



Elettrotecnica

Parte 8: Circuiti in regime sinusoidale

Prof . Ing. Giambattista Gruosso, Ph. D.

Dipartimento di Elettronica, Informazione e Bioingegneria

Indice

- **Circuiti in regime sinusoidale**
- **Richiami sui numeri complessi**
- **Fasori e soluzione di esercizi**
- **Potenza in regime sinusoidale**

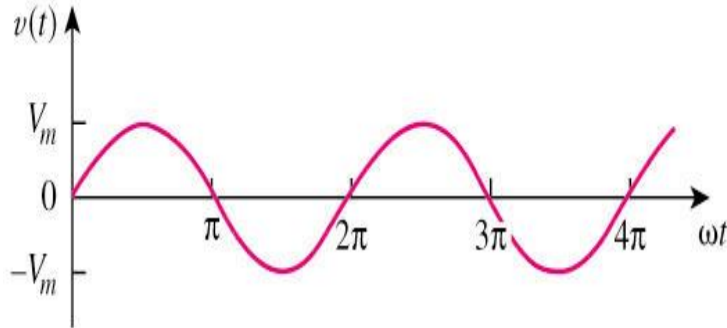
POLITECNICO DI MILANO



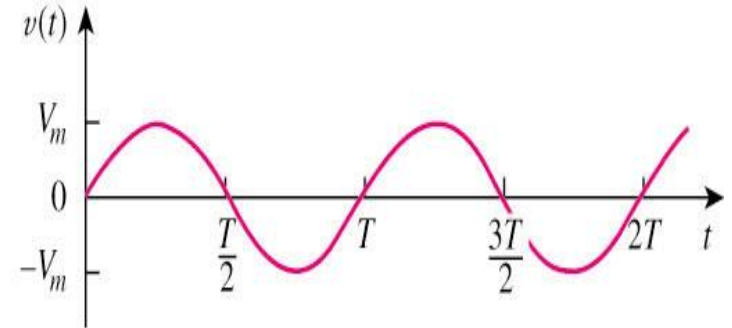
Prof. G. Gruosso

Definizioni sulle sinusoidi

$$v(t) = V_m \sin(\omega t + \phi)$$



(a)

