Ben-Gurion University
of the Negev

SOLUTION

By

Avi Ferdman

שאלה 1

השינוי שנבצע יהיה באופן הבא:

במקום הלולאה הראשית שמבוצעת $|V|-1$ פעמים באלגוריתם המקורי, נגדיר $flag$ בוליאני ונריץ את הלולאה הראשית כל עוד $flag$ לא שינה את ערכו. ערכו של $flag$ ישתנה רק כאשר לא עדכנו בפעולת $Relax$ **אף אחד** מהקודקודים במהלך כניסה ללולאה.

הוכחת נכונות לאחר השינוי המתבססת על הוכחה שראינו בכיתה של האלגוריתם של בלמן-פורד:

טענה ראשית: תחת ההנחה שאין מעגלים שליליים בגרף, בסיום הריצה לכל $v \in V$ מתקיים: $d(v) = \delta(v)$.

טענת עזר: יהי P מסלול מ-s ל-v בעל k צלעות. בסיום האיטרציה ה-k מתקיים: $d(v) \leq w(P)$

הבחנה: תחת ההנחה שאין מעגלים שליליים, לכל $v \in V$ קיים מסלול קל ביותר שהינו פשוט.

הסבר להבחנה: נניח כי P מסלול קל ביותר מ-s ל-v ב-G. לכל מעגל C ב-P מתקיים $w(C) \geq 0$. מכיוון ש-P קל ביותר, לא ייתכן ש- $w(C) > 0$ ולכן $w(C) = 0$ ולכן ע"י הורדת כל המעגלים ב-P ניתן לקבל מסלול פשוט P' בעל משקל זהה.

הוכחת הטענה הראשית באמצעות הטענה וההבחנה:

תחת ההנחה כי אין מעגלים שליליים נובע מההבחנה כי לכל $v \in V$ קיים מסלול קל ביותר P מ-s ל-v שהינו פשוט נסמן **מבין המסלולים האלה את המסלול** הקצר ביותר P, לכן: $|P| = a(s,v) \leq max_{u \in V} a(s,u)$**.** לפי טענת העזר, בסיום האיטרציה ה-$a(s,v)$ מתקיים $d(v) \leq w(P)$ אבל $w(P) = \delta(v)$ מטענת חסם תחתון מתקיים: $d(v) \geq \delta(v)$ ולכן: $d(v) = \delta(v)$ בסיום האיטרציה ה-$a(s,v)$. מטענת חסם תחתון $d(v)$ לא יירד יותר בהמשך הריצה, ולכן בסיום ריצת האלג' מתקיים $d(v) = \delta(v)$.
בנוסף נשים לב כי מאחר ו-$a(s,v) \leq max_{u \in V} a(s,u)$ אזי בסוף האיטרציה ה- $max_{u \in V} a(s,u)$ מתקיים לכל קוד $d(v) = \delta(v)$. לכן מספר האיטרציות באלגוריתם הוא $max_{u \in V} a(s,u)$ ועושים עוד איטרציה אחת שבה לא מבצעים $Relax$ על אף קודקוד ומשנים את ערכו של ה-$flag$ **ולכן מספר האיטרציות בסך הכל הוא לכל היותר: $\boldsymbol{a}(\mathbf{G}) + \mathbf{1}$** $= max_{u \in V} a(s,u) + 1$.

הוכחת טענת העזר:

באינדוקציה על מספר האיטרציות של האלגוריתם:

בסיס: $k = 0$

s הוא הקוד' היחיד עבורו קיים מסלול (ריק) P מאורך 0 . משקלו $w(P) = 0$ ואכן בסיום האיטרציה ה-0, לפי האתחול $d(s) = 0 \leq w(P)$

