Comenzado el	Sunday, 4 de June de 2023, 11:25
Estado	Finalizado
Finalizado en	Sunday, 4 de June de 2023, 17:00
Tiempo empleado	5 horas 34 minutos
Calificación	**10,00** de 10,00 (**100**%)

Pregunta **1**

Correcta

Se puntúa 5,00 sobre 5,00

Consideramos la imagen rectangular de 10 x 9 píxeles siguiente

plotter1

almacenada en forma de matriz como

$$A = \begin{pmatrix} 0.26 & 0.26 & 0.26 & 0.26 & 0.26 & 0.26 & 0.26 & 0.26 & 0.26 \\ 0.47 & 0.47 & 0.47 & 0.47 & 0.47 & 0.47 & 0.47 & 0.47 & 0.47 \\ 0.53 & 0.53 & 0.53 & 0.53 & 0.53 & 0.53 & 0.53 & 0.53 & 0.53 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \\ 0.16 & 0.16 & 0.16 & 0.16 & 0.16 & 0.16 & 0.16 & 0.16 & 0.16 \\ 0.97 & 0.97 & 0.97 & 0.97 & 0.97 & 0.97 & 0.97 & 0.97 & 0.97 \\ 0.18 & 0.18 & 0.18 & 0.18 & 0.18 & 0.18 & 0.18 & 0.18 & 0.18 \\ 0.62 & 0.62 & 0.62 & 0.62 & 0.62 & 0.62 & 0.62 & 0.62 & 0.62 \\ 0.32 & 0.32 & 0.32 & 0.32 & 0.32 & 0.32 & 0.32 & 0.32 & 0.32 \\ 0.48 & 0.48 & 0.48 & 0.48 & 0.48 & 0.48 & 0.48 & 0.48 & 0.48 \end{pmatrix}.$$

1. Hallar el rango de la matriz

   rango(A) = 1

2. Expresar la matriz A como el producto de un vector columna (u) por un vector fila (v^T) de forma que $A = uv^T$, imponiendo que la primera componente del vector v es 1.

   u = [0.26,0.47,0.53,0.25,0.16,0.97,0.18,0.62,0.32,0.48]
   v = [1,1,1,1,1,1,1,1,1]

   NOTA: para introducir los vectores, debéis utilizar la siguiente notación: si v=(1,2,3,5,7) introduciremos [1,2,3,5,7]. Es decir, introduciremos los números entre [ ] y separados por comas. Debéis introducir <u>todos</u> los decimales.

3. ¿Cuántos números necesitamos para guardar la matriz A completa? ¿Cuántos números necesitamos para guardar la matriz A en la forma descompuesta? ¿Cual es el ahorro de números que obtenemos?

   matriz completa = 90
   matriz descompuesta = 19
   ahorro = 71

<u>Apartado 1</u> - Hallar el rango de la matriz

Vemos que todas las columnas de la matriz son iguales, es decir, son todas linealmente dependientes entre ellas. Por lo tanto el rango de la matriz es 1.

rango(A) = 1

<u>Apartado 2</u> - Expresar la matriz A como el producto de un vector columna (u) por un vector fila (v^T) de forma que $A = uv^T$.

Tal y como se detalla en el la sección *3.1 Ejemplo introductorio* del módulo *Descomposición en valores singulares: introducción y aplicaciones*, se puede ver fácilmente que la matriz se puede expresar como

$$A = uv^T = \begin{pmatrix} 0.26 \\ 0.47 \\ 0.53 \\ 0.25 \\ 0.16 \\ 0.97 \\ 0.18 \\ 0.62 \\ 0.32 \\ 0.48 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y por lo tanto la respuesta es

u = $[0.26, 0.47, 0.53, 0.25, 0.16, 0.97, 0.18, 0.62, 0.32, 0.48]$ y v = $[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]$.

<u>Apartado 3</u> - ¿Cuántos números necesitamos para guardar la matriz A completa? ¿Cuántos números necesitamos para guardar la matriz A en la forma descompuesta? ¿Cual es el ahorro de números que obtenemos?

