Chapitre 5
Régimes transitoires

I – Condensateurs – Le dipôle RC.

II – Inductances – Le dipôle RL.

III – Le dipôle LC .

IV – Le dipôle RLC .

<u>Définition</u>: « régime quasi stationnaire »

Quand l'intensité dans un circuit varie relativement lentement, on utilise l'approximation des régimes dits « **quasi stationnaires** » ou « lentement variables », valable pour des fréquences allant jusqu'à plusieurs MHz :

On ne tient pas compte du temps de propagation à l'intérieur du circuit.

Pour des fréquences plus grandes (quelques GHz) on doit tenir compte du temps de propagation du signal entre les différents points du circuit.

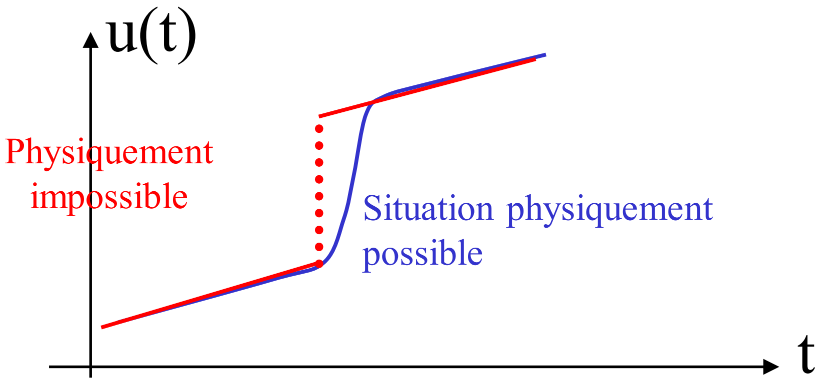
Le phénomène de propagation dans le circuit est négligeable si la longueur du circuit est très inférieure à *cT*.

(c = 30 cm/ns, T = période).

Par exemple pour un ordinateur 2GHz, cT=15cm. on ne peut pas utiliser l'approximation quasi stationnaire, il faut tenir compte du temps de propagation des signaux entre les différents éléments du circuit.

<u>Continuité</u> :

la tension u(t) ne peut jamais présenter de discontinuité

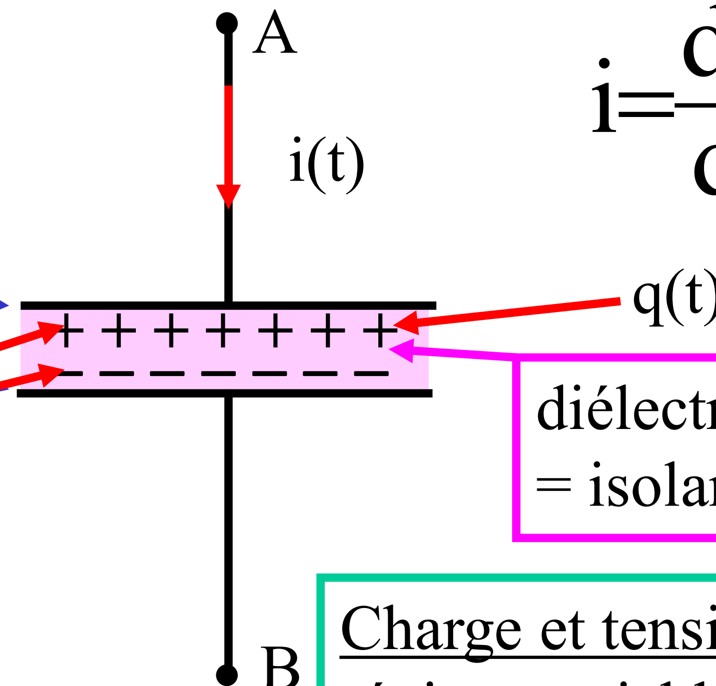


1- Condensateurs, Le dipôle RC

$$\boxed{q(t) = C\,u(t) \qquad\qquad i = \frac{dq}{dt}}$$

1- Condensateurs: définitions

$$i = \frac{dq}{dt}$$



Armatures portant les **charges électriques**

diélectrique = isolant

<u>Charge et tension en régime continu</u>:

U ne varie pas,

Q est constant,

i = 0 (=isolant)

$$U = V_A - V_B = \frac{Q}{C}$$

$$\mathbf{Q = C.U}$$

<u>Charge et tension en régime variable</u>:

i est différent de 0 mais valeur moyenne de i = zéro

$$u(t) = V_A - V_B = \frac{q(t)}{C}$$

$$q(t) = C.u(t)$$

1- Condensateurs: définitions

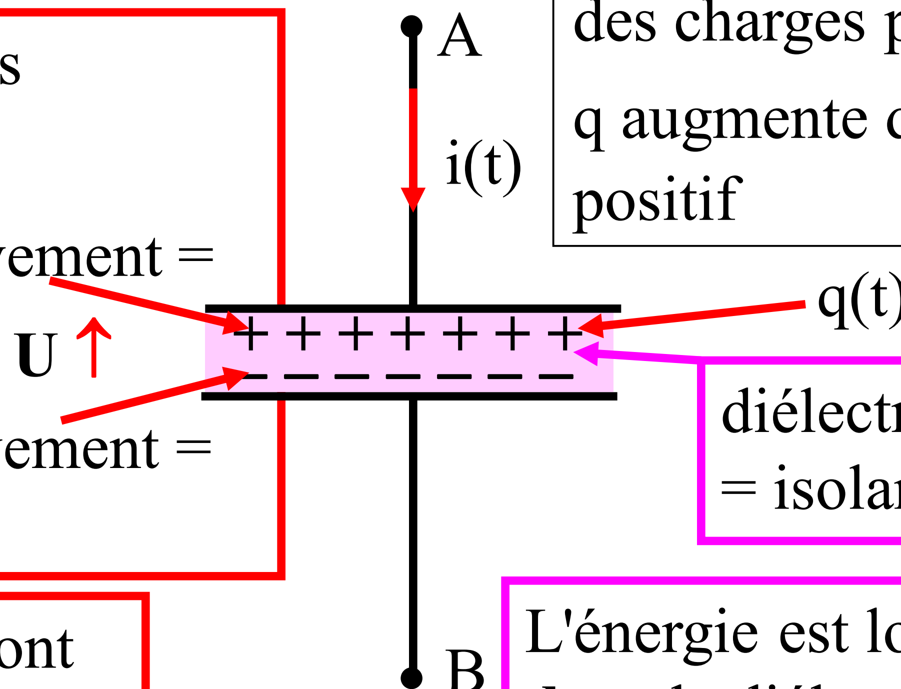
dans ce cas i apporte des charges positives

q augmente dq/dt est positif

Les électrons sont chargés négativement.

électrode chargée positivement = manque d'électrons.

électrode chargée négativement = excès d'électrons.



