



دانشگاه صنعتی شریف  
دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد  
گرایش مهندسی نرم‌افزار

عنوان:

# الگوریتم‌های تقریبی برای خوشه‌بندی نقاط در مدل جویبار داده

نگارش:

بهنام حاتمی ورزنه

استاد راهنما:

حمید ضرابی‌زاده

شهریور ۱۳۹۴



به نام خدا  
دانشگاه صنعتی شریف  
دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

## پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد

عنوان: الگوریتم‌های تقریبی برای خوشه‌بندی نقاط در مدل جویبار داده  
نگارش: بهنام حاتمی ورزنه

## کمیته‌ی ممتحنین

استاد راهنما: حمید ضرابی‌زاده  
امضاء:

استاد مشاور: حمید بیگی  
امضاء:

استاد مدعو: استاد ممتحن  
امضاء:

تاریخ:

## چکیده

این قسمت باید تکمیل گردد.

کلیدواژه‌ها: خوشه‌بندی،  $k$ -مرکز، جویبار داده، الگوریتم تقریبی

# فهرست مطالب

۱۰	۱ مقدمه
۱۱	۱-۱ تعریف مسئله
۱۴	۲-۱ اهمیت موضوع
۱۵	۳-۱ ادبیات موضوع
۱۵	۴-۱ اهداف تحقیق
۱۶	۵-۱ ساختار پایان نامه
۱۸	۲ مفاهیم اولیه
۱۸	۱-۲ مسائل ان پی- سخت
۲۰	۱-۲-۱ پوشش رأسی
۲۱	۲-۲ الگوریتم های تقریبی
۲۳	۲-۲-۱ میزان تقریب پذیری مسائل
۲۳	۳-۲ الگوریتم های جویبار داده
۲۴	۲-۳-۱ مقدمه
۲۵	۲-۳-۲ گونه های مطرح
۲۵	۳-۳-۲ تحلیل الگوریتم های جویبار داده
۲۶	۲-۳-۴ مجموعه هسته

۲۹	۳ کارهای پیشین
۲۹	۳-۱ $k$ -مرکز در حالت ایستا . . . . .
۳۳	۳-۲ $k$ -مرکز در حالت جویبار داده . . . . .
۴۰	۳-۳ $k$ -مرکز با داده‌های پرت . . . . .
۴۶	۴ نتایج جدید
۴۷	۴-۱ نمادگذاری‌ها و تعاریف اولیه . . . . .
۴۸	۴-۲ مسئله‌ی ۱-مرکز در حالت جویبار داده . . . . .
۴۹	۴-۲-۱ مسئله‌ی ۱-مرکز با داده‌های پرت در حالت جویبار داده . . . . .
۵۷	۴-۲-۲ مسئله‌ی ۱-مرکز پوشاننده در حالت جویبار داده . . . . .
	۴-۲-۳ مسئله‌ی ۱-مرکز با داده‌های پرت در حالت جویبار داده با تعداد داده‌های
۶۲	پرت ثابت . . . . .
۶۳	۴-۳ مسئله‌ی ۲-مرکز با داده‌های پرت در حالت جویبار داده . . . . .
۶۴	۴-۳-۱ حالت $\delta^* \leq \alpha r^*$ . . . . .
۶۹	۴-۳-۲ حالت $\delta^* > \alpha r^*$ . . . . .
۸۴	۵ نتیجه‌گیری
۸۵	آ مطالب تکمیلی

# فهرست شکل‌ها

۱-۱	نمونه‌ای از مسئله‌ی ۲- مرکز	۱۲
۲-۱	نمونه‌ای از مسئله‌ی ۲- مرکز با داده‌های پرت	۱۳
۳-۱	نمونه‌ای از مسئله‌ی ۲- مرکز در حالت پیوسته	۱۴
۱-۳	نمونه‌ای از تخصیص نقاط به ازای مراکز آبی رنگ	۳۰
۲-۳	نمونه‌ای از تبدیل یک گراف ورودی مسئله‌ی پوشش رأسی به یک ورودی مسئله‌ی $k$ -مرکز (در گراف سمت چپ، یال‌های سیاه وزن ۱ و یال‌های آبی، وزن ۲ دارند)	۳۰
۳-۳	نمونه‌ای از حل مسئله‌ی ۳- مرکز با الگوریتم گنزالز	۳۲
۴-۳	نمونه‌ای از توری‌بندی الگوریتم ضربابی زاده (نقاط آبی، مراکز به دست آمده از الگوریتم تقریبی است). پس از توری‌بندی کافی است برای هر کدام از خانه‌های شبکه‌بندی، تنها یکی را به عنوان نماینده در نظر بگیریم	۳۴
۵-۳	نمونه‌ای از اجرای الگوریتم ضربابی زاده بر روی چهار نقطه $P_1 \dots P_4$ که به ترتیب اندیس در جویبار داده فرا می‌رسند و دایره‌های $B_1 \dots B_4$ دایره‌هایی که الگوریتم به ترتیب نگه می‌دارد	۳۶
۶-۳	اثبات لم ۲-۳	۳۸
۷-۳	اثبات لم ۳-۳	۴۰
۸-۳	کاهش قابل توجه شعاع مسئله‌ی ۲- مرکز با حذف تنها دو نقطه	۴۱

۴۷	۱-۴ تعریف فاصله‌ی دو توپ دلخواه
۵۱	۲-۴ اثبات قضیه‌ی ۲-۴
۵۲	۳-۴ گسترش توپ $B(c, r')$ در راستای نقطه‌ی $q$
۵۷	۴-۴ نحوه‌ی اجرای الگوریتم ۵
۵۹	۵-۴ اثبات لم ۶-۴
۶۰	۶-۴ اثبات لم ۷-۴
۶۱	۷-۴ نمودار تابع $\frac{1+\sqrt{\alpha^2-1}}{\alpha}$
۶۴	۸-۴ حالت‌های الگوریتم کیم و آهن [۱]
۶۹	۹-۴ اثبات لم ۱۰-۴
۷۰	۱۰-۴ اثبات مشاهده‌ی ۱۲-۴
۷۲	۱۱-۴ اثبات لم ۱۶-۴



# فهرست جدول‌ها

۱-۲ نمونه‌هایی از ضرایب تقریب برای مسائل بهینه‌سازی ..... ۲۳

# فصل ۱

## مقدمه

مسئله‌ی خوشه‌بندی<sup>۱</sup> یکی از مهم‌ترین مسائل داده‌کاوی<sup>۲</sup> به حساب می‌آید. در این مسئله هدف، دسته‌بندی تعدادی جسم به گونه‌ای است که اجسام در یک دسته (خوشه)، نسبت به یکدیگر در برابر دسته‌های دیگر شبیه‌تر باشند (معیارهای متفاوتی برای تشابه تعریف می‌گردد). این مسئله در حوزه‌های مختلفی از علوم کامپیوتر، از جمله داده‌کاوی، جست‌وجوی الگو<sup>۳</sup>، پردازش تصویر<sup>۴</sup>، بازیابی اطلاعات<sup>۵</sup> و بیوانفورماتیک<sup>۶</sup> مورد استفاده قرار می‌گیرد [۲].

مسئله‌ی خوشه‌بندی، به‌خودی‌خود یک مسئله‌ی الگوریتمی به حساب نمی‌آید. راه‌حل‌های الگوریتمی بسیار زیادی برای خوشه‌بندی تعریف شده است. این الگوریتم‌ها را براساس رویکردهای مختلفی که به مسئله دارند، می‌توان در یکی از چهار دسته‌بندی زیر قرار داد:

- خوشه‌بندی‌های سلسه‌مراتبی<sup>۷</sup>

- خوشه‌بندی‌های مرکزگرا<sup>۸</sup>

---

<sup>۱</sup> Clustering

<sup>۲</sup> Data mining

<sup>۳</sup> Pattern recognition

<sup>۴</sup> Image analysis

<sup>۵</sup> Information retrieval

<sup>۶</sup> Bioinformatics

<sup>۷</sup> Hierarchical clustering

<sup>۸</sup> Centroid-based clustering

• خوشه‌بندی‌های مبتنی بر توزیع<sup>۹</sup> نقاط

• خوشه‌بندی‌های مبتنی بر چگالی<sup>۱۰</sup> نقاط

در عمل هیچ کدام از راه‌حل‌های بالا بر دیگری ارجحیت ندارند و باید راه‌حل مد نظر را متناسب با کاربرد مطرح مورد استفاده قرار داد. به طور مثال استفاده از الگوریتم‌های مرکز‌گرا، برای خوشه‌های غیر محدب به خوبی عمل نمی‌کند. یکی از راه‌حل‌های شناخته شده برای مسئله‌ی خوشه‌بندی، الگوریتم  $k$ -مرکز است. در این الگوریتم هدف، پیدا کردن  $k$  نقطه به عنوان مرکز دسته‌ها است به طوری که شعاع دسته‌ها تا حد ممکن کمینه شود. در نظریه‌ی گراف، مسئله‌ی  $k$ -مرکز متریک<sup>۱۱</sup> یا مسئله‌ی استقرار تجهیزات متریک<sup>۱۲</sup> یک مسئله‌ی بهینه‌سازی ترکیبیاتی<sup>۱۳</sup> است. فرض کنید که  $n$  شهر و فاصله‌ی دویه‌دوی آن‌ها، داده شده است. می‌خواهیم  $k$  انبار در شهرهای مختلف بسازیم به طوری که بیش‌ترین فاصله‌ی هر شهری از نزدیک‌ترین انبار به خود، کمینه گردد. در حالت نظریه‌ی گراف آن، این بدان معناست که مجموعه‌ای شامل  $k$  رأس انتخاب کنیم به طوری که بیش‌ترین فاصله‌ی هر نقطه از نزدیک‌ترین نقطه‌اش داخل مجموعه‌ی  $k$  عضوی کمینه گردد. توجه نمایید که فاصله‌ی بین رئوس باید در فضای متریک<sup>۱۴</sup> باشند و یا به زبان دیگر، یک گراف کامل داشته باشیم که فاصله‌ها در آن در رابطه‌ی مثلثی<sup>۱۵</sup> صدق می‌کنند. مثالی از مسئله‌ی ۲-مرکز را در شکل ۱-۱ نشان داده شده است.

در این پژوهش، مسئله‌ی  $k$ -مرکز با متریک‌های خاص و برای  $k$ های کوچک مورد بررسی قرار گرفته است و از جنبه‌های متفاوتی بهبود یافته است. در زیر فصل بعدی، تعریف رسمی<sup>۱۶</sup> از مسائلی که در این پایان‌نامه مورد بررسی قرار می‌گیرند را تعریف کرده و در مورد هر کدام توضیح مختصری می‌دهیم.

## ۱-۱ تعریف مسئله

تعریف دقیق‌تر مسئله‌ی  $k$ -مرکز در زیر آمده است:

<sup>۹</sup>Distribution-based

<sup>۱۰</sup>Density-based

<sup>۱۱</sup>Metric

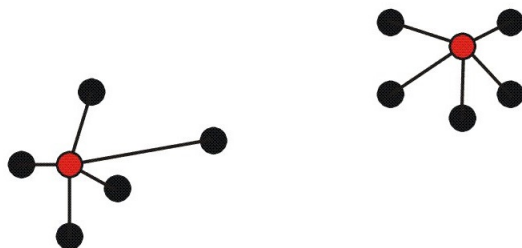
<sup>۱۲</sup>Metric facility location

<sup>۱۳</sup>Combinatorial optimization

<sup>۱۴</sup>Metric space

<sup>۱۵</sup>Triangle equation

<sup>۱۶</sup>Formal



شکل ۱-۱: نمونه‌ای از مسئله‌ی ۲-مرکز

مسئله‌ی ۱-۱ ( $k$ -مرکز) یک گراف کامل بدون جهت  $G = (V, E)$  با فاصله‌ی  $d$ ، که از نامساوی مثلی پیروی می‌کند داده شده است. زیرمجموعه‌ی  $S \subseteq V$  با اندازه‌ی  $k$  را به گونه‌ای انتخاب کنید به طوری که عبارت زیر را کمینه کند:

$$\max_{v \in V} \{ \min_{s \in S} d(v, s) \}$$

گونه‌های مختلفی از مسئله‌ی  $k$ -مرکز با محدودیت‌های متفاوتی به وسیله‌ی پژوهشگران، مورد مطالعه قرار گرفته است. از جمله‌ی این گونه‌ها، می‌توان به حالتی که در بین داده‌های ورودی، داده‌های پرت وجود دارد، می‌توان اشاره کرد. در واقع در این مسئله، قبل از خوشه‌بندی می‌توانیم تعدادی از نقاط ورودی را حذف نماییم و سپس به خوشه‌بندی نقاط پردازیم. سختی این مسئله از آنجاست که نه تنها باید مسئله‌ی خوشه‌بندی را حل نمود، بلکه در ابتدا باید تصمیم گرفت که کدام یک از داده‌ها را به عنوان داده‌ی پرت در نظر گرفت که بهترین جواب در زمان خوشه‌بندی به دست آید. در واقع اگر تعداد نقاط پرتی که مجاز به حذف است، برابر صفر باشد، مسئله به مسئله‌ی  $k$ -مرکز تبدیل می‌شود. نمونه‌ای از مسئله‌ی ۲-مرکز با ۷ داده‌ی پرت را در شکل ۲-۱ می‌توانید ببینید. تعریف دقیق‌تر این مسئله در زیر آمده است:

مسئله‌ی ۲-۱ ( $k$ -مرکز با داده‌های پرت) یک گراف کامل بدون جهت  $G = (V, E)$  با فاصله‌ی  $d$ ، که از نامساوی مثلی پیروی می‌کند داده شده است. زیرمجموعه‌ی  $Z \subseteq V$  با اندازه‌ی  $z$  و  $S \subseteq V - Z$  با اندازه‌ی  $k$  را انتخاب کنید به طوری که عبارت زیر را کمینه کند:

$$\max_{v \in (V-Z)} \{ \min_{s \in S} d(v, s) \}$$



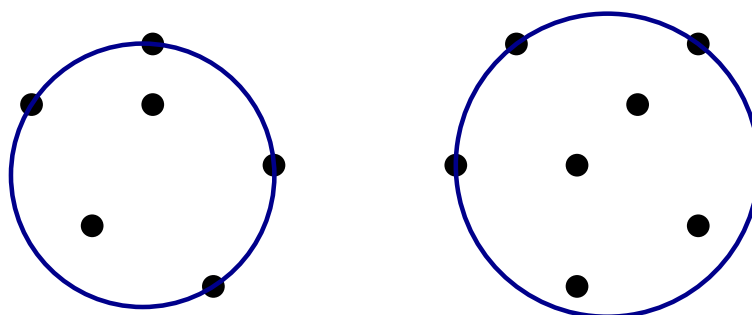
شکل ۱-۲: نمونه‌ای از مسئله‌ی ۲-مرکز با داده‌های پرت

گونه‌ی دیگری از مسئله‌ی  $k$ -مرکز که در سال‌های اخیر مورد توجه قرار گرفته است، حالت جویبار داده‌ی آن است. در این گونه از مسئله‌ی  $k$ -مرکز، در ابتدا تمام نقاط در دسترس نیستند، بلکه به مرور زمان نقاط در دسترس قرار می‌گیرند. محدودیت دومی که وجود دارد، محدودیت شدید حافظه است، به طوری که نمی‌توان تمام نقاط را در حافظه نگه داشت و بعضاً حتی در حافظه‌ی جانبی نیز نمی‌توان ذخیره نمود و به طور معمول باید مرتبه‌ی حافظه‌ای کم‌تر از مرتبه‌ی حافظه‌ی خطی<sup>۱۷</sup> متناسب با تعداد نقاط استفاده نمود. از این به بعد به چنین مرتبه‌ای، مرتبه‌ی زیرخطی می‌گوییم. مدلی که ما در این پژوهش بر روی آن تمرکز داریم مدل جویبار داده تک‌گذره [۳] است. یعنی تنها یک بار می‌توان از ابتدا تا انتهای داده‌ها را بررسی کرد و پس از عبور از یک داده، اگر آن را در حافظه ذخیره نکرده باشیم، دیگر به آن دسترسی نداریم.

یکی از دغدغه‌هایی که در مسائل جویبار داده وجود دارد، عدم امکان دسترسی به تمام نقاط است. در واقع هم این مشکل وجود دارد که به تمام داده‌های قبلی دسترسی نداریم و هم این مشکل وجود دارد که هیچ اطلاعی از داده‌های آتی نداریم. در نتیجه یکی از تبعات این گونه از مسئله‌ی  $k$ -مرکز، امکان انتخاب نقطه‌ای به عنوان مرکز برای یک دسته به طوری که در بین نقاط ورودی نیست. این گونه از مسئله‌ی  $k$ -مرکز، معمولاً تنها برای  $L_p$ -متریک مطرح می‌شود یا حالتی که ما مجموعه‌ای از تمام نقاط فضا به انضمام فاصله‌هایشان را داشته باشیم. زیرا مرکز دسته‌ها ممکن است در هر نقطه از فضا قرار بگیرد و ما نیاز داریم که فاصله‌ی آن را از تمام نقاط بدانیم. نمونه‌ای از مسئله‌ی ۲-مرکز در حالت پیوسته، در شکل ۱-۳ نشان داده شده است. تعریف دقیق گونه‌ی جویبار داده‌ی مسئله‌ی  $k$ -مرکز، در

<sup>۱۷</sup>Sublinear

زیر آمده است:



شکل ۱-۳: نمونه‌ای از مسئله‌ی ۲-مرکز در حالت پیوسته

مسئله‌ی ۱-۳ ( $k$ -مرکز در حالت جویبار داده) مجموعه‌ی  $U$  از نقاط فضای  $d$  بعدی داده شده است. زیرمجموعه  $S \subseteq U$  با اندازه‌ی  $k$  را انتخاب کنید به طوری که عبارت زیر را کمینه کند:

$$\max_{u \in U} \{ \min_{s \in S} L_p(u, s) \}$$

از آنجایی که گونه‌ی جویبار داده و داده پرت مسئله‌ی  $k$ -مرکز به علت داغ شدن مبحث داده‌های بزرگ<sup>۱۸</sup>، به تازگی مورد توجه قرار گرفته است و نتایج به دست آمده قابل بهبود است، در این تحقیق سعی شده است که تمرکز بر روی این گونه‌ی خاص از مسئله باشد. همچنین در این پژوهش سعی می‌شود گونه‌های مسئله را برای انواع متریک‌ها و برای  $k$ های کوچک نیز مورد بررسی قرار داد.

## ۲-۱ اهمیت موضوع

مسئله‌ی  $k$ -مرکز و گونه‌های آن کاربردهای زیادی در داده‌کاوی دارند. این الگوریتم یکی از رایج‌ترین الگوریتم‌های مورد استفاده برای خوشه‌بندی محسوب می‌شود. به علت افزایش حجم داده‌ها و تولید داده‌ها در طول زمان، گونه‌ی جویبار داده‌ی مسئله در سال‌های اخیر مورد توجه قرار گرفته است. از طرفی مسئله‌ی  $k$ -مرکز در بعضی مسائل مانند ارسال نامه از تعدادی مراکز پستی به گیرنده‌ها، نیاز دارد که تمام نامه‌ها را به دست گیرنده‌ها برساند و در نتیجه باید همه‌ی نقاط را پوشش دهد، ولی برای بعضی از مسائل تجاری، نیازی به پوشش تمام نقاط هدف نیست و از لحاظ اقتصادی به صرفه است که نقاط پرت را در نظر نگرفت. به طور مثال، Kmarts در سال ۲۰۱۰ اعلام کرده است که به ۸۸ درصد جمعیت

<sup>۱۸</sup> Big data

آمریکا با فاصله‌ای حداکثر ۶ مایل، می‌تواند سرویس دهد. در صورتی که اگر این شرکت قصد داشت تمام جمعیت آمریکا را پوشش دهد، نیاز داشت تعداد شعب یا شعاع پوشش خود را به میزان قابل توجهی افزایش دهد که از لحاظ اقتصادی به صرفه نیست [۴]. علاوه بر دو گونه‌ی مطرح شده در این قسمت، گونه‌های دیگر از مسئله‌ی  $k$ -مرکز در مرجع [۴] آمده است.

## ۳-۱ ادبیات موضوع

همان‌طور که ذکر شد مسئله‌ی  $k$ -مرکز در حالت داده‌های پرت و جویبار داده، گونه‌های تعمیم‌یافته از مسئله‌ی  $k$ -مرکز هستند و در حالت‌های خاص به مسئله‌ی  $k$ -مرکز کاهش پیدا می‌کنند. مسئله‌ی  $k$ -مرکز در حوزه‌ی مسائل ان‌پی-سخت<sup>۱۹</sup> قرار می‌گیرد و با فرض  $P \neq NP$  الگوریتم دقیق با زمان چندجمله‌ای برای آن وجود ندارد. بنابراین برای حل کارای<sup>۲۰</sup> این مسائل از الگوریتم‌های تقریبی<sup>۲۱</sup> استفاده می‌شود.

برای مسئله‌ی  $k$ -مرکز، دو الگوریتم تقریبی معروف وجود دارد. در الگوریتم اول، که به روش حریصانه<sup>۲۲</sup> عمل می‌کند، در هر مرحله بهترین مرکز ممکن را انتخاب می‌کند به طوری تا حد ممکن از مراکز قبلی دور باشد. این الگوریتم، الگوریتم تقریبی با ضریب تقریب ۲ ارائه می‌دهد. در الگوریتم دوم، با استفاده از مجموعه‌ی غالب کمینه<sup>۲۳</sup>، الگوریتمی با ضریب تقریب ۲ ارائه می‌گردد. همچنین ثابت شده است، که بهتر از این ضریب تقریب، الگوریتمی نمی‌توان ارائه داد مگر آن‌که  $P = NP$  باشد.

## ۴-۱ اهداف تحقیق

در این پایان‌نامه مسئله‌ی  $k$ -مرکز در حالت جویبار داده با داده‌های پرت در حالت‌های مختلف مورد بررسی قرار می‌گیرد و سعی خواهد شد که نتایج قبلی در این مسائل را از جنبه‌های مختلفی مورد بهبود دهد.

---

<sup>۱۹</sup>NP-hard

<sup>۲۰</sup>Efficient

<sup>۲۱</sup>Approximation Algorithm

<sup>۲۲</sup>Greedy

<sup>۲۳</sup>Dominating set

اولین مسئله‌ای که مورد بررسی قرار گرفته است، ارائه الگوریتمی تقریبی، برای مسئله‌ی ۱-مرکز در حالت جویبار داده است به طوری که، نه تنها تمام نقاط ورودی را می‌پوشاند بلکه تضمین می‌کند که دایره‌ی بهینه‌ی جواب ۱-مرکز برای نقاط ورودی را نیز بپوشاند. در تلاش اول، الگوریتم جدیدی با حافظه و زمان به‌روزرسانی  $O(\frac{d}{\epsilon})$  و با ضریب تقریب  $1/8 + \epsilon$ ، برای این مسئله ارائه گردید. با بررسی‌های بیش‌تر، الگوریتم دیگری با ضریب تقریب  $1/69$ ، با الگوریتمی کاملاً متفاوت، با حافظه‌ی  $O(d)$  برای این مسئله ارائه گردید.

مسئله‌ی دومی که مورد بررسی قرار گرفت، مسئله‌ی ۱-مرکز در حالت جویبار داده با داده‌های پرت است. در ابتدا الگوریتمی ساده با حافظه‌ی  $O(zd)$  و زمان به‌روزرسانی  $O(zd \log(z))$  با ضریب تقریب ۲ برای این مسئله ارائه گردید. در بررسی‌های بعدی، با استفاده از نتایج بدست آمده در قسمت قبل، برای  $z$  های کوچک، الگوریتمی با حافظه‌ی  $O(dz^d)$  با ضریب تقریب  $1/69$  برای این مسئله ارائه شد که ضریب تقریب بهترین الگوریتم موجود را، از  $1/79$  به  $1/69$  کاهش می‌دهد.

مسئله‌ی سومی که مورد بررسی قرار گرفت، مسئله‌ی ۲-مرکز در حالت جویبار داده با داده‌های پرت است. بهترین الگوریتمی که در حال حاضر برای این مسئله وجود دارد، یک الگوریتم با ضریب تقریب  $4 + \epsilon$  است [۵]. ما با ارائه الگوریتمی جدید، الگوریتمی با ضریب تقریب  $1/8 + \epsilon$  برای این مسئله ارائه دادیم که بهبودی قابل توجه محسوب می‌شود.

## ۵-۱ ساختار پایان‌نامه

این پایان‌نامه در پنج فصل به شرح زیر ارائه خواهد شد. در فصل دوم به بیان مفاهیم و تعاریف مرتبط با موضوعات مورد بررسی در بخش‌های دیگر خواهیم پرداخت. سعی شده، تا حد امکان با زبان ساده و ارجاع‌های مناسب، پایه‌ی لازم را برای فصول بعدی در این فصل فراهم آوریم. فصل سوم این پایان‌نامه شامل مطالعه و بررسی کارهای پیشین انجام شده مرتبط با موضوع این پایان‌نامه خواهد بود. این فصل در سه بخش تنظیم گردیده است. در بخش اول، مسئله‌ی  $k$ -مرکز در حالت ایستا مورد بررسی قرار می‌گیرد. در بخش دوم، حالت جویبار داده‌ی مسئله و مجموعه هسته‌های<sup>۲۴</sup> مطرح برای این مسئله مورد بررسی قرار می‌گیرد. در نهایت، در بخش سوم، مسئله‌ی  $k$ -مرکز با داده‌های پرت مورد بررسی قرار می‌گیرد.



در فصل چهارم، نتایج جدیدی که در این پایان نامه به دست آمده است، ارائه می شود. این نتایج شامل الگوریتم های جدید برای مسئله ی ۱- مرکز در حالت جویبار داده، مسئله ی ۱- مرکز با داده های پرت در حالت جویبار داده و مسئله ی دو مرکز در حالت جویبار داده با داده های پرت می شود.

در فصل پنجم، به جمع بندی کارهای انجام شده در این پژوهش و ارائه ی پیشنهادهایی برای انجام کارهای آتی و تعمیم هایی که از راه حل ارائه شده وجود دارد، خواهیم پرداخت.

## فصل ۲

# مفاهیم اولیه

در این فصل به تعریف و بیان مفاهیم پایه‌ای مورد استفاده در فصل‌های بعد می‌پردازیم. با توجه به مطالب مورد نیاز در فصل‌های آتی، مطالب این فصل به سه بخش، مسائل ان‌پی-سخت، الگوریتم‌های تقریبی و الگوریتم‌های جویبار داده تقسیم می‌شود.

### ۲-۱ مسائل ان‌پی-سخت

یکی از اولین سوال‌های بنیادی مطرح در علم کامپیوتر، اثبات عدم حل پذیری بعضی از مسائل است. به عنوان نمونه، می‌توان از دهمین مسئله‌ی هیلبرت<sup>۱</sup> در گنگره‌ی ریاضی یاد کرد. هیلبرت این مسئله را این‌گونه بیان کرد: ”فرآیندی طراحی کنید که در تعداد متناهی گام بررسی کند که آیا یک چندجمله‌ای، ریشه‌ی صحیح<sup>۲</sup> دارد یا خیر“. با مدل محاسباتی که به‌وسیله‌ی تورینگ<sup>۳</sup> ارائه شد، این مسئله معادل پیدا کردن الگوریتمی برای این مسئله است که اثبات می‌شود امکان‌پذیر نیست [۶]. برخلاف مثال بالا، عمده‌ی مسائل علوم کامپیوتر از نوع بالا نیستند و برای طیف وسیعی از آن‌ها، الگوریتم‌های پایان‌پذیر وجود دارد. بیشتر تمرکز علوم کامپیوتر هم بر روی چنین مسائلی است.

اگر چه برای اکثر مسائل، الگوریتمی پایان‌پذیر وجود دارد، اما وجود چنین الگوریتمی لزومی بر حل

---

<sup>۱</sup>Hilbert

<sup>۲</sup>Integral root

<sup>۳</sup>Touring

شدن چنین مسائلی نیست. در عمل، علاوه بر وجود الگوریتم، میزان کارآمدی<sup>۴</sup> الگوریتم نیز مطرح می‌گردد. به طور مثال، اگر الگوریتم حل یک مسئله مرتبه‌ی بالا یا نمایی داشته باشد، الگوریتم ارائه شده برای آن مسئله برای ورودی‌های نسبتاً بزرگ قابل اجرا نیست و نمی‌توان از آن‌ها برای حل مسئله استفاده کرد. برای تشخیص و تمیز کارآمدی الگوریتم‌های مختلف و همچنین میزان سختی مسائل در امکان ارائه‌ی الگوریتم‌های کارآمد یا غیرکارآمد، نظریه‌ی پیچیدگی<sup>۵</sup>، دسته‌بندی‌های مختلفی برای سختی مسائل و حل‌پذیری آن‌ها ارائه داده است تا بتوان به‌طور رسمی<sup>۶</sup> در مورد این معیارها صحبت کرد. برای دسته‌بندی مسائل در نظریه‌ی پیچیدگی، ابتدا آن‌ها را به صورت تصمیم‌پذیر بیان می‌کنند.

