고과서 (단원)1. 지수와 로그

고과서(강)1. 지수

제1장 거듭제곱근의 계산

1-1. a의 n제곱근과 $\sqrt[n]{a}$

지수법칙을 실수의 범위로 확장해보려고 하면「거듭제곱근」의 개념을 정확하게 알고 넘어가야 하는데 의외로 학생들은 용어나 기호의 정의에 소홀히 하고 문제 푸는 데 경향이 너무 많은 것 같다. 철저하게 a의 n제곱근과 $\sqrt[n]{a}$를 구별하고 문제를 풀도록 하자.

어떤 수 x를 n제곱해서 실수 a가 될 때,

x를 a의 n제곱근이라고 한다. 즉,

$x^2=a \Leftrightarrow x$는 a의 제곱근

$x^3=a \Leftrightarrow x$는 a의 3제곱근

$x^4=a \Leftrightarrow x$는 a의 4제곱근

$\vdots$

$x^n=a \Leftrightarrow x$는 a의 n제곱근

$\vdots$

제곱근, 3제곱근, 4제곱근 등을 통틀어서 <u>**거듭제곱근**</u>이라고 한다.

n제곱해서 a가 되는 수, 즉, a의 n제곱근은

$x^n=a$의 해가 되고 $x^n=a$는 n차의 방정식이므로

이것의 근 x는 n개가 있다.

즉, a의 n제곱근은 일반적으로 n개가 존재한다는 뜻이다.

이 중에는 실수도 있고 허수도 있다.

다음 예에서 한번 확인해 보자.

ex) 8의 세제곱근과 $\sqrt[3]{8}$의 관계

세제곱하여 8이 되는 수, 곧 $x^3=8$을 만족하는 수 x를 8의 세제곱근이라고 한다.

곧, $x^3=8$의 근은 $x^3-8=0$에서

$(x-2)(x^2+2x+4)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=-1+\sqrt{3}i$ 또는 $x=-1-\sqrt{3}i$

따라서 8의 세제곱근은 $2,\ -1+\sqrt{3}i,\ -1-\sqrt{3}i$이다.

이 중에서 실수 2를 $\sqrt[3]{8}$로 나타낸다.

즉, 8의 3제곱근과 3제곱근 8이 다르다는 것을 알 수 있다.

고과서 (단원)2.

ex) 81의 네제곱근과 $\sqrt[4]{8}$의 관계

81의 4제곱근을 구해보자.

방정식 $x^4=81$의 근 x를 모두 구하면 답이 나온다.

$x^4-81=0$

$(x^2-9)(x^2+9)=0$

$(x-3)(x+3)(x-3i)(x+3i)=0$

따라서 81의 4제곱근은 $3,\ -3,\ 3i,\ -3i$ 4개가 나온다.

이 중 실수인 것은 3은 <u>$\sqrt[4]{81}$ (양의 제곱근)</u>이고

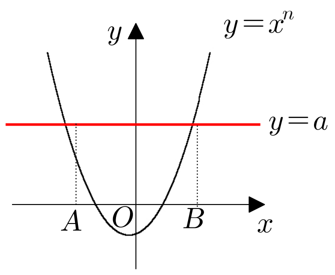
-3은 $-\sqrt[4]{81}$ 이다.

위의 예로부터 우리가 짐작할 수 있는 것은 다음과 같은 사실을 알 수 있다.

> n 제곱근 중 실수의 근은 n이 짝수이면 2개이고,
> n이 홀수이면 1개이다

그래프를 이용하여 교점의 수를 파악해 보자.
방정식 $x^n = a$의 실근을 구하는 것은 $y=x^n$과 $y=a$의 그래프가 서로 만나는 교점의 x좌표를 구하는 것과 같다.
이때 $y=x^n$의 그래프는 n이 짝수인가 홀수인가에 따라 모양이 달라진다.
n**이 짝수**이면 $(-x)^n = x^n$이므로, $y=x^n$의 그래프는 y축에 대칭인 함수이므로 우함수라고도 한다.

따라서 다음과 같이 그려진다.
잘 이해가 안 되면 곡선 $y=x^2$을 연상해 보길 바란다.
참고로 차수가 커지면 함수의 그래프는 폭이 좁아진다는 것을 알 수 있다.

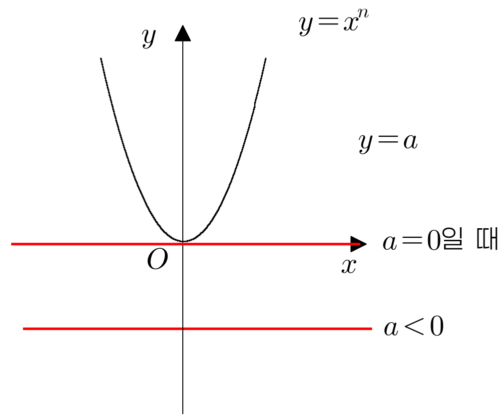


이것과 직선 $y=a$의 교점은 a의 부호에 따라 다음과 같이 나타난다.

① $a>0$**일 때**
그림처럼 교점은 2개이고, 곡선 $y=x^n$이 y축에 대하여 대칭이므로 $OA=OB$임을 확인할 수 있다.
따라서 a의 n제곱근은 부호만 다르고 절댓값이 같은 2개의 실수가 나온다.
이 중에서 양수를 $\sqrt[n]{a}$로 나타내고
음수는 당연히 $-\sqrt[n]{a}$로 나타낸단다.
그림에서 A에 해당하는 값이 $-\sqrt[n]{a}$이고,
B에 해당하는 값이 $\sqrt[n]{a}$이라는 것을 확인할 수 있다.
즉, n이 짝수일 때 a의 n제곱근은 n개 존재하지만
실수는 2개가 있다는 것을 확인할 수 있다.

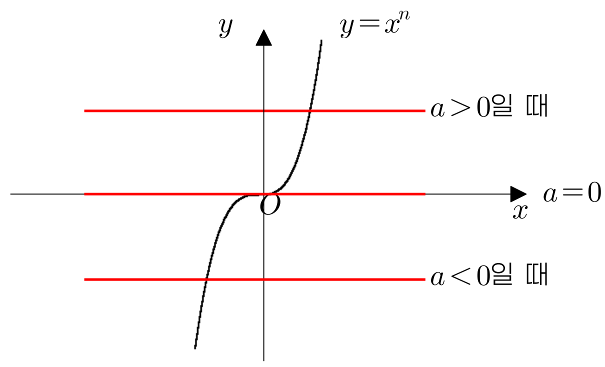
$ex)$ 7의 제곱근은 $\sqrt[2]{7}$, $-\sqrt[2]{7}$이다.
제곱근 기호는 흔히 2를 생략하고 $\sqrt{7}$, $-\sqrt{7}$로 주로 나타낸다.
$ex)$ 9의 제곱근은 $\sqrt{9}$, $-\sqrt{9}$이다.
실제로 방정식 $x^2=9$를 풀면
$x=3,\ -3$이 나온다.
따라서 $\sqrt{9}=3,\ -\sqrt{9}=-3$이다.

② $a \le 0$**일 때**



$y=x^n$과 $y=0$(즉, x축)의 교점은 원점 O뿐이다.
따라서 0의 n제곱근은 0이다.
즉, $\sqrt{0}=\sqrt[4]{0}=\sqrt[6]{0}=\cdots=0$모두가 0으로 나온다.
그리고 $a<0$일 때는 그림에서 보다시피 교점이 생기지 않는 것을 확인할 수 있을 것이다.
따라서 실수의 범위에서는 음수의 n제곱근이 존재하지 않는다.

n**이 홀수**이면 $(-x)^n=-x^n$이므로 $y=x^n$의 그래프는 원점에 대칭인 곡선(기함수라고도 함)으로 나온다.
$y=x^3$의 그래프를 연상해 보는 것이 좋을 듯하다. 참고로 차수가 커지면 함수의 그래프는 폭이 좁아진다는 것을 알 수 있다.



$y=x^n$은 a의 부호와 상관없이 $y=a$와 항상 1개의 점에서 만난다.
즉, a의 n제곱근 중 실수는 유일하게 한 개뿐이라는 것을 그래프에서 보면 확인이 된다.
이 때 교점의 x 좌표가 $\sqrt[n]{a}$(n제곱근 a)로 나타난다.
그림을 보면 다음 사실을 알 수 있을 것이다.

