עבודה 3 – תכנון דינאמי ומבוא למסלולים קלים ביותר

תאריך הגשה: 6.12, 7:59 במערכת ההגשות

מתרגל אחראי: רון קורין

הוראות כלליות:

- כל עוד לא נאמר אחרת, כאשר הנכם מתבקשים לתאר אלגוריתם יש לספק את הבאות:
  - תיאור של האלגוריתם
  - הוכחת נכונות של האלגוריתם
  - ניתוח זמן הריצה של האלגוריתם
- אלגוריתם עם זמן ריצה אקספוננציאלי לא נחשב יעיל ולכן בדרך כלל לא יתקבל
- את הפתרון יש לרשום בדף התשובות הנלווה לעבודה
- לתשומת לבכם, המקום שהוקצה בדף התשובות הוא פי 1.5 מהמקום המומלץ לתשובה!

שאלה 1

בשאלה זו עליכם למצוא אלגוריתם לבעיית משחק הלוח "לא סכום אפס".

המשחק הוא משחק לשחקן יחיד. לוח המשחק B בגודל $n * n$ $(n \geq 2)$ כאשר כל משבצת בו מכילה מספר שלם כלשהו. במשחק מתקדמים על הלוח משמאל לימין, כאשר השחקן מתחיל במשבצת $< 1{,}1 >$ כלומר בפינה השמאלית העליונה בלוח. כמו כן, נתונה מגבלה על כמות התורות המותרת במשחק, והיא: k תורות, לכל היותר $(0 < k < n)$.

מטרת כל שחקן לצבור מספר מקסימלי של נקודות, כאשר הוא מוסיף לעצמו ניקוד עם כל צעד, כמספר הרשום במשבצת אליה עבר בלוח. ההתקדמות בלוח היא התקדמות של **צעד אחד או יותר מהמשבצת עליה עומד לכיוון ימין**, והוא יכול במקביל להתקדמות ימינה להתקדם באותו התור גם למעלה או למטה *אם מעוניין בכך*, גם כן בצעד אחד או יותר ביחס למשבצת עליה עומד בתחילת התור.

בסה"כ הוא חייב להתקדם בלכל היותר l משבצות בכל תור, כלומר אם הוא עומד במשבצת $< i, j >$ בלוח ורוצה לזוז למשבצת $< x, y >$ מותר לו לעשות כן רק אם: $|i - x| + |y - j| \leq l$.

המשחק מסתיים כאשר השחקן מגיע למשבצת בעמודה האחרונה בלוח המשחק (ה-n) בלוח, כלומר כשאין לו לאן עוד להתקדם ימינה, או אם נגמרו כמות התורות המקסימלית האפשרית למשחק (k).

<u>קלט הבעיה</u>: לוח משחק B בגודל $n * n$ משבצות $(n \geq 2)$, חסם על מספר התורות המותרים: $0 < k < n$ וכן חסם על מספר המשבצות בהן ניתן לעבור בכל צעד: $0 < l < n$.

<u>דוגמת משחק עבור השחקן מריו:</u>

נתון: השחקן במשחק P_{Mario} ולוח משחק עם ערכיו במשבצות, בגודל $4 * 4$. מריו מתחיל במשבצת: $< 1{,}1 >$ בלוח עם ניקוד של 17 (הניקוד על משבצת ההתחלה נספר גם כן עבור השחקן). נתונים גם: j, k כאשר מתקיים בדוגמה זאת כי $l = k = 2$.

זה התור הראשון במשחק. מריו חייב להתקדם ימינה, והוא לא יכול לזוז יותר מ-2 משבצות בסה"כ, על כן הוא בוחר להתקדם זוג צעדים לכיוון ימין. לא נותרו לו עוד צעדים לתור אז הוא לא עולה מעלה או מטה, כך שבסיום תורו הוא עובר מהמשבצת $< 1{,}1 >$ אל המשבצת $< 1{,}3 >$ ומסיים את תור זה עם סך ניקוד של: $B[1][1] + B[1][3] = 17 + 52 = 69$ נקודות.

בתום התור הראשון של המשחק, מאחר ש$k = 2$ למריו יש רק שני תורות, וזהו התור האחרון שלו. מריו בוחר לנצל את הצעדים בתור שלו על מנת לקפוץ למשבצת $< 2,4 >$ (שני צעדים ולא יותר, וחייב להתקדם לכיוון ימין בכל תור כפי שעשה ולכן התור חוקי) וכך מסיים את המשחק עם סך כולל של 92 נקודות. המשחק הסתיים, שכן הסתיימו כמות התורות של מריו.