**مسئله‌ی ۱-۲ (مسائل تصمیم‌گیری)<sup>۷</sup>** به دسته‌ای از مسائل گفته می‌شود که پاسخ آن‌ها تنها بله یا خیر است.

به عنوان مثال، اگر بخواهیم مسئله‌ی ۱- مرکز در فضای  $\mathbb{R}^d$  را به صورت تصمیم‌پذیر بیان کنیم، به مسئله‌ی زیر می‌رسیم:

**مسئله‌ی ۲-۲ (نسخه‌ی تصمیم‌پذیر ۱- مرکز)** مجموعه‌ی نقاط در فضا  $\mathbb{R}^d$  و شعاع  $r$  داده شده است، آیا دایره‌ای به شعاع  $r$  وجود دارد که تمام نقاط را بپوشاند؟

در نظریه‌ی پیچیدگی، می‌توان گفت عمده‌ترین دسته‌بندی موجود، دسته‌بندی مسائل تصمیم‌گیری به مسائل پی (P) و ان پی (NP) است. رده‌ی مسائل P، شامل تمامی مسائل تصمیم‌گیری است که راه‌حل چندجمله‌ای برای آن‌ها وجود دارد. از طرفی رده‌ی مسائل NP، شامل تمامی مسائل تصمیم‌گیری است که در زمان چندجمله‌ای قابل صحت‌سنجی<sup>۸</sup> اند. تعریف صحت‌سنجی در نظریه پیچیدگی، یعنی اگر جواب مسئله‌ی تصمیم‌گیری بله باشد، می‌توان اطلاعات اضافی با طول چندجمله‌ای ارائه داد، که در زمان چندجمله‌ای از روی آن، می‌توان جواب بله الگوریتم را تصدیق نمود. به طور مثال، برای مسئله‌ی ۱- مرکز، کافی است به عنوان تصدیق جواب بله، مرکز دایره‌ی پوشاننده، ارائه داده شود. در این صورت، می‌توان با مرتبه‌ی خطی بررسی نمود که تمام نقاط داخل این دایره قرار می‌گیرند یا نه. برای مطالعه‌ی بیش‌تر و تعاریف دقیق‌تر می‌توان به مرجع [۶] مراجعه نمود.

---

Efficiency<sup>۴</sup>

Complexity theory<sup>۵</sup>

Formal<sup>۶</sup>

Decision problems<sup>۷</sup>

Verifiable<sup>۸</sup>

همان‌طور که می‌دانید درستی یا عدم درستی  $P \subset NP$  از جمله معروف‌ترین مسائل حل نشده<sup>۹</sup> در نظریه پیچیدگی است. حدس بسیار قوی وجود دارد که  $P \neq NP$  و بسیاری از مسائل، با این فرض حل می‌شوند و در صورتی که زمانی، خلاف این فرض اثبات گردد، آنگاه قسمت عمده‌ای از علوم کامپیوتر زیر سوال می‌رود.

در نظریه پیچیدگی، برای دسته‌بندی مسائل، یکی از روش‌های دسته‌بندی کاهش چندجمله‌ای<sup>۱۰</sup> مسائل به یک‌دیگر است.

**تعریف ۱-۲** می‌گوییم مسئله‌ای  $A$  در زمان چندجمله‌ای به مسئله‌ی  $B$  کاهش می‌یابد، اگر وجود داشته باشد الگوریتم چندجمله‌ای  $C$  که به ازای هر ورودی  $\alpha$  برای مسئله‌ی  $A$ ، یک ورودی  $\beta$  در زمان چندجمله‌ای برای مسئله‌ی  $B$  بسازد، به طوری که  $A$ ،  $\alpha$  را می‌پذیرد اگر و تنها اگر  $B$ ،  $\beta$  را بپذیرد. در این جا منظور از پذیرفتن جواب بله به ورودی است.

از این به بعد برای سادگی به جای کاهش چندجمله‌ای از واژه‌ی کاهش استفاده می‌کنیم. در پی جست‌جوهای که برای برابری دسته‌ی پی و ان‌پی صورت گرفت، مجموعه‌ای از مسائل که عمدتاً داخل ان‌پی هستند استخراج گردید که اگر ثابت شود یکی از آن‌ها متعلق به پی است، آنگاه تمام مسائل دسته‌ی ان‌پی متعلق به پی خواهند بود و در نتیجه  $P = NP$  خواهد بود. به این مجموعه مسائل ان‌پی-سخت می‌گویند. در واقع مسائل این دسته، مسائلی هستند که تمام مسائل داخل دسته‌ی ان‌پی، به آن‌ها کاهش می‌یابند.

کوک و لوین در قضیه‌ای به نام **قضیه‌ی کوک-لوین** ثابت کردند مسئله‌ی صدق‌پذیری<sup>۱۱</sup> یک مسئله‌ی ان‌پی-سخت است [۶]. با پایه قرار دادن این اثبات و استفاده از تکنیک کاهش، اثبات ان‌پی-سخت بودن سایر مسائل، بسیار ساده‌تر گردید. در ادامه مسئله‌ی پوشش رأسی<sup>۱۲</sup> را تعریف می‌کنیم.

## ۲-۱-۱ پوشش رأسی

در این پایان‌نامه، از این مسئله به عنوان مسئله‌ی پایه برای اثبات ان‌پی-سخت بودن مسئله‌ی  $k$ -مرکز استفاده می‌شود. تعریف این مسئله مطابق زیر است:

<sup>۹</sup>Open problem

<sup>۱۰</sup>Polynomial Reduction

<sup>۱۱</sup>Satisfiability problem

<sup>۱۲</sup>Vertex Coverage

**مسئله ۲-۳** (پوشش رأسی) گراف بدون جهت  $G(V, E)$  داده شده است. هدف مسئله پیدا کردن مجموعه‌ای  $S \subset V$  با کمترین تعداد اعضا است به طوری که هر رأس  $v \in V$  در یکی از شرایط زیر صدق کند:

$$\bullet v \in S$$

$$\bullet \text{ وجود دارد رأسی } u \in S \text{ به طوری } (v, u) \in E$$

به عبارت ساده‌تر هر رأسی یا خودش یا یکی از همسایگانش داخل مجموعه‌ای  $S$  قرار دارد.

نسخه‌ی تصمیم‌گیری این مسئله به این گونه تعریف می‌شود که آیا گراف داده‌شده دارای پوشش رأسی با اندازه‌ی  $k$  است یا نه.

**قضیه ۲-۱** مسئله‌ی پوشش رأسی، یک مسئله‌ی ان‌پی-سخت است.

اثبات. برای مشاهده‌ی اثبات ان‌پی-سخت بودن مسئله‌ی پوشش رأسی، نیاز به زنجیره‌ای از مسائل که از مسئله‌ی صدق‌پذیری شروع می‌شود است، به طوری هر عضو از این زنجیره، به عضو بعدی در زمان چندجمله‌ای کاهش می‌یابد و در نهایت نتیجه می‌شود که مسئله‌ی صدق‌پذیری در زمان چندجمله‌ای به مسئله‌ی پوشش رأسی کاهش می‌یابد و در نتیجه چون مسئله‌ی صدق‌پذیری یک مسئله‌ی ان‌پی-سخت است، بنابراین مسئله‌ی پوشش رأسی نیز ان‌پی-سخت خواهد بود. برای مطالعه‌ی روند اثبات به مرجع [۶] مراجعه کنید.

□

## ۲-۲ الگوریتم‌های تقریبی

تا این جا با رده‌بندی مسائل به دو دسته‌ی پی و ان‌پی آشنا شدیم. نه تنها مسائل ان‌پی، بلکه بعضی از مسائل پی نیز دارای الگوریتم کارآمدی نیستند. در عمل، یک الگوریتم چندجمله‌ای با مرتبه‌ی بیش از ۳، یک الگوریتم ناکارآمد محسوب می‌شود. به طور مثال هنوز الگوریتم کارآمدی برای فهمیدن این‌که یک عدد اول است یا نه پیدا نشده است، با اینکه الگوریتم ارائه شده یک الگوریتم چندجمله‌ای است.

عمده‌ی مسائل کاربردی مطرح در دنیای واقع، یا متعلق به دسته‌ی ان‌پی هستند و در نتیجه راه‌حل چندجمله‌ای ندارند، یا اگر راه‌حل چند جمله‌ای داشته باشند، مرتبه‌ی چندجمله‌ای بالاست و در نتیجه راه‌حل کارآمدی محسوب نمی‌گردد. یکی از رویکردهای رایج در برابر چنین مسائلی، صرف نظر کردن از دقت راه‌حل‌هاست. به طور مثال راه‌حل‌های مکاشفه‌ای<sup>۱۳</sup> گوناگونی برای مسائل مختلف به خصوص مسائل ان‌پی بیان شده است. این راه‌حل‌ها بدون این‌که تضمین کنند راه‌حل خوبی ارائه می‌دهند یا حتی جوابشان به جواب بهینه نزدیک است، اما با معیارهایی سعی در بهینه عمل کردن دارند و تا حد ممکن سعی در ارائه‌ی جواب بهینه یا نزدیک بهینه دارند. اما در عمل، تنها برای دسته‌ای از کاربردها پاسخ قابل قبولی ارائه می‌دهند.

مشکل عمده‌ی راه‌حل‌های مکاشفه‌ای، عدم امکان استفاده از آن‌ها برای تمام کاربردها است. بنابراین در رویکرد دوم که اخیراً نیز مطرح شده است و عمر کمی دارد، سعی در ارائه‌ی الگوریتم‌های مکاشفه‌ای شده است که تضمین می‌کنند اختلاف زیادی با الگوریتمی که جواب بهینه می‌دهد، نداشته باشند. در واقع این الگوریتم‌ها همواره و در هر شرایطی، تقریبی از جواب بهینه را ارائه می‌دهند. به چنین الگوریتم‌هایی، **الگوریتم‌های تقریبی**<sup>۱۴</sup> می‌گویند. علت اصلی این نام‌گذاری، تقریب زدن جواب الگوریتم بهینه است. ضریب تقریب یک الگوریتم تقریبی، به حداکثر نسبت جواب الگوریتم تقریبی به جواب بهینه گفته می‌شود.

الگوریتم‌های تقریبی تنها به علت محدودیت کارایی الگوریتم‌هایی که جواب بهینه می‌دهند، مورد استفاده قرار نمی‌گیرند. هر نوع محدودیتی ممکن است، استفاده از الگوریتم تقریبی را نسبت به الگوریتمی که جواب بهینه می‌دهد، مقرون به صرفه کند. به طور مثال از جمله عوامل دیگری که ممکن است باعث این انتخاب شود، کاهش میزان حافظه‌ی مصرفی باشد. برای طیف وسیعی از مسائل، کمبود حافظه، باعث می‌شود الگوریتم‌هایی با حافظه‌ی مصرفی کمتر طراحی شود که به دقت الگوریتم‌های بهینه عمل نمی‌کند اما می‌تواند با مصرف کمتر به تقریبی از جواب بهینه دست یابد. معمولاً چنین الگوریتم‌هایی حافظه‌ی مصرفی از مرتبه‌ی زیرخطی<sup>۱۵</sup> دارند و به همین دلیل برای داده‌های حجیم بسیار کاربرد دارند.

<sup>۱۳</sup> Heuristic<sup>۱۴</sup> Approximation Algorithm<sup>۱۵</sup> Sublinear

مسئله	کران پایین تقریب پذیری
پوشش رأسی	$1,3606 [7]$
$k$ - مرکز	$2 [8]$
$k$ - مرکز در فضای اقلیدسی	$1,822 [9]$
۱ - مرکز در حالت جویبار داده	$\frac{1+\sqrt{2}}{4} [10]$
$k$ - مرکز با نقاط پرت و نقاط اجباری	$3 [4]$

جدول ۲-۱: نمونه‌هایی از ضرایب تقریب برای مسائل بهینه‌سازی

## ۲-۲-۱ میزان تقریب پذیری مسائل

همان‌طور که تا این‌جا دیدیم، یکی از راه‌کارهایی که برای کارآمد کردن راه‌حل ارائه شده برای یک مسئله وجود دارد، استفاده از الگوریتم‌های تقریبی برای حل آن مسئله است. یکی از عمده‌ترین دغدغه‌های مطرح در الگوریتم‌های تقریبی کاهش ضریب تقریب است. حتی در بعضی از موارد حتی امکان ارائه‌ی الگوریتم تقریبی با ضریبی ثابت نیز وجود ندارد. به‌طور مثال، همان‌طور که در فصل کارهای پیشین بیان خواهد شد، الگوریتم تقریبی با ضریب تقریب کم‌تر از ۲، برای مسئله‌ی  $k$  - مرکز وجود ندارد مگر اینکه  $P = NP$  باشد. برای مسائل مختلف، معمولاً می‌توان کران پایینی برای میزان تقریب پذیری آن‌ها ارائه داد. در واقع برای مسائل ان‌پی، علاوه بر این الگوریتم کارآمدی وجود ندارد، بعضاً الگوریتم تقریبی برای حل آن با ضریبی تقریب کم و نزدیک به یک نیز وجود ندارد. در جدول ۲-۱ از میزان تقریبی مسائل مختلفی که در این پایان‌نامه مورد استفاده قرار می‌گیرد ببینید.

## ۲-۳ الگوریتم‌های جویبار داده

در علوم کامپیوتر، الگوریتم جویبار داده به الگوریتم‌هایی گفته می‌شود که برای پردازش جویبارهای داده طراحی شده‌اند به‌طوری که ورودی آن، به صورت دنباله‌ای از داده‌ها داده می‌شود و تنها می‌توان تعدادی محدود بار، از روی دنباله گذر کرد (معمولاً تنها یک بار). الگوریتم‌های جویبار داده معمولاً محدودیت شدیدی در حافظه دارند (نسبت به اندازه‌ی ورودی) و به علت تعداد زیاد داده‌ها، محدودیت زمانی پردازش برای هر داده نیز مطرح است.

چنین محدودیت‌هایی معمولاً باعث می‌شود که الگوریتم جویبار داده تنها بتواند یک جواب تقریبی از جواب بهینه را با استفاده از اطلاعات مختصری که در حافظه نگه می‌دارد را ارائه دهد.

## ۲-۳-۱ مقدمه

در سال‌های اخیر، پیشرفت‌های حوزه‌ی تکنولوژی، امکان جمع‌آوری داده‌ها را به صورت پوسته ممکن ساخته است. به طور مثال می‌توان از تراکنش‌های بانکی، استفاده از تلفن همراه یا مرورگر وب خود را در نظر بگیرید. در هر تعاملی که با این سیستم‌ها انجام می‌دهید، میزان زیادی داده تولید شده و ذخیره می‌گردد. در اکثر مواقع می‌توان این حجم عظیم داده را مورد پردازش قرار داد و اطلاعات بسیار مفیدی از آن، استخراج نمود. زمانی که حجم داده بسیار زیاد باشد، معمولاً چالش‌های محاسباتی و الگوریتمی برای الگوریتم‌ها به وجود می‌آورد. از جمله‌ی آن‌ها می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

- با افزایش حجم داده، امکان پردازش داده‌ها به صورت کارآمد با چندبار عبور کردن از جویبار داده وجود ندارد. یکی از مهم‌ترین موانع در طراحی الگوریتم‌های کارآمد برای مدل جویبار داده این است که الگوریتم‌ها مجبور هستند هر داده را حداکثر یک بار مورد پردازش قرار دهند. بنابراین الگوریتم‌های مدل جویبار داده، معمولاً تک‌گذره‌اند.
- در اکثر الگوریتم‌های جویبار داده، از یک واحد برای پردازش داده‌ها به صورت محلی استفاده می‌شود. علت اصلی وجود چنین واحدی، نیاز این الگوریتم‌ها به تشخیص تغییرات در داده‌های ورودی است. این عملکرد الگوریتم‌های جویبار داده را می‌توان نوعی استفاده از اصل محل‌گرایی<sup>۱۶</sup> محسوب نمود. اما مشکل عمده‌ی این نوع رویکرد اجتناب ناپذیر، در عمده‌ی موارد، عدم امکان راه‌حلی مناسب برای مسئله است. در ساخت الگوریتم‌های جویبار داده، باید دقت و تمرکز عمده‌ای را صرف تشخیص نحوه‌ی تغییر داده‌های ورودی نمود.
- یکی از مهم‌ترین مشخصه‌های جویبار داده‌ها، ماهیت عدم متمرکز بودن داده‌ها است. از طرفی یک پردازنده به تنهایی دارای محدودیت بسیار زیادی از نظر قدرت پردازشی و حافظه است. بنابراین معمولاً الگوریتم‌های جویبار داده، به گونه‌ای طراحی می‌شوند که قابل توزیع‌پذیری بوده و توانایی اجرا شدن به صورت چندروندی<sup>۱۷</sup> را دارا باشند.

<sup>۱۶</sup> Locality

<sup>۱۷</sup> Multi Thread



## ۲-۳-۲ گونه‌های مطرح

در مدل جویبار داده، بعضی یا همه‌ی نقاط ورودی که باید پردازش گردند برای دسترسی تصادفی<sup>۱۸</sup> از حافظه‌ی اصلی یا حافظه‌ی جانبی در دسترس نیستند، بلکه به مرور زمان، به صورت جویبار یا جویبارهایی از داده در اختیار الگوریتم قرار می‌گیرند [۳].

هر جویبار را می‌توان به عنوان دنباله‌ای مرتب از نقاط (یا به‌روزرسانی‌ها<sup>۱۹</sup>) در نظر گرفت به طوری که به ترتیب دنباله قابل دسترسی هستند و هر کدام را تنها به تعدادی محدود بار (معمولاً یک بار) می‌توان خواند [۳].

مسائل زیادی در این مدل مورد بررسی قرار گرفته‌اند که از جمله مهم‌ترین آن‌ها می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

- محاسبه‌ی آماری مربوط به توزیع داده‌های یک جویبار داده که به قدری بزرگ هستند قابل ذخیره شدن نیست.
- مسائل مربوط به گراف‌ها، به طوری که ماتریس مجاورت گراف به ترتیب دلخواهی به صورت جویبار داده به الگوریتم داده می‌شود.
- مسائل مربوط به دنباله‌ها و استخراج اطلاعات از دنباله‌ها که وابستگی شدیدی به ترتیب اعضای دنباله دارند، مانند پیدا کردن طولانی‌ترین زیردنباله با اعضای صعودی یا پیدا کردن تعداد نابه‌جایی‌های<sup>۲۰</sup> داخل دنباله. [۳]

## ۲-۳-۳ تحلیل الگوریتم‌های جویبار داده

کارایی یک الگوریتم جویبار داده بر اساس سه معیار زیر اندازه‌گیری می‌شود:

- تعداد مرتبه‌ای که الگوریتم از روی جویبار داده گذر می‌کند
- میزان حافظه‌ی مصرفی
- زمان مصرفی به ازای هر داده

<sup>۱۸</sup> Random access

<sup>۱۹</sup> Update

<sup>۲۰</sup> Inversion

الگوریتم‌های جویبار داده تشابه‌های زیادی با الگوریتم‌های برخط<sup>۲۱</sup> دارند. به طور مثال، هر دو نوع الگوریتم، نیاز دارند قبل از اینکه تمام ورودی فرا برسد، در مورد داده‌ی جویبار داده تصمیم بگیرند. اما تفاوت‌های عمده‌ای نیز در این الگوریتم‌ها وجود دارد. الگوریتم‌های جویبار داده، دارای حافظه‌ی محدودی هستند، اما می‌توانند تصمیم‌گیری راجع به یک داده را تا چند مرحله به عقب بیاندازند، در صورتی که الگوریتم‌های برخط، به محض ورود داده، باید در مورد آن تصمیم بگیرند.

## ۴-۳-۲ مجموعه هسته

یکی از تکنیک‌های رایج در الگوریتم‌های جویبار داده، نگه‌داری نماینده‌ای با اندازه‌ی بسیار کوچک‌تر نسبت جویبار داده است. این مجموعه معمولاً دغدغه‌ی محدودیت حافظه را در الگوریتم‌های جویبار داده برطرف می‌کند. به چنین مجموعه‌ای، مجموعه هسته می‌گوییم. حال به تعریف رسمی هسته می‌پردازیم:

**تعریف ۲-۲** فرض کنید  $\mu$  یک تابع اندازه‌گیری<sup>۲۲</sup> (همانند تابع عرض مجموعه‌ای از نقاط) از  $\mathbb{R}^d$  به اعداد حقیقی نامنفی  $\mathbb{R}^d \cup \{0\}$  باشد. فرض کنید که این تابع، یک تابع یکنواخت است، یعنی به ازای هر دو مجموعه‌ی  $P_1$  و  $P_2$  که  $P_1 \subset P_2$  است، آنگاه

$$\mu(P_1) \leq \mu(P_2)$$

فرض کنید  $\epsilon > 0$  داده شده است، به زیرمجموعه‌ی  $Q \subset P$  یک  $\epsilon$ -مجموعه‌ی هسته برای مجموعه  $P$  است اگر رابطه‌ی زیر برقرار باشد:

$$(1 - \epsilon)\mu(P) \leq \mu(Q)$$

یکی از مجموعه هسته‌های معروف، مجموعه هسته‌ی مطرح برای برای تابع اندازه‌گیری عرض نقاط است. به چنین مجموعه هسته‌ای به اختصار  $\epsilon$ -هسته<sup>۲۳</sup> گفته می‌شود. تعریف دقیق  $\epsilon$ -هسته در زیر آمده است:

**تعریف ۳-۲** فرض کنید  $S^{d-1}$  کره‌ی واحد با مرکز واقع در مبدأ در فضای  $\mathbb{R}^d$  باشد. به ازای هر مجموعه  $P$  از نقاط در فضای  $\mathbb{R}^d$  و هر جهت دلخواه  $u \in S^{d-1}$ ، عرض جهت‌دار  $P$  در جهت  $u$  که با نماد  $\omega(u, P)$

<sup>۲۱</sup>Online

<sup>۲۲</sup>Measure Function

<sup>۲۳</sup> $\epsilon$ -Kernel

تعریف می‌شود، مطابق زیر است:

$$\omega(u, P) = \max_{p \in P} \langle u, p \rangle - \min_{p \in P} \langle u, p \rangle$$

که در آن  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  همان ضرب داخلی دو بردار است. برای متغیر  $\epsilon > 0$ ، زیرمجموعه‌ی  $Q \subset P$  یک  $\epsilon$ -هسته نامیده می‌شود اگر به ازای هر  $u \in S^{d-1}$  داشته باشیم:

$$(1 - \epsilon)\omega(u, P) \leq \omega(u, Q)$$

$\epsilon$ -هسته یکی از اساسی‌ترین مجموعه‌های هسته‌های مطرح است و برای طیف وسیعی از مسائل قابل استفاده است. الگوریتم‌های زیادی برای محاسبه‌ی  $\epsilon$ -هسته در حالت ایستا تعریف شده است [۱۱].

یکی از روش‌هایی که در تبدیل یک الگوریتم از حالت ایستا به حالت جویبار داده استفاده از روش دوبرابری‌سازی<sup>۲۴</sup> است. این روش یک روش عام و قابل استفاده برای طیف وسیعی از مسائل است. به عنوان نمونه، دوبرابری‌سازی را بر روی  $\epsilon$ -هسته مورد بررسی قرار می‌دهیم.  $\epsilon$ -هسته، دارای دو خاصیت اساسی است که آن را قابل استفاده برای تکنیک دوبرابری‌سازی است.

• اگر  $P_2$  یک  $\epsilon$ -هسته برای  $P_1$  باشد و  $P_3$  یک  $\delta$ -هسته برای  $P_2$  باشد، آنگاه  $P_3$  یک  $(\epsilon + \delta)$ -هسته برای  $P_1$  است.

• اگر  $P_2$  یک  $\epsilon$ -هسته برای  $P_1$  باشد و  $Q_2$  یک  $\epsilon$ -هسته برای  $Q_1$  باشد، آنگاه  $P_2 \cup Q_2$  یک  $\epsilon$ -هسته برای  $P_1 \cup Q_1$  است.

ایده‌ی اصلی تکنیک دوبرابری‌سازی، استفاده از روش مبنای دو است، که در ابتدا از نقطه‌ی اول یک مجموعه هسته ساخته می‌شود. سپس با نقطه‌ی بعدی یک مجموعه هسته از دو نقطه‌ی فعلی ساخته می‌شود. سپس با دو نقطه‌ی بعدی یک مجموعه‌ی هسته از چهار نقطه فعلی ساخته می‌شود. اگر این روند را به صورت توان‌هایی از ۲ ادامه بدهیم، در هر لحظه حداکثر،  $\log(n)$  مجموعه هسته داریم که در طول الگوریتم، بعضی از آن‌ها با یک‌دیگر ادغام می‌گردند و پس از ادغام، یک هسته از کل آن‌ها به عنوان نماینده انتخاب می‌گردد و مجموعه هسته‌ی جدیدی از روی آن ساخته می‌شود. در واقع اگر دوباره بر روی دو مجموعه‌ی ادغام شده هسته حساب نشود، اندازه‌ی هسته به صورت نمایی افزایش می‌یابد که مطلوب نیست. ازین رو برای کاهش حافظه‌ی مصرفی از روی دو هسته‌ی ادغام شده، یک هسته‌ی

<sup>۲۴</sup>Doubling

جدید محاسبه می‌گردد. این کار، ضریب تقریب را افزایش می‌دهد ولی باعث می‌شود، حافظه‌ی مصرفی، حداکثر  $\log(n)$  برابر حافظه‌ی مصرفی در حالت ایسا می‌شود.

## فصل ۳

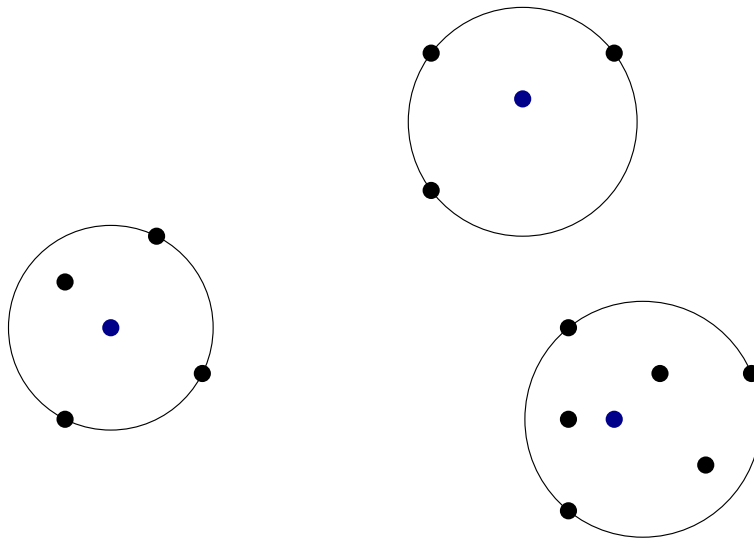
# کارهای پیشین

در این فصل کارهای پیشین انجام شده روی مسئله  $k$  - مرکز، در سه بخش مورد بررسی قرار می‌گیرد. در بخش اول، مسئله  $k$  - مرکز مورد بررسی قرار می‌گیرد. در بخش دوم، حالت جویبار داده‌ی مسئله و مجموعه هسته‌های مطرح برای این مسئله مورد بررسی قرار می‌گیرد. در نهایت، در بخش سوم، مسئله  $k$  - مرکز با داده‌های پرت مورد بررسی قرار می‌گیرد.

### ۳-۱ $k$ - مرکز در حالت ایستا

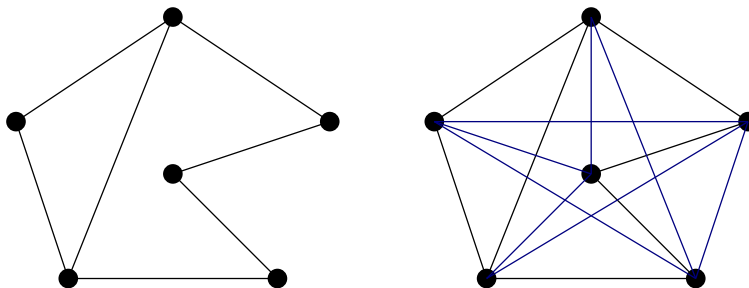
مسئله  $k$  - مرکز به عنوان مسئله‌ی شناخته شده در علوم کامپیوتر مطرح است. این مسئله، در واقع یک مسئله‌ی بهینه‌سازی است که سعی در کاهش بیش‌ترین فاصله نقاط از مرکز دسته‌ها را دارد. سختی اصلی این مسئله در انتخاب مرکز دسته‌هاست. زیرا اگر بتوانیم مرکز دسته‌ها را به درستی تشخیص دهیم، کافی است هر نقطه را به دسته‌ای که نزدیک‌ترین مرکز را دارد، تخصیص دهیم. به وضوح چنین تخصیصی بهینه‌ترین تخصیص ممکن است. نمونه‌ای از این تخصیص را در شکل ۳-۱ نشان داده شده است.

در سال ۱۹۷۹، نه تنها اثبات گردید که این مسئله در حالت کلی یک مسئله‌ی ان‌پی-سخت است [۱۲]، بلکه ثابت شده است که این مسئله در صفحه‌ی دو بعدی و با متریک اقلیدسی نیز ان‌پی-سخت است [۱۳]. فراتر از این، ثابت شده است که برای مسئله  $k$  - مرکز با متریک دلخواه هیچ الگوریتم تقریبی با ضریب تقریب بهتر از ۲ وجود ندارد. ایده‌ی اصلی این کران پایین، کاهش مسئله‌ی پوشش رأسی، به مسئله  $k$  - مرکز است. برای چنین کاهش‌ی کافی است، از روی گراف اصلی که می‌خواهیم



شکل ۳-۱: نمونه‌ای از تخصیص نقاط به ازای مراکز آبی رنگ.

