Università degli studi di Parma
Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione

Circuiti Sequenziali

Macchine Completamente Specificate

Introduzione

Riduzione del numero degli stati

Irragiungibilità

Indistinguibilità & Equivalenza

Introduzione

- Passi per la sintesi delle FSM completamente specificate:
  - Realizzazione del diagramma degli stati a partire dalle specifiche informali del problema
  - Costruzione della tabella degli stati
  - Riduzione del numero degli stati
    - Ottimizzazione
  - Costruzione della tabella delle transizioni
  - Assegnamento degli stati
    - Codice & codifica
  - Costruzione della tabella delle eccitazioni
    - Scelta degli elementi di memoria (tipo)
  - Sintesi delle reti combinatorie necessarie

Riduzione del numero degli stati

- Il numero minimo di elementi di memoria (flip-flop) necessari a memorizzare tutti gli stati dell'insieme **S** è:

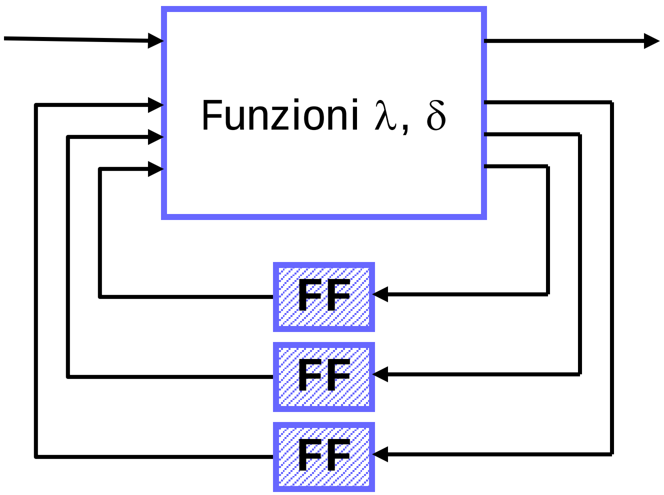
  $$N_{FF,min} = \lceil \log_2 |S| \rceil$$

- Nel modello di una FSM possono esistere stati ridondanti
- L'identificazione ed eliminazione di tali stati comporta
  - Reti combinatorie meno costose
    - Aumento dei gradi di libertà nella sintesi combinatoria
      - Condizioni di indifferenza dovute all'utilizzo parziale delle configurazioni che possono codificare lo stato
    - Riduzione del numero di bit necessari per codificare gli stati
      - Minore numero di ingressi e di uscite alle reti combinatorie
  - Numero minore di elementi di memoria

