

P. Mazzoldi

M. Nigro

C. Voci

*Dipartimento di Fisica Galileo Galilei Padova*

**Questo E-Books deve essere cancellato entro le 24 ore successive al download nel caso non si possieda il libro originale. Nessuna garanzia di alcun tipo tutela il materiale fornito e l'utente si impegna ad utilizzarlo a suo rischio e pericolo. Il libro è a scopo informativo e non è assolutamente da considerarsi promozione della pirateria; a tal proposito è reato servirsene a scopo di lucro o di profitto.**

# FISICA

Vol. II

ELETTRONAGNETISMO – ONDE

SECONDA EDIZIONE

EdiSES

P. Mazzoldi - M. Nigro - C. Voci  
FISICA - Vol. II Seconda edizione  
Copyright © 1991, 1998, EdiSES s.r.l.

9 8 7 6 5 4 3 2 1 0

2002 2001 2000 1999 1998

*Le cifre sulla destra indicano il numero e l'anno dell'ultima ristampa effettuata*

STOP

*A norma di legge, le pagine di questo volume non possono essere fotocopiate o ciclostilate o comunque riprodotte con alcun mezzo meccanico. La casa editrice sarebbe particolarmente spiacente di dover promuovere, a sua tutela, azioni legali verso coloro che arbitrariamente non si adeguano a tale norma.*

*L'Editore*

*Fotocomposizione: EdiSES s.r.l. - Napoli  
Fotoincisione: Centro DMS - Napoli*

*Stampato presso la  
Sograte s.r.l. - Zona Ind. Regnano  
Città di Castello (PG) - Tel. 075/8518004*

*per conto della  
EdiSES - Napoli Via Nuova San Rocco 62/A - P.co Soleado  
Tel. 081/7441706-07 Fax 081/7441705*

ISBN 88 7959 152 5

# Indice generale

---

<b>Capitolo 1</b>	<b>Forza elettrica.</b>				
	<b>Campo elettrostatico</b>	<b>1</b>			
1.1	Cariche elettriche. Isolanti e conduttori	1			
1.2	Struttura elettrica della materia	3			
1.3	Misura delle cariche elettriche. Legge di Coulomb	5			
1.4	Campo elettrostatico	11			
1.5	Campo elettrostatico prodotto da una distribuzione continua di carica	14			
1.6	Linee di forza del campo elettrostatico	20			
1.7	Moto di una carica in un campo elettrostatico. Esperienza di Rutherford	21			
1.8	Determinazione della carica elementare. Esperienza di Millikan	25			
1.9	Commenti conclusivi	27			
			<b>3.6</b>		
			Riepilogo sulle operazioni di gradiente, rotore, divergenza		
			86		
<b>Capitolo 2</b>	<b>Lavoro elettrico.</b>				
	<b>Potenziale elettrostatico</b>	<b>29</b>			
2.1	Lavoro della forza elettrica. Tensione, potenziale	29			
2.2	Calcolo del potenziale elettrostatico	31			
2.3	Energia potenziale elettrostatica	35			
2.4	Il campo come gradiente del potenziale	45			
2.5	Superficie equipotenziali	51			
2.6	Rotore di un campo vettoriale. Teorema di Stokes. Applicazione al campo elettrostatico	52			
2.7	Il dipolo elettrico	57			
2.8	Potenziale di un sistema di cariche nell'approssimazione di dipolo	59			
2.9	La forza su un dipolo elettrico	62			
			<b>4.11</b>		
			Funzioni armoniche. Problemi di Dirichlet		
			124		
<b>Capitolo 3</b>	<b>La legge di Gauss</b>				
3.1	Flusso del campo elettrico. Legge di Gauss	68			
3.2	Alcune applicazioni e conseguenze della legge di Gauss	68			
3.3	Campo elettrostatico nell'intorno di uno strato superficiale di carica	72			
3.4	Legge di Gauss in forma differenziale. Divergenza di un campo vettoriale	78			
3.5	Equazioni di Maxwell per l'elettrostatica. Equazioni di Poisson e di Laplace	79			
			82		
			<b>Capitolo 4</b>		
			<b>Conduttori.</b>		
			<b>Energia elettrostatica</b>	<b>89</b>	
			4.1	Conduttori in equilibrio	89
			4.2	Capacità di un conduttore isolato	91
			4.3	Conduttore cavo. Schermo elettrostatico	93
			4.4	Sistemi di conduttori	98
			4.5	Condensatori	101
			4.6	Collegamento di condensatori	104
			4.7	Energia del campo elettrostatico	108
			4.8	Energia di un sistema di cariche	111
			4.9	Forza tra le armature di un condensatore. Pressione elettrostatica	115
			4.10	Il metodo delle cariche immaginari	120
			4.11	Funzioni armoniche. Problemi di Dirichlet	124
			<b>Capitolo 5</b>	<b>Dielettrici</b>	<b>127</b>
			5.1	La costante dielettrica	127
			5.2	Polarizzazione dei dielettrici	130
			5.3	Campo elettrico prodotto da un dielettrico polarizzato	131
			5.4	Campo elettrico all'interno di un dielettrico polarizzato	134
			5.5	Equazioni generali dell'elettrostatica in presenza di dielettrici. Il vettore induzione dielettrica	135
			5.6	Dipendenza della polarizzazione dal campo elettrico. Mezzi isotropi e anisotropi	138
			5.7	Discontinuità dei campi sulla superficie di separazione tra due dielettrici	141
			5.8	Campo elettrico all'interno di una cavità in un dielettrico	145
			5.9	L'energia elettrostatica nei dielettrici	147
			5.10	Meccanismi di polarizzazione nei dielettrici isotropi	152
			5.11	La costante dielettrica dei liquidi. Equazione di Clausius-Mossotti	158
			5.12	Cenno ai meccanismi di polarizzazione nei solidi	160

<b>Capitolo 6 Corrente elettrica</b>	<b>161</b>	<b>Capitolo 9 Proprietà magnetiche della materia</b>	<b>269</b>
6.1 Conduzione elettrica	161	9.1 Magnetizzazione della materia	269
6.2 Corrente elettrica	164	9.2 Permeabilità magnetica e suscettività magnetica	271
6.3 Legge di conservazione della carica.	166	9.3 Correnti amperiane e magnetizzazione	274
6.4 Regime di corrente stazionaria	168	9.4 Equazioni generali della magnetostatica. Il campo H	276
6.5 Modello classico della conduzione elettrica. Legge di Ohm	171	9.5 Discontinuità dei campi sulla superficie di separazione tra due mezzi magnetizzati.	282
6.6 Legge di Ohm per i conduttori metallici. Resistenza elettrica. Effetto Joule	179	Campi all'interno di una cavità	282
6.7 Resistori in serie e in parallelo	181	Confronto tra le leggi dell'elettrostatica e della magnetostatica in mezzi omogenei indefiniti	287
6.8 Forza elettromotrice. Legge di Ohm generalizzata	186	Sostanze ferromagnetiche	289
6.9 Il generatore Van der Graaf	188	Circuiti magnetici	292
6.10 Carica e scarica di un condensatore attraverso un resistore	192	Elettromagneti, magneti permanenti	295
6.11 Leggi di Kirchhoff per le reti elettriche	195	Correnti elettriche e momenti magnetici atomici	302
6.12 Alcuni circuiti particolari in corrente continua	199	Teoria microscopica classica del diamagnetismo e del paramagnetismo	307
6.13 Calcolo della resistenza di conduttori tridimensionali	200	Cenno alla teoria del ferromagnetismo	313
6.14 Conduzione elettrolitica	205		
<b>Capitolo 7 Forza magnetica. Campo magnetico</b>	<b>208</b>	<b>Capitolo 10 Campi elettrici e magnetici variabili nel tempo</b>	<b>318</b>
7.1 Primi fatti sperimentali sull'interazione magnetica	208	10.1 Legge di Faraday dell'induzione elettromagnetica	319
7.2 Linee di forza del campo magnetico. Legge di Gauss per il campo magnetico	212	10.2 Origine fisica della forza elettromotrice indotta	321
7.3 Forza magnetica su una carica in moto	214	10.3 Applicazioni delle leggi di Faraday	328
7.4 Forza magnetica su un conduttore percorso da corrente	218	10.4 Legge di Felici. Misure di campo magnetico	335
7.5 Momenti meccanici su circuiti piani. Principio di equivalenza di Ampère	221	10.5 Autoinduzione	337
7.6 Espressioni di forza, momento e lavoro tramite il flusso magnetico	224	10.6 Energia magnetica	340
7.7 Effetto Hall	230	10.7 Pressione magnetica. Forze su corpi magnetizzati	346
7.8 Esempi di moti di particelle caricate in campo magnetico uniforme	232	10.8 Induzione mutua	350
<b>Capitolo 8 Sorgenti del campo magnetico. Legge di Ampère</b>	<b>240</b>	10.9 Energia magnetica di circuiti accoppiati	351
8.1 Campo magnetico prodotto da una corrente	240	10.10 Corrente di spostamento. Legge di Ampère-Maxwell	357
8.2 Calcoli di campi magnetici prodotti da circuiti particolari	243	10.11 Equazioni di Maxwell	361
8.3 Azioni elettrodinamiche tra circuiti percorsi da corrente	250		
8.4 Legge di Ampère	252		
8.5 Flusso tra circuiti. Autoflusso	258		
8.6 Proprietà del campo magnetostatico nel vuoto	261		
8.7 Potenziale vettore	263		
8.8 Le trasformazioni dei campi elettrici e magnetici	267		
<b>Capitolo 11 Oscillazioni elettriche. Correnti alternate</b>	<b>366</b>		
11.1 Oscillazioni smorzate in un circuito RLC	366		
11.2 Oscillazioni permanenti in un circuito RLC	371		
11.3 Circuiti in corrente alternata. Impedenza	374		
11.4 Metodo simbolico per i circuiti in corrente alternata	382		
11.5 Alcune applicazioni	387		
11.6 Potenza in regime alternato	392		
11.7 Generatori e motori	395		

<b>Problemi di Elettromagnetismo</b>	399	14.6	Propagazione di un'onda piana elettromagnetica in un mezzo anisotropo	562
<b>Guida alla risoluzione dei problemi di Elettromagnetismo. Risultati numerici</b>	420	14.7	Applicazioni della birifrangenza	567
		14.8	Birifrangenza elettrica, magnetica e meccanica	574
		14.9	Attività ottica	575
		14.10	Riflessione su una superficie metallica	577
<b>Capitolo 12 Fenomeni ondulatori</b>	443			
12.1 Descrizione di un'onda. Equazione differenziale delle onde piane	443	14.1	Capitolo 15 Interferenza	578
12.2 Richiamo sulle onde elastiche	446	15.1	Somma di onde. Fenomeni di interferenza.	
12.3 Onde piane armoniche	457	15.2	Sorgenti coerenti e incoerenti	578
12.4 Analisi di Fourier	459	15.3	Interferenza prodotta da due sorgenti.	
12.5 Onde longitudinali. Onde trasversali. Polarizzazione	461	15.4	Caso delle onde hertziane e delle onde sonore	581
12.6 Onde sulla superficie di un liquido	463	15.5	Interferenza di due onde luminose.	
12.7 Propagazione dell'energia. Intensità di un'onda	465	15.6	Esperimento di Young	587
12.8 Intensità delle onde sonore. Battimenti	469	15.7	Applicazioni del metodo di Young	594
12.9 Onde in più dimensioni	474	15.8	Interferenza prodotta da $N$ sorgenti coerenti	
12.10 Pacchetti d'onde	480	15.9	Interferenza delle onde luminose su lame sottili	597
12.11 Velocità di fase e velocità di gruppo	483	15.10	Interferenza con riflessioni e trasmissioni multiple	602
12.12 Effetto Doppler. Onda d'urto	487	15.11	Onde stazionarie in una corda tesa	611
		15.12	Onde stazionarie in una colonna di gas	612
			Onde elettromagnetiche stazionarie.	618
<b>Capitolo 13 Onde elettromagnetiche</b>	490		Esperienza di Hertz	620
13.1 Onde elettromagnetiche piane	490	15.13	Onde stazionarie bidimensionali e tridimensionali. Radiazione di cavità	622
13.2 Polarizzazione delle onde elettromagnetiche piane	495	15.14	Cavità risonanti. Guide d'onda	627
13.3 Energia di un'onda elettromagnetica piana. Vettore di Poynting	498			
13.4 Quantità di moto di un'onda elettromagnetica piana. Pressione di radiazione	502			
13.5 Onde elettromagnetiche piane, sferiche, cilindriche	505	<b>Capitolo 16 Diffrazione</b>	631	
13.6 Radiazione elettromagnetica prodotta da un dipolo elettrico oscillante	507	16.1	Fenomeni di diffrazione di Fraunhofer e di Fresnel	631
13.7 Radiazione emessa da una carica elettrica in moto accelerato	511	16.2	Diffrazione ad una fenditura rettilinea	632
13.8 Radiazione emessa dagli atomi. Diffusione della luce	514	16.3	Diffrazione ad un foro circolare e da parte di un disco opaco	636
13.9 Propagazione di un'onda elettromagnetica in un mezzo dielettrico. Dispersione	518	16.4	Limite di risoluzione delle lenti	638
13.10 Onde elettromagnetiche nei conduttori	525	16.5	Reticolo di diffrazione	641
13.11 Effetto Doppler. Effetto Cerenkov	528	16.6	Potere dispersivo e potere risolutivo di un reticolo di diffrazione	644
13.12 Spettro delle onde elettromagnetiche	531	16.7	Spettroscopia con il reticolo di diffrazione	647
13.13 La velocità della luce	536	16.8	Fenomeni di diffrazione di Fresnel	651
		16.9	Olografia	655
		16.10	Diffrazione dei raggi X	658
<b>Capitolo 14 Riflessione e rifrazione delle onde</b>	539			
14.1 Introduzione	539	<b>Capitolo 17 Ottica geometrica</b>	662	
14.2 Teorema di Kirchhoff. Principio di Huygens-Fresnel	539	17.1	Leggi della riflessione e della trasmissione	662
14.3 Le leggi della riflessione e della rifrazione	542	17.2	Definizioni e convenzioni	664
14.4 Intensità delle onde elettromagnetiche riflesse e riferate. Formule di Fresnel	548	17.3	Specchi	665
14.5 Riflessione e rifrazione di onde elastiche	560	17.4	Diotri	670
		17.5	Lenti sottili	673

17.6	Lenti spesse. Sistemi diottici centrati	677	<b>Capitolo 19</b>	<b>Proprietà degli elettroni nei solidi</b>	724
17.7	Aberrazioni	681	19.1	Introduzione	724
17.8	Strumenti ottici. L'occhio	683	19.2	Struttura elettronica degli atomi	724
17.9	Dispersione. Prisma	686	19.3	Legami nelle molecole e nei solidi.	
17.10	Il principio di Fermat	689	19.4	Bande di energia	730
17.11	Note e commenti	690	19.5	Il gas di elettroni liberi di Fermi	736
			19.6	Gas di elettroni all'interno di un reticolo	741
			19.7	cristallino	
			19.8	Conduttori e isolanti. Semiconduttori	743
			19.9	Superconduttività	749
			19.10	Effetto Volta. Effetti termoelettrici	752
<b>Capitolo 18 Proprietà corpuscolari e ondulatorie della radiazione e della materia</b>					757
18.1	Introduzione	692	<b>Problemi di Onde</b>		
18.2	Radiazione termica. Corpo nero	692	<b>Guida alla risoluzione dei problemi</b>		
18.3	Legge di Planck	696	<b>di Onde. Risultati numerici</b>		
18.4	Effetto fotoelettrico	698	769		
18.5	Effetto Compton. Produzione di coppie	702			
18.6	Righe spettrali. Modello di Bohr.				
	Livelli energetici	707	<b>Indice analitico</b>		
18.7	Onde materiali. Relazione di de Broglie	713			
18.8	Il principio di indeterminazione	717			

# **ELETTRONAGNETISMO**



# Forza elettrica. Campo elettrostatico



## 1.1 Cariche elettriche. Isolanti e conduttori

Tra le interazioni fondamentali esistenti in natura la prima ad essere scoperta e studiata quantitativamente è stata l'interazione gravitazionale, responsabile di gran parte dei fenomeni che si osservano su scala macroscopica nell'universo. Il moto dei pianeti attorno al sole come il moto rispetto alla terra, sia di un corpo qualsiasi che di un satellite artificiale, sono regolati dalla *legge di Newton* che fornisce, per il modulo della forza gravitazionale, l'espressione

$$F_g = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} : \quad (1.1) \quad \text{Legge di Newton}$$

due corpi di masse  $m_1$  e  $m_2$ , posti a distanza  $r$  molto grande rispetto alle dimensioni dei corpi stessi, interagiscono con una forza attrattiva la cui intensità è proporzionale al prodotto delle masse e inversamente proporzionale al quadrato della distanza. Le masse dei corpi, da cui dipende l'interazione, possono essere assunte eguali alle masse inerziali, cioè a quelle che compaiono nelle leggi del moto  $F = ma$ . La costante  $\gamma = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$ , che descrive l'intensità dell'interazione, è *universale*: il suo valore è indipendente sia dal valore che da qualsiasi altra caratteristica delle masse interagenti. Alcune conseguenze importanti di (1.1) sono esposte nel capitolo 5 del primo volume.

Un'altra *interazione* fondamentale, che gioca un ruolo essenziale nella costituzione della materia, è quella *elettromagnetica*, le cui leggi vennero formulate in modo quantitativo tra la fine del settecento e la metà dell'ottocento. Un aspetto particolare dell'interazione elettromagnetica è la *forza elettrica*: le sue proprietà costituiscono l'argomento dei primi capitoli di questo volume.

L'osservazione di fenomeni legati alla forza elettrica, ovvero di natura elettrica, risale al settimo secolo a.C., quando si scoprì che l'ambra, l'ebanite e altri materiali, strofinati con un panno di lana, acquistano la proprietà di attirare corpuscoli leggeri, quali granelli di polvere e pagliuzze. Queste osservazioni, tramandate inalterate per oltre venti secoli, vennero riprese nel sedicesimo secolo da W. Gilbert il quale, attraverso un'analisi sistematica, individuò tutta una serie di sostanze, dal diamante al vetro e allo zolfo, che presentano lo stesso comportamento. Egli chiamò *elettrizzati* i materiali che acquistavano la proprietà di attirare i corpuscoli leggeri e *forza elettrica* la forza che si manifestava (dal termine *electron*, che è il nome greco dell'ambra).

Oggi noi attribuiamo le forze in parola a *cariche elettriche*, che preesistono nei corpi e che passano da un corpo all'altro durante lo strofinio, per cui i *corpi elettrizzati* si chiamano anche *elettricamente carichi*.

Questi corpi che si caricano per strofinio sono detti *isolanti*, in quanto capaci di trattenere la carica elettrica, mentre altri, come ad esempio i metalli e il corpo umano stesso, non trattengono la carica e sono detti *conduttori*; in effetti, se proviamo a strofinare con un panno una bacchetta di metallo, constatiamo che esso non si elettrizza.

Il metodo dell'elettrizzazione per strofinio può essere applicato sistematica-

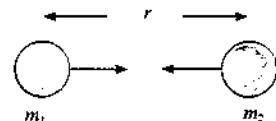


Figura 1.1

Forza elettrica

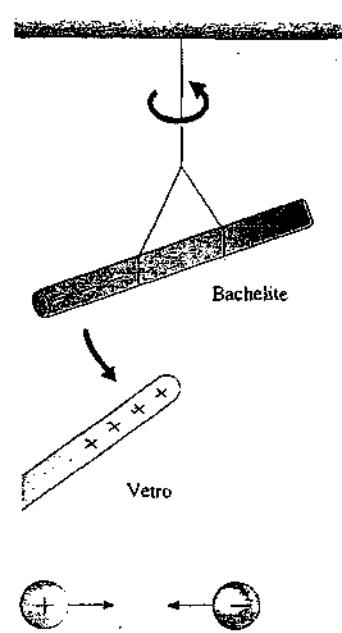


Figura 1.2

mente a un gran numero di materiali isolanti, tra cui anche i materiali sintetici attualmente disponibili (bachelite, plexiglass, materie plastiche in generale), con i seguenti risultati che rivestono carattere generale:

- esistono due specie di materiali isolanti, quelli che si comportano come il vetro e quelli che si comportano come la bachelite;
- tra due bacchette elettrizzate della medesima specie (entrambe tipo vetro o entrambe tipo bachelite) si manifesta sempre una forza repulsiva;
- tra due bacchette elettrizzate di specie diversa (una tipo vetro e l'altra tipo bachelite) si manifesta sempre una forza attrattiva;
- una forza attrattiva si manifesta in ogni caso tra la bacchetta di isolante e il materiale con cui è stata elettrizzata per strofinio.

Da questo insieme di fatti sperimentali si deduce che esistono *due diversi tipi di cariche elettriche*; per convenzione è stata chiamata *positiva* la carica che compare sulla superficie delle sostanze tipo *vetro* quando vengono elettrizzate, mentre è stata chiamata *negativa* la carica che compare sulla superficie delle sostanze tipo *bachelite*. Possiamo allora sintetizzare così i risultati precedenti:

- due corpi isolanti carichi entrambi positivamente o entrambi negativamente si respingono;
- un corpo isolante carico positivamente e uno carico negativamente si attraggono;
- nel processo di carica per strofinio i due corpi, la bacchetta di isolante e il panno, acquistano sempre una carica di segno opposto.

La carica che si accumula per strofinio sugli isolanti si mantiene per tempi considerevoli, specialmente se l'aria nell'ambiente in cui si opera è secca.

Invece, come abbiamo già rilevato, non è possibile caricare per strofinio una bacchetta di metallo tenendola in mano, come si fa con le bacchette di isolante. Gli effetti di elettrizzazione si osservano però se la bacchetta di metallo è sostenuta da un supporto di materiale isolante e in tal caso il comportamento dei metalli è simile a quello degli isolanti.

L'assenza di elettrizzazione se non si adotta la suddetta precauzione si spiega col fatto, già ricordato, che i metalli e il corpo umano sono conduttori, cioè permettono il movimento della carica elettrica accumulata durante lo strofinio, a differenza di quanto avviene negli isolanti. Dal punto di vista di questi esperimenti hanno caratteristiche di conduttori anche il suolo, svariati liquidi tra cui l'acqua e anche l'aria umida. Allora, dalla bacchetta di metallo tenuta in mano e strofinata la carica si disperde (molto rapidamente) nel corpo umano e, se possibile, nel suolo; analogamente, in una giornata umida un corpo isolante carico mantiene meno facilmente la carica, che tende a disperdersi (lentamente) nell'aria conduttrice verso i corpi circostanti.

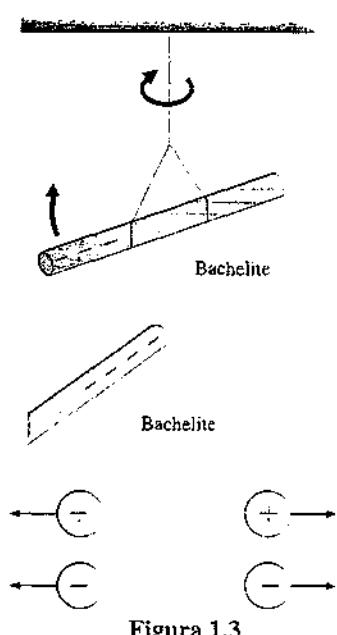


Figura 1.3

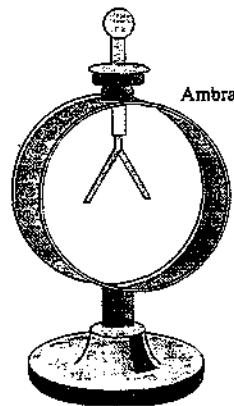
#### *L'elettroscopio a foglie*

L'elettroscopio a foglie è il primo strumento costruito per rivelare e riconoscere lo stato (relativo) di carica. Esso è costituito da due foglioline metalliche molto sottili, d'oro o di alluminio, sospese ad una asticciola metallica. Allo scopo di proteggere le foglie da movimenti dell'aria che ne altererebbero la posizione queste sono contenute in un involucro di vetro; l'asticciola esce dall'involucro attraverso un tappo di ottimo materiale isolante, ad esempio ambra.

Se si tocca con una bacchetta carica l'estremità dell'asticciola, le due foglie acquistano dalla bacchetta tramite l'asticciola una data carica, dello stesso segno, per cui tendono a divergere. L'equilibrio statico di ciascuna foglia (Fig. 1.4), caratterizzato da un certo angolo di deflessione  $\alpha$ , si raggiunge quando è nulla la risul-

tante delle forze agenti sulla foglia, come discuteremo nell'esempio 1.4. Lo strumento può essere completato da una scala graduata per la misura dell'angolo  $\alpha$ .

L'elettroscopio permette di riconoscere il segno relativo della carica dei corpi. Se ad esempio tocchiamo l'elettroscopio precedentemente caricato con una carica di un dato segno con una bacchetta carica con lo stesso segno la deflessione delle foglie aumenta, mentre se la carica della bacchetta è di segno opposto la deflessione diminuisce.



## 1.2 Struttura elettrica della materia

I fenomeni descritti finora si spiegano in modo coerente con l'ipotesi della preesistenza delle cariche elettriche nei corpi, ovvero con l'ipotesi che i costituenti elementari della materia possiedono carica elettrica.

Per le nostre considerazioni possiamo dire che la materia stabile che ci circonda (corpi terrestri, pianeti, la nostra galassia) è formata da tre costituenti elementari, il *protone p*, il *neutrone n*, l'*elettrone e*.

La massa del protone, entro qualche permille, è eguale alla massa del neutrone e vale  $m_p \cong m_n \cong 1.67 \cdot 10^{-27}$  kg; la massa dell'elettrone è  $m_e \cong 9.11 \cdot 10^{-31}$  kg, circa 1840 volte più piccola della massa del protone e del neutrone (i valori precisi sono dati nella tabella 1.1 del paragrafo 1.3).

Sulla base dei dati sperimentali attuali il protone e il neutrone hanno dimensioni dell'ordine di  $10^{-15}$  m, cioè del *femtometro*, unità che in fisica nucleare è anche chiamata *fermi*. Con i mezzi di indagine attualmente disponibili si può affermare che le dimensioni dell'elettrone sono inferiori a  $10^{-17}$  m: esso ci appare puntiforme, cioè privo di struttura interna (su questo argomento ritorneremo nell'esempio 4.19).

La carica elettrica dell'elettrone è la più piccola osservata sperimentalmente: essa è chiamata *carica elementare* ed è indicata con  $-e$ ; il segno evidenzia l'assunzione che la carica dell'elettrone sia negativa. Il protone ha una carica positiva  $+e$ , eguale in valore assoluto a quella dell'elettrone, il neutrone invece ha carica elettrica nulla (è neutro).

Il carattere elementare della carica dell'elettrone è suffragato, oltre che dall'esperimento di Millikan (paragrafo 1.8), anche dal fatto che tutte le particelle subatomiche osservate hanno una carica che, in valore assoluto, è eguale alla carica elementare  $e$  oppure è multipla intera di questa. Questa situazione si esprime dicendo che la carica elettrica è una grandezza *quantizzata*.

I tre costituenti si aggregano in strutture che si chiamano *atomi*. Precisamente, un certo numero di protoni e neutroni, legati dall'*interazione forte* (un altro tipo di interazione fondamentale esistente in natura) costituiscono il nucleo dell'atomo, che risulta quindi carico positivamente; attorno al nucleo si muove un certo numero di elettroni, sotto l'azione elettrica attrattiva esercitata dal nucleo. La configurazione di questi elettroni è determinata dalle leggi della meccanica quantistica ed è caratteristica del tipo di atomo.

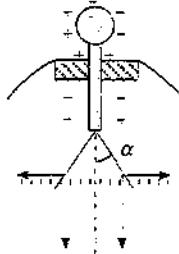
La composizione di un atomo è descritta da due numeri:

- il *numero atomico Z* che dà il numero di protoni ed elettroni esistenti nell'atomo;
- il *numero di massa A = Z + N*, somma del numero Z di protoni e N di neutroni che formano il nucleo dell'atomo.

Poiché il numero di protoni in ogni atomo è eguale al numero di elettroni, la carica elettrica totale, somma delle singole cariche, è nulla e l'*atomo è neutro*.

Le proprietà di massa di un atomo sono rappresentate dal numero di massa A; in effetti oltre il 99.9% della massa di un atomo è concentrato nel nucleo. Le dimensioni dei nuclei variano da  $10^{-15}$  m (nuclei leggeri) fino a  $10^{-14}$  m per i nuclei più

Carica elementare



$$\tan \alpha = \frac{F_r}{F_s}$$

Figura 1.4

Numero atomico Z

Numero di massa A

pesanti; si è trovato sperimentalmente che il raggio di un nucleo atomico è dato con buona approssimazione dalla formula

$$r = R_0 A^{1/3} \quad \text{con} \quad R_0 = 1.5 \cdot 10^{-15} \text{ m}$$

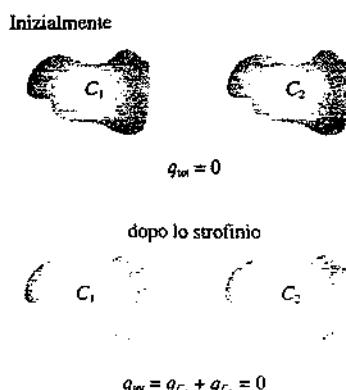


Figura 1.5

La carica elettrica  
è quantizzata

Principio di conservazione  
della carica

Ione negativo  
Ione positivo

La dipendenza da  $A$  è proprio quella attesa per una distribuzione uniforme di massa nel nucleo (si veda l'esempio 4.18). Le dimensioni degli atomi sono dell'ordine di  $10^{-10}$  m e coincidono con lo spazio entro cui si muovono gli elettroni.

Le proprietà elettriche di un atomo sono invece descritte dal numero atomico  $Z$ ; in particolare dalla configurazione degli  $Z$  elettroni attorno al nucleo dipendono la capacità di un atomo di legarsi ad altri atomi e quindi le sue *proprietà chimiche*.

Gli elettroni di un atomo, specialmente quelli periferici, sono più o meno legati al nucleo: da ciò deriva la differenza tra materiali isolanti e conduttori. Negli isolanti gli elettroni sono ben vincolati al nucleo e non possono spostarsi attraverso il corpo: gli isolanti non trasportano facilmente la carica. Mediante una specifica azione locale, quale lo strofinio con un panno, si può far passare, nei punti di contatto, un certo numero  $n$  di elettroni e quindi una carica  $-q = -ne$  da un corpo  $C_1$ , ad esempio una bacchetta di vetro, ad un corpo  $C_2$ , il panno;  $C_2$  risulta carico negativamente nei punti di contatto con  $C_1$  e tale carica non si muove verso altre zone di  $C_2$ . Invece in  $C_1$ , nei punti di contatto è presente un eccesso di carica positiva  $q = ne$ . Nel caso di isolanti tipo bachelite il processo avviene in senso contrario ( $C_1$  acquista elettroni da  $C_2$ ).

In conclusione un processo di carica per *strofinio* è un processo in cui vengono separate, attraverso un agente meccanico, delle cariche (elettroni) e trasferite da un corpo ad un altro. Si noti che lo spostamento riguarda un numero intero di elettroni, cioè la carica trasferita può assumere solo valori multipli interi della carica elementare, in accordo al fatto che la *carica elettrica è quantizzata*.

Prima dello strofinio la carica del panno e della bacchetta erano entrambe nulle: tutti i corpi sono neutri, perché ogni atomo costituente della materia è neutro. Dopo lo strofinio il panno e la bacchetta hanno acquistato una carica eguale ed opposta, ma nel suo complesso la carica totale del sistema panno + bacchetta è rimasta nulla.

Questa proprietà fondamentale di tutti i processi in cui compaiono cariche elettriche è nota come *principio di conservazione della carica* ed è verificata senza nessuna eccezione sia su scala macroscopica che su scala atomica e subatomica. L'enunciato è il seguente: *in un sistema elettricamente isolato la somma algebrica di tutte le cariche rimane costante nel tempo ovvero si conserva*.

Quando ad un atomo vengono aggiunti o tolti elettroni si forma rispettivamente uno *ione negativo* o uno *ione positivo*; in particolare il fenomeno di sottrazione di elettroni di chiama *ionizzazione*. Gli atomi dei metalli hanno la proprietà di essere facilmente ionizzabili: uno o più elettroni degli strati più esterni della configurazione elettronica si comportano come *elettroni liberi* e le proprietà conduttrici dei metalli sono dovute proprio a questo *gas di elettroni di conduzione* che si possono muovere liberamente nel corpo.

Se ad esempio tocchiamo con una bacchetta di vetro carica positivamente un conduttore isolato, cioè non in contatto con la terra, nel punto di contatto alcuni elettroni del conduttore sotto l'azione della forza attrattiva esercitata dalla carica positiva si trasferiscono sulla bacchetta e il conduttore appare carico positivamente (è così che si carica l'elettroscopio a foglie). Come vedremo in seguito l'*eccesso di carica del conduttore si distribuisce su tutta la superficie del conduttore e non nel suo interno*.

Quando il conduttore non è isolato, essendo per esempio collegato a terra tramite il corpo dello sperimentatore che lo sostiene con una mano, la carica si distribuisce ancora su tutta la superficie di conduttore disponibile, ma essendo la superficie della terra preponderante ne consegue che tutta la carica si disperde sulla terra e il conduttore appare scarico.

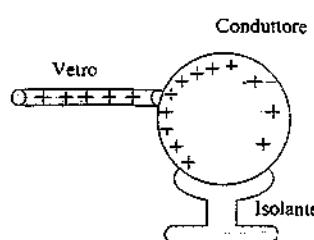


Figura 1.6

### Induzione elettrostatica

Supponiamo ora di avvicinare una bacchetta carica positivamente ad un elettroskopio senza toccarlo: osserviamo che le foglie divergono. Sotto l'azione della carica positiva un certo numero di elettroni liberi del conduttore si porta sull'estremità superiore dell'asticciola e sulla parte più lontana, le foglie, resta un eccesso di carica positiva. Se la bacchetta è carica negativamente, gli elettroni si muovono verso le foglie, su cui compare un eccesso di carica negativa. Allontanando la bacchetta si ripristinano le condizioni iniziali, le foglie si richiudono.

Un'analisi più accurata, ovvero una spiegazione che rimandiamo al capitolo 4 sulle proprietà dei conduttori, permetterebbe di verificare che ad una estremità è comparsa globalmente una carica  $q$  e all'altra una carica  $-q$ , cioè che la carica totale del conduttore è nulla come all'inizio dell'esperimento ed è nulla anche la carica all'interno del conduttore.

Questo processo di separazione della carica, caratteristico dei conduttori, è noto come *induzione elettrostatica*. Il processo è statico, cioè comporta una situazione di equilibrio con cariche ferme, come tutti i fenomeni che stiamo descrivendo, in quanto l'accumulo di elettroni su una estremità, che avviene molto rapidamente, impedisce per repulsione elettrica un ulteriore arrivo di elettroni. Si può ottenere per induzione una carica permanente su un conduttore isolato operando nel modo seguente.

Sottoponiamo ad induzione elettrostatica, con una carica inducente per esempio negativa, un conduttore. Collegiamo con un filo metallico il conduttore a *terra*, che in figura è indicata con il simbolo universalmente adottato. Il conduttore e la terra costituiscono un unico conduttore e quindi la carica dello stesso segno di quella inducente compare nei punti più lontani da questa, cioè sulla terra. Se a questo punto si interrompe il collegamento e si allontana la carica inducente, il corpo rimane carico di segno opposto a questa (cioè positivamente nell'esempio considerato) e la carica si distribuisce su tutta la superficie del conduttore.

È chiaro che anche nei processi di carica dei conduttori vale sempre il principio di conservazione della carica del sistema complessivo; se il processo avviene per contatto si ha un trasferimento di  $n$  elettroni da un corpo all'altro, se avviene per induzione si ha una separazione di carica (spostamento di elettroni) che può diventare permanente, ma la carica totale finale è sempre eguale a quella iniziale.

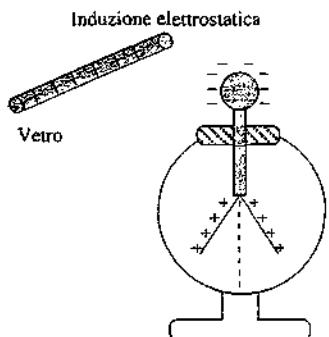


Figura 1.7

### 1.3 Misura delle cariche elettriche. Legge di Coulomb

Come abbiamo visto nel paragrafo 1.2 i costituenti dell'atomo hanno carica pari alla carica elementare o sono neutri e l'atomo stesso è neutro. Di conseguenza per un corpo qualsiasi, che è composto di atomi, la carica totale, pari alla somma algebrica di tutte le cariche elementari presenti nel corpo, risulta normalmente nulla: il corpo è neutro. Con metodi opportuni, alcuni dei quali abbiamo descritto in precedenza, è però possibile effettuare trasferimenti di carica tra corpi per cui la carica totale di un corpo può risultare *positiva*, e si dice che il *corpo è carico positivamente*, oppure *negativa*, e si dice che il *corpo è carico negativamente*.

Per misurare operativamente la carica elettrica dei corpi carichi si stabilisce innanzi tutto di considerare eguali in grandezza e segno due cariche se queste, poste alla stessa distanza da una terza, agiscono su di essa con una forza eguale e dello stesso verso: si considerano eguali e di segno opposto quando, nelle stesse condizioni, le forze risultano eguali in modulo, ma di verso opposto. Un possibile metodo di misura è indicato nell'esempio 1.3.

### Induzione elettrostatica

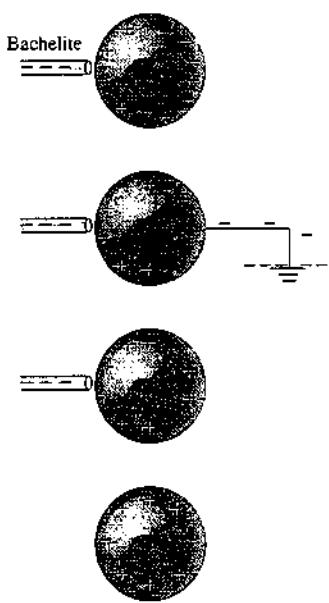


Figura 1.8

Un confronto tra cariche si può effettuare anche con l'elettroscopio descritto nel paragrafo 1.1. Se ammettiamo, come giustificheremo nell'esempio 4.12, che quando portiamo a contatto un conduttore carico con un elettroscopio questo acquista una carica proporzionale alla carica del corpo, diremo che due corpi hanno la stessa carica quando, posti successivamente a contatto con l'elettroscopio scarico, fanno deviare le foglie dello stesso angolo. Una carica sarà maggiore di un'altra quando farà divergere le foglie di un angolo maggiore dell'altra.

Il confronto tra due cariche diverse in modulo può diventare quantitativo solo se si conosce l'espressione della forza con cui interagiscono le cariche elettriche.

La formulazione precisa della legge della forza elettrica è dovuta a Coulomb, il quale eseguì nel 1785 una serie di misure sistematiche per stabilire la dipendenza della forza tra due cariche dai valori  $q_1$  e  $q_2$  di queste e dalla loro distanza  $r$ .

Coulomb utilizzò la bilancia di torsione mostrata schematicamente in figura 1.9 e descritta nel paragrafo 7.4 del primo volume. Una sottile asta isolante orizzontale è appesa al centro ad un filo di quarzo, di cui è nota la costante elastica di torsione  $k$ . Ad una estremità dell'asta è fissata una piccola sfera conduttrice che porta una carica  $q_1$ , all'altra estremità è fissato un opportuno contrappeso per garantire l'orizzontalità. Nel piano orizzontale contenente l'asta è posta una seconda sferetta con carica  $q_2$ , a distanza  $r$  da  $q_1$ . Per effetto della forza tra  $q_1$  e  $q_2$  l'asta, se si ha cura di neutralizzare altri movimenti, compie solo una rotazione e raggiunge una posizione di equilibrio, individuata da un angolo  $\theta$  di rotazione, in cui il momento elastico  $k\theta$  egualia il momento della forza elettrica. In sostanza il valore di  $F$  è dedotto dalla misura di  $\theta$ .

Variando i parametri in gioco, tra cui i valori delle cariche con un metodo che descriveremo tra breve, Coulomb stabilì che due *cariche puntiformi*  $q_1$  e  $q_2$ , poste a distanza  $r$ , interagiscono con una forza  $F$ , diretta secondo la loro congiungente, di modulo

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2} ; \quad (1.2)$$

*la forza cioè è direttamente proporzionale alle cariche e inversamente proporzionale al quadrato della distanza.* Osserviamo subito che la struttura di (1.2) è identica a quella di (1.1): la caratteristica più peculiare è che sia la forza gravitazionale che quella elettrica sono *inversamente proporzionali al quadrato della distanza*. Ricordiamo inoltre che il metodo di Coulomb fu applicato nel 1798 da Cavendish all'interazione gravitazionale tra sfere massicce con lo scopo di determinare il valore della costante  $\gamma$  nella (1.1).

La precisione raggiungibile nell'esperimento di Coulomb è limitata da varie cause. Volendo stabilire una legge per due cariche puntiformi occorre che le dimensioni delle sferette siano piccole rispetto alla loro distanza, per poter approssimare la distanza tra i due corpi estesi con la distanza tra i loro centri. Però non si può diminuire di molto il raggio delle sferette perché in tal caso, come vedremo nel paragrafo 4.1, sulla loro superficie si manifestano scariche che disperdono la carica nell'aria. D'altra parte se si aumenta la distanza diminuisce rapidamente secondo (1.2) la forza da misurare. Inoltre le cariche dovrebbero rimanere costanti durante l'esperimento, il che è difficoltoso in quanto si ha sempre una certa dispersione della carica nell'aria, soprattutto se questa è umida. Infine bisogna aver cura che il sistema sia schermato dalle azioni di altre cariche circostanti, che potrebbero falsare la misura.

In realtà, più che da una verifica sperimentale diretta molto accurata, la validità di (1.2) è confermata dalla verifica delle leggi che da essa si derivano, come vedremo nel seguito. Pertanto noi assumeremo che la (1.2) si possa sempre applicare a una qualsiasi coppia di cariche puntiformi *in quiete*: per sottolineare quest'ultimo fatto si dice anche che (1.2) esprime la *forza elettrostatica tra due cariche*.

Conseguenza immediata di (1.2) è che le forze esercitate (separatamente) da due

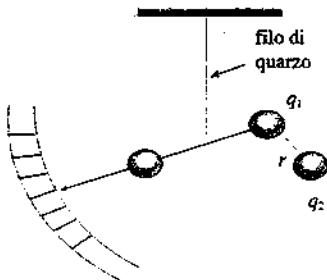


Figura 1.9

Legge di Coulomb

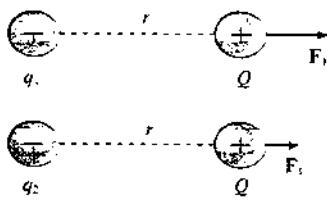


Figura 1.10

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{q_1}{q_2}$$

cariche  $q_1$  e  $q_2$  su una terza carica a parità di distanza stanno tra loro come le cariche stesse:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{q_1}{q_2} \quad (1.3)$$

La (1.3) fornisce un metodo quantitativo per confrontare tra di loro cariche differenti.

Tecnicamente, una procedura per ottenere cariche di qualsiasi valore è la seguente. Abbiamo visto nel paragrafo 1.2 come sia possibile, tramite l'induzione elettrostatica, ottenere una carica  $q$  su una sfera conduttrice sorretta da un supporto isolante. Diciamo  $C_1$  questa sfera, di raggio  $R_1$ ; se la mettiamo a contatto con una sfera conduttrice  $C_2$  di raggio  $R_2$ , isolata, la carica  $q$  si ripartisce in due cariche  $q_1$  e  $q_2$ , che si distribuiscono sulle superficie delle due sfere secondo la proporzione

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{R_1}{R_2}, \quad (1.4)$$

come dimostreremo nell'esempio 4.2. Se in particolare  $R_1 = R_2$ ,  $q_1 = q_2 = q/2$ : la carica si ripartisce in parti eguali. È chiaro che attraverso successivi contatti con sfere dello stesso raggio è possibile ottenere sottomultipli di una certa carica; oppure si può giocare sui raggi per ottenere un determinato valore. La (1.4) può essere verificata col metodo descritto nell'esempio 1.3.

La costante  $k$  che compare nella (1.2) dipende dalla scelta delle unità di misura e dal mezzo in cui le cariche sono immerse, mezzo di norma isolante che per le sue proprietà elettriche viene chiamato *dielettrico*. Prendiamo per ora come dielettrico il vuoto e supponiamo di porre  $k = 1$ : immediatamente resta definita come carica unitaria quella che porta a distanza unitaria da una carica eguale la respinge con una forza unitaria. Questa definizione fa dipendere l'unità di carica esclusivamente da unità meccaniche (distanza e forza); inoltre, poiché la misura della forza tra cariche non è tra le più precise, c'è lo svantaggio intrinseco che un possibile sostanziale affannamento della misura della forza tra cariche supposte unitarie, con cui si dimostrasse che la forza tra di esse non è esattamente unitaria, comporterebbe una ridefinizione dell'unità di carica.

La via seguita è differente: si è adottata nell'ambito del *sistema internazionale* una unità indipendente per le grandezze elettromagnetiche e la scelta, per ragioni di precisione di misura, è caduta sull'*ampere*, simbolo A, unità di misura dell'intensità di corrente elettrica, che definiremo in seguito ed è stato ad ogni modo introdotto nell'appendice B del primo volume. Come unità di carica si è poi definito il *coulomb*, simbolo C, che è *pari alla carica trasportata da una corrente di 1A in 1 secondo*. Fissata l'unità di misura della carica, ed essendo già definite le unità di forza e di distanza, in linea di principio basta misurare la forza tra due cariche note a distanza nota per determinare nel sistema internazionale il valore di  $k$  nel vuoto; risulta

$$k = 8.9875 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2, \quad (1.5)$$

approssimabile a tutti gli effetti con  $9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$ .

Per ragioni pratiche che appariranno chiare più avanti è conveniente esprimere  $k$  come

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

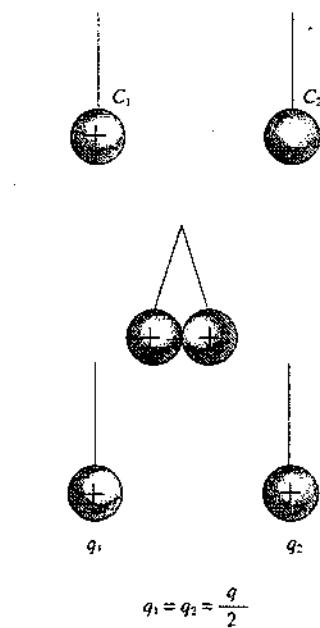


Figura 1.11

Il coulomb

Costante dielettrica  
del vuoto

dove la costante  $\epsilon_0$  è nota come *costante dielettrica* (o *permittività*) del vuoto e ha il valore

$$\epsilon_0 = \frac{8.8542 \cdot 10^{-12}}{4\pi k} \text{ C}^2/\text{Nm}^2 \quad (1.6)$$

Con questa notazione la (1.2) scritta nel sistema internazionale diventa

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (1.7)$$

Il valore della *carica elementare* espresso in Coulomb risulta

Carica elementare

$$e = 1.6022 \cdot 10^{-19} \text{ C} \quad (1.8)$$

e quindi 1C equivale alla carica di  $1/e = 6.24 \cdot 10^{18}$  elettroni.

In tabella 1.1 sono dati i valori più aggiornati delle cariche e delle masse dell'elettrone, del protone e del neutrone; si intende che l'incertezza è sull'ultima cifra indicata.

Tabella 1.1 Carica e massa di elettrone, protone, neutrone	
Carica (C)	Massa (kg)
elettrone $e$	$-1.602177335 \cdot 10^{-19}$
protone $p$	$+1.602177335 \cdot 10^{-19}$
neutrone $n$	0
	$9.10938975 \cdot 10^{-31}$
	$1.67262311 \cdot 10^{-27}$
	$1.67492866 \cdot 10^{-27}$

Negli esperimenti di elettrostatica che abbiamo descritto, come l'elettrizzazione per strofinio, la carica della bacchetta può essere dell'ordine di  $10^{-7}$  C e ciò equivale allo spostamento di  $6.24 \cdot 10^{11}$  elettroni. Due cariche  $q_1 = q_2 = 10^{-7}$  C poste a distanza  $r = 10^{-2}$  m interagiscono con una forza

$$F = 9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-7} \cdot 10^{-7} / 10^{-4} = 0.9 \text{ N}$$

che è ben misurabile (due cariche di 1C a 1 metro di distanza interagirebbero con una forza di  $9 \cdot 10^9$  N!). In effetti in elettrostatica la carica di 1C è ben oltre le possibilità sperimentali; gli eccessi di carica su isolanti e conduttori sono quasi sempre inferiori a  $10^{-6}$  C; solo con opportuni dispositivi che descriveremo più avanti, i *condensatori*, è possibile in qualche caso avere cariche separate dell'ordine di  $0.1 \div 1$  C. La ragione sostanziale che impedisce l'accumulo oltre un certo limite di carica libera è la repulsione tra cariche dello stesso segno.

Bisogna però notare che, pur trattandosi di piccole cariche dal punto di vista macroscopico, le cariche tipiche dell'elettrostatica corrispondono a un numero di cariche elementari talmente grande da far perdere significato, agli effetti pratici, alla quantizzazione: nel senso che è impossibile mettere in evidenza che le cariche in questione sono multiple della carica elementare, in quanto i mezzi di misura non sono sensibili a tal punto.

### Forma vettoriale della legge di Coulomb

La legge (1.7) deve essere scritta in termini vettoriali, trattandosi dell'espressione di una forza. Abbiamo già detto che la direzione della forza è quella della retta

congiungente le due cariche puntiformi; cambiando simboli rispetto a (1.7) chiamiamo  $q$  la carica  $q_1$ , e  $q_0$  la carica  $q_2$  e indichiamo con  $\mathbf{u}$  il versore del vettore  $\mathbf{r}$  che va da  $q$  a  $q_0$ , cioè il versore uscente da  $q$ . La forza che la carica  $q$  esercita sulla carica  $q_0$  assume la forma

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q q_0}{r^2} \mathbf{u} \quad (1.9)$$

Se  $q$  e  $q_0$  hanno lo stesso segno ( $q q_0 > 0$ ), la forza ha lo stesso verso di  $\mathbf{u}$ , è cioè *repulsiva*; se invece  $q$  e  $q_0$  hanno segno opposto ( $q q_0 < 0$ )  $\mathbf{F}$  ha verso opposto ad  $\mathbf{u}$ , è *attrattiva*. In accordo con il principio di azione e reazione la forza che  $q_0$  esercita su  $q$  è  $-\mathbf{F}$ .

Introduciamo un sistema di coordinate cartesiane in cui la carica  $q$  si trova nel punto  $P$  di coordinate  $x, y, z$  e la carica  $q_0$  nel punto  $P_0(x_0, y_0, z_0)$ . La distanza tra le cariche, cioè il modulo del vettore  $\mathbf{r} = \mathbf{P}\mathbf{P}_0$ , è

$$r = \sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + (z_0 - z)^2},$$

mentre le componenti del versore  $\mathbf{u}$ , cioè i coseni direttori del vettore  $\mathbf{r}$ , sono

$$\frac{x_0 - x}{r}, \quad \frac{y_0 - y}{r}, \quad \frac{z_0 - z}{r}$$

Le componenti della forza  $\mathbf{F}$  sono di conseguenza

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q q_0}{r^2} \frac{x_0 - x}{r} = \frac{q q_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{x_0 - x}{[(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + (z_0 - z)^2]^{3/2}} \\ F_y &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q q_0}{r^2} \frac{y_0 - y}{r} = \frac{q q_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{y_0 - y}{[(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + (z_0 - z)^2]^{3/2}} \\ F_z &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q q_0}{r^2} \frac{z_0 - z}{r} = \frac{q q_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{z_0 - z}{[(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + (z_0 - z)^2]^{3/2}} \end{aligned} \quad (1.10)$$

Accenniamo soltanto al fatto che, vista la simmetria sferica del problema, sarebbe più adatto un sistema di coordinate polari con centro in  $P$ , dove si trova la carica  $q$ ; la  $\mathbf{F}$  ha solo componente radiale, data da (1.7), e manifesta chiaramente il suo carattere di *forza centrale* (per le proprietà generali delle forze centrali rimandiamo al paragrafo 2.23 del primo volume). Naturalmente, sia la struttura di (1.9) che la caratteristica della forza di essere centrale non dipendono dal sistema di riferimento scelto.

### Esempio 1.1

L'elettrone e il protone in un atomo di idrogeno si trovano a una distanza media  $r = 0.53 \cdot 10^{-10}$  m. che coincide con le dimensioni dell'atomo.

Calcolare l'intensità della forza gravitazionale e della forza elettrica tra il protone e l'elettrone.

### Soluzione

Da (1.1) e dai dati della tabella 1.1 troviamo:

$$F_e = \gamma \frac{m_e m_p}{r^2} = \frac{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 9.11 \cdot 10^{-31} \cdot 1.67 \cdot 10^{-27}}{(0.53 \cdot 10^{-10})^2} = 3.61 \cdot 10^{-47} \text{ N}$$

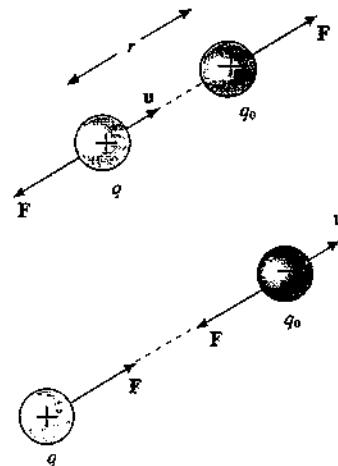


Figura 1.12

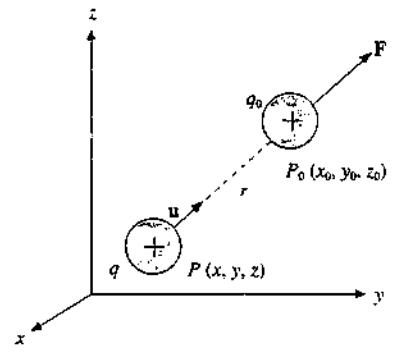


Figura 1.13

Per il calcolo della forza elettrica applichiamo (1.7):

$$F_e = \frac{e^2}{4 \pi \epsilon_0 r^2} = \frac{9 \cdot 10^9 (1.6 \cdot 10^{-19})^2}{(0.53 \cdot 10^{-10})^2} = 8.20 \cdot 10^{-8} \text{ N}$$

Il rapporto  $F_e/F_g \approx 2.3 \cdot 10^{39}$  evidenzia che a livello atomico la forza gravitazionale è completamente trascurabile rispetto alla forza elettrica. Si deve a quest'ultima la formazione e la stabilità degli atomi e quindi della materia.

### Esempio 1.2

Un uomo di massa  $m = 70 \text{ kg}$ , isolato da terra, possiede una carica  $-q$  che, per queste considerazioni, pensiamo concentrata in un punto a distanza  $r = 1 \text{ m}$  dal suolo. Sul suolo è posta una carica  $q$ , a distanza  $r$  da  $-q$ . Calcolare il valore di  $q$  per cui la forza elettrica tra le cariche è pari al peso dell'uomo.

#### Soluzione

Dobbiamo calcolare  $q$  dall'eguaglianza

$$m g = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{q^2}{r^2}$$

per cui  $q = \sqrt{4 \pi \epsilon_0 m g r} = 2.76 \cdot 10^{-4} \text{ C}$ . Poiché la carica negativa è portata dagli elettroni, vuol dire che l'uomo ha sul suo corpo un eccesso di elettroni:

$$N = \frac{q}{e} = \frac{2.76 \cdot 10^{-4}}{1.6 \cdot 10^{-19}} = 1.73 \cdot 10^{15} \text{ elettroni} ;$$

questi hanno la massa  $N m_r = 1.58 \cdot 10^{-15} \text{ kg}$ , del tutto trascurabile rispetto alla massa dell'uomo!

L'esempio, che è volutamente paradossale, indica che se i corpi non fossero neutri, ma possedessero cariche anche piuttosto piccole, la forza elettrica maschererebbe completamente la forza gravitazionale.

Del resto la forza gravitazionale, alla quale si deve la formazione delle galassie, delle stelle e dei pianeti, ha potuto manifestarsi nella storia dell'universo solamente dopo che la forza elettrica aveva terminato la sua opera e cioè aveva formato gli atomi neutri partendo dai protoni, neutroni ed elettroni, costituenti elementari della materia stabile.

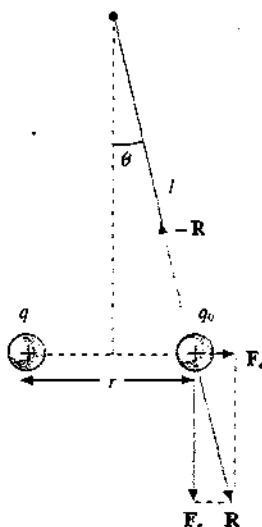


Figura 1.14

### Esempio 1.3

Una sferetta conduttrice molto leggera, di massa  $m = 2 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$ , possiede una carica  $q_0 = 2 \cdot 10^{-8} \text{ C}$  ed è sospesa ad un filo lungo  $l$ . Una seconda sferetta conduttrice con una carica  $q = 5 \cdot 10^{-7} \text{ C}$  viene avvicinata a  $q_0$ . Quando la distanza tra i centri di  $q$  e  $q_0$  vale  $r = 5 \text{ cm}$  l'angolo che il filo forma con la verticale vale  $\theta$ . Calcolare  $\theta$ .

#### Soluzione

All'equilibrio abbiamo la situazione indicata in figura 1.14: la risultante  $R$  della forza peso e della forza elettrica agenti su  $q_0$  è diretta lungo il filo, bilanciata dalla tensione del filo stesso. Quindi

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{F_e}{F_g} = \frac{q q_0}{4 \pi \epsilon_0 r^2 mg} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 5 \cdot 10^{-7} \cdot 2 \cdot 10^{-8}}{25 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 9.8} = 0.1837$$

e  $\theta \approx 10.41^\circ$ ; con l'approssimazione  $\theta = \operatorname{tg} \theta$  risulta  $\theta \approx 10.53^\circ$ . Pertanto, finché l'angolo è piuttosto piccolo, diciamo inferiore a  $10^\circ = 0.1745 \text{ rad}$ , possiamo scrivere

$$\theta = \frac{q q_0}{4 \pi \epsilon_0 m g r^2}$$

in cui l'angolo è espresso in radianti. La relazione tra l'angolo di deviazione della carica  $q_0$  e il valore della carica che provoca la deviazione è lineare, a parità di distanza. L'angolo  $\theta$  può essere dedotto dallo spostamento  $d = l\theta$  della carica  $q_0$ .

Sulla base di quanto descritto si può costruire uno strumento per confrontare tra loro due cariche e quindi misurare una rispetto all'altra nota; una misura assoluta di carica può essere fatta se è nota  $q_0$ , che potrebbe essere determinata con il medesimo strumento ponendo  $q = q_0$ .

La sensibilità non è elevata: se si apprezza il decimo di grado ( $0.1^\circ = 1.75 \cdot 10^{-3}$  rad) si commette un errore relativo superiore all'1%, che per una carica di  $10^{-7}$  C vuol dire  $10^{-9}$  C. Di questo ordine di grandezza è anche il valore minimo di carica che in pratica si può pensare di misurare.

#### Esempio 1.4

Due sferette conduttrici eguali, di massa  $m$  e carica  $q$ , sono sospese ciascuna ad un filo lungo  $l$ ; in equilibrio i fili sono disposti simmetricamente rispetto alla verticale, ciascuno ad angolo  $\theta$ . Calcolare la relazione esistente tra  $q$  e  $\theta$  ed estendere il risultato all'equilibrio delle foglie di un elettroscopio.

#### Soluzione

La distanza tra le cariche in equilibrio è  $r = 2l \sin \theta$ ; come abbiamo visto nell'esempio 1.3, ciascuna carica sta in equilibrio all'angolo

$$\tan \theta = \frac{F_e}{F_g} = \frac{q^2}{4 \pi \epsilon_0 m g (2l \sin \theta)^2} \Rightarrow q = 2l \sin \theta \sqrt{4 \pi \epsilon_0 m g \tan \theta}.$$

La relazione tra  $q$  e  $\theta$  non è lineare, nemmeno nell'approssimazione di angoli piccoli ( $q \sim \theta^{3/2}$ ).

Il risultato può essere esteso, in prima approssimazione, alle foglie di un elettroscopio se si immagina che la carica di ciascuna foglia sia concentrata nel centro, a distanza  $l$  dal punto di sospensione (in realtà la carica si distribuisce su tutta la superficie della foglia).

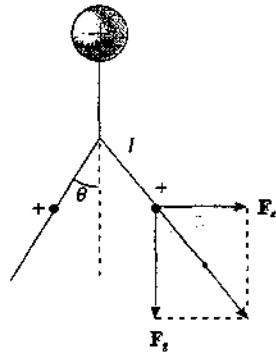


Figura 1.15

## 1.4 Campo elettrostatico

Le forze elettriche agenti su una carica  $q_0$  dovute alle cariche circostanti si sommano come vettori: vige cioè il *principio di sovrapposizione*, detto anche *principio di indipendenza delle forze simultanee*, che esemplifichiamo nel caso più semplice.

Consideriamo tre cariche puntiformi, fisse in un sistema di riferimento inerziale,  $q_1, q_2, q_0$ . La carica  $q_1$  esercita separatamente la forza  $F_1$  su  $q_0$  e la carica  $q_2$  esercita la forza  $F_2$ ; quando entrambe le cariche sono presenti, la forza  $F$  su  $q_0$  è data dalla somma vettoriale di  $F_1$  e  $F_2$ . Per ciascuna forza vale una formula tipo (1.9); se indichiamo con  $r_1$  e  $r_2$  rispettivamente la distanza da  $q_1$  a  $q_0$  e da  $q_2$  a  $q_0$  e con  $\mathbf{u}_1$  e  $\mathbf{u}_2$  i relativi versori, uscenti dalle cariche, possiamo scrivere

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{q_1 q_0}{r_1^2} \mathbf{u}_1 + \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{q_2 q_0}{r_2^2} \mathbf{u}_2. \quad (1.11)$$

La forza elettrica su una carica puntiforme  $q_0$ , risultante delle forze esercitate da un sistema discreto di cariche puntiformi  $q_i$ , si ottiene generalizzando (1.11) con

Principio di sovrapposizione

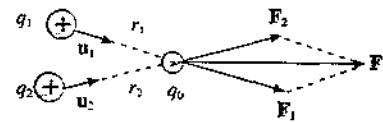


Figura 1.16

ovvio significato dei simboli:

$$\mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_i = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_0}{r_i^2} \mathbf{u}_i = q_0 \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i^2} \mathbf{u}_i. \quad (1.12)$$

Questi risultati sono verificati sperimentalmente e confermano il carattere vettoriale della legge (1.9).

Nella (1.12) abbiamo messo in evidenza che la forza risultante esercitata su  $q_0$  è proporzionale a  $q_0$ . La grandezza vettoriale

### Campo elettrostatico

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_0} \quad (1.13)$$

viene chiamata *campo elettrostatico*. Più precisamente: il campo elettrostatico  $E$  generato in un punto dello spazio da un sistema di cariche ferme è definito come la forza elettrica risultante  $\mathbf{F}$  che agisce su una carica di prova  $q_0$  positiva posta in quel punto divisa per la carica  $q_0$  stessa.

Nei casi concreti la carica di prova  $q_0$  può perturbare la distribuzione originale, non potendo questa essere formata da cariche esattamente puntiformi, cioè prive di struttura. Se ad esempio le cariche  $q_i$  sono portate da sferette conduttrici,  $q_0$  può alterare la distribuzione della carica sulla superficie delle sferette tramite il fenomeno dell'induzione elettrostatica. Se invece le sferette che portano le  $q_i$  sono di materiale isolante,  $q_0$  non può spostare le cariche presenti sulle sferette, ma può tuttavia produrre dei microspostamenti locali tramite il fenomeno della polarizzazione dei dielettrici, che studieremo nel capitolo 5.

Da un punto di vista teorico la definizione (1.13) diventerebbe quindi più precisa se si facesse tendere a zero il valore di  $q_0$ , così da far scomparire la perturbazione prodotta da  $q_0$ . Poiché al tendere a zero di  $q_0$  tende a zero anche la forza su  $q_0$ , il rapporto

$$E = \lim_{q_0 \rightarrow 0} \frac{F}{q_0}$$

rimane finito. In pratica è sufficiente che  $q_0$  sia molto piccola rispetto a ciascuna delle  $q_i$ .

In base a (1.13), (1.9), (1.10) il campo prodotto da una carica puntiforme  $q$ , nel punto  $P(x, y, z)$  è dato da

$$\mathbf{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_1^2} \mathbf{u}_1 \quad (1.14)$$

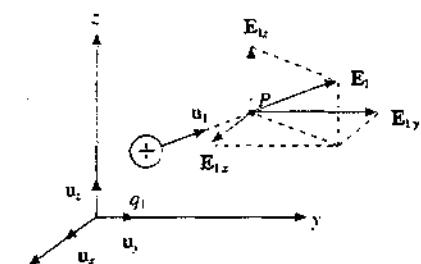
e ha le componenti cartesiane

$$E_{1,x}(x, y, z) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{x - x_1}{[(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2]^{3/2}}$$

$$E_{1,y}(x, y, z) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{y - y_1}{[(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2]^{3/2}} \quad (1.15)$$

$$E_{1,z}(x, y, z) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{z - z_1}{[(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2]^{3/2}}$$

**Figura 1.18**



Da (1.14) si deduce che se la carica  $q_1$  è positiva il campo è uscente da  $q_1$ , mentre se la carica  $q_1$  è negativa il campo è entrante in  $q_1$ .

Analogamente si ottiene da (1.12) il campo generato da un sistema discreto di cariche puntiformi:

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i^2} \mathbf{a}_i \quad (1.16)$$

Le componenti cartesiane si scrivono, generalizzando (1.15),

$$\begin{aligned} E_x(x, y, z) &= \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{x - x_i}{[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2]^{3/2}} \\ E_y(x, y, z) &= \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{y - y_i}{[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2]^{3/2}} \\ E_z(x, y, z) &= \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{z - z_i}{[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2]^{3/2}} \end{aligned} \quad (1.17)$$

Queste formule mettono bene in evidenza come, fissato un sistema di cariche, si possa associare ad ogni punto  $P(x, y, z)$  un valore del campo elettrostatico  $\mathbf{E}(x, y, z)$ , indipendentemente dalla presenza di una carica di prova  $q_0$ . Quando  $q_0$  viene posta nel punto  $P$  essa risente, secondo (1.13), della forza

$$\mathbf{F}(x, y, z) = q_0 \mathbf{E}(x, y, z) \quad (1.18)$$

La (1.18) può essere interpretata dicendo che il sistema di cariche è la sorgente del campo elettrostatico  $\mathbf{E}$ : la carica  $q_0$  interagisce con questo subendo la forza  $\mathbf{F}$ ; l'azione elettrica tra cariche, che è una azione a distanza, avviene attraverso il campo. Del resto la stessa interpretazione viene data all'azione gravitazionale attraverso l'introduzione del campo gravitazionale  $\mathbf{G}$ , come è discusso nel paragrafo 5.3 del primo volume.

### Unità di misura

Nel sistema internazionale di unità di misura il campo elettrico, rapporto tra una forza e una carica, si misura in newton/coulomb (N/C). Vedremo in seguito un'unità di misura equivalente più utilizzata nella pratica.

### Esempio 1.5

Tre cariche positive uguali  $q_1 = q_2 = q_3 = q$  sono fisse nei vertici di un triangolo equilatero di lato  $l$ . Calcolare la forza elettrica agente su ognuna delle cariche e il campo elettrostatico nel centro del triangolo.

#### Soluzione

Per calcolare la forza che agisce su una delle cariche, ad esempio su  $q_3$ , calcoliamo i campi  $\mathbf{E}_1$  e  $\mathbf{E}_2$  prodotti da  $q_1$  e  $q_2$  nel punto  $P_3$  (la carica  $q_3$  funge da carica di prova). Essendo  $q_3$  equidistante da  $q_1$  e  $q_2$ , in modulo

$$E_1 = E_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 l^2}$$

I due campi sono disposti simmetricamente rispetto all'asse  $y$  e quindi le loro compo-

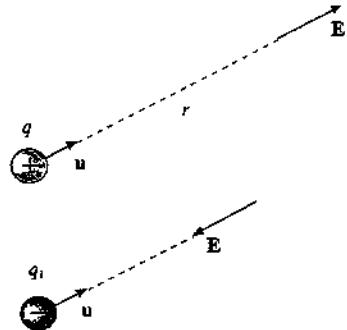


Figura 1.19

Campo elettrostatico di un insieme discreto di cariche

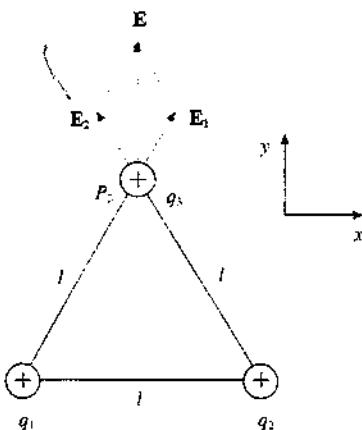


Figura 1.20

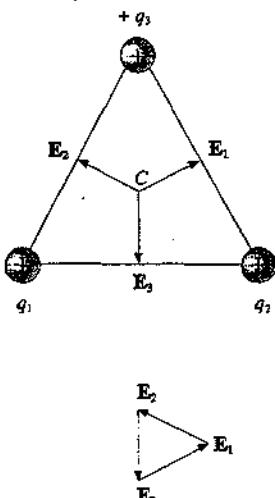


Figura 1.21

nenti lungo l'asse  $x$ , eguali ed opposte, si annullano nella somma; invece le componenti lungo l'asse  $y$ , eguali e concordi, sommandosi danno il modulo

$$E = E_{1,y} + E_{2,y} = \frac{2q \cos 30^\circ}{4\pi\epsilon_0 l^2} = \frac{q\sqrt{3}}{4\pi\epsilon_0 l^2};$$

lo stesso risultato si può ottenere da

$$E^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2 E_1 E_2 \cos 60^\circ.$$

La forza  $\mathbf{F}$  che agisce su  $q_3 = q$  vale

$$\mathbf{F} = q_3 \mathbf{E} = \frac{q^2 \sqrt{3}}{4\pi\epsilon_0 l^2} \mathbf{u}_y.$$

Il vincolo che tiene ferma ciascuna carica deve esercitare una forza eguale e contraria. Il centro  $C$  del triangolo equilatero è equidistante dai vertici, per cui i moduli dei campi  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$  generati dalle tre cariche uguali nel centro sono uguali. I tre vettori sono disposti come i lati di un triangolo equilatero e quindi

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 = 0,$$

il campo nel centro è nullo. Se ponessimo in  $C$  una carica, essa non risentirebbe di alcuna forza e resterebbe in equilibrio (instabile).

## 1.5 Campo elettrostatico prodotto da una distribuzione continua di carica

Abbiamo già rilevato che le cariche di interesse nei problemi elettrostatici corrispondono a un numero molto grande di cariche elementari; inoltre nella maggior parte dei casi pratici queste cariche non sono concentrate in un unico punto, o in una regione estremamente ristretta, ma sono distribuite nello spazio con una ben determinata geometria.

Tali distribuzioni spaziali di carica sono naturalmente sorgenti di un campo elettrostatico: nelle normali applicazioni non si è interessati tanto alla conoscenza del *campo locale* che esiste in prossimità di ciascuna carica, campo che d'altra parte non sarebbe né calcolabile, per l'elevato numero di contributi tipo (1.14), né rilevabile sperimentalmente, quanto piuttosto al *campo medio* nei punti distanti dalle cariche, punti dai quali la distribuzione di carica è vista come una *distribuzione continua*. La distanza in questione, che può essere anche piccola dal punto di vista macroscopico, deve essere molto grande rispetto alla distanza media tra le cariche elementari, che è dell'ordine di  $10^{-10}$  m.

Se la carica è distribuita in un corpo  $C$  avente il volume  $\tau$ ; si definisce la *densità spaziale di carica*  $\rho(x', y', z')$  mediante la

$$dq = \rho(x', y', z') d\tau, \quad (1.19)$$

dove  $d\tau = dx' dy' dz'$  è il volume elementare, intorno al punto del corpo di coordinate  $x', y', z'$ , in cui è contenuta la carica  $dq$ . La carica totale posseduta dal corpo è data dall'integrale

$$q = \int_C \rho(x', y', z') d\tau \quad (1.20)$$

esteso a tutto il volume; in generale la densità può essere variabile da punto a punto.

Densità spaziale  
di carica

Il campo elettrostatico prodotto dalla carica infinitesima  $dq$  in un punto  $P(x, y, z)$  distante  $r$  da  $dq$  si scrive utilizzando (1.14) in quanto  $dq$  è approssimabile a una carica puntiforme per questo calcolo:

$$d\mathbf{E}(x, y, z) = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{u} = \frac{\rho d\tau}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{u},$$

con  $\mathbf{u}$  versore della direzione orientata che va da  $dq$  a  $P$ . Il campo risultante nel punto  $P(x, y, z)$  si calcola come in (1.16), ricorrendo al principio di sovrapposizione; poiché però la somma è estesa a un numero infinito di contributi infinitesimi, essa si riduce a un integrale vettoriale esteso a tutto il volume  $\tau$ :

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \frac{\rho d\tau}{r^2} \mathbf{u} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \frac{\rho(x', y', z') dx' dy' dz'}{r^2} \mathbf{u} \quad (1.21)$$

Le componenti di questo campo sono:

$$\begin{aligned} E_x(x, y, z) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \frac{\rho(x', y', z') (x - x') dx' dy' dz'}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{3/2}} \\ E_y(x, y, z) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \frac{\rho(x', y', z') (y - y') dx' dy' dz'}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{3/2}} \\ E_z(x, y, z) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \frac{\rho(x', y', z') (z - z') dx' dy' dz'}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{3/2}} \end{aligned} \quad (1.22)$$

La (1.21) è una formula di carattere generale che, almeno in linea di principio, consente di calcolare il campo in ogni punto  $P(x, y, z)$ , fissata la distribuzione di carica caratterizzata dalla densità  $\rho(x', y', z')$ . Notiamo che nell'integrazione il punto  $P$  deve essere considerato fisso: le variabili di integrazione sono le coordinate  $x', y', z'$  dei punti dove si trova la carica.

