Modelli per i tempi di vita di apparecchiature

23 marzo 2017

Per tempo di vita di una apparecchiatura intendiamo il tempo X che intercorre tra l'inizio del funzionamento e il primo guasto.

E' ragionevole considerare X una variabile aleatoria non-negativa. D'ora in avanti supporremo anche che X sia assolutamente continua.

Vogliamo considerare modelli probabilistici per tempi di vita di apparecchiature, per esempio, soggette ad usura e non oppure in fase di rodaggio.

Come modelliamo la nozione di non usura, usura e rodaggio?

1) non usura: $\mathbb{P}(X > t + s | X > t) = \mathbb{P}(X > s)$ per $s > 0$, $t \geq 0$;
2) usura: $\mathbb{P}(X > t + s | X > t) < \mathbb{P}(X > s)$ per $s > 0$, $t \geq 0$;
3) rodaggio: $\mathbb{P}(X > t + s | X > t) > \mathbb{P}(X > s)$ per $s > 0$, $t \geq 0$

Abbiamo visto che l'unica variabile aleatoria con f.d.r. continua che soddisfa 1) è la v.a. con densità esponenziale.

Introduciamo ora uno strumento utile ad ottenere modelli che soddisfano 2) e 3).

Intensità di rottura o hazard function

Definizione

Sia X una v.a. assolutamente continua tale che $\mathbb{P}(X > 0) = 1$, con f.d.r. F_X e densità f_X. Si definisce intensità di rottura (o hazard function) la funzione

$$\lambda(t) := \frac{f_X(t)}{1 - F_X(t)} \qquad t > 0 \quad \text{tale che} \quad F_X(t) \neq 1$$

Significato

Calcoliamo la probabilità che un apparecchio ancora funzionante al tempo t si guasti entro "un tempo infinitesimo dt":

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(t < X \leq t + dt | X > t) &= \frac{\mathbb{P}(\{t < X \leq t + dt\} \cap \{X > t\})}{\mathbb{P}(X > t)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(X \in (t, t + dt])}{\mathbb{P}(X > t)} \\
&\simeq \frac{f_X(t)}{1 - F_X(t)} dt = \lambda(t) dt
\end{aligned}$$

Quindi l'hazard function rappresenta il tasso istantaneo di guasto al tempo t, dato che l'apparecchio è ancora funzionante al tempo t.

Hazard function della distribuzione esponenziale

Abbiamo visto che la distribuzione esponenziale è l'unica distribuzione continua che soddisfa la proprietà di mancanza di usura (o memoria) 1): infatti se $X \sim exp(\lambda)$ allora

$$\mathbb{P}(X > t + s | X > t) = \frac{\mathbb{P}(X > t + s)}{\mathbb{P}(X > t)} = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda(t+s)}}{\mathrm{e}^{-\lambda t}}$$
$$= \mathrm{e}^{-\lambda s} = \mathbb{P}(X > s) \quad \forall s > 0, t \geq 0,$$

cioè 1) abbiamo visto che vale anche il viceversa (v.d. Dispense pag. 48). Quindi la sua intensità di guasto è costante. Infatti

$$\lambda(t) = \frac{\lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}}{1 - (1 - \mathrm{e}^{-\lambda t})} = \lambda = costante.$$

In altre parole la distribuzione del tempo di vita rimanente è la medesima sia nel caso in cui l'apparecchio stia funzionando da un tempo t, sia nel caso in cui esso sia nuovo e quindi la sua un'intensità di rottura al tempo t è indipendente da t e coincide con il parametro dell'esponenziale.

Come ricavare la funzione di ripartizione dalla hazard function

Si noti che, se $s > 0$

$$\lambda(s) = \frac{f_X(s)}{1 - F_X(s)} = -\frac{d}{ds}\ln(1 - F_X(s)).$$

Integrando tra 0 e t otteniamo:

$$\int_0^t \lambda(s)ds = -[\ln(1 - F_X(t)) - \ln(1 - F_X(0))] = -\ln(1 - F_X(t)),$$

e quindi

$$1 - F_X(t) = \mathrm{e}^{-\int_0^t \lambda(s)ds} \Rightarrow F_X(t) = 1 - \mathrm{e}^{-\int_0^t \lambda(s)ds}, \quad t > 0.$$

Ne segue che la hazard function determina la funzione di ripartizione di X e quindi può essere usata per assegnare un modello per la v.a. X.

