Chap 3 Matrices

I Generalités

1) Définition

On appelle matrice à coefficient réelle, tout tableau ayant m lignes et n colonnes de la forme :

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Le réel a_{ij} est l'élément qui se trouve à la ligne i et à la colonne j
L'ensemble des matrices à m lignes et n colonnes est noté $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$

$$\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$$

Exemple

1) $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 3 & 2 & -7 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix}$, A est une matrice à 3 lignes et 3 colonnes

$a_{11} = 2$, $a_{12} = -4$, $a_{13} = 5$
$a_{21} = 3$, $a_{22} = 2$, $a_{23} = -7$
$a_{31} = 4$, $a_{32} = 6$, $a_{33} = 2$

2) $B = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 9 & 7 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ B est une matrice à 2 colonnes, 3 lignes

$C = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$ C est une matrice à 1 colonne et 4 lignes

$D = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 9 & -4 \end{bmatrix}$: D est une matrice à 4 colonnes et 1 ligne

2) Matrice nulle

Exemple

$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ est une matrice à 2 lignes et 2 colonnes

3) Matrice colonne

Matrice formée d'une seul colonne

Exemple

$B = \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ 5 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$

3) Matrice ligne

Matrice formee d'une seule ligne

Exemple $C = [3, 4, 7, -4]$

5) Matrice carré

Matrice dont le nombre de lignes est égal au nombre de colonnes, l'ensemble des matrice carrés à n lignes et n colonnes est notee $M_n(\mathbb{R})$

$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 7 & 6 \\ 9 & -2 & 9 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$ est une une matrice ~~d'ordre~~ 4 carré d'ordre

$C = [-3]$ est une matrice carré d'ordre 1

$M_n(\mathbb{R})$ est une matrice ~~d'ordre n~~ carré d'ordre n

Soit A une matrice carré d'ordre n, tous les éléments au dessus de la diagonale définissent la sur diagonale

6) Matrice triangulaire

Soit A

Tous les éléments en dessous de la diagonale définissent la sous diagonale

On dit que A est une matrice triangulaire superieur si tous les élement de la sous diagonale sont nuls

On dit que A est une matrice triangulaire inférieur si tous les éléments de la sur-diagonale sont nul

Exemple

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Matrice triangulaire supérieur — Matrice triangulaire inférieur

7) Matrice diagonale

Matrice ~~...~~ carré dont touts les termes qui ne sont pas sur la diagonales sont nul

Exemple :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

sont des matrices diagonales

8) Matrice unité

Une matrice unité est une matrices diagonale dont tous les termes sont égaux à 1.
L'ensemble des matrice unités d'ordre n est noté I_n

$$I_1 = [1], \quad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

9) transposé d'une matrice

La transposé de la matrice A noté ^tA est la matrice dont les lignes sont les colonnes de A

Exemple

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -7 \\ 5 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad {}^tA = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ -7 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

II Opération d'une matrice

1) Égalité ~~d'une~~

Soient $A = [a_{ij}]$ $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ et $B = [b_{ij}]$ $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$

$$A = B \text{ ssi } a_{ij} = b_{ij}$$

Exemple

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & -6 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

$A = B$ ssi $b_{11} = 1$ $b_{12} = 3$ $b_{13} = 3$

$b_{21} = 0$ $b_{22} = 4$ $b_{23} = -6$

$b_{31} = 2$ $b_{32} = -3$ $b_{33} = 1$

2) Somme et multiplication externe de deux matrices

Soient $A = [a_{ij}]$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ et $B = [b_{ij}]$ $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$

deux matrices à m lignes et n colonnes

~~* A + B = [aij]~~ * $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$ $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$

* $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha A = [\alpha a_{ij}]$ $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$

Exemple

$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

Calculer $A+B$, $A-B$, $3B$, $2A-4B$

$A+B = \begin{bmatrix} 10 & 11 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$, $A-B = \begin{bmatrix} -4 & -7 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$, $3B \begin{bmatrix} 21 & 27 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$

$2A-4B = \begin{bmatrix} -22 & -32 \\ -16 & 6 \end{bmatrix}$

5) Produit matriciel

Soient $A = [a_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ et $B = [b_{ij}]_{\substack{1 \leq j \leq p \\ 1 \leq k \leq q}}$ $\substack{1 \leq j \leq p \\ 1 \leq k \leq q}$

