

Reguläre Augmentierung von planaren Graphen mit geringem Grad

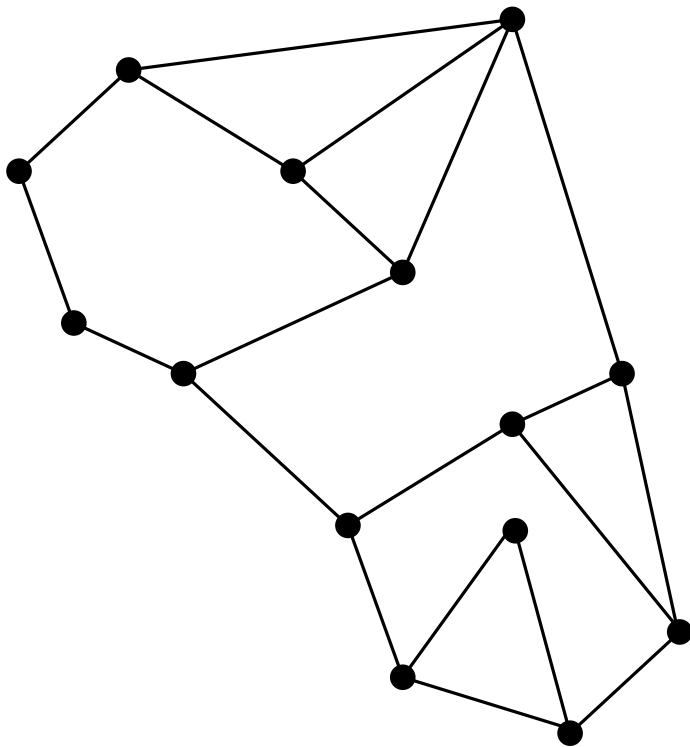
Bachelorabschlussvortrag · October 1, 2013
Chau Nguyen

INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK · PROF. DR. DOROTHEA WAGNER



Reguläre planare Augmentierungen

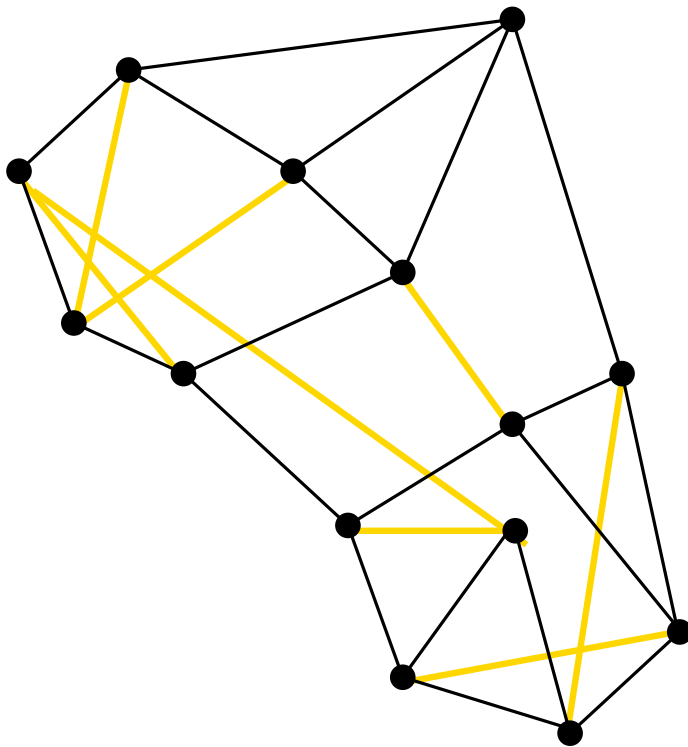
Gegeben: Planarer Graph



Reguläre planare Augmentierungen

Gegeben: Planarer Graph

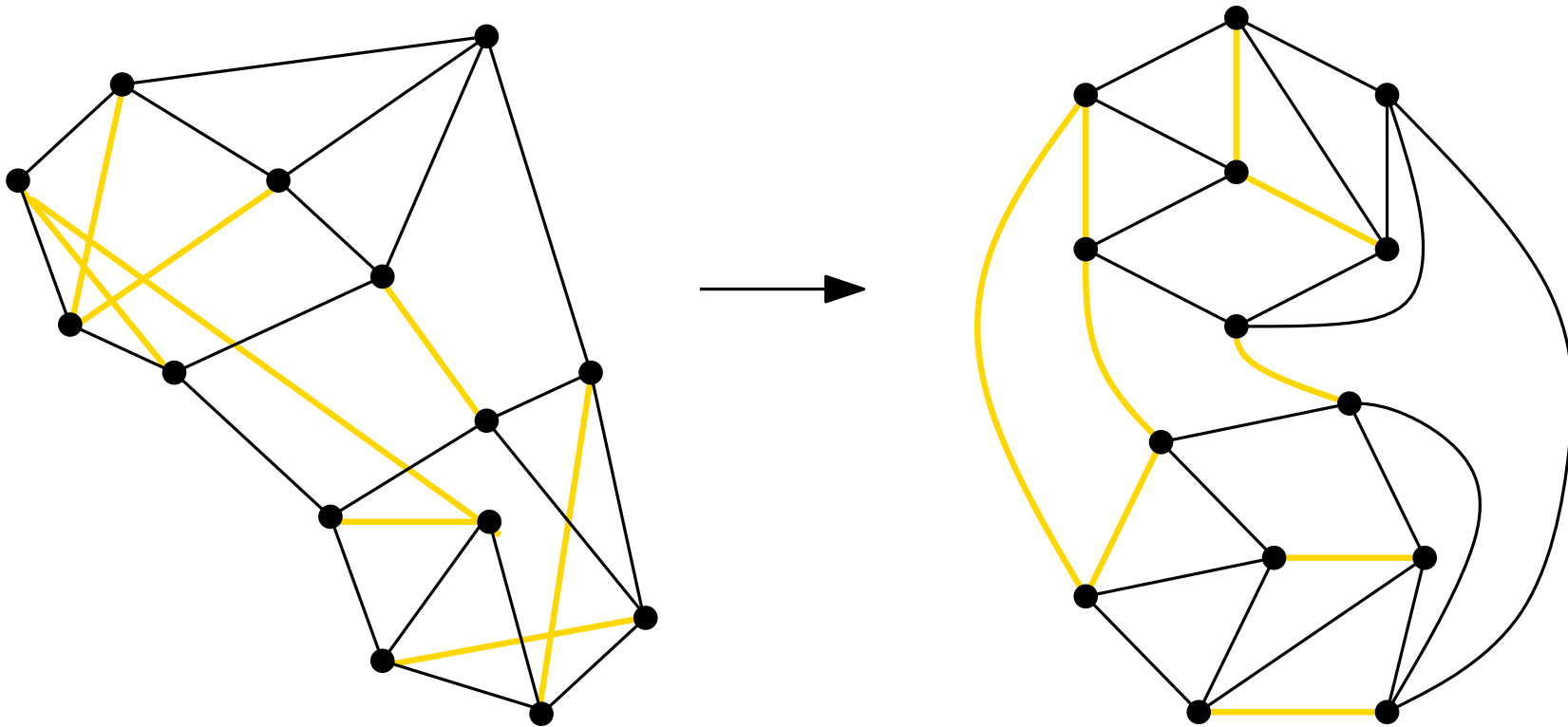
Gesucht: Kanten (Augmentierung), sodass Graph regulär wird



Reguläre planare Augmentierungen

Gegeben: Planarer Graph

Gesucht: Kanten (Augmentierung), sodass Graph regulär wird
und planar bleibt

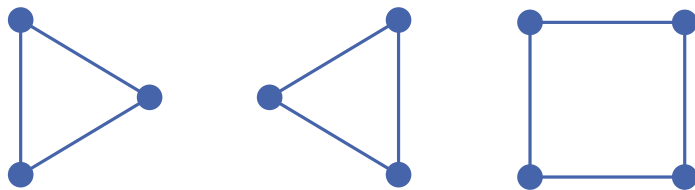


Beispiel: 4-regulärer planarer Graph

3-Reguläre Augmentierung von Graph mit zwei Dreiecken und einem 4-Kreis

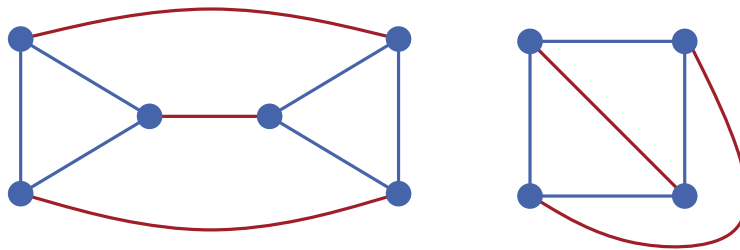
3-Reguläre Augmentierung von Graph mit zwei Dreiecken und einem 4-Kreis

- mit variabler Einbettung:



3-Reguläre Augmentierung von Graph mit zwei Dreiecken und einem 4-Kreis

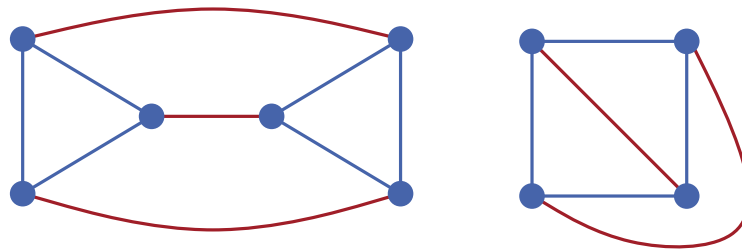
- mit variabler Einbettung:



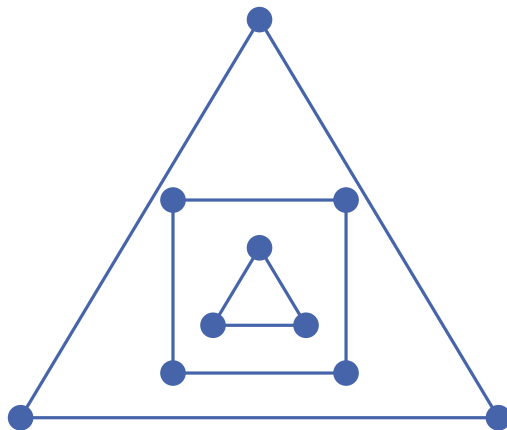
Feste und variable Einbettung

3-Reguläre Augmentierung von Graph mit zwei Dreiecken und einem 4-Kreis

- mit variabler Einbettung:



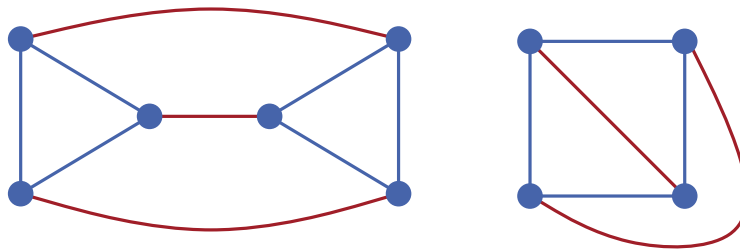
- mit fester Einbettung:



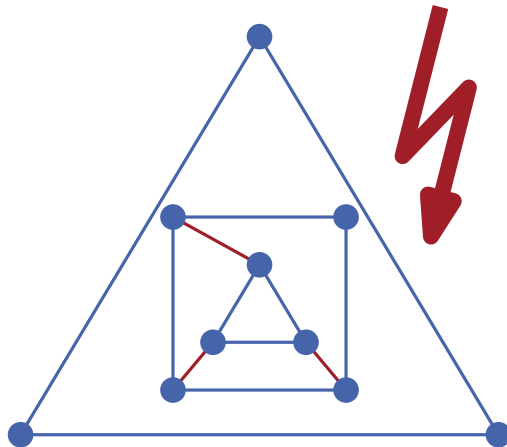
Feste und variable Einbettung

3-Reguläre Augmentierung von Graph mit zwei Dreiecken und einem 4-Kreis

- mit variabler Einbettung:



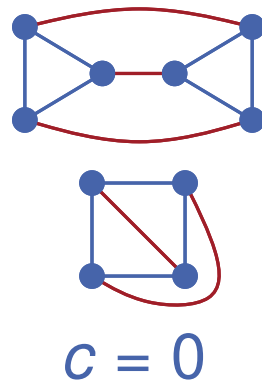
- mit fester Einbettung:



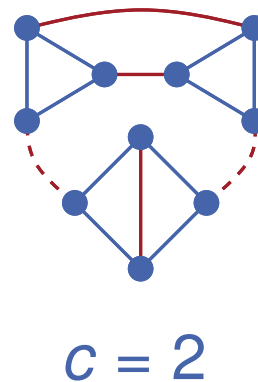
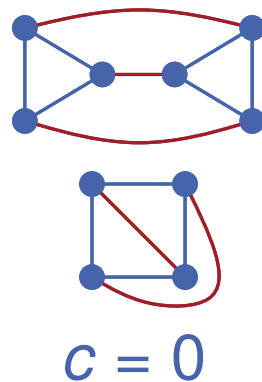
- Der Graph soll zusätzlich c -zusammenhängend sein

- Der Graph soll zusätzlich c -zusammenhängend sein
- k -regulärer Graph ist höchstens k -zusammenhängend

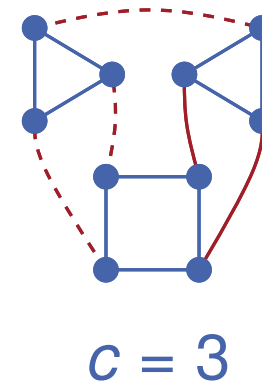
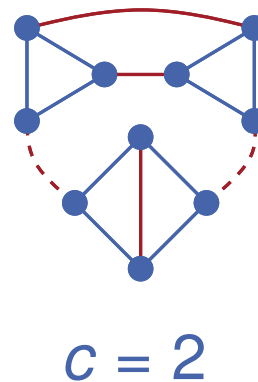
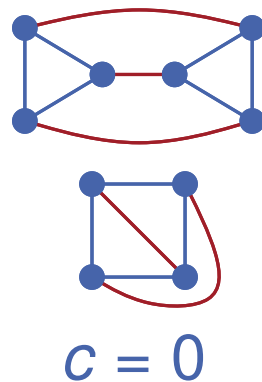
- Der Graph soll zusätzlich c -zusammenhängend sein
- k -regulärer Graph ist höchstens k -zusammenhängend



- Der Graph soll zusätzlich c -zusammenhängend sein
- k -regulärer Graph ist höchstens k -zusammenhängend



- Der Graph soll zusätzlich c -zusammenhängend sein
- k -regulärer Graph ist höchstens k -zusammenhängend



$k \backslash c$	1	2		3		4		5
	VE = FE	VE	FE	VE	FE	VE	FE	VE FE
0	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$	$\in \mathcal{NPC}$	$\in O(n^{1.5})$	$\in \mathcal{NPC}$		$\in \mathcal{NPC}$
1	$O(n)$	$O(n)$		$\in \mathcal{NPC}$	$\in O(n^{1.5})$	$\in \mathcal{NPC}$		$\in \mathcal{NPC}$
2	—	$O(n)$		$\in \mathcal{NPC}$	$\in O(n^{1.5})$	$\in \mathcal{NPC}$		$\in \mathcal{NPC}$
3	—	—		$\in \mathcal{NPC}$	$\in \mathcal{NPC}$	$\in \mathcal{NPC}$		$\in \mathcal{NPC}$
4	—	—		—		$\in \mathcal{NPC}$		$\in \mathcal{NPC}$
5	—	—		—		—		$\in \mathcal{NPC}$

Hartmann, Rollin, Rutter: Regular Augmentations for Planar Graphs

$k \backslash c$	1 VE = FE	2 VE FE		3 VE FE		4 VE FE	5 VE FE
0	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$	$\in \mathcal{NPC}$	$\in O(n^{1.5})$	$\in \mathcal{NPC}$	$\in \mathcal{NPC}$
1	$O(n)$	$O(n)$		$\in \mathcal{NPC}$	$\in O(n^{1.5})$	$\in \mathcal{NPC}$	$\in \mathcal{NPC}$
2	—	$O(n)$		$\in \mathcal{NPC}$	$\in O(n^{1.5})$	$\in \mathcal{NPC}$	$\in \mathcal{NPC}$
3	—	—		$\in \mathcal{NPC}$	$\in \mathcal{NPC}$	$\in \mathcal{NPC}$	$\in \mathcal{NPC}$
4	—	—		—		$\in \mathcal{NPC}$	$\in \mathcal{NPC}$
5	—	—		—		—	$\in \mathcal{NPC}$

Hartmann, Rollin, Rutter: Regular Augmentations for Planar Graphs

$k \backslash c$	1	2		3		4	5
	VE = FE	VE	FE	VE	FE	VE FE	VE FE
0	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$	$\in \mathcal{NPC}$	$\in O(n^{1.5})$	$\in \mathcal{NPC}$	$\in \mathcal{NPC}$
1	$O(n)$	$O(n)$		$\in \mathcal{NPC}$	$\in O(n^{1.5})$	$\in \mathcal{NPC}$	$\in \mathcal{NPC}$
2	—	$O(n)$		$\in \mathcal{NPC}$	$\in O(n^{1.5})$	$\in \mathcal{NPC}$	$\in \mathcal{NPC}$
3	—	—		$\in \mathcal{NPC}$	$\in \mathcal{NPC}$	$\in \mathcal{NPC}$	$\in \mathcal{NPC}$
4	—	—		—		$\in \mathcal{NPC}$	$\in \mathcal{NPC}$
5	—	—		—		—	$\in \mathcal{NPC}$

Hartmann, Rollin, Rutter: Regular Augmentations for Planar Graphs

$k \backslash c$	1	2		3		4		5
	VE = FE	VE	FE	VE	FE	VE	FE	VE FE
0	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$	$\in \mathcal{NPC}$	$\in O(n^{1.5})$	$\in \mathcal{NPC}$		$\in \mathcal{NPC}$
1	$O(n)$	$O(n)$		$\in \mathcal{NPC}$	$\in O(n^{1.5})$	$\in \mathcal{NPC}$		$\in \mathcal{NPC}$
2	—	$O(n)$		$\in \mathcal{NPC}$	$\in O(n^{1.5})$	$\in \mathcal{NPC}$		$\in \mathcal{NPC}$
3	—	—		$\in \mathcal{NPC}$	$\in \mathcal{NPC}$	$\in \mathcal{NPC}$		$\in \mathcal{NPC}$
4	—	—		—		$\in \mathcal{NPC}$		$\in \mathcal{NPC}$
5	—	—		—		—		$\in \mathcal{NPC}$

Hartmann, Rollin, Rutter: Regular Augmentations for Planar Graphs

→ Einschränkung der Eingabe auf 2-reguläre Graphen

$k \backslash c$	1	2		3		4		5	
	VE = FE	VE	FE	VE	FE	VE	FE	VE	FE
0	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$	$\in \mathcal{NPC}$	$\in O(n^{1.5})$	$\in \mathcal{NPC}$		$\in \mathcal{NPC}$	
1	$O(n)$	$O(n)$		$\in \mathcal{NPC}$	$\in O(n^{1.5})$	$\in \mathcal{NPC}$		$\in \mathcal{NPC}$	
2	—	$O(n)$		$\in \mathcal{NPC}$	$\in O(n^{1.5})$	$\in \mathcal{NPC}$		$\in \mathcal{NPC}$	
3	—	—		$\in \mathcal{NPC}$	$\in \mathcal{NPC}$	$\in \mathcal{NPC}$		$\in \mathcal{NPC}$	
4	—	—		—		$\in \mathcal{NPC}$		$\in \mathcal{NPC}$	
5	—	—		—		—		$\in \mathcal{NPC}$	

