Chap 2 : Espaces Vectoriels

I) Généralités

1) Définition

Soit E un ensemble non vide muni de deux lois $+$ et $\cdot$

On dit $(E, +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou une $\mathbb{R}$-espace vectoriel si :

1) $(E, +)$ est un groupe abélien c'est à dire :

a) l'addition est commutative

$\forall U, V \in E$, $U + V = V + U$

b) l'addition est associative

$\forall U, V, W \in E$ $U + (V + W) = (U + V) + W$

c) Il existe un élément neutre par l'addition

$\exists 0_E \in E$, $\forall U \in E$, $U + 0_E = 0_E + U = U$

d) $\forall U \in E$, $U - U = 0_E$ ~~$\neq U = U$~~

2) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall U, V \in E$, $\alpha(U + V) = \alpha U + \alpha V$

3) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $(\alpha + \beta)U = \alpha U + \beta U$

4) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha(\beta)U = (\alpha(\beta))U$

5) $\forall U \in E$, $1 . U = U . 1 = U$

Exemple

1) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ et $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$

2) $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) / x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}\}$

$(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ est un espace vectoriel

3) $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) / x, y$ et $z \in \mathbb{R}\}$

$(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel, ~~alors les element de E sont des vecteurs et les element de $\mathbb{R}$ des scalaires~~

Remarque

Si $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel, alors les element de E sont des vecteurs et les elements de $\mathbb{R}$ sont des scalaires

3) Notation

Un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ est souvent noté sur $\mathbb{R}$-e.V

4) Sous espace vectoriel

Soient $(E, +, .)$ un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel et F un sous ensemble de E.

On dit que F est un sous ~~ensemble~~ espace vectoriel de E si :

i) $F \neq \emptyset$

ii) $\forall U, V \in F, (U,V) \in F$ c'est à dire F est stable par addition

iii) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall U \in F$ $\alpha U \in F$ c'àd F est stable par la multiplication externe

Exple

Soit $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x + 2y = 0\}$.

- Non vide
- stable par addition
- stable par multiplication externe

Mq F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$

$(0,0) \in F$ car $0 + 2(0) = 0$

Donc $F \neq \emptyset$

Soient $U = (x,y)$ et $V = (x', y') \in F$

$U \in F \Rightarrow x + 2y = 0$

$V \in F \Rightarrow x' + 2y' = 0$

$U + V = (x+x', y+y')$

$(x+x') + 2(y+y') = (x + 2y) + (x' + 2y') = 0 + 0 = 0$

donc $U + V \in F$

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $U = (x,y) \in F$

$U \in F \Rightarrow x + 2y = 0$

$\alpha U = \alpha(x,y) = (\alpha x, \alpha y)$

$\alpha x + 2\alpha y = \alpha(x + 2y) = \alpha(0) = 0$

donc $\alpha U \in F$

F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$

Exple 2

Soit $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x + 2y - 3z = 0\}$

Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

$(0,0,0) \in G$ car $0 + 2\times0 - 3\times0 = 0$ donc $F \neq \emptyset$

Soit $U = (x, y, z)$ et $V = (x', y', z')$

$U \in G$ dans $x + 2y - 3z = 0$

$V \in G$ dans $x' + 2y' - 3z' = 0$

$U + V = (x + x') + 2(y + y') - 3(z + z') = (x + 2y - 3z) + (x' + 2y' - 3z') = 0 + 0 = 0$

donc $U + V \in G$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^3$ et $U = (x, y, z) \in G$.

$U \in F \Rightarrow x + 2y' - 3z = 0$

$\alpha U = \alpha(x, y, z) = \alpha(x, \alpha y, \alpha z)$

$\alpha x + 2\alpha y - 3\alpha z = \alpha(x + 2y - 3z) = \alpha(0) = 0$

Donc $\alpha U \in G$

F est un sous espace vectorel de $\mathbb{R}^3$

Exple 3

Soit $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + 2y + z = 0 \text{ et } y - 4t = 0\}$

Mq H est un SEV de $\mathbb{R}^4$

$(0,0,0,0) \in H$ car $0 + 2\cdot 0 + 0 = 0$ $\quad 0 - 4 \times 0 = 0$ donc H est non vide

Soit $U = (x, y, z, t)$ et $V(x', y', z', t')$.

