1 Úkol

1. Změřte dobu kmitu T_0 dvou stejných nezávislých fyzických kyvadel.
2. Změřte dobu kmitů T_i dvou stejných fyzických kyvadel vázaných slabou pružnou vazbou vypouštěných z klidu při počátečních podmínkách:
   (a) $y_1 = y_2 = B \ldots$ doba kmitu T_1
   (b) $y_1 = -y_2 = B \ldots$ doba kmitu T_2
   (c) $y_1 = 0, y_2 = B$
      i. doba kmitu T_3
      ii. doba $T_4/4$, za kterou dojde k maximální výměně energie mezi kyvadly
3. Vypočtěte kruhové frekvence ω_0, ω_1, ω_2, ω_3 a ω_4 odpovídající dobám T_0, T_1, T_2, T_3 a T_4, ověřte měřením platnost vztahů odvozených pro ω_3 a ω_4.
4. Vypočtěte stupeň vazby κ.
5. Pro jednu pružinu změřte závislost stupně vazby na vzdálenosti zavěšení pružiny od uložení závěsu kyvadla a graficky znázorněte.

2 Teorie

Vázané scilátory jsou v našem případě dvě identická kyvadla, mezi kterými je upevněna ve vzdálenosti d od osy otáčení pružina. Pro každé z nich platí

$$T = \sqrt{\frac{D}{J}}, \tag{1}$$

kde D je direkční moment a J moment setrvačnosti kyvadla. Pro samostatné kyvadlo též platí

$$M = \alpha D, \tag{2}$$

kde M je moment síly potřebný k vychýlení osy kyvadla o úhel α. Při zapojení pružiny se začne projevovat její vlastní direkční moment D^*, který je závislý na tuhosti pružiny a vzdálenosti d uvedené výše.

V závislosti na počátečních podmínkách tyto kyvadla splňují význačné pohybové rovnice. Obecnější řešení naleznete v [1]. První případ je $y_1(0) = y_2(0) = A, \dot{y}_1(0) = \dot{y}_2(0) = 0$, kde y_i jsou výchylky kyvadel. V tomto případě splňují kyvadla rovnici

$$\varphi_1 = \varphi_2 = A \cos \omega_1, \tag{3}$$

kde A je maximální amplituda a

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{D}{J}}. \tag{4}$$

Pro druhý případ jsou počáteční podmínky $y_1(0) = -y_2(0) = B, \dot{y}_1(0) = \dot{y}_2(0) = 0$, při kterých splňují rovnici

$$\varphi_1 = -\varphi_2 = A\cos\omega_2, \tag{5}$$

kde A je amplituda a

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{D + 2D^*}{J}}. \tag{6}$$

Z těchto dvou případů se dá dopočítat případ $y_1(0), y_2(0) = B, \dot{y}_1(0) = \dot{y}_2(0) = 0$, pro který platí

$$\varphi_1 = A\sin\left[\frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)t\right]\cos\left[\frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_1)t\right], \tag{7}$$

$$\varphi_2 = A\cos\left[\frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)t\right]\sin\left[\frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_1)t\right] \tag{8}$$

Při slabé vazbě můžeme rovnice (7), (8) interpretovat tak, že obě kyvadla kmitají se stejnou frekvencí

$$\omega_3 = \frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_1) \tag{9}$$

a jejich ampitudy se periodicky mění s frekvencí

$$\omega_4 = \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1). \tag{10}$$

Tyto frekvence zjistíme naměřením času t, za který kyvadlo vykoná n kmitů a dosazením do rovnice

$$\omega = \frac{2\pi n}{t}. \tag{11}$$

Výsledný vztah pro výpočet stupňe vazby je dle [1]

$$\kappa = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2 + \omega_1^2}. \tag{12}$$

Podrobnější rozbor mechaniky kyvadel naleznete v [2]
K měření byli k dispozici dvě pružiny různé tuhosti, stopky, metr a kyvadla.

3 Výsledky měření

Vnější podmínky neměly žádné důsledky na přenost měření, tudíž je neuvádím.

