Michał Pskit (193568)

Aproksymacja profilu wysokościowego

Metody numeryczne – zadanie 3

Wstęp

Celem projektu była implementacja i analiza dwóch metod aproksymacji interpolacyjnej - metody wykorzystującej wielomian interpolacyjny Lagrange'a oraz metodę wykorzystującą funkcje sklejane trzeciego stopnia. Metody zostały zweryfikowane dla rzeczywistych danych dostarczonych na potrzeby realizacji projektu z wykorzystaniem języka Python. Do prezentacji rezultatów w postaci wykresów użyta została biblioteka *matplotlib*, a także *math* do obliczeń matematycznych.

Dane

Właściwości obu metod zostały sprawdzone dla dwóch zróżnicowanych profili wysokościowych: ***Mount Everest*** *(zestaw MountEverest)* oraz ***Hel*** *(zestaw Hel_yeah)*. Pierwszy z nich to trasa o jednym wyraźnym wzniesieniu, a drugi charakteryzuje się znacznie większym zróżnicowaniem wysokości, ale za to w mniejszej skali.

Interpolacja Lagrange'a

Metoda aproksymacji interpolacyjnej za pomocą wielomianu Lagrange'a polega na konstruowaniu wielomianu stopnia *n*, który przechodzi przez zadany zbiór *n+1* punktów. Każdy punkt jest reprezentowany przez wielomian bazowy Lagrange'a:

$$\phi_i(x) = \prod_{j=1, j\neq i}^{n+1} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

dla i = 1, 2, ..., n+1

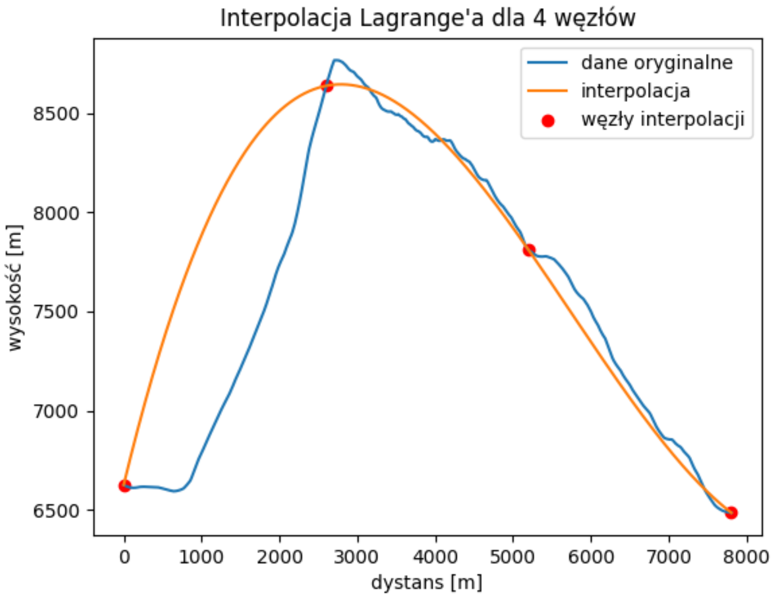
Następnie wielomiany są sumowane, aby utworzyć końcowy wielomian interpolacyjny:

$$F(x) = \sum_{i=1} y_i \phi_i(x)$$

Dzięki tej metodzie można uzyskać wielomian, który odwzorowuje wartości funkcji w zadanych punktach, oferując większą stabilność w porównaniu do klasycznej interpolacji wielomianowej.

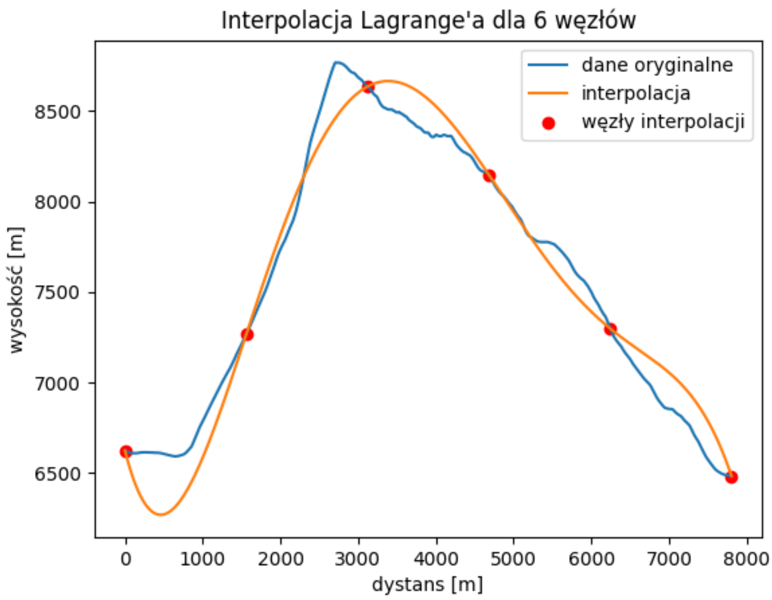
Analiza podstawowa interpolacji wielomianowej pierwszej trasy - Mount Everest

- równomierne rozmieszczenie 4 węzłów



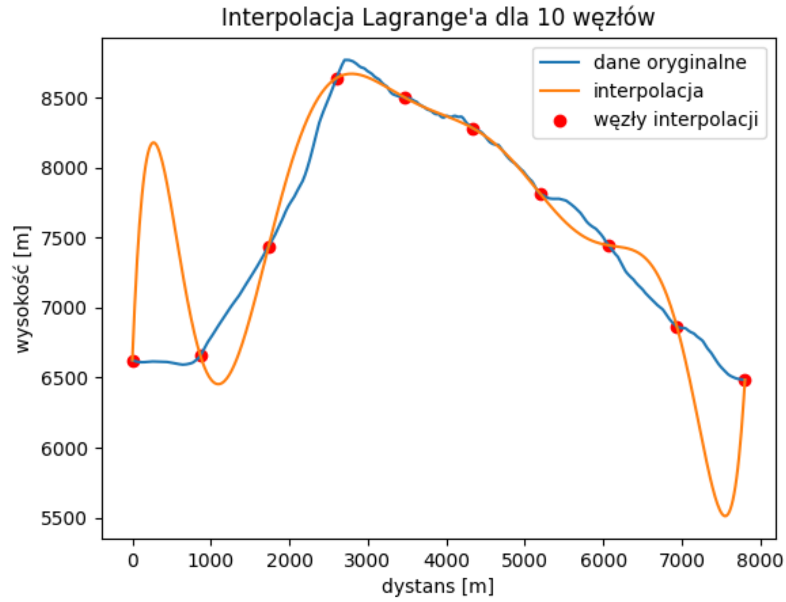
Interpolacja dla niewielkiej liczby węzłów cechuje się ograniczoną dokładnością przybliżenia. W prawej części wykresu, reprezentującej strome zbocze profilu wysokościowego, zauważalna jest nieco lepsza jakość interpolacji, ale wynika to wyłącznie z charakterystyki danych wejściowych.

