POLITECNICO DI MILANO

# Elettrotecnica
# Parte 3: Teoremi delle reti

Prof . Ing. Giambattista Gruosso, Ph. D.

Dipartimento di Elettronica, Informazione e Bioingegneria

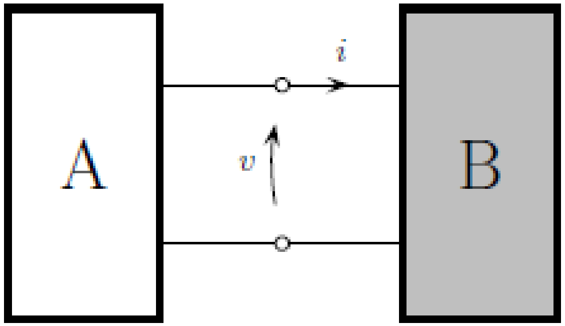
POLITECNICO DI MILANO

Prof. G. Gruosso

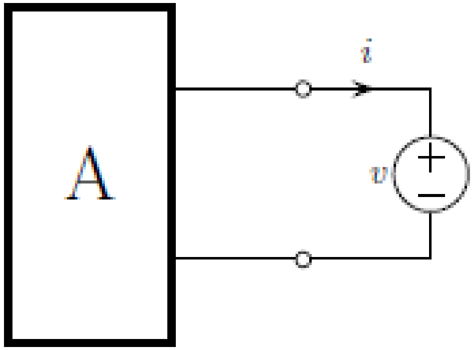
# Indice

Prof. G. Gruosso

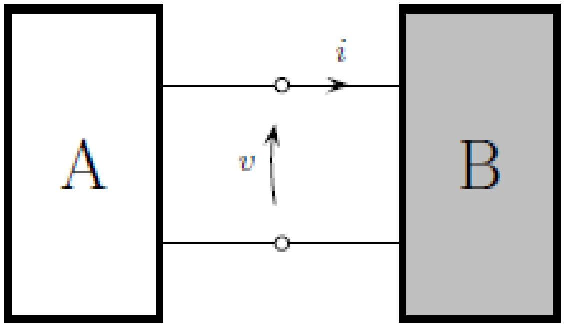
# Principio di Sostituzione



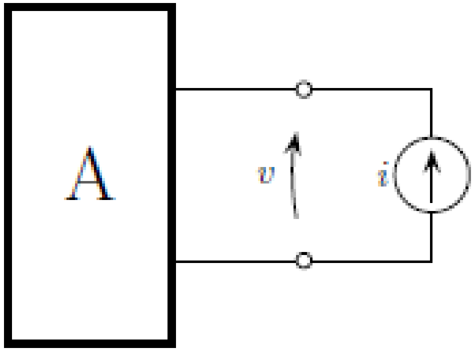

**Se si conosce la tensione v Sostituendo il bipolo B con un generatore indipendente di tensione di valore v, tutti i valori di tensione e tutti i valori di corrente di A, compresa la corrente i, rimangono invariati.**



# Principio di Sostituzione




**Se si conosce la corrente i Sostituendo il bipolo B con un generatore indipendente di corrente di valore i, tutti i valori di tensione e tutti i valori di corrente di A, compresa la tensione v, rimangono invariati.**




POLITECNICO DI MILANO

Prof. G. Gruosso

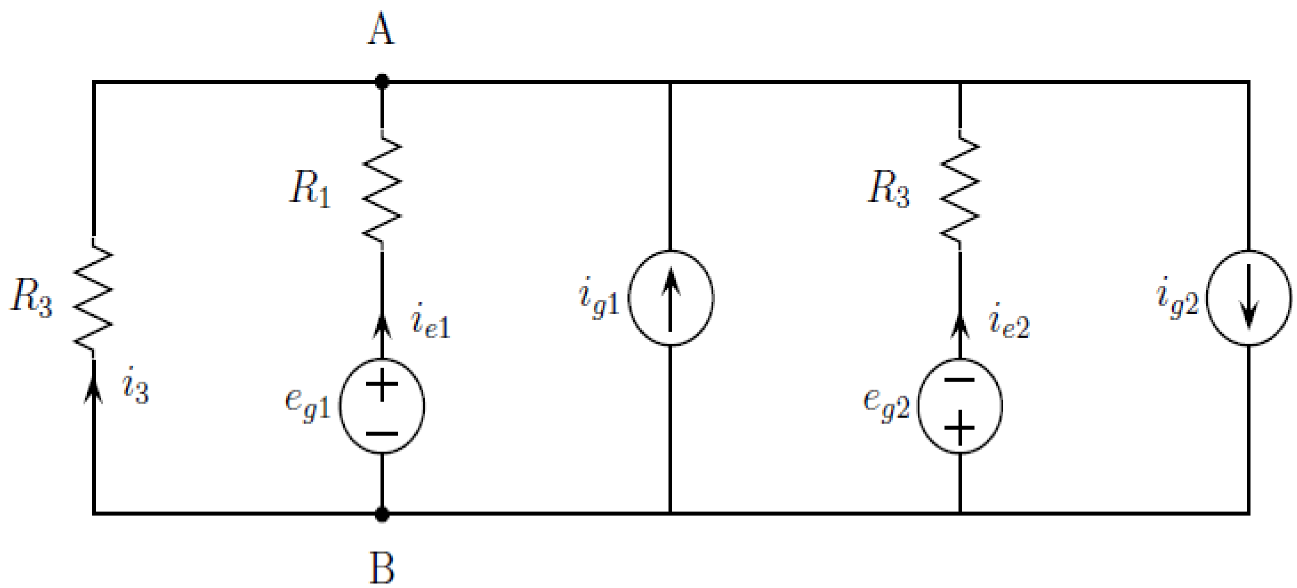
# Teorema di Millmann

POLITECNICO DI MILANO

Prof. G. Gruosso

Considerando un circuito formato da due soli nodi e aventi le seguenti proprietà:

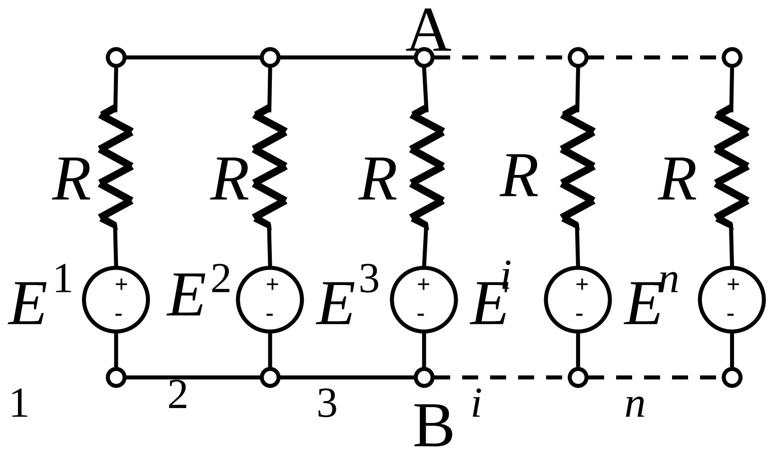
- Tutti i lati sono formati da resistori, generatori di corrente o generatori di tensione reali

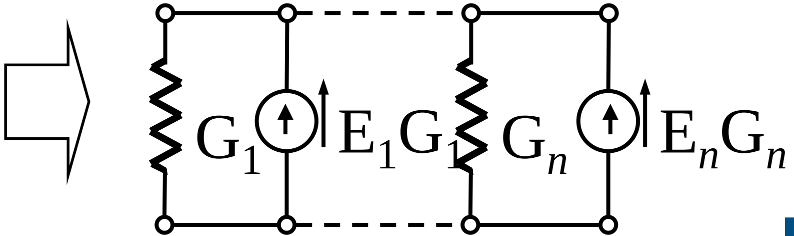


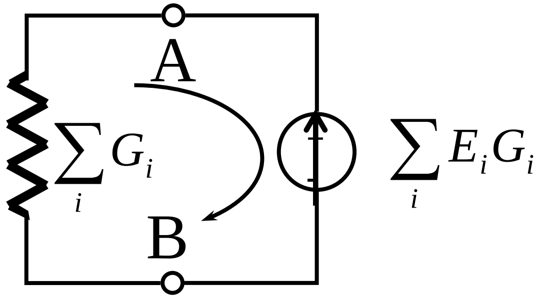

$$\boxed{v_{AB} = \frac{\frac{e_{g1}}{R_1} - \frac{e_{g2}}{R_2} + i_{g1} - i_{g2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_3}}}$$

**Teorema di Millmann**

# Teorema di Millmann




$$V_{AB} = \frac{\sum_i G_i E_i}{\sum_i G_i}$$

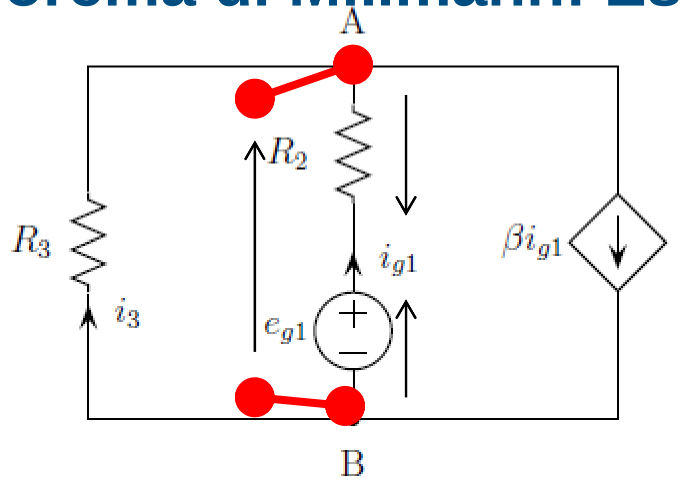
POLITECNICO DI MILANO

Prof. G. Gruosso

POLITECNICO DI MILANO

Prof. G. Gruosso

# Teorema di Millmann: Esempio 1




Maglia generalizzata: è come se ci fosse componente un circuito aperto

$$v_{AB} = \frac{\frac{e_{g1}}{R_2} - \beta \boxed{i_{g1}}}{G_2 + G_3}$$

$$v_{AB} = e_{g1} - R_2 i_{g1}$$

**Equazione aggiuntiva per Determinare la grandezza pilota**

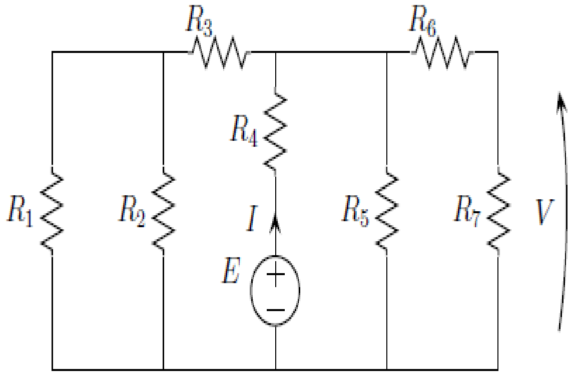
$$i_{g1} = \frac{-(v_{ab} - e_{g1})}{R_2}$$

