1 Conceitos Fundamentais - Um exemplo 1-D

1.1 Preliminares

Ingredientes do MEF para um PVC:

\# A formulação variacional (formulação fraca)

\# ~~Forma~~ aproximada da equação variacional através do uso de "funções de elementos finitos"

Exemplo

$$u_{,xx} + f = 0$$

$f : [0,1] \to \mathbb{R}$, f suficientemente suave

Condições de contorno (por exemplo):

$$u(1) = g$$
$$-u_{,x}(0) = h$$

, g, h constantes dadas.

FORMA FORTE: $[0,1]$

Dado $f : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$, e des g, h, ache $u : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ tal que

$$(S)\left\{\begin{array}{l} u_{,xx} + f = 0 \\ u(1) = g \\ -u_{,x}(0) = h \end{array}\right.$$

Solução: $u(x) = g + (1-x)h + \int_x^1 \left\{ \int_0^y f(z)\,dz \right\} dy$

$\to$ DIFERENÇAS FINITAS - aplicadas diretamente à forma forte!

1.2. Forma Variacional (Forma Fraca)

Necessário caracterizar 2 classes de funções:

\# Funções Teste (Candidatas)

- Satisfazem $u(1) = g$
- $\int_0^1 (u_{,x})^2 dx < \infty$, logo $u \in H^1$

Então

$$S = \{ u \mid u \in H^1, \ u(1) = g \}$$ "funções teste"

\# Funções Peso (Variações)

$$\mathcal{V} = \{ w \mid w \in H^1, \ w(1) = 0 \}$$

\# Forma Fraca

$$(W) \begin{cases} \text{Dados } f : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}, \text{ ctes } g, h, \text{ ache } u \in S \text{ tal que } \forall w \in \mathcal{V} \\ \int_0^1 w_{,x} u_{,x} \, dx = \int_0^1 w f \, dx + w(0) h \end{cases}$$

Trabalhos virtuais, deslocamentos virtuais, etc.

Equação Variacional, Equação Trabalhos virtuais, etc.

1.3. Relação entre a Forma Forte e a Forma Fraca.

. Proposição:

a. Seja u solução de (S). Então u é solução de (W).

b. Seja u solução de (W). Então u é solução de (S).

. logo, (W) é equivalente a (S)!

Prova:

a. Assumindo que u é solução de (S),

$$0 = -\int_0^1 w(u_{,xx}+f)\,dx \quad , \quad \forall w \in \mathcal{V}$$

Integrando por partes,

$$0 = \int_0^1 w_{,x}\, u_{,x}dx - \int_0^1 wf\,dx - wu_{,x}\Big|_0^1$$

Como $-u_{,x}(0)=h$ e $w(1)=0$

$$\int_0^1 w_{,x}\,u_{,x}\,dx = \int_0^1 wf\,dx + w(0)\,h.$$

Além disso, u é solução de (S) então $u(1)=g \Rightarrow u \in \mathcal{S}$.

$\forall w \in \mathcal{V} \Rightarrow u$ é solução de (W)!

b. Assumindo que u é solução de (W), $u \in S$ e $u(1)=g$. logo,

$$\int_0^1 w_{,x}\,u_{,x}\,dx = \int_0^1 wf\,dx + w(0)h \qquad \forall w \in \mathcal{V}$$

Integrando por partes e lembrando que $w(1)=0$, tem-se:

$$0 = \int_0^1 w(u_{,xx}+f)\,dx + w(0)\left[u_{,x}(0)+h\right]$$

o que implica que:

i) $u_{,xx}+f=0$ em Ω

ii) $u_{,x}(0)+h=0$

Prova de i):

Definindo $w = \phi(u_{,xx}+f)$

ϕ suave ; $\phi(x)>0 \ \forall x \in \Omega =]0,1[$, $\phi(0)=\phi(1)=0$, implica que $w(1)=0 \Rightarrow w \in \mathcal{V}$! Substituindo,

$$0 = \int_0^1 \phi\,\underbrace{(u_{,xx}+f)^2}_{\overset{\|}{0}\,!}\,dx + 0$$

<u>Observações</u>:

① $-u_{,x}(0)=h$ → condição de contorno natural. Não aparecem em (W).

$u(1)=g$ → condição de contorno essencial

② $a(w,u) = \int_0^1 w_{,x}u_{,x}\,dx$

$(w,f) = \int_0^1 wf\,dx$

$a(w,u) = (w,f) + w(0)h$

onde $a(\cdot,\cdot)$ e $(\cdot,\cdot)$ são formas BILINEARES e SIMÉTRICAS, isto é,

$$\left.\begin{array}{l} a(u,v) = a(v,u) \\ (u,v) = (v,u) \end{array}\right\} \text{SIMETRIA}$$

$$\text{BILINEARIDADE}\left\{\begin{array}{l} a(c_1 u_1 + c_2 u_2, w) = c_1\, a(u_1,w) + c_2\, a(u_2,w) \\ (c_1 u_1 + c_2 u_2, w) = c_1 (u_1,w) + c_2 (u_2,w) \end{array}\right.$$

1.4. Método Aproximado de Galerkin

$$\left\{\begin{array}{ll} S^h \subset S & (\text{i.e., se } u^h \in S^h \Rightarrow u^h \in S) \\ V^h \subset V & (\text{i.e., se } w^h \in V^h \Rightarrow w^h \in V) \end{array}\right.$$

(espaços de dimensão finita, associados a uma malha!

Logo, se $u^h \in S^h$ e $w^h \in V^h$ então:

$$u^h(1) = g \quad ; \quad w^h(1) = 0$$

As coleções S, V, S^h e V^h são ESPAÇOS DE FUNÇÕES.

$$\left\{\begin{array}{l} c_1, c_2 \text{ ctes} \; ; \; v, w \in V \Rightarrow c_1 v + c_2 w \in V \\ c_1, c_2 \text{ ctes}, \; v^h, w^h \in V^h \Rightarrow c_1 v^h + c_2 w^h \in V^h \end{array}\right.$$

Entretanto esta propriedade não vale p/ S, S^h, devido a condição de contorno não homogênea.

Se $u_1, u_2 \in S$, $u_1 + u_2 \notin S$ já que

$u_1(1) + u_2(1) = g + g = 2g$!!! o que viola a definição de S!

Método de Galerkin

$\mathcal{V}^h$ dado. Então para cada $v^h \in \mathcal{V}^h$ construímos uma função $u^h \in \mathcal{S}^h$,

$$u^h = v^h + g^h$$

onde g^h é uma função dada satisfazendo a condição de contorno essencial, i.e.,

$$g^h(1) = g$$

Portanto $u^h(1) = v^h(1) + g^h(1) = 0 + g$. Logo, a menos da função g^h, $\mathcal{S}^h$ e $\mathcal{V}^h$ contem as MESMAS funções.

Forma variacional

$$\boxed{a(w^h, u^h) = (w^h, f) + w^h(0)h}$$

$$a(w^h, v^h + g^h) = (w^h, f) + w^h(0)h$$

$$\boxed{a(w^h, v^h) = (w^h, f) + w^h(0)h - a(w^h, g^h)}$$

Método de Galerkin

Dado f, g e h, ache $u^h = v^h + g^h$, $v^h \in \mathcal{V}^h$ tal que, $\forall w^h \in \mathcal{V}^h$

$$a(w^h, v^h) = (w^h, f) + w^h(0)h - a(w^h, g^h)$$

Observaçã

Outros métodos, por exemplo, PETROV-GALERKIN, $w^h \notin \mathcal{V}^h$!!

1.5. Forma Matricial - Matriz de Rigidez $\underset{\sim}{K}$

Definição de $\mathcal{V}^h$

Suponha que

$$w^h = \sum_{A=1}^{n} c_A N_A = c_1 N_1 + c_2 N_2 + \dots + c_n N_n$$

onde N_A é uma função de interpolação (função de forma, base). Obviamente, $N_A : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$. e $N_A(1) = 0$, $A = 1, 2, \dots, n$. Logo, $w^h(1) = 0$, como necessário.

O espaço $\mathcal{V}^h$ tem dimensão n.

Para definirmos $\mathcal{S}^h$ é necessário especificar g^h. Vamos introduzir outra função de interpolação, $N_{n+1} : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, tal que:

$$N_{n+1}(1) = 1 \qquad (N_{n+1} \notin \mathcal{V}^h !!!).$$

Logo:

$$g^h = g N_{n+1} \implies g(1) = g$$

$u^h \in \mathcal{S}^h$ é:

$$u^h = v^h + g^h = \sum_{A=1}^{n} d_A N_A + g N_{n+1}$$

onde os d_A são ctes. Portanto

$$u(1) = g \qquad (\quad N_A(1) = 0 \ , \forall A \quad e \quad N_{n+1}(1) = 1 \ ! \ )$$

Substituindo na equação de Galerkin,

$$a\left(\sum_{A=1}^{n} c_A N_A , \sum_{B=1}^{n} d_B N_B \right) = \left(\sum_{A=1}^{n} c_A N_A , f \right) + \left[\sum_{A=1}^{n} c_A N_A(0) \right] h$$

$$- \ a\left(\sum_{A=1}^{n} c_A N_A , g N_{n+1} \right)$$

Usando a bilinearidade de $a(\cdot,\cdot)$ e $(\cdot,\cdot)$, temos

$$0 = \sum_{A=1}^{n} c_A G_A$$

onde $G_A = \sum_{B=1}^{n} a(N_A, N_B) d_B - (N_A, f) - N_A(0) h +$

$$a(N_A, N_{n+1}) g$$

como todas as equações de Galerkin tem que ser satisfeitas p/ $\forall w^h \in \mathcal{V}^h \Rightarrow G_A \ , A = 1, 2, \ldots, n \equiv 0$ (c_A = ctes arbitrárias!!)

$$\boxed{\sum_{B=1}^{n} a(N_A, N_B) d_B = (N_A, f) + N_A(0) h - a(N_A, N_{n+1}) g}$$

Em forma matricial

$$K_{AB} = a(N_A, N_B)$$

$$F_A = (N_A, f) + N_A(0)\,h - a(N_A, N_{n+1})\,g$$

ou

$$\sum_{B=1}^{n} K_{AB}\, d_B = F_A \quad , \quad A = 1, 2, \dots, n$$

$$\underset{\sim}{K} = [K_{AB}] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \cdots & K_{1n} \\ & & \\ K_{n1} & K_{n2} \cdots & K_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{F} = \{F_A\} = \{F_1, F_2, \dots, F_n\}^T$$

$$\underset{\sim}{d} = \{d_B\} = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}^T$$

$$\boxed{\underset{\sim}{K}\underset{\sim}{d} = \underset{\sim}{f}}$$

$\underset{\sim}{K}$ ≡ MATRIZ DE "RIGIDEZ"

$\underset{\sim}{F}$ ≡ VETOR ~~DE~~ "FORÇAS"

$\underset{\sim}{d}$ ≡ VETOR DE DESLOCAMENTOS

Forma matricial do Problema de Galerkin

Dados $\underset{\sim}{K}$, $\underset{\sim}{F}$ ache d tal que

$$(M)\left\{\ \underset{\sim}{K}\,\underset{\sim}{d} = \underset{\sim}{F}\right.$$

Solução: $\underset{\sim}{d} = \underset{\sim}{K}^{-1}\underset{\sim}{F}$

$$u^h(x) = \sum_{A=1}^{n} d_A N_A(x) + g N_{n+1}(x)$$

Observação

\# A solução de (W) é uma aproximação da solução de (G). A qualidade da aproximação depende da escolha de N_A e do número n.

\# A matriz $\underset{\sim}{K}$ é simétrica:

$$\underset{\sim}{K}_{AB} = a(N_A, N_B) = a(N_B, N_A) = K_{BA}$$

$$\hookrightarrow \underset{\sim}{K} = \underset{\sim}{K}^T$$

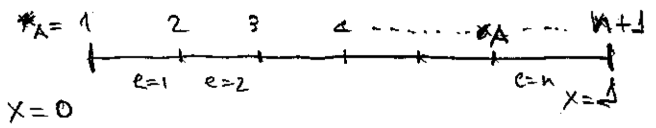
\# É conveniente na maioria das vezes escrever:

$$u^h(x) = \sum_{A=1}^{n+1} N_A(x)\, d_A$$

onde $d_{n+1} = g$

1.8. Espaços de Elementos Finitos - Funções Lineares por Partes

Seja o domínio $\bar{\Omega} = [0,1]$. A malha de elementos finitos é definida como



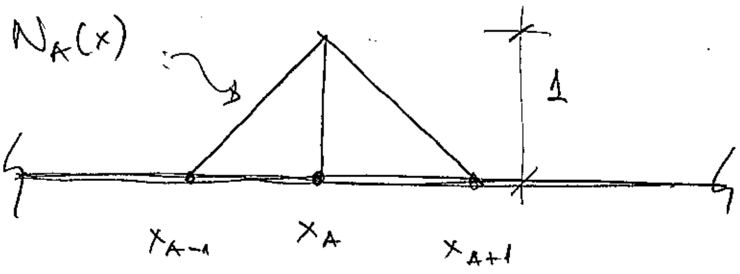
, $A = 1, \ldots, n+1$ = nós

e = elemento de tamanho

$h_A = x_{A+1} - x_A$

Funções de Forma:

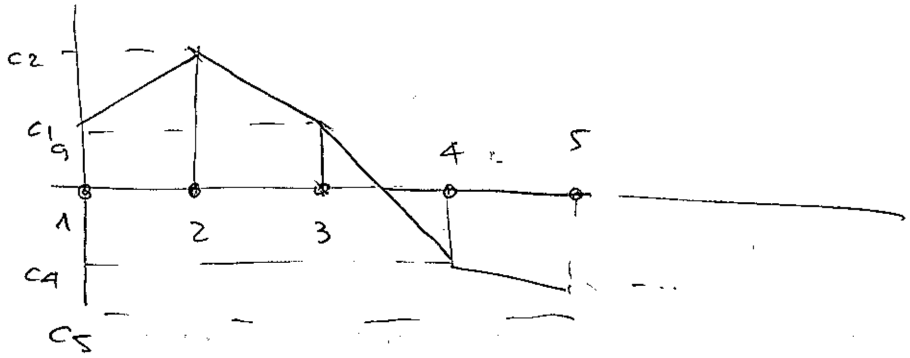
$$N_A(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{A-1}}{h_{A-1}} & x_{A-1} \leq x \leq x_A \\[2ex] \dfrac{x_{A+1} - x}{h_A} & x_A \leq x \leq x_{A+1} \\[2ex] 0 & \end{cases}$$



Note que $N_A(x_B) = \delta_{AB}$, ou seja

$$\begin{cases} N_A(x_B) = 1 & \text{se} \quad A = B \\ N_A(x_B) = 0 & \text{se} \quad A \neq B \end{cases}$$

Um membro típico de $w^h \in \mathcal{V}^h$ tem a forma $\sum_{A=1}^{n} c_A N_A$ e pode ser representado por



w^h é contínuo, porém tem derivada 1ª descontínua nos nós!

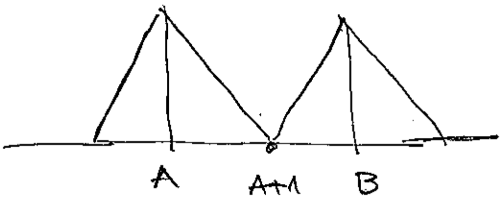
1.9. Propriedades de $\underline{K}$

Como as funções N_A, $A = 1, 2, \dots, n+1$ são nulas fora dos vizinhos de A, muitos termos de $\underline{K}$ são nulos.

Por exemplo:

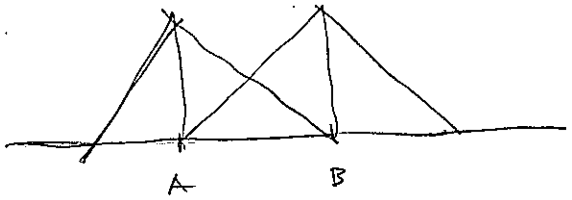
$$[K_{AB}] = \int_0^1 N_{A,x} N_{B,x}\,dx$$

Se



$\Rightarrow [K_{AB}] = 0$

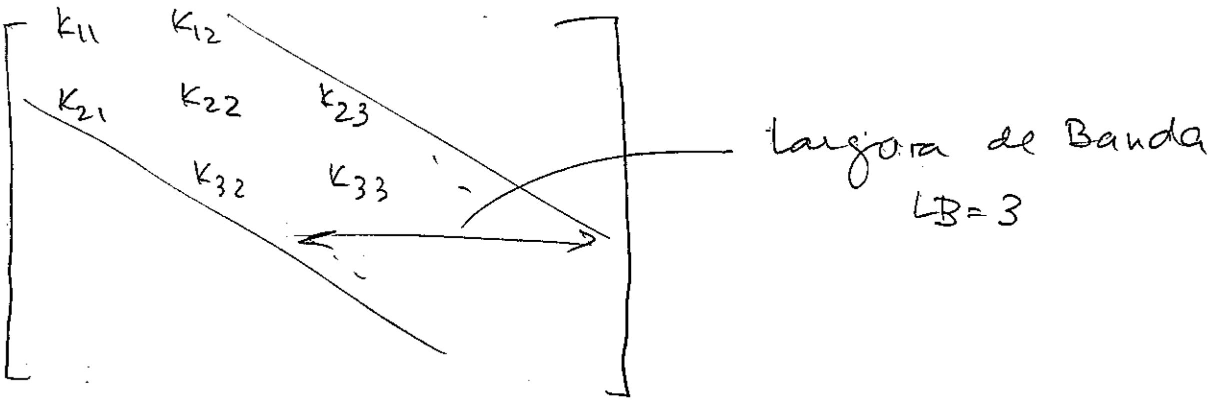
Se



$\Rightarrow [K_{AB}] \neq 0$

logo, $\underset{\sim}{K}$ tem a estrutura (caso 1-D!!)

$\underset{\sim}{K} =$



Como veremos adiante, $\underset{\sim}{K}$ é uma matriz esparsa no caso geral, porem sempre com uma estrutura em banda. A largura de banda e obviamente o grau de esparsidade é função da numeração dos nós da malha! Além disso, $\underset{\sim}{K}$ é positiva definida, ou seja,

i) $\underset{\sim}{c}^T \underset{\sim}{K} \underset{\sim}{c} \geq 0 \quad \forall \underset{\sim}{c} \in \mathbb{R}^n$

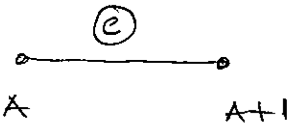
ii) $\underset{\sim}{c}^T \underset{\sim}{K} \underset{\sim}{c} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underset{\sim}{c} = \underset{\sim}{0}$

Como consequência:

1) Uma matriz SPD possui uma única solução
2) Os autovalores de uma matriz PD são reais e positivos.

1.10. O Ponto de Vista do Elemento

O quê é um elemento finito ?



Elemento Finito 1D Linear – Descriçã Global :

(g1) Domínio $[x_A, x_{A+1}]$

(g2) Nós $\{x_A, x_{A+1}\}$

(g3) Graus de liberdade $\{d_A, d_{A+1}\}$

(g4) Funções de Forma $\{N_A, N_{A+1}\}$

(g5) Interpolaçã : $u^h(x) = N_A(x)d_A + N_{A+1}(x)d_{A+1}$, $x \in [x_A, x_{A+1}]$

Ou seja, um elemento finito 1D linear é apenas a restriçã da funçã u^h (definida globalmente, isto é p/ todo o domínio) ao domínio do elemento. Sendo assim, pode-se introduzir uma descriçã local do elemento, de forma a se padronizar os cálculos, com vistas à implementaçã computacional. Logo, Descrição local:

(l1) Domínio $[\xi_1, \xi_2]$

(l2) Nos $\{\xi_1, \xi_2\}$

(l3) Graus de liberdade $\{d_1, d_2\}$

(l4) Funções de Forma $\{N_1, N_2\}$

(l5) Funções de Interpolação

$$u^h(\xi) = N_1(\xi)d_1 + N_2(\xi)d_2$$

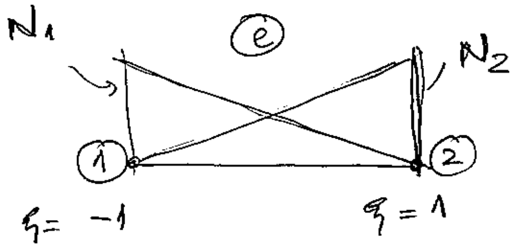
Onde existe a transformação afim

$$\xi : [x_A, x_{A+1}] \rightarrow [\xi_1, \xi_2] \text{ tal que}$$

$$\xi(x_A) = \xi_1 = -1$$

$$\xi(x_{A+1}) = \xi_2 = 1$$

Ou seja



Assumindo que ξ é dado por:

$$\xi(x) = c_1 + c_2 x$$

onde c_1, c_2 são constantes determinadas por,

$$\begin{cases} -1 = c_1 + x_A c_2 \\ 1 = c_1 + x_{A+1} c_2 \end{cases} \Rightarrow \xi(x) = \frac{2x - x_A - x_{A+1}}{h_A}$$

$$x(\xi) = \frac{h_A \xi + x_A + x_{A+1}}{2}$$

$$\sim\|\sim$$

Daí p/ frente a, b, c ... índices locais
A, B, C ... índices globais
^{e} ---> local

Na variável ξ, as funções de forma são:

$$N_a(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi_a \xi) \quad , a = 1,2$$

ou seja

$$N_1(\xi) = \frac{1}{2}(1-\xi) \quad ; \quad N_2 = \frac{1}{2}(1+\xi) .$$

Por outro lado, é interessante notar que x pode ser escrito em função do Na, isto é,

$$x^e(\xi) = \sum_{a=1}^{2} N_a(\xi)\, x_a^e$$

$$\sim\|\sim$$

$$\frac{1}{2}(1-\xi)\,x_1 + \frac{1}{2}(1+\xi)\,x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 - \xi x_1 + x_2 + \xi x_2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x_1 + x_2 + \xi(x_2 - x_1)\right) = \frac{1}{2}\left(x_1 + x_2 + h\xi\right)$$

Note que:

$$u^h(\xi) = \sum_{a=1}^{2} N_a(\xi)\, d_a \; !$$

1.11. Matriz de Rigidez do Elemento e Vetor de Forças

$$K_{AB} = a(N_A,N_B) = \int_0^1 N_{A,x} N_{B,x}\, dx \quad \Rightarrow \quad \underset{\sim}{K} = [K_{AB}]_{n\times n}$$

$$F_A = (N_A,f) + \delta_{A1} h - a(N_A, N_{A+1})\, g =$$

$$= \int_0^1 N_a f\, dx + \delta_{A1} h - \int_0^1 N_{A,x} N_{n+1,x}\, dx\; g \Rightarrow \underset{\sim}{F} = \{F_A\}_{n\times 1}$$

→ $(N_A(x_1) \equiv \delta_{A1})$!

Entretanto, as integrais em $\bar{\Omega}$ podem ser feitas como uma soma das integrais nos domínios dos elementos, isto é,

$$\underset{\sim}{K} = \sum_{e=1}^{nel} \underset{\sim}{K}^e \quad ; \quad \underset{\sim}{K}^e = [K^e_{AB}]$$

$$\underset{\sim}{F} = \sum_{e=1}^{nel} \underset{\sim}{F}^e \quad ; \quad \underset{\sim}{F}^e = \{F^e_A\}$$

onde

$$K^e_{AB} = a(N_A, N_B)^e = \int_{\Omega^e} N_{A,x} N_{B,x}\, dx$$

$$F^e_A = \int_{\Omega^e} N_A f\, dx + \delta_{e1}\delta_{A1} h - \int_{\Omega^e} N_{A,x} N_{n+1,x}\, dx\; g$$

onde $\Omega^e = [x_1^e, x_2^e] \equiv$ domínio do elemento.

Logo, agora podemos definir a matriz de rigidez do elemento, $\underset{\sim}{k}^e$ e o vetor de forças do elemento, $\underset{\sim}{f}^e$:

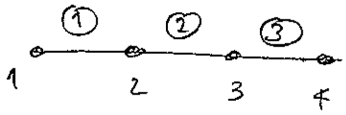
$$\boxed{\begin{aligned} &\underset{\sim}{k}^e = [\,k^e_{ab}\,]_{2\times2} \;; \quad \underset{\sim}{f}^e = \{\,f^e_a\,\}_{2\times1} \\ &k^e_{ab} = a(N_a, N_b)^e = \int_{\Omega^e} N_{a,x} N_{b,x}\, dx \\ &f^e_a = \int_{\Omega^e} N_a f \, dx + \begin{cases} \delta_{a1}\, h & e = 1 \\ 0 & e = 2,3,\ldots, n_{el}-1 \\ -k^e_{a2}\, g & e = n_{el} \end{cases} \end{aligned}}$$

1.12. Montagem da Matriz de Rigidez Global e do Vetor de Forças Global ; O arranjo LM.

Em um programa de elementos finitos, existe uma rotina responsável por gerar as matrizes de rigidez e o vetor de forças dos elementos, e gerar os dados necessários à montagem da matriz de rigidez global e do vetor de forças global. Para tanto, é necessário um "mapa" das informações locais ⟶ globais, isto é, uma matriz de localização, definida como,

$$A = LM(e, a) = \begin{cases} e & \text{se} \quad a = 1 \\ e+1 & \text{se} \quad a = 2 \end{cases}$$

Exemplo:



Elemento	No1	No2
1	1	2
2	2	3
3	3	4

$\} \; \underline{\underline{LM}}$

$\underset{\sim}{K}^1, \; \underset{\sim}{K}^2, \; \underset{\sim}{K}^3, \; , f^1, f^2, f^3$

$$\underset{\sim}{K} = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & K_{11}^1 & K_{12}^1 & & \\ 2 & K_{21}^1 & K_{22}^1 + K_{11}^2 & K_{12}^2 & \\ 3 & & K_{21}^2 & K_{22}^2 + K_{11}^3 & K_{12}^3 \\ 4 & & & K_{21}^3 & K_{22}^3 \end{array} \Rightarrow \underset{\sim}{K} = \underset{e=1}{\overset{nel}{\mathbf{A}}} (\underset{\sim}{K}^e)$$

$$\underset{\approx}{F} = \begin{array}{c|c} 1 & f_1^1 \\ 2 & f_2^1 + f_1^2 \\ 3 & f_2^2 + f_1^3 \\ 4 & f_2^3 \end{array} \Rightarrow \underset{\sim}{F} = \underset{e=1}{\overset{nel}{\mathbf{A}}} (f^e) .$$

1.13. Cálculo da Matriz de Rigidez e do Vetor de Forças dos Elementos.

→ Troca de variáveis

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx = \int_{\xi_1}^{\xi_2} f(x(\xi))\, x_{,\xi}\, d\xi \quad , \quad x_{,\xi} \equiv \text{Jacobiano da Transformação}$$

→ Regra da Cadeia

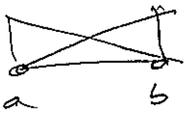
$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = f_{,x}\, x_{,\xi} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi}$$

Com esses dois ingredientes,

$$k_{ab}^{e} = \int_{\Omega^e} N_{a,x}\, N_{b,x}\, dx = \int_{-1}^{1} N_{a,x}(\xi)\, N_{b,x}(\xi)\, x_{,\xi}\, d\xi =$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{N_{a,\xi}(\xi)}{x_{,\xi}} \frac{N_{b,\xi}(\xi)}{x_{,\xi}}\, x_{,\xi}\, d\xi = \int_{-1}^{1} N_{a,\xi}\, N_{b,\xi}\, \frac{1}{x_{,\xi}}\, d\xi .$$

lembrando que,



$$N_a = \frac{1}{2}(1-\xi) \quad ; \quad N_b = \frac{1}{2}(1+\xi)$$

$$N_{a,\xi} = -\frac{1}{2} \quad ; \quad N_{b,\xi} = \frac{1}{2}$$

$$x_{,\xi} = \frac{h^e}{2}$$

logo,

$$k^e_{11} = \int_{-1}^{1} N_{1,\xi} N_{1,\xi} \cdot \frac{2}{h^e} d\xi = \int_{-1}^{1} \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{2}{h^e} dx = \frac{1}{h^e}$$

$$k^e_{12} = \int_{-1}^{1} N_{1,\xi} N_{2,\xi} \cdot \frac{2}{h^e} d\xi = \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) \frac{2}{h^e} dx = -\frac{1}{h^e}$$

$$k^e_{21} = \int_{-1}^{1} N_{2,\xi} N_{1,\xi} \frac{2}{h^e} d\xi = -\frac{1}{h^e}$$

$$k^e_{22} = \int_{-1}^{1} N_{2,\xi} N_{2,\xi} \frac{2}{h^e} d\xi = \frac{1}{h^e}$$

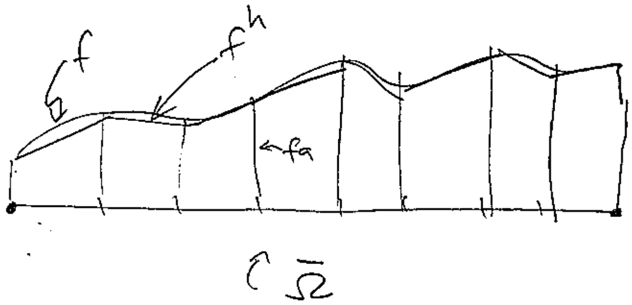
$$\underset{\sim}{k}^e = \frac{1}{h^e} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

É interessante notar que $N_{a,\xi}, N_{b,\xi}$ NÃO dependem dos dados do elemento, uma vez que $N_a = N_a(\xi)$. Tal não ocorre com as "derivadas" $x_{,\xi}$ e $\xi_{,x}$ que dependem do elemento em questão.

O cálculo de f^e não pode ser efetuado sem se conhecer a forma de $f(x)$. Entretanto, na prática é comum aproximar-se a função $f(x)$. A forma mais simples é:

$$f^h = \sum_{a=1}^{2} f_a N_a \quad , \quad f_a = f(x(\xi_a))$$

isto nos conduz a,



onde agora apenas os valores nodais de f (fa's) são necessários. Portanto,

$$\left[f^e_x \right] = f_a \int_{\Omega^e} N_a N_b \, dx = f_a \int_{-1}^{1} N_a(\xi)\, N_b(\xi)\, x_{,\xi}\, d\xi \; ; \quad a,b = 1,2$$

$$\underset{\sim}{f}^e = \frac{h^e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} = \frac{h^e}{6} \begin{Bmatrix} 2f_1 + f_2 \\ f_1 + 2f_2 \end{Bmatrix} + \text{termos do contorno.}$$

→ Solução do Sistema de Equações: Eliminação de Gauss.

⇒ Lista de exercícios:

(i) $\dfrac{d^2u}{dx^2} + u + 1 = 0$, $\bar{\Omega} = [0,1]$

$u(0) = 0$; $du/dx \big|_{x=1} = 1$; $h_1 = h_2 = h_3 = 1/3$

(ii) $\dfrac{d^2u}{dx^2} + u + 1 = 0$; $\bar{\Omega} = [0,1]$

$u(0) = 0$; $\dfrac{du}{dx}\Big|_{x=1} = -u$; $h_1 = h_2 = h_3 = 1/3$

(iii) $k(x)\dfrac{d^2u}{dx^2} = 0$; $\bar{\Omega} = [0,1]$

$u(0) = 0$; $u(1) = 1$; $k(x) = \begin{cases} 1 \; ; & x < 1/2 \\ 2 \; ; & x > 1/2 \end{cases}$

$h_1 = h_2 = h_3 = h_4 = 1/4$

(iv) $$\frac{du}{dx} + \varepsilon \frac{d^2u}{dx^2} + \sigma u = 0 \quad , \quad \bar{\Omega} = [0,1]$$

$$u(0) = 0 \; , \quad u(1) = 1$$

$$\varepsilon << 1 \; , \quad \begin{cases} \sigma = O(1) , \; \sigma > 0 \\ \sigma = 0 \\ \sigma = O(1) , \; \sigma < 0 \end{cases}$$

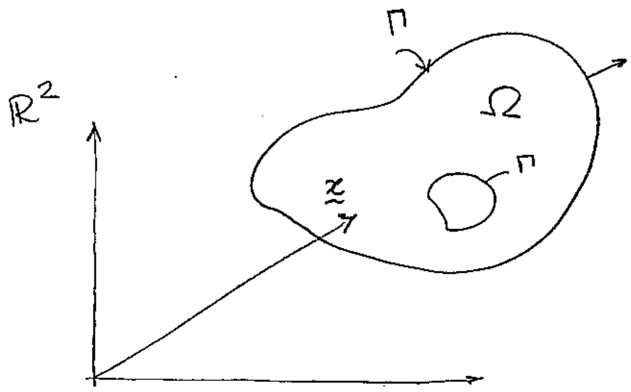
Escolher (i) / (ii)

(iii) + (iv)

2. Formulação de PVC em 2 e 3 Dimensões - Condução de Calor

2.1. Preliminares

$n_{sd} = 2, 3$ → número de dimensões



$\underset{\sim}{n} = \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix}$ = vetor unitário normal

$\underset{\sim}{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}$

$\Omega \subset \mathbb{R}^{n_{sd}}$

Γ . contorno de Ω

↳ $\Gamma = \overline{\Gamma_g \cup \Gamma_h}$; $\Gamma_g \cap \Gamma_h = \phi$

(A barra significa conjunto fechado) $\Rightarrow \overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$

$$u_{,i} = u_{,x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

$$u_{,ii} = u_{,11} + u_{,22} + u_{,33} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Teorema da Divergência

seja $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, f de classe C^1 (1ª derivada contínua), então

$$\boxed{\int_{\Omega} f_{,i} \, d\Omega = \int_{\Gamma} f n_i \, d\Gamma}$$

Integração por Partes

Seja f como antes, e $g : \bar{\Omega} \Rightarrow \mathbb{R}$, g também C^1, então

$$\boxed{\int_\Omega f_{,i}\, g \, d\Omega = -\int_\Omega f g_{,i} + \int_\Gamma f g n_i \, d\Gamma}$$

—— // ——

$$(fg)_{,i} = f_{,i}\, g + f g_{,i}$$

Integrando → $\underbrace{\int_\Omega (fg)_{,i}\, d\Omega}_{\overset{\shortparallel}{\int_\Gamma f g n_i d\Gamma}} = \int_\Omega f_{,i}\, g \, d\Omega + \int_\Omega f g_{,i} \, d\Omega$

—— // ——

2.2. Condução de Calor – Forma Forte e Fraca.

q_i → componentes cartesianas do vetor de fluxo de calor
u → temperaturas
f → calor aplicado por unidade de volume

Lei de Fourier Generalizada :

$$\boxed{q_i = -k_{ij}\, u_{,j}} \quad , \quad k_{ij} = k_{ji} \ \ (\text{simetria})$$

↳ EQUAÇÃO CONSTITUTIVA, EQUAÇÃO DE ESTADO

$k_{ij} = k_{ij}(\underset{\sim}{x})$ = condutividades térmicas

se k_{ij} é cte em Ω ⇒ material homogêneo
se $k_{ij} = k(\underset{\sim}{x})\,\delta_{ij}$ em Ω ⇒ material isotrópico

Forma Forte

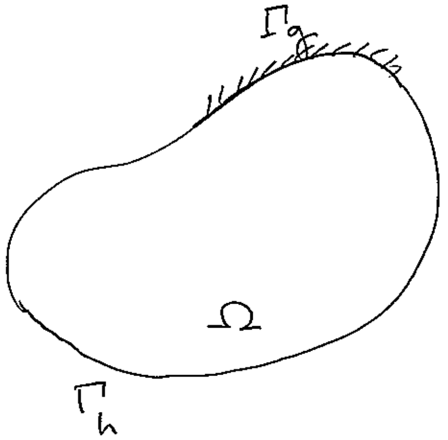
Dado $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $g: \Gamma_g \rightarrow \mathbb{R}$ e $h: \Gamma_h \rightarrow \mathbb{R}$, ache $u: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que:

(S)

$q_{i,i} = f$ em Ω (equação do calor (a)

$u = g$ em Γ_g (b)

$-q_i n_i = h$ em Γ_h (c)



g - temperaturas prescitas no contorno

h - fluxos de calor prescitos no contorno

Em uma outra terminologia, temos

(a) Equação de Poisson generalizada

(b) Condição de contorno de Dirichlet

(c) Condição de contorno de Neumann.