$a>0$ 이면 $\sqrt[n]{a}>0$
$a=0$ 이면 $\sqrt[n]{0}=0$
$a<0$ 이면 $\sqrt[n]{a}<0$

$ex)$ 방정식 $x^3=27$을 풀면

$x^3-3^3=0$

$(x-3)(x^2+3x+9)=0$

따라서 $\sqrt[3]{27}=3$

$ex)$ 방정식 $x^3=-8$을 풀면

$x^3+2^3=0$

$(x+2)(x^2-2x+4)=0$ 　　따라서 $\sqrt[3]{-8}=-2$

따라서 a 를 양수로 제한하면 n이 짝수인가 홀수인가에 상관없이 $\sqrt[n]{a}$의 값은 양수로서 항상 존재한다.

즉, $x^n=a$(a 의n 제곱근) 이고 $a>0$이면

$x=\sqrt[n]{a}$ (n제곱근 a) 는 n에 관계없이 a의 n제곱근 중 유일한 양의 실수라는 것이다.

그래서 $x^n=a$에 $x=\sqrt[n]{a}$를 대입하면 $(\sqrt[n]{a})^n=a$라고 할 수 있다.

$ex)$ 10의 4제곱근은 $\sqrt[4]{10}$, $-\sqrt[4]{10}$ 이다.

정확하게 말하면 10의 4제곱근은 4개인데, 이 중에서 실수는 $\sqrt[4]{10}$, $-\sqrt[4]{10}$ 이고 나머지 2개는 허수라고 생각할 수 있다.

$ex)$ 방정식 $x^4=16$을 풀면 $x^4-16=0$

$(x^2-4)(x^2+4)=0$

$(x-2)(x+2)(x-2i)(x+2i)=0$

따라서 16의 4제곱근 중 실수는

$\sqrt[4]{16}=2$, $-\sqrt[4]{16}=-2$ 　2개가 나온다.

실수의 범위에서 a의 n제곱근을 정리하면 다음과 같다.

[정리]

[a의 n제곱근과 $\sqrt[n]{a}$]

① n이 홀수인 경우

a의 n제곱근이 되는 실수는 오직 한 개이며,

이것을 $\sqrt[n]{a}$로 나타낸다.

② n이 짝수인 경우

(1) $a>0$일 때, a의 n제곱근이 되는 실수는 양수, 음수 각각 한 개이며, 양수인 것을 $\sqrt[n]{a}$, 음수인 것을 $-\sqrt[n]{a}$로 나타낸다.

(2) $a<0$일 때, a의 n제곱근이 되는 실수는 없다.

(3) $a=0$일 때, $\sqrt[n]{0}=0$이다.

1-2. 거듭제곱근의 계산법칙

다음은 거듭제곱근의 성질을 설명해 보자.
지수법칙을 증명할 때나 문제를 풀 때 요긴하게 쓰이므로 익혀두시기 바란다.
앞에서도 얘기했듯이 $\sqrt[4]{-3}$과 같은 것은 실수가 아니므로, 편의상 거듭제곱근 기호 안의 수는 모두 양수로 제한하기로 한다.

$a>0,\ b>0$ 이고, $m,\ n$은 2이상의 정수일 때,

① [거듭제곱근의 성질1] $(\sqrt[n]{a})^n=a$

② [거듭제곱근의 성질2] $\sqrt[n]{a}\ \sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$

③ [거듭제곱근의 성질3] $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

④ [거듭제곱근의 성질4] $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$

⑤ [거듭제곱근의 성질5] $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$

⑥ [거듭제곱근의 성질6] $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}$ **(단, p는 자연수)**

$pf)$ ①

$\sqrt[n]{a}=x$ 　$\cdots$① 라 두면, x는 a의 n제곱근이므로

$x^n=a$ 　$\cdots$②

①을 ②에 대입하면 $(\sqrt[n]{a})^n=a$

$ex)$ ① $(\sqrt{5})^2=5$ 　　② $(\sqrt[3]{7})^3=7$

$pf)$ ②

$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=x$라 두면

$x^n=(\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b})^n=(\sqrt[n]{a})^n(\sqrt[n]{b})^n=ab$

따라서 x는 ab의 n제곱근

그런데 $a>0,\ b>0$이므로 $x>0$

따라서 $x=\sqrt[n]{ab}$

$ex)$ ① $\sqrt{2}\sqrt{8}=\sqrt{2\cdot 8}=\sqrt{16}=4$ 　② $\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{8}=2$

$pf)$ ③

$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=x$라 두면

$x^n=\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n=\dfrac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n}=\dfrac{a}{b}$

따라서 x는 $\dfrac{a}{b}$ 의 n제곱근

그런데 $a>0,\ b>0$이므로 $x>0$, 따라서 $x=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

$ex)$ ① $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}}=\sqrt{\dfrac{3}{12}}=\sqrt{\dfrac{1}{4}}=\dfrac{1}{2}$

② $\dfrac{\sqrt[5]{64}}{\sqrt[5]{2}}=\sqrt[5]{\dfrac{64}{2}}=\sqrt[5]{32}=2$

pf) ④

$(\sqrt[n]{a})^m = x$라 두면

$x^n = \{(\sqrt[n]{a})^m\}^n = \{(\sqrt[n]{a})^n\}^m = a^m$

따라서 x는 a^m의 n제곱근

그런데 $a>0$이므로 $x>0$ 이고, 따라서 $x = \sqrt[n]{a^m}$ 이다.

cf) ④에서 특히 $m=n$이면 $(\sqrt[n]{a})^n = \sqrt[n]{a^n}$ 이 성립한다.

따라서 ①에 의해 $\sqrt[n]{a^n} = a$가 성립한다.

ex) ① $(\sqrt{7})^2 = \sqrt{7^2} = \sqrt{49} = 7$

② $(\sqrt[3]{8})^2 = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$

③ $\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$

④ $\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4$

pf) ⑤

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = x$라 두면

$x^{mn} = (\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}})^{mn} = \{(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}})^m\}^n$

$= (\sqrt[n]{a})^n = a$

따라서 x는 a의 mn제곱근이다.

그런데 $a>0$이므로 $x>0$ $\quad\therefore$ 따라서 $x = \sqrt[mn]{a}$

cf) 같은 방법으로 하면 $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$이 된다.

따라서 $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$ 이 성립하는 것을 알 수 있다.

ex) ① $\sqrt[3]{\sqrt{8}} = \sqrt{\sqrt[3]{8}} = \sqrt{2}$

② $\sqrt[6]{64} = \sqrt{\sqrt[3]{64}} = \sqrt{4} = 2$

pf) ⑥

$\sqrt[n]{a^m} = x$라 두면

$x^{np} = (\sqrt[n]{a^m})^{np} = \{(\sqrt[n]{a^m})^n\}^p = (a^m)^p = a^{mp}$

따라서 x는 a^{mp}의 np제곱근이다.

그런데 $a>0$이므로 $x>0$ $\quad\therefore$ 따라서 $x = \sqrt[np]{a^{mp}}$

ex) ① $\sqrt[6]{a^3} = \sqrt[3\cdot 2]{a^{3\cdot 1}} = \sqrt[2]{a^1} = \sqrt{a}$

② $\sqrt{a}\,\sqrt[3]{a} = \sqrt[6]{a^3}\,\sqrt[6]{a^2} = \sqrt[6]{a^3a^2} = \sqrt[6]{a^5}$

1-3. 거듭제곱근의 대소관계

크게 밑을 같게 할 수 있는 경우와 밑을 갖게 할 수 없는 경우로 나눠 생각해 보자.

(1) 밑을 같게 할 수 있을 때는

① $0<(\text{밑})<1$인 경우 지수가 작은 쪽이 큰 수가 된다.

② $(\text{밑})>1$인 경우 지수가 큰 쪽이 큰 수가 된다.

(2) 밑을 같게 할 수 없을 때는

① 거듭제곱근의 꼴을 분수 지수의 형태로 고친다.

② 지수의 각 분모의 최소공배수를 이용하여 통분한다.

