Probabilités et statistique

Lois de probabilité discrètes

Module 4

Plan

- Loi de Bernouilli
- Loi binomiale
- Loi géométrique
- Loi de Pascal
- Loi de Poisson

1. Loi de Bernouilli

- ***Définition***

L'expérience de Bernouilli comporte seulement 2 résultats: *succès* ou *échec*

X : « nombre de succès en 1 expérience » $R_X = \{0, 1\}$

$$X = \begin{cases} 1 & \text{si le résultat est un succès} \\ 0 & \text{si le résultat est un échec} \end{cases}$$

X suit une loi de Bernouilli de paramètre p.

p : la probabilité de succès.

$$\boxed{X \sim B(1, p)}$$

Exemple

EA: Tirer une carte d'un jeu de 52 cartes.

X : « la carte tirée est un as » $R_X = \{0, 1\}$

$$X = \begin{cases} 1 & \text{si la carte est un as} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad ; \quad X \sim B(1, 1/13)$$

➢ Fonction de masse de la loi de Bernouilli

$$\boxed{\begin{array}{l} P(\mathrm{X}=x)=p^{x}(1-p)^{1-x} \\ x\in\{0,1\} \end{array}}$$

➢ Espérance

$$E(\mathrm{X})=\sum_{x\in R_{\mathrm{X}}} x\,P(\mathrm{X}=x)=0\times(1-p)+1\times p=p$$

$$\boxed{E(\mathrm{X})=p}$$

➢ Variance

$$V(\mathrm{X})=E(\mathrm{X}^{2})-[E(\mathrm{X})]^{2}=(0^{2}\times(1-p)+1^{2}\times p)-p^{2}=p-p^{2}=p(1-p)$$

$$\boxed{V(\mathrm{X})=p(1-p)}$$

Exemple : Le jeu de cartes

- $P(\mathrm{X}=x)=\left(\frac{1}{13}\right)^{x}\left(1-\frac{1}{13}\right)^{1-x}\Rightarrow P(\mathrm{X}=0)=1-\frac{1}{13}=\frac{12}{13}$ et $P(\mathrm{X}=1)=\frac{1}{13}$
- $E(\mathrm{X})=\frac{1}{13}$ et $V(\mathrm{X})=\frac{1}{13}\left(1-\frac{1}{13}\right)=\frac{1}{13}\times\frac{12}{13}=\frac{12}{189}$

2. Loi binomiale

- ***Définition***

Il s'agit de *n* expériences de Bernouilli indépendantes avec la même probabilité de succès.

X : « Nombre de succès dans les *n* expériences » $R_X = \{ 0, 1, 2, \ldots\ldots, n \}$

X suit une loi binomiale de paramètres n et p.

p : probabilité de succès

n : nombre d'expériences.

$$\boxed{X \sim B(n\,,\,p)}$$

Exemple: Puces défectueuses

EA : « Tirer 20 puces avec remise d'un lot de 100 puces dont 5 sont défectueuses »

X : « Nombre de puces défectueuses dans les 20 tirages »

$$n = 20 \text{ et } p = 5/100 = 0.05 \quad ; \quad X \sim B(20\,,0.05) \quad ; \quad R_X = \{ 0\,,1\,,2\,,\ldots\ldots,20 \}$$

➢ Fonction de masse de la loi binomiale

$$P(\mathrm{X}=x)=C_x^n p^x (1-p)^{n-x}$$
$$x \in \{0, 1, 2, \ldots\ldots, n\}$$

Exemple : Puces défectueuses

$$\mathrm{X} \sim B(20\,, 0.05)$$
$$P(\mathrm{X}=x)=C_x^{20}(0.05)^x(1-0.05)^{20-x}$$
$$x \in \{0, 1, 2, \ldots\ldots, 20\}$$

a) Quelle est la probabilité de ne pas tirer de puces défectueuses ?

$$P(\mathrm{X}=0)=C_0^{20}(0.05)^0(1-0.05)^{20} = 1\times 1\times 0.95^{20} = 0.358$$

b) Quelle est la probabilité d'avoir au moins 2 puces défectueuses ?

