Theoretische Infomatik: Übungsaufgaben - Blatt 3

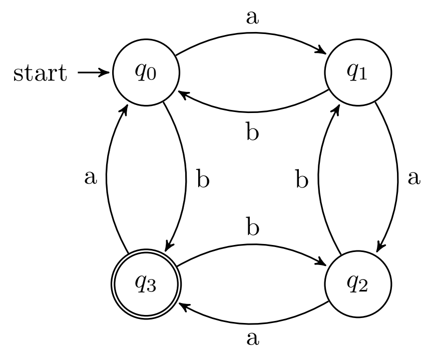
Abgabe bis 10. Oktober 2014

Prof. Hromkovič

Kevin Klein, Vincent von Rotz und David Bimmler

Aufgabe 7

(a) Es ist bekannt, dass $(|w|_a + 3 * |w|_b) \mod 4 = 3 \Leftrightarrow (|w|_a \mod 4 + (3 * |w|_b) \mod 4) \mod 4 = 3$. Der die Sprache L_1 akzeptierende endliche Automat M_1 sieht folgendermassen aus:



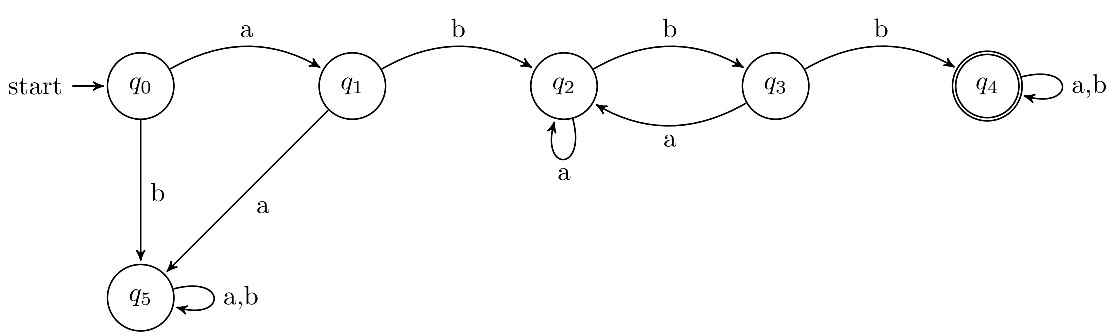
Es gilt $M_1 = (Q, \Sigma, \delta, F)$, wobei

$$
\begin{aligned}
Q &= \{q_0, q_1, q_2, q_3\} \\
\Sigma &= \{a, b\} \\
\delta : Q &\to Q \\
q_i &\mapsto \begin{cases} q_{(i+1) \bmod 4} & \text{bei } a \\ q_{(i-1) \bmod 4} & \text{bei } b \end{cases} \\
F &= \{q_3\}
\end{aligned}
$$

Die Klassen sind wiefolgt:

$$
\begin{aligned}
\text{Kl}[q_0] &= \{w \in \{a,b\}^* \mid (|w|_a + 3 \cdot |w|_b) \mod 4 = 0\} \\
\text{Kl}[q_1] &= \{w \in \{a,b\}^* \mid (|w|_a + 3 \cdot |w|_b) \mod 4 = 1\} \\
\text{Kl}[q_2] &= \{w \in \{a,b\}^* \mid (|w|_a + 3 \cdot |w|_b) \mod 4 = 2\} \\
\text{Kl}[q_3] &= \{w \in \{a,b\}^* \mid (|w|_a + 3 \cdot |w|_b) \mod 4 = 3\}
\end{aligned}
$$

(b) Der die Sprache L_2 akzeptierende endliche Automat M_2 sieht folgendermassen aus:



Es gilt $M_2 = (Q, \Sigma, \delta, F)$, wobei

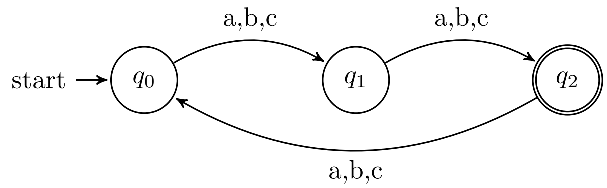
$$
\begin{aligned}
Q &= \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\} \\
\Sigma &= \{a, b\} \\
\delta : Q &\to Q \\
q_0 &\mapsto \begin{cases} q_1 & \text{bei } a \\ q_5 & \text{bei } b \end{cases} \\
q_1 &\mapsto \begin{cases} q_5 & \text{bei } a \\ q_2 & \text{bei } b \end{cases} \\
q_2 &\mapsto \begin{cases} q_2 & \text{bei } a \\ q_3 & \text{bei } b \end{cases} \\
q_3 &\mapsto \begin{cases} q_2 & \text{bei } a \\ q_4 & \text{bei } b \end{cases} \\
q_4 &\mapsto q_4 \\
q_4 &\mapsto q_5 \\
F &= \{q_4\}
\end{aligned}
$$