3.1 Stupeň vazby

Nejprve jsem nastavil háčky na uchycení pružiny u obou kyvadlech do stejné vzdálenosti od osy otáčení a změřil ji. Hodnoty naleznete v tabulce 1.

d_0/cm	34.6	34.5	34.6	34.5	34.4	34.4	34.5	34.5	34.4	34.6

Tabulka 1: Vzdálenost úchytů od osy otáčení

Následně jsem ověřil, zda jsou obě kyvadla dobře zkalibrovaná, a to tak, že jsem změřil dobu deseti kmitů každého z kyvadel, které jsou shrnuty v tabulce 2 pod označením T_0^1 a T_0^2, a dle vztahu (11) stanovil jejich periody spolu s jejich chybami dle [4]

$$T_0^1 = (1.91 \pm 0.01)\mathrm{s}, \tag{13}$$
$$T_0^2 = (1.91 \pm 0.01)\mathrm{s} \tag{14}$$

n	$10 \cdot T_0^1$/s	$10 \cdot T_0^2$/s
1	19.07	19.05
2	19.04	19.13
3	19.14	19.09
4	18.98	19.05
5	19.05	19.02

Tabulka 2: Doba deseti kmitů jednotlivých kyvadel.

Poté jsem postupně zavěšoval na háčky pružiny a měřil výzačné připady popsané výše. Dále v textu je vždy příslušný případ ozačen dolním indexem a horní značí typ pružiny. Z těchto naměřených hodnot jsem dle [4] stanovil jejich střední hodnotu a chybu. Měření jsou shrnuta v tabulkách 3,4,5 a 6.

n	$10 \cdot T_1^1$/s	$10 \cdot T_1^2$/s	n	$10 \cdot T_1^1$/s	$10 \cdot T_1^2$/s
1	19.09	19.04	6	19.08	19.06
2	19.15	19.05	7	19.10	19.09
3	19.02	19.02	8	19.04	19.08
4	19.05	19.01	9	19.05	19.05
5	19.08	19.04	10	19.06	19.02

Tabulka 3: Doba deseti period pro případ stejné výchylky na obou kyvadlech.

n	$10 \cdot T_2^1/\mathrm{s}$	$10 \cdot T_2^2/\mathrm{s}$	n	$10 \cdot T_2^1/\mathrm{s}$	$10 \cdot T_2^2/\mathrm{s}$
1	18.24	16.88	6	18.22	16.89
2	18.18	16.89	7	18.14	16.92
3	18.22	16.89	8	18.20	16.79
4	18.29	16.89	9	18.21	16.95
5	18.22	16.85	10	18.15	16.89

Tabulka 4: Doba deseti period pro případ opačné výchylky na kyvadlech.

n	$7 \cdot T_3^1/\mathrm{s}$	$3 \cdot T_3^2/\mathrm{s}$	n	$7 \cdot T_3^1/\mathrm{s}$	$3 \cdot T_3^2/\mathrm{s}$
1	12.93	5.18	6	12.93	5.27
2	12.88	5.44	7	12.94	5.37
3	13.00	5.31	8	13.06	5.35
4	12.98	5.34	9	12.89	5.36
5	12.99	5.35	10	12.96	5.39

Tabulka 5: Doba sedmi respektive tří period pro případ vychýlení jednoho kyvadla.

n	$\frac{1}{2} \cdot T_4^1/\mathrm{s}$	$\frac{1}{2} \cdot T_4^2/\mathrm{s}$	n	$\frac{1}{2} \cdot T_4^1/\mathrm{s}$	$\frac{1}{2} \cdot T_4^1/\mathrm{s}$
1	39.79	14.03	6	40.23	14.14
2	39.92	13.95	7	40.99	14.09
3	39.60	14.66	8	39.89	14.62
4	38.99	13.81	9	39.77	14.82
5	40.18	13.90	10	39.83	14.36

Tabulka 6: Doba, za kterou se druhé kyvadlo opět zastaví, pokud vychýlíme pouze první.

Po jejich vyhodnocení dle [4] mi vyšli výsledné doby period

$$T_1^1 = (1.91 \pm 0.01)\mathrm{s} \quad (15)$$
$$T_2^1 = (1.82 \pm 0.01)\mathrm{s} \quad (16)$$
$$T_3^1 = (1.85 \pm 0.01)\mathrm{s} \quad (17)$$
$$T_4^1 = (79.8 \pm 0.7)\mathrm{s} \quad (18)$$
$$T_1^2 = (1.90 \pm 0.01)\mathrm{s} \quad (19)$$
$$T_2^2 = (1.69 \pm 0.01)\mathrm{s} \quad (20)$$
$$T_3^2 = (1.78 \pm 0.03)\mathrm{s} \quad (21)$$
$$T_4^2 = (28.6 \pm 0.6)\mathrm{s} \quad (22)$$