- równomierne rozmieszczenie 6 węzłów



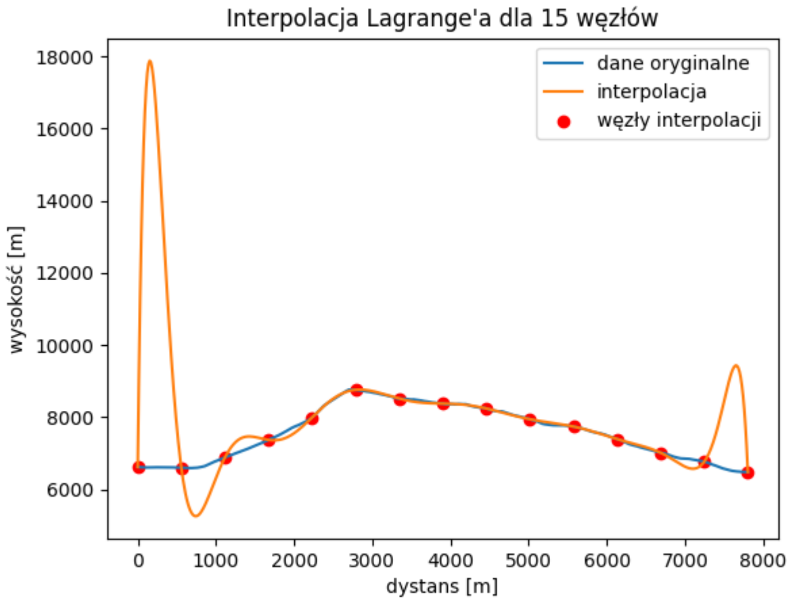
Niewielkie zwiększenie liczby węzłów sprawiło, że interpolacja lepiej pokrywa się z wartościami oryginalnych danych, jednak na brzegach przedziału widoczne są wyraźne oscylacje, będące efektem Rungego.

- równomierne rozmieszczenie 10 węzłów



Ponowne zwiększenie liczby węzłów poprawiło jakość odwzorowania środkowej części profilu, jednak spowodowało nasilenie efektu Rungego na brzegach przedziału.

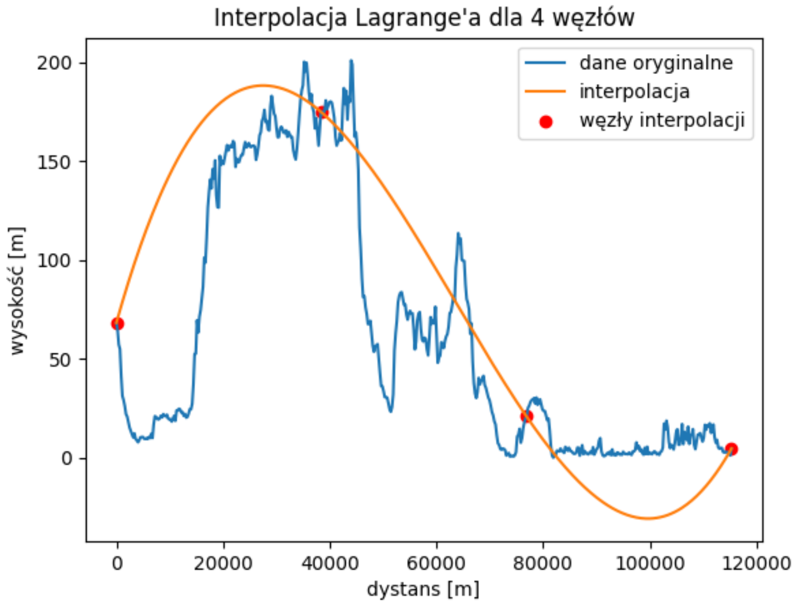
- równomierne rozmieszczenie 15 węzłów



Zwiększenie liczby węzłów do 15 poprawiło interpolację funkcji w środku przedziału, jednak oscylacje na krawędziach sprawiają, że dane interpolowane w ten sposób nie nadają się do użytku.

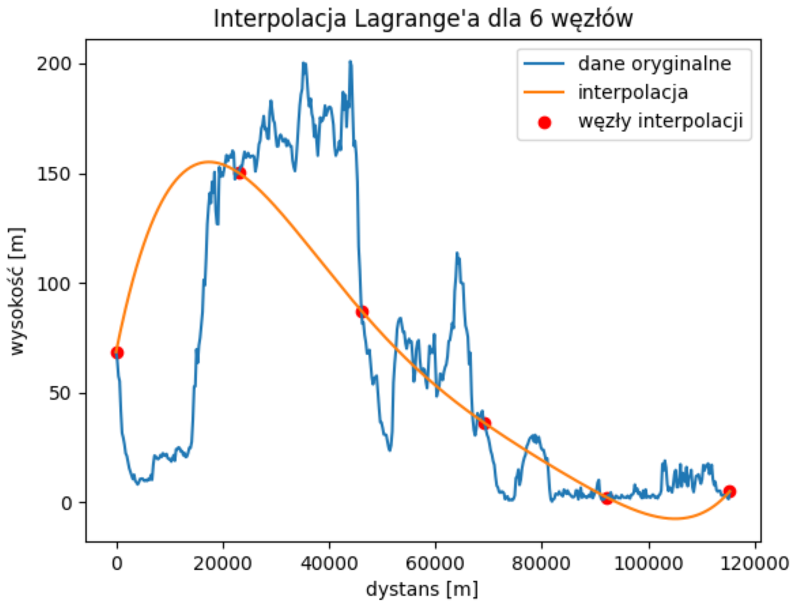
Analiza podstawowa interpolacji wielomianowej drugiej trasy - Hel

- równomierne rozmieszczenie 4 węzłów



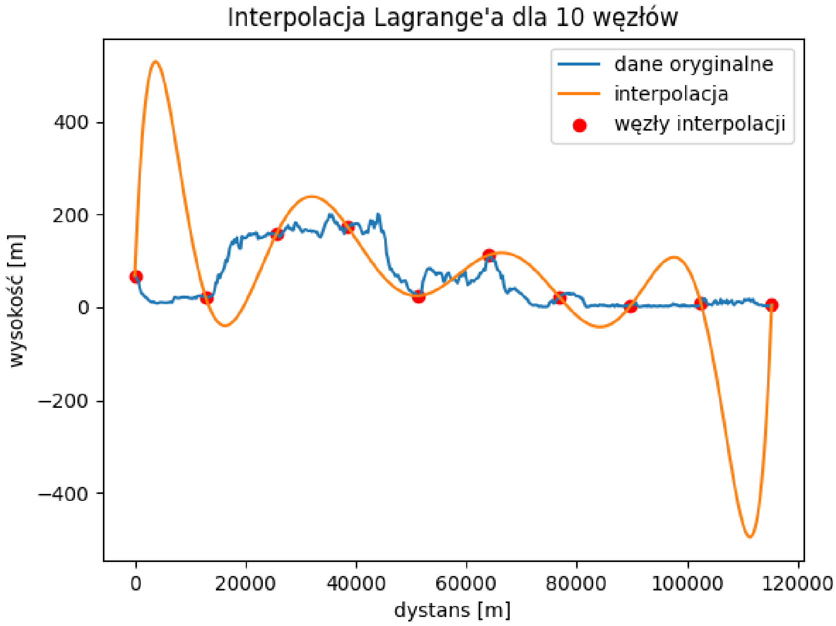
Ze względu na specyfikę powyższego profilu wysokościowego interpolacja dla niewielkiej liczby węzłów gorzej niż w poprzednim przypadku przybliża wejściowe dane. Wykres oddaje jedynie ogólny trend najwyższego wzniesienia, ale zupełnie pomija mniejsze z nich oraz fragmenty o niewielkich różnicach wysokości.