צעד: נניח את נכונות הטענה עבור $k-1$ ונוכיח עבור k. יהי $P_{s,v}$ מסלול באורך k מ-s ל-v. נסמן: $P_{s,v} = (s, \dots, u, v)$ נתבונן ברישא $P_{s,u}$ של המסלול, כלומר תת המסלול מ-s ל-u. $|P_{s,u}| = k-1$ ולכן לפי הנחת האינ' בסיום האיטרציה ה-$k-1$ מתקיים $d(u) \leq w(P_{s,u})$ נביט באיטרציה ה-k בפעולת $Relax(u,v,w)$ בסיום הפעולה מתקיים: $d(v) \leq d(u) + w(u,v)$ לכן בסיום הפעולה מתקיים:

$$d(v) \leq d(u) + w(u,v) \leq w\left(P_{s,u}\right) + w(u,v) = w(P_{s,v})$$

קיבלנו כי $d(v) \leq w(P_{s,v})$ ואי-שיוויון זה לא ישתנה במהלך שאר האיטרציות, מאחר וערך $d(v)$ יכול רק לרדת, ולכן בסיום האיטרציה הטענה מתקיימת.

ניתוח זמן ריצה:

הלולאה הראשית עפ"י ההוכחה מבוצעת לכל היותר $a(\mathrm{G}) + 1$ פעמים ולכן זמן הריצה שלה הוא: $O(a(\mathrm{G}))$

מעבר על כל הקשתות: $O(|E|)$

ביצוע Relax על כל קשת: $O(|E|)$

סה"כ זמן הריצה: $\boldsymbol{O}(\boldsymbol{a}(\mathbf{G}) \cdot |\boldsymbol{E}|)$

שאלה 2

סעיף א

נסמן ב-F את קבוצת כל חתכי ה-$s-t$ המינימאליים של הרשת N.

הוכיחו כי F סגורה תחת חיתוך ואיחוד.

טענת עזר: $(S,V\backslash S)$ חתך מינימום אם"ם כל הקשתות חוצות החתך רוויות.

טענה ראשית 1: F סגורה תחת חיתוך.

הוכחת הטענה הראשית 1:

יהיו $S_1=(S_1,V\backslash S_1),S_2=(S_2,V\backslash S_2)\in F$ ותהי $S_3=S_1\cap S_2=(S_1\cap S_2,V\backslash(S_1\cap S_2))$. נניח בשלילה כי קיימת קשת (v,u) $\mathrm{v}\in S_1\cap S_2,\mathrm{u}\in V\backslash(S_1\cap S_2)$ כלומר קשת חוצת חתך ב-S_3 שאינה רוויה. אם כך נחלק למקרים :

מקרה א' : $u\notin S_1$ אזי הקשת (v,u) חוצת חתך ב-S_1 ולכן הקשת (v,u) רוויה וזו סתירה להנחה.

מקרה ב': $u\notin S_2$ אזי הקשת (v,u) חוצת חתך ב-S_2 ולכן הקשת (v,u) רוויה וזו סתירה להנחה.

נשים לב כי בהכרח אחד מהמקרים הללו מתקיימים כי אחרת $u\in S_1\cap S_2$ וזו סתירה להנחה. לכן בכל מקרה הגענו לסתירה ולכן כל הקשתות החוצות חתך ב-S_3 רוויות ולכן עפ"י טענת העזר S_3 חתך מינימום.

טענה ראשית 2: F סגורה תחת איחוד.

הוכחת הטענה הראשית 2:

יהיו $S_1=(S_1,V\backslash S_1),S_2=(S_2,V\backslash S_2)\in F$ ותהי $S_3=S_1\cup S_2=(S_1\cup S_2,V\backslash(S_1\cup S_2))$. נניח בשלילה כי קיימת קשת (v,u) $\mathrm{v}\in \mathrm{S},\mathrm{u}\in \mathrm{V}\backslash \mathrm{S}$ כלומר קשת חוצת חתך ב-S_3 שאינה רוויה. אם כך הקשת (v,u) חוצת חתך או ב-S_1 או ב-S_2 . נניח בה"כ כי היא חוצת חתך ב-S_1. אבל מכיוון שהיא לא רוויה לפי טענת העזר נובע כי $S_1\notin F$ בסתירה להנחה. באופן דומה נגיע לסתירה אם (v,u) שייכת לS_2 ולכן בכל מקרה הגענו לסתירה לכן ב- S_3 כל הקשתות חוצות החתך רוויות ולכן לפי טענת העזר S_3 חתך מינימום.