On défini le produit $C = AB$ par

$C = [c_{ik}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq k \leq q}}$ avec

$$C_{ik} = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} b_{jk}$$

Exemple

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$

Calcul AB et BA

posons $C = AB$

taille $(2,2)$ x taille $(2,2)$ = taille $(2,2)$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$$

$C_{11} = 1 \times 5 + 2 \times 2 = 9$

$C_{12} = 1 \times 3 + 2 \times 6 = 11$

$C_{21} = -3 \times 5 + 4 \times 2 = -7$

$C_{22} = -3 \times 3 + 4 \times 6 = 15$

$$\Rightarrow \quad C = \begin{bmatrix} 9 & 11 \\ -7 & 15 \end{bmatrix}$$

$$C' = BA = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$C' = \begin{bmatrix} -4 & 22 \\ -16 & 28 \end{bmatrix}$$

On voit que $AB \neq BA$

Exemple 2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{et } B = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 16 & 34 & 1 \\ 15 & 10 & 7 \end{bmatrix}$$

4) Quelques propriétés du produit matriciel

Soient A, B, C trois matrices carrées d'ordre n

P_1 :

En général, $AB \neq BA$, on dit que le produit matriciel n'est pas commutatif

P_2 :

$A(B+C) = AB + AC$

$(B+C)A = BA + CA$

P_3 $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$

si $BA = AB$, alors $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

P_4 si $AB = BA$ alors $(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k A^k B^{n-k}$

5) Inverse d'une matrice par la mé

On dit qu'une matrice carré A est inversible si il existe une matrice carreé B tel que $AB = BA = I_n$

L'inverse de la matrice A est notée A^{-1}

Exemple :

Déterminer l'inverse de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc|l}
1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & L_1 \\
2 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & L_2 \\
1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & L_3 \\
\hline
1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & L_1' = L_1 \\
0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0 & L_2' = L_2 - 2L_1 \\
0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & L_3' = L_3 - L_1 \\
\hline
1 & 0 & 3 & 3 & -1 & 0 & L_1'' = L_1' - L_2' \\
0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0 & L_2'' = L_2' \\
0 & 0 & 3 & -5 & 2 & 1 & L_3'' = L_3' + 2L_2' \\
\hline
1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & L_1''' = L_1'' + L_3'' \\
0 & -3 & 0 & 4 & -1 & -2 & L_2''' = 3L_2'' - 2L_3'' \\
0 & 0 & -3 & -5 & 2 & 1 & L_3''' = L_3'' \\
\hline
1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & L_1^4 = L_1''' \\
0 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & L_2^4 = -\frac{1}{3} L_2''' \\
0 & 0 & 1 & \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & L_3^4 = -\frac{1}{3} L_3'''
\end{array}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -6 & 3 & 3 \\ -4 & 1 & 2 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Expl 1

Determiner l'inverse

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc|l} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & L_1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & L_2 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 & L_3 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & L_1' = L_1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & L_2' = L_2 \\ 0 & -4 & -15 & 5 & 0 & 1 & L_3' = L_3 - 5L_1 \\ \hline 1 & 0 & -5 & 1 & -2 & 0 & L_1'' = L_1' - 2L_2' \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & L_2'' = L_2' \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 1 & L_3'' = L_3' + 4L_2' \\ \hline 1 & 0 & 0 & -24 & +18 & +5 & L_1''' = L_1'' + 5L_3'' \\ 0 & 1 & 0 & 20 & -15 & -4 & L_2''' = 4L_3'' + L_2'' \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 1 & L_3''' = L_3'' \\ \hline 1 & 0 & 0 & -24 & -22 & -5 & \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 17 & 4 & \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -4 & -1 & L_3^4 = -L_3''' \end{array}$$

$$L_2''' = L_2'' - 4L_3''$$

$$B^{-1} = \begin{vmatrix} -24 & -22 & -5 \\ 5 & 17 & 4 \\ -5 & -4 & -1 \end{vmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

7) Quelques propriétés du déterminant d'ordre n

P_1

Une matrice comportant une ligne ou une colonne de 0 a un déterminant nul

Exemple

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

P_2 Si une ligne ou une colonne d'une matrice est multipliée par une constante k alors le déterminant est également multiplié par k