Hartmann, Rollin, Rutter: Regular Augmentations for Planar Graphs

Augmentierung von 2-regulären Graphen

Ergebnisse für 2-reguläre Graphen

$\begin{matrix} k \\ c \end{matrix}$	3		
	VE	Tunnel	FE
0	Char. ✓	Char. ✓	Char. ✓
1	Char. ✓	Char. ✓	$\in O(n)$
2	Char. ✓	Char. ✓	Char. ✓
3	Char. ✓	Char. ✓	Char. ✓

Augmentierung von 2-regulären Graphen

Ergebnisse für 2-reguläre Graphen

$\begin{matrix} k \\ c \end{matrix}$	3		
	VE	Tunnel	FE
0	Char. ✓	Char. ✓	Char. ✓
1	Char. ✓	Char. ✓	$\in O(n)$
2	Char. ✓	Char. ✓	Char. ✓
3	Char. ✓	Char. ✓	Char. ✓

Augmentierung von 2-regulären Graphen

Ergebnisse für 2-reguläre Graphen

$\begin{smallmatrix} k \\ c \end{smallmatrix}$	3		
	VE	Tunnel	FE
0	Char. ✓	Char. ✓	Char. ✓
1	Char. ✓	Char. ✓	$\in O(n)$
2	Char. ✓	Char. ✓	Char. ✓
3	Char. ✓	Char. ✓	Char. ✓

... und für allg. Graphen

$\begin{smallmatrix} k \\ c \end{smallmatrix}$	3	
	VE	FE
0	$\in \mathcal{NPC}$	$\in O(n^{1.5})$
1	$\in \mathcal{NPC}$	$\in O(n^{1.5})$
2	$\in \mathcal{NPC}$	$\in O(n^{1.5})$
3	$\in \mathcal{NPC}$	$\in \mathcal{NPC}$

Augmentierung von 2-regulären Graphen

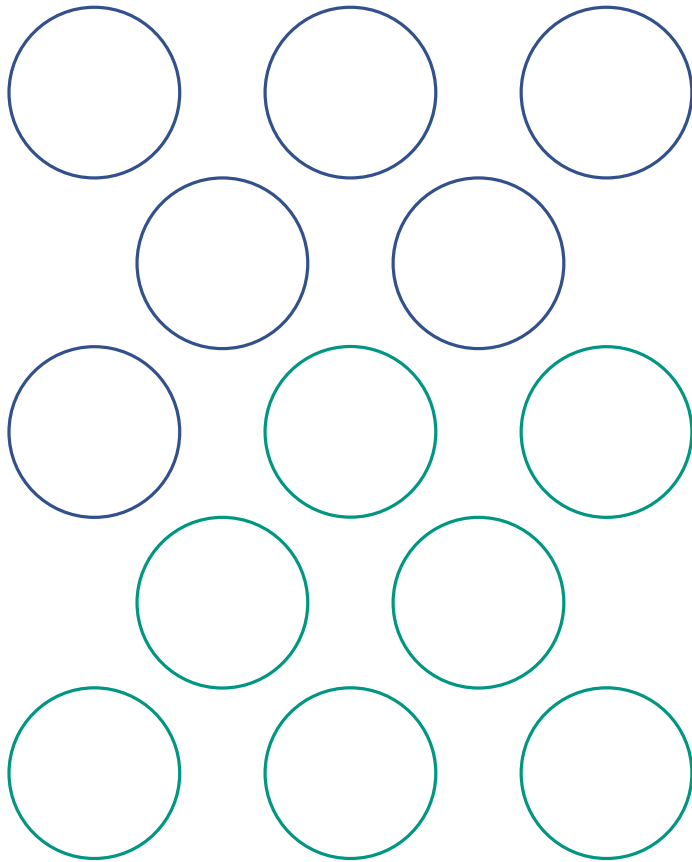
Ergebnisse für 2-reguläre Graphen

$\begin{smallmatrix} k \\ c \end{smallmatrix}$	3		
	VE	Tunnel	FE
0	Char. ✓	Char. ✓	Char. ✓
1	Char. ✓	Char. ✓	$\in O(n)$
2	Char. ✓	Char. ✓	Char. ✓
3	Char. ✓	Char. ✓	Char. ✓

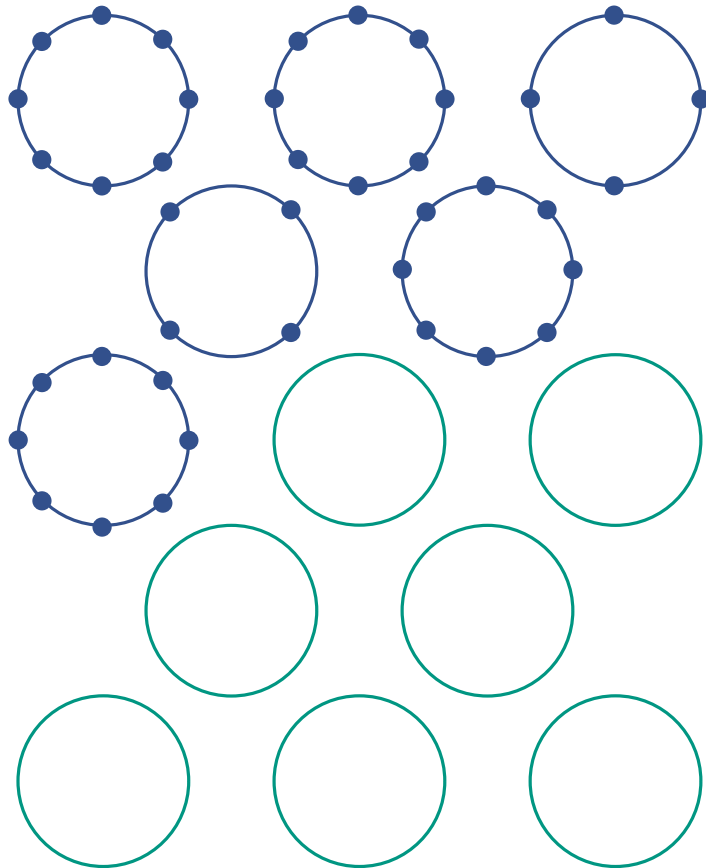
... und für allg. Graphen

$\begin{smallmatrix} k \\ c \end{smallmatrix}$	3	
	VE	FE
0	$\in \mathcal{NPC}$	$\in O(n^{1.5})$
1	$\in \mathcal{NPC}$	$\in O(n^{1.5})$
2	$\in \mathcal{NPC}$	$\in O(n^{1.5})$
3	$\in \mathcal{NPC}$	$\in \mathcal{NPC}$

2-Reguläre Graphen

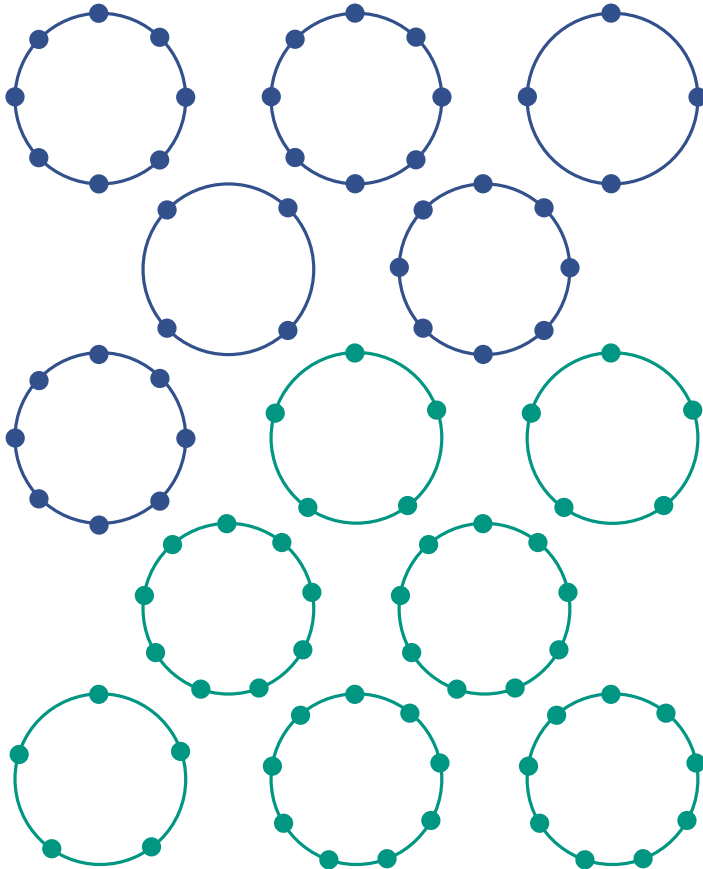


2-Reguläre Graphen



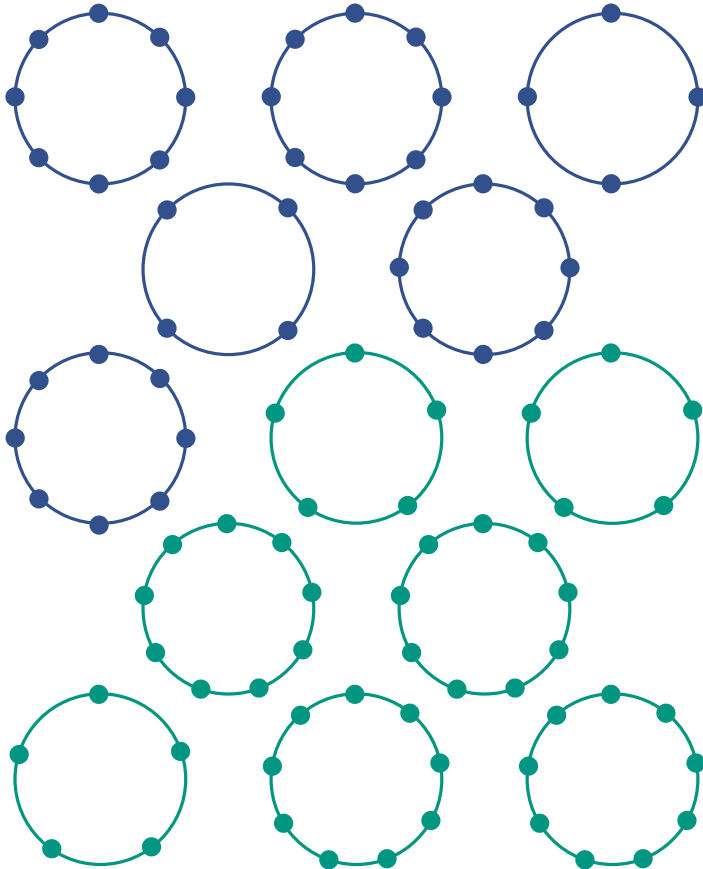
■ Gerade Kreise

2-Reguläre Graphen

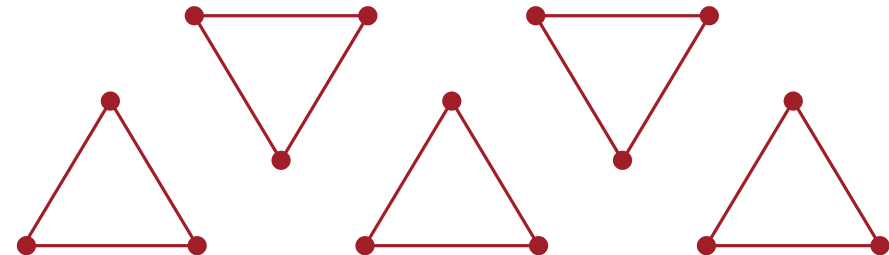


- Gerade Kreise
- Ungerade Kreise

2-Reguläre Graphen

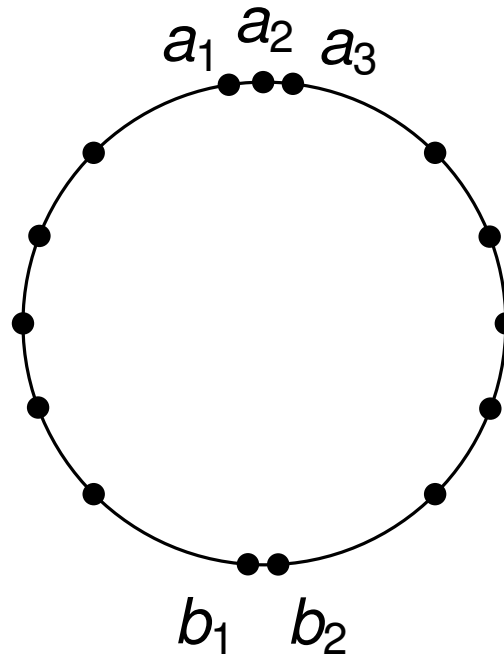


- Gerade Kreise
- Ungerade Kreise
- Dreiecke



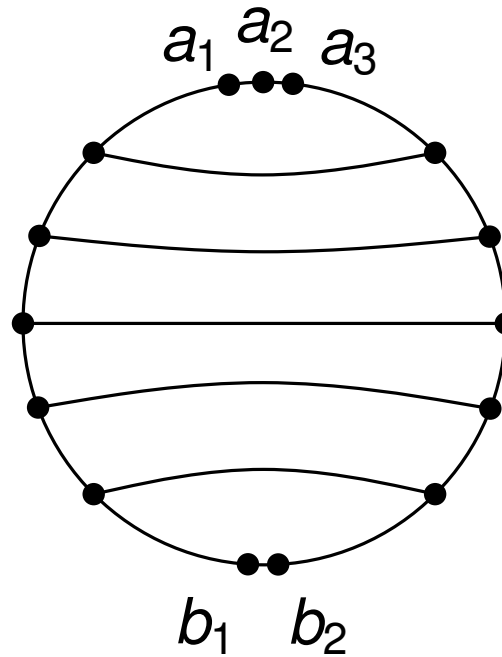
Basisaugmentierungen

Wähle k Knoten
mit $|V| - k$ gerade



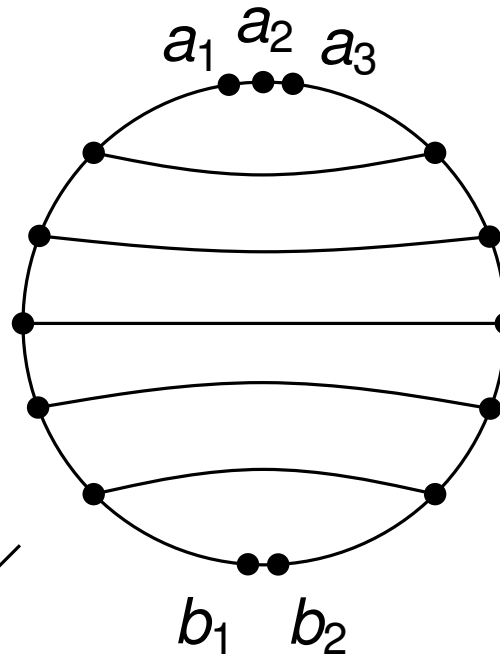
Basisaugmentierungen

Wähle k Knoten
mit $|V| - k$ gerade

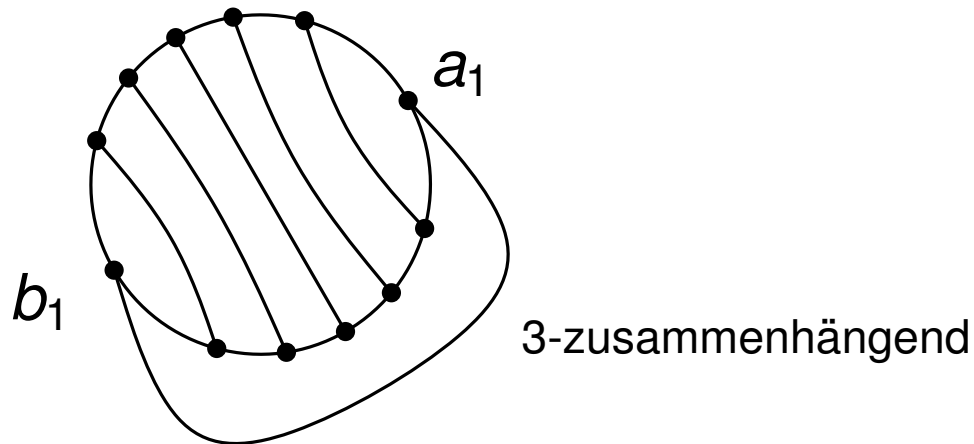
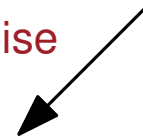


Basisaugmentierungen

Wähle k Knoten
mit $|V| - k$ gerade

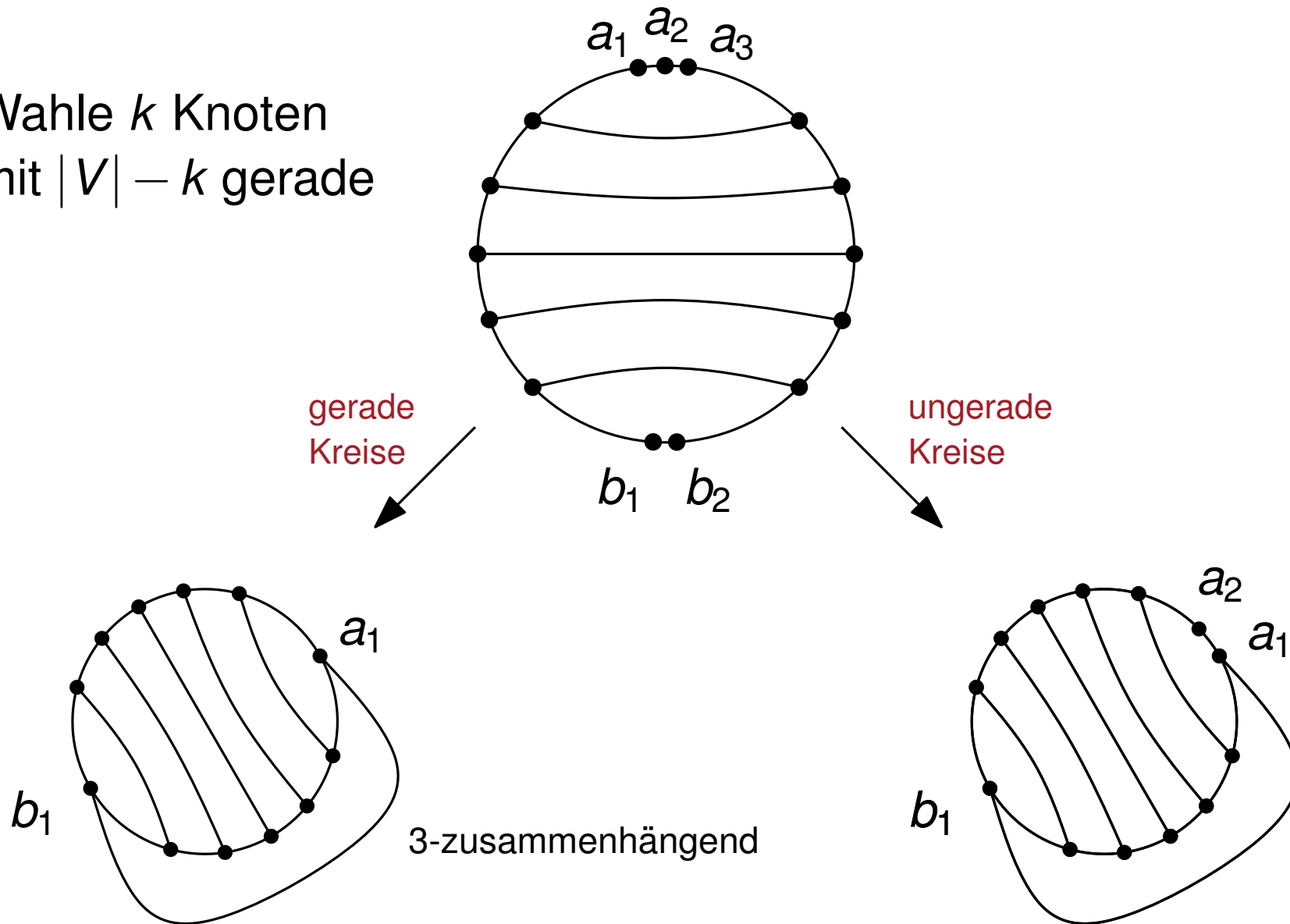


gerade
Kreise



Basisaugmentierungen

Wähle k Knoten
mit $|V| - k$ gerade



2-Regulärer Graph: 0-Zusammenhang (VE)

