-ay)e^{-ax}=0.$$

От получения резултат следва, че $z=c=\text{const.}$, което заедно с (3) показва, че y е функция от вида (2).

И така функциите (2) *удовлетворяват* (1) *и никоя друга функция няма това свойство.*

По-долу следват някои приложения на направените разглеждания.

Пример 1. Да се намери законът за разпадане на радиоактивните вещества.

Известно е, че скоростта на разпадане на едно радиоактивно вещество е пропорционална на наличното количество от това вещество. Следователно, ако означим с y количеството от разглежданото вещество в произволен момент x от времето ще имаме

(4) $$y'=\lambda y,$$

където λ е константа. Понеже количеството на радиоактивното вещество намалява с течение на времето, скоростта y' ще бъде отрицателна, поради което константата λ ще бъде отрицателна и (4) може да се запише във вида

(5) $$y'=-\mu y,$$

където μ е положителна константа.

Вече знаем, че общото решение на (5) е

(6) $$y=ce^{-\mu x}.$$

При $x=0$ намираме $c=y(0)$ и следователно c е началното количество от радиоактивното вещество. По този начин (6) добива вида

(7) $$y=y_0e^{-\mu x},$$

където y_0 е началното количество на радиоактивния материал.

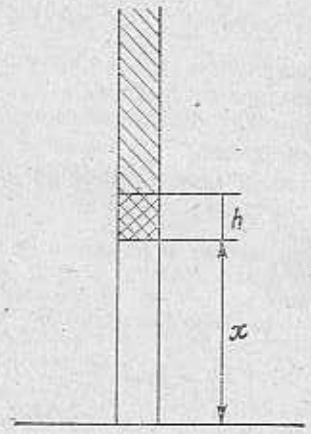
Пример 2. Да се намери законът, по който атмосферното налягане f се изменя в зависимост от надморската височина x.

Да отбележим най-напред, че съгласно закона на Бойл—Мариот теглото Q на газ, разположен в обем V под налягане p, се дава от формулата

(8) $$Q=kpV,$$

където k зависи от естеството на газа, от температурата му, но не и от налягането.

Да разгледаме вертикален цилиндричен въздушен стълб с лице на напречното сечение 1 и с основа върху морското ниво. За произволна надморска височина x означаваме с $p(x)$ атмосферното налягане на тази височина. Очевидно $p(x)$ съвпада с теглото на онази част от въздуха, която е в стълба и е над x (черт. 99). Следователно разликата $p(x)-p(x+h)$ ще бъде равна на теглото на въздуха, който се намира в цилиндъра с лице на основата 1 и височина h, който е изобразен на черт. 99. Тъй като обемът на този цилиндър е h, съгласно (8)



Черт. 99

теглото на въздуха, който се намира в него, ще бъде $kp_{ср}h$, където $p_{ср}$ е средното налягане на въздуха в цилиндъра. Ето защо $p(x)-p(x+h)=k\,p_{ср}\,h$ и като разделим двете страни на това равенство с h ще получим

(9) $$\frac{p(x+h)-p(x)}{h}=-p_{ср}\,k.$$

Когато h клони към нула, налягането $p_{ср}$ клони към $p(x)$ и като оставим в (9) h да клони към нула, получаваме

(10) $$p'(x)=-k\,p(x).$$

Така полученото уравнение не е от вида (1), понеже k зависи от температурата, която изобщо се изменя с x. Но във всеки случай (10) добива вида (1), ако температурата на атмосферата е постоянна. По такъв начин получаваме възможност да намерим как налягането в една атмосфера с постоянна температура се изменя заедно с височината x.

И така, ако температурата на една атмосфера е постоянна, уравнението (10) *е от вида* (1) *и следователно* $p(x)=c\,e^{-kx}$. При $x=0$ намираме $c=p(0)$ и следователно

(11) $$p(x)=p_0\,e^{-kx},$$

където p_0 е атмосферното налягане на морското ниво. За да може формула (11) да се използува за конкретни изчисления, трябва да се знае константата k. Ако вече знаем p_0, тази константа може да се определи от (11), ако измерим $p(x)$ за някое $x\neq 0$.

§ 6. УРАВНЕНИЕТО $y'=ay+b$

Уравнението

(1) $$y'=ay+b,$$

където a и b са константи, е обобщение на (5.1), тъй като последното се получава от (1) при $b=0$.

Лесно се вижда, че (1) може да се запише и във вида

(2) $$\left(y+\frac{b}{a}\right)'=a\left(y+\frac{b}{a}\right)$$

и като положим

(3) $$y+\frac{b}{a}=z$$

виждаме, че (1) е еквивалентно с уравнението

(4) $$z'=az,$$

което е от вида (5.1). Следователно $z=c\,e^{ax}$ и съгласно (3) общото решение на (1) ще има вида

(5) $$y=c\,e^{ax}-\frac{b}{a},$$

където c е произволна константа.

Пример 1. Да се намери законът, по който температурата T на едно нагрято тяло, което е оставено да се охлажда, зависи от времето x.

Ще отбележим най-напред, че количеството топлина Q, което се съдържа в едно тяло, и температурата T на това тяло са свързани с релацията

(6) $$Q=kT,$$

където k зависи от тялото, но не и от Q или T.

Да си мислим два топлинни източника A и B с температури T_A и T_B. Ако тези температури са различни, от източника с по-висока температура изтича топлина към източника с по-ниска температура. Количеството Q на топлината, про-

текла от A към B, е пропорционално на температурната разлика $T_A - T_B$ и на интервала от време h, през който е ставал топлообменът между A и B, т. е.

(7) $$Q = \lambda (T_A - T_B) h,$$

където λ зависи от телата, но не зависи от температурите и от интервала от време h.

В нашия случай също имаме два топлинни източника — нагрятото тяло и заобикалящата го среда. При това можем да считаме, че температурата T_0 на заобикалящата тялото среда остава постоянна по време на целия топлообмен.

За произволен момент x означаваме съответно с $Q(x)$ и $T(x)$ количеството топлина, която се съдържа в тялото в момента x и температурата на тялото в този момент. Съгласно (6) ще имаме

(8) $$Q(x) = k\,T(x).$$

Съгласно дефиницията на $Q(x)$ разликата $Q(x) - Q(x+h)$ ще бъде равна на количеството топлина, която е изтекла от тялото в интервала от време $[x, x+h]$. Следователно

$$Q(x) - Q(x+h) = \lambda (T_{cp} - T_0) h,$$

където T_{cp} е средната температура на тялото в интервала $[x, x+h]$. Ако в последното равенство заместим Q с равното му от (8) и разделим двете страни на така полученото равенство на $-kh$, ще получим

(9) $$\frac{T(x+h) - T(x)}{h} = -\frac{\lambda}{k}(T_{cp} - T_0).$$

Когато h клони към нула, T_{cp} клони към $T(x)$. Ето защо, ако в (9) оставим h да клони към нула, ще получим

(10) $$T'(x) = -\frac{\lambda}{k}(T(x) - T_0),$$

което показва, че температурата като функция на времето удовлетворява уравнение от вида (1). Следователно $T(x)$ ще има вида (5), т. е.

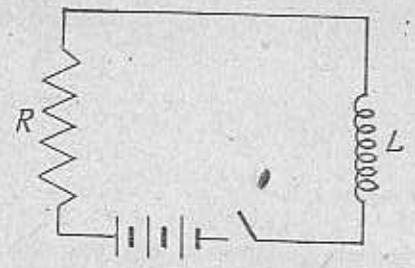
(11) $$T(x) = C e^{-\frac{\lambda}{k} x} + T_0.$$

Ако в (11) положим $x = 0$, ще получим $T(0) = C + T_0$ и $C = T(0) - T_0$, поради което (11) добива вида

(12) $$T(x) = (T(0) - T_0) e^{-\frac{\lambda}{k} x} + T_0.$$

Ако знаем $T(0)$, константата $\frac{\lambda}{k}$ може да се определи от (12), ако се измери $T(a)$ за някое $x \neq 0$.

Пример 2. Дадена е електрическа верига с неизменящи се във времето съпротивление R и самоиндукция L. Да се намери законът, по който силата на тока I зависи от времето x, ако напрежението V е постоянно (черт. 100).



Черт. 100

Ако във веригата няма самоиндукция, напрежението V, съпротивлението R и силата на тока I са свързани със закона на Ом:

(13) $$V = IR.$$

Типична самоиндукция наблюдаваме, когато във веригата е включена една навита на желязна пръчка бобина. При изменението на силата на тока I, самоиндукционната бобина произвежда променливо магнитно поле, което от своя страна произвежда едно допълнително електрическо напрежение V_L във веригата. Индукционното напрежение V_L се противопоставя на изменението на тока и е пропорционално на скоростта на изменение на тока, т. е.

(14) $$V_L = -L I',$$

където коефициентът L се нарича самоиндукция на веригата.

Да отбележим, че всяка електрическа верига притежава самоиндукция. Това е причината, поради която силата на тока при включване и изключване е непрекъсната функция на времето. Наистина, ако във веригата не би имало самоиндукция, при включване силата на тока би трябвало от нула скокообразно да приеме стойността (13). Но както вече видяхме, самоиндукцията произвежда напрежение, което се противопоставя на изменението на силата на тока и по такъв начин (както ще видим това подробно след малко) осигурява нейната непрекъснатост.

И така във верига със самоиндукция освен външното напрежение V действа и напрежението (14). Следователно сумарното напрежение $V - L I'$ трябва да се постави в закона на Ом (13) вместо V, за да се получи диференциалното уравнение за силата на тока. Така получаваме $V - L I' = R I$ или, което е все същото,

(15) $$I' = -\frac{R}{L} I + \frac{V}{L},$$

което е уравнение от вида (1). Решенията на това уравнение са функции от вида (5), т. е.

(16) $$I = C e^{-\frac{R}{L} x} + \frac{V}{R}.$$

При $x=0$ уравнението (16) дава $C=I_0-\frac{V}{R}$ и следователно решението на (15) се дава с формулата

(17) $$I=\left(I_0-\frac{V}{R}\right)e^{-\frac{R}{L}x}+\frac{V}{R},$$

където I_0 е началната сила на тока.

От (17) се вижда, че след известно време силата на тока практически се стабилизира на стойността $\frac{V}{R}$. Наистина при нарастването на x функцията $e^{-\frac{R}{L}x}$ бързо клони към нула. Така се убеждаваме, че в крайна сметка силата на тока приема стойността, предписвана от закона на Ом (13). В същото време (17) е непрекъсната функция на x, както и да бъде избрано I_0.

§ 7. ОБЩО ЛИНЕЙНО УРАВНЕНИЕ ОТ ПЪРВИ РЕД

Уравненията, които разглеждахме в предните два параграфа, са частни случаи от уравнението

(1) $$y'=a(x)\,y+b(x),$$

което се нарича линейно диференциално уравнение от първи ред. То се различава от уравнението (6.1) по това, че коефициентите $a(x)$ и $b(x)$ не са непременно постоянни, а могат да се изменят.

По аналогия с това, което имахме в § 5, най-напред ще разгледаме специалния случай, когато в (1) имаме $b(x)=0$, т. е. ще се занимаем с уравнението

(2) $$y'=a(x)\,y.$$

След деление с y уравнението (2) добива вида $(\ln y)'=a(x)$ и следователно $\ln y=\int a(x)\,dx+\ln C$, където за удобство произволната константа е записана като $\ln C$. От последното равенство намираме

(3) $$y=Ce^{\int a(x)\,dx},$$

което е общото решение на (2).

Изложеният начин за решаване на (2) не е коректен, понеже делихме с функцията y, без да сме сигурни, че тя не се анулира. За да се заобиколи тази мъчнотия, обикновено (2) се решава така.

За произволна функция y, която удовлетворява (2), разглеждаме функцията

(4) $$z=y\,e^{-\int a(x)\,dx}.$$

Очевидно е, че ако общото решение на (2) се дава от (3), функцията z би трябвало да бъде константа. Да проверим чрез диференциране дали това действително е така:

(5) $$\begin{cases} z'=y'e^{-\int a(x)dx}+ye^{-\int a(x)dx}\left(-\int a(x)dx\right)' \\ =y'e^{-\int a(x)dx}+ye^{-\int a(x)dx}(-a(x)) \\ =(y'-a(x)y)\,e^{-\int a(x)dx}=0. \end{cases}$$

Следователно съгласно фундаменталното свойство на производната имаме $z=c=\text{const}$ и (4) дава (3). С това е доказано, че общото решение на (2) се дава от формулата (3), където C е произволна константа.

Полученият резултат може да се използува например за изучаване на зависимостта на атмосферното налягане от височината, в случая, когато температурата на атмосферата не е постоянна. Тогава k от уравнението (5.10) не е константа, но това не е пречка да приложим (3).

За да решим общото уравнение (1), отново ще разгледаме произволно решение y на (1) и отново ще разгледаме функцията (4). Изчислението (5) на z' отново може да се проведе, но тъй като този път $y'-a(x)y=b(x)$, за z' ще получим

(6) $$z'=b(x)e^{-\int a(x)dx},$$

откъдето

(7) $$z=\int b(x)e^{-\int a(x)dx}+C.$$

Тъй като от (4) следва, че $y=z\,e^{\int a(x)dx}$, равенство (7) дава

(8) $$y=e^{\int a(x)dx}\left[\int b(x)e^{-\int a(x)dx}+C\right],$$

което е общото решение на (1).

Пример 1. Дадена е електрическа верига с постоянно съпротивление R и самоиндукция L. Да се намери закона, по който силата на тока I зависи от времето x, ако напрежението се дава с формулата $V=V_0 \cos \omega x$.

Когато напрежението V зависи от времето x по указания начин, полученият електричен ток се нарича променлив. Разсъждавайки, както в пример **2** от §6, се убеждаваме, че диференциалното уравнение, което ще удовлетворява силата на тока, ще бъде

$$I' = -\frac{R}{L} I + \frac{V_0 \cos \omega x}{L}. \tag{9}$$

Следователно $a(x) = -\frac{R}{L}$ и $b(x) = \frac{V_0}{L} \cos \omega x$. Ето защо

$$\int a(x)\, dx = -\frac{R}{L} x \tag{10}$$

и

$$\int b(x) e^{-\int a(x) dx} dx = \frac{V_0}{L} \int \cos \omega x\, e^{\frac{R}{L} x} dx. \tag{11}$$

За да намерим интеграла, фигуриращ отдясно на (11), ще пресметнем най-напред интеграла

$$I = \int \cos \lambda x\, e^{\mu x} dx. \tag{12}$$

Очевидно

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\mu} \int \cos \lambda x \left(e^{\mu x}\right)' dx = \frac{1}{\mu} \cos \lambda x\, e^{\mu x} - \frac{1}{\mu} \int e^{\mu x} (\cos \lambda x)' dx \\ &= \frac{1}{\mu} \cos \lambda x\, e^{\mu x} + \frac{\lambda}{\mu} \int \sin \lambda x\, e^{\mu x} dx \\ &= \frac{1}{\mu} \cos \lambda x\, e^{\mu x} + \frac{\lambda}{\mu^2} \int \sin \lambda x \left(e^{\mu x}\right)' dx \\ &= \frac{1}{\mu} \cos \lambda x\, e^{\mu x} + \frac{\lambda}{\mu^2} \sin \lambda x\, e^{\mu x} - \frac{\lambda^2}{\mu^2} \int \cos \lambda x\, e^{\mu x} dx, \end{aligned}$$

където беше интегрирано два пъти по части. От написаната верига от равенства следва, че

$$I = \frac{1}{\mu} \cos \lambda x\, e^{\mu x} + \frac{\lambda}{\mu^2} \sin \lambda x\, e^{\mu x} - \frac{\lambda^2}{\mu^2} I,$$

откъдето след решаване относно I намираме

$$\int \cos \lambda x\, e^{\mu x} dx = \frac{\lambda \sin \lambda x + \mu \cos \lambda x}{\lambda^2 + \mu^2} e^{\mu x}. \tag{13}$$

Ако в полученото равенство заместим λ с ω и μ с $\frac{R}{L}$, като вземем пред вид

(11), ще получим

$$\int b(x) e^{-\int a(x) dx} dx = \frac{V_0}{\sqrt{L^2 \omega^2 + R^2}} \cdot \frac{L \omega \sin \omega x + R \cos \omega x}{\sqrt{L^2 \omega^2 + R^2}} \cdot e^{\frac{R}{L} x}. \tag{14}$$

Ако сега заместим (10) и (14) в (8), ще получим

$$I = \frac{V_0}{\sqrt{L^2 \omega^2 + R^2}} \cdot \frac{L \omega \sin \omega x + R \cos \omega x}{\sqrt{L^2 \omega^2 + R^2}} + C e^{-\frac{R}{L} x}, \tag{15}$$

което е общото решение на (9).

Ако във веригата нямаше самоиндукция, т. е. ако $L \to 0$, от (15) бихме получили

$$I = \frac{V_0 \cos \omega x}{R}, \tag{16}$$

което се съгласува със закона на Ом (6.13), защото $V = V_0 \cos \omega x$. Удобно е (15) да се представи във вид, който напомня (16). За тази цел най-напред ще отбележим, че $e^{-\frac{R}{L} x}$ много бързо клони към нула и следователно, когато x е далече от началния момент, с достатъчна точност (15) може да се представи във вида

$$I = \frac{V_0}{\sqrt{L^2 \omega^2 + R^2}} \cdot \frac{L \omega \sin \omega x + R \cos \omega x}{\sqrt{L^2 \omega^2 + R^2}}. \tag{17}$$

Понеже сборът от квадратите на числата $\frac{L \omega}{\sqrt{L^2 \omega^2 + R^2}}$ и $\frac{R}{\sqrt{L^2 \omega^2 + R^2}}$ е очевидно 1, сигурно съществува ъгъл φ, за който

$$\begin{cases} \cos \omega \varphi = \dfrac{R}{\sqrt{L^2 \omega^2 + R^2}}, \\ \sin \omega \varphi = \dfrac{L \omega}{\sqrt{L^2 \omega^2 + R^2}}, \end{cases} \tag{18}$$

което след заместване в (17) дава

$$I = \frac{V_0 \cos \omega (x - \varphi)}{\sqrt{L^2 \omega^2 + R^2}}. \tag{19}$$

Полученият израз действително напомня (16). Ролята на съпротивлението R се поема от $\sqrt{L^2 \omega^2 + R^2}$ и освен това токът е „изместен по фаза" в сравнение със случая (16), когато няма самоиндукция.

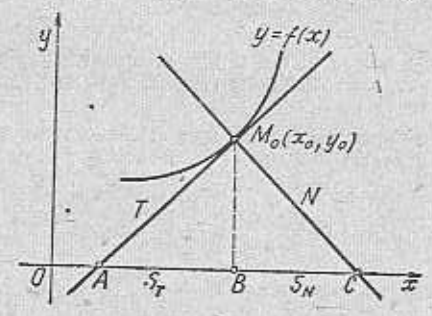
§ 8. НЯКОИ ПРИЛОЖЕНИЯ В ГЕОМЕТРИЯТА

Най-напред ще разгледаме задачата за намиране на уравнението на тангентата към дадена крива в дадена нейна точка.

Да разгледаме кривата с уравнение $y=f(x)$ и произволна нейна точка $(x_0, f(x_0))$ (черт. 101). Както вече знаем, ъгловият коефициент на тангентата към кривата в точката $(x_0, f(x_0))$ е $f'(x_0)$. Следователно тангентата ще има уравнение

(1) $$y=f'(x_0)\,x+b,$$

където b трябва да се определи от условието правата (1) да минава през точката $(x_0, f(x_0))$. Ако поставим координатите на тази точка вместо (x, y) в (1), ще получим $y_0=f'(x_0)f(x_0)+b$ и



Черт. 101

като извадим почленно това равенство от (1), ще получим окончателно уравнението на тангентата

(2) $$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0).$$

Правата, която минава през точката $(x_0, f(x_0))$ и е перпендикулярна на тангентата, се нарича *нормала* към кривата $y=f(x)$ в точката $(x_0, f(x_0))$. Да означим с k ъгловия коефициент на нормалата, а с α и β — съответно ъгъла, който тангентата и нормалата сключват с абсцисната ос. Тогава $\operatorname{tg}\alpha=f'(x_0)$ и $\beta=\alpha+\frac{\pi}{2}$. Ето защо

$$k=\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha}=-\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=-\frac{1}{f'(x_0)}.$$

Следователно уравнението на нормалата ще бъде

$$y=-\frac{1}{f'(x_0)}x+b$$

и като използуваме, че това е права, която минава през точката $(x_0, f(x_0))$, ще получим окончателно

(3) $$y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0).$$

Понякога уравненията на тангентата и нормалата се записват по-кратко така

(4) $$\eta-y=y'(\xi-x)$$

и

(5) $$\eta-y=-\frac{1}{y'}(\xi-x).$$

Да отбележим, че в тези две уравнения x и y са координатите на произволна точка от кривата, а ξ и η—координатите на произволна точка от съответната права.

Отсечките T, N, S_T S_N (черт. 101) се наричат съответно *тангента, нормала, субтангента* и *субнормала*.

Да положим в уравнението на тангентата $\eta=0$ и да решим така полученото уравнение относно ξ. Тогава ще получим следната формула за абсцисата на точка A:

(6) $$\xi=x-\frac{y}{y'}$$

и тъй като абсцисата на точката B е x, намираме следната формула за субтангентата

(7) $$S_T=\frac{y}{y'}.$$

Аналогично за субнормалата намираме

(8) $$S_N=yy'.$$

По-нататък от правоъгълните триъгълници ABM_0 и CBM_0, общият катет BM_0, на които е y, намираме

(9) $$T=\frac{y}{y'}\sqrt{1+y'^2}$$

и

(10) $$N=y\sqrt{1+y'^2}.$$

Формулите (7), (8), (9) и (10) могат да се използват за съставяне на различни геометрични задачи, водещи до диференциални уравнения. Тук ще разгледаме няколко най-прости примери.

Пример 1. Да се намерят всички криви, субнормалата на които навсякъде е равна на p.

Съгласно (8) диференциалното уравнение на тези криви ще бъде

(11) $$yy'=p,$$

което очевидно може да се запише и така $\frac{1}{2}(y^2)'=p$, т. е. $(y^2)'=2p$. Следователно $y^2=\int 2p\,dx=2px+C$, поради което уравненията на тези криви са

(12) $$y^2=2px+C,$$

където C е произволна константа. Да отбележим, че за всяка стойност на C се получава по една крива с желаното свойство и че, когато C пробягва цялата числова права, (12) дава всички такива криви.

