Mat 1748 Hiver 2017

Méthodes de preuve

1. Preuve de $P \Rightarrow Q$

Nous allons voir deux techniques : la preuve directe et la preuve de la contraposée.

Preuve directe

On suppose que P est vraie et on en déduit que Q est vraie.

Assertion: $P \Rightarrow Q$

Preuve. Supposons que P est vraie.

$\vdots$

Donc Q est vraie. $\square$

Voici un exemple.

1.1. **Proposition.** *Soit* $x \in \mathbb{R}$. *Si* $-1 < x < 0$ *alors* $x^3 > x$.

Preuve. Supposons que $-1 < x < 0$.

Donc $x > -1$ et $x < 0$. En multipliant l'inégalité $x > -1$ par le nombre négatif x, on obtient
$$x^2 < -x.$$
En multipliant l'inégalité $x > -1$ par -1, on obtient
$$-x < 1.$$
Donc $x^2 < -x < 1$, donc $x^2 < 1$. En multipliant cette dernière inégalité par x, on obtient enfin $x^3 > x$. $\square$

Preuve de la contraposée (aussi appelée "preuve indirecte")

Pour prouver que $P \Rightarrow Q$ est vraie, il suffit de prouver que $\neg Q \Rightarrow \neg P$ est vraie. En effet ces deux formules sont équivalentes, donc si une est vraie alors l'autre l'est aussi. La *preuve indirecte* de $P \Rightarrow Q$ consiste à faire une preuve directe de l'implication $\neg Q \Rightarrow \neg P$.

Assertion: $P \Rightarrow Q$

Preuve. Supposons que $\neg Q$ est vraie.

$\vdots$

Donc $\neg P$ est vraie.
Ceci montre que $\neg Q \Rightarrow \neg P$ est vraie, donc $P \Rightarrow Q$ est vraie. $\square$

1.2. **Proposition.** *Soit $n \in \mathbb{Z}$. Si n^2 est pair, alors n est pair.*

Preuve. La contraposée est:

(1) *Si n est impair, alors n^2 est impair.*

On fait une preuve directe de (1). Supposons que n est impair. Alors il existe $a \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2a + 1$. Alors $n^2 = (2a+1)^2 = 4a^2 + 4a + 1 = 2(2a^2 + 2a) + 1$, donc $n^2 = 2N + 1$ où N est un entier (en fait $N = 2a^2 + 2a$), donc n^2 est impair. Ceci démontre (1), donc la proposition est démontrée. □

Exercice. Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. Démontrez l'implication

Si ab est pair, alors au moins un des entiers a, b est pair.

2. Preuve de $P \Leftrightarrow Q$

Pour prouver $P \Leftrightarrow Q$, on doit prouver les deux implications $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$.

3. Preuve par séparation des cas

Supposons qu'on veut prouver une assertion Q, sachant qu'une assertion $P_1 \vee P_2$ est vraie. La méthode par séparation des cas consiste à faire deux preuves :

- on prouve que si P_1 est vraie, alors Q est vraie
- on prouve que si P_2 est vraie, alors Q est vraie.

Assertion: Q

Preuve. On sait que $P_1 \vee P_2$ est vraie.

- Supposons que P_1 est vraie, alors ..., donc Q est vraie.
- Supposons que P_2 est vraie, alors ..., donc Q est vraie.

Donc Q est démontrée. □

Voici deux exemples de preuves par séparation des cas.

3.1. **Proposition.** *Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $0 \leq \frac{x+|x|}{2} \leq |x|$.*

Preuve. On sait que $x \geq 0$ ou $x < 0$.

- Si $x \geq 0$ alors $|x| = x$, donc $\frac{x+|x|}{2} = \frac{x+x}{2} = x = |x|$, donc $0 \leq \frac{x+|x|}{2} \leq |x|$.
- Si $x < 0$ alors $|x| = -x$, donc $\frac{x+|x|}{2} = \frac{x-x}{2} = 0$, donc $0 \leq \frac{x+|x|}{2} \leq |x|$.

Donc $0 \leq \frac{x+|x|}{2} \leq |x|$. □

3.2. **Proposition.** *Soit n un entier qui n'est pas divisible par 3. Alors n^2-1 est divisible par 3.*

Preuve. Puisque n n'est pas un multiple de 3, on a :

n est 1 de plus qu'un multiple de 3 **ou** n est 2 de plus qu'un multiple de 3.

- Supposons que n est 1 de plus qu'un multiple de 3. Alors il existe $a \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 3a+1$. Alors $n^2-1 = (3a+1)^2-1 = 9a^2+6a+1-1 = 3(3a^2+2a)$, donc n^2-1 est divisible par 3.
- Supposons que n est 2 de plus qu'un multiple de 3. Alors il existe $a \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 3a+2$. Alors $n^2-1 = (3a+2)^2-1 = 9a^2+12a+4-1 = 3(3a^2+4a+1)$, donc n^2-1 est divisible par 3.

Donc n^2-1 est divisible par 3. $\square$

4. Preuve par contradiction

Si on veut démontrer l'assertion P en utilisant la technique de preuve "par contradiction", on commence par supposer que P est fausse et on déduit de cette hypothèse une conséquence impossible. Ceci montre qu'il est impossible que P soit fausse, donc P est prouvée.

