

# 1 Pracovní úkol

1. Změřte dynamickou viskozitu parafinového oleje Stokesovou metodou.
2. Změřte dynamickou viskozitu ricinového oleje Stokesovou metodou.
3. Ověřte, zda jsou pro dané experimentální uspořádání splněny podmínky platnosti Stokesova vzorce pro odpor prostředí při pohybu koule.
4. Hustotu skleněných kuliček určete pyknometrickou metodou.

## 2 Teoretický úvod

### 2.1 Stokesova metoda měření viskozity

Na pohybující se těleso v tíhovém poli působí obecně tři síly - tíhová síla určena vztahem  $G = mg$  (standardně  $m$  je hmotnost tělesa,  $g$  je tíhové zrychlení), vztlaková síla a odporová síla. Vztlaková síla má dle Archimedova zákona tvar  $Fvz = V\rho g$ , kde  $V$  je objem tělesa a  $\rho$  je hustota tekutiny. Pokud se jedná o pohyb kulově symetrického tělesa a jsou splněny podmínky laminárního obtékání popisuje odporovou sílu Stokesův vztah

$$F = 6\pi\eta rv, \quad (1)$$

kde  $\eta$  je dynamická viskozita kapaliny,  $r$  je poloměr tělesa,  $v$  je jeho rychlost. Kromě laminarity proudění jsou zde předpokládány neomezené rozměry prostředí v němž se kulička pohybuje.

Kriterium laminarity proudění je určeno Reynoldsovým číslem  $Re$ , které je definováno

$$Re = \frac{2r\rho v}{\eta}, \quad (2)$$

kde  $\rho$  je hustota tekutiny. Pokud je  $Re \ll 1$  jedná se dle [1] o laminární proudění.

Pokud se tedy jedná o pád kuliček ve válcové nádobě splňující podmínku laminárního proudění je viskozita tekutiny v ní dle [1] určena

$$\eta = \frac{2r^2(\rho_k - \rho)g}{9v\left(1 - \frac{2,4r}{R}\right)}, \quad (3)$$

kde  $\rho_K$  je hustota kuliček,  $R$  je poloměr válcové nádoby a  $\rho_k$  je hustota kuliček.

### 2.2 Pyknometrická metoda pro určení hustoty pevných látek

Pro určení hustoty malých objektů určíme jejich hmotnost  $m_1$  na vzduchu. Poté určíme hmotnost  $m_2$  celého pyknometru naplněného kapalinou o hustotě  $\rho_z$ . Nakonec určíme

hmotnost  $m_3$  tak, že do pyknometru naplněného vodou nasypeme objekty o hmotnosti  $m_1$ . Pak je tedy výsledná hustota tělísek  $\rho_k$  dle [5]

$$\rho_k = \frac{m_1}{m_1 + m_2 - m_3}(\rho_z - \rho_{vzduch}) + \rho_{vzduch}, \quad (4)$$

kde  $\rho_{vzduch}$  je hustota vzduchu.

## 3 Měření

### 3.1 Parametry kuliček

Kuličky jsou dvou typů - velké a malé. Od každého typu jsem si vybrala 10 kuliček. Pro ty jsem určila průměr pomocí dilenského mikroskopu. Naměřené hodnoty jsou v tabulce 2 (je zde uvedeno pouze 7 kuliček velkých - ostatní nebyly využity). Pro první tři velké kuličky a první dvě malé kuličky jsem provedla vždy po pěti měření (tabulka 1) a dle [2] jsem určila směrodatné odchyly, které jsem kvadraticky sečetla s polovinou nejmenšího dílku přístroje, tj  $0,005 \text{ mm}$ . Pro ostatní kuličky jsem z časových důvodů tolik měření nemohla provést, proto jako chybu určení průměru ostatních kuliček беру aritmetický průměr statisticky určených chyb. Kuličky jsem si odkládala do číslovaných boxů. V dalším měření, jsem pak mohla rozlišovat jednotlivé velikosti kuliček.

Hustotu kuliček jsem určila pyknometrickou metodou. Tedy za předpokladu konstantní hustoty měřeného materiálu jsem vybrala soubor kuliček s nímž jsem pak prováděla měření nezávisle na číslovaných kuličkách. Naměřené hodnoty jsou v tabulce 7. Chyby jsou spočteny dle kvadratického hromadění chyb. Chyby jednotlivých hmotností jsem brala jako velikost předposledního digitu na měřících vahách, tedy  $0,001 \text{ g}$ . Váhy mi na posledním desetinném místě i po doporučeném čase 3 s přišly nestabilní.

Hustotu  $\rho_z$  destilované vody jsem odečetla z přítomné tabulky po určení teploty  $t_z = (23,0 \pm 0,1)^\circ\text{C}$  jako  $\rho = 997,3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .

Dále jsem určila atmosferický tlak  $p_A = (987,0 \pm 2) \text{ hPa}$  a teplotu vzduchu  $t_v = (24,8 \pm 0,4)^\circ\text{C}$ . Tyto chyby byly odečteny z dokumentace měřících přístrojů. Na základě těchto hodnot určím z [2] pomocí stavové rovnice hustotu vzduchu  $\rho_{vzduch} = (1,15 \pm 0,02) \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ , kde pro určení chyb jsem kvadraticky sečetla relativní chyby teploty a tlaku. Dosazením do (4) pro hustoty kuliček dostanu<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \rho_k^V &= (2506 \pm 40) \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}, \\ \rho_k^M &= (2469 \pm 53) \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}, \end{aligned}$$

kde chyba těchto veličin byla určena standardními vztahy pro rozdíl resp. podíl relativních chyb z [2].

---

<sup>1</sup>index  $v$  načí velké kuličky, index  $m$  značí malé kuličky

## 3.2 Měření viskozity

Do odměrného válce naplněného kapalinou jsem postupně pouštěla jednotlivé kuličky. Měřila jsem čas  $t$ , za který kulička urazila vzdálenost  $l_r$  nebo  $l_p$ <sup>2</sup>. Při předpokladu, že v měřeném úseku je rychlost kuličky již maximální možná rychlost, kterou při daném průměru v dané kapalině může dosáhnout, určím rychlost pádu kuličky ze vztahu pro rovnoměrný pohyb. Naměřené hodnoty jsou v tabulkách 3, 4, 5 a 6.

Hustota kapalin je uvedena přímo u měřených kapalin jako  $\varrho_r = 950 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  a  $\varrho_p = 850 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .

Pro počáteční charakteristiku proudění v jednotlivých kapalinách jsem pomocí tabulkových hodnot viskozit [3], tedy  $\eta_r = (986 \cdot 10^3) \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1}\text{s}^{-1}$ ,  $\eta_p = (101,8 \cdot 10^3) \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1}\text{s}^{-1}$ , určila hodnotu Reynoldsova čísla. Pro ricinový olej se jedná vždy o proudění laminární. Pro olej parafinový byla podmínka hodnoty 2 pro velké kuličky porušena. Proto jsem provedla pouze 2 měření pro ověření teoretického výpočtu.

Dosazením hodnot do vztahu 3 jsem určila hodnotu viskozity pro každou kuličku zvlášť. Následně jsou určila jejich střední hodnotu, tedy

$$\begin{aligned}\eta_r^V &= (832 \pm 37) \text{ kg} \cdot \text{mm}^{-1}\text{s}^{-1}, \\ \eta_r^M &= (732 \pm 52) \text{ kg} \cdot \text{mm}^{-1}\text{s}^{-1}, \\ \eta_p^V &= (46 \pm 4) \text{ kg} \cdot \text{mm}^{-1}\text{s}^{-1}, \\ \eta_p^V &= (61 \pm 4) \text{ kg} \cdot \text{mm}^{-1}\text{s}^{-1},\end{aligned}$$

kde chyby byly určeny postupem z [2] a [4] pomocí kvadratického sčítání relativních chyb a statistického zpracování souboru hodnot. Chybu určení času jsem na stopkách s přesností 0,01s odhadla i s reakční dobou na 0,1s.

## 4 Diskuze

### 4.1 Parametry kuliček

Při měření hustoty kuliček pyknometrem se předpokládá, že hustota souboru je vzhledem k jejich výrobnímu postupu u všech kuliček stejná. Pokud by jejich hustoty takové nebyly určili bychom pouze průměrnou hustotu celého souboru a tím bychom vnesli chybu do celkového výsledku.

U měření průměrů kuliček je vidět jejich značná různorodost. Navíc všechny kuličky nemají přesně kulový tvar a tedy pro ně neplatí Stokesův vztah. Celkový výsledek měření je na určení průměru kuliček velmi citlivý, proto by se přesnost zvýšila větším počtem měření pro každou kuličku.

---

<sup>2</sup>index  $r$  značí ricinový olej, index  $p$  značí parafinový olej

## 4.2 Měření viskozity

Výsledné hodnoty se s hodnotami tabulkovými ([3]) neshodují ani v rámci určené chyby. To může být částečně způsobeno rozdílným složením měřených látek a částečně také teplotou. Tabulková hodnota byla udána pro 20°C. Nicméně se neshodují v rámci chyby ani určené viskozity pro jednotlivé velikosti kuliček.

Rozdílná hodnota výsledků při měření parafínového oleje se vzhledem k turbulentnímu charakteru proudění v případě velkých kuliček očekávala. Ale u oleje ricinového se dle hodnoty 2 pro velké i malé kuličky jednalo o laminární proudění a tedy hodnoty by se neměly příliš lišit.

Důvodem rozdílnosti těchto hodnot by mohl být nerovnoměrný pohyb na měřeném úseku. Další chybu vnáší již zmiňovaná tvarová nepravidelnost kuliček a tedy neoprávněné užití Stokesova vztahu. Také vztah 3, který platí přesně při pádu kuličky středem válce, čehož nešlo vždy přesně docílit.

