

**LINEE di TRASMISSIONE  
per SEGNALI IMPULSATI  
e studio del RITARDO**

*Corso di*

**Laboratorio 2**

Corso di Laurea in Fisica

*Università degli Studi di Milano - Bicocca*

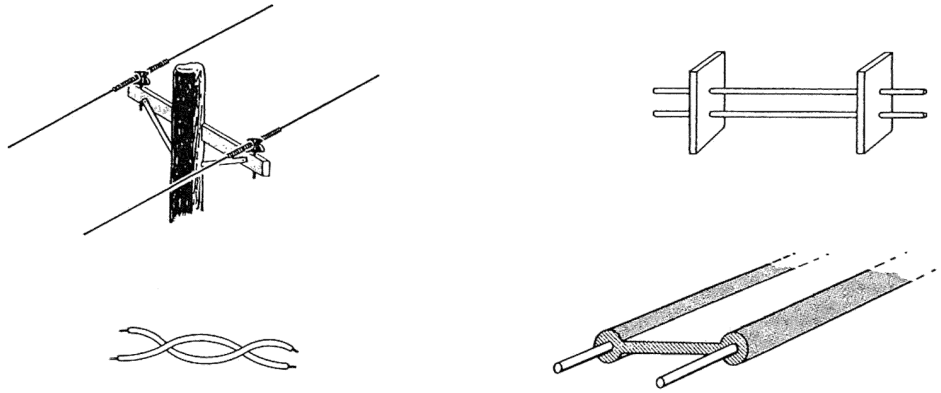
*Anno Accademico 2001-02*

**Massimo Gervasi**

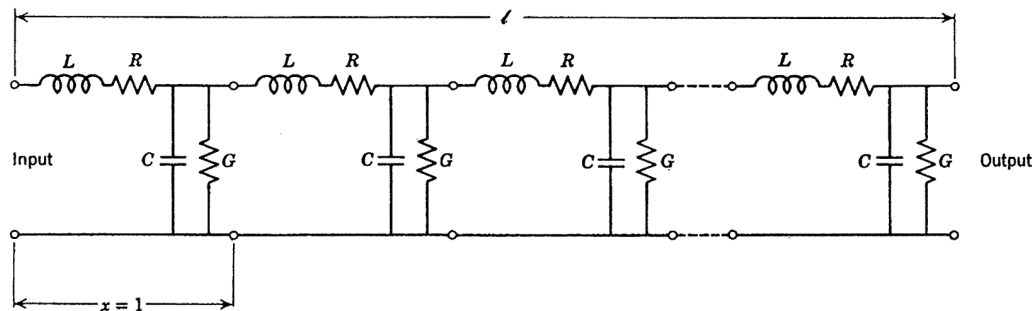
# 1. Linee di Trasmissione

## 1.1. Definizione e schema di una linea

Un sistema a due conduttori che trasmetta un segnale elettrico è una *linea di trasmissione*. Una coppia di fili paralleli, come il *doppino piatto* o *twistato*, o un *cavo coassiale* sono esempi semplici di linee di trasmissione.



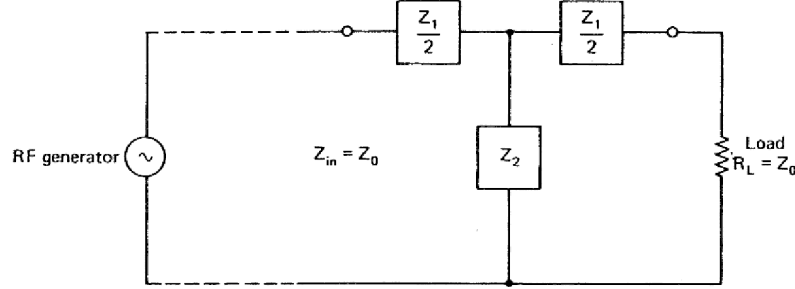
La teoria della linea è di solito svolta considerando che ogni tratto  $dx$  si essa può essere schematizzato da una *resistenza* e da una *induttanza* in serie e da una *conduttanza* e da una *capacità* in parallelo.



La resistenza  $R$  e la conduttanza  $C$ , per unità di lunghezza, elementi dissipativi, rendono conto della resistenza *ohmica* dei conduttori e dell'effetto pellicolare e, rispettivamente, dell'isolamento del dielettrico e delle perdite dielettriche ad alta frequenza. La capacità  $C$  e l'induttanza  $L$ , per unità di lunghezza, sono invece caratteristiche della geometria della coppia di conduttori di cui la linea di trasmissione è costituita.

## 1.2. Impedenza caratteristica di una Linea

L'impedenza caratteristica  $Z_o$  di un quadrupolo è tale che inserita come carico risulta uguale all'impedenza di ingresso ( $Z_i$ ) dello stesso quadrupolo. Ovvero imponiamo che sia  $Z_o$  l'impedenza di ingresso di una linea chiusa con un carico pari a  $Z_o$ . Per un tratto qualsiasi  $\delta x$  della linea otteniamo:



$$Z_o = \frac{Z_1}{2} + \left[ \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_1/2 + Z_o} \right]^{-1}$$

$$Z_o^2 = (Z_1/2)^2 + Z_2 Z_1$$

$$Z_o = \sqrt{(Z_1/2)^2 + Z_2 Z_1}$$

$$Z_o = \sqrt{\frac{R+j\omega L}{G+j\omega C} + (R+j\omega L)^2 \delta x^2/4}$$

Se passiamo al limite per  $\delta x \rightarrow 0$  otteniamo l'espressione dell'impedenza caratteristica:

$$Z_o = \sqrt{\frac{R+j\omega L}{G+j\omega C}} \quad (1)$$

Per una linea *non-dissipativa*, o a bassa dissipazione si ha:

