Probabilités et statistique

Bases mathématiques de la théorie des probabilités

Module 1

Dr Diagne

Plan

- Introduction
- Notions sur les ensembles
- Expériences et espace échantillonnal
- Calcul des probabilités
- Espaces échantillonnaux finis
- Probabilité conditionnelle
- Probabilité totale et théorème de Bayes

1. Introduction

Dans la nature, on retrouve des phénomènes décrits par des lois *déterministes* ou *probabilistes*.

- Lois *déterministes*: on peut prédire avec certitude

Exemple
Avec la loi gravitationnelle, on peut prédire
a) Le temps de chute d'un objet
b) La position de la terre par rapport au soleil à un moment donné

- Lois *probabilistes*: on ne peut pas le prédire avec exactitude

Exemple
a) Le nombre de panne d'électricité par jour.
b) Le temps d'attente à une connexion Internet.

L'objectif de la première partie de ce cours est d'assigner une probabilité à chacun des résultats possibles d'un phénomène aléatoire.

2. Notions sur les ensembles

- ***Ensemble***: collection ou groupe d'objets de même nature.

Pour définir un ensemble, on peut

→ énumérer ses éléments

$$A = \{-3, -1, 0, 2, 3, 4, 7\} \quad 4 \in A \ , \ 9 \notin A$$

- donner la caractéristique commune

$$A = \{x \in N \ / \ 4 \leq x \leq 7\} \qquad 5 \in A \ , \ 5.3 \notin A$$

$$B = \{x \in R \ / \ 2 \leq x < 3\} \qquad 2.5 \in B \ , \ 3 \notin B$$

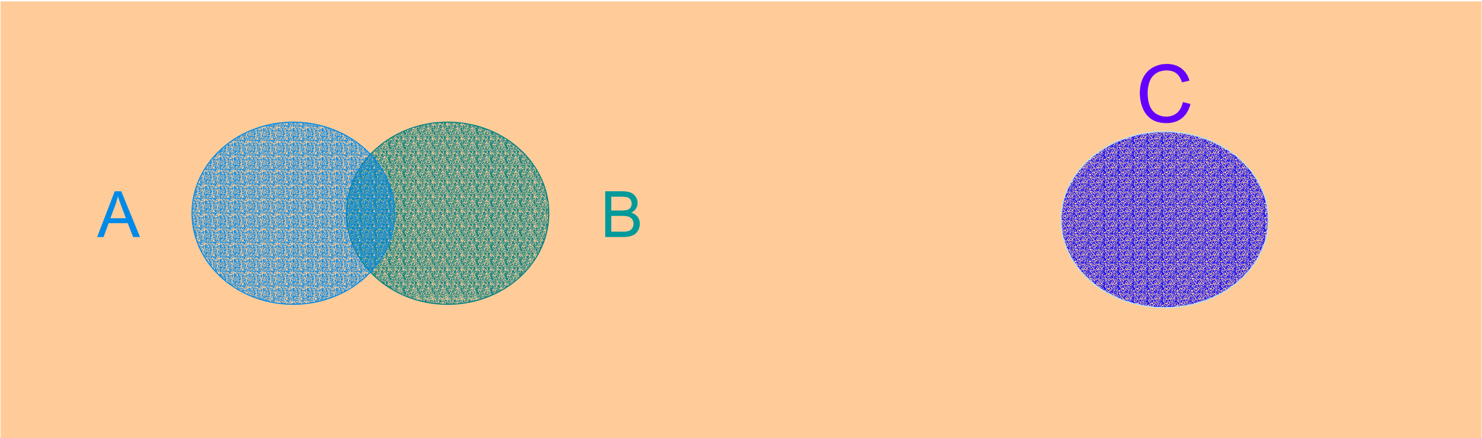
- ***Deux ensembles importants***:

V : ensemble de tous les éléments (ensemble fondamental)

Φ : ensemble qui ne contient aucun élément (ensemble vide)

Façon de présenter les ensembles

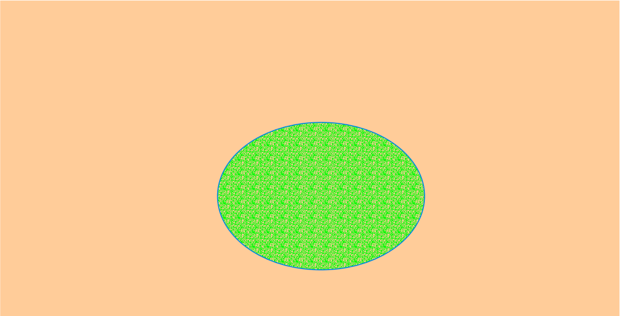
→ Diagramme de Venn **V**



Trois opérations sur les ensembles

Complément: $\overline{\mathrm{A}}$ ou A^{c} **V**

Le complémentaire de A est la partie qui n'est pas en Vert.



