Ben-Gurion University of the Negev

SOLUTION

By

Avi Ferdman

שאלה 1

סעיף א':

נגדיר:

x – אינדקס שורה. (בטווח חוקי של הטבלה הנתונה)

y – אינדקס עמודה. (בטווח חוקי של הטבלה הנתונה)

$p(x,y)$ אוסף כל (i,j) הנקודות שמתקיים עבורן: $|i-x|+|j-y|\le l$ וגם: $j>y$

$$Sol(x_1,y_1,k)=\{I=\left((x_1,y_1),(x_2,y_2),\dots,(x_l,y_l)\right)\middle|\ \forall(x_i,y_i),(x_{i+1},y_{i+1}):(x_{i+1},y_{i+1})\in p(x_i,y_i)\wedge|I|\le k+1\}$$

לכל $\mathrm{I}\in Sol(x,y,k)$ נגדיר: $v(I)=\sum_{i=1}^{l}B[x_i][y_i]\ |(x_i,y_i)\in I$

$$\mathrm{OPT}(x,y,k)=max_{I\in Sol(x,y,k)}(v(I))$$

סעיף ב'

$$\mathrm{OPT}(x,y,k)=\begin{cases}B[x][y]+OPT(p(x,y),k-1), & n>y\ ,k>0\\ B[x][y], & k=0\\ B[x][y], & y=n-1\end{cases}$$

סעיף ג'

טענה: כל הפתרונות בקבוצה $Sol(x,y,k)$ הם בדיוק הקבוצה $I\circ(x,y)$ כך ש- $I\in Sol(p(x,y),k-1)$.

הוכחת כיסוי מלא: נוכיח באינדוקציה על מספר הצעדים שלנו n:

בסיס: $n=0$, אנו נמצאים במשבצת הראשונה ובוחרים אותה, וסך הכל כל האפשרויות שיכולנו לבחור מהם הם רק המשבצת הזו.

הנחה: נניח כי בסוף הצעד ה-$n-1$ כיסינו את כל המשבצות שיכולנו לבחור עד הצעד ה-$n-1$ כולל.

צעד: צ"ל בסוף הצעד ה-n אנחנו מכסים את כל האפשרויות שיכולנו לבחור עד הצעד ה-n כולל. תהי $B[i][j]$ המשבצת שבחרנו בשלב ה-n. אזי לפי ההגדרה קיימת משבצת $B[i'][j']$ שבחרנו לפניה כך שמתקיים: $|i'-i|+|j'-j|\le l$. הבחירה של המשבצת $B[i'][j']$ מקיימת את הנחת האינדוקציה ולכן עד אליה כיסינו את כל האפשרויות הקיימות. כעת נשים לב כי בתחילת הצעד ה-n בחנו את כל המשבצות $B[x][y]$ המקיימות: $|i'-x|+|j'-y|\le l$ ולכן כיסינו את כל המשבצות שיכולנו לבחור גם בשלב ה-n.

הוכחת הנוסחא באמצעות הטענה:

כאשר $n>y$-ו $k>1$:

$$\mathrm{OPT}(x,y,k)=max_{I\in Sol(x,y,k)}\big(v(I)\big)=max_{I\in Sol(p(x,y),k-1)}\big(v(x,y)+v(I)\big)=B[x][y\}+OPT(p(x,y),k-1)$$

אחרת, ניתן לבחור רק את המשבצת שאנו נמצאים עליה ולכן הסכום הכולל שווה לערך של המשבצת $B[x][y]$.

הוכחת הטענה:

תהי $I\in Sol(x,y,k)$. מההגדרה: $I=\left((x,y),(x_2,y_2),\dots,(x_l,y_l)\right)$. בנוסף מההגדרה נובע: $(x_2,y_2)\in p(x,y)$ ולכן נובע כי $\mathrm{I}'=\left((x_2,y_2),\dots,(x_l,y_l)\right)\in Sol(p(x,y),k-1)$. לכן קיים איבר ב-$Sol(p(x,y),k-1)$ (מצאנו אותו הוא I' כך ש-$I'\in Sol(p(x,y),k-1)$) ולכן $I=(x,y)\cup I'$ ולכן $I\in(x,y)\cup Sol(p(x,y),k-1)$

תהי $A=(x,y)\cup I$ כך ש- $I\in Sol(p(x,y),k-1)$. מההגדרה $A=\left((x,y),p(x,y),\dots,(x_l,y_l)\right)$ ולכן נובע כי: $A\in Sol(x,y,k)$.

בנוסף, כאשר $k=0$ לא נותרו לנו תורות להמשיך לצעוד ולכן הערך $B[x][y]$ הוא $\mathrm{OPT}(x,y,0)$.

בנוסף, כאשר $y=n-1$ לא נוכל יותר לצעוד ימינה ולכן אין משבצות חוקיות שנותרו לנו לבחור מהן ולכן הערך $B[x][n-1]$ הוא $\mathrm{OPT}(x,n-1,k)$.

<u>סעיף ד'</u>

נתחזק מטריצה מגודל $nXnXk$. כך שבסיום הריצה יתקיים: $M[x,y,k]=OPT(x,y,k)$. לכל $0\le x<n\ ,0\le y<n,$ $0\le k<n$

אתחול: נאתחל לכל $1\le y<n$ ולכל $1\le x<n$ את התאים במטריצה $M[x,y,0]$ להיות $B[x][y]$.

בנוסף לכל $1\le k<n$ ולכל $1\le x<n$ נאתחל את הערכים במקום $\mathrm{M}[x][n-1][k]$ להיות $B[x][n-1]$

צעד:

עבור כל y מ- $n-1$ עד 0 (כולל)

עבור כל x מ- $n-1$ עד 0 (כולל)

עבור כל x מ- 0 עד k (כולל)

עבור כל (i,j) כך ש- $(i,j)\in p(x,y)$

בחר את האינדקסים i,j עבורם $M[i][j][k-1]$ הוא מקסימלי מביניהם והצב אותו ב-val.

$M[x][y][k]=val+B[x][y]$

סיום: החזר את M.

נשים לב כי בכל חישוב של ערך בטבלה אנחנו ניגשים לערכים שכבר חושבו.

זמן ריצה:

לכל תא במטריצה התלת מימדית באינדקס $M[x][y][k]$ אנו מחשבים כל אחד מהערכים: $p(x,y)$. נחשב כמה ערכים כאלו קיימים:

נשים לב כי לכל l מספר המשבצות החוקיות לנוע אליהן הוא: $1+3+5+\cdots$ כאשר מספר האיברים בסדרה הוא בדיוק l לכן מספר המשבצות החוקיות הוא סכום סדרה חשבונית: $S=\frac{l(2+(l-1)2)}{2}=l^2$.

ולכן זמן הריצה הוא: $O(l^2\cdot k\cdot n^2)$.

<u>סעיף ה'</u>

נתונה מטריצה M בה מתקיים $M[x][y][k]=OPT(x,y,k)$. לכל x,y,k חוקיים.