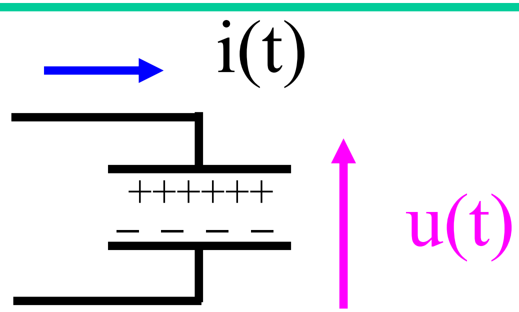
diélectrique = isolant

L'énergie est localisée **dans** le diélectrique

Les charges électriques sont localisées **à la surface** des conducteurs

Orientation du courant = sens de déplacement des charges **positives**

1- Condensateurs: Orientation et signes

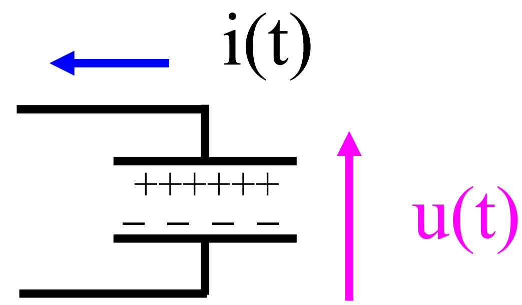


Charge du condensateur:
Convention récepteur

q ↗

$$i = +\frac{dq}{dt}$$

$$i(t) = +C\frac{du(t)}{dt}$$



Décharge du condensateur:
Convention générateur

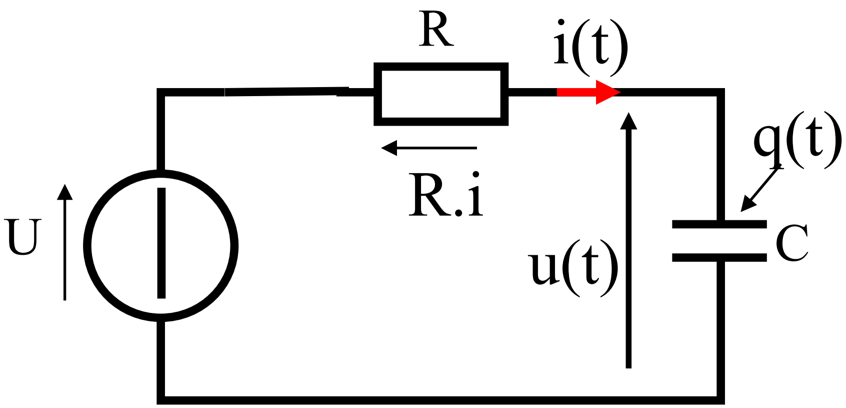
q ↘

$$i = -\frac{dq}{dt}$$

$$i(t) = -C\frac{du(t)}{dt}$$

1- Le dipôle RC: Charge du condensateur

Alimentation par source de tension parfaite



à l'instant t=0 le condensateur est déchargé u(0)=0, et q(0)=0. on ferme l'interrupteur k et le courant commence à passer.

Analyse du circuit:

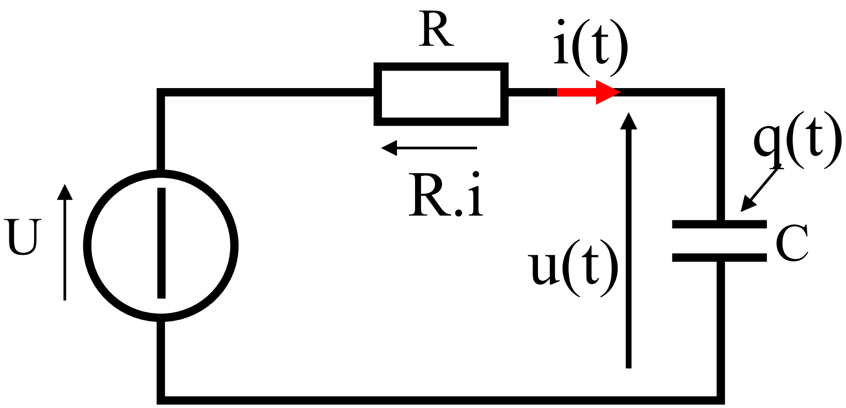
Le circuit ne comporte qu'une seule maille.

$$U = R.i + u(t).$$

Dans ce cas le condensateur est le récepteur, (charge du condensateur).

$$u(t) = \frac{q(t)}{C} \quad \text{et} \quad i(t) = \frac{dq}{dt}$$

1- Le dipôle RC: Charge du condensateur



Mise en équation:

U = R.i(t) + u(t).

$$U = R.i(t) + \frac{q(t)}{C}$$

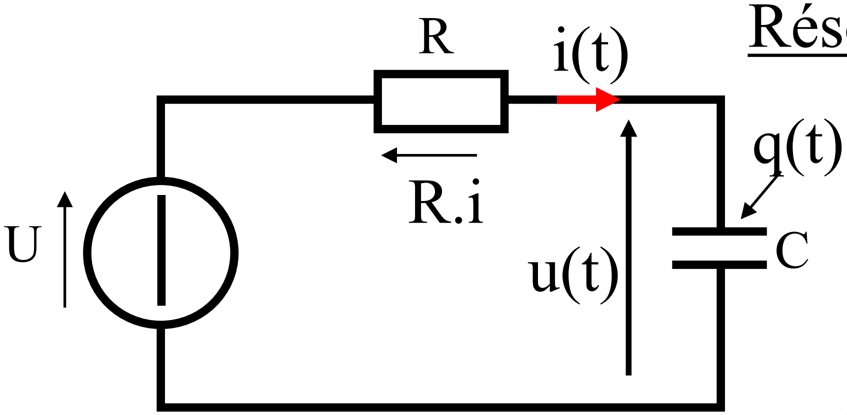
Nous avons trois variables: u(t), i(t), q(t) On exprime tout en fonction de l'une (au choix) de ces variables.