Пример 2. Да се намерят всички криви, сумата от дължините на нормалата и на субнормалата на които е постоянно равна на a.

Съгласно (8) и (10) диференциалното уравнение на тези криви ще бъде

$$yy'+y\sqrt{1+y'^2}=a.$$

Като решим това уравнение относно y', ще получим

(13) $$y'=\frac{a^2-y^2}{2ay}.$$

Очевидно (13) може да се запише и така $\frac{2yy'}{a^2-y^2}=\frac{1}{a}$, $\frac{(y^2)'}{a^2-y^2}=\frac{1}{a}$ и $\frac{(a^2-y^2)'}{a^2-y^2}=-\frac{1}{a}$, откъдето $(\ln(a^2-y^2))'=-\frac{1}{a}$ и следователно $\ln(a^2-y^2)=-\frac{x}{a}+\ln(-C)$, където за удобство произволната константа е записана като $\ln(-C)$. От последното равенство чрез антилогаритмуване получаваме

(14) $$y^2=a^2+ce^{-\frac{x}{a}},$$

което е и уравнението на всички криви с желаното свойство.

Задачи към глава 6

1. Като се използват правилата за интегриране 1 и 2, да се пресметнат следните неопределени интеграли

а) $\int\frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}}\,dx.$

Отг. $\left(\frac{2}{5}x^2-\frac{4}{3}x+2\right)\sqrt{x}.$

б) $\int\frac{(x+1)^2}{x}\,dx.$

Отг. $\frac{x^2}{2}+2x+\ln x.$

в) $\int\frac{dx}{\operatorname{sh}^2x\operatorname{ch}^2x}.$

Отг. $-\operatorname{th}x-\operatorname{cth}x.$

г) $\int\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2dx.$

Отг. $x+\cos x.$

д) $\int\left(\cos^4\frac{x}{2}-\sin^4\frac{x}{2}\right)dx$

Отг. $\sin x$

е) $\int\operatorname{tg}^2x\,dx.$

Отг. $\operatorname{tg}x-x.$

ж) $\int\operatorname{ctg}^2x\,dx.$

Отг. $-x-\operatorname{ctg}x.$

з) $\int\frac{dx}{a^x}.$

Отг. $-\frac{1}{\ln a\,.\,a^x}.$

и) $\int(3^x+e^x)^2dx.$

Отг. $\frac{9^x}{\ln 9}+\frac{2}{1+\ln 3}3^xe^x+\frac{e^{2x}}{2}.$

2. Като се използват правилата за интегриране по части, да се пресметнат следните неопределени интеграли

а) $\int x^a\ln x\,dx\qquad(a\neq-1).$

Отг. $x^{a+1}\left(\frac{\ln x}{a+1}-\frac{1}{(a+1)^2}\right).$

б) $\int x \ln^2 x dx.$

Отг. $\frac{x^2}{2}\left(\ln^2 x - \ln x + \frac{1}{2}\right).$

в) $\int \ln x dx.$

Отг. $x \ln x - x.$

г) $\int \ln^2 x dx$

Отг. $x(\ln^2 x - 2\ln x + 1).$

д) $\int x e^x dx.$

Отг. $(x-1)e^x.$

е) $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x} dx.$

Отг. $\frac{\sin^2 x}{\cos x} + 2\cos x$

ж) $\int \sin \lambda x e^{\mu x} dx.$

Отг. $\frac{\mu \sin \lambda x - \lambda \cos \lambda x}{\lambda^2 + \mu^2} e^{\mu x}$

з) $\int \sin \lambda x \operatorname{ch} \mu x dx$

Отг. $\frac{\mu \sin \lambda x \operatorname{sh} \mu x - \lambda \cos \lambda x \operatorname{ch} \mu x}{\lambda^2 + \mu^2}.$

3. Като се използува правило 5, да се пресметнат следните неопределени интеграли

а) $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x}.$

Отг. $\ln \operatorname{th} x.$

б) $\int \frac{x^2}{1+x^3} dx$

Отг. $\frac{1}{3} \ln (1+x^3)$

в) $\int \frac{\ln x}{x}.$

Отг. $\frac{1}{2} \ln^2 x$

г) $\int \frac{dx}{x \ln x}.$

Отг. $\ln (\ln x).$

д) $\int x \sqrt{1+x^2} dx$

Отг. $\frac{1}{3} (1+x^2)^{\frac{3}{2}}$

е) $\int \frac{dx}{x(1+x^2)}.$

Отг. $\ln x - \frac{1}{2} \ln (1+x^2) = \ln \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$

4. Да се пресметнат следните определени интеграли

а) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x dx.$

Отг. $\frac{1}{2} \ln 2.$

б) $\int_0^{\pi} \cos 2x dx.$

Отг. 0.

в). $\int_1^2 \frac{dx}{e^x - 1}.$

5. Да се намерят лицата на множествата, определени от следните системи от неравенства:

а) $0 \leq x \leq 1,$
$0 \leq y \leq x^3.$

Отг. $\frac{1}{4}.$

б) $1 \leq x \leq 2$,
$0 \leq y \leq \frac{1}{x^2}$.

Отг. $\frac{1}{2}$.

в) $0 \leq x \leq \pi$,
$0 \leq y \leq \cos^2 x$.

Отг. $\frac{\pi}{2}$.

г) $0 \leq x \leq a$,
$0 \leq y \leq \operatorname{sh}^2 x$. $(a > 0)$.

Отг. $\frac{1}{2} \operatorname{sh} 2a - a$.

6 Да се намерят обемите на телата, получени от въртенето на следните криви около абсцисната ос:

а) $y = \cos x$ $\left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$.

Отг. $\frac{\pi^2}{2}$.

б) $y = |\cos x|$. $(0 \leq x \leq \pi)$.

Отг. π^2.

в) $y = \sin^2 x$. $(0 \leq x \leq 2\pi)$.

Отг. $\frac{5}{8}\pi^2$.

г) $y = \operatorname{tg} x$. $\left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}\right)$.

Отг. $\pi - \frac{\pi^2}{4}$.

д) $y = x^2$ $(-a \leq x \leq a)$.

Отг. $\frac{2}{3} a^3$.

7. Да се намери обема на тялото, определено от неравенствата:

$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq \frac{x}{a} \leq 1$ $(a, b, c > 0)$. Отг. $\frac{\pi}{2} abc$.

Упътване. Равнината, която минава през точката $(x, 0, 0)$ и е перпендикулярна на Ox, пресича разглежданото тяло по елипсата с уравнение $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{x}{a}$.

8. Да се намери обемът на тялото, определено от неравенствата

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq \frac{x^3}{a^3} \leq 1 \qquad (a, b, c > 0).$$

Отг. $\frac{\pi}{4} abc$.

9. Конична фуния с лице на горния отвор S и лице на долния отвор S_0 е напълнена с течност. Да се намери времето T, необходимо за изтичане на течността от фунията, ако височината ѝ е H.

Отг. $\frac{S}{5S_0}\sqrt{\frac{2H}{g}}$.

10. Да се решат следните линейни диференциални уравнения

а) $y' = \frac{2x}{1+x^2} y$.

Отг. $y = C(1+x^2)$.

б) $y' = -\frac{y}{x} + 3x$.

Отг. $y = \frac{C}{x} + x^2$.

в) $y' = y \sin x + \sin x \cos x$.

Отг. $y = Ce^{-\cos x} - \cos x + 1$.

11. Да се намерят всички криви, тангентата в произволна точка към които отсича от ординатната ос отсечка с дължина половината от сбора на координатите на допирната точка.

Отг. $y = C\sqrt{x} - x$.

Глава 7

НЯКОИ ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ ОТ ВТОРИ РЕД

Диференциално уравнение от втори ред се нарича всяко уравнение от вида

$$F(x, y, y', y'')=0,$$

където функцията F е дадена, а $y=y(x)$ е функция, която се търси. Функциите $y=e^x$ и $y=e^{-x}$ са решения на диференциалното уравнение от втори ред $y''-y=0$, което лесно може да се провери чрез двукратно диференциране и заместване. Същото уравнение се удовлетворява и от всяка функция от вида $y=C_1e^x+C_2e^{-x}$, където C_1 и C_2 са произволни константи. Появата на две произволни константи при търсенето на общото решение на едно диференциално уравнение от втори ред е нещо закономерно.

Диференциалните уравнения от втори ред са основен математически апарат на механиката. Това дава основната насока на тази глава. В § 1 и §2 са разгледани някои спомагателни въпроси. Съдържанието на тази глава до голяма степен се основава на тези два параграфа. Връзката на диференциалните уравнения от втори ред с механиката е обсъдена в §3 и §4. Движението на точка под действието на различни видове сили е изучено в §5, §6, §7 и §8. Физическото явление резонанс получава математическа форма в §9 и §10.

§ 1. ФУНКЦИИ, КОИТО СЕ ДИФЕРЕНЦИРАТ КАТО ТРИГОНОМЕТРИЧНИТЕ

Двойката функции $\sin x$ и $\cos x$ притежават свойствата

$$(1)\qquad \begin{aligned}(\sin x)'&=\cos x,\\ (\cos x)'&=-\sin x.\end{aligned}$$

Естествено е да се запитаме дали няма и други двойки функции с тези свойства. В тази точка ще намерим всички двойки функции $S(x)$ и $C(x)$, за които

$$(2)\qquad \left|\begin{aligned}S'(x)&=C(x)\\ C'(x)&=-S(x).\end{aligned}\right.$$

Нека $S(x)$ и $C(x)$ е двойка функции със свойствата (2). Може да се очаква, че функцията φ и ψ, дефинирани посредством равенствата

$$\varphi(x)=S(x)\cos x-C(x)\sin x$$
$$\psi(x)=S(x)\sin x+C(x)\cos x,$$

са константи, защото поне в специалния случай, когато $S(x)=\sin x$ и $C(x)=\cos x$, това е така. Да пресметнем производните φ' и ψ':

$$\varphi'(x)=S'(x)\cos x-S(x)\sin x-C'(x)\sin x-C(x)\cos x$$

или, като вземем пред вид (2), получаваме

$$\varphi'(x)=C(x)\cos x-S(x)\sin x+S(x)\sin x-C(x)\cos x=0$$

и следователно $\varphi(x)=C_1=\text{const}$. Аналогично

$$\psi'(x)=S'(x)\sin x+S(x)\cos x+C'(x)\cos x-C(x)\sin x=0,$$

следователно $\psi(x)=C_2=\text{const}$. Така получихме, че всяка двойка функции, които удовлетворяват (2), трябва да удовлетворяват системата

$$(3)\qquad \left|\begin{aligned}S(x)\cos x-C(x)\sin x&=C_1\\ S(x)\sin x+C(x)\cos x&=C_2,\end{aligned}\right.$$

където C_1 и C_2 са константи. Като решим системата (3) по отношение на $S(x)$ и $C(x)$, получаваме

$$(4)\qquad \left|\begin{aligned}S(x)&=C_1\cos x+C_2\sin x\\ C(x)&=C_2\cos x-C_1\sin x.\end{aligned}\right.$$

Обратно, всеки две функции $S(x)$ и $C(x)$, дефинирани чрез равенствата (4), удовлетворяват системата (2). Наистина от (4) намираме

$$\left|\begin{aligned}S'(x)&=-C_1\sin x+C_2\cos x\\ C'(x)&=-C_1\cos x-C_2\sin x\end{aligned}\right.$$

и следователно

$$\left|\begin{array}{l} S'(x)=C(x) \\ C'(x)=-S(x). \end{array}\right.$$

§ 2. ФУНКЦИИ, КОИТО СЕ ДИФЕРЕНЦИРАТ КАТО ХИПЕРБОЛИЧНИТЕ

Тук ще решим една задача, аналогична на тази от предната точка. Двойката функции $\operatorname{sh} x$ и $\operatorname{ch} x$ притежават свойствата

(1) $$\left|\begin{array}{l} (\operatorname{sh} x)'=\operatorname{ch} x \\ (\operatorname{ch} x)'=\operatorname{sh} x. \end{array}\right.$$

Задачата, която си поставяме, е да намерим всички двойки функции, за които

(2) $$\left|\begin{array}{l} S'(x)=C(x) \\ C'(x)=S(x). \end{array}\right.$$

Нека $S(x)$ и $C(x)$ е двойка функции със свойства (2). Ще покажем, че функциите φ и ψ, дефинирани посредством равенствата

$$\left|\begin{array}{l} \varphi(x)=S(x)\operatorname{ch} x-C(x)\operatorname{sh} x \\ \psi(x)=-S(x)\operatorname{sh} x+C(x)\operatorname{ch} x \end{array}\right.$$

са константи. За тази цел да пресметнем производните им:

$$\varphi'(x)=S'(x)\operatorname{ch} x+S(x)\operatorname{sh} x-C'(x)\operatorname{sh} x-C(x)\operatorname{ch} x$$

или, като вземем пред вид (2), получаваме

$$\varphi'(x)=C(x)\operatorname{ch} x+S(x)\operatorname{sh} x-S(x)\operatorname{sh} x-C(x)\operatorname{ch} x=0$$

и следователно $\varphi(x)=C_1=\text{const}$. Аналогично

$$\psi'(x)=-S'(x)\operatorname{sh} x-S(x)\operatorname{ch} x+C'(x)\operatorname{ch} x+C(x)\operatorname{sh} x=0,$$

следователно $\psi(x)=C_2=\text{const}$. Така получихме, че всяка двойка функции, които удовлетворяват (2), трябва да удовлетворяват системата

(3) $$\left|\begin{array}{l} S(x)\operatorname{ch} x-C(x)\operatorname{sh} x=C_1 \\ -S(x)\operatorname{sh} x+C(x)\operatorname{ch} x=C_2, \end{array}\right.$$

където C_1 и C_2 са произволни константи. Като решим системата (3) по отношение на $S(x)$ и $C(x)$, получаваме

(4) $$\left|\begin{array}{l} S(x)=C_1\operatorname{ch} x+C_2\operatorname{sh} x \\ C(x)=C_1\operatorname{sh} x+C_2\operatorname{ch} x. \end{array}\right.$$

Обратно, всеки две функции S и C, дефинирани чрез равенствата (4), удовлетворяват системата (2). Наистина от (4) намираме

$$\left|\begin{array}{l} S'(x)=C_1\operatorname{sh} x+C_2\operatorname{ch} x \\ C'(x)=C_1\operatorname{ch} x+C_2\operatorname{sh} x \end{array}\right.$$

и следователно

$$\left|\begin{array}{l} S'(x)=C(x) \\ C'(x)=S(x). \end{array}\right.$$

§ 3 УСКОРЕНИЕ

Нека $S=S(t)$ е законът на движение на някаква точка M. *Ускорение* на точката M в момента t наричаме втората производна на функцията S, пресметната за този момент. Очевидно ускорението е една функция на времето. Ако означим тази функция с $a(t)$, горното определение може да се запише по следния начин:

(1) $$a(t)=S''(t).$$

Съгласно определението на втора производна (вж. гл. 4, §2) функцията a е производна на функцията V, където $V(t)$ е скоростта на движещата се точка. Следователно ускорението има същото значение при изучаването на скоростта, което има скоростта за изучаването на пътя.

По-долу ще разгледаме няколко примера.

Пример 1. Ако точка M се движи равномерно, ускорението ѝ във всеки момент от времето е нула.

Наистина законът на движението в този случай е $S(t)=\alpha t+\beta$, където α и β са фиксирани константи. Скоростта във всеки момент е $V(t)=S'(t)=\alpha$ и следователно $a(t)=V'(t)=0$.

Пример 2. Да се намери най-общият закон на равноускорителните движения.

Движението на една точка наричаме *равноускорително*, ако ускорението ѝ във всеки момент е постоянно. Нека $a(t)=\alpha=\text{const}$. Последното равенство може да се запише и така:

(2) $$V'(t)=\alpha.$$

Като интегрираме (2), намираме

$$V(t)=\int \alpha dt=\alpha\int dt=\alpha t+C_1.$$

Тъй като $S'(t)=V(t)$, то

$$S(t)=\int V(t)\,dt=\int(\alpha t+C_1)\,dt=\frac{\alpha t^2}{2}+C_1 t+C_2.$$

И така най-общият закон на равноускорителните движения е квадратен тричлен по отношение на времето.

Пример 3. Да се намери ускорението във всеки момент, ако законът на движението е $S(t)=\sin\alpha t$, където α е константа.

Чрез двукратно диференциране намираме $S''(t)=-\alpha^2\sin\alpha t$, което може да се запише и така:

(3) $$a(t)+\alpha^2\sin\alpha t=0.$$

Ако сега заместим в (3) $a(t)$ с $S''(t)$ и $\sin\alpha t$ с $S(t)$, ще получим

(4) $$S''+\alpha^2 S=0,$$

т. е. законът на движението удовлетворява диференциалното уравнение (4). Понататък ще намерим всички функции, които удовлетворяват уравнението (4).

§ 4. ОСНОВЕН ЗАКОН НА ДИНАМИКАТА

Ускоренията играят важна роля в динамиката, понеже дават възможност по дадена сила, която действува върху движещата се точка, да се намери законът на движение на тази точка.

Движението на тяло, върху което не действуват сили, е равномерно. Обратното също е вярно. Ако едно тяло се движи равномерно, действуващите върху него сили взаимно се уравновесяват. Това е причината, поради която в природата не може да наблюдаваме равномерни движения. Наистина в природата действуват многобройни сили, като например силата на гравитацията, силата на триене и много други, които рядко се уравновесяват и поради това непрекъснато променят скоростта.

И така силите причиняват изменение на скоростта. При това изменението на скоростта е толкова по-голямо, колкото по-голяма е действуващата сила. С други думи, изменението на скоростта е пропорционално на действуващата сила. Но изменението на скоростта се измерва с ускорението, поради което е естествено да се очаква, че ускорението е пропорционално на силата. Тази хипотеза бе блестящо потвърдена от приложенията ѝ, направени от Нютон и неговите последователи, и се превърна в основен закон на динамиката. Този закон се записва в математична форма чрез равенството

(1) $$F=ma,$$

където F е силата, която действува на движещата се точка, m е масата и a — ускорението на точката.

Уравнението (1) може да се представи и във вида

(2) $$a=\frac{1}{m}F.$$

В много задачи силата F и масата m са известни и (2) дава възможност да се намери ускорението. Принципно вече знаем как по дадена скорост $V(t)$ да намерим изминатия път $S(t)$. Наистина скоростта е производната на пътя, т. е. $S'(t)=V(t)$, поради което $S(t)$ е една примитивна на $V(t)$, или което е все същото

(3) $$S(t)=\int V(t)\,dt.$$

По същия начин, когато е известно ускорението $a(t)$, скоростта $V(t)$ може да се пресметне по формулата

(4) $$V(t)=\int a(t)\,dt.$$

Формулите (4) и (3) дават възможност по дадено ускорение чрез двукратно интегриране да се намери пътят.

Пример 1. Да се намери законът на движението, когато върху движещата се точка действува постоянна сила F.

Понеже m и F са константи, съгласно (2) ускорението a също ще бъде константа. Съгласно (4) ще имаме $V(t)=\int a\,dt=a\,t+C$. При $t=0$ получаваме $V(0)=C$, откъдето $C=V_0$, където V_0 е началната скорост. Следователно $V(t)=a\,t+V_0$. Сега за $S(t)$ получаваме $S(t)=\int V(t)\,dt=\int(a\,t+V_0)\,dt=\frac{a}{2}t^2+V_0 t+S_0$, където S_0 е абсцисата на подвижната точка в момента $t=0$.

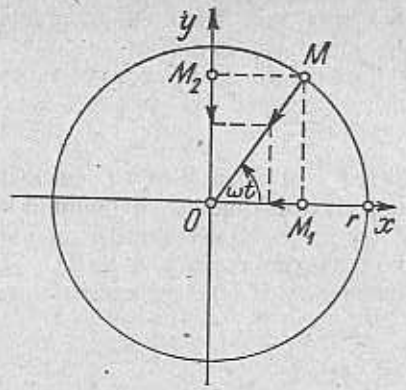
Пример 2. Точка с маса 1 се движи по закона $S(t)=t^3$. Да се намери силата, която действува върху точката.

Очевидно $V(t)=S'(t)=3t^2$, поради което $a(t)=V'(t)=6t$ и (1) дава $F=1.6\,t=6\,t$.

Пример 3. Точка с маса m се движи по окръжност с радиус r. Да се намери центробежната сила F, ако ъгловата скорост ω е постоянна.

Точката се движи под действието на сила R, насочена към центъра на окръжността (черт. 102). Нека в момента $t=0$ точката се е намирала в положението $(r, 0)$. Тъй като ъгловата скорост ω е постоянна, за интервала от време $(0, t)$ радиусът OM ще опише ъгъл ωt, поради което в момента t точката ще се намира в положението $(r\cos\omega t,\ r\sin\omega t)$. Следователно проекциите ѝ M_1 и M_2 се движат съответно по законите

(5) $$x=r\cos\omega t,\qquad y=r\sin\omega t.$$



Черт. 102

Очевидно

$$x'' = -r\,\omega^2 \cos \omega t, \qquad y'' = -r\,\omega^2 \sin \omega t \tag{6}$$

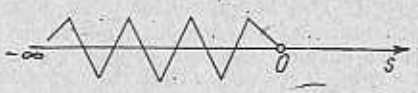
и следователно за проекциите R_1 и R_2 на R имаме $R_1 = -m\,r\,\omega^2 \cos \omega t$, $R_2 = -m\,r\,\omega^2 \sin \omega t$. Ето защо големината на R е $R = \sqrt{R_1^2 + R_2^2} = m\,r\,\omega^2$. Големината на центробежната сила F е еднаква с тази на R и следователно

$$F = m\,r\,\omega^2.$$

§ 5. ДВИЖЕНИЕ НА ТОЧКА ПОД ДЕЙСТВИЕ НА ЕЛАСТИЧНА СИЛА

Да разгледаме една пружина, единият край на която е закачен неподвижно. При деформация (опъване или свиване) пружината действува със сила, насочена противоположно на деформацията. При това силата става толкова по-голяма, колкото е по-голяма деформацията. Опитът показва, че при „малки" деформации силата е пропорционална на деформацията.

Тук ще си служим с една „идеална" пружина с безкрайно голяма дължина, единият край на която е закачен в минус безкрайност, а другият край при недеформирано състояние на пружината се намира в нулата (черт. 103). Ще предполагаме, че си-



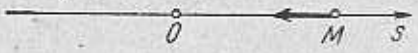
Черт. 103

лата е пропорционална и противоположно насочена на деформацията.

