Chapitre 3 Régime sinusoïdal

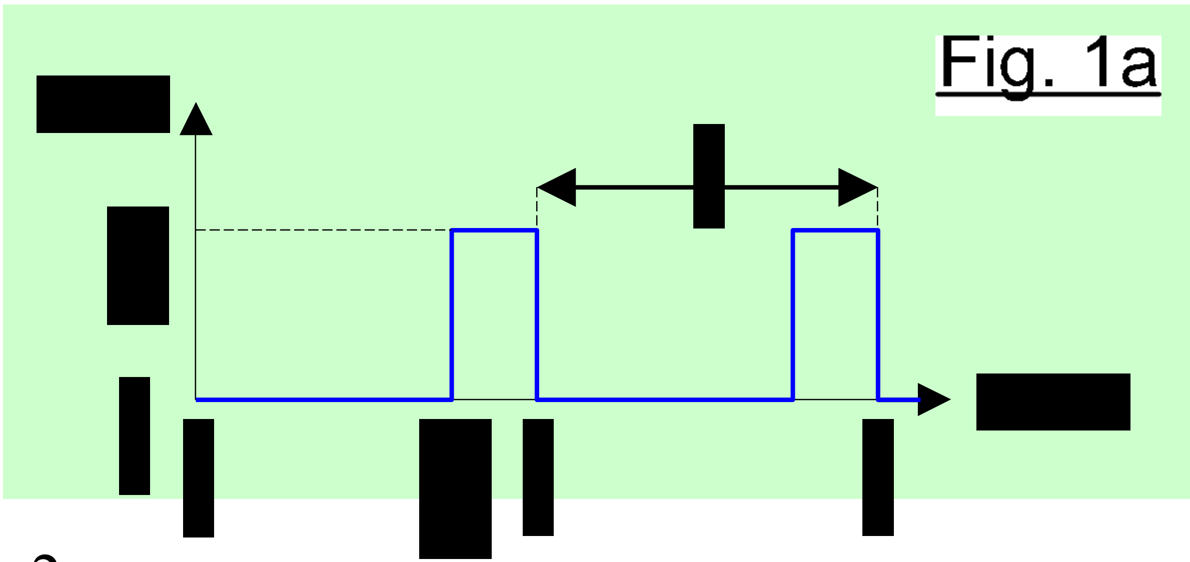
Sommaire

Chapitre 3 Régime sinusoïdal

1- Introduction : les grandeurs périodiques

• Période

Un signal périodique est caractérisé par sa période :



T = 2 ms.

• Fréquence

La fréquence f (en hertz) correspond au nombre de périodes par unité de temps :

$$\boxed{f = \frac{1}{T}}$$

A.N.

T = 2 ms ⇔ f = 500 Hz (500 périodes par seconde)

• Pulsation

La pulsation est définie par :

$$\boldsymbol{\omega = 2\pi f = 2\pi/T}$$ (en radians par seconde)

• Valeur moyenne

On note <u> la valeur moyenne dans le temps de la tension u(t) :

$$\boxed{< u >= \frac{1}{T}\int_0^T u(t)dt}$$

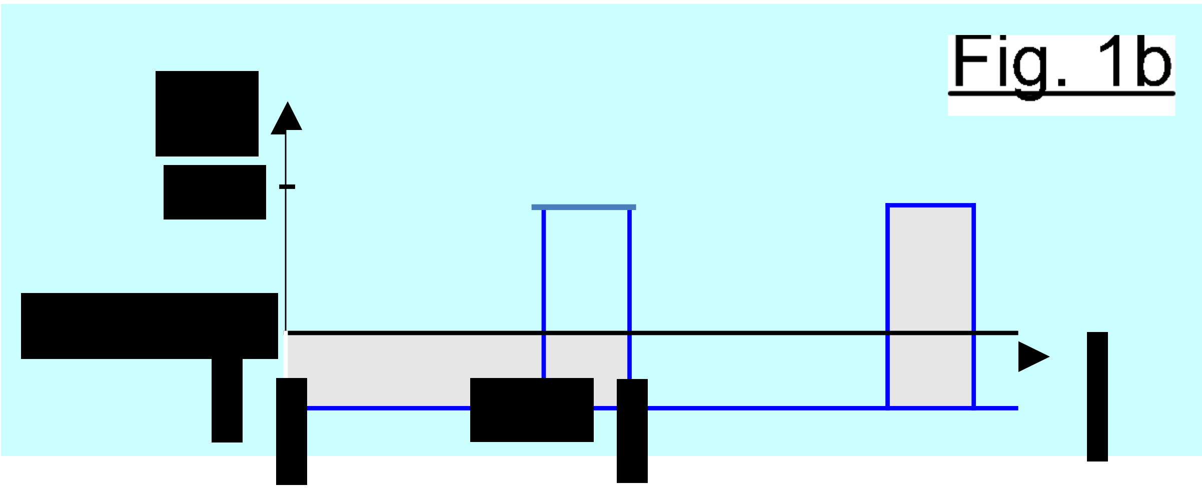


Fig. 1b

A.N.

$$< u > = \frac{1}{4} \times 10 = 2,5 \text{ V}$$

• Composante continue (DC =) et composante alternative (AC ~)

Une grandeur périodique a deux composantes :

- la composante continue (c'est la valeur moyenne ou « offset »)
- et la composante alternative

$u(t) = \langle u \rangle + u_{AC}(t)$:

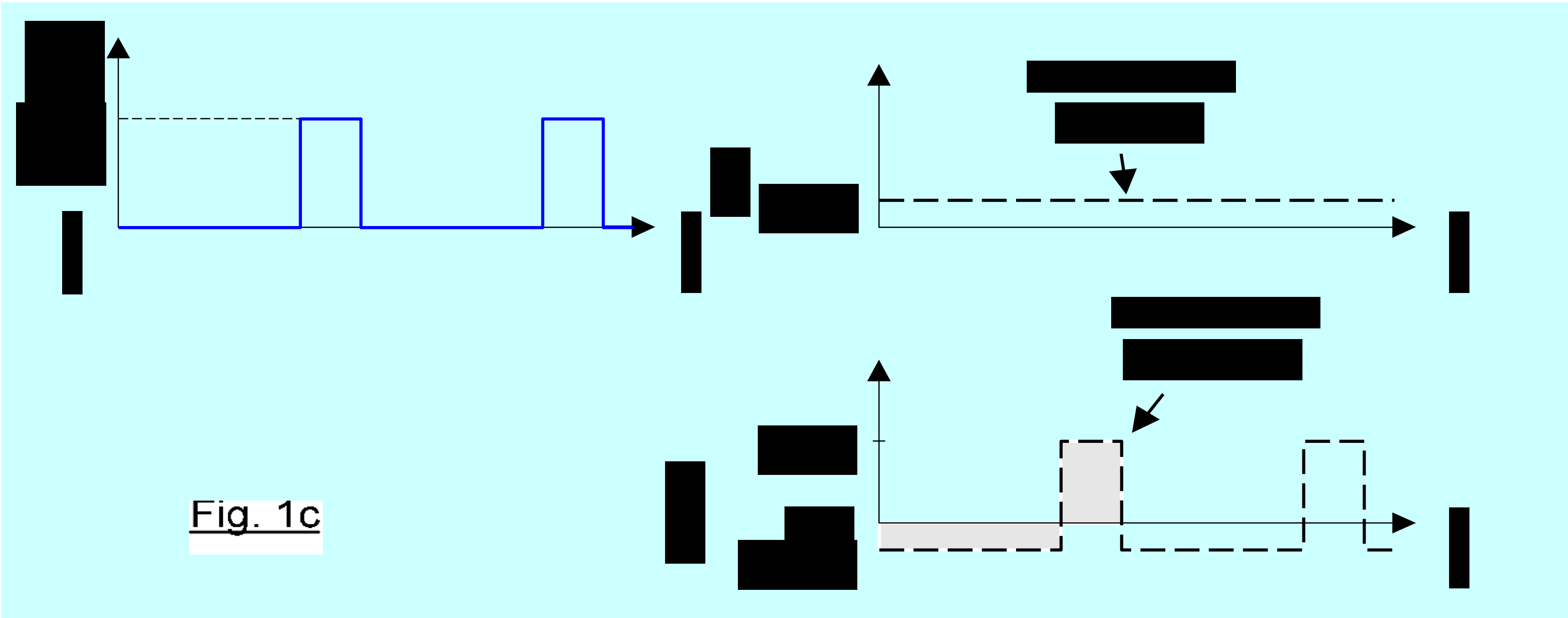


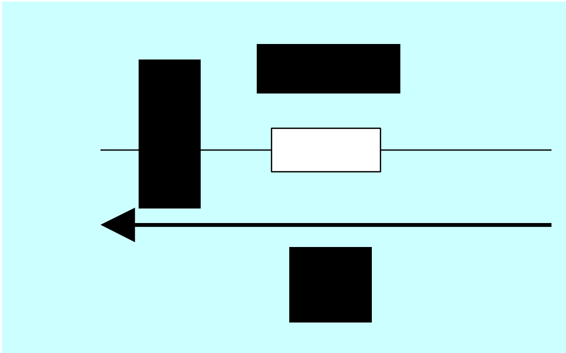
Fig. 1c

Remarques :

-la composante alternative a une valeur moyenne nulle : $\langle u_{AC} \rangle = 0$

-une grandeur périodique ***alternative*** n'a pas de composante continue : $\langle u \rangle = 0$

• Puissance électrique



p(t) = u(t)·i(t) est la puissance électrique consommée à l’instant t (ou puissance instantanée).

En régime périodique, ce n’est pas p(t) qu’il est intéressant de connaître mais la puissance moyenne dans le temps :

$$P = \langle p \rangle = \langle ui \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)i(t)dt$$

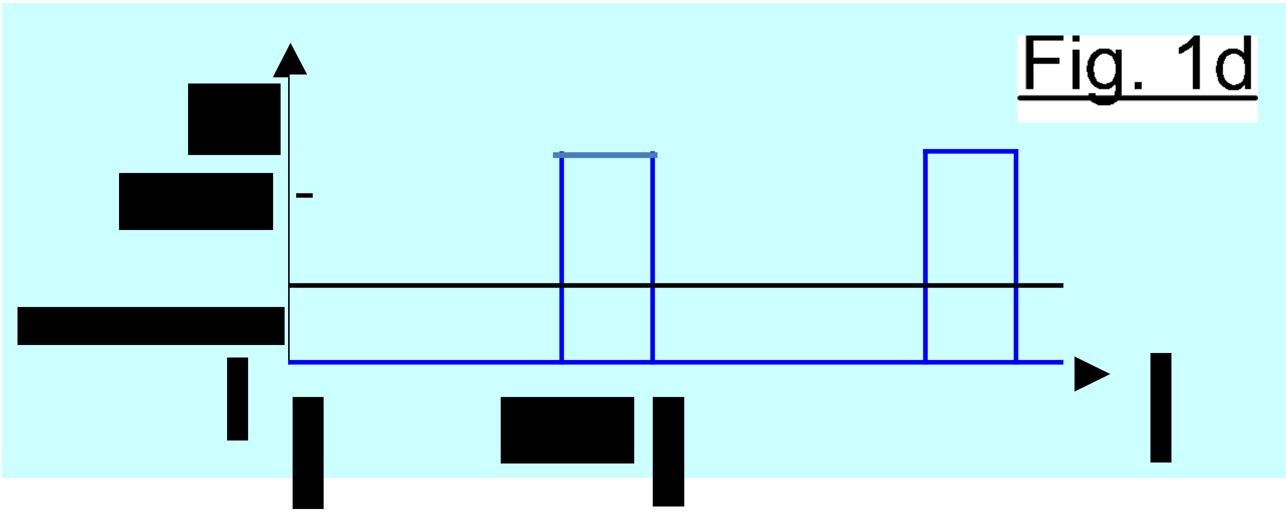
Attention : en général, <ui> ≠ <u> <i>

• Valeur efficace (RMS, Root Mean Square, ou moyenne quadratique)

Par définition, la valeur efficace U_{eff} de la tension u(t) est :

$$U_{eff} = \sqrt{< u^2 >} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)dt}$$

A.N.



$$U_{eff} = \sqrt{100 \times \frac{1}{4}} = 5\ V$$

Remarques :

La valeur efficace est une grandeur positive.