הוכחת טענת העזר:

$\Leftarrow$ יהא $(S,V\backslash S)$ חתך מינימום צ"ל כל הקשתות חוצות החתך רוויות. תהי f זרימה מקסימלית ברשת N . נניח בשלילה כי קיימת קשת (v,u) $\mathrm{v}\in \mathrm{S},\mathrm{u}\in \mathrm{V}\backslash \mathrm{S}$ כלומר קשת חוצת חתך, שאינה רוויה. לכן נובע כי $|f|<c(S)$. בנוסף לפי משפט $min-cut-max-flow$ נובע כי קיים חתך נסמנו S' המקיים: $c(S')=|f|$. ולכן: $\mathrm{c}(\mathrm{S}')=|\mathrm{f}|<\mathrm{c}(\mathrm{S},\mathrm{V}\backslash \mathrm{S})$ בסתירה לכך ש-$(S,V\backslash S)$ חתך מינימום.

$\Rightarrow$ יהא $(S,V\backslash S)$ חתך ונניח כי כל הקשתות חוצות החתך רוויות צ"ל $(S,V\backslash S)$ חתך מינימום. לפי ההנחה נובע כי: $|f|=c(S,V\backslash S)$. נניח בשלילה שקיים חתך אחר נסמנו S' שמקיים: $c(S')<c(S,V\backslash S)$ אבל אז $c(S')<c(S,V\backslash S)=|f|$ מצב כזה לא ייתכן ולכן זו סתירה. לכן לא קיים חתך עם קיבול קטן יותר ולכן לפי הגדרה $(S,V\backslash S)$ חתך מינימום. ■

סעיף ב

נתאר אלגוריתם למציאת $\bigcup_{S\in F}S$ ו- $\bigcap_{S\in F}S$: (נבצע סריקה דומה לסריקת BFS)

- אתחול שדה $flag$ לכל קודקוד ב-N שמציין אם כל הצלעות שיוצאות ממנו רוויות או לא.

ו- $S=\{\}$, $R=\{s\}$ (R מסמלת את קבוצת הקודקודים שכל הקשתות היוצאות מהם רוויים)

כל עוד קיים $v\in R$ ב- N עבורו מתקיים: $\mathrm{flag}(\mathrm{v})=\mathrm{false}$ בצע:

$R=R\backslash\{v\}\cup N(v)$ נוודא לכל שכן שמועמד להכנס ל-R שאינו היה כבר ב-R למשל ע"י תחזוק שדה בוליאני

$S=S\cup\{v\}$

$S_{min}=(S\cup R,V\backslash\{S\cup R\})$ (R כל הקוד' ה"רוויים" וS כל הקוד, ה"לא רוויים" עד לשלב הזה)

- אתחול שדה $flag$ לכל קודקוד ב-N_f שמציין אם כל הצלעות שיוצאות ממנו רוויות או לא.

ו- $S = \{\}$, $R = \{t\}$ (R מסמלת את קבוצת הקודקודים שכל הקשתות היוצאות מהם רוויים)

כל עוד קיים $v \in R$ ב- N_f עבורו מתקיים: $\mathrm{flag(v) = false}$ בצע:

$R = R\backslash\{v\} \cup N(v)$ נוודא לכל שכן שמועמד להכנס ל-R שאינו היה כבר ב-R למשל ע"י תחזוק שדה בוליאני

$S = S \cup \{v\}$

$S_{max} = (V\backslash\{S \cup R\}, S \cup R)$ (R כל הקוד' ה"רוויים" וS כל הקוד, ה"לא רוויים" עד לשלב הזה)

החזר את S_{min} ואת S_{max}.

הוכחת נכונות:

טענה ראשית: האלגוריתם מחזיר $S_{min} = \bigcap_{S\in F} S$ ו- $S_{max} = \bigcup_{S\in F} S$.