- równomierne rozmieszczenie 6 węzłów



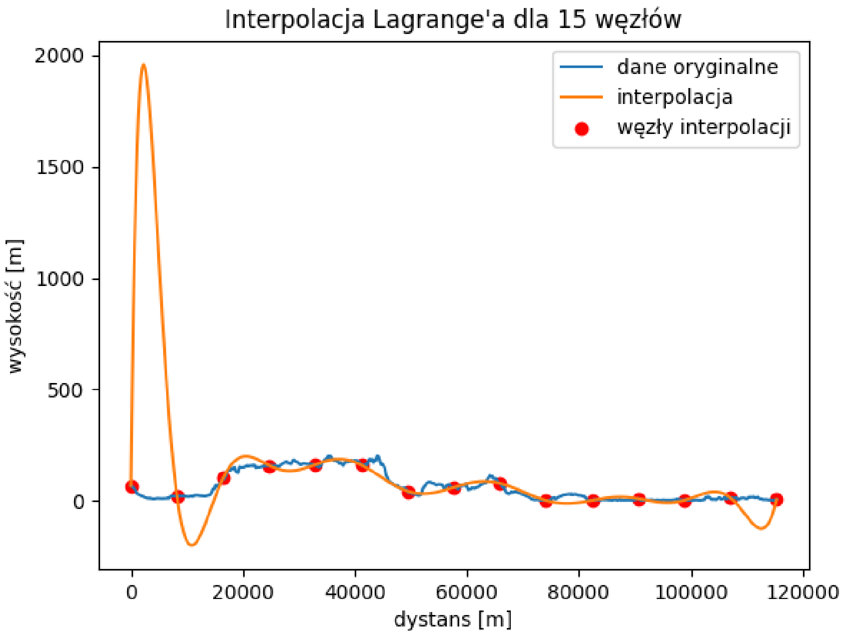
Niewielkie zwiększenie liczby węzłów nie poprawiło jakości interpolacji, ale sprawiło, że interpolacja w mniejszym stopniu wykracza poza zakres badanego profilu.

- równomierne rozmieszczenie 10 węzłów



Ponowne zwiększenie liczby węzłów nieco poprawiło jakość odwzorowania głównej części profilu, jednak spowodowało pojawienie się efektu Rungego na brzegach przedziału, co wyraźnie zaburza wykres interpolacji.

- równomierne rozmieszczenie 15 węzłów



Zwiększenie liczby węzłów do 15 poprawiło jakość interpolacji znacznej części profilu, ale jednocześnie spowodowało znaczący wzrost oscylacji, zwłaszcza po jednej ze stron wykresu. Wykres jest przez to całkowicie nieczytelny.

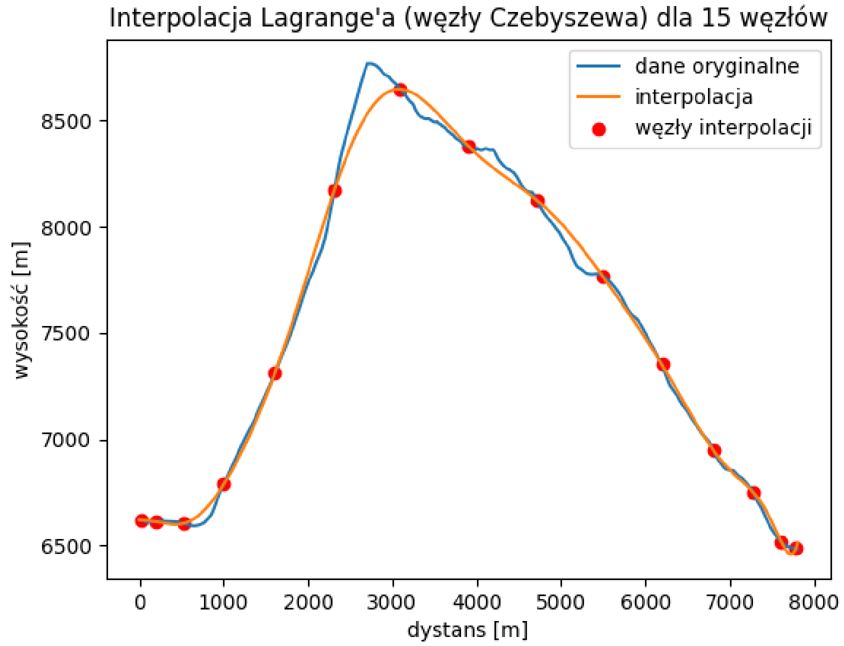
Analiza dodatkowa interpolacji - wykorzystanie węzłów Czebyszewa

W celu eliminacji efektu Rungego możliwe jest wykorzystanie węzłów Czebyszewa. Wiąże się to z zastosowaniem nierównomiernego rozłożenia węzłów, ze szczególnym uwzględnieniem ich gęstszego rozmieszczenia na brzegach przedziału. Są to węzły określone dla przedziału $x \in (-1,1)$ wzorem:

