Inferenza statistica parametrica: intervalli di confidenza

13 maggio 2019

Intervallo di confidenza e stima intervallare

Esempio. Sia $X_1, \dots, X_n$ un campione di dimensione n estratto da una popolazione con distribuzione $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2 = 4)$, μ incognita.

L'M.L.E. di μ è $\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$.

N.B. $\overline{X}_n$ è una v.a. assolutamente continua, μ è un numero e $P_\mu(\overline{X}_n = \mu) = 0$ qualunque sia il valore di μ. Tuttavia ci aspettiamo che $\overline{X}_n$ sia "vicina" a μ. Per quantificare questa vicinanza usiamo il modello probabilistico (quello gaussiano) che abbiamo ipotizzato per le X_i. Ricordiamo che

$$X_1, \dots, X_n \text{ i.i.d. con } X_i \sim \mathcal{N}(\mu, 4) \Rightarrow \frac{(\overline{X}_n - \mu)\sqrt{n}}{2} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Cioè, quando μ è il valore della media della distribuzione gaussiana $\dfrac{(\overline{X}_n - \mu)\sqrt{n}}{2}$ è gaussiana standard.
Ne segue, per esempio, che

$$\mathbb{P}_\mu\Big(-1.96 < \frac{(\overline{X}_n - \mu)\sqrt{n}}{2} < 1.96 \Big) = \Phi(1.96) - \Phi(-1.96)$$
$$= 2\Phi(1.96) - 1 \simeq 0.95$$

per ogni μ. (Ricordiamo che $\mathbb{P}_\mu$ sta ad indicare che tale probabilità è calcolata per il valore μ del parametro incognito che è la media delle X_i).

Equivalentemente

$$\mathbb{P}_\mu\left(\overline{X}_n - 1.96\frac{2}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X}_n + 1.96\frac{2}{\sqrt{n}}\right) \simeq 0.95,$$

cioè qualunque sia il " vero" valore del parametro incognito μ con probabilità pari a 0.95 il valore di $\overline{X}_n$ è ad una distanza non superiore a $1.96\frac{2}{\sqrt{n}}$ da μ.

Se osserviamo $X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n$ che fornisce $\overline{X}_n = \bar{x}_n$, dove $\bar{x}_n = \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n)$ (oppure osserviamo direttamente il valore $\bar{x}_n$ della statistica $\overline{X}_n$) allora sostituendo tale valore ottengo un vero e proprio intervallo di $\mathbb{R}$

$$\bar{x}_n - 1.96\frac{2}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x}_n + 1.96\frac{2}{\sqrt{n}}$$

L'intervallo "aleatorio"

$$\left(\overline{X}_n - 1.96\frac{2}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{X}_n + 1.96\frac{2}{\sqrt{n}}\right)$$

è detto intervallo di confidenza per μ al 95% (o di livello di confidenza 0.95).

Diciamo che con confidenza del 95% la media μ della popolazione appartiene all'intervallo

$$\left(\bar{x}_n - 1.96\frac{2}{\sqrt{n}}\ ,\ \bar{x}_n + 1.96\frac{2}{\sqrt{n}}\right).$$

Questo intervallo è detto stima intervallare al 95% (o di livello di confidenza 0.95).

Intervalli di confidenza in generale

Sia $X_1, \ldots, X_n$ un campione aleatorio estratto da una popolazione con densità f_θ dipendente da un parametro incognito (o vettore di parametri incogniti) θ. Sia $k(\theta)$ una caratteristica della popolazione (funzione reale non costante di θ) e sia $\alpha \in (0, 1)$ fissato.

Definizione: Intervallo di confidenza bilatero

Siano $T_1 = t_1(X_1, \ldots, X_n)$ e $T_2 = t_2(X_1, \ldots, X_n)$ due statistiche tali che $T_1 < T_2$ e per le quali

$$P_\theta\Big(T_1 < k(\theta) < T_2\Big) = 1 - \alpha$$

per ogni θ. Allora

- $\Big(T_1, T_2\Big)$ è detto intervallo di confidenza all'$(1 - \alpha)100\%$ per $k(\theta)$.
- $1 - \alpha$ è detto livello di confidenza.