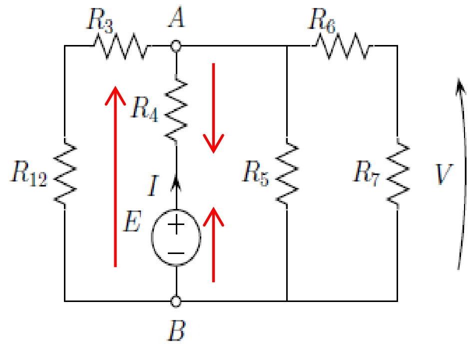
$$v_{Ab} = \frac{\left(\frac{e_{g1}}{R_3} - \frac{\beta e_{g1}}{R_2}\right)}{G_2 + G_3 - \beta G_1}$$

POLITECNICO DI MILANO

Prof. G. Gruosso

# Teorema di Millmann: Esempio 2




$$R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

$$V_{AB} = \frac{\frac{E}{R_4}}{\frac{1}{R_{12}+R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6+R_7}}$$

$$I = \frac{E - V_{AB}}{R_4}$$

**Equazione alla maglia**

$$V = V_{AB}\frac{R_7}{R_7 + R_6}$$

**Partitore di Tensione**

POLITECNICO DI MILANO

Prof. G. Gruosso

# Principio di Sovrapposizione degli Effetti: Premessa

$$\begin{cases} x + y = d \\ x - y = f \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{d+f}{2} \\ y = \dfrac{d-f}{2} \end{cases}$$

$$=$$

$$\begin{cases} x' + y' = d \\ x' - y' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{d}{2} \\ y' = \dfrac{d}{2} \end{cases}$$

$$+$$

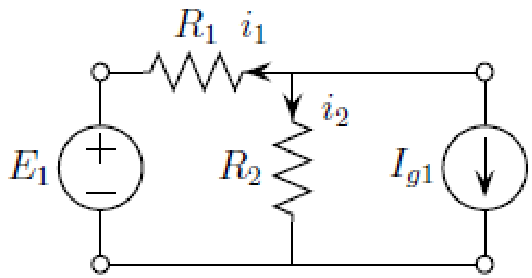
$$\begin{cases} x'' + y'' = 0 \\ x'' - y'' = f \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'' = \dfrac{f}{2} \\ y'' = -\dfrac{f}{2} \end{cases}$$

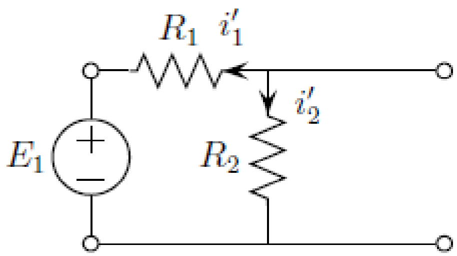
$$\begin{cases} x = x' + x'' \\ y = y' + y'' \end{cases}$$

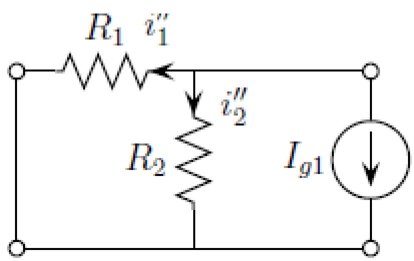
POLITECNICO DI MILANO

Prof. G. Gruosso

# Principio di Sovrapposizione degli Effetti




$$\begin{cases} i'_1 = -i'_2 \\ i'_2 = \dfrac{E_1}{R_1 + R_2} \end{cases}$$

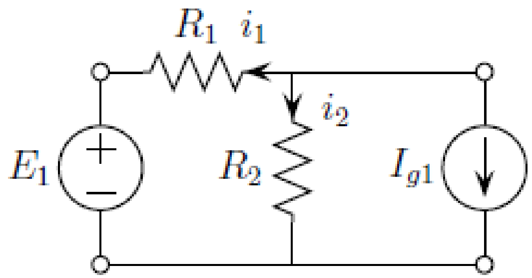
$$\begin{cases} i''_1 = -\dfrac{G_1}{G_1+G_2} I_{g1} \\ i''_2 = -\dfrac{G_2}{G_1+G_2} I_{g1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} i_1 = i'_1 + i''_1 \\ i_2 = i'_2 + i''_2 \end{cases}$$

POLITECNICO DI MILANO

Prof. G. Gruosso

# Principio di Sovrapposizione degli Effetti




**Attenzione: la sovrapposizione vale solo per Correnti e Tensioni**

## La sovrapposizione non vale per le Potenze

$$v_1 = v_1^{(')} + v_1^{('')}$$
$$i_1 = i_1^{(')} + i_1^{('')}$$

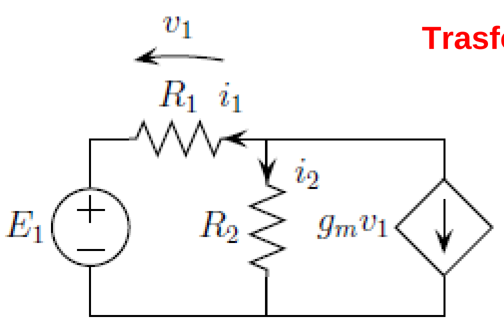
$$p_1 = v_1 i_1 = (v_1^{(')} + v_1^{('')})(i_1^{(')} + i_1^{('')})$$

$$\cancel{p_1 = (v_1^{(')} i_1^{(')} + v_1^{('')} i_1^{('')})}$$

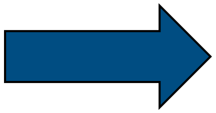
POLITECNICO DI MILANO

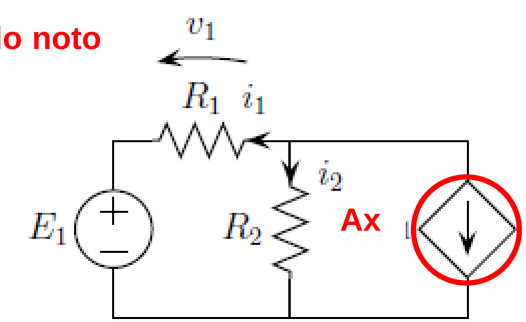
Prof. G. Gruosso

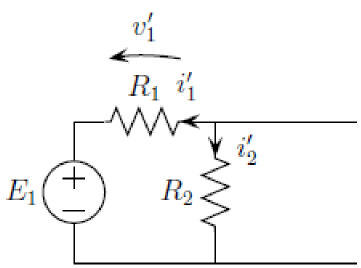
# Principio di Sovrapposizione degli Effetti: Caso dei generatori pilotati

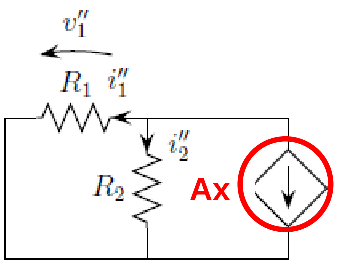



**Trasformo la rete supponendo noto il Generatore Pilotato**





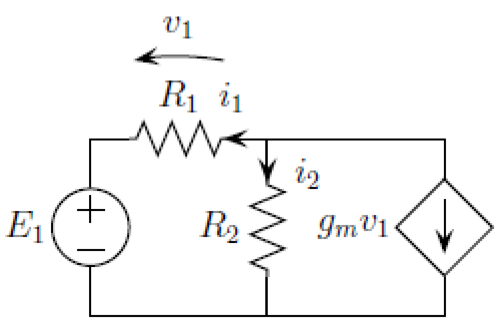

$$
\begin{cases}
i'_1 = -i'_2 \\
i'_2 = \dfrac{E_1}{R_1 + R_2} \\
\boxed{v'_1 = \dfrac{R_1}{R_1 + R_2} E_1}
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
i''_1 = -\dfrac{G_1}{G_1 + G_2} Ax \\
i''_2 = -\dfrac{G_2}{G_1 + G_2} Ax \\
\boxed{v''_1 = \dfrac{Ax}{G_1 + G_2}}
\end{cases}
$$

POLITECNICO DI MILANO

Prof. G. Gruosso

# Principio di Sovrapposizione degli Effetti: Caso dei generatori pilotati




$$\begin{cases} i_1 = -\dfrac{E_1}{R_1+R_2} - \dfrac{G_1}{G_1+G_2}Ax \\ i_2 = \dfrac{E_1}{R_1+R_2} - \dfrac{G_2}{G_1+G_2}Ax \\ v_1 = \dfrac{R_1}{R_1+R_2}E_1 + \dfrac{Ax}{G_1+G_2} \end{cases}$$

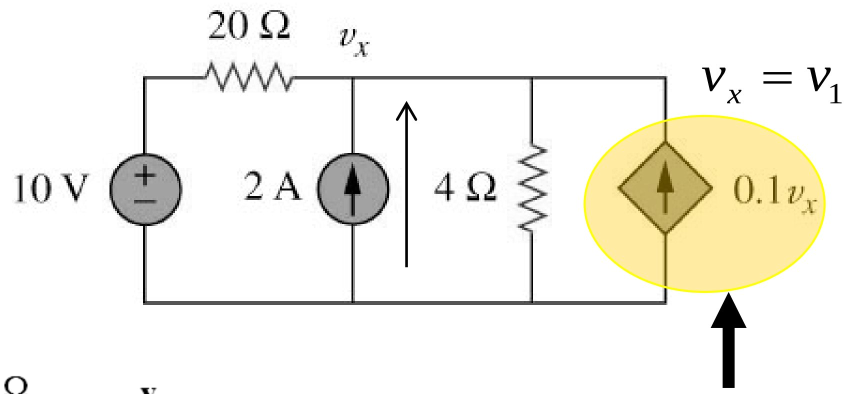
$$\begin{cases} i_1 = -\dfrac{E_1}{R_1+R_2} - \dfrac{G_1}{G_1+G_2}g_m v_1 \\ i_2 = \dfrac{E_1}{R_1+R_2} - \dfrac{G_2}{G_1+G_2}g_m v_1 \\ \boxed{v_1 = \dfrac{R_1}{R_1+R_2}E_1 + \dfrac{g_m v_1}{G_1+G_2}} \end{cases}$$