$$R \ll \omega L \quad ; \quad G \ll \omega C$$

$$Z_o = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (2)$$

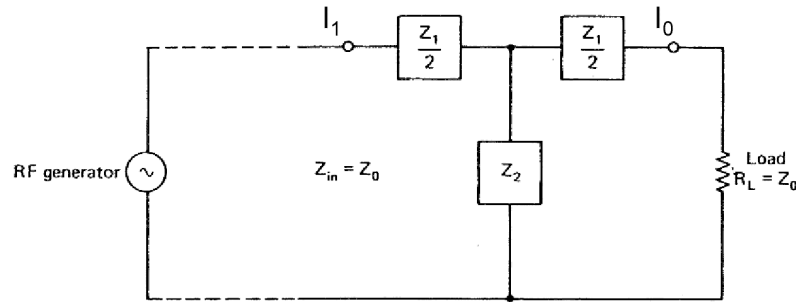
L'impedenza caratteristica  $Z_o$  è reale nelle seguenti condizioni:

- $R = G = 0 \longrightarrow$  *Linea non-dissipativa;*
- $R/L = G/C \longrightarrow$  *Linea bilanciata.*

## 2. Propagazione dei segnali in una linea

### 2.1. La costante di propagazione dei segnali

Studiamo la propagazione di un segnale in una linea, che supponiamo per il momento adattata, ovvero chiusa con un carico di impedenza pari all'impedenza caratteristica  $Z_o$ . In un tratto qualsiasi  $\delta x$  per la corrente possiamo scrivere:



$$I_0 = I_1 + I_2$$

$$I_2 Z_2 = I_1 (Z_1/2 + Z_o)$$

$$I_0/I_1 = 1 + Z_o/Z_2 + Z_1/2Z_2$$

$$I_0/I_1 = 1 + \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} \delta x + (R + j\omega L)(G + j\omega C) \delta x^2/2$$

Ma il rapporto tra corrente in ingresso e corrente in uscita è legato alla costante di propagazione  $\gamma$ :

$$I_0/I_1 = \exp(\gamma \delta x)$$

$$I_0/I_1 \simeq 1 + \gamma \delta x + \frac{1}{2} \gamma^2 \delta x^2$$

Dallo sviluppo in serie di Taylor e per analogia con la relazione precedente otteniamo l'identità:

$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} \quad (3)$$

La costante di propagazione si può scrivere come un numero complesso la cui parte reale  $\alpha$  (l'attenuazione) è legata alle perdite resistive, mentre la parte immaginaria  $\beta$  è la costante di fase:

$$\gamma = \alpha + j\beta \quad (4)$$

La costante di fase  $\beta$  si può legare ai parametri della linea. Infatti se immaginiamo una linea non-dissipativa otteniamo che:

$$\beta = \omega \sqrt{LC} \quad (5)$$

Ma la costante di fase è legata anche alla frequenza:  $\beta = 2\pi/\lambda = \omega/v$ . Otteniamo quindi il valore della velocità di propagazione:

$$v = 1/\sqrt{LC} \quad (6)$$

Sappiamo inoltre che la velocità di propagazione è legata alla costante dielettrica  $\epsilon$  e alla permeabilità magnetica  $\mu$  ( $v = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$ ) e pertanto risulta:

$$LC = \epsilon\mu = \epsilon_r\mu_r/c^2 \quad (7)$$

## 2.2. Attenuazione di una linea di trasmissione

L'attenuazione di una linea, in funzione della distanza  $x$  dall'ingresso, è data dal rapporto tra il segnale in  $x$  ed il segnale in ingresso  $V_o$ :

$$\frac{|V(x)|}{|V_o|} = e^{-\alpha x} \quad (8)$$

$\alpha$  è il coefficiente di attenuazione della linea. In una linea a bassa dissipazione possiamo partire dalla relazione (3):

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}$$

Passando ai quadrati e uguagliando la parte immaginaria abbiamo:  $2\alpha\beta = \omega(LG + RC)$ . Utilizzando la relazione  $\beta = \omega\sqrt{LC}$  otteniamo quindi:

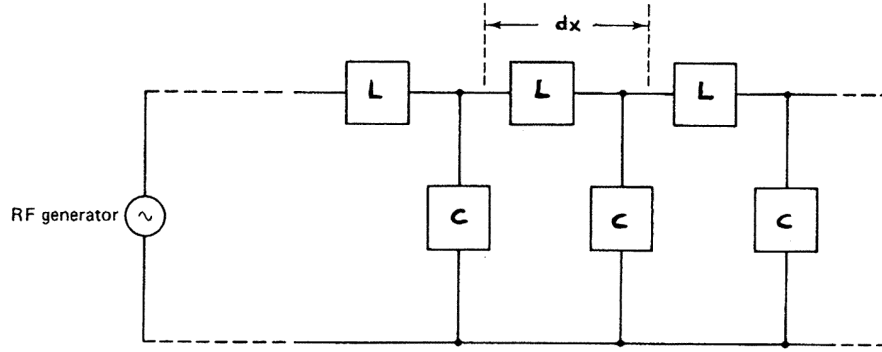
$$\alpha \simeq \frac{LG + RC}{2\sqrt{LC}} = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} + \frac{G}{2} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{R}{2 Z_o} + \frac{G Z_o}{2} = \alpha_c + \alpha_d \quad (9)$$

I due termini rappresentano rispettivamente le perdite resistive del conduttore e le perdite di conduzione del dielettrico:

$$\alpha_c = \frac{R}{2 Z_o}$$

$$\alpha_d = \frac{G Z_o}{2}$$

### 2.3. Equazione delle onde



Consideriamo le relazioni che legano tensione e corrente in una linea non-dissipativa:

$$dV = -L dx \frac{dI}{dt} \quad dI = -C dx \frac{dV}{dt}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -L \frac{\partial I}{\partial t} \quad \frac{\partial I}{\partial x} = -C \frac{\partial V}{\partial t}$$

Se deriviamo entrambe le relazioni per le due variabili  $x$  e  $t$  otteniamo l'equazione delle onde:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \quad (10a)$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} \quad (10b)$$

I segnali quindi si propagano in una linea di trasmissione seguendo l'equazione delle onde e pertanto risulteranno soggette a tutti i fenomeni correlati a questo processo, ovvero riflessione, rifrazione, etc. Da queste equazioni risulta di nuovo che la velocità di propagazione è:  $v^2 = 1/LC$ .