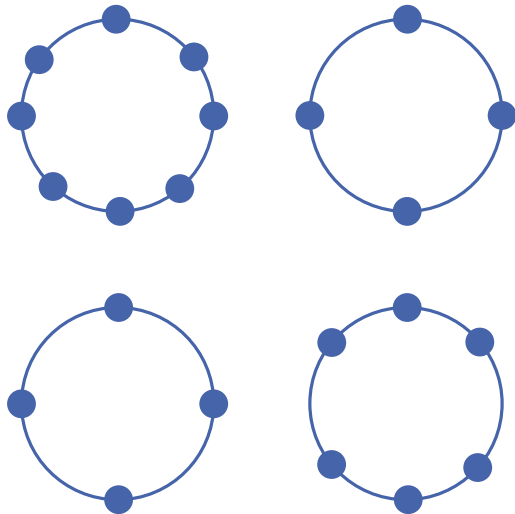
Ein 3-regulärer Graph hat immer eine gerade Anzahl an Knoten.
(Grund: $\frac{n \cdot 3}{2}$ *Kanten*)

2-Regulärer Graph: 0-Zusammenhang (VE)

Ein 2-reg. Graph mit einer geraden Anzahl an Knoten besitzt eine planare 3-reg. Augmentierung

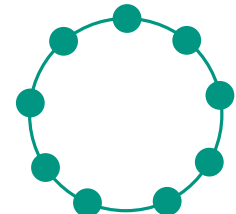
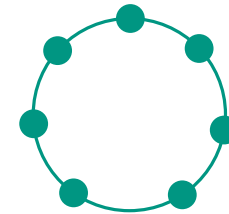
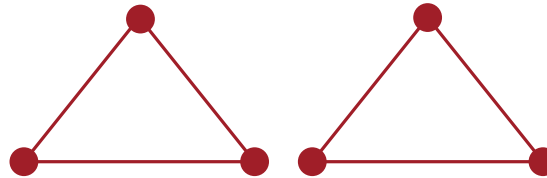
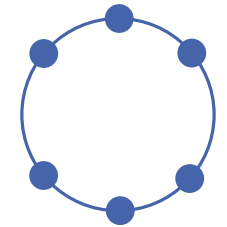
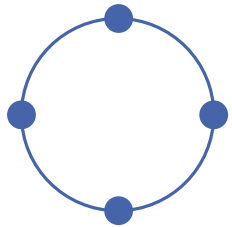
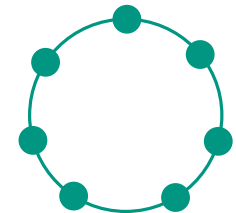
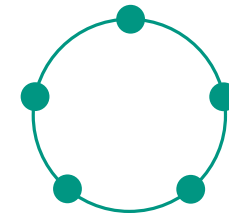
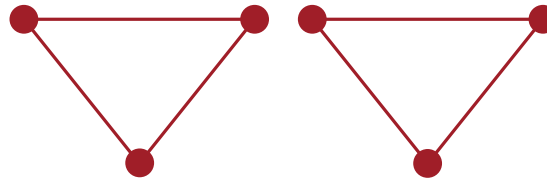
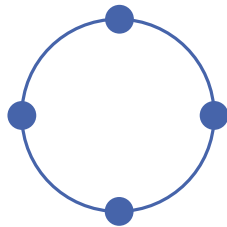
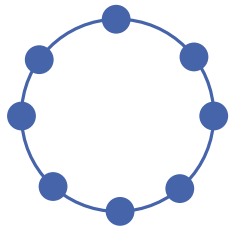
2-Regulärer Graph: 0-Zusammenhang (VE)

Ein 2-reg. Graph mit einer geraden Anzahl an Knoten besitzt eine planare 3-reg. Augmentierung



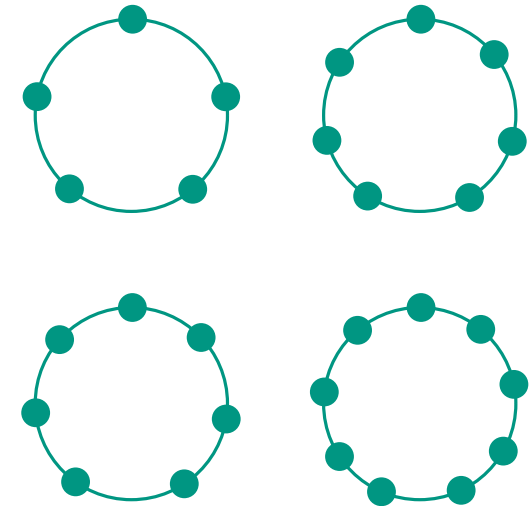
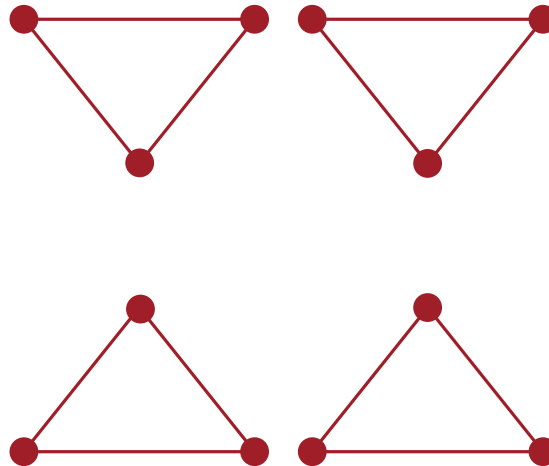
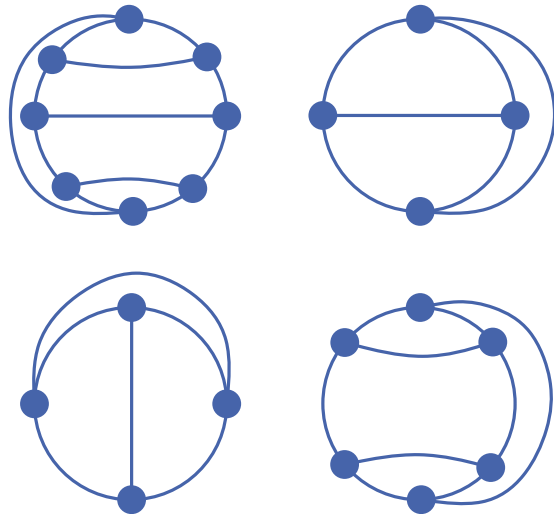
2-Regulärer Graph: 0-Zusammenhang (VE)

Ein 2-reg. Graph mit einer geraden Anzahl an Knoten besitzt eine planare 3-reg. Augmentierung



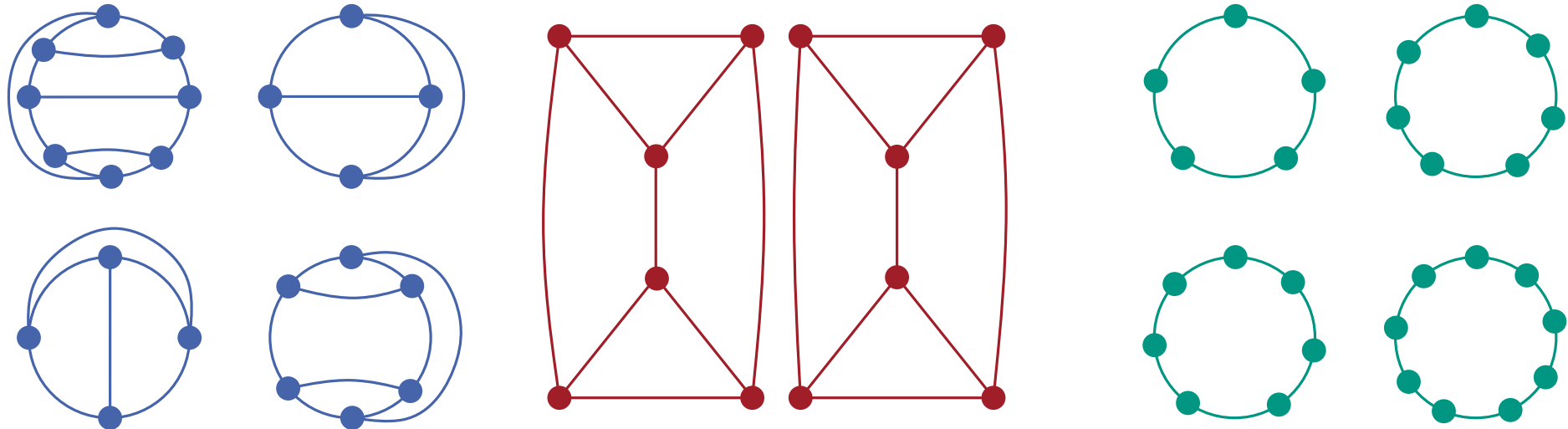
2-Regulärer Graph: 0-Zusammenhang (VE)

Ein 2-reg. Graph mit einer geraden Anzahl an Knoten besitzt eine planare 3-reg. Augmentierung



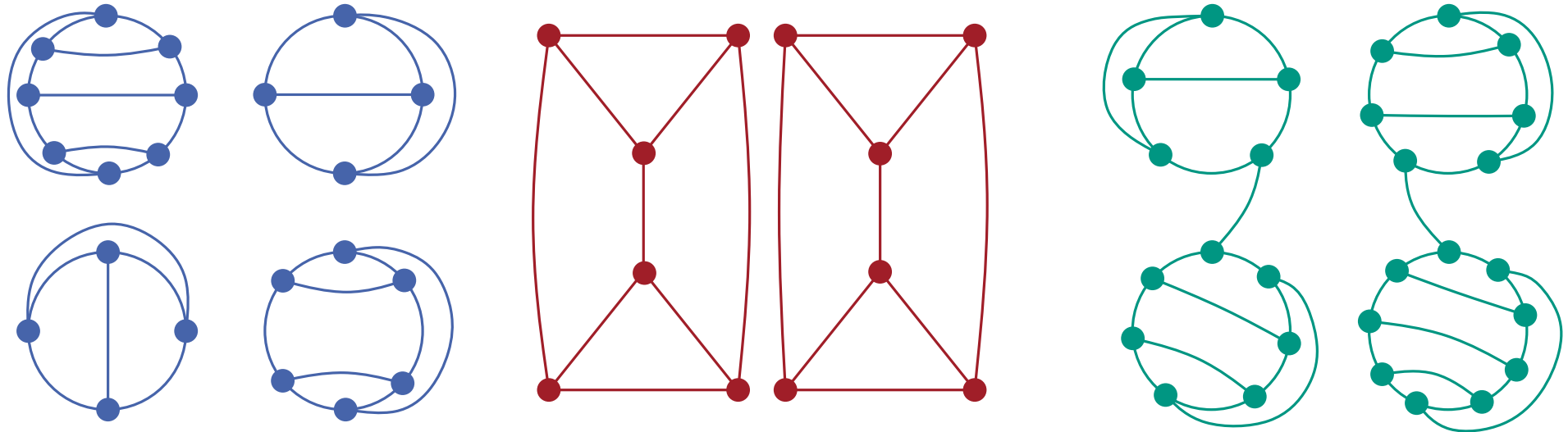
2-Regulärer Graph: 0-Zusammenhang (VE)

Ein 2-reg. Graph mit einer geraden Anzahl an Knoten besitzt eine planare 3-reg. Augmentierung



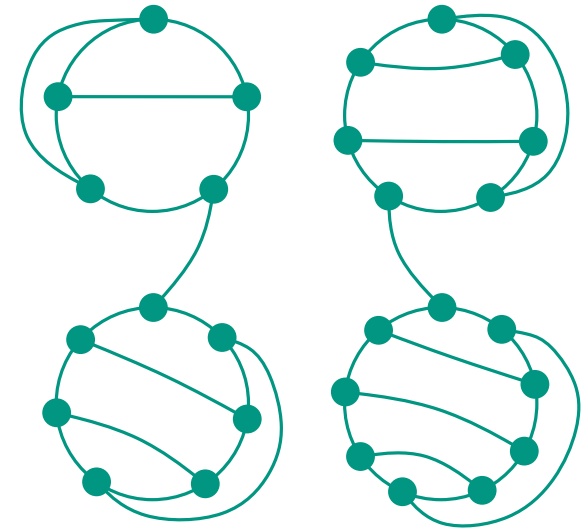
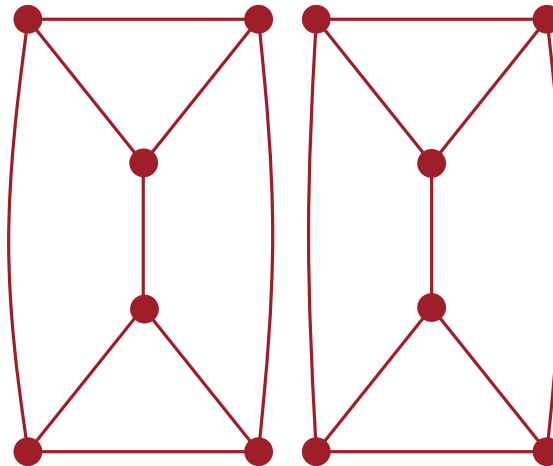
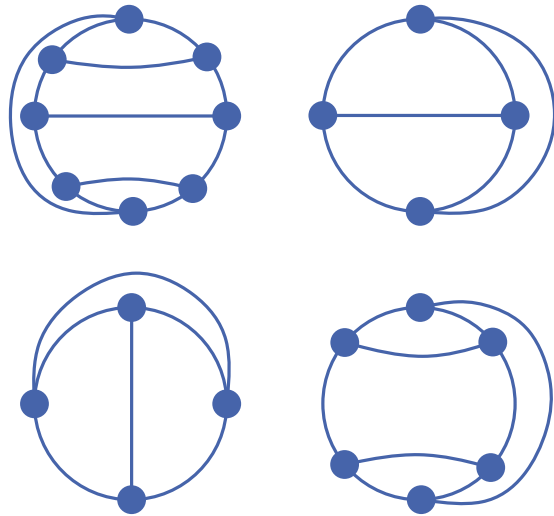
2-Regulärer Graph: 0-Zusammenhang (VE)

Ein 2-reg. Graph mit einer geraden Anzahl an Knoten besitzt eine planare 3-reg. Augmentierung

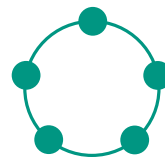
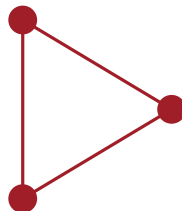


2-Regulärer Graph: 0-Zusammenhang (VE)

Ein 2-reg. Graph mit einer geraden Anzahl an Knoten besitzt eine planare 3-reg. Augmentierung

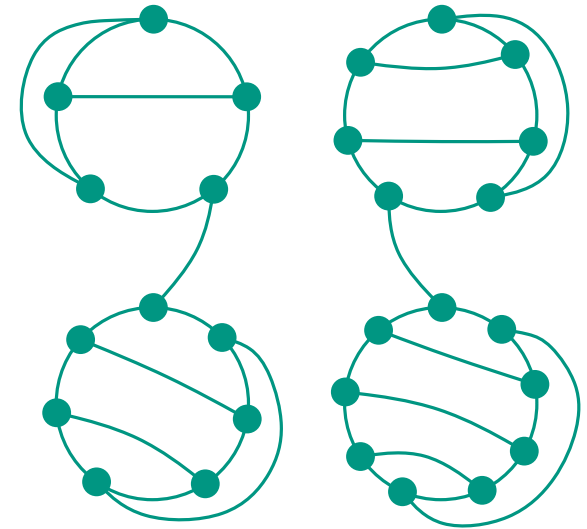
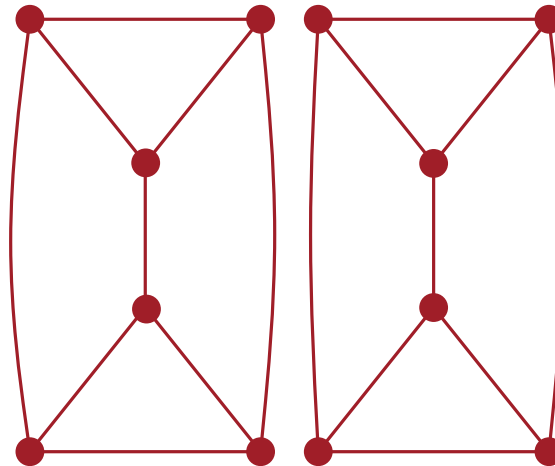
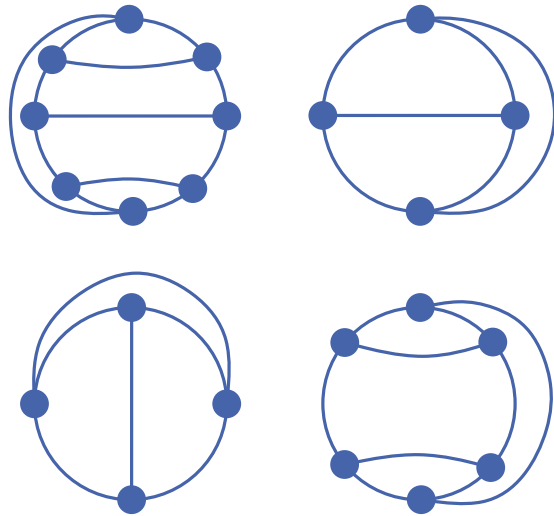


Spezialfall:

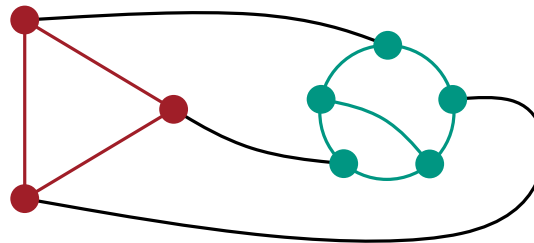


2-Regulärer Graph: 0-Zusammenhang (VE)

Ein 2-reg. Graph mit einer geraden Anzahl an Knoten besitzt eine planare 3-reg. Augmentierung