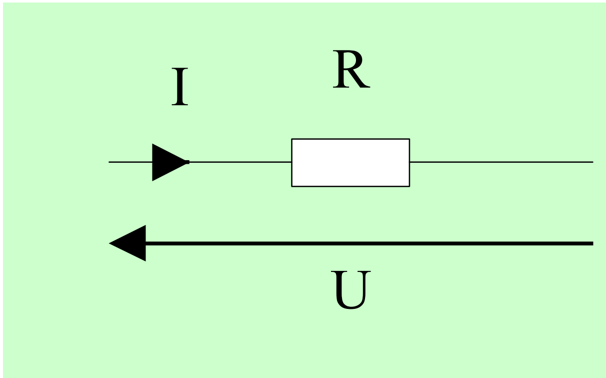
$U_{eff}^2 = \langle u \rangle^2 + U_{AC\ eff}^{\ 2}$

Valeur efficace d'un courant électrique :

$$\boxed{I_{eff} = \sqrt{< i^2 >}}$$

• Signification physique de la valeur efficace

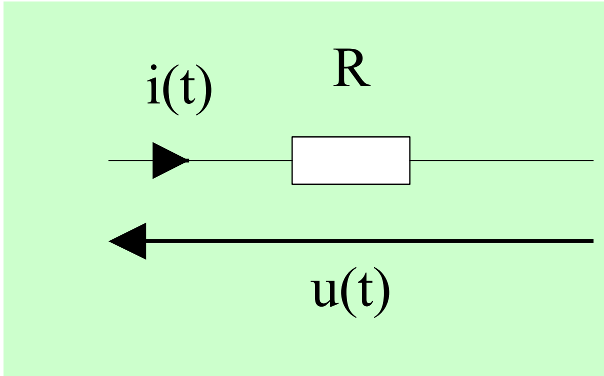
Soit une résistance parcourue par un courant ***continu*** :



La résistance consomme une puissance électrique :

$$P = RI^2 = U^2/R \text{ (loi de Joule)}$$

Soit la même résistance parcourue par un courant ***périodique*** i(t) de valeur efficace I_{eff} :



La puissance moyenne consommée est :

$$P = \langle Ri^2 \rangle = R\langle i^2 \rangle$$
$$= RI_{eff}^2 = U_{eff}^2/R$$

Pour avoir les mêmes effets thermiques, il faut que I_{eff} soit égal à la valeur du courant en régime continu I (idem pour les tensions) :

La notion de valeur efficace est liée à l'énergie.

• Cas particulier des grandeurs sinusoïdales alternatives

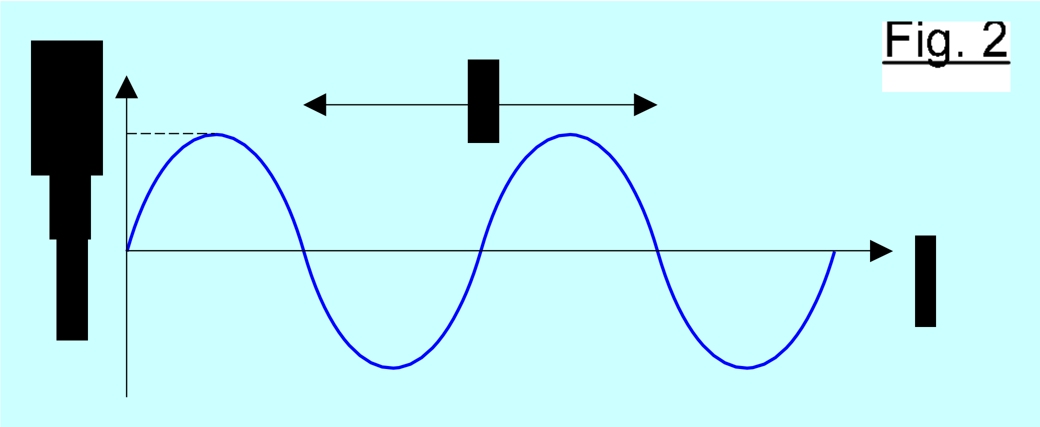


Fig. 2

Û désigne la tension maximale (ou tension crête)

On montre que :

$$\boxed{U_{eff} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}}}$$

Exemple : EDF fournit une tension sinusoïdale alternative de valeur efficace 230 V et de fréquence 50 Hz.

Pour un courant sinusoïdal alternatif :

$$\boxed{I_{eff} = \frac{\hat{I}}{\sqrt{2}}}$$

2- Représentation des grandeurs sinusoïdales

2-1- Fonction mathématique

$$i(t) = \hat{I}\sin(\omega t + \varphi_i) = I_{eff}\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi_i)$$

avec :

- I_{eff} : valeur efficace (A)
- ω : pulsation (rad/s)
- t : temps (s)
- $(\omega t + \varphi_i)$: *phase* (rad)
- φ_i : *phase à l'origine* (rad)

2-2- Représentation de Fresnel

C'est une représentation vectorielle des grandeurs sinusoïdales.
Le vecteur de Fresnel associé au courant i(t) est défini de la façon suivante :

$$\begin{cases} \left\|\vec{I}\right\| = I_{eff} \\ (Ox, \vec{I}) = \varphi_i \end{cases}$$

Exemple :

$$i(t) = 3\sqrt{2}\sin(\omega t - \tfrac{\pi}{12})$$

$$u(t) = 5\sqrt{2}\sin(\omega t + \tfrac{\pi}{4})$$

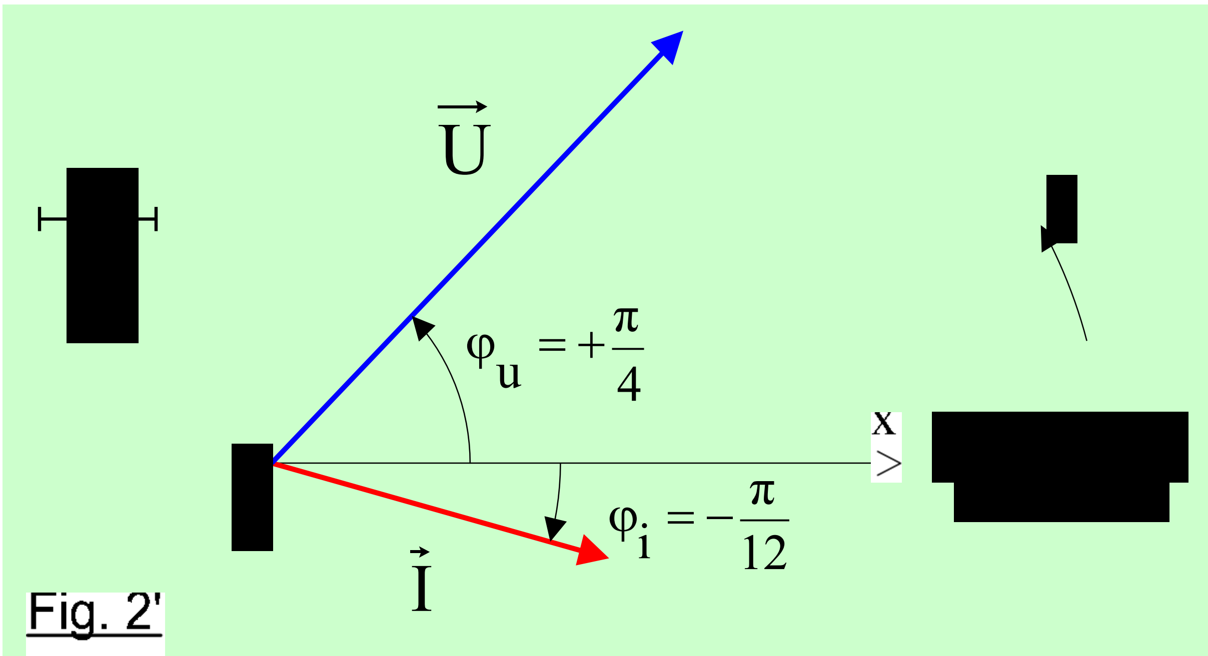


Fig. 2'

2-3- Nombre complexe associé

Le nombre complexe $\underline{I}$ associé au courant i(t) est défini de la façon suivante : $\underline{I} = (I_{eff}, \varphi_i)$

A la grandeur i(t), on associe la valeur complexe $\underline{I}$
i(t) = Réel ($\underline{I}$) (Partie réelle)
Il est usuel de définir aussi la valeur efficace (module) et l'argument à la phase à l'origine telle que

$$\underline{I} = I_{eff} e^{j\varphi_i}$$

A.N. Déterminer le nombre complexe associé à la tension :

$$u(t) = 5\sqrt{2}\sin(\omega t + \tfrac{\pi}{4})$$

$$\underline{U} = (5, +\tfrac{\pi}{4})$$

$$= 5\cos\left(+\tfrac{\pi}{4}\right) + 5\sin\left(+\tfrac{\pi}{4}\right)j$$

$$= \frac{5\sqrt{2}}{2} + \frac{5\sqrt{2}}{2}j$$

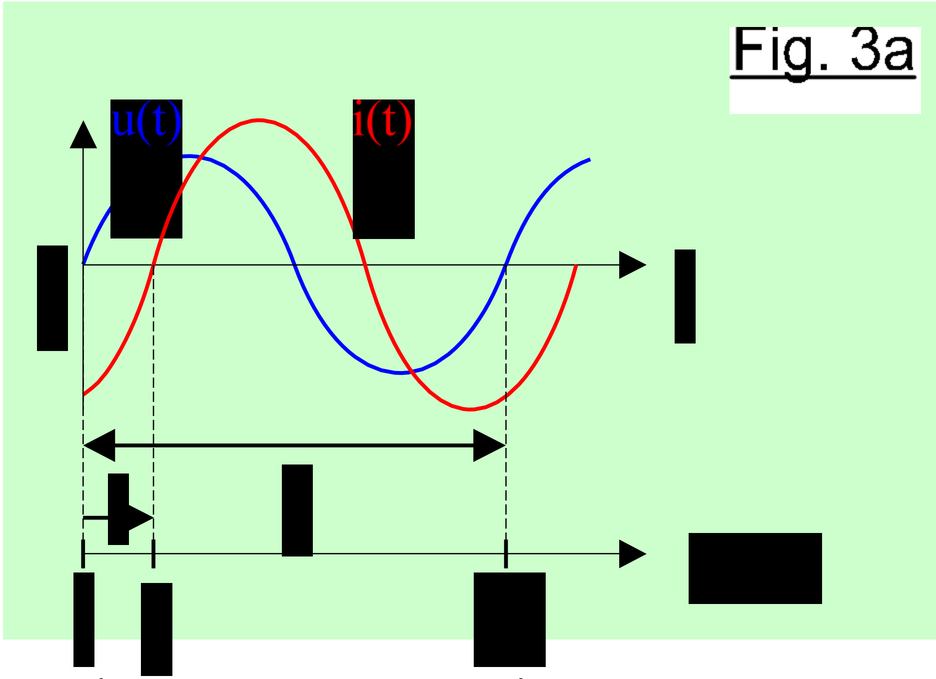
$$(j^2 = -1)$$

3-Déphasage (ou différence de phase) entre deux grandeurs sinusoïdales

Soit deux grandeurs sinusoïdales (de même fréquence) :

$$i(t) = \hat{I}\sin(\omega t + \varphi_i)$$

$$u(t) = \hat{U}\sin(\omega t + \varphi_u)$$



Le ***déphasage*** de u par rapport à i est par convention : $\varphi_{u/i} = \varphi_u - \varphi_i$