③ 지수를 같게 하면 밑이 큰 쪽이 큰 수가 된다.

ex)(1) ① $\left(\frac{1}{2}\right)^2$과 $\left(\frac{1}{2}\right)^3$의 대소를 비교하면 $\left(\frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{1}{2}\right)^3$

② 2^2와 2^3의 대소를 비교하면 $2^2 < 2^3$

(2) $\sqrt{2}$와 $\sqrt[3]{3}$의 대소를 비교하면

$\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{6}} = (2^3)^{\frac{1}{6}} = 8^{\frac{1}{6}}$

$\sqrt[3]{3} = 3^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{2}{6}} = (3^2)^{\frac{1}{6}} = 9^{\frac{1}{6}}$

$\therefore\ \sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$

이때, 다음의 방법으로 거듭제곱근의 대소를 비교할 수 있다.

$\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}},\ \sqrt[3]{3} = 3^{\frac{1}{3}}$에서

지수 $\frac{1}{2}$과 $\frac{1}{3}$의 최소공배수인 6제곱을 하면

$(\sqrt{2})^6 = (2^{\frac{1}{2}})^6 = 2^3 = 8$

$(\sqrt[3]{3})^6 = (3^{\frac{1}{3}})^6 = 3^2 = 9$

$\therefore\ \sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$

ex) 다음 세 수의 대소를 비교하여라

$\sqrt{3},\ \sqrt[3]{2},\ \sqrt[4]{4}$

sol) $\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}},\ \sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}},\ \sqrt[4]{4} = 4^{\frac{1}{4}}$

각각의 지수의 분모 $2,\ 3,\ 4$의 최소공배수는 12이므로

$\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{6}{12}} = (3^6)^{\frac{1}{12}} = 729^{\frac{1}{12}}$

$\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{4}{12}} = (2^4)^{\frac{1}{12}} = 16^{\frac{1}{12}}$ $\quad \sqrt[4]{4} = 4^{\frac{1}{4}} = 4^{\frac{3}{12}} = (4^3)^{\frac{1}{12}} = 64^{\frac{1}{12}}$

$\therefore\ \sqrt[3]{3} < \sqrt[4]{4} < \sqrt{3}$

제2장 지수의 확장

지수법칙이 중학교에서 배운 자연수에서만 성립한다면, 지금처럼 유용하지 않을 것이다. 따라서 지수를 (자연수) → (정수) → (유리수) → (실수)로 확장할 필요가 있는데, 이때 지수법칙이 성립하도록 음수 지수와 유리수 지수를 새롭게 정의하고 밑의 범위를 제한한다.

(1) 자연수에서 정수로의 확장

① $a^0=1,\ a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$($n$은 자연수)을 정의하였다.

② 밑 a의 조건은 '$a\neq 0$인 실수'이다.

이 조건이 없다면 $0^{-2}=\dfrac{1}{0^2}$ 인 경우가 생긴다.

(2) 정수에서 유리수로의 확장

① $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$($m$은 정수, n은 자연수)을 정의하였다.

② 밑 a의 조건은 '$a>0$인 실수'이다. 이 조건이 없다면

$1=\{(-1)^2\}^{\frac{1}{2}}=(-1)^{2\times\frac{1}{2}}=(-1)^1=-1$인 경우가 생긴다.

(3) 유리수에서 실수로의 확장

유리수와 마찬가지로 a^r에서 밑 a의 조건은 '$a>0$인 실수'이다. 이 조건이 없다면

$1=[\{(-1)^2\}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}]^{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\{(-1)^{\sqrt{2}}\}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}=(-1)^1=-1$인 경우가 생긴다.

2-1. 자연수 지수법칙

(1) 자연수 지수의 정의

같은 실수 a를 2개 곱한 것을 a의 제곱이라 하고 a^2으로 나타낸다. 이때 제곱은 말 그대로 **제자신을 곱한다**는 뜻이다.
그래서 a^2을 a의 자승(自乘) 또는 2승(二乘)이라고도 한다. 자승은 제 스스로 곱했다는 뜻이고, 2승은 2개를 곱했다는 뜻이다.
마찬가지로, a를 3개 곱한 것을 a의 3제곱 또는 a의 3승이라 하고 a^3으로 나타낸다.

$a^2,\ a^3,\ a^4,\ \cdots$을 통틀어 a의 **거듭제곱**이라고 하고 말 그대로 **거듭**해서 **제**자신을 **곱**한다는 뜻을 갖고 있다.
이때 $\boldsymbol{a}$를 **밑**이라 하고, 곱한 개수를 가리키는 $2,\ 3,\ 4,\ \cdots$를 **지수**라고 한다.

많은 개수의 덧셈을 곱셈으로 나타내면 편리하듯이, 많은 개수의 곱셈은 거듭제곱으로 나타내면 편리하다는 것을 보여준다.

$ex)$ ① $3^4=3\cdot3\cdot3\cdot3=81$ ② $\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{8}$

③ $7\cdot(\sqrt{3})^2=7\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=21$

④ $(-2)^4=(-2)(-2)(-2)(-2)=16$

⑤ $-2^4=-(2\cdot2\cdot2\cdot2)=-16$

⑥ $(-1)^3=(-1)(-1)(-1)=-1$ ⑦ $-1^3=-(1\cdot1\cdot1)=-1$

(2) 지수법칙(자연수 지수)

지수가 자연수일 때 다음과 같은 법칙이 성립하는데 이것을 **지수법칙**이라고 한다. 천천히 하나씩 확인해 보기로 하자.

[지수법칙1] $a^m a^n = a^{m+n}$

[지수법칙2] $(a^m)^n = a^{mn}$

[지수법칙3] $(ab)^n = a^n b^n$

[지수법칙4] $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ (단, $a \neq 0$이고 $m>n$)

[지수법칙5] $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$ (단, $b \neq 0$)

$ex)$ $a^2 a^3 = aa \cdot aaa = aaaaa = a^5$

즉, 밑이 같은 거듭제곱끼리의 곱셈은 지수끼리 더한다.

$ex)$ $(a^2)^3 = a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 = a^{2+2+2} = a^6$

즉, 거듭제곱의 거듭제곱은 지수끼리 곱하면 된다.

$ex)$ $(ab)^3 = (ab)(ab)(ab) = (aaa)(bbb) = a^3 b^3$

즉, 곱의 거듭제곱은 각각의 거듭제곱끼리 곱한다.

$ex)$ $\dfrac{a^5}{a^3} = \dfrac{aaaaa}{aaa} = aa = a^2$

즉, 거듭제곱의 나눗셈은 분자 지수에서 분모 지수를 뺀다.

$cf)$ **지수법칙 4**는 $m>n$일 때 성립한다. 만일 그렇지 않으면 a^{m-n}에서 지수 $m-n$이 자연수의 범위를 벗어나기 때문이다. 따라서 지수가 정수인 경우를 배우기 전까지는 $m>n$으로 제한하는 것이다. 그러나 위의 법칙을 이용하지 못할 뿐, 실제의 계산은 약분을 이용해서 얼마든지 할 수 있다.

① $m=n$인 경우 $\dfrac{a^3}{a^3} = \dfrac{aaa}{aaa} = 1$

② $m<n$인 경우 $\dfrac{a^3}{a^5} = \dfrac{aaa}{aaaaa} = \dfrac{1}{a^2}$

$ex)$ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^3 = \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{a}{b} = \dfrac{aaa}{bbb} = \dfrac{a^3}{b^3}$

즉, 나눈 것의 거듭제곱은 각각의 거듭제곱끼리 나누면 된다.

$ex)$ 다음을 계산하여 간단한 꼴로 고쳐라.

① $\dfrac{a^3a^5}{a^2a^4}$ ② $\dfrac{(a^3)^5}{(a^2)^4}$ ③ $(2a^2)^3(3a^3)^2$

④ $\dfrac{(-3)^2}{-3^2}$ ⑤ $\dfrac{-2^3}{(-2)^3}$ ⑥ $\left(\dfrac{2a^3b^4}{ab^6}\right)^5$

$sol)$

① $\dfrac{a^3a^5}{a^2a^4} = \dfrac{a^8}{a^6} = a^2$

② $\dfrac{(a^3)^5}{(a^2)^4} = \dfrac{a^{15}}{a^8} = a^7$

③ $(2a^2)^3(3a^3)^2 = 2^3(a^2)^3 \cdot 3^2(a^3)^2 = 8a^6 \cdot 9a^6 = 72a^{12}$

④ $\dfrac{(-3)^2}{-3^2} = \dfrac{(-3)(-3)}{-3 \cdot 3} = \dfrac{9}{-9} = -1$

⑤ $\dfrac{-2^3}{(-2)^3} = \dfrac{-2 \cdot 2 \cdot 2}{(-2)(-2)(-2)} = \dfrac{-8}{-8} = 1$

⑥ $\left(\dfrac{2a^3b^4}{ab^6}\right)^5 = \left(\dfrac{2a^2}{b^2}\right)^5 = \dfrac{(2a^2)^5}{(b^2)^5} = \dfrac{32a^{10}}{b^{10}}$

$ex)$ 다음은 모두 잘못된 계산이다. 올바르게 고쳐라.