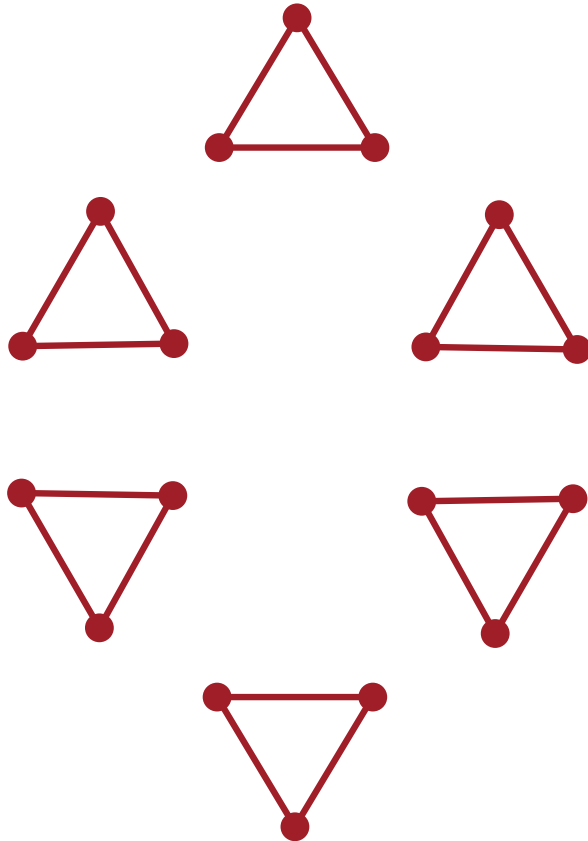


Spezialfall:



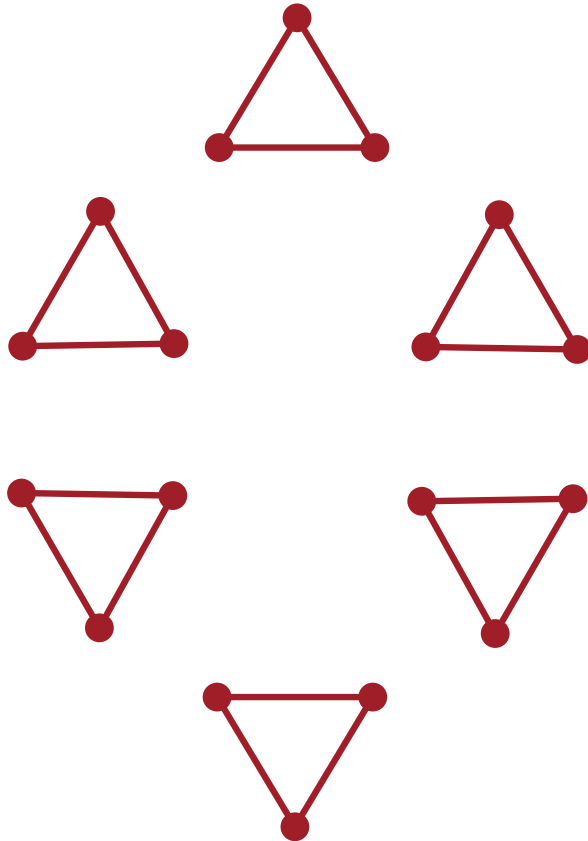
2-Regulärer Graph: 3-Zusammenhang (VE)

Graph bestehend aus s Dreiecken



2-Regulärer Graph: 3-Zusammenhang (VE)

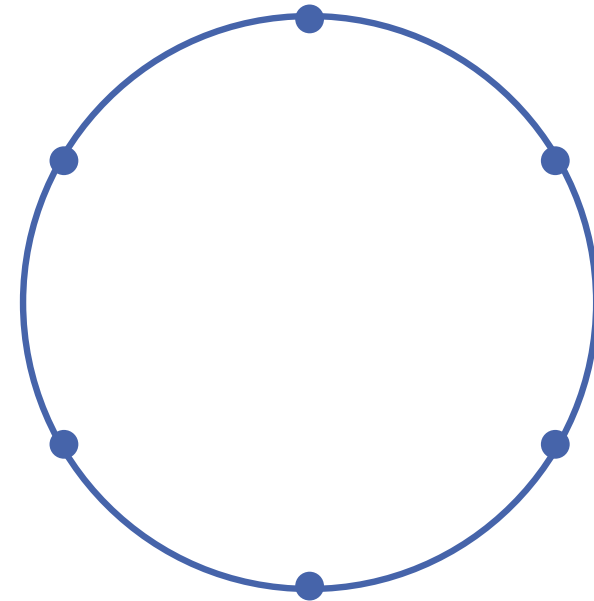
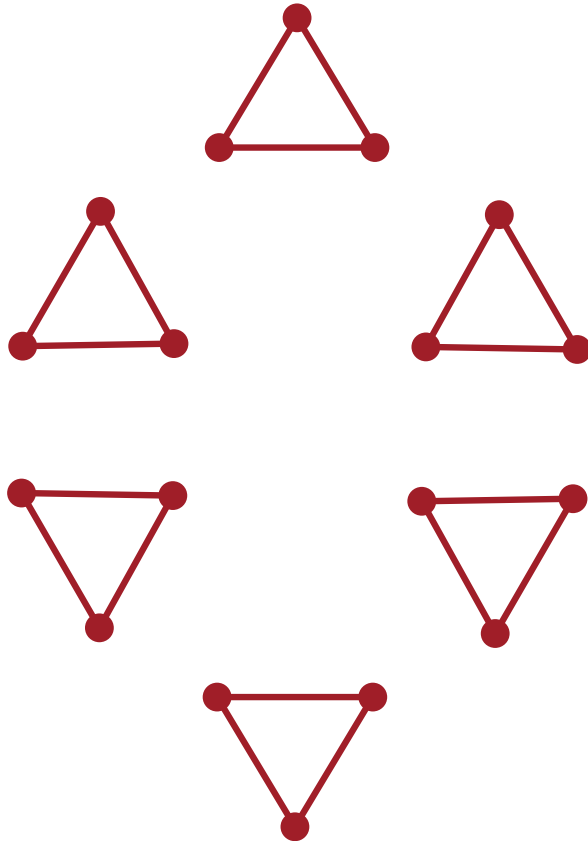
Graph bestehend aus s Dreiecken



Identifiziere Dreiecke mit Knoten

2-Regulärer Graph: 3-Zusammenhang (VE)

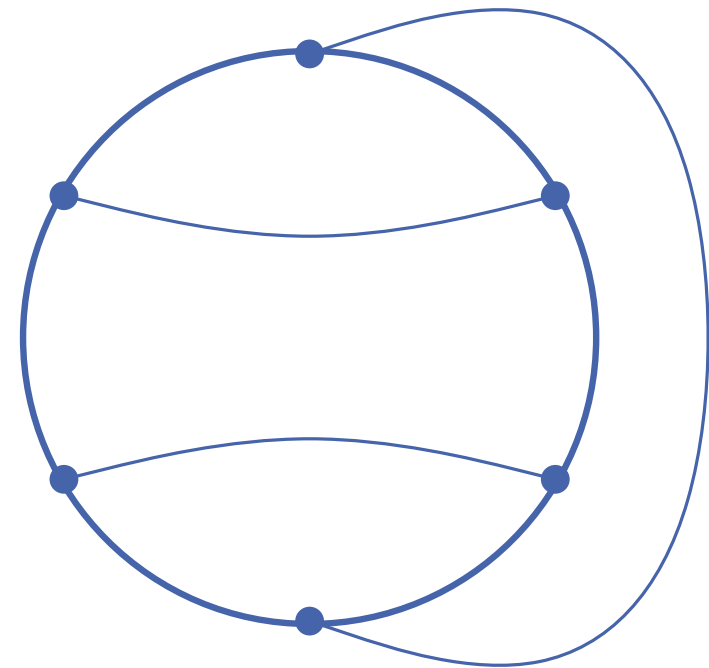
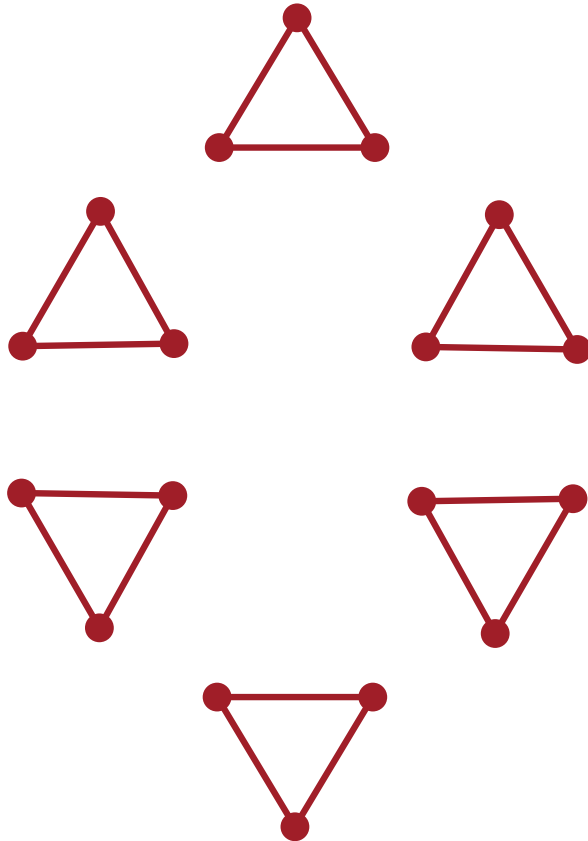
Graph bestehend aus s Dreiecken



Identifiziere Dreiecke mit Knoten

2-Regulärer Graph: 3-Zusammenhang (VE)

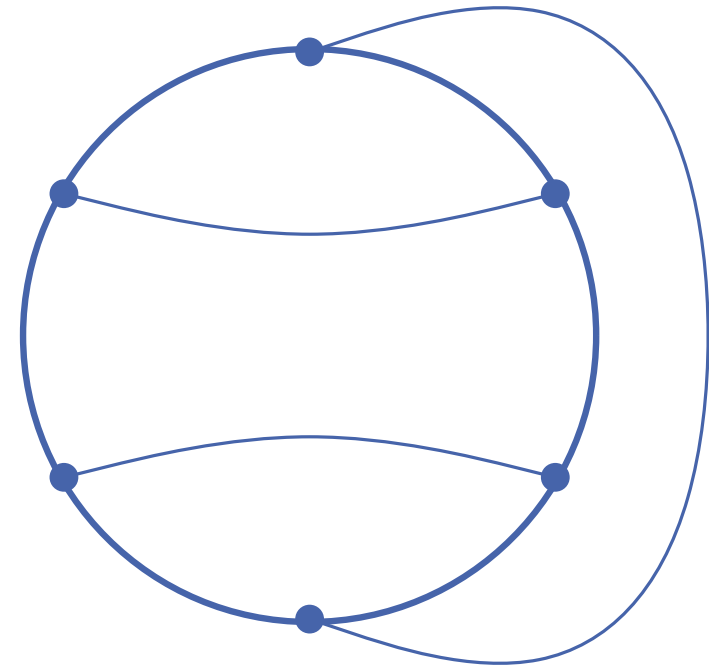
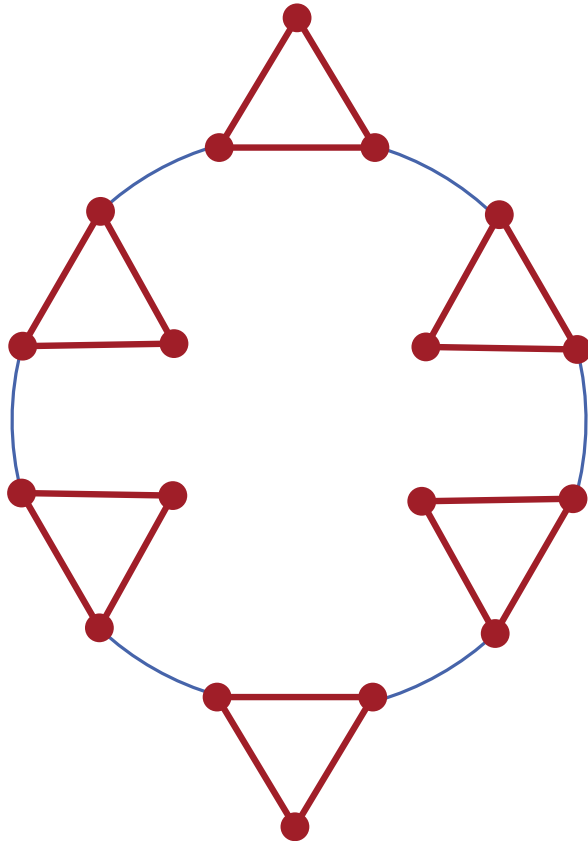
Graph bestehend aus s Dreiecken



Identifiziere Dreiecke mit Knoten

2-Regulärer Graph: 3-Zusammenhang (VE)

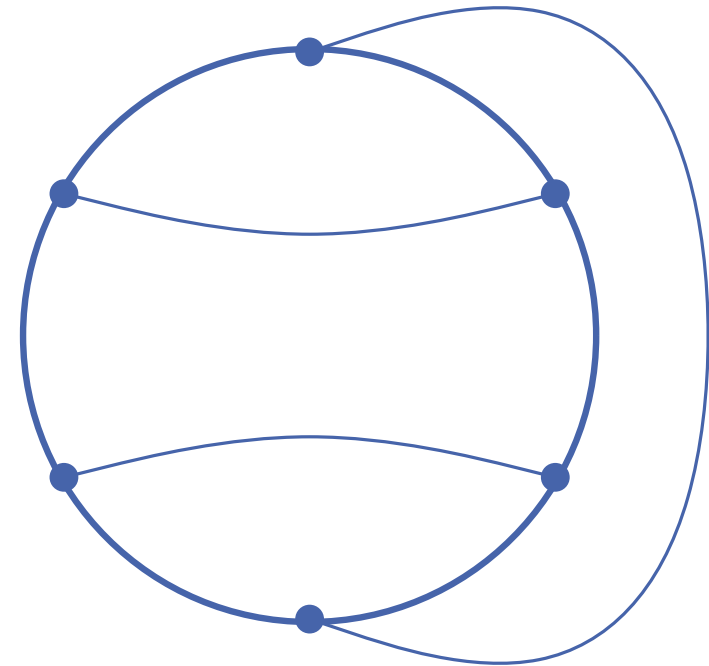
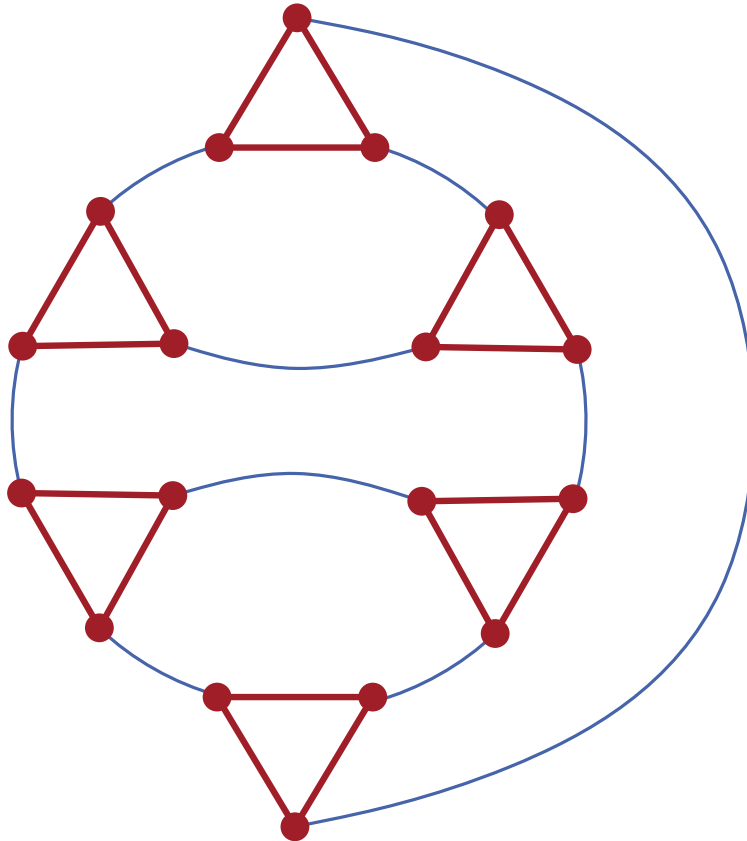
Graph bestehend aus s Dreiecken



Identifiziere Dreiecke mit Knoten

2-Regulärer Graph: 3-Zusammenhang (VE)

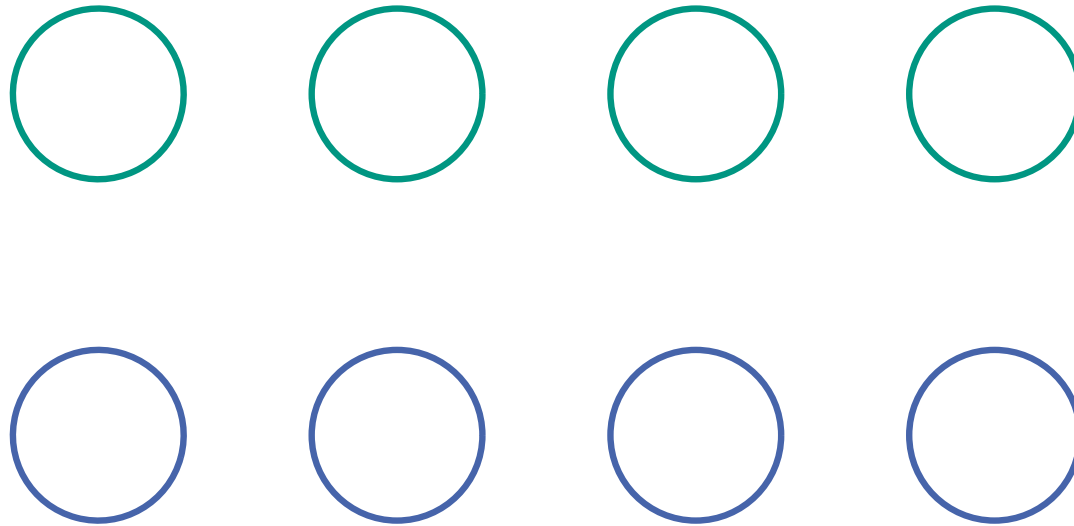
Graph bestehend aus s Dreiecken



Identifiziere Dreiecke mit Knoten

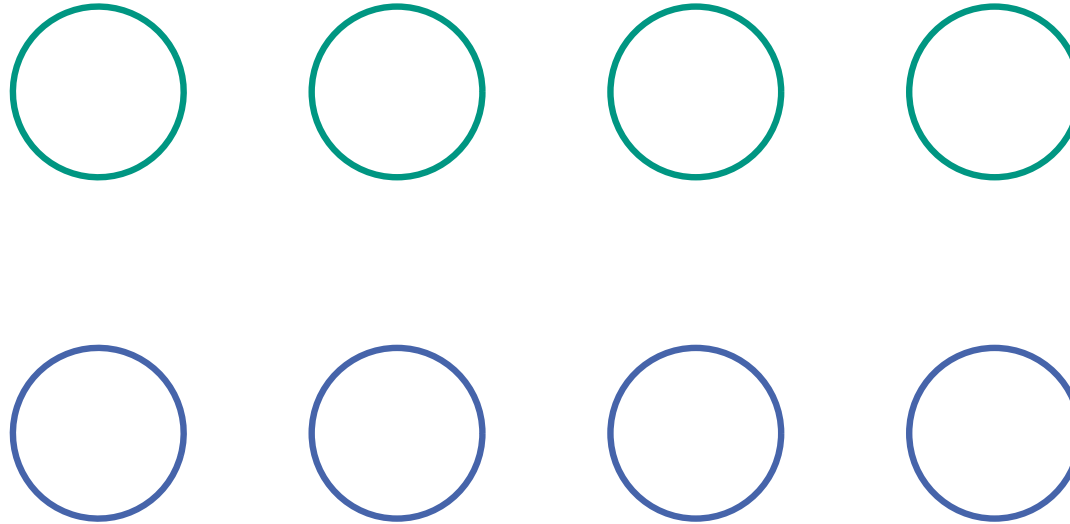
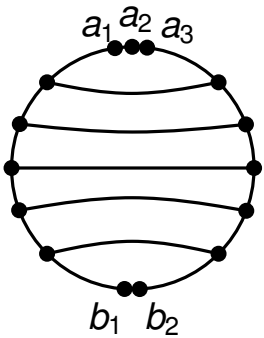
2-Regulärer Graph: 3-Zusammenhang (VE)