Да разгледаме едно топче M, закачено на свободния край на

тази пружина. При това ще считаме, че липсват други сили, които да смущават движението (съпротивление на средата, гравитация и др.). Ако пружината се опъне и след това се пусне, топчето M ще започне да извършва колебателно движение около началото O. Задачата, която си поставяме, е да намерим закона на движението $S(t)$ на топчето M.

Тъй като силата F е пропорционална на $OM = S$ (черт. 104), то $F = -kS$, където $k > 0$ е константа, която зависи от качествата



Черт. 104

на пружината, а знакът минус показва, че F е насочена постоянно към O. Ускорението на M е $a(t) = S''(t)$ и съгласно (4.2) имаме

$$S'' = -\frac{k}{m} S, \tag{1}$$

където m е масата на M. Ако положим $\frac{k}{m} = \alpha^2$, (1) добива вида

$$S'' + \alpha^2 S = 0. \tag{2}$$

По този начин задачата се сведе до намиране на решението $S(t)$ на уравнението (2). Последното е едно диференциално уравнение от втори ред, тъй като в него участвува втората производна на търсената функция S и не участвуват производни от по-висок ред.

За да решим уравнението (2), да положим

$$S'(t) = C(t). \tag{3}$$

Очевидно функцията $C(t)$ е неизвестна, тъй като $S(t)$ е неизвестна. Като диференцираме равенството (3), за производната на C получаваме $C'(t) = S''(t)$. Но съгласно (2) $S''(t) = -\alpha^2 S(t)$, т. е.

$$C'(t) = -\alpha^2 S(t). \tag{4}$$

По този начин задачата се сведе до намирането на всички двойки функции S и C, които удовлетворяват (3) и (4), т. е. системата

$$\begin{cases} S'(t) = C(t) \\ C'(t) = -\alpha^2 S(t). \end{cases} \tag{5}$$

Тази система много напомня системата (1.2), която умеем вече да решаваме. За да решим (5), ще си послужим с помощни функции,

аналогични на тези, които използувахме в §1. Ще дефинираме тези функции посредством равенствата

$$\varphi(t)=S(t)\cos\alpha t-\frac{1}{\alpha}S'(t)\sin\alpha t,$$

(6)

$$\psi(t)=S(t)\sin\alpha t+\frac{1}{\alpha}S'(t)\cos\alpha t.$$

Не е трудно да се покаже, че φ и ψ не зависят от времето t. За тази цел да пресметнем производните им. За производната на φ получаваме

$$\varphi'(t)=S'(t)\cos\alpha t-\alpha S(t)\sin\alpha t-\frac{1}{\alpha}S''(t)\sin\alpha t-S'(t)\cos\alpha t$$

$$=-\frac{\sin\alpha t}{\alpha}(S''(t)+\alpha^2 S(t))=0,$$

понеже $S''(t)+\alpha^2 S(t)=0$. Следователно $\varphi(t)=C_1=\text{const}$. Аналогично за производната на ψ получаваме

$$\psi'(t)=S'(t)\sin\alpha t+\alpha S(t)\cos\alpha t+\frac{1}{\alpha}S''(t)\cos\alpha t-S'(t)\sin\alpha t$$

$$=\frac{\cos\alpha t}{\alpha}(S''(t)+\alpha^2 S(t))=0.$$

Следователно $\psi(t)=C_2=\text{const}$. Ако сега заместим в (6) φ и ψ съответно с C_1 и C_2, ще получим

(7)
$$\begin{cases} S(t)\cos\alpha t-\frac{1}{\alpha}S'(t)\sin\alpha t=C_1 \\ S(t)\sin\alpha t+\frac{1}{\alpha}S'(t)\cos\alpha t=C_2, \end{cases}$$

което е една алгебрична система от две уравнения с неизвестни $S(t)$ и $S'(t)$. Като умножим първото от тези уравнения с $\cos\alpha t$, а второто със $\sin\alpha t$ и съберем, ще получим

(8) $$S(t)=C_1\cos\alpha t+C_2\sin\alpha t,$$

където C_1 и C_2 са произволни константи. Така се убедихме, че всяка функция, която удовлетворява уравнението (2), има вида (8). Проверката, че всяка функция от вида (8) удовлетворява (2), се състои в заместването на $S(t)$, дефинирана чрез (8) в уравнението (2), т. е. в установяването на тъждеството

$$(C_1\cos\alpha t+C_2\sin\alpha t)''+\alpha^2(C_1\cos\alpha t+C_2\sin\alpha t)=0,$$

което предоставяме на читателя.

Решението (8) представлява закона на движението на точка M в неговата най-обща форма. Това означава, че всяко конкретно движение от типа, разглеждан в този параграф, се подчинява на закон, който е частен случай от общия закон, даден с равенството (8). С други думи, законът на движението за всеки конкретен случай е една функция $S(t)$, която се получава от (8) за определени стойности на константите C_1 и C_2; тази функция се нарича *частно решение (частен интеграл)* на уравнението (2). Функцията (8), където C_1 и C_2 са произволни константи, се нарича *общо решение (общ интеграл)* на уравнението (2). Всяко частно решение на уравнението (2) се получава от общото решение (8) за конкретни стойности на константите C_1 и C_2. Така например $S(t)=\cos\alpha t-\frac{1}{2}\sin\alpha t$ е частно решение на (2), защото се получава от общото решение (8) за $C_1=1$ и $C_2=-\frac{1}{2}$. Функцията $S(t)=\cos\alpha t$ е друго частно решение на (2), защото се получава от (8) за $C_1=1$ и $C_2=0$ и т. н.

За намирането на едно частно решение на (2) са необходими още условия, наречени начални. Ако в даден момент t_0 знаем пътя $S_0=S(t_0)$ и скоростта $V_0=S'(t_0)$ на точката M, можем да намерим закона на движението ѝ. За да намерим решението на (2) при начални условия

(9)
$$\begin{cases} S(t_0)=S_0 \\ S'(t_0)=V_0, \end{cases}$$

където S_0 и V_0 са известни величини, трябва да пресметнем константите C_1 и C_2 в (8) съгласно условията (9). Ако в (8) заместим t с t_0 и вземем пред вид първото от условията (9), ще получим

(10) $$S_0=C_1\cos\alpha t_0+C_2\sin\alpha t_0.$$

Ако сега диференцираме (8), получаваме

$$S'(t)=-\alpha C_1\sin\alpha t+\alpha C_2\cos\alpha t.$$

Като заместим в последното равенство t с t_0 и вземем пред вид второто от условията (9), получаваме

(11) $$V_0=-\alpha C_1\sin\alpha t_0+\alpha C_2\cos\alpha t_0.$$

Уравненията (10) и (11) представляват една система от две уравнения с неизвестни C_1 и C_2. Като решим тази система, получаваме

$$C_1=S_0\cos\alpha t_0-\frac{V_0}{\alpha}\sin\alpha t_0$$

$$C_2=S_0\sin\alpha t_0+\frac{V_0}{\alpha}\cos\alpha t_0.$$

За да намерим частното решение, остава да заместим в (8) така пресметнатите стойности на C_1 и C_2.

Да разгледаме един по-конкретен пример. Нека в момента $t=0$ точката M се е намирала на разстояние от началото $S_0 = S(0)=1$, а скоростта ѝ в този момент е била $V_0=S'(0)=0$. Тогава законът на движението на точка M е едно частно решение на уравнението (2) при начални условия

$$\left| \begin{array}{l} S(0)=1 \\ S'(0)=0. \end{array} \right.$$

Като поставим $t=0$ във формулите, които определят $S(t)$ и $S'(t)$, и вземем пред вид началните условия, ще получим $C_1=1$, $C_2=0$, откъдето намираме частното решение

$$S(t)=\cos\alpha t.$$

Да се върнем отново към общия интеграл (8). Един по-компактен вид на тази формула може да се получи, ако положим

$$(12) \qquad \begin{array}{l} C_1=A\sin\beta \\ C_2=A\cos\beta, \end{array}$$

където $A>0$ и β са константи. Като поставим в (8) C_1 и C_2, определени чрез равенствата (12), ще получим

$$S(t)=A\sin\beta\cos\alpha t+A\cos\beta\sin\alpha t=A\sin(\alpha t+\beta).$$

По този начин общият интеграл на (2) се представя във вида

$$(13) \qquad S(t)=A\sin(\alpha t+\beta),$$

където $A>0$ и β са константи, определени чрез формулите

$$(14) \qquad \left| \begin{array}{l} A=\sqrt{C_1^2+C_2^2} \\ \operatorname{tg}\beta=\dfrac{C_1}{C_2}. \end{array} \right.$$

Съгласно общоприетата терминология A се нарича *амплитуда*, α — *честота* на колебателното движение, което извършва точката M. Величината $\alpha t+\beta$ се нарича *фаза*, а β — *начална фаза*. Очевидно A е най-голямото разстояние (по абсолютна стойност) от точката M до началото O, т. е. абсолютният максимум на функцията $S(t)$.

Общият интеграл на диференциалното уравнение (2) е една периодична функция на t с период

$$(15) \qquad T=\frac{2\pi}{\alpha}$$

(вж. Увод, 17, 18). Числото T се нарича *период* на колебателното (хармоничното) движение, което извършва подвижната точка M. Периодът T е интервал от време, за който M извършва едно пълно колебание.

§ 6. ДВИЖЕНИЕ НА ТОЧКА ПОД ДЕЙСТВИЕТО НА ОТБЛЪСКВАЩА СИЛА ПРОПОРЦИОНАЛНА НА ПЪТЯ

Да разгледаме движението на една точка M, подложена на действието на отблъскваща сила F, пропорционална на разстоянието $S=OM$, т. е. $F(t)=k\,.\,S(t)$, където $k>0$, е дадена константа. Тъй като $a(t)=S''(t)$, основното уравнение на динамиката $F=ma$ за този случай добива вида

$$(1) \qquad S''-\alpha^2 S=0,$$

където $\alpha=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ е константа. Уравнението (1) е диференциалното уравнение на разглежданото движение. Законът на движението на точката M е общият интеграл на уравнението (1).

Уравнението (1) ще решим аналогично на (5.2). За тази цел ще разгледаме функциите

$$(2) \qquad \begin{array}{l} \varphi(t)=S(t)\operatorname{ch}\alpha t-\dfrac{1}{\alpha}S'(t)\operatorname{sh}\alpha t, \\ \psi(t)=-S(t)\operatorname{sh}\alpha t+\dfrac{1}{\alpha}S'(t)\operatorname{ch}\alpha t. \end{array}$$

За производната на φ имаме

$$\varphi'(t)=S'(t)\operatorname{ch}\alpha t+\alpha S(t)\operatorname{sh}\alpha t-\frac{1}{\alpha}S''(t)\operatorname{sh}\alpha t-S'(t)\operatorname{ch}\alpha t$$

$$=-\frac{\operatorname{sh}\alpha t}{\alpha}(S''(t)-\alpha^2 S(t))=0,$$

понеже $S''(t)-\alpha^2 S(t)=0$. Аналогично

$$\psi'(t)=-S'(t)\operatorname{sh}\alpha t-\alpha S(t)\operatorname{ch}\alpha t+\frac{1}{\alpha}S''(t)\operatorname{ch}\alpha t+S'(t)\operatorname{sh}\alpha t$$

$$-\frac{\operatorname{ch}\alpha t}{\alpha}(S''(t)-\alpha^2 S(t))=0.$$

Следователно $\varphi(t)=C_1$ и $\psi(t)=C_2$, където C_1 и C_2 са произволни константи. Като заместим в (2) $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ съответно с C_1 и C_2, получаваме

$$(3) \qquad \left| \begin{array}{l} S(t)\operatorname{ch}\alpha t-\dfrac{1}{\alpha}S'(t)\operatorname{sh}\alpha t=C_1 \\ -S(t)\operatorname{sh}\alpha t+\dfrac{1}{\alpha}S'(t)\operatorname{ch}\alpha t=C_2, \end{array} \right.$$

което е една алгебрична система от две уравнения с неизвестни $S(t)$ и $S'(t)$. Като умножим първото от тези уравнения с $\operatorname{ch}\alpha t$, а второто с $\operatorname{sh}\alpha t$ и съберем, ще получим

$$S(t)=C_1\operatorname{ch}\alpha t+C_2\operatorname{sh}\alpha t, \tag{4}$$

понеже $\operatorname{ch}^2\alpha t-\operatorname{sh}^2\alpha t=1$. Функцията (4) е общият интеграл на диференциалното уравнение (1). Като използуваме дефиницията на хиперболичните функции, общото решение (4) може да се представи във вида

$$S(t)=C_1\frac{e^{\alpha t}+e^{-\alpha t}}{2}+C_2\frac{e^{\alpha t}-e^{-\alpha t}}{2}$$

или, което е все същото,

$$S(\ )=\frac{C_1+C_2}{2}e^{\alpha t}+\frac{C_1-C_2}{2}e^{-\alpha t}.$$

Ако сега в последното равенство положим

$$\frac{C_1+C_2}{2}=A,\qquad \frac{C_1-C_2}{2}=B,$$

получаваме

$$S(t)=A\,e^{\alpha t}+B\,e^{-\alpha t}, \tag{5}$$

където A и B са произволни константи. Равенството (5) представлява общият интеграл на уравнението (1), изразен с помощта на експоненти.

Пример. Да се намери законът на движението, ако при $t=0$ имаме

$$\left|\begin{array}{l} S(0)=1\\ S'(0)=2.\end{array}\right. \tag{6}$$

Като заместим $t=0$ в общото решение (4) и използуваме първото от началните условия (6), намираме

$$C_1=1. \tag{7}$$

От (4) за производната на S получаваме

$$S'(t)=\alpha C_1\operatorname{sh}\alpha t+\alpha C_2\operatorname{ch}\alpha t.$$

Като заместим сега t с 0 в последното равенство и вземем пред вид второто от началните условия (6), намираме

$$C_2=\frac{2}{\alpha}. \tag{8}$$

От (4), (7) и (8) намираме частното решение, съответствуващо на началните условия (6), а именно

$$S(t)=\operatorname{ch}\alpha t+\frac{2}{\alpha}\operatorname{sh}\alpha t.$$

§ 7. ОТЧИТАНЕ НА СЪПРОТИВЛЕНИЕТО НА СРЕДАТА

Задачата, която разглеждахме в §5, предполага отсъствието на смущаващи сили. Тук ще разгледаме движение на точка, извършващо се в някаква среда (напр. въздух), която оказва съпротивление. Това съпротивление е една сила R, която, събрана с еластичната сила F, дава силата $F_1=R+F$, която действува върху точката M. Съгласно основния закон на динамиката ще имаме

$$m\,S''=F_1. \tag{1}$$

Еластичната сила е $F=-k\,S$. Съпротивлението R е сила, която освен от средата зависи и от скоростта на M. При това тя се увеличава с увеличаването на скоростта. Тук ще разгледаме случая, когато средата оказва съпротивление, пропорционално на скоростта на M, т. е. $R=-l\,S'$, където l е неотрицателна константа. Знакът минус показва, че съпротивлението е насочено обратно на посоката на скоростта. При това предположение за резултантната сила F_1 намираме $F_1=F+R=-k\,S-l\,S'$ и уравнението (1) добива вида

$$m\,S''=-l\,S'-k\,S. \tag{2}$$

Ако положим сега $\frac{l}{m}=\lambda$, $\frac{k}{m}=\mu$, уравнението (2) може да се запише и така:

$$S''+\lambda S'+\mu S=0, \tag{3}$$

където λ и μ са известни константи. И така, законът на каквото и да е движение от разглеждания вид е една функция на t, която е решение на (3).

Преди да потърсим общия интеграл на диференциалното уравнение (3), да отбележим, че до това уравнение достигнахме, като следвахме чисто физични съображения, поради които $\lambda\geq 0$ и $\mu>0$; но методът, който по-долу прилагаме, за да решим (3), не се нуждае от тези предположения, затова ще разгледаме уравнението за произволни λ и μ.

В специалния случай, когато $\lambda=0$, уравнението (3) добива

вида $S''+\mu S=0$, което при $\mu>0$ е уравнението (5.2) и следователно съгласно (5.8) общият интеграл се дава с формулата

$$S(t)=C_1\cos t\sqrt{\mu}+C_2\sin t\sqrt{\mu}.$$

При $\lambda=0$ и $\mu<0$ разглежданото уравнение е уравнението (6.1) и следователно съгласно (6.5) общият интеграл се дава с формулата

$$S(t)=C_1 e^{t\sqrt{-\mu}}+C_2 e^{-t\sqrt{-\mu}}.$$

Естествено е да се опитаме да сведем (3) към уравнение от типа (6.1) или (5.2), на които познаваме общия интеграл. За тази цел ще представим търсената функция $S(t)$ във вида

(4) $$S(t)=e^{pt}f(t),$$

където p е константа, която имаме свободата да избираме произволно, а $f(t)$ ще потърсим така, щото $S(t)$, представена с равенството (4), да бъде решение на уравнението (3). От (4) за производната на S получаваме

(5) $$S'(t)=e^{pt}(pf(t)+f'(t)).$$

Като диференцираме равенството (5), ще получим

(6) $$S''(t)=e^{pt}(p^2f(t)+2pf'(t)+f''(t)).$$

Като заместим S, S' и S'' от (4), (5) и (6) в уравнението (3), ще получим

$$e^{pt}(f''(t)+(2p+\lambda)f'(t)+(p^2+\lambda p+\mu)f(t))=0.$$

Тъй като $e^{pt}>0$ за всяко t, то като съкратим на e^{pt}, ще получим

(7) $$f''+(2p+\lambda)f'+(p^2+\lambda p+\mu)f=0.$$

Като че ли не се осъществи никакъв прогрес, тъй като (7) е също от вида (3). Да припомним обаче, че имаме свободата да избираме p по произволен начин. Ако искаме (7) да добие вида (5.2) или (6.1) не ни остава нищо друго, освен да положим $2p+\lambda=0$, т. е.

(8) $$p=-\frac{\lambda}{2}.$$

Сега (7) добива вида

(9) $$f''+\left(\mu-\frac{\lambda^2}{4}\right)f=0,$$

тъй като съгласно (8) $p^2+\lambda p+\mu=\frac{\lambda^2}{4}+\lambda\left(-\frac{\lambda}{2}\right)+\mu=\mu-\frac{\lambda^2}{4}$.

Могат да се предоставят следните три случая:

а) $\mu-\frac{\lambda^2}{4}>0$;

б) $\mu-\frac{\lambda^2}{4}<0$;

в) $\mu-\frac{\lambda^2}{4}=0$.

Ще разгледаме всяка от тези три възможности поотделно.

Случай а. Полагаме $\mu-\frac{\lambda^2}{4}=\alpha^2$ и (9) добива вида $f''+\alpha^2f=0$. Общият интеграл на последното уравнение съгласно (5.8) се дава с формулата

(10) $$f(t)=C_1\cos\alpha t+C_2\sin\alpha t,$$

където C_1 и C_2 са произволни константи. Като заместим функцията f, определена чрез равенството (10) в (4), и вземем пред вид (8), получаваме

(11) $$S(t)=e^{-\frac{\lambda}{2}t}(C_1\cos\alpha t+C_2\sin\alpha t).$$

И така общият интеграл на уравнението (3) в този случай се дава с (11), където $\alpha=\sqrt{\mu-\frac{\lambda^2}{4}}$.

Случай б. Полагаме $\mu-\frac{\lambda^2}{4}=-\alpha^2$ и (9) добива вида $f''-\alpha^2f=0$. Общият интеграл на последното уравнение съгласно (6.5) се дава с формулата

(12) $$f(t)=C_1e^{\alpha t}+C_2e^{-\alpha t},$$

където C_1 и C_2 са произволни константи. Като заместим f, определена чрез (12) в (4), и вземем пред вид (8), получаваме

(13) $$S(t)=C_1e^{\left(\alpha-\frac{\lambda}{2}\right)t}+C_2e^{-\left(\alpha+\frac{\lambda}{2}\right)t}.$$

И така общият интеграл на уравнението (3) в този случай се дава с (13), където $\alpha=\sqrt{\frac{\lambda^2}{4}-\mu}$.

Случай в. В този случай уравнението (9) има вида

(14) $$f''=0,$$

на което общият интеграл се намира чрез двукратно интегриране, т. е.

(15) $$f(t)=C_1 t+C_2,$$

където C_1 и C_2 са произволни константи. Като заместим f, определена чрез (15) в (4), и вземем пред вид (8), получаваме

(16) $$S(t)=e^{-\frac{\lambda}{2}t}(C_1 t+C_2).$$

И така общият интеграл на уравнението (3) в този случай се дава с (16).

С това задачата за намиране на общия интеграл на уравнението (3) е решена.

Да се върнем сега към физическата постановка на въпроса, с която започнахме. В такъв случай $\lambda>0$ и $\mu>0$. Да предположим най-напред, че е налице случаят a; тогава законът на движение на точката M е функцията S, дефинирана чрез (11). Каквито и да са константите C_1 и C_2 функцията $C_1\cos\alpha t+C_2\sin\alpha t$ остава ограничена, понеже

$$|C_1\cos\alpha t+C_2\sin\alpha t|\leqq|C_1|\cos\alpha t|+|C_2|\sin\alpha t|\leqq|C_1|+|C_2|,$$

следователно

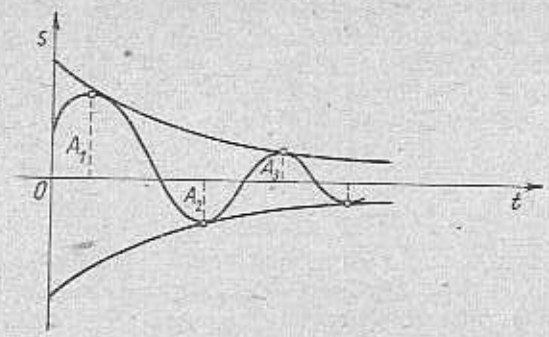
(17) $$S(t)\leqq(|C_1|+|C_2|)\,e^{-\frac{\lambda}{2}t}.$$

Тъй като $\lambda>0$, то $\lim\limits_{t\to\infty} e^{-\frac{\lambda}{2}t}=0$, което заедно със (17) дава

(18) $$\lim_{t\to\infty} S(t)=0.$$

Равенството (18) показва, че точката M, движеща се по закона (11), извършва затихващо хармонично трептене. Графически това движение може да се илюстрира като „затихваща синусоида", допираща се до кривите с уравнения $S(t)=Ce^{-\frac{\lambda}{2}t}$ и $S(t)=-Ce^{-\frac{\lambda}{2}t}$ (черт. 105), където $C=|C_1|+|C_2|$.