① $a^4 \cdot a^3 = a^{4 \cdot 3} = a^{12}$ ② $(a^3)^2 = a^{3^2} = a^9$

③ $a^5 = a^{2+3} = a^2 + a^3$ ④ $\dfrac{a^6}{a^3} = a^{\frac{6}{3}} = a^2$

$sol)$ ① $a^4 \cdot a^3 = a^{4+3} = a^7$ ② $(a^3)^2 = a^{3 \cdot 2} = a^6$

③ $a^5 = a^{2+3} = a^2 \cdot a^3$ ④ $\dfrac{a^6}{a^3} = a^{6-3} = a^3$

[정리]

[지수법칙(자연수 지수)]

지수 m과 n이 자연수일 때, 실수 a와 b에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $a^m a^n = a^{m+n}$

(2) $(a^m)^n = a^{mn}$

(3) $(ab)^n = a^n b^n$

(4) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ (단, $a \neq 0$이고 $m>n$)

(5) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$ (단, $b \neq 0$)

2-2. 정수 지수법칙

(1) 정수지수의 정의

이제 거듭제곱 a^n에서 지수 n의 범위를 정수인 경우까지 넓혀서 생각해보자.
이렇게 지수의 범위를 조금씩 넓혀가는 이유는 마지막 단계에서 지수함수를 공부하기 위해서이다.

예를 들어 $y=2^x$, $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$처럼 $y=a^x$ 꼴의 함수를 지수함수라고 부르는데, 특별한 말이 없으면 함수에서 정의역(즉, x의 범위)은 실수의 범위까지 생각해야 된다.
이것을 위해서 우리는 지수의 범위를 "자연수 → 정수 → 유리수 → 실수"로 점점 확장해가려고 하는 것이다.
지수의 범위를 확장할 때 기본 뼈대가 되는 것은 앞에서 공부한 지수법칙이 기본이다. 즉, 지수의 범위를 확장해도 지수법칙은 계속 성립하도록 해보자는 것이다.
앞에서 지수가 자연수(양의 정수)일 때는 지수법칙이 성립함을 알고 있으므로 지수가 0이거나 음의 정수일 때도 지수법칙이 성립하는지 알아보자.
그러기 위해서는 어떤 조건이 더 필요할까?
이에 대하여 한번 살펴보기로 하자.

① 지수가 0일 때

지수가 자연수일 때는 $a^m a^n = a^{m+n}$이 성립한다고 했다.
지수가 0일 때도 이것이 성립하도록 해보자.
지수법칙이 정수로 확장되는 과정에서 $a^m a^0 = a^{m+0} = a^m$ 이 성립하려면 $a^0 = 1$ 을 만족해야 한다.
따라서 a^0은 곱셈에 대한 항등원의 역할을 한다.
따라서 $a^0 = 1$이라고 정의하는 게 타당하다.
예를 들면 $3^0 = 1$, $\left(-\frac{1}{2}\right)^0 = 1$로 정의하는 것이라는 뜻이다.

② 지수가 음의 정수일 때

$a^{-1} = \frac{1}{a}$ 로 정의할까?

지수법칙이 정수로 확장되는 과정에서 $a^n a^{-n} = a^{n+(-n)} = a^0 = 1$ 이 성립하게 된다.

여기서 양변을 $a^n\ (a \neq 0)$ 로 나누면 $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ 이 성립하게 된다.

위의 2개는 지수법칙이 자연수에서 정수로 넘어가는 과정에서 꼭 필수적으로 정의되어야 할 약속이다.

$cf)$ 에서 $a \neq 0$으로 제한하듯이 $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$에서도 $a \neq 0$으로 제한한다.

그러지 않으면 $0^{-2} = \frac{1}{0^2} = \frac{1}{0 \cdot 0} = \frac{1}{0}$

로서 분모가 0인 분수가 되어버리기 때문이다.

> $0^2 = 0^3 = 0^4 = \cdots = 0$
>
> 0^0, 0^{-1}, 0^{-2}, $\cdots$은 정의되지 않는다.

따라서 특별한 조건이 없으면 정수 지수에서는 밑을 0이 아닌 실수로 제한한다.

$cf)$ $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$에서 특히 $n=1$이면 $a^{-1} = \frac{1}{a}$이 성립한다.

즉, 어떤 수의 -1승은 그 수의 역수이다.

$ex)$ $(-2)^{-1} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$, $\left(\frac{5}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{5}$이다.

[정리]

[정수 지수의 정의]

$a \neq 0$일 때 $\cdot a^0 = 1$ $\cdot a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

(2) 지수법칙(정수 지수)

지수가 정수일 때도 지수법칙이 성립함을 확인해보자. 앞에서 지수가 자연수(양의 정수)일 때 성립함은 증명했으므로 지수가

- 하나는 양의 정수이고 다른 하나는 음의 정수일 때
- 하나는 양의 정수이고 다른 하나는 0일 때
- 하나는 음의 정수이고 다른 하나는 0일 때
- 모두 음의 정수일 때
- 모두 0일 때

등 나머지 경우들을 따져봐야 한다. 여기서는 지수가 모두 음의 정수인 경우만 살펴보기로 하자.

m,n을 음의 정수라 하면 자연수 p,q에 대하여

$$m=-p,\quad n=-q$$

가 성립하고, 자연수 지수에서는 지수법칙이 성립하므로

$$a^pa^q=a^{p+q},\quad (a^p)^q=a^{pq},\quad (ab)^q=a^qb^q$$

이다. 따라서 다음 성질이 성립한다.
물론 지금부터 a와 b는 모두 0이 아닌 실수라고 가정한다.

[지수법칙1] $a^ma^n=a^{m+n}$
[지수법칙2] $(a^m)^n=a^{mn}$
[지수법칙3] $(ab)^n=a^nb^n$

$pf)$
지수법칙(1)증명

$$a^ma^n=a^{-p}a^{-q}=\frac{1}{a^p}\cdot\frac{1}{a^q}=\frac{1}{a^pa^q}=\frac{1}{a^{p+q}}$$
$$=a^{-(p+q)}=a^{(-p)+(-q)}=a^{m+n}$$

이 결과에 따라

$$\frac{a^m}{a^n}=a^m\cdot\frac{1}{a^n}=a^ma^{-n}=a^{m+(-n)}=a^{m-n}$$ 도 성립한다.

따라서 이제부터는 $\frac{a^m}{a^n}$을 계산할 때 m과 n 중 어느 것이 더 큰가에 상관없이 a^{m-n}으로 계산하면 된다.

지수법칙(3)증명

$$(ab)^n=(ab)^{-q}=\frac{1}{(ab)^q}=\frac{1}{a^qb^q}=\frac{1}{a^q}\cdot\frac{1}{b^q}$$
$$=a^{-q}b^{-q}=a^nb^n$$

이 결과에 따라

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\left(a\cdot\frac{1}{b}\right)^n=(ab^{-1})^n=a^n(b^{-1})^n$$
$$=a^nb^{-n}=a^n\cdot\frac{1}{b^n}=\frac{a^n}{b^n}$$ 도 성립한다.

$ex)$ ① $a^{-5}a^{-3}=a^{(-5)+(-3)}=a^{-8}=\frac{1}{a^8}$

② $a^{-5}a^3=a^{(-5)+3}=a^{-2}=\frac{1}{a^2}$

③ $\frac{a^2}{a^5}=a^{2-5}=a^{-3}=\frac{1}{a^3}$

④ $\frac{a^3}{a^3}=a^{3-3}=a^0=1$

$ex)$ ① $(a^{-5})^{-3}=a^{(-5)(-3)}=a^{15}$

② $(a^{-2})^3=a^{(-2)\cdot 3}=a^{-6}=\frac{1}{a^6}$

$ex)$ ① $2^{-4}\cdot 5^{-4}=(2\cdot 5)^{-4}=10^{-4}=\frac{1}{10^4}=\frac{1}{10000}$

② $\frac{8^{-3}}{2^{-3}}=\left(\frac{8}{2}\right)^{-3}=4^{-3}=\frac{1}{4^3}=\frac{1}{64}$

지금까지 공부한 내용을 정리를 해보자.

