

1 Úkol

1. Změřte tuhost k_1 pěti pružin metoudou statickou.
2. Sestrojte graf závislosti prodloužení pružiny na působící síle $y = i(F)$
3. Změřte tuhost k_2 pěti pružin metodou dynamickou.
4. Z doby kmitu tělesa známé hmotnosti a výchylky pružiny po zavěšení tohoto tělesa určete místní tíhové zrychlení g .
5. Sestrojte grafy závislostí
 - (a) $\omega = f(\sqrt{k})$
 - (b) $\omega = f\left(\sqrt{\frac{1}{m}}\right)$
6. Při zpracování použijte lineární regresi.

2 Teorie

Harmocnický kmit je lineární případ pohybu, kdy se těleso pohybuje periodicky kolem jednoho bodu. Je způsoben silou F , která je přímo úměrná vzdálenosti od tohoto bodu. Tato vzdálenost se nazývá výchylka a značí y . Konstanta úměrnosti se většinou značí k . Pohybová rovnice tedy je

$$F = -ky. \quad (1)$$

Řešení této rovnice pro okamžitou výchylku je

$$y = A \sin \omega t + \varphi, \quad (2)$$

kde A je maximální výchylka, ω úhlová frekvence, t čas a φ počáteční fáze. Pro úhlovou frekvenci platí vztah

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad (3)$$

kde T je perioda kmitu.

Pružina se závažím m v tíhovém poli je jeden z případů harmonického oscilátoru. Konstanta k charakterizuje tuhost dané pružiny. Ta se dá určit dvěma způsoby.

První je statická metoda, kdy pružina nekmitá. Tíhová síla a síla, kterou působí pružina jsou tedy v rovnováze a platí vztah

$$mg = ky, \quad (4)$$

příčemž y je výchylka od referenční polohy a m hmotnost, kterou jsme na pružinu přidali. Z tohoto snadno vyládríme vztah pro výpočet tuhosti pružiny

$$k = \frac{mg}{y}. \quad (5)$$

Druhá metoda, dynamická, vychází ze vztahu pro úhlovou frekvenci

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (6)$$

kde k je tuhost pružiny a m hmotnost závaží na ní. Jelikož se ω špatně měřím využijeme vztahu 3 a nakonec vyjádříme tuhost pružiny

$$k = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 m. \quad (7)$$

Ze studia pohybu pružiny se dá také určit tíhové zrychlení. Odvození naleznete např v [1]. Výsledný vzorec je

$$g = \omega^2 y_0, \quad (8)$$

kde y_0 je výchylka v klidové poloze.

Bližší studium harmonického oscilátoru je v [2]

3 Výsledky měření

3.1 Podmínky

Teplota v laboratoři byla 25.1 °C. Uvádím ji, protože pružiny jsou vyrobeny z kovu. Proto má teplota výrazný vliv na jejich rozměry, které ovlivňují jejich tuhost.

3.2 Hmotnost závaží

K zatěžování pružin jsem používal sadu závaží, kde byly reprezentovány hmotnosti od pěti do sta gramů. Pro kontrolu jejich skutečné hmotnosti jsem zvažil tři sto gramová závaží. Tato hmotnost byla

$$m = (299.9 \pm 0.1)\text{g}. \quad (9)$$

Chybu hmotnosti určenou tímto měřením jsem zahrnul do dalších výpočtů.

m/g	y_1/cm	y_2/cm	y_3/cm	y_4/cm	y_5/cm
0	44.85	56.34	59.73	41.16	
100	42.16	54.23	35.88	41.16	46.66
125	41.63	53.53	29.68	37.30	45.22
150	40.92	52.90	24.46	33.57	43.85
175	39.95	52.43	18.80	29.56	42.57
200	39.38	52.04	13.14	25.91	41.40
225	38.65	51.29	8.18	21.72	40.08
300	36.72	49.70		10.56	36.17
400	33.83	47.75			31.38
500	31.19	45.64			26.05
600	28.37	43.31			21.05
700	25.61	41.23			
800	22.73	39.21			

Tabulka 1: Výchyšky pružiny při různém zatížení.

3.3 Statická metoda

Pro každou pružinu jsem provedl okolodeseti měření. Nejprve jsem postupně přidával sto gramová závaží a na závěr jsem zhustil měření v oblasti dvou set gramů. Výsledky měření jsou v tabulce 1, kde veličina y značí hodnotu na stupnici katetometru, u níž dolní index značí číslo pružiny. Jako nulový bod jsem nakonec zvolil hmotnost sto gramů, protože pružiny byly lehce zdeformované a při nižším zatížení se nechovali dle předpokladů. Z rozdílu hodnot y jsem určil výchylku a dosadil ro rovnice 5, přičemž od hmotnosti jsem odečetl zatížení v nulovém bodě. Výsledky naleznete v tabulce 2 spolu s jejich střední hodnotou určenou dle [3].

