Theoretische Infomatik: Übungsaufgaben - Blatt 4

Abgabe bis 17. Oktober 2014

Prof. Hromkovič

Kevin Klein, Vincent von Rotz und David Bimmler

Aufgabe 10

(a) Wir führen einen Widerspruchsbeweis. Wir nehmen an, die Sprache $L_1 = \{0^{n!} \mid n \in \mathbb{N}\}$ sei regulär. Es gibt unendlich viele $x = 0^m$ mit $L_x = \{y \mid xy \in L_1\}$. Es gibt zu jedem x ein y ($y = 0^{n!-m}$) welches das erste kanonische Element in L_x ist. Daraus folgt

$$K(y) \leq \lceil \log_2 n \rceil + c = 1 + c \text{ (endlich)}$$

Es gibt unendlich viele y, diese können nicht von endlich vielen Programmen generiert werden, wir haben also einen Widerspruch.

(b) Wir führen einen Widerspruchsbeweis. Wir nehmen an, die Sprache L_2 ist regulär. Man betrachte $\lambda, c^{2\cdot 1}, c^{2\cdot 2}, c^{2\cdot 3}, \ldots, c^{2\cdot |Q|}$. Mit dem Schubfachprinzip

$$\Longrightarrow \exists\, i, j \mid i \neq j \wedge \hat{\delta}_A(q_0, c^{2i}) = \hat{\delta}_A(q_0, c^{2j}) \quad i, j \in [1, |Q|]$$
$$\Longrightarrow \hat{\delta}_A(q_0, c^{2i}a^i b^i) \in F \wedge \hat{\delta}_A(q_0, c^{2j}a^i b^i) \notin F$$

Dies steht jedoch im Widerspruch zu Lemma 3.3, welches für alle regulären Sprachen gelten muss.

Aufgabe 11

(a) Wir führen einen Widerspruchsbeweis. Man nimmt also an, L_3 sei regulär. Nun existiert nach pumping Lemma ein n_0, sodass es eine Zerlegung $w = yxz, |w|$ für jedes Wort w gibt. Diese Zerlegung muss dann die drei Bedingungen erfüllen.

Sei nun $w := a^{n_0}cb^{n_0}$. $w \notin L_3$. Aber für jede Wahl von x gilt $yx^iz \in L_3$ für $i \neq 1$. Somit ist Folgerung 3 des pumping Lemmas nicht erreicht und wir haben einen Widerspruch. Folglich ist L_3 nicht regulär.

(b) Wir führen einen Widerspruchsbeweis. Wir nehmen an, die Sprache L_4 ist regulär. Sei $p_0 \geq n_0$ eine Primzahl. Dann muss aufgrund des Pumping-Lemmas eine Zerlegung $yxz = 0^{p_0}$ existieren. Es gilt auch $|x| \geq 1, |yx| \leq n_0$. Folglich ist $x = 0^j$.

Da $yxz = 0^{p_0} \in L$, muss auch $yx^iz = 0^p, p$ ist eine Primzahl. Aber für $i = p_0 + 1$ gilt

$$yx^{p_0+1}z = yxx^{p_0}z = 0^{p_0}x^{p_0} = 0^{p_0}0^{jp_0} = 0^{(j+1)p_0}$$

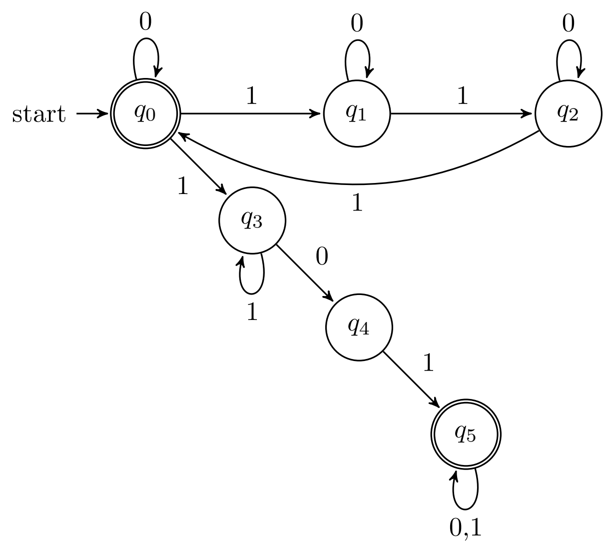
$(j+1)p_0$ ist aber keine Primzahl und somit ist das Pumping-Lemma nicht erfüllt, und die Sprache L_4 nicht regulär.

Aufgabe 12

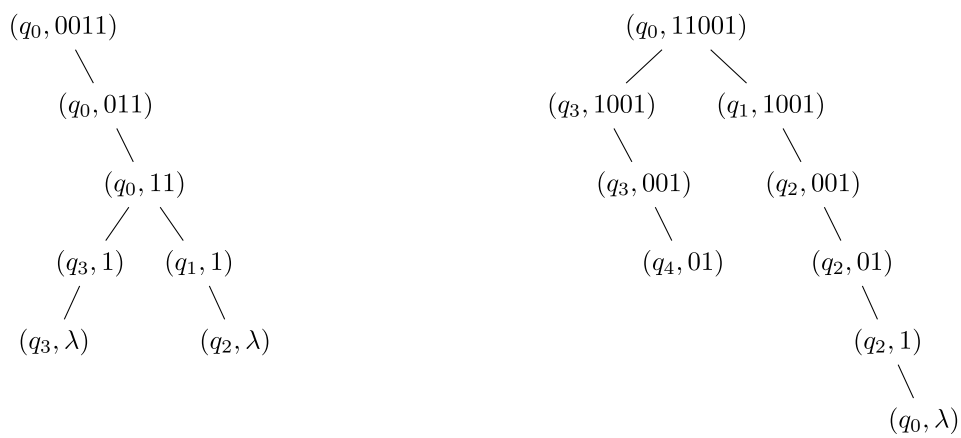
(a) Der folgende nichtdeterministische endliche Automat akzeptiert die Sprache

$$L = \{x \in \{0,1\}^* \mid |x|_1 \mod 3 = 0 \text{ oder } x \text{ enthält das Teilwort } 101\}.$$

Die Idee des Entwurfes ist, dass sich die Spezifikation der Sprache gut aufteilen lässt, in eine Sprache welche das Teilwort 101 enthält, und eine Sprache mit $|x|_1 \mod 3 = 0$.