[정리]

[지수법칙(정수 지수)]

지수 m과 n이 정수일 때,
0이 아닌 실수 a와 b에 대하여 다음이 성립한다.

1. $a^ma^n=a^{m+n}$
2. $(a^m)^n=a^{mn}$
3. $(ab)^n=a^nb^n$

2-3. 유리수 지수법칙

(1) 유리수 지수의 정의

앞에서 배운 거듭제곱근의 개념

$x>0$이고 $x^n=a \quad \Rightarrow \quad x=\sqrt[n]{a}$

을 써서 지수가 유리수인 경우를 정의해보기로 하자.

지수법칙 $(a^m)^n=a^{mn}$ 이 유리수 지수에서도 자유롭게 성립하려면 어떤 약속을 해줘야 할까?

예를 들어 $x=a^{\frac{n}{m}}$ $\cdots$① 이라 하면

$x^m=\left(a^{\frac{n}{m}}\right)^m=a^{\frac{n}{m}\cdot m}=a^n$이고, $a>0$이므로 $x>0$ 이다.

따라서 x는 a^n의 m제곱근이다.

따라서 $x=\sqrt[m]{a^n}$ $\cdots$②

①, ②를 비교하면 $a^{\frac{n}{m}}=\sqrt[m]{a^n}$

으로 약속하는 것이 타당하다고 볼 수 있다.

$cf)$ 되풀이해서 얘기하지만 $a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p}$의 값이 실수의 범위에서 항상 존재하려면 $a>0$이어야 한다는 것이다. p, q가 짝수인가 홀수인가에 따라 상황이 달라질 수 있으니까. 다음 예제를 보자.

$ex)$ ① $1^{\frac{5}{3}}=\sqrt[3]{1^5}=\sqrt[3]{1}=1$ (실수)

② $1^{\frac{5}{2}}=\sqrt{1^5}=\sqrt{1}=1$ (실수)

③ $(-1)^{\frac{5}{3}}=\sqrt[3]{(-1)^5}=\sqrt[3]{-1}=-1$ (실수)

④ $(-1)^{\frac{5}{2}}=\sqrt{(-1)^5}=\sqrt{-1}$ (허수)

즉, 실수의 범위에서 $a^{\frac{p}{q}}$의 값이 정의되지 않을 때는 ④처럼 밑이 음수이고 지수가 $\frac{\text{홀수}}{\text{짝수}}$인 경우이다. 따라서 $a^{\frac{p}{q}}$의 값이 p, q에 상관없이 실수로 정의되려면 $a>0$인 조건이 필요하다는 것을 알 수 있다.

$cf)$ $a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p}$에서 특히 $p=1$이면 $a^{\frac{1}{q}}=\sqrt[q]{a}$가 성립한다.

문제를 풀 때 많이 쓰이는 것이므로 공식처럼 익혀두면 편리하다.

$ex)$ ① $a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a}$ ② $a^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{a}$

[정리]

[유리수 지수의 정의]

$a>0$일 때 $a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p}$ (p는 정수, q는 2이상의 정수)

⬅ 분모는 거듭제곱근 자리로, 분자는 지수 자리로 바뀐다.

(2) 지수법칙(유리수 지수)

거듭제곱근의 성질을 적절히 이용하여 지수가 유리수일 때도 지수법칙이 성립함을 확인해보자.
여기에 사용되는 지수법칙은 모두 $a>0,\ b>0$이고 $m,\ n$은 유리수일 때 성립하는 것이다.

[지수법칙1] $a^m a^n = a^{m+n}$
[지수법칙2] $(a^m)^n = a^{mn}$
[지수법칙3] $(ab)^n = a^n b^n$

$pf)$
1) 지수법칙(1)증명

$m=\frac{p}{q},\ n=\frac{r}{s}$라 두면

$a^m a^n = a^{\frac{p}{q}} a^{\frac{r}{s}} = \sqrt[q]{a^p}\ \sqrt[s]{a^r} = \sqrt[qs]{a^{ps}}\ \sqrt[qs]{a^{qr}}$

$= \sqrt[qs]{a^{ps}a^{qr}} = \sqrt[qs]{a^{ps+qr}} = a^{\frac{ps+qr}{qs}} = a^{\frac{ps}{qs}+\frac{qr}{qs}} = a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}} = a^{m+n}$

2) 지수법칙(2)증명

$m=\frac{p}{q},\ n=\frac{r}{s}$라 두면

$(a^m)^n = \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} = \sqrt[s]{\left(\sqrt[q]{a^p}\right)^r} = \sqrt[s]{\sqrt[q]{a^{pr}}}$

$= \sqrt[qs]{a^{pr}} = a^{\frac{pr}{qs}} = a^{\frac{p}{q}\cdot\frac{r}{s}} = a^{mn}$

3) 지수법칙(3)증명

$n=\frac{p}{q}$라 두면

$(ab)^n = (ab)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{(ab)^p} = \sqrt[q]{a^p b^p} = \sqrt[q]{a^p}\ \sqrt[q]{b^p}$

$= a^{\frac{p}{q}} b^{\frac{p}{q}} = a^n b^n$

$ex)$ $(4a^{\frac{3}{2}})(2a^{\frac{1}{2}}) = (4\cdot 2)(a^{\frac{3}{2}}a^{\frac{1}{2}}) = 8a^{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}} = 8a^2$

$ex)$ $(a^{-6})^{\frac{2}{3}} = a^{-6\cdot\frac{2}{3}} = a^{-4} = \frac{1}{a^4}$

$cf)$ 유리수 지수일 때는 $a>0$이란 점을 다시 강조한다.
다음과 같은 계산은 모두 잘못된 것이다.

① $\{(-1)^2\}^{\frac{1}{2}} = (-1)^{2\cdot\frac{1}{2}} = (-1)^1 = -1$

(올바른 풀이) $\{(-1)^2\}^{\frac{1}{2}} = 1^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1$

② $-1 = (-1)^3 = (-1)^{4\cdot\frac{3}{4}} = \{(-1)^4\}^{\frac{3}{4}} = 1^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{1^3} = \sqrt[4]{1} = 1$

역시 밑이 음수이고 지수가 $\frac{\text{홀수}}{\text{짝수}}$일 때 오류가 생기는 게 보인다?
이 꼴이 아니면 다음처럼 아무 문제가 생기지 않을 것이다.

③ $\{(-1)^3\}^{\frac{1}{3}} = (-1)^{3\cdot\frac{1}{3}} = (-1)^1 = -1$

(확인) $\{(-1)^3\}^{\frac{1}{3}} = (-1)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-1} = -1$

④ $-1 = (-1)^3 = (-1)^{5\cdot\frac{3}{5}} = \{(-1)^5\}^{\frac{3}{5}} = (-1)^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{(-1)^3}$
$= \sqrt[5]{-1} = -1$

$ex)$ $(25a^4)^{-\frac{3}{2}} = (5^2)^{-\frac{3}{2}}(a^4)^{-\frac{3}{2}} = 5^{-3}a^{-6} = \frac{1}{125a^6}$

$ex)$ $9^{\frac{3}{2}} \times 27^{-\frac{2}{3}}$의 값은?

① $\frac{1}{3}$ ② 1 ③ $\sqrt{3}$
④ 3 ⑤ $3\sqrt{3}$

$sol)$ $9^{\frac{3}{2}} \times 27^{-\frac{2}{3}} = (3^2)^{\frac{3}{2}} \times (3^3)^{-\frac{2}{3}} = 3^3 \times 3^{-2} = 3^{3-2} = 3$

지금까지 공부한 내용을 요약하면 다음과 같다.