On dérive par rapport à t et on tient compte de $i = \dfrac{dq}{dt}$

l'équation devient: $R\dfrac{di}{dt} + \dfrac{i}{C} = 0$

on écrit cette **équation différentielle** sous la forme: $\dfrac{di}{dt} = -\dfrac{i}{RC}$

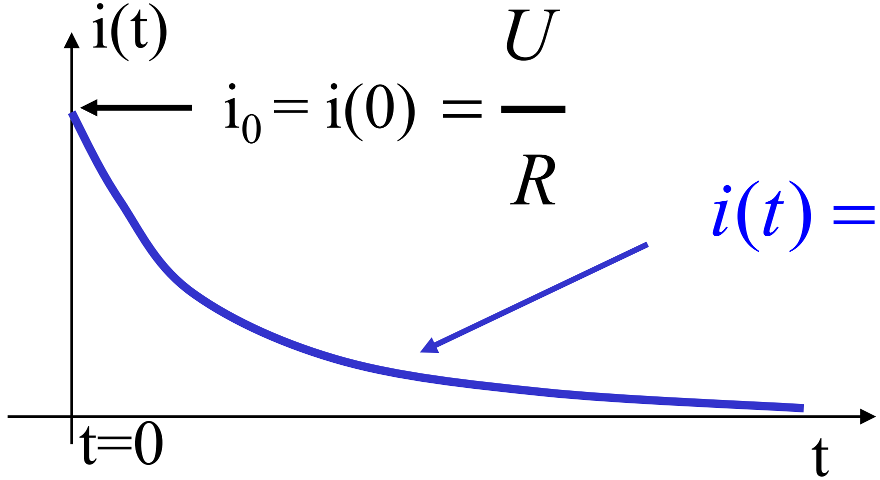
1- Le dipôle RC: Charge du condensateur



<u>Résolution de cette équation différentielle</u>:

$$\frac{di}{dt} = -\frac{i}{RC} \qquad \frac{di}{i} = -\frac{dt}{RC}$$

$t = 0 \Rightarrow i(0) = i_0$ $$\ln(i) = -\frac{t}{RC} + \ln(i_0)$$

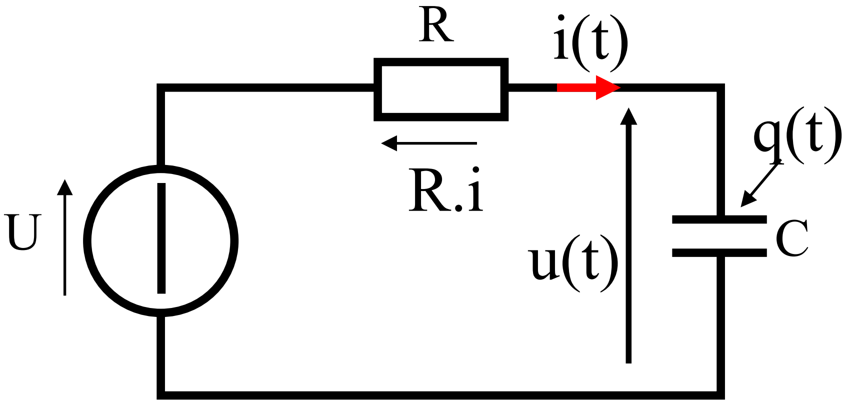


$$i_0 = i(0) = \frac{U}{R}$$

$$i(t) = \frac{U}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

C'est donc bien un courant **<u>transitoire</u>**, qui tend rapidement vers zéro après la fermeture du circuit.