- הוכחת $S_{min} = \bigcap_{S\in F} S$:
  S_{min} הינו חתך מינימום:
  נניח בשלילה כי $S_{min} = (S, V\backslash S)$ שהאלגוריתם החזיר אינו חתך מינימום. אם כך קיימת קשת חוצת חתך נסמנה $e = (v,u)$ $\mathrm{v \in S, u \in V\backslash S}$ כך שאינה רוויה. אבל אז האלגוריתם לא היה עוצר מכיוון ש- $flag(v) = false$ והוא רץ כל עוד לא קיימים כאלה קודקודים ב-R ולכן זו סתירה.
  כעת נוכיח כי S_{min} הוא חתך מינימום הקטן ביותר:
  נניח בשלילה כי קיים חתך מינימום שונה נסמנו S'_{min} קטן יותר. לכן קיים קודקוד ששייך ל- S_{min} ואינו שייך ל-S'_{min} נסמנו v. נתבונן במסלול: $P = (s = v_0, v_1, \dots, v_i, v_{i+1} = v)$ ב-S_{min} בהכרח קיים כזה כי הגענו ל-v דרך BFS.
  לכן קיימת קשת כלשהי במסלול הזה שחוצה את החתך S'_{min} כי S'_{min} מוכל ממש ב-S_{min}. ולכן לפי הגדרת האלגוריתם הקשת הזו אינה רוויה כי אחרת האלגוריתם לא היה ממשיך במסלול הזה. אבל זו סתירה לכך שS'_{min} חתך מינימום.
- הוכחת $S_{max} = \bigcup_{S\in F} S$:
  S_{max} הינו חתך מינימום:
  נניח בשלילה כי $S_{max} = (S, V\backslash S)$ שהאלגוריתם החזיר אינו חתך מינימום. אם כך קיימת קשת חוצת חתך נסמנה $e = (v,u)$ $\mathrm{v \in S, u \in V\backslash S}$ כך שאינה רוויה. לכן קיימת הקשת (u,v) ברשת השיורית והיא גם אינה רוויה מכיוון ש-(v,u) ברשת הזרימה המקורית אינה רוויה. אבל אז האלגוריתם לא היה עוצר מכיוון ש- $flag(u) = false$ ברשת השיורית והוא רץ כל עוד לא קיימים כאלה קודקודים ב-R ולכן זו סתירה.
  כעת נוכיח כי S_{max} הוא חתך מינימום הגדול ביותר:
  נניח כי בשלילה כי קיים חתך מינימום גדול יותר נסמנו S'_{max}. לכן קיים קודקוד ששייך לS'_{max} ואינו שייך ל-S_{max} נסמנו ב-u. נחלק למקרים:
  מקרה א: אם לא קיים מסלול ברשת השיורית מ-t ל-u אזי זו סתירה כי אז u לא יהיה שייך ל-S או ל-R ולכן u יהיה שייך ל-$\mathrm{V\backslash(S \cup R)}$ בסתירה לכך שהוא לא שייך לחתך S_{max}
  מקרה ב: אם קיים מסלול ברשת השיורית מ-t ל-u אזי בהכרח נגיע ל-u בסריקה באלגוריתם כי אחרת אם לא נגיע אליו נקבל חתך גדול יותר כי $V\backslash\mathrm{(S \cup R)}$ יכיל יותר איברים. נסמן את המסלול הזה: $P = (t = u_0, u_1, \dots u_i, u_{i+1} = u)$ לכן קיימת הקשת (u_i, u) ברשת השיורית שאינה רוויה. (כי אילו היתה רוויה לא היינו מגיעים ל-u בסריקה של האלגוריתם). אבל זו סתירה כי אז הקשת (u, u_i) אינה רוויה ברשת זרימה המקורית, בסתירה לכך ש-S'_{max} חתך מינימום. ■

זמן ריצה:

נשים לב כי זמני הריצה של שני חלקי האלגוריתם סימטריים ולכן מספיק שנחשב את זמן הריצה של אחד מהם וזה יהיה נכון גם לזמן הריצה הכולל מכיוון שהוא מתבצע סה"כ פעמיים כפול זמן הריצה הזה.