אלגוריתם שחזור איטרטיבי:

אתחול: $S\leftarrow()\ ,x\leftarrow 0\ ,y\leftarrow 0$

כל עוד $k\ge 0$ וגם $y\le n-1$

עבור כל (i,j) כך ש- $(i,j)\in p(x,y)$

בחר את האינדקסים i,j עבורם $M[i][j][k-1]$ הוא מקסימלי מביניהם ועבורם בצע:

$S\leftarrow S\circ(x,y)$

$x\leftarrow i$

$y\leftarrow j$

$k \leftarrow k-1$

זמן ריצה:

הלולאה הראשית מתבצעת לכל היותר $O(n)$ פעמים:

לכל תא במטריצה התלת מימדית באינדקס $M[x][y][k]$ אנו מחשבים כל אחד מהערכים: $p(x,y)$, ראינו שחישוב כזה הוא $O(l^2)$

לכן בסה"כ זמן ריצת אלגוריתם שחזור הפתרון הוא: $O(n \cdot l^2)$

לכן בסה"כ זמן ריצה האלגוריתם בשאלה הוא: $\boldsymbol{O(l^2 \cdot k \cdot n^2)}$

שאלה 2 – השאלה האלטרנטיבית

סעיף א': יהיו A, B מחרוזות מעל הא"ב $\{a, b, c, d\}$, נסמן $A =< A_0, A_1, \dots, A_n >$, $B =< B_0, B_1, \dots, B_n >$ w פונקציית משקל נתונה מעל הא"ב. נסמן ב- A^k את תת המחרוזת של A החל מהתו במקום ה-k. לכל $0 \leq i < n$:

$$Sol(i) = \{I \mid A^i \text{ תת מחרוזת של } I \ \wedge B \text{ תת סדרה של } I\}$$

$$Cost(I) = w(a) \cdot c_1 + w(b) \cdot c_2 + w(c) \cdot c_3 + w(d) \cdot c_4$$

כך ש- c_1 מספר המופעים של $'a'$ ב-I, c_2 מספר המופעים של $'b'$ ב-I, c_3 מספר המופעים של $'c'$ ב-I, c_4 מספר המופעים של $'d'$ ב-I.

$$\mathrm{OPT}(i) = \max_{I \in Sol(i)}(Cost(I))$$

סעיף ב': נסמן ב- A^k את תת המחרוזת של A החל מהתו במקום ה-k. נגדיר $\boldsymbol{p(i)}$ **כערכה** של אורך תת המחרוזת הארוכה ביותר המתחילה בתו באינדקס ה-i שהיא גם תת סדרה של B.

נוסחת המבנה:

$$OPT(i) = \begin{cases} \max(OPT(i+1), p(i)), & \text{אם } 0 \leq i < n-1 \\ w(A_i), & \text{אחרת אם } A_i \in B \ \wedge i = n-1 \\ 0, & \text{אחרת אם } A_i \notin B \ \wedge i = n-1 \end{cases}$$

סעיף ג'

אבחנה: תהי E קבוצת כל תתי המחרוזות של A המתחילות באינדקס i לכל $0 \leq i < n$ כך שהן גם תתי סדרות ב-B אזי אורך תת המחרוזות הארוכה ביותר I מקיימת $\mathrm{Cost(I)} = \max_{s \in E}(Cost(S))$.

כיסוי מלא: כל תת מחרוזת של A^i לכל $0 \leq i < n$ נסמנה A' כך ש- A' היא גם תת סדרה של B מתקיים$A' \in Sol(i)$. נובע ישירות מהגדרת $Sol(i)$.

הוכחת האבחנה: נניח בשלילה כי קיימת תת מחרוזת I' קצרה יותר מI המתחילה בתו באינדקס ה-i כך ש$Cost(I') > \ Cost(I)$

אבל זו סתירה כי משקלי כל התווים הם חיוביים ממש לפי נתוני הבעיה, וכי $I' \subset I$.

טענה 1:

לכל $0 \leq i < n$ כל הפתרונות בקבוצה $Sol(i)$ הם בדיוק הקבוצה $Sol(i+1) \cup I$ כך ש-I היא אוסף כל תתי המחרוזות של A^i שמתחילות בתו ה-i והן תתי סדרות של B.

הוכחת נוסחת המבנה: לכל $0 \leq i < n$ מתקיים:

$$\begin{aligned} OPT(i) &= \max_{S \in Sol(i)}(Cost(S)) = max_{S \in (Sol(i+1) \cup I)}\big(Cost(S)\big) = \max\big(\max\big(Sol(i+1), p(i)\big)\big) \\ &= \max(OPT(i+1), p(i)) \end{aligned}$$

כאשר $i = n-1$ תת המחרוזת היחידה של A^i היא התו A_i. נחלק למקרים:

$A_i \in B$ אזי אם היא התת מחרוזת היחידה שהיא גם תת סדרה של B נובע ישירות כי $\mathrm{OPT}(i) = \max_{I \in Sol(i)}(Cost(I)) =$ $w(A_i)$.

אחרת, אם $A_i \notin B$ לא קיימת תת מחרוזת של A^i ובפרט לא קיימת תת מחרוזת של A^i שהיא גם תת סדרה של B ולכן משקל תת המחרוזת הריקה הוא 0.

הוכחת טענת 1:

תהי $S \in Sol(i)$ צ"ל $S \in Sol(i+1) \cup I$ כך ש-I היא אוסף כל תתי המחרוזות של A^i שמתחילות בתו ה-i והן תתי סדרות של B. נחלק למקרים:

אם התו הראשון של S הוא במיקום ה-i ב-A אז לפי ההגדרה $S \in I$ ובפרט $S \in Sol(i+1) \cup I$.

אחרת , אם התו התו הראשון של S **אינו** במיקום ה-i ב-A אז לפי ההגדרה $S \in Sol(i+1)$ ובפרט $S \in Sol(i+1) \cup I$

כעת נוכיח את כיוון ההכלה השני, תהי $S \in Sol(i+1) \cup I$ כך ש-I היא אוסף כל תתי המחרוזות של A^i שמתחילות בתו ה-i והן תתי סדרות של B צ"ל $S \in Sol(i)$. אבל זה נובע ישירות כי עפ"י ההגדרה כל הקבוצות ב$Sol(i+1) \cup I$ הם פתרונות חוקיים, כלומר S היא תת מחרוזת כלשהי ב-A^i והיא גם תת סדרה של B לכן היא שייכת ל$Sol(i)$.

<u>סעיף ד'</u>

ניצור מערך חד מימדי נסמנו O בגודל n כך שבסופו של התהליך יתקיים $O[i] = \mathrm{OPT(i)}$ לכל $0 \le i < n$. אם יהיה נתון לנו מערך כזה, הרי לפי ההגדרה של $OPT[i]$ יתקיים שהערך בתא $O[0]$ יהיה ערכם של רצף התווים המפיקים את העלות המקסימלית כל שהם גם תת מחרוזת ב-A וגם תת סדרה ב-B.

נשלח למתודה $Solve$ את המיקום של התו האחרון של A אם היא באורך n אז התו האחרון הוא במיקום $n-1$:

$Solve(i)$

$While\ i \ge 0$

  $\mathrm{if\ i = n-1\ \&\ B\ contains\ i}$

    $\mathrm{O[i] =\ w}(A_i)$

  $\mathrm{else\ if\ i = n-1\ \&\ B\ not\ contains\ i}$

    $\mathrm{O[i] =\ 0}$

  else

    $\mathrm{O[i]} = max(\mathrm{O[i+1]}, p(i))$

  $i = i - 1$

זמן ריצה:

חישוב מקדים לכל $0 \le i < n$ את $p(i)$ לצורך כך דרוש מעבר על כל המחרוזת B או על כל המחרוזת A (הקצרה מביניהן, כי ברגע שאחת מהן תגמר אין מה להמשיך את האיטרציה) לכל תו במחרוזת A נניח כי גודל מחרוזת B הוא m וגודל מחרוזת A הוא n אזי סך הכל זמן החישוב הוא: $O(n \cdot \min(m,n))$

האלגוריתם מבצע לולאה n פעמים, בכל כניסה ללולאה מבצע $O(1)$ פעולות, סה"כ $O(n)$

סה"כ זמן ריצת האלגוריתם $O(n \cdot \min(m,n))$

<u>סעיף ה'</u>

נשלח למתודה את הערך 0.