Posso Ricavare v1 da questa equazione

POLITECNICO DI MILANO

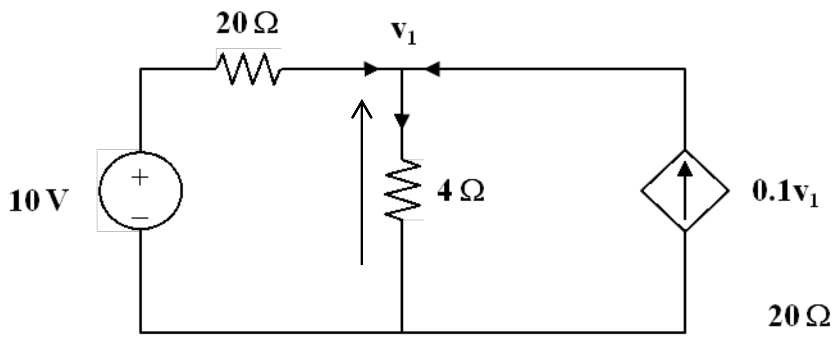
Prof. G. Gruosso

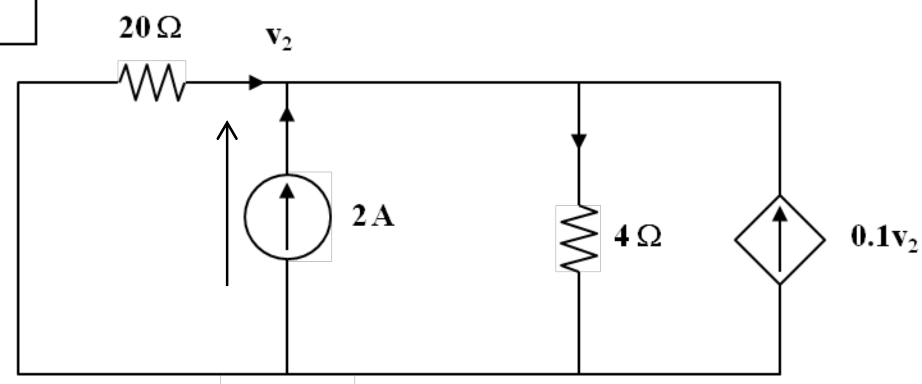
# Principio di Sovrapposizione degli Effetti: Caso dei generatori pilotati metodo 2