Exemplo: Caso homogêneo e isotrópico:

$$q_x = -k\frac{\partial u}{\partial x} \quad ; \quad q_y = -k\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$q_{,x} = -k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad ; \quad q_{,y} = -k\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$q_{i,i} = q_{x,x} + q_{y,y} = -k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - k\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{f}{k} = 0} \quad \text{ou} \quad \boxed{-\nabla^2 u = f}$$

Forma Fraca

A construção da forma fraca é feita da mesma forma que no caso 1-D. Em particular, as condições de contorno de Dirichlet e Neumann serão tratadas respectivamente como condições essenciais e naturais da formulação variacional.

$$\begin{cases} \mathcal{S} \rightarrow \text{espaço das funções teste} \\ \mathcal{V} \rightarrow \text{espaço das funções peso} \end{cases} \Rightarrow \text{definidas em } \overline{\Omega}$$

logo, $\forall u \in \mathcal{S}$, $u = g$ em Γ_g

$\forall w \in \mathcal{V}$, $w = 0$ em Γ_g

(W) Dado $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \Gamma_g \rightarrow \mathbb{R}$ e $h : \Gamma_h \rightarrow \mathbb{R}$, ache $u \in \mathcal{S}$, tal que, $\forall w \in \mathcal{V}$,

$$-\int_\Omega w_{,i} q_i \, d\Omega = \int_\Omega w f \, d\Omega + \int_{\Gamma_h} w h \, d\Gamma$$

ou, substituindo a lei de Fourier,

$$\underset{a(w,u)}{\underset{\parallel}{\int_\Omega w_{,i} k_{ij} u_{,j} \, d\Omega}} = \underset{(w,f)}{\underset{\parallel}{\int_\Omega w f \, d\Omega}} + \underset{(w,h)_\Gamma}{\underset{\parallel}{\int_{\Gamma_h} w h \, d\Gamma}}$$

$$\boxed{a(w,u) = (w,f) + (w,h)_\Gamma}$$

Exercício 1 - Hughes

← Prove que as formas são bilineares e simétricas!

Notação matricial ($n_{sd} = 2$)

$$\nabla u = \{ u_{,i} \} = \begin{Bmatrix} u_{,1} \\ u_{,2} \end{Bmatrix} \equiv \text{gradiente} = \begin{Bmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \end{Bmatrix}$$

$$\nabla w = \{ w_{,i} \} = \begin{Bmatrix} w_{,1} \\ w_{,2} \end{Bmatrix}$$

$$[k_{ij}] = \underset{\sim}{k} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}$$ (simetrica → $k_{12} = k_{21}$

- Isotrópico : $\underline{k} = k \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
- Ortotrópico : $\underline{k} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$

$$w_{,i} k_{ij} u_{,j} = \underset{1\times2}{(\nabla w)^T} \; \underset{2\times2}{\underset{\sim}{k}} \; \underset{2\times1}{\nabla u}$$

$$w_{,x} k_{11} u_{,x} + w_{,x} k_{12} u_{,y} + w_{,y} k_{21} u_{,x} + w_{,y} k_{22} u_{,2}$$

!

$$\underline{k} \nabla u = \begin{Bmatrix} k_{11} u_{,x} + k_{12} u_{,y} \\ k_{21} u_{,x} + k_{22} u_{,y} \end{Bmatrix}$$

$$(\nabla w)^T \underline{k} \nabla u = w_{,x} k_{11} u_{,x} + w_{,x} k_{12} u_{,y} + w_{,y} k_{21} u_{,x} + w_{,y} k_{22} u_{,y}$$

Portanto:

$$\boxed{a(w,u) = \int_\Omega (\nabla w)^T \underset{\sim}{k} \nabla u \, d\Omega}$$

↑ Exercício 2 - pg. 64 !

2.3. Condução de Calor: Formulação de Galerkin; $\underset{\sim}{K}$ - matriz SPD.

Sejam $S^h \subset S$ e $\mathcal{V}^h \subset \mathcal{V}$ espaços de dimensão finita. Assume-se que $\forall\, w^h \in \mathcal{V}^h$, $w^h = 0$ em Γ_g de forma exata, ou ao menos, aproximada. Assume-se tambem que $\forall\, u^h \in S^h$,

$$u^h = v^h + g^h$$

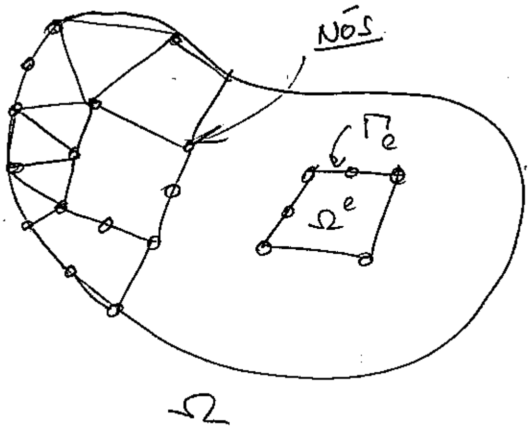
onde $v^h \in \mathcal{V}^h$ e g^h satisfaz, ao menos aproxidamente a condição de contorno $u=g$ em Γ_g.

A formulação de Galerkin é,

Dados f, g e h como em (W), ache $u^h = v^h + g^h \in S^h$, tal que, $\forall\, w^h \in \mathcal{V}^h$,

$$a(w^h, v^h) = (w^h, f) + (w^h, h)_\Gamma - a(w^h, g^h)$$

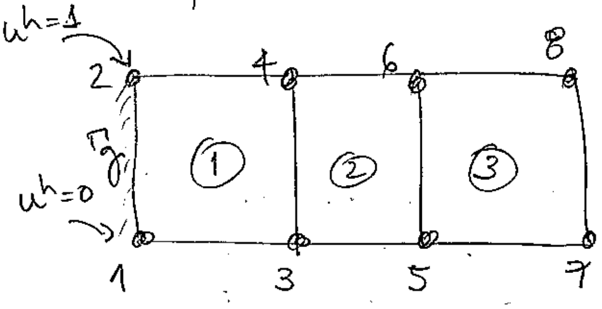
onde agora o domínio Ω é discretizado em elementos Ω^e, tal que $\bigcup_{e=1}^{nel} \Omega^e \equiv \Omega$, $\Omega^e_i \cap \Omega^e_j = \phi$



seja $\eta = \{1, 2, \dots, n_{np}\}$ → conjunto de número de nós e um g-nó, um nó tal que $u^h = g$, ou seja, um nó com uma condição de contorno de temperatura especifica

Logo, o conjunto de g-nós é $\eta_g \subset \eta$. O complemento de η_g em η, $\eta - \eta_g$, é o conjunto de nós para o qual u^h deve ser determinado. O número de nós em $\eta - \eta_g$ é igual a n_{eq}, o número de equações.

Exemplo:



$\eta = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

$\eta_g = \{1,2\}$

$\eta - \eta_g = \{3,4,5,6,7,8\} \Rightarrow n_{eq} = 6$

* * *

Um membro típico de $\mathcal{V}^h$ tem a forma,

$$\boxed{w^h(\underset{\sim}{x}) = \sum_{A=\eta-\eta_g} N_A(\underset{\sim}{x})\, c_A}$$

onde $N_A \equiv$ função de forma p/ o nó A e $c_A = \text{cte}$.

$w^h = 0$ se e somente se $c_A = 0 \;\forall A \in \eta - \eta_g$.

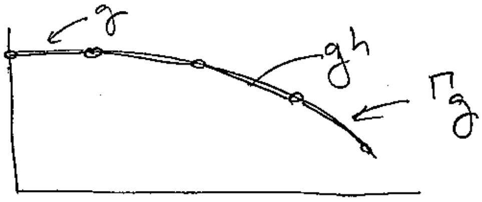
De forma semelhante,

$$\boxed{v^h(\underset{\sim}{x}) = \sum_{A\in\eta-\eta_g} N_A(\underset{\sim}{x})\, d_A}$$

onde d_A é a incógnita nodal no nó A (ou seja, a temperatura nodal), e,

$$\boxed{g^h(\underset{\sim}{x}) = \sum_{A\in\eta_g} N_A(\underset{\sim}{x})\, g_A} \qquad g_A = g(\underset{\sim}{x}_A)$$

onde a funçã prescrita no contorno foi aproximada da mesma forma que w^h e v^h. Isto implica que a condiçã de contorno será satisfeita de forma aproximada



Substituindo as expressões no problema (G),

$$\boxed{\sum_{B\in\eta-\eta_g} a(N_A,N_B)\, d_B = (N_A,f) + (N_A,h)_{\Gamma} - \sum_{B\in\eta_g} a(N_A,N_B)\, g_B}$$

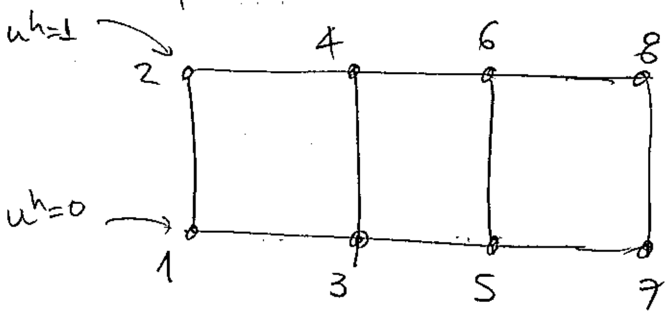
$$A\in\eta-\eta_g$$

De maneira a definir a matriz de rigidez global e o vetor de forças, é necessário especificar uma numeração global para as equações. Com esse propósito, introduzimos o arranjo ID, frequentemente chamado de arranjo de "destinações" (Destination array), que atribui ao nó $\underline{A}$ sua correspondente equação global, isto é,

número da equação global

$$\boxed{ID(A) = \begin{cases} P & \text{se } A \in \eta-\eta_g \\ 0 & \text{se } A \in \eta_g \end{cases}}$$

Exemplo:



$\eta = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

$\eta_g = \{1,2\}$

$\eta-\eta_g = \{3,4,5,6,7,8\}$, $n_{eq} = 6$

η	Equação Global
1	0
2	0
3	1
4	2
5	3
6	4
7	5
8	6

$\equiv ID(nnp)$

Logo, g-nós não são "ativos", isto é, suas equações são $\underline{\underline{0}}$!

De forma matricial as expressões de Galerkin ficam,

$$\boxed{\underset{\sim}{K}\,\underset{\sim}{d} = \underset{\sim}{f}}$$

$$\left[\begin{array}{l} \underset{\sim}{K} = [K_{PQ}] = a(N_A, N_B) \\ \underset{\sim}{d} = \{d_Q\} \\ \underset{\sim}{F} = \{F_P\} = (N_A, f) + (N_A, h)_\Gamma - \sum_{B \in \eta_g} a(N_A, N_B) g_B \end{array}\right.$$

$$P = ID(A) \;;\quad Q = ID(B)$$

Novamente, $\underset{\sim}{K}$ é SPD!

(i) Simetria

$$K_{PQ} = a(N_A, N_B) = a(N_B, N_A) = K_{QP}$$

(ii) PD.
$$\left\{\begin{array}{l} \underset{\sim}{c}^T \underset{\sim}{K} \underset{\sim}{c} \geq 0 \\ \underset{\sim}{c}^T \underset{\sim}{K} \underset{\sim}{c} = 0, \quad \underset{\sim}{c} = \underset{\sim}{0} \end{array}\right.$$

<u>Observação</u>:

\# $\underset{\sim}{K}$ é PD como consequência de que $\underset{\sim}{k}$, a matriz constitutiva, é PD!

2.4. Condução de Calor: Matriz de Rigidez de Elemento e Vetor de Forças.

Como anteriormente,

$$\underset{\sim}{K} = \sum_{e=1}^{nel} \underset{\sim}{K}^{e} \; ; \; \underset{\sim}{K}^{e} = [K^{e}_{PQ}]$$

$$\underset{\sim}{F} = \sum_{e=1}^{nel} \underset{\sim}{F}^{e} \; ; \; \underset{\sim}{F}^{e} = \{F^{e}_{P}\}$$

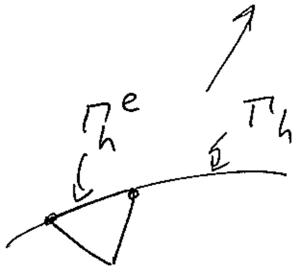
p/ $\left\{ \begin{array}{l} P = ID(A) \\ Q = ID(B) \end{array} \right.$

onde,

$$\underset{\sim}{K}^{e}_{PQ} = a(N_A, N_B)^{e} = \int_{\Omega^e} (\nabla N_A)^T \underset{\sim}{k} (\nabla N_B)\, d\Omega$$

$$F^{e}_{P} = (N_A, f)^{e} + (N_A, h)_{\Gamma^e} - \sum_{B \in \eta_g} a(N_A, N_B)^{e} g_B =$$

$$= \int_{\Omega^e} N_A f \, d\Omega + \int_{\Gamma_h^e} N_A h \, d\Gamma - \sum_{B \in \eta_g} a(N_A, N_B)^{e} g_B$$



Das equações acima, podemos deduzir as expressões para a matriz de rigidez dos elementos e do vetor de forças:

$$\boxed{\begin{aligned} &\underset{\sim}{k}^e = [k^e_{ab}] \qquad \underset{\sim}{f}^e = \{f^e_a\} \ , \quad 1 \leq a,b \leq n_{en} \\ &k^e_{ab} = a(N_a, N_b)^e = \int_{\Omega^e} (\nabla N_a)^T \underset{\sim}{k} \, (\nabla N_b) \, d\Omega \\ &f^e_a = \int_{\Omega^e} N_a f \, d\Omega + \int_{\Gamma^e_h} N_a h \, d\Gamma - \sum_{b=1}^{n_{en}} k^e_{ab} \, g^e_b \end{aligned}}$$

onde $n_{en} \equiv$ número de nós do elemento e

$g^e_b = g(\underset{\sim}{x}^e_b)$ se g é prescrita no nó b, e $=0$ em caso contrário. De maneira equivalente, a matriz global pode ser escrita da contribuição dos elementos através do "assembly",

$$\underset{\sim}{K} = \mathop{\mathbf{A}}_{e=1}^{n_{el}} \underset{\sim}{k}^e \quad ; \quad \underset{\sim}{F} = \mathop{\mathbf{A}}_{e=1}^{n_{el}} \underset{\sim}{f}^e$$

A matriz de rigidez do elemento pode também ser escrita na forma,

$$\boxed{\underset{\sim}{k}^e = \int_{\Omega^e} \underset{\sim}{B}^T \underset{\sim}{D} \, \underset{\sim}{B} \, d\Omega}$$

onde, no caso, $\underset{\sim}{D} = \underset{\sim}{k}$ de ordem $n_{sd} \times n_{sd}$ e,

$$\underset{n_{sd} \times n_{en}}{\underset{\sim}{B}} = [\underset{\sim}{B}_1, \underset{\sim}{B}_2, \ldots, \underset{\sim}{B}_{n_{en}}] \quad ; \quad \underset{n_{sd} \times 1}{\underset{\sim}{B}_a} = \nabla N_a$$

← Verifique!!

2.5. Condução de Calor: Arranjos de Dados – ID, IEN, LM.

Os dados dos elementos são armazenados no arranjo IEN – arranjo de nós do elemento, ou arranjo de incidências, ou arranjo de conetividades.

$$IEN(e,a) = A \leftarrow$$

número global do nó

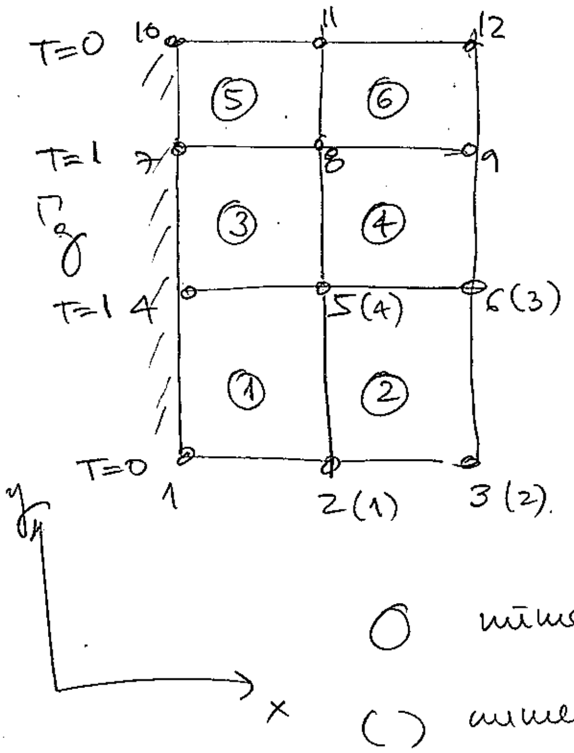
número do elemento

número local do nó

A matriz de localização é agora construída da relação:

$$\boxed{LM(e,a) = ID(IEN(a,e))}$$

Exemplo 1.



$\eta = \{1, 2, \ldots, 12\}$

$\eta_g = \{1, 4, 7, 10\}$

○ número dos elementos

( ) numeração local dos nós do elemento

Arranjo ID - leitura dos nós

NO	ID	X	Y
1	1	x_1	y_1
2	0	x_2	y_2
3	0	x_3	y_3
4	1	x_4	y_4
5	0	x_5	y_5
6	0	x_6	y_6
7	1	x_7	y_7
8	0	x_8	y_8
9	0	x_9	y_9
10	1	x_{10}	y_{10}
11	0	x_{11}	y_{11}
12	0	x_{12}	y_{12}

ID = 0 nó livre

ID = 1 nó prescrito.

Internamente

nnp = 12

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ID^+ =	0	1	2	0	3	4	0	5	6	0	7	8

neq = 8

Arranjo IEN

elemento	NO1	NO2	NO3	NO4
	numeração local			
1	1	2	5	4
2	2	3	6	5
3	4	5	8	7
4	5	6	9	8
5	7	8	11	10
6	8	9	12	11

IEN(6,4)

Arranjo LM

elemento	numeração local Nó1	Nó2	Nó3	Nó4
1	0	1	3	0
2	1	2	4	3
3	0	3	5	0
4	3	4	6	5
5	6	5	7	6
6	5	6	8	7

LM(6,4)

$$\boxed{g^e_a = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad LM(e,a) \neq 0 \\ g_A & \text{se} \quad LM(e,a) = 0 \,, \quad A = IEN(e,a) \end{cases}}$$

Exemplo 2. Assembling. Fazer Exercício 1 pg. 75!

$$LM(e,4) \equiv \boxed{5 \,|\, 0 \,|\, 0 \,|\, 9}$$

$$\underset{\sim}{k}^e = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 5 & 0 & 0 & 9 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \boxed{k_{11}} & \enclose{circle}{k_{12}} & \enclose{circle}{k_{13}} & \boxed{k_{14}} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ \boxed{k_{41}} & \enclose{circle}{k_{42}} & \enclose{circle}{k_{43}} & \boxed{k_{44}} \end{bmatrix} \end{array} \qquad \underset{\sim}{f}^e = \begin{bmatrix} \langle f^e_1 \rangle \\ f^e_2 \\ f^e_3 \\ \langle f^e_4 \rangle \end{bmatrix}$$

$\boxed{}$ contribuem p/ $\underset{\sim}{K}$ $\qquad$ $\langle \; \rangle$ contribuem p/ $\underset{\sim}{F}$

$\bigcirc$ contribuem p/ $\underset{\sim}{F} \rightarrow -k^e_{ab}\, g^e_b$

2.6. Sumário

2. Condução de Calor Clássica

$$(S)\quad \begin{cases} q_{i,i} = f & \text{em } \Omega \\ u = g & \text{em } \Gamma_g \\ -q_i n_i = h & \text{em } \Gamma_h \\ \text{onde } q_i = k_{ij} u_j & \end{cases}$$

$$(W)\quad \begin{cases} \text{Ache } u \in S, \text{ tal que } \forall w \in V \\ \quad a(w,u) = (w,f) + (w,h)_\Gamma \\ \text{onde } a(w,u) = \int_\Omega w_{,i}\, k_{ij}\, u_j \, d\Omega \\ \quad (w,f) = \int_\Omega w f \\ \quad (w,h)_\Gamma = \int_\Gamma w h \, d\Gamma \end{cases}$$

$$(G)\quad \begin{cases} \text{Ache } v^h \in S^h, \text{ tal que } \forall w^h \in V^h \\ \quad a(w^h, v^h) = (w^h, f) + (w^h, h)_\Gamma - a(w^h, g^h) \end{cases}$$

$$(M)\quad \begin{cases} \underline{K}\,\underline{d} = \underset{\sim}{F}, \text{ onde } \underline{K} = \mathop{\mathbf{A}}_{e=1}^{nel} \underset{\sim}{k}^e \; ; \; \underset{\sim}{F} = F_{nodal} + \mathop{\mathbf{A}}_{e=1}^{nel} (\underset{\sim}{f}^e) \\ \underset{\sim}{k}^e = \int_\Omega \underset{\sim}{B}^T \underset{\sim}{D}\, \underset{\sim}{B} \, d\Omega \; ; \\ \{f_a^e\} = \int_{\Omega^e} N_a f \, d\Omega + \int_{\Gamma_h^e} N_a h \, d\Gamma - \sum_{b=1}^{nen} k_{ab}^e g_b^e \end{cases}$$

3. Elementos Isoparamétricos e Conceitos de Programação de Elementos

3.1. Preliminares

- Funções de Interpolação $\underset{\sim}{N}$ tem que ser tais que:

  $h \to 0 \Rightarrow u^h \to u$!

- Condições suficientes:

  C1. N_a tem que ser suave (ao menos C^1) em Ω^e.

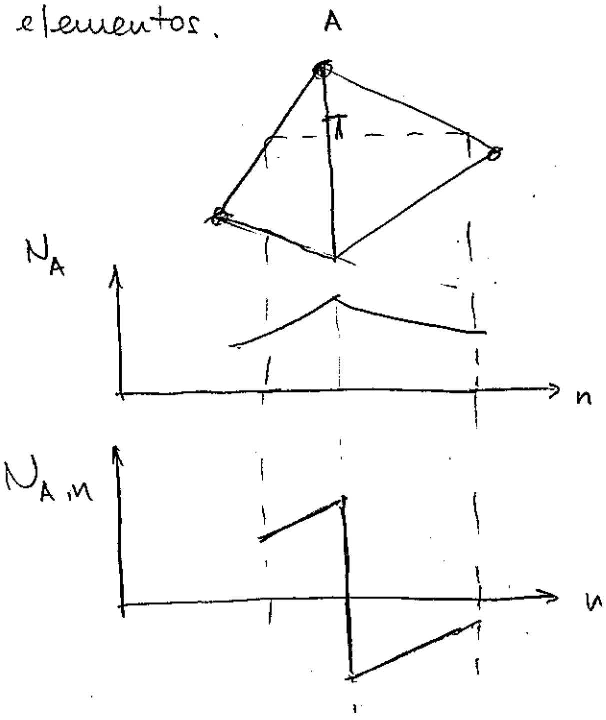
  C2. N_a tem que ser contínua em Γ^e.

  C3. N_a tem que ser COMPLETA

Observações

1. As condições C1 - C3 podem ser violadas. Existem elementos, chamados NÃO-CONFORMES que violam estas condições e são convergentes.

2. As condições C1 e C2 garantem que $N_{,i}$ tem, no pior caso, um salto finito na interface dos elementos.



Portanto, as integrais que envolvem N_A são bem definidas.

3. As funções N_a que satisfazem C1 e C2 são de classe $C^0(\overline{\Omega})$. Elementos finitos construídos com estas funções são elementos C^0.

4. Se os integrandos envolvem derivadas de ordem <u>m</u>, a condição C1 implica em continuidade C^m em Ω^e e a condição C2 implica em continuidade de C^{m-1} ao longo de Γ^e. Elementos finitos que satisfazem esta propriedade são ditos CONFORMES ou COMPATÍVEIS.

<u>Completidade</u>

Seja a interpolação no e-ésimo elemento

$$u^h = \sum_{a=1}^{n_{en}} N_a d_a^e$$

onde $d_a^e = u^h(x_a^e)$, temperaturas nodais. Para o caso de $n_{sd} = 3$, as funções de interpolação são ditas <u>completas</u> se,

$$d_a^e = c_0 + c_1 x_a^e + c_2 y_a^e + c_3 z_a^e$$

implica em

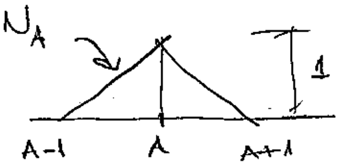
$$u^h(\underset{\sim}{x}) = c_0 + c_1 x + c_2 y + c_3 z$$

onde $c_0, \cdots, c_3$ são constantes arbitrárias. Em outras palavras, a completidade requer que a interpolação no interior do elemento é capaz de representar exatamente um campo linear. Ou seja, as funções de forma devem conter todos os monômios constantes e lineares(Em mecânica dos sólidos significa que o elemento deve representar exatamente os movimentos de corpo rígido!).

Observação

5. Em teorias que envolvem derivadas de ordem $\underline{m}$ nas integrais, a completidade deve ser satisfeita por polinômios de ordem $\underline{m}$.

Exemplo 1 : Funções Lineares em 1-D.



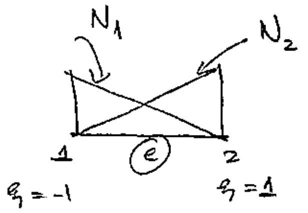
C1-C2 → satisfeitas na definição de N_A.

C3: $d_a^e = c_0 + c_1 x_a^e$

$$u^h = \sum_{a=1}^{2} N_a d_a^e = \sum_{a=1}^{2} N_a (c_0 + c_1 x_a^e) =$$

$$= \underbrace{\left(\sum_{a=1}^{2} N_a\right)}_{Ⓘ} c_0 + \underbrace{\left(\sum_{a=1}^{2} N_a x_a^e\right)}_{Ⓘⅈ} c_1$$

Ⓘ $\sum_{a=1}^{2} N_a = 1$



$N_1 = \frac{1}{2}(1-\xi)$

$N_2 = \frac{1}{2}(1+\xi)$

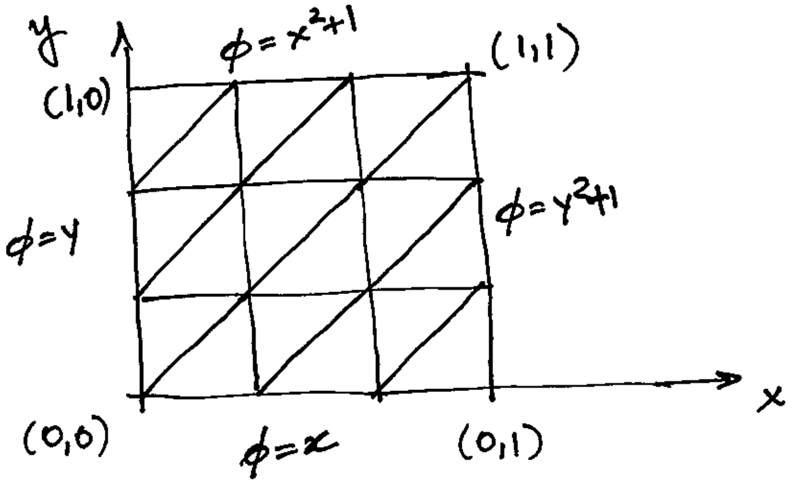
Ⓘⅈ $\sum_{a=1}^{2} N_a x_a^e = x$

↑ já foi def. antes!

$N_1 + N_2 = \frac{1}{2}(1-\xi) + \frac{1}{2}(1+\xi) = \frac{1}{2}(1-\xi+1-\xi) = \underline{1}$

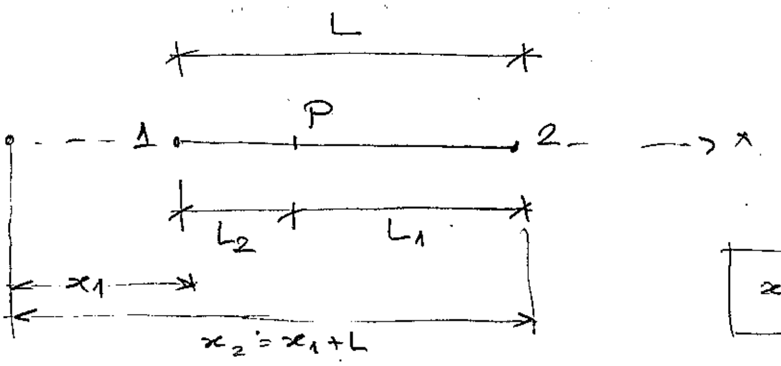
Exercício

Obtenha a distribuição de temperaturas em regime permanente para o problema abaixo:



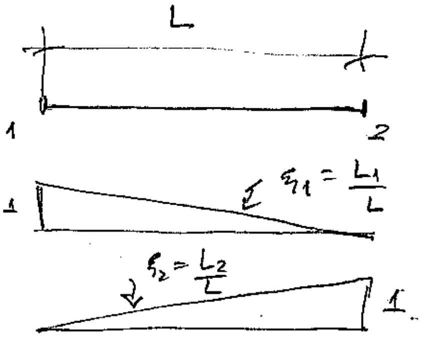
3.2 Elementos Triangulares de Lado Reto.