کوچک‌ترین مجموعه‌ی پوشش رأسی را در آن پیدا کنیم، یک گراف کامل بسازیم به طوری که به ازای هر یال در گراف اصلی، یک یال با وزن یک و به ازای هر یال که در گراف اصلی وجود ندارد، یک یال با وزن ۲ قرار می‌دهیم. نمونه‌ای از چنین تبدیلی را در شکل ۳-۲ می‌توانید مشاهده کنید. حال اگر الگوریتمی بتواند مسئله‌ی  $k$ -مرکز را با ضریب تقریب بهتر از ۲ حل نماید، آنگاه گراف جدید دارای یک  $k$ -مرکز با شعاع کمتر از ۲ است، اگر و تنها اگر گراف اصلی دارای یک پوشش رأسی با اندازه‌ی  $k$  باشد. برای متریک  $L_2$  یا فضای اقلیدسی<sup>۱</sup> نیز ثابت شده است برای مسئله‌ی  $k$ -مرکز، الگوریتم تقریبی با ضریب تقریب بهتر از  $1/822$  وجود ندارد [۹].



شکل ۳-۲: نمونه‌ای از تبدیل یک گراف ورودی مسئله‌ی پوشش رأسی به یک ورودی مسئله‌ی  $k$ -مرکز (در گراف سمت چپ، یال‌های سیاه وزن ۱ و یال‌های آبی، وزن ۲ دارند)

<sup>۱</sup>Euclidean space

## الگوریتم ۱ گنزalez

- ۱:  $S$  را برابر مجموعه تهی قرار بده.
- ۲: عنصر دلخواه از مجموعه نقاط  $V$  را به  $S$  اضافه کن.
- ۳: به ازای  $i$  بین ۲ تا  $k$ :
- ۴:  $v$  را نقطه‌ای از  $V$  در نظر بگیرید که بیشترین فاصله را از مجموعه‌ی  $S$  دارد.
- ۵:  $v$  را  $S$  اضافه کن.
- ۶:  $S$  را برگردان

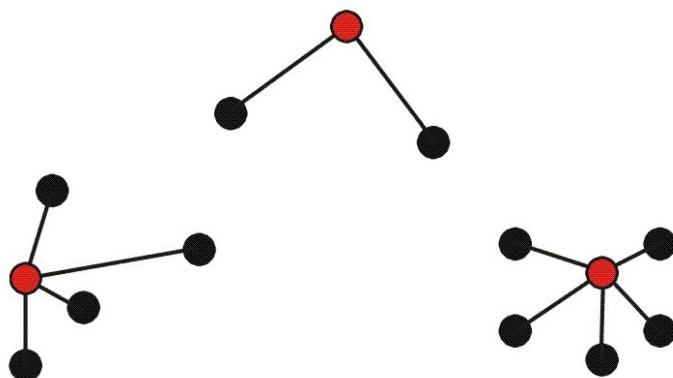
یکی از اولین الگوریتم‌های تقریبی برای مسئله‌ی  $k$ -مرکز به وسیله‌ی گنزalez<sup>۲</sup> ارائه شده است [۱۴]. این الگوریتم یک الگوریتم تقریبی با ضریب ۲ است و در زمان  $O(kn)$  قابل اجراست. الگوریتم گنزalez، از نظر روش برخورد با مسئله، یک الگوریتم حریصانه<sup>۳</sup> محسوب می‌شود. برای این‌که عملکرد الگوریتم گنزalez را درک کنید، نیاز به تعریف فاصله‌ی یک نقطه از یک مجموعه نقطه داریم.

**تعریف ۳-۱** فاصله‌ی نقطه‌ی  $v$  از مجموعه‌ای ناتهی از نقاط  $S$  را برابر فاصله‌ی نقطه‌ای درون  $S$  از  $v$  تعریف می‌کنیم، به گونه‌ای که از تمام نقاط  $S$  به  $v$  نزدیک‌تر باشد. در واقع داریم:

$$d(v, S) = \min_{u \in S} \{d(u, v)\}$$

همان‌طور که در الگوریتم ۱ مشاهده می‌کنید، روش اجرای این الگوریتم به این گونه است که در ابتدا یک نقطه‌ی دلخواه را به عنوان مرکز دسته‌ی اول در نظر می‌گیرد. سپس دورترین نقطه از آن را به عنوان مرکز دسته‌ی دوم در نظر می‌گیرد. در هر مرحله، دورترین نقطه از مرکز مجموعه دسته‌های موجود را به عنوان مرکز دسته‌ی جدید به مجموعه مراکز دسته‌ها اضافه می‌کند. با اجرای الگوریتم تا  $k$  مرحله، مراکز دسته‌ها انتخاب می‌شود. حال اگر هر نقطه را به نزدیک‌ترین مرکز انتخابی تخصیص دهیم، می‌توان نشان داد که شعاع بزرگ‌ترین دسته، حداکثر دو برابر شعاع بهینه برای مسئله‌ی  $k$ -مرکز است. فدر<sup>۴</sup> و سایرین، زمان اجرای الگوریتم گنزalez را برای هر  $L_p$ -متریک به مرتبه‌ی  $O(n \log k)$  بهبود بخشیدند. نمونه‌ای از اجرای الگوریتم گنزalez، در شکل ۳-۳ نشان داده شده است.

<sup>۲</sup>Gonzalez<sup>۳</sup>Greedy<sup>۴</sup>Feder



شکل ۳-۳: نمونه‌ای از حل مسئله‌ی ۳-مرکز با الگوریتم گنزالز

تا به اینجا، تنها بر روی حالت کلی مسئله‌ی  $k$ -مرکز صحبت شد و تنها محدودیتی که مورد توجه قرار گرفت، متریک مطرح برای فاصله‌ی نقاط بوده است. در ادامه به بررسی، حالاتی از مسئله‌ی  $k$ -مرکز، که  $k$  تعداد دسته‌ها یا  $d$  ابعاد فضا ثابت باشند می‌پردازیم. آگاروال<sup>۵</sup> و سایرین الگوریتمی دقیق با زمان اجرای  $n^{O(k^{-1}-\frac{1}{d})}$  برای مسئله  $k$ -مرکز در فضای  $L_p$ -متریک با ابعاد ثابت  $d$  ارائه داده‌اند [۱۵]. قابل توجه است که اگر  $d$  ثابت نباشد، مسئله‌ی  $k$ -مرکز حتی برای متریک اقلیدسی ( $L_2$ -متریک) با تعداد دسته‌ی ثابت  $k \geq 2$ ، ان‌پی-سخت است [۱۶].

علاوه بر حالاتی که ابعاد فضا یا تعداد دسته‌ها ثابت‌اند، مسئله‌ی  $k$ -مرکز برای حالتی که مقادیر  $k$  و  $d$  کوچک هستند، مورد بررسی قرار گرفته‌اند و الگوریتم‌های بهینه‌تری از الگوریتم‌های کلی برای این حالت‌های خاص ارائه شده است. به طور مثال، برای مسئله‌ی ۱-مرکز در فضای اقلیدسی با ابعاد ثابت، الگوریتم خطی با زمان اجرای  $O((d+1)n)$  وجود دارد [۱۷]. الگوریتم ارائه شده بر پایه‌ی دو نکته‌ی اساسی بنا شده است. اول اینکه کره‌ی بهینه را می‌توان با حداکثر  $d+1$  نقطه‌ی واقع در پوسته‌ی کره‌ی بهینه مشخص نمود و دوم اینکه اگر نقاط ورودی را با ترتیبی تصادفی پیمایش کنیم احتمال اینکه نقطه‌ی پیمایش شده جزء نقاط مرزی باشد از مرتبه‌ی  $O(\frac{d}{n})$  است که با توجه به ثابت بودن  $d$  این احتمال برای  $n$ های بزرگ کوچک محسوب می‌شود و زمان اجرای الگوریتم، به طور میانگین خطی خواهد بود.

در صفحه‌ی اقلیدسی برای مسئله‌ی ۲-مرکز، بهترین الگوریتم را چن<sup>۶</sup> با زمان اجرای  $O(c \log^2 n \log^2 \log n)$  و حافظه‌ی  $O(n)$  ارائه داده است [۱۸]. برای فضای سه‌بعدی اقلیدسی نیز آگاروال و سایرین، الگوریتمی

Agarwal<sup>۵</sup>  
Chan<sup>۶</sup>



با متوسط زمان اجرای  $O(n^3 \log^k n)$  ارائه داده است [۱۹].

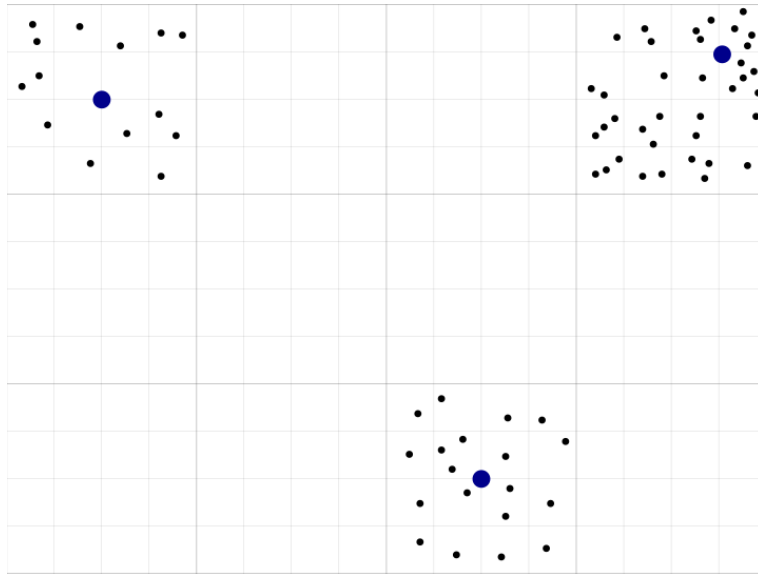
## ۳-۲ $k$ -مرکز در حالت جویبار داده

در مدل جویبار داده، مشکل اصلی عدم امکان نگه‌داری تمام داده‌ها در حافظه است و باید سعی شود تنها داده‌هایی که ممکن است در ادامه مورد نیاز باشد را، نگه‌داریم. یکی از راه‌های رایج برای این کار نگه‌داری مجموعه‌ای از نقاط (نه لزوماً زیرمجموعه‌ای از نقاط ورودی) به عنوان نماینده‌ی نقاط به طوری که جواب مسئله‌ی  $k$ -مرکز برای آن‌ها منطبق با جواب مسئله‌ی  $k$ -مرکز برای نقاط اصلی باشد (با تقریب قابل قبولی). به چنین مجموعه‌ای مجموعه‌ی هسته‌ی نقاط گفته می‌شود.

بهترین مجموعه هسته‌ای که برای مسئله‌ی  $k$ -مرکز ارائه شده است، روش ارائه‌شده به وسیله‌ی ضربایی‌زاده برای نگه‌داری یک  $\epsilon$ -هسته با حافظه‌ی  $O(\frac{k}{\epsilon^d})$  برای  $L_p$ -متریک‌ها است [۲۰]. در روش ارائه شده، از چند ایده‌ی ترکیبی استفاده شده است. در ابتدا، الگوریتم با استفاده از یک الگوریتم تقریبی با ضریب ثابت، یک تقریب از جواب بهینه به دست می‌آورد. به طور مثال با استفاده از الگوریتم گنزالز، یک دو تقریب از شعاع بهینه به علاوه‌ی مرکز دسته‌های پیدا شده را به دست می‌آورد. حال کافی است که با طول شعاع الگوریتم تقریبی، حول هر مرکز به دست آمده، یک توری با  $O(\frac{1}{\epsilon})$  شبکه‌بندی در هر بعد تشکیل داد و چون هر نقطه در حداقل یکی از توری‌ها قرار می‌گیرد، می‌توان با حداکثر  $\epsilon$  تقریب در جواب نهایی نقاط را به نقاط شبکه‌بندی توری گرد نمود. با این کار، دیگر ما نیازی به نگهداری تمام نقاط ورودی نداشته و تنها نیاز به نگهداری نقاط شبکه‌بندی توری داریم. با این روش می‌توان به یک  $\epsilon$ -هسته برای مسئله‌ی  $k$ -مرکز رسید. نکته‌ی اساسی برای سازگار سازی روش ارائه‌شده با مدل جویبار داده‌ی تک‌گذره استفاده از روش دوبرارسازی<sup>۷</sup> رایج در الگوریتم‌های جویبار داده است. نمونه‌ای از اجرای الگوریتم ضربایی‌زاده را در شکل ۳-۴ نشان داده شده است. برای دیدن اثبات‌ها و توضیح بیش‌تر در مورد روش ارائه شده می‌توانید به مرجع [۲۰] مراجعه کنید.

از جمله مشکلات وارده به الگوریتم ضربایی‌زاده، وابستگی اندازه‌ی مجموعه‌ی هسته به ابعاد فضا است. بنابراین هسته‌ی ارائه شده به وسیله‌ی ضربایی‌زاده را نمی‌توان برای ابعاد بالا مورد استفاده قرار داد. از طرفی، حساب کردن جواب از روی هسته در زمان چندجمله‌ای بر اساس  $k$  و  $d$  قابل انجام نیست. با توجه با موارد گفته شده، برای قابل استفاده شدن الگوریتم‌ها برای ابعاد بالا، الگوریتم‌هایی

<sup>۷</sup>Doubling



شکل ۳-۴: نمونه‌ای از توری‌بندی الگوریتم ضربی‌زاده (نقاط آبی، مراکز به دست آمده از الگوریتم تقریبی است). پس از توری‌بندی کافی است برای هر کدام از خانه‌های شبکه‌بندی، تنها یکی را به عنوان نماینده در نظر بگیریم.

ارائه می‌شود که ضریب تقریب بدتری دارند، اما میزان حافظه‌ی مصرفی یا اندازه‌ی مجموعه هسته‌ی آن‌ها چندجمله‌ای بر اساس  $d$  و  $k$  و  $\log n$  باشد. به چنین الگوریتم‌هایی الگوریتم‌های جویبار داده برای ابعاد بالا گفته می‌شود.

اولین الگوریتم ارائه شده برای ابعاد بالا، الگوریتمی با ضریب تقریب ۸ و حافظه‌ی مصرفی  $\mathcal{O}(dk)$  است [۲۱]. پس از آن، گوها<sup>۸</sup>، به طور موازی با مک‌کاتن<sup>۹</sup> و سایرین، الگوریتمی با ضریب تقریب  $(2 + \epsilon)$  با حافظه‌ی  $\mathcal{O}(\frac{dk}{\epsilon} \log \frac{1}{\epsilon})$  برای مسئله‌ی  $k$ -مرکز در هر فضای متریکی ارائه دادند [۲۲، ۵]. در سال ۲۰۱۴، اهن<sup>۱۰</sup> و سایرین، الگوریتمی با همین ضریب تقریب و حافظه‌ی  $\mathcal{O}((k + 3)! 2^{k \frac{d}{\epsilon}})$  ارائه داده‌اند که برای  $k$ های ثابت، حافظه را از مرتبه‌ی  $\mathcal{O}(\log \frac{1}{\epsilon})$  کاهش می‌دهد [۲۳].

تا به این‌جا ما به بررسی مسئله‌ی  $k$ -مرکز در حالت جویبار داده بدون محدودیت خاصی پرداختیم. برای حالت‌های خاص  $k$ ، به خصوص ۱ و ۲، مسئله‌ی  $k$ -مرکز با متریک اقلیدسی مورد توجه زیادی قرار گرفته است و راه‌حل‌های بهینه‌تری نسبت به حالت کلی برای آن‌ها پیشنهاد شده است. به طور مثال،

Guha<sup>۸</sup>McCutchen<sup>۹</sup>Ahn<sup>۱۰</sup>

می‌توان یک هسته با اندازه‌ی  $O(\frac{1}{\epsilon^{\frac{d-1}{2}}})$ ، با استفاده از نقاط حدی<sup>۱۱</sup> در تعداد مناسبی جهت، به صورت جویبار داده ساخت.

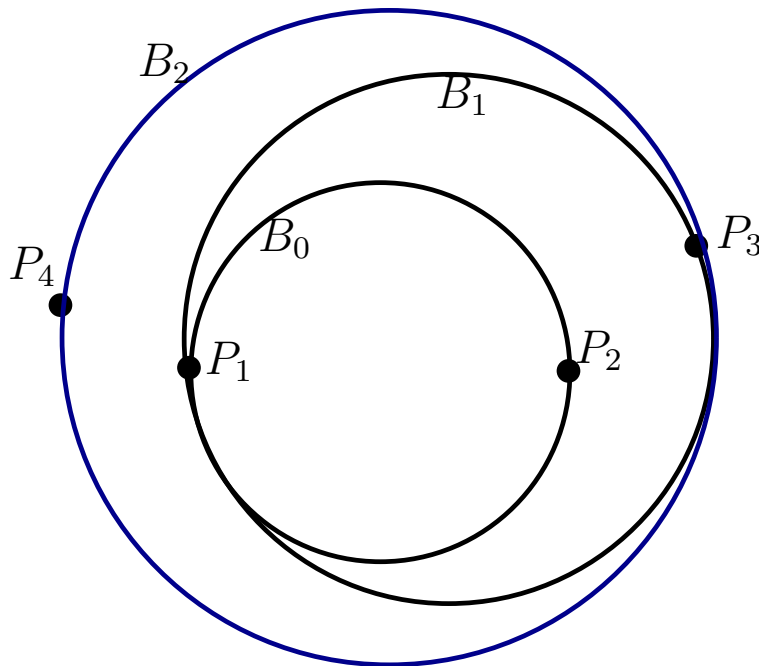
### الگوریتم ۲ الگوریتم ضربایی زاده

- ۱:  $B$  را تویی به مرکز نقطه‌ی اول و شعاع صفر قرار دهید.
- ۲: به ازای هر نقطه‌ی  $u$  در جویبار داده:
- ۳: اگر  $u$  داخل  $B$  قرار می‌گیرد:
- ۴: ادامه بده.
- ۵: در غیر این صورت:
- ۶:  $B$  را با کوچک‌ترین توپ ممکن که هردوی  $B$  و  $u$  را می‌پوشاند، جایگزین کن.
- ۷: مجموعه‌ی  $S$  را برگردان.

همان‌طور که برای الگوریتم ضربایی زاده مطرح شد، مشکل عمده‌ی مجموعه هسته‌ی ارائه‌شده، وابستگی حافظه‌ی مصرفی آن به  $d$  است. در راستای حل این مشکل، ضربایی زاده و سایرین [۲۴] برای ابعاد بالا و متریک اقلیدسی، الگوریتمی با ضریب تقریب  $1/5$  و حافظه‌ی مصرفی  $O(d)$  ارائه دادند. در واقع در الگوریتم آن‌ها، در هر لحظه تنها یک مرکز و یک شعاع را نگه داشته می‌شود، که کم‌ترین حافظه‌ی ممکن برای مسئله‌ی ۱-مرکز است. همان‌طور که در الگوریتم ۲ مشاهده می‌کنید، نقطه‌ی اول را به عنوان مرکز کره با شعاع صفر در نظر گرفته می‌شود. با فرا رسیدن هر نقطه‌ی جدید، اگر نقطه‌ی مد نظر، داخل کره‌ی فعلی بیفتد که بدون هیچ تغییری ادامه داده و در صورتی که بیرون کره‌ی فعلی بیفتد، آن را با کوچک‌ترین کره‌ای که نقطه‌ی جدید به علاوه‌ی کره‌ی قبلی را به طور کامل می‌پوشاند، جایگزین می‌کند.

به وضوح در هر لحظه کره‌ی ساخته شده تمام نقاطی که تا کنون در جویبار داده آمده است را می‌پوشاند. از طرفی ثابت می‌شود شعاع کره در هر لحظه، حداکثر  $1/5$  - برابر شعاع کره‌ی بهینه است. نکته‌ی قابل توجه در مورد این الگوریتم، نگهداری کم‌ترین حافظه‌ی ممکن برای مسئله‌ی ۱-مرکز است. زیرا تنها یک مرکز و یک شعاع نگه می‌دارد. نمونه‌ای از اجرای الگوریتم را بر روی چهار نقطه می‌توان در شکل ۳-۵ دید. برای اثبات کامل‌تر می‌توانید به مرجع [۲۴] مراجعه کنید.

<sup>۱۱</sup>Extreme points



شکل ۳-۵: نمونه‌ای از اجرای الگوریتم ضربی‌زاده بر روی چهار نقطه  $P_1 \dots P_4$  که به ترتیب اندیس در جویبار داده فرا می‌رسند و دایره‌های  $B_0, \dots, B_2$  دایره‌هایی که الگوریتم به ترتیب نگه می‌دارد.

در ادامه، آگاروال و سایرین [۱۰] الگوریتمی تقریبی با حافظه‌ی مصرفی  $O(d)$  ارائه دادند. در الگوریتم ارائه شده، ضرب تقریب، برابر  $\frac{1+\sqrt{3}}{4}$  تخمین زده شد، اما با تحلیل دقیق‌تری که چن و سایرین [۲۵] بر روی همان الگوریتم انجام دادند، مشخص شد همان الگوریتم دارای ضرب تقریب  $1/22$  است.

الگوریتم آگاروال از الگوریتم کلارکسون و سایرین [۲۶] به عنوان یک زیرالگوریتم استفاده می‌کند. الگوریتم کلارکسون، الگوریتمی کاملاً مشابه الگوریتم گنزالز است و به این گونه عمل می‌کند که در ابتدا یک نقطه دلخواه را به عنوان نقطه‌ی اول انتخاب می‌کند، سپس دورترین نقطه از نقطه‌ی اول را به عنوان دومین نقطه انتخاب می‌کند. ازین به بعد در هر مرحله، نقطه‌ای که از نقاط انتخاب شده‌ی قبلی بیش‌ترین فاصله را دارد به عنوان نقطه‌ی جدید انتخاب می‌کند. اگر این الگوریتم را تا  $O(\frac{1}{\epsilon})$  مرحله ادامه بدهیم، به مجموعه‌ای با اندازه‌ی  $O(\frac{1}{\epsilon})$  خواهیم رسید که کلارکسون و سایرین اثبات کرده‌اند که یک  $\epsilon$ -هسته برای مسئله‌ی ۱-مرکز است. در واقع آن‌ها نشان داده‌اند یک  $O(\frac{1}{\epsilon})$ -مرکز به دست آمده برای مجموعه‌ای از نقاط، یک  $\epsilon$ -هسته برای مسئله‌ی ۱-مرکز برای همان مجموعه نقاط است.

الگوریتم آگاروال به این گونه عمل می‌کند که اولین نقطه‌ی جویبار داده را به عنوان تنها نقطه‌ی

مجموعه‌ی  $K_1$  در نظر می‌گیرد. حال تا وقتی که نقاطی که فرا می‌رسند داخل  $(1 + \epsilon)Meb(K_1)$  قرار بگیرند، ادامه می‌دهد. اولین نقطه‌ای که در شرایط ذکر شده صدق نمی‌کند را  $p_2$  بنامید. حال الگوریتم کلارکسون را بر روی  $K_1 \cup \{p_2\}$  اجرا کرده و مجموع هسته‌ی به دست آمده را  $K_2$  بنامید. با ادامه‌ی این روند، الگوریتم، دنباله‌ای از مجموعه هسته  $\kappa = \{K_1, \dots, K_u\}$  نگه می‌دارد و زمانی که نقطه‌ی  $p_{u+1}$  پیدا شود که در هیچ کدام از  $(1 + \epsilon)Meb(K_j)$  به ازای  $1 \leq j \leq u$  نباشد، الگوریتم کلارکسون را برای  $\bigcup_{j=1}^u K_j \cup \{p_{u+1}\}$  اجرا نموده و مجموعه هسته‌ی به دست آمده را  $K_{u+1}$  می‌نامد. با توجه به نحوه‌ی ساخته شدن  $K_i$  ها، به راحتی می‌توان نشان داد رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$P \subset \bigcup_{i=1}^u (1 + \epsilon)Meb(K_i)$$

حال در نهایت برای به دست آوردن جواب نهایی کافی است کوچک‌ترین کره‌ای که

$$\bigcup_{i=1}^u (1 + \epsilon)Meb(K_i)$$

را می‌پوشاند را به عنوان جواب محاسبه کنیم. چن و سایرین ثابت کرده‌اند که کره‌ی نهایی دارای شعاع حداکثر  $1/22$  برابر شعاع بهینه است. برای مشاهده جزئیات بیشتر، به [۲۵، ۱۰] مراجعه کنید.

آگاروال نه تنها الگوریتمی ارائه داد که در نهایت، ثابت شد حداکثر جوابی با ضریب تقریب  $1/22$  برابر جواب بهینه می‌دهد، بلکه نشان داد، که با حافظه‌ی چندجمله‌ای بر اساس  $\log n$  و  $d$  نمی‌توان الگوریتمی ارائه داد که ضریب تقریب بهتر از  $\frac{1+\sqrt{2}}{4}$  داشته باشد.

**قضیه‌ی ۳-۱** هر الگوریتم تحت مدل جویبار داده که یک  $\alpha$ -تقریب برای مسئله‌ی ۱-مرکز برای مجموعه‌ی  $S$  شامل  $n$  نقطه در فضای  $\mathbb{R}^d$  نگه می‌دارد، برای  $\alpha \leq \frac{1+\sqrt{2}}{4}(1 - \frac{2}{d^{\frac{1}{3}}})$  با احتمال حداقل  $\frac{2}{3}$  نیاز به  $\Omega(\min\{n, e^{d^{\frac{1}{3}}}\})$  حافظه مصرف می‌کند.

اثبات. ایده‌ی اصلی اثبات بر اساس قضیه‌ی معروف آلیس و باب<sup>۱۲</sup> در نظریه انتقال اطلاعات بنا شده است. برای خواندن اثبات این قضیه می‌توانید به مرجع [۱۰] مراجعه کنید.

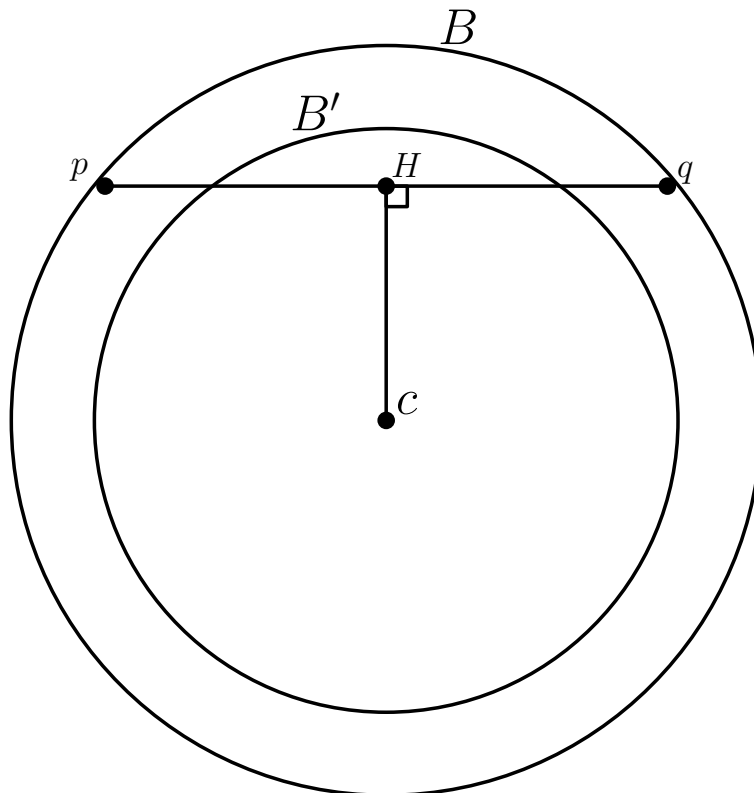
□

علاوه بر مسئله‌ی ۱-مرکز، مسئله‌ی دو مرکز نیز در سال‌های اخیر مورد توجه قرار گرفته است و بهبودهایی نیز برای این مسئله ارائه شده است. آهن و سایرین [۱] در سال ۲۰۱۴، اولین الگوریتم با

<sup>۱۲</sup>alice and bob

ضریب تقریب کمتر از دو را برای مسئله ۲- مرکز در فضای اقلیدسی ارائه دادند. این الگوریتم تقریباً پایه‌ی کار این پایان‌نامه برای حالت‌های مختلف است. به همین منظور، تعدادی از لم‌های داخل این الگوریتم که در آینده استفاده می‌شود این‌جا توضیح داده می‌شود.

**لم ۲-۳** فرض کنید  $B$  یک کره‌ی واحد با مرکز  $c$  در فضای اقلیدسی  $\mathbb{R}^d$  باشد. هر پاره‌خط  $pq$  به طول حداقل  $1/2$  که به طور کامل داخل  $B$  قرار دارد، کره‌ی  $B'(c, 1/8)$  را قطع می‌کند.



شکل ۳-۶: اثبات لم ۲-۳

اثبات. صفحه‌ی گذرنده از پاره‌خط و مرکز کره را نظر بگیرید. ادامه اثبات تنها به همین صفحه محدود می‌شود، بنابراین نیاز به در نظر گرفتن ابعاد بزرگ‌تر از ۲ نیست. همان‌طور که در شکل ۳-۶ مشخص شده است، پای عمود از مرکز کره بر پاره‌خط  $pq$  را  $h$  بنامید. بدون کم شدن از کلیت مسئله فرض می‌کنیم  $\|hq\| \leq \|hp\|$ . بنابراین داریم:

$$1/6 = \frac{1/2}{2} \leq \|hq\|$$

از طرفی چون پاره‌خط  $pq$  به طور کامل داخل کره‌ی واحد قرار گرفته است، بنابراین تمام نقاط آن، شامل

دو سر آن، از مرکز کره، فاصله‌ی حداکثر ۱ دارند. بنابراین طبق رابطه‌ی فیثاغورث، داریم:

$$\|hc\| = \sqrt{\|qc\|^2 - \|qh\|^2} \leq \sqrt{1 - 0/6^2} = 0/8$$

بنابراین نقطه‌ی  $h$  داخل کره‌ی  $B'$  قرار می‌گیرد. از طرفی چون،  $1 \leq \|pq\|$  بنابراین،  $h$  داخل پاره‌خط قرار دارد و در نتیجه کره‌ی  $B'$  با پاره‌خط  $pq$  تقاطع دارد.

