

פיזה 2012 - מסגרת המחקר באוריינות מתמטית

ט י ו ט ה

אפריל 2010

הקונסורציום:

(ACER, אוסטרליה) Australian Council for Educational Research

(cApStAn Linguistic Quality Control (Belgium) (בלגיה)

(DIPF, גרמניה) Deutsches Institut für Internationale Pädagogische Forschung

(ETS, ארה"ב) Educational Testing Service

(ILS, נורווגיה) Institutt for Lærerutdanning og Skoleutvikling

(IPN, גרמניה) Leibniz - Institute for Science Education and Mathematics

(NIER, יפן) National Institute for Educational Policy Research

The Tao Initiative: CRP - Henri Tudor and Université de Luxembourg - EMACS
(לוקסמבורג)

(aSPe, בלגיה) Unité d'analyse des systèmes et des pratiques d'enseignement

(Westat (ארה"ב)

תוכן העניינים

3	הגדרת התחום
5	פיזה 2012: התייחסות לתלמידים כאל פותר בעיות פעילים
7	פיזה 2010: קשר מפורש למגוון הקשרים עבור בעיות מתמטיות
7	פיזה 2012: תפקידם הבולט של כלים מתמטיים, לרבות טכנולוגיה
9	פיזה 2012: הצהרה מפורשת על תהליכים והתנהגויות של תלמידים
9	פיזה 2012: אוריינות כרצף המשכי
9	ארגון התחום
10	ידע של תוכן מתמטי
11	שינוי ויחסים
12	מרחב וצורה
14	כמות
15	אי-ודאות
16	נושאי תוכן שמתאימים להיכלל בהערכת האוריינות המתמטית של תלמידים בני 15
18	תהליכים מתמטיים ותת-תהליכים שמונחים ביסודם
18	תהליכים מתמטיים
20	תת-תהליכים מתמטיים
25	המחשה של תת-התהליך המתמטי
26	הקשרים
28	הערכה של אוריינות מתמטית
28	מבנה הערכה המתמטיקה של פיזה 2012
28	חלוקת הניקוד הרצויה על פי קטגוריית תוכן
30	התפלגות הניקוד הרצויה על פי התהליכים מתמטיים
30	התפלגות הניקוד הרצויה על פי קטגוריית ההקשר
32	טווח רמות הקושי של פריטים
32	מבנה כלי הסקר
33	תכנון פריטי המתמטיקה של פיזה 2012
34	עזרים וכלים
34	ניקוד פריטים
35	דיווח על בקיאות מתמטית
37	עמדות כלפי מתמטיקה
39	הערכה מתמטית אופציונלית, מבוססת-מחשב
41	סיכום

הגדרת התחום

4. במהלך העשור האחרון חלה התקדמות יוצאת מן הכלל במתמטיקה כענף מדעי, אך היא עדיין נתפשת כמרוחקת בעיני מרבית בני האדם. נוסף על כך, כיוון שהטכנולוגיה הפכה להיות כלי מרכזי ונפוץ יותר לפתרון בעיות, חלה התפתחות ניכרת בדרכי ההתייחסות למתמטיקה וביישומה בהקשרים שונים. הטכנולוגיה משנה את הדרכים בהן ניתן לפתור בעיות, והסביבה החדשה עשירה הנתונים, שנוצרה על ידי טכנולוגיה זו, משנה את אופי הבעיות שיש לפתור. על שינויים אלה לבוא לידי ביטוי בהערכת המתמטיקה.

5. ההבנה המתמטית חשובה מאין כמוה למידת מוכנותם של צעירים לחיים בחברה המודרנית. יותר ויותר מן הבעיות והמצבים בהם אנו נתקלים בחיי היום-יום מחייבים רמה מסוימת של הבנה מתמטית, היסק מתמטי, וכלים וטכנולוגיה מתמטיים, בטרם ניתן יהיה להבינם ולטפל בהם במלואם. המתמטיקה היא כלי חיוני להתמודדותם של צעירים עם סוגיות ואתגרים ברמה האישית, החברתית, המקצועית והמדעית. לפיכך, חשוב להבין את מידת מוכנותם של בוגרי בתי הספר ליישם ידע מתמטי בניסיון להבין סוגיות חשובות ולפתור בעיות משמעותיות. הערכה המתבצעת בגיל 15 מספקת מדד מוקדם לאופן בו עשויים הצעירים הללו להגיב בהמשך חייהם למערך המצבים המגוון בהם ייתקלו – מצבים המצריכים יישום של ידע מתמטי.

6. כבסיס להערכה הבינלאומית של תלמידים בני 15, מתקבל על הדעת לשאול: "מה חשוב שאזרחים ידעו ומה חשוב שהם יהיו מסוגלים לעשות במצבים המצריכים ידע מתמטי?" ובפרט, מה משמעות היכולת המתמטית עבור בן 15, שמסיים את לימודיו בבית הספר או שבכוונתו להמשיך ולשאוף להתמחות בתחום מסוים על מנת לפתח קריירה או להתקבל לאוניברסיטה? חשוב שהמושג *אוריינות מתמטית*, המשמש במסמך זה לציון יכולתם של פרטים לזהות, לעסוק או להשתמש במתמטיקה, לא ייתפס כמילה נרדפת לרמת ידע או מיומנות מזערית או נמוכה. אלא, הוא נועד לתאר את יכולתם של אנשים לנתח, לנמק ולהסביר רעיונות ביעילות כאשר הם מציגים, מנסחים, פותרים ומפרשים מצבים המצריכים ידע מתמטי, תוך שימוש בתכנים הולמי-גיל. הדגש בפיזה מושם על בעיות ומצבים משמעותיים – לא רק מבחינת המתמטיקה הנדרשת בקריירות מדעיות מתקדמות, אלא גם המתמטיקה שאנשים מתמודדים איתה בקביעות כאשר הם עוסקים בפעילויות כגון תכנון ותקצוב משאבים כספיים אישיים, תיור וניווט, ארגון פרויקטים מורכבים והערכת נתונים ממקום העבודה הנוגעים לדברים כגון מכירות חודשיות, בקרת איכות על תהליכי ייצור, והוצאות – שאינם מוגבלים לסוג המצבים והבעיות בהם נתקלים בדרך כלל בכיתות הלימוד.

7. בעוד שסקר פיזה תוכנן עבור תלמידים בני 15, *האוריינות המתמטית* מתעלה, באופן טבעי, מעל מגבלות הגיל. עם זאת, על הערכתו את בני ה-15 להתחשב במאפיינים רלוונטיים של תלמידים אלה; לפיכך, יש צורך לזהות תכנים, שפה והקשרים הולמי-גיל. עקב כך, מסגרת מושגית זו מבחינה בין קטגוריות תוכן רחבות החשובות *לאוריינות המתמטית* של אנשים, בכלל,

ובין נושאי התוכן המיוחדים המתאימים לתלמידים בני 15, בפרט. אוריינות מתמטית איננה תכונה אשר קיימת או איננה קיימת באדם. אלא, האוריינות המתמטית היא תכונה שניתן לסדר על גבי קו רצף כאשר חלק מבני האדם הם בעלי יכולת אוריינית גבוהה מאחרים – והפוטנציאל לפיתוחה קיים תמיד.

הגדרת פיזה 2012 לאוריינות מתמטית: אוריינות מתמטית היא יכולתו של הפרט לזהות, לעסוק ולהשתמש במתמטיקה, בין היתר, לצורך ביצוע היסקים מתמטיים במגוון הקשרים, וכן לזהות את התפקיד שממלאת המתמטיקה בעולם על ידי תיאור, מידול, הסבר וחיזוי של תופעות. אוריינות מתמטית היא רצף המשכי – ולפיכך אנשים בעלי אוריינות מתמטית גבוהה מסוגלים להשתמש במתמטיקה ובכלים מתמטיים טוב יותר על מנת לגבש דעות והחלטות בעלות בסיס איתן כמתבקש מאזרחים תורמים, מעורבים וחושבים.

9. הערות ההסבר שמופיעות בהמשך נועדו להבהיר היבטים חשובים במיוחד של ההגדרה.

פיזה 2012: התייחסות לתלמידים כאל פותרי בעיות פעילים

10. לשון הגדרת האוריינות המתמטית מתמקדת בעיקר בעיסוק הפעיל במתמטיקה ובשימוש בה, והיא נועדה לכלול גם ביצוע היסקים מתמטיים והערכת השימוש במתמטיקה ובטיעונים מתמטיים.

11. לשון ההגדרה נועדה להבהיר את הציפייה, לפיה על הפרטים להיות מסוגלים "לזהות, לעסוק ולהשתמש במתמטיקה" במגוון הקשרים. הגדרה זו משלבת בבהירות את מושג המידול המתמטי, אשר היה, מבחינה היסטורית, מאבני היסוד של המסגרת המושגית במתמטיקה של פיזה, בהגדרת האוריינות המתמטית.

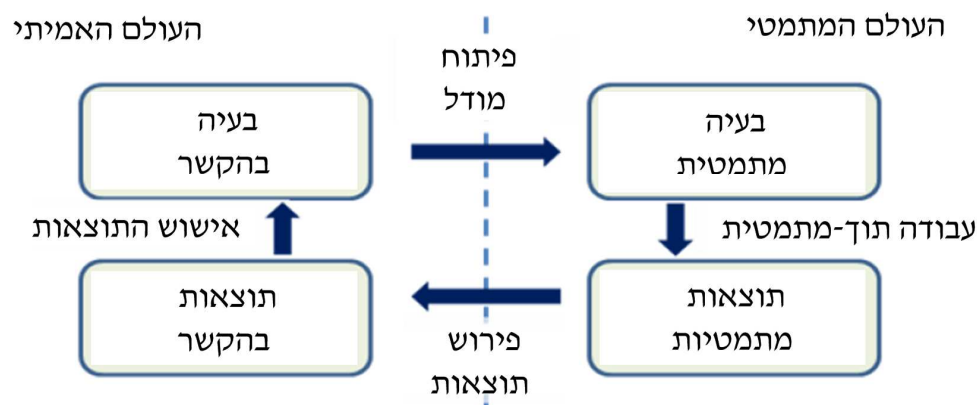
12. כאשר אנשים משתמשים במתמטיקה ובכלים מתמטיים כדי לפתור בעיות בהקשרים מסוימים, הם עושים זאת באמצעות סדרה של שלבים המוצגים באמצעות מודל מתמטי. תהליך המידול המתמטי מתחיל בבעיה אשר ממוקמת בהקשר משמעותי, ואשר מוצגת בתרשים בצד "העולם האמיתי" ("בעיה בהקשר"). פותר הבעיה מנסה לזהות את המתמטיקה הרלוונטית, ומארגן מחדש את הבעיה על פי המושגים והיחסים שזוהו. פותר הבעיה מנתק בהדרגה את ההקשר מן הבעיה, בדרך כלל באמצעות הנחות מפשטות, דבר שמאפשר לו להתמיר את הבעיה לתצורה הניתנת לטיפול מתמטי נוח. פעולות אלו, המתוארות באמצעות החץ האופקי העליון, מביאות ליצירתו של מודל מתמטי ("בעיה מתמטית"). החץ המצביע מטה בתרשים מציין את העבודה התוך-מתמטית המתבצעת בשלב זה, כאשר פותר הבעיה מיישם ידע, מיומנויות וחשיבה אסטרטגית בעולם המתמטי על מנת למצוא פתרון ("תוצאות מתמטיות"). בשלב הבא, יש לפרש את הפתרון המתמטי במושגי הבעיה המקורית ("תוצאות בהקשר"). לאחר מכן, מעריך פותר הבעיה את מידת ההגיון של הפתרון, במטרה לאששו, כאשר הוא מאמץ את הפתרון או חוזר ומבצע את התהליך מתחילתו על מנת לשפר את המודל, אם הוא לא שרת את מטרותו. יחדיו, מתוארים שלבים אלה לעיתים קרובות כמעגל המידול המתמטי.

13. התיאור לעיל של מעגל המידול המתמטי מציג הסבר מופשט ואידיאלי. במציאות, עשוי פותר הבעיה לנוד בין שלבים, כשהוא שב ובוחן החלטות והנחות קודמות. כל אחד מן השלבים עשוי להציב אתגרים נכבדים בפני הפותר, וייתכן שיידרש לחזור על המעגל כולו מספר פעמים.

תרשים 1. אוריינות מתמטית בפועל

שגיאה!

אוריינות מתמטית בפועל



14. מבחן פיזה מכיר בכך שאנשים משתמשים במתמטיקה לעיתים קרובות בהקשרים בהם אין צורך לבצע כל אחד מן השלבים במעגל המידול. במקרים מסוימים, מסופקים ייצוגים מתמטיים הניתנים למניפולציה באופן ישיר, על מנת לענות על שאלה כלשהי או להסיק מסקנה כלשהי. לדוגמה, גרף מסוים עשוי להופיע בעיתון או בדו"ח במקום העבודה, והאדם עשוי להידרש לקרוא מידע מתוכו, או לבצע חישוב על פי נתונים שנלקחו מן הגרף או מטבלה, על מנת להסיק מסקנה. ייתכן שיצירת הגרף או הטבלה הייתה כרוכה בפיתוח מודל ובעבודה תוך-מתמטית ניכרת, אך האדם שהינו משתמש הקצה לא צריך לבצע שלב זה. כדוגמה נוספת, יתכן שמשוואה מתמטית המתארת את היחס בין שני משתנים מוצגת בפני אדם כלשהו (כך שפותח כבר מודל), ועליו רק להשתמש במשוואה על מנת למצוא את ערכו של אחד המשתנים כאשר ערכו של המשתנה השני משתנה, ולפרש את התוצאה. לחילופין, משוואה עשויה להתיימר לייצג במדויק את היחס בין משתנים שנצפו בהקשר מעשי כלשהו, ונדרשת פרשנות על מנת לקבוע אם אכן כך הדבר. במקרים כגון אלה ואחרים, חלקים ניכרים ממעגל המידול המתמטי בוצעו זה מכבר, ומשתמש הקצה מבצע חלק מן השלבים, אך לא את כולם. מסיבה זו, פריטים רבים במבחני פיזה כוללים רק קטעים ממעגל המידול. יש לפרש את תרשים 1 באופן הבא: אוריינות מתמטית בפועל מצריכה פיתוח של מודל, עבודה תוך-מתמטית, פירוש התוצאות ואישושן; עם זאת, אנשים מיישמים לעיתים קרובות את האוריינות המתמטית שלהם כאשר לא נדרשים כל השלבים הללו.