Siguiendo de nuevo lo que se detalla en el la sección *3.1 Ejemplo introductorio* del módulo *Descomposición en valores singulares: introducción y aplicaciones*, tenemos que

matriz completa = $10 \cdot 9 = 90$
matriz descompuesta = $10 + 9 = 19$
ahorro = $90 - 19 = 71$

De hecho, en este ejemplo concreto, podríamos también ahorrarnos el almacenamiento de los 1's del vector v con lo que sería suficiente guardar 10 valores para almacenar la matriz descompuesta.

Pregunta 2

Correcta

Se puntúa 5,00 sobre 5,00

Se ha calculado la descomposición en valores singulares de una matriz A en la forma $A = U\Sigma V^T$ y se ha obtenido:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{7\cdot\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{343\cdot\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2401\cdot\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{49\cdot\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{49\cdot\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2401\cdot\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{343\cdot\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{7\cdot\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2401 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 343 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 49 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. ¿Cúal es el rango de la matriz A?

   rango(A) = 5

2. ¿Qué valor tiene la norma dos de A?

   $\|A\|_2$ = 2401

3. Calculad la matriz comprimida A_2 . ¿Qué valor tiene la norma de la diferencia entre A y su compresión A_2?

   $\|A-A_2\|_2$= 49

4. Queremos aproximar la matriz A por su mejor aproximación de rango 1. Utilizando la descomposición SVD dada anteriormente, ¿cuál de estas matrices sería la mejor aproximación en norma 2?

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2401\cdot\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2401\cdot\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{49\cdot\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{49\cdot\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{343\cdot\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{343\cdot\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se puntúa 1,00 sobre 1,00

La respuesta correcta es:
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2401\cdot\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2401\cdot\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Apartado 1 - ¿Cúal es el rango de la matriz A?

Tal y como se detalla en el la sección *3.3.1 Propiedades interesantes de la descomposición en valores singulares* del módulo *Descomposición en valores singulares: introducción y aplicaciones*, el rango de la matriz A es el número de valores singulares no nulos, es decir

rango(A) = 5

Recordad que los valores singulares son los valores que tenemos en la diagonal de la matriz Σ, es decir, en este caso son $[2401, 343, 49, 7, 1]$.

Apartado 2 - ¿Qué valor tiene la norma dos de A?

Tal y como se detalla en el la sección *3.3.1 Propiedades interesantes de la descomposición en valores singulares* del módulo *Descomposición en valores singulares: introducción y aplicaciones*, $||A||_2 = \sigma_1$, es decir, el valor singular mayor

$||A||_2 = 2401$

Apartado 3 - Calculad la matriz comprimida A_2 . ¿Qué valor tiene la norma de la diferencia entre A y su compresión A_2?

Tal y como se detalla en el la sección *3.4 Aplicación de la descomposición en valores singulares: compresión de imágenes* del módulo *Descomposición en valores singulares: introducción y aplicaciones*, la compresión de una matriz se define como

$\mathbf{A} = \sum_{j=1}^{r} \sigma_j \mathbf{u}_j \mathbf{v}_j^T$ es una matriz de dimensión $m \times n$ y rango r ($r <$ mín$\{m,n\}$). Consideramos la ν-ésima suma parcial:

$$\mathbf{A}_\nu = \sigma_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^T + \sigma_2 \mathbf{u}_2 \mathbf{v}_2^T + \cdots + \sigma_\nu \mathbf{u}_\nu \mathbf{v}_\nu^T = \sum_{j=1}^{\nu} \sigma_j \mathbf{u}_j \mathbf{v}_j^T$$

Así pues, la diferencia en norma 2 entre estas dos matrices es igual a:

$$||\mathbf{A} - \mathbf{A}_\nu||_2 = \sigma_{\nu+1}.$$

Es decir, podemos saber la norma de la diferencia sin calcular A_2

$||A-A_2||_2 = \sigma_3 = 49$

En caso de necesitar calcular la matriz comprimida, en este caso tendríamos

$$A_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2401 & 0 \\ 0 & 343 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{343\cdot\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2401\cdot\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2401\cdot\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{343\cdot\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Apartado 4 - La mejor aproximación de rango 1 en norma 2 viene dada por la matriz comprimida A_1

En este caso tendríamos

$$A_1=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2401 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2401\cdot\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2401\cdot\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

◄ RETO 3 - Semana 10

Ir a...

RETO 4 - Tabla resumen de la Práctica 1 ►