□

لم بالا در واقع نشان می‌دهد اگر در طول الگوریتم بتوانیم دو نقطه‌ی دور نسبت به هم (حداقل  $1/2$  برابر شعاع بهینه) از یکی از دو کره‌ی بهینه را بیابیم، این پاره‌خط از مرکز کره‌ی بهینه فاصله‌ی کمی (حداکثر  $0/8$  شعاع بهینه) دارد.

لم ۳-۳ فرض کنید  $B$  کره‌ای به مرکز  $c$  و شعاع واحد در  $\mathbb{R}^d$  باشد. پاره‌خط دلخواه  $pq$  با طول حداقل  $1/2$  که به طور کامل داخل  $B$  قرار دارد را در نظر بگیرید. هر نقطه‌ی  $x$  از پاره‌خط  $pq$  که از دو سر آن حداقل  $0/6$  فاصله داشته باشد، داخل کره‌ی  $B'(c, 0/8)$  قرار می‌گیرد.

اثبات. اثبات این لم نیز کاملاً مشابه لم ۲-۳ است. بدون کم شدن از کلیت مسئله همان‌طور که در شکل ۷-۳ مشخص شده است، فرض کنید زاویه‌ی  $\angle pxc$  بزرگ‌تر مساوی  $90^\circ$  درجه است. در نتیجه داریم:

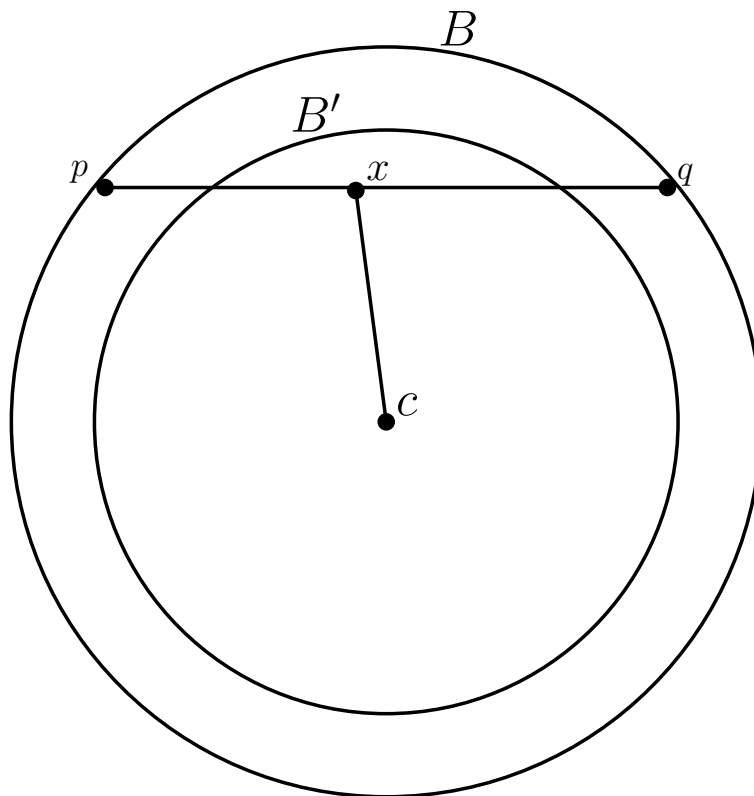
$$\sqrt{\|px\|^2 + \|xc\|^2} \leq \|pc\| \leq 1$$

از طرفی طبق فرض مسئله داریم:

$$0/6 \leq \|px\| \implies \|xc\| \leq \sqrt{1 - 0/6^2} = 0/8$$

□

الگوریتم آهن، با استفاده از دو لم بالا و تقسیم مسئله به دو حالتی که دو کره‌ی بهینه بیش از دو برابر شعاع بهینه یا کم‌تر از برابر شعاع بهینه فاصله داشته باشند، دو الگوریتم کاملاً جداگانه ارائه می‌دهد که به طور موازی اجرا می‌گردند. اجرای موازی این دو الگوریتم، در هر لحظه دو جواب درست ارائه می‌دهد و کافی است برای جواب نهایی بین دو شعاعی که به عنوان جواب خود می‌دهند، شعاع کم‌تر را به عنوان جواب نهایی الگوریتم بدهیم.



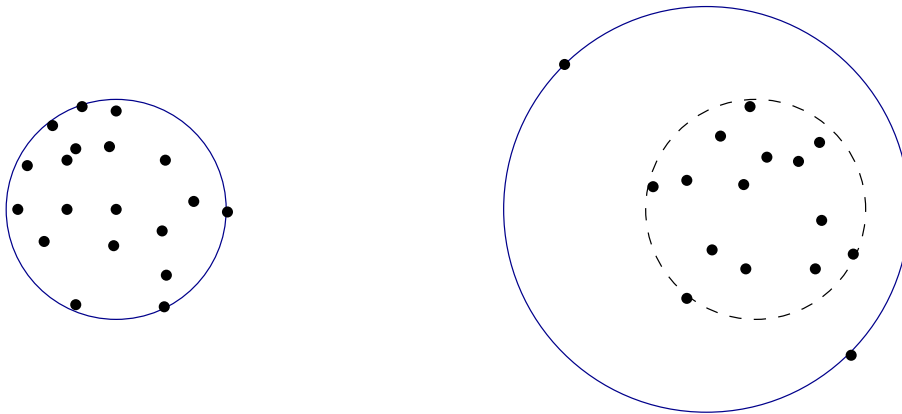
شکل ۳-۷: اثبات لم ۳-۳

### ۳-۳ - مرکز با داده‌های پرت $k$

در دنیای واقعی در میان داده‌ها، داده‌های دارای اریب وجود دارد که اگر امکان تشخیص و حذف آن‌ها در حین جمع‌آوری داده‌ها وجود داشت، شعاع مسئله‌ی  $k$  - مرکز به میزان قابل توجهی کاهش پیدا می‌کرد و شهود بسیار بهتری از دسته‌ها ارائه می‌داد. در عمل نیز حذف داده‌هایی که به هیچ دسته‌ای شباهت ندارند، معقول به نظر می‌رسد، زیرا هدف به دست آوردن دسته‌بندی برای کلیت نقاط است و نه دسته‌بندی که تمام نقاط در آن می‌گنجند. همان‌طور که در شکل ۳-۸ می‌بینید، تنها حذف دو نقطه که نسبت به بقیه نقاط داده‌ی اریب حساب می‌شوند، دسته‌بندی بسیار قابل قبول‌تری را نتیجه می‌دهد. با چنین رویکردی، باید تعدادی نقطه که با بقیه نقاط فاصله‌ی زیادی دارند از داده‌های ورودی حذف شده و سپس به عنوان ورودی مسئله‌ی  $k$  - مرکز دسته‌های مرتب را از آن استخراج کرد.

مسئله‌ی  $k$  - مرکز با داده‌های پرت، بسیار مشابه مسئله‌ی استقرار تجهیزات است. در مسئله‌ی استقرار تجهیزات، هدف استقرار چند مرکز ارائه دهنده‌ی خدمات است که هزینه‌ی استقرار به علاوه‌ی انتقال





شکل ۳-۸: کاهش قابل توجه شعاع مسئله ۲- مرکز با حذف تنها دو نقطه

تجهیزات از مراکز ارائه دهنده به مکان‌ها متقاضی کمینه گردد. تعریف رسمی این مسئله در زیر آمده است:

**مسئله ۳-۱ (استقرار تجهیزات)** مجموعه‌ای نقطه به عنوان مکان‌های مجاز برای استقرار تجهیزات داده شده است. هزینه استقرار تجهیزات در نقطه‌ی  $i$  ام را برابر با  $f_i$  در نظر بگیرید. مجموعه‌ای از نقاط نیز که متقاضی تجهیزات هستند نیز داده شده است. به ازای هر متقاضی  $j$  و محل استقرار تجهیزات  $i$ ،  $d(i, j)$  برابر هزینه انتقال تجهیزات از محل استقرار به متقاضی است. مجموعه‌ای  $k$  عضوی به نام  $K$  انتخاب کنید به طوری که هزینه کلی را کمینه نماید:

$$\sum_{i \in K} f_i + \sum_{\text{all customers}} \min_{i \in K} d(i, j)$$

گونه‌های مختلفی از مسئله استقرار تجهیزات تعریف شده است. از جمله‌ی آن می‌توان به گونه‌های زیر اشاره نمود:

- هر مرکز ارائه‌دهنده حداکثر به تعداد مشخصی از متقاضیان می‌تواند تجهیزات انتقال دهد. در واقع در این روش سعی در استقرار تجهیزات به صورت متوازن است و متناسب با قدرت ارائه‌ی تجهیزات آن‌هاست.
- هزینه استقرار مرکز ارائه‌دهنده متناسب با تعداد متقاضیانی که پاسخ می‌دهد است. در این روش، معمولاً هر چه تعداد تقاضاهای یک مرکز بالاتر رود هزینه استقرار یا ساخت آن برای تامین چنین میزان درخواستی بالاتر می‌رود.

• هر متقاضی میزانی جریمه بابت عدم دریافت تقاضای خود مشخص کند. در این روش، هر متقاضی در صورت عدم دریافت تجهیزات مورد نیاز، میزانی جریمه مطالبه می‌کند و هدف کاهش مجموع هزینه‌ها به علاوه‌ی هزینه‌های قبلی است.

• تعدادی از متقاضیان را می‌توان بدون پرداخت جریمه پوشش نداد. در این حالت، امکان چشم‌پوشی از تعدادی از متقاضیان وجود دارد ولی امکان تخطی از محدودیت تعداد آن‌ها وجود ندارد.

اگر به دو گونه‌ی آخر توجه بیشتری کنید، به شباهتشان به مسئله‌ی  $k$ -مرکز با داده‌های پرت پی خواهید برد. می‌توان نشان داد که مسئله‌ی  $k$ -مرکز با  $z$  داده‌ی پرت از لحاظ پیچیدگی محاسباتی هم‌ارز استقرار تجهیزات با امکان عدم پوشش  $z$  متقاضی است. همان‌طور که در زیربخش قبلی دیدیم، هیچ الگوریتمی با ضریب تقریب کمتر از ۲ برای مسئله‌ی  $k$ -مرکز در حالت کلی وجود ندارد مگر این‌که  $P = NP$  باشد. برای مسئله‌ی  $k$ -مرکز با داده‌های پرت، اگر تعداد مجاز داده‌های پرت صفر باشد، مسئله به همان مسئله‌ی  $k$ -مرکز تبدیل می‌گردد. گونه‌ی مشابهی با مسئله‌ی  $k$ -مرکز با داده‌های پرت تعریف می‌گردد که در آن تعدادی از نقاط نمی‌توانند به عنوان مرکز انتخاب شوند. به این‌گونه، مسئله‌ی  $k$ -مرکز با داده‌های پرت و داده‌های ممنوعه (برای قرارگیری مرکز در آن‌ها) تعریف می‌شود. در مرجع [۴]، ثابت شده است که این مسئله در حالت کلی با ضریب کمتر از ۳ قابل تقریب‌پذیر نیست مگر آن‌که  $P = NP$  باشد.

**قضیه‌ی ۳-۴** فرض کنید نقطه‌هایی دلخواه از یک متریک دلخواه داده شده‌اند. مسئله‌ی  $k$ -مرکز با داده‌های پرت، که در آن، بعضی از رئوس امکان مرکز شدن ندارند (رئوس ممنوعه)، را نمی‌توان با ضریب تقریبی کمتر از ۳ تقریب زد.

اثبات. ایده‌ی ارائه شده برای این کران پایین، بسیار مشابه با ایده‌ی ارائه شده برای مسئله‌ی  $k$ -مرکز در فضای اقلیدسی است [۹]. در واقع در این راه‌حل، مسئله‌ی بیشینه پوشش رأسی به یک گراف دوبخشی متریک تبدیل می‌گردد که در آن وزن تمام یال‌ها برابر یک است. با استفاده از گراف ساخته شده، نشان داده می‌شود که اگر مسئله‌ی  $k$ -مرکز با داده‌های پرت و مراکز ممنوعه، دارای الگوریتمی با ضریب تقریب کمتر از ۳ داشته باشد (کوتاه‌ترین مسیر بین دو رأس غیر مجاور در دو بخش مختلف)، آنگاه می‌توان مسئله‌ی بیشینه پوشش رأسی را در زمان چندجمله‌ای حل نمود. برای مشاهده‌ی اثبات کامل‌تر می‌توانید به مرجع [۴] مراجعه کنید.

□

الگوریتمی که چریکار<sup>۱۳</sup> سایرین در این مقاله ارائه داده‌اند یک الگوریتم ۳- تقریب برای مسئله‌ی  $k$ -مرکز با داده‌های پرت است. در ابتدا، الگوریتم چریکار، تمام شعاع‌های ممکن را پیدا می‌کند. در حالت مسئله‌ی  $k$ -مرکز گسته، کافی است تمام فاصله‌های بین دوبه‌دوی نقاط را به عنوان کاندیدا در نظر گرفت که تعدادشان از مرتبه‌ی  $O(n^2)$  است و کافی است بر روی گزینه‌های به دست آمده، جست‌وجوی دوبویی زد. در صورتی که مسئله‌ی  $k$ -مرکز در حالت پیوسته مد نظر باشد، به ازای هر  $d + 1$  نقطه‌ی دلخواه، یک کاندید اضافه می‌گردد که تعدادشان از مرتبه‌ی  $O(n^{d+1})$  است. حال اگر ما شعاع  $r$  داشته باشیم که  $r$  بزرگ‌تر مساوی شعاع بینه باشد، چریکار یک الگوریتم ساده با شعاع حداکثر  $3r$  ارائه می‌دهد و اگر الگوریتم چریکار نتوانست با شعاع  $3r$  همه‌ی نقاط به جز حداکثر  $z$  نقطه را بپوشاند، بنابراین فرض اولیه‌ی ما اشتباه بوده است و  $r$  از شعاع بهینه کم‌تر است.

**تعریف ۲-۳** به ازای هر نقطه‌ی  $v_i \in V$ ،  $G_i$  (به طور مشابه) را برابر مجموعه نقاطی در نظر بگیرید که در فاصله‌ی حداکثر  $r$  (به طور مشابه) از  $v_i$  قرار دارند.  $G_i$  را توپ به شعاع  $r$  و  $E_i$  را به عنوان توپ گسترش‌یافته به شعاع  $3r$  می‌نامیم. وزن هر توپ را برابر تعداد نقاط درون آن در نظر می‌گیریم.

---

### الگوریتم ۳ اولین الگوریتم با ضریب تقریب ۳ برای $k$ -مرکز با $z$ داده‌ی پرت

---

- ۱: به ازای  $i$  از ۱ تا  $k$ :
  - ۲: به ازای تمام نقاط، توپ‌ها و توپ‌های گسترش‌یافته را محاسبه کن.
  - ۳:  $G_j$  را توپی در نظر بگیر که بیش‌ترین وزن را دارد (بیش‌ترین تعداد نقاط پوشش داده نشده را می‌پوشاند).
  - ۴: توپ  $E_j$  را به عنوان توپ  $i$ ام در نظر بگیر.
  - ۵: تمام نقاط داخل  $E_j$  را به مجموعه نقاط پوشش داده شده اضافه کن.
  - ۶: اگر همه‌ی نقاط به جز حداکثر  $z$  تای آن‌ها پوشانده شده بودند:
  - ۷:  $r$  اولیه بزرگ‌تر مساوی  $r$  بهینه است. برگردان  $E_j$ ‌های انتخاب شده
  - ۸: در غیر این صورت:
  - ۹:  $r$  اولیه کوچک‌تر از  $r$  بهینه است.
-

الگوریتم ۳، یک الگوریتم حریصانه و ساده است که با مقایسه‌ی عمل‌کرد آن با جواب بهینه می‌توان نشان داد که به درستی عمل می‌کند. برای مشاهده‌ی درستی اثبات، می‌توانید به [۴] کنید. چریکار در ادامه، با استفاده از برنامه‌ریزی خطی<sup>۱۴</sup> و گردسازی<sup>۱۵</sup> جواب، یک الگوریتم ۳- تقریب برای حالت گسسته و یک ۴- تقریب برای حالت پیوسته ارائه می‌دهد. به علت عدم استفاده از روش برنامه‌ریزی خطی، از بیان جزئیات این قسمت صرف نظر می‌کنیم. مک‌کاتن<sup>۱۶</sup> با استفاده از الگوریتم ارائه شده در بالا، یک الگوریتم جویبار داده ارائه داد که متناسب با اینکه از کدام الگوریتم استفاده کند، همان ضریب تقریب را برای حالت جویبار داده می‌دهد. ایده‌ی اصلی به کار رفته در این تبدیل، پردازش نقاط به صورت دسته‌های  $O(kz)$  تایی و در نظر گرفتن نقاط آزاد به عنوان نقاطی هنوز مطمئن نیستیم نقطه‌ی پرت هستند و نقاطی که مطمئن هستیم باید پوشانده شوند. این الگوریتم حافظه‌ای از مرتبه‌ی  $O(\frac{kz}{\epsilon})$  مصرف می‌کند. برای مشاهده جزئیات بیشتر به مرجع [۵] مراجعه کنید.

تا به اینجا مسئله‌ی  $k$ - مرکز را در حالت کلی بررسی کردیم. مسئله‌ی ۱- مرکز با داده‌های پرت به صورت جداگانه به وسیله‌ی ضربی‌زاده و سایرین مورد بررسی قرار گرفته است [۲۷]. در الگوریتم ارائه شده برای حالتی که  $z = 1$  است، ضربی‌زاده یک الگوریتم با ضریب تقریب  $1/48 \leq 1/22 \times \frac{\sqrt{2}+1}{4} \leq$  با حافظه‌ی مصرفی  $O(\frac{d}{\epsilon^3} \log \frac{1}{\epsilon})$  ارائه داده است. به ازای  $z$  های کلی، الگوریتم دیگری با حافظه‌ی مصرفی  $O(d^3 z + \frac{d}{\epsilon^3} \log \frac{1}{\epsilon})$  و ضریب تقریب  $1/73 \leq 1/22 \times \sqrt{2} \leq$  ارائه شده است.

ایده‌ی اصلی که در این مقاله ارائه شده است، ارائه‌ی یک راه‌کار کلی برای مسائل جویبار داده است. در این راه‌کار، یک حافظه‌ی میان‌گیر<sup>۱۷</sup> تعریف می‌شود که هر نقطه از جویبار داده به محض ورود به آن اضافه می‌شود. در صورتی که حافظه‌ی میان‌گیر، پر گردد، یکی از نقاط از حافظه استخراج شده و به الگوریتم زیرین داده می‌شود. الگوریتم زیرین یک الگوریتم جویبار داده برای مسئله‌ی ۱- مرکز بدون داده‌های پرت است. همان‌طور که در زیربخش مسئله‌ی  $k$ - مرکز در حالت جویبار داده بیان شد، بهترین الگوریتم موجود یک الگوریتم با حافظه‌ی مصرفی  $O(d^3 z + \frac{d}{\epsilon^3} \log \frac{1}{\epsilon})$  و ضریب تقریب  $1/22$  است.

عامل ثانویه‌ای که در ضریب تقریب نهایی الگوریتم تاثیر به سزایی دارد نحوه‌ی استخراج نقطه از حافظه‌ی میان‌گیر است. فرض کنید  $O_x$  مجموعه نقاطی از  $P$  (جویبار داده) باشند که در جواب بهینه به عنوان داده‌ی پرت انتخاب شدند و  $O$  مجموعه نقاطی که به اشتباه از حافظه‌ی میان‌گیر استخراج شدند

<sup>۱۴</sup>Linear Programming<sup>۱۵</sup>Rounding<sup>۱۶</sup>McCutchen<sup>۱۷</sup>Buffer

باشد، اگر داشته باشیم که

$$Meb((P - O_x) \cup O) \leq \beta Meb(P - O_x)$$

در نتیجه ضریب تقریب نهایی برابر  $1/22\beta$  خواهد بود. نکته‌ی قابل توجه در اینجا است که طول حافظه‌ی میان‌گیر، در ضریب  $\beta$  تأثیر به‌سزایی دارد.

در حالت کلی  $z$ ، ایده‌ی اصلی برای استخراج یک نقطه از حافظه‌ی میان‌گیر، نقطه‌ی مرکزی<sup>۱۸</sup> نقاط داخل حافظه‌ی میان‌گیر است. در واقع نزدیک‌ترین نقطه به نقطه‌ی مرکزی نقاط داخل حافظه‌ی میان‌گیر، استخراج می‌گردد و ثابت می‌شود با این شیوه‌ی استخراج  $\beta \leq \sqrt{2}$  خواهد بود. برا مشاهده‌ی اثبات و جزئیات بیشتر به مرجع [۲۷] مراجعه کنید.

در فصل آتی، در ابتدا به پیشرفت‌هایی که برای مسئله‌ی ۱ – مرکز در حالت جویبار داده با داده‌های پرت در این پایان‌نامه ارائه شده است، خواهیم پرداخت. سپس برای مسئله‌ی ۲ – مرکز در حالت جویبار داده با داده‌های پرت، اولین کار موجود را ارائه می‌دهیم که بهبود قابل توجهی نسبت به حالت کلی است.

## فصل ۴

# نتایج جدید

در این فصل نتایج جدید به دست آمده در پایان نامه توضیح داده می شود. این فصل در سه بخش تهیه شده است. بخش اول به بیان مقدمات و نمادگذاری های مورد نیاز برای بخش های بعدی می پردازد. در بخش دوم، راه حل های ارائه شده برای مسئله ۱ - مرکز با  $z$  داده ی پرت در حالت جویبار داده مورد بررسی قرار می گیرد. این بخش به سه زیربخش تقسیم می شود.

در زیربخش اول، دو الگوریتم جدید ارائه می شود. الگوریتم اول، با مصرف حافظه ی  $O(z^2 d)$ ، جوابی با ضریب تقریب ۲ ارائه می دهد که حافظه ی مصرفی الگوریتم ضرابی زاده و سایرین [۲۷] را در صورتی که ابعاد فضا بیش تر از  $z$  باشد بهبود می بخشد. از طرفی الگوریتم ارائه شده بسیار ساده تر از الگوریتم ضرابی زاده است. الگوریتم دوم یک الگوریتم با ضریب تقریب  $\epsilon + 1/8$  و حافظه ی مصرفی  $O(\frac{z^2}{\epsilon})$  است.

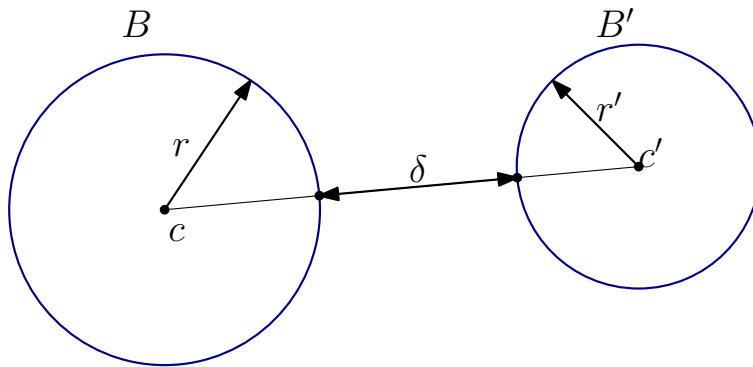
در زیر بخش دوم، به بررسی مسئله ۱ - مرکز پوشاننده بدون داده ی پرت می پردازیم، به طوری که نه تنها می خواهیم تمام نقاط ورودی پوشیده شود، بلکه می خواهیم کل توپ بهینه نیز به طور کامل پوشیده شود. برای این مسئله، یک الگوریتم با ضریب تقریب  $1/7$  ارائه می شود. در زیربخش سوم، با استفاده از زیربخش های قبلی، الگوریتمی با ضریب تقریب  $1/7$  برای مسئله ۱ - مرکز با  $z$  داده ی پرت ارائه می دهیم (برای حالتی که  $z$  ثابت است).

در بخش سوم، مسئله ۲ - مرکز با  $z$  - داده ی پرت مورد بررسی قرار می گیرد. ایده ی اصلی این بخش، تقسیم بندی مسئله به دو حالت است که حاصل، دو الگوریتم متفاوت می شود که به صورت

موازی اجرا می‌شوند. هر دوی این الگوریتم‌ها ضریب تقریب  $\epsilon + 1/8$  دارند و حافظه‌ی مصرفی در کل برابر است با  $O(dz^2(d^2 + \frac{z}{\epsilon}))$ . این اولین الگوریتم ارائه شده بعد از الگوریتمی که با ضریب تقریب  $\epsilon + 4$  برای  $k$  کلی ارائه شده است، می‌باشد که بهبود قابل توجهی محسوب می‌شود.

## ۴-۱ نمادگذاری‌ها و تعاریف اولیه

در این قسمت، تعدادی نمادگذاری که در بخش‌های آتی مورد استفاده قرار می‌گیرند، بیان می‌شود. علاوه بر این، تعدادی از مفاهیم و تعاریف رایج که در بخش‌های آتی به تکرار مورد استفاده قرار می‌گیرند نیز در این فصل مورد بررسی قرار می‌گیرد.



شکل ۴-۱: تعریف فاصله‌ی دو توپ دلخواه

- در طول متن، برای مشخص کردن یک توپ از نماد  $B(c, r)$  استفاده می‌کنیم که  $c$  مرکز توپ و  $r$  شعاع آن را مشخص می‌کند. هر جا خواستیم به شعاع توپی ارجاع دهیم از نماد  $r(B)$  و هر گاه خواستیم به مرکز یک توپ اشاره کنیم از نماد  $c(B)$  استفاده می‌کنیم.
- به ازای هر دو نقطه‌ی دلخواه  $p$  و  $q$  در فضا، فاصله‌ی  $p$  و  $q$  را با  $\|pq\|$  نشان می‌دهیم.
- همان‌طور که در شکل ۴-۱ نشان داده شده است، دو توپ دلخواه  $B(c, r)$  و  $B'(c', r')$  را در نظر بگیرید. فاصله‌ی دو توپ  $B$  و  $B'$  مطابق زیر تعریف می‌شود:

$$\delta(B, B') = \max\{\bullet, \|cc'\| - r - r'\}$$

- دو توپ دلخواه  $B(c, r)$  و  $B'(c', r')$  را  $\alpha$ -تفکیک شده گوییم اگر داشته باشیم:

$$\delta(B, B') \geq \alpha \cdot \max\{r(B), r(B')\}$$

• زمانی که می‌خواهیم در مورد توپ بهینه‌ی ۱- مرکز صحبت کنیم از  $B^*(c^*, r^*)$  یا  $MEB(c^*, r^*)$  استفاده می‌کنیم. برای مسئله‌ی ۲- مرکز نیز از  $B_1^*(c_1^*, r^*)$  و  $B_2^*(c_2^*, r^*)$  برای نشان دادن دو دایره‌ی بهینه مسئله‌ی ۲- مرکز برای مجموعه‌ای از نقاط استفاده می‌کنیم.

• مجموعه نقاط  $P$  داده شده است.  $k$ - دورترین نقطه از  $p \in P$  نقطه‌ای از  $P$  است که فاصله‌اش از نقطه‌ی  $p, k$ - امین بزرگ‌ترین فاصله را در بین تمام نقاط  $P$  داراست.

علاوه بر نمادگذاری‌های بالا، در بخش‌های بعدی، بعضی از تعاریف رایج در هندسه‌ی محاسباتی مورد استفاده قرار می‌گیرد. فرض کنید مجموعه‌ی  $n$ - عضوی  $P$  از نقاط در  $\mathbb{R}^d$  داده شده است. نقطه‌ی  $c \in \mathbb{R}^d$  را نقطه‌ی مرکزی<sup>۱</sup> مجموعه‌ی  $P$  می‌گویند، اگر هر نیم‌صفحه‌ی<sup>۲</sup> شامل  $c$ ، حداقل شامل  $\lceil \frac{n}{d+1} \rceil$  نقطه از نقاط  $P$  باشد. مرجع [۲۸] ثابت کرده است که هر مجموعه‌ی متناهی از نقاط در فضای  $d$ - بعدی، دارای یک نقطه‌ی مرکزی است. مشاهده‌ی زیر نتیجه‌ی مستقیم این گزاره است.

**مشاهده‌ی ۴-۱** مجموعه‌ی  $P$  با  $k(d+1)$  نقطه در فضای  $d$ - بعدی داده شده است. هر شکل محدب که شامل نقطه‌ی مرکزی  $P$  نباشد، حداقل  $k$  نقطه از  $P$  را نیز نمی‌پوشاند.

در این پایان‌نامه، فرض می‌کنیم ذخیره‌ی هر بعد از یک نقطه حافظه‌ی ثابتی مصرف می‌کند. در نتیجه، ذخیره‌سازی یک نقطه در فضای  $d$ - بعدی،  $\mathcal{O}(d)$  حافظه مصرف می‌کند و عملیات عادی بر روی نقاط نیز  $\mathcal{O}(d)$  زمان می‌برد.