Функцията (11) е законът на движение на точката M, когато съпротивлението на средата е сравнително малко ($\lambda<2\sqrt{\mu}$). Когато това съпротивление стане достатъчно голямо ($\lambda>2\sqrt{\mu}$), законът на движение се дава с (13). Това движение, както трябва



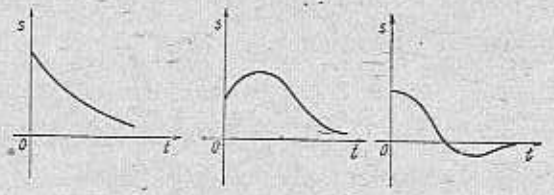
Черт. 105.

да се очаква, е също така затихващо, т. е. че формула (18) е валидна и в този случай. Наистина, като вземем пред вид, че

$$\alpha-\frac{\lambda}{2}=\sqrt{\frac{\lambda^2}{4}-\mu}-\frac{\lambda}{2}<0,$$

$$-\left(\alpha+\frac{\lambda}{2}\right)=-\left(\sqrt{\frac{\lambda^2}{4}-\mu}+\frac{\lambda}{2}\right)>0,$$

всяка от експонентите, фигуриращи в (13), клони към 0, когато t расте неограничено, следователно $S(t)$ също клони към 0. Примерни графики на едно такова движение са изобразени на черт. 106. Не е трудно да се покаже, че ако C_1 и C_2 имат еднакви знаци, графиката на функцията $S(t)$ няма екстремум, а ако тези



Черт. 106

знаци са различни, тя притежава един екстремум (докажете това твърдение сами, като покажете, че уравнението $S'(t)=0$ в първия случай няма реални корени, а във втория — само един реален корен).

Ако сравним движенията в случаите a. и б. виждаме, че когато съпротивлението на средата е „малко", подвижната точка M

Случай c е граничен на разгледаните. Покажете сами, че графиката на функцията (16) притежава само един екстремум ($t > 0$).

§ 8. ДЕЙСТВИЕ НА ВЪНШНИ СИЛИ

В §7 разгледахме движение под действието на две сили $F(t) = -k\,S(t)$ и $R(t) = -l\,S'(t)$. Първата е еластична сила и е определена от положението на движещата се точка. Втората сила представлява съпротивлението на средата и е определена от скоростта. Силите F и R са непосредствено свързани със самото движение на точката.

Тук ще разгледаме движение, което е подложено освен на действието на силите $F(t)$ и $R(t)$ и на това на една трета сила $\Phi(t)$, която е дадена функция на времето, т. е. не зависи от закона, по който точката се движи. Тогава резултантната сила $F_1(t)$, която действува върху движещата се точка M, е

$$F_1(t) = -k\,S(t) - l\,S'(t) + \Phi(t),$$

където S е търсеният закон на движение, по който се движи M под действието на F_1. Съгласно основния закон на динамиката имаме $m\,S'' = F_1$ или

(1) $$m\,S'' = -k\,S - l\,S' + \Phi,$$

където m е масата на M. Да положим $\frac{l}{m} = \lambda$, $\frac{k}{m} = \mu$. Тогава уравнението (1) може да се запише и така:

(2) $$S'' + \lambda\,S' + \mu\,S = \varphi(t),$$

където сме положили $\varphi(t) = \frac{1}{m}\,\Phi(t)$, и следователно φ е известна функция на времето. Да намерим закона на движението на точката M, означава да намерим общия интеграл на диференциалното уравнение (2). Тук ще дадем една обща схема, по която може да се реши така поставената задача.

Да отбележим най-напред, че когато силата Φ липсва ($\Phi = 0$), имаме $\varphi(t) = \frac{1}{m}\,\Phi(t) = 0$ и уравнението (2) се превръща в

(3) $$S'' + \lambda\,S' + \mu\,S = 0.$$

Този случай е разгледан по-горе. Общото решение S_0 (общият интеграл на (3)) се дава с една от формулите (7.11), (7.13) и (7.16). Ще покажем, че ако познаваме едно какво да е решение (частен интеграл) на уравнението (2), общият му интеграл се представя като сума от това частно решение и общия интеграл на (3).

Нека S_1 е известно частно решение на (2) и S е произволно решение на (2), т. е.

$$S''(t) + \lambda\,S'(t) + \mu\,S(t) = \varphi(t),$$
$$S_1''(t) + \lambda\,S_1'(t) + \mu\,S_1(t) = \varphi(t).$$

Като извадим последните две уравнения и вземем пред вид правилото за диференциране на разлика, получаваме

$$(S - S_1)'' + \lambda\,(S - S_1)' + \mu\,(S - S_1) = 0,$$

което показва, че функцията $S(t) - S_1(t)$ е едно решение на уравнението (3) и следователно $S - S_1 = S_0$, т. е.

(4) $$S(t) = S_0(t) + S_1(t),$$

където S е едно произволно решение на (2), S_1 е познато частно решение на (2), а S_0 има вида (7.11), (7.13) или (7.16). Обратно, всяка функция S, определена чрез равенството (4), е решение на уравнението (2). Наистина

$$S'' + \lambda\,S' + \mu\,S = (S_0 + S_1)'' + \lambda\,(S_0 + S_1)' + \mu\,(S_0 + S_1)$$
$$= \underbrace{S_0'' + \lambda\,S_0' + \mu\,S_0}_{0} + \underbrace{S_1'' + \lambda\,S_1' + \mu\,S_1}_{\varphi} = \varphi,$$

с което последното твърдение е доказано. Следователно общото решение на (2) се дава с равенството (4), където $S_0(t)$ е общият интеграл на (3), а $S_1(t)$ е едно каквото и да е познато решение на (2).

Пример 1. Да се реши уравнението

(5) $$S'' + S = 1$$

при начални условия

(6) $$\left| \begin{array}{l} S\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \\ S'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1. \end{array} \right.$$

Ще използуваме равенството (4), като за целта потърсим най-напред едно частно решение на (5). Лесно се вижда, че $S_1 = 1$ е решение на (5), тъй като

$S_1'' + S_1 = 0 + 1 = 1$. Функцията S_0 съгласно показаната схема е решение на уравнението $S_0'' + S_0 = 0$ и следователно има вида (5.8) при $\alpha = 1$, т. е.

$$S_0(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t.$$

Като поставим така намерените функции S_1 и S_0 в (4), получаваме общия интеграл на уравнението (5)

(7) $$S(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t + 1,$$

където C_1 и C_2 са произволни константи. За да намерим частното решение, ще използуваме началните условия (6). За тази цел ще намерим производната на S от (7). Имаме

(8) $$S'(t) = -C_1 \sin t + C_2 \cos t.$$

Като поставим сега $t = \frac{\pi}{2}$ в (7) и (8) и вземем пред вид условията (6), получаваме системата

$$\left| \begin{array}{l} C_2 + 1 = 1 \\ -C_1 = -1, \end{array} \right.$$

откъдето $C_1 = 1$ и $C_2 = 0$. Като поставим така пресметнатите стойности на C_1 и C_2 в общия интеграл (7), получаваме търсеното частно решение

$$S(t) = \cos t + 1.$$

Пример 2. Да се реши уравнението

(9) $$S'' + 2S' + 5S = 5t^2 + 4t + 2$$

при начални условия

(10) $$\left| \begin{array}{l} S(0) = 0 \\ S'(0) = 2. \end{array} \right.$$

Тъй като $\lambda = 2$ и $\mu = 5$, то $\mu - \frac{\lambda^2}{4} = 5 - \frac{2^2}{4} = 4 > 0$, следователно общият интеграл на уравнението

(11) $$S'' + 2S' + 5S = 0$$

се дава с (7.11) при $\lambda = 2$, $\alpha = \sqrt{\mu - \frac{\lambda^2}{4}} = \sqrt{4} = 2$, т. е.

$$S_0(t) = e^{-t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t).$$

Тъй като дясната страна на (9) е полином на t от втора степен, естествено е да потърсим едно частно решение на това диференциално уравнение, което също да бъде полином от втора степен на t, т. е.

(12) $$S_1(t) = at^2 + bt + c,$$

където a, b и c са константи, които ще определим от условието S_1 да бъде решение на (9). За това е необходимо да бъде изпълнено равенството

$$(at^2 + bt + c)'' + 2(at^2 + bt + c)' + 5(at^2 + bt + c) = 5t^2 + 4t + 2$$

за всяко t. Като пресметнем производните и подредим лявата страна по степените на t, получаваме тъждеството

$$5at^2 + (4a + 5b)t + 2a + 2b + 5c = 5t^2 + 4t + 2.$$

Като приравним коефициентите пред еднаквите степени на t (вж. гл. 1, § 4), за a, b и c получаваме системата

$$\left| \begin{array}{ll} 5a & = 5 \\ 4a + 5b & = 4 \\ 2a + 2b + 5c & = 2. \end{array} \right.$$

Решението на тази система е $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$, за което частният интеграл (12) добива вида

(13) $$S_1(t) = t^2.$$

Като поставим така намерените функции S_0 и S_1 в (4), намираме общия интеграл на уравнението (9)

$$S(t) = e^{-t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t) + t^2.$$

Покажете, че при началните условия (10) решението на (9) е функцията

$$S(t) = e^{-t} \sin 2t + t^2.$$

§ 9. ЯВЛЕНИЕТО РЕЗОНАНС

Тук ще решим уравнението (8.2) в специалния случай, когато $\lambda = 0$, $\mu > 0$ и $\varphi(t) = \sin at$, където $a \neq 0$ е константа. Тогава то добива вида

(1) $$S'' + \alpha^2 S = \sin at,$$

където за удобство при пресмятанията е положено $\mu = \alpha^2$. Ще приложим (8.4). Тук S_0 е общият интеграл на уравнението $S'' + \alpha^2 S = 0$ и следователно е функцията (5.8), т. е.

(2) $$S_0(t) = C_1 \cos \alpha t + C_2 \sin \alpha t,$$

където C_1 и C_2 са произволни константи. За да намерим общото решение на (1), е достатъчно да намерим едно частно решение S_1 на това уравнение, което да прибавим към S_0. Ще потърсим решението S_1 във вида

(3) $$S_1(t) = M \sin at,$$

където a е константа, която трябва да определим от условието функцията S_1, определена чрез (3) да удовлетворява (1), т. е. да бъде изпълнено тъждеството $(M \sin at)'' + \alpha^2 (M \sin at) = \sin at$ или, което е все същото,

$$M(\alpha^2 - a^2) \sin at = \sin at.$$

Последното равенство е изпълнено за всяко t, ако коефициентите

пред синусите от двете страни са равни, т. е.

$$M=\frac{1}{\alpha^2-a^2}\quad(\alpha\neq\pm a). \tag{4}$$

Като заместим константата M, определена чрез (4) в (3), намираме един частен интеграл на уравнението (1), а именно

$$S_1(t)=\frac{1}{\alpha^2-a^2}\sin a\,t. \tag{5}$$

Като заместим S_0 и S_1, определени съответно чрез (2) и (5), в (8.4), получаваме общия интеграл на (1)

$$S(t)=C_1\cos\alpha\,t+C_2\sin\alpha\,t+\frac{1}{\alpha^2-a^2}\sin a\,t, \tag{6}$$

където C_1 и C_2 са произволни константи и $\alpha\neq\pm a$.

От (4) се вижда, че при $\alpha^2=a^2$ не съществува такава константа M, за която (3) да бъде частен интеграл на (1), тъй като в противен случай бихме получили тъждеството $\sin a\,t=0$, което не е вярно за всяко t поради условието $a\neq0$. Този случай е забележителен. Наистина честотата α на „несмутеното" движение, картината на което се описва от уравнението $S''+\alpha^2S=0$, съвпада с честотата a на външната сила, която го „смущава", поради което е естествено да очакваме, че амплитудата ще расте неограничено с течение на времето. Това явление се нарича резонанс.

При наличие на резонанс, т. е. $\alpha^2=a^2$, ще потърсим едно частно решение на уравнението (1) във вида

$$S_1(t)=M\,t\cos a\,t, \tag{7}$$

където M е константа, която ще определим от условието функцията $M\,t\cos a\,t$ да бъде решение на (1). Като заместим S в (1) с S_1, определена чрез (7), и опростим, получаваме

$$-2\,a\,M\sin a\,t=\sin a\,t.$$

Последното равенство е изпълнено за всяко t при $M=-\frac{1}{2a}$ и следователно частният интеграл добива вида

$$S_1(t)=-\frac{1}{2a}\,t\cos a\,t. \tag{8}$$

Като заместим S_0 и S_1, определени съответно чрез (2) и (8) в (8.4), получаваме общия интеграл на (1)

$$S(t)=C_1\cos a\,t+C_2\sin a\,t-\frac{1}{2a}\,t\cos a\,t. \tag{9}$$

За да разберем по-добре явлението резонанс, по-долу ще разгледаме конкретни примери.

Пример 1. Да се намери общото решение на уравнението

$$S''+S=\sin t. \tag{10}$$

Уравнението (10) се получава от (1) при $\alpha=1$ и $a=1$. Понеже $\alpha=a$ имаме резонанс, следователно общото решение на (10) ще се получи от (9) при $a=1$, т. е.

$$S(t)=C_1\cos t+C_2\sin t-\frac{1}{2}\,t\cos t. \tag{11}$$

Функцията $\frac{1}{2}t\cos t$ може да взема произволно големи стойности за достатъчно големи t, а $C_1\cos t+C_2\sin t$ остава ограничена. Това показва, че S, определена чрез (11), не е ограничена, когато t расте неограничено. Една подвижна точка M, която извършва движение по закон от вида (11), ще се колебае около началото O, като амплитудата й ще расте неограничено с течение на времето.

Пример 2. Да се намери законът на движението S, ако движението се описва с диференциалното уравнение

$$S''+3S=\sin\sqrt{3}\,t, \tag{12}$$

а пътят и скоростта в момента $t=0$ са съответно

$$\left|\begin{aligned} S(0)&=-\frac{1}{2\sqrt{3}}\\ S'(0)&=-\frac{1}{2\sqrt{3}}\end{aligned}\right. \tag{13}$$

Уравнението (12) се получава от (1) при $\alpha=a=\sqrt{3}$, следователно има резонанс. Тогава общото решение на (12) ще се получи от (9) при $a=\sqrt{3}$, т. е.

$$S(t)=C_1\cos\sqrt{3}\,t+C_2\sin\sqrt{3}\,t-\frac{1}{2\sqrt{3}}\,t\cos\sqrt{3}\,t. \tag{14}$$

Лесно се вижда, че началните условия (13) дават $C_1=-\frac{1}{2\sqrt{3}}$, $C_2=0$, поради което законът на движението е

$$S(t)=-\frac{1}{2\sqrt{3}}(t+1)\cos\sqrt{3}\,t. \tag{15}$$

Да определим моментите, в които точката M ще съвпада с O. Очевидно всеки такъв момент е корен на уравнението $S(t)=0$ или, като вземем пред вид (15), на уравнението $\cos\sqrt{3}\,t=0$, на което решенията са $t_k=(2k+1)\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$, $k=0,1,2,\ldots$ Това показва, че M ще съвпада с O през равни интервали от време с дължина $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$. Поради наличието на множителя $(t+1)$ амплитудата ще расте неограничено с течение на времето.

Пример 3. Да се реши диференциалното уравнение

(16) $$S''+4S=\sin 4t$$

при начални условия

(17) $$\begin{cases} S(0)=0 \\ S'(0)=-\frac{1}{6}. \end{cases}$$

Уравнението (16) се получава от уравнението (1) при $\alpha=2$ и $a=4$. Понеже $\alpha\neq a$, няма резонанс. Тогава общият интеграл на (16) се получава от (6) при $\alpha=2$ и $a=4$, т. е.

(18) $$S(t)=C_1\cos 2t+C_2\sin 2t-\frac{1}{12}\sin 4t.$$

Началните условия (17) дават $C_1=0$ и $C_2=\frac{1}{12}$, следователно частният интеграл е

(19) $$S(t)=\frac{1}{12}(\sin 2t-\sin 4t).$$

За разлика от резонансния случай тук отсъстват множители пред тригонометричните функции, които да зависят от t, поради което решението (18) е една ограничена функция. Освен това тази функция е и периодична, тъй като честотата на несмутеното движение ($\alpha=2$) е съизмерима с честотата на външната сила ($a=4$). Очевидно този период е $T=\pi$.

Уравнението

(20) $$S''+\alpha^2S=\beta\sin at+\gamma\cos at,$$

където α, β, γ, a са известни константи, е обобщение на (1). При отсъствие на резонанс ($\alpha^2\neq a^2$) съществува частно решение на (20) от вида

$$S_1(t)=M\sin at+N\cos at.$$

Покажете сами, че общото решение на (20) е

(21) $$S(t)=C_1\cos\alpha t+C_2\sin\alpha t+\frac{\beta\sin at+\gamma\cos at}{\alpha^2-a^2}.$$

В резонансния случай ($\alpha^2-a^2=0$) едно частно решение може да бъде намерено, ако се потърси във вида

$$S_1(t)=t(M\sin at+N\cos at).$$

Определете сами константите M и N и запишете общия интеграл.

§ 10. ДРУГ СЛУЧАЙ НА РЕЗОНАНС

Тук ще потърсим решението на уравнението (8.2) в случая, когато $\varphi(t)=e^{at}(at+b)$, където α, a и b са дадени константи; това уравнение има вида

(1) $$S''+\lambda S'+\mu S=e^{at}(at+b).$$

Функцията S_0, която е решение на уравнението $S''+\lambda S'+\mu S=0$, се дава с някоя от формулите (7.11), (7.13) или (7.16). Съгласно (8.4), за да намерим общото решение на (1), трябва да знаем едно частно решение на (1). Ще потърсим едно частно решение S_1 на (1) във вид, сходен с този на φ, а именно

(2) $$S_1(t)=e^{at}(Mt+N),$$

където M и N са константи, които се определят от условието S_1 да бъде решение на (1). Като пресметнем S_1', S_1'' и заместим съответно в (1), след съкращение на e^{at} получаваме

(3) $$M(\alpha^2+\lambda\alpha+\mu)t+N(\alpha^2+\lambda\alpha+\mu)+M(\lambda+2\alpha)=at+b.$$

За да бъде изпълнено (3) за всяко t, трябва коефициентите пред еднаквите степени на t да бъдат равни, т. е.

(4) $$\begin{cases} M(\alpha^2+\lambda\alpha+\mu)=a \\ N(\alpha^2+\lambda\alpha+\mu)+M(\lambda+2\alpha)=b. \end{cases}$$

Решението на тази система при $\alpha^2+\lambda\alpha+\mu\neq 0$ е

(5) $$M=\frac{a}{\alpha^2+\lambda\alpha+\mu},\quad N=\frac{b\alpha^2+b\lambda\alpha+b\mu-a\lambda-2ab}{(\alpha^2+\lambda\alpha+\mu)^2}.$$

Като заместим M и N, определени чрез формулите (5) в (2), ще получим

(6) $$S_1(t)=\frac{e^{at}}{\alpha^2+\lambda\alpha+\mu}\left(at+\frac{b\alpha^2+b\lambda\alpha+b\mu-a\lambda-2ab}{\alpha^2+\lambda\alpha+\mu}\right).$$

Тогава общото решение се намира съгласно (8.2), където S_1 и S_0 се дават съответно с (6) и някоя от формулите (7.11), (7.13), (7.16).

Разгледаният метод е неприложим, ако $\alpha^2+\lambda\alpha+\mu=0$, понеже системата (4) няма решение. От това следва, че не съществува частен интеграл на (1) от вида (2). Този случай е резонансен и за да намерим S_1, ще постъпим както в §9, т. е. ще умножим

дясната страна на (2) с t. Търсеното решение S_1 добива вида

(7) $$S_1(t)=e^{\alpha t}(Mt^2+Nt).$$

Като поставим S_1 от (7) в (1), след леки пресмятания получаваме

$$M(\alpha^2+\lambda\alpha+\mu)t^2+2M(\lambda+2\alpha)t+2M+\lambda\alpha N+\mu N=at+b.$$

Тъй като разглеждаме случая $\alpha^2+\lambda\alpha+\mu=0$, горното равенство приема вида

$$2M(\lambda+2\alpha)t+2M+\lambda\alpha N+\mu N=at+b.$$

За да бъде изпълнено последното, за всяко t е необходимо

(8) $$\begin{cases} 2M(\lambda+2\alpha) = a \\ 2M+\lambda\alpha N+\mu N=b. \end{cases}$$

Решението на тази система при $\lambda+2\alpha\neq 0$ е

(9) $$M=\frac{a}{2(\lambda+2\alpha)},\quad N=\frac{b\lambda+2b\alpha-a}{(\lambda+2\alpha)^2}.$$

Така S_1 е вече известна функция и следователно общият интеграл на уравнението (1), $S=S_0+S_1$ е намерен.

Формулите (9) показват, че се налага да разгледаме и трети случай, а именно, когато $\lambda+2\alpha=0$ и $\alpha^2+\lambda\alpha+\mu=0$. Потърсете сами частен интеграл на (1) S_1, като го представите във вида

(10) $$S_1(t)=e^{-\frac{\lambda}{2}t}(Mt^3+Nt^2).$$

Да резюмираме трите случая.

1. $\alpha^2+\lambda\alpha+\mu\neq 0$. Тогава S_1 се дава с (6) и търсеното решение S на (1) е $S=S_0+S_1$, където S_0 се дава с (7.11), (7.13) или (7.16).

