Chap 1

Suites numériques

I Généralités

1 Suites majorée, suite minorée, suite bornée

- Une suite (U_n) est majorée s'il existe un réel M tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \leq M$
- Une suite (U_n) est minorée s'il existe un réel m tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \geq m$
- Une suite (U_n) est bornée si elle est à la fois majorée et minorée c a d il existe deux réels m, M tel que $\forall n \in \mathbb{N}$ $m \leq U_n \leq M$ ou $|U_n| \leq M'$

2 Sens de variation

Une suite (U_n) est dite croissante si $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} \geq U_n$

- Une suite (U_n) est dite décroissante si $\forall n \in \mathbb{N}$: $U_{n+1} \leq U_n$

Remarque 1

si (U_n) est une suite à terme positif, on peut comparer $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ par rapport à 1

Remarque 2

- Une suite (U_n) croissante est minorée par son premier terme
- Une suite (U_n) décroissante est majorée par son première terme

Exo

Soit (U_n) la suite définie par

$U_0 = \frac{3}{2}$ et $U_{n+1} = U_n^2 - 2U_n + 2$

1) Mq $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \in]1, 2[$

2) Mq (U_n) est decroissante

Solution

1) Montrons que la suite est vraie au 1^{er} rang c a d

$U_0 = \frac{3}{2} \in]1, 2[$

- Supposons que la propriété est vraie au rang n

$1 < U_n < 2$

- Montrons que la propriété est vraie au rang $n+1$ c a d $1 < U_{n+1} < 2$

$$U_n^2 - 2U_n + 2 = U_n^2 - 2U_n + 1 + 1 = (U_n - 1)^2 + 1$$

$$0 < U_n - 1 < 1 \quad 0 < (U_n - 1)^2 < 1 \quad 1 < (U_n - 1)^2 + 1 < 2$$

$$1 < U_{n+1} < 2$$

2) Mq la suite est décroissante

$U_{n+1} - U_n = U_n^2 - 3U_n + 2 \qquad \Delta = 1 > 0 \qquad U_{n_1} = 1 \;,\; U_{n_2} = 2$

$U_n^2 - 3U_n + 2 = (U_n - 1)(U_n - 2)$ ou $1 < U_n < 2 \Rightarrow 0 < U_n - 1 < 2$

$U_n - 1 > 0 \quad U_n - 2 < 0 \qquad U_n - 2 < 0$

donc (U_n) est décroissante

Exo: Déterminer le sens de variation des suites (U_n) et (V_n) définies par

$U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $V_n = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)}$

$U_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} = \sum_{k=1}^{n} + \frac{1}{n+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$

$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{n+1} > 0 \Rightarrow (U_n)$ est ↗

$V_{n+1} = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)(2n+1)}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2n\,(2n+2)} \qquad \frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{\cancel{(2n-1)}\,(2n+1)}{\cancel{2n}\,(2n+2)} \cdot \frac{\cancel{2n}}{\cancel{(2n-1)}}$

$\frac{V_{n+1}}{V_n} \quad 2n+1 < 2n+2 \Rightarrow \frac{2n+1}{2n+2} < 1 \Rightarrow (V_n)$ est ↘

$\frac{V_{n+1}}{V_n} < 1$

II Suites arithmétiques, suite géométrique

1) Suites arithmétiques

a) Définition

On dit qu'une suite U_n est arithmétique s'il existe un réel r tel que $\forall n \in \mathbb{N}$

$U_{n+1} = U_n + r$ ou $U_{n+1} - U_n = r$ le réel r est appelé la raison de $(U$

b) propriétés

Soit (U_n), une suite arithmétique de raison r et $\forall n$ et $m \in \mathbb{N}$

* $U_n = U_0 + nr$
* $U_n = U_m + (n-m)r$

2) Suite géométrique

a) Définition

On dit qu'une suite est geometrique de raison q s'il existe un reel q tel que $U_{n+1} = qU_n$

b) proprietes

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = U_0 q^n$
- $\forall n, m \in \mathbb{N}$, $U_n = U_m q^{n-m}$

3) Suite arithmetico geometrique

a) Definition

On dit qu'une suite (U_n) est arithmetico geometrique s'il existe deux (2) reels a et b tels que $U_{n+1} = aU_n + b$

b) Proposition

Si (U_n) est une suite arithmetico-geometrique avec $a \neq 1$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$,
$U_n = a^n\left(U_0 + \frac{b}{a-1}\right) - \frac{b}{a-1}$