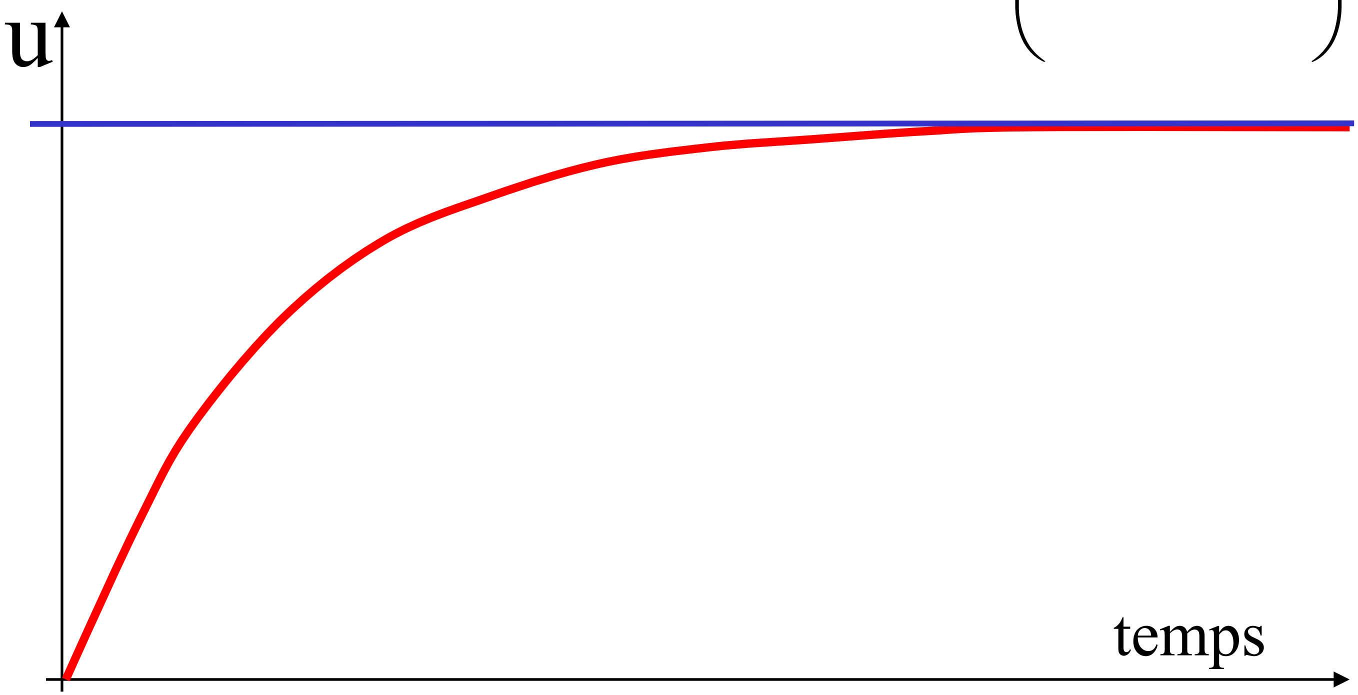
1- Le dipôle RC: Charge du condensateur



La tension

u(t) = U - R.i

$$u(t) = U\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

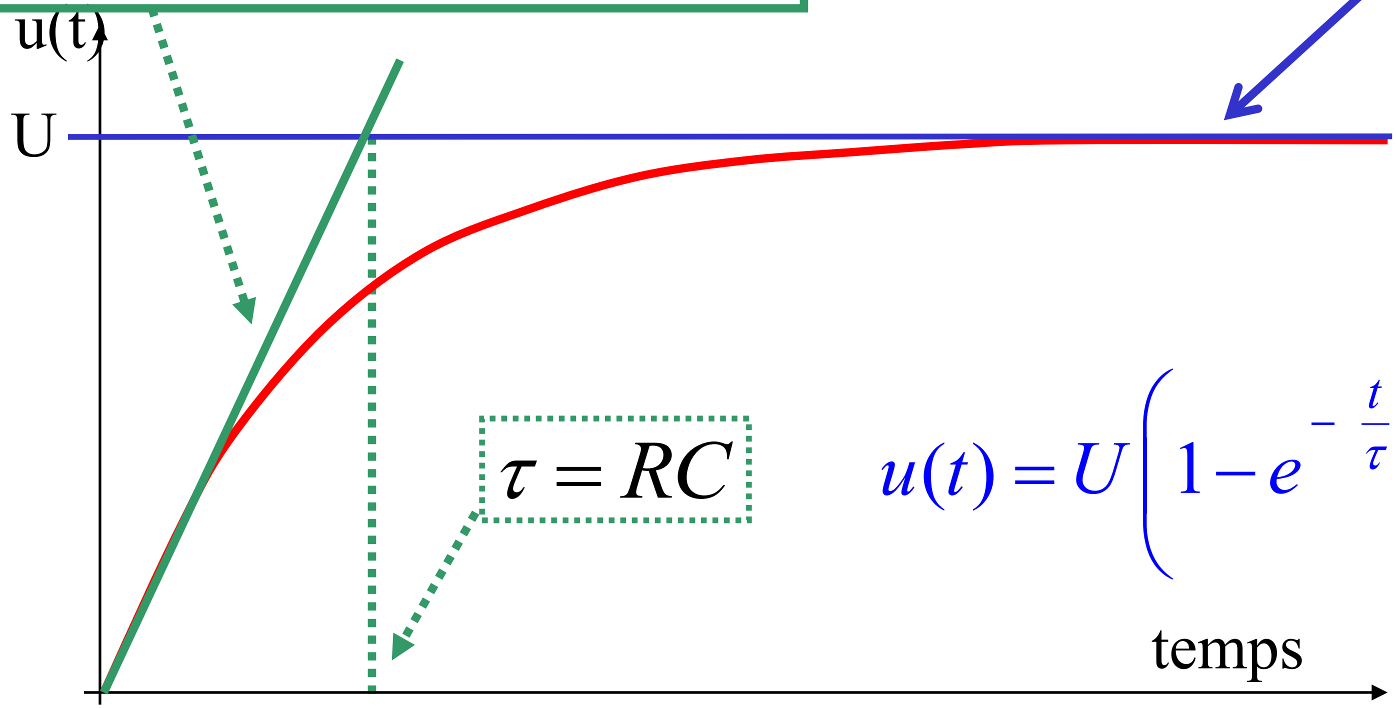


1- Le dipôle RC: Charge du condensateur

Etude de la fonction $$u(t) = U\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

pente à l'origine: $$\left(\frac{du}{dt}\right)_{(t=0)} = \frac{U}{RC}$$

Asymptote:
quand t $\rightarrow \infty$, u(t) $\rightarrow$ U



$$\boxed{\tau = RC}$$

$$u(t) = U\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

<u>Unités</u>: τ en seconde, R en ohm et C en farad

Comment évolue l'énergie au cours d'un transitoire de charge de condensateur ?

Puissance $p(t) = U.i(t)$, Energie $dW = U.i.dt$

$q=Cu$, ce qui donne $dq=Cdu$ et d'autre part, $dq=i.dt$.

énergie fournie par le générateur

$$\int_0^{\infty} U.i.dt = \int_0^{Q} U\,dq = U.Q = CU^2$$

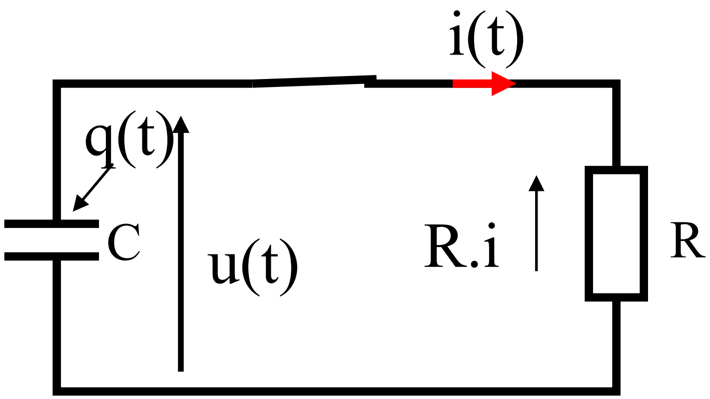
énergie stockée par le condensateur

$$W_E = \int_0^{\infty} u.i.dt = \int_0^{Q} u\,dq = \int_0^{U} C\,u.du = \frac{1}{2}CU^2$$

énergie perdue par effet Joule dans la résistance

$$\int_0^{\infty} R.i^2.dt = \int u\,i.dt = \int u.dq = C\int u.du = \frac{1}{2}CU^2$$

1- Le dipôle RC: Décharge du condensateur



à l'instant t=0 le condensateur est chargé u(0)≠0, il porte la charge q(0)=C.u(0) on ferme l'interrupteur k et le courant commence à passer.

<u>Analyse du circuit</u>:

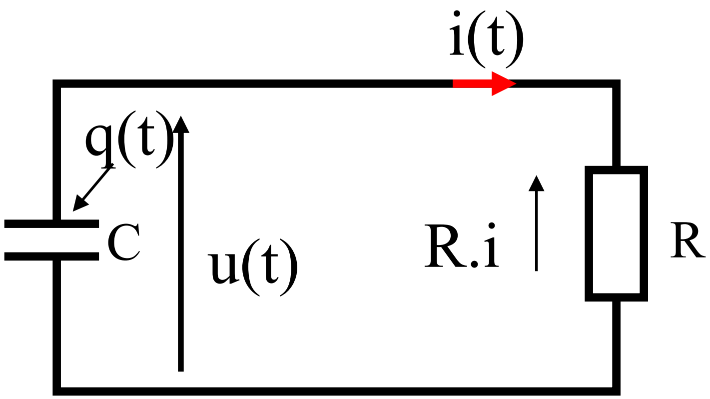
Le circuit ne comporte qu'une seule boucle maille.

$$u(t) = R.i.$$

Dans ce cas le condensateur est le générateur, (décharge du condensateur).

$$u(t) = \frac{q(t)}{C} \quad \text{et} \quad i(t) = -\frac{dq}{dt}$$

1- Le dipôle RC: Décharge du condensateur



Mise en équation:

$$u(t) = Ri(t)$$

$$\frac{q(t)}{C} = R.i(t)$$

Cette fois choisissons u(t).

$$i(t) = -\frac{dq}{dt}$$

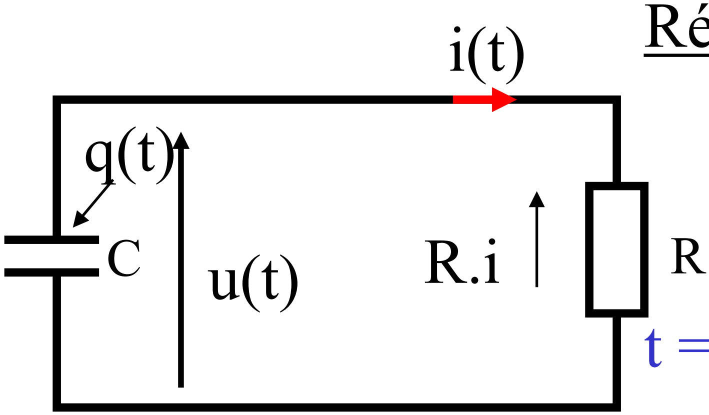
$$u(t) = -R\frac{dq}{dt} = -RC\frac{du}{dt}$$

On écrit cette équation sous la forme: $\frac{du}{dt} = -\frac{u}{RC}$

Bien remarquer que nous pouvons tout aussi bien choisir d'orienter i dans le sens inverse inverse. cela revient à changer l'orientation de i : changer i en -i donc u(t)=-R.i(t)

et i=+dq/dt . On obtient donc le même résultat.

