Theoretische Informatik: Übungsaufgaben 6

Abgabe bis 07. November 2014

Prof. Welzl

Vincent von Rotz, David Bimmler und Kevin Klein

Aufgabe 17

(a) $(L_{infinite})^{\complement} \in \mathcal{L}_{RE}$
Offensichtlich gilt:
$(L_{infinite})^{\complement} = \{x \mid \nexists TM\ M s.t.\ x = Kod(M)\#w \vee \exists TM\ M\ s.t. x = Kod(M)\#w \wedge M$ hält auf mindestens einer Eingabe$\}$
Wir entewerfen eine NTM M, die das Entscheidungsproblem $((L_{infinite})^{\complement}, \Sigma)$ löst.
Dies impliziert $(L_{infinite})^{\complement} \in \mathcal{L}_{RE}$, da es laut Satz 4.2 für jede NTM eine aequivalente TM gibt mit.
Die NTM sollte folgend auf einem Input x funktionnieren:

- Wenn w nicht die Kodierung einer TM ist, wird x akzeptiert.
- Wenn w die Kodierung einer TM ist:
  1. Suche nichtdeterministisch ein y.
  2. Entscheide deterministisch ob $x = Kod(M)y$ akzeptiert indem M auf y simuliert wird.
     - Wenn y von M akzeptiert wird, wird x akzeptiert.
     - Wenn y vom M nicht akzeptiert wird, wird dieses y verworfen.

(b) $(L_{infinite})^{\complement} \notin \mathcal{L}_R$
Wenn wir zeigen können, dass $L_H \leq_{RR} (L_{infinite})^{\complement}$ folgt, dass $(L_{infiinte})^{\complement} \notin \mathcal{L}_R$.
Zur EE-Reduzierbarkeit verwenden wir eine TM M', $(L_{infinite})^{\complement}$ auf L_H reduziert und x zu $f_{M'}(x) = Kod(B_x)$ transformiert.
M' generiert die Kodierung der TM B_x, welche wie folgt definiert ist:
Falls:

- $\exists TM\ M\ s.t.\ x = Kod(M)\#w$
  B_x generiert $Kod(M)$ und w s.t. $x = Kod(M)\#w$.
  B_x simuliert M auf w. B_x übernimmt die Ausgabe von M, dies ist jedoch irrelevant.

- $\nexists TM\ M\ s.t.\ x = Kod(M)\#w$
  B_x ist eine beliebige TM die auf keiner Eingabe hält.

Es gilt offenbar:

$$\begin{aligned} x \in L_H &\iff x = Mod(M)\#w \wedge M \text{ hält auf } w \\ &\iff B_x \text{ generiert } M \text{ auf } w \text{ und hält, da } M \text{ auf } w \text{ hält.} \\ &\iff Kod(B_x) \in (L_{infinite})^{\complement} \end{aligned} \tag{1}$$

(c) $L_{infinite} \notin \mathcal{L}_{RE}$
Lemma 5.4 besagt, dass $L \leq_R L^{\complement}$ und $L^{\complement} \leq_R L$.
Daraus folgt mit (b) direkt, dass $L_{infinite} \notin \mathcal{L}_R$.

Aufgabe 18

(a)

(b) $L_{all} \notin (L)_{empty}$
Wir zeigen dies in dem wir die EE-Reduktion von L_{empty} auf L_{all} mittels einer TM M zeigen.
Falls:

- $\nexists TM\ M\ s.t.\ x = Kod(M)$
  Übergebe x an $L_{empty}(f_M(x) = x)$

- $\exists TM\ M\ s.t.\ x = Kod(M)$
  Die TM M' generiert die Kodierung einer TM B.
  B ist die Sprache, die alle Wörter akzeptiert, die von M nicht akzeptiert werden.

Es gilt offenbar:

$$\begin{aligned} x \in L_{all} &\iff \exists TM\ M\ s.t. x = Kod(M) \wedge L(M) = (\Sigma_{bool})^* \\ &\iff L(B) = \emptyset \\ &\iff Kod(B) \in L_{empty} \end{aligned} \tag{2}$$

Aufgabe 19

Wir betrachten eine unendliche Sprache L. Da wir jedes Wort über ein Alphabet Σ auf Σ_{bool} abbilden können, sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei das Alphabet der Sprache L Σ_{bool}. Wir kennen die kanonische Ordnung über Σ_{bool}. Wir können also die Wörter aus L kanonisch geordnet aufzählen. Sei also w_i das kanonisch i-te Wort aus L. Ausserdem können wir die Turingmaschinen aufzählen. Wir erstellen jetzt eine unendliche Tabelle mit $w_1, w_2, \ldots$ als Spalten, und den Turingmaschinen $M_1, M_2, \ldots$ als Zeilen.

	w_1	w_2	w_3	$\ldots$	w_i	$\ldots$
M_1	$\boxed{d_{11}}$	d_{12}	d_{13}	$\ldots$	d_{1i}	$\ldots$
M_2	d_{21}	$\boxed{d_{22}}$	d_{23}	$\ldots$	d_{2i}	$\ldots$
M_3	d_{31}	d_{32}	$\boxed{d_{33}}$	$\ldots$	d_{3i}	$\ldots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
M_i	d_{i1}	d_{i2}	d_{i3}	$\ldots$	$\boxed{d_{ii}}$	$\ldots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	

Wir konstruieren jetzt eine Sprache L'_{diag}, die keiner der Sprachen $L(M_i)$ entspricht und eine Teilmenge von L ist. Wir definieren

$$L'_{diag} = \{w \in (\Sigma_{bool})^* \mid w = w_i \text{ für ein } i \in \mathbb{N} - \{0\} \text{ und } d_{ii} = 0\}$$

Wir beweisen $L'_{diag} \notin \mathcal{L}_{RE}$ indirekt. Sei $L'_{diag} \in \mathcal{L}_{RE}$. Dann ist $L'_{diag} = L(M)$ für eine TM M. Weil M eine der Turingmaschinen in der Nummerierung aller Turingmaschinen sein muss, existiert ein $i \in \mathbb{N} - \{0\}$, so dass $M = M_i$. Aber L'_{diag} kann nicht gleich $L(M_i)$ sein, weil folgende Äquivalenz gilt:

$$w_i \in L'_{diag} \iff d_{ii} = 0 \iff w_i \notin L'_{diag}$$

d.h., w_i ist genau in einer der Sprachen L'_{diag} oder $L(M_i)$. Damit gilt $L'_{diag} \notin \mathcal{L}_{RE}$ und wir haben eine Teilmenge der unendlichen Sprache L gefunden, die nicht in $\mathcal{L}_{RE}$ ist.