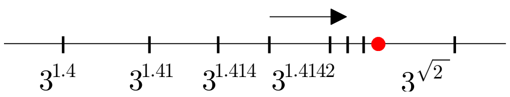
[정리]

[지수법칙(유리수 지수)]

지수 m과 n이 유리수일 때,
양수 a와 b에 대하여 다음이 성립한다
1. $a^m a^n = a^{m+n}$
2. $(a^m)^n = a^{mn}$
3. $(ab)^n = a^n b^n$

2-4. 실수지수의 정의

마지막으로 지수가 실수인 경우를 생각해보자.
유리수 지수는 앞에서 공부했으니 무리수 지수만 살펴보기로 하자.
예를 들어 $3^{\sqrt{2}}$은 다음처럼 정의한다. 무리수 $\sqrt{2}$는
$\sqrt{2}=1.41421356\cdots$처럼 순환하지 않는 무한소수이다.
이때 $\sqrt{2}$에 점점 가까워지는 유리수
$1.4,\quad 1.41,\quad 1.414,\quad 1.4142,\quad 1.41421,\ \cdots$
을 생각해보자. 그러면 이들 유리수를 지수로 갖는 수
$3^{1.4},\quad 3^{1.41},\quad 3^{1.414},\quad 3^{1.4142},\quad 3^{1.41421},\ \cdots$
은 어떤 일정한 값에 점점 가까워진다.
이 값을 $3^{\sqrt{2}}$으로 정의하면 된다.
즉, $3^{1.4}<3^{1.41}<3^{1.414}<3^{1.4142}<3^{1.41421}<\cdots$
이고, 이들은 $3^{1.5}$을 넘지 못할 것이므로 $3^{1.5}$보다 작은 어떤 일정한 값에 점점 가까워질 수밖에 없다는 뜻이다.
그 값을 $3^{\sqrt{2}}$으로 정의하는 것이다.



계산기를 써서 실제 근삿값을 구해보면
$3^{1.4}\fallingdotseq 4.65554$, $3^{1.41}\fallingdotseq 4.70697$
$3^{1.414}\fallingdotseq 4.7277$, $3^{1.4142}\fallingdotseq 4.72873$
등이 나온다. 계산 과정은 불편하겠지만 이런 식으로 계속 계산해가면 $3^{\sqrt{2}}$의 더 좋은 근삿값을 얻을 수 있다.
그래서 지수가 실수일 때도 지수법칙이 성립한다고 알려져 있다.

$ex)$ ① $3^{\sqrt{2}}\cdot 3^{2\sqrt{2}}=3^{\sqrt{2}+2\sqrt{2}}=3^{3\sqrt{2}}$

② $\left(5^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}=5^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=5^2=25$

지금까지 배운 내용을 요약하면 다음과 같다.

지수 x의 범위	밑 a의 조건	지수법칙
자연수	실수	$a^m a^n=a^{m+n}$ $(a^m)^n=a^{mn}$ $(ab)^n=a^n b^n$
정수	$a\neq 0$	
유리수	$a>0$	
실수		

즉, 지수 x의 범위가 넓어질수록 밑 a의 조건은 점점 더 제한해야 된다.
그래야 a^x의 값도 존재하고 지수법칙도 오류 없이 성립하는 것이다.

$ex)$ $3^x=\sqrt{7+\sqrt{48}}-\sqrt{7-\sqrt{48}}$일 때, 9^x+9^{-x}의 값을 구하여라.

$sol)$ $3^x=\sqrt{7+\sqrt{48}}-\sqrt{7-\sqrt{48}}$
$=\sqrt{7+2\sqrt{12}}-\sqrt{7-2\sqrt{12}}$
$=2+\sqrt{3}+(2-\sqrt{3})=2\sqrt{3}$
$9^x=(3^x)^2=(2\sqrt{3})^2=12$
$\therefore\ 9^x+9^{-x}=9^x+(9^x)^{-1}=12+\dfrac{1}{12}=\dfrac{145}{12}$

[정리]

[지수법칙(실수 지수)]

지수 m과 n이 유리수일 때,
양수 a와 b에 대하여 다음이 성립한다.

1. $a^m a^n=a^{m+n}$
2. $(a^m)^n=a^{mn}$
3. $(ab)^n=a^n b^n$

1. 지수의 확장과 거듭제곱근

지수의 확장(1) : 자연수 지수에서 정수 지수로의 확장

중학교 때 배웠다.
→ $a\times a\times a=a^3$에서 a를 밑이라 하고, 3을 지수라고 한다.

[지수법칙]

① $a^m\times a^n=a^{m+n}$, $a^m\div a^n=\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$

② $(a^m)^n=a^{mn}$

③ $(ab)^n=a^nb^n$, $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}$

여기서 문제가 되는 건 $a^m\div a^n=a^{m-n}$!!!

예)

① 지수법칙에 의하면 $a^2\div a^2=a^0=?$ 한편, $a^2\div a^2=\dfrac{a^2}{a^2}=1$

② 지수법칙에 의하면 $a^2\div a^5=a^{-3}=?$ 한편 $a^2\div a^5=\dfrac{a^2}{a^5}=\dfrac{1}{a^3}$

그래서 다음과 같은 지수의 확장이 필요하다.

[지수의 확장(1)]

$a\neq 0$일 때, $a^0=1$, $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$

1. 다음 값을 계산하여라.

(1) $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-2}$ (2) $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{-3}$

(3) $(-3)^{-2}$ (4) -3^{-2}

2. 다음 중 그 값이 0 또는 1이 아닌 것을 모두 고르면?

① 0^0 ② 0^3 ③ 0^{-3}
④ $(-3)^0$ ⑤ -3^0

거듭제곱근

지수를 자연수에서 정수로 확장했다.
이제 지수를 정수에서 유리수로 확장할 예정이다.
이를 위해 먼저 거듭제곱근을 배운다.

거듭제곱이란 거듭해서 곱한 x^n을 의미하고,
거듭제곱근이란 $x^n=a$의 근을 의미한다.

[거듭제곱근]
a의 n제곱근 → $x^n=a$의 n개의 근

a의 세제곱근이란 $x^3=a$의 세 근을 의미하고,
a의 네제곱근이란 $x^4=a$의 네 근을 의미한다.

예) ① 8의 세제곱근은 $x^3=8$의 세 근인
$x=2$, $x=-1\pm\sqrt{3}i$ → 이 중 실수는 2
② 16의 네제곱근은 $x^4=16$의 네 근인
$x=\pm2$, $x=\pm2i$ → 이 중 실수는 ±2

a의 n제곱근 중 실수인 것은
n이 홀수일 때는 한 개, n이 짝수일 때는 플러스, 마이너스의 두 개

[$\sqrt[n]{a}$의 정의]
① n이 홀수일 때 : $\sqrt[n]{a}=$(a의 n제곱근 중 실수)
② n이 짝수일 때 : $\sqrt[n]{a}=$(a의 n제곱근 중 양수)
예) ① $\sqrt[3]{8}=$(세제곱해서 8이 되는 실수)$=2$
② $\sqrt[3]{-8}=$(세제곱해서 -8이 되는 실수)$=-2$
③ $\sqrt[4]{16}=$(네제곱해서 16이 되는 양수)$=2$

네제곱해서 -16이 되는 양수는 없다.
→ $\sqrt[4]{-16}$은 실수에서 정의되지 않는다.

3. 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

① 5의 다섯제곱근은 $\sqrt[5]{5}$뿐이다.
② -3의 세제곱근 중 실수인 것은 없다.
③ 4의 네제곱근 중 실수인 것은 두 개다.
④ n이 홀수일 때, n의 n제곱근 중 실수인 것은 한 개다.
⑤ n이 짝수일 때, $-n$의 n제곱근 중 실수인 것은 두 개다.

4. 다음 중 그 값이 -1이 아닌 것을 모두 고르면?

① $\sqrt{-1}$ ② $\sqrt[3]{-1}$ ③ $-\sqrt[3]{1}$
④ $\sqrt[4]{-1}$ ⑤ $-\sqrt[4]{1}$

$\sqrt[n]{a}$의 계산 공식

$\sqrt{a}$의 계산 공식은 중학교 때 배웠다.
$\sqrt[n]{a}$의 계산에서도 유사한 공식이 성립한다.

[$\sqrt[n]{a}$의 계산 공식]
$a>0$, $b>0$이고 m, n이 2 이상의 정수일 때,
① $(\sqrt[n]{a})^n = a$, $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$
② $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$, $\dfrac{\sqrt[n]{b}}{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\dfrac{b}{a}}$
③ $\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$, $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

5. 다음 값을 계산하여라.

(1) $\sqrt[4]{2}\sqrt[4]{8}$

(2) $\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{54}}$

(3) $\sqrt[4]{81^3}$

6. 다음 값을 계산하여라.

