III Continuité

1) Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, On dit que f est continue en $x_0 \in I$ si $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

On dit que f est continue sur I si f est continue en tout point de I

Exemple

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ f(x) = 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

f est elle continue

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} e^{-1/x} = 0$

f $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} e^{-1/x} = 0 = f(0) = 0$ car $f(x) = 0$ si $x = 0$

donc f est continue en 0

3) Prolongement par continuité

si f est une fonction non définie en x_0 alors la limi mais possédant une limite l en x_0 alors g par $g(x) = f(x)$ si $x \in D_f$ et $g(x_0) = l$

la fonction g est appelé le prolongement par continuité de f

Exemple $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{x-2} - \sqrt{2}}$

Soit

$f \exists$ ssi $\sqrt{x-2} - \sqrt{2} \neq 0$ et $x \geq 2$ et $x \geq -\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $x \in [2, +\infty[$

$x - 2 \neq 2 \Rightarrow x \neq 4$

$f(x) = [2, +\infty[\setminus \{4\}$

$\lim_{x \to 4} f(x) = \lim_{x \to 4^-} \dfrac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{x-2} - \sqrt{2}} = FI \Rightarrow \lim_{x \to 4^-} \dfrac{(\sqrt{2x+1}^2 - 9)(\sqrt{x-2} + \sqrt{2})}{(x - 2 - 2)(\sqrt{2x+1} + 3)}$

$\lim_{x \to 4} \dfrac{(2x - 8)(\sqrt{x-2} + \sqrt{2})}{x(\sqrt{2x+1} + 3)} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ $g(x)$ $\dfrac{2(2x-8)(\sqrt{x-2} + \sqrt{2})}{(\cancel{x-4})(\sqrt{2x+1} + 3)}$

$\lim_{x \to 4} f(x) = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

la fonction f peut être prolongée en $x_0 = 4$
$g(4) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$$\begin{cases} g(x) = f(x) & \text{si } x \neq 4 \\ g(4) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{cases}$$

3) Théorème

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I alors les fonctions $g+f$; $f \times g$, αf sont continues sur I

si $g \neq 0$ alors $\frac{f}{g}$ est continue sur I

4) théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ si
Pour tout réel k, compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un réel $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = k$

5) théorème de la bijection monotone

Toute fonction f continue et strictement monotone sur un intervalle I réalise une bijection de I vers $J = f(I)$ de plus la bijection réciproque f^{-1} a m̄ sens de variation que celui de f

4) Dérivabilité

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$, on dit que f est dérivable en x_0 si $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l \in \mathbb{R}$ le réel l est appelé le nombre dérivé de f en x_0 et on le note $f'(x_0)$

Exemple

Soit f la fonction définie

$$\begin{cases} f(x) = (x+1) e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ f(x) = 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

f est elle dérivable à droite de 0

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x+1) e^{-\frac{1}{x}} = 0$ donc f est continue

$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{(x+1) e^{-\frac{1}{x}} - 0}{x} = \frac{0}{0} = F_I = \lim_{x \to 0^+} \frac{x e^{-\frac{1}{x}}}{x} - \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = e^{-\frac{1}{x}} - \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}}$

posons $X = -\frac{1}{x} \Rightarrow x \to 0 \Rightarrow X \to -\infty$

$\lim_{X \to -\infty} e^X - X e^X = e^X (1 - X) = 0$

4) Operation sur les dérivés

fonctions	dérivés
$f + g$	$f' + g'$
$f g$	$f' g + g' f$
$\frac{f}{g}$	$(g f' + g' f) / g^2$
f^n	$n f' f^{n-1}$
$\ln(f)$	$\frac{f'}{f}$
e^f	$f' e^f$
$f \circ g$	$g' \times f' \circ g$
$1/f^n$	~~nf~~ $-n f' / f^{n+1}$
$\sqrt{f}$	$f' / 2\sqrt{f}$

$f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1 + \dfrac{1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}}}{2\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}$

$\dfrac{2\sqrt{x} \, (2\sqrt{x + \sqrt{x}}) + 2\sqrt{x} + 1}{(2\sqrt{x + \sqrt{x}})(2\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}) \, 2\sqrt{x}}$