2. $\alpha^2+\lambda\alpha+\mu=0$ и $\lambda+2\alpha\neq 0$. В този случай S_1 се дава с (7), където M и N са определени с формулите (9). Тъй като реалното число α е решение на квадратното уравнение $x^2+\lambda x+\mu=0$, трябва дискриминантата $\lambda^2-4\mu$ да бъде неотрицателна. Ако $\lambda^2-4\mu=0$, ще имаме $\mu=\frac{\lambda^2}{4}$, т. е.

$$0=\alpha^2+\lambda\alpha+\mu=\alpha^2+\lambda\alpha+\frac{\lambda^2}{4}=\frac{1}{4}(4\alpha^2+4\alpha\lambda+\lambda^2)=\frac{1}{4}(2\alpha+\lambda)^2,$$

което противоречи на условието $\alpha+2\lambda\neq 0$. Тогава $\lambda^2-4\mu>0$, следователно S_0 се дава със (7.13). Общото решение на (1) в този случай има вида

$$S(t)=C_1e^{\left(\alpha-\frac{\lambda}{2}\right)t}+C_2e^{-\left(\alpha+\frac{\lambda}{2}\right)t}+\frac{e^{\alpha t}}{\lambda+2\alpha}\left(\frac{a}{2}t^2+\frac{(b\lambda+2b\lambda-a)t}{\lambda+2\alpha}\right).$$

3. $\alpha^2+\lambda\alpha+\mu=0$ и $\lambda+2\alpha=0$. Тогава $\alpha=-\frac{\lambda}{2}$ и

$$0=\alpha^2+\lambda\alpha+\mu=\frac{\lambda^2}{4}-\frac{\lambda^2}{2}+\mu=\mu-\frac{\lambda^2}{4}.$$

Последният резултат показва, че S_0 се дава с формулата (7.16). Общото решение на (1) в този случай е

$$S(t)=e^{-\frac{\lambda}{2}t}\left(\frac{a}{6}t^3+\frac{b}{2}t^2+C_1t+C_2\right).$$

Задачи към глава 7

1. Да се реши уравнението $y''-y=0$. Отг. $y=C_1e^x+C_2e^{-x}$.
2. Да се реши уравнението $y''-5y'+6y=0$. Отг. $y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$.
3. Да се реши уравнението $y''+3y'+2y=0$. Отг. $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}$.
4. Да се реши уравнението $y''+2y'+y=0$. Отг. $y=e^{-x}(C_1+C_2x)$.
5. Да се реши уравнението $y''-4y'+4y=0$. Отг. $y=e^{-2x}(C_1+C_2x)$.
6. Да се реши уравнението $y''+a^2y=e^x$. Отг. $y=C_1\cos ax+C_2\sin ax+\frac{e^x}{a^2+1}$.
7. Да се реши уравнението $y''-7y'+6y=\sin x$. Отг. $y=C_1e^x+C_2e^{6x}+\frac{5x+7\cos x}{74}$.
8. Да се реши уравнението $y''-a^2y=e^{bx}$. Отг. $\begin{cases} y=C_1e^{ax}+C_2e^{-ax}+\frac{e^{bx}}{b^2-a^2}\ (b\neq a) \\ y=C_1e^{ax}+C_2e^{-ax}+\frac{xe^{ax}}{2a}\ (b=a). \end{cases}$
9. Да се реши уравнението $y''+a^2y=\sin bx$. Отг. $\begin{cases} y=C_1\cos ax+C_2\sin ax+\frac{\sin bx}{a^2-b^2}\ (a\neq b) \\ y=C_1\cos ax+C_2\sin ax-\frac{x\cos ax}{2a}\ (a=b). \end{cases}$

Глава 8

ДВИЖЕНИЕ НА ПЛАНЕТИТЕ

В началото на 17 в. немският астроном Йохан Кеплер откри основните закони за движение на планетите. Главната задача на тази глава е извеждането на законите на Кеплер от нютоновия закон за всемирното привличане.

Както е известно, планетите се движат около Слънцето по равнинни криви, наречени орбити. Орбитата на една планета се изучава най-лесно, като вместо декартовите се използват така наречените полярни координати. Необходимите сведения за тях са дадени в §1, §2 и §3.

Орбитите на телата от Слънчевата система са криви, които се получават от пресичането на прав кръгов конус с равнина. Така получените криви се наричат конични сечения. Коничните сечения са изучени в §4, §5, §6, §7 и §8.

В §9 е формулиран законът на Нютон за гравитацията, а в §10, §11, §12 и §13 са посветени на доказателството на законите на Кеплер.

§ 1 ПОЛЯРЕН РАДИУС И ПОЛЯРЕН ЪГЪЛ

Появата на координатния метод може да се схваща като поява на съвременната математика, тъй като той дава възможност да се прилагат аналитични методи за решаване на многобройни геометрични и физични задачи. Така например изучаването на кривите вече беше сведено към изучаване на функции. Но декартовите координати, които използвахме досега, не са винаги най-удобни за тази цел, тъй като в някои важни случаи се получават необозрими уравнения.

Нека M е точка от равнината, в която е зададена една декартова координатна система Oxy. Под *полярен радиус* на точката M разбираме разстоянието OM. Той е едно неотрицателно число и е равен на нула тогава и само тогава, когато M съвпада с началото O.

Нека $M \neq O$. Под *полярен ъгъл* на M ще разбираме всеки от ъглите, които OM сключва с оста Ox. По този начин точката M има безбройно много полярни ъгли. Тези от тях, които са измерени в положителна посока, считаме положителни, а онези, които са измерени в отрицателна посока — отрицателни. Очевидно разликата на всеки два полярни ъгъла на точката M е целочислено кратно на 2π, т. е. за всеки два полярни ъгъла θ_1 и θ_2 на M имаме

$$\theta_2 - \theta_1 = 2k\pi, \tag{1}$$

където k е произволно цяло число. Например, ако M лежи върху положителния лъч на Ox, полярните й ъгли са числата от вида $0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$; ако тя лежи на противоположния лъч, полярните ъгли са числата $\pi, \pi \pm 2\pi, \pi \pm 4\pi, \ldots$; точките с полярни ъгли $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ са разположени по ъглополовящата на първи квадрант, а онези с полярни ъгли $-\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ — по ъглополовящата на трети квадрант.

Понятието полярен ъгъл се въвежда и когато $M = O$. Тогава под полярен ъгъл на M се разбира всеки ъгъл.

Накрая да отбележим, че полярният радиус на произволна точка M се означава с ρ, а произволен неин полярен ъгъл с θ.

§ 2. ПОЛЯРНИ КООРДИНАТИ

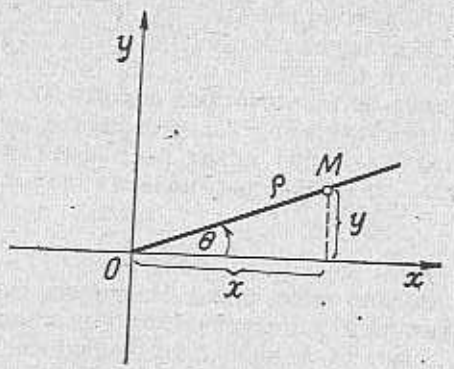
От черт. 107 се вижда, че ако ρ е полярният радиус, а θ кой да е полярен ъгъл на една точка M с декартови координати (x, y), то

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \theta, \\ y &= \rho \sin \theta. \end{aligned} \tag{1}$$

Така написаната формула дава повод за следната дефиниция.

Полярни координати на една точка M с декартови координати (x, y) наричаме всяка двойка числа (ρ, θ), за които са изпълнени формулите (1).

От тази дефиниция най-напред следва, че полярният радиус ρ и кой да е полярен ъгъл θ на точка M образуват една двойка (ρ, θ) полярни координати на M. Но с това не се изчерпват всички възможни двойки полярни координати на M. Ако (ρ, θ) са полярни координати на M, то $(-\rho, \theta + \pi)$ са също полярни коорди-



Черт. 107

нати на тази точка. Наистина това, че ρ и θ са полярни координати на M означава, че са изпълнени равенствата (1). От друга страна,

$$-\rho\cos(\theta+\pi)=-\rho(-\cos\theta)=\rho\cos\theta=x$$

и

$$-\rho\sin(\theta+\pi)=-\rho(-\sin\theta)=\rho\sin\theta=y,$$

откъдето виждаме, че числата $-\rho$ и $\theta+\pi$ удовлетворяват съотношенията (1) и следователно са една двойка полярни координати на точка M.

И така полярни координати на точка M са всеки две числа ρ и θ, където ρ е полярният радиус на M, а θ е кой да е полярен ъгъл на M, както и всеки две числа ρ и θ, където $-\rho$ е полярен радиус на M, а $\theta+\pi$ е полярен ъгъл на M. Читателят ще се убеди сам, че освен така посочените полярни координати точката M няма други.

Ако повдигнем равенствата (1) в квадрат и съберем получените резултати, ще получим

(2) $$x^2+y^2=\rho^2.$$

Това е важно следствие от връзката (1) между декартовите и полярните координати.

Нека $f(x,y)$ е една функция на две променливи. Под крива с уравнение

(3) $$f(x,y)=0$$

се разбира множеството на всички точки (x,y) от равнината, за които е изпълнено (3). Например кривата с уравнение $x^2+y^2=r^2$ е окръжност с радиус r и център в началото на координатната

система. Уравнението на една крива представлява връзка между двете ѝ координати. Тъй като в (3) участвуват декартовите координати на точката от кривата, това уравнение се нарича декартово уравнение на кривата.

Аналогично стоят нещата и при полярните координати. Уравнението на една крива в полярни координати (полярното уравнение на кривата) представлява връзка между полярните координати на точките от тази крива.

Да видим кои са кривите, представени с най-простите възможни полярни уравнения. Такова е например уравнението $\theta=\theta_0$, където θ_0 е константа. То се удовлетворява от онези и само онези точки, един от полярните ъгли на които е θ_0 или $\theta_0+\pi$. Явно това е правата, която минава през началото на координатната система и сключва ъгъл θ_0 с оста Ox. Така например абсцисната ос има уравнение $\theta=0$, а също така има за уравнение и $\theta=\pi$. Ординатната ос има уравнение $\theta=\frac{\pi}{2}$, а също така и $\theta=\frac{\pi}{2}+k\pi$. Да видим сега коя е кривата с уравнение $\rho=r>0$, където $r>0$ е константа. Това уравнение се удовлетворява от онези и само онези точки, които се намират на разстояние r от началото и следователно кривата е окръжност с радиус r и център в началото.

За да получим полярното уравнение на кривата с декартово уравнение (3), трябва да заместим в (3) x и y с равните им от (1). Да намерим например полярното уравнение на окръжността, като изходим от декартовото ѝ уравнение $x^2+y^2=r^2$. Като заместим в това уравнение x и y с равните им от (1) и вземем пред вид (2), ще получим $\rho^2=r^2$, откъдето получаваме $\rho=r$ или $\rho=-r$. По-общо полярното уравнение на кривата (3) е

(4) $$f(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta)=0.$$

Да намерим сега полярното уравнение на права, която не минава през началото. Както е известно, декартовото уравнение на такава права е $ax+by+c=0$ $(c\neq0)$. Като заместим отново x и y с равните им от (1), ще получим

(5) $$\rho(a\cos\theta+b\sin\theta)=-c.$$

Нека (d,θ_0) е една двойка полярни координати на точката с декартови координати (a,b). Тогава съгласно (1) ще имаме $a=d\cos\theta_0$ и $b=d\sin\theta_0$ и като заместим a и b с тези стойности в (5), получаваме

$$\rho\, d(\cos\theta\cos\theta_0+\sin\theta\sin\theta_0)=-c,$$

откъдето

(6) $$\rho = \frac{p}{\cos(\theta - \theta_0)},$$

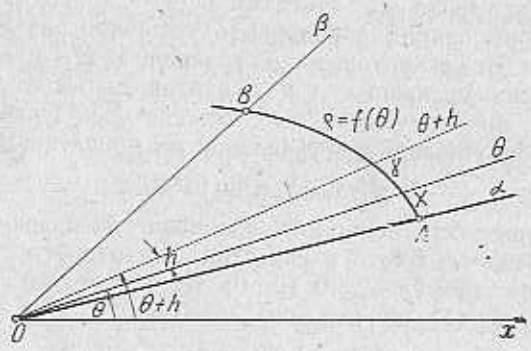
където е положено $p = -\frac{c}{d}$. Без ограничение на общността можем да предполагаме, че $c < 0$ и $d > 0$, поради което $p > 0$. Предоставяме на читателя да се убеди, че (ρ, θ_0) е една двойка полярни координати на най-близката до началото точка от разглежданата права.

§ 3. ПРЕСМЯТАНЕ НА ЛИЦА В ПОЛЯРНИ КООРДИНАТИ

Нека функцията f е дефинирана и непрекъсната в интервала $[\alpha, \beta]$ $(0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi)$ и нека $f(\theta) \geq 0$ за всяко θ от този интервал. С T ще означим множеството на всички точки с полярни координати (ρ, θ), за които

(1) $$\alpha \leq \theta \leq \beta$$
$$0 \leq \rho \leq f(\theta).$$

Тъй като ρ е неотрицателно, θ е полярен ъгъл и следователно точките на множеството T са разположени между лъчите α и β. При фиксирано θ координатата ρ се изменя по дефиниция от 0 до $f(\theta)$ (черт. 108). Така дефинираното множество се нарича понякога *сектор*.



Черт. 108

Тъй като секторът T е еднозначно определен, когато е зададена функцията f, лицето му би трябвало да може да се изрази чрез f. Това става особено просто чрез интеграли.

Ако Φ е произволна примитивна на функцията $\frac{1}{2} f^2$ в интервала $[\alpha, \beta]$, лицето S на сектора T се дава от формулата

(2) $$S = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha).$$

Доказателството на (2) става с помощта на добре известните вече на читателя методи. За произволно θ, $\alpha \leq \theta \leq \beta$, означаваме с $F(\theta)$ лицето на сектора OAX (черт. 108). Очевидно нарастването $F(\theta+h) - F(\theta)$ съвпада с лицето на сектора OXY. Като вземем пред вид, че лицето на кръгов сектор с радиус r и централен ъгъл ω, измерен в радиани, е равно на $\frac{1}{2} r^2 \omega$, лесно съобразяваме, че лицето на сектора OXY ще бъде $\frac{1}{2} \rho_{\text{ср}}^2 h$, където $\rho_{\text{ср}}$ е средният радиус на този сектор. Следователно $F(\theta+h) - F(\theta) = \frac{1}{2} \rho_{\text{ср}}^2 h$, откъдето

(3) $$\frac{F(\theta+h) - F(\theta)}{h} = \frac{1}{2} \rho_{\text{ср}}^2.$$

Съгласно (1) при фиксирано θ радиусът ρ се мени от 0 до $f(\theta)$. Поради това не е трудно да се съобрази, че при h, клонящо към нула, $\rho_{\text{ср}}$ ще клони към $f(\theta)$. Ето защо от (3) получаваме $F'(\theta) = \frac{1}{2} f^2(\theta)$, което показва, че $F(\theta)$ е примитивна на $\frac{1}{2} f^2(\theta)$. По условие Φ е също примитивна на тази функция и следователно $F(\theta) = \Phi(\theta) + C$. Понеже по дефиниция $F(\alpha) = 0$, то $0 = \Phi(\alpha) + C$ и следователно $F(\theta) = \Phi(\theta) - \Phi(\alpha)$. Сега формула (2) се получава, ако в последното равенство поставим $\theta = \beta$.

Да отбележим изрично, че доказателството на (2) даде повече, отколкото беше формулирано. Именно получихме равенството

(4) $$F'(\theta) = \frac{1}{2} f^2(\theta).$$

Пример. Да се докаже, че множеството M на точките (x, y), за които е изпълнено неравенството

$$(x^2+y^2)^2 \leq a^2(x^2-y^2) \qquad (a > 0),$$

е ограничено и да се намери лицето му.

Ако въведем полярни координати, ще получим $\rho^4 \leq a^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\rho^2$, откъдето виждаме, че M съвпада с множеството на всички точки в равнината, полярните координати на които удовлетворяват неравенството

(5) $$\rho^2 \leq a^2 \cos 2\theta.$$

Тъй като в дефиницията на M координатите x и y участвуват само с четни степени, множеството M е симетрично относно координатните оси. Следователно достатъчно е да намерим лицето само на онази негова част, която се намира в първи квадрант.

Преди всичко от (5) следва, че $\cos 2\theta \geq 0$. За стойности на θ от интервала $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ последното неравенство е изпълнено само когато $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$. Ето защо частта от M, която се намира в първи квадрант, е определена в полярни координати с неравенствата

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4},$$

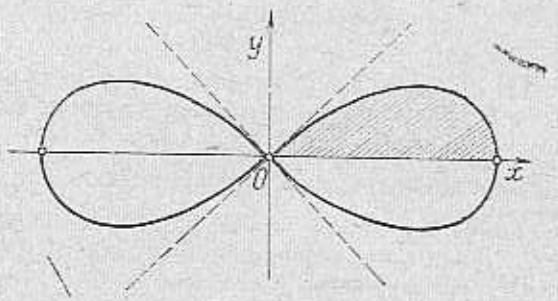
(6)

$$0 \leq \rho \leq a\sqrt{\cos 2\theta},$$

които показват, че тази част на M е елиз сектор. Тогава

$$\Phi(\theta) = \frac{a^2}{2}\int \cos 2\theta \, d\theta = \frac{a^2}{4}\sin 2\theta$$

и съгласно (2) лицето на частта от M, която се намира в първия квадрант, ще



Черт. 109

бъде $S = \Phi\left(\frac{\pi}{4}\right) - \Phi(0) = \frac{a^2}{4}\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) = \frac{a^2}{4}$. Оттук намираме, че лицето S на M е

$$S = a^2.$$

Кривата с уравнение $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$ се нарича *лемниската на Бернули*. Тя е изобразена на черт. 109. Множеството M представлява вътрешността на лемниската на Бернули

§ 4. КОНИЧНИ СЕЧЕНИЯ

Нека K е конус и ω е равнина, която не минава през върха му. Кривата, по която ω пресича K, се нарича *конично сечение*.

Да разгледаме равнината ω', която е успоредна на ω и минава през върха O на конуса K. За ω' могат да се представят следните три възможности:

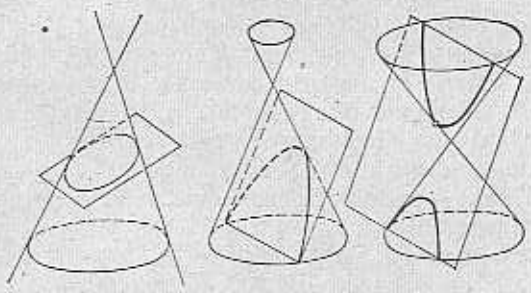
а) ω' пресича K само в точката O; тогава коничното сечение се нарича *елипса*.

б) ω' пресича конуса по една права; тогава коничното сечение се нарича *парабола*.

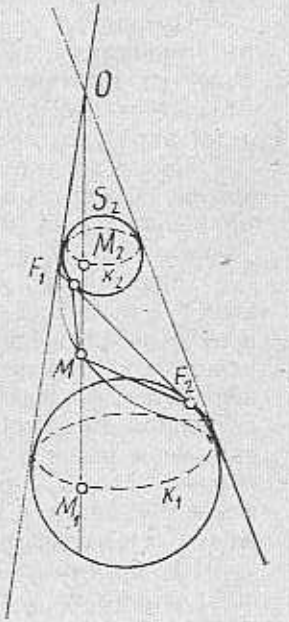
в) ω' пресича конуса по две прави; тогава коничното сечение се нарича *хипербола*.

Не бива да забравяме, че коничната повърхнина е съставена от две части с общ връх. Очевидно точките на елипсата и параболата са разположени само върху едната част на коничната повърхнина, докато хиперболата има точки върху всяка от тях (черт. 110).

Противно на първото впечатление коничните сечения са твърде симетрични фигури. Преди да пристъпим към подробното им изучаване, ще отбележим, че светилата от Слънчевата система се движат по конични сечения.



Черт. 110



Черт. 111

Да разгледаме най-напред случая, когато равнината ω пресича коничната повърхнина по елипса (черт. 111). Да означим с S_1 и S_2 двете сфери, които са вписани в конуса и се допират до равнината ω. Допирните точки на сферите S_1 и S_2 с ω означаваме съответно с F_1 и F_2.

Ще покажем, че *сборът от разстоянията на коя да е точка M от елипсата до точките F_1 и F_2 не зависи от точката M.*

Преди всичко ще отбележим, че сферите S_1 и S_2 се допират до коничната повърхнина по две окръжности K_1 и K_2 и че всяка образуваща l на конуса пресича тези две окръжности в две точки, разстоянието между които не зависи от образуващата.

Да отбележим освен това, че всеки две допирателни към една сфера през някоя външна точка са равни.

След тези бележки твърдението става почти очевидно. Да изберем произволна точка M от елипсата и да прекараме образувателната l на конуса през точката M. Пресечните точки на l с S_1 и S_2 означаваме съответно с M_1 и M_2. Тогава

$$F_1M+F_2M=M_1M+M_2M=M_1M_2=\text{const.},$$

с което всичко е доказано.

Предоставяме на читателя сам да докаже, че ако M е точка от равнината ω, за която сборът от разстоянията F_1M+F_2M е равен на дължината на отсечката, която окръжностите K_1 и K_2 отсичат от произволна образувателна на конуса, то M непременно лежи върху разглежданата елипса.

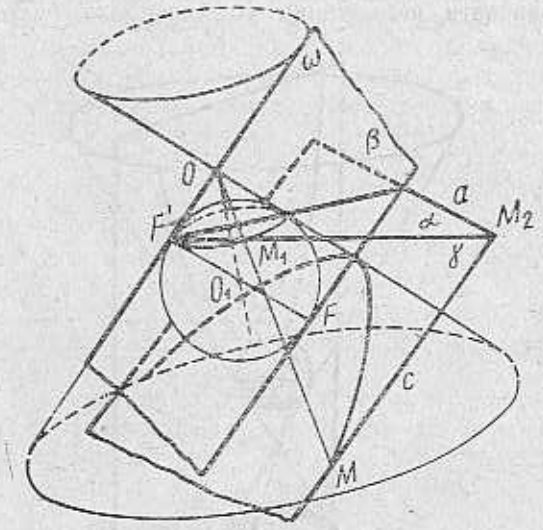
По такъв начин се убедихме, че *елипсата е геометрично място на точки от една равнина ω, сборът от разстоянията на които до две дадени точки F_1 и F_2 е постоянна величина.* Точките F_1 и F_2 се наричат *фокуси* на елипсата.

Преминаваме към изучаване на параболата. Да разгледаме конус K и равнина ω' през върха O на конуса, която пресича конуса по една единствена права OL. Нека равнината ω е успоредна на ω'. Както вече видяхме, ω пресича конуса K по една парабола. Да означим с S сферата, която е вписана в конуса и се допира до равнината ω. Очевидно S се допира и до успоредната на ω равнина ω'. Означаваме допирните точки съответно с F и F'. Нека K е окръжността, по която S се допира до конуса, и α е равнината, в която тази окръжност лежи. Пресечната права на ω и α означаваме с a (черт. 112).

Ще покажем, че *разстоянието на коя да е точка M от параболата до точката F се равнява на разстоянието на M до правата a.*

Преди всичко да отбележим, че правата a е перпендикулярна на OL. Да означим с O_1 центъра на сферата S. Тогава правата OO_1 е оста на конуса. Нека β е равнината, определена от правите FF' и OO_1. Тъй като правата FF' е очевидно перпендикулярна на ω, ще имаме $a \perp FF'$. От друга страна, оста OO_1

на конуса е перпендикулярна и на α, следователно $a \perp OO_1$. По този начин виждаме, че правата a е перпендикулярна на двете прави FF' и OO_1 от равнината β. Но тогава тя е перпендикулярна и на всяка права от тази равнина, а следователно и на OL.