Exemple

$$\begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 7 & 4 & 5 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 7 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & 2b & 3c \\ 2a & b & 2c \\ 3a & 3b & c \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

P_3 : La permutation d'1 ligne ou d'1 colonne change uniquement le signe du déterminant

Exemple

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & 6 \\ 4 & 2 & 8 \\ 5 & 9 & 6 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 4 & 2 & 8 \\ 3 & 7 & 6 \\ 5 & 9 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & 6 \\ 4 & 2 & 8 \\ 5 & 9 & 6 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 6 & 7 & 3 \\ 8 & 2 & 4 \\ 6 & 9 & 5 \end{vmatrix}$$

P_5 Une matrice qui a deux lignes ou deux colonne identiques a un déterminant nul

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 7 & 2 & 9 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} a & x & a \\ b & y & b \\ c & z & c \end{vmatrix} = 0$$

P_5 $\det(A) = \det {}^t(A)$

Exemple

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 7 & 8 \\ 9 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 9 \\ 4 & 7 & 3 \\ 5 & 8 & 2 \end{vmatrix}$$

P_6 : $\det(A \times B) = \det(A) \times \det(B)$

cependant $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$

P_7 Le determinant d'une matrice diagonale est égal au produit des éléments de sa diagonale

Le determinant d'une matrice triangulaire est égal au produit des éléments de sa diagonal

Exemple

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & -z \end{vmatrix} = -xyz \qquad \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 3(-5)(6) = -90$$

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ \cancel{y} & y & 0 \\ x & y & z \end{vmatrix} = xyz$$

P_8 Le determinant d'une matrice ne change pas si on remplace la ligne L_i par la ligne $L_i - \alpha L_j$, $\alpha \in \mathbb{R}$, la colonne C_i par la colonne $C_i - \alpha C_j$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Exemple 1

soit $B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 & -2 \\ -2 & -3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ -1 & -6 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ calculons le determinant

Chap 1 Déterminants et systèmes linéaires

I Déterminants

1) Déterminants d'ordre 2

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2

Le déterminants de A, noté $\det(A)$, est le réel $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{2} \\ 5 & -6\sqrt{2} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -4 \\ 7 & 2\sqrt{3} \end{pmatrix}$

$\det(A) = 3(-6\sqrt{2}) - 5(\sqrt{2}) = -23\sqrt{2}$

$\det(B) = \sqrt{3}(2\sqrt{3}) - 7(-4) = +34$

2) Déterminant d'ordre 3 (méthode de Sarrus)

Soit $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ est une matrice carrée d'ordre 3

$$\det(A) = \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

$$= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12})$$

Exemple

$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -5 & 6 & -3 \\ 7 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 6 \\ 7 & -3 & 2 \\ 8 & -5 & -7 \end{bmatrix}$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -5 & 6 & -3 \\ 7 & -1 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & 4 \\ -5 & 6 \\ 7 & -1 \end{matrix}$$

$$\det(B) = \begin{vmatrix} -4 & -2 & 6 \\ 7 & -3 & 2 \\ 8 & -5 & -7 \end{vmatrix} \begin{matrix} -4 & -2 \\ 7 & -3 \\ 8 & -5 \end{matrix}$$

$$\det(A) = 3\times 6(-2) + 4(-3)\times 7 + 2(-5)(-1) - \left(7\times 6\times 2 + -1(-3)(3) - 2(-5)(4)\right) = -243$$

$$\det(B) = -4(-3)(-7) - 2(2)(8) + 6\times 7(-5) - \left(8(-3)(6) - 5(2)(-4) - 7(7)(-2)\right) = -326$$

3) Mineurs et Cofacteurs

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}}$ une matrice carré d'ordre n.