3) Propriétés et sens de variation

Soit f une fonction dérivable sur un ~~ensen~~ intervalle I

* f est croissante sur I ssi $f' \geq 0$ sur I
* f est décroissante sur I ssi $f' \leq 0$ sur I
* f est constante sur I ssi $f' = 0$ sur I

$$\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$

Ex

Soit $f : [0, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [0, 1]$

$x \longrightarrow \sin^2 x$

1) Mq f est bijective

2) Démq $\left(f^{-1}(x)\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}$

solution

Mq f est bijective

$f(x) = \sin^2 x$ $D_f = \mathbb{R}$

$D_f =]-1, 1[$ $-1 < \sin x < -1$

$f(x + 2\pi)$

$\sin x \sin x$

$\sin(x + 2\pi) \sin(x + 2\pi)$

$(\sin x \cos 2\pi + \sin 2\pi \cos x)(\sin$

$(\sin x)(\sin x) = \sin^2 x$

Alors la fonction est periodique de periode 2π alors on peut restreindre l'étude de sa fonct sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

utilisons la restriction sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

$\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}} \sin^2 x = +1$

$\lim\limits_{x \to 0} \sin^2(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin^2(x) = 1$

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin^2 x = 1$

La fonction $\sin^2(x)$ est bijective de $[0, \frac{\pi}{2}]$ $\alpha =]0, 1[$

Dérivée d'ordre supérieur

1) Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I

* On dit que f est deux fois dérivables sur I si f et f' sont dérivables sur I
* On dit que f est trois fois dérivables sur I si f' et f'' sont dérivables sur I
* La dérivée d'ordre 3 est notée $f^{(3)}$
* On dit que f est n fois dérivables sur I si les dérivées $f', f'', f''', \dots f^{(n-1)}$ et $f^{(n)}$ existent

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$$

2) Fonction de classe C^n

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est de classe C^n sur I si f est n fois dérivables sur I et la dérivée d'ordre n $f^{(n)}$ est continue sur I

L'ensemble des fonctions de classe C^n est noté $C^n(I)$

3) Fonction de classe C^∞

Soit une fonction définie sur I. On dit que f est de classe C^∞ sur I si, quelque soit $\forall n \in \mathbb{N}$, f est n fois dérivables sur I

Exemple

Les fonctions polynômes exponentielles

4) Formule de Leibniz

Soient f et g deux fonctions n fois dérivables sur I. Alors le produit fg est n fois dérivables sur I et on a

$$(fg)^{n} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}$$

avec $f^{(0)} = f$

Exemple

Calculer la dérivée d'ordre n de $f(x) = (x^2 + 1)\, e^{2x}$

$f_1(x) = x^3+1$; $f_1'(x) = 3x^2$, $f_1''(x) = 6x$, $f_1^{(3)} = 6$, $\forall n \geq 4$ $f_1^{(n)}(x) = 6$

$f_2(x) = e^{2x}$; $f_2^{(1)}(x) = 2e^{2x}$, $f_2^{(2)}(x) = 4e^{2x}$, $f_2^{(3)} = 2^3 e^{2x}$, $\forall n \geq 1$, $f_2^{(n)}(x) = 2^n e^{2x}$

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f_1^{(k)}(x) f_2^{(n-k)}(x) = C_n^0 f_1^{(0)}(x) f_2^{(n)}(x) + C_n^1 f_1'(x) f_2^{(n-1)}(x)$$

$$+ C_n^2 f_1''(x) f_2^{(n-2)}(x) + C_n^3 f_1^{(3)}(x) f_2^{(n-3)}(x) + 0 + 0 + \dots$$

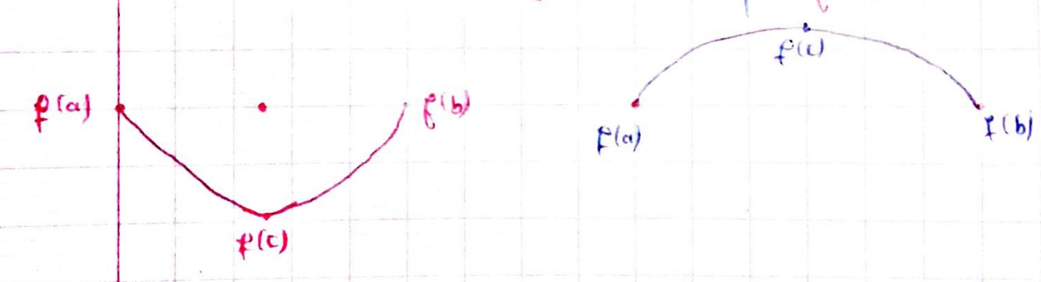
$$= (x^3+1)(2^n e^{2x}) + n(3x^2)(2^{n-1}e^{2x}) + C_n^2 (6x)(2^{n-2}e^{2x}) + C_n^3 (6)(2^{n-3}e^{2x})$$