Hodnoty z tabulky 1 jsem přepočítal na sílu působící na pružinu a za pomoci programu Gnuplot zanesl do grafu. Výsledný graf závislosti prodloužení na síle je obrázek 1.

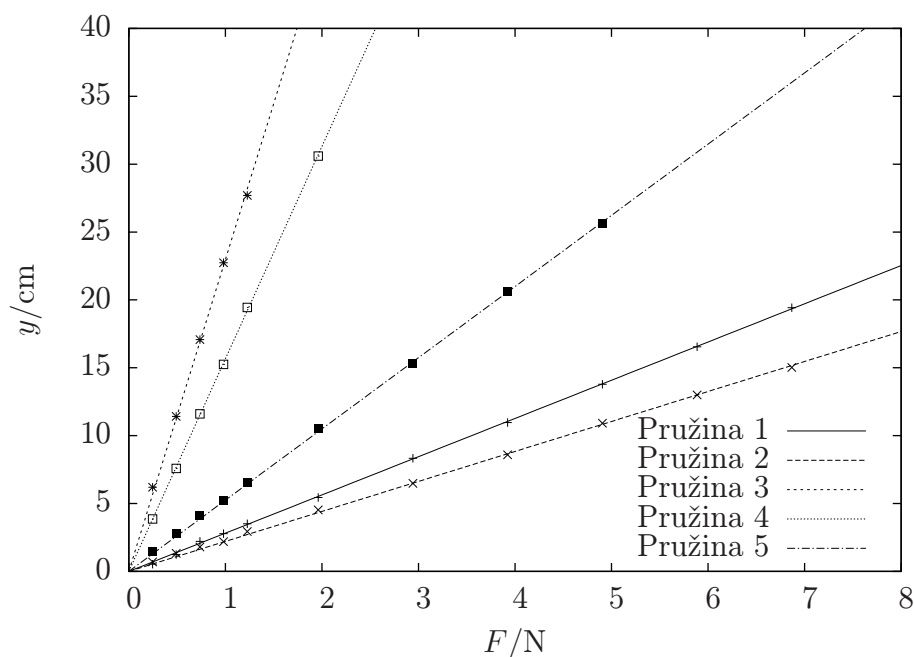
3.4 Dynamická metoda

Periodu kmitů pružiny jsem určoval spolu s výchylkou ve statické poloze, abych zkrátil dobu měření. Změřil jsem vždy dobu dvaceti kmitů pružiny pro každou hmotnost. Měření jsem provedl dvakrát, abych vyloučil hrubou chybu. Stopky sice měřili s přesností na dvě desetinná místa, ale vzhledem k reakční době 0.2 s, se kterou jsem počítal jsem hodnoty zaokrouhlil. Naměřené časy jsou v tabulce 3.

Výsledky jsem dále dosadil do vztahu 7 a vypočetl ruhost pružiny k . Výsledky jsou shrnuty v tabulce 4 opět s vypočítanou střední hodnotou.

m/g	$k_1/\text{kg} \cdot \text{s}^{-2}$	$k_2/\text{kg} \cdot \text{s}^{-2}$	$k_3/\text{kg} \cdot \text{s}^{-2}$	$k_4/\text{kg} \cdot \text{s}^{-2}$	$k_5/\text{kg} \cdot \text{s}^{-2}$
125	46.3 ± 0.2	35.0 ± 0.1	3.96 ± 0.02	6.35 ± 0.03	17.03 ± 0.07
150	39.6 ± 0.2	36.9 ± 0.1	4.30 ± 0.02	6.46 ± 0.03	17.46 ± 0.07
175	33.3 ± 0.1	40.9 ± 0.1	4.31 ± 0.02	6.34 ± 0.03	17.99 ± 0.07
200	35.3 ± 0.1	44.8 ± 0.2	4.31 ± 0.02	6.43 ± 0.03	18.65 ± 0.07
225	34.9 ± 0.1	41.7 ± 0.1	4.43 ± 0.03	6.31 ± 0.04	18.64 ± 0.07
300	36.1 ± 0.1	43.3 ± 0.1		6.41 ± 0.06	18.70 ± 0.08
400	35.3 ± 0.1	45.4 ± 0.2			19.26 ± 0.08
500	35.8 ± 0.2	45.7 ± 0.2			19.04 ± 0.09
600	35.6 ± 0.2	44.9 ± 0.2			19.2 ± 0.1
700	35.6 ± 0.2	45.3 ± 0.2			
800	35.3 ± 0.2	45.7 ± 0.2			
$k/\text{kg} \cdot \text{s}^{-2}$	37 ± 1	43 ± 1	4.26 ± 0.08	6.38 ± 0.02	18.4 ± 0.3

Tabulka 2: Tuhost pružin pro různá zatížení určená statickou metodou.