$$v_x = v_1 + v_2$$

Lascio invariato il generatore pilotato ma cambio la grandezza pilota

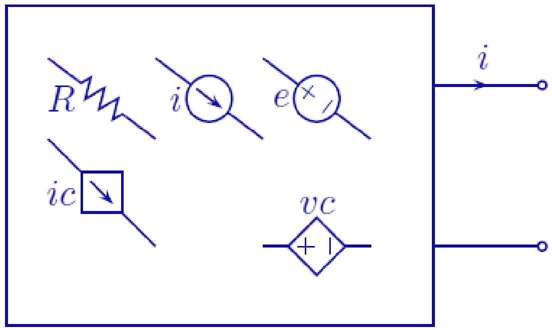


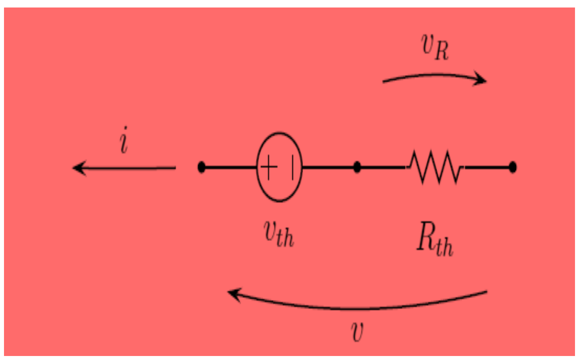
# Teoremi di Thevenin E Norton

POLITECNICO DI MILANO

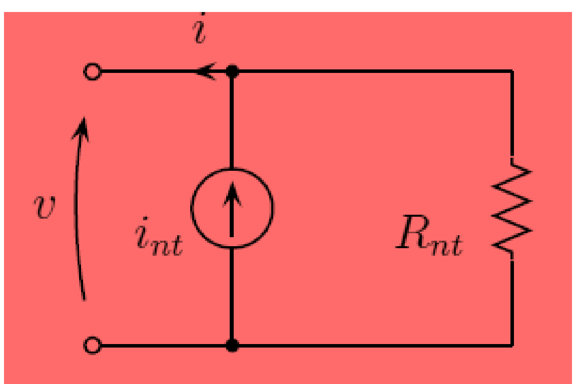
Prof. G. Gruosso




**Dato un Circuito lineare contenente generatori e resistori: questi è sempre riconducibile a:**




**Teorema di Thevenin**

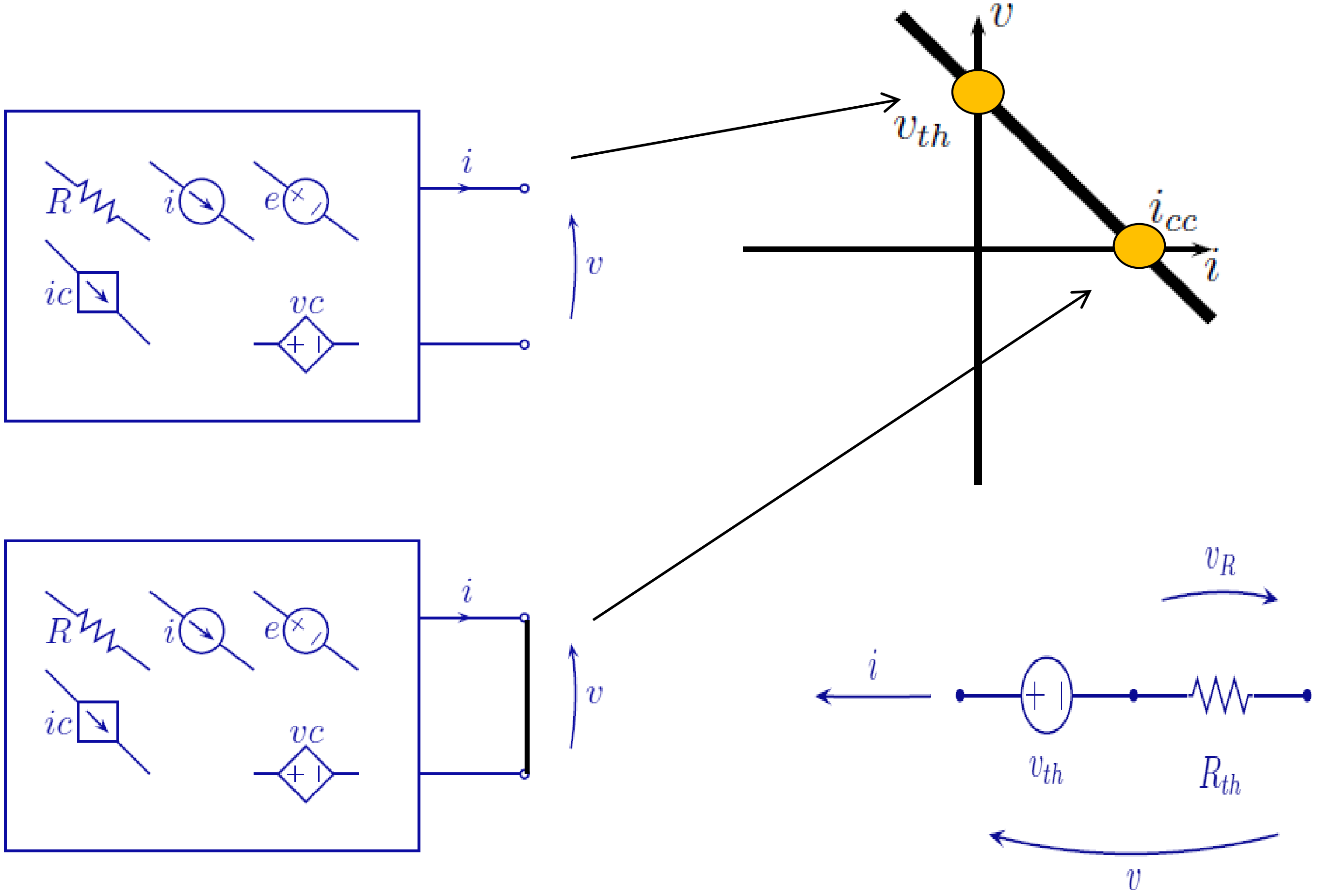



**Teorema di Norton**

POLITECNICO DI MILANO

Prof. G. Gruosso

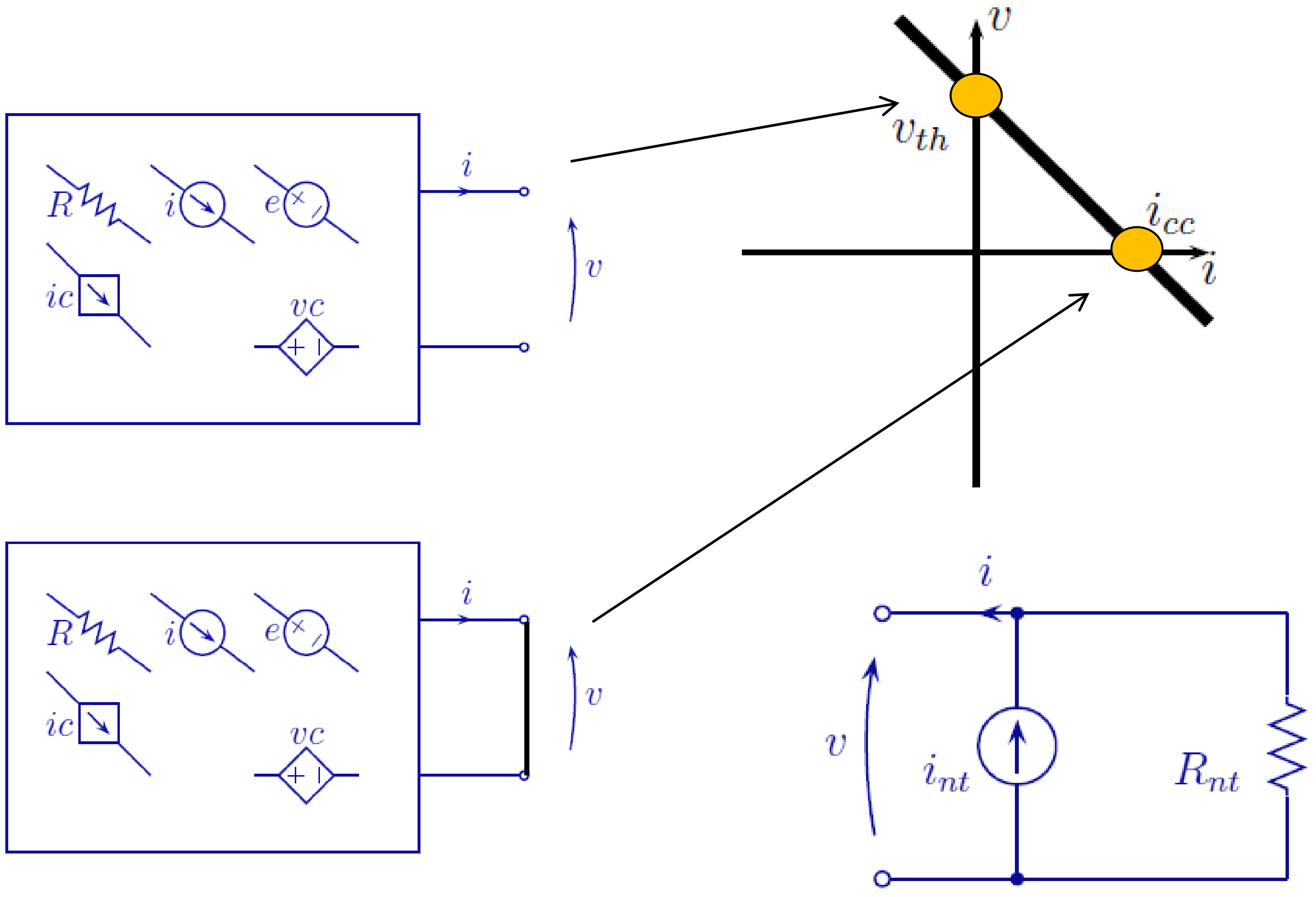
# Teoremi di Thevenin E Norton




$$v = v_{th} - R_{th} i \qquad\qquad i_{cc} = \frac{v_{th}}{R_{th}}$$

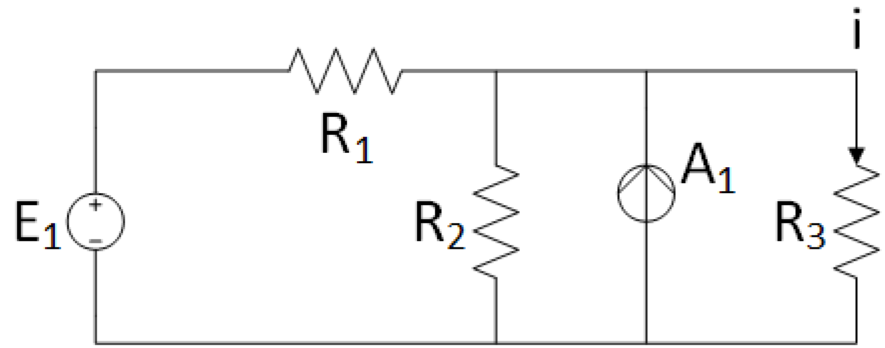
Prof. G. Gruosso

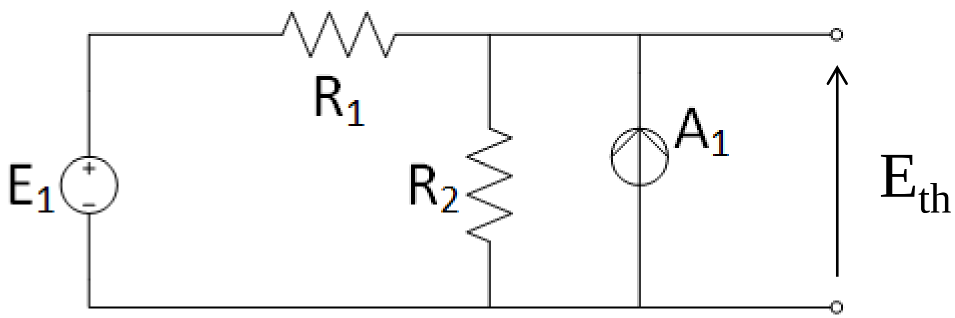
# Teoremi di Thevenin E Norton



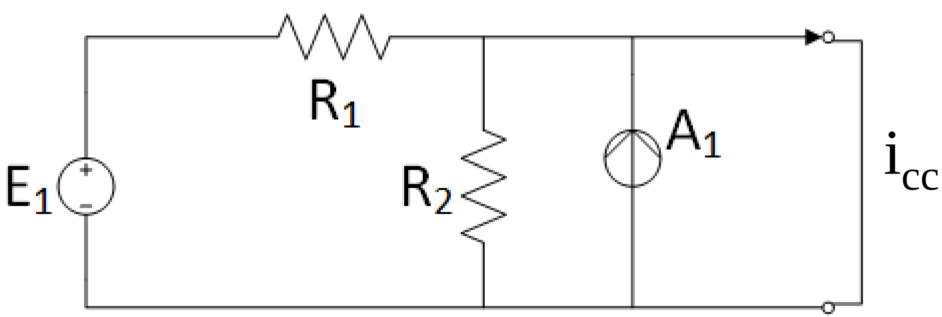

$$R_{nt} = R_{th} \qquad i_{nt} = \frac{v_{th}}{R_{th}}$$

# Teoremi di Thevenin E Norton: Esempio 1




$$E_{th} = \frac{\frac{E_1}{R_1} + A_1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

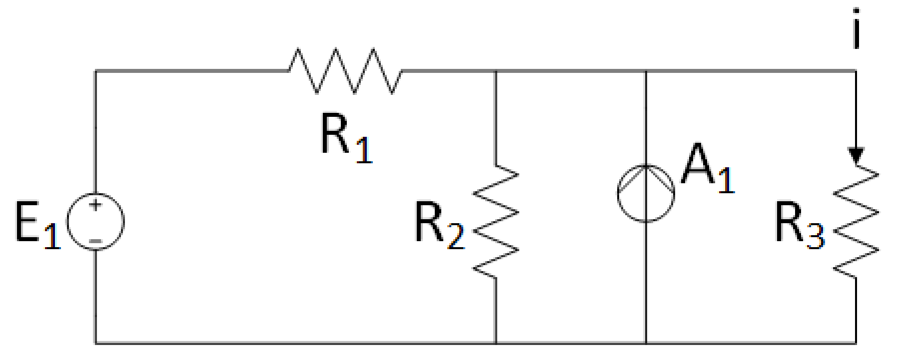



$$i_{cc} = A_1 + \frac{E_1}{R_1}$$

POLITECNICO DI MILANO

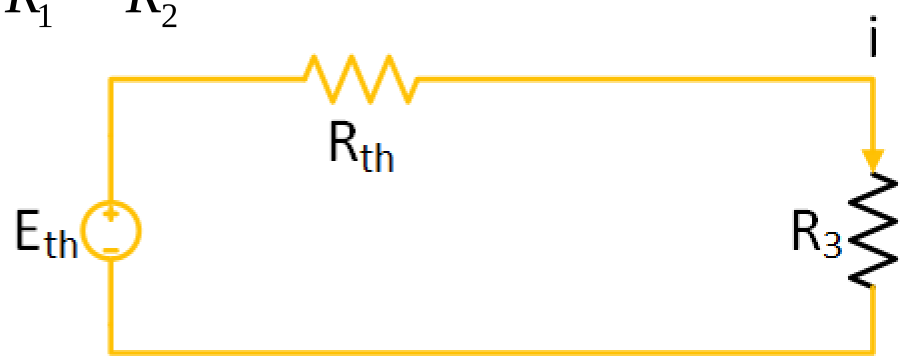
Prof. G. Gruosso

# Teoremi di Thevenin E Norton: Esempio 1



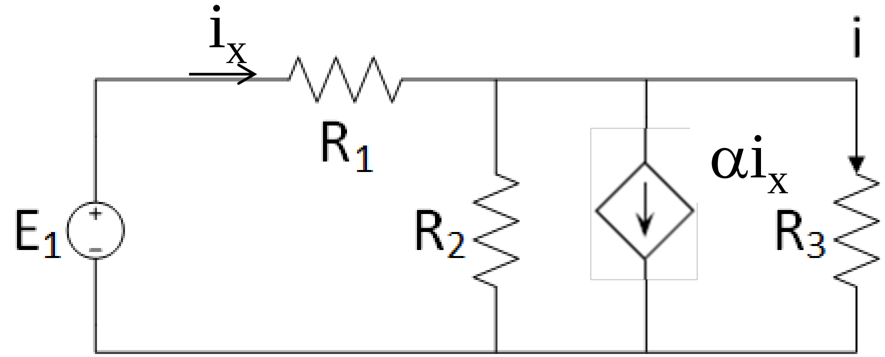

$$E_{th} = \frac{\dfrac{E_1}{R_1} + A_1}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}}$$

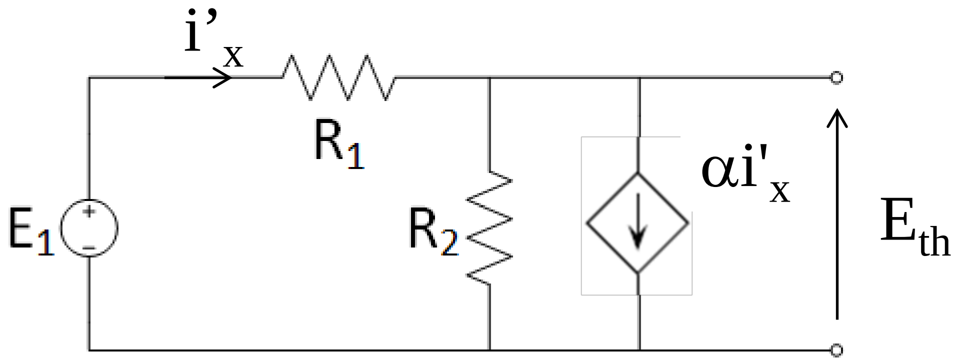
$$R_{th} = \frac{E_{Th}}{i_{cc}} = \frac{1}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}}$$




$$i = \frac{E_{Th}}{R_{th} + R_3}$$

# Teoremi di Thevenin E Norton: Esempio 2



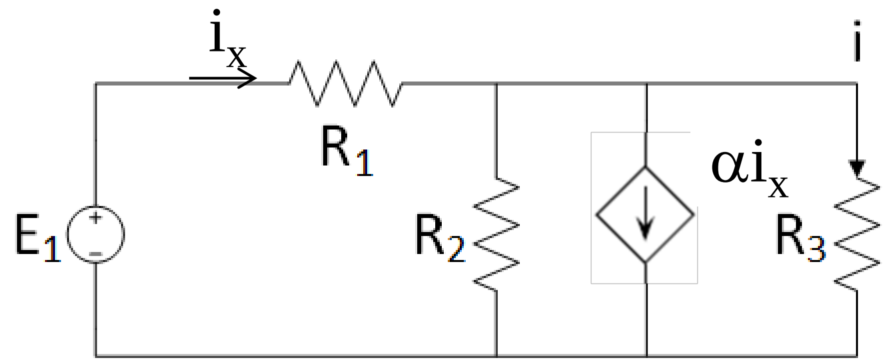



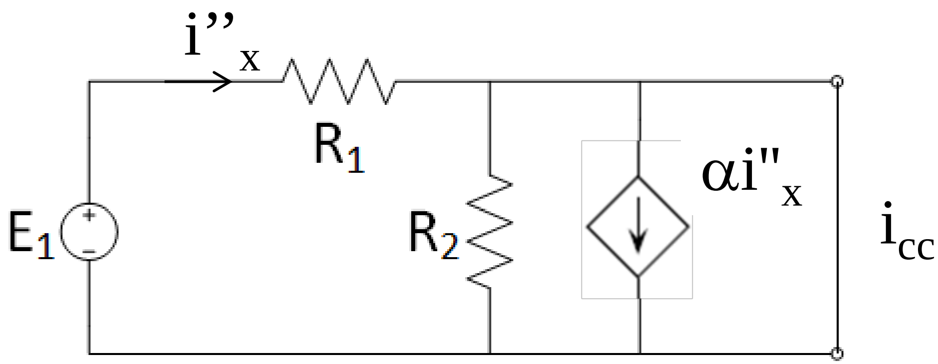

$$E_{th} = \frac{\frac{E_1}{R_1} - \alpha i'_x}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} \qquad i'_x = \frac{E_1 - E_{th}}{R_1} \Rightarrow E_{th} = \frac{G_1 E_1 (1-\alpha)}{G_1 - \alpha G_1 + G_2}$$