(a) Coordenadas Naturais em 1-D.



$$\boxed{x_p = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_1 = \dfrac{L_1}{L} \; ; \quad \xi_2 = \dfrac{L_2}{L} \\ \\ \xi_1 + \xi_2 = 1 \end{array} \right. \Rightarrow$$



Em forma matricial,

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{Bmatrix} \quad e \quad \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} x_2 & -1 \\ -x_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \end{Bmatrix}$$

$$u^h = \sum_{a=1}^{2} N_a d_a^e \quad \text{ou} \quad u^h = \underset{\sim}{N}\, \underset{\sim}{d} \; ; \quad \underset{\sim}{N} = [N_1, N_2] \; ; \quad \underset{\sim}{d} = \begin{Bmatrix} d_1^e \\ d_2^e \end{Bmatrix}$$

Se tomarmos $N_a = \xi_1$ e $N_2 = \xi_2$, a matriz p/ um elemento 1-D, torna-se:

$$\underset{\sim}{B}_{1D} = [N_{1,x} \, ; N_{2,x}] \quad ; \quad \underset{\sim}{D} = \underset{\sim}{I}_{2\times2}$$

$$\underset{\sim}{K} = \int_\Omega \underset{\sim}{B}^T \underset{\sim}{D}\, \underset{\sim}{B}\, d\Omega$$

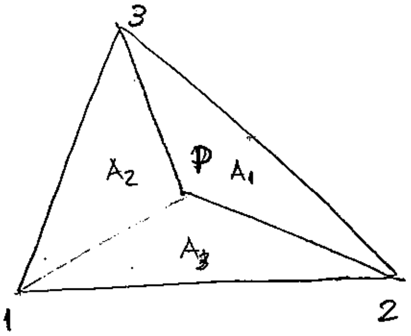
$$\frac{dN_1}{dx} = \frac{dN_1}{d\xi_1} \frac{d\xi_1}{dx} = -\frac{1}{L}$$

$$\frac{dN_2}{dx} = \frac{dN_2}{d\xi_1} \frac{d\xi_1}{dx} = \frac{1}{L} \qquad \Rightarrow \underset{\sim}{B}_{1D} = \left[-\frac{1}{L} , \frac{1}{L} \right]$$

$$\int_L \xi_1^k \xi_2^l \, dL = L \frac{k!\, l!}{(1+k+l)!}$$

$$\underset{\sim}{K} = \int_L \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} dL = \begin{bmatrix} \frac{1}{L^2} & -\frac{1}{L^2} \\ -\frac{1}{L^2} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix} \int_L dL = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} !$$

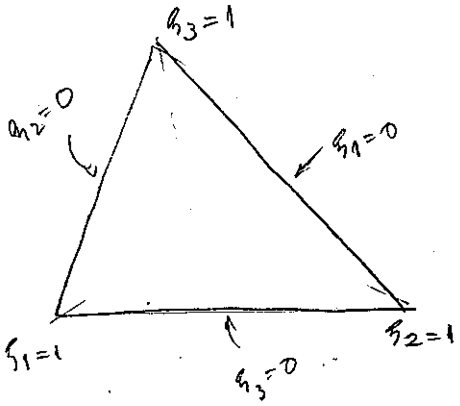
(b) Coordenadas de Área e Volume



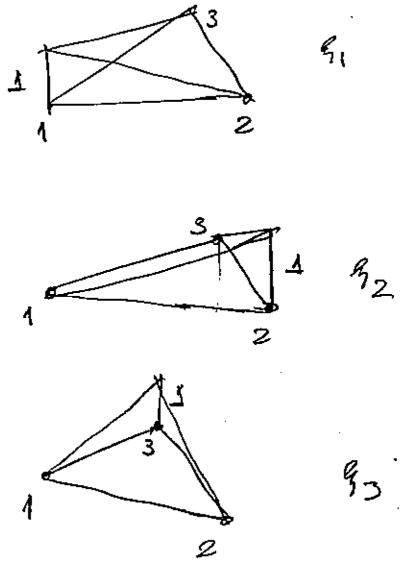
$$\xi_1 = \frac{A_1}{A} \; ; \; \xi_2 = \frac{A_2}{A} \; ; \; \xi_3 = \frac{A_3}{A}$$

A = area do Δ 1-2-3

$$A = A_1 + A_2 + A_3 \Rightarrow \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1$$



ou seja



Transformacão de Coordenadas

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} = \underset{\sim}{A} \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Bmatrix} \quad e \quad \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Bmatrix} = \underset{\sim}{A}^{-1} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix}$$

onde , com $x_{ij} = x_i - x_j$ e $y_{ij} = y_i - y_j$

$$\underset{\sim}{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \quad e \quad \underset{\sim}{A}^{-1} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 & y_{23} & x_{32} \\ x_3y_1 - x_1y_3 & y_{31} & x_{13} \\ x_1y_2 - x_2y_1 & y_{12} & x_{21} \end{bmatrix}$$

$$2A = \det \underset{\sim}{A} = x_{21} y_{31} - x_{31} y_{21}$$

Se a numeração dos nós for no sentido horário

$\Rightarrow$ 2A é negativo!

A formulação de matrizes de elemento requer que uma função de interpolação, expressa em coordenadas de área seja diferenciada com respeito à coordenadas cartesianas. Portanto,

$$N_a = N_a(\xi_1, \xi_2, \xi_3).$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial N_a}{\partial x} = \dfrac{\partial N_a}{\partial \xi_1}\dfrac{\partial \xi_1}{\partial x} + \dfrac{\partial N_a}{\partial \xi_2}\dfrac{\partial \xi_2}{\partial x} + \dfrac{\partial N_a}{\partial \xi_3}\dfrac{\partial \xi_3}{\partial x} \\ \dfrac{\partial N_a}{\partial y} = \dfrac{\partial N_a}{\partial \xi_1}\dfrac{\partial \xi_1}{\partial y} + \dfrac{\partial N_a}{\partial \xi_2}\dfrac{\partial \xi_2}{\partial y} + \dfrac{\partial N_a}{\partial \xi_3}\dfrac{\partial \xi_3}{\partial y} \end{cases}$$

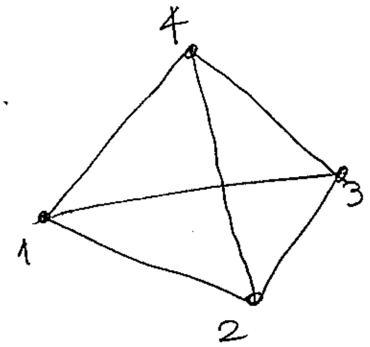
A partir da relação entre os ξ_i e x, y, temos:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \xi_1}{\partial x} = \dfrac{y_{23}}{2A} \; ; \; \dfrac{\partial \xi_2}{\partial x} = \dfrac{y_{31}}{2A} \; ; \; \dfrac{\partial \xi_3}{\partial x} = \dfrac{y_{12}}{2A} \\ \dfrac{\partial \xi_1}{\partial y} = \dfrac{x_{32}}{2A} \; ; \; \dfrac{\partial \xi_2}{\partial y} = \dfrac{x_{13}}{2A} \; ; \; \dfrac{\partial \xi_3}{\partial x} = \dfrac{x_{21}}{2A} \end{cases}$$

A integração de polinômios em ξ_1, ξ_2 e ξ_3 na área do triângulo é dada por

$$\int_A \xi_1^k \, \xi_2^l \, \xi_3^m \, dA = 2A \, \frac{k! \, l! \, m!}{(2+k+l+m)!}$$

Para o tetraedro abaixo



$$\xi_i = \frac{V_i}{V} \quad : \quad \Sigma \xi_i = 1 \quad , \quad i = 1, \dots, 4$$

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \underset{\sim}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{bmatrix}} \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{Bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{A}$$

$\det \underset{\sim}{A} = 6V > 0$ na numeração dada

$$\int_V \xi_1^k \, \xi_2^l \, \xi_3^m \, \xi_4^n \, dV = 6V \, \frac{k! \, l! \, m! \, n!}{(3 + k + l + m + n)!}$$

o que define as coordenadas de volume.

(c) Funções de Interpolação para Triângulos de Lados Retos:

$$\begin{cases} N_a = N_a(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \\ u^h = \sum_{a=1}^{nen} N_a \, d_a^e \end{cases}$$

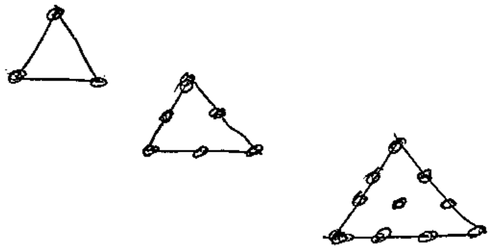
Considere então uma função $\phi = \phi(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \phi(x,y)$ tal que,

$$\phi = \sum_{i=1}^{n} c_i \, \xi_1^q \, \xi_2^r \, \xi_3^s$$

nos quais q, r e s são inteiros não negativos que fornecem todas as combinações possíveis, tais que $q + r + s = p$ (ordem do polinômio de aproximação).

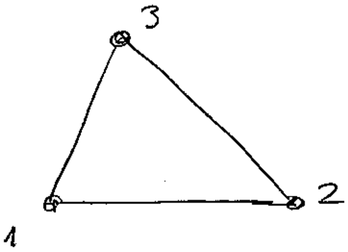
Triângulo de Pascal	p	n
1	0	1
$x \quad y$	1 (linear)	3
$x^2 \quad xy \quad y^2$	2(quadrático)	6
$x^3 \quad x^2y \quad yx^2 \quad y^3$	3(cúbico)	10
— — —	— — —	

Elemento Triangular

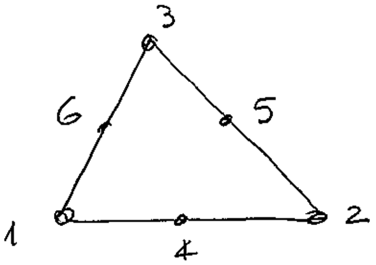

— — —

Esta seqüência gera polinômios completos do grau p que podem gerar funções de interpolação

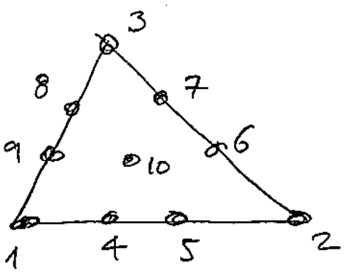
__CONFORMES__ (verifique!)



LINEAR



QUADRÁTICO



NO 10 - $\xi_1 = \frac{1}{3}$; $\xi_2 = \frac{1}{3}$; $\xi = 1/3$

(centróide!)

FUNÇÕES DE FORMA

$N_1 = \xi_1$

$N_2 = \xi_2$

$N_3 = \xi_3$

$N_1 = \xi_1(2\xi_1 - 1)$

$N_2 = \xi_2(2\xi_2 - 1)$

$N_3 = \xi_3(2\xi_3 - 1)$

$N_4 = 4\xi_1\xi_2$

$N_5 = 4\xi_2\xi_3$

$N_6 = 4\xi_3\xi_1$

$N_i = \frac{1}{2}\xi_i(3\xi_i - 1)(3\xi_i - 2)$ $\quad i = 1, 2, 3$

$N_4 = \frac{9}{2}\xi_2\xi_1(3\xi_1 - 1)$

$N_5 = \frac{9}{2} \dots$

$\vdots$

$N_9 = \frac{9}{2} \dots$

$N_{10} = 27\xi_1\xi_2\xi_3$

(c) O Elemento Triangular Linear

$$u^h(\xi) = \sum_{a=1}^{nen} N_a(\xi)\, d_a^e \quad ; \quad N_a(\xi) = \xi_a$$

$$\underset{\sim}{B}_a = \nabla N_a = \begin{bmatrix} N_{a,x} \\ N_{a,y} \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{B} = \begin{bmatrix} N_{1,x} & N_{2,x} & N_{3,x} \\ N_{1,y} & N_{2,y} & N_{3,y} \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \underset{2\times 3}{\begin{bmatrix} y_{23} & y_{31} & y_{12} \\ x_{32} & x_{13} & x_{21} \end{bmatrix}}$$

Logo,

$$\underset{\sim}{K}^e = \int_{\Omega^e} \underset{\sim}{B}^T \underset{\sim}{D}\, \underset{\sim}{B}\, d\Omega = t^e \int_{A_e} \frac{1}{2A_e} \underset{3\times 2}{\begin{bmatrix} y_{23} & x_{32} \\ y_{31} & x_{13} \\ y_{12} & x_{21} \end{bmatrix}} \overset{\text{ORTOTROPIA !}}{\underset{2\times 2}{\begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix}}} \frac{1}{2A_e} \underset{2\times 3}{\begin{bmatrix} y_{23} & y_{31} & y_{12} \\ x_{32} & x_{13} & x_{21} \end{bmatrix}} d =$$

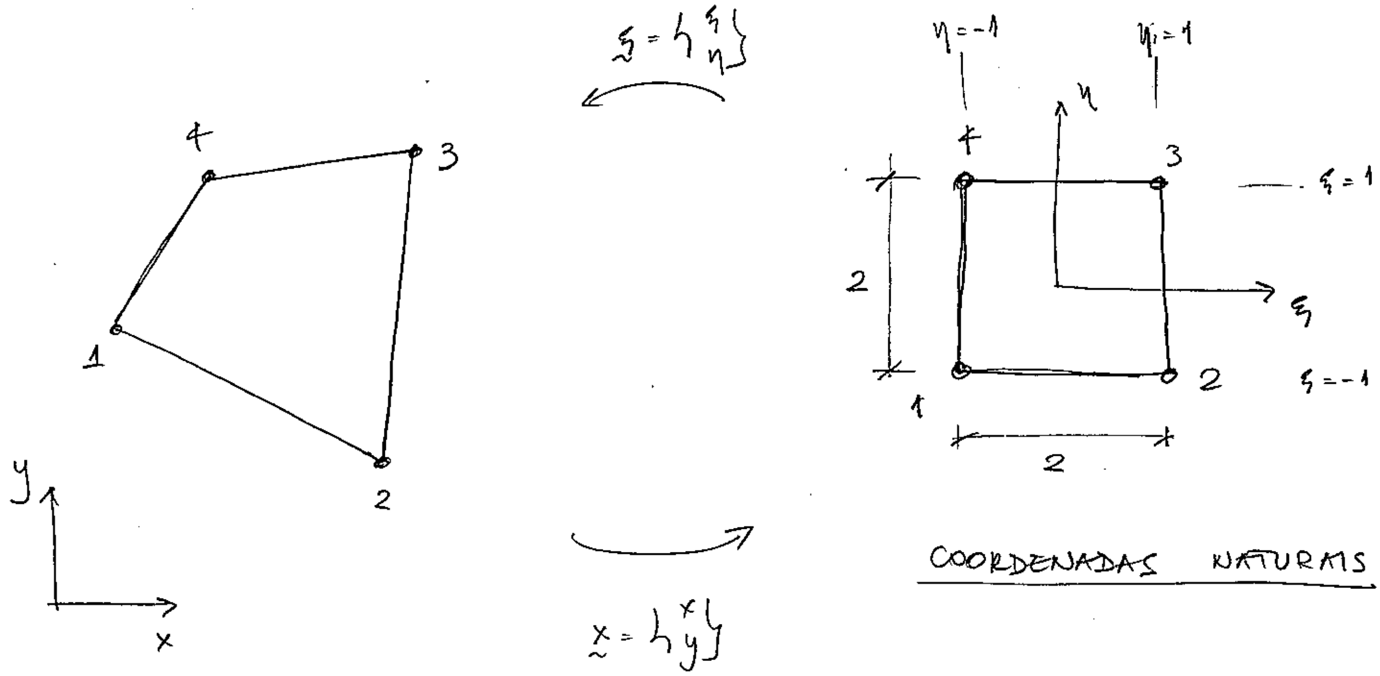
onde t^e é a espessura do elemento

$$\underset{\sim 3\times 3}{K^e} = \frac{t^e}{4A^e} \begin{bmatrix} y_{23} k_x y_{23} + x_{32} k_y x_{32} & y_{23} k_x y_{31} + x_{32} k_y x_{13} & y_{23} k_x y_{12} + x_{32} k_y x_{21} \\ y_{31} k_x y_{23} + x_{13} k_y x_{32} & y_{31} k_x y_{31} + x_{13} k_y x_{13} & y_{31} k_x y_{12} + x_{13} k_y x_{21} \\ y_{12} k_x y_{23} + x_{21} k_y x_{32} & y_{12} k_x y_{31} + x_{21} k_y x_{13} & y_{12} k_x y_{12} + x_{21} k_y x_{21} \end{bmatrix}$$

$\underset{\sim}{K}^e$ é Simétrica!

Lista → Zienkiewicz & Morgan Ex-3.13 pg. 146 → ATRÁS

3.3. O Elemento Quadrilatero Bilinear



$$\begin{cases} x(\xi,\eta) = \sum_{a=1}^{4} N_a(\xi,\eta)\, x_a^e \\ y(\xi,\eta) = \sum_{a=1}^{4} N_a(\xi,\eta)\, y_a^e \end{cases} \quad \text{ou} \quad \underset{\sim}{x} = \sum_{a=1}^{4} N_a(\underset{\sim}{\xi})\, \underset{\sim}{x}_a^e$$

Assumindo que as expansões bilineares,

$$\begin{cases} x(\xi,\eta) = \alpha_0 + \alpha_1\xi + \alpha_2\eta + \alpha_3\xi\eta \\ y(\xi,\eta) = \beta_0 + \beta_1\xi + \beta_2\eta + \beta_3\xi\eta \end{cases}$$

onde os α e β são constantes a serem determinadas,

e impondo as condições,

$$\begin{cases} x_a(\xi_a,\eta_a) = x_a^e \\ y_a(\xi_a,\eta_a) = y_a^e \end{cases}$$

a	ξ_a	η_a
1	-1	-1
2	1	-1
3	1	1
4	-1	1

que restringem as funções N_a.

$$N_a(\underset{\sim}{\xi}_b) = \delta_{ab}$$

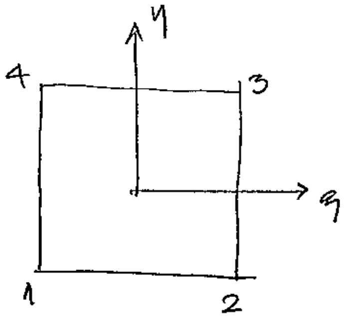
Em forma matricial

$$\begin{Bmatrix} x_1^e \\ x_2^e \\ x_3^e \\ x_4^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix}$$

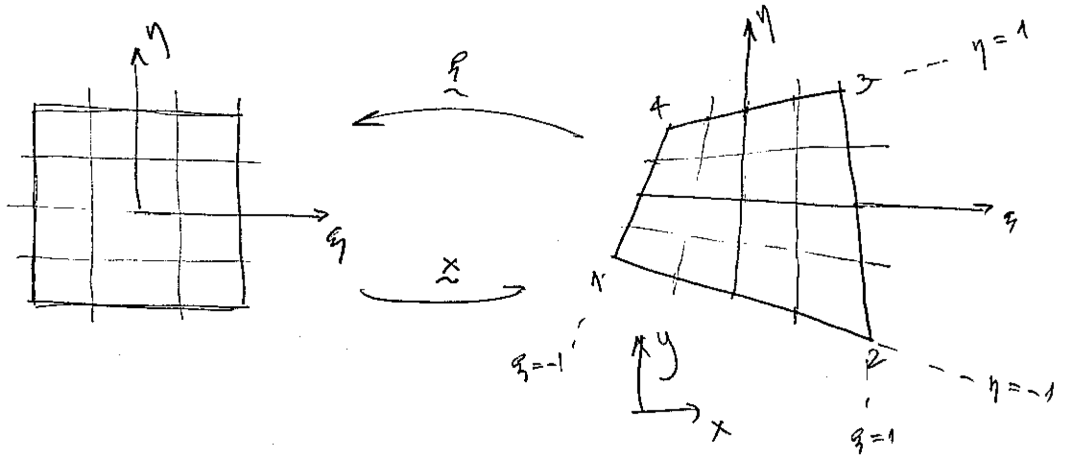
$$\begin{Bmatrix} y_1^e \\ y_2^e \\ y_3^e \\ y_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad & \quad \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{Bmatrix}$$

Solucionando-se para os α's e β's e substituindo-se os resultados em na expansão de x e y, podemos deduzir a forma das funções N.

$$N_a(\underset{\sim}{\xi}) = N_a(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1+\xi_a\xi)(1+\eta_a\eta)$$



$$\begin{cases} N_1(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \\ N_2(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\ N_3(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \\ N_4(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \end{cases}$$



Agora, <u>ASSUMIMOS</u> que a interpolação das grandezas no interior do elemento é feita de forma semelhante ao mapeamento da geometria,

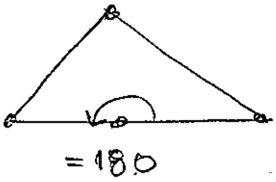
$$\boxed{u^h(\underset{\sim}{\xi}) = \sum_{a=1}^{4} N_a(\xi) d_a^e}$$

– Condições de Convergência:

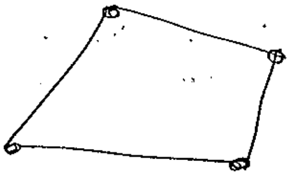
(C1) Suavidade em Ω^e.

Pode-se mostrar que Na é uma função suave de x, y se todos os ângulos interiores do quadrilátero formados por lados adjacentes forem < 180°

Na <u>não</u> é suave



Na <u>não</u> é suave

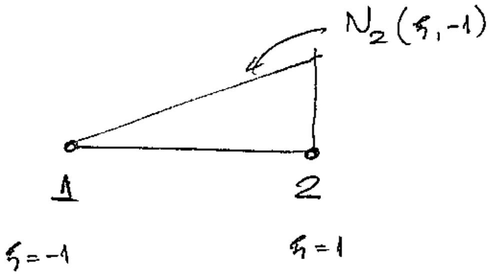


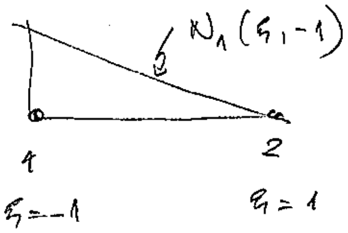
Na suave!

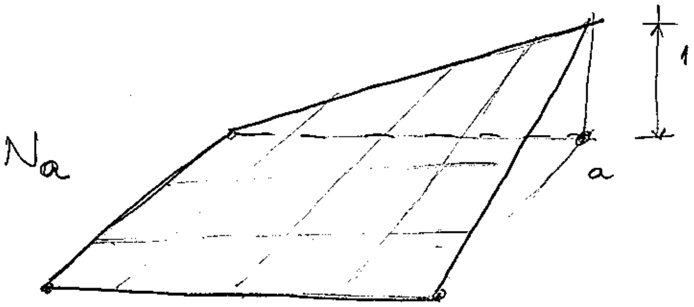
(C2) Continuidade em Γ^e

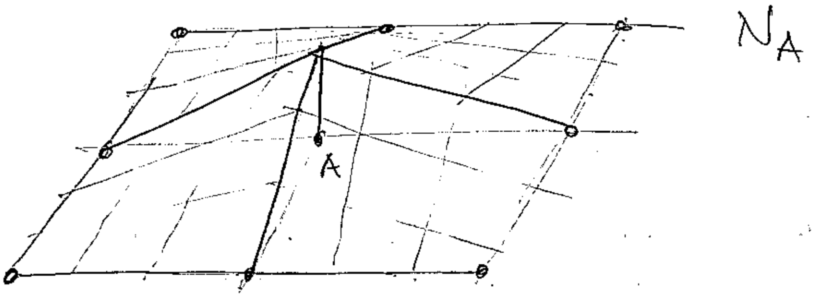
$$N^1_{1-2} = N_a(\xi,-1) = \frac{1+\xi_a\xi}{2} \quad a=1,2$$

Lado 1-2





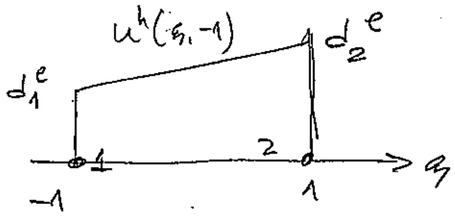




De outra forma, ao longo do lado $\underset{\sim}{x}_1^e - \underset{\sim}{x}_2^e$,

$$u^h(\xi,-1) = \sum_{a=1}^{2} \frac{1}{2}(1+\xi_a \xi)\, d_a^e$$

- u^h ao longo de $[\underset{\sim}{x}_1^e, \underset{\sim}{x}_2^e]$ é determinado somente pelos valores nodais de u^h nos nós 1 e 2
- a variação de u^h é linear na coordenada natural ξ



As mesmas conclusões podem ser tiradas de qualquer outro elemento que contenha o lado 1-2 $\Rightarrow$ a continuidade de u^h ao longo de Γ^h é satisfeita.

(C3) Completidade

$$u^h = \sum_{a=1}^{nen} N_a d_a^e = \sum_{a=1}^{nen} N_a (c_0 + c_1 x_a^e + c_2 y_a^e) =$$

$$= \Big(\sum_{a=1}^{nen} N_a\Big) c_0 + \underset{\underset{x}{\parallel}}{\Big(\sum_{a=1}^{nen} N_a x_a^e\Big)} c_1 + \underset{\underset{y}{\parallel}}{\Big(\sum_{a=1}^{nen} N_a y_a^e\Big)} c_2$$

$$\sum_{a=1}^{nen} N_a = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) + \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) + \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) + \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) = \frac{1}{4}\left[(1-\xi)(1-\cancel{\eta}+1+\cancel{\eta}) + (1+\xi)(1-\cancel{\eta}+1+\cancel{\eta})\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left[2(1-\xi) + 2(1+\xi)\right] = \frac{1}{4}[2+2] = 1 //$$

3.4. Elementos Isoparamétricos.

Seja $\square$ um elemento "pai" no espaço-ξ (o quadrado de lado 2, no $\mathbb{R}^2$).

Definição 1 : Seja $\underset{\sim}{x} : \square \rightarrow \bar{\Omega}_e$ da forma

$$\boxed{\underset{\sim}{x}(\underset{\sim}{\xi}) = \sum_{a=1}^{nen} N_a(\underset{\sim}{\xi})\, \underset{\sim}{x}_a^e}$$

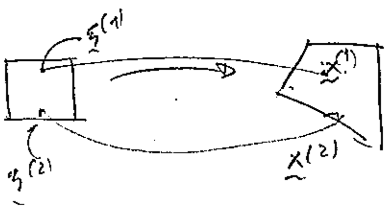
Se a interpolação de u^h no interior do elemento for da forma

$$\boxed{u^h(\underset{\sim}{\xi}) = \sum_{a=1}^{nen} N_a(\underset{\sim}{\xi})\, d_a^e}$$

o elemento é dito ISOPARAMÉTRICO.

Condição de Convergência (C1)

Definição 2 : Um mapeamento $\underset{\sim}{x} : \square \rightarrow \bar{\Omega}^e \subset \mathbb{R}^{nsd}$ é dito UM-PARA-UM (INJETOR) se, para cada par de pontos $\underset{\sim}{\xi}^{(1)}, \underset{\sim}{\xi}^{(2)} \in \square$ tal que $\underset{\sim}{\xi}^{(1)} \neq \underset{\sim}{\xi}^{(2)}$, então $\underset{\sim}{x}(\underset{\sim}{\xi}^{(1)}) \neq \underset{\sim}{x}(\underset{\sim}{\xi}^{(2)})$.



Definição 3 : $\underset{\sim}{x} : \square \to \overline{\Omega}^e$ é dita SOBREJETORA se $\overline{\Omega}^e = x(\square)$, isto é, cada pto em $\overline{\Omega}^e$ é a imagem de um ponto em $\square$ sob o mapa $\underset{\sim}{x}$.

Definição 4 : Seja $\underset{\sim}{x} : \square \to \overline{\Omega}^e$ um mapeamento diferenciável. O determinante da derivada, $j = \det(\partial \underset{\sim}{x} / \partial \underset{\sim}{\xi})$, é chamado de Jacobiano da transformação.

$$j = \det \begin{bmatrix} x_{,\xi} & x_{,\eta} \\ y_{,\xi} & y_{,\eta} \end{bmatrix} \quad , \text{ se } \Omega^e \subset \mathbb{R}^2$$

$$j = \det \begin{bmatrix} x_{,\xi} & x_{,\eta} & x_{,\zeta} \\ y_{,\xi} & y_{,\eta} & y_{,\zeta} \\ z_{,\xi} & z_{,\eta} & z_{,\zeta} \end{bmatrix} \quad , \text{ se } \Omega^e \subset \mathbb{R}^3$$

Como consequencia, se $\underset{\sim}{x}$ é:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(i)} & \text{UM-PARA-UM (INJETORA)} \\ \text{(ii)} & \underline{\text{SOBREJETORA}} \end{array}\right\} \text{BIUNÍVOCO}$$

(iii) C^k, $k \geq 1$

(iv) $j(\underset{\sim}{\xi}) > 0$, $\forall\, \underset{\sim}{\xi} \in \square$

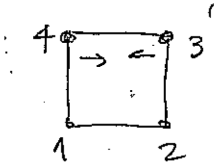
então o mapeamento inverso $\underset{\sim}{\xi} = \underset{\sim}{x}^{-1} : \overline{\Omega}^e \to \square$ existe e é C^k.

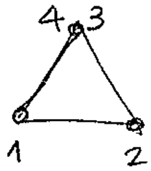
Proposição 1 Seja o mapeamento definido anteriormente ($x: \square \to \bar{\Omega}^e$), satisfazendo (i) — (iv). Logo, a condição de suavidade C1 é satisfeita.

Prova: Hipótese: $N_a = N_a(\xi)$ também é de classe $C^1 \Rightarrow$ $\xi = \xi(x)$ é também C^1. Portanto, $N_a(x) = N_a(\xi(x))$ é uma função C^1 de x.

Observações

Na prática, os mapeamentos $x: \square \to \bar{\Omega}^e$ satisfazem condições (i) à (iv). Entretanto, existe uma única exceção — a técnica de degenerações dos elementos.





Ao longo da linha 4-3 $j=0$!
fora $j>0$.

Também na prática monitora-se o sinal do Jacobiano para garantir a condição (iv). Se um valor negativo ou zero é encontrado, termina-se os cálculos. De maneira geral, esta é uma indicação de erro de dados, ou de um elemento muito distorcido.

⟶ Exercício 1 pg. 123.

Condição de Convergência (C3)

Proposição 2: Se $\sum_{a=1}^{n_{en}} N_a = 1 \Rightarrow$ completidade.

$$u^h = \sum_{a=1}^{n_{en}} N_a d_a^e = \sum_{a=1}^{n_{en}} N_a (c_0 + c_1 x_a^e + c_2 y_a^e + c_3 z_a^e) =$$

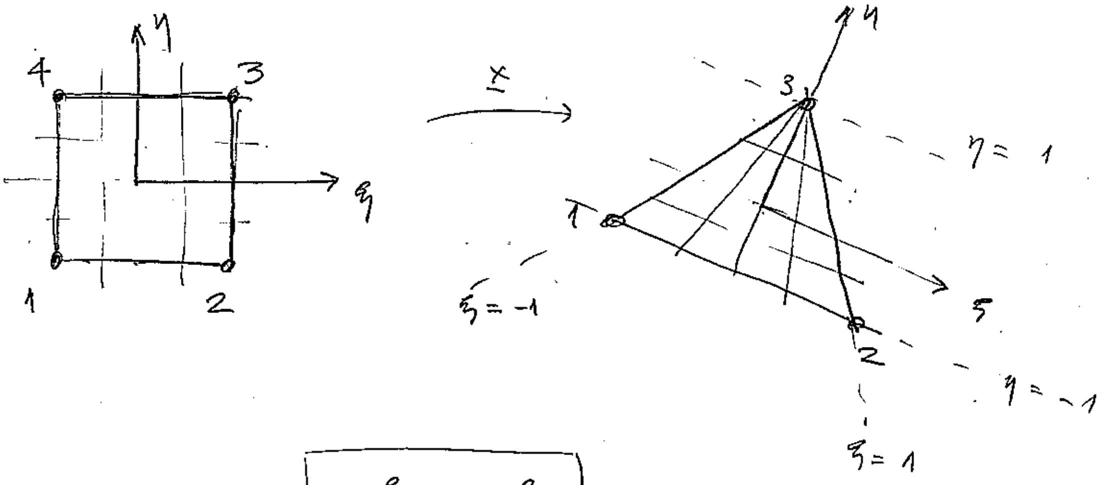
$$= \Big(\sum_{a=1}^{n_{en}} N_a\Big) c_0 + \underbrace{\Big(\sum_{a=1}^{n_{en}} N_a x_a^e\Big)}_{\parallel \atop x} c_1 + \underbrace{\Big(\sum_{a=1}^{n_{en}} N_a y_a^e\Big)}_{\parallel \atop y} c_2 + \underbrace{\Big(\sum_{a=1}^{n_{en}} N_a z_a^e\Big)}_{\parallel \atop z} c_3$$

Condição de Convergência (C2)

Verificada da mesma forma que no elemento quadrilátero bilinear.

RESUMO : Elementos Isoparamétricos são CONFORMES!

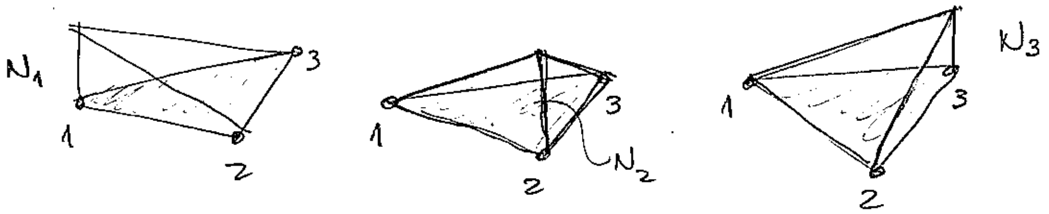
3.5. Elemento Triangular linear ; Um exemplo de DEGENERAÇÃO.