פיזה 2010: קשר מפורש למגוון הקשרים עבור בעיות מתמטיות

15. ההתייחסות ל"מגוון הקשרים" בהגדרת האוריינות המתמטית היא מכוונת, והיא נועדה להוות דרך ליצירת חיבור להקשרים הפרטניים (אישיים, תעסוקתיים, מדעיים וחברתיים) שיתוארו ויודגמו ביתר פירוט בהמשך מסגרת מושגית זו. מרכיב מפתח באוריינות מתמטית הוא יכולתו של אדם ליישם מתמטיקה במגוון מצבים, וההגדרה מכירה בחשיבות יכולתם של אנשים לטפל בטווח נרחב של הקשרים.

פיזה 2012: תפקידם הבולט של כלים מתמטיים, לרבות טכנולוגיה

16. ההגדרה של אוריינות מתמטית דורשת במפורש שימוש בכלים מתמטיים, ובכלל זה טכנולוגיה, לשם שיפוט וקבלת החלטות. כלים ממוחשבים מצויים בשימוש רווח במקומות העבודה של המאה ה-21, והם יהפכו נפוצים יותר ויותר לאורכה של המאה. טבען של הבעיות וההנמקה הלוגית בהקשר התעסוקתי התרחב לצד הזדמנויות חדשות אלו – כשהוא יוצר ציפיות חדשות עבור אנשים.

17. הערכה מתמטית מבוססת מחשב היא תחום פתוח לחדשנות במסגרת הערכת פיזה 2012, והיא מוצעת כאפשרות למדינות המשתתפות. ההתייחסות לכלים מתמטיים בהגדרת האוריינות המתמטית היא, אם כן, הולמת במיוחד. השימוש במחשבוניס הותר בכל סקרי המתמטיקה של פיזה, כל עוד הוא תואם את מדיניות המדינה המשתתפת. הואיל והפריטים במבחני פיזה משקפים בעיות העולות בהקשרים אישיים, תעסוקתיים, חברתיים ומדעיים, ניתן להסתייע במחשבון ברבים מן הפריטים במבחני פיזה. טכנולוגיית מחשב ומחשבון משחררת מן המעמסה הגלומה בתהליך החישוב, כך שתשומת ליבם של פותרי הבעיות יכולה להתמקד באסטרטגיות, במושגים ובמבנים, במקום בתהליכים מכניים. הערכה מבוססת-מחשב תספק את ההזדמנות להרחיב את השילוב של טכנולוגיות – כגון כלים סטטיסטיים, בנייה גיאומטרית וכלים חזותיים, וכן כלי מדידה וירטואליים – בפריטי המבחן. דבר זה ישקף את האמצעי המשמש מספר הולך וגדל של אנשים ליצירת ממשק עם עולמם ולפתרון בעיות, ויספק גם את ההזדמנות להעריך היבטים של אוריינות מתמטית שלא ניתן להעריכם בקלות באמצעות מבחנים מסורתיים מבוססי-נייר.

18. הערכה מבוססת-מחשב מאפשרת לקדם את אופן הצגת הפריטים. לדוגמה, ייתכן שיוצגו גריינים בתנועה, עצמים תלת-ממדיים הניתנים לסיבוב, או גישה גמישה יותר למידע או נתונים רלוונטיים. תצורות פריטים חדשות, המאפשרות טווח רחב יותר של סוגי תשובות, אפשריות גם הן. לדוגמה, פריטים שניתן "לגרור ולשחרר" או השימוש ב"נקודות חמות" על גבי תמונה, עשויים לאפשר לתלמידים להשיב על פריטים רבים יותר באופן לא מילולי, ובכך לספק תמונה שלמה יותר של אוריינות מתמטית, שמוגבלת פחות על ידי השפה. תיתכן אינטראקטיביות במידה מסוימת. נוסף על כך, האפשרות של קידוד תשובות אוטומטי עשויה להחליף חלק מן העבודה הידנית;

וחשוב אף יותר, אפשרות זו עשויה לאפשר קידוד מאפיינים בתרשימים, בתצוגות ובהליכים שיצרו תלמידים, אשר נכון לזמן זה, לא ניתן לקודדם.

פיזה 2012: הצהרה מפורשת על תהליכים והתנהגויות של תלמידים

19. הגדרת האוריינות המתמטית בפיזה 2012 מדגישה פעילויות חשובות שתלמידים בעלי רמות הולכות וגובחות של אוריינות מתמטית אמורים להיות מסוגלים לעסוק בהן – היסק, תיאור, מידול, הסבר וחיזוי – כסיוע בשיפוט וקבלת החלטות. בהתאם לתמונה המצטיירת מן ההגדרה, לפיה אנשים בעלי יכולת אוריינית הם אזרחים חושבים ומעורבים, מספקות הפעילויות המיוחדות המוזכרות כאן הבחנה באשר לסוגי ההתנהגות שניתן לצפות שיפגינו אנשים כאלה. נוסף על היכולת להסיק ולבצע חישובים שגתיים ומניפולציה של סמלים אלגבריים, יש ציפייה שאנשים יוכלו גם לתאר, למדל, להסביר ולחזות תופעות, כך שיוכלו לגבש דעות והחלטות מבוססות.

פיזה 2012: אוריינות כרצף המשכי

20. האוריינות מוגדרת כמשתנה, ומורכבת מרצף המשכי שנע מן המפותח פחות למפותח יותר. בני האדם נחשבים כבעלי אוריינות מתמטית גבוהה יותר או פחות, ולא כבעלי אוריינות מתמטית או חסרי אוריינות מתמטית. לדוגמה, אדם בעל אוריינות מתמטית מפותחת פחות יוכל להשיב על שאלות העוסקות בהקשרים מוכרים, לזהות מידע רלוונטי בבעיה ולבצע הליכים שגתיים. אדם בעל אוריינות מתמטית מפותחת יותר יאמץ עמדה מתמטית פעילה ויעילה יותר ביחס לעולם הסובב אותו; יפתח מודלים עבור מצבים מורכבים ויעבוד עמם, ואולי אף בלתי מוכרים, כשהוא מזהה מגבלות ומפרט הנחות; יישם רעיונות מתמטיים מדויקים דיים לפתרון בעיות; יבחר, ישווה ויעריך אסטרטגיות לפתרון בעיה; יהגה במעשיו; וינסח ויסביר את מסקנותיו ופרשנותיו.

ארגון התחום

21. המסגרת המושגית במתמטיקה של פיזה מגדירה את תחום המתמטיקה עבור סקר פיזה ומתארת גישה להערכת רמת האוריינות המתמטית בקרב בני 15. כלומר, מבחני פיזה מעריכים את מידת שליטתם המקצועית של תלמידים בני 15 במתמטיקה כאשר הם נתקלים במצבים ובבעיות – שרובם מוצגים בהקשרים מן העולם האמיתי.

22. למטרות הערכה, ניתן לנתח את הגדרת פיזה 2012 לאוריינות מתמטית במונחים של שלושה היבטים הקשורים זה בזה:

- התוכן המתמטי המיועד לשימוש בפתרון הבעיות

- **התהליכים המתמטיים המתארים** מה עושים אנשים כדי לחבר בין הקשר הבעיה לבין המתמטיקה וכך לפתרה, והמיומנויות המונחות ביסודם של התהליכים הללו - מיומנויות שיש להפעילן על מנת לעשות זאת

- העולם האמיתי והקשרים המתמטיים שבהם ממוקמות הבעיות

23. החלקים הבאים מרחיבים היבטים אלה. בהדגישה היבטים אלה של התחום, המסגרת המושגית במתמטיקה של פיזה 2012 עוזרת להבטיח שפריטי המבחן המפותחים לצורך הסקר משקפים מגוון של הקשרים, תכנים, תהליכים ומיומנויות – פריטי מבחן שמהווים אופרציונליזציה יעילה של האוריינות המתמטית כפי שהיא מוגדרת במסגרת מושגית זו. מספר שאלות, המבוססות על השקפת פיזה 2010 באשר לאוריינות מתמטית, עומדות מאחורי ארגונו של חלק זה של המסגרת המושגית. אלו הן:

- לאיזה ידע של תוכן מתמטי נוכל לצפות מבני אדם בכלל – ומתלמידים בני 15 בפרט?
- אילו תהליכים מבצעים בני אדם בפתרם בעיות מתמטיות בהקשר כלשהו, ואילו מיומנויות נוכל לצפות מבני אדם להפגין עם עליית רמת האוריינות המתמטית שלהם?
- באילו הקשרים ניתן להתבונן באוריינות מתמטית ולהעריך אותה?

ידע של תוכן מתמטי

24. הבנה של תוכן מתמטי – והיכולת ליישם ידע זה בפתרון בעיות משמעותיות בהקשרים שונים – חשובה לאזרחים בעולם המודרני. כלומר, על מנת לפתור בעיות ולפרש מצבים בהקשרים אישיים, תעסוקתיים, חברתיים ומדעיים, יש צורך להשתמש בידע מתמטי מסוים ובהבנות מתמטיות מסוימות.

25. בהתאם לכך, ידע של תוכן מתמטי שיהווה בסיס לפיזה 2012 ייבחר מבין ארבע קטגוריות תוכן, שיובילו לשימוש במגוון תכנים מתמטיים החשובים וחיוניים לדיסציפלינה. הקטגוריות הבאות תשמשנה לתיאור תוכן מתמטי, כשהן ממחישות את רמתם והיקפם הכלליים של התכנים שמן הראוי שינחו את פיתוחם של פריטי מבחן עבור הערכת פיזה 2012. קטגוריות תוכן אלה הן בהתאם למסמכי המסגרת המושגית במתמטיקה הקודמים של פיזה, והן מאפשרות דיווח על נתוני מגמה לאורך זמן, בנוסף לכסות את דיסציפלינת המתמטיקה והאפיקים המרכזיים בתכניות הלימודים הבית-ספריות.

- שינוי ויחסים

• מרחב וצורה

• כמות

• אי-ודאות

26. בעזרת ארבע הקטגוריות הללו, ניתן לארגן תוכן מתמטי באופן שמבטיח את פרישת הפריטים על פני התחום כולו, ויחד עם זאת מונע חלוקה מפורטת מדי, שתקשה להתמקד בבעיות המבוססות על מצבים אמיתיים. נוסף על כך, ניתן להשוות קטגוריות אלה לארגון של התוכן הנמצא בשימוש בתקנים ובתוכניות הלימודים של מדינות רבות. בעוד שסיווג לפי תחום תוכן חשוב לצורך מיקוד בפיתוח פריטי מבחן ובחירתם, וכן לצורך דיווח על תוצאות ההערכה, חשוב לציין שקטגוריות תוכן אלה מתלכדות. קשרים הקיימים בין היבטים שונים של התכנים הכלולים בארבע קטגוריות אלה תורמים לבהירותה של המתמטיקה כדיסציפלינה, וניתנים להבחנה לפחות בחלק מפריטי המבחן שנבחרו להערכת פיזה 2012.

27. הידע של התוכן המתמטי המתואר מטה משקף את הרמה ואת ההיקף של תוכן הראוי להיכלל בהערכת פיזה 2012. ראשית מפורטים תיאורי הקטגוריות והרלוונטיות של כל אחת מהן לפתרון בעיות משמעותיות, ולאחר מכן מוצגת הגדרה ספציפית יותר של התוכן המתאים להיכלל בהערכת אוריינות מתמטית של תלמידים בני 15. קטגוריות התוכן הרחבות, ונושאי התכנים הספציפיים הכלולים במסגרת המושגית, נבחרו על סמך מספר קריטריונים בסיסיים:

- על הידע של התוכן המתמטי להיות רלוונטי להקשרים מתמטיים המחייבים אנשים לזהות בבעיה את המבנה המתמטי הרלוונטי להולשתמש בו.

- על הידע של התוכן המתמטי לשקף את ההבנות שאנשים יוכלו ליישם בחייהם כאשר הם מגבשים דעות והחלטות מבוססות, לא רק במסגרת תפקידיהם כבעלי קריירות מדעיות מתקדמות, אלא גם כאזרחים תורמים, מעורבים וחושבים.

- הידע של התוכן המתמטי הנחשב הולם בעבור תלמידים בני 15 זוהה על בסיס בחינת סטנדרטים תכניים, מתוך מדגם שנלקח הן ממדינות החברות בארגון לשיתוף פעולה ופיתוח כלכלי (OECD), והן ממדינות שאינן חברות בו.

28. תיאורים של הידע של התוכן המתמטי, אשר מאפיינים כל אחת מארבע הקטגוריות – שינוי ויחסים, מרחב וצורה, כמות ואי-ודאות – מובאים להלן.