$$x_i = cos(\frac{2i+1}{2n})\,\pi \qquad \text{dla } i = 0, 1, 2, ..., n-1$$

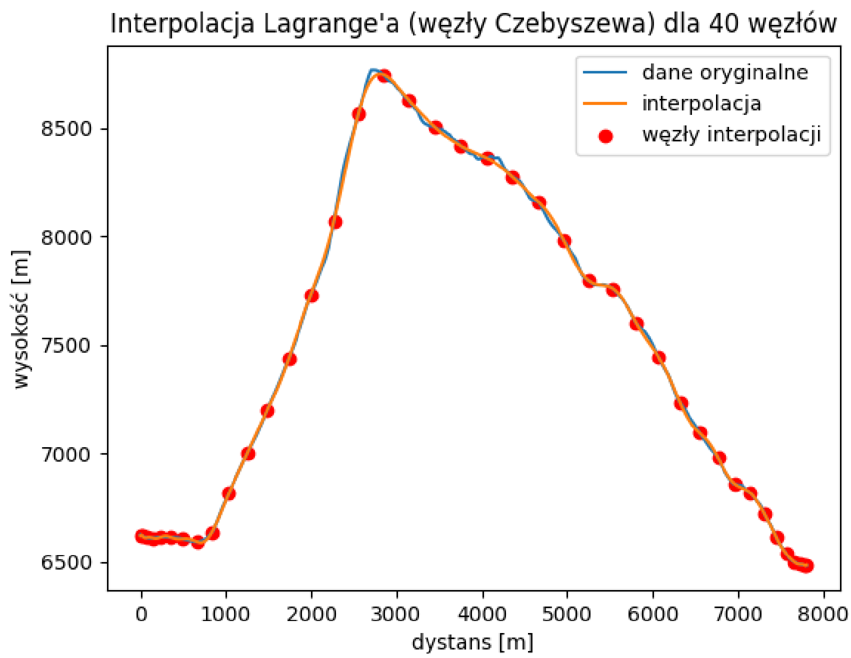
Tak wyliczone wartości muszą zostać jeszcze przeskalowane do przedziału odpowiedniego dla badanego profilu wysokościowego. Dalsze obliczenia przebiegają dokładnie tak, jak w przypadku równomiernie rozmieszczonych węzłów.

- nierównomierne rozmieszczenie 15 węzłów – Everest



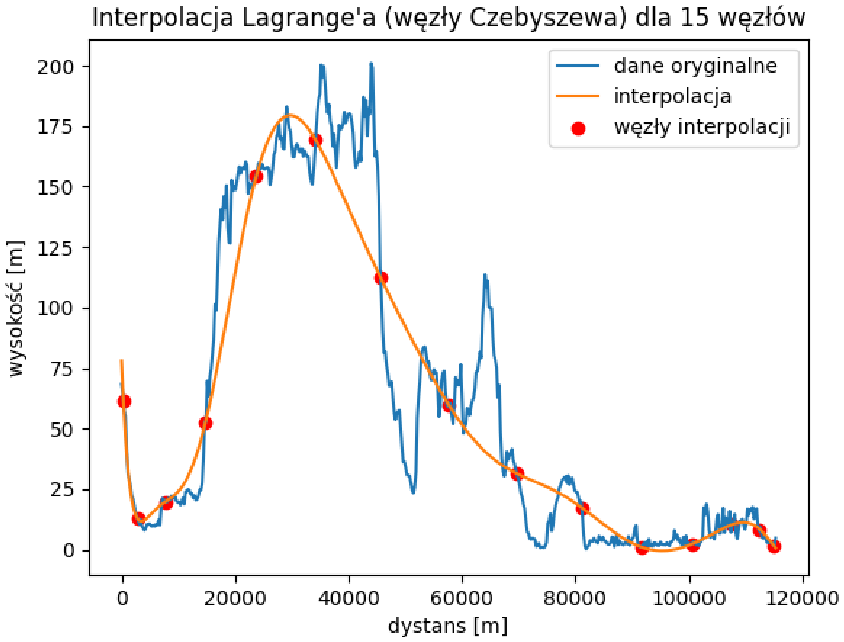
Zastosowanie nierównomiernego rozmieszczenia węzłów umożliwiło zachowanie dobrej jakości środkowej części wykresu, przy jednoczesnej eliminacji efektu Rungego.

- nierównomierne rozmieszczenie 40 węzłów – Everest



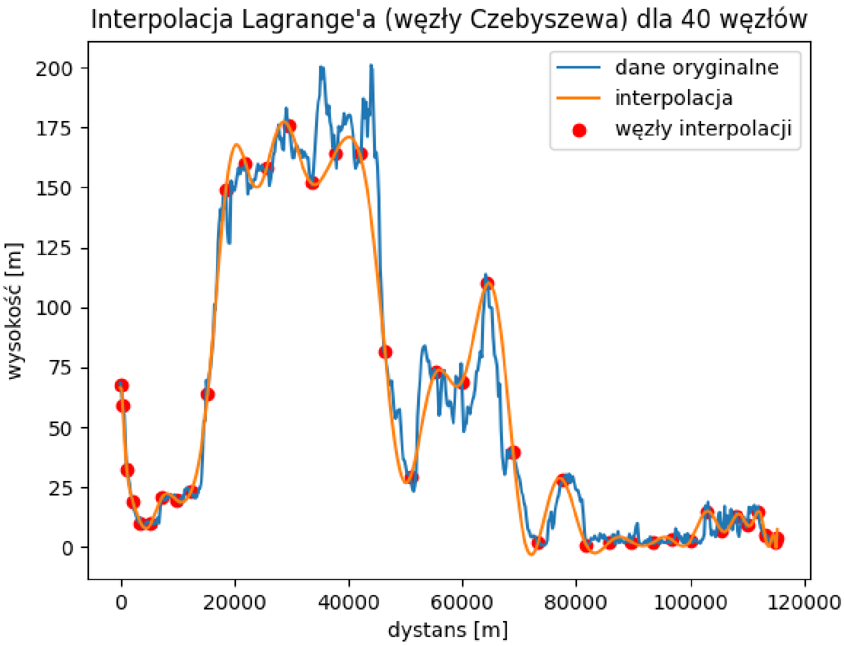
Zwiększenie liczby węzłów Czebyszewa pozwala uzyskać bardzo dokładną interpolację, niemal w całości pokrywającą się z oczekiwanym rezultatem.

- nierównomierne rozmieszczenie 15 węzłów – Hel



Zastosowanie węzłów Czebyszewa także w tym przypadku pozwala całkowicie wyeliminować efekt Rungego. Jednak sama interpolacja wciąż przedstawia bardzo ogólny zarys oczekiwanego profilu.

- nierównomierne rozmieszczenie 40 węzłów – Hel



Ponowne zwiększenie liczby węzłów zapewnia znaczne lepsze pokrycie trasy, ale ze względu na jej specyfikę i częste zmiany wysokości, dokładność interpolacji jest znacznie niższa niż w przypadku wcześniejszego zestawu danych. W celu poprawy jakości interpolacji należałoby dalej zwiększać liczbę węzłów, aż do osiągnięcia zadawalających rezultatów.

Interpolacja funkcjami sklejanymi trzeciego stopnia

Metoda interpolacji za pomocą funkcji sklejanych polega na utworzeniu n-1 podprzedziałów dla n węzłów. W każdym podprzedziale tworzymy funkcję wielomianową trzeciego stopnia. W i-tym podprzedziale wielomian ma postać:

$$S_i(x) = a_i + b_i (x - x_i) + c_i (x - xi)^2 + d_i (x - x_i)^3$$

W celu wyznaczenia współczynników *a, b, c, d* każdego wielomianu tworzymy układ *4(n-1)* równań i rozwiązujemy go za pomocą faktoryzacji LU. Po wyznaczeniu wielomianów, łączymy je w jedną funkcję tworząc funkcję sklejaną.

