Michał Pskit (193568)

Układy równań liniowych

Metody numeryczne – zadanie 2

Wstęp

Celem projektu była implementacja i analiza dwóch metod iteracyjnych - Jacobiego i Gaussa-Seidla oraz jednej metody bezpośredniej - faktoryzacji LU rozwiązywania układów równań liniowych. Metody zostały przetestowane dla danych układów równań z wykorzystaniem języka Python. W celu liczenia czasu wykonywania oraz prezentacji rezultatów użyte zostały dodatkowe biblioteki *time* i *matplotlib*, a także *math* do obliczeń matematycznych.

Zadania

- **Zadanie A**

  Rozwiązywane równanie macierzowe ma postać ***Ax = b***, gdzie:

  A to macierz o wymiarach $N{\times}N$ (dla N = 968), której elementy zostały określone jako:

  $a1 = 5 + 5$, $a2 = a3 = -1$

  x to wektor rozwiązań, które chcemy znaleźć

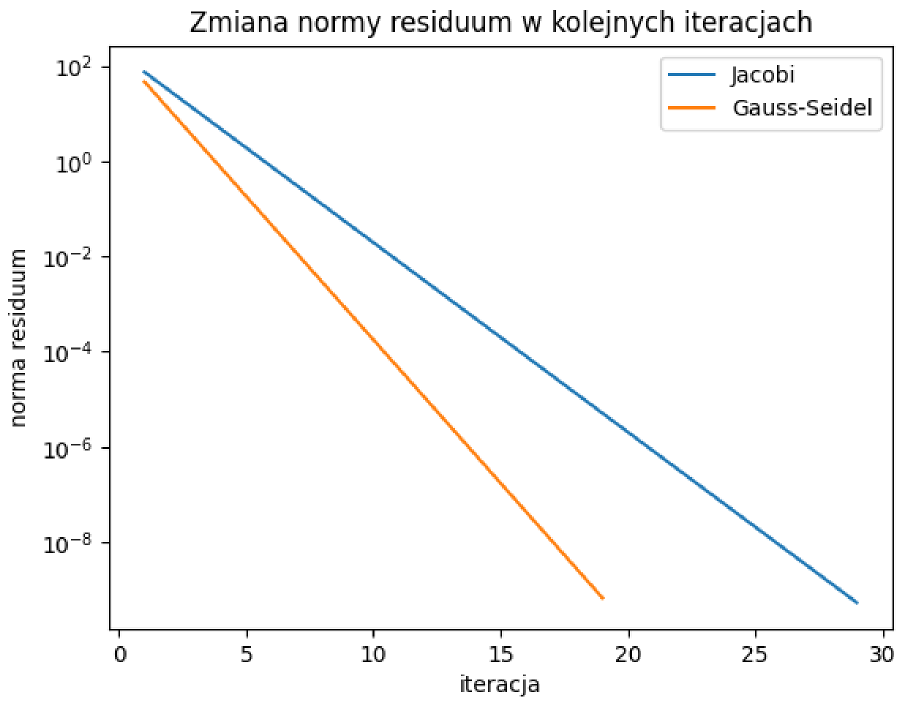
  b to wektor pobudzenia o długości N, którego n−ty element ma wartość $\sin(n \cdot (3 + 1))$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a1 & a2 & a3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a2 & a1 & a2 & a3 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a3 & a2 & a1 & a2 & a3 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a3 & a2 & a1 & a2 & a3 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & a3 & a2 & a1 \end{bmatrix}$$