$$U_n = a^n\left(U_0 + \frac{b}{a-1}\right) - \frac{b}{a-1}$$

Demonstration

$U_{n+1} = aU_n + b$

Posons $x = ax + b$

donc $x = \frac{b}{1-a}$

Etudions la suite (V_n) defini par

$V_n = U_n - x = U_n - \frac{b}{1-a}$

$V_{n+1} = U_{n+1} - x =$

$U_{n+1} - \frac{b}{1-a}$

$V_{n+1} = aU_n + b - \frac{b}{1-a}$

$V_{n+1} = aU_n - \frac{ab}{1-a}$

$V_{n+1} = a\left(U_n - \frac{b}{1-a}\right)$

$V_{n+1} = aV_n$

donc (V_n) est une suite geometrique de raison $q = a$

$V_n = V_0 q^n = V_0 \times a^n$ or

$V_0 = U_0 - x = U_0 - \frac{b}{1-a}$

$V_n = \left(U_0 - \frac{b}{1-a}\right) \times a^n$

or $U_n = V_n + x$

Donc $U_n = a^n\left(U_0 - \frac{b}{1-a}\right) + \frac{b}{1-a}$

$U_n = a^n\left(U_0 + \frac{b}{a-1}\right) - \frac{b}{a-1}$

cqfd

Exo: Soit la suite (U_n) defini par $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = 5U_n - 3$ et $U_0 = 1$

1) Exprimer U_n en fct de n

1) Calculer la somme $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$

posons $x = 5x + 3 \Rightarrow x = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$

$\frac{1}{4}(5^0 + 5^1 + \dots + 5^n) + \frac{3}{4}(n+1)$

$U_n = 5^n\left(1 + \left(-\frac{3}{4}\right)\right) + \frac{3}{4}$

$\frac{1}{4}($

$U_n = 5^n\left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{3}{4}$

2) $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$

$S_n = \left(\frac{5^0}{4} + \frac{3}{4}\right) + \left(\frac{5^1}{4} + \frac{3}{4}\right) + \dots + \left(\frac{5^n}{4} + \frac{3}{4}\right)$

$S_n = \frac{(n+1)}{2}\left(1 + 5^n\left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{3}{4}\right)$; $S_n = \left(\frac{n+1}{2}\right)\left[\frac{7}{4} + 5^n\left(-\frac{1}{4}\right)\right]$

$\frac{1}{4} \quad \left(\frac{5^0}{4} + \frac{3}{4}\right) + \left(\frac{5^1}{4} + \frac{3}{4}\right) + \dots + \left(\frac{5^n}{4} + \frac{3}{4}\right)$

c) proposition 2

Si (U_n) est une suite arithmético-géométrique alors on a $U_{n+1} - U_n = a^n(U_1 - U_0)$

$U_{n+1} - U_n = a^n(U_1 - U_0)$

4) Suite récurrente d'ordre 2

Une suite récurrente linéaire d'ordre 2 est définie par : U_0 et U_1 sont donnés

$\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+2} = aU_{n+1} + bU_n$

L'équation $x^2 - ax - b = 0$ est appelé l'équation caractéristique de la suite

~~c'est~~ * si $\Delta > 0$

Soient r_1 et r_2 les racines

$\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = A_1 r_1^n + A_2 r_2^n$ où A_1 et A_2 sont des constantes à déterminer

* si $\Delta = 0$

Soit r_0 la racine double

$\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = (An + B) r_0^n$ où A et B sont des ctes à déterminer

* si $\Delta < 0$

Soient $re^{i\theta}$ et $re^{-i\theta}$ les racines complexes

$\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = A_1 r^n \cos(n\theta) + A_2 r^n \sin(n\theta)$
$= r^n \left[A_1 \cos(n\theta) + A_2 \sin(n\theta)\right]$

Exo: Calculer le terme général des suites suivantes

1) $U_{n+2} = 3U_{n+1} - 2U_n$
$U_0 = U_1 = 1$

2) $U_{n+2} = -U_{n+1} - 2$ et $U_1 = 2$

3) $2U_{n+2} + U_{n+1} - U_n = 0$ et $U_0 = U_1 = 1$

4) $U_{n+2} = 2U_n$, $U_0 = e$ et $U_1 = 0$

1) Solution

1) $x^2 - 3x + 2 = 0$

$\Delta = 9 - 8 = 1$

$x_1 = 1 \quad x_2 = -1$

$U_n = A_1 x_1^n + A_2 x_2^n$

$U_n = A_1 \times 1^n + A_2 (-1)^n$

$U_0 = U_1 = 1$

$\left.\begin{array}{l} U_0 = A_1 + A_2 = 1 \\ U_1 = A_1 - A_2 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A_1 = 1 \\ A_2 = 0 \end{array}$

$U_n = 1^n = 1$

2) $U_{n+2} = -U_{n+1} - 2$

$x^2 + x + 2$

$\Delta = 1 - 8 = -7$

$\Delta = 7i^2$

$\sqrt{\Delta} = i\sqrt{7}$

$r_1 = \frac{-1 - i\sqrt{7}}{2} \qquad r_2 = \frac{-1 + i\sqrt{7}}{2}$

$U_n = A_1 \left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{7}}{2}\right)^n + A_2 \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{7}}{2}\right)^n$

U

$x^2 + x = 0$

$x = -1$

$U_n = A_1 (-1)^n$

$U_1 = A_1 (-1)^1 = 2$

$-A = 2$

$A = -2$

$U_n = -2(-1)^n$

$U_{n+2} = -U_{n+1} - 2$

Cette équation a $\Delta = 0$

$\forall n \quad U_{n+2} = -U_{n+1} - 2$ donc

$U_{n+1} = -U_n - 2$

$U_n = (-1)^{n-1} (U_1)$

$U_n = U_1 \times (-1)^{n-1}$

$2U_{n+2} + U_{n+1} - U_n = 0$

$2x^2 + x - 1 = 0$

$x_1 = -1$

$x_2 = \frac{1}{2}$

$U_n = A_1 (-1)^n + A_2 \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$A_1 + A_2 = 1$

$-A_1 + \frac{1}{2}A_2 = 1$

$\frac{3}{2}A_2 = 2$

$A_2 = \frac{4}{3}$

$A_1 = 1 - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}$

$U_n = -\frac{1}{3}(-1)^n + \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$U_{n+2} = 2U_n$

$x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

$U_n = A_1\sqrt{2}^n + A_2(-\sqrt{2})^n$

$A_1 + A_2 = 0$

$\sqrt{2}A_1 - \sqrt{2}A_2 = 0$

$A_1 + A_2 = 0$

$A_1 - A_2 = 0$

$2A_1 = 0 \Rightarrow A_1 = 0$

$A_2 = 0$

III) Convergence d'une suite

1) Définition

On dit qu'une suite (U_n) est convergente s'il existe un réel l tel que

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = l .$$

Le réel l est unique.

Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente

Ex : $U_n = e^{\frac{1}{n}+2}$

$\lim_{n \to +\infty} U_n = e^2$ La suite (U_n) converge vers e^2

2) Propriété

Soient (U_n), (V_n) et (W_n)

i) si (U_n) et (V_n) sont convergentes telles que $U_n \leq V_n$ alors

$\lim\limits_{n \to +\infty} U_n \leq \lim\limits_{n \to +\infty} V_n$

ii) si (U_n), (V_n) et (W_n) sont convergentes telles que $V_n \leq U_n \leq W_n$

Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = \lim\limits_{n \to +\infty} W_n = l$ implique $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = l$

b) Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et (U_n) une suite de point de I.

Si $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = l$ et si $\lim\limits_{x \to l} f(x) = \alpha$, Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} f(U_n) = \alpha$

c) Corollaire

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et (U_n) une suite de points de I

On pose $U_{n+1} = f(U_n)$

si $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = l$ et si f est continue en l, alors le réel l vérifie l'équation $f(l) = l$

(c'est à dire l est solution de l'équation $f(x) = x$)

d) Convergence et monotonie

Toute suite croissante et majorée est convergente

Toute suite décroissante et minorée est convergente

e) Suite adjacentes

Soit (U_n) et (V_n) deux suites telles que :

i) (U_n) est croissante

ii) (V_n) est décroissante

iii) $\lim\limits_{n \to +\infty} (U_n - V_n) = 0$,

On dit alors que les suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes

f) théorème des suites adjacentes

Deux suite adjacentes sont convergentes et on les même limite

Exo 1

Soit (U_n) la suite définie par $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = U_n\left(2 - \frac{1}{4}U_n\right) \end{cases}$

4) Démontrer que (U_n) est croissante et majorée par 4
2) En déduire que (U_n) est convergente et déterminer sa limite

Exo 2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \longrightarrow \dfrac{x^3 + 6x + 1}{9}$

On pose $U_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = f(U_n)$

$U_{n+1} = \dfrac{U_n^3 + 6U_n + 1}{9}$

1) Mq $f(x) = x$ admet une solution unique $\alpha \in [0, \frac{1}{2}]$

2) Montrer par récurrence que :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq U_n \leq \alpha$

3) Donner la monotonie de (U_n)

4) En déduire que (U_n) est convergente et justifier que $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \alpha$

Exo 3

Soit (a_n) et (b_n) deux suites définies par $a_0 = 2$, $b_n = \dfrac{2}{a_n}$ et $a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$

1) Mq (a_n) et (b_n) sont adjacentes

2) Déterminer la limite de a_n et b_n

Indication Mq $a_n \leq b_n$

Solution Exo 1

1) Dmq (U_n) est croissante et majorée par 4

On a $U_{n+1} = U_n\left(2 - \frac{1}{4}U_n\right)$

Cherchons le signe de $U_{n+1} - U_n$

$U_n\left(2 - \frac{1}{4}U_n\right) - U_n = U_n\left(2 - \frac{1}{4}U_n - 1\right) = U_n\left(1 - \frac{1}{4}U_n\right) \Rightarrow U_n = 0$ ou $U_n = 4$

$\forall U_n \in]0, 4[$ $U_{n+1} - U_n > 0$ ~~alors~~ $0 \leq U_n \leq 4$ Mq c'est vrai !!

- $0 < 1 < 4$ alors vrai au 1^{er} rang
- posons $0 < U_n < 4$
- montrons que $0 < U_{n+1} < 4$ $\quad 0 < U_n < 4 \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{4}U_n < 1 \Leftrightarrow -1 < -\frac{1}{4}U_n < 0$

$1 < 2 - \frac{1}{4}U_n < 2 \Rightarrow 0 < U_n\left(2 - \frac{1}{4}U_n\right) < 8$

on a $U_{n+1} > 0$