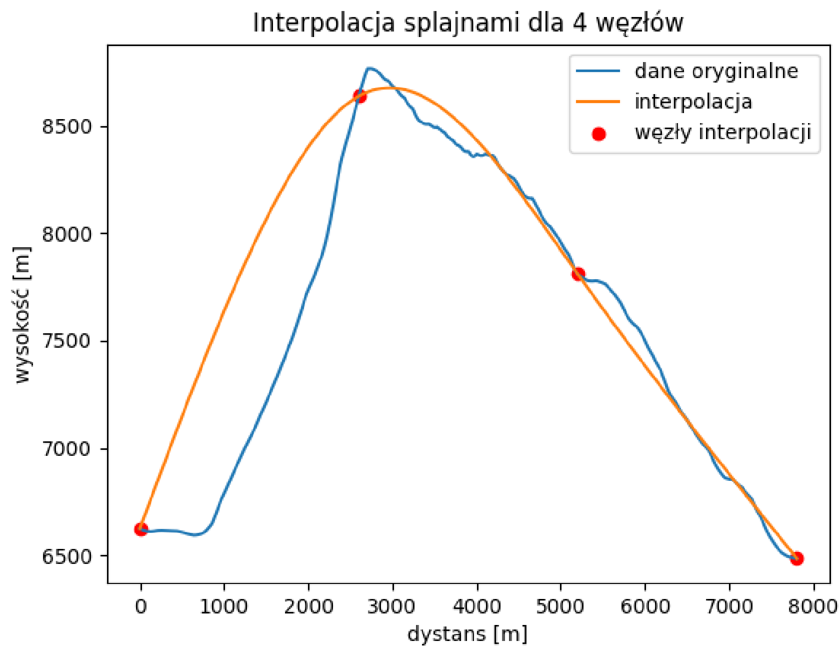
Warunki ciągłości funkcji oraz jej pierwszej i drugiej pochodnej w węzłach zapewniają gładkość tej funkcji na całym przedziale. Aby to osiągnąć, rozwiązujemy układ równań wynikający z tych warunków ciągłości, co pozwala na wyznaczenie współczynników dla każdego podprzedziału.

- równość funkcji w punktach węzłowych: $S_i(x_{i+1}) = S_{i+1}(x_{i+1})$
- ciągłość pierwszej pochodnej: $S_i'(x_{i+1}) = S_{i+1}'(x_{i+1})$
- ciągłość drugiej pochodnej: $S_i''(x_{i+1}) = S_{i+1}''(x_{i+1})$
- na krańcach: $S_0''(x_0) = 0$ i $S_i''(x_{i+1}) = 0$

Działanie powyższej metody zostało przetestowane dla tych samych zestawów danych, co w przypadku metody Lagrange' a oraz dla równomiernego rozkładu węzłów, aby zapewnić równe długości podprzedziałów.

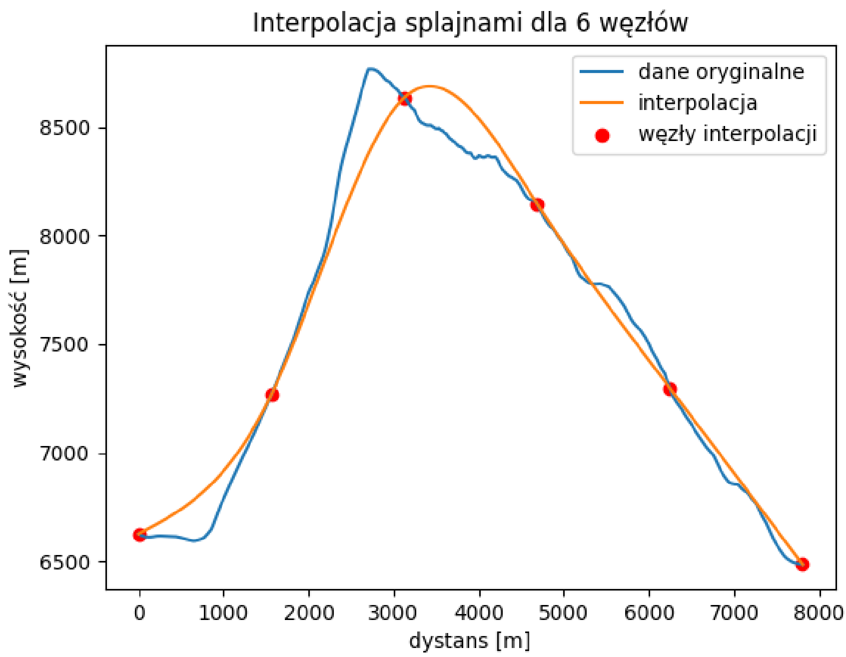
Analiza podstawowa interpolacji funkcjami sklejanymi pierwszej trasy - Mount Everest

- równomierne rozmieszczenie 4 węzłów



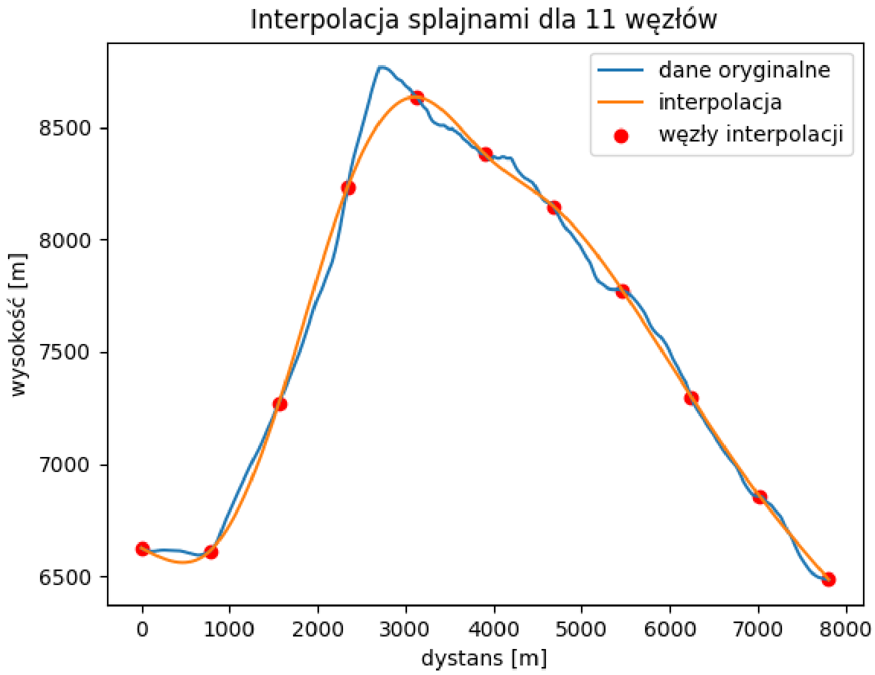
Interpolacja dla niewielkiej liczby węzłów wykazuje zbliżoną dokładność przybliżenia do metody Lagrange'a . Lepsze dopasowanie prawej części wykresu ponownie wynika z charakterystyki profilu oraz rozmieszczenia węzłów.