- **Zadanie B**

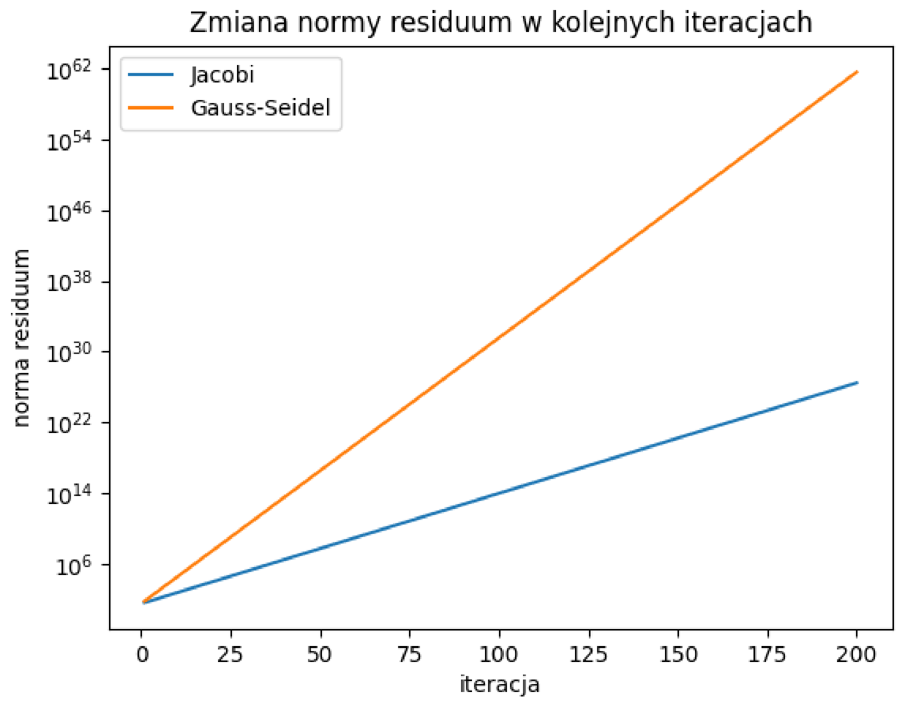
  Powyższe równanie zostało rozwiązane dwoma metodami - Jacobiego i Gaussa–Seidla. Kolejne iteracje były wykonywane dopóki norma residuum była większa niż 10^{-9}. Na podstawie rezultatów działania obu metod można zaobserwować, że metoda Gaussa–Seidla potrzebuje mniejszej liczby iteracji do osiągnięcia rozwiązania o założonej dokładności. Także czas wykonywania jest niższy niż w przypadku metody Jacobiego.

metoda	liczba iteracji	czas wykonywania [s]
Jacobiego	*29*	*5.36*
Gaussa–Seidla	*19*	*3.70*



- **Zadanie C**

  Układ równań dla tego podpunktu został stworzony zgodnie z treścią zadania A, ale dla wartości $a1 = 3$, $a2 = a3 = -1$. Z wykresu obrazującego zmiany normy residuum dla takich wartości elementów macierzy ***A*** wynika, że metody iteracyjne nie zbiegają się. Zamiast tego kolejne iteracje wykonują się aż do osiągnięcia maksymalnej ich liczby określonej w programie (200), a wartość wektora residuum zbiega do nieskończoności.