Graph bestehend aus t großen Kreisen



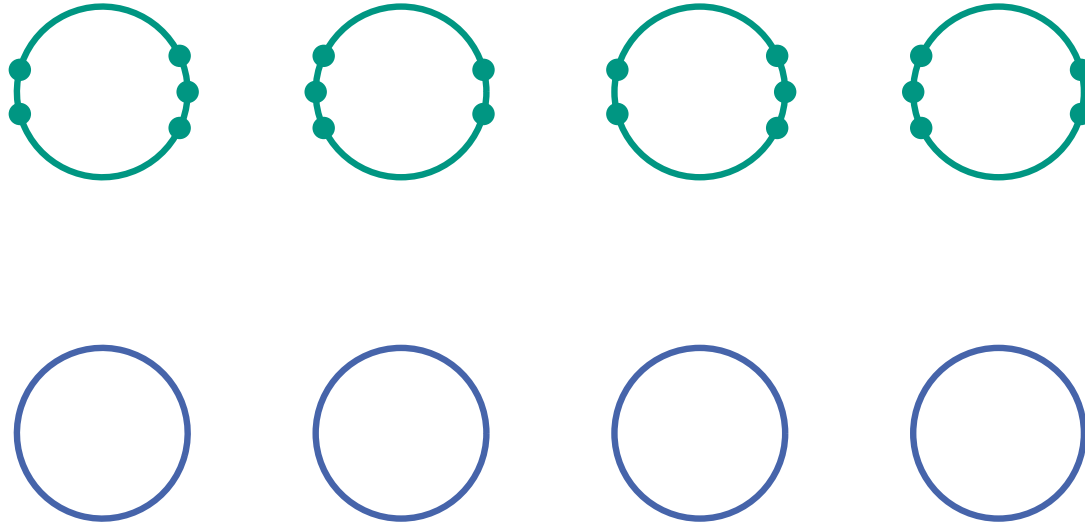
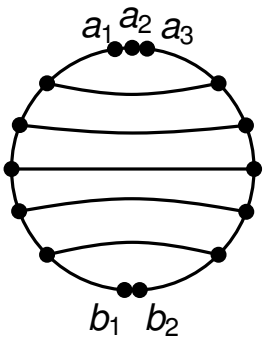
2-Regulärer Graph: 3-Zusammenhang (VE)

Graph bestehend aus t großen Kreisen



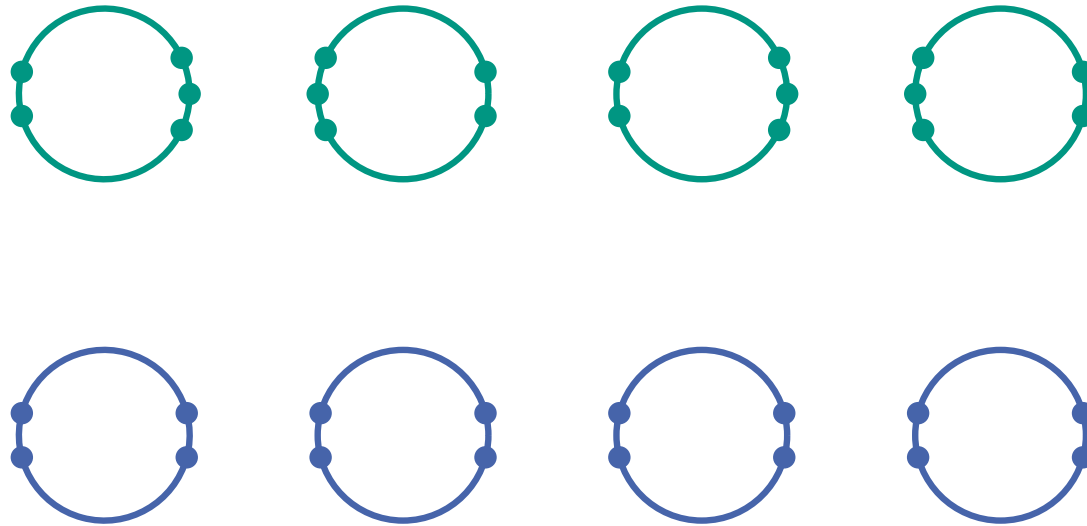
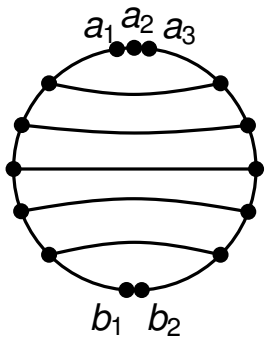
2-Regulärer Graph: 3-Zusammenhang (VE)

Graph bestehend aus t großen Kreisen



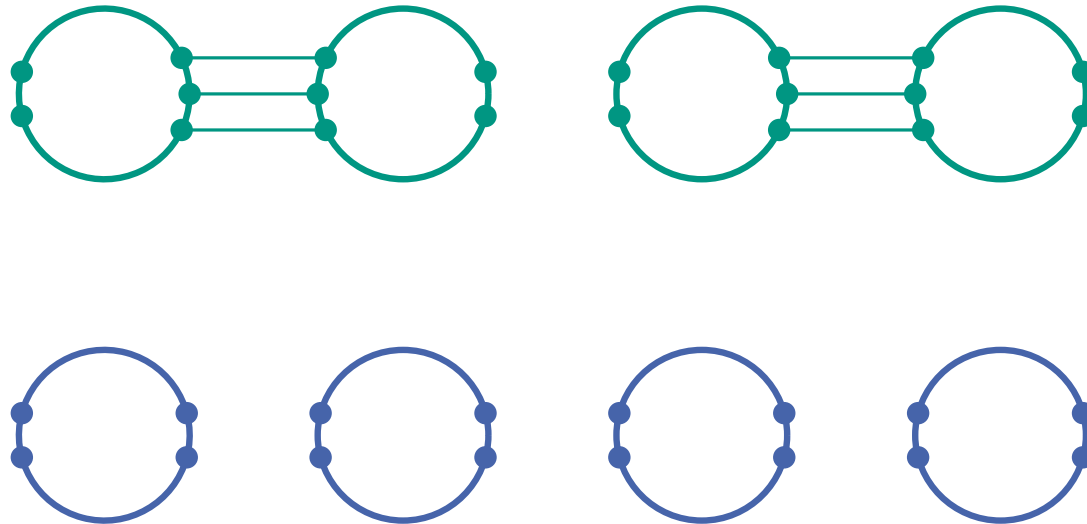
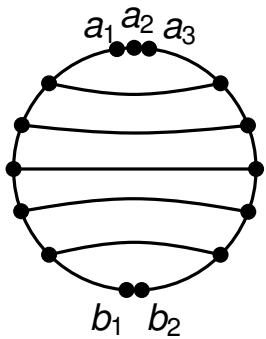
2-Regulärer Graph: 3-Zusammenhang (VE)

Graph bestehend aus t großen Kreisen



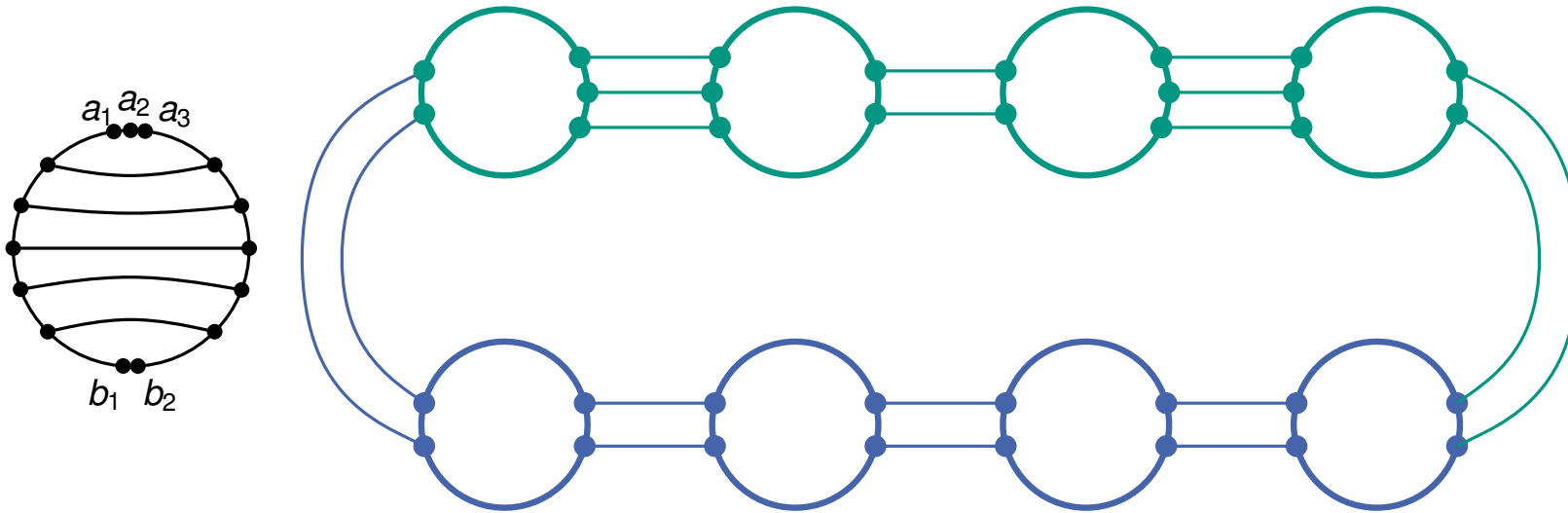
2-Regulärer Graph: 3-Zusammenhang (VE)

Graph bestehend aus t großen Kreisen



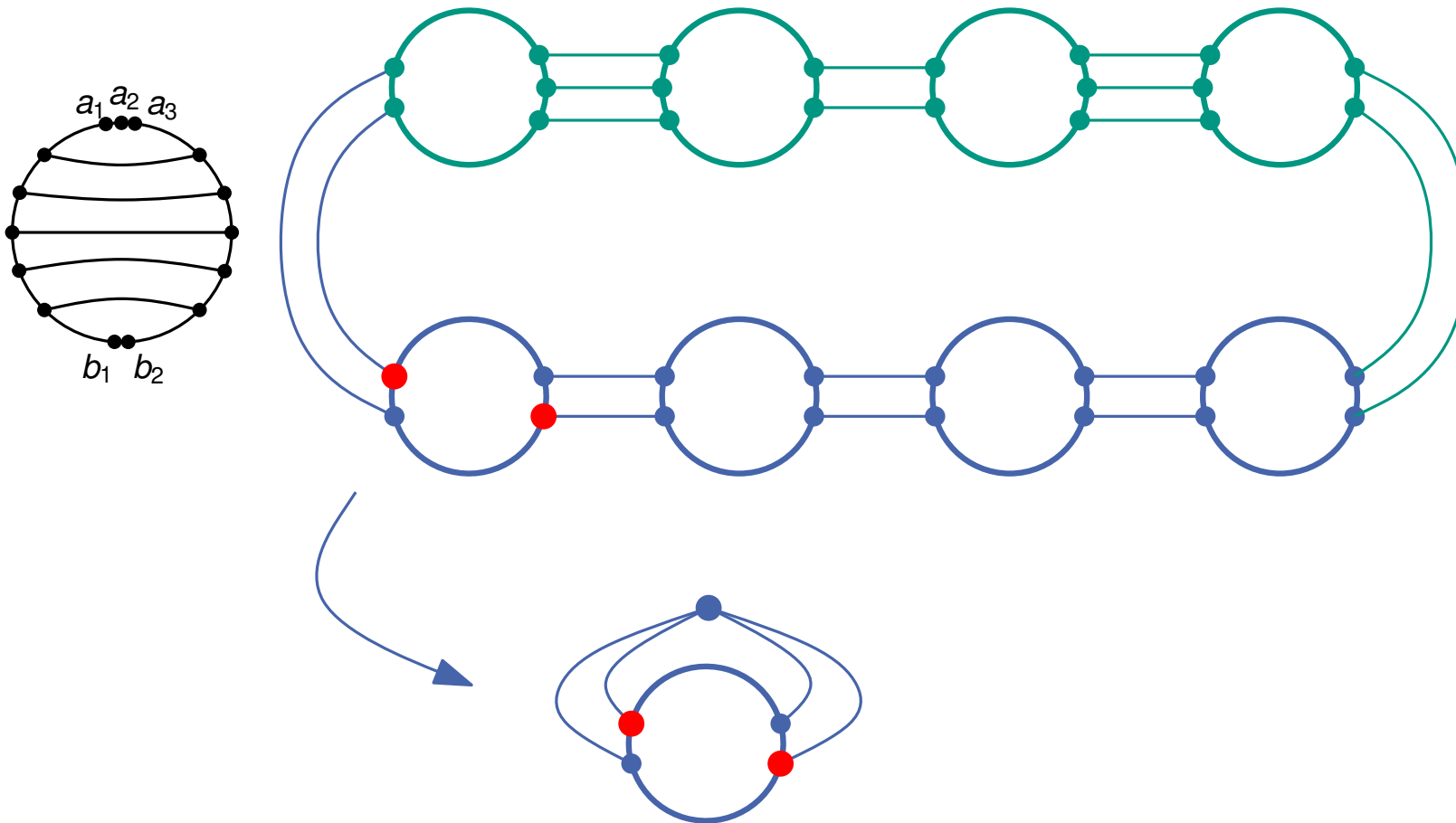
2-Regulärer Graph: 3-Zusammenhang (VE)

Graph bestehend aus t großen Kreisen



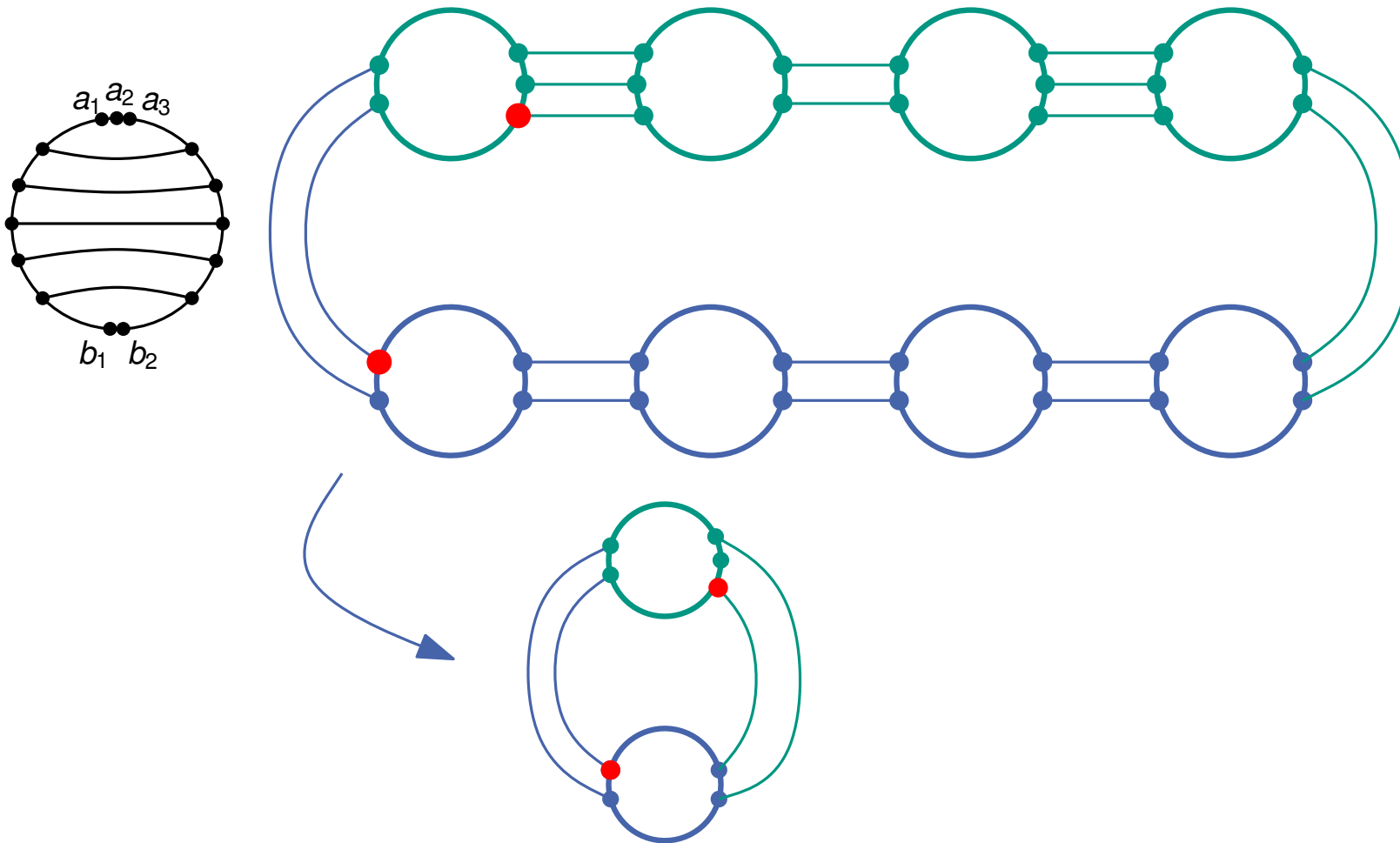
2-Regulärer Graph: 3-Zusammenhang (VE)

Graph bestehend aus t großen Kreisen



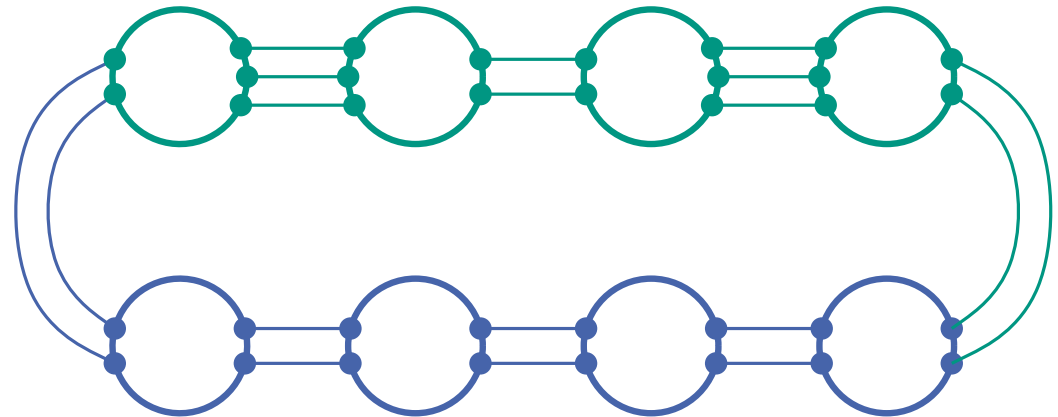
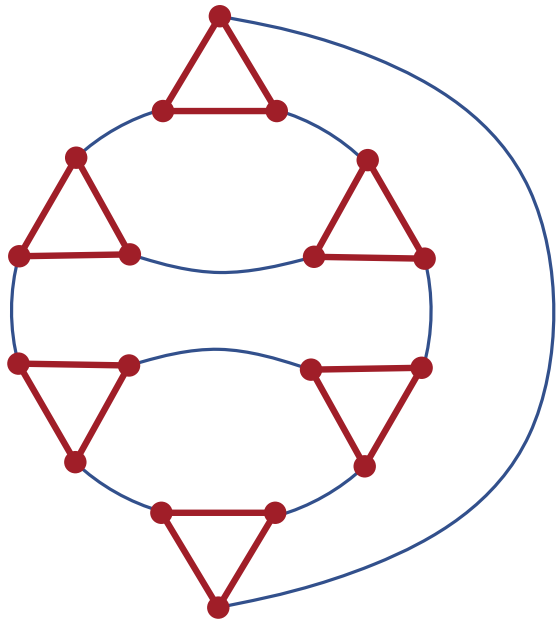
2-Regulärer Graph: 3-Zusammenhang (VE)