τ : décalage (en s) entre les deux signaux.

$$\boxed{\frac{\tau}{T} = \frac{\varphi(\text{rad})}{2\pi} = \frac{\varphi(°)}{360}}$$

• Déphasages particuliers

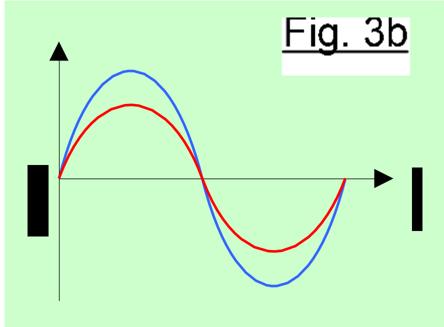


Fig. 3b

-déphasage nul ($\tau = 0$) :
les grandeurs sont *en phase*

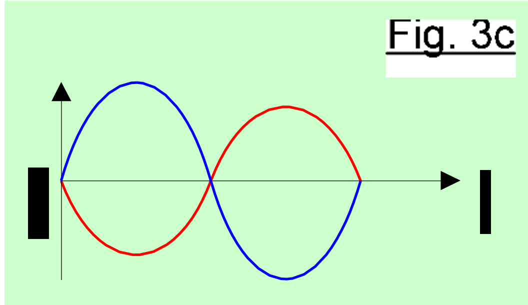


Fig. 3c

-déphasage de 180° ($\tau = T/2$) :
grandeurs *en opposition de phase*

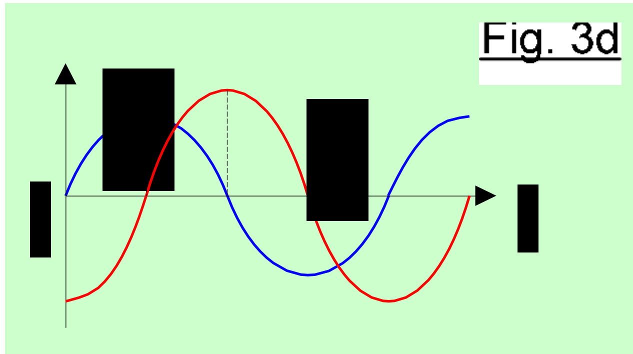
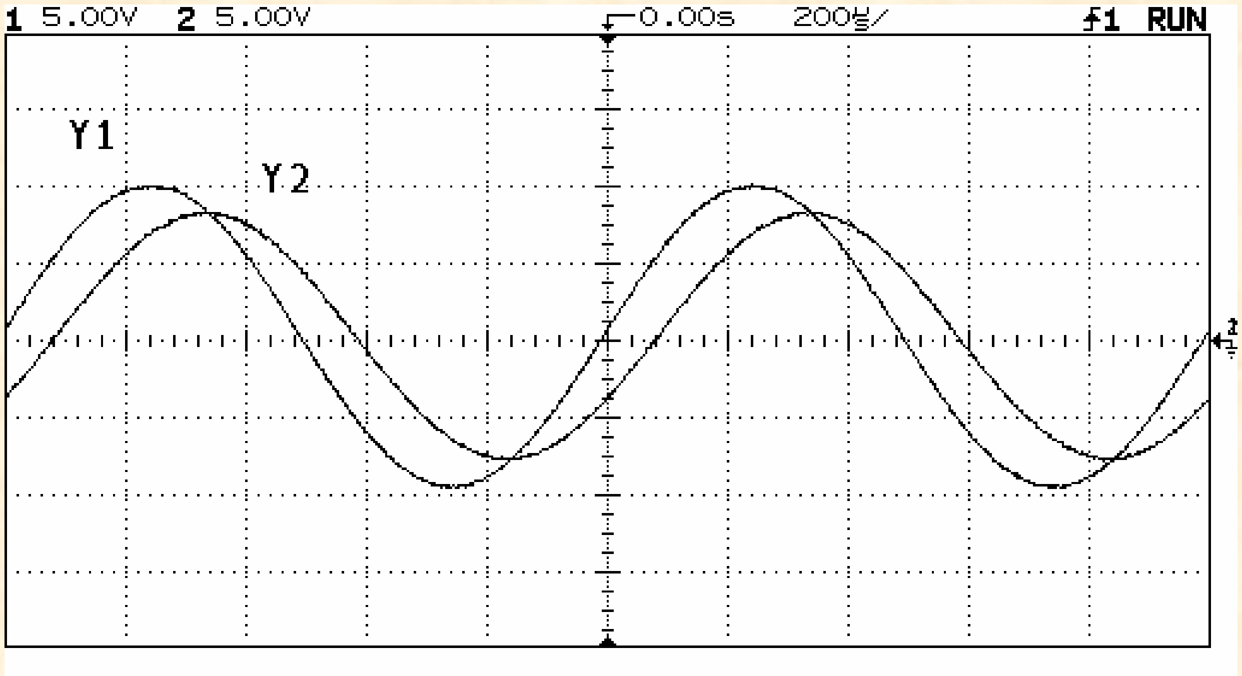


Fig. 3d

-déphasage de 90° ($\tau = T/4$) :
grandeurs *en quadrature de phase*

N.B. Le déphasage est une grandeur algébrique : $\varphi_{i/u} = - \varphi_{u/i}$
Fig. 3d : $\varphi_{u/i} = +90°$: u est en quadrature avance sur i.

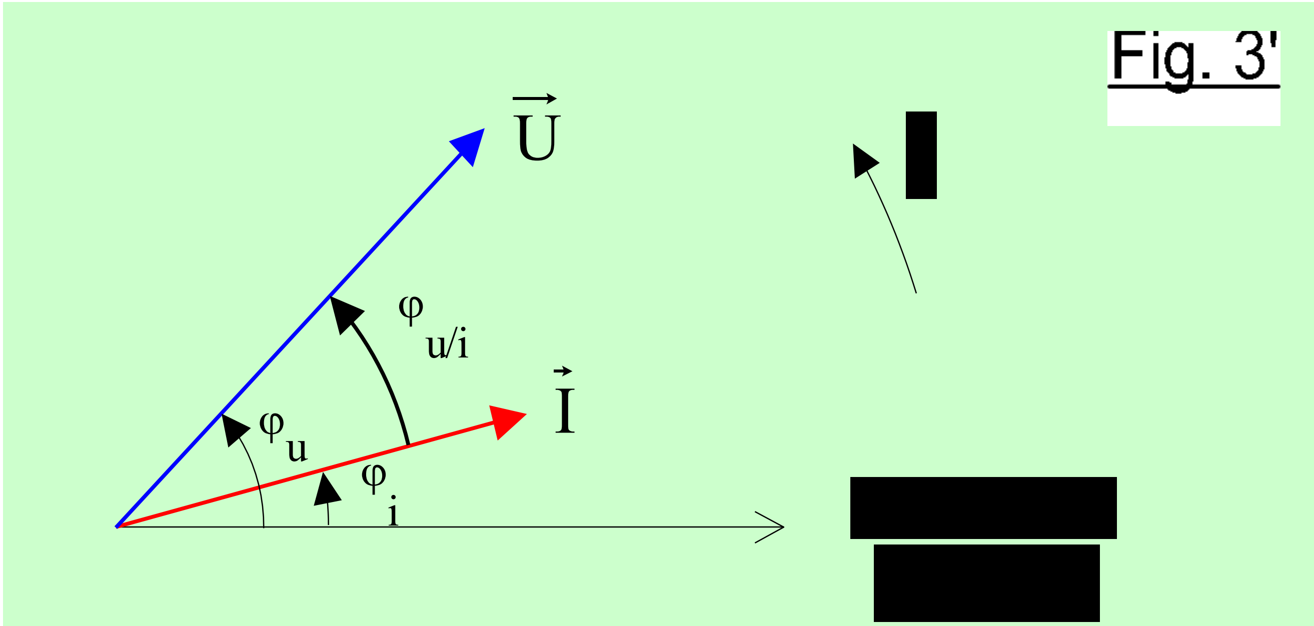
A.N. Calculer le déphasage $\varphi_{u1/u2}$:



$$\varphi_{u1/u2} = 360\frac{\tau}{T} = 360\frac{100\ \mu s}{1\,ms} = +36°$$

• Déphasage et vecteurs de Fresnel

$$\varphi_{u/i} = (\vec{I}, \vec{U})$$



• Déphasage et nombres complexes

$$\varphi_{u/i} = \varphi_u - \varphi_i = \arg(\underline{U}) - \arg(\underline{I})$$

$$\varphi_{u/i} = \arg\left(\frac{\underline{U}}{\underline{I}}\right)$$

A.N. Calculer le déphasage $\varphi_{u / i}$

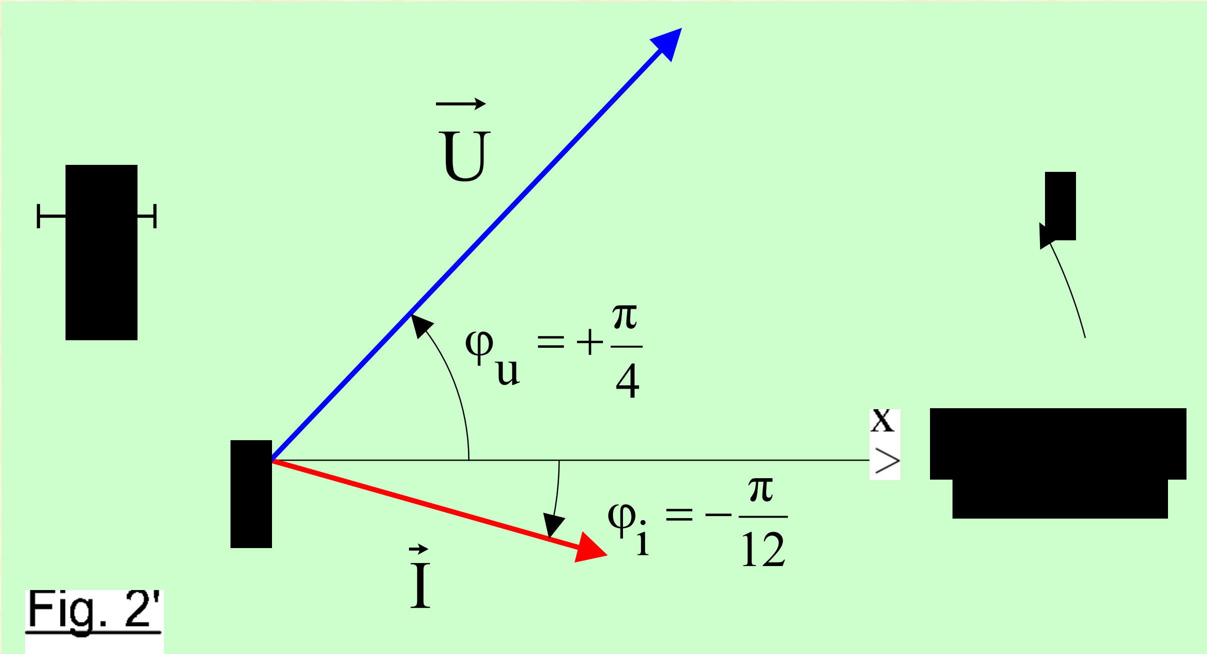
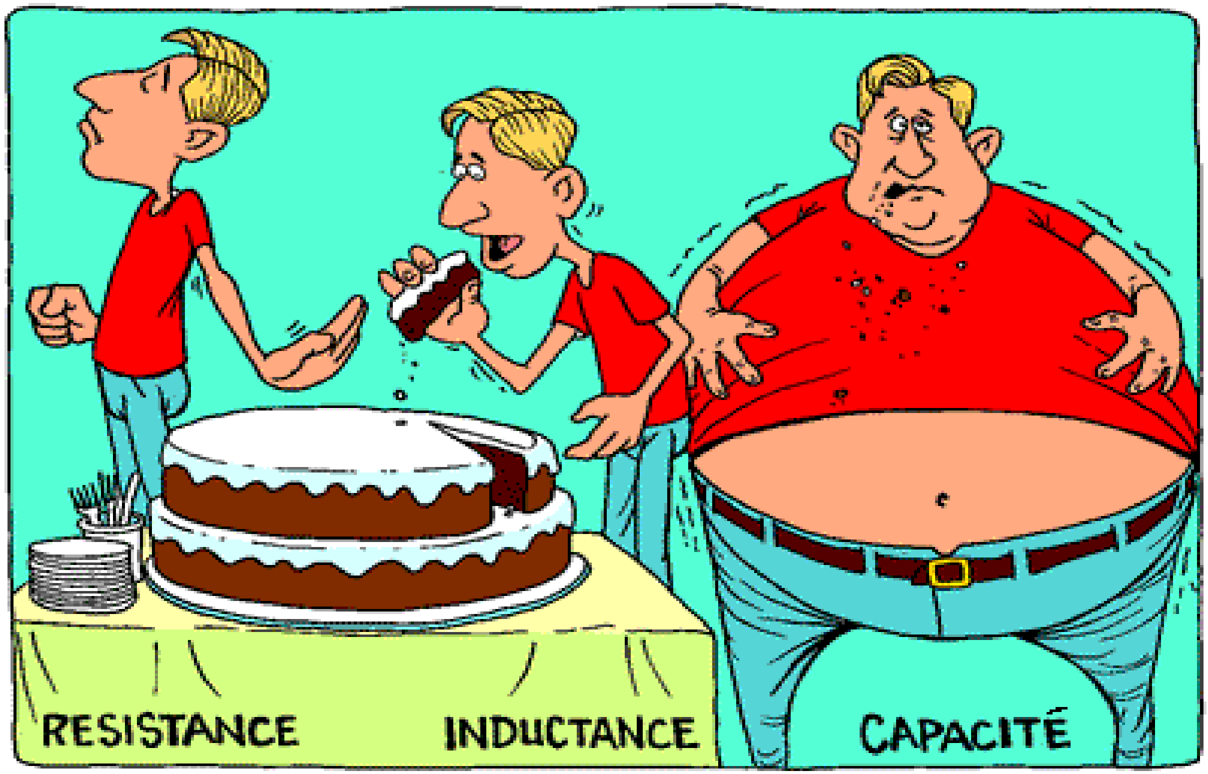