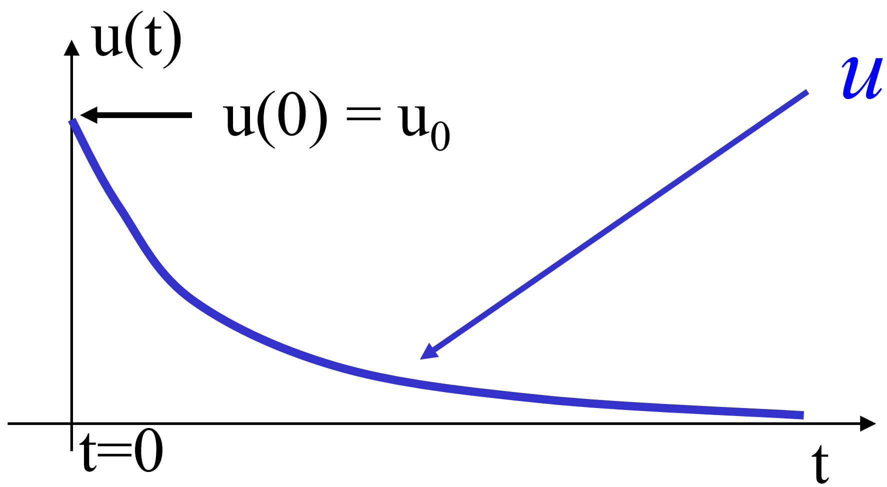
1- Le dipôle RC: Décharge du condensateur



Résolution de cette équation différentielle:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{u}{RC} \qquad \frac{du}{u} = -\frac{dt}{RC}$$

$t = 0 \Rightarrow u(0) = u_0$ $\quad \ln(u) = -\dfrac{t}{RC} + \ln(u_0)$



$$u(t) = u_0 \, e^{-\frac{t}{RC}}$$

2-Inductances, Le dipôle RL

$$\boxed{u = r.i + L\frac{di}{dt}}$$

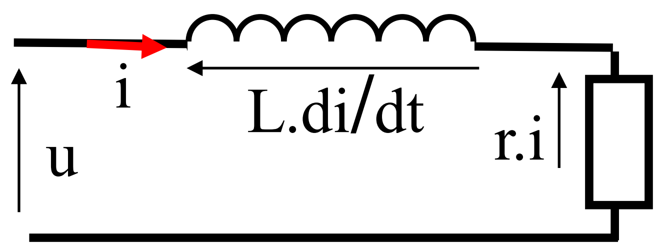
2- Inductances

Une bobine est constitué par l'enroulement d'une grande longueur de fil conducteur . Un noyau de matériau magnétique est parfois placé à l'intérieur.

Considérons une bobine d'inductance L orientée en convention récepteur.Une bobine présente toujours une résistance interne r.

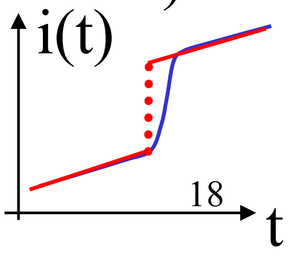
<u>Relation intensité - tension</u>:

$$u = r.i + L\frac{di}{dt}$$



En régime continu, i = cte donc L.di/dt = 0 (= fil conducteur)

<u>Relations de continuité</u>: Le courant i ne peut présenter de discontinuité, la tension ne peut être infinie.



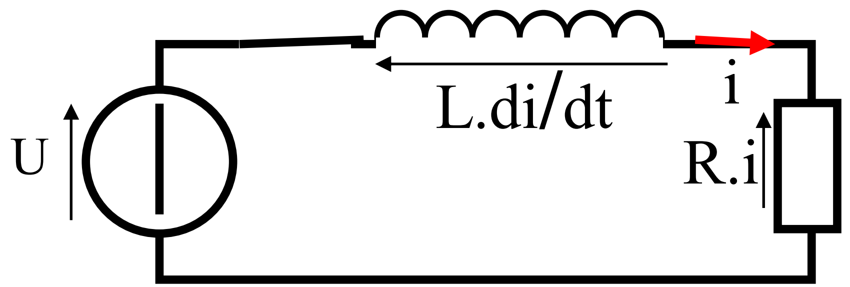
2- Le dipôle RL: évolution temporelle

Dipôle RL série: Alimentation par une source de tension parfaite.

évolution temporelle du courant

R est la résistance totale du circuit

$$U = R.i + L\frac{di}{dt}$$



à l'instant t=0, on ferme l'interrupteur k et le courant commence à passer. i(0)=0 .

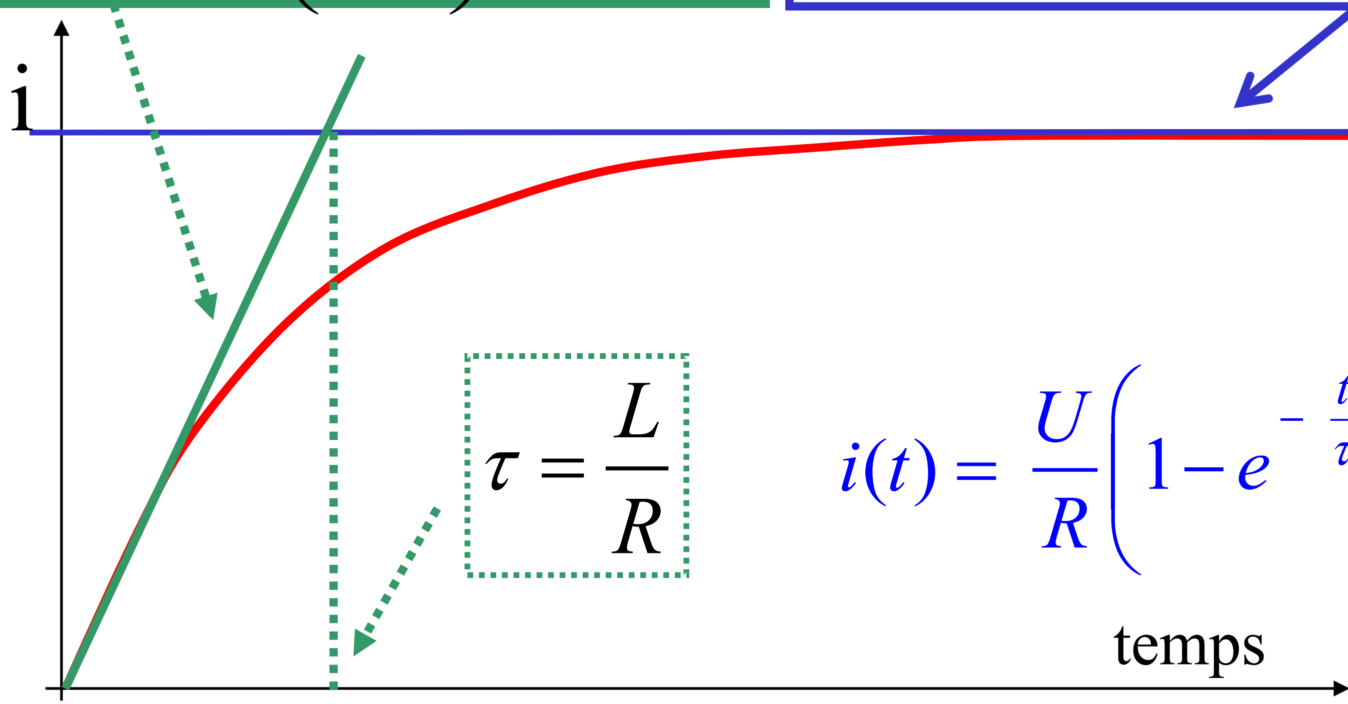
$$i(t) = \frac{U}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