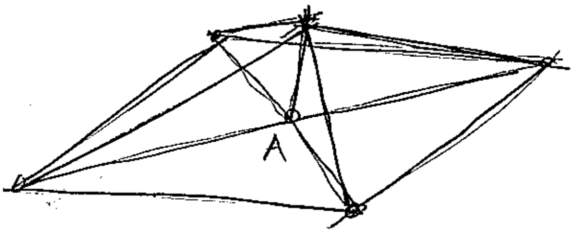
$$\boxed{\underset{\sim}{x}^e_4 = \underset{\sim}{x}^e_3}$$

$$\underset{\sim}{x} = \sum_{a=1}^{4} N_a x_a^e = N_1 \underset{\sim}{x}_1^e + N_2 \underset{\sim}{x}_2^e + (N_3 + N_4)\underset{\sim}{x}_3^e = \sum_{a=1}^{3} N'_a \underset{\sim}{x}_a^e .$$

$$N'_a = \begin{cases} N_a = \frac{1}{4}\left[1 + (-1)^a \xi\right](1-\eta) & , a = 1,2 \\ N_3 + N_4 = \frac{1}{2}(1+\eta) & , a = 3 \end{cases}$$

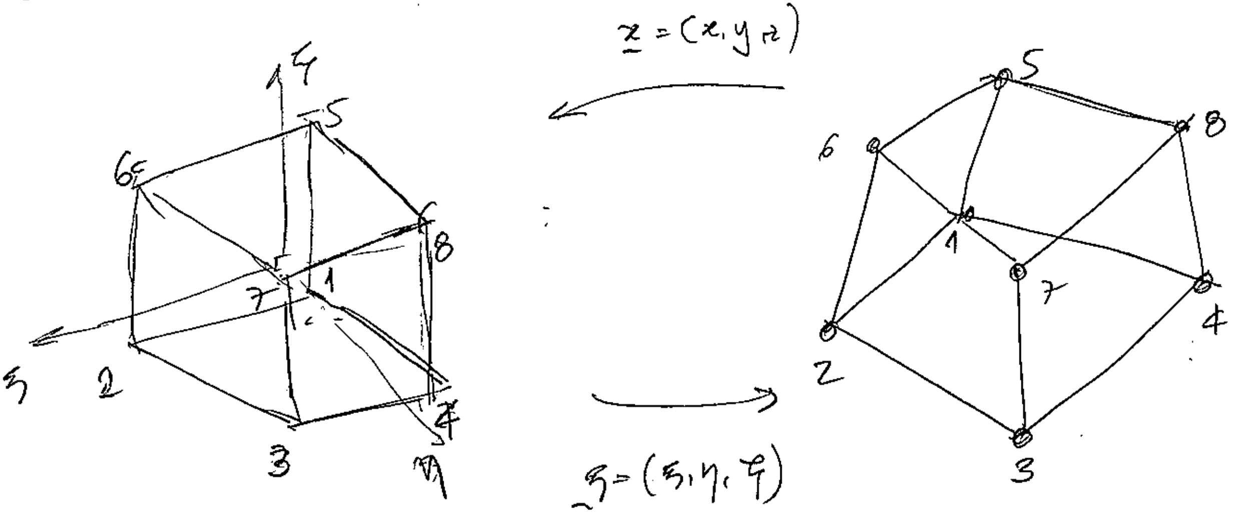


Neste caso, o mapeamento não é UM-PARA-UM, já que o segmento do contorno 3-4 ($\xi \in [-1,1], \eta = 1$) no espaço $\underset{\sim}{\xi}$ é todo mapeado em $\underset{\sim}{x}_3^e$. Isto implica que o jacobiano é zero em $\underset{\sim}{x}_3^e$. Entretanto, as derivadas com respeito a x e y são constantes, logo, suaves $\Rightarrow$ condição (C1) é satisfeita. A condição (C2) também é satisfeita.



A condição (C3) é automaticamente satisfeita.

3.6. Elemento Hexaedro Trilinear



$$\begin{cases} x(\underset{\sim}{\xi}) = \alpha_0 + \alpha_1 \xi + \alpha_2 \eta + \alpha_3 \zeta + \alpha_4 \xi\eta + \alpha_5 \eta\zeta + \alpha_6 \xi\zeta + \alpha_7 \xi\eta\zeta \\ y(\underset{\sim}{\xi}) = \\ z(\underset{\sim}{\xi}) = \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} x(\underset{\sim}{\xi}_a) = x_a^e, \quad a = 1,\dots,8 \\ y \\ z \end{cases}$$

a	ξ	η	ζ
1	-1	-1	-1
2	1	-1	-1
3	1	1	-1
4	-1	1	-1
5	-1	-1	1
6	1	-1	1
7	1	1	1
8	-1	1	1

$$\boxed{\underset{\sim}{x}(\xi) = \sum_{a=1}^{8} N_a(\underset{\sim}{\xi})\, \underset{\sim}{x}_a^e}$$

$$\boxed{N_a(\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{8}\,(1+\xi_a\xi)(1+\eta_a\eta)(1+\zeta_a\zeta)}$$

$$\left\{\begin{aligned}
N_1 &= \tfrac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta)\\
N_2 &= \tfrac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta)\\
N_3 &= \tfrac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1-\zeta)\\
N_4 &= \tfrac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1-\zeta)\\
N_5 &= \tfrac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1+\zeta)\\
N_6 &= \tfrac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1+\zeta)\\
N_7 &= \tfrac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1+\zeta)\\
N_8 &= \tfrac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1+\zeta)
\end{aligned}\right.$$

$$\boxed{u^h = \sum_{a=1}^{8} N_a(\underset{\sim}{\xi})\, d_a^e}$$

3.7. Elementos de Ordem Superior - Polinômios de Lagrange

Polinômios de Lagrange

$$\boxed{l_a^{n_{en}-1}(\xi)=\frac{\prod_{\substack{b=1\\ b\neq a}}^{n_{en}}(\xi-\xi_b)}{\prod_{\substack{b=1\\ b\neq a}}^{n_{en}}(\xi_a-\xi_b)}}$$

$$\begin{cases} l_a^{n_{en}-1}(\xi)=\dfrac{(\xi-\xi_1)(\xi-\xi_2)\cdots(\xi-\xi_{a-1})(\xi-\xi_{a+1})\cdots(\xi-\xi_{n_{en}})}{(\xi_a-\xi_1)(\xi_a-\xi_2)\quad(\xi_a-\xi_{a-1})(\xi_a-\xi_{a+1})\cdots(\xi_a-\xi_{n_{en}})} \\ \\ l_a(\xi_b)=\delta_{ab} \end{cases}$$

$$\bigtriangledown$$

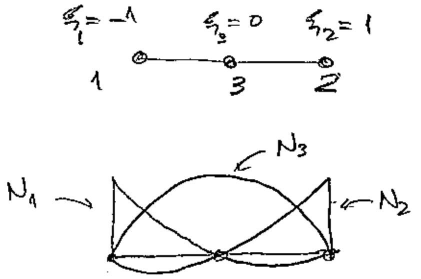
$$\boxed{N_a=l_a^{n_{en}-1}}$$

Exemplo 1

- Funcoes Lineares : $N_1=l_1^1(\xi)=\dfrac{(\xi-\xi_2)}{(\xi_1-\xi_2)}=\dfrac{\xi-1}{-1-(+1)}=\dfrac{1}{2}(1-\xi)$

$$N_2=l_2^1(\xi)=\frac{\xi-\xi_1}{(\xi_2-\xi_1)}=\frac{\xi+1}{1-(-1)}=\frac{1}{2}(1+\xi)$$

- Funçoes Quadráticas em 1D

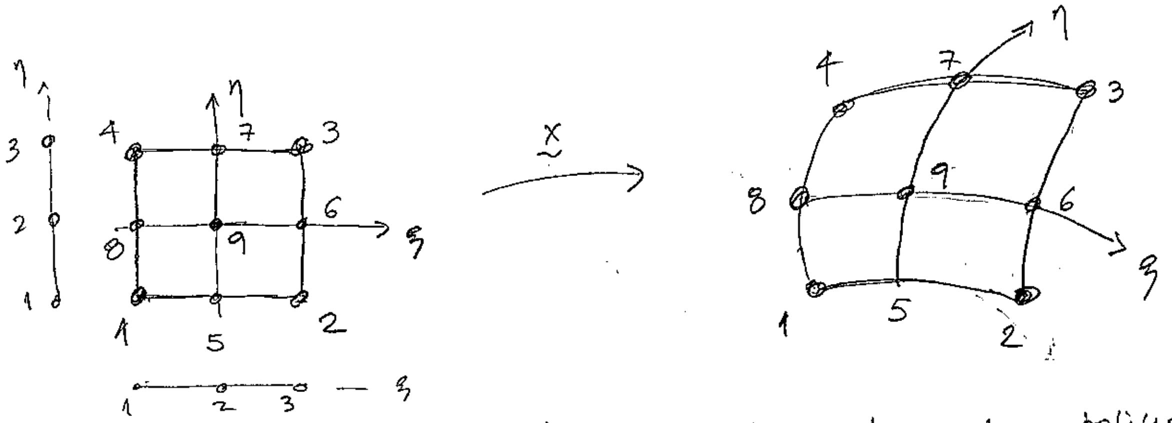


$$N_1=l_1^2(\xi)=\frac{(\xi-\xi_2)(\xi-\xi_3)}{(\xi_1-\xi_2)(\xi_1-\xi_3)}=\frac{(\xi-1)\xi}{(-1-1)(-1)}=\frac{1}{2}\xi(\xi-1)$$

$$N_2=l_2^2(\xi)=\frac{(\xi-\xi_1)(\xi-\xi_3)}{(\xi_2-\xi_1)(\xi_2-\xi_3)}=\frac{(\xi+1)\xi}{(1-(-1))(1)}=\frac{1}{2}\xi(\xi+1)$$

$$N_3=l_3^2(\xi)=\frac{(\xi-\xi_1)(\xi-\xi_2)}{(\xi_3-\xi_1)(\xi_3-\xi_2)}=\frac{(\xi+1)(\xi-1)}{(-(-1))(-1)}=1-\xi^2$$

Exemplo 4 Elemento Quadrático em 2-D - Lagrangeano



Funções de Interpolação ⇒ produtos de polinomios de Lagrange de 2º grau.

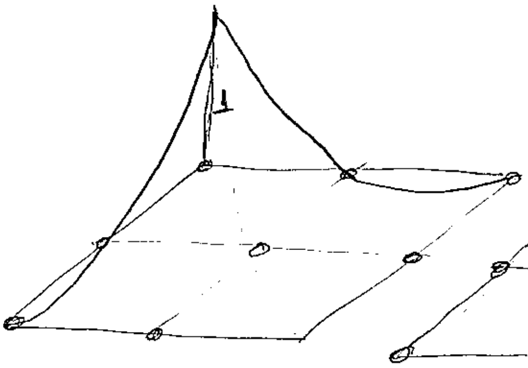
$$N_a(\xi,\eta) = \ell_b^2(\xi)\,.\,\ell_c^2(\eta)$$

a	b	c
1	1	1
2	3	1
3	3	3
4	1	3
5	2	1
6	3	2
7	2	3
8	1	2
9	2	2

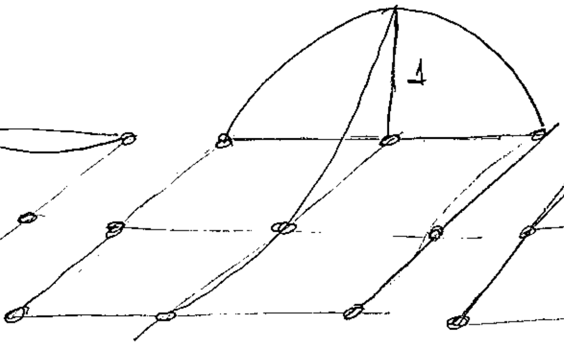
$$N_1(\xi,\eta) = \ell_1^2(\xi)\,\ell_1^2(\eta) = \frac{1}{4}\xi\eta(\xi-1)(\eta-1)$$

$$N_5(\xi,\eta) = \ell_2^2(\xi)\,\ell_1^2(\eta) = \frac{1}{2}\eta(1-\xi^2)(\eta-1)$$

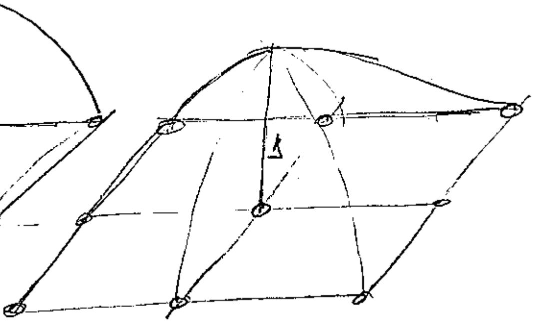
$$N_9(\xi,\eta) = \ell_2^2(\xi)\,\ell_2^2(\eta) = (1-\xi^2)(1-\eta^2)$$



N_1, N_2, N_3, N_4



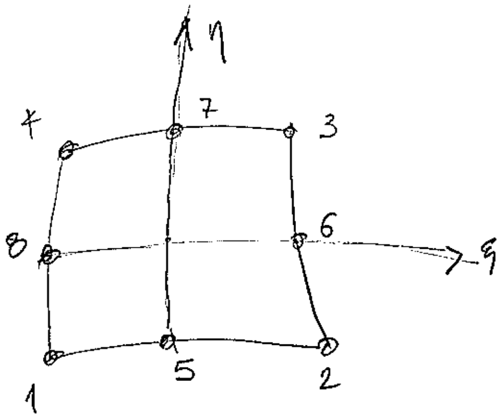
N_5, N_6, N_7, N_8



N_9

→ Exercício 4. pg. 130

3.8 Elementos com Número de Nós Variavel



	$n_{en}=5$	$n_{en}=6$	$n_{en}=7$	$n_{en}=8$
$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$	$-\frac{1}{2}N_5$			$-\frac{1}{2}N_8$
$N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$	$-\frac{1}{2}N_5$	$-\frac{1}{2}N_6$		
$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)$		$-\frac{1}{2}N_6$	$-\frac{1}{2}N_7$	
$N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$			$-\frac{1}{2}N_7$	$-\frac{1}{2}N_8$

$$N_5 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)$$

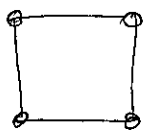
$$N_6 = \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2)$$

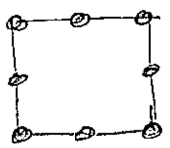
$$N_7 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta)$$

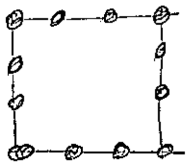
$$N_8 = \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2)$$

Famílias de Elementos

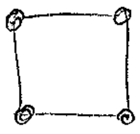
(i) Serendipity

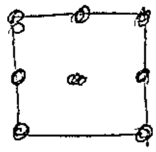


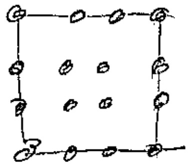




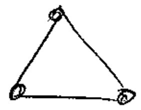
(ii) Lagrange

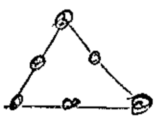






(iii) Triângulos





- - - -

Exercício 1 - pg. 135

3.9 Integração Numérica: Quadratura de Gauss

Seja $f : \Omega^e \subset \mathbb{R}^{n_{sd}} \to \mathbb{R}$. $\int_{\Omega^e} f(\underset{\sim}{x})\, d\Omega = ?$

Por exemplo, $f(\underset{\sim}{x}) = \underset{\sim}{B}_a^T \underset{=}{D}\, \underset{\sim}{B}_b$. A operação será efetuada no espaço-$\underset{\sim}{\xi}$ (coordenadas naturais). Para $n_{sd} = 1$, temos,

$$\boxed{\int_{\Omega^e} f(x)\, dx = \int_{-1}^{1} f(x(\xi))\, x_{,\xi}(\xi)\, d\xi}$$

- $n_{sd} = 2$

$$\boxed{\int_{\Omega^e} f(x,y)\, d\Omega = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta))\, j(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta}$$

- $n_{sd} = 3$

$$\boxed{\int_{\Omega^e} f(x,y,z)\, d\Omega = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x(\xi,\eta,\zeta), y(\xi,\eta,\zeta), z(\xi,\eta,\zeta))\, j(\xi,\eta,\zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta}$$

onde $j = \det(\partial \underset{\sim}{x} / \partial \underset{\sim}{\xi}) \equiv$ Jacobiano.

As integrais serão computadas numericamente, ou seja,

$$\int_{-1}^{1} g(\xi)\, d\xi = \sum_{l=1}^{n_{int}} g(\tilde{\xi}_l)\, W_l + R \cong \sum_{l=1}^{n_{int}} g(\tilde{\xi}_l)\, W_l$$

$$\begin{cases} n_{int} = \text{número de pontos de integração} \\ \tilde{\xi}_l = \text{coordenada do pto de integração} \\ W_l = \text{peso do } l\text{-ésimo ponto de integração} \end{cases}$$

Quadratura de Gauss

- Ótima em 1D. Precisão de ordem $2n_{int}$ é alcançada por n_{int} pontos.

1. $n_{int} = 1 \Rightarrow \tilde{\xi}_1 = 0$; $W_1 = 2$; $R = \dfrac{g_{,\xi\xi}(\tilde{\xi})}{3}$

2. $n_{int} = 2 \Rightarrow \tilde{\xi}_1 = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$; $W_1 = W_2 = 1$; $R = \dfrac{g^{(4)}(\tilde{\xi})}{135}$

3. $n_{int} = 3 \Rightarrow \tilde{\xi}_{1,3} = -\sqrt{\dfrac{3}{5}}$; $W_{1,3} = 5/9$; $R = \dfrac{g^{(6)}(\tilde{\xi})}{15750}$
   $\tilde{\xi}_2 = 0$; $W_2 = 8/9$

Exemplo: Regra c/ 2 pontos exata p/ um polinômio cúbico

$$g(\xi) = \alpha_0 + \alpha_1\xi + \alpha_2\xi^2 + \alpha_3\xi^3.$$

$$W_1 = W_2 \ ; \ \tilde{\xi}_1 = -\tilde{\xi}_2$$

$$\int_{-1}^{1} g(\xi)\,d\xi = 2\alpha_0 + \frac{2}{3}\alpha_2 = \sum_{\ell=1}^{2} g(\tilde{\xi}_\ell) W_\ell = 2W_2(\alpha_0 + \alpha_2\tilde{\xi}_2^2)$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} 2 = 2W_2 \Rightarrow W_2 = W_1 = 1. \\ \frac{2}{3} = 2\tilde{\xi}_2^2 \Rightarrow \tilde{\xi} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

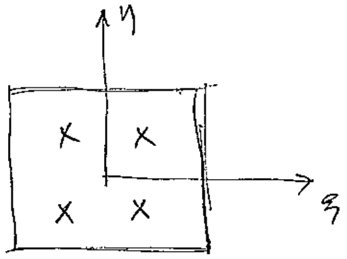
→ Exercício 2 - pg. 143.

Quadratura de Gauss em $\mathbb{R}^2$

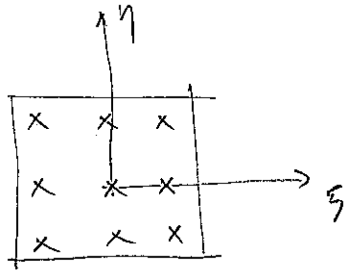
Regra de Gauss em ξ!

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} g(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta \cong \int_{-1}^{1}\left\{\sum_{\ell^{(1)}=1}^{n_{int}^{(1)}} g(\tilde{\xi}^{(1)}_{\ell^{(1)}},\eta)\, W^{(1)}_{\ell^{(1)}}\right\} d\eta \cong$$

$$\sum_{\ell^{(1)}=1}^{n_{int}^{(1)}} \sum_{\ell^{(2)}=1}^{n_{int}^{(2)}} g(\tilde{\xi}^{(1)}_{\ell^{(1)}}, \tilde{\eta}^{(2)}_{\ell^{(2)}})\, W^{(1)}_{\ell^{(1)}} W^{(2)}_{\ell^{(2)}}$$



2×2



3×3

3.10 - Derivadas das Funções de Forma e Rotinas de Funções de Forma.

$$\begin{cases} N_{a,x} = N_{a,\xi}\,\xi_{,x} + N_{a,\eta}\,\eta_{,x} \\ N_{a,y} = N_{a,\xi}\,\xi_{,y} + N_{a,\eta}\,\eta_{,y} \end{cases} = (N_{a,\xi}\,, N_{a,\eta})\begin{bmatrix} \xi_{,x} & \xi_{,y} \\ \eta_{,x} & \eta_{,y} \end{bmatrix}$$

As derivadas $N_{a,\xi}$ e $N_{a,\eta}$ podem ser computadas explicitamente. Entretanto, os termos da matriz não. Usando as relações inversas,

$$\begin{cases} x(\xi,\eta) = \sum_{a=1}^{n_{en}} N_a(\xi,\eta)\, x_a^e \\ y(\xi,\eta) = \sum_{a=1}^{n_{en}} N_a(\xi,\eta)\, y_a^e \end{cases}$$

podemos calcular a matriz

$$\underset{\sim}{x}_{,\underset{\sim}{\xi}} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & x_{,\eta} \\ y_{,\xi} & y_{,\eta} \end{bmatrix}$$

onde

$$\begin{cases} x_{,\xi} = \sum_{a=1}^{n_{en}} N_{a,\xi}\, x_a^e \;; & x_{,\eta} = \sum_{a=1}^{n_{en}} N_{a,\eta}\, x_a^e \\ y_{,\xi} = \sum_{a=1}^{n_{en}} N_{a,\xi}\, y_a^e \;; & y_{,\eta} = \sum_{a=1}^{n_{en}} N_{a,\eta}\, y_a^e \end{cases}$$

Porém,

$$\begin{bmatrix} \xi_{,x} & \xi_{,y} \\ \eta_{,x} & \eta_{,y} \end{bmatrix} = (\underset{\sim}{x}_{,\underset{\sim}{\xi}})^{-1} = \frac{1}{j} \begin{bmatrix} y_{,\eta} & -x_{,\eta} \\ -y_{,\xi} & x_{,\xi} \end{bmatrix}$$

$$j = \det(\underset{\sim}{x}_{,\underset{\sim}{\xi}}) = x_{,\xi}\, y_{,\eta} - x_{,\eta}\, y_{,\xi}$$

3.12 Cálculo da Matriz de Rigidez de Elemento

$$\underset{\sim}{k}^{e} = \int_{\Omega} \underset{\sim}{B}^{T} \underset{\sim}{D}\, \underset{\sim}{B}\, d\Omega = \int_{\square} \underset{\sim}{B}^{T} \underset{\sim}{D}\, \underset{\sim}{B}\, j\, d\square$$

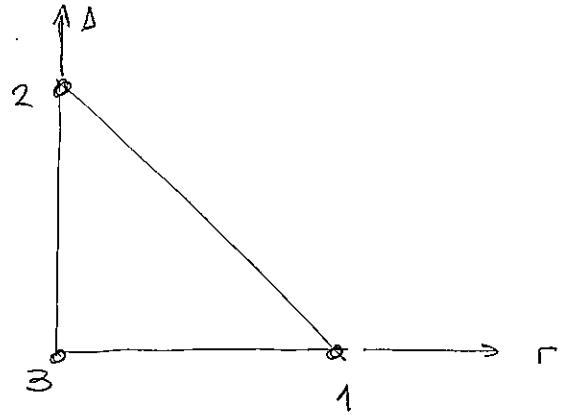
$$\cong \sum_{l=1}^{n_{int}} (\underset{\sim}{B}^{T} \underset{\sim}{D}\, \underset{\sim}{B}\, j) \Big|_{\tilde{\xi}_l} W_l$$

Se fizermos $\underset{\sim}{\tilde{D}} = j(\tilde{\xi}_l)\, W_l\, \underset{\sim}{D} \Rightarrow \underset{\sim}{k}^{e} = \sum_{l=1}^{n_{int}} (\underset{\sim}{B}^{T} \underset{\sim}{\tilde{D}}\, \underset{\sim}{\tilde{B}})_l$

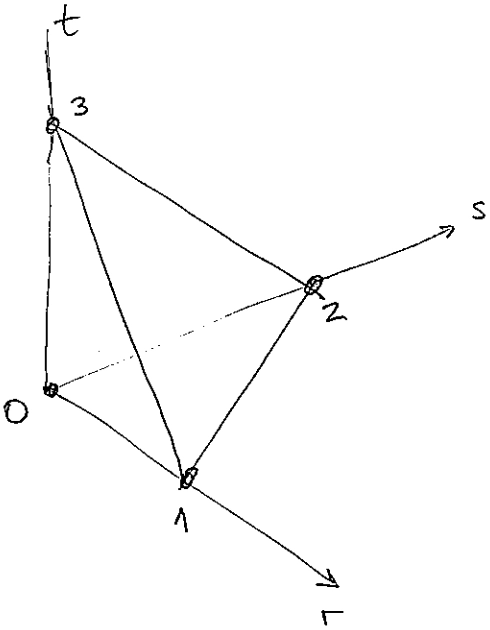
```
for l = 1,..., nint
    calcule matriz $\underset{\sim}{B}$
    calcule a matriz constitutiva $\underset{\sim}{\tilde{D}}$
    multiplique $\underset{\sim}{\tilde{D}} * \underset{\sim}{B}$
    multiplique $\underset{\sim}{B}^{T} * (\underset{\sim}{\tilde{D}}\underset{\sim}{B})$, levando em conta a simetria,
    acumulando em $\underset{\sim}{k}^{e}$
enddo.
```

→ Exercício 2 pg 157 X
3 pg. 159 • X
6 pg. 161 • ✓
7 pg 161 • ✓
12 pg. 163 ✓

3.13. Elementos Triangulares e Tetraedros



$$\begin{cases} N_1(r,s) = r \\ N_2(r,s) = s \\ N_3(r,s) = t(r,s) = 1 - r - s \end{cases}$$



$$\begin{cases} N_1(r,s,t) = r \\ N_2(r,s,t) = s \\ N_3(r,s,t) = t \\ N_4(r,s,t) = u(r,s,t) = 1 - r - s - t \end{cases}$$

<u>Exercício</u> : Usando as funções de interpolação acima, obtenha a matriz de rigidez do Δ da Seção 3.1 através da formulação isoparamétrica.

3.8. Elementos Finitos p/ Condução de Calor em 2-D

A eq. de condução de calor em regime permanente em 2D é:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)+Q=0$$

$$\phi=\bar{\phi} \quad \text{em } \Gamma_\phi$$

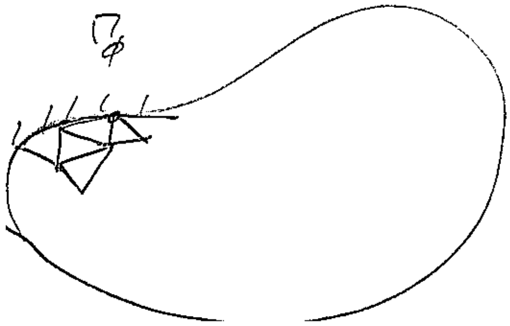
$$k\frac{\partial \phi}{\partial n}=-\bar{q} \quad \text{em } \Gamma_q.$$

onde $\Gamma=\Gamma_\phi \cup \Gamma_q$, n é a normal exterior e o problema é ISOTRÓPICO ($k_x=k_y=k$)

Aproximando o problema pelo MEF de maneira usual,

$$\phi \cong \hat{\phi}=\sum_{m=1}^{M}\phi_m N_m$$

pode-se notar que a c.c. em Γ_ϕ pode ser satisfeita imediatamente nos nós que $\in$ a Γ_ϕ, especificando-se os valores nodais apropriados



A sentença de resíduos ponderados correspondente ao método de Galerkin com integração por partes é, no caso (refaça como exercício):

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial N_l}{\partial x} k \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} + \frac{\partial N_l}{\partial y} k \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial y} \right) dx\,dy = \int_{\Omega} Q N_l \,dx\,dy - \int_{\Gamma_q} \bar{q} N_l \,d\Gamma$$

$l = 1, 2, \dots M$

Inserindo a aproximação do MEF, chega-se ao problema matricial padrão,

$$\underline{K}\,\underline{\phi} = \underline{f}$$

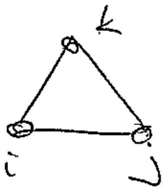
onde

$$K^e_{lm} = \int_{\Omega^e} \left(\frac{\partial N^e_l}{\partial x} k \frac{\partial N^e_m}{\partial x} + \frac{\partial N^e_l}{\partial y} k \frac{\partial N^e_m}{\partial y} \right) dx\,dy$$

$$f^e_l = \int_{\Omega^e} Q N^e_l \,dx\,dy - \int_{\Gamma^e_q} N_l \bar{q} \,d\Gamma$$

e são ainda válidas as propriedades

$K^e_{lm} = 0$, se $l, m \neq i, j, k$

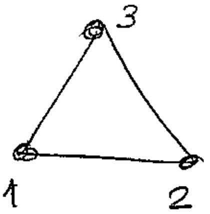


$K^e_{lm} \neq 0$ se $l, m = i, j, k$

3.8.1. Elementos Triangulares de Lado Reto:

Chamando-se de,

$$B_a = \nabla N_a = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_a}{\partial x} \\ \frac{\partial N_a}{\partial y} \end{bmatrix} \quad , \quad a = 1, 2, 3$$



a expressão para K^e_{lm} pode ser rearranjada

como,

$$\underset{\sim}{B}^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_j}{\partial x} & \frac{\partial N_k}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_j}{\partial y} & \frac{\partial N_k}{\partial y} \end{bmatrix} \; ; \quad \underset{\sim}{D} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{K}^e = \int_\Omega \underset{\sim}{B}^T \underset{\sim}{D} \underset{\sim}{B} \, d\Omega =$$

$$= \int_\Omega \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_j}{\partial x} & \frac{\partial N_j}{\partial y} \\ \frac{\partial N_k}{\partial x} & \frac{\partial N_k}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_j}{\partial x} & \frac{\partial N_k}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_j}{\partial y} & \frac{\partial N_k}{\partial y} \end{bmatrix} d\Omega$$

(verifique)

Resta-nos ainda estabelecer como serão efetuadas as integrais de forma conveniente.

4. Formulação de Problemas ~~de Autovalor~~ Dependentes do Tempo

4.1. Caso Parabólico: Equação do Calor.

Este capítulo trata da generalização da formulação do Cap. 2 – condução de calor em regime permanente – para problemas dependentes do tempo.

$$f : \Omega \times]0,T[\to \mathbb{R} \quad ; \quad f = f(\underline{x}, t)$$

$$g : \Gamma_g \times]0,T[\to \mathbb{R}$$

$$h : \Gamma_h \times]0,T[\to \mathbb{R}$$

Deve-se notar que Γ_g e Γ_h <u>não</u> variam com o tempo. Para que o problema seja bem-posto, uma condição inicial para a temperatura tem que ser especificada:

$$u_0 : \Omega \to \mathbb{R}$$

Além disso, temos:

ρ → densidade ⇒ $\rho = \rho(\underline{x})$

c → capacidade ⇒ $c - c(\underline{x})$

FORMA FORTE

Dados f, g, h e u_0, ache $u : \bar{\Omega} \times [0,T] \to \mathbb{R}$

$$(S)\left\{\begin{array}{lll} \text{tal que} & & \\ \rho c u_{,t} + q_{i,i} = f & \text{em} & \Omega \times]0,T[\quad (\text{Equação do Calor}) \\ u = g & \text{em} & \Gamma_g \times]0,T[\\ -q_i n_i = h & \text{em} & \Gamma_h \times]0,T[\\ u(\underline{x},0) = u_0(\underline{x}) & & \underline{x} \in \Omega \end{array}\right.$$

$$\longrightarrow \quad u_{,t} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad ; \quad q_i = -k_{ij} u_{,j}$$

Seja $\mathcal{V}$ o espaço das funções peso ($w=0$ em Γ_g!). Note que $\forall w \in \mathcal{V}$, $w = w(\underset{\sim}{x})$ somente! Seja $\mathcal{S} = \mathcal{S}_t$ o espaço das funções teste. Note que $\mathcal{S}$ depende do tempo,

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_t = \{ u(\cdot,t) \,/\, u(\underset{\sim}{x},t) = g(\underset{\sim}{x},t),\ \underset{\sim}{x} \in \Gamma_g,\ u(\cdot,t) \in H^1(\Omega) \}$$

logo, a formulação fraca consiste em:

$$(W) \left\{ \begin{array}{l} \text{Dados } f, g, h \text{ e } u_0 \text{, ache } u(t) \in \mathcal{S}_t,\ t \in [0,T] \text{ tal} \\ \text{que } \forall w \in \mathcal{V}, \\ \boxed{(w, \rho c \dot{u}) + a(w,u) = (w,f) + (w,h)_\Gamma} \\ (w, \rho c u(0)) = (w, \rho c u_0) \end{array} \right.$$

Observação

\# $\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t}$; $u(\cdot,t) = u(\underset{\sim}{x},t)$; $u(\cdot,0) = u_0$

\# $(w, \rho c \dot{u}) = \int_\Omega w \rho c \frac{\partial u}{\partial t} \, d\Omega$

$\longrightarrow$ Exercício 1. pg 420!

Para se desenvolver a formulação de Galerkin, precisamos construir funções $u^h \in \mathcal{S}^h$, tais que,

$$u^h = v^h + g^h$$

onde

$$\left\{\begin{array}{ll} v^h(t) \in \mathcal{V}^h , & \text{para } \underline{t},\ v^h(\cdot,t) \in \mathcal{V}^h \\ g^h(t) \in \mathcal{S}_t^h & \end{array}\right.$$

e consequentemente,

$$u^h(\underline{x},t) = v^h(\underline{x},t) + g^h(\underline{x},t)$$

\# Formulação de Galerkin

Dados f, g, h e u_0, ache $u^h = v^h + g^h$, $u^h(t) \in \mathcal{S}_t^h$

$$(G)\left\{\begin{array}{l} \text{tal que } \forall\, w^h \in \mathcal{V}^h \\ \boxed{\begin{array}{r} (w^h, \rho c \dot{v}^h) + a(w^h, v^h) = (w^h, f) + (w^h, h)_\Gamma \\ - (w^h, \rho c \ddot{g}^h) - a(w^h, g^h) \end{array}} \\ (w^h, \rho c v^h(0)) = (w^h, \rho c u_0) - (w^h, \rho c g^h(0)) \end{array}\right.$$

<u>Observação</u>

A formulação de Galerkin é dita <u>SEMI-DISCRETA</u> já que o tempo permanece contínuo.

Interpolação

$$\begin{cases} v^h(\underset{\sim}{x},t) = \displaystyle\sum_{A\in \eta-\eta_g} N_A(\underset{\sim}{x})\, \underset{\sim}{d}_A(t) \\ \\ g^h(\underset{\sim}{x},t) = \displaystyle\sum_{A\in \eta_g} N_A(\underset{\sim}{x})\, g_A(t) \end{cases}$$

Observação

- A dependência do tempo é levada em conta apenas através dos valores nodais $\underset{\sim}{d}_A$.
- As funções de forma são as mesmas dos capítulos anteriores — elas NÃO dependem de t!