Черт. 112

Да вземем сега произволна точка M от параболата и да означим с M_1 пресечната точка на правата OM с окръжността K. Нека γ е равнината, определена от правите OM и $F'M_1$ и нека c е пресечната права на γ и ω.

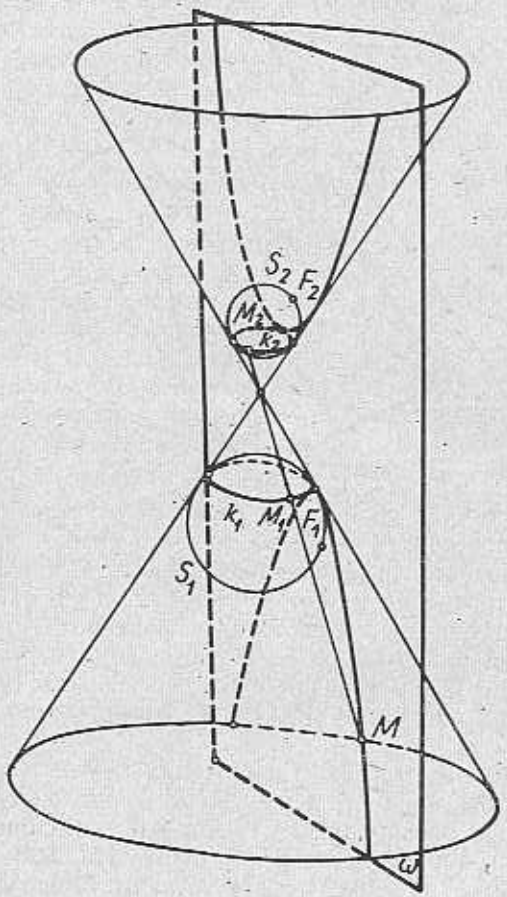
Тъй като γ пресича успоредните равнини ω' и ω съответно по правите OL и c, то $c \parallel OL$. Но вече видяхме, че $a \perp OL$. Следователно $a \perp c$ и ако означим с M_2 пресечната точка на c и a, дължината на отсечката MM_2 ще бъде разстоянието между M и a.

Триъгълникът MM_2M_1 е подобен на $OF'M_1$ (понеже $c \parallel OL$). От друга страна, F' и M_1 лежат на K и следователно триъгълникът $OF'M_1$ е равнобедрен. Ето защо и триъгълникът MM_2M_1 е равнобедрен, поради което $MM_2=MM_1$. Но MM_1 и MF са допирателни към S от една и съща точка M. Следователно $MM_1=MF$ и тъй като $MM_2=MM_1$, то $MM_2=MF$. С това е показано, че MF е равно на разстоянието от M до a.

Предоставяме на читателя да докаже сам, че ако M е точка от ω, за която MF е равно на разстоянието от M до a, то M непременно лежи върху разглежданата парабола.

По този начин се убедихме, че *параболата е геометрично място на точки от една равнина ω, разстоянията на които до дадена точка F и до дадена права a са равни.* Точката F се нарича *фокус* на параболата, а *a директриса.*

Преминаваме към изучаване на хиперболата. Нека равнината ω пресича коничната повърхнина по хипербола (черт. 113). Да



Черт. 113

означим с S_1 и S_2 двете сфери, които са вписани в конуса и се допират до равнината ω. Допирните точки на сферите S_1 и S_2 с ω означаваме съответно с F_1 и F_2.

Ще докажем, че *разликата от разстоянията на коя да е точка M от хиперболата до точките F_1 и F_2 не зависи от точката M.*

Преди всичко ще отбележим, че сферите S_1 и S_2 се допират до коничната повърхнина по две окръжности K_1 и K_2 и че всяка образуваща l на конуса пресича тези две окръжности в две точки, разстоянието между които не зависи от образуващата.

Да изберем произволна точка M от хиперболата и да прекараме образувателната l на конуса през точката M. Пресечните точки на l с K_1 и K_2 означаваме съответно с M_1 и M_2. Тогава

$$MF_1 - MF_2 = MM_1 - MM_2 = M_2M_1 = \text{const.},$$

с което всичко е доказано.

Читателят ще докаже сам, че ако M е точка от равнината ω, за която разликата от разстоянията MF_1 и MF_2 е равна на дължината на отсечката, която окръжностите K_1 и K_2 отсичат от произволна образувателна на конуса, то M непременно лежи върху разглежданата хипербола.

Така се убедихме, че *хиперболата е геометрично място на точки от една равнина ω, разликата от разстоянията на които до две дадени точки F_1 и F_2 е постоянна величина.* Точките F_1 и F_2 се наричат *фокуси* на хиперболата.

§ 5. ДЕКАРТОВИ УРАВНЕНИЯ НА КОНИЧНИТЕ СЕЧЕНИЯ

Да разгледаме една елипса E с фокуси F_1 и F_2. Ако при произволна координатна система изразим разстоянията от фокусите F_1 и F_2 до произволна точка от елипсата чрез координатите им и ги заместим в равенството

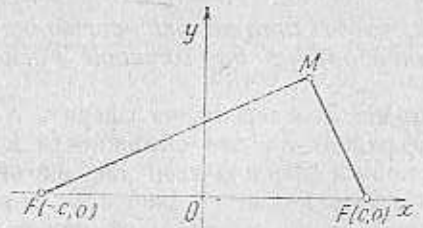
$$F_1M + F_2M = 2a \quad (a>0,\ a=\text{const.}), \tag{1}$$

ще получим уравнение, което ще се удовлетворява от всяка точка на елипсата.

За да получим това уравнение във възможно най-прост вид, ще изберем координатната система по следния начин. За абсцисна ос ще изберем правата F_1F_2; за начало на координатната система ще изберем средата на отсечката F_1F_2. Нека при така избраната координатна система координатите на фокусите са съответно $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$ (черт. 114).

Да разгледаме произволна точка $M(x, y)$ от елипсата. Тогава за разстоянията F_1M и F_2M ще имаме:

$$F_1M = \sqrt{(x+c)^2+y^2}, \qquad F_2M = \sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$



Черт. 114

Тъй като M е точка от елипсата, ще бъде в сила равенство (1) и следователно

(2) $$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a.$$

Преобразуваме това уравнение по следния начин:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Повдигаме двете страни в квадрат и получаваме

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2.$$

След като опростим това равенство, добиваме

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx.$$

Повдигаме отново двете страни в квадрат и след приведение получаваме

$$(a^2-c^2)\,x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2).$$

Полагаме $b=\sqrt{a^2-c^2}$ (тъй като $2c=F_1F_2<F_1M+MF_2=2a$, разликата a^2-c^2 е положителна), откъдето $b^2=a^2-c^2$. Така получаваме уравнението в следния вид:

(3) $$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2.$$

Като разделим двете страни на това уравнение на a^2b^2, ще получим

(4) $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

което е уравнението на елипсата.

Ако (x, y) е произволна точка от елипсата от (4) следва, че $\frac{x^2}{a^2}\leqq 1$, поради което $x^2\leqq a^2$. Ето защо $-a\leqq x\leqq a$, т. е. абсцисата на произволна точка от елипсата се намира между $-a$ и a. Това

показва, че точките на елипсата са разположени между правите $x=-a$ и $x=a$. Аналогично се проверява, че точките на елипсата са разположени и между правите $y=-b$ и $y=b$.

По този начин се убедихме, че елипсата е разположена изцяло в правоъгълника, заграден от правите $x=-a$, $x=a$; $y=-b$ и $y=b$. Най-дясната и най-лявата точки на елипсата са съответно $(a, 0)$ и $(-a, 0)$, а най-горната и най-долната $(b, 0)$ и $(-b, 0)$.

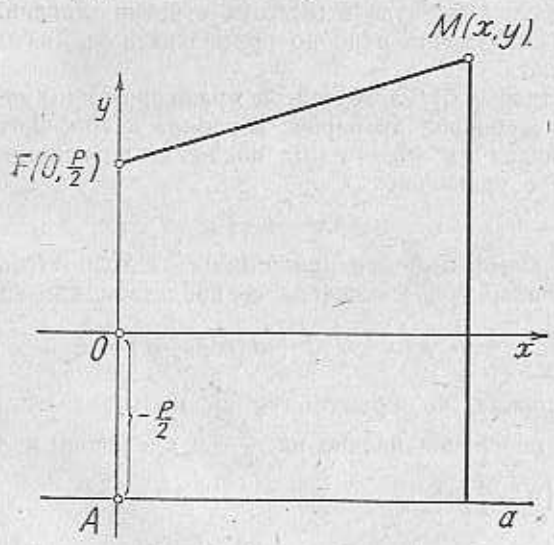
Да отбележим още, че тъй като в (4) x и y участвуват само с четни степени, елипсата е симетрична спрямо координатните оси, т. е. те са оси на симетрия на елипсата. Частта от абсцисната ос която лежи в елипсата, е отсечка с дължина $2a$, а частта от ординатната ос, която лежи в нея, има дължина $2b$. Ето защо a и b се наричат *полуоси* на елипсата (a се нарича *голяма полуос*, а b — *малка полуос*).

Ще споменем изрично, че голямата полуос, малката полуос и половината c от разстоянието между фокусите са свързани с равенството

(5) $$a^2=b^2+c^2$$

(вж. определението на b).

Преминаваме към намиране уравнението на параболата. Нека P е парабола с фокус F и директриса a. Както и при елипсата, за да получим възможно най-простото уравнение на параболата, ще изберем координатната система по специален начин. Да озна-



Черт. 115

чим с A петата на перпендикуляра от F към a (черт. 115). Абсцисната ос прекарваме през средата на FA, успоредно на a, и за начало избираме пресечната точка на FA с абсцисната ос. Нека сега координатите на фокуса са $\left(0, \frac{p}{2}\right)$.

Нека $M(x, y)$ е произволна точка от параболата. За MF имаме

$$MF=\sqrt{\left(y-\frac{p}{2}\right)^2+x^2}.$$

Разстоянието d от M до a е $d=y+\frac{p}{2}$. Според характеристиката на параболата от предния параграф ще имаме равенството $MF=d$, т. е.

$$y+\frac{p}{2}=\sqrt{\left(y-\frac{p}{2}\right)^2+x^2}.$$

След като се освободим от корена и направим опростяване, ще получим уравнението $2py=x^2$, или

(6) $$y=\frac{x^2}{2p}$$

на параболата.

От това уравнение се вижда, че за всяка точка от параболата имаме $y\geq 0$, поради което тя е разположена над абсцисната ос. Освен това x участвува в (6) само с четни степени. Ето защо параболата е симетрична относно ординатната ос, която се нарича *ос* на параболата.

Читателят знае от алгебрата, че уравнението (6) описва парабола. Но той е свикнал да нарича парабола и графиката на всеки квадратен тричлен ax^2+bx+c. Да покажем, че например, когато $a>0$, кривата с уравнение

(7) $$y=ax^2+bx+c$$

е парабола в смисъла, който придадохме на този термин в предната точка. Очевидно (7) може да се представи във вида

$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+a\left(c-\frac{b^2}{4a^2}\right),$$

откъдето се вижда, че кривата (7) се получава от параболата $y=ax^2$ чрез транслация наляво на $\frac{b}{2a}$ и следваща я транслация нагоре на $a\left(c-\frac{b^2}{4a^2}\right)$.

Уравнението на хиперболата се получава аналогично на това на елипсата. Избираме абсцисната ос по такъв начин, че фокусите на хиперболата да лежат върху нея и да са разположени симетрично на началото. Нека при така избраната координатна система координатите на фокусите са съответно $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$.

Както вече видяхме, точките от хиперболата се характеризират с равенството

(8) $$MF_1-MF_2=2a.$$

Ако за произволна точка $M(x, y)$ от хиперболата изразим разстоянията MF_1 и MF_2 чрез координатите и заместим в (8) след преобразования, аналогични на тези при извода на уравнението на елипсата, ще получим

(9) $$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2).$$

Тук изниква въпросът за знака на c^2-a^2. Съгласно неравенството между дължините на страните на триъгълника и равенство(8)имаме

$$2c=F_1F_2\geq MF_1-MF_2=2a,$$

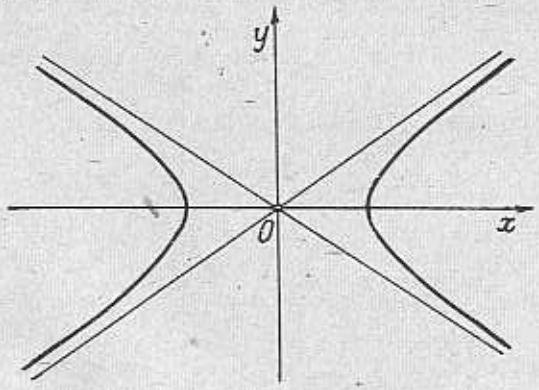
откъдето $c>a$ и следователно $c^2-a^2>0$. Ако положим $b=\sqrt{c^2-a^2}$, то $c^2-a^2=b^2$ и (9) дава

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2,$$

или

(10) $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

което е и уравнението на хиперболата.



Черт. 116

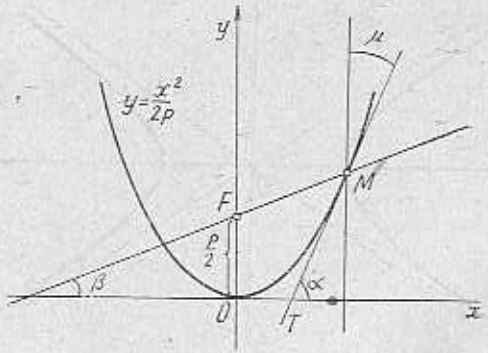
Понеже в (10) x и y участвуват само с четни степени, хиперболата е симетрична относно координатните оси. При $x=0$ лявата страна на (10) е неположителна и следователно не може да бъде равна на дясната. Следователно върху ординатната ос няма точки от хиперболата. Ето защо тя се нарича имагинерна ос на хиперболата. Аналогично от (10) следва, че при $|x|<a$ няма точки от хиперболата. При $|x|\geq a$ уравнението (10) вече има решения относно y и следователно за тези x има точки от хиперболата. Без да се впускаме в повече подробности, ще отбележим, че общият вид на хиперболата е представен на черт. 116.

Да отбележим изрично, че константите a и b от (10) и половината на фокусното разстояние c са свързани с формулата

$$c^2=a^2+b^2. \tag{11}$$

От многобройните важни свойства на коничните сечения ще отбележим едно, свързано с оптиката. Ако в единия от фокусите на елипсата поставим светлинен източник, след отразяването си от елипсата лъчите ще минат през другия фокус. Аналогично стоят нещата и при хиперболата. Ако един светлинен лъч минава преа единия от фокусите на хиперболата, след отразяването му от хиперболата неговото продължение минава през другия фокус. Ако пък поставим светлинен източник във фокуса на параболата, след отраженето лъчите стават успоредни на оста на параболата. Ето защо понякога се казва, че параболата е елипса, единият от фокусите на която е в „безкрайност". Понякога се отива по-далече, като се казва, че хиперболата е елипса, която пресича „безкрайната права". Изучаването на коничните сечения в този аспект е предмет на така наречената проективна геометрия.

Ще се ограничим с доказателството на оптичното свойство на параболата. Да разгледаме произволна точка $M(x, y)$ от параболата. Съгласно закона за отражението трябва да се докаже, че $\sphericalangle FMT=\mu$, където μ е ъгълът, който тангентата T сключва с ординатната ос (черт. 117). Да означим с α и β ъглите,



Черт. 117

които тангентата и правата FM сключват с абсцисната ос. Тогава съгласно (6) ще имаме

$$\operatorname{tg}\alpha=y'=\frac{x}{p}. \tag{12}$$

От друга страна, $\operatorname{tg}\beta=\dfrac{y-\frac{p}{2}}{x-0}$ и като използуваме отново (6), последното равенство след прости преобразования дава

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{x^2-p^2}{2\,px}. \tag{13}$$

От друга страна,

$$\operatorname{tg}\sphericalangle FMT=\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

и като използуваме (12) и (13), след прости преобразования получаваме

$$\operatorname{tg}\sphericalangle FMT=\frac{p}{x}. \tag{14}$$

За да завършим доказателството, остава само да забележим, че

$$\operatorname{tg}\mu=\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1}{y'}=\frac{p}{x}$$

и да използуваме (14).

Така отбелязаното оптическо свойство на параболата действително намира широко практическо приложение. Така например прожекторите по принцип се състоят от параболично огледало (огледало, което има формата на ротационен параболоид) и светлинен източник, който се намира във фокуса. Още по важно е приложението на параболичните рефлектори в астрономията. Ако един сноп лъчи е успореден на оста на параболата, съгласно доказаното след отразяване от параболата всички лъчи ще минат през фокуса ѝ. Най-големите телескопи в в света са построени върху този принцип. Най-лесно параболичен телескоп може да се построи, като се вземе цилиндър, пълен с живак, и се завърти около оста си. Съгласно доказаното в край на §1 от гл. 6 живакът ще приеме формата на ротационен параболоид. С такъв телескоп могат да се наблюдават само звезди, които са разположени близко до зенита.

§ 6. ХИПЕРБОЛИЧНИТЕ ФУНКЦИИ И ХИПЕРБОЛАТА

Окръжността с уравнение

$$x^2+y^2=r^2 \qquad (r>0), \tag{1}$$

е елипса. Наистина, ако в уравнението на елипсата (5.4) поставим $a=b=r$, ще получим след освобождаване от знаменателя (1). Може да се каже, че окръжността с радиус r е елипса, двете полуоси a и b на която са равни на r.

Аналогично, ако в уравнението на хиперболата (5.10) поставим $a=b=r>0$, ще получим, след като се освободим от знаменателя

$$x^2-y^2=r^2. \tag{2}$$

Кривата с уравнението (2) се нарича *равнораменна хипербола* (*с рамо r*). Каквото е и взаимоотношението на окръжността с елипсите, такова е и взаимоотношението на равнораменната хипербола с хиперболите.

Читателят познава важната връзка, която съществува между тригонометричните функции и окръжността. Да отбележим например, че за произволен ъгъл t точката с координати

$$x=r\cos t,$$

$$y=r\sin t$$

лежи на окръжността (1). Нещо повече, всяка точка $M(x, y)$ от окръжността може да се получи по този начин. Достатъчно е за тази цел да означим с t кой да е от ъглите, които радиусът OM сключва с Ox.

Като се използува съотношението

$$\mathrm{ch}^2 t-\mathrm{sh}^2 t=1$$

(вж. §12, гл. 3), не е трудно да се съобрази, че за всяко t точката с координати

$$x=r\,\mathrm{ch}\, t,$$

(3)

$$y=r\,\mathrm{sh}\, t$$

лежи върху равнораменната хипербола (2). Тъй като по определение $\mathrm{ch}\, t=\frac{e^t+e^{-t}}{2}>0$, всички точки от вида (3) лежат върху десния клон на хиперболата.

Да изберем сега едно число $t_1 \neq t$. Тогава точката с координати

(4)

$$x=r\,\mathrm{ch}\, t_1$$
$$y=r\,\mathrm{sh}\, t_1$$

също лежи върху хиперболата. Ще покажем, че тези две точки са различни. Ако допуснем противното, ще имаме

$$\mathrm{ch}\, t=\mathrm{ch}\, t_1$$
$$\mathrm{sh}\, t=\mathrm{sh}\, t_1.$$

Като съберем тези равенства и вземем пред вид, че по определение

$$\mathrm{ch}\, t=\frac{e^t+e^{-t}}{2},\ \mathrm{sh}\, t=\frac{e^t-e^{-t}}{2},$$

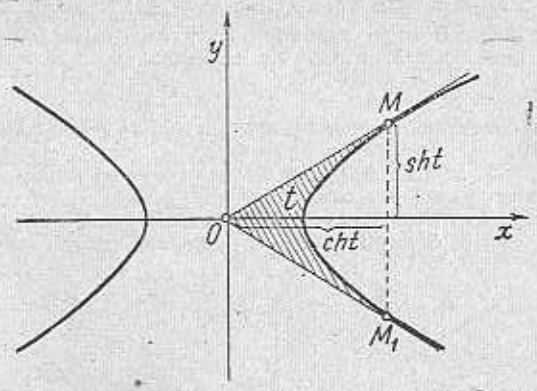
ще получим $e^t=e^{t_1}$, откъдето $t=t_1$, което противоречи на предположението, че $t_1 \neq t$.

И така за всяко t равенствата (3) дават координатите на една точка от равнораменната хипербола (2) и за различни числа t се получават различни точки от десния клон на тази крива.

Интересно е, че по този начин се получава целият десен клон на равнораменната хипербола. Да покажем, че това е така за онази негова част, която лежи над абсцисната ос (черт. 118). При $t=0$ равенствата (3) очевидно дават точката $(r, 0)$ от хиперболата. Когато t расте неограничено (чрез положителни стойности), имаме

$$\mathrm{ch}\, t=\frac{e^t+e^{-t}}{2}\to+\infty,\ \mathrm{sh}\, t=\frac{e^t-e^{-t}}{2}\to+\infty.$$

и следователно за произволно големи t равенствата (3) дават произволно отдале-



Черт. 118

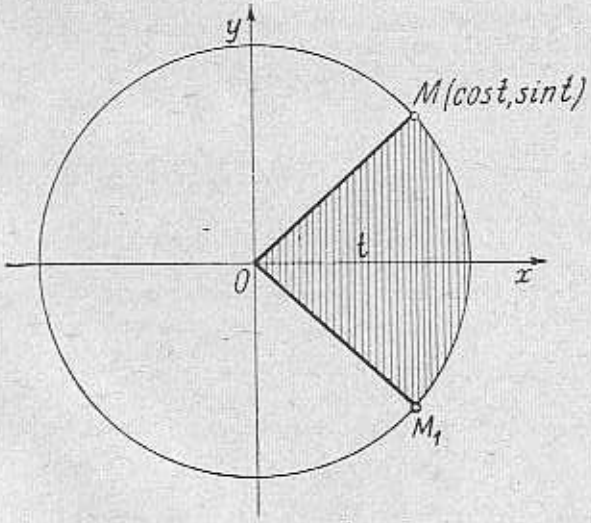
чени от началото точки от хиперболата. От друга страна, хиперболичните функции са непрекъснати и следователно при изменението на t в интервала $(0,\infty)$ точката с координати (3) ще опише една непрекъсната крива. Тъй като тази непрекъсната крива лежи върху хиперболата, минава през точката $(r, 0)$ и съдържа произволно отдалечени от началото точки от горната половина на десния ѝ клон, ясно е, че докато t пробягва интервала $[0, \infty)$, точката, дадена от (3), ще трябва да пробяга цялата горна част на десния клон.