$Reconstruct(i)$

$Sum \longleftarrow A[i]$

$SolutionSequence \longleftarrow ()$

$While\ i \le n$

  $\mathrm{if\ i = n\ \&}\ Sum = w(A_i)$

    $SolutionSequence \longleftarrow SolutionSequence \circ A_i$

    $Sum = \mathrm{Sum} - w(A_i)$

  $\mathrm{else\ if\ i \ne n\ \&\&\ A[i] = A[i+1]} + w(A_i)$

$SolutionSequence \longleftarrow SolutionSequence \circ A_i$

$Sum = \mathrm{Sum} - w(A_i)$

$i = i + 1$

$return\ SolutionSequence$

זמן ריצה:

האלגוריתם מבצע לולאה n פעמים, בכל כניסה ללולאה מבצע $O(1)$ פעולות, סה"כ $O(n)$

סה"כ זמן ריצת האלגוריתם $O(n)$

לכן בסה"כ זמן ריצה האלגוריתם בשאלה הוא: $O(n \cdot \min(m, n))$

שאלה 3

<u>סעיף א'</u>

קלט: $G = (V, E)$ גרף מכוון ממושקל עם פונקציית משקל $w: E \to N$ משקלים שלמים חיובים על הצלעות. וקוד' $s \in V$.

פלט: לכל $v \in V$ "משקל אורך" מינימאלי מ-s ל-v.

נבצע רדוקציה לאלגוריתם דייקסטרה.

תרגום קלט: ניצור גרף חדש: $G' = (V, E)$ עם פונקציית משקל חדשה שבה: לכל $e \in E$ נגדיר: $w'(e) \leftarrow w(e) + 1$.

נריץ את אלגוריתם דייקסטרה על הגרף עם המשקלים החדשים מהקודקוד s.

תרגום פלט: הפלט נשאר ללא שינוי.

הוכחת נכונות:

משפט: האלגוריתם מחזיר לכל $v \in V$ "משקל אורך" מינימאלי מ-s ל-v.

טענת עזר:

לכל $v \in V$ ב-G קיים מסלול P מ-s ל-v במשקל $w(P)$ באורך l אם"ם קיים מסלול P' באורך l ב-G' מ-s ל-v במשקל $w(P') = w(P) + l$.

הוכחת המשפט באמצעות טענת העזר:

יהי $v \in V$, נסמן ב-$T(v)$ את "משקל אורך" המינימאלי עבור v. לכן קיים מסלול ב-G מ-s ל-v באורך l כך שמשקלו הוא $T(v) - l$ ולכן עפ"י טענת העזר קיים מסלול P' ב-G' באורך l מ-s ל-v שמשקלו הוא: $T(v) - l + l = T(v)$ ולכן האלגוריתם יחזיר לכל היותר את הערך $T(v)$ עבור v. נניח בשלילה כי האלגוריתם יחזיר ערך $T'(v)$ עבור v כך ש: $T'(v) < T(v)$. לכן קיים מסלול ב-G' מ-s ל-v באורך l' כך שמשקלו הוא $T'(v)$ לכן מטענת העזר קיים מסלול ב-G מ-s ל-v שאורכו l' ומשקלו $T'(v) - l'$ אבל זו סתירה למינימאליות של $T(v)$ כי אז קיים "משקל אורך" קטן יותר עבור v והוא המשקל של המסלול שמשקלו $T'(v) - l'$ שמשקל "אורך מסלול" שלו הוא $T'(v) - l' + l' = T'(v) < T(v)$.

הוכחת טענת העזר:

$\Leftarrow$ נניח כי לכל $v \in V$ ב-G קיים מסלול P מ-s ל-v במשקל $w(P)$ באורך l צ"ל קיים מסלול P' באורך l ב-G' מ-s ל-v במשקל $w(P') = w(P) + l$. נוכיח זאת באינדוקציה על $l \le 1$.

מקרה בסיס: $l = 1$: אם כך קיים מסלול (s, v) ב-G ונסמן את משקל הקשת $w(e)$ אזי לפי ההגדרה של G' קיימת הקשת $e' = (s, v)$ בקבוצת הקשתות של G' ומשקלה הוא $w(e) + 1$.

הנחה: נניח כי לכל $v \in V$ ב-G קיים מסלול P מ-s ל-v במשקל $w(P)$ באורך $l - 1$ אז קיים מסלול P' באורך $l - 1$ ב-G' מ-s ל-v במשקל $w(P') = w(P) + l - 1$.

צעד: נניח כי לכל $v \in V$ ב-G קיים מסלול P מ-s ל-v במשקל $w(P)$ באורך l צ"ל קיים מסלול P' באורך l ב-G' מ-s ל-v במשקל $w(P') = w(P) + l$. נתבונן ברישא ה-$l - 1$ של P ונסמן את הקוד האחרון ברישא הזו ב-v'. מכיוון שלקחנו תת מסלול שהתחיל בקודקוד s וגודל תת המסלול הזה הוא $l - 1$ אזי הוא מקיים את הנחת האינדקוציה ולכן מתקיים כי קיים מסלול P' באורך $l - 1$ ב-G' מ-s ל-v' במשקל $w(P') = w(P_{l-1}) + l - 1$. כעת נוסיף לשני המסלולים את הקשת (v', v) . בגרף G משקלה הוא $w(e)$ ובגרף G' משקלה הוא $w(e) + 1$ וזה לפי הגדרת פונקציית משקל הצלעות ב-G' ולכן כאשר נחשב את משקלי הצלעות של המסלולים: $P' \cup \{v\}$ ו- $(P_{l-1}) \cup \{v\}$ נקבל :
$w\big((P_{l-1}) \cup \{v\}\big) = w\big((P_{l-1})\big) + w(e) = w(P') - l + 1 + w(e) = w(P' \cup \{v\}) - l$ כנדרש. בנוסף אורכי המסלולים שווים כי אורכי P_{l-1} ו-P' היו שווים ולכל אחד מהם הוספנו עוד קשת בסוף.

$\Rightarrow$ נניח כי קיים מסלול P' באורך l ב-G' מ-s ל-v במשקל $w(P') = w(P) + l$ נסמנו: $P' = (s, u_1, u_2, \dots, v)$. צ"ל קיים מסלול P מ-s ל-v במשקל $w(P)$ באורך l. נוכיח זאת באינדוקציה על l.

בסיס: $l = 1$ אם כך קיים מסלול (s, v) ב-G' ונסמן את משקל הקשת $w(e')$ אזי לפי ההגדרה של G' קיימת הקשת $e = (s, v)$ בקבוצת הקשתות של G' ומשקלה הוא $w(e') - 1$.

הנחה: נניח כי קיים מסלול P' באורך $l-1$ ב-G' מ-s ל-v במשקל $w(P')=w(P)+l-1$ כך שP מסלול ב-G מ-s ל-v במשקל $w(P)$ באורך $l-1$.

צעד: קיים מסלול P' באורך l ב-G' מ-s ל-v במשקל $w(P')$ צ"ל ב-G קיים מסלול P מ-s ל-v במשקל $w(P)$ באורך l כך ש-$w(P')=w(P)+l$. נתבונן ברישא ה-$l-1$ של P' ונסמן את הקוד האחרון ברישא הזו ב-v'. מכיוון שלקחנו תת מסלול שהתחיל בקודקוד s וגודל תת המסלול הזה הוא $l-1$ אזי הוא מקיים את הנחת האינדקוציה ולכן מתקיים כי קיים מסלול P באורך $l-1$ ב-G מ-s ל-v' במשקל $w({P'}_{l-1})=w(P)+l-1$. כעת נוסיף לשני המסלולים את הקשת (v',v) . בגרף G משקלה הוא $w(e)$ ובגרף G' משקלה הוא $w(e)+1$ וזה לפי הגדרת פונקציית משקל הצלעות ב-G' ולכן כאשר נחשב את משקלי הצלעות של המסלולים נקבל:

$$w({P'}_{l-1}\cup\{v\})=w(P)+l-1+w(e')=w(P)+l+w(e)=w(P\cup\{v\})+l$$

כנדרש מצאנו מסלול עם משקל מתאים, ואורכם המסלולים הללו שווים כי אורכם של ${P'}_{l-1}$ ו- P שווים ולכל אחד מהם הוספנו עוד קשת אחת.