Forma matricial

Dado $\underset{\sim}{F} :]0,T[\rightarrow \mathbb{R}^{n_{eq}}$, ache $\underset{\sim}{d} : [0,T] \rightarrow \mathbb{R}^{n_{eq}}$ tal que,

$$\boxed{\begin{array}{ll} \underset{\sim}{M}\,\dot{\underset{\sim}{d}} + \underset{\sim}{K}\,\underset{\sim}{d} = \underset{\sim}{F}\,, & t \in \,]0,T[\\ \underset{\sim}{d}(0) = \underset{\sim}{d}_0 & \end{array}}$$

onde

$$\underset{\sim}{M} = \mathop{\mathbb{A}}_{e=1}^{n_{el}} (\underset{\sim}{m}^e)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \underset{\sim}{m} = [\, m^e_{ab} \,] \\[2ex] m^e_{ab} = \displaystyle\int_{\Omega^e} N_a \, \rho c \, N_b \, d\Omega \end{array}}$$

$$\underset{\sim}{K} = \mathop{\mathsf{A}}_{e=1}^{n_{el}} \left(\underset{\sim}{k}^e \right)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \underset{\sim}{k}^e = [\, k^e_{ab} \,] \\[2ex] k^e_{ab} = \displaystyle\int_{\Omega^e} \underset{\sim}{B}_a^T \, \underset{\sim}{D} \, \underset{\sim}{B}_b \, d\Omega \end{array}}$$

$$\underset{\sim}{F}(t) = \underset{\sim}{F}_{nodal}(t) + \mathop{\mathsf{A}}_{e=1}^{n_{el}} \left(\underset{\sim}{f}^e(t) \right)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \underset{\sim}{f}^e = \{ f^e_a \} \\[2ex] f^e_a = \displaystyle\int_{\Omega} N_a f \, d\Omega + \int_{\Gamma^e_h} N_a h \, d\Gamma - \sum_{b=1}^{n_{en}} \left(k^e_{ab} \, g^e_b + m^e_{ab} \, \dot{g}^e_b \right) \end{array}}$$

$$\underset{\sim}{d}_0 = \underset{\sim}{M}^{-1} \mathop{\mathsf{A}}_{e=1}^{n_{el}} \left(\hat{\underset{\sim}{d}}^e \right)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \hat{\underset{\sim}{d}}^e = \{ \hat{d}^e_a \} \\[2ex] \hat{d}^e_a = \displaystyle\int_{\Omega} N_a \rho c u_0 \, d\Omega - \sum_{a=1}^{n_{en}} m^e_{ab} \, g^e_b(0) \end{array}}$$

Observações

#1 A única diferença com a, formulação em regime permanente é a matriz de massa $\underset{\sim}{M}$ ($\underline{M}$ tb é SPD! Verifique ...).

#2 A formulação matricial é uma EDO.

#3 Na prática, a condição inicial é especificada diretamente nos nós $\Rightarrow d_{0_A} = u_0(x_A)$, $A \in \eta - \eta_g$. Para determinarmos $\dot{d}_0$, solucionamos a eq. de equilíbrio, isto é,

$$\underline{M}\,\dot{\underset{\sim}{d}}_0 = \underset{\sim}{F}_0 - \underline{K}\,\underset{\sim}{d}_0 \Rightarrow \dot{\underset{\sim}{d}}_0 = \underset{\sim}{M}^{-1}\left(\underset{\sim}{F}_0 - \underline{K}\,\underset{\sim}{d}_0\right)$$

4.2 Formas da Matriz de Massa.

- Massa Consistente

$$\underset{\sim}{M} = \int_\Omega \underset{\sim}{N}^T \underset{\sim}{N}\, d\Omega$$

— Elemento Δ de lados retos:

$$m^e_{ab} = \rho c \int_\Omega \xi_a \xi_b \, d\Omega = \begin{cases} \dfrac{At}{6}, & a=b \\ \dfrac{At}{12}, & a \neq b \end{cases}$$

$$\underline{m}^e = \rho c A t \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

- Massa Diagonal ("Lumped")

— Elemento Δ

$$\underline{m}^e = \rho c A t \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

— Elemento Isoparamétrico linear

$$\underline{m}^e = \frac{\rho c A t}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

— Diagonalização por Quadratura Nodal

$$\int_{\square} g(\xi)\, d\square \approx \sum_{a=1}^{n_{en}} g(\xi_a) W_a$$

(pontos de integração coincidentes c/ os nós)

$$m^e_{pq} = \delta_{ij} \int_{\Omega^e} N_a \rho c N_b \, d\Omega =$$

$$= \delta_{ij} \int_{\square} N_a \rho c N_b j \, d\square =$$

$$\approx \delta_{ij} \sum_{a=1}^{n_{en}} \underbrace{N_a(\xi_c)}_{\delta_{ac}} \rho c \underbrace{N_b(\xi_c)}_{\delta_{bc}} j(\xi_c) W_c =$$

$$= \begin{cases} \delta_{ij} \rho c \, j(\xi_a) W_a, & a = b \\ 0, & a \neq b. \end{cases}$$

▷ Regra de Lobatto p/ ξ_a e W_a!

— Tecnica de Soma das Linhas

$$\underset{\sim}{m}^{e}_{pq} = \begin{cases} \delta_{ij} \int_{\Omega^e} \rho c \, N_a \, d\Omega & , a=b \\ 0 & , a\neq b \end{cases}$$

Exemplo: Δ linear

$$\underset{\sim}{m}^{consist.} = \rho c A_t \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{m}^{SL} = \rho c A_t \begin{bmatrix} 2/6 & 0 & 6 \\ 0 & 2/6 & 0 \\ 0 & 0 & 2/6 \end{bmatrix} \equiv \text{massa "lumped"}$$

— Tecnica de Hinton et al → Massa sempre positiva!

$$\underset{\sim}{m}^{e}_{pq} = \begin{cases} \alpha \, \delta_{ij} \int_{\Omega^e} \rho c \, N_a^2 \, d\Omega & , a=b \\ 0 & , a\neq b \end{cases}$$

$$\alpha = \int_{\Omega^e} \rho c \, d\Omega \Big/ \sum_{a=1}^{n_{en}} \int_{\Omega^e} \rho c \, N_a^2 \, d\Omega .$$

Exercicios 7 e 8 - p. 445!

↖ quadratico

5. Algoritmos para Problemas Parabólicos

5.1. Algoritmos "Um-Passo" para a Equação Semi-Discreta de Condução de Calor: O Método Trapezoidal Generalizado.

$\boxed{\underset{\sim}{M}\,\dot{\underset{\sim}{d}} + \underset{\sim}{K}\,\underset{\sim}{d} = \underset{\sim}{F}}$ e $\boxed{\underset{\sim}{d}(0) = d_0}$

Método Trapezoidal Generalizado

$$\boxed{\begin{aligned} \underset{\sim}{M}\,\underset{\sim}{v}_{n+1} + \underset{\sim}{K}\,\underset{\sim}{d}_{n+1} &= \underset{\sim}{F}_{n+1} \\ \underset{\sim}{d}_{n+1} &= \underset{\sim}{d}_n + \Delta t\,\underset{\sim}{v}_{n+\alpha} \\ \underset{\sim}{v}_{n+\alpha} &= (1-\alpha)\,\underset{\sim}{v}_n + \alpha\,\underset{\sim}{v}_{n+1} \end{aligned}}$$

onde $\underset{\sim}{d}_n \rightsquigarrow \underset{\sim}{d}(t_n)$; $\underset{\sim}{v}_n \rightsquigarrow \dot{\underset{\sim}{d}}(t_n)$

$\underset{\sim}{F}_{n+1} \rightsquigarrow \underset{\sim}{F}(t_{n+1})$; $\Delta t \equiv$ intervalo de tempo

$\alpha \in [0,1]$

α	Método
0	Diferenças p/ Frente
1/2	Regra Trapezoidal ; Crank-Nicolson
1	Diferenças p/ Trás

- Implementação 1 - forma-$\underset{\sim}{v}$.

— PREDIÇÃO :

$$\boxed{\bar{\underset{\sim}{d}}_{n+1} = \underset{\sim}{d}_n + (1-\alpha)\,\Delta t\,\underset{\sim}{v}_n}$$

logo,

$$\underset{\sim}{d}_{n+1} = \bar{\underset{\sim}{d}}_{n+1} + \alpha\,\Delta t\,\underset{\sim}{v}_{n+1}$$

Substituindo na equação de equilíbrio,

$$\boxed{(\underset{\sim}{M} + \alpha\,\Delta t\,\underset{\sim}{K})\,\underset{\sim}{v}_{n+1} = \underset{\sim}{F}_{n+1} - \underset{\sim}{K}\,\bar{\underset{\sim}{d}}_{n+1}}$$

— CORREÇÃO

$$\boxed{\underset{\sim}{d}_{n+1} = \bar{\underset{\sim}{d}}_{n+1} + \alpha\,\Delta t\,\underset{\sim}{v}_{n+1}}$$

Observações

#1. Se $\alpha = 0$, o método é dito EXPLÍCITO e a equação a ser resolvida é,

$$\underset{\sim}{M}\,\underset{\sim}{v}_{n+1} = \underset{\sim}{F}_{n+1} - \underset{\sim}{K}\,\bar{\underset{\sim}{d}}_{n+1}.$$

Portanto, se $\underset{\sim}{M}$ for diagonal, a solução p/ $\underset{\sim}{v}_{n+1}$ é trivial. O avanço no tempo se dá solucionando-se em t_{n+1} apenas com termos em t_n, já que $\bar{\underset{\sim}{d}}_{n+1} = \underset{\sim}{d}_{n+1} = \underset{\sim}{d}_n + \Delta t\,\underset{\sim}{v}_n$.

#2 Se $\alpha \neq 0$ o método é IMPLÍCITO. Nestes casos, deve-se solucionar um sistema de equações em cada instante, no qual a matriz de coeficientes é,

$$\underset{\sim}{M}^* = \underset{\sim}{M} + \alpha \Delta t \, \underset{\sim}{K}$$ ("Matriz de Massa Efetiva)

#3. O lado direito do sistema de equações,

$$\underset{\sim}{F}^* = \underset{\sim}{F} - \underset{\sim}{K} \, \underset{\sim}{\bar{d}}_{n+1}$$

é conhecido como RESÍDUO. O termo,

$$\underset{\sim}{K} \, \underset{\sim}{\bar{d}}_{n+1} = \overset{nel}{\underset{e=1}{\mathrm{A}}} \left(\underset{\sim}{k}^e \, \underset{\sim}{\bar{d}}_{n+1} \right)$$

também pode ser obtido através do "assembly".

#4. Esta forma de implementação pode ser generalizada para métodos IMPLÍCITOS-EXPLÍCITOS, como será visto adiante.

- Implementação 2 : forma-$\underset{\sim}{d}$.

Eliminando-se $\underset{\sim}{v}_{n+1}$, temos,

$$\boxed{\frac{1}{\alpha \Delta t} \left(\underset{\sim}{M} + \alpha \Delta t \, \underset{\sim}{K} \right) \underset{\sim}{d}_{n+1} = \underset{\sim}{F}_{n+1} + \frac{1}{\alpha \Delta t} \underset{\sim}{M} \, \underset{\sim}{\bar{d}}_{n+1}}$$

$$\boxed{\underset{\sim}{v}_{n+1} = \frac{\underset{\sim}{d}_{n+1} - \underset{\sim}{\bar{d}}_{n+1}}{\alpha \Delta t}}$$

Esta implementação é vantajosa quando $\underset{\sim}{M}$ é diagonal. Neste caso, o cálculo do resíduo, $\underline{F}^*$ é muito + econômico.

5.2. Análise do Método Trapezoidal Generalizado.

Os algoritmos apresentados anteriormente devem ser <u>CONVERGENTES</u>, isto é, para um t_n fixo e $\Delta t = t_n / n$, $\underset{\sim}{d}_n \rightarrow \underline{d}(t_n)$ qdo $\Delta t \rightarrow 0$. Para se estabelecer a convergência de um algoritmo dois conceitos devem ser estabelecidos: <u>ESTABILIDADE</u> e <u>CONSISTÊNCIA</u>. Veremos que se a estabilidade e consistência são verificadas, então o algoritmo é convergente. Além disso, a <u>PRECISÃO</u> do algoritmo deve ser estudada. Por precisão entende-se a taxa de convergência qdo $\Delta t \rightarrow 0$. A técnica empregada para estudar estes tópicos será a da redução modal, onde o sistema de equações acoplado é reduzido a apenas 1 equação.

Redução Modal.

Seja o problema de autovalor associado a equação de equilíbrio transiente,

$$(\underset{\sim}{K} - \lambda_l^h \underset{\sim}{M}) \underset{\smile}{\Psi}_l = \underset{\sim}{0} \qquad l \in \{1, 2, \ldots, n_{eq}\}$$

onde $0 \le \lambda_1^h \le \lambda_2^h \le \dots \le \lambda_{neq}^h$ ≡ AUTOVALORES e

$\phi = [\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{neq}]$ os AUTOVETORES. Os autovetores são tais que,

$$\phi^T M \phi = I \quad \text{ou} \quad \psi_l^T M \psi_m = \delta_{lm}$$

↑ CONDIÇÃO DE ORTONORMALIDADE

e além disso, constituem uma base para o R^{neq}, isto é, qq. vetor em R^{neq} pode ser escrito como uma combinação linear dos ψ_l! Pré-multiplicando-se o prob. de autovalor por ϕ^T,

$$\phi^T K \phi - \phi^T \Lambda M \phi = 0 \Rightarrow \phi^T K \phi = \Lambda \quad \text{, ou seja,}$$

$$\psi_l^T K \psi_m = \lambda_l^h \delta_{lm} \quad \text{e} \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{neq} \end{bmatrix} .$$

Seja agora a equação semi-discreta de condução de calor,

$$M v + K d = F .$$

Pré-multiplicando por ϕ^T, temos,

$$\phi^T M v + \phi^T K d = \phi^T F$$

e introduzindo-se agora a transformação de coordenadas

$$\underset{\sim}{d}(t) = \underset{\sim}{\phi}\,\underset{\sim}{x}(t) \quad e \quad \underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{\phi}\,\dot{\underset{\sim}{x}}(t)$$

onde as novas coordenadas $\underset{\sim}{x}$ e $\dot{\underset{\sim}{x}}$ são os coeficientes de Fourier, temos,

$$\underbrace{\underset{\sim}{\phi}^T \underset{\sim}{M}\, \underset{\sim}{\phi}}_{\underset{\sim}{I}}\, \dot{\underset{\sim}{x}} + \underbrace{\underset{\sim}{\phi}^T \underset{\sim}{K}\, \underset{\sim}{\phi}}_{\underset{\sim}{\Lambda}}\, \underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{\phi}^T \underset{\sim}{F}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\dot{\underset{\sim}{x}} + \underset{\sim}{\Lambda}\, \underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{\phi}^T \underset{\sim}{F}}$$

A equação acima é um sistema desacoplado de EDO, cuja condição inicial é

$$\underset{\sim}{d}_0 = \underset{\sim}{\phi}\, \underset{\sim}{x}_0 \Rightarrow \underset{\sim}{\phi}^T \underset{\sim}{M}\, \underset{\sim}{d}_0 = \underset{\sim}{\phi}^T \underset{\sim}{M}\, \underset{\sim}{\phi}\, x_0 \Rightarrow \boxed{\underset{\sim}{x}_0 = \underset{\sim}{\phi}^T \underset{\sim}{M}\, \underset{\sim}{d}_0}$$

ou seja, $\underset{\sim}{\phi}^{-1} = \underset{\sim}{\phi}^T \underset{\sim}{M}$!

Desta forma, basta-nos estudar uma equação do sistema desacoplado para conhecermos o comportamento dos algoritmos. Logo, o nosso problema de valor inicial modelo pode ser enunciado como:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Dado } f :]0,T[\text{ ache } d = d(t) \text{ tal que} \\ \qquad \dot{d} + \lambda^h d = f \\ \qquad\quad d(0) = d_0 \end{array}}$$

onde d é uma componente de $\underset{\sim}{x}$!

Algoritmo Trapezoidal Generalizado

$$\underset{\sim}{d}_n = \underline{\phi}\, \underset{\sim}{x} \qquad ; \qquad \underset{\sim}{x} = \underline{M}\, \underset{\sim}{\phi}\, \underset{\sim}{d}_n$$

$$\underset{\sim}{d}_{n+1} = \underline{\phi}\, x_{n+1} \qquad ; \qquad \underset{\sim}{x}_{n+1} = \underline{M}\, \underset{\sim}{\phi}\, \underset{\sim}{d}_{n+1}$$

Para o problema ~~modelo~~ acoplado,

$$\begin{cases} \underline{\phi}^T (\underline{M} + \alpha\Delta t \underline{K})\, \underset{\sim}{\phi}\, \underline{x}_{n+1} - \underline{\phi}^T (\underline{M} - (1-\alpha)\Delta t\, \underset{\sim}{K})\, \underset{\sim}{\phi}\, \underset{\sim}{x}_n = \Delta t\, \underline{\phi}^T \underline{F}_{n+\alpha} \\ \underline{F}_{n+\alpha} = (1-\alpha)\, \underline{F}_n + \alpha\, \underset{\sim}{F}_{n+1} \end{cases}$$

→ Para uma equação desacoplada,

$$\begin{cases} (1 + \alpha\Delta t\, \lambda^h)\, \underset{\sim}{d}_{n+1} = (1 - (1-\alpha)\Delta t\, \lambda^h)\, \underset{\sim}{d}_n + \Delta t\, f_{n+\alpha} \\ d_0 \text{ dado} \end{cases}$$

Observações

#1 Validade do problema modelo ⇒ Convergencia de $\underset{\sim}{d}_n \to \underset{\sim}{d}(t_n)$:

seja $\underset{\sim}{e}(t_n) = \underset{\sim}{d}_n - \underset{\sim}{d}(t_n)$ e $e_\ell(t_n) = d_\ell - d_\ell(t_n)$ p/ $\ell = 1, 2, \ldots, n_{eq}$ e

$\underline{E} = [e_1, e_2, \ldots, e_{neq}]$ entao:

$$\underset{\sim}{e}(t_n)^T \underset{\sim}{M}\, \underset{\sim}{e}(t_n) = (\underline{\phi}\, \underset{\sim}{E})^T \underset{\sim}{M}\, (\underline{\phi}\, \underline{E}) = \underline{E}^T \underset{\sim}{\phi}\, \underline{M}\, \underline{\phi}\, \underline{E} = \underline{E}^T \underset{\sim}{E}$$

Logo $\underline{e}(t_n)^T \underline{M}\, \underline{e}(t_n) \to 0$ se e somente se $\underline{E}^T \underline{E} \to 0$, isto é $[e_\ell(t_n)]^2 \to 0$, $\ell = 1, 2, \ldots, n_{eq}$. Como $\underset{\sim}{M}$ é SPD, a quantidade $\underset{\sim}{e}(t_n)^T \underset{\sim}{M}\, \underline{e}(t_n) \to 0$ se e somente se $\underset{\sim}{e}(t_n) \to 0$, e portanto, só é necessario considerar o problema modelo!

#2.

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\begin{array}{c} \underset{\sim}{M}\dot{\underset{\sim}{d}} + \underset{\sim}{K}\underset{\sim}{d} = \underset{\sim}{F} \\ \underset{\sim}{d}(0) = \underset{\sim}{d}_0 \end{array}} \arrow[r, "\text{DISCRETIZAÇÃO}", "\text{TEMPORAL}"'] \arrow[d, "\text{DECOMPOSIÇÃO MODAL}"'] & \boxed{\begin{array}{l} (\underset{\sim}{M} + \alpha\Delta t\underset{\sim}{K})\underset{\sim}{d}_{n+1} = \\ (\underset{\sim}{M} - (1-\alpha)\Delta t\underset{\sim}{K})\underset{\sim}{d}_n + \\ + \Delta t \underset{\sim}{F}_{n+\alpha} \\ \underset{\sim}{d}_0 \text{ dado} \end{array}} \arrow[d, "\text{DECOMPOSIÇÃO MODAL}"] \\
\boxed{\begin{array}{c} \dot{d} + \lambda^h d = F \\ d(0) = d_0 \end{array}} \arrow[r, "\text{DISCRETIZAÇÃO}", "\text{TEMPORAL}"'] & \boxed{\begin{array}{l} (1 + \alpha\Delta t\lambda^h) d_{n+1} = \\ (1 - (1-\alpha)\Delta t\lambda^h) d_n + \\ \Delta t \, f_{n+1} \\ d_0 \text{ dado} \end{array}}
\end{tikzcd}$$

Estabilidade

Seja o problema homogeneo

$$\dot{d} + \lambda^h d = 0$$

solução $\Rightarrow$ $d(t_{n+1}) = e^{-\lambda^h(t_{n+1}-t_n)} d(t_n) = e^{-\lambda^h \Delta t} d(t_n)$

Em consequencia:

$$\begin{cases} |d(t_{n+1})| < |d(t_n)| , & \lambda^h > 0 \\ d(t_{n+1}) = d(t_n) & \lambda^h = 0 \end{cases}$$

As condições acima devem ser obtidas também no caso discreto. Para o problema modelo,

$$(1+\alpha\Delta t\lambda^h)d_{n+1} = (1-(1-\alpha)\Delta t\,\lambda^h)\,d_n$$

Já que $(1+\alpha\Delta t\lambda^h)>0$, $\forall\, \alpha, \Delta t, \lambda^h$ podemos escrever:

$$\boxed{d_{n+1} = A\,d_n}$$

onde

$$\boxed{A = (1-(1-\alpha)\Delta t\lambda^h)/(1+\alpha\Delta t\,\lambda^h)}$$

é o FATOR DE AMPLIFICAÇÃO!

As condições de estabilidade requerem que:

$$\begin{cases} |d_{n+1}| < |d_n| & , \lambda^h>0 \\ d_{n+1} = d_n & , \lambda^h=0 \end{cases}$$

A segunda condição é sempre satisfeita, já que $A(\lambda^h=0)=1$!

A primeira é equivalente a,

$$|A| < 1 \quad ; \quad \lambda^h>0$$

ou seja,

$$\boxed{-1 < \frac{(1-(1-\alpha)\Delta t\,\lambda^h)}{(1+\alpha\Delta t\,\lambda^h)} < 1} \quad , \lambda^h>0$$

A desigualdade $A<1$ é satisfeita $\forall, \alpha, \Delta t, \lambda^h>0$, porém $A>-1$ só é satisfeita se $\alpha \geq 1/2$. Porém se $\alpha < 1/2$ a desigualdade implica em

$$\boxed{\lambda^h\Delta t < \frac{2}{(1-2\alpha)}}$$

o que significa uma restrição em Δt. Qto maior λ^h, menor o Δt! Tais algoritmos são ditos CONDICIONALMENTE ESTÁVEIS

Observações:

#1 Algoritmos condicionalmente estáveis

$$\Delta t < \frac{2}{[(1-2\alpha)\lambda^h_\ell]} \quad , \ \ell = 1, 2, \ldots, neq$$

Logo, $\Delta t < 2/[(1-2\alpha)\lambda^h_{neq}]$! Em problemas de condução de calor pode-se mostrar que $\lambda^h_{neq} = O(h^{-2})$ $\Rightarrow$ $\Delta t <$ cte. h^2.

Resumo: Estabilidade de Métodos Trapezoidais Generalizados

Fator de Amplificação: $A = \dfrac{1-(1-\alpha)\Delta t \lambda^h}{1+\alpha \Delta t \lambda^h}$

Condição de Estabilidade: $|A| < 1$ para $\lambda^h = \lambda^h_{neq}$

Estabilidade Incondicional: $\alpha \geq 1/2$

Estabilidade Condicional: $\alpha < 1/2$, $\Delta t < \dfrac{2}{(1-2\alpha)\lambda^h_{neq}}$

$$\Delta t_{cr} < \frac{2}{\lambda^h_{max}} \qquad (\alpha = 0)$$

Coeficiente de Rayleigh

$$\lambda = \frac{\underset{\sim}{d}^T \underset{\sim}{K} \underset{\sim}{d}}{\underset{\sim}{d}^T \underline{M} \underset{\sim}{d}} \quad \text{(Coeficiente de Rayleigh)}$$

Se $\underset{\sim}{d}$ aproxima o i-ésimo autovalor, então $\lambda = \lambda^h_i$ $(O(h^2))$. Entretanto, é válida a relação

$$\lambda_{min} \leq \frac{\underset{\sim}{v}^T \underline{K} \underset{\sim}{v}}{\underset{\sim}{v}^T \underline{M} \underset{\sim}{v}} \leq \lambda_{max} \qquad (\underline{M} \text{ PD!})$$

Um valor limite p/ λ_{max} pode ser obtido levando em conta 1 elemento finito

$$\det[\underline{k}^e - \lambda^1 \underset{\sim}{m}^e] = 0$$

e de acordo com Irons,

$$\boxed{\lambda^h_{max} \leq \lambda^1_{max}}$$

Portanto,

$$\Delta t_{CR} \simeq \frac{2}{\lambda^1_{max}}$$

Convergência

O problema modelo discreto pode ser escrito na forma:

$$\boxed{d_{n+1} - A d_n - L_n = 0} \quad (*)$$

onde a "carga", $L_n = \Delta t \, f_{n+\alpha} / (1+\alpha \Delta t \lambda^h)$. Substituindo ~~os valores dos~~ d_n e d_{n+1} por seus valores exatos, podemos obter a expressão,

$$\boxed{d(t_{n+1}) - A\,d(t_n) - L_n = \Delta t \, . \, \tau(t_n)} \quad (**)$$

onde $\tau(t_n)$ é o <u>ERRO DE TRUNCAMENTO LOCAL</u>.

Se $|\tau(t_n)| \leq c \Delta t^k$, $\forall \, t \in [0,T]$ onde $c \in \mathbb{R}^+$ não depende de Δt e $k > 0$, o algoritmo definido pela equação discreta $(*)$ é dito <u>CONSISTENTE</u>. k é conhecido como ordem de precisão ou taxa de convergência.

<u>PROPOSIÇÃO</u>: Os métodos trapezoidais generalizados são consistentes e $k = 1$ $\forall \, \alpha \, [0,1]$, exceto $\alpha = 1/2 \Rightarrow k = 2$.

<u>Prova</u> → baseada na expansão em série de Taylor de $d(t_{n+1})$ e $d(t_n)$ em torno de $t_{n+\alpha}$.

$$\boxed{\tau = (1-2\alpha)\, O(\Delta t) + O(\Delta t^2).}$$

Observação

A regra trapezoidal ($\alpha = 1/2$) é o ÚNICO membro da família que possui k = 2 !!

Teorema: Considere as equações (*) e (**). Seja t_n fixo e assuma válidas as seguintes condições:

(i) $|A| \le 1$ (ESTABILIDADE)

(ii) $|\tau(t)| \le c\,\Delta t^k$, $t \in [0,T]$, $k > 0$ (CONSISTÊNCIA)

Então: $e(t_n) \to 0$ quando $\Delta t \to 0$.

Prova: (*) - (**)

$$d_{n+1} - d(t_{n+1}) - A\left(d_n - d(t_n)\right) = -\Delta t\, \tau(t_n)$$

$$\boxed{e(t_{n+1}) = A\, e(t_n) - \Delta t\, \tau(t_n)}$$ EQUAÇÃO DO ERRO

Mas, $A\, e(t_n) = A\left[A\, e(t_{n-1}) - \Delta t\, \tau(t_{n-1})\right] \Rightarrow$

$$e(t_{n+1}) = A^2 e(t_{n-1}) - \Delta t\, A\, \tau(t_{n-1}) - \Delta t\, \tau(t_n)$$

Repetindo-se este processo, chega-se a:

$$\boxed{e(t_{n+1}) = A^{n+1} e(0) - \Delta t \sum_{i=0}^{n} A^i \tau(t_{n-i})}$$

já que $e(0) = d_0 - d(0) = 0$. Tomando-se os módulos,

$$|e(t_n)| = \Delta t \left| \sum_{i=0}^{n-1} A^i \tau(t_{n-1-i}) \right|$$

$$\leq \Delta t \sum_{i=0}^{n-1} |A^i| \, |\tau(t_{n-1-i})|$$

$$\leq \Delta t \sum_{i=0}^{n-1} |\tau(t_{n-1-i})| \qquad \underline{\text{ESTABILIDADE}}$$

$$\leq t_n \max |\tau(t)| \qquad t \in [0,T]$$

$$\leq t_n C \, \Delta t^k \qquad \underline{\text{CONSISTÊNCIA}}$$

Logo, $e(t_n) \to 0$ quando $\Delta t \to 0$ e a taxa de convergência é k!

<u>Observação</u>:

#1 Este teorema é uma forma particular do Teorema de Lax ⇒ CONSISTÊNCIA + ESTABILIDADE ⇒ NECESSÁRIO E SUFICIENTE PARA CONVERGÊNCIA.

Exercícios 2.07 pg 473/477

\# Método da Energia (Enfoque Alternativo p/ Estabilidade)

$$\begin{cases} [d_n] = d_{n+1} - d_n \\ \langle d_n \rangle = \dfrac{d_{n+1} + d_n}{2} \end{cases} \Rightarrow \langle d_n \rangle^T M [d_n] = \frac{1}{2}[d_n^T M d_n]$$

$$= \frac{1}{2}\{ d_{n+1}^T M d_{n+1} - d_n^T M d_n \}.$$

Reescrevendo-se as equações do método trapezoidal generalizado

$$d_{n+1} = d_n + \Delta t \, v_{n+\alpha} \Rightarrow [d_n] = \Delta t \, v_{n+\alpha}$$

$$v_{n+\alpha} = (1-\alpha) v_n + \alpha v_{n+1} \Rightarrow [d_n] = \Delta t \left(\langle v_n \rangle + (\alpha - \tfrac{1}{2})[v_n] \right)$$

Escrevendo-se a equação de equilíbrio em $n+\alpha$

$$M v_{n+\alpha} + K d_{n+\alpha} = F_{n+\alpha} \Rightarrow \frac{1}{\Delta t} M [d_n] + K d_{n+\alpha} = F_{n+\alpha}$$

Pré-multiplicando-se por $\langle d_n \rangle^T$,

$$\frac{1}{\Delta t} \langle d_n \rangle^T M [d_n] + \langle d_n \rangle^T K d_{n+\alpha} = \langle d_n \rangle^T F_{n+\alpha}$$

$$\frac{1}{2\Delta t}[d_n^T M d_n] = - \langle d_n^T \rangle K d_{n+\alpha} + \langle d_n \rangle^T F_{n+\alpha} =$$

$$= - \langle d_n \rangle^T K \left(\langle d_n \rangle + (\alpha - \tfrac{1}{2})[d_n] \right) + \langle d_n \rangle^T F_{n+\alpha} =$$

$$= - \langle d_n \rangle^T K \langle d_n \rangle - \frac{(\alpha - 1/2)}{2}[d_n^T K d_n] + \langle d_n \rangle^T F_{n+\alpha} =$$

~~[illegible] Pg. 413/426~~!

Rearranjando,

$$\boxed{d_{n+1}^{+} A\, d_{n+1} = d_n^{+} A\, d_n - 2\Delta t < d_n^{+} > K < d_n^{+} > + 2\Delta t < d_n^{T} > F_{n+1}}$$

onde $A = M + (\alpha - \frac{1}{2})\Delta t\, K$

mas

$$d_{n+1}^{+} A\, d_{n+1} \leq d_n^{+} A\, d_n + 2\Delta t < d_n >^{T} F_{n+1}$$

para o caso homogeneo:

$$d_{n+1}^{+} A\, d_{n+1} \leq d_n^{T} A\, d_n \qquad \forall\, n.$$

expandindo-se nos seus autovectores, $d_{n+1} = \Phi\, x_{n+1}$, $d_n = \Phi\, x_n$,

$$x_{n+1}^{T} \Phi\, A\, \Phi\, x_{n+1} \leq x_n^{T} \Phi^{T} A\, \Phi\, x_n$$

$$x_{n+1}^{+} \left[I + (\alpha - \tfrac{1}{2})\Delta t\, \Lambda \right] x_{n+1} \leq x_n^{T} \left[I + (\alpha - \tfrac{1}{2})\Delta t\, \Lambda \right] x$$

Portanto:

$$1 + (\alpha - \tfrac{1}{2})\Delta t\, \lambda_{\ell}^{h} > 0 \quad , \forall \ell = 1, 2, \ldots n_{eq}$$

que é a mesma condição de estabilidade estabelecida anteriormente.

~~Exercícios 2x 7 pp 423/429.~~

5.3. Algoritmos Baseados em Separação dos Operadores e Partição de Malhas.

Algoritmo Preditor-Corretor

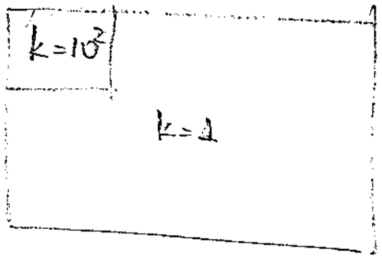
- Predição $\quad \underset{\sim}{\bar{d}}_{n+1} = \underset{\sim}{d}_n + (1-\alpha)\,\Delta t\,\underset{\sim}{v}_n$
- Equação Equilíbrio: $\quad \underset{\sim}{M}\,\underset{\sim}{v}_{n+1} + \underset{\sim}{K}\,\underset{\sim}{d}_{n+1} = \underset{\sim}{F}_{n+1}$
- Correção: $\quad \underset{\sim}{d}_{n+1} = \underset{\sim}{\bar{d}}_{n+1} + \alpha\Delta t\,\underset{\sim}{v}_{n+1}$

* Observações

* Um método explícito preditor corretor implica em resolver a equação de equilíbrio por ($\alpha = 0$!).

