עבודה 4

<u>תאריך הגשה:</u> 30/12 בשעה 7:59 AM

<u>מתרגל אחראי:</u> בנימין ברנד

<u>הוראות כלליות:</u>

- כל עוד לא נאמר אחרת, כאשר הנכם מתבקשים לתאר אלגוריתם יש לספק את הבאות:
  1. תיאור מילולי של האלגוריתם
  2. הוכחת נכונות
  3. ניתוח זמן ריצה
- אלגוריתם עם זמן ריצה אקספוננציאלי לא נחשב יעיל ולכן בדרך כלל לא יתקבל.
- יש לרשום פתרון בדף התשובות הנלווה לעבודה.
- לתשומת לבכם, המקום שהוקצה בדף התשובות הינו פי 1.5 מהמקום המומלץ.
- הגשה אך ורק דרך מערכת Submission System

שאלה 1

יהי $G=(V,E)$ גרף מכוון, ו-$w:E\to\mathbb{R}$ פונקציית משקל על צלעות הגרף. בנוסף נתון צומת מקור $s\in V$.

נתון כי ב-G לא קיימים מעגלים שליליים.

לכל $v\in V$ נסמן ב-$\alpha(s,v)$ את *אורך* מסלול קצר ביותר מבין כל המסלולים הקלים ביותר מ-s ל-v. במילים אחרות, זהו *אורך* (= מס' צלעות) מסלול קצר ביותר מבין כל המסלולים מ-s ל-v במשקל $\delta(s,v)$.

נסמן $\alpha(G)=\max_{v\in V}\alpha(s,v)$.

הציעו שינוי פשוט לאלגוריתם בלמן-פורד אשר מבטיח כי האלג' עוצר לאחר לכל היותר $\alpha(G)+1$ איטרציות.

הוכיחו את נכונות האלג' לאחר השינוי שהצעתם, והוכיחו כי מס' האיטרציות חסום ע"י $\alpha(G)+1$.

הערה: שימו לב כי $\alpha(G)$ לא נתון בקלט.

.

שאלה 2

תהי $N=(G,c,s,t)$ רשת זרימה.

סימון: עבור $S\subset V$ כך ש-$s\in S$ ו-$t\notin S$, נגדיר את החתך S להיות החתך $(S,V\setminus S)$. נשים לב כי זהו חתך $s-t$ ברשת הזרימה.

יהיו S_1,S_2 חתכים ברשת N.

נגדיר את החיתוך של החתכים להיות החתך $S_1\cap S_2$, ואת האיחוד של החתכים להיות החתך $S_1\cup S_2$.

נסמן ב-$\mathcal{F}$ את קבוצת כל חתכי ה-$s-t$ המינימליים של הרשת N.

סעיף א

הוכיחו כי $\mathcal{F}$ סגורה תחת חיתוך ואיחוד. כלומר, אם $S_1,S_2\in\mathcal{F}$ אזי מתקיים $S_1\cup S_2\in\mathcal{F}$ וגם $S_1\cap S_2\in\mathcal{F}$.

סעיף ב

נסמן

$$S_{max}=\bigcup_{S\in\mathcal{F}}S \qquad\qquad S_{min}=\bigcap_{S\in\mathcal{F}}S$$

תארו אלגוריתם אשר בהינתן זרימה מקסימלית f מוצא את S_{max},S_{min}.

על האלגוריתם לרוץ בזמן $O(|V|+|E|)$.

הוכיחו נכונותו, ונתחו זמן ריצה.

שאלה 3

נתונה רשת זרימה $N=(G,c,s,t)$. בנוסף, נתונה זרימת מקסימום f עבור רשת זו.

תארו אלגוריתם אשר בהינתן מס' טבעי k קובע האם ניתן להגדיל את הקיבול של k קשתות ברשת כך שגודל זרימת מקסימום ברשת יגדל. כלומר, לאחר הגדלת הקיבול של k קשתות מתקבלת רשת זרימה חדשה בה קיימת זרימה בגודל גדול ממש מ-$|f|$.

על האלגוריתם לרוץ בזמן $O(|E|\log|V|)$.

הערה: קיים אלגוריתם עבור בעיה זו הרץ בזמן $O(|V|+|E|)$.

שאלה 4

נתבונן בשלב כלשהו בריצה של אלגוריתם דיניץ על רשת הזרימה $N = (G = (V, E), c, s, t)$.
נסמן את הזרימה ברשת בתחילת השלב ב-f, את הזרימה החוסמת שנמצאת ב-L_f במהלך השלב ב-g, ואת הזרימה המעודכנת בסוף השלב ב-f'. מתקיים $f' = f + g$.
עוד נסמן ב-$N_{f'}$ את הרשת השיורית הנבנית בסוף השלב.

סימון:
לכל $v \in V$ נסמן ב- $\delta_f(s, v)$ את המרחק של x מ-s בגרף G_f שב-N_f (הרשת השיורית בתחילת השלב).
לכל $v \in V$ נסמן ב- $\delta_{f'}(s, v)$ את המרחק של x מ-s בגרף $G_{f'}$ שב-$N_{f'}$ (הרשת השיורית בסוף השלב).

יהי $v \in V$ צומת כך ש-v נגיש מ-s ברשת השיורית N_f. בנוסף, נתון כי <u>לא קיים</u> מסלול <u>לא רווי</u> מ-s ל-v ברשת השכבות L_f תחת פונקציית הזרימה g. במילים אחרות, לכל מסלול P מ-s ל-v ברשת השכבות L_f מתקיים כי לפחות אחת מקשתות המסלול רוויה בזרימה החוסמת g.

הוכיחו כי מתקיים $\delta_{f'}(s, v) > \delta_f(s, v)$.

<u>הבהרה</u>: בשאלה זו רשת השכבות אינה "קטומה" החל מהשכבה של צומת t כפי שמופיע בחלק מהספרות. כלומר, היא מכילה גם צמתים (ואת הקשתות המתאימות) עבור צמתים שמרחקם מ-s גדול ממש ממרחק t.

בהצלחה!