עבודת בית 1: תכנון אלגוריתמים 2020

תאריך הגשה: 15.11.2019, 7:59 בבוקר. את העבודה יש להגיש במערכת ההגשה (עדיף מוקלד).

* ממולץ ביותר ***לא להמתין לרגע האחרון*** להגשת העבודה.

מתרגל אחראי: תומר סידי.

הוראות כלליות:

- כל עוד לא נאמר אחרת, כאשר הנכם מתבקשים לתאר אלגוריתם יש לספק את הבאות:
  1. תיאור מילולי של האלגוריתם.
  2. הוכחת נכונות.
  3. ניתוח זמן ריצה (**לא כולל** זמן הריצה של הקופסה השחורה).
- אלגוריתם עם זמן ריצה אקספוננציאלי לא נחשב יעיל ולכן בדרך כלל לא יתקבל.
- פתרון יש לכתוב רק בדף התשובות הנלווה לעבודה.
- הגשת העבודה תתבצע במערכת ההגשה בקובץ PDB יחיד (לא ZIP). נא לשים לב ששם הקובץ הוא כדקלמן: {ID1}_{ID2}.pdf , לדוגמא: 987654321_123456789.pdf

<u>תזכורת</u>:

רדוקציה הינה פתרון בעיה אחת בעזרת בעיה אחרת. באופן פורמלי (מהתרגול):

הגדרה פורמאלית ל- "רדוקציה":

תהיינה A ו-B זוג בעיות נתונות. רדוקציה מ- A לבעיה B היא זוג פונקציות f,g כך ש:

- f היא פונקצית המרת הקלט, המעבירה מופע של בעיה A למופע של בעיה B.
- g היא פונקצית המרת הפלט, המעבירה פתרון של בעיה B לפתרון של בעיה A.
- עבור מופע a לבעיה A, אם $B(f(a))$ הוא פתרון עבור המופע $f(a)$ תחת בעיה B אזי $g(B(f(a)))$ הוא פתרון למופע a תחת בעיה A. (הגדרת נכונות)

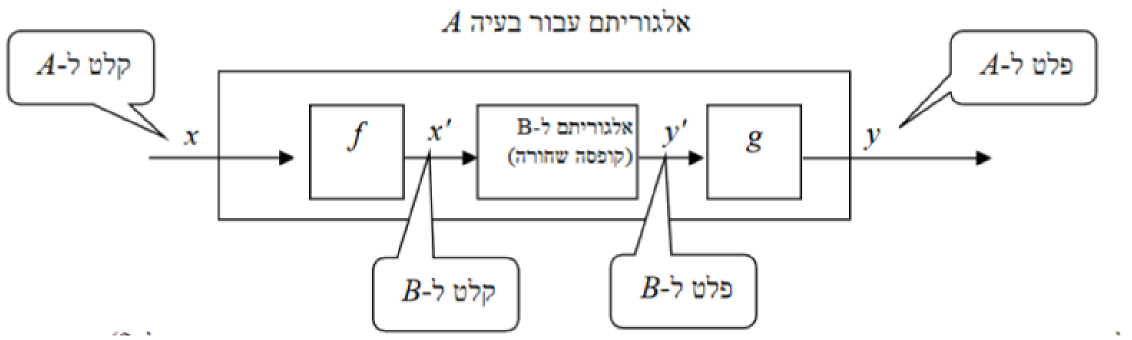
כדי להוכיח את נכונות הרדוקציה, יש להוכיח שהאלגוריתם הבא פותר את הבעיה A:

1. עבור מופע a לבעיה A, חשב את $f(a)$.
2. עבור המופע $f(a)$ לבעיה B, חשב את הפיתרון b.
3. חשב את $g(b)$ להיות הפתרון של A.

כאשר f הינה תרגום הקלט, g הינה תרגום הפלט והאלגוריתם לבעיה B הינו ה"קופסא השחורה".

לטובת העבודה, כשאנו מבקשים רדוקציה מבעיה A לבעיה B, יש לתת פתרון לבעיה A באמצעות קופסא שחורה של בעיה B.

<u>הערה:</u> ניתן להניח כי ממיר הפלט מכיר גם את הקלט המקורי a.