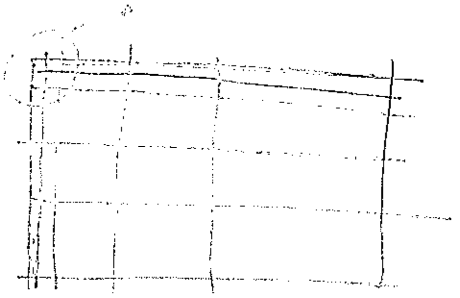
$$\underset{\sim}{M}\,\underset{\sim}{v}_{n+1} + \underset{\sim}{K}\,\underset{\sim}{\bar{d}}_{n+1} = \underset{\sim}{F}_{n+1} \qquad (\text{Eq. 2, pg 473!}).$$

Algoritmos Implícitos-Explícitos



Heterogeneidades

ou



Malhas Irregulares

Em ambos os casos, nas regiões assinaladas, o Δt necessário para o método explícito é muito pequeno. Porém, fora destas regiões, este Δt já é muito maior.

Portanto, a idéia é de se utilizar um Δt compatível com um método implícito (incondicionalmente estável) nas regiões que requerem um Δt muito pequeno para o método explícito, e um algoritmo explícito nas regiões que podem ser integradas c/ problemas com este Δt com um operador explícito!

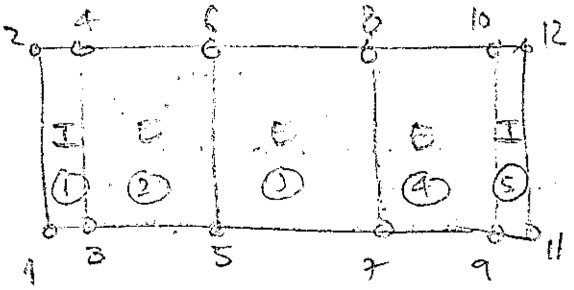
Ingredientes Básicos

\# Um operador implícito

\# Um operador explícito preditor-corretor, construído de forma compatível com um dado operador implícito

\# Uma equação de equilíbrio compatível

Considere um modelo de elementos finitos nos quais os elementos são divididos em 2 grupos, um IMPLÍCITO (I) e outro EXPLÍCITO (E).



$\underset{\sim}{M}^I$, $\underset{\sim}{K}^I$

$\underset{\sim}{M}^E$, $\underset{\sim}{K}^E$, $\underset{\sim}{M}^E$ diagonal

Portanto,

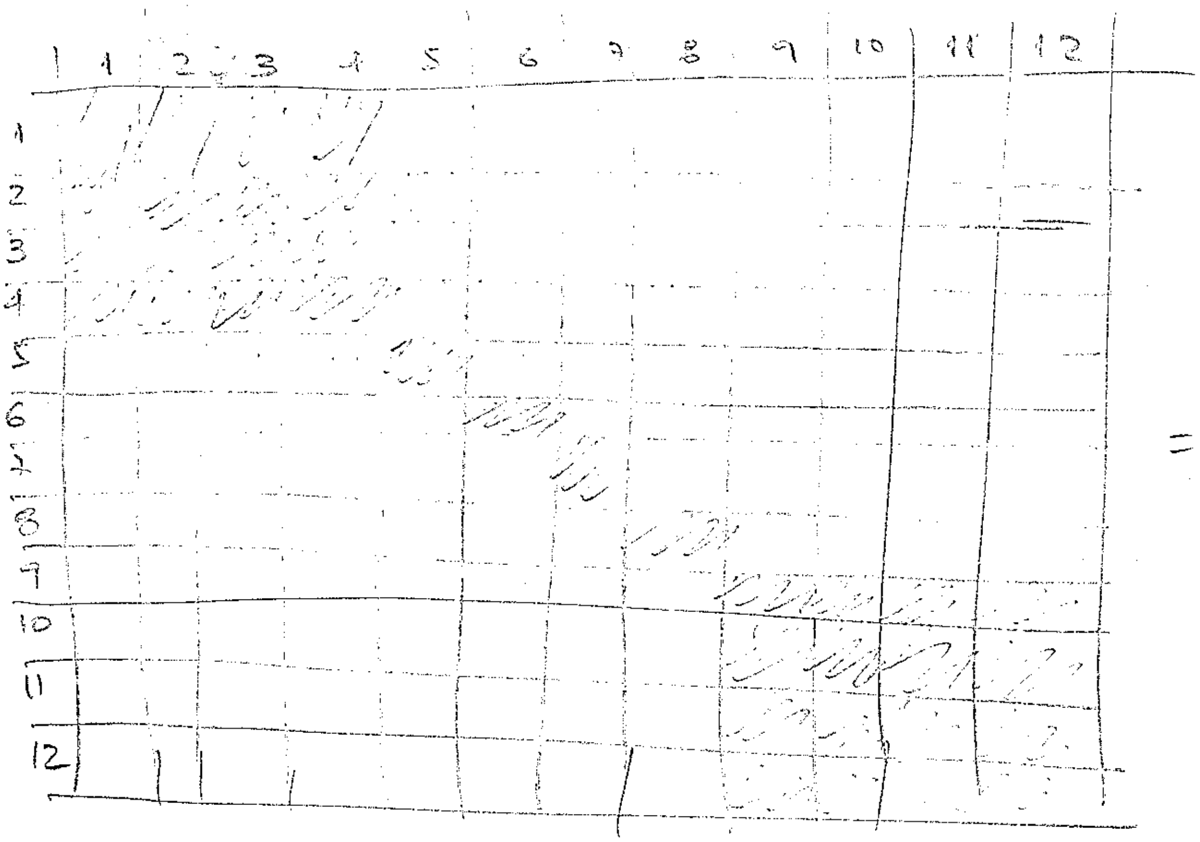
$$\boxed{\underset{\sim}{M}\,\underset{\sim}{v}_{n+1} + \underset{\sim}{K}^I \underset{\sim}{d}_{n+1} + \underset{\sim}{K}^E \underset{\sim}{\tilde{d}}_{n+1} = \underset{\sim}{F}_{n+1}}$$

onde
$$\underset{\sim}{M} = \underset{\sim}{M}^I + \underset{\sim}{M}^E$$
$$\underset{\sim}{K} = \underset{\sim}{K}^I + \underset{\sim}{K}^E$$
$$\underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{F}^I + \underset{\sim}{F}^E .$$

Substituindo-se as expressões correspondentes, chegamos a,

$$\boxed{\begin{array}{l} \underset{\sim}{M}^{*}\, \underset{\sim}{v}_{n+1} = \underset{\sim}{F}_{n+1} - \underset{\sim}{K}\, \bar{\underset{\sim}{d}}_{n+1} \\ \\ \underset{\sim}{M}^{*} = \underset{\sim}{M} + \alpha \Delta t\, \underset{\sim}{K}^{I} \end{array}}$$

Note que a matriz de massa efetiva só é afetada na parte implícita da partição. Além disso, a contribuição da matriz de rigidez da partição implícita resulta numa estrutura em banda (skyline) somente nas regiões correspondentes a conetividade dos elementos implícitos.



$$= \underset{\sim}{M}^{*}$$

ou seja,

$$(\underset{\sim}{M}^{*})^{1} = \underset{\sim}{M}^{1} + \alpha \Delta t\, \underline{K}^{1}$$

$$(\underset{\sim}{M}^{*})^{2} = \underset{\sim}{M}^{2} \quad \text{(Diagonal)}$$

$$(\underset{\sim}{M}^{*})^{3} = \underset{\sim}{M}^{3} \quad \text{(Diagonal)}$$

$$(\underset{\sim}{M}^{*})^{4} = \underset{\sim}{M}^{4} \quad \text{(Diagonal)}$$

$$(\underset{\sim}{M}^{*})^{5} = \underset{\sim}{M}^{5} + \alpha \Delta t\, \underline{K}^{5}$$

Observação

Se os elementos correspondentes às partições I e E não mudam ao longo do tempo (PARTIÇÃO-FIXA), os esquemas I/E são facilmente implementados em códigos de elementos finitos que utilizam um solucionador skyline.

Algoritmos Preditores-multicorretores

$i = 0$ (contador da iteração)

$$\left.\begin{aligned} \underset{\sim}{d}^{(0)}_{n+1} &= \tilde{\underset{\sim}{d}}_{n+1} = \underset{\sim}{d}_{n} + (1-\alpha)\Delta t\, \underset{\sim}{v}_{n} \\ \underset{\sim}{v}^{(0)}_{n+1} &= \underset{\sim}{0} \end{aligned}\right\} \text{PREDIÇÃO}$$

```
for i=0,1,2, ..., until convergence do
    $\Delta \underset{\sim}{F}_{n+1} = \underset{e=1}{\overset{nel}{\mathbb{A}}} \left( \underset{\sim}{f}^{ext}_{n+1} - \underset{\sim}{m}^e \underset{\sim}{v}^{e(i)}_{n+1} - \underset{\sim}{k}^e \underset{\sim}{d}^{e(i)}_{n+1} \right)$
    $\underset{\sim}{M}^* \Delta \underset{\sim}{v} = \Delta \underset{\sim}{F}^{(i)}_{n+1}$
    $\underset{\sim}{v}^{(i)}_{n+1} = \underset{\sim}{v}^{(i)}_{n+1} + \Delta \underset{\sim}{v}$
    $\underset{\sim}{d}^{(i)}_{n+1} = \underset{\sim}{d}^{(i-1)}_{n+1} + \alpha \Delta t \Delta \underset{\sim}{v}^{(i)}_{n+1}$
end do
```

A definição de $\underset{\sim}{M}^*$ se origina da equação de equilíbrio discreta. Para métodos I/E ela tem a forma,

$$\boxed{\underset{\sim}{M} \underset{\sim}{v}^{(i+1)}_{n+1} + \underset{\sim}{K}^I \underset{\sim}{d}^{(i+1)}_{n+1} + \underset{\sim}{K}^E \underset{\sim}{d}^{(i)}_{n+1} = \underset{\sim}{F}_{n+1}}$$

o que significa que,

$$\boxed{\underset{\sim}{M}^* = \underset{\sim}{M} + \alpha \Delta t \underset{\sim}{K}^I}$$

Observações

#1. Se apenas 1 passo é efetuado, o algoritmo é equivalente ao anterior.

#2. Uma análise completa da estabilidade do algoritmo PMC não foi efetuada até a presente data. Entretanto, pode-se mostrar que cada passo aumenta a ordem de precisão do método. Ou seja, ele é ao menos $O(\Delta t^2)$!

#3. Note que da forma que o vetor de resíduos $(\Delta \underline{F}^*)$ foi escrito, há uma independência em relação à consideração da massa. Ou seja, é possível formular um algoritmo explícito preditor-multicorretor no qual a massa que entra no cálculo de $\Delta \underline{F}^*$ é consistente. Ou seja, o algoritmo irá convergir p/ a solução implícita correspondente, numa iteração tipo Jacobi. De forma geral, qualquer que seja a forma de $\underline{M}^*$, se no lado direito a massa for consistente, o algoritmo irá convergir p/ a solução implícita correspondente.

6. Problemas Hiperbólicos

6.0. Preliminares

Bibliografia

- C. Johnson – "Numerical Solutions of Partial Differential Equations by the Finite Element Method"., Cambridge Press, 1987 (Cap. 9)
- O. C. Zienkiewicz e R.L. Taylor, "The Finite Element Method", 4th Edição, Vol. 2, 1991, (Cap. 12).
- A.N. Brooks e T.J.R. Hughes, "Streamline Upwind/Petrov-Galerkin Formulations for Convection Dominated Flows with Particular Emphasis on the Incompressible Navier-Stokes Equations", Comp. Meth. App. Mech. Engng., 32, pp. 199-259, 1982.

Alguns Conceitos Matemáticos

Seja a equação de convecção-difusão,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}(u\beta) + \sigma u - \varepsilon \nabla^2 u = 0 \quad \text{em} \quad \Omega \times I$$

u – escalar representando uma qtidade a ser transportada (concentração de um fluido, por exemplo).

β – campo de velocidades conhecido
$\beta \in \mathbb{R}^{nsd}$, isto é $\beta = (\beta_x, \beta_y)$ em $\mathbb{R}^2$, ou $\beta = (\beta_x, \beta_y, \beta_z)$ em $\mathbb{R}^3$.

σ – coeficiente de absorção

ε – coeficiente de difusão.

$\Omega \in \mathbb{R}^{nsd}$ e $I = [0, T]$

A equação acima é do tipo hiperbólica-parabólica. O caráter hiperbólico ou parabólico depende fundamentalmente da magnitude das grandezas $\underset{\sim}{\beta}$ e ε. Se ε for pequeno, a equação é predominantemente hiperbólica. Em particular, se $\varepsilon = 0$, temos a equação puramente hiperbólica,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}(u\underset{\sim}{\beta}) + \sigma u = 0 \quad \text{em} \quad \Omega \times I$$

ou

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \underset{\sim}{\beta}\cdot\nabla u + \gamma u = 0 \quad \text{em} \quad \Omega \times I$$

onde $\gamma = \sigma + \operatorname{div}\beta$. Considerando inicialmente o problema puramente hiperbólico estacionário ($u, \underset{\sim}{\beta}$ não dependem do tempo),

$$\underset{\sim}{\beta}\cdot\nabla u + \gamma u = 0 \quad \text{em} \quad \Omega.$$

As linhas de corrente (streamlines), correspondentes ao campo de velocidades $\underset{\sim}{\beta}$, são as curvas $\underset{\sim}{x}(s)$, $\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{nsd})$, soluções do sistema de EDO,

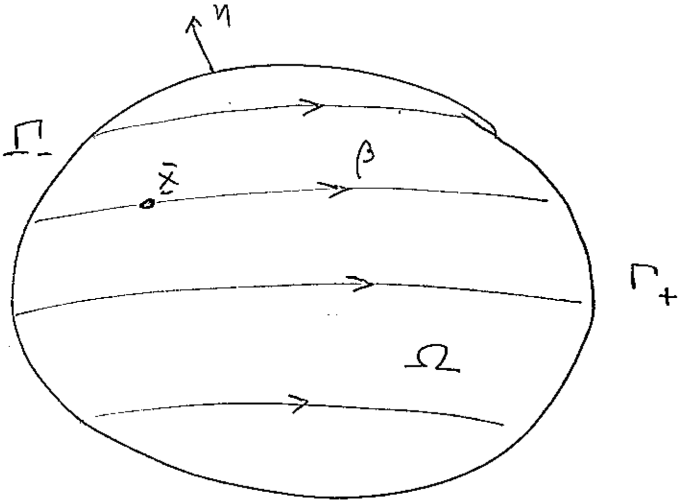
$$\frac{d x_i}{ds} = \beta_i(\underset{\sim}{x}) \quad , i = 1, \dots, n_{sd}.$$

Estas curvas, parametrizadas por s, são também chamadas de <u>CARACTERÍSTICAS</u>. Assumindo que $\underset{\sim}{\beta}$ é Lipschitz-contínua (isto é, $\|\beta(\underset{\sim}{x}) - \beta(\underset{\sim}{y})\| \leq C\|\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{y}\|, \forall \underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y} \in \Omega, C>0$)

↳ as curvas não se cruzam!

existe, para um pto $\bar{x} \in \Omega$, exatamente 1 característica $\underset{\sim}{x}(s)$ passando por $\underset{\sim}{\bar{x}}$, ou seja, existe somente uma única função $\underset{\sim}{x}(s)$, tal que

$$\begin{cases} \dfrac{d\underset{\sim}{x}_i}{ds} = \beta_i(\underset{\sim}{x}) \quad , i=1,\dots,n_{sd} \\ \underset{\sim}{x}(0) = \underset{\sim}{\bar{x}} \end{cases}$$



Agora se $\underset{\sim}{x}(s)$ é uma característica, então,

$$\frac{d}{ds}(u(\underset{\sim}{x}(s)) = \sum_{i=1}^{n_{sd}} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{dx_i}{ds} = \sum_{i=1}^{n_{sd}} \frac{\partial u}{\partial x_i}\beta_i = \beta \cdot \nabla u$$

Logo,

$$\frac{du(\underset{\sim}{x}(s))}{ds} + \gamma u(\underset{\sim}{x}(s)) = 0 \qquad (*)$$

Portanto, ao longo de cada característica a EDP é reduzida a uma EDO! Se u é conhecido em um pto da característica, então u pode ser determinado nos outros ptos $\underset{\sim}{x}(s)$ pela integração da eq. (*). Como um exemplo, seja u dado no contorno Γ_-, definido como

$$\Gamma_- = \{\underset{\sim}{x} \in \Gamma / \underset{\sim}{n}(\underset{\sim}{x}) \cdot \underset{\sim}{\beta}(\underset{\sim}{x}) < 0\}$$

onde $\underset{\sim}{n}(\underset{\sim}{x})$ é o unitário normal apontando p/ fora de Ω.

A funçã u em $\bar{x} \in \Omega$ pode ser obtida por integraçã ao longo da característica passando por $\hat{x}$ e começando em Γ_-. Como conseqüência, os efeitos da equaçã de convecçã são propagados

AO LONGO das características!

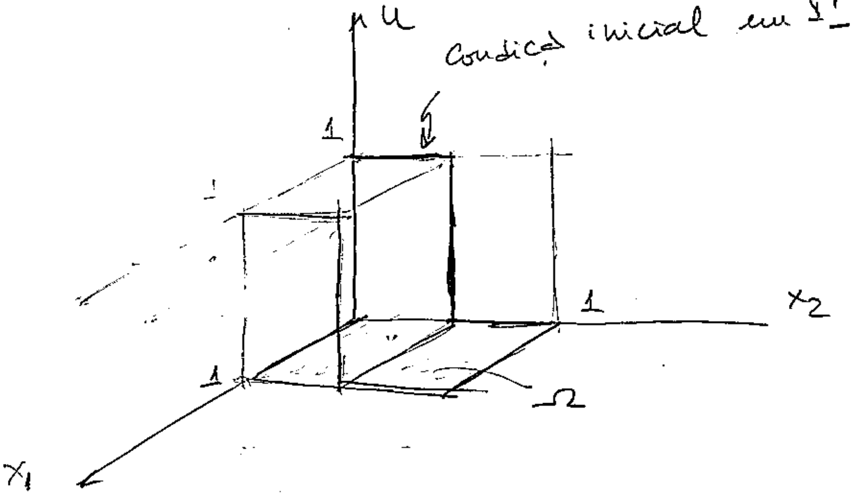
É importante notar que a soluçã u pode ser DESCONTÍNUA através da característica. Por exemplo, se u dada em Γ_- possuir uma descontinuidade de salto em $\bar{x} \in \Gamma$, então a soluçã u será descontínua através de toda a característica passando em $\bar{x}$!

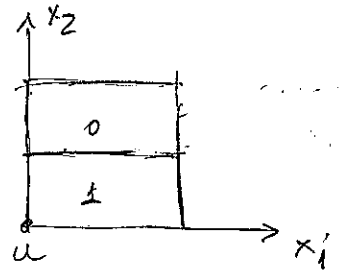
Exemplo:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0 \quad \text{em} \quad \{ x \in \mathbb{R}^2 / \ 0 < x_i < 1 \ , i = 1,2 \}$$

$$u(0, x_2) = 1 \quad p/ \quad 0 < x_2 < 1/2 \ , \ u(0, x_2) = 0 \quad \tfrac{1}{2} < x_2 < 1$$

o que corresponde a tomar $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 0$ e $\gamma = 0$.





Soluçã $\begin{cases} u(x_1, x_2) = 1 & 0 < x_2 < 1/2 , \ 0 < x_1 < 1 \\ u(x_1, x_2) = 0 & 1/2 < x_2 < 1 \ , \ 0 < x_1 < 1 \end{cases}$

Seja o problema dependente do tempo, substituindo t p/ x_0 e $\beta_0 = 1$, então a equação pode ser reescrita como,

$$\sum_{i=0}^{n_{sd}} \beta_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + \gamma u = 0$$

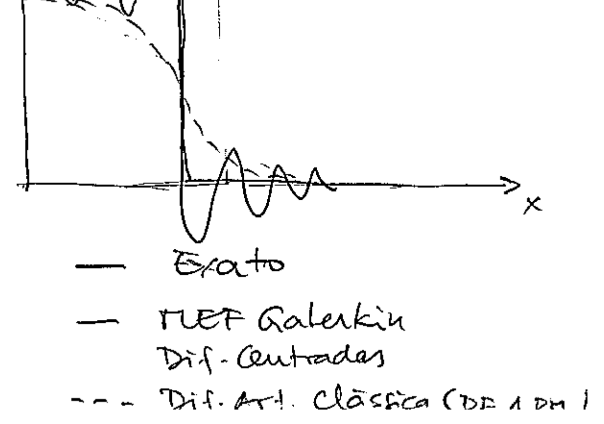
que é formalmente idêntica ao problema estacionário. Em particular, as características desta equação são as curvas $(\underline{x}(t), t)$ no espaço-tempo, onde $\underline{x}(t)$ satisfaz a

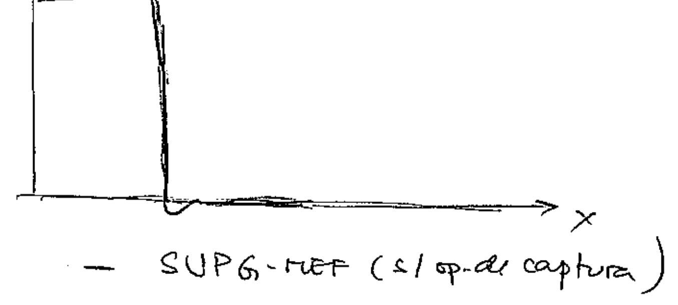
$$\frac{d x_i}{dt} = \beta_i(\underline{x}, t) \quad , \quad i = 1, \dots, n_{sd}$$

(onde s é escolhido como $t = x_0$, correspondendo a equação $\frac{dx_0}{ds} = \beta_0 = 1$!)

Métodos Numéricos p/ Equações Hiperbólicas

- Métodos de características
- Diferenças Finitas
- Elementos Finitos





6.1. Problema 1-D em Regime Permanente

Seja a equação de convecção-difusão 1-D, em regime permanente,

$$\begin{cases} \beta \dfrac{du}{dx} - \varepsilon \dfrac{d^2u}{dx^2} + f = 0 & , \text{em } \Omega = [0, L] . \\ u(0) = u_0 \ ; \ u(L) = u_L \end{cases}$$

onde u é a função a ser transportada, β, a velocidade, ε o termo difusivo e f a fonte. A forma variacional de Galerkin é,

$$\int_0^L w \left(\beta \frac{du}{dx} - \varepsilon \frac{d^2u}{dx^2} + f \right) dx = 0$$

onde $w \in \mathcal{V}$ e $u \in \mathcal{S}$, os espaços usuais definidos anterior-mente. Discretizando-se pelo MEF, chegamos a, para o i-ésimo nó da malha,

↳ ~~funções lineares~~

$u = \Sigma N_i d_i \ ; \ w = \Sigma N_i c_i$

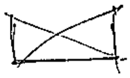
$$k_{ij} d_j + f_i = 0$$

onde

$$k_{ij} = \int_0^L \left(N_i \beta \frac{dN_j}{dx} + \frac{dN}{dx} \varepsilon \frac{dN}{dx} \right) dx$$

$$f_i = \int_0^L N_i f \, dx$$

Deve-se salientar agora que, devido a presença do termo convectivo, a matriz de rigidez torna-se NÃO-SIMÉTRICA. Entretanto, tal problema é de menor importância, se comparado as dificuldades encontradas na formulação.

Utilizando-se N_i lineares () e elementos de tamanho h, uma equação "assemblada" típica tem a forma,

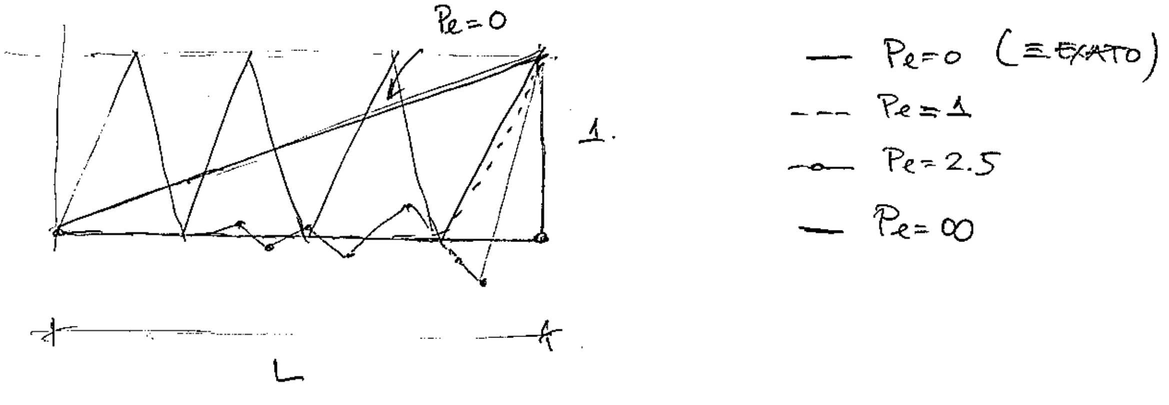
$$\boxed{(-Pe-1)\,d_{i-1} + 2d_i + (Pe-1)\,d_{i+1} + \frac{fh^2}{\varepsilon} = 0}$$

onde $\boxed{P_e = \frac{\beta h}{2\varepsilon}}$ é o número de Peclet da malha.

A equação acima é idêntica àquela obtida pela aproximação de diferenças centrais, isto é,

$$\frac{du}{dx} = \frac{d_{i+1}-d_i}{2h} \; ; \; \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d_{i+1}-2d_i+d_{i-1}}{h^2}$$

Tomando-se como c.c. $u(0)=0$ e $u(L)=1$, temos as seguintes soluções qdo $Pe\to\infty$ (convecção pura):



Ou seja, à medida que $Pe\to\infty$, a solução deteriora, e para $Pe=\infty$ ela já não tem mais relação com o problema original. Isto é em parte um problema de condições de contorno. Qdo NÃO se considera a difusão ($Pe=\infty$) somente uma única condição de contorno pode ser especificada (em Γ_-). Qdo. a difusão é pequena, a condição $U(L)=1$ só é "sentida" numa região muito. próxima e a formação de uma camada limite torna-se evidente da solução exata deste problema,

$$\boxed{u = \frac{1 - e^{\beta x/\varepsilon}}{1 - e^{\beta L/\varepsilon}}}$$

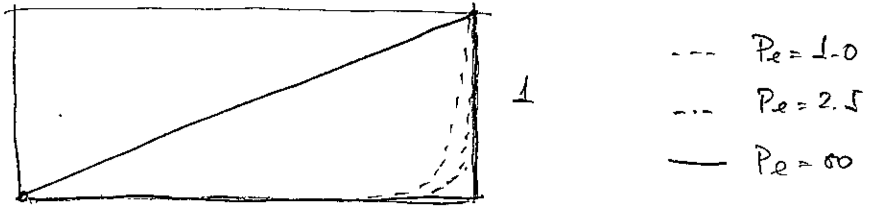
Motivados pelo fato de que as informações se propagam na direção de β, o MDF utiliza uma outra aproximação (1 pto à montante) para a 1ª derivada, isto é,

$$\frac{du}{dx} = \frac{d_i - d_{i-1}}{h}$$

resultando em,

$$\boxed{(-2P_e - 1)\, d_{i-1} + (2+2P_e)\, d_i - d_{i+1} + \frac{fh^2}{\varepsilon} = 0}$$

Com esta aproximação, soluções realísticas (mas nem sempre precisas) podem ser obtidas p/ $\forall$ Pe. Em particular, qdo $P_e = \infty$, soluções nodalmente exatas são obtidas



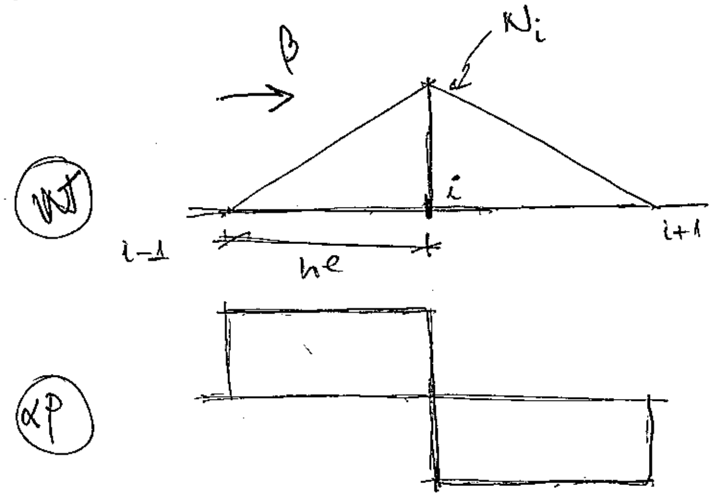
O problema agora é : Como obter boas soluções p/ o MEF ? (A receita Galerkin NÃO é + válida !!!).

Uma possibilidade é a utilização de funções peso tipo PETROV-GALERKIN (PG), onde $w \notin \mathcal{V}$. Em particular, para elementos lineares, a função peso é tal que,

$$\boxed{\tilde{w} = w + \alpha p}$$

onde p é tal que $\int_L p\,dx = \pm \frac{h}{2}$ (área da fção de interpolação!)

Várias formas são possíveis, uma é a função descontínua



$$\alpha p = \alpha \frac{h}{2} \frac{dN_i}{dx} (\text{sgn}\,\beta)$$

onde o sinal depende se a velocidade "entra" no nó (+) ou sai (−). Com a expressão acima a equação "assemblada" torna-se:

$$\boxed{[-P_e(\alpha+1) - 1]\, d_{i-1} + [2 + 2\alpha(P_e)]\, d_i + [-P_e(\alpha-1) - 1]\, d_{i+1} + \frac{f h^2}{\varepsilon} = 0}$$

É claro que $\left\{ \begin{array}{lllll} \alpha = 0 & \Rightarrow & \text{GALERKIN} & \Rightarrow \text{EXATO} & Pe = 0 \\ \alpha = 1 & \Rightarrow & \text{1PM} & \Rightarrow \text{EXATO} & Pe = \infty \end{array} \right.$

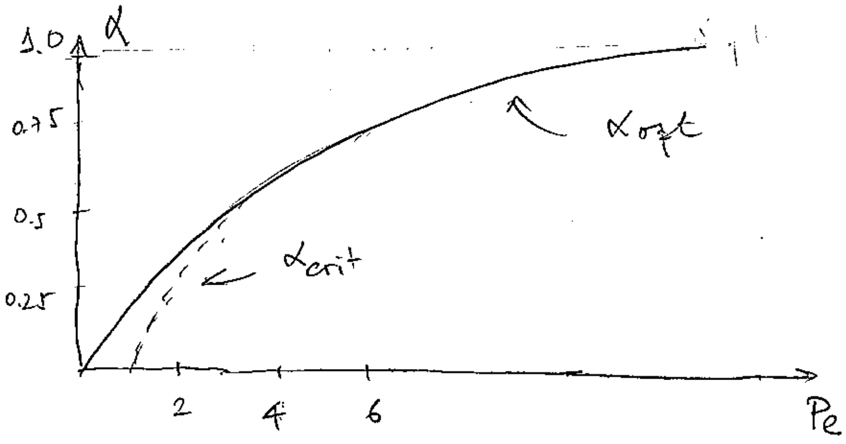
Valendo-se da solução analítica do problema pode-se ajustar α de tal forma que a solução exata seja obtida p/ $\forall\, Pe$:

$$\boxed{|\alpha| = \alpha_{opt} = \coth|Pe| - \frac{1}{|Pe|}}$$

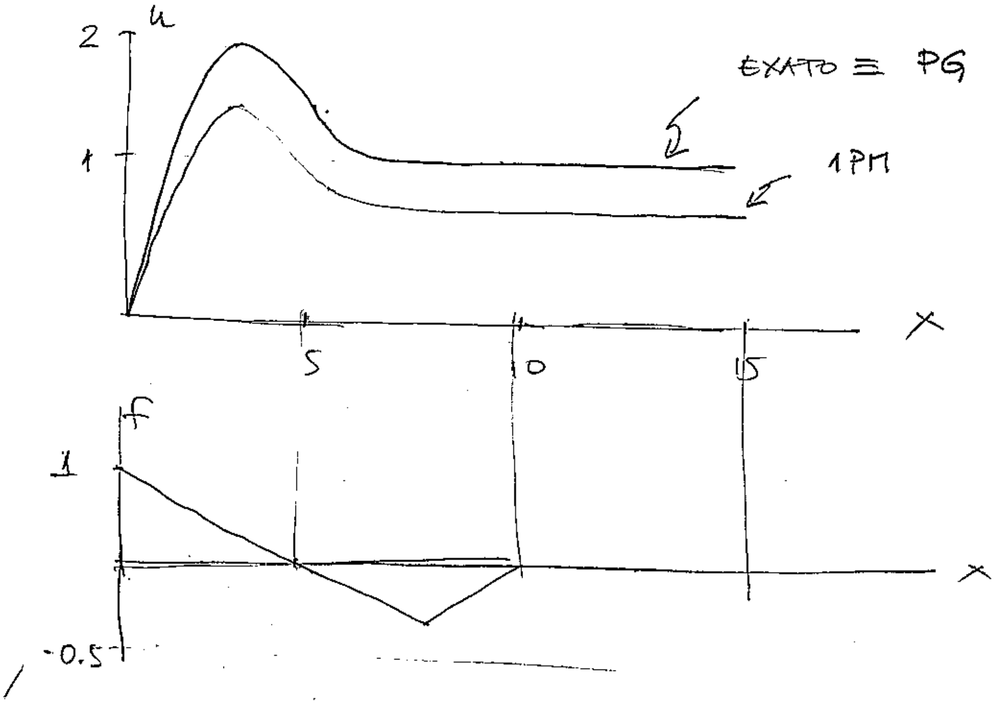
Verifica-se também se

$$|\alpha| > \alpha_{crit} = 1 - \frac{1}{|Pe|}$$

oscilações espúrias nunca irão ocorrer. Portanto, como consequência, oscilações irão ocorrer no Método de Galerkin ($\alpha = 0$) qdo $Pe > 1$!