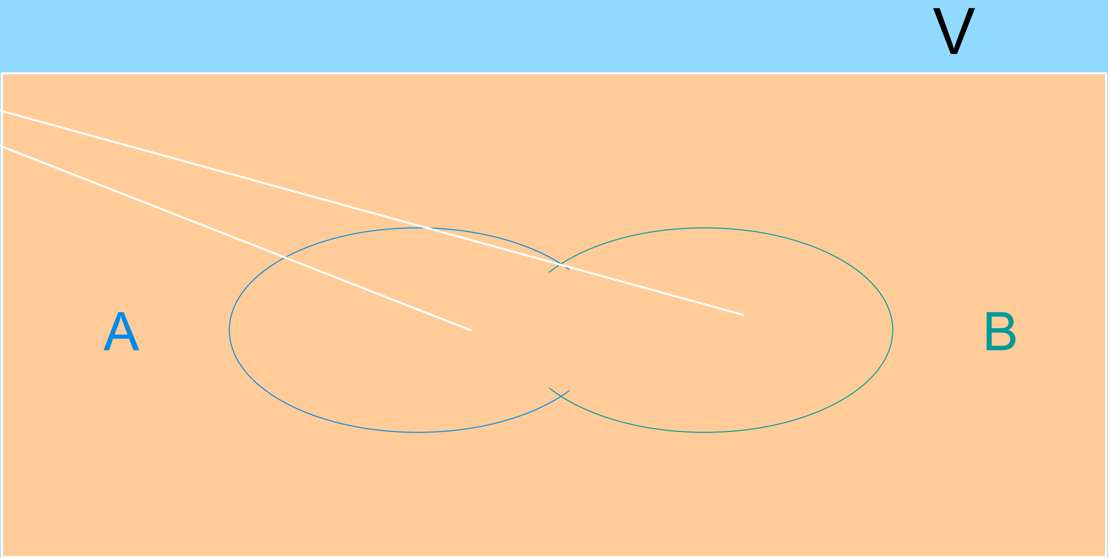
Exemple $\{ \quad \} \quad \{ \quad \}$

$\overline{}$

2) Union: $A \cup B$

Exemple

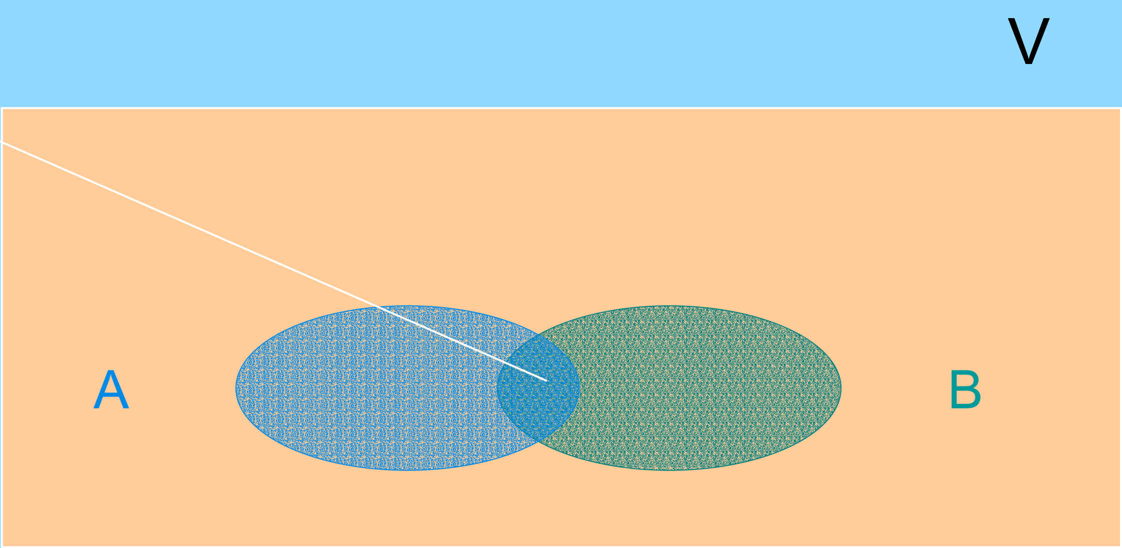
$$V = \{\, a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f \,\}$$
$$A = \{\, b,\ c \,\}$$
$$B = \{\, b,\ e,\ f \,\}$$
$$A \cup B = \{\, b,\ c,\ e,\ f \,\}$$
$$\overline{A \cup B} = \{\, a,\ d \,\}$$