שינוי ויחסים

29. העולמות הטבעיים והמלאכותיים מציגים מספר רב של יחסים זמניים וקבועים בין תופעות, כאשר שינויים מתחוללים בתוך מערכות של תופעות או עצמים הקשורים זה לזה, עם השפעתם של המרכיבים זה על זה. במקרים רבים מתחוללים שינויים אלה לאורך זמן, ובמקרים אחרים השינויים החלים בתופעה אחת קשורים לשינויים המתחוללים באחרת. בחלק מן התופעות השינוי שחל הוא בלתי רציף; אחרות משתנות ללא הרף. טבעם של חלק מן היחסים הוא קבוע יותר, או בלתי משתנה – לדוגמה, הדבר ההופך את הפונקציות הפולינומיות לקבוצה של פונקציות. אוריינות גבוהה יותר בקטגוריית השינוי והיחסים כרוכה בהבנת סוגי יסוד של שינויים ובזיהויים עם התרחשותם, על מנת להשתמש במודלים המתמטיים המתאימים כדי לתאר שינוי ולחזותו. מבחינה מתמטית, המשמעות היא מידול השינוי והיחסים באמצעות הפונקציות המתאימות, כמו גם יצירה, פירוש ותרגום של סמליים וגרפיים של יחסים.

30. *שינוי ויחסים* באים לידי ביטוי במגוון רב של סביבות, כגון אורגניזמים בתהליך גדילה, מוסיקה, מחזור עונות השנה, דפוסי מזג אוויר, רמות תעסוקה ותנאים כלכליים. היבטי התוכן המתמטי המסורתיים של פונקציות ואלגברה, ובכלל זה ביטויים סמליים, טבלאות וייצוגים גרפיים, הם מרכיב מרכזי בתיאור, מידול ופירוש תופעות שינוי. נוסף על כך, ייצוגים של נתונים ויחסים המתוארים על ידי שימוש בסטטיסטיקה משמשים לתיאור שינויים ויחסים ולפירושם. מתופעות גיאומטריות עולים מספר יחסים מעניינים, כמו האופן בו שינויים בהיקף של צורות בסיסיות עשוי להתקשר לשינויים בשטחן, או היחסים בין אורכי צלעותיהם של משולשים. ביסוס איתן של תורת המספרים הבסיסית הוא חיוני להגדרתם של שינויים ויחסים ולפירושם.

31. הערכה מבוססת-מחשב תאפשר להציג בפני תלמידים תמונות דינמיות וייצוגים רבים המקושרים זה לזה באופן דינמי, ואף את ההזדמנות לבצע מניפולציה של פונקציות. לדוגמה, ניתן להדגים באופן חזותי ושירי שינוי לאורך זמן (כגון צמיחה או תנועה) באמצעות אנימציה והדמיות, ולייצגו באמצעות פונקציות, גרפים וטבלאות נתונים מקושרים. מציאת מודלים מתמטיים של שינוי והשימוש בהם מקודמים על ידי האפשרות לחקור שינוי ולתארו על ידי עבודה עם תוכנה שבכוחה לשרטט גרף פונקציות, לבצע מניפולציה של פרמטרים, להפיק טבלאות ערכים, לארגן ולהכין תרשים נתונים, ולחשב באמצעות נוסחאות. רלוונטית במיוחד היא יכולתם של גיליונות אלקטרוניים וכלים גרפיים לעבוד עם נוסחאות ולהכין תרשימי נתונים.

מרחב וצורה

32. *מרחב וצורה* היא קטגוריה המקיפה מגוון רחב של תופעות המתחוללות בכל מקום בעולמנו החזותי: דפוסים, מאפייני עצמים, מיקומים וכיוונים, ייצוגי עצמים, פענוח וקידוד מידע חזותי, ניווט ואינטראקציה דינמית עם צורות אמיתיות, כמו גם עם ייצוגים. למרות שהגיאומטריה היא אחד מיסודותיה של קטגוריית *מרחב וצורה*, היא מרחיקה לכת הרבה מעבר לגיאומטריה המסורתית בכל הנוגע לתוכן, משמעות ושיטה, והיא משתמשת באלמנטים מתחומים מתמטיים אחרים כגון חזותיות (ויזואליזציה) מרחבית, מדידה, מספר ואלגברה.

כלולים בתחום זה מניפולציה ופירוש של צורות בטווח של סביבות, שנע בין תוכנת גיאומטריה דינמית לכלי מערכת ניווט לוויינית (GPS).

33. ההנחה של פיזה היא שהבנתו של מערך מושגי וכישורי ליבה הוא בעל חשיבות לאוריינות הנוגעת למרחב וצורה. כלומר, על מנת לפרש בעיות בהקשרים אישיים, תעסוקתיים, חברתיים ומדעיים ולפתורן, יש צורך לשאוב ממאגר ידע מתמטי מסוים, מיחסים מסוימים ומהבנות מסוימות. אוריינות מתמטית בתחום המרחב והצורה כרוכה במגוון פעילויות, כגון הבנת הפרספקטיבה; לדוגמה, בציור, יצירת מפות וקריאתן, שינוי צורות באמצעות טכנולוגיה, פירוש תמונות תלת-ממדיות מפרספקטיבות שונות ובניית ייצוגים של צורות.

34. הערכה מבוססת-מחשב תקנה לתלמידים הזדמנות לבצע מניפולציה של ייצוגים דינמיים של צורות ועצמים תלת-ממדיים, שניתן לסובבם באופן מדומה ובכך לתרום ליצירת תמונה מדויקת יותר. תלמידים יכולים לעבוד עם מפות שיש בהן אפשרות לביצוע רוטציה והגדלה, על מנת לבנות תמונה מנטלית של המקום ולהשתמש בכלים אלה כעזר לתכנון נתיבים. הם יכולים לבחור כלים מדומים ולהשתמש בהם על מנת לבצע מדידות (למשל, של זוויות וקטעי קו) בתכניות, בתמונות ובדגמים, ולהשתמש בנתונים אלה בחישובים. הטכנולוגיה תאפשר לתלמידים לשלב ידע גיאומטרי עם מידע חזותי על מנת לבנות דגם מנטלי מדויק. לדוגמה, כדי למצוא את נפחה של כוס, יכול אדם לבצע מניפולציה של התמונה עד לזיהוי הקונוס הקטום, לזהות את הניצב וכן נקודות בהן ניתן למודדו, ולזהות שהדברים העשויים להידמות לאליפסות בראשו ובתחתיתו הם, למעשה, מעגלים.

כמות

35. רעיון הכמות הוא אולי ההיבט המתמטי הנפוץ והחיוני ביותר לצורך מעורבות ותפקוד בעולמנו. רעיון זה משלב בתוכו כימות תכונותיהן של תופעות, יחסים, מצבים וישויות בעולם, הבנת ייצוגים שונים לכימותים אלה ויכולת לשפוט פירושים וטיעונים מבוססי-כמות. המעורבות בכימות העולם כרוכה בהבנת מידות, ספירות, מחוונים (אינדקטורים), גודל יחסי ומגמות ודפוסים מספריים. היבטים של הסקה כמותית – כגון חוש מספרי, ייצוגים מרובים של מספרים, אלגנטיות בחישוב, חישובים מנטליים, אומדן והערכה של סבירות תוצאות – הם מהותה של האוריינות בקטגוריית הכמות. תופעות הקשורות בכמות עשויות להיות קשורות באופן הדוק לייצוגים ולאפשרויות הפעולה שמספקים כלים, כגון מחשבוניס וגיליונות אלקטרוניים.

36. כימות הוא שיטה עיקרית לתיאור מערך רחב של תכונות ותופעות בעולם ומדידתו. היא מאפשרת מידול מצבים, בחינת שינויים ויחסים, תיאור ומניפולציה של מרחב וצורה, וכן מדידה והערכה של אי-ודאות. לפיכך, אוריינות בקטגוריית הכמות נסמכת במידה רבה על ידע ותהליכים בתחום המספרים, המיושמים במגוון רחב של תצורות סביבתיות.

37. הערכה מבוססת-מחשב תקנה לסטודנטים הזדמנות לנצל את הכוח החישובי הנרחב של הטכנולוגיה המודרנית. ראוי לציין שעל אף שהטכנולוגיה יכולה להקל את נטל החישוב עבור בני האדם ולאפשר להם להתמקד במשמעות ובאסטרטגיה בבואם לפתור בעיות, אין בכך כדי לבטל את צרכם של אנשים בעלי אוריינות מתמטית לפתח הבנה עמוקה של המתמטיקה. אדם ללא הבנה כזו יכול להשתמש בטכנולוגיה רק לצורך משימות שגרתיות, מצב שאינו תואם את הגדרת פיזה 2012 לאוריינות מתמטית. יתר על כן, שילוב של טכנולוגיה בהערכה אופציונלית זו עשוי לאפשר את הכללתם של פריטים המצריכים רמות חישובים מספריים וסטטיסטיים, שיהיו בלתי מציאותיים במסגרת הערכה מבוססת-נייר.

אי-ודאות

38. במדע, בטכנולוגיה, ובחיי היום יום, אי-הודאות היא נתון קיים. קטגוריית תוכן זו כוללת את זיהוי תפקידה של השונות בתהליכים, הבנה מסוימת של הכימות וההסבר של שונות זו, ההכרה באי-הודאות הכרוכה במדידה וידע בדבר מושג. נוסף על כך, גיבוש, פירוש והערכת מסקנות שהוסקו במצבים שבמרכזם אי-ודאות, מהווים חלק מן האוריינות בהיבט זה של המתמטיקה.

39. אי-ודאות קיימת ברוב התחזיות המדעיות, תוצאות הסקרים, תחזיות מזג האוויר והמודלים הכלכליים. קיימת שונות בתהליכי ייצור, בצינוי מבחנים ובממצאי סקרים, והסיכוי עומד ביסודן של רבות מפעילויות הפנאי מהן נהנים בני האדם. תוכניות הלימודים המסורתיות בתחום ההסתברות והסטטיסטיקה מספקות אמצעים רשמיים יותר לתיאור, למידול ולפירוש תופעות של אי-ודאות, כמו גם לביצוע היקשים. נוסף על כך, ידע על מספרים והיבטים מסוימים באלגברה, כגון ייצוגים גרפיים וסמליים, תורם ליכולת ההתמודדות עם בעיות בקטגוריית תוכן זו.

40. הערכה מבוססת-מחשב תקנה לתלמידים הזדמנות לעבוד עם מערכי נתונים גדולים ותספק את כוח החישוב ואת היכולת לטפל בנתונים הנדרשים לעבודה עם מערכים כאלה. לתלמידים עשויה להיות הזדמנות לבחור בכלים המתאימים על מנת לבצע מניפולציה, לנתח, ולייצג נתונים, וייצוגים הקשורים זה בזה יאפשרו לתלמידים לבחון נתונים כגון אלה באופנים שונים. היכולת להפיק מספרים אקראיים מאפשרת לחקור מצבים הסתברותיים באמצעות הדמיות, כגון ההסתברות האמפירית של אירועים ומאפייני מדגמים.

41. על מנת להבין ולפתור בעיות נתונות בהקשר הכוללות שינוי ויחסים, מרחב וצורה, כמות ואי-ודאות, יש לשאוב משלל נושאים, מושגים ותהליכים מתמטיים, ברמת עומק הולמת. היות שמבחינה פיזית תוכנו ופותרו להערכת אוריינות מתמטית של תלמידים בני 15, מתוארים להלן תכנים הולמים לרמת גיל זו. מפרט התכנים אינו מאורגן על פי ארבע קטגוריות התוכן בכוונה תחילה; זאת על מנת להדגיש את החתך הרוחבי בו מאופיינים רבים מן הנושאים והמושגים. המושגים והנושאים מאורגנים דווקא באשכולות שהינם נהירים מנקודת מבט מתמטית.

פונקציות: המושג פונקציות, הכולל פונקציות ליניאריות ופונקציות רלוונטיות אחרות, מאפייניהן ומגוון תיאורים וייצוגים שלהן. ייצוגים אלה כוללים, בין היתר, ייצוג מילולי, סמלי, תרשימי, טבלאי וגרפי.

ביטויים אלגבריים: פירוש מילולי ומניפולציה של ביטויים אלגבריים, הכוללים מספרים, סמלים, פעולות חשבון, חזקות ושורשים פשוטים.

משוואות: משוואות ליניאריות ומשוואות הקשורות בהן.

מערכות נקודות ציון (קואורדינטות): ייצוג ותיאור נתונים ויחסים, וכן עצמים גיאומטריים ואלגבריים רלוונטיים.

יחסים בתוך עצמים גיאומטריים וביניהם בשניים ובשלושה ממדים: כולל יחסים סטטיים, כגון קשרים אלגבריים בין רכיבי גזרות (לדוגמה, משפט פיתגורס כפי שהוא מגדיר את היחס בין אורכי צלעותיו של משולש ישר-זווית), מיקום יחסי, דמיון וחפיפה, ויחסים דינמיים העוסקים בתמורתם ובתנועתם של עצמים, וכן התאמה בין עצמים דו-ממדיים ותלת-ממדיים.

מדידה גיאומטרית: התכונות המספריות והמרחקים בין עצמים, כגון מידות זווית, אורך, היקף, קוטר, שטח ונפח.

מספרים ויחידות: מושגים, ייצוגים ומאפיינים של מספרים שלמים ורציונליים, היבטים רלוונטיים של מספרים אי-רציונליים, וכן כמויות ויחידות שקשורות לתופעות ולרעיונות, כגון זמן, כסף, משקל, טמפרטורה, מרחק, שטח ונפח, וכן כמויות נגזרות ותיאורן המספרי.

פעולות חשבוניות: טבען של הפעולות הללו, מאפייניהן ומוסכמות הסימון הקשורות אליהן.

אחוזים, יחס ופרופורציות: תיאורים מספריים של גודל יחסי והשימוש בפרופורציות ובהסקה פרופורציונלית לצורך פתרון בעיות.

אומדן: הערכה מונחית-מטרה של כמויות וביטויים מספריים, לרבות ספרות משמעותיות ועיגול מספרים.

איסוף וייצוג נתונים: טבעם, מקורם ואיסופם של סוגי נתונים שונים, והאופנים השונים לייצוגם.