- Se osservo $X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n$ e se $\bar{t}_1 = t_1(x_1, \ldots, x_n)$ e $\bar{t}_2 = t_2(x_1, \ldots, x_n)$ sono i valori corrispondenti all'osservazione campionaria delle statistiche T_1 e T_2, allora l'intervallo dell'asse reale $(\bar{t}_1, \bar{t}_2)$ è detto stima intervallare (o ancora intervallo di confidenza) di $k(\theta)$ con livello di confidenza $1 - \alpha$ in corrispondenza dell'osservazione campionaria $(x_1, \ldots, x_n)$.
- Diremo che con confidenza $1 - \alpha$

$$k(\theta) \in (\bar{t}_1, \bar{t}_2).$$

Questi intervalli sono detti bilateri ovviamente perché delimitati da due statistiche. Si ha un'analoga definizione per gli intervalli unilateri e verrà presentata più avanti.

Metodo della quantità pivotale

Definizione: Quantità pivotale

Sia $X_1, \dots, X_n$ un campione aleatorio estratto da una popolazione con densità f_θ con θ incognito. Sia $Q = q(X_1, \dots, X_n; \theta)$ una v.a. funzione di $X_1, \dots, X_n$ e θ. Diciamo che Q è una quantità pivotale se la sua distribuzione non dipende da θ.

Quindi, data una quantità pivotale $Q = q(X_1, \dots, X_n; \theta)$, è possibile determinare due numeri q_1 e q_2 che dipendono da α ma non da θ tali che:

$$\mathbb{P}_\theta(q_1 < Q < q_2) = \mathbb{P}_\theta(q_1 < q(X_1, \dots, X_n; \theta) < q_2) = 1 - \alpha$$

Se per ogni realizzazione campionaria $X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n$

$$q_1 < q(x_1, \dots, x_n; \theta) < q_2 \iff t_1(x_1, \dots, x_n) < k(\theta) < t_2(x_1, \dots, x_n)$$

per opportune funzioni t_1 e t_2, allora

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_\theta\Big(t_1(X_1, \dots, X_n) < k(\theta) < t_2(X_1, \dots, X_n)\Big) \\ &= \mathbb{P}_\theta\Big(q_1 < q(X_1, \dots, X_n; \theta) < q_2\Big) \\ &= 1 - \alpha.\end{aligned}$$

qualunque sia il valore di θ e quindi

$$\Big(t_1(X_1, \dots, X_n)\ ,\ t_2(X_1, \dots, X_n)\Big)$$

è un intervallo di confidenza di livello $1 - \alpha$ per $k(\theta)$.

Esempio iniziale. Sia $X_1, \ldots, X_n$ un campione aleatorio estratto da una popolazione gaussiana di media μ incognita e varianza $\sigma_0^2 = 4$. Allora

$$q(X_1, \ldots, X_n; \mu) = \frac{\overline{X}_n - \mu}{2/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

quindi è una quantità pivotale. Inoltre, se

$$1 - \alpha = 0.95 \ \Rightarrow \alpha = 0.05 \ \Rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0.025} \simeq 1.96$$

(infatti $1 - \Phi(1.96) \simeq 1 - 0.9750 = 0.025$). Quindi

$$\begin{aligned}
0.95 &= \mathbb{P}_\mu\Big(-1.96 < \frac{\overline{X}_n - \mu}{2/\sqrt{n}} < 1.96\Big) = \mathbb{P}_\mu\Big(q_1 < q(X_1, \ldots, X_n; \mu) < q_2\Big) \\
&= \mathbb{P}_\mu\Big(\overline{X}_n - \frac{2}{\sqrt{n}} 1.96 < \mu < \overline{X}_n + \frac{2}{\sqrt{n}} 1.96\Big) \\
&= \mathbb{P}_\mu\Big(t_1(X_1, \ldots, X_n) < \mu < t_2(X_1, \ldots, X_n)\Big)
\end{aligned}$$

Quindi

$$\left(\overline{X}_n - \frac{2}{\sqrt{n}}\,1.96\;,\;\overline{X}_n + \frac{2}{\sqrt{n}}\,1.96\right)$$

è un intervallo di confidenza di livello $1-\alpha = 0.95$.