Come abbiamo accennato nei paragrafi precedenti e come spiegheremo in seguito, in alcuni corpi la carica tende a portarsi sulla superficie occupando una sottile regione di spessore trascurabile, dell'ordine delle dimensioni atomiche. In questo e in casi analoghi la distribuzione di carica può essere vista, per il calcolo del campo, come una distribuzione superficiale di carica. Le (1.19) e (1.20) sono sostituite da

$$dq = \sigma(x', y', z') d\Sigma, \quad q = \int_{\Sigma} \sigma(x', y', z') d\Sigma, \quad (1.23)$$

dove  $\sigma$  si chiama *densità superficiale di carica* e  $d\Sigma$  è l'area della superficie infinitesima, intorno al punto di coordinate  $x', y', z'$ , su cui è distribuita la carica  $dq$ .

Un'ulteriore possibilità è che la carica sia distribuita lungo una linea, in generale curva, nel qual caso abbiamo

$$dq = \lambda(x', y', z') dl, \quad q = \int_l \lambda(x', y', z') dl, \quad (1.24)$$

$\lambda$  è la *densità lineare di carica* e  $dl$  è la lunghezza del tratto infinitesimo di linea, intorno al punto di coordinate  $x', y', z'$ , lungo cui è distribuita la carica  $dq$ .

I campi dovuti a distribuzioni superficiali o lineari si scrivono rispettivamente

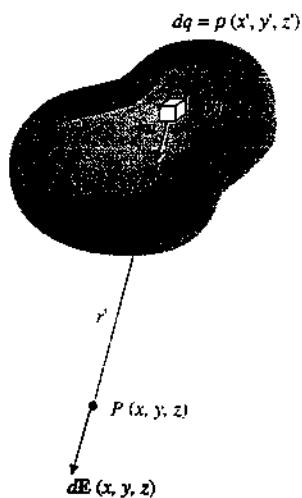


Figura 1.22

Campo elettrostatico  
di una distribuzione continua  
di cariche

Densità superficiale  
di carica

Densità lineare di carica

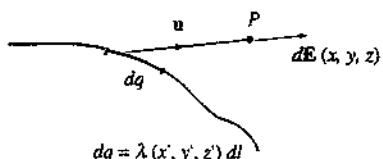
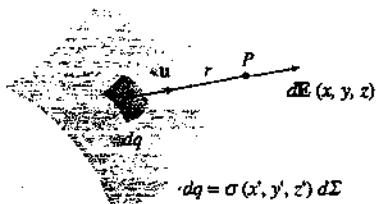


Figura 1.23

Distribuzioni uniformi  
di carica

Come nel caso tridimensionale il punto  $P(x, y, z)$  è fisso nell'integrazione che avviene sulle coordinate delle distribuzioni di carica.

Per chiarire il significato e l'uso delle formule ricavate le applichiamo, negli esempi che seguono, ad alcune distribuzioni di carica caratterizzate da un elevato grado di simmetria, il che corrisponde, come si vedrà, a facilità di integrazione. Facciamo però prima alcune precisazioni.

Il volume, la superficie e la linea infinitesimi  $d\tau$ ,  $d\Sigma$ ,  $dl$  vanno intesi molto piccoli rispetto alle dimensioni dei corpi ordinari, ma sempre molto grandi rispetto alle dimensioni atomiche; essi contengono cioè un grandissimo numero di cariche elementari e anche al loro livello la distribuzione si assume continua.

Le densità  $\rho$ ,  $\sigma$ ,  $\lambda$  nel caso più generale sono funzioni del punto, cioè non sono costanti entro il dominio di integrazione. Quando sono costanti si parla di *distribuzioni uniformi* e valgono le formule più semplici

$$q = \rho \tau, \quad q = \sigma \Sigma, \quad q = \lambda l. \quad (1.27)$$

In tal caso nei calcoli dei campi le densità si portano fuori dal segno di integrale.

### Unità di misura

$$\rho : \text{C/m}^3, \quad \sigma : \text{C/m}^2, \quad \lambda : \text{C/m}.$$

### Esempio 1.6

Un filo di lunghezza  $2l$ , parallelo all'asse  $x$ , possiede una carica  $q$  distribuita uniformemente su tutta la sua lunghezza. Calcolare il campo elettrostatico  $E$  nei punti dell'asse del filo (asse  $y$ ). Dedurre l'espressione del campo anche per un filo infinitamente lungo e uniformemente carico.

#### Soluzione

La densità lineare di carica, costante su tutto il filo, è data da (1.27):  $\lambda = q/2l$ . Ogni elemento di filo  $dx'$  ha una carica  $dq = \lambda dx'$ , secondo (1.24), e produce nel punto  $P(0, y)$  dell'asse, distante  $y$  dal centro del filo, il campo infinitesimo dato da (1.26):

$$dE(0, y) = \frac{\lambda dx'}{4 \pi \epsilon_0 r^2} \mathbf{u}$$

L'elemento di carica simmetrico a  $dq$  rispetto al centro del filo produce in  $P$  un campo eguale in modulo e disposto specularmente rispetto al campo prodotto da  $dq$ , come mostrato in figura 1.24; siamo nella stessa situazione discussa nell'esempio 1.5, le componenti  $x$  si sommano annullandosi e le componenti  $y$  si sommano dando il campo in  $P$ :

$$dE(0, y) = dE_y(0, y) \mathbf{u}_y = \frac{2 \lambda dx'}{4 \pi \epsilon_0 r^2} \cos \theta \mathbf{u}_y$$

Il campo risultante è la somma di tutti questi contributi infinitesimi, paralleli e concordi; notiamo che valgono le seguenti relazioni:

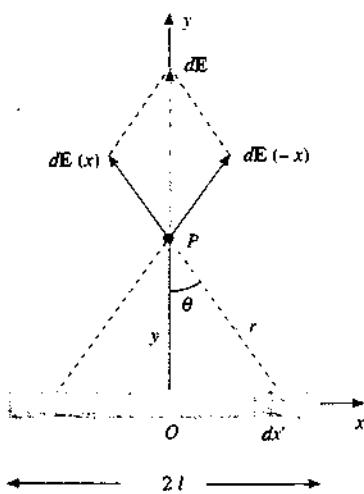


Figura 1.24

$$dE(x, y, z) = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \int \frac{\sigma d\Sigma}{r^2} \mathbf{u} \quad (1.25)$$

$$dE(x, y, z) = \frac{\lambda dl}{4 \pi \epsilon_0 r^2} \mathbf{u} \quad (1.26)$$

$$r \cos \theta = y \quad , \quad x' = y \tan \theta \quad , \quad dx' = \frac{y d\theta}{\cos^2 \theta} \quad ,$$

per cui

$$dE(0, y) = \frac{\lambda}{2 \pi \epsilon_0 y} \cos \theta d\theta \mathbf{u}_y \quad .$$

L'integrale si calcola da  $\theta = 0$  a  $\theta = \theta_1 = \arcsen(l/\sqrt{y^2 + l^2})$ , con  $y$  costante, e dà il risultato

$$\mathbf{E}(0, y) = \frac{\lambda \mathbf{u}_y}{2 \pi \epsilon_0 y} \int_0^{\theta_1} \cos \theta d\theta = \frac{\lambda}{2 \pi \epsilon_0 y} \sin \theta_1 \quad .$$

In definitiva

$$\mathbf{E}(0, y) = \frac{\lambda l \mathbf{u}_y}{2 \pi \epsilon_0 y \sqrt{y^2 + l^2}} = \frac{q \mathbf{u}_y}{4 \pi \epsilon_0 y \sqrt{y^2 + l^2}} \quad . \quad (1.28)$$

Il risultato vale in qualsiasi piano passante per l'asse  $x$ , sussiste cioè una simmetria cilindrica.

Si verifica facilmente, a conferma del ragionamento basato sulla simmetria, che la componente  $dE_z$  in  $P$  dovuta all'elemento di carica  $dq$  è  $-\lambda \sin \theta d\theta / 4 \pi \epsilon_0 y$  per cui l'integrale esteso a tutto il filo è nullo.

Osserviamo che il campo (1.28) non presenta la dipendenza  $1/r^2$  tipica della carica puntiforme, appunto perché è prodotto da una distribuzione estesa. Se però ci allontaniamo molto dal filo ( $y \gg l$ ), la (1.28) diventa

$$\mathbf{E}(0, y \gg l) = \frac{q}{4 \pi \epsilon_0 y^2} \mathbf{u}_y$$

e coincide con il campo generato da una carica puntiforme  $q$  posta nel centro del filo: all'aumentare della distanza il filo appare sempre più piccolo, fino ad essere confuso con un punto.

Quando il filo è infinitamente lungo risulta  $l \gg y$  e da (1.28) si ha

$$\mathbf{E}(0, y \ll l) = \frac{\lambda}{2 \pi \epsilon_0 y} \mathbf{u}_y \quad . \quad (1.29)$$

Il campo elettrostatico generato da un filo indefinito uniformemente carico è perpendicolare al filo e costante in tutti i punti che stanno su una superficie cilindrica di raggio  $y$  avente il filo come asse. Questa situazione ideale si realizza in pratica con un filo di lunghezza finita nei punti con distanza dal filo molto minore della lunghezza del filo.

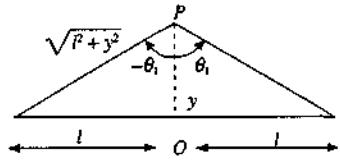


Figura 1.25

### Esempio 1.7

Una carica  $q$  è distribuita uniformemente su un sottile anello di raggio  $R$ . Calcolare il campo elettrostatico sull'asse dell'anello.

#### Soluzione

La densità di carica, costante sull'anello, è  $\lambda = q / 2 \pi R$ . Considerati due elementi  $dl$  di anello, diametralmente opposti, ciascuno con carica  $dq = \lambda dl$ , nei punti dell'asse si ha la situazione già vista più volte: le componenti lungo l'asse dei campi elementari dovuti alle due cariche sono eguali e concordi, mentre quelle perpendicolari si elidono. Il campo risultante nei punti dell'asse è parallelo all'asse e si calcola integrando la componente  $x$  di ciascun elemento  $dl$ :

$$dE_x(x) = \frac{\lambda dl}{4 \pi \epsilon_0 r^2} \cos \theta \quad .$$

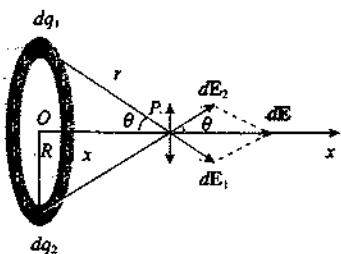


Figura 1.26

Al variare della posizione di  $dl$  sull'anello tutti i termini di questa espressione restano costanti e quindi

$$\mathbf{E}(x) = \frac{\lambda \cos\theta \mathbf{u}_x}{4\pi\epsilon_0 r^2} \int dl = \frac{\lambda \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} 2\pi R \mathbf{u}_x$$

Siccome  $r^2 = R^2 + x^2$  e  $\cos\theta = x / \sqrt{R^2 + x^2}$ ,

$$\mathbf{E}(x) = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0} \frac{x}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \mathbf{u}_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \mathbf{u}_x \quad (1.30)$$

Il campo è parallelo e concorde all'asse dell'anello, così come orientato in figura, per  $x > 0$ , è parallelo e discorde per  $x < 0$  ed è nullo nel centro dell'anello, dove tutti i contributi elementari si elidono.

Nei punti a grande distanza dal centro ( $x \gg R$ )

$$\mathbf{E}(x \gg R) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x^2} \mathbf{u}_x$$

concorde all'asse a destra e discorde a sinistra, come se la carica fosse concentrata nel centro dell'anello; non si distingue più, in questa situazione, la struttura della distribuzione.

### Esempio 1.8

Un disco sottile di raggio  $R$  ha una carica  $q$  distribuita uniformemente su tutta la sua superficie. Calcolare il campo  $\mathbf{E}$  sull'asse del disco. Estendere il risultato al caso in cui  $R$  tende all'infinito (piano uniformemente carico).

#### Soluzione

La carica è contenuta in uno spessore sottilissimo tra le facce del disco (e non su ciascuna faccia); la densità superficiale di carica, costante su tutto il disco, è  $\sigma = q/\pi R^2$ . Isoliamo idealmente una corona circolare compresa tra  $r$  e  $r + dr$ , assimilabile a un anello, di superficie  $d\Sigma = 2\pi r dr$  e carica  $dq = \sigma d\Sigma = 2\pi\sigma r dr$ . Questa distribuzione anulare produce sull'asse, a distanza  $x$  dal centro, il campo dato da (1.30):

$$d\mathbf{E}(x) = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \frac{r dr}{(r^2 + x^2)^{3/2}} \mathbf{u}_x = \frac{q x}{2\pi\epsilon_0 R^2} \frac{r dr}{(r^2 + x^2)^{3/2}} \mathbf{u}_x \quad (1.30)$$

Il campo risultante si ottiene sommando i contributi degli infiniti anelli che compongono il disco, cioè integrando l'espressione precedente per  $r$  che varia da 0 a  $R$  (e  $x$  costante):

$$\mathbf{E}(x) = \frac{\sigma x \mathbf{u}_x}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{r dr}{(r^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right) \mathbf{u}_x$$

Questa è l'espressione del campo per  $x > 0$ , dove esso è parallelo e concorde all'asse; per  $x < 0$  il modulo è lo stesso, cambia solo il verso, per cui scriviamo in generale

$$\mathbf{E}(x) = \pm \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right) \mathbf{u}_x = \pm \frac{q}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left( 1 - \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right) \mathbf{u}_x \quad (1.31)$$

Il segno positivo vale per  $x > 0$ , quello negativo per  $x < 0$ . Lasciamo come esercizio la verifica che per grandi distanze ( $x \gg R$ ) il disco è visto come una carica puntiforme  $q$  posta nel centro.

Quando  $x$  tende a zero i limiti destro e sinistro del campo sono diversi e valgono rispettivamente

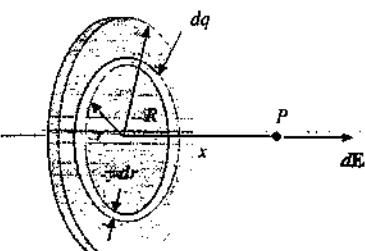


Figura 1.27

$$\mathbf{E}_+ = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{u}_x, \quad \mathbf{E}_- = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{u}_x. \quad (1.32)$$

Nell'attraversamento della superficie carica con densità  $\sigma$  il campo subisce la discontinuità

$$\mathbf{E}_+ - \mathbf{E}_- = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{u}_x. \quad (1.33)$$

Se ora facciamo tendere  $R$  all'infinito, mantenendo  $\sigma$  costante, otteniamo un piano indefinito uniformemente carico; il campo eletrostatico, calcolato passando al limite in (1.31), vale

$$\mathbf{E} = \pm \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{u}_x \quad (1.34)$$

ed è ortogonale al piano, uscente da esso e costante in ogni punto dello spazio ovvero, come si dice, *uniforme*. Esso è discontinuo nel passaggio da una parte all'altra del piano, con discontinuità (1.33).

Nella pratica si ha localmente una situazione tipo piano indefinito quando ci si mette molto vicini ad una superficie carica.

### Esempio 1.9

Calcolare il campo eletrostatico prodotto da due piani indefiniti paralleli uniformemente carichi con densità superficiale l'uno  $+\sigma$  e l'altro  $-\sigma$ .

#### Soluzione

In base alla (1.34) i campi  $\mathbf{E}_+$  e  $\mathbf{E}_-$  generati separatamente dai due piani sono in modulo entrambi eguali a  $\sigma/2\epsilon_0$ . Utilizzando il principio di sovrapposizione per calcolare il campo risultante  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_-$  si vede che i campi si sommano nella regione compresa tra i due piani e si annullano all'esterno. All'interno, per  $x_1 < x < x_2$ , il campo vale

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{u}_x, \quad (1.35)$$

mentre è nullo per  $x < x_1$  e  $x > x_2$ . In  $x_1$  e  $x_2$  si hanno le discontinuità  $+\sigma/\epsilon_0$  e  $-\sigma/\epsilon_0$  rispettivamente.

La disposizione geometrica descritta è utilizzata per ottenere un campo approssimativamente uniforme in una regione limitata tra due superficie piane finite: l'approssimazione è tanto migliore quanto minore è la distanza tra le superficie rispetto alle loro dimensioni; in ogni caso ci si avvicina di più all'uniformità nella zona centrale.

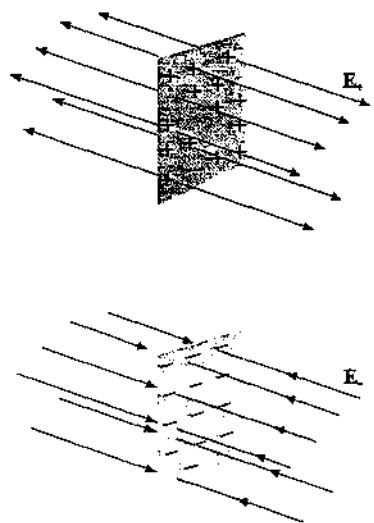


Figura 1.28

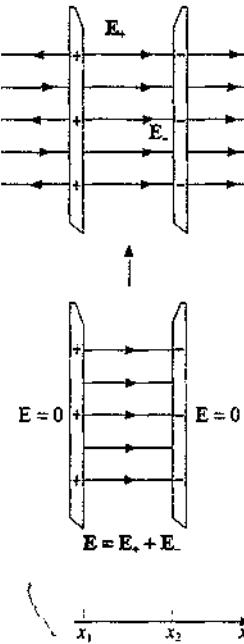


Figura 1.29

Vogliamo concludere questo paragrafo con alcune osservazioni. I risultati ottenuti negli esempi 1.6, 1.7, 1.8 valgono per distribuzioni di carica positiva; se la carica fosse negativa cambierebbe soltanto il verso del campo, che diventerebbe entrante verso le cariche invece che uscente, come si è visto nell'esempio 1.9.

Una caratteristica comune degli esempi mostrati è che le distribuzioni di carica sono uniformi. Questa scelta è stata fatta per ragioni di semplicità analitica, ma nella pratica non è realizzabile facilmente, se non con particolari geometrie.

Sempre per ragioni di semplicità analitica ci siamo limitati a distribuzioni di carica lineari e superficiali e non abbiamo fatto esempi di calcoli di campi generati da distribuzioni volumetriche di carica; infatti, anche in condizioni di simmetria, le integrazioni sono complicate. Vedremo nel paragrafo 3.1 un metodo per

risolvere più semplicemente sia qualche problema di questo tipo che alcuni degli esempi già visti.

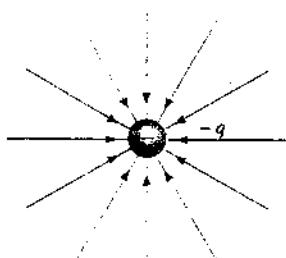
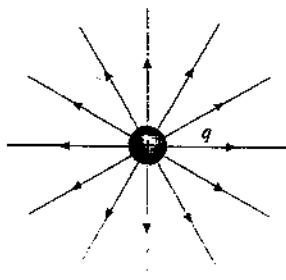


Figura 1.30

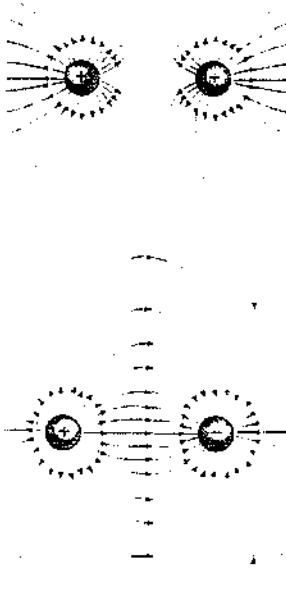


Figura 1.31

## 1.6 Linee di forza del campo elettrostatico

L'introduzione del concetto di campo elettrostatico mette in evidenza che la presenza di un sistema di cariche, dal caso più semplice della singola carica puntiforme al caso più generale di una distribuzione spaziale, modifica lo spazio circostante nel senso che una carica di prova posta in un qualsiasi punto risente della forza (1.18), attribuita all'interazione con il campo (1.21).

Partendo da una generica posizione e muovendosi per tratti infinitesimi successivi, ciascun parallelo e concorde al campo elettrostatico in quel dato punto, si ottiene una linea che è detta *linea di forza* o *linea di campo*: pertanto in ogni suo punto tale linea per definizione è tangente al campo e il suo verso di percorrenza indica il verso del campo. Se si traccia un certo numero di linee di forza si ha una rappresentazione grafica complessiva del campo in tutto lo spazio, come vedremo negli esempi che seguono.

Nel caso di una carica puntiforme, il cui campo è dato da (1.14), le linee di forza hanno direzione radiale con origine sulla carica e sono uscenti da questa se è positiva, entranti se è negativa. Si vede dalla figura 1.30 che le linee di infittiscono man mano che ci si avvicina alla sorgente del campo e ciò indica che l'intensità del campo è crescente.

Come esempi successivi consideriamo due cariche puntiformi eguali in valore, ma di segno opposto (sistema detto dipolo elettrico che studieremo nel paragrafo 2.7), e due cariche puntiformi eguali in valore e segno (positive nella figura 1.31). Già a questo punto sono evidenti tutte le proprietà delle linee di forza. Oltre alle prime due già enunciate:

- una linea di forza in ogni suo punto è tangente e concorde al campo in quel punto;
- le linee di forza si addensano dove l'intensità del campo è maggiore;

abbiamo che:

- le linee di forza non si incrociano mai, in quanto in ogni punto il campo è definito univocamente e non può avere due direzioni distinte;
- le linee di forza hanno origine dalle cariche positive e terminano sulle cariche negative; qualora ci siano solo cariche di uno stesso segno le linee di forza si chiudono all'infinito;
- nel caso di cariche di segno opposto, ma eguali in modulo, tutte le linee che partono dalle cariche positive si chiudono su quelle negative, alcune passando eventualmente per l'infinito; se invece le cariche non sono eguali in modulo, alcune linee terminano o provengono dall'infinito, come nella figura 1.32 ( $+q, -q/2$ ).

Un campo uniforme è rappresentato da linee parallele (costanza di direzione e verso) ed equidistanti (costanza del modulo).

Tali sono le linee del campo di un piano indefinito uniformemente carico (esempio 1.8), mentre nel caso dei due piani dell'esempio 1.9 le linee hanno questo andamento solo nell'intercapedine.

Nelle figure successive sono mostrate le linee di forza relative alle distribuzioni di carica lineare e superficiale degli esempi 1.6, 1.8.

Dalla proprietà a) che stabilisce il parallelismo tra il tratto infinitesimo  $d\mathbf{l}$  della linea di forza e il campo  $\mathbf{E}$ , discende la condizione di proporzionalità tra le componenti di  $d\mathbf{l}$  e quelle di  $\mathbf{E}$ ,

$$\frac{dx}{E_x(x, y, z)} = \frac{dy}{E_y(x, y, z)} = \frac{dz}{E_z(x, y, z)}, \quad (1.36)$$

che può essere assunta come definizione analitica delle linee di forza. Si tratta di un sistema di due equazioni che integrato dà le relazioni tra  $x, y$  e  $z$  che definiscono una famiglia di curve. Se il problema è bidimensionale le (1.36) si riducono all'unica  $dx/E_x = dy/E_y$ .

Applicando (1.36) alla situazione tridimensionale più semplice, che è sempre quella della carica puntiforme, e ricordando le (1.15) abbiamo

$$\frac{dx}{x - x_1} = \frac{dy}{y - y_1} = \frac{dz}{z - z_1}$$

Consideriamo l'eguaglianza, per esempio, tra il primo e il secondo membro e tra il primo e il terzo e integriamo da un punto  $(x_2, y_2, z_2)$  a un punto  $(x, y, z)$ ; otteniamo, passando attraverso i logaritmi,

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}, \quad \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1},$$

che sono le equazioni nello spazio di una retta passante per il punto  $(x_1, y_1, z_1)$  dove si trova la carica e il punto generico  $(x_2, y_2, z_2)$ ; al variare del punto generico si ha una stella di rette passanti per la carica.

Torneremo a utilizzare (1.36) nel capitolo 4 per un caso più interessante (esempio 4.25).

## 1.7 Moto di una carica in un campo elettrostatico.

### Esperienza di Rutherford

Supponiamo di immettere una carica puntiforme  $q$  in una zona di spazio in cui esiste un campo elettrostatico generato da un sistema di cariche ferme, che non vengono perturbate in alcun modo dalla presenza della carica. Questa, di massa  $m$ , è sottoposta alla forza (1.18) e la legge della dinamica di Newton, in condizioni non relativistiche, si scrive

$$q\mathbf{E} = m\mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{q}{m}\mathbf{E}. \quad (1.37)$$

Integrando la (1.37) si determinano posizione e velocità della carica, note posizione e velocità iniziali.

Il problema non è semplice perché, pur essendo il campo  $\mathbf{E}$  costante nel tempo, non lo è in generale nello spazio e la carica, passando in istanti successivi in punti diversi, è sottoposta all'azione di un campo variabile. Naturalmente la soluzione è più accessibile se la dipendenza del campo dalle coordinate permette un'integrazione non difficoltosa. Ad esempio, se il campo ha l'andamento radiale  $k/r$  e la carica è negativa, questa sente una forza di richiamo  $-kq/r^2$ , con opportune condizioni iniziali, descrive un moto armonico semplice. Il caso più facile è certamente quello del campo uniforme, che trattiamo nell'esempio seguente.

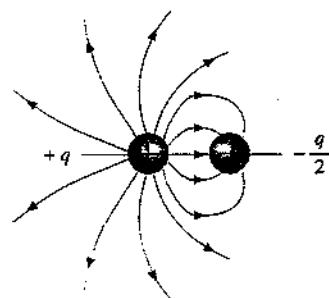


Figura 1.32

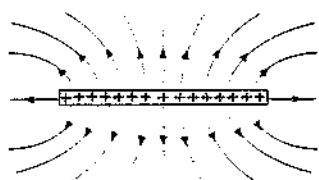


Figura 1.33

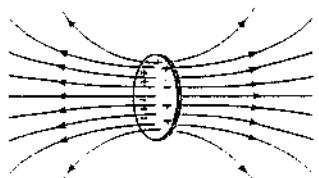


Figura 1.34

**Esempio 1.10**

Una carica  $q$  di massa  $m$  è lasciata libera in quiete in una posizione  $x = 0$  in una regione in cui esiste un campo elettrostatico uniforme  $\mathbf{E}$  parallelo e concorde all'asse  $x$ . Descrivere il moto della carica.

**Soluzione**

In un campo uniforme l'accelerazione è costante; se la velocità iniziale è diretta lungo l'asse  $x$  il moto della carica è rettilineo uniformemente accelerato con equazioni per lo spazio e la velocità date da

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2, \quad v(t) = v_0 + a t, \quad v^2(x) = v_0^2 + 2 a(x - x_0)$$

in cui  $a = q E / m$  è concorde al campo  $E$  se la carica è positiva, discorde se è negativa. In particolare per  $x_0 = 0$  e  $v_0 = 0$

$$x(t) = \frac{q E}{2 m} t^2, \quad v(t) = \frac{q E}{m} t, \quad v^2(x) = \frac{2 q E}{m} x.$$

Se invece la velocità iniziale forma un certo angolo con l'asse  $x$ , il moto ha una componente uniformemente accelerata lungo l'asse  $x$  e una componente uniforme ortogonalmente all'asse  $x$  per cui la traiettoria è una parabola, come vedremo esplicitamente nell'esempio 2.4.

La variazione di energia cinetica della particella è

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} m v^2(x) - \frac{1}{2} m v_0^2 = m a (x - x_0) = q E (x - x_0) = F(x - x_0),$$

pari al lavoro della forza (costante), come deve essere; si osservi che  $\Delta E_k$  non dipende dalla massa della carica (ma la velocità sì).

Nel caso proposto la carica positiva parte dalla posizione  $x = 0$  e arriva nella posizione

$x$  dopo un tempo  $t = \sqrt{2 m x / q E}$  con velocità  $v = \sqrt{2 q E x / m}$  ed energia cinetica  $q E x$ . Se mettiamo una particella di eguale massa ed eguale carica, ma negativa, con velocità nulla nella posizione  $x$ , essa arriva nell'origine nello stesso tempo e con la stessa velocità in modulo; anche l'energia cinetica è la stessa e in effetti il lavoro della forza elettrica è lo stesso nei due casi (se  $q$  avesse avuto velocità iniziale  $v_0 = -q$  avrebbe dovuto avere  $-v_0$ ).

Si tratta del caso particolare di un fatto generale, che è contenuto in (1.37): un campo accelerante per una data carica  $q$  è decelerante per una carica  $-q$  con le stesse condizioni iniziali, ma è accelerante per una carica  $-q$  che si muova in verso opposto. Una volta che è stata determinata la traiettoria di una particella con carica positiva in un certo campo, quella stessa traiettoria può essere percorsa in verso opposto e con la stessa velocità da una particella con la stessa massa e carica opposta, purché si scelgano opportunamente le condizioni iniziali.

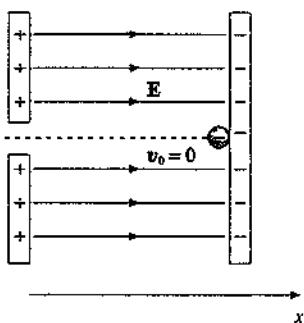
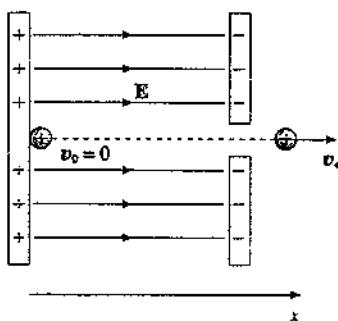


Figura 1.35

L'esempio appena visto dimostra l'utilizzazione dei campi elettostatici per accelerare particelle caricate: storicamente questo è stato il primo metodo funzionante. Torneremo sull'argomento nei capitoli successivi.

Un caso dinamico molto particolare, ma estremamente importante, è quello del moto relativo di due cariche puntiformi sottoposte alla loro interazione mutua che, per velocità molto minori di quella della luce, è data dalla legge di Coulomb (1.9).

Se le cariche sono di segno opposto la forza è attrattiva e abbiamo una situazione del tutto analoga a quella di due masse soggette all'interazione gravitazionale, che è stata discussa nel capitolo 5 del primo volume e che riprenderemo nel paragrafo 2.3 per descrivere il primo modello atomico, quello di Bohr (1913), e le sue modifiche dovute a Sommerfeld.

Anche il caso di cariche dello stesso segno ha avuto un'applicazione storica fondamentale da parte di Rutherford (1911) che descriviamo brevemente.

**Esperienza di Rutherford**

All'epoca non era noto come le cariche elettriche fossero distribuite nell'atomo. Un modello, dovuto a Thomson, suggeriva che le cariche negative, gli elettroni, fossero distribuite all'interno di una sfera carica positivamente di raggio pari a quello dell'atomo.

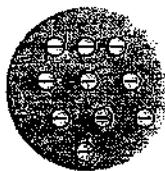
Una conseguenza di tale struttura, che possiamo intuire qualitativamente, è che una carica lanciata contro l'atomo non dovrebbe essere molto deviata rispetto alla sua direzione di incidenza a causa dell'interazione elettrica con i costituenti atomici. Supponendo che la massa della particella carica proiettile sia molto maggiore di quella dell'elettrone, nelle interazioni con questi ultimi la carica subisce accelerazioni quasi trascurabili, mentre nelle interazioni con i componenti positivi gli effetti di molte interazioni successive in media si compensano con il risultato di causare di norma piccole deviazioni e praticamente mai deviazioni importanti (la deviazione complessiva risultando dal fatto che le accelerazioni dovute alle singole interazioni non sono in generale parallele alla velocità). Nell'attraversamento di uno spessore finito di materiale l'effetto complessivo dovrebbe rimanere piccolo.

Una prima verifica sperimentale venne effettuata bombardando sottili lame metalliche, in oro, argento, rame di spessori dell'ordine di  $0.1 \mu\text{m} = 10^{-7} \text{ m}$ , con particelle  $\alpha$ , dotate di carica  $2e$  e massa circa quattro volte quella del protone, emesse con una determinata energia cinetica da una sorgente radioattiva e opportunamente collimate in direzione (oggi sappiamo che la particella  $\alpha$  è composta da due protoni e due neutroni ed è identica al nucleo dell'atomo di elio). Si trovò così che le deflessioni valevano in media circa  $1^\circ$ , ma che un certo numero di particelle  $\alpha$ , ben superiore alle attese, subiva deviazioni notevoli, anche oltre  $90^\circ$ .

Per spiegare l'evidenza sperimentale contraria al modello di Thomson, Rutherford propose un nuovo modello in cui la carica positiva (*nucleo*), invece di essere distribuita in tutto il volume dell'atomo, era accumulata nel centro, praticamente puntiforme, mentre la carica negativa portata dagli elettroni occupava tutto il volume dell'atomo. Nella maggior parte dei casi le particelle  $\alpha$  che attraversano il foglio passano lontane dai nuclei e subiscono piccole deflessioni; se però la traiettoria passa molto vicina ad un nucleo, a causa dell'andamento  $1/r^2$  della forza di Coulomb l'interazione può essere molto violenta e causare una grossa deflessione.

Quantitativamente, consideriamo una particella  $\alpha$  con energia cinetica  $E_k = \frac{1}{2}mv_0^2$  che si muove inizialmente lungo un asse parallelo all'asse  $x$ : in figura 1.37 sono mostrati tre

Atomo di Thomson



Atomo di Rutherford

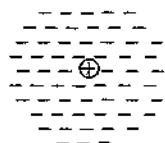


Figura 1.36

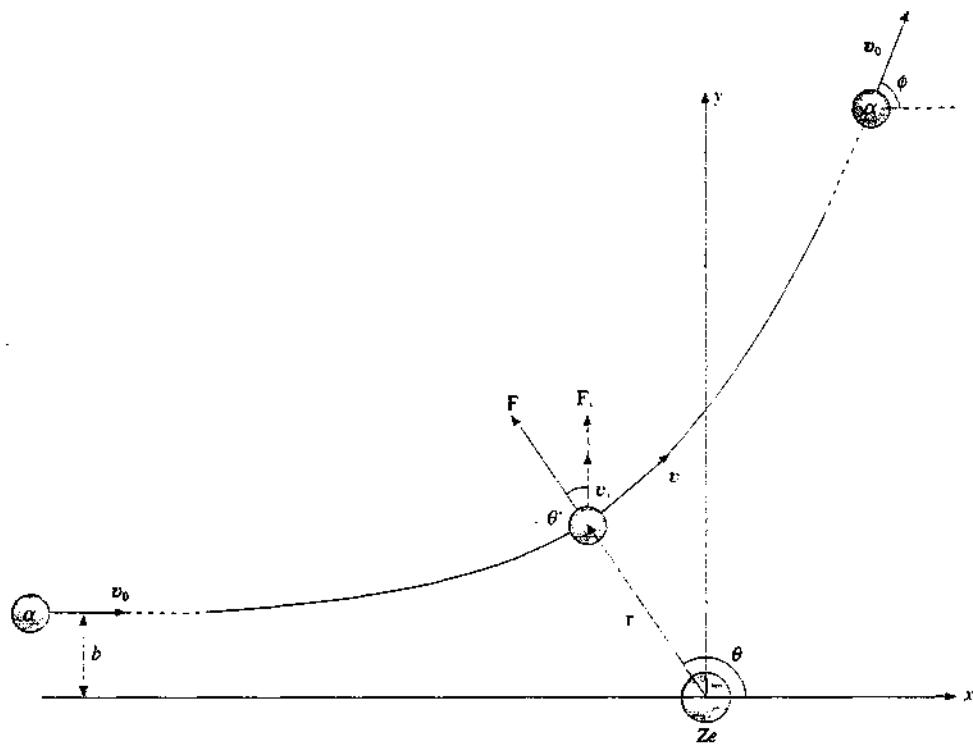


Figura 1.37

istanti particolari, quando la particella è a distanza  $\infty$ , quando è vicina al nucleo, quando è a distanza  $+ \infty$ . La deflessione è causata dalla forza elettrica repulsiva che vale in modulo  $F = 2 Z e^2 / 4 \pi \epsilon_0 r^2$ , se  $Z e$  è la carica positiva del nucleo. Tale forza centrale è conservativa e quindi si conservano durante il moto, che si svolge in un piano, il momento angolare (rispetto al centro della forza) e l'energia meccanica. Nell'istante iniziale questa coincide con  $E_k$  ed è positiva: siamo perciò nel caso, già discusso nel capitolo 5 del primo volume, in cui la traiettoria è un'iperbole. Supponiamo inoltre che il nucleo abbia massa molto superiore a quella della particella  $\alpha$  e si possa pertanto considerare fermo durante il processo (altrimenti si ricorre al concetto di massa ridotta).

La conservazione del momento angolare comporta l'eguaglianza

$$m v_0 b = m r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

### Parametro d'impatto

dove a secondo membro abbiamo l'espressione generica del modulo del momento angolare di un punto che descrive un moto piano:  $m v_0 b$  è il momento angolare iniziale e  $b$  è il cosiddetto *parametro d'impatto*.

L'equazione del moto lungo l'asse  $y$  è

$$m \frac{dv_y}{dt} = F_y = F \cos \theta' = F \sin \theta = \frac{2 Z e^2}{4 \pi \epsilon_0 r^2} \sin \theta$$

ed esprimendo  $r^2$  dall'equazione di conservazione del momento angolare

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{2 Z e^2}{4 \pi \epsilon_0 m v_0 b} \sin \theta \frac{d\theta}{dt}$$

Possiamo eliminare  $dt$  e integrare:

$$\int_0^{v_0 \sin \phi} dv_y = \frac{2 Z e^2}{4 \pi \epsilon_0 m v_0 b} \int_{\pi}^{\theta} \sin \theta d\theta ;$$

infatti lungo l'asse  $y$  la velocità iniziale è nulla e quella finale è la componente  $y$  di  $v_0$  (possiamo dire questo perché l'energia meccanica finale è tutta cinetica e coincide con quella iniziale: la velocità della particella  $\alpha$  è la stessa in modulo): l'angolo polare  $\theta$ , misurato rispetto al verso positivo dell'asse  $x$  varia da  $\pi$  a  $\phi$  passando da  $-\infty$  a  $+\infty$ . Di conseguenza

$$v_0 \sin \phi = \frac{2 Z e^2}{4 \pi \epsilon_0 m v_0 b} (1 + \cos \phi)$$

e poiché vale l'identità trigonometrica

$$\frac{\sin \phi}{1 + \cos \phi} = \tan \frac{\phi}{2}$$

otteniamo il risultato

$$\tan \frac{\phi}{2} = \frac{2 Z e^2}{4 \pi \epsilon_0 m v_0^2} \frac{1}{b}$$

che lega il parametro d'impatto  $b$  e l'*angolo di diffusione*  $\phi$  nell'urto di una particella  $\alpha$  contro un nucleo puntiforme di carica  $Z e$  e massa molto grande. Si vede che se  $b$  è molto piccolo sono possibili grandi valori di  $\phi$ : al limite per  $b \rightarrow 0$   $\phi$  tende a  $\pi$ , la particella  $\alpha$  rimbalza indietro.

Il parametro di impatto di ogni singolo urto non è controllabile sperimentalmente, però non è difficile calcolare la probabilità di deflessione che risulta proporzionale: al prodotto  $n s$ , se  $n$  è il numero di atomi per unità di volume nel foglio di spessore  $s$ , alla quantità  $(2 Z e^2 / 4 \pi \epsilon_0 m v_0^2)^2$  e alla funzione  $1 / \sin^2 \phi / 2$ ; ciò vuol dire che la frazione di particelle  $\alpha$  deflesse di un angolo  $\phi$ , a parità di caratteristiche del bersaglio e a parità di energia cinetica, è proporzionale a  $[\sin^2 \phi / 2]^{-1}$ .

Tutte queste previsioni del modello di Rutherford furono verificate con precisione da Geiger e Marsden nel 1913, trovando pieno accordo con i risultati sperimentali.

L'esperimento di Rutherford è di importanza capitale nella storia della fisica moderna, oltre che per la scoperta della struttura nucleare dell'atomo, perché ha dato origine a un metodo di indagine tuttora unico, che consiste nello studiare le strutture nucleari e subnucleari e le interazioni tra i loro costituenti attraverso urti tra un proiettile e un bersaglio: dalle caratteristiche di questi *processi di diffusione* (o di scattering, come si dice in lingua inglese) si sono ricavate praticamente tutte le informazioni in nostro possesso sui fenomeni subatomici.

Sempre utilizzando particelle  $\alpha$  come proiettili lo stesso Rutherford nel 1919 provocò le prime reazioni nucleari artificiali. Ci si rese conto in quegli anni, oltre che dell'importanza di poter disporre di diversi tipi di proiettili e bersagli, anche della necessità di operare ad energie variabili e controllabili, dando così impulso allo sviluppo degli acceleratori di particelle i cui primi esemplari, basati sull'utilizzazione di campi eletrostatici, entrarono in funzione intorno al 1930.

## 1.8 Determinazione della carica elementare. Esperienza di Millikan

Nel paragrafo 1.2 abbiamo detto che una delle proprietà della carica elettrica è di essere quantizzata, cioè di essere sempre multipla intera di un certo valore minimo, detto carica elementare, che corrisponde alla carica portata dall'elettrone e dal protone.

Le misure condotte da Millikan tra il 1909 e il 1917 hanno permesso di determinare il valore della carica elementare; da questo, e noto con altri metodi che discuteremo più avanti il rapporto  $e/m$  tra carica e massa dell'elettrone, è stato possibile ricavare il valore della massa dell'elettrone.

L'apparato sperimentale è mostrato schematicamente in figura 1.38. Tra due dischi  $A$  e  $B$  è possibile stabilire un campo elettrico, dell'ordine di  $10^5 \text{ N/C}$ , diretto ad esempio dall'alto verso il basso e uniforme nella zona centrale (la distanza tra i dischi è circa dieci volte più piccola del diametro). Attraverso un foro in  $A$  passano in questa zona goccioline d'olio, nebulizzato con uno spruzzatore, alcune delle quali risultano cariche, in genere negativamente per strofinio contro l'ugello dello spruzzatore. Lo spazio tra i dischi è opportunamente illuminato e il moto verticale delle gocce, che avviene in aria, è osservato con un microscopio  $M$ , fornito di occhiale micrometrico: si può così misurare lo spazio percorso da una goccia in un dato tempo e quindi la sua velocità di caduta. Il tutto è termostatato per evitare moti convettivi nell'aria dovuti a gradienti di temperatura.

In assenza di campo elettrico l'equazione del moto è

$$ma = m'g - 6\pi\eta rv :$$

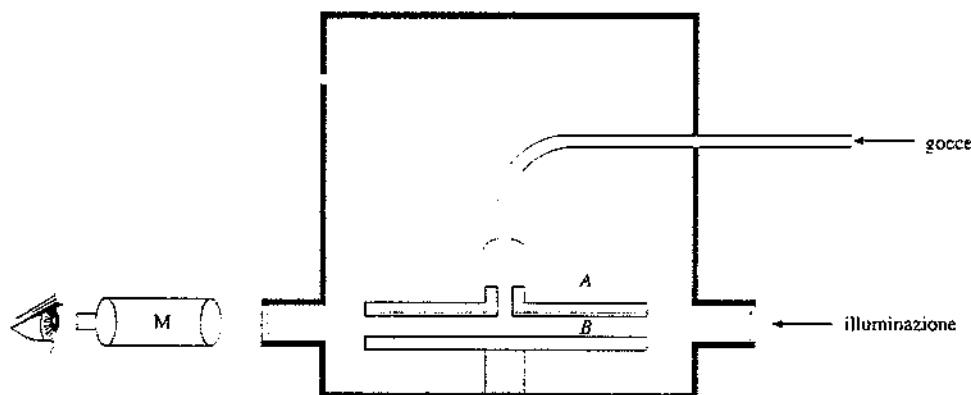


Figura 1.38

$m$  è la massa della goccia,  $m'g$  è la forza peso agente sulla goccia corretta per la spinta idrostatica,

$$m'g = (\rho - \rho_a) \frac{4}{3} \pi r^3 g ,$$

con  $\rho$  densità dell'olio,  $\rho_a$  densità dell'aria nelle condizioni sperimentali,  $r$  raggio della goccia. Il termine proporzionale alla velocità rappresenta la resistenza dell'aria, la cui viscosità è  $\eta$  (legge di Stokes, vedi il paragrafo 8.13 del primo volume).

A regime, quando la resistenza eguaglia la forza peso corretta, il moto è rettilineo uniforme con velocità

$$v_0 = \frac{m'g}{6\pi\eta r} = \frac{2(\rho - \rho_a)gr^2}{9\eta} ;$$

dalla misura di  $v_0$  si può pertanto dedurre il raggio della goccia; valori tipici sono  $v_0 \sim 1 \text{ mm/s} = 10^{-3} \text{ m/s}$ ,  $r \sim 1 \mu\text{m} = 10^{-6} \text{ m}$ .

Quando si applica il campo elettrico la legge del moto diviene

$$ma = m'g - qE - 6\pi\eta rv$$

se la carica è negativa e il campo è diretto come si è detto; a regime la velocità di caduta è

$$v_1 = \frac{m'g - qE}{6\pi\eta r} = v_0 - \frac{qE}{6\pi\eta r} , \quad (1.39)$$

minore di quella precedente in quanto nella situazione descritta la forza elettrica frena il moto; con il citato valore del campo,  $v_1 \sim 0.1 v_0 \sim 10^{-4} \text{ m/s}$ .

Si osservi che variando il valore del campo è possibile fare scendere più o meno velocemente la goccia o mantenerla ferma o farla salire; si possono così eseguire con la stessa goccia più misure di velocità e pertanto della carica posseduta dalla goccia, secondo (1.39).

Se si irradia l'aria con la radiazione emessa da una sorgente radioattiva o con raggi X avviene il fenomeno della ionizzazione e nell'aria si formano ioni positivi (atomi che hanno perso elettroni a causa della radiazione), e ioni negativi (atomi che hanno catturato gli elettroni liberati dalla radiazione, tipicamente ioni ossigeno).

Osservando il moto delle gocce si vedono di tanto in tanto variazioni brusche della velocità  $v_1$ , attribuibili a variazioni di carica della goccia che nel suo moto ha catturato qualche ione. Oppure, se la goccia è bilanciata, cioè in equilibrio statico, si vede che talvolta essa si mette all'improvviso in movimento, verso l'alto o verso il basso, sempre a causa della cattura di uno o più ioni. In entrambi i casi da (1.39) si deduce che, in modulo,

$$\Delta v_1 = \frac{E}{6\pi\eta r} \Delta q .$$

In particolare, nel caso delle gocce in equilibrio, la misura della variazione di velocità dà il valore della carica degli ioni catturati, indipendentemente dalla carica preesistente della goccia.

Eseguendo un gran numero di misure su una certa goccia e ripetendo l'esperienza con numerose altre gocce, Millikan trovò che la velocità variava sempre in modo discreto, segno di variazioni discrete della carica, e che le quantità calcolate  $\Delta q$  erano sempre esprimibili come multipli interi piccoli di un valore preciso, cioè

come  $\Delta q = n e$  con  $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ . Inoltre anche le cariche delle gocce, misurate in assenza di radiazione, risultarono sempre multiple della stessa quantità  $e$ , con  $n$  maggiore ( $10 \div 100$ ). Queste misure vennero eseguite anche con gocce di glicerina e di mercurio e tutte diedero lo stesso risultato. In conclusione sia le cariche degli ioni che quelle formate per strofinio in materiali isolanti o conduttori, positive o negative, sono sempre multiple di una carica elementare.

Nel corso delle sue misure Millikan scoprì che la legge di Stokes nella forma usuale non vale se il raggio della goccia è così piccolo da avvicinarsi al cammino libero medio delle molecole, che nell'aria a pressione atmosferica è  $\sim 10^{-7}$  m, cioè se il mezzo non appare continuo alla sferetta che cade. Egli ottenne dati consistenti operando la sostituzione

$$v \rightarrow \frac{v}{1 + \frac{k}{rp}} :$$

la velocità di caduta è corretta in termini del raggio della goccia e della pressione dell'aria;  $k$  è una costante da determinare sperimentalmente.

Il valore attuale di  $e$ , dato da (1.8), è maggiore appena dello 0.6% di quello misurato col metodo descritto. La discrepanza è stata ricondotta al valore della viscosità dell'aria utilizzato da Millikan.

### 1.9 Commenti conclusivi

Raccogliamo in questo paragrafo alcune puntualizzazioni sugli argomenti discussi.

Il primo concetto nuovo che abbiamo incontrato è quello di *carica elettrica*. Possiamo dire che la carica di un corpo caratterizza l'intensità dell'interazione elettrica subita dal corpo e in questo senso verrebbe spontaneo un paragone con la massa, che caratterizza l'intensità dell'interazione gravitazionale: dalla massa e dalla carica dipende il comportamento di un corpo rispetto alle due diverse interazioni. Alla massa però è legata un'altra caratteristica indipendente dal tipo di interazione: essa esprime, in base alla legge della dinamica di Newton, la risposta di un corpo a una qualsiasi forza, cioè l'inerzia del corpo. Solo sperimentalmente si trova che la massa inerziale è eguale a quella gravitazionale. Il ruolo della massa appare pertanto duplice rispetto a quello della carica.

Carica elettrica

Le proprietà specifiche delle due grandezze sono molto differenti. La *carica elettrica* presenta due segni, è *quantizzata*, si conserva ed è *relativisticamente invariante*, cioè ha lo stesso valore in qualsiasi sistema di riferimento. La massa ha un solo segno, non è quantizzata e non si conserva: come la carica essa è relativisticamente invariante (una particella ha la stessa massa in qualsiasi sistema di riferimento).

Bisogna però sottolineare che alcune di queste proprietà si manifestano chiaramente soltanto nei fenomeni microscopici. Se consideriamo ad esempio la quantizzazione della carica, essa è evidente a livello atomico e subatomico, ma diventa inapprezzabile non appena il valore della carica è tale che non si riescono a misurare variazioni dell'ordine della carica elementare (nell'esperienza di Millikan il limite era intorno a  $200 e$ ). Di conseguenza nei normali esperimenti di elettrostatica le cariche in gioco non mostrano la loro natura discreta. Invece la conservazione della carica si manifesta sempre, sia nei processi elementari, dove non sono mai state osservate reazioni in cui variasse la somma delle cariche elementari del sistema anche se ne cambiava la composizione, sia nei fenomeni macroscopici, nei quali entro gli errori di misura la carica complessiva di tutti i corpi partecipanti resta costante.

Nel caso della massa, la non conservazione è evidente solo quando possono avvenire trasformazioni di massa in energia; per esempio, si realizzano facilmente reazioni tra nuclei o tra particelle subnucleari in cui nello stato finale ci sono componenti diversi da quelli presenti nello stato iniziale e la massa totale non è la stessa. Quando però si considerano fenomeni macroscopici ordinari, come nello studio della dinamica dei corpi solidi o delle proprietà dei fluidi, non ci sono le condizioni perché avvengono trasformazioni di massa in energia o viceversa (tipiche dei fenomeni nucleari e subnucleari) e quindi la massa si conserva: questa conservazione si osserva per corpi singoli oppure, se avvengono cambiamenti di fase o reazioni chimiche, per tutto il sistema. Il fatto che la massa non sia quantizzata è invece una caratteri-

stica che si manifesta in ogni ordine di fenomeni.

Si osservi infine, secondo quanto visto nel paragrafo 1.2, che la massa di un sistema è dovuta ai nuclei degli atomi che lo compongono e quindi di norma non varia, come detto sopra, mentre la carica è dovuta ai nuclei e agli elettroni; essendo possibile il trasferimento di questi ultimi da un sistema ad un altro, si ottengono facilmente variazioni di carica, naturalmente col vincolo che la carica totale resta costante.

### Campo

Un concetto fondamentale nello studio dell'elettromagnetismo è quello di *campo*, per ora introdotto come campo statico dovuto a una distribuzione di carica. In questo stadio iniziale il campo appare come una grandezza formale, utile per separare nella formula della forza il contributo della sorgente (appunto il campo) e quindi scrivere la forza come interazione di una carica con un campo. In effetti, nei casi statici o lentamente variabili, il campo è inscindibile dalla sorgente; vedremo più avanti che invece, nel caso di fenomeni rapidamente variabili che comportano l'emissione di onde elettromagnetiche, un campo che si propaga acquista una realtà fisica indipendente dalla sorgente.

La presenza del campo è rivelabile esclusivamente attraverso un'interazione, ad esempio la forza subita da una carica, e questa è una nozione basilare, valida per il campo eletrostatico come per il campo magnetostatico che verrà introdotto successivamente e per i campi elettromagnetici variabili nel tempo.

### Legge di Coulomb

La legge che esprime la forza elettrica tra cariche ferme o in moto con piccola velocità è la *legge di Coulomb*, di cui vogliamo ora mettere in evidenza due aspetti interessanti.

La dipendenza  $1/r^2$  comporta che per  $r \rightarrow 0$  la forza tenda all'infinito, il che non ha senso fisico: questo vuol dire che la carica veramente puntiforme non è un oggetto reale. Non abbiamo difficoltà ad ammettere ciò per i corpi macroscopici che ovviamente non sono mai puntiformi. Esiste però in natura l'elettrone le cui dimensioni sono inferiori a  $10^{-17}$  m e che porta la carica elementare  $e$ : esso per definizione è un oggetto puntiforme carico. Questa difficoltà concettuale, che è insormontabile in fisica classica, è stata risolta soltanto nell'ambito dell'elettrodinamica quantistica.

### Azione a distanza

Un'altra caratteristica tipica della legge di Coulomb, come della legge della gravitazione di Newton, è la cosiddetta *azione a distanza*: l'interazione avviene senza che ci sia contatto tra i corpi (si pensi ad esempio all'esperimento di Rutherford, ma anche alle forze attrattive o repulsive tra due corpi carichi distanti o all'attrazione tra corpi celesti). Questa proprietà appare molto diversa da quelle di altre forze che si studiano in meccanica, come le forze con cui si spingono o tirano i corpi, direttamente con le mani o tramite una molla o un filo, o le forze di attrito, sia radente che volente o viscoso, forze che non si manifestano a distanza. In realtà ciò avviene perché la materia è neutra; però, quando ad esempio si spinge un corpo, si tende ad avvicinare moltissimo le distribuzioni elettroniche degli atomi dell'oggetto che spinge e del corpo e nascono forze elettriche repulsive che danno luogo alla forza effettivamente osservata. Questo è il significato di contatto a livello macroscopico, che è dunque un'azione a distanza molto breve.

Un'ultima osservazione: negli esperimenti di elettrostatica che sono stati descritti e in quelli dei capitoli successivi si fa in generale riferimento a corpi solidi e in effetti la sperimentazione con questi è più semplice: in particolare i conduttori sono tipicamente metalli nella fase solida. Non è facile sperimentare con i fluidi (a parte il caso molto speciale dell'esperienza di Millikan) e d'altra parte nelle applicazioni pratiche le cariche sono spesso portate dai metalli mentre i fluidi sono utilizzati soprattutto come isolanti. Infatti, dal punto di vista della suddivisione in isolanti e conduttori, i liquidi, con l'eccezione notevole del mercurio, sono isolanti (ottimi come alcuni oli o non molto buoni come l'acqua) e lo stesso vale per i gas. Sia liquidi che gas possono essere resi conduttori rispettivamente con l'eletrolisi e la ionizzazione.

# Lavoro elettrico. Potenziale elettrostatico



## 2.1 Lavoro della forza elettrica. Tensione, potenziale

La formula (1.18), che esprime la forza subita da una carica  $q_0$  in un campo elettrostatico, è valida quando le cariche che generano il campo sono fisse e costanti e la carica  $q_0$  è a sua volta fissa oppure si muove senza però perturbare la distribuzione delle cariche sorgenti. Il termine *elettrostatico* è utilizzato proprio per evidenziare questa situazione di immutabilità.

Come vedremo nel capitolo 7, se la carica  $q_0$  si muove in presenza di altre cariche, sia fisse che in moto, la forza su di essa è sempre proporzionale a  $q_0$ . Più in generale, quando su una carica  $q_0$  agisce una forza  $\mathbf{F}$  di qualsiasi natura, non necessariamente elettrostatica, ma ad esempio dovuta a processi chimici o ad azioni meccaniche, o ad altre cause ancora, possiamo definire sempre un campo elettrico  $\mathbf{E}$ , che si indica anche col nome di *campo elettromotore*, come rapporto tra la forza  $\mathbf{F}$  che agisce sulla carica e il valore della carica stessa:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_0} \Rightarrow \mathbf{F} = q_0 \mathbf{E} \quad (2.1)$$

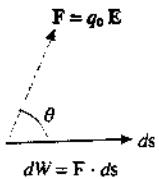


Figura 2.1

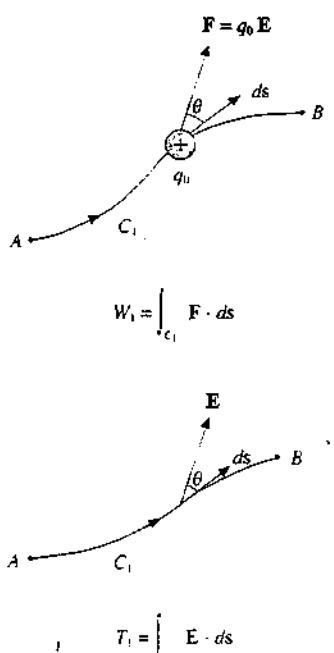


Figura 2.2

Alla (2.1) si dà carattere generale: *la forza che agisce su una carica, e che in quanto tale si chiama forza elettrica, si esprime sempre come prodotto della carica per un certo campo elettrico*.

Il lavoro della forza  $\mathbf{F}$  per uno spostamento elementare  $ds$  della carica  $q_0$  è dato da

$$dW_1 = \mathbf{F} \cdot ds = q_0 \mathbf{E} \cdot ds = q_0 E \cos\theta ds \quad (2.2)$$

se  $\theta$  è l'angolo tra il campo elettrico  $\mathbf{E}$  e lo spostamento  $ds$ . Per uno spostamento finito dalla posizione  $A$  alla posizione  $B$  lungo un percorso  $C_1$  il lavoro è dato da

$$W_1 = \int_{C_1} dW_1 = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot ds = q_0 \int_{C_1} \mathbf{E} \cdot ds \quad (2.3)$$

dove l'ultimo integrale è l'*integrale di linea* del campo  $\mathbf{E}$  lungo  $C_1$  (si veda l'appendice A del primo volume). Questo integrale, ovvero il rapporto  $W_1/q_0$  tra il lavoro compiuto dalla forza  $\mathbf{F}$  nello spostamento della carica  $q_0$  da  $A$  a  $B$  lungo il percorso  $C_1$  e il valore della carica, definisce la *tensione elettrica tra i due punti  $A$  e  $B$  relativi al percorso  $C_1$* :

$$T_1(A \rightarrow B \text{ lungo } C_1) = \int_{C_1} \mathbf{E} \cdot ds \quad (2.4) \quad \text{Tensione elettrica}$$

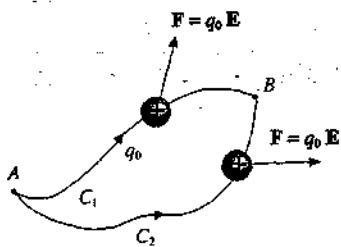


Figura 2.3

Se si considera un altro percorso  $C_2$ , si trova in generale un lavoro diverso e quindi un *diverso valore della tensione elettrica*, pur essendo i punti  $A$  e  $B$  gli stessi:

$$T_1(A \rightarrow B \text{ lungo } C_1) \neq T_2(A \rightarrow B \text{ lungo } C_2)$$

Per un percorso chiuso  $C$ , composto ad esempio dal percorso  $C_1$  da  $A$  a  $B$  e dal percorso  $-C_2$  da  $B$  ad  $A$ , il lavoro risulta

$$W = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

$$W = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} + \int_{-C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} - \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = W_1 - W_2,$$

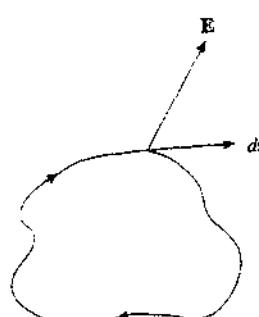


Figura 2.4

**Forza elettromotrice (f.e.m.)**

in cui abbiamo sfruttato la proprietà dell'integrale di linea di cambiare soltanto di segno se cambia il verso di percorrenza lungo la linea e utilizzato il simbolo  $\oint$  per indicare che il percorso è chiuso (ricordiamo che in questo caso l'integrale di linea si chiama anche *circuitazione*). Vediamo che *in generale il lavoro per un percorso chiuso è diverso da zero*. Inseriamo (2.1):

$$W = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = q_0 \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = q_0 \mathcal{E}. \quad (2.5)$$

Il lavoro per spostare una carica lungo il percorso chiuso  $C$  è dato dal prodotto della carica per la circuitazione del campo elettrico lungo  $C$ . L'integrale

$$\mathcal{E} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \quad (2.6)$$

che esprime il rapporto tra lavoro compiuto e carica per lo spostamento  $C$  si definisce *forza elettromotrice (f.e.m.) relativa al percorso chiuso  $C$* . Essa è in generale diversa da zero e dipende dalle caratteristiche del campo e dal percorso  $C$  scelto, ma non dalla carica  $q_0$ ; malgrado il nome improprio, si tenga ben presente che  $\mathcal{E}$  non è una forza.

Abbiamo visto in meccanica che esiste una categoria di *forze conservative*, per le quali il lavoro compiuto nello spostamento di un punto da  $A$  a  $B$  è funzione soltanto della posizione di partenza e di quella di arrivo e non del cammino seguito:

$$W(C_1) = \dots = W(C_i) = \dots = W(C_n).$$

qualunque sia  $C$ , purché inizi in  $A$  e finisca in  $B$ . Ne deriva che il *lavoro lungo un qualsiasi percorso chiuso è nullo*, ovvero che la circuitazione di una forza conservativa è nulla.

Non si verifica in natura che qualsiasi forza elettrica sia conservativa; questo è però il caso delle forze elettrostatiche, come dimostreremo nel paragrafo 2.2, e il risultato si esprime anche dicendo che *il campo elettrostatico è conservativo*. Non dipendendo dal percorso effettivamente seguito l'integrale che compare nella (2.3) può sempre essere espresso come differenza dei valori di una funzione delle coordinate

$$\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = f(B) - f(A).$$

All'opposto di questa funzione si dà il nome di *potenziale elettrostatico* del campo  $E$ , che risulta pertanto definito dalla

$$V_A - V_B = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \quad (2.7)$$

Differenza di potenziale  
(d.d.p.)

In realtà è la *differenza di potenziale* (d.d.p.) tra il punto *A* e il punto *B* ad essere definita da (2.7) e ciò vuol dire che il potenziale in un punto è determinato a meno di una costante additiva. Inserendo (2.7) in (2.3)

$$W_{AB} = q_0(V_A - V_B) = -q_0 \Delta V : \quad (2.8)$$

il *lavoro svolto dalla forza elettrica per portare  $q_0$  da *A* a *B** è dato dal prodotto di  $q_0$  per la d.d.p. tra *A* e *B* ovvero dal prodotto di  $q_0$  per l'oppeso della d.d.p. tra il punto di arrivo e il punto di partenza.

Ricordiamo che ad ogni forza conservativa è associata una determinata *energia potenziale* e che il *lavoro della forza conservativa è pari all'oppeso della variazione della corrispondente energia potenziale*. Nel caso elettrostatico abbiamo pertanto

$$W_{AB} = -\Delta U_e = U_e(A) - U_e(B) \quad \text{Energia potenziale}$$

e dal confronto con (2.8) seguono le eguaglianze

$$\Delta U_e = q_0 \Delta V , \quad U_e = q_0 V . \quad (2.9)$$

Una carica  $q_0$  posta in un campo elettrostatico possiede un'energia potenziale proporzionale al potenziale (e anch'essa definita a meno di una costante additiva).

Notiamo esplicitamente l'uso del simbolo  $U_e$  per l'*energia potenziale elettrostatica* al posto del simbolo  $E_p$ , introdotto nello studio della meccanica. La scelta è motivata dall'opportunità di evitare confusione con il simbolo del campo elettrico.

Dalle (2.5, 2.6, 2.7, 2.8) segue che per un qualsiasi percorso chiuso nella regione in cui è definito il campo  $\mathbf{E}$ , essendo la d.d.p. nulla in quanto  $A \equiv B$ , valgono le relazioni

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0 , \quad W = q_0 \oint = 0 \quad (2.10)$$

*In un campo elettrostatico la forza elettromotrice è sempre uguale a zero e quindi è nullo il lavoro compiuto dalla forza elettrica per ogni spostamento che riporti la carica nella posizione iniziale.*

## 2.2 Calcolo del potenziale elettrostatico

Rivediamo brevemente i risultati del paragrafo precedente: il lavoro di una forza elettrica si può sempre esprimere attraverso l'integrale di linea del campo elettrico lungo il percorso seguito dalla carica e in generale dipende dal percorso, come vedremo nei capitoli successivi.

Se però il campo è elettrostatico abbiamo affermato che esso è conservativo e pertanto il lavoro risulta indipendente dal percorso: ciò porta alla definizione del potenziale e dell'energia potenziale.

In questo paragrafo dimostriamo che il campo elettrostatico di una qualsiasi distribuzione di carica è conservativo e ricaviamo le espressioni esplicite di  $V$  ed  $U_e$ .

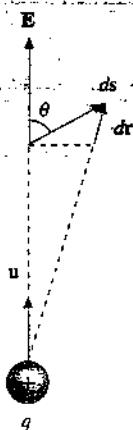


Figura 2.5

Iniziamo dal caso più semplice, che è quello del campo generato da una carica puntiforme. Il lavoro della forza  $F$  per uno spostamento elementare  $ds$  della carica  $q_0$  nel campo della carica puntiforme  $q$ , fissa in  $O$ , è dato in base a (2.2) e (1.14) da

$$dW = q_0 q \cdot E \cdot ds = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{u} \cdot d\mathbf{s}}{r^2} = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2}$$

per cui

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2}$$

La quantità  $dr = \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} = ds \cos\theta$ , proiezione di  $d\mathbf{s}$  lungo la direzione  $\mathbf{u}$  del campo, rappresenta di quanto è variata la distanza  $r$  tra  $q_0$  e  $q$  a seguito dello spostamento  $ds$ . La funzione integranda risulta così dipendere soltanto dalla variabile  $r$  e si ottiene subito, per uno spostamento dal punto  $A$  al punto  $B$ , caratterizzati rispettivamente dalle distanze  $r_A$  e  $r_B$  dal punto  $O$ .

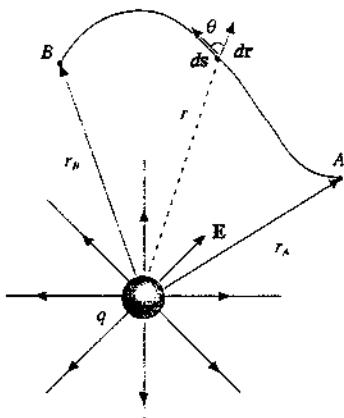


Figura 2.6

Il lavoro corrispondente è

$$W = q_0 \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0 r_A} - \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0 r_B} . \quad (2.11)$$

Abbiamo così verificato che il *lavoro non dipende dal percorso seguito*. Il risultato era scontato perché la *forza in questione è centrale* e il suo modulo dipende solo dalla distanza  $r$ , però il calcolo fornisce le espressioni della differenza di potenziale e della variazione di energia potenziale nel campo di una carica puntiforme: basta confrontare (2.11) con (2.7) e (2.12) con (2.9):

Differenza di potenziale

$$V_A - V_B = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_A} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_B} . \quad (2.13)$$

Variazione dell'energia potenziale

$$U_e(A) - U_e(B) = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0 r_A} - \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0 r_B} . \quad (2.14)$$

Ricordando che il potenziale e l'energia potenziale sono definiti a meno di una costante additiva, (2.13) e (2.14) possono essere considerate le variazioni delle funzioni

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + A \quad , \quad U_e(r) = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0 r} + B \quad ,$$

che danno rispettivamente il *potenziale* in un punto a distanza  $r$  dalla carica  $q$  e l'*energia potenziale* della carica  $q_0$  distante  $r$  da  $q$ .

Il fatto che la forza tra due cariche decresca con la distanza suggerisce che per cariche molto lontane tra loro la forza sia trascurabile, cioè non ci sia più interazione. Al limite, a distanza infinita, è lecito supporre che sia

$$E(\infty) = 0 \quad , \quad F(\infty) = 0 \quad , \quad V(\infty) = 0 \quad , \quad U_e(\infty) = 0 \quad .$$

Poiché  $V(\infty) = A$  ed  $U_e(\infty) = B$  possiamo assumere  $A = B = 0$ . D'altra parte da (2.7)

$$\int_r^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = V(r) - V(\infty) = V(r)$$

e in conclusione abbiamo per il potenziale generato da una carica puntiforme  $q$  in un punto a distanza  $r$

$$V(r) = \int_r^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (2.15)$$

e per l'energia potenziale di  $q_0$  nel campo di  $q$

$$U_e(r) = q_0 V(r) = q_0 \int_r^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (2.16)$$

Osserviamo che il potenziale è costante in tutti i punti della superficie sferica di raggio  $r$  con centro nella carica  $q$ .

I risultati trovati si estendono senza difficoltà, in base al *principio di sovrapposizione*, al caso di un campo elettrostatico generato da un numero qualsiasi di cariche puntiformi fisse  $q_1, q_2, \dots, q_n$ .

Il lavoro per uno spostamento finito da  $A$  a  $B$  della carica  $q_0$  è

$$W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = q_0 \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

e nell'integrale di linea del campo si inserisce la (1.16):

$$\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_A^B (\sum_i \mathbf{E}_{i,i} \cdot d\mathbf{s}) = \sum_i \int_A^B \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{s} = \sum_i \int_A^B \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} \mathbf{u}_i \cdot d\mathbf{s} .$$

Ciascun integrale porta ad un risultato tipo (2.11) e quindi il campo delle  $n$  cariche è conservativo. Da (2.7) e (2.8) che definiscono in ogni caso d.d.p. e lavoro abbiamo

$$V_A - V_B = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_{A,i}} - \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_{B,i}} \quad (2.17)$$

$$W = q_0(V_A - V_B) = \sum_i \frac{q_0 q_i}{4\pi\epsilon_0 r_{A,i}} - \sum_i \frac{q_0 q_i}{4\pi\epsilon_0 r_{B,i}} = -\Delta U_e . \quad (2.18)$$

Ragionando come nel caso di una singola carica puntiforme, il potenziale generato dal sistema di cariche nel punto  $P(x, y, z)$ , distante  $r_i$  dalla carica  $q_i$ , è

$$V(x, y, z) = \int_P^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i} . \quad (2.19)$$

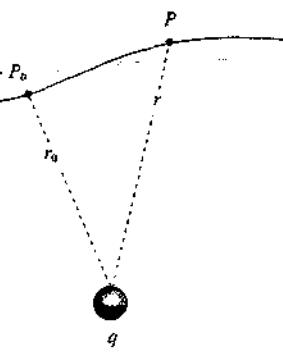


Figura 2.7

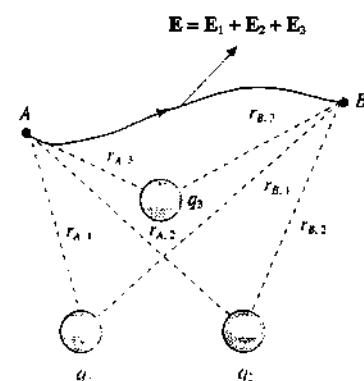


Figura 2.8

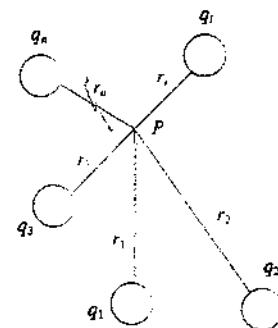


Figura 2.9

Questo risultato indica che il potenziale elettrostatico generato da un sistema di cariche puntiformi è uguale alla somma dei potenziali generati singolarmente dalle cariche. Dette  $x_i, y_i, z_i$  le coordinate della carica  $q_i$  la (2.19) si scrive

Potenziale elettrostatico di un sistema discreto di cariche.

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2]^{1/2}} \quad (2.20)$$

Infine, nel caso che le cariche siano distribuite in modo continuo, come descritto nel paragrafo 1.5 con *densità lineare*  $\lambda$  o *superficiale*  $\sigma$  o *spaziale*  $\rho$ , il campo elettrostatico è ancora ovviamente conservativo e per il calcolo del potenziale basta sostituire nella (2.20) alla sommatoria l'integrale di linea, di superficie o di volume:

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_s \frac{\lambda ds}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_s \frac{\lambda(x', y', z') ds}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{1/2}} \quad (2.21)$$

Potenziale elettrostatico di distribuzioni continue di carica

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Sigma} \frac{\sigma d\Sigma}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Sigma} \frac{\sigma(x', y', z') d\Sigma}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{1/2}} \quad (2.22)$$

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \frac{\rho d\tau}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \frac{\rho(x', y', z') d\tau}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{1/2}} \quad (2.23)$$

Le (2.20, 2.21, 2.22, 2.23) forniscono le regole per il calcolo del potenziale generato da un sistema di cariche comunque distribuite. Nell'eseguire le operazioni di somma o di integrale le coordinate  $x, y, z$  sono fisse mentre sono variabili le coordinate delle cariche sorgenti.

Il lavoro si calcola tramite (2.8); l'energia potenziale elettrostatica di una carica  $q_0$  posta nel punto  $P$  è data da (2.9):

$$U_e(x, y, z) = q_0 V(x, y, z) \quad (2.24)$$

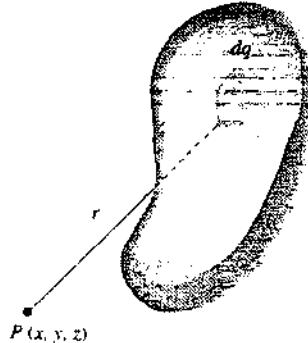


Figura 2.10

Il potenziale elettrostatico, in tutte le situazioni descritte, risulta una *funzione (univoca)* del punto, *continua e derivabile*, che può essere calcolata una volta che sia definita la distribuzione delle cariche sorgenti, indipendentemente dalla presenza della carica  $q_0$ . Come nel caso del campo  $E$  si parla di campo vettoriale, così per il *potenziale elettrostatico* si può parlare di *campo scalare*. A differenza però del campo elettrico non è il valore del potenziale ad essere significativo, ma le sue variazioni, come dicono (2.7) e (2.8).