3) Intersection: $A \cap B$

Exemple

$$V = \{\, a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f \,\}$$
$$A = \{\, b,\ c \,\}$$
$$B = \{\, b,\ e,\ f \,\}$$
$$A \cap B = \{\, b \,\}$$
$$\overline{A \cap B} = \{\, a,\ c,\ d,\ e,\ f \,\}$$



➤ ***Règles régissant ces opérations***

1. $A \cup \varnothing = \varnothing$; $A \cap \varnothing = \varnothing$

2. $A \cup V = V$; $A \cap V = A$

3. $A \cup \overline{A} = V$; $A \cap \overline{A} = \varnothing$

4. Commutativité :

$. A \cup B = B \cup A$

$. A \cap B = B \cap A$

5. Associativité :

$. A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

$. A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

6. Distributivité :

$. A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$. A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

7. Identité de Morgan :

$. \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

$. \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

$. A \cap \overline{B} = A \mid A \cap B = \overline{B} \mid \overline{A} \cap \overline{B}$

Exemple

$$V = \{a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f\} \ ; \quad A = \{b,\ c\} \ ; \quad B = \{b,\ e,\ f\}$$

$$\overline{A} = \{a, d, e, f\} \ ; \ \overline{B} = \{a, c, d\}$$

$$A \cup B = \{b,\ c,\ e,\ f\} \quad ; \quad \overline{A \cup B} = \{a,\ d\}$$

$$A \cap B = \{b\} \quad ; \quad \overline{A \cap B} = \{a,\ c,\ d,\ e,\ f\}$$

$$\overline{A} \cup \overline{B} = \{a,\ c,\ d,\ e,\ f\} = \overline{A \cap B}$$

$$\overline{A} \cap \overline{B} = \{a,\ d\} = \overline{A \cup B}$$

$$A \mid A \cap B = \{c\} = A \cap \overline{B}$$

$$\overline{B} \mid \overline{A} \cap \overline{B} = \{c\} = A \cap \overline{B}$$

3. Expériences et espace échantillonnal

- ***Expérience aléatoire*** *EA* :

  Épreuve dont le résultat dépend du hasard.

Exemples

a) lancer une pièce de monnaie

b) lancer un dé

c) mesurer la durée de vie d'un ordinateur en années.

- ***Univers des possibilités*** Ω

  Ensemble de tous les résultats possibles et incompatibles d'une *EA*.

Exemples

a) lancer une pièce de monnaie : $\Omega = \{p\ ,\ f\}$; *p* : pile et *f* : face

b) lancer un dé à six numéros : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

c) mesurer la durée de vie d'un ordinateur : $\Omega = [0\ ,\ +\infty[$

➢ *Événements*

Événement : Ensemble composé de résultats possibles d'une ***EA***.

Tout événement ***E*** est un sous ensemble de Ω. On note $\mathrm{E} \subseteq \Omega$.

Chaque élément de Ω est un événement élémentaire.

$$\boxed{\text{Évènement = Ensemble}}$$

Exemples

a) *EA* : « lancer un dé à six numéros », $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$

A : « obtenir un 5 », $\mathrm{A} = \{5\}$

B : « obtenir un nombre pair », $\mathrm{B} = \{2, 4, 6\}$

b) *EA* : « mesurer la durée de vie d'un ordinateur », $\Omega = [0 \ , \quad +\infty [$

C : « la durée de vie est plus de 10 ans », $C = [10, \quad +\infty [$

D : « la durée de vie est soit inférieure à 5 ans ou entre 15 et 25 ans»,

$$\mathrm{D} = [0 \quad 5] \cup [15 \quad 25]$$

➢ *Événements disjoints*

Deux évènements A et B sont disjoints si $A \cap B = \Phi$
A et B ne peuvent se réaliser en même temps.

Exemple:

EA : « lancer un dé à six numéros » , $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A = \{5\}$; $B = \{2, 4, 6\}$; $C = \{1, 3, 5, 6\}$

- $A \cap B = \Phi$ A et B sont disjoints.
- $A \cap C = \{5\}$ A et B ne sont pas disjoints.
- $B \cap C = \{6\}$ B et C ne sont pas disjoints.

DISJOINTS ≠ INDEPENDANTS

On verra plus loin la notion probabiliste de l'indépendance.