אתחול השדה $flag$ דורש מעבר לכל קוד על כל הקשתות שלו ולכן: $O(|E| + |V|)$

הלולאה עוברת לכל היותר על כל הקודקודים ועל כל הקשתות ולכן זמן הריצה שלה הוא: $O(|E| + |V|)$

מספר קבוע של פעולות לאחר סיום האיטרציה: $O(1)$

ולכן בסה"כ זמן ריצת האלגוריתם הוא: $\boldsymbol{O(|E| + |V|)}$

שאלה 3

נבצע רדוקציה לאלגוריתם מציאת מסלולים קלים של דייקסטרה. תהי $N = (G = (V,E), c, s, t)$ רשת זרימה, ותהי f זרימת מקסימום עבור רשת זו.

ממיר קלט: נבנה גרף מכוון וממושקל $G' = (V,E)$ כאשר נגדיר פונקציית משקל $w\colon \mathrm{E} \to R$ על הקשתות באופן הבא:

$$\mathrm{w(v,u)}\begin{cases}0, & f(v,u) = c(v,u)\\ 1, & f(v,u) < c(v,u)\end{cases}$$

נריץ את האלגוריתם של דייקסטרה על G' החל מהקודקוד s.

ממיר הקלט: נתבונן ב-$d(t)$ שהוחזר ע"י האלגוריתם של דייקסטרה. אם: $d(t) \le k$ נחזיר אמת, אחרת נחזיר שקר.

טענה ראשית: האלגוריתם מחזיר אמת אם ניתן להגדיל קיבול של k קשתות ברשת הזרימה ולקבל רשת זרימה חדשה בה קיימת זרימה $|f'|$ המקיימת $|f| < |f'|$.

טענת עזר: קיים מסלול מ-s ל-t עם x קשתות רוויות ב-N אם"ם קיים מסלול במשקל x בין s ל- t ב-G'.

הוכחת הטענה הראשית באמצעות טענת העזר:

נניח כי האלגוריתם החזיר אמת. לכן $d(t) \le k$ לאחר הרצת האלגוריתם של דייקסטרה ב-G'. לכן לפי הגדרת G' ולפי טענת העזר קיים מסלול P מ-s ל-t עם $d(t)$ קשתות רוויות. לכן ניתן להגדיל את הקיבול של קשתות אלה מכיוון ש- $d(t) \le k$, נסמן את רשת הזרימה החדשה שקיבלנו ב-N'. נזרים ברשת N' את הזרימה f היא בהכרח זרימה חוקית כי רק הגדלנו את הקיבול של צלעות מסויימות. בנוסף קיבלנו מסלול שיפור ב-${N'}_f$ זהו המסלול P ולכן f איננה זרימת מקסימום ב-N' לפי $min-cut-max-flow$, לכן קיימת זרימה f' המקיימת: $|f| < |f'|$.

נניח כי האלגוריתם החזיר שקר. לכן $d(t) > k$ לאחר הרצת האלגוריתם של דייקסטרה ב-G'. לכן לפי הגדרת G' ולפי טענת העזר לא קיים מסלול P מ-s ל-t עם k או פחות קשתות רוויות. ולכן בכל הגדלה כלשהי של קיבול של לכל היותר k קשתות, עדיין לכל מסלול מ-s ל-t תהיה לפחות קשת רוויה אחת, ולכן אין מסלול מ-s ל-t ברשת השיורית, ולכן לפי $min-cut-max-flow$ f עדיין תשאר זרימת מקסימום גם לאחר הגדלת הקיבול של לכל היותר k קשתות.

הוכחת טענת העזר:

$\Leftarrow$ יהי מסלול P עם x קשתות רוויות מ-s ל-t ב-N צ"ל קיים מסלול במשקל x בין s ל- t ב-G'. לפי הגדרת G' ולפי הגדרת פונקציית המשקל, המסלול P הוא מסלול חוקי ב-G' מ-s ל-t ובנוסף מכיוון שקיימות בו בדיוק x קשתות רוויות וכל השאר הן קשתות אינן רוויות נובע כי $w(P) = x$.