Dle (11) a vzorců pro přenos chyby z [4] jsem dopočetl výsledné frekvence

$$\omega_1^1 = (3.29 \pm 0.03)\mathrm{s} \tag{23}$$
$$\omega_2^1 = (3.45 \pm 0.02)\mathrm{s} \tag{24}$$
$$\omega_3^1 = (3.40 \pm 0.02)\mathrm{s} \tag{25}$$
$$\omega_4^1 = (7.87 \pm 0.07) \cdot 10^{-2}\mathrm{s} \tag{26}$$
$$\omega_1^2 = (3.31 \pm 0.02)\mathrm{s} \tag{27}$$
$$\omega_2^2 = (3.72 \pm 0.02)\mathrm{s} \tag{28}$$
$$\omega_3^2 = (3.53 \pm 0.02)\mathrm{s} \tag{29}$$
$$\omega_4^2 = (2.20 \pm 0.05) \cdot 10^{-1}\mathrm{s} \tag{30}$$

Po dosazení do rovnic (9) a (10) jsem zjistil, že mnou naměřené hodnouty ω_3 a ω_4 odpovídají v rámci chyby měření těm vypočteným.

Nakonec jsem dle (12) vypočetl stupeň vyzby pro jednotlivé pružiny

$$\kappa^1 = (4.74 \pm 0.07) \cdot 10^{-2}, \tag{31}$$
$$\kappa^2 = (1.16 \pm 0.02) \cdot 10^{-1} \tag{32}$$

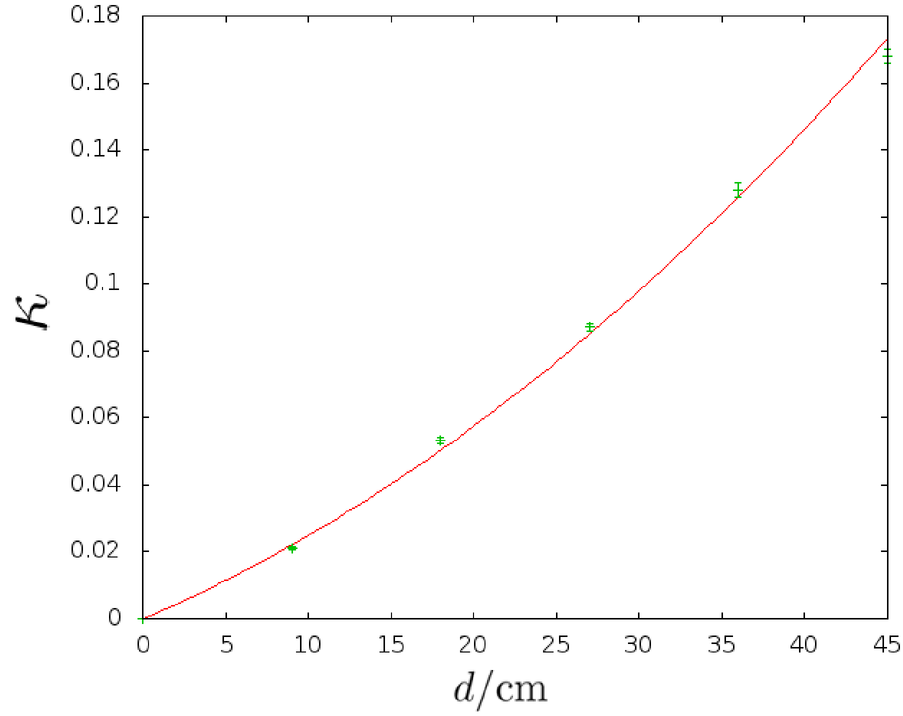
3.2 Závislost κ na poloze pružiny

Pro lepší viditelnost závislosti jsem zvolil pružinu s vyšším stupněm vazby. Počátek souřadnice d jsm si položil do nejvyššího místa, kam se dal háček na pružinu umístit. Vycházel jsem z předpokladu, že perioda T_1 dle značení výše nezávisí na κ, což jsem si ověřil pro krajní hodnoty, a tak jsem měřil pouze T_2 pro jednotlivé hodnoty d. Naměřené hodnoty jsou spolu s výslednou periodou a stupněm vazby včetně chyby v tabulce 7.

d/cm	$10 \cdot T_2^i$/s					T_2/s	κ
0	19.07	19.08	19.14	19.02	19.07	1.91 ± 0.01	0.00 ± 0.0001
9	18.67	18.74	18.82	18.73	18.73	1.87 ± 0.01	0.0211 ± 0.0003
18	18.21	18.13	18.11	18.08	18.07	1.81 ± 0.01	0.0532 ± 0.0008
27	17.49	17.54	17.45	17.47	17.51	1.75 ± 0.01	0.087 ± 0.001
36	16.83	16.81	16.75	16.68	16.74	1.68 ± 0.01	0.128 ± 0.002
45	16.21	16.12	16.16	16.08	16.09	1.61 ± 0.01	0.168 ± 0.002

Tabulka 7: Závislost stupně vazby na vzdálenosti pružiny od osy otáčení.