La soluzione generale per la propagazione in una linea (non-dissipativa) risulta pertanto:

$$V(x, t) = V_1 \left( t - \frac{x}{v} \right) + V_2 \left( t + \frac{x}{v} \right) \quad (11a)$$

$$I(x, t) = \left[ V_1 \left( t - \frac{x}{v} \right) - V_2 \left( t + \frac{x}{v} \right) \right] \left( \frac{1}{Z_o} \right) \quad (11b)$$

$V_1$  e  $V_2$  sono rispettivamente l'onda progressiva e l'onda regressiva che si propaga lungo la linea.

### 3. Coefficiente di riflessione e resistenza di carico

Supponiamo di chiudere la linea con un carico di impedenza  $Z_L$ . Valutiamo i segnali presenti ai capi del carico. La tensione sarà la somma dell'onda progressiva  $V_i$ , proveniente dall'ingresso, e dell'onda regressiva  $V_r$ , generata (eventualmente) sul carico. Se introduciamo il coefficiente di riflessione  $\rho$  abbiamo:

$$V_L = V_i + V_r = V_i + \rho V_i = V_i (1 + \rho) \quad (12)$$

La corrente sarà sempre la somma dell'onda progressiva  $I_i$  e dell'onda regressiva  $I_r$ . In questo caso però visto che  $I_r$  scorre in senso inverso a  $I_i$  avrà il segno cambiato:

$$I_L = I_i + I_r = I_i - \rho I_i = I_i (1 - \rho) \quad (13)$$

Ricordiamo che l'impedenza vista dall'onda progressiva in ingresso alla linea è l'impedenza caratteristica  $Z_o$ . Abbiamo pertanto  $Z_o = V_i/I_i$  e quindi otteniamo la relazione  $Z_L = Z_o (1 + \rho)/(1 - \rho)$  che invertita fornisce il coefficiente di riflessione:

$$\rho = \frac{Z_L - Z_o}{Z_L + Z_o} \quad (14)$$

In una linea non-dissipativa  $Z_o$  è reale e quindi  $\rho$  sarà reale solo se il carico è resistivo:  $Z_L = R_L$ . Viceversa se il carico è anche reattivo (ovvero  $Z_L = R_L + jX_L$ )  $\rho$  risulta un numero complesso.

#### 3.1. Linea adattata - $Z_L = Z_o$

Se la linea è chiusa su un carico  $Z_L$  adattato, ovvero se risulta  $Z_L = Z_o$  allora si ha:

$$\rho = 0$$

Ovvero non si hanno riflessioni. In una linea adattata quindi i segnali si propagano senza subire riflessioni e senza produrre onde stazionarie. I segnali risultano pertanto uguali al valore in ingresso (e costanti lungo la linea):

$$V_L = V_i$$

$$I_L = I_i$$

### **3.2. Linea aperta - $Z_L = \infty$**

Se la linea è aperta si ha  $Z_L = \infty$  e il coefficiente di riflessione risulta:

$$\rho = 1$$

Ovvero sul carico si ha riflessione totale dell'onda progressiva. Tensione e corrente sul carico risultano:

$$V_L = 2 V_i$$

$$I_L = 0$$

### **3.3. Linea corto-circuitata - $Z_L = 0$**

Se la linea è chiusa con un corto circuito ( $Z_L = 0$ ), il coefficiente di riflessione risulta:

$$\rho = -1$$

Ovvero sul carico si ha riflessione totale, ma con segno opposto. Tensione e corrente sul carico risultano:

$$V_L = 0$$

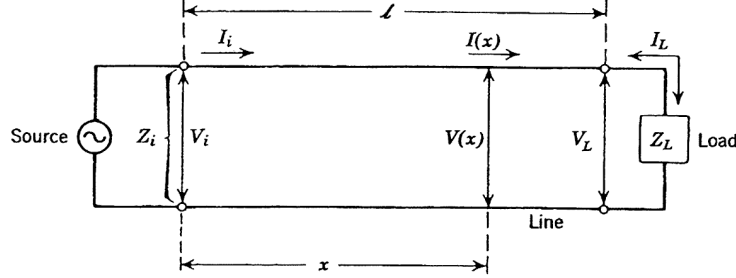
$$I_L = 2 I_i$$

### **3.4. Segnali in una Linea**

Abbiamo visto come il coefficiente di riflessione  $\rho$  sia legato all'onda progressiva e all'onda riflessa valutate ai capi del carico, posto a distanza  $l$  dall'ingresso:



$$\frac{V_r(l)}{V_i(l)} = \frac{Z_L - Z_o}{Z_L + Z_o} = \rho$$



Ci interessa adesso valutare il valore della tensione e della corrente in un punto qualunque della linea. Possiamo scrivere le seguenti relazioni:

$$V(x) = V_i(x) + V_r(x)$$

$$V_i(x) = V_i(0) e^{-\gamma x}$$

$$V_r(x) = V_r(l) e^{-\gamma(l-x)} = \rho V_i(l) e^{-\gamma(l-x)} = \rho V_i(0) e^{-\gamma l} e^{-\gamma(l-x)}$$

La tensione nel punto  $x$  si può quindi esprimere in funzione dell'onda progressiva all'ingresso:

$$V(x) = V_i(0) [e^{-\gamma x} + \rho e^{-\gamma(2l-x)}] \quad (15)$$

$$V(0) = V_i(0) [1 + \rho e^{-2\gamma l}]$$

$$V(x) = V(0) [e^{-\gamma x} + \rho e^{-\gamma(2l-x)}] / [1 + \rho e^{-2\gamma l}]$$

