Chap 2. Ensemble et les Relation binaire

I Ensemble

Définition

Un ensemble est une collections d'élément, en général les ensembles sont désignés par des lettres majuscules et les éléments par des lettre miniscule

Exemple $A = \{a, b, c, d\}$ si les éléments peuvent être ordonnés on les regroupe par ordre croissant

2) Remarque

i) si x est un élément de l'ensemble A, on le note $x \in A$

ii) si A n'a aucun élément, on la note Φ ensemble vide

iii) Certain ~~élément~~ ensembles peuvent être défini par des proposition

exemple: $E = \{x \in \mathbb{N} \,/\, x \text{ divisible par } 3\}$

3) Inclusion

soit E et F deux ensembles. On dit que E est inclu dans F si tout élément de E est aussi un élément de F, on le note $E \subseteq F$

$E \subseteq F \Leftrightarrow \forall x \in E, x \in F$ on dit alors E est un sous ensemble ou une partie de F

4) **Définition** : L'ensemble des parties de E, notée $\mathcal{P}(E)$ est l'ensemble dont les éléments sont des sous ensembles de E

$E = \{a\} \Rightarrow \mathcal{P}(E) = \{\Phi, \{a\}\}$

$E = \{a, b\} \Rightarrow \mathcal{P}(E) = \{\Phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

$E = \{a, b, c\} \Rightarrow \mathcal{P}(E) = \{\Phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$

5) Remarque

si $Card(E) = n$ alors $Card(\mathcal{P}(E)) = 2^n$

6) Intersection

L'intersection de deux ensembles E et F est l'ensemble des éléments qui appartiennent simultanément en E et en F

Remarque

$\mathbb{H}$ quaternion } les
$\mathbb{O}$ octonions }

i) $E \cap F \subseteq E$ et $E \cap F \subseteq F$
ii) si $E \cap F = \emptyset$, on dit que E et F sont disjoints
iii) $E \cap \emptyset = \emptyset$
iv) si $E \subseteq F$, alors $E \cap F = E$

7) Union

L'union ou la réunion de deux ensembles E et F est l'ensemble des élément qui sont dans E ou dans F

Remarque

i) $E \subseteq E \cup F$ et $F \subseteq F \cup E$
ii) $E \cup \emptyset = E$
iii) $E \cup F = \emptyset$ ssi $E = \emptyset$ et $F = \emptyset$

8) Complémentaire

Soit A une partie d'un ensemble E.
Le complémentaire de A dans E est l'ensemble des éléments de E qui n'appartient pas à A. On le note $\overline{A}$ ou $C_E(A)$

Remarque

i) $\overline{\overline{A}} = A$
ii) $C_E(\emptyset) = E$ et $C_E(E) = \emptyset$

9) Différence

Soient A et B deux parties de E, on appelle différence de B dans A notée $A \setminus B$ l'ensemble des élément de A qui ne sont pas des élément de B
On appelle aussi différence de A dans B notée $B \setminus A$ l'ensemble des élément de B qui ne sont pas des element de A

$A \setminus B = A \cap \overline{B}$ $\qquad$ $A \setminus B$ se lit A moins B
$B \setminus A = B \cap \overline{A}$

10) Propriété

Soit A, B et C trois parties d'un ensembles E

* Commutativité

$A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$

* Associativité

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

* Distributivité

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

* Idempotence

$A \cap A = A$

$A \cup A = A$

* loi de Morgan

$\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$

$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Exo soit A, B, C trois sous-ensembles de E

Demontrer que

$(A - B) \cup (A \cap B) = A$

$(B - A) \cup (B \cap A) = B$

$(A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$

$(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$

$A - (B \cup C) = (A - B) \cup (A - C)$

$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$

$= (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$

$A - B = A \cap \overline{B}$

$B - A = B \cap \overline{A}$

$(A - B) \cup (A \cap B) = A$

$(A - B) = A \cap \overline{B}$

$(A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B) = (A \cup A) \cap (\overline{B} \cap B)$

$(A \cap \overline{B} \cup A)$ ∩ $(A \cap \overline{B} \cup B)$

$(A \cap \overline{B}) \cap (B)$

$A \cap (A \cup B) = A$ car $A \subseteq A \cup B$

$B \cap (A \cup B) = B$ car $B \subseteq A \cup B$

$A \cup (A \cup B) = A \cup B$ car $A \subseteq A \cup B$

$B \cup (A \cup B) = A \cup B$ car $B \subseteq A \cup B$

$e \mathcal{I} e' \Rightarrow e' \mathcal{I} e$ donc symetrie

$e \mathcal{I} e'$ et $e' \mathcal{I} e'' \not\Rightarrow e \mathcal{R} e''$ (n'implique pas que $e \mathcal{R} e''$)

une proposition tantôt vraie, tantôt fausse est considérée comme faux

3) $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow xe^y = ye^x$

$x \mathcal{R} x \Leftrightarrow xe^x = xe^x$ donc $\mathcal{R}$ est reflexive

$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow xe^y = ye^x$

xe^y implique pas ye^x ... est symetrie

$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow xe^y = ye^x$ ①

$y \mathcal{R} z \Leftrightarrow ye^z = ze^y$ ②

① $\Rightarrow y = \frac{xe^y}{e^x}$

② $\Rightarrow \left(\frac{xe^y}{e^x}\right) e^z = ze^y$

$x\cancel{e^y}e^z = z\cancel{e^y}e^x$

$xe^z = ze^x \Rightarrow x \mathcal{R} z$

$\mathcal{R}$ est transitive

4) $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x = -y$

$x \neq -x$ $\mathcal{R}$ n'est pas reflexive

$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x = -y \Leftrightarrow y = -x$ $\mathcal{R}$ est symetrique