2- Le dipôle RL: évolution temporelle

$$i(t) = \frac{U}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

pente à l'origine: $\left(\frac{di}{dt}\right)_{(t=0)} = \frac{U}{L}$

Asymptote: en régime permanent i(t) → U/R



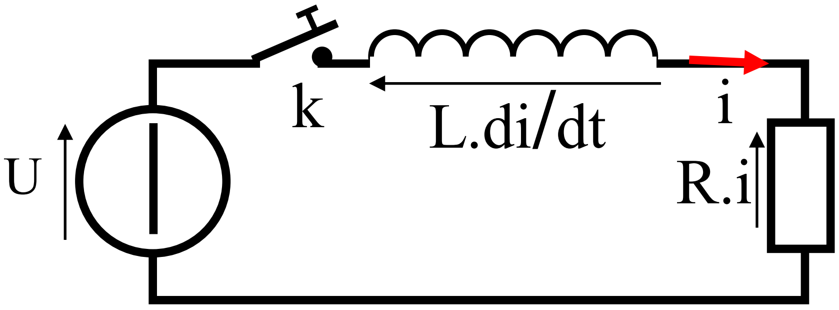
$$\tau = \frac{L}{R}$$

$$i(t) = \frac{U}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

<u>Unités</u>: τ en seconde, R en ohm (Ω) et L en henry (H)

2- Le dipôle RL: aspect énergétique

Comment évolue l'énergie au cours d'un transitoire d'établissement du courant dans une inductance?



$$U = Ri + L\frac{di}{dt}$$

$$p(t) = U.i = (Ri + L\frac{di}{dt}).i$$

$$dW = p.dt = U.idt = Ri^2dt + L.i.di$$

énergie fournie par la source

effet Joule

énergie stockée dans l'inductance

i varie de 0 à I

$$dW_L = L.i.di$$

$$W_L = \int_{i=0}^{i=I} L.idi = \frac{1}{2}LI^2$$

l'énergie stockée dans l'inductance est $\frac{1}{2}LI^2$

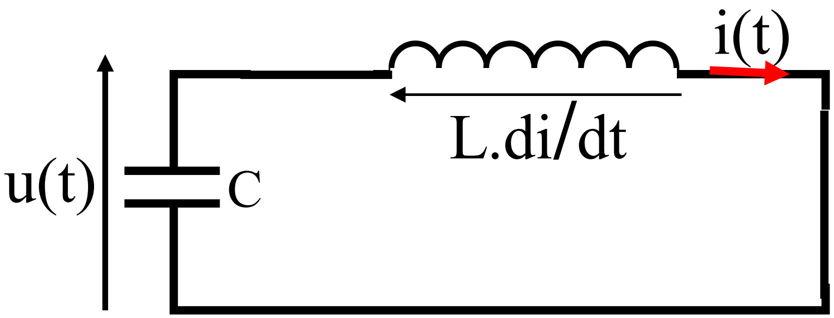
3- Le dipôle LC

$$\boxed{LC\omega^2 = 1}$$

$$u(t) = -LC\,\frac{d^2u}{dt^2}$$

$$i(t) = -LC\,\frac{d^2i}{dt^2}$$

3- Le dipôle LC: Oscillations libres



à l'instant t=0 le condensateur est chargé $u(0)=U_0$. on ferme l'interrupteur k et le courant commence à passer.

Analyse du circuit et mise en équation: $u = + L\, di/dt$

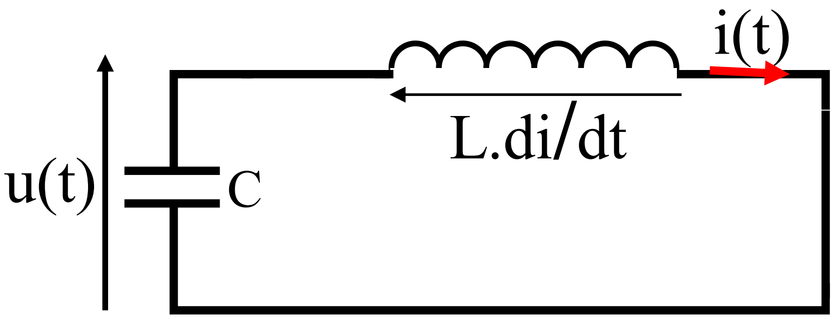
$q=C.u$ Le condensateur se décharge $i = -dq/dt$

$i = -C\, du/dt$ donc $$u(t) = -LC\frac{d^2u}{dt^2}$$

De même en éliminant u on obtient $$i(t) = -LC\frac{d^2i}{dt^2}$$

*3

3- Le dipôle LC: Oscillations libres



Solution de cette équation différentielle:

$$u(t) = -LC\frac{d^2u}{dt^2}$$

qui s'écrit aussi u = –LC u''

On vérifie que u = A cos (ωt + φ) est solution de cette équation

du/dt = u' = – Aω sin (ωt + φ) ; d^2u/dt^2 = u''= – $A\omega^2$ cos (ωt + φ) ;

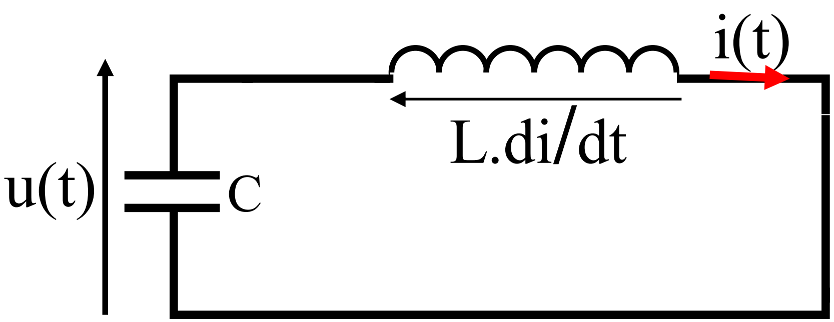
on reporte u et u'' dans l'équation différentielle ce qui donne: **$LC\omega^2 = 1$**

U est solution de cette équation pour tout A et φ.