La tensione  $V(x)$  nel punto generico e  $V_L$  sul carico, in funzione della tensione all'ingresso  $V(0)$  risulta:

$$V(x) = V(0) \frac{[e^{\gamma(l-x)} + \rho e^{-\gamma(l-x)}]}{[e^{\gamma l} + \rho e^{-\gamma l}]} \quad (16)$$

$$V_L = V(l) = V(0) \frac{[1 + \rho]}{[e^{\gamma l} + \rho e^{-\gamma l}]} \quad (17)$$

In una linea non-dissipativa si ha:  $R = G = 0$ , quindi  $\alpha = 0$  e  $\gamma = j\beta$ . Pertanto  $V(x)$  e  $V_L$  sono:

$$V(x) = V(0) \frac{[Z_L \cos \beta(l-x) + j Z_o \sin \beta(l-x)]}{[Z_L \cos \beta l + j Z_o \sin \beta l]} \quad (18)$$

$$V_L = V(l) = V(0) \frac{Z_L}{[Z_L \cos \beta l + j Z_o \sin \beta l]} \quad (19)$$

Per la corrente in maniera equivalente otteniamo:

$$\frac{I_r(l)}{I_i(l)} = \frac{Z_o - Z_L}{Z_o + Z_L} = -\rho$$

$$I_i(0) = V_i(0)/Z_o$$

$$I(x) = I_i(x) + I_r(x) = I_i(0) [e^{-\gamma x} - \rho e^{-\gamma(2l-x)}]$$

$$I(x) = \frac{V(0)}{Z_o} \frac{[e^{\gamma(l-x)} + \rho e^{-\gamma(l-x)}]}{[e^{\gamma l} + \rho e^{-\gamma l}]} \quad (20)$$

Per una linea non-dissipativa otteniamo ancora:

$$I(x) = \frac{V(0)}{Z_o} \frac{[Z_L \cos \beta(l-x) + j Z_o \sin \beta(l-x)]}{[Z_L \cos \beta l + j Z_o \sin \beta l]} \quad (21)$$

Infine possiamo valutare l'impedenza in un punto  $x$  qualsiasi della linea:

$$Z(0) = \frac{V(0)}{I(0)} = Z_o \frac{[\exp(\gamma l) + \rho \exp(-\gamma l)]}{[\exp(\gamma l) - \rho \exp(-\gamma l)]}$$

$$Z(x) = Z_o \frac{[e^{\gamma(l-x)} + \rho e^{-\gamma(l-x)}]}{[e^{\gamma(l-x)} - \rho e^{-\gamma(l-x)}]} \quad (22)$$

Per una linea non-dissipativa si ha infine:

$$Z(0) = Z_o \frac{[(Z_L/Z_o) + j \tan \beta l]}{[1 + j (Z_L/Z_o) \tan \beta l]}$$

$$Z(x) = Z_o \frac{[(Z_L/Z_o) + j \tan \beta(l-x)]}{[1 + j (Z_L/Z_o) \tan \beta(l-x)]} \quad (23)$$

#### 4. Potenza che viaggia su una linea

La potenza è legata al quadrato della tensione (o della corrente):  $P \propto V^2 \propto I^2$ .

La potenza assorbita dal carico, supposto resistivo, si può stimare come differenza tra la potenza incidente e quella riflessa:

$$P_L = P_i - P_r = (1 - |\rho|^2) P_i \quad (24)$$

Per dissipare tutta la potenza in gioco occorre quindi utilizzare un carico in grado di adattare la linea, oltre che essere un carico resistivo, ovvero:  $Z_L = R_L = Z_o$ .

Se la linea ha delle perdite la relazione che lega il coefficiente di attenuazione alla potenza che viaggia sulla linea risulta:

$$\frac{|P(x)|}{|P_o|} = e^{-2\alpha x} \quad (25)$$

#### 5. Esempi di linee di trasmissione

Le linee di trasmissione costituite da una coppia di conduttori di corrente elettrica rappresentano la grande maggioranza di queste. I conduttori possono essere separati dal vuoto o dall'aria, ma spesso vi è un mezzo che si interpone tra essi.

Le costanti dielettrica  $\epsilon$  e magnetica  $\mu$  di un mezzo si scrivono come il prodotto tra le quantità caratteristiche del vuoto e le costanti relative del mezzo rispetto allo stesso vuoto:

$$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$$

$$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$$

$$\mu = \mu_0 \mu_r$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m} = 1.2566 \times 10^{-6} \text{ H/m}$$

Le costanti dielettrica e magnetica nel vuoto sono inoltre legate alla velocità della luce:

$$c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0} \quad (26)$$

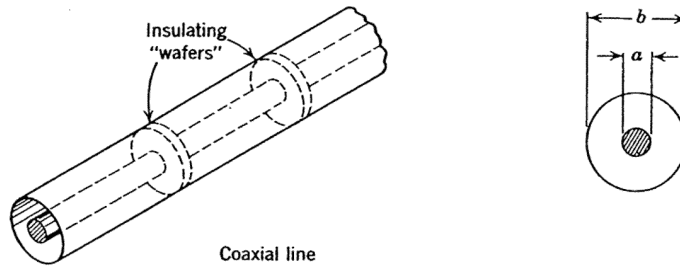
Possiamo inoltre definire una impedenza caratteristica del vuoto, ovvero dello spazio libero:

$$\eta_0 = E/H = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} = 120\pi = 377 \text{ } \Omega \quad (27)$$

Uno dei meccanismi di perdita di una linea di trasmissione a due conduttori è l'irraggiamento di onde elettromagnetiche.