Pode-se mostrar que se $\alpha = \alpha_{opt}$ $\forall e$, $e = 1, 2 .. nel$ valores nodalmente exatos tb serão obtidos, caso $f = f(x)$ e $\beta = \beta(x)$. Entretanto, deve-se salientar que a ponderação PG deve ser aplicada a todos os termos da equação, inclusive ao termo fonte. Seja o exemplo proposto por Leonard: $\frac{du}{dx} = f$



Observação

No que diz respeito ao termo convectivo, as funções de ponderação podem ser descontínuas, que as integrais,

$$\int_0^L \left(\tilde{w}\beta \frac{du}{dx}\right)dx = \int_0^L \left(w\beta \frac{du}{dx} + p\beta \frac{du}{dx}\right)dx$$

fazem sentido. Entretanto, o termo difusivo é geralmente obtido integrando-se por partes a integral.

$$\int_0^L \tilde{w}\varepsilon \frac{d^2u}{dx^2}\, dx = \int_0^L w\,\varepsilon \frac{d^2u}{dx^2}\, dx + \int_0^L p\,\varepsilon \frac{d^2u}{dx^2}\, dx$$

Aqui a descontinuidade de p causa problemas na integração por partes. Para evitar esta dificuldade, assume-se que a ponderação de PG é descontínua no interior dos elementos somente e a forma variacional torna-se,

$$\int_0^L w\left(\beta \frac{du}{dx} - \varepsilon \frac{d^2u}{dx^2} + f\right)dx + \sum_{e=1}^{nel} \int_0^L p\left(\beta \frac{du}{dx} - \varepsilon \frac{d^2u}{dx^2} + f\right)dx = 0$$

onde agora o termo difusivo da ponderação de PG é integrado diretamente, mostrando uma contribuição nula para elementos C^0 / Entretanto, a ponderação PG é variacionalmente CONSISTENTE, já que se u for a solução exata a EDP e/ou a Formulação variacional são identicamente satisfeitas!!

6.2. Generalização p/ Várias Dimensões - Streamline-Upwind Petrov-Galerkin (SUPG)

Difusão Artificial -

Pode-se verificar que o efeito do procedimento PG é equivalente a usar um procedimento Galerkin padrão adicionando-se uma difusividade

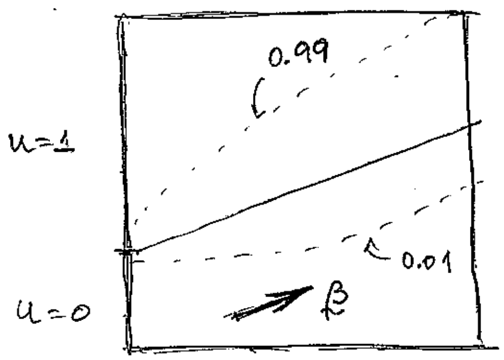
$$\boxed{k_b = \frac{1}{2} \alpha \beta h}$$

a equação diferencial original homogenea, que torna-se

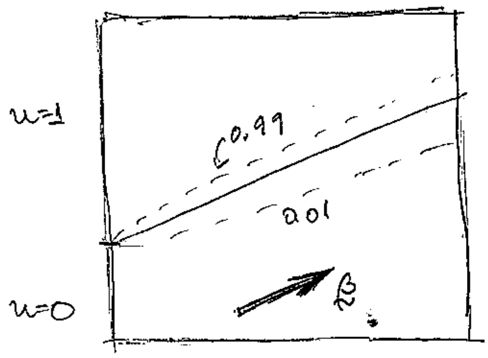
$$\beta \frac{du}{dx} - (k + k_b) \frac{d^2u}{dx^2} + \cancel{f} = 0$$

Aplicando-se Galerkin, ~~[illegible]~~, chega-se a mesma expressão obtida p/ procedimento PG (VERIFIQUE!)

Este conceito de DIFUSÃO ARTIFICIAL é mais fácil de implementar em 2D/3D e possui uma interpretação física + simples. Entretanto, além de nos influenciar os termos fonte, sofrem do problema de difusão CRUZADA ("CROSSWIND DIFUSION"), suponha o seguinte exemplo proposto por Leonard:



Difusão Artificial



Difusão na Direção do Escoamento
STREAMLINE UPWIND

Fica aparente que só é necessário difusão artificial na direção do escoamento. Em várias dimensões,

$$\underset{\sim}{k}_b = \tilde{k}\,\frac{\beta}{\|\beta\|} \otimes \frac{\beta}{\|\beta\|} = \frac{\tilde{k}}{\|\beta\|^2}\begin{bmatrix}\beta_x^2 & \beta_x\beta_y \\ \beta_x\beta_y & \beta_y^2\end{bmatrix}$$

$\otimes$ Produto Tensorial

$\underset{\sim}{x} \otimes \underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{x}\,\underset{\sim}{y}^T$

Especificamente, se $\beta_x = 1$ e $\beta_y = 0$,

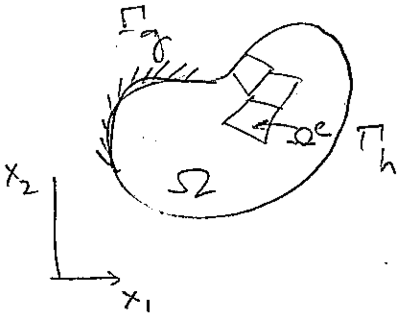
$$\underset{\sim}{k}_b = \tilde{k}\begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix}$$ → age na direção do escoamento

Formulaçã SUPG

- FORMA FORTE

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^{n_{sd}}$, $n_{sd} = 1, 2, \text{ou } 3$, com contorno Γ, $\underset{\sim}{x} = \{x_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, n_{sd}$, um ponto $\in \Omega$ e $\underset{\sim}{n} = \{n_i\}$ a normal externa a Γ. Seja Γ_g e Γ_h subconjuntos de Γ, satisfazendo a,

$$\begin{cases} \overline{\Gamma_g \cup \Gamma_h} = \Gamma \\ \Gamma_g \cap \Gamma_h = \phi \end{cases}$$



Considere uma discretizaçã Ω^e, $e = 1, 2, \ldots, nel$, tal que Γ^e é o contorno de Ω^e e assumindo que

$$\begin{cases} \bigcup_e \overline{\Omega}^e = \Omega \\ \bigcap_e \Omega^e = \phi \end{cases}$$

Pode-se definir o contorno INTERIOR, Γ_{int}

$$\Gamma_{int} = \bigcup_e \Gamma^e - \Gamma$$

A equaçã de convecçã-difusã linear em regime transiente pode ser escrita como,

$$u_{,t} + \sigma_{i,i} = f$$

onde $\sigma_i = \sigma_i^a + \sigma_i^d$ ≡ FLUXO TOTAL

$\sigma_i^a = \beta_i u$ ≡ FLUXO CONVECTIVO

$\sigma_i^d = -k_{ij} u_{,j}$ ≡ FLUXO DIFUSIVO onde $f = f(\underset{\sim}{x},t)$, $\beta_i = \beta_i(\underset{\sim}{x},t)$ e $k_{ij} = k_{ij}(\underset{\sim}{x})$ e $div(\underset{\sim}{\beta}) = 0$.

As condições de contorno,

$$u = g \quad \text{em} \quad \Gamma_g$$

$$-\sigma_n^d = \sigma_i^d n_i = h \quad \text{em} \quad \Gamma_h$$

e a condição inicial, $u(\underset{\sim}{x},0) = u_0$ terminam a especificação do problema de valor inicial.

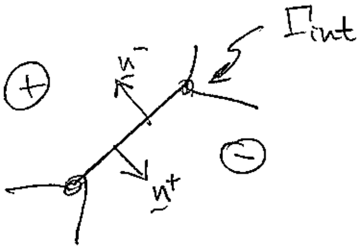
- Formulação Variacional

Como visto anteriormente (1-D) a formulação PG requer funções peso descontínuas, da forma,

$$\tilde{w} = w + p$$

onde w é contínua por partes e p é a contribuição SUPG (descontínua). Entretanto w, p são suaves no interior dos elementos.

Seja $\underset{\sim}{x} \in \Gamma_{int}$. Designando, de forma arbitrária, um lado de Γ_{int} como ⊕ e o outro como ⊖, e $\underset{\sim}{n}^+$, $\underset{\sim}{n}^-$ respectivamente vetores unitários normais a Γ_{int} em $\underset{\sim}{x}$. É claro que $\underset{\sim}{n}^- = -\underset{\sim}{n}^+$. Sejam



$\sigma_i^+ \rightarrow \sigma_i$ aproximado do lado ⊕

$\sigma_i^- \rightarrow \sigma_i$ " " " ⊖

O salto em σ_n em $\underset{\sim}{x}$ é:

$$[\sigma_n] = (\sigma_i^+ - \sigma_i^-)\, n_i^+ = \sigma_i^+ n_i^+ + \sigma_i^- n_i^-$$

A formulação variacional é:

$$\int_\Omega \tilde{w}(\dot{u} + \sigma_{i,i} - f)\,d\Omega = \int_\Omega w\dot{u}\,d\Omega + \int_\Omega w\,\sigma^a_{i,i} +$$

$$\int_\Omega w_{,i}\,\sigma^d_i\,d\Omega + \sum_{e=1}^{nel}\int_{\Omega^e} p(\dot{u} + \sigma_{i,i} - f)\,d\Omega = \int_\Omega wf + \int_{\Gamma_h} wh\,d\Gamma$$

onde, a contribuição de Galerkin do fluxo difusivo foi integrado por partes, da forma usual.

Integrando-se a equação acima por partes tem-se

$$\sum_e \int_{\Omega^e} \tilde{w}\,\underbrace{(\dot{u} + \sigma_{i,i} - f)}_{\text{Euler-Lagrange}}\,d\Omega - \int_{\Gamma_h} w(\sigma^d_n + h)\,d\Gamma - \int_{\Gamma_{int}} w[\sigma^d_n]\,d\Gamma = 0$$

onde agora as Eqs. de Euler-Lagrange são restritas ao interior dos elementos e a continuidade do fluxo difusivo ao longo do contorno dos elementos implica em:

$[\sigma^d_n] = 0$ ao longo de Γ_{int}.

Observação

Se as seguintes condições são válidas

(i) $k_{ij} = k\,\delta_{ij}$ — ISOTROPIA

(ii) u é interpolado p/ funções lineares

Então, no interior dos elementos:

$$\boxed{\sigma^{d}_{i,i} = 0}$$

ou seja, a contribuição SUPG não afeta o termo difusivo.

- A função SUPG

O termo convectivo na formulação SUPG é

$$\int_{\Omega} \tilde{w}\, \beta_i u_{,i}\, d\Omega = \int_{\Omega} w\, \beta_i u_{,i}\, d\Omega + \sum_e \int_{\Omega^e} p\, \beta_i u_{,i}\, d\Omega^e$$

Escolhendo-se p como

$$p = \tilde{k} \frac{\beta_j}{\|\beta\|} w_{,j} \quad ,$$

a função p é descontínua, e o termo convectivo para um elemento é,

$$\int_{\Omega^e} \tilde{k} \frac{\beta_j}{\|\beta\|} w_{,j}\, \beta_i u_{,i}\, d\Omega^e$$

que é equivalente a, se β for cte no elemento:

$$\int_{\Omega^e} \frac{\tilde{k}}{\|\beta\|} \nabla w . \beta \otimes \beta\, \nabla u\, d\Omega^e$$

onde $\beta \otimes \beta$ é o STREAMLINE DIFFUSION TENSOR.

$$\tau_{SUPG} = \left(\left(\frac{2}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{2\,\|\beta\|}{h}\right)^2 + 9\left(\frac{4\varepsilon}{h^2}\right)^2 \right)^{-1/2}$$

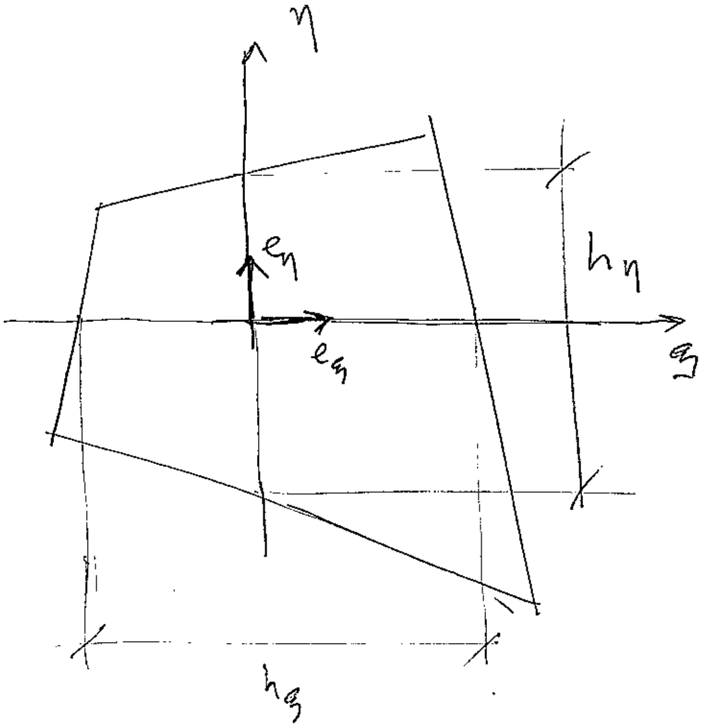
Codina, Shakib, Tezduyar...

$$h = 2 \sum_{a=1}^{nnos} \left(\left| \frac{\beta}{\|\beta\|} \cdot \nabla N_a \right| \right)^{-1}$$

(Tezduyar e co-autores)

Pode-se mostrar (ver JOHNSON) que $\tilde{k} = O(h)$.

No caso multidimensional, temos para um elemento isoparamétrico bilinear,



$$\tilde{k} = (\tilde{\xi}\beta_\xi h_\xi + \tilde{\eta}\beta_\eta h_\eta)/2$$

$$\tilde{\xi} = (\coth\alpha_\xi) - 1/\alpha_\xi$$

$$\tilde{\eta} = (\coth\alpha_\eta) - 1/\alpha_\eta$$

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_\xi = \beta_\xi h_\xi / 2k \\ \alpha_\eta = \beta_\eta h_\eta / 2k\end{array}\right\rangle \text{Nos de Peclet Direcionais}$$

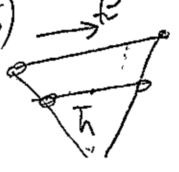
$$\left\{\begin{array}{l}\beta_\xi = \underline{e}_\xi \cdot \beta \\ \beta_\eta = \underline{e}_\eta \cdot \beta\end{array}\right.$$

Entretanto, esta não é a única possibilidade. Mais importante que a escolha de $\tilde{k}$ é a estrutura do termo SUPG. Outras escolhas são possíveis, como as sugeridas p/ o caso transiente (Elem. Bilineares)

- Hughes → $\tilde{k} = (\tilde{\xi}\beta_\xi h_\xi + \tilde{\eta}\beta_\eta h_\eta)/\sqrt{15}$
- Tezduyar → $\tilde{k} = \bar{h}/2$, $\bar{h} = 2\left(\sum_{a=1}^{4}\left|\frac{\beta}{\|\beta\|}\cdot\nabla N_a\right|\right)^{-1}$

Triângulos

- Steady-State – Mizukami (85)
- Transiente – $\tilde{k} = \bar{h}/2$ —



$\tilde{\tau} = \Delta t/2$

- Exemplo: Triângulo linear em Coordenadas de Área p/ Equação de Convecção-Difusão linear

(i) Galerkin : $w^h = \sum N_a c_a$; $u^h = \sum N_a d_a$

- Matriz de Difusão (ORTOTRÓPICO)

$$\underset{\sim}{K}^e_D = t^e \int_{\Omega^e} \underset{\sim}{B}^T \underset{\sim}{D} \underset{\sim}{B} \, d\Omega = t^e \int_{\Omega} \frac{1}{2A^e} \begin{bmatrix} y_{23} & x_{32} \\ y_{31} & x_{13} \\ y_{12} & x_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & 0 \\ 0 & k_{22} \end{bmatrix} \frac{1}{2A^e} \begin{bmatrix} y_{23} & y_{31} & y_{12} \\ x_{32} & x_{13} & x_{21} \end{bmatrix} d\Omega =$$

$$= \frac{t^e}{4A^e} \begin{bmatrix} y_{23} k_{11} y_{23} + x_{32} k_{22} x_{32} & y_{23} k_{11} y_{31} + x_{32} k_{22} x_{13} & y_{23} k_{11} y_{12} + x_{32} k_{22} x_{21} \\ & y_{31} k_{11} y_{31} + x_{13} k_{22} x_{13} & y_{31} k_{11} y_{12} + x_{13} k_{22} x_{21} \\ \text{SIM} & & y_{12} k_{11} y_{12} + x_{21} k_{22} x_{21} \end{bmatrix}$$

- Matriz de Massa Consistente

$$\underset{\sim}{M}^e_G = t^e \int_{\Omega^e} \underset{\sim}{N}^T \underset{\sim}{N} \, d\Omega = t^e \int_{\Omega^e} \begin{bmatrix} \xi_1 \xi_1 & \xi_1 \xi_2 & \xi_1 \xi_3 \\ \xi_2 \xi_1 & \xi_2 \xi_2 & \xi_2 \xi_3 \\ \xi_3 \xi_1 & \xi_3 \xi_2 & \xi_3 \xi_3 \end{bmatrix} d\Omega = \frac{t^e A^e}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

- Matriz de Convecção

$$\underset{\sim}{K}^e_{AG} = [\underset{\sim}{K}^e_A] = t^e \beta_x \int_{\Omega^e} N_a \frac{\partial N_b}{\partial x} d\Omega + t^e \beta_y \int_{\Omega^e} N_a \frac{\partial N_b}{\partial y} d\Omega^e$$

$$\underset{\sim}{K}^e_{AG} = t^e \beta_x \int_{\Omega^e} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{bmatrix} d\Omega^e + t^e \beta_y \int_{\Omega^e} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y} \end{bmatrix} d\Omega$$

$$\underset{\sim}{K}^e_A = \frac{t^e \beta_x}{6} \begin{bmatrix} y_{23} & y_{31} & y_{12} \\ y_{23} & y_{31} & y_{12} \\ y_{23} & y_{31} & y_{12} \end{bmatrix} + \frac{t^e \beta_y}{6} \begin{bmatrix} x_{32} & x_{13} & x_{21} \\ x_{32} & x_{13} & x_{21} \\ x_{32} & x_{13} & x_{21} \end{bmatrix}$$

Observações

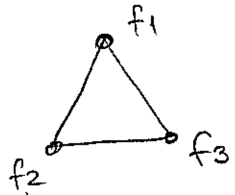
- $$\int_{\Omega^e} N_1 \frac{\partial N_1}{\partial x} d\Omega^e = \int_{\Omega^e} N_1 \left[\frac{\partial N_1}{\partial \xi_1}\frac{\partial \xi_1}{\partial x} + \frac{\partial N_1}{\partial \xi_2}\frac{\partial \xi_2}{\partial x} + \frac{\partial N_1}{\partial \xi_3}\frac{\partial \xi_3}{\partial x} \right] d\Omega^e =$$

Mas $N_1 = \xi_1$, portanto,

$$= \int_{\Omega^e} \xi_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial x} d\Omega^e = \frac{y_{23}}{2A}\int_{\Omega^e} \xi_1 \, d\Omega^e = \frac{y_{23}}{2A} \cdot \frac{2A}{6} = \frac{y_{23}}{6} \; !$$

- $\underset{\sim}{K}^e_A$ é NÃO-SIMÉTRICA !

- Carga Consistente



$$\{f^e_G\} = t^e \int_{\Omega^e} N_a N_b f_b \quad , a = 1, 2, 3.$$

Logo,

$$\underset{\sim}{f}^e_G = \int_{\Omega} N^T N \underset{\sim}{f} = \frac{A}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix} =$$

$$= \frac{A}{12} \begin{bmatrix} 2f_1 + f_2 + f_3 \\ f_1 + 2f_2 + f_3 \\ f_1 + f_2 + 2f_3 \end{bmatrix}$$

Se $f_1 = f_2 = f_3 = f$

$$\underset{\sim}{f}^e_G = \frac{A}{3} \begin{Bmatrix} f \\ f \\ f \end{Bmatrix}$$

(ii) Petrov-Galerkin : $p = \tau \frac{\beta}{\|\beta\|} \cdot \nabla w$.

- Matriz de Massa.

$$M^e_{PG} = t^e \int_{\Omega^e} p \, \dot{u} \, d\Omega^e = t^e \int_{\Omega^e} \tau \frac{\beta}{\|\beta\|} \cdot \nabla w \; \dot{u} \, d\Omega^e =$$

$$= t^e \int_{\Omega^e} \frac{\tau}{\|\beta\|} \left(\beta_x w_{,x} + \beta_y w_{,y} \right) \dot{u} \, d\Omega^e =$$

$$= t^e \int_{\Omega^e} \frac{\tau}{\|\beta\|} \left(\beta_x w_{,x} \dot{u} + \beta_y w_{,y} \dot{u} \right) d\Omega^e .$$

Discretizando, $(w^h)^e = \sum_{a=1}^{nen} N_a c_a^e$ e $(\dot{u}^h)^e = \sum_{a=1}^{nen} N_a \dot{d}_a^e$, $a = 1,2,3$:

$$\left[\underset{\sim}{M}^e_{PG} \right] = t^e \int_{\Omega^e} \frac{\tau}{\|\beta\|} \beta_x \frac{\partial N_a}{\partial x} N_b \, d\Omega^e + t^e \int_{\Omega^e} \frac{\tau}{\|\beta\|} \beta_y \frac{\partial N_a}{\partial y} N_b \, d\Omega^e ,$$

$a, b = 1, 2, 3$

Como β e τ são ctes no elemento, temos:

$$\underset{\sim}{M}^e_{PG} = \frac{t^e \tau \beta_x}{6 \|\beta\|} \begin{bmatrix} y_{23} & y_{23} & y_{23} \\ y_{31} & y_{31} & y_{31} \\ y_{12} & y_{12} & y_{12} \end{bmatrix} + \frac{t^e \tau \beta_y}{6 \|\beta\|} \begin{bmatrix} x_{32} & x_{32} & x_{32} \\ x_{13} & x_{13} & x_{13} \\ x_{21} & x_{21} & x_{21} \end{bmatrix}$$

<u>Observação</u>

A correção de PG da matriz de massa tem a "estrutura" da matriz de advecção de Galerkin!

- Matriz de Convecção.

$$K^e_{APG} = t^e\int_{\Omega^e} p \cdot \beta \cdot \nabla u \, d\Omega^e = t^e\int_{\Omega^e} \tau \frac{\beta}{\|\beta\|} \cdot \nabla w \; \beta \cdot \nabla u \, d\Omega^e =$$

$$= t^e\int_{\Omega^e} \frac{\tau}{\|\beta\|} \nabla w \; \beta \otimes \beta \; \nabla u \, d\Omega^e$$

$$\beta \otimes \beta = \beta \cdot \beta^T = \begin{bmatrix} \beta_x\beta_x & \beta_x\beta_y \\ \beta_y\beta_x & \beta_y\beta_y \end{bmatrix}$$

Discretizando-se, temos:

$$\underset{\sim}{K}^e_{APG} = t^e\int_{\Omega^e} \frac{\tau}{\|\beta\|} \underset{\sim}{B}^T \begin{bmatrix} \beta_x\beta_x & \beta_y\beta_y \\ \beta_y\beta_x & \beta_y\beta_y \end{bmatrix} \underset{\sim}{B} \, d\Omega^e$$

Observação

A correção de PG no termo convectivo produz uma matriz com a "estrutura" de uma matriz de difusão, com um tensor constitutivo anisotrópico. ⟶ ①

- Correção da Carga Consistente.

$$\{f^e_{PG}\} = t^e\int_{\Omega^e} p_a N_b f_b \, d\Omega^e = t^e\int_{\Omega^e} \tau \frac{\beta}{\|\beta\|} \cdot \nabla N_a N_b f_b \, d\Omega^e =$$

$$= t^e\int_{\Omega^e} \frac{\tau}{\|\beta\|} \left[\beta_x \frac{\partial N_a}{\partial x} N_b f_b + \beta_y \frac{\partial N_a}{\partial y} N_b f_b \right] d\Omega^e \quad , a,b = 1,2,3$$

Ou ainda, segundo Codine (2000)

$$\tau = \left(\frac{2\|\beta\|}{h} + \frac{4\tilde{k}}{h^2} \right)^{-1}$$

e segundo Shakib, Hughes e Johan (1991)

$$\tau = \left(\left(\frac{2\|\beta\|}{h} \right)^2 + 9\left(\frac{4\tilde{k}}{h^2} \right) \right)^{-1/2}$$

Caso o problema seja transiente, inclui-se o termo $\frac{2}{\Delta t}$ ou $\left(\frac{2}{\Delta t}\right)^2$. Mas com cuidado!

Note que se $\|\beta\| << \tilde{k}$, τ será dominado pela parte difusiva e se $\|\beta\| >> \tilde{k}$, pela parte advectiva.

Uma outra idéia mais recente, Tezduyar e Osawa (2000) e usar relação de normas matriciais,

$$\underset{\sim}{m}^e ; \ \underline{m}^e_{PG}, \ \underline{K}^e_{D}, \ \underset{\sim}{K}^e_{AG}, \ \underline{K}^e_{APG}$$

definindo se,

$$\tau_{S1} = \|\underline{K}^e_{AG}\| / \|\underline{K}^e_{APG}\|$$

$$\tau_{S2} = \frac{\Delta t}{2} \|\underline{K}^e_{AG}\| / \|\underline{m}^e_{PG}\|$$

$$\tau_{S3} = \tau_{S1} \frac{\|\beta\|^2}{\tilde{k}} \frac{\|\underline{K}^e_{AG}\|}{\|\underline{K}^e_{APG}\|}$$

$$\tau_{SUPG} = \left(\frac{1}{\tau_{S1}^r} + \frac{1}{\tau_{S2}^r} + \frac{1}{\tau_{S3}^r} \right)^{1/r}$$

Note que em 1D:

$$\tau_{s1} = \frac{h}{2\beta}, \quad \tau_{s2} = \frac{\Delta t}{2}, \quad \tau_{s3} = \frac{h^2}{4\tilde{K}}$$

que é equivalente a fórmula de Codina!

Como notado por Donea e Huerta, nenhuma "fórmula" é ótima e para elementos do alta ordem, experimentos numéricos indicam que τ/p é o melhor (p = ordem do polinômio de aprox).

Observação: cálculo de τ.

$$\begin{cases} \tau = \alpha \dfrac{h}{2} \\ \alpha \equiv \text{parâmetro do "upwind"} = f(Pe) \end{cases}$$

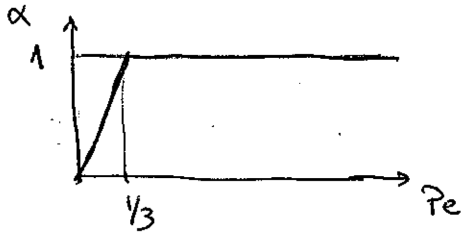
- $Pe \equiv$ número de Peclet do elemento

$$Pe = \frac{\|\beta\| h}{2\tilde{k}}$$

- $\tilde{k} \equiv$ difusão na direção das streamlines

$$\tilde{k} = \frac{\beta}{\|\beta\|}^{T} \underset{\sim}{K} \cdot \frac{\beta}{\|\beta\|}$$

- Expansão assintótica para α: $\alpha = \min\left(\frac{Pe}{3}, 1\right)$



- Valor de h:

$h \leftarrow \sqrt{A}$, A = área do triângulo

$h \leftarrow$ diâmetro do círculo inscrito

$$\underset{\sim}{f}^e_{PG} = \frac{-\beta_x \tau}{6\|\underset{\sim}{\beta}\|}\begin{Bmatrix} y_{23}(f_1+f_2+f_3) \\ y_{31}(f_1+f_2+f_3) \\ y_{12}(f_1+f_2+f_3) \end{Bmatrix} + \frac{\beta_y \tau}{6\|\underset{\sim}{\beta}\|}\begin{Bmatrix} x_{32}(f_1+f_2+f_3) \\ x_{13}(f_1+f_2+f_3) \\ x_{21}(f_1+f_2+f_3) \end{Bmatrix}$$

(iii) Matrizes Resultantes

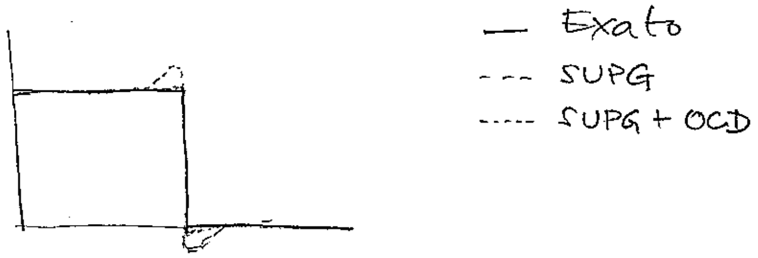
$$\begin{cases} \underset{\sim}{M}^e = \underset{\sim}{M}^e_G + \underset{\sim}{M}^e_{PG} \\ \underset{\sim}{K}^e = \underset{\sim}{K}^e_D + \underset{\sim}{K}^e_{AG} + \underset{\sim}{K}^e_{APG} \qquad (\underset{\sim}{K}^e_{DPG} = \underset{\sim}{0}\,!) \\ \underset{\sim}{F}^e = \underset{\sim}{f}^e_G + \underset{\sim}{f}^e_{PG} \end{cases}$$

$$\underset{\sim}{M} = \mathop{\mathsf{A}}_{e=1}^{nel} \underset{\sim}{M}^e \; ; \quad \underset{\sim}{K} = \mathop{\mathsf{A}}_{e=1}^{nel} \underset{\sim}{K}^e \; ; \quad \underset{\sim}{F} = \mathop{\mathsf{A}}_{e=1}^{nel} \underset{\sim}{F}^e$$

$$\boxed{\underset{\sim}{M}\,\underset{\sim}{v} + \underset{\sim}{K}\,\underset{\sim}{d} = \underset{\sim}{F}}$$

6.3. Operador de Captura de Descontinuidade

De forma a estabilizar as oscilações da solução que existem no entorno das descontinuidades, vamos introduzir um segundo termo, dependendo agora basicamente do gradiente da solução, ∇u.



Diversos esquemas tem sido propostos na literatura, desde Hughes, Mallet e Mizukami (86), ~~Gales e~~ Tezduyar e Park (86), Galeão e Dutra do Carmo (88), Johnson e Szepessy (90), Codina (93), etc. Iremos adotar aqui, basicamente o esquema de Galeão e Dutra do Carmo, conhecido como CAU. Neste esquema a estrutura do operador de captura é semelhante ao SUPG, isto é:

$$\sum_{e=1}^{nel} \frac{1}{2} \alpha_c^e h^e \frac{|L^h(u^h)|}{|\nabla u^h|} \nabla w^h \nabla u^h \, d\Omega \qquad , |\nabla u^h| \neq 0$$

onde

$$L^h(uh) = \frac{\partial u}{\partial t} + \beta \cdot \nabla u - \nabla \cdot (\underset{\sim}{k} \nabla u) - f$$

e a formulação variacional torna-se:

$$a_G(u,w) + \sum_e a_{PG}(u,w) + \sum_e a_{DC}(u,w) = (w,f) + \langle w,h \rangle .$$

<u>Observações</u>:

\# O operador CAU tem a "estrutura" de uma difusão, proporcional ao resíduo discreto $L^h(u^h)$ e só age em regiões onde $|\nabla u^h| \neq 0$.

O resíduo discreto p/ elementos lineares é calculado como:

$$L^h(u^h) = \underset{\sim}{N}(\underset{\sim}{d}^e) + \beta \cdot \underline{B}^T \underline{d}^e - f$$

O parâmetro de "upwind" α_e^e é calculado como:

$$\underset{\sim}{\beta}_{//} = \frac{\beta \cdot \nabla u^h}{|\nabla u^h|} \nabla u^h$$

$$\tilde{k}_{//} = \frac{\beta_{//}^T}{\|\beta_{//}\|} \underset{\sim}{k} \frac{\beta_{//}}{\|\beta_{//}\|}$$

$$Pe_{//} = \frac{\|\beta_{//}\| \; h}{2 \tilde{k}_{//}}$$

$$\alpha_c^e = \overset{\min}{\cancel{\max}} \left(\frac{Pe}{4}, 0.7 \right)$$ (expansão "assintótica").

Matrizes Resultantes

$$\begin{cases} \underline{M}^e = \underline{M}^e_G + \underset{\sim}{M}^e_{PG} \\ \underline{K}^e = \underline{K}^e_D + \underline{K}^e_{AG} + \underset{\sim}{K}^e_{APG} + \underset{\sim}{K}^e_{Dc} \quad (\underline{K}^e_{DPG} = \underline{0} \, !) \\ \underline{F}^e = \underline{f}^e_G + \underline{f}^e_{PG} \end{cases}$$

$$\underset{\sim}{M} = \overset{nel}{\underset{e=1}{A}} \underline{M}^e ; \quad \underset{\sim}{K} = \overset{nel}{\underset{e=1}{A}} \underset{\sim}{k}^e ; \quad \underline{F} = \overset{nel}{\underset{e=1}{A}} \underline{F}^e$$

$$\boxed{\underset{\sim}{M} \, \underset{\sim}{v} + \underline{K}(\underline{d}) \, \underset{\sim}{d} = \underline{F}}$$ NÃO-LINEAR

Ver review paper by John, 2007 !