4. Calcul des probabilités

- ***Probabilité***

  Nombre associé à chaque événement **E**, noté **P(E)** , qui satisfait les axiomes suivants :

A1: $0 \leq P(E) \leq 1$ pour tout événement $E \subseteq \Omega$

Une probabilité est toujours comprise entre 0 et 1.

A2: $P(\varnothing) = 0$ et $P(\Omega) = 1$

A3: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

- ***Interprétation***

Soit $A \subseteq \Omega$

Si $P(A) \cong 0$ alors A est un événement presque impossible

Si $P(A) \cong 1$ alors A est un événement presque certain

Exemple

a) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A = \{1, 2\}$ et $B = \{3, 4, 5\}$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ car $A \cap B = \varnothing$

b) $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$

$A_n = \{n\}$ donc $A_i \cap A_j = \varnothing$ si $i \neq j$

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P(\Omega) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

➢ ***Conséquences de ces axiomes***

1. $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$

2. Si A et B sont disjoints

$$P(A \cap B) = P(\varnothing) = 0$$

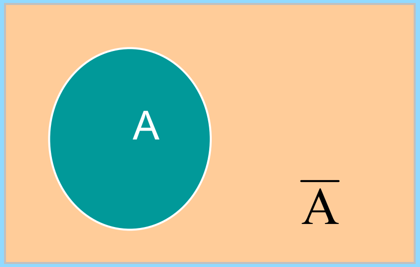
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

3) $A \cup \overline{A} = \Omega$ et $A \cap \overline{A} = \varnothing$

$P(A \cup \overline{A}) = P(\Omega) = 1$

$P(A) + P(\overline{A}) = 1$

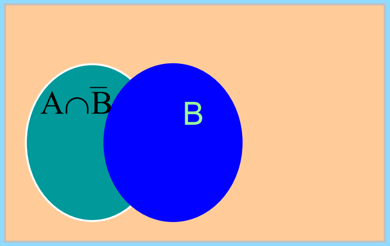
$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$



Cette formule est très utile pour calculer P(au moins 1) = 1 – P(0)

4) $A \cap \overline{B} = A \mid A \cap B = \overline{B} \mid \overline{A} \cap \overline{B}$

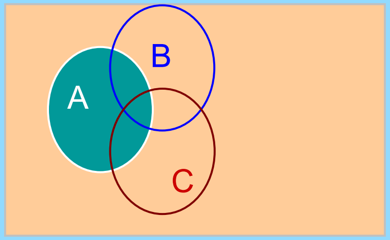
$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = P(\overline{B}) - P(\overline{A} \cap \overline{B})$



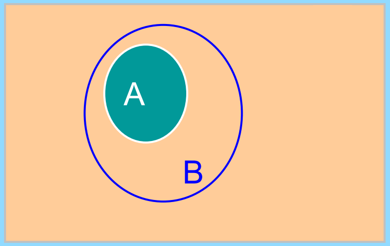
5) $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$

$- P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C)$

$+ P(A \cap B \cap C)$



6) $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$



- ***Application***

Un ingénieur en informatique reçoit 300 ordinateurs portables. Il choisit un portable au hasard.

A : « le portable est un Pentium 4 »

B : « le portable a un écran de 15 pouces »

Il a seulement les références suivantes :

$$P(A) = 0.4 \ ; \ P(B) = 0.3 \ ; \ P(A \cup B) = 0.45$$

a) Quelle est la probabilité que le portable choisi ne soit pas un Pentium 4 ?

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.4 = 0.6$$

b) Quelle est la probabilité que le portable choisi n'ait pas un écran de 15 pouces ?

$$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0.3 = 0.7$$

c) Quelle est la probabilité que le portable choisi soit un Pentium 4 et dispose un écran de 15 pouces ?

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0.4 + 0.3 - 0.45 = 0.25$$

d) Quelle est la probabilité que le portable choisi ne soit pas un Pentium 4 ou ne dispose pas d'un écran de 15 pouces ?

$$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0.25 = 0.75$$

e) Quelle est la probabilité que le portable choisi ne soit pas un Pentium 4 et ne dispose pas un écran de 15 pouces ?

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) + P(\overline{B}) - P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0.6 + 0.7 - 0.75 = 0.55$$

f) Quelle est la probabilité que le portable choisi soit un Pentium 4 et ne dispose pas un écran de 15 pouces ?