$$P(\mathrm{X}\geq 2)=1-P(\mathrm{X}<2)=1-\left[P(\mathrm{X}=0)+P(\mathrm{X}=1)\right]$$
$$=1-\left[0.358+C_1^{20}(0.05)^1(1-0.05)^{20-1}\right]=1-0.358-0.377=0.265$$

Espérance mathématique et variance

Soit la variable $X \sim B(n, p)$ alors X peut s'écrire sous la forme

$$X = X_1 + X_2 + X_3 + \ldots.. + X_n$$

avec les X_i indépendants et suivant la même loi $B(1, p)$

$$E(X) = E(X_1 + X_2 + \ldots.. + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \ldots.. + E(X_n)$$
$$= p + p + \ldots.. + p = np$$

$$E(X) = n \times p$$

$$V(X) = V \times (X_1 + X_2 + X_3 + \ldots.. + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \ldots.. + V(X_n)$$
$$= p(1-p) + p(1-p) + \ldots.. + p(1-p) = np(1-p)$$

$$V(X) = n \times p \times (1-p)$$

Exemple : Puces défectueuses

$$E(X) = 20 \times 0.05 = 1 \quad ; \quad V(X) = 20 \times 0.05 \times 0.95 = 0.95$$

3. Loi géométrique

Il s'agit d'expériences de Bernouilli indépendantes pour 1 succès.

X : « le nombre d'expériences nécessaires pour obtenir le 1er succès »
Le nombre de succès est fixé à 1. Il faut chercher le nombre d'expériences.

X suit une loi géométrique de paramètre p.

p : probabilité de succès.

$\mathrm{R_X} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots..\}$

$$\boxed{\mathrm{X} \sim G(p)}$$

Exemple: Jeu de 52 cartes

EA : « Tirer des cartes avec remise d'un jeu de 52 cartes »
X : « nombre de cartes nécessaires pour obtenir un 1er as »

Probabilité de succès $p = 4/52 = 1/13$

$\mathrm{R_X} = \{1, 2, 3, \ldots..\}$

$\mathrm{X} \sim G(1/13)$

Fonction de masse de la loi géométrique

$$P(\mathrm{X}=x)=(1-p)^{x-1}\,p$$
$$x\in\{1,2,3,.....\}$$

Exemple : Jeu de 52 cartes $\mathrm{X}\sim G(1/13)$

a) Quelle est la probabilité d'obtenir le 1er succès au 7ème tirage ?

$$\mathrm{X}=7 \Leftrightarrow \mathrm{EEEEEES} \quad ; \quad \mathrm{E}:\text{échec et } \mathrm{S}:\text{succès}$$

$$P(\mathrm{X}=7)=\left(1-\tfrac{1}{13}\right)^{6}\left(\tfrac{1}{13}\right)=0.048$$

b) Quelle est la probabilité d'obtenir le 1er succès avec moins de 3 tirages ?

$$P(\mathrm{X}<3)=P(\mathrm{X}=1)+P(\mathrm{X}=2)=\left(1-\tfrac{1}{13}\right)^{0}\left(\tfrac{1}{13}\right)+\left(1-\tfrac{1}{13}\right)^{1}\left(\tfrac{1}{13}\right)=0.077+0.071=0.148$$

Remarque

$$P(\mathrm{X}>x)=P\Big(\overbrace{EEEE....E}^{x\ \text{échecs consécutifs avant le } 1^{\text{er}}\text{ succès}}\Big)=(1-p)^{x}$$

c) Quelle est la probabilité d'obtenir le 1er succès avec plus de 5 tirages ?

$$P(\mathrm{X}>5)=\left(1-\tfrac{1}{13}\right)^{5}=0.67$$

Espérance mathématique et variance

$$\boxed{\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \frac{1}{p}}$$

Plus la probabilité d'un succès est faible plus le nombre d'essais est élevé pour l'obtenir.