Infine, anche per il potenziale elettrostatico si possono ripetere i commenti fatti nel paragrafo 1.9 a proposito del campo elettrostatico. Da una parte esso è un concetto molto utile per il calcolo del lavoro, nella cui formula evidenzia il contributo delle sorgenti, ma non ha, almeno nei casi statici, un'esistenza indipendente dalle sorgenti. Dall'altra, la presenza di un potenziale variabile con la posizione in una determinata regione di spazio si mette in evidenza solo attraverso la constatazione che lo spostamento di una carica in quella regione richiede un certo lavoro. Osserviamo di nuovo che in realtà è la d.d.p. ad essere messa in evidenza, se il potenziale fosse ovunque costante non si sarebbe alcun effetto, in quanto non ci sarebbero campo e forza elettrica.

### Unità di misura

Poiché la differenza di potenziale è un lavoro diviso per una carica l'unità di misura nel SI è joule/coulomb. J/C. Questa unità è molto importante e si chiama *volt*, simbolo V; quindi

$$V = \frac{J}{C}$$

La d.d.p. di 1V è quella che dà luogo al lavoro di 1J per il trasporto di una carica di 1C. Dall'equazione (2.7) si vede che l'unità di misura del campo elettrico, già definita come N/C, è anche eguale a quella del potenziale divisa per quella della lunghezza: in effetti

$$\frac{N}{C} = \frac{N \text{ m}}{C \text{ m}} = \frac{J}{C \text{ m}} = \frac{V}{m}$$

L'unità V/m (volt/metro) è quella più comunemente usata per il campo elettrico. Si noti che il volt è l'unità di misura anche delle tensioni elettriche e delle forze elettromotrici.

### Esempio 2.1

Calcolare il potenziale elettrostatico nel centro di un triangolo equilatero di lato  $l$  se in ogni vertice c'è una carica  $q$ .

#### Soluzione

Abbiamo un sistema discreto di cariche e quindi utilizziamo la (2.19), in cui i tre contributi sono uguali. La distanza  $r$  di ogni carica dal centro è tale che  $r \cos 30^\circ = l/2$ , cioè  $r = l/\sqrt{3}$ , e quindi

$$V = 3 \frac{q}{4 \pi \epsilon_0 r} = \frac{3\sqrt{3}}{4 \pi \epsilon_0 l} q$$

Il segno del potenziale è uguale a quello delle cariche. Si noti che se le cariche fossero diverse, l'espressione del potenziale sarebbe  $V = (q_1 + q_2 + q_3)/4 \pi \epsilon_0 r$ ; in particolare esso sarebbe nullo solo se  $q_1 + q_2 + q_3 = 0$ .

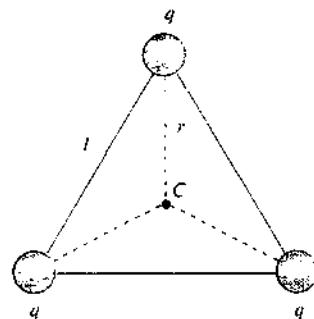


Figura 2.11

Altri esempi di calcoli di potenziale si trovano nel paragrafo 2.4, con riferimento a distribuzioni continue di carica.

## 2.3 Energia potenziale elettrostatica

Abbiamo verificato che la forza elettrostatica è conservativa e abbiamo determinato l'espressione della corrispondente energia potenziale per una carica  $q_0$  posta nel campo di un sistema qualsiasi di cariche.

Nel caso più semplice di due sole cariche distanti  $r$  vale la (2.16), mentre quando le cariche sorgenti sono  $n$  da (2.18) vediamo che l'energia potenziale di  $q_0$  è la somma di  $n$  termini, ciascuno del tipo (2.16), cioè che l'energia potenziale di  $q_0$  è la somma delle energie potenziali che  $q_0$  avrebbe se fosse in presenza di una sola carica alla volta. Il risultato è valido anche per distribuzioni continue di carica e si ottiene integrando sul termine infinitesimo  $q_0 dq / 4 \pi \epsilon_0 r$  che dà l'energia potenziale di  $q_0$  nel campo della carica sorgente  $dq$ . In ogni caso questi procedimenti portano all'espressione (2.24).

Analizziamo il significato della formula  $U_r(r) = q_0 q / 4 \pi \epsilon_0 r$ : essa può essere egualata secondo (2.16) a  $U_r(r) - U_r(\infty)$  e quindi al lavoro  $W$  della forza elettrica per portare le cariche dalla distanza  $r$  alla distanza infinita, in accordo con  $W = -\Delta U_r$ .

Se le cariche sono dello stesso segno, e quindi si respingono, l'energia potenziale  $U_r(r)$  è positiva ed è positivo il lavoro elettrico: infatti la forza repulsiva tende ad allontanare le cariche. Nel processo di allontanamento l'energia potenziale diminuisce e viene fornito lavoro all'esterno. Se si vuole costruire il sistema di due cariche dello stesso segno inizialmente a distanza infinita e alla fine a distanza  $r$  bisogna spendere lavoro esterno contro la forza repulsiva e ritroviamo questo lavo-

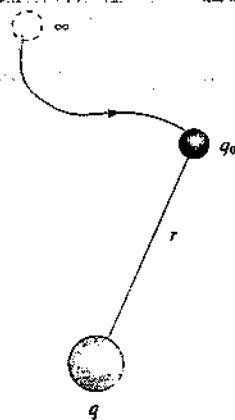


Figura 2.12

ro sotto forma di energia potenziale  $U_e(r)$ , che aumenta nell'avvicinamento.

Se invece le cariche sono di segno opposto, e quindi si attraggono, l'energia potenziale e il lavoro elettrico per separare le cariche sono negativi: la forza attrattiva nell'allontanamento compie lavoro negativo. L'allontanamento può avvenire cioè per effetto di una forza esterna che compie lavoro positivo e ritroviamo questo lavoro nell'energia potenziale che aumenta (diviene meno negativa) nel processo. Quando due cariche di segno opposto si avvicinano dall'infinito a distanza  $r$ , l'energia potenziale diminuisce e viene fornito lavoro all'esterno.

Pertanto il sistema di due cariche dello stesso segno evolve spontaneamente verso la distanza infinita e per costruirlo bisogna spendere un lavoro pari a  $U_e(r)$ , il sistema di due cariche di segno opposto evolve verso la situazione di distanza minima e per separarlo occorre spendere il lavoro  $-U_e(r)$ . Osserviamo che in nessun caso è possibile mantenere due cariche ferme a distanza finita senza l'intervento di altre forze, ad esempio forze vincolari che bilanciano la forza elettrica.

Essendo il potenziale pari all'energia potenziale divisa per la carica  $q_0$ , cioè una energia potenziale per unità di carica, possiamo affermare da (2.15) che *il potenziale in un punto è pari al lavoro che la forza elettrica compie per spostare una carica positiva unitaria da quel punto all'infinito*.

La discussione può essere estesa al caso della carica  $q_0$  nel campo di più cariche: l'energia potenziale di  $q_0$  è la somma di vari contributi che possono essere di segno diverso e, a differenza del caso di due cariche, essa può cambiare di segno a seconda della regione considerata; ad ogni modo le conclusioni sono analoghe.

Un esame critico di tutto l'argomento mostra una dissimmetria: la carica  $q_0$  è stata considerata separatamente dal sistema di cariche fisse che generano il campo. Però questo sistema ha una sua energia potenziale in quanto tra le cariche che lo compongono, e che sono a distanza finita tra loro, si esercitano forze elettrostatiche. L'energia potenziale elettrostatica complessiva andrebbe scritta

$$U_e = U_e(q_0) + U_e(\text{sistema}) :$$

il fatto è che  $U_e(\text{sistema})$  è costante durante i processi descritti, e cioè spostamenti della carica  $q_0$  da una posizione ad un'altra, e quindi le variazioni dell'energia potenziale totale coincidono con  $\Delta U_e(q_0)$ .

Comunque sia, risolviamo adesso il problema del calcolo dell'energia potenziale di un sistema di cariche fisse utilizzando i risultati finora ottenuti per  $q_0$ .

Ciascuna carica è nel campo delle altre cariche e ha una determinata energia potenziale, che dipende dalle distanze relative e dai valori delle cariche. L'energia potenziale totale è la somma di tutti questi termini, che scriviamo esplicitamente nella tabella seguente:

	$q_1$	$q_2$	$q_n$
$q_1$	0	$\frac{q_1 q_2}{4 \pi \epsilon_0 r_{1,2}}$	$\frac{q_1 q_n}{4 \pi \epsilon_0 r_{1,n}}$
$q_2$	$\frac{q_2 q_1}{4 \pi \epsilon_0 r_{2,1}}$	0	$\frac{q_2 q_n}{4 \pi \epsilon_0 r_{2,n}}$
$q_n$	$\frac{q_n q_1}{4 \pi \epsilon_0 r_{n,1}}$	$\frac{q_n q_2}{4 \pi \epsilon_0 r_{n,2}}$	0

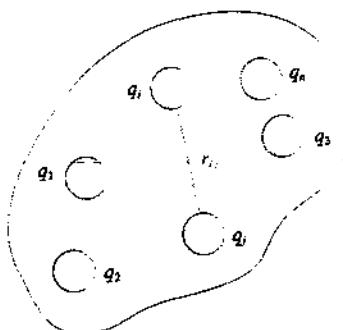


Figura 2.13

L'elemento  $i, j$  è l'energia potenziale della coppia  $q_i, q_j$  data da (2.16); scrivendo zero per gli elementi  $i, i$  assumiamo che una carica non risenta del proprio campo. Siccome  $r_{i,j} = r_{j,i}$  risulta evidente che ogni contributo compare due volte nella tabella e pertanto il risultato è

$$U_e(\text{sistema}) = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{4\pi \epsilon_0 r_{i,j}} \quad (2.25)$$

Energia potenziale di un sistema discreto di cariche

Chiamando  $V_{j,i}$  il potenziale che la carica  $q_j$  genera nel punto in cui si trova la carica  $q_i$ , la (2.25) si scrive

$$U_e(\text{sistema}) = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} q_i V_{j,i} \quad (2.26)$$

Concettualmente analoghe sono le espressioni per una distribuzione continua.

### *Moto di una carica. Conservazione dell'energia*

Ritorniamo a considerare una carica puntiforme  $q_0$  e supponiamo che sia in moto in un campo elettrostatico  $\mathbf{E}$ ; il problema è stato già discusso nel paragrafo 1.7 e ora lo riprendiamo applicando la conservazione dell'energia totale, come è lecito in quanto il moto avviene in presenza di forze conservative.

Quando la particella, con carica  $q_0$  e massa  $m$ , passa dalla posizione  $A$  alla posizione  $B$  la sua energia cinetica cambia in accordo con il *teorema dell'energia*:

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = W ;$$

d'altra parte il lavoro si esprime tramite (2.8):

$$W = -\Delta U_e = U_e(A) - U_e(B) = q_0 V_A - q_0 V_B .$$

Eguagliando e ordinando abbiamo la relazione

$$\frac{1}{2} m v_A^2 + q_0 V_A = \frac{1}{2} m v_B^2 + q_0 V_B , \quad (2.27)$$

che esprime la *conservazione dell'energia*

$$E = E_k + U_e = \frac{1}{2} m v^2 + q_0 V . \quad (2.28) \quad \text{Conservazione dell'energia}$$

*durante il moto della particella l'energia totale, somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale, rimane costante.*

Nella (2.27) è considerato solo il termine elettrostatico; se agiscono anche altre forze conservative, come forza peso e forze elastiche, vanno aggiunti i termini corrispondenti. Durante il moto di norma i vari termini cambiano e avvengono trasformazioni da una forma di energia all'altra, però la somma resta sempre costante.

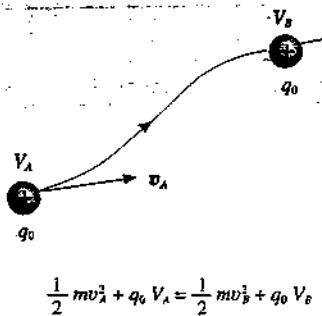


Figura 2.14

La (2.27) mostra che scegliendo opportunamente il segno della differenza di potenziale è possibile *accelerare* la particella, trasformando l'energia potenziale in energia cinetica. Una carica positiva è accelerata se  $V_A > V_B$ , mentre una carica negativa è accelerata se  $V_A < V_B$ . Quanto detto è alla base dell'accelerazione di particelle con campi elettrostatici. Se  $V_A = V_B$  non c'è alcun effetto complessivo; ciò non vuol dire che tra  $A$  e  $B$  non c'è campo, ma semplicemente che nel percorso  $A$ - $B$  ci sono zone in cui l'effetto è accelerante e altre in cui è decelerante. In particolare  $V_A = V_B$  se  $A \equiv B$ : alla fine di un percorso chiuso l'energia cinetica è la stessa che all'inizio, la velocità può essere cambiata di direzione, ma non di modulo (si riveda quanto detto alla fine del paragrafo 2.1).

Una situazione particolare, ma che in molti casi è realizzata per la sua semplicità, si ha quando nella regione in cui avviene il moto il campo è uniforme, cioè costante in modulo, direzione e verso; da (2.7) abbiamo

$$V_A - V_B = \mathbf{E} \cdot \int_A^B d\mathbf{s} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{r}_{AB} = E(z_B - z_A) . \quad (2.29)$$

da cui deduciamo che

$$V_A = -E z_A + \text{costante}, \quad V_B = -E z_B + \text{costante},$$

cioè che in un campo uniforme, parallelo e concorde all'asse  $z$ ,

$$V(z) = -E z + \text{costante}. \quad (2.30)$$

Il potenziale ha lo stesso valore in tutti i punti di un piano ortogonale alla direzione del campo ed è una funzione lineare decrescente della coordinata misurata lungo la direzione e il verso del campo. La d.d.p. tra un punto  $A$  e un punto  $B$  a valle distante  $h$  è  $Eh$ , se il punto  $B$  è a monte è  $-Eh$ . Il valore della costante è pari al potenziale nell'origine, che è assunta come riferimento; non è possibile in questo caso fare riferimento all'infinito perché, come diremo in seguito, non è possibile realizzare un campo uniforme all'infinito.

La conservazione dell'energia in un campo uniforme si scrive

$$\frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = q_0 E (z_B - z_A) . \quad (2.31)$$

Se riguardiamo l'esempio 1.10, vediamo che si è ritrovata l'espressione già ricavata per  $\Delta E_k$ .

Nel caso del campo di una carica puntiforme (2.27) e (2.16) danno

$$\frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = \frac{q_0 q}{4 \pi \epsilon_0} \left( \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) . \quad (2.32)$$

Abbiamo ricavato (2.31) e (2.32) non solo perché saranno utili in seguito, ma anche per far vedere, nell'ambito generale della (2.27), come la struttura della variazione di  $U$ , dipenda dal modo con cui è distribuita la carica sorgente.

### Unità di misura L'elettronvolt

Quando una carica elementare viene accelerata dalla d.d.p. di 1V essa acquista l'energia cinetica

$$e \Delta V = 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 1 = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Questa quantità di energia, che è adeguata per descrivere le energie dei fenomeni su scala atomica, definisce l'unità di misura *elettronvolt*, simbolo eV:

$$1 \text{ eV} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J} \Rightarrow 1 \text{ J} = 6.25 \cdot 10^{18} \text{ eV}. \quad (2.33)$$

Il valore preciso si ha in corrispondenza al valore di  $e$  dato nella tabella 1.1, ma differisce da quello riportato in (2.33) di circa lo 0.1%.

I multipli e i sottomultipli comunemente usati per il volt e per l'elettronvolt sono:

$$\mu\text{V} = 10^{-6} \text{ V} \quad \mu\text{eV} = 10^{-6} \text{ eV} = 1.6 \cdot 10^{-25} \text{ J}$$

$$\text{mV} = 10^{-3} \text{ V} \quad \text{meV} = 10^{-3} \text{ eV} = 1.6 \cdot 10^{-22} \text{ J}$$

$$\text{kV} = 10^3 \text{ V} \quad \text{keV} = 10^3 \text{ eV} = 1.6 \cdot 10^{-16} \text{ J}$$

$$\text{MV} = 10^6 \text{ V} \quad \text{MeV} = 10^6 \text{ eV} = 1.6 \cdot 10^{-13} \text{ J}$$

$$\text{GV} = 10^9 \text{ V} \quad \text{GeV} = 10^9 \text{ eV} = 1.6 \cdot 10^{-10} \text{ J}$$

$$\text{TeV} = 10^{12} \text{ eV} = 1.6 \cdot 10^{-7} \text{ J}$$

Il massimo valore di energia attualmente raggiunto da elettroni accelerati è 50 GeV, mentre per i protoni è 1 TeV. Queste energie non sono raggiunte con mezzi elettrostatici (è impossibile realizzare d.d.p. di  $50 \cdot 10^9$  V o di  $10^{12}$  V), ma con altri sistemi elettrici cui accenneremo in seguito.

### Esempio 2.2

Nell'esperimento di Rutherford, descritto nel paragrafo 1.7, si assuma che le particelle  $\alpha$  abbiano una energia cinetica di 7 MeV. Si calcoli la loro velocità  $v$ , in un urto con parametro d'impatto  $b = 0$  la minima distanza dal nucleo a cui esse arrivano. La massa delle particelle  $\alpha$  è  $m = 6.64 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ .

#### Soluzione

Secondo (2.33)  $E_k = 7 \cdot 10^6 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} = 11.2 \cdot 10^{-13} \text{ J}$  ed eguagliando a  $1/2 m v^2$  si trova  $v = 1.84 \cdot 10^7 \text{ m/s}$  (circa il 6% della velocità della luce). Con parametro d'impatto nullo la velocità iniziale della particella  $\alpha$  è diretta verso il punto in cui si trova il nucleo; la particella viene decelerata dalla forza repulsiva, ma non deflessa e si ferma quando la sua energia cinetica iniziale si è tutta tramutata in energia potenziale elettrostatica:

$$\frac{(Z e)(2 e)}{4 \pi \epsilon_0 r} = \frac{2 Z e^2}{4 \pi \epsilon_0 r} = 7 \text{ MeV} = 11.2 \cdot 10^{-13} \text{ J}$$

$Ze$  è la carica del nucleo,  $2e$  la carica della particella  $\alpha$ . Si trova

$$r = 4.11 \cdot 10^{-16} \text{ m}$$

Se il nucleo è di rame,  $Z = 29$  e  $r = 1.2 \cdot 10^{-14} \text{ m}$ , se è d'oro  $Z = 79$  e  $r = 3.2 \cdot 10^{-14} \text{ m}$ .

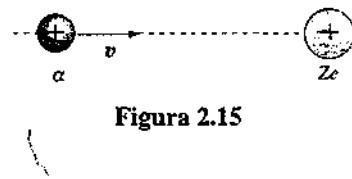


Figura 2.15

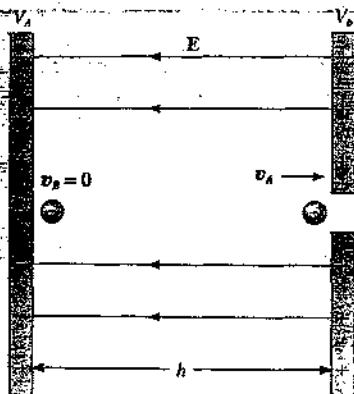


Figura 2.16

**Esempio 2.3**

Un elettrone è abbandonato in quiete in un campo elettrico uniforme, di modulo  $E = 2 \cdot 10^6 \text{ V/m}$ , che lo accelera per una distanza  $h = 0.5 \text{ cm}$ . Calcolare l'energia cinetica acquistata dall'elettrone.

**Soluzione**

La d.d.p. sulla distanza  $h$  è data da

$$Eh = 2 \cdot 10^6 \cdot 0.5 \cdot 10^{-2} = 10^4 \text{ V}$$

e quindi l'energia cinetica acquistata dall'elettrone è, secondo (2.31),

$$E_t = e Eh = 10^4 \text{ eV} = 10 \text{ keV} = 1.6 \cdot 10^{-15} \text{ J}$$

A questa energia corrisponderebbe, con la formula classica, la velocità  $v = 5.93 \cdot 10^7 \text{ m/s}$ , pari a circa il 20% della velocità della luce. La corretta formula relativistica dà  $v = 5.85 \cdot 10^7 \text{ m/s}$ .

**Esempio 2.4 Separatore elettrostatico. Oscilloscopio**

Un elettrone viene immesso con velocità iniziale  $v_0$  in una regione limitata in cui agisce un campo elettrostatico uniforme perpendicolare a  $v_0$ .

Uscito dalla regione l'elettrone colpisce uno schermo  $S$  nel punto  $C$ . Calcolare l'angolo di deflessione  $\alpha$ , l'energia cinetica e la velocità finali dell'elettrone e la distanza  $d$  del punto  $C$  dall'asse  $x$ .

**Soluzione**

L'elettrone è soggetto a una accelerazione  $a = eE/m$  diretta lungo l'asse  $y$  quando attraversa la regione in cui c'è campo elettrico. Il moto lungo  $x$  è rettilineo uniforme con velocità  $v_0$ , il moto lungo  $y$  è uniformemente accelerato:

$$x = v_0 t \quad , \quad y = \frac{1}{2} \frac{eE}{m} t^2$$

La traiettoria è un arco di parabola di equazione

$$y = \frac{1}{2} \frac{eE}{m} \frac{x^2}{v_0^2}$$

Si tratta dello stesso tipo di moto descritto da un corpo di massa  $m$  sotto l'azione della forza peso  $m g$ .

L'angolo di deflessione si calcola da

$$\operatorname{tg} \alpha = \left( \frac{dy}{dx} \right)_{x=0} = \frac{eE l}{m v_0^2}$$

e la distanza  $h$  vale

$$h = y(l) = \frac{1}{2} \frac{eE}{m} \frac{l^2}{v_0^2}$$

L'energia cinetica nel punto  $B$  si ottiene applicando (2.31):

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 + eEh = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{e^2 E^2 l^2}{2 m v_0^2}$$

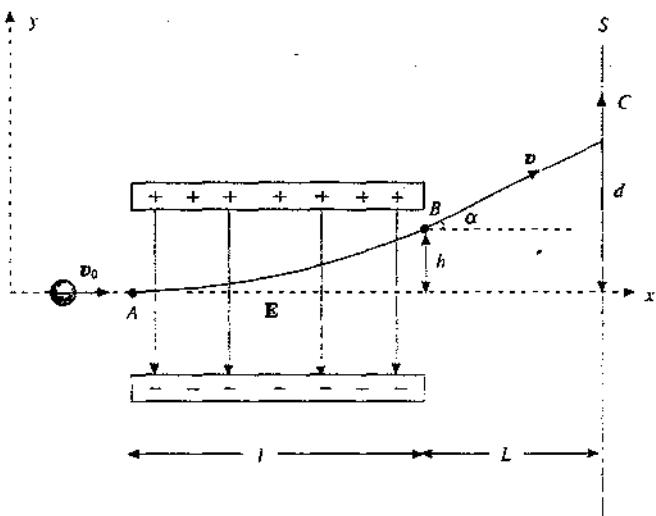


Figura 2.17

$$\text{e quindi } v^2 = v_0^2 + \frac{e^2 E^2 l^2}{m^2 v_0^2} = v_0^2 + 2ah$$

Fuori dal campo l'elettrone descrive una traiettoria rettilinea e quindi

$$d = h + L \operatorname{tg} \alpha = \frac{e E l}{m v_0^2} \left( \frac{l}{2} + L \right) \quad (2.34)$$

Noti i parametri geometrici  $l$  e  $L$ , il valore del campo e la velocità iniziale, si può determinare il rapporto  $e/m$  per gli elettroni misurando  $d$ . Ritorneremo più avanti su questa misura fondamentale eseguita da Thomson nel 1897. Per avere un'idea quantitativa dell'entità di  $d$ , assumiamo il valore conosciuto  $e/m = 1.76 \cdot 10^{11} \text{ C/kg}$ , una velocità iniziale  $v_0 \approx 3 \cdot 10^7 \text{ m/s}$ , un campo  $E = 10^4 \text{ V/m}$  e  $l = L = 10 \text{ cm}$ : si ottiene  $h = 0.98 \text{ cm}$ ,  $d = 2.93 \text{ cm}$ .

La (2.34) permette anche, se è noto tutto eccetto il campo, di determinarne il valore misurando  $d$ ; siccome il valore del campo è legato alla d.d.p. tra i piani carichi distanti  $h_0$  dalla  $\Delta V = E h_0$ , la misura di  $d$  fornisce in pratica il valore della d.d.p. applicata e anche il segno, dal segno della deflessione.

Vediamo alcune applicazioni del dispositivo descritto. Se lungo l'asse  $x$  entrano particelle con la stessa carica e massa diversa esse colpiscono lo schermo in punti diversi: con un opportuno diaframma possono essere lasciate proseguire oltre lo schermo solo quelle con massa compresa entro un intervallo determinato dalla larghezza del diaframma. Il sistema si chiama *separatore elettrostatico*.

Uno strumento di larghissimo uso in cui sono adottate due coppie di placchette di deflessione come quelle descritte è l'*oscilloscopio*, il cui elemento principale, il tubo a raggi catodici, è mostrato in figura 2.18. Si può capirne il funzionamento fin d'ora, anche se viene utilizzato soprattutto per misura di d.d.p. variabili nel tempo.

Dentro un involucro di vetro in cui è fatto il vuoto si trovano una sorgente che emette lungo l'asse  $x$  un fascio collimato di elettroni, una coppia di placchette di deflessione verticale, una coppia di placchette di deflessione orizzontale e lo schermo  $S$  costituito da materiale fluorescente depositato all'interno della parete terminale: l'emissione di luce dallo schermo nel punto in cui è colpito dal fascio di elettroni permette di visualizzare la posizione del fascio (un tubo a raggi catodici è l'elemento essenziale anche nei televisori e nei terminali dei calcolatori: il nome raggi catodici è quello dato agli elettroni al tempo della loro scoperta).

Gli elettroni sono sottoposti a due deflessioni a  $90^\circ$  tra loro: la deflessione orizzontale è causata da una d.d.p., applicata alle placchette verticali, che viene fatta variare linear-

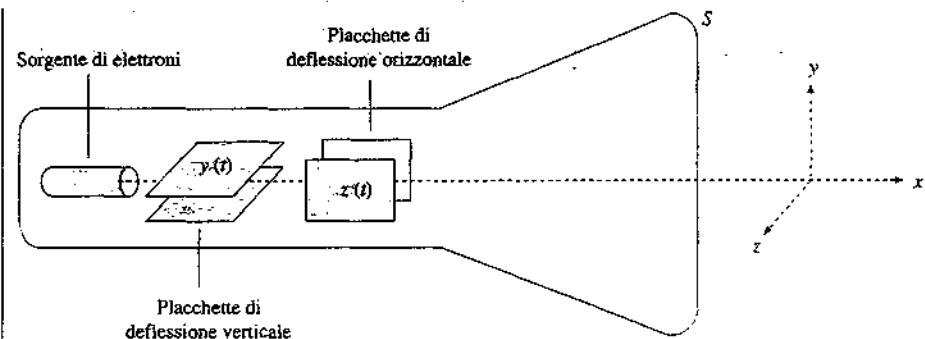


Figura 2.18

mente nel tempo, per cui sullo schermo provoca uno spostamento di equazione  $z = v_0 t$ ; la deflessione verticale è causata da una d.d.p.  $V(t)$ , applicata alle placchette orizzontali, che provoca sullo schermo uno spostamento di equazione  $y = y(t)$ , con  $y(t)$  proporzionale a  $V(t)$  come abbiamo visto in precedenza. Il fascio colpisce lo schermo nel punto di coordinate  $(z, y)$  che nel tempo descrive la curva di equazione  $y = y(z/v_0)$ ; questa ha, in funzione di  $z$ , lo stesso grafico di  $y$ , e quindi di  $V$ , in funzione di  $t$ . Sullo schermo si vede una traccia continua luminosa corrispondente al grafico e non una successione di punti luminosi lungo il grafico in quanto l'emissione luminosa dura un certo tempo.

Per esempio, se la d.d.p. applicata alle placchette di deflessione verticale è sinusoidale con periodo  $T = 2\pi/\omega$ , allora

$$y(t) = y_0 \sin \omega t \Rightarrow y(z) = y_0 \sin \frac{\omega z}{v_0} = y_0 \sin k z ,$$

che è ancora una sinusoide di periodo

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\omega} v_0 = T v_0 .$$

Tarando lo schermo lungo  $z$  in unità di  $\lambda/v_0$  si può leggere direttamente  $T$ .

L'uso prevalente dell'oscilloscopio in laboratorio consiste nella visualizzazione di qualsiasi  $V(t)$  e nella sua misura in ampiezza e nel tempo.

Da un punto di vista dinamico quella che abbiamo descritto è un'applicazione della composizione di moti su assi ortogonali; ad esempio l'oscilloscopio fornisce il modo più comodo per studiare la composizione di oscillazioni armoniche su assi ortogonali (capitolo 9 del primo volume): basta trasformarle in oscillazioni elettriche e applicarle alle placchette  $z$  e  $y$ .

Un'alternativa recente al tubo a raggi catodici è costituita da dispositivi a cristalli liquidi, molto più compatti.

### Esempio 2.5

Nel modello di Bohr dell'atomo di idrogeno l'elettrone compie un'orbita circolare di raggio  $r = 0.53 \cdot 10^{-10}$  m attorno al protone. Calcolare l'energia di legame dell'atomo di idrogeno.

#### Soluzione

Il potenziale elettrico del protone, puntiforme rispetto alle dimensioni atomiche, ha alla distanza  $r$  il valore, dato da (2.16),

$$V = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r} = 27.2 \text{ V}$$

e quindi l'energia potenziale dell'elettrone nel campo del protone è

$$U_e = -eV = \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -27.2 \text{ eV} = -4.35 \cdot 10^{-18} \text{ J} .$$

Sull'elettrone agisce la forza data dalla legge di Coulomb e, per la legge di Newton,

$$m a = m \frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{4 \pi \epsilon_0 r^2}$$

la forza coulombiana è cioè la forza centripeta che mantiene l'elettrone sull'orbita circolare. L'energia cinetica dell'elettrone è

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \frac{e^2}{4 \pi \epsilon_0 r}$$

(risulta  $v = 2.19 \cdot 10^6$  m/s) e la sua energia totale è pari a

$$U = E_k + U_r = -\frac{1}{2} \frac{e^2}{4 \pi \epsilon_0 r} = -13.6 \text{ eV} = -21.8 \cdot 10^{-19} \text{ J.}$$

L'energia totale è negativa in quanto l'energia potenziale in modulo è superiore all'energia cinetica; il sistema è quindi *legato* con energia di legame pari a  $-13.6$  eV. Se si vuole separare l'elettrone dal protone portandolo a distanza infinita, la minima spesa di energia si ha quando l'elettrone arriva all'infinito con velocità nulla. La sua energia finale è nulla e quindi lo è anche quella iniziale: pertanto all'inizio deve essere

$$U + U_r = 0 \Rightarrow -13.6 \text{ eV} + U_r = 0 \Rightarrow U_r = 13.6 \text{ eV}$$

Questa è la cosiddetta *energia di ionizzazione* dell'atomo di idrogeno. Ricordiamo che si chiama *ionizzazione* il processo di separazione di elettroni da un atomo a seguito del quale si formano uno ione positivo (l'atomo privo di uno o più elettroni) ed elettroni liberi; altri atomi possono catturare questi elettroni diventando ioni negativi (paragrafo 1.2).

Si osservi che l'energia di legame non è l'energia potenziale: ciò sarebbe vero se entrambe le cariche fossero in quiete ( $E_k = 0$ ); abbiamo però notato che questo sistema non è elettricamente stabile, mentre l'atomo è stabile. In effetti la stabilità sotto l'azione di una forza attrattiva si ottiene solo perché l'elettrone ruota. Riprenderemo questo problema della stabilità dell'atomo tra breve parlando del modello atomico di Bohr-Sommerfeld.

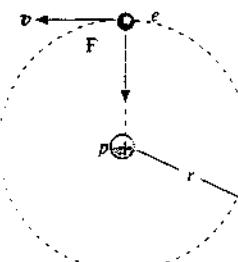


Figura 2.19

Riteniamo necessarie due precisazioni. Negli esempi in cui si descrive il moto di elettroni o di protoni o di ioni è sempre sottinteso che il moto avviene nel vuoto; se così non fosse il moto delle particelle sarebbe completamente diverso, a causa degli urti con le molecole del mezzo.

Un'altra ipotesi, implicita nelle formule che usiamo, è che le velocità siano sempre abbastanza inferiori a quella della luce in modo da poter usare la meccanica classica. Per gli elettroni assumiamo di poter fare ciò fino a energie cinetiche  $E_k \leq 5$  KeV, che corrispondono a velocità inferiori a  $0.14 c = 4.2 \cdot 10^7$  m/s, per i protoni la stessa situazione si ha fino ad energie cinetiche  $E_k \leq 10$  MeV (i limiti sono  $\sim 0.01 mc^2$ ). Naturalmente il passaggio è graduale, oltre i limiti indicati l'approssimazione classica è sempre meno precisa fino a diventare completamente errata. La differenza di comportamento tra elettroni e protoni sta nella differenza di massa, per cui è molto più facile accelerare un elettrone che un protone: a parità di aumento di energia cinetica, cioè a parità del valore assoluto della d.d.p. accelerante, l'elettrone ha una variazione di velocità molto superiore e quindi raggiunge già a piccole energie cinetiche il regime relativistico. Con i massimi valori di d.d.p. elettrostatica, che sono dell'ordine di 10 MV, gli elettroni sono relativistici, i protoni possono ancora essere trattati classicamente.

*Il modello atomico di Bohr-Sommerfeld*

Il modello atomico di Bohr venne proposto nel 1913; accogliendo l'ipotesi nucleare di Rutherford e applicandola all'atomo di idrogeno, Bohr suppose che l'elettrone potesse descrivere orbite circolari intorno al protone, ubbidendo alla cosiddetta *condizione di quantizzazione del momento angolare*: il momento angolare  $L$  dell'elettrone rispetto al nucleo deve essere multiplo intero della quantità  $\hbar = h / 2\pi$ ; la costante  $h$  è la *costante di Planck*.

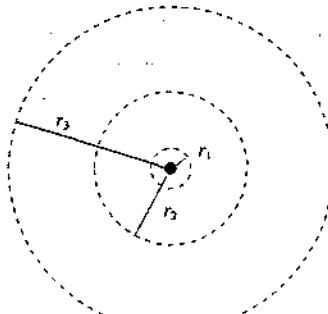


Figura 2.20

$$\hbar = 6.626 \cdot 10^{-34} \text{ J s} \Rightarrow \hbar = 1.055 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$$

Quindi, per un'orbita circolare di raggio  $r_n$  deve essere

$$m v r_n = n \hbar \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

La condizione classica di equilibrio è stata scritta nell'esempio 2.5:

$$m \frac{v^2}{r_n} = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{e^2}{r_n^2} \Rightarrow v = e / \sqrt{4 \pi \epsilon_0 m r_n} \Rightarrow r_n = \frac{4 \pi \epsilon_0 \hbar^2 n^2}{m e^2} = n^2 0.529 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

La quantizzazione del momento angolare impone che i raggi delle orbite debbano valere

$$r_1 = 0.529 \cdot 10^{-10} \text{ m}, \quad r_2 = 2.116 \cdot 10^{-10} \text{ m}, \quad r_3 = 4.761 \cdot 10^{-10} \text{ m}, \dots$$

In ciascuno di questi stati, che si chiamano *stati quantici*, l'energia totale dell'elettrone è data, secondo quanto ricavato nell'esempio 2.5, da

$$U_n = -\frac{1}{2} \frac{e^2}{4 \pi \epsilon_0 r_n} = -\frac{1}{2} \frac{m e^4}{(4 \pi \epsilon_0)^2 \hbar^2 n^2} = -\frac{13.6}{n^2} \text{ eV}$$

Anche l'*energia* è dunque *quantizzata*: il suo valore minimo si ha per  $n=1$  ed è  $U_1 = -13.6 \text{ eV}$ ; al crescere di  $n$  l'energia aumenta tendendo a zero per valori discreti. Si parla di *livelli energetici dell'atomo di idrogeno*: quello corrispondente all'energia  $U_1$  si chiama *livello fondamentale*, gli altri livelli eccitati: *in condizioni normali l'elettrone si trova nel livello di energia  $U_1$* .

Sommerfeld estese il modello di Bohr considerando la possibilità per l'elettrone di descrivere orbite ellittiche con il protone in uno dei fuochi: infatti è questa l'orbita più generale per un sistema di due punti legati da una forza centrale attrattiva tipo  $k/r^2$  e con energia totale negativa. Il semiasse maggiore  $a$  dipende soltanto dall'energia mentre l'eccentricità  $\epsilon = \sqrt{1 - b^2/a^2}$ , con  $b$  semiasse minore, dipende, per una data energia, dal momento angolare con cui è percorsa l'orbita (si veda il capitolo 5 del primo volume).

A questa configurazione classica Sommerfeld impose che sia il momento angolare dell'elettrone rispetto al protone che la sua proiezione lungo una determinata direzione fossero quantizzati, cioè multipli interi di  $\hbar$ . Le conseguenze di queste ipotesi sono le seguenti.

a) L'energia dell'elettrone dipende dal numero quantico principale  $n$  come nel modello originario di Bohr.

b) In ogni livello energetico  $U_n$  l'elettrone può percorrere  $n$  orbite ellittiche, tutte con lo stesso semiasse maggiore  $a_n = -e^2 / 8 \pi \epsilon_0 U_n$  e con semiasse minore, e quindi momento angolare, diversi, questi ultimo dato da

$$L = (l+1) \hbar \quad l = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

L'intero  $l$  si chiama *numero quantico azimutale*: poiché si dimostra che  $b_n/a_n = (l+1)/n$ , risulta che l'orbita con  $l=n-1$  è una circonferenza.

c) Per ciascuna orbita caratterizzata dal valore  $l$  sono possibili  $2l+1$  *inclinazioni* del piano dell'orbita; precisamente, l'angolo  $\alpha$  tra la normale al piano e una data direzione deve essere tale che

$$\cos \alpha = \frac{m}{l+1} \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$$

L'intero  $m$  si chiama *numero quantico magnetico*.

Fissato  $n$  sono dunque possibili



Figura 2.21

$$\sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) = n^2$$

stati dinamici; nel livello fondamentale ( $n=1, l=0, m=0$ ) c'è un solo stato dinamico accessibile.

Il modello di Bohr-Sommerfeld, sviluppato e ulteriormente raffinato tra il 1913 e il 1925, spiegò molte caratteristiche dei fenomeni atomici allora osservati, soprattutto nel campo dell'emissione e dell'assorbimento di radiazioni elettromagnetiche da parte degli atomi, e stabilì il concetto di energia e momento angolare quantizzati secondo valori discreti nei fenomeni atomici; per queste ragioni la sua importanza storica è fondamentale.

Tuttavia questo modello non era coerente: esso applicava al moto dell'elettrone rispetto al protone i risultati ben noti in meccanica classica relativi al moto in un campo di forze centrali newtoniane ( $k/r^2$ ), ma introduceva ad hoc le ipotesi di quantizzazione del momento angolare, essenziali per spiegare i dati sperimentali, ma senza giustificazione teorica.

Inoltre, se da una parte si sfruttavano risultati classici, dall'altra si era costretti ad ignorare il fenomeno classico dell'emissione di radiazioni da parte di una carica in moto con accelerazione centripeta, emissione che avrebbe dovuto portare molto rapidamente l'elettrone a perdere la sua energia e a cadere sul protone, mentre invece sperimentalmente è provato che gli atomi sono stabili. Esamineremo questo meccanismo nello studio delle onde elettromagnetiche.

Il modello di Bohr-Sommerfeld venne superato nel 1925 con l'avvento della meccanica quantistica, proposta da Heisenberg e Schrödinger, nel cui ambito sono formulate coerentemente le leggi che regolano i fenomeni atomici e che spiegano con estrema precisione le relative osservazioni sperimentali.

## 2.4 Il campo come gradiente del potenziale

Nei paragrafi precedenti abbiamo dimostrato che se si conosce il campo elettrostatico in ogni punto di una curva che unisce due punti  $A$  e  $B$  possiamo calcolare la differenza di potenziale tra i due punti tramite la (2.7) e che il risultato non dipende dalla curva prescelta.

Vogliamo ora dimostrare che accanto a questa relazione *integrale* esiste una relazione *locale* che permette dalla conoscenza del potenziale elettrostatico in ogni punto di un certa regione di calcolare il campo elettrostatico in ogni punto della stessa regione.

Abbiamo già rilevato che il potenziale è una funzione scalare continua e derivabile. Per uno spostamento  $d\mathbf{r} = dx \mathbf{u}_x + dy \mathbf{u}_y + dz \mathbf{u}_z$ , che unisce due punti di coordinate  $A(x, y, z)$  e  $B(x+dx, y+dy, z+dz)$  la variazione del potenziale è

$$dV = V(x+dx, y+dy, z+dz) - V(x, y, z) = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -E_x dx - E_y dy - E_z dz$$

in accordo con (2.7) e con l'espressione del prodotto scalare tramite le componenti. D'altra parte per il teorema del differenziale totale

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

e dal confronto tra le due espressioni di  $dV$  ricaviamo che devono sussistere le egualanze

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}. \quad (2.35)$$

Abbiamo così ritrovato le relazioni che a partire da una funzione scalare definiscono le componenti del vettore gradiente della funzione (si veda l'appendice C del primo volume); la (2.35) può cioè essere scritta sinteticamente

Campo  $\mathbf{E}$  come gradiente  
di  $V$

$$\mathbf{E} = -\nabla V$$

(2.36)

il campo elettrostatico è eguale pertanto al gradiente del potenziale elettrostatico cambiato di segno. L'equazione (2.36) è la relazione locale che tramite il calcolo delle derivate parziali del potenziale permette di determinare le componenti del campo elettrico in ogni punto della regione in cui sono definiti campo e potenziale.

La rappresentazione dell'operazione di gradiente può avvenire in modo diverso utilizzando l'*operatore vettoriale del* definito da

L'operatore  $\nabla$  in coordinate cartesiane

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{u}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{u}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{u}_z . \quad (2.37)$$

Formalmente  $\nabla$  si comporta come un vettore, che acquista significato quando opera su una funzione scalare o viene moltiplicato per un altro vettore. In particolare l'applicazione dell'operatore *del* a una funzione scalare come il potenziale consiste nel riempire il posto vuoto nell'operazione di derivata con la funzione stessa, cioè

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{u}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{u}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{u}_z = \text{grad } V : \quad (2.38)$$

L'operatore *del* applicato a una funzione scalare acquista il significato di gradiente della funzione. Vedremo più avanti l'applicazione a vettori. Nel seguito useremo il simbolo  $\nabla V$  per indicare il gradiente del potenziale.

Secondo (2.36) e (2.38) la (2.7) può essere riscritta a livello infinitesimo e a livello finito come

$$dV = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \nabla V \cdot d\mathbf{s} , \quad V_B - V_A = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - \int_A^B \nabla V \cdot d\mathbf{s}$$

ovvero

$$V_B - V_A = \int_A^B \nabla V \cdot d\mathbf{s} . \quad (2.39)$$

La (2.39) è l'applicazione al potenziale di un teorema generale di calcolo vettoriale, il *teorema del gradiente*, secondo cui la variazione di una funzione scalare tra due punti  $A$  e  $B$  è data dall'integrale di linea del gradiente della funzione lungo un qualunque percorso che unisce  $A$  e  $B$ .

La (2.36) suggerisce un metodo alternativo per il calcolo di  $\mathbf{E}$ . Fino a questo punto, nota la distribuzione delle cariche elettriche sorgenti, abbiamo utilizzato una delle relazioni (1.17) o (1.22) e simili. Poiché il campo elettrico è un vettore questo metodo comporta in generale il calcolo di un integrale per ciascuna delle componenti del campo. Il metodo alternativo consiste nel calcolo del potenziale applicando una delle (2.20, 2.21, 2.22, 2.23), eseguendo quindi un solo integrale; successivamente si calcolano le componenti del campo con (2.35).

Di solito le funzioni del tipo  $1/r$  sono più semplici da integrare delle funzioni del tipo  $x/r^3$  e quindi la seconda strada è in generale più semplice. Solo nei casi in cui la distribuzione di carica presenti un elevato grado di simmetria il calcolo diretto di  $\mathbf{E}$  è semplice: con un metodo che vedremo nel capitolo 3 esso è a volte addirittura immediato.

In ogni caso la conoscenza del potenziale è il mezzo più semplice per calcolare il lavoro delle forze elettriche su una carica  $q_0$  che si muove nella ragione in cui esiste il campo elettrostatico.

Prima di ripetere con la nuova procedura alcuni calcoli di campi, tra cui quelli degli esempi 1.6, 1.7, 1.8, 1.9, ricordiamo la proprietà di invarianza dell'operazio-

ne gradiente, legata alla sua natura vettoriale. Modulo, direzione e verso del vettore  $\nabla V$  non dipendono dal sistema di coordinate: pertanto, fissati due punti infinitamente vicini, la

$$dV = \nabla V \cdot ds \quad (2.40)$$

ha un significato intrinseco, in quanto operazione tra vettori. La (2.40) può essere presa come definizione del gradiente della funzione scalare  $V$ : il gradiente di  $V$  è quel vettore tale che il suo prodotto scalare per il vettore spostamento infinitesimo  $ds$  dà la variazione di  $V$  in corrispondenza di quello spostamento.

D'altra parte nella maggior parte dei calcoli pratici è necessario servirsi di un sistema di coordinate e bisogna determinare le componenti del gradiente nel dato sistema. In altre parole, l'espressione esplicita dell'operatore *del* (2.37) e la (2.38), valide in un sistema cartesiano tridimensionale, dipendono dal sistema di coordinate.

Se si utilizza un sistema di coordinate polari nello spazio, che è in particolare adeguato ai casi di simmetria sferica, gli spostamenti infinitesimi che corrispondono alla variazione di una coordinata tenendo costanti le altre due sono  $dr$ ,  $r d\theta$ ,  $r \sin\theta d\phi$  come risulta dalla figura 2.22 e pertanto

$$ds = dr \mathbf{u}_r + r d\theta \mathbf{u}_\theta + r \sin\theta d\phi \mathbf{u}_\phi ,$$

essendo  $\mathbf{u}_r$ ,  $\mathbf{u}_\theta$ ,  $\mathbf{u}_\phi$  tre versori variabili, a  $90^\circ$  tra loro.

Inseriamo in (2.40) ed egualiamo all'espressione generale di  $dV$ :

$$dV = \frac{\partial V}{\partial r} dr + \frac{\partial V}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial V}{\partial \phi} d\phi = (\nabla V)_r dr + (\nabla V)_\theta r d\theta + (\nabla V)_\phi r \sin\theta d\phi$$

Risulta quindi

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r} \mathbf{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \mathbf{u}_\theta + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \mathbf{u}_\phi \quad (2.41)$$

ovvero che l'espressione dell'*operatore-del* in coordinate polari è

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{u}_\theta + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \mathbf{u}_\phi . \quad (2.42)$$

Quanto detto vale per qualsiasi campo scalare: nel caso del potenziale elettrostatico da (2.36) e (2.41) segue

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} , \quad E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} , \quad E_\phi = -\frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \quad (2.43)$$

per le componenti del campo in coordinate polari.

Un altro sistema di coordinate, utile nei problemi con simmetria rispetto ad un asse, è costituito dalle coordinate cilindriche  $r$ ,  $\theta$ ,  $z$  e si trova facilmente

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{u}_\theta + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{u}_z , \quad (2.44)$$

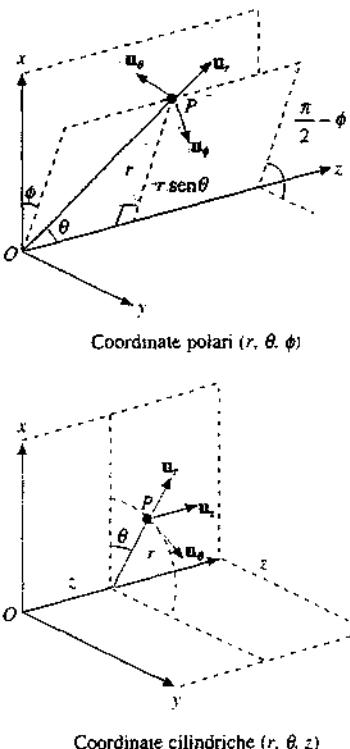


Figura 2.22

L'operatore  $\nabla$  in coordinate polari

L'operatore  $\nabla$  in coordinate cilindriche

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r} \mathbf{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \mathbf{u}_\theta + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{u}_z . \quad (2.45)$$

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} , \quad E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} , \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} . \quad (2.46)$$

**Esempio 2.6**

Una carica puntiforme  $q$  è posta in un punto di coordinate  $x_0, y_0, z_0$ . Calcolare il campo E a partire dal potenziale elettrostatico.

**Soluzione**

Il potenziale in un punto  $P(x, y, z)$  è dato da (2.15),  $V = q / 4 \pi \epsilon_0 r$  con  $r = [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{1/2}$ .

Per applicare (2.35) calcoliamo le derivate parziali del potenziale: rispetto a  $x$  si trova

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{q}{4 \pi \epsilon_0} \frac{\partial r^{-1}}{\partial x} = -\frac{q}{4 \pi \epsilon_0 r^3} (x - x_0)$$

e per le altre derivate valgono formule analoghe. Abbiamo quindi

$$\mathbf{E} = -\nabla V = \frac{q}{4 \pi \epsilon_0 r^3} [(x - x_0) \mathbf{u}_x + (y - y_0) \mathbf{u}_y + (z - z_0) \mathbf{u}_z] = \frac{q}{4 \pi \epsilon_0 r^2} \mathbf{u}_r$$

che è la (1.14).

Il calcolo è molto più semplice in coordinate polari. Poiché il potenziale dipende solo da  $r$  e non da  $\theta$  e  $\phi$  (simmetria sferica), è diversa da zero solo  $\partial V / \partial r = -q / 4 \pi \epsilon_0 r^2$  e, per la (2.43),

$$\mathbf{E} = -\nabla V = \frac{q}{4 \pi \epsilon_0 r^2} \mathbf{u}_r$$

Simmetria sferica vuol dire che il potenziale assume lo stesso valore in tutti i punti di una superficie sferica avente  $q$  come centro; per il campo vuol dire che il suo modulo ha lo stesso valore su una tale superficie e che la sua direzione è radiale.

**Esempio 2.7**

Una carica  $q$  è distribuita uniformemente su un filo lungo  $2l$ , come nell'esempio 1.6. Calcolare potenziale e campo elettrostatico nei punti dell'asse del filo ed estendere il risultato ad un filo infinitamente lungo.

**Soluzione**

Il potenziale dovuto alla carica infinitesima  $\lambda dx$  in un punto dell'asse è

$$dV = \frac{\lambda dx}{4 \pi \epsilon_0 r} = \frac{\lambda}{4 \pi \epsilon_0} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

e integrando su tutto il filo

$$V = \int_{-l}^{+l} dV = \frac{\lambda}{4 \pi \epsilon_0} [\ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})]_{-l}^{+l} \Rightarrow V(y) = \frac{\lambda}{4 \pi \epsilon_0} \ln \frac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{-l + \sqrt{l^2 + y^2}}$$

Se si calcola  $-dV/dy$  si ottiene

$$E(y) = q / 4 \pi \epsilon_0 y \sqrt{l^2 + y^2}$$

che è il risultato dell'esempio 1.6.

Quando  $l$  tende all'infinito,  $E(y)$  tende a  $\lambda / 2 \pi \epsilon_0 y$ , ma il potenziale tende all'infinito. Il risultato non deve preoccupare, perché il filo indefinito non è un sistema fisico reale; innanzitutto esso avrebbe una carica infinita, inoltre la presenza di cariche all'infinito non ci permette di assumere  $V(\infty) = 0$ . In effetti, come già detto, l'espressione limite del campo è valida a distanze  $y$  da un filo lungo  $2l$  quando  $y \ll 2l$ : da essa calcoliamo:

$$V(y_1) - V(y_2) = \int_{y_1}^{y_2} E(y) dy = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{y_2}{y_1}$$

Le d.d.p. sono quindi in pratica determinabili, anche se il valore del potenziale tende all'infinito.

Alternativamente, se nella formula divergente di  $V(y)$  scriviamo le radici, quando  $l \gg y$ ,

$$l\sqrt{1+y^2/l^2} = l(1+y^2/2l^2)$$

$$V(y) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln y + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln 2l$$

e il termine costante, per quanto grande, nelle differenze scompare.

Si ritrova così

$$\Delta V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{y_2}{y_1} \quad \text{ovvero} \quad E = -dV/dy$$

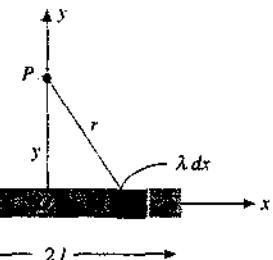


Figura 2.23

### Esempio 2.8

Una carica  $q$  è distribuita uniformemente su un sottile anello di raggio  $R$ , come nell'esempio 1.7. Calcolare potenziale e campo elettrostatico sull'asse dell'anello.

#### Soluzione

Utilizziamo (2.21) con  $\lambda = q/2\pi R$  e  $r = \sqrt{R^2 + x^2}$ , costante in quanto un punto sull'asse è equidistante da tutti i punti dell'anello:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\lambda dl}{r} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} \int dl = \frac{\lambda 2\pi R}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + x^2}}$$

Si noti che per  $x \gg R$ , cioè a grande distanza dall'anello, il potenziale vale  $q/4\pi\epsilon_0|x|$ , come se la carica fosse nel centro.

Per il calcolo del campo come gradiente del potenziale ricorriamo a (2.35):

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial x} (R^2 + x^2)^{-1/2} = \frac{qx}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + x^2)^{3/2}}$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = 0$$

Abbiamo ritrovato la (1.30).

Una rilettura dell'esempio 1.7 mostra che per evitare il calcolo delle due componenti  $E_x$  e  $E_z$ , cioè di due integrali, abbiamo dovuto far ricorso esplicitamente alle condizioni di simmetria del sistema. Adesso il fatto che il campo sia diretto lungo l'asse  $x$  è risultato direttamente dall'indipendenza del potenziale da  $y$  e  $z$ .

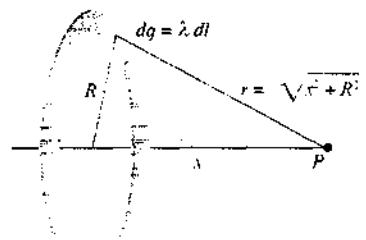


Figura 2.24

### Esempio 2.9

Un disco sottile di raggio  $R$  ha una carica  $q$  distribuita uniformemente su tutta la sua superficie, come nell'esempio 1.8. Calcolare potenziale e campo elettrostatico sull'asse del disco ed estendere il risultato se  $R$  tende all'infinito.

#### Soluzione

Posto  $\sigma = q/\pi R^2$ , consideriamo un anello, concentrico al disco, di raggio  $r$  e area  $d\Sigma = 2\pi r dr$  sul quale c'è la carica  $dq = \sigma d\Sigma = 2\pi\sigma r dr$ : il potenziale generato da questo

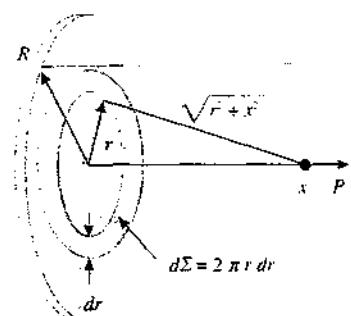


Figura 2.25

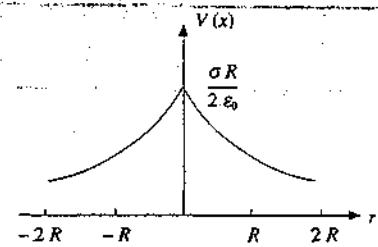


Figura 2.26

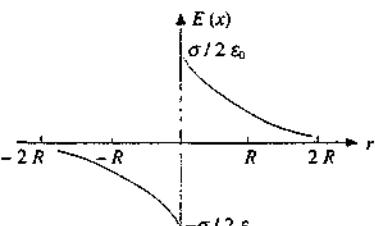


Figura 2.27

anello sull'asse si calcola come nell'esempio 2.8:

$$dV = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0\sqrt{r^2+x^2}} = \frac{2\pi\sigma r dr}{4\pi\epsilon_0\sqrt{r^2+x^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{r dr}{\sqrt{r^2+x^2}}$$

Si integra su tutto il disco e si ottiene:

$$V = \int_x^R dV = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{r dr}{\sqrt{r^2+x^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{R^2+x^2} - x)$$

Per  $x = 0$   $V = \sigma R / 2 \epsilon_0$ . A grandi distanze, scrivendo il termine tra parentesi come

$$x \left( \sqrt{1 + \frac{R^2}{x^2}} - 1 \right)$$

e approssimando la radice con  $1 + \frac{R^2}{2x^2}$  (sviluppo in serie arrestato al primo termine) si trova

$$V(x \gg R) = \frac{\sigma R^2}{4\epsilon_0 x} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x}$$

come se la carica  $q$  fosse posta nel centro del disco.

Anche in questo caso il potenziale dipende solo da  $x$  per cui da (2.35)  $E_x = E_z = 0$  e

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}} \right)$$

che è la (1.31). Le formule di  $V$  e  $E_x$  così scritte valgono per  $x > 0$ ; il potenziale per  $x < 0$  è identico e quindi basta sostituire  $x$  con  $|x|$ : per il campo, che è discontinuo nell'attraversamento del disco, vale la (1.31).

Quando  $R$  tende all'infinito e il disco diventa un piano indefinito uniformemente carico, abbiamo visto nell'esempio 1.8 che il campo diventa ovunque uniforme, con espressione (1.34); invece il potenziale chiaramente diverge in tutto lo spazio ( $\sqrt{R^2+x^2} \rightarrow \infty$ ). Le ragioni di questo comportamento sono le stesse già discusse nell'esempio 2.7.

### Esempio 2.10

Calcolare l'andamento del potenziale tra due piani indefiniti paralleli uniformemente carichi con densità superficiale l'una  $+\sigma$  e l'altra  $-\sigma$ , come nell'esempio 1.9.

#### Soluzione

Sappiamo che per il campo all'interno vale la (1.35): esso è uniforme e siamo nel caso discusso nel paragrafo 2.3, per cui applichiamo (2.30):

$$V(x) = V_1 - \frac{\sigma}{\epsilon_0} (x - x_1)$$

dove  $V_1$  è il potenziale del piano positivo. Rispetto a  $V_1$  quindi

$$V_1 - V(x) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} (x - x_1) \quad (2.47)$$

e in particolare, posto  $h = x_2 - x_1$ .

$$V_1 - V_2 = \Delta V = \frac{\sigma}{\epsilon_0} h \quad (2.48)$$

All'esterno  $E=0$  e il potenziale è costante; siccome è continuo nell'attraversare il piano, per  $x < x_1$ ,  $V = V_1$ , per  $x > x_2$ ,  $V = V_2$ .

Può sembrare discutibile la procedura di calcolare differenze di potenziale, che sono finite e hanno significato fisico in quanto legate al campo, a partire da valori di potenziale che sappiamo essere infiniti e quindi non fisici. Formalmente ha senso parlare di differenze finite tra quantità infinite, ma è più importante notare che, nella realtà sperimentale, si hanno due superficie piane finite, con dimensioni molto superiori della distanza  $h$ ; i valori  $V_1$  e  $V_2$  sono finiti e nella zona centrale sono riprodotte con ottima approssimazione le condizioni di uniformità del campo, per cui valgono (1.35), (2.47) e (2.48).

Vedremo che la realizzazione pratica si effettua con due piastre parallele conduttrici, con struttura tipo foglio o tipo griglia.

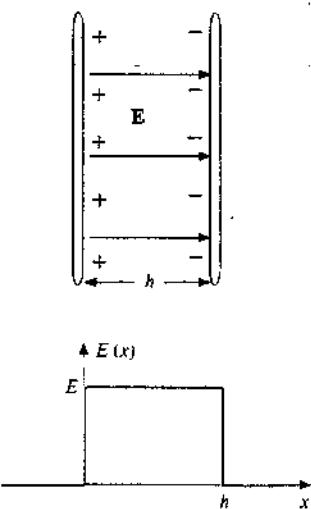


Figura 2.28

## 2.5 Superficie equipotenziali

Con gli esempi del paragrafo 2.4 si è completata la discussione sulla relazione tra campo e potenziale. In sostanza il potenziale può essere pensato come la primitiva del campo, nel senso che le sue variazioni si calcolano dal campo col procedimento integrale (2.7) e viceversa con l'operazione di derivazione (2.36) dal potenziale si ottiene il campo. Si tratta di una estensione tridimensionale, che riprenderemo nel prossimo paragrafo, di quanto già sappiamo per le funzioni di una variabile.

Diciamo anche che il segno negativo di (2.36) deriva in definitiva da una proprietà ben nota delle forze conservative, e cioè che  $\mathbf{F} = -\nabla U_e$ , nella quale il segno negativo significa che il lavoro compiuto dalla forza è utilizzabile all'esterno avviene a spese dell'energia potenziale che diminuisce. In elettrostatica più che sulla relazione tra forza ed energia potenziale si mette l'accento su quella tra campo e potenziale, ma il significato fisico è lo stesso.

Nel paragrafo 1.6 abbiamo introdotto la rappresentazione visiva del campo con le *linee di forza*, la cui espressione analitica è data da (1.36). Anche l'andamento del potenziale è visualizzabile ricorrendo alle *superficie equipotenziali*: si definisce così una *superficie dello spazio tridimensionale nei cui punti il potenziale ha lo stesso valore*. In coordinate cartesiane l'equazione di una superficie equipotenziale è

$$V(x, y, z) = \text{costante}$$

Superficie equipotenziali

e, al variare del valore della costante, si ha tutta una famiglia di superficie equipotenziali. È chiaro che queste non si intersecano: *in un punto passa una ed una sola superficie equipotenziale, essendo il potenziale una funzione univoca*.

Ricordando le proprietà di direzione e verso del gradiente, che ad ogni modo si deducono dalla (2.40)

$$dV = \nabla V \cdot ds = -\mathbf{E} \cdot ds$$

abbiamo che per uno spostamento  $ds$  tangente a una superficie equipotenziale la variazione  $dV$  è ovviamente nulla e quindi il *gradiente è ortogonale in ogni punto alla superficie equipotenziale*. Inoltre, per uno spostamento  $ds = dn$  ortogonale alla superficie equipotenziale e diretto nel verso di crescita di  $V$  (cioè da una superficie  $V = V_1$  a un'altra  $V = V_1 + dV$  con  $dV > 0$ ),  $dV = |\nabla V| dn$  ovvero

$$|\nabla V| = \frac{dV}{dn}$$

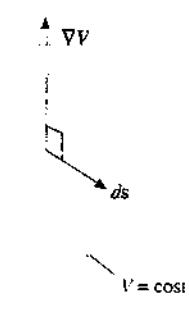


Figura 2.29

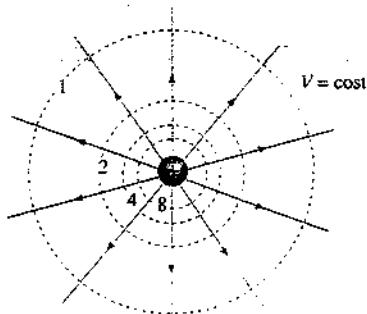


Figura 2.30

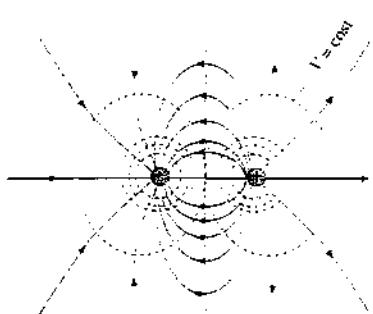


Figura 2.31

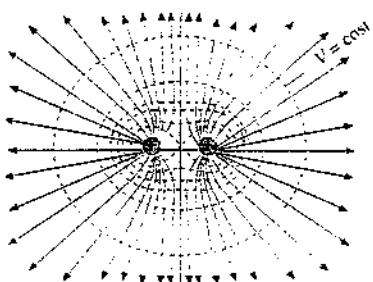


Figura 2.32

il modulo del gradiente è eguale alla derivata del potenziale nella direzione ortogonale alla superficie equipotenziale che indica il verso di crescita del potenziale. Visto il segno negativo, concludiamo che il campo elettrostatico è in ogni punto ortogonale alla superficie equipotenziale che passa per quel punto e il suo verso indica il verso di diminuzione del potenziale. Le superficie equipotenziali risultano dunque ortogonali alle linee di forza.

Queste proprietà generali si riscontrano facilmente negli esempi che abbiamo trattato. Iniziamo dalla carica puntiforme: le superficie equipotenziali hanno l'equazione

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} = \text{costante} \Rightarrow r = \text{costante}$$

e sono quindi superficie sferiche concentriche con centro nella carica, figura 2.30; le linee di forza sono semirette uscenti dalla carica, ortogonali alle superficie sferiche. Se  $q$  è positiva il campo è uscente e il potenziale è decrescente con la distanza, se  $q$  è negativa il campo è entrante e il potenziale è crescente con la distanza. I numeri riportati in figura 2.30 individuano quattro superficie tali che il potenziale su una di esse è doppio di quello sulla superficie immediatamente precedente, muovendosi nel verso del potenziale crescente. Si vede che le superficie si infittiscono avvicinandosi alla carica (andamento  $1/r$ ).

Nel caso di un filo indefinito il campo ha direzione ortogonale al filo e le superficie equipotenziali sono superficie cilindriche aventi il filo come asse; nel caso di un piano indefinito il campo è ortogonale al piano e le superficie equipotenziali sono piani paralleli al piano e la stessa geometria si ha all'interno di due piani carichi con carica opposta. Si verifica sempre che il verso del campo indica il verso di decrescita del potenziale.

Altri esempi, due cariche di segno opposto e due cariche con lo stesso segno, sono mostrati nelle figure 2.31 e 2.32.

Da queste e dalle precedenti si osserva la proprietà seguente: se si conviene di disegnare le superfici equipotenziali con un certo passo  $\Delta V$  (cioè  $V = V_1, V = V_1 + \Delta V, V = V_1 + 2\Delta V$ , ecc.) è chiaro che la distanza tra di esse è minore dove il campo è maggiore: localmente, a parità di  $\Delta V$ , maggiore è il campo minore è  $\Delta n$ . Le superficie equipotenziali cioè si infittiscono nelle zone in cui il campo è maggiore: in un campo uniforme esse sono equispaziate.

## 2.6 Rotore di un campo vettoriale. Teorema di Stokes. Applicazione al campo elettrostatico

Accanto alla caratterizzazione di un campo conservativo che è data da relazioni tipo (2.7) e (2.36) se ne può porre un'altra basata sulla (2.10). Sappiamo che per un campo conservativo la circuitazione estesa a qualsiasi linea chiusa è nulla e che, viceversa, se la circuitazione di un campo è nulla lungo una qualsiasi linea chiusa allora il campo è conservativo. Vogliamo esprimere la (2.10), che è una condizione integrale, in forma locale.

A questo scopo dobbiamo introdurre il concetto di *rotore di un campo vettoriale*, campo che indichiamo con  $E$  anche se la definizione e le proprietà connesse si applicano a qualsiasi campo vettoriale. Successivamente vedremo l'applicazione dei risultati trovati a un campo conservativo come il campo elettrostatico.

Cominciamo col considerare un percorso rettangolare infinitesimo  $d\Gamma_x = ABCD$  che giace nel piano  $yz$  e ha i lati, lunghi  $AB = dy$  e  $BC = dz$ , paralleli agli assi; il verso di percorrenza, mostrato in figura 2.33, è tale da apparire antiorario dalla punta dell'asse  $x$  (si parla di *regola della vite destrorsa*: come si vede dal disegno, ruotando lungo il verso di percorrenza della vite destrorsa, la punta della vite indi-

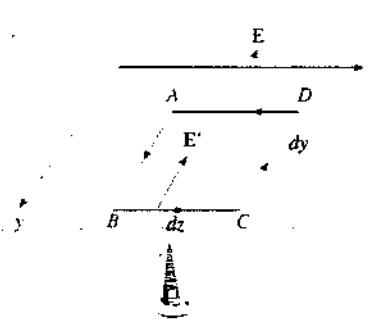


Figura 2.33

ca il verso dell'asse  $x$ ); l'area vale  $d\Sigma_x = dy dz$ .

Calcoliamo l'integrale di linea di  $\mathbf{E}$  lungo questo percorso:

$$d\Gamma_x = \mathbf{E}(\mathbf{AB}) \cdot \mathbf{AB} + \mathbf{E}(\mathbf{BC}) \cdot \mathbf{BC} + \mathbf{E}(\mathbf{CD}) \cdot \mathbf{CD} + \mathbf{E}(\mathbf{DA}) \cdot \mathbf{DA},$$

dove con  $\mathbf{E}(\mathbf{AB})$  è indicato il valore del campo lungo il segmento infinitesimo  $\mathbf{AB}$  e così via; si osservi che  $\mathbf{CD} = -\mathbf{AB}$  e  $\mathbf{DA} = -\mathbf{BC}$  per cui

$$d\Gamma_x = [\mathbf{E}(\mathbf{AB}) - \mathbf{E}(\mathbf{CD})] \cdot dy \mathbf{u}_y + [\mathbf{E}(\mathbf{BC}) - \mathbf{E}(\mathbf{DA})] \cdot dz \mathbf{u}_z.$$

Eseguire i prodotti scalari vuol dire proiettare i campi lungo gli assi  $y$  e  $z$ ; otteniamo

$$\begin{aligned} d\Gamma_x &= [E_y(\mathbf{AB}) - E_y(\mathbf{CD})] dy + [E_z(\mathbf{BC}) - E_z(\mathbf{DA})] dz = \\ &= [E_y(z) - E_y(z + dz)] dy + [E_z(y + dy) - E_z(y)] dz. \end{aligned}$$

Le differenze tra parentesi si esprimono con uno sviluppo in serie arrestato al primo termine:

$$E_y(z + dz) - E_y(z) = \frac{\partial E_y}{\partial z} dz, \quad E_z(y + dy) - E_z(y) = \frac{\partial E_z}{\partial y} dy.$$

Pertanto

$$d\Gamma_x = \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) dy dz = \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) d\Sigma_x.$$

Procedendo in modo analogo per un rettangolo infinitesimo nel piano  $x z$  di area  $d\Sigma_x$  e per un rettangolo infinitesimo nel piano  $x y$  di area  $d\Sigma_y$  si trova per la circuitazione del campo lungo tali percorsi

$$d\Gamma_y = \left( \frac{\partial E_z}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) d\Sigma_y,$$

$$d\Gamma_z = \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) d\Sigma_z.$$

Ciascuna delle espressioni  $d\Gamma_i$  ( $i = x, y, z$ ) è stata ricavata per un rettangolo infinitesimo che racchiude un punto nel quale calcoliamo le derivate delle componenti del campo. Osserviamo che il risultato è diverso a seconda del piano coordinato scelto, ma che in realtà non dipende dalla forma del contorno della superficie  $d\Sigma$ , sia esso rettangolare o generico.

Consideriamo ora un punto nello spazio e una superficie  $d\Sigma$  infinitesima intorno ad esso, alla quale associamo il vettore  $d\Sigma \mathbf{u}_n$ , con modulo  $d\Sigma$ , direzione ortogonale a  $d\Sigma$  e verso legato al verso di percorrenza del contorno di  $d\Sigma$  dalla regola della vite destrorsa. In coordinate cartesiane

$$d\Sigma \mathbf{u}_n = d\Sigma_x \mathbf{u}_x + d\Sigma_y \mathbf{u}_y + d\Sigma_z \mathbf{u}_z,$$

dove  $d\Sigma_x, d\Sigma_y, d\Sigma_z$  sono le proiezioni sui piani coordinati  $(y, z), (x, z), (x, y)$  di  $d\Sigma$ .

La circuitazione  $d\Gamma$  del vettore  $\mathbf{E}$  lungo il contorno di  $d\Sigma$  è eguale alla somma delle circuitazioni  $d\Gamma_x, d\Gamma_y, d\Gamma_z$  lungo i contorni delle superficie proiettate. Ciò discende dalla proprietà generale secondo cui, data una linea chiusa e costruita una rete di circuiti chiusi su una qualsiasi superficie che abbia la linea come contorno,

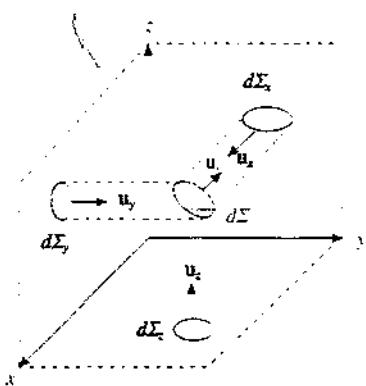


Figura 2.34

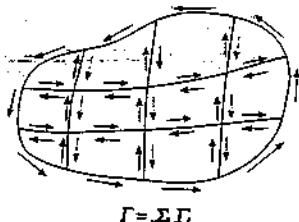


Figura 2.35

la circuitazione  $\Gamma$  lungo questa è la somma delle circuitazioni  $\Gamma_i$  lungo le maglie della rete, tutte orientate secondo la stessa convenzione. Infatti, come si capisce dalla figura 2.35, il contributo di qualsiasi tratto che non stia sulla linea è nullo, perché tale tratto è percorso una volta in un verso e una volta nel verso opposto. Applichiamo il risultato alla superficie  $d\Sigma$  e alle sue proiezioni  $d\Sigma_x, d\Sigma_y, d\Sigma_z$  con le quali si può costruire una superficie che ha lo stesso contorno di  $d\Sigma$ ; la costruzione è mostrata in figura 2.36 per un caso particolare semplice, che è generalizzabile.

In conclusione, data una superficie  $d\Sigma$  nello spazio, intorno ad un punto in cui il vettore  $\mathbf{E}$  ha le componenti  $E_x, E_y, E_z$ , la circuitazione di  $\mathbf{E}$  lungo il contorno di  $d\Sigma$  è

$$d\Gamma = \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) d\Sigma_x + \left( \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) d\Sigma_y + \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) d\Sigma_z ;$$

essendo  $d\Gamma$  una quantità scalare e  $(d\Sigma_x, d\Sigma_y, d\Sigma_z)$  le componenti di un vettore, i termini tra parentesi devono a loro volta essere le componenti di un vettore.