(1) $\sqrt[3]{9}\sqrt[3]{3}$

(2) $\dfrac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{2}}$

(3) $\sqrt[3]{\left(\dfrac{27}{8}\right)^2}$

7. 다음 물음에 답하여라. (단, $a>0$)

(1) $\sqrt[12]{5^4}\,\sqrt[9]{5^6}$ 의 값을 구하여라.

(2) $\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt{a}}}\times\sqrt{\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[6]{a}}}$ 을 간단히 하여라.

8. 다음 물음에 답하여라. (단, $a>0$)

(1) $\sqrt[8]{7^6}\,\sqrt[12]{7^3}$ 의 값을 구하여라.

(2) $\sqrt{\dfrac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[3]{a}}}\times\sqrt{\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a}}}\times\sqrt[4]{\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a}}}$ 을 간단히 하여라.

9. 다음 계산 과정에서 처음으로 틀린 곳은?

$$\begin{array}{cccccc} 10 & =\sqrt[10]{10^{10}} & =\sqrt{\sqrt[5]{10^{10}}} & =\sqrt{\sqrt{10^2}} & =\sqrt[4]{10^2} & =\sqrt{10} \\ & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ & ① & ② & ③ & ④ & ⑤ \end{array}$$

거듭제곱근의 대소비교

10. 다음 수의 크기를 비교하여라.

(1) $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[4]{10}$

(2) $\sqrt[5]{5\sqrt[3]{3}}$, $\sqrt[3]{3\sqrt[5]{5}}$

11. 다음 수의 크기를 비교하여라.

(1) $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[6]{6}$

(2) $\sqrt[3]{2\sqrt{3}}$, $\sqrt[4]{3\sqrt[3]{2}}$

지수의 확장(2) : 정수 지수에서 유리수 지수로의 확장

수학사는 어느 정도 일반화의 역사.
기존의 정리는 유지한 채로 개념과 정의를 끝없이 확장해 왔다.
지수를 자연수에서 정수로 확장했다.
이번엔 지수를 정수에서 유리후로 확장할 것이다.
물론, 지수법칙을 유지하며!!!

지수법칙 $(a^m)^n=a^{mn}$에
$m=\dfrac{1}{3}$, $n=3$을 대입하면 $\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3=a$ $\therefore a^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{a}$
여기에 착안하여 다음과 같은 분수 지수의 정의를 얻는다.

[지수의 확장(2)]
$a>0$일 때, $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$, $a^{\frac{n}{m}}=\sqrt[n]{a^m}$
예) $8^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{8}=2$, $5^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{5^2}=\sqrt[3]{25}$
지수가 확장됨에 따라 밑은 점점 제한되어 왔다.
→ 음수 지수에서는 $a\neq 0$, 분수 지수에서는 $a>0$
지수법칙을 쓸 때, 밑의 제한 조건에 특히 주의한다.

[밑이 음수이고 지수가 분수일 때에는 지수법칙을 쓸 수 없다.]

12. 다음 식을 간단히 하여라.

(1) $\left\{\left(\dfrac{4}{9}\right)^{\frac{2}{3}}\right\}^{-\frac{3}{4}}$

(2) $2^{\frac{1}{3}}+4^{\frac{1}{3}}+16^{\frac{1}{3}}+32^{\frac{1}{3}}$

13. 다음 식을 간단히 하여라.

(1) $\left\{\left(\dfrac{9}{16}\right)^{-\frac{4}{3}}\right\}^{\frac{3}{8}}$

(2) $3^{\frac{1}{3}}+9^{\frac{1}{3}}+72^{\frac{1}{3}}+81^{\frac{1}{3}}$

14. 다음 식을 간단히 하여라. (단, $a>0$, $b>0$, $c>0$)

(1) $a^{\frac{3}{2}}\times a^{\frac{1}{6}}\div a^{-\frac{1}{3}}$

(2) $\left(a^{\frac{1}{2}}\times b^{\frac{2}{3}}\times c^{\frac{5}{6}}\right)^{6}$

(3) $\sqrt{a}\times\sqrt[3]{a}\times\sqrt[4]{a}$

(4) $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}$

15. 다음 식을 간단히 하여라.

(1) $\left(a^{\frac{3}{2}}\times a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{6}{13}}$

(2) $\sqrt{a^3}\times\sqrt[3]{a^2}\div\sqrt[6]{a}$

(3) $\sqrt{\dfrac{a}{\sqrt{a}}\times\sqrt[3]{a}}$

(4) $\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a}}}$

16. 다음 계산 과정에서 처음으로 틀린 곳은?

$$3 \underset{①}{=} 9^{\frac{1}{2}} \underset{②}{=} \left\{(-3)^2\right\}^{\frac{1}{2}} \underset{③}{=} (-3)^{2\times\frac{1}{2}} \underset{④}{=} (-3)^1 \underset{⑤}{=} -3$$

지수의 확장(3) : 유리수 지수에서 실수 지수로의 확장

실수 지수의 정교한 분석은 대학교 때 한다.
고교 때는 근삿값을 구하는 방법만 이해하면 끝!
실수 지수의 근삿값을 구하는 방법은?

예) ① $2^{\sqrt{3}}$의 근삿값은?

→ $\sqrt{3} \fallingdotseq 1.7$이므로 $2^{\sqrt{3}} \fallingdotseq 2^{1.7} = 2^{\frac{17}{10}} = \sqrt[10]{2^{17}}$

② 2^{π}의 근삿값은?

→ $\pi \fallingdotseq 3$이므로 $2^{\pi} \fallingdotseq 2^3 = 8$

물론, 지수를 실수로 확장해도 모든 지수법칙은 보존된다.

[밑이 양수이기만 하면 지수에 상관없이 마음 놓고 지수법칙을 쓸 수 있다.]

예) $\left(2^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}} = 2^{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = 2^3 = 8$

17. 다음 식을 간단히 하여라.

(1) $\left(3^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{8}}$

(2) $\left(3^{\sqrt{3}} \times 3^{\sqrt{12}}\right)^{\frac{1}{3}}$

(3) $\left(3^{\sqrt{8}} \div 3^{\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$

18. 다음 식을 간단히 하여라.

(1) $\left(10^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{12}}$

(2) $\left(6^{\sqrt{18}} \div 6^{\sqrt{8}}\right)^{\sqrt{2}}$

(3) $\left(4^{\frac{1}{\sqrt{6}}} \times 3^{\sqrt{\frac{2}{3}}}\right)^{\sqrt{3}}$

19. 세 수 $A = \left(\sqrt{\sqrt{2^{\sqrt{2}}}}\right)^{\sqrt{2}}$, $B = \sqrt{\left(\sqrt{2^{\sqrt{2}}}\right)^{\sqrt{2}}}$, $C = \left\{\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}\right\}^{\sqrt{2}}$의 크기를 비교하여라.

지수법칙과 함수방정식

1) 착각은 자유다. 하지만 불행한 결과를 낳는다.

착각	안 착각
$(a^2)^3 = a^{2^3} = a^8$	$(a^2)^3 = a^{2\times 3} = a^6$
$a^2 \times a^3 = a^{2\times 3} = a^6$	$a^2 \times a^3 = a^{2+3} = a^5$
지수의 마이너스는 역수의 효과를 준다. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{4}{5}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{4}{5}}$	지수의 마이너스는 밑을 역수로 만든다. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{4}{5}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{4}{5}}$

2) 지수법칙의 함수방정식 버전

지수법칙	함수방정식
$a^x \times a^y = a^{x+y}$	$f(x)\times f(y) = f(x+y)$
$a^x \div a^y = a^{x-y}$	$f(x)\div f(y) = f(x-y)$
$(a^x)^y = a^{xy}$	$\{f(x)\}^y = f(xy)$

혹시나 길을 가다 $f(x)\times f(y) = f(x+y)$를 만나면 반갑게 인사한다.
"어이구, 이거 지수함수 아니신가. 마누라는 잘 있고?"
(지수함수의 마누라는 로그함수)

3) 복소수 지수로의 확장
대학교 때는 지수를 복소수까지 확장한다. 밑이 양수라는 조건도 사라진다. 모든 수가 밑과 지수에 올 수 있다.

이 이론을 이용하면 i의 i제곱인 i^i은 $e^{-\frac{\pi}{2}}$이라는 괴상한 실수가 된다.

(단, $e = 2.71828\cdots$인 무리수)

$$i^i = e^{-\frac{\pi}{2}}$$

20. 모든 실수 x, y에 대하여

$$f(x+y) = f(x)f(y),\ f(x) > 0$$

인 관계가 성립할 때, 다음 보기에서 옳은 것의 개수를 구하여라.