## 5 Závěr

Změřila jsem průměry kuliček dilénským mikroskopem. Naměřené hodnoty zobrazují tabulky 1 a 2.

Pyknometrickou metodou jsem určila hustu malých i velkých kuliček. Naměřené hodnoty jsou v tabulce 7. Výsledné hodnoty hustot jsou

$$\begin{aligned}\varrho_k^V &= (2506 \pm 40) \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}, \\ \varrho_k^M &= (2469 \pm 53) \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}.\end{aligned}$$

Dále jsem určila dynamickou viskozitu ricinového a parafínového oleje pro obě velikosti kuliček. Tedy <sup>3</sup>

$$\begin{aligned}\eta_r^V &= (832 \pm 37) \text{ kg} \cdot \text{mm}^{-1} \text{s}^{-1}, \\ \eta_r^M &= (732 \pm 52) \text{ kg} \cdot \text{mm}^{-1} \text{s}^{-1}, \\ \eta_p^V &= (46 \pm 4) \text{ kg} \cdot \text{mm}^{-1} \text{s}^{-1}, \\ \eta_p^M &= (61 \pm 4) \text{ kg} \cdot \text{mm}^{-1} \text{s}^{-1}.\end{aligned}$$

Hodnoty jsou v tabulkách 4-6.

## Reference

- [1] Studijní text - Volný pád koule ve viskózní kapalině,  
[http://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/txt\\_119.pdf](http://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/txt_119.pdf), 13.3 2011

---

<sup>3</sup>Kde dolní index značí druh kapaliny (r - ricinový olej, p - parafínový olej) a horní index velikost kuličky.

- [2] Mikulčák, J. a kol. - Matematické, fyzikální a chemické tabulky, Prometheus, Praha 2007, 1. vydání
- [3] Brož, J. a kol. - Fyzikální a matematické tabulky, SNTL, Praha 1980
- [4] Čížek, J. - Úvod do praktické fyziky, <http://physics.mff.cuni.cz/kfnt/>, 13.3 2011
- [5] Studijní text - Pyknometrická metoda pro určení hustoty pevných látek, [http://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/txt\\_119\\_pyknometr.pdf](http://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/txt_119_pyknometr.pdf), 13.3 2011

Tabulka 1: Průměry kuliček u kterých bylo provedeno více měření

	$d_{1V}/\text{mm}$	$d_{2V}/\text{mm}$	$d_{3V}/\text{mm}$	$d_{1M}/\text{mm}$	$d_{1M}/\text{mm}$
	2,656	2,585	2,57	1,465	1,54
	2,58	2,56	2,58	1,425	1,525
	2,57	2,575	2,555	1,46	1,54
	2,59	2,605	2,565	1,48	1,525
	2,575	2,57	2,56	1,46	1,52
$\bar{d}/\text{mm}$	$2,59 \pm 0,06$	$2,58 \pm 0,03$	$2,59 \pm 0,02$	$1,46 \pm 0,04$	$1,53 \pm 0,02$

Tabulka 2: Výsledné průměry kuliček

$d_{kV}/\text{mm}$	$d_{kM}/\text{mm}$
2,59	1,46
2,58	1,53
2,57	1,53
2,57	1,54
2,62	1,52
2,50	1,57
2,54	1,59
	1,57
	1,53
	1,50

Tabulka 3: Určení viskozity - velké kuličky ricinový olej

$t_r^V/s$	$v_r^V/cm \cdot s^{-1}$	$\eta_r^V/kgmm^{-1} \cdot s^{-1}$
26,4	0,62	844,932
25,85	0,64	818,026
26,19	0,63	820,762
26,48	0,62	832,343
26,03	0,63	845,990

Tabulka 4: Určení viskozity - malé kuličky ricinový olej

$t_r^M/s$	$v_r^M/cm \cdot s^{-1}$	$\eta_r^M/kgmm^{-1} \cdot s^{-1}$
67,79	0,24	692,121
66,9	0,25	750,529
66,56	0,25	746,715
66,37	0,25	749,345
65,03	0,25	720,262

Tabulka 5: Určení viskozity - malé kuličky parafinový olej

$t_p^M/s$	$v_p^M/cm \cdot s^{-1}$	$\eta_p^M/kgmm^{-1} \cdot s^{-1}$
3,05	5,44	63,448
3,14	5,28	63,098
3,2	5,18	60,399
3,07	5,40	59,851
3,16	5,25	56,298

Tabulka 6: Určení viskozity - velké kuličky parafinový olej

$t_p^V/s$	$v_p^V/cm \cdot s^{-1}$	$\eta_p^V/kgmm^{-1} \cdot s^{-1}$
1,32	12,56	42,006
1,58	10,49	49,714

Tabulka 7: Pyknometrické určení hustoty kuliček

	velké kuličky	malé kuličky
$m_1g$	4,77	3,49
$m_2g$	11,66	11,41
$m_3g$	14,54	13,50