Questo vettore si chiama *rotore* di  $\mathbf{E}$  e si definisce formalmente come prodotto vettoriale dell'operatore *del* per il vettore  $\mathbf{E}$ :

$$\text{rot } \mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{E} . \quad (2.49)$$

Ricordiamo l'espressione del prodotto vettoriale in coordinate cartesiane (appendice C del primo volume):

$$\nabla \times \mathbf{E} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \mathbf{u}_x + \left( \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \mathbf{u}_y + \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \mathbf{u}_z . \quad (2.50)$$

Abbiamo allora l'eguaglianza

$$d\Gamma = (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\Sigma \mathbf{u}_n \quad (2.51)$$

ovvero, proiettando il rotore sulla direzione di  $\mathbf{u}_n$ ,

$$d\Gamma = (\nabla \times \mathbf{E})_n d\Sigma , \quad \frac{d\Gamma}{d\Sigma} = (\nabla \times \mathbf{E})_n . \quad (2.52)$$

Pertanto, secondo (2.51), la circuitazione di  $\mathbf{E}$  lungo un percorso chiuso infinitesimo su cui si appoggia una superficie  $d\Sigma$  è data dal flusso del rotore di  $\mathbf{E}$  attraverso  $d\Sigma$  (si chiama così il prodotto scalare indicato, concetto che riprenderemo nel capitolo 3). La successiva (2.52) afferma che la componente del rotore di  $\mathbf{E}$  secondo una certa direzione è data dal rapporto tra la circuitazione di  $\mathbf{E}$  lungo il contorno di una superficie infinitesima ortogonale alla direzione e la superficie stessa. Questa si può considerare la definizione intrinseca di rotore, invariante rispetto al sistema di riferimento in quanto derivata dall'equazione vettoriale (2.51).

Il passaggio ad una linea chiusa finita  $C$  avviene sulla base del processo descritto nella figura 2.38; la circuitazione lungo  $C$  è la somma di infiniti contributi infinitesimi (2.51) calcolati lungo percorsi chiusi appoggiati su una qualsiasi superficie  $\Sigma$  avente  $C$  come contorno:

Rotore in coordinate cartesiane

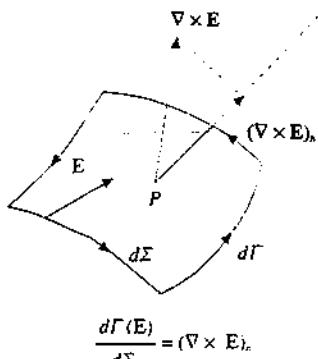


Figura 2.37

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \iint_{\Sigma} (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S}$$

(2.53) Teorema di Stokes

Il risultato costituisce il *teorema di Stokes*: la circuitazione di un campo vettoriale lungo una linea chiusa  $C$  è eguale al flusso del rotore del campo attraverso una qualunque superficie  $\Sigma$  avente per contorno  $C$ .

Se il campo vettoriale è conservativo la circuitazione è nulla lungo qualsiasi linea chiusa  $C$ ; quindi la (2.53), dovendo essere valida per qualsiasi superficie  $\Sigma$  si appoggia su  $C$ , comporta

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 . \quad (2.54)$$

La (2.54) è la *forma locale* di (2.10): un campo conservativo ha rotore identicamente nullo ovvero, come si dice, è *irrotazionale*. Formalmente il risultato è immediato:  $\mathbf{E} = -\nabla V$  implica

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \times \nabla V = 0$$

in quanto il prodotto vettoriale di due vettori paralleli, come sono  $\nabla$  e  $\nabla V$ , è identicamente nullo; in altre parole l'applicazione successiva delle due operazioni di gradiente e di rotore dà risultato nullo.

Riprendiamo la (2.50) inserendo (2.35) per le componenti del campo vettoriale conservativo  $\mathbf{E}$ :

$$-\nabla \times \mathbf{E} = \left( \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial y} \right) \mathbf{u}_x + \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x} \right) \mathbf{u}_y + \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} \right) \mathbf{u}_z .$$

I termini tra parentesi sono tutti nulli per la proprietà delle derivate seconde miste di essere indipendenti dall'ordine di derivazione e quindi anche così si prova che un campo conservativo è irrotazionale. In coordinate cartesiane la condizione di nullità è

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial z} , \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial x} , \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial y} . \quad (2.55)$$

Riassumendo, se un campo è conservativo esso può essere espresso come gradiente di una funzione scalare e il suo rotore è ovunque nullo, il che in particolare porta a (2.55). Viceversa, se per un campo valgono le (2.55), cioè se il suo rotore è ovunque nullo, queste sono le condizioni di integrabilità della forma differenziale lineare

$$E_x dx + E_y dy + E_z dz$$

e vuol dire che esiste una funzione scalare di cui il campo è il gradiente. Abbiamo citato questo teorema nell'appendice A del primo volume, per le forme in due variabili; la situazione è la stessa per le forme in tre variabili e vale sempre la condizione che il dominio sia semplicemente connesso, cioè che data una linea chiusa sia sempre possibile trovare almeno una superficie contenuta interamente nel dominio e avente la linea come contorno.

Tutte le proprietà ricavate dal teorema di Stokes per i campi conservativi valgono in particolare per il campo elettostatico generato da una distribuzione di cariche elettriche fisse e anche per il campo gravitazionale studiato nel capitolo 5 del primo volume.

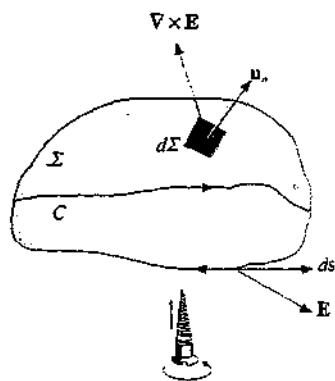


Figura 2.38

**Esempio 2.11**

All'interno di una superficie sferica di raggio  $R$  con centro nell'origine delle coordinate è definito il potenziale elettrostatico  $V = A r^2 / 2$  con  $r$  distanza dall'origine e  $A$  costante positiva. Verificare direttamente che il campo elettrostatico è irrotazionale.

Se una particella con carica  $q_0$  e massa  $m$  è abbandonata con velocità nulla a distanza  $r_0$  dal centro, quale sarà il suo moto?

**Soluzione**

Scriviamo  $V = A (x^2 + y^2 + z^2) / 2$  e calcoliamo le componenti di  $\mathbf{E}$ :

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -A x \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -A y \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = -A z$$

cioè  $\mathbf{E} = -A \mathbf{r}$  (campo centrale). Si vede che le derivate  $\partial E_x / \partial y$ ,  $\partial E_x / \partial z$ ,  $\partial E_y / \partial x$ ,  $\partial E_y / \partial z$ ,  $\partial E_z / \partial x$ ,  $\partial E_z / \partial y$  sono tutte nulle e quindi le (2.55) sono soddisfatte.

Altrettanto semplice è la verifica, partendo dall'esempio 2.6, che  $\nabla \times \mathbf{E} = 0$  per il campo di una carica puntiforme.

La particella lasciata libera con velocità iniziale nulla a distanza  $r_0$  dal centro viene accelerata lungo una direzione passante per il centro e il moto è rettilineo perché non ci sono forze ortogonali a tale traiettoria. L'equazione del moto nel campo  $\mathbf{E} = -A \mathbf{r}$  è

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -q A \mathbf{r} \Rightarrow \frac{d^2 r}{dt^2} + \frac{q A}{m} r = 0$$

e quindi la particella si muove di moto armonico con pulsazione  $\omega = \sqrt{q A / m}$ : tenendo conto delle condizioni iniziali si ha

$$r = r_0 \cos \omega t \quad v = -\omega r_0 \sin \omega t$$

**Il rotore in coordinate polari e cilindriche**

Diamo senza dimostrazione le espressioni del rotore nei sistemi di coordinate polari e cilindriche già considerati per ricavare le espressioni (2.41) e (2.45) del gradiente:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (E_\phi \sin \theta) - \frac{\partial E_\theta}{\partial \phi} \right] \mathbf{u}_r + \\ &+ \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial E_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r E_\phi) \right] \mathbf{u}_\theta + \\ &+ \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r E_\theta) - \frac{\partial E_r}{\partial \theta} \right] \mathbf{u}_\phi . \end{aligned} \quad (2.56)$$

Rotore in coordinate polari

$$\nabla \times \mathbf{E} = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \theta} - \frac{\partial E_\theta}{\partial z} \right) \mathbf{u}_r + \left( \frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) \mathbf{u}_\theta + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r E_\theta) - \frac{\partial E_r}{\partial \theta} \right] \mathbf{u}_\phi . \quad (2.57)$$

Rotore in coordinate cilindriche

Osserviamo esplicitamente, utilizzando le coordinate cilindriche, che un campo diretto radialmente rispetto ad un asse, cioè con componenti  $E_r(r) \neq 0$ ,  $E_\theta = E_\phi = 0$ , è irrotazionale; invece un campo con  $E_\theta(r) \neq 0$ ,  $E_r = E_z = 0$ , cioè disposto trasversalmente rispetto all'asse e con modulo dipendente solo dalla distanza, ha rotore non nullo: da (2.57) si ha

$$\nabla \times \mathbf{E} = \left( \frac{E_\theta}{r} + \frac{\partial E_\theta}{\partial r} \right) \mathbf{u}_r$$

Ne deduciamo che non esistono campi elettrostatici di questo tipo. In effetti le linee di forza di questo campo sono circonferenze e tale configurazione non è possibile per un campo elettrostatico, in cui le linee di forza iniziano e terminano su cariche diverse o vanno all'infinito. È anche chiaro che per questo campo la circuitazione lungo una qualsiasi linea è diversa da zero.

## 2.7 Il dipolo elettrico

Due cariche puntiformi  $-q$  e  $+q$  distanti  $a$  costituiscono un *dipolo elettrico*; si chiama *momento del dipolo* il vettore

$$\mathbf{p} = q\mathbf{a} \quad (2.58)$$

con  $\mathbf{a}$  orientato dalla carica negativa alla carica positiva.

Il potenziale generato dal dipolo elettrico si calcola utilizzando la relazione (2.19):

$$V(P) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}$$

Se il punto  $P$  è lontano dal dipolo, cioè se  $r \gg a$ , si può porre

$$r_2 - r_1 = a \cos\theta, \quad r_1 r_2 = r^2$$

e quindi  $V(P) = q a \cos\theta / 4\pi\epsilon_0 r^2$  ovvero

$$V(P) = \frac{p \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{u}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (2.59) \quad \text{Potenziale di dipolo elettrico}$$

essendo  $\mathbf{u}_r$  il versore della direzione  $OP$ .

Esaminiamo la struttura della formula (2.59). L'unica grandezza caratteristica del dipolo è il momento  $\mathbf{p}$  e non  $q$  e  $a$  separatamente: ciò indica che da *misure di potenziale possiamo ricavare informazioni su  $\mathbf{p}$ , ma non sulla costituzione del sistema*. Ad esempio due cariche  $+2q$  e  $-2q$  distanti  $a/2$  hanno momento di dipolo  $2q a/2 = q a = p$  e generano un potenziale eguale a (2.59).

Il valore del potenziale decresce con il quadrato della distanza dal dipolo, cioè più rapidamente di quello generato da una singola carica puntiforme; qualitativamente, ciò è dovuto al fatto che gli effetti delle due cariche di segno opposto si neutralizzano parzialmente (l'effetto sarebbe nullo se le due cariche potessero coincidere). Ritroviamo nel caso più semplice un risultato già incontrato nei vari calcoli di potenziale che abbiamo eseguito: quando si sommano i contributi di più cariche puntiformi si ottiene alla fine una dipendenza funzionale di  $V$  da  $r$  che è diversa dalla forma  $1/r$  caratteristica di ogni singolo contributo. Geometricamente è spontanea la scelta delle coordinate polari: il potenziale dipende dalla distanza e dall'angolo tra  $\mathbf{u}_r$  e l'asse del dipolo. Esso ha quindi simmetria cilindrica rispetto a tale asse:  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{u}_r$  individuano un piano in cui  $V$  è dato da (2.59) e il risultato è lo stesso in ogni altro piano contenente l'asse del dipolo, cioè ottenuto dal primo con una rotazione intorno all'asse del dipolo. Analiticamente la proprietà è resa evidente dal fatto che il potenziale non dipende dalla terza coordinata polare  $\phi$ .

Per il calcolo del campo utilizziamo (2.45) e (2.59):

$$\begin{aligned} E_r &= -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2p \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \\ E_\theta &= -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{p \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \\ E_\phi &= -\frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0 \end{aligned} \quad (2.60) \quad \text{Campo elettrico di un dipolo elettrico}$$

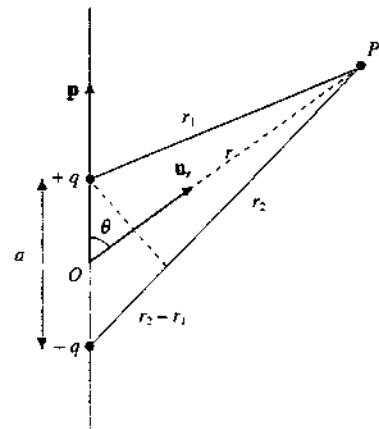


Figura 2.39

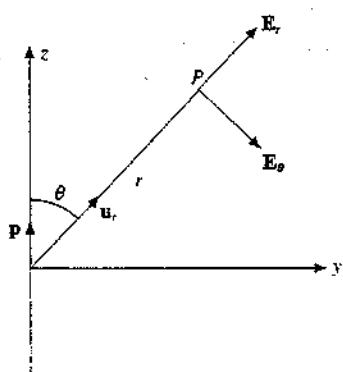


Figura 2.40

il campo sta pertanto nel piano  $p$ ,  $u_r$ . Vettorialmente

$$\boxed{\mathbf{E} = E_r \mathbf{u}_r + E_\theta \mathbf{u}_\theta = \frac{-p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2\cos\theta \mathbf{u}_r + \sin\theta \mathbf{u}_\theta)} \quad (2.61)$$

e il modulo vale

$$E = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{3\cos^2\theta + 1} ,$$

mentre l'angolo  $\alpha$  rispetto a  $u_r$  è tale che

$$\tan\alpha = \frac{E_\theta}{E_r} = \frac{1}{2} \tan\theta .$$

Vediamo che il campo decresce col cubo della distanza, in accordo con la legge  $1/r^2$  del potenziale.

Esprimiamo anche il momento di dipolo in componenti polari,

$$\mathbf{p} = p \cos\theta \mathbf{u}_r - p \sin\theta \mathbf{u}_\theta .$$

e introduciamolo nella (2.61):

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3p \cos\theta \mathbf{u}_r - \mathbf{p}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} [3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{u}_r) \mathbf{u}_r - \mathbf{p}] . \quad (2.62)$$

Questa espressione mostra una scomposizione del campo diversa da (2.61): invece che in componenti polari il campo è espresso come somma di due contributi,

$$\mathbf{E}_1 = \frac{-\mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

sempre antiparallelo a  $\mathbf{p}$  e variabile solo con la distanza.

$$\mathbf{E}_2 = \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{u}_r) \mathbf{u}_r}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

parallelo a  $\mathbf{u}_r$  e quindi dipendente anche dall'angolo polare  $\theta$  tra  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{u}_r$ , oltre che dalla distanza.

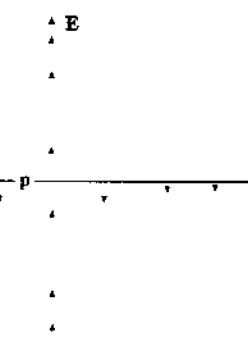
Sia da (2.61) che da (2.62) si vede in particolare che nei punti dell'asse del dipolo il campo è parallelo e concorde a  $\mathbf{p}$  e vale

$$\mathbf{E} = \frac{2\mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad \text{sull'asse del dipolo :}$$

cioè si ricava ad esempio dal fatto che per  $\theta = 0$  e  $\theta = \pi$   $E_\theta = 0$  e  $\mathbf{E} = E_r \mathbf{u}_r$ . Nel piano mediano, cioè nel piano passante per il centro del dipolo e ortogonale a  $\mathbf{p}$ , il campo è parallelo e discorde a  $\mathbf{p}$  e vale

$$\mathbf{E} = \frac{-\mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad \text{nello piano mediano .}$$

Figura 2.43



in quanto per  $\theta = \pi/2$  e  $\theta = 3\pi/2$   $E_z = 0$  e  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_z$  (oppure  $E_r = 0$ ,  $\mathbf{E} = E_\theta \mathbf{u}_\theta$ ). In tutte le altre situazioni geometriche il campo non è mai parallelo a  $\mathbf{p}$ .

Le linee di forza sono rappresentate in figura 2.44 in un qualsiasi piano passante per l'asse del dipolo; la rappresentazione nello spazio si ottiene ruotando la figura intorno all'asse del dipolo.

L'approssimazione di dipolo ( $r \gg a$ ) in base alla quale abbiamo ricavato potenziale e campo di dipolo è spesso utilizzata in fisica. Su scala macroscopica essa si applica per esempio a un'antenna che emette onde elettromagnetiche, anche se non si tratta di un *sistema statico*, ma *oscillante* in quanto le cariche sono mantenute in movimento lungo l'antenna con moto periodico.

Molto importanti sono i dipoli atomici e molecolari: come vedremo nel capitolo 5, un atomo sottoposto a un campo elettrico esterno si deforma e acquista un momento di dipolo (si *polarizza*); esistono inoltre molecole che hanno una struttura elettrica assimilabile a un dipolo (*molecole polari*) anche in assenza di campi esterni. Nel paragrafo 2.9 tratteremo le interazioni elettriche tra dipoli; per ora diciamo soltanto che l'approssimazione di dipolo è appropriata perché la separazione tra cariche che dà origine ai momenti di dipolo è piccola rispetto alle distanze interatomiche e intermolecolari.

### Esempio 2.12

Esprimere il potenziale e il campo di dipolo in coordinate cartesiane.

#### Soluzione

Prendiamo come asse  $z$  l'asse del dipolo, con  $\mathbf{u}_z$  concorde a  $\mathbf{p}$ ; gli assi  $x$  e  $y$  stanno nel piano mediano, l'origine coincide col centro del dipolo. In queste ipotesi

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \cos\theta = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \\ V &= \frac{p \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \\ E_x &= -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3xz}{r^5}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3yz}{r^5}, \\ E_z &= -\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{3z^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right). \end{aligned}$$

Si verifica subito che

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{\frac{3z^2}{r^2} + 1} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{3\cos^2\theta + 1}$$

come trovato precedentemente. In coordinate cartesiane le proprietà di simmetria sono meno apparenti.

## 2.8 Potenziale di un sistema di cariche nell'approssimazione di dipolo

L'espressione (2.59) dedotta per il potenziale di due cariche puntiformi eguali ed opposte è suscettibile di una generalizzazione per sistemi di cariche più complessi.

Consideriamo un sistema di cariche  $q_i$  distribuite in una regione ristretta di dimensione massima  $d$ : potrebbe trattarsi ad esempio delle cariche positive e negative contenute in un atomo o in una molecola. Detto  $O$  un qualsiasi punto interno alla regione, calcoliamo il

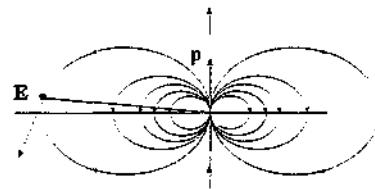


Figura 2.44

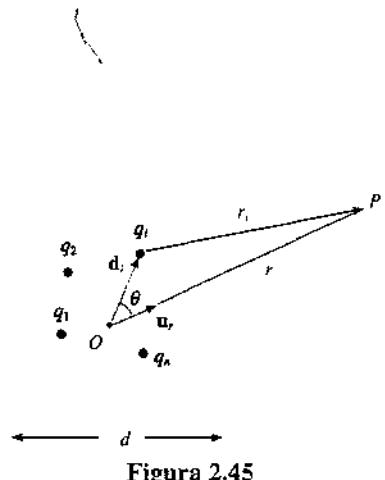


Figura 2.45

potenziale in un punto  $P$  a distanza  $r$  da  $O$  molto grande rispetto a  $d$  ( $r \gg d$ ). Se  $r_i$  è la distanza da  $q_i$  a  $P$ , secondo (2.19) in  $P$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

Chiamando  $\mathbf{d}_i$  il vettore che unisce  $O$  alla carica  $q_i$ , abbiamo  $\mathbf{d}_i + \mathbf{r}_i = \mathbf{r}$  e se appunto  $r \gg d$ , possiamo scrivere  $d_i \cos \theta_i + r_i = r$  ovvero

$$r_i \approx r - d_i \cos \theta_i = r - \mathbf{d}_i \cdot \mathbf{u}_r$$

con  $\mathbf{u}_r$  versore della direzione  $OP$ . Pertanto

$$\frac{1}{r_i} = \frac{1}{r - \mathbf{d}_i \cdot \mathbf{u}_r} = \frac{r + \mathbf{d}_i \cdot \mathbf{u}_r}{r^2 - (\mathbf{d}_i \cdot \mathbf{u}_r)^2} = \frac{r + \mathbf{d}_i \cdot \mathbf{u}_r}{r^2}$$

se ammettiamo di poter trascurare  $d_i^2$  rispetto a  $r^2$ . Il potenziale nel punto  $P$  risulta quindi

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sum_i q_i (r + \mathbf{d}_i \cdot \mathbf{u}_r)}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{(\sum_i q_i \mathbf{d}_i) \cdot \mathbf{u}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

avendo posto  $Q = \sum_i q_i$ , carica totale del sistema. Definiamo il vettore

$$\mathbf{p} = \sum_i q_i \mathbf{d}_i \quad (2.63)$$

detto *momento di dipolo elettrico del sistema rispetto al punto O* e in conclusione scriviamo il potenziale prodotto dal sistema di cariche nel punto  $P$  lontano dal sistema come

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{u}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} = V_0 + V_{\text{dip}} \quad (2.64)$$

Il primo termine rappresenta il potenziale generato da una carica, eguale alla carica totale del sistema, posta nel punto  $O$  e si chiama termine di *monopolio*; il secondo, formalmente eguale a (2.59), si chiama termine di *dipolo*.

Se la  $Q$  è diversa da zero il termine di monopolio è preponderante: infatti, scrivendo

$$\mathbf{p} = \sum_i q_i \mathbf{d}_i = Q \mathbf{d}$$

dove il modulo di  $\mathbf{d}$  non è molto diverso dai moduli dei vari  $\mathbf{d}_i$ , abbiamo

$$\frac{V_{\text{dip}}}{V_0} = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{u}_r}{r Q} \sim \frac{Q d}{r Q} = \frac{d}{r} \ll 1$$

Il fatto che  $V_{\text{dip}}$  sia trascurabile rispetto a  $V_0$  rende non influente la proprietà del momento  $\mathbf{p}$  di dipendere dalla scelta del punto  $O$ .

Considerando un altro punto  $O'$ , vale la relazione

$$\mathbf{d}_i = \mathbf{OP}_i = \mathbf{OO}' + \mathbf{O}'\mathbf{P}_i = \mathbf{OO}' + \mathbf{d}'_i \Rightarrow \mathbf{p} = \sum_i q_i \mathbf{d}_i = \sum_i q_i \mathbf{OO}' + \sum_i q_i \mathbf{d}'_i = Q \mathbf{OO}' + \mathbf{p}'$$

il momento riferito a  $O'$  è diverso da quello riferito a  $O$ . Pertanto il termine di dipolo dipende dalla scelta del centro, il che non è appropriato per una quantità che abbia significato fisico.

Se invece il sistema è neutro ( $Q = 0$ ), il termine di monopolio è nullo e il potenziale in  $P$  è

$$V = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{u}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (2.65)$$

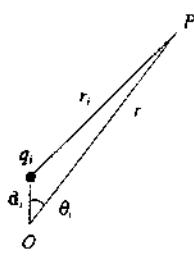
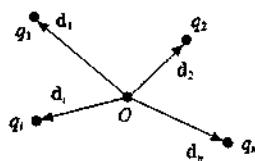


Figura 2.46

Momento di dipolo elettrico  
di un sistema di cariche



$\mathbf{p} = \sum_i q_i \mathbf{d}_i$   
Figura 2.47

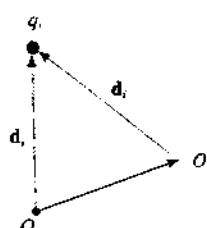


Figura 2.48

con  $\mathbf{p}$  proprietà intrinseca, caratteristica del sistema, indipendente da  $O$ : un punto va scelto per calcolare  $\mathbf{p}$ , ma il risultato è invariante.

Il caso specifico trattato nel paragrafo 2.7 appare adesso come un'applicazione particolare; anche (2.58) si ricava da (2.63):

$$\mathbf{p} = \sum_i q_i \mathbf{d}_i = q \mathbf{d}_1 - q \mathbf{d}_2 = q (\mathbf{d}_1 - \mathbf{d}_2) = q \mathbf{a} .$$

È evidente che da misure di potenziale e di campo non si traggono informazioni sulla effettiva distribuzione di carica del sistema, ma soltanto su  $\mathbf{p}$ ; per questo motivo la schematizzazione più semplice di un sistema neutro è quella di rappresentarlo con due cariche  $+Q$  e  $-Q$  poste a una certa distanza. Per esempio, in un sistema di  $n$  cariche di un segno ed  $n$  cariche eguali, ma di segno opposto, separando nella (2.63) i contributi delle cariche positive da quelli delle cariche negative, si scrive

$$\mathbf{p} = \sum_i q_i \mathbf{d}_i^{(+)} - \sum_i q_i \mathbf{d}_i^{(-)} = Q \mathbf{d}_1 - Q \mathbf{d}_2 . \quad (2.66)$$

Osserviamo che l'eguaglianza  $\sum_i q_i \mathbf{d}_i = Q \mathbf{d}$  ricorda la definizione di centro di massa, per cui si parla di centro delle cariche positive individuato da  $\mathbf{d}_1$  e di centro delle cariche negative individuato da  $\mathbf{d}_2$  e si immaginano le cariche  $Q$  e  $-Q$  concentrate in tali punti, le cui posizioni non dipendono da  $O$ , distanti tra loro  $\mathbf{d}_1 - \mathbf{d}_2$ .

L'esistenza di un momento di dipolo intrinseco in una distribuzione di carica è legata all'esistenza di una *asimmetria* tra cariche positive e negative. In effetti si può dimostrare che se esiste un centro di simmetria il momento di dipolo del sistema è nullo. Nella figura 2.50 sono mostrate due distribuzioni con  $Q = 0$  e  $\mathbf{p} = 0$ , dette *quadrupolo lineare* e *quadrupolo bidimensionale*.

Quando  $\mathbf{p} = 0$ , la (2.64) non è sufficiente per il calcolo del potenziale e occorre introdurre altri termini, che derivano dallo sviluppo in serie della funzione  $1/r_i$ . I primi due termini sono  $V_0$  e  $V_{\text{dip}}$ , i successivi si chiamano *termini di multipolo* (*quadrupolo*, *ottupolo*, ...). Ogni termine è trascurabile rispetto a quello precedente, però se questo è nullo esso diventa il termine importante. Un sistema neutro pertanto può avere una interazione elettrica, che è tanto minore quanto maggiore è il grado di simmetria.

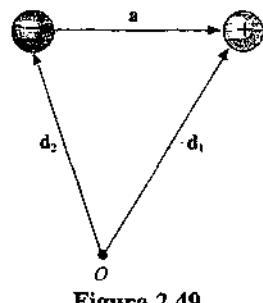


Figura 2.49

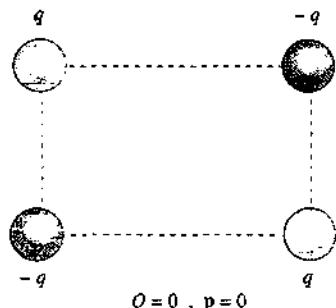
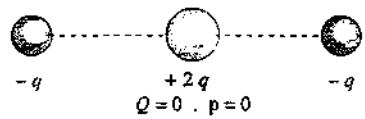


Figura 2.50

### Esempio 2.13

Si consideri il quadrupolo lineare della figura 2.51 e si calcoli il potenziale in un punto  $P$  distante  $r \gg a$  dal quadrupolo.

#### Soluzione

Utilizziamo le coordinate cartesiane ( $y$  nel foglio,  $x$  ortogonale al foglio): in generale sarebbe

$$\mathbf{r} = \mathbf{OP} = x_i \mathbf{u}_x + y_i \mathbf{u}_y + z_i \mathbf{u}_z , \quad \mathbf{d}_i = \mathbf{O}P_i = x_i \mathbf{u}_x + y_i \mathbf{u}_y + z_i \mathbf{u}_z .$$

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{P}_i \mathbf{P} = (x - x_i) \mathbf{u}_x + (y - y_i) \mathbf{u}_y + (z - z_i) \mathbf{u}_z$$

e lo sviluppo in serie di  $1/r_i$  si dovrebbe scrivere

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_i} &= \frac{1}{r} + \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{r} \right) x_i + \left( \frac{\partial}{\partial y_i} \frac{1}{r} \right) y_i + \left( \frac{\partial}{\partial z_i} \frac{1}{r} \right) z_i + \\ &+ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \frac{1}{r} \right) x_i^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} \frac{1}{r} \right) y_i^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2}{\partial z_i^2} \frac{1}{r} \right) z_i^2 + \left( \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial y_i} \frac{1}{r} \right) x_i y_i + \\ &+ \left( \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial z_i} \frac{1}{r} \right) x_i z_i + \left( \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial z_i} \frac{1}{r} \right) y_i z_i + \dots \end{aligned}$$

dove tutte le derivate si intendono calcolate per  $r_i = r$  e i sei termini con le derivate seconde miste, essendo a due a due uguali, diventano tre. Però il punto  $P$  sta nel piano  $y, z$  e i punti  $P_i$ , cioè le cariche, sull'asse  $z$ , per cui  $x_i = y_i = 0$  e

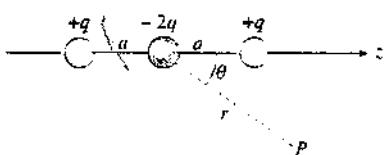


Figura 2.51

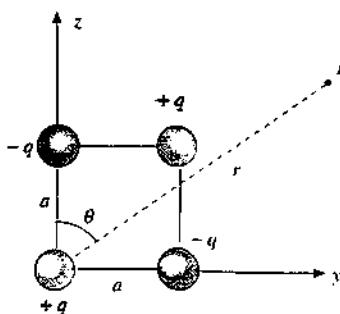


Figura 2.52

$$\frac{1}{r_i} = \frac{1}{r} + \left( \frac{\partial}{\partial z_i} \frac{1}{r} \right) z_i + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2}{\partial z_i^2} \frac{1}{r} \right) z_i^2 + \dots$$

con  $1/r_i = 1/\sqrt{y^2 + (z - z_i)^2}$ . Eseguendo le derivate e ricordando che  $\cos\theta = z/r$  si trova:

$$\frac{1}{r_i} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} \frac{z z_i}{r} + \frac{1}{2 r^3} \left( 3 \frac{z^2}{r^2} - 1 \right) z_i^2 + \dots = \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} z_i \cos\theta + \frac{1}{2 r^3} (3 \cos^2\theta - 1) z_i^2 + \dots$$

Il potenziale di un sistema lineare di cariche è pertanto

$$V = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i} = \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0 r} + \frac{\cos\theta}{4 \pi \epsilon_0 r^2} \sum_i q_i z_i + \frac{3 \cos^2\theta - 1}{8 \pi \epsilon_0 r^3} \sum_i q_i z_i^2 + \dots$$

$$= \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0 r} + \frac{p \cos\theta}{4 \pi \epsilon_0 r^2} + \frac{p_q (3 \cos^2\theta - 1)}{8 \pi \epsilon_0 r^3} + \dots$$

avendo definito momento di quadrupolo  $p_q = \sum_i q_i z_i^2$ . Nel nostro caso  $Q = 0$  e  $p = \sum_i q_i z_i = q a - q a = 0$ , mentre  $p_q = 2 q a^2$  per cui

$$V = \frac{2 q a^2 (3 \cos^2\theta - 1)}{8 \pi \epsilon_0 r^3} = \frac{q a^2 (3 \cos^2\theta - 1)}{4 \pi \epsilon_0 r^3}$$

Osserviamo che in un sistema neutro con momento di dipolo non nullo il termine di quadrupolo, normalmente trascurabile, è l'unico contributo al potenziale nel piano mediano del doppio polo equivalente, dove  $V_{\text{dip}} = 0$ .

Nel caso del quadrupolo bidimensionale eseguendo lo sviluppo di  $1/r_i$  con  $x = x_i = 0$  si trova che nella formula del potenziale tutti i termini si elidono con l'eccezione di

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial z_i} \frac{1}{r_i} \right) y_i z_i$$

relativo alla carica  $+q$  di coordinate  $(a, b)$ , e si ottiene

$$V = \frac{3 q a b \cos\theta \sin\theta}{4 \pi \epsilon_0 r^3}$$

## 2.9 La forza su un dipolo elettrico

Consideriamo un dipolo formato da una carica  $-q$  posta nel punto  $P_1(x, y, z)$  e da una carica  $+q$  posta nel punto  $P_2(x + a_x, y + a_y, z + a_z)$ . Il vettore  $\mathbf{a} = a_x \mathbf{u}_x + a_y \mathbf{u}_y + a_z \mathbf{u}_z$  congiunge  $P_1$  a  $P_2$  e il momento di dipolo è  $\mathbf{p} = q \mathbf{a}$ . Se il dipolo si trova in una regione in cui c'è un campo elettrico, la sua energia potenziale elettrostatica secondo (2.9) è

$$U_e = q V(x + a_x, y + a_y, z + a_z) - q V(x, y, z)$$

Supponiamo che la distanza  $a$  sia piccola, così da poter scrivere

$$V(x + a_x, y + a_y, z + a_z) = V(x, y, z) + \frac{\partial V}{\partial x} a_x + \frac{\partial V}{\partial y} a_y + \frac{\partial V}{\partial z} a_z ;$$

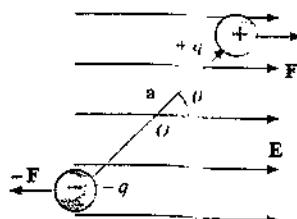


Figura 2.53

In tal caso l'energia elettrostatica del dipolo è

$$U_e = q a_x \frac{\partial V}{\partial x} + q a_y \frac{\partial V}{\partial y} + q a_z \frac{\partial V}{\partial z} = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E} = -p \cos \theta E \quad (2.67)$$

ricordando che il campo è l'opposto del gradiente del potenziale,  $\mathbf{E} = -\nabla V$ .

Se il campo è uniforme le forze sulle cariche,  $\mathbf{F}_1 = -q \mathbf{E}$ ,  $\mathbf{F}_2 = q \mathbf{E}$ , costituiscono una *coppia* e quindi hanno risultante nulla, ma momento diverso da zero. Il dipolo pertanto resta fermo nel campo uniforme e la sua posizione di equilibrio stabile, corrispondente al minimo dell'energia potenziale, è col momento di dipolo  $\mathbf{p}$  parallelo e concorde al campo  $\mathbf{E}$  ( $U_{e,\min} = -p E$ ). Facendo ruotare il dipolo di un angolo  $\theta$  rispetto alla posizione di equilibrio stabile, esso risente di un *momento delle forze*  $\mathbf{M}$  che tende a riportarlo nella posizione  $\theta = 0$ . Tale momento, calcolato per esempio rispetto al centro del dipolo (ma sappiamo che il momento di una coppia non dipende dal polo), è

$$\mathbf{M} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 = (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times q \mathbf{E} = q \mathbf{a} \times \mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E} \quad (2.68)$$

Energia elettrostatica  
del dipolo

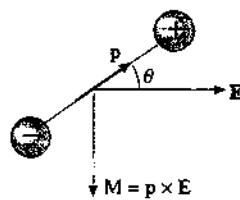


Figura 2.54

Momento agente sul dipolo

Dalla figura 2.54 si vede che  $\mathbf{M} = -p \sin \theta E \mathbf{u}_z$ , ovvero

$$M = -p \sin \theta E = -\frac{dU_e}{d\theta}$$

in accordo con  $dW = M d\theta = -dU_e$ ; nella derivata dell'energia non si è usato il simbolo di derivata parziale perché l'energia dipende solo dall'angolo quando il campo è uniforme.

#### Esempio 2.14

Un dipolo, di momento elettrico  $\mathbf{p}$  e momento d'inerzia  $I$  rispetto ad un asse passante per il centro e ortogonale a  $\mathbf{p}$ , è immerso in un campo  $\mathbf{E}$  uniforme. Descrivere il moto del dipolo quando viene spostato di un piccolo angolo dalla posizione di equilibrio.

#### Soluzione

Ricordiamo dalla dinamica dei corpi rigidi che l'equazione del moto di rotazione è

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = I \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{p} \times \mathbf{E} \quad :$$

proiettando sull'asse di rotazione, che è l'asse  $z$  della figura 2.54

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -p E \sin \theta \quad .$$

Nell'ipotesi che l'angolo sia piccolo così da poter confondere il seno con l'angolo

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{p E}{I} \theta = 0 \quad .$$

che è l'equazione di un moto armonico con pulsazione e periodo dati da

$$\omega = \sqrt{\frac{p E}{I}} \quad , \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{p E}} \quad .$$

La posizione angolare e la velocità angolare sono

$$\theta = \theta_0 \sin(\omega t + \phi) \quad , \quad \Omega = \frac{d\theta}{dt} = \omega \theta_0 \cos(\omega t + \phi) \quad .$$

La dinamica è quella del pendolo di torsione: in entrambi i casi agisce un momento di tipo elastico  $M = -k\theta$ .

Se l'angolo è grande il moto non è più armonico, pur restando periodico, e applicando la conservazione dell'energia si può esprimere la velocità in funzione dell'angolo:

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} I \Omega_2^2 - \frac{1}{2} I \Omega_1^2 = -\Delta U_e = p E \cos \theta_2 - p E \cos \theta_1$$

$$\Rightarrow \Omega_2^2 = \Omega_1^2 + \frac{2 p E}{I} (\cos \theta_2 - \cos \theta_1) = \Omega_1^2 + 2 \omega^2 (\cos \theta_2 - \cos \theta_1)$$

Quando il campo elettrico non è uniforme, oltre al momento  $M$  che tende a rendere  $\mathbf{p}$  parallelo a  $\mathbf{E}$  (allineamento del dipolo), agisce anche una forza  $\mathbf{F}$  poiché le forze sulle due cariche  $-q$  e  $+q$  sono ora diverse in quanto diverso è il valore del campo nelle due posizioni occupate dalle cariche. Tali forze si scrivono

$$\mathbf{F}_1 = -q \mathbf{E}, \quad \mathbf{F}_2 = q (\mathbf{E} + \Delta \mathbf{E}) = q \left( \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} a_x + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial y} a_y + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z} a_z \right),$$

dove abbiamo usato il teorema del differenziale totale per una grandezza vettoriale, strutturalmente identico a quello per una grandezza scalare. La forza risultante è

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = q a_x \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + q a_y \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial y} + q a_z \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z}$$

ovvero

$$\mathbf{F} = p_x \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + p_y \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial y} + p_z \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z}. \quad (2.69)$$

Le componenti cartesiane della forza subita dal dipolo sono:

$$F_x = p_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + p_y \frac{\partial E_x}{\partial y} + p_z \frac{\partial E_x}{\partial z},$$

$$F_y = p_x \frac{\partial E_y}{\partial x} + p_y \frac{\partial E_y}{\partial y} + p_z \frac{\partial E_y}{\partial z},$$

$$F_z = p_x \frac{\partial E_z}{\partial x} + p_y \frac{\partial E_z}{\partial y} + p_z \frac{\partial E_z}{\partial z}. \quad (2.70)$$

In forma compatta (2.69) si scrive

$$\mathbf{F} = (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}$$

intendendo che l'operatore  $(\mathbf{p} \cdot \nabla)$  applicato al vettore  $\mathbf{E} = E_x \mathbf{u}_x + E_y \mathbf{u}_y + E_z \mathbf{u}_z$  dà un vettore la cui componente  $x$  è

$$(\mathbf{p} \cdot \nabla) E_x = p_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + p_y \frac{\partial E_x}{\partial y} + p_z \frac{\partial E_x}{\partial z}$$

e analogamente per le altre componenti.

La (2.69) è l'espressione più generale della forza subita dal dipolo, valida anche in campi elettrici non conservativi. In un campo elettrostatico deve essere vero anche che

$$\mathbf{F} = -\nabla U_e = -\nabla (-\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}) = \nabla (\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}) = \nabla (p_x E_x + p_y E_y + p_z E_z)$$

e quindi la forza ha le componenti

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}) = p_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + p_y \frac{\partial E_y}{\partial x} + p_z \frac{\partial E_z}{\partial x}, \\ F_y &= \frac{\partial}{\partial y} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}) = p_x \frac{\partial E_x}{\partial y} + p_y \frac{\partial E_y}{\partial y} + p_z \frac{\partial E_z}{\partial y}, \\ F_z &= \frac{\partial}{\partial z} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}) = p_x \frac{\partial E_x}{\partial z} + p_y \frac{\partial E_y}{\partial z} + p_z \frac{\partial E_z}{\partial z}. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Forza su un dipolo in un campo elettrostatico

Queste componenti sono uguali alle componenti (2.70) in quanto, essendo il campo conservativo, valgono le (2.55).

Non è semplice intuire in generale la direzione della forza agente sul dipolo; nell'esempio successivo studieremo un caso specifico. Si deve notare ad ogni modo che le componenti della forza dipendono dalle derivate delle componenti del campo e quindi nella determinazione della forza sul dipolo sono importanti le variazioni del campo più che il campo stesso.

### Esempio 2.15

Un dipolo di momento  $\mathbf{p}$  è immerso nel campo generato da una carica puntiforme positiva  $q_0$ . Si consideri il dipolo posizionato nel punto  $P$  dell'asse  $y$  con il momento parallelo a  $\mathbf{E}$  oppure ortogonale a  $\mathbf{E}$ .

#### Soluzione

Il problema è un problema piano: se il dipolo ha il momento  $\mathbf{p}$  nel piano  $y, z$  le forze stanno in tale piano. Per applicare le (2.71) ricorriamo alle (1.15) che nel nostro caso ( $x = 0$ ) si scrivono

$$E_x = 0, \quad E_y = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{y}{(y^2 + z^2)^{3/2}}, \quad E_z = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Le derivate sono

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial x} &= 0, \quad \frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{q_0(-2y^2 + z^2)}{4\pi\epsilon_0 r^5}, \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{-3q_0yz}{4\pi\epsilon_0 r^5}, \\ \frac{\partial E_z}{\partial x} &= 0, \quad \frac{\partial E_z}{\partial y} = \frac{-3q_0yz}{4\pi\epsilon_0 r^5} = \frac{\partial E_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{q_0(y^2 - 2z^2)}{4\pi\epsilon_0 r^5}. \end{aligned}$$

Se il dipolo nel punto  $P$  ( $y = r, z = 0$ ) ha il momento parallelo e concorde al campo, cioè se  $p_x = 0, p_y = p, p_z = 0$ , si trova

$$F_x = 0, \quad F_y = \frac{-2p q_0 y^2}{4\pi\epsilon_0 r^5}, \quad F_z = 0 \Rightarrow \mathbf{F}_1 = \frac{-2p q_0}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{u}_y;$$

la forza è attrattiva, il dipolo si sposta verso l'origine. Se invece il dipolo è discordo al campo,  $p_z = -p$  e la forza, eguale in modulo, è ora repulsiva.

Quando il dipolo è ortogonale a  $\mathbf{E}$  e concorde all'asse  $z, p_x = 0, p_y = 0, p_z = p$  e si trova

$$F_x = 0, \quad F_y = 0, \quad F_z = \frac{p q_0 y^2}{4\pi\epsilon_0 r^5} \Rightarrow \mathbf{F}_2 = \frac{p q_0}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{u}_z;$$

la forza è parallela e concorde all'asse  $z$ , cioè a  $\mathbf{p}$ . Se si rovescia  $\mathbf{p}$  si rovescia anche la forza, che resta concorde a  $\mathbf{p}$ .

Si può scrivere nei due casi

$$\mathbf{F}_1 = \frac{-2q_0}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{p}, \quad \mathbf{F}_2 = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{p}.$$

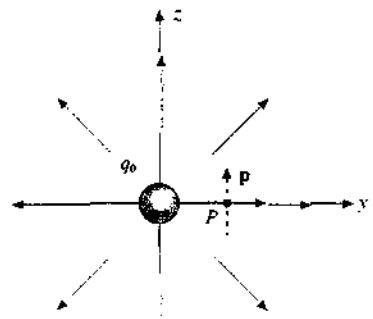


Figura 2.55

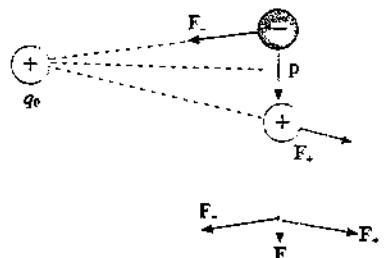
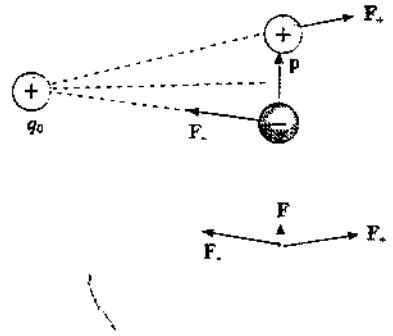


Figura 2.56

Dopo aver trovato i risultati con le formule generali (2.71) osserviamo che i versi delle forze si possono dedurre facilmente a priori: se il dipolo è concorde al campo la carica negativa è più vicina a  $q_0$  di quella positiva e il risultato è attrattivo, viceversa nel caso opposto. Nella seconda posizione si vede dalla figura 2.56 che la forza è ortogonale al campo e concorde a  $\mathbf{p}$ .

Nell'esempio appena discusso ci sono alcuni fatti che è interessante mettere in evidenza. Quando il momento  $\mathbf{p}$  è parallelo al campo  $\mathbf{E}$  la forza si può scrivere

$$\mathbf{F} = -\frac{2 p q_0}{4 \pi \epsilon_0 r^3} \mathbf{u}_r = p \left( \frac{-2 q_0}{4 \pi \epsilon_0 r^3} \right) \mathbf{u}_r = p \frac{dE}{dr} \mathbf{u}_r = p \nabla E .$$

Questo risultato è vero anche in generale: se  $\mathbf{p}$  è parallelo a  $\mathbf{E}$  la forza è

$$\mathbf{F} = \nabla (\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}) = \nabla (p E) = p \nabla E$$

e risulta parallela al gradiente del modulo del campo. Ciò significa che il *dipolo tende a portarsi nei punti in cui il campo è più intenso se il momento  $\mathbf{p}$  è concorde al campo, mentre tende ad allontanarsene se  $\mathbf{p}$  è discordo al campo*; tale situazione è frequente perché un dipolo tende spontaneamente ad allinearsi al campo.

Quando invece il momento di dipolo non è parallelo al campo, le cariche del dipolo sondono la struttura del campo anche trasversalmente alle linee di forza e la formula della forza è più complessa.

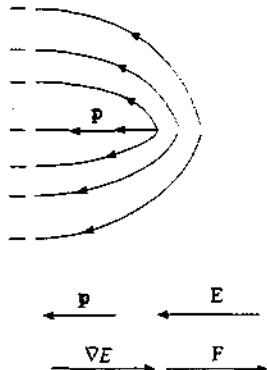


Figura 2.57

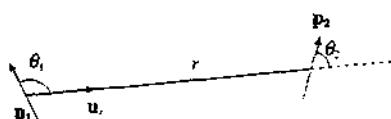


Figura 2.58

### Interazione tra dipoli

Due dipoli di momenti elettrici  $\mathbf{p}_1$  e  $\mathbf{p}_2$ , posti a distanza  $r$  tra loro, interagiscono in quanto ciascuno è sottoposto al campo dell'altro. Vogliamo calcolare l'energia elettrostatica del sistema di due dipoli e la forza in alcune situazioni geometricamente semplici.

Riprendiamo le formule del campo di un dipolo (2.62) e dell'energia di un dipolo in un campo (2.67); abbiamo per l'energia del secondo dipolo nel campo del primo

$$U_{e,2} = -\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{E}_1 = -\frac{1}{4 \pi \epsilon_0 r^3} [\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 - 3(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{u}_r)(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{u}_r)] , \quad (2.72)$$

essendo  $\mathbf{u}_r = \mathbf{u}_{1,2}$  il versore della direzione che va dal primo al secondo dipolo. Si vede che l'energia potenziale è simmetrica rispetto allo scambio  $1 \rightarrow 2$ , cioè che  $U_{e,1} = U_{e,2}$ , come deve essere trattandosi di una *interazione mutua*. L'energia è inversamente proporzionale a  $r^3$ , per cui la forza è inversamente proporzionale a  $r^4$ : l'interazione decresce molto rapidamente con la distanza.

Se i dipoli stanno nello stesso piano si ha la situazione della figura 2.58 e la (2.72) diventa

$$U_e = -\frac{1}{4 \pi \epsilon_0 r^3} [p_1 p_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - 3 p_1 p_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2] = \frac{p_1 p_2}{4 \pi \epsilon_0 r^3} (\sin \theta_1 \sin \theta_2 - 2 \cos \theta_1 \cos \theta_2) .$$

Esaminiamo per primo il caso in cui i due dipoli abbiano momenti concordi disposti su due rette parallele distanti  $r$  e ortogonalmente alla congiungente, per cui

$$\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 = p_1 p_2 \quad \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{u}_r = \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{u}_r = 0 \Rightarrow U_e = \frac{p_1 p_2}{4 \pi \epsilon_0 r^3} .$$

La forza subita dal secondo dipolo è

$$\mathbf{F}_2 = -\nabla U_e = -\frac{\partial U_e}{\partial r} \mathbf{u}_r = \frac{3 p_1 p_2}{4 \pi \epsilon_0 r^4} \mathbf{u}_r .$$

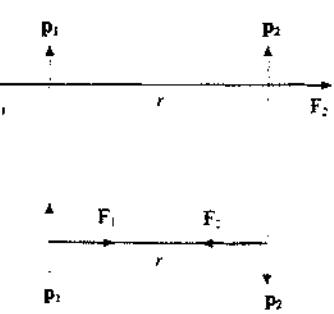


Figura 2.59

cioè repulsiva; si verifica subito che  $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$ . Se i momenti sono discordi l'energia cambia di segno e la forza tra i dipoli diviene attrattiva.

Supponiamo successivamente che i due dipoli abbiano momenti paralleli e concordi, posti sullo stesso asse:

$$\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 = p_1 p_2, \quad \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{u}_r = p_1, \quad \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{u}_r = p_2 \Rightarrow U_e = \frac{-2 p_1 p_2}{4 \pi \epsilon_0 r^3}.$$

La forza è attrattiva e vale

$$\mathbf{F} = \frac{-6 p_1 p_2}{4 \pi \epsilon_0 r^4} \mathbf{u}_r.$$

Con i dipoli discordi energia e forza cambiano di segno.

L'interazione tra molecole aventi un momento di dipolo intrinseco avviene secondo le linee descritte. Una molecola d'acqua presenta un momento di dipolo elettrico  $p = 6.2 \cdot 10^{-30}$  Cm; date due molecole distanti  $r = 5 \cdot 10^{-10}$  m, che è un valore tipico per l'acqua nella fase liquida, il valore di riferimento dell'energia di interazione è

$$U_e = \frac{p_1 p_2}{4 \pi \epsilon_0 r^3} = \frac{9 \cdot 10^9 (6.2 \cdot 10^{-30})^2}{(5 \cdot 10^{-10})^3} = 2.77 \cdot 10^{-21} \text{ J} = 1.73 \cdot 10^{-2} \text{ eV} = 17.3 \text{ meV}.$$

Quindi nella prima disposizione studiata  $U_e = 17.3$  meV, nella seconda  $U_e = -34.6$  meV (l'energia di agitazione termica, data come ordine di grandezza da  $k_B T$ , vale 26 meV a 300 K). Le forze corrispondenti sono  $1.66 \cdot 10^{-11}$  N e  $-3.32 \cdot 10^{-11}$  N.

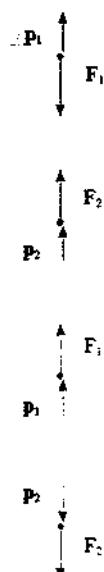


Figura 2.60

### Unità di misura

Il momento di doppio elettrico, prodotto di una carica per una distanza, ha l'unità di misura Coulomb · metro, Cm. come abbiamo appena visto. I doppoli elementari, intrinseci o indotti, hanno valori da  $10^{-30}$  Cm per i primi a  $10^{-35}$  Cm per i secondi.

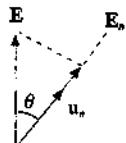
# La legge di Gauss

Il campo elettrostatico di una carica puntiforme è un *campo centrale* e in quanto tale è *conservativo*, come abbiamo discusso nel capitolo 2. Per una distribuzione di carica discreta o continua non si può parlare in generale di campo radiale; esso però è sempre conservativo, come discende dall'applicazione del principio di sovrapposizione nel calcolo del lavoro, che è indipendente dal particolare percorso seguito in quanto lo sono tutti i contributi dovuti ai singoli campi.

La proprietà di essere conservativo non è una caratteristica specifica di un campo radiale che dipende dalla distanza come  $r^{-2}$ , ma vale per qualsiasi campo del tipo  $\mathbf{E} = E(r) \mathbf{u}_r$ , radiale e con modulo dipendente solo dalla distanza, cioè centrale. Ad esempio, il campo

$$\mathbf{E} = \frac{C}{r^n} \mathbf{u}_r ,$$

con  $n \neq 1$ , è il gradiente della funzione potenziale calcolata secondo (2.15):



$$V(r) = \int_r^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{C}{(n-1)r^{n-1}} .$$

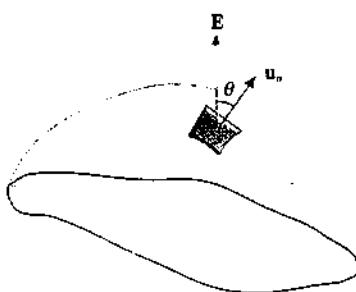
In questo capitolo dedurremo una legge che vale solamente se la dipendenza del campo dalla distanza è del tipo  $r^{-2}$ ; è una legge che si applica pertanto anche nel caso del campo gravitazionale e che è stata per questo già enunciata nel capitolo 5 del primo volume.

Figura 3.1

## 3.1 Flusso del campo elettrico. Legge di Gauss.

Consideriamo, figura 3.1, una superficie  $d\Sigma$  immersa in una regione in cui è definito un campo  $\mathbf{E}$  e orientiamola fissando il verso del versore della normale  $\mathbf{u}_n$ . Si definisce *flusso del campo  $\mathbf{E}$  attraverso la superficie  $d\Sigma$*  la quantità scalare

$$d\Phi(\mathbf{E}) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = E \cos\theta d\Sigma = E_n d\Sigma . \quad (3.1)$$



Il flusso attraverso una superficie finita  $\Sigma$ , figura 3.2, si ottiene sommando tutti i contributi infinitesimi (3.1) ovvero *integrando*:

$$\Phi(\mathbf{E}) = \int_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma . \quad (3.2)$$

Se la superficie è chiusa il flusso si scrive, con simbologia di significato evidente,

$$\Phi(\mathbf{E}) = \oint_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma . \quad (3.3)$$

$\int_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma$

Figura 3.2

In questo caso è convenzione orientare la normale verso l'esterno. I contributi positivi all'integrale (3.3) sono quelli per cui  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_n > 0$ , dovuti a quelle zone dove anche  $\mathbf{E}$  punta verso l'esterno: essi rappresentano un *flusso di E uscente* dalla superficie. I contributi negativi provengono dalle zone in cui  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_n < 0$ , in cui cioè  $\mathbf{E}$  punta verso l'interno, e rappresentano un *flusso di E entrante*. Pertanto l'integrale (3.3) dà il *flusso netto attraverso la superficie chiusa*; se esso è *nullo* vuol dire di norma che il *flusso entrante egualia in modulo il flusso uscente*.

La definizione di flusso si applica a qualsiasi campo vettoriale; ad esempio l'abbiamo già utilizzata nel paragrafo 2.6 a proposito del flusso del rotore di un vettore. Il nome di flusso deriva dalle applicazioni in idrodinamica, ma deve essere chiaro che il flusso di un campo vettoriale è un concetto matematico e non si accompagna necessariamente al passaggio attraverso  $\Sigma$  di materia o energia.

Prendiamo ora in esame il campo prodotto da una carica puntiforme  $q$ , dato da (1.14), e calcoliamo il flusso attraverso l'elemento di superficie orientata utilizzando (3.1):

$$d\Phi(\mathbf{E}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d\Sigma \cos\theta}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d\Sigma_0}{r^2},$$

dove  $d\Sigma_0$  è la proiezione di  $d\Sigma$  sul piano perpendicolare a  $\mathbf{u}_r$ . Per definizione (si veda la nota più avanti)  $d\Sigma_0/r^2$  è l'*angolo solido*  $d\Omega$  sotto cui è visto dalla carica  $q$  il contorno di  $d\Sigma$ , per cui

$$d\Phi(\mathbf{E}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega. \quad (3.4)$$

Il flusso del campo  $\mathbf{E}$  di una carica puntiforme  $q$  dipende solo dall'angolo solido e non dalla superficie né dalla sua distanza dalla carica; tracciate da  $q$  una serie di semirette che definiscono un *cono infinitesimo* con vertice in  $q$ , il flusso di  $\mathbf{E}$  è lo stesso per qualsiasi superficie  $d\Sigma$  il cui contorno si appoggi sulla superficie laterale del cono in quanto

$$d\Omega = \frac{d\Sigma_1 \cos\theta_1}{r_1^2} = \frac{d\Sigma_{1,0}}{r_1^2} = \frac{d\Sigma_2 \cos\theta_2}{r_2^2} = \frac{d\Sigma_{2,0}}{r_2^2} = \dots$$

Conviene osservare subito che la dipendenza del flusso dall'angolo solido è conseguenza del fatto che a denominatore dell'espressione del campo compare  $r^2$ : qualunque altra dipendenza funzionale non avrebbe portato alla (3.4).

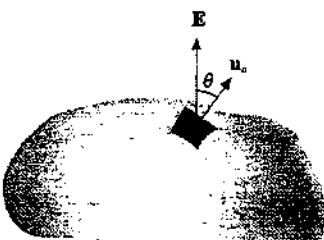
Il flusso attraverso una superficie finita è dato da

$$\Phi(\mathbf{E}) = \int_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \Omega, \quad (3.5)$$

con  $\Omega$ , figura 3.6, angolo solido sotto cui è visto il contorno della superficie  $\Sigma$  dalla carica  $q$ . Calcoliamo adesso il flusso di  $\mathbf{E}$  attraverso una superficie chiusa, distinguendo due casi: precisamente il caso in cui la *carica q* è *interna* alla superficie chiusa e il caso in cui è *esterna*.

Se la *carica* è *interna*, figura 3.7, tutti i contributi  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma$  si sommano in quanto hanno sempre lo stesso segno in qualsiasi punto di  $\Sigma$  e applicando (3.5) abbiamo

$$\Phi(\mathbf{E}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} 4\pi = \frac{q}{\epsilon_0}; \quad (3.6)$$



$\oint \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma$

Figura 3.3

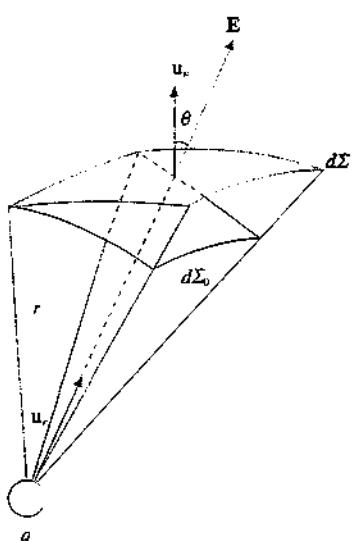


Figura 3.4

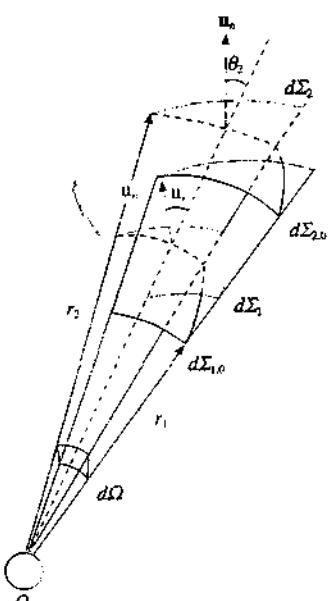


Figura 3.5

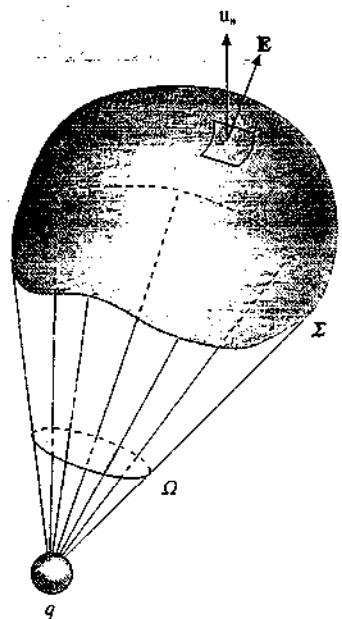


Figura 3.6

infatti (vedi nota più avanti) l'angolo solido totale sotto cui è vista una *superficie chiusa qualunque* da un punto all'interno è  $4\pi$ .

Se invece la *carica* è *esterna* alla superficie chiusa, consideriamo (figura 3.8) un cono elementare che sottende l'angolo solido  $d\Omega$  e che stacca sulla superficie chiusa due elementi  $d\Sigma_1$  e  $d\Sigma_2$ ; l'orientazione della normale è tale che su  $d\Sigma_1 \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma_1 < 0$  e su  $d\Sigma_2 \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma_2 > 0$ . I flussi attraverso i due elementi sono:

$$d\Phi_1(\mathbf{E}) = \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma_1 = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega ,$$

$$d\Phi_2(\mathbf{E}) = \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega = -d\Phi_1(\mathbf{E})$$

$$\Rightarrow d\Phi_1(\mathbf{E}) + d\Phi_2(\mathbf{E}) = 0 .$$

Integrando su tutta la superficie chiusa otteniamo

$$\Phi(\mathbf{E}) = \oint \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = 0 . \quad (3.7)$$

Le (3.6) e (3.7) si possono così riassumere: *il flusso totale attraverso una superficie chiusa del campo di una carica puntiforme q vale  $q/\epsilon_0$ , se la carica è interna alla superficie, vale zero se la carica è esterna.*

Il risultato enunciato si estende al caso di più cariche puntiformi, attraverso il principio di sovrapposizione e la proprietà additiva degli integrali: il flusso attraverso una superficie chiusa del campo  $\mathbf{E}$  generato da un sistema discreto di cariche è dato da

$$\Phi(\mathbf{E}) = \oint \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = \oint (\sum_i \mathbf{E}_i) \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = \sum_i \oint \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma .$$

Ciascun integrale vale  $q_i/\epsilon_0$  se la carica è contenuta all'interno della superficie e vale zero se la carica è esterna. Pertanto abbiamo

$$\Phi(\mathbf{E}) = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Figura 3.7

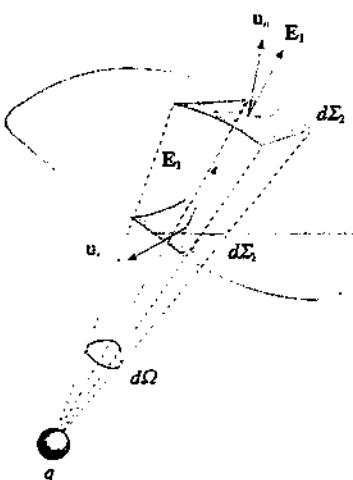


Figura 3.8

essendo la somma estesa a tutte e sole le cariche poste all'interno della superficie  $\Sigma$  (figura 3.9).

Nel caso più generale in cui il campo sia generato da una distribuzione continua di cariche caratterizzata dalla densità spaziale  $\rho(x, y, z)$ , definita dalla (1.19), la (3.8) diviene

$$\Phi(\mathbf{E}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\Sigma} \rho(x, y, z) d\tau , \quad (3.9)$$

dove l'integrale, esteso al volume  $\tau$  racchiuso dalla superficie  $\Sigma$ , rappresenta sempre la carica totale contenuta all'interno di  $\Sigma$ .

Le (3.8) e (3.9) costituiscono la *legge*, o teorema, di *Gauss*: *il flusso del campo E attraverso una superficie chiusa è eguale alla somma algebrica delle cariche contenute entro la superficie, comunque siano distribuite, divisa per  $\epsilon_0$ .*

Notiamo esplicitamente che il campo  $\mathbf{E}$  è quello prodotto da tutte le cariche, interne e esterne alla superficie; però il suo flusso attraverso  $\Sigma$  dipende solo dalle cariche interne.

Come abbiamo già accennato la dimostrazione della legge di Gauss si basa sul fatto che l'esponente di  $r$  al denominatore è esattamente 2. Per un campo radiale qualunque del tipo  $1/r^n$ , con  $n \neq 2$  anche di una quantità molto piccola, non vale la legge di Gauss: questa può quindi essere considerata come una *formulazione alternativa della legge di Coulomb, basata sul concetto di campo*. Vedremo nell'esempio 4.3 che dalla legge di Gauss si ricava la legge di Coulomb.

Verificare sperimentalmente la legge di Gauss significa pertanto verificare la legge di Coulomb; e in effetti le verifiche più precise si hanno per questa via più che da misure dirette di forza (paragrafo 4.3).

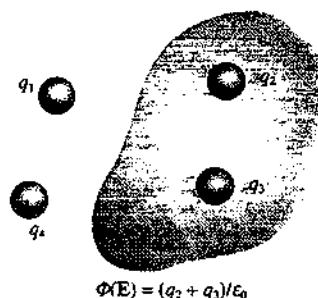


Figura 3.9

### Nota. L'angolo solido

La nozione di *angolo solido* è l'estensione a tre dimensioni del concetto di angolo piano, che richiamiamo brevemente per mettere in evidenza l'analogia tra le due definizioni. L'angolo piano compreso tra due semirette uscenti da uno stesso punto  $O$  è misurato dal rapporto tra la lunghezza  $s$  di un arco di circonferenza di centro  $O$  compreso tra le due semirette e il raggio  $r$  della circonferenza stessa,

$$\theta = \frac{s}{r}$$

La definizione è valida anche per un arco infinitesimo,

$$d\theta = \frac{ds}{r} ,$$

e si può estendere a un tratto  $ds'$  formante l'angolo  $\alpha$  con  $ds$  scrivendo

$$d\theta = \frac{ds}{r} = \frac{ds' \cos\alpha}{r} :$$

$\alpha$  è anche l'angolo tra le normali a  $ds$  e  $ds'$ . In ogni caso la definizione non dipende dalla circonferenza scelta, cioè da  $r$ .

L'unità di misura dell'angolo piano è il *radiane*, corrispondente all'angolo per cui  $s = r$ . Se  $s$  coincide con la lunghezza della circonferenza,  $2\pi r$ , l'angolo corrispondente vale  $2\pi$  radianti, che è il valore massimo possibile. Per un giro completo del punto  $P$  rispetto a  $O$  lungo *qualsiasi linea chiusa* l'angolo vale sempre  $2\pi$ .

Nel caso tridimensionale, figura 3.13, consideriamo subito l'*angolo solido infinitesimo*  $d\Omega$  che è così definito: data una superficie  $d\Sigma$  e la sua proiezione  $d\Sigma_0$  ortogonale al raggio uscente da un punto  $O$  e passante per  $d\Sigma$  si chiama angolo solido la quantità

$$d\Omega = \frac{d\Sigma \cos\alpha}{r^2} = \frac{d\Sigma_0}{r^2}$$

La superficie  $d\Sigma_0$  è un elemento di calotta sferica e la sua area vale, nel sistema di coordinate polari della figura 3.14

$$(AB) \cdot (AD) = (r d\theta) (r \sin\theta d\phi) = r^2 \sin\theta d\theta d\phi$$

per cui

$$d\Omega = \frac{d\Sigma_0}{r^2} = \sin\theta d\theta d\phi \quad (3.10)$$

La (3.10) esprime l'*angolo solido* sotto cui dal punto  $O$  si vede il contorno  $ABCD$  della superficie  $d\Sigma_0$ : risulta che  $d\Omega$  non dipende dal raggio  $r$ . Geometricamente, possiamo dire che l'*angolo solido* dà una misura della parte di spazio compresa entro un fascio di semirette uscenti da  $O$ , così come l'*angolo piano* dà una misura della parte di piano compresa tra due semirette uscenti da  $O$ .

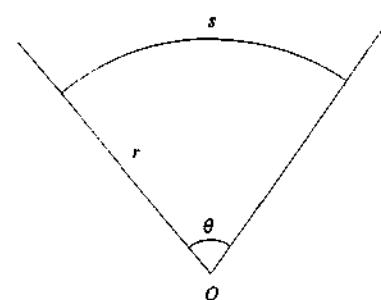


Figura 3.10

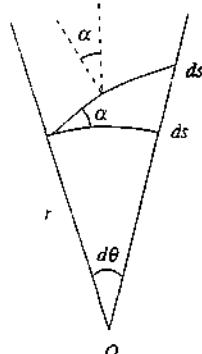


Figura 3.11

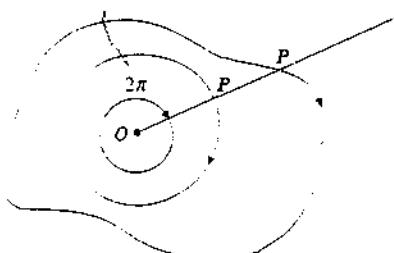


Figura 3.12

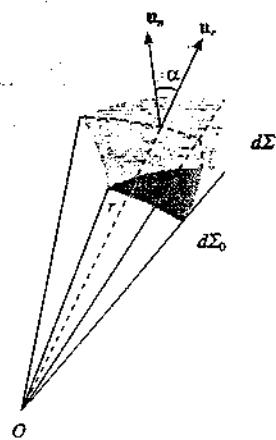


Figura 3.13

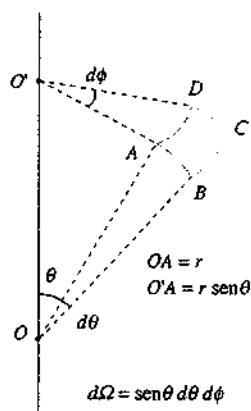


Figura 3.14

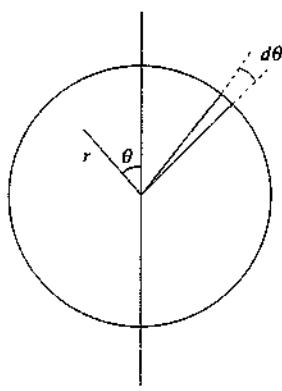


Figura 3.15

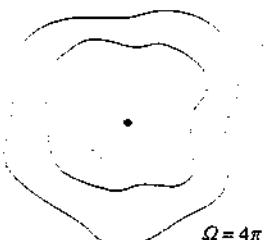


Figura 3.16

Per una superficie finita l'angolo solido è dato dall'integrale

$$\Omega = \int \sin \theta d\theta d\phi$$

che è un integrale doppio sulle variabili  $\theta$  e  $\phi$ .

Se, a  $\theta$  costante, si fa variare  $\phi$  da zero a  $2\pi$ , abbiamo l'angolo solido sotto cui da  $O$  è vista la corona sferica infinitesima della figura 3.15:

$$d\Omega = \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi \sin \theta d\theta$$

Integrando da  $\theta_1$  a  $\theta_2$ ,

$$\Omega(\theta_1, \theta_2) = 2\pi (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$$

In particolare, se  $\theta_1 = 0$  e  $\theta_2 = \theta$ ,

$$\Omega(\theta) = 2\pi (1 - \cos \theta)$$

e infine, se  $\theta_2 = \pi$ , abbiamo l'angolo solido sotto cui dal centro è vista tutta la superficie sferica,

$$\Omega = 4\pi \quad . \quad (3.11)$$

Il risultato (3.11) è valido per una superficie chiusa di qualsiasi forma che racchiuda  $O$ , in quanto per ogni elemento infinitesimo di questa vale sempre (3.10); cioè l'*angolo solido sotto cui un punto interno a una superficie chiusa vede la superficie è sempre 4pi, che è il valore massimo di Omega*.

L'unità di misura dell'angolo solido è lo *steradiane*:  $\Omega$  dato da (3.11) vale  $4\pi$  steradiani.

### 3.2 Alcune applicazioni e conseguenze della legge di Gauss.

La legge di Gauss diventa uno strumento molto potente per determinare il campo  $E$  nei casi in cui la *distribuzione di carica* che genera il campo presenti un *elevato grado di simmetria* (sferica, cilindrica, piana). In queste condizioni di norma è facile individuare a priori l'andamento delle linee di forza e trovare di conseguenza delle superficie chiuse nei cui punti il campo è parallelo o ortogonale alla superficie stessa, per cui i contributi  $E \cdot u_n d\Sigma$  sono nulli o si scrivono semplicemente  $E \Sigma$ . Se inoltre si può dedurre che il modulo del campo è costante nelle zone in cui  $E$  è parallelo a  $u_n$ , la legge di Gauss assume la forma

$$\Phi(E) = \oint E \cdot u_n d\Sigma = E \Sigma = \frac{q}{\epsilon_0} \quad .$$

da cui si trova subito il modulo del campo:

$$E = \frac{q}{\epsilon_0 \Sigma} \quad ;$$

$q$  è la carica posta all'interno della superficie chiusa  $\Sigma$ . Questa procedura di calcolo è mostrata negli esempi che seguono, tra i quali troviamo problemi già trattati in precedenza; si vedrà così la maggior semplicità del metodo ora descritto.

**Esempio 3.1**

Una carica  $q$  è distribuita con densità superficiale costante  $\sigma$  su una superficie sferica di raggio  $R$ . Calcolare il campo  $E$  nei punti all'interno e all'esterno della superficie.