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0.4 - 0.25 = 0.15$$

g) Quelle est la probabilité que le portable choisi ne soit pas un Pentium 4 et dispose un écran de 15 pouces ?

$$P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0.3 - 0.25 = 0.05$$

5. Espaces échantillonnaux finis

➢ ***Équiprobabilité***

1. Ω contient un nombre fini d'éléments n. On note $\#\Omega = n$
2. Chaque événement élémentaire a une probabilité $\frac{1}{n}$ de se réaliser.

Exemple

EA : « lancer un dé à six numéros », $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; $\#\Omega = 6$
Chaque élément de Ω a une probabilité $1/6$ de se réaliser.

➢ ***Définition***

Soit E un événement contenu dans Ω. E contient un nombre fini d'éléments.

$$\boxed{P(\mathrm{E}) = \frac{n(\mathrm{E})}{\#\Omega}}$$

$n(\mathrm{E}) = \#\,\mathrm{E}$
nombre d'éléments de Ω favorables à E.

Exemple

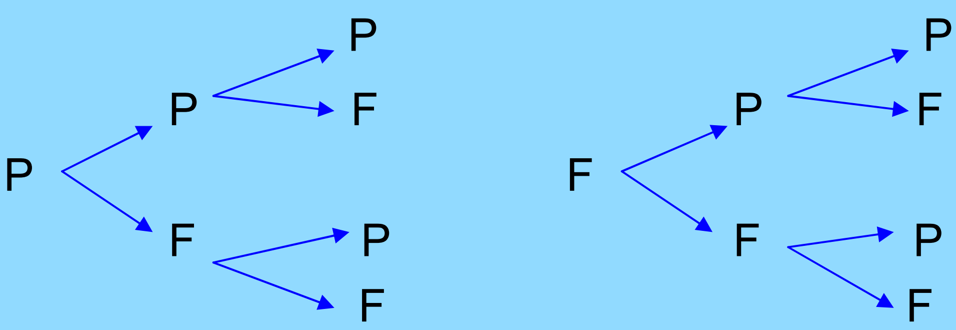
EA:"lancer un dé à six numéros" $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ $\#\Omega = 6$

$\mathrm{E} = \{2,3,5,6\}$ $n(\mathrm{E}) = 4$; $P(\mathrm{E}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

➢ *Méthodes de Dénombrement*

1) Diagramme en Arbre

Expérience: 3 lancers d'une pièce de monnaie



$$\Omega = \{\, \text{PPP},\ \text{PPF},\ \text{PFP},\ \text{PFF},\ \text{FPP},\ \text{FPF},\ \text{FFP},\ \text{FFF} \,\}$$

$$\#\,\Omega = 8 = 2^3 = 2^{\text{nombre de lancers}}$$

Nombre de choix avec remise de *r* objets parmi *n* distincts

$$\boxed{\#\,\Omega = r^n}$$

2) Principe de Multiplication

$$A_1 \quad A_2 \quad .... \quad A_k \quad (ensembles)$$

$$n_1 \quad n_2 \quad ..... \quad n_k \quad (nombres\ d'éléments)$$

Nombre de façons possibles de constituer un ensemble comportant un élément de Chaque A_i

$$\boxed{\#\Omega = n_1 \times n_2 \times .... \times n_k}$$

Exemple

Combien peut-on former de codes postaux au Canada ?
Par exemple, le code postal de l'université Laval est G1K 7P4 .

Un code postal au Canada est composé de

lettre - chiffre - lettre - chiffre - lettre - chiffre

$$\#\Omega = 26 \times 10 \times 26 \times 10 \times 26 \times 10$$

$$= 17\,576\,000$$

3) Permutation

Permutation: ensemble ordonné d'objets distincts abc ≠ bac

a) Nombre de permutations dans *n* objets distincts.

$$\text{objet} \quad 1^{\text{er}} \quad 2^{\text{e}} \quad 3^{\text{e}} \;\ldots\ldots\; (n-1)^{e} \; n^{\text{e}}$$

$$\#\Omega = \; n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots\ldots \times 2 \times 1$$

$$\boxed{\#\Omega = n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots\ldots \times 3 \times 2 \times 1}$$

Exemple

Combien y a-t-il de permutations possibles de abc ?

$$\Omega = \{\, \text{abc}, \;\; \text{acb}, \;\; \text{cab}, \;\; \text{cba}, \;\; \text{bca}, \;\; \text{bac} \,\}$$

$$\#\Omega = 6 = 3 \times 2 \times 1 = 3!$$

b) Nombre de permutations de *r* objets parmi *n* distincts.

$$\begin{array}{llllll} \text{objet} & 1^{\text{er}} & 2^{\text{e}} & 3^{\text{e}} & \ldots\ldots & r^{\text{e}} \end{array}$$

$$\#\Omega = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots\ldots \times [n-(r-1)]$$

$$\boxed{\#\Omega = \frac{n!}{(n-r)!} = P_r^n}$$

Exemple

Football avec 11 joueurs capables de jouer à tous les postes.