Esempio. Per $t > 0$ sia $\lambda(t) = ct$, con c costante positiva, allora

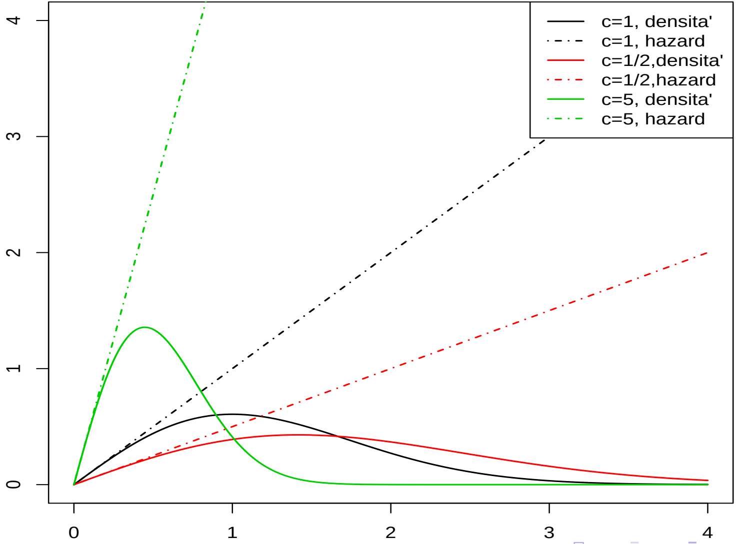
$$\int_0^t \lambda(s)ds = \int_0^t csds = \frac{c}{2}t^2,\ t > 0 \Rightarrow F_X(t) = 1 - \mathrm{e}^{-ct^2/2},\ t > 0,$$

e

$$f_X(t) = ct\mathrm{e}^{-ct^2/2},\ t > 0$$

detta distribuzione di Rayleigh.

Distribuzione di Rayleigh: hazard e funzioni di densità



Inoltre

$$\mathbb{P}(X > t+s|X > t) = \frac{\mathbb{P}(X > t+s)}{\mathbb{P}(X > t)} = \frac{e^{-\int_0^{t+s} \lambda(u)du}}{e^{-\int_0^{t} \lambda(u)du}} = e^{-\int_t^{t+s} \lambda(u)du}$$

e

$$\mathbb{P}(X > s) = e^{-\int_0^{s} \lambda(u)du}$$

A questo punto è facile verificare che:

1. se $\lambda(\cdot)$ è crescente $\Rightarrow \mathbb{P}(X > t+s|X > t) < \mathbb{P}(X > s)$
2. se $\lambda(\cdot)$ è decrescente $\Rightarrow \mathbb{P}(X > t+s|X > t) > \mathbb{P}(X > s)$
3. se $\lambda(\cdot) = \lambda \Rightarrow \mathbb{P}(X > t+s|X > t) = \mathbb{P}(X > s)$.

Esempio: distribuzione Weibull

Sia $\lambda(t) = \alpha\beta t^{\beta-1}$, $t > 0$, where $\alpha, \beta > 0$. Nota che:

if $\beta < 1$, $t \mapsto \lambda(t)$ decresce con t
if $\beta = 1$, $\lambda(t) = cost$
if $\beta > 1$, $t \mapsto \lambda(t)$ cresce con t.

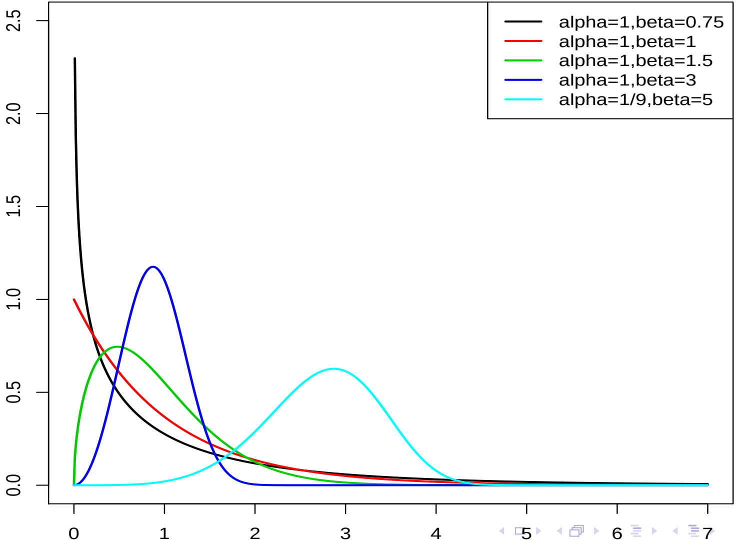
Inoltre

$$F_X(t) = 1 - \mathrm{e}^{-\alpha t^{\beta}}, \ t > 0$$
$$f_X(t) = \alpha\beta t^{\beta-1}\mathrm{e}^{-\alpha t^{\beta}}, \ t > 0.$$

e indicheremo $X \sim Weibull(\alpha, \beta)$.