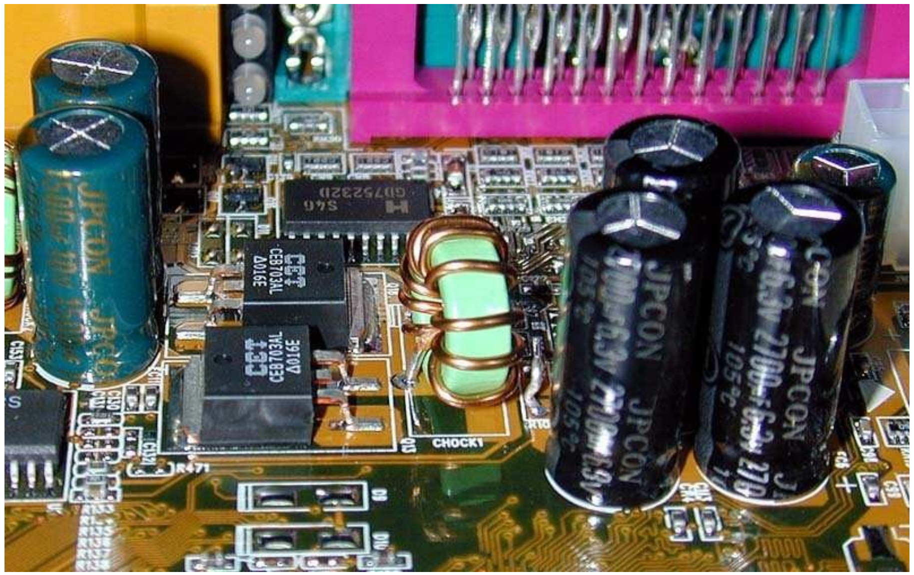
Fig. 2'

$\varphi_{u / i} = +60\ °$

4- Les dipôles passifs linéaires en régime sinusoïdal



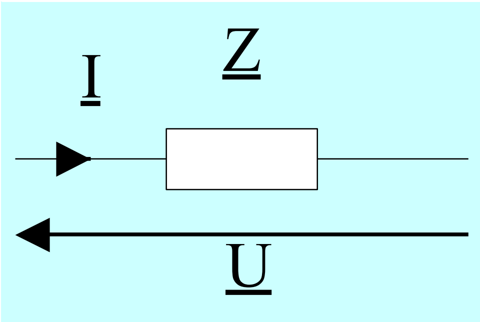
astuces-pratiques.fr ©



4- Les dipôles passifs linéaires en régime sinusoïdal

• Impédance complexe

En régime continu, un dipôle passif linéaire est caractérisé par sa ***résistance*** : R = U/I (loi d'Ohm)
En régime sinusoïdal, un dipôle passif linéaire est caractérisé par son ***impédance complexe*** $\underline{Z}$:



$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}$$

- L'impédance Z (en Ω) est le module de $\underline{Z}$:

$$Z(\Omega) = \frac{U_{eff}\,(V)}{I_{eff}\,(A)}$$

- Le déphasage de u par rapport à i correspond à l'argument de $\underline{Z}$:

$$\arg(\underline{Z}) = \varphi_{u/i}$$

- En définitive : $\underline{Z} = (Z, \varphi_{u/i}) = (U_{eff}/I_{eff}, \varphi_{u/i})$

• Admittance complexe

L'*admittance complexe* est l'inverse de l'impédance complexe :

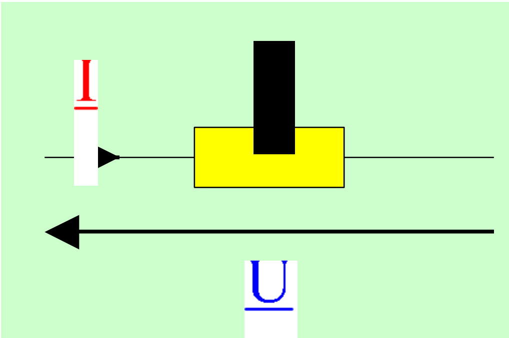
$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$$

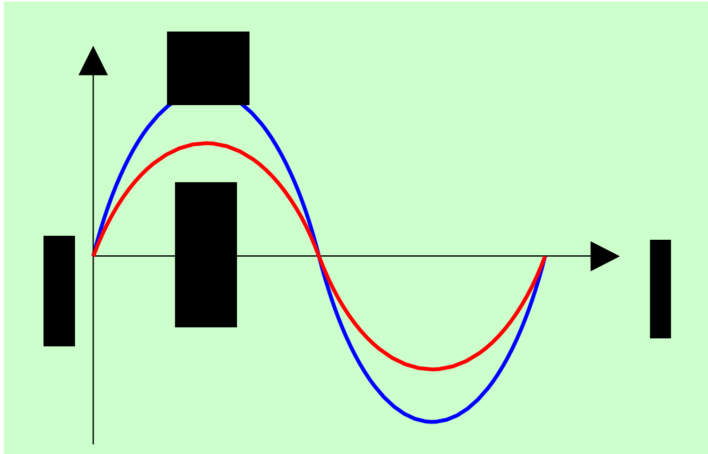
Y est l'admittance (en siemens S) : $Y = \frac{1}{Z} = \frac{I_{eff}}{U_{eff}}$

$$\arg(\underline{Y}) = -\arg(\underline{Z}) = \varphi_{i/u}$$

• Dipôles passifs élémentaires en régime sinusoïdal

- résistance parfaite

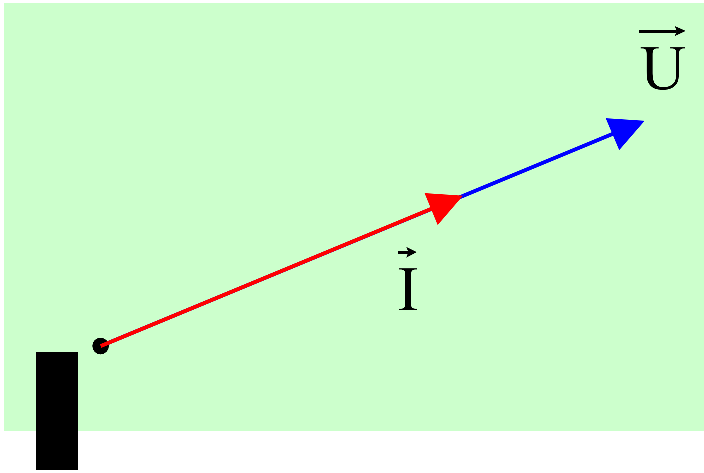




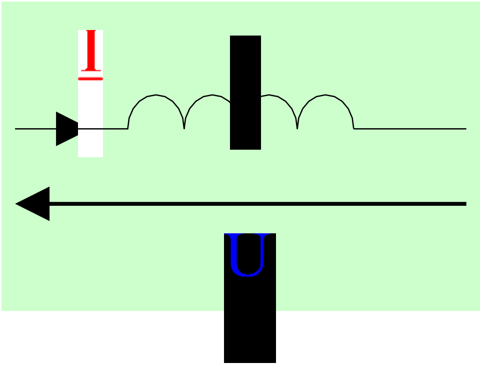
$$\underline{Z}_R = R \qquad \begin{cases} Z_R = R \\ \varphi_{u/i} = 0° \end{cases}$$

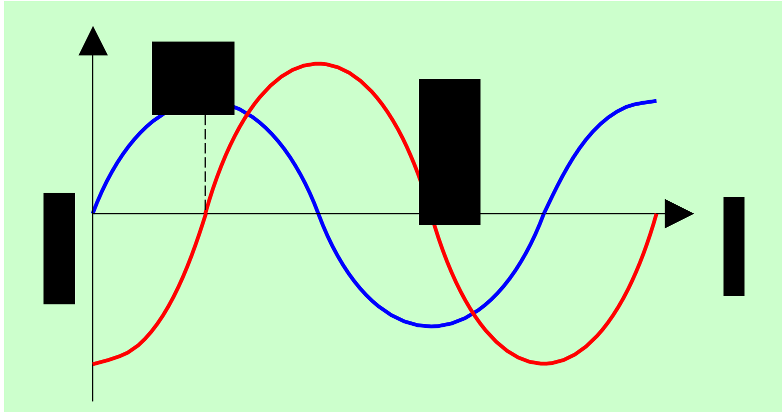
$$U_{eff} = RI_{eff} \text{ (loi d'Ohm)}$$

$$\underline{Y}_R = G = \frac{1}{R}$$



- bobine parfaite

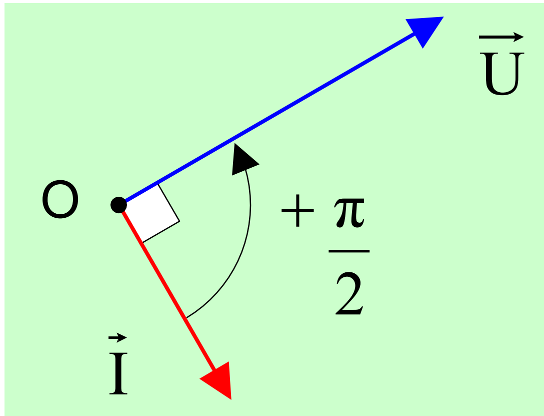




$$\underline{Z}_L = jL\omega \qquad \begin{cases} Z_L = L\omega \\ \varphi_{u/i} = +90° \end{cases}$$

$$U_{eff} = L\omega I_{eff}$$

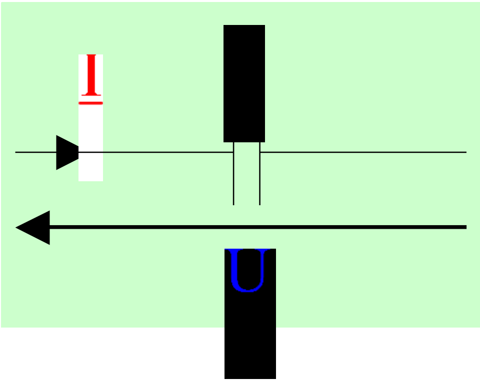
$$\underline{Y}_L = -\frac{j}{L\omega}$$