L'entraîneur doit composer la ligne de la défense en tenant compte de l'ordre des 4 positions : G, MG, MD, D

$$\#\Omega = 11 \times 10 \times 9 \times 8 = \frac{11!}{(11-4)!} = 7920$$

4) Combinaison

Combinaison : Ensemble d'objets distincts où l'ordre n'a pas d'importance.

- Nombre de combinaisons de *r* objets parmi *n* distincts.

$$\#\Omega = \frac{n!}{(n-r)!r!} = C_r^n = \binom{n}{r} \text{ coefficient binomial}$$

Exemple

Nombre de façons de composer un comité directeur de 3 personnes d'une association de 25 membres.

$$\#\Omega = C_3^{25} = \frac{25!}{3!(25-3)!} = 2300$$

Remarques

$R_1 : C_r^n = C_{n-r}^n$ c'est équivalent de prendre ou ne pas prendre les r objets.

$R_2 : \ C_r^n = C_{r-1}^{n-1} + C_r^{n-1}$

C_{r-1}^{n-1} : nombre de façon de choisir r objets incluant le 1^{er}.

C_r^{n-1} : nombre de façon de choisir r objets excluant le 1^{er}.

Application

On veut choisir dans une association d'ingénieurs comptant 25 membres, un président, un trésorier et un secrétaire. Le cumul est exclu.

Nombre de comités possibles : $\#\,\Omega = C_3^{25} = 2300$

a) Quelle est la probabilité que deux membres refusent de siéger ensemble ?

A : « deux membres refusent de siéger ensemble »

$$\mathrm{n(A)} = C_2^{23} + C_2^{23} + C_3^{23} = 2277$$

$$\mathrm{P(A)} = \frac{2277}{2300} = 0.99$$

b) Quelle est la probabilité que deux membres siégent ensemble ou pas du tout ?

B : « deux membres siégeront ensemble ou pas du tout »

$$\mathrm{n(B)} = C_1^{23} + C_3^{23} = 23 + 1771 = 1794$$

$$\mathrm{P(A)} = \frac{1794}{2300} = 0.78$$

c) Quelle est la probabilité qu'un membre désigné ait absolument une charge ?

C : « un membre désigné doit absolument avoir une charge »

$$n(C) = C_2^{24} = 276$$

$$P(C) = \frac{276}{2300} = 0.12$$

d) Quelle est la probabilité qu'un des membres n'accepte que la charge de président ?

D : « un membre n'accepte que la charge du président »

$$n(D) = C_2^{24} + C_3^{24} = 2300$$

$$P(D) = \frac{2300}{2300} = 1$$

L'association est composée de 15 hommes et 10 femmes.

e) Quelle est la probabilité que les élus soient une femme et deux hommes ?

E : « comité composé d'une femme et de 2 hommes »

$$\mathrm{n(E)} = C_1^{10} \times C_2^{15} = 1050$$

$$\mathrm{P(E)} = \frac{1050}{2300} = 0.45$$

f) Quelle est la probabilité que les élus soient deux femmes et 1 homme ?

F : « comité composé de 2 femmes et 1 homme »

$$\mathrm{n(F)} = C_2^{10} \times C_1^{15} = 675$$

$$\mathrm{P(F)} = \frac{675}{2300} = 0.29$$

Remarque

Si l'ordre est important alors on effectue une *permutation* sinon on utilise la *combinaison*.

6. Probabilité conditionnelle

➢ *Définition*

La probabilité conditionnelle de A étant donné B est définie par

$$\boxed{P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

(P(B) étant supposée non nul)

Exemple 1

A : « gagner le gros lot à la loterie 6 sur 49 »

B : « avoir les 5 premiers numéros gagnants »

$$P(A) = \frac{1}{C_6^{49}} = \frac{1}{13983816} \quad ; \quad P(B) = \frac{C_5^6 \times C_1^{43}}{C_6^{49}} = \frac{258}{13983816}$$

$$P(A/B) = \frac{1}{44} > \frac{1}{13983816} = P(A)$$

- Avoir les cinq premiers bons numéros augmente la chance de gagner le gros lot.
- Connaître des informations *a priori* peut augmenter la probabilité.