- równomierne rozmieszczenie 6 węzłów



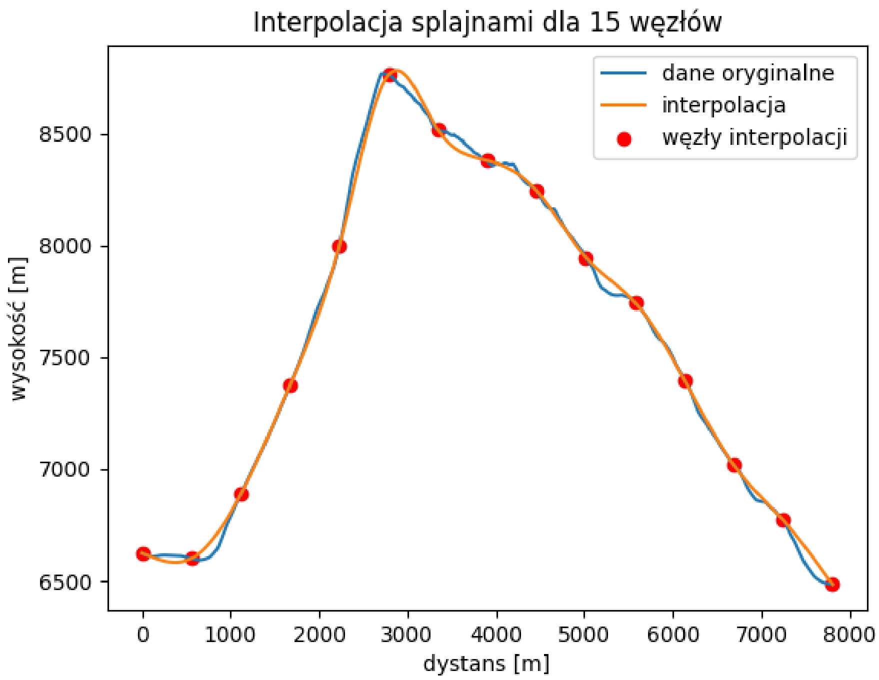
Już niewielkie zwiększenie liczby węzłów sprawiło, że interpolacja lepiej pokrywa się z wartościami oryginalnych danych, jednak uskoki w profilu wciąż wpływają na różnice między interpolacją a oczekiwanym rezultatem.

➢ równomierne rozmieszczenie 11 węzłów



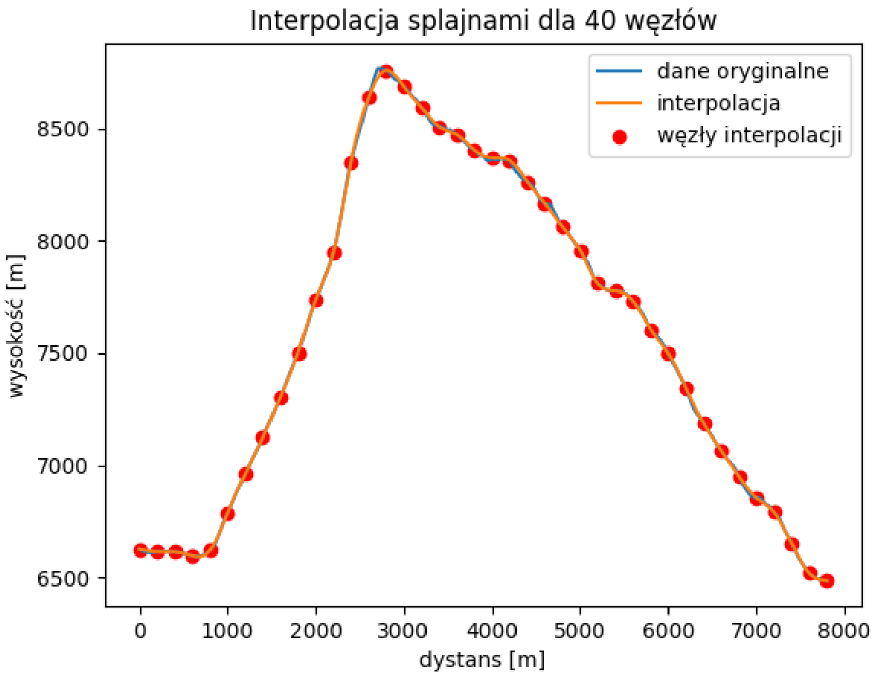
Jakość interpolacji wciąż rośnie. Zwiększenie liczby węzłów poprawia odwzorowanie profilu.

➢ równomierne rozmieszczenie 15 węzłów



Dalsze zwiększanie liczby węzłów cały czas poprawia jakość interpolacji, nie wpływając jednocześnie na występowanie efektu Rungego.

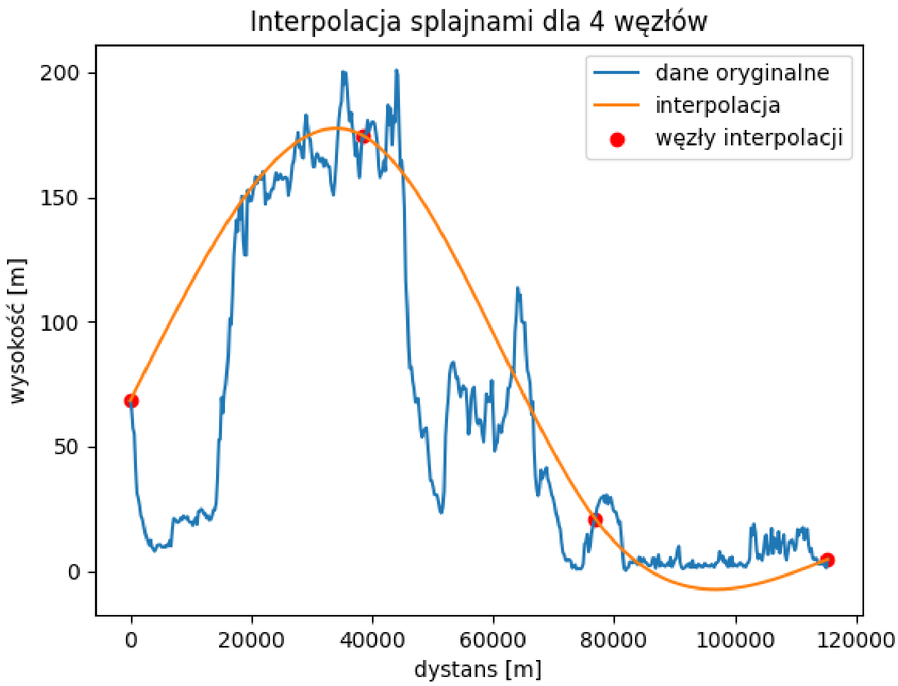
➢ równomierne rozmieszczenie 40 węzłów



Dla 40 węzłów interpolacja jest już niemal doskonała. Większe różnice są już trudne do dostrzeżenia na wykresie.

