(2)

size X → 20X354

plot(x(10,:), x(20,:))

?

(1.1)

- Se uma matriz de autocorrelação $n \times n$ tem eigenvalues diferentes, então, sendo semidefinida positiva e simétrica, pode ser decomposta da seguinte forma:

$$R_x = P \Lambda P^T$$, sendo P uma matriz ortonormal e Λ uma matriz diagonal $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \emptyset \\ & \lambda_2 & \\ \emptyset & & \ddots \lambda_n \end{bmatrix}$

- P é única por forma a que $P \Lambda P^T$ seja R_x
- $R_x P = P \Lambda \Leftrightarrow R_x e_i = \lambda_i e_i \Rightarrow$ os colunas de P são os eigenvectors de R_x

coluna i de P

- Assim, sendo possível maximizar a variância dos coeficientes, usando os n eigenvectors de R_x como base, conclui-se que existe uma base ortonormal em $\mathbb{R}^n$ formada por estes eigenvectors

Prova por indução:

↳ sabe-se que $\sigma_{P_K}^2 = \langle P_K^2 \rangle = \langle (w^T x)(x^T w) \rangle = w^T \langle x x^T \rangle w = w^T R_x w = w^T R_x (\sum ...$

$= \sum_K w_K w^T R_x v_K = \sum_K w_K \lambda_j w^T v_K = \sum_{i=1}^{K} w_K^2 \lambda_K$

↳ $w^T = [w_1, \ldots w_K] = \cancel{M} P$

↳ $\|w\|^2 = 1$, pelo facto de M_i ter comprimento unitário e P é uma matriz ortonormal

↳ Assumindo que os primeiros $K-1$ vectores base são os eigenvectors de R_x, $\sigma^2(P_K) = \sum$

↳ Como os λ_i são ordenados por ordem decrescente, a variância é maximizada por $w_K =$

$w^T = e_K P$

↳ $K = 1 \Rightarrow M_1 = e_1$

(2.1) . Ao representar a data, observam-se nuvens de pontos.

. Pela análise destas nuvens, verifica-se que há coordenadas que estão relacionadas positivamente, outros negativamente ~~inversamente~~ e outros sobre os quais não é possível saber informação devido à existência de ruído.

. Utilizamos os comandos plot(x(i,:), x(j,:), 'b.'), ~~para i≠j~~ Para i ≠ j verificamos os casos explicados anteriormente. Para i = j, as coordenadas relacionam-se positivamente

(2.2)

1º → calculate mean:

```
~~μ = 1/20~~ mean = 0
for i = 1:354
    mean = mean + x(:, i)
end
mean = mean./354
```

calc_mean(X)

2 → remove the mean:

```
for i = 1:354
    x(:, i) = x(:, i) - mean;
end
```

3 → calculo de R

$$R = \frac{1}{354} X X'$$

4 → Calcular os eigenvalues de R: eig(R)

5 → ordenar: sort(eigvalues, 'descend');

(6) comparar para saber as direcções

(2.3)

$$\frac{g[L]}{g[P]} \geq 0{,}95 \quad , \quad g[L] = \sum_{K=1}^{L} D[K,K] \rightarrow eig(R)$$

11 components

→ é isto né?

```
gP = sum(eigvalues);
for i = 1:20
    if (sum(ordered_eig(1:i))/gP) >= 0,95
        break;
    end
end
```

→ verificou-se que i = 11

2.4

Energy = gp = sum(eigvalues)

gl = sum(ordered eig(1:2))

energy = gl/gp = 0,8879

Calculate v_i:

$R v_i = \lambda_i v_i \Leftrightarrow v_i^T$

↓

vectors → colunas → 1 eighenvector

2.5

~~$y_{11} = x(20,:)' \, V(:,20)$; $y_{12} = x(20,:)' \cdot V(:,19)$ + mean~~

~~$y_{21} = x(19,:)' \, V(:,20)$; $y_{22} = x(19,:)' \cdot V(:,19)$ + mean~~

XR =

$y_{11} = X(:,1)' \, V(:,20)$

$y_{12} = X(:,1)' \, V_2(:,19)$

$X_{1R} = y_{11} V(:,20) + y_{12} V(:,19)$ + mean

3

faces.bmp → data → cada imagem 60x50 pixels → vector de dimensão 3000

3.1

directions		eighenvalues
3000	→	$-1,5089 \times 10^{-9}$
2999	→	$-9,5263 \times 10^{-10}$
2998	→	$-6,1741 \times 10^{-10}$
	→	$-3,5152 \times 10^{-10}$
	→	$-4,7816 \times 10^{-10}$
⋮		
8		
7		
6		
5	→	$8,0461 \times 10^{5}$
4	→	$1,0545 \times 10^{6}$
3	→	$1,1319 \times 10^{6}$
2	→	$1,2258 \times 10^{6}$
1	→	$3,6722 \times 10^{6}$

? change

O número de componentes necessárias para reconstruir corretamente as imagens deverá ser 23

3.2

- Ao dar o comando showing (vectors(:, 2995:3000)) (média ?)
  as imagens que surgem estão bastante desfocadas, sendo imperceptíveis as expressões de cada pessoa.

?

3.3

Última mudança significativa → 20 / 21 componentes

→ 18 para reconhecer bem a pessoa

→ 20 p/ reconhecer expressões faciais

→ Numa fase inicial, as imagens estão praticamente irreconhecíveis tal como em 3.2

→ A partir de certo número de principal components, já é possível reconhecer a pessoa, sendo possível verificar as expressões faciais

→ Posteriormente, as imagens quase não se alteram

3.4

→ O critério é determinante a escolha dos componentes que contribuem de forma mais significativa para a variância

→ Para tal, faz-se o gráfico de $\sigma_i^2 = \sum_{i=m+1}^{3000} \lambda_i$ e procura-se um "Knee" no gráfico resultante

→ Para a utilização de um nº de componentes superiores a 23 (onde se encontra o "Knee", a contribuição de cada componente adicional para a redução do erro da variância praticamente não é notória

→ Esta procura do Knee corresponde aproximadamente a reter apenas a informação correspondente à data inicial e a ignorar os componentes que correspondem a ruído, realizando desta forma "denoising"