שונות נתונים ותיאורה: מושגים כגון שונות, התפלגות ומגמה מרכזית של מערכי נתונים, ואופנים לתיאורם ולפירושם במונחים כמותיים.

מדגמים ודגימה: מושגי דגימה ונטילת דגימות מאוכלוסיות נתונים, לרבות היקשים פשוטים המבוססים על מאפייני מדגמים.

סיכוי והסתברות: מושג בדבר אירועים מקריים, שונות מקרית וייצוגה, סיכוי ושכיחות של אירועים, כמו גם היבטים בסיסיים של מושג ההסתברות.

תהליכים מתמטיים ותת-התהליכים שמונחים ביסודם

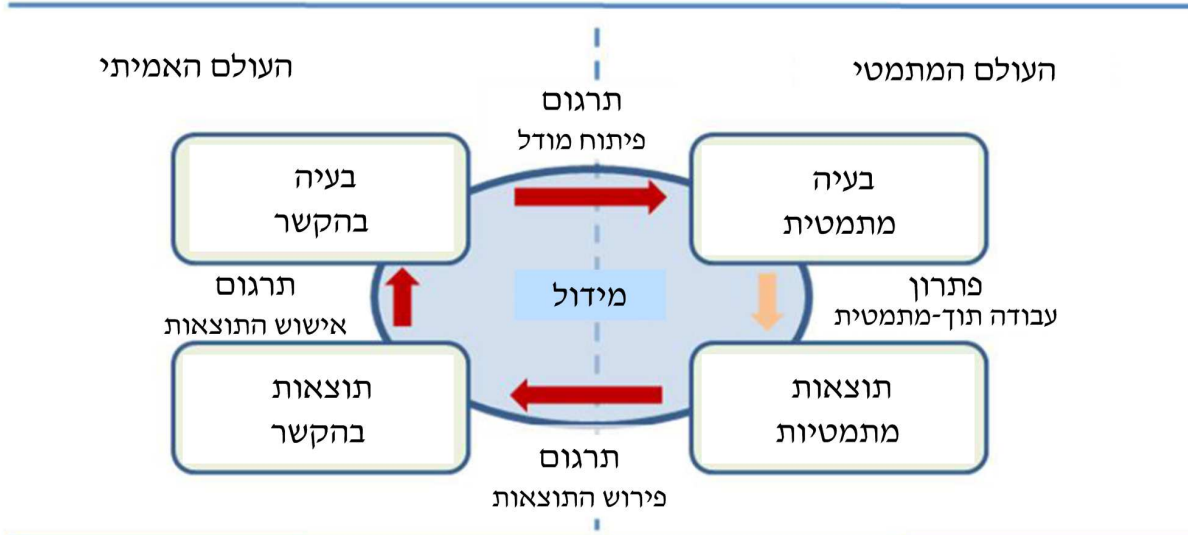
תהליכים מתמטיים

42. תוצאות ההערכה המתמטית של פיזה 2012 תדווחנה באמצעות שלושה תהליכים: *תהליך התרגום, תהליך הפתרון, ובאופן שתלוי בנתונים אמפיריים, תהליך מידול* מאוחד. כל אחד מן התהליכים הללו ייתמך על ידי מערך של שבעה תת-תהליכים המשמשים להגדרת הרמות השונות של אוריינות מתמטית ולהבחנה ביניהן. תת-תהליכים אלה יתוארו בחלק הבא. יישומם המוצלח של כל אחד מתת-התהליכים הללו מתבסס על ידע מתמטי כפי שמתואר לעיל. התהליכים המתמטיים המדווחים מתוארים בתרשים 2.

תרשים 2. התהליכים המתמטיים

שגיאה!

התהליכים המתמטיים



43. **תהליך התרגום** מאופיין על ידי היבטי העבודה המתמטית המתרחשים במסגרת הקשר העולם האמיתי של הבעיה, או אלה הקשורים לממשק בין העולם האמיתי והעולם המתמטי. פריטים שמדגימים את תהליך התרגום כוללים בעיקרון המשגה של אתגר או הקשר הממוקמים בעולם האמיתי במונחים שיאפשרו ניסוח מתמטי שמתרגם בין העולם האמיתי למתמטי, בין אם בשלב של ניסוח בעיה אמיתית בצורה מתמטית או בשלב התרגום של תוצאה מתמטית לשפת הבעיה המקורית ואישוש התוצאה בהקשר המקורי של הבעיה. התרשים באיור 2 מראה איך תהליך התרגום קשור לפעולות הכרוכות בשימוש באוריינות מתמטית בפיתוח מודל לבעיה בעולם האמיתי, ובפירוש התוצאות ואישושן.

44. **תהליך הפתרון** מאופיין על ידי היבטי העבודה המתמטית המתרחשים בעיקר במסגרת העולם המתמטי. ליתר דיוק, הפריטים המאפיינים את תת-התהליך של הפתרון הם אלו שמתמקדים בעיקר בחישוב, במניפולציה של מודלים מתמטיים או משוואות, בפתרון בעיות מתמטיות שגרתיות או לא שגרתיות, בקריאת מידע מגרף או מתרשים, בהיסק ובטיעון בתוך ההקשר המתמטי, או בבדיקת תוצאות והצדקתן במסגרת המתמטיקה. התרשים באיור 2 מציג את מקומו בפועל של תהליך הפתרון באוריינות המתמטית.

45. באופן שתלוי בתיקוף אמפירי, ייעשה שימוש בקטגוריית דיווח שלישית על מנת לאפיין את המשימות הכרוכות הן בתהליך התרגום והן בתהליך הפתרון באופן מובהק. בפרט, **תהליך המידול** הזה מסווג את פריטי המבחן אשר משתמשים במעגל המידול המתמטי כולו. החץ המעגלי

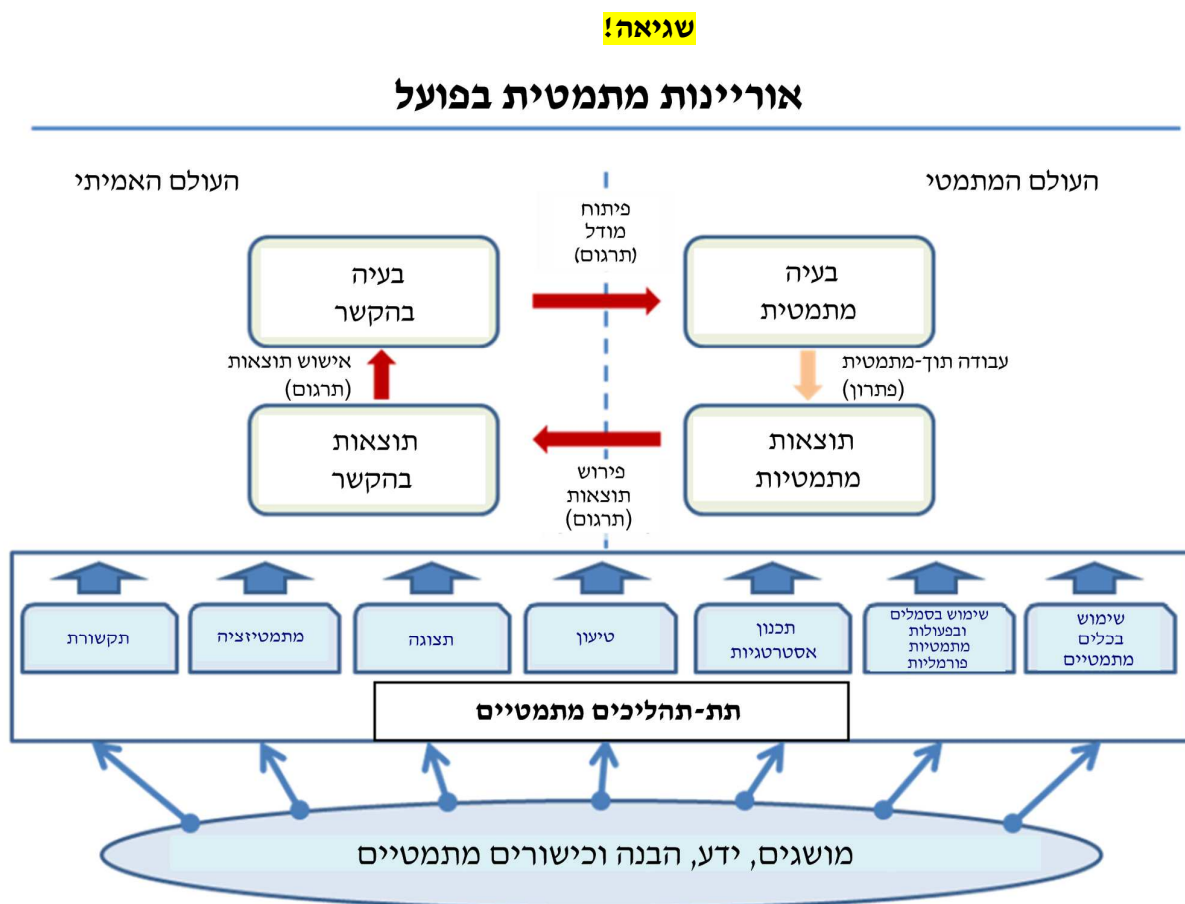
באיור 2 מייצג את תהליך המידול במרכז התרשים, למרות שמן הראוי לציין שלא כל פריטי פיזה התורמים להערכת תהליך זה כוללים את המעגל כולו.

תת-תהליכים מתמטיים

46. תת-תהליכים המתמטיים שבני האדם מסוגלים להפעיל על מנת להתמודד עם האתגרים שעומדים בפניהם נמצאים בלב האוריינות המתמטית. תת-תהליכים הם היכולות הקוגניטיביות הזמינות לבני האדם, או הניתנות ללמידה על ידם, על מנת שיוכלו להבין את העולם ולהיות מעורבים בו באופן מתמטי, או לפתור בעיות מסוימות. הם מניעים את הפעלת ההבנות, הידע והכישורים המושגיים (מבחינת המסגרת המושגית של פיזה, הידע של התוכן המתמטי) שברשות בני האדם. תת-תהליכים כוללים גם את המוכנות ליישם את המיומנויות הללו במצבים שונים. ככל שגדלה רמת האוריינות המתמטית של אדם מסוים, כך גדלה יכולתו של האדם להסתמך ביעילות על מבחר של תת-תהליכים מתמטיים. מזהים שבעה תת-תהליכים מתמטיים המהווים בסיס לאוריינות מתמטית ומניעים אותה.

47. איור 3 מציג את היבטי המסגרת המושגית המתייחסים לתת-התהליכים. בחלקו העליון, מערך הפעילויות אשר מרכיבות את האוריינות המתמטית בפועל, ואשר, יחדיו, יוצרות את מעגל המידול המתמטי. התהליכים המתמטיים המוצעים למטרות דיווח מוצגים באמצעות חיצים אדומים וכתומים. התרשים ממחיש גם את תפקידם היסודי של תת-התהליכים המתמטיים. בתחתית התרשים, מוצגים המושגים, הידע, ההבנה והכישורים המתמטיים (במונחי המסגרת המושגית של פיזה, ידע התוכן המתמטי) המזינים את כל תת-התהליכים המתמטיים, ולפיכך את האוריינות המתמטית.

תרשים 3. תת-התהליכים מתמטיים של פיזה והקשר בינם ובין האוריינות המתמטית בפועל



48. המונח תת-התהליכים נועד להצביע על מאפיין של האדם, והמונח תת-התהליכים מתמטיים מתייחס למאפיינים של בני אדם בעלי רמות שונות של אוריינות מתמטית. על תפיסה זו של תת-התהליכים יסתמכו תיאורי הבקיאיות שיפותחו על מנת לתאר את תוצאות מבחני פיזה במתמטיקה, המוצגים בהמשך. אותם תת-התהליכים מתמטיים יכולים גם לשמש לתיאור המורכבות הקוגניטיבית של פעילויות ומשימות מתמטיות. ניתן לתאר משימות על פי רמת הדרישה

הקוגניטיבית של כל תת-תהליך שיש להפעיל, כך שמשימות פשוטות יחסית מצריכות הפעלת תת-תהליכים מעטים בלבד, וברמה נמוכה; משימות מורכבות יותר מבחינה קוגניטיבית מצריכות הפעלת תת-תהליכים ברמה גבוהה יותר. האופנים בהם באות לידי ביטוי דרישות ההפעלה של התהליכים השונים וקשרי הגומלין ביניהם הם הגורמים העיקריים שמשפיעים על רמת הקושי של המשימה.

49. מתוארים שבעה תת-תהליכים מתמטיים, הן מנקודת המבט של ההתנהגויות שלגביהן הם מרמזים, והן מנקודת המבט של מורכבות הפעילויות המזמנות את הפעלתם.

50. *תקשורת*: אוריינות מתמטית הלכה למעשה מצריכה *תקשורת*. האדם מבחין בקיומו של אתגר כלשהו ומגורה לזהות מצב בעייה ולהבינו. קריאה, פענוח ופירוש הצהרות, שאלות, משימות או עצמים מסוימים, מאפשרים לאדם ליצור מודל מנטלי של המצב, וזהו שלב חשוב בהבנת הבעיה, הבהרתה וניסוחה. במהלך תהליך הפתרון, ייתכן שיהיה צורך בפרשנות נוספת של מידע, ובסיכום של תוצאות ביניים והצגתן. מאוחר יותר, לאחר שנמצא פתרון, ייתכן שפותר הבעיה יצטרך להציגו, ואולי אף להסבירו או להצדיקו בפני אחרים.

