Theoretische Informatik: Übungsaufgaben - Blatt 7

Abgabe bis 14. November 2014

Prof. Welzl

Kevin Klein, Vincent von Rotz und David Bimmler

Aufgabe 20

(a) Es gilt zu beweisen, dass die Funktion $e(n) = 3^n$ zeitkonstruierbar ist. Es ist ausreichend, eine MTM zu beschreiben, welche mit der Eingabe 0^n auf dem ersten Arbeitsband 0^{3^n} generiert. Die 3-Band MTM A schreibt zunächst einmal eine 1 auf das zweite Arbeitsband. A liest dann die Eingaben von links nach rechts, und für jede 0 passiert folgendes:

i) auf das dritte Arbeitsband wird das zweite Arbeitsband kopiert, und am Ende eine 0 hinzugefügt. (Dies entspricht einer Multiplikation mit 2 der binären Zahl auf dem zweiten Arbeitsband).

ii) zur Zahl, welche in binärer Kodierung auf dem zweiten Arbeitsband wird die Zahl, welche in binärer Kodierung auf dem dritten Arbeitsband steht addiert.

Wenn die Eingabe ganz gelesen ist, wird die Zahl die auf dem zweiten Arbeitsband steht abgezählt und jedes mal eine 0 auf das erste Arbeitsband geschrieben, so dass am Ende auf dem ersten Arbeitsband 0^{3^n} steht.

Dieses Verfahren hat eine Laufzeit welche in $\mathcal{O}(3^n)$ liegt: n mal werden die Schritte ausgeführt, sowohl Schritt (i) wie auch (ii) brauchen $\mathcal{O}(\log n)$ Schritte. Somit braucht man $\mathcal{O}(n \log n)$ für die Generierung der Zahl 3^n auf dem zweiten Arbeitsband. Für das Abzählen und Schreiben der 3^n 0 auf das erste Arbeitsband braucht man $\mathcal{O}(3^n)$. Also liegt die kombinierte Laufzeit in $\mathcal{O}(3^n)$ und die Funktion ist zeitkonstruierbar.

(b) Wir definieren folgende 3-Band TM A:

Vor Beginn schreiben wir binär 1 auf Band 2 und binär 0 auf Band 3.
Die TM iteriert von links nach recht über die Eingabe der Form 0^n.
Bei jeder Operation wird folgendes ausgeführt:

(i) schreibe den Inhalt von AB2 auf AB4

(ii) schreibe den Inhalt von AB2 + den Inhalt von AB3 auf AB2

(iii) schreibe den Inhalt von AB4 auf AB3

Am Ende haben wir in AB2 binär die Zahl $fib(n)$. Diese zählen wir ab, und schreiben dementsprechend viele '0' in AB1.
Jetzt gilt es noch die Anzahl an Schritten zu überprüfen. Alle Ausführungen von (i) führen zu $\mathcal{O}(\sum_{i=1}^{n} log(f(i-1)))$ Schritten, da auf AB2 $fib(i-1)$ steht und dies logartihmische Länge wegen der binären Darstellung hat.
Alle Ausührungen von (ii) führen dementsprechend zu $\mathcal{O}(\sum_{i=1}^{n} log(f(i-1)))$ Schritten.
Alle Ausführungen von (iii) führen dementsprechend zu $\mathcal{O}(\sum_{i=1}^{n} log(f(i-2)))$ Schritten.
Das Ausgeben der $fib(n)$ $'0'$ führt offensichtlich zu $\mathcal{O}(fib(n))$ Schritten.
Es gilt also zu zeigen, dass $\mathcal{O}(\sum_{i=1}^{n} log(f(i-1))) \in \mathcal{O}(fib(n))$.
Offensichtlich gilt: $\mathcal{O}(\sum_{i=1}^{n} log(f(i-1))) \in \mathcal{O}(n * log(fib(n)))$
Wir wissen, dass $fib(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} * ((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n)$
Somit gilt $\lim_{n\to\infty} fib(n) = c^n$ für irgend ein c.
Daraus folgt: $\lim_{n\to\infty} \frac{n*log(fib(n))}{fib(b)} = \frac{n*log(c^n)}{c^n} = \frac{n^2}{c^n} = 0$
Damit haben wir gezeigt, was wir zeigen wollten.

Aufgabe 21

(a) Da wir wissen, dass für jede akzeptierte Eingabe $x \in L(M)$ die Berechnung in $\text{Time}_M(x) \leq t(|x|)$ erfolgt, können wir abbrechen, sobald länger brauchen.

Wir bauen also eine neue Turingmaschine M', mit einem zusätzlichen Arbeitsband. Vor Beginn konstruieren wir auf unserem neuen Band die binäre Codierung von $t(|x|)$. Da die Funktion t zeitkonstruierbar ist, erfolgt dies in Zeit $\mathcal{O}(|x|)$. Nun beginnen wir mit der tatsächlichen Arbeit: wir lassen die ursprüngliche Maschine laufen, aber mit jedem Schritt dekrementieren wir unser neues Band um 1. Wir wissen, dass dekrementieren amortisiert konstante Laufzeit hat (ausführlicher Beweis in Datenstrukturen und Algorithmen). Folglich bleibt die Laufzeit der ursprünglichen TM M gleich.

Wenn die ursprüngliche Maschine die Eingabe akzeptiert, so soll die neue TM M' auch akzeptieren. Ansonsten verwirft M' seine Eingabe, sobald unser neuer Zähler 0 erreicht.

Die Laufzeit unserer neuen Turingmaschine M' setzt sich zusammen aus der Laufzeit des Initialisieren des Zählers und der tatsächlichen Berechnung. Das Initialisieren des Zählers dauert (dank der Zeitkonstruierbarkeit) höchstens $\mathcal{O}(t(|x|))$. Die tatsächliche Berechnung ist ebenfalls beschränkt durch $\mathcal{O}(t(|x|))$, da diese sich ja gegenüber der Ursprünglichen TM nicht verändert hat. Nun gilt für unsere Gesamtlaufzeit:

$\text{Time}_{M'}(n) \in 2 * \mathcal{O}(|x|) \in \mathcal{O}(|x|)$

Aufgabe 22

(a)