## ۴-۲ مسئله‌ی ۱- مرکز در حالت جویبار داده

در این بخش به بررسی گونه‌های مختلفی از مسئله‌ی ۱- مرکز در حالت جویبار داده می‌پردازیم. مباحث این بخش، به صورت سه زیربخش دسته‌بندی شده است. در زیربخش اول مسئله‌ی ۱- مرکز با داده‌های پرت، مورد بررسی قرار می‌گیرد. در زیرقسمت دوم مسئله‌ی ۱- مرکز پوشاننده مورد بررسی قرار می‌گیرد و در نهایت در بخش سوم، با استفاده از نتایج دو بخش قبلی، مسئله‌ی ۱- مرکز با تعداد ثابتی داده‌ی

<sup>۱</sup>Centerpoint<sup>۲</sup>Half Space



پرت، مورد بررسی قرار می‌گیرد. در هر سه بخش، الگوریتم‌های قبلی از جنبه یا جنبه‌هایی بهبود داده شده‌اند. مهم‌ترین معیارهای مطرح، ضریب تقریب و حافظه‌ی مصرفی است که در هر الگوریتم به دقت محاسبه شده و با کارهای قبلی مقایسه می‌شوند.

#### ۴-۲-۱ مسئله‌ی ۱ - مرکز با داده‌های پرت در حالت جویبار داده

در این زیربخش، دو الگوریتم کاملاً متفاوت برای مسئله‌ی ۱ - مرکز ارائه می‌شود که نسبت به الگوریتم‌های موجود ساده‌تر هستند و حافظه‌ی مصرفی کم‌تری دارند. از طرفی دیگر، دارای ویژگی‌هایی هستند که با استفاده از آن‌ها، در فصول بعدی، الگوریتم تقریبی برای مسئله‌ی ۲ - مرکز ارائه می‌شود.

#### الگوریتم تقریبی با ضریب تقریب ۲

در این قسمت، یک الگوریتم ساده‌ی جویبار داده با ضریب تقریب ۲ برای مسئله‌ی ۱ - مرکز با داده‌ی پرت ارائه می‌شود. در این الگوریتم، از ایده‌ی موازی‌سازی<sup>۳</sup> استفاده می‌شود که به وفور در بخش‌های آتی مورد استفاده قرار می‌گیرد. در الگوریتم ۴ شبه‌کد<sup>۴</sup> الگوریتم ارائه شده آمده است. الگوریتم، جویبار داده‌ی  $P$  و تعداد داده‌های پرت را از ورودی دریافت می‌کند. همان‌طور که می‌بینید الگوریتم فرض کرده است که نقطه‌ی اول جویبار داده، داده‌ی پرت نیست. در ادامه نشان خواهیم داد چگونه چنین فرضی را حذف نماییم. در نهایت الگوریتم توپ  $B$  را بر می‌گرداند که همه‌ی نقاط  $P$  به غیر از حداکثر  $\epsilon$  نقطه را می‌پوشاند (دقیقاً  $\epsilon$  دورترین نقطه از نقطه‌ی اول را نمی‌پوشاند).

**قضیه‌ی ۴-۲** الگوریتم ۴ با فرض این‌که نقطه‌ی اول جویبار داده، داده‌ی پرت نیست یک الگوریتم تقریبی با ضریب تقریب ۲ برای مسئله‌ی ۱ - مرکز با  $\epsilon$  داده‌ی پرت است.

**اثبات.** فرض کنید  $B^*(c^*, r^*)$  توپ جواب بهینه باشد و  $c$  نقطه‌ی دلخواهی از جویبار داده‌ی  $P$  است که در جواب بهینه قرار دارد و جزء نقاط پرت نیست. بنابراین  $c$  داخل  $B^*$  قرار دارد. به ازای هر نقطه‌ی دلخواه  $p \in B^*$  داریم:

$$\|cp\| \leq \|cc^*\| + \|c^*p\| \leq 2r^*$$

<sup>۳</sup>Parallelization

<sup>۴</sup>Pseudocode

---

**الگوریتم ۴** الگوریتم با ضریب تقریب ۲ برای مسئله‌ی ۱ – مرکز با  $z$  داده‌ی پرت
 

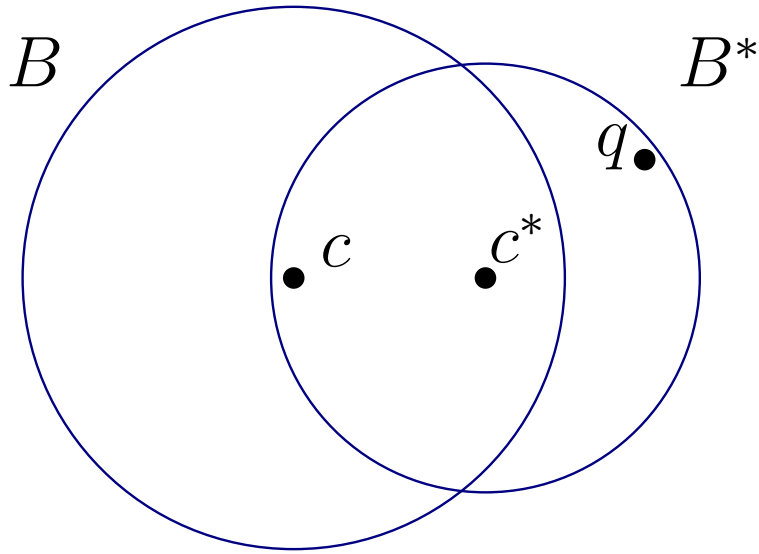
---

- ۱:  $c$  را اولین نقطه از جویبار داده‌ی  $P$  قرار بده.
  - ۲: توپ  $B(c, 0)$  را در نظر بگیر.
  - ۳: حافظه‌ی میان‌گیر خالی  $Q$  را در نظر بگیر.
  - ۴: به ازای هر  $p$  در مجموعه‌ی  $P$ :
  - ۵: اگر  $p \notin B$ :
  - ۶:  $p$  را به  $Q$  اضافه کن.
  - ۷: اگر  $|Q| = z + 1$ :
  - ۸:  $q$  را نزدیک‌ترین نقطه‌ی  $Q$  به مرکز  $c$  در نظر بگیر.
  - ۹:  $q$  را از  $Q$  حذف کن.
  - ۱۰:  $B$  را با توپ  $B(c, \|cq\|)$  جایگزین کن.
  - ۱۱:  $B$  را برگردان
- 

از طرفی، از بین  $z + 1$  دورترین نقطه از  $c$ ، حداقل یک نقطه به نام  $q$  وجود دارد که در جواب بهینه داده‌ی پرت نیست و در نتیجه داخل  $B^*$  قرار دارد (به شکل ۲-۴ نگاه کنید). با توجه به گزاره‌ی گفته‌شده،  $\|cq\| \leq 2r^*$  است. از طرفی چون شعاع جواب الگوریتم ۴ به اندازه‌ی فاصله‌ی  $c$  از  $z + 1$  – دورترین نقطه از  $c$  است، بنابراین شعاع جواب الگوریتم نیز کم‌تر مساوی  $2r^*$  است و بنابراین الگوریتم ۴ یک الگوریتم ۲ – تقریب برای مسئله‌ی ۱ – مرکز با  $z$  داده‌ی پرت است.

□

الگوریتم ۴ به طور ضمنی فرض کرده است که نقطه‌ی اول، در جواب بهینه نقطه‌ی پرت نیست. برای حذف چنین فرضی،  $z + 1$  نمونه از الگوریتم ۴ به طور موازی اجرا می‌گردد به طوری که در هر کدام، یکی از  $z + 1$  نقطه‌ی اول به آن به عنوان نقطه‌ی اول جویبار داده به الگوریتم داده می‌شود و بقیه نقاط در ادامه می‌آید. به وضوح، در بین  $z + 1$  نقطه‌ی اول، حتماً یک نقطه وجود دارد که در جواب بهینه داده‌ی پرت نیست. بنابراین جواب آن نمونه از الگوریتم، یک ۲ – تقریب برای جواب بهینه است و در نتیجه، کوچک‌ترین توپ بین  $z + 1$  نمونه‌ی موازی، همواره یک ۲ – تقریب برای جواب بهینه است. با توجه به این که پیچیدگی حافظه‌ی الگوریتم ۴ برای یک نمونه از مرتبه‌ی  $O(zd)$  است و زمان به‌روزرسانی آن از



شکل ۲-۴: اثبات قضیه ۲-۴

مرتبه‌ی  $O(d + \log z)$  است، نتیجه زیر به دست می‌آید.

**قضیه ۳-۴** برای یک جویبار داده از نقاط در فضای  $d$ -بعدی، الگوریتم ۴ یک ۲-تقریب برای مسئله ۱-مرکز با  $z$  داده‌ی پرت با حافظه‌ی مصرفی  $O(z^2 d)$  و زمان به‌روزرسانی  $O(zd + z \log z)$  ارائه می‌دهد.

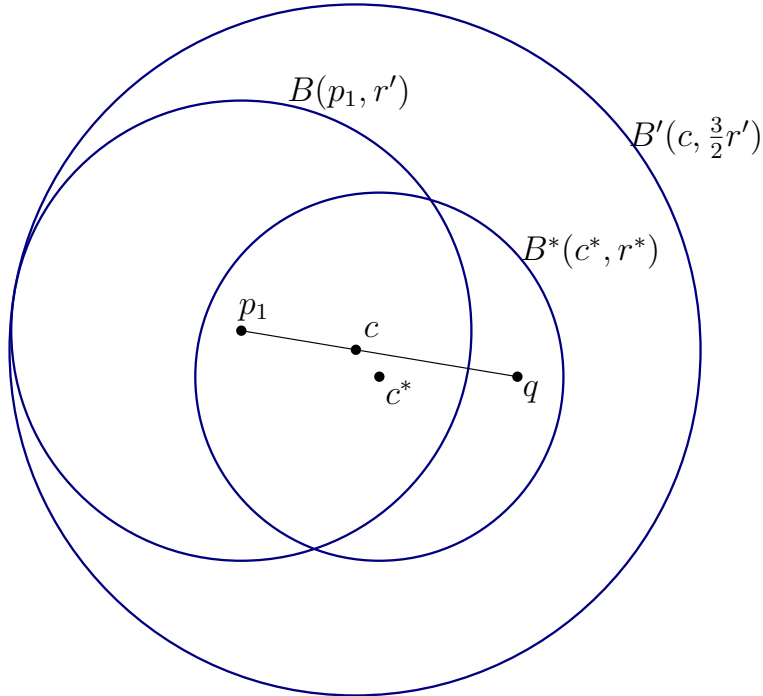
#### الگوریتم تقریبی با ضریب تقریب ۱/۸

در این قسمت، الگوریتمی با ضریب تقریب ۱/۸ برای مسئله ۱-مرکز با  $z$  داده‌ی پرت ارائه می‌دهیم. برای بیان الگوریتم فرض می‌کنیم  $r'$ ی داده شده است که در شرایط زیر صدق می‌کند:

$$1/2 r^* \leq r' \leq (1/2 + \frac{2\epsilon}{3}) r^*$$

با فرض شدن  $r'$ ، الگوریتم ۵، یک توپ با شعاع حداکثر  $\frac{3}{4} r'$  ارائه می‌دهد که حداکثر  $z$  نقطه از جویبار داده را نمی‌پوشاند. بدون کم شدن از کلیت مسئله، همانند قسمت قبلی فرض کنید که نقطه‌ی اول جویبار داده، جزء نقاط پرت در جواب بهینه نباشد. در نهایت برای حذف چنین فرضی کافی است  $z + 1$  نمونه از الگوریتم ارائه شده را به طور موازی اجرا نموده و از بین  $z + 1$  توپ جواب، توپ با کوچک‌ترین شعاع را به عنوان جواب نهایی بدهیم. با این تغییر، حافظه‌ی مصرفی، زمان به‌روزرسانی

و زمان پاسخ‌گویی به پرسمان همگی در مرتبه‌ی  $O(z)$  ضرب می‌شوند. برای ادامه‌ی کار به لم زیر نیاز داریم:



شکل ۴-۳: گسترش توپ  $B(c, r')$  در راستای نقطه‌ی  $q$

**لم ۴-۴** همان‌طور که در شکل ۴-۳ نشان داده شده است، نقطه‌ی  $q$  از جویبار داده‌ی  $P$  را در نظر بگیرید به‌طوری‌که در توپ بهینه‌ی  $B^*$  قرار گرفته (داده‌ی پرت نیست) و فاصله‌ی آن از  $p_1$  بزرگ‌تر مساوی  $r'$  باشد. نقطه‌ی  $c$  را در فاصله‌ی  $\frac{1}{4}r'$  از  $p_1$  بر روی پاره‌خط  $p_1q$  در نظر بگیرید. ثابت می‌شود توپ  $B'(c, \frac{3}{4}r')$ ، توپ  $B^*$  و  $B(p_1, r')$  را به‌طور کامل می‌پوشاند (توپ  $B^*$  و  $B(p_1, r')$  به‌طور کامل داخل  $B'$  قرار می‌گیرند). به‌چنین عملی گسترش توپ  $B(p_1, r')$  در راستای نقطه‌ی  $q$  گفته می‌شود.

**اثبات.** طبق لم ۳-۳، مرکز توپ  $B^*$  که با  $c^*$  نشان داده می‌شود، حداکثر  $\frac{1}{8}r^*$  از  $q$  فاصله دارد. برای هر نقطه‌ی  $s$  که در توپ  $B(c, r')$  قرار می‌گیرد، داریم:

$$\|sc\| \leq \|sp_1\| + \|p_1c\| \leq r' + \frac{1}{4}r' \leq \frac{3}{4}r'$$

از طرفی برای هر نقطه‌ی  $s$  داخل  $B^*$  داریم:

$$\|sc\| \leq \|sc^*\| + \|c^*c\| \leq r^* + \frac{1}{8}r^* \leq \frac{3}{4}r'$$

و در نتیجه هر نقطه از  $B^*$  داخل  $B(c, \frac{r'}{4})$  قرار می‌گیرد و بنابراین  $B(c, \frac{r'}{4})$  به طور کامل  $B^*$  را می‌پوشاند.

□

در واقع به عنوان نتیجه مستقیم لم بالا، اگر بتوانیم دو نقطه‌ی غیر پرت با فاصله‌ی بیش‌تر مساوی  $r'$  پیدا کنیم، می‌توانیم یک توپ به شعاع  $\frac{r'}{4}$  ارائه دهیم که توپ  $B^*$  را به طور کامل می‌پوشاند.

---

#### الگوریتم ۵ الگوریتم با ضریب تقریب $1/8$ برای مسئله‌ی ۱ – مرکز با $z$ داده‌ی پرت

---

۱: فرض کنید  $r'$  تقریب برای  $1/2r^*$  و  $z$  تعداد نقاط پرت قبل از گسترش  $B$  داده شده‌اند.

۲: توپ  $B(p_1, r')$  را در نظر بگیر.

۳: حافظه‌ی میان‌گیر خالی  $Q$  را در نظر بگیر.

۴: به ازای هر  $p$  در مجموعه‌ی  $P$ :

۵: اگر  $p \notin B$ :

۶:  $p$  را به  $Q$  اضافه کن.

۷: اگر  $B$  هنوز گسترش پیدا نکرده و  $|Q| = z + 1$ :

۸: توپ  $B$  را در راستای  $p$  گسترش بده.

۹: به ازای هر  $q \in Q$ :

۱۰: اگر  $q \in B$ :

۱۱:  $q$  را از  $Q$  حذف کن.

۱۲: اگر  $Q = z + 1$ :

۱۳: از برنامه خارج شو.

۱۴:  $B$  را برگردان

---

با توجه به لم بالا، با فرض داشتن  $r'$ ، همان‌طور که در الگوریتم ۵ می‌بینید، در ابتدا توپ  $B(p_1, r')$  را به عنوان توپ کاندید در نظر می‌گیریم. حال نقاطی که خارج این توپ قرار می‌گیرند را داخل یک حافظه‌ی میان‌گیر قرار می‌دهیم. اگر اندازه حافظه‌ی میان‌گیر هیچ‌گاه به  $z + 1$  نرسید، بنابراین توپی با شعاع  $r'$  پیدا کرده‌ایم که حداکثر  $z$  نقطه خارج آن قرار دارد و چون  $r^* \leq (1/2 + \frac{\epsilon}{4})r^* \leq r' \leq 1/2r^*$  است، بنابراین یک جواب با ضریب تقریب  $1/2 + \epsilon$  از جواب بهینه به دست آورده‌ایم. اگر حافظه‌ی میان‌گیر

پرسود، حتما یکی از اعضای آن وجود دارد که جزء داده‌های پرت نبوده (طبق اصل لانه‌کبوتری<sup>۵</sup>). بنابراین اگر نسبت به آن نقطه (کافی است تمام گزینه‌ها را امتحان کنیم) توپ اولیه را گسترش دهیم، به توپی می‌رسیم که تمام نقاط قبلی (غیر از نقاط داخل حافظه‌ی میان‌گیر) را پوشانده و مطمئن هستیم کل جواب بهینه را نیز می‌پوشاند.

پس از گسترش هر کدام از گزینه‌ها، کافی است در هر لحظه نگه‌داریم چند نقطه و کدام نقاط خارج از توپ گسترش یافته قرار می‌گیرند. توجه کنید در لحظه‌ی تشکیل توپ گسترش یافته، طبق لم بالا، تنها نقاط حافظه‌ی میان‌گیر که تعدادشان  $z$  تاست ( $z+1$  نقطه‌ی حافظه‌ی میان‌گیر به غیر از نقطه‌ای که در آن راستا توپ را گسترش داده‌ایم)، ممکن است خارج توپ گسترش یافته قرار بگیرند و نیازی به نگه‌داشتن نقاط قبلی نیست. اگر در ادامه‌ی جویبار داده تعداد نقاط خارج از توپ گسترش یافته بیش از  $z$  عدد گردد، با پوشش کامل  $B^*$  تناقض دارد و در نتیجه با توجه به لم بالا، یا نقطه‌ی  $q$  خود جزء داده‌های پرت در جواب بهینه بوده است یا شعاع  $r'$  در شرایط گفته شده صدق نمی‌کرده است و در هر صورت گزینه باید حذف گردد. با این حذف گزینه‌ها، در هر لحظه تعدادی گزینه داریم (همواره حداقل یک گزینه وجود دارد، چون حالتی وجود دارد که فرض برای آن درست است) و هر کدام یک جواب با شعاع حداکثر  $\frac{3}{4}r'$  ارائه می‌دهند که اگر از بین آن‌ها توپ با شعاع کمینه را به عنوان جواب نهایی بدهیم، مطمئناً یک جواب با تقریب حداکثر  $\epsilon + 1/8$  از جواب بهینه ارائه داده‌ایم.

تا به این جا الگوریتمی ارائه دادیم که با فرض داشتن  $r'$  و داده‌ی پرت نبودن  $p_1$ ، با مصرف حافظه‌ی  $O(z)$  و زمان به‌روزرسانی  $O(z)$  در هر لحظه می‌تواند یک  $\epsilon + 1/8$  - تقریب از جواب بهینه بدهد.

تنها قسمتی که مورد بررسی قرار نگرفته است، نحوه‌ی به‌دست‌آوردن  $r'$  است که در این قسمت به بررسی آن خواهیم پرداخت. در ابتدا برای این‌که ایده‌ی اصلی را درک کنیم فرض کنید که می‌خواهیم یک الگوریتم دو گذره برای این مسئله ارائه دهیم، به‌طوری‌که در گذر اول،  $r'$  محاسبه می‌شود و در گذر دوم، با استفاده از  $r'$  به‌دست‌آمده و الگوریتم ۵، یک  $\epsilon + 1/8$  - تقریب ارائه می‌گردد. در ادامه نشان داده می‌شود، چگونه می‌توان این دو گذر را هم‌زمان اجرا نمود. برای پیدا کردن  $r'$  کافی است که با استفاده از یک الگوریتم  $\alpha$  - تقریب (به طور مثال الگوریتم ۲ - تقریب ارائه شده در قسمت قبلی)، یک  $r$  به‌دست آوریم. طبق الگوریتم استفاده شده داریم:

$$r^* \leq r \leq \alpha r^*$$

حال اگر بازه‌ی  $[0, 1/2r]$  را به

$$m = \left\lceil \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} \times \alpha \times \frac{1}{\epsilon} \right\rceil$$

قسمت مساوی تقسیم کنیم، طول هر قسمت برابر است با:

$$\frac{1/2r}{m} = \frac{2}{3} \times \frac{r}{\alpha} \times \epsilon \leq \frac{2\epsilon}{3} r^*$$

از طرفی چون  $1/2r \leq 1/2r^*$  است، بنابراین یکی از این بازه‌ها  $1/2r^*$  را شامل می‌شود و انتهای آن بازه با توجه به طول بازه‌ها، کاندیدای مناسبی برای  $r'$  است. بنابراین کافی است پس از پیدا کردن یک  $\alpha$ -تقریب برای مسئله‌ی ۱- مرکز با  $z$  داده‌ی پرت، به ازای سرهای تمام بازه‌ها، الگوریتم ۵ را اجرا کنیم و از بین گزینه‌هایی که باقی می‌مانند کوچک‌ترین توپ را به عنوان جواب نهایی بدهیم. با توجه به این‌که برای سر یکی از بازه‌ها،  $r$  در شرایط  $r^* (1/2 + \frac{2\epsilon}{3}) \leq r \leq 1/2r^*$  صدق می‌کند، در نتیجه یکی از گزینه‌ها یک  $\epsilon + 1/8$ -تقریب برای جواب بهینه است و در نتیجه توپ با شعاع کمینه نیز همین ضریب تقریب را تضمین می‌کند.

تنها قسمتی که نیاز به دقیق شدن دارد، قسمت تک‌گذره کردن الگوریتم است. همان‌طور که گفته شد، از الگوریتم ۴ که الگوریتمی ۲-تقریب است، برای پیدا کردن  $r'$  استفاده می‌کنیم. فرض کنید  $r_i$  برابر شعاع الگوریتم ۲-تقریب برای جویبار داده تا  $i$ امین عنصر جویبار داده باشد. به وضوح دنباله‌ی  $r_i$  یک دنباله صعودی است. به ازای هر  $i, k$  را عدد صحیحی در نظر بگیرید که رابطه‌ی زیر برقرار باشد:

$$2^{k-1} \leq r_i \leq 2^k$$

با توجه به  $k$  بالا  $l_i = 2^k$  قرار دهید. به وضوح طبق رابطه‌ی گفته شده،  $l_i \leq 2r_i$  است و در نتیجه  $l_i$  یک ۴-تقریب برای مسئله‌ی ۱- مرکز با  $z$  داده‌ی پرت است.

حال کافی است بازه‌ی  $[0, 1/2l_i]$  را به  $m = \left\lceil \frac{1/2}{\epsilon} \right\rceil$  قسمت تقسیم کنیم. با این تقسیم‌بندی، طول هر بازه،  $t_i = \frac{1/2l_i}{m}$  می‌شود و مجموعه سر بازه‌ها برابر

$$R_i = \{j \times t_i \mid 1 \leq j \leq m\}$$

می‌گردد. طبق توضیحات قسمت قبل، سر یکی از بازه‌ها کاندیدای مناسبی برای  $r'$  است.

حال کافی است که در هر لحظه  $m$  نمونه از الگوریتم ۵ را به ازای هر  $r \in R_i$  به صورت موازی اجرا نماییم. به ازای اضافه شدن نقطه‌ی  $p_i$ ، اگر  $l_i = l_{i-1}$  باشد،  $R_i = R_{i-1}$  است و در نتیجه بدون هیچ

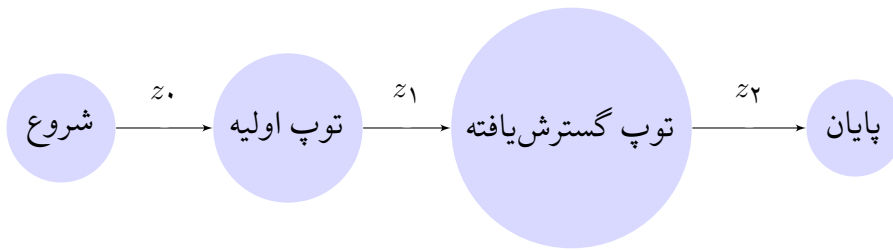
تغییری کافی است  $p_i$  را به تمام نمونه‌های موازی اضافه کنیم. در حالتی که  $l_{i-1} < l_i$  باشد، مجموعه‌ی  $R_i$  را می‌توان به دو زیرمجموعه تقسیم نمود. اعضای  $R_i$  از  $r \in R_i$  که کمتر مساوی  $1/2 l_{i-1}$  هستند و در نتیجه داخل  $R_{i-1}$  نیز قرار دارند (چون  $\frac{t_i}{t_{i-1}}$  همواره توان صحیحی از دو است). برای چنین اعضای، کافی است، نمونه معادل آن را در  $R_{i-1}$  بدون هیچ تغییری پیدا کرد و نقطه‌ی  $p_i$  را به آن اضافه کرد. اگر  $r \in R_i$  باشد و در  $R_{i-1}$  نباشد، در نتیجه  $1/2 l_{i-1} \leq r \leq l_{i-1}$  است. با توجه با نحوه‌ی عمل کرد الگوریتم ۴، می‌دانیم در هر لحظه  $z$  نقطه‌ای به عنوان داده‌ی پرت در نظر گرفته می‌شود که فاصله‌ی بزرگ‌تر مساوی  $l_i$  دارند و بقیه نقاطی که تا کنون آمده‌اند فاصله‌ای کمتر مساوی  $l_i$  دارند. بنابراین در بین تمام نقاط جویبار داده تا کنون، حداکثر  $z$  نقطه‌ی ذخیره شده در حافظه‌ی میان‌گیر الگوریتم ۴ خارج توپ  $B(p_i, r)$  می‌افتند. بنابراین اگر بخواهیم به ازای این  $r$  جدید الگوریتم ۵ را بر روی نقاط جویبار داده تاکنون اجرا نماییم، کافی است الگوریتم را به ازای نقاط داخل حافظه‌ی میان‌گیر اجرا نموده و مطمئن هستیم که بقیه‌ی نقاط به علت قرار گیری داخل  $B(p_i, r)$ ، تاثیری در روند اجرای الگوریتم نخواهند داشت.

با جمع‌بندی روند توضیح داده شده، ساخت یک نمونه‌ی جدید از الگوریتم ۵ معادل اضافه کردن حداکثر  $z$  نقطه‌ی موجود در حافظه‌ی میان‌گیر الگوریتم ۴ به نمونه‌ی جدید از الگوریتم که از مرتبه‌ی  $O(zd)$  زمان می‌برد. در هر مرحله هم حداکثر  $m$  نمونه‌ی جدید ساخته می‌شود، بنابراین زمان به‌روزرسانی نمونه‌ها در هر مرحله حداکثر  $O(\frac{zd}{\epsilon})$  است. از طرفی در هر لحظه  $mz$  به خاطر عدم اطمینان از نقطه‌ی دومی که داخل  $B^*$  قرار می‌گیرد و  $m$  به علت عدم اطمینان از محل قرارگیری  $r'$  در بازه‌ها) نمونه موازی از الگوریتم ۵ در حال اجراست. بنابراین، زمان به‌روزرسانی نهایی الگوریتم برابر  $O(\frac{z^2 d}{\epsilon})$  است و حافظه‌ی مصرفی نیز متناسب با  $mz$  نمونه‌ی موازی از الگوریتم ۵ برابر  $O(\frac{zd}{\epsilon})$  است. با دخیل کردن امکان پرت نبودن نقطه‌ی اول جویبار داده، به قضیه‌ی زیر می‌رسیم:

**قضیه‌ی ۴-۵** الگوریتم ۵ با مصرف حافظه‌ی  $O(\frac{z^2 d}{\epsilon})$  و زمان به‌روزرسانی  $O(\frac{z^3 d}{\epsilon})$ ، در هر لحظه با صرف زمان اجرای  $O(\frac{z^2}{\epsilon})$  جوابی با ضریب تقریب  $\epsilon + 1/8$  ارائه می‌دهد.

اگر بخواهیم الگوریتم گفته شده را جمع‌بندی کنیم، الگوریتم همان‌طور که در شکل ۴-۴ نشان داده شده است. در ابتدا،  $z$  نقطه‌ی اول را به عنوان داده‌ی پرت در نظر می‌گیرد و سپس  $1 + z$  اُمین نقطه‌ی جویبار داده را به عنوان نقطه‌ی اول و مرکز توپ  $B$  به شعاع  $r'$  در نظر می‌گیرد. سپس  $z_1$  نقطه‌ی اولی از ادامه‌ی جویبار داده که بیرون این توپ قرار می‌گیرند را به عنوان داده‌ی پرت در نظر گرفته و به ازای





شکل ۴-۴: نحوه اجرای الگوریتم ۵

۱ +  $z_1$  اُمین نقطه‌ی خارج  $B$ ، آن را در همان راستا گسترش می‌دهد. سپس  $z_2$  نقطه‌ی دیگر از ادامه‌ی جویبار داده که خارج  $B$  گسترش یافته قرار می‌گیرند را نیز به عنوان داده‌ی پرت در نظر می‌گیرد، حال اگر نقطه‌ی دیگری در جویبار داده وجود داشته باشد که خارج  $B$  بیفتد با توجه به اینکه  $z_i = z$ ،  $\sum_{i=1}^2$  است، تعداد نقاط پرت از  $z$  بیش‌تر شده و نشان می‌دهد یکی از فرض‌های اولیه اشتباه بوده و در نتیجه، گزینه حذف می‌گردد.