* Le mineurs de l'élément a_{ij} est le déterminant de la matrice A_{ij} obtenu en supprimant la ligne i et la colone j

* Le cofacteur de l'élément a_{ij} est le réel $C_{ij} = (-1)^{i+j}.\det(A_{ij})$

Exemple

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -2 & 7 & -3 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix}$$

Le mineur de 3 est : $42+6 = 48$

le cofacteur de 3 est : $(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 48$

3 se situe l_1 et C_1 $\underbrace{\quad}_{1+1}$

Le mineur de 4 = -9

Le cofacteur de 4 est ; +9

Le mineur de -3 = 2

Le cofacteur de -3 = -2

Le mineur de 2 est : 1

Le cofacteur de 2 est : -1

Le cofacteur de 6 est : 29

3) ~~Mineurs et cofacteurs~~

4 Comatrice

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ une matrice carrée d'ordre n. La comatrice de A, noté $com(A)$, est la matrice dont les coefficients sont les facteurs de A

$$com(A) = (C_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \quad \text{avec} \quad C_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{\overline{ij}})$$

Exemple

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -2 & 7 & -3 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix} \quad \text{posons} \quad com(A) = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{vmatrix}$$

$C_{11} = 48$

$C_{12} = 9$

$C_{13} = 11$

$C_{21} = -14$

$C_{22} = 13$

$C_{23} = -2$

$C_{31} = 47$

$C_{32} = 1$

$C_{33} = 29$

$$com(A) \begin{pmatrix} 48 & 9 & 11 \\ -14 & 13 & -2 \\ -47 & 1 & 29 \end{pmatrix}$$

5) Inverse d'une matrice par la méthode des cofacteurs

a) Théorème 1

Soit A une matrice carrée d'ordre n. A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$

b) théorème 2

Soit A une matrice carrée d'ordre n si $\det(A) \neq 0$ alors $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \times {}^t com(A)$

Exemple

soit $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$

1) calculons com(A) et com(B)

2) Deduisons A^{-1} et B^{-1}

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$com(A) = \begin{bmatrix} -6 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & -2 \\ 3 & +2 & -1 \end{bmatrix} \qquad com(B) = \begin{bmatrix} -24 & +20 & -5 \\ 18 & -15 & +4 \\ 5 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$^{t}com(A) = \begin{bmatrix} -6 & 3 & 3 \\ -4 & 1 & 2 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \qquad ^{t}com(B) = \begin{bmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{matrix} \qquad det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 5 & 6 \end{matrix}$$

$det(A) = 1 \times (-3)(2) + 2 + 3 + 4 = 3$

$det(B) = 40 - 15 - 24 = 1$

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -6 & 3 & 3 \\ -4 & 1 & 2 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -4/3 & 1/3 & 2/3 \\ 5/3 & -2/3 & -1/3 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

4) Développement du déterminant

Soit $A = [a_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ une matrice carrée

* Le développement du déterminant par rapport à la ligne i est donné par

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

où A_{ij} est la matrice obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j

* Le développement du déterminant par rapport à la colonne j est donné par

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

Exemple

soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

1) Calcul du $\det(A)$ suivant la ligne 1
2) Calcul du $\det(B)$ suivant la colonne 1

1) $(-1)^2 \times 1 \times \begin{vmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{matrix} = 40 + 30 = 70$

~~$\det(A) = 7$~~

$-3 \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 4 & 0 \\ 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{matrix} = 60 \times -3 = -180$

$0 \begin{vmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 4 & 5 \\ 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{matrix} = 0 \quad -2 \begin{vmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 4 & 5 \\ 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{matrix} = -20 \times 2 = +40$

$\det(A) = -70$

II Système linéaire

Définition

On appelle système linéaire de n équation à p inconnues
Tout système de la forme

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

Exemple

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 4x_1 + 7x_2 + 9x_3 = 0 \end{cases}$$ est un système de 3 équations à 3 inconnues

2) Représentation matricielle

La matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ est appelée matrice du système (S)

La matrice colonne $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ est appelée matrice du second membre

en posant $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix}$ Le système (S) peut se mettre sous la forme

$AX = B$

Exemple

Le système (S) : $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x + z = -4 \\ y + 3z = 2 \end{cases}$ posons $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$ et $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ Le système (S) s'écrit $AX = B$

3) Résolution par la méthode de Cramer

Le système $AX = B$ (forme matricielle) est dit système de Cramer si A est une matrice carrée et $\det(A) \neq 0$.