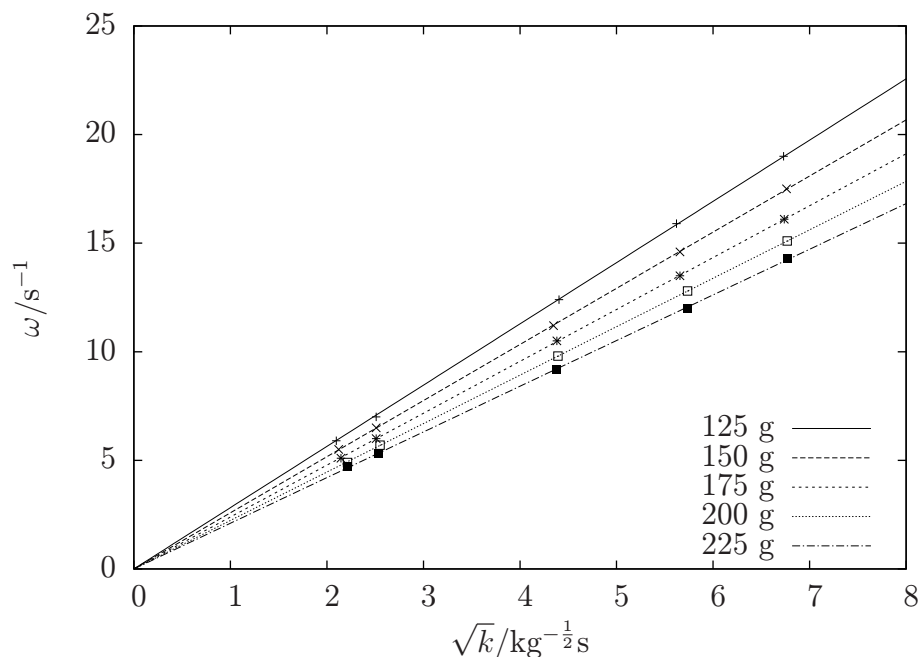
Obrázek 1: Graf závislosti prodloužení na působící síle

m/g	$20 \cdot T_1/\text{cm}$	$20 \cdot T_2/\text{cm}$	$20 \cdot T_3/\text{cm}$	$20 \cdot T_4/\text{cm}$	$20 \cdot T_5/\text{cm}$
125	7.9	6.6	21.2	17.7	10.1
150	8.6	7.2	23.0	19.4	11.2
175	9.3	7.8	24.6	20.9	12.0
200	9.8	8.3	25.5	22.1	12.8
225	10.4	8.8	27.0	23.5	13.6
300	11.9	10.1		26.8	15.7
400	13.7	11.6			18.1
500	15.2	12.9			20.2
600	16.6	14.0			22.1
700	17.9	15.0			
800	19.1	15.8			

Tabulka 3: Doba dvaceti kmitů pružiny pro různé zatížení pružin.

m/g	$k_1/\text{kg} \cdot \text{s}^{-2}$	$k_2/\text{kg} \cdot \text{s}^{-2}$	$k_3/\text{kg} \cdot \text{s}^{-2}$	$k_4/\text{kg} \cdot \text{s}^{-2}$	$k_5/\text{kg} \cdot \text{s}^{-2}$
125	31.6 ± 0.2	45.3 ± 0.2	4.39 ± 0.07	6.30 ± 0.08	19.4 ± 0.1
150	32.0 ± 0.2	45.7 ± 0.2	4.48 ± 0.08	6.29 ± 0.09	18.9 ± 0.2
175	32.0 ± 0.2	45.4 ± 0.3	4.57 ± 0.08	6.33 ± 0.10	19.2 ± 0.2
200	32.9 ± 0.2	45.8 ± 0.3	4.86 ± 0.09	6.4 ± 0.1	19.3 ± 0.2
225	32.9 ± 0.3	45.9 ± 0.3	4.87 ± 0.10	6.4 ± 0.1	19.2 ± 0.2
300	33.5 ± 0.3	46.4 ± 0.4		6.6 ± 0.1	19.2 ± 0.2
400	33.7 ± 0.3	46.9 ± 0.4			19.3 ± 0.3
500	34.2 ± 0.4	47.4 ± 0.5			19.4 ± 0.3
600	34.4 ± 0.4	48.3 ± 0.5			19.4 ± 0.3
700	34.5 ± 0.5	49.1 ± 0.6			
800	34.6 ± 0.5	50.6 ± 0.6			
$k/\text{kg} \cdot \text{s}^{-2}$	33.3 ± 0.3	47.0 ± 0.5	4.63 ± 0.10	6.39 ± 0.05	19.26 ± 0.05

Tabulka 4: Hodnoty k určené dynamickou metodou.