Graph bestehend aus t großen Kreisen



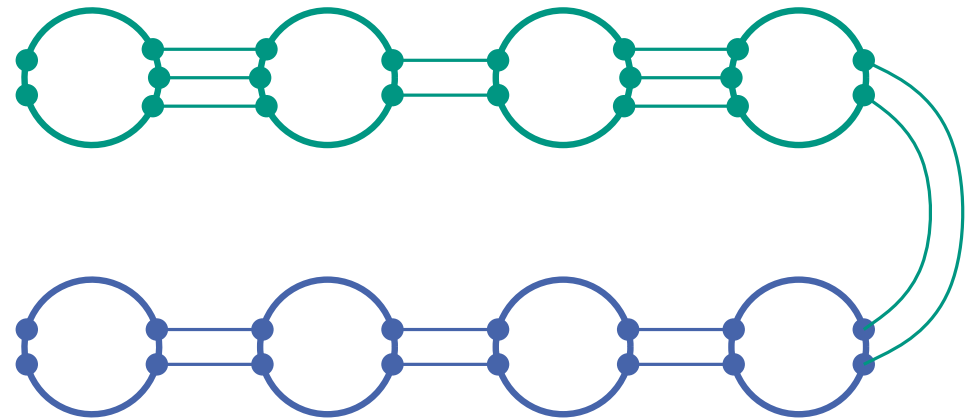
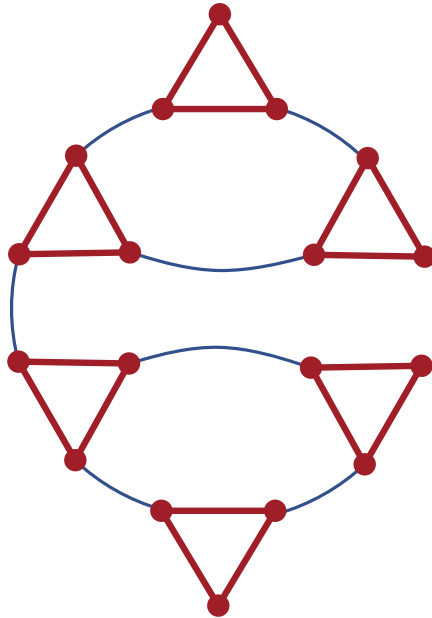
2-Regulärer Graph: 3-Zusammenhang (VE)

Graph bestehend aus s Dreiecken und t großen Kreisen



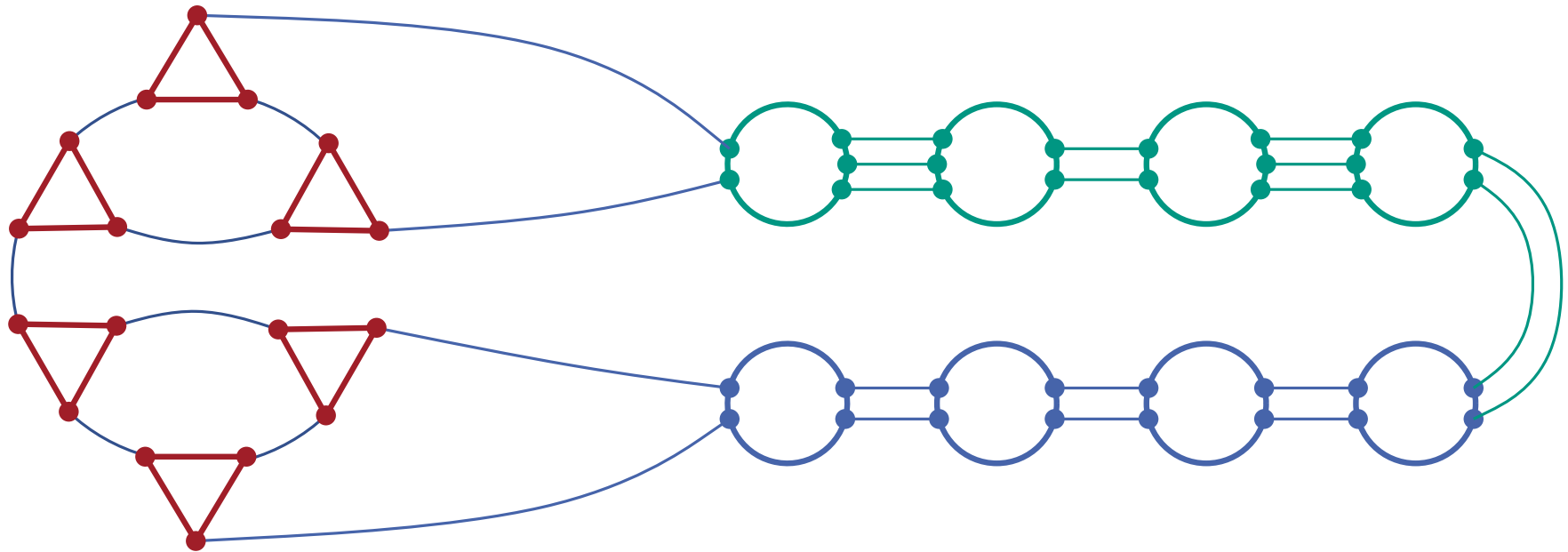
2-Regulärer Graph: 3-Zusammenhang (VE)

Graph bestehend aus s Dreiecken und t großen Kreisen



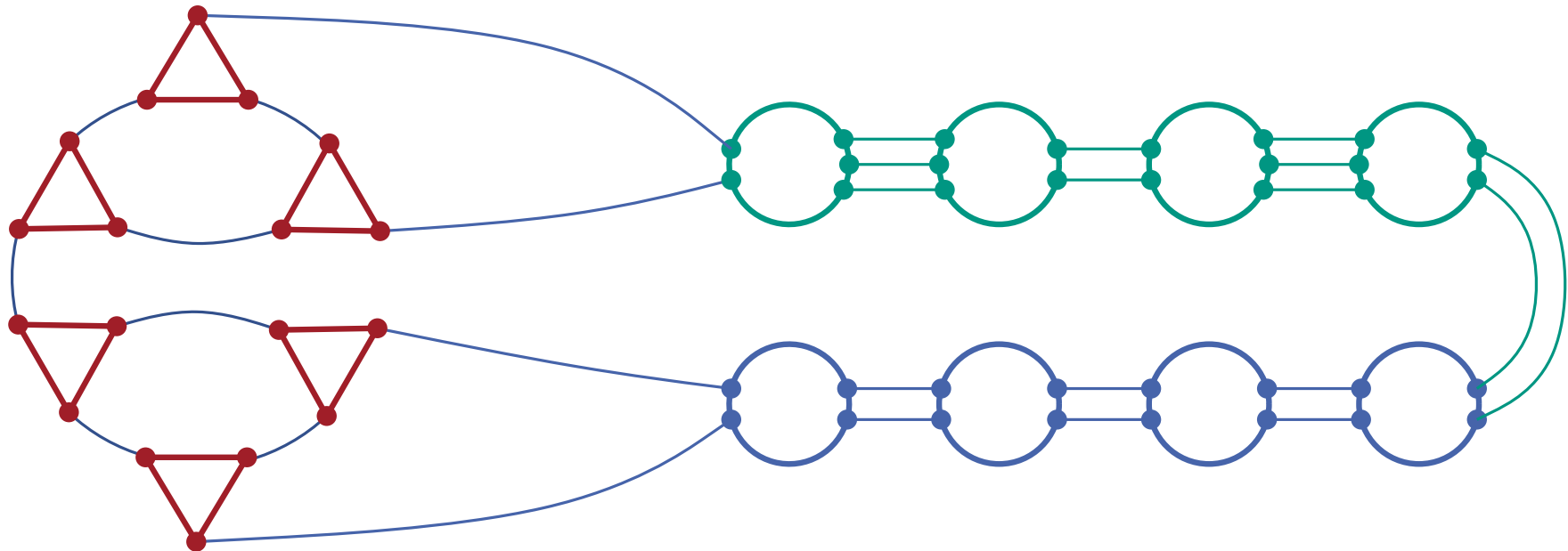
2-Regulärer Graph: 3-Zusammenhang (VE)

Graph bestehend aus s Dreiecken und t großen Kreisen



2-Regulärer Graph: 3-Zusammenhang (VE)

Graph bestehend aus s Dreiecken und t großen Kreisen



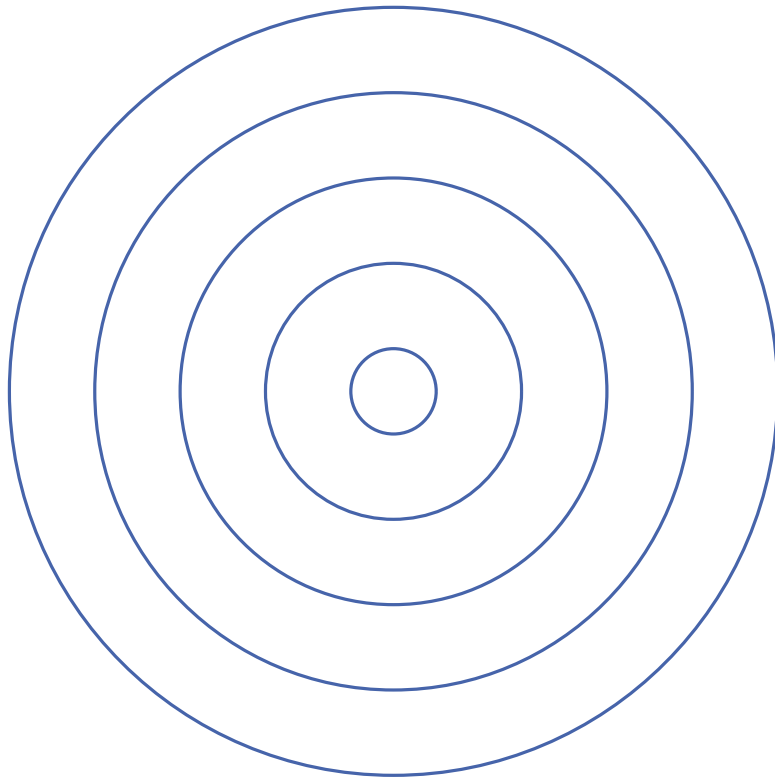
Ein 2-reg. Graph mit einer geraden Anzahl an Knoten besitzt eine planare 3-reg. und 3-zusammenhängende Augmentierung

2-Regulärer Tunnel: 3-Zusammenhang (VE)

Graph mit fester Einbettung, bei der jede Facette zu höchstens zwei Zusammenhangskomponenten inzident ist

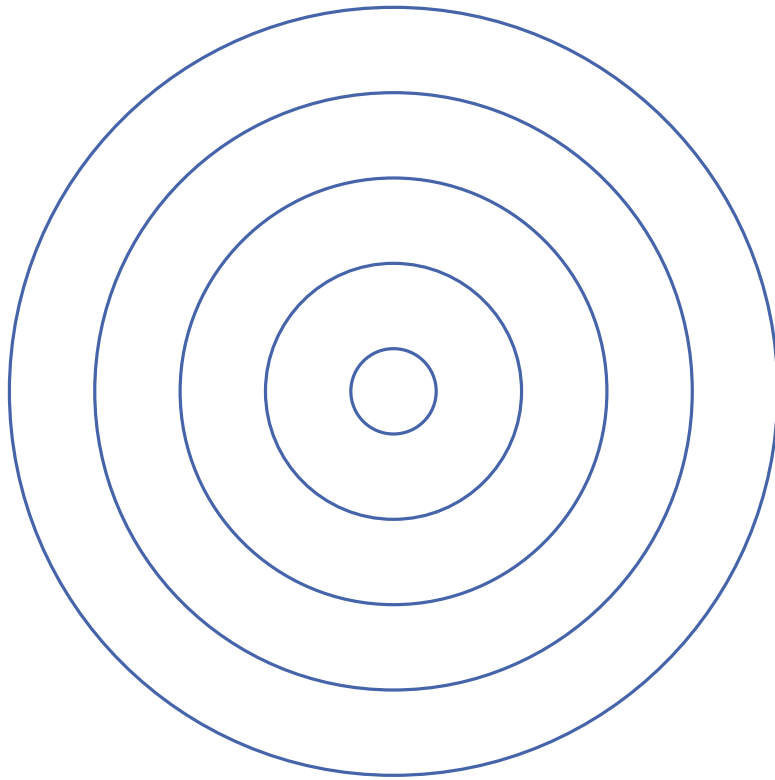
2-Regulärer Tunnel: 3-Zusammenhang (VE)

Graph mit fester Einbettung, bei der jede Facette zu höchstens zwei Zusammenhangskomponenten inzident ist



2-Regulärer Tunnel: 3-Zusammenhang (VE)

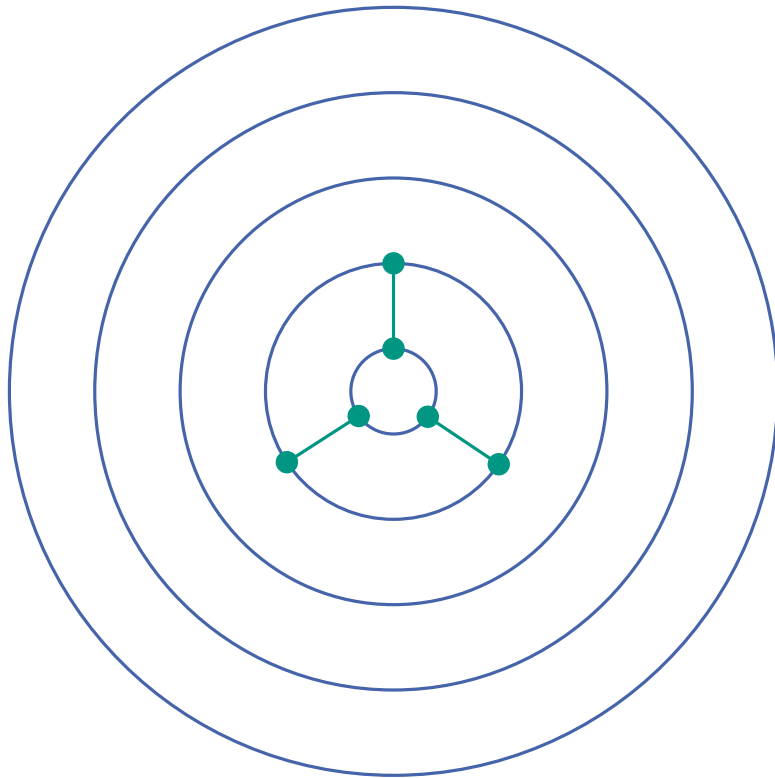
Graph mit fester Einbettung, bei der jede Facette zu höchstens zwei Zusammenhangskomponenten inzident ist



- Drei Kanten zu jedem Nachbarn

2-Regulärer Tunnel: 3-Zusammenhang (VE)

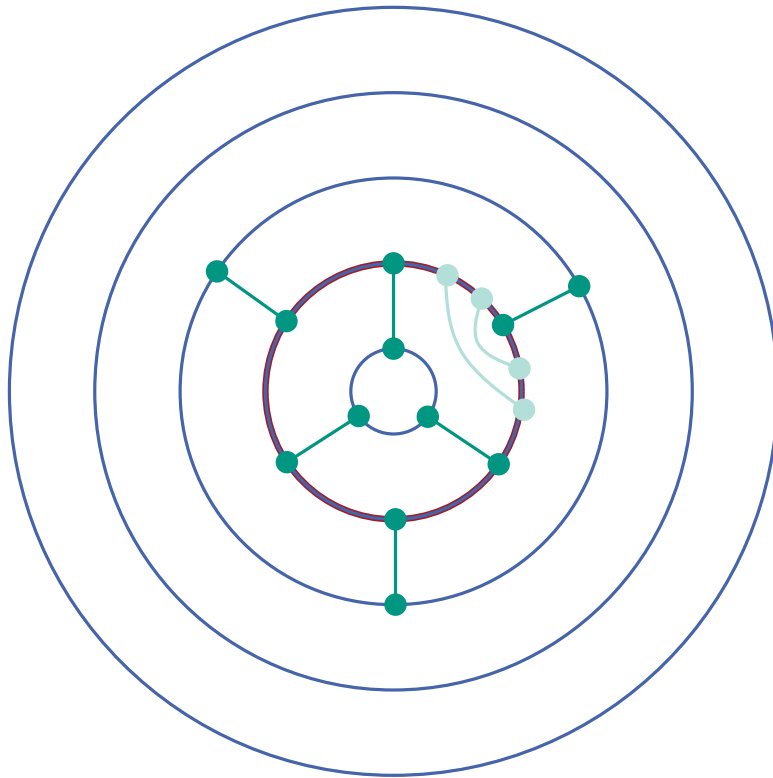
Graph mit fester Einbettung, bei der jede Facette zu höchstens zwei Zusammenhangskomponenten inzident ist



- Drei Kanten zu jedem Nachbarn

2-Regulärer Tunnel: 3-Zusammenhang (VE)

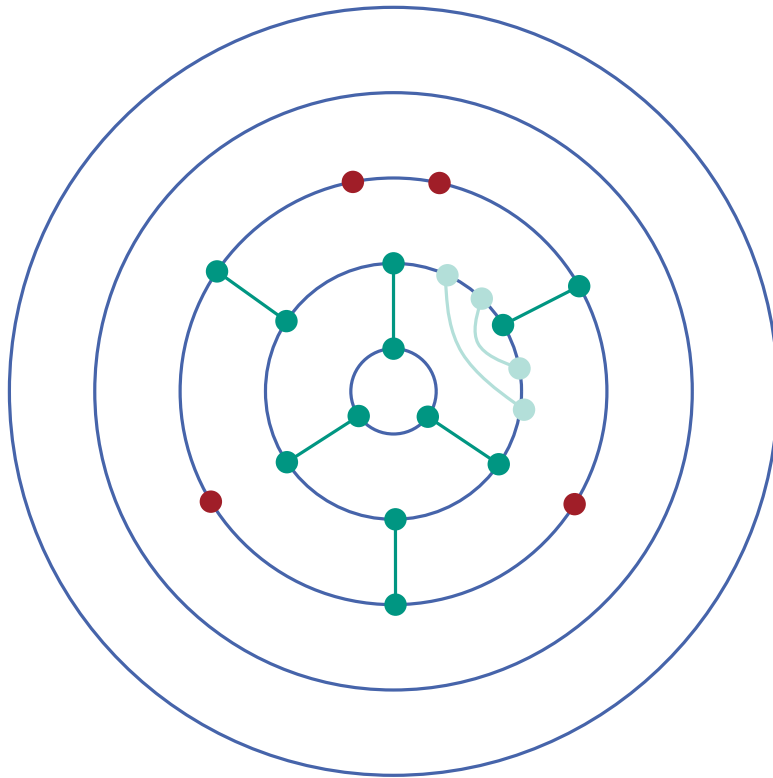
Graph mit fester Einbettung, bei der jede Facette zu höchstens zwei Zusammenhangskomponenten inzident ist