$$\boxed{V(\mathrm{X}) = \frac{1-p}{p^2}}$$

Exemple : Jeu de 52 cartes

$$\mathrm{X} \sim \mathrm{G}(1/13)$$

$$E(\mathrm{X}) = \frac{1}{1/13} = 13$$

$$V(\mathrm{X}) = \frac{1-(1/13)}{(1/13)^2} = \frac{12/13}{1/13^2} = 12 \times 13 = 156$$

➢ Propriété d'absence de mémoire de la loi géométrique

Exemple

$$X \sim G(p)$$

$$P(X > 15 / X > 10) = \frac{P(\{X > 15\} \cap \{X > 10\})}{P(X > 10)}$$

$$\{X > 15\} \subset \{X > 10\} \Rightarrow \{X > 15\} \cap \{X > 10\} = \{X > 15\}$$

$$P(X > 15 / X > 10) = \frac{P(X > 15)}{P(X > 10)} = \frac{(1-p)^{15}}{(1-p)^{10}} = (1-p)^{5} = P(X > 5)$$

La loi ne se souvient pas de la totalité des échecs précédents.

En général :

$$\boxed{P(X > x + t / X > x) = (1-p)^{t}}$$

(En exercice).

La probabilité ne dépend pas de la valeur de x .

4. Loi de Pascal

On fixe le nombre de succès et on s'intéresse au nombre d'épreuves nécessaires pour atteindre ces succès.

X : « le nombre d'expériences nécessaires pour obtenir le r succès »

X suit une loi de Pascal de paramètres r et p

r : le nombre de succès requis

p : la probabilité de succès

$R_X = \{ r , r+1 , r+2 , ... \}$

$$\boxed{X \sim Pas(r , p)}$$

Remarque

$$Pas(1 , p) = G(p)$$

Exemple : *Jeu de 52 cartes*

X : « le nombre de cartes nécessaire pour obtenir 4 as »

$X \sim Pas(4 , 1/13)$

Fonction de masse de la loi de Pascal

$$P(\mathrm{X}=x)=C_{r-1}^{x-1}\,p^{r}(1-p)^{x-r}$$
$$x\in\{\,r+1\,,r+2\,,r+3\,,.....\,\}$$

Exemple: Jeu de 52 cartes

X : « le nombre de cartes nécessaire pour obtenir 4 as »

$$\mathrm{X}\sim Pas\,(4\,,1/13)$$

- Quelle est la probabilité d'obtenir le 4^{e} as au 10^{e} tirage ?

$$\mathrm{X}=10\Leftrightarrow \text{obtenir le } 4^{e} \text{ as à la } 10^{e} \text{ carte tirée.}$$
$$P(\mathrm{X}=10)=C_{3}^{9}(1/13)^{4}(12/13)^{6}=0.0013$$

Espérance et variance de la loi de Pascal

$X \sim Pas(r, p)$ alors X s'écrit :

$X = X_1 + X_2 + X_3 + ... + X_r$

Les variables X_i sont indépendantes et suivent la même loi $G(p)$.

- $E(X) = E(X_1 + X_2 + ... + X_r) = E(X_1) + E(X_2) + ... + E(X_r)$

$$= \frac{1}{p} + \frac{1}{p} + ... + \frac{1}{p} = \frac{r}{p}$$

$$\boxed{E(X) = \frac{r}{p}}$$

- $V(X) = V(X_1 + X_2 + ... + X_r) = V(X_1) + V(X_2) + ... + V(X_r)$

$$= \frac{1-p}{p} + \frac{1-p}{p} + ... + \frac{1-p}{p} = \frac{r(1-p)}{p}$$

$$\boxed{V(X) = \frac{r(1-p)}{p}}$$

Exemple

$X \sim Pas(4, 1/13)$; $E(X) = \frac{4}{1/13} = 4 \times 13 = 52$; $V(X) = \frac{4 \times (12/13)}{1/13^2} = 4 \times 12 \times 13 = 624$

5. Loi de Poisson

Il s'agit d'une approximation de la loi binomiale lorsque 2 conditions sont satisfaites.

- Le nombre d'expériences est grand
- La probabilité de succès est petite

La loi de Poisson est utilisée suivant 2 contextes: *temporel* et *spatial*.

