Probabilités et statistique

Lois de probabilité continues

Module 5

Plan

- Loi exponentielle
- Loi Gamma
- Loi uniforme
- Loi normale

1. Loi exponentielle

➢ ***Définition***

λ : nombre espéré d'événements dans une unité de temps .

T : « durée entre deux événements consécutifs mesurée dans la même unité de temps que λ ».

$$\boxed{\mathrm{T} \sim Exp(\lambda)}$$

T suit une loi exponentielle de paramètre λ.

Exemple : Compagnie de téléphonie mobile

La compagnie reçoit en moyenne 17 appels à l'heure pour un abonnement.

T : « la durée en heures entre 2 appels consécutifs »

T suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 17$.

$\mathrm{T} \sim Exp(17)$

Exemple : Site Web

Un site du Web reçoit en moyenne 18 connexions par période de 5 minutes.

T : « la durée en périodes de 5 minutes entre 2 connexions consécutives »

$$\lambda = 18$$

$$\mathrm{T} \sim Exp(18)$$

T : « la durée en minutes entre 2 connexions consécutives »

$$\lambda = 18/5 = 3.6$$

$$\mathrm{T} \sim Exp(3.6)$$

T : « la durée en secondes entre 2 connexions consécutives »

$$\lambda = 18/(5 \times 60) = 0.06 \quad ; \quad \mathrm{T} \sim Exp(0.06)$$

➢ **Fonction de répartition**

λ : nombre moyen ou espéré d'événements dans une unité de temps. $\lambda > 0$

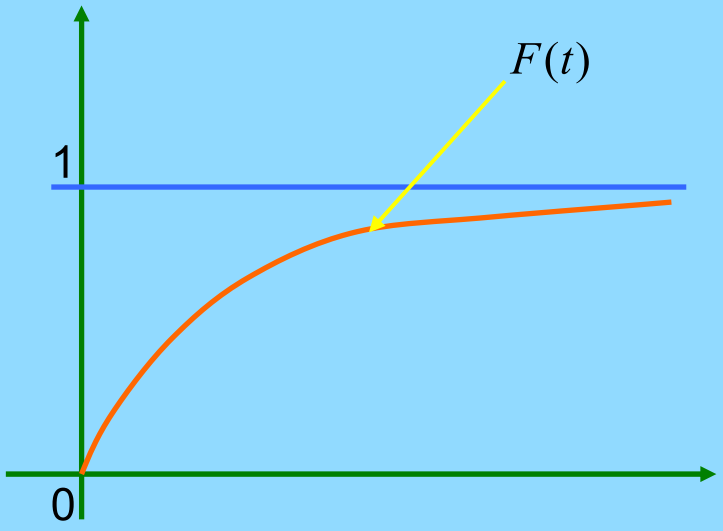
X : nombre d'événements dans t unités de temps. $X \sim Pois(\lambda t)$

T : durée entre deux événements consécutifs dans la même unité de temps que λ.

$$
\begin{aligned}
P(\mathrm{T} > t) &= P(\text{durée entre 2 événements consécutifs supérieure à } t) \\
&= P(\text{aucun événement dans }]0 \;\; t[\,) \\
&= P(\mathrm{X} = 0) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^0}{0!} = e^{-\lambda t}
\end{aligned}
$$

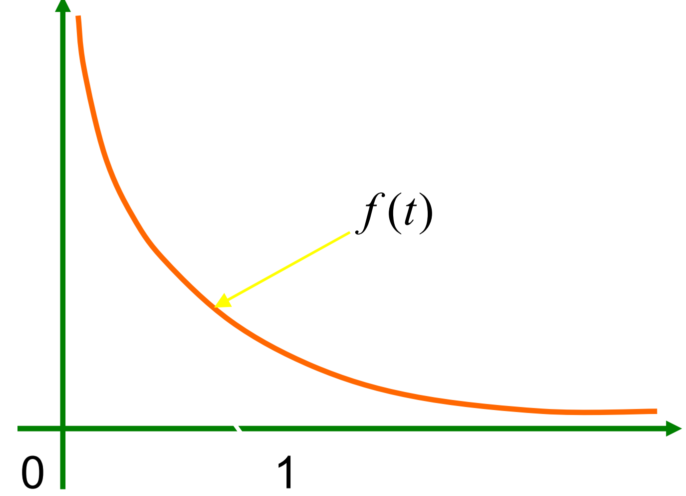
- $P(\mathrm{T} > t) = e^{-\lambda t}$
- $F(t) = P(\mathrm{T} \leq t) = 1 - P(T > t) = 1 - e^{-\lambda t}$

$$
F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} & \text{si} \quad t \geq 0 \end{cases}
$$



Fonction de densité de la loi exponentielle

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$



- $f(t) \geq 0$
- $\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^{+\infty} = -e^{-\infty} - (-e^{0}) = 0 + 1 = 1$

$f(t)$ est une densité de probabilités.