Una delle proprietà più importanti di una linea di trasmissione è la sua uniformità lungo il percorso. Una linea uniforme conserva le dimensioni, la forma e la spaziatura dei suoi conduttori. Una buona uniformità è necessaria per avere un adattamento costante sulla linea.

### 5.1. Il Cavo Coassiale



Il cavo coassiale per le sue caratteristiche di simmetria è una delle linee di trasmissione più utilizzate, soprattutto ad alta frequenza, dove le perdite sono molto importanti. L'induttanza e la capacità, per unità di lunghezza, sono date dalle seguenti espressioni:

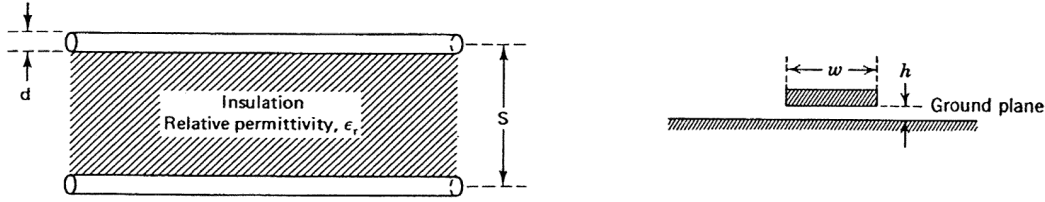
$$L = \frac{\mu \ln b/a}{2\pi} \quad (28)$$

$$C = \frac{2\pi \epsilon}{\ln b/a} \quad (29)$$

La costante dielettrica  $\epsilon_r$  è una caratteristica del mezzo interposto tra i due conduttori. La permittività magnetica è invece praticamente unitaria per tutti i dielettrici utilizzati ( $\mu_r = 1$ ). L'impedenza caratteristica del cavo coassiale non-dissipativo risulta pertanto:

$$Z_o = \sqrt{\frac{L}{C}} = 60 \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} \ln \frac{b}{a} \simeq \frac{60}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln \frac{b}{a} = \frac{138}{\sqrt{\epsilon_r}} \log \frac{b}{a} \quad (30)$$

## 5.2. Altri conduttori



- Il **doppino** si utilizza per far viaggiare la corrente elettrica della rete. Nel doppino capacità e induttanza sono tali per cui l'impedenza caratteristica risulta:

$$Z_o = \frac{120}{\sqrt{\epsilon_r}} \cosh^{-1} \frac{s}{d} \quad (31a)$$

Nel caso in cui risulta  $d < s/2$  l'espressione dell'impedenza si semplifica:

$$Z_o = \frac{276}{\sqrt{\epsilon_r}} \log \frac{2s}{d} \quad (31b)$$

Il cavo ha delle perdite di irraggiamento trascurabili se è ben bilanciato e se risulta  $s/\lambda < 10^{-2}$ .

- La **strip-line** è utilizzata ad esempio nei circuiti stampati. In essa si ha di solito  $w \gg h$  e l'impedenza caratteristica risulta:

$$Z_o = \frac{377}{\sqrt{\epsilon_r}} \frac{h}{w} \quad (32)$$

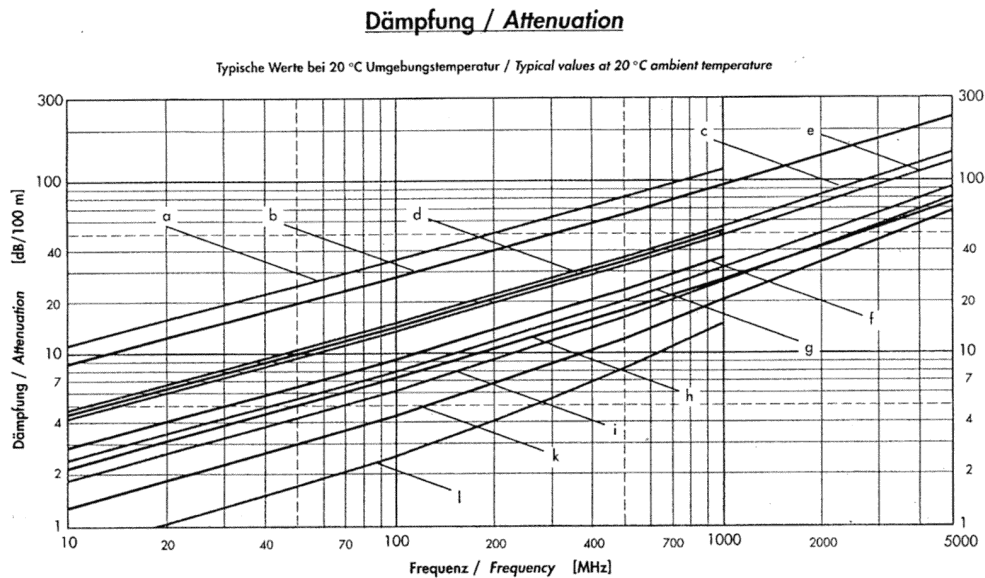
## 6. Caratteristiche della linea e strumentazione necessaria

### 6.1. Caratteristiche del Cavo coassiale

Si utilizza per questa esperienza un cavo coassiale la cui sigla è **RG 58 C/U**. Le caratteristiche essenziali di questo conduttore, fornite dal costruttore, sono:

- **Impedenza Caratteristica:**  $Z_o = 50 \pm 2 \Omega$  ;
- **Capacità:**  $C = 101 \text{ pF/m}$  ;
- **Velocità di propagazione:**  $v = 0.66 c = 2.0 \cdot 10^8 \text{ m/s}$  ;
- **Ritardo:**  $t_d = 5.0 \text{ ns/m}$  ;
- **Attenuazione ( $\nu = 1 \text{ MHz}$ ):**  $\alpha \simeq 1.5 \text{ dB/100m}$  .

L'attenuazione cresce con la frequenza e diventa molto importante nella regione delle micro-onde. L'attenuazione del cavo *RG 58* è mostrata nella seguente figura (curva c).