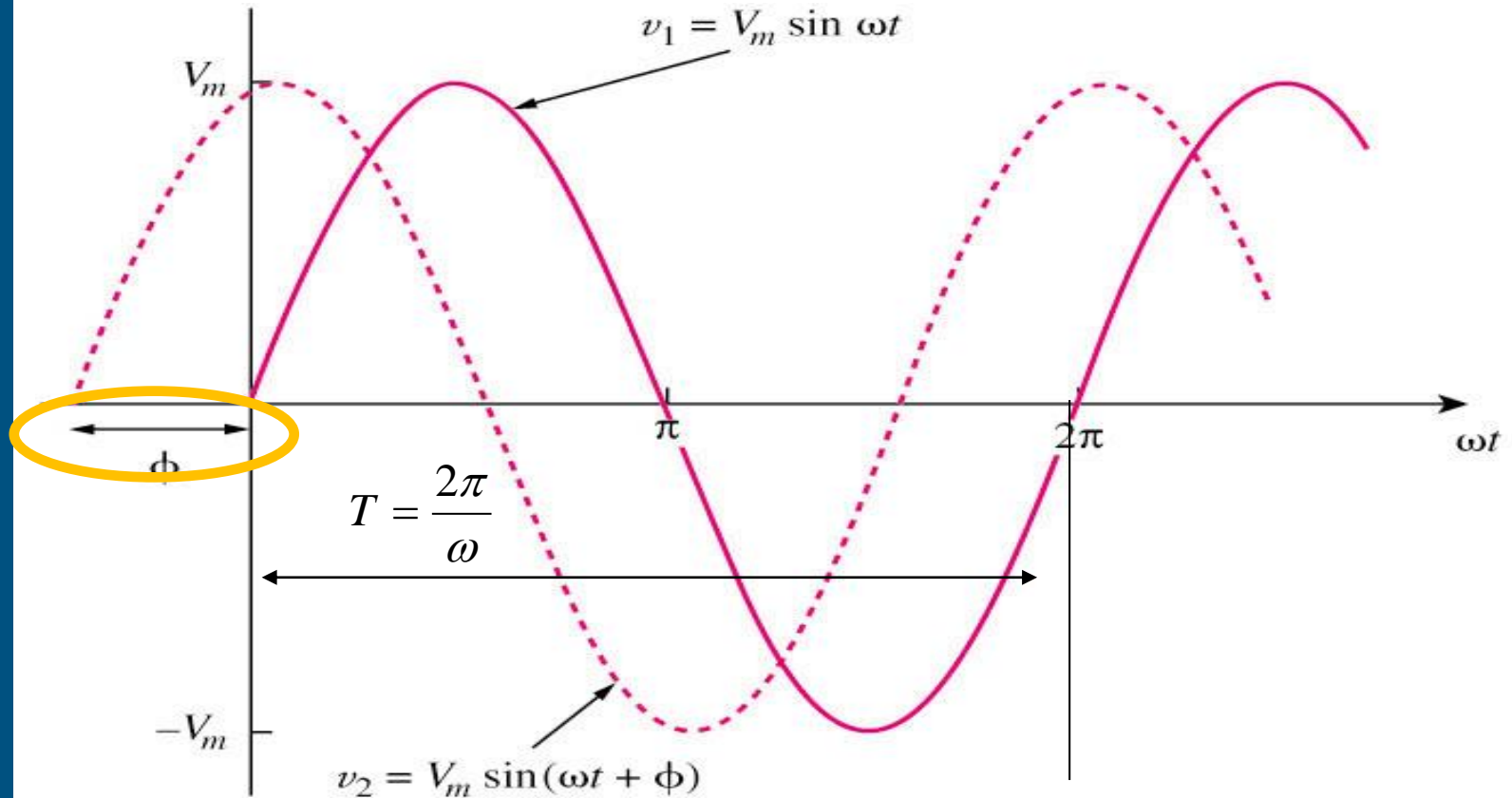


(b)

dove

V_m = Ampiezza delle sinusoidi
 ω = pulsazione (rad/s) = $2\pi f$
 Φ = fase della sinusoidi
 T = periodo = $1/f$
 f = frequenza [Hz]

Definizioni sulle sinusoidi: significato della fase



$$f = \frac{1}{T} \text{ Hz} \quad \omega = 2\pi f$$

Definizione di valore medio e valore efficace

POLITECNICO DI MILANO



$$A_{av} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} a(t) dt'$$

valore medio di una grandezza periodica

Prof. G. Gruosso

$$A = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} a(t)^2 dt'}$$

valore efficace di una grandezza periodica

Definizione di valore medio e valore efficace

POLITECNICO DI MILANO



$$V_{av} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \hat{V} \sin(\omega t + \phi) dt' = \frac{1}{T} \hat{V} (-\cos(t_0 + T) + \cos(t_0)) = 0$$

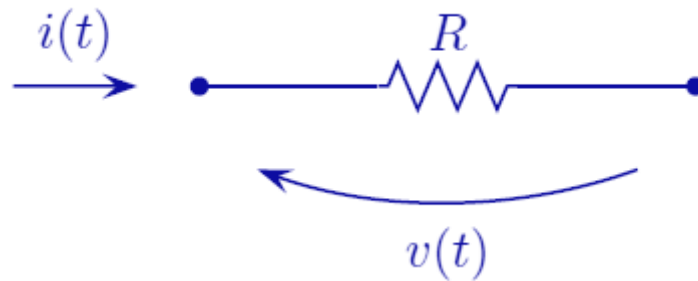
valore medio di una Sinuoide

$$\begin{aligned} V &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \left(\hat{V} \sin(\omega t + \phi) \right)^2 dt'} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \left(\frac{\hat{V}^2}{2} \right) (1 - \cos(2\omega t + \phi)) dt'} = \left(\frac{\hat{V}}{\sqrt{2}} \right) \end{aligned}$$

valore efficace di una sinusoide

Prof. G. Gruosso

Significato fisico del valore efficace



$$i(t) = \hat{I} \sin(\omega t + \phi)$$

$$P = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} p(\tau) d\tau = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} R i(\tau)^2 d\tau$$

$$\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} R \left(\hat{I} \sin(\omega \tau + \phi) \right)^2 d\tau = RI^2$$

Richiami numeri complessi

$$\bar{z} = x + jy \quad j = \sqrt{-1}$$

$$\bar{z} = |\bar{z}|e^{j\phi}$$

$$|\bar{z}| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \phi = \text{atan}(y/x)$$

Richiami numeri complessi: passaggio di rappresentazione

POLITECNICO DI MILANO



$$x = |\bar{z}| \cos \phi \qquad y = |\bar{z}| \sin \phi$$

Polare a Cartesiana

$$|\bar{z}| = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \phi = \pm \operatorname{atan}\left(\frac{y}{x}\right)$$