**Soluzione**

Cominciamo col calcolare il campo all'esterno. Nel punto  $P$  distante  $r > R$  dal centro  $E$  è certamente radiale, in quanto è dovuto alla somma di contributi a due a due simmetrici, eguali in modulo, la cui risultante è radiale; se così non fosse vorrebbe dire che  $\sigma$  non è uniforme. In qualsiasi altro punto che ha la stessa distanza di  $P$  dal centro la situazione è la stessa. Ciò significa che il campo ha modulo costante su una superficie sferica di raggio  $r$ , è ortogonale a questa e ha verso uscente o entrante a seconda del segno della carica:

$$\mathbf{E} = E(r) \mathbf{u}_r ,$$

dove abbiamo messo in evidenza che il modulo può dipendere solo da  $r$ . Applicando (3.9) ad una superficie sferica  $\Sigma$  di raggio  $r > R$ :

$$\Phi(\mathbf{E}) = \oint \mathbf{E}(r) \cdot \mathbf{u}_r d\Sigma = E(r) \oint d\Sigma = E(r) 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

con  $q = 4\pi R^2 \sigma$ . Di conseguenza

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2} \quad , \quad \mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{u}_r .$$

*Il campo all'esterno di una distribuzione superficiale sferica uniforme di carica è eguale a quello di una carica puntiforme di egual valore concentrata in  $O$  ; a parità di carica esso non dipende dal raggio della distribuzione.*

All'interno della superficie sferica valgono le stesse ragioni di simmetria per cui il campo dovrebbe essere radiale e il flusso attraverso una qualsiasi superficie sferica  $\Sigma'$  di raggio  $r < R$  dovrebbe valere  $E \cdot \Sigma'$ . D'altra parte all'interno non c'è carica, il flusso attraverso  $\Sigma'$  è nullo e quindi deve essere  $E = 0$  per  $r < R$ : *all'interno di una distribuzione superficiale sferica uniforme il campo è nullo*.

Notiamo che per  $r$  tendente a  $R$  dall'interno il campo è sempre nullo, mentre per  $r$  tendente a  $R$  dall'esterno  $E$  tende a  $q / 4\pi\epsilon_0 R^2 = \sigma / \epsilon_0$ : il campo presenta la discontinuità  $\sigma / \epsilon_0$  nel passaggio attraverso lo strato carico.

Il potenziale si calcola, per  $r > R$ , a partire dal campo e vale ovviamente  $q / 4\pi\epsilon_0 r$ ; in particolare, per  $r = R$   $V = V_0 = q / 4\pi\epsilon_0 R$  e questo è il valore costante in tutti i punti all'interno della superficie sferica, dove il campo è nullo.

L'andamento con  $r$  del campo e del potenziale è mostrato in figura 3.19.

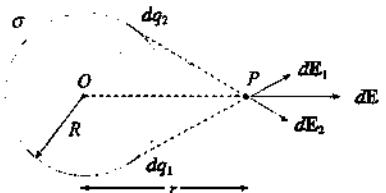


Figura 3.17

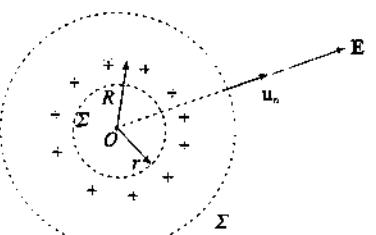


Figura 3.18

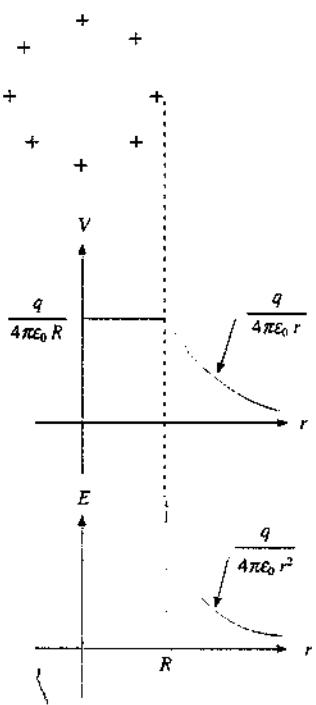


Figura 3.19

**Esempio 3.2**

Una carica  $q$  è distribuita con densità spaziale  $\rho$  uniforme nel volume di una sfera di raggio  $R$ . Calcolare il campo elettrostatico nei punti interni ed esterni alla sfera.

**Soluzione**

Il ragionamento basato sulla simmetria sferica utilizzato nell'esempio 3.1 è valido anche adesso per  $r \geq R$  e possiamo subito dire che il campo all'esterno di una sfera uniformemente carica vale

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{u}_r = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \mathbf{u}_r ,$$

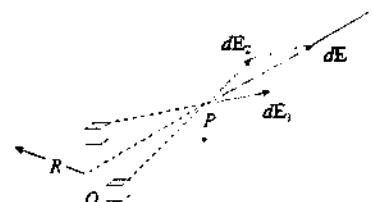


Figura 3.20

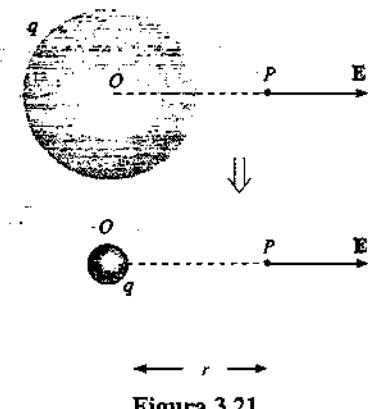


Figura 3.21

con

$$q = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho ;$$

è come se la carica fosse concentrata nel centro della sfera, figura 3.21.

All'interno ( $r < R$ ) esiste ora una carica distribuita uniformemente e il campo non è più nullo; resta però valido l'argomento di simmetria che porta ad un campo radiale per cui il flusso attraverso una superficie sferica di raggio  $r$  si scrive

$$\Phi(E) = 4\pi r^2 E = \frac{q'}{\epsilon_0}$$

dove  $q'$  è la carica contenuta all'interno della superficie  $\Sigma'$ :

$$q' = \rho \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{q}{\frac{4}{3} \pi R^3} \frac{4}{3} \pi r^3 = q \frac{r^3}{R^3} .$$

Ne segue che il modulo del campo elettrico a distanza  $r < R$  dal centro vale

$$E = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{q r}{4\pi\epsilon_0 R^3} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} . \quad (3.12)$$

In conclusione, il campo cresce linearmente dal valore zero assunto nel centro della sfera al valore  $\rho R / 3\epsilon_0 = q / 4\pi\epsilon_0 R^2$  assunto sulla superficie della sfera; all'esterno esso decresce con il quadrato della distanza dal centro. Per  $r = R$  il campo è continuo (è discontinua  $dE/dr$ ).Il potenziale all'esterno della sfera è dato da  $V = q / 4\pi\epsilon_0 r$  e in particolare vale

$$V(R) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{\rho R^2}{3\epsilon_0}$$

sulla superficie della sfera. All'interno

$$V(r) - V(R) = \int_r^R \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_r^R \frac{\rho r}{3\epsilon_0} dr = \frac{\rho}{6\epsilon_0} (R^2 - r^2)$$

$$\Rightarrow V(r) = \frac{\rho}{6\epsilon_0} (3R^2 - r^2) = \frac{q}{8\pi\epsilon_0 R} \left( 3 - \frac{r^2}{R^2} \right) .$$

Nel centro  $V(0) = \rho R^2 / 2\epsilon_0 = 3q / 8\pi\epsilon_0 R = \frac{3}{2} V(R)$ .

Si noti che i valori del potenziale all'interno sono riferiti al potenziale sul bordo e che questo è riferito al potenziale all'infinito, assunto nullo; in sostanza ciò è conseguenza della definizione (2.7), che fissa il potenziale a meno di una costante additiva.

L'andamento di  $E$  e  $V$  è mostrato nella figura 3.23; nell'esempio 2.11 abbiamo calcolato il moto di una carica in una situazione simile.Supponendo che un nucleo atomico possa essere assimilato a una distribuzione sferica continua di carica, di valore complessivo  $Ze$ , il campo sulla superficie è dato da

$$E = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 R_n^2}$$

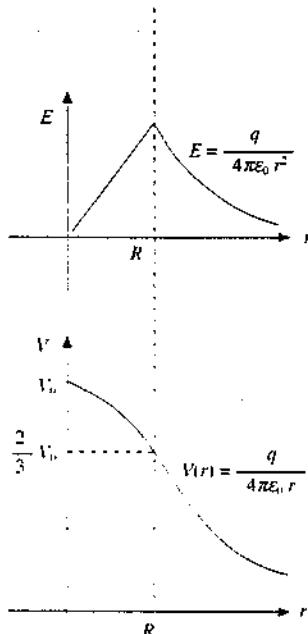
Posto  $R_n = 10^{-15} m$ , risulta  $E = 1.5 Z \cdot 10^{21} V/m$ , valore che dà un'idea dei campi molto intensi che esistono a livello microscopico.Osserviamo infine che la proprietà del campo all'esterno di una sfera carica di essere eguale al campo prodotto da una carica puntiforme posta nel centro della sfera resta valida anche se la densità di carica non è costante: è sufficiente che  $\rho$  sia una funzione del tipo  $\rho(r)$ , cioè a simmetria sferica.

Figura 3.23

**Esempio 3.3**

Una distribuzione spaziale continua e uniforme di carica ha forma cilindrica di raggio  $R$ ; calcolare il campo  $\mathbf{E}$  da essa prodotto.

**Soluzione**

La simmetria cilindrica del problema suggerisce che il campo sia diretto in ogni punto ortogonalmente all'asse del cilindro formato dalla carica e sia costante su ogni superficie cilindrica coassiale di raggio  $r$ . Per applicare la legge di Gauss (3.9) consideriamo una scatola cilindrica  $\Sigma$  di raggio  $r > R$  e altezza  $h$ , figura 3.24.

Il flusso di  $\mathbf{E}$  attraverso le basi di  $\Sigma$  è nullo in quanto il campo è parallelo alle basi e quindi ortogonale a  $\mathbf{u}_n$ . Il flusso attraverso la superficie laterale, che per quanto detto coincide con il flusso totale attraverso  $\Sigma$ , vale

$$\Phi(\mathbf{E}) = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{\Sigma} = 2\pi r h E = \frac{q}{\epsilon_0}$$

La carica contenuta entro  $\Sigma$  è

$$q = \int \rho d\tau = \rho \pi R^2 h = \lambda h$$

definendo

$$\lambda = \rho \pi R^2 = \frac{q}{h}$$

la carica contenuta in un cilindro di raggio  $R$  e altezza unitaria. Quindi

$$\Phi(\mathbf{E}) = 2\pi r h E = \frac{\lambda h}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r} = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r}$$

Abbiamo ritrovato la (1.29) dell'esempio 1.6, relativa al campo prodotto da un filo indefinito uniformemente carico, risultato allora ottenuto con un calcolo piuttosto laborioso. Pertanto un cilindro uniformemente carico genera all'esterno un campo eguale a quello che genererebbe la stessa carica distribuita linearmente sull'asse del cilindro.

All'interno del cilindro possiamo ancora scrivere

$$\Phi(\mathbf{E}) = 2\pi r h E = \frac{q'}{\epsilon_0}$$

dove adesso  $q'$  è la carica contenuta dentro una scatola cilindrica di raggio  $r' < R$  e vale

$$q' = \rho \pi r^2 h = \lambda h \frac{r'^2}{R^2}$$

per cui

$$E = \frac{\rho r}{2\epsilon_0} = \frac{\lambda r}{2\pi \epsilon_0 R^2} \quad (3.13)$$

Il campo cresce linearmente dal valore zero sull'asse al valore  $\lambda / 2\pi \epsilon_0 R$  sul bordo; all'esterno decresce con legge  $1/r$ , per  $r = R$  è continuo.

È interessante notare, in questo esempio come nel precedente, che la dimensione radiale finita del sistema ha come conseguenza la diminuzione continua del campo all'interno fino all'annullamento nel centro della distribuzione; si evita così la divergenza tipica della carica puntiforme o del filo di raggio nullo, che, come abbiamo già rilevato, non sono oggetti fisicamente realizzabili nella teoria classica dell'elettromagnetismo.

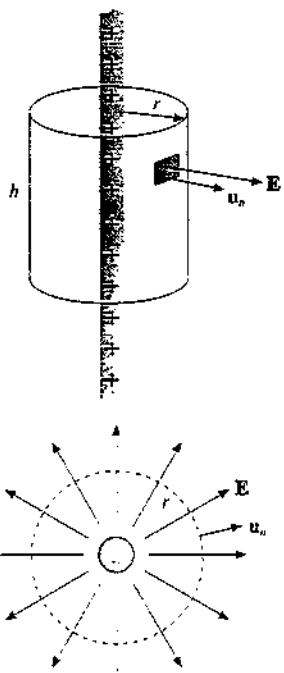


Figura 3.24

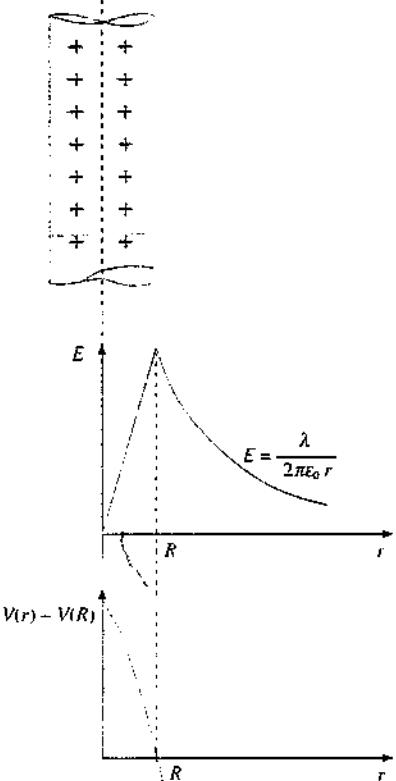


Figura 3.25

Il calcolo del potenziale per la distribuzione cilindrica presenta la stessa difficoltà segnalata nell'esempio 2.7, dovuta al fatto che la distribuzione è indefinita. Possiamo però facilmente calcolare le differenze di potenziale. All'interno, rispetto al bordo, si ha

$$V(r) - V(R) = \int_r^R E dr = \int_r^R \frac{\lambda r}{2\pi \epsilon_0 R^2} dr = \frac{\lambda}{4\pi \epsilon_0 R^2} (R^2 - r^2)$$

e in particolare  $V(0) - V(R) = \lambda / 4\pi \epsilon_0$ .

All'esterno la d.d.p. tra due qualsiasi superficie equipotenziali, che sono superficie cilindriche coassiali sia per  $r < R$  che per  $r > R$ , è

$$V(r_1) - V(r_2) = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r} dr = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1} ;$$

rispetto al bordo

$$V(r) - V(R) = -\frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \ln \frac{r}{R} .$$

Nella figura 3.25 è mostrato l'andamento del campo e del potenziale rispetto al bordo, cioè della differenza  $\Delta V = V(r) - V(R)$ .

Si provi per esercizio, in analogia con l'esempio 3.1, a calcolare il campo generato da una carica distribuita con densità superficiale  $\sigma$  costante su una superficie cilindrica di raggio  $R$  e la discontinuità del campo nell'attraversamento della superficie carica.

#### Esempio 3.4

Calcolare il campo  $E$  generato da una carica distribuita con densità superficiale  $\sigma$  su un piano indefinito.

#### Soluzione

Sempre in base a ragionamenti di simmetria si deduce che il campo elettrostatico è ortogonale al piano su cui è distribuita la carica e ha versi opposti dalle due parti (cioè è sempre uscente o sempre entrante). Come superficie a cui applicare la legge di Gauss scegliamo una scatola cilindrica con la basi, di area  $\Sigma$ , parallele al piano, così che il flusso attraverso le basi è  $2E\Sigma$  mentre quello attraverso la superficie laterale è nullo.

All'interno della scatola c'è la carica  $q = \sigma\Sigma$  e quindi

$$\Phi(E) = 2E\Sigma = \frac{\sigma\Sigma}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} .$$

Il campo ha modulo costante in tutto lo spazio, come abbiamo trovato nell'esempio 1.8, in cui il calcolo è stato eseguito partendo dalla legge di Coulomb.

Vettorialmente, detto  $x$  un asse ortogonale al piano,

$$E(x > 0) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{u}_x = E_1 , \quad E(x < 0) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{u}_x = E_2 ,$$

che sono le (1.32); nel passaggio attraverso la superficie carica il campo è discontinuo.

$$E_1 - E_2 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{u}_x - \left( -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{u}_x \right) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{u}_x ,$$

che è la (1.33).

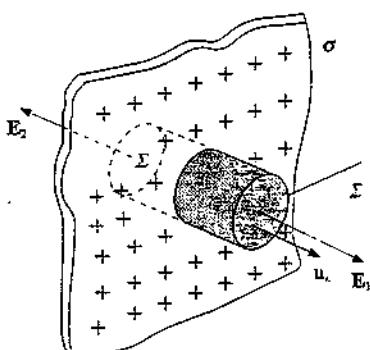


Figura 3.26

Anche in questo caso, essendo la distribuzione indefinita, il calcolo del potenziale presenta una divergenza, ma è semplice calcolare le d.d.p.:

$$V(x_1) - V(x_2) = \int_{x_1}^{x_2} E dx = \frac{\sigma}{\epsilon_0} (x_2 - x_1)$$

Il risultato dipende solo da  $x$  e mostra che le superficie equipotenziali sono piani paralleli al piano carico.

Già da questi esempi risulta evidente come l'applicazione della legge di Gauss, nei problemi con distribuzioni simmetriche di carica, permetta la determinazione immediata del campo evitando il calcolo degli integrali (1.22), che potrebbe essere notevolmente complicato. In tali situazioni diventa poi più conveniente ottenere il potenziale tramite (2.7).

#### Nota. Equilibrio in un campo elettrico. Considerazioni ulteriori sulla legge di Gauss

Un problema di carattere più generale che si risolve agevolmente con la legge di Gauss è quello dell'equilibrio in un campo elettrostatico. Ricordiamo che una posizione  $P$  di equilibrio stabile per una carica  $q$  è definita dal fatto che per un qualsiasi piccolo spostamento da tale posizione esistono forze che riportano la carica nella posizione originaria. Di conseguenza in qualsiasi punto di una ipotetica superficie chiusa che circonda  $P$  la forza è diretta verso  $P$  e così il campo, se la carica  $q$  è positiva. Ma allora, per la legge di Gauss, c'è un flusso entrante nella superficie e quindi all'interno ci deve essere una carica  $q'$  negativa (e viceversa se  $q$  è negativa). Se in  $P$  non c'è alcuna carica la situazione descritta non può verificarsi e concludiamo che una carica, posta in un campo elettrostatico, non ha posizioni di equilibrio stabile se non a ridosso delle cariche sorgenti o a distanza infinita da queste.

Ad esempio, date due cariche eguali, nel punto di mezzo  $O$  della congiungente il campo è nullo ed è possibile porre lì una carica  $q_0$  che resta in quiete. Se è una carica dello stesso segno delle sorgenti, solo per spostamenti lungo la congiungente essa è riportata verso il centro (equilibrio stabile), ma per qualsiasi altro spostamento essa si allontana indefinitamente (equilibrio instabile). Se è una carica  $-q_0$  di segno opposto l'equilibrio è stabile solo per spostamenti ortogonali alla congiungente, instabile negli altri casi.

Un sistema di cariche libere dello stesso segno non può restare insieme spontaneamente, occorrono altre forze per vincolare le cariche. Un nucleo atomico è stabile perché tra i suoi costituenti agisce l'*interazione forte* che supera la repulsione elettrostatica tra i protoni. Sistemi macroscopici con una densità di carica di volume, come la sfera e il cilindro degli esempi 3.2 e 3.3, possono essere realizzati sfruttando le proprietà dei materiali isolanti, come vedremo nel capitolo 5; distribuzioni superficiali di carica si ottengono facilmente caricando materiali conduttori, come discuteremo ampiamente nel capitolo 4, oppure per strofinio di materiali isolanti. In nessun caso però le cariche sono completamente libere.

Un'altra serie di considerazioni interessanti riguarda quelle situazioni in cui il flusso attraverso una superficie chiusa è nullo, indicando che la carica totale all'interno è nulla. Ciò non vuol dire necessariamente che il campo nei punti della superficie è nullo, ma, come abbiamo già rilevato nel paragrafo 3.1, che esso ha in alcune parti verso uscente e in altre verso entrante, così che flusso entrante e flusso uscente risultano eguali ed opposti. Solo quando tale situazione non è realizzabile a causa di particolari condizioni di simmetria (vedi esempio 3.1), la nullità del flusso comporta la nullità del campo.

La condizione  $q = 0$  che segue da  $\Phi = 0$  è soddisfatta in due modi: o non ci sono proprio cariche all'interno della superficie oppure la carica, algebricamente nulla, è composta da un'eguale quantità di carica positiva e di carica negativa.

Il caso più semplice della seconda possibilità è costituito dal dipolo elettrico, il cui campo  $E$  è in ogni punto diverso da zero, ma ha flusso nullo attraverso qualsiasi super-

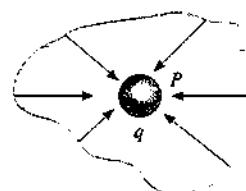


Figura 3.27

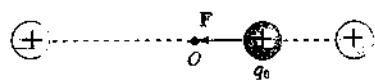


Figura 3.28



Figura 3.28

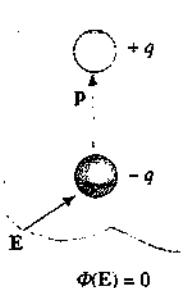


Figura 3.29

ficie che racchiuda al suo interno il dipolo. Il risultato non sarebbe vero per una superficie che contenesse una sola delle due cariche, però se consideriamo solo dipoli elementari  $\Phi(E) = 0$  attraverso qualsiasi superficie chiusa: questa caratteristica si indica dicendo che il campo di dipolo è *solenoidale*. Riprendiamo l'argomento nel paragrafo 3.4.

### 3.3 Campo elettrostatico nell'intorno di uno strato superficiale di carica

Le equazioni integrali che caratterizzano il campo  $E$ .

$$\oint E \cdot ds = 0, \quad \oint E \cdot u_n d\Sigma = \frac{q}{\epsilon_0} .$$

permettono di prevederne il comportamento nel passaggio attraverso una superficie su cui è depositata una certa carica.

Questa situazione di carica superficiale è assai frequente nella pratica e si realizza sia con materiali conduttori che con materiali dielettrici, come abbiamo già accennato nel paragrafo 3.2 e come vedremo nel capitoli 4 e 5. In entrambi i casi lo spessore della distribuzione di carica è trascurabile e si può parlare correttamente di *densità superficiale*.

Sia dunque  $\Sigma$  una superficie che fa da supporto a una carica distribuita con densità  $\sigma$ . Consideriamo una linea chiusa infinitesima  $ABCDA$ : i lati  $AB = ds_1$  e  $CD = ds_2$ , giacenti da parti opposte rispetto alla superficie, sono paralleli a questa ed eguali in modulo; i lati  $BC$  e  $DA$ , ortogonali alla superficie, sono infinitesimi di ordine superiore rispetto ai precedenti.

Diciamo  $E_1, E_2$  i valori del campo su  $AB$  e  $CD$  e  $E_{1n}, E_{2n}$  le componenti tangenziali, cioè le proiezioni di  $E_1$  e  $E_2$  lungo la direzione di  $AB$  e  $CD$ , parallela alla superficie. Essendo il campo conservativo la circuitazione lungo il percorso chiuso è nulla:

$$E_1 \cdot ds_1 + E_2 \cdot ds_2 = E_1, ds_1 - E_2, ds_2 = (E_{1n} - E_{2n}) ds = 0$$

da cui segue

$$E_{1n} = E_{2n} . \quad (3.14)$$

*La componente tangenziale del campo  $E$  è continua quando si attraversa una distribuzione superficiale di carica.*

Consideriamo ora un punto di  $\Sigma$  e un suo intorno di area  $d\Sigma$ : sia  $u_n$  la normale alla superficie. Costruiamo una scatola cilindrica di basi  $d\Sigma_1$  e  $d\Sigma_2$ , uguali in valore a  $d\Sigma$  e parallele a questa, e con altezza tale che la superficie laterale sia infinitesima di ordine superiore rispetto a  $d\Sigma$ . La carica contenuta all'interno della scatola cilindrica è  $\sigma d\Sigma$  e, per la legge di Gauss,

$$E_1 \cdot u_1 d\Sigma_1 + E_2 \cdot u_2 d\Sigma_2 = -E_1 \cdot u_n d\Sigma_1 + E_2 \cdot u_n d\Sigma_2 = (E_{2n} - E_{1n}) d\Sigma = \frac{\sigma d\Sigma}{\epsilon_0} .$$

$$E_{2n} - E_{1n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Figura 3.31

avendo indicato con  $E_{1n}$  e  $E_{2n}$  le componenti normali alla superficie, cioè le proiezioni lungo  $u_n$ . Si ha

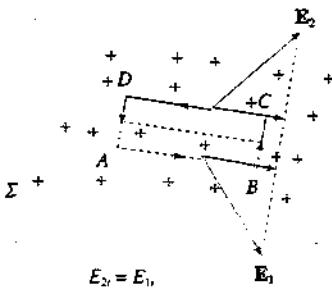
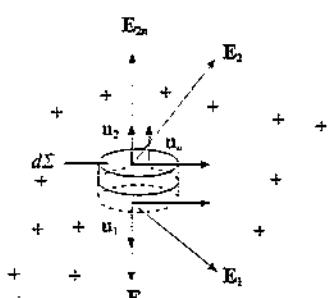


Figura 3.30

Continuità della componente tangenziale del campo elettrico



$$E_{2n} - E_{1n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Figura 3.31

$$E_{2,n} - E_{1,n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (3.15)$$

Discontinuità della componente normale del campo elettrico

Nell'attraversamento della superficie la componente normale del campo  $\mathbf{E}$  subisce una discontinuità pari a  $\sigma / \epsilon_0$ .

Le (3.14) e (3.15) si possono riassumere nell'equazione vettoriale

$$\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{u}_n, \quad (3.16)$$

essendo  $\mathbf{u}_n$  orientato dalla parte in cui il campo vale  $\mathbf{E}_1$  a quella in cui il campo vale  $\mathbf{E}_2$ .

La relazione (3.16) vale localmente, cioè in ogni punto della superficie: non è necessario che  $\sigma$  sia costante né che la superficie sia piana. I campi  $\mathbf{E}_1$ ,  $\mathbf{E}_2$  sono dovuti sia alla carica sulla superficie che ad altre cariche presenti; i loro valori e le loro direzioni variano spostandosi lungo  $\Sigma$ , così come varia  $\sigma$ , con la condizione che la differenza è solo nella componente normale e dipende soltanto da  $\sigma$ .

Abbiamo già incontrato la (3.16) negli esempi 3.1 e 3.4, in casi particolari in cui era presente solo la carica superficiale e il campo era normale alla superficie; pertanto  $E_1 = E_2 = 0$ ,  $E_{1,n} = E_1$ ,  $E_{2,n} = E_2$ .

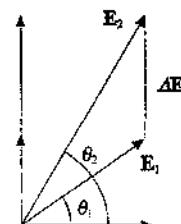


Figura 3.32

### 3.4 Legge di Gauss in forma differenziale. Divergenza di un campo vettoriale

La legge di Gauss nella forma (3.9) è una legge integrale che lega il flusso del campo  $\mathbf{E}$  attraverso una superficie chiusa a quelle sorgenti del campo che stanno all'interno della superficie. Essa può essere espressa in forma differenziale tramite una *relazione locale* che lega le derivate del campo in un determinato punto con la densità di carica  $\rho$  in quel punto.

Consideriamo un parallelepipedo infinitesimo con gli spigoli  $dx, dy, dz$  paralleli agli assi che contiene la carica  $dq = \rho(x, y, z) d\tau$  essendo  $d\tau = dx dy dz$  il volume del parallelepipedo. Il flusso attraverso la superficie  $A' B' C' D'$ , perpendicolare all'asse  $x$ , è dato da

$$\mathbf{E}' \cdot \mathbf{u}_x dy dz = E'_x dy dz,$$

se indichiamo con  $E'_x$  la componente di  $\mathbf{E}'$  parallela all'asse  $x$ . Analogamente, il flusso attraverso la faccia  $ABCD$  è

$$\mathbf{E} \cdot (-\mathbf{u}_x) dy dz = -E_x dy dz;$$

infatti la normale alla superficie orientata verso l'esterno è  $-\mathbf{u}_x$  per la faccia  $ABCD$ . Complessivamente

$$(E'_x - E_x) dy dz = \frac{\partial E_x}{\partial x} dx dy dz$$

è il flusso attraverso le superficie considerate; il campo  $E'_x$  è espresso con uno sviluppo in serie di  $E_x$  arrestato al primo termine perché la distanza  $dx$  tra le superficie è molto piccola.

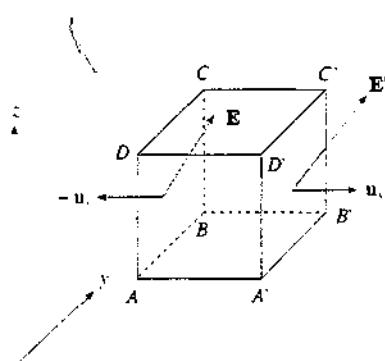


Figura 3.33

Espressioni simili si hanno per le altre coppie di superficie e quindi il flusso attraverso tutta la superficie del parallelepipedo è

$$d\Phi = \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = \left( \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) dx dy dz = \left( \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) d\tau . \quad (3.17)$$

Poiché, secondo la legge di Gauss (3.9),

$$d\Phi = \frac{dq}{\epsilon_0} = \rho(x, y, z) \frac{d\tau}{\epsilon_0} ,$$

abbiamo la *relazione locale* che cercavamo:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(x, y, z) . \quad (3.18)$$

La particolare combinazione di derivate del campo che è a primo membro della (3.18) si chiama *divergenza del campo E*.

Ricorrendo all'espressione (2.37) dell'operatore simbolico del vediamo che

Divergenza di E in coordinate cartesiane

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} , \quad (3.19)$$

cioè che la *divergenza di un campo vettoriale è data dal prodotto scalare dell'operatore del per il campo*; essa è quindi una grandezza scalare. La (3.18) si scrive

Legge di Gauss in forma differenziale

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} : \quad (3.20)$$

il campo E ha divergenza diversa da zero solo nei punti in cui esiste una densità di carica, nello spazio vuoto la divergenza di E è nulla.

Anche se abbiamo utilizzato le coordinate cartesiane nella definizione della divergenza, essa è indipendente dal sistema di coordinate prescelto, per la sua natura di grandezza scalare. Il significato intrinseco si ricava da (3.17):

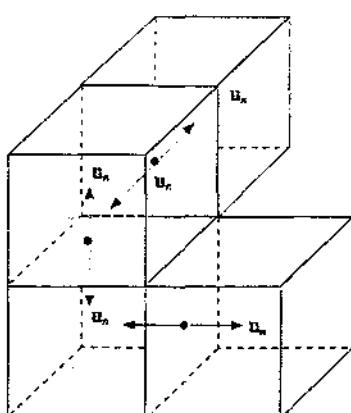


Figura 3.34

$$d\Phi = \nabla \cdot \mathbf{E} d\tau , \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{d\Phi}{d\tau} . \quad (3.21)$$

La divergenza del campo nel punto P è data dal rapporto tra il flusso attraverso la superficie di un parallelepipedo infinitesimo centrato su P e il volume del parallelepipedo.

Questa definizione è vera per qualsiasi campo vettoriale. Nel caso di E vale la legge di Gauss e perciò, essendo il flusso diverso da zero solo se nel volume c'è una carica, si capisce che la divergenza è diversa da zero solo dove ci sono cariche.

La (3.17) si estende a un volume finito  $\tau$  racchiuso da una superficie  $\Sigma$ ;  $\tau$  può essere suddiviso in infiniti volumetti infinitesimi, a ciascuno dei quali si applica (3.21). Poiché i flussi attraverso le facce comuni si annullano essendo eguali ed opposti, resta solo il contributo delle facce esterne che coincidono con  $\Sigma$  e si ha il cosiddetto *teorema della divergenza*

$$\oint \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = \int_{\tau} \nabla \cdot \mathbf{E} d\tau : \quad (3.22)$$



il flusso del campo attraverso una superficie chiusa  $\Sigma$  è eguale all'integrale della divergenza del campo esteso al volume racchiuso da  $\Sigma$ .

### Divergenza in coordinate polari e cilindriche

Anche per la divergenza riportiamo le espressioni in coordinate polari e cilindriche, utili nei problemi con simmetria rispetto a un punto o rispetto a un asse:

coordinate polari

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (E_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial E_\phi}{\partial \phi}, \quad (3.23)$$

Divergenza di  $\mathbf{E}$  in coordinate polari

coordinate cilindriche

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial E_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial E_z}{\partial z}. \quad (3.24)$$

Divergenza di  $\mathbf{E}$  in coordinate cilindriche

### Esempio 3.5

Calcolare la divergenza del campo prodotto da una carica puntiforme  $q$  posta nell'origine degli assi.

#### Soluzione

Ricorriamo alle espressioni (1.15) in coordinate cartesiane dalle quali si deduce:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^5} (y^2 + z^2 - 2x^2) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^5} (r^2 - 3x^2),$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^5} (x^2 + z^2 - 2y^2) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^5} (r^2 - 3y^2),$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^5} (x^2 + y^2 - 2z^2) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^5} (r^2 - 3z^2),$$

Si verifica subito che la somma è nulla. Il risultato si ottiene più facilmente da (3.23): poiché per il campo abbiamo

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{u}_r \Rightarrow E_r = \frac{k}{r^2}, \quad E_\theta = E_\phi = 0,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{k}{r^2} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (k) = 0.$$

Quindi la divergenza è ovunque nulla salvo che per  $r = 0$  dove va all'infinito: se la carica  $q$  è contenuta in un volume nullo la densità è infinita. Se però  $q$  fosse distribuita con densità uniforme entro una piccola sfera, utilizzando (3.12) si troverebbe

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\rho r^2}{\epsilon_0} = \frac{\rho}{\epsilon_0},$$

in accordo con (3.20). Lo stesso risultato si otterebbe se  $q$  fosse distribuita su una piccola superficie sferica con spessore non infinitesimo.

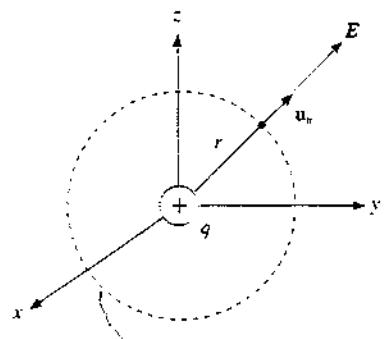


Figura 3.36

### Campi vettoriali solenoidali

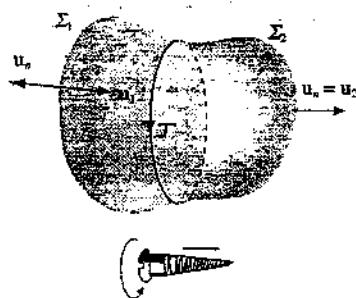


Figura 3.37

Nel paragrafo 3.2 abbiamo accennato al fatto che il campo generato da un doppio elementare ha flusso nullo attraverso qualsiasi superficie chiusa e abbiamo detto che un *campo* con questa proprietà si chiama *solenoidale*. Dal teorema della divergenza (3.22) ricaviamo che *per un campo solenoidale la divergenza è sempre nulla*: infatti, se essa fosse diversa da zero in un punto, sarebbe diverso da zero il flusso attraverso una superficie chiusa intorno al punto, contro l'ipotesi di flusso sempre nullo. Pertanto per un campo  $\mathbf{C}$  solenoidale vale sempre la relazione

$$\nabla \cdot \mathbf{C} = 0 . \quad (3.25)$$

Una proprietà tipica di un campo solenoidale è la seguente: scelta una linea chiusa  $\Gamma$  e appoggiate due superficie  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  su tale contorno, l'insieme di  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  forma una superficie chiusa  $\Sigma$  per la quale il flusso totale è nullo:

$$\Phi(\mathbf{C}) = \oint \mathbf{C} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = \int_{\Sigma_1} \mathbf{C} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma_1 + \int_{\Sigma_2} \mathbf{C} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma_2 = 0 .$$

Osserviamo che se fissiamo un verso di percorrenza lungo la linea le normali  $\mathbf{u}_n$  su  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  non sono orientate in modo coerente con la regola della vite. Se vogliamo fare ciò dobbiamo cambiare una orientazione, per esempio su  $\Sigma_1$ , e allora si ha

$$\Phi(\mathbf{C}) = -\Phi_1 + \Phi_2 = 0 \rightarrow \Phi_1 = \Phi_2 . \quad (3.26)$$

Proprietà di un campo solenoidale

*In un campo solenoidale il flusso attraverso due superficie, aventi lo stesso contorno e orientate concordemente, è eguale.* Non conta quindi la superficie, che serve per eseguire il calcolo, ma il contorno e si parla infatti di *flusso attraverso una linea chiusa*.

Il campo elettrostatico in generale non è solenoidale e infatti la sua divergenza non è identicamente nulla; lo sarebbe se le sue sorgenti fossero dipoli elementari, ma questo invece è un caso molto particolare. Vedremo nei capitoli successivi che il *campo magnetico*  $\mathbf{B}$  ha le proprietà di essere *solenoidale*, e quindi di avere divergenza identicamente nulla, in qualsiasi circostanza. Torneranno allora utili le considerazioni appena fatte.

### 3.5 Equazioni di Maxwell per l'elettrostatica. Equazioni di Poisson e di Laplace

L'introduzione degli operatori rotore e divergenza permette di scrivere in forma sintetica le equazioni locali che corrispondono al fatto che il campo  $\mathbf{E}$  sia conservativo e obbedisca alla legge di Gauss: abbiamo

Equazioni di Maxwell  
del campo elettrostatico

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 , \quad (2.54)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} , \quad (3.20)$$

che sono dette le *equazioni di Maxwell per il campo elettrostatico*. Ciascuna di esse corrisponde a tre equazioni differenziali nelle componenti del campo.

Poiché per il campo  $\mathbf{E}$  la (2.54) equivale alla (2.36)  $\mathbf{E} = -\nabla V$ , inseriamo questa espressione nella (3.20):

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\nabla \cdot \nabla V = -\nabla^2 V = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Operando in coordinate cartesiane e quindi utilizzando (2.38) e (3.19) si ottiene

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (3.27) \quad \text{Equazione di Poisson}$$

Questa equazione differenziale che lega il potenziale alla densità di carica è detta *equazione di Poisson*. Nello spazio vuoto essa diventa

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad (3.28) \quad \text{Equazione di Laplace}$$

ed è detta *equazione di Laplace*.

L'integrazione di (3.27) o (3.28) con determinate condizioni al contorno permette di determinare univocamente il potenziale  $V(x, y, z)$  e da questo il campo elettrico attraverso l'operazione di gradiente. In effetti si dimostra che, se si impone al potenziale di annullarsi all'infinito insieme a tutte le sue derivate (e quindi è nullo all'infinito anche il campo) e si fissa una certa distribuzione di carica  $\rho(x', y', z')$  contenuta in un'regione finita di spazio, la soluzione dell'equazione di Poisson è data da

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(x', y', z') dx' dy' dz'}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{1/2}} ,$$

coincidente con (2.23).

### Operatore di Laplace

L'operatore  $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$ , che in coordinate cartesiane si scrive

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (3.29)$$

Operatore laplaciano in coordinate cartesiane

e che, applicato a un campo scalare, dà luogo a un'altra grandezza scalare, si chiama *operatore di Laplace* o *laplaciano*. Il simbolo deriva dal fatto che il prodotto scalare di un vettore per se stesso è eguale al quadrato del modulo e quindi alla somma dei quadrati delle componenti; in questo caso simbolico il quadrato vuol dire che l'operazione di derivazione è eseguita due volte.

In coordinate polari e cilindriche ricordando (2.42) e (2.44) si ha:

coordinate polari

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} . \quad (3.30)$$

Operatore laplaciano in coordinate polari

coordinate cilindriche

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} . \quad (3.31)$$

Operatore laplaciano in coordinate cilindriche

Si considera anche l'applicazione di  $\nabla^2$  a un vettore; il risultato è un vettore che ha come componenti i laplaciani delle componenti:

$$\nabla^2 \mathbf{a} = (\nabla^2 a_x) \mathbf{u}_x + (\nabla^2 a_y) \mathbf{u}_y + (\nabla^2 a_z) \mathbf{u}_z . \quad (3.32)$$

**Esempio 3.6**

Verificare che il potenziale di una carica puntiforme (posta nell'origine) soddisfa l'equazione di Laplace.

**Soluzione**

Adottiamo l'espressione (3.30) in coordinate polari:

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0,$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \right) = 0.$$

Se si esegue il calcolo in coordinate cartesiane si ottengono le stesse espressioni viste nell'esempio 3.5; infatti applicare l'operatore di Laplace al potenziale equivale a calcolare la divergenza del campo.

**Esempio 3.7**

Tra due piani indefiniti, distanti  $d$  e carichi con densità uniforme  $+ \sigma$  e  $- \sigma$ , è posta una carica distribuita in tutto lo spazio con densità uniforme  $\rho$ . Determinare, nella regione compresa tra i due piani, il campo e il potenziale, assumendo che sia  $V = 0$  per  $x = d$ .

**Soluzione**

La simmetria del problema suggerisce che le superficie equipotenziali siano piani paralleli ai due piani carichi per cui il problema è unidimensionale. L'equazione di Poisson (3.27) si scrive

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

e la sua soluzione più generale è

$$V(x) = c_1 + c_2 x - \frac{\rho x^2}{2\epsilon_0}.$$

Le costanti  $c_1$  e  $c_2$  sono determinate dalle condizioni al contorno,  $V(d) = 0$  e  $V(0) = V_0$ ; per il momento  $V_0$  non è noto. Si ha:

$$V(0) = V_0 = c_1 \Rightarrow c_1 = V_0$$

$$V(d) = 0 = c_1 + c_2 d - \frac{\rho d^2}{2\epsilon_0} \Rightarrow c_2 = \frac{\rho d}{2\epsilon_0} - \frac{V_0}{d}$$

per cui

$$V(x) = V_0 + \left( \frac{\rho d}{2\epsilon_0} - \frac{V_0}{d} \right) x - \frac{\rho x^2}{2\epsilon_0} \quad E(x) = -\frac{dV}{dx} = \frac{V_0}{d} + \frac{\rho}{2\epsilon_0} (2x - d)$$

Osserviamo che il campo è dato dalla somma di due contributi, uno  $E_c$  della carica con densità  $\rho$  e l'altro  $E_\sigma$  evidentemente dovuto ai piani carichi. Dall'esempio 1.9 sappiamo che il campo tra due piani carichi è

$$\frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{u}_x$$

per cui ricaviamo  $V_0 = \sigma d / \epsilon_0$ . In altre parole  $V_0$  è la d.d.p. tra i piani dovuta alle cariche depositate su di essi.

Rispetto alla situazione con  $\rho = 0$ , campo costante e potenziale linearmente decrescente con la distanza (esempio 2.10), abbiamo ora che il campo varia linearmente tra i valori

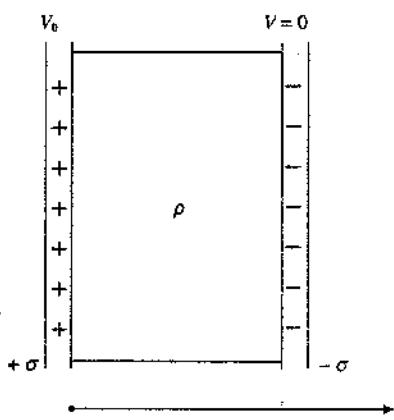
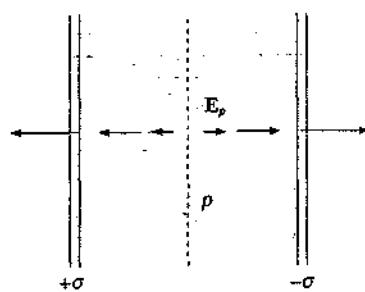


Figura 3.38

$$E(0) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} - \frac{\rho d}{2\epsilon_0}, \quad E(d) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} + \frac{\rho d}{2\epsilon_0}$$

Il contributo della carica di volume, lineare in  $x$ , è negativo tra 0 e  $d/2$ , positivo tra  $d/2$  e  $d$  (si provi a calcolare questo campo direttamente con la legge di Gauss). Il potenziale decresce con legge quadratica; però la d.d.p. tra i piani è sempre  $V_0$ , ci sia o non ci sia la carica di volume, in quanto la d.d.p. dovuta a questa è nulla, come si capisce dall'andamento del suo campo.



Con gli argomenti trattati in questo paragrafo abbiamo concluso lo studio delle *proprietà generali del campo elettrostatico*, cioè del campo generato da distribuzioni di carica fisse. Tutte le deduzioni sono state effettuate a partire dalla legge di Coulomb, la quale stabilisce che il campo di una carica puntiforme è centrale e dipende dalla distanza dalla carica secondo  $1/r^2$ . Sulla base di questo dato sperimentale, esprimendo la forza subita da una carica posta nel campo come  $F = qE$  e servendosi del principio di sovrapposizione è possibile risolvere qualsiasi problema di elettrostatica nel vuoto.

Dalla struttura della legge di Coulomb risulta evidente la proprietà del campo di essere conservativo, però non appare l'altra proprietà fondamentale, stabilità esplicitamente dalla legge di Gauss; e in effetti per Newton risultò molto difficile stabilire che una sorgente sferica estesa esercita la stessa azione di una sorgente puntiforme posta nel centro della distribuzione. Questo esempio serve a spiegare le ragioni per cui spesso è più conveniente servirsi delle leggi derivate da quella di Coulomb, nella forma locale data dalle equazioni di Maxwell compendiate nell'equazione di Poisson, o nella forma integrale, relativa alle proprietà della circuitazione e del flusso di  $E$ .

Un'altra proprietà fondamentale, che abbiamo spesso utilizzato e continueremo a utilizzare, è resa esplicita dalla struttura delle leggi citate: esse sono lineari nel campo o nel potenziale, cioè  $E$  e  $V$  compaiono alla prima potenza, e contengono pertanto il principio di sovrapposizione. Ad esempio, se esistono due situazioni fisiche descritte dall'equazione di Poisson, nella forma semplificata unidimensionale,

$$\frac{d^2V_1}{dx^2} = -\frac{\rho_1}{\epsilon_0}, \quad \frac{d^2V_2}{dx^2} = -\frac{\rho_2}{\epsilon_0},$$

la funzione  $V = V_1 + V_2$  è soluzione dell'equazione

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{d^2V_1}{dx^2} + \frac{d^2V_2}{dx^2} = -\frac{\rho_1}{\epsilon_0} - \frac{\rho_2}{\epsilon_0} = -\frac{\rho_1 + \rho_2}{\epsilon_0},$$

la sovrapposizione delle due distribuzioni genera un potenziale che è la somma dei potenziali generati da ciascuna singola distribuzione. Una struttura del tipo

$$k \frac{d^2V^2}{dx^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

non darebbe questo risultato.

Nei capitoli 4 e 5 studieremo le proprietà dell'elettrostatica dei materiali conduttori e dei materiali isolanti, detti anche dielettrici: alle leggi generali si aggiungono leggi specifiche, che possiamo considerare alla stregua di *equazioni di stato*, nel senso che descrivono il comportamento del mezzo materiale introducendo opportune grandezze caratteristiche del mezzo stesso.

Concludiamo osservando che, malgrado l'aspetto formale della nozione di campo elettrostatico, a cui abbiamo accennato nel paragrafo 1.9, rispetto all'aspetto più sostanziale che ha la forza subita da una carica, la teoria è sviluppata ponendo l'accento sulle proprietà del campo o del potenziale generato da un sistema di cariche, cioè su quel fattore dell'interazione che dipende dalle sorgenti: la forza e il lavoro vengono poi calcolati con  $F = qE$ ,  $W = q\Delta V$  o con formule integrali equivalenti.

Questo tipo di approccio, in cui le leggi generali riguardano i campi e la formula della forza è scritta a parte, è tipico della *teoria classica dei campi* ed è generalmente seguito nello studio dell'elettromagnetismo. L'idea di trattare i campi come entità fisiche significative risulta essenziale nella presentazione dei fenomeni di propagazione delle onde elettromagnetiche.

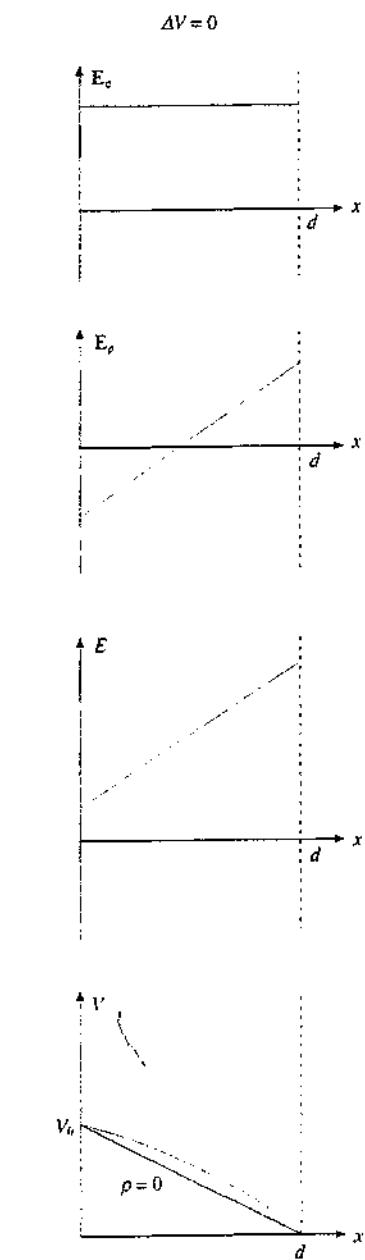


Figura 3.39 (Esempio 3.7)

### 3.6 Riepilogo sulle operazioni di gradiente, rotore, divergenza.

Nelle leggi che descrivono il comportamento del campo  $\mathbf{E}$ , e in altre che studieremo in seguito, compaiono alcune particolari combinazioni delle derivate spaziali del campo che sono espresse sinteticamente con i concetti di *gradiente*, *rotore*, *divergenza*.

Riepiloghiamo in questo paragrafo le proprietà di tali operazioni, servendoci dei simboli  $\mathbf{E}$  e  $V$  per i campi vettoriali e scalari a cui le operazioni si applicano, ma sottolineando che si tratta di proprietà generali, valide anche per altri campi. Ricordiamo con l'occasione che chiamiamo *campo una grandezza fisica che in una certa regione di spazio assume valori dipendenti dalla posizione, cioè è funzione delle coordinate*. Per il suo carattere fisico un campo ha un significato intrinseco che non dipende dal particolare sistema di riferimento. Ciò è vero per il numero che rappresenta il campo scalare in un punto, come per il modulo, la direzione, il verso del campo vettoriale in un punto: non è vero per le componenti del campo vettoriale, le quali dipendono esplicitamente dal sistema di riferimento e variano con questo.

Campo

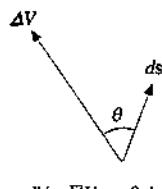


Figura 3.40

#### Gradiente $\nabla V$ , grad $V$

Il gradiente si applica a un campo scalare e il risultato è un campo vettoriale. Il significato intrinseco è espresso da

$$dV = \nabla V \cdot ds : \quad (2.40)$$

la variazione infinitesima del campo scalare nella direzione di  $ds$  è data dal prodotto per  $ds$  della proiezione del gradiente lungo tale direzione. Il gradiente riassume quindi nello spazio tridimensionale le proprietà di variazione del campo scalare. In ogni punto del dominio  $\nabla V$  è ortogonale alla superficie di livello passante per quel punto (si chiamano così le superficie  $V = \text{costante}$ ) e indica col suo verso la massima crescita di  $V$ ; detto  $dn$  lo spostamento infinitesimo lungo tale verso,  $|\nabla V| \approx dV/dn$ .

Dato un campo scalare è evidente che la differenza finita

$$V_B - V_A = \int_A^B \nabla V \cdot ds$$

è determinata solo dalla posizione dei punti  $A$  e  $B$  e non dal percorso scelto per andare da  $A$  a  $B$  (se il campo scalare è univoco). L'integrale di linea del gradiente è quindi indipendente dal percorso ovvero la circuitazione del gradiente è sempre eguale a zero:

Teorema del gradiente

$$\oint \nabla V \cdot ds = 0 . \quad (3.33)$$

Il risultato è noto come *teorema del gradiente* e si dice che il campo vettoriale  $\nabla V$  è un campo conservativo.

Viceversa, se un campo vettoriale soddisfa alla proprietà di avere circuitazione nulla lungo qualsiasi linea chiusa contenuta nel suo dominio e se questo è connesso (cioè dati due punti essi sono sempre congiungibili con una linea interamente contenuta nel dominio), allora esiste una funzione scalare  $V$  di cui il campo vettoriale è il gradiente.

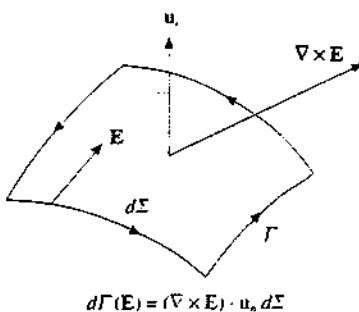


Figura 3.41

#### Rotore $\nabla \times \mathbf{E}$ , rot $\mathbf{E}$

Il rotore si applica ad un campo vettoriale e fornisce un altro campo vettoriale. Il significato intrinseco è espresso da

$$d\Gamma = (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma : \quad (2.51)$$

$d\Gamma$  è la circuitazione del vettore  $\mathbf{E}$  lungo un percorso infinitesimo su cui appoggia la superficie  $d\Sigma$ , secondo (2.51), essa è eguale al flusso di rotore di  $\mathbf{E}$  attraverso  $d\Sigma$ . Il rotore in un punto è dunque legato alla circuitazione elementare del campo intorno a quel punto.

Se un campo è conservativo la sua circuitazione è sempre nulla e quindi è nullo il rotore: in effetti  $\nabla \times (\nabla V) = 0$ : il gradiente è un campo irrotazionale. Viceversa se il rotore di  $\mathbf{E}$  è

identicamente nullo e il dominio del campo è semplicemente connesso (data una linea chiusa è sempre possibile trovare una superficie che si appoggia su quella linea ed è interamente contenuta nel dominio), allora  $\mathbf{E}$  è conservativo. Si vede che la condizione locale  $\nabla \times \mathbf{E} = 0$  è meno forte della condizione integrale (3.33).

In termini finiti si ha il *teorema di Stokes*:

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{n}_n d\Sigma . \quad (2.53)$$

*L'integrale di linea di  $\mathbf{E}$  è sostituibile con un integrale, esteso a una qualsiasi superficie che si appoggia alla linea, di quella particolare combinazione di derivate di  $\mathbf{E}$  che si chiama rotore.*

### Divergenza $\nabla \cdot \mathbf{E}$ , div $\mathbf{E}$

La divergenza si applica ad un campo vettoriale e fornisce un campo scalare. Il significato intrinseco è dato da

$$d\Phi = \nabla \cdot \mathbf{E} d\tau : \quad (3.21)$$

*Il flusso infinitesimo del campo  $\mathbf{E}$  attraverso una superficie chiusa  $d\Sigma$  che racchiude il volume  $d\tau$  è dato dal prodotto della divergenza di  $\mathbf{E}$  per  $d\tau$ . La divergenza in un punto è legata al flusso del campo entrante o uscente da quel punto.*

La forma integrale di (3.21) è il *teorema della divergenza*:

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = \int_V \nabla \cdot \mathbf{E} d\tau . \quad (3.22)$$

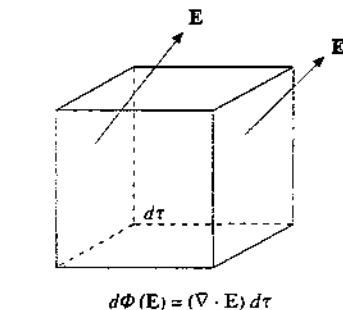


Figura 3.42

Teorema della divergenza

*L'integrale di superficie di  $\mathbf{E}$  è sostituibile con l'integrale di volume di quella particolare combinazione di derivate di  $\mathbf{E}$  che si chiama divergenza. Si intende che  $\Sigma$  e  $\tau$  sono completamente contenuti nel dominio di  $\mathbf{E}$ .*

Il teorema della divergenza continua a valere per campi vettoriali gradienti di una funzione scalare del tipo  $c_1 + c_2 / r$  anche se entro  $\tau$  c'è un numero finito di punti in cui il modulo del campo vettoriale diverge oppure se  $\tau$  tende all'infinito, cioè se il dominio diventa illimitato.

*Un campo vettoriale che ha flusso nullo attraverso qualsiasi superficie chiusa si dice solenoidale e la sua divergenza risulta identicamente nulla.* Viceversa un campo a divergenza nulla ha flusso nullo attraverso qualsiasi superficie chiusa ed è solenoidale.

Proprietà tipica dei *campi solenoidali* è che è sempre lo stesso il flusso attraverso le superficie che si appoggiano su uno stesso contorno: *il flusso cioè è definito soltanto dalla forma del contorno*.

Un particolare campo solenoidale è il vettore  $\nabla \times \mathbf{E}$ : infatti si verifica facilmente che  $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = 0$ . Viceversa è pure vero che se un campo vettoriale è solenoidale, esso è il rotore di un altro campo vettoriale. Cioè: dato  $\mathbf{a}$  e calcolato  $\mathbf{b} = \nabla \times \mathbf{a}$ , risulta sempre  $\nabla \cdot \mathbf{b} = 0$ ; se viceversa risulta sempre  $\nabla \cdot \mathbf{b} = 0$  allora esiste un vettore  $\mathbf{a}$  tale che  $\mathbf{b} = \nabla \times \mathbf{a}$ . In un certo senso, come  $V$  è la primitiva scalare di un campo irrotazionale, così  $\mathbf{a}$  è la primitiva vettoriale di un campo solenoidale.  $V$  è determinato a meno di una costante: infatti

$$\nabla V \text{ e } \nabla(V+k) = \nabla V + \nabla k$$

danno lo stesso risultato. Invece il campo  $\mathbf{a}$  di cui  $\mathbf{b}$  è il rotore è determinato a meno di un vettore esprimibile come gradiente: infatti

$$\nabla \times \mathbf{a} \text{ e } \nabla \times (\mathbf{a} + \nabla S) = \nabla \times \mathbf{a} + \nabla \times \nabla S$$

coincidono.

### L'operatore $\nabla$ . Operazioni combinate.

Il vettore simbolico *del.* introdotto nel paragrafo 2.4. è molto utile per esprimere le operazioni di gradiente, rotore, divergenza e per dimostrare rapidamente alcune proprietà. Abbiamo:

Campo solenoidale

Applicazione diretta a uno scalare	$\nabla V$	gradiente
Prodotto vettoriale per un vettore	$\nabla \times \mathbf{E}$	rotore
Prodotto scalare per un vettore	$\nabla \cdot \mathbf{E}$	divergenza

Considerando  $\nabla$  formalmente come un vettore, è immediato che

$$\nabla \times \nabla V, \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{E}$$

siano identicamente nulli: il primo è un prodotto vettoriale tra due vettori paralleli, il secondo è un prodotto misto con due fattori eguali (vedi la nota successiva).

Altre operazioni combinate sono:

Divergenza di un gradiente	$\nabla \cdot \nabla V = \nabla^2 V$	laplaciano
Gradiente di una divergenza	$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E})$	

### Nota. Prodotto misto di tre vettori. Doppio prodotto vettore

Si definisce prodotto misto di tre vettori l'operazione  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}$ : non c'è bisogno di parentesi perché non avrebbe senso eseguire prima  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ , che è uno scalare, e farne il prodotto vettoriale con  $\mathbf{c}$ . In coordinate cartesiane il prodotto misto è dato dallo sviluppo del determinante

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \quad (3.34)$$

e sono evidenti queste proprietà:

- 1) lo scambio di due fattori comporta solo un segno negativo;
- 2) se due vettori sono eguali il prodotto misto è nullo ( $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{E} = 0$ );
- 3) si possono scambiare i prodotti:  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ .

Il modulo del prodotto misto è pari al volume del parallelepipedo che ha come spigoli  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$ .

Il doppio prodotto vettore  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$  è un vettore: modulo, direzione e verso si ricavano dalle note proprietà del prodotto vettoriale. Le parentesi sono necessarie in quanto

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \neq (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$$

Si dimostra inoltre che

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c} \quad (3.35)$$

il doppio prodotto vettore sta nel piano individuato da  $\mathbf{b}$  e  $\mathbf{c}$ .

Rotore di un rotore

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E})$$

Infine, detti  $S$ ,  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  un campo scalare e due campi vettoriali, diamo alcune formule utili; in particolare la prima si ricava subito dalla (3.35):

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \mathbf{a} &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla^2 \mathbf{a} \\ \nabla \cdot S \mathbf{a} &= \nabla S \cdot \mathbf{a} + S \nabla \cdot \mathbf{a} \\ \nabla \times S \mathbf{a} &= \nabla S \times \mathbf{a} + S \nabla \times \mathbf{a} \\ \nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= \mathbf{b} \cdot \nabla \times \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \nabla \times \mathbf{b} \end{aligned} \quad (3.36)$$

# Conduttori.

## Energia elettrostatica

### 4.1 Conduttori in equilibrio

I materiali *conduttori* sono caratterizzati dal fatto che nel loro interno sono verificate particolari condizioni per cui è possibile il moto di alcune delle cariche che li costituiscono. In conduttori come le soluzioni eletrolitiche o i gas ionizzati si hanno spostamenti di cariche di entrambi i segni, però questi materiali non sono di interesse per l'elettrostatica. La nostra attenzione è invece concentrata sui conduttori solidi, il cui esempio più tipico sono i *metalli*: in essi per ogni atomo si hanno uno o più elettroni che sono in pratica separati dal resto dell'atomo e liberi di muoversi nel conduttore. Con l'applicazione di un opportuno campo  $\mathbf{E}$  si può provocare un moto ordinato di elettroni ovvero dar luogo a una *corrente elettrica*, argomento che cominceremo a studiare nel capitolo 6. Nei fenomeni elettrostatici però le cariche sono fisse e questa condizione richiede che all'interno di un conduttore il campo debba essere nullo, altrimenti ci sarebbe un moto di cariche, contrariamente all'ipotesi. Pertanto in elettrostatica lo *stato di conduttore in equilibrio* è definito dalla condizione

$$\mathbf{E} = 0 \quad \text{all'interno}$$

Condizione di equilibrio  
di un conduttore

Si deve intendere che questa è una *condizione media macroscopica*. Nelle immediate vicinanze dei nuclei ci sono campi molto intensi, come abbiamo visto nell'esempio 3.2, che tengono legati gli elettroni non liberi; inoltre gli elettroni libri non sono in quiete ma hanno un moto completamente disordinato di agitazione termica. Però in nessun istante c'è un moto ordinato in una certa direzione degli elettroni libri rispetto agli ioni metallici fissi; si usa per questo parlare di *gas di elettroni libri* all'interno di un conduttore.

La condizione  $\mathbf{E} = 0$  ha importanti conseguenze.

a) Se il campo elettrico è nullo, è nullo il flusso attraverso qualsiasi superficie chiusa  $\Sigma$  si tracci all'interno del conduttore e quindi secondo la legge di Gauss (3.7) all'interno di un conduttore non ci sono cariche ( $q_{\text{int}} = 0$ ), nel senso che non c'è un eccesso di carica di un segno o dell'altro. Di conseguenza un *eccesso di carica in un conduttore può stare solo sulla superficie*, distribuito con densità superficiale  $\sigma = dq/d\Sigma$ ; se si cedono elettroni questi si portano all'esterno, se si sottraggono elettroni ne risulta sprovvisto lo strato superficiale.

b) Il potenziale del conduttore è costante in ogni punto del conduttore: presi due punti qualsiasi

$$V(P_1) - V(P_2) = \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0 \Rightarrow V(P_1) = V(P_2) = V_0$$

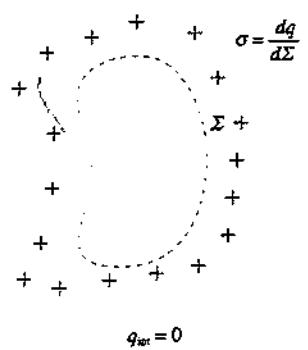


Figura 4.1

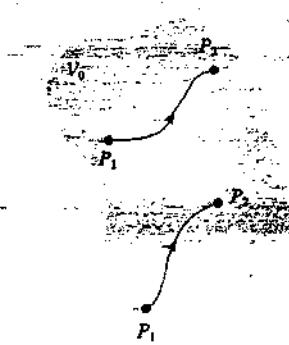


Figura 4.2

Il risultato è vero anche se uno dei due punti  $P_1$  sta sulla superficie, che si trova quindi allo stesso potenziale  $V_0$  dell'interno. Pertanto la *superficie di un conduttore è una superficie equipotenziale*.

c) Dato che la superficie del conduttore è equipotenziale, il campo in un punto esterno molto vicino al conduttore è ortogonale alla superficie del conduttore, indipendentemente dalla forma di questo.

Tale valore del campo  $\mathbf{E}$  si ricava direttamente dalla (3.16) che esprime la discontinuità del campo nell'attraversamento di uno strato superficiale di carica: posto  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 = 0$  all'interno e detto  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_2$  il campo elettrico all'esterno, si ha

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{u}_n , \quad (4.1)$$

risultato noto come *teorema di Coulomb*. Il verso è *uscente* se la densità è *positiva*, *entrante* se è *negativa*.

Si vede che il modulo del campo elettrico è *maggior* dove  $\sigma$  è *maggior*: come giustificheremo più avanti  $\sigma$  è maggiore dove il raggio di curvatura della superficie è minore, fatto che si verifica ad esempio in zone a forma di *punta*. Se il conduttore possiede una carica notevole la densità sulle punte è molto elevata e tale è il campo nelle immediate vicinanze; in una rappresentazione grafica le linee di forza sono molto fitte vicino alle punte. Da questo effetto hanno origine svariati fenomeni, come la formazione di scintille tra elettrodi di forma appuntita in ambiente gassoso o l'effluvio di elettroni da punte cariche negativamente, che avviene anche nel vuoto.

Un conduttore carico lontano da altri conduttori ha dunque una distribuzione superficiale di carica tale che il campo elettrico all'interno sia nullo, qualunque sia la forma del conduttore. In particolare se il conduttore è sferico la carica è distribuita uniformemente: sappiamo infatti dall'esempio 3.1 che una distribuzione superficiale sferica uniforme di carica dà campo nullo all'interno. Notiamo inoltre che la carica deve avere lo stesso segno, positivo o negativo, ovunque sulla superficie: un accumulo di elettroni soltanto in una certa zona sarebbe dovuto esclusivamente a un campo esterno che non esiste nel caso considerato.

Avvicinando un conduttore, carico o scarico, ad un altro corpo carico, ovvero introducendolo in un campo elettrico esterno  $\mathbf{E}$ , il campo elettrico all'interno non sarebbe più nullo, ma sarebbe dato da  $\mathbf{E}$ ; senonché questo fatto provoca un movimento di elettroni e sulla superficie del conduttore compare una carica, se prima era scarico, o viene modificata la distribuzione di carica preesistente con il risultato che la sovrapposizione del campo esterno  $\mathbf{E}$  e del campo dovuto alla carica superficiale dà campo nullo all'interno. Avviene cioè un fenomeno transiente con movimento di cariche che ristabilisce lo stato di conduttore in equilibrio, espellendo il campo  $\mathbf{E}$  dall'interno; la durata è dell'ordine di  $t = d/c$ , se  $d$  è una dimensione tipica del conduttore e  $c$  la velocità della luce.

Ci sono varie precisazioni da fare relativamente a questo fenomeno di *induzione elettrostatica* (paragrafo 1.2). Gli elettroni si spostano per l'azione del campo esterno e si accumulano in una zona della superficie, lasciando sul resto della superficie un eccesso di carica positiva: tra queste zone si crea un campo elettrico indotto  $\mathbf{E}$ , che contrasta il movimento degli elettroni e si raggiunge l'equilibrio quando  $\mathbf{E}_i = -\mathbf{E}$  in tutto l'interno del conduttore. Abbiamo così una distribuzione di carica indotta dei due segni sulla superficie del conduttore che si sovrappone all'eventuale carica preesistente: in totale però la carica del conduttore rimane la stessa poiché la carica indotta è la somma algebrica dei due contributi eguali ed opposti. È evidente che questa nuova distribuzione complessiva deve essere diversa da quella preesistente: essa dà all'interno un campo  $\mathbf{E}_i \neq 0$ .

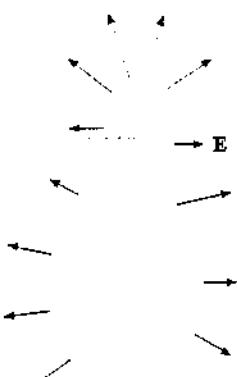


Figura 4.3

Infine bisogna dire che la distribuzione di equilibrio è una ed una sola, cioè non ci sono diverse soluzioni; ciò è dovuto all'unicità della soluzione dell'equazione di Laplace, come discuteremo più avanti.

Nelle figure 4.4 e 4.5 sono mostrati due esempi: i conduttori sono inizialmente privi di carica (e tali restano). Nel primo caso un conduttore a forma di lastra piana è posto tra due piani uniformemente carichi: sulle facce compare la densità uniforme di carica  $\sigma_i = \epsilon_0 E$ , eguale in modulo alla densità  $\sigma = \epsilon_0 E$  dei piani, con segno tale da produrre campo nullo dentro la lastra (e invariato fuori dalla lastra).

Nel secondo caso il conduttore è sferico e la densità di carica non può essere uniforme (darebbe da sola campo nullo all'interno): essa deve invece essere tale da dare campo uniforme, pari a  $-\sigma / \epsilon_0$ , in tutta la sfera. Il campo esterno risulta ora modificato dalla presenza della sfera: vedremo nell'esempio 4.23 come si risolve analiticamente questo problema.

Finora abbiamo parlato di un unico conduttore. Se poniamo a contatto due o più conduttori, ad esempio collegandoli con un filo conduttore, si costituisce un *unico corpo conduttore* e in equilibrio vale ovunque la condizione  $\mathbf{E} = 0, V = \text{costante}$ : i conduttori a contatto hanno lo stesso potenziale.

## 4.2 Capacità di un conduttore isolato

La carica distribuita sulla superficie di un conduttore carico isolato, cioè lontano da altri corpi carichi, e la densità della distribuzione sono legate da (1.23), estesa a tutta la superficie:

$$q = \oint \sigma(x', y', z') d\Sigma ;$$

il potenziale in un punto  $P$  qualsiasi del conduttore è costante in valore ed è dato da (2.22):

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint \frac{\sigma(x', y', z') d\Sigma}{r'} .$$

Abbiamo già rilevato nel paragrafo 4.1 che la *distribuzione di carica tale da rendere il campo elettrico nullo all'interno e quindi costante il potenziale è una ed una sola*.

Se la carica del conduttore viene portata al valore  $q' = mq$  anche la densità varia dello stesso fattore,  $\sigma' = m\sigma$  e pure il potenziale del conduttore viene moltiplicato per  $m$ . Si deduce che il rapporto

$$C = \frac{q}{V} \quad (4.2)$$

tra la carica e il potenziale di un conduttore isolato non cambia al variare della carica sul conduttore: a questo rapporto si dà il nome di *capacità del conduttore* e si trova che dipende solamente dalla forma e dalle dimensioni del conduttore e dal mezzo che lo circonda, in questo caso il vuoto.

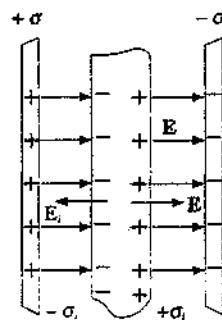


Figura 4.4

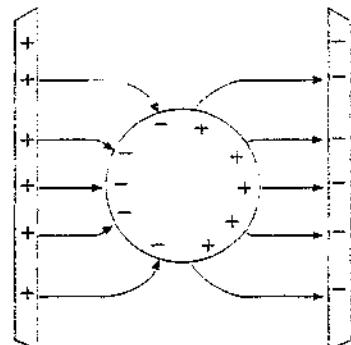


Figura 4.5



Figura 4.6



$$dq' = \sigma d\Sigma$$

Figura 4.7

**Unità di misura**

L'unità di misura della capacità di un conduttore è il coulomb/volt, che prende il nome di farad, simbolo F:

$$F = \frac{C}{V}$$

Si tratta di una unità di misura molto grande, come vedremo. Nella pratica si usano i sotomultipli:

millifarad	$\text{mF} \approx 10^{-3} \text{ F}$
microfarad	$\mu\text{F} = 10^{-6} \text{ F}$
nanofarad	$\text{nF} = 10^{-9} \text{ F}$
picofarad	$\text{pF} = 10^{-12} \text{ F}$

**Esempio 4.1**

Determinare la capacità di un conduttore sferico isolato, di raggio  $R$ .

**Soluzione**

Nell'esempio 3.1 abbiamo visto che una distribuzione superficiale sferica uniforme di carica, come quella che si trova su un conduttore sferico isolato, produce un campo che è nullo all'interno e vale  $q / 4\pi\epsilon_0 r^2$  all'esterno; il potenziale è  $V = q / 4\pi\epsilon_0 r$  e sulla superficie è pari a  $q / 4\pi\epsilon_0 R$ , valore assunto anche all'interno. Da (4.2) si ricava

$$C = \frac{q}{V} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} ; \quad (4.3)$$

la capacità dipende soltanto dal raggio della sfera.

Facciamo alcuni esempi numerici:

$$R = 0.1 \text{ m} \quad C = \frac{10^{-1}}{9 \cdot 10^9} = 11 \cdot 10^{-12} \text{ F} = 11 \text{ pF}$$

$$R = 6.7 \cdot 10^6 \text{ m} \text{ (raggio della terra)}$$

$$C = 0.74 \cdot 10^{-3} \text{ F} = 0.74 \text{ mF}$$

$$R = 9 \cdot 10^8 \text{ m} \quad C = 1 \text{ F}$$

Almeno per la sfera isolata è evidente che il farad è una unità troppo grande.

**Esempio 4.2**

Due sfere conduttrici  $S_1$  e  $S_2$ , rispettivamente di raggi  $R_1$  e  $R_2$ , sono poste a distanza molto grande rispetto a  $R_1$  e  $R_2$  e sono unite da un filo conduttore. La carica complessiva è  $q$  e supponiamo che sia  $q_1$  la carica distribuita con densità uniforme  $\sigma_1$  sulla superficie  $\Sigma_1$  della sfera  $S_1$  e  $q_2$  quella distribuita con densità uniforme  $\sigma_2$  su  $\Sigma_2$ , mentre si può trascurare la carica che si trova sul filo. Determinare i valori delle due cariche  $q_1$  e  $q_2$ .