- Drei Kanten zu jedem Nachbarn
- Mittlere Kreise brauchen mindestens sechs Knoten

2-Regulärer Tunnel: 3-Zusammenhang (VE)

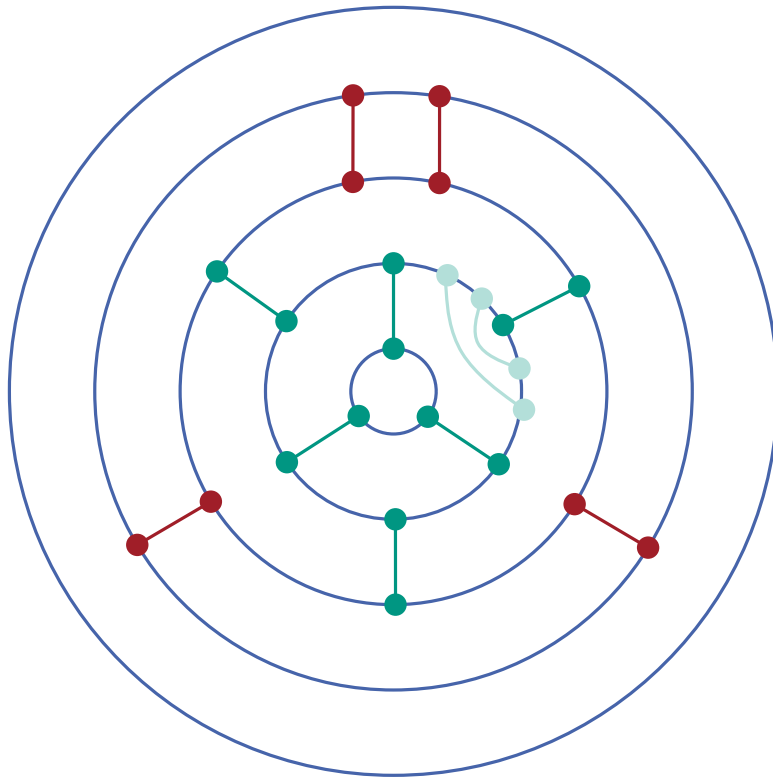
Graph mit fester Einbettung, bei der jede Facette zu höchstens zwei Zusammenhangskomponenten inzident ist



- Drei Kanten zu jedem Nachbarn
- Mittlere Kreise brauchen mindestens sechs Knoten

2-Regulärer Tunnel: 3-Zusammenhang (VE)

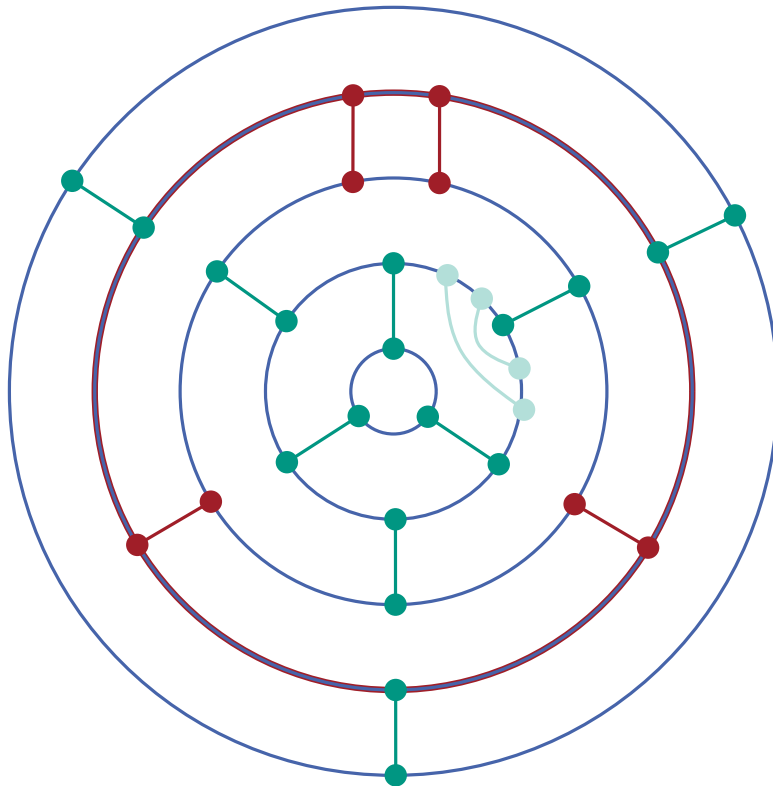
Graph mit fester Einbettung, bei der jede Facette zu höchstens zwei Zusammenhangskomponenten inzident ist



- Drei Kanten zu jedem Nachbarn
- Mittlere Kreise brauchen mindestens sechs Knoten

2-Regulärer Tunnel: 3-Zusammenhang (VE)

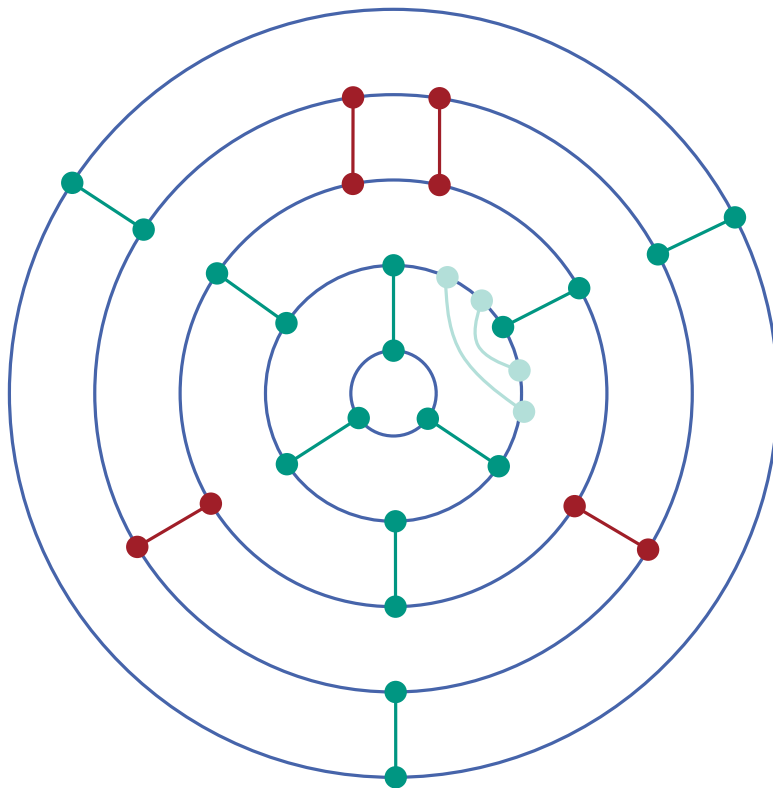
Graph mit fester Einbettung, bei der jede Facette zu höchstens zwei Zusammenhangskomponenten inzident ist



- Drei Kanten zu jedem Nachbarn
- Mittlere Kreise brauchen mindestens sechs Knoten
- Kreise mit gerader Anzahl Knoten im Inneren brauchen mindestens sieben Knoten

2-Regulärer Tunnel: 3-Zusammenhang (VE)

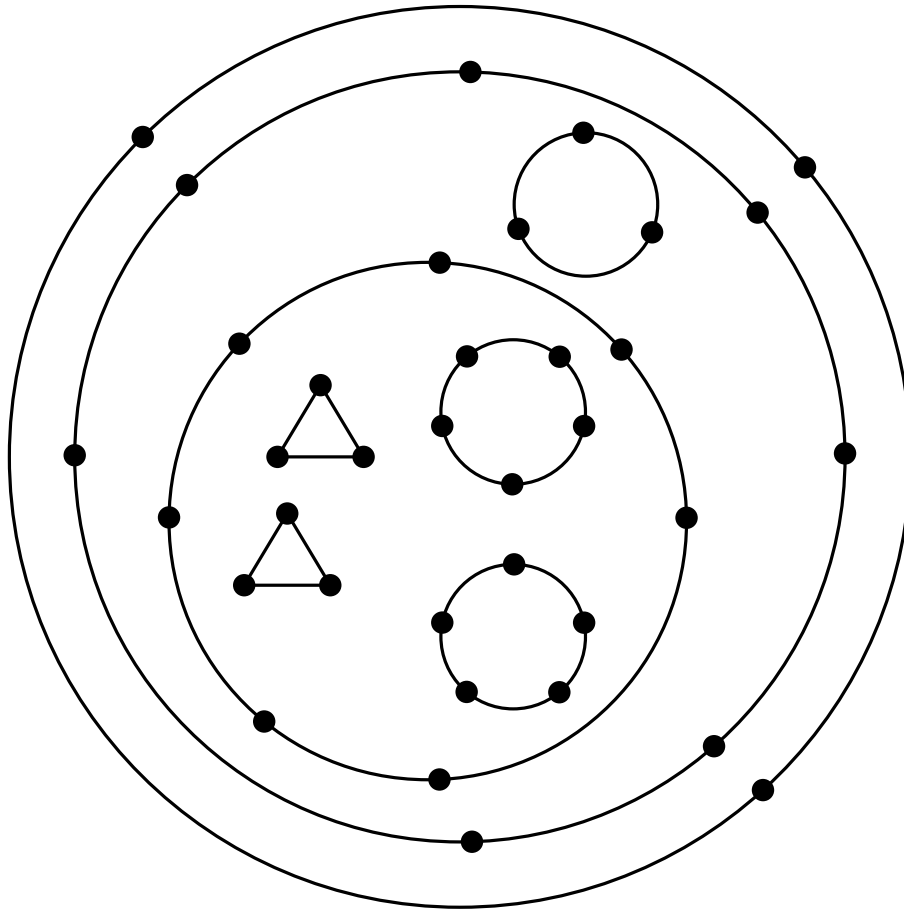
Graph mit fester Einbettung, bei der jede Facette zu höchstens zwei Zusammenhangskomponenten inzident ist



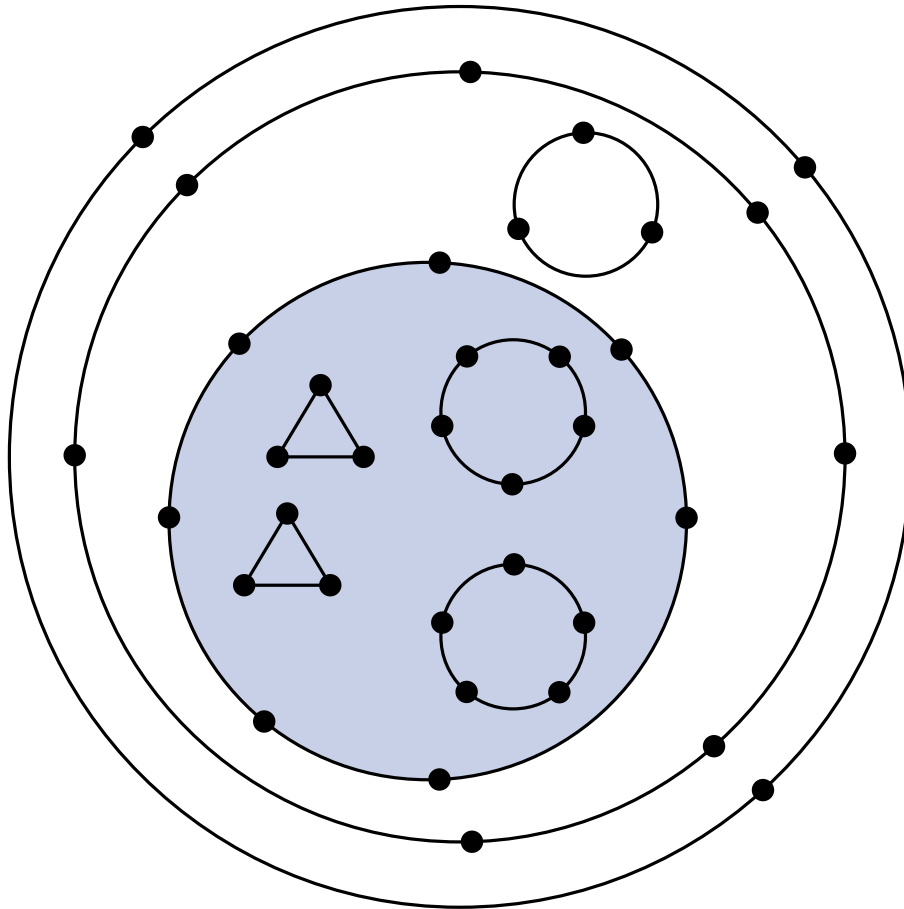
Ein Tunnel besitzt Augmentierung, wenn

- alle mittleren Kreise aus min. sechs Knoten bestehen
- alle mittleren Kreise, die eine gerade Anzahl an Knoten im Inneren haben, aus min. sieben Knoten bestehen

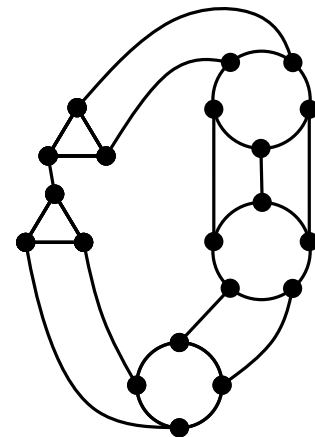
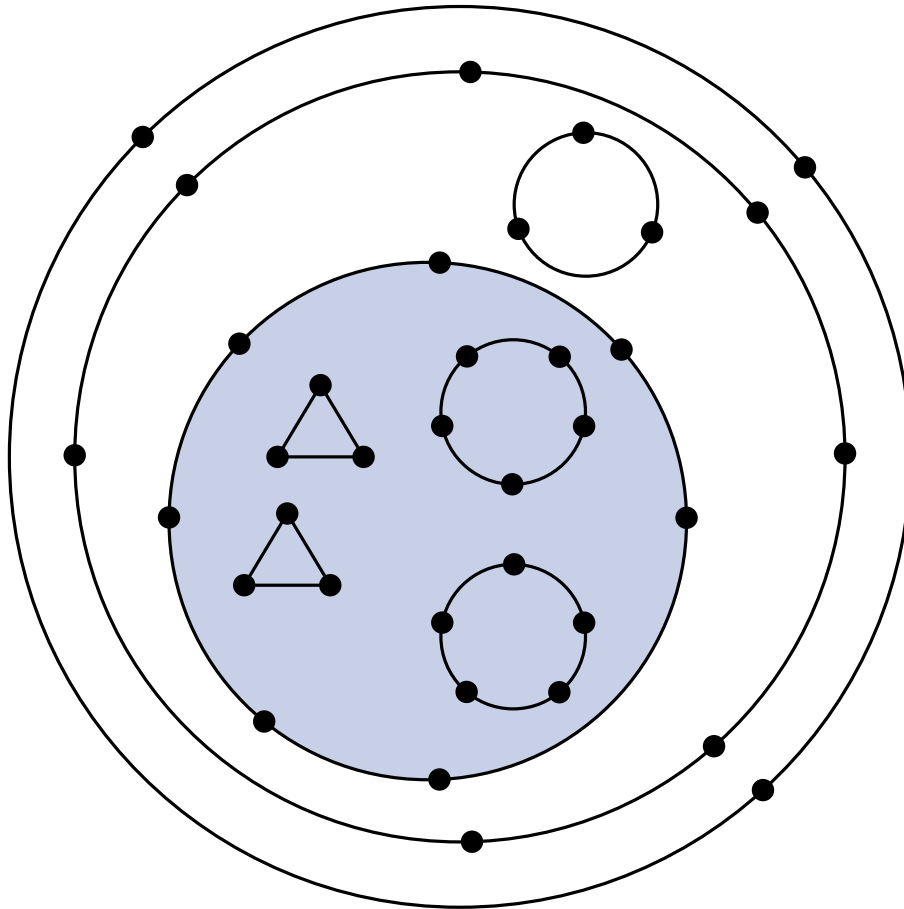
2-Regulärer Tunnel: 3-Zusammenhang (FE)



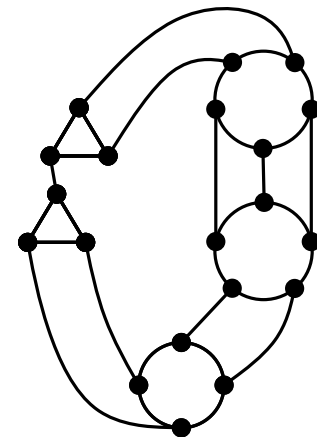
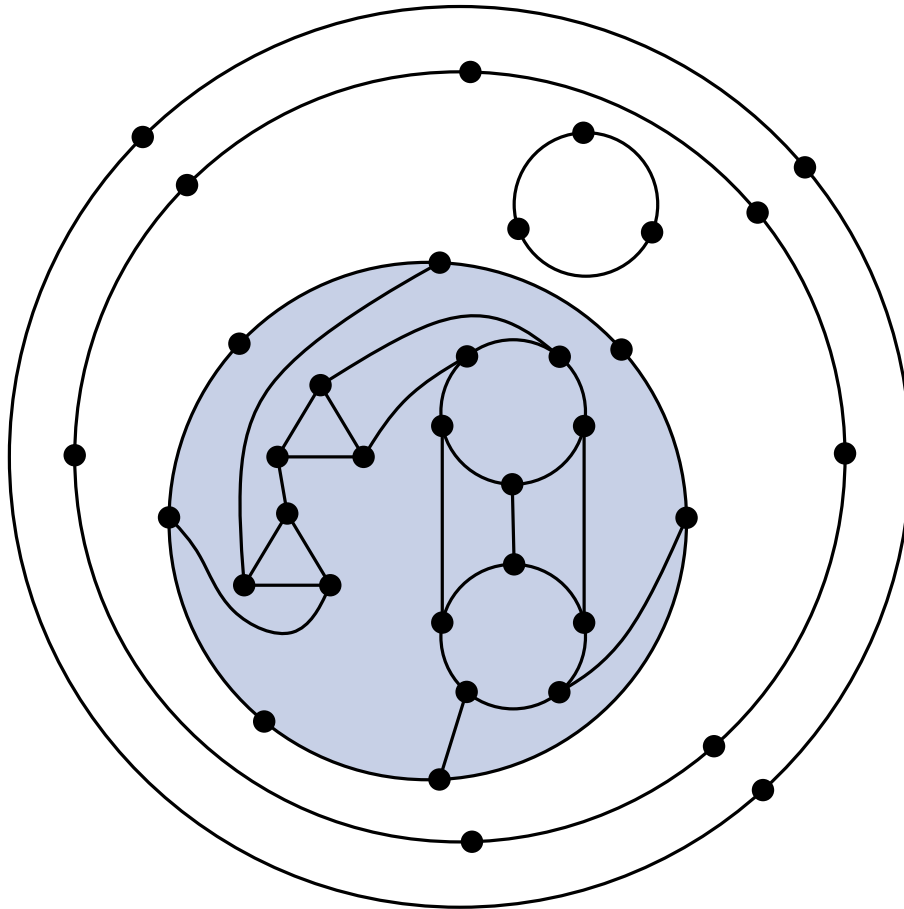
2-Regulärer Tunnel: 3-Zusammenhang (FE)



