Theoretische Infomatik: Übungsaufgaben - Blatt 2

Abgabe bis 3. Oktober 2014

Prof. Hromkovič

Kevin Klein, Vincent von Rotz und David Bimmler

Aufgabe 4

(a) Die Länge eines Programmes welches $0^{2^{2^{n^5}}}$ generiert ist nur von der Länge von n abhängig, da der Rest immer gleich bleibt. Eine obere Schranke der Komplexität abhängig von n ist deshalb

$$K(w_n) \leq \lceil \log_2 (n+1) \rceil + c' \leq \log_2 (n) + c \tag{1}$$

mit zum Buch analoger Begründung. Nun soll die Schranke in Abhängigkeit zur Länge $|w_n| = 2^{2^{(n^5)}}$ formuliert werden:

$$\begin{aligned} 2^{2^{(n^5)}} &= |w_n| \\ n^5 &= \log_2 \log_2 |w_n| \\ n &= \sqrt[5]{\log_2 \log_2 |w_n|} \\ \log_2 n &= \log_2 \sqrt[5]{\log_2 \log_2 |w_n|} = \frac{1}{5} * \log_2 \log_2 \log_2 |w_n| \end{aligned}$$

Nun setzt man dieses Resultat in (1) ein, und erhält:

$$K(w_n) \leq \frac{1}{5} * \log_2 \log_2 \log_2 |w_n| + c$$

(b) Eine solche Folge ist $y_i = 2^{((2^i)^3)}$. Es gilt $y_i < y_{i+1}$. Wir haben auch

$$\begin{aligned} y_i &= 2^{((2^i)^3)} \\ \log_2 y_i &= (2^i)^3 \\ \sqrt[3]{\log_2 y_i} &= 2^i \\ i &= \log_2 \left(\sqrt[3]{\log_2 y_i} \right) \end{aligned}$$

Ein Programm, welches diese Folge generiert, ist in seiner Länge nur von i abhängig. Mit der bekannten Kodierung von i folgt:

$$\begin{aligned} K(y_i) &\leq \lceil \log_2 i \rceil + c \\ &= \left\lceil \log_2 \log_2 \left(\sqrt[3]{\log_2 y_i} \right) \right\rceil + c \end{aligned}$$

Aufgabe 5

Wir führen einen Widerspruchsbeweis. Wir nehmen an, dass für mindestens die Hälfte der natürlichen Zahlen in $I =]0, 2^n[$ gilt $K(i) < \lceil \log_2 (2^n) \rceil - 1$.
In I gibt es $|[1, 2^n - 1]|$ viele Zahlen. Die Hälfte davon sind $\frac{|I|}{2} = \frac{2^n - 1}{2} = 2^{n-1} - \frac{1}{2}$. Da es *mindestens* die Hälfte der Zahlen sein müssen, können wir auf

$$2^{n-1} - 0 \tag{2}$$

aufrunden.
Für 2^{n-1} Zahlen gilt $K(i) < \lceil \log_2 (i+1) \rceil - 1$. Es folgt direkt $K(i) \leq \lceil \log_2 (i+1) \rceil - 2$. Es stehen also $\lceil \log_2 (i+1) \rceil - 2$ Bits zur Darstellung dieser 2^{n-1} Zahlen zur Verfügung. Es gilt $i \leq 2^n - 1$, also können wir in der binären Darstellung

$$2^{\lceil \log_2 (2^n - 1 + 1) \rceil - 2} = \frac{2^n}{4} = 2^{n-2} \tag{3}$$

Zahlen darstellen. Nun ist aber (2) < (1), und wir haben einen Widerspruch. Es folgt, dass mindestens die Hälfte aller natürlichen Zahlen i in I die folgende Eigenschaft haben:

$$K(i) \geq \lceil \log_2 (i+1) \rceil - 1$$

Aufgabe 6

Ein Wort x_n ist durch i und j eindeutig definiert. Zudem gilt $2(i+j) = |x_n|$. Es folgt somit

$$\begin{aligned}
K(x_n) &\leq c + \log_2 i + \log_2 j \\
K(x_n) &\leq c + \log_2 (i * j) \\
K(x_n) &\leq c + \log_2 (2 * i * j) \\
K(x_n) &\leq c + \log_2 (i^2 + 2ij + j^2) \\
K(x_n) &\leq c + \log_2 (4i^2 + 8ij + 4j^2) \\
K(x_n) &\leq c + \log_2 ((2(i+j))^2) \\
K(x_n) &\leq c + 2 * \log_2 (2(i+j)) \\
K(x_n) &\leq c + 2 * \log_2 (|x_n|)
\end{aligned}$$

und die Aussage ist bewiesen.