**Soluzione**

Dal testo capiamo che possiamo porre  $q = q_1 + q_2$  e che le sfere sono sufficientemente lontane da poter trascurare l'induzione elettrostatica che renderebbe non uniformi le

distribuzioni di carica sulla superficie. Nel paragrafo 4.1 abbiamo detto che due conduttori a contatto hanno lo stesso potenziale, per cui

$$\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} = V_1 = V_2 = -\frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

e utilizzando anche la (4.3)

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{C_1}{C_2} \quad . \quad (4.4)$$

La carica si ripartisce tra le sfere proporzionalmente ai raggi e quindi alle capacità. Ricordando che  $q = q_1 + q_2$  abbiamo

$$q_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} q \quad , \quad q_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} q \quad .$$

La densità di carica sulle sfere vale

$$\sigma_1 = \frac{q_1}{4\pi R_1^2} \quad , \quad \sigma_2 = \frac{q_2}{4\pi R_2^2} \Rightarrow \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1} \quad , \quad \frac{E_1}{E_2} = \frac{R_2}{R_1} \quad , \quad (4.5)$$

utilizzando il teorema di Coulomb (4.1). Abbiamo verificato in un caso particolare l'affermazione fatta nel paragrafo 4.1 che densità di carica e campo elettrico superficiale sono maggiori dove minore è il raggio di curvatura.

Sulla relazione (4.4) è basato il metodo di ripartizione di una data carica tra due conduttori sferici, descritto nel paragrafo 1.3 in relazione alle misure di Coulomb sulla legge della forza tra cariche.

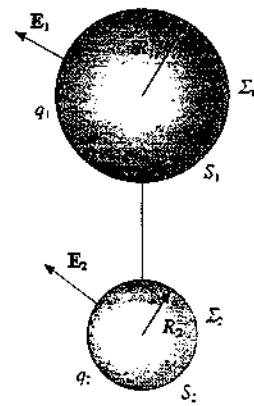
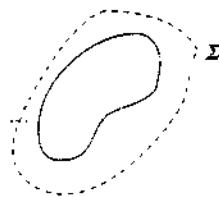
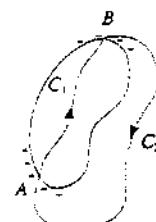


Figura 4.8



$E = 0$

Figura 4.9



$\oint E \cdot ds \neq 0$

Figura 4.10

### 4.3 Conduttore cavo. Schermo elettrostatico

Consideriamo un conduttore carico che abbia nel suo interno una cavità. Nella massa del conduttore il campo elettrico è nullo e pertanto è nullo il flusso attraverso qualsiasi superficie chiusa, in particolare attraverso qualsiasi superficie chiusa  $\Sigma$  che racchiuda la cavità: segue, per la legge di Gauss, che all'interno di  $\Sigma$  non ci sono cariche e quindi *sulle pareti della cavità la carica è nulla*.

Non è nemmeno possibile sulle pareti una separazione della carica in  $+q$  e  $-q$ : per negare questa circostanza si ricorre all'altra proprietà fondamentale di  $E$ , quella di essere conservativo.

Infatti, se sulle pareti della cavità fossero presenti due distribuzioni di carica di segno opposto, ci sarebbero nella cavità linee di forza uscenti dalle cariche positive e entranti in quelle negative. La circuitazione di  $E$  lungo una linea chiusa, costituita da un tratto  $C_1$  interno alla cavità su cui  $E \neq 0$  e da un tratto  $C_2$  interno al conduttore dove  $E = 0$ , darebbe

$$\oint E \cdot ds = \int_{C_1} E \cdot ds + \int_{C_2} E \cdot ds = \int_{C_1} E \cdot ds \neq 0 \quad ,$$

in contrasto col fatto che  $E$  è conservativo. Pertanto il campo nella cavità deve essere nullo se l'integrale di linea esteso a *qualsiasi percorso*  $C_1$  interno alla cavità deve essere nullo: *sulle pareti della cavità non possono esserci cariche elettriche*. Inoltre è chiaro che il potenziale in un qualsiasi punto della cavità è uguale a quello del conduttore: se ci fosse una d.d.p. dovrebbe infatti esserci un campo diverso da zero.

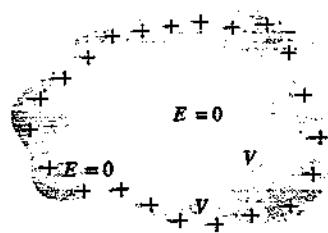


Figura 4.11

In conclusione la carica di un conduttore in equilibrio si distribuisce sempre e soltanto sulla superficie esterna, anche se il conduttore è cavo; il campo elettrico è nullo e il potenziale è costante in ogni punto interno rispetto alla superficie del conduttore, sia esso nella massa del medesimo o in una eventuale cavità. La capacità di un conduttore isolato, definita nel paragrafo 4.2, è la stessa anche se il conduttore è cavo. In particolare resta vero quanto detto nell'esempio 4.1: un conduttore sferico, isolato carico di raggio  $R$  che sia pieno o con una cavità sferica concentrica o con cavità di qualsiasi forma, ha sempre campo nullo all'interno e campo all'esterno eguale a quello di una carica puntiforme posta nel centro; la sua capacità è sempre  $4\pi \epsilon_0 R$ .

Una prima osservazione importante è la seguente: la situazione descritta all'interno della cavità di un conduttore cavo non dipende dalla carica e quindi dal potenziale del conduttore. Il conduttore può essere a 10 V o a  $10^6$  V, ma all'interno della cavità non si misura mai tra due punti una d.d.p. diversa da zero: il punto di riferimento per il potenziale è la parete della cavità, rispetto a cui la d.d.p. è nulla, qualunque sia il valore del potenziale del conduttore.

### Esempio 4.3

Dal fatto che il campo elettrico all'interno di un conduttore carico sferico cavo è nullo dedurre la legge di Coulomb.

#### Soluzione

Sulla superficie esterna di un conduttore sferico cavo la carica si distribuisce con densità superficiale costante e dà campo nullo all'interno. Teniamo inoltre conto dell'evidenza sperimentale che la forza esercitata da una carica puntiforme  $q$  su una carica di prova  $q_0$  è proporzionale al prodotto delle cariche e diminuisce con la distanza, ha cioè l'espressione

$$F = k \frac{q q_0}{r^n}$$

essendo  $n$  l'esponente che bisogna determinare. Ciò equivale a dire che una carica puntiforme produce il campo elettrico:

$$E = \frac{F}{q_0} = k \frac{q}{r^n}$$

Prendiamo un punto  $P$  interno alla cavità e due aree infinitesime  $d\Sigma_1$  e  $d\Sigma_2$  come in figura, tali che gli angoli solidi (vedi nota paragrafo 3.1) sotto cui sono viste da  $P$  siano eguali:

$$\frac{d\Sigma_1 \cos \alpha_1}{r_1^2} = \frac{d\Sigma_2 \cos \alpha_2}{r_2^2}$$

Gli angoli  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  sono evidentemente uguali e la relazione precedente si riduce a

$$\frac{d\Sigma_1}{r_1^2} = \frac{d\Sigma_2}{r_2^2}$$

Se il campo in  $P$  è nullo, vuol dire che i due campi prodotti dalle cariche  $dq_1 = \sigma d\Sigma_1$  e  $dq_2 = \sigma d\Sigma_2$  sono opposti in verso ed eguali in modulo

$$k \frac{\sigma d\Sigma_1}{r_1^2} = k \frac{\sigma d\Sigma_2}{r_2^2}$$

Abbiamo pertanto

$$\frac{d\Sigma_1}{d\Sigma_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{r_1''}{r_2''} \Rightarrow r_1^{n-2} = r_2^{n-2}$$

Poiché  $r_1$  è diverso da  $r_2$ , l'eguaglianza è soddisfatta solo se  $n = 2$ . Resta dimostrato che come conseguenza della legge di Gauss la forza tra due cariche è inversamente proporzionale al quadrato della distanza.

Consideriamo adesso un conduttore  $C_2$  cavo, isolato e privo di carica, e introduciamo un altro conduttore  $C_1$  carico nella cavità, mantenendolo isolato da  $C_2$ . In condizioni di equilibrio, se  $C_1$  ha sulla sua superficie esterna una carica  $q$ , una carica  $-q$  risulta distribuita sulla superficie interna e una carica  $q$  sulla superficie esterna di  $C_2$ .

Tale fatto si spiega subito con la legge di Gauss: attraverso una superficie chiusa  $\Sigma$  interna a  $C_2$  e contenente la cavità il flusso di  $E$  è nullo in quanto è nullo il campo stesso; di conseguenza all'interno di  $\Sigma$  non c'è carica e se  $C_1$  porta la carica  $q$ , sulla superficie interna di  $C_2$  deve comparire una carica  $-q$ . Inoltre essendo  $C_2$  neutro, lo spostamento di una carica  $-q$  sulla superficie interna provoca la comparsa di una carica  $+q$  sulla superficie esterna.

Siamo di fronte a un fenomeno di induzione che in questo caso, essendo la carica  $q$  completamente contenuta all'interno di una cavità chiusa, si chiama *induzione completa: tutte le linee di forza che partono da  $C_1$  terminano su  $C_2$* . Dalla superficie esterna di  $C_2$  partono altre linee di forza, il cui andamento in prossimità del conduttore riflette la distribuzione delle cariche sorgenti. Le due zone in cui esiste un campo sono separate da una zona in cui, in equilibrio, non può esistere campo elettrostatico.

Il campo all'interno della cavità è determinato dal valore di  $q$ , dalla posizione di  $C_1$  e dalla forma geometrica delle due superficie affacciate. Però, fissato  $q$ , all'esterno l'effetto è sempre lo stesso, qualunque siano forma e posizione. Infatti la distribuzione di carica superficiale esterna su  $C_2$  che dà campo nullo all'interno è una sola e dipende esclusivamente dalla forma esterna di  $C_2$ . Alternativamente possiamo dire che l'*informazione* sulla situazione interna potrebbe passare all'esterno solo attraverso un campo che penetrasse nel conduttore  $C_2$ : ma questo non è possibile per la proprietà dei conduttori in equilibrio di avere campo nullo all'interno. Al limite si può portare  $C_1$  a contatto con  $C_2$ , con il che le cariche  $+q$  e  $-q$  si elidono, ma all'esterno non cambia nulla: questo fatto, la cui verifica sperimentale vedremo tra breve, ci fa anche capire che la distribuzione della carica  $-q$  sulla faccia interna di  $C_2$ , è sempre tale che, sommando l'effetto della carica  $q$  di  $C_1$ , il campo dovuto alle cariche nella cavità è nullo all'esterno della cavità. Se così non fosse, il caso con carica nulla, ma separata ( $C_1$  non tocca  $C_2$ ), potrebbe essere diverso dal caso con carica assolutamente nulla ( $C_1$  tocca  $C_2$ ).

Analogamente, se variamo la carica sulla superficie esterna oppure variamo la sua distribuzione, ad esempio avvicinando al conduttore un altro corpo carico, cambia il campo all'esterno, ma la distribuzione di carica sulla superficie esterna di  $C_2$  è sempre tale da dare campo nullo all'interno di  $C_2$  e quindi non può alterare il campo locale esistente nella cavità. Come osservato prima, ciò potrebbe avvenire se un campo penetrasse dall'esterno nella massa del conduttore, ma la possibilità è esclusa dalle proprietà di un conduttore in equilibrio.

Pertanto, finché lo spazio interno e lo spazio esterno non sono comunicanti, il *conduttore cavo costituisce uno schermo elettrostatico perfetto tra spazio interno ed esterno*.

Una verifica sperimentale dell'azione di schermo perfetto di un conduttore cavo è la seguente; si introduce una carica  $+q$  isolata dentro una cavità conduttrice.

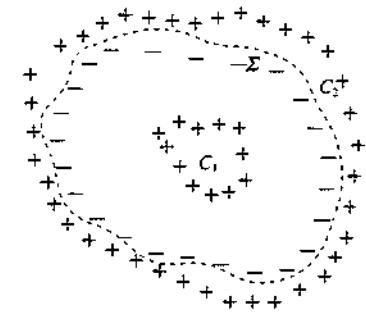


Figura 4.13

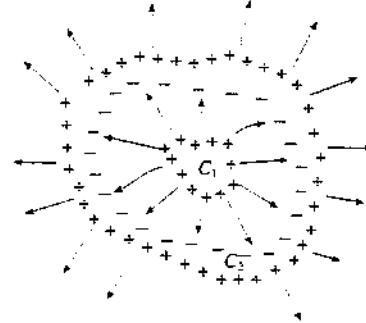


Figura 4.14

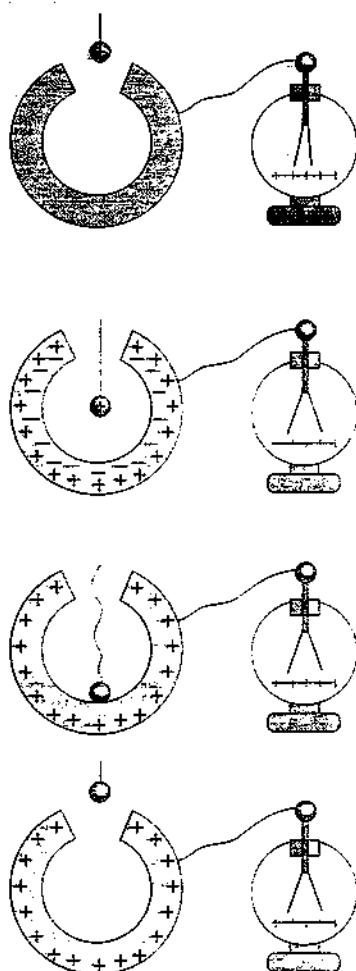


Figura 4.15

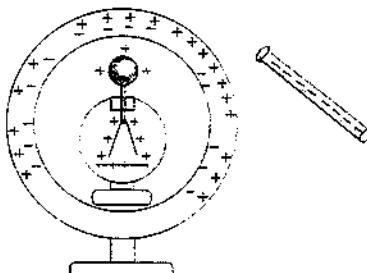


Figura 4.16

ce con apertura molto piccola e si misura con un elettroscopio collegato alla superficie esterna la carica indotta, che risulta essere  $+q$ . Se muoviamo la carica  $+q$  all'interno della cavità, facendo variare il campo all'interno e la distribuzione di carica sulla parete interna della cavità, l'elettroscopio non segnala alcuna variazione, nemmeno se caliamo la carica fino a toccare il fondo. Successivamente poniamo un elettroscopio carico all'interno della cavità, che esternamente può essere carica o scarica e avviciniamo un corpo carico in modo da variare la distribuzione della carica esterna: si osserva che la deviazione dell'elettroscopio rimane inalterata. In effetti un conduttore cavo scherma lo spazio interno dallo spazio esterno nei due sensi.

Non è necessario che lo schermo sia compatto: esso può avere delle piccole aperture o una struttura a rete; la presenza di queste discontinuità non si avverte a distanze grandi rispetto alle loro dimensioni.

Gli schermi elettrostatici trovano applicazione in laboratorio quando si devono eseguire determinate misure elettrostatiche o più in generale, quando si vuole schermare una strumentazione da disturbi elettromagnetici esterni: in effetti, anche in caso di campi variabili, si ha un'azione di schermo, pur se non completamente efficiente. Una rete metallica, ben collegata condutivamente alla terra, inserita nei muri di un edificio lo scherma dalle scariche atmosferiche.

È interessante ricordare che l'azione di schermo elettrostatico venne scoperta da Franklin nel 1755 e completamente verificata da Faraday nella prima metà dell'ottocento; già nel 1773, dodici anni prima che venisse effettuato l'esperimento di Coulomb, Cavendish dedusse dalle proprietà di schermo sperimentate in laboratorio che l'esponente della legge, detta poi di Coulomb, doveva essere  $n = 2 \pm 0.02$ ; la misura diretta di Coulomb risultò avere una precisione analoga. Sulla linea di Cavendish si mosse Maxwell che nel 1873 trovò  $n - 2 = 10^{-5}$ ; gli esperimenti più recenti (1971) danno  $n - 2 = (2.7 \pm 3.1) \cdot 10^{-16}$ .

Nell'esempio che segue calcoliamo analiticamente le distribuzioni di campo e potenziale in una situazione particolare di schermo elettrostatico.

#### Esempio 4.4

Un conduttore sferico di raggio  $R_1$  è al centro di un conduttore sferico cavo di raggio interno  $R_2$  e raggio esterno  $R_3$ . Una carica  $+q$  è depositata sul conduttore interno. Calcolare campo e potenziale in funzione di  $r$ , distanza dal centro, e studiare i casi particolari in cui si colleghino i due conduttori oppure si ponga a potenziale zero quello esterno.

#### Soluzione

In equilibrio abbiamo la carica  $+q$  sulla superficie di raggio  $R_1$ ,  $-q$  sulla superficie di raggio  $R_2$  e  $+q$  sulla superficie di raggio  $R_3$ . Per simmetria la densità di carica è costante su ciascuna superficie (ma non eguale su di esse) e campo e potenziale sono funzioni solo di  $r$ .

Utilizziamo i risultati già noti per una distribuzione sferica di carica (esempio 3.1) e sommiamo i contributi delle tre distribuzioni in base al principio di sovrapposizione, con i risultati riportati nella tabella all'inizio della pagina seguente e mostrati nella figura 4.18.

Si osservi che per  $r \geq R_2$  gli effetti delle cariche interne alla cavità si elidono, dando campo e potenziale nulli, per cui tra  $R_2$  e  $R_3$  il campo è nullo e oltre  $R_3$  è dovuto solo alla carica esterna.

In particolare la d.d.p. tra i due conduttori è

$$V_1 - V_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) , \quad (4.6)$$

determinata dal valore della carica interna e dei raggi.

	$V(r)$	$E(r)$
1) $0 \leq r \leq R_1$	$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_1} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_3} = V_1$	$0 + 0 + 0 = 0$
2) $R_1 \leq r \leq R_2$	$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_3}$	$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} + 0 + 0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$
3) $R_2 \leq r \leq R_3$	$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_3} = V_2$	$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} + 0 = 0$
4) $R_3 \leq r$	$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$	$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

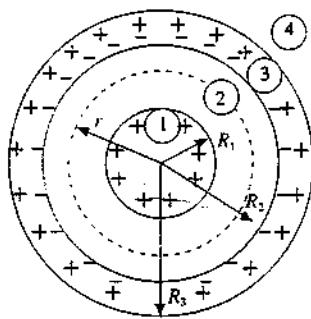


Figura 4.17

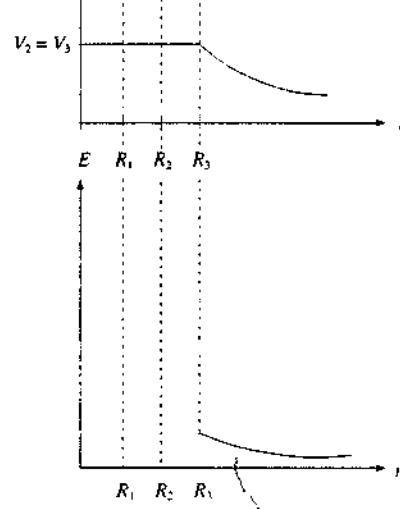
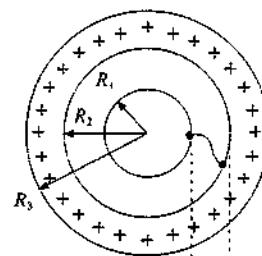


Figura 4.19

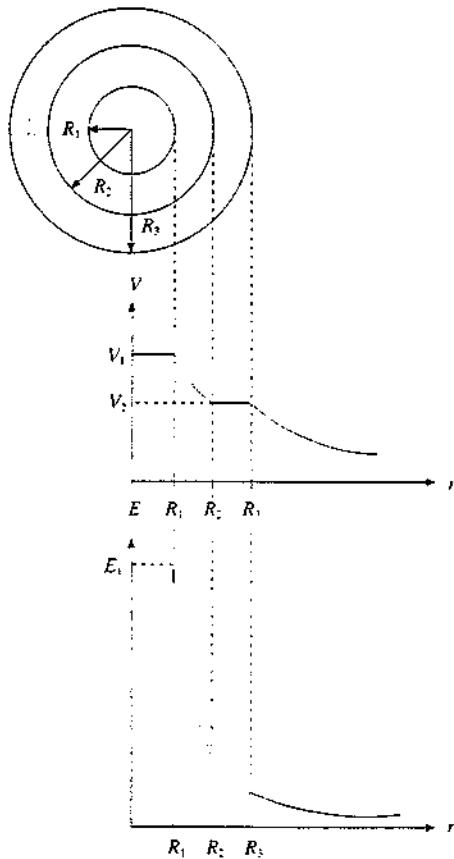


Figura 4.18

Se collegiamo i due conduttori (figura 4.19), la carica all'interno si annulla, le prime due colonne della tabella di  $V(r)$  e  $E(r)$  sono sempre nulle e resta un unico conduttore al potenziale  $q / 4\pi\epsilon_0 R_3$ , che genera all'esterno lo stesso campo e lo stesso potenziale di prima. Lo spazio esterno è schermato dalle variazioni di campo che avvengono all'interno.

Supponiamo infine di collegare la superficie esterna del conduttore cavo a terra (figura 4.20): la carica  $q$  viene neutralizzata e quindi sono ora le terze colonne ad essere identicamente nulle. All'esterno il campo è nullo, all'interno il campo è rimasto lo stesso ovunque. Il potenziale invece cambia: esso diminuisce ovunque della quantità  $q / 4\pi\epsilon_0 R_3$ , ma questo fatto

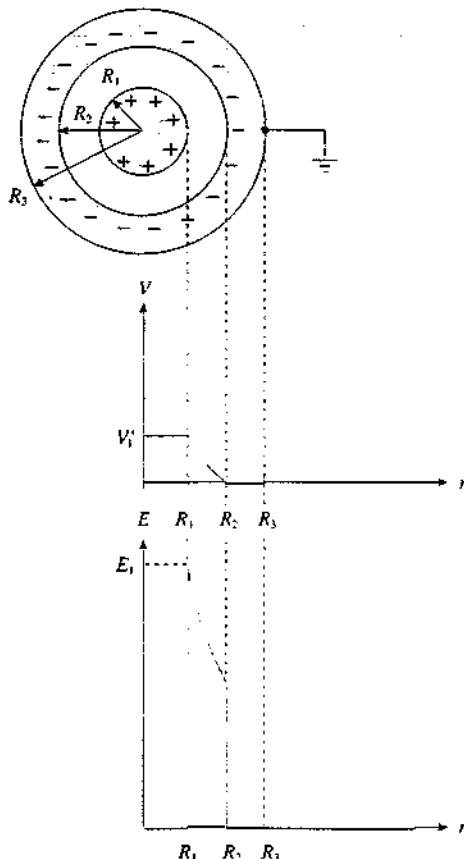


Figura 4.20

non produce alcun effetto in quanto non cambiano le d.d.p., ovvero il campo che è il gradiente del potenziale.

Nei grafici che rappresentano  $E(r)$  e  $V(r)$ , il potenziale nel terzo caso è semplicemente spostato verso il basso rispetto al primo caso: è cambiato il valore di riferimento, ma non la distribuzione (prima  $V(\infty) = 0$ , dopo  $V(R_3) \approx 0$ ).

Gli esperimenti di precisione per la misura dell'esponente di  $r$  nella legge di Coulomb si basano proprio su questo principio: si fa variare la carica e quindi il potenziale del conduttore esterno e si misura la d.d.p. tra i due conduttori, che invece deve rimanere costante se  $n=2$ .

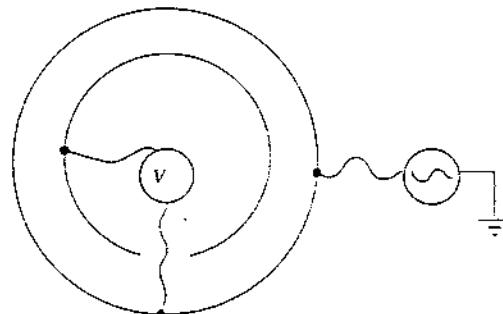


Figura 4.21

#### 4.4 Sistemi di conduttori

Riprendiamo in esame il conduttore isolato carico del paragrafo 4.2, per il quale abbiamo definito la capacità secondo (4.2), dipendente dalla forma e dalle dimensioni del conduttore. Se a questo conduttore, che chiamiamo  $C_1$  e su cui si trova la carica  $q_1$ , avviciniamo un altro conduttore  $C_2$  scarico, sulla parte di  $C_2$  più vicina a  $C_1$ , compare una carica  $-q'$  e sulla parte più lontana la carica  $+q'$ , per effetto dell'induzione elettrostatica, che in questo caso diciamo incompleta, in quanto non tutte le linee di forza che partono da  $C_1$  finiscono su  $C_2$ .

Il potenziale di  $C_1$  si porta al valore  $V_1 < V$ , in quanto esso viene diminuito dalla presenza della carica negativa  $-q'$  più di quanto venga aumentato da  $q'$ , che è più lontana. Come risultato aumenta la capacità di  $C_1$ , rapporto tra carica e potenziale.

Questo caso è un aspetto particolare del caso più generale, costituito da un sistema di  $n$  conduttori fissi racchiusi entro un conduttore, il cui potenziale viene assunto come riferimento e posto eguale a zero: questo conduttore può anche mancare e allora il riferimento è il potenziale nullo all'infinito. Tra i potenziali e le cariche dei conduttori sussistono le relazioni

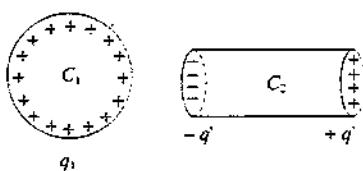


Figura 4.22

$$V_1 = a_{11} q_1 + a_{12} q_2 + \dots + a_{1n} q_n$$

$$V_2 = a_{21} q_1 + a_{22} q_2 + \dots + a_{2n} q_n$$

$$\dots \dots \dots \quad (4.7)$$

$$V_n = a_{n1} q_1 + a_{n2} q_2 + \dots + a_{nn} q_n$$

Le grandezze  $a_{ij}$  sono dette *coefficienti di potenziale* e dipendono soltanto dalla geometria del sistema; per esse valgono le relazioni

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad a_{ii} > 0, \quad a_{ii} > a_{ij} \quad i \neq j. \quad (4.8)$$

Dati i potenziali e nota la *matrice* (simmetrica) dei coefficienti  $a_{ij}$ , le cariche sui conduttori sono univocamente determinate dalla soluzione del sistema di equazioni lineari (4.7); matematicamente ciò implica che il determinante della matrice sia diverso da zero.

Il sistema (4.7) può essere invertito esprimendo le cariche in funzione dei potenziali:

$$\begin{aligned} q_1 &= c_{11} V_1 + c_{12} V_2 + \dots + c_{1n} V_n \\ q_2 &= c_{21} V_1 + c_{22} V_2 + \dots + c_{2n} V_n \\ &\dots \\ q_n &= c_{n1} V_1 + c_{n2} V_2 + \dots + c_{nn} V_n \end{aligned} \quad (4.9)$$

Le grandezze  $c_{ij}$ , determinate in funzione delle  $a_{ij}$ , sono chiamate *coefficienti di induzione* se  $i \neq j$  e *coefficienti di capacità* se  $i = j$ . Valgono le seguenti relazioni:

$$c_{ij} = c_{ji}, \quad c_{ii} < 0, \quad c_{ii} > 0. \quad (4.10)$$

Anche la *matrice dei coefficienti*  $c_{ij}$  ha determinante non nullo.

La conoscenza dei coefficienti  $a_{ij}$  o  $c_{ij}$  consente di risolvere qualsiasi problema di elettrostatica che riguardi il sistema di  $n$  conduttori in esame. Poiché questi coefficienti non dipendono dalla carica presente sui conduttori, ma solamente dalla geometria del sistema, la loro determinazione può essere fatta considerando le distribuzioni di carica più convenienti.

Dimostriamo le (4.7) chiarendo contemporaneamente il significato dei coefficienti di potenziale. Supponiamo che il primo conduttore abbia carica  $q_1$ , mentre tutti gli altri abbiano carica nulla:  $q_2 = q_3 = \dots = q_n = 0$ . I potenziali degli  $n$  conduttori, dovuti alla presenza di  $q_1$ , sono dati da formule tipo (2.22) e dipendono quindi dalla densità di carica sul primo conduttore; se questa viene moltiplicata per un dato fattore essi variano proporzionalmente e in definitiva sono proporzionali a  $q_1$ :

$$V'_1 = a_{11} q_1, \quad V'_2 = a_{21} q_1, \dots, \quad V'_n = a_{n1} q_1.$$

I coefficienti  $a_{ij}$ , con  $i \neq j$ , descrivono l'*interazione mutua* tra il primo conduttore e ognuno degli altri  $n - 1$ . Analogamente, se supponiamo  $q_2 \neq 0$  e  $q_1 = q_3 = \dots = q_n = 0$ , abbiamo

$$V''_1 = a_{12} q_2, \quad V''_2 = a_{22} q_2, \dots, \quad V''_n = a_{n2} q_2.$$

È chiaro che  $a_{12} = a_{21}$ , in quanto entrambi descrivono la stessa interazione, tra il primo e il secondo conduttore. Si capisce anche perché i coefficienti siano positivi (una carica di un certo segno dà un potenziale dello stesso segno).

Procedendo così di seguito si considerano in definitiva  $n$  situazioni di ciascuna delle quali è diversa da zero la carica posseduta da un conduttore e sono nulle tutte le  $n - 1$  restanti. Se tutti gli  $n$  conduttori sono carichi, a norma delle proprietà additiva dei potenziali il potenziale complessivo di ciascun conduttore si ottiene dalla somma dei singoli potenziali  $V'_i, V''_i, \dots$ .

È importante sottolineare che in ciascuna delle  $n$  situazioni singole la presenza della carica sul solo conduttore  $i$ -esimo induce distribuzioni di carica sugli altri (con carica totale nulla) che a loro volta modificano la distribuzione inducente: i coefficienti  $a_{i1}, \dots, a_{in}$  riasumono la condizione di equilibrio. Quando sono presenti tutte le cariche abbiamo su ogni conduttore la sovrapposizione delle distribuzioni di carica dei casi singoli ed è lecito applicare il principio di sovrapposizione.

## Coefficienti di potenziale

## Coefficienti di induzione e di capacità

**Esempio 4.5**

Calcolare i coefficienti di potenziale, di capacità e di induzione per il sistema di due conduttori sferici concentrici già considerato nell'esempio 4.4.

**Soluzione**

Le (4.7) in questo caso si riducono a

$$V_1 = a_{11} q_1 + a_{12} q_2 , \quad V_2 = a_{21} q_1 + a_{22} q_2 .$$

Sappiamo dall'esempio 4.4 che se diamo una carica  $q_1$  al conduttore interno quello esterno ha una carica complessiva nulla e i potenziali sono

$$V_1 = \frac{q_1}{4\pi \epsilon_0 R_1} - \frac{q_1}{4\pi \epsilon_0 R_2} + \frac{q_1}{4\pi \epsilon_0 R_3} , \quad V_2 = \frac{q_1}{4\pi \epsilon_0 R_3}$$

da confrontare con  $V_1 = a_{11} q_1$ ,  $V_2 = a_{21} q_1$ . Pertanto

$$a_{11} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) , \quad a_{21} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 R_3} .$$

Se diamo una carica  $q_2$  al conduttore esterno,

$$V_1 = V_2 = \frac{q_2}{4\pi \epsilon_0 R_3}$$

da confrontare questa volta con  $V_1 = a_{12} q_2$ ,  $V_2 = a_{22} q_2$  per cui

$$a_{12} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 R_3} = a_{21} , \quad a_{22} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 R_3} .$$

Se comunichiamo una carica  $q_1$  al conduttore interno e una carica  $q_2$  a quello esterno i potenziali, secondo (4.7), sono

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) q_1 + \frac{1}{4\pi \epsilon_0 R_3} q_2 , \\ V_2 &= \frac{1}{4\pi \epsilon_0 R_3} q_1 + \frac{1}{4\pi \epsilon_0 R_3} q_2 . \end{aligned} \tag{4.11}$$

Vediamo che per qualsiasi configurazione di carica la d.d.p. tra i conduttori è sempre data da (4.6),

$$V_1 - V_2 = \frac{q_1}{4\pi \epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) .$$

Invertiamo il sistema (4.11) e troviamo

$$\begin{aligned} q_1 &= c_{11} V_1 + c_{12} V_2 = \frac{4\pi \epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1} V_1 - \frac{4\pi \epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1} V_2 \\ q_2 &= c_{21} V_1 + c_{22} V_2 = -\frac{4\pi \epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1} V_1 + \frac{4\pi \epsilon_0 (R_1 R_2 + R_2 R_3 - R_1 R_3)}{R_2 - R_1} V_2 \end{aligned}$$

che riscriviamo nella forma più espressiva

$$q_1 = \frac{4\pi \epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1} (V_1 - V_2) , \quad q_1 + q_2 = 4\pi \epsilon_0 R_3 V_2 ; \quad (4.12)$$

la carica  $q_1$  dipende soltanto dalla d.d.p. tra i conduttori; ricordando poi da (4.3) che la capacità del conduttore esterno è  $C = 4\pi \epsilon_0 R_3$ , vediamo che la sua carica  $CV_2$  è la somma della carica  $q_2$  posta dall'esterno e della carica  $q_1$  indotta dall'interno.

Nelle applicazioni pratiche è più semplice controllare il potenziale dei vari conduttori e quindi  $V_1, V_2, \dots, V_n$  sono noti mentre le cariche sono le incognite che si possono calcolare o risolvendo le (4.7) o utilizzando direttamente le (4.9). Vedremo nel paragrafo 4.11 che esiste una ragione più profonda per preferire questa impostazione.

## 4.5 Condensatori

La relazione (4.6), che abbiamo ritrovato nell'esempio 4.5, si può scrivere

$$C = \frac{q}{V_1 - V_2} = \frac{4\pi \epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1} \quad (4.13)$$

e mostra che il rapporto tra carica e d.d.p. tra i due conduttori sferici è indipendente dalla carica ed è determinato esclusivamente dalla geometria del sistema e dal mezzo contenuto nell'intercapedine tra i raggi  $R_1$  e  $R_2$ , in questo caso il vuoto caratterizzato da  $\epsilon_0$ .

Più in generale una relazione analoga sussiste per una qualsiasi coppia di conduttori tra i quali ci sia *induzione completa*.

Poniamo infatti nelle (4.7)  $q_1 = q$  e  $q_2 = -q$ :

$$V_1 = a_{11} q - a_{12} q , \quad V_2 = a_{12} q - a_{22} q ,$$

dove abbiamo tenuto conto che  $a_{12} = a_{21}$ . Sottraendo membro a membro

$$V_1 - V_2 = (a_{11} + a_{22} - 2 a_{12}) q$$

e il rapporto

$$C = \frac{q}{V_1 - V_2} = \frac{1}{a_{11} + a_{22} - 2 a_{12}}$$

risulta indipendentemente da  $q$  e determinato dalla geometria.

*Un sistema costituito da due conduttori tra i quali c'è induzione completa si chiama condensatore*; i due conduttori prendono il nome di *armature del condensatore*. Il rapporto tra il valore assoluto della carica presente su una delle armature e la d.d.p. si chiama *capacità del condensatore*, estendendo la definizione (4.2). Ripetiamo che la capacità di un condensatore è individuata dalla geometria delle armature e dal mezzo interposto e riscriviamo la definizione nelle tre maniere possibili, tutte di uso molto comune:

$$C = \frac{q}{V_1 - V_2} . \quad q = C(V_1 - V_2) , \quad V_1 - V_2 = \frac{q}{C} . \quad (4.14)$$

Condensatore

Capacità del condensatore



Se  $h = R_2 - R_1$  è molto minore dei raggi, sviluppiamo in serie il denominatore arrestandoci al primo termine,

$$\ln \frac{R_2}{R_1} = \ln \left( 1 + \frac{R_2 - R_1}{R_1} \right) = \frac{R_2 - R_1}{R_1} = \frac{h}{R}$$

per cui la capacità diventa

$$C = \frac{2\pi \epsilon_0 d R}{h} = \frac{\epsilon_0 \Sigma}{h} \quad . \quad (4.17)$$

con  $\Sigma = 2\pi R d$  area delle armature distanti  $h$ : si ritrova la (4.15). Dalla (4.16) si definisce la *capacità per unità di lunghezza*

$$C_d = \frac{C}{d} = \frac{2\pi \epsilon_0}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \quad . \quad (4.18)$$

Si realizza un condensatore cilindrico a capacità variabile facendo scorrere uno dei due cilindri lungo l'asse in modo da far variare la lunghezza  $d$ . Le formule restano valide se si possono trascurare gli effetti di bordo.

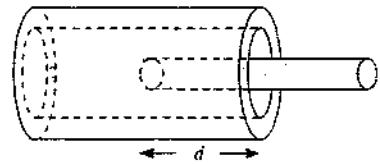


Figura 4.24

#### Esempio 4.8 Capacità di un condensatore piano

Le armature di un condensatore piano sono costituite da due conduttori piani paralleli, di area  $\Sigma$  e distanti  $h$ . La carica positiva  $q$  è distribuita con densità uniforme  $\sigma$  sull'armatura positiva e quella negativa  $-q$  con densità uniforme  $-\sigma$  sull'armatura negativa. Abbiamo già calcolato campo e potenziale per una tale distribuzione di cariche negli esempi 1.9 e 2.10, supponendo la struttura indefinita:

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{u}_z \quad , \quad V_1 - V_2 = E h = \frac{\sigma}{\epsilon_0} h = \frac{\sigma \Sigma}{\epsilon_0 \Sigma} h = \frac{q}{\epsilon_0 \Sigma} h \quad .$$

Si deduce quindi che la capacità di un condensatore piano è data da

$$C = \frac{q}{V_1 - V_2} = \frac{\epsilon_0 \Sigma}{h} \quad . \quad (4.19)$$

coincidente con (4.15) e (4.17). Questa volta non ci sono approssimazioni geometriche, però la (4.19) è approssimata per un'altra ragione: il campo si può supporre uniforme solo nella regione del condensatore, lontano dai bordi.

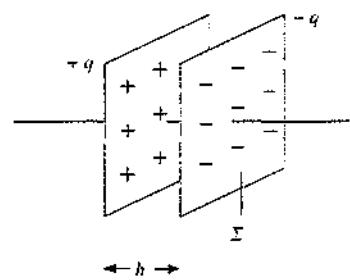


Figura 4.25

Le configurazioni regolari del campo  $\mathbf{E}$ , considerate nel condensatore cilindrico e nel condensatore piano, non sono completamente realizzabili nella pratica. Esse sarebbero corrette se l'estensione fosse indefinita: per una dimensione finita si avrebbe, nella zona del bordo, un passaggio brusco dalla regione in cui esiste un campo elettrico regolare alla regione con campo elettrico nullo e sarebbe possibile trovare una linea chiusa, come quella mostrata in figura 4.26, tale che

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \neq 0 \quad .$$

Essendo il campo conservativo, questa possibilità va esclusa e in effetti il campo è regolare solo nella zona centrale del condensatore, mentre vicino ai bordi le linee di forza sono deformate ed escono all'esterno, assumendo una configurazione che assicura la nullità della

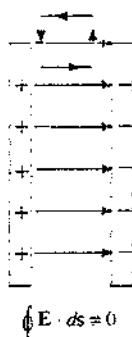


Figura 4.26

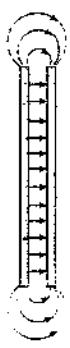


Figura 4.27

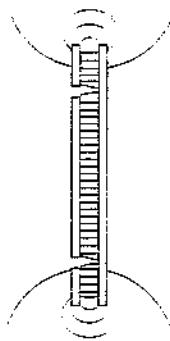
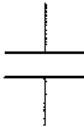


Figura 4.28



circuazione del campo elettrico; il valore del campo elettrico è ad ogni modo rapidamente decrescente verso l'esterno.

Si capisce che la configurazione sferica sarebbe l'unica ideale, per l'assenza dei bordi. Le capacità reali di condensatori cilindrici e piani differiscono dal valore calcolabile con le espressioni (4.16) e (4.19). Tuttavia queste vengono sempre usate per avere un'indicazione dei valori in gioco, tanto più vicina alla situazione reale quanto più ci si pone nella condizione  $\Sigma \gg h^2$  (dimensioni delle armature grandi rispetto alla loro distanza) per la quale l'effetto di bordo è sostanzialmente trascurabile.

Per i condensatori piani da laboratorio si usa l'accorgimento dell'*anello di guardia*: le armature sono circolari e di raggio diverso, la più piccola essendo circondata da un anello complanare posto allo stesso potenziale. Nella zona centrale, che corrisponde praticamente all'intera aerea  $\Sigma$  dell'armatura più piccola, il campo è uniforme.

## 4.6 Collegamento di condensatori

Un condensatore viene utilizzato essenzialmente come deposito di carica; pur essendo la carica totale nulla, essa è separata nella quantità  $+q$  e  $-q$ , proporzionali per un conduttore di data capacità alla d.d.p. tra le armature. Tramite opportuni collegamenti conduttori esterni è possibile far fluire la carica negativa (elettroni) da un'armatura all'altra, generando una corrente elettrica che scarica il condensatore. Vedremo questo argomento nel capitolo 6. Possiamo però subito descrivere come si collegano con fili conduttori più condensatori tra loro e calcolare la capacità equivalente. Noi supponiamo costanti nel tempo le cariche e le d.d.p., però i risultati sono validi anche in regime variabile.

Per comodità scriviamo  $V$  la differenza di potenziale  $V_1 - V_2$  che esiste tra le armature; inoltre con la lettera  $C$  indichiamo sia il condensatore che la sua capacità. Nella figura a fianco è mostrato il simbolo che individua un condensatore in un circuito elettrico: esso si rifà chiaramente al condensatore piano, che è la configurazione di gran lunga più comune, però è valido per qualsiasi condensatore.

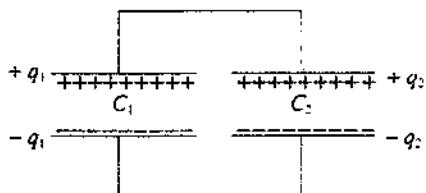
### Condensatori in parallelo

La connessione in parallelo delle armature consiste nel realizzare, come mostrato in figura 4.29, due soli conduttori. In tal modo, essendo ciascun conduttore equipotenziale, la d.d.p. applicata al condensatore  $C_1$  è eguale a quella applicata al condensatore  $C_2$  e scriviamo, da (4.14),

$$q_1 = C_1 V, \quad q_2 = C_2 V.$$

La carica globale sul conduttore superiore, costituito dalle due armature superiori è

$$q = q_1 + q_2 = (C_1 + C_2) V;$$



sul conduttore inferiore la carica è  $-q = -(q_1 + q_2)$ . Definiamo capacità equivalente del sistema

$$C_{eq} = \frac{q}{V} = C_1 + C_2. \quad (4.20)$$

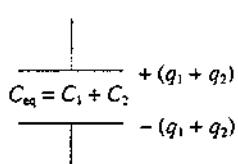


Figura 4.29

*Due condensatori in parallelo si comportano come un unico condensatore la cui capacità è data dalla somma delle capacità dei componenti. Il ragionamento si estende a  $n$  condensatori:*

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + \dots + C_n .$$

(4.21) Condensatori in parallelo

La capacità equivalente è dunque sempre maggiore di quella di ciascun componente.

### Collegamento in serie

Nella connessione in serie c'è un solo collegamento tra i due condensatori e viene costituito un sistema composto da tre conduttori: ai due estremi si applica la d.d.p.  $V = V_C - V_A$  e il conduttore intermedio assume un potenziale  $V' = V_B - V_A$ . Se  $+q$  è la carica sull'armatura di  $C_1$  a potenziale  $V_C$ , per induzione compare la carica  $-q$  sull'armatura affacciata e  $+q$  sull'armatura di  $C_2$  a questa collegata, doven-  
do essere il conduttore centrale neutro; sempre per induzione compare la carica  $-q$  sull'armatura di  $C_2$  a potenziale  $V_A$ . Vediamo che il valore della carica è lo stesso nei due condensatori. Da (4.14)

$$\begin{aligned} V_C - V_B &= \frac{q}{C_1} , \quad V_B - V_A = \frac{q}{C_2} , \\ V = V_C - V_A &= \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} = q \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) = \frac{q}{C_{eq}} \\ \frac{1}{C_{eq}} &= \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} , \quad C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} . \end{aligned} \quad (4.22)$$

Il ragionamento si estende a  $n$  condensatori collegati in serie: l'inverso della capacità equivalente del sistema è la somma degli inversi delle capacità dei singoli condensatori.

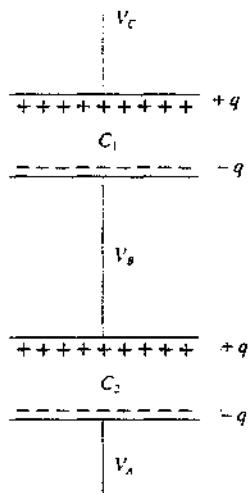


Figura 4.30

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} . \quad (4.23)$$

Condensatori in serie

Nel collegamento in serie la capacità è sempre minore della capacità di ciascun condensatore.

Ci si rende conto che da un insieme di condensatori di valori dati con opportuni collegamenti in parallelo o in serie è possibile ottenere capacità equivalenti in un grande intervallo di valori.

### Esempio 4.9 Partitore capacitivo

Ai capi di tre condensatori in serie c'è una d.d.p.  $V = V_B - V_A = 100$  V e la capacità equivalente del sistema è  $C = 100$  pF. Calcolare i valori delle capacità  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  tali che rispetto a  $V_A$  sia  $V_1 = 50$  V e  $V_2 = 70$  V.

#### Soluzione

La carica che si trova su ciascuna armatura è

$$q = C V = 100 \cdot 10^{-12} \cdot 10^2 = 10^{-8} \text{ C}$$

e i valori richiesti delle capacità sono

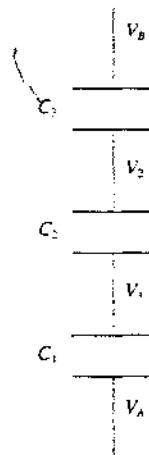


Figura 4.31

$$C_1 = \frac{q}{V_1 - V_A} = \frac{10^{-8}}{50} = 2 \cdot 10^{-10} \text{ F} = 200 \text{ pF}$$

$$C_2 = \frac{q}{V_2 - V_1} = \frac{10^{-8}}{20} = 5 \cdot 10^{-10} \text{ F} = 500 \text{ pF}$$

$$C_3 = \frac{q}{V_B - V_2} = \frac{10^{-8}}{30} = 3.33 \cdot 10^{-10} \text{ F} = 333 \text{ pF}$$

Il sistema si chiama *partitore capacitivo* perché permette di ripartire una data d.d.p. (in tre parti nel caso specifico). In generale, detti  $C_i$  e  $V_i$  i valori della capacità e della d.d.p. ai capi dell' $i$ -esimo condensatore, dall'eguaglianza

$$C_1 V_1 = C_2 V_2 = \dots = C_i V_i = \dots C_n V_n$$

si vede che la d.d.p. si ripartisce in maniera inversamente proporzionale alla capacità:

$$V_1 : V_2 : \dots : V_n = \frac{1}{C_1} : \frac{1}{C_2} : \dots : \frac{1}{C_n}$$

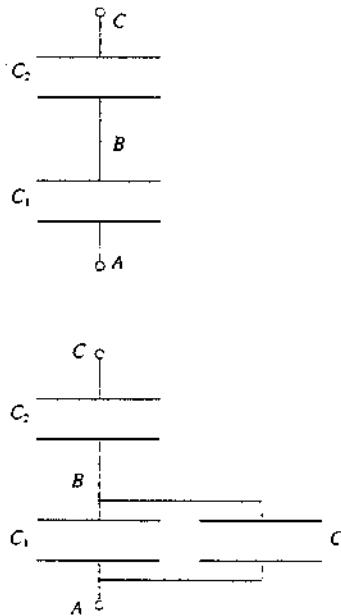


Figura 4.32

### Esempio 4.10

Due condensatori  $C_1$  e  $C_2$  sono collegati in serie e le d.d.p. ai loro capi sono rispettivamente  $V_1 = 30 \text{ V}$  e  $V_2 = 20 \text{ V}$ . Collegando in parallelo a  $C_1$  un condensatore di capacità  $C' = 2 \mu\text{F}$  le d.d.p. diventano  $V'_1 = 5 \text{ V}$  e  $V'_2 = 45 \text{ V}$ . Calcolare i valori delle capacità  $C_1$  e  $C_2$ .

#### Soluzione

Nella prima situazione abbiamo

$$C_1 V_1 = C_2 V_2 \Rightarrow \frac{C_1}{C_2} = \frac{V_2}{V_1} = \frac{2}{3}$$

Nella seconda situazione  $C_1$  e  $C'$  equivalgono ad un unico condensatore di capacità  $C_1 + C'$  per cui

$$(C_1 + C') V'_1 = C_2 V'_2 \Rightarrow \frac{C_1 + C'}{C_2} = \frac{V'_1}{V'_2} = 9$$

e risolvendo nelle due incognite abbiamo

$$C_1 = 0.16 \mu\text{F} \quad , \quad C_2 = 0.24 \mu\text{F}$$

### Esempio 4.11

Due condensatori di capacità  $C_1$  e  $C_2$  hanno un'armatura a terra e sono caricati con d.d.p.  $V_1$  e  $V_2$ . Si collegano tra loro le due armature libere e il sistema assume una nuova condizione di equilibrio con una d.d.p.  $V$  rispetto alla terra. Calcolare il valore di  $V$ .

#### Soluzione

La carica presente inizialmente nei due condensatori è

$$q_1 = C_1 V_1 \quad , \quad q_2 = C_2 V_2$$

e la somma rimane la stessa anche nella nuova situazione.



Concludiamo questo paragrafo notando che le connessioni in serie o in parallelo sono significative, dal punto di vista delle capacità equivalenti, solo se i valori delle capacità non sono molto diversi tra loro. In caso contrario, se ad esempio  $C_1 >> C_2$ , abbiamo

$$C_1 + C_2 \approx C_1, \quad \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{C_2} ;$$

nel parallelo predomina il valore maggiore, nella serie il valore minore.

#### 4.7 Energia del campo elettrostatico

Il *processo di carica* di un condensatore, in cui si passa dalla situazione di carica zero sulle armature alla situazione  $(+q, -q)$  con una d.d.p.  $V = q/C$  tra le armature, consiste in definitiva in una *separazione di cariche* e richiede un determinato lavoro che, essendo il campo conservativo, dipende soltanto dallo stato iniziale e dallo stato finale, ma non dalle modalità con cui avviene il processo. Per eseguire il calcolo possiamo immaginare quindi che la carica di un condensatore avvenga sottraendo una carica  $dq$  dall'armatura negativa e portandola sull'armatura positiva, così che alla fine una carica  $+q$  è stata trasferita da un'armatura all'altra lasciando la prima con una carica  $-q$ , e si è stabilita tra le armature la d.d.p.  $V$ ; la *carica totale è in ogni istante nulla*.

Se in una fase intermedia del processo la d.d.p. tra le armature è  $V'$ , in quanto è già stata trasferita la carica  $q' = CV'$  il lavoro per spostare l'ulteriore carica  $dq'$  attraverso la d.d.p.  $V'$  è, secondo (2.8),

$$dW = V' dq' = \frac{q'}{C} dq'$$

e quindi il lavoro complessivo per effettuare la separazione delle cariche è

$$W = \int dW = \int_0^q \frac{q'}{C} dq' = \frac{q^2}{2C} .$$

Come si vede, esso dipende solo dalla carica trasportata e dalla capacità del condensatore e non contiene informazioni sul processo effettivo.

Questo lavoro, effettuato contro la forza elettrostatica che si oppone a un accumulo di cariche dello stesso segno, viene immagazzinato nel sistema sotto forma di *energia (potenziale) elettrostatica*. Assumendo che l'energia sia nulla quando  $q = 0$ , abbiamo  $W = U_e$  e, servendoci delle (4.14), scriviamo tre espressioni equivalenti per l'energia elettrostatica del condensatore di capacità  $C$ , carico con carica  $q$  e d.d.p.  $V$ :

$$U_e = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} qV . \quad (4.24)$$

Energia elettrostatica

Alle stesse espressioni si arriva per l'energia elettrostatica di un conduttore carico isolato immaginando il processo di carica come un trasporto di carica dall'infinito, dove  $V = 0$ , alla superficie del conduttore. Ciò torna formalmente con l'idea di considerare un conduttore isolato come un condensatore con un'armatura all'infinito.

Il ragionamento svolto per il calcolo dell'energia del condensatore lega l'energia alle cariche, che la possiedono in quanto si trovano ad un certo potenziale: l'energia totale è la somma delle energie potenziali delle singole cariche. È però possibile trovare un'espressione alternativa dell'energia, legata al campo prodotto dal sistema di cariche piuttosto che alle sorgenti del campo stesso.

Consideriamo per semplicità un condensatore piano, in cui il campo elettrico tra le armature è uniforme. Riprendiamo la (4.19) e la relazione  $V = Eh$ :

$$U_e = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 \Sigma}{h} E^2 h^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \Sigma h = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \tau$$

essendo  $\tau = \Sigma h$  il volume del condensatore, cioè il volume in cui è definito il campo elettrostatico. Se facciamo l'ipotesi che l'energia sia distribuita nei punti in cui c'è campo e che questa distribuzione sia uniforme come il campo, possiamo dire che la *densità di energia elettrostatica*, ovvero l'energia elettrostatica per unità di volume, è

$$u_e = \frac{U_e}{\tau} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 . \quad (4.25)$$

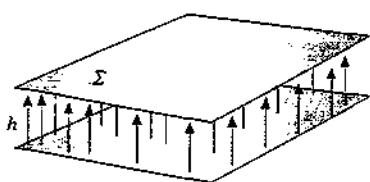


Figura 4.35

Densità di energia elettrostatica

La generalità di questa formula, in cui non compare alcun elemento caratteristico del sistema per cui il calcolo è stato eseguito, ma soltanto il valore del campo e una proprietà del mezzo (in questo caso il vuoto), suggerisce che (4.25) si possa applicare a qualsiasi situazione. In effetti si può dimostrare che in una regione in cui è definito un campo elettrostatico l'energia contenuta in ogni volume infinitesimo  $d\tau$ , al cui interno il campo vale  $E$ , è

$$dU_e = u_e d\tau = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 d\tau ;$$

l'energia totale del campo elettrostatico si ottiene integrando su tutto il volume in cui il campo elettrico è diverso da zero:

$$U_e = \int dU_e = \int \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 d\tau . \quad (4.26)$$

Questa energia corrisponde al lavoro speso per costruire la distribuzione di cariche che dà origine al campo.

### Esempio 4.13

Calcolare l'energia elettrostatica di un condensatore sferico di raggi  $R_1$  e  $R_2$ .

#### Soluzione

Impostiamo il calcolo sulla (4.26) utilizzando quanto visto nell'esempio 4.4: il campo tra le armature del condensatore vale  $E = q / 4\pi \epsilon_0 r^2$ ; il volume della corteccia sferica infinitesima compresa tra il raggio  $r$  e il raggio  $r + dr$  è  $d\tau = \Sigma dr = 4\pi r^2 dr$  e pertanto

$$U_e = \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2} \epsilon_0 \left( \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr = - \frac{q^2}{8\pi \epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} = - \frac{q^2}{8\pi \epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) . \quad (4.27)$$

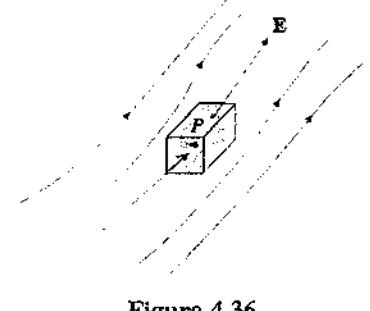


Figura 4.36

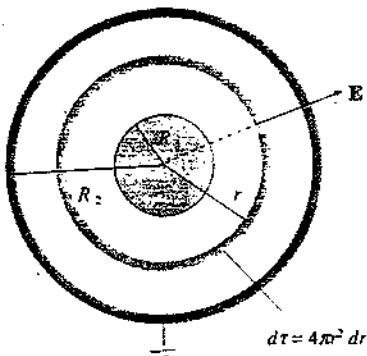


Figura 4.37

Ricordando che la capacità di un condensatore sferico è data da (4.13), vediamo che (4.27) è pari a  $q^2/2C$ : quindi (4.26) e (4.24) portano allo stesso risultato. L'energia così calcolata corrisponde al lavoro per creare la d.d.p.  $V$  tra i due conduttori sferici; se il conduttore esterno è a terra non ci sono altri termini. Se invece il conduttore esterno è isolato, esso ha la carica  $q$  distribuita sulla superficie sferica esterna di raggio  $R_2$ , e nello spazio circostante c'è il campo  $E = q/4\pi\epsilon_0 r^2$ , ovvero è distribuita l'energia

$$U_e = \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2} \epsilon_0 \left( \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R_2} . \quad (4.28)$$

Poiché la capacità di un conduttore sferico di raggio  $R_2$  è  $4\pi\epsilon_0 R_2$ , risulta  $U_e = q^2/2C$ . Anche per il campo esterno verifichiamo che i due metodi di calcolo portano allo stesso risultato.

#### Esempio 4.14

Riprendendo i condensatori dell'esempio 4.11 calcolare l'energia elettrostatica prima e dopo il collegamento in parallelo.

#### Soluzione

Le energie elettrostatiche iniziale e finale sono

$$U_{e,\text{in}} = \frac{1}{2} q_1 V_1 + \frac{1}{2} q_2 V_2 , \quad U_{e,\text{fin}} = \frac{1}{2} (q_1 + q_2) V$$

per cui la variazione di energia vale

$$\Delta U_e = U_{e,\text{fin}} - U_{e,\text{in}} = \frac{1}{2} q_1 (V - V_1) + \frac{1}{2} q_2 (V - V_2) .$$

Ricorriamo all'espressione del potenziale finale trovata nell'esempio 4.11 e troviamo

$$\Delta U_e = \frac{1}{2} \frac{V_1 - V_2}{C_1 + C_2} (q_2 C_1 - q_1 C_2) .$$

Siccome

$$V_1 - V_2 = \frac{q_1}{C_1} - \frac{q_2}{C_2} = \frac{q_1 C_2 - q_2 C_1}{C_1 C_2}$$

si ha infine

$$\Delta U_e = -\frac{1}{2} \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} (V_1 - V_2)^2 .$$

L'energia finale è minore di quella iniziale; evidentemente lo spostamento delle cariche richiede un lavoro e l'energia diminuisce.

A commento di (4.24) e (4.26) occorre dire che nei fenomeni statici il problema della localizzazione dell'energia non è concettualmente molto importante: noi usiamo indifferentemente le due espressioni, badando soprattutto alla semplicità del calcolo. Dove la (4.26) diventa di importanza fondamentale è nei fenomeni di



**Esempio 4.15**

Calcolare l'energia elettrostatica di un sistema di cinque cariche puntiformi.

**Soluzione**

Usiamo (4.31) scrivendo così il risultato:

$$\begin{aligned} U_e = & q_2 V_{12} \\ & + q_3 V_{13} + q_3 V_{23} \\ & + q_4 V_{14} + q_4 V_{24} + q_4 V_{34} \\ & + q_5 V_{15} + q_5 V_{25} + q_5 V_{35} + q_5 V_{45} \end{aligned}$$

Vediamo subito che la prima riga rappresenta il lavoro per portare la carica  $q_2$  nel campo della carica  $q_1$ , la seconda il lavoro per portare la carica  $q_3$  nel campo di  $q_1$  e  $q_2$  e così via. I vari  $V_{ji}$  dipendono dalle posizioni relative delle cariche.

Il risultato è valido anche per (4.32) e quindi l'energia elettrostatica si può calcolare sommando i lavori necessari per trasportare una carica nel campo delle cariche precedentemente trasportate, lavori dati da  $V dq$  con  $V$  che varia durante il processo.

Proprio questa è la logica seguita nel paragrafo 4.7 per il calcolo dell'energia elettrostatica di un condensatore o di un conduttore isolato. Nel caso particolare il calcolo è facilitato dalla relazione (4.14) che si può chiamare l'*equazione di stato del sistema*, per cui alla fine è possibile esprimere il risultato (4.24) in funzione soltanto di  $q$  o di  $V$ , oltre che della grandezza caratteristica  $C$ .

**Esempio 4.16**

Calcolare l'energia elettrostatica di due sfere conduttrici, con cariche  $q_1$  e  $q_2$  e raggi  $R_1$  e  $R_2$  poste a una distanza  $d$  tra i loro centri molto maggiori dei raggi.

**Soluzione**

Secondo (4.30)

$$U_e = \frac{1}{2} q_1 V_1 + \frac{1}{2} q_2 V_2$$

Il potenziale  $V_1$  della prima sfera è dato dalla somma del contributo della carica  $q_1$  sulla sfera stessa e della carica  $q_2$  sulla seconda sfera:

$$V_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 d}$$

Analogamente

$$V_2 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 d} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

Nello scrivere queste relazioni supponiamo che la distanza sia tale che le densità di carica siano uniformi su ciascuna superficie sferica e che l'interazione tra le sfere sia eguale a quella di due cariche puntiformi. Pertanto

$$U_e = \frac{1}{2} \frac{q_1^2}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{1}{2} \frac{q_2^2}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 d} = \frac{q_1^2}{2C_1} + \frac{q_2^2}{2C_2} + \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 d}$$

utilizzando l'espressione della capacità di una sfera isolata.

I primi due termini, sempre positivi, danno il lavoro per caricare le due sfere; il terzo rappresenta l'*energia mutua di interazione* tra le sfere e dipende dal segno relativo delle cariche.

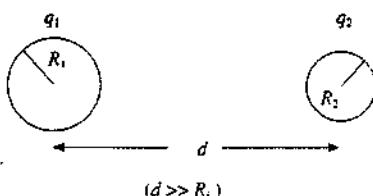


Figura 4.39

**Esempio 4.17**

Calcolare l'energia elettrostatica del campo di una carica  $q$  distribuita uniformemente sulla superficie di una sfera di raggio  $R$  oppure in tutta la sfera. Eseguire il calcolo con  $q = 3.2 \cdot 10^{-18} \text{ C}$ ,  $R = 10^{-15} \text{ m}$ .

**Soluzione**

Il primo caso è già stato considerato alla fine dell'esempio 4.13, formula (4.28) e nell'esempio 4.16:

$$U_e = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R}$$

Se volessimo utilizzare questa espressione per una carica puntiforme troveremmo un risultato infinito; questo vuol dire che nell'elettromagnetismo classico il concetto di carica puntiforme è un'astrazione più che una realtà fisica.

Nel caso della distribuzione di volume, il contributo della parte esterna è sempre  $q^2/8\pi\epsilon_0 R$  perché il campo è eguale nei due casi. In più c'è il contributo del campo esistente tra  $r = 0$  e  $r = R$ , campo che vale  $E = \rho r / 3\epsilon_0$  (esempio 3.2). Da (4.26)

$$\int_0^R \frac{1}{2} \epsilon_0 \left( \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{1}{5} \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R}$$

per cui in totale

$$U_e = \frac{6}{5} \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R} = \frac{3}{5} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 R} \quad (4.33)$$

Allo stesso risultato si arriva con (4.29). L'integrale va esteso al volume della sfera, dove il potenziale vale

$$V(r) = \frac{\rho}{6\epsilon_0} (3R^2 - r^2)$$

secondo quanto trovato nell'esempio 3.2. Pertanto

$$\begin{aligned} U_e &= \frac{1}{2} \int \frac{\rho}{6\epsilon_0} (3R^2 - r^2) \rho 4\pi r^2 dr = \frac{\pi\rho^2}{3\epsilon_0} \int_0^R (3R^2 - r^2) r^2 dr \\ &= \frac{4\pi}{15\epsilon_0} \rho^2 R^5 = \frac{3}{5} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 R} \end{aligned}$$

avendo posto

$$\rho = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

Infine si può effettuare un calcolo diretto di lavoro in base a (4.32). Nel caso della sfera piena supponiamo di aver già costruito una sfera di raggio  $r < R$  con carica  $q(r)$  e potenziale  $V(r)$  in superficie dati da

$$q(r) = \rho \frac{4}{3} \pi r^3, \quad V(r) = \frac{q(r)}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\rho r^2}{3\epsilon_0}$$

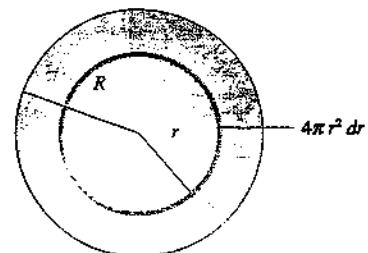


Figura 4.40

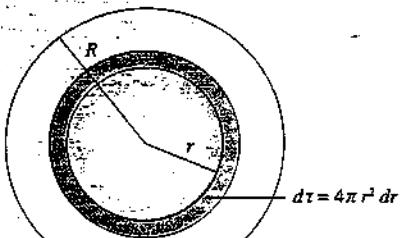


Figura 4.41

Il lavoro per portare la carica  $dq = \rho d\tau = \rho 4\pi r^2 dr$  dall'infinito sulla superficie della sfera, il cui raggio passa da  $r$  a  $r + dr$ , è

$$dW = V dq = \frac{4\pi}{3\epsilon_0} \rho^2 r^4 dr$$

e integrando

$$U_e = W = \frac{4\pi}{3\epsilon_0} \rho^2 \int_0^R r^4 dr = \frac{4\pi}{15\epsilon_0} \rho^2 R^5 = \frac{3}{5} \frac{q^2}{4\pi \epsilon_0 R}$$

Introducendo i dati numerici, se la carica è superficiale

$$U_e = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot (3.2 \cdot 10^{-18})^2}{2 \cdot 10^{-15}} = 4.61 \cdot 10^{-11} \text{ J} = 288 \text{ MeV},$$

se è di volume

$$U_e = \frac{6}{5} \cdot 288 = 346 \text{ MeV}$$

Sarebbe questa l'energia elettrostatica del nucleo di un atomo contenente 20 protoni ( $q = 20 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} = 3.2 \cdot 10^{-18} \text{ C}$ ) e con raggio  $10^{-15} \text{ m}$ , pensando la carica distribuita uniformemente in tutto il nucleo.

Sotto l'azione della forza elettrica repulsiva tra protoni in nucleo non potrebbe essere stabile; è la forza nucleare tra i costituenti (protoni e neutroni) che permette la stabilità.

### Esempio 4.18

Date  $Z$  sfere di raggio  $R_0$ , cariche uniformemente con densità  $\rho$ , calcolare come variano con  $Z$  il raggio e l'energia elettrostatica del sistema ottenuto dalla fusione delle sfere.

#### Soluzione

Detto  $R$  il raggio finale e se la densità resta la stessa, abbiamo dall'egualanza della carica iniziale e finale

$$Z \frac{4}{3} \pi R_0^3 \rho = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho \Rightarrow R = R_0 Z^{1/3}.$$

Per l'energia elettrostatica, dall'esempio 4.17 troviamo, chiamando  $e$  la carica di una sfera,

$$U_e = \frac{3}{5} \frac{(Ze)^2}{4\pi \epsilon_0 R} = \frac{3}{5} \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 R_0} Z^{5/3}.$$

Lo stesso procedimento si potrebbe applicare a distribuzioni sferiche di massa e in effetti per i nuclei si trova sperimentalmente che il raggio varia secondo la legge

$$R = R_0 A^{1/3},$$

dove  $A$  è il numero di componenti (protoni e neutroni) e  $R_0$  una costante che vale  $1.2 \cdot 10^{-15} \text{ m}$ .

**Esempio 4.19**

Calcolare il raggio dell'elettrone nell'ipotesi che la sua energia a riposo  $mc^2$  sia di origine esclusivamente elettrostatica.

**Soluzione**

Eguagliamo (4.33) a  $mc^2$  dove  $m$  è la massa dell'elettrone (tabella 1.1 paragrafo 1.3):

$$\frac{3}{5} \frac{q^2}{4\pi \epsilon_0 r} = mc^2 \Rightarrow r = \frac{3}{5} \frac{q^2}{4\pi \epsilon_0 m c^2} = 1.7 \cdot 10^{-15} \text{ m} .$$

In fisica atomica compare spesso la costante

$$r_e = \frac{q^2}{4\pi \epsilon_0 m c^2} \approx 2.8 \cdot 10^{-15} \text{ m} .$$

detta *raggio classico dell'elettrone*. Essa però non indica le dimensioni reali dell'elettrone che in qualsiasi esperimento finora condotto appare puntiforme (dimensioni minori di  $10^{-17}$  m). L'egualanza proposta non è quindi significativa.

Se si ripete lo stesso calcolo per il protone, la cui massa è data nella medesima tabella 1.1, si trova

$$r_p = \left( \frac{m_e}{m_p} \right) r = 1.6 \cdot 10^{-18} \text{ m} ,$$

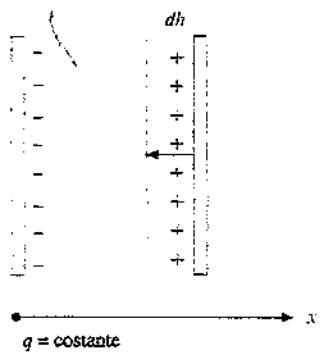
in contrasto con i dati sperimentali che danno  $r_p = 10^{-15}$  m.

Le dimensioni finite del protone pongono il problema della sua struttura interna. L'ipotesi che meglio corrisponde ai risultati di numerosissimi esperimenti è che il protone sia composto da tre particelle dette *quark*, due con carica  $2/3e$  e una con carica  $-1/3e$  (carica risultante  $e$ ), le quali sono legate tra loro dall'*interazione forte* e hanno la peculiarità di esistere solo confinate all'interno del protone. Infatti non è mai stato possibile osservare quark liberi; tuttavia le prove indirette della loro esistenza sono molto convincenti. Anche il neutrone è composto di tre quark, due con carica  $-1/3e$  e una con carica  $2/3e$  (carica risultante zero). Le forze che agiscono tra i nucleoni, come sono chiamati il protone e il neutrone, e che tengono insieme il nucleo atomico, sono la manifestazione all'esterno dei nucleoni delle interazioni tra i quark.

Il protone è formato  
da tre quark

Anche il neutrone è formato  
da tre quark

**Figura 4.42**



**Figura 4.43**

## 4.9 Forza tra le armature di un condensatore.

### Pressione elettrostatica

L'energia elettrostatica di un condensatore piano con armature di area  $\Sigma$  distanti  $h$  è

$$U_e = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2}{2\epsilon_0 \Sigma} h .$$

Tra le armature, cariche di segno opposto, si esercita una forza  $F$  attrattiva che, per ragioni di simmetria, è parallela al campo, cioè ortogonale alle armature.

Supponiamo, con riferimento alla figura 4.43, di mantenere fissa l'armatura negativa e di lasciare avvicinare, sotto l'azione della forza, l'armatura positiva di una quantità  $dh$  (negativa).

La carica sulle armature resta costante, la capacità  $C$  aumenta perché la distanza tra le armature diminuisce e quindi la d.d.p. diminuisce (ovvero: il campo  $E = \sigma/\epsilon_0$  rimane lo stesso,  $V = E h$  diminuisce con  $h$ ). L'energia diminuisce della quantità



$$dW = V dq = V^2 dC = - dU_{\text{gen}}$$

ed è fornito a spese dell'energia interna del generatore  $U_{\text{gen}}$  che diminuisce. L'energia totale del sistema, somma dell'energia elettrostatica e dell'energia interna del generatore, varia quindi in corrispondenza dello spostamento  $dh$  di

$$dU = dU_e + dU_{\text{gen}} = \frac{V^2}{2} dC - V^2 dC = - \frac{V^2}{2} dC = - dU_e .$$

In definitiva il bilancio energetico è il seguente: l'energia interna del generatore diminuisce, la metà dell'energia così resasi disponibile la ritroviamo sotto forma di energia elettrostatica. L'altra metà deve corrispondere al lavoro per avvicinare le armature e concludiamo che

$$dW = \frac{V^2}{2} dC = dU_e = - \frac{\epsilon_0 V^2}{2h^2} \Sigma dh .$$

a cui corrisponde la forza attrattiva

$$F = - \frac{\epsilon_0 V^2}{2h^2} \Sigma = - \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \Sigma . \quad (4.35)$$

Sia a carica costante che a potenziale costante la forza ha la stessa espressione: essa dipende dal quadrato della densità di carica e dall'area. Esprimendo  $\sigma$  in funzione del campo  $E$  abbiamo in modulo

$$F = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \Sigma = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \Sigma \quad (4.36)$$

e la forza per unità di superficie risulta

$$p = \frac{F}{\Sigma} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 , \quad (4.37) \quad \text{Pressione elettrostatica}$$

detta *pressione elettrostatica*. In questa espressione non compaiono elementi caratteristici del sistema e possiamo assumere pertanto che essa sia valida in generale, qualsiasi sia la distribuzione di carica superficiale e la forma delle armature.

La (4.37) può essere anche dimostrata considerando un elemento di carica  $dq = \sigma d\Sigma$  sulla superficie di un conduttore di forma qualunque e determinando qual è la forza che agisce su di esso. Il campo elettrico nelle immediate vicinanze di  $dq$  all'esterno del conduttore vale

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{u}_n$$

secondo il teorema di Coulomb (4.1): invece all'interno il campo è nullo. D'altra parte lo strato di carica  $dq$  sulla superficie  $d\Sigma$  genera nei punti immediatamente vicini il campo elettrico:

$$\mathbf{E}' = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{u}_n \quad \text{all'esterno}$$

$$-\mathbf{E}' = - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{u}_n \quad \text{all'interno} .$$

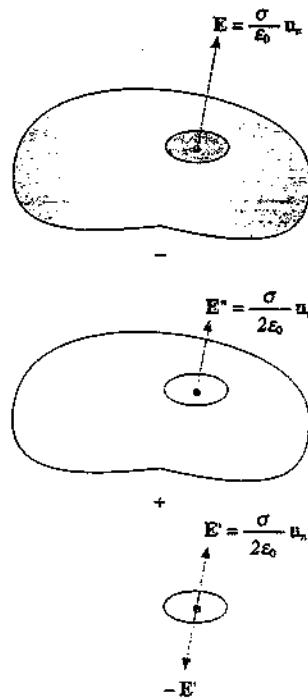


Figura 4.45

Allora evidentemente *tutte le altre cariche* del conduttore generano nella zona in cui si trova la carica  $q$  il campo elettrico

$$\mathbf{E}'' = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{u}_n$$

il quale sommandosi a  $\mathbf{E}'$  e a  $-\mathbf{E}'$  dà la situazione nota.