Se osserviamo $\overline{X}_n = \bar{x}_n = 9$ e se $n = 9$, sostituendo questi valori otteniamo

$$\left(\bar{x}_n - 1.96\frac{2}{\sqrt{n}}\;,\;\bar{x}_n + 1.96\frac{2}{\sqrt{n}}\right) = (9 - 1.96 \times \frac{2}{3}, 9 + 1.96 \times \frac{2}{3})$$
$$= (7.69\;,\;10.31)$$

(stima intervallare per μ al livello di confidenza del 95%).

Attenzione: confidenza non probabilità

Se osserviamo $\overline{X}_n = \bar{x}_n$ e costruiamo la stima intervallare, per esempio bilatera e al 95% di μ, diciamo che:

con confidenza 0.95 μ appartiene a questo intervallo.

Non stiamo affermando che la probabilità che

$$\mu \in \left(\bar{x}_n - 1.96 \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \, , \, \bar{x}_n + 1.96 \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \right)$$

è 0.95. Infatti in questo enunciato non vi è nulla di aleatorio.

Stiamo affermando invece che la probabilità che l'intervallo di estremi aleatori

$$\left(\overline{X}_n - 1.96 \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \, , \, \overline{X}_n + 1.96 \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \right)$$

contenga il valore μ è pari a 0.95.

Analogamente...

Definizione: Intervallo di confidenza illimitato superiormente

Sia $T_1 = t_1(X_1, \ldots, X_n)$ una statistica tale che

$$\mathbb{P}_\theta\Big(T_1 < k(\theta)\Big) = 1 - \alpha$$

per ogni θ. Allora

- $\Big(T_1, +\infty\Big)$ è detto intervallo di confidenza unilatero (non limitato superiormente) all'$(1-\alpha)100\%$ per $k(\theta)$.
- Se osservo $X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n$ e sia $\bar{t}_1 = t_1(x_1, \ldots, x_n)$, allora l'intervallo dell'asse reale $(\bar{t}_1, +\infty)$ è detto stima intervallare unilatera (o ancora intervallo di confidenza unilatero) di $k(\theta)$ con livello di confidenza $1-\alpha$ in corrispondenza dell'osservazione campionaria $(x_1, \ldots, x_n)$.
- Diremo che con confidenza $1-\alpha$ vale $k(\theta) \in (\bar{t}_1, +\infty)$.

Definizione: Intervallo di confidenza illimitato inferiormente

Sia $T_2 = t_2(X_1, \dots, X_n)$ una statistica tale che

$$\mathbb{P}_\theta\Big(k(\theta) < T_2\Big) = 1 - \alpha$$

per ogni θ. Allora

- $\Big(-\infty, T_2\Big)$ è detto intervallo di confidenza unilatero (non limitato inferiormente) all'$(1-\alpha)100\%$ per $k(\theta)$.
- Se osservo $X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n$ e sia $\bar{t}_2 = t_2(x_1, \dots, x_n)$ allora l'intervallo dell'asse reale $(-\infty, \bar{t}_2)$ è detto stima intervallare unilatera (o ancora intervallo di confidenza unilatero) di $k(\theta)$ con livello di confidenza $1-\alpha$ in corrispondenza dell'osservazione campionaria $(x_1, \dots, x_n)$.
- Diremo che con confidenza $1-\alpha$ vale $k(\theta) \in (-\infty, \bar{t}_2)$.

ESEMPIO: Intervalli di confidenza di livello $1-\alpha$ per la media di una popolazione gaussiana

Ricordiamo che:

se $\alpha \in (0,1)$ si definisce quantile (di coda destra) di ordine α di una distribuzione gaussiana standard l'unico numero z_α tale che

$$1-\Phi(z_\alpha) = \mathbb{P}(Z > z_\alpha) = \alpha \quad (\text{o} \;\; \Phi(z_\alpha) = \mathbb{P}(Z \le z_\alpha) = 1-\alpha)$$

dove $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. Quindi

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) &= \mathbb{P}(Z < z_{\alpha/2}) - \mathbb{P}(Z < -z_{\alpha/2}) \\ &= \Phi(z_{\alpha/2}) - \Phi(-z_{\alpha/2}) = 2\Phi(z_{\alpha/2}) - 1 \\ &= 2(1-\alpha/2) - 1 = 1-\alpha. \end{aligned}$$

Analoghe definizioni e proprietà valgono per la t di Student.