La solution générale de cette équation peut s'écrire :

$$u(t) = A.\cos(\omega t + \varphi) \qquad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

3- Le dipôle LC: Oscillations libres



Les **conditions initiales**
à l'instant t=0 le condensateur est chargé $u(0)=U_0$. et $i(0)=0$

Déphasage: i est en **retard** de $\pi/2$ par rapport u

$$u(t) = A.\cos(\omega t + \varphi)$$

$i(t) = -C\, du/dt = + C\omega A \sin(\omega t + \varphi)$

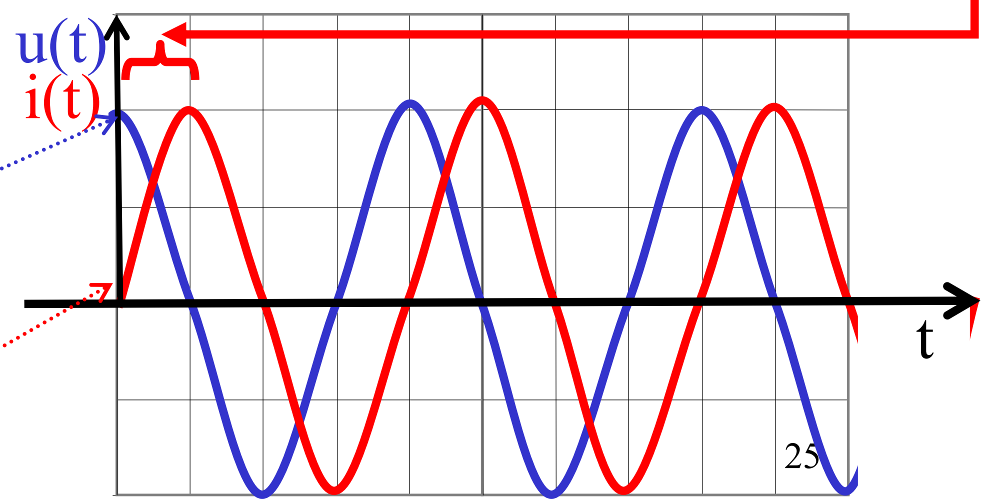
pour $t=0$ $i(0)=0$ donc $\sin(\varphi) = 0$ donc $\varphi = 0$ $(+ k\pi)$

$$u(t) = A.\cos(\omega t)$$

à l'instant $t = 0$ $u(0) = U_0$

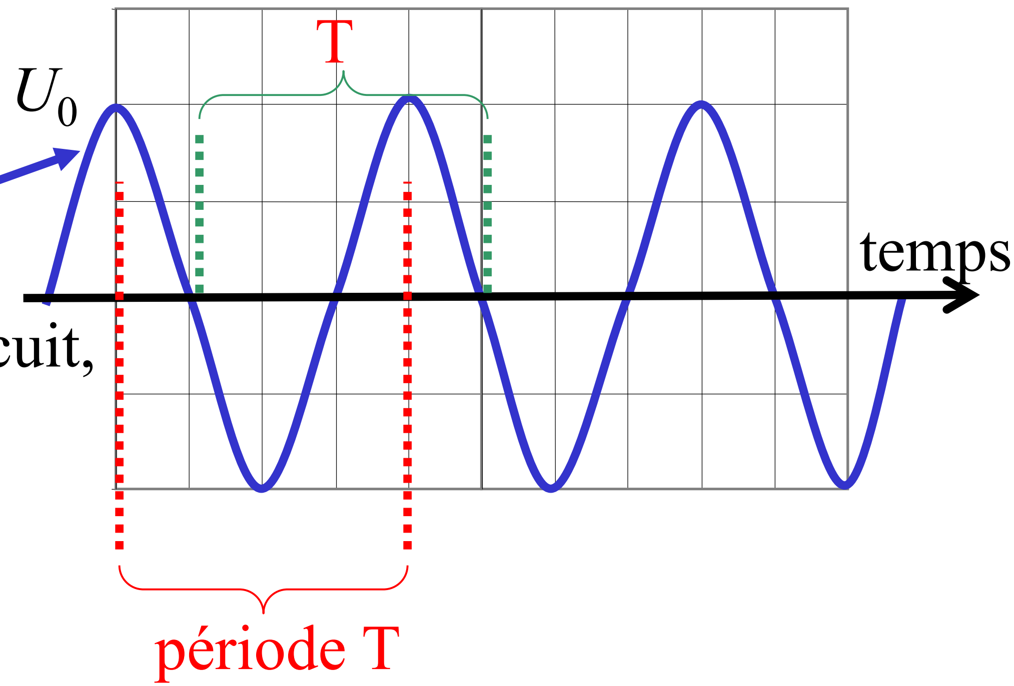
$$u(t) = U_0.\cos(\omega t)$$

$$i(t) = \sqrt{\frac{C}{L}}U_0.\sin(\omega t)$$



3- Le dipôle LC: Oscillations libres

$$u(t) = U_0.\cos(\omega t)$$



ω est la pulsation propre du circuit, (par la suite nous l'écrirons ω_0)

<u>L'amplitude</u> U_0 (en volt)

<u>La période</u> T (en seconde)

<u>La fréquence f</u> = 1/T (en Hertz Hz = s^{-1})

<u>La pulsation</u> ω = 2πf (en radian par seconde = $rad.s^{-1}$)

$$u(t) = U_0.\cos(\omega t) = U_0.\cos(2\pi f.t) = U_0.\cos(2\pi \frac{t}{T})$$

$$\boldsymbol{\omega = 2\pi f = 2\pi/T}$$

3- Le dipôle LC: aspect énergétique

Energie contenue dans le condensateur à l'instant t :

$$u(t) = U_0.\cos(\omega t)$$

$$W_C = \frac{1}{2}C.u^2 = \frac{1}{2}C.U_0^2.\cos^2(\omega t)$$

Energie contenue dans l'inductance à l'instant t :

$$i(t) = \sqrt{\frac{C}{L}}U_0.\sin(\omega t)$$

$$W_L = \frac{1}{2}L.i^2 = \frac{1}{2}C.U_0^2.\sin^2(\omega t)$$

Energie totale:

$$\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t) = 1$$

$$W = W_L + W_C = \frac{1}{2}C.U_0^2$$

ne dépend pas de t

Analogie électrique-mécanique

l'énergie s'échange constamment entre L et C

W_C analogue électrique de l'énergie potentielle (U=diff.de potentiel)