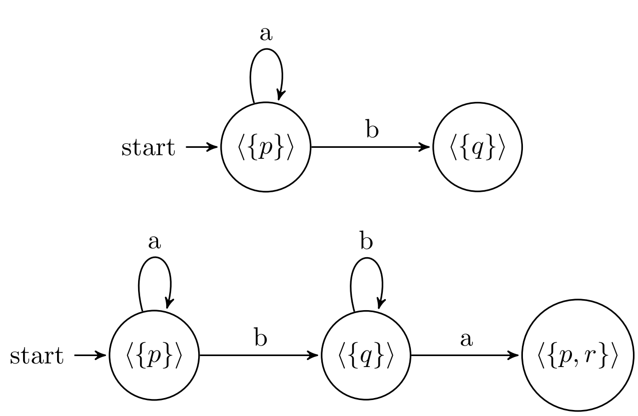


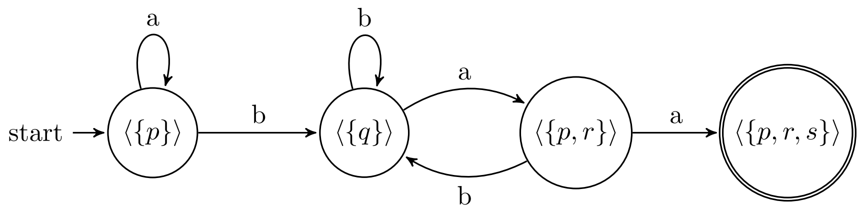
(b) Die Berechnungsbäume für die Wörter $w_1 = 0011$ und $w_2 = 11011$:

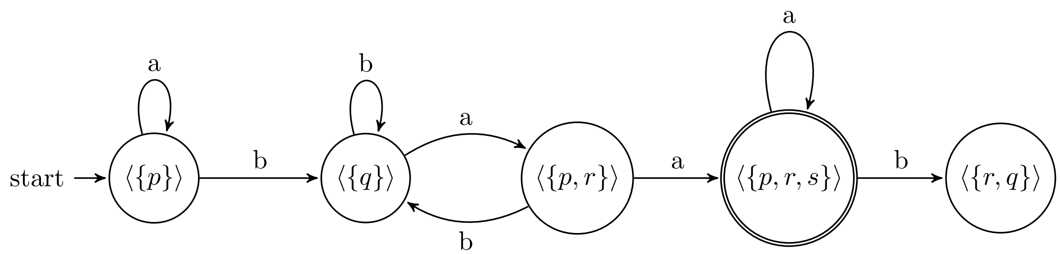


Aufgabe 13

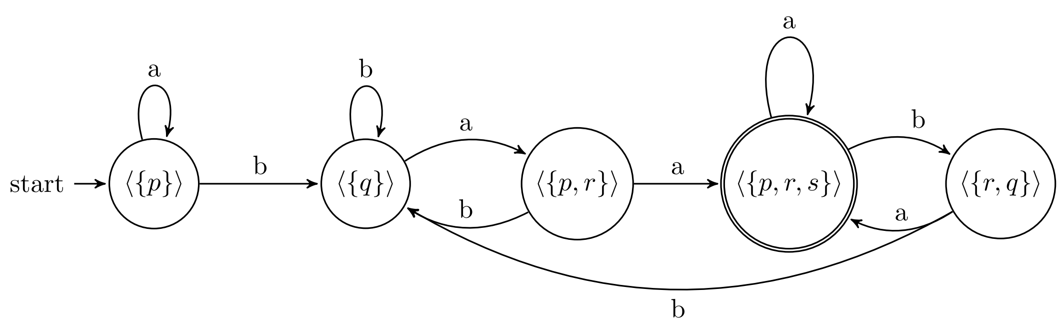
Wir konstruieren den deterministischen endlichen Automaten nach dem Beweis 3.2 im Buch. Die folgenden Schemata sind *nicht* komplette endliche Automaten, sie zeigen lediglich den Arbeitsweg.







Der folgende deterministische endliche Automat ist äquivalent zum nichtdeterministischen endlichen Automat der Aufgabenstellung.



Die Funktionen δ und δ' sind folgendermassen definiert:

δ	a	b
p	$\{p\}$	$\{q\}$
q	$\{p, r\}$	$\{q\}$
r	$\{r, s\}$	$\emptyset$
s	$\{r, s\}$	$\{r\}$

δ'	a	b
$\langle\{p\}\rangle$	$\langle\{p\}\rangle$	$\langle\{q\}\rangle$
$\langle\{q\}\rangle$	$\langle\{p, r\}\rangle$	$\langle\{q\}\rangle$
$\langle\{p, r\}\rangle$	$\langle\{p, r, s\}\rangle$	$\langle\{q\}\rangle$
$\langle\{p, r, s\}\rangle$	$\langle\{p, r, s\}\rangle$	$\langle\{r, a\}\rangle$
$\langle\{r, q\}\rangle$	$\langle\{p, r, s\}\rangle$	$\langle\{q\}\rangle$