Rapport

Titre	Laboratoire 4 : Dérivée
Professeur	Stéphane Gobron
Étudiants	Diego Antognini, Alexandre Perez, Sébastien Vaucher
Date	13 Mai 2013

Contexte

Le but de ce laboratoire est, dans un premier temps, d'implémenter un algorithme permettant de calculer la dérivée première et seconde d'une fonction en un point. Il faudra représenter le résultat de manière graphique avec les deux fonctions suivantes :

$$f_1(x) = x^5 + 5 \cdot x^3 + 2 \cdot x \qquad\qquad f_2(x) = \frac{x}{1 - x^2}$$

En bonus, il y a une application des dérivées dans un problème d'optimisation. La deuxième partie consiste à trouver les meilleurs moments auxquels il fallait acheter de l'or en Suisse afin d'avoir un bénéfice maximum. Il faudra trouver ceux avec une durée d'une année puis une durée indéterminée.

Choix

- Partie 1

Après avoir analysé les trois méthodes proposées, nous avons décidé d'implémenter la méthode de la différence centrée. Nous n'avons pas choisi la dernière, car bien qu'elle ait une meilleure précision ($O(h^4)$), elle ne s'applique qu'aux polynômes du quatrième degré. Nous avons préféré la différence centrée que progressive car nous avons une erreur plus faible, $O(h^2)$ au lieu de $O(h)$.

- Partie 2

Après avoir récupéré une base de données contenant le prix de l'or en Suisse[1], nous avons d'abord créé un tableau représentant l'inflation. Pour chaque jour, nous avons calculé l'inflation entre la valeur courante et la première valeur de l'or que nous avons, en 1979.

Pour trouver la meilleure durée d'une année pour acheter l'or, nous avons calculé le nombre de jours boursier par année. La moyenne s'élève à 260.92 jours depuis 1979, nous l'avons donc arrondi à 261. Ensuite pour chaque jour, nous avons calculé la différence d'inflation entre le jour courant et celui une année après (soit 261 jours plus tard). Pour finir, nous trions le tableau dans l'ordre croissant et récupérons les trois dernières dates.

Quant à la meilleur période, le calcul est similaire à celle pour une année. Pour chaque jour, nous cherchons la plus grande différence d'inflations sur les jours restants jusqu'à la dernière date connue. En d'autres termes, l'on recherche le minimum ainsi que le maximum.

Résultats

Pour les dérivées, nous avons un résultat graphique cohérent. Pour le h de la dérivée première, nous avons pu utiliser l'epsilon machine, ce qui n'a pas pu être le cas pour la dérivée seconde. Pour cette dernière, nous avons fixé h à 10^{-6}. Pour la deuxième partie, les durées que nous avons trouvées semblent elles aussi cohérentes par rapport au résultat graphique affiché.

Conclusion

Concernant les dérivées, celles-ci correspondent bien à celles que l'on trouve avec le logiciel *Mathematica* et les discontinuités s'affichent aussi (dans notre cas des asymptotes).

[1] Récupérée à cet endroit : http://www.gold.org/download/value/stats/statistics/xls/gold_prices.xls

Partie bonus

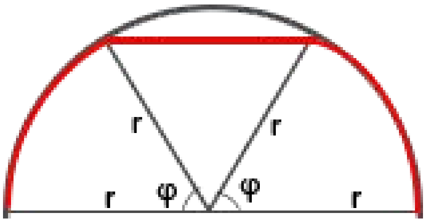
La partie bonus consiste à effectuer un travail d'optimisation sur un problème donné. Dans celui-ci, nous devons parcourir un lac étant un cercle parfait et avons deux manières que nous pouvons combiner ou alors en n'utiliser qu'une.

Les deux manières sont :

1. Aller en ligne droite, avec une vitesse de $2\ m/s$;
2. Longer le bord du lac, avec une vitesse de $4\ m/s$.

Le but est de trouver la distance à parcourir pour avoir un temps minimal en utilisant les deux manières proposées.

Voici une interprétation graphique du problème :



Interprétation du problème, Figure 1

Voici la méthode analytique que nous proposons, avec un rayon constant :