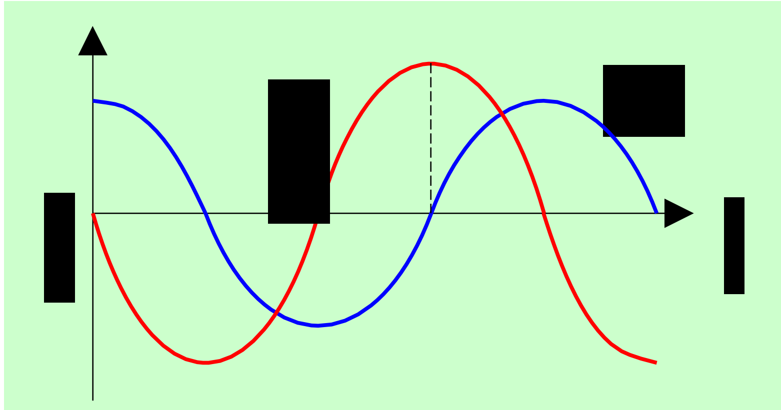


L : inductance d'une bobine (en henry H)

L'impédance d'une bobine augmente avec la fréquence.

- condensateur parfait

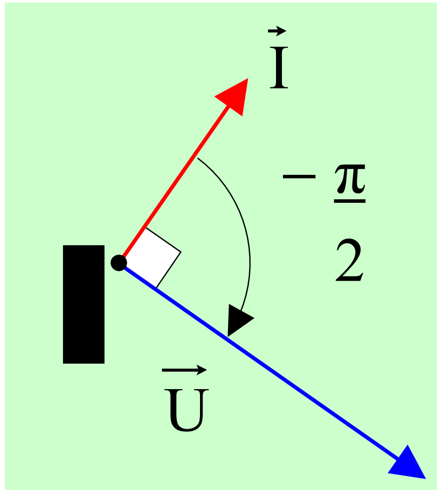




$$\underline{Z}_C = -\frac{j}{C\omega} \qquad \begin{cases} Z = \dfrac{1}{C\omega} \\ \varphi_{u/i} = -90° \end{cases}$$

$$U_{eff} = \frac{I_{eff}}{C\omega}$$

$$\underline{Y}_C = jC\omega$$



C : capacité en farad F (corps humain ≈ 200 pF)

L'impédance d'un condensateur diminue avec la fréquence.

5- Etude des circuits linéaires en régime sinusoïdal

Un circuit électrique ***linéaire*** est composé uniquement de dipôles linéaires :

- passifs : R, L, C
- actifs : source de courant ou de tension sinusoïdal (de fréquence f)

Dans un tel circuit, tensions et courants sont sinusoïdaux (de fréquence f).

On peut donc utiliser :

- la représentation vectorielle
- ou les nombres complexes associés.

5-1- Lois de Kirchhoff

5-1- Lois de Kirchhoff

- Loi des nœuds

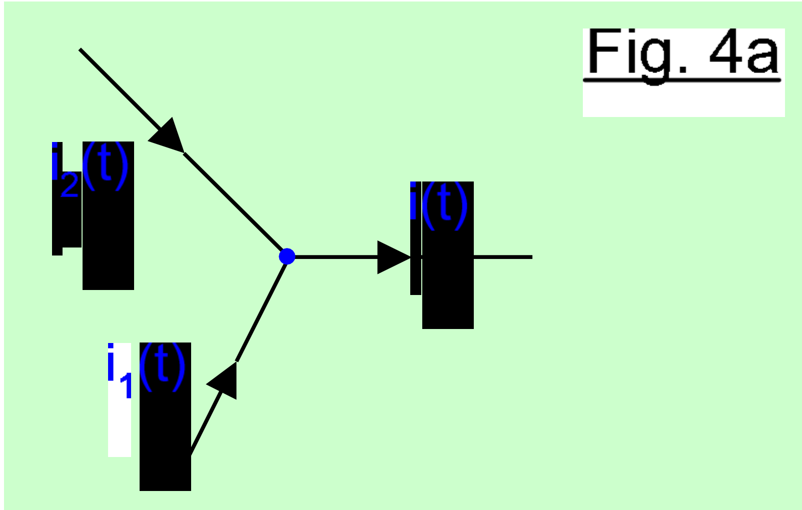


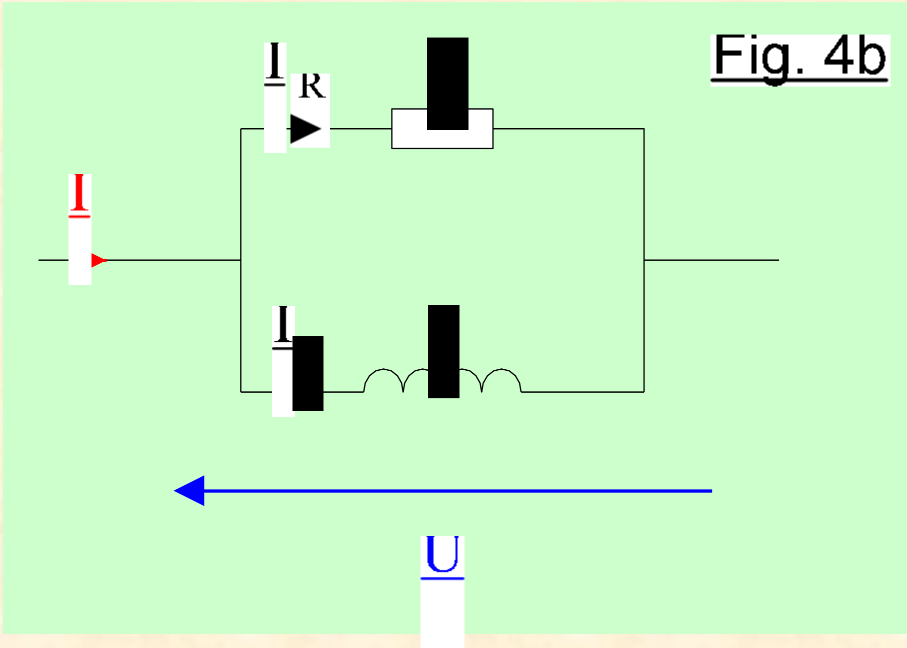
Fig. 4a

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t)$$

Pour les vecteurs de Fresnel : $\vec{I} = \vec{I_1} + \vec{I_2}$

Pour les nombres complexes associés : $\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2$

• Exemple :



Une mesure au multimètre (en mode AC ~) donne :

$I_{R\ eff} = 5{,}00$ mA
$I_{L\ eff} = 3{,}98$ mA

Calculer la valeur efficace du courant i(t)
et le déphasage par rapport à la tension u(t) : $\varphi_{u/i}$

Utilisons une construction vectorielle :

$$\varphi_{u/iR} = (\vec{I}_R, \vec{U}) = 0°$$

$$\varphi_{u/iL} = (\vec{I}_L, \vec{U}) = +90°$$

$$\vec{I} = \vec{I}_R + \vec{I}_L$$

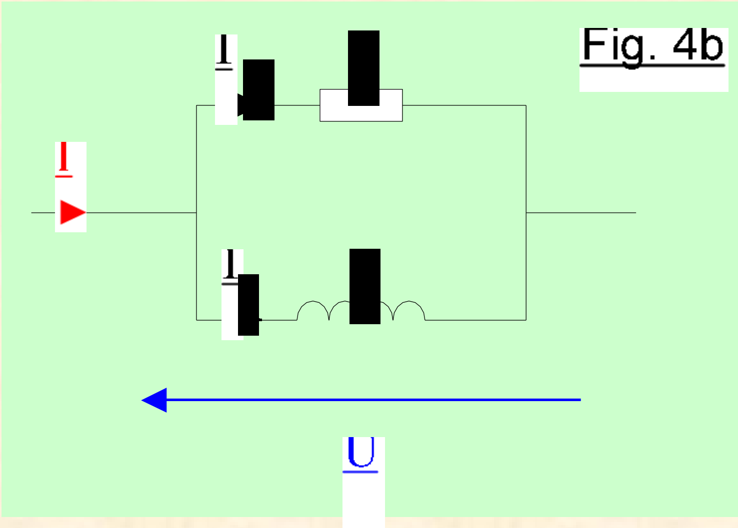


Fig. 4b

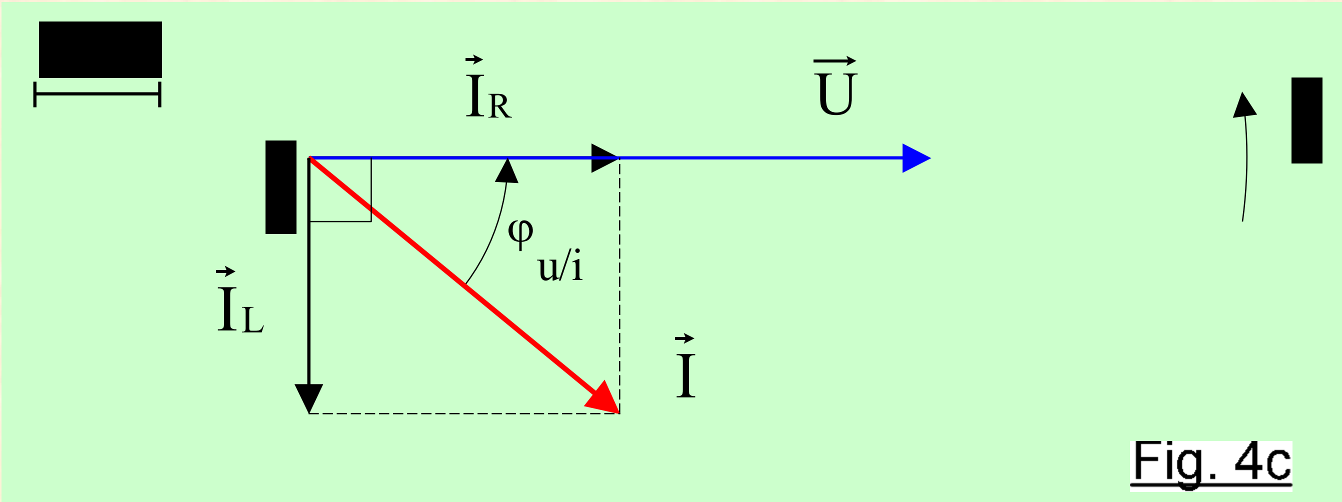


Fig. 4c

$$I_{eff} = \sqrt{I_{R\,eff}^{\,2} + I_{L\,eff}^{\,2}} = 6{,}39 \text{ mA (théorème de Pythagore)}$$

$$\tan \varphi_{u/i} = \frac{I_{L\,eff}}{I_{R\,eff}} \qquad \text{d'où : } \varphi_{u/i} = +38{,}5°$$

En raison des déphasages, la loi des nœuds ne s'applique pas aux valeurs efficaces.

- Loi des branches / Loi des

  mailles $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$

  $$\overrightarrow{U} = \overrightarrow{U_1} + \overrightarrow{U_2}$$

  $$\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2$$

La loi des branches ne s'applique pas aux valeurs efficaces.

5-2- Association de dipôles passifs linéaires

Une association de dipôles passifs linéaires se comporte comme un dipôle passif linéaire.

On note $\mathbf{Z}_{eq}$ l'impédance complexe équivalente de ce dipôle.

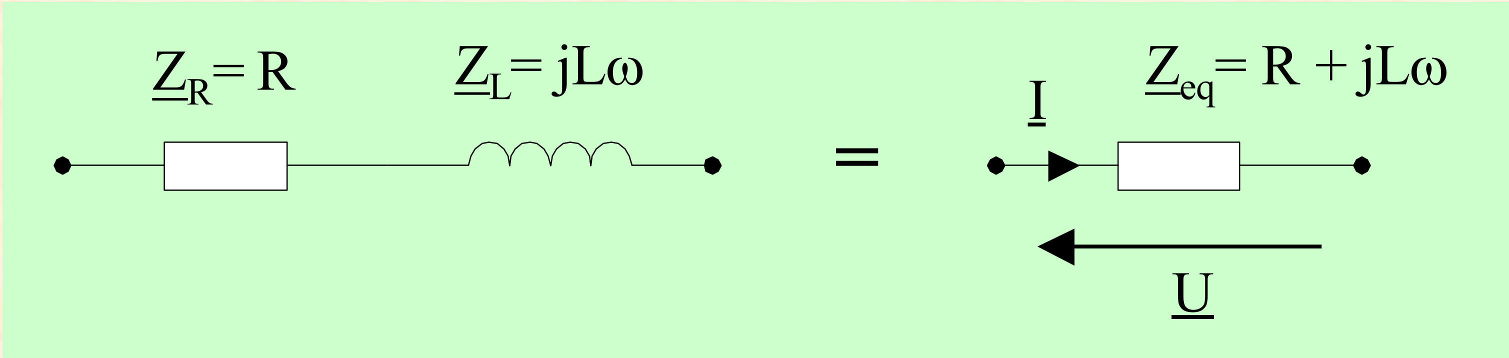
• En série, les impédances complexes s'additionnent :

$$\boxed{\underline{Z}_{éq} = \sum_i \underline{Z}_i}$$

• En parallèle, les admittances complexes s'additionnent :

$$\boxed{\underline{Y}_{éq} = \sum_i \underline{Y}_i} \quad \text{ou} \quad \boxed{\frac{1}{\underline{Z}_{éq}} = \sum_i \frac{1}{\underline{Z}_i}}$$

• Exemple n°1



On en déduit la relation entre les valeurs efficaces :

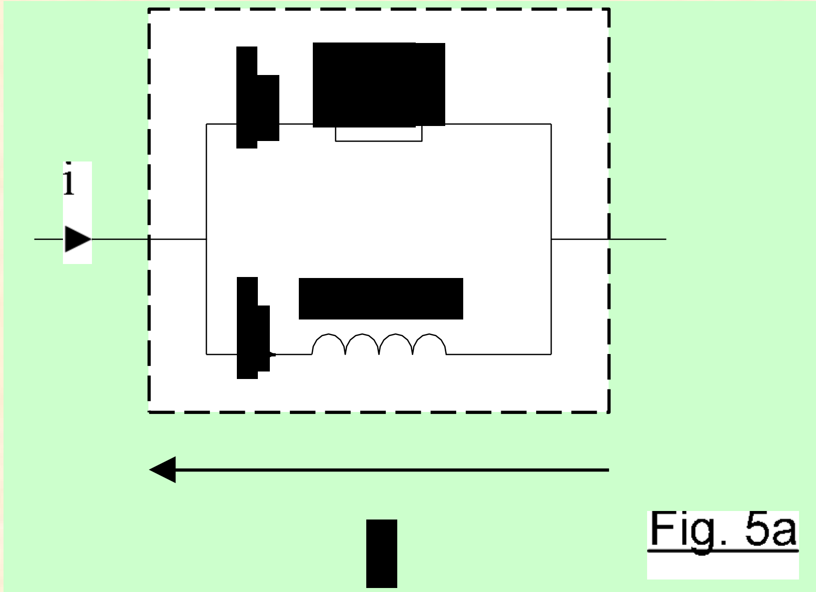
$$U_{eff} = Z_{eq} I_{eff}$$

$$\text{avec : } Z_{eq} = \left|\underline{Z}_{eq}\right| = \left|R + jL\omega\right| = \sqrt{R^2 + (L\omega)^2}$$

$$\text{et le déphasage : } \varphi_{u/i} = \arg \underline{Z}_{eq} = \arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right)$$

Remarque : sauf exception $Z_{éq} \neq \sum_i Z_i$

- Exemple n°2



La tension d'alimentation u(t) est sinusoïdale alternative de valeur efficace 5 V et de fréquence 10 kHz.

Le circuit est linéaire donc le courant i(t) est sinusoïdal de fréquence 10 kHz.
Calculer sa valeur efficace et le déphasage par rapport à u.

$$\underline{Y}_{eq} = \underline{Y}_R + \underline{Y}_L = \frac{1}{R} - \frac{j}{L\omega}$$

Loi d'Ohm : $I_{eff} = Y_{eq}U_{eff} = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{L\omega}\right)^2}\; U_{eff} = 6{,}39\,\text{mA}$

$\varphi_{u/i} = -\arg \underline{Y}_{eq} = -\arctan\left(\frac{-\frac{1}{L\omega}}{\frac{1}{R}}\right) = +38{,}5°$

En définitive :

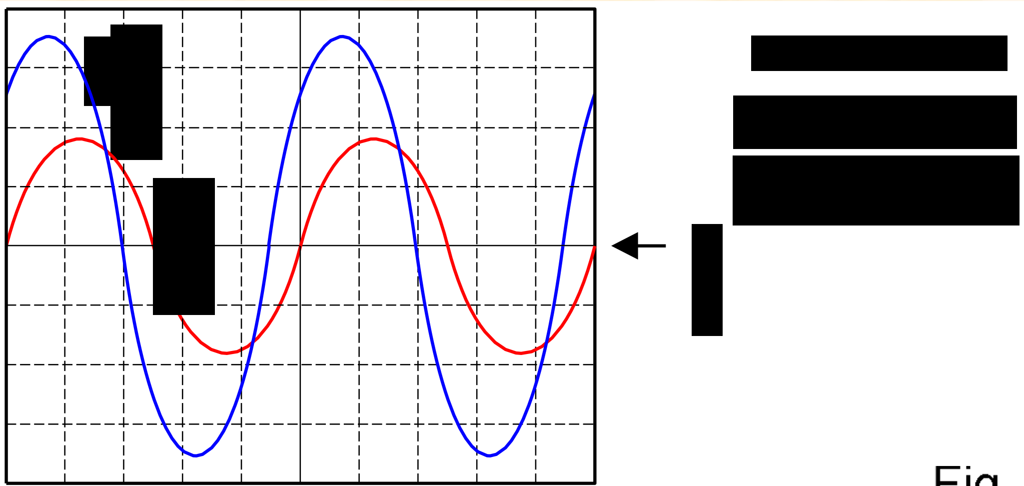


Fig. 5c

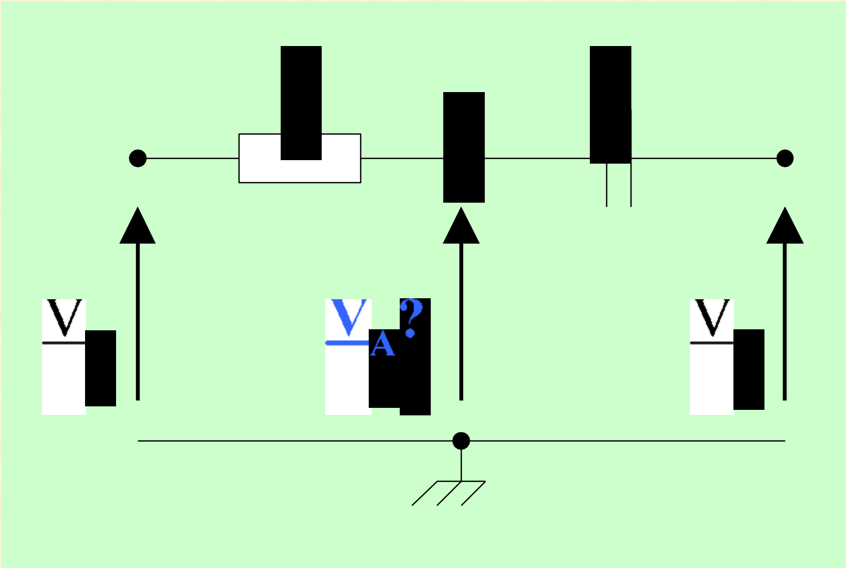
5-3- Théorèmes généraux

Les formules et théorèmes vus en régime continu (diviseur de tension, Thévenin – Norton, superposition …) se généralisent au régime sinusoïdal.

Analogies :

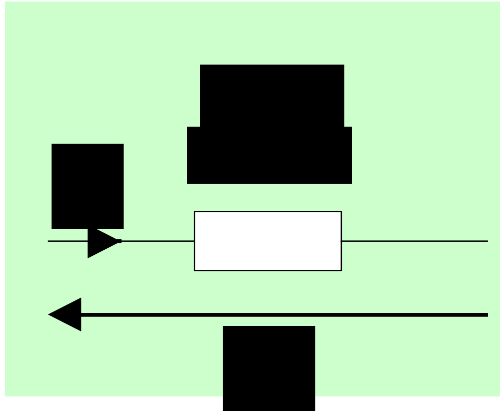
	Régime continu	Régime sinusoïdal
Tension	**U**	$\underline{\mathbf{U}}$
Courant	**I**	$\underline{\mathbf{I}}$
Résistance / Impédance complexe	**R**	$\underline{\mathbf{Z}}$
Conductance / Admittance complexe	**G**	$\underline{\mathbf{Y}}$
Source de tension parfaite	**E**	$\underline{\mathbf{E}}$
Source de courant parfaite	**Icc**	$\underline{\mathbf{Icc}}$

Exemple : Théorème de Millman



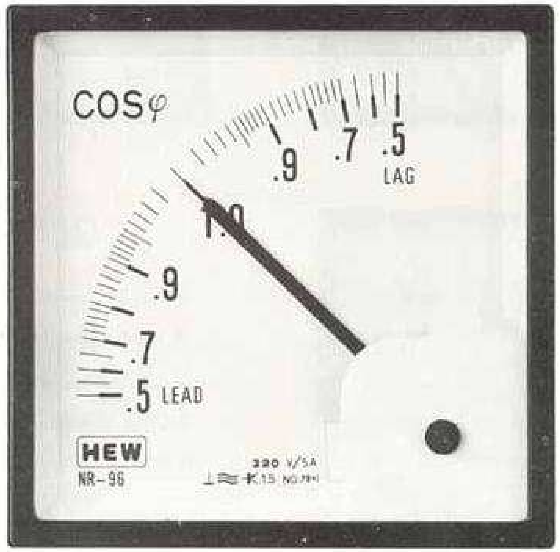
$$\underline{V}_A = \frac{\dfrac{\underline{V}_R}{R} + jC\omega\underline{V}_C}{\dfrac{1}{R} + jC\omega}$$

6- Puissance en régime sinusoïdal



On montre que la puissance moyenne consommée (ou puissance active) est :

$$\boxed{P = U_{eff} I_{eff} \cos\ \varphi_{u/i}}$$



Le terme ***cos*** φ est appelé ***facteur de puissance***.

- **A.N.** : Calculer la puissance active d'un condensateur parfait.

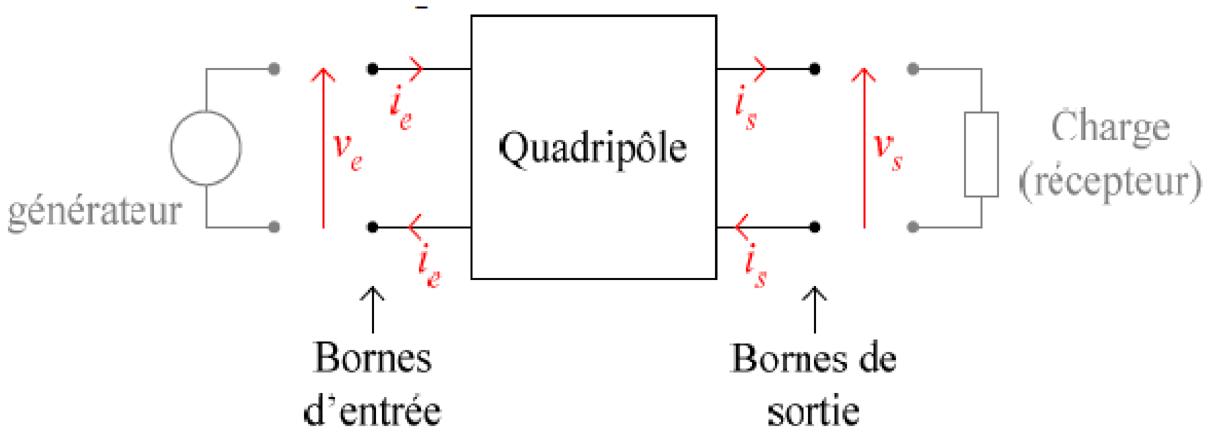
On sait que : $\varphi_{u/i} = -90°$

$\Rightarrow P = 0$ watt   (pas d'échauffement)

7. Quadripole, fonction de transfert, filtre

7.1 Quadripôle électrocinétique

7.1.1 Définition: Elément de circuit à quatre (04) bornes



Quadripôle passif : pas de source auxiliaire de puissance électrique.
Quadripôle actif : présence d'une source auxiliaire de puissance.
Le fonctionnement électrique du quadripôle est caractérisé par :

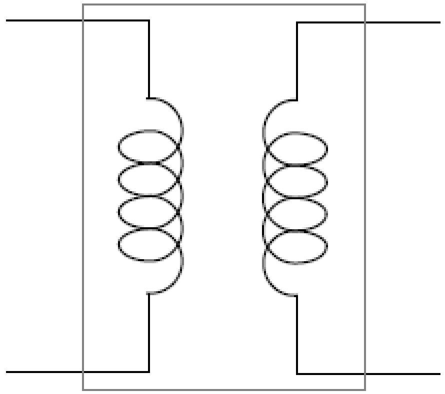
v_e, v_s : tension d'entrée, de sortie du quadripôle

i_e, i_s : courant d'entrée, de sortie du quadripôle

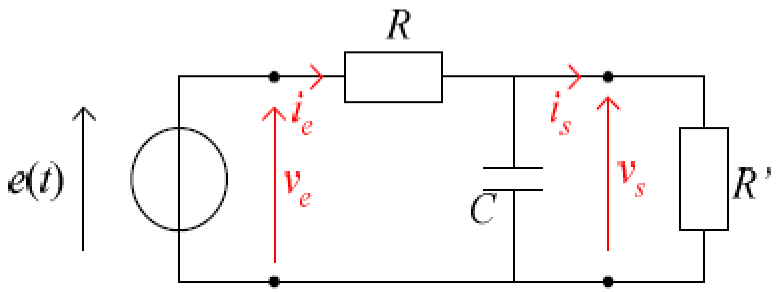
Un quadripôle est dit linéaire lorsqu'il est constitué uniquement de dipôles et éléments de circuit linéaires.

7.1.2 Exemples de quadripoles

Transformateur :

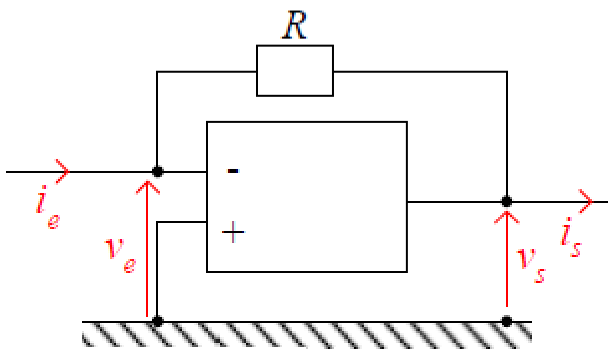


(passif)



(passif)

Montage à amplificateur opérationnel (A.O)



(actif)

7.2 Fonction de transfert d'un quadripôle linéaire en R.S.F (Régime Sinusoïdal Forcé)

$$\underline{v_e} = \underline{V_e} e^{j\omega.t} \qquad \underline{i_e} = \underline{I_e} e^{j\omega.t}$$

$$\underline{v_s} = \underline{V_s} e^{j\omega.t} \qquad \underline{i_s} = \underline{I_s} e^{j\omega.t}$$

Fonction de transfert (Transmittance)

$$\underline{H}(j\omega) \text{ (fonction de transfert)} = \frac{\underline{v_s}}{\underline{v_e}} = \frac{\underline{V_s}}{\underline{V_e}} \text{ (amplification en tension)}$$

$$\text{ou } \frac{\underline{i_s}}{\underline{i_e}} = \frac{\underline{I_s}}{\underline{I_e}} \text{ (amplification en courant)}$$

$$\text{ou } \frac{\underline{V_s}}{\underline{I_e}} \text{ (Transimpédance)}$$

$$\text{ou } \frac{\underline{I_s}}{\underline{V_e}} \text{ (Transadmittance)}$$

Attention : $\underline{H}$ dépend du quadripôle et du reste du circuit.

$$\underline{H}(j\omega) = \left|\underline{H}(j\omega)\right| e^{j\arg(\underline{H}(j\omega))} = G(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

$G(\omega)$: gain du quadripôle.

$\varphi(\omega)$: avance de phase de la sortie sur l'entrée.

On définit le gain en décibel : $G_{\mathrm{dB}}(\omega) = 20\log_{10}(G(\omega))$

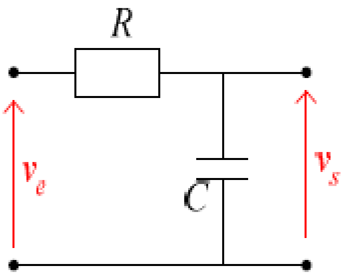
8. Diagramme de Bode

8.1 Définition

Consiste à tracer les graphes G_{dB} et φ en fonction de $\log_{10}(\omega/\omega_0)$, où ω_0 est soit une pulsation caractéristique du circuit, soit $\omega_0 = 1\text{rad.s}^{-1}$. On peut aussi tracer en fonction de ω sur un papier millimétré en échelle logarithmique. (unité : décade).

8.2 Exemple: Circuit RC et CR

Circuit R,C :



Source : $v_e = V_e \cos(\omega.t + \varphi)$

Charge : circuit ouvert ($i_s = 0$)

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{V_s}}{\underline{V_e}} = \frac{\underline{Z_C}}{\underline{Z_C} + \underline{Z_R}} \text{ (diviseur de tension)}$$

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega}. \text{ On pose } \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

Donc $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0}}$

Ainsi, $G(\omega)=\dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$; $\varphi(\omega)=-\arctan\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)$

Diagramme de Bode :

En basse fréquence ($\omega << \omega_0$) :

$\lim\limits_{\omega\mapsto 0} G(\omega)=1$ donc $\lim\limits_{\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)\mapsto-\infty} G_{\mathrm{dB}}=0$. On a donc une asymptote horizontale en $-\infty$.

$\lim\limits_{\omega\mapsto 0} \varphi(\omega)=0$ donc $\lim\limits_{\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)\mapsto-\infty} \varphi(\omega)=0$. On a aussi une asymptote horizontale.

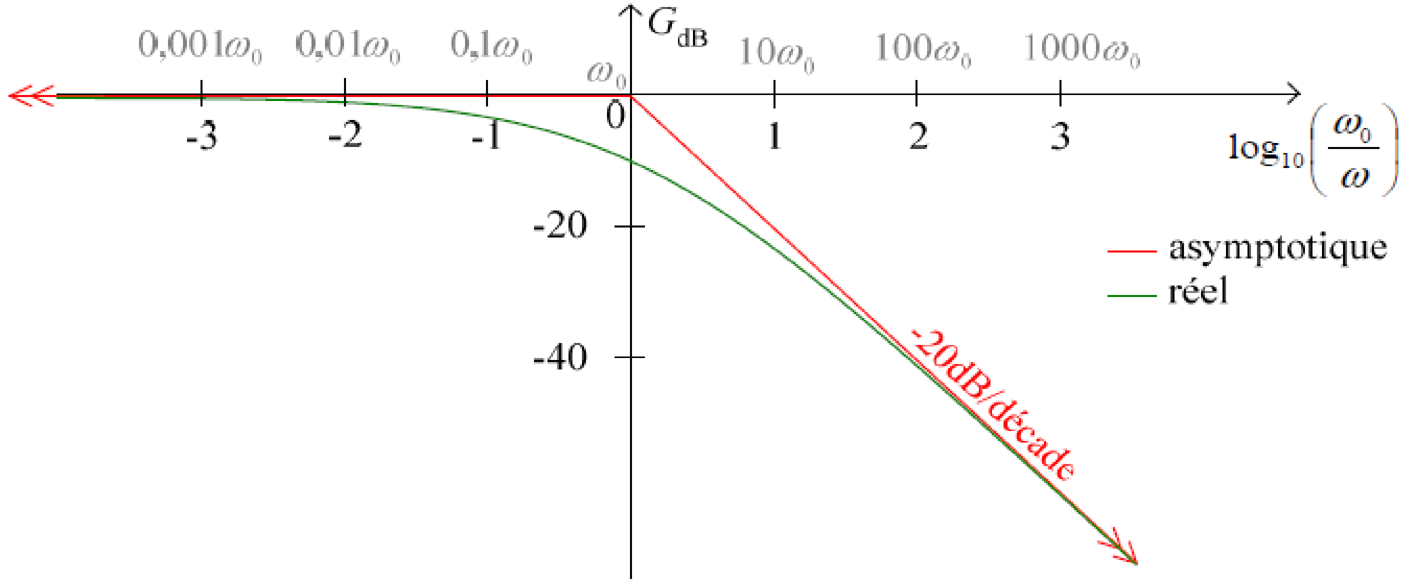
En haute fréquence ($\omega >> \omega_0$) :

$G(\omega)\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{\omega}{\omega_0}$

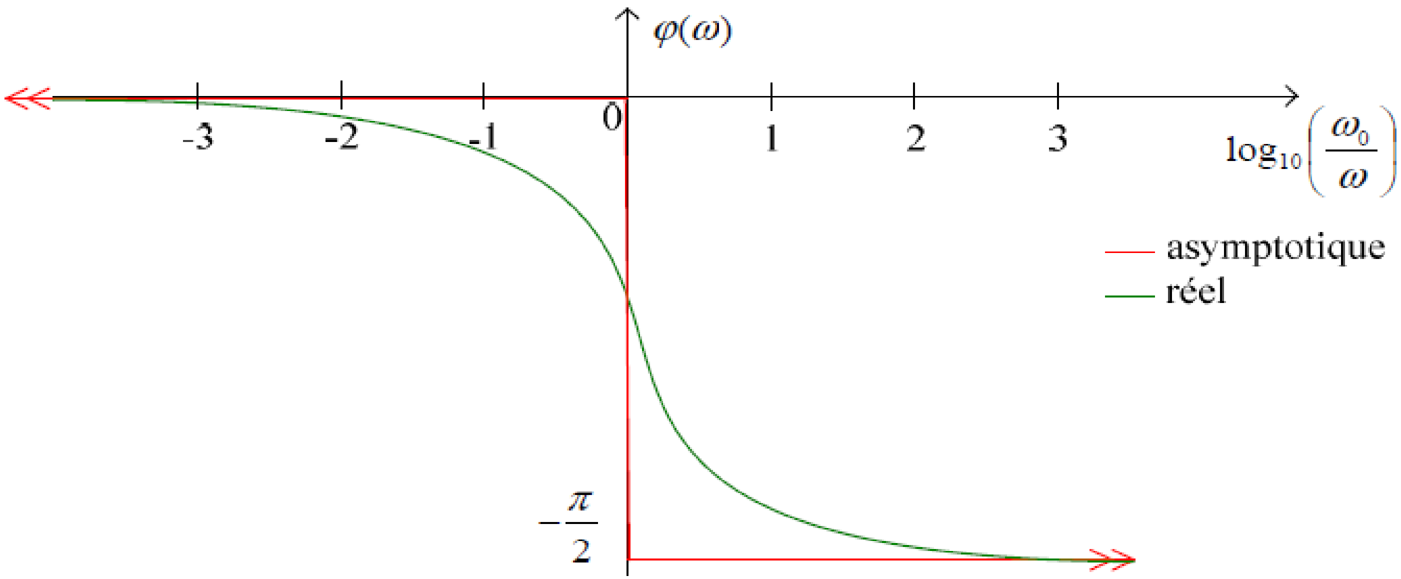
Donc $\lim\limits_{\omega\mapsto+\infty}\left(\log(G\omega)-\log\left(\dfrac{\omega_0}{\omega}\right)\right)=0$

On a une asymptote d'équation $Y=-20X$ (soit $G_{\mathrm{dB}}(\omega)=-20\log\dfrac{\omega_0}{\omega}$) en $+\infty$.

$\lim\limits_{\omega\mapsto+\infty}\varphi(\omega)=-\dfrac{\pi}{2}$. On a donc une asymptote horizontale en $+\infty$

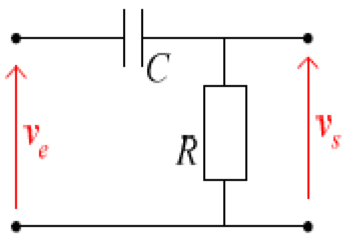


$$G(\omega_0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow G_{dB}(\omega_0) = -3\text{dB}$$



$$\varphi(\omega_0) = -\arctan 1 = -\frac{\pi}{4}$$

Circuit C,R :



Source : $v_e = V_e \cos(\omega.t + \varphi)$

Charge : R_∞ .

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{Z_R}}{\underline{Z_R} + \underline{Z_C}} = \frac{R}{R + \dfrac{1}{jC\omega}} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega} = \frac{j\dfrac{\omega}{\omega_0}}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0}}, \text{ avec } \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

$$G(\omega) = \frac{\dfrac{\omega}{\omega_0}}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \quad ; \quad \varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

En basse fréquence ($\omega << \omega_0$) :

$$G(\omega) \underset{0}{\sim} \frac{\omega}{\omega_0}$$

Donc $\lim_{\omega \to 0} \left(G_{\mathrm{dB}}(\omega) - 20\log \frac{\omega_0}{\omega} \right) = 0$

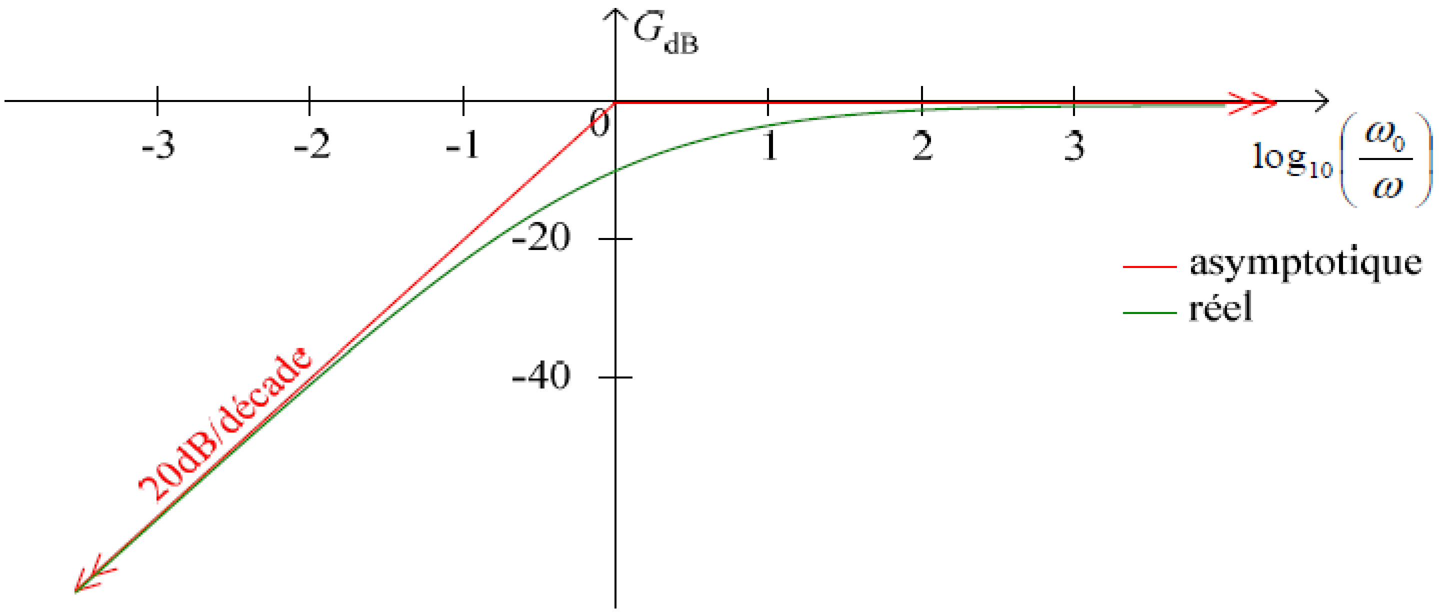
On a une asymptote d'équation $G_{\mathrm{dB}}(\omega) = 20\log \frac{\omega_0}{\omega}$ en $-\infty$.

$$\lim_{\omega \to 0} \varphi(\omega) = \frac{\pi}{2}$$

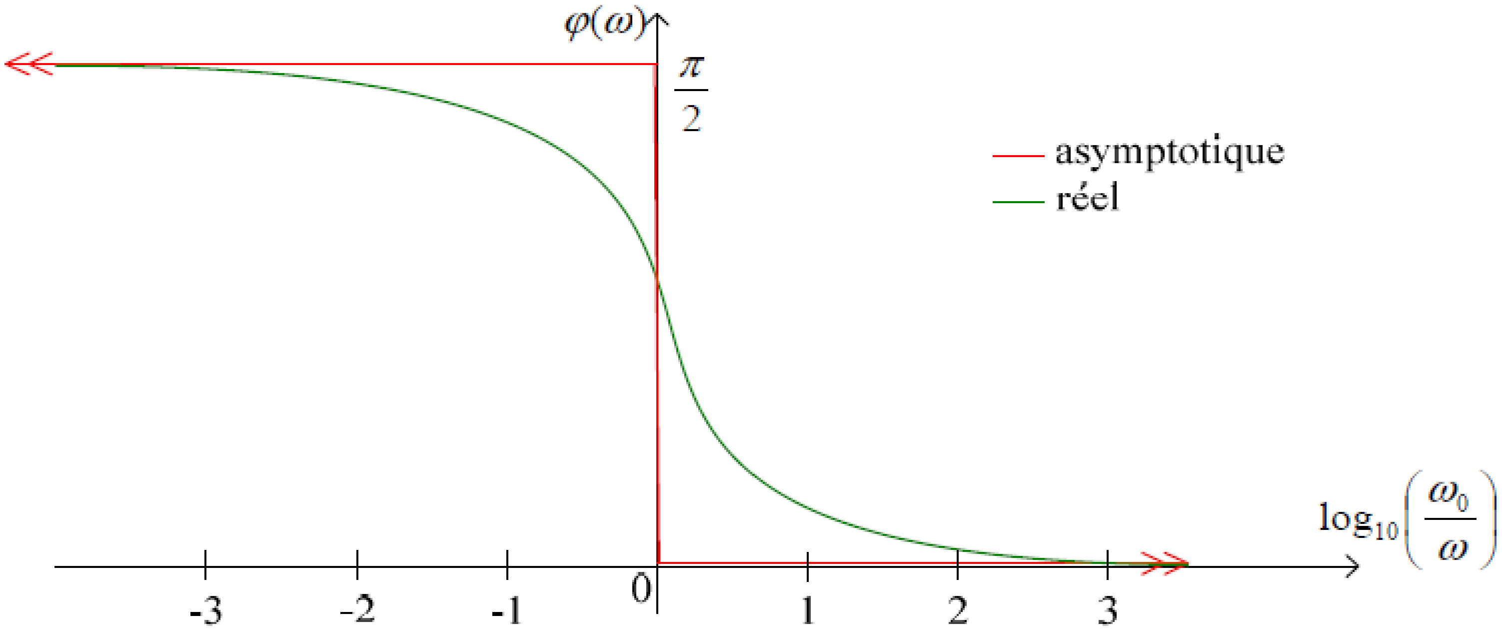
En haute fréquence ($\omega >> \omega_0$) :

$G(\omega) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\omega / \omega_0}{\omega / \omega_0} \underset{+\infty}{\sim} 1$. Donc $\lim_{\omega \to +\infty} G(\omega) = 1$; $\lim_{\omega \to +\infty} G_{\mathrm{dB}}(\omega) = 0$

$$\lim_{\omega \to +\infty} \varphi(\omega) = 0$$



Pour $\varphi(\omega)$, c'est le même que le précédent décalé de $\pi / 2$ vers le haut :



8.3 Diagramme de Bode Asymptotique

Définition du diagramme de Bode asymptotique : c'est la réunion des asymptotes haute fréquence et basse fréquence. (Le diagramme de Bode asymptotique est très proche du réel.) Remarque : on peut avoir plusieurs domaines de fréquences (haute fréquence, basse fréquence et intermédiaire).

9. Filtre: Définition et classification

Un filtre est un quadripôle linéaire.

Bande passante du filtre :

$$BP = \left\{ \omega, G(\omega) \geq \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}} \right\} = \left\{ \omega, G_{\mathrm{dB}}(\omega) \geq G_{\mathrm{dB}}^{\max} - 3\mathrm{dB} \right\}$$

Un filtre est dit :

Passe-bas si la bande passante est de la forme $[0; \omega_1]$.

Passe-haut si la bande passante est de la forme $[\omega_1; +\infty[$.

Passe-bande si la bande passante est de la forme $[\omega_1; \omega_2]$

Coupe-bande si la bande passante est de la forme $[0; \omega_1] \cup [\omega_2; +\infty[$

Pour un quadripôle linéaire, $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{P(j\omega)}{Q(j\omega)}$, où P et Q sont des polynômes de degré $\leq n$; n désigne alors l'ordre du filtre.

Exemple : passe-bas

$$v_e(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos(\omega . n . t + \varphi_n) \quad ; \quad v_s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C'_n \cos(\omega . n . t + \varphi'_n)$$

$$G(n\omega) = \frac{C'_n}{C_n}$$

Pour $\omega << \omega_1$, C'_n et C_n sont comparables (les basses fréquences sont transmises)

Pour $\omega >> \omega_1$, $C'_n << C_n$ (les hautes fréquences sont atténuées)