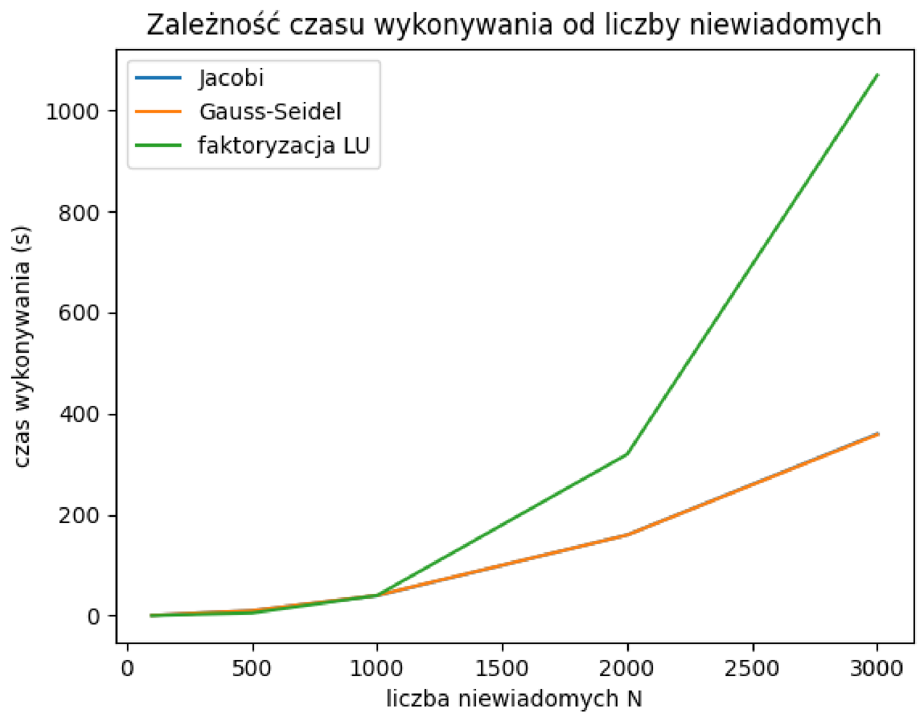


- **Zadanie D**

  Omawianego w podpunkcie C układu nie udało się rozwiązać metodami iteracyjnymi. Sprawdziła się tu jednak metoda bezpośredniego rozwiązania układów równań liniowych. Dla zastosowanej metody faktoryzacji LU norma wektora residuum wyniosła $\mathbf{2.92 \cdot 10^{-13}}$, a czas potrzebny na wykonanie **49.64 s**. Niska wartość residuum świadczy o wysokiej dokładności uzyskanego wyniku, otrzymanej kosztem dłuższego czasu trwania obliczeń.

- **Zadanie E**

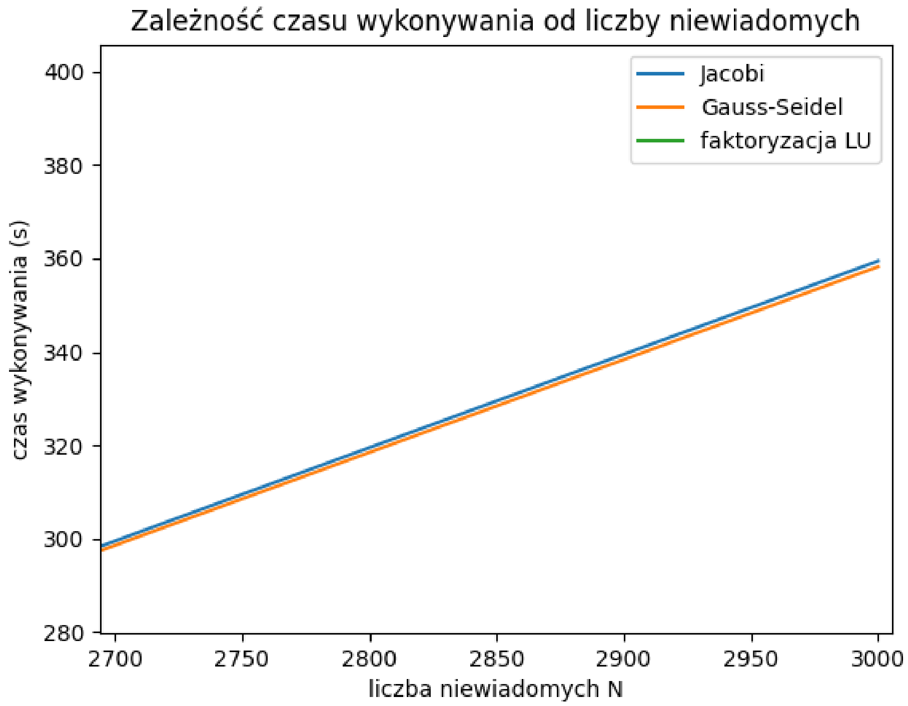
  Poniższy wykres przedstawia zależność czasu wyznaczenia rozwiązania dla trzech badanych metod od liczby niewiadomych N = {100, 500, 1000, 2000, 3000} dla macierzy opisanej w zadaniu A.



