Chap 1 : Logiques et Raisonnements

I . Vocabulaire mathématique

Les mathématiques actuels sont battis de la façon suivante : On part
On part d'un petit nombre d'affirmation, appelé axiomes supposé vrai a priori et que l'on ne cherche pas à démontrer.
On défini ensuite la notion de démonstration en décidant de ce qui est une implication ou une équivalence etc..
On décide en fin de qualifier de vrai toutes affirmations obtenues en fin de démonstration

1 Axiome

Un axiome est un énoncé supposé vrai à priori et que l'on ne cherche pas à démontrer ex : les cinq axiomes d'Euclide

2 . Proposition

Une proposition ou assertion ou affirmation est un énoncé pouvant être vrai ou faux ex 7 est un nombre impair est une assertion vrai

3 . Théorème

Un théorème est une proposition vrai et démontré ex : théorème de pythagore

4 . Corollaire

Un corollaire à un théorème est une conséquence de ce théorème

5 . Lemme

Un lemme est un théorème préparatoire à l'établissement d'un théorème de plus grande importance

6 . Conjecture

Une conjecture est une proposition que l'on suppose vrai sans parvenir à la démontrer ex₁ : la conjecture de Fermat : si n est un entier naturel supérieur ou égal à 3, il n'existe pas d'entiers naturels x, y, z tel que $x^n + y^n = z^n$
ex₂ La conjecture de Riemann sur la distribution des nombres premiers dans $\mathbb{N}$

II Calcul propositionnel

1) Proposition

une proposition est un énoncé mathématique qui peut être vrai ou faux

2. Négation d'une proposition

A une proposition P, on peut associer sa négation notée non P (ou $\neg P$ ou $\bar{P}$), qui est vraie si P est fausse et fausse si P est vraie

Table de vérité

P	$\neg P$
V	F
F	V

3. Conjonction

A deux proposition P et Q, on peut associer la conjonction de P et Q notée $P \wedge Q$ qui est :

- vraie si P et Q sont vraies
- fausse sinon

Table de vérité

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

4. Disjonction

A deux proposition P et Q on peut associer la disjonction $P \vee Q$ qui est P ou Q

- vraie si l'une au moins des deux proposition P ou Q est vraie
- fausse sinon

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Folleski til barn. Trenger allsidig føre og snøfo... kort og lang, ift...

5. Implication

A deux proposition P et Q on peut associer la proposition P implique Q $P \Rightarrow Q$, qui est :

- vraie si P et Q sont vraie ou si P fausse
- fausse si P vraie et Q fausse

Table de vérité

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	F	F
V	V	V
F	V	V
F	F	V

Remarque

- $P \Rightarrow Q$ correspond en français à :
  si P alors Q
  Ex : s'il pleut alors je reste à la maison
- La réciproque de $P \Rightarrow Q$ est $Q \Rightarrow P$
- La contraposée de $P \Rightarrow Q$ est $\neg Q \Rightarrow \neg P$
- La négation de $P \Rightarrow Q$ est $P \wedge \neg Q$

6. Equivalence

A deux proposition P et Q, on peut associer P est équivalent à Q, notée $P \Leftrightarrow Q$, qui est

- vrai si P et Q sont vraie ou si P et Q sont fausses
- fausse sinon

Table de vérité

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Remarque

$P \Leftrightarrow Q$ correspond en français à P si et seulement si Q

exemple : une fraction existe si et seulement si son dénominateur est différent de zéro

- Deux proposition sont équivalentes s'ils ont les mêmes valeurs dans la table de vérité

exercice 1 Soit P et Q deux propositions, construire la table de vérité de

1) $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$

2) $(\neg P \Rightarrow Q)$

3) $(\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q)$

4 $[(P \Rightarrow Q) \Rightarrow P] \Rightarrow P$

solution

$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

$(\neg P \Rightarrow Q)$

$\neg P$	P	Q	$\neg P \Rightarrow Q$
F	V	V	V
V	F	V	V
F	V	F	V
V	F	F	F

$(\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q)$

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \wedge Q$	$\neg P \wedge \neg Q$	$(\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$	$(\neg P \wedge Q) \vee (\bar{P} \wedge \bar{Q}) \vee (P \wedge Q)$	$P \wedge Q$
V	V	F	F	F	F	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	V	F	V	V	F
F	F	V	V	F	V	F	F	F

$[(P \Rightarrow Q) \Rightarrow P] \Rightarrow P$

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow P$	$[(P \Rightarrow Q) \Rightarrow P] \Rightarrow P$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