Espérance mathématique et variance

- $E(\mathrm{T}) = \int_0^{+\infty} t\, \lambda e^{-\lambda t} dt = \left[(-t - \tfrac{1}{\lambda}) e^{-\lambda t}\right]_0^{+\infty} = 0 + \tfrac{1}{\lambda} e^{0} = \tfrac{1}{\lambda}$
- $E(\mathrm{T}^2) = \int_0^{+\infty} t^2 \lambda e^{-\lambda t} dt = \left[(-t^2 - \tfrac{2}{\lambda} t - \tfrac{2}{\lambda^2}) e^{-\lambda t}\right]_0^{+\infty} = 0 + \tfrac{2}{\lambda^2} e^{0} = \tfrac{2}{\lambda^2}$
- $V(\mathrm{T}) = E(\mathrm{T}^2) - E^2(\mathrm{T}) = \tfrac{2}{\lambda^2} - (\tfrac{1}{\lambda})^2 = \tfrac{1}{\lambda^2}$

$$E(\mathrm{T}) = \frac{1}{\lambda} \quad ; \quad \mathrm{V}(\mathrm{T}) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Exemple: Site du Web

Un site du Web reçoit en moyenne 18 connexions par période de 5 minutes.
T : « la durée en minutes entre 2 connexions consécutives »

$$T \sim Exp(3.6) \quad ; \quad F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - e^{-3.6\,t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases} \quad ; \quad f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 3.6\,e^{-3.6\,t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

a) Quelle est la probabilité que la durée entre 2 connexions est moins de 1 minute ?

$$P(\mathrm{T} < 1) = \int_0^1 3.6\,e^{-3.6\,t}\,dt = -\,e^{-3.6\times 1} + e^0 = 0.97$$

b) Quelle est la probabilité que la durée entre 2 connexions dépasse 30 secondes ?

$$P(\mathrm{T} > ½) = \int_{0.5}^{+\infty} 3.6\,e^{-3.6\,t}\,dt = -\,e^{-\infty} + e^{-3.6\times 0.5} = 0 + 0.16 = 0.16$$

c) Quelle est la moyenne et la variance de la durée entre deux connexions ?

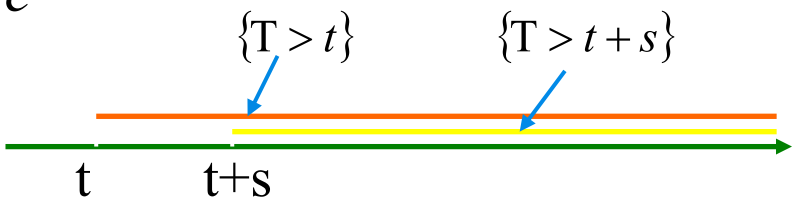
$$E(\mathrm{T}) = 1/3.6 = 0.277 \quad ; \quad V(\mathrm{T}) = 1/(3.6)^2 = 0.077$$

Propriété d'absence de mémoire

$$P(\mathrm{T} > t+s \,/\, \mathrm{T} > t) = \frac{P(\{T > t+s\} \cap \{T > t\})}{P(T > t)} = \frac{P(\mathrm{T} > t+s)}{P(T > t)}$$

$$= \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = \frac{e^{-\lambda t} \times e^{-\lambda s}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s}$$

La probabilité ne dépend pas de t .



Exemple : Durée de vie d'un ordinateur

Le temps d'utilisation d'un ordinateur est en moyenne 5 années.

T : « durée en années de l'utilisation d'un ordinateur »

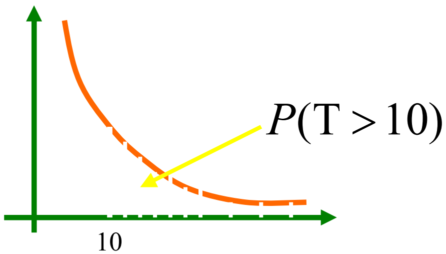
$$E(\mathrm{T}) = 1/\lambda = 5 \Rightarrow \lambda = 1/5$$

$$F(t) = 1 - e^{-t/5} \qquad t \geq 0$$

$$f(t) = \tfrac{1}{5} e^{-t/5} \qquad t \geq 0$$

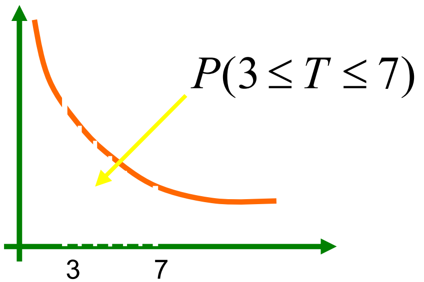
a) Quelle est la probabilité qu'un ordinateur soit utilisé plus de 10 ans ?

$$P(\mathrm{T}>10)=1-F(10)=1-(1-e^{-0.2\times 10})$$
$$=e^{-2}=0.135$$



b) Quelle est la probabilité que la durée de l'utilisation soit entre 3 et 7 ans ?

$$P(3\leq \mathrm{T}\leq 7)=P(\mathrm{T}\leq 7)-P(\mathrm{T}<3)=F(7)-F(3)$$
$$=\left(1-e^{-7/5}\right)-\left(1-e^{-3/5}\right)=e^{-3/5}-e^{-7/5}$$
$$=0.302$$



c) Quelle est la probabilité qu'un ordinateur soit utilisé plus de 10 ans sachant qu'elle a déjà été utilisée 7 ans ?

$$P(\mathrm{T}>10/\mathrm{T}>7)=P(\mathrm{T}>3)=e^{-0.2\times 3}=e^{-0.6}=0.55$$

2. Loi Gamma

- Il s'agit de loi de la durée entre deux événements quelconque qui ne sont pas forcément consécutifs.

Exemple

Une bibliothèque offre au public abonné la possibilité d'accès à des ordinateurs à la seule condition de réserver à l'avance. Le nombre moyen de réservations à l'heure est 5.

T_{12} : « la durée en heures entre la $1^{ère}$ et la 2^{e} réservation »
T_{23} : « la durée en heures entre la 2^{e} et la 3^{e} réservation »
T_{13} : « la durée en heures entre la $1^{ère}$ et la 3^{e} réservation »

$$T_{12} \sim Exp(5)$$
$$T_{23} \sim Exp(5)$$
$$T_{13} \sim ?$$

$$T_{13} = T_{12} + T_{23} \sim Gamma\,(2\,,5)$$

En général

Soient $T_1\,, T_2\,, T_3\,, \ldots\ldots, T_r$ des variables indépendantes et de même loi $Exp(\lambda)$.

$$\boxed{T = \sum_{i=1}^{r} T_i \sim Gamma(r\,,\lambda)}$$

Fonction de densité de la loi Gamma

Soit la variable $T \sim Gamma\,(r\,,\lambda)$.

$$\boxed{f(t) = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} t^{r-1}\, e^{-\lambda t} \quad ; \quad t \geq 0}$$

$$\Gamma(r) = \int_0^{+\infty} t^{r-1} e^{-t} dt = \begin{cases} (r-1)! & \text{si } r = 1\,,2\,,3\,,\ldots \text{ entier} \\ (r-1)\Gamma(r-1) & \text{si } r \text{ est un réel} \end{cases}$$

Exemple

$\Gamma(1) = (1-1)! = 0! = 1$

$\Gamma(2) = (2\text{-}1)! = 1! = 1$

$\Gamma(3) = (3\text{-}1)! = 2! = 2 \times 1 = 2$

$\Gamma(4) = (4\text{-}1)! = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$

$\Gamma(5) = (5\text{-}1)! = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

etc...

$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

$\Gamma(3/2) = (\tfrac{3}{2} - 1)\Gamma(\tfrac{3}{2} - 1) = \tfrac{1}{2}\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{\sqrt{\pi}}{2}$

$\Gamma(5/2) = (\tfrac{5}{2} - 1)\Gamma(\tfrac{5}{2} - 1) = \tfrac{3}{2}\Gamma(\tfrac{3}{2}) = \tfrac{3}{2}\tfrac{\sqrt{\pi}}{2} = \tfrac{3\sqrt{\pi}}{4}$ etc...

Espérance et variance

Soient $T_1, T_2, T_3, \ldots\ldots, T_r$ des variables indépendantes et de même loi $Exp(\lambda)$.

$$T = \sum_{i=1}^{r} T_i \sim Gamma(r, \lambda)$$

$$\bullet\, E(T) = E\left(\sum_{i=1}^{r} T_i\right) = \sum_{i=1}^{r} E(T_i) = \sum_{i=1}^{r} \tfrac{1}{\lambda} = \frac{r}{\lambda}$$

$$\boxed{E(T) = \frac{r}{\lambda}}$$

$$\bullet\, V(T) = V\left(\sum_{i=1}^{r} T_i\right) = \sum_{i=1}^{r} V(T_i) = \sum_{i=1}^{r} \tfrac{1}{\lambda^2} = \frac{r}{\lambda^2}$$

$$\boxed{V(T) = \frac{r}{\lambda^2}}$$

Exemple: Réservations à la bibliothèque

a) Quelle est la durée moyenne et la variance entre la 1ère et la 3e réservation ?

T_{13} : durée entre la 1ere et la 3e réservation $\qquad T_{13} \sim Gamma(2, 5)$

$E(T_{13}) = 2/5 = 0.4$ heures $= 24$ minutes $\qquad V(T_{13}) = 2/(5)^2 = 2/25 = 0.08$

- Quelle est la durée moyenne et la variance entre la 2e et la 7e réservation ?

T_{27} : durée entre la 2e et la 7e réservation $\qquad T_{27} \sim Gamma(5, 5)$

$E(T_{27}) = 5/5 = 1$ heure $\qquad V(T_{25}) = 5/(5)^2 = 5/25 = 0.2$

3. Loi uniforme

Cette loi est utilisée lorsque aucune information n'est disponible sur la variable.

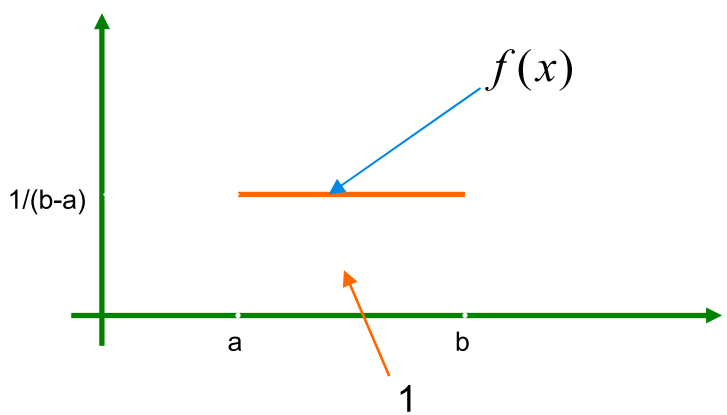
X suit une loi uniforme sur l'intervalle $[a \;\; b]$

avec a et b des réels contants a < b.

$$X \sim U[a \;\; b]$$

- Fonction de densité de la loi uniforme

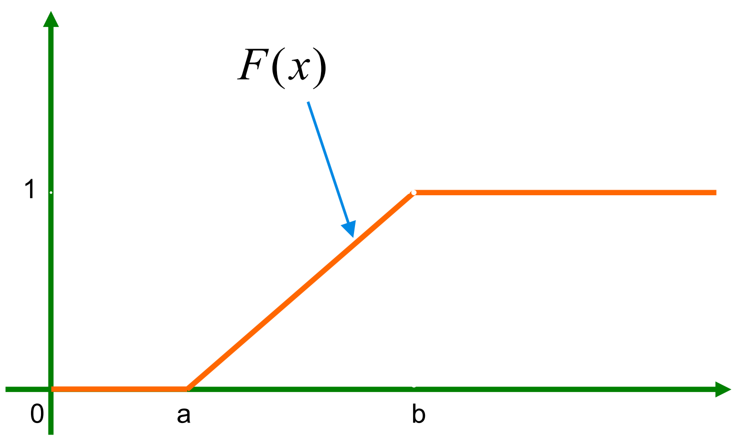
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \le x \le b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



- Fonction de répartition de la loi uniforme

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \le x < b \\ 1 & \text{si } b \le x \end{cases}$$



Espérance mathématique et variance de la loi uniforme

- $E(X) = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{1}{b-a}\frac{b^2-a^2}{2} = \frac{b+a}{2}$
- $E(X^2) = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b = \frac{1}{b-a}\frac{b^3-a^3}{3} = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$
- $V(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \left(\frac{b+a}{2}\right)^2 = \frac{4a^2+4ab+4b^2-3b^2-6ab-3a^2}{12} = \frac{a^2-2ab+b^2}{12} = \frac{(a-b)^2}{12}$

$$\boxed{E(X) = \frac{a+b}{2}}$$

$$\boxed{V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}}$$

Exemple : $X \sim U[0,1]$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \le x \end{cases}$$

$$E(X) = \frac{1}{2} \qquad V(X) = \frac{1}{12}$$

Cas particulier

Considérons les variables X_1 et X_2 indépendantes

Si $X_1 \sim U[0,1]$ et $X_2 \sim U[0,1]$ alors $X = X_1 + X_2 \sim ?$

$\bullet\, x \in [0,\ 2]$

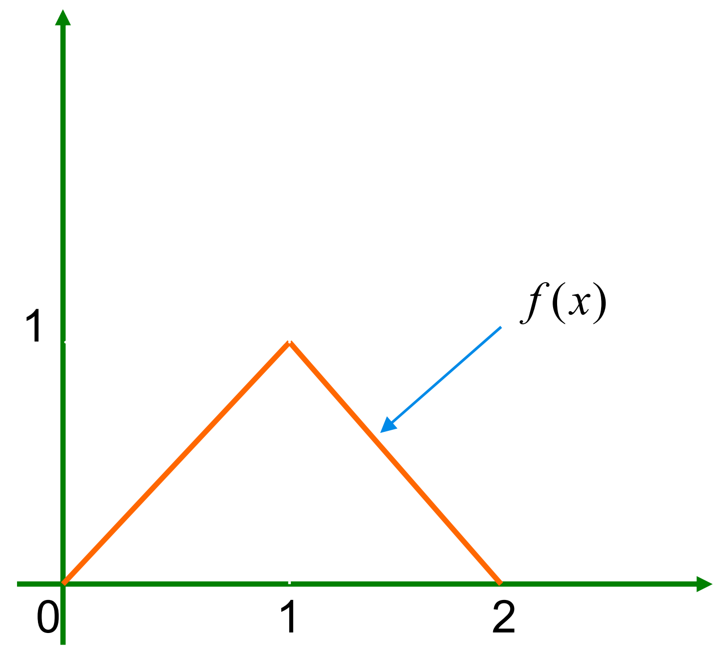
$x \leq 0 \Rightarrow f(x) = 0$

$0 < x \leq 1 \Rightarrow f(x) = x$

$1 < x \leq 2 \Rightarrow f(x) = 2 - x$

$2 < x \Rightarrow f(x) = 0$

$X \sim loi\ \ triangulaire$



$\bullet\, E(X) = E(X_1) + E(X_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

$\bullet\, V(X) = V(X_1) + V(X_2) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

ou

$\bullet\, E(X) = \int_0^1 x^2\, dx + \int_1^2 x(2-x)\, dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{1}{3} + (4 - \frac{8}{3}) - (1 - \frac{1}{3}) = \frac{1+4-2}{3} = \frac{3}{3} = 1$

$\bullet\, E(X^2) = \int_0^1 x^3\, dx + \int_1^2 x^2(2-x)\, dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 + \left[2\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_1^2 = \frac{1}{4} + (\frac{16}{3} - \frac{16}{4}) - (\frac{2}{3} - \frac{1}{4}) = \frac{1}{4} + \frac{16}{12} - \frac{5}{12} = \frac{14}{12} = \frac{7}{6}$

$\bullet\, V(X) = \frac{7}{6} - 1^2 = \frac{7-6}{6} = \frac{1}{6}$

4. Loi normale

Il s'agit de la loi qui décrit les erreurs de mesures, d'ajustement ou le comportement des êtres humains.

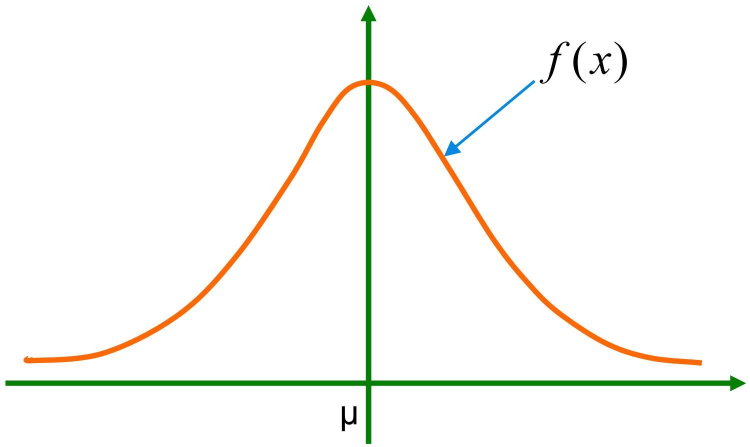
X suit une loi normale de paramètres μ et σ^2.

$$\boxed{X \sim N(\mu, \sigma^2)}$$

- Fonction de densité de la loi normale

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$x \in \left]-\infty, \quad +\infty\right[$$



- Espérance mathématique et variance

$$\boxed{E(X) = \mu \quad \text{et} \quad V(X) = \sigma^2}$$

➢ La loi normale centrée et réduite

La variable Z suit une normale centrée et réduite

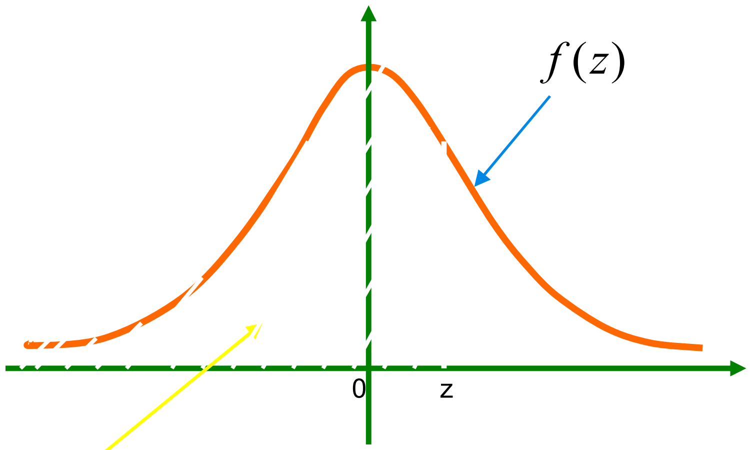
$$\boxed{Z \sim N(0\,,1)}$$

$E(Z) = 0$ et $V(Z) = 1$

Fonction de densité

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$z \in \left]-\infty\,,\ +\infty\right[$$



Fonction de répartition

$$F(z) = P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^{z} f(t)dt = \int_{-\infty}^{z} \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(z)$$

Il n'est pas facile de calculer cette intégrale. Par conséquent on utilise les valeurs tabulées de la loi normale centrée réduite. Voir dans le livre à la page 547-548.

Exemple : $Z \sim N(0\,,1)$

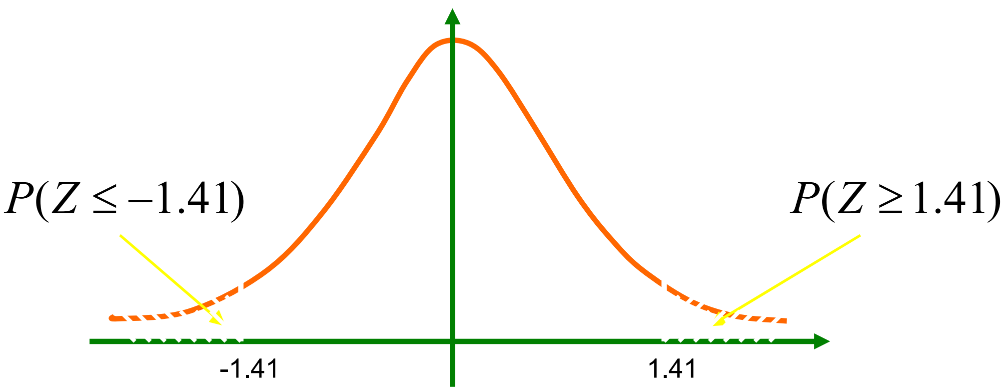
Pour la Table, voir dans le livre à la page 547-548

- $P(Z \leq 1.72) = \Phi(1.72) = 0.95728$
- $P(Z \geq 1.78) = 1 - P(Z < 1.78) = 1 - P(Z \leq 1.78) = 1 - \Phi(1.78) = 1 - 0.96246 = 0.03754$

Z étant une variable continue donc l'égalité n'a pas d'importance.

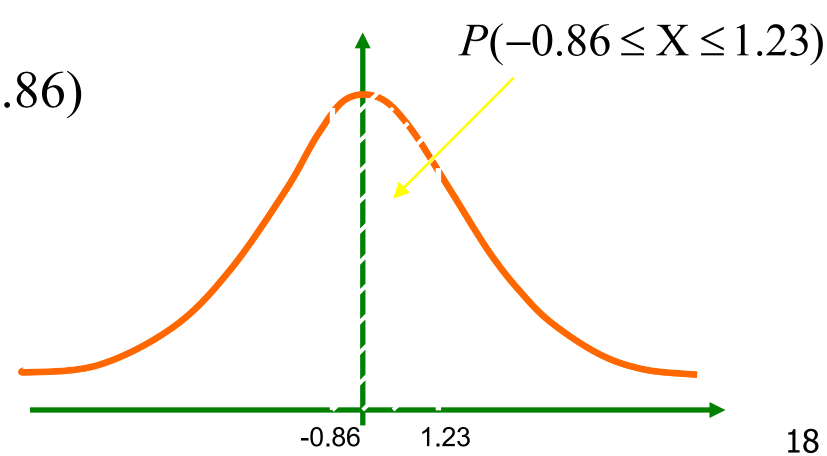
- $P(Z \leq -1.41) = P(Z \geq 1.41)$

$$= 1 - P(Z < 1.41)$$
$$= 1 - \Phi(1.41)$$
$$= 1 - 0.92073$$
$$= 0.07927$$



- $P(-0.86 \leq Z \leq 1.23) = P(Z \leq 1.23) - P(Z \leq -0.86)$

$$= \Phi(1.23) - [1 - \Phi(0.86)]$$
$$= 0.89065 - 1 + 0.80510$$
$$= 0.6957$$

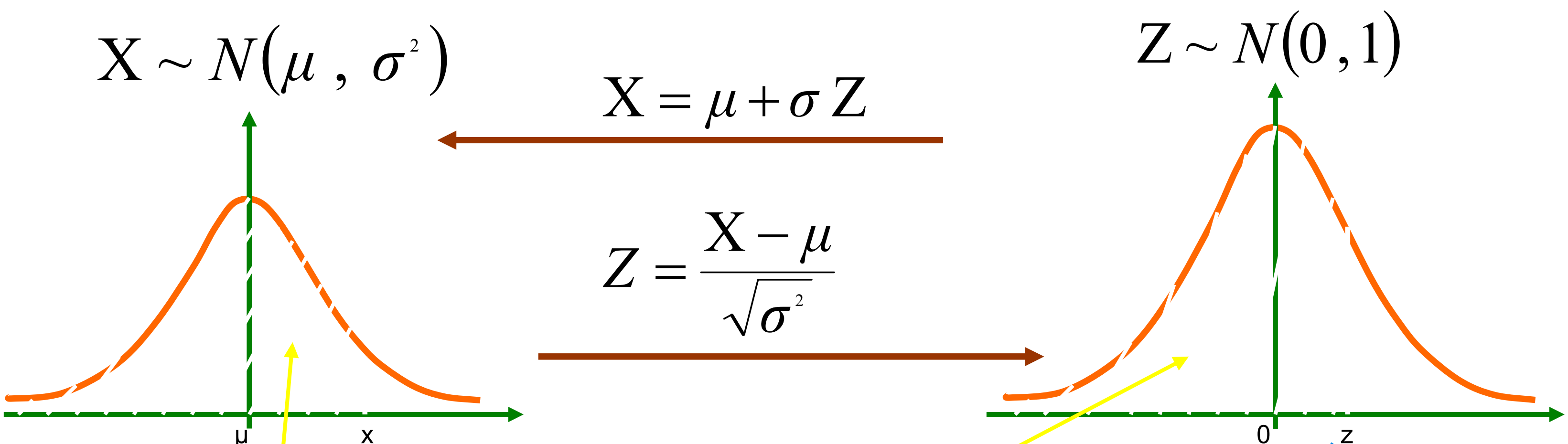


➢ *Remarques*

$Z \sim N(0\,,1)$; a et b des nombres réels $a < b$

- $P(a \le Z \le b) = P(Z \le b) - P(Z < a) = \Phi(b) - \Phi(a)$
- $P(Z > a) = 1 - P(Z \le a) = 1 - \Phi(a)$
- $P(Z \le -a) = P(Z > a) = 1 - \Phi(a)$
- $P(-a \le Z \le a) = P(Z \le a) - P(Z \le -a) = 2\Phi(a) - 1$

➢ *Transformation linéaire*



$$\boxed{P(X \le x) = P\left(\frac{X-\mu}{\sqrt{\sigma^2}} \le \frac{x-\mu}{\sqrt{\sigma^2}}\right) = P\left(Z \le \frac{x-\mu}{\sqrt{\sigma^2}}\right) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{\sigma^2}}\right)}$$

Exemple

La longueur d'une certaine catégorie de clavier d'ordinateur suit la loi normale d'espérance mathématique 35 et de variance 1.96 .

X : « la longueur d'un clavier choisi au hasard »

$$\mathrm{X} \sim N(35\,,1.96)$$

a) Quelle est la probabilité que la longueur d'un clavier soit supérieure à 37 cm ?

$$P(\mathrm{X} > 40) = P(\tfrac{\mathrm{X}-35}{\sqrt{1.96}} > \tfrac{37-35}{\sqrt{1.96}}) = P(Z > 1.43) = 1 - P(Z < 1.43) = 1 - 0.9236 = 0.0764$$

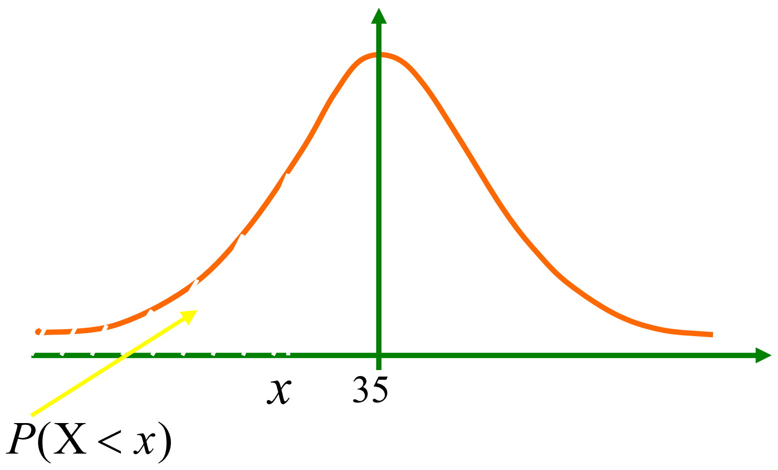
b) Quelle est la longueur du clavier dont 25% de l'ensemble sont plus courts que lui ?