I parametri costruttivi del cavo, ovvero materiali e geometria, sono i seguenti:

- **Conduttore centrale:**  $\text{CuSn}$  ;

**Diametro esterno:**  $a = 0.90 \text{ mm}$  ;

- **Conduttore esterno:**  $CuSn$  ;

**Diametro interno:**  $b = 2.95 \text{ mm}$  ;

- **Dielettrico:** *Polietilene* ;

**Costante dielettrica:**  $\epsilon_r = 2.28$  .

## 6.2. Strumentazione utilizzata nell'esperienza

La strumentazione utilizzata in questa esperienza comprende:

- **Generatore** di forme d'onda, utilizzato per produrre impulsi in *onda quadra*. Si utilizza un'onda alla frequenza  $\nu \sim 100 \text{ kHz}$  ( $T \sim 10 \mu s$ ). L'impedenza interna del generatore è  $Z_g = 50 \Omega$ , pari all'impedenza caratteristica della linea.
- **Oscilloscopio** con frequenza massima di lavoro  $\nu_{max} \geq 1 \text{ MHz}$ .
- **Cavo coassiale RG 58** di lunghezza  $l \sim 100 \text{ m}$ , in modo da introdurre un tempo di ritardo  $t_d = l/v = 0.5 \mu s$ .
- **Terminazioni** in connessione *BNC* con impedenza  $R = 50 \Omega$ , per adattare la linea, e con impedenza  $R = 0 \Omega$ , per chiudere la linea con un corto circuito.
- **Resistenze:**  $R_1 \simeq 3 Z_o \simeq 150 \Omega$ ;  $R'_1 \simeq 2 Z_o \simeq 100 \Omega$ ;  $R_2 \simeq Z_o/3 \simeq 17 \Omega$ ;  $R'_2 \simeq Z_o/2 \simeq 25 \Omega$ .
- **Condensatori:**  $C = 20 \text{ nF}$ .

## 7. Misura delle caratteristiche della linea

### 7.1. Linea adattata

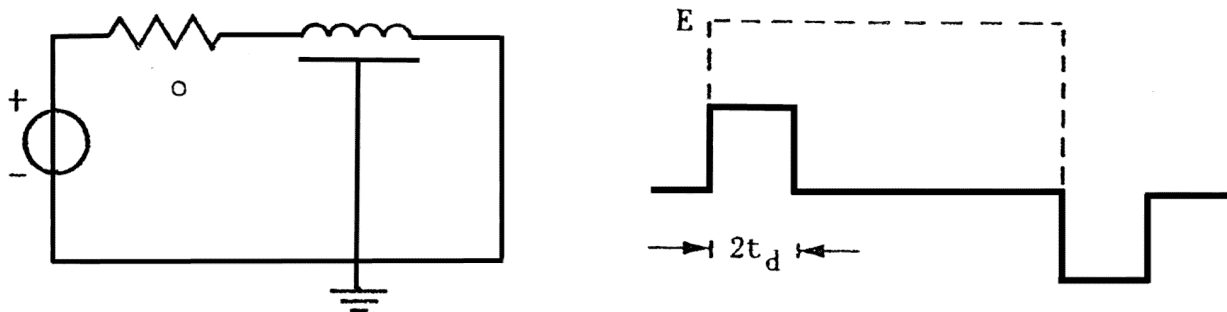
Si misurano le caratteristiche della linea attraverso lo studio della propagazione di un'onda quadra. La prima cosa da verificare è che l'impedenza della linea sia effettivamente  $Z_o = 50 \Omega$ . Se chiudiamo la linea con una terminazione di  $50 \Omega$  dovremo quindi avere la linea adattata. Si misura innanzi tutto con l'oscilloscopio la tensione  $V_0$  erogata dal generatore a circuito aperto.

Se connettiamo al generatore la linea adattata ed osserviamo con l'oscilloscopio la ten-

sione all'ingresso, osserviamo l'onda quadra prodotta dal generatore con una ampiezza  $V_{in} = V_0/2$ . Infatti la tensione  $V_0$  del generatore si distribuisce nel partitore formato dalla resistenza interna del generatore stesso  $Z_g$  e dalla linea adattata  $Z_o$  e risulta:

$$V_{in} = V_0 \frac{Z_o}{Z_g + Z_o} \quad (33)$$

## 7.2. Linea chiusa con un corto circuito



Chiudiamo la linea, lunga 100 m, con un corto circuito, mentre il generatore eroga un impulso di ampiezza  $E$  e durata  $\tau/2 = 5 \mu s$ . Se connettiamo l'oscilloscopio all'ingresso della linea (punto A della figura) osserveremo un impulso di durata  $2t_d = 1 \mu s$  ed ampiezza  $E/2$ .

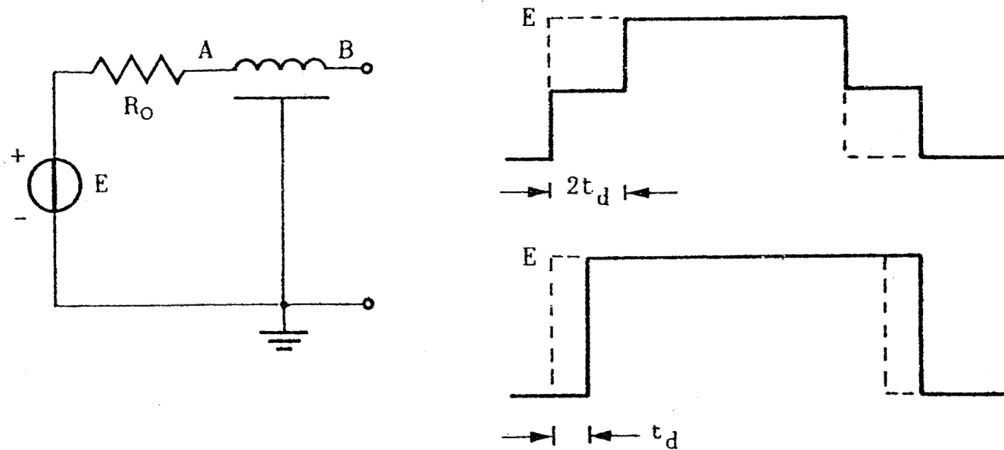
Al tempo  $t = 0$  l'onda progressiva porta il potenziale al livello  $E/2$ . Infatti l'onda progressiva *vede* il partitore tra  $Z_g$  e  $Z_o$ . In fondo alla linea l'onda viene riflessa e ritorna all'ingresso dopo un tempo  $2t_d$ . Il segno dell'onda riflessa è opposto all'onda progressiva e dopo il suo passaggio il potenziale è nullo. Quando parte la semi-onda negativa dell'onda quadra, al tempo  $t = \tau/2$ , si osserva un impulso analogo ma di segno opposto.

