Второй курс, осенний семестр 2017/18
Практика по алгоритмам #9

Игры, теория чисел

17 ноября

Собрано 18 ноября 2017 г. в 23:42

Содержание

Игры, теория чисел

1. **Продление удовольствия**
   Дана игра на орграфе. Предложите стратегию для выигрывающего, при которой игра длится максимально долго.
   То есть проигрывающий стремится проиграть как можно быстрее (если только ему не предоставят возможность выиграть :)), а выигрывающий выигрывать как можно дольше.
   Причем если есть возможность играть бесконечно, находясь всегда в выигрышной позиции, нужно ей пользоваться (садизм).
2. **Бюрократия**
   Нужно подписать некоторый набор бумаг. Чтобы подписать бумагу номер i, нужно сначала подписать бумаги $a_1, a_2, \ldots, a_{m_i}$. Ситуация настолько печальна, что могут быть циклы.
   Но в моменты времени $t_1 \leqslant t_2 \leqslant \ldots$ происходят чудеса – самоподписываются бумаги $i_1, i_2, \ldots$!
   Бумага подписываются в тот же момент, когда подписаны все нужные для нее.
   Выяснить для каждой бумаги, в какой момент времени она будет подписана.
3. **Симметрия**
   Игроки по очереди закрашивают клетки в сетке $n \times n$, n нечетно, нельзя закрашивать две клетки с общей стороной. Предложить выигрышную стратегию для одного из игроков.
4. **Игра на деке**
   Есть ряд из n конфет, у каждой конфеты есть вкусность a_i. Каждый игрок может в свой ход съесть крайнюю справа или слева конфету. Какой максимальной суммарной вкусности может добиться каждый игрок? $\mathcal{O}(n^2)$.
5. **Скамейки**
   Есть ряд из n скамеек. Две команды по очереди сажают одного из своих участников на свободную скамейку, все соседние которой свободны. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Посчитайте функцию Гранди игры в зависимости от числа скамеек.
   А что делать, если n до 10^{18}?
6. **Малыш и Карлсон**
   Малыш и Карлсон едят трехмерную шоколадки из $n \times m \times k$ долек. Каждый по очереди разламывает ее на два куска (не ломая дольки) и съедает меньший из двух кусков. Когда остается одна долька, очередной игрок съедает ее и побеждает. Посчитайте функцию Гранди в зависимости от размеров шоколадки.
7. **Хакенбуш**
   Дано корневое дерево. Игроки по очереди отрезают у дерева некоторое ребро, при этом пропадает компонента связности, не содержащая корень. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Посчитать функцию Гранди.
8. **Решето Эратосфена**
   a) Найти все простые числа на $[n^2, n^2 + n]$ за $\mathcal{O}(n \log\log n)$.
   b) Найти все простые на $[1, n]$ за $\mathcal{O}(n \log\log n)$ с $\mathcal{O}(\sqrt{n})$ памяти.
9. **Применяем решето**
   Для каждого числа от 1 до n найти: число делителей, сумму делителей, функцию Эйлера, функцию Мёбиуса.

10. **(∗) Ним с разбиением кучек**
    Ним. В свой ход можно взять сколько-то камней из одной из кучек, а можно разбить одну из кучек на несколько произвольным образом. Посчитать функцию Гранди.
11. **(∗) 3-ним**
    Ним, в котором игрок может брать камни сразу из двух кучек, причем из каждой свое число камней. Посчитать функцию Гранди.
12. **(∗) Misere Nim**
    Ним с несколькими кучками, в котором выигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при оптимальной игре?
13. **(∗) Игра Витхоффа**
    Ним из двух кучек, можно брать либо из одной кучки, либо сразу из двух, но одинаковое число камней. Посчитать функцию Гранди.

Разбор задач практики

1. **Продление удовольствия**
   Запустим ретроанализ, поймём, какие вершины проигрышные, выигрышные, ничейные.
   Выкинем из графа неинтересные ребра, оставим только $\texttt{W} \to \texttt{L}$ и $\texttt{L} \to \texttt{W}$.
   Запустим ретроанализ наоборот, считая по пути длину игры.
   Из выигрышной вершины нужно идти в проигрышную с максимальной длиной (последнюю в порядке обхода). Из проигрышной – в выигрышную с минимальной длиной (первую в пордяке обхода). Как раз и вышел ретроанализ наоборот.
   Те вершины, которые второй ретроанализ сочтёт ничейными, – $\texttt{W}^\infty$ и $\texttt{L}^\infty$.

2. **Бюрократия**
   Обработка с очередью, по аналогии с ретроанализом.
   Если для бумаги i нужна j, ребро $j \to i$.
   Подписанную бумагу кладем в очередь. Вынимая бумагу из очереди, удаляем все ребра из нее. Если у бумаги занулилась входящая степень, она подписана.
   Когда очередь опустела, переходим к следующему моменту времени.

3. **Симметрия**
   Первый игрок закрашивает центр. Дальше он всегда может сделать ход, симметричный ходу второго относительно центра.

4. **Игра на деке**
   $f[l, r]$ – максимальная разность выигрышей, которую может достичь игрок, начинающий с отрезка $[l, r]$. $f[l, r] = \max(a[l] - f[l + 1, r], a[r] - f[l, r - 1])$.

5. **Скамейки**
   $g[n] = mex\{g[n-2], g[n-3], g[n-4] \,\hat{}\, g[1], g[n-5] \,\hat{}\, g[2], \ldots\}$.

6. **Малыш и Карлсон**
   Это прямая сумма игр на одномерных шоколадках $g[n] \,\hat{}\, g[m] \,\hat{}\, g[k]$.
   Для одномерной считаем Гранди по определению через mex за квадрат.

7. **Хакенбуш**
   Если степень корня больше 1, то представим игру, как прямую сумму независимых.
   Иначе $g(\text{root} \to T) = g(T) + 1$, легко показать по индукции.

8. **Решето Эратосфена**
   a) За $\mathcal{O}(n \log\log n)$ нашли все простые от 1 до n. Теперь для каждого простого p_k вычеркнем все числа на отрезке $[n^2..n^2 + n]$, кратные ему. Сделаем это за $\mathcal{O}(\frac{n}{p_k})$.
   b) Предподсчитаем все простые от 1 до $\sqrt{n}$. Для каждого отрезка $[i\sqrt{n}..(i+1)\sqrt{n})$ вычеркнем все непростые за $\mathcal{O}(\sqrt{n} + \sqrt{n})$ (количество простые + длина отрезка).

9. **Применяем решето**

```
int d[N]; // d[x] - минимальный простой делитель x
int cnt[N]; // cnt[x] - степень вхождения d[x]
int y[N]; // y[x] = x / d[x]^cnt[x]
// Запустили решето, нашли d[], d[1] = 0
cnt_div[1] = sum_div[1] = mu[1] = 1;
```

```
for (int x = 2; x < N; x++) {
  int z = x / d[x];
  if (d[x] == d[z])
    cnt[x] = cnt[z] + 1, y[x] = y[z];
  else
    cnt[x] = 1, y[x] = z;
  cnt_div[x] = cnt_div[y[x]] * (cnt[x] + 1);
  sum_div[x] = sum_div[y[x]] * ((x / y[x] * d[x] - 1) / (d[x] - 1));
  mu[x] = cnt[x] > 1 ? 0 : -mu[y[x]];
}
```

10. **(∗) Ним с разбиением кучек**
Для состояния n можно посчитать `mex` по определению. Тогда размер множества под mex-ом – количество разбиений числа n на слагаемые. Это решение подойдёт при $n \leqslant 50$.
Более красивое решение: динамика за $\mathcal{O}(xor \cdot n^2)$, работающая быстро в предположении, что $xor = \mathcal{O}(n)$. Динамика `is[xor, n]` – для каждого `xor`-а функций Гранди считаем, можно ли его получить: отделить одно слагаемое `is[xor, n] |= is[xor ^ a, n - a]`.

11. **(∗) 3-ним**
Проигрышная позиция: поразрядная сумма по модулю 3 записей чисел в троичной системе счисления равен нулю.

12. **(∗) Misere Nim**
Всё необходимое содержится в основной статье про Ним на wiki.

13. **(∗) Игра Витхоффа**
Забавно, но проигрышными являются позиции $\langle x, y\rangle$: $\frac{x}{y} \approx \phi$ (золотое сечение).

Домашнее задание

3.1. Обязательная часть

1. **(2) Ретроанализ для суммы**
   Есть две игры $\langle G_1, v_1\rangle, \langle G_2, v_2\rangle$. Примените ретроанализ для их прямой суммы. Оцените время и память.

2. **(2) Хорды**
   Дана окружность с отмеченными на ней n точками. Игроки по очереди соединяют какую-нибудь пару точек хордой так, чтобы она не пересекала уже проведенные (даже в концах). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Посчитать функцию Гранди.

3. **(2) Ним с делением пополам**
   Разрешим в Ниме делить кучку на две равные части. Кто выиграет при оптимальной игре?

4. **(2) Игра в спички**
   Даны n стеков из спичек. В i-м стеке a_i спичек. За ход можно взять от 1 до k спичек из любого стека. Проигрывает тот, кто не может ходить. Кто выиграет при оптимальной игре? $\mathcal{O}(n)$.

5. **(3) Максимальное число Гранди**
   Какое максимальное значение функции Гранди в графе с m ребрами?
   Приведите пример, на котором достигается максимум, и доказательство, что больше нельзя.

6. **(2) Не самая наивная факторизация**
   Приходят запросы факторизовать число $a_i \leqslant N$.
   Предпосчет $\mathcal{O}(\sqrt{N})$, ответ на запрос за $\mathcal{O}(\sqrt{N}/\log N)$.
   Ну, мы же вроде знаем, сколько бывает простых чисел от 1 до N?

3.2. Дополнительная часть

1. **(3) Упорядоченный Ним**
   Дан массив размеров кучек $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$, двое играют в Ним с запретом нарушать неравенства. Кто выиграет при правильной игре? $\mathcal{O}(n)$.

2. **(3) Ним с делением**
   Двое играют в Ним с дополнительным ходом: можно делить любую кучку на любые две части. Кто выиграет? $\mathcal{O}(n)$.

3. **(4) Хакенбуш в произвольном графе**
   Некоторую выделенную вершину назовем корнем, дальше те же правила, что в Хакенбуше на дереве. Кто выигрывает при оптимальной игре?

4. **(4) $\pi(n)$ для больших n.**
   $\pi(n)$ – количество простых от 1 до n.
   С помощью решета Эратосфена умеем считать $\pi(n)$ за $\mathcal{O}(n)$. Можно быстрее. Эта задача даёт вам подсказку и предлагает придумать алгоритм.
   $\Phi(n, d)$ – количество чисел от 1 до n, все простые делители которых больше d.
   Видно, что $\pi(n) = \Phi(n, \sqrt{n})$.
   Можно вывести рекуррентную формулу пересчета $\Phi(n, p_i)$, а из этого получить алгоритм.
   Баллы будут ставиться за любое решение за $\mathcal{O}(n^{1-\varepsilon})$. Существует решение за $\mathcal{O}(n^{2/3})$.