POLITECNICO DI MILANO

Prof. G. Gruosso

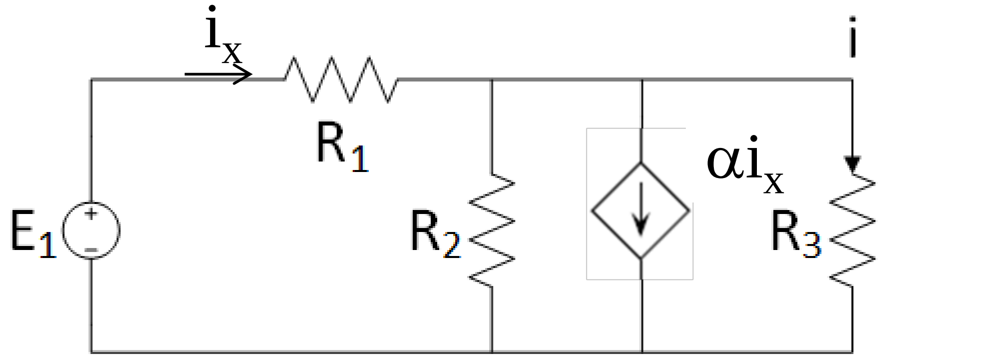
# Teoremi di Thevenin E Norton: Esempio 2



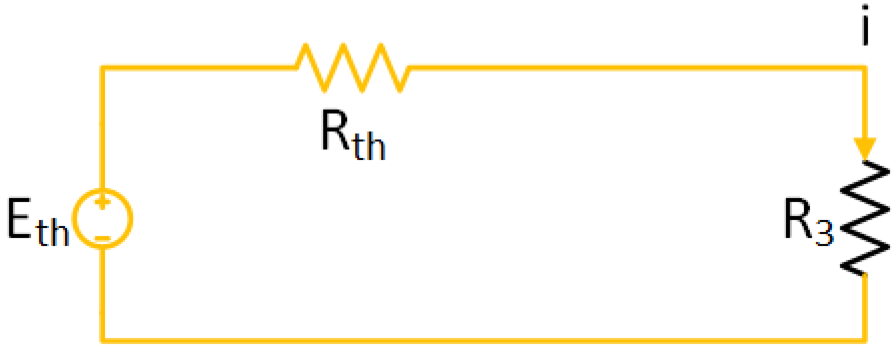




$$i_{cc} = -\alpha i''_x + \frac{E_1}{R_1} \qquad i''_x = \frac{E_1}{R_1} \qquad \Rightarrow \qquad i_{cc} = G_1 E_1 (1-\alpha)$$

# Teoremi di Thevenin E Norton: Esempio 2




$$E_{th} = \frac{G_1 E_1 (1-\alpha)}{G_1 - \alpha G_1 + G_2} \qquad R_{th} = \frac{E_{Th}}{i_{cc}} = \frac{1}{G_1 - \alpha G_1 + G_2}$$



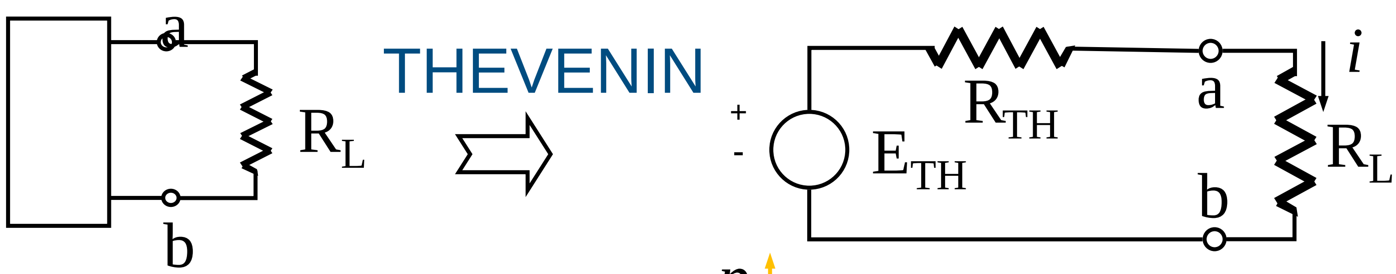

$$i = \frac{E_{Th}}{R_{th} + R_3}$$

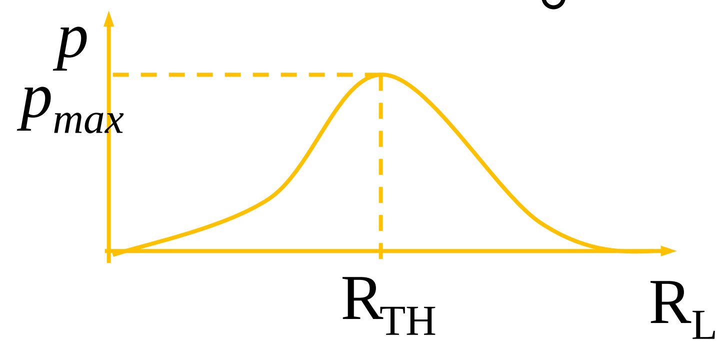

POLITECNICO DI MILANO
Prof. G. Gruosso

POLITECNICO DI MILANO

Prof. G. Gruosso

# Teorema del massimo trasferimento di Potenza



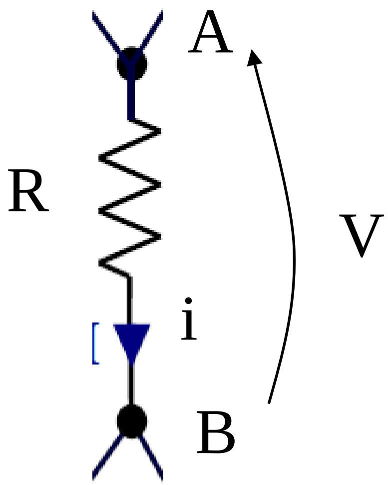

$$p = v_{R_L} i = R_L i^2 = R_L \cdot \left( \frac{E_{TH}}{R_{TH} + R_L} \right)^2$$

$$\frac{dp}{dR_L} = V_{TH}^2 \left[ \frac{(R_{TH} + R_L)^2 - 2R_L (R_{TH} + R_L)}{(R_{TH} + R_L)^4} \right] = 0$$

$$\Rightarrow \quad R_{TH} + R_L - 2R_L = 0 \quad \Rightarrow \quad R_L = R_{TH}$$

$$\Rightarrow \boxed{p_{\max} = \frac{V_{TH}^2}{4R_{TH}}}$$

# ANALISI NODALE




$$u_A \quad u_B$$

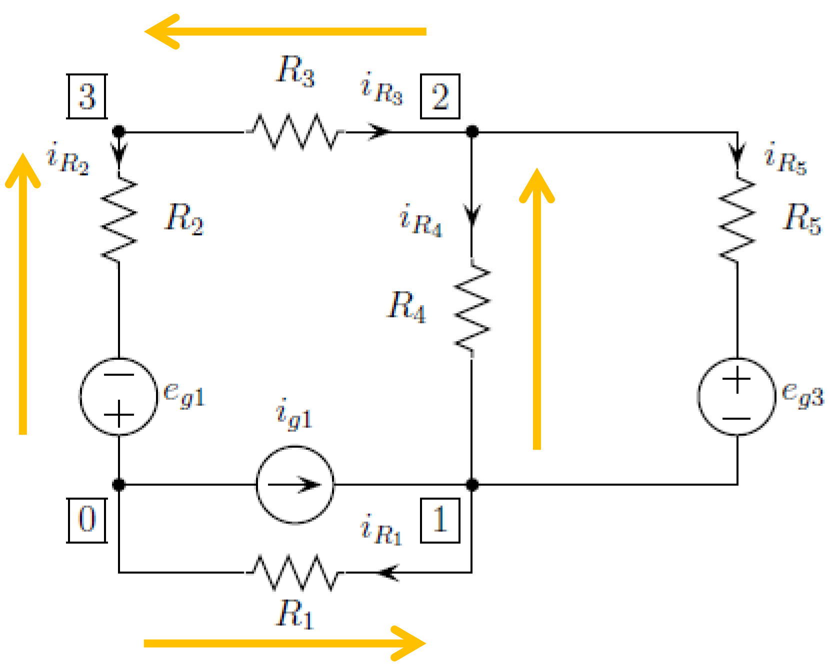
$$V = u_A - u_B$$

$$i = \frac{V}{R} = \frac{u_A - u_B}{R}$$

**Calcolare le correnti partendo dai potenzali nei nodi**
**Permette di ridurre il numero delle incognite al numero di nodi**