17 	6	52 	4
33	-24	19	23 
43	31	-25	7
9	133	43	92

בשאלה זו נרצה לתכנן אלגוריתם עבור השחקן שלנו, שבסופו מתקבלת סדרת משבצות המתארת תזוזה חוקית של שחקן במשחק על הלוח, עבורה מתקבל ניקוד מקסימלי במשחק.

סעיף א': נסחו תת בעיה אופיינית, כלומר הגדירו $Sol(\dots)$ ואת $OPT(\dots)$ המכיל ערך פתרון אופטימלי עבור הבעיה.

סעיף ב': הציעו נוסחת מבנה לפתרון הבעיה.

סעיף ג': הוכיחו את נכונות נוסחת המבנה שהצעתם בסעיף ב'.

סעיף ד': הציעו אלגוריתם איטרטיבי המבוסס על נוסחת המבנה ונתחו את זמן הריצה שלו (אין צורך בהוכחת נכונות).

סעיף ה': על סמך האלגוריתם שהצעתם בסעיף הקודם הציעו אלגוריתם לשחזור פתרון אופטימלי ונתחו את זמן הריצה שלו (אין צורך בהוכחת נכונות).

שאלה 2

שאלה זו היא גרסה דומה לשאלה 2 המקורית. נתחיל במספר הגדרות: תחילה נסמן בשאלה זו מחרוזת\סדרה באמצעות תווים בין מרכאות (") או בסדרת תווים המופרדים בתו ',' בין סוגריים משולשים. כך למשל "CAT" ו-$< C, A, T >$ הם ייצוגים לגיטימיים בשאלה לאותה המחרוזת\הסדרה.

<u>הגדרת תת-סדרה</u>: תת סדרה היא סדרה שמתקבלת מסדרה אחרת על ידי מחיקת חלק (ייתכן שהחלק ריק) מאיבריה מבלי לשנות את סדר האיברים הנותרים. כך למשל, עבור הסדרה: $Seq =< C, A, T >$ תתי הסדרות שניתן לדלות הם: $< C >, < A >, < T >, < C, T >, < C, A >, < A, T >$, וכמובן תת הסדרה $< C, A, T >$, שמתקבלת ממחיקת אפס איברים מהסדרה הנתונה.

<u>הגדרת תת-מחרוזת</u>: עבור מחרוזת: המחרוזת: $STR = < s_1, s_2 \dots s_n >$: $SUB_{STR} =< s'_1, \dots s'_t >$ היא תת מחרוזת של המחרוזת: STR אם קיימת סדרת אינדקסים: $1 \le i_1 < i_2 \dots i_t \le n$ עוקבים כך ש: $s'_{i_j} = s_j$ לכל $j \in \{1, \dots t\}$. לדוגמה, עבור המחרוזת "CAT", תתי המחרוזות של המחרוזת הינן: "C", "A", "T", "CA", "AT", "CAT". לחילופין, תת מחרוזת מוגדרת כאוסף של תווים רצופים מ-STR.

על סמך הגדרות אלו נגדיר גם כי מחרוזת S היא <u>**מחרוזת-$Super_{Sub}$**</u> עבור זוג מחרוזות: Q, P (בהתאמה) אם S היא <u>תת מחרוזת</u> של המחרוזת Q וגם <u>תת סדרה</u> של המחרוזת P.

בשאלה זו עליכם לעזור לעדי, חוקר *DNA*, המעוניין בהינתן סדרות *DNA* של זוג חתולים (לצורך העניין נקרא להם ציון ולאקי), כלומר זוג מחרוזות: Cat_{Zion}, Cat_{Lucky}, לאפיין את הדמיון בין החתולים.

עדי הגדיר פונקציית משקל מעל הא"ב של ה-*DNA*, $w: \Sigma \to \mathbb{R}$, כך שבהינתן תו המרכיב את רצף ה-*DNA* נותנת לו ערך של מידת החשיבות שלו לאפיון התנהגות החתול. עליכם לסייע לעדי למצוא <u>מחרוזת-$Super_{Sub}$</u> מקסימלית <u>בערכה</u> לפי פונקציית המשקל w עבור זוג מחרוזות המייצגות רצפי *DNA* של חתולים: Ca_{Zion}, Cat_{Lucky} (בהתאמה).

