Theoretische Informatik: Übungsaufgaben - Blatt 7

Abgabe bis 14. November 2014

Prof. Welzl

Kevin Klein, Vincent von Rotz und David Bimmler

Aufgabe 20

(a) Es gilt zu beweisen, dass die Funktion $e(n) = 3^n$ zeitkonstuierbar ist. Es ist ausreichend, eine MTM zu beschreiben, welche mit der Eingabe 0^n auf dem ersten Arbeitsband 0^{3^n} generiert. Die 3-Band MTM A schreibt zunächst einmal eine 1 auf das zweite Arbeitsband. A liest dann die Eingaben von links nach rechts, und für jede 0 passiert folgendes:

i) auf das dritte Arbeitsband wird das zweite Arbeitsband kopiert, und am Ende eine 0 hinzugefügt. (Dies entspricht einer Multiplikation mit 2 der binären Zahl auf dem zweiten Arbeitsband).

ii) zur Zahl, welche in binärer Kodierung auf dem zweiten Arbeitsband wird die Zahl, welche in binärer Kodierung auf dem dritten Arbeitsband steht addiert.

Wenn die Eingabe ganz gelesen ist, wird die Zahl die auf dem zweiten Arbeitsband steht abgezählt und jedes mal eine 0 auf das erste Arbeitsband geschrieben, so dass am Ende auf dem ersten Arbeitsband 0^{3^n} steht.

Dieses Verfahren hat eine Laufzeit welche in $\mathcal{O}(3^n)$ liegt: n mal werden die Schritte ausgeführt, sowohl Schritt (i) wie auch (ii) brauchen $\mathcal{O}(\log n)$ Schritte. Somit braucht man $\mathcal{O}(n \log n)$ für die Generierung der Zahl 3^n auf dem zweiten Arbeitsband. Für das Abzählen und Schreiben der 3^n 0 auf das erste Arbeitsband braucht man $\mathcal{O}(3^n)$. Also liegt die kombinierte Laufzeit in $\mathcal{O}(3^n)$ und die Funktion ist zeitkonstruierbar.

(b) Wir definieren folgende 3-Band TM A:

Vor Beginn schreiben wir 1 auf Band 2. Solange der Lesekopf auf dem Eingabeband nicht $ liest, addiert nun A den Inhalt der Bänder 2 und 3. Das Resultat wird auf das Band geschrieben, das jeweils länger nicht mehr geschrieben wurde. Wenn der Kopf des Eingabebandes $ erreicht, wird das neuste geschriebene Band auf das erste Band (das Ausgabeband) kopiert. (Wenn das Eingabewort leer ist, so wird 0 ausgegeben). Die Ausgabe ist die n-te Fibonacci-Zahl.

Aufgabe 21

Aufgabe 22

(a)