POLITECNICO DI MILANO
Prof. G. Gruosso

# ANALISI NODALE




1. Consideriamo positive le tensioni tra il nodo a numerazione più alta e quello a numerazione più bassa

2. Tutti i lati saranno considerati con la convezione degli utlizzatori

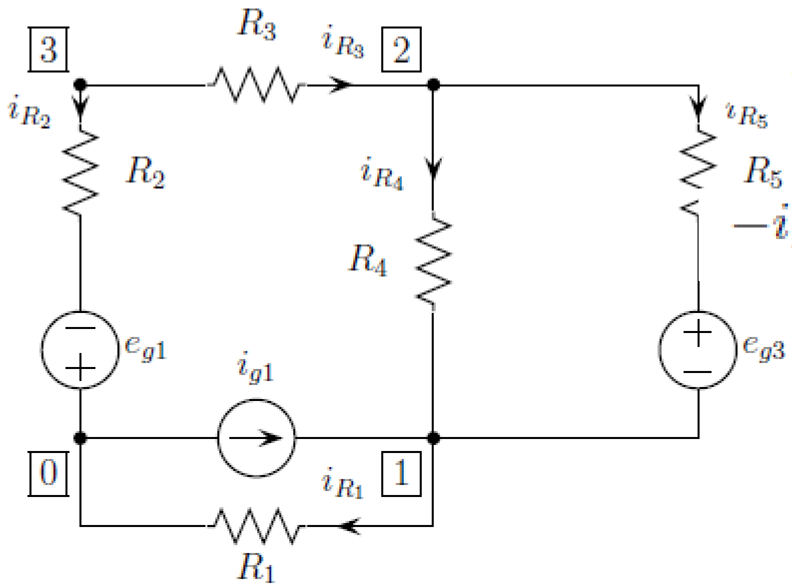
3. Consideremo positive le correnti uscenti da ogni nodo

3. I lati con generatori reali di tensione verranno trasformati in generatori reali di corrente

POLITECNICO DI MILANO

Prof. G. Gruosso

# ANALISI NODALE




$$-i_{g1} + i_{R_1} - i_{R_4} - i_{R5} = 0 \qquad (1)$$

$$-i_{R_3} + i_{R_4} + i_{R5} = 0 \qquad (2)$$

$$i_{R_2} + i_{R_3} = 0 \qquad (3)$$

$$i_{R_1} = \frac{u_1}{R_1}$$

$$i_{R_4} = \frac{u_2 - u_1}{R_4}$$

$$i_{R_3} = \frac{u_3 - u_2}{R_3}$$

Correnti nei lati con solo resistori

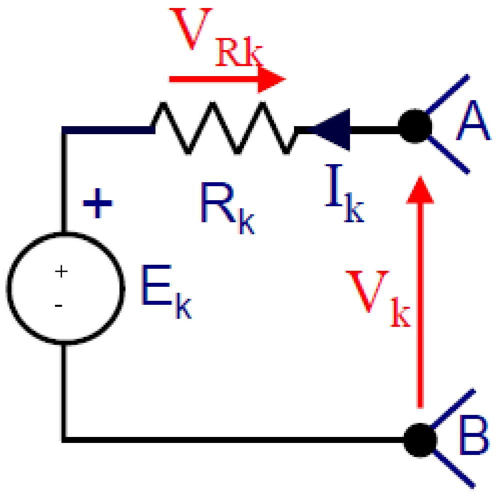
$$i_{R_2} = \frac{u_3 + e_{g1}}{R_2}$$

$$i_{R_5} = \frac{u_2 - u_1 - e_{g3}}{R_5}$$

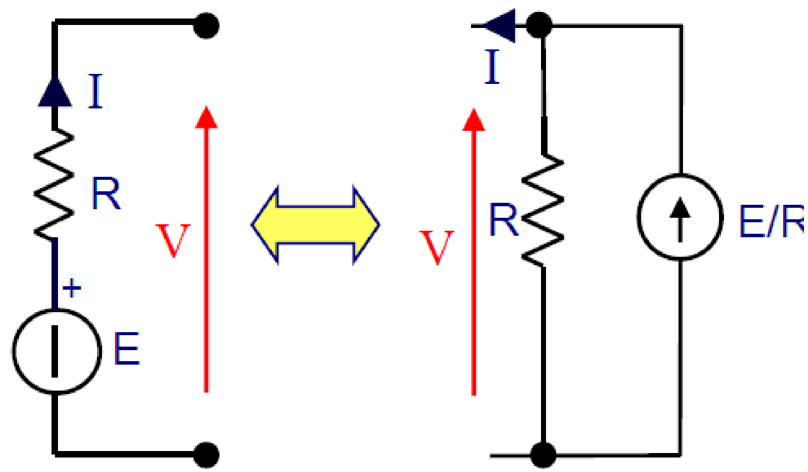
Correnti nei lati con generatori reali di tensione

Prof. G. Gruosso

# ANALISI NODALE



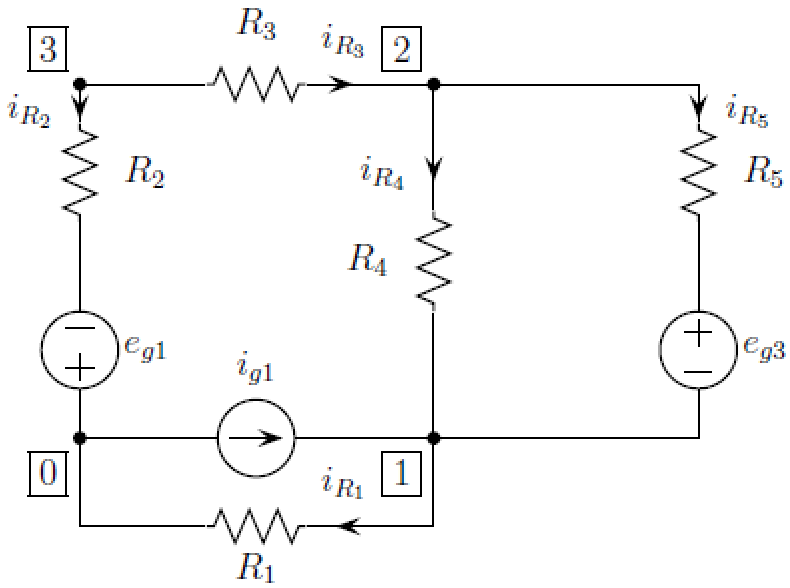

$$I_k = \frac{V_k - E_k}{R_k} = \frac{u_A - u_B - E_k}{R_K}$$



POLITECNICO DI MILANO

Prof. G. Gruosso

# ANALISI NODALE




$$-i_{g1} + \frac{u_1}{R_1} - \frac{u_2 - u_1}{R_4} - \frac{u_2 - u_1 - e_{g3}}{R_5} = 0$$

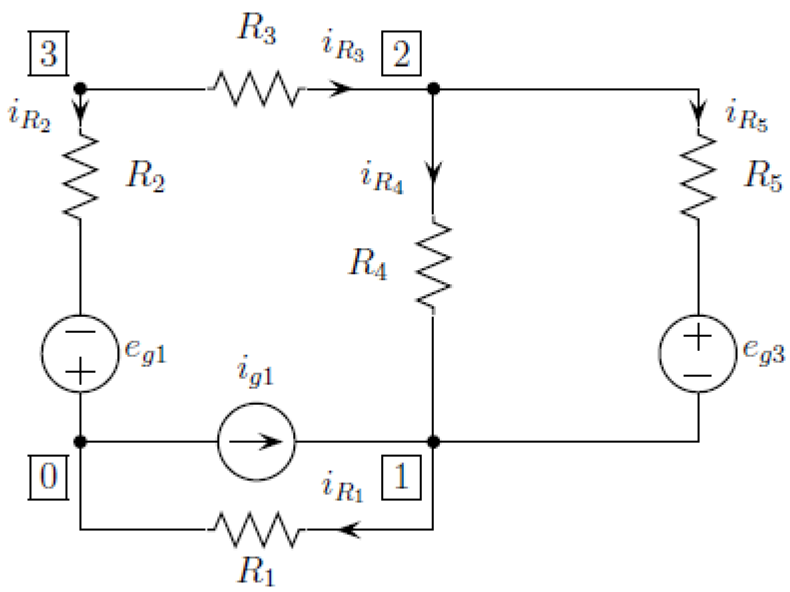
$$-\frac{u_3 - u_2}{R_3} + \frac{u_2 - u_1}{R_4} + \frac{u_2 - u_1 - e_{g3}}{R_5} = 0$$

$$\frac{u_3 + e_{g1}}{R_2} + \frac{u_3 - u_2}{R_3} = 0$$

POLITECNICO DI MILANO

Prof. G. Gruosso

# ANALISI NODALE




$$\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5}\right)u_1-\left(\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5}\right)u_2=i_{g1}-\frac{e_{g3}}{R_5}$$

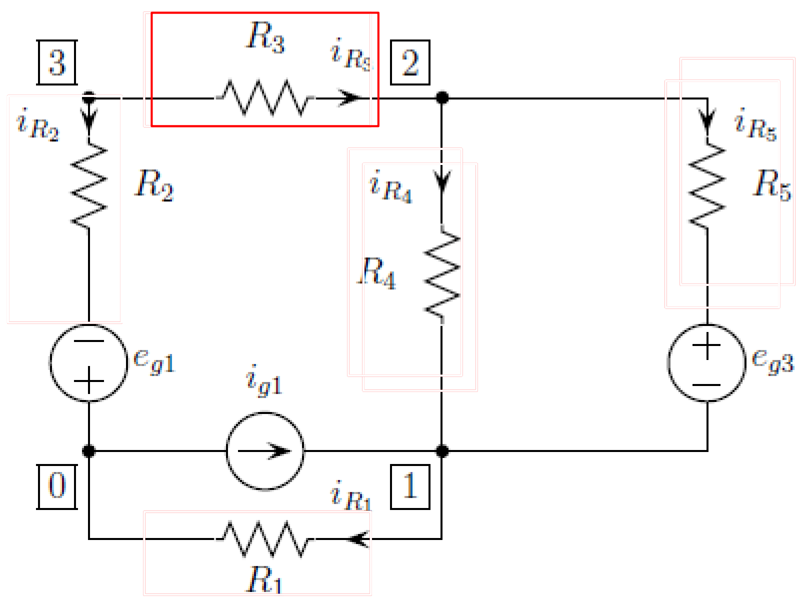
$$-\left(\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5}\right)u_1+\left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5}\right)u_2-\frac{u_3}{R_3}=\frac{e_{g3}}{R_5}$$

$$-\frac{u_2}{R_3}+\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)u_3=-\frac{e_{g1}}{R_2}$$

# ANALISI NODALE

POLITECNICO DI MILANO

Prof. G. Gruosso

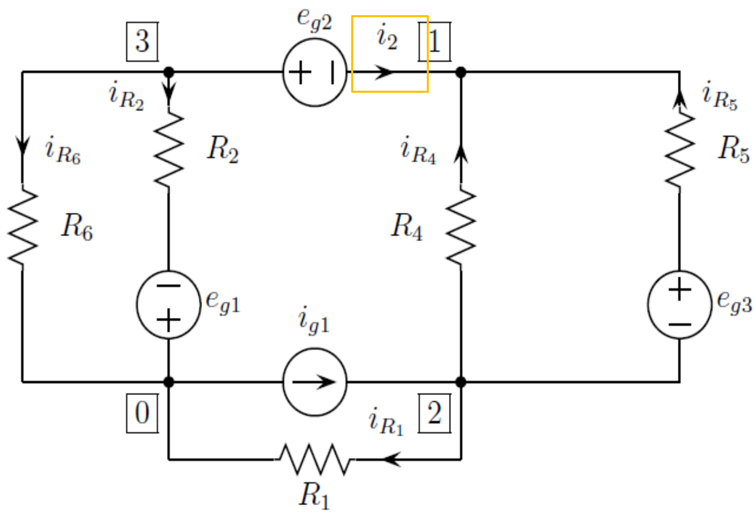



$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} G_1+G_4+G_5 & -(G_4+G_5) & 0 \\ -(G_4+G_5) & G_3+G_4+G_5 & \boxed{-G_3} \\ 0 & -G_3 & G_2+G_3 \end{bmatrix} \end{array} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} i_{g1}-G_5e_{g3} \\ G_5e_{g3} \\ -G_2e_{g1} \end{Bmatrix}$$

POLITECNICO DI MILANO

Prof. G. Gruosso

# ANALISI NODALE MODIFICATA CASO GENERATORI IDEALI DI TENSIONE




$$\boxed{-i_2} - i_{R_4} - i_{R5} = 0$$

$$-i_{g1} + i_{R_1} + i_{R_4} + i_{R5} = 0$$

$$i_{R_2} + i_2 + i_{R_6} = 0$$

$$i_{R_1} = \frac{u_2}{R_1}$$

$$i_{R_6} = \frac{u_3}{R_6}$$

$$i_{R_2} = \frac{u_3 + e_{g1}}{R_2}$$

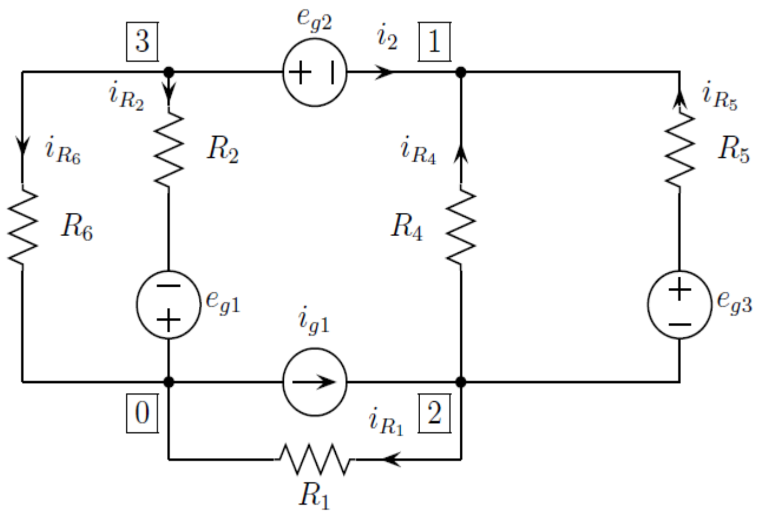
$$i_{R_4} = \frac{u_2 - u_1}{R_4}$$

$$i_{R_5} = \frac{u_2 - u_1 + e_{g3}}{R_5}$$

POLITECNICO DI MILANO

Prof. G. Gruosso

# ANALISI NODALE MODIFICATA
# CASO GENERATORI IDEALI DI TENSIONE




$$-i_2 - \frac{u_2 - u_1}{R_4} - \frac{u_2 - u_1 + e_{g3}}{R_5} = 0$$

$$-i_{g1} + \frac{u_2}{R_1} + \frac{u_2 - u_1}{R_4} + \frac{u_2 - u_1 + e_{g3}}{R_5} = 0$$

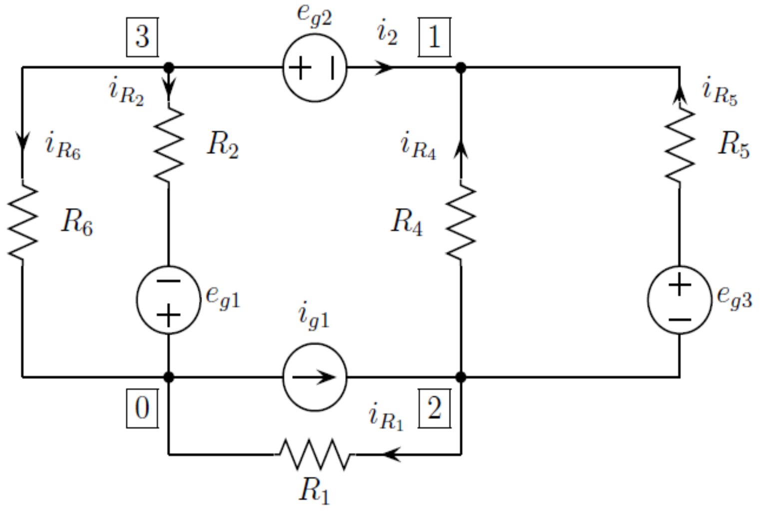
$$\frac{u_3 + e_{g1}}{R_2} + i_2 + \frac{u_3}{R_6} = 0$$

$$u_3 - u_1 = e_{g2}$$

POLITECNICO DI MILANO

Prof. G. Gruosso

# ANALISI NODALE MODIFICATA
# CASO GENERATORI IDEALI DI TENSIONE




$$\left(\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5}\right)u_1-\left(\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5}\right)u_2-i_2=\frac{e_{g3}}{R_5}$$

$$-\left(\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5}\right)u_1+\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5}\right)u_2=i_{g1}-\frac{e_{g3}}{R_5}$$

$$\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_6}\right)u_3+i_2=-\frac{e_{g1}}{R_2}$$

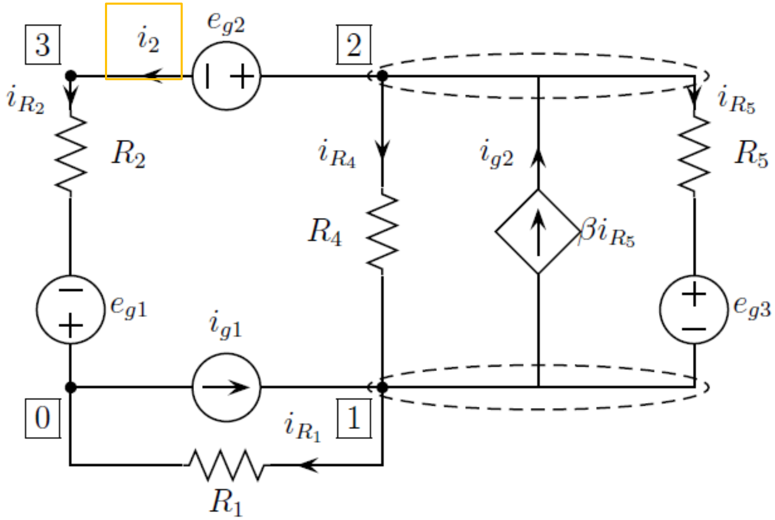
$$-u_2+u_3=e_{g2}$$

$$\begin{bmatrix} (G_4+G_5) & -(G_4+G_5) & 0 & -1 \\ -(G_4+G_5) & (G_1+G_4+G_5) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (G_2+G_6) & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ i_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} G_5 e_{g3} \\ i_{g1}-G_5 e_{g3} \\ -G_2 e_{g1} \\ e_{g2} \end{Bmatrix}$$

# ANALISI NODALE MODIFICATA
# CASO GENERATORI CONTROLLATI

POLITECNICO DI MILANO

Prof. G. Gruosso




$$-i_{g1} + i_{R_1} - i_{R_4} + i_{g2} - i_{R5} = 0$$

$$\boxed{-}i_2 + i_{R_4} - i_{g2} + i_{R5} = 0$$

$$i_{R_2} + i_2 = 0$$

$$i_{R_1} = \frac{u_1}{R_1}$$

$$i_{R_4} = \frac{u_2 - u_1}{R_4}$$

$$i_{R_5} = \frac{u_2 - u_1 - e_{g3}}{R_5}$$

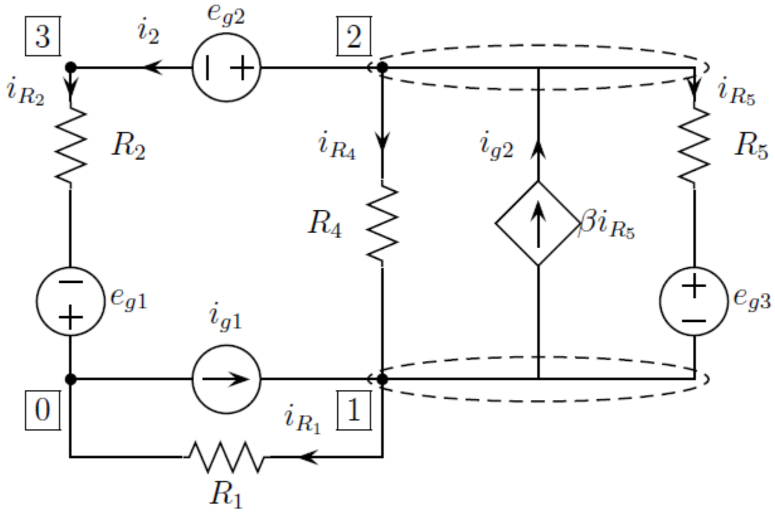
$$i_{R_2} = \frac{u_3 + e_{g1}}{R_2}$$

$$i_{g2} = \beta i_{R_5}$$

POLITECNICO DI MILANO

Prof. G. Gruosso

# ANALISI NODALE MODIFICATA
# CASO GENERATORI CONTROLLATI




$$-i_{g1} + \frac{u_1}{R_1} - \frac{u_2 - u_1}{R_4} + \beta i_{R_5} - \frac{u_2 - u_1 - e_{g3}}{R_5} = 0$$

$$-i_2 + \frac{u_2 - u_1}{R_4} - \beta i_{R_5} + \frac{u_2 - u_1 - e_{g3}}{R_5} = 0$$

$$\frac{u_3 + e_{g1}}{R_2} + i_2 = 0$$

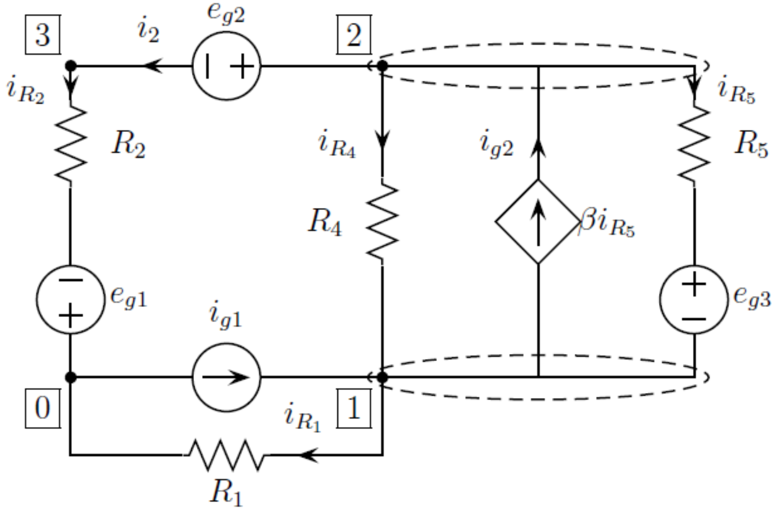
$$\boxed{u_3 - u_2 = -e_{g2}}$$

$$\boxed{i_{R_5} = \frac{u_2 - u_1 - e_{g3}}{R_5}}$$

# ANALISI NODALE MODIFICATA
# CASO GENERATORI CONTROLLATI

POLITECNICO DI MILANO

Prof. G. Gruosso




$$\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5}\right)u_1-\left(\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5}\right)u_2+\beta i_{R_5}=i_{g1}-\frac{e_{g3}}{R_5}$$