Tuto závislost jsem zanesl do grafu 1 a pro lepší názornost proložil parabolou.



Graf 1:Závislost stupně vazby na vzdálenosti pružiny od osy otáčení.

4 Diskuze

Přesnost měření T_1 a T_2 dále potřebných pro výpočet κ byla vysoká, a proto si myslím, že výsledek odpovídá skutečnosti. S ostatnímy časy se již vyskytovaly nemalé potíže. Zaprvé u periody T_3 jsem musel snížit počet kmitů, které jsem počítal, protože okolo nulové výchylky nebylo možné stanovit jejich počet. Tím se samozřejmě výrazně zvýšila chyba daná především reakční dobou, obzvláště u tužší pružiny, kdy jsem byl schopen přesně určit pouze 3 kmity. U periody T_4 nastal problém s přesným určením doby, kdy se druhé kyvadlo opět zastavilo, protože nebylo mnohdy poznat, jestli už se tak stalo, či nikoliv. U tohoto měření je také chyba zdaleka největší, protože jsem tento fakt musel vzít v úvahu ve statistické chybě. I přes tyto nepřesnosti se všask ukázalo, že vzorce (11) a (12) jsou správné. Díky tomu, že k závilosti κ na vzdálenosti pružiny od osy otáčení bylo zapotřebí pouze prvních dvou period je výsledná chyba opět minimální a z grafu je dobře vidět, že se nejedá o lineární závislost.

5 Závěr

Změřil jsem periodu dvou nezávislých fyzických kyvadel

$$T_0^1 = (1.91 \pm 0.01)\mathrm{s}, \tag{33}$$
$$T_0^2 = (1.91 \pm 0.01)\mathrm{s}. \tag{34}$$

Změřil jsem periody vázaných kyvadel T_i při počátečbích podmínkách dle zadání

$$T_1^1 = (1.91 \pm 0.01)\mathrm{s}, \tag{35}$$
$$T_2^1 = (1.82 \pm 0.01)\mathrm{s}, \tag{36}$$
$$T_3^1 = (1.85 \pm 0.01)\mathrm{s}, \tag{37}$$
$$T_4^1 = (79.8 \pm 0.7)\mathrm{s}, \tag{38}$$
$$T_1^2 = (1.90 \pm 0.01)\mathrm{s}, \tag{39}$$
$$T_2^2 = (1.69 \pm 0.01)\mathrm{s}, \tag{40}$$
$$T_3^2 = (1.78 \pm 0.03)\mathrm{s}, \tag{41}$$
$$T_4^2 = (28.6 \pm 0.6)\mathrm{s}. \tag{42}$$

Vypočetl jsem frekvence ω_i odpovídající periodám výše

$$\omega_1^1 = (3.29 \pm 0.03)\mathrm{s}, \tag{43}$$
$$\omega_2^1 = (3.45 \pm 0.02)\mathrm{s}, \tag{44}$$
$$\omega_3^1 = (3.40 \pm 0.02)\mathrm{s}, \tag{45}$$
$$\omega_4^1 = (7.87 \pm 0.07) \cdot 10^{-2}\mathrm{s}, \tag{46}$$
$$\omega_1^2 = (3.31 \pm 0.02)\mathrm{s}, \tag{47}$$
$$\omega_2^2 = (3.72 \pm 0.02)\mathrm{s}, \tag{48}$$
$$\omega_3^2 = (3.53 \pm 0.02)\mathrm{s}, \tag{49}$$
$$\omega_4^2 = (2.20 \pm 0.05) \cdot 10^{-1}\mathrm{s}, \tag{50}$$

a ověřil, že vztahy (9) a (10) platí.
Vypočetl jsem stupeň vazby pro obě pružiny zavěšené v poloze d_0

$$\kappa^1 = (4.74 \pm 0.07) \cdot 10^{-2}, \tag{51}$$
$$\kappa^2 = (1.16 \pm 0.02) \cdot 10^{-1}. \tag{52}$$

Změřil jsem závislost stupně vazby jedné pružiny na vzdálenosti od osy otáčení a znázornil ji v grafu 1.

Reference

[1] **Studijní text na praktikum I**
http://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/txt_107.pdf (21. 3. 2011)

[2] *Prof. RNDr. Jozef Kvasnica, DrSc. a kolektiv*: **Mechanika**
Academia, Praha 1988

[3] *Jiří Mikulčák a kolektiv*: **Matematické, fyzikální a chemické tabulky**
Prometheus, Praha 1988

[4] *J. Englich*: **Zpracování výsldků fyzikálních měření**
LS 1999/2000