x : la longueur du clavier.

$$P(\mathrm{X} < x) = 0.25 \Leftrightarrow P(\tfrac{X-35}{\sqrt{1.96}} < \tfrac{x-35}{\sqrt{1.96}}) = 0.25$$

$$\Rightarrow \tfrac{x-35}{\sqrt{1.96}} = -0.675$$

$$\Rightarrow x = 34.055\,cm$$



Propriétés de la loi normale

Soient $X_1 , X_2 , X_3 , \ldots\ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant la loi normale

$$X_i \sim N(\mu_i , \sigma_i^2) \qquad i = 1, 2, 3, \ldots.., n \,\cdot$$

$$\boxed{X = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} a_i u_i \ , \ \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2\right)}$$

- $a_1 , a_2 , a_3 , \ldots , a_n$ sont des nombres réels.
- $E(X) = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i$
- $V(X) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2$

Toute combinaison linéaire de variables aléatoires normales indépendantes suit également une loi normale.

Exemple

X_1: Poids en kg d'un ordinateur de type A. $X_1 \sim N(15\,,8)$

X_2: Poids en kg d'un ordinateur de type B. $X_2 \sim N(17\,,10)$

a) Quelle est la probabilité que le poids total des deux types d'ordinateurs excède 35 kg ?

$$X = X_1 + X_2 \text{ : somme des deux poids}$$

$$a_1 = 1 \text{ et } a_2 = 1$$

$$E(X) = E(X_1) + E(X_2) = 15 + 17 = 32$$

$$V(X) = V(X_1) + V(X_2) = 8 + 10 = 18$$

$$X \sim N(32\,,18)$$

$$\begin{aligned} P(X > 35) &= P\left(\tfrac{X-32}{\sqrt{18}} > \tfrac{35-32}{\sqrt{18}}\right) = P(Z > 0.71) \\ &= 1 - P(Z \leq 0.71) = 1 - \Phi(0.71) \\ &= 1 - 0.7611 = 0.2389 \end{aligned}$$

b) Quelle est la probabilité que leur poids moyen soit inférieur à 16.5 kg ?

$$\overline{X} = \frac{X_1+X_2}{2} = \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2 : \text{moyenne arithmétique des poids}$$

$$a_1 = \frac{1}{2} \text{ et } a_2 = \frac{1}{2}$$

$$E(\overline{X}) = \frac{1}{2}E(X_1) + \frac{1}{2}E(X_2) = \frac{1}{2}\times 15 + \frac{1}{2}\times 17 = 16$$

$$V(\overline{X}) = \frac{1}{4}\times V(X_1) + \frac{1}{4}\times V(X_2) = \frac{1}{4}\times 8 + \frac{1}{4}\times 10 = 4.5$$

$$\overline{X} \sim N(16\,, 4.5)$$

$$P(\overline{X} < 16.5) = P(\frac{\overline{X}-16}{\sqrt{4.5}} < \frac{16.5-16}{\sqrt{4.5}}) = P(Z < \frac{16.5-16}{\sqrt{4.5}}) = P(Z < 0.23) = 0.591$$

c) Quelle est la probabilité que le poids de l'ordinateur de type A dépasse celui de type B ?

$$X_1 > X_2 : \text{Le poids de l'ordinateur de type A dépasse celui de type B} \;,\quad X_1 - X_2 > 0$$

$$Y = X_1 - X_2 \qquad a_1 = 1 \text{ et } a_2 = -1$$

$$E(Y) = E(X_1) - E(X_2) = 15 - 17 = -2$$

$$V(Y) = (1)^2 \times V(X_1) + (-1)^2 \times V(X_2) = 1\times 8 + 1\times 10 = 18$$

$$Y \sim N(-2\,, 18) \Rightarrow P(X_1 > X_2) = P(X_1 - X_2 > 0) = P(Y > 0) = P(\frac{Y-(-2)}{\sqrt{18}} > \frac{0-(-2)}{\sqrt{18}})$$

$$= P(Z > 0.47) = 1 - P(Z \leq 0.47) = 1 - 0.6808 = 0.3192$$