זמן ריצה:

ממיר קלט: יצירת גרף חדש, מעבר על כל הקשתות ובניית פונקציית משקל חדשה: $O(|V|+|E|)$

הפעלת דייקסטרה על הגרף החדש: $O(|E|+|V|\log|V|)$

ולכן זמן הריצה הכולל הוא $O(|E|+|V|\log|V|)$

<u>סעיף ב'</u>

קלט: $G=(V,E)$ גרף מכוון ממושקל עם פונקציית משקל $w\colon E\to N$ משקלים שלמים חיובים על הצלעות. וקוד' $s\in V$.

פלט: לכל $v\in V$ "משקל אורך בריבוע" מינימאלי מ-s ל-v.

נסמן ב-$\mathrm{D}(v)$ את הערך שהאלגוריתם דייקסטרה נותן עבור הקודקוד v.

נסמן ב-$S(v)$ את הערך "משקל אורך בריבוע" מינימאלי מ-s עבור v.

נבצע רדוקציה לאלגוריתם דייקסטרה.

ממיר הקלט:

נבנה גרף חדש $G'=(V',E')$ באופן הבא:

$$V'=\{v^1,v^2,\dots,v^{v-1},v^v\mid v\in V\land v\neq s\}\cup\{s\}$$

נבנה את קבוצת הקשתות באופן הבא:

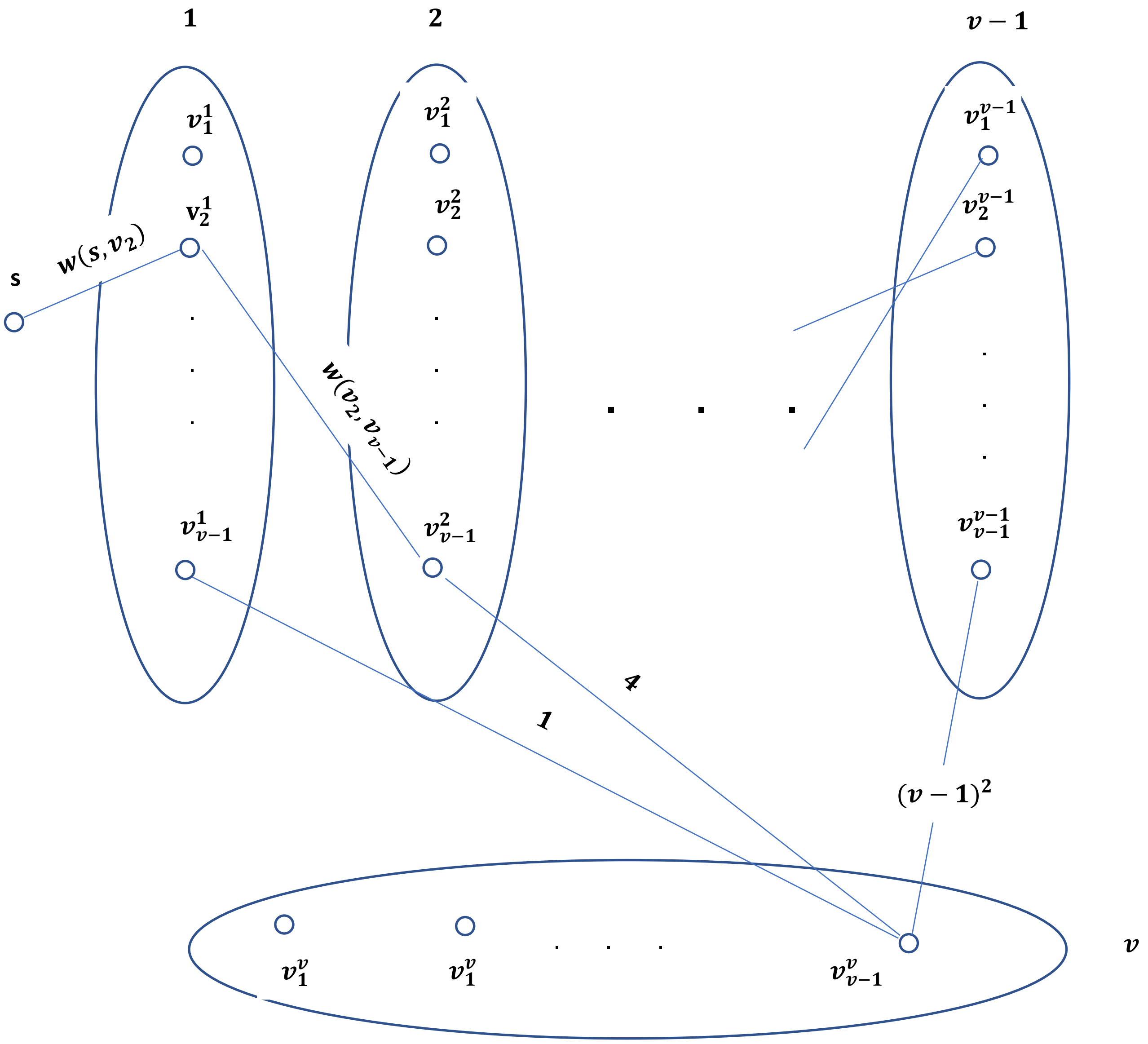
תחילה נעבור על כל השכנים של s ב-G ולכל קשת $(s,v)\in E$ נבנה קשת $(s,v^1)\in E'$ עם משקל זהה למשקל הקשת המקורית.

כעת לכל קשת שיוצאת מקוד' $v\in N(s)$ נסמנה (v_1,v_2) נבנה קשת (v_1^1,v_2^2) עם משקל זהה למשקל הקשת המקורית..

נמשיך בתהליך זה $|V|-1$ פעמים. (ההסבר מדוע יגיע בהמשך).

בנוסף לכך לכל $v\in V$ שאינו s נוסיף את הקשתות $\left(v^i,v^v \mid 1\leq i\leq |V|-1\right)$ ונגדיר: $w\left(\left(v^i,v^v\right)\right)=i^2$

לצורך המחשה בלבד הגרף שניצור נראה כך:



אבחנה: המסלול בעל "משקל אורך בריבוע" מינימאלי ב- G מ-s ל-v אינו מכיל מעגל.

הוכחת האבחנה: נניח בשלילה כי המסלול P בעל "משקל אורך בריבוע" מינימאלי ב- G מ-s ל-v מכיל מעגל, נסמנו: $\mathrm{P} = (s, v_1, v_2, \dots, v_i, \dots, v_i, \dots, v)$. מכיוון שמשקלי כל הצלעות חיוביים ניתן ליצור מסלול "משקל אורך בריבוע" שמשקלו קטן יותר ממש והוא: $(s, v_1, v_2, \dots, v_i, \dots, v)$, בסתירה.

לכן אורך המסלול בעל "משקל אורך בריבוע" מינימאלי ב- G מ-s ל-v הוא לכל היותר $|V|-1$.

לאחר המרת הפלט נפעיל את האלגוריתם של דייקסטרה על הגרף G' החדש שהתקבל.

ממיר הפלט:

עבור כל קוד $v \in V$ נטען כי : $S(v) = D(v^v)$ ולכן נחזיר את $D(v^v)$ לכל $v \in V$.

הוכחת נכונות:

משפט: עבור כל $v \in V$ האלגוריתם מחזיר $S(v)$ מינימאלי.

טענת עזר:

לכל $v \in V$ ב-G קיים מסלול P מ-s ל-v במשקל $w(P)$ באורך l אם"ם קיים מסלול P' באורך $l+1$ ב-G' מ-s ל-v^v במשקל $w(P') = w(P) + l^2$.

הוכחת המשפט באמצעות טענת העזר:

יהי $v \in V$, נסמן ב-$S_{min}(v)$ את "משקל אורך" המינימאלי עבור v ב-G. לכן קיים מסלול $P = (s, v_1, v_2, \dots, v)$ ב-G כך שמתקיים: $w(P) + l^2 = S_{min}(v)$. לפי טענת העזר קיים מסלול P' ב-G' מ-s ל-v^v כך שאורכו $l + 1$ ומשקלו $w(P) + l^2$. לכן $D(v^v) \leq w(P) + l^2$. נניח בשלילה כי $D(v^v) < w(P) + l^2$ אזי קיים מסלול P'_2 ב-G' כך שאורכו $l' + 1$ ומשקלו $w(P'_2) + l'^2$ מ-s ל-v^v. לכן לפי טענת העזר קיים ב- G מסלול P_2 באורך l' מ-s ל-v שמשקלו $w(P_2) = w(P'_2) - l^2$ אבל זו סתירה כי $w(P'_2) = w(P_2) + l'^2 < w(P) + l^2$ בסתירה למינימאליות $S_{min}(v)$.

הוכחת טענת העזר:

$\Leftarrow$ נניח כי קיים מסלול $P = (s, v_1, v_2, \dots, v)$ ב-G באורך l במשקל $w(P)$ צ"ל קיים מסלול P' באורך $l + 1$ ב-G' מ-s ל-v^v במשקל $w(P') = w(P) + l^2$. נוכיח זאת באינדוקציה על l.

בסיס: $l = 1$ אז קיים המסלול: $P = (s, v_1)$ ב-G באורך 1 במשקל $w((s, v_1))$ וקיים המסלול $P' = (s, v_1^1, v_1^v)$ שאורכו 2 ומשקלו $w\left((s, v_1)\right) + 1$ וזאת עפ"י הגדרת G' ופונקציית המשקל בו.

הנחה: לכל $v \in V$ ב-G נניח כי קיים מסלול $P = (s, v_1, v_2, \dots, v)$ ב-G באורך $l - 1$ במשקל $w(P)$ וקיים מסלול P' באורך l ב-G' מ-s ל-v^v במשקל $w(P') = w(P) + (l-1)^2$.

צעד: לכל $v \in V$ ב-G קיים מסלול P מ-s ל-v במשקל $w(P)$ באורך l צ"ל קיים מסלול P' באורך $l + 1$ ב-G' מ-s ל-v^v במשקל $w(P') = w(P) + l^2$. נתבונן ברישא ה- $l - 1$ של P , ונסמן את הקודקוד האחרון ברישא זו ב-v'. רישא זו מקיימת את הנחת האינדוקציה ולכן קיים מסלול P' באורך l ב-G' מ-s ל-v'^v במשקל $w(P') = w(P) + (l-1)^2$. ב-P' הקשת האחרונה היא בהכרח מהצורה (v'^{l-1}, v'^v) ומשקלה: $(l-1)^2$ לכן בהסרתה מהמסלול P' נקבל מסלול שווה אורך וגודל ל-P נסמנו P''. כעת נוסיף ל-P_{l-1} את הקשת (v', v) ול-P'' את הקשת (v'^{l-1}, v^l) לפי הגדרת הגרף G הקשת הזו בהכרח קיימת ומשקלה שווה למשקל הקשת (v', v) ב-G . כעת קיבלנו שני מסלולים שווי אורך ושווי גודל. כעת, לפי הגדרת קבוצת הצלעות ופונקציית המשקל ב-G' קיימת הקשת (v^l, v^v) ומשקל הקשת הזו לפי הגדרה הוא: l^2 . לכן נקבל מסלול $P'' \cup (v'^{l-1}, v^l) \cup (v^l, v^v)$ ב- G' שאורכו גדול ב-1 מ- $P \cup (v', v)$ ומשקלו:

$$\mathrm{w}\left(P'' \cup \left(v'^{l-1}, v^l\right) \cup \left(v^l, v^v\right)\right) = \mathrm{w}(P'' \cup \left(v'^{l-1}, v^l\right)) + l^2 = w(P \cup (v', v)\ ) + l^2$$

כנדרש.

$\Rightarrow$ נניח כי קיים מסלול P' באורך $l + 1$ ב-G' מ-s ל-v^v במשקל $w(P')$, צ"ל ב-G קיים מסלול P מ-s ל-v במשקל $w(P)$ באורך l כך ש: $w(P') = w(P) + l^2$. נוכיח זאת באינדוקציה על l.

בסיס $l = 1$: אז קיים המסלול: $P' = (s, v_1^1, v_1^v)$ שאורכו 2 ומשקלו $w\left((s, v_1)\right) + 1$ ועפ"י הגדרת G' ופונקציית המשקל בו קיים המסלול : $P = (s, v_1)$ ב-G באורך 1 במשקל $w((s, v_1))$.

הנחה: לכל $v \in V$ קיים מסלול P' באורך l ב-G' מ-s ל-v^v במשקל $w(P') = w(P) + (l-1)^2$ כך ש- P מסלול ב-G מ-s ל-v במשקל $w(P)$ באורך $l - 1$.

צעד: יהי $v \in V$ ויהי מסלול P' באורך $l + 1$ ב-G' מ-s ל-v^v במשקל $w(P')$ צ"ל קיים מסלול P מ-s ל-v במשקל $w(P)$ באורך l כך ש-$w(P') = w(P) + l^2$. נתבונן בקשת האחרונה ב-P' היא בהכרח מהצורה (v_i^l, v_i^v) ולכן הקשת שלפניה היא מהצורה(v_j^{l-1}, v_i^l). נתבונן ברישא ה-$l - 1$ של P' הקודקוד האחרון בה הוא v_j^{l-1} ולכן עפ"י הגדרת G' ניתן ליצור מסלול חוקי ע"י הוספת הקשת (v_j^{l-1}, v_j^v) ומשקלה לפי ההגדרה הוא $(l-1)^2$. המסלול $P'_{l-1} \cup (v_j^{l-1}, v_j^v)$ עונה על תנאי האינדוקציה ולכן קיים מסלול P_1 ב-G כך שאורכו הוא $l - 1$ ומשקלו $w(P'_{l-1} \cup (v_j^{l-1}, v_j^v)) = w(P_1) + (l-1)^2$. כעת נסיר מ-$P'_{l-1} \cup (v_j^{l-1}, v_j^v)$ את הקשת (v_j^{l-1}, v_j^v) ונקבל ש-P'_{l-1} ו- P_1 הם מסלולים שווי אורך ושווי משקל. כעת נוסיף למסלול P'_{l-1} את הקשת (v_j^{l-1}, v_i^l) ול-P_1 את הקשת (v_i, v_j) שבהכרח קיימת ומשקלי הקשתות הללו שהוספנו שוות וזאת לפי ההגדרה של פונקציית המשקל וקבוצת הקשתות של G'. לכן שימרנו את המסלולים שהתקבלו שווי אורך ושווי משקל. כעת לפי הגדרת פונקציית המשקל וקבוצת הקשתות של G' ניתן להוסיף למסלול $P'_{l-1} \cup (v_j^{l-1}, v_i^l)$ את הקשת (v_i^l, v_i^v)ומשקלה לפי ההגדרה הוא i^2 כי אורך המסלול $P'_{l-1} \cup (v_j^{l-1}, v_i^l) \cup (v_i^l, v_i^v)$ הוא $l + 1$ ואורך המסלול $P_1 \cup (v_i, v_j)$ הוא l ומשקלם:

$$w\left(\ P'_{l-1} \cup \left(v_j^{l-1}, v_i^l\right) \cup \left(v_i^l, v_i^v\right)\right) = w\left(\ P'_{l-1} \cup \left(v_j^{l-1}, v_i^l\right)\right) + w\left(\left(v_i^l, v_i^v\right)\right) = w\left(P_1 \cup \left(v_i, v_j\right)\right) + l^2$$

כנדרש.