5) Extrémum local

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $x_0 \in I$, on dit que f admet un extrémum local en x_0 si $f'(x_0) = 0$ et f' change de signe en x_0

6) théorème de Rolle

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ dérivable sur $]a, b[$ et telque $f(a) = f(b)$ alors il existe au moins un $c \in]a, b[$ telque $f'(c) = 0$



7) théorème des accroissement finis

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ alors il existe au moins un $c \in]a, b[$ telque $f(a) - f(b) = (b - a) f'(c)$

8) Théorème des accroissement finis généralisés

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$, dérivables sur $]a, b[$ ducha ss $g(a) \neq g(b)$ et $g'(x) \neq 0$ sur $[a, b]$, alors il existe $x_0 \in]a, b[$ telque

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

9) théorème de l'hopital

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalles ouvert contenant x_0

Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$, alors $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Exemple

Mq $\lim_{x \to 0} \frac{x - \tan x}{x^3} = \frac{1}{3}$

$\lim_{x \to 0} x - \tan x = 0$

$\lim_{x \to 0} x^3 = 0$

$\lim_{x \to 0} \frac{x - \tan x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \frac{1}{\cos^2 x}}{3x^2} = \frac{\cos^2 x - 1}{3x^2 \cos^2 x} = \lim_{x \to 0} \cos^2 x - 1 = 0$

$\lim_{x \to 0} 3x^2 \cos^2 x = 0$

$f'(x) = -\sin 2x$

$g'(x) = 6x \cos^2 x + -\sin 2x \times 3x^2$

$\lim_{x \to 0} \frac{1 - (1 + \tan^2 x)}{x^3} = \lim_{x \to 0} 1$

$(x - \tan x)' = 1 - (1 + \tan^2 x) = -\tan^2 x$

$(x^3)' = 3x^2$

D'après l'hôpital

$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{-\tan^2 x}{3x^2} = \boxed{-\frac{1}{3}\left(\frac{\tan^2 x}{x^2}\right) = -\frac{1}{3}}$

c) Inégalité des accroissements finis

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$

* s'il existe deux réels m et M tels que $m \leq M$, $m \leq f'(x) \leq M$,

alors $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$

* S'il existe un réel positif k tel que

$$|f'(x)| \leq k \text{, alors } |f(b) - f(a)| \leq k|b-a|$$

1) Fonction arcsinus

Soit la fonction $f : x \longmapsto \sin x$ est continue et strictement croissante de $[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}]$ vers $[-1, 1]$

$$f(x) = \sin x$$

x	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	
f	-1	$\nearrow$	1

Donc la fonction f est bijective

La réciproque de la fonction $f(x) = \sin x$ est la fonction $g(x) = \arcsin(x)$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{avec } -1 < x < 1$$

$$\sin(\arcsin(x))' = (\arcsin x)' \times \cos(\arcsin x) = 1$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

2) Fonction arccosinus

La fonction $f : x \longmapsto \cos x$ est continue et strictement décroissante de $[0, \pi]$ vers $[-1, 1]$

$$f(x) = \cos x$$

x	0		π
$f'(x) = -\sin x$		$-$	
f	1	$\searrow$	-1

La réciproque de la fonction $\cos x$ est la fonction $g(x) = \arccos x$; $x \in [-1,1]$

3) Fonction arc tangente

La fonction $f : x \longrightarrow \tan x$ est continue et strictement croissante de $]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$ vers $]-\infty ; +\infty[$

$$f(x) = \tan x$$
$$f'(x) = 1 + \tan^2 x$$

x	$-\pi/2$		$\pi/2$
$f'(x)$		$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

La réciproque de la fonction $f(x) = \tan x$ est la fonction $g(x) = \arctan x$

$$(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$$

Exo

1) Démontrer que
$\forall x \in [0, \pi]$, $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$

2) Démontrer que si $x > 0$, $\arctan(x) + \arctan(1/x) = \frac{\pi}{2}$

$$\sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) = \cos^{(n)}(x)$$