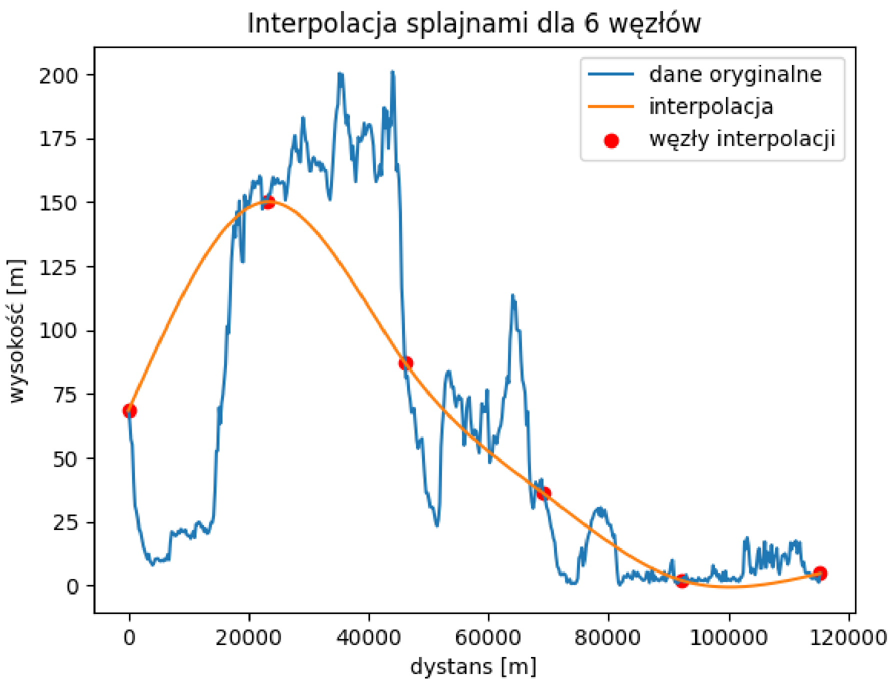
Analiza podstawowa interpolacji funkcjami sklejanymi drugiej trasy - Hel

- równomierne rozmieszczenie 4 węzłów



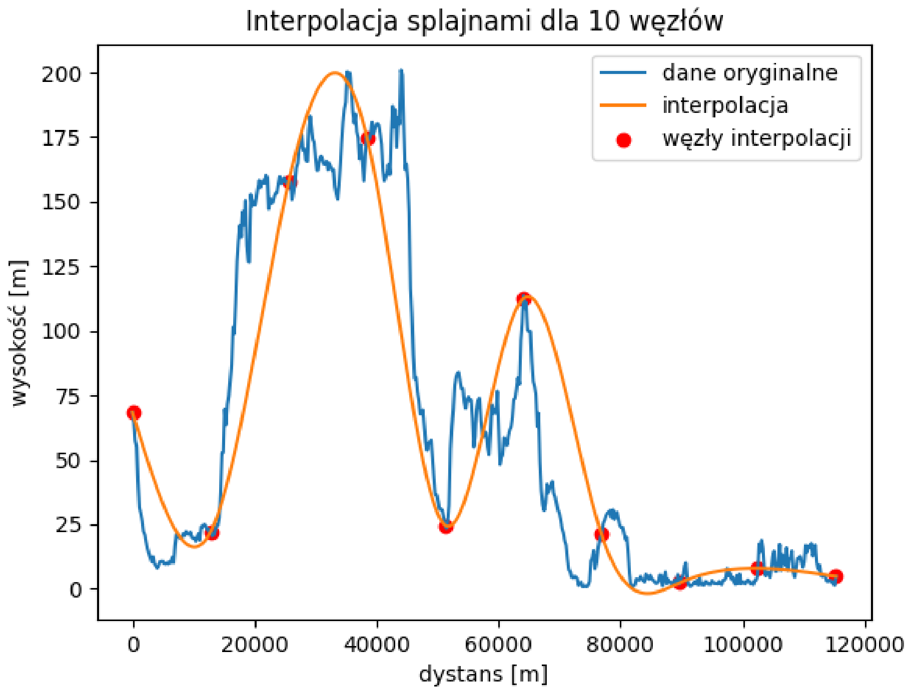
Dla niewielkiej liczby węzłów interpolacja ponownie nie różni się poziomem dokładności od metody wykorzystującej wielomian interpolacyjny.

- równomierne rozmieszczenie 6 węzłów



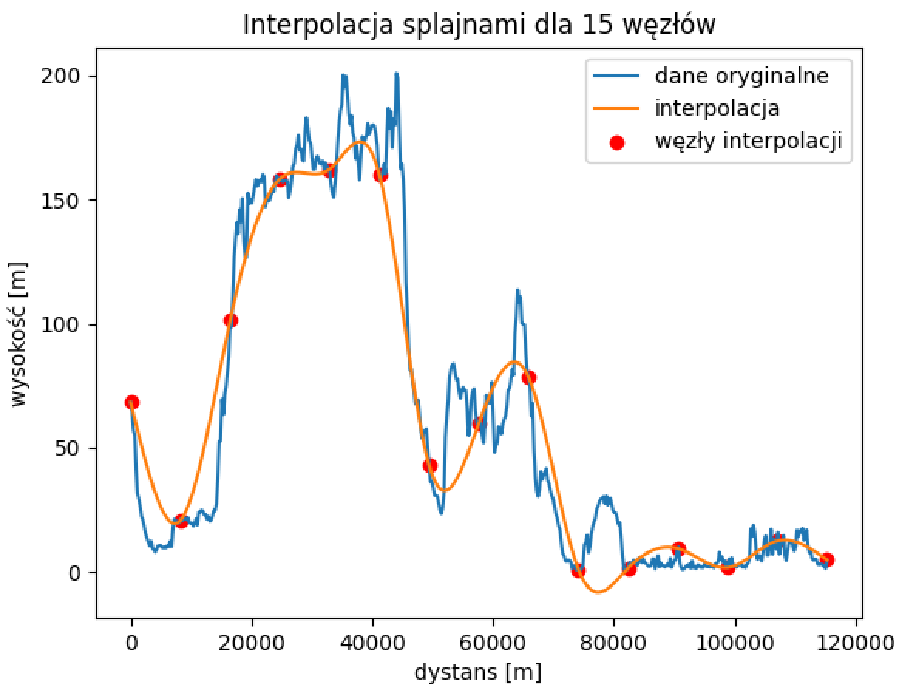
Charakterystyka profilu sprawia, że dla 6 węzłów nie jest dostrzegalna poprawa jakości interpolacji.