6.4. Extensão : Galerkin "Least-Squares"

PG method : $p = \tau \beta \, w_{,x}$

$$\sum_e \int_{\Omega^e} \tau \beta \, w_{,x} \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \beta \nabla u - k \nabla^2 u + f \right)}_{\mathcal{L}(u) - f:\ \text{resíduo}} d\Omega$$

$$\mathcal{L}(u) = \mathcal{L}_t + \mathcal{L}_{adv} + \mathcal{L}_{diff} \qquad \begin{cases} \mathcal{L}_t = \dfrac{\partial u}{\partial t} \\ \mathcal{L}_{adv} = \beta \nabla u \\ \mathcal{L}_{diff} = -k \nabla^2 u \end{cases}$$

<u>SUPG</u> : $G + \sum_e \int_{\Omega^e} \tau \, \mathcal{L}_{adv}(w) \left(\mathcal{L}(u) - f \right) d\Omega$

<u>GLS</u> :

$$G + \sum_e \int_{\Omega^e} \tau \, \mathcal{L}(w) \left(\mathcal{L}(u) - f \right) d\Omega$$

<u>Observação</u> : steady-state, Elementos lineares

$$\mathcal{L}(w) = \beta \nabla w - \underset{0}{\cancel{k \nabla^2 w}}$$

Logo : GLS $\equiv$ SUPG

De forma abstrata:

Ache u^h tal que:

Galerkin: $B(w^h, u^h) = L(w^h)$, $\forall w^h \in \mathcal{V}^h$

$$B(w^h, u^h) = \int_\Omega w^h \mathcal{L}(u^h)\, d\Omega \; ; \quad L(w^h) = \int_\Omega w^h f + \int_\Gamma w^h h \, d\Gamma$$

SUPG

$$B_{SUPG}(w^h, u^h) = L_{SUPG}(w^h)$$

$$B_{SUPG}(w^h, u^h) = B(w^h, u^h) + \sum_e \int_{\Omega^e} \tau \mathcal{L}_{adv}(w^h) \mathcal{L}(u^h)\, d\Omega$$

$$L_{SUPG}(w^h) = L(w^h) + \int_\Omega \tau \mathcal{L}_{adv}(w^h) f \, d\Omega$$

GLS

$$B_{GLS}(w^h, u^h) = L_{GS}(w^h)$$

$$B_{GLS}(w^h, u^h) = B(w^h, u^h) + \sum_e \int_{\Omega^e} \tau \mathcal{L}(w^h) \mathcal{L}(u^h)\, d\Omega$$

$$L_{GLS}(w^h, u^h) = L(w^h) + \sum_e \int_{\Omega^e} \tau \mathcal{L}(w^h) f \, d\Omega$$

- B's ~~ser~~ formas BILINEARES e os L's formas lineares.

Diversos esquemas tem sido propostos na literatura, desde Hughes, Mallet e Mizukami (86), Galeão e Dutra do Carmo (88), Johnson e Szepessy (90), etc. Iremos adotar aqui, basicamente pela sua facilidade de implementação,

CMAME, 59, pp 307-325!

o esquema proposto por Tezduyar e Park (1986). Neste esquema a função peso de PG tem a forma:

$$p = w + \phi + q \leftarrow$$ operador de captura de descontinuidade

onde

$$q = \tau_{DC}\, g \cdot \nabla w \quad , \quad \begin{cases} g = \dfrac{\nabla u}{\|\nabla u\|} , & \text{vetor unitário na direção do gradiente da solução.} \\ \tau_{DC} = \text{parâmetro } O(h). \end{cases}$$

Esta escolha retem a mesma estutura da formulação SUPG e a formulação variacional correspondente torna-se:

$$\int_\Omega \tilde{w}\,(\dot u + \sigma_{i,i} - f)\, d\Omega = \int_\Omega w \dot u \, d\Omega + \int_\Omega w\, \sigma^a_{i,i} + \int_\Omega w_{,i}\, \sigma^d_i \, d\Omega +$$

$$\sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega^e} p\,(\dot u + \sigma_{i,i} - f)\, d\Omega^e + \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega^e} q\,(\dot u + \sigma_{i,i} - f)\, d\Omega^e = \int_\Omega w f \, d\Omega +$$

$$\int_{\Gamma_h} w h \, d\Gamma$$

Deve-se notar agora que a introdução do termo de captura de descontinuidade torna o problema não-linear, já que a ponderação DC depende da solução u (mais precisamente, de ∇u!). Por outro lado, esta formulação é também variacionalmente consistente já que se u for solução exata, a formulação variacional é identicamente satisfeita.

- A Função DC

Para um determinado nó a, a função DC tem a forma,

$$q_a = \tau_{DC}^{a} \, g^{a} \cdot \nabla N_a$$

onde $g^a = \dfrac{\nabla u^a}{\|\nabla u^a\|}$, vetor unitário na direção do gradiente da solução e τ_{DC}^{a} é um parametro determinado através de:

seja a componente de β paralela a ∇u:

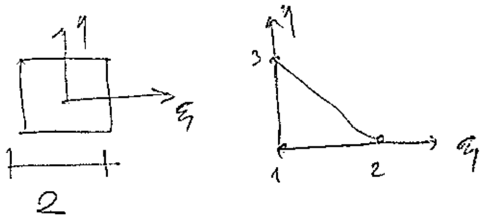
$$\beta_g^a = \beta \cdot g^a$$

o vetor na direção de ∇u com esta magnitude é,

$$\beta_g^a = \beta_g^a \, g^a = (\beta \cdot g^a) g^a$$

o comprimento efetivo do elemento na direção do gradiente da solução é

$$h_g^a = 2 \left(\sum_a | g^a \cdot \nabla N_a |^{-1} \right)$$



Interpolação no elemento de referência!

portanto, podemos definir o coeficiente

$$\eta^a = \eta \cdot \frac{\|\beta_g^a\|}{\|\beta\|} = 2\left(1 - \frac{\|\beta_g^a\|}{\|\beta\|}\right)\frac{\|\beta_g^a\|}{\|\beta\|}$$

e então

$$\tau_{DC} = \frac{1}{2} h_g^a \, \mathrm{sign}(\beta_g^a)\, \eta^a$$

Observações:

#1 É interessante notar que $\eta^a = 0$ toda a vez que $\beta \perp \nabla u$ ou $\beta \parallel \nabla u$. Ou seja, não há contribuição do termo DC nestes casos.

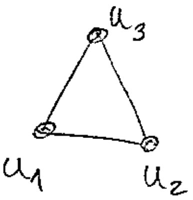
#2. A contribuição DC depende somente do vetor unitário g. Consequentemente, a magnitude do gradiente não é levada em consideração. Isto implica que regiões com um gradiente baixo (isto é, solução praticamente suave) e regiões com um gradiente alto tenham a mesma contribuição para o esquema DC. Sendo assim, é usual modificar-se a expressão de τ_{DC} para se levar em conta a magnitude do gradiente. Portanto,

$$\tau_{DC} = \frac{1}{2} h_g^a \, sign(\beta_g^a) \, G^a \eta^a$$

$$G^a = h_g^a \frac{\| \nabla u^a \|}{u_0^a}$$, $u_0^a \equiv$ valor de referência.

- Exemplo: Operador de Captura de Descontinuidade p/ o Triângulo Linear em Coordenadas de Área

(i) Vetor Unitário na Direção do Gradiente da Solução



$$u_{,x} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2A} \left[y_{23} u_1 + y_{31} u_2 + y_{12} u_3 \right]$$

$$u_{,y} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2A} \left[x_{32} u_1 + x_{13} u_2 + x_{21} u_3 \right]$$

$$\underset{\sim}{g} = \frac{1}{\left[(u_{,x})^2 + (u_{,y})^2 \right]^{1/2}} \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ u_{,y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{Bmatrix}$$

(ii) Componente da Velocidade na Direção do Gradiente da Solução

$$\beta \cdot \underset{\sim}{g} = \beta_x g_1 + \beta_y g_2$$

$$\underset{\sim}{\beta_g} = \beta_g \begin{Bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \beta_{g_1} \\ \beta_{g_2} \end{Bmatrix}$$

(iii) Comprimento efetivo do elemento na direção do gradiente da solução

$$hg_1 = \text{dabs}(y_{23} \cdot g_1 + x_{32} \cdot g_2)$$
$$hg_2 = \text{dabs}(y_{31}\, g_1 + x_{13}\, g_2)$$
$$hg_3 = \text{dabs}(y_{12} \cdot g_1 + x_{21} \cdot g_2)$$

$$hg = 4A / (hg_1 + hg_2 + hg_3)$$

(iv) Coeficiente Parabólico

$$\|\beta\| = (\beta_x^2 + \beta_y^2)^{1/2} \; ; \; \|\beta g\| = (\beta g_1^2 + \beta g_2^2)^{1/2}.$$

$$\eta = 2\left(1 - \frac{\|\beta\|}{\|\beta g\|}\right) \frac{\|\beta\|}{\|\beta g\|}$$

(v) Constante τ_{DC}

$$\begin{cases} \tau_{DC} = \dfrac{hg}{2} \cdot \text{sign}(\beta g) \cdot hg \dfrac{\|\nabla u\|}{u_0}\, \eta \\ u_0 = (u_1 + u_2 + u_3)/3 \end{cases}$$

(vi) Função de Ponderação DC

$$q = \tau_{DC} \cdot g \nabla w$$

(vii) Correção da Matriz de Massa

$$M^e_{DC} = t^e \int_{\Omega^e} \tau_{DC}\, g \cdot \nabla w\, \dot{u}\, d\Omega^e = t^e \int_{\Omega^e} \tau_{DC} \left\{ g_1 w_{,x} \dot{u} + g_2 w_{,y} \dot{u} \right\} d\Omega^e$$

Discretizando-se , $(w^h)^e = \sum_{a=1}^{nen} N_a c_a^e$; $(\dot{u}^h)^e = \sum_{a=1}^{nen} N_a \dot{d}_a^e$

$a = 1, 2, 3$

$$\left[\underset{\sim}{M}{}^e_{DC} \right] = t^e \int_{\Omega^e} \tau_{DC}\, g_1 \frac{\partial N_a}{\partial x} N_b\, d\Omega^e + t^e \int_{\Omega^e} \tau_{DC}\, g_2 \frac{\partial N_a}{\partial y} N_b\, d\Omega^e$$

$a, b = 1, 2, 3$

$$\underset{\sim}{M}{}^e_{DC} = \frac{t^e \tau_{DC}\, g_1}{6} \begin{bmatrix} y_{23} & y_{23} & y_{23} \\ y_{31} & y_{31} & y_{31} \\ y_{12} & y_{12} & y_{12} \end{bmatrix} + \frac{t^e \tau_{DC}\, g_2}{6} \begin{bmatrix} x_{32} & x_{32} & x_{32} \\ x_{13} & x_{13} & x_{13} \\ x_{21} & x_{21} & x_{21} \end{bmatrix}$$

(viii) Matriz de Convecção

$$K^e_{ADC} = t^e \int_{\Omega^e} q\, \beta \cdot \nabla u\, d\Omega^e = t^e \int_{\Omega^e} \tau_{DC}\, g \cdot \nabla w\, \beta \cdot \nabla u\, d\Omega^e =$$

$$= t^e \int_{\Omega^e} \tau_{DC} \nabla w\, g \otimes \beta\, \nabla u\, d\Omega^e$$

$$g \otimes \beta = g \cdot \beta^T = \begin{bmatrix} g_1 \beta_x & g_1 \beta_y \\ g_2 \beta_y & g_2 \beta_2 \end{bmatrix}$$

Discretizando-se

$$\underset{\sim}{K}{}^e_{ADC} = t^e \int_{\Omega^e} \tau_{DC}\, \underset{\sim}{B}^T \begin{bmatrix} g_1 \beta_x & g_1 \beta_y \\ g_2 \beta_y & g_2 \beta_y \end{bmatrix} \underset{\sim}{B}\, d\Omega^e.$$

(ix) Correcçã da Carga Consistente

$$\{ \underset{\sim}{f}^e_{DC} \} = t^e \int_{\Omega^e} q_a N_b f_b \, d\Omega^e = t^e \int_{\Omega^e} \tau_{DC} \underset{\sim}{g} \cdot \nabla N_a N_b f_b \, d\Omega^e =$$

$$= t^e \int_{\Omega^e} \tau_{DC} \left[g_1 \frac{\partial N_a}{\partial x} N_b f_b + g_2 \frac{\partial N_a}{\partial y} N_b f_b \right] d\Omega^e$$

$$\underset{\sim}{f}^e_{DC} = t^e \tau_{DC} g_1 \begin{Bmatrix} y_{23} f_1 \\ y_{31} f_2 \\ y_{12} f_3 \end{Bmatrix} + t^e \tau_{DC} g_2 \begin{Bmatrix} x_{32} f_1 \\ x_{13} f_2 \\ x_{12} f_3 \end{Bmatrix}$$

(x) Matrizes Resultantes

$$\begin{cases} \underset{\sim}{M}^e = \underset{\sim}{M}_G + \underset{\sim}{M}^e_{PG} + \underset{\sim}{M}^e_{DC} \\ \underset{\sim}{K}^e = \underset{\sim}{K}^e_D + \underset{\sim}{K}^e_{AG} + \underset{\sim}{K}^e_{APG} + \underset{\sim}{K}^e_{ADC} \quad (\underset{\sim}{K}^e_{DPG} = \underset{\sim}{K}^e_{DDC} = \underset{\sim}{0} \,!) \\ \underset{\sim}{F}^e = \underset{\sim}{f}^e_G + \underset{\sim}{f}^e_{PG} + \underset{\sim}{f}^e_{DC} \end{cases}$$

$$\underset{\sim}{M} = \underset{e=1}{\overset{nel}{\mathsf{A}}} \underset{\sim}{M}^e \; ; \quad \underset{\sim}{K} = \underset{e=1}{\overset{nel}{\mathsf{A}}} \underset{\sim}{K}^e \; ; \quad \underset{\sim}{F} = \underset{e=1}{\overset{nel}{\mathsf{A}}} \underset{\sim}{F}^e$$

$$\boxed{\underset{\sim}{M} \underset{\sim}{v} + \underset{\sim}{K} \underset{\sim}{d} = \underset{\sim}{F}}$$

NÃO-LINEAR !

$$\downarrow$$

$$\boxed{\underset{\sim}{M}(\underset{\sim}{d}) \underset{\sim}{v} + \underset{\sim}{K}(\underset{\sim}{d}) \underset{\sim}{d} = \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{d})}$$

5. Solução das Eqs N-S Incompressíveis na Forma de Função de Corrente e Vorticidade.

5.1 Definição e Interpretação

Se u, v são as velocidades então a FUNÇÃO DE CORRENTE $\psi(x,y)$ é definida como:

$$\frac{\partial \psi(x,y)}{\partial x} = -v \; ; \; \frac{\partial \psi(x,y)}{\partial y} = u$$

ou ainda;

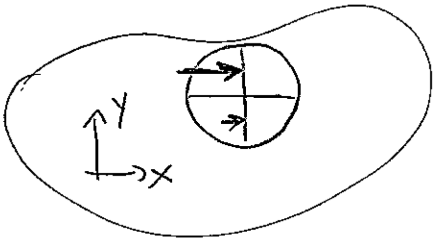
$$\underset{\sim}{u}^T = \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial y} \, , \, -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right\}.$$

Já a VORTICIDADE é definida como:

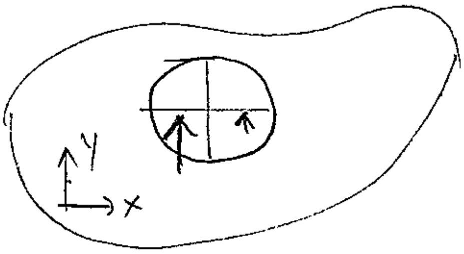
$$w(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}$$

Interpretação:

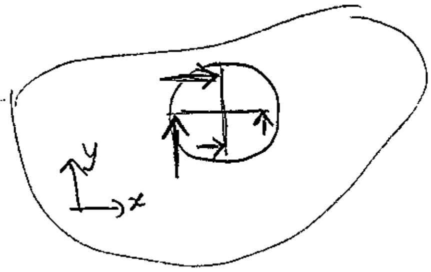
#1 VORTICIDADE w = mede a força dos vórtices.



$$\frac{\partial u}{\partial y} > 0$$



$$\frac{\partial v}{\partial x} < 0$$



$$w = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}$$

#2. Função de corrente $\Psi(x,y)$

A condição de integrabilidade deve ser satisfeita isto é:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2\psi}{\partial y\,\partial x}$$

Seja a equação de continuidade (incompressibilidade):

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial x} \quad !$$

Linha de corrente: é a curva cuja tangente é paralela a $\underline{u} = \{ {u \atop v} \}$ em cada um dos seus pontos $\{ {x \atop y} \}$ em um tempo fixo t.

Logo, as linhas de corrente são as isolinhas de Ψ. Podemos ver isto através de:

(i) Ao longo das isolinha $\Psi_c(s)$, $\nabla\psi \perp \dot{\Psi}_c(s)$, isto é:

$$0 = \frac{d\Psi(\Psi_c(s))}{ds} = \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{dx_c(s)}{ds} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{dy_c(s)}{ds} =$$

$$= \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\cdot\begin{pmatrix}\dot{x}_c(s)\\ \dot{y}_c(s)\end{pmatrix} = \nabla\psi \cdot \dot{\Psi}_c(s)$$

(ii) $\nabla\psi \perp \underset{\sim}{u}$

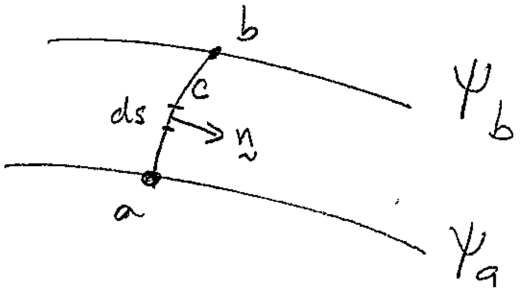
$$\nabla\psi \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial y}\right) \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = (-v, u) \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} =$$

$$-vu + uv = 0$$

(iii) De (i) e (ii) $\Rightarrow$ $\dot{\psi}_c(s) \,//\, \underset{\sim}{u}$!

(iv) $m^t = \psi_b - \psi_a \equiv$ fluxo de massa entre 2 linhas de corrente é constante!

$$m^t = \int_c \rho\, \underset{\sim}{u} \cdot \underset{\sim}{n}\, ds$$



Escoamento incompressível: $\rho = cte$

Para o sistema adimensionalizado ($\rho = 1$) temos:

$$m^t = \int_c \underset{\sim}{u} \cdot \underset{\sim}{n}\, ds = \int_a^b (u, v) \begin{pmatrix} dy \\ -dx \end{pmatrix} = \int_a^b u\,dy - \int_a^b v\,dx =$$

$$= \int_a^b \left(\frac{\partial\psi}{\partial y} dy + \frac{\partial\psi}{\partial x} dx \right) = \int_a^b d\psi = \psi_b - \psi_a$$

5.2. Equações de N-S na Formulação Vorticidade-Função de Corrente:

N-S em variáveis primitivas

$$\rho\left(\frac{\partial \underset{\sim}{u}}{\partial t} + \underset{\sim}{u}\cdot\nabla\underset{\sim}{u}\right) - \nabla\cdot\sigma = 0 \quad \text{em } \Omega\times[0,T]$$

$$\nabla\cdot\underset{\sim}{u} = 0 \quad \text{em } \Omega\times[0,T]$$

$$\underset{\sim}{\sigma} = -p\,\underset{\sim}{I} + 2\mu\,\underset{\sim}{\varepsilon}(\underset{\sim}{u})$$

$$\underset{\sim}{\varepsilon}(\underset{\sim}{u}) = \frac{(\nabla\underset{\sim}{u} + \nabla^T\underset{\sim}{u})}{2}$$

c. contorno:

$$\underset{\sim}{u} = g \quad \text{em} \quad \Gamma_g$$

$$\underset{\sim}{n}\cdot\underset{\sim}{\sigma} = \underset{\sim}{h} \quad \text{em} \quad \Gamma_h$$

Considere agora o caso adimensionalizado em 2D:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \quad (*)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \quad (**)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Derivando-se (*) p/ $\frac{\partial}{\partial y}$ e (**) p/ $\frac{\partial}{\partial x}$:

$$\frac{\partial u}{\partial t\,\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} + v\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} =$$

$$= \frac{1}{Re}\frac{\partial}{\partial y}\left(\quad\right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t\,\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + u\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + v\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 p}{\partial y \partial x} =$$

$$= \frac{1}{Re}\frac{\partial}{\partial x}\left(\quad\right)$$

Subtraindo-se uma da outra:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) + u\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) +$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) + v\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}\right) = \frac{1}{Re}\left[\frac{\partial}{\partial x}(\,) - \frac{\partial}{\partial y}(\,)\right]$$

Porem

$$\omega = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \quad ; \quad \frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\omega + u\frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\omega + v\frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\right)$$

Como $w\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0$, temos:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

ou ainda,

$$\boxed{\frac{\partial w}{\partial t} + \underset{\sim}{u}\cdot\nabla w = \frac{1}{Re}\nabla^2 w} \qquad (*)$$

↑ Equação de Transporte de Vorticidade

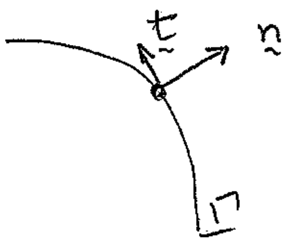
Substituindo a definição de ψ na definição de w, temos:

$$w(x,y) = \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$$

$$\boxed{\nabla^2\psi = w} \qquad (**)$$

Logo (*) e (**) formam um sistema acoplado de PDE não-lineares no qual a pressão foi eliminada e a condição de continuidade é satisfeita automaticamente.

Condições de Contorno p/ a Formulação das Eqs N-S em $\omega \times \psi$:



$\underset{\sim}{n}$ = normal unitária externa $\equiv \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix}$

$\underset{\sim}{t}$ = tangente unitaria externa $= \begin{Bmatrix} n_y \\ -n_x \end{Bmatrix}$

$$\begin{cases} u_n = \underset{\sim}{n} \cdot \underset{\sim}{u} = n_x \dfrac{\partial \psi}{\partial y} - n_y \dfrac{\partial \psi}{\partial x} = \dfrac{\partial \psi}{\partial t} \\[2ex] u_t = \underset{\sim}{t} \cdot \underset{\sim}{u} = \dfrac{\partial \psi}{\partial n} \end{cases}$$

- Não-deslizamento: $u_n = \overline{u}_n \Rightarrow \dfrac{\partial \psi}{\partial \tau} = -\overline{u}_n$

  Escoamentos viscosos: $u_t = \overline{u}_t \Rightarrow \dfrac{\partial \psi}{\partial n} = \overline{u}_t$

- Simetria

$$u_n = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial u_t}{\partial n} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega = 0$$

- Tensão nula (condição de saída)

$$\left(\begin{cases} \sigma_n = \underset{\sim}{n} \cdot \underset{\sim}{\sigma} \cdot \underset{\sim}{n} = 0 \\ \sigma_t = \underset{\sim}{n} \cdot \underset{\sim}{\sigma} \cdot \underset{\sim}{t} = 0 \end{cases} \right.$$

$$\neq$$

$$\left(\begin{cases} \dfrac{\partial \omega}{\partial n} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial \psi}{\partial n} = 0 \end{cases} \right.$$

▷ saída tem que estar longe o bastante para não dar problemas.

Formulação Semi-discreta de EF

- Eq. Vorticidade

$$\int_{\Omega} w^h \left(\frac{\partial \omega^h}{\partial t} + \underset{\sim}{u}^h \cdot \nabla \omega^h \right) d\Omega + \int_{\Omega} \frac{1}{Re} \nabla w^h \cdot \nabla \omega^h \, d\Omega +$$

$$\sum_e \int_{\Omega^e} \tau_{SUPG} \, \underset{\sim}{u}^h \cdot \nabla w^h \left(\frac{\partial \omega^h}{\partial t} + \underset{\sim}{u}^h \cdot \nabla \omega^h - \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega^h \right) =$$

$\int_{\Gamma_h} w^h h \, d\Gamma$; $h \equiv$ c.c. natural de ω^h

- Eq. Função de Corrente

$\int_{\Omega} \nabla w^h \cdot \nabla \psi^h \, d\Omega - \int_{\Omega} w^h \omega^h \, d\Omega = \int_{\Gamma} w^h H \, d\Gamma$;

$H \equiv$ c.c. natural de ψ

- Discretização de EF

$$\omega^h = \sum N_i(\underset{\sim}{x}) \, \omega_i(t)$$

$$\psi^h = \sum N_i(\underset{\sim}{x}) \, \psi_i(t)$$

$$w^h = \sum N_i(x) \, c_i$$

- Equações Semi-Discretas

$$\begin{cases} \underset{\sim}{M}\,\dot{\underset{\sim}{\omega}} + \underset{\sim}{N}(\underline{\omega},\underline{\Psi}) = \underline{F}_\omega \\ -\underset{\sim}{\omega} + \underset{\sim}{\overline{K}}\,\underset{\sim}{\psi} = \underline{F}_\psi \end{cases}$$

$\underset{\sim}{N}(\underline{\omega},\underline{\Psi}) \equiv$ vetor não-linear de $\underset{\sim}{\omega}$ e $\underline{\Psi}$

A não-linearidade vem dos termos:

① $\int_\Omega w^h\, \underline{u}^h \cdot \nabla \omega^h \, d\Omega$

② $\int_{\Omega^e} \tau_{SUPG}\, \underline{u}^h \cdot \nabla w^h \, (\quad)\, d\Omega$

Vamos olhar com detalhe ①:

① $$\int_\Omega N_i \Big(\underbrace{\frac{\partial N_j}{\partial y}\Psi_j \frac{\partial N_j}{\partial x}\omega_j}_{f} + \underbrace{\frac{\partial N_j}{\partial x}\psi_j \frac{\partial N_j}{\partial y} w_j}_{g} \Big) d\Omega \,, \qquad i = 1,2,\dots,nnos$$

Para i fixo:

$$\frac{\partial f}{\partial w_j} = \int_\Omega N_i \left(\frac{\partial N_j}{\partial y}\Psi_j \right) \frac{\partial N_i}{\partial x}\, d\Omega$$

$$\frac{\partial g}{\partial w_j} = \cdots$$

$$\frac{\partial f}{\partial \psi_j} = \int_\Omega N_i \left(\frac{\partial N_j}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial x} w_j \right) d\Omega$$

$$\frac{\partial g}{\partial \psi_j} = \ldots$$

Portanto:

$$\begin{bmatrix} \underset{\sim}{M} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\underset{\sim}{\omega}} \\ \underset{\sim}{0} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial \underset{\sim}{N}}{\partial \underset{\sim}{\omega}} & \frac{\partial \underset{\sim}{N}}{\partial \underset{\sim}{\psi}} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{\bar{K}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{\omega} \\ \underset{\sim}{\psi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{F}_\omega \\ \underset{\sim}{F}_\psi \end{Bmatrix}$$

Agora, se descartarmos o termo de acoplamento $\frac{\partial \underset{\sim}{N}}{\partial \underset{\sim}{\psi}}$, e introduzirmos um esquema iterativo para resolvermos o sistema não-linear, temos:

```
para $i = 1, 2, \ldots$
    $\underset{\sim}{M} \, \dot{\underset{\sim}{\omega}}^{(i)} + \frac{\partial \underset{\sim}{N}}{\partial \underset{\sim}{\omega}} (\underset{\sim}{u}^{(i)}) \, \underset{\sim}{\omega}^{(i)} = \underset{\sim}{F}_\omega$
    $\underset{\sim}{\bar{K}} \, \underset{\sim}{\psi}^{(i+1)} = \underset{\sim}{F}_\psi^{(i)}$
    $\underset{\sim}{u}^{(i+1)} = \underset{\sim}{\tilde{B}} \, \underset{\sim}{\psi}^{(i+1)}$ ; $\underset{\sim}{\tilde{B}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ -\frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix}$
fim para.
```

Agora note que

$$\frac{\partial \underset{\sim}{N}}{\partial \underset{\sim}{\omega}}(\underset{\sim}{u}^{(i)}) = \underset{\sim}{K}\,\underset{\sim}{\omega}^{(i)} \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial \omega_j} = \int N_i\, u^{(i)} \frac{\partial N_j}{\partial x}\,\omega_j\, d\Omega \right)$$

Porém, $\underset{\sim}{u}^{(i)}$ é uma ordem de precisão inferior a $\underset{\sim}{\omega}, \Psi$. Para aumentarmos a ordem de precisão de $\underset{\sim}{u}^{(i)}$ vamos introduzir uma formulação auxiliar, supondo $\underset{\sim}{\bar{u}}^{(i)}$ um campo de velocidades aproximado como:

$$\underset{\sim}{\bar{u}}^{(i)} = \sum N_j \underset{\sim}{\bar{u}}_j \quad ; \quad \underset{\sim}{\bar{w}} = \sum \underset{\sim}{N}_j \underset{\sim}{\bar{c}}_j$$

e a formulação variacional

$$\int_\Omega \underset{\sim}{\bar{w}}\, \underset{\sim}{\bar{u}}^{(i)}\, d\Omega = \int_\Omega \underset{\sim}{\bar{w}}\, \underset{\sim}{u}^{(i)}\, d\Omega \quad , \quad c.c \quad \underset{\sim}{\bar{u}} = g$$

Logo:

$$\underset{\sim}{\bar{M}}\, \underset{\sim}{\bar{u}}^{(i)} = \underset{\sim}{\bar{F}}$$

onde

$$\underset{\sim}{\bar{M}} = \mathop{\mathbf{A}}_{e=1}^{n_{el}} \underset{\sim}{\bar{m}}^e \; , \quad [\underset{\sim}{\bar{m}}^e]_{ij} = \int_\Omega \underset{\sim}{N}_i \underset{\sim}{N}_j\, d\Omega$$

$$\underset{\sim}{\bar{F}} = \mathop{\mathbf{A}}_{e=1}^{n_{el}} \underset{\sim}{\bar{f}}^e \; , \quad [\underset{\sim}{\bar{f}}^e]_j = \int_\Omega \underset{\sim}{N}_i\, \underset{\sim}{\tilde{B}} \cdot \underset{\sim}{\Psi}^{(i)}\, d\Omega$$

Introduzindo se agora a discretização temporal de $\dot{\omega}$ pelo método trapezoidal generalizado chegamos ao seguinte algoritmo bloco-iterativo preditor multicorretor para avançar do tempo n p/ $n+1$:

Dados $\underset{\sim}{\omega}_n$, $\dot{\underset{\sim}{\omega}}_n$, $\underset{\sim}{\Psi}_n$ e $\bar{\underset{\sim}{u}}_n$

$i=0$ | :

$$\left.\begin{aligned} \underset{\sim}{\omega}^{(0)}_{n+1} &= \bar{\underset{\sim}{\omega}}_{n+1} = \underset{\sim}{\omega}_n + (1-\alpha)\Delta t\, \dot{\underset{\sim}{\omega}}_n \\ \dot{\underset{\sim}{\omega}}^{(0)}_{n+1} &= \underset{\sim}{0} \end{aligned}\right] \text{ PREDIÇÃO}$$

para $i = 0, 1, 2, \ldots$

BLOCO 1

$$\underset{\sim}{M}^{*} \Delta \dot{\underset{\sim}{\omega}} = \underset{\sim}{F}^{*}$$

$$\underset{\sim}{M}^{*} = \underset{\sim}{M}(\dot{\underset{\sim}{\omega}}^{(i)}_{n+1}) + \alpha \Delta t\, \underset{\sim}{K}(\underset{\sim}{\omega}^{(i)}_{n+1}, \bar{\underset{\sim}{u}}^{(i)}_{n+1})$$

$$\underset{\sim}{F}^{*} = \underset{\sim}{F}_{\omega} - \underset{\sim}{M}(\dot{\underset{\sim}{\omega}}^{(i)}_{n+1})\, \dot{\underset{\sim}{\omega}}^{(i)}_{n+1} - \underset{\sim}{K}(\underset{-}{\omega}^{(i)}_{n+1}, \bar{\underset{-}{u}}^{(i)}_{n+1})\, \underset{\sim}{\omega}^{(i)}_{n+1}$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{\underset{\sim}{\omega}}^{(i+1)}_{n+1} &= \dot{\underset{\sim}{\omega}}^{(i)}_{n} + \alpha \Delta t\, \Delta \dot{\underset{\sim}{\omega}} \\ \underset{-}{\omega}^{(i+1)}_{n+1} &= \underset{\sim}{\omega}^{(i)}_{n+1} + \alpha \Delta t\, \Delta \dot{\underset{\sim}{\omega}} \end{aligned}\right\} \text{ CORREÇÃO}$$

Bloco 2

$$\underset{\sim}{\bar{K}}\, \underset{\sim}{\Psi}_{n+1}^{(i+1)} = \underset{\sim}{F}_{\psi}\left(\underset{\sim}{\omega}_{n+1}^{(i+1)} \right)$$

Bloco 3

$$\underset{\sim}{\bar{M}}\, \underset{\sim}{\bar{u}}_{n+1}^{(i+1)} = \underset{\sim}{\bar{F}}\left(\underset{\sim}{\psi}_{n+1}^{(i+1)} \right)$$

fim para.

OBS:

É claro que o bloco 1 acomoda um esquema I/E.

Podemos solucionar os blocos 1, 2 e 3 de forma iterativa.