עבודה 5

תאריך הגשה: 12.1.2020

מתרגל אחראי: נדב ברק

הוראות כלליות:

- כל עוד לא נאמר אחרת, כאשר הנכם מתבקשים לתאר אלגוריתם יש לספק את הבאות:
  1. תיאור מילולי של האלגוריתם
  2. הוכחת נכונות
  3. ניתוח זמן ריצה
- אלגוריתם עם זמן ריצה אקספוננציאלי לא נחשב יעיל ולכן בדרך כלל לא יתקבל.
- יש לרשום פתרון בדף התשובות הנלווה לעבודה.
- לתשומת לבכם, המקום שהוקצה בדף התשובות הינו פי 1.5 מהמקום המומלץ.

שאלה 1

בעיית Set-Cover

מופע: סדרת איברים $U=(a_1,\dots,a_n)$, אוסף של תתי קבוצות $S=(s_1,\dots,s_m)$ כך לכל i מתקיים כי $s_i\subseteq U$ ופונקצית משקל $C:S\to R^+$ כאשר $c_{s_i}\in R$ המשקל של s_i.

פתרון חוקי: אוסף C של קבוצות מ S המהווה כיסוי של U, כלומר אוסף שמקיים $\bigcup_{s\in C} s=U$.

יש למצוא: אוסף C שמהווה פתרון חוקי בעל משקל כולל $\sum_{s\in C} c_s$ מינימלי

סעיף א

1. הגדירו בעיית תכנון ליניארי מתאימה (בשלמים).
2. הגדירו את הבעיה הדואלית לבעיית התכנון הליניארי שהגדרתם (ללא אילוצי השלמים)

בעיית המשקול המקסימלי

הגדרה: בגרף מכוון $G=(V,E)$ עם פונקציית משקל $w:E\to\mathbb{R}$ על הקשתות, דרגת הכניסה הממושקלת של צומת $v\in V$ מוגדרת להיות סכום משקלי הקשתות הנכנסות, כלומר

$$d_{in}^{w}(v)=\sum_{u:(u,v)\in E} w(u,v)$$

ובאופן דומה, דרגת היציאה הממושקלת מוגדרת להיות

$$d_{out}^{w}(u)=\sum_{v:(u,v)\in E} w(u,v)$$

מופע: גרף מכוון $G=(V,E)$

פתרון חוקי: פונקציית משקל אי-שלילית $w:E\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ על הקשתות שעבורה כל דרגות הכניסה והיציאה הממושקלות בגרף הן לכל היותר 1.

יש למצוא: פונקציית משקל חוקית w הממקסמת את משקל הגרף כולו $w(E)\coloneqq \sum_{e\in E} w(e)$

.

סעיף ב

1. הגדירו בעיית תכנון ליניארי מתאימה.
2. הגדירו את הבעיה הדואלית לבעיית התכנון הליניארי שהגדרתם
3. מדוע לא יכול להיות פתרון לבעיה הליניארית מסעיף א בעל ערך גדול מ |E|?

שאלה 2

במסגרת עסקת הטיעון שחתמה עם הפרקליטות, הוטל על זמרת מפורסמת עונש של 150 ימי עבודות שירות. בפני הזמרת הוצגו מספר אלטרנטיבות לעבודות השירות, כאשר ביכולתה לבחור כמה ימים לבצע בכל אחת מהן. הזמרת מבינה כי לכל אחת מהעבודות שתבצע תיהיה פגיעה ישירה בפופולאריות שלה ולכן תגרום לאובדן הכנסות בעתיד (פחות מעריצים – פחות הכנסות). הטבלה הבאה מציגה את האלטרנטיבות אשר עומדות בפני הזמרת ואת הפגיעה הפופולריות שלה (מספר המעריצים שתאבד בכל יום של עבודת שירות) בכל אחת מהן.

סוג עבודת השירות	פגיעה בפופולריות - אובדן מעריצים ליום עבודה
1. מגישת פינת התרבות בערוץ 1	10
2. זמרת הבית בתאטרון היידיש-שפיגל	16
3. עוזרת יו"ר ועד הכיתה במחלקה לפילוסופיה	12
4. זמרת ליווי בהופעות של מירי מסיקה	18

הזמרת אוהבת לשיר ולכן רוצה להעביר לפחות 50 ימים בשירה (אופציות 2 + 4). ישנה אפשרות לחלק יום עבודה בין מספר עבודות שירות אפשריות.

סעיף א

הגדירו בעיית תכנון ליניארי מתאימה

סעיף ב

הגדירו את הבעיה הדואלית

סעיף ג

מצאו פתרון לבעיית התכנון הליניארי מסעיף א והוכיחו את נכונותו

שאלה 3

הגדרת הבעיה: אליס מחזיקה בשתי מחרוזות $A = (a_1, \dots, a_n), B = (b_1, \dots, b_n)$ ובוב מחזיק בשתי מחרוזות $C = (c_1, \dots, c_n), D = (d_1, \dots, d_n)$. אליס ובוב רוצים לבדוק האם A=C וגם $B \neq D$.

סעיף א

הציעו אלגוריתם דטרמיניסטי לבעיה בו אליס שולחת לבוב הודעה **אחת בלבד**. נתחו את אורך ההודעה של אליס. **אין צורך** להוכיח נכונות

סעיף ב

הציעו אלגוריתם הסתברותי בעל סיבוכיות תקשורת טובה ככל הניתן בו אליס שולחת לבוב הודעה אחת ובוב עונה "אמת" או "שקר" וההסתברות לשגיאה היא לכל היותר $\frac{1}{4}$ עבור n גדול מספיק. נתחו את הסתברות השגיאה באלגוריתם שהצעתם ואת סיבוכיות התקשורת (אורך ההודעה של אליס).

בהצלחה!

.