Prof. Maurizio Dècina

APPUNTI SULLE

COMUNICAZIONI SICURE

Politecnico di Milano 2005

LARGE NUMBERS

Potenze di 2	2^{10}	$\longrightarrow$	$\sim 10^{3}$	
	2^{16}	$\longrightarrow$	$\sim 6{,}55$	10^{4}
	2^{32}	$\longrightarrow$	$\sim 4{,}3$	10^{9}
	2^{48}	$\longrightarrow$	$\sim 2{,}8$	10^{14}
	2^{56}	$\longrightarrow$	$\sim 7{,}2$	10^{16}
	2^{64}	$\longrightarrow$	$\sim 1{,}8$	10^{19}
	2^{100}	$\longrightarrow$	$\sim 1{,}3$	10^{30}
	2^{128}	$\longrightarrow$	$\sim 3{,}4$	10^{38}
	2^{200}	$\longrightarrow$	$\sim 1{,}6$	10^{60}
	2^{256}	$\longrightarrow$	$\sim 1{,}2$	10^{77}
	2^{512}	$\longrightarrow$	$\sim 1{,}3$	10^{154}
	2^{750}	$\longrightarrow$	$\sim 5{,}9$	10^{225}
	2^{1024}	$\longrightarrow$	$\sim 1{,}8$	10^{308}

$$\frac{\text{\# Cifre Esp. Binario}}{\log_2 10} = \text{\# Cifre Esp. Decimale} \quad [\log_2 10 \cong 3{,}33]$$

Secondi	1 h	3,6	10^{3}
	1 g	8,64	10^{4}
	1 mese	$\sim 2{,}6$	10^{6}
	1 anno	$\sim 3{,}15$	10^{7}
	10 anni	$\sim 3{,}15$	10^{8}
	100 anni	$\sim 3{,}15$	10^{9}
	1000 anni	$\sim 3{,}15$	10^{10}

Servono metà combinazioni in media per risolvere

Esempio Chiave da 56 bit combinazioni $= 2^{56} \cong 7{,}2\text{x}10^{16}$

$7{,}2 \times 10^{16} \times 10^{-9} = \sim 7{,}2 \times 10^{7}$ ~ 2 anni per provarle tutte

10^{-9} s per combinazione

1 ns per combinazione [>1.000 MIPS in multiprocessing]

LARGE NUMBERS

• Probabilità di venire ucciso in un incidente automobilistico (negli U.S., per anno)	1 su 5.600	(2^{-12})
• Età della Terra	10^9	(2^{30}) anni
• Età dell'Universo	10^{10}	(2^{34}) anni
Se l'Universo è Chiuso		
• Vita totale dell'Universo, durata	10^{11}	(2^{37}) anni
	10^{18}	(2^{61}) secondi
Se l'Universo è aperto		
• Tempo affinché tutta la materia si liquidi a temperatura zero	10^{65}	(2^{216}) anni
	10^{72}	(2^{240}) secondi
• Numero di atomi della Terra	10^{51}	(2^{170})
• Numero di atomi nella Galassia	10^{67}	(2^{223})
nell'Universo	10^{77}	(2^{265})
• Volume dell'Universo	10^{84}	(2^{280}) cm^3

n oggetti diversi $\rightarrow$ presi a gruppi di k

PERMUTAZIONI $(k = n)$	$n!$
DISPOSIZIONI	$\dfrac{n!}{(n-k)!}$
DISPOSIZIONI CON RIPETIZIONE	n^k
COMBINAZIONI	$\dbinom{n}{k}$
COMBINAZIONI CON RIPETIZIONE	$\dbinom{n+k-1}{k}$

$n = 1, 2 ...$
$k = 1, 2 ...$

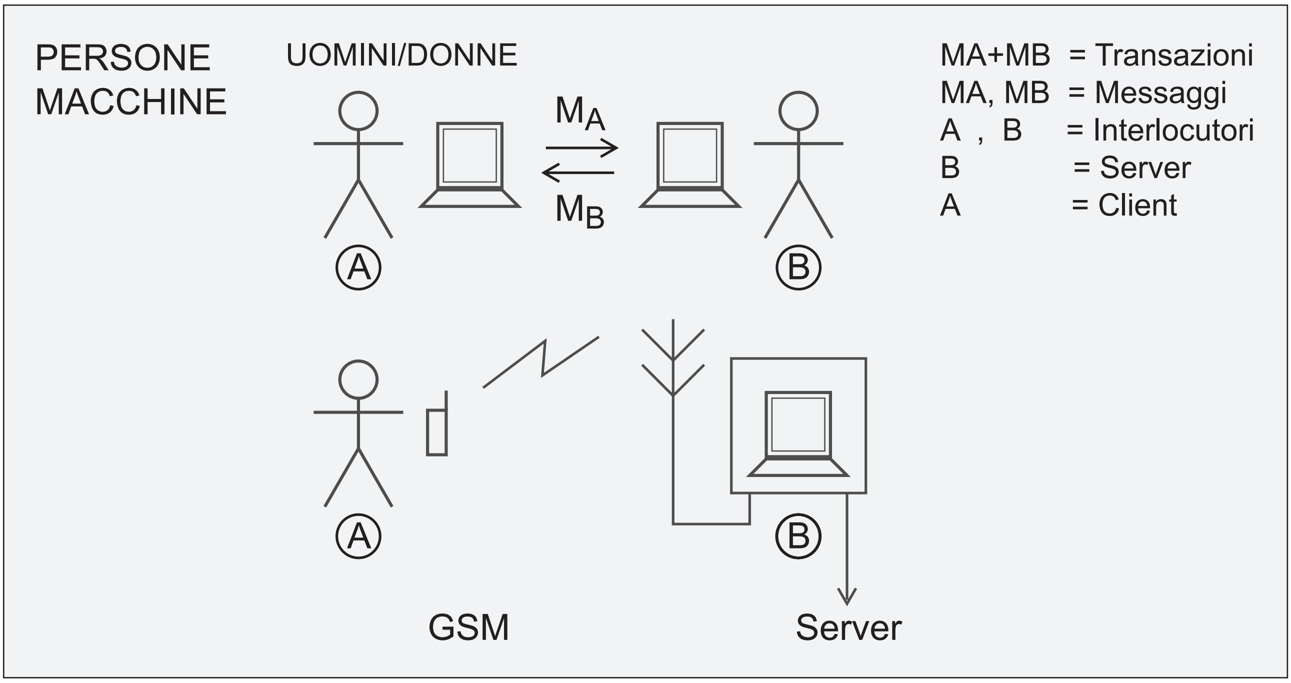
FORMULA DI STIRLING

$$n! \simeq \sqrt{(2\pi n)}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

n intero > 0, per $n \gg 1$

ASPETTI DELLA SICUREZZA

- SEGRETEZZA {DEI MESSAGGI {RISERVATEZZA / CONFIDENZIALITA'
- IDENTIFICAZIONE {AUTENTICAZIONE DEGLI INTERLOCUTORI} MACCHINE / PERSONE
- INTEGRITA' {AUTENTICAZIONE DEI MESSAGGI
- FIRMA {DEI MESSAGGI {FIRMA DI PERSONE
- CERTIFICATO {DI IDENTITA' DI PERSONE
- NON RIPUDIO {DELLE TRANSAZIONI
- ANONIMITA' {DELLE TRANSAZIONI
- DISPONIBILITA' {DEL SERVIZIO} {(DENIAL OF SERVICE ATTACK)
- AFFIDABILITA' {DEL SERVIZIO
- AUTORIZZAZIONE {A INTERLOCUTORI IDENTIFICATI}



NUMERI INTERI

• Dato m intero positivo, $m > 0$, l'espressione

'm divide n'

ove n è intero, $n \gtreqqless 0$, significa che

'n è divisibile per m'

in modo perfetto, cioè senza resto:

$$\frac{n}{m} = k \text{ intero} \qquad \begin{array}{l} n \gtreqqless 0 \\ k \gtreqqless 0 \\ m > 0 \end{array}$$

e si scrive

$$m \backslash n$$

Quindi n è multiplo di m:

$n = km$, per qualche intero k.

• Esiste solo un multiplo di $m = 0$, cioè zero stesso.
Cioè 0 non 'divide' alcun numero, ovvero nessun intero è divisibile per 0.

• Dato a intero positivo, $a > 0$, questi è un numero 'primo'
soltanto se 1 e a dividono a stesso, cioè se a è divisibile soltanto per 1 e per a stesso

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{a}{1} = a \\[2ex] \dfrac{a}{a} = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{se queste sono le sole divisioni senza resto,} \\ \text{allora } a \text{ è primo} \qquad a = p \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad\; p > 0. \end{array}$$

per $a = 0$ $\quad \left\{ \dfrac{0}{1} = 0 \right. \qquad \dfrac{0}{0} = \text{indefinito}$

$p_i \Rightarrow 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, ...$ $\qquad i = 1, 2, 3, ...$

I numeri primi sono infiniti

• Tutti gli altri numeri interi sono ‘composti’

$$m = \prod_{k=1}^{n} p_k, \quad p_1 \le p_2 \le p_3 ... \le p_n, \quad m > 0$$

p_k numeri primi - Teorema fondamentale dell’Aritmetica -
ovvero

$$m = \prod_{i=1}^{n} p_i^{ei}, \quad 1 \le i \le n, \quad m > 0, \quad e_i > 0$$

Ad es: $91 = 7 \times 13$ $\qquad 20 = 2^2 \cdot 5$

• Il massimo comun divisore ($\equiv$ mcd) di due numeri interi m e n è l’intero più grande che li divide entrambi

$$\text{mcd}\,(m,n) = \max\,\{k \mid k\backslash m \text{ e } k\backslash n\}$$

l’espressione

k divide m (o m è divisibile per k)

$k\backslash m \equiv k > 0$ e $m = qk$
per un certo intero q

Ad es: $\text{mcd}\,(12, 18) = 6$

• Due numeri positivi m e n interi sono ‘primi tra loro’ se

$$\text{mcd}\,(n,m) = 1$$

e si scrive

$$n \perp m \text{ o } m \perp n$$

inoltre:

$$\text{mcd}\,(0, n) = n$$
$$\text{mcd}\,(0, 0) = \text{indefinito}$$

ARITMETICA MODULARE

Dato $a \lesseqgtr 0$, intero

e $m > 0$, intero

$$a \bmod m = r$$

significa che

$$a - \lfloor \frac{a}{m} \rfloor \ m = r$$

e cioè che

$$a = k\,m + r \qquad k = \lfloor \frac{a}{m} \rfloor$$

$$a = \lfloor \frac{a}{m} \rfloor \ m + r$$

con

$$0 \leq r \leq m - 1$$

sempre $r \geq 0$
i residui di a modulo m
sono sempre ≥ 0.

Ad esempio:

$3 \bmod 7 = 3$	$(k = 0)$	$a = 3, m = 7$
$7 \bmod 3 = 1$	$(k = 2)$	$a = 7, m = 3$
$-1 \bmod 7 = 6$	$(k = -1)$	$-1 = k\,7 + 6, k = -1$
$-2 \bmod 3 = 1$	$(k = -1)$	$-2 = k\,3 + 1, k = -1$
$2 \bmod 3 = 2$	$(k = 0)$	
$9 \bmod 5 = 4$	$(k = 1)$	

($a \bmod 0 = a$, per definizione)
($0 \bmod m = 0$, per definizione)

EXCLUSIVE OR

$$0 \oplus 0 = 0$$

$$0 \oplus 1 = 1$$

$$1 \oplus 0 = 1$$

$$1 \oplus 1 = 0$$

$$(0+0) \bmod 2 = 0 \rightarrow 0 \bmod 2 = 0$$

$$(0+1) \bmod 2 = 1 \rightarrow 1 \bmod 2 = 1$$

$$(1+0) \bmod 2 = 1 \rightarrow 1 \bmod 2 = 1$$

$$(1+1) \bmod 2 = 0 \rightarrow 2 \bmod 2 = 0$$

Si dice inoltre che b è congruente con a mod$m$

$$b \equiv a \pmod{m}$$

se b e a hanno lo stesso resto quando divisi per m,

$$m > 0$$

$$b,\ a,\ \gtreqless 0$$

e cioè detti

$$\begin{cases} a = k_1 m + r_1 \\ b = k_2 m + r_2 \end{cases}$$

a e b sono congruenti mod$m$ se e solo se

$$r_1 = r_2 = r$$

$$b \bmod m = a \bmod m = r$$

$$(b - a) \bmod m = 0$$

e cioè $(b-a)$ è 'DIVISIBILE' (perfettamente divisibile) per m (resto $= 0$).

Ad esempio:

$$13 \bmod 3 = 1$$

$$22 \bmod 3 = 1$$

$$22 \equiv 13 \pmod{3}$$

Si dice anche che l'operazione

$$a \bmod m = r, \qquad \text{ove } r \text{ è il residuo di } a,$$

è la riduzione modulare di a, modulo m.

L'insieme dei numeri interi

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ m-1$$

è l'insieme completo dei residui, modulo m.

L'insieme

$$\mathcal{Z}_m \ (m > 0; |\mathcal{Z}_m| = m)$$

$$r_i \in \mathcal{Z}_m, \ r_i = 0, 1, 2, ..., m-1$$

è lo spazio dell' 'aritmetica modulo' m.
Valgono tutte le proprietà dell'aritmetica

$$(a \pm b) \bmod m \equiv [(a \bmod m) \pm (b \bmod m)] \bmod m$$

$$(a \times b) \bmod m \equiv [(a \bmod m) \times (b \bmod m)] \bmod m$$

$$[a \times (b + c)] \bmod m \equiv \{[(a \times b) \bmod m] + [(a\ c) \bmod m]\} \bmod m$$

POTENZE DI NUMERI MODULO *m*

$$a^x \bmod m$$

Esempio

$$a^4 \bmod m$$

$$\rightarrow \quad (a \times a \times a \times a) \bmod m$$

oppure

$$\rightarrow \quad [(a \times a) \bmod m]^2 \bmod m$$

$$3^4 \bmod 2 \rightarrow 81 \bmod 2 = 1$$

oppure $\rightarrow$ $(9 \bmod 2)^2 \bmod 2 = (1)^2 \bmod 2 = 1.$

$$a^x \bmod m = b$$

dato x e a trovare b in $\mathcal{Z}_m$.

LOGARITMO DISCRETO

$$3^x \bmod 17 = 15$$

dato a, m e b trovare x.

per tentativi, in questo caso $x = 6$

$$3^6 = 729$$

$$729 \cdot \bmod 17 = 15$$

infatti

$$729 = \lfloor \frac{729}{17} \rfloor \times 17 + 15 =$$

$$= 42 \times 17 + 15 = \qquad (k = 42)$$

$$714 + 15$$

Purtroppo non tutti i logaritmi discreti hanno soluzioni

Ad esempio:

$$3^x \bmod 13 = 7$$

non ha soluzione.

Trovare l'intero x, $x \geqslant 0$

tale che

$$\boxed{a^x \bmod m = b}$$ assegnato con a e b interi

positivi

cioè

$$a^x = km + r \qquad k \geqslant 0 \text{ intero}$$

$$\overset{\mathrm{D}}{\log}_a a^x = x = \log_a (km + r) \qquad k \geqslant 0 \text{ intero}$$

$$\boxed{x \triangleq \overset{\mathrm{D}}{\log}_a b}$$

$$\boxed{a^x \equiv b \pmod{m}}$$

Logaritmi discreti $\log^D$ x si dice logaritmo discreto

$$\boxed{a^x \bmod m = b} \quad \text{assegnato } b$$

Trovare x tale che

$$a^x \equiv b \pmod{m}.$$

$$\boxed{3^x \bmod 17 = 15}$$

$$\begin{cases} a = 3 \\ b = 15 \\ m = 17 \end{cases}$$

$\rightarrow$ allora $x = 6$ infatti:

$$3^6 \bmod 17 = 15$$

$$729 \bmod 17 =$$

$$= 729 - \left\lfloor \frac{729}{17} \right\rfloor \cdot 17 =$$

$$= 729 - 714 = 15.$$

ALGORITMO DI EUCLIDE

Calcolo ricorsivo

$$\text{mcd}\,(n, m) = \text{mcd}\,(m, n)$$

dato

$$0 \leq m < n$$

si calcola con la ricorrenza

$$\begin{cases} * \ \ \text{mcd}\,(0, n) = n \\ * \ \ \text{mcd}\,(m, n) = \end{cases} \qquad \begin{cases} n > 0 \\ \text{mcd}\,(0, 0) = \text{indefinito} \end{cases}$$

$$\text{mcd}\,(n \bmod m, m) \qquad (m > 0)$$

Ad esempio

$$\text{mcd}\,(12, 18) =$$

$$\text{mcd}\,(18 \bmod 12, 12) = \text{mcd}\,(6, 12) =$$

$$\text{mcd}\,(12 \bmod 6, 6) = \text{mcd}\,(0, 6) = 6$$

Due numeri sono primi tra loro se

$$\text{mcd}\,(n, m) = 1$$

$$n \perp m\ ;\ m \perp n$$

NUMERI INVERSI

Dato $n > 0$ intero, l'inverso è il numero (in generale non intero) m

tale che

$$m = \frac{1}{n} .$$

Ad esempio:

$$n = 4; \; m = \frac{1}{4} ,$$

cioè m è tale che

$$n \times m = 1.$$

Nell'aritmetica modulo m $(m > 0)$, lo spazio dei residui $\mathcal{Z}_m$,
l'operazione di inversione è definita analogamente
Dato

$$a \bmod m \qquad\qquad a \gtreqless 0$$

trovare l'intero positivo $x > 0$
tale che

$$(x \cdot a) \bmod m = 1$$

che si può scrivere come

$$a^{-1} \equiv x \pmod m$$

a^{-1} congruente con x mod$m$.

L'equazione

$$a^{-1} \text{ congruente con } x \bmod m$$

ha una sola soluzione se e solo se

$$a \text{ e } m$$

sono primi relativi

Se m è primo $\quad m = p$
allora ogni numero da 1 a $m-1$ è primo relativo con m
ed ha esattamente un inverso corrispondente

Due numeri sono primi tra loro

m è primo di n

$$m \perp n \equiv m, n \text{ sono interi}$$
$$\text{e mcd}(m, n) = 1$$

Ad esempio:

$$m = 3 = p$$

$a = 7 =$ primo, è certo che $a \perp m$

allora esiste a^{-1}

$$a^{-1} = 1$$

infatti

$$(a^{-1} \cdot a) \bmod m = \qquad \begin{cases} a = 7 \\ a^{-1} = 1 \end{cases}$$

$$= (1 \times 7) \bmod 3 = 1$$

NUMERI PRIMI

Dato

$$m > 0$$

il numero dei numeri primi $< m$

è $$\Pi\,(m) \to \frac{m}{l_n(m)}$$

Esempio:

$$m = 2^{256} = 1{,}1 \cdot 10^{77}$$

$$\Pi\,(2^{256}) \cong \frac{1{,}1 \cdot 10^{77}}{l_n(1{,}1 \cdot 10^{77})} \cong \frac{1{,}1 \cdot 10^{77}}{177{,}4} \cong 6{,}2 \cdot 10^{74}$$

A giugno 1999 il numero primo più grande scoperto era:

$$\boxed{2^{6{,}972.593} - 1}$$

www.utm.edu/research/prime

corrispondente a un numero decimale con 2.098.960 cifre,

numero primo di Marsenne della forma $2^p - 1$ con p numero primo.

Breve storia della scoperta dei numeri primi più grandi:

1588	Cataldi	$2^{17} - 1$	
1772	Eulero	$2^{31} - 1$	
1951	Ferrier	$\frac{2^{148}+1}{17}$	(44 cifre decimali)

Non tutti i numeri di Marsenne sono primi.
Fermat e poi 1876 - Test di Lucas, per verificare se il numero è primo.

In generale $\mathcal{Z}_m$ l'insieme di tutti i residui $(0 \div m-1)$, $m > 0$, comprende numeri interi composti e numeri primi

$$| \mathcal{Z}_m | = m.$$

L'insieme ridotto

$$\mathcal{Z}_m^* \in \mathcal{Z}_m$$

comprende residui che sono numeri primi

$$p_i, \; 1 \le i \le \varphi(m), \qquad p_i \perp m$$

e cioè la cardinalità

$$| \mathcal{Z}_m^* | = \varphi(m)$$

dell'insieme 'ridotto' dei residui modulo m è uguale alla funzione fi di Eulero (Funzione 'Toziente')

Si sa che:

- se $m = p$, cioè è primo, allora

$$\varphi(p) = p - 1$$

e cioè comprende tutti i residui tranne lo 0, infatti

$$\text{mcd}(0, p) = p.$$

- se $m = p \times q$, ove e p e q sono primi

allora

$$\varphi(p \times q) = (p - 1)(q - 1).$$

più in generale se

$$m = \prod_{i=1}^{n} p_i^{l_i} \qquad \begin{array}{r} l_i > 0 \\ 1 \le i \le n \end{array}$$

$$\varphi(m) = \prod_{i=1}^{n} (p_i^{l_i} - p_i^{l_i - 1})$$

Ad esempio:

$$m = 60; \qquad 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$\varphi(60) = (2^2 - 2^1)(3 - 1)(5 - 1) =$$

$$= 2 \times 2 \times 4 = 16 \qquad \begin{cases} p_1 = 2, \; l_1 = 2 \\ p_2 = 3, \; l_2 = 1 \\ p_3 = 5, \; l_3 = 1 \end{cases}$$

$$98 = 2 \times 7^2$$

$$\varphi(98) = (2 - 1)(7^2 - 7) = 42$$

PICCOLO TEOREMA DI FERMAT

Dato $m > 0$ intero e primo $m = p$, se a non è multiplo di p allora

(1) $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}, \quad a \perp p;$

e cioè anche → $a^{p} \equiv a \pmod{p}, \quad a \perp p;$

dalla (1) si ha

$a^{p-1} \bmod p = 1 = 1 \bmod p$

e quindi $(a \cdot a^{p-2}) \bmod p = 1$

$a^{p-2} \equiv a^{-1} \pmod{p}$

e cioè $a^{-1} = a^{p-2} \bmod p.$

TEOREMA DI LAGRANGE

afferma che in $\mathcal{Z}_m^*$ gli elementi $a \perp m$ elevati a $\varphi(m)$ danno 1:

Dato $m > 0$ e $a \perp m$,

m qualsiasi intero, se: $a \perp m$, allora → $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$

cioè $a^{\varphi(m)} \bmod m = 1 = 1 \bmod m$

quindi $a^{-1} = a^{\varphi(m)-1} \bmod m, \; a \perp m$

$a \in \mathcal{Z}_m^*$

detta anche espressione di Eulero.

• Ad esempio:

$$m = 3 = p$$

$$a = 7 \quad \text{primo} \qquad 7 \perp 3,\ a \perp p$$

$$a^{-1} = a^{p-2} \bmod p = 7 \bmod 3 = 1 \bmod 3$$

infatti $(1 \times 7) \bmod 3 = 1.$

• Ad esempio:

$$m = 15 \qquad 15 = 3 \times 5,\ \ 7 \perp 15$$
$$a = 7 \qquad \varphi(15) = 2 \times 4 = 8$$

$$a^{-1} = 7^7 \bmod 15 = 13 \bmod 15$$

$$7^7 = 823543$$

$$\left\lfloor \frac{7^7}{15} \right\rfloor = 54902$$

$$54902 \times 15 = 823530$$

$$\Delta = a^{-1} = 13$$

infatti $(13 \times 7) \bmod 15 = 91 \bmod 15 = 1.$

• Esempio:

$$\begin{cases} m = 26 = 2 \times 13 \\ a = 7 \end{cases} \qquad \begin{matrix} 26 \perp 7 \\ \varphi(26) = 1 \times 12 = 12 \end{matrix}$$

$$a^{-1} = 7^{11} \bmod 26 = 15$$

$$7^{11} = 1.977.326.743$$

$$\left\lfloor \frac{7^{11}}{26} \right\rfloor = 76.051.028$$

$$76.051.028 \times 26 = 1.977.326.728$$

$$\Delta = 15$$

Verifica:

$$(7 \times 15) \bmod 26 = 105 \bmod 26 = 1$$

$$105 - 4 \times 26 = 1.$$

• Esempio:

$$\begin{cases} m = 75 \\ a = 28 \end{cases} \qquad \begin{matrix} 75 = 3 \times 5^2 \\ 28 = 2^2 \times 7 \end{matrix}$$

$$75 \perp 28$$

$$a^{-1} = 28^{39} \bmod 75 =$$

$$\varphi(75) = 2 \cdot (5^2 - 5) = 2 \cdot (25 - 5) = 40$$

$$\left\{ \begin{matrix} \left\lfloor \frac{28^{39}}{75} \right\rfloor \text{ non c'è modo di controllare,} \\ \text{col calcolatore 55 cifre decimali} \end{matrix} \right\}$$

$$a^{-1} = 67$$

$$(67 \times 28) \bmod 75 = 1$$

$$1876 \bmod 75 = 1$$

$$(\text{infatti: } 25 \times 75 = 1875)$$

Metodo di Euclide Esteso

solo se

$$r_0 = m$$
$$r_1 = a$$
$$a < m$$
$$m > a$$
$$r_0 > r_1.$$

ALGORITMO DI EUCLIDE ESTESO

EUCLIDEAN ALGORITHM

• $\mathcal{Z}_m$ è un anello per ogni intero positivo m

se $a \in \mathcal{Z}_m$ ha un a^{-1} moltiplicatore inverso; se, e solo se

$$\mathrm{mcd}(a, m) = 1;$$

inoltre, il numero di interi positivi minori di m
e primi relativi a m è $\varphi(m)$.

• L'insieme dei residui modulo m che sono primi relativi a m è $\mathcal{Z}_m^*$.
Ogni elemento di $\mathcal{Z}_m^*$ ha un moltiplicatore inverso (anche lui in $\mathcal{Z}_m^*$).

$$a \in \mathcal{Z}_m \text{ ha un } a^{-1}.$$

Due numeri r_0 e r_1 positivi, $\qquad r_0 > r_1$

$$\begin{array}{c} r_1,\ 0 \div \max \\ q_1,\ 1 \div \max \end{array} \quad \begin{cases} r_0 = q_1 r_1 + r_2 & 0 < r_2 < r_1 \\ r_1 = q_2 r_2 + r_3 & 0 < r_3 < r_2 \\ \quad\vdots & \\ r_{\max-1} = q_{\max}\, r_{\max} & \end{cases}$$

allora

$$\text{mcd}\,(r_0, r_1) = \text{mcd}\,(r_1, r_2) \ldots = \text{mcd}\,(r_{\text{max-1}}, r_{\text{max}}) = r_{\text{max}}$$

$$\text{mcd}\,(r_0, r_1) = r_{\text{max}}$$

Si può usare l'ALGORITMO ESTESO

$$\begin{cases} \text{se} & a < m \\ \text{ha un} & a^{-1} \text{modulo } m \end{cases}$$

comincio con

$$r_0 = m$$
$$r_1 = a$$

tuttavia - NON calcola b^{-1}

Numeri $t_0, t_1, \ldots, t_{\text{max}}$

con i q_j definiti come sopra

$$t_0 = 0$$

$$t_1 = 1$$

$$t_j = (t_{j-1} - q_{j-1} t_{j-1}) \bmod r_0 \qquad \text{per } j \geqslant 2$$

si ha

$$r_j \equiv t_j\, r_1 \pmod{r_0} \qquad 0 \leq j \leq \text{max}$$

ove q_j e r_j sono definiti dall'algoritmo e t_j come detto

Allora, se

$$\text{mcd}\,(r_0,\ r_1) = 1$$

si ha

$$t_{\max} = r_1^{-1}\ \text{mod} r_0$$

Allora si calcola la sequenza

$$t_0, t_1, ..., t_{\max}$$

insieme a

$$q_1, q_2, ..., q_{\max}$$

$$r_1, r_2, ..., r_{\max}$$ algoritmo di Euclide

Per controllo deve essere

$$t_i \cdot r_1 \equiv r_i\ (\text{mod} r_0)$$

per $0 \leq\ i \leq \max$

$$t_0 \cdot a \equiv m\ (\text{mod} m) \qquad r_0 = m$$

$$0 \equiv 0$$

$$t_1 \cdot a \equiv a \qquad r_1 = a$$

$$a \equiv a$$

$$t_2 \cdot a \equiv r_2\ (\text{mod} r_0)$$

ESEMPIO

$$\begin{cases} m = 75 \\ a = 28 \end{cases}$$

$$75 = 2 \times 28 + 19$$
$$r_0 = q_1 r_1 + r_2$$
$$28 = 1 \times 19 + 9$$
$$r_1 = q_2 r_2 + r_3$$
$$19 = 2 \times 9 + 1$$
$$r_2 = q_3 r_3 + r_4$$
$$9 = 9 \times 1$$
$$r_3 = q_4 r_4$$

$$r_0 = 75$$
$$r_1 = 28$$
$$r_2 = 19$$
$$r_3 = 9$$
$$r_4 = 1$$

$$q_1 = 2$$
$$q_2 = 1$$
$$q_3 = 2$$
$$q_4 = 9$$

$4 = \max$

$$t_0 = 0$$
$$t_1 = 1$$
$$t_2 = t_0 - q_1 t_1 = 0 - 2 \times 1 = -2 \text{ mod}75 = 73$$
$$t_3 = t_1 - q_2 t_2 = 1 + 1 \times 2 = 3$$
$$t_4 = t_2 - q_3 t_3 = -2 - 2 \times 3 = -8 \text{ mod}75 = 67$$

$a^{-1} = t_{\max} \longrightarrow$ $a^{-1} = t_4 = 67$

per verifica

$$\begin{cases} \bullet\ t_2 \cdot r_1 = r_2 \text{ mod}75 \\ \quad 73 \times 28 = 19 \text{ mod}75 \\ \bullet\ t_3 \cdot r_1 = r_3 \text{ mod}75 \\ \quad 3 \times 28 = 9 \text{ mod}75 \\ \quad 84 \text{ mod}75 = 9 \\ \bullet\ t_4 \cdot r_1 = r_4 \text{ mod}75 \\ \quad 67 \times 28 = 1 \text{ mod}75 \end{cases}$$

ESEMPIO

$$\begin{cases} m = 26 \\ a = 7 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} r_0 &= 26 \\ r_1 &= 7 \\ r_2 &= 5 \\ r_3 &= 2 \\ r_4 &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 26 &= 3 \times 7 + 5 \\ r_0 &= q_1 r_1 + r_2 \\ 7 &= 1 \times 5 + 2 \\ r_1 &= q_2 r_2 + r_3 \\ 5 &= 2 \times 2 + 1 \\ r_3 &= q_3 r_3 + r_4 \\ 2 &= 2 \times 1 \\ r_3 &= q_4 r_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_1 &= 3 \\ q_2 &= 1 \\ q_3 &= 2 \\ q_4 &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_0 &= 0 \\ t_1 &= 1 \\ t_2 &= t_0 - q_1 t_1 = 0 - 3 \times 1 = -3, \quad -3 \equiv 23 \\ t_3 &= t_1 - q_2 t_2 = 1 + 1 \times 3 = 4 \\ t_4 &= t_2 - q_3 t_3 = -3 - 2 \times 4 = -11, \; -11 \equiv 15 \end{aligned}$$

$a^{-1} \equiv 15.$

per verifica

$$\begin{cases} \bullet\ t_2 \cdot r_1 = r_2 \bmod 26 \\ \quad 23 \times 7 = 5 \bmod 26 \\ \bullet\ t_3 \cdot r_1 = r_3 \bmod 2 \\ \quad 4 \times 7 = 2 \bmod 26 \\ \bullet\ t_4 \cdot r_1 = r_4 \bmod 26 \\ \quad 15 \times 7 = 1 \bmod 26 \end{cases}$$

Algoritmo esteso di Euclide

Complessità $0\ (l_n\ m)$

il numero medio di divisioni è

$$0{,}843\ l_n\ (m) + 1{,}47$$

(Knuth)

ELEMENTI GENERATORI

Se $m = p$ è primo allora $\mathcal{Z}_p^*$ è un gruppo di ordine $p-1$ $\quad p > 0$

$$|\mathcal{Z}_p^*| = p-1.$$

Se p è primo c'è un elemento

$$\alpha \in \mathcal{Z}_p^* \qquad \alpha < p$$

che è di *ordine* $(p-1)$:

$$\alpha^{p-1} \equiv 1 \qquad \text{cioè } \alpha^{p-1} \bmod p = 1,$$

α è detto elemento primitivo (o generatore) modulo p

Ogni elemento $\quad \beta \in \mathcal{Z}_p^* \quad \beta \perp p$

mcd $(\beta, p) = 1$

può essere scritto come

$\beta > 0 \quad \beta = \alpha^i \quad 0 \leq i \leq p-2$

Il numero di elementi primitivi modulo p è

$$\varphi(p-1)$$

AD ESEMPIO

da 1 a $p-1$

$p-1$

$\begin{cases} p = 5 \\ \alpha = 2 \end{cases}$

$\beta = \alpha^i$

$0 \le i \le p-2 \qquad \beta = 1, 2, 3, 4 \qquad \beta > 0$

$2^0 \bmod 5 = 1$

$2^1 \bmod 5 = 2$

$2^2 \bmod 5 = 4$

ciclico $\qquad 2^3 \bmod 5 = 3$

$$\begin{cases} \beta_1 = \alpha^0 \\ \beta_2 = \alpha^2 \\ \beta_{p-1} = \alpha^{p-2} \end{cases}$$

$2^4 \bmod 5 = 1$

$2^5 \bmod 5 = 2$

$2^6 \bmod 5 = 4$

$2^7 \bmod 5 = 3$

$2^8 \bmod 5 = 1$

$2^9 \bmod 5 = 2$

$2^{10} \bmod 5 = 4$

$2^{11} \bmod 5 = 3$

notare che

$\alpha = 2$

è di ordine

$p-1$

infatti

$2^4 = 16 \bmod 5 = 1$

ecc.

quanti α ci sono?

$\varphi(4)$

$4 = 2^2$

$\varphi(4) = 2^2 - 2^1 = 2 \qquad$ c'è $\alpha = 2$ e $\alpha = 3$

2 e 3

Infatti per

$$p = 5$$
$$\alpha = 3$$

$$\begin{array}{l}
3^0 = 1 \bmod 5 = 1 \\
3^1 = 3 \bmod 5 = 3 \\
3^2 = 9 \bmod 5 = 4 \\
3^3 = 27 \bmod 5 = 2 \\
\hline
3^4 = 81 \bmod 5 = 1 \\
3^5 = 243 \bmod 5 = 3 \\
3^6 = 729 \bmod 5 = 4 \\
3^7 = 2187 \bmod 5 = 2 \\
\hline
\end{array}$$

$3^4 = 81 \bmod 5 = 1$

anche $\alpha = 3$ è di ordine $p-1$

QUANTI ELEMENTI PRIMITIVI CI SONO?

$\varphi\ (p - 1)$.

Se

$$(p-1) = \prod_{i=1}^{n} q_i = q_1 q_2 \ldots q_n$$

primi

allora si calcola

$$\alpha^{\frac{p-1}{q_i}} \bmod p$$

$$\begin{cases} \text{se } \neq 1 & \text{OK} \\ \text{se } = 1 & \text{allora } \alpha \text{ NON è primitivo} \end{cases}$$

Ad esempio

$p = 5$

$p - 1 = 4 = 2 \times 2$

$\alpha = 3$

$3^{\frac{4}{2}} \bmod p$

$9 \bmod 5 = 4$ OK

Ad esempio

$p = 11$

$\alpha = 3$

$p - 1 = 10 = 2 \times 5$

$3^{\frac{11-1}{2}} \bmod 11 = 1$: NO $\alpha \neq 3$.

CRITTOGRAFIA CLASSICA

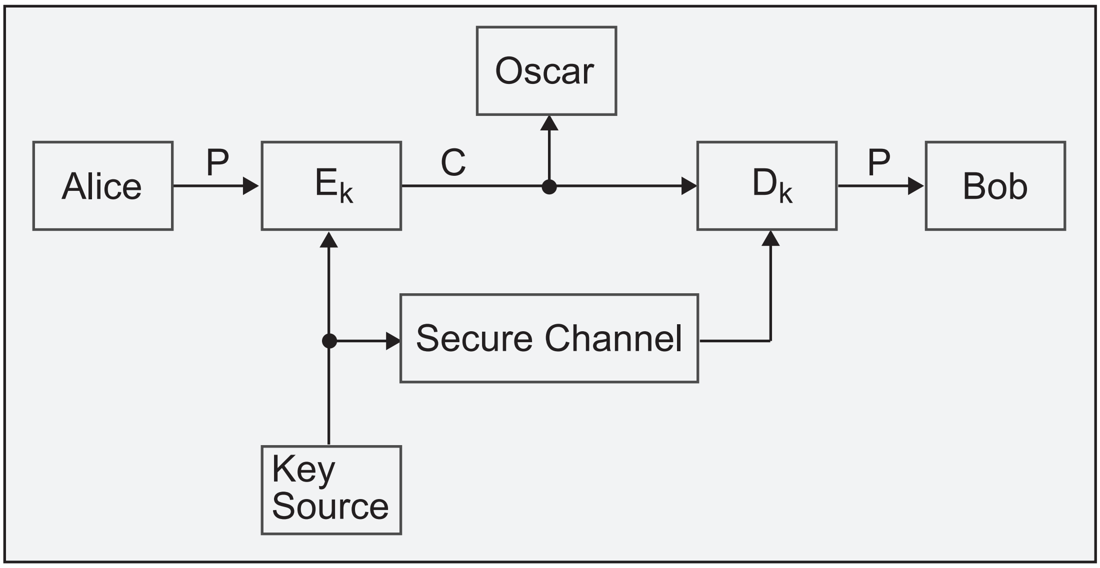
Cifratura	Ciphering
Decifratura	Deciphering
Crittografare	Cifrare
Decrittografare	Decifrare
Crittosistemi	Crittografia
Crittoanalisi	
Crittologia	

Canali sicuri
Comunicazioni sicure

Principals	Alice & Bob
Opponent	Oscar
Crittosistema a chiave	
	‘Segreta’ ovvero
	‘Privata’

Protocolli di Sicurezza

CRITTOSISTEMA A CHIAVE ‘SEGRETA’



‘Insecure’ Communication Channel

P	Plaintext	Testo in chiaro
C	Ciphertext	Testo cifrato

TEXT*
testo alfabetico (tipicamente 26 lettere inglesi senza punteggiatura
e cifre decimali, ecc.)

$C = E_K(P)$	Algoritmo di cifratura
$P = D_K(C) = D_K[E_K(P)]$	Algoritmo di decifratura
$K = \text{KEY}$	Chiave della cifratura

*	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

insieme dei numeri interi da 0 a 25

CRITTOSISTEMA

Un CRITTOSISTEMA è una quintupla

$$(\mathcal{P}, \mathcal{C}, \mathcal{K}, \mathcal{E}, \mathcal{D})$$

- $\mathcal{P}$ insieme dei testi in chiaro,

$$P \in \mathcal{P}$$

- $\mathcal{C}$ insieme dei testi cifrati,

$$C \in \mathcal{C}$$

- $\mathcal{K}$ è lo ‘spazio delle chiavi’, insieme delle possibili chiavi di cifratura,

$$K \in \mathcal{K}$$

- Per ogni $K \in \mathcal{K}$, c’è una regola di cifratura

$$E_{\mathrm{K}} \in \mathcal{E}$$

  e la corrispondente regola di decifratura

$$D_{\mathrm{K}} \in \mathcal{D}$$

- Per ogni testo in chiaro $P \in \mathcal{P}$, E_{K} e D_{K} sono funzioni tali che

$$D_{\mathrm{K}}\,[E_{\mathrm{K}}\,(P)] = P, \text{ per ogni } P \in \mathcal{P}.$$

Il sistema funziona così:

1) C'è un modo sicuro con cui Alice e Bob scelgono una 'chiave segreta' a caso

$$K \in \mathcal{K}$$

2) Alice vuole mandare un testo in chiaro P composto dalla sequenza di testi

$$P = P_1 P_2 P_3 \ldots P_n, \qquad \text{per } n \geqslant 1 \text{ e per } P_i \in \mathcal{P} \quad 1 \leq i \leq n$$

Alice calcola

$$C_i = E_{\mathrm{k}}(P_i), \qquad 1 \leq i \leq n$$

e manda la sequenza di testi

$$C = C_1 C_2 C_3 \ldots C_n$$

E_{k} deve essere una funzione 'iniettiva'
cioè deve essere: $E_{\mathrm{k}}(P_1) \neq E_{\mathrm{k}}(P_2)$
se risulta $P_1 \neq P_2$

Se $\mathcal{P} \equiv C$ allora le E_{k} sono PERMUTAZIONI

CIFRARIO A SCORRIMENTO

Siano $\mathcal{P} = \mathcal{C} = \mathcal{K} = \mathcal{Z}_{26}$ SHIFT CIPHER

per $0 \leq K \leq 25$ definire!

$$P, C \in \mathcal{Z}_{26} \begin{cases} E_K(P) = (P + K) \bmod 26 \\ D_K(C) = (C - K) \bmod 26 \end{cases}$$

26 lettere dell'alfabeto inglese

$$D_K(E_K(P)) = P \text{ per ogni } P \in \mathcal{Z}_{26}$$

---

per $K = 3$ CAESAR CIPHER (cifrario di Giulio Cesare)

A ÷ Z

chiave $0 \leq K \leq 25$

---

per $K = 11$

w	*e*	*w*	*i*	*l*	*l*	*m*	*e*	*e*	*t*
22	4	22	8	11	11	12	4	4	19

aggiungiamo 11 e riduciamo modulo 26

$$\begin{cases} (22 + 11) \bmod 26 = 7 \\ 33 \bmod 26 = 7 \\ (7 - 11) \bmod 26 = 22 \end{cases}$$

$$-4 \bmod 26 = 22$$
$$-4 = K26 + 22$$
$$K = -1$$

Per rompere il cifrario 'shift' a scorrimento basta esaminare tutte le chiavi,

sono 26

in media mi bastano 26/2 prove per trovare la chiave giusta.

$26/2 = 13$ prove

è lo schema più 'stupido' possibile per la cifratura dei testi.

CIFRARIO A SOSTITUZIONE
SUBSTITUTION CIPHER

* $\mathcal{P} \equiv \mathcal{C} \equiv \mathcal{Z}_{26}$
* $\mathcal{K} \equiv$ tutte le permutazioni di 0, 1 ... 25

  26 simboli (caratteri alfabetici) $\qquad |\mathcal{K}| = 26!$

  per ogni permutazione $\quad \pi \in \mathcal{K}$

$$E_{\pi}(P) = \pi(P)$$
$$D_{\pi}(C) = \pi^{-1}(C)$$

ove π^{-1} è la permutazione inversa di π

---

esempio → $\textit{a b c } \boxed{d} \textit{ e f ...}$

permutazione → X N Y $\boxed{\text{A}}$ H P ...

sostituzione lettere → $E_{\pi}(a) \equiv \text{X},\ E_{\pi}(b) \equiv \text{N}, \ldots, E_{\pi}(d) \equiv \text{A}$

STIRLING

$m! \simeq \sqrt{2\pi m}\left(\frac{m}{e}\right)^m$

per $m \gg 1$

$$\begin{array}{|c|ccccc} \text{A} & \text{B} & \text{C} & \text{D} & \text{E} & \text{F} \\ d & l & r & y & v & o \end{array}$$

→ $D_{\pi}(A) = d,\ D_{\pi}(B) = l,$ etc.

$26! \cong 4 \cdot 10^{26}$ $\qquad$ # medio tentativi $\cong 2 \cdot 10^{26}$

1000 anni $\cong 3{,}5 \cdot 10^{10}$ sec

10^{-9} sec per tentativo $\qquad 2 \cdot 10^{17} \rightarrow$ un trilione di anni

CIFRARIO AFFINE
AFFINE CIPHER

* $\mathcal{P} \equiv \mathcal{C} \equiv \mathcal{Z}_{26}$
* $\mathcal{K} = \{(a,b) \in \mathcal{Z}_{26}{}^* \cdot \mathcal{Z}_{26} : \text{mcd}(a, 26) = 1\}$

Per $K \in \mathcal{K} \qquad K = (a, b);\ a, b > 0$

K è una coppia di numeri positivi

$$K = (a, b) \in \mathcal{K}$$

si definisce la seguente regola di cifratura

$$C = E_{\text{k}}(P) = (aP + b) \bmod 26$$

e decifratura

$$P = D_{\text{k}}(C) = [a^{-1}(C - b)] \bmod 26,$$

essendo

$$P, C \in \mathcal{Z}_{26} \quad \text{e} \quad a \perp 26$$

infatti

$$C \equiv (aP + b) \pmod{26}$$
$$aP \equiv (C - b) \pmod{26}$$
$$a^{-1}(aP) \equiv [a^{-1}(C - b)] \pmod{26}$$

ma

$$a^{-1}(aP) \equiv (a^{-1}a)\, P \equiv 1 \cdot P = P$$

quindi

$$P \equiv [a^{-1}(C - b)] \pmod{26}$$

così che

$$D_{\text{k}}(C) = [a^{-1}(C - b)] \bmod 26.$$

Residui tutti

$\mathcal{Z}_{26} \qquad 0, 1, 2, ...,25$ (sono 26)

Primi con 26 $\quad \text{mcd}\,(a, 26) = 1$

sono $\varphi(26) = 12 \quad 1, 3, 5, 7, 9, 11, 15, 17, 19, 21, 23, 25$

$$\text{m} = 26 = 2 \times 13$$
$$\varphi(m) = (2 - 1) \cdot (13 - 1) = 12$$

Il numero delle chiavi nel cifrario affine è

$$m \cdot \varphi(m)$$
$$26 \times 12 = 312$$

poche!

ESEMPIO

Ricordo $\quad m = \prod_{i=1}^{n} p_i^{e_i} \quad e_i > 0; 1 \quad \leq i \leq n$

$$\varphi(m) = \prod_{i=1}^{n} (p_i^{e_i} - p_i^{e_i - 1})$$

mcd (7,26) = 1

$a = 7$ e $m = 26$

$a \perp 26$

$7 \perp 26$

$k = (7, 3)$

$x = 7^{-1} \bmod 26$

$a^{-1} = a^{\varphi(m)-1} \bmod m$

$x = 7^{11} \bmod 26$

$a \cdot x \equiv 1 \pmod{26}$

$7^{11} = 1.977.326.743$

$\left\lfloor \frac{7^{11}}{26} \right\rfloor$

76.051.028
× 26

1.977.326.743

$\boxed{x = a^{-1} = 15}$ $\qquad$ $\boxed{x = 15}$

infatti

$7 \times 15 = 105 \equiv 1 \pmod{26}$

---

mcd (7,3) = 1

mcd (7 mod3,3)

= mcd (1,3)

mcd (3 mod1,1) = mcd (0,1) = 1

cvd

ESEMPIO

$K = (7,3)$

$7^{-1} \bmod 26 = 15$

$$E_k(P) = (7 \times P + 3) \bmod 26$$
$$D_k(C) = [15\,(C-3)]$$
$$= (15C - 45) \bmod 26 =$$
$$= (15C - 45) \bmod 26 =$$
$$= (15C - 19) \bmod 26$$

$$\begin{array}{cccccc} & \text{h} & , & \text{o} & , & \text{t} \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ P = & 7 & , & 14 & , & 19 \end{array}$$

$(7 \times 7 + 3) \bmod 26 = 52 \bmod 26 = 0$

$(7 \times 14 + 3) \bmod 26 = 101 \bmod 26 = 23$

$(7 \times 19 + 3) \bmod 26 = 136 \bmod 26 = 6$

$$\begin{array}{cccccc} & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ C = & 0 & , & 23 & , & 6 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & \text{A} & , & \text{X} & , & \text{G} \end{array}$$

$[15\,(0-3)] \bmod 26 = -45 \bmod 26 = 7$

$[15\,(23-3)] \bmod 26 =$

$= 300 \bmod 26 = 14$ $\qquad \left\lfloor \frac{300}{26} \right\rfloor = 11$

$11 \times 26 = 286$

$[15\,(6-3)] \bmod 26 = 45 \bmod 26 = 19.$

IL CIFRARIO DI VIGENÈRE

POLIALFABETICO (Blaise de Vigenère)

Shift
Substitution
Affine

$\left.\begin{array}{l}\text{Shift}\\ \text{Substitution}\\ \text{Affine}\end{array}\right\}$ monoalfabetici

VIGENÈRE CIPHER

n è intero positivo

$$\mathcal{P} \equiv \mathcal{C} \equiv \mathcal{K} \equiv (\mathcal{Z}_{26})^n$$

Per una chiave (PAROLA CHIAVE – Keyword) lunga n

$$K = (k_1, k_2 \ldots k_n)$$

si definisce:

$$E_k\,(P_1, P_2 \ldots P_n) = (P_1 + k_1, P_2 + k_2 \ldots P_n + k_n)\ \text{mod}26$$

e

$$D_k\,(C_1, C_2 \ldots C_n) = (C_1 - k_1, C_2 - k_2 \ldots C_n - k_n)$$

mod26

operazioni in $\mathcal{Z}_{26}$.

Esempio $n = 6$ $k =$ CIPHER $\equiv 2, 8, 15, 7, 4, 17$

Parola chiave lunga n

Plaintext

THIS CRYPTOSYSTEM IS NOT SECURE

A	0
B	1
C	2
D	3
E	4
F	5
G	6
H	7
I	8
J	9
K	10
L	11
M	12
N	13
O	14
P	15
Q	16
R	17
S	18
T	19
U	20
V	21
W	22
X	23
Y	24
Z	25

$$\begin{array}{cccccc} 19 & 7 & 8 & 18 & 2 & 17 \\ 2 & 8 & 15 & 7 & 4 & 17 \\ \hline 21 & 15 & 23 & 25 & 6 & 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} 24 & 15 & 19 & 14 & 18 & 24 \\ 2 & 8 & 15 & 7 & 4 & 17 \\ \hline 0 & 23 & 8 & 21 & 22 & 15 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} 18 & 19 & 4 & 12 & 8 & 18 \\ 2 & 8 & 15 & 7 & 4 & 17 \\ \hline 20 & 1 & 19 & 19 & 12 & 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} 13 & 14 & 19 & 18 & 4 & 2 \\ 2 & 8 & 15 & 7 & 4 & 17 \\ \hline 15 & 22 & 8 & 25 & 8 & 19 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 20 & 17 & 4 \\ 2 & 8 & 15 \\ \hline 22 & 25 & 19 \end{array}$$

$n = 6$ parola chiave

C I P H E R

$k \equiv 2, 8, 15, 7, 4, 17$

\# of possible keywords

$26^n \cong$

per $n = 6$

$26^6 \cong 3{,}1 \times 10^8$

per $n = 26$

$26^{26} \cong 6{,}1 \times 10^{36}$

V P X Z G I A X I V W P U B T T M J P W I Z I T W Z T

Nel cifrario di Vigenère con una parola chiave di *n* lettere

Ogni carattere alfabetico

Ad esempio $\mathrm{T} \equiv 19$

Keyword P A S

15 0 18

può diventare a seconda della sua posizione nel messaggio

$$19 + 15 = 34 \bmod 26 = 8 \rightarrow \mathrm{I}$$
$$19 + 0 = 19 \bmod 26 = 19 \rightarrow \mathrm{T}$$
$$19 + 18 = 37 \bmod 26 = 11 \rightarrow \mathrm{L}$$

$$\mathrm{T} \rightarrow \begin{cases} \mathrm{I} \\ \mathrm{T} \\ \mathrm{L} \end{cases}$$ secondo 'P A S'

cifrario Polialfabetico.

CIFRARIO A PERMUTAZIONE

∗ n è intero positivo $n > 0$

∗ $\mathcal{P} \equiv \mathcal{C} \equiv (\mathcal{Z}_{26})^n$

K consiste in tutte le permutazioni di $\{1, 2, 3, ...n\}$ (sono $n!$)

per $K = \Pi$ una permutazione si definisce:

$$E_k\ (P_1, P_2 ... P_n) = [P_{\Pi(1)}, P_{\Pi(2)} ... P_{\Pi(n)}]$$

e

$$D_k\ (C_1, C_2 ... C_n) = [C_{\Pi^{-1}(1)}, C_{\Pi^{-1}(2)} ... C_{\Pi^{-1}(n)}]$$

essendo Π^{-1} la permutazione inversa di Π.

→ Usiamo un esempio alfabetico

Ad esempio

$n = 6$

$n = 6$	1	2	3	4	5	6
$\Pi \rightarrow$	3	5	1	6	4	2

Testo .... | .... | .... |

$\Pi \rightarrow$ S H E S E L | L S S E A S | H E L L S A | N D . . .

1 2 3 4 5 6			
3 5 1 6 4 2			
E E S L S H	S A L S E S	L S H A L E	

$\Pi^{-1} \rightarrow$

1	2	3	4	5	6
3	6	1	5	2	4

1 2 3 4 5 6	
3 5 1 6 4 2	
S H E S E L	L S S E A S

la complessità è

$n!$

abbiamo visto che $26! \cong 4 \times 10^{26}$

Anche questo è Polialfabetico
a differenza di quello a sostituzione che è Monoalfabetico

CIFRARIO A CATENA
STREAM CIPHER

∗ Finora BLOCK CIPHER

$$C = C_1 C_2 \ldots C_i \ldots = E_k(P_1)\, E_k(P_2) \ldots E_k(P_i) \ldots$$

Cifrari a Blocco

Catena di chiavi (Keystream)

$$\mathcal{Z} \equiv (Z_1, Z_2, \ldots, Z_i \ldots) \qquad i \to \infty$$

$$C = C_1 C_2 \ldots C_i \ldots = E_{Z_1}(P_1)\, E_{Z_2}(P_2) \ldots E_{Z_i}(P_i) \ldots$$

Funziona così

K è la 'chiave' $\in \mathcal{K}$ STREAM CIPHER

La 'generica chiave' Z_i è generata con una funzione della 'chiave' e dei testi chiari precedenti, $(i-1)$ testi.

Elemento Keystream $Z_i = f_i(K, \underbrace{P_1, P_2, \ldots, P_{i-1}}_{(i\text{ - }1)\text{ testi}}) \qquad 1 \le i \le \infty$

la chiave dipende dal passato testo in chiaro e poi è usata per cifrare

$$Z_i \to E_{Z_i}(P_i) = C_i$$

poi

$$Z_{i+1} \to C_{i+1}.$$

Block cipher = Stream cipher

se $Z_i = K, \quad \forall_i$

Esempio

Testo in chiaro a Stream	P_1, P_2, P_3, P_4
Calcolo	$Z_1 = f_1(K) \equiv K$
e trovo	$C_1 = E_{Z_1}(P_1)$
poi calcolo	$Z_2 = K + P_1$
e trovo	$C_2 = E_{Z_2}(P_2)$
Poi calcolo ancora	$Z_3 = K + P_1 + P_2$, etc.
In ricezione	$Z_1 = K$
calcolo	$P_1 = D_{Z_1}(C_1)$
poi calcolo	$Z_2 = K + P_1$
e verifico	$P_2 = D_{Z_2}(C_2)$

in sequenza, etc.

CIFRARIO A CATENA
STREAM CIPHER

Settupla $\{\, \mathcal{P}, \mathcal{C}, \mathcal{K}, \mathcal{Z}, \mathcal{F}, \mathcal{E}, \mathcal{D} \,\}$

- $P \in \mathcal{P}$ testi in chiaro
- $C \in \mathcal{C}$ testi cifrati
- $K \in \mathcal{K}$ spazio delle possibili chiavi
- $Z \in \mathcal{Z}$ alfabeto della catena di chiavi (keystream)
- $\mathcal{F} \equiv (f_1, f_2 ...)$ è il generatore della catena di chiavi

ove f_i, $i \geqslant 1$

è tale che

$$\mathcal{K} \times \mathcal{P}^{\,i\text{-}1} \Rightarrow \mathcal{Z}$$

Per ogni $Z_i \in \mathcal{Z}$ c'è una regola di cifratura

$$E_{Z_i} \in \mathcal{E}, \quad i \geqslant 1$$

e di decifratura

$$D_{Z_i} \in \mathcal{D}.$$

E_{Z_i} è tale che

$$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{C}$$

D_{Z_i} è tale che

$$\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{P}$$

in modo tale che

$$D_{Z_i}[E_{Z_i}(P)] = P$$

per ogni $P \in \mathcal{P}$.

Il cifrario a blocco è un caso particolare di quello a catena quando

$$Z_i = K \quad \text{per tutti gli } i \geqslant 1$$

Un cifrario a catena si dice

SINCRONO

se la catena di chiavi (Keystream) è indipendente dal testo in chiaro P
e cioè se il keystream è generato

$$Z_i = f_i(K, i) \qquad i \geqslant 1$$

solo a partire dalla chiave K e dall'indice (i) dello stream.
K è il 'SEED' seme della catena.

Un cifrario a catena si dice

PERIODICO

di Periodo $= d$ per $d > 0$

se

$$Z_{i+d} = Z_i \qquad i \geqslant 1.$$

Il cifrario di Vigenère è periodico di periodo n (Parola chiave – keyword)

la $K = (K_1, K_2, ..., K_n)$

e si ha $Z_i = K_i$ $\qquad 1 \leq i \leq n$

e poi la catena si ripete periodicamente.

I Cifrari a catena spesso si applicano su alfabeti binari

$$\mathcal{P} = \mathcal{C} = \mathcal{Z} = Z_2$$

si ha

$$E_{Z_i}(P_i) = (P_i + Z_i) \bmod 2$$
$$D_{Z_i}(C_i) = (C_i + Z_i) \bmod 2 \qquad i \geqslant 1.$$

ESEMPIO

Ad esempio
usiamo la regola

$$Z_{i+4} = (Z_i + Z_{i+1}) \bmod 2$$

con vettore di Inizializzazione

$$(1, 0, 0, 0)$$

si ha

$$\left|\begin{array}{cccc|cccc|cccc} Z_1 & Z_2 & Z_3 & Z_4 & Z_5 & Z_6 & Z_7 & Z_8 & Z_9 & Z_{10} & Z_{11} & Z_{12} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right.$$

$$i = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,$$

quindi se devo cifrare il testo binario esadecimale

	A	7	B	F	F	1	1	4	0
	1010	0111	1011	1111	1111	0001	0001	0100	0000
$P \oplus$	A	7	B	F	F	1	1	4	0
Z	1000	1001	1010						
	0010	1110	0001						
C $\oplus$	2	E	1						
Z	1000	1001	1010						
	1010	0111	1011						
P	A	7	B						

0000 0
0001 1
0010 2
0011 3
0100 4
0101 5
0110 6
0111 7
1000 8
1001 9
1010 A
1011 B
1100 C
1101 D
1110 E
1111 F

METODO DI CIFRATURA A CATENA
ONE TIME PAD

A Catena uso chiavi binarie K_i per codificare un testo binario
La lunghezza è *n* bit
Ad esempio, nel GSM

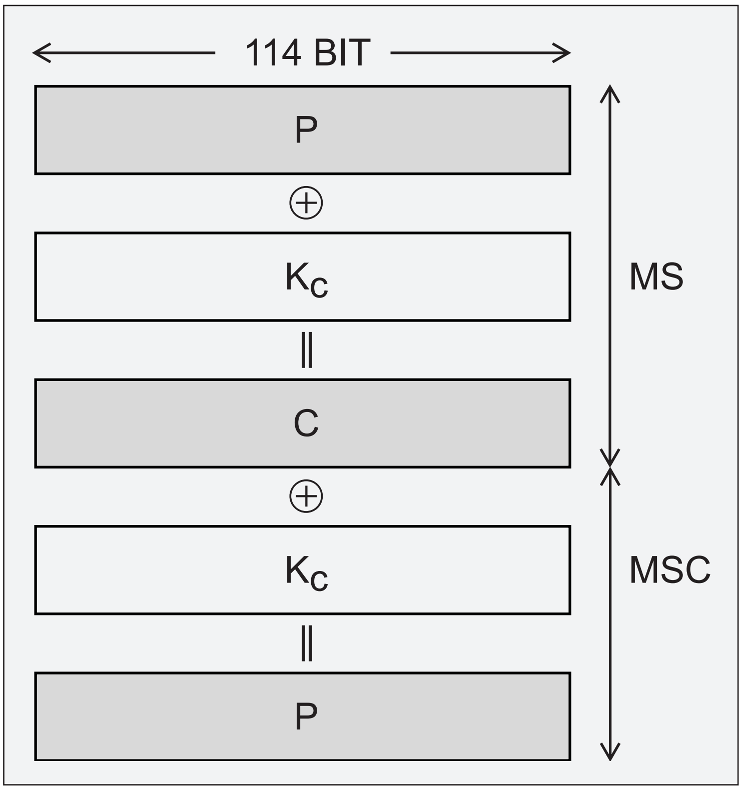
Varia BURST PER BURST

$$K_c = f(K_{SUB} + \text{SEQNO})$$

K_c = 114 BIT
K_{SUB} = 64 BIT
SEQNO = 22 BIT

Testo Binario

chiave di (sessione) chiamata



Esempio: Voce 8 campioni nel BURST

ONE TIME PAD

$$2^{114} \cong 2{,}2 \times 10^{35}$$

tre condizioni per il cifrario "perfetto" OTP

1 - chiave lunga come il testo
2 - chiave "perfettamente" casuale
3 - chiave usata una sola volta

CRITTOANALISI DI TESTI CIFRATI

Il principio di Kerckhoff dice che Oscar conosce sempre il tipo di algoritmo di cifratura e deve soltanto cercare la chiave per decifrare.

→ Tipi di Attacchi al Criptosistema

(1) Solo Testo Cifrato
Oscar ha solo una stringa di C_i

(2) Testo In Chiaro Noto
Oscar ha una stringa P_i e la corrispondente stringa C_i

(3) Testo In Chiaro Scelto
Oscar ha accesso temporaneo al CIFRATORE
quindi sceglie una stringa P_i^* e la codifica C_i^*

(4) Testo Cifrato Scelto
Oscar ha accesso temporaneo al DECIFRATORE
quindi sceglie una stringa C_i^{**} e ottiene la stringa P_i^{**}.

---

(1) è l'attacco più debole
Basta fare ricorso alle proprietà statistiche del testo (lingua scritta)

ATTACCO SUL ‘SOLO TESTO CIFRATO’

Frequenza lettere inglesi singole digrammi trigrammi	conoscenza a priori della statistica del messaggio

	lettera		p	monogrammi
0,127	E	⇒	0,12	
0,091	T, A, O, I, N, S, H, R	⇒	$0{,}06 \leq p \leq 0{,}09$	
	D, L	⇒	0,04	
	C, U, M, W, F, G, Y, P, B	⇒	$0{,}015 \leq p \leq 0{,}028$	
	V, K, J, X, Q, Z	⇒	0,01	

digrammi

TH
HE
IN
ER
AN
RE
ED, ecc.

trigrammi

THE
ING
AND
HER
ERE
ENT
THA, ecc.

Ad esempio

ATTACCO AL CIFRARIO AFFINE

Ricevo un testo di 57 caratteri

$$\underbrace{\text{FMXVEDKA............RHHRH}}_{57\ ch}$$

con le seguenti occorrenze di monogramma

R – 8 volte
D – 6 volte
E, H, K – 5 volte
F, S, V – 4 volte

Si ipotizza $\begin{cases} R \rightarrow e \\ D \rightarrow t \end{cases}$

$$\begin{array}{l|} e = 4 \\ t = 19 \\ \hline R = 17 \\ D = 3 \end{array}$$

prendo una coppia

$$\left.\begin{array}{l} E_K(4) = 17 \\ E_K(19) = 3 \end{array}\right\} \text{ipotesi}$$

ma (cifrario affine)

$$E_K(P) \equiv aP + b \qquad \text{sempre modulo 26}$$

$$\begin{cases} 4 \cdot a + b \equiv 17 \\ 19 \cdot a + b \equiv 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 6 \\ b = 19 \end{cases} \qquad \text{mod}(6, 26) = 2$$

ma $\quad$ mcd $(a, 26) = 2 > 1$ $\quad$ allora errato!

Riprovo $\quad$ R $\rightarrow$ e
K $\rightarrow$ t

questo porta $\left.\begin{array}{l} a = 3 \\ b = 5 \end{array}\right\}$ LEGAL KEY mcd $(3, 26) = 1$.

Allora scegliamo $\Rightarrow$ K = (3,5) $\quad$ e decrittiamo

$D_K(C) = 9C - 19$

$$\underbrace{\text{ALGORITHM... ...PROCESSES}}_{57\ ch}$$

Ad esempio

prima lettera è

$C = 3P + 5$

F M X V E D
$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
A L G O R I

$C = (3P + 5) \bmod 26$

$K = 3{,}5$

$a = 3$
$b = 5$

$a^{-1} = 9$

$D_K(C) = a^{-1}(C - b)$

$a^{-1} = 9$

$a^{-1} = 3^{11} \bmod 26$

$P = 9C - 9 \cdot b =$

$\lfloor \frac{177.147}{26} \rfloor =$

$= 6813$

$= 9C - 45 \bmod 26 =$

6813×26

$\underline{177.138}$
9

$= 9C - 19$

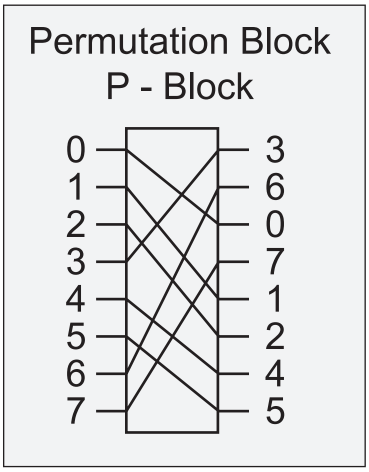
$\underline{P = 9 \times 5 - 19 = 0}$

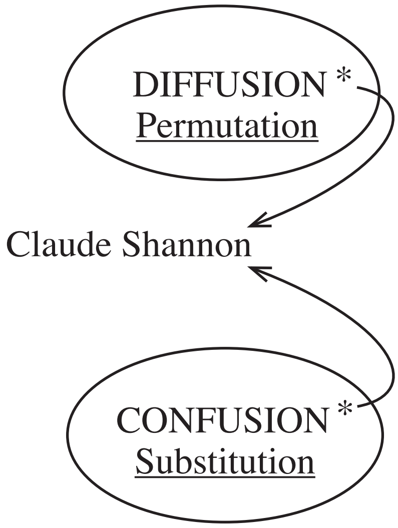
A $= 0$

F $\rightarrow$ A

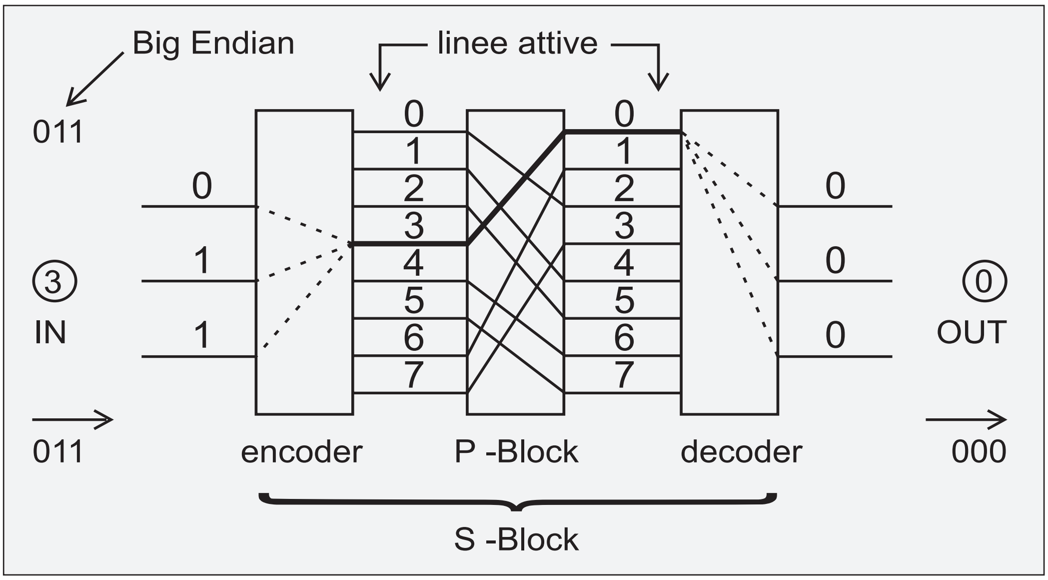
DIGITAL ENCRYPTION ALGORITHM
DES

TRASPOSIZIONI



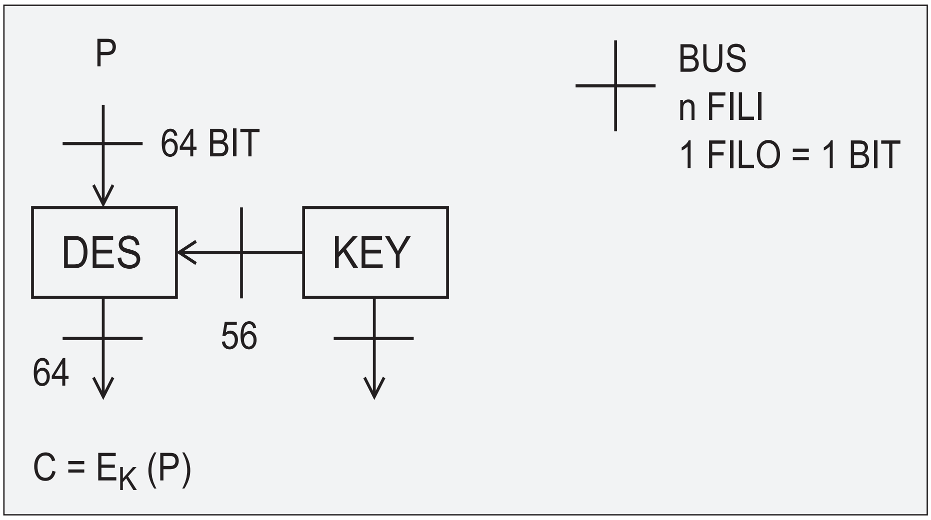


SOSTITUZIONI



Plain			Chypher	
000	0	2	010	
001	1	4	100	
010	2	5	101	
011 →	3	0	→	000
	4	6		
	5	7		
	6	1		
	7	3		

DES



$\frac{2^{56}}{2} = 2^{55}$ numero medio di tentativi per decifrare

complessità d'attacco

$2^{55} \cong 10^{16}$

se per ogni tentativo $10ns$ $\quad 10^{-8}s$

servono per decrittare $\quad \sim 10^{8}s$

$10^{8}s \cong$ 3 anni e 2 mesi

---

p = permutazione

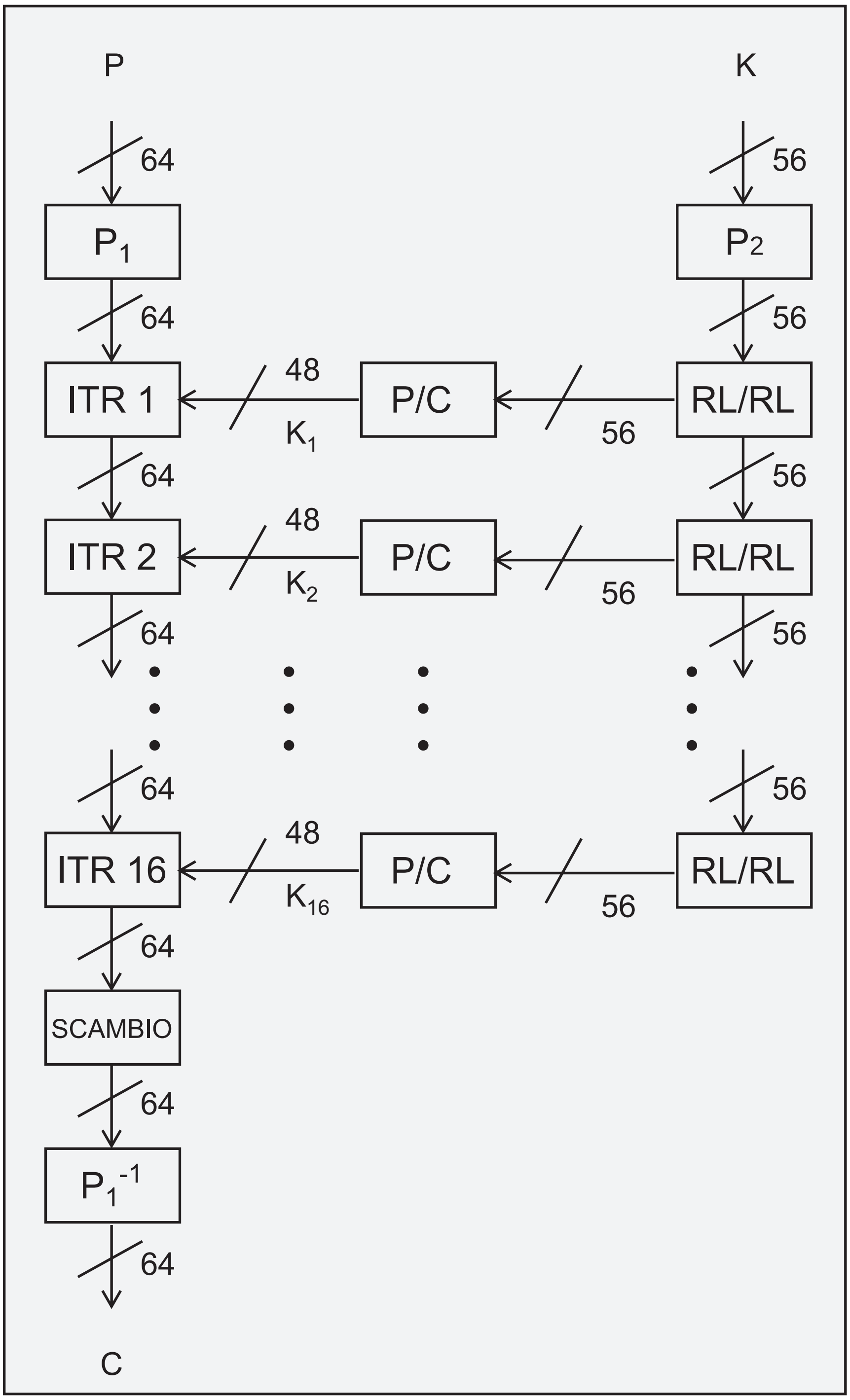
re = *rotate left* sulla chiave divisa in due blocchi da 28 bit

rotazioni di 1 o 2 bit secondo la sequenza

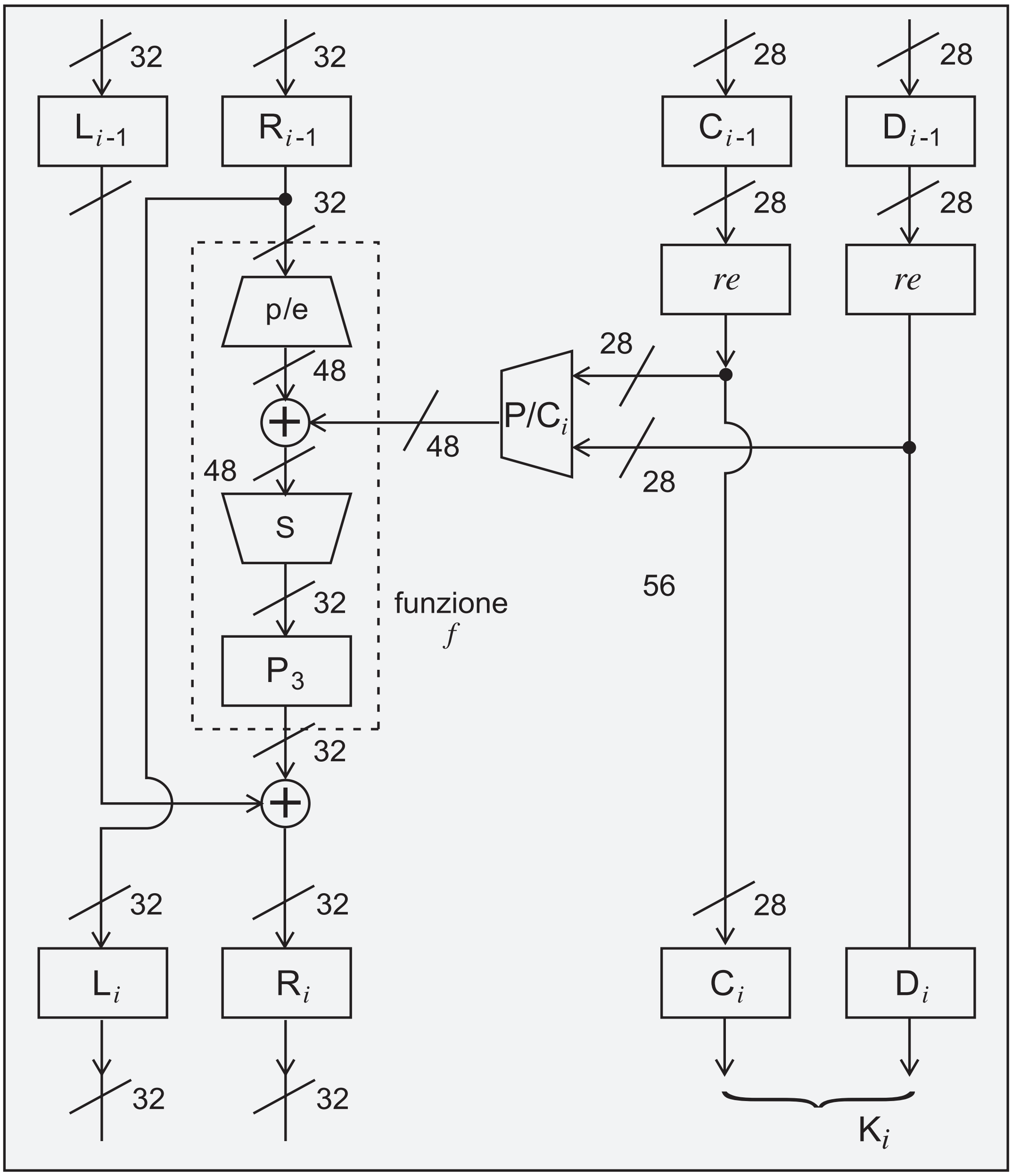
16 ITERAZIONI → 1 1 2 2 2 2 2 2 1 2 2 2 2 2 2 1 = 28 → BEGIN AGAIN

p/c = permutazione e concentrazione
che da 56 bit genera chiave di stadio a 48 bit

p/e = permutazione e espansione
che da 32 bit genera codice a 48 bit


P
K
64
56
P1
P2
64
56
48
ITR 1
P/C
RL/RL
K1
56
64
56
48
ITR 2
P/C
RL/RL
K2
56
64
56
64
56
48
ITR 16
P/C
RL/RL
K16
56
64
SCAMBIO
64
P1-1
64
C

OGNI ITERAZIONE

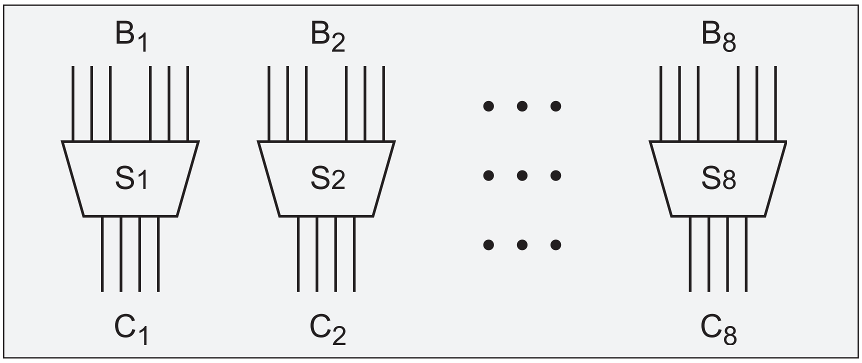


$1 \leq i \leq 16$

BLOCCO S

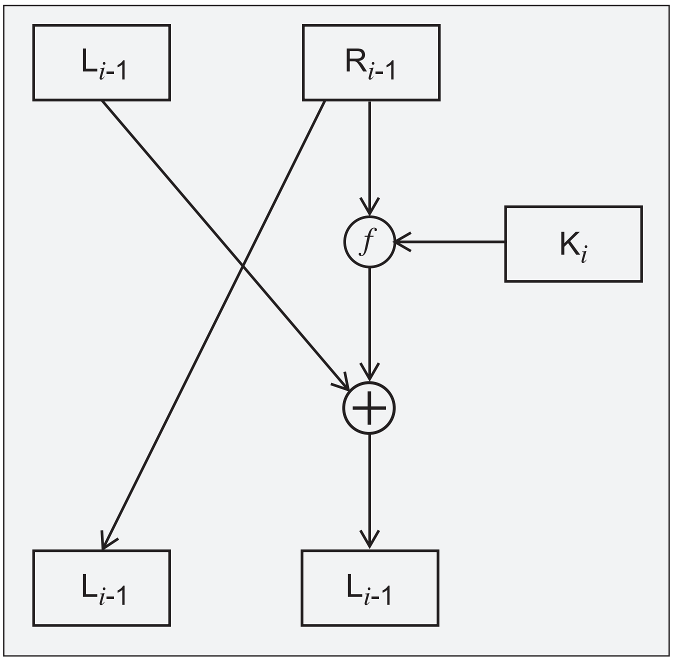
$6 \times 8 = 48$

8
BLOCCHI
6×4



$4 \times 8 = 32$

ITERAZIONE



i da 1 a 16

$\downarrow x$

p_1

$L_0\ R_0$

$L_1\ R_1$

$L_2\ R_2$

$\vdots$

$L_{16}\ R_{16}$

$R_{16}\ L_{16}$

p_1^{-1}

$\downarrow y$

❶ initial permutation p_1 on plain text x

$$x_0 = p_1(x) = L_0R_0$$

L_0 primi 32 bit di x_0
R_0 ultimi 32 bit di x_0

❷ 16 iterazioni $1 \leq i \leq 16$

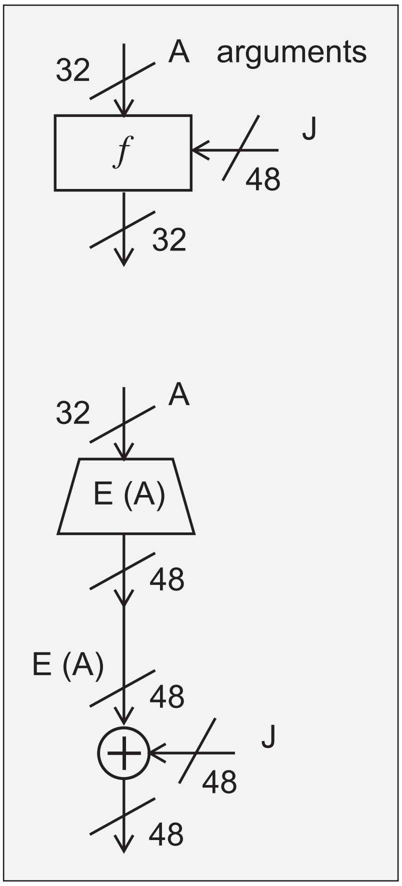
$$L_i = R_{i-1}$$
$$R_i = L_{i-1} \oplus f(R_{i-1}, K_i)$$

$K_i = K_1, K_2 \ldots K_{16}$ chiavi di 48 bit
calcolate in funzione della chiave K di 56 bit
Ogni K_i è una permutazione selezionata di K

❸ inverse permutation p_1^{-1}

si prende $L_{16}\,R_{16}$
e si scambia $R_{16}\,L_{16}$
poi si fa: $y = p_1^{-1}(R_{16}L_{16})$

Funzione f



Passo 1

p/*e*

permutazione di A
e con 16 bit
che appaiono due volte

Passo 2

calcola $E\,(A) \oplus J$

e spilla il risultato a 48 bit in otto stringhe da 6 bit

$$B \equiv B_1\ B_2\ B_3\ B_4\ B_5\ B_6\ B_7\ B_8$$

$$A \rightarrow E(A) \rightarrow \oplus \leftarrow J$$

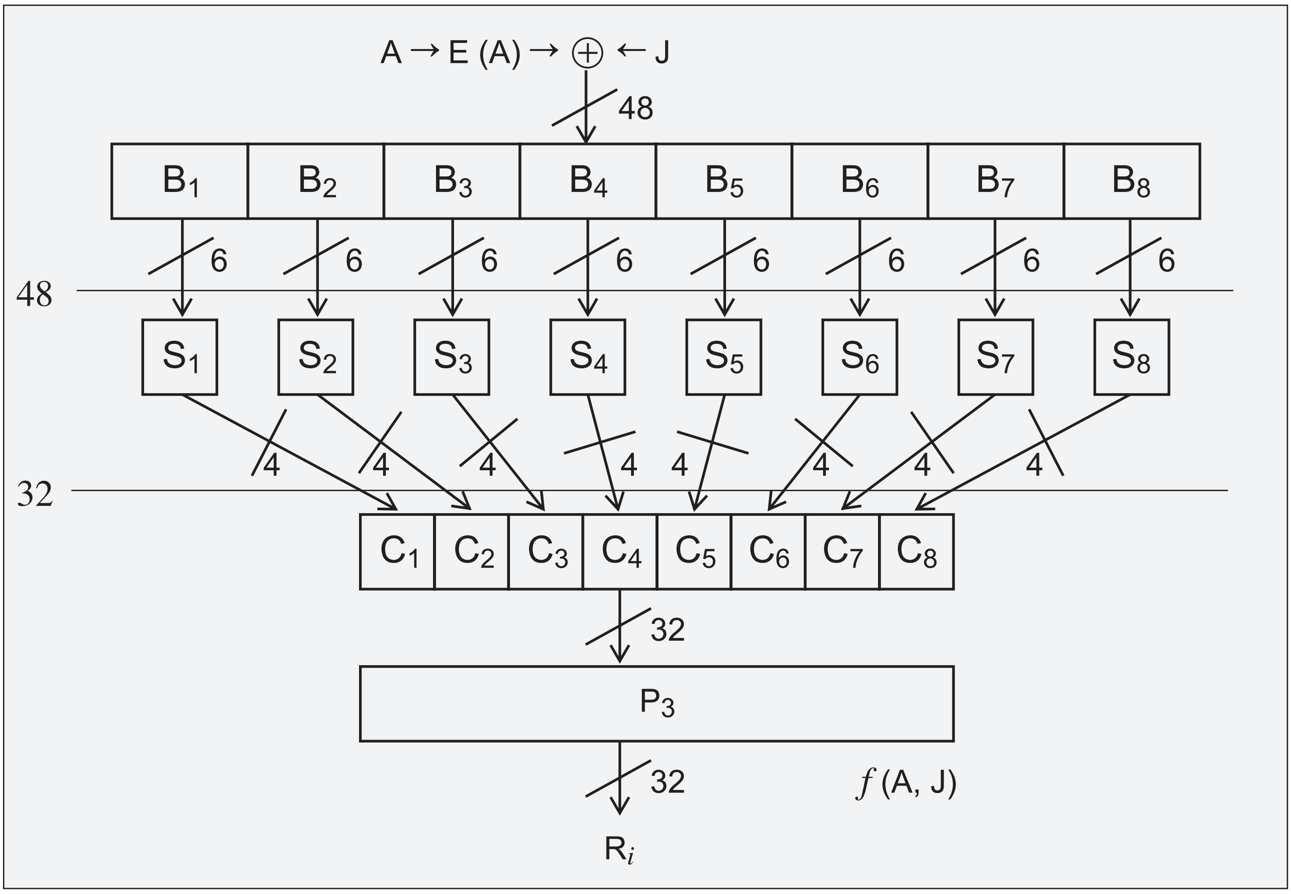
$$\downarrow 48$$

Passo 2

calcola $E\,(A) \oplus J$

e spilla il risultato a 48 bit in otto stringhe da 6 bit

$$B \equiv B_1\ B_2\ B_3\ B_4\ B_5\ B_6\ B_7\ B_8$$



Ogni S_I $(1 \leq i \leq 8)$

ha una matrice 4×16 con elementi compresi tra 0 e 15

$$B_j = b_1\ b_2\ b_3\ b_4\ b_5\ b_6$$

$$S_j\,(B_j)$$

$b_1\ b_6$ row bits – r $0 \leq r \leq 3$

$b_2\ b_3\ b_4\ b_5$ column bits – c $0 \leq c \leq 15$

entry $S_j\,(B_j) = S_j\,(r, c) = c_1\ c_2\ c_3\ c_4$

scritto in binario a 4 BIT $= C_j$ $\quad C_j = S_j(r, c) = S_j(B_j)$

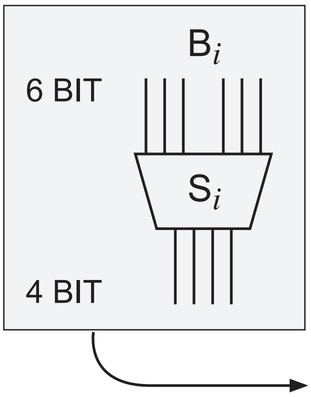
$1 \leq j \leq 8$

S – BOX

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0																
1	0	12	4	13	15	5	10	9	2	3	6	8	11	1	7	14
2			1	0												
3																

Box rows & columns

$1 \le i \le 8$



RIGA a b c d e f COLONNA

$0 \div 3$ $0 \div 15$

$\boxed{a\ f}$ $\boxed{b\ c\ d\ e}$

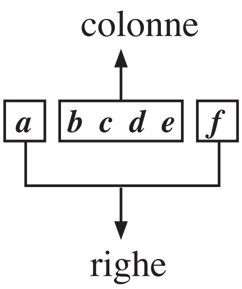
$R_1, C_1 \rightarrow 12$

Box entry

$12 \rightarrow 11\ 00$

Ogni riga è una permutazione di 16 valori 8 S – box

8 tabelle di 64 possibili uscite



$C = C_1\ C_2\ C_3\ C_4\ C_5\ C_6\ C_7\ C_8$

è permutata con la permutazione p_3

$f\,(\mathrm{A}, \mathrm{J}) = p_3\,(C)$

BIT di x $\quad 1^o, \ldots, 64^o$

1^o BIT

p_1	
58 50 42 34 26 18 10 2	60 52 44 36 28 20 12 4
. . . . . .	
. . .	63 55 47 39 31 23 15 7

ultimo BIT

p_1^{-1}
40 8 48 16 56 24 64 32 . . .
. . . .
. . . . 33 1 41 9 49 17 5 7 25

64^o BIT

58^o

entra A
a 32 BIT
1, 2, 3, .., 32

si producono
48 BIT così
(16 BIT
appaiono
due volte)

E - bit selection table

32	1	2	3	4	5	1
4	5	6	7	8	9	2
8	9	10	11	12	13	3
12	13	14	15	16	17	4
16	17	18	19	20	21	5
20	21	22	23	24	25	6
24	25	26	27	28	29	7
28	29	30	31	32	1	8

$6 \times 8 = 48$

S1 BOX

14	4	13	1	2	15	11	8	3	10	6	12	5	9	0	7
0	15	7	4	14	2	13	1	10	6	12	11	9	5	3	8
4	1	14	8	13	6	2	11	15	12	9	7	3	10	5	0
15	12	8	2	4	9	1	7	5	11	3	14	10	0	6	13

1÷32
32 BIT
permutazione
P_3

p_3							
16	7	20	21	29	12	28	17
1	15	23	26	5	18	31	10
2	8	24	14	32	27	3	9
19	13	30	6	22	11	4	25

$=$ CALCOLO DELLE CHIAVI $K_1 \div K_{16}$
KEY SCHEDULE
64 BIT $= K =$ 56 BIT $-$ CHIAVE $+$ 8 PARITY CHECK

64 BIT
8 PARITY
56 KEY

BYTE								
1	1	2	3	4	5	6	7	8
2	9	10	11	12	13	14	15	16
3	17	18	19	20	21	22	23	24
4	25	26	27	28	29	30	31	32
5								40
6								48
7								56
8								64

→ ogni byte ha un numero dispari di 1

← ignorati

Key Schedule

❶ Dati K 64 BIT buttare i parity–check
permutare con la permutazione p_2

$$p_2(K) = C_o\, D_o$$

C_o – primi 28 bit di $p_2(K)$
D_o – ultimi 28 bit di $p_2(K)$

❷ Calcolare per $1 \leq i \leq 16$

$$\begin{cases} C_i = LS_i(C_{i-1}) \\ D_i = LS_i(D_{i-1}) \end{cases}$$

e quindi

$$- \; K_i = p/c\,(C_i, D_i)$$

ove

LS_i è uno shift a sinistra di 1 o 2 bit dipendente da i

1 — 1
2 — 1
3 — 2
4 — 2
5 — 2
6 — 2
7 — 2
8 — 2
9 — 1
10 — 2
11 — 2
12 — 2
13 — 2
14 — 2
15 — 2
16 — 1

p/c
permutazione fissa

p_2

	1						7
1	57	49	41	33	25	17	9
2	1	58	50	42	34	26	18
		•	•	•	•	•	
8	21	13	5	28	20	12	4

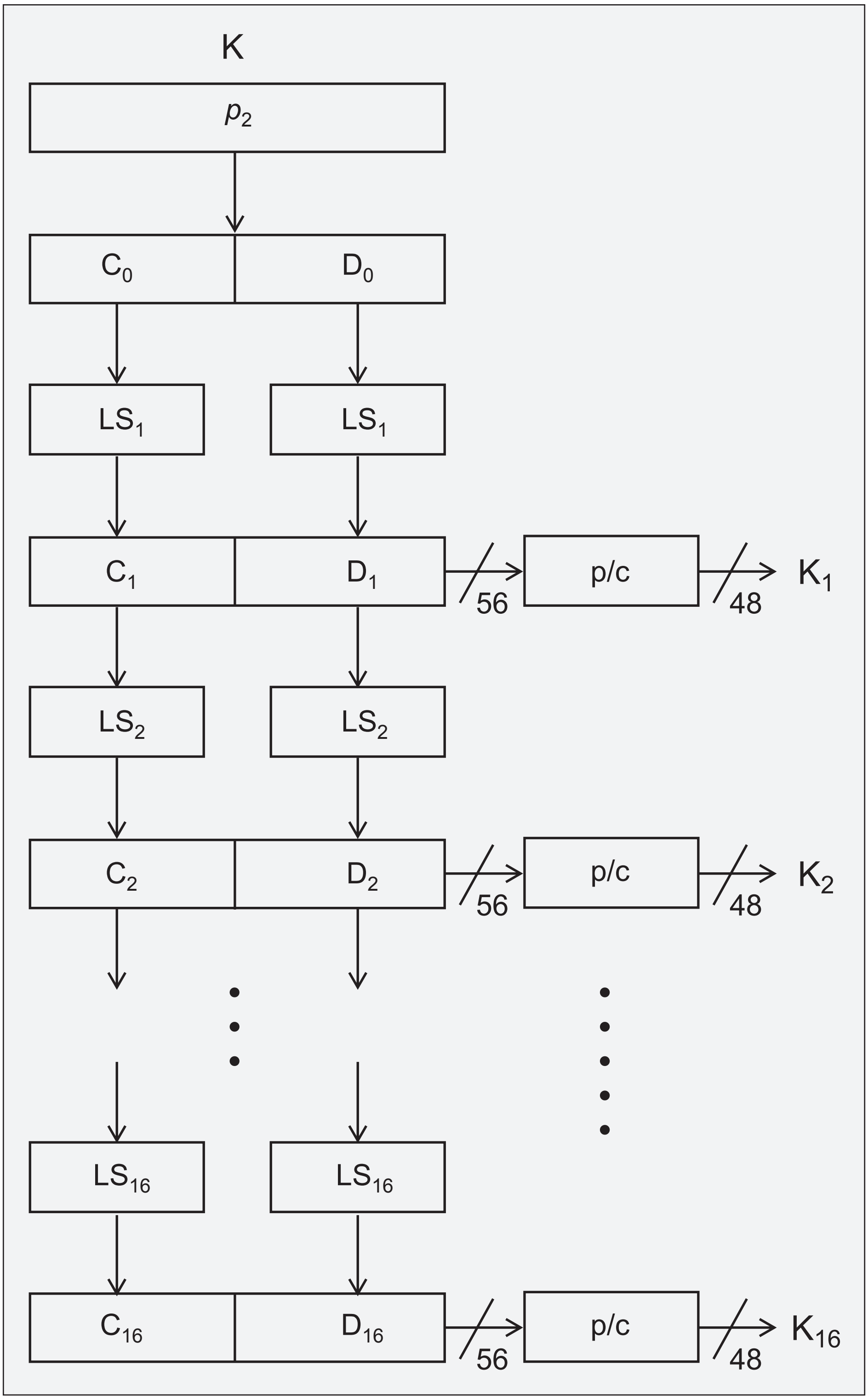
7 × 8
56 BIT

p/c

						6
	14	17	11	24	1	5
	3	28	15	6	21	10
	23	19	12	4	26	8
	16	7	27	20	13	2
	41	52	31	37	47	55
	30	40	51	45	33	48
	44	49	39	56	34	53
8	46	42	50	36	29	32

entrano 56 BIT
escono 48 BIT

6 × 8
perdo 8 BIT


K
p_2
C_0
D_0
LS_1
LS_1
C_1
D_1
56
p/c
48
K_1
LS_2
LS_2
C_2
D_2
56
p/c
48
K_2
LS_{16}
LS_{16}
C_{16}
D_{16}
56
p/c
48
K_{16}

dei 56 bit di K

K_1

10	51	34	60	49	17	33	57	2	9	19	42
3											41
22											29
61	21	38	63	15	20	45	14	13	62	55	31

$12 \times 4 = 48$ BIT

ROUND 1

K_{16}

Decrittazione

→ si usa C come input

le chiavi in ordine inverso

$K_{16}, K_{15}, \ldots, K_1$

l'uscita è P.

EXTENDED DES

DES è usato per crittografare i PIN degli ATM
è usato nelle CHIPS per autenticare transazioni
tra Clearig Houses Interbank Payment System

(1)	E C B	Electronic CodeBook
(3)	C F B	Cipher FeedBack mode
(2)	C B C	Cipher Block Chaining mode
(4)	O F B	Output FeedBack mode

ECB

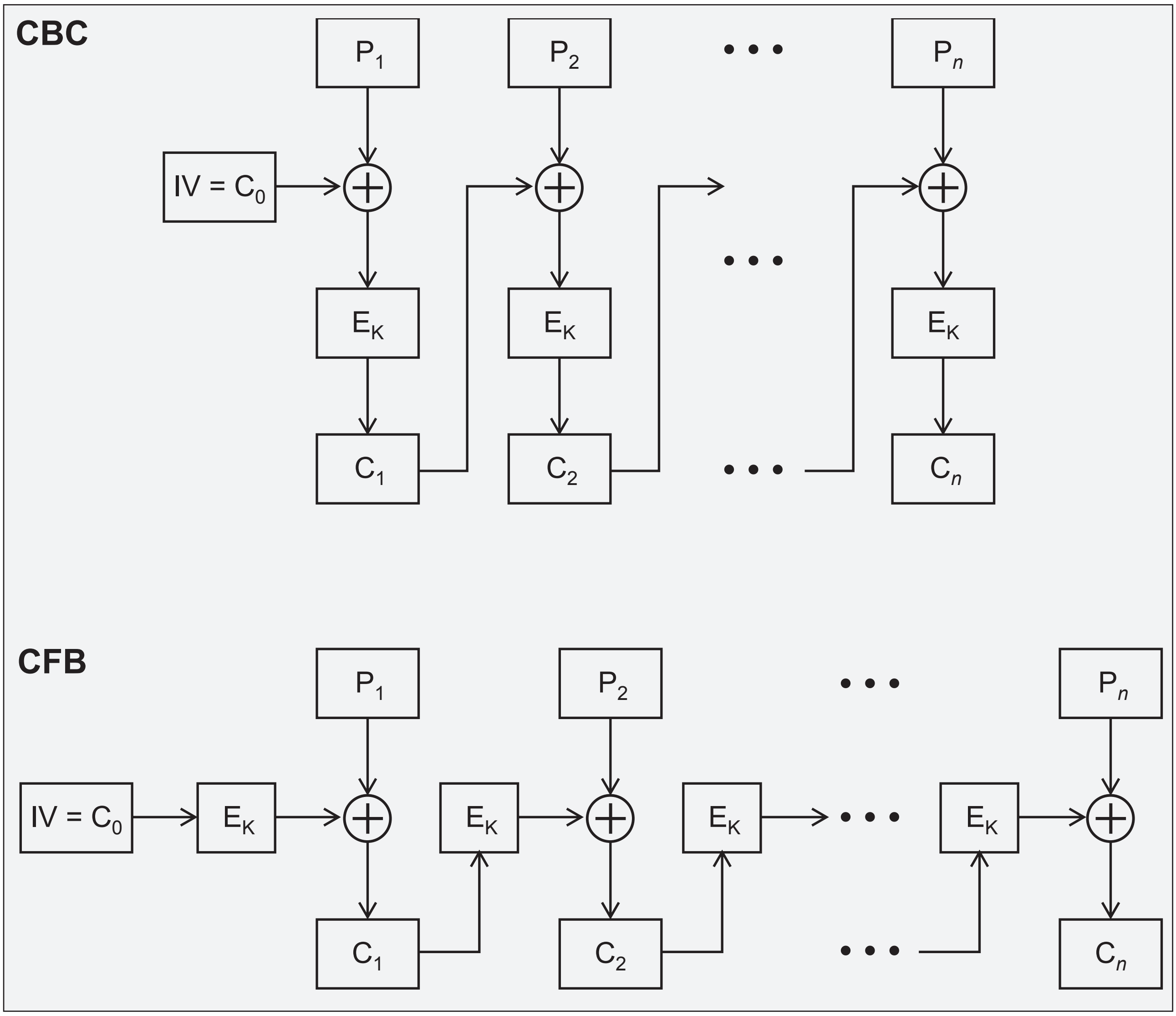
$$\begin{array}{llll} P_1 & P_2 & \dots & P_n \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ k & k & & k \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ C_1 & C_2 & \dots & C_n \end{array}$$

di 64 bit di P ← plaintext

stessa chiave

di 64 bit di C ← ciphertext

ENCRYPT



C B C

64 BIT Initialization Vector IV $\quad C_0 = \text{IV}$

$$\{ C_i = E_k = (C_{i\text{-}1} \oplus P_i)\,, \quad 1 \geq i, \quad i = 1, 2, \ldots n$$

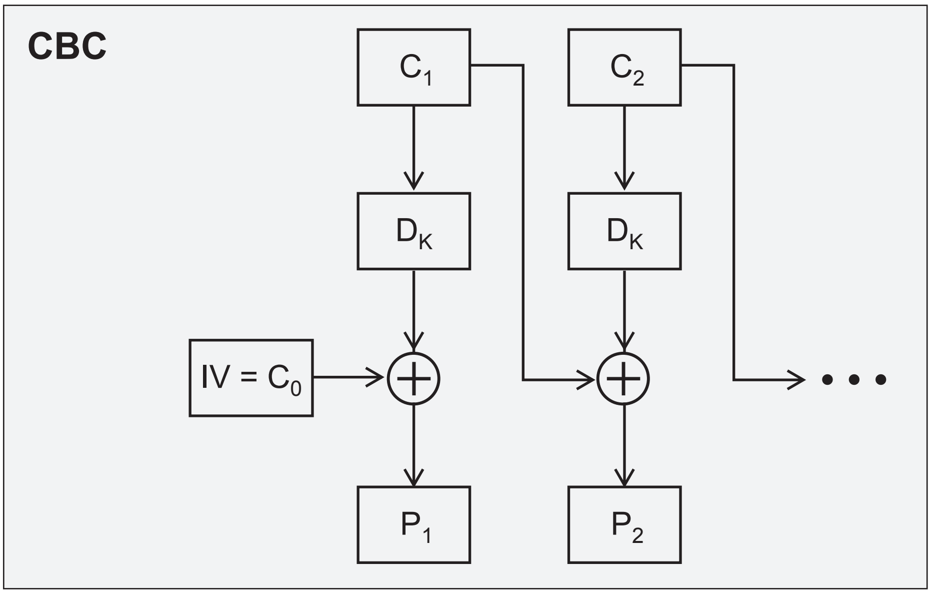
C F B

$C_0 = \text{IV}$

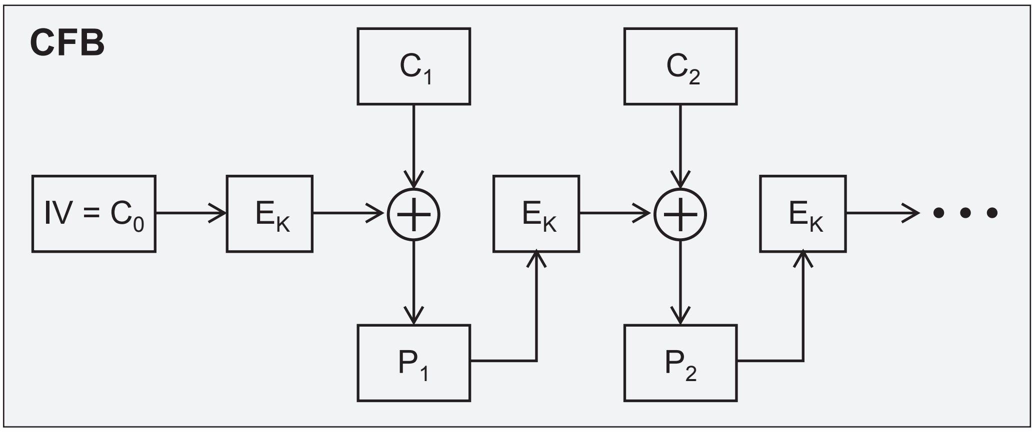
Keystream element Z_i

$$\begin{cases} Z_i \equiv E_k\,(C_{i\text{-}1})\,, & i \geq 1, \quad i = 1, 2, \ldots n \\ C_i \equiv P_i \oplus Z_i\,, & i \geq 1, \quad i = 1, 2, \ldots n \end{cases}$$

DECRYPT



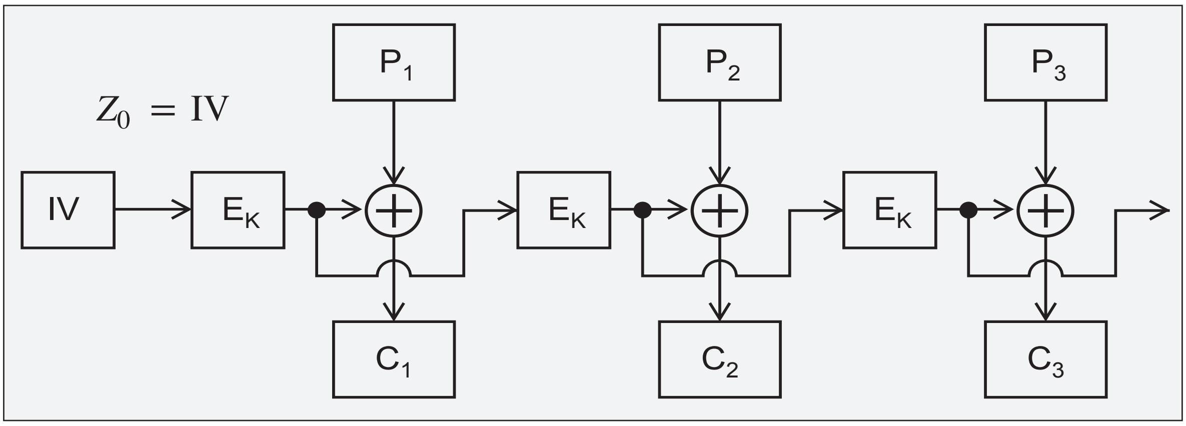
$$P_i = C_{i\text{-}1} \oplus \mathrm{D}_k\,(C_i) \qquad i \geq 1 \qquad i = 1, 2, \ldots\, n$$
$$C_0 = \mathrm{IV}$$



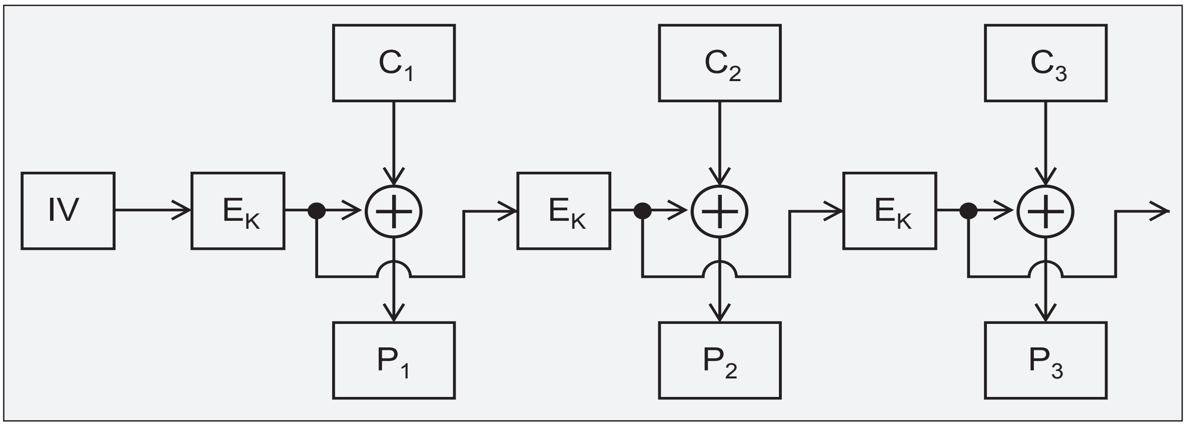
$$P_i = E_k\,(C_{i\text{-}1}) \oplus C_i \qquad i \geq 1 \qquad i = 1, 2, \ldots\, n$$
$$C_0 = \mathrm{IV}$$

OUTPUT FEEDBACK MODE

$$\begin{cases} Z_i = E_k(Z_{i-1}) & i = 1, 2, \ldots n \\ \text{per } i = 1, & Z_0 = \text{IV} \\ C_i = P_i \oplus Z_i & \end{cases}$$



$$\begin{cases} P_i = E_k(Z_{i-1}) \oplus C_i & i = 1, 2, \ldots n \\ Z_0 = \text{IV} & \end{cases}$$



DES / INTEGRITÁ DEL MESSAGGIO A CHIAVE SEGRETA

Message Authentication Code

MAC

Senza segretezza

❶ $\boxed{\text{Bob}} \to (P, \text{MAC}) \quad \to \boxed{\text{Alice}}$ controlla

Bob usa $\quad \text{MAC} = E_k(P) \quad E_k(P) = \text{MAC}$

one–time–DES $\quad$ OK!

Alice si convince che il testo in chiaro P è ‘integro’
e non è stato modificato da Oscar

troppe coppie ‘P’ $\leftrightarrow$ ‘C’
per Oscar

❷ Bob usa ora una CBC–DES

Initialization Vector $\quad \text{IV} \equiv$ tutti 0

Bob ha $\quad P_1, P_2, \dots P_n$

e calcola $\quad C_1, C_2, \dots C_n$

con chiave K e modalità CBC

$$\text{MAC} = C_n$$

Bob manda $\quad \{(P_1, P_2, \dots P_n), \text{MAC}\}$

$\text{MAC} = C_n$

Alice verifica

Riceve $\quad (P_1, P_2, \dots P_n)$

costruisce

$C_i = E_k(P_i) \quad C_1, C_2, \dots C_n$

e verifica $\quad C_n = \text{MAC ricevuto}$

Oscar/Trudy non può produrre il MAC perché non conosce
la chiave segreta K di Alice e Bob.
Se Trudy intercetta $P_1, P_2, \dots P_n + \text{MAC}$
se combina un P_i $(1 \le i \le n)$ non sa combinare il MAC
e Bob se ne accorge.

MAC / AUTENTICAZIONE DEI MESSAGGI CON SEGRETEZZA

Alice e Bob hanno due chiavi segrete K_1 e K_2

Alice usa K_1 per produrre MAC da $P_1, P_2, \ldots P_n$

poi dice che MAC calcolato

$$\text{MAC} = C_n = E_{k1}(P_n) = P_{n+1}$$

$$\boxed{C_n = \text{MAC} = P_{n+1}}$$

Alice manda poi

$$E_{k2}(P_1, P_2, \ldots P_n, P_{n+1})$$

Bob usa K_2 e trova

$$P_1 \div P_n \text{ e } P_{n+1}$$

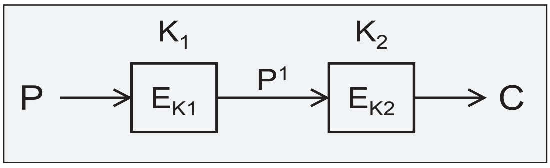
usa K_1 per trovare $C_n = \text{MAC}$:

$$P_{n+1} = C_n = E_{k1}(P_n)$$

check OK!

Alice può anche scambiare l'ordine delle chiavi K_1 e K_2

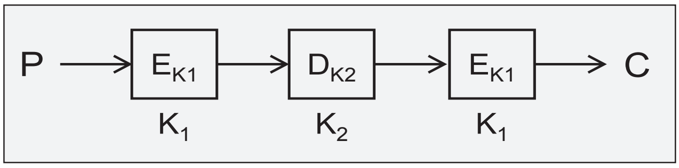
DES IN CASCATA



DOPPIA CON DUE DIVERSE CHIAVI $K1$ e $K2$

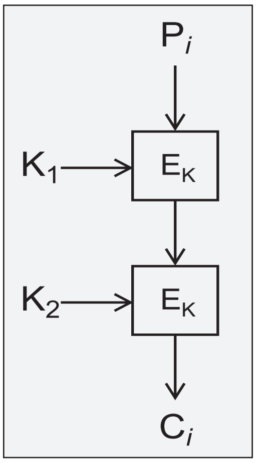
soggetta a Meet–in–the–Middle

TRIPLA CON DUE CHIAVI



Meet–in–the–Middle Attack

Modalità ECB



$$C_i = E_{k2}\,[E_{k1}\;(P_i)]$$

$$D_{k2}(C_i) = E_{k1}\;(P_i)$$

Meet-in-the-Middle   Attack

❶ Calcolo $R_i = E_i(P_i)$

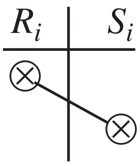
per tutti i 2^{56} valori di i

e costruisco una tabella ascendente per i valori di R_i

❷ Calcolo $S_j = D_j(C_j)$

per tutti i 2^{56} valori di j

e costruisco una tabella ascendente per i valori di R_j



❸ Cerco l'equivalenza in coppie $i-j$ di chiavi $\begin{cases} i = K_1 \\ j = K_2 \end{cases}$
che rende:

$$D_j(C_j) = E_i(P_i)$$

❹ Controllo se — dati $P_1, P_2 \rightarrow C_1, C_2$

$E_j\ [E_i(P_2)]$ è equivalente a C_2

se lo è prova per tutte le coppie chiaro–cifrato

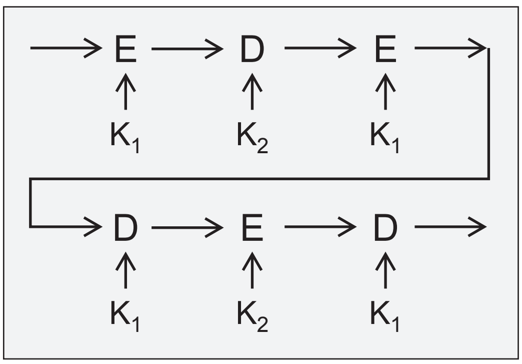
tale attacco richiede

$$2 \times 2^{56}$$

operazioni di codifica decodifica

e 2^{60} BYTE di memoria per le due tabelle

A tre in cascata (TRIPLE DES) ⟵ Il Bancomat usa questo



Triple DES $\begin{Bmatrix} \text{si dice a} \\ \text{112 BIT} \\ \text{di sicurezza} \end{Bmatrix}$

può essere $K_1 = K_2 = K$

e dà compatibilità con SINGLE STAGE DES

PUBLIC KEY CRYPTOGRAPHY

I sistemi a chiave segreta o privata (simmetrica)

Alice e Bob scelgono segretamente la chiave K e quindi

$$E_k \text{ e } D_k$$

D_k è lo stesso di E_k o molto semplicemente derivabile da E_k.

Alice e Bob si scambiano l'informazione sulla chiave K da usare, prima della comunicazione, sul canale sicuro.

⇒ Avendo esposto E_k trovare D_k è possibile e quindi rende il sistema poco sicuro.

I sistemi a chiave pubblica (asimmetrica)
sono basati sul fatto di ideare crittosistemi ove è computazionalmente impossibile determinare D_k dato E_k.
Allora E_k è disponibile al PUBBLICO IN UN ELENCO (DIRECTORY)

Alice usa E_k e Bob è l'unico che può decrittare perchè conosce D_k .

DIFFIE e HELLMAN (1976)

RIVEST (1977)
SHAMIR
ADLEMAN

RSA

Basato sulla difficoltà di fattorizzare numeri interi molto grandi
(100 – 200 – 300 cifre decimali)

ElGamal

è basato sulla difficoltà di trovare logaritmi discreti

Sistema a chiave pubblica

Oscar osserva il testo C^* cifrato
Prova a codificare ogni possibile testo in chiaro P
usando la chiave pubblica E_k, P_1, P_2, ...
finché trova

$$C^* = E_k(P^*)$$

cioè decifra C^* in P^*.

La sicurezza computazionale di questi crittosistemi va verificata!

Si pensi a questo sistema come una

(Scappatoia) TRAPDOOR (one–way function)
Funzione unidirezionale con porta di uscita dalla trappola

L'algoritmo E_k di Bob deve essere facile da calcolare.
Calcolare l'inversa D_k deve essere HARD per chiunque tranne Bob.

$$\left.\begin{array}{l}\text{EASY TO COMPUTE}\\ \text{HARD TO INVERT}\end{array}\right\} \quad \begin{array}{r}\text{Proprietà ONE–WAY}\\ \text{(senso unico)}\end{array}$$

Non esiste oggi prova di esistenza di funzioni a senso unico.

ALGORITMO RSA

$m = p \times q$ — primi > 0

$\mathcal{P} = \mathcal{C} = \mathcal{Z}_{\mathrm{m}}$

$\mathcal{K} = \{(m, p, q, a, b) : m = pq;\ p, q$ primi

$ab \equiv 1\ [\mathrm{mod}\varphi\ (m)]\}$ — interi $a, b > 0$ e $b \perp \varphi(m)$

Per $K = (m, p, q, a, b)$

$E_k\ (P) = P^b \mathrm{mod} m$

$D_k\ (C) = C^a \mathrm{mod} m$

$P,\ C \in Z_{\mathrm{m}}$

m e $b \longrightarrow$ PUBLIC

$p, q, a \longrightarrow$ SECRET

TRAP DOOR — $m = p \cdot q$

e quindi — $\varphi\ (m) = (p-1)(q-1)$

calcola a noti b e m essendo $b \perp \varphi(m)$.

ESEMPIO

Bob sceglie $\begin{cases} p = 3 \\ q = 11 \end{cases}$ numeri primi

$\rightarrow$ $m = 3 \text{ x } 11 = 33$

$\varphi(m) = 2 \times 10 = 20 = 2^2 \times 5$

$*$ SCELGO $b = 7$ (primo con 2 e 5) $b \perp \varphi(m)$

mcd (7, 20) = 1

allora devo codificare con b

Bob trova $b^{-1} \Rightarrow a$

$b^{-1} = \text{a} = b^{\varphi(20)-1}\text{mod}20 =$

$\varphi(20) = \varphi(\varphi(m)) = 8$

$b^{-1} = a = 7^7\text{mod}20 = 3$

$$\left\lfloor \frac{823543}{20} \right\rfloor = 41177$$

823540 $\boxed{b^{-1} = 3} \longrightarrow \boxed{a = 3}$

chiave segreta di Bob

$3 \times 7 = 21 \rightarrow 21 \text{ mod}20 = 1$

BOB PUBBLICA $\text{m} = 33$

$\text{b} = 7$

---

quindi chiunque può mandare

$C = P^7\text{mod}33$

SOLO BOB DECODIFICA

$P = C^3\text{mod}33$

Alice manda, per esempio, la lettera S $\longrightarrow$ 19

$P = 19$

$P^7 = 19^7 = \left\lfloor \frac{893871739}{20} \right\rfloor = 27087022 \times 33$

$= 893871726$

messaggio di Alice $C = 13$

Bob decodifica usando $a = 3$

$13^3 = \left\lfloor \frac{2197}{33} \right\rfloor = 66 \times 33$

$\overline{2178}$

$19 \longrightarrow \text{S}$

Bob • genera due primi grandi (200 cifre decimali almeno)

$$p \text{ e } q$$

• calcola $m = p \times q$ e $\varphi(m) = (p-1)(q-1)$

• sceglie a caso b

$$0 < b < \varphi(m)$$

• in modo che sia

$$\text{mcd}\,[b, \varphi(m)] = 1$$

• calcola

$$a = b^{-1} \mod \varphi(m)$$

con l'algoritmo di Euclide esteso

• pubblica

$$m \text{ e } b.$$

ATTACCO del crittoanalista

Ha $m \longrightarrow$ fattorizzazione in numeri primi;

Quanti primi ci sono tra 0 e m?

$$\Pi(\text{m}) \rightarrow \frac{m}{l_n m}$$

$$\frac{10^{200}}{460} \cong 10^{197} \qquad \text{sono tanti!} \qquad \begin{cases} m = 10^{200} \\ l_n m \cong 460{,}5 \end{cases}$$

La fattorizzazione in DUE primi
molto difficile da calcolare

p e q a 150 cifre decimali

$m = p \times q$ a 300 cifre decimali

$p, q \equiv 80$ cifre
$m \equiv 160$ cifre
troppo piccoli

512 BIT RSA $2^{512} \cong 1{,}3 \cdot 10^{154}$

1024 BIT RSA $2^{1024} \cong 1{,}7 \cdot 10^{308}$

2048 BIT RSA = OK

ALTRO ESEMPIO CRITTOSISTEMA RSA

Bob sceglie $\begin{cases} p = 101 \\ q = 113 \end{cases}$

$m = 11413$

$\varphi(m) = 100 \times 112 = 11200$

$11200 = 2^6 \cdot 5^2 \cdot 7$

posso scegliere b primo relativo a $\varphi(m)$,
cioè b non deve essere divisibile per 2, 5 o 7. $b \perp \varphi(m)$

Verifica

$\text{mcd}\,[\varphi(n), \text{b}] = 1$

Bob sceglie $b = 3533$

quindi

$b^{-1} = 6597 \bmod 11200$

e quindi la chiave segreta di Bob è

$a = 6597 = b^{-1}$

Bob pubblica $\begin{cases} m = 11413 \\ b = 3533. \end{cases}$

Alice manda 9726 a Bob $9726 \equiv P$

calcola $9726^{3533} \bmod 11413 = 5761$ $5761 = C$

Bob riceve e calcola

$5761^{6597} \bmod 11413 = 9726.$

SICUREZZA

$E_k(P) = P^b \bmod m$

funzione a senso unico

Bob ha una TRAPDOOR $\boxed{m = p \cdot q}$

e quindi $\varphi(m) = (p-1)(q-1)$

e calcola "*a*" il decrittore $a = b^{-1} \bmod[\varphi\, m]$

$\varphi(m) = (p-1)(q-1)$

Controlliamo che *E* e *D* siano operazioni inverse.

$a \equiv b^{-1} (\bmod \varphi(m))$

$a\, b \equiv 1 (\bmod \varphi(m))$

$a\, b = t\, \varphi(m) + 1, \quad b \perp \varphi(m)$

t intero $\geqslant 1$

per ogni $P \in Z_m^*$

cioè $0 < P < m$
è primo con m $P \perp m$

si ha $(P^b)^a \equiv [P^{t\varphi(m)+1}](\bmod m)$

$\equiv [(P^{\varphi(m)})^t P](\bmod m)$

$\equiv [1^t P](\bmod m)$

$\equiv P(\bmod m)$.

$\begin{cases} \text{Teorema di Lagrange: se} & P \in Z_m^* \\ \text{allora} & P^{\varphi(m)} \bmod m = 1 \end{cases}$

SCHEMI DI FIRMA DIGITALE

Firma convenzionale

Firma elettronica

Messaggio M

Firma $\longrightarrow$ Algoritmo di firma

SIG
É SEGRETO

$A = \text{SIG}(M)$

$M \| A$ vengono spediti

al destinatario “separatamente”

la verifica è elettronica

Verifica $\longrightarrow$ Algoritmo di verifica

VER
É PUBBLICO

$\text{VER}\ (M \| A) = \begin{cases} \longrightarrow \text{TRUE} \\ \longrightarrow \text{FALSE} \end{cases}$

tutti possono esattamente verificare.

La copia elettronica è come l’originale per evitare di essere riusata (reply attack) deve contenere un TIMESTAMP, cioè la data, l’ora, ad esempio.

SCHEMA DI FIRMA

⊕ Algoritmo di firma SEGRETO

$$P, \quad \mathrm{SIG}(P)$$

$$A = \mathrm{SIG}(P)$$

Spedisco $P \| A$

⊕ Algoritmo di verifica PUBBLICO

$$\mathrm{VER}(P, A) = \begin{cases} \mathrm{TRUE} \\ \mathrm{FALSE} \end{cases}$$

se la firma è vera o falsa

DEFINIZIONE

Lo schema di firma è una quintupla

$$(\mathcal{P}, \mathcal{A}, \mathcal{K}, \mathcal{S}, \mathcal{V})$$

- $\mathcal{P}$ = insieme finito dei messaggi $P \in \mathcal{P}$
- $\mathcal{A}$ = insieme finito delle firme $A \in \mathcal{A}$
- $\mathcal{K}$ = insieme finito delle chiavi $K \in \mathcal{K}$
  Keyspace

Per ogni $K \in \mathcal{K}$ c'è un algoritmo di firma

$$\mathrm{SIG_K} \in \mathcal{S}$$

ed un corrispondente algoritmo di verifica

$$\mathrm{VER_K} \in \mathcal{V}$$

Ogni

$$\mathrm{SIG_K} \text{ comporta } \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{A}$$

Ogni

$$\mathrm{VER_K} \text{ comporta } \mathcal{P} \times \mathcal{A} \longrightarrow \{\text{vero, falso}\}$$

Sono funzioni tali che per ogni messaggio $P \in \mathcal{P}$ e per ogni firma A $\in \mathcal{A}$

$$\mathrm{VER_K}(P, A) = \begin{cases} \text{vero se } A = \mathrm{SIG_K}(P) \\ \text{falso se } A \neq \mathrm{SIG_K}(P) \end{cases}$$

SCHEMA DI FIRMA RSA

Sia	$m = p \cdot q$,	p e q primi
	$\mathcal{P} \equiv \mathcal{A} \equiv \mathcal{Z}_m$	
	$\mathcal{K}, \equiv \{(m, p, q, a, b) : m = p \cdot q;\ p, q$ primi	
	$a\, b \equiv 1\ [\mathrm{mod}\varphi(m)]\}, b \perp \varphi(m)$	$a, b > 0$
I valori m e b sono pubblici,		
e p, q e a sono segreti.		
Per	$k = m, p, q, a, b$	
(segreta)	$\mathrm{SIG_K}\,(P) = P^{\mathrm{a}}\ \mathrm{mod} m = \mathrm{A}$	decifratura RSA
e		
(pubblica)	$\mathrm{VER_K}\,(P, \mathrm{A}) =$ true $\leftrightarrow$ vero se	
	$P \equiv \mathrm{A}^{\mathrm{b}} (\mathrm{mod} m)$	cifratura RSA
$(P, \mathrm{A} \in \mathrm{Z}_m)$		

FIRMA RSA

Quindi Bob firma il messaggio P

con la regola RSA di decrittaggio D_{K}

$D_{\mathrm{K}} = \mathrm{SIG_K}$ è segreto (a segreto: $a = b^{-1}$)

La verifica usa RSA crittaggio E_{K}

Chiunque può verificare la firma dato che E_{K} è PUBBLICA. (m e b pubblici)

SEGRETARE TESTO E FIRMA

Alice vuole combinare FIRMA e TESTO CIFRATO con un RSA

Dato un testo in chiaro P Alice calcola la sua firma $\boxed{\text{FIRMARE PRIMA DI CRITTOGRAFARE!}}$

(segreta) $A = \mathrm{SIG}_{\mathrm{ALICE}}(P)$ $\left\{ \text{è la decodifica di RSA con } a \text{ e } m \right.$

poi Alice cifra il tutto con m e b

(pubblica) $E_{\mathrm{BOB}}(P, A) = Z$ { è la codifica di RSA.

Alice quindi spedisce

$\longrightarrow$ Z va a Bob

Prima Bob

(segreta) $D_{\mathrm{BOB}}(Z)$

ottiene P e A

Poi Bob fa

(pubblica) $\mathrm{VER}_{\mathrm{ALICE}}(P, A) = \text{true}$

---

che succede se Alice prima crittografa e poi firma?

Alice calcola

$$C = E_{\mathrm{BOB}}(P)$$

$$A = \mathrm{SIG}_{\mathrm{ALICE}}[E_{\mathrm{BOB}}(P)]$$

$$A = \mathrm{SIG}_{\mathrm{ALICE}}(C)$$

e manda (A, C).

Bob riceve A e C

calcola $P = D_{\mathrm{BOB}}(C)$

poi

$$\mathrm{VER}_{\mathrm{ALICE}}(C, \mathrm{A}) = \text{true}$$

Ma Oscar ottiene A e C e li blocca

ora fa così, rimpiazza A con la sua

$$A' = \mathrm{SIG}_{\mathrm{OSCAR}}\,[E_{\mathrm{BOB}}(P)] \qquad \text{(segreta)}$$

e manda (A', C) a Bob

Bob decritta $P = D_{\mathrm{BOB}}\,(C)$

e verifica $\mathrm{VER}_{\mathrm{OSCAR}}\,(C, A') = \text{true}$ (pubblica)

e crede che il messaggio lo ha mandato Oscar

PLEASE

SIGNING BEFORE ENCRYPTING!

Oppure

FUNZIONI HASH

$$\begin{array}{l} P \;\rightarrow MD \\ \qquad\quad \downarrow \\ \mathrm{SIG}(MD) \end{array}$$

$P \parallel \mathrm{SIG}\,[H\,(P)]$ nudo P, $\mathrm{SIG}\,(MP)$

ElGamal

DSA Digital Signature Algorithm

- messaggio 160 BIT
- firma da 320 BIT

RSA-Fattorizzazione numeri primi
DSA-Calcolo dei logaritmi discreti

Sia p primo tale che il problema di trovare i logaritmi discreti in $\mathcal{Z}_p^*$ sia intrattabile.

Sia $\alpha \in \mathcal{Z}_p^*$ un elemento primitivo

Sia $\mathcal{P} = \mathcal{Z}_p^*,\ \mathcal{A} = \mathcal{Z}_p^* \times \mathcal{Z}_{p\text{-}1}$

e sia

$\mathcal{K} = \{(p, \alpha, a, \beta)$ tale che $\beta \equiv \alpha^a (\bmod p)\}$

- p, α e β PUBBLICI
- a SEGRETO

$\boxed{a = \log_\alpha^D \beta}$

Allora per $\mathcal{K} = (p, \alpha, a, \beta)$ e per un numero segreto k

$k \in \mathcal{Z}_{p\text{-}1}^*$ casuale (da usare one time)

$k \perp (p-1)$, sia:

$\Rightarrow$

ove

$$\left.\begin{array}{l} SIG_K(P, k) = (\gamma, \delta) \\ \\ \bullet\ \gamma = \alpha^{k} \bmod p \\ \bullet\ \delta = [(P - a\gamma)k^{-1}] \bmod (p-1) \end{array}\right\} \begin{array}{ll} a \text{ e } k & \text{SEGRETI} \\ P, \alpha, \beta & \text{PUBBLICI} \end{array}$$

per

$$P, \gamma \in \mathcal{Z}_p^*$$
$$\delta \in \mathcal{Z}_{p\text{-}1}$$

sarà

$$VER\ (P, \gamma, \delta) = \begin{cases} \text{vero se } \beta^{\gamma}\gamma^{\delta} \equiv \alpha^{p} (\bmod p) \\ \text{falso, altrimenti} \end{cases}$$

---

infatti

$$\begin{aligned} \beta^{\gamma}\gamma^{\delta} &\equiv \alpha^{a\gamma}\alpha^{k\delta} (\bmod p) \\ &\equiv \alpha^{(a\gamma + k\delta)} (\bmod p) \\ &\equiv \alpha^{p} (\bmod p) \end{aligned}$$

ove $\alpha\gamma + k\delta \equiv P[\bmod (p-1)]$.

Bob calcola la firma usando

a = parte della chiave

k = numero casuale usato

per un SINGOLO messaggio

Esempio:

$p = 467$

$\alpha = 2$

$a = 127$

$$\text{PUBBLICI} \begin{cases} p = 467 \\ \alpha = 2 \\ \gamma = 132 \end{cases}$$

$\beta = \alpha^{a} \bmod p = 2^{127} \bmod 467 = 132$

Bob ora $P = 100$

e $k = 213$

$$\text{SEGRETI} \begin{cases} a = 127 \\ k = 213 \end{cases}$$

allora

$\gamma = 2^{213} \bmod 467 = 29$

$\delta = [(100 - 127 \times 29)\ 431] \bmod 466 = 51$

*C*hiunque verifica

$132^{29} 29^{51} \equiv 189 \quad (\bmod 467)$

e quindi $2^{100} \equiv 189 \quad (\bmod 467)$

DSA
DIGITAL SIGNATURE ALGORITHM

Digital Signature Algorithm usa ElGamal

messaggio P lungo 160 BIT

---

p, α e β	pubblici		
a	segreto		
scelgo		k casuale $\in \mathcal{Z}^*_{p\text{-}1}$	segreto
		$SIG_K(P, k) = (\gamma, \delta)$	
ove		$\gamma = \alpha^k \bmod p$	k segreto
		$\delta = (P - a\gamma)k^{-1} \bmod (p-1)$	k segreto, a segreto
		$VER(P, \gamma, \delta) = \beta^{\gamma}\gamma^{\delta} \equiv \alpha^P (\bmod p)$	

Richiede

una firma DSA (γ, δ) di 320 BIT.

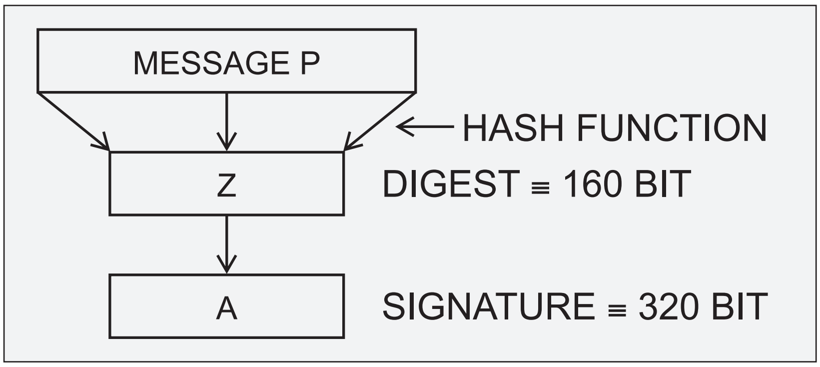
Allora per messaggi lunghi si fa così

P – lunghezza arbitraria

Lungo messaggio

'digest' del messaggio

Firma

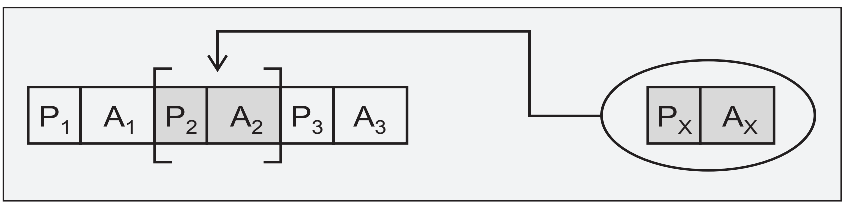


To hash = tagliare (la carne) in dadini

uguali

Problema con le firme
perché è facile cancellare o variare l'ordine.

INTEGRITÀ



DSA

Digital Signature Algorithm usa ElGamal Public Key System

	messaggio corto di 160 BIT	P – 160 BIT
	usa una Firma da 320 BIT	(γ, δ) 320 BIT
		$SIG_K(P, k) = (\gamma, \delta)$

messaggi corti FUNZIONE HASH PUBBLICA

	messaggio P	P – lunghezza arbitraria
	compute	
	message DIGEST $z = h(P)$	160 BIT
	then apply	
	SIGNATURE	$A = SIG(z)$ 320 BIT
ricordi	γ e $\delta \equiv SIG(z)^k$	$160 \times 2 = 320$ BIT

$z = h(P)$ FUNZIONE HASH UNIDIREZIONALE PUBBLICA

Bob	vuole formare un messaggio	P
	costruisce	$z = h(P)$
	poi calcola	$A = SIG_k(z)$
	manda	$(P, A) =$
Chiunque calcola		$z = h(P)$
	e poi	$VER_K(z, A) =$ TRUE

Una funzione hash

$$z = h(P)$$

è unidirezionale se dato un message digest z

è impossibile calcolare P tale che

$$h(P) = z$$

---

messaggio P

Bob vuole firmare il messaggio P

calcola ❶ $z = h(P)$ message digest

❷ $A = \mathrm{SIG}_k(z)$ la firma segreta

❸ manda P e A

$P \parallel \mathrm{A}$

Alice

calcola ❶ $z = \mathrm{h}(P)$

e poi ❷ $\mathrm{VER}_K(z, A) =$ vero se $z \equiv A^b (\mathrm{mod} m)$

ad es. cifrato RSA

$$\text{PUBBLICHE} \quad \begin{cases} y = h(x) & \text{HASH} \\ b, m & \text{RSA} \end{cases}$$

ATTACCO DI OSCAR
alle funzioni hash

intercetta $P \parallel A$ valido di Bob

$A = \mathrm{SIG}_{\mathrm{BOB}}[\mathrm{h}(P)]$

poi calcola $z = h(P)$ PUBBLICA

e cerca $P' \neq P$

tale che $h(P') = h(P)$.

Allora Oscar manda (P', A) è valido firmato da Bob!
è una FALSIFICAZIONE.

❶ h deve soddisfare la proprietà detta SENZA COLLISIONI (collision free)
Dato P trovare P'

h è debolmente senza collisioni se è computazionalmente intrattabile
il calcolo di $P' \neq P$ tale che $h(P') = h(P)$.

ALTRO ATTACCO

Oscar trova due messaggi	P' e P
	$P' \neq P$
tali che	$h(P') = h(P)$

Oscar manda P a Bob e lo convince a firmare

Bob lo firma	
calcola	$Z = h(P)$
lo firma	$A_{\mathrm{BOB}} = \mathrm{SIG}_{\mathrm{BOB}}(Z)$
riceve	P, A_{BOB}

successivamente

Oscar manda P', A_{BOB} è valida!

e falsifica la firma di Bob.

❷ Una funzione hash è fortemente senza collisioni
se è computazionalmente intrattabile trovare due messaggi

P e P'

tali che $P \neq P'$

e $h(P) = h(P')$.

Trovare P e P' tali che.

Infine

❸ Una funzione hash è unidirezionale (one–way)
se dato un digest di messaggio z
è computazionalmente impossibile trovare un messaggio P
tale che $h(P) = z$.

Message digest (P = 512 BIT FISSI)

- MD4 64 BIT hash function
- MD5 128 BIT

Message digest ($P < 2^{64}$ BIT)

SHA 160 BIT Secure Hash Algorithm.

LEGGE ITALIANA

DIGEST ⟶ IMPRONTA

Chiavi a 1024 BIT

Generazione	firme digitali	RSA
Verifica	firme digitali	DSA

Algoritmi di hash P variabile fino a 2^{64} BIT	RIPEMD – 160	160 BIT
	SHA – 1	Secure Hash Algorithm

MESSAGGIO ⟶ FUNZIONE HASH ⟶ IMPRONTA

Digest ⟶ sommario   To digest   digerire

⟶ riassunto

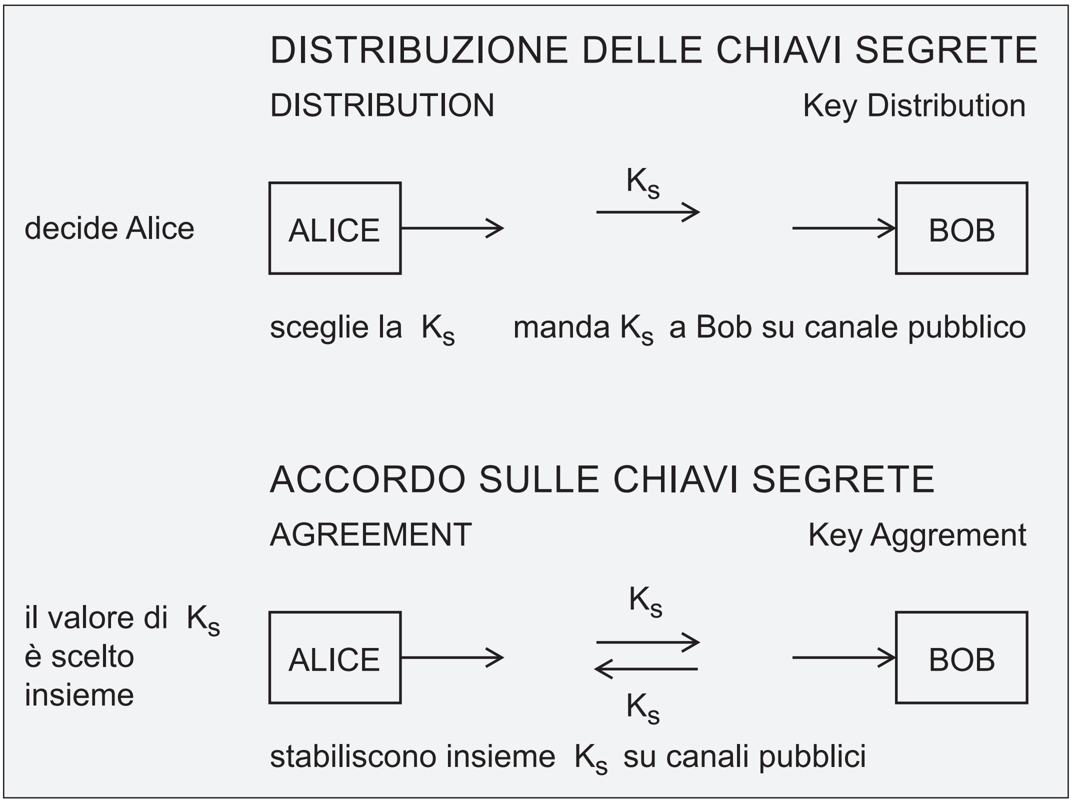
⟶ selezione

↓

IMPRONTA del MESSAGGIO

DISTRIBUZIONE DELLE CHIAVI

- I sistemi a chiave pubblica non richiedono canali sicuri per scambiare chiavi segrete come nei sistemi a chiave privata
- I sistemi pubblici sono lenti. RSA rispetto a DES.
- Per cifrare messaggi lunghi bisogna usare chiavi private, quindi bisogna trovare dei metodi per lo scambio delle chiavi segrete

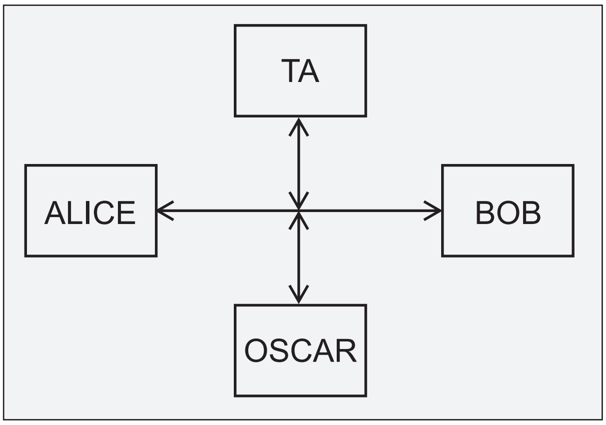


TRUSTED AUTHORITY

TA Trusted Authority

n Utenti

- Verifica l'identità dell'utente
- Sceglie e trasmette chiavi agli utenti



PASSIVO (Oscar) SPIA
– spia i messaggi

ATTIVO (Oscar = Trudy) INTRUSO
– altera i messaggi
– conserva i messaggi per uso futuro
– si maschera, al posto di un certo utente
si traveste: è un impostore

❶ Obiettivi dell'intruso
– imbrogliare A e B facendogli accettare una "chiave" falsa
(vecchia chiave o chiave inventata da Trudy)
– imbrogliare A e B facendogli credere che hanno scambiato una chiave tra loro, mentre non l'hanno fatto.

❷ Obiettivo della distribuzione delle chiavi o dell'accordo sulle chiavi è che alla fine del protocollo A e B possiedano la stessa chiave K.

PREDISTRIBUZIONE DELLE CHIAVI

Per ogni coppia di utenti U e V

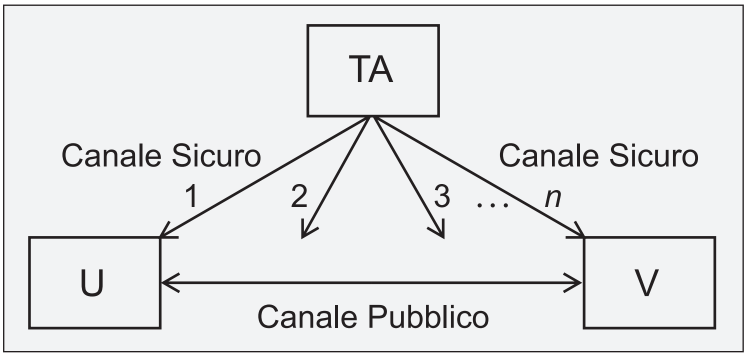
$$\{U, V\}$$

$\boxed{n \text{ Utenti}}$

il TA sceglie una chiave a caso

$$K_{u,v} = K_{v,u}$$

e la manda su un canale sicuro



solo n canali sicuri,
e non $\binom{n}{2}$ tra tutti gli utenti

TA genera e trasmette
$\dfrac{n\,(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$ chiavi e dà ogni chiave ad un'unica coppia di utenti U, V.

Ogni utente $\quad U \longrightarrow K_{u,v}, \; K_{u,k}, \; K_{u,h}$ $\quad$ ha $(n-1)$ chiavi

È complicato.

DISTRIBUZIONE ON LINE DELLE CHIAVI DA PARTE DEL TA

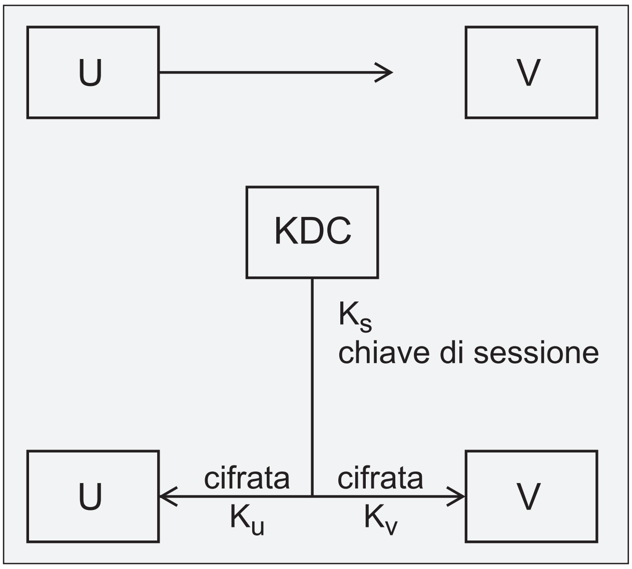
TA è un Key Distribution Center KDC

KDC ha n chiavi segrete, una per ciascuno degli utenti della rete

K_u chiave segreta dell'utente u

U vuole parlare con V
e chiede
una chiave di sessione

KDC manda a U e V
la chiave di sessione
cifrata K_u e K_v



KERBEROS

---

oppure l'altro schema è

PROTOCOLLO D'ACCORDO SULLE CHIAVI

$\begin{cases} \text{Diffie–Hellman} \\ \text{Merkle} \end{cases}$

DISTRIBUITA: senza TA.

KERBEROS KDC

KERBEROS è basato su sistemi a chiave privata

- Ogni utente ha una chiave segreta

DES con TA (KERBEROS) $U \longrightarrow K_u$

$V \longrightarrow K_v$

DES – CBC MODE e usa DES per segretezza

ID (U) informazione pubblica di identificazione dell'utente U
(Nome/Cognome/Indirizzo/Nascita/Luogo/E–mail/Telefono)

TA T – Timestamp
L – Lifetime

genera Session Key K valida nell'intervallo
($T \div T + L$).

---

❶ U chiede a TA di avere una chiave di sessione K per l'utente V

❷ TA sceglie K a caso con T e L

❸ TA calcola

- $m_1 = E_{\mathrm{K_U}}(K, \mathrm{ID}(V), T, L)$
- $m_2 = E_{\mathrm{K_V}}(K, \mathrm{ID}(U), T, L)$ $\longleftarrow$ ticket per V

e manda m_1 e m_2 a U

❹ U usa la decrittazione

$$D_{\mathrm{K}_u}(m_1) = K, \mathrm{ID}(V), T, L$$

e calcola

- $m_3 = E_{\mathrm{K}}[\mathrm{ID}(U), T]$

e lo manda a V insieme al Ticket per V ricevuto da TA : m_2.

❺ V usa $D_{\mathrm{K}_v}(m_2) = K, \mathrm{ID}(U), T, L$

poi calcola

$$D_{\mathrm{K}}(m_3) = T, \mathrm{ID}(U)$$

Verifica che i due valori di T coincidono e che i due valori di ID(U) coincidono,

e calcola

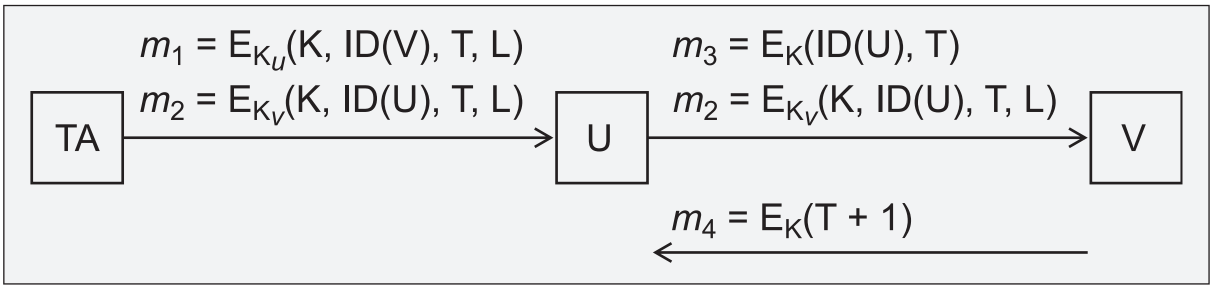
- $m_4 = E_{\mathrm{K}}(T + 1)$

e lo manda a U.

❻ *U* decifra

$$D_K(m_4) = T + 1$$

e verifica $\quad T + 1.$



SYNCHRONIZED CLOCK (or quasi synchronized)

T, L

TO AVOID REPLAY ATTACK

Key Transmission Secrecy	m_1 & m_2 forniscono segretezza nella trasmissione di *K*
Key Confirmation	m_3 & m_4 forniscono riscontro della ricezione delle chiavi

SCAMBIO DELLE CHIAVI DI DIFFIE & HELLMAN

KEY AGREEMENT PROTOCOL

Complessità di calcolo dei logaritmi discreti

p e α noti, numeri primi con $\frac{p-1}{2}$ primo: α elemento primitivo di $\mathcal{Z}_{p^*}$

❶ U sceglie a_u a caso

$$0 \le a_u \le p-2$$

❷ U calcola

$$b_u = \alpha^{a_u} \bmod p$$

e lo manda a V

❸ V sceglie a_v a caso

$$0 \le a_v \le p-2$$

❹ V calcola

$$b_v = \alpha^{a_v} \bmod p$$

e lo manda a U

❺ U calcola

$$K = (\alpha^{a_v})^{a_u} \bmod p$$

V calcola

$$K = (\alpha^{a_u})^{a_v} \bmod p$$

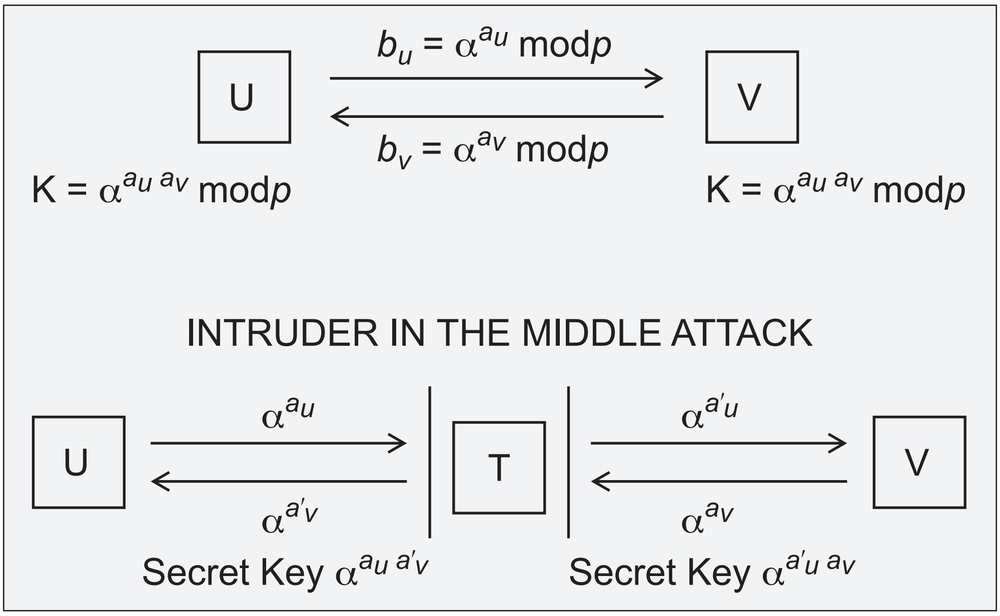
p è numero primo

α è elemento primitivo di $\mathcal{Z}_p$

Valori noti, pubblicamente

U e V alla fine hanno calcolato la chiave di sessione

$$K = \alpha^{a_u\, a_v} \bmod p.$$



PROTOCOLLO DI ACCORDO SULLE CHIAVI AUTENTICATO

Authenticated Key Agreement Protocol

Per lo scambio delle chiavi D&H è quindi necessario che U e V siano sicuri della loro identità

IDENTIFICAZIONE

si usano p, α e i certificati rilasciati dalla TA.

Ogni utente U ha uno schema di firma elettronica

SIG_u	segreto	ad esempio a_u
VER_u	pubblico	$b_u = \alpha^{a_u}$

mod$p$

TA ha il suo

$\mathrm{SIG}_{\mathrm{TA}}$	e
$\mathrm{VER}_{\mathrm{TA}}$	pubblico

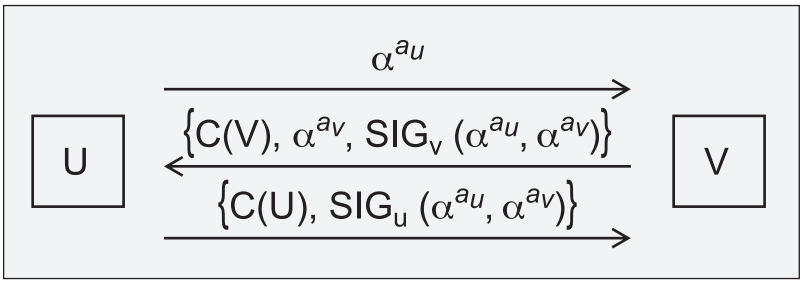
Ogni utente ha un certificato

$$C(\mathrm{U}) = \{\mathrm{ID}(U); \mathrm{VER}_u; \mathrm{SIG}_{\mathrm{TA}}\,[\mathrm{ID}(U); \mathrm{VER}_u]\}$$

ID(U) è ID di U.

SIMPLIFIED STATION-TO-STATION PROTOCOL

❶	U sceglie	$a_u, \quad 0 \le a_u \le p-2$
❷	U calcola	$\alpha^{a_u} \bmod p$
	e lo manda a V	
❸	V sceglie	$a_v \quad 0 \le a_v \le p-2$
❹	V calcola	$\alpha^{a_v} \bmod p$
	poi calcola	$K = (\alpha^{a_u})^{a_v} \bmod p$
	e	$y_v = \mathrm{SIG}_v(a^{a_v}, a^{a_u})$
❺	V manda	$\{C(V), \alpha^{a_v}, y_v\}$ a U
❻	U calcola	
		$K = (\alpha^{a_v})^{a_u} \bmod p$
	verifica	y_v usando VER_v
		$C(V)$ usando VER_{TA}
	U calcola	$y_v = \mathrm{SIG}_u(a^{a_u}, a^{a_v})$
	e manda	$\{C(U), y_u\}$ a V
❼	V verifica	y_u usando VER_u
	e	$C(U)$ usando VER_{TA}



p, α
VER_v
VER_u
VER_{TA}
PUBBLICI

$\mathrm{SIG}_v \; a_v$
$\mathrm{SIG}_u \; a_u$
SEGRETI

L'uso dei certificati evita "impostori"

$$K = \alpha^{a_v a_u} \bmod p$$

SCHEMI DI IDENTIFICAZIONE

(Autenticazione dell'identità di una persona)

CODICI DI AUTENTICAZIONE

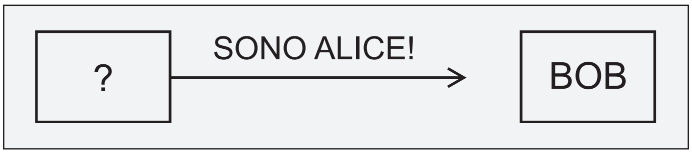
(Autenticare l'integrità di un messaggio e la provenienza)

cioè – non alterato

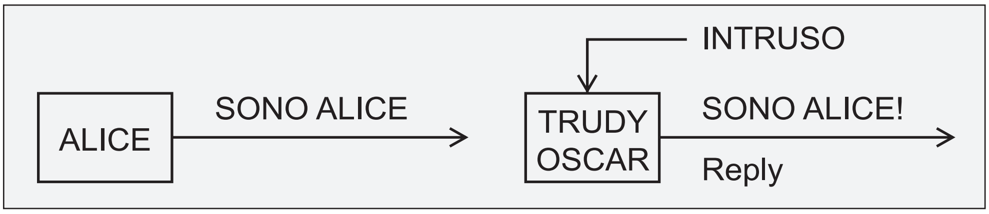
– è stato originato dal presunto trasmettore

SCHEMI DI IDENTIFICAZIONE

Obiettivi



❶ Come fa Bob a sapere se è veramente Alice?



❷ Alice vuole provare che è Alice, ma evitare che, così facendo, consenta di essere 'impersonata' da Bob più tardi.

AUTORIZZARE: dare il permesso di un'azione a qualcuno già identificato

Semplice metodo da realizzare su

SMART CARD

Carta con un chip che fa operazioni aritmetiche

- Piccola memoria
- Poca potenza di calcolo
- Poichè OSCAR può rubare la card, occorre anche un PIN

SISTEMA BASATO SU CRITTOSISTEMI A CHIAVE PRIVATA (DES)

SFIDA E RISPOSTA Challenge–and–Response

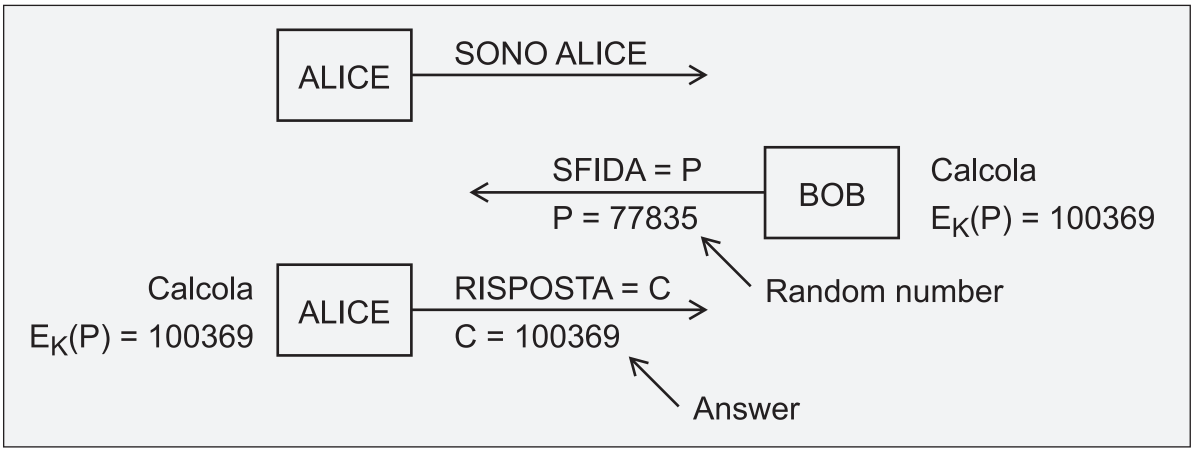
Richiede una chiave segreta condivisa

$K \qquad E_k$

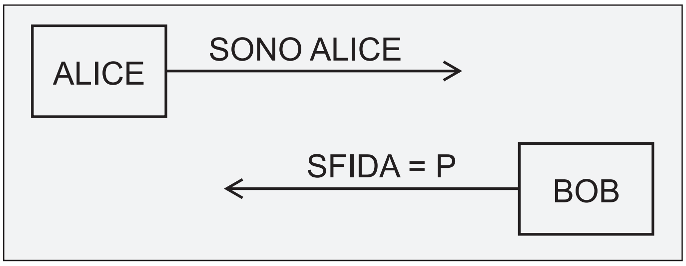
Esempio

$$C = E_k(P) = \qquad P^{101379} \bmod 167653$$

$$K_s(b, m) \qquad K_s = \underset{\text{chiave}}{(\overset{b}{101379}, \overset{m}{167653})}$$



Challenge–and–Response con chiave segreta



P è un numero casuale a 64 BIT

es. $P = 77835$

$b = 101379$

$m = 167653$

$K_s = (b, m)$

	Bob manda	P
	e calcola	$E_{K_s}(P) = P^b \bmod m$
es.	se	$K_s = (b, m) = (101379, 167653)$
	Bob calcola	$x = E_{K_s}(P) = 100369$
	riceve	P
		Risposta $= x'$
	Alice manda	$x' = 100369$
	calcola	$E_{K_s}(P) = 100369$

Bob confronta
se $x = x'$
è Alice

SCHEMA DI IDENTIFICAZIONE DI SCHNORR

C'è la TA che fa così

1 p è primo grande
(il problema di trovare il logaritmo discreto è intrattabile)

2 q è un divisore primo grande di p $\qquad 0 < q < p-1,\ q \in \mathbb{Z}_p^*$

3 $\alpha \in \mathbb{Z}_p^*$ primitivo elemento generatore

4 un parametro t tale che $q > 2^t$ $\qquad$ ad esempio $t = 40$

5 TA decide

$\mathrm{SIG}_{\mathrm{TA}}$

e

$\mathrm{VER}_{\mathrm{TA}}$

6 TA decide

$h(p)$ $\qquad$ hash function

p, q, α e $\mathrm{VER}_{\mathrm{TA}}$ e $h(p)$ $\qquad$ PUBBLICI

CERTIFICAZIONE

❶ TA vede Alice e passaporto, crea una stringa ID(Alice) con le sue informazioni di identità

❷ Alice sceglie $0 \leq a \leq q-1$ e calcola

$$v = \alpha^{-a} \bmod p$$

e dà v al TA.

❸ Il TA genera la firma

$$s = \mathrm{SIG}_{\mathrm{TA}}[\mathrm{ID}(A), v]$$

e dà ad Alice il CERTIFICATO

$$C\,(\text{Alice}) = [\mathrm{ID}(\text{Alice}), v, s]$$

p, q, α PUBBLICI

a SEGRETO di Alice

PROVA DELL'IDENTITÀ

❶ Alice sceglie un numero k $\quad 0 \leq k \leq q-1$

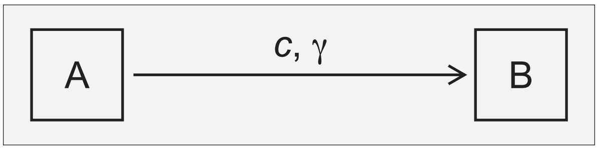
e calcola

$$\gamma = \alpha^k \bmod p$$

$\left\{ \begin{array}{l} p, q, \alpha \\ \mathrm{VER}_{TA} \\ \text{e } h(p) \\ \text{PUBBLICI} \end{array} \right.$

❷ Alice manda a Bob $\quad C\,(\text{Alice}) = [\text{ID}(\text{Alice}), v, s]$

e $\quad \gamma$

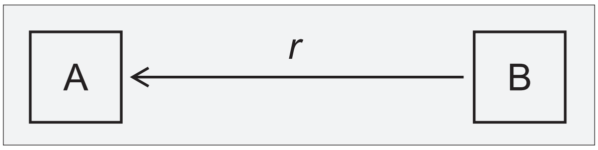


❸ Bob verifica la firma del TA

$$\mathrm{VER}_{TA}[\text{ID}(\text{Alice}), v, s] = \text{true}$$

❹ Bob sceglie r e lo manda ad Alice $\quad$ numero casuale a t BIT

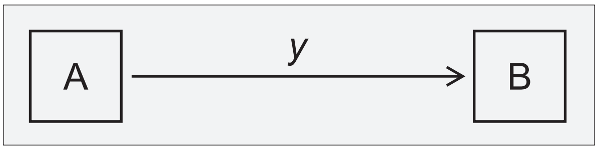
$$1 \leq r \leq 2^t$$



❺ Alice calcola

$$y = (k + ar) \bmod q$$

e lo manda



❻ Bob verifica che

$$\gamma \equiv \alpha^y v^r \pmod{p}.$$

Infatti

$$\begin{aligned} \alpha^y v^r &\equiv \alpha^{k+ar} v^r \pmod{p} \\ &\equiv \alpha^{k+ar} \alpha^{-ar} \pmod{p} \\ &\equiv \alpha^k \pmod{p} \\ &\equiv \gamma \pmod{p} \end{aligned}$$

ESEMPIO

$p = 88667$ $\qquad$ $p \perp q$

$q = 1031$

$t = 10$

$\alpha = 70322$ è primitivo in $\mathbb{Z}_p^*$ di ordine 1031 $\qquad$ $\alpha^{1031} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p)$

ALICE SEGRETO $\qquad$ $a = 755$

allora $\qquad$ $v = \alpha^{-a} \mathrm{mod}\, p =$

$$= 70322^{1031-755} \mathrm{\ mod\ } 88667 =$$

$$= 13136$$

Alice ora sceglie $k = 543$

$$\gamma = \alpha^k \mathrm{mod}\, p$$

$$= 70322^{543} \mathrm{\ mod\ } 88667 =$$

$$= 84109$$

$$\boxed{A} \xrightarrow{\gamma = 84109} \boxed{B}$$

Bob sceglie $\qquad$ $r = 1000 \quad < 2^{10}$

$$\boxed{A} \xleftarrow{r = 1000} \boxed{B}$$

Alice calcola

$$y = (k + ar) \mathrm{\ mod}\, q$$

$$= (543 + 755 + 1000) \mathrm{\ mod} 1031 =$$

$$= 851$$

$$\boxed{A} \xrightarrow{y = 851} \boxed{B}$$

Bob calcola che

$$\gamma = \alpha^y v^r (\mathrm{mod}\, p).$$

$$84109 \equiv 70322^{851} 13136^{1000} (\mathrm{mod} 88667)$$