Si osservi che con questa elementare applicazione del principio di sovrapposizione abbiamo risolto un problema apparentemente difficile. Data una distribuzione di carica leviamo una piccola aerea su cui c'è la carica  $dq = \sigma d\Sigma$  e lasciamo il resto imperturbato: quanto vale il campo nel foro? La risposta è

$$\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{u}_n$$

La carica  $dq$  è dunque sottoposta al campo  $\mathbf{E}''$  e subisce la forza

$$d\mathbf{F} = dq \mathbf{E}'' = \sigma d\Sigma \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{u}_n = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} d\Sigma \mathbf{u}_n .$$

*diretta sempre verso l'esterno* qualunque sia il segno della carica. A questa forza corrisponde la pressione

$$p = \frac{dF}{d\Sigma} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$$

che tende a dilatare la distribuzione di carica.

Da (4.37) notiamo che *la pressione elettrostatica coincide con la densità di energia elettrostatica sulla superficie del conduttore*. Non è la prima volta che incontriamo questo legame tra pressione e densità di energia. Nel teorema di Bernoulli la densità di energia cinetica e di energia potenziale hanno il significato di pressione dovuta alla velocità del fluido e alla forza di gravità.

Dimensionalmente l'egualanza è evidente:

$$p = \frac{N}{m^2} = \frac{N \cdot m}{m^3} = \frac{J}{m^3} .$$

Concludiamo osservando che spesso, anche per sistemi non complessi, il calcolo delle forze appare in generale più semplice se affrontato partendo dall'energia elettrostatica del sistema. Il calcolo diretto sulla base della legge di Coulomb richiede, anche nei casi più banali, calcoli laboriosi. Nota l'energia elettrostatica la componente della forza nella direzione  $x$  si ottiene derivando l'energia elettrostatica rispetto a  $x$ . Bisogna avere l'avvertenza di verificare se il processo si svolge a carica costante o a potenziale costante. Nei due casi

$$q = \text{cost} \quad F_x = -\frac{\partial U_e}{\partial x} , \quad (4.38)$$

$$V = \text{cost} \quad F_x = \frac{\partial U_e}{\partial x} ; \quad (4.39)$$

il cambiamento di segno è dovuto al fatto che nel secondo caso agisce anche il generatore, come discusso in precedenza.

**Esempio 4.20**

Nell'elettrometro a bilancia di Thomson l'aerea delle armature, costituite da due piastre circolari parallele, è  $\Sigma = 400 \text{ cm}^2$  e la loro distanza è  $h = 5 \text{ mm}$ . Connettendo le piastre a un generatore che fornisce la d.d.p.  $V$ , per rimettere la bilancia in equilibrio occorre aggiungere una massa  $m = 20 \cdot 10^{-3} \text{ g}$  sul piatto della bilancia. Calcolare  $V$ .

**Soluzione**

La bilancia è in equilibrio prima del collegamento. Dopo, la forza di attrazione tra le piastre è data da

$$F = p\Sigma = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \Sigma = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \Sigma \frac{V^2}{h^2}$$

che, per l'equilibrio, deve essere eguale a  $mg$ :

$$m = \frac{\varepsilon_0 \Sigma}{2gh^2} V^2 \quad \text{ovvero} \quad V = \sqrt{\frac{2mgh^2}{\varepsilon_0 \Sigma}} = 166.4 \text{ V}$$

La grandezza che si misura,  $m$ , dipende dal quadrato della grandezza che si vuole determinare,  $V$ , e per questo si dice che lo strumento ha una *scala quadratica*. La *sensibilità*

$$\frac{\Delta V}{\Delta m} = \frac{gh^2}{\varepsilon_0 \Sigma V}$$

cioè la variazione di  $V$  che corrisponde alla più piccola variazione di  $m$  misurabile, è inversamente proporzionale a  $V$ ; l'errore relativo è

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{gh^2}{\varepsilon_0 \Sigma} \frac{\Delta m}{V^2}$$

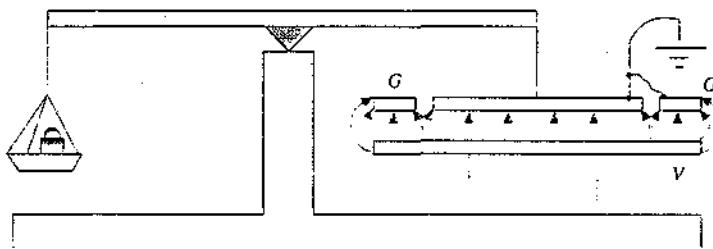


Figura 4.46

Inserendo i dati numerici e supponendo  $\Delta m = 10^{-3} \text{ g} = 10^{-6} \text{ kg}$ ,

$$\frac{\Delta V}{\Delta m} = \frac{6.92 \cdot 10^8}{V} \frac{V}{\text{kg}} \quad , \quad \frac{\Delta V}{V} = \frac{692}{V^2}$$

Con  $V = 100 \text{ V}$      $\Delta V/V = 6.92\%$     ,    con  $V = 200 \text{ V}$      $\Delta V/V = 1.73\%$     .

Lo strumento è poco sensibile e impreciso se adoperato per misurare piccole d.d.p., ma le sue prestazioni migliorano al crescere di  $V$ . La sua importanza risiede nel fatto che si tratta di uno *strumento assoluto*: esso riferisce una grandezza elettrica non ad altre grandezze elettriche, bensì a grandezze meccaniche (purché sia definita  $\varepsilon_0$ ).

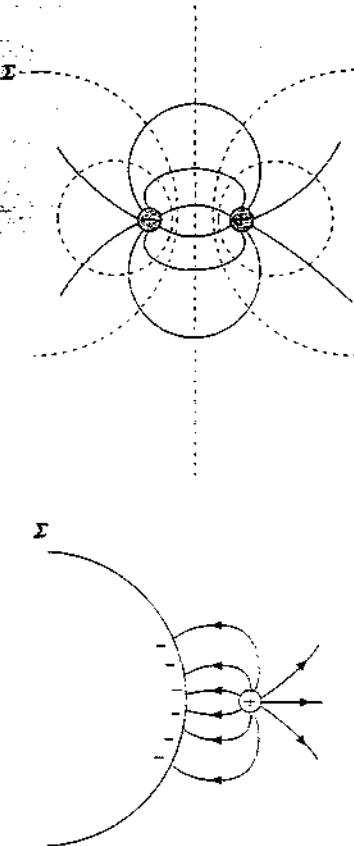


Figura 4.47

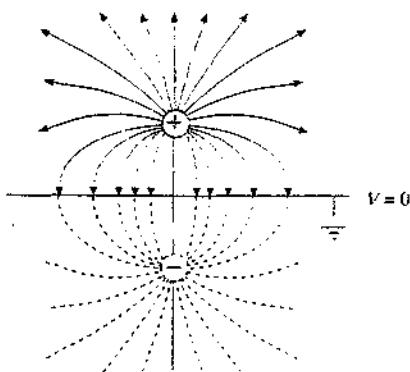


Figura 4.48

#### 4.10 Il metodo delle cariche immagini

Supponiamo di avere  $n$  cariche puntiformi e di tracciare una superficie equipotenziale  $\Sigma$  che separi idealmente  $m$  cariche dalle altre  $n-m$ . Nei punti di  $\Sigma$  le linee del campo  $E$  sono ortogonali alla superficie stessa. Se al posto di una parte di  $\Sigma$  mettiamo un foglio conduttore mantenuto al potenziale caratteristico di  $\Sigma$  nulla cambia per quanto riguarda la distribuzione spaziale del potenziale e del campo elettrostatico. Estendendo abbastanza la superficie conduttrice, sempre seguendo  $\Sigma$  si può far sì che tutte le linee di campo che escono dalle  $m$  cariche e non si chiudono su qualcuna di esse terminino su questa superficie. Abbiamo così realizzato uno schermo elettrostatico: dentro ci sono  $m$  cariche che inducono sulla faccia interna dello schermo una carica eguale ed opposta; sulla faccia esterna appare, opportunamente distribuita, la carica totale delle  $m$  cariche interne. Se queste vanno a toccare la faccia interna si neutralizzano con la carica indotta senza che nulla accada all'esterno.

Alla fine abbiamo la situazione nuova in cui  $n-m$  cariche sono poste vicino a un conduttore delimitato dalla superficie  $\Sigma$  su cui è distribuita una carica indotta e la situazione elettrostatica al di fuori di  $\Sigma$  è equivalente a quella delle  $n$  cariche originarie.

Quindi il problema di calcolare campo e potenziale elettrostatici di un sistema di cariche posto nelle vicinanze di un conduttore mantenuto a un determinato potenziale, nonché la densità di carica indotta sulla superficie del conduttore, è ricondotto alla ricerca di un altro sistema di cariche, poste al di là della superficie del conduttore, che insieme a quelle reali abbiano tale superficie come superficie equipotenziale al valore corretto. Le cariche fintizie così introdotte si chiamano *cariche immagini*.

Vediamo negli esempi alcuni casi di applicazione del metodo; dalla figura 4.47 si intuisce che per una carica posta di fronte a un piano o a una sfera conduttrice il problema si risolve con una sola carica immagine.

#### Esempio 4.21

Una carica puntiforme positiva  $q$  è posta di fronte a una lastra conduttrice indefinita a potenziale zero, da cui dista  $x$ . Calcolare la densità di carica indotta sul conduttore e la forza con cui la carica è attirata dal conduttore.

##### Soluzione

La carica  $+q$  induce una carica  $-q$  sulla lastra conduttrice (l'induzione è completa), distribuita con densità superficiale  $\sigma$  in modo tale che la carica  $q$  e la carica indotta diano in ogni punto della superficie un valore nullo del potenziale.

Il potenziale dovuto alla carica  $q$  in un punto del piano distante  $r$  da  $q$  è

$$V_q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

e la carica indotta deve generare in quel punto il potenziale

$$V_i = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

eguale e contrario. Una situazione di questo genere si può realizzare, in ogni punto del piano, ponendo una *carica immagine*  $-q$  in posizione simmetrica a quella della carica  $q$  rispetto al piano.

Il problema è ricondotto in tal modo a due cariche puntiformi eguali e contrarie distanti  $2x$ . Il piano mediano è equipotenziale a potenziale zero. Il campo in ogni punto del piano è normale al piano, diretto verso l'esterno e vale

$$E(y) = -2 \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos\theta = -\frac{2qx}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2)^{3/2}}$$

La densità di carica indotta negativa è data dal teorema di Coulomb (4.1):

$$\sigma = \epsilon_0 E = -\frac{qx}{2\pi (x^2 + y^2)^{3/2}}$$

Essa è massima in corrispondenza della congiungente le due cariche ( $y = 0$ ) e decresce radialmente, tendendo rapidamente a zero. C'è ovviamente simmetria circolare rispetto al centro.

Verifichiamo che la carica indotta è  $-q$ :

$$\int \sigma d\Sigma = -\frac{q}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} 2\pi y dy = -\frac{qx}{2} \int_0^{\infty} (x^2 + y^2)^{-3/2} d(y^2) = \\ = qx [(x^2 + y^2)^{-1/2}]_0^{\infty} = -q$$

Calcoliamo infine la forza totale esercitata dal piano carico su  $q$ . Suddividiamo la carica indotta in corone circolari infinitesime di carica  $dq$  distribuita con densità  $\sigma$  sull'area  $2\pi y dy$  (stesso procedimento seguito per l'integrazione appena eseguita). Ciascuna dà in  $P$  il campo  $dE$  equivalente a quello di un anello di raggio  $y$  e densità di carica  $\lambda = \sigma d\Sigma / 2\pi y = \sigma dy$ ; da (1.30) e dall'espressione di  $\sigma$

$$dE = -\frac{qx^2 y dy}{4\pi \epsilon_0 (x^2 + y^2)^3} = -\frac{qx^2}{8\pi \epsilon_0} (x^2 + y^2)^{-3} d(y^2)$$

per cui il campo elettrico che agisce su  $q$  è, in modulo,

$$E = \frac{qx^2}{8\pi \epsilon_0} \int_0^{\infty} (x^2 + y^2)^{-3} d(y^2) = \frac{q}{16\pi \epsilon_0 x^2}$$

e la forza subita da  $q$  vale

$$F = qE = \frac{q^2}{16\pi \epsilon_0 x^2} = \frac{q^2}{4\pi \epsilon_0 (2x)^2}$$

coincidente con la forza dovuta alla carica immagine posta a distanza  $2x$  da  $q$ . La soluzione trovata è pertanto consistente: *al sistema piano conduttore - carica induttiva si è sostituito l'insieme di due cariche puntiformi, assai più facile da trattare.*

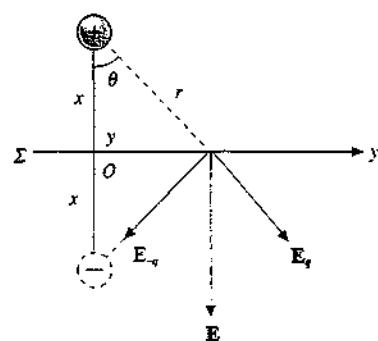


Figura 4.49

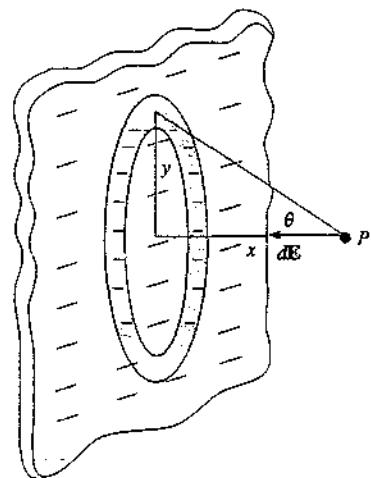


Figura 4.50

### Esempio 4.22

Una carica puntiforme  $q$  è posta a distanza  $d$  dal centro di una sfera conduttrice scarica e mantenuta a potenziale zero. La distanza  $d$  è maggiore del raggio  $R$  della sfera. Calcolare la densità di carica indotta sulla sfera.

#### Soluzione

Per risolvere il problema cerchiamo un sistema di due cariche  $q$  e  $q_i$  che abbia la superficie di raggio  $R$  come superficie equipotenziale a  $V = 0$ . Prendiamo l'asse  $x$  con origine nel centro della sfera e passante per la carica  $q$  e poniamo la carica  $q_i$  sull'asse  $x$  a distanza dal centro della sfera compresa tra zero e  $R$ : supponiamo inoltre che sia  $q_i = -y q$ .

Il potenziale di queste due cariche in un punto  $P$  della superficie sferica è  $V(P) = V_q + V_{q_i} = 0$  per cui

$$\frac{1}{4\pi \epsilon_0} \left[ \frac{q}{(d^2 + R^2 - 2Rd \cos\theta)^{1/2}} - \frac{y q}{(x^2 + R^2 - 2Rx \cos\theta)^{1/2}} \right] = 0$$

da cui segue l'eguaglianza

$$y^2 (d^2 + R^2 - 2Rd \cos\theta) = x^2 + R^2 - 2Rx \cos\theta$$

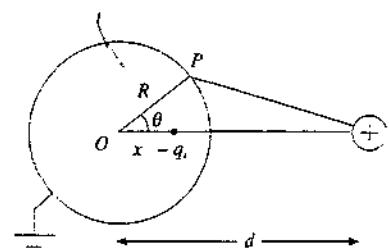


Figura 4.51

che deve essere verificata per ogni valore di  $\theta$ . Allora in base al principio di identità dei polinomi, deve essere

$$y^2 (d^2 + R^2) = x^2 + R^2 \quad , \quad -2R d y^2 = -2R x \quad \Rightarrow \quad y^2 d = x$$

Sostituita la seconda nella prima si ottiene un'equazione di secondo grado che ammette le soluzioni  $x_1 = d$ ,  $x_2 = R^2/d$  e, in corrispondenza,  $y_1 = 1$ ,  $y_2 = R/d$ . La prima soluzione è banale in quanto pone  $q_1 = q$  e coincidente spazialmente con  $q$ , così che il potenziale è nullo in tutto lo spazio. La seconda soluzione dice che la carica immagine vale

$$q_1 = -y_2 q = -\frac{R}{d} q$$

ed è posta a distanza

$$x_1 = x_2 = \frac{R^2}{d}$$

dal centro della sfera, ovvero a distanza  $d - x_2 = (d^2 - R^2)/d$  dalla carica  $q$ . Si verifica che tale posizione è la proiezione sull'asse  $x$  del punto  $T$ , individuato da una retta tangente alla sfera passante per  $q$ .

La soluzione trovata può essere vista in modo diverso, cioè come la dimostrazione che date due cariche  $q_1$  e  $q_2$  di segno opposto esiste sempre una superficie equipotenziale sferica con  $V = 0$ . Le formule ricavate permettono facilmente di determinarne il raggio e la posizione noti i valori delle cariche e la loro distanza.

Le due cariche  $q$  e  $q_1$  generano nello spazio il potenziale

$$V(r, \theta) = \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \left[ \frac{1}{(d^2 + r^2 - 2r d \cos\theta)^{1/2}} - \frac{R}{d} \frac{1}{\left(\frac{R^4}{d^2} + r^2 - 2r \frac{R}{d} \cos\theta\right)^{1/2}} \right] \quad ,$$

in un riferimento polare con origine nel centro della sfera. Il campo elettrico sulla superficie  $r = R$ , evidentemente radiale, è dato da

$$\mathbf{E} = - \left( \frac{\partial V}{\partial r} \right)_{r=R} \mathbf{u}_r = - \frac{q}{4\pi \epsilon_0 R} \frac{d^2 - R^2}{(d^2 + R^2 - 2R d \cos\theta)^{3/2}} \mathbf{u}_r \quad ,$$

diretto verso l'interno se  $q$  è positiva, verso l'esterno se è negativa. La densità superficiale di carica sulla sfera è

$$\sigma = \epsilon_0 E = - \frac{q}{4\pi R} \frac{d^2 - R^2}{(d^2 + R^2 - 2R d \cos\theta)^{3/2}} \quad ,$$

ovunque di segno opposto a  $q$ : le cariche indotte dello stesso segno di  $q$  sfuggono verso la terra attraverso il filo di collegamento. Questa distribuzione non uniforme di carica produce all'interno della sfera un campo diverso da zero che cancella il campo prodotto da  $q$ , cioè un campo radiale con centro in  $q$  e opposto a quello di  $q$ . Si noti che non si tratta del campo prodotto da  $q_1$ : ma sappiamo che il sistema  $q - q_1$  dà la situazione corretta all'esterno della sfera. Osserviamo infine che in questo caso l'*induzione non è completa* e quindi l'integrale di  $\sigma$  sulla superficie non è eguale a  $-q$ . È abbastanza facile verificare che

$$\int \sigma d\Sigma = - \frac{q(d^2 - R^2)}{4\pi R} \int \frac{2\pi R^2 \sin\theta d\theta}{(d^2 + R^2 - 2R d \cos\theta)^{3/2}} = - \frac{R}{d} q = q \quad .$$

come dovevamo attenderci sulla base delle considerazioni generali fatte all'inizio del paragrafo.

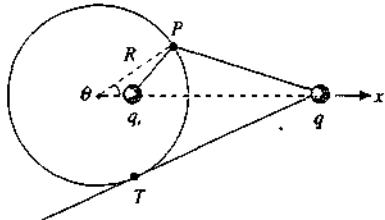


Figura 4.52

### Esempio 4.23

Dimostrare che, posto un dipolo di momento  $\mathbf{p}$  in un campo uniforme  $\mathbf{E}_0$ , con  $\mathbf{p}$  parallelo e concorde a  $\mathbf{E}_0$ , nel campo risultante esiste una superficie equipotenziale sferica con centro nel dipolo e calcolare il raggio di tale superficie e il potenziale che le compete. Applicare il risultato al caso di una sfera conduttrice scarica posta in un campo uniforme.

#### Soluzione

Prendiamo un asse  $z$  con origine nel centro del dipolo e orientato come  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{E}_0$ . Il potenziale dovuto alla distribuzione di cariche che generano il campo uniforme è dato da (2.30), dove la costante è pari al valore  $V_0$  nell'origine. Il contributo del dipolo è (2.59). In un generico punto  $P$

$$V(P) = V_0 - E_0 z + \frac{p \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 r^2} = V_0 - E_0 r \cos \theta + \frac{p \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 r^2}$$

Se esiste una superficie sferica equipotenziale di raggio  $R$  centrata sul dipolo, nei suoi punti deve essere  $V(P) = \text{costante}$  qualsiasi sia il valore di  $\theta$ :

$$V_0 - \cos \theta \left( E_0 R - \frac{p}{4\pi \epsilon_0 R^2} \right) = \text{costante}$$

La condizione è soddisfatta se  $R^3 = p / 4\pi \epsilon_0 E_0$  e il valore della costante è proprio  $V_0$ . Pertanto nel campo elettrico risultante dalla somma di un campo uniforme  $\mathbf{E}_0$  e di un campo di dipolo, con  $\mathbf{p}$  concorde a  $\mathbf{E}_0$ , esiste una superficie sferica di raggio

$$R = \left( \frac{p}{4\pi \epsilon_0 E_0} \right)^{1/3}$$

equipotenziale con valore  $V_0$  uguale al potenziale del campo uniforme nella posizione in cui si trova il dipolo.

Il campo elettrostatico nei punti della superficie equipotenziale è radiale ed è dato dalla somma delle componenti radiali del campo di dipolo (2.60) e del campo uniforme:

$$\mathbf{E}(P) = \left( \frac{2p \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 R^3} + E_0 \cos \theta \right) \mathbf{u}_r = 3E_0 \cos \theta \mathbf{u}_r$$

Quando mettiamo una sfera conduttrice scarica in un campo uniforme, la sua superficie deve essere equipotenziale; ma allora la situazione elettrostatica all'esterno della sfera si può calcolare supponendo di porre nel centro della sfera un *dipolo immagine* il cui momento è determinato dal raggio della sfera e dal valore del campo uniforme:

$$p = 4\pi \epsilon_0 R^3 E_0$$

Il campo elettrico all'esterno della sfera è dato dalla sovrapposizione di  $\mathbf{E}_0$  e del campo elettrico del dipolo di momento  $p$ ; la perturbazione dovuta alla presenza della sfera è massima sulla superficie della sfera, dove il campo è radiale, ma decresce rapidamente come  $1/r^2$ .

Il potenziale assunto dalla sfera è quello che ci sarebbe nel centro in assenza della sfera e la densità di carica indotta (che perturba il campo  $\mathbf{E}_0$ ) è data da

$$\sigma = \epsilon_0 E = 3\epsilon_0 E_0 \cos \theta \quad : \quad (4.40)$$

essa è positiva nell'emisfero anteriore ( $0 \leq \theta < \pi/2$ ) con massimo  $3\epsilon_0 E_0$  per  $\theta = 0$ , si annulla per  $\theta = \pi/2$ , è negativa nell'emisfero posteriore ( $\pi/2 < \theta \leq \pi$ ) con minimo  $-3\epsilon_0 E_0$  per  $\theta = \pi$ . Resta così giustificato quanto avevamo qualitativamente detto nel paragrafo 4.1.

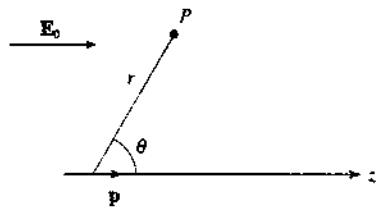


Figura 4.53

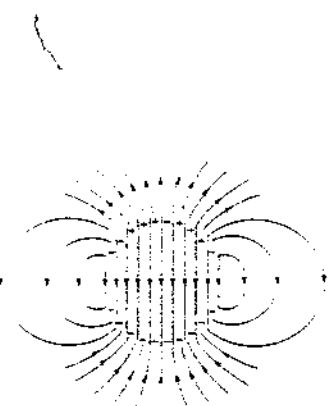


Figura 4.54

Questa distribuzione superficiale deve dare all'interno della sfera un campo elettrico ovunque opposto a  $E_0$ : abbiamo così trovato il risultato interessante che una carica distribuita su una superficie sferica con densità che varia come  $\cos\theta$  produce all'interno un campo uniforme di valore

$$E_0 = \frac{\sigma}{3\epsilon_0} \quad (4.41)$$

che va dall'emisfero dove  $\cos\theta > 0$  all'emisfero dove  $\cos\theta < 0$ ; all'esterno essa produce un campo di dipolo.

#### Esempio 4.24

Una sfera conduttrice di raggio  $R$  è posta a distanza  $r \gg R$  da una carica puntiforme  $q$ . Calcolare la forza che agisce sulla sfera.

#### Soluzione

Il campo della carica  $q$  non è uniforme, però agli effetti dell'induzione sulla sfera possiamo supporlo tale se la distanza è grande. Utilizzando i risultati dell'esempio 4.23, abbiamo un dipolo di momento

$$p = 4\pi\epsilon_0 R^3 \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{qR^3}{r^2}$$

dipendente dalla posizione. Esso, posto nel campo della carica, ha l'energia elettrostatica (2.67):

$$U_e = -pE = -\frac{pq}{4\pi\epsilon_0 r^2} = -\frac{q^2 R^3}{4\pi\epsilon_0 r^4}$$

Calcoliamo la forza come derivata dell'energia secondo (4.38):

$$F = -\frac{dU_e}{dr} = -\frac{q^2 R^3}{\pi\epsilon_0 r^5}$$

Tale forza, che decresce molto rapidamente con la distanza, è sempre attrattiva: le cariche indotte di segno opposto a  $q$  sono più vicine alla carica di quelle indotte dello stesso segno.

Se il campo è veramente uniforme  $p$  non dipende dalla posizione,  $U_e$  è costante e la forza è nulla.

### 4.11 Funzioni armoniche. Problema di Dirichlet

Nel paragrafo 3.5 abbiamo visto che l'equazione di Laplace (3.28) riassume tutte le proprietà del campo elettrostatico nello spazio privo di cariche, cioè  $\nabla \times E = 0$ ,  $\nabla \cdot E = 0$ . Noi ci siamo serviti di queste ultime, e della definizione  $E = 0$  all'interno, per stabilire le proprietà dei conduttori in equilibrio. Vogliamo adesso brevemente accennare a come si imposta il problema partendo dall'equazione di Laplace; essendo questo argomento tipico della fisica matematica, ci limitiamo ai concetti generali.

Le soluzioni di (3.28) che sono finite e continue insieme alle loro derivate prime e hanno derivate seconde finite si dicono *funzioni armoniche*. Si può dimostrare formalmente l'esistenza di tali soluzioni, ma ciò non è per noi molto importante perché siamo sicuri a priori, per via sperimentale, che c'è almeno una soluzione nei problemi di elettrostatica. Ben più interessante è il *teorema di unicità* della soluzione: una funzione armonica  $V$  definita in una certa regione finita è univocamente determinata in tale regione se si assegnano i suoi valori sulla superficie chiusa  $\Sigma$  che delimita la regione. Il teorema resta valido se la regione si estende all'infinito: in questo caso, dati i valori di  $V$  su una o più superficie chiuse

se  $\Sigma$ ,  $V$  è univocamente determinato in tutto lo spazio esterno a  $\Sigma$ , purché abbia un certo comportamento asintotico. Precisamente, considerato un qualsiasi punto  $O$  del dominio e un punto  $P$  distante  $r$  da  $O$ , quando  $P$  tende a distanza infinita da  $O$   $V(r)$  deve andare a zero almeno come  $1/r$  e  $\partial V/\partial r$  almeno come  $1/r^2$ .

Altra proprietà importante della funzione armonica  $V$  è che se essa ha un valore costante su una superficie chiusa  $\Sigma$ , essa ha lo stesso valore in tutti i punti dello spazio interno a  $\Sigma$ .

Il problema della determinazione di  $V$  una volta che siano noti i suoi valori al contorno si chiama *problema di Dirichlet*. Vediamo che la soluzione di un qualsiasi problema di elettrostatica con conduttori consiste nella soluzione di un problema di Dirichlet; purtroppo pur essendo garantita l'esistenza e l'unicità della soluzione, non esiste un metodo generale di ricerca della soluzione, come avviene per altre classi di equazioni differenziali.

Assumendo di poter arrivare alla soluzione, che in molti casi si ottiene per via analitica e che si può sempre avere con metodi numerici, analizziamo qualche caso che già conosciamo.

Dato un conduttore qualsiasi carico isolato, il potenziale  $V$  in tutto lo spazio è univocamente determinato se è dato quello  $V_0$  del conduttore. Questo è vero purché il conduttore abbia dimensioni finite, altrimenti  $V$  non può soddisfare alle condizioni di comportamento asintotico e nascono problemi di divergenze, come abbiamo visto per fili, cilindri e piani indefiniti. Noto  $V$ , è noto ovunque il campo elettrostatico  $-\nabla V$ , in particolare nelle immediate vicinanze del conduttore e quindi col teorema di Coulomb (4.1) si calcola la densità di carica sul conduttore; da questa per integrazione si ottiene la carica  $q_0$  sul conduttore e dividendo per  $V_0$  la sua capacità. Risolto così il problema e trovata la relazione  $q_0 = CV_0$ , sappiamo che per qualsiasi altro valore noto di carica  $q$  messa sul conduttore o per qualsiasi altro valore noto del potenziale del conduttore il legame sarà sempre  $q = CV$ .

Il problema immediatamente successivo è quello di più conduttori carichi, che quindi si influenzano tra loro, di cui siano noti i potenziali oppure le cariche. La soluzione permette di calcolare ovunque il campo  $-\nabla V$ , quindi di determinare le densità di carica sui conduttori e per integrazione le loro cariche e porta alle relazioni (4.7) e (4.9) per i potenziali e le cariche dei conduttori.

Ancora, dal fatto che se  $V$  è costante su una superficie chiusa, essa è costante anche all'interno, si derivano le proprietà di schermo elettrostatico in un conduttore cavo.

Concludiamo con due precisazioni: noi sappiamo che il campo  $E$  vicino alla superficie di un conduttore è determinato dal valore locale della densità di carica e viceversa; il termine locale non deve però trarre in inganno, facendo pensare ad esempio che le altre cariche presenti non abbiano influenza, in quanto il valore locale di  $\sigma$  è determinato dalla soluzione del problema di Dirichlet, che dipende da tutte le cariche presenti. La stessa osservazione vale evidentemente per la pressione elettrostatica (4.37).

L'altra precisazione riguarda il potenziale di un conduttore: quando parliamo di conduttore isolato il suo potenziale non è noto a priori e dipende dalla carica che è stata depositata sul conduttore e dalle altre cariche. È però possibile fissare il potenziale di un conduttore collegandolo a un generatore di tensione che lo mantiene a una d.d.p. costante rispetto alla terra; in questo caso è la carica del conduttore che varia a seconda della situazione elettrostatica circostante.

### Problema di Dirichlet

#### Esempio 4.25

Verificare che la funzione  $V(x,y) = h(x^2 - y^2)$  è una funzione armonica e determinare il campo elettrostatico e l'andamento delle linee di campo. Discutere la forza che questo campo esercita su una carica puntiforme.

#### Soluzione

Calcoliamo le derivate della funzione  $V$ :

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 2hx \quad , \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 2h \quad , \quad \frac{\partial V}{\partial y} = -2hy \quad , \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -2h$$

e quindi l'equazione di Laplace (3.28) è soddisfatta. Il campo è il gradiente del potenziale per cui

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -2hx \quad , \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = 2hy \quad , \quad \mathbf{E} = -2h(x\mathbf{u}_x - y\mathbf{u}_y)$$

Il modulo è  $E = 2h \sqrt{x^2 + y^2} = 2hr$ , la direzione rispetto all'asse  $x$  è tale che  $\tan \theta = E_y/E_x = -y/x$ . Il problema è piano, le superficie equipotenziali sono linee equipotenziali di equazione

$$h(x^2 - y^2) = \text{costante}$$

iperboli equilatere che hanno come asintoti gli assi a  $45^\circ$  rispetto agli assi coordinati. Per trovare l'equazione delle linee di campo ricorriamo a (1.36) nel caso piano:

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} \Rightarrow \frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y}$$

La soluzione di questa equazione differenziale è

$$\ln x = -\ln y + \text{costante} \quad \text{ovvero} \quad xy = \text{costante}$$

Le linee di campo  $\mathbf{E}$  sono iperboli equilatere, ortogonali alle precedenti, che hanno come asintoti gli assi coordinati. La forza su una carica  $q$  è

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} = -2hqx\mathbf{u}_x + 2hy\mathbf{u}_y$$

e risulta che la componente  $x$  è attrattiva e quella  $y$  repulsiva, se la carica è positiva. Una tale particella in moto lungo l'asse  $z$  ortogonale al disegno non risente di nessuna forza perché sull'asse  $z$  il campo elettrico è nullo; se invece si muove lungo un asse parallelo all'asse  $z$ , essa risente di una forza che la avvicina all'asse  $z$  nel piano orizzontale, ma la allontana nel piano verticale. L'opposto succede per una carica negativa.

Un *quadrupolo eletrostatico* è un sistema di quattro conduttori con sagoma iperbolica che producono il campo descritto. Mettendo in serie un secondo quadrupolo ruotato di  $90^\circ$  rispetto all'asse  $z$ , una particella carica viene dal primo quadrupolo deflessa verso l'asse  $z$  in un piano e allontanata nell'altro, dal secondo quadrupolo subisce l'effetto opposto. Si dimostra che l'*effetto* complessivo è sempre di avvicinare le particelle all'asse  $z$ , cioè è *focalizzante* e per questo una *coppia di quadrupoli* siffatta viene chiamata anche *lente eletrostatica* (convergente).

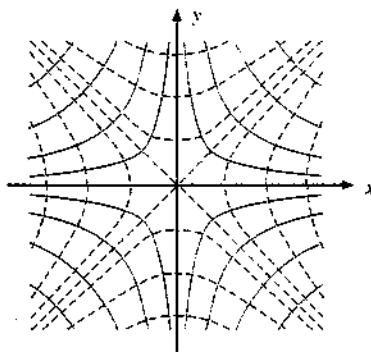


Figura 4.55

# Dielettrici

## 5.1 La costante dielettrica

L'interazione tra cariche elettriche fisse è stata studiata nei capitoli precedenti supponendo che lo spazio tra le cariche fosse vuoto. Successivamente sono state descritte le proprietà dei conduttori in equilibrio: esse possono essere riassunte dicendo che la carica di un conduttore si distribuisce sempre sulla sua superficie in modo tale che il campo generato da essa e da altre cariche eventualmente presenti sia nullo all'interno del conduttore. Questo è dunque equipotenziale e il valore del potenziale dipende dalla distribuzione di tutte le cariche presenti (paragrafo 4.4). La carica di un conduttore può essere facilmente cambiata, dando origine a una nuova situazione elettrostatica, sfruttando il fatto che è molto semplice cedergli o sottrargli carica attraverso il contatto con altri corpi carichi o il collegamento con generatori.

Vogliamo adesso studiare come viene modificato il campo elettrostatico nello spazio tra conduttori carichi quando questo viene parzialmente o totalmente riempito con un *materiale isolante* e quali fenomeni avvengono all'interno di un materiale isolante sottoposto ad un campo  $\mathbf{E}$ .

Cominciamo con l'esaminare una situazione semplice, un condensatore piano carico e isolato, in modo che la carica sulle armature resti costante. Se  $q_0$  è il valore della carica, distribuita con densità uniforme  $\sigma_0$ , tra le armature c'è un campo elettrico  $E_0$  e una d.d.p.  $V_0$  dati da

$$E_0 = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} , \quad V_0 = \frac{q_0}{C_0} = E_0 h ;$$

$C_0$  è la capacità e  $h$  la distanza tra le armature.

Introduciamo parallelamente alle armature e senza toccarle una lastra conduttrice di spessore  $s < h$ : si osserva che la d.d.p. tra le armature diminuisce (come è messo in evidenza ad esempio dalla diminuzione dell'angolo tra le foglie di un elettroskopio connesso in parallelo al condensatore). Infatti sulle facce della lastra si formano, per induzione elettrostatica completa, due distribuzioni di densità  $\sigma_0$  con segno tale da annullare il campo all'interno della lastra: all'esterno invece il campo resta invariato e pertanto

$$V = E_0(h - s) < V_0 .$$

indipendentemente dalla posizione della lastra. La presenza della carica indotta sulle facce della lastra può essere messa in evidenza toccando una faccia con una sferetta conduttrice sostenuta da un manico isolante e portando la sferetta a contat-

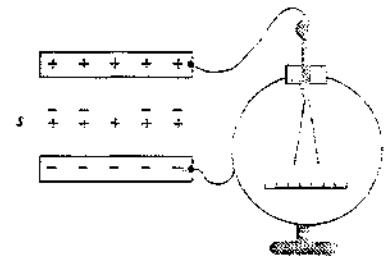
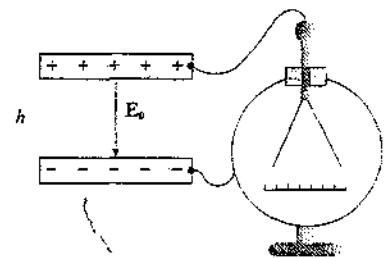


Figura 5.1

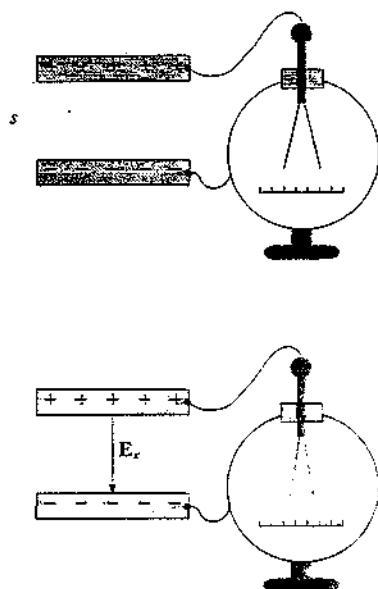


Figura 5.2

Costante dielettrica relativa

to con un elettroscopio; in tal modo si può anche verificare che sulle due facce le cariche hanno segno opposto.

Ripetiamo l'esperimento con una lastra di materiale isolante, definito nel paragrafo 1.1 come un materiale in cui la carica prodotta localmente per strofinio non è libera di muoversi. La d.d.p. tra le armature diminuisce e l'effetto, a parità di spessore  $s$ , è minore di quello rilevato con la lastra di conduttore. Un esame dello stato di carica delle facce dell'isolante, fatto con la sferetta di prova, non segnala la presenza di carica elettrica libera. La d.d.p. diminuisce linearmente all'aumentare dello spessore  $s$  della lastra, come dimostreremo nell'esempio 5.2 e assume il valore minimo  $V_\kappa$  quando tutto lo spazio tra le armature è riempito da materiale isolante. Il contatto tra la lastra di isolante e le armature del condensatore non produce alcun effetto dal momento che sulle facce della lastra non si è formata carica libera.

Una serie di esperienze di carattere sistematico, come quelle condotte da Faraday nel 1831, mostra che il rapporto tra la d.d.p.  $V_0$  misurata con il condensatore vuoto e la d.d.p.  $V_\kappa$  misurata con il condensatore completamente riempito di isolante è sempre maggiore di 1 e dipende soltanto dal tipo di materiale, ma non dalla carica sulle armature o dalle dimensioni e forma delle stesse.

Le sostanze isolanti che hanno questa proprietà di ridurre la d.d.p. tra le armature, e quindi il campo elettrico, si chiamano anche *sostanze dielettriche* o *dielettrici* e il rapporto adimensionale

$$\kappa = \frac{V_0}{V_\kappa} > 1 \quad (5.1)$$

è detto *costante dielettrica relativa del dielettrico*.

Ritornando al condensatore piano riempito completamente di dielettrico, il campo elettrico all'interno (nell'ipotesi che resti uniforme) deve valere

$$E_\kappa = \frac{V_\kappa}{h} = \frac{V_0}{\kappa h} = \frac{E_0}{\kappa} = \frac{\sigma_0}{\kappa \epsilon_0}, \quad (5.2)$$

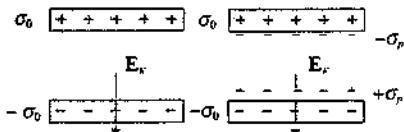


Figura 5.3

pertanto ridotto dello stesso fattore  $\kappa$ . La variazione del campo elettrico dovuta alla presenza del dielettrico è

$$E_0 - E_\kappa = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} - \frac{\sigma_0}{\kappa \epsilon_0} = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} = \frac{\chi}{1 + \chi} \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}$$

definendo

Suscettività elettrica

$$\chi = \kappa - 1 \quad (5.3)$$

una grandezza chiamata *suscettività elettrica del dielettrico*. Per il campo elettrico nel dielettrico possiamo dunque scrivere

$$E_\kappa = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} - \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} - \frac{\sigma_p}{\epsilon_0} \quad (5.4)$$

ponendo

$$\sigma_p = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \sigma_0 \quad (5.5)$$

La (5.4) mostra che il campo elettrico all'interno del dielettrico ha la stessa espressione di un campo nel vuoto sovrapposizione del campo dovuto alle cariche libere sulle armature e del campo di una distribuzione uniforme di carica con densità  $\sigma_p$ , che immaginiamo depositata sulle facce della lastra dielettrica, con segno opposto a quello della carica libera sull'armatura contigua. Come vedremo queste cariche non sono fittizie, bensì sono il risultato dei processi microscopici che avvengono all'interno del dielettrico sotto l'azione del campo esterno.

La capacità del condensatore pieno di dielettrico è

$$C_\kappa = \frac{q_0}{V_\kappa} = \kappa \frac{q_0}{V_0} = \kappa C_0 , \quad (5.6)$$

Capacità del condensatore con dielettrico

aumentata dello stesso fattore  $\kappa$  di cui è diminuita la d.d.p. ai capi del condensatore, in accordo col fatto che la carica è rimasta costante. Allo stesso modo di (5.1) si trova che (5.6) è una relazione di carattere generale che vale qualunque sia la forma del condensatore. Deduciamo allora che le formule (4.13, 4.16, 4.19), date per un condensatore sferico, cilindrico, piano, restano valide purché si sostituisca a  $\epsilon_0$  la grandezza

$$\epsilon = \kappa \epsilon_0 , \quad (5.7)$$

Costante dielettrica assoluta del dielettrico

della costante dielettrica assoluta del dielettrico. In particolare, per il condensatore piano, scriviamo esplicitamente

$$C_\kappa = \kappa C_0 = \frac{\kappa \epsilon_0 \Sigma}{h} = \frac{\epsilon \Sigma}{h} . \quad (5.8)$$

Notiamo che il vuoto può essere assimilato, per queste formule, a un dielettrico con costante dielettrica assoluta  $\epsilon_0$ , costante dielettrica relativa  $\kappa = 1$  e suscettività elettrica  $\chi = 0$ .

Nella tabella 5.1 sono riportati i valori della costante dielettrica relativa per alcuni materiali sottoposti, a temperatura ambiente, ad un campo elettrico costante. È anche riportata la rigidità dielettrica, cioè il massimo valore del campo elettrico che può essere applicato a un dielettrico senza che avvengano scariche al suo interno, concetto che discuteremo nell'esempio 5.4.

Rigidità dielettrica

Tabella 5.1 Costanti dielettriche relative e rigidità dielettriche

Sostanza	Costante dielettrica relativa $\kappa$	Rigidità dielettrica V/m
aria	1.00059	$3 \cdot 10^6$
acqua	80	—
alcool etilico	28	—
olio per trasformatori	2.5	$20 \cdot 10^6$
ambra	2.7	$90 \cdot 10^6$
bachelite	4.9	$24 \cdot 10^6$
carta	3.7	$16 \cdot 10^6$
polietilene	2.3	$50 \cdot 10^6$
polistirolo	2.6	$25 \cdot 10^6$
porcellana	6.5	$4 \cdot 10^6$
teflon	2.1	$60 \cdot 10^6$
vetro	$4 \div 7$	$20 \cdot 10^6$

## 5.2 Polarizzazione dei dielettrici

La spiegazione dei fenomeni osservati si basa sulla struttura elettrica microscopica della materia. Ricordiamo come il fenomeno dell'induzione elettrostatica, che rende possibile la separazione delle cariche dei due segni nei conduttori, sia dovuto al fatto che nei conduttori un certo numero di elettroni per atomo è separato dall'atomo stesso: all'interno dei conduttori esiste un *gas di elettroni* praticamente liberi.

Negli isolanti invece tutti gli elettroni sono legati agli atomi e non se ne allontanano spontaneamente. Per fare avvenire la separazione occorre agire dall'esterno, ad esempio tramite lo strofinio con un panno. Se si applica ai dielettrici un campo elettrico esterno avviene soltanto uno *spostamento locale* delle cariche che costituiscono gli atomi. Si tratta di effetti molto piccoli per ogni singolo atomo: come vedremo nell'esempio 5.10, gli spostamenti delle cariche sono dell'ordine di  $10^{-15}$  m, confrontabili con le dimensioni del nucleo. Però il numero di atomi per unità di volume è  $n = 10^{25} \div 10^{28} \text{ m}^{-3}$ , a seconda dello stato di aggregazione, e l'effetto complessivo è misurabile.

In un atomo in condizioni normali e in assenza di campo elettrico esterno la distribuzione degli elettroni è in media simmetrica rispetto al nucleo: essa viene rappresentata come una nube di carica negativa che occupa una zona intorno al nucleo di raggio pari alle dimensioni dell'atomo ( $\sim 10^{-10}$  m); il centro di massa della carica negativa coincide con il nucleo positivo.

Sotto l'azione di un campo  $E$  il centro (di massa) della nube negativa subisce uno spostamento in verso contrario al campo, il nucleo in senso concorde al campo e si raggiunge una posizione di equilibrio in cui questo effetto è bilanciato dall'attrazione tra le cariche di segno opposto. Detta  $x$  la distanza tra i centri delle cariche ovvero  $x$  il vettore che va dal centro della carica negativa al nucleo, ha senso definire il *momento di dipolo elettrico* di questa configurazione come

$$\mathbf{p}_a = Ze \mathbf{x} \quad . \quad (5.9)$$

Infatti l'atomo è un sistema elettricamente neutro e il *momento di dipolo* (5.9) ha un significato intrinseco (si veda il paragrafo 2.8).

Possiamo quindi affermare che un atomo acquista un momento di dipolo elettrico microscopico  $p_a$ , parallelo e concorde al campo  $E$ ; l'effetto cessa quando si annulla il campo. Il fenomeno si chiama *polarizzazione elettronica*.

Come abbiamo accennato nel paragrafo 2.7 e come vedremo in seguito nel paragrafo 5.10, esistono delle sostanze le cui molecole presentano un *momento di dipolo intrinseco*: si tratta di molecole poliatomiche formate da specie atomiche diverse ( $\text{H}_2\text{O}$ ,  $\text{CO}_2$ ,  $\text{NH}_3$ ) in cui la distribuzione delle cariche è tale che il centro delle cariche negative non coincide con il centro delle cariche positive. In assenza di campo elettrico esterno i dipoli molecolari sono orientati a caso, per via degli urti dovuti al moto di agitazione termica che distruggono eventuali configurazioni ordinate dovute alle interazioni tra dipoli. Quando si applica un campo  $E$ , su ciascuno dei dipoli di momento  $p_0$  agisce il momento delle forze (2.68) che ne causa un orientamento con il campo soltanto parziale perché disturbato dall'agitazione termica. Il grado di allineamento aumenta al diminuire della temperatura e all'aumentare dell'intensità del campo elettrico esterno.

Anche questo meccanismo, che prende il nome di *polarizzazione per orientamento*, porta al risultato che ogni molecola acquista un *momento di dipolo elettrico medio*  $\langle \mathbf{p} \rangle$  microscopico parallelo al campo  $E$ .

Senza approfondire oltre la dinamica dei meccanismi di polarizzazione, che verranno trattati nei paragrafi 5.10, 5.11 e 5.12, riassumiamo per ora l'effetto dell'applicazione di un campo elettrico ad un dielettrico dicendo che ciascun atomo o molecola acquista un momento di dipolo elettrico medio  $\langle \mathbf{p} \rangle$ , parallelo e concorde a  $E$ .

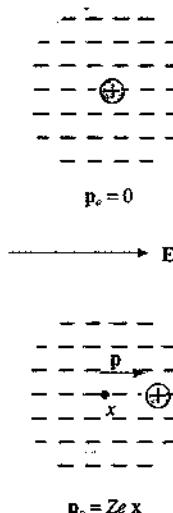


Figura 5.4

### Momento di dipolo elettrico

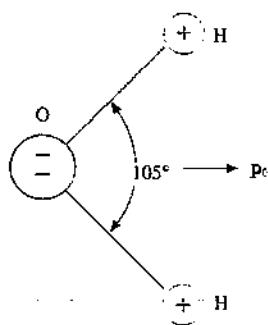


Figura 5.5

Considerato un volumetto  $\Delta\tau$  nell'intorno di un punto  $O$  in cui sono contenuti  $\Delta N$  atomi (o molecole), il momento di dipolo risultante  $\Delta p$  è dato da  $\Delta p = \Delta N \langle p \rangle$  e il momento di dipolo per unità di volume nell'intorno del punto  $O$  si scrive

$$\mathbf{P} = \frac{\Delta p}{\Delta\tau} = \frac{\Delta N}{\Delta\tau} \langle \mathbf{p} \rangle = n \langle \mathbf{p} \rangle , \quad (5.10)$$

dove  $n$  è il *numero di atomi (o molecole) per unità di volume*. Se nella (5.10) facciamo tendere  $\Delta\tau$  a zero otteniamo il valore di  $\mathbf{P}$  nel punto  $O$ . Bisogna dire che il passaggio al limite deve essere inteso nel senso che  $\Delta\tau$  è piccolo su scala macroscopica, ma sempre abbastanza grande da contenere un numero tale di atomi per cui abbia senso affermare che  $\langle \mathbf{p} \rangle$  rappresenta il momento di dipolo elettrico medio di ciascun elemento (la media cioè ha senso se il numero di elementi è grande). Ad esempio, se prendiamo un cubetto di lato  $10^{-6}$  m, il volume è  $\Delta\tau = 10^{-18}$  m<sup>3</sup>: con  $n = 10^{25}$  atomi/m<sup>3</sup>  $\Delta N = n \Delta\tau = 10^7$ , per cui  $\langle \mathbf{p} \rangle$  e  $\mathbf{P}$  sono bene definiti e non soggetti a fluttuazioni.

Il vettore  $\mathbf{P}$ , che caratterizza l'effetto di formazione dei momenti di dipolo indotti dal campo esterno, si chiama *polarizzazione del dielettrico*. Nella maggior parte dei dielettrici risulta che  $\mathbf{P}$  è proporzionale a  $\mathbf{E}$  e tale relazione si scrive

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 (\kappa - 1) \mathbf{E} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E} . \quad (5.11)$$

I *dielettrici* che obbediscono a (5.11) si chiamano *lineari*; essi sono materiali amorfi, dotati di simmetria spaziale in tutte le direzioni ovvero, come si dice, caratterizzati da *isotropia spaziale*.

Esistono mezzi anisotropi, come i cristalli, nei quali la suscettività elettrica non è un numero, ma un *tensore* (paragrafo 5.6). In queste sostanze il parallelismo tra  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{E}$  è mantenuto solo lungo alcune direzioni che coincidono con gli *assi cristallografici*.

### 5.3 Campo elettrico prodotto da un dielettrico polarizzato

Riprendiamo in considerazione il condensatore piano carico con all'interno una lastra di dielettrico, che supponiamo *polarizzato uniformemente*: il vettore polarizzazione  $\mathbf{P}$  è cioè costante in tutti i punti della lastra.

Suddividiamo la lastra in prismi infinitesimi di base  $d\Sigma_0$ , altezza  $dh$  e volume  $d\tau = d\Sigma_0 dh$ : ciascuno di questi ha, secondo (5.10), il momento di dipolo

$$dp = P d\tau = P d\Sigma_0 dh ,$$

essendo  $d\mathbf{h}$  orientato concordemente a  $\mathbf{P}$ . Ricordiamo, sempre dal paragrafo 2.8, che potenziale e campo di dipolo di un sistema neutro di cariche *non* dipendono dalla distribuzione effettiva delle cariche: qualsiasi distribuzione che abbia lo stesso momento di dipolo non è distinguibile sperimentalmente dalla distribuzione reale ed è quindi ad essa perfettamente *equivalente* per quanto riguarda gli effetti prodotti.

Sostituiamo allora al prisma un sistema costituito da due cariche  $\pm dq_p = \pm P d\Sigma_0$  poste nel vuoto e distanti  $dh$ , distribuite sulle basi del prisma con densità  $\pm \sigma_p = \pm dq_p / d\Sigma_0 = \pm P$ . Tali cariche hanno un momento di dipolo  $dp$  eguale a quello del prisma.

Se consideriamo due prismi consecutivi con una base in comune e se  $\mathbf{P}$  è costante, la carica  $+dq_p$  di un prisma si annulla con la carica  $-dq_p$  dell'altro sulla base in comune; ripetendo l'operazione per tutti i prismi alla fine rimangono solamente le cariche sulle basi dei prismi che appartengono alle facce della lastra.

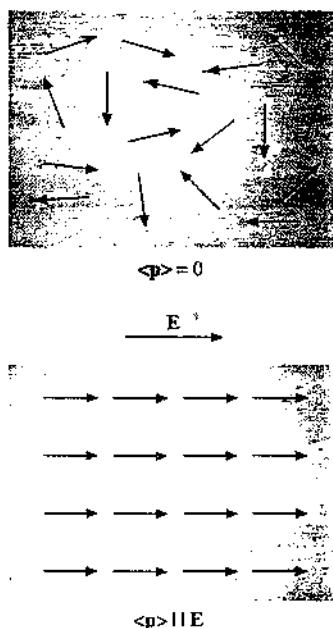


Figura 5.6



Figura 5.7

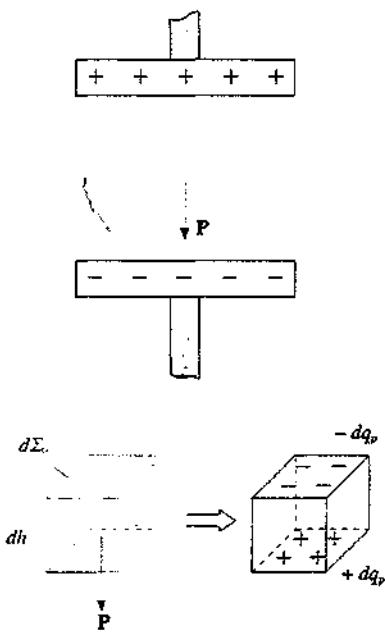


Figura 5.8

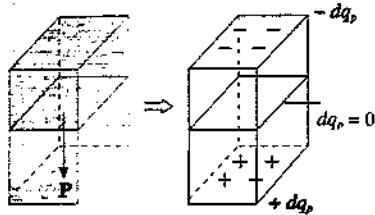


Figura 5.9

Cariche di polarizzazione

Il significato fisico dell'operazione è di ammettere che avvenga una compensazione delle cariche, spostate dalle posizioni di equilibrio, all'interno del dielettrico uniformemente polarizzato, ma *non* alla superficie limite dove la discontinuità del mezzo impedisce la compensazione. Qui la *carica* è *localizzata* entro uno strato di spessore pari alle dimensioni atomiche ed è a tutti gli effetti trattabile come una distribuzione superficiale di carica. La *lastra* viene quindi ad essere *equivalente a due distribuzioni di carica, localizzate sulle facce, con densità*  $\pm \sigma_p = \pm P$ .

È bene sottolineare che queste *cariche di polarizzazione non sono libere* come nei conduttori: esse si manifestano a causa degli *spostamenti microscopici locali, ma rimangono vincolate agli atomi o alle molecole*. Per questo motivo quando cerchiamo di prelevarne un campione non riusciamo ad asportarne nemmeno una piccola quantità misurabile. Per lo stesso motivo quando un dielettrico occupa completamente lo spazio interno a un condensatore e le facce del dielettrico vengono in più punti a contatto con le cariche libere presenti sulle armature conduttrici non avvengono trasferimenti di carica, pur essendo affacciate cariche di segno opposto.

Estendiamo il risultato a un dielettrico di forma qualunque, sempre uniformemente polarizzato; in un punto in cui il versore  $\mathbf{u}_n$  normale alla superficie è orientato verso l'esterno forma con  $\mathbf{P}$  l'angolo  $\theta$ , la carica  $dq_p = P d\Sigma_0$  è distribuita sulla superficie  $d\Sigma$ , con  $d\Sigma_0 = d\Sigma \cos\theta$ ; pertanto la densità superficiale è

$$\sigma_p = \frac{dq_p}{d\Sigma} = P \frac{d\Sigma_0}{d\Sigma} = P \cos\theta = \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}_n$$

Possiamo allora dire che in generale la *densità superficiale delle cariche di polarizzazione* in un dielettrico è eguale alla *componente* di  $\mathbf{P}$  lungo la *normale* alla superficie:

$$\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}_n = P \cos\theta . \quad (5.12)$$

Il caso della lastra considerata in precedenza corrisponde alle due orientazioni particolari  $\theta = 0$  e  $\theta = \pi$ . In generale, quando  $0 \leq \theta < \pi/2$  la densità di carica è positiva, quando  $\pi/2 < \theta \leq \pi$  essa è negativa ed è nulla solo per  $\theta = \pi/2$ , superficie parallela a  $\mathbf{P}$ . Di conseguenza in un dielettrico polarizzato, indipendentemente dalla forma, avremo *sempre* una parte della superficie carica positivamente e la rimanente carica negativamente. Se la *polarizzazione è uniforme* non si manifestano cariche all'interno del dielettrico, come abbiamo già notato, e quindi la *carica totale superficiale deve essere nulla*, come deve sempre essere una carica di polarizzazione visti i meccanismi da cui ha origine. Pertanto

$$\oint \sigma_p d\Sigma = \oint \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = 0 . \quad (5.13)$$

L'integrale essendo esteso a tutta la superficie del dielettrico.

Supponiamo ora che la *polarizzazione non sia uniforme* ed esaminiamo il valore della carica sulla base comune a due prismi infinitesimi contigui, come quelli già visti, con asse parallelo all'asse  $x$  e area di base  $d\Sigma = dy dz$ . Utilizziamo (5.12) con riferimento alla figura 5.13:

$$-dq'_p = \mathbf{P}' \cdot \mathbf{u}'_n d\Sigma = -P'_x dy dz ,$$

$$dq_p = \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = P_x dy dz ,$$

$$dq_p - dq'_p = -(P'_x - P_x) dy dz = -\frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz .$$

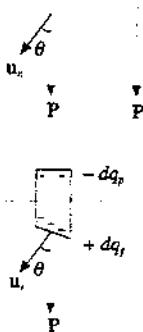


Figura 5.11

Vediamo che se  $\mathbf{P}$  varia lungo l'asse  $x$  non c'è *compensazione* tra le cariche e compare una *carica di polarizzazione* anche all'interno del dielettrico. Il risultato ottenuto si generalizza nel senso che dentro un volume infinitesimo  $d\tau = dx dy dz$  c'è la carica

$$dq_p = \left( -\frac{\partial P_x}{\partial x} - \frac{\partial P_y}{\partial y} - \frac{\partial P_z}{\partial z} \right) d\tau$$

distribuita con densità

$$\rho_p = \frac{dq_p}{d\tau} = -\nabla \cdot \mathbf{P} , \quad (5.14)$$

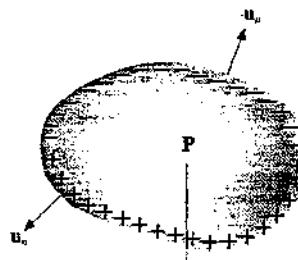


Figura 5.12

Densità spaziale di carica di polarizzazione

ricordando (3.19). Quindi in un *dielettrico* in cui la *polarizzazione non sia uniforme* oltre alla densità superficiale (5.12) esiste una *densità spaziale di carica di polarizzazione eguale in ogni punto all'opposto della divergenza del vettore P*.

Anche in questo caso la *carica totale di polarizzazione* del dielettrico deve essere nulla e abbiamo al posto di (5.13)

$$\oint \sigma_p d\Sigma + \int \rho_p d\tau = 0 \quad (5.15)$$

ovvero

$$\oint \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = \int \nabla \cdot \mathbf{P} d\tau . \quad (5.16)$$

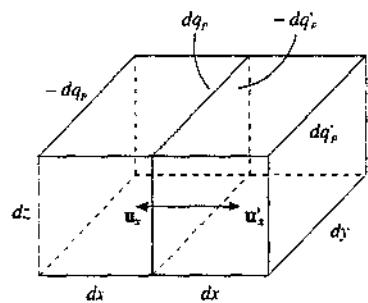


Figura 5.13

formalmente coincidente col teorema della divergenza (3.22). Le due distribuzioni di carica superficiale e spaziale si compensano *globalmente* (non localmente) dando carica totale nulla.

La conoscenza della polarizzazione  $\mathbf{P}$  permette dunque di calcolare il potenziale e il campo elettrico in ogni punto  $Q$  esterno al dielettrico. Da (2.22, 2.23)

$$V(Q) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma}{r} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\nabla \cdot \mathbf{P} d\tau}{r} , \quad (5.17)$$

dove  $r$  è la distanza da  $Q$  all'elemento di carica di polarizzazione. Se sono presenti anche cariche libere, ad esempio distribuite sulla superficie di un conduttore, alla (5.17) bisogna aggiungere il loro contributo

$$V'(Q) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint \frac{\sigma' d\Sigma}{r'} .$$

Dall'espressione del potenziale si ricava il campo elettrico come  $\mathbf{E} = -\nabla V$ .

Le sorgenti del campo elettrico sono quindi sia le cariche libere localizzate sulla superficie dei conduttori che le cariche di polarizzazione descritte da  $\sigma_p$  e  $\rho_p$ . Quando  $\nabla \cdot \mathbf{P} = 0$  la carica di polarizzazione all'interno del dielettrico si annulla e rimane solamente il contributo dovuto alla carica superficiale. La condizione  $\mathbf{P} = \text{costante}$  comporta necessariamente  $\nabla \cdot \mathbf{P} = 0$ ; esistono però condizioni più generali, che vedremo nel paragrafo 5.6, per cui  $\nabla \cdot \mathbf{P} = 0$  pur non essendo  $\mathbf{P} = \text{costante}$ . Tali condizioni si verificano nella maggior parte dei casi e, per questi, gli effetti introdotti dalla presenza del dielettrico polarizzato si riconducono esclusivamente alla carica di polarizzazione superficiale.

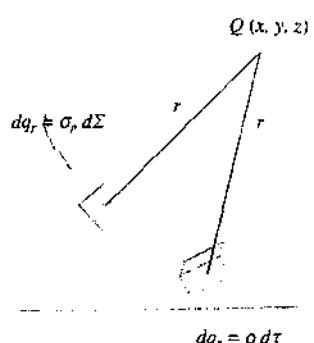


Figura 5.14

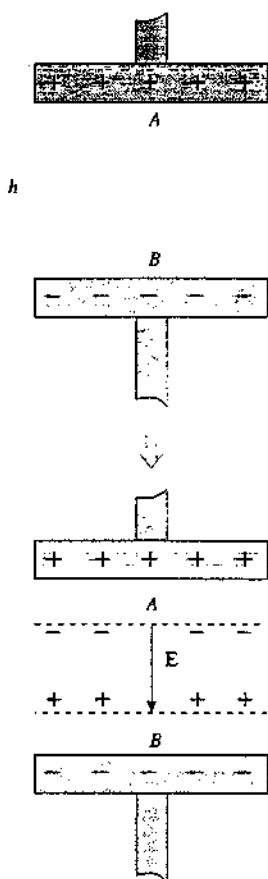


Figura 5.15

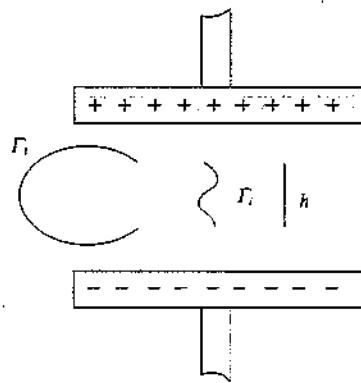


Figura 5.16

Campo elettrico medio macroscopico

## 5.4 Campo elettrico all'interno di un dielettrico polarizzato

Rivolghiamo adesso la nostra attenzione al *campo elettrico all'interno* di un *dielettrico polarizzato*. Per fissare le idee ci rifacciamo ancora una volta alla situazione più semplice che conosciamo, la lastra dielettrica posta all'interno di un condensatore piano carico. Abbiamo visto che la conseguenza della polarizzazione del dielettrico è la comparsa di una densità di carica  $\sigma_p$  sulle facce della lastra, così che si hanno le due distribuzioni  $\pm \sigma_0$  e  $\pm \sigma_p$ . Nello spazio vuoto tra le armature il campo elettrico vale in modulo  $E_0 = \sigma_0 / \epsilon_0$ , mentre all'interno del dielettrico il valore sarebbe

$$E = \frac{(\sigma_0 - \sigma_p)}{\epsilon_0} = E_0 - \frac{P}{\epsilon_0}$$

uniforme ovunque, ma inferiore al campo  $E_0$ .

Se prendiamo due punti  $A$  e  $B$  sulle facce del dielettrico, la d.d.p. tra di essi è

$$V_A - V_B = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = Eh$$

ed è la stessa qualunque percorso si scelga, essendo il campo elettrostatico conservativo.

È necessario però chiarire il significato del campo che compare nell'integrale. Per un percorso  $\Gamma_1$  esterno al dielettrico si tratta del campo elettrico nel vuoto dovuto alle suddette distribuzioni di carica. All'interno un qualsiasi percorso incontra invece situazioni molto particolari. La lastra è composta da nuclei e da elettroni e i *campi elettrici locali* sono molto differenti a seconda che la linea di integrazione passi vicina ad un nucleo o nello spazio vuoto tra gli atomi. Il campo elettrico sulla superficie di un protone, che ha raggio  $r \sim 10^{-15}$  m, è dato da  $e / 4\pi \epsilon_0 r^2 \approx 10^{21}$  V/m, mentre all'esterno di un atomo, a distanze dell'ordine di  $10^{-10}$  m dal nucleo, il campo elettrico microscopico è praticamente nullo. Il campo che compare nell'integrale è il *campo totale*, dovuto sia alle cariche esterne che a quelle atomiche, ed è rapidamente variabile da punto a punto, appunto a causa dei contributi atomici che sono completamente casuali lungo la linea di integrazione, sia in intensità che in direzione. D'altra parte ci sono precise conferme sperimentali che anche a piccolissime distanze la forza elettrica è coulombiana e quindi i *campi elettrici locali sono conservativi*; detto  $\mathbf{E}_i$  il campo interno, possiamo sempre scrivere, per qualsiasi percorso interno  $\Gamma_i$ ,

$$\int_A^B \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{s} = Eh$$

e pertanto definire un *campo elettrico medio macroscopico* all'interno del dielettrico come

$$E = \frac{1}{h} \int_A^B \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{s} , \quad (5.18)$$

coincidente col *campo che producono le distribuzioni  $\pm \sigma_0$  e  $\pm \sigma_p$  nello spazio occupato dal dielettrico considerato come se fosse vuoto*. Osserviamo che l'effetto delle cariche di polarizzazione è di *diminuire* il campo dovuto alle cariche libere esterne; per questa ragione si parla di *effetto depolarizzante*.

Le conclusioni raggiunte sono di carattere generale: il campo elettrico effettivo

nel vuoto e quello medio all'interno di un dielettrico si calcolano a partire dalle distribuzioni di carica libera e di carica di polarizzazione con le formule che abbiamo già stabilito. Il campo interno è sempre minore di quello che ci sarebbe nello stesso punto in assenza del dielettrico; la media in un dato punto, che porta alla formula (5.18), si può intendere come

$$\langle \mathbf{E} \rangle = \frac{1}{\tau} \int_{\tau} \mathbf{E} d\tau , \quad (5.19)$$

dove  $\tau$  è un volume molto piccolo intorno al punto, ma contenente un grandissimo numero di atomi, secondo quanto discusso nel paragrafo 5.3.

La determinazione sperimentale del campo elettrico medio all'interno di un dielettrico, ad esempio con una carica di prova su cui si misura la forza, non è in realtà eseguibile direttamente: l'introduzione di una carica di prova, di dimensioni tali da essere sensibile solo al valor medio macroscopico del campo, può essere effettuata solo praticando un *foro* nel dielettrico, con il che si ottiene una *cavità vuota, esterna al dielettrico*. La difficoltà è superabile concettualmente operando nel modo seguente. Si pratica nel dielettrico una cavità cilindrica di base  $\Sigma$  e altezza  $s$ , parallela alla direzione di  $\mathbf{E}$ , con la condizione  $\Sigma / s^2 \approx 0$ : la *cavità* cioè è *lunga e sottile*, in modo che le cariche di polarizzazione che compaiono sulle basi diano luogo a una perturbazione trascurabile (sulle pareti laterali della cavità non si hanno cariche di polarizzazione se  $\mathbf{P}$  è parallelo a  $\mathbf{E}$  e quindi alle pareti stesse). Consideriamo ora una linea chiusa  $ABCD$  con i lati  $AB$  e  $CD$  paralleli all'asse della cavità e contenuti rispettivamente nella cavità e nel dielettrico e i restanti lati infinitesimi. La circuitazione del campo elettrico lungo questa linea deve essere nulla, il che comporta

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{AB} + \langle \mathbf{E} \rangle \cdot \mathbf{CD} = E |AB| - \langle E \rangle |CD| = 0 ,$$

indicando con  $E$  il campo nella cavità e con  $\langle E \rangle$  il campo medio nel dielettrico. Pertanto

$$\mathbf{E} = \langle \mathbf{E} \rangle :$$

il campo elettrico misurato nella cavità lunga e sottile è eguale al campo elettrico medio all'interno del dielettrico.

La scelta della forma della cavità è essenziale nella dimostrazione; vedremo più ampiamente l'argomento del valore del campo in cavità di forme diverse nel paragrafo 5.8.

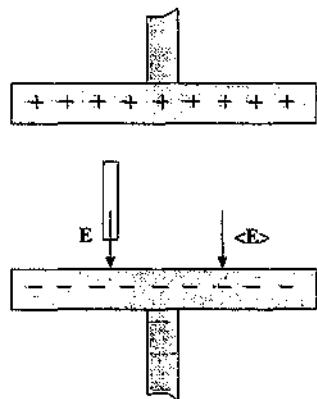


Figura 5.17

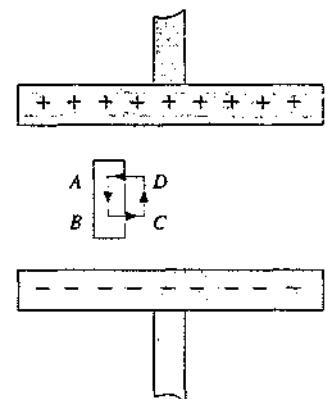


Figura 5.18

## 5.5 Equazioni generali dell'elettrostatica in presenza di dielettrici. Il vettore induzione dielettrica

Nel paragrafo 5.4 abbiamo menzionato il fatto che il campo elettrico prodotto da cariche ferme è conservativo anche in presenza di dielettrici polarizzati. Continuano pertanto a valere le due formulazioni, integrale e locale, date da (2.10) e (2.54).

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0 , \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0 ,$$

e la proprietà equivalente che il campo elettrico si possa ottenere come gradiente della funzione potenziale,  $\mathbf{E} = -\nabla V$ .

Anche la legge di Gauss resta valida in presenza di dielettrici polarizzati, purché si tenga conto delle cariche di polarizzazione oltre che delle cariche libere:

$$\oint \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = \frac{q + q_p}{\epsilon_0} . \quad (5.20)$$

*Il flusso del campo elettrico attraverso una superficie chiusa è eguale alla somma delle cariche libere e delle cariche di polarizzazione contenute all'interno della superficie.* In forma differenziale

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho + \rho_p}{\epsilon_0} . \quad (5.21)$$

Ricordando (5.14) abbiamo

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot \epsilon_0 \mathbf{E} = \rho - \nabla \cdot \mathbf{P} \Rightarrow \nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho$$

a cui corrisponde la legge integrale

$$\oint (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = q .$$

Introduciamo il vettore  $\mathbf{D}$ , detto *induzione dielettrica*:

Induzione dielettrica  $\mathbf{D}$

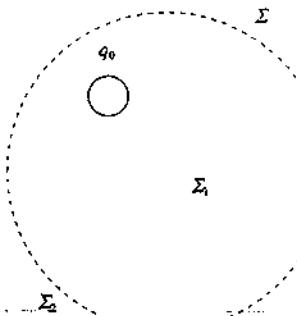
$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} ; \quad (5.22)$$

la definizione è generale, valida qualunque sia la relazione tra  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{E}$ . Le leggi precedenti si scrivono allora

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho , \quad (5.23)$$

Leggi di Gauss per il vettore  $\mathbf{D}$

$$\oint \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = q \quad (5.24)$$



*Il flusso del vettore  $\mathbf{D}$  attraverso una superficie chiusa, contenente in generale sia cariche libere che cariche di polarizzazione, dipende soltanto dalle cariche libere.* La proprietà non è banale perché la superficie chiusa  $\Sigma$  può intersecare un dielettrico, invece che contenere interamente, per cui la carica di polarizzazione all'interno di  $\Sigma$  non è nulla.

Per chiarire l'argomento è opportuno ricavare (5.24) ragionando sulla forma integrale della legge di Gauss (5.20), con riferimento alla figura 5.19. La superficie chiusa  $\Sigma$  contiene al suo interno la carica libera  $q_0$  e una parte di un dielettrico polarizzato; diciamo  $\Sigma_1$  la superficie del dielettrico interno a  $\Sigma$  e  $\Sigma_2$  la superficie di intersezione col dielettrico; inoltre  $\tau$  è il volume di dielettrico racchiuso in  $\Sigma$ . Abbiamo:

$$\Phi(\mathbf{E}) = \frac{q_0}{\epsilon_0} + \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\Sigma_1} \sigma_p d\Sigma + \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\tau} \rho_p d\tau ,$$

Figura 5.19

dove  $\sigma_p$  è la densità superficiale e  $\rho_p$  la densità spaziale di carica di polarizzazione. Usiamo (5.12), (5.14) e il teorema della divergenza (3.22) per scrivere

$$\frac{1}{\epsilon_0} \int_{\Sigma_1} \sigma_p d\Sigma = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\Sigma_1} \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma ,$$

$$\frac{1}{\epsilon_0} \int_{\tau} \rho_p d\tau = -\frac{1}{\epsilon_0} \int_{\tau} \nabla \cdot \mathbf{P} d\tau = -\frac{1}{\epsilon_0} \int_{\Sigma_1 + \Sigma_2} \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma .$$

Pertanto nella somma gli integrali estesi a  $\Sigma_1$  si elidono e si ottiene

$$\Phi(\mathbf{E}) = \oint_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = \frac{q_0}{\epsilon_0} - \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\Sigma_1} \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma :$$

il flusso di  $\mathbf{E}$  attraverso  $\Sigma$  contiene un contributo, in generale non nullo, dovuto alla carica di polarizzazione. Poiché nella parte di  $\Sigma$  non coincidente con  $\Sigma_2$ , cioè nella parte esterna al dielettrico,  $\mathbf{P}$  è nulla, è lecito scrivere

$$\int_{\Sigma_1} \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = \oint_{\Sigma} \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma$$

e in conclusione

$$\oint_{\Sigma} (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = q_0 ,$$

che, tenuto conto di (5.22), è la (5.24).