Exemple 2

EA : « lancer 2 dés à six numéros »

A : « obtenir des nombres différents »

B : « somme des nombres est égale à 6 »

$$\Omega = \{(i\,,j) :\ 1 \le i \le 6\,,\ 1 \le j \le 6\ \} = \{(1\,,1);(1\,,2);(1\,,3);.....;(6\,,6)\} \quad ; \quad \#\Omega = 6^2 = 36$$

$$A = \{(i\,,j) :\ 1 \le i \le 6\,, 1 \le j \le 6\ \text{ et }\ i \ne j\} \quad ; \quad \#A = 36 - 6 = 30$$

$$B = \{(i\,,j) :\ 1 \le i \le 6\,, 1 \le j \le 6\ \text{ et }\ i + j = 6\} \quad ; \quad \#B = 5$$

$$A \cap B = \{(i\,,j) :\ 1 \le i \le 6\,, 1 \le j \le 6\,,\ i \ne j\ \text{ et }\ i + j = 6\} \quad ; \quad \#A \cap B = 4$$

$$P(A) = 30/36 = 0.8\overline{3} \quad ; \quad P(B) = 5/36 = 0.13\overline{8} \quad ; \quad P(A \cap B) = 4/36 = 0.1\overline{1}$$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{4/36}{5/36} = \frac{4}{5} = 0.8$$

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{4/36}{30/36} = \frac{4}{30} = 0.1\overline{3}$$

Remarques

R1 : On doit d'abord calculer l'intersection de A et B puis la probabilité de B et finalement la probabilité conditionnelle de A étant donné B.

R2 : Si A et B sont distincts alors

$$
\begin{aligned}
A \cap B = \emptyset &\Rightarrow P(A \cap B) = 0 \\
&\Rightarrow P(A/B) = 0 \quad \text{et} \quad P(B/A) = 0
\end{aligned}
$$

R3 :
$$
\begin{aligned}
\text{Si } B \subseteq A \Leftrightarrow A \cap B = B \\
&\Rightarrow P(A \cap B) = P(B) \\
&\Rightarrow P(A/B) = 1
\end{aligned}
$$

Indépendance

Définition

Deux événements A et B sont indépendants si

$$\boxed{\begin{array}{c} P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \\ \text{ou} \\ P(A/B) = P(A) \quad \text{et} \quad P(B/A) = P(B) \end{array}}$$

Le fait qu'un événement se soit réalisé n'influence pas l'autre.

Exemple

Une urne contient 6 boules blanches et 9 boules rouges.

EA : « tirer successivement 2 boules »

Quelle est la probabilité que les 2 boules soient rouges ?

R_i : "la i^e boule tirée est rouge"

$R_1 \cap R_2$: "la $1^{ère}$ et la 2^e boules tirées sont rouges"

a) Si le tirage est avec remise alors les événements R_1 et R_2 sont indépendants.

$$P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \times P(R_2) = \frac{9}{15} \times \frac{9}{15} = \frac{81}{225} = 0.36$$

b) Si le tirage est sans remise alors les événements R_1 et R_2 sont dépendants.

$$P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \times P(R_2 / R_1) = \frac{9}{15} \times \frac{8}{14} = \frac{72}{210} = 0.34$$

Formule générale

Soient A , B , C et D des événements.

$$P(A \cap B \cap C \cap D) = P(A) \times P(B/A) \times P(C / A \cap B) \times P(D/A \cap B \cap C)$$

Si A , B , C et D sont indépendants alors

$$P(A \cap B \cap C \cap D) = P(A) \times P(B) \times P(C) \times P(D)$$

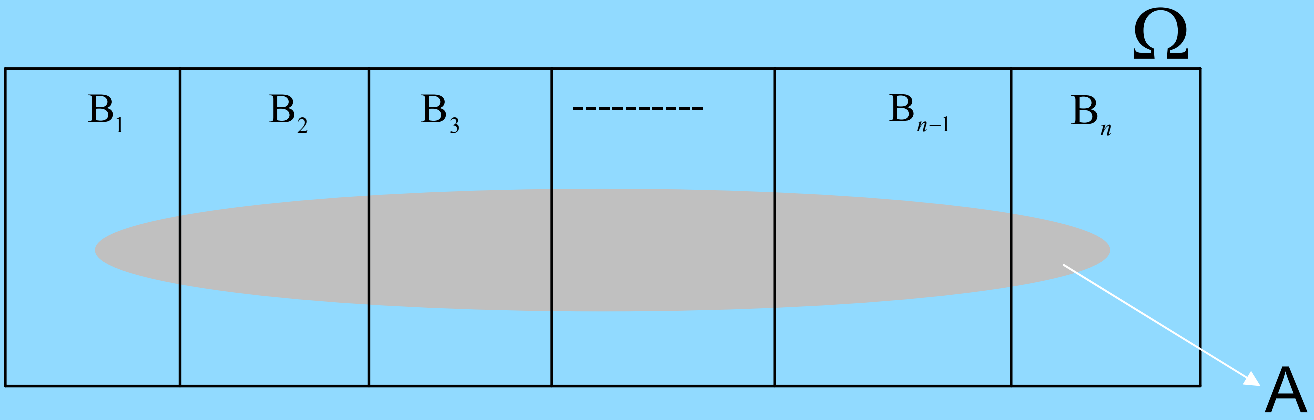
7. Probabilité totale et théorème de Bayes