Cartesiana a Polare

Prof. G. Gruosso

Richiami numeri complessi: operazioni

1.Somma

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$$

2.Sottrazione

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2)$$

3.Moltiplicazione

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \angle \phi_1 + \phi_2$$

4.Divisione

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \angle \phi_1 - \phi_2$$

5.Inverso

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r} \angle -\phi$$

6.Radice quadrata

$$\sqrt{z} = \sqrt{r} \angle \phi/2$$

7.Coniugato

$$z^* = x - jy = r \angle -\phi = re^{-j\phi}$$

8.Identità di eulero

$$e^{\pm j\phi} = \cos \phi \pm j \sin \phi$$



Equivalenza Sinusoidi numeri complessi

$$\bar{z}(t) = A \cos(\omega t + \varphi) + jA \sin(\omega t + \varphi)$$

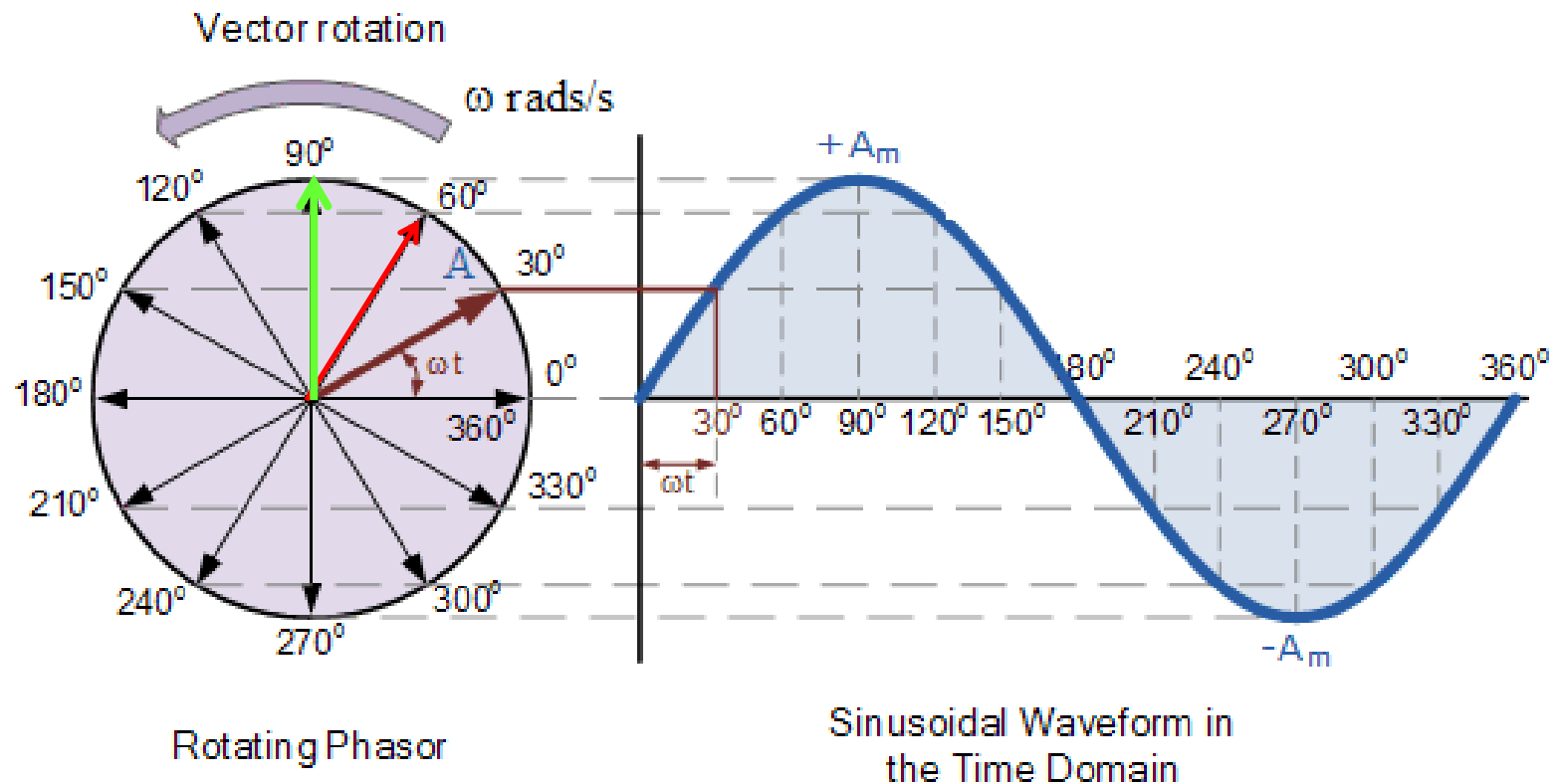
$$a(t) = A \cos(\omega t + \varphi) = \operatorname{Re}(\bar{A})$$