51. גורמים שונים קובעים את הרמה ואת ההיקף של דרישות התקשורת של משימה מסוימת, ויכולתו של אדם לעמוד בדרישות אלו מצביעה על מידת שליטתו בתת-תהליך התקשורת. בהיבטים הקולטים של התקשורת, כוללים גורמים אלה את האורך ואת המורכבות של הטקסט או של אובייקט אחר שיש לקרוא ולפרש, את מידת היכרותו של האדם עם הרעיונות או עם המידע, אשר מוזכרים בטקסט או באובייקט זה, את המידה בה יש לחלץ את המידע הנדרש מתוך מידע אחר, סדר המידע והאם הוא תואם את סדר תהליכי החשיבה הנדרשים לפירוש המידע ולשימוש בו, ואת מידת קיומם של רכיבים שונים (כגון טקסט, רכיבים גרפיים, גרפים, טבלאות, לוחות) שיש לפרשם זה ביחס לזה. בהיבטים ההבעתיים של התקשורת, רמת המורכבות הנמוכה ביותר ניכרת במשימות הדורשות רק מתן תשובה מספרית. במידה שמתווספת הדרישה להבעה נרחבת יותר של הפתרון, ונדרשים הסבר מילולי או הצדקה של התוצאה, כך גוברת הדרישה התקשורתית.

52. *מתמטיזציה*: אוריינות מתמטית הלכה למעשה עשויה לכלול המרה של בעיה שהוגדרה בעולם האמיתי לביטוי מתמטי צרוף (שעשוי לכלול בנייה, המשגה, הנחת הנחות, פיתוח מודל), או פירוש פתרון מתמטי או מודל מתמטי ביחס לבעיה המקורית. המונח *מתמטיזציה* משמש לתיאור התהליכים המתמטיים הבסיסיים המעורבים.

53. ישנן משימות שבהן לא נדרשת מתמטיזציה – היות שהבעיה מופיעה כבר בצורה מתמטית מספקת, או שהיחס בין המודל למצב שהוא מייצג אינו דרוש לפתרון הבעיה. הדרישה למתמטיזציה עולה בצורתה הפשוטה ביותר כאשר פותר הבעיה נדרש לפרש ולהקיש ישירות ממודל נתון; או לתרגם ישירות ממצב למתמטיקה (לדוגמה, ליצור את המצב ולהמשיגו באופן רלוונטי, לזהות משתנים רלוונטיים ולבחור בהם, לאסוף מדידות רלוונטיות, ליצור תרשימים).

הדרישה למתמטיזציה גוברת עם דרישות נוספות לשנות מודל נתון או להשתמש בו על מנת לתפוש תנאים משתנים, או לפרש יחסים שהוקשו; לבחור במודל מוכר במסגרת אילוצים מוגבלים שהוגדרו בבהירות; או ליצור מודל שבו המשתנים, היחסים והאילוצים הנדרשים הם מפורשים וברורים. רמה גבוהה אף יותר של הדרישה למתמטיזציה מומחשת על ידי הצורך ליצור מודל או לפרשו במצב שבו יש לזהות או להגדיר הנחות, משתנים, יחסים ואילוצים רבים, ולבדוק שהמודל עומד בדרישות המשימה; או להעריך מודלים או להשוות ביניהם.

54. **ייצוגים:** אוריינות מתמטית הלכה למעשה דורשת לעיתים קרובות מאוד ייצוגים מתמטיים. דבר זה עשוי לחייב בחירה, תכנון, פירוש ותרגום בין ייצוגים וכן שימוש במגוון ייצוגים, כדי להמחיש מצב, לפעול מול בעיה, או להציג את העבודה שבוצעה. הייצוגים האמורים כוללים משוואות, נוסחאות, גרפים, טבלאות, תרשימים, תמונות, תיאורים מילוליים וחומרים מוחשיים.

55. **תת-ההליך מתמטי זה נדרש ברמתו הנמוכה ביותר כאשר מתעורר הצורך להתמודד ישירות עם ייצוג מוכר נתון, לדוגמה, מעבר ישיר מטקסט למספרים, או קריאת ערך ישירות מגרף או מטבלה, כאשר נדרשת פרשנות מזערית ביחס למצב.** משימות ייצוג בעלות דרישות קוגניטיביות גבוהות יותר מצריכות בחירה ופרשנות של ייצוג שגרתי או מוכר ביחס למצב, וברמת דרישה גבוהה יותר כאשר הן מצריכות תרגום בין ייצוגים או שימוש ביותר מייצוג אחד ביחס למצב, ובכלל זה המרתו של ייצוג; או כאשר הדרישה היא להמציא ייצוג ברור של המצב. דרישה קוגניטיבית ברמה גבוהה יותר מסתמנת בצורך להבין וייצוג לא-שגרתי המצריך מידה ניכרת של פענוח ופירוש ולהשתמש בו; להמציא ייצוג הממחיש את היבטי המפתח של מצב מורכב; או להשוות או להעריך ייצוגים שונים.

56. **היסק וטיעון:** תת-ההליך המתמטי הנדרש בפעילויות ובשלבים השונים הקשורים לאוריינות מתמטית בפועל מכונה **היסק וטיעון**. מיומנות זו כרוכה בתהליכים מחשבתיים ששורשיהם נטועים בהגיון, החוקרים ומקשרים בין רכיבי בעיה כך שניתן להקיש מהם, לבדוק הוכחה שניתנה, או לספק הוכחה להצהרות.

57. **במשימות בעלות דרישה נמוכה יחסית להפעלת תת-ההליך הזה, ההיסק הנדרש כרוך פשוט במילוי ההוראות הנתונות.** ברמת דרישה מעט גבוהה יותר, יש להפעיל מחשבה במהלך המשימה, כדי לחבר בין פריטי מידע שונים לצורך הקשת היקשים (לדוגמה, לקשר בין רכיבים נפרדים בבעיה, או להסיק ישירות על פי אחד מהיבטי הבעיה). ברמה גבוהה יותר, המשימות מצריכות ניתוח של מידע (לדוגמה, לחבר מספר משתנים זה לזה) כדי ליצור או לעקוב אחר טיעון רב שלבי; או להסיק ממקורות מידע מקושרים. ברמת דרישה גבוהה אף יותר יש למזג ולהעריך מידע, ליצור או להשתמש בשרשראות של היסקים להצדקת היקשים, או לקבוע הכללות בהסתמך על רכיבי מידע רבים ושילובם באופן מונחה ונתמך.

58. *תכנון אסטרטגיות: אוריינות מתמטית* הלכה למעשה מצריכה לעיתים קרובות תכנון אסטרטגיות לפתרון מתמטי של בעיות. דבר זה מצריך מערך של תהליכי בקרה חיוניים המנחים את הפותר לזהות, לנסח ולפתור בעיות ביעילות. מיומנות זו מאופיינת כבחירה או המצאה, וכן הנחיות ליישום, של תכנית או אסטרטגיה לשימוש במתמטיקה לצורך פתרון בעיות העולות מן המשימה או מן ההקשר. תת-תהליך מתמטי זה עשוי להתממש בשלבים שונים של תהליך פתרון הבעיה.

59. במשימות בעלות דרישה נמוכה יחסית ליישום תת-תהליך זה, על פי רוב די לבצע פעולות ישירות, בהן האסטרטגיה הנדרשת מוצהרת או ברורה מאליה. ברמת דרישה גבוהה מעט יותר, ייתכן שיהיה צורך להחליט על אסטרטגיה מתאימה המשתמשת במידע הרלוונטי הנתון כדי להסיק מסקנה. הדרישה הקוגניטיבית גדלה והולכת עם הצורך לתכנן ולבנות אסטרטגיה שתאפשר המרת מידע נתון כדי להסיק מסקנה. משימות בעלות דרישה גבוהה אף יותר מחייבות בניית אסטרטגיה מורכבת למציאת פתרון מקיף או מסקנה כוללת; או להערכת אסטרטגיות אפשריות שונות או השוואה ביניהן.

60. *שימוש בשפה ובפעולות סמליות, רשמיות וטכניות: אוריינות מתמטית* הלכה למעשה מצריכה שימוש בשפה ובפעולות סמליות, רשמיות וטכניות. דבר זה מצריך הבנה, מניפולציה ושימוש בביטויים סמליים בהקשר מתמטי (לרבות פעולות וביטויים חשבוניים) הנשלטים על ידי כללים ומוסכמות מתמטיים. דבר זה גם מצריך הבנה ושימוש במבנים המבוססים על הגדרות, כללים ומערכות רשמיות. הסמלים, הכללים והמערכות שבשימוש ישתנו על פי הידע של התוכן המתמטי המסוים הנדרש במשימה ספציפית על מנת לנסח, לפתור או לפרש את המתמטיקה.

61. הדרישה להפעלת תת-תהליך זה משתנה בשיעור ניכר בין משימות. במשימות הפשוטות ביותר, אין צורך להפעיל כללים מתמטיים או ביטויים סמליים מעבר לחישובים האריתמטיים היסודיים בעבודה עם מספרים קטנים או נוחים לניהול. העבודה עם משימות בעלות דרישות גבוהות יותר עשויה לכלול שימוש ישיר ביחס פונקציונלי פשוט, בין אם מפורש או מרומז (לדוגמה, יחסים ליניאריים מוכרים); שימוש בסמלים מתמטיים רשמיים (לדוגמה, על ידי חיסור ישיר או חישובים אריתמטיים נתמכים הכוללים שברים ונקודות עשרוניות); או הפעלה ושימוש ישיר בהגדרה מתמטית רשמית, במוסכמה, או במושג בסמלי. דרישה קוגניטיבית גבוהה יותר מאופיינת על ידי הצורך בשימוש מפורש בסמלים ובמניפולציה שלהם (לדוגמה, על ידי ארגון האלגברי מחדש של נוסחה), או על ידי הפעלה ושימוש בכללים, הגדרות, מוסכמות, נוסחאות או הליכים מתמטיים באמצעות שילוב יחסים או מושגים סמליים מרובים. ודרישה לרמה גבוהה אף יותר מאופיינת על ידי הצורך ביישום מרובה שלבים של הליכים מתמטיים רשמיים; עבודה גמישה עם יחסים אלגבריים פונקציונליים או כאלה הכרוכים זה בזה; או השימוש הן בטכניקה מתמטית והן בידע למטרת הפקת תוצאות.

62. *שימוש בכלים מתמטיים: תת-תהליך המתמטי האחרון* המונח ביסודה של האוריינות המתמטית הלכה למעשה הוא השימוש בכלים מתמטיים. בעבר, אפשר היה לכלול את השימוש

בכלים בסקרי פיזה מבוססי-נייר רק באופן שולי ביותר. הרכיב האופציונלי מבוסס-המחשב של הערכת המתמטיקה בפיזה 2012 יספק הזדמנויות רבות יותר לתלמידים להשתמש בכלים מתמטיים ולכלול הבחנות באשר לאופן השימוש בכלים כחלק מן ההערכה. הכלים המתמטיים כוללים כלים פיזיים כגון כלי מדידה, וכן מחשבוניס וכלים מבוססי-מחשב שזמינותם הופכת נפוצה יותר. תת-תהליך זה כולל את היכולת והידע אודות השימוש בעזרים ובכלים שונים העשויים לסייע בפעילות מתמטית, וכן ידע אודות מגבלותיהם של עזרים וכלים כגון אלה. כלים מתמטיים עשויים גם למלא תפקיד חשוב בשלב הסבר התוצאות.

63. משימות ופעילויות הכרוכות בדרישה נמוכה יחסית של תת-תהליך זה עשויות לכלול שימוש ישיר בכלים מוכרים כגון כלי מדידה, במצבים בהם תורגל היטב השימוש בכלים אלה. רמות דרישה גבוהות יותר מתעוררות כאשר השימוש בכלי כרוך בסדרה של תהליכים, או בקישור מידע שונה במהלך השימוש בכלי, וכאשר ישנה היכרות מעטה יותר עם הכלים עצמם או עם המצב בו יש ליישם. ניתן לראות דרישה גבוהה אף יותר כאשר יש להשתמש בכלי על מנת לעבד מספר רב של רכיבי מידע ולקשר ביניהם, כאשר יישום הכלי נדרש במצב שונה למדי מיישומים קודמים, וכאשר יש צורך להפעיל מחשבה על מנת להבין ולהעריך את יתרונות הכלי ומגבלותיו.

המחשה של תת-תהליך המתמטי

64. שבעת תת-תהליכים שתוארו זה עתה מהווים בסיס למושג אוריינות מתמטית, ותומכים בו ובתהליכים המתמטיים של תרגום, פתרון ומידול שישמשו לצרכי דיווח בפיזה 2012. תת-תהליכים המשוייכים באופן ההדוק ביותר לתהליך התרגום הם תכנון אסטרטגיות, תקשורת, ייצוג, מתמטיזציה, והיסק וטיעון. אלה המשוייכים באופן ההדוק ביותר לתהליך הפתרון הם תכנון אסטרטגיות, ייצוג, היסק וטיעון, שימוש בשפה ובפעולות סמליות, רשמיות וטכניות, ושימוש בכלים מתמטיים.

65. ניתן להדגים את תת-התהליכים המתמטיים באמצעות הפניה לפריט מבחן הופעת רוק ששימש בניסוי השטח שקדם לסקר פיזה 2003. הפריט מוצג באיור 4.

66. תת- התהליך תקשורת נדרש ברמה נמוכה יחסית עם הצורך לקרוא את הטקסט ולהבין. יש לפרש ולהבין את החשיבות המתמטית של מילים, כגון מלבן וגודל, משפט כגון המגרש היה מלא, וכן הצורך לאמוד. ידע מסוים מן העולם האמיתי יסייע בכך. המשימה מצריכה יכולות מתמטיזציה גבוהות, היות שפתרון הבעיה דורש להניח הנחות מסוימות

הופעת רוק

להופעת רוק נשמר לקהל מגרש מלבני בגודל 100 מטר X 50 מטר. הכרטיסים להופעה נמכרו כולם, המגרש היה מלא והקהל כולו עמד.

איזו מבין התשובות הבאות היא האומדן הסביר ביותר לסך כל האנשים שנכחו בהופעה?

- א. 2,000
- ב. 5,000
- ג. 20,000
- ד. 50,000
- ה. 100,000

איור 4. פריט המחשה – הופעה של להקת רוק

אודות החלל שעשוי אדם למלא בעודו עומד. על מנת לבצע זאת, האדם נדרש ליצור ייצוג מנטלי של המצב, או ייצוג גרפי כלשהו, כחלק מניסוח המודל שיקשר בין החלל הנדרש לאדם בקהל לבין שטח המגרש. תכנון אסטרטגיה נדרש במספר שלבים של תהליך הפתרון של בעיה זו, כמו בעת ההחלטה על האופן שבו יש לגשת לבעיה, כאשר יש צורך לדמיין איזה סוג של מודל יהיה שימושי להגדרת החלל הנדרש לכל אדם בקהל, וכאשר יש לזהות את הצורך בהליכי בדיקה ואישוש כלשהם. אסטרטגיית פתרון אחת עשויה לכלול הנחה של גודל האזור לכל אדם, הכפלתו במספר האנשים הנתון בכל אחת מן האפשרויות המסופקות, והשוואת התוצאות עם התנאים שתוארו בשאלה. לחילופין, אפשר לבצע תהליך הפוך, להתחיל באזור הניתן ולעבוד אחורנית, באמצעות כל אחת מאפשרויות התגובה, עד הגעה למרחב הנדרש לאדם, ולהחליט איזו מן התוצאות תואמת ביותר את הקריטריונים שנקבעו בשאלה. שימוש בשפה ובפעולות סמליות, רשמיות וטכניות נדרש בעת היישום של האסטרטגיה שאומצה, על ידי פירוש ושימוש בממדים שסופקו ובתכונות רלוונטיות של מלבנים, ובביצוע החישובים הנדרשים כדי לקשר את שטח המגרש לשטח לאדם. היסק וטיעון נכנסים לתמונה כאשר יש צורך לחשוב בצורה בהירה על היחס בין המודל שהומצא, התוצאה שנבעה ממנו וההקשר האמיתי, על מנת לאשש את המודל שבו נעשה שימוש ולבדוק שנבחרה התשובה הנכונה.

הקשרים

67. היבט חשוב של אוריינות מתמטית הוא עיסוק במתמטיקה במגוון סביבות ומצבים. הבחירה בשיטות ובייצוגים המתאימים תלויה לעיתים קרובות בסביבות ובמצבים בהם מופיעות ההזדמנויות לחשיבה מתמטית, ושבהם מתעוררות הבעיות. אין בהכרח חשיבות להקשרים מעצם מהותם. למעשה, בעת הפיתוח של מסגרת מושגית זו – ושל פריטי המבחן שיפותחו וייבחרו על פי מסגרת זו – מוקדשת תשומת לב לרוחב טווח ההקשרים בהם עשויים בני אדם ליישם ביעילות

את הידע המתמטי שלהם. שימוש במגוון הקשרים מאפשר גם התחברות למגוון תחומי העניין הרחב ביותר של תלמידים.

68. ההקשר הוא אותו היבט של עולמו של האדם שבו טמונות הבעיות. למטרות המסגרת המושגית במתמטיקה של פיזה 2012, הוגדרו ארבעה הקשרים המשמשים לסיווג פריטי המבחן שפותחו עבור ההערכה:

- **אישי** – בעיות הנתונות בהקשר אישי מתמקדות באדם עצמו, במשפחתו ובקבוצת השווים שלו. סוגי ההקשרים העשויים להיחשב אישיים כוללים את אלה המכילים מיסים, תקציבים, משכנתאות, הכנת אוכל, קניות, משחקים, בריאות אישית, תחבורה אישית, ספורט, נסיעות, ולוחות זמנים אישיים.
- **תעסוקתי** – בעיות הנתונות בהקשר תעסוקתי מתרכזות בעולם העבודה. בעיות שמסווגות כתעסוקתיות עשויות להכיל דברים כמו יישומי גיליונות אלקטרוניים, משכורת / חשבונאות, בקרת איכות, לוחות זמנים / מצאי, עיצוב / ארכיטקטורה, וקבלת החלטות הקשורות לעבודה.
- **חברתי** – בעיות הנתונות בהקשר חברתי מתמקדות בקהילה. הן עשויות לכלול נושאים כמו הצבעה בבחירות, תחבורה ציבורית, ממשלה, מדיניות ציבורית, דמוגרפיה, פרסום וכלכלה.
- **מדעי** – בעיות הנתונות בהקשר מדעי קשורות ליישום של מתמטיקה בסוגיות ובנושאים הקשורים למדע. הקשרים עשויים לכלול תחומים כמו מזג אוויר או אקלים, אקולוגיה, רפואה, מדע החלל, גנטיקה ומדידה.

69. במסגרת הקשרים מוגדרים אלה, תהיינה בעיות מסוימות המוגדרות במובהק לא על פי קרבתן לעולם האמיתי אלא על פי דרישותיהן לזיהוי ולשימוש במבנה מתמטי. בעיות מסוג זה מזהות **מתמטיות**. לדוגמה, תלמידים עשויים להידרש לפתור חידות מתמטיות או לטפל במצבי בעיה משוערים, או שאינם שייכים למצב יום יומי. לדוגמה, תכנון נקיבת ערך המטבעות בעבור מטבע כלכלי חדש מצריכה יישום מושגים וכישורים מתמטיים, ומצריכה חשיבה על מבנים מתמטיים הרלוונטיים למצבים המוכרים לכול, אבל בעיה מסוג זה לא תתעורר בדרך כלל בחיים האמיתיים. בעיות תוך-מתמטיות עשויות לדרוש מתלמידים ליישם ידע מתמטי מסוים או להשתמש במיומנויות מתמטיות כגון היסק וטיעון. פריטים כגון אלה מדגישים את החשיבות שיש לזיהוי של מבנים מתמטיים כחלק חיוני מן האוריינות המתמטית.

70. סכימה זו של סיווג פריטים מקנה בסיס לבחירה של תמהיל הקשרי פריטים בהערכה, אשר משקפים טווח רחב של שימושים במתמטיקה, הנע בין שימושים אישיים יום-יומיים לדרישות מדעיות של בעיות כלל-עולמיות.

71. בעת הזיהוי של הקשרים שעשויים להיות רלוונטיים, חשוב ביותר לזכור שאחת ממטרות ההערכה היא לאמוד את יישום הידע של התוכן המתמטי והמיומנויות המתמטיות שרכשו התלמידים עד הגיעם לגיל 15 – גיל שבו במדינות רבות מסתיימות שנות חינוך החובה. לפיכך, ההקשרים של פריטי ההערכה נבחרים על פי מידת הרלוונטיות לתחומי העניין של התלמידים ולחיהם, והדרישות שיוטלו עליהם כשיצטרפו לחברה כאזרחים תורמים, מעורבים וחושבים.

הערכה של אוריינות מתמטית

72. בחלק זה מפורטת הגישה שננקטה ביישום רכיבי המסגרת המושגית, שתוארו בחלקים קודמים בסקר פיזה לשנת 2012. תיאור זה כולל את המבנה של המרכיבים המתמטיים של סקר פיזה, הדיווח על מיומנויות מתמטיות, הגישות הקשורות למיומנות מתמטית שאותן יש לחקור, וההסדרים עבור רכיב הסקר האופציונלי מבוסס-המחשב במתמטיקה.

מבנה הערכת המתמטיקה של פיזה 2012

73. בהתאם להגדרה של אוריינות מתמטית, פריטי מבחן שמופיעים בכל הכלים המפותחים כחלק מסקר פיזה, הן מבוססי-נייר והן מבוססי-מחשב, קוראים לשימוש במיומנות מתמטית בתוך הקשר, שעשוי להיות טבוע בעולם האמיתי או כזה שטבעו תוך-מתמטי. הפריטים כרוכים ביישום של מושגים, ידע, הבנה וכישורים מתמטיים (ידע של תוכן מתמטי) ברמה ההולמת תלמידים בני 15.

74. במהלך הפיתוח והבחירה של פריטים שייכללו בהערכת פיזה 2012, שימשה המסגרת המושגית להנחיית המבנה והתוכן של כלי הבחינה. כנקודת פתיחה בפיתוח פריטי ההערכה, נשקלו הקשרים שיהוו מסגרת למצבי בעייה, לידע של תוכן מתמטי החיוני למילוי המשימות, ולתהליכים ותת-התהליכים המונחים ביסודם, אשר מחברים בין הקשר הפריט והמתמטיקה הנדרשת לפתרון הבעיה - ובכך מאפשרים לתלמידים להשיב על פריטים. חשוב שכלי הסקר, הן מבוססי-הנייר והן מבוססי-המחשב, יכללו איזון הולם של פריטים המשקפים מרכיבים אלה של מסגרת האוריינות המתמטית.

חלוקת הניקוד הרצויה על פי קטגוריית תוכן

75. פריטי המתמטיקה של פיזה נבחרים כך שישקפו את הידע של התוכן המתמטי שתואר לעיל במסגרת מושגית זו. לצרכי פיזה 2012, אורגן הידע של התוכן המתמטי שהוגדר כמתאים להערכה בארבע קטגוריות תוכן: שינוי ויחסים, מרחב וצורה, כמות ואי-ודאות. בנוסף להיותו מתאים לתלמידים בני 15, התוכן שנבחר עבור פיזה 2012 הוא בר יישום במצבים מהחיים האמיתיים או בהקשר מתמטי הקורא לבני האדם לזהות מבנה מתמטי רלוונטי לפתרון בעיה ולהשתמש בו. הפריטים שנבחרו עבור פיזה 2012 מחולקים בין ארבע קטגוריות התוכן, כמוצג

בטבלה שלהלן. התפלגות הניקוד הרצויה זהה כמעט לחלוקה זו, אם כי הושם דגש קל על שינוי ויחסים, וכן על מרחב וצורה, בהתאם לחשיבות המושגים משני תחומים אלה בתכניות הלימודים הטיפוסיות לתלמידים בני 15. הודגשו מעט פחות הקטגוריות כמות ואי-ודאות; הראשונה היות שהיא נוטה לדרוש תכנים מתמטיים שנלמדו בשלבים מוקדמים הרבה יותר של רכישת ההשכלה, וזו האחרונה הואיל וקטגוריית תוכן זו מודגשת פחות משלוש האחרות בתכניות הלימודים של מרבית המדינות.

קטגוריית תוכן	אחוזי הניקוד
שינוי ויחסים	25-30
מרחב וצורה	25-30
כמות	20-25
אי-ודאות	20-25
סך הכול	100

התפלגות הניקוד הרצויה על פי התהליכים מתמטיים

76. נוסף על כך, ניתן לשייך את פריטי המבחן בהערכה המתמטית של פיזה 2012 לאחד משלושה תהליכים מתמטיים, בכפוף לאישוש אמפירי של גישה זו. התהליכים המתמטיים שישמשו למטרות דיווח הם: *תהליך התרגום*, *תהליך הפתרון ותהליך המידול*. פריטי מבחן המסווגים כפריטי *תרגום* יתמקדו בעיקר בממשק בין העולם האמיתי והעולם המתמטי. בפרט, יהיו פריטי מבחן מסוג זה כרוכים בתרגום בין העולם האמיתי לעולם המתמטי, בין אם בשלב הניסוח של בעיה אמיתית כבעיה מתמטית או בשלב של תרגום תוצאה מתמטית חזרה להקשר של הבעיה המקורית. פריטי מבחן המסווגים כפריטי *פתרון* יהיו כרוכים בעיבוד ניכר בעולם המתמטי, ויצריכו מיומנויות, כגון חישוב, מניפולציה, פתרון, בדיקה והצדקה. פריטים שדורשים מתלמידים לעשות שימוש ניכר גם בתרגום וגם בפתרון יסווגו כפריטי *מידול*. חלקם היחסי של הפריטים בתוך כל אחת מקטגוריות דיווח אלה מוצג בטבלה שלהלן. חלק יחסי זה מעניק משקל כמעט זהה לתהליכי *תרגום* ו*פתרון*, בעוד שניתן גם משקל לקטגוריה השלישית של פריטים שמשלבים בין השתיים הראשונות באופן בולט.

קטגוריית מיומנות	אחוזי הניקוד
תרגום	40-50
פתרון	40-50
מעגל מידול שלם	10-20
סך הכול	100

התפלגות הניקוד הרצויה על פי קטגוריית ההקשר

77. בחלקים הקודמים של מסגרת מושגית זאת, נידונו בצורה מפורטת למדי ההקשרים שבהם ייעשה שימוש בפריטי המתמטיקה של פיזה. בפיזה 2012, כל פריט ממוקם באחת מארבע קטגוריות הקשר: אישית, תעסוקתית, חברתית ומדעית. הפריטים שנבחרו בהערכת המתמטיקה של פיזה 2012 נפרשים על פני קטגוריות תוכן אלה, כמתואר בטבלה שלהלן. למרות שניתן טווח בעמודה המגדירה את אחוזי הניקוד שיוקצו לכל קטגוריית תוכן, הכוונה היא להקצות ניקוד זהה בקירוב לכל אחת מארבע הקטגוריות. בדרך זו, מובטחת תערובת של הקשרים, ולא מתאפשר לאף סוג של הקשר להיות הדומיננטי.

קטגוריית הקשר	אחוזי הניקוד
אישי	20-30
תעסוקתי	20-30
חברתי	20-30
מדעי	20-30
סך הכול	100

78. במסגרת ארבע קטגוריות אלה, הערכת המתמטיקה של פיזה 2012 תכלול הן פריטים הממוקמים בהקשרים אותנטיים והן פריטים תוך-מתמטיים הממוקמים אך ורק בהקשר מתמטי. בעוד שדגימת פריטים תוך-מתמטיים היא חשובה לביצוע הערכת אוריינות מתמטית, הערכת פיזה מייחסת ערך גבוה לפריטים הכוללים מצבים משמעותיים מן העולם האמיתי. הקשרים מסוימים, כגון האישי והמדעי, עשויים להיות בעלי נטייה גבוהה יותר מאחרים לכלול פריטים תוך-מתמטיים, כך שחלוקת פריטים כגון אלה על פני ארבע קטגוריות התוכן הללו לא תהיה בהכרח שווה.

טווח רמות הקושי של פריטים

79. סקר המתמטיקה של פיזה 2012 כולל פריטים בעלי טווח רחב רמות קושי, במונחים של המתמטיקה המונחת בבסיסם, טווח התואם לטווח יכולותיהם של התלמידים שנדגמו להשתתפות בסקר. בכלל זה פריטים שיהוו אתגר גם לתלמידים בעלי היכולות הגבוהות ביותר, ופריטים המתאימים לתלמידים בעלי יכולת נמוכה בהרבה. מנקודת מבט פסיכומטרית, סקר שנועד למדוד קוהורט מסוים של פרטים יהיה בר-תועלת ויעיל ביותר כאשר רמת הקושי של פריטי המבחן תואמת את יכולתם של הנבדקים. יתר על כן, *סולם הבקיאות המתואר* המשמש כחלק מרכזי בדיווח תוצאות פיזה ניתן לפיתוח רק אם הפריטים, שמהם נובעים תיאורי רמות הבקיאות, מקיפים את כלל היכולות שתוארו.

מבנה כלי הסקר

80. הכלים מבוססי-הנייר עבור פיזה 2012 יכילו 270 דקות של חומרים מתמטיים. החומרים יאורגנו בתשעה מקבצים של פריטים, כאשר כל מקבץ ייצג 30 דקות מזמן המבחן. מסך כל זה, שלושה מקבצים (המייצגים 90 דקות מזמן המבחן) יורכבו מחומר מקשר (link material) אשר שימש במבחני פיזה קודמים, ארבעה מקבצים (המייצגים 120 דקות מזמן המבחן) יורכבו

מחומרים חדשים בעלי טווח רחב של רמות קושי, ושני מקבצים (המייצגים 60 דקות מזמן המבחן) יוקדשו לחומרים בעלי רמת קושי נמוכה יותר.

81. כל מדינה משתתפת תשתמש בשבעה מן המקבצים: שלושת המקבצים של חומרי הקישור, שניים מן המקבצים "הרגילים" החדשים, וכן שני המקבצים "הרגילים" האחרים או שני המקבצים "הקלים". מקבצי הפריטים ממקומים בחוברות מבחן על פי מערך של סבב (rotated test design), כאשר כל טופס מכיל ארבעה מקבצים של חומר מתחומי המתמטיקה, הקריאה והמדעים.

82. הכלים האופציונליים מבוססי-המחשב, יכללו 80 דקות של חומרים מתמטיים. החומרים יאורגנו בארבעה מקבצים של פריטים, כאשר כל מקבץ מייצג 20 דקות מזמן המבחן. חומרים אלה יאורגנו בצורת סבב בכמה טפסי בחינה יחד עם חומר נוסף לבחינות המבוצעות באמצעות מחשב, כאשר כל טופס יכיל שני מקבצים המייצגים, סך הכול, 40 דקות מזמן הבחינה.

תכנון פריטי המתמטיקה של פיזה 2012

83. שלושה סוגי פריטים משמשים ברכיב מבוסס-הנייר להערכת אוריינות מתמטית בפיזה 2012: פריטים מובנים-פתוחים, פריטים מובנים-סגורים ופריטים רבי-ברירה. פריטים מובנים-פתוחים דורשים מהתלמיד תגובה כתובה נרחבת למדי. פריטים מסוג זה עשויים לא רק לדרוש מהתלמיד תגובה, אלא גם לדרוש להציג את השלבים שבוצעו או להסביר כיצד הגיע לתשובה. פריטים מובנים-סגורים מספקים סביבה מובנית יותר להצגת פתרונות לבעיה, והם מפיקים מתלמידים תגובות שניתן לשפוט בקלות את נכונותן או אי-נכונותן. פריטים רבי-ברירה דורשים בחירה בתגובה אחת או יותר מבין מספר אפשרויות תגובה. מספר זהה בקירוב של כל אחד מסוגי הפריטים הללו ישמש בהרכבת כלי המבחן.

84. ברכיב האופציונלי מבוסס-המחשב, צפוי שתתאפשר הוספה של תצורות פריטים.

85. הכלים בפיזה מורכבים מיחידות הערכה הכוללות גריינים, כגון טבלאות, לוחות, גרפים או תרשימים, ובנוסף, שאלה אחת או יותר הקשורה בגריינים משותפים אלה. השאלות מכונות פריטים. מתכונת זו נותנת לתלמידים הזדמנות להיות מעורבים בהקשר או בבעיה על ידי מתן תגובה לסדרה של שאלות הקשורות לאותו נושא או הקשר. עם זאת, מודל המדידה המשמש לניתוח נתוני פיזה מניח כי קיימת אי-תלות בין הפריטים, כך שבכל פעם שנעשה שימוש ביחידות המכילות יותר מפריט אחד, המטרה היא להבטיח אי-תלות מרבית של הפריטים.

86. פיזה משתמשת במבנה יחידה זה על מנת לאפשר את השימוש בהקשרים מציאותיים ככל האפשר, שמשקפים את המורכבות של מצבים אמיתיים תוך ניצול יעיל של זמן הבחינה. השימוש במצבים אודותיהם ניתן להעלות מספר שאלות, במקום לשאול שאלות נפרדות על מספר גדול

יותר של מצבים שונים, מפחית את הזמן הכללי הנדרש לתלמיד להכיר את החומר הקשור לכל שאלה. עם זאת, מאחר שגישה זו מפחיתה את מספר ההקשרים השונים בהערכה, ומאחר שלא תמיד קל ליישמה מבלי לפגוע באי-התלות בין הפריטים, חשוב להבטיח שיהיה מגוון מספק של הקשרים על מנת שה הטייה הנובעת מבחירת ההקשרים תהיה מזערית ושאי-התלות בין הפריטים תהיה מרבית. השאיפה היא, אם כן, לאזן בין שתי דרישות מנוגדות אלה.

87. פריטים שנבחרו להיכלל בכלי הבחינה של פיזה מייצגים טווח רחב של רמות קושי, על מנת שיתאימו לטווח היכולות הרחב הצפוי בקרב תלמידים המשתתפים בהערכה. נוסף על כך, קטגוריות ההערכה העיקריות (קטגוריות הקשר, קטגוריות תוכן ותהליכים, שבבסיסם תת-תהליכים) מיוצגות, במידת האפשר, באמצעות פריטים הכוללים טווח רחב של רמות קושי. רמות הקושי של פריטים נקבעות על פי ניסוי שטח מקיף של פריטי מבחן בטרם בחירת הפריטים לסקר הראשי של פיזה. הגורם המרכזי הקובע את רמת הקושי של הפריטים יהיה התוכן המתמטי המונח בבסיס המשימות, ולא מורכבות ההקשרים.

88. נוסף על כך, רמת הקריאה הנדרשת להתמודדות מוצלחת עם פריט נשקלת בתשומת לב רבה בעת פיתוח פריטים ובחירתם. היעד הוא להפוך את ניסוח הפריטים לפשוט וישיר ככל הניתן. תשומת לב רבה הוקדשה גם להימנעות מהקשרי פריטים העשויים ליצור אפליה תרבותית. תשומת הלב המוקדשת לאפליה העלולה להתעורר עקב ניסוח הפריטים חיונית אף יותר בפיזה 2012 מאחר שהכללתם של פריטים ממוחשבים ברכיב האופציונלי מבוסס-המחשב עשויה ליצור אתגרים חדשים לתלמידים שייתכן - או ייתכן שלא - הייתה להם גישה למחשבים בכיתות המתמטיקה שלהם.

עזרים וכלים

89. מדיניות פיזה מאפשרת לתלמידים להשתמש במחשבונים ובכלים אחרים ברכיבים מבוססי-הנייר, היות שלרוב נעשה בהם שימוש בבית הספר. דבר זה מאפשר את ההערכה האוטנטית ביותר של הרמות אליהן מסוגלים התלמידים להגיע, ומספק את ההשוואה האינפורמטיבית ביותר בין ביצועי מערכות חינוך. בחירתה של מערכת לאפשר לתלמידים גישה למחשבונים ושימוש בהם איננה שונה, בעיקרון, מהחלטות אחרות הנובעות משיקולי מדיניות חינוכית, אשר נקבעות על ידי מערכות שאינן בבקרת פיזה. בפריטי מבחן מסוימים, קיימת הסבירות שזמינותו של מחשבון תהווה יתרון.

90. ברכיב מבוסס-המחשב, יסופק טווח נרחב של כלים כחלק ממערכת הבחינה, כגון מחשבון, מכשירי מדידה מדומים, גיליונות אלקטרוניים וכלי ייצוג וחיזוי גרפיים שונים.

ניקוד פריטים

91. למרות שניקוד מרבית הפריטים מתבצע באופן דיכוטומי (כלומר, ניקוד או ללא-ניקוד), פריטים מובנים-פתוחים עשויים לכלול לעיתים ניקוד חלקי, דבר שמאפשר את סיווג התגובות בשלוש רמות איכות או יותר, וניקודן על פי רמות שונות של "נכונות" התגובות. דבר זה מאפשר לזהות רמות אוריינות מתמטית המופגנות באופן יחסי לפריט. תשובה שתזכה בניקוד המלא היא תשובה שתעמוד באמות המידה של רמת האיכות הגבוהה ביותר שהוגדרה אמפירית. תשובות פחות מתוחכמות או נכונות תוכלנה לזכות בניקוד חלקי, ואילו תשובות שאינן נכונות לגמרי, אינן רלוונטיות או לוקות בחסר לא יזכו לנקודות כלל. עבור כל אחד מן הפריטים הללו, מדריך קידוד מפורט (מחוון), שמאפשר מתן ניקוד מלא, ניקוד חלקי או אפס נקודות, ניתן לאנשים שהוכשרו בקידוד תשובות תלמידים ברחבי המדינות המשתתפות, על מנת להבטיח שקידוד התשובות יתבצע באופן עקבי ומהימן.

דיווח על בקיאות מתמטית

92. באיור 5 מוצגים תיאורים של שש רמות בקיאות שדווחו במבחני המתמטיקה של פיזה בשנים 2003, 2006 ו-2009. אלה יהוו את הבסיס לסולם המתמטיקה בפיזה 2012, לאחר שילוטשו מעט באמצעות נתונים אמפיריים שהופקו מסקר 2012.

איור 5. תיאורי רמות הבקיאות במתמטיקה

6	תלמידים ברמה 6 מסוגלים להמשיג, להכליל ולהשתמש במידע בהתבסס על חקירות שביצעו ומידול מצבים בעיתיים מורכבים. הם מסוגלים לקשר בין מקורות מידע וייצוגים שונים ולתרגם ביניהם בגמישות. תלמידים ברמה זו מסוגלים לחשיבה וליכולת היסק מתמטיות מתקדמות. תלמידים אלה יכולים ליישם את התובנות וההבנות שלהם, בד בבד עם שליטה מלאה בפעולות וביחסים מתמטיים סמליים ורשמיים, לפתח גישות חדשות ואסטרטגיות כלפי מצבים חדשים. תלמידים ברמה זו יכולים לנסח ולהסביר במדויק את מעשיהם ומחשבותיהם בנוגע לממצאיהם, לפירושיהם, לטיעוניהם ולמידת ההתאמה בין כל אלה לבין המצבים המקוריים.
---	---

5	תלמידים ברמה 5 מסוגלים לפתח מודלים של מצבים מורכבים ולעבוד עמם, תוך שהם מזהים אילוצים ומפרטים הנחות. הם מסוגלים לבחור, להשוות ולהעריך אסטרטגיות מתאימות לפתרון בעיות על מנת להתמודד עם בעיות מורכבות הקשורות למודלים אלה. תלמידים ברמה זו מסוגלים לעבודה אסטרטגית תוך שימוש בכישורי חשיבה והיסק רחבים ומפותחים ביותר, בייצוגים מקושרים הולמים, באפיונים רשמיים וסמליים, ובתובנות
---	--

	<p>בנוגע למצבים הללו. הם מסוגלים להעריך את פעולותיהם, ולנסח ולהסביר את פרשנויותיהם ואת תהליך הסקת המסקנות שלהם.</p>
4	<p>תלמידים ברמה 4 מסוגלים לעבוד ביעילות עם מודלים מפורשים של מצבים מוחשיים מורכבים שעשויים לכלול אילוצים או כאלה שדורשים מהתלמיד להניח הנחות. הם יכולים לבחור ייצוגים שונים ולשלב ביניהם, לרבות ייצוגים סמליים, ולקשרם ישירות להיבטים של מצבים בעולם האמיתי. תלמידים ברמה זו יכולים להשתמש בכישורים מפותחים היטב ולנמק בגמישות, עם תובנות מסוימות, בהקשרים אלה. הם יכולים להרכיב ולהעביר הסברים וטיעונים המבוססים על פרשנויותיהם, טיעוניהם ופעולותיהם.</p>
3	<p>תלמידים ברמה 3 מסוגלים לבצע הליכים המתוארים בבהירות, כולל כאלה המצריכים סדרה של החלטות. הם מסוגלים לבחור אסטרטגיות פשוטות לפתרון בעיות וליישמן. תלמידים ברמה זו יכולים לפרש ולהשתמש בייצוגים המבוססים על מקורות מידע שונים ולנמק ישירות מהם. הם יכולים לפתח הסברים קצרים המדווחים על פרשנויותיהם, תוצאותיהם ונימוקיהם.</p>
2	<p>תלמידים ברמה 2 יכולים לפרש ולזהות מצבים בהקשרים הדורשים לא יותר מאשר היקש ישיר. הם יכולים לחלץ מידע רלוונטי ממקור אחד ולהשתמש במודל ייצוגי אחד. תלמידים ברמה זו מסוגלים ליישם אלגוריתמים, נוסחאות, הליכים או מוסכמות בסיסיים. ביכולתם להסיק מסקנות ישירות ולפרש מילולית את התוצאות.</p>
1	<p>תלמידים ברמה 1 מסוגלים לענות על שאלות הכוללות הקשרים מוכרים בהם המידע הרלוונטי מוצג בכללותו והשאלות מוגדרות בבירור. הם מסוגלים לזהות מידע ולבצע הליכים שגרתיים על פי הנחיות ישירות במצבים מפורשים. הם יכולים לבצע פעולות ברורות מאליהן העולות באופן מידי מהגריין הנתון.</p>

93. נוסף על הסולם הכולל במתמטיקה, צפוי כי יפותחו וידווחו שני תיאורי סולמות בקיאות, על בסיס תהליך התרגום ותהליך הפתרון שתוארו קודם לכן. כל עוד יתמכו בכך הנתונים האמפיריים, יישקל גם תהליך שלישי, תהליך המידול, אשר ישלב בתוכו היבטים של תהליכי התרגום והפתרון.