$U \in H$ $x + 2y + z = 0$ $\quad y - 4t = 0$

$V \in H$ $x' + 2y' + z' = 0$ $\quad y' - 4t' = 0$

$U + V = (x + x') + 2(y + y') + z + z' = 0$ et $y + y' - 4(t + t') = 0$

$= x + 2y + z + x' + 2y' + z' = 0$ et $y - 4t + y' - 4t' = 0$

donc $U + V \in H$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^4$ et $U = (x, y, z, t) \in H$

$U \in H \Rightarrow \alpha U = \alpha(x, y, z, t) = \alpha(0) = 0$

donc H est un SEV

Exple 3

Mq que les Ensemble suit ne sont pas des SEV de $\mathbb{R}^3$

1) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / xy \geq 0\}$

2) $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 2\}$

3) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / y = x^2\}$

① $x = y - 3t$

② $\Rightarrow y - 3t - 2z + t = 0 \Rightarrow y = 2z + 2t$

Donc $x = 2z + 2t - 3t = 2z - t$

$x = 2z - t$ et $y = 2z + 2t$

$U = (x, y, z, t) = (2z - t, 2z + 2t, z, t)$

$= (2z, 2z, z, 0) + (-t, +2t, 0, t)$

$= z(2, 2, 1, 0) + t(-1, 2, 0, 1)$

posons $U_1 = (2, 2, 1, 0)$ et $U_2 = (-1, 2, 0, 1)$

$U = zU_1 + tU_2$

D'où $G = \text{lin}\{U_1, U_2\}$

Donc G est un SEV de $\mathbb{R}^4$

Exemple

Soit $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = z + t = x + z = x + t = y + z\}$

Mq H est un SEV de $\mathbb{R}^4$

$(0, 0, 0, 0) \in H$ car $0+0 = 0+0 = 0+0 = 0+0 = 0+0 = 0$

Soit $U = (x, y, z, t)$

$x + y = x + z \Rightarrow y = z$

$x + y = x + t \Rightarrow y = t$.

$z + t = x + z \Rightarrow x = t$

Donc $x = y = z = t$

Donc $U = (x, x, x, x) = x(1, 1, 1, 1)$

posons $U_1 = (1, 1, 1, 1) \Rightarrow U = xU_1$

Donc $H = \text{lin}\{U_1\}$ D'où H est un SEV de $\mathbb{R}^4$

III Bases et dimension d'un espace vectoriel

1) Dépendance linéaire

Soit $S = \{U_1, U_2, \dots, U_n\}$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E. On dit que S est libre ou que les vecteurs $U_1, U_2, \dots, U_n$ sont linéairement indépendants si

$\forall (\alpha_i)_{1 \le i \le n} \in \mathbb{R}$, $\alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2 + \dots + \alpha_n U_n = 0_E$

i) Pour montrer qu'une partie A d'un $\mathbb{R}$ espace vectoriel E est un SEV de E, il suffit de montrer que A est non vide et que tout élément de A est engendré par un certain nombre de vecteurs de E.

Exemple

Soit $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x - 2y + 3z = 0\}$

Mq F est un SEV de $\mathbb{R}^3$

$(0,0,0) \in F$ car $0 - 2(0) + 3(0) = 0$ Donc $F \neq \emptyset$

Soit $U = (x,y,z) \in F \Rightarrow x - 2y + 3z = 0$

$\Rightarrow x = 2y - 3z$

$U = (2y - 3z, y, z) = (2y, y, 0) + (-3z, 0, z)$

$= y(2,1,0) + z(-3, 0, 1)$

posons $U_1 = (2,1,0)$ et $U_2 = (-3,0,1)$

Donc $U = yU_1 + zU_2$

U s'écrit comme combinaison linéaire de U_1 et U_2, Donc F est un SEV, $\mathbb{R}^3$

Exemple 2

Soit $G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / x - y + 3t = 0$ et $x - 2z + t = 0\}$

Mq G est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$

$x = y - 3t$ et $t = 2z - x$

$G = (y - 3t, y, z, 2z - x) = (y, y, 0, 0) + (-3t, 0, 0, 0) + (0, 0, z, 2z)$

$= y(1,1,0,0) + t(-3,0,0,0) + z(0,0,1,2)$

Posons $G_1 = (1,1,0,0)$, $G_2 = (-3,0,0,0)$, $G_3 = (0,0,1,2)$

$G = yG_1 + tG_2 + zG_3$

Ma résolution est faux

Correction

$(0,0,0,0) \in G$, car $0 - 0 + 3(0) = 0$ et $0 - 2\times 0 + 0 = 0$ Donc $G \neq \emptyset$

Soit $U = (x,y,z,t) \in G \Rightarrow \begin{cases} x - y + 3t = 0 & (1) \\ x - 2z + t = 0 & (2) \end{cases}$

Variable effectif
Variable formelle

Operation sur les sous espaces vectoriels

1) Intersection Soit F et G 2 sous EV de E alors $F \cap G$ est un SEV de E

2) Union

Soient F et G deux sous espaces vectoriels de E. $F \cup G$ n'est pas nécessairement un sous espace vectoriel de E

Contreexemple :

Soit $\mathbb{R}^2$ un $\mathbb{R}$- espace vectoriel

$F = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ est un sous espaces vectoriel de $\mathbb{R}^2$

$G = \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$

$U = (1,0) \in F \Longleftrightarrow U = (1,0) \in F \cup G$

$V = (0,1) \in G \Rightarrow V = (0,1) \in F \cup G$

$U+V = (1,1) \notin F$ et $U+V \notin G$ donc $U+V \notin F \cup G$

Donc $F \cup G$ n'est pas un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$

3) Sous espace vectoriel engendré

a) Définition

Soit $U_1, U_2, \dots U_n$ des vecteurs d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E, on appelle combinaison linéaire de $U_1, U_2 \dots, U_n$ tout élément de la forme $\alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2 + \dots + \alpha_n U_n$

Exemple

Soient $U_1 = (1,2,-1)$, $U_2 = (3,4,2)$

Une combinaison linéaire de U_1 et U_2 s'écrit

$\alpha U_1 + \beta U_2$ avec α et $\beta \in \mathbb{R}$

b) Proposition

Soit $S = \{U_1, U_2, \dots, U_n\}$ de Vecteurs d'un $\mathbb{R}$- espace vectoriel E

L'ensemble des combinaisons linéaires des elements de S est un sous-espace de E appelé SEV engendré par S. On le note $\text{Lin}(S)$ ou $\text{Vect}(S)$

c) ~~si A~~ Remarque

i) Si $A = \text{Lin}(S)$, on dit que A est sous espace vectoriel engendré par S. A est appelé le système générateur de S implique $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$. On dit que S est lié ou que les vecteurs $U_1, U_2, \dots, U_n$ sont linéairement dependant s'ils existent des reels $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ non tous nul tlq $\alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2 + \dots + \alpha_n U_n = 0_E$

Emple 1

Soit $S = \{U_1, U_2\}$ avec $U_1 = (1, 1)$ et $\{U_2\} = (1, 2)$

Montrer que S est libre

Soient a et b deux reels tels que

$aU_1 + bU_2 = 0_{\mathbb{R}^2}$

$a(1,1) + b(1,2) = (0,0)$

$(a+b, a+2b) = (0,0)$

$$\begin{cases} a+b=0 & (1) \\ a+2b=0 & (2) \end{cases}$$

$(1) - (2) = -b = 0$

$\Rightarrow b = 0$

$\Rightarrow a = 0$

$a = b = 0 \Rightarrow$ S est un système libre de $\mathbb{R}^2$

Exemple 2

Soit $S = \{V_1, V_2, V_3\}$ avec $V_1 = (1,2,0)$, $V_2 = (-2,-1,1)$ et $V_3 = (0,3,1)$

Mq S est un système lié

Soient a, b, c trois reels telsque

$aV_1 + bV_2 + cV_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$

$a(1,2,0) + b(-2,-1,1) + c(0,3,1) = (0,0,0)$

$$\begin{cases} a-2b=0 & (1) \\ 2a-b+3c=0 & (2) \\ b+c=0 & (3) \end{cases}$$

$(1) \to a = 2b$

$b = -c$

$4b - b - 3b = 0$

$4b - 4b = 0$

b n'est pas forcément egal à zero

2) Proposition

Soit E un $\mathbb{R}$-esp. Vect. Alors les assertions suivantes sont vérifiées

i) Toutes familles de vecteurs contenant une sous familles lié est lié

ii) Toute famille de vecteurs contenant le vecteur nul est lié

iii) Tout sous-ensemble d'une famille libre est libre

3) Base

Soit un $\mathbb{R}$ esp-vectori et $S = \{U_1, U_2, \dots U_n\}$ une famille de vecteurs de E.

On dit que S est une base de E ssi

S est libre et generalement de E

4) Remarque

Tout système ~~vectoriel~~ libre de n Vect de $\mathbb{R}^n$ est une base $\mathbb{R}^n$

5) Base Canonique

i) La base canonique $\mathbb{R}^2$ est constituee des vecteurs $C_1 = (1, 0)$, $C_2(0, 1)$ ~~et $C_3(0,0,1)$~~

ii) La base canonique de $\mathbb{R}^3$ est constitué de vecteurs $C_1 = (1, 0, 0)$, $C_2 = (0, 1, 0)$ et $C_3 = (0, 0, 1)$

iii) " " $\mathbb{R}^4$ $C_1 = (1, 0, 0, 0) \dots\dots C_4 = (0, 0, 0, 1)$

Rmq

Un espace vectoriel admet pleurs bases cependant, toutes les base ont le même nombre d'éléments (n vecteurs) Ex :

Soit $B = \{U_1, U_2, U_3\}$ avec $U_1 = (-1, -1, 1)$, $U_2 = (1, 2, 0)$ et $U_3 = (0, 1, 2)$

1) Mq B est une base de $\mathbb{R}^3$

2) Soit $V = (3, 4, -5)$

Ecris les composantes de vecteurs de base B

Soient a, b et c des reels / $aU_1 + bU_2 + cU_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$

$a(-1, -1, 1) + b(1, 2, 0) + c(0, 1, 2) = (0, 0, 0)$

$$\begin{cases} -a + b = 0 & (1) \\ -a + 2b + c = 0 & (2) \\ a + 2c = 0 & (3) \end{cases}$$