Equivalenza Sinusoidi numeri complessi

POLITECNICO DI MILANO



Prof. G. Grusso



$$A = A_m \cos(\omega t + \varphi)$$

Equivalenza Sinusoidi numeri complessi

POLITECNICO DI MILANO



Prof. G. Grusso

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi) = \text{Re}(\bar{z}(t))$$

$$\bar{z}(t) = V_m \cos(\omega t + \phi) + jV_m \sin(\omega t + \phi)$$

$$\bar{z}(t) = V_m e^{j(\omega t + \phi)} = V_m e^{j(\phi)} e^{j(\omega t)}$$

$$\bar{V} = V_m e^{j\phi}$$

Operazioni con i fasori

POLITECNICO DI MILANO



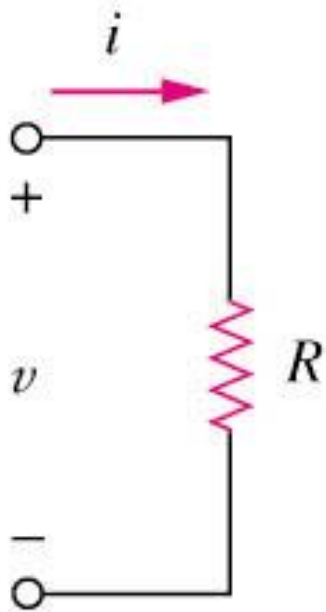
Prof. G. Gruosso

$$v(t) \longleftrightarrow \bar{V} = V e^{j\varphi}$$

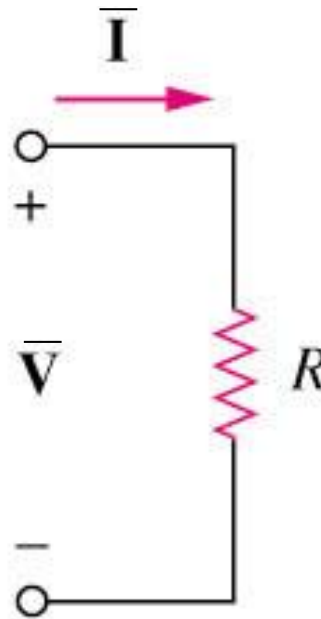
$$\frac{dv}{dt} \longleftrightarrow j\omega \bar{V}$$

$$\int v dt \longleftrightarrow \frac{\bar{V}}{j\omega}$$

Equazioni costitutive



$$v = Ri$$

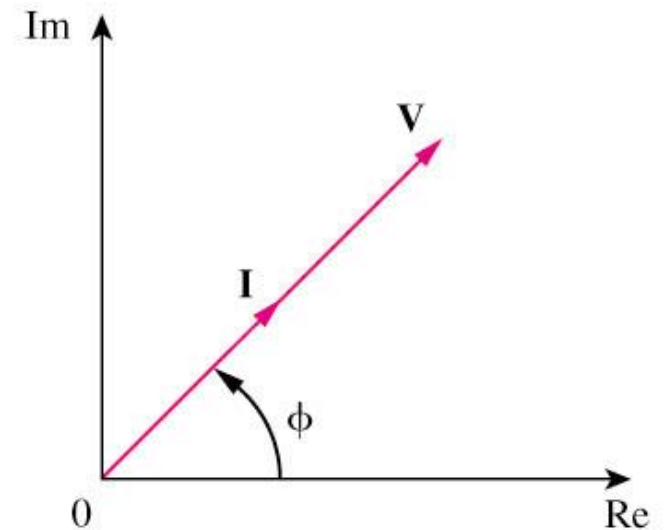


$$\bar{V} = R\bar{I}$$

$$i = I \cos(\omega t)$$

$$v = Ri = RI \sin(\omega t)$$

$$v = RI \cos(\omega t)$$

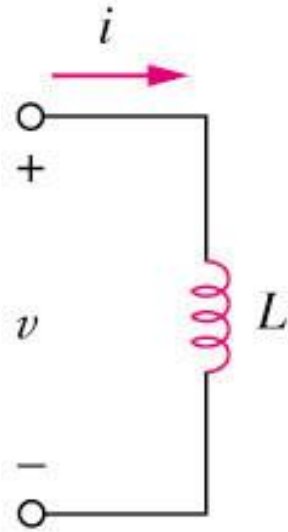


Equazioni costitutive

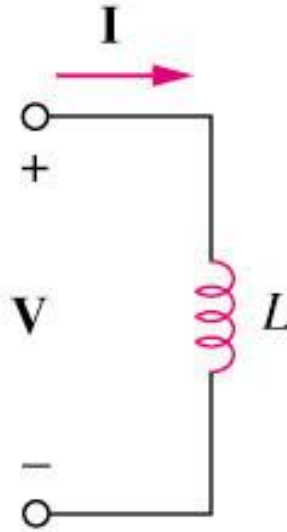
POLITECNICO DI MILANO



Prof. G. Grusso



$$v = L \frac{di}{dt}$$

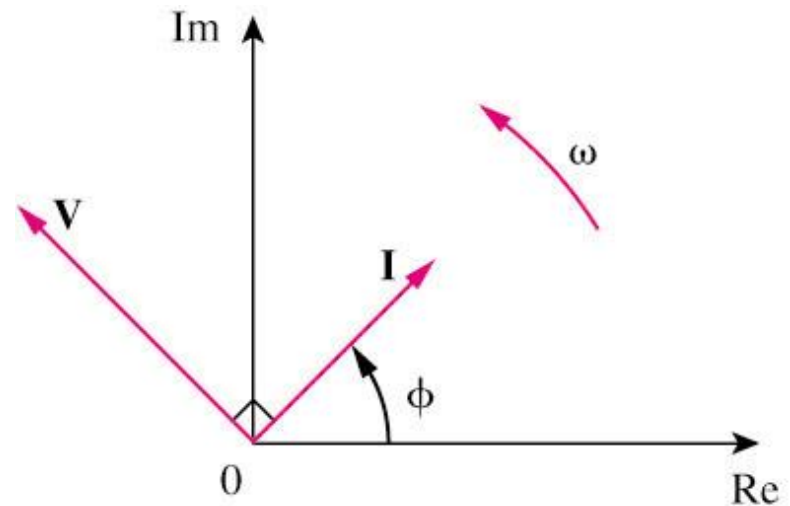


$$\bar{V} = j\omega L \bar{I}$$

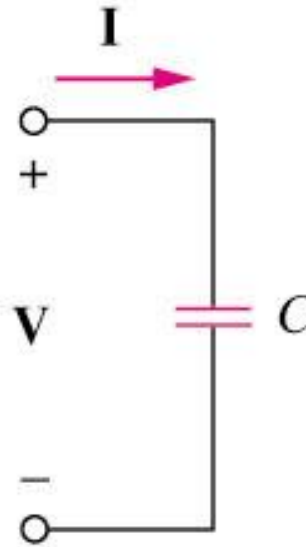
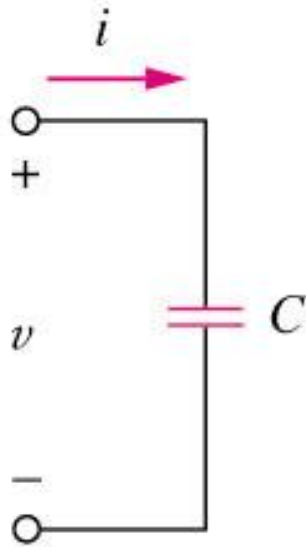
$$i = I \cos(\omega t)$$

$$v = L \frac{di}{dt} = -\omega L I \sin(\omega t)$$

$$v = \omega L I \cos(\omega t + \pi / 2)$$



Equazioni costitutive



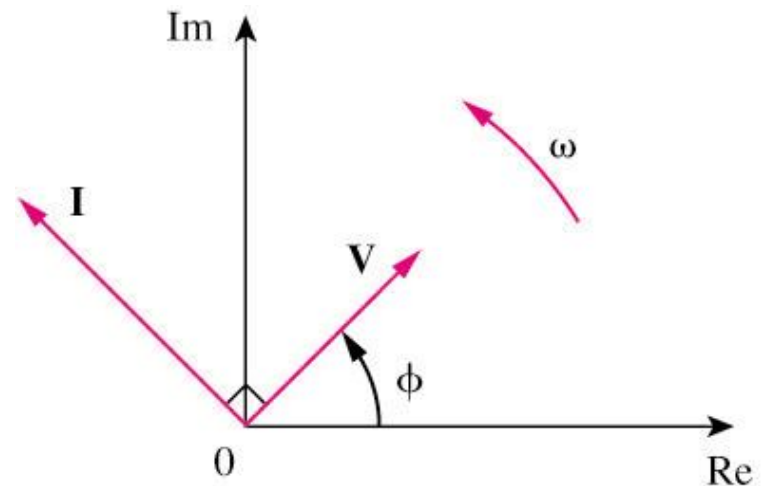
$$v = V \cos(\omega t)$$

$$i = C \frac{dv}{dt} = -\omega CV \sin(\omega t)$$

$$i = \omega CV \cos(\omega t + \pi / 2)$$

$$i = C \frac{dv}{dt}$$

$$\bar{I} = j\omega C \bar{V}$$



Equazioni costitutive

POLITECNICO DI MILANO



Prof. G. Grusso

Riepilogo

Elemento	Dominio del Tempo	Dominio della Frequenza
R	$v = Ri$	$\bar{V} = R\bar{I}$
L	$v = L \frac{di}{dt}$	$\bar{V} = j\omega L \bar{I}$
C	$i = C \frac{dv}{dt}$	$\bar{V} = \frac{\bar{I}}{j\omega C} = -j \frac{\bar{I}}{\omega C}$

Concetto di Impedenza e Ammettenza

- L'impedenza di un circuito è il rapporto, misurato in ohms Ω .:

$$\bar{Z} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} = R + jX$$

R è la parte reale (Resistenza) e X la parte immaginaria (Reattanza) . **Positiva X per L** e **negativa per C**.

- L'ammettenza è l'inverso dell'impedenza e si misura in siemens (S).

$$\bar{Y} = \frac{1}{\bar{Z}} = \frac{\bar{I}}{\bar{V}}$$



Concetto di Impedenza e Ammettenza

POLITECNICO DI MILANO

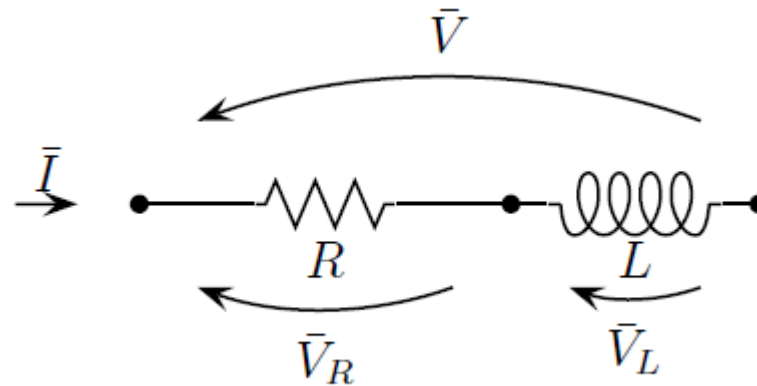


Prof. G. Gruosso

Impedenze e Ammettenze dei componenti

Elemento	Impedenza	Ammettenza
R	$\bar{Z} = R$	$\bar{Y} = \frac{1}{R}$
L	$\bar{Z} = j\omega L$	$\bar{Y} = \frac{1}{j\omega L}$
C	$\bar{Z} = \frac{1}{j\omega C}$	$\bar{Y} = j\omega C$

Concetto di Impedenza e Ammettenza

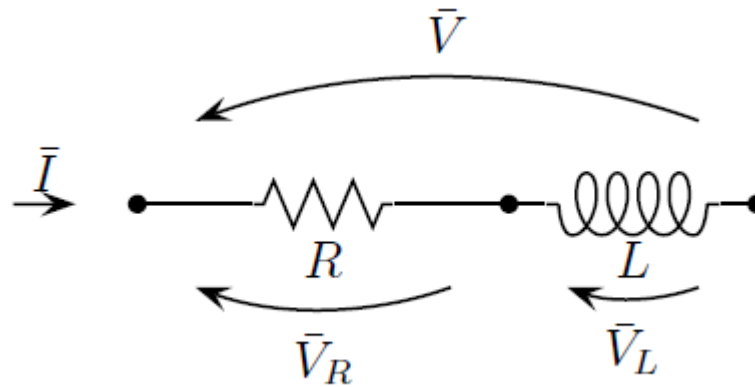


Serie di Resistore ed Induttore

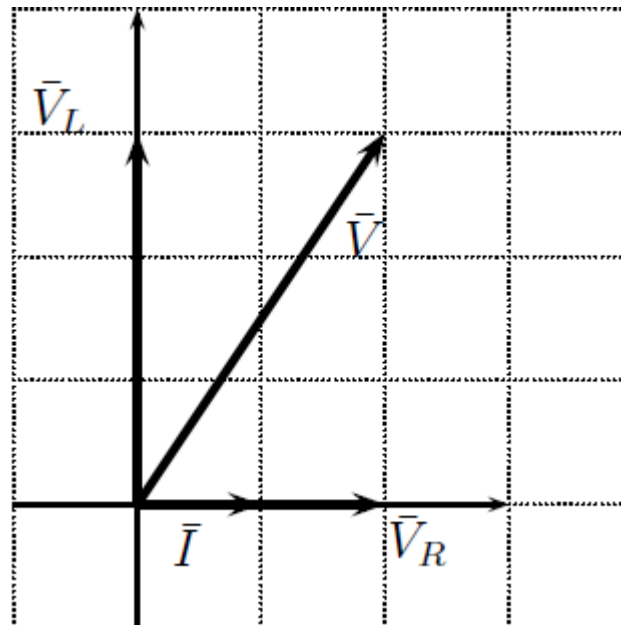
$$\begin{aligned}\bar{V} &= \bar{V}_R + \bar{V}_L \\ &= R\bar{I} + j\omega L\bar{I} : \end{aligned}$$