Partition de Ω : B_1 , B_2 , ….. , B_n

Disjoints $B_i \cap B_j = \varnothing$ pour $i \neq j$, $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = B_1 \cup B_2 \cup ..... \cup B_n = \Omega$

Tout événement $A \subseteq \Omega$ peut s'écrire :

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} (B_i \cap A) = (B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap A) \cup ..... \cup (B_n \cap A)$$



1. *Probabilité totale*

$$\mathrm{P(A)} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P(B}_i \cap \mathrm{A)} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P(B}_i\mathrm{)P(A/B}_i\mathrm{)}$$
$$= \mathrm{P(B}_1\mathrm{)P(A/B}_1\mathrm{)} + \mathrm{P(B}_2\mathrm{)P(A/B}_2\mathrm{)} + \ldots.. + \mathrm{P(B}_n\mathrm{)P(A/B}_n\mathrm{)}$$

2. *Théorème de Bayes*

$$\mathrm{P(B}_k\mathrm{/A)} = \frac{\mathrm{P(B}_k \cap \mathrm{A)}}{\mathrm{P(A)}} = \frac{\mathrm{P(B}_k\mathrm{)P(A/B}_k\mathrm{)}}{\sum_{i=1}^{n}\mathrm{P(B}_i\mathrm{)P(A/B}_i\mathrm{)}} \quad ; \quad k = 1,2,3,\ldots..,n$$

postérieur à A

antérieur à B_k

Application

Un ingénieur reçoit de 3 fabricants des microprocesseurs parmi lesquels certains sont défectueux.

Fabricant	Proportion fournie	Proportion défectueuse
1	0.15	0.02
2	0.80	0.01
3	0.05	0.03

B_i : « Le microprocesseur provient du fabricant i » ; i = 1, 2, 3.

A : « Le microprocesseur est défectueux»

$$P(B_1) = 0.15 \quad ; \quad P(B_2) = 0.80 \quad ; \quad P(B_3) = 0.05$$

$$P(A/B_1) = 0.02 \quad ; \quad P(A/B_2) = 0.01 \quad ; \quad P(A/B_3) = 0.03$$

a) Quelle est la proportion totale de microprocesseurs défectueux ?

Le théorème des probabilités totales est utilisé.

$$A = \bigcup_{i=1}^{3} (B_i \cap A) = (B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap A) \cup (B_3 \cap A)$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(B_i)P(A/B_i) = 0.15 \times 0.02 + 0.80 \times 0.01 + 0.05 \times 0.03 = 0.0125$$

$$P(A) = 0.0125 = 1.25\%$$

b) Si un microprocesseur est défectueux, quelle est la probabilité qu'il provienne du fabricant 1 ?

Le théorème de Bayes est utilisé.

$$P(B_1/A) = \frac{P(B_1 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B_1)P(A/B_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(B_i)P(A/B_i)} = \frac{0.15 \times 0.02}{0.0125} = 0.24$$

c) Si un microprocesseur est défectueux, quelle est la probabilité qu'il provienne du fabricant 2 ?

$$P(B_2/A) = \frac{P(B_2 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B_2)P(A/B_2)}{\sum_{i=1}^{3} P(B_i)P(A/B_i)} = \frac{0.8 \times 0.01}{0.0125} = 0.64$$

d) Si un microprocesseur est défectueux, quelle est la probabilité qu'il provienne du fabricant 3 ?

$$P(B_3/A) = \frac{P(B_3 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B_3)P(A/B_3)}{\sum_{i=1}^{3} P(B_i)P(A/B_i)} = \frac{0.05 \times 0.03}{0.0125} = 0.12$$

Remarque

- $\sum_{k=1}^{n} P\left(B_k/A\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{P(B_k \cap A)}{P(A)} = \frac{\sum_{k=1}^{n} P(B_k)P(A/B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A/B_i)} = 1$