זמן ריצה:

ממיר הקלט:

שכפול כל קודקוד שאינו s , $|v|$ פעמים: $O(|V|^2)$

יצירת הקשתות ב-G': מעבר לכל היותר על כל הקשתות ב-G והוספת לכל היותר לכל קודקוד $\{v_i^j|0 \le i \le |V|-1,\ 1 \le j \le |V|-1\}$ את הקשת: (v_i^j, v_i^v): $O(|E|+|V|^2) = O(|E|)$

הרצת דייקסטרה על הגרף החדש שהתקבל: $O(|E|+|V|^2 \log|V|^2) = O(2|E|\log|V|) = O(|E|\log|V|)$

המרת הקלט: מעבר על כל הקודקודים בקבוצה $\{v_i^n|0 \le i \le |V|-1\}$: $O(|V|^2)$

סה"כ זמן ריצת האלגוריתם: $\mathrm{O}(|\mathrm{E}|\log|V|)$

<u>סעיף ג'</u>

קלט: $G=(V,E)$ גרף מכוון ממושקל עם פונקציית משקל $w: E \to N$ משקלים שלמים חיובים על הצלעות. וקוד' $s \in V$.

פלט: לכל $v \in V$ "משקל עד 10-שליליות" מינימאלי מ-s ל-v.

נסמן ב-$\mathrm{D}(v)$ את הערך שהאלגוריתם דייקסטרה נותן עבור הקודקוד v.

נסמן ב-$S(v)$ את הערך "משקל עד 10-שליליות " מינימאלי מ-s עבור v.

נבצע רדוקציה לאלגוריתם דייקסטרה.

ממיר הקלט:

נבנה גרף חדש $G'=(V',E')$ באופן הבא:

$$V' = \{v^0, v^1, \dots, v^9, v^{10}, v^{11} |\ v \in V \wedge\}$$

נבנה את קבוצת הקשתות באופן הבא:

תחילה נעבור על כל השכנים של s ב-G ולכל קשת $(s,v) \in E$ נחלק למקרים:

אם משקל הקשת חיובי:

נוסיף את הקשת: (s^1, v^1) עם משקל זהה למשקל הקשת המקורית.

אחרת, אם משקל הקשת הוא שלילי, נוסיף את הקשת (s^1, v^2) עם משקל 0.

כעת לכל קשת שיוצאת מקוד' $v \in N(s)$ נסמנה (v_1, v_2) שוב נחלק למקרים:

אם משקל הקשת חיובי:

נבנה קשת (v_1^1, v_2^1) עם משקל זהה למשקל הקשת המקורית.

אחרת, אם משקל הקשת שלילי:

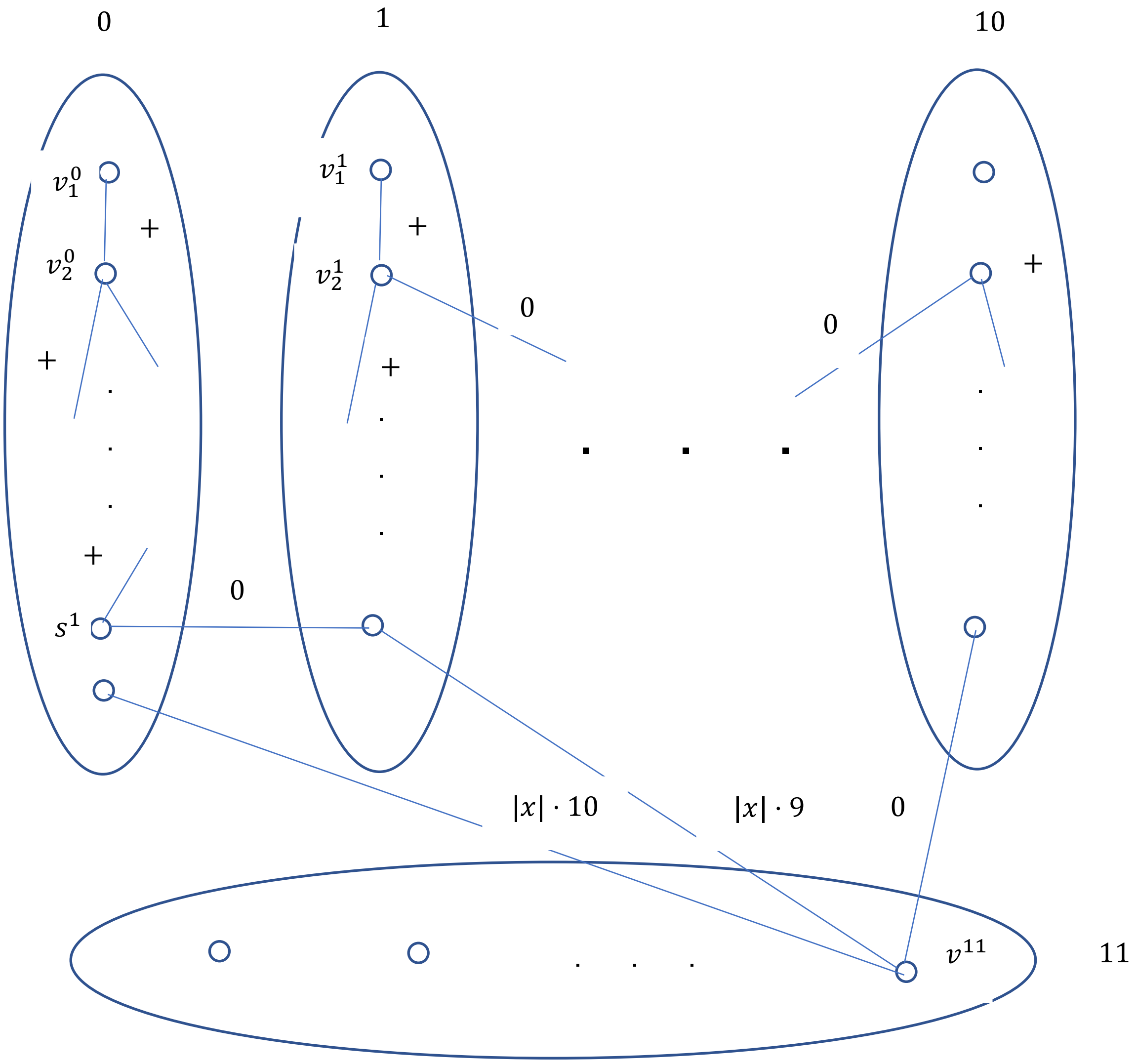
נבנה קשת (v_1^0, v_2^1) עם משקל 0.

נמשיך בתהליך זה עד שנעבור על כל קשתות הגרף ב-G בתנאי ש:

אם קיים קוד ששייך ל-v^{10} וקיימת קשת שלילית בגרף המקורי שיוצאת ממנו, אז לפי החוקיות אנו אמורים לחבר אותו לקודקוד ששייך ל- v^{11} אך במקרה כזה **לא נחבר אותו לאף קודקוד**.

בנוסף לכך לכל $v \in V$ נוסיף את הקשתות $(v^i, v^{11} \mid 0 \le i \le 10)$ ונגדיר: $w\left(\left(v^i, v^{11}\right)\right) = (10-i)|x|$

לצורך המחשה בלבד הגרף שניצור נראה כך:



לאחר המרת הפלט נפעיל את האלגוריתם של דייקסטרה על הגרף G' החדש שהתקבל. (זה אפשרי כי **משקלי הקשתות הם אי שליליים**)

ממיר הפלט:

עבור כל קוד $v \in V$ נטען כי: $S(v) = D(v^{11}) - 10 \cdot |x|$ ולכן נחזיר את $D(v^v) - 10|x|$ לכל $v \in V$.