Concetto di Impedenza e Ammettenza

POLITECNICO DI MILANO

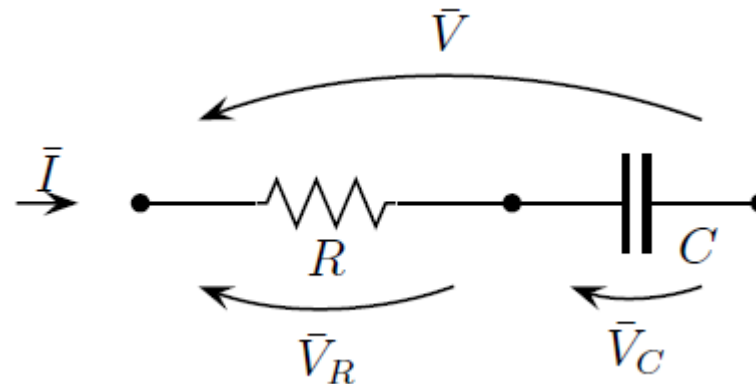


Serie di Resistore ed Induttore



Prof. G. Grusso

Concetto di Impedenza e Ammettenza

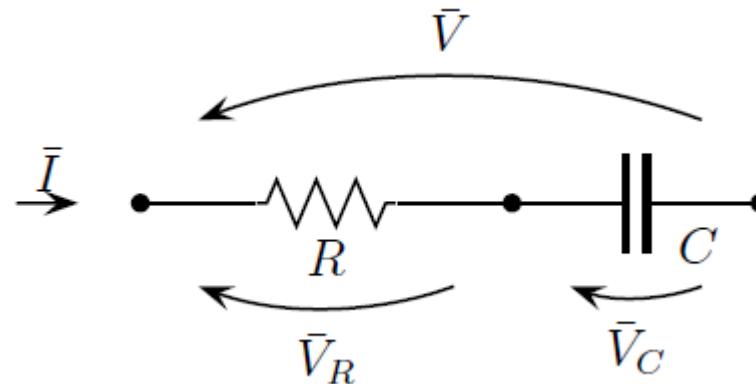


Serie di Resistore ed Condensatore

$$\bar{V} = \bar{V}_R + \bar{V}_C$$

$$R\bar{I} + \frac{1}{j\omega C}\bar{I} = R\bar{I} - jX_C\bar{I}$$

Concetto di Impedenza e Ammettenza

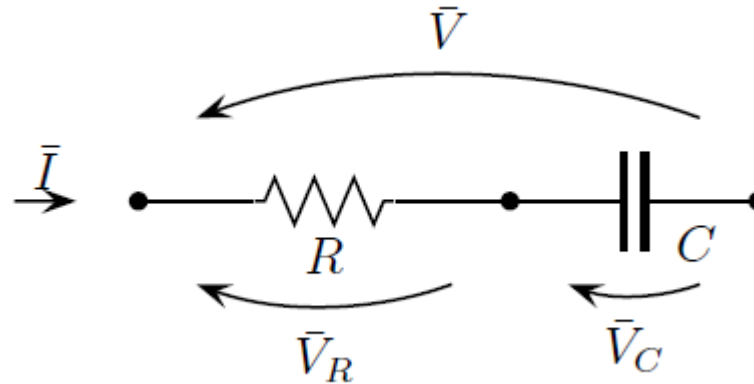


Serie di Resistore ed Condensatore

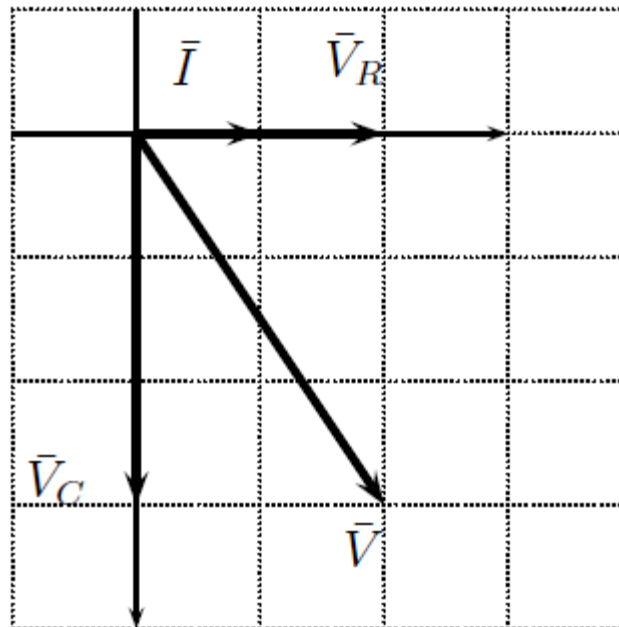
$$\bar{V} = \bar{V}_R + \bar{V}_C$$

$$R\bar{I} + \frac{1}{j\omega C}\bar{I} = R\bar{I} - jX_C\bar{I}$$

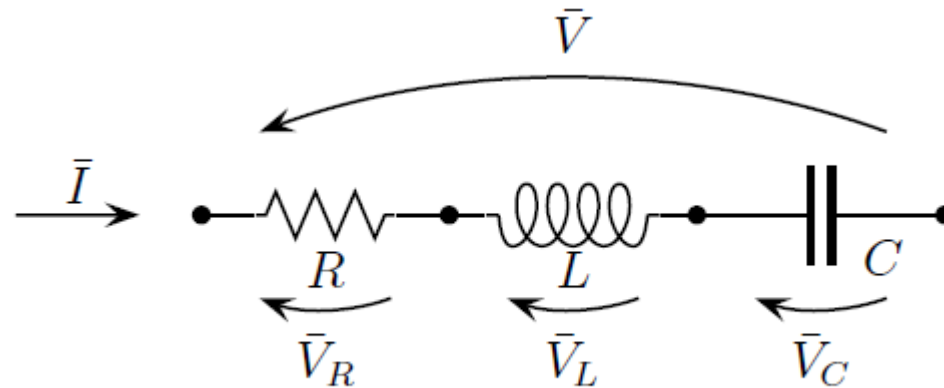