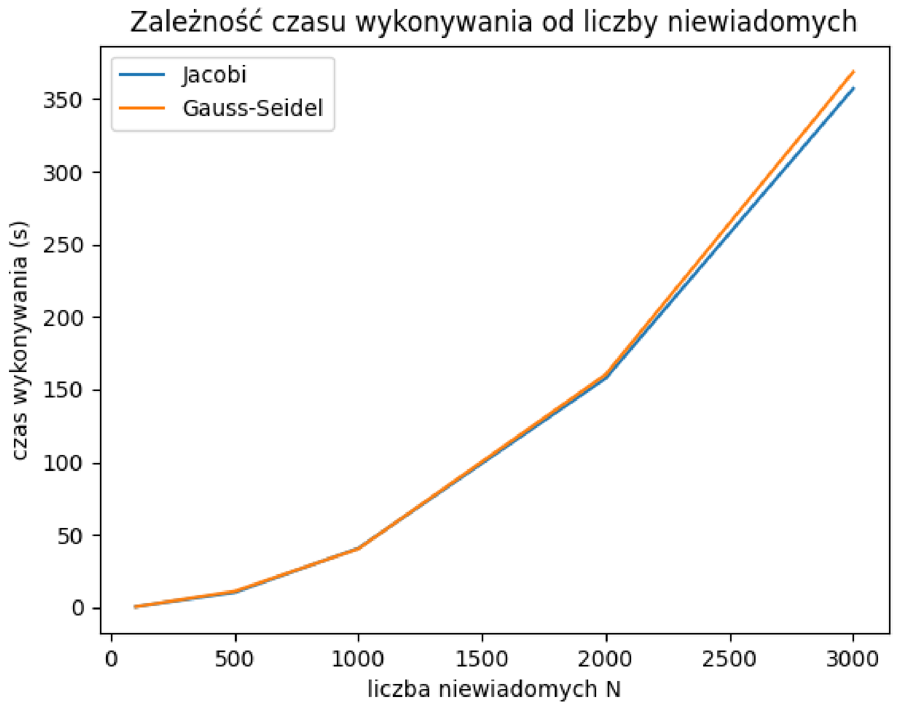
Z wykresu można zaobserwować, że dla każdej ze sprawdzanych metod czas rozwiązywania układu rośnie wraz ze wzrostem liczby argumentów. Metoda Gaussa-Seidla jest minimalnie szybsza niż Jacobiego, ale ta różnica jest zauważalna dopiero dla N powyżej 2500. Z kolei czas wykonywania faktoryzacji LU jest wyraźnie dłuższy już od 1000 niewiadomych. Metody iteracyjne są zatem znacznie szybsze w rozwiązywaniu tego układu.

metoda	czas wykonywania dla 3000 iteracji
Jacobiego	*359.45*
Gaussa–Seidla	*358.22*
faktoryzacji LU	*1069.57*

Na kolejnym wykresie przedstawiony jest moment, w którym czas wykonywania metody Jacobiego zaczyna oddalać się od metody Gaussa-Seidla. Dla większej liczby iteracji ta różnica byłaby bardziej wyraźna.



Poniższy wykres przedstawia czas trwania procesu rozwiązywania tego samego układu równań z wyłączeniem faktoryzacji LU dla lepszej widoczności różnicy pomiędzy dwoma metodami iteracyjnymi. Widać, że od 2000 niewiadomych różnica czasu między metodą Jacobiego a Gaussa-Seidla zaczyna wzrastać.



- **Zadanie F - <u>podsumowanie</u>**

  Iteracyjne metody rozwiązywania równań, takie jak metoda Jacobiego oraz Gaussa-Seidla, charakteryzują się szybkością działania, co ułatwia stosowanie ich w praktyce. W niektórych przypadkach potrafią być jednak zawodne, nie zbiegając się do rozwiązania. Z kolei metoda faktoryzacji LU, chociaż jest bardziej czasochłonna, daje pewność uzyskania poprawnego i dokładnego wyniku.

  Wybór pomiędzy metodami iteracyjnymi a metodą faktoryzacji LU zależy zatem od wymagań dotyczących dokładności i czasu wykonania obliczeń. Trzeba także brać pod uwagę charakterystykę układu równań, szczególnie w przypadku, gdy metody Jacobiego i Gaussa-Seidla okazują się nieskuteczne.