94. למען השמירה על המשכיות עם דיווח תוצאות הסקר של שנת 2003 – הפעם האחרונה שבה המתמטיקה הייתה התחום העיקרי של מבחני פיזה – ידווח גם על ארבעה סולמות נוספים על פי ארבע קטגוריות התוכן: כמות, מרחב וצורה, שינוי ויחסים ואי-ודאות. המדינות השונות תמשכנה להתעניין בסולמות אלה הודות ליכולתן להציג פרופילים מסוימים בבקיאות מתמטית, הנובעים מדגשים מסוימים בתכנית הלימודים.

עמדות כלפי מתמטיקה

95. עמדות, אמונות ורגשות של בני-אדם ממלאים תפקיד משמעותי במידת העניין שלהם ובתגובות שלהם למתמטיקה באופן כללי, ובשימוש שלהם במתמטיקה בחייהם הפרטיים. לתלמידים המרגישים בטוחים יותר ברמת המתמטיקה שלהם, לדוגמה, יש סבירות גבוהה יותר מאחרים לעסוק במתמטיקה ולעשות בה שימוש, לבצע היסקים מתמטיים ולהשתמש בכלים מתמטיים בהקשרים השונים שבהם הם נתקלים. לתלמידים בעלי רגשות חיוביים כלפי מתמטיקה יש סיכוי טוב יותר ללמוד מתמטיקה מתלמידים המרגישים חרדה כלפי הנושא. לפיכך, אחד מיעדי החינוך המתמטי הוא שתלמידים יפתחו עמדות, אמונות ורגשות שמגדילים את הסבירות שישתמשו בידע המתמטי שלהם באופן מוצלח, ושילמדו יותר מתמטיקה, הן לטובתם האישית והן לטובת החברה.

96. תשומת הלב שמעניקה הערכת המתמטיקה של פיזה 2012 למשתנים הללו מבוססת על טענות לפיהן פיתוח עמדות, אמונות ורגשות חיוביים כלפי המתמטיקה הוא תוצאה חינוכית בעלת ערך העומדת בפני עצמה, ומטביעה בתלמידים נטייה מוקדמת להשתמש במתמטיקה בחייהם; כמו כן, משתנים אלה עשויים לתרום להסבר ההבדלים בין הישגי האוריינות המתמטית. לפיכך, למען כל המטרות הללו, סקר פיזה כולל פריטים הקשורים למשתנים אלה. נוסף על כך, מבחן פיזה מודד מגוון של משתני רקע שמאפשרים דיווח על האוריינות המתמטית וניתוחה עבור תת-קבוצות חשובות של תלמידים (למשל, לפי מין, שפה, או מעמד הגירתי).

97. כדי לאסוף מידע רקע, הארגון לשיתוף פעולה ופיתוח כלכלי (OECD) ופיזה מבקשים מתלמידים וממנהלי בתי הספר שלהם לענות על שאלוני רקע, תהליך שאורך 20 עד 30 דקות. שאלונים אלה הם מרכיב מרכזי בניתוח התוצאות ובדיווח עליהן על פי מגוון מאפייני תלמידים ובתי ספר.

98. שלושה תחומים רחבים של עמדות תלמידים כלפי המתמטיקה, המשפיעות על מידת המעורבות הפורמלית שלהם במתמטיקה, מזוהים כבעלי פוטנציאל להתווסף להערכת המתמטיקה של פיזה 2012: התעניינות במתמטיקה; נכונות להשתמש במתמטיקה; ואמונות הנוגעות למתמטיקה כדיסציפלינה.

99. תחום ההתעניינות במתמטיקה כולל רכיבים הקשורים לפעילות עכשווית ועתידית. שאלות רלוונטיות תתמקדנה במידת ההתעניינות של תלמידים במתמטיקה בבית-הספר, וכן בכוונותיהם להמשיך ללמוד מתמטיקה ולעסוק בקריירות בעלות אוריינטציה מתמטית. קיים חשש בקנה מידה בינלאומי בתחום זה, מפני שבמדינות משתתפות רבות חלה ירידה באחוזי התלמידים הבוחרים בלימודים עתידיים הקשורים במתמטיקה, כאשר בו בזמן קיים ביקוש הולך וגדל לבוגרים בתחומים אלה.

100. הנכונות לעסוק במתמטיקה קשורה בעמדות, ברגשות ובאמונות של תלמידים לגבי עצמם, אשר מעודדים אותם או מונעים מהם להפיק תועלת מהאוריינות המתמטית שרכשו. לתלמידים שנהנים מפעילות מתמטית ומרגישים בטוחים לעסוק בה יש סבירות גבוהה יותר להשתמש במתמטיקה כדי לחשוב על המצבים שהם נתקלים בהם בהיבטים השונים בחייהם, בתוך בית הספר או מחוצה לו. המרכיבים מסקר פיזה שרלוונטיים לתחום הזה כוללים רגשות הנאה, ביטחון ו(חוסר) חרדה ממתמטיקה, ואמונות התלמידים לגבי עצמם הנוגעות לתפיסה העצמית שלהם ולתחושת המסוגלות העצמית שלהם.

101. אמונות הנוגעות למתמטיקה יכולות גם לגרום לתלמידים להיות מעורבים במתמטיקה באופן פורה. סקר פיזה מזהה את האמונות האפיסטמולוגיות של תלמידים בנוגע למתמטיקה ושואל באופן ספציפי אם הם רואים את המתמטיקה ככלי שימושי לפתרון בעיות בחיים האמיתיים או רק כאוסף של חוקים ונוסחאות שאותו הם מחויבים ללמוד.

102. תוצאות סקר פיזה 2012 תספקנה מידע חשוב לקובעי המדיניות החינוכית במדינות המשתתפות, באשר לתוצאות הלימוד בבתי הספר, הן אלו הקשורות להישגים והן אלו הקשורות לעמדות. תמונה מלאה יותר תתקבל משילוב של המידע שעולה מהערכת האוריינות המתמטית של פיזה וסקר העמדות, הרגשות והאמונות המשפיעות על המידה בה תלמידים עושים שימוש באוריינות המתמטית שלהם.

הערכה מתמטית אופציונלית, מבוססת-מחשב

103. רעיון האוריינות המתמטית משתנה עם הזמן, והמחשבים הופכים חלק חיוני באוריינות מסוג זה במאה העשרים ואחת. המחשבים מעורבים כעת בחייהם של אנשים ברחבי העולם בהיותם משולבים בפעילויותיהם האישיות, החברתיות, התעסוקתיות והמדעיות. ההגדרה של אוריינות מתמטית בפיזה 2012 מכירה בתפקיד החשוב שיש לטכנולוגיה בציינה כי מצופה מאנשים בעלי אוריינות מתמטית להשתמש במתמטיקה ובכלים מתמטיים לשם ביצוע שיפוט מבוסס היטב וקבלת החלטות איתנה. בהגדרה זו, המילה "כלי" מתייחסת למחשבוניס ולמחשבים, וכן לעצמים פיזיים אחרים כגון סרגלים ומדי זווית שמשמשים למדידה וליצירה.

104. בתגובה לתופעה זו, האפשרות לבחור בהערכה מתמטית מבוססת-מחשב היא חידוש עיקרי בהערכת פיזה 2012. יחידות פיזה שעוצבו במיוחד תוצגנה באמצעות מחשב, ותלמידים יגיבו עליהן באמצעות המחשב. הם יוכלו גם להשתמש בעיפרון ובנייר כעזר לתהליכי החשיבה שלהם. הפלטפורמה מבוססת-המחשב תספק אפשרויות רבות יותר לא רק בשימוש בטכנולוגיה, אלא גם לבחינת השימוש בכלי מדידה, כגון סרגל, גם אם בצורתו הווירטואלית.

105. שימוש בשיפורים אשר מציעה טכנולוגיית המחשב יצור פריטי מבחן מעניינים יותר לתלמידים, צבעוניים יותר, וקלים יותר להבנה. לדוגמה, ניתן להציג לתלמידים גריינים בתנועה, עצמים תלת-ממדיים שניתן לסובבם, או גישה גמישה יותר למידע רלוונטי. תצורות פריטים חדשות, כגון אלו שמבקשות מתלמידים "לגרור ולשחרר" מידע או להשתמש ב"נקודות חמות" על גבי תמונה, יעוררו עניין בתלמידים, יאפשרו מגוון רחב יותר של סוגי תגובות, ויספקו תמונה מלאה יותר של האוריינות המתמטית.

106. מחקרים מוכיחים שהדרישות המתמטיות הולכות וגדלות במקומות העבודה, לאור נוכחותה של הטכנולוגיה האלקטרונית, כך שאוריינות מתמטית ושימוש במחשב כרוכים זה בזה באופן הדוק. עבור עובדים בכל הרמות במקום העבודה, קיימת היום תלות הדדית בין אוריינות מתמטית ובין השימוש בטכנולוגיית המחשב, והרכיב מבוסס-המחשב עשוי לספק הזדמנויות לחקור את מידת המסוגלות של אנשים להתמודד עם תלות הדדית זו.

107. טכנולוגיית המחשב מציעה מאפיינים רבים היכולים להעשיר את האופנים בהן מיושמת המתמטיקה. מאפיינים אלה כוללים:

- תצוגות דינמיות ואף סטטיות מסורתיות (לדוגמה, אנימציה, הדמיות, וידאו)
 - תגובות הכוללות פעילות גומלין, שמשקפות את פעולת המשתמש (לדוגמה, לשנות אוטומטית את קנה המידה של גרף, להציע תיקון לנוסחה, להוסיף סוגריים על מנת להשלים ביטוי)
 - ייצוגים מרובים המקושרים זה לזה באופן דינמי, כך ששינוי בייצוג אחד מחולל אוטומטית שינוי בייצוג אחר (לדוגמה, שינוי בטבלת נתונים מחולל שינוי בגרף)
 - עוצמה חישובית רבה לסיוע בתחום האלגברה המספרית, וחישובים סטטיסטיים, המאפשרים למקד את תשומת הלב של התלמידים באסטרטגיות פתרון בעיות, מושגים ומבנים
 - גישה מובנית וקלה למידע (לדוגמה, מאגרי מידע, מידע מקושר בהיפר-קישורים, יכולות מיון וסידור, בחירה בתת-מערכים מסוימים של נתונים)
108. בעתיד, עשויים פריטי פיזה לנצל טווח רחב יותר של המאפיינים הללו.

109. מטרת פיזה מבחינת אוריינות מתמטית היא לפתח מדדים המראים באיזו מידת יעילות מכינות מדינות את התלמידים להשתמש במתמטיקה לא רק כחלק מקריירות מדעיות אלא גם כחלק מהאזרחות התורמת, המעורבת והחושבת שלהם. כדי להשיג מטרה זו, פיזה פיתחה הגדרה לאוריינות מתמטית ומסגרת הערכה שמשקפת את המרכיבים החשובים של הגדרה זו. פריטי הערכת המתמטיקה שפותחו ונבחרו להיכלל בפיזה 2012, על פי ההגדרה והמסגרת המושגית דלעיל, נועדו לשקף איזון של הקשרים, תכנים, תהליכים ותת-תהליכים רלוונטיים. פריטים אלה נועדו לקבוע אם תלמידים מסוגלים להשתמש במה שלמדו. הם דורשים מתלמידים להשתמש בתוכן הידוע להם על ידי מעורבות בתהליכים ויישום כישורים שרכשו על מנת לפתור בעיות שמתעוררות בהתנסויות היומיומיות. ההערכה מספקת בעיות במגוון של תצורות פריטים, בדרגות שונות של הנחייה מובנית והרכב מובנה, אבל הדגש הוא על בעיות אותנטיות שעליהן התלמידים נדרשים לחשוב בכוחות עצמם.

110. מסגרת מושגית זו מתארת וממחישה את ההגדרה של פיזה 2012 לאוריינות מתמטית ויוצרת את ההקשר להערכתה. המרכיבים המרכזיים של המסגרת המושגית במתמטיקה כוללים ידע של תוכן מתמטי, תהליכים ותת-תהליכים מתמטיים, והקשרים של שימוש במתמטיקה – כאשר כל אחד מאלה נובע ישירות מההגדרה של אוריינות מתמטית. הדיונים לגבי קטגוריות ההקשר והתוכן מדגישים מאפיינים של הבעיות שמתעוררות בחייהם של אנשים, ואילו הדיון על תהליכים ועל ידע של תוכן מתמטי מפורט מדגיש את הכישורים אותם מיישמים אנשים על מנת לפתור את הבעיות הללו.