$(\bar{P} \wedge \bar{Q}) \vee (\bar{P} \wedge Q) \vee (P \wedge Q)$, $(\bar{P} \wedge Q) \vee (\bar{P} \wedge \bar{Q})$ et $[(P \Rightarrow Q) \Rightarrow P] \Rightarrow P$ sont tautologie

si tous f

7) Règle de calcul propositionnel

Soit P, Q et R trois propositions

a) Commutativité

$P \wedge Q = Q \wedge P$

$P \vee Q = Q \vee P$

b) Associativité

$P \wedge (Q \wedge R) = (P \wedge Q) \wedge R$

$P \vee (Q \vee R) = (P \vee Q) \vee R$

c) Distributivité

$P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

$P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

d) Négation

$\neg(\neg P) = P$

$\neg(P \wedge Q) = \neg P \vee \neg Q$ pareille $\neg(P \vee Q) = \neg P \wedge \neg Q$

$P \Rightarrow Q = \neg Q \Rightarrow \neg P$

$P \Rightarrow Q = \neg P \vee Q$

$\neg(P \Rightarrow Q) = \neg(\neg P \vee Q) = P \wedge \neg Q$

e) Idempotence

$P \wedge P = P$

$P \vee P = P$

Exo Utilisez les tables de vérité, montrer que les équivalences suivantes :

1) $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R) \Leftrightarrow [(P \wedge Q) \Rightarrow R]$

2) $[(P \vee Q) \Rightarrow R] \Leftrightarrow [(P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)]$

3) $[P \Rightarrow (Q \vee R)] \Leftrightarrow [(P \Rightarrow Q) \vee (P \Rightarrow R)]$

Solution

1) $[P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)] \Leftrightarrow [\neg P \vee (Q \Rightarrow R)]$
$\Leftrightarrow [\neg P \vee (\neg Q \vee R)]$
$\Leftrightarrow [(\neg P \vee \neg Q) \vee R]$
$\Leftrightarrow [\neg(P \wedge Q) \vee R]$
$\Leftrightarrow [R \vee \neg(P \wedge Q)]$
$\Leftrightarrow [(P \wedge Q) \Rightarrow R]$

2) $[(P \vee Q) \Rightarrow R] \Leftrightarrow [\neg(P \vee Q) \vee R]$
$\Leftrightarrow [(\neg P \wedge \neg Q) \vee R] \Leftrightarrow [(\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee R)] \Leftrightarrow [(P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)]$

3) $[P \Rightarrow (Q \vee R)] \Leftrightarrow [\neg P \vee (Q \vee R)]$

$\Leftrightarrow [(\neg P \vee \neg P) \vee (Q \vee R)]$

$\Leftrightarrow [(\neg P \vee Q) \vee (\neg P \vee R)]$

$\Leftrightarrow [(P \Rightarrow Q) \vee (P \Rightarrow R)]$

III Quantificateur

On considère trois proposition $P(x) : x^2 \geq 0$

$Q(x) : 2x > 7$

$R(x) : 7x = 12$

La proposition $P(x)$ est vraie pour tout réel x, on écrira :

$\forall x \in \mathbb{R}, P(x)$;

La proposition $Q(x)$ n'est vraie que pour certaines valeurs de x on écrira :

$\exists x \in \mathbb{R}, Q(x)$;

La proposition $R(x)$ n'est vraie que pour une seule valeur de x on écrira :

$\exists ! x \in \mathbb{R}, R(x)$;

1) Définition

Le symbole $\forall$ signifie "quel que soit" on l'appelle :
quantificateur universel

Le symbole $\exists$ signifie "il existe" on l'appelle
Quantificateur existentiel

Le symbole $\exists !$ signifie "il existe un unique" on l'appelle
Quantificateur de l'unicité

2) Propriété 1

i) La négation de $\forall x \in I, P(x)$ est $\exists x \in I$, non $P(x)$

ii) La négation de $\exists x \in I, P(x)$ est $\forall x \in I$ non $P(x)$

iii) La négation de $\forall x \in I, \exists y \in J, P(x, y)$ est $\exists x \in I \ \forall y \in J$, non $P(x, y)$

3) Propriété 2

i) Les propositions $\forall x \in I, \forall y \in J, P(x, y)$ et $\forall y \in J, \forall x \in I, P(x, y)$ sont équivalentes

ii) Les propositions $\exists x \in I, \exists y \in J, P(x, y)$ et $\exists y \in J, \exists x \in I, P(x, y)$ ne sont pas équivalentes

Exemple

Soit H l'ensemble des Hommes et F l'ensemble des femmes

$\forall h \in H, \exists f \in F$, f est la mère de h signifie

Tout homme a une mère (proposition vraie)

$\exists f \in F, \forall h \in H$, f est la mère de h signifie

Il existe une femme qui est la mère de tous les hommes (proposition fausse)

IV Méthodes de démonstration

1) Raisonnement par implication

C'est le type de raisonnement standard. On sait que P est vraie et que $P \Rightarrow Q$ est vraie alors Q aussi est vraie. On répète ceci autant de fois que nécessaire jusqu'à aboutir au résultat. La démonstration contiendra des mots comme donc, ainsi, par conséquent, d'où, si ... alors

Exemple 1

Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction paire et dérivable.

Montrer que f' est impaire

La fonction f est paire alors : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(-x)$ et f est dérivable, donc

$f'(x) = [f(-x)]'$ $\qquad (f(u))' = u' f'(u)$

$f'(x) = -f'(-x)$ d'où f' est impaire

Exemple 2

Soient $a \geq 0$ et $b \geq 0$, Montrer que si $a < b$ alors $a < \frac{a+b}{2} < b$ et $a < \sqrt{ab} < b$

Supposons que $a \geq 0$ et $b \geq 0$ et $a < b$

$a < b$, donc $2a < a+b \Leftrightarrow a < \frac{a+b}{2}$

$a < b$, donc $a+b < 2b \Leftrightarrow \frac{a+b}{2} < b$

d'où $a < \frac{a+b}{2} < b$ (1)

$a < b$, donc $a^2 < ab$

$a < b$, donc $ab < b^2$

d'où $a^2 < ab < b^2$ alors $a < \sqrt{ab} < b$ (2)

D'après (1) et (2) : $a < \frac{a+b}{2} < b$ et $a < \sqrt{ab} < b$

2) Raisonnement par équivalence

Pour montrer que $P \Longleftrightarrow Q$,

a) On peut montrer $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$

b) On peut montrer simultanément que $P \Longleftrightarrow Q$

Exple

Mq $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \; xy \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$

$$(x-y)^2 \geq 0 \Longleftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \Longleftrightarrow x^2+y^2 \geq 2xy \Longleftrightarrow \frac{x^2+y^2}{2} \geq xy$$

$$xy \leq \frac{(x^2+y^2)}{2}$$

3) Raisonnement par contraposée

Pour montrer que $P \Rightarrow Q$ équivaut à montrer que $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$

Exple : Soit a un réel, Montrer que si a^2 n'est pas un multiple de 16 alors $\frac{a}{2}$ n'est pas un entier pair

Supposons que $\frac{a}{2}$ est un entier pair

$\frac{a}{2} = 2k \Leftrightarrow a = 4k \Leftrightarrow a^2 = 16k^2$ donc a^2 est un multiple de 16 d'où l'ennoncé

4 Raisonnement par l'absurde

Pour montrer qu'une proposition P est vraie, on peut pas montrer que $\overline{P}$ est fausse

En pratique, on suppose que P est fausse et on aboutit à une contradiction

Exple : Mq $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Supposons que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Rightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2 = 2q^2$ donc p^2 est pair d'où p est pair

Posons $p = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$

$p^2 = 4k^2 \Leftrightarrow 4k^2 = 2q^2 \Leftrightarrow q^2 = 2k^2$ donc q^2 est pair d'où q est pair

p est pair, q est pair et $pgdc(p,q) = 1$ absurde

5) Raisonnement par récurrence

On considère une proposition P qui dépend d'un entier naturel noté $H(n)$

$H(n)$ est appelée l'hypothèse de récurrence

* Initialisation : On suppose que la proposition est vraie au premier rang

n₀

* Hérédité : On suppose $H(n)$ est vraie et on montre que $H(n+1)$ est vraie.

* Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $H(n)$ est vraie

Exple : Mq $2^n > n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$2^0 = 1 > 0$

supposons que la propriété est vraie au rang n donc $2^n > n$

Mq $2^{n+1} > n+1$

$2^n > n \Rightarrow 2^n + 2^n > n + 2^n$

$2^{n+1} > n+1$ car $n + 2^n > n+1$ car $2^n > 1$ donc

$2^n > n$ est vraie