<u>לדוגמה, עבור המחרוזות:</u>

$$Cat_{Zion} = <D,B,C,A,B,C,D,B,D>$$

$$Cat_{Lucky} =< A, A, A, A, B, B, B, C, C, A, A, A, A, B, D, B, A >$$

$$w \text{ is defined as follows}: w(B) = 20, w(A) = 5, w(D) = 5, w(C) = 10$$

המחרוזת $S =< A, B, C >$ עבור זוג המחרוזות Cat_{Zion}, Cat_{Lucky} היא מחרוזת $Super_{Sub}$ בערך של $5 + 20 + 10 = 35$. לעומת זאת, המחרוזת $S' =< A, B, C, D, B >$ היא מחרוזת $Super_{Sub}$ מקסימלית בערכה עבור זוג המחרוזות, וערכה הוא $5 + 20 + 10 + 5 + 20 = 60$.

סעיף א': נסחו תת בעיה אופיינית, כלומר הגדירו $Sol(\dots)$ ואת $OPT(\dots)$ המכיל ערך פתרון אופטימלי עבור הבעיה.

סעיף ב': הציעו נוסחת מבנה לפתרון הבעיה.

סעיף ג': הוכיחו את נכונות נוסחת המבנה שהצעתם בסעיף ב'.

סעיף ד': הציעו אלגוריתם איטרטיבי המבוסס על נוסחת המבנה (אין צורך להוכיח את נכונותו), ונתחו את זמן הריצה שלו.

סעיף ה': על סמך האלגוריתם שהצעתם בסעיף הקודם הציעו אלגוריתם לשחזור פתרון אופטימלי, ונתחו את זמן הריצה שלו (אין צורך להוכיח את נכונותו).

שאלה 3

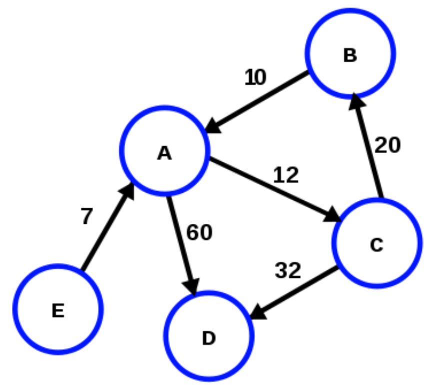
שאלה זו מחולקת למספר סעיפים. ייתכן קשר בין הסעיפים. כמו כן, בסעיף ב' בשאלה נתונה הדרכה. מומלץ *מאוד* להיעזר בה בפתרון שלכם. הקלט לכל הסעיפים הוא זהה: גרף $G = (V, E)$ מכוון וממושקל, וכן צומת: $s \in V$.

<u>תזכורת</u>: אלגוריתם Dijkstra מוצא מסלולים קלים ביותר מקודקוד מקור לכל הקודקודים בגרף מכוון וממושקל במשקולות אי שליליים. קלט האלגוריתם: גרף $G = (V, E)$ מכוון, פונקציית משקל על הקשתות: $w: E \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ וקודקוד מקור: $s \in V$. סיבוכיות זמן ריצתו היא: $O(|E| + |V| \log|V|)$.

סעיף א'

נגדיר "משקל-אורך" של מסלול בגרף בתור משקלו + אורכו [מספר הקשתות במסלול]. בסעיף זה משקלי הקשתות הם **שלמים חיוביים**.

<u>לדוגמה</u>:



בגרף שבציור, ה"משקל-אורך" של המסלול:
$P = < A, C, B >$ הוא: $12 + 20 + 2 = 34$

עליכם להציע אלגוריתם המחשב לכל $v \in V$ את ה"משקל אורך" המינימלי של מסלול מ-s ל-v. בנוסף, להוכיח את נכונות האלגוריתם ולהוכיח את זמן הריצה שלו.

סעיף ב'

בדומה ל"משקל-אורך" נגדיר עבור מסלול בגרף "משקל-אורך-בריבוע" בתור משקלו + (אורכו בריבוע). עליכם להציע אלגוריתם המחשב לכל $v \in V$ את ה"משקל-אורך-בריבוע" המינימלי של מסלול מ-s ל-v. בנוסף, להוכיח את נכונות האלגוריתם ולהוכיח את זמן הריצה שלו.

<u>שימו לב</u>: כמו בסעיף הקודם, בשאלה זו משקלי הקשתות הם **שלמים חיוביים**.