A. Contexte temporel

X : « nombre d'événements indépendants dans un intervalle de temps fixe »

X suit une loi de Poisson de paramètre λ.

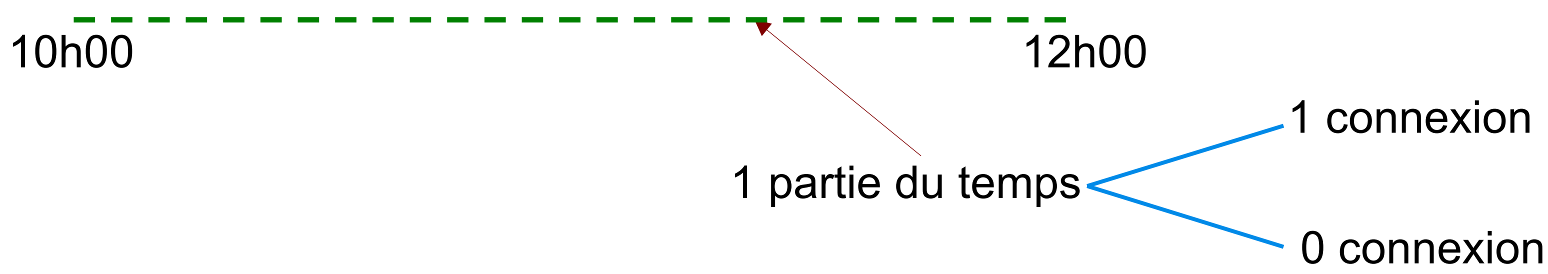
λ : nombre moyen d'événements dans l'intervalle de temps fixé.

$$R_X = \{0, 1, 2, 3, ...\}$$

$$\boxed{X \sim Pois(\lambda)}$$

Exemple : Connexion à une page Web

X : « nombre de connexions à une page Web de 10h00 à 12h00 »



Si n = nombre total de parties du temps

p = probabilité de connexion dans une partie du temps.

$\bullet\ \mathrm{X} \sim \mathrm{B}(n\,,\,p)$

Comme n est grand et p est petit

$\bullet\ \mathrm{X} \sim Pois(\lambda)$

$\lambda = n \times p$

nombre moyen de connexions entre 10h00 et 12h00.

B. Contexte spatial

X : « nombre d'objets sur une surface bornée »

$\text{X suit une loi de Poisson de paramètre } \lambda.$

$\lambda : \text{nombre moyen d'objets sur la surface bornée.}$

$\mathrm{R}_{\mathrm{X}} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\ldots\}$

Exemple

X : « nombre d'internautes résidents une ville »

$n = \text{nombre de carrés}$

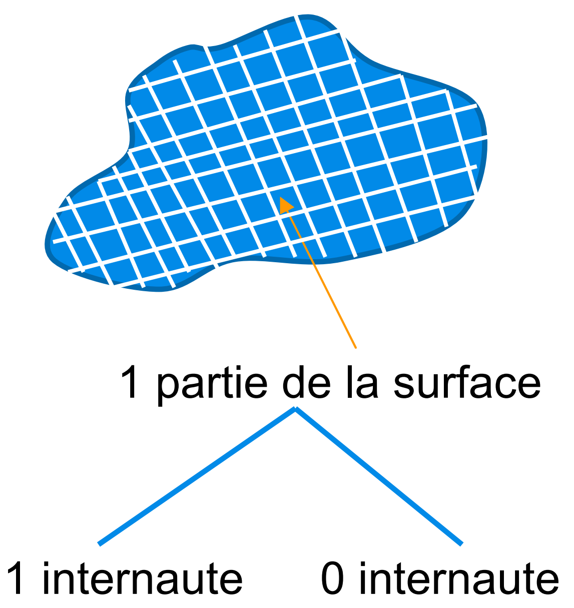
$p = \text{probabilité d'avoir un internaute dans un carré.}$