$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x = -y$

$-y = z \Rightarrow x = z$ donc

$\mathcal{R}$ est transitive

5) Relation d'équivalence

iii) On dit que $\mathcal{R}$ est antisymetrique si : $\forall (x,y) \in E\times E, (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x) \Rightarrow x=y$
iv) On dit que $\mathcal{R}$ est transitive si $\forall (x,y,z) \in E^3, (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \Rightarrow x \leq z$

Exemple

1) La relation $\leq$ est reflexive car $x \leq x$
La relation $\leq$ n'est pas symetrique car $x \leq y$ n'implique pas que $y \leq x$
La relation $\leq$ est asymetrique car $(x \leq y \text{ et } y \leq x) \Rightarrow x = y$
$\leq$ est transitive car $(x \leq y \text{ et } y \leq z) \Rightarrow x \leq z$

2) La relation $\subseteq$ sur l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ les parties de E

soit $A \in \mathcal{P}(E)$
$A \subseteq A$, l'inclusion est reflexive
soit A et B, $\in \mathcal{P}(E)$
$(A \subseteq B)$ n'implique pas que $(B \subseteq A)$, l'inclusion n'est symetrique
$(A \subseteq B \text{ et } B \subseteq A) \Rightarrow A = B$, l'inclusion est antisymetrique
$(A \subseteq B \text{ et } B \subseteq C) \Rightarrow A \subseteq C$, l'inclusion est transitive

Exo 2

Dans ces cas suivants, donner les propriété (reflexivité, symétrie, transivité) vérifiées par $\mathcal{R}$

1) E est l'ensemble des droites du plan.
$\mathcal{R}$ est définie par : $(D)\mathcal{R}(D') \Leftrightarrow (D) \perp (D')$
2) E est l'ensemble des cercles du plan
$\mathcal{R}$ est définie par $(\mathcal{C})\mathcal{R}(\mathcal{C}') \Leftrightarrow \mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ se coupent exactement en 2 pts
3) $E = \mathbb{R}$, $\mathcal{R}$ est défini par
$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow xe^y = ye^x$
4) $E = \mathbb{Z}$ $\mathcal{R}$ est définie par
$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x = -y$

Solution

$(D)\mathcal{R}(D') \Leftrightarrow (D) \perp (D')$

- Reflexivite

La reflexivité ne s'applique pas au cercle

- symétrie $(D) \perp (D') \Leftrightarrow (D') \perp (D)$

$(D) \perp (D')$ et $(D') \perp (D'') \Rightarrow (D) \parallel (D'')$ donc elles ne sont pas transitives

I) Familles d'ensemble

1) soit $I = \{1, 2, \dots, n\}$

$$\bigcap_{i \in I} A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n$$

$$\bigcup_{i \in I} A_1 = A_1 \cup A_2 \cap A_3 \cap \dots \cup A_n$$

$$x \in \bigcap_{i \in I} A_i \iff \forall i \in I,\ x \in A_i$$

$$x \notin \bigcap_{i \in I} A_i \iff \exists i \in I,\ x \in A_i$$

$$x \in \bigcup_{i \in I} A_i \iff \exists i \in I,\ x \in A_i$$

$$x \notin \bigcup_{i \in I} A_i \iff \forall i \in I,\ x \notin A_i$$

II Relation binaire

1) Définition 1

On appelle relation binaire sur un ensemble E, toute partie $\mathcal{R}$ de $E \times E$

Pour tout $(x, y) \in E \times E$, la proposition $(x, y) \in \mathcal{R}$ se notera $x \mathcal{R} y$ et on dira dans ce cas que x est en relation avec y.

Une relation binaire sur un ensemble E peut être vue comme une propriété que chaque couple $(x, y) \in E \times E$ est susceptible d'avoir ou non

Exemple

1) $\leq \neq \geq$; $< \neq >$ sont des relations binaires sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$
2) La divisibilité est une relation binaire sur $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$.

2) Définition 2

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur un ensemble E

i) On dit que $\mathcal{R}$ est reflexive si $\forall x \in E,\ x \mathcal{R} x$

ii) On dit que $\mathcal{R}$ est symétrique si $\forall (x, y) \in E \times E,\ x \mathcal{R} y \iff y \mathcal{R} x$

Une relation ~~binaire sur~~ d'equivalence sur un ensemble E est une relation binaire, reflexive, symetrique et transitive

4) Classe d'equivalence

Soit R une relation d'équivalence sur un ensemble E. La classe d'equivalence de a, notee $\bar{a}$ est l'ensemble des éléments de E qui sont en relation avec a

$$\bar{a} = \{x \in E \,/\, x \mathcal{R} a\}$$