Riduzione del numero degli stati

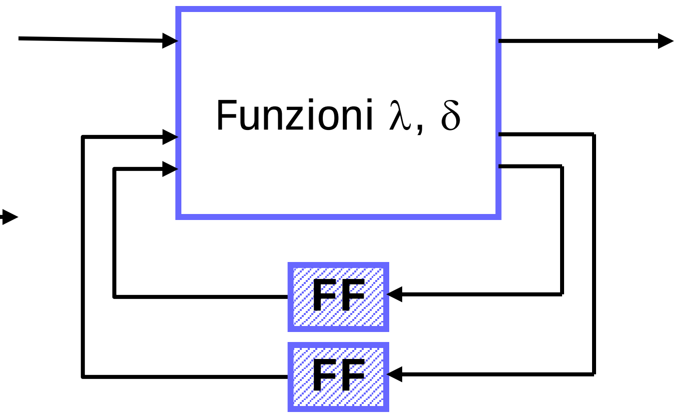
Esempio

8 stati
1 ingresso
1 uscita



Eliminazione di
5 stati ridondanti

3 stati
1 ingresso
1 uscita



	0	1
a	b/0	c/1
b	a/0	c/0
c	b/0	a/0
-	-/-	-/-

Sfrutto le nuove condizioni
di indifferenza per ridurre
le due reti combinatorie

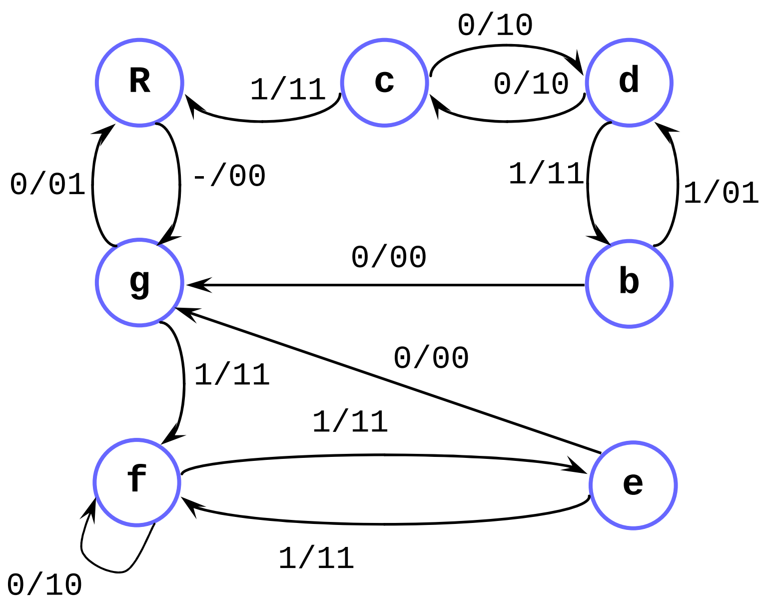
Riduzione del numero degli stati

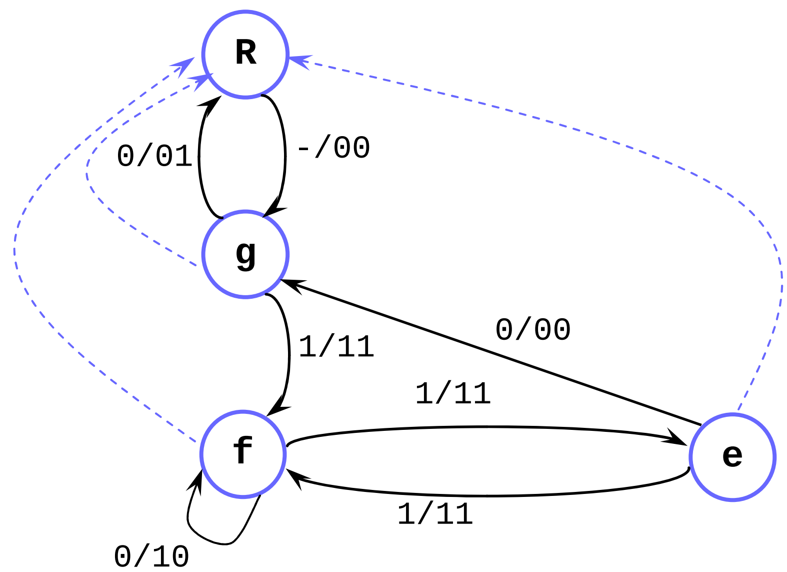
- Lo scopo della riduzione del numero degli stati consiste nella individuazione della macchina minima equivalente
- La macchina minima equivalente è quella macchina:
  - Funzionalmente equivalente alla macchina data
  - Avente il minimo numero di stati
- Il problema della riduzione del numero di stati è distinto in due passi:
  - Eliminazione degli stati non raggiungibili dallo stato iniziale
  - Identificazione degli stati:
    - Equivalenti: Macchine completamente specificate
    - Compatibili: Macchine non completamente specificate

Riduzione del numero degli stati

- Eliminazione degli stati irraggiungibili
  - Uno stato **S** non è raggiungibile se non esiste alcuna sequenza di transizioni che porti dallo stato iniziale ad **S**

Macchina iniziale	Macchina ridotta





Transizioni di RESET

Riduzione del numero degli stati

- Eliminazione degli stati irraggiungibili
  - Mediante la tabella degli stati
    - Partendo dallo stato di reset si indicano gli stati a cui rimanda
    - Iterativamente, si svolge la stessa operazione per tutti gli stati successivi, non inicando quelli che sono già considerati
    - Quando non è più possibile identificare nuovi stati, il risultato è l'insieme degli stati ragginugibili

	0	**1**
R	g/00	g/00
b	g/00	d/01
c	-/--	R/11
d	c/10	d/11
e	g/00	f/11
f	f/10	e/10
g	R/01	f/11

Analisi di raggiungibilità

1: {R{g,g}} = {R{g}}
2: {R{g{R,f}}} = {R{g{f}}}
3: {R{g{f{f,e}}}} = {R{g{f{e}}}}
4: {R{g{f{e{g,f}}}}} = {R{g{f{e}}}}

Stati raggiungibili: **{R,g,f,e}**

Riduzione del numero degli stati

- Si consideri una macchina completamente specificata
- Siano:
  - $\mathbf{I_a}$ generica sequenza di ingresso $\mathbf{i_j}$, ..., $\mathbf{i_k}$
  - $\mathbf{U_a}$ sequenza d'uscita associata a $\mathbf{I_a}$ ottenuta tramite λ
  - $\mathbf{s_i}$, $\mathbf{s_j}$ due generici stati
- Gli stati $\mathbf{s_i}$ e $\mathbf{s_j}$ appartenenti ad $\mathbf{S}$ sono indistinguibili se:

$$\mathbf{U}_{\alpha,\mathbf{i}} = \lambda(\mathbf{s_i}, \mathbf{I}_\alpha) = \lambda(\mathbf{s_j}, \mathbf{I}_\alpha) = \mathbf{U}_{\alpha,\mathbf{j}} \quad \forall \mathbf{I}_\alpha$$

- L'indistinguibilità tra $\mathbf{s_i}$ e $\mathbf{s_j}$ si indica con: $\mathbf{s_i} \sim \mathbf{s_j}$

Riduzione del numero degli stati

- La relazione di indistinguibilità gode di tre proprietà:
  - Riflessiva: $s_i \sim s_i$
  - Simmetrica: $s_i \sim s_j \leftrightarrow s_j \sim s_i$
  - Transitiva: $s_i \sim s_j \wedge s_j \sim s_k \rightarrow s_i \sim s_k$
- L'indistinguibilità è una relazione d'equivalenza
  - Due stati indistinguibili sono equivalenti
  - Possono essere sostituiti con un solo stato
- In generale
  - Un gruppo di stati tra loro equivalenti può essere raggruppato in unica classe
- L'insieme delle classi identificate determina l'insieme degli stati della macchina minima equivalente

