עבודה 2

תאריך הגשה: 24/11/19, בשעה 7:59 בבוקר. יש להגיש את העבודה במערכת ההגשה.

מתרגל אחראי: נתי פטר.

הוראות כלליות:

- כל עוד לא נאמר אחרת, כאשר הנכם מתבקשים לתאר אלגוריתם יש לספק:
  1. תיאור מילולי של האלגוריתם
  2. הוכחת נכונות
  3. ניתוח זמן-ריצה
- אלגוריתם עם זמן-ריצה אקספוננציאלי נחשב לא-יעיל ולכן בדרך כלל לא יתקבל.
- יש לכתוב את הפתרון רק בדף התשובות הנלווה לעבודה.
- בכל שימוש במשפט שהוכח בכיתה, יש לצטט את המשפט באופן מדויק.

שאלה 1

נתבונן בבעיה בה לקוח רוצה לפרוט n סנטים בבנק, וברשות הפקיד יש רק מטבעות של $1,10,25$ סנטים (ללא הגבלה). הפקיד רוצה לתת ללקוח מספר מינימלי של מטבעות.

<u>מופע</u>: מספר טבעי n (בייצוג אונארי) שהוא מספר הסנטים אותם רוצה הלקוח לפרוט.
<u>פתרון חוקי</u>: קבוצת מטבעות של $1,10,25$ סנטים, כך שסכום כל ערכי המטבעות הוא בדיוק n סנטים.
<u>פתרון אופטימלי</u>: פתרון חוקי עם מספר מטבעות מינימלי.

<u>דוגמה</u>: כאשר הלקוח רוצה לפרוט 50 סנטים, פתרון חוקי לבעיה הוא קבוצת 5 מטבעות של 10 סנטים ופתרון אופטימלי לבעיה הוא קבוצת 2 מטבעות של 25 סנטים.

<u>נתבונן באלגוריתם החמדן הבא</u>:

1. הגדר $M = n,\ S = \emptyset$
2. כל עוד $M \neq 0$ בצע:
   2.1. הוסף לקבוצה S מטבע עם הערך הגדול ביותר שלא גדול מ- M, נסמנו ב- x
   2.2. עדכן $M = M - x$
3. החזר את קבוצת המטבעות S

סעיף א'

הראו שהאלגוריתם החמדן המתואר לעיל לא בהכרח מחזיר את הפתרון האופטימלי לבעיה.

סעיף ב'

כעת, נתבונן באותה הבעיה, כאשר הפעם ברשות הפקיד יש מטבעות של $1,5,10,25$ סנטים (ללא הגבלה).

<u>מופע</u>: מספר טבעי n (בייצוג אונארי) שהוא מספר הסנטים אותם רוצה הלקוח לפרוט.
<u>פתרון חוקי</u>: קבוצת מטבעות של $1,5,10,25$ סנטים, כך שסכום כל ערכי המטבעות הוא בדיוק n סנטים.
<u>פתרון אופטימלי</u>: פתרון חוקי עם מספר מטבעות מינימלי.

הוכיחו שבהנתן מופע לבעיה, האלגוריתם החמדן המתואר לעיל מחזיר פתרון אופטימלי. בנוסף, נתחו את זמן-הריצה של האלגוריתם.

שאלה 2

חברת היי-טק מקבלת n הצעות לפרויקטים, כאשר כל פרויקט לוקח בדיוק חודש אחד, ועל החברה לעבוד על פרויקט אחד בלבד במשך כל חודש. לכל פרויקט יש הצעת-מחיר ודד-ליין, כך שלא ניתן להגיש את הפרויקט לאחר הדד-ליין, ופרויקטים שהוגשו עד הדד-ליין יזכו את החברה בתשלום בהתאם להצעת-המחיר. החברה רוצה לבצע את הפרויקטים שיניבו את הרווח הגדול ביותר עבורה. שימו לב שהחברה לא בהכרח תוכל לבצע את כל n הפרויקטים. לצורך פשטות, נניח כי כעת אנו נמצאים בתחילת חודש מספר 0, ודד-ליין של פרויקט הוא מספר החודש (לאחר חודש מספר 0) אשר בתחילתו יש להגיש את הפרויקט.

<u>מופע</u>: n פרויקטים $p_1, \dots, p_n$, כאשר לפרויקט p_i יש הצעת-מחיר $m_i > 0$ ודד-ליין $d_i > 0$ לכל $1 \le i \le n$.
<u>פתרון חוקי</u>: סדרה של ℓ פרויקטים $(p_{i_1}, \dots, p_{i_\ell})$, כאשר $\ell \le n$ וגם $j \le d_{i_j}$ לכל $1 \le j \le \ell$.
<u>פתרון אופטימלי</u>: פתרון חוקי $(p_{i_1}, \dots, p_{i_\ell})$ כאשר $\sum_{j=1}^{\ell} m_{i_j}$ הוא מקסימלי.