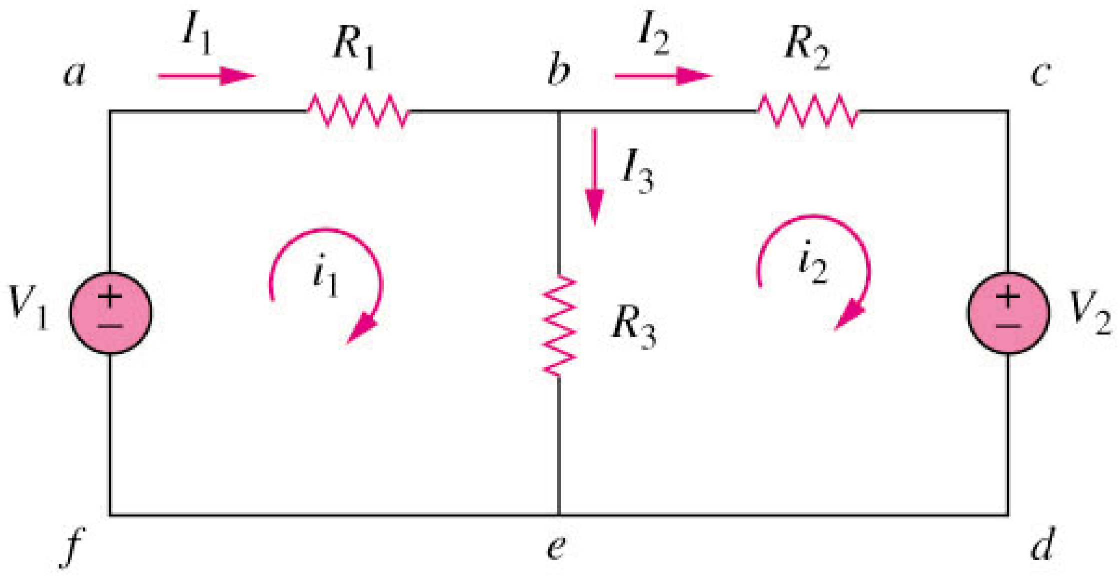
$$-\left(\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5}\right)u_1+\left(\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5}\right)u_2-i_2-\beta i_{R_5}=\frac{e_{g3}}{R_5}$$

$$\frac{u_3}{R_2}+i_2=-\frac{e_{g1}}{R_2}$$

$$-u_2+u_3=-e_{g2}$$

$$\frac{u_1}{R_5}-\frac{u_2}{R_5}+i_{R_5}=\frac{-e_{g3}}{R_5}$$

# ANALISI ALLE MAGLIE




$i_1$ e $i_2$ sono le correnti di maglia (immaginarie, non esistono in realtà)

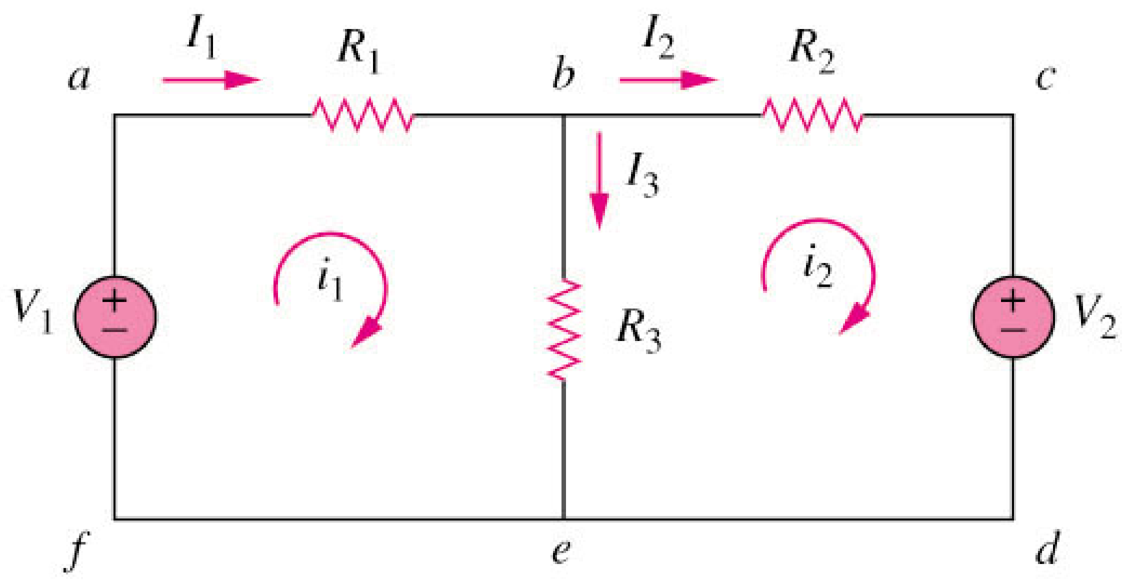
$I_1$, $I_2$ e $I_3$ sono le correnti di lato (reali)

$$I_1 = i_1; \qquad I_2 = i_2; \qquad I_3 = i_1 - i_2$$

POLITECNICO DI MILANO

Prof. G. Gruosso

# ANALISI ALLE MAGLIE



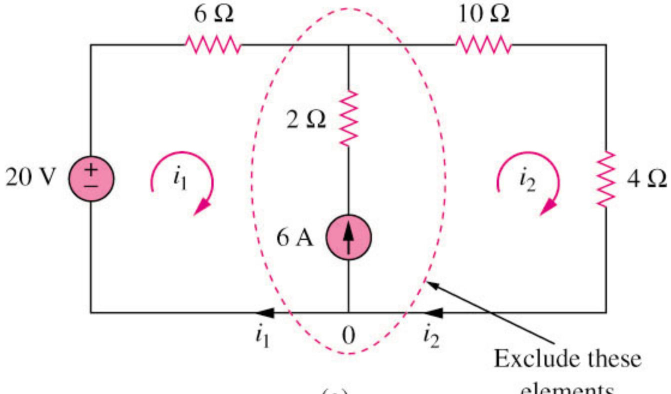

$$V_1 - R_1 i_1 - R_3\left(i_1 - i_2\right) = 0$$

$$-V_2 - R_2 i_2 + R_3\left(i_1 - i_2\right) = 0$$

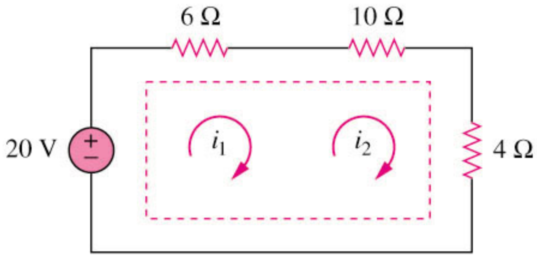
POLITECNICO DI MILANO

Prof. G. Gruosso

# ANALISI ALLE MAGLIE MODIFICATA
## Generatori ideali di corrente



(a)



(b)

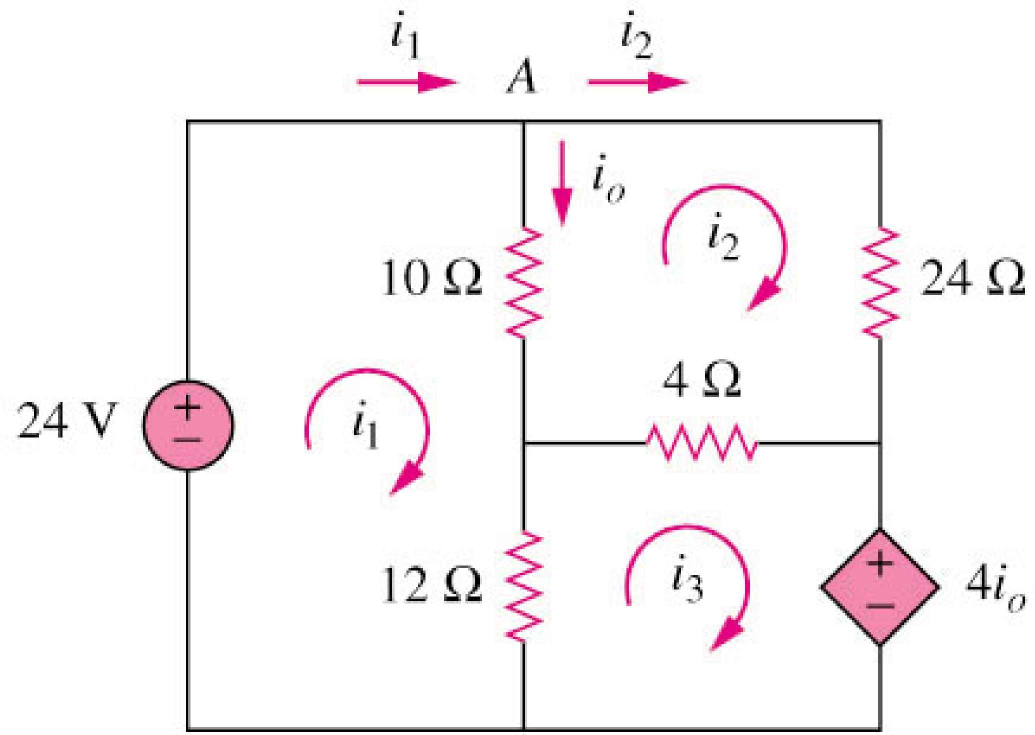
$$20 - 6i_1 - 10i_2 - 4i_2 = 0$$

$$i_2 - i_1 = 6$$

POLITECNICO DI MILANO

Prof. G. Gruosso

# ANALISI ALLE MAGLIE MODIFICATA
## Generatori controllati




$$i_1 - i_2 = i_0$$