הוכחות נכונות:

משפט: עבור כל $v \in V$ האלגוריתם מחזיר $S(v)$ מינימאלי.

טענת עזר:

לכל $v \in V$ ב-G קיים מסלול "עד 10 שליליות" P מ-s ל-v במשקל $w(P)$ באורך l אם"ם קיים מסלול P' באורך $l+1$ ב-G' מ-s^1 ל-v^{11} במשקל $w(P') - 10|x| = w(P)$.

הוכחת המשפט באמצעות טענת העזר:

יהי $v \in V$, נסמן ב-$S_{min}(v)$ את משקל "עד 10 שליליות" המינימאלי עבור v ב-G. לכן קיים מסלול חוקי $P = (s, v_1, v_2, \dots, v)$ מ-s ל-v ב-G כך שמתקיים: $w(P) = S_{min}(v)$. לפי טענת העזר קיים מסלול P′ ב-G' מ-s^1 ל-v^{11} כך שאורכו $l+1$ ומשקלו $w(P) + 10|x|$ שמסתיים ב-v^v. לכן $D(v^{11}) \le w(P) + 10|x|$. נניח בשלילה כי $D(v^{11}) <$

$w(P)+10|x|$ אזי קיים מסלול P'_2 ב-G' s^1 ל-v^{11} כך שאורכו $l'+1$ ומשקלו $w(P'_2)$ שמסתיים ב-v^{11}. לכן לפי טענת העזר קיים ב- G מסלול P_2 באורך l' שמשקלו $w(P_2)=w(P'_2)-10|x|$ אבל זו סתירה כי $w(P'_2)=w(P_2)+10|x| <$ $w(P)+10|x|$ ולכן נובע כי: $w(P_2)<w(P)$ בסתירה למינימאליות $S_{min}(v)$.

בנוסף נניח כי לא קיים מסלול מ-s ל-v לכן עפ"י טענת העזר לא קיים מסלול בין s^1 ל-v^{11} ולכן האלגוריתם יחזיר תשובה נכונה שלא קיים מסלול.

הוכחת טענת העזר:

$\Leftarrow$ יהי $v\in V$, יהי P מסלול "עד 10 שליליות" ב-G מ-s ל-v במשקל $w(P)$ באורך l צ"ל קיים מסלול P' באורך $l+1$ ב-G' מ-s^1 ל-v^{11} במשקל $w(P')=w(P)$. נוכיח זאת באינדוקציה על l.

בסיס: $l=0$ אזי $P=(s)$ ו- $P'=(s^0,s^{11})$ זהו מסלול חוקי עפ"י הגדרת הצלעות ב-G' ומשקלו עפ"י הגדרת פונקציית המשקל ב-G' הוא $10|x|$ ובגרף המקורי זהו מסלול ריק ולכן משקלו הוא 0 והטענה מתקיימת.

הנחה: יהי P מסלול ב- G "עד 10 שליליות" מ-s ל-v במשקל $w(P)$ באורך $l-1$ אז קיים מסלול P' באורך l ב-G' מ-s^1 ל-v^{11} במשקל $w(P')$ כך ש-$w(P')=w(P)+10|x|$.

צעד: יהי P מסלול ב- G "עד 10 שליליות" מ-s ל-v במשקל $w(P)$ באורך l צ"ל קיים מסלול P' באורך $l+1$ ב-G' מ-s^1 ל-v^{11} במשקל $w(P')$ כך ש-$w(P')=w(P)+10|x|$. נתבונן ברישא ה-$l-1$ של P. נסמן את האיבר האחרון של רישא זו ב- v_i. רישא זו מקיימת את הנחת האינדוקציה ולכן קיים מסלול P'' באורך l ב-G' מ-s^1 ל-v_i^{11} במשקל $w(P'')=w(P_{l-1})+10|x|$. נתבונן בקשת האחרונה ב-P'' היא מהצורה: (v_i^j,v_i^{11}) ומשקלה עפ"י הגדרתה הוא $(10-j)|x|$. ניתן להסיר אותה מ-P'' ונקבל מסלול חוקי באורך $l-1$ עם משקל: $w(P''\backslash(v_i^j,v_i^{11}))=w(P_{l-1})+10|x|-(10-j)|x|=w(P_{l-1})+j|x|$. כעת ניתן להוסיף למסלול P_{l-1} את הקשת (v_i,v) היא בהכרח חוקית כי היא היתה נתונה ב-P, ולמסלול P'' נחלק לשני מקרים:

אם הקשת (v_i,v) שלילית בגרף המקורי:

אזי קיימת הקשת (v_i^j,v^{j+1}) בגרף שלנו לפי הגדרה ומשקלה הוא 0 וגם קיימת הקשת (v^{j+1},v^{11}) שמשקלה הוא $(10-j+1)|x|$ ובסך הכל הוספנו 2 קשתות למסלול $P''\backslash(v_i^j,v_i^{11})$ לכן אורכו $l+1$. נסמן את המסלול הזה P′ ונחשב כעת את משקלו: $w(P')=P''\backslash(v_i^j,v_i^{11})+0+(10-j+1)|x|=w(P_{l-1})+j|x|+(10-j+1)|x|=w(P_{l-1})+$ $11|x|=w(P_{l-1})-|x|+11|x|=w(P)+10|x|$

כנדרש.

אם הקשת (v_i,v) **אינה** שלילית בגרף המקורי:

אזי קיימת הקשת (v_i^j,v^j) בגרף שלנו לפי הגדרה ומשקלה הוא שווה ערך למשקלה של הקשת בגרף המקורי, וגם קיימת הקשת (v^j,v^{11}) שמשקלה הוא $(10-j)|x|$. ובסך הכל הוספנו 2 קשתות למסלול $P''\backslash(v_i^j,v_i^{11})$ לכן אורכו $l+1$. נסמן את המסלול הזה P′ ונחשב כעת את משקלו: $w(P')=P''\backslash(v_i^j,v_i^{11})+w((v_i,v))+(10-j)|x|=w(P_{l-1})+$ $j|x|w((v_i,v))+(10-j)|x|=\mathrm{w(P)}+10|\mathrm{x}|$

כנדרש.

$\Rightarrow$ יהי $v\in V$, יהי מסלול P' באורך $l+1$ ב-G' מ-s^1 ל-v^{11} במשקל $w(P')$ צ"ל קיים מסלול ב- G "עד 10 שליליות" P מ-s ל-v במשקל $w(P)=w(P')-10|x|$ באורך l. נסמן את $P'=(s^0,\dots,v^{11})$ נוכיח את הטענה באינדוקציה על l:

מקרה בסיס: כאשר l = 0: אז $\mathrm{P}'=(s^0,s^{11})$ $w(P')=10|x|$ אורכו 1, וקיים המסלול $w(P)=(s)$ שמשקלו 0 ואורכו 0.

הנחה עבור $l-1$: יהי מסלול P' באורך l ב-G' מ-s^1 ל-v^{11} במשקל $w(P')$ אז קיים מסלול ב- G "עד 10 שליליות" P מ-s ל-v במשקל $w(P)$ באורך $l-1$ כך ש- $w(P)=w(P')-10|x|$.