Да разгледаме единичната окръжност

5)

$$x^2+y^2=1$$

и произволна точка $M(x, y)$ върху горната ѝ половина. Координатите (x, y) на тази точка могат да се представят във вида $x=\cos t$, $y=\sin t$, където t е ъгълът MOx. Особено интересно е, че t е равно също и на лицето на сектора OMM_1, където M_1 е симетрична на M относно абсцисната ос (черт. 119).



Черт. 119

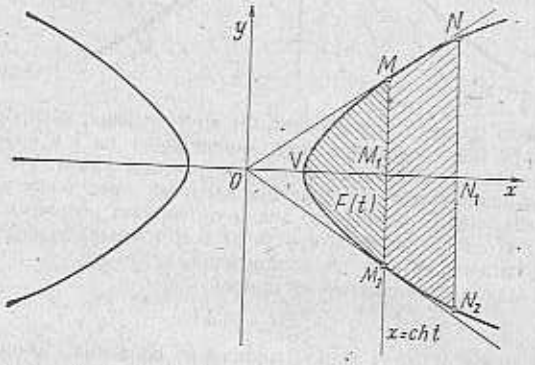
Аналогично стоят нещата с хиперболичните функции и единичната равнораменна хипербола. *Нека* OMM_1 *е симетричен относно оста* Ox *сектор с лице* t, *който е ограничен отдясно с дъга от хиперболата*

(6) $$x^2-y^2=1$$

(черт. 118). *Тогава точката с координати* $(\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t)$ *е най-горната точка* M *на този сектор.*

Доказателството на това твърдение е аналогично на начина, по който в §2 на гл. 6 намерихме лицето на кръга.

За произволно $t \geq 0$ означаваме с $F(t)$ лицето на сегмента, заграден от десния клон на хиперболата (6) и от вертикалната права $x=\operatorname{ch} t$ (черт. 120).



Черт. 120

Очевидно нарастването $F(t+h)-F(t)$ съвпада с лицето на криволинейния трапец MM_2N_2N, т. е.

(7) $$F(t+h)-F(t)=M_1N_1 \cdot y_{\text{ср.}},$$

където $y_{\text{ср.}}$ е „средната" височина на криволинейния трапец. Тъй като $M_1N_1=\operatorname{ch}(t+h)-\operatorname{ch} t$, от (7) получаваме

(8) $$\frac{F(t+h)-F(t)}{h}=\frac{\operatorname{ch}(t+h)-\operatorname{ch} t}{h} \cdot y_{\text{ср.}}$$

Но $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\operatorname{ch}(t+h)-\operatorname{ch} t}{h}=(\operatorname{ch} t)'=\operatorname{sh} t$ и $\lim\limits_{h\to 0} y_{\text{ср.}}=2\operatorname{sh} t$. Ето защо

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(t+h)-F(t)}{h}=\operatorname{sh} t\, 2\operatorname{sh} t=2\operatorname{sh}^2 t,$$

т. е. $F'(t)=2\operatorname{sh}^2 t$. Последното равенство показва, че $F(t)$ е една примитивна на $\operatorname{sh}^2 t$. Ето защо

$$F(t)=2\int \operatorname{sh}^2 t\, dt=2\int \frac{\operatorname{ch} 2t-1}{2}\, dt$$

$$=\int \operatorname{ch} 2t\, dt-\int dt=\frac{1}{2}\cdot \operatorname{sh} 2t-t+c.$$

За да намерим константата c, полагаме $t=0$ и получаваме $0=0+c$, поради което

(9) $$F(t)=\frac{1}{2}\operatorname{sh} 2t-t=\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t-t.$$

И така лицето на сегмента VMM_2 се дава от формула (9). За да намерим лицето S на сектора OMM_2, трябва от лицето на триъгълника OMM_2 да извадим $F(t)$. Следователно

$$S=\frac{1}{2}\, OM_1 \cdot MM_2-\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t+t$$

$$=\frac{1}{2}\operatorname{ch} t \cdot 2\operatorname{sh} t-\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t+t$$

$$=t$$

и твърдението е доказано.

§ 7. ПОЛЯРНИ УРАВНЕНИЯ НА КОНИЧНИТЕ СЕЧЕНИЯ

За да получим законите на Кеплер, се нуждаем от полярните уравнения на коничните сечения. При това началото на координатната система трябва да се избере в един от фокусите на коничното сечение.

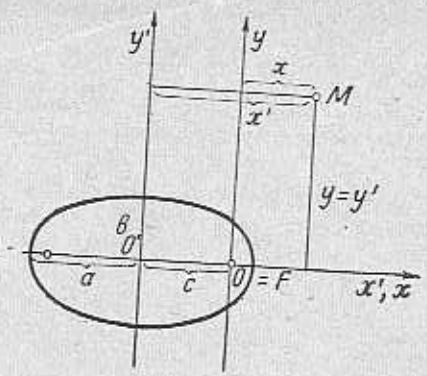
Вече видяхме в §2 как по дадено декартово уравнение на една крива се намира полярното ѝ уравнение. В декартовото уравнение на кривата x и y се заместват с (2.1). По този начин, като изходим от уравненията (5.4), (5.6) и (5.10) на коничните сечения, можем да получим техни полярни уравнения. Но нашата цел е да получим полярни уравнения на коничните сечения, при които началото на координатната система е в един от фокусите. Ето защо първо ще намерим декартовите уравнения на тези криви относно координатна система с начало в някой от фокусите.

Да разгледаме най-напред елипсата с полуоси a и b и фокусно разстояние $2c$ $(a>b>0,\ c>0)$. Избираме координатната система Oxy с връх в десния фокус (черт. 121). Да разгледаме освен това „стандартната" координатна система $O'x'y'$ с начало в центъра на елипсата. Както вече знаем, уравнението на елипсата относно $O'x'y'$ е

(1) $$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1.$$

Очевидно връзката между координатите (x, y) и (x', y') на произволна точка M от равнината се дава от формулите

(2) $$x'=x+c,\quad y'=y.$$



Черт. 121

Като заместим така написаните изрази за x' и y' в (I), ще получим уравнението на елипсата относно фокалната координатна система Oxy. По този начин добиваме

$$\frac{x^2+2cx+c^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

откъдето след освобождаване от знаменателя намираме

$$b^2x^2+2b^2cx+b^2c^2+a^2y^2=a^2b^2,$$

което след прости преобразования дава

$$a^2(x^2+y^2)=(a^2-b^2)x^2-2b^2cx+b^2(a^2-c^2).$$

Като вземем пред вид връзката (5.5) $a^2=b^2+c^2$, получаваме

$$a^2(x^2+y^2)=c^2x^2-2cxb^2+b^4,$$

или, което е все същото,

$$a^2(x^2+y^2)=(b^2-cx)^2.$$

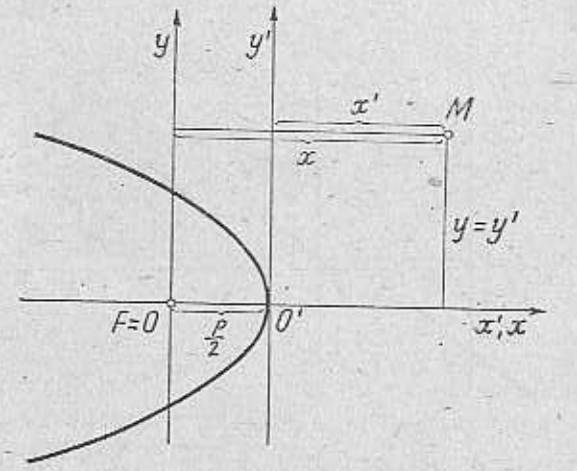
Като разделим двете страни на последното равенство с a^2, добиваме окончателно

(3) $$x^2+y^2=\left(\frac{b^2}{a}-\frac{c}{a}x\right)^2,$$

което е уравнението на елипсата относно „фокалната" координатна система Oxy.

Преминаваме към фокалното уравнение на параболата. С оглед да се подчертае приликата между трите конични сечения ще разположим параболата както на черт. 122. Като вземе пред вид (5.6), читателят лесно ще съобрази, че уравнението на разглежданата парабола относно координатната система $Ox'y'$ ще бъде

(4) $$y'^2=-2px'.$$



Черт. 122

Освен това връзката между координатите (x, y) и (x', y') на произволна точка M се дава от формулите

(5) $$x'=x-\frac{p}{2},\qquad y'=y.$$

Като заместим така написаните изрази за x' и y' в (4), ще получим уравнението на параболата относно координатната система Oxy. По този начин добиваме

$$y^2=-2p\left(x-\frac{p}{2}\right),$$

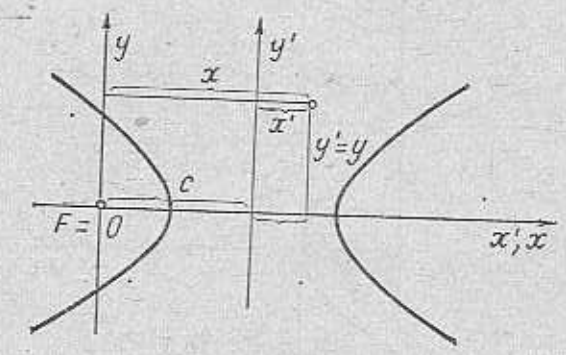
или, което е все същото, $y^2=-2px+p^2$. Като прибавим към двете страни на това равенство x^2, ще получим

(6) $$x^2+y^2=(p-x)^2,$$

което е уравнението на параболата относно координатната система Oxy.

Накрая да разгледаме хиперболата с полуоси a и b и фокусно разстояние $2c$ $(a>0, b>0, c>0)$. Избираме координатните системи както на черт. 123. Съгласно (5.10) уравнението на хиперболата относно $Ox'y'$ ще бъде

(7) $$\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}=1.$$



Черт. 123

Тъй като връзката между координатите (x, y) и (x', y') на произволна точка M се дава от формулите

$$x'=x-c,$$
$$y'=y,$$

от (7) получаваме за уравнението на хиперболата относно Oxy:

$$\frac{x^2-2cx+c^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

което след преобразования, аналогични на тези при елипсата, дава окончателно

(8) $$x^2+y^2=\left(\frac{b^2}{a}-\frac{c}{a}x\right)^2.$$

Един поглед върху уравненията (3), (6) и (8) показва, че те са частни случаи на следното уравнение

(9) $$x^2+y^2=(p-ex)^2 \qquad (p>0,\ e\geq 0),$$

което се нарича фокално уравнение на коничните сечения. Константата p често се нарича *параметър* на коничното сечение (9), а e — *ексцентрицитет*. Ако в (9) положим $x=0$, ще получим $y^2=p^2$ и следователно p има прост геометричен смисъл. Именно

p е ординатата на онази точка от коничното сечение, която се намира точно над фокуса му.

Тъй като при елипсата имаме $c<a$, ексцентрицитетът e на тази крива удовлетворява неравенството $0\leq e<1$. От (6) следва, че ексцентрицитетът e на параболата е единица. При хиперболата пък имаме $e>1$.

Уравнението (9) изтъква еднаквата природа на коничните сечения. Видът на сечението се определя от стойността на ексцентрицитета. Да отбележим, че най-малко ексцентричната елипса — окръжността, има ексцентрицитет нула. Колкото повече ексцентрицитетът на една елипса се приближава до 1, елипсата става толкова по-разтегната. Ако в (9) държим p фиксирано и оставим e да клони към 1 (чрез стойности, по-малки от 1), левият фокус на елипсата ще се отдалечава неограничено от началото. Фигуративно казано, при $e=1$ „фокусът е в безкрайността" и тогава кривата е парабола. Ако оставим e да расте след единицата, част от кривата „ще отиде оттатък безкрайността, т. е. ще се появи в дясната част на равнината", и ще получим хипербола.

Накрая да намерим полярното уравнение на коничните сечения. За тази цел в (9) ще поставим

$$x=\rho\cos\theta,$$
$$y=\rho\sin\theta$$

и ще получим $\rho^2=(p-e\rho\cos\theta)^2$, откъдето

(10) $$\rho=\frac{p}{1+e\cos\theta},$$

или

(11) $$\rho=-\frac{p}{1-e\cos\theta},$$

т. е. коничното сечение (9) се състои от онези и само онези точки, полярните координати на които удовлетворяват поне едно от уравненията (10) или (11).

Разбира се, не е приятно точките на една крива да се изчисляват от две уравнения. За щастие тук може да се мине с кое да е от уравненията (10) или (11), понеже всяка точка, която се дава от някое от тях, се дава и от другото. Ще се убедим, че точките, давани от (11), се дават и от (10), което ще ни позволи да се ограничим само с (10). Нека някоя точка M има двойка полярни координати (ρ, θ), които удовлетворяват (11). Точката M има и много други двойки полярни координати (вж. §2). Ще по-

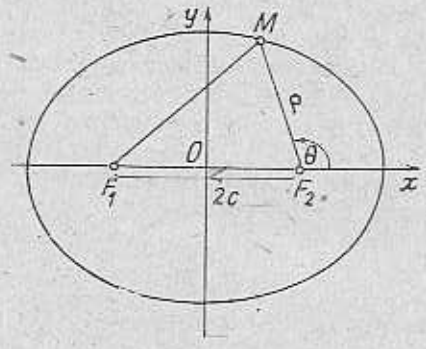
кажем, че двойката полярни координати $(-\rho, \theta+\pi)$ на M удовлетворяват (10). Наистина

$$\frac{p}{1+e\cos(\theta+\pi)}=\frac{p}{1-e\cos\theta}=-\left(\frac{p}{1-e\cos\theta}\right)=-\rho,$$

тъй като по условие ρ се изразява чрез θ съгласно (11).

И така *полярното уравнение на коничните сечения е* (10).

Да отбележим, че уравнението (10) може да се получи и директно, като се изхожда направо от характеристиката на коничните сечения като геометрични места, дадена в §4. Ще покажем как това може да стане за елипсата. Нека M е произволна точка от елипсата с полуоси a и b. От триъгълника F_1F_2M (черт. 124), като приложим косинусовата теорема, получаваме



Черт. 124

(12) $$F_1M^2=\rho^2+4c^2-4\rho c\cos(\pi-\theta).$$

Но $\rho+F_1M=2a$ и (12) дава

$$(2a-\rho)^2=\rho^2+4c^2+4\rho c\cos\theta,$$

откъдето $a^2-a\rho=c^2+\rho c\cos\theta$ и

$$\rho=\frac{a^2-c^2}{a+c\cos\theta}=\frac{b^2}{a+c\cos\theta}=\frac{\frac{b^2}{a}}{1+\frac{c}{a}\cos\theta}=\frac{p}{1+e\cos\theta},$$

което е полярното уравнение на елипсата.

§8. НАМИРАНЕ ЛИЦЕТО НА ЕЛИПСАТА ПО ЗАДАДЕНО ПОЛЯРНО УРАВНЕНИЕ

За да изведем единия от законите на Кеплер, имаме нужда да можем да изразяваме лицето на елипсата, когато са зададени нейният параметър p и ексцентрицитетът ѝ e. От (7.3) и (7.9) следва, че

(1) $$\frac{b^2}{a}=p,\qquad \frac{c}{a}=e.$$

Освен това съгласно (5.5) имаме

(2) $$a^2=b^2+c^2.$$

От системата уравнения (1) и (2) ще намерим a и b. За тази цел от второто от уравненията (1) определяме c, заместваме в (2) и получаваме $a^2=b^2+e^2a^2$ или $b^2=a^2(1-e^2)$. Ако така полученият израз за b^2 заместим в първото от уравненията (1), ще получим $a(1-e^2)=p$, откъдето

(3) $$a=\frac{p}{1-e^2}.$$

Заместваме така намереното a в първото от уравненията (1) и добиваме $b^2=\frac{p^2}{1-e^2}$ и следователно

(4) $$b=\frac{p}{\sqrt{1-e^2}}.$$

Съгласно формула (16) от §2 на гл. 6 лицето S на елипсата се дава с формулата $S=\pi ab$. Ето защо (3) и (4) дават

(5) $$S=\frac{\pi p^2}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

§9. ЗАКОН ЗА ГРАВИТАЦИЯТА

Откритият от Нютон закон за гравитацията гласи:

Всеки две тела с маси m_1 и m_2 се привличат със сила F, която е право пропорционална на масата на всяко от тях и е обратно пропорционална на квадрата от разстоянието.

По-точно този закон се дава от формулата

(1) $$F=k\frac{m_1m_2}{r^2},$$

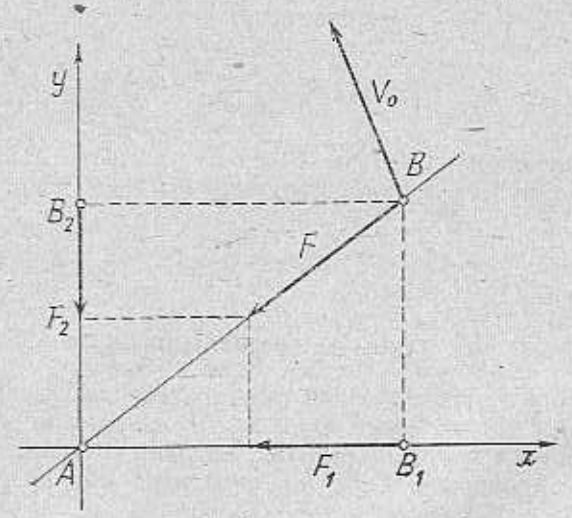
където m_1 и m_2 са масите на телата, r е разстоянието между тях, а k е един коефициент на пропорционалност, наречен *гравитационна* константа. Коефициентът k не зависи нито от масите на телата, нито от разстоянието между тях.

§ 10. ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ НА ДВИЖЕНИЕТО НА ЕДНА ПЛАНЕТА

Да си мислим, че в пространството има две тела A и B с маси, съответно равни на m_A и m_B. Върху всяко от тях ще действува силата на привличане на другото тяло, чиято големина е дадена от формулата (9.1) и е насочена към другото тяло.

Да фиксираме една пространствена координатна система с начало в точката A. Интересуваме се от закона на движение на точката B по отношение на тази координатна система. В специалния случай, когато A е Слънцето, а B е някоя планета, това означава че се интересуваме от движението на планетата по отношение на Слънцето.

Нека тялото B има в момента t_0 начална скорост V_0 (черт. 125). Да разгледаме равнината, определена от точките A и B, и от тази



Черт. 125

скорост. Силата F, която действува върху B, лежи в същата равнина. Поради това точката B ще остане през време на цялото движение в тази равнина. Следователно *задачата, която имаме да решаваме, е равнинна.*

В глава 7 изучавахме праволинейни движения и подробно видяхме как по дадена сила може да се напише диференциалното уравнение на едно такова движение. *Изучаването на равнинните движения се свежда до изучаване на праволинейните.* Ако проектираме точката B върху една произволна права, то проекцията B_1 на B ще се движи по закон, който се определя от сила, равна на проекцията F_1 на силата F, действуваща на B (черт. 125). В нашия специален случай ще проектираме точката B върху координатните оси Ox и Oy. Очевидно е, че ако познаваме движенията на тези проекции, с това познаваме и движението на точката B. Движението на всяка от проекциите се определя от своя закон. Нека $x=x(t)$ и $y=y(t)$ са тези два закона. Тогава в момента t точката B има координати $x(t)$ и $y(t)$. И така, за да получим диференциалните уравнения на движението на точката B, трябва да приложим основния закон на динамиката към нейните проекции. Силите, които действуват върху проекциите B_1 и B_2, са проекциите на гравитационната сила F.

Ще започнем с намирането на тези проекции. Нека координатите на B в произволен момент t са $x(t)$ и $y(t)$. От правоъгълния триъгълник AB_1B (черт. 126) намираме

(1) $$r=AB=\sqrt{(x(t))^2+(y(t))^2}.$$

Тогава съгласно закона на Нютон за гравитацията за големината на силата F намираме

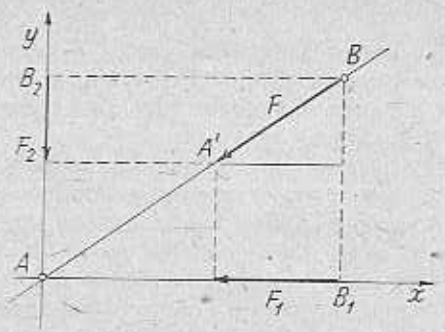
(2) $$F=k\frac{m_Am_B}{(x(t))^2+(y(t))^2}.$$

За да намерим големината на проекцията на F върху оста Ox, ще разгледаме подобните триъгълници AB_1B и $A'B'B$. От подобието следва, че $\frac{A'B}{AB}=\frac{A'B'}{AB_1}$ и като използуваме (1), получаваме

$$\frac{F}{\sqrt{(x(t))^2+(y(t))^2}}=\frac{A'B'}{x(t)},$$

откъдето

$$A'B'=\frac{F\cdot x(t)}{\sqrt{(x(t))^2+(y(t))^2}}.$$



Черт. 126

В последната формула $A'B'$ е големината на проекцията F_1 на F. Понеже посоката на F_1 е противна на тази на AB_1, проекцията F_1 на F ще се получи от $A'B'$ чрез умножение с -1, т. е.

$$F_1 = -\frac{F \cdot x(t)}{\sqrt{(x(t))^2+(y(t))^2}}$$

и като използуваме (2), получаваме

$$F_1 = -k\, m_A m_B \frac{x(t)}{(\sqrt{(x(t))^2+(y(t))^2})^3}. \tag{3}$$

Аналогично намираме и втората проекция F_2 на F:

$$F_2 = -k\, m_A m_B \frac{y(t)}{(\sqrt{(x(t))^2+(y(t))^2})^3}. \tag{4}$$

Вече сме готови да напишем диференциалните уравнения на движенията на проекциите B_1 и B_2:

$$m_B x''(t) = -k\, m_A m_B \frac{x(t)}{((x(t))^2+(y(t))^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$m_B y''(t) = -k\, m_A m_B \frac{y(t)}{((x(t))^2+(y(t))^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Като съкратим на m_B и изпуснем независимата променлива, получаваме окончателно

$$x'' = -\alpha \frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad y'' = -\alpha \frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, \tag{5}$$

където $\alpha = k\, m_A > 0$, зависи от A, но не и от B (тази бележка играе основна роля при третия закон на Кеплер).