Obrázek 2: Graf závislosti ω na \sqrt{k}

3.5 Tíhové zrychlení

Hodnoty z tabulek 1 a 3 jsem dosadil od vzorců 3 a 8. Tyto hodnoty jsem následně statisticky vyhodnotil dle [3]. Byl jsem nucen zanedbat hodnoty, které zjevně neodpovídali skutečnosti, protože především u větších pružin byl vzorec pro výpočet g chybný. Výsledné tíhové zrychlení jsem stanovil na

$$g = (9.7 \pm 0.2) \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \quad (10)$$

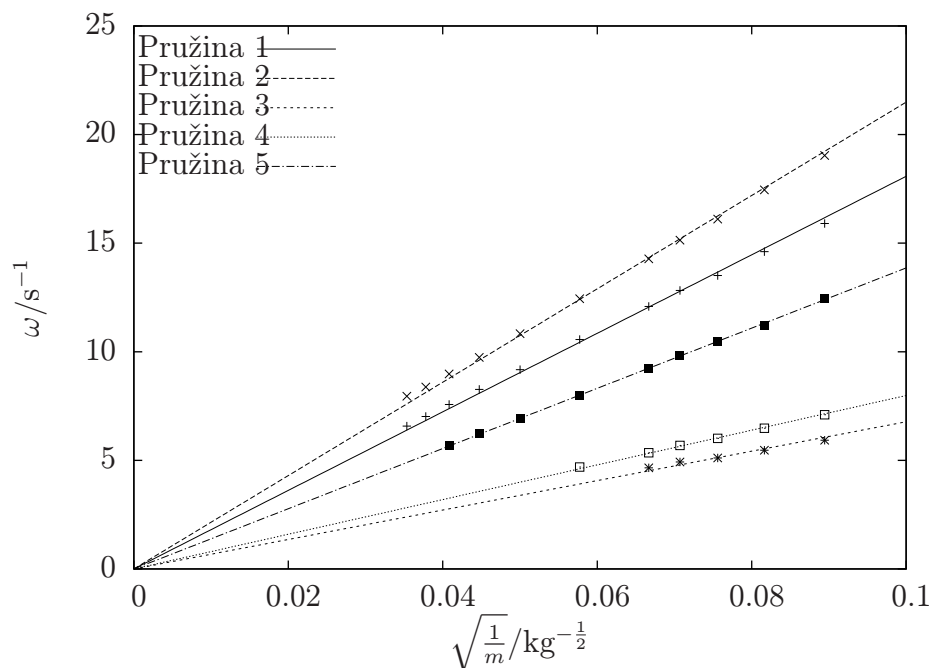
3.6 Grafy závislost ω

Dle hodnot z tabulek výše jsem za pomoci programu gnuplot sestrojil grafy závislosti ω na \sqrt{k} resp. $\sqrt{\frac{1}{m}}$, které jsou obrázky 2 resp. 3.

4 Diskuze

Ukázalo se, že přesnost určení tuhosti statickou metodou velmi závisí na délce a hustotě závitů. Velká pružina (číslo 1) měla při nižším zatížení velmi rozdílné parametry. Dynamická metoda tak náchylná nebyla.

Tíhové zrychlení určené za pomoci pružiny vcelku odpovídá realitě, akorát jsem byl nucen vynechat spoustu hodnot. Jednalo se především o ty větší pružiny za nízkého zatížení.



Obrázek 3: Graf závislosti ω na $\sqrt{\frac{1}{m}}$

U dynamické metody bylo opět u nižších závaží, protože perioda byla velmi krátká a i dvacet kmitů nebylo vzhledem k chybě dostačující. Více jsem jich však měřit nemohl, protože osa kmitu se s časem vychylovala a místy byla její precese tak velká, že ani dvacet kmitů neproběhlo správně.

Výsledné grafy vyšli dle mého nároku dobře. Chyba fitu nebyla vysoká. Dokonce nedosáhla ani celého procenta.

5 Závěr

Určil jsem tuhost pružin k , které jsou shrnuty v tabulce 2.

Sestrojil jsem graf závislosti prodloužení na působící síle, který je na obrázku 1.

Určil jsem tuhost pružin k dynamickou metodou shrnuté v tabulce 4.

Z doby kmitu jsem snanovil hodnotu tíhového zrychlení

$$g = (9.7 \pm 0.2) \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}. \quad (11)$$

Sestrojil jsem grafy závislosti ω dle zadání. Jedná se o obrázky 2 a 3.

Reference

- [1] **Studijní text na praktikum I**
http://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/txt_102.pdf (16. 4. 2011)
- [2] *Prof. RNDr. Jozef Kvasnica, DrSc. a kolektiv: Mechanika*
Academia, Praha 1988
- [3] *J. Englisch: Zpracování výsledků fyzikálních měření*
LS 1999/2000