<u>הערה</u>: מומלץ לפתור באמצעות רדוקציה בה יוצרים גרף בו קבוצת הקודקודים משוכפלת מספר פעמים

סעיף ג'

<u>שימו לב</u>: שלא כמו בסעיפים הקודמים, בשאלה זו משקלי הקשתות שלמים אך אינם בהכרח חיוביים. כמו כן משקל כל קשת, אם קטן מ-0, זהה ושווה ל-$x < 0$ קבוע כלשהו. ניתן להניח גם שלא קיימת קשת ב-E עם משקל 0 (הנחה זו לא נדרשת, אך היא יכולה לפשט במעט חישובים מסוימים).

נגדיר בתור "משקל-עד-10-שליליות" של מסלול את משקלו של המסלול אם הוא כולל לכל היותר 10 קשתות שליליות, ואחרת אין-סוף. עליכם להציע אלגוריתם המחשב לכל $v \in V$ את ה"משקל-עד-10-שליליות" המינימלי של מסלול מ-s ל-v. בנוסף, להוכיח את נכונות האלגוריתם ולהוכיח את זמן ריצתו.

<u>הערה</u>: זמן הריצה של האלגוריתם שעליכם להציע הוא: $O(|E|\log|V|)$. פתרונות עם זמן ריצה: $O(|E| + |V| \log|V|)$ יתקבלו כמובן גם כן.

שאלה 4

<u>בעיית התרמיל</u>:

קלט: אוסף של n פריטים. לפריט ה-i משקל w_i ומחיר p_i, לכל $1 \leq i \leq n$. בנוסף, ערך W המהווה את המשקל המקסימלי של הפריטים שניתן לקחת בתרמיל. כל הפרמטרים הינם מספרים שלמים אי-שליליים.

פתרון חוקי: תת קבוצה של פריטים: $I \subseteq \{1,2 \dots n\}$ במשקל: $w(I) = \sum_{i \in I} w_i \leq W$.

פלט: פתרון חוקי I במחיר: $p(I) = \sum_{i \in I} p_i$ מקסימלי.

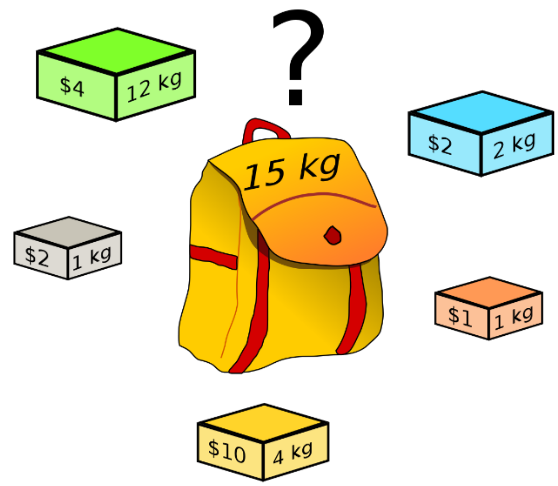


Figure 1- המחשה לבעיית התרמיל, בה הערך *W* הוא 15 – ויקיפדיה

<u>תזכורת – בעיית הארנק</u>:

קלט: אוסף של n פריטים. לפריט ה-i משקל w_i ומחיר p_i, לכל $1 \leq i \leq n$. בנוסף, ערך P המהווה את ערך המחיר הכולל הנדרש. כל הפרמטרים הינם מספרים שלמים אי-שליליים.

פתרון חוקי: תת קבוצה של פריטים: $I \subseteq \{1,2 \dots n\}$ במחיר: $p(I) = \sum_{i \in I} p_i = P$.

פלט: פתרון חוקי I במשקל $w(I) = \sum_{i \in I} w_i$ מינימלי, אם קיים.

מה נדרש בשאלה?

תארו אלגוריתם לפתרון <u>בעיית התרמיל</u> המבוסס על פתרון לבעיית הארנק (ראיתם פתרון לבעיה זו בהרצאות, ופתרון זה מצורף גם בעמוד העבודה).

<u>הדרכה</u>: מומלץ שלא לפתור את הבעיה באמצעות שימוש בפתרון בעיית הארנק כקופסא שחורה, אלא להיעזר בטבלת התכנון הדינאמי של בעיית הארנק לצורך הפתרון. זמן הריצה של הפתרון שלכם צריך לכלול את זמן הריצה הנדרש לחישוב טבלה זו.

בהצלחה!