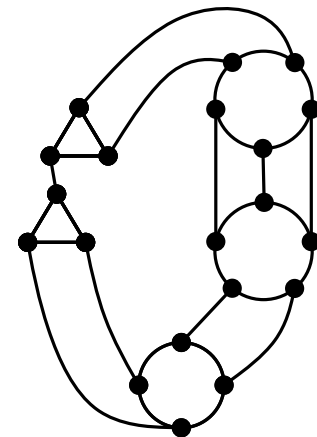
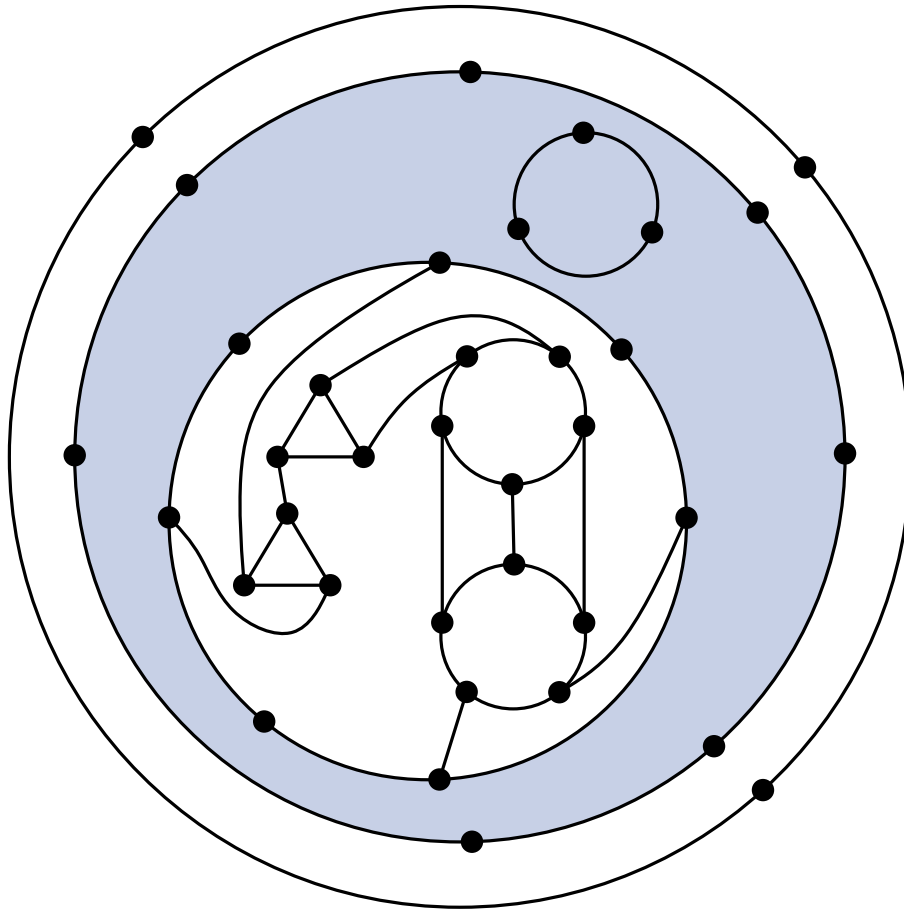
2-Regulärer Tunnel: 3-Zusammenhang (FE)



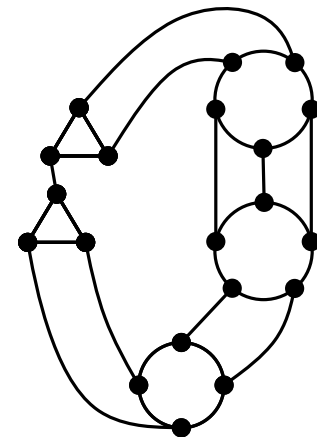
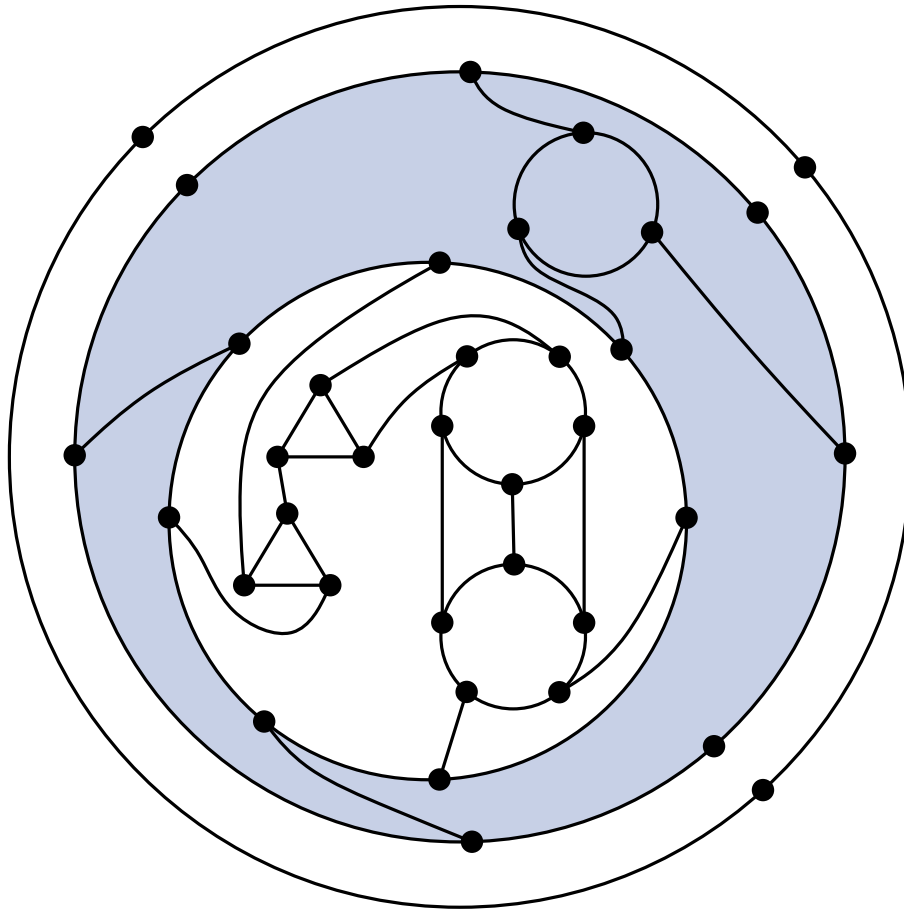
2-Regulärer Tunnel: 3-Zusammenhang (FE)



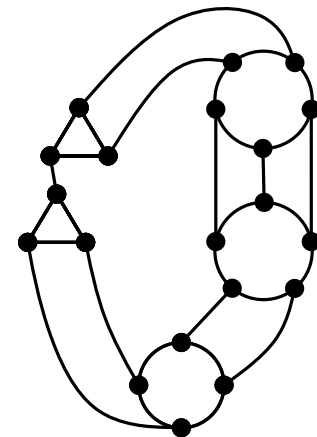
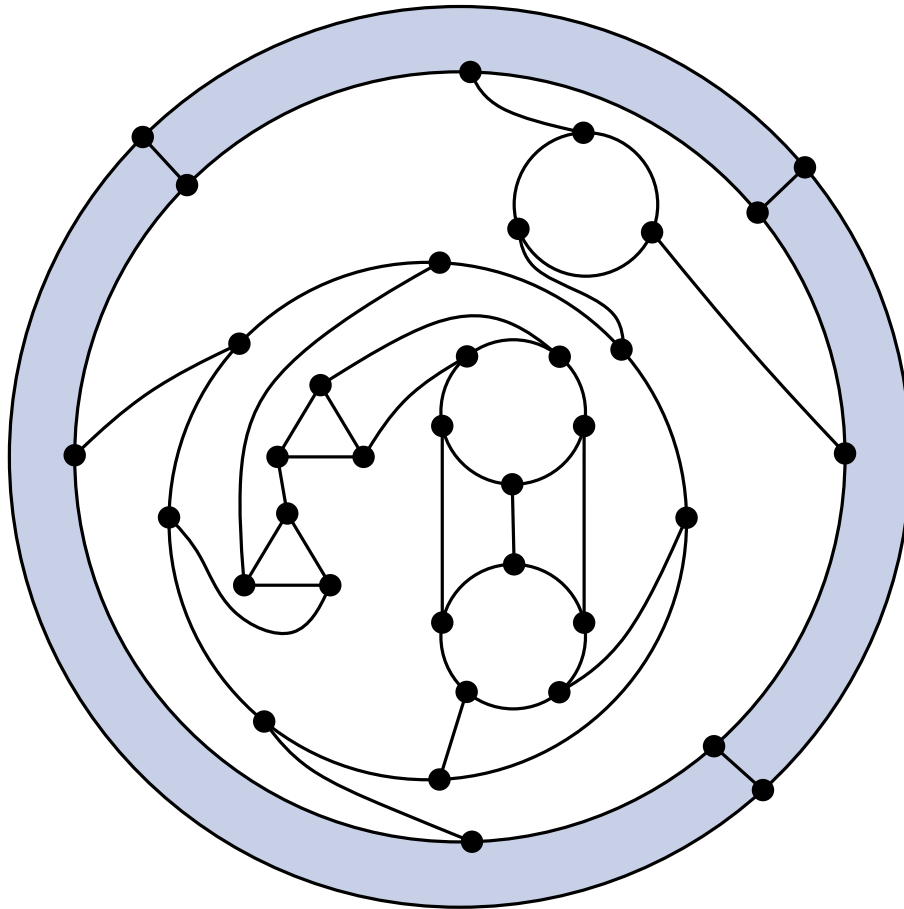
2-Regulärer Tunnel: 3-Zusammenhang (FE)



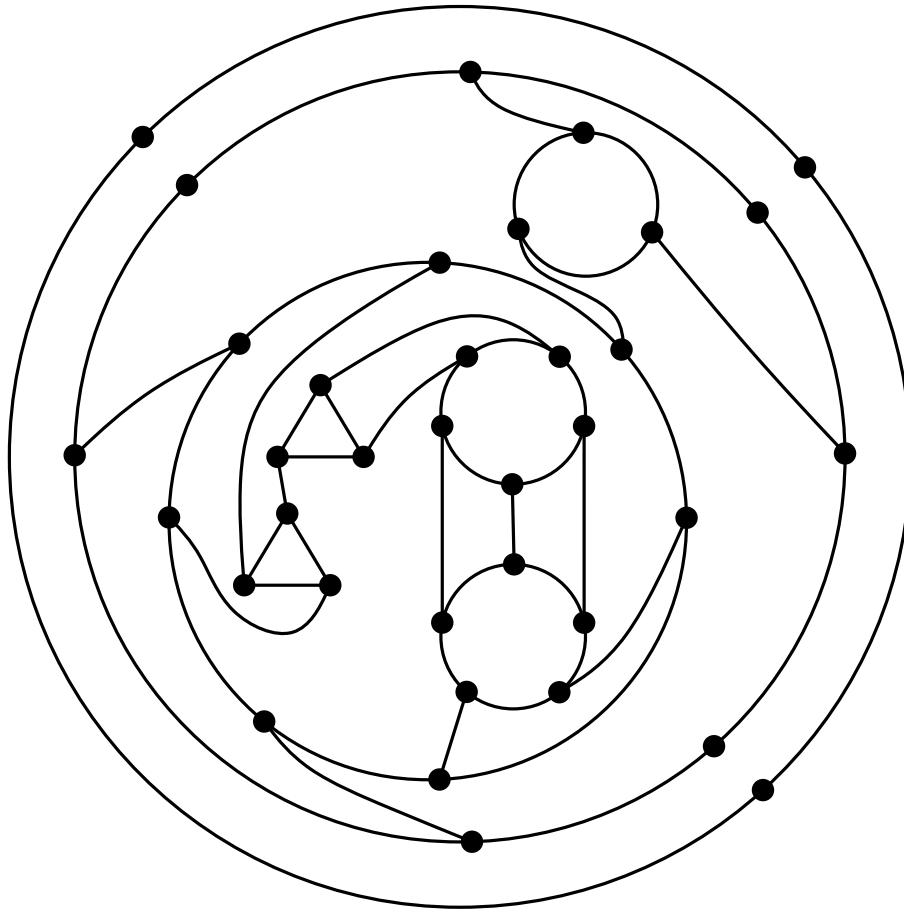
2-Regulärer Tunnel: 3-Zusammenhang (FE)



2-Regulärer Tunnel: 3-Zusammenhang (FE)

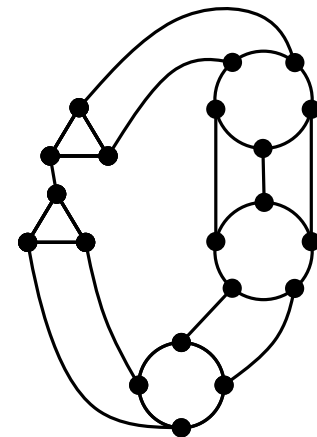


2-Regulärer Tunnel: 3-Zusammenhang (FE)



Ein Graph mit fester Einbettung ist augmentierbar, wenn

- mittlere Kreise aus min. sechs Knoten bestehen
- mittlere Kreise mit gerader Anzahl Knoten im Inneren aus min. sieben Knoten bestehen



Zusammenfassung

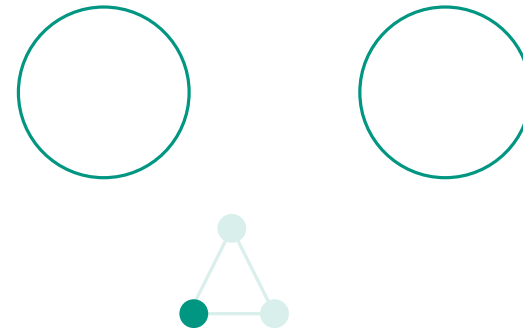
$\begin{array}{c} k \\ c \end{array}$	3		
	VE	Tunnel	FE
0	Char. ✓	Char. ✓	Char. ✓
1	Char. ✓	Char. ✓	$\in O(n)$
2	Char. ✓	Char. ✓	Char. ✓
3	Char. ✓	Char. ✓	Char. ✓

$\begin{smallmatrix} k \\ c \end{smallmatrix}$	3		
	VE	Tunnel	FE
0	Char. ✓	Char. ✓	Char. ✓
1	Char. ✓	Char. ✓	$\in O(n)$
2	Char. ✓	Char. ✓	Char. ✓
3	Char. ✓	Char. ✓	Char. ✓

Offene Fragen

- 3-Reguläre Augmentierungen für planare Graphen mit höchstens Grad 2

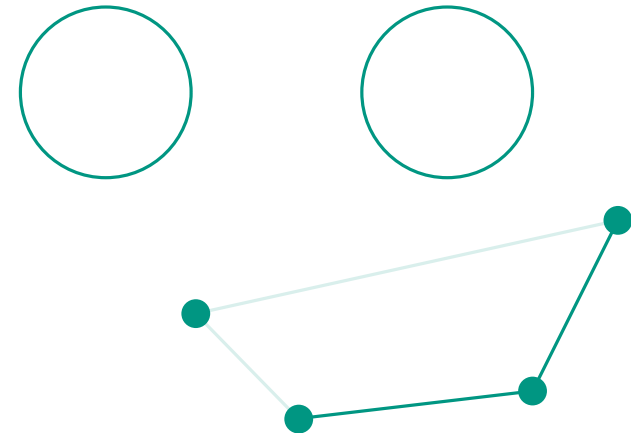
$\begin{smallmatrix} k \\ c \end{smallmatrix}$	3		
	VE	Tunnel	FE
0	Char. ✓	Char. ✓	Char. ✓
1	Char. ✓	Char. ✓	$\in O(n)$
2	Char. ✓	Char. ✓	Char. ✓
3	Char. ✓	Char. ✓	Char. ✓



Offene Fragen

- 3-Reguläre Augmentierungen für planare Graphen mit höchstens Grad 2

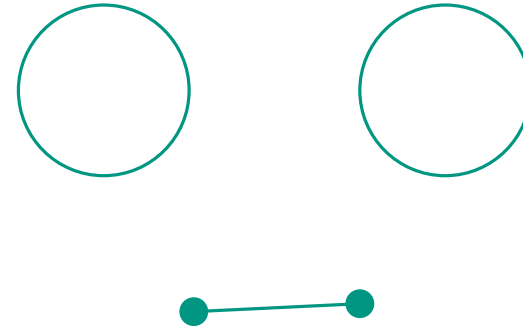
$\begin{smallmatrix} k \\ c \end{smallmatrix}$	3		
	VE	Tunnel	FE
0	Char. ✓	Char. ✓	Char. ✓
1	Char. ✓	Char. ✓	$\in O(n)$
2	Char. ✓	Char. ✓	Char. ✓
3	Char. ✓	Char. ✓	Char. ✓



Offene Fragen

- 3-Reguläre Augmentierungen für planare Graphen mit höchstens Grad 2

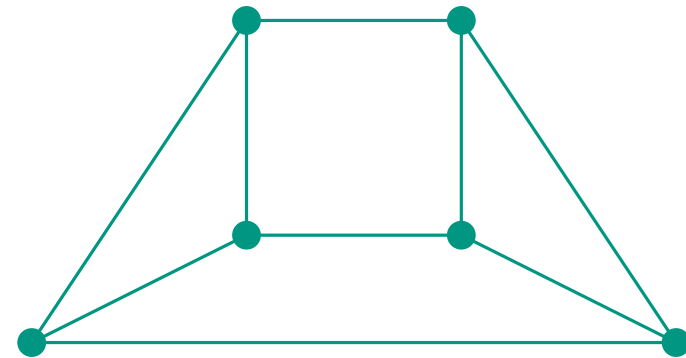
$\begin{smallmatrix} k \\ c \end{smallmatrix}$	3		
	VE	Tunnel	FE
0	Char. ✓	Char. ✓	Char. ✓
1	Char. ✓	Char. ✓	$\in O(n)$
2	Char. ✓	Char. ✓	Char. ✓
3	Char. ✓	Char. ✓	Char. ✓



Offene Fragen

- 3-Reguläre Augmentierungen für planare Graphen mit höchstens Grad 2

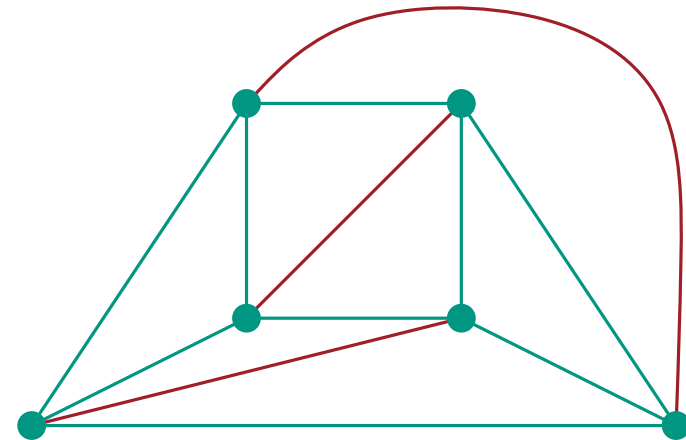
$\begin{smallmatrix} k \\ c \end{smallmatrix}$	3		
	VE	Tunnel	FE
0	Char. ✓	Char. ✓	Char. ✓
1	Char. ✓	Char. ✓	$\in O(n)$
2	Char. ✓	Char. ✓	Char. ✓
3	Char. ✓	Char. ✓	Char. ✓



Offene Fragen

- 3-Reguläre Augmentierungen für planare Graphen mit höchstens Grad 2
- 4-Reguläre Augmentierung von 3-regulären Graphen

$k \backslash c$	3		
	VE	Tunnel	FE
0	Char. ✓	Char. ✓	Char. ✓
1	Char. ✓	Char. ✓	$\in O(n)$
2	Char. ✓	Char. ✓	Char. ✓
3	Char. ✓	Char. ✓	Char. ✓



Offene Fragen

- 3-Reguläre Augmentierungen für planare Graphen mit höchstens Grad 2
- 4-Reguläre Augmentierung von 3-regulären Graphen