#### ۴-۲-۲ مسئله‌ی ۱- مرکز پوشاننده در حالت جویبار داده

در این زیر قسمت به بررسی مسئله‌ی تقریباً جدیدی می‌پردازیم. در ابتدا به تعریف دقیق مسئله می‌پردازیم:

**تعریف ۴-۱** مجموعه نقاط  $P$  داده شده‌اند. به توپ  $B$  یک  $\alpha$ -تقریب برای مسئله‌ی ۱- مرکز پوشاننده گویند اگر نه تنها تمام نقاط  $P$  را بپوشاند، بلکه توپ بهینه‌ی ۱- مرکز این نقاط که با  $B^*$  نشان داده می‌شود را نیز به طور کامل می‌پوشاند و شعاع آن، حداکثر  $\alpha$  برابر شعاع توپ بهینه باشد.

اگر این مسئله را در حالت جویبار داده در نظر بگیریم، هدف نگه‌داری مجموعه‌ای هسته که بتوان با استفاده از آن، در هر لحظه یک  $\alpha$ -تقریب از مسئله‌ی ۱- مرکز در حالت پوشاننده ارائه داد. برای این مسئله دو الگوریتم ارائه می‌دهیم. در الگوریتم اول، الگوریتم  $1/8$ -تقریب ارائه شده برای مسئله‌ی ۱- مرکز با  $z$  داده‌ی پرت را به گونه‌ای تغییر می‌دهیم که الگوریتمی با ضریب تقریب  $1/8$  برای مسئله‌ی ۱- مرکز پوشاننده در حالت جویبار داده ارائه دهد. در الگوریتم دوم، با استفاده از الگوریتمی دلخواه برای مسئله‌ی ۱- مرکز در حالت جویبار داده به عنوان جعبه‌ی سیاه<sup>۶</sup>، یک الگوریتم برای مسئله‌ی ۱- مرکز پوشاننده در حالت جویبار داده ارائه می‌دهد.

<sup>۶</sup>Black Box

### الگوریتم $\epsilon + 1/8$ - تقریب برای مسئله ی ۱ - مرکز پوشاننده در حالت جویبار داده

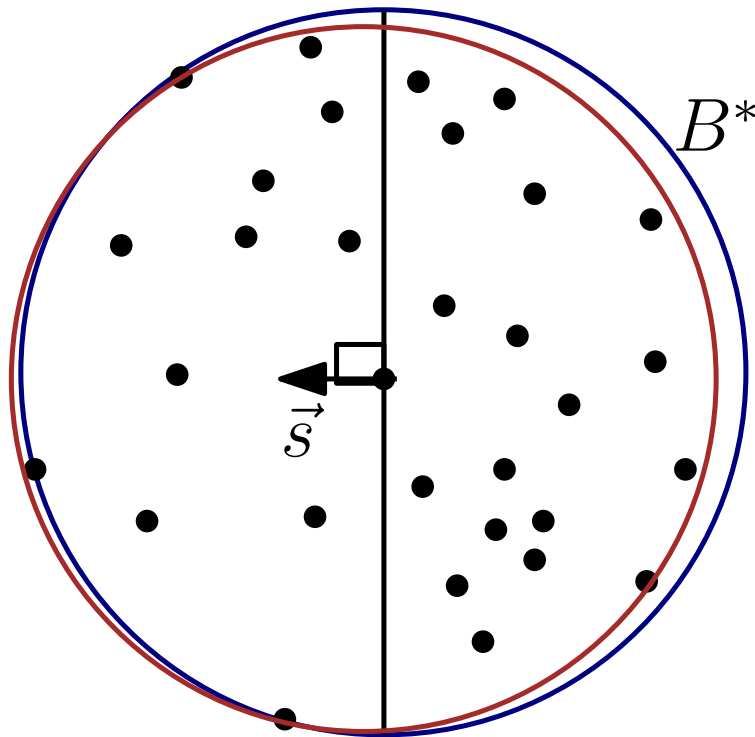
اگر الگوریتم ۵، را با  $z = 0$  بر روی جویبار داده اجرا کنیم، با مصرف حافظه و زمان به روزرسانی از مرتبه ی  $O(\frac{d}{\epsilon})$  می تواند یک جواب  $1/8$  - تقریب از جواب بهینه برای مسئله ی ۱ - مرکز ارائه می دهد. توجه کنید که برای حالتی که  $z = 0$  است، تنها لازم است  $m$  نمونه از الگوریتم اجرا نمود که هر نمونه نیز  $O(d)$  حافظه مصرف می کند. تنها تفاوتی که با الگوریتم قبلی در این استفاده ی جدید وجود دارد این است که، در زمان به دست آوردن جواب نهایی، از بین  $m$  گزینه، آن گزینه ای را به عنوان جواب نهایی می دهیم که کمترین  $r'$  را دارد (نه گزینه ای که کمترین شعاع را داشته باشد). با توجه به این که توپ با  $r'$  کمتری در گزینه ها نیست، بنابراین مطمئن هستیم که برای کمترین مقدار  $r'$  بین گزینه ها (که با  $r'_m$  نشان می دهیم)، داریم:

$$r_m \leq (1/2 + \frac{2\epsilon}{3})r^*$$

زیرا مطمئن هستیم  $r'$  ای که در بازه ی  $[1/2r^*, (1/2 + \frac{2\epsilon}{3})r^*]$  است در بین گزینه ها قرار دارد. حال اگر تویی که با استفاده از  $r'_m$  ساخته شده باشد، شعاعی برابر با  $\frac{3}{4}r'_m$  داشته باشد، مطمئن هستیم که  $B^*$  را به طور کامل می پوشاند و از طرفی شعاعش حداکثر  $1/8$  - برابر  $r^*$  است. اما اگر توپ گسترش نیافته باشند، یک توپ داریم که تمام نقاط را می پوشاند و شعاعش حداکثر  $1/2$  - برابر شعاع بهینه است. برای ادامه، نیاز به به دو لم زیر داریم:

**لم ۴-۶** فرض کنید مجموعه نقاط  $P$  از فضای  $\mathbb{R}^d$  داده شده اند.  $B^*$  را تویی با شعاع کمینه در نظر بگیرید که تمام نقاط را می پوشاند. آنگاه پوسته ی هر نیم کره از  $B^*$  شامل حداقل یک نقطه از  $P$  است.

اثبات. از برهان خلف استفاده می کنیم. همان طور که در شکل ۴-۵ نشان داده شده است، فرض کنید نیم کره ای از  $B^*$  وجود داشته باشد که در پوسته ی آن هیچ نقطه ای از  $P$  قرار ندارد. بردار عمود بر صفحه ای که کره ی  $B^*$  را به دو نیم کره تقسیم می کند را  $\vec{s}$  در نظر بگیرید (در جهت به خارج نیم کره). حال کافی است توپ  $B^*$  را به اندازه ی بسیار کمی (کمتر از فاصله ی نقاط توپ و نقاط  $P$ ) در جهت  $\vec{s}$  حرکت دهیم. با این حرکت، هیچ نقطه ای بر روی نیم کره قرار نمی گیرد و پوسته ی نیم کره ی مقابل نیز کاملاً خالی می شود. بنابراین می توان شعاع توپ را کاهش داد و به توپ قهوه ای رنگ که شعاع کمتری نسبت به  $B^*$  دارد رسید که تمام نقاط را می پوشاند، که با بهینه بودن  $B^*$  تناقض دارد. بنابراین فرض



شکل ۴-۵: اثبات لم ۴-۶

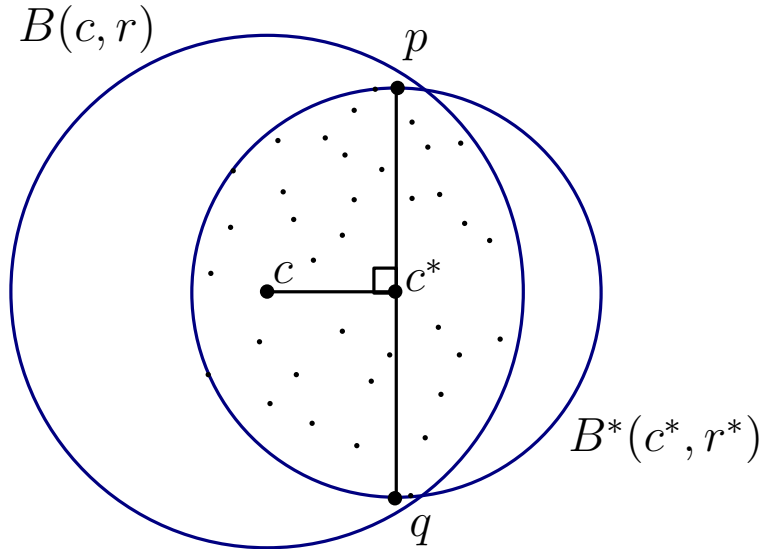
اولیه مبنی بر وجود نیم‌کره‌ای با پوسته‌ی خالی اشتباه بوده است.

□

لم ۴-۷ فرض کنید مجموعه نقاط  $P$  از فضای  $\mathbb{R}^d$  داده شده‌اند.  $B^*(c^*, r^*)$  را توپی با شعاع کمینه در نظر بگیرید که تمام نقاط را می‌پوشاند. توپ  $B(c, r)$  با شعاعی  $\alpha r^*$  در نظر بگیرید که تمام نقاط  $P$  را می‌پوشاند. ثابت می‌شود اگر شعاع توپ  $B$  را  $\sqrt{2}$  برابر کنیم، کل توپ  $B^*$  را نیز می‌پوشاند.

اثبات. همان‌طور که در شکل ۴-۶ نشان داده شده است، هر دوی  $B$  و  $B^*$  کلیه‌ی نقاط را می‌پوشانند. حال صفحه‌ی عمود بر پاره‌خط واصل  $c^*c$  را نظر بگیرید. مرز تقاطع صفحه‌ی رسم شده با توپ  $B^*$  یک دایره به نام  $D$  تشکیل می‌دهد. همان‌طور که در شکل پیداست، تمام نقاط این دایره از  $c$  به یک فاصله‌اند (به علت عمود بودن  $c^*c$  بر صفحه‌ی رسم شده)، بنابراین یا به طور کامل داخل  $B$  قرار می‌گیرد یا بیرون آن. ادعا می‌کنیم، دایره‌ی  $D$  به طور کامل داخل  $B$  قرار می‌گیرد، زیرا در صورتی که خارج  $B$  قرار بگیرد، پوسته‌ی نیم‌کره‌ی حاصل از تقاطع این صفحه که  $c$  در آن قرار نمی‌گیرد، به طور کامل خارج از  $B$  قرار گرفته و از طرفی طبق لم ۴-۶، حداقل یک نقطه‌ی  $s$  از  $P$  بر روی پوسته‌ی این نیم‌کره قرار دارد، که

می‌توان نتیجه گرفت  $s$  به وسیله  $B$  پوشانده نمی‌شود. تناقض، پس دایره  $D$  به طور کامل داخل  $B$  قرار می‌گیرد.



شکل ۴-۶: اثبات لم ۴-۷

نقطه‌ی دلخواه  $q$  بر روی این دایره را در نظر بگیرید. چون این نقطه بر روی پوسته‌ی  $B^*$  قرار دارد، بنابراین داریم:

$$\|c^*q\| = r^*$$

از طرفی دیگر، چون  $q \in B$  است بنابراین داریم:

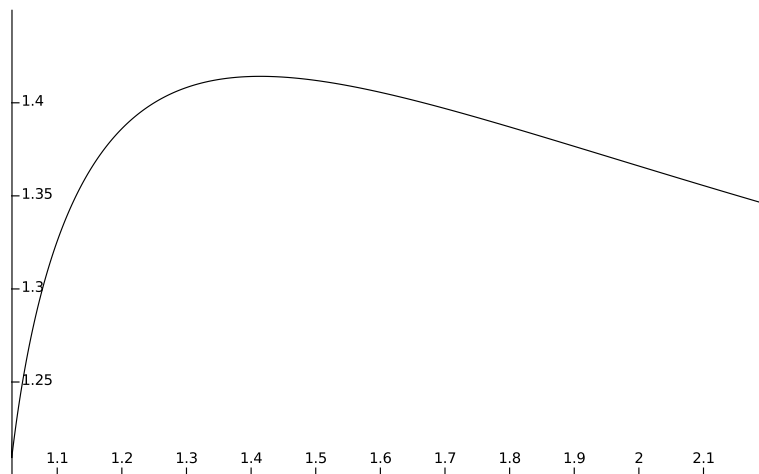
$$\|cq\| \leq r = \alpha r^*$$

و چون زاویه‌ی  $\angle cc^*q$  قائم است، طبق رابطه‌ی فیثاغورث داریم:

$$\|cc^*\| = \sqrt{\|cq\|^2 - \|c^*q\|^2} \leq \sqrt{\alpha^2 - 1} r^*$$

حال با توجه به این‌که  $\alpha \geq 1$  است، اگر شعاع دایره‌ی  $B$  را  $\sqrt{\alpha^2 - 1} r^*$  افزایش دهیم، دایره‌ی  $B^*$  را به طور کامل می‌پوشاند. در واقع برای افزایش شعاع به این میزان کافی است، شعاع را  $\frac{1 + \sqrt{\alpha^2 - 1}}{\alpha}$  برابر کنیم. اگر مطابق شکل ۴-۷ نمودار این تابع را رسم کنیم، می‌بینیم که حداکثر تابع در نقطه‌ی  $\sqrt{2}$  و برابر  $\sqrt{2}$  خواهد بود. توجه کنید که اگر  $\alpha \leq \sqrt{2}$  باشد، تابع در بازه‌ی  $[1, \alpha]$  مقداری کمتر از  $\sqrt{2}$  به خود می‌گیرد و همان‌طور که در نمودار پیداست، چون تابع در این بازه صعودی است، مقدار بیشینه در خود  $\alpha$  به دست می‌آید.

□



شکل ۴-۷: نمودار تابع  $\frac{1+\sqrt{\alpha^2-1}}{\alpha}$

با توجه به لم ۴-۷، برای حالتی که توپ گسترش پیدا نکرده است، اگر شعاعش را  $\sqrt{2}$  برابر کنیم، تضمین می‌کند که دایره‌ی بهینه را پوشانده است. با توجه به این‌که در این حالت شعاع توپ کم‌تر مساوی  $r^* \frac{1}{\sqrt{2}}$  است، با  $\sqrt{2}$  برابر کردن شعاعش به توپی با شعاعی حداکثر  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  برابر  $r^*$  دست خواهیم یافت. بنابراین در هر دو حالت، توپی را برمی‌گردانیم که توپ بهینه را به طور کامل می‌پوشاند، شعاع آن حداکثر  $\frac{1}{\sqrt{2}} + \epsilon$  برابر جواب بهینه است.

#### الگوریتم $\frac{1}{\sqrt{2}}$ - تقریب برای مسئله‌ی ۱ - مرکز پوشاننده در حالت جویبار داده

در این قسمت با استفاده از لم ۴-۷، الگوریتمی با ضریب تقریب  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  برای مسئله‌ی ۱ - مرکز پوشاننده در حالت جویبار داده ارائه می‌دهیم. ایده‌ی اصلی این الگوریتم، استفاده از یک الگوریتم  $\alpha$  - تقریب برای مسئله‌ی ۱ - مرکز در حالت جویبار داده است و افزایش شعاع آن در زمان پاسخ‌گویی به پرسمان برای پوشش کامل توپ بهینه. همان‌طور که در فصل کارهای پیشین ذکر شده است، بهترین الگوریتم موجود برای مسئله‌ی ۱ - مرکز در حالت جویبار داده، الگوریتم ارائه شده به وسیله‌ی آگاروال با حافظه‌ی مصرفی و زمان به‌روزرسانی  $O(d)$  و ضریب تقریب  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  است. حال اگر جواب این الگوریتم را بخواهیم افزایش بدهیم، طبق لر ۴-۷، باید شعاع آن را  $\frac{1+\sqrt{1/2-1}}{1/\sqrt{2}}$  برابر کنیم، که توپی با شعاع حداکثر  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  برابر شعاع توپ بهینه ارائه می‌دهد. زمان اجرا و حافظه‌ی مصرفی این الگوریتم همانند الگوریتم آگاروال،  $O(d)$  است.

### ۴-۲-۳ مسئله‌ی ۱- مرکز با داده‌های پرت در حالت جویبار داده با تعداد داده‌های پرت ثابت

در این قسمت، با استفاده از الگوریتم‌هایی که در قسمت قبل برای مسئله‌ی ۱- مرکز پوشاننده در حالت جویبار داده ارائه شده است، الگوریتم جدیدی برای مسئله‌ی ۱- مرکز با داده‌های پرت در حالت جویبار داده با تعداد داده‌های پرت ثابت ارائه می‌دهیم. در ابتدا لمی را ثابت می‌کنیم که نقش اساسی در اجرای الگوریتم دارد.

**لم ۴-۸** مجموعه‌ی  $P$  از نقاط در فضای  $\mathbb{R}^d$  در نظر بگیرید. حداکثر  $(d+1)^z$  حالت برای انتخاب نقاط پرت این مجموعه وجود دارد. در واقع حداکثر  $(d+1)^z$  زیرمجموعه‌ی  $z$  عضوی از  $P$  وجود دارد که دایره‌ی با شعاع کمینه‌ای که سایر نقاط  $P$  را می‌پوشاند، هیچ کدام از اعضای زیرمجموعه‌ی انتخابی را نپوشاند.

اثبات. از استقراء برای اثبات لم استفاده می‌کنیم.

• **پایه:** حکم برای  $z = 0$  برقرار است، زیرا در این حالت تنها یک حالت برای انتخاب مجموعه‌ی داده‌های پرت وجود دارد. (مجموعه‌ی  $\emptyset$ )

• **فرض:** فرض کنید که به ازای مجموعه‌ی دلخواه  $P$  در  $\mathbb{R}^d$ ، و  $z = k - 1$  حداکثر  $(d+1)^z$  حالت برای انتخاب زیرمجموعه داده‌های پرت وجود دارد.

• **حکم:** ثابت می‌کنیم به ازای هر مجموعه‌ی دلخواه  $P$  در  $\mathbb{R}^d$  و  $z = k$  حداکثر  $(d+1)^z$  حالت برای انتخاب زیرمجموعه داده‌های پرت وجود دارد. توپ به شعاع کمینه  $B^*$  که تمام نقاط  $P$  را می‌پوشاند را در نظر بگیرید. مجموعه‌ی  $S \subset P$  را که بر روی پوسته‌ی  $B^*$  قرار دارند را در نظر بگیرید. از بین اعضای  $S$  می‌توان زیرمجموعه‌ی حداکثر  $d+1$  عضوی  $S'$  را انتخاب کرد به طوری که دایره‌ی محاطی که کم‌ترین شعاع آن همان  $B^*$  گردد (در فضای  $d$ -بعدی، هر توپ را با حداکثر  $d+1$  نقطه روی پوسته‌ی آن می‌توان مشخص کرد).

زیرمجموعه‌ای دلخواه  $O$  برای داده‌های پرت را در نظر بگیرید. اگر  $O \cap S' = \emptyset$  باشد، آنگاه کوچک‌ترین توپی که  $P - O$  را می‌پوشاند همان  $B^*$  است، زیرا  $S'$  به طور کامل داخل  $P - O$  قرار می‌گیرد. بنابراین فرض تهی بودن اشتراک  $O$  و  $S'$  غلط است. بنابراین حداقل یکی از اعضای

$S'$  داخل  $O$  است. این عضو  $1 + d$  حالت برای انتخاب دارد. اگر این نقطه را از  $O$  و  $P$  حذف کنیم، مسئله به تعداد حالت‌های انتخاب داده‌های پرت با اندازه‌ی  $k - 1$  از مجموعه‌ی جدید تبدیل می‌شود که طبق فرض استقرای  $(d + 1)^{z-1}$  حالت دارد. در نتیجه در کل تعداد حالات انتخاب  $O$  حداکثر برابر  $(d + 1)^z$  است.

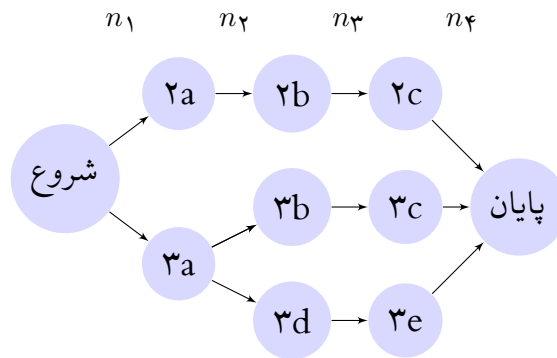
□

الگوریتم به گونه‌ای عمل می‌کند که تعدادی حالت مختلف را به طور موازی دنبال می‌کند. در ابتدا، قبل از ورود اولین نقطه، تنها یک حالت داریم (حالتی که مجموعه نقاط غیر پرت و پرت هردو تهی هستند). به ازای ورود نقطه‌ی جدید  $p$  از جویبار داده، به ازای هر کدام از حالت‌ها، آن را با دو حالت جای‌گزین می‌کنیم. اولین حالت، حالتی است که نقطه‌ی جدید را به مجموعه نقاط پرت حالت اولیه اضافه می‌کنیم و دومین حالت، حالتی است که آن را به مجموعه نقاط غیر پرت حالت اولیه اضافه می‌کنیم. توجه کنید که مجموعه نقاط پرت، یک حافظه با اندازه‌ی حداکثر  $z$  و مجموعه نقاط غیر پرت، همان اجرای الگوریتم ۱ - مرکز پوشاننده در حالت جویبار داده است.

یک گزینه در صورتی که تعداد نقاط پرتش از  $z$  بیش‌تر شود یا اینکه یکی از نقاط پرتش داخل توپ پوشاننده‌ی نقاط غیر پرت قرار بگیرد، حذف می‌گردد. با توجه به این‌که برای نقاط غیر پرت، از الگوریتمی استفاده می‌کنیم که توپ بهینه را به طور کامل می‌پوشاند، تعداد حالات نقاط پرت نیز در این حالت، حداکثر  $(d + 1)^z$  حالت است. بنابراین الگوریتمی ارائه دادیم که مسئله‌ی ۱ - مرکز با  $z$  داده‌ی پرت در حالت جویبار داده را با ضریب تقریب  $1/7$  (حاصل استفاده از الگوریتم ارائه شده در قسمت قبل برای مسئله‌ی ۱ - مرکز پوشاننده در حالت جویبار داده) حل می‌نماید. حافظه‌ی مصرفی و زمان به‌روزرسانی الگوریتم ارائه شده از مرتبه‌ی  $O(d \times (d + 1)^z)$  است.

### ۴-۳ مسئله‌ی ۲ - مرکز با داده‌های پرت در حالت جویبار داده

در این بخش، یک الگوریتم  $\epsilon + 1/8$  - تقریب برای مسئله‌ی ۲ - مرکز با داده‌های پرت در حالت جویبار داده ارائه می‌شود. در تمام الگوریتم‌های ارائه شده، فرض شده است که نقطه‌ی اول جویبار داده  $p_1$ ، داده‌ای غیر پرت است. این فرض را می‌توان همانند روشی که برای حذف این محدودیت در بخش دوم همین فصل انجام دادیم، با در نظر گرفتن  $1 + z$  نمونه از الگوریتم ارائه شده برطرف نمود.



شکل ۴-۸: حالت‌های الگوریتم کیم و آهن [۱]

همان‌طور که در بخش نمادگذاری‌ها ذکر شده بود،  $B_1^*(c_1^*, r^*)$  و  $B_2^*(c_2^*, r^*)$  را توپ‌های جواب بهینه برای مسئله‌ی ۲- مرکز با  $z$  داده‌ی پرت برای جویبارداده‌ی  $P$  در نظر بگیرید. شعاع توپ‌های بهینه را با  $r^*$  و فاصله‌ی دو توپ بهینه را با  $\delta^*$  نشان می‌دهیم. برای این‌که بتوانیم به نتیجه مطلوب برسیم، مسئله را به دو حالت تقسیم می‌کنیم. در زیربخش اول به بررسی حالت  $\delta^* \leq \alpha r^*$  و در زیربخش دوم به بررسی حالت  $\delta^* > \alpha r^*$  می‌پردازیم، که در آن  $\alpha$  یک عدد ثابت است که در طول تحلیل نشان داده می‌شود ۱۶ یک انتخاب مناسب برای  $\alpha$  است.

#### ۴-۳-۱ حالت $\delta^* \leq \alpha r^*$

ایده‌ی اصلی این بخش، تغییر الگوریتم ارائه شده به وسیله‌ی کیم<sup>۷</sup> و آهن<sup>۸</sup> [۱] که در اصل برای نگه‌داری مجموعه‌ی هسته برای مسئله‌ی ۲- مرکز در حالت جویبارداده با ضریب تقریب  $\epsilon + 1/8$  ارائه شده است، حاصل می‌گردد. الگوریتم آهن و کیم، در واقع مبنای الگوریتم‌های ارائه شده در همین پایان‌نامه برای مسئله‌ی ۱- مرکز با داده‌های پرت در حالت جویبارداده با ضریب تقریب  $\epsilon + 1/8$  و مسئله‌ی ۱- مرکز پوشاننده در حالت جویبارداده با ضریب تقریب  $\epsilon + 1/8$  است. تغییرات اعمال شده نیز بسیار شبیه عملکرد الگوریتم  $\epsilon + 1/8$  - تقریب برای مسئله‌ی ۱- مرکز با داده‌ی پرت است. بنابراین، در این قسمت، برای جلوگیری از تکرار، در ابتدا گام‌های اصلی الگوریتم کیم را بیان کرده و سپس تغییراتی که در الگوریتم جدید مورد نیاز است را ذکر می‌کنیم.

همان‌طور که در شکل ۴-۸ نشان داده شده است، الگوریتم کیم و آهن، دارای ۱۰ حالت مختلف



است. متناسب با نقاطی که تا کنون در جویبار داده آمده‌اند، الگوریتم در یکی از حالت‌های بالا قرار دارد. در هر کدام یک از حالت‌ها، الگوریتم دو توپ به عنوان نماینده‌ی جواب در این حالت در نظر می‌گیرد. انتقال بین حالت‌ها، تنها زمانی رخ می‌دهد که نقطه‌ای در جویبار داده وارد شود که در هیچ کدام از توپ‌های کاندید قرار نگیرد.

الگوریتم کیم و آهن، از گره‌ی شروع، شروع می‌کند و با رسیدن نقاط جدید از جویبار داده در طول گراف مطابق با یال‌ها جابه‌جا می‌گردد. در بعضی از حالت‌ها، بیش‌تر یک حالت برای حالت بعدی وجود دارد (گره‌ی معادل آن حالت، درجه‌ی خروجی بیش از یک دارد) و الگوریتم هیچ اطلاعات قبلی ندارد که کدام یک حالت را به عنوان حالت بعدی انتخاب کند. اما اگر بیش‌تر دقت کنید، تنها ۳ مسیر از گره‌ی شروع به گره‌ی انتهایی وجود دارد. بنابراین کافی است، در ابتدا سه نمونه‌ی موازی از الگوریتم به طور موازی اجرا کنیم که هر کدام به صورت قطعی<sup>۹</sup> مسیر تعیین شده را دنبال می‌کند و در هر لحظه مطمئن هستیم که حداقل یکی از سه مسیر، مسیر درستی است.

در دوزیر بخش بعدی، تغییراتی که در الگوریتم آهن و کیم برای مسئله‌ی ۲ - مرکز با داده‌های پرت ارائه دادیم را بیان می‌کنیم. در بخش اول، تغییرات اصلی در الگوریتم برای تشخیص داده‌های پرت را ارائه می‌دهیم و در زیر بخش دوم، به نحوه‌ی پیدا کردن  $r'$  مورد نیاز الگوریتم اصلی می‌پردازیم (تعریف  $r'$  کاملاً مشابه  $r$  استفاده شده در الگوریتم  $\epsilon + 1/8$  - تقریب برای مسئله‌ی ۱ - مرکز با داده‌های پرت در همین پایان‌نامه است).

### الگوریتم اصلی

در این بخش تغییراتی که بر روی الگوریتم کیم و آهن ارائه دادیم را بیان می‌کنیم. الگوریتم ارائه شده، کاملاً مشابه الگوریتم ارائه شده برای مسئله‌ی ۱ - مرکز با داده‌های پرت است که در همین فصل مورد بررسی قرار گرفت. تغییر اصلی الگوریتم جدید، بر روی قسمت انتقال بین حالات اعمال شده است.

در طول اجرای الگوریتم، هر نقطه اگر داخل دو توپ کاندید قرار بگیرد باعث تغییر حالت الگوریتم نمی‌گردد. بنابراین حذف چنین نقاطی در روند اجرای الگوریتم تغییری ایجاد نمی‌کند. توجه کنید اگر یک نقطه در داخل دو توپ کاندید یک حالت قرار بگیرد، در دو توپ حالت‌هایی که از این حالت قابل رسیدن هستند نیز قرار می‌گیرد، زیرا زمانی که از یک حالت به حالت جدید می‌رویم، کاندیدها به گونه‌ای

<sup>۹</sup> Deterministic

تغییر می‌کنند که کاندیدهای قبلی را به طور کامل می‌پوشانند.

بنابراین تنها وجود نقاطی در جویبار داده مهم هستند که خارج توپ‌های کاندید قرار می‌گیرند. با توجه به این‌که این نقاط تنها باعث افزایش شعاع توپ‌های کاندید می‌گردند و وجودشان در روند الگوریتم تاثیر دارد، بنابراین تنها گزینه‌های مطرح برای نقاط پرت محسوب می‌شوند.