Sia $X_1, \dots, X_n$ un campione di dimensione n estratto da una popolazione con distribuzione $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

1. μ incognita e $\sigma^2 = \sigma_0^2$ nota.

Se $X_1, \dots, X_n$ *i.i.d.* $\sim \mathcal{N}(\mu, \sigma_0^2)$, allora $\overline{X}_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma_0^2/n)$.
Ne segue che $\frac{(\overline{X}_n - \mu)\sqrt{n}}{\sigma_0} \sim \mathcal{N}(0,1)$ e quindi è una quantità pivotale e, per ogni μ,

$$1 - \alpha = \mathbb{P}_\mu\Big(- z_{\alpha/2} < \frac{(\overline{X}_n - \mu)\sqrt{n}}{\sigma_0} < z_{\alpha/2} \Big)$$
$$= \mathbb{P}_\mu\Big(\overline{X}_n - z_{\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X}_n + z_{\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \Big).$$

L'intervallo (con estremi dati da due statistiche)

$$\Big(\overline{X}_n - z_{\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \, , \, \overline{X}_n + z_{\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \Big).$$

è quindi un intervallo di confidenza (bilatero) per μ di livello $(1-\alpha)$ (o anche all'$(1-\alpha)100\%$).

Se osserviamo $X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n$, che fornisce la stima della media campionaria $\overline{X}_n = \bar{x}_n$, dove $\bar{x}_n = \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n)$, allora l'intervallo dell'asse reale

$$\left(\bar{x}_n - z_{\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\ ,\ \bar{x}_n + z_{\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right).$$

è una stima intervallare per μ di livello di confidenza $1-\alpha$. Diremo che con confidenza pari a $1-\alpha$

$$\mu \in \left(\bar{x}_n - z_{\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\ ,\ \bar{x}_n + z_{\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right).$$

Per ottenere intervalli di confidenza unilateri partiamo dalle relazioni

$$\mathbb{P}(Z > z_\alpha) = \alpha = \mathbb{P}(Z < -z_\alpha)$$

se $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Quindi, usando ancora la quantità pivotale $\frac{(\overline{X}_n - \mu)\sqrt{n}}{\sigma_0} \sim \mathcal{N}(0,1)$, per ogni μ vale

$$1 - \alpha = \mathbb{P}_\mu\Big(\frac{(\overline{X}_n - \mu)\sqrt{n}}{\sigma_0} < z_\alpha\Big) = \mathbb{P}_\mu\Big(\mu > \overline{X}_n - \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} z_\alpha\Big)$$

e

$$1 - \alpha = \mathbb{P}_\mu\Big(\frac{(\overline{X}_n - \mu)\sqrt{n}}{\sigma_0} > -z_\alpha\Big) = \mathbb{P}_\mu\Big(\mu < \overline{X}_n + \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} z_\alpha\Big).$$

Possiamo concludere gli intervalli unilateri (illimitato superiormente e inferiormente rispettivamente) di livello $1 - \alpha$ per μ sono

$$\Big(\overline{X}_n - \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} z_\alpha \,,\, +\infty\Big) \qquad \text{e} \qquad \Big(-\infty \,,\, \overline{X}_n + \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} z_\alpha\Big).$$

Sia $X_1, \ldots, X_n$ un campione di dimensione n estratto da una popolazione con distribuzione $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ con

2. μ e σ^2 incognite.

Se la varianza σ^2 del campione è incognita l'intervallo precedentemente costruito

$$\left(\bar{x}_n - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \bar{x}_n + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

non è più un intervallo noto dell'asse reale poiché contiene il parametro σ che è incognito. Tale intervallo è stato costruito partendo dalla v.a. $\dfrac{(\overline{X}_n - \mu)\sqrt{n}}{\sigma}$ che oltre al parametro μ contiene un altro parametro incognito σ.

Tuttavia sappiamo che

$$X_1, \ldots, X_n \; i.i.d. \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \;\Rightarrow\; \frac{(\overline{X}_n - \mu)\sqrt{n}}{S_n} \;\sim\; t(n-1),$$

dove $S_n = \sqrt{S_n^2} := \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2}$ è la deviazione standard campionaria. Quindi $\frac{(\overline{X}_n - \mu)\sqrt{n}}{S_n}$ è una quantità pivotale funzione solo del parametro μ.