Soit (S) : $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$

Un système de cramer :

Puisque $\det(A) \neq 0$, le système admet une solution unique

Les solutions sont de la forme

$x_i = \dfrac{\Delta i}{\det(A)}$ où Δi est le déterminant de la matrice obtenue en remplaçant la colonne i par la colonne $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_n \end{bmatrix}$

Exemple :

Soit (S) : $\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 2x + y + z = -1 \\ x - 3y + 2z = -1 \end{cases}$

Résoudre le système (S) par la méthode de cramer

Posons $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{matrix}$ $\det(A) = -8$

donc le système admet une unique solution

$x = \dfrac{\Delta_1}{\det(A)}$ avec $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \\ -1 & -3 \end{matrix}$ $= 4 - 2 + 3 + 1 + 6 + 4 = 16 = -2 \Rightarrow x = -2$

$x = \dfrac{1}{-8} \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$

$y = \dfrac{\Delta_2}{\det(A)}$. $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{matrix}$ $= -2 + 2 - 2 + 1 + 1 - 8 = -8$

$y = 1$

$z = \dfrac{\Delta_3}{\det(A)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{matrix}$ $= -1 - 2 - 12 - 2 - 3 + 4$

$z = \dfrac{-16}{-8} = 2$ $\quad z = 2$

4) Résolution par la méthode d'inversion matricielle

Soit $AX = B$ un système de Cramer

$AX = B$ équivaut à $X = A^{-1}B$

Soit (S) : $\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 2x + y + z = -1 \\ x - 3y + 2z = -1 \end{cases}$

Résoudre le système (S) par la méthode d'inversion matricielle

Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$

$$\left.\begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}$$

$$\left|\begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & -1 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} L'_1 = L_1 \\ L'_2 = -2L_1 + L_2 \\ L'_3 = L_1 - L_3 \end{matrix}$$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc|l} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & L'_1 \\ 0 & 3 & -1 & -2 & 1 & 0 & L'_2 \\ 0 & 5 & -1 & 1 & 0 & -1 & L'_3 \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc|l} 3 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & L''_1 = 2L'_2 + 3L'_1 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 1 & 0 & L''_2 = L'_2 \\ 0 & 0 & 8 & -7 & 5 & -3 & L''_3 = 5L'_2 + 3L'_3 \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc|l} 24 & 0 & 0 & -15 & 21 & -3 & L'''_1 = L''_3 + 8L''_1 \\ 0 & -24 & 0 & -9 & 3 & 3 & L'''_2 = -L''_3 + 8L''_2 \\ 0 & 0 & -8 & -7 & 5 & -3 & L'''_3 = L''_3 \end{array}\right.$$

$$A^{-1} \left|\begin{array}{ccc} \frac{24}{-15} & \frac{21}{24} & -3/24 \\ \frac{-9}{-24} & 3/-24 & 3/-24 \\ \frac{-7}{-8} & \frac{5}{-8} & -\frac{3}{-8} \end{array}\right| = \left| -\frac{8}{5} \right.$$

$$A^{-1} = \frac{t_{com(A)}}{det(A)} = -\frac{1}{8}\begin{bmatrix} 5 & -7 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -7 & 5 & -3 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = -\frac{1}{8}\left|\begin{array}{ccc} 5 & -7 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -7 & 5 & -3 \end{array}\right| \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -\frac{1}{8}\begin{bmatrix} 16 \\ -8 \\ -16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$x = -2$, $y = 1$ $z = 2$

$S = \{(-2 ; 1 ; 2)\}$

Exemple 3

Resoudre (S) par inverse matricielle

Soit (S)
$$\begin{cases} x + 2y + z = 8 \\ y + z = 4 \\ 3x + y + 2z = 10 \end{cases}$$

Soit $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{{}^t\mathrm{com}(A)}{\det(A)}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{matrix} = 2 + 6 - 3 - 1 = 4$$

$$\mathrm{com}(A) = \begin{vmatrix} 1 & +3 & -3 \\ -3 & -1 & +5 \\ 1 & +1 & 1 \end{vmatrix} \qquad {}^t\mathrm{com}(A) = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -3 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -3 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -3 & 5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 8 - 12 + 10 \\ 24 - 4 + 10 \\ -24 + 20 + 10 \end{bmatrix} = \cancel{\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5/2 \\ 8 & -1 & \\ & & \end{bmatrix}}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 6 \\ 10 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 10/2 \\ 3/2 \end{bmatrix} \qquad x = 3/2,\quad y = 5/2,\quad z = 3/2$$