$\Rightarrow$ יהי P מסלול במשקל x בין s ל- t ב-G' צ"ל קיים מסלול המכיל x קשתות רוויות מ-s ל-t ב-N . לפי הגדרת G' ולפי הגדרת פונקציית המשקל, המסלול P הוא מסלול חוקי ב-N מ-s ל-t ובנוסף מכיוון שמשקלו x נובע שבמסלול זה ב-N היו בדיוק x קשתות רוויות וכל השאר הן קשתות אינן רוויות ולכן קיים קיים מסלול מ-s ל-t המכיל x קשתות רוויות ב-N. ■

זמן ריצה:

ממיר קלט:

יצירת הגרף G': $\mathrm{O}(|V| + |E|)$

יצירת פונקציית המשקל: $O(|E|)$

הפעלת אלגוריתם של דייקסטרה על G': $O(|E|\log|V|)$

ממיר הקלט:

בדיקה קבועה: $O(1)$

לכן **בסה"כ זמן ריצת האלגוריתם הוא: $\boldsymbol{O(|E|\log|V|)}$**

שאלה 4

הוכיחו כי מתקיים $\delta_{f'}(s,t) > \delta_f(s,t)$ נתבסס על ההוכחה שראינו בכיתה של הטענה: $\delta_{f'}(s,v) > \delta_f(s,v)$ לכל $v\epsilon V$.

לכל $v \in V$ נסמן ב-L(v) את מס' השכבה שלו ב-L_f. כלומר, $L(v)$ זהו מרחקו של v מ-s ב-N_f.

טענת עזר: לכל קשת $(v,u) \in N_f$ מתקיים: $\mathrm{L(v)} \leq \mathrm{L(u)} + 1$.

הוכחת טענת העזר:

ברשת השיורית N_f, יש שני סוגים של קשתות:

- קשתות "ישנות" שהיו גם ב-N_f.
- קשתות "חדשות" שהתווספו במהלך השלב הנוכחי.

מקרה א (u,v) קשת ישנה:

- אם הקוד' v נמצא בשכבה העוקבת לשכבה של u אזי $\mathrm{L(v)} = \mathrm{L(u)} + 1$.
  נשים לב לעובדה שנשתמש בה בהמשך ההוכחה: במקרה זה (u,v) קשת ברשת שכבות L_f
- אחרת, v נמצא בשכבה של u או בשכבה קודמת לכן : $L(v) < L(u) + 1$

מקרה ב (u,v) קשת חדשה:

אם (u,v) קשת חדשה אזי הקשת ההפוכה (v,u) השתייכה למסלול בו שיפרנו את הזרימה במהלך השלב הנוכחי, בפרט (v,u) קשת ברשת שכבות L_f ולכן: $L(v) = L(u) - 1$

הוכחה באמצעות טענת העזר:

יהי $\mathrm{P} =< \mathrm{s} = v_0, v_1, \dots, v_l = \mathrm{v} >$ מסלול מ-s ל-t ב-N_f באורך l. נתבונן בסדרה המתארת את מספר השכבה של קודקודי P
$S = L(s) = 0, L(v_1), \dots, L(v) = k$

טענה א': $l = |P| \geq k$.

הוכחת טענה א' : סדרת S זוהי סדרה המתחילה ב-0 ומסתיימת ב-k . לפי הלמה, כל קשת ב-P מגדילה את L ב-1 לכל היותר. לכן, האפשרות היחידה להגיע מ-0 ל-k הינה לכל הפחות ע"י k צעדים. כלומר אורכו של P הינו k או יותר. ולכן $l = |P| \geq k$.

טענה ב': $l = |P| \geq k + 1$

הוכחת טענה ב': נניח בשלילה כי אורכו של P הינו k. זה אפשרי רק אם L גדל בדיוק ב-1 בכל קשת במסלול. לפי הוכחת טענת העזר, במקרה זה כל קשת במסלול הגיעה מ-L_f. קיבלנו כי P מסלול מ-s ל-t ב-L_f. לא ייתכן כי P מוכל ברשת השכבות L_f מאחר והנחנו כי g זרימה חוסמת ב-L_f מ-s ל-v , ולכן לפחות אחת מקשתות המסלול הרוותה ונעלמה כאשר בנינו את N_f, סתירה.

$\Leftarrow$ קיבלנו כי אורכו של P לפחות $k + 1$ כנדרש. ■