از طرفی چون در هر حالت، تعداد نقاط پرت غیر مشخص است، مجبور هستیم تمام حالت‌های ممکن برای نقاط پرت را در نظر بگیریم. چون گراف تغییر حالات<sup>۱۰</sup>، یک گراف جهت‌دار بدون دور با عمق ۴ است، کافی است به ازای هر عمق گراف، تعداد نقاط پرت  $(n_i)$  مشخص کنیم و برای در نظر گرفتن تمام حالات ممکن، تمام ۴-تایی‌های صحیح نامنفی  $(n_1, \dots, n_4)$  که  $\sum_{i=1}^4 n_i = z$  را در نظر بگیریم. به راحتی می‌توان نشان داد که تعداد چنین ۴-تایی‌هایی از مرتبه‌ی  $O(z^3)$  است.

شبه‌کد الگوریتم ارائه شده در الگوریتم ۶ نشان داده شده است. به ازای تمام حالت‌های ممکن برای  $n_1$  تا  $n_4$  و هر مسیر مجاز از بین سه مسیر موجود بین گره‌ی شروع تا پایان، الگوریتم یک جواب کاندید  $(B_1, B_2)$  برای پوشش نقاط غیر پرت نگه می‌دارد. متغیر  $z$ ، برای هر حالت، عمق آن حالت را مشخص می‌کند. چهار شمارنده نیز برای شمارش تعداد نقاطی که در هر عمق به عنوان داده‌ی پرت در نظر گرفته شده‌اند استفاده می‌شود.

الگوریتم ابتدا با دو کاندید  $B_1 = B(p_1, r')$  و  $B_2 = \emptyset$  شروع می‌کند که معادل حالت شروع الگوریتم کیم و آهن است. پس از ورود هر نقطه‌ی  $p$  از جویبار داده، در ابتدا بررسی می‌شود که نقطه‌ی مورد نظر در توپ‌های کاندید قرار می‌گیرند یا نه. اگر قرار بگیرند به سراغ نقطه‌ی بعدی می‌رویم. در غیر این صورت، اگر تعداد نقاط پرت در این عمق (فرض کنید در عمق  $z$  ام هستیم) به  $n_j$  نرسیده باشد، نقطه‌ی  $p$  را به عنوان داده‌ی پرت در نظر می‌گیریم و به سراغ نقطه‌ی بعدی می‌رویم. در غیر این صورت، مطابق مسیر انتخاب شده، به حالت بعدی می‌رویم و توپ‌های کاندید  $(B_1, B_2)$  را مطابق با الگوریتم کیم و آهن، به‌روزرسانی می‌کنیم. توجه کنید که برای انتقال حالت مطابق الگوریتم کیم و آهن، علاوه بر نقطه‌ی  $p$ ، ما مسیر حرکت را نیز می‌دهیم که به طور قطعی، حالت بعدی مشخص شود.

زمانی که تمام نقاط  $P$  پردازش شدند، اگر هنوز به گره‌ی پایان وارد نشده‌ایم، توپ‌های کاندید را به عنوان یک جواب به مجموعه جواب اضافه می‌کنیم. در غیر این صورت مطابق عملکرد الگوریتم کیم و

<sup>۱۰</sup>Transition Graph

---

 الگوریتم ۶ مسئله‌ی ۲ – مرکز در حالت نزدیک
 

---

- ورودی: مجموعه نقاط  $P$ ، عدد ثابت  $r'$  در بازه‌ی  $[1/2r^*, (1/2r^* + \frac{1}{4}\epsilon)r^*]$  و  $z$  تعداد نقاط پرت
- ۱: مجموعه جواب  $S$  را برابر  $\emptyset$  قرار بده.
  - ۲: به ازای هر  $4$  – تایی  $(n_1, \dots, n_4)$  که  $\sum_{i=1}^4 n_i = z$ :
  - ۳: به ازای هر  $\pi \in \{1, 2, 3\}$ : انتخاب یکی از سه مسیر مختلف
  - ۴: به ازای هر  $i$  از بین  $\{1, \dots, 4\}$ :
  - ۵:  $counter_i$  را برابر صفر قرار بده.
  - ۶:  $B_1$  را  $B(p_1, r')$  قرار بده.
  - ۷:  $B_2$  را مجموعه‌ی  $\emptyset$  قرار بده.
  - ۸: متغیر  $j$  را برابر ۱ قرار بده.  $\triangleleft$  متغیر  $j$  عمق حالت را مشخص می‌کند.
  - ۹: به ازای هر  $p \in P$ :
  - ۱۰: اگر  $p \notin B_1 \cup B_2$ :
  - ۱۱:  $counter_j$  را یک عدد افزایش بده.
  - ۱۲: اگر  $counter_j > n_j$ :
  - ۱۳:  $j$  را یک عدد افزایش بده.  $\triangleleft$  در مسیر  $\pi$  به حالت بعدی برو
  - ۱۴: توپ‌های کاندید  $(B_1, B_2)$  را با توپ‌های کاندید حاصل از انتقال حالت مطابق مسیر  $\pi$  در الگوریتم کیم و آهن جایگزین کن.
  - ۱۵: اگر  $j \leq 4$ :
  - ۱۶: شعاع توپ با شعاع بیشینه از بین دو توپ  $B_1$  و  $B_2$  را به مجموعه  $S$  اضافه کن.
  - ۱۷: کم‌ترین شعاع داخل مجموعه‌ی  $S$  را برگردان
-

آهن این حالت، از بین حالات موجود حذف می‌شود. در نهایت از بین تمام جواب‌های ممکن، بهترین جواب را با کم‌ترین شعاع به عنوان جواب نهایی می‌دهیم. همان‌طور کهیم و آهن [۱] ثابت کرده‌اند، جوابی که با این روش محاسبه می‌شود دارای شعاعی حداکثر  $\frac{2}{3}r^*$  است، با فرض اینکه  $\delta^* \leq \alpha r^*$  باشد (اثبات بیان شده برای  $\alpha = 2$  بیان شده است، اما می‌توان نشان داد که به ازای هر  $\alpha$  ثابتی این اثبات صادق است). بنابراین با فرض داشتن  $r^* \leq (\frac{1}{2} + \frac{2\epsilon}{3})r^*$ ، قضیه زیر برقرار است:

**قضیه ۴-۹** به ازای  $r^* \leq (\frac{1}{2} + \frac{2\epsilon}{3})r^*$  داده شده و با فرض  $\delta^* \leq \alpha r^*$ ، الگوریتم ۶ یک جواب  $\epsilon + \frac{1}{8}$  - تقریب برای جواب بهینه مسئله ۲ - مرکز با  $z$  داده‌ی پرت ارائه می‌دهد. حافظه‌ی مصرفی این الگوریتم از مرتبه‌ی  $O(dz^3)$  و زمان به‌روزرسانی/پاسخ‌گویی به پرسمان آن، از مرتبه‌ی  $O(dz^3)$  است (با فرض پرت نبودن داده‌ی اول).

در زیر بخش بعدی، نحوه‌ی پیدا کردن  $r'$  مناسب را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

#### پیدا کردن $r'$

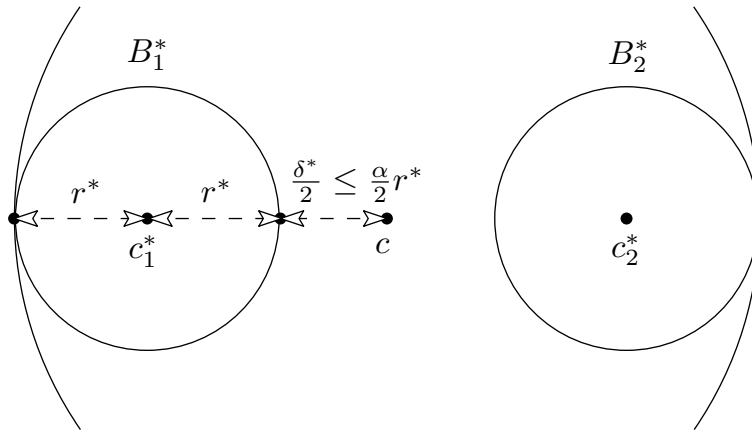
در این زیر بخش، نشان می‌دهیم که چگونه  $r'$  مناسبی را پیدا کنیم که در رابطه‌ی

$$\frac{1}{2}r^* \leq r \leq (\frac{1}{2} + \frac{2\epsilon}{3})r^*$$

صدق کند. لم زیر ایده‌ی اصلی را بیان می‌کند.

**لم ۴-۱۰** مجموعه نقاط  $P$  در فضای  $\mathbb{R}^d$  داده شده است. یک جواب بهینه برای مسئله ۱ - مرکز با  $z$  داده‌ی پرت برای مجموعه نقاط  $P$ ، با فرض  $\delta^* \leq \alpha r^*$ ، یک  $(2 + \frac{\alpha}{3})$  - تقریب برای مسئله ۲ - مرکز با  $z$  داده‌ی پرت برای مجموعه‌ی نقاط  $P$  ارائه می‌دهد.

اثبات. فرض کنید  $r_1^*$  و  $r^*$  به ترتیب شعاع بهینه برای مسئله ۱ - مرکز و ۲ - مرکز با  $z$  داده‌ی پرت برای مجموعه نقاط  $P$  باشد. به وضوح  $r^* \leq r_1^*$  است، زیرا هر جواب درست  $B^*$  برای مسئله ۱ - مرکز با  $z$  داده‌ی پرت، یک جواب درست  $(B^*, B^*)$  برای مسئله ۲ - مرکز با  $z$  داده‌ی پرت ارائه می‌دهد. حال  $B_1^*(c_1^*, r^*)$  و  $B_2^*(c_2^*, r^*)$  را دو توپ جواب مسئله ۲ - مرکز با  $z$  داده‌ی پرت در نظر بگیرید.  $c$  را نقطه‌ی میانی پاره‌خط واسط مراکز  $c_1^*$  و  $c_2^*$  در نظر بگیرید (همان‌طور که در شکل ۴-۹ نشان داده شده



شکل ۴-۹: اثبات لم ۴-۱۰

است). به وضوح،  $B(c, \frac{\delta^*}{4} + 2r^*)$  هر دوی  $B_1^*$  و  $B_2^*$  را می‌پوشاند. بنابراین یک جواب قابل قبول برای مسئله‌ی ۱- مرکز با  $z$  داده‌ی پرت است، و در نتیجه داریم:

$$r_1^* \leq (2 + \frac{\alpha}{4})r^*$$

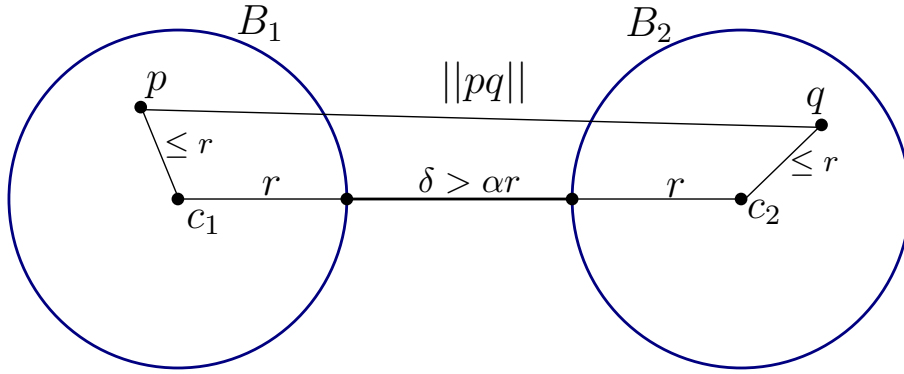
□

حال کافی است، به طور کاملاً مشابه با الگوریتم ۵ از الگوریتم ۴ برای تقریب  $r^*$  استفاده کنیم و با تقسیم بندی بازه‌ی  $[0, 1/2r]$  به  $m = \lceil \frac{1/\epsilon}{4} \times (4 + \alpha) \rceil$  زیربازه، تمام گزینه‌های ممکن را امتحان کنیم. با استفاده از روش ارائه شده و با حذف فرض پرت نبودن داده‌ی اول جویبار داده به قضیه‌ی زیر می‌رسیم:

**قضیه‌ی ۴-۱۱** اگر  $\delta^* \leq \alpha r^*$  باشد، یک  $(1/8 + \epsilon)$ -تقریب برای مسئله‌ی ۲- مرکز با  $z$  داده‌ی پرت با مصرف حافظه‌ی  $O(\frac{dz^4}{\epsilon})$  و زمان به‌روزرسانی  $O(\frac{dz^5}{\epsilon})$  قابل ارائه است.

**۴-۳-۲ حالت  $\delta^* > \alpha r^*$**

در این بخش، الگوریتمی با ضریب تقریب  $1/8$  برای حالتی که دو توپ بهینه بیش از  $\alpha r^*$  یک‌دیگر فاصله دارند. با دو مشاهده‌ی ساده شروع می‌کنیم.



شکل ۴-۱۰: اثبات مشاهده‌ی ۴-۱۲

**مشاهده‌ی ۴-۱۲** فرض کنید که توپ  $B_1$  و  $B_2$ ، دو توپ با شعاع  $r$  باشند، به‌طوری‌که که فاصله‌ی بیش‌تر از  $\alpha r$  دارند. به ازای هر دو نقطه‌ی  $p \in B_1$  و  $q \in B_2$ ، داریم:

$$1 \leq \frac{\|pq\|}{\delta} < \frac{4 + \alpha}{\alpha}$$

اثبات. همان‌طور که در شکل ۴-۱۰ می‌بینید، با استفاده از نامساوی مثلثی رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$\|pq\| \leq \|pc_1\| + \|c_1c_2\| + \|c_2q\| \leq r + r + \delta + r + r$$

از طرفی با توجه با نحوه‌ی تعریف  $\delta$ ، می‌دانیم فاصله‌ی هر زوج دلخواه از  $(B_1, B_2)$  از جمله  $p$  و  $q$ ، حداقل  $\delta$  است. در نتیجه داریم:

$$\delta \leq \|pq\| \leq 4r + \delta$$

که با تقسیم طرفین بر  $\delta$  به حکم مسئله می‌رسیم.

□

**مشاهده‌ی ۴-۱۳** فرض کنید  $B_1$  و  $B_2$  دو توپ با فاصله‌ی  $\delta$  باشند و  $B$  یک توپ با شعاع کم‌تر از  $\frac{\delta}{4}$  باشد. آنگاه  $B$  حداکثر با یکی از  $B_1$  و  $B_2$  تقاطع دارد.

در ادامه، تعدادی ویژگی برای توپ‌های بهینه‌ی  $B_1^*$  و  $B_2^*$  ارائه می‌دهیم.

**لم ۴-۱۴** فرض کنید  $B_1^*$  و  $B_2^*$  دو توپ  $\alpha$ -جداپذیر باشند ( $\alpha > 4$ ). اگر نقطه‌ی دلخواه از  $B_1^*$  و  $S$  زیرمجموعه‌ی  $1 + z$  عضوی از  $P$  شامل دورترین نقاط از  $p$  باشد، آنگاه  $B_1^* \cap S$  ناتهی است.

اثبات. از برهان خلف برای اثبات استفاده می‌کنیم. با برهان خلف فرض می‌کنیم که خلاف حکم مسئله برقرار و  $S \cap B_p^*$  تهی باشد. چون  $|S| = z + 1 > z$  است، بنابراین حداقل عضوی از  $S$  وجود دارد که جزء داده‌های پرت در جواب بهینه نیست و چون  $S$  اشتراکش با  $B_p^*$  تهی است، بنابراین آن عضو داخل  $B_p^*$  قرار دارد و مجموعه‌ی  $B_p^* \cap S$  ناتهی است. نقطه‌ی  $q$  را دورترین عضو  $B_p^* \cap S$  در نظر بگیرید. توپ  $B(p, \|pq\|)$  را در نظر بگیرید. به ازای هر نقطه‌ی  $s \in P \setminus S$ ، زیرا  $s \notin S$  و  $q \in S$  است. بنابراین،  $B$ ، مجموعه‌ی  $P \setminus S$  را به طور کامل می‌پوشاند. از طرفی چون  $p, q \in B_p^*$  است داریم:

$$\|pq\| \leq \|pc_p^*\| + \|c_p^*q\| \leq 2r^*$$

بنابراین با توجه به مشاهده‌ی ۴-۱۳،  $B_p^* \cap B$  تهی است. بنابراین  $B_p^* \cap P$  تهی است و در نتیجه  $B_p^*$  تهی است، که با بهینه بودن  $B_p^*$  و  $B_p^*$  تناقض دارد.

□

لم ۴-۱۵ فرض کنید  $p$  نقطه‌ای دلخواه در  $B_p^*$  باشد و  $q$ ،  $z + 1$  - دورترین نقطه از  $p$  باشد. آنگاه  $\delta^* > \frac{\alpha}{\alpha+4} \|pq\|$ .

اثبات. با استفاده از لم ۴-۱۴، نقطه‌ی  $q' \in B_p^*$  وجود دارد به طوری که  $\|pq\| \leq \|pq'\|$ . بنابراین با توجه به مشاهده‌ی ۴-۱۲ داریم:

$$\frac{\|pq\|}{\delta^*} \leq \frac{\|pq'\|}{\delta^*} < \frac{\alpha + 4}{\alpha}$$

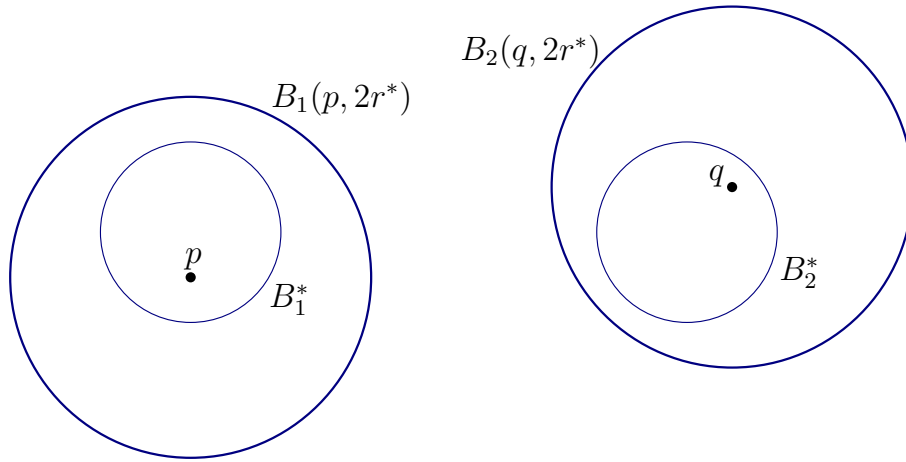
□

لم ۴-۱۶ دو نقطه‌ی  $p \in B_p^*(c_1, r^*)$  و  $q \in B_p^*(c_2, r^*)$  در نظر بگیرید، آنگاه  $B_p^* \subset B(p, 2r^*) \subset B(q, 2r^*)$  است و در نتیجه حداکثر  $z$  نقطه از  $P$  خارج  $B(p, 2r^*) \cup B(q, 2r^*)$  قرار می‌گیرد.

اثبات. نقطه‌ی دلخواه  $p' \in B_p^*$  در نظر بگیرید. داریم:

$$\|pp'\| \leq \|pc_1\| + \|p'_c_1\| \leq 2r^*$$

و در نتیجه  $B_p^* \subset B(p, 2r^*)$  است (به شکل ۴-۱۱ مراجعه کنید). به طور مشابه ثابت می‌شود  $B_p^* \subset B(q, 2r^*)$  است. با توجه به این که حداکثر  $z$  نقطه‌ی پرت خارج  $B_p^*$  و  $B_p^*$  قرار می‌گیرد، در نتیجه اثبات کامل است.



شکل ۴-۱۱: اثبات لم ۴-۱۶

□

لم ۴-۱۷ فرض کنید  $S$  زیرمجموعه‌ای از  $P$  با اندازه‌ی حداقل  $(z+1)(d+1)$  باشد که توسط توپی با شعاع کم‌تر از  $\frac{\delta^*}{4}$  پوشانده می‌شود. آنگاه  $c_p$  نقطه‌ی مرکزی نقاط  $S$ ، یا داخل  $B^*$  قرار می‌گیرد یا داخل  $B^*$  قرار می‌گیرد.

اثبات. با توجه به این که اندازه‌ی  $S$  بیش‌تر از  $z$  است، حداقل یک نقطه‌ی غیر پرت داخل  $S$  قرار دارد. بنابراین با توجه به مشاهده‌ی ۴-۱۳،  $B$  دقیقاً با یکی از  $B_1^*$  یا  $B_2^*$  تقاطع دارد. بدون کم شدن از کلیت مسئله، فرض کنید  $B$  با توپ  $B_1^*$  تقاطع دارد. حال اگر  $c_p \notin B_1^*$  نباشد، بنابراین طبق مشاهده‌ی ۴-۱ حداقل  $z+1$  نقطه‌ی دیگر خارج  $B_1^*$  قرار می‌گیرند، که وجود حداقل  $z$  داده‌ی پرت را نقض می‌کند. بنابراین فرض  $c_p \notin B_1^*$  اشتباه بوده و حکم ثابت شد.

□

### الگوریتم اصلی

در این قسمت، الگوریتم اصلی برای حالتی که  $\delta^* > \alpha r^*$  است. در هر لحظه، الگوریتم نقاط  $P$  از جویبار داده را به سه دسته‌ی مجزای  $B_1$ ،  $B_2$  و حافظه‌ی میان‌گیر Buffer افراز می‌کند. بدون کم شدن از کلیت مسئله، فرض کنید  $p_1 \in B_1^*$  است. الگوریتم سعی می‌کند نقاط را به گونه‌ای به سه دسته افراز کند که  $B_1$  به طور کامل  $B_1^*$  را بپوشاند و  $B_2$ ،  $B_1^*$  را به طور کامل بپوشاند و Buffer تنها شامل تعدادی از



نقاط پرت در جواب بهینه است. توجه کنید که  $B_1$  و  $B_2$  علاوه بر پوشش توپ متناظر در جواب بهینه، ممکن است تعدادی از نقاط پرت را نیز شامل شوند.

با شروع الگوریتم، مرکز توپ  $B_1$  را که با  $c_1$  نشان می‌دهیم برابر  $p_1$  قرار می‌دهد و  $c_2$  را از میان نقاطی که تا کنون پردازش شده است به عنوان کاندیدی برای مرکز  $B_2$  انتخاب می‌کند. الگوریتم همچنین دو متغیر  $\delta$  و  $r$  را در طول جویبار داده به‌روزرسانی می‌کند به طوری که در هر لحظه،  $\delta$  کران پایینی برای  $\delta^*$  است و  $r$  تحت شرایطی که در ادامه گفته می‌شود، کران بالایی برای  $2r^*$  است.

شبه کد الگوریتم، در الگوریتم ۷ آورده شده است. به محض ورود نقطه‌ی  $p$  از جویبار داده‌ی  $P$ ، الگوریتم ارائه شده، سعی می‌کند آن را به توپ  $B_1$  یا  $B_2$  اضافه کند. عمل اضافه کردن نقاط به توپ‌های  $B_1$  و  $B_2$  به ترتیب به وسیله‌ی توابع  $AddToB_1$  و  $AddToB_2$  انجام می‌شود. اگر نقطه‌ی  $p$ ، در هیچ کدام از توپ‌ها قرار نگیرد، به  $Buffer$  اضافه می‌شود. تابع  $AddToB_1$  نقطه‌ی  $p$  را به  $B_1$  اضافه می‌کند اگر فاصله‌ی  $p$  از  $c_1$  کم‌تر مساوی  $\delta$  باشد. تابع  $AddToB_2$  نقطه‌ی  $p$  را به مجموعه‌ی  $B_2$  اضافه می‌کند اگر نقطه‌ی  $p$  از  $c_2$  حداکثر  $r$  فاصله داشته باشند. هر دوی توابع، مقدارهای  $\delta$  و  $r$  را در صورت لزوم تغییر می‌دهند که ناوردهای داخل لم ۴-۱۸ برقرار بمانند.

زمانی که  $Buffer$  سرریز می‌کند (در الگوریتم ۷)، الگوریتم یکی از دو عملیات زیر را وابسته به این‌که اندازه‌ی  $B_2$  چقدر است، انجام می‌دهد. اگر اندازه‌ی  $|B_2|$  بزرگ‌تر مساوی  $(z+1)(d+1)$  باشد، تمام اعضای  $B_2$  را به  $B_1$  اضافه می‌شود و  $B_2$  خالی می‌گردد. در غیر این صورت،  $c_2$  در صورتی که قبلاً تعیین شده باشد، به  $B_1$  اضافه می‌شود و نقطه‌ی دیگری از  $B_2 \cup Buffer \setminus \{c_2\}$  به عنوان  $c_2$  جدید انتخاب می‌گردد. حلقه‌ی مذکور، حداکثر  $O(dz)$  بار اجرا می‌شود، زیرا پس از اولین اجرا، مطمئن هستیم که  $T$  حداکثر  $z + (z+1)(d+1)$  نقطه دارد و در هر مرحله حداقل یک عنصر از آن حذف می‌گردد ( $c_2$ ). توجه داشته باشید که هر نقطه حداکثر یک بار به عنوان  $c_2$  انتخاب می‌شود، بنابراین حلقه‌ی مذکور، به طور سرشکن<sup>۱۱</sup> یک بار به ازای هر نقطه از جویبار داده اجرا می‌شود.

برای تحلیل، علاوه بر  $c_2$ ، نیاز به نقطه‌ی مرکزی به نام  $c_p$  داریم. زمانی که  $|B_2| < (z+1)(d+1)$ ، آن‌گاه  $c_p$  همان  $c_2$  است و در غیر این صورت،  $c_p$  را نقطه‌ی مرکزی  $(z+1)(d+1)$  نقطه‌ی اولی که به

<sup>۱۱</sup>Amortized

---

الگوریتم ۷ الگوریتم برای ۲- مرکز در حالت دور

---

- ۱:  $c_1$  را برابر  $p_1$  قرار بده.
  - ۲:  $r$  و  $\delta$  را برابر صفر قرار بده.
  - ۳: به ازای هر نقطه‌ی  $p \in P$ :
  - ۴: اگر  $p_1$  قابل اضافه شدن به  $B_1$  و  $B_2$  نبود:  $\Leftarrow$  از دو تابع  $AddToB_1$  و  $AddToB_2$  به ترتیب برای اضافه کردن نقطه به  $B_1$  و  $B_2$  استفاده کنید.
  - ۵:  $p$  را به Buffer اضافه کن.
  - ۶: تا وقتی  $|Buffer| \geq z$ :
  - ۷: اگر  $|B_2| \geq (d+1)(z+1)$ :
  - ۸:  $B_1$  را برابر  $B_1 \cup B_2$  قرار بده.
  - ۹:  $B_2$  را برابر مجموعه‌ی تهی قرار بده.
  - ۱۰: در غیر این صورت:
  - ۱۱: اگر  $c_2$  مشخص شده است:
  - ۱۲:  $c_2$  را به  $B_1$  اضافه کن.
  - ۱۳: متغیر محلی  $T$  را برابر  $Buffer \cup B_2 \setminus \{c_2\}$  قرار بده.
  - ۱۴:  $B_2$  را تهی قرار بده.
  - ۱۵:  $c_2$  را  $(z+1)$ -امین دورترین نقطه از  $c_1$  در  $T$  قرار بده.
  - ۱۶:  $r$  را برابر با  $\frac{2}{\alpha} \|c_1 c_2\|$  قرار بده.
  - ۱۷: به ازای هر  $p \in T$ :
  - ۱۸:  $p$  را به  $B_2$  اضافه کن.
  - ۱۹: Buffer را برابر  $B_2 \setminus T$  قرار بده.
-

الگوریتم ۸ تابع اضافه‌کننده نقطه به  $B_1$ 

- ۱: اگر حداقل  $1 + z$  نقطه پردازش شده است:
- ۲:  $q$  را  $(z + 1)$ -دورترین نقطه از  $c_1$  در نقاطی که تا کنون آمده‌اند در نظر بگیر.
- ۳: در غیر این صورت:
- ۴:  $q$  را برابر  $c_1$  در نظر بگیرد.
- ۵:  $\delta$  را برابر  $\frac{\alpha}{\alpha+4} \|c_1 q\|$  قرار بده.
- ۶: اگر  $p \in B(c_1, \delta)$ :
- ۷:  $p$  را به مجموعه‌ی  $B_1$  اضافه کن.
- ۸: برگردان true
- ۹: برگردان false

$B_2$  اضافه می‌شوند قرار می‌دهیم.

لم ۴-۱۸ ثابت‌های حلقه‌ی زیر در طول اجرای الگوریتم حفظ می‌شوند:

$$1. \delta < \delta^*$$

$$2. r \leq \frac{\delta}{4}$$

$$3. B_1 \cap B_2^* = \emptyset$$

$$4. \text{ اگر } c_p \in B_2^* \text{ باشد، آن‌گاه:}$$

$$2r^* \leq r \quad (\bar{I})$$

$$(ب) \quad B_2 \cap B_2^* = \emptyset$$

(ج) تمام نقاط داخل Buffer در جواب بهینه داده‌ی پرت هستند.

اثبات. ۱. در ابتدای اجرای الگوریتم  $\delta = 0$  است که به وضوح حکم برقرار است. بعد از این که  $1 + z$  نقطه از جویبار داده پردازش می‌شود، تابع  $AddToB_1$  مقدار  $\delta$  را به  $\frac{\alpha}{\alpha+4} \|c_1 q\|$  افزایش می‌دهد، که

الگوریتم ۹ تابع اضافه‌کننده نقطه به  $B_2$ 

۱: اگر  $c_2$  تعیین شده باشد و  $p \in B(c_2, r)$ :

۲:  $p$  را به  $B_2$  اضافه کن.