Die Klassen sind wiefolgt:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Kl}[q_0] = \{\lambda\} \\
&\mathrm{Kl}[q_1] = \{a\} \\
&\mathrm{Kl}[q_2] = \{aby \mid y \in \{a, b\}^* \land y \text{ enthält nicht das Teilwort } bb \land y \text{ endet in } a\} \\
&\mathrm{Kl}[q_3] = \{abz \mid z \in \{a, b\}^* \land z \text{ enthält nicht das Teilwort } bb \land z \text{ endet in } b\} \\
&\mathrm{Kl}[q_4] = \{abx \mid x \in \{a, b\}^* \land x \text{ enthält das Teilwort } bb\} \\
&\mathrm{Kl}[q_5] = \{w \mid w \in \{a, b\}^* \land w \text{ beginnt mit } b \lor w \text{ beginnt mit } aa\}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 8

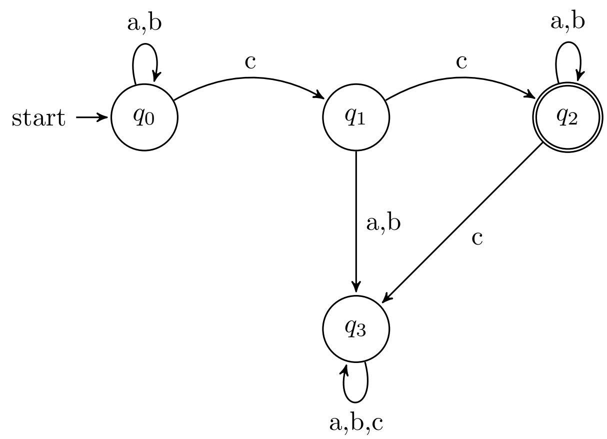
(a) Der erste Teilautomat sieht folgendermassen aus:



Die Klassen dieses endlichen Automaten sind:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Kl}[q_0] &= \{w \in \{a,b,c\}^* \mid |w| \mod 3 = 0\} \\
\mathrm{Kl}[q_1] &= \{w \in \{a,b,c\}^* \mid |w| \mod 3 = 1\} \\
\mathrm{Kl}[q_2] &= \{w \in \{a,b,c\}^* \mid |w| \mod 3 = 2\}
\end{aligned}$$

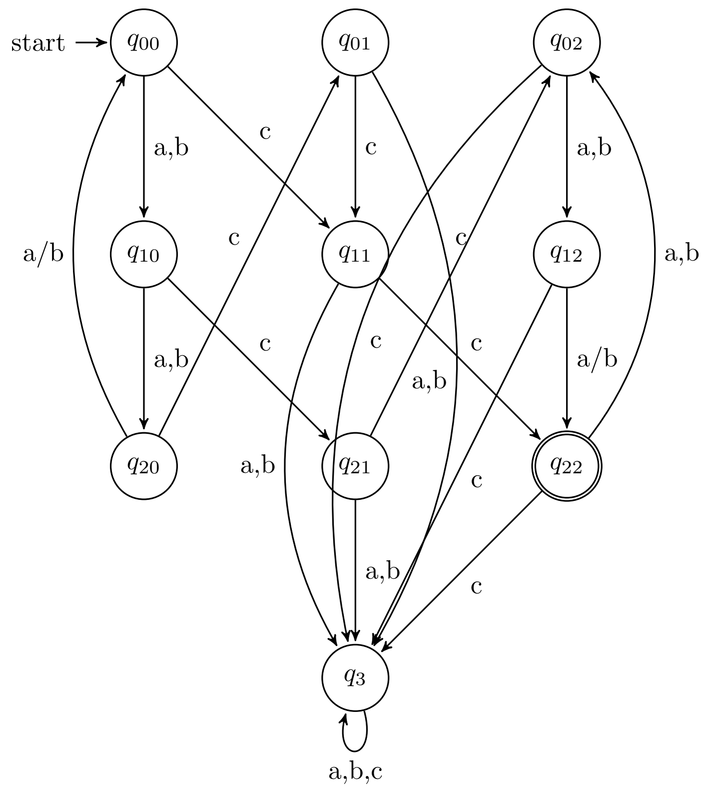
Der zweite Teilautomat sieht folgendermassen aus:



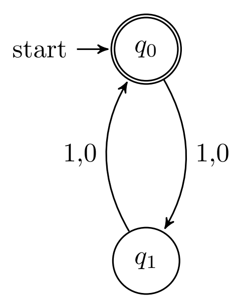
Die Klassen dieses endlichen Automaten sind:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Kl}[q_0] &= \{w \in \{a,b\}^*\} \\
\mathrm{Kl}[q_1] &= \{wc, w \in \{a,b\}^*\} \\
\mathrm{Kl}[q_2] &= \{w_1 cc w_2 \mid w_1, w_2 \in \{a,b\}^*\} \\
\mathrm{Kl}[q_3] &= \{wcw_1w_2 \mid w_1 \in \{a,b\}^* \vee w_1 = cc, w_2 \in \{a,b,c\}^*\}
\end{aligned}$$