➢ równomierne rozmieszczenie 10 węzłów



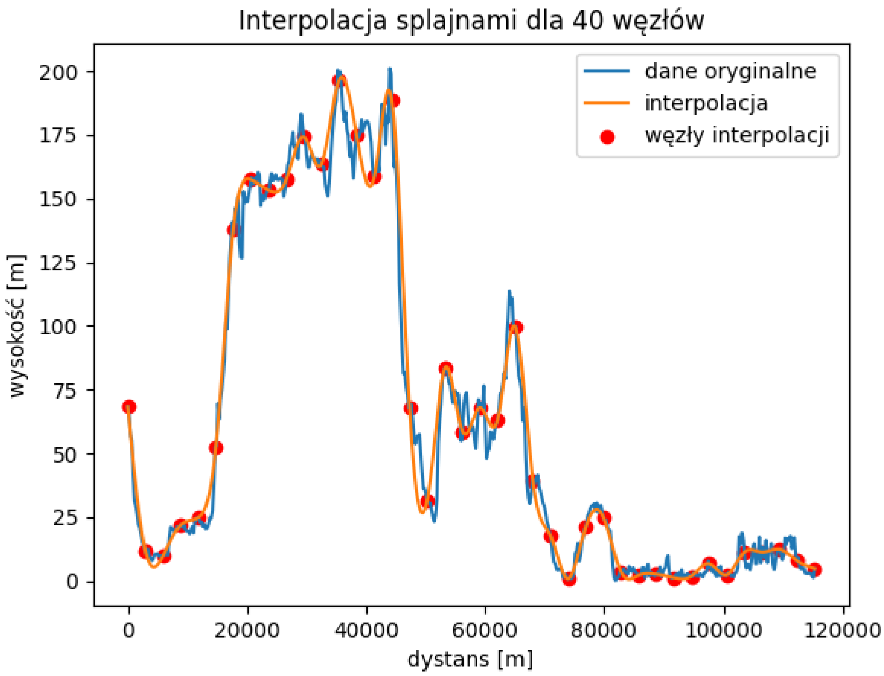
Dla 10 węzłów możliwe jest już wskazanie największych wzniesień profilu, a wykres interpolacji zaczyna przypominać kształtem dane wejściowe.

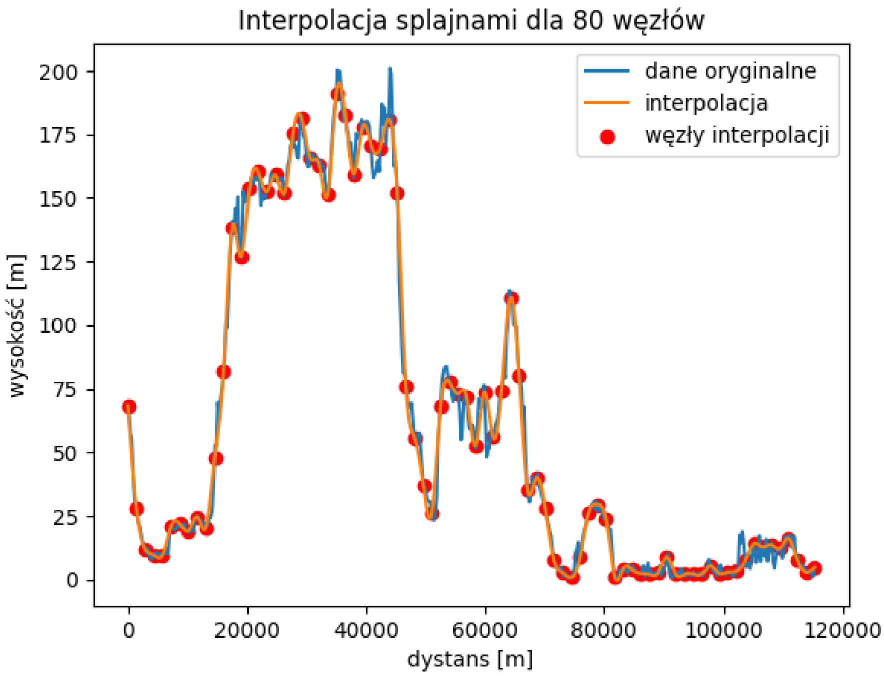
➢ równomierne rozmieszczenie 15 węzłów



Kolejne zwiększenie liczby węzłów poprawia wypłaszczenia względem poprzedniego wykresu, jednak wciąż bywa błędny dla wzniesień mieszczących się w większej części pomiędzy węzłami.

➢ równomierne rozmieszczenie 40 oraz 80 węzłów





Dalsze zwiększanie liczby węzłów coraz bardziej przybliża wykres interpolacji do oczekiwanego stanu. Ze względu na częste i niewielkie zmiany wysokości terenu dodawanie kolejnych węzłów do wykresu czyni go nieczytelnym. Dla tego przypadku danych efekt Rungego także nie występuje.

Podsumowanie

Metoda wykorzystująca wielomian interpolacyjny Lagrange'a, choć stosunkowo prosta w implementacji, okazała się nieskuteczna w wyznaczaniu dokładnej interpolacji dla równomiernie rozmieszczonych węzłów ze względu na występowanie oscylacji na brzegach przedziału. Efekt ten zwiększa się wraz z dalszym zwiększaniem liczby węzłów. Rozwiązaniem tego problemu jest zastosowanie nierównomiernego rozłożenia punktów, np. w postaci węzłów Czebyszewa. Takie rozwiązanie może jednak mieć negatywny wpływ na interpolację środkowej części przedziału.

Interpolacja wykorzystująca funkcje sklejane trzeciego stopnia była skuteczna dla równomiernie rozłożonych węzłów, a zwiększanie ich liczby tylko poprawiało dokładność przybliżenia. Wykazuje to brak podatności na efekt Rungego. Mimo większego skomplikowania obliczeń jest to metoda, w której nie trzeba martwić się rozkładem punktów interpolacji.

Obie metody łączy relacja między jakością interpolacji a liczbą węzłów - im większa liczba węzłów tym dokładniejsza interpolacja (z wyjątkiem równomiernych punktów dla metody Lagrange'a).

Nie bez wpływu na interpolację pozostaje także charakterystyka badanych profili. Dane równomiernie rosnące i malejące na dużych przedziałach są łatwiejsze do interpolacji niż profile o częstych uskokach terenu. Częstsze i nawet niewielkie różnice wysokości wymagają znacznie większej liczby węzłów w celu wyznaczenia dokładnej interpolacji.

Podsumowując, metoda interpolacji funkcjami sklejanymi powinna być lepszym wyborem, ze względu na brak efektu Rungego oraz wysoką dokładność. Natomiast metoda Lagrange'a może być dobrym wyborem w przypadku nierównomiernego rozmieszczenia punktów interpolacji, szczególnie gdy zastosowane zostaną węzły Czebyszewa.