<u>דוגמה</u>: נתבונן בשלושת הפרויקטים p_1, p_2, p_3, כאשר לפרויקט הראשון p_1 הצעת-מחיר $m_1 = 80$ ודד-ליין $d_1 = 2$, לפרויקט השני p_2 הצעת-מחיר $m_2 = 50$ ודד-ליין $d_2 = 1$ ולפרויקט השלישי p_3 הצעת-מחיר $m_3 = 60$ ודד-ליין $d_3 = 1$. פתרון חוקי לבעיה הוא (p_2, p_1) ופתרון אופטימלי לבעיה הוא (p_3, p_1).

תארו אלגוריתם חמדן יעיל ככל הניתן, אשר בהנתן מופע לבעיה מחזיר פתרון אופטימלי. הוכיחו את נכונות האלגוריתם ונתחו את זמן-הריצה שלו.

שאלה 3

סעיף א'

יהי $G = (V, E)$ גרף קשיר ו- $w: E \to \mathbb{R}$ פונקציית משקל על צלעות הגרף. בנוסף, יהי T MST של G ותהי $e \notin E$ צלע שלא נמצאת בגרף G. נניח שפונקציית המשקל w מוגדרת גם עבור הצלע e, כלומר הפונקציה $w: E \cup \{e\} \to \mathbb{R}$ מחזירה משקל לכל צלע בקבוצת הצלעות $E \cup \{e\}$. בהנתן T, נרצה לקבוע האם T הוא גם MST של הגרף $G' = (V, E \cup \{e\})$.

<u>מופע</u>: גרף קשיר $G = (V, E)$, פונקציית משקל $w: E \cup \{e\} \to \mathbb{R}$, MST T של G וצלע $e \notin E$.
<u>פתרון</u>: האם T הוא MST של הגרף $G' = (V, E \cup \{e\})$.

תארו אלגוריתם יעיל ככל הניתן, אשר בהנתן מופע לבעיה מחזיר פתרון לבעיה. הוכיחו את נכונות האלגוריתם ונתחו את זמן-הריצה שלו. על האלגוריתם לצרוך זמן-ריצה קטן יותר מזמן-הריצה של האלגוריתם הטוב ביותר למציאת MST של גרף.

סעיף ב'

יהי $G=(V,E)$ גרף קשיר ו- $w: E \to \mathbb{R}$ פונקציית משקל על צלעות הגרף. בנוסף, תהי $U \subseteq V$ תת-קבוצה של קודקודים ו- S_U קבוצת כל העצים-הפורשים של G כך שלכל עץ ב- S_U מתקיים שכל הקודקודים מהקבוצה U הם עלים. נגדיר MST_U של הגרף G כעץ-פורש של G במשקל מינימלי מהקבוצה S_U, כלומר עץ-פורש במשקל מינימלי כך שכל הקודקודים מהקבוצה U הם עלים (כמו MST, ייתכנו כמה עצים כאלו). נרצה למצוא MST_U של הגרף G.

<u>מופע</u>: גרף קשיר $G=(V,E)$, פונקציית משקל $w: E \to \mathbb{R}$ ותת-קבוצה $U \subseteq V$.
<u>פתרון</u>: MST_U של הגרף G.

תארו אלגוריתם יעיל ככל הניתן, אשר בהנתן מופע לבעיה מחזיר פתרון לבעיה. הוכיחו את נכונות האלגוריתם ונתחו את זמן-הריצה שלו.

<u>שאלה 4</u>

יהי $G=(V,E)$ גרף קשיר ו- $w: E \to \mathbb{R}$ פונקציית משקל על צלעות הגרף. נגדיר $\mathrm{MST}_{\max}$ של הגרף G כעץ-פורש של G כך שהצלע הכבדה ביותר בו היא בעלת משקל מינימלי מבין כל העצים הפורשים של G (כמו MST, ייתכנו כמה עצים כאלו). נרצה למצוא $\mathrm{MST}_{\max}$ של הגרף G.

<u>מופע</u>: גרף קשיר $G=(V,E)$ ופונקציית משקל $w: E \to \mathbb{R}$.
<u>פתרון</u>: $\mathrm{MST}_{\max}$ של הגרף G.

תארו אלגוריתם יעיל ככל הניתן, אשר בהנתן מופע לבעיה מחזיר פתרון לבעיה. הוכיחו את נכונות האלגוריתם ונתחו את זמן-הריצה שלו. על האלגוריתם לצרוך זמן-ריצה קטן יותר מזמן-הריצה של האלגוריתם הטוב ביותר למציאת MST של גרף.

<u>הדרכה</u>: השתמשו בכיווץ של צלעות, כלומר הפיכת צלע לקודקוד כך שקיימת צלע חדשה מהקודקוד החדש לקודקוד ישן כלשהו אם ורק אם קיימת צלע ישנה מאחד מקודקודי הצלע שכווצה לקודקוד הישן. אם יש שתי צלעות ישנות כאלו, משקל הצלע החדשה יהיה משקל הצלע המינימלי מבין שתי הצלעות הישנות.

*ניתן להגיש אחת מבין השאלות 3,4.

בהצלחה!