۳: اگر  $|B_2| = (d+1)(z+1)$ :

۴:  $r$  را  $(2 + \frac{2}{\alpha})$  برابر کن.

۵: به ازای  $p \in B(c_2, r)$ :

۶: اگر  $p \in B(c_2, r)$ :

۷:  $p$  را به  $B_2$  اضافه کن.

۸:  $p$  را از Buffer حذف کن.

۹: در غیر این صورت:

۱۰: برگردان true

۱۱: برگردان false

در آن  $q, (z+1)$  - دورترین نقطه از  $c_2$  در جویبار داده است. از طرفی چون  $c_1 \in B_1^*$  است، طبق

لم ۴-۱۵ داریم  $\delta < \delta^*$

۲. زمانی که متغیر  $c_2$  در الگوریتم ۷ تعیین می‌شود،  $(z+1)$  - دورترین نقطه از  $c_1$  در بین اعضای

$T \subset P$  است و  $r$  برابر  $\frac{2}{\alpha} \|c_1 c_2\|$  است. اگر  $q, (z+1)$  - دورترین نقطه از  $c_1$  در جویبار داده در آن

لحظه باشد، آنگاه  $\|c_1 c_2\| \leq \|c_1 q\|$  است. با فرض این که  $\alpha \geq 16$  باشد، داریم:

$$\frac{2}{\alpha} \|c_1 c_2\| \leq \frac{1}{6} \times \frac{\alpha \|c_1 q\|}{\alpha + 4} \leq \frac{\delta}{6}$$

و در نتیجه:

$$r \leq (2 + \frac{2}{\alpha}) \times \frac{2}{\alpha} \|c_1 c_2\| \leq 3 \times \frac{2}{\alpha} \|c_1 c_2\| \leq \frac{\delta}{4}$$

که نشان می‌دهد که صورت ناوردا درست است، حتی بعد از افزایشی که در تابع  $AddToB_2$  می‌یابد.

۳. در ابتدا لم زیر را ثابت می‌کنیم:

ادعای ۴-۱۹ اگر  $c_2$  تعیین شده باشد، آنگاه  $B(c_p, \frac{2}{\alpha} \|c_1 c_p\|) \subset B_2(c_2, r)$  است.

اثبات. اگر  $|B_2| < (d+1)(z+1)$  باشد، با توجه به این که  $c_p = c_2$  است و  $r = \frac{2}{\alpha} \|c_1 c_2\|$ ، در نتیجه  $B_2 = B(c_p, \frac{2}{\alpha} \|c_1 c_p\|)$  است و حکم برقرار است. در حالتی که اندازه  $B_2$  به  $(d+1)(z+1)$  می‌رسد، نقطه  $c_p$  به نقطه‌ی مرکزی نقاط  $B_2$  انتقال می‌یابد و  $r$ ، برابر می‌گردد. از طرفی چون نقطه‌ی مرکزی نقاط داخل  $B_2$ ، داخل  $B_2$  قرار می‌گیرد، بنابراین  $c_p \in B(c_2, \frac{2}{\alpha} \|c_1, c_2\|)$  است. در نتیجه زمانی داریم:

$$\|c_2 c_p\| \leq \frac{2}{\alpha} \|c_1 c_2\|$$

و در نتیجه داریم:

$$\frac{2}{\alpha} \|c_1 c_p\| \leq \frac{2(\|c_1 c_2\| + \|c_2 c_p\|)}{\alpha} \leq \frac{2}{\alpha} \|c_1 c_2\| (1 + \frac{2}{\alpha})$$

که نتیجه می‌دهد:

$$B(c_p, \frac{2}{\alpha} \|c_1 c_p\|) \subset B_2(c_2, \frac{2}{\alpha} \|c_1 c_2\| (2 + \frac{2}{\alpha}))$$

□

حال با استفاده از ادعای ۴-۱۹، حکم را ثابت می‌کنیم. نقطه‌ی  $p$  از جویبار داده را در نظر بگیرید که به  $B_1$  اضافه شده است. این نقطه در دو شرایط می‌تواند به  $B_1$  اضافه شده باشد. حالت اول، زمانی است که تابع  $AddToB_1$  صدا زده می‌شود. در این تابع، نقطه‌ی  $p$  تنها زمانی به  $B_1$  اضافه می‌شود که در فاصله‌ی  $\delta$  از  $c_1$  قرار داشته باشد. با توجه به ناوردای ۱، مطمئن هستیم که  $\delta < \delta^*$  و در نتیجه  $\|c_1 p\| < \delta^*$  است و در نتیجه  $p \notin B_2^*$ . در حالت دوم، در الگوریتم ۷، زمانی که حافظه‌ی میان‌گیر  $Buffer$  سرریز می‌کند و  $B_2$  خالی نیست، الگوریتم وابسته به اندازه‌ی  $B_2$  عمل می‌کند. اگر اندازه‌ی  $B_2$  هنوز به  $(d+1)(z+1)$  نرسیده باشد، آنگاه  $c_p = c_2$  است. در این حالت، الگوریتم ۴-۱۹،  $c_2$  را به  $B_1$  اضافه می‌کند. با فرض خلف فرض کنید که  $c_p \in B_2^*$  باشد. آنگاه با توجه ناوردای ۲ و ۴ قسمت (آ) داریم:

$$2r^* \leq r \leq \frac{\delta}{2} \leq \frac{\delta^*}{2}$$

در نتیجه با توجه به لم ۴-۱۶، حداکثر باید  $z$  نقطه خارج  $B_1 \cup B_2$  قرار بگیرد، که با سرریز شدن حافظه‌ی میان‌گیر  $Buffer$  تناقض دارد. در حالتی که  $|B_2| \geq (d+1)(z+1)$  است، آنگاه  $c_p$ ، نقطه‌ی مرکزی  $(d+1)(z+1)$  اولین نقاطی است که به  $B_2$  اضافه شده‌اند. در این حالت،

تمام نقاط  $B_2$  به  $B_1$  اضافه می‌شود. با استفاده از نوردای ۲، داریم:

$$r \leq \frac{\delta}{2} < \frac{\delta^*}{2}$$

در نتیجه، طبق لم ۴-۱۷،  $c_p \in B_1^*$  یا  $c_p \in B_2^*$  است. با فرض خلف، فرض کنید که  $c_p \in B_2^*$  است. در این حالت، با توجه به نوردای ۴ قسمت (آ)، و ادعای ۴-۱۹، توپ  $B_2(c_p, \frac{2}{\alpha} \|c_1 c_p\|)$  را می‌پوشاند و  $r \leq 2r^*$  است. بنابراین کاملاً مشابه حالتی که  $|B_2| < (d+1)(z+1)$ ، با سرریز شدن حافظه‌ی میان‌گیر Buffer تناقض دارد و در نتیجه  $c_p \in B_1^*$  و در نتیجه  $B_2 \cap B_1^* = \emptyset$  است و اضافه کردن آن به  $B_1$  صورت ناوردا را نقض نمی‌کند.

۴. (آ) اگر  $c_1 \in B_1^*$  باشد و  $c_p \in B_2^*$  باشد، طبق مشاهده‌ی ۴-۱۳، اگر  $c_1 \in B_1^*$  باشد و  $c_p \in B_2^*$  باشد، آن‌گاه

$$1 \leq \frac{\|c_1 c_p\|}{\delta^*} \leq \frac{\|c_1 c_p\|}{\alpha r^*}$$

و در نتیجه:

$$2r^* \leq \frac{2}{\alpha} \|c_1 c_p\|$$

اگر  $|B_2| < (d+1)(z+1)$  باشد،  $c_p = c_2$  است و با توجه به الگوریتم ۷،  $r = \frac{2}{\alpha} \|c_1 c_2\|$  است و در نتیجه  $r \leq 2r^*$  است. اگر  $|B_2| < (d+1)(z+1)$  باشد، مشابه با ناردای ۲ داریم:

$$2r^* \leq \frac{2}{\alpha} \|c_1 c_p\| \leq (1 + \frac{2}{\alpha}) \frac{2}{\alpha} \|c_1 c_2\| \leq (2 + \frac{2}{\alpha}) \frac{2}{\alpha} \|c_1 c_2\| = r$$

(ب) بر اساس نوردای ۴ قسمت (آ)، اگر  $c_p \in B_2^*$  باشد، در نتیجه داریم:

$$2r^* \leq r \leq \frac{\delta}{2}$$

و  $c_p \in B_2$  است. حال با توجه به نوردای ۱ و مشاهده‌ی ۴-۱۳،  $B_2$  تنها  $B_1^*$  را قطع می‌کند و در نتیجه  $B_2 \cap B_1^* = \emptyset$ .

(ج) با توجه به نوردای ۳ و نوردای ۴ قسمت (آ) داریم:

$$2r^* \leq r \leq \frac{\delta}{2} < \frac{\delta^*}{2}$$

و در نتیجه با توجه به لم ۴-۱۶، تمام نقاط داخل حافظه‌ی میان‌گیر Buffer یا خارج از  $B_1 \cup B_2$  داده‌ی پرت هستند.

□

## پاسخ‌گویی به پرسمان‌ها

در این قسمت، نشان می‌دهیم با تقسیم‌بندی که الگوریتم ۷ در طول اجرای الگوریتم نگه می‌دارد، چگونه به پرسمان‌های همانند پرسمان زیر پاسخ می‌دهد.

- اگر بدانیم دو توپ بهینه‌ی جواب مسئله‌ی ۲- مرکز با  $z$  داده‌ی پرت،  $\alpha$ - جداپذیر باشند، دو توپ هم‌شعاع پیدا کنید که همه‌ی نقاط به غیر از حداکثر  $z$  نقطه از نقاطی که تاکنون در جویبار داده آمده‌اند را بپوشانند.

الگوریتم پاسخ‌گویی به پرسمان در الگوریتم ۱۰ آمده است. ایده‌ی اصلی پاسخ‌گویی به پرسمان استفاده از تقسیم‌بندی که الگوریتم ۷ ارائه می‌دهد، است. با توجه به فرض‌های اولیه و با استفاده از ناورداهای ۳ و ۴، اگر  $c_p \in B_p^*$  باشد، آن‌گاه  $B_p$  به طور کامل  $B_p^*$  را می‌پوشاند و  $B_p$  به طور کامل  $B_p^*$  را می‌پوشاند. اما ممکن است فرض  $c_p \in B_p^*$  اشتباه باشد و در نتیجه  $B_p$ ،  $B_p^*$  و  $B_p^*$  را نپوشاند. برای برطرفی کردن این مشکل، تمام حالت‌های ممکن برای  $c_p$  (که از روی آن تمام حالت‌های  $c_p$  به دست می‌آید) امتحان می‌کنیم و به ازای آن تقسیم‌بندی  $B_p$  و  $Buffer$  را به دست آورده و از روی آن با استفاده از الگوریتم ۱۱، یک جواب برای مسئله‌ی ۲- مرکز با حداکثر  $z$  داده‌ی پرت ارائه می‌دهد.

فرض کنید  $C$  مجموعه‌ی نقاط کاندید برای  $c_p$  باشد. با استفاده از ناوردای ۳، داریم  $B_p \cap B_p^* = \emptyset$ . بنابراین،  $(B_p \cup Buffer) \cap B_p^* \neq \emptyset$  و در نتیجه وجود دارد  $c_p$  در این مجموعه که می‌توان از روی آن، جواب با تقریب مناسبی برای ۲- مرکز با حداکثر  $z$  داده‌ی پرت به دست آورد. در لم ۴-۲۰، برای حالتی  $|B_p| \geq (d+1)(z+1)$  است، نشان داده شده است که  $(\{c_p\} \cup Buffer) \cap B_p^* \neq \emptyset$ . بنابراین اگر  $|B_p| \geq (d+1)(z+1)$  باشد، کافی است مجموعه‌ی  $\{c_p\} \cup Buffer$  را به عنوان مجموعه‌ی نقاط کاندید برای  $c_p$  در نظر گرفت. بنابراین اندازه‌ی مجموعه‌ی نقاط کاندید از  $O(zd)$  است.

لم ۴-۲۰ در هر لحظه، اگر  $|B_p| \geq (d+1)(z+1)$  باشد و  $c_p \notin B_p^*$  باشد، آن‌گاه  $B_p \cap B_p^* = \emptyset$ .

اثبات. با استفاده از ناورداهای ۱ و ۲، داریم:

---

الگوریتم ۱۰ پاسخ‌گویی به پرسمان

---

- ۱: مجموعه‌ی solutions را برابر  $\{\text{MinCover}(B_1, B_2, \text{Buffer})\}$  قرار بده.
  - ۲: اگر  $|B_2| < (d+1)(z+1)$  است:
  - ۳: مجموعه‌ی candidates را برابر Buffer قرار بده.
  - ۴: مجموعه‌ی  $B_1$  را برابر  $B_1 \cup B_2$  قرار بده.
  - ۵: مجموعه‌ی  $B_2$  را تهی کن.
  - ۶: در غیر این صورت:
  - ۷: مجموعه‌ی candidates را برابر  $B_2 \cup \text{Buffer} \setminus \{c_2\}$  قرار بده.
  - ۸: به ازای هر  $c \in \text{candidates}$ :
  - ۹:  $r$  را برابر  $\frac{2}{\alpha} \|c_1 c\|$  قرار بده.
  - ۱۰:  $B'_1$  را برابر  $B_1$  قرار بده.
  - ۱۱:  $\delta$  را برابر  $\max\{\delta_0, r\}$  قرار بده.
  - ۱۲:  $B'_2$  و حافظه‌ی میان‌گیر  $\text{Buffer}'$  را برابر مجموعه‌ی تهی قرار بده.
  - ۱۳: به ازای هر  $p \in \text{candidates}$ :
  - ۱۴: اگر اگر نقطه‌ی  $p$  به  $B'_1$  و  $B'_2$  اضافه نشد:
  - ۱۵:  $p$  را به حافظه میان‌گیر  $\text{Buffer}'$  اضافه کن.
  - ۱۶:  $\text{MinCover}(B'_1, B'_2, \text{Buffer}')$  را به مجموعه‌ی solutions اضافه کن.
  - ۱۷: کم‌ترین عضو مجموعه‌ی solutions را برگردان.
-



## الگوریتم ۱۱ محاسبه‌ی پوشش بهینه

- ورودی:  $B_1$  به عنوان توپی که با  $B^*$  اشتراک ندارد،  $B_2$  به عنوان توپی که با  $B^*$  اشتراک ندارد و Buffer
- به عنوان زیر مجموعه‌ای از نقاط پرت در جواب بهینه.
- ۱: solutions را مجموعه‌ی تهی قرار دهید.
  - ۲: به ازای  $k$  در بازه‌ی  $[0 \dots (z - |Buffer|)]$ :
  - ۳:  $r_1$  را برابر شعاع  $1 - \text{Center}(B_1, k)$  قرار بده.
  - ۴:  $r_2$  را برابر شعاع  $1 - \text{Center}(B_2, z - |Buffer| - k)$  قرار بده.
  - ۵: بیشینه‌ی  $r_1$  و  $r_2$  را به مجموعه‌ی solutions اضافه کن.
  - ۶: کمینه عضو solutions را به عنوان خروجی برگردان.

$$r \leq \frac{\delta}{2} < \frac{\delta^*}{2}$$

. با توجه به لم ۴-۱۷،  $c_p \in B_1^* \cap B_2^*$  است. اگر  $c_p \notin B_2^*$  باشد، در نتیجه  $c_p \in B_1^*$  است. و در نتیجه با توجه به مشاهده‌ی ۴-۱۳،  $B_2$  حداکثر یکی از  $B_1^*$  و  $B_2^*$  را قطع می‌کند و در نتیجه  $B_2 \cap B_1^* = \emptyset$ .

□

الگوریتم پاسخ‌گویی به پرسمان، به ازای هر نقطه‌ی  $c \in C$ ، دو توپ  $(c_1, \max\{\delta, \frac{r}{\alpha}\|c_1 c\|\})$  و  $B'_1(c_1, \max\{\delta, \frac{r}{\alpha}\|c_1 c\|\})$  را تشکیل می‌دهد. اگر نقطه‌ی کاندید برابر  $c_2$  کنونی باشد،  $B'_1 = B_1$  است. از طرفی چون  $\frac{r}{\alpha}\|c_1 c_2\| \leq r \leq \frac{\delta}{\alpha}\|c_1 c_2\|$  است، با توجه به ناوردای ۲،  $B'_1 \subset B_2$  است و در نتیجه نیازی به ساخت  $B'_1$  نیست. اگر نقطه‌ی کاندید برابر  $c_2$  نباشد، با توجه به ناوردای ۲، مطمئن هستیم که  $B_1 \subset B'_1$  است. بنابراین کافی است ببینیم کدام یک از نقاط  $B_1 \cup Buffer$  داخل  $B'_1$  قرار می‌گیرند.

اگر  $|B_2| \geq (d+1)(z+1)$  باشد، بدان معناست که  $c_p \notin B_2^*$  است. با توجه به لم ۴-۲۰،  $B_2$  را می‌توان بدون نقض کردن ناوردای ۳، به  $B'_1$  اضافه کرد. بنابراین در این حالت، کافی است نقاط Buffer برای اضافه شدن به  $B'_1$  بررسی شوند. الگوریتم ۱۰ از دو تابع  $AddToB'_1$  و  $AddToB'_2$  به ترتیب برای اضافه کردن نقاط به  $B'_1$  و  $B'_2$  استفاده می‌کند. این دو تابع، کاملاً مشابه  $AddToB_1$  و  $AddToB_2$  است، با این تفاوت که به ترتیب نقاط را به  $B'_1$  و  $B'_2$  اضافه می‌کند.

از آنجایی که الگوریتم ۱۰، تمام گزینه‌های ممکن برای کاندیداها را بررسی می‌کند، حداقل به ازای یک  $c^* \in C$ ،  $c^* \in B_1^*$  نیز قرار دارد.  $B_1'$  و  $B_1''$  متناظر با نقطه‌ی کاندید  $c^*$  را به ترتیب  $B_1''$  و  $B_1'$  نشان می‌دهیم. با توجه به مشاهده‌ی ۴-۱۲ داریم:

$$1 \leq \frac{\|c_1 c^*\|}{\alpha^* r^*} < \frac{\|c_1 c^*\|}{\alpha r^*}$$

و از طرفی داریم:

$$2r^* \leq \frac{2}{\alpha} \|c_1 c^*\|$$

و در نتیجه با توجه به لم ۴-۱۶  $B_1^* \subset B_1''$  و  $B_1^* \subset B_1'$  است. که در واقع بدان معناست که  $B_1''$  به طور کامل  $B_1^*$  را می‌پوشاند و  $B_1'$  به طور کامل  $B_1^*$  را می‌پوشاند و تمام نقاط داخل  $Buffer$  در جواب بهینه داده‌ی پرت هستند. تنها نقطه‌ی ابهام باقی مانده، عدم اطلاع از تقسیم‌بندی نقاط پرت بین  $B_1''$  و  $B_1'$  است که الگوریتم ۱۱ تمام حالت‌های ممکن برای این تقسیم‌بندی را امتحان کرده و کم‌ترین شعاع در بین تمام حالات را به عنوان جواب نهایی ارائه می‌دهد.

**قضیه‌ی ۴-۲۱** الگوریتم ۱۰، در حالتی که دو توپ بهینه  $\alpha$ - جداپذیر باشند، می‌تواند جوابی با ضریب تقریب  $\epsilon + 1/8$  برای مسئله‌ی ۲- مرکز با  $z$  داده‌ی پرت در زمان اجرای  $O(\frac{z^2 d^2}{\epsilon})$  ارائه دهد.

اثبات. همان‌طور که گفته شد، تعداد کاندیدهای موجود از مرتبه‌ی  $O(zd)$  است. بنابراین الگوریتم ۱۰،  $O(zd)$  بار  $B_1'$  و  $B_1''$  را حساب کرده و با آن، الگوریتم ۱۱ را صدا می‌زند. اگر از الگوریتم ۵ برای نگه‌داری  $B_1'$  و  $B_1''$  استفاده کنیم، محاسبه‌ی  $B_1'$  و  $B_1''$  از مرتبه‌ی  $O(\frac{z^2 d^2}{\epsilon}) \times O(zd)$  زمان می‌برد (توجه کنید که فرض کرده‌ایم نقطه‌ی اول  $B_1'$  و  $B_1''$  که مرکز دسته‌ها هستند داده‌ی پرت نیستند) و اجرای الگوریتم ۱۱، از مرتبه‌ی  $O(z) \times O(\frac{z^2}{\epsilon})$  زمان می‌برد (فرض شده نقاط اول هر دسته داده‌ی پرت نیست). بنابراین زمان پاسخ‌گویی به پرسمان از مرتبه‌ی  $O(\frac{z^2 d^2}{\epsilon})$  زمان خواهد برد.

□

و در نهایت قضیه‌ی زیر نتیجه می‌شود:

**قضیه‌ی ۴-۲۲** در حالتی که  $\delta^* > \alpha r^*$  است، یک  $\epsilon + 1/8$ - تقریب برای مسئله‌ی ۲- مرکز با  $z$  داده‌ی پرت قابل نگه‌داری است که از مرتبه‌ی  $O(\frac{z^2 d^2}{\epsilon})$  حافظه‌ی مصرف کرده و زمان به‌روزرسانی آن، از مرتبه‌ی  $O(\frac{z^5 d^2}{\epsilon})$  بوده و با مصرف  $O(\frac{z^5 d^2}{\epsilon})$  به پرسمان‌ها پاسخ می‌دهد.

اثبات. همان‌طور که در قسمت قبلی نشان داده شد، برای پاسخ‌گویی به پرسمان، الگوریتم ۱۰ از تقسیم‌بندی  $B_1$ ،  $B_2$  و  $Buffer$  برای محاسبه‌ی جواب استفاده می‌کند. در حالت جویبارداده، امکان نگه‌داری تمام نقاط  $B_1$  و  $B_2$  وجود ندارد. بنابراین از داده‌ساختاری برای نگه‌داری مجموعه هسته‌ای از نقاط داخل  $B_1$  و  $B_2$  استفاده می‌کنیم، که قابلیت اضافه شدن نقطه و ارائه‌ی یک  $\beta$ -تقریب برای مسئله‌ی ۱-مرکز با  $k$  داده‌ی پرت (برای  $k$  در بازه‌ی  $[0, z]$ ) داشته باشد. از طرفی به علت نیاز به اضافه کردن کل  $B_2$  به  $B_1$  در بعضی از مراحل الگوریتم،  $B_u = B_1 \cup B_2$  را موازی با  $B_1$  و  $B_2$  نگه می‌داریم که به طور موازی نگه‌داری می‌شود. توجه کنید که داده‌ساختارهای مورد نیاز برای  $B_1$  و  $B_2$  نیازی به نگه‌داری کل نقاط ندارند، بلکه تنها نیاز به یک حافظه‌ی میان‌گیر برای نگه‌داری  $(d+1)(z+1)$  آخرین نقاطی که به داده‌ساختار اضافه شده است.

برای نگه‌داری  $B_1$  و  $B_2$  و  $B_u$  از الگوریتم جویبارداده‌ی ۵ ارائه شده در همین پایان‌نامه استفاده می‌کنیم، که یک الگوریتم با ضریب تقریب  $\epsilon + 1/8$  ارائه می‌دهد. با توجه به الگوریتم ۵، حافظه‌ی مصرفی برابر  $O(z) \times O(\frac{zd}{\epsilon})$  است (فرض کرده‌ایم نقاط اول هر دسته داده‌ی پرت نیست). زمان به‌روزرسانی نیز با توجه به اجرا شدن یک بار حلقه به صورت سرشکن در هر مرحله از مرتبه‌ی  $O(\frac{dz^2}{\epsilon}) \times O(z) \times O(zd)$  زمان می‌برد. از طرفی با توجه به این‌که برای حذف فرض پرت نبودن نقطه‌ی اول نیاز به اجرای  $z$  نمونه موازی از الگوریتم داریم، بنابراین تمام تحلیل‌ها  $z$  برابر می‌شوند.

□

## فصل ۵

# نتیجه‌گیری

در این فصل، ضمن جمع‌بندی نتایج جدید ارائه‌شده در پایان‌نامه، مسائل باز باقی‌مانده و همچنین پیشنهادهایی برای ادامه‌ی کار ارائه می‌شوند.

# کتاب نامه

- [1] S.-S. Kim and H.-K. Ahn. *An improved data stream algorithm for clustering. In Proceedings of the 11th, pages 273–284. 2014.*
- [2] J. Han and M. Kamber. *Data Mining, Southeast Asia Edition: Concepts and Techniques. Morgan kaufmann, 2006.*
- [3] C. C. Aggarwal. *Data streams: models and algorithms, volume 31. Springer Science & Business Media, 2007.*
- [4] M. Charikar, S. Khuller, D. M. Mount, and G. Narasimhan. *Algorithms for facility location problems with outliers. In Proceedings of the 12th ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, pages 642–651, 2001.*
- [5] R. M. McCutchen and S. Khuller. *Streaming algorithms for k-center clustering with outliers and with anonymity. In Approximation, Randomization and Combinatorial Optimization. Algorithms and Techniques, pages 165–178. 2008.*
- [6] M. Sipser. *Introduction to the Theory of Computation. Cengage Learning, 2012.*
- [7] I. Dinur and S. Safra. *On the hardness of approximating minimum vertex cover. Annals of mathematics, pages 439–485, 2005.*
- [8] V. V. Vazirani. *Approximation algorithms. Springer Science & Business Media, 2013.*
- [9] M. Bern and D. Eppstein. *Approximation algorithms for geometric problems. Approximation algorithms for NP-hard problems, pages 296–345, 1996.*
- [10] P. K. Agarwal and R. Sharathkumar. *Streaming algorithms for extent problems in high dimensions. In Proceedings of the 21st ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, pages 1481–1489, 2010.*

- [11] P. K. Agarwal, S. Har-Peled, and K. R. Varadarajan. *Approximating extent measures of points*. Journal of the ACM, 51(4):606–635, 2004.
- [12] R. G. Michael and S. J. David. *Computers and intractability: a guide to the theory of np-completeness*. WH Freeman & Co., San Francisco, 1979.
- [13] N. Megiddo and K. J. Supowit. *On the complexity of some common geometric location problems*. SIAM Journal on Computing, 13(1):182–196, 1984.
- [14] J. Han, M. Kamber, and J. Pei. *Data mining: concepts and techniques: concepts and techniques*. Elsevier, 2011.
- [15] P. K. Agarwal and C. M. Procopiuc. *Exact and approximation algorithms for clustering*. Algorithmica, 33(2):201–226, 2002.
- [16] N. Megiddo. *On the complexity of some geometric problems in unbounded dimension*. Journal of Symbolic Computation, 10(3):327–334, 1990.
- [17] B. Chazelle and J. Matoušek. *On linear-time deterministic algorithms for optimization problems in fixed dimension*. Journal of Algorithms, 21(3):579–597, 1996.
- [18] T. M. Chan. *More planar two-center algorithms*. Computational Geometry: Theory and Applications, 13(3):189–198, 1999.
- [19] P. K. Agarwal, R. B. Avraham, and M. Sharir. *The 2-center problem in three dimensions*. Computational Geometry, 46(6):734–746, 2013.
- [20] H. Zarrabi-Zadeh. *Core-preserving algorithms*. In Proceedings of the 20th Canadian Conference on Computational Geometry, pages 159–162, 2008.
- [21] M. Charikar, C. Chekuri, T. Feder, and R. Motwani. *Incremental clustering and dynamic information retrieval*. In Proceedings of the 29th ACM Symposium on Theory of Computing, pages 626–635. ACM, 1997.
- [22] S. Guha. *Tight results for clustering and summarizing data streams*. In Proceedings of the 12th International Conference on Database Theory, pages 268–275, 2009.
- [23] H.-K. Ahn, H.-S. Kim, S.-S. Kim, and W. Son. *Computing  $k$  centers over streaming data for small  $k$* . International Journal of Computational Geometry and Applications, 24(02):107–123, 2014.

- 
- [24] H. Zarrabi-Zadeh and T. M. Chan. *A simple streaming algorithm for minimum enclosing balls*. In *Proceedings of the 18th Canadian Conference on Computational Geometry*, pages 139–142, 2006.
- [25] T. M. Chan and V. Pathak. *Streaming and dynamic algorithms for minimum enclosing balls in high dimensions*. *Computational Geometry: Theory and Applications*, 47(2):240–247, 2014.
- [26] M. Bădoiu and K. L. Clarkson. *Smaller core-sets for balls*. In *Proceedings of the 14th ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, pages 801–802. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, 2003.
- [27] H. Zarrabi-Zadeh and A. Mukhopadhyay. *Streaming 1-center with outliers in high dimensions*. In *Proceedings of the 21st Canadian Conference on Computational Geometry*, pages 83–86, 2009.
- [28] L. Danzer, B. Gruenbaum, and V. Klee. *Helly’s theorem and its relatives*. In *Proceedings of the Symposia in Pure Mathematics* 7, pages 101–180, 1963.

# واژه‌نامه

## الف

*heuristic*..... ابتکاری

*worth*..... ارزش



## ***Abstract***

*This part should be completed.*

***Keywords:*** *Clustering, K-Center, Streaming Data, Approximation Algorithm*



*Sharif University of Technology*

*Department of Computer Engineering*

*M.Sc. Thesis*

***Approximation Algorithms for Clustering Points  
in the Data Stream Model***

*By:*

***Behnam Hatami-Varzaneh***

*Supervisor:*

***Dr. Hamid Zarrabi-zade***

*September 2015*