Ricordiamo che:

Per $\alpha \in (0,1)$, si definisce quantile (di coda destra) di ordine α di una distribuzione t-Student con k gradi di libertà (in simboli $t(k)$) l'unico numero $t_{\alpha,k}$ tale che

$$\mathbb{P}(T_k > t_{\alpha,k}) = \alpha \quad (\text{o} \;\; \mathbb{P}(T_k \leq t_{\alpha,k}) = 1 - \alpha)$$

dove $T_k \sim t(k)$. Per la simmetria della densità vale

$$-t_{\alpha,k} = t_{1-\alpha,k}$$

Quindi, sempre dalla simmetria della densità t-Student rispetto allo zero, se $\alpha \in (0,1)$:

$$\mathbb{P}_{(\mu,\sigma^2)}\Big(-t_{\alpha/2,n-1} < \frac{(\overline{X}_n-\mu)\sqrt{n}}{S_n} < t_{\alpha/2,n-1}\Big) = 1-\alpha$$

o equivalentemente

$$\mathbb{P}_{(\mu,\sigma^2)}\Big(\overline{X}_n - \frac{S_n}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2,n-1} < \mu < \overline{X}_n + \frac{S_n}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2,n-1}\Big) = 1-\alpha$$

per ogni μ e σ^2.

Possiamo concludere che

$$\left(\overline{X}_n - \frac{S_n}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2,n-1} \; , \; \overline{X}_n + \frac{S_n}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2,n-1}\right)$$

è un intervallo di confidenza di livello $1-\alpha$ (o anche all'$(1-\alpha)100\%$) per μ.

Inoltre, se osserviamo i valori $\overline{X}_n = \bar{x}_n$ e $S_n = s_n$ per la media e la deviazione standard campionarie, diciamo che con confidenza $1-\alpha$

$$\mu \in \left(\bar{x}_n - \frac{s_n}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2,n-1} \; , \; \bar{x}_n + \frac{s_n}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2,n-1}\right).$$

Riassumendo

1. Gli intervalli di confidenza per μ (incognita) si basano sulla quantità pivotale:

$$\text{se } \sigma^2 = \sigma_0^2 \text{ nota} \Rightarrow \frac{(\overline{X}_n - \mu)\sqrt{n}}{\sigma_0} \sim \mathcal{N}(0,1);$$

$$\text{se } \sigma^2 \text{ incognita} \Rightarrow \frac{(\overline{X}_n - \mu)\sqrt{n}}{S_n} \sim t(n-1).$$

2. La misura dell'intervallo (bilatero) di livello $1-\alpha$ è:

$$\text{se } \sigma^2 = \sigma_0^2 \text{ nota} \Rightarrow 2z_{\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}};$$

$$\text{se } \sigma^2 \text{ incognita} \Rightarrow 2t_{\alpha/2,n-1}\frac{S_n}{\sqrt{n}}.$$

Si può dimostrare che

$$t_{\alpha/2,n-1}\mathbb{E}_{(\mu,\sigma^2)}(S_n) \geq z_{\alpha/2}\sigma$$

quindi, se la varianza è nota, anche se si potrebbero usare entrambi gli intervalli di confidenza, è preferibile scegliere il primo.

Analogamente, gli intervalli di confidenza unilateri si ottengono osservando che, comunque fissati μ e σ^2,

$$1-\alpha = \mathbb{P}_{(\mu,\sigma^2)}\left(\frac{(\overline{X}_n-\mu)\sqrt{n}}{S_n} < t_{\alpha,n-1}\right) = \mathbb{P}_{(\mu,\sigma^2)}\left(\mu > \overline{X}_n - \frac{S_n}{\sqrt{n}} t_{\alpha,n-1}\right).$$

Quindi

$$\left(\overline{X}_n - \frac{S_n}{\sqrt{n}}\, t_{\alpha,n-1}\,,\ +\infty\right)$$

è un intervallo di confidenza (non limitato superiormente) per μ di livello $1-\alpha$. Inoltre se osserviamo $\overline{X}_n = \bar{x}_n$ e $S_n = s_n$, diciamo che con confidenza $1-\alpha$

$$\mu \in (\bar{x}_n - \frac{s_n}{\sqrt{n}}\, t_{\alpha,n-1}\,,\ +\infty)$$

Analogamente per ogni μ e σ^2

$$1-\alpha = \mathbb{P}_{(\mu,\sigma^2)}\left(\frac{(\overline{X}_n-\mu)\sqrt{n}}{S_n} > -t_{\alpha,n-1}\right)$$
$$= \mathbb{P}_{(\mu,\sigma^2)}\left(\mu < \overline{X}_n + \frac{S_n}{\sqrt{n}} t_{\alpha,n-1}\right).$$

Quindi

$$\left(-\infty\ ,\ \overline{X}_n + \frac{S_n}{\sqrt{n}}\ t_{\alpha,n-1}\right)$$

è un intervallo di confidenza (non limitato inferiormente) per μ di livello $1-\alpha$. Inoltre, se osserviamo $\overline{X}_n = \bar{x}_n$ e $S_n = s_n$, diciamo che con confidenza $1-\alpha$.

$$\mu \in (-\infty\ ,\ \bar{x}_n + \frac{s_n}{\sqrt{n}}\ t_{\alpha,n-1}).$$

ESEMPIO: Intervalli di confidenza di livello $1-\alpha$ per la varianza di una popolazione gaussiana

Ricordiamo che:

se $\alpha \in (0,1)$ si definisce quantile (di coda destra) di ordine α di una distribuzione chi-quadrato con k gradi di libertà (in simboli $\chi^2(k)$) l'unico numero $\chi^2_{\alpha,k}$ tale che

$$\mathbb{P}(C_k > \chi^2_{\alpha,k}) = \alpha \quad (\text{o } \ \mathbb{P}(C_k \le \chi^2_{\alpha,k}) = 1-\alpha)$$

dove $C_k \sim \chi^2(k)$. Quindi

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\chi^2_{1-\alpha/2,k} < C_k < \chi^2_{\alpha/2,k}) &= \mathbb{P}(C_k < \chi^2_{\alpha/2,k}) - \mathbb{P}(C_k < \chi^2_{1-\alpha/2,k}) \\ &= (1-\alpha/2) - \alpha/2 = 1-\alpha.\end{aligned}$$

Sia $X_1, \ldots, X_n$ un campione di dimensione n estratto da una popolazione con distribuzione $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ con

1. μ e σ^2 incognite.

Possiamo costruire un intervallo di confidenza per σ^2 usando il fatto che

$$X_1, \ldots, X_n \text{ } i.i.d. \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

e quindi è una quantità pivotale funzione solo di σ^2.
Fissato $\alpha \in (0,1)$, per ogni μ e σ^2

$$\begin{aligned} 1-\alpha &= \mathbb{P}_{(\mu,\sigma^2)}\left(\chi^2_{1-\alpha/2,n-1} < \frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\alpha/2,n-1}\right) \\ &= \mathbb{P}_{(\mu,\sigma^2)}\left(\frac{(n-1)S_n^2}{\chi^2_{\alpha/2,n-1}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S_n^2}{\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}}\right). \end{aligned}$$

Quindi

$$\Big(\frac{(n-1)S_n^2}{\chi^2_{\alpha/2,n-1}}, \frac{(n-1)S_n^2}{\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}}\Big)$$

è un intervallo di confidenza di livello $1-\alpha$ per σ^2 e, se osserviamo il valore $S_n^2 = s_n^2$, otteniamo la stima intervallare per σ^2 di livello di confidenza $1-\alpha$:

$$\Big(\frac{(n-1)s_n^2}{\chi^2_{\alpha/2,n-1}}, \frac{(n-1)s_n^2}{\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}}\Big).$$

2. $\mu = \mu_0$ nota e σ^2 incognite.

Possiamo costruire un intervallo di confidenza usando il fatto che

$$X_1, \ldots, X_n \ i.i.d. \ \sim \mathcal{N}(\mu_0, \sigma^2) \ \Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$$

in quanto è la somma di n v.a. che sono quadrati di gaussiane standard indipendenti. Quindi è una quantità pivotale funzione solo di σ^2 (μ_0 è nota).
Se $\alpha \in (0,1)$ e indichiamo con $T_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2$

$$\begin{aligned} 1 - \alpha &= \mathbb{P}_{\sigma^2}\left(\chi^2_{1-\alpha/2,n} < \frac{nT_n^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\alpha/2,n}\right) \\ &= \mathbb{P}_{\sigma^2}\left(\frac{nT_n^2}{\chi^2_{\alpha/2,n}} < \sigma^2 < \frac{nT_n^2}{\chi^2_{1-\alpha/2,n}}\right) \end{aligned}$$

per ogni σ^2.

Quindi

$$\left(\frac{nT_n^2}{\chi^2_{\alpha/2,n}}, \frac{nT_n^2}{\chi^2_{1-\alpha/2,n}}\right)$$

e, se osserviamo il valore $T_n^2 = t_n^2$, otteniamo una stima intervallare bilatera per σ^2 di livello di confidenza $1-\alpha$:

$$\left(\frac{nt_n^2}{\chi^2_{\alpha/2,n}}, \frac{nt_n^2}{\chi^2_{1-\alpha/2,n}}\right).$$

Esercizio. Costruire intervalli di confidenza unilateri per la varianza di una popolazione gaussiana di livello $1-\alpha$.

ESEMPIO: Intervalli di confidenza di livello $1-\alpha$ per la media di una popolazione esponenziale

Sia $X_1, \ldots, X_n$ un campione di dimensione n estratto da una popolazione con distribuzione esponenziale di media θ incognita (in simboli $\mathcal{E}(1/\theta)$).
L'M.L.E di θ è $\overline{X}_n$. Inoltre,

$$X_1, \ldots, X_n \ i.i.d. \sim \mathcal{E}(1/\theta) \ \Rightarrow n\overline{X}_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \Gamma(n, 1/\theta)$$

quindi la sua f.g.m. è

$$m_{\sum_{i=1}^{n} X_i}(t) = \left(\frac{1/\theta}{1/\theta - t}\right)^n = \left(\frac{1}{1-\theta t}\right)^n.$$

Mostriamo che

$$Q_n = q(X_1, \ldots, X_n; \theta) = \frac{2}{\theta} \sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{2}{\theta} n\overline{X}_n \sim \chi^2(2n)$$

e quindi è una quantità pivotale.

Calcoliamo a questo scopo la f.g.m.: se $t < 1/2$

$$m_{Q_n}(t) = \mathbb{E}_\theta\left[e^{\frac{2t}{\theta}\sum_{i=1}^n X_i}\right] = m_{\sum_{i=1}^n X_i}\left(\frac{2t}{\theta}\right)$$
$$= \left(\frac{1}{1-\theta\frac{2t}{\theta}}\right)^n = \left(\frac{1}{1-2t}\right)^n = \left(\frac{1/2}{1/2-t}\right)^{2n/2},$$

che è la f.g.m. di una v.a. con densità $\chi^2(2n)$. Quindi

$$\frac{2}{\theta}n\overline{X}_n \sim \chi^2(2n)$$

è una quantità pivotale, cioè è una funzione del campione e del parametro θ e con distribuzione che non dipende da θ.

Si può usare per costruire un intervallo di confidenza per θ. Fissato $\alpha \in (0,1)$, per ogni $\theta > 0$

$$1-\alpha = \mathbb{P}_\theta\Big(\chi^2_{1-\alpha/2,2n} < \frac{2}{\theta}\sum_{i=1}^n X_i < \chi^2_{\alpha/2,2n}\Big)$$

$$= \mathbb{P}_\theta\Big(\frac{2\sum_{i=1}^n X_i}{\chi^2_{\alpha/2,2n}} < \theta < \frac{2\sum_{i=1}^n X_i}{\chi^2_{1-\alpha/2,2n}}\Big).$$

In conclusione

$$\Big(\frac{2\sum_{i=1}^n X_i}{\chi^2_{\alpha/2,2n}}, \frac{2\sum_{i=1}^n X_i}{\chi^2_{1-\alpha/2,2n}}\Big)$$

è un intervallo di confidenza bilatero per θ di livello $1-\alpha$.

Esercizio. Costruire un intervallo di confidenza di livello 0.95 per θ e determinare la stima intervallare corrispondente ad una osservazione della media campionaria $\overline{X}_n = 2.64$ per un campione di dimensione $n = 6$.
Costruire l'analogo intervallo di confidenza e relativa stima intervallare per il parametro dell'esponenziale $1/\theta$.