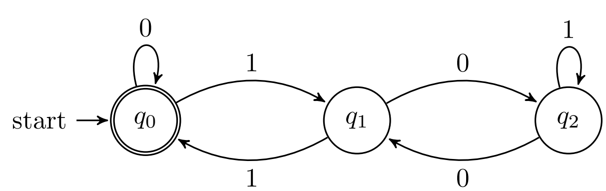
Der zusammengesetzte endliche Automat sieht so aus:



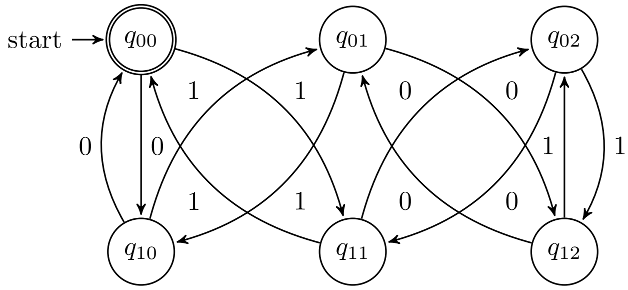
(b) Wir benutzen die erneut die Methode des modularen Entwurfs. Die erste Bedingung ("$|w|$ ist gerade") lässt sich durch den folgenden endlichen Automaten darstellen.



Die zweite Bedingung ("w ist die Binärdarstellung einer durch drei teilbaren Zahl") so:



Zusammengesetzt entsprechen diese zwei Automata diesem:



Der zweite endliche Automat lässt sich durch folgendes δ beschreiben:

i) $\delta(q_0, 0) = q_0$: Die Zahl ist durch drei teilbar und wird mit 2 multipliziert. Sie ist immer noch durch drei teilbar.

ii) $\delta(q_0, 1) = q_1$: Ein Vielfaches von drei wird mit zwei multipliziert und um eins erhöht. $\exists k n = 3k \implies 2n + 1 = 6k + 1 \implies (2n + 1) \mod 3 = 1$

iii) $\delta(q_1, 0) = q_2$: $\exists k n = 3k + 1 \implies 2n = 6k + 2 \implies (2n) \mod 3 = 2$

iv) $\delta(q_1, 1) = q_0$: $\exists k n = 3k + 1 \implies 2n + 1 = 6k + 3 \implies (2n + 1) \mod 3 = 0$

v) $\delta(q_2, 0) = q_1$: $\exists k n = 3k + 2 \implies 2n = 6k + 4 \implies (2n) \mod 3 = 1$

vi) $\delta(q_2, 1) = q_2$: $\exists k n = 3k + 2 \implies 2n + 1 = 6k + 5 \implies (2n + 1) \mod 3 = 2$

Das zusammengesetzte Modell erweitert diese Beschreibung in dem es für jeden Zustand noch die Möglichkeit “gerade/ungerade Länge” gibt.

Aufgabe 9

(a) Wir führen einen Widerspruchsbeweis und stützen uns auf das Pumping-Lemma. Man nehme an, es existiere ein n_0, so dass für alle $w \in L_1|w| \geq n_0$ gilt, es existiere eine Zerlegung $w = yxz$, welche die Bedingungen $(i), (ii)$ und (iii) des Pumping Lemmas erfüllt. Sei nun $w = 0^{n_0}1^{2n_0}0^{n_0}$. Dann gilt aufgrund der Bedingung (i), dass $x = 0^i$, mit $1 \leq i \leq n_0$. Somit gilt nicht, dass $yx^iz \in L_1$ für alle i, da die erste Nullfolge verändert wird, aber nicht der Rest, also wird (iii) gebrochen. Somit haben wir einen Widerspruch, und L_1 ist nicht regulär.

(b) Wir führen wieder einen Widerspruchsbeweis und stützen uns erneut auf das Pumping-Lemma. Die Annahmen seien gleich wie in (a). Diesmal definieren wir $w = 0^{{n_0}^3}$. Es muss also eine Zerlegung für w von der Form $w = y^ix^jz^{{n_0}^3-i-j}$ existieren, wenn die Sprache regulär ist. Man definiere nun $|x| = r, |y| = s$. Es gilt aber nicht, dass $\{yx^iz|i \in \mathbb{N}\} \subseteq L_1$, denn $yx^2z = 0^s0^{2r}0^{{n_0}^3-r-s} = 0^{{n_0}^3+r}$. Dies ist aber kleiner als die nächste Kubikzahl ${n_0}^3 = (n_0+1)^3 = n_0^3 + 3n_0^2 + 3n_01 \geq n_0^3 + r, dar \leq n_0$. Somit ist Bedingung (iii) nicht erfüllt und die Sprache nicht regulär.