<u>שאלה 1 (25 נקודות)</u>

א. **בעיית המסלול הקצר**.
<u>מופע לבעיה</u>: גרף מכוון ולא ממושקל $G = (V, E)$ ושני קודקודים שונים $s, t \in V$.
<u>פתרון למופע</u>: $d(s,t)$ – אורך המסלול הקצר ביותר מ- s ל- t, או ∞ אם אין מסלול ביניהם.

ב. **בעיית הסדרה הקצרה**.
<u>מופע לבעיה</u>: גרף מכוון ולא ממושקל $G = (V, E)$ וסדרה של קודקודים שונים (s, u_1, u_2, t) כך ש- $u_2, u_1, s, t \in V$.
<u>פתרון למופע</u>: אורך המסלול הקצר ביותר מ- s ל- t שעובר דרך הקודקודים u_1, u_2 לפי סדר כאשר כל אחד מהם מופיע פעם אחת בלבד במסלול, או ∞ אם אין מסלול העונה על התנאי.

* שימו לב שמסלול כנ"ל איננו בהכרח מסלול פשוט. בפרט, ייתכן כי המסלול עובר יותר מפעם אחת דרך s ו/או t.

מצאו רדוקציה מבעיה ב' לבעיה א'. יש להשתמש ב"קופסא השחורה" פעם אחת בלבד. על האלגוריתם שתכננתם להיות יעיל ככל האפשר. הוכיחו נכונות האלגוריתם ונתחו זמן ריצתו (לא כולל זמן הריצה של הקופסה השחורה).

<u>שאלה 2 (25 נקודות)</u>

<u>בעיית חלוקת הגרף:</u>

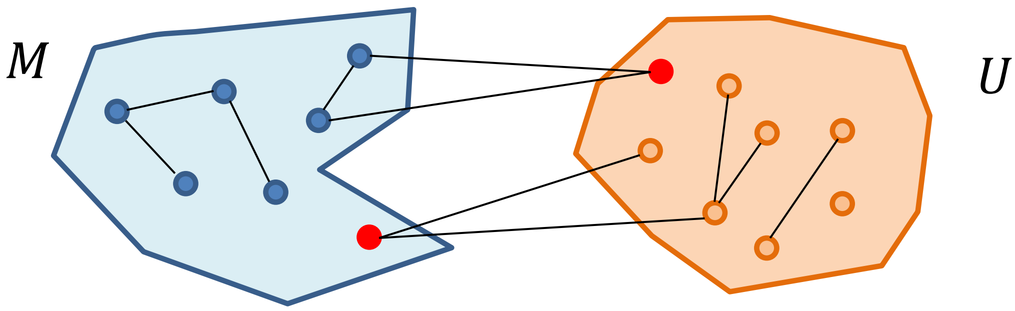
<u>מופע לבעיה</u>: גרף לא מכוון $G = (V, E)$ ו- 2 קבוצות קודקודים $U, M \subset V$ כך ש- $U \cap M = \emptyset$ ו- $U \cup M = V$.

<u>פתרון למופע</u>: קבוצת חלוקה $L \subset V$ בגודל מינימלי.

<u>הגדרה</u>: קבוצת חלוקה הינה קבוצת קודקודים $L \subset V$ בגודל כך שבגרף $G' = (V \backslash L, E_L)$ עם $E_L = E \backslash \{(u, v) \in E \mid u \in L \text{ or } v \in L\}$ כל שני קודקודים $u \in U \backslash L$ ו- $w \in M \backslash L$ נמצאים ברכיבי קשירות שונים.

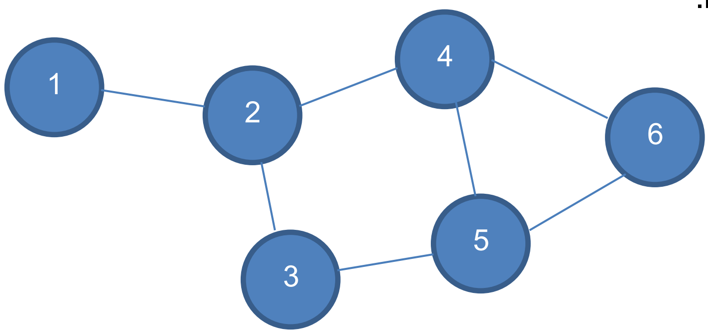
כלומר, יש להפריד את 2 קבוצות הקודקודים U ו- M, כך שלא יהיו קשתות בין 2 הקבוצות.

דוגמא:



בגרף הנ"ל, כאשר נוריד את 2 הקודקודים האדומים, כל זוג קודקודים (כשאחד מקבוצה U ואחד מקבוצה M) שנבחר, יהיו ברכיבי קשירות שונים בגרף החדש.

<u>הגדרה</u>: קבוצה $V' \subseteq V$ היא כיסוי בקודקודים עבור גרף לא מכוון $G = (V, E)$, אם לכל קשת $(u, v) \in E$ מתקיים $v \in V'$ או $u \in V'$ (או שניהם). כלומר, תת-קבוצה של V היא כיסוי בקודקדים אם עבור כל קשת, לפחות אחת מקצוות הקשת נמצא בתת-קבוצה זו.



בדוגמא שמוצגת קבוצת הקודקודים $\{1,3,4,6\}$ ו- $\{2,5,4\}$ הן כיסוי בקודקודים של הגרף. קבוצת הקודקודים $\{6,3,4\}$ אינה מהווה כיסוי בקודקודים, כי הקשת $(1,2)$ אינה מכוסה.

<u>בעיית *VertexCover*:</u>

<u>מופע לבעיה</u>: גרף לא מכוון $G = (V, E)$.

<u>פתרון למופע</u>: כיסוי בקודקודים של הגרף G בגודל מינימלי.

מצאו פתרון מבוסס רדוקציה מבעיית חלוקת הגרף לבעית VC. יש להשתמש ב"קופסא השחורה" פעם אחת בלבד. על האלגוריתם שתכננתם להיות יעיל ככל האפשר. הוכיחו נכונות האלגוריתם ונתחו זמן ריצתו (לא כולל זמן הריצה של הקופסה השחורה).

שאלה 3 (25 נקודות)

בעיית k-החציונים:

מופע לבעיה: n מספרים רציונלים $x_1, x_2, \dots, x_n$ שונים זה מזה.
פתרון מופע: k מספרים רציונלים $m_1, \dots, m_k$ (הנקראים "מרכזים") אשר מביאים למינימום את סכום המרחקים מכל נקודת קלט למרכז הכי קרוב אליה (ניתן להניח כי $k < n$).

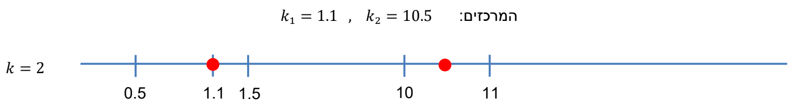
באופן פורמלי, עבור k מרכזים $M = \{m_1, \dots, m_k\}$ נגדיר את העלות שלהם (ביחס לנקודות הקלט) כ-

$$\mathrm{cost}(M) = \sum_{i=1..n} \min_{j=1..k} \{|x_i - m_j|\}$$

יש להחזיר k מרכזים עם עלות מינימלית, כלומר k מרכזים M^* כך ש-

$$\mathrm{cost}(M^*) = \min_{M,|M|=k} \{\mathrm{cost}(M)\}$$

דוגמא:



בעיית המסלול הקל ביותר באורך k:

מופע לבעיה: גרף מכוון $G = (V, E)$, פונקצית משקל $w: V \times V \to \mathbb{R}$ ושני קודקודים s, t.
פתרון מופע: מסלול קל ביותר מ s ל t באורך בדיוק k (אם קיים).

תזכורת:

- משקל מסלול הינו סכום משקלי הקשתות שלו.
- מסלול קל ביותר הינו מסלול עם משקל מינימלי.

הראו אלגוריתם לבעיית k-החציונים המבוסס רדוקציה לבעיית המסלול הקל ביותר באורך k. עליכם להראות אלגוריתם עם זמן ריצה $O(n^3)$ לכל היותר, לא כולל זמן הריצה של הקופסא השחורה.