vd, vitesse en allant tout droit, en m/s

vl, vitesse en longeant le bord, en m/s

r, le rayon, en mètre

ϕ, l'angle, en radian

dl, fonction exprimant la distance lorsque l'on va tout droit

dd, fonction exprimant la distance lorsque l'on longe le bord

f, fonction exprimant le temps total de parcours

$$dl(\phi, r) = |r| \cdot \sqrt{2 + 2 \cdot Cos(2 \cdot \phi)}$$

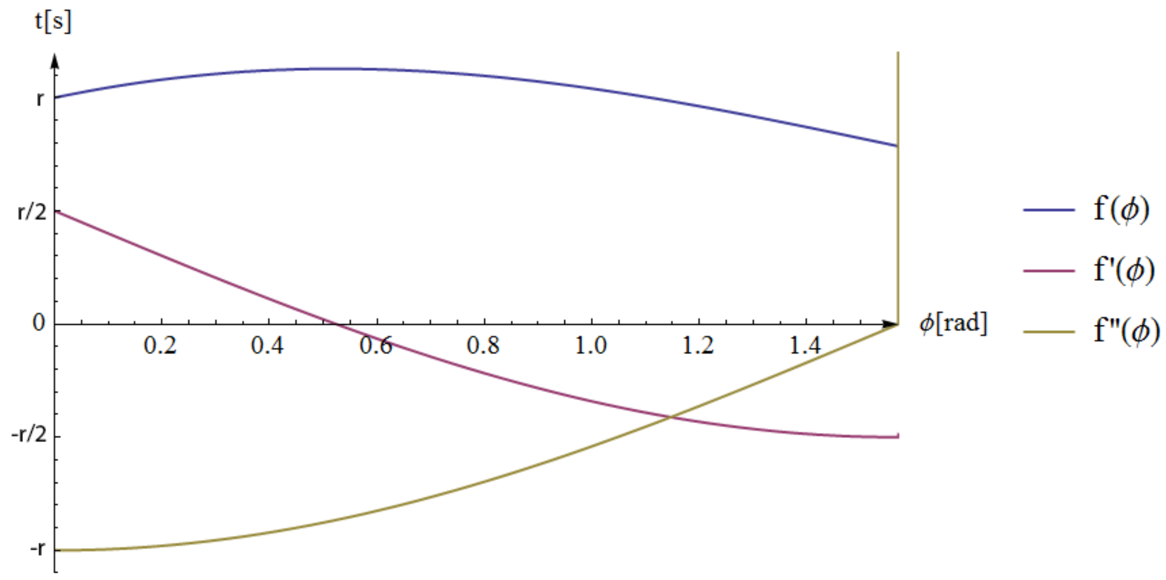
$$dd(\phi, r) = \phi \cdot r$$

$$f(\phi, r) = \frac{2 \cdot dl(\phi, r)}{vl} + \frac{dd(\phi, r)}{vd}$$

Ensuite, nous cherchons le point critique de la fonction :

$$f'(\phi, r) = 0$$

Et obtenons la solution $\phi = \frac{\pi}{6} rad$. Mais en injectant cette solution dans la dérivée seconde de la fonction, nous obtenons valeur de $-\sqrt{3}$ ce qui nous montre qu'il s'agit d'un maximum. La solution se trouve donc dans les bords de la fonction. Donc nous analysons les courbes de la fonction, de sa dérivée première et seconde.

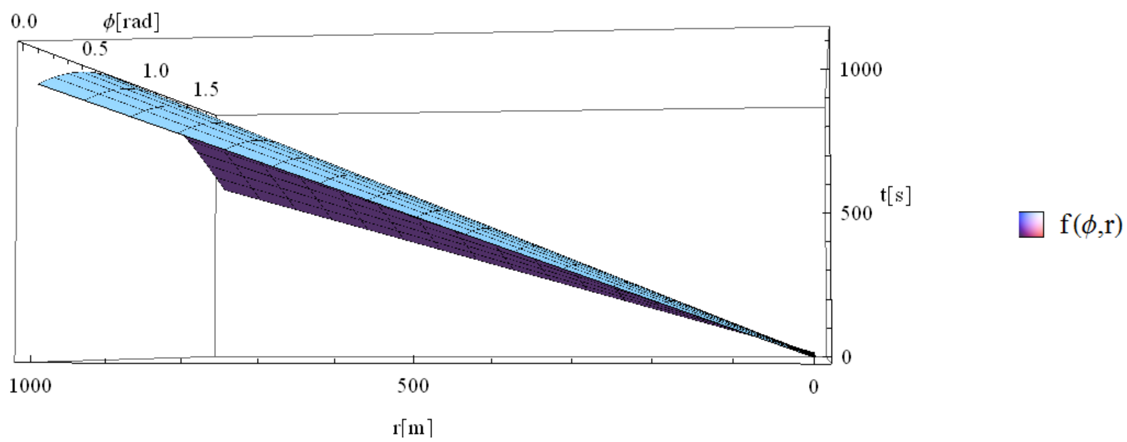


Représentation graphique de f, sa dérivée première et seconde, avec un rayon constant, Figure 2

Selon la *Figure 2*, l'on peut voir que le temps est minimal si $\phi = \frac{\pi}{2} rad$, ce qui correspond à longer le lac tout du long.

Pour répondre à la question, la distance à parcourir pour obtenir un temps minimal est de $\pi \cdot r$ avec un temps de $\frac{\pi \cdot r}{vl}$.

Pour finir, il pourrait être intéressant de faire varier le rayon du lac afin de mieux apercevoir la différence de temps.



Représentation graphique avec un rayon variable, Figure 3

Nous pouvons apercevoir que si nous allons tout droit ($\phi = 0 rad$), nous prenons un temps supérieur comparé à si on ne faisait que de longer le bord ($\phi = \frac{\pi}{2} rad$). On peut aussi voir que la pire des solutions est de combiner les deux manières, comme nous avons vu avec le maximum trouvé à $\phi = \frac{\pi}{6} rad$. Pour finir, on peut conclure qu'indépendamment du rayon, longer le bord du lac avec les vitesses données sera toujours optimale aux autres solutions.