<보기>

[I] $f(0) = 1$

[II] $f(10) = \{f(1)\}^{10}$

[III] $f\left(\frac{x}{3}\right) = \{f(x)\}^{\frac{1}{3}}$

[IV] $f(-x) = -f(x)$

2. 여러 가지 문제

확장된 지수가 곱셈 공식이랑 한판 논다.
수학에서 배웠다. → 처음엔 미웠지만 살다 보니 정이 든 다음 네 곱셈공식. ① $(A-B)(A+B)=A^2-B^2$ $(A-B)(A^2+AB+B^2)=A^3-B^3$ ② $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ $(A+B)^3=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$

21. 다음 식을 간단히 하여라. (단, $a>0,\ b>0$)

(1) $\left(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)$

(2) $(a-b)\div\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)$

22. 다음 식을 간단히 하여라. (단, $a>0,\ b>0$)

(1) $\left(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}\right)(a+a^{-1})$

(2) $(a-a^{-1})\div\left(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}\right)$

(3) $\left(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)$

(4) $(a-b^{-1})\div\left(a^{\frac{1}{3}}-b^{-\frac{1}{3}}\right)$

23. 다음 식을 간단히 하여라.

(1) $\left(2^{\frac{3}{2}}+2^{-\frac{1}{2}}\right)^2+\left(2^{\frac{3}{2}}-2^{-\frac{1}{2}}\right)^2$

(2) $\left(3^{\frac{1}{3}}+3^{-\frac{2}{3}}\right)^3+\left(3^{\frac{1}{3}}-3^{-\frac{2}{3}}\right)^3$

24. $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=3$일 때, 다음 식의 값을 구하여라.

(단, $a>0$)

(1) $a+a^{-1}$

(2) a^2+a^{-2}

(3) $a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}$

25. $\sqrt{a}+\dfrac{1}{\sqrt{a}}=4$일 때, 다음 식의 값을 구하여라.

(단, $a>0$)

(1) $a+\dfrac{1}{a}$

(2) $a^2+\dfrac{1}{a^2}$

(3) $a\sqrt{a}+\dfrac{1}{a\sqrt{a}}$

26. 다음 물음에 답하여라. (단, $a>0$)

(1) $a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}=10$일 때, $\dfrac{a^{\frac{3}{2}}-a^{-\frac{3}{2}}}{a+a^{-1}+1}$의 값을 구하여라.

(2) $a^2+a^{-2}=14$일 때, $\dfrac{a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}}{a+a^{-1}}$의 값을 구하여라.

나를 먹으려면 네가 변해야 한다.
→ 구할 식을 변형해 주어진 값을 대입한다.

27. 다음 물음에 답하여라. (단, $a>0$)

(1) $3^a=2$일 때, $\left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{a}{2}}$의 값을 구하여라.

(2) $a^{2x}=2010$일 때, $\frac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}$의 값을 구하여라.

28. 다음 물음에 답하여라. (단, $a>0$)

(1) $\pi^a=3$일 때, $\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^{-4a}$의 값을 구하여라.

(2) $a^{2x}=2$일 때, $\frac{a^{3x}-a^{-3x}}{a^x+a^{-x}}$의 값을 구하여라.

(3) $a^{-2}=3$일 때, $\frac{a^3-a^{-3}}{a^3+a^{-3}}$의 값을 구하여라.

이중근호 문제가 이중근호 문제 아닌 척 한다.

수학에서 참고용으로 배웠다.
→ 루트 안에 루트가 또 깝죽되는 이중근호.

$$\sqrt{(\text{합})-2\sqrt{(\text{곱})}}$$

예) $\sqrt{5-2\sqrt{6}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$ ← 큰 수를 앞쪽에 쓴다.

29. $2^{a}=\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^{\frac{4}{3}}$일 때, $\left(\dfrac{1}{\sqrt{8}}\right)^{-\frac{a}{2}}$의 값을 구하여라.

30. 다음 식의 값을 구하여라.

(1) $\sqrt{\sqrt{2}+1}\times\sqrt[4]{3-2\sqrt{2}}$

(2) $\sqrt[4]{17+2\sqrt{72}}-\sqrt[4]{17-2\sqrt{72}}$

(3) $\sqrt[5]{\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}}$

31. $a^{x}=\left(\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}}+\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$일 때, $\dfrac{a^{x}-a^{-3x}}{a^{x}+a^{-3x}}$의 값을 구하여라. (단, $a>0$)

문제가 헷갈리게 한다고 슬퍼하거나 노여워하지 말라.

로마의 영웅 줄리어스 시저는 이렇게 말하였다.
→ 헷갈렸노라, 풀었노라, 통쾌했노라.

32. 어떤 호수에서 수면에서의 빛의 세기가 I_0일 때, 수심이 $d\,\mathrm{m}$인 곳에서의 빛의 세기를 I_d라고 하면

$$I_d = I_0\, 2^{-0.25d}$$

의 관계식이 성립한다고 한다. 이 호수에서 빛의 세기가 수면에서의 빛의 세기의 25%인 곳의 수심은?

① $4\,\mathrm{m}$ ② $8\,\mathrm{m}$ ③ $10\,\mathrm{m}$
④ $12\,\mathrm{m}$ ⑤ $16\,\mathrm{m}$

33. $a=\sqrt{2},\ b=\sqrt[4]{3}$일 때, $\sqrt[8]{6}$을 $a,\ b$로 나타내면?

① $\sqrt[4]{a}\sqrt{b}$ ② $\sqrt[3]{a}\sqrt{b}$ ③ $\sqrt{ab}$
④ a^2b ⑤ a^4b^2

34. 어떤 전자레인지로 피자 n조각을 굽는 데 걸리는 시간을 t분이라고 하면

$$t=1.2\times n^{0.5}$$

의 관계식이 성립한다고 한다. 이 전자레인지로 피자 8조각을 굽는 데 걸리는 시간은 피자 2조각을 굽는 데 걸리는 시간의 몇 배인지 구하여라.

35. $a=3^3,\ b=4^4$일 때, 6^6을 $a,\ b$로 나타내어라.

36. 등식 $2^{2010}+2^{2010}+2^{2011}+2^{2012}=2^{\square}$이 성립할 때, □안에 알맞은 값을 구하여라.

37. n이 정수일 때, $1024^{\frac{1}{n}}$이 나타낼 수 있는 정수의 개수를 구하여라.

38. $x=\sqrt[2012]{2010}$일 때, $\dfrac{1+x+x^2+\cdots+x^{2010}}{x^{-2}+x^{-3}+x^{-4}+\cdots+x^{-2012}}$의 값을 구하여라.

39. 다음 중 5^{5^5}의 5제곱근으로 옳은 것은?

① 5^5　② 5^{5^5-1}　③ 5^{4^5}
④ 5^{5^4}　⑤ $(\sqrt{5})^5$

40. 네 집합

$A=\{x|x$는 $(-10)^{10}$의 8제곱근 $\}$,
$B=\{x|x$는 $(-10)^{11}$의 9제곱근 $\}$,
$C=\{x|x$는 $(-10)^{12}$의 11제곱근 $\}$,
$D=\{x|x$는 $(-10)^{13}$의 12제곱근 $\}$

에 대하여 원소의 개수가 가장 많은 집합과 실수인 개수가 가장 많은 집합을 구하여라.

41. x^2을 $x-\sqrt{3}$으로 나누었을 때의 나머지를 R_1,
x^3을 $x-\sqrt{R_1}$로 나누었을 때의 나머지를 R_2,
x^5을 $x-\sqrt{R_2}$로 나누었을 때의 나머지를 R_3이라고 할 때,
$\sqrt[n]{R_2}=(R_1\cdot R_3)^{\frac{3}{190}}$을 만족하는 자연수 n의 값을 구하여라.

42. 두 양수 a, b에 대하여 연산 $\circ$을 $a\circ b=(\sqrt[5]{\sqrt{3^a}})^b$으로 정의할 때, 다음 보기에서 옳은 것을 모두 골라라.

<보기>

[I] $a\circ b=b\circ a$
[II] $(10\circ 0)\times(10\circ 1)=10$
[III] ab가 10의 배수이면 $a\circ b$는 자연수이다.
[IV] $\dfrac{a\circ b}{a\circ c}=a\circ\left(\dfrac{b}{c}\right)$