Concetto di Impedenza e Ammettenza



Serie di Resistore ed Condensatore



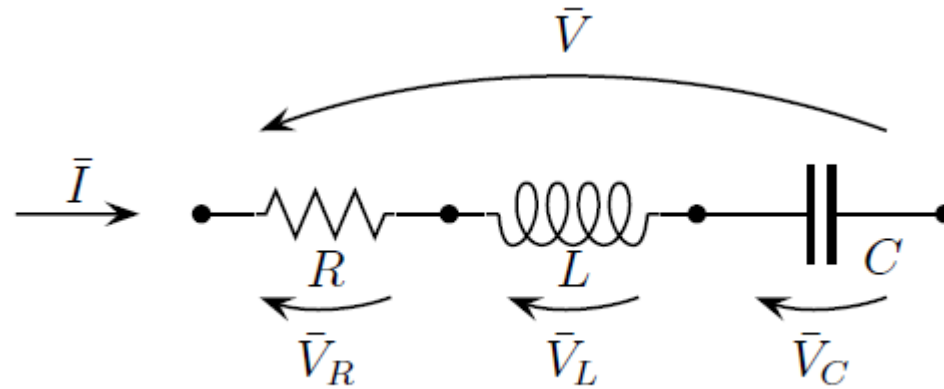
Concetto di Impedenza e Ammettenza



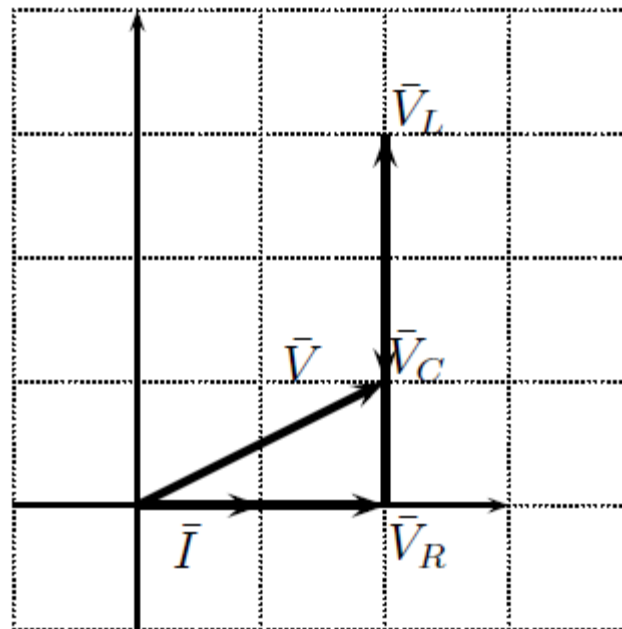
Serie di Resistore ed Condensatore e Induttore

$$\begin{aligned}\bar{V} &= \bar{V}_R + \bar{V}_L + \bar{V}_C = R\bar{I} + j\omega L\bar{I} + \frac{1}{j\omega C}\bar{I} \\ &= R\bar{I} + jX_L\bar{I} - jX_C\bar{I}\end{aligned}$$

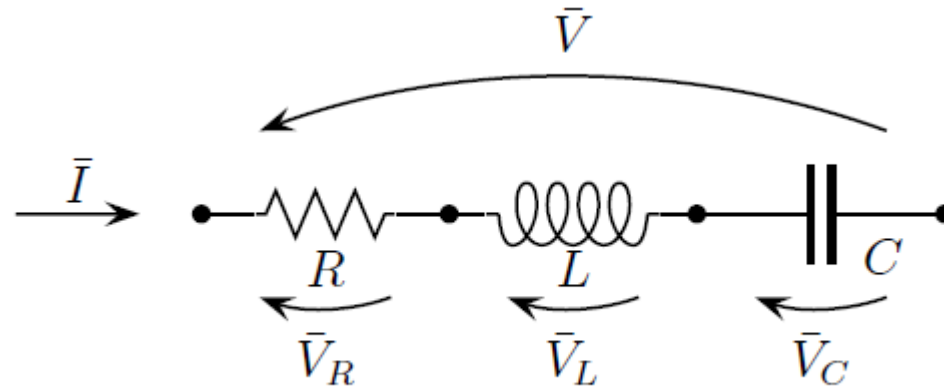
Concetto di Impedenza e Ammettenza



Serie di Resistore ed Condensatore e Induttore



Concetto di Impedenza e Ammettenza



Serie di Resistore ed Condensatore e Induttore

