Rapport

Titre	Laboratoire 3 : Systèmes linéaires
Professeur	Stéphane Gobron
Étudiants	Diego Antognini, Alexandre Perez, Sébastien Vaucher
Date	23 avril 2013

Contexte

Le but de ce laboratoire est d'implémenter un algorithme permettant de résoudre des systèmes linéaires. Pour cela, plusieurs méthodes existent, comme par exemple la méthode de *Cramer* ou la méthode de *Gauss*. L'algorithme à implémenter devra être l'une de ces deux méthodes.

Choix

Nous avons effectué une comparaison des deux méthodes présentées. Dans *Cramer*, il faut calculer $n+1$ déterminants et la complexité de celui-ci peut varier selon la méthode utilisée, mais elle est soit $O(n!)$ ou $O(n^3)$ [1]. Les méthodes de calculs sont donc relativement lourdes. Le deuxième désavantage est que l'algorithme présente des instabilités numériques. Tandis que pour la méthode de *Gauss*, la complexité est de $O(n^3)$, les opérations nettement moins lourdes et la stabilité numérique est possible. Nous avons tout de même implémenté le calcul du déterminant en utilisant la décomposition LU.

L'algorithme de *Gauss* proposé dans le cours utilise la méthode dite « naïve ». Le problème de celle-ci est qu'il peut y avoir des divisions par zéros et une instabilité numérique potentielle. Fort heureusement, des méthodes existent pour combler ces 2 problèmes[2] :

- Méthode du pivot complet, complexité $O(n^3)$;
- Méthode du pivot partiel ou sa variante du pivot partiel échelonné[3], complexité $O(n^2)$.

Il est généralement conseillé d'utiliser une des méthodes du pivot partiel, car elles sont, dans la plupart des cas, suffisantes pour obtenir une stabilité numérique. Nous avons opté pour la méthode du pivot partiel, car la variante échelonnée s'utilise dans des cas plus précis. Pour certains systèmes et algorithmes, la méthode du pivot complet est mieux adaptée afin d'obtenir une précision adéquate.

Résultats

Après avoir implémenté notre algorithme, nous l'avons utilisé dans plusieurs systèmes linéaires dont certains piégeurs pour la méthode de *Gauss*, auquel cas une méthode de pivot devient obligatoire.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -11 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Division par zéro

$$\begin{pmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 64 & 8 & 1 \\ 144 & 12 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 106.8 \\ 177.2 \\ 279.2 \end{pmatrix}$$

Instabilité numérique

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 0 & 5 & 9 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 1.2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Système linéairement dépendant

Conclusion

Nous avons pu ressentir les différences entre la méthode naïve et celle du pivot, notamment sur la division par zéro et l'instabilité numérique, comme les exemples cités précédemment. Les solutions trouvées de divers systèmes linéaires correspondent à celles calculées par le logiciel *Mathematica*. Cela prouve que l'algorithme fonctionne et est numériquement stable.

---

[1] On ne prendra pas en compte les algorithmes en-dessous de $O(n^3)$. Pour plus d'informations, se référer à la page http://en.wikipedia.org/wiki/Coppersmith%E2%80%93Winograd_algorithm

[2] Pour plus d'informations sur ces méthodes, se référer au site http://en.wikipedia.org/wiki/Pivot_element

[3] Le mot original en anglais est le "*scaled partial pivoting*"

Référence

1. Livre “*Accuracy and Stability of Numerical Algorithms*”, de Nicholas J. Higham, aperçu disponible sur books.google.ch.
2. Cours de méthode numérique de “*University of South Florida*”, disponible sur http://mathforcollege.com/nm/topics/gaussian_elimination.html
3. Cours de méthode numérique de “*Tennessee Technological University*”, disponible sur http://www.cae.tntech.edu/Members/renfro/me2000/lectures/2004-09-28_handouts.pdf/view
4. Explication de la méthode en décomposition LU en détails, disponible sur http://rosettacode.org/wiki/LU_decomposition