Se avessimo scelto  $\Sigma$  completamente all'interno del dielettrico, dove non ci sono cariche libere, non ci sarebbero stati il termine con  $q_0$  e quello con  $\sigma_p$  e avremmo trovato

$$\Phi(\mathbf{E}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\tau} \rho_p d\tau = -\frac{1}{\epsilon_0} \int_{\tau} \nabla \cdot \mathbf{P} d\tau = -\frac{1}{\epsilon_0} \oint_{\Sigma} \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma$$

ovvero  $\Phi(\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = 0$ , in accordo con la successiva (5.25).

L'utilità delle relazioni (5.23) e (5.24) riguardanti il vettore  $\mathbf{D}$  si può capire osservando che di norma sono le cariche libere ad essere conosciute e non le cariche di polarizzazione. È quindi possibile, con i metodi visti nel capitolo 3, calcolare il vettore  $\mathbf{D}$ ; allora, tramite (5.22) e se è nota la relazione tra  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{P}$ , si determinano sia il campo elettrico che la polarizzazione e da questa le densità di carica di polarizzazione.

Nello spazio privo di cariche libere, come può essere lo spazio tra conduttori carichi riempito da un dielettrico, le relazioni (5.23) e (5.24) diventano

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 , \quad \oint_{\Sigma} \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = 0 : \quad (5.25)$$

Proprietà di  $\mathbf{D}$  in assenza di cariche libere

in assenza di cariche libere il campo vettoriale  $\mathbf{D}$  è solenoidale (vedi paragrafo 3.4).

Per completezza aggiungiamo che per il vettore induzione dielettrica non si può stabilire che la circuitazione lungo qualsiasi percorso chiuso è nulla:  $\mathbf{D}$  non è cioè un campo conservativo.

Infine notiamo esplicitamente che è significativo utilizzare  $\mathbf{D}$  soltanto in presenza di un dielettrico; nello spazio vuoto  $\mathbf{P} = 0$  e  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$ , per cui  $\mathbf{D}$  non ha nessuna proprietà particolare che lo distingua da  $\mathbf{E}$ .

**Unità di misura**

La polarizzazione e l'induzione dielettrica hanno la stessa unità di misura, che è quella della densità superficiale di carica,  $C/m^2$ .

La costante dielettrica relativa e la suscettività elettrica sono adimensionali. Invece la costante dielettrica assoluta ha le dimensioni di  $\epsilon_0$ , che si possono ricavare da  $E = \sigma / \epsilon_0$  e risultano farad/m, F/m, unità corrispondente, ma più usata, di  $C^2 / Nm^2$ , indicata nella (1.6).

### 5.6 Dipendenza della polarizzazione dal campo elettrico. Dielettrici isotropi e anisotropi

Nel paragrafo 5.2 abbiamo definito come dielettrici lineari quelli che seguono la relazione (5.11) di parallelismo tra  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{E}$ :

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 (\kappa - 1) \mathbf{E} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E} .$$

Da (5.22) e (5.7) si ricava

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon_0 (1 + \chi) \mathbf{E} = \epsilon_0 \kappa \mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E} \quad (5.26)$$

e introducendo tale relazione in (5.11),  $\mathbf{P} = \epsilon_0 (\kappa - 1) \mathbf{D} / \epsilon$  ovvero

$$\mathbf{P} = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \mathbf{D} = \frac{\chi}{1 + \chi} \mathbf{D} . \quad (5.27)$$

In un dielettrico lineare l'induzione dielettrica, il campo elettrico e la polarizzazione sono vettori tra loro paralleli, legati da relazioni in cui le proprietà del dielettrico sono espresse soltanto dalla costante dielettrica relativa  $\kappa$  o, equivalentemente, dalla suscettività elettrica  $\chi$ .

Se il dielettrico lineare è omogeneo, cioè a densità costante, la costante dielettrica relativa è anch'essa ovunque costante e da (5.27) si ricava

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \nabla \cdot \mathbf{D} .$$

In assenza di cariche libere nel dielettrico  $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$  e quindi

$$\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P} = 0 . \quad (5.28)$$

Proprietà dei dielettrici lineari

In un dielettrico lineare e omogeneo la densità spaziale di carica di polarizzazione è nulla e le cariche di polarizzazione sono distribuite esclusivamente sulle superficie. Ciò avviene anche se il campo elettrico all'interno del dielettrico e quindi la polarizzazione ad esso parallela non sono uniformi: vuol dire che in tal caso la legge di variazione è tale da soddisfare sempre alla (5.28).

#### Esempio 5.1

Una sfera conduttrice, di raggio  $R$  e carica  $q$ , è immersa in un dielettrico indefinito, lineare e omogeneo, di costante dielettrica relativa  $\kappa$ . Calcolare il campo elettrico  $E(r)$ , la polarizzazione  $\mathbf{P}(r)$  e la densità di carica di polarizzazione.

**Soluzione**

In assenza di dielettrico il campo elettrico all'esterno della sfera è dato da

$$\mathbf{E}_0(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{u}_r ;$$

in particolare, per  $r = R$ , cioè sulla superficie della sfera,

$$\mathbf{E}_0(R) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \mathbf{u}_r = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{u}_r .$$

In presenza di dielettrico applichiamo la legge di Gauss (5.24) al vettore  $\mathbf{D}$  su una superficie sferica di raggio  $r > R$ , concentrica alla sfera.

Seguendo le considerazioni di simmetria già sviluppate nell'esempio 3.1 otteniamo

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{D}) &= \oint \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = 4\pi r^2 D = q \\ \mathbf{D}(r) &= \frac{q}{4\pi r^2} \mathbf{u}_r \end{aligned} \quad (5.29)$$

e quindi, in base alle (5.26) e (5.7),

$$\mathbf{E}(r) = \frac{\mathbf{D}(r)}{\epsilon} = \frac{q}{4\pi\kappa\epsilon_0 r^2} \mathbf{u}_r = \frac{\mathbf{E}_0(r)}{\kappa} . \quad (5.30)$$

Il campo elettrico nel dielettrico indefinito risulta ridotto del fattore  $\kappa$  rispetto al campo nel vuoto, come avviene nel condensatore piano del paragrafo 5.1. Per  $r = R$

$$\mathbf{E}(R) = \frac{q}{4\pi\kappa\epsilon_0 R^2} \mathbf{u}_r = \frac{\sigma}{\kappa\epsilon_0} \mathbf{u}_r ;$$

è come se la presenza del dielettrico portasse a una riduzione delle densità di carica di un fattore  $\kappa$ .

L'effetto è dovuto alle cariche di polarizzazione, di segno opposto a  $q$ , che compaiono sulla superficie del dielettrico a contatto con il conduttore. Infatti la polarizzazione del dielettrico, secondo (5.27), è

$$\mathbf{P}(r) = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \mathbf{D} = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{q}{4\pi r^2} \mathbf{u}_r$$

e sulla superficie del dielettrico ( $r = R$ )

$$\mathbf{P}(R) = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{q}{4\pi R^2} \mathbf{u}_r = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \sigma \mathbf{u}_r$$

ovvero, in termini di densità,

$$\sigma_p = \mathbf{P}(R) \cdot \mathbf{u}_n = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \sigma \mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_n = -\frac{\kappa - 1}{\kappa} \sigma ,$$

in quanto il versore  $\mathbf{u}_n$  uscente dalla superficie è opposto a  $\mathbf{u}_r$ .

La carica di polarizzazione è

$$q_p = 4\pi R^2 \sigma_p = -\frac{\kappa - 1}{\kappa} 4\pi R^2 \sigma = -\frac{\kappa - 1}{\kappa} q$$

e quindi, per  $r \geq R$ , il campo elettrico effettivo è

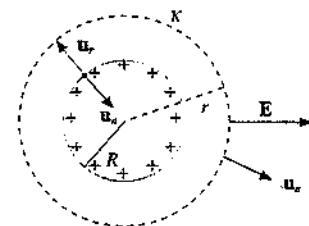


Figura 5.20

$$\mathbf{E}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q+q_p}{r^2} \mathbf{u}_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left(1 - \frac{\kappa-1}{\kappa}\right) \mathbf{u}_r = \frac{q}{4\pi\kappa\epsilon_0 r^2} \mathbf{u}_r ,$$

in accordo con (5.30). Si vede anche in questo caso l'effetto depolarizzante del dielettrico.

La polarizzazione nel dielettrico è una funzione del tipo  $k u_r / r^2$  e si verifica, come nell'esempio 3.5, che  $\nabla \cdot \mathbf{P} = 0$  ovunque. Anche se la polarizzazione non è uniforme, la densità spaziale di carica è nulla.

Quando invece, pur essendo il dielettrico lineare, la costante dielettrica relativa varia da punto a punto, si ha da (5.27)

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = \frac{\kappa-1}{\kappa} \nabla \cdot \mathbf{D} + \mathbf{D} \cdot \nabla \left( \frac{\kappa-1}{\kappa} \right) ,$$

dove abbiamo usato l'identità vettoriale (3.36) relativa a  $\nabla \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{a})$ .

Anche in assenza di cariche libere nel dielettrico la divergenza di  $\mathbf{P}$  non è nulla e dipende dal gradiente della funzione  $(\kappa-1)/\kappa$ :

$$\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P} = -\mathbf{D} \cdot \nabla \left( \frac{\kappa-1}{\kappa} \right) . \quad (5.31)$$

Bisogna dire che il caso (5.28) è quello di gran lunga più frequente.

Abbiamo già accennato nel paragrafo 5.2 al fatto che i *dielettrici lineari* sono dotati di simmetria spaziale, cioè sono *isotropi*. Per i *dielettrici anisotropi*, come i *cristalli*, la polarizzazione  $\mathbf{P}$  non è in generale parallela al campo  $\mathbf{E}$  e la relazione tra  $\mathbf{P}$  ed  $\mathbf{E}$  è espressa dalla terna di equazioni

Dielettrici anisotropi

Tensore suscettività elettrica

$$P_x = \epsilon_0 (\chi_{11} E_x + \chi_{12} E_y + \chi_{13} E_z)$$

$$P_y = \epsilon_0 (\chi_{21} E_x + \chi_{22} E_y + \chi_{23} E_z) \quad (5.32)$$

$$P_z = \epsilon_0 (\chi_{31} E_x + \chi_{32} E_y + \chi_{33} E_z) .$$

I nove numeri  $\chi_{ij}$  costituiscono il *tensore suscettività elettrica*; essi sono in realtà sei, poiché  $\chi_{ij} = \chi_{ji}$  ( $i \neq j$ ), il *tensore* cioè è *simmetrico*. Introduciamo (5.22) e otteniamo

$$D_x = \epsilon_0 [(1 + \chi_{11}) E_x + \chi_{12} E_y + \chi_{13} E_z]$$

$$D_y = \epsilon_0 [\chi_{21} E_x + (1 + \chi_{22}) E_y + \chi_{23} E_z] \quad (5.33)$$

$$D_z = \epsilon_0 [\chi_{31} E_x + \chi_{32} E_y + (1 + \chi_{33}) E_z] .$$

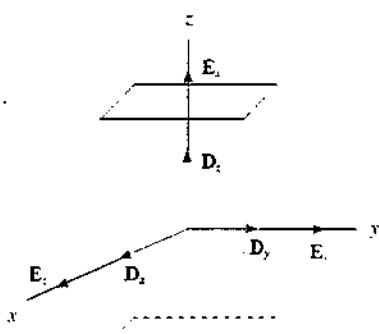


Figura 5.21

Nemmeno il vettore  $\mathbf{D}$  è parallelo al campo  $\mathbf{E}$ .

In questi materiali esistono tuttavia tre direzioni caratteristiche, tra loro ortogonalì, lungo ciascuna delle quali  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{D}$  sono paralleli. Detta  $i$  una qualsiasi di queste direzioni, si ha

$$D_i = \epsilon_0 E_i + P_i = \epsilon_0 (1 + \chi_{ii}) E_i = \epsilon_i E_i .$$

Tali direzioni sono note come *assi cristallografici* o *assi ottici del dielettrico*, per

le proprietà connesse con la propagazione della luce lungo di essi.

Se si scelgono questi assi coordinati le (5.33) diventano

$$\begin{aligned} D_x &= \epsilon_0 E_x + P_x = \epsilon_0 (1 + \chi_x) E_x = \epsilon_x E_x \\ D_y &= \epsilon_0 E_y + P_y = \epsilon_0 (1 + \chi_y) E_y = \epsilon_y E_y \\ D_z &= \epsilon_0 E_z + P_z = \epsilon_0 (1 + \chi_z) E_z = \epsilon_z E_z \end{aligned} \quad (5.34)$$

In tale sistema di riferimento il tensore è diagonalizzato: ciò non vuol dire che  $\mathbf{D}$  è parallelo a  $\mathbf{E}$ , perché  $\epsilon_x \neq \epsilon_y \neq \epsilon_z$ .

## 5.7 Discontinuità dei campi sulla superficie di separazione tra due dielettrici

Nel paragrafo 3.3 abbiamo studiato la discontinuità del campo elettrico nell'attraversare una superficie su cui è depositata una carica. Una situazione di questo tipo si ritrova sempre quando si attraversa la superficie limite di un dielettrico polarizzato e quindi anche sulla superficie  $\Sigma$  di separazione tra due dielettrici diversi, di costanti dielettriche relative  $\kappa_1$  e  $\kappa_2$ . Indichiamo con  $\mathbf{E}_1$ ,  $\mathbf{P}_1$ ,  $\mathbf{D}_1$  il campo elettrico, la polarizzazione e l'induzione dielettrica sulla faccia di  $\Sigma$  rivolta al dielettrico di costante dielettrica  $\kappa_1$  e con  $\mathbf{E}_2$ ,  $\mathbf{P}_2$ ,  $\mathbf{D}_2$  i corrispondenti valori sulla faccia di  $\Sigma$  rivolta al secondo dielettrico.

Sappiamo da (3.14) che la componente tangenziale di  $\mathbf{E}$  rimane costante nel passaggio attraverso  $\Sigma$ , circostanza che si esprime con la relazione

$$E_{1n} = E_1 \sin \theta_1 = E_2 \sin \theta_2 = E_{2n} \quad (5.35)$$

Applichiamo adesso la legge di Gauss al vettore  $\mathbf{D}$ , scegliendo per superficie di integrazione una scatola cilindrica di altezza infinitesima ortogonale a  $\Sigma$  e con le basi all'interno dei due dielettrici, in analogia a quanto fatto nel paragrafo 3.3. All'interno della superficie del cilindro non ci sono cariche libere e quindi

$$\mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{u}_2 d\Sigma + \mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{u}_1 d\Sigma = (D_{2n} - D_{1n}) d\Sigma = 0 \Rightarrow D_{1n} = D_{2n} \quad , \quad (5.36)$$

nel passaggio attraverso  $\Sigma$  la componente normale di  $\mathbf{D}$  non varia. Da (5.22)

$$\epsilon_0 E_{1n} + P_{1n} = \epsilon_0 E_{2n} + P_{2n}$$

e pertanto

$$E_{2n} - E_{1n} = \frac{P_{1n} - P_{2n}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_{1p} - \sigma_{2p}}{\epsilon_0} \quad .$$

che corrisponde alla (3.15) e poteva essere ricavata direttamente. Da (5.36) e (5.26) otteniamo inoltre

$$\kappa_1 \epsilon_0 E_1 \cos \theta_1 = \kappa_2 \epsilon_0 E_2 \cos \theta_2 \quad (5.37)$$

e dividendo membro a membro (5.35) e (5.37)

$$\frac{\tan \theta_2}{\tan \theta_1} = \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \quad . \quad (5.38)$$

La discontinuità della componente normale di  $\mathbf{E}$ , insieme alla continuità della componente tangenziale, comporta un cambiamento di direzione delle linee di

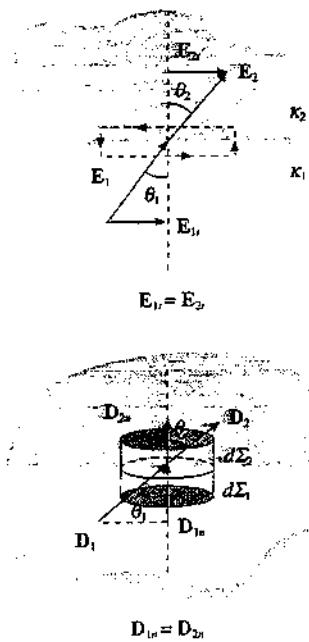


Figura 5.22

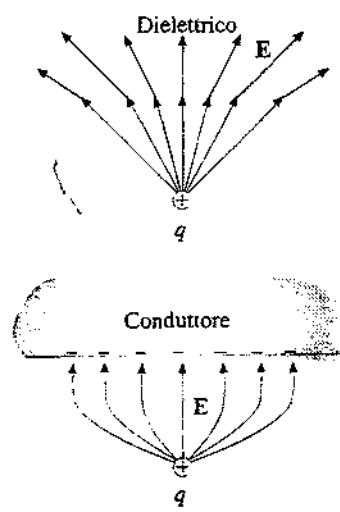


Figura 5.23

## Rifrazione delle linee di forza



Figura 5.24

forza del campo elettrico, fenomeno che si chiama anche *rifrazione delle linee di forza*. Si vede che se  $\kappa_1$  è minore di  $\kappa_2$ ,  $\theta_2$  è maggiore di  $\theta_1$ : le linee di forza si allontanano in questo caso dalla normale alla superficie. Nella figura 5.23 sono confrontati i comportamenti delle linee di forza del campo elettrico prodotto da una carica  $q$  quando incontrano un dielettrico e un conduttore.

In particolare se  $\theta_1 = 0$  anche  $\theta_2 = 0$  e le condizioni (5.36, 5.37) diventano

$$D_1 = D_2, \quad \kappa_1 E_1 = \kappa_2 E_2 \quad (5.39)$$

Se praticchiamo in un dielettrico di costante dielettrica relativa  $\kappa$  una *cavità cilindrica vuota* ( $\kappa = 1$ ) con le basi ortogonali alle linee di  $D$ , il vettore  $D$  ha lo stesso valore nel dielettrico e nella cavità: pertanto, *misurando il campo elettrico  $E$  nella cavità e moltiplicandolo per  $\epsilon_0$  otteniamo il valore di  $D$  all'interno del dielettrico*. Non è necessario in questo caso che la base sia molto piccola: anche se la cavità è larga e sulle basi c'è una carica di polarizzazione non trascurabile,  $D$  è continuo nel passaggio dal dielettrico alla cavità.

## Esempio 5.2

Una lastra di dielettrico lineare e omogeneo, di area  $\Sigma$  e spessore  $s$ , è inserita in un condensatore piano carico parallelamente alle armature, di area  $\Sigma$  e distanti  $h$ . Determinare i valori dei campi  $E$ ,  $P$ ,  $D$  e la d.d.p. tra le armature al variare dello spessore  $s$  della lastra.

## Soluzione

Abbiamo già discusso parzialmente questa situazione, a cui ora applichiamo le condizioni di discontinuità appena determinate. Chiamiamo  $E_0 = \sigma_0 / \epsilon_0$  il campo in assenza di dielettrico,  $D = \epsilon_0 E_0 = \sigma_0$  l'induzione dielettrica e  $V_0 = E_0 h = \sigma_0 h / \epsilon_0$  la d.d.p. tra le armature. Introducendo il dielettrico sulle facce di questo si formano le cariche di polarizzazione distribuite con densità  $\sigma_p$ . Nello spazio vuoto il campo elettrico e l'induzione dielettrica conservano i loro valori; passando nel dielettrico l'induzione dielettrica non varia,

$$\epsilon_0 E_0 = \epsilon E = \kappa \epsilon_0 E$$

e quindi

$$E_0 = \kappa E$$

La polarizzazione, nulla nello spazio vuoto, vale nel dielettrico

$$P = \epsilon_0 (\kappa - 1) E = \epsilon_0 \frac{\kappa - 1}{\kappa} E_0 = \frac{\kappa - 1}{\kappa} D = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \sigma_0 \quad ;$$

questo è il valore assoluto della densità di carica di polarizzazione. Le conclusioni tratte finora non dipendono dallo spessore del dielettrico.

La d.d.p. tra le armature si scrive

$$V = \int_0^h E \cdot dh = E_0 (h - s) + Es \quad .$$

qualunque sia la posizione della lastra rispetto alle armature. Introduciamo i valori dei campi:

$$V = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} (h - s) + \frac{\sigma_0}{\kappa \epsilon_0} s = \frac{\sigma_0 h}{\epsilon_0} \left( 1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{s}{h} \right) = V_0 \left( 1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{s}{h} \right) \quad .$$

La d.d.p. diminuisce linearmente con  $s$  ed è minima quando il dielettrico riempie completamente lo spazio tra le armature ( $s = h$ ): in effetti in tal caso  $E = E_0 / \kappa$  ovunque e l'integrale di linea assume il suo valore minimo che è  $V = Eh = E_0 h / \kappa = V_0 / \kappa$ . Abbiamo

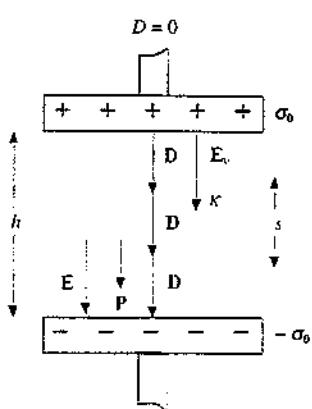


Figura 5.25

così ricavato e spiegato i risultati degli esperimenti presentati nel paragrafo 5.1.  
La d.d.p. si può riscrivere

$$V = \frac{\sigma_0 \Sigma}{\epsilon_0 \Sigma} \left( h - \frac{\kappa - 1}{\kappa} s \right) ,$$

in cui  $\sigma_0 \Sigma$  è la carica libera  $q$  presente sulle armature. Pertanto

$$\frac{V}{q} = \frac{1}{C} = \frac{h-s}{\epsilon_0 \Sigma} + \frac{s}{\epsilon_0 \kappa \Sigma} ,$$

dove  $C$  è la capacità del condensatore parzialmente riempito di dielettrico. Si vede dalla formula che la capacità non dipende dalla posizione della lastra e che il sistema si può interpretare come due condensatori in serie, uno vuoto con capacità  $\epsilon_0 \Sigma / (h-s)$ , l'altro con dielettrico, di capacità  $\epsilon_0 \kappa \Sigma / s$ . In realtà tra il primo e il secondo condensatore della serie non c'è un'armatura conduttrice. Si può però immaginare di porre una sottilissima lastra conduttrice sulla faccia del dielettrico, al potenziale che compete a quella posizione, con densità di carica  $\pm \sigma_0$ , e si ottengono realmente due condensatori in serie, senza alterare lo stato elettrico del sistema.

### Esempio 5.3

Un condensatore piano, con armature di area  $\Sigma$  distanti  $h$ , è riempito da due lastre di dielettrico, una di spessore  $d_1$  e costante dielettrica relativa  $\kappa_1$ , l'altra di spessore  $d_2$  e costante dielettrica relativa  $\kappa_2$ . Ai capi del condensatore è applicata una d.d.p.  $V$ . Calcolare i valori  $E_1$  e  $E_2$  del campo elettrico nei due dielettrici e la densità di carica di polarizzazione  $\sigma_p$  sulla superficie di separazione tra i due dielettrici.

#### Soluzione

In ciascun dielettrico il campo elettrico è uniforme e ortogonale alle armature; alla superficie di separazione esso è discontinuo secondo (5.39):

$$\kappa_1 E_1 = \kappa_2 E_2 .$$

Questa esprime anche la *continuità dell'induzione dielettrica D* nell'attraversamento della superficie di separazione. In modulo  $D$  è eguale alla densità di carica libera sulle armature,

$$D = \epsilon_0 \kappa_1 E_1 = \epsilon_0 \kappa_2 E_2 = \sigma_0 .$$

La d.d.p. tra le armature si scrive

$$V = \int_0^h \mathbf{E} \cdot d\mathbf{b} = E_1 d_1 + E_2 d_2 ;$$

facendo sistema con (5.39) si trova

$$E_1 = \frac{\kappa_2 V}{\kappa_2 d_1 + \kappa_1 d_2} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0 \kappa_1} \quad ; \quad E_2 = \frac{\kappa_1 V}{\kappa_2 d_1 + \kappa_1 d_2} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0 \kappa_2} \quad , \quad (5.40)$$

e quindi

$$D = \frac{\epsilon_0 \kappa_1 \kappa_2 V}{\kappa_2 d_1 + \kappa_1 d_2} .$$

Le densità di carica di polarizzazione nei due dielettrici sono

$$\sigma_1 = \frac{\kappa_1 - 1}{\kappa_1} D \quad , \quad \sigma_2 = \frac{\kappa_2 - 1}{\kappa_2} D$$

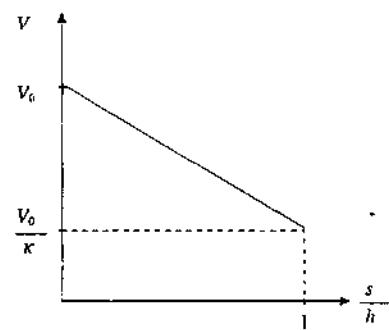


Figura 5.26

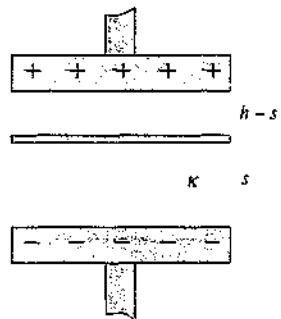


Figura 5.27

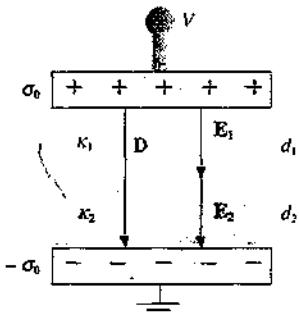


Figura 5.28

e sulla superficie di separazione

$$\sigma_p = \sigma_1 - \sigma_2 = \frac{\kappa_1 - \kappa_2}{\kappa_1 \kappa_2} D = \frac{\epsilon_0 (\kappa_1 - \kappa_2) V}{\kappa_2 d_1 + \kappa_1 d_2},$$

positiva o negativa a seconda che  $\kappa_1$  sia maggiore o minore di  $\kappa_2$ .  
Dalle relazioni precedenti risulta pure

$$V = E_1 d_1 + E_2 d_2 = \frac{\epsilon_0}{\kappa_1} \left( \frac{d_1}{\kappa_1} + \frac{d_2}{\kappa_2} \right) = \frac{q}{\epsilon_0 \Sigma} \left( \frac{d_1}{\kappa_1} + \frac{d_2}{\kappa_2} \right)$$

essendo  $q = \sigma_0 \Sigma$  la carica libera sulle armature. Quindi

$$\frac{V}{q} = \frac{1}{C} = \frac{d_1}{\epsilon_0 \kappa_1 \Sigma} + \frac{d_2}{\epsilon_0 \kappa_2 \Sigma}$$

La capacità equivalente è quella di *due condensatori in serie*. La d.d.p. si ripartisce tra i due condensatori nel rapporto

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{C_2}{C_1} = \frac{\kappa_2 d_1}{\kappa_1 d_2}$$

#### Esempio 5.4 Rigidità dielettrica

Dare l'espressione della massima d.d.p.  $V$  applicabile al condensatore dell'esempio 5.3.

##### Soluzione

Per ogni dielettrico esiste un valore limite del campo elettrico oltre il quale si produce una scarica attraverso il dielettrico; se questo è solido, la scarica lo deteriora irreparabilmente. Tale campo massimo si chiama *rigidità dielettrica*; valori indicativi per alcuni dielettrici sono stati riportati nella tabella 5.1. Per un dato dielettrico la rigidità dielettrica dipende dalla purezza del dielettrico e dallo stato delle superficie conduttrici che portano la carica libera (pulizia, levigatezza).

Dalle formule (5.40) si deduce che il campo elettrico è più intenso dove la costante dielettrica relativa è minore, in quanto minore è la carica di polarizzazione e il suo effetto depolarizzante. Per evitare scariche nei due dielettrici, dette  $E_{1S}$  e  $E_{2S}$  le rispettive rigidità dielettriche, devono essere soddisfatte entrambe le condizioni  $E_1 < E_{1S}$ ,  $E_2 < E_{2S}$ , ovvero

$$V < (\kappa_2 d_1 + \kappa_1 d_2) \frac{E_{1S}}{\kappa_2} = V_{1S} \quad . \quad V < (\kappa_2 d_1 + \kappa_1 d_2) \frac{E_{2S}}{\kappa_1} = V_{2S} \quad .$$

Supponiamo che sia  $V_{1S} < V_{2S}$  (cioè  $\kappa_1 E_{1S} < \kappa_2 E_{2S}$ ) e che si applichi al condensatore una d.d.p.  $V > V_{1S}$ . Nel primo dielettrico si ha una scarica e tutta la d.d.p.  $V$  è applicata al secondo dielettrico. Allora, se  $V < E_{2S} d_2$ , il secondo dielettrico può sopportare la d.d.p.  $V$ ; altrimenti anche nel secondo dielettrico avviene una scarica. Se è verificata la condizione  $V_{1S} = V_{2S}$ , cioè  $\kappa_1 E_{1S} = \kappa_2 E_{2S}$ , la d.d.p. di scarica è  $V_S = E_{1S} d_1 + E_{2S} d_2$ .

Con riferimento al collegamento in serie tra condensatori (paragrafo 4.6), osserviamo che se una data d.d.p. non è sopportabile da un solo condensatore, è sempre possibile collegarne vari in serie realizzando un partitore capacitivo, così che il campo in ciascuno sia inferiore alla rigidità dielettrica. La capacità equivalente complessiva è minore, però il sistema non presenta scariche. L'osservazione è pertinente in quanto tutti i condensatori di uso pratico hanno un dielettrico che non è il vuoto.

Anche se il vuoto in sé avrebbe rigidità dielettrica infinita, dati due conduttori tra i quali c'è il vuoto esiste in ogni caso un valore massimo della d.d.p. applicabile oltre la quale c'è una scarica tra i conduttori, sotto forma di elettroni che vengono strappati dal conduttore a potenziale minore a causa del fortissimo campo superficiale e sono raccolti dal conduttore a potenziale maggiore.

### 5.8 Campo elettrico all'interno di una cavità in un dielettrico

Vogliamo adesso calcolare il campo elettrico all'interno di cavità di forma definita praticate in un dielettrico uniformemente polarizzato. Per eseguire il calcolo ci serviremo del principio di sovrapposizione secondo le linee seguenti. All'interno della massa del dielettrico il campo elettrico  $\mathbf{E}$  ( $Q$ ) in un punto  $Q$  può essere pensato come somma del campo elettrico dovuto a un volume di dielettrico che racchiude il punto  $\mathbf{E}_b$  e del campo elettrico  $\mathbf{E}_c$  dovuto a tutte le altre cariche, libere esterne al dielettrico e di polarizzazione sul dielettrico:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_c + \mathbf{E}_b . \quad (5.41)$$

La situazione è illustrata graficamente nella figura 5.29, in cui i vettori tutti eguali rappresentano la polarizzazione uniforme. Se siamo in grado di determinare  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{E}_b$  possiamo ricavare  $\mathbf{E}_c$  come  $\mathbf{E} - \mathbf{E}_b$ .

#### Cavità cilindrica

Supponiamo che il blocco di materiale che ha la forma della cavità sia un cilindro di raggio  $R$  e lunghezza  $h$ , polarizzato uniformemente con  $\mathbf{P}$  parallela all'asse del cilindro. In un punto  $Q$  dell'asse il campo è quello prodotto da due dischi coincidenti con le basi del cilindro, uniformemente carichi con densità di carica  $+P$  e  $-P$ . Dalla relazione (1.31) dell'esempio 1.8 abbiamo

$$\mathbf{E}_Q = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- = -\frac{\mathbf{P}}{2\epsilon_0} [(1 - \cos\theta_+) + (1 - \cos\theta_-)] ,$$

essendo  $\theta_+$  e  $\theta_-$  gli angoli sotto cui da  $Q$  sono visti i bordi dei due dischi. In particolare nel centro  $\theta_+ = \theta_- = \theta_0$  e

$$\mathbf{E}_{Q,0} = -\frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0} (1 - \cos\theta_0)$$

mentre su una base, per esempio quella negativa,  $\theta_- = \pi/2$  e

$$\mathbf{E}_{Q,-} = -\frac{\mathbf{P}}{2\epsilon_0} (2 - \cos\theta_+) = -\frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0} \left(1 - \frac{1}{2} \cos\theta_+\right) ;$$

si verifica che il campo diminuisce spostandosi dal centro verso le basi. Notiamo che si tratta in ogni caso di un campo depolarizzante.

Applicando (5.41) abbiamo il campo nella cavità cilindrica; nel centro

$$\mathbf{E}_c = \mathbf{E} - \mathbf{E}_{Q,0} = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0} (1 - \cos\theta_0) . \quad (5.42)$$

Esaminiamo due casi limite.

a) Cavità piatta.  $R \gg h$ .

L'angolo  $\theta_0$  coincide in pratica con  $\pi/2$  e (5.42) diventa

$$\mathbf{E}_c = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0} = \kappa \mathbf{E} , \quad (5.43)$$

se introduciamo (5.11). Il campo elettrico è maggiore nella cavità vuota che nel dielettrico; l'induzione dielettrica vale

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}_c = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} .$$

pertanto eguale nel dielettrico e nella cavità. Abbiamo ritrovato il risultato del paragrafo 5.7.

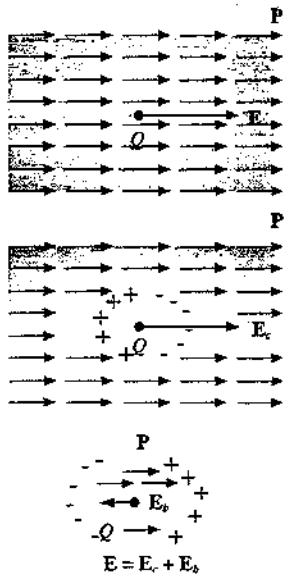


Figura 5.29

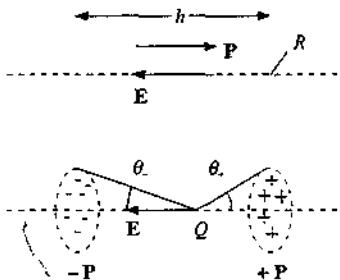


Figura 5.30

b) Cavità lunga e sottile,  $R \ll h$ .

In questo caso l'angolo  $\theta_0$  è piccolo e possiamo scrivere

$$\cos \theta_0 \approx 1 - \frac{\theta_0^2}{2} = 1 - \frac{2R^2}{h^2}$$

Utilizziamo anche (5.11) e da (5.42) otteniamo

$$\mathbf{E}_c = \mathbf{E} + \frac{2R^2}{\epsilon_0 h^2} \mathbf{P} = \left(1 + \frac{2R^2}{h^2} \chi\right) \mathbf{E}$$

Al limite, per  $R/h = 0$ ,

$$\mathbf{E}_c = \mathbf{E}$$

il campo elettrico nella cavità è eguale a quello nel dielettrico (paragrafo 5.4).

### Cavità sferica

Una sfera uniformemente polarizzata ha una densità superficiale di carica di polarizzazione data da (5.12), con  $P$  costante. Una carica distribuita in tal modo produce, come visto nell'esempio 4.23, un campo elettrico uniforme all'interno della superficie sferica, dato da (4.41)

$$\mathbf{E}_b = -\frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0}$$

Secondo (5.41) il campo elettrico all'interno di una cavità sferica è quindi

$$\mathbf{E}_c = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0} = \left(1 + \frac{\chi}{3}\right) \mathbf{E} = \frac{\kappa+2}{3} \mathbf{E} \quad (5.44)$$

Siccome è sempre  $\kappa > 1$ , il campo elettrico nella cavità è maggiore di quello nel dielettrico. L'induzione dielettrica nella cavità vale

Figura 5.31

$$\mathbf{D}_c = \epsilon_0 \mathbf{E}_c = \epsilon_0 \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{3}$$

diversa dal valore  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$  nel dielettrico (in modulo  $D_c < D$ ).

La polarizzazione nel dielettrico oltre che in funzione di  $\mathbf{E}$  si può scrivere in funzione di  $\mathbf{E}_c$ , servendosi di (5.44):

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 (\kappa - 1) \mathbf{E} = 3 \epsilon_0 \frac{\kappa - 1}{\kappa + 2} \mathbf{E}_c \quad (5.45)$$

Nella figura 5.32 sono mostrate le linee di forza nel dielettrico e nella cavità sferica vuota.

I risultati trovati si possono riassumere dicendo che il campo nella cavità è maggiore o al più eguale a quello nel dielettrico secondo la formula

$$\mathbf{E}_c = \mathbf{E} + \gamma \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0} \quad (5.46)$$

dove  $\gamma$  è un coefficiente numerico che dipende dalla forma della cavità: nei casi visti

$\gamma = 0$	cavità cilindrica sottile
$\gamma = 1$	cavità cilindrica piatta
$\gamma = \frac{1}{3}$	cavità sferica

Notiamo da (5.41) che è  $\mathbf{E}_b = -\gamma \mathbf{P} / \epsilon_0$ :  $\gamma$  misura pertanto l'*effetto depolarizzante* che si ha nel blocco di dielettrico e per questa ragione di chiama anche *fanore di depolarizzazione*.

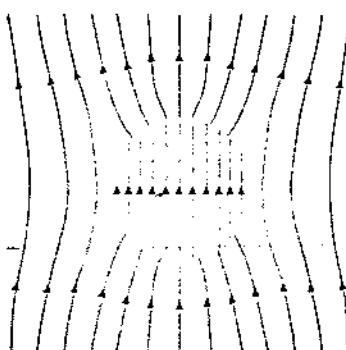


Figura 5.31

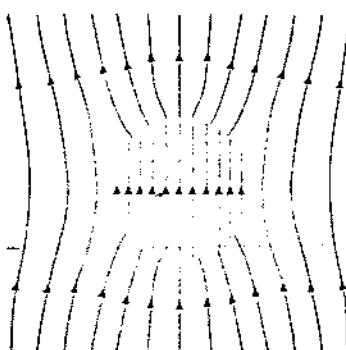


Figura 5.32

**Esempio 5.5**

Una sfera di dielettrico lineare e omogeneo è immersa in un campo elettrico uniforme  $E_0$ .

Calcolare il campo elettrico e la polarizzazione nella sfera.

**Soluzione**

Premettiamo un risultato importante, che ci permette di capire come si polarizza la sfera. Un dielettrico di forma qualsiasi in generale non si polarizza uniformemente quando è posto in un campo elettrico uniforme: ciò avviene solo se la sua forma è ellissoidica o, in particolare, sferica. Noi abbiamo implicitamente ammesso che la polarizzazione sia uniforme in una lastra piana ortogonale a un campo uniforme in quanto supponiamo trascurabili gli effetti di bordo.

La sfera in questione si polarizza dunque uniformemente. Riprendendo quanto detto prima introducendo l'argomento cavità sferica, il campo depolarizzante dovuto alla densità superficiale di carica di polarizzazione è  $E_b = -P / 3\epsilon_0$  e quindi il campo all'interno della sfera è

$$E = E_0 - \frac{P}{3\epsilon_0}$$

Ricorriamo a (5.11) e otteniamo

$$E = \frac{3}{\kappa + 2} E_0 \quad , \quad P = 3\epsilon_0 \frac{\kappa - 1}{\kappa + 2} E_0 \quad .$$

All'esterno la sfera produce un campo che è pari a quello di un dipolo posto nel suo centro e di momento elettrico  $p = 4\pi\epsilon_0 R^3 E_\sigma$ , dove  $R$  è il raggio della sfera e  $E_\sigma$  l'opposto del campo prodotto all'interno dalla densità superficiale di carica sulla sfera (esempio 4.23). Nel nostro caso  $E_\sigma = P / 3\epsilon_0$  e quindi

$$p = \frac{4}{3} \pi R^3 P = 4\pi\epsilon_0 R^3 \frac{\kappa - 1}{\kappa + 2} E_0 \quad .$$

Si osservi che tale momento è pari al prodotto della polarizzazione per il volume della sfera, in accordo con la definizione di polarizzazione come momento di dipolo elettrico dell'unità di volume. Abbiamo una conferma diretta che il campo di un dielettrico polarizzato è pari ad un campo di dipolo.

La perturbazione di  $E_0$  da parte del campo della sfera decresce rapidamente con la distanza dal centro della sfera. L'andamento delle linee di campo è mostrato in figura 5.33: si confronti con la figura 5.32 relativa alla cavità sferica e con la figura 4.54 relativa alla sfera conduttrice.

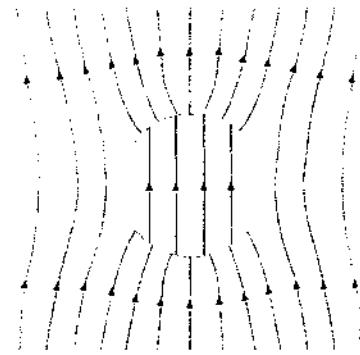


Figura 5.33

## 5.9 L'energia elettrostatica nei dielettrici

Il ragionamento che nel paragrafo 4.7 ha portato all'espressione dell'energia elettrostatica di un condensatore piano caricato con carica  $q$  può essere ripetuto anche se lo spazio tra le armature è riempito completamente da un dielettrico di costante dielettrica relativa  $\kappa$ , con il risultato

$$U_e = \frac{q^2}{2C} = \frac{\sigma^2 \Sigma^2}{2\epsilon \Sigma / h} = \frac{1}{2} \epsilon E^2 \Sigma h \quad . \quad (5.47)$$

Vediamo le stesse possibilità di interpretazione a suo tempo discusse: da una parte l'energia è legata alle cariche, dall'altra al campo elettrico. Ora abbiamo in più la dipendenza dalle proprietà del dielettrico che riempie lo spazio in cui esiste il

campo elettrico; nella (5.47) compare  $\kappa$  e rispetto al caso in cui il dielettrico è il vuoto l'energia è diminuita proprio del fattore  $\kappa$ . La quantità

Densità di energia elettrostatica

$$u_e = \frac{U_e}{\Sigma h} = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} \frac{D^2}{\epsilon} \quad (5.48)$$

rappresenta la densità di energia elettrostatica.

Pure adesso la formula (5.48) è di validità generale: in una regione in cui esiste campo elettrico l'energia elettrostatica è distribuita con densità (5.48) e vale

Energia elettrostatica

$$U_e = \int_{\tau} u_e d\tau = \int_{\tau} \frac{1}{2} \epsilon E^2 d\tau \quad (5.49)$$

Nei dielettrici anisotropi la (5.48) diventa

$$u_e = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \quad (5.50)$$

e il prodotto scalare mette in evidenza che in questi dielettrici i campi  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{D}$  non sono paralleli.

Poiché per riempire di campo elettrico un dato volume occorre spendere per unità di volume il lavoro  $1/2 \epsilon_0 E^2$  e in presenza di dielettrico tale lavoro risulta, a parità di campo elettrico,  $1/2 \epsilon_0 \kappa E^2$ , la differenza  $1/2 \epsilon_0 (\kappa - 1) E^2$  rappresenta evidentemente il lavoro necessario per polarizzare l'unità di volume del dielettrico (lavoro che nel vuoto è nullo). In effetti, per separare di  $dx$  la carica  $q$  dalla carica  $-q$  occorre spendere il lavoro  $dW = E q dx = E dp$ , dove  $dp$  è il momento di dipolo elettrico creato con la separazione  $dx$ ; nell'unità di volume

$$dW = E dP = E \epsilon_0 (\kappa - 1) dE$$

e integrando si ottiene appunto  $1/2 \epsilon_0 (\kappa - 1) E^2$ .

### Esempio 5.6

In un condensatore piano, le cui armature sono quadrate di lato  $d$  e distanti  $h$ , è parzialmente inserita una lastra di dielettrico di spessore  $h$ . Assumendo che la carica libera sulle armature sia costante, calcolare in funzione della posizione della lastra le densità di carica, la d.d.p., la capacità e l'energia elettrostatica.

#### Soluzione

Le armature sono equipotenziali e quindi il campo elettrico è lo stesso sia nella regione vuota larga  $d - x$  che nella regione riempita di dielettrico larga  $x$ . Dette  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  le densità di carica libera sulle armature in corrispondenza delle due zone, si ha

$$E = E_1 = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0} = E_2 = \frac{\sigma_2}{\kappa \epsilon_0} \Rightarrow \sigma_2 = \kappa \sigma_1$$

La maggior densità di carica libera sulle armature in corrispondenza del dielettrico compensa la carica di polarizzazione

$$\sigma_p = \sigma_2 - \sigma_1 = (\kappa - 1) \sigma_1 = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \sigma_2$$

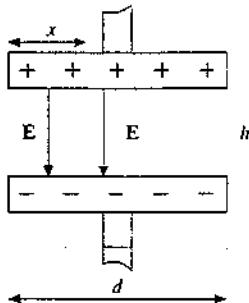


Figura 5.34

Il vettore induzione dielettrica è maggiore nel dielettrico che nel vuoto:

$$D_1 = \epsilon_0 E \quad , \quad D_2 = \epsilon_0 E + P = \epsilon_0 E + \epsilon_0 (\kappa - 1) E = \epsilon_0 \kappa E = \kappa D_1 \quad .$$

La carica totale del condensatore è

$$q = q_1 + q_2 = \sigma_1 (d - x) d + \sigma_2 x d$$

e quindi, essendo  $\sigma_2 = \kappa \sigma_1$ , si ha

$$\begin{aligned} \sigma_1(x) &= \frac{q}{d [d + (\kappa - 1)x]} \quad , \quad \sigma_2(x) = \frac{\kappa q}{d [d + (\kappa - 1)x]} \quad , \\ E(x) &= \frac{\sigma_1(x)}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_2(x)}{\kappa \epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon_0 d [d + (\kappa - 1)x]} \quad , \\ \sigma_p(x) &= \sigma_2(x) - \sigma_1(x) = \frac{(\kappa - 1)q}{d [d + (\kappa - 1)x]} \quad . \end{aligned}$$

La d.d.p. ai capi del condensatore è

$$V(x) = E h = \frac{\sigma_1(x)}{\epsilon_0} h = \frac{\sigma_2(x)}{\kappa \epsilon_0} h = \frac{q h}{\epsilon_0 d [d + (\kappa - 1)x]}$$

e la capacità del condensatore vale

$$C(x) = \frac{q}{V(x)} = \frac{\epsilon_0 d [d + (\kappa - 1)x]}{h} = \frac{\epsilon_0 d (d - x)}{h} + \frac{\epsilon_0 \kappa dx}{h} \quad .$$

equivalente, come c'era da aspettarsi, alla *capacità di due condensatori in parallelo*. L'energia elettrostatica del sistema si scrive

$$U_e(x) = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2 h}{2\epsilon_0 d [d + (\kappa - 1)x]} \quad (5.51)$$

e si verifica subito che questa espressione corrisponde a

$$U_e(x) = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 d (d - x) h + \frac{1}{2} \epsilon_0 \kappa E^2 d x h \quad .$$

### Esempio 5.7

Lo spazio compreso tra le armature di un condensatore sferico, di raggio interno  $R_1$  e raggio esterno  $R_2$ , è riempito parzialmente da un dielettrico lineare e omogeneo di costante dielettrica relativa  $\kappa$  che occupa la corona sferica compresa tra  $R_1$  e  $R_0$ , con  $R_0 < R_2$ . Calcolare l'energia elettrostatica del sistema e la densità di carica di polarizzazione.

#### Soluzione

Per ragioni di simmetria  $E, P, D$  sono radiali e dipendono solo da  $r$ . L'induzione dielettrica si ricava come nell'esempio 5.1 in quanto il suo flusso dipende solo dalla carica libera sulle armature  $q$ . Vale quindi in tutta l'intercapedine la (5.29):

$$\mathbf{D} = \frac{q}{4\pi r^2} \mathbf{u}_r \quad .$$

Da questa e da (5.48) si calcola l'energia elettrostatica del sistema, tenendo presente che

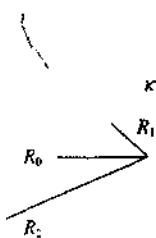


Figura 5.35

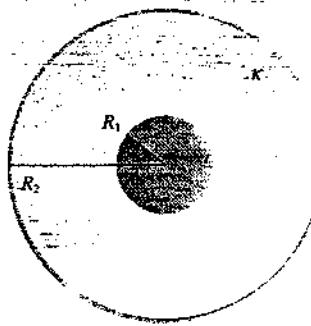


Figura 5.36



Figura 5.37

c'è una variazione di dielettrico per  $r = R_0$ :

$$U_e = \int_{R_1}^{R_0} \frac{D^2}{2\kappa\epsilon_0} 4\pi r^2 dr + \int_{R_0}^{R_2} \frac{D^2}{2\epsilon_0} 4\pi r^2 dr \\ = -\frac{q^2}{8\pi\kappa\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_0} \right) + \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{q^2}{2} \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) = \frac{q^2}{2C}$$

La capacità  $C$  è quella della serie di due condensatori  $C_1$  e  $C_2$  sferici, il primo con dielettrico e il secondo vuoto.

La densità di carica di polarizzazione sulle due facce della corona sferica dielettrica è

$$\sigma_p(R_1) = \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{u}_1 = -\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{u}_r = -\frac{\kappa-1}{\kappa} \mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{u}_r = -\frac{\kappa-1}{\kappa} \frac{q}{4\pi R_1^2}$$

$$\sigma_p(R_2) = \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{u}_2 = \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{u}_r = \frac{\kappa-1}{\kappa} \mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{u}_r = \frac{\kappa-1}{\kappa} \frac{q}{4\pi R_2^2}$$

avendo utilizzato (5.27). È evidente che

$$q_p(R_1) = \sigma_p(R_1) 4\pi R_1^2 = -\frac{\kappa-1}{\kappa} q = -q_p(R_2) = -\sigma_p(R_2) 4\pi R_2^2$$

All'interno del dielettrico non ci sono cariche libere per cui  $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$  e di conseguenza  $\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P} = 0$ , essendo  $\kappa$  costante. La verifica diretta è immediata, come nell'esempio 5.1.

Se  $R_0$  coincide con  $R_2$  il condensatore è totalmente riempito dal dielettrico e l'energia vale

$$U_e = \frac{q^2}{2} \left[ \frac{1}{4\pi\kappa\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \right] = \frac{q^2}{2C}$$

con  $C = 4\pi\kappa\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$ ,  $\kappa$  volte maggiore che nel vuoto.

Infine se  $R_2$  tende all'infinito

$$U_e = \frac{q^2}{8\pi\kappa\epsilon_0 R_1} = \frac{q^2}{2C} \quad , \quad C = 4\pi\kappa\epsilon_0 R_1$$

Abbiamo così l'energia elettrostatica e la capacità di una sfera conduttrice immersa in un dielettrico indefinito (esempio 5.1).

### Esempio 5.8

Calcolare la forza con cui la lastra di dielettrico dell'esempio 5.6 è attratta dentro il condensatore. Esaminare anche il caso in cui la d.d.p. ai capi del condensatore resti costante.

#### Soluzione

L'energia elettrostatica è data da (5.51); lo spostamento della lastra comporta una variazione di energia e alla fine, quando il condensatore è completamente riempito dalla lastra, l'energia è minima. Essendo il sistema a carica costante, cioè isolato, la diminuzione di energia corrisponde al lavoro fornito dalla forza elettrica che vale

$$F(x) = -\frac{dU_e}{dx} = \frac{q^2 h}{2\epsilon_0 d} \frac{\kappa-1}{[d + (\kappa-1)x]^2}$$

ovvero, ricorrendo all'espressione del campo elettrico calcolata nell'esempio 5.6,

$$F(x) = \frac{1}{2} \epsilon_0 (\kappa - 1) E^2(x) \Sigma ; \quad (5.52)$$

$\Sigma = hd$  è la sezione della lastra, cioè la superficie su cui agisce la forza  $F$ . Si noti che questa dipende da  $x$ .

Il processo considerato avviene a *carica costante*. Se invece si mantiene *costante la d.d.p.* tra le armature, tramite il collegamento con un generatore, il campo elettrico è sempre costante, indipendentemente dalla posizione della lastra, e vale  $E = V/h$ . L'energia elettrostatica si scrive più convenientemente nella forma

$$U_e = \frac{1}{2} C(x) V^2 = \frac{V^2}{2} \epsilon_0 \frac{d}{h} [d + (\kappa - 1)x] .$$

dove abbiamo utilizzato l'espressione della capacità ricavata nell'esempio 5.6. L'energia aumenta, per un avanzamento  $dx$ , della quantità

$$dU_e = \frac{V^2}{2} dC(x) = \frac{V^2 \epsilon_0 d}{2h} (\kappa - 1) dx .$$

Seguiamo in questo caso lo stesso ragionamento sviluppato nel paragrafo 4.9. Per mantenere costante la d.d.p.  $V$  in presenza di un aumento di capacità  $dC(x)$  il generatore deve spostare la carica  $dq = V dC$  dall'armatura negativa a quella positiva compiendo il lavoro  $dW_{gen} = V dq = V^2 dC$  a spese della propria energia  $U_{gen}$  che varia di  $dU_{gen} = -dW_{gen} = -V^2 dC$ . Osserviamo che ritroviamo la metà di questo lavoro nell'aumento di energia elettrostatica  $dU_e$  e quindi la restante metà è spesa come lavoro per fare avanzare la lastra,

$$dW = \frac{V^2}{2} dC = dU_e ;$$

la forza corrispondente, indipendente da  $x$ , risulta

$$F = \frac{dU_e}{dx} = \frac{V^2 \epsilon_0 d (\kappa - 1)}{2h} .$$

Poiché

$$dU_{tot} = d(U_{gen} + U_e) = -V^2 dC + \frac{V^2}{2} dC = -\frac{V^2}{2} dC = -dU_e$$

la forza appena calcolata è  $-dU_{tot}/dx$ .

Sostituendo  $Eh$  al posto di  $V$

$$F = \frac{1}{2} \epsilon_0 (\kappa - 1) E^2 hd = \frac{1}{2} \epsilon_0 (\kappa - 1) E^2 \Sigma .$$

formalmente eguale a (5.52).

Riassumendo: nel processo a *carica costante* in cui  $dU_{tot} = dU_e$ ,

$$F = - \left( \frac{dU_e}{dx} \right)_{q=\text{cost}} .$$

mentre nel processo a potenziale costante in cui  $dU_{tot} = -dU_e$ ,

$$F = \left( \frac{dU_e}{dx} \right)_{V=\text{cost}} .$$

Abbiamo ritrovato in questo caso, che è fisicamente diverso, le relazioni (4.38, 4.39). In effetti esse rivestono carattere generale: *la forza agente si può sempre calcolare come l'opposto del gradiente dell'energia elettrostatica se il processo è a carica costante e come gradiente della stessa energia se il processo è a potenziale costante*.

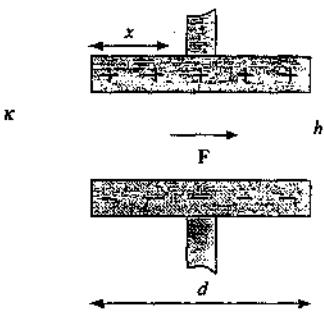


Figura 5.38

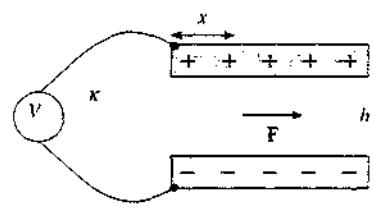


Figura 5.39

**Esempio 5.9**

Una sfera di dielettrico lineare e omogeneo è posta nel campo di una carica puntiforme; il raggio  $R$  della sfera è molto minore della distanza  $r$  tra la carica puntiforme e il centro della sfera. Calcolare la forza subita dalla sfera.

**Soluzione**

La situazione è analoga a quella dell'esempio 4.24. La forza sulla sfera è in ogni caso attrattiva perché, a causa della polarizzazione, nella parte di sfera rivolta alla carica puntiforme compaiono cariche di polarizzazione di segno opposto a quello della carica inducente, mentre le cariche di segno eguale compaiono sull'altra parte della sfera, più lontane.

Supponendo uniformi campo e polarizzazione all'interno della sfera e detto  $E_0$  il valore del campo dovuto alla carica puntiforme, sappiamo dall'esempio 5.5 che la polarizzazione vale

$$\mathbf{P} = 3\epsilon_0 \frac{\kappa - 1}{\kappa + 2} \mathbf{E}_0$$

e che il momento di dipolo elettrico della sfera è

$$\mathbf{p} = 4\pi \epsilon_0 R^3 \frac{\kappa - 1}{\kappa + 2} \mathbf{E}_0$$

L'energia elettrostatica di questo dipolo nel campo della carica è

$$U_e = -pE_0 = -4\pi \epsilon_0 R^3 \frac{\kappa - 1}{\kappa + 2} \frac{q^2}{(4\pi \epsilon_0 r^2)^2} = -\frac{\kappa - 1}{\kappa + 2} \frac{q^2 R^3}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{r^4}$$

e la forza risulta

$$\mathbf{F} = -\frac{dU_e}{dr} = \frac{\kappa - 1}{\kappa + 2} \frac{q^2 R^3}{\pi \epsilon_0} \frac{1}{r^5}$$

variabile molto rapidamente con la distanza. Il risultato spiega l'attrazione di corpi isolanti neutri da parte di corpi carichi.

Osserviamo che se  $\kappa$  è molto grande  $(\kappa - 1)/(\kappa + 2)$  vale circa 1 e la forza è la stessa di quella ricavata per una sferetta conduttrice: il caso del conduttore appare come il limite per  $\kappa \rightarrow \infty$  del caso del dielettrico (risultato questo che è di carattere generale).

### 5.10 Meccanismi di polarizzazione nei dielettrici isotropi

Nello studio delle proprietà macroscopiche dei dielettrici isotropi abbiamo ammesso la validità della legge di proporzionalità tra polarizzazione e campo agente nel dielettrico

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E} . \quad (5.11)$$

Vogliamo ora discutere i meccanismi di *polarizzazione elettronica* e di *polarizzazione per orientamento* al fine di dimostrare la validità della (5.11) e di ottenere un'espressione della suscettività elettrica in termini di grandezze relative ai processi elementari da cui dipende il fenomeno della polarizzazione.

#### *Polarizzazione elettronica in un gas*

Discussiamo innanzitutto la polarizzazione di un gas costituito da molecole non polari. Nell'atomo non perturbato la carica negativa è distribuita nel volume dell'atomo con densità media

$$\rho_e = -Ze / \frac{4}{3} \pi R^3$$

e il suo centro coincide col nucleo. Sotto l'azione del campo elettrico  $E_{loc}$  effettivamente agente sul singolo atomo la nube elettronica risente di una forza  $F_{loc} = -Ze E_{loc}$ , che causa uno spostamento del centro rispetto al nucleo di una quantità  $x$ . Il nucleo risente in tal caso di una forza attrattiva che possiamo calcolare come dovuta al campo (3.12) di una distribuzione sferica uniforme di carica,

$$E_e = \rho_e \frac{x}{3\epsilon_0} \approx -\frac{Ze x}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$

cioè di una forza  $F = Ze E_e$ . La forza che il nucleo esercita sulla nube elettronica vale  $F_r = -F = -Ze E_e$  e si raggiunge l'equilibrio quando

$$F_{loc} + F_r = -Ze (E_{loc} + E_e) = 0$$

ovvero quando

$$E_{loc} = -E_e \Rightarrow Ze x = 4\pi\epsilon_0 R^3 E_{loc}$$

D'altra parte, secondo (5.9),  $Ze x$  è il momento di dipolo elettrico  $p_e$  acquistato dall'atomo, per cui possiamo scrivere

$$p_e = \epsilon_0 \alpha_e E_{loc} \quad (5.53)$$

con

$$\alpha_e = 4\pi R^3 \quad (5.54)$$

coefficiente chiamato *polarizzabilità elettronica*, caratteristico della sostanza e pari a tre volte il volume dell'atomo. La proporzionalità tra  $p_e$  e  $E_{loc}$  riflette la proporzionalità tra  $E_{loc}$  e la deformazione  $x$  da esso indotta.

Detto  $n$  il numero di atomi per unità di volume, la polarizzazione (5.10) è data da

$$P = n p_e = \epsilon_0 n \alpha_e E_{loc} \quad (5.55)$$

Il campo  $E_{loc}$  agente sul singolo atomo a rigore non coincide con il campo macroscopico  $E$  presente nel dielettrico, in cui è compreso il contributo dell'atomo interessato. Questo contributo, come vedremo nel paragrafo 5.11, è però trascurabile in un gas in condizioni standard di temperatura e pressione: limitandoci per ora a questo caso nella (5.55) sostituiamo  $E_{loc}$  con  $E$  ottenendo  $P = \epsilon_0 n \alpha_e E$ . Dal confronto con (5.11) si ottiene

$$\chi = n \alpha_e \quad (5.56)$$

Abbiamo così giustificato la relazione di proporzionalità tra  $P$  e  $E$  e ottenuto la *suscettività elettrica come somma delle polarizzabilità dei singoli atomi contenuti nell'unità di volume*.

Valutiamo ora l'ordine di grandezza della suscettività di un gas ideale. Il volume molare è  $\tau_A = 22.4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$  e contiene  $N_A = 6.022 \cdot 10^{23}$  atomi. Quindi

$$n = \frac{N_A}{\tau_A} = 2.69 \cdot 10^{25} \text{ atomi/m}^3$$

Poniamo il raggio  $R$  di un atomo pari a  $10^{-10} \text{ m}$  e otteniamo

$$\chi = n \alpha_e = n 4\pi R^3 = 3.4 \cdot 10^{-1} \Rightarrow \kappa = 1 + \chi = 1.00034$$

Nella tabella 5.2 sono indicati alcuni valori sperimentali, a 20°C e pressione atmosferica.

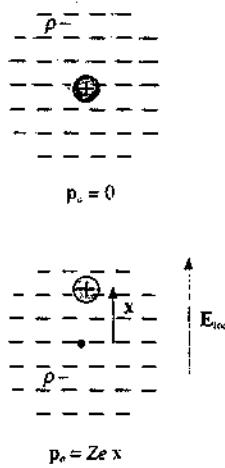


Figura 5.40

Polarizzabilità elettronica

Suscettività elettrica

Tavella 5.2 Costante dielettrica di gas non polari	
	Costante dielettrica relativa
anidride carbonica	1.000985
argon	1.000545
azoto	1.000580
elio	1.000068
idrogeno	1.000264
ossigeno	1.000523

### Esempio 5.10

La costante dielettrica dell'azoto gassoso a 20°C e alla pressione atmosferica è  $\kappa = 1.000580$ . Supponendo che il meccanismo di polarizzazione avvenga a livello della molecola di azoto, calcolare il valore della polarizzabilità elettronica e del momento di dipolo elementare in un campo  $E = 3 \cdot 10^6$  V/m. Il numero di massa dell'azoto è  $A = 14$  e la densità, nelle condizioni suddette, è  $\rho = 1.25 \text{ kg/m}^3$ .

#### Soluzione

Per applicare (5.56) calcoliamo il numero di molecole per unità di volume con la formula

$$n = \frac{N_A}{2A} \rho$$

Infatti  $N_A$  è il numero di molecole per mole,  $2A$  il numero di chilogrammi per mole (la molecola di azoto è biamonica) e  $\rho$  il numero di chilogrammi per  $\text{m}^3$ , così che  $N_A \rho / 2A$  dà appunto il numero di molecole per  $\text{m}^3$ . Risulta

$$n = \frac{6.022 \cdot 10^{23}}{28 \cdot 10^{-3}} \cdot 1.25 = 2.69 \cdot 10^{25} \text{ molecole/m}^3.$$

La polarizzabilità elettronica vale

$$\alpha_e = \chi / n = (\kappa - 1) / n = 2.16 \cdot 10^{-29} \text{ m}^3$$

Nel campo  $E$  dato il momento di dipolo elementare, secondo (5.53), vale

$$p_a = 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 2.16 \cdot 10^{-29} \cdot 3 \cdot 10^6 = 5.73 \cdot 10^{-34} \text{ Cm}$$

Se questo momento fosse dovuto allo spostamento di tutte le cariche della molecola ( $Z = 14$ ), sarebbe  $x = p_a / Ze = 0.26 \cdot 10^{-15} \text{ m}$ . Questo calcolo indicativo mostra quanto siano piccoli gli spostamenti che danno luogo al fenomeno della polarizzazione elettronica; essi sono dell'ordine delle dimensioni di un nucleo.

### Polarizzazione per orientamento nei gas

Consideriamo ora una molecola che possiede un momento di dipolo permanente  $p_0$ , come la molecola dell'acqua  $\text{H}_2\text{O}$ . Tali molecole, dette *polari*, contengono due o più atomi, di specie diverse, disposti secondo configurazioni in cui il centro della carica negativa non coincide con quello della carica positiva (essi invece coincidono ad esempio nelle molecole  $\text{H}_2$ ,  $\text{N}_2$ ,  $\text{O}_2$ ,  $\text{CH}_4$ ). Nelle molecole d'acqua il centro della carica positiva sta praticamente nel punto di mezzo della congiungente gli atomi di idrogeno, mentre quello della carica negativa coincide quasi col nucleo di ossigeno: ne deriva un momento di dipolo che vale circa  $p_0 = 6 \cdot 10^{-30} \text{ Cm}$ , molto maggiore dei valori tipici della polarizzazione elettronica.

In assenza di campo elettrico i singoli dipoli, almeno se la sostanza è in fase fluida, sono diretti casualmente in tutte le direzioni così che in ogni elemento di volume  $d\tau$  il momento di dipolo elettrico risultante è eguale a zero e quindi la polarizzazione è nulla. Quando si applica un campo elettrico dall'esterno ha luogo la polarizzazione elettronica, ma succede anche che su ogni dipolo permanente agisce il momento (2.68)

$$\mathbf{M} = \mathbf{p}_0 \times \mathbf{E}_{loc}$$

che tende a orientare  $\mathbf{p}_0$  concordemente a  $\mathbf{E}_{loc}$ . Se tutte le molecole si allineassero risulterebbe una polarizzazione intensa; però, a temperature ordinarie e con campi elettrici non particolarmente intensi, gli urti tra le molecole dovuti all'agitazione termica permettono un *allineamento soltanto parziale* che si rappresenta con un momento di dipolo medio  $\langle \mathbf{p}_0 \rangle$ , parallelo a  $\mathbf{E}_{loc}$  e ad esso proporzionale. Ne ha origine una polarizzazione che si calcola con un metodo classico di meccanica statistica, sviluppato da P. Debye.

La funzione che descrive il comportamento statistico di un insieme di  $N$  dipoli alla temperatura  $T$  e sottoposti a un campo elettrico  $\mathbf{E}_{loc}$  è la *funzione di distribuzione di Boltzmann*. Precisamente, se  $N$  molecole sono in equilibrio termico alla temperatura  $T$  in un campo di forza conservativo in cui ciascuna molecola ha un'energia potenziale  $U$ , la *frazione di molecole* con energia compresa tra  $U$  e  $U + dU$  è data da

$$\frac{dN}{N} = A e^{-U/k_B T} dU \quad (5.57) \quad \text{Funzione di Boltzmann}$$

dove  $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23}$  J/K è la *costante di Boltzmann* e  $A$  una costante, che ha le dimensioni dell'inverso di un'energia, determinata dalla condizione di normalizzazione

$$\int \frac{dN}{N} = A \int e^{-U/k_B T} dU = 1 \quad \text{ovvero} \quad dN = N \quad .$$

È importante notare che la (5.57) è *valida* solamente se i dipoli, pur interagendo tramite gli urti, *rimangono liberi*. Ciò è senz'altro vero nei gas in condizioni normali in cui le molecole sono mediamente lontane tra loro, ma può non verificarsi in un liquido in cui le molecole sono praticamente a contatto. Se ad esempio le molecole interagendo tendono a formare strutture composte da *catene di molecole*, la trattazione che segue non è applicabile.

Il dipolo  $\mathbf{p}_0$  nel campo  $\mathbf{E}_{loc}$  possiede l'energia eletrostatica (2.67)

$$U = -\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{E}_{loc} = -p_0 E_{loc} \cos\theta$$

e la (5.57) diviene

$$\frac{dN}{N} = -A p_0 E_{loc} e^{p_0 E_{loc} \cos\theta / k_B T} d\cos\theta \quad .$$

In condizioni ordinarie l'argomento dell'esponenziale è molto minore di 1, il che vuol dire che l'energia potenziale del dipolo in presenza del campo  $\mathbf{E}_{loc}$  è molto minore dell'energia legata all'agitazione termica: l'*interazione elettrica* è solo una *piccola perturbazione* (ad esempio  $p_0 E_{loc}$  per vapor d'acqua sottoposto a  $10^6$  V/m è  $6 \cdot 10^{-24}$  J, mentre  $k_B T$  è  $4 \cdot 10^{-21}$  J a 300 K). Allora

$$\frac{dN}{N} = -A p_0 E_{loc} \left( 1 + \frac{p_0 E_{loc} \cos\theta}{k_B T} \right) d\cos\theta \quad .$$

Imponiamo la condizione di normalizzazione:

$$\int \frac{dN}{N} = -A p_0 E_{loc} \int_{-1}^{+1} \left( 1 + \frac{p_0 E_{loc} \cos\theta}{k_B T} \right) d\cos\theta = -A p_0 E_{loc} \int_{-1}^{+1} d\cos\theta = 1$$

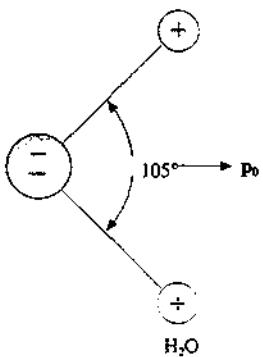


Figura 5.41

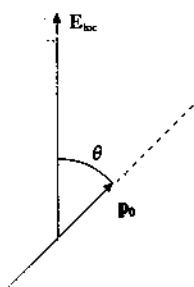


Figura 5.42

e si ricava  $A = 1/2 p_0 E_{loc}$ , per cui

$$\frac{dN}{N} = -\frac{1}{2} \left( 1 + \frac{p_0 E_{loc} \cos \theta}{k_B T} \right) d \cos \theta . \quad (5.58)$$

Questa espressione dà la frazione di molecole con momento di dipolo  $p_0$  che forma un angolo compreso tra  $\theta$  e  $\theta + d\theta$  con il campo elettrico  $E_{loc}$  (passando da zero a  $\pi$ ,  $d \cos \theta$  è negativo e  $dN$  risulta positivo).

Ciascuna molecola ha una componente del momento di dipolo  $p_0$  parallela al campo  $E_{loc}$ , data da  $p(\theta) = p_0 \cos \theta$  e la somma di queste componenti dà il momento di dipolo risultante nella direzione di  $E_{loc}$ : le componenti ortogonali a  $E_{loc}$  danno somma nulla, per ragioni di simmetria. Il momento di dipolo per  $dN$  molecole, con  $dN$  dato da (5.58), è

$$dp = p_0 \cos \theta dN \approx -\frac{N}{2} p_0 \left( 1 + \frac{p_0 E_{loc} \cos \theta}{k_B T} \right) \cos \theta d \cos \theta$$

e, integrando, il momento di dipolo di  $N$  molecole risulta

$$p = \int dp = -\frac{N}{2} p_0 \int_1^{-1} \left( 1 + \frac{p_0 E_{loc} \cos \theta}{k_B T} \right) \cos \theta d \cos \theta = -\frac{N p_0^2 E_{loc}}{3 k_B T} .$$

Il momento di dipolo medio acquistato da ogni singola molecola è

$$\langle p_a \rangle = \frac{\mathbf{p}}{N} = \frac{p_0^2}{3 k_B T} \mathbf{E}_{loc} \quad (5.59)$$

e risulta parallelo e concorde a  $E_{loc}$ . Sottolineamo che questa è una proprietà media: da (5.58) si vede che ci sono dipoli con momento ad un angolo rispetto a  $E_{loc}$  maggiore di  $\pi/2$ , però la media pesata su  $N$  molecole è concorde a  $E_{loc}$ . Sotto questo aspetto c'è una profonda differenza con il meccanismo di polarizzazione elettronica, in cui tutti i contributi sono dello stesso segno.

Scriviamo (5.59) in modo analogo a (5.53):

$$\langle p_a \rangle = \epsilon_0 \alpha_D \mathbf{E}_{loc} \quad (5.60)$$

con

Polarizzabilità per orientamento

$$\alpha_D = \frac{p_0^2}{3 \epsilon_0 k_B T} . \quad (5.61)$$

*polarizzabilità per orientamento* (la  $D$  ricorda Debye). Detto  $n$  il numero di molecole per unità di volume, la polarizzazione vale

$$\mathbf{P} = n \langle p_a \rangle = \epsilon_0 n \alpha_D \mathbf{E}_{loc} .$$

Approssimiamo, trattandosi di un gas, il campo locale con il campo macroscopico e utilizziamo (5.11) ottenendo

Suscettività elettrica

$$\chi = n \alpha_D = \frac{n p_0^2}{3 \epsilon_0 k_B T} . \quad (5.62)$$

Concludiamo che anche il meccanismo di polarizzazione per orientamento porta nei gas a una *relazione lineare* tra  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{E}$  e a una interpretazione della suscettività in termini microscopici.

La *polarizzabilità complessiva* è la somma della polarizzabilità elettronica e di quella per orientamento,

$$\alpha = \alpha_e + \alpha_D = \alpha_e + \frac{p_0^2}{3\epsilon_0 k_B T}$$

Polarizzabilità complessiva

e la suscettività elettrica complessiva è

$$\chi = n \alpha = n (\alpha_e + \alpha_D) \quad (5.63)$$

Suscettività elettrica complessiva

ovvero, più esplicitamente,

$$\kappa - 1 = n \left( \alpha_e + \frac{p_0^2}{3\epsilon_0 k_B T} \right) \quad (5.64)$$

In un dielettrico polare di norma l'importanza della polarizzazione per orientamento è maggiore di quella della polarizzazione elettronica. Poiché un meccanismo dipende dalla temperatura mentre l'altro ne è indipendente, una misura della costante dielettrica relativa in funzione della temperatura, mantