Esercizio 1

Si consideri la seguente formula:

$f(A, B,C) = (((\sim A) \vee C) \Leftrightarrow B)$

Togliere le parentesi superflue;

determinare l'insieme delle sottoformule di f (A, B,C);

costruire la sua tavola di verità;

dire se è una formula soddisfacibile e, in caso affermativo, se è una tautologia.

Soluzione

Tenuto conto della priorità dei connettivi la formula può essere scritta senza alcuna parentesi

$\sim A \vee C \Leftrightarrow B$.

Le sottoformule della formula sono $\{\sim A \vee C \Leftrightarrow B, \sim A \vee C, \sim A , A, B, C\}$.

La sua tavola di verità è

A	B	C	f(A,B,C)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

La formula è quindi soddisfacibile in quanto ha modelli e non è una tautologia perché non tutte le interpretazioni sono modelli.

Esercizio 2

Si consideri la tavola di verità

A	B	C	f(A,B,C)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

e si scriva una formula f(A,B,C) con i soli connettivi $\sim$ e $\Rightarrow$ che abbia la suddetta tavola di verità.

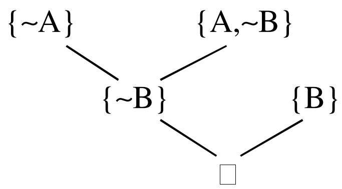
Si trovi poi una formula g(A,B,C) soddisfacibile, non equivalente ad f(A,B,C), da cui si possa semanticamente dedurre f(A,B,C).

Si dica se si può dimostrare che $g(A,B,C) \vdash_L f(A,B,C)$. Ritrovare il risultato usando la risoluzione.

Soluzione

$f(A,B,C)\equiv(\sim A\wedge B\wedge\sim C)\vee(\sim A\wedge B\wedge C)\vee(A\wedge\sim B\wedge C)\vee(A\wedge B\wedge C)\equiv(\sim A\wedge B)\vee(A \wedge C)\equiv\sim(\sim A\wedge B)\Rightarrow(A \wedge C)\equiv$
$(B\Rightarrow A)\Rightarrow\sim(A\Rightarrow\sim C)$.

g(A,B,C) deve ammettere almeno un modello, tutti i suoi modelli devono essere modelli per f(A,B,C) e ci deve essere almeno un modello di f(A,B,C) che non è modello di g(A,B,C), g(A,B,C) non è quindi univocamente determinata, una possibile scelta per g(A,B,C) è $\sim A \wedge B \wedge \sim C$ che ha l'unico modello v(A)=v(C)=0,v(B)=1.
Poiché abbiamo costruito g(A,B,C) in modo che g(A,B,C)$\models$f(A,B,C) per il teorema di correttezza (nella versione forte) sappiamo che g(A,B,C) $\vdash_L$ f(A,B,C).
Utilizzando la risoluzione, ricordiamo che per il teorema di correttezza e completezza nella versione forte g(A,B,C) $\vdash_L$ f(A,B,C) se e solo se g(A,B,C) $\models$ f(A,B,C) il che equivale a dire che {g(A,B,C),~f(A,B,C)} è insoddisfacibile, ma un insieme di formule è insoddisfacibile se e solo se da esso ricaviamo per risoluzione la clausola vuota.
Scriviamo {g(A,B,C),~f(A,B,C)} in forma a clausole.
$\{g(A,B,C)\}^c=\{\{\sim A\},\{B\},\{\sim C\}\}$.
$\sim f(A,B,C) \equiv (A \vee \sim B) \wedge (\sim A \vee \sim C)$, quindi $\{\sim f(A,B,C)\}^c=\{\{A,\sim B\},\{\sim A,\sim C\}\}$.
Dunque $\{g(A,B,C),\sim f(A,B,C)\}^c=\{\{\sim A\},\{B\},\{\sim C\},\{A,\sim B\},\{\sim A,\sim C\}\}$.
Ora



Quindi abbiamo ritrovato che g(A,B,C) $\vdash_L$ f(A,B,C) usando la risoluzione.

<u>Esercizio 3</u>
Trovare una formula $\mathcal{A}$ contenente solo i connettivi ~ e $\Rightarrow$ avente la seguente tavola di verità

A	B	C	f (A, B, C)
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	0

a) Determinare inoltre una formula $\mathcal{B}$, non equivalente ad $\mathcal{A}$ e che non sia una tautologia, tale che da $\mathcal{A}$ si deduca in L $\mathcal{B}$.
b) Stabilire dai risultati precedenti se, data una qualunque formula $\mathcal{C}$, la formula ben formata $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{C}$ è un teorema di L.
c) Mostrare, usando la risoluzione e tenuto conto dei risultati precedenti, che da $\mathcal{A}$ si deduce $\mathcal{B}$ e che esiste una formula $\mathcal{C}$, che non è una contraddizione, tale che l'insieme $\{\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}, \sim\mathcal{C}\}$ è soddisfacibile.
<u>Soluzione</u>
$f(A,B,C) \equiv (A \wedge B \wedge \sim C) \vee (\sim A \wedge B \wedge C) \vee (\sim A \wedge \sim B \wedge C) \equiv (A \wedge B \wedge \sim C) \vee (\sim A \wedge C) \equiv (A \vee B \vee \sim C) \Rightarrow (\sim A \wedge C) \equiv$
$(C \Rightarrow (\sim A \Rightarrow B)) \Rightarrow \sim(C \Rightarrow A)$, che è la formula $\mathcal{A}$ cercata.

a) La formula $\mathcal{B}$ non deve essere una tautologia quindi deve ammettere almeno una interpretazione che non sia modello. Inoltre deve essere $\mathcal{A} \vdash_L \mathcal{B}$ che, per il teorema di correttezza e completezza nella versione forte, equivale a dire che $\mathcal{A} \models \mathcal{B}$. Quindi $\mathcal{B}$ deve avere tutti i modelli di $\mathcal{A}$ ed inoltre avere almeno un modello che non sia modello di $\mathcal{A}$ (altrimenti sarebbe equivalente ad $\mathcal{A}$). $\mathcal{B}$ non è pertanto univocamente determinata, ma una possibile scelta per $\mathcal{B}$ è $\sim A \vee \sim B \vee \sim C$, che ammette come unica interpretazione che non sia modello quella che assegna ad A,B,C il valore 1. Altra soluzione. Si può anche determinare $\mathcal{B}$ semplicemente per via sintattica, osservando che la formula $C \Rightarrow (\sim A \Rightarrow B)$ si deduce in L da $\mathcal{A}$, in quanto

1. $((C \Rightarrow (\sim A \Rightarrow B)) \Rightarrow \sim(C \Rightarrow A)) \Rightarrow (C \Rightarrow (\sim A \Rightarrow B))$ è un'istanza dell'assioma A1
2. $(C \Rightarrow (\sim A \Rightarrow B)) \Rightarrow \sim(C \Rightarrow A)$ è l'ipotesi $\mathcal{A}$
3. $C \Rightarrow (\sim A \Rightarrow B)$ si deduce da 2 e da 1 per MP

E' facile poi osservare che $C \Rightarrow (\sim A \Rightarrow B)$ non è equivalente a $(C \Rightarrow (\sim A \Rightarrow B)) \Rightarrow \sim(C \Rightarrow A)$, infatti esiste un'interpretazione, ad esempio $v(A)=v(B)=0$ e $v(C)=1$, che non è un modello per $C \Rightarrow (\sim A \Rightarrow B)$ ed è un modello per $(C \Rightarrow (\sim A \Rightarrow B)) \Rightarrow \sim(C \Rightarrow A)$.

b) Poiché da $\mathcal{A} \vdash_L \mathcal{B}$ segue, per il teorema di deduzione sintattica, che $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ è una teorema di L, se $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{C}$ fosse teorema di L si otterrebbe per MP che ogni f.b.f. $\mathcal{C}$ è un teorema di L e quindi, per il teorema di completezza, una tautologia. Poiché esistono f.b.f. che non sono tautologie (ad es. una qualsiasi lettera enunciativa) $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{C}$ non è un teorema di L per ogni scelta della f.b.f $\mathcal{C}$.

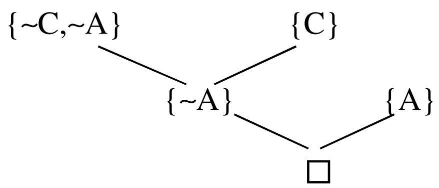
c) Nel punto a) abbiamo scritto come f.b.f. $\mathcal{B}$ la formula $\sim A \vee \sim B \vee \sim C$. Sappiamo che $\mathcal{A} \models \mathcal{B}$ se e solo se $\{\mathcal{A}, \sim\mathcal{B}\}$ è insoddisfacibile e quindi se e solo se da $\{\mathcal{A}, \sim\mathcal{B}\}$ si ottiene per risoluzione la clausola vuota. Scriviamo quindi $\mathcal{A}$ e $\sim\mathcal{B}$ in forma a clausole.

$\{\sim\mathcal{B}\}^c = \{\{A\},\{B\},\{C\}\}$

$\mathcal{A} \equiv (A \wedge B \wedge \sim C) \vee (\sim A \wedge C) \equiv (A \vee C) \wedge (B \vee \sim A) \wedge (B \vee C) \wedge (\sim C \vee \sim A)$ da cui

$\{\mathcal{A}\}^c = \{\{A,C\},\{B,\sim A\},\{B,C\},\{\sim C,\sim A\}\}$

Quindi $\{\mathcal{A}, \sim\mathcal{B}\}^c = \{\{A,C\},\{B,\sim A\},\{B,C\},\{\sim C,\sim A\},\{A\},\{B\},\{C\}\}$ da cui si ha



Abbiamo quindi provato con la risoluzione che $\mathcal{A} \models \mathcal{B}$.

Dobbiamo ora provare, sempre utilizzando la risoluzione, che esiste una f.b.f $\mathcal{C}$ tale che $\{\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}, \sim\mathcal{C}\}$ è soddisfacibile, questo equivale a dire che esiste una f.b.f. $\mathcal{C}$ non semanticamente deducibile da $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ e abbiamo già detto che una qualsiasi formula che non sia una tautologia, ad esempio A, non è deducibile da $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$. Dobbiamo pertanto provare che da $\{\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}, \sim A\}$ non si ricava la clausola vuota.

Scriviamo $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ in forma a clausole.

$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \equiv \sim\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \equiv (\sim A \vee \sim B \vee C) \wedge (A \vee \sim C)) \vee (\sim A \vee \sim B \vee \sim C) \equiv (\sim A \vee \sim B \vee C \vee \sim C) \wedge (A \vee \sim A \vee \sim B \vee \sim C)$

quindi $\{\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}, \sim A\}^c = \{\{\sim A,\sim B,C,\sim C\},\{A,\sim A,\sim B,\sim C\},\{\sim A\}\}$. Le prime due clausole si possono eliminare perché contengono un letterale e il suo negato (e quindi sono tautologie), pertanto rimane solo la clausola $\{\sim A\}$ che non può portare alla clausola vuota.

Esercizio 4

Si consideri la tavola di verità

A	B	C	f(A,B,C)
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	0

Scrivere una formula equivalente ad f(A,B,C) che contenga solo i connettivi ~ e ⇒.
Stabilire, giustificando l'affermazione, se in L la formula B ⇒f(A,B,C) può essere dedotta da B⇒(C⇒A).

Soluzione

$f(A,B,C) \equiv (A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \sim C) \vee (\sim A \wedge B \wedge \sim C) \equiv (A \wedge B) \vee (\sim A \wedge B \wedge \sim C) \equiv B \wedge (A \vee \sim C)$
$\equiv \sim((C \Rightarrow A) \Rightarrow \sim B)$

Per il teorema di correttezza e completezza nella versione forte si ha $B \Rightarrow (C \Rightarrow A) \vdash_L B \Rightarrow f(A,B,C)$ se e solo se $B \Rightarrow (C \Rightarrow) \models B \Rightarrow f(A,B,C)$

Da B⇒(C⇒A) si deduce semanticamente B⇒f(A,B,C) se e solo se ogni modello di B⇒(C⇒A) è anche modello per B⇒f(A,B,C). Tutte le interpretazioni che danno a B il valore 0 sono modelli di B ⇒f(A,B,C), Consideriamo ora le interpretazioni che danno a B il valore 1. Tali interpretazioni sono modelli per la f.b.f B⇒(C⇒A) se e solo sono modelli anche di C⇒A, ma allora sono modelli anche f(A,B,C) e quindi di B⇒f(A,B,C).

Esercizio 5

Siano f (A,B,C) e g(A,B,C) due f.b.f. aventi le seguenti tavole di verità:

A	B	C	f (A,B,C)	g(A,B,C)
1	1	1	1	1
1	1	0	0	1
1	0	1	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	0
0	1	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	0	0	1

1

a) Si scrivano le formule f (A,B,C) e g(A,B,C) in modo tale che contengano solo i connettivi ~ e ⇒.

b) Si determini una f.b.f. h(A,B,C) che non sia una contraddizione tale che l'insieme {f(A,B,C),g(A,B,C), h(A,B,C)} sia insoddisfacibile.

c) Si stabilisca se vale la seguente deduzione nella teoria L:
$f(A,B,C), g(A,B,C) \vdash_L \sim h(A,B,C)$

d) Si dimostri che $f(A,B,C) \models g(A,B,C) \Rightarrow \sim h(A,B,C)$ prima per via semantica e poi attraverso il metodo di risoluzione.

Soluzione

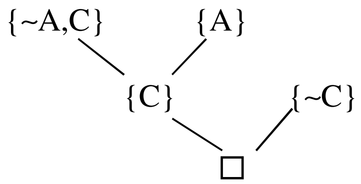
a) $f(A,B,C)\equiv(\sim A\vee\sim B\vee C)\wedge(\sim A\vee B\vee C)\wedge(A\vee B\vee\sim C)\wedge(A\vee B\vee C)\equiv(\sim A\vee C)\wedge(A\vee\sim C)\equiv$ $\sim((A\Rightarrow C)\Rightarrow\sim(C\Rightarrow A))$
$g(A,B,C)\equiv(\sim A\vee B\vee C)\wedge(A\vee\sim B\vee\sim C)\wedge(A\vee B\vee C)\equiv(B\vee C)\wedge(A\vee\sim B\vee\sim C)\equiv\sim((B\Rightarrow(C\Rightarrow A))\Rightarrow\sim(\sim C\Rightarrow B))$

b) h(A,B,C) deve avere almeno un modello e nessuna interpretazione che sia modello sia per f(A,B,C) sia di g(A,B,C) può essere modello per h(A,B,C), per cui possiamo scegliere h(A,B,C) come la f.b.f il cui unico modello è v(A)=v(B)=1 e v(C)=0, da cui $h(A,B,C)\equiv A\wedge B\wedge\sim C$. In tal modo v non è modello per {f(A,B,C),g(A,B,C), h(A,B,C)} in quanto non è modello per f(A,B,C) e ogni altra interpretazione non è modello per {f(A,B,C),g(A,B,C), h(A,B,C)} in quanto non è modello per h(A,B,C).

c) Essendo {f(A,B,C),g(A,B,C), h(A,B,C)} insoddisfacibile da {f(A,B,C),g(A,B,C)} si deduce semanticamente ~h(A,B,C) e per il teorema di correttezza nella versione forte si ha che $\{f(A,B,C), g(A,B,C)\}\vdash_L \sim h(A,B,C)$

d) Dal punto precedente sappiamo che $\{f(A,B,C),g(A,B,C)\}\models\sim h(A,B,C)$, quindi per il teorema di deduzione semantica abbiamo $f(A,B,C)\models g(A,B,C)\Rightarrow\sim h(A,B,C)$.

e) Attraverso il metodo di risoluzione dobbiamo dimostrare che l'insieme di f.b.f. $\{f(A,B,C),\sim(g(A,B,C)\Rightarrow\sim h(A,B,C))\}$ è insoddisfacibile. Scriviamo le due f.b.f in forma a clausole: $\{f(A,B,C)\}^c=\{\{\sim A,C\},\{A,\sim C\}\}$
$\sim(g(A,B,C)\Rightarrow\sim h(A,B,C))\equiv g(A,B,C)\wedge h(A,B,C)\equiv(B\vee C)\wedge(A\vee\sim B\vee\sim C)\wedge A\wedge B\wedge\sim C$, da cui $\{\sim(g(A,B,C)\Rightarrow\sim h(A,B,C))\}^c=\{\{B,C\},\{A,\sim B,\sim C\},\{A\},\{B\},\{\sim C\}\}$
Ora da $\{\{\sim A,C\},\{A,\sim C\},\{B,C\},\{A,\sim B,\sim C\},\{A\},\{B\},\{\sim C\}\}$ si ricava facilmente la clausola vuota:

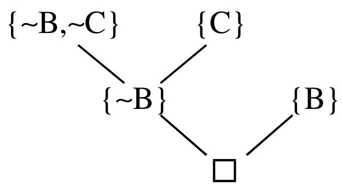


Esercizio 6
Data la seguente tavola di verità

A	B	C	f (A, B, C)
1	1	1	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	0	0	0
0	1	1	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	0	0	1

scrivere una f.b.f. $\mathcal{A}$ contenente solo i connettivi ~ e ⇒ ed avente la suddetta tavola di verità.
Trovare poi una f.b.f. $\mathcal{B}$ che non sia una contraddizione, tale che la formula $\mathcal{A}\Rightarrow\sim\mathcal{B}$ possa essere dedotta da $\mathcal{A}$ nella teoria formale L.
Dimostrare, usando la risoluzione, che $\{\mathcal{A},\sim(\mathcal{A}\Rightarrow\sim\mathcal{B})\}$ è un insieme insoddisfacibile di formule.
Soluzione

$f(A,B,C) \equiv (\sim A \vee \sim B \vee \sim C) \wedge (\sim A \vee B \vee C) \wedge (A \vee \sim B \vee \sim C) \wedge (A \vee B \vee \sim C) \equiv (\sim B \vee \sim C) \wedge (\sim A \vee B \vee C) \wedge (A \vee \sim C) \equiv (\sim C \vee (A \wedge \sim B)) \wedge (\sim A \vee B \vee C) \equiv (C \Rightarrow \sim(A \Rightarrow B)) \wedge (A \Rightarrow (\sim B \Rightarrow C)) \equiv \sim((C \Rightarrow \sim(A \Rightarrow B)) \Rightarrow \sim (A \Rightarrow (\sim B \Rightarrow C)))$.
Quindi abbiamo trovato la f.b.f. $\mathcal{A}$ nella forma richiesta.
Per il teorema di correttezza e completezza forte $\mathcal{A} \Rightarrow \sim\mathcal{B}$ può essere dedotta da $\mathcal{A}$ nella teoria L se e solo se $\mathcal{A} \Rightarrow \sim\mathcal{B}$ è conseguenza semantica di $\mathcal{A}$, quindi se e solo se ogni modello di $\mathcal{A}$ è modello per $\mathcal{A} \Rightarrow \sim\mathcal{B}$ e quindi per $\sim\mathcal{B}$. Basta pertanto prendere come formula $\mathcal{B}$ la formula $\sim\mathcal{A}$. Ovviamente questa non è l'unica scelta possibile. Per esempio potremmo prendere come formula $\mathcal{B}$ una formula che abbia come unico modello $v(A)=v(B)=v(C)=1$, ovvero $A \wedge B \wedge C$.
Dobbiamo poi dimostrare che da $\{\mathcal{A}, \sim(\mathcal{A} \Rightarrow \sim\mathcal{B})\}^c$ possiamo per risoluzione ottenere la clausola vuota quando $\mathcal{B}$ sia (una delle) la formula precedentemente trovata, ad esempio $A \wedge B \wedge C$
$\sim(\mathcal{A} \Rightarrow \sim(A \wedge B \wedge C)) \equiv \mathcal{A} \wedge (A \wedge B \wedge C) \equiv (\sim B \vee \sim C) \wedge (\sim A \vee B \vee C) \wedge (A \vee \sim C) \wedge A \wedge B \wedge C$
Quindi $\{\mathcal{A}, \sim(\mathcal{A} \Rightarrow \sim\mathcal{B})\}^c = \{\{\sim B,\sim C\},\{\sim A,B,C\},\{A,\sim C\},\{A\},\{B\},\{C\}\}$ da cui si ricava la clausola vuota così:



<u>Esercizio 7</u>
Verificare che l'insieme di fbf $\{\sim A, \sim A \Rightarrow (B \vee C), B \Rightarrow (A \vee C)\}$ è soddisfacibile.
Trovare una formula di logica proposizionale $f(A,B,C)$ che non sia una contraddizione e tale che l'insieme di f.b.f. $\{\sim A, \sim A \Rightarrow (B \vee C), B \Rightarrow (A \vee C), f(A,B,C)\}$ sia insoddisfacibile. La formula A è una conseguenza semantica di $\{\sim A \Rightarrow (B \vee C), B \Rightarrow (A \vee C), f(A,B,C)\}$? Verificare il risultato trovato tramite la risoluzione.
<u>Soluzione</u>
Per via semantica si osserva subito che l'interpretazione $v(A)=v(B)=0, v(C)=1$ è un modello dell'insieme $\{\sim A, \sim A \Rightarrow (B \vee C), B \Rightarrow (A \vee C)\}$.
Usando la risoluzione osserviamo che
$\Gamma = \{\sim A, \sim A \Rightarrow (B \vee C), B \Rightarrow (A \vee C)\}^c = \{\{\sim A\},\{\sim A,B,C\},\{\sim B,A,C\}\}$ e verifichiamo che da Γ non possiamo ricavare la clausola vuota infatti
$\mathrm{Ris}\,\Gamma = \{\{\sim A\},\{\sim A,B,C\},\{\sim B,A,C\},\{\sim B,C\},\{B,\sim B,C\},\{A,\sim A,C\}\}$ da cui possiamo eliminare le ultime due clausole che corrispondono a tautologie e le clausole $\{\sim A,B,C\},\{\sim B,A,C\}$ che sono soddisfatte quando sono soddisfatte rispettivamente $\{\sim A\},\{\sim B,C\}$, a questo punto è evidente che $\mathrm{Ris}^2\Gamma = \mathrm{Ris}\,\Gamma$ da cui $\mathrm{Ris}^*\Gamma = \mathrm{Ris}^2\Gamma$ e dunque non si può ottenere la clausola vuota.
E' evidente che se prendiamo $f(A,B,C)=A$, l'insieme di formule $\{\sim A, \sim A \Rightarrow (B \vee C), B \Rightarrow (A \vee C), A\}$ è insoddisfacibile, infatti A e ~A non hanno modelli comuni, ed inoltre $\{\{A\},\{\sim A\}\} \subseteq \{\sim A, \sim A \Rightarrow (B \vee C), B \Rightarrow (A \vee C), A\}^c$ per cui da $\{\sim A, \sim A \Rightarrow (B \vee C), B \Rightarrow (A \vee C), A\}^c$ si può ricavare la clausola vuota per risoluzione.
Poiché $\{\sim A, \sim A \Rightarrow (B \vee C), B \Rightarrow (A \vee C), A\}$ è insoddisfacibile abbiamo subito che $\{\sim A \Rightarrow (B \vee C), B \Rightarrow (A \vee C), A\} \models A$. Il risultato è già stato ritrovato per risoluzione infatti abbiamo visto che da $\{\sim A, \sim A \Rightarrow (B \vee C), B \Rightarrow (A \vee C), A\}^c$ si ricava la clausola vuota.

<u>Esercizio 8</u>
Provare in due modi diversi che $\sim C \Rightarrow \sim B \vdash_L (A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$.
<u>Soluzione</u>
Risolviamo l'esercizio in tre modi diversi, era richiesto di risolverlo in due di questi tre modi.

A. *Usando la teoria L*

Per il teorema di deduzione sintattica (applicato due volte $\sim C\Rightarrow\sim B \vdash_L (A\Rightarrow B)\Rightarrow(A\Rightarrow C)$ se e solo se $\{\sim C\Rightarrow\sim B, A\Rightarrow B, A\}\vdash_L C$.

1. A è un'ipotesi
2. $A\Rightarrow B$ è un'ipotesi
3. B M.P. fra 1. e 2.
4. $B\Rightarrow(\sim C\Rightarrow B)$ assioma A1
5. $\sim C\Rightarrow B$ M.P. fra 3. e 4.
6. $\sim C\Rightarrow\sim B$ è un'ipotesi
7. $(\sim C\Rightarrow\sim B)\Rightarrow((C\Rightarrow\sim B)\Rightarrow C)$ assioma A3
8. $(C\Rightarrow\sim B)\Rightarrow C$ M.P. fra 6. e 7.
9. C M.P. fra 5. e 8.

B. *Usando la semantica*

Per il teorema di correttezza e completezza nella versione forte $\sim C\Rightarrow\sim B \vdash_L (A\Rightarrow B)\Rightarrow(A\Rightarrow C)$ se e solo se $\sim C\Rightarrow\sim B \models (A\Rightarrow B)\Rightarrow(A\Rightarrow C)$, dobbiamo quindi mostrare che ogni modello di $\sim C\Rightarrow\sim B$ è modello di $(A\Rightarrow B)\Rightarrow(A\Rightarrow C)$. I modelli di $\sim C\Rightarrow\sim B$ sono tutte le interpretazioni che danno a C il valore 1 e quelle che danno sia a C sia a B il valore 0. Sia v un'interpretazione per cui $v(C)=1$ allora $v(A\Rightarrow C)=1$ perché il conseguente è vero e ancora $v((A\Rightarrow B)\Rightarrow(A\Rightarrow C))=1$ perché il conseguente è vero. Consideriamo allora le interpretazioni w per cui $w(B)=w(C)=0$, se $w(A)=1$ allora $w(A\Rightarrow B)=0$ e quindi $w((A\Rightarrow B)\Rightarrow(A\Rightarrow C))=1$ perché l'antecedente è falso, se $w(A)=0$ allora $w(A\Rightarrow C)=1$ perché l'antecedente è falso e dunque $w((A\Rightarrow B)\Rightarrow(A\Rightarrow C))=1$ perché il conseguente è vero.

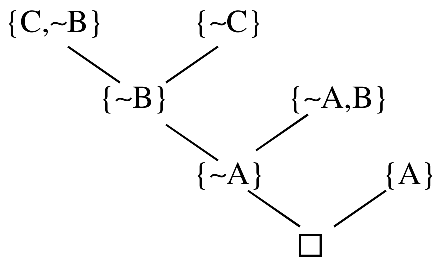
C. *Usando la risoluzione*

Per il teorema di correttezza e completezza nella versione forte $\sim C\Rightarrow\sim B \vdash_L (A\Rightarrow B)\Rightarrow(A\Rightarrow C)$ se e solo se $\sim C\Rightarrow\sim B \models (A\Rightarrow B)\Rightarrow(A\Rightarrow C)$ e quindi se e solo se $\{\sim C\Rightarrow\sim B, \sim((A\Rightarrow B)\Rightarrow(A\Rightarrow C))\}$ è insoddisfacibile. Un insieme di f.b.f. è insoddisfacibile se e solo se da esso posso ricavare per risoluzione la clausola vuota. Scriviamo allora $\{\sim C\Rightarrow\sim B, \sim((A\Rightarrow B)\Rightarrow(A\Rightarrow C))\}^c$.

$\sim C\Rightarrow\sim B\equiv C\vee\sim B$

$\sim((A\Rightarrow B)\Rightarrow(A\Rightarrow C))\equiv(\sim A\vee B)\wedge(A\wedge\sim C)$ da cui

$\{\sim C\Rightarrow\sim B, \sim((A\Rightarrow B)\Rightarrow(A\Rightarrow C))\}^c=\{\{C,\sim B\},\{\sim A,B\},\{A\},\{\sim C\}\}$ e quindi



<u>Esercizio 9</u>

Si consideri la f.b.f. $(A\Rightarrow\sim B)\Rightarrow(C\Rightarrow(\sim B\vee A))$.

Scrivere una formula $f(A,B,C)$ ad essa equivalente che contenga solo i connettivi $\sim$, $\wedge$, $\vee$.

Si trovi poi una formula $g(A,B,C)$, non equivalente ad $f(A,B,C)$, tale che l'insieme di formule $\{g(A,B,C), \sim f(A,B,C)\}$ sia insoddisfacibile.

Si dica, utilizzando la risoluzione, se $A\Rightarrow(B\Rightarrow C) \vdash_L g(A,B,C)\wedge f(A,B,C)$.

Dire se $f(A,B,C) \vdash_L A\Rightarrow(B\Rightarrow\sim C)$. E' vero che da $\{A, B\Rightarrow\sim C\}$ si deduce $f(A,B,C)$?

Si ha allora $\{A, B\Rightarrow\sim C\} \vdash_L \sim f(A,B,C)$?

<u>Soluzione</u>

$(A\Rightarrow\sim B)\Rightarrow(C\Rightarrow(\sim B\vee A))\equiv \sim (A\Rightarrow\sim B)\vee(\sim C\vee\sim B\vee A)\equiv (A\wedge B)\vee\sim C\vee\sim B\vee A\equiv \sim C\vee\sim B\vee A=f(A,B,C)$

Si vede quindi subito che $\sim f(A,B,C)=\sim A\wedge B\wedge C$ ha il solo modello $v(A)=1,v(B)=v(C)=0$. Basta quindi prendere come $g(A,B,C)$ una formula che non abbia tale modello, ad esempio B.
Sappiamo che se $A\Rightarrow(B\Rightarrow C)\vdash_L B\wedge(\sim C\vee\sim B\vee A)$ se e solo se $A\Rightarrow(B\Rightarrow C)\models B\wedge(\sim C\vee\sim B\vee A)$ e quindi se e solo se $\{A\Rightarrow(B\Rightarrow C),\sim(B\wedge(\sim C\vee\sim B\vee A))\}$ è insoddisfacibile e quindi se e solo se da $\{A\Rightarrow(B\Rightarrow C),\sim(B\wedge(\sim C\vee\sim B\vee A))\}^c$ si ricava per risoluzione la clausola vuota.
$A\Rightarrow(B\Rightarrow C)\equiv\sim A\vee\sim B\vee C$, $\sim(B\wedge(\sim C\vee\sim B\vee A))\equiv\sim B\vee(C\wedge B\wedge\sim A)\equiv(\sim B\vee C)\wedge(\sim B\vee\sim A)$ e dunque $\{A\Rightarrow(B\Rightarrow C),\sim(B\wedge(\sim C\vee\sim B\vee A))\}^c=\{\{\sim A,\sim B,C\},\{\sim B,C\},\{\sim B,\sim A\}\}$. Chiamato Γ tale insieme abbiamo $\Gamma=\text{Ris}\,\Gamma$ e quindi non possiamo ricavare la clausola vuota. Dunque in L non si può dedurre $B\wedge(\sim C\vee\sim B\vee A)$ da $A\Rightarrow(B\Rightarrow C)$.
Per il teorema di correttezza e completezza nella versione forte $f(A,B,C)\vdash_L A\Rightarrow(B\Rightarrow\sim C)$ se e solo se $f(A,B,C)\models A\Rightarrow(B\Rightarrow\sim C)$. Tutte le interpretazioni eccetto quella per cui $v(A)=1,v(B)=v(C)=0$ sono modelli per $f(A,B,C)$, mentre l'interpretazione $w(A)=w(B)=w(C)=1$ non è modello per $A\Rightarrow(B\Rightarrow\sim C)$. Quindi w è un modello di $f(A,B,C)$ che non è modello per $A\Rightarrow(B\Rightarrow\sim C)$ per cui $A\Rightarrow(B\Rightarrow\sim C)$ non si deduce in L da $f(A,B,C)$. Da $\{A, B\Rightarrow\sim C\}$ si deduce $f(A,B,C)$, in quanto ogni modello di $\{A,B\Rightarrow\sim C\}$ è modello per A e dunque per $f(A,B,C)=A\vee\sim B\vee\sim C$. Non può essere $\{A, B\Rightarrow\sim C\}\vdash_L\sim f(A,B,C)$ perché sempre per il teorema di correttezza e completezza nella versione forte in tal caso si avrebbe $\{A, B\Rightarrow\sim C\}\models\sim f(A,B,C)$ e dunque $\{A, B\Rightarrow\sim C\}$ non dovrebbe avere modelli, mentre ad esempio $v(A)=1$, $v(B)=0$, $v(C)=0$ è un modello di $\{A, B\Rightarrow\sim C\}$.

<u>Esercizio 10</u>
Si considerino i seguenti enunciati:
$\mathcal{A}$: Se Anna è bionda o Beatrice è castana, allora Claudia è mora.
$\mathcal{B}$: Se Anna è bionda, allora Claudia non è mora.
$\mathcal{C}$: Claudia è mora o Anna non è bionda.
Mostrare per via semantica che $\mathcal{A},\mathcal{B}\models\mathcal{C}$. Provare lo stesso risultato utilizzando la risoluzione. Scrivere una formula $f(A,B,C)$ che non sia contraddittoria e tale che $\mathcal{A}\wedge\mathcal{B}$ sia conseguenza semantica di $f(A,B,C)$.
<u>Soluzione</u>
Indichiamo con A l'enunciato "Anna è bionda", con B l'enunciato "Beatrice è castana" con C l'enunciato "Claudia è mora". L'enunciato $\mathcal{A}$ è allora $(A\vee B)\Rightarrow C$, l'enunciato $\mathcal{B}$ è $A\Rightarrow\sim C$, l'enunciato $\mathcal{C}$ è $C\vee\sim A$. I modelli di $\mathcal{A}$ sono $v_1(A)=v_1(B)=0$, $v_1(C)=-$; $v_2(A)=v_2(C)=1,v_2(B)=-$; $v_3(B)=v_3(C)=1,v_3(A)=-$, dove con $v(X)=-$ intendiamo che la lettera X può assumere sia il valore 0 sia il valore 1. I modelli di $\mathcal{B}$ sono $w_1(A)=0,w_1(B)=-,w_1(C)=-$ e $w_2(A)=1,w_2(B)=-$, $w_2(C)=0$. I modelli comuni ad $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono $v_1(A)=v_1(B)=0$, $v_1(C)=-$ che sono tutti modelli per $\mathcal{C}$. Dunque $\mathcal{C}$ è conseguenza semantica di $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$.
$\mathcal{A},\mathcal{B}\models\mathcal{C}$ se e solo se $\{\mathcal{A},\mathcal{B},\sim\mathcal{C}\}$ è insoddisfacibile. Calcoliamo $\{\mathcal{A},\mathcal{B},\sim\mathcal{C}\}^c$.
$\mathcal{A}\equiv\sim(A\vee B)\vee C\equiv(\sim A\vee C)\wedge(\sim B\vee C)$, $\mathcal{B}\equiv\sim A\vee\sim C$, $\sim\mathcal{C}\equiv A\wedge\sim C$ e quindi $\{\mathcal{A},\mathcal{B},\sim\mathcal{C}\}^c=\{\{\sim A,C\},\{\sim B,C\},\{\sim A,\sim C\},\{A\},\{\sim C\}\}$. Ora

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \{\sim A,C\} \arrow[dr,dash] & & \{A\} \arrow[dl,dash] & \\ & \{C\} \arrow[dr,dash] & & \{\sim C\} \arrow[dl,dash] \\ & & \square & \end{tikzcd}$$

Dunque da $\{\mathcal{A},\mathcal{B},\sim\mathcal{C}\}^c$ si ricava per risoluzione la clausola vuota e dal teorema di completezza per refutazione della risoluzione abbiamo il risultato.

Abbiamo visto prima che $\mathcal{A}\wedge\mathcal{B}$ ha solo i modelli $v_1(A)=v_1(B)=0$, $v_1(C)=-$. Poiché ogni modello di $f(A,B,C)$ deve essere modello di $\mathcal{A}\wedge\mathcal{B}$, ed $f(A,B,C)$ non deve essere contraddittoria, $f(A,B,C)$ può avere come modello un sottoinsieme non vuoto di quell'insieme di modelli. Una scelta possibile è $f(A,B,C)=\sim A\wedge\sim B\wedge\sim C$ (le altre scelte possibili sono $f(A,B,C)=\sim A\wedge\sim B\wedge C$ e $f(A,B,C)=(\sim A\wedge\sim B\wedge\sim C)\vee(\sim A\wedge\sim B\wedge C)=\sim A\wedge\sim B$).

<u>Esercizio 11</u>

Si provi, utilizzando il metodo di risoluzione, che dalle frasi:

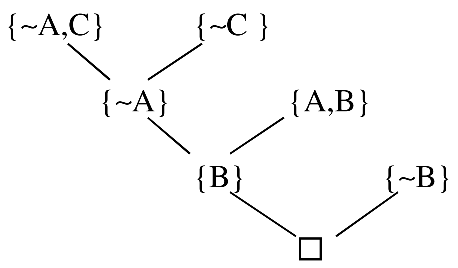
1. La macchina di Giovanni è rossa o decappottabile;
2. Se la macchina di Giovanni è rossa, è una Honda;
3. La macchina di Giovanni non è una Honda;

si deduce che

4. La macchina di Giovanni è decappottabile.

<u>Soluzione</u>

Indichiamo con A l'enunciato "la macchina di Giovanni è rossa", con B l'enunciato "la macchina di Giovanni è decappottabile" con C l'enunciato "la macchina di Giovanni è una Honda". L'enunciato 1. è allora $A\vee B$, l'enunciato 2. è $A\Rightarrow C$, l'enunciato 3. è $\sim C$ e l'enunciato 4 è B. Da $\{A\vee B, A\Rightarrow C, \sim C\}$ si deduce B se e solo $\{A\vee B, A\Rightarrow C, \sim C, \sim B\}$ è insoddisfacibile e quindi se e solo se da $\{A\vee B, A\Rightarrow C, \sim C, \sim B\}$ si ricava per risoluzione la clausola vuota. $\{A\vee B, A\Rightarrow C, \sim C, \sim B\}^c=\{\{A,B\},\{\sim A,C\},\{\sim C\},\{\sim B\}\}$ da cui



<u>Esercizio 12</u>

Dimostrare, usando il teorema di deduzione semantica e la risoluzione, che dalle seguenti ipotesi:

1. Se Barbara va al mare allora almeno uno tra Alberto, Carlo e Davide va al mare;
2. Se Davide va al mare allora Carlo va al mare;
3. Almeno uno tra Barbara e Alberto va al mare e se Carlo va al mare allora Barbara non ci va;

segue l'affermazione:

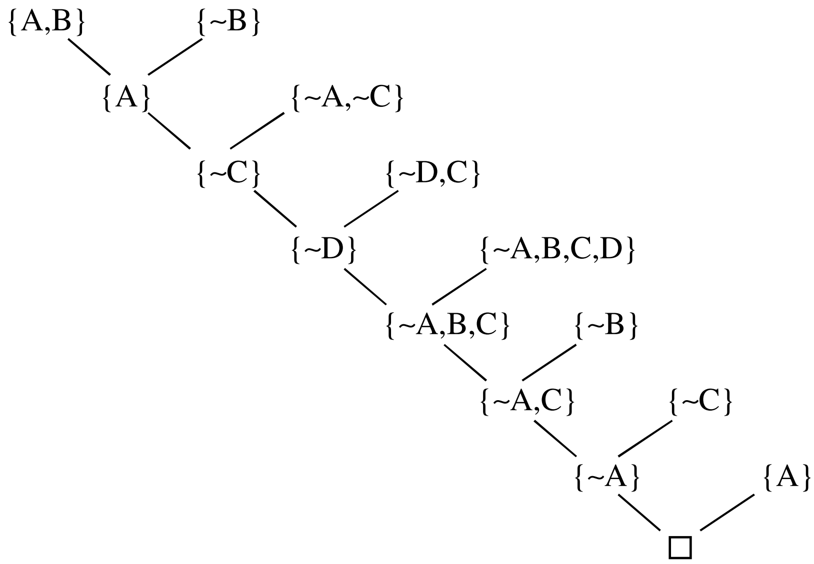
4. Alberto va al mare.

Dire se si può ottenere il risultato usando la risoluzione lineare e usando la risoluzione lineare per input.

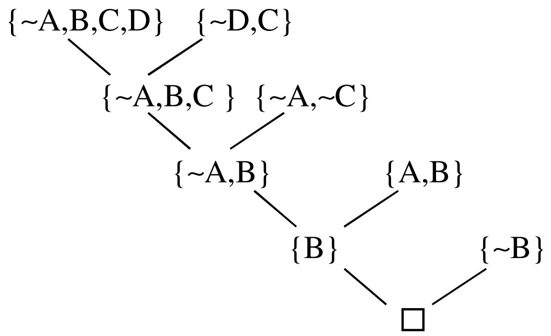
<u>Soluzione</u>

Indichiamo con A l'enunciato "Barbara va al mare", con B l'enunciato "Alberto va al mare", con C l'enunciato "Carlo va al mare", con D l'enunciato "Davide va al mare". L'enunciato 1. è allora $A\Rightarrow B\vee C\vee D$, l'enunciato 2. è $D\Rightarrow C$, l'enunciato 3. è $(A\vee B)\wedge(C\Rightarrow\sim A)$, l'enunciato 4. è B.
Per via semantica dobbiamo dimostrare che ogni modello di $\{A\Rightarrow B\vee C\vee D, D\Rightarrow C, (A\vee B)\wedge(C\Rightarrow\sim A)\}$ è modello di B. I modelli di $A\Rightarrow B\vee C\vee D$ sono $v_1(A)=0, v_1(B)=-, v_1(C)=-, v_1(D)=-$; $v_2(A)=v_2(B)=1$, $v_2(C)=-, v_2(D)=-$; $v_3(A)=v_3(C)=1, v_3(B)=-$, $v_3(D)=-$; $v_4(A)=v_4(D)=1, v_4(B)=-, v_4(C)=-$, dove per un'interpretazione v $v(X)=-$ indica che v può assegnare alla lettera X sia il valore 0 sia il valore 1. I modelli di $D\Rightarrow C$ sono $v_5(A)=-, v_5(B)=-$, $v_5(C)=-$, $v_5(D)=0$; $v_6(A)=-, v_6(B)=-, v_6(C)=1, v_6(D)=1$. I

modelli di $(A\vee B)\wedge(C\Rightarrow\sim A)$ sono $v_7(A)=0, v_7(B)=v_7(C)=1, v_7(D)=-$; $v_8(A)=1, v_8(B)=-$, $v_8(C)=0, v_8(D)=-$.
Un'interpretazione che assegni a B il valore 0, per essere un modello di $(A\vee B)\wedge(C\Rightarrow\sim A)$ dovrebbe assegnare ad A il valore 1 e a C il valore 0 ed in tal caso per essere modello di $A\Rightarrow B\vee C\vee D$ dovrebbe assegnare a D il valore 1, ma allora non sarebbe più modello per $D\Rightarrow C$. Quindi tutti i modelli di $\{A\Rightarrow B\vee C\vee D, D\Rightarrow C, (A\vee B)\wedge(C\Rightarrow\sim A)\}$ devono assegnare a B il valore 1 e quindi essere modello per B. Sappiamo che $\{A\Rightarrow B\vee C\vee D, D\Rightarrow C, (A\vee B)\wedge(C\Rightarrow\sim A)\}\models B$ se e solo se $\{A\Rightarrow B\vee C\vee D, D\Rightarrow C, (A\vee B)\wedge(C\Rightarrow\sim A), \sim B\}$ è insoddisfacibile. Calcoliamo $\{A\Rightarrow B\vee C\vee D, D\Rightarrow C, (A\vee B)\wedge(C\Rightarrow\sim A), \sim B\}^c$.
$A\Rightarrow B\vee C\vee D \equiv \sim A\vee B\vee C\vee D$; $D\Rightarrow C \equiv \sim D\vee C$, $(A\vee B)\wedge(C\Rightarrow\sim A)\equiv (A\vee B)\wedge(\sim A\vee\sim C)$ e quindi $\{A\Rightarrow B\vee C\vee D, D\Rightarrow C, (A\vee B)\wedge(C\Rightarrow\sim A), \sim B\}^c = \{\{\sim A,B,C,D\},\{\sim D,C\},\{A,B\},\{\sim A,\sim C\},\{\sim B\}\}$. Ora



Dunque da $\{A\Rightarrow B\vee C\vee D, D\Rightarrow C, (A\vee B)\wedge(C\Rightarrow\sim A), \sim B\}^c$ si ricava per risoluzione la clausola vuota e dal teorema di completezza per refutazione della risoluzione abbiamo il risultato.
Il risultato è stato ottenuto tramite risoluzione lineare ed è ben noto che la risoluzione lineare per input è completa per refutazione, quindi ogni volta che per risoluzione si ricava la clausola vuota, tale clausola può essere ottenuta tramite risoluzione lineare.
La risoluzione lineare per input non è invece completa per refutazione. La sua completezza è garantita quando si lavora su clausole di Horn e fra le clausole che stiamo considerando $\{\sim A,B,C,D\}$ e $\{A,B\}$ non sono di Horn.
La risoluzione che abbiamo eseguito non è per input in quanto abbiamo utilizzato come clausole ausiliarie le clausole $\{A\}$ e $\{\sim C\}$ che non sono di input.
Tuttavia la derivazione



è una derivazione lineare per input da cui si ricava la clausola vuota.
Per verificare se la clausola vuota può essere ottenuta per risoluzione lineare per input basta modificare in questo modo la definizione di risolvente: sia Γ un insieme di clausole chiamiamo $Ris_{inp}\,\Gamma=Ris\,\Gamma$, $Ris^{n}_{inp}\,\Gamma=Ris^{n-1}_{inp}\,\Gamma\cup\{C|C$ è una risolvente fra una clausola di Γ ed una di $Ris^{n-1}_{inp}\,\Gamma\}$ per ogni $n>1$ e $Ris^*_{inp}\,\Gamma=\bigcup_{n>0} Ris^{n}_{inp}\Gamma$. È ovvio che $\Box$ si ricava per risoluzione per input da Γ se e solo se $\Box$ appartiene a $Ris^*_{inp}\,\Gamma$ (che come nel caso del solito risolvente si ottiene con un numero di passi limitato in funzione del numero di lettere enunciative che compaiono nelle clausole di partenza).

Esercizio 13
Si scrivano sotto forma di formule di logica proposizionale le seguenti frasi
a) Se Luisa ha guardato la televisione, si sente depressa.
b) Se Luisa non è informata delle notizie, si sente depressa.
c) Luisa è informata delle notizie se ha guardato la televisione o ha letto il giornale.
d) Luisa si sente depressa quando non ha letto il giornale.
e) Se Luisa ha letto il giornale non si sente depressa
Dire se la frase d) è conseguenza semantica di a), b), c) e fare lo stesso per la frase e).
Ritrovare i risultati precedenti facendo uso della risoluzione.
Soluzione
Indichiamo con A l'enunciato "Luisa ha guardato la televisione", con B l'enunciato "Luisa si sente depressa", con C l'enunciato "Luisa è informata delle notizie", con D l'enunciato "Luisa ha letto il giornale". L'enunciato a) è allora $A\Rightarrow B$, l'enunciato b) è $\sim C\Rightarrow D$, l'enunciato c) è $A\vee D\Rightarrow C$, l'enunciato d) $\sim D\Rightarrow B$ l'enunciato e) è $D\Rightarrow\sim B$.
Per verificare per via semantica se frase d) è conseguenza semantica di a), b), c) dobbiamo verificare se ogni modello di $\{A\Rightarrow B, \sim C\Rightarrow D, A\vee B \Rightarrow C\}$ è modello di $\sim D\Rightarrow B$. I modelli di $A\Rightarrow B$ sono $v_1(A)=0,v_1(B)=-,v_1(C)=-,v_1(D)=-$; $v_2(A)=v_2(B)=1$, $v_2(C)=-,v_2(D)=-$,)=–, dove $v(X)=-$ indica che la lettera X può assumere sia il valore 0 sia il valore 1 nell'interpretazione v; i modelli di $\sim C\Rightarrow D$ sono $v_3(A)=-,v_3(B)=-,v_3(C)=1,v_3(D)=-$; $v_4(A)=-,v_4(B)=-,v_4(C)=0,v_4(D)=1$; i modelli di $A\vee D\Rightarrow C$ sono $v_5(A)=0,v_5(B)=-,v_5(C)=-,v_5(D)=0$; $v_6(A)=v_6(C)=1,v_6(B)=-,v_6(D)=-$; $v_7(A)=0,v_7(B)=-$, $v_7(C)=v_7(D)=1$. I modelli di $\{A\Rightarrow B, \sim C\Rightarrow D, A\vee B \Rightarrow C\}$ sono allora $w_1(A)=0,w_1(B)=-$, $w_1(C)=1,w_1(D)=-$ e $w_2(A)=w_2(B)=w_2(C)=1$, $w_2(D)=-$. Ora se consideriamo l'interpretazione che assegna ad A il valore 1, a B il valore 0 , a C il valore 1 e a D il valore 0 (caso particolare di w_1), questa non è modello per $\sim D\Rightarrow B$, pur essendo modello di $\{A\Rightarrow B, \sim C\Rightarrow D, A\vee B \Rightarrow C\}$ e quindi da $\{A\Rightarrow B, \sim C\Rightarrow D, A\vee B \Rightarrow C\}$ non si deduce $\sim D\Rightarrow B$. Verifichiamo analogamente se ogni modello di $\{A\Rightarrow B, \sim C\Rightarrow D, A\vee B \Rightarrow C\}$ è modello di $D\Rightarrow\sim B$. Si osserva subito che l'interpretazione $w(D)=0,w(B)=1$, $w(A)=w(C)=1$ (che è una particolarizzazione di w_2) è un modello per $\{A\Rightarrow B, \sim C\Rightarrow D, A\vee B \Rightarrow C\}$ ma non per $D\Rightarrow\sim B$ e quindi $D\Rightarrow\sim B$ non è conseguenza semantica di $\{A\Rightarrow B, \sim C\Rightarrow D, A\vee B \Rightarrow C\}$.
Ritroviamo ora i risultati con la risoluzione.
Sappiamo che $\{A\Rightarrow B, \sim C\Rightarrow D, A\vee D \Rightarrow C\}\models\sim D\Rightarrow B$ se e solo se $\{A\Rightarrow B, \sim C\Rightarrow D, A\vee D \Rightarrow C, \sim(\sim D\Rightarrow B)\}$ è insoddisfacibile. Calcoliamo $\{A\Rightarrow B, \sim C\Rightarrow D, A\vee D \Rightarrow C, \sim(\sim D\Rightarrow B)\}^c$.
$A\Rightarrow B \equiv\sim A\vee B$; $\sim C\Rightarrow D \equiv C\vee D$; $A\vee D\Rightarrow\sim C\equiv\sim(A\vee D)\vee C\equiv(\sim A\wedge\sim D)\vee C\equiv(\sim A\vee C)\wedge(\sim D\vee C)$; $\sim(\sim D\Rightarrow B)\equiv\sim(D\vee B)\equiv\sim D\wedge\sim B$ e quindi $\{A\Rightarrow B, \sim C\Rightarrow D, A\vee D \Rightarrow C, \sim(\sim D\Rightarrow B)\}^c$ $=\{\{\sim A,B\},\{C,D\},\{\sim A,C\},\{\sim D,C\},\{\sim D\},\{\sim B\}\}$. Ora possiamo considerare $\Gamma=\{\{\sim A,B\},\{C,D\},\{\sim A,C\},\{\sim D\},\{\sim B\}\}$, in quanto ogni modello di $\{\sim D\}$ è modello per $\{\sim D,C\}$ e si ha $Ris\,\Gamma=\Gamma\cup\{\{\sim A\},\{C\}\}=Ris^2\,\Gamma$. Pertanto $Ris^*\Gamma=Ris\,\Gamma$ non contiene la clausola vuota e dunque da $\{\{\sim A,B\},\{C,D\},\{\sim A,C\},\{\sim D,C\},\{\sim D\},\{\sim B\}\}$ non si ricava per risoluzione la clausola vuota e dunque $\{A\Rightarrow B, \sim C\Rightarrow D, A\vee D \Rightarrow C, \sim(\sim D\Rightarrow B)\}$ è insoddisfacibile.

Analogamente $\{A\Rightarrow B, \sim C\Rightarrow D, A\vee D \Rightarrow C\}\models\sim B\Rightarrow D$ se e solo se $\{A\Rightarrow B, \sim C\Rightarrow D, A\vee D \Rightarrow C, \sim(D\Rightarrow\sim B)\}$ è insoddisfacibile. Essendo $\sim(D\Rightarrow\sim B)\equiv B\wedge D$, $\{A\Rightarrow B, \sim C\Rightarrow D, A\vee D \Rightarrow C, \sim(D\Rightarrow\sim B)\}^c=\{\{\sim A,B\},\{C,D\},\{\sim A,C\},\{\sim D,C\},\{B\},\{D\}\}$. Ora possiamo considerare $\Gamma=\{\{\sim A,C\},\{\sim D,C\},\{B\},\{D\}\}$, in quanto ogni modello di $\{D\}$ è modello per $\{D,C\}$ e ogni modello di $\{B\}$ è modello per $\{\sim A,B\}$ e abbiamo
$\mathrm{Ris}\,\Gamma=\Gamma\cup\{\{C\}\}=\mathrm{Ris}^2\,\Gamma$. Pertanto $\mathrm{Ris}^*\Gamma=\mathrm{Ris}\,\Gamma$ non contiene la clausola vuota e dunque da $\{\{\sim A,B\},\{C,D\},\{\sim A,C\},\{\sim D,C\},\{B\},\{D\}\}$ non si ricava per risoluzione la clausola vuota e dunque $\{\{\sim A,B\},\{C,D\},\{\sim A,C\},\{\sim D,C\},\{B\},\{D\}\}$ è insoddisfacibile.