## 7.3. Linea aperta

Consideriamo il caso in cui la linea rimane aperta. Il segnale che si osserva all'ingresso (punto A della figura) e all'uscita della linea (punto B) è mostrato nei grafici seguenti. Consideriamo il segnale in ingresso. La differenza rispetto al caso precedente è che il segno dell'onda riflessa è lo stesso dell'onda progressiva. Pertanto il segnale nell'intervallo  $0 < t < 2t_d$  è identico al caso della linea chiusa con un corto circuito, ovvero l'ampiezza è  $E/2$ . Invece per  $2t_d < t < \tau/2$  le due onde si sommano e quindi il potenziale è pari ad  $E$ . Al tempo  $t = \tau/2$  l'onda progressiva torna a potenziale nullo,



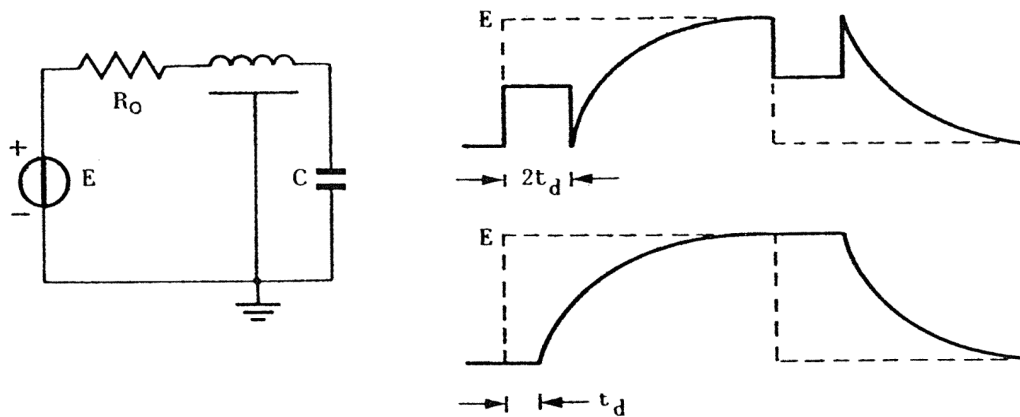
mentre l'onda regressiva è ancora al potenziale  $E/2$ . La loro somma è quindi pari ad  $E/2$  fino al tempo  $t = \tau/2 + 2t_d$ . Per tempi maggiori di questo anche l'onda riflessa va a zero e il segnale è nullo.



Se connettiamo l'oscilloscopio all'uscita osserviamo invece la forma d'onda imperturbata. Ovvero osserviamo l'impulso di durata  $\tau/2$  ed ampiezza  $E$ . L'istante di salita è però ritardato di  $t_d$ . Se i segnali in ingresso ed uscita vengono osservati in contemporanea si riesce a misurare il tempo di ritardo  $t_d$ .

#### 7.4. Linea chiusa con un condensatore

La linea chiusa su un condensatore di capacità  $C = 20 \text{ nF}$  consente di osservare un andamento caratteristico sia in ingresso che in uscita.



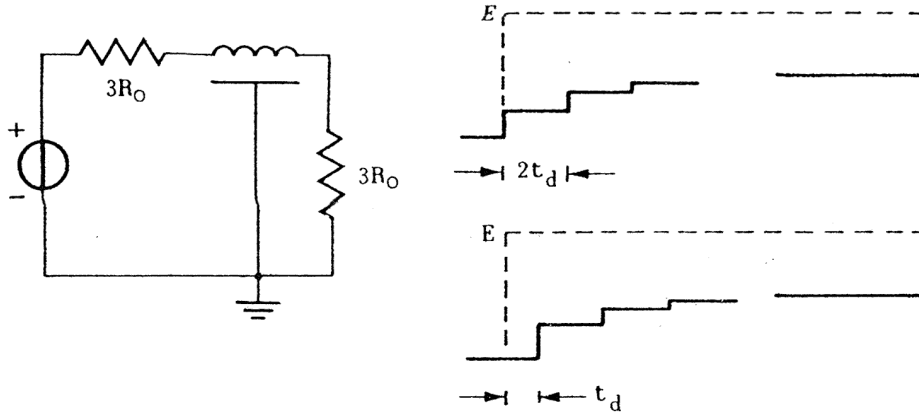
In ingresso nell'intervallo  $0 < t < 2t_d$  si ha il solito impulso di ampiezza  $E/2$ . Succes-

sivamente l'onda riflessa si va a sommare al potenziale. Il segnale riflesso è in questo caso determinato dalla carica del condensatore posto in uscita. La costante di tempo con cui il condensatore si carica è  $R_o C$ , dove  $R_o = Z_o$ . Infatti il condensatore *vede* verso l'ingresso una linea adattata e quindi una impedenza reale pari a  $Z_o$ . La tensione a regime è pari ad  $E$ , infatti per tempi lunghi il condensatore equivale ad un circuito aperto.

Il segnale in uscita è in qualche modo più semplice. Si osserva in questo caso la semplice carica e scarica del condensatore, con costante di tempo  $R_o C$  e con ritardo  $t_d$  rispetto all'onda prodotta dal generatore:

$$V(t) = E \left[ 1 - e^{-(t-t_d)/R_o C} \right] \quad (34)$$

### 7.5. Linea disadattata ad entrambi gli estremi



Riflessioni multiple possono essere osservate se la linea è disadattata ad entrambi gli estremi. Conviene utilizzare resistenze esterne di valore  $R = 3Z_o = 150 \Omega$ , che danno un coefficiente di riflessione  $\rho = 1/2$  (o alternativamente  $R = Z_o/3 = 17 \Omega$  e  $\rho = -1/2$ ). I segnali in ingresso ed in uscita risultano dalla somma delle successive riflessioni, che qui indichiamo raggruppati nella successione temporale a distanza  $2t_d$ :

$$V_{in}(t) = \frac{R_o}{R + R_o} E \left[ 1 + (\rho_{out} + \rho_{in}\rho_{out}) + (\rho_{in}\rho_{out}^2 + \rho_{in}^2\rho_{out}^2) + \dots \right] \quad (35)$$

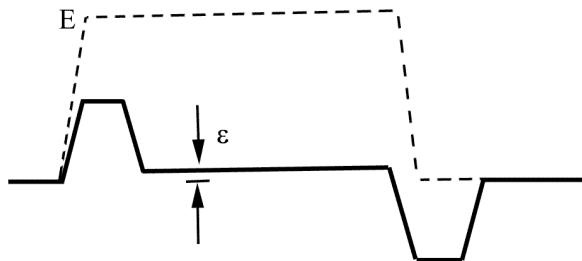
$$V_{out}(t) = \frac{R_o}{R + R_o} E \left[ (1 + \rho_{out}) + (\rho_{in}\rho_{out} + \rho_{in}\rho_{out}^2) + (\rho_{in}^2\rho_{out}^2 + \rho_{in}^2\rho_{out}^3) + \dots \right] \quad (36)$$

Il primo gradino in ingresso è pari ad  $E/4$  e per tempi lunghi entrambi i segnali tendono al valore  $E/2$ . Infatti a lungo termine la linea equivale ad un collegamento ohmico di bassa resistenza interposto tra le due resistenze esterne entrambe pari a  $R = 3Z_o$ .

Quanto abbiamo visto in questa sezione avviene normalmente quando connettiamo, attraverso un cavo coassiale, un generatore con resistenza interna qualsiasi ad un voltmetro con impedenza di ingresso molto alta. In genere le impedenze in gioco sono tali per cui i valori dei segnali da misurare sono ragionevolmente vicini ai livelli imperturbati. L'effetto del disadattamento può essere invece importante rispetto al profilo della forma d'onda. Un gradino ad esempio sarà visto come una gradinata del tipo appena descritto. Normalmente però il cavo è molto corto ( $\sim 1\text{ m}$ ) e la scala dei tempi è contratta rispetto ai tempi indicati.

## 7.6. Misura dell'attenuazione

Finora nelle nostre misure abbiamo considerato la linea non-dissipativa. In realtà, come sappiamo, vi sono delle perdite che possono essere misurate, se sono di entità rilevante. Per studiare l'attenuazione  $\alpha$  ci rimettiamo nelle condizioni in cui la linea è chiusa con un corto circuito.



L'impulso, dopo il tempo  $2t_d$ , non ritorna esattamente a zero, ma si ferma ad un livello  $\epsilon$ . Infatti l'onda riflessa non cancella quella progressiva in quanto è attenuata. Il livello residuo di tensione  $\epsilon$  risulta:

$$\epsilon = \frac{E}{2} - \frac{E}{2} e^{-2\alpha l} \quad (37)$$

Il coefficiente di riflessione dipende dalla frequenza. In questo caso  $\alpha$  è valutato a una frequenza  $\nu \sim 1\text{ MHz}$ , infatti le misure sono effettuate alla scala temporale di  $1\text{ }\mu\text{s}$ .

Una ulteriore verifica può essere fatta a proposito dell'attenuazione della linea. Infatti la tensione residua si può considerare come il risultato della partizione tra l'impedenza interna del generatore ( $R_o$ ) e la resistenza ohmica del cavo  $R_{dc}$ , misurata con l'ohmetro:

$$\epsilon = \frac{E R_{dc}}{R_{dc} + R_o} \simeq E \frac{R_{dc}}{R_o} \quad (38)$$

La relazione (37) si può approssimare, nel caso di linee a bassa attenuazione:

$$\epsilon = \frac{E}{2} [1 - e^{-2\alpha l}] \simeq \frac{E}{2} [1 - 1 + 2 \alpha l] = E \alpha l$$

Possiamo quindi mettere in relazione il coefficiente di attenuazione  $\alpha$  con la resistenza ohmica del cavo  $R_{dc}$ :

$$\alpha l \simeq \frac{R_{dc}}{R_o} \quad (39)$$

L'argomento che conduce alla relazione (39) non è rigoroso. Infatti vengono confrontate due grandezze che sono misurate in condizioni completamente differenti.  $\alpha$  è l'attenuazione a frequenze dell'ordine del  $MHz$ , mentre  $R_{dc}$  è misurata a frequenza zero. In verità la resistenza di un conduttore varia con la frequenza a causa del così detto *effetto pelle*, che ad alta frequenza tende a confinare la corrente ad uno strato superficiale del conduttore. Questo fenomeno ha l'effetto di diminuire la sezione efficace del conduttore e di aumentarne la lunghezza a causa della inevitabile rugosità superficiale. Il risultato è quindi un aumento della resistenza ohmica del cavo ad alta frequenza.