$\bullet\ \mathrm{X} \sim B(n, p)$

n étant grand et p petit alors

$\bullet\ \mathrm{X} \sim Pois(\lambda)$

$\lambda = n \times p : \text{ nombre moyen d'internautes de la ville.}$



➢ Fonction de masse de la loi de Poisson

$$\boxed{P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} \quad ; \quad x \in \{0, 1, 2, \ldots\ldots\}}$$

Résultats

- $e^{\lambda} = 1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \ldots\ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$

- $\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \times e^{\lambda} = e^{0} = 1$

➢ Espérance mathématique et variance

- $E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} x\, P(X = x) = \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda e^{0} = \lambda$

- $E(X^2) = \sum_{x=0}^{\infty} x^2\, P(X = x) = \sum_{x=0}^{\infty} x^2 \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} x \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\lambda^x}{(x-1)!}\right)$

$$= \lambda e^{-\lambda} \frac{d}{d\lambda}\left(\lambda \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}\right) = \lambda e^{-\lambda} \frac{d}{d\lambda}\left(\lambda e^{\lambda}\right) = \lambda e^{-\lambda}\left(e^{\lambda} + \lambda e^{\lambda}\right) = \lambda + \lambda^2$$

- $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = (\lambda + \lambda^2) - \lambda^2 = \lambda$

$$\boxed{E(X) = V(X) = \lambda}$$

Exemple

Un site Internet reçoit en moyenne 5 visites entre 8h et 9h.

- Quelle est la probabilité qu'il en reçoive 10 entre 8h et 9h ?

X : « nombre de visites reçues entre 8h et 9h »

- $X \sim Pois(5)$
- $P(X=10) = \dfrac{e^{-5} \times 5^{10}}{10!} = 0.018$

> **Comparaison de la loi binomiale à la loi de Poisson**

$X \sim B(1000\ ,\ 1/100)$ versus $X \sim Pois(1000 \times 1/100) = Pois(10)$

$P(X=7) = C_7^{1000}(1/100)^7(99/100)^{993}$ versus $P(X=7) = e^{-10}\dfrac{10^7}{7!}$

$= 0.089986$ $= 0.090079$

➢ Propriétés de la loi de Poisson

Soient $X_1, X_2, X_3, \ldots\ldots, X_r$ des variables aléatoires indépendantes.

Avec $X_i \sim Pois(\lambda_i) \;\; ; \;\; i = 1, 2, \ldots.., r$. Chaque X_i peut avoir une espérance différente.

$$\boxed{X = \sum_{i=1}^{r} X_i \sim Pois\left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i\right)}$$

Exemple: Visites d'un site Internet

X_1 : « nombre de visites reçues entre 8h et 9h » $X_1 \sim Pois(5)$

X_2 : « nombre de visites reçues entre 9h et 10h » $X_2 \sim Pois(7)$

X_3 : « nombre de visites reçues entre 10h et 11h » $X_3 \sim Pois(10)$

X_4 : « nombre de visites reçues entre 11h et 12h » $X_4 \sim Pois(9)$

X : « nombre de visites reçues entre 8h et 12h »

$$X = \sum_{i=1}^{4} X_i \sim Pois(5+7+10+9) = Pois(31)$$

- Quelle est la probabilité que ce site reçoive 40 visites en matinée ?

$$P(X = 40) = e^{-31} \frac{31^{40}}{40!} = 0.019$$

- Cas particulier : λ est constant dans le temps.

Processus de Poisson

λ : nombre espéré d'événements par unité de temps.

X : nombre d'événements dans t unités de temps.

$$\boxed{X \sim Pois(\lambda t)}$$

Exemple: Visiteurs d'un site Internet

λ : nombre espéré de visites à l'heure $= 8$

X : « nombre de visites reçues entre 9h et 11h »

$$X \sim Pois(2 \times 8) = Pois(16)$$

X : « nombre de visites reçues entre 9h15 et 10h30 »

$$9h15 - 10h30 \Leftrightarrow 5/4 \text{ d'heures} \quad ; \quad \lambda t = 8 \times (5/4) = 10 \Rightarrow X \sim Pois(10)$$