Диференциалните уравнения (5) описват движението на точката B. Трябва да помним, че в тази система от уравнения x и y са функции на времето t и производните x'' и y'' са пресметнати по отношение на t. При всяко начално положение и начална скорост на B уравненията (5) еднозначно определят функциите $x(t)$ и $y(t)$, т. е. закона на движението на точката B.

Няма да разглеждаме въпроса за решаване на системата (5), т. е. няма да се интересуваме от закона на движение на точка B, а ще се ограничим само с извеждане на законите на Кеплер от (5).

§ 11. ЗАКОН ЗА ПЛОЩИТЕ

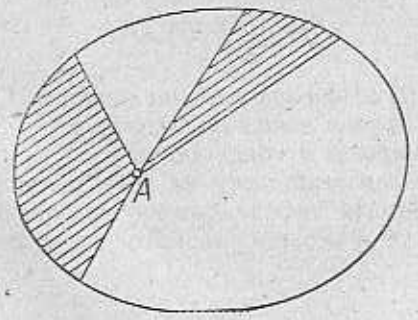
Законът за площите, който понякога се нарича първи закон на Кеплер, гласи:

При движението на тяло B от слънчевата система около Слънцето A под действието на силата на гравитацията отсечката AB описва за равни интервали от време равни площи.

Оттук вече следва известна качествена характеристика за движението на тялото B. При дадено движение на B законът за площите може да бъде спазен само ако скоростта на B е по-голяма, когато B се намира по-близо до A (черт. 127). В частност виждаме, че една планета се движи с най-голяма скорост, когато е най-близко до Слънцето, и обратно, скоростта е най-малка, когато планетата е най-далече от него.

Да фиксираме един момент t_0 и за всяко $t > t_0$ да означим с $\Phi(t)$ лицето на площта, която радиусът AB е описал при движението на B от момента t_0 до момента t.

Ще намерим производната на функцията $\Phi(t)$. За тази цел да означим с $(R(t), Q(t))$ полярните координати на B в произво-

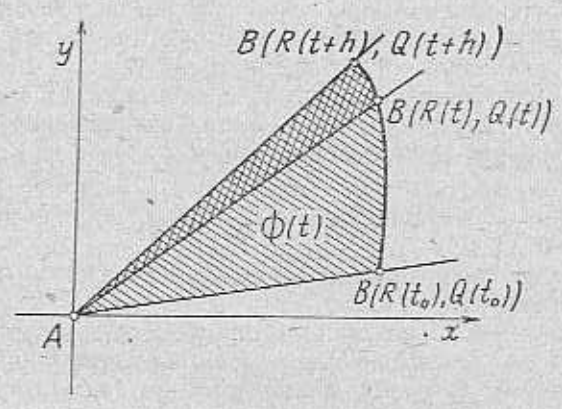


Черт. 127

лен момент t. За произволно $h \neq 0$ означаваме с $S(h)$ лицето на сектора с върхове A, $B(R(t), Q(t))$, $B(R(t+h), Q(t+h))$ (черт. 128).

Очевидно

$$\Phi(t+h)-\Phi(t)=S(h). \tag{1}$$



Черт. 128

От друга страна, секторът, който разглеждаме, има централен ъгъл $Q(t+h)-Q(t)$, поради което

$$S(h)=\frac{1}{2} R_{\text{ср}}^2 (Q(t+h)-Q(t)), \tag{2}$$

където $R_{\text{ср}}$ е средното разстояние между A и B в интервала от време $[t, t+h]$. От (1) и (2) след деление с h получаваме

$$\frac{\Phi(t+h)-\Phi(t)}{h}=\frac{1}{2} R_{\text{ср}}^2 \frac{Q(t+h)-Q(t)}{h}. \tag{3}$$

Ако в (3) оставим h да клони към нула, ще получим

$$\Phi'(t)=\frac{1}{2} R^2(t) . Q'(t). \tag{4}$$

Функцията $\Phi'(t)$ се нарича *площна скорост*. Очевидно точната формулировка на първия закон на Кеплер е.

Площната скорост е константа.

Да се заемем с извеждането на този закон. След като разполагаме със системата диференциални уравнения (10.5), това не е никак трудно. Ако умножим първото от уравненията на тази

система с y, второто с x и извадим намерените резултати, ще получим

$$xy''-x''y=0. \tag{5}$$

Лесно се вижда, че лявата страна на (5) представлява точно производната на $xy'-x'y$, така че (5) добива вида $(xy'-x'y)'=0$. Ето защо ще бъде в сила равенството

$$xy'-x'y=2C, \tag{6}$$

където C е някаква константа.

За да получим закона за площите, ще запишем равенството (6) в полярни координати. Полярните координати на B в произволен момент t бяха вече означени с $R(t)$ и $Q(t)$. Както знаем, те са свързани с декартовите координати (x, y) на B в момента t посредством формулите

$$\begin{aligned} x&=R(t) \cos Q(t), \\ y&=R(t) \sin Q(t). \end{aligned} \tag{7}$$

Като диференцираме равенствата (7), ще получим

$$\begin{aligned} x'&=R'(t) \cos Q(t)-R(t) \sin Q(t) . Q'(t), \\ y'&=R'(t) \sin Q(t)+R(t) \cos Q(t) . Q'(t). \end{aligned} \tag{8}$$

Съгласно (7) и (8) ще имаме

$$\begin{aligned} xy'-x'y&=RR' \cos Q \sin Q+R^2 \cos^2 Q . Q' \\ &-RR' \cos Q \sin Q+R^2 \sin^2 Q . Q'=R^2(t) . Q'(t). \end{aligned}$$

От последните равенства и от (6) следва, че $R^2(t) . Q'(t)=2C$, което заедно с (4) показва, че

$$\Phi'(t)=C \tag{9}$$

и площната скорост действително се оказа константа.

Да отбележим, че при извода на закона за площите централна роля играеше следствието (5) от системата диференциални уравнения (10.5). Същото следствие бихме получили и ако системата (10.5) би имала следния по-общ вид

$$\begin{aligned} x''&=x . f(x, y), \\ y''&=y . f(x, y), \end{aligned} \tag{10}$$

където f е произволна функция. Не е трудно да се съобрази, че системата (10) описва движението на точка под действието на сила, която е постоянно насочена към точката A. Такива сили се наричат в механиката *централни*. И така законът за площите е изпълнен в общия случай на централна сила. Не е трудно да се види, че ако една точка B се движи около някакъв център A по такъв

начин, че да е в сила законът за площите, силата, под действието на която се движи B, е постоянно насочена към центъра. Така виждаме, че *една точка B изпълнява при движението си закона за площите тогава и само тогава, когато се движи под действието на централна сила.*

§ 12. ОРБИТИ НА ПЛАНЕТИТЕ

Орбитите на планетите са конични сечения, в един от фокусите на които се намира Слънцето.

За да докажем този закон, ще намерим полярното уравнение на кривата, която точка B описва при движението си. Изходен момент е системата (10.5). По-точно ще използуваме уравнението

$$x'' = \frac{-\alpha x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{1}$$

и закона за площите във формата

$$R^2(t).Q'(t) = 2C, \tag{2}$$

която следва от (11.4) и (11.9).

Нека полярното уравнение на орбитата на точка B е

$$\rho = \rho(\theta), \tag{3}$$

където $\rho(\theta)$ е една неизвестна функция. Задачата е да се намери функцията $\rho(\theta)$. За тази цел ще намерим едно диференциално уравнение за функцията $\rho(\theta)$, като използуваме намерените вече уравнения (1) и (2). Да отбележим, че в търсеното диференциално уравнение диференцирането трябва да става относно θ, а в уравненията (1) и (2) производните са относно времето t. Ето защо при извеждането на диференциалното уравнение за $\rho(\theta)$ ще се наложи многократно да ее използува правилото за диференциране на функция от функция. Може да се каже, че това е един от главните моменти.

Вече знаем полярното уравнение на коничните сечения

$$\rho = \frac{p}{1+e\cos\theta} \tag{4}$$

(вж. (7.10)). Следователно (3) трябва да има вида (4), т. е. неизвестната функция, която търсим, трябва да бъде от вида $\rho(\theta) = \frac{p}{1+e\cos\theta}$. Тъй като функцията $\frac{1}{\rho(\theta)} = \frac{1+e\cos\theta}{p}$ е значително по-проста от $\rho(\theta)$, няма да се придържаме стриктно към програмата от предния абзац, а ще намерим диференциално уравнение,

в което неизвестна функция е $\frac{1}{\rho(\theta)}$. И така да положим

$$u(\theta) = \frac{1}{\rho(\theta)}. \tag{5}$$

Да напомним, че в §11 означихме с $(R(t), Q(t))$ полярните координати на точката B в момента T. Тъй като съгласно (3) $\rho(\theta)$ е полярният радиус на B, когато полярният ъгъл е θ, функциите $R(t)$, $Q(t)$ и $\rho(\theta)$ ще бъдат свързани с равенството

$$R(t) = \rho(Q(t)). \tag{6}$$

От (5) и (6) добиваме и следната връзка:

$$R(t) = \frac{1}{u(Q(t))} \tag{7}$$

между $R(t)$, $Q(t)$ и $u(\theta)$. Да отбележим още, че по силата на (7) законът за площите (2) може да се запише и във вида

$$Q'(t) = 2C\,u^2(Q(t)). \tag{8}$$

Ако сега диференцираме (7), ще получим

$$R'(t) = -\frac{u'(Q(t)).Q'(t)}{u^2(Q(t))}, \tag{9}$$

което заедно с (8) дава

$$R'(t) = -2C\,u'(Q(t)). \tag{9}$$

В първото от равенствата (11.8) заместваме R, Q' и R' с равните им от (7), (8) и (9) и получаваме

$$x' = -2C\,u'(Q).\cos Q - \frac{1}{u(Q)}\sin Q\,.\,2C\,.\,u^2(Q)$$

или

$$x' = -2C(u'(Q)\cos Q + u(Q)\sin Q), \tag{10}$$

където за краткост вместо $Q(t)$ е писано Q.

Ако диференцираме (10), ще получим

$$x'' = -2C\,(u''(Q).Q'.\cos Q - u'(Q).\sin Q.Q' + u'(Q).Q'.\sin Q + u(Q).\cos Q.Q'),$$

откъдето, като използуваме (8), добиваме

$$x'' = -4C^2u^2(Q)\cos Q\,(u''(Q) + u(Q)). \tag{11}$$

По този начин лявата страна на (1) е изразена чрез функцията u и втората ѝ производна. За да направим същото и с дясната страна, ще заместим x и y с равните им от (11.7). Тогава

$$(12)\qquad -\frac{\alpha x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{\alpha R(t)\cos Q(t)}{R^3(t)}=-\alpha u^2(Q)\cos Q,$$

където беше използувано още и (7).

Съгласно (1) десните страни на (11) и (12) трябва да са равни, т. е.

$$-4C^2u^2(Q)\cos Q\,(u''(Q)+u(Q))=-\alpha u^2(Q)\cos Q,$$

откъдето чрез деление на $-4C^2u^2(Q)\cos Q$ получаваме

$$(13)\qquad u''(Q(t))+u(Q(t))=\frac{\alpha}{4C^2}.$$

Тъй като (13) е изпълнено за всяко t и при изменението на t полярният ъгъл $Q(t)$ сигурно пробягва дефиниционната област на функцията (3), уравнението (13) ще бъде изпълнено за всяко θ от тази дефиниционна област. И така функцията u удовлетворява диференциалното уравнение

$$(14)\qquad u''+u=\frac{\alpha}{4C^2}.$$

Диференциалните уравнения от този тип изучихме в гл. 7. За да решим (14), трябва най-напред да решим хомогенното уравнение

$$(15)\qquad u''+u=0$$

и след това към общото решение на (15) да прибавим някакво частно решение на (14).

Вече знаем, че функциите, които удовлетворяват (15), са

$$(16)\qquad M\cos\theta+N\sin\theta,$$

където M и N са произволни константи, а (14) сигурно се удовлетворява от константата $\frac{\alpha}{4C^2}$. Ето защо общото решение на (14) е

$$(17)\qquad u=M\cos\theta+N\sin\theta+\frac{\alpha}{4C^2}.$$

Ако положим

$$(18)\qquad \frac{4C^2}{\alpha}=p,$$

общото решение (17) добива вида

$$(19)\qquad u=\frac{pM\cos\theta+pN\cos\theta+1}{p}.$$

Нека сега $e\geq 0$ и θ_0 са двойка полярни координати на точката $(pM,\ pN)$. Тогава

$$pM=e\cos\theta_0,\qquad pN=e\sin\theta_0$$

и като заместим тези изрази в (19), ще получим

$$u=\frac{e(\cos\theta\cos\theta_0+\sin\theta\sin\theta_0)+1}{p},$$

откъдето

$$(20)\qquad u=\frac{1+e\cos(\theta-\theta_0)}{p}.$$

Разбира се, θ_0 е една константа. Без ограничение на общността можем да считаме, че тя е 0, тъй като можем да завъртим координатната система на ъгъл θ_0. И така всяко решение на (14) при подходяща координатна система има вида

$$(21)\qquad u=\frac{1+e\cos\theta}{p},$$

откъдето, като си припомним (5), виждаме, че полярното уравнение на орбитата на тяло от Слънчевата система действително има вида (4).

С това е доказано, че орбитите на планетите са конични сечения, в един от фокусите на които се намира Слънцето. Това твърдение е известно под названието втори закон на Кеплер.

Първият и вторият закон на Кеплер дават възможност по принцип да определяме положението на едно светило във всеки момент. За това са нужни три наблюдения на тялото. Наистина двете от тях са достатъчни, за да се определи равнината на движението, а след това трите дават възможност да се намери и орбитата, тъй като в (20) има само три неизвестни константи. По-нататък само две от наблюденията са достатъчни, за да се намери площната скорост и след това да се изчислява положението на светилото в произволен момент. Тъй като съгласно (20) видът на орбитата не се мени с времето, а площната скорост е постоянна, виждаме, че движенията на телата от Слънчевата система са периодични, когато орбитите им са елиптични. Това е и типичният наблюдаем случай, защото при параболична или хиперболична орбита светилото минава около Слънцето само веднаж.

Вече видяхме, че движението на една планета около Слънцето е периодично. Времето T, за което една планета прави пълна обиколка около Слънцето, се нарича *период* на тази планета.

Периодът на една планета може да се пресметне, като се раздели лицето на елипсата, по която тя обикаля, с площната скорост на планетата. Нека полярното уравнение на орбитата на планетата е

(1) $$\rho = \frac{p}{1+e\cos\theta} \qquad (p>0,\ 0 \leqq e < 1).$$

От §8 знаем, че лицето S на елипсата с това уравнение се дава от формулата

(2) $$S = \frac{\pi p^2}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Но съгласно (12.18) имаме

(3) $$p = \frac{4C^2}{\alpha},$$

където C е площната скорост на планетата (вж. 11.9)), а α е една константа, която ни най-малко не зависи от планетата (вж. (10.5)). Ако заместим p от (3) в (2) ще получим

(4) $$S = \frac{16\pi}{\alpha^2} \cdot \frac{C^4}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Ето защо за периода T на планетата намираме

(5) $$T = \frac{S}{C} = \frac{16\pi}{\alpha^2} \cdot \frac{C^3}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

С оглед да дадем още едно физическо тълкуване на константата α ще напомним, че голямата полуос на елипсата (1) се дава от формулата $a = \frac{p}{1-e^2}$ (вж. (8.3)), която заедно с (3) дава

(6) $$a = \frac{4}{\alpha} \cdot \frac{C^2}{1-e^2}.$$

Сега от (5) и (6) следва, че

(7) $$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\alpha}.$$

Да забележим, че от дясната страна на това равенство стои число, което ни най-малко не зависи от планетата. И така *отношението на квадрата на периода на една планета към куба на голямата полуос на орбитата ѝ не зависи от планетата.* Следователно това отношение е едно и също за всички планети. Това е третият закон на Кеплер.

Задачи към глава 8

1. Като се използват полярни координати, да се намерят лицата на множествата, определени от неравенствата:

а) $(x^2+y^2)^2 \leqq a^2 x y \qquad (a>0).$

Отг. $\frac{1}{4}a^2$.

б) $(x^2+y^2)^4 \leqq a^4 y^4 \qquad (a>0).$

Отг. $\frac{\pi}{2}a^2$.

в) $\begin{cases} 0 \leqq \theta \leqq \pi \\ 0 \leqq \rho \leqq a(1+\cos\theta) \end{cases} \qquad (a>0)$

Отг. $\frac{3\pi}{4}a^2$.

2. Да се докаже, че за всяка точка $M(x, y)$ от кривата

$$x^2+y^2=(p-ex)^2$$

отношението на разстоянието от M до началото на координатната система и на разстоянието от M до правата с уравнение $x=\frac{p}{e}$ не зависи от M. Каква е стойността на тази константа?

Отг. e.

3. Без да се използва уравнението (7.9), да се изведат полярните уравнения на параболата и хиперболата.

4. Да се намери полярното уравнение на орбитата на една планета, като вместо първото от уравненията (10.5) се използва второто.

СЪДЪРЖАНИЕ

Увод

Глава 1. **Полиноми**

§ 1. Степен на полином 30
§ 2. Геометрична прогресия 31
§ 3. Разлагане на полиномите на множители 32
§ 4. Принцип за сравняване на коефициентите 34
§ 5. Някои приложения на принципа за сравняване на коефициентите 36
§ 6. Полиномите $\binom{x}{k}$ 38
§ 7. Нютонов бином 39
§ 8. Някои приложения на бинома на Нютон 41
§ 9. Поведение на полиномите при неограничено нарастване на аргумента 45
§ 10. Един пример 48
Задачи към глава I 50

Глава 2. **Непрекъснати функции**

§ 1. Движения и функции 53
§ 2. Непрекъснатост 55
§ 3. Примери на непрекъснати функции 60
§ 4. Някои приложения на непрекъснатостта в алгебрата 64
§ 5. Някои приложения на непрекъснатостта в геометрията 67
§ 6. Някои приложения на непрекъснатостта във физиката 72
§ 7. Равномерно движение 75
§ 8. Една характеристика на линейните функции 78
§ 9. Функционално уравнение на показателната функция 84
§ 10. Функционално уравнение на логаритмичната функция 86
Задачи към глава 2. 88

Глава 3. **Производна на функция**

§ 1. Скорост на равномерното движение 90
§ 2. Средна скорост 91
§ 3. Моментна скорост 93
§ 4. Тангента към крива 94
§ 5. Граници на функции 96

§ 6. Някои основни граници 100
§ 7. Производни 103
§ 8. Правила за пресмятане на производни 106
§ 9. Производни на някои елементарни функции 110
§ 10. Фундаментално свойство на производните 114
§ 11. Функции, които съвпадат с производната си 116
§ 12. Хиперболични функции 120
§ 13. Производна на показателната функция 123
§ 14. Производна на логаритмичната функция 124
§ 15. Таблица на производните 125
Задачи към глава 3 126

Глава 4. **Някои приложения на производните**

§ 1. Монотонни функции 132
§ 2. Втора производна 136
§ 3. Екстремуми на функции 136
§ 4. Някои задачи за екстремум 143
§ 5. Изпъкнали функции 145
§ 6. Изследване на функции 150
§ 7. Неравенство на Коши между средната аритметична и средната геометрична 161
§ 8. Неравенство на Хьолдер 162
§ 9. Неравенство на Минковски 163
Задачи към глава 4 164

Глава 5. **Пресмятане стойностите на функциите**

§ 1. Пресмятане на числото e 167
§ 2. Пресмятане на естествените логаритми на числата 172
§ 3. Пресмятане на десетичните логаритми на числата 178
§ 4. Пресмятане на стойностите на $(1+x)^n$ 179
§ 5. Пресмятане на числото π 185
§ 6. Пресмятане стойностите на $\sin x$ и $\cos x$ 190
Задачи към глава 5 194

Глава 6. **Някои диференциални уравнения от първи ред**

§ 1. Интегрално смятане 195
§ 2. Пресмятане на лица 204
§ 3. Пресмятане на обеми 210
§ 4. Изтичане на течности 215
§ 5. Уравнението $y'=a\,y$ 220
§ 6. Уравнението $y'=a\,y+b$ 223
§ 7. Общо линейно уравнение от първи ред 226
§ 8. Някои приложения в геометрията 230
Задачи към глава 6 232

Глава 7. **Някои диференциални уравнения от втори ред**

§ 1. Функции, които се диференцират като тригонометричните 238
§ 2. Функции, които се диференцират като хиперболичните 240

§ 3. Ускорение 241
§ 4. Основен закон на динамиката 242
§ 5. Движение на точка под действие на еластична сила 244
§ 6. Движение на точка под действието на отблъскваща сила, пропорционална на пътя 249
§ 7. Отчитане на съпротивлението на средата 251
§ 8. Действие на външни сили 256
§ 9. Явлението резонанс 259
§ 10. Друг случай на резонанс 263
Задачи към глава 7 265

Глава 8. Движение на планетите

§ 1. Полярен радиус и полярен ъгъл 296
§ 2. Полярни координати 267
§ 3. Пресмятане на лица в полярни координати 270
§ 4. Конични сечения 272
§ 5. Декартови уравнения на коничните сечения 277
§ 6. Хиперболичните функции и хиперболата 283
§ 7. Полярни уравнения на коничните сечения 287
§ 8. Намиране лицето на елипсата по зададено полярно уравнение 293
§ 9. Закон за гравитацията 293
§ 10. Диференциални уравнения на движението на една планета 294
§ 11. Закон за площите 297
§ 12. Орбити на планетите 300
§ 13. Връзка между движенията на различните планети 304
Задачи към глава 8. 305

Любомир Николов Петрушев
Доц. Иван Рачев Проданов

ПЪРВИ СТЪПКИ В АНАЛИЗА

Редактор **доц. Друми Байнов**
Художник на корица **Георги Гаделев**

Художник-редактор **Магда Гедова**
Технически редактор **Симеон Айтов**
Коректор **Ева Близнашка**

Бълг. Издание I Л. Г. III 16 Темат. № 1386./74 г. Дадена за набор 2 X 1974 г. Подписана за печат 7. II. 1975 г. Излязла от печат 20. II. 1975 г. Формат 60×84/16 Печатни коли 19.25 Изд. коли 16,36 Тираж 10101 Поръчка № 1157 Цена 0,91 лв.

Държавно издателство „Народна просвета"
Д. П. „Г. Димитров"