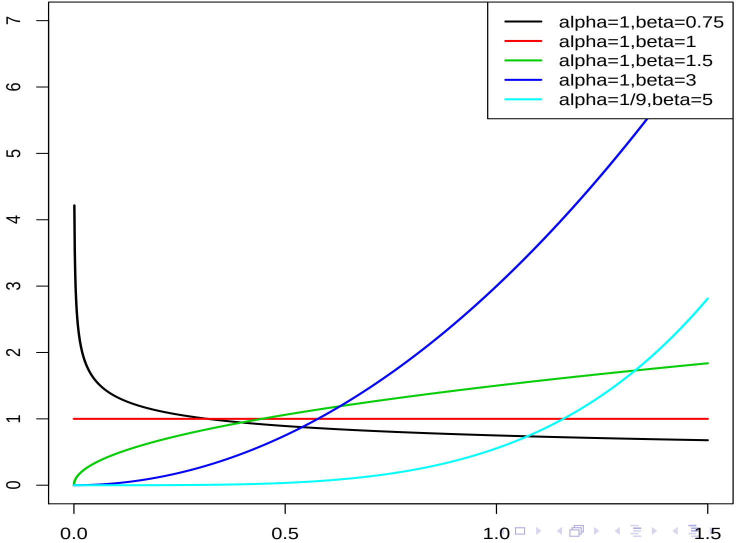
Weibull: funzioni di densità

$$f_X(t) = \alpha\beta t^{\beta-1}\mathrm{e}^{-\alpha t^{\beta}}$$



Weibull: hazard functions

$$\lambda(t) = \alpha\beta t^{\beta-1}$$



Ancora sulla Weibull

Se $X \sim \textit{Weibull}(\alpha, \beta)$ allora

$$\mathbb{E}(X) = \alpha^{-\frac{1}{\beta}} \Gamma(1 + \frac{1}{\beta})$$

dove $\Gamma(x)$ è la funzione Gamma di Eulero:

$$\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} dt, \quad x > 0.$$

Distribuzione Weibull generalizzata

Siano $\alpha, \beta > 0$.

$$\lambda(t) = \frac{\alpha\beta t^{\beta-1}}{1-\lambda t^{\beta}\alpha}$$

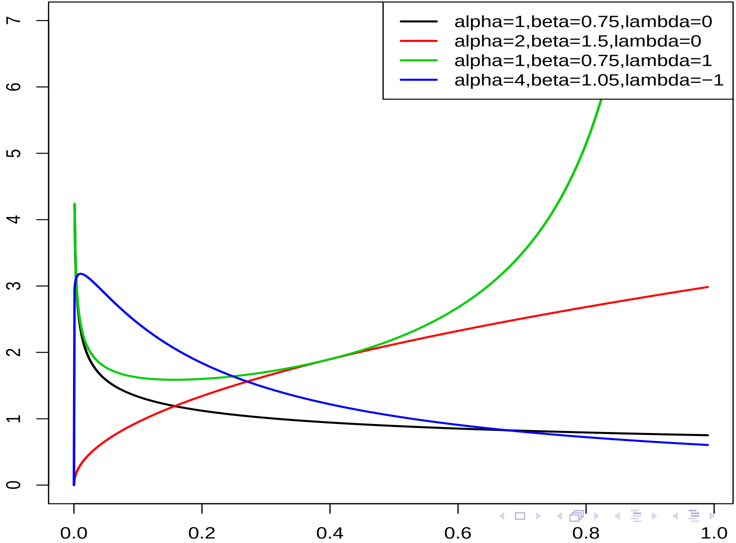
per $t \in (0, +\infty)$ se $\lambda \leq 0$, per $t \in (0, 1/(\lambda\alpha)^{1/\beta})$ se $\lambda > 0$.

Notare che per $\lambda = 0$ si ottiene l'hazard di una Weibull e
se $\beta < 1$, $t \mapsto \lambda(t)$ decresce con t
se $\beta = 1$, $\lambda(t) = cost$
se $\beta > 1$, $t \mapsto \lambda(t)$ cresce con t.

Inoltre se
se $\lambda > 0$ e $\beta < 1$ bathtube hazard function
se $\lambda < 0$ e $\beta > 1$ unimodal hazard function .

Weibull generalizzata: hazard functions

$$\lambda(t) = \frac{\alpha\beta t^{\beta-1}}{1 - \lambda t^{\beta}\alpha}$$



Ancora sulla Weibull generalizzata

La funzione di ripartizione di una v.a. X con densità Weibull generalizzata, se $\lambda \neq 0$, è

$$F_X(t) = \left(1 - (1 - \lambda\alpha t^{\beta})^{1/\lambda}\right)$$

per $t \in (0, +\infty)$ se $\lambda < 0$, per $t \in (0, 1/(\lambda\alpha)^{1/\beta})$ se $\lambda > 0$.

Si ottiene la funzione di ripartizione di una *Weibull*(α, β) facendo il limite per $\lambda \to 0$. Infatti

$$\lim_{\lambda \to 0} \left(1 - (1 - \lambda\alpha t^{\beta})^{1/\lambda}\right) = 1 - \mathrm{e}^{-\alpha t^{\beta}}$$