Assertion: P

Preuve. Supposons $\neg P$.

$\vdots$

Contradiction. $\square$

Voici un exemple classique de preuve par contradiction. Cette preuve a été donnée par Aristote il y a plus de 2300 ans.

4.1. **Proposition.** *$\sqrt{2}$ est irrationnel.*

Dans la démonstration de 4.1 nous utiliserons le fait suivant, qui a été démontré en 1.2 :

(‡) *Si k est un entier tel que k^2 est pair, alors k est pair.*

Preuve de 4.1. Supposons que $\sqrt{2}$ est rationnel.
Alors il existe des entiers m et n tels que $\sqrt{2} = m/n$ (où $n \neq 0$). On peut choisir m et n de telle sorte que la fraction m/n soit réduite, ce qui signifie que le seul diviseur commun de m, n est 1. En particulier, m et n ne sont pas tous les deux pairs.

Mais $\sqrt{2} = m/n$ implique $2 = m^2/n^2$, donc $m^2 = 2n^2$, donc m^2 est pair. En vertu de (‡), on déduit que m est pair. Puisque m et n ne sont pas tous les deux pairs, on obtient:

n est impair.

Puisque m est pair, on a $m = 2a$ où a est un entier. Alors $4a^2 = m^2 = 2n^2$, donc $n^2 = 2a^2$, donc n^2 est pair et (‡) implique:

n est pair.

On a donc démontré que l'entier n est à la fois pair et impair ; autrement dit, l'hypothèse que $\sqrt{2}$ est rationnel a une conséquence impossible. Ceci termine la preuve par contradiction. $\square$

Preuve d'une implication $P \Rightarrow Q$ par contradiction

Ici on suppose que l'implication $P \Rightarrow Q$ est fausse et on en déduit une impossibilité. Rappelez-vous que $P \Rightarrow Q$ est fausse lorsque P est vraie et Q est fausse.

Assertion: $P \Rightarrow Q$

Preuve. Supposons que P est vraie et que Q est fausse.

$\vdots$

Contradiction. $\square$

Redémontrons 1.2 en utilisant cette technique.

Proposition. *Soit $n \in \mathbb{Z}$. Si n^2 est pair, alors n est pair.*

Preuve. Procédons par contradiction : supposons que n^2 est pair et que n est impair. Alors il existe $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que

$$n^2 = 2a \qquad \text{et} \qquad n = 2b + 1.$$

Alors $2a = n^2 = (2b+1)^2 = 4b^2 + 4b + 1$, donc

$$2(a - 2b^2 - 2b) = 1.$$

Ceci est absurde, car 2 fois un entier ne peut pas être égal à 1. Cette contradiction complète la démonstration. $\square$

Exercices

(1) Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrez que si $0 < a < 1$ alors $a^2 < a$. (Suggestion : preuve directe).

(2) Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrez que si a^5 est irrationnel, alors a est irrationnel. (Suggestion : preuve indirecte).

(3) Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. Montrez que si ab est pair, alors au moins un des entiers a, b est pair. (Suggestion : preuve indirecte).

(4) Si $x, y \in \mathbb{R}$, on définit

$$\min(x,y) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq y, \\ y & \text{si } x > y; \end{cases} \qquad \max(x,y) = \begin{cases} y & \text{si } x \leq y, \\ x & \text{si } x > y. \end{cases}$$

Faites une preuve par séparation des cas pour montrer que $\min(x,y)+\max(x,y) = x+y$.

(5) Soient $a < b$ des nombres rationnels. Montrez qu'il existe une infinité de nombres rationnels x satisfaisant $a < x < b$. (Suggestion : preuve par contradiction.)

(6) Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrez que $n^5 + 7$ est pair si et seulement si n est impair. Suggestion : faites une preuve directe de "n impair $\Rightarrow n^5+7$ pair", et une preuve indirecte de "n^5+7 pair $\Rightarrow n$ impair".

(7) Sur l'île des chevaliers et des coquins, les habitants A et B ont dit:
A: *Au moins un de nous deux est un coquin, et cette île est l'île de Maya.*
B: *Ce qu'a dit A est vrai.*
(a) Prouvez que A est coquin, au moyen d'une preuve par contradiction.
(b) Pouvez-vous dire si cette île est l'île de Maya? Pouvez-vous déterminer le type de B?

(8) Sur l'île des chevaliers et des coquins, les habitants A et B ont dit:
A: *Au moins un de nous deux est un coquin, ou cette île est l'île de Maya.*
B: *Ce qu'a dit A est vrai.*
(a) Prouvez que A est chevalier, au moyen d'une preuve par contradiction.
(b) Pouvez-vous dire si cette île est l'île de Maya? Pouvez-vous déterminer le type de B?

(9) Sur l'île des chevaliers et des coquins, les habitants A et B ont dit:
A: *Si je suis chevalier, alors B est coquin ou cette île est l'île de Maya.*
B: *Si je suis coquin alors A est chevalier ou cette île est l'île de Maya.*
(a) Prouvez que A est chevalier, au moyen d'une preuve par contradiction.
(b) Déterminez le type de B. Pouvez-vous dire si cette île est l'île de Maya?