W_L analogue électrique de l'énergie cinétique (i=N.q.v analogue à vitesse)

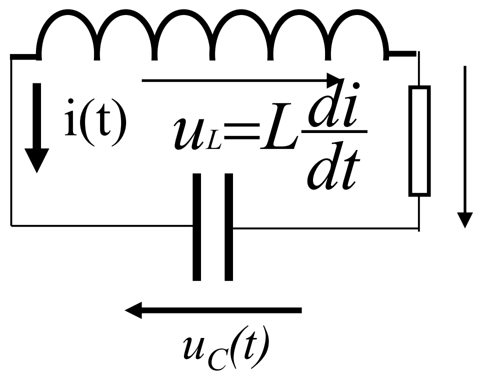
$(1/2)Li^2$ analogue à $(1/2)mv^2$

Un circuit oscillant LC et l'analogue électrique d'un pendule mécanique

4- Le dipôle RLC

4- Le dipôle RLC: Oscillations amorties

Analyse du circuit



$$u_R = Ri \qquad i(t) = C\frac{du_C}{dt}$$

$$u_R + u_L + u_C = 0$$

mise en équation $$u_C + LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + RC\frac{du_C}{dt} = 0$$

on a vu que $LC\omega^2 = 1$ $\Rightarrow$ $$\frac{1}{\omega^2}\frac{d^2u_C}{dt^2} + RC\frac{du_C}{dt} + u_C = 0$$

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + RC\omega^2 . \frac{du_C}{dt} + \omega^2 u_C = 0$$

on pose $RC\omega^2 = 2\lambda$

$$\boxed{\frac{d^2u_C}{dt^2} + 2\lambda\frac{du_C}{dt} + \omega^2 u_C = 0 \qquad \text{forme "canonique"}}$$

4- Le dipôle RLC: Oscillations amorties

Solutions de cette équation

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2\lambda\frac{du}{dt} + \omega_0^2 . u(t) = 0$$

r^2 r 1

équation caractéristique

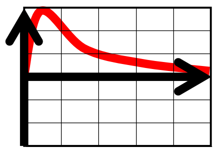
$$r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0 \qquad \Delta = 4\left(\lambda^2 - \omega_0^2\right)$$

$\Delta > 0$	régime apériodique
$\Delta = 0$	régime critique
$\Delta < 0$	régime pseudo-périodique = oscillations amorties

4- Le dipôle RLC: Oscillations amorties

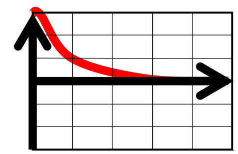
$\Delta > 0$ Régime apériodique

$$u = e^{-\lambda t}\left(Ae^{-(\sqrt{\lambda^2-\omega_0^{\,2}}).t} + Be^{+(\sqrt{\lambda^2-\omega_0^{\,2}}).t}\right)$$



$\Delta = 0$ Régime critique

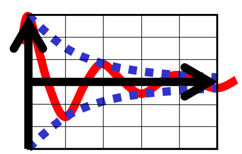
$$u = e^{-\lambda t}(At + B)$$



$\Delta < 0$ Régime pseudo-périodique = oscillations amorties

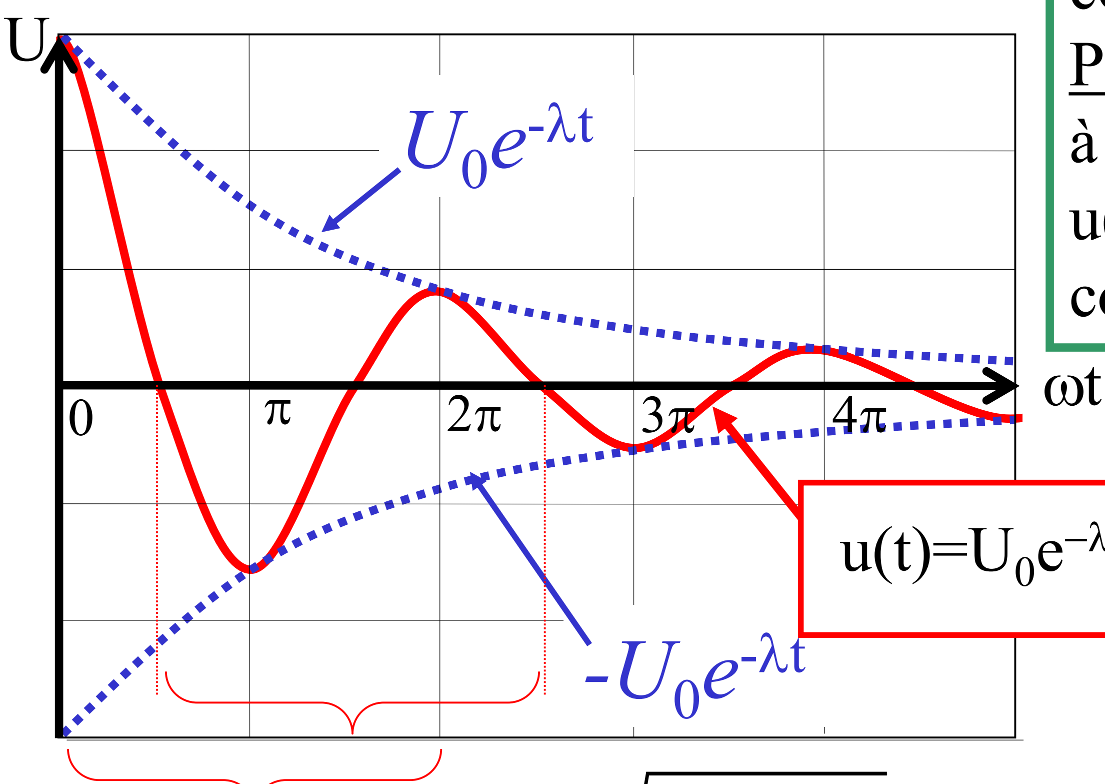
$$u = e^{-\lambda t}[A\cos(\sqrt{\omega_0^{\,2} - \lambda^2}\;.t) + B\sin(\sqrt{\omega_0^{\,2} - \lambda^2}\;.t)]$$

$$ou\quad u = e^{-\lambda t}.C\cos(\sqrt{\omega_0^{\,2} - \lambda^2}\;.t + \varphi)$$



4- Le dipôle RLC: Oscillations amorties

$$u = e^{-\lambda t}\, C \cos[(\sqrt{\omega_0^{\,2} - \lambda^2})t + \varphi\,]$$



pseudo-période

<u>Les conditions initiales</u> permettent de déterminer les constantes C et φ.

<u>Par exemple</u>:

à l'instant t=0, C est chargé $u(0) = U_0$. on ferme k et le courant commence à passer.

Donc $C = U_0$ et $\varphi = 0$

$$u(t) = U_0 e^{-\lambda t} \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}\; t\right)$$

$\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$ est la pseudo-pulsation.

λ est le coefficient d'amortissement.