הערה 1: יתקבלו גם אלגוריתמים לבעיית k החציונים המבוססים על רדוקציה לבעיית המסלול הקל ביותר באורך (k+1).

הדרכה: נניח כי $x_1, x_2, \dots, x_n$ ממויינים (כך ש- x_1 הקטן ביותר). בנו גרף עם קודקוד v_i לכל נקודת קלט x_i, ועוד 1 או 2 קודקודים נוספים.

הערה 2: ניתן להשתמש בטענה הבאה ללא הוכחה.
עבור $k = 1$: אם c הוא חציון של $x_1, x_2, \dots, x_n$ אזי

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i - c| = \min_{d \in \mathbb{R}} \sum_{i=1}^{n} |x_i - d|$$

<u>שאלה 4 (25 נקודות)</u>

<u>סעיף א: בעיית זיהויי המשולשים:</u>

מופע לבעייה: גרף פשוט ולא מכוון $G=(V,E)$ עם n קודקודים. (גרף פשוט הוא גרף ללא קשתות עצמיות וללא קשתות מקבילות.)

פתרון למופע: אם בגרף הנתון קיים משולש (כלומר מעגל פשוט באורך 3) אז יש להחזיר "כן". אחרת יש להחזיר "לא".

תכננו אלגוריתם לבעייה זו עם זמן ריצה $O(|V|^3)$. אין צורך להוכיח נכונות.

<u>סעיף ב:</u>

נתון גרף פשוט ולא מכוון $G_A=(V,E)$ עם n קודקודים המיוצג על ידי מטריצת שכנויות A.

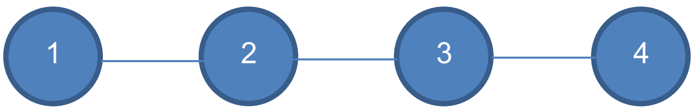
תהי $C=A\cdot A$ המטריצה המתקבלת ע"י הכפלת המטריצה A בעצמה ויהי G_C הגרף המיוצג ע"י מטריצת השכנויות C. יש לשים לב כי בהקשר זה, פעולת הכפל היא אופרטור AND ופעולת חיבור היא אופרטור OR. לכן,

$$C_{i,j}=\bigvee_{k=1}^{n}(A_{i,k}\wedge A_{k,j})$$

דוגמא:

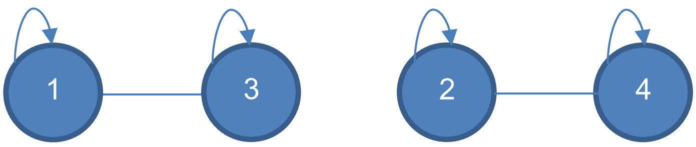
A

0	1	0	0
1	0	1	0
0	1	0	1
0	0	1	0



C

1	0	1	0
0	1	0	1
1	0	1	0
0	1	0	1



הוכיחו כי לכל $v_i,v_j\in V$ מתקיים:

יש מסלול באורך בדיוק 2 בין v_i ו- v_j ב- G_A אם ורק אם יש קשת בין v_i ל- v_j ב- G_C.

<u>סעיף ג: בעיית כפל מטריצות.</u>

<u>מופע לבעיה</u>: A ו- B שתי מטריצות בוליאניות, שתיהן בגודל $n\times n$.

<u>פתרון למופע</u>: מטריצה בוליאנית C בגודל $n\times n$ כך ש- $A\cdot B=C$. גם כאן, פעולת הכפל היא אופרטור AND ופעולת חיבור היא אופרטור OR.

הניחו כי קיים אלגוריתם לבעיית כפל המטריצות עם זמן ריצה $O(n^{\omega})$ עבור קבוע ω כלשהו. תכננו אלגוריתם עבור בעיית זיהויי המשולשים המבוסס על רדוקציה לבעיית כפל המטריצות. על האלגוריתם שתכננתם לרוץ בזמן $O(n^2+n^{\omega})$. הוכיחו נכונות האלגוריתם ונתחו זמן ריצתו.

בהצלחה!