צעד: נניח שהטענה נכונה עבור $l-1$ ונוכיח שהטענה נכונה עבור l. יהי מסלול P' באורך $l+1$ ב-G' מ-s^1 ל-v^{11} במשקל $w(P')$ צ"ל קיים מסלול ב- G "עד 10 שליליות" P מ-s ל-v במשקל $w(P)$ באורך l כך ש- $w(P)=w(P')-10|x|$. נתבונן ברישא ה-$l-1$ של P'. אזי הקודקוד האחרון ב- P' הוא מהצורה v_{l-1}^j כך ש-$0\le \mathrm{j}\le 10$ ולכן עפ"י הגדרת קבוצת הקשתות של

G' קיימת הקשת: $(v_{l-1}^{j}, v_{l-1}^{11})$ שמשקלה $(10-j)|x|$, נתבונן במסלול $(P'_{l-1} \circ (v_{l-1}^{11}))$ הוא מקיים את הנחת האינדוקציה ולכן עפ"י הנחת האינדוקציה קיים מסלול P_1 שגודלו $l-1$ ומשקלו:

$w\left(P'_{l-1} \circ (v_{l-1}^{11})\right) - 10|x| = w(P_1) = w(P'_{l-1}) + (10-j)|x| - 10|x| = w(P'_{l-1}) - j|x|$ מ-s ל-v_{l-1} . כעת נתבונן בקודקוד הראשון אחרי הריישא ה-l ב-P'' הוא בהכרח מהצורה v^k נפריד למקרים:

אם משקל הצלע (v_{l-1}^{j}, v^k) הוא 0:

אזי נובע לפי הגדרת הגרף G' כי $k = j+1$. בנוסף נובע לפי הגדרת G' כי קיימת הקשת (v_{l-1}, v) ב- G ומשקלה $w((v_{l-1}, v)) - |x|$. כעת לפי הגדרת הגרף G' קיימת הקשת (v^k, v^{11}) ומשקלה הוא: $(10-k)|x| = (9-\text{j})|x|$. נתבונן כעת במסלול: $P_2 = P'_{l-1} \circ (v_{l-1}^{j}, v^k) \circ (v^k, v^{11})$ לפי הגדרת P'_{l-1} נובע כי אורך P_2 הוא $\text{l}+1$ ומשקלו: $w(P_2) = w\left(P'_{l-1} \circ \left(v_{l-1}^{j}, v^k\right) \circ (v^k, v^{11})\right) = w(P'_{l-1}) + 0 + (9-j)|x| = w(P_1) + 9|x| - j|x| + j|x| = w(P) - |x| + 9|x| = w(P) + 10|x|$

כאשר $P = (P_1 \circ (v_{l-1}, v))$ שאורכו l וזה המסלול כנדרש.

אם משקל (v_{l-1}^{j}, v^k) אינו 0:

אזי נובע לפי הגדרת הגרף G' כי $k = j$. בנוסף נובע לפי הגדרת G' כי קיימת הקשת (v_{l-1}, v) ב- G ומשקלה שווה למשקל הקשת (v_{l-1}^{j}, v^k) זאת לפי ההגדרה של G'. כעת לפי הגדרת הגרף G' קיימת הקשת (v^k, v^{11}) ומשקלה הוא: $(10-k)|x| = (10-\text{j})|x|$. נתבונן כעת במסלול: $P_2 = P'_{l-1} \circ (v_{l-1}^{j}, v^k) \circ (v^k, v^{11})$ לפי הגדרת P'_{l-1} נובע כי אורך P_2 הוא $\text{l}+1$ ומשקלו: $w(P_2) = w\left(P'_{l-1} \circ \left(v_{l-1}^{j}, v^k\right) \circ (v^k, v^{11})\right) = w(P'_{l-1}) + w\left(v_{l-1}^{j}, v^k\right) + (10-j)|x| = w(P_1) + j|x| + w\left((v_{l-1}, v)\right) + (10-j)|x| = w\left(P_1 \circ (v_{l-1}, v)\right) + 10|x|$

כאשר $P = (P_1 \circ (v_{l-1}, v))$ שאורכו l וזה המסלול כנדרש.

זמן ריצה:

ממיר קלט:

שכפול 10 פעמים כל הקודקודים: $O(|V|)$

מעבר על הקשתות והקודקודים בגרף המקורי והכנסתן ל- G' עפ"י החוקיות: $O(|V| + |E|)$

לכל $v \in V$ נוסיף את הקשתות $\left(v^i, v^{11} \;\middle|\; 0 \le i \le 10\right)$: $O(|V|)$

הרצת דייקסטרה על G': $\text{O}(|\text{E}| + |\text{V}|^2 \log |V|^2) = \text{O}(|E| \log |V|)$

תרגום הקלט: מעבר על כל הקוד' ב-V והתאמת הערך הנכון עבורם עפ"י הקוד' המתאים ב-G': $O(|V|)$

סה"כ זמן הריצה הוא: $\text{O}(|E| \log |V|)$

שאלה 4

נשתמש בפתרון מוכח לבעיית הארנק. כאשר n הפריטים בבעיית הארנק יהיו n הפריטים מבעיית התרמיל, כאשר לכל פריט $0 \leq i \leq n$ קיים משקל w_i ומחיר p_i וכל הפרמטרים הללו מספרים שלמים אי שליליים ולכן מקיימים את ההנחות של בעיית הארנק. נגדיר את מספר הפריטים בבעיית הארנק כמספר הפריטים שברשותנו - n , ואת המחיר P שיש להגיע אליו בדיוק בבעיית הארנק נגדיר כסכום כל הפריטים, כלומר: $P = \sum_{i=1}^{n} p_i$. תהי M טבלת הערכים המתקבלת מבעיית הארנק כך שמתקיים $M[j][T] = \mathrm{OPT}(\mathrm{j}, \mathrm{T})$ לכל $0 \leq j \leq n$ ולכל $0 \leq T \leq P$. כעת נעבור באיטרציה על M באופן הבא:

נאתחל משתנה $v = P$. כל עוד v גדול או שווה ל-0 נבצע:

אם $M[n][v]$ קטן או שווה ל-W נחזיר את v

אחרת, $v = v - 1$

משפט: האלגוריתם מחזיר את המחיר המקסימלי שניתן להשיג תחת האילוץ שמשקלם הכולל של הפריטים לא עולה על W.

הוכחת המשפט:

נניח בשלילה כי האלגוריתם החזיר v כך שלא ניתן לקבל אותו ע"י צירוף של פריטים כך שמשקלם הכולל יהיה קטן או שווה ל-W או ש-v אינו מקסימלי. נחלק למקרים:

נניח שלא ניתן לקבל את v ע"י צירוף של פריטים כך שמשקלם הנוכחי יהיה קטן או שווה ל-W, אבל זו סתירה מכיוון ש$M[n][v]$ מייצג את המשקל המינימאלי של הפריטים שניתן להרכיב באמצעותם את המחיר v ואם הוא קטן מ-W בפרט קיים צירוף כזה של פריטים שמשקלם אינו עולה עלW וסכומם שווה ל-v.

נניח ש-v אינו מקסימלי. כלומר קיים $v' > v$ כך ש-$M[n][v'] \leq W$ אבל זו סתירה כי אז האלגוריתם שלנו היה מחזיר את v' בסתירה לכך שהוא החזיר את v ו- $v \neq v'$.

כעת נשחזר פתרון לבעיית התרמיל דרך המטריצה M ונניח כי v הוא הערך המקסימלי שהאלגוריתם החזיר.

נשתמש באלגוריתם השחזור של בעיית הארנק עבור הערכים n ו- v כלומר נבצע $Reconstruct\ (n, v)$. האלגוריתם יחזיר לנו קבוצה חוקית שמחיר הכולל של הפריטים הינו v ולפי טענת העזר מחיר זה הוא הערך המקסימלי שניתן להשיג תחת האילוץ שמשקלם הכולל של הפריטים לא יעלה על W.

זמן הריצה:

חישוב הערכים בטבלה M: $\mathrm{O}(\mathrm{n} \cdot \mathrm{P})$

אלגוריתם לחישוב הערך המקסימלי לבעיית התרמיל: $O(P)$

אלגוריתם שחזור: $\mathrm{O}(\mathrm{n})$

סה"כ: זמן ריצת האלגוריתם $O(\mathrm{n} \cdot \mathrm{P})$.