Riduzione del numero degli stati

- Formalmente, una relazione di equivalenza induce sull'insieme degli stati una partizione $\mathbf{P_e}$
  - L'insieme degli stati $\mathbf{S}$ si dice partizionato nelle $\mathbf{m}$ classi di equivalenza $\mathbf{C_1}, \ldots, \mathbf{C_m}$ se:

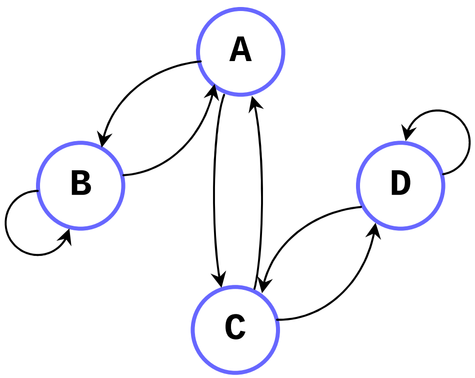
$$\mathbf{C_1} \cup \mathbf{C_2} \cup \ldots \cup \mathbf{C_m} = \mathbf{S}$$

$$\mathbf{C_i} \cap \mathbf{C_j} = \emptyset \quad \forall \mathbf{i,j}: \mathbf{i} \neq \mathbf{j}$$

- Il nuovo insieme degli stati è formato dalle classi di equivalenza della partizione

Riduzione del numero degli stati

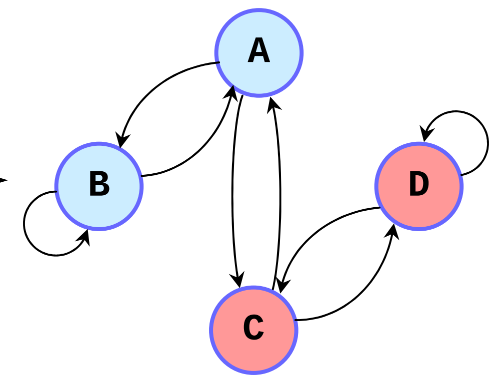
Esempio



Relazioni di equivalenza

$A \sim B$

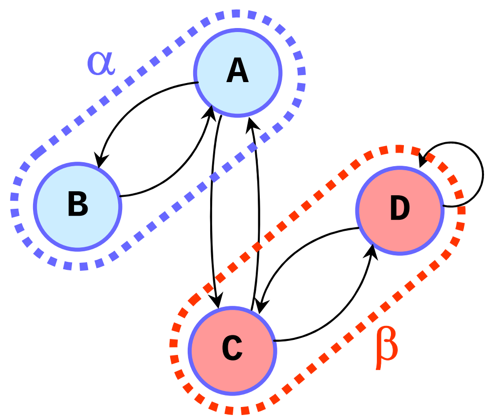
$C \sim D$

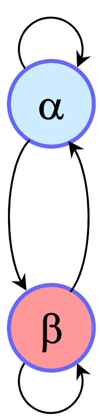


Classi di equivalenza

α = {A, B}

β = {C, D}





Riduzione del numero degli stati

- La definizione di indistinguibilità è difficilmente applicabile in modo diretto
  - Richiederebbe di considerare tutte le sequenze di ingresso che, a priori, possono essere in numero infinito
- Si ricorre a una regola ricorsiva introdotta da Paull-Unger
  - Due stati $\mathbf{s_i}$ e $\mathbf{s_j}$ appartenenti ad $\mathbf{S}$ sono indistinguibili se e solo se per ogni simbolo di ingresso $\mathbf{i_a}$:

$$\lambda(\mathbf{s_i},\mathbf{i_a}) = \lambda(\mathbf{s_j},\mathbf{i_a})$$

  - Ovvero, le uscite sono uguali per ogni simbolo di ingresso

$$\delta(\mathbf{s_i},\mathbf{i_a}) \sim \delta(\mathbf{s_j},\mathbf{i_a})$$

  - Ovvero, gli stati prossimi sono indistinguibili

Riduzione del numero degli stati

- Poiché gli insiemi **S** e **I** hanno cardinalità finita, dopo un numero finito di passi si ricadrà in una delle 2 condizioni:
- $s_i \not\sim s_j$
  - Se i simboli d'uscita sono diversi
  - Se gli stati prossimi sono già stati verificati come distinguibili
- $s_i \sim s_j$
  - Se i simboli di uscita sono uguali
  - Se gli stati prossimi sono già stati verificati come indistinguibili

Riduzione del numero degli stati

- Le relazioni di indistinguibilità o equivalenze possono essere evidenziate mediante la Tabella delle Implicazioni
- Tale tabella ha le seguenti caratteristiche:
  - Mette in relazione ogni coppia di stati
  - È triangolare (proprietà simmetrica)
  - È priva della diagonale principale (proprietà riflessiva)
- Esempio:

S1			
S2			
S3			
	S0	**S1**	**S2**

Riduzione del numero degli stati

- Ogni elemento della tabella può contenere
  - Il simbolo di non equivalenza
    - Gli stati corrispondenti non sono equivalenti
  - Il simbolo di equivalenza
    - Gli stati corrispondenti sono equivalenti
  - Le coppie di stati a cui si rimanda la verifica
    - Se non è possibile pronunciarsi sulla equivalenza degli stati corrispondenti
- Sulla tabella così ottenuta si procede ad una analisi di tutte le coppie di stati

Riduzione del numero degli stati

Esempio

S1	**x**		
S2	**x**	**~**	
S3	**S1,S2**	**X**	**X**
	S0	**S1**	**S2**

S1 ≁ S0
Gli stati **S1** ed **S0** non sono equivalenti

S1 ~ S2
Gli stati **S1** ed **S2** sono equivalenti

L'equivalenza tra **S3** ed **S0** dipende dall'equivalnza tra **S1** ed **S2**

Riduzione del numero degli stati

- Analisi delle coppie di stati
  - Una volta costruita la tabella delle implicazioni si procede ad una seconda fase di analisi
  - Tale analisi deve essere effettuata per ogni coppia di stati
  - Segue il criterio di equivalenza secondo la formulazione ricorsiva di Paull-Unger
- Tale analisi porta alla definizione dell'insieme minimo di stati per la macchina originale

Riduzione del numero degli stati

- Regole di analisi
  - Una coppia marcata come equivalente o come non equivalente non richiede ulteriori verifiche
  - Se si trova un rimando ad un'altra coppia
    - Se gli stati cui si rimanda sono equivalenti anche gli stati della coppia in esame sono equivalenti
    - Se gli stati cui si rimanda non sono equivalenti anche gli stati della coppia in esame non sono equivalenti
    - Se gli stati cui si rimanda dipendono da una ulteriore coppia di stati si ripete il procedimento in modo iterativo fino a quando ci si riconduce ad uno dei due casi precedenti
  - Il procedimento termina quando non sono possibili ulteriori riduzioni

Esempio 1

Tabella degli stati

	0	1
a	h/0	g/1
b	c/0	e/0
c	b/0	a/0
d	e/1	c/0
e	h/0	d/1
f	e/1	h/0
g	a/1	c/0
h	d/0	f/1

Tabella delle implicazioni

b	x						
c	x	ae					
d	x	x	x				
e	dg	x	x	x			
f	x	x	x	ch	x		
g	x	x	x	ae	x	ae ch	
h	dh fg	x	x	x	dh df	x	x
	a	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**g**

Esempio 1

Tabella delle implicazioni

	a	b	c	d	e	f	g
b	x						
c	x	ae					
d	x	x	x				
e	dg	x	x	x			
f	x	x	x	ch	x		
g	x	x	x	ae	x	ae ch	
h	dh fg	x	x	x	dh df	x	x

1: Le coppie contrassegnate dal simbolo di equivalenza o di non equivalenza non necessitano ulteriore analisi

2: Si procede all'analisi delle coppie rimanenti

Esempio 1

Tabella delle implicazioni

b	x						
c	x	ae					
d	x	x	x				
e	dg	x	x	x			
f	x	x	x	ch	x		
g	x	x	x	ae	x	ae ch	
h	dh fg	x	x	x	dh df	x	x
	a	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**g**

1: La coppia **(a,e)** rimanda alla coppia **(d,g)**

2: La coppia **(d,g)** rimanda alla coppia **(a,e)**

3: Il vincolo è circolare

4: Gli stati **a** ed **e** sono equivalenti
Gli stati **d** e **g** sono equivalenti

5: Si sosticuiscono i rimandi con simboli di equivalenza

Esempio 1

Tabella delle implicazioni

b	x						
c	x	ae					
d	x	x	x				
e	~	x	x	x			
f	x	x	x	ch	x		
g	x	x	x	~	x	ae ch	
h	dh fg	x	x	x	dh df	x	x
	a	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**g**

1: La coppia **`(a,h)`** rimanda alle coppie **`(d,h)`** e **`(f,g)`**

2: Gli stati **d** ed **h** non sono equivalenti

3: Di conseguenza, gli stati **a** ed **h** non sono equivalenti

4: Si sosticuisce il rimando con il simbolo di non equivalenza

Esempio 1

Tabella delle implicazioni

b	x						
c	x	ae					
d	x	x	x				
e	~	x	x	x			
f	x	x	x	ch	x		
g	x	x	x	~	x	ae ch	
h	x	x	x	x	dh df	x	x
	a	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**g**

1: La coppia **`(b,c)`** rimanda alla coppia **`(a,e)`**

2: Gli stati **a** ed **e** sono equivalenti

3: Di conseguenza, gli stati **b** e **c** sono equivalenti

4: Si sosticuisce il rimando con il simbolo di equivalenza

Esempio 1

Tabella delle implicazioni

	a	b	c	d	e	f	g
b	x						
c	x	~					
d	x	x	x				
e	~	x	x	x			
f	x	x	x	ch	x		
g	x	x	x	~	x	ae ch	
h	x	x	x	x	dh df	x	x

1: La coppia **(d,f)** rimanda alla coppia **(c,h)**

2: Gli stati **c** ed **h** non sono equivalenti

3: Di conseguenza, gli stati **d** ed **f** non sono equivalenti

4: Si sosticuisce il rimando con il simbolo di non equivalenza

Esempio 1

Tabella delle implicazioni

	a	b	c	d	e	f	g
b	x						
c	x	~					
d	x	x	x				
e	~	x	x	x			
f	x	x	x	x	x		
g	x	x	x	~	x	ae ch	
h	x	x	x	x	dh df	x	x

1: La coppia **(e,h)** rimanda alle coppie **(d,h)** e **(d,f)**

2: Gli stati **d** ed **h** non sono equivalenti

3: Di conseguenza, gli stati **e** ed **h** non sono equivalenti

4: Si sosticuisce il rimando con il simbolo di non equivalenza

Esempio 1

Tabella delle implicazioni

b	x						
c	x	~					
d	x	x	x				
e	~	x	x	x			
f	x	x	x	x	x		
g	x	x	x	~	x	ae ch	
h	x	x	x	x	x	x	x
	a	b	c	d	e	f	g

1: La coppia **`(f,g)`** rimanda alle coppie **`(a,e)`** e **`(c,h)`**

2: Gli stati **c** ed **h** non sono equivalenti

3: Di conseguenza, gli stati **`f`** e **`g`** non sono equivalenti

4: Si sosticuisce il rimando con il simbolo di non equivalenza

Esempio 1

Tabella delle implicazioni

b	x						
c	x	~					
d	x	x	x				
e	~	x	x	x			
f	x	x	x	x	x		
g	x	x	x	~	x	x	
h	x	x	x	x	x	x	x
	a	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**g**

1: Tutti i rimadi sono stati risolti ed il procedimento termina

2: La nuova tabella evidenzia tutte le relazioni di equivalenza fra gli stati della macchina originale

Riduzione del numero degli stati

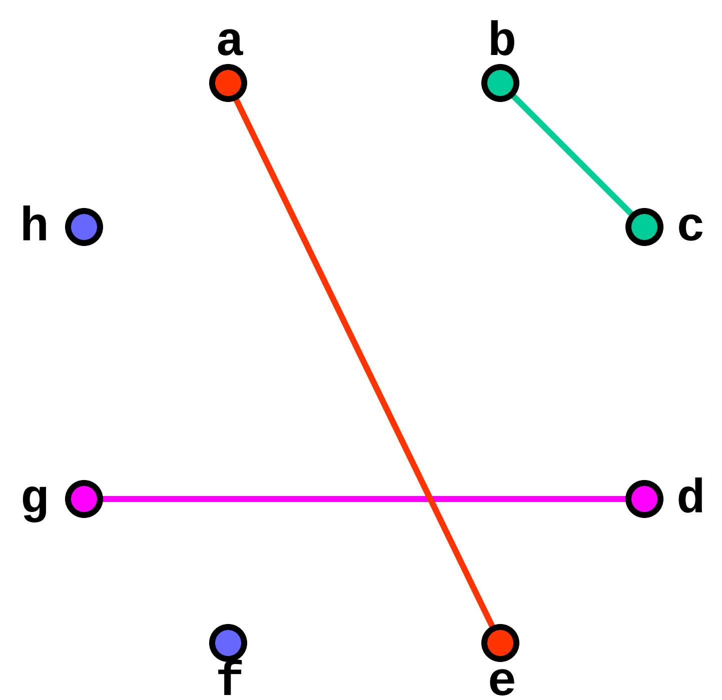
- Le relazioni d'equivalenza sono rappresentabili in forma grafica mediante un grafo
  - Vertice
    - Rappresenta uno stato
  - Arco
    - Due vertici sono uniti da un lato se e solo se sono equivalenti
- Le classi d'equivalenza
  - Sono i poligoni completi del grafo
  - Sono detti anche grafi completi o clique

Esempio 1 (continua)

Tabella delle implicazioni

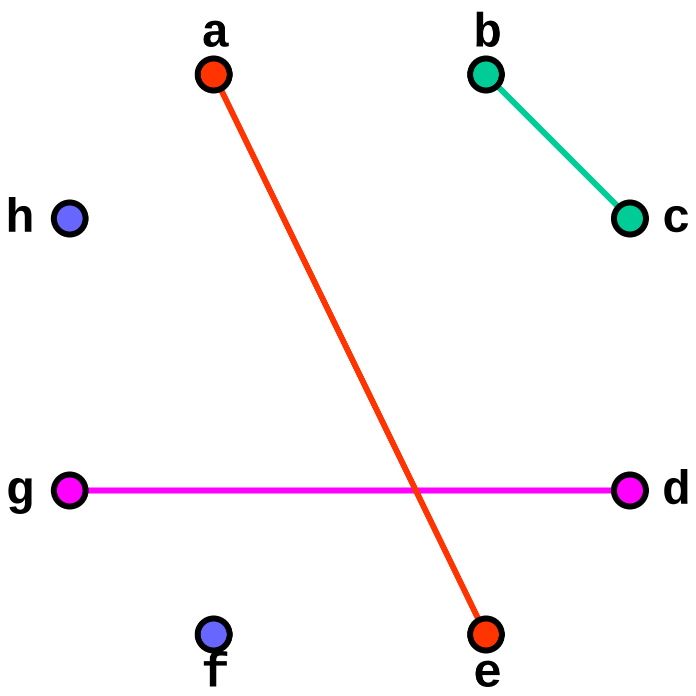
b	x						
c	x	~					
d	x	x	x				
e	~	x	x	x			
f	x	x	x	x	x		
g	x	x	x	~	x	x	
h	x	x	x	x	x	x	x
	a	b	c	d	e	f	g

Grafo di equivalenza



Esempio 1

Grafo di equivalenza



Classi di equivalenza (cliques)

α = {a, e}

β = {b, c}

γ = {d, g}

Nuovo insieme degli stati

$S_{min} = \{\alpha, \beta, \gamma, f, h\}$

Esempio 1

Nuovo insieme degli stati

$$S_{min} = \{\alpha, \beta, \gamma, f, h\}$$

Tabella degli stati originale

	0	1
a	h/0	g/1
b	c/0	e/0
c	b/0	a/0
d	e/1	c/0
e	h/0	d/1
f	e/1	h/0
g	a/1	c/0
h	d/0	f/1

{a, e} $\rightarrow \alpha$

{b, c} $\rightarrow \beta$

{d, g} $\rightarrow \gamma$

Tabella degli stati ridotta

	0	1
α	h/0	γ/1
β	β/0	α/0
γ	α/1	β/0
f	α/1	h/0
h	γ/0	f/1

Riduzione del numero degli stati

- La macchina a stati finiti ottenuta mediante la minimizzazione degli stati gode di alcune proprietà
- Equivalente alla precedente
  - Per costruzione
- Minima
  - Due stati indistinguibili appartengono ad una sola classe della partizione
  - Due stati distinguibili appartengono a classi distinte della partizione
- Unica
  - La partizione d'equivalenza è unica

Esempio 2

Diagramma degli stati

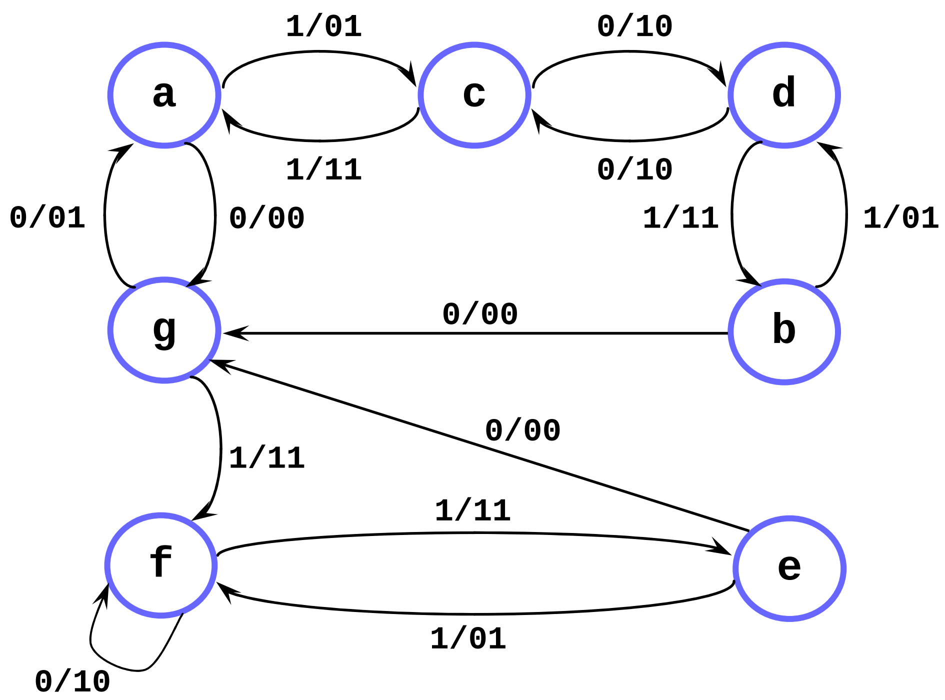


Tabella degli stati

	0	1
a	g/00	c/01
b	g/00	d/01
c	d/10	a/01
d	c/10	b/01
e	g/00	f/01
f	f/10	e/11
g	a/01	f/11

Esempio 2:

Tabella degli stati

	0	1
a	g/00	c/01
b	g/00	d/01
c	d/10	a/01
d	c/10	b/01
e	g/00	f/01
f	f/10	e/01
g	a/01	f/11

Tabella delle implicazioni

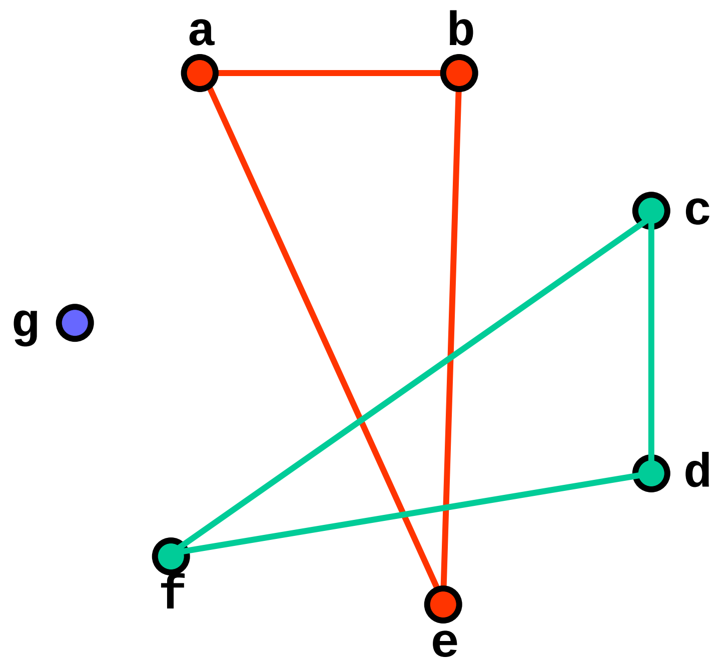
b	cd					
c	x	x				
d	x	x	ab			
e	cf	fd	x	x		
f	x	x	ae df	cf be	x	
g	x	x	x	x	x	x
	a	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**

Esempio 2

Tabella delle implicazioni

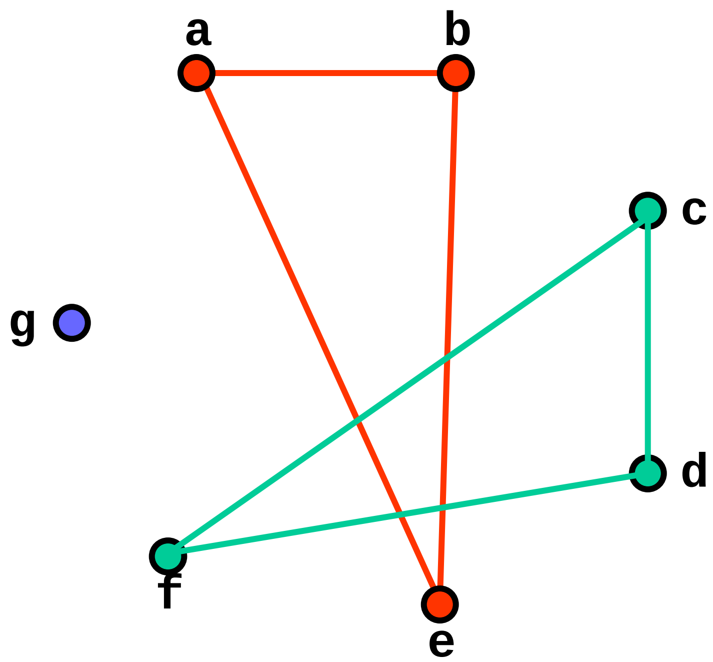
b	~					
c	x	x				
d	x	x	~			
e	~	~	x	x		
f	x	x	~	~	x	
g	x	x	x	x	x	x
	a	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**

Grafo di equivalenza



Esempio 2

Grafo di equivalenza



Classi di equivalenza (cliques)

α = {a, b, e}

β = {c, d, f}

Nuovo insieme degli stati

$S_{min} = \{\alpha, \beta, g\}$

Esempio 2

Nuovo insieme degli stati

$S_{min} = \{\alpha, \beta, g\}$

Tabella degli stati originale

	0	1
a	g/00	c/01
b	g/00	d/01
c	d/10	a/01
d	c/10	b/01
e	g/00	f/01
f	f/10	e/11
g	a/01	f/11

$\{a, b, e\} \rightarrow \alpha$

$\{c, d, f\} \rightarrow \beta$

Tabella degli stati ridotta

	0	1
α	g/00	β/01
β	β/10	α/01
g	α/01	β/11

Esempio 3

- Sintetizzare una FSM di Moore secondo le specifiche:
  - La FSM ha due ingressi A e B
  - La FSM ha una uscita Z, che assume valore iniziale 1
  - L'uscita assume il valore di B quando A=1
  - Tale valore è mantenuto fino a che non si ripresenta la condizione specificata
  - Il ruolo assunto da A e B viene scambiato quando si presenta la condizione A = B = Z = 1
- Il primo passo consiste nel disegnare il diagramma delle transizioni e nel costruire la corrispondente tabella degli stati

Esempio 3

Diagramma degli stati

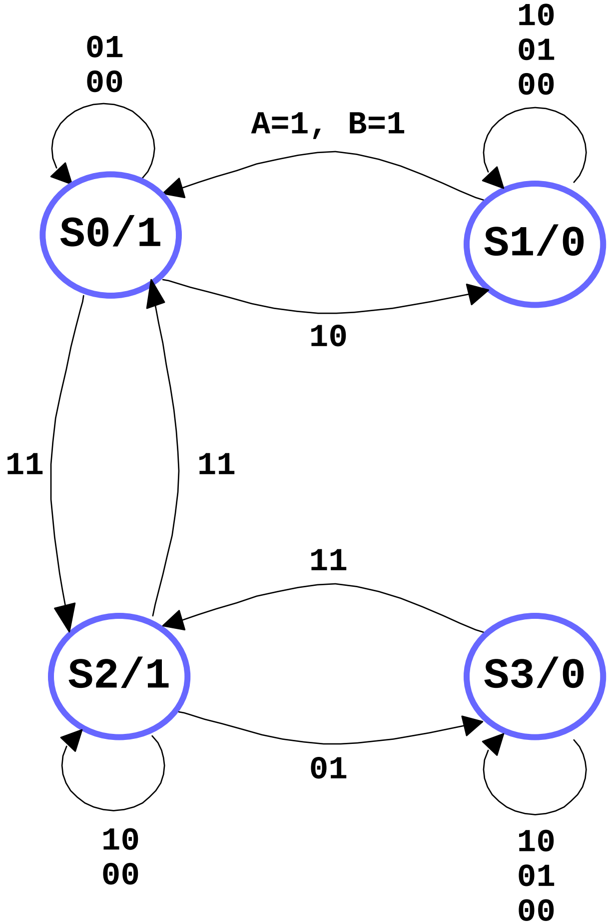


Tabella degli stati

	00	01	11	10	Z
S0	S0	S0	S2	S1	1
S1	S1	S1	S0	S1	0
S2	S2	S3	S0	S2	1
S3	S3	S3	S2	S3	0

Esempio 3

Tabella degli stati

	00	01	11	10	Z
S0	S0	S0	S2	S1	1
S1	S1	S1	S0	S1	0
S2	S2	S3	S0	S2	1
S3	S3	S3	S2	S3	0

Tabella delle implicazioni

S1	x		
S2	S0,S3 S1,S2	x	
S3	x	S0,S2	x
	S0	**S1**	**S2**

S1	x		
S2	x	x	
S3	x	x	x
	S0	**S1**	**S2**

Esempio 4

Tabella degli stati

	00	01	11	10
S1	S2/0	S8/1	S6/0	S3/0
S2	S7/0	S1/1	S5/1	S8/1
S3	S4/0	S8/1	S7/0	S5/0
S4	S6/0	S3/1	S1/1	S8/1
S5	S2/0	S8/1	S7/0	S1/0
S6	S1/1	S6/0	S3/1	S7/1
S7	S3/1	S6/0	S5/1	S7/1
S8	S1/1	S2/1	S8/1	S7/1

Tabella delle implicazioni iniziale

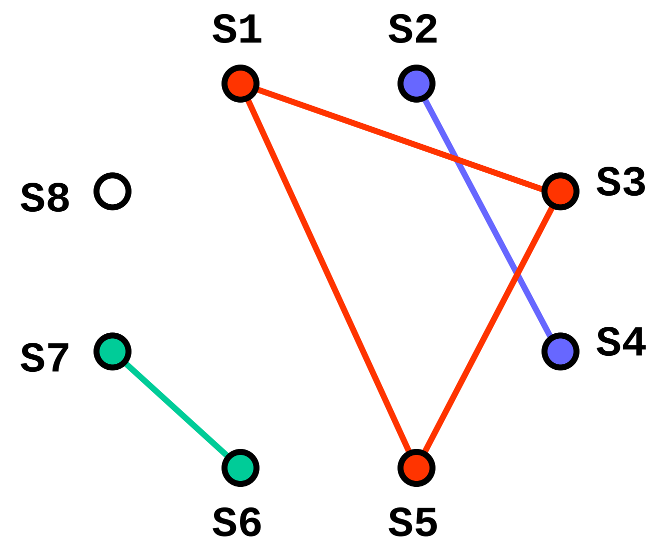
	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7
S2	x						
S3	S2,S4 S6,S7 S3,S5	x					
S4	x	S5,S1 S6,S7 S3,S1	x				
S5	S6,S7 S3,S1	x	S4,S2 S5,S1	x			
S6	x	x	x	x	x		
S7	x	x	x	x	x	S3,S1 S3,S5	
S8	x	x	x	x	x	x	x

Esempio 4

Tabella delle implicazioni iniziale

	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7
S2	x						
S3	~	x					
S4	x	~	x				
S5	~	x	~	x			
S6	x	x	x	x	x		
S7	x	x	x	x	x	~	
S8	x	x	x	x	x	x	x

Grafo di equivalenza



Classi di equivalenza (cliques)

a = {S1, S3, S5}

b = {S2, S4}

c = {S6, S7}

Esempio 4

Classi di equivalenza (cliques)

a = {S1, S3, S5}

b = {S2, S4}

c = {S6, S7}

Insieme degli stati ridotto

S_{min} = {a, b, c, S8}

Tabella degli stati ridotta

	00	01	11	10
a	b/0	S8/1	c/0	a/0
b	c/0	a/1	a/1	S8/1
c	a/1	c/0	a/1	c/1
S8	a/1	b/1	S8/1	c/1

Riduzione del numero degli stati

- Osservazione:
  - Non è obbligatorio utilizzare i blocchi della partizione per ottenere una macchina equivalente a quella di partenza a patto di raggruppare stati che appartengono a sotto-grafi completi
    - Non è ammissibile riunire in una stessa classe di equivalenza stati che equivalenti non sono
  - È la cifra di merito (costo) che richiede di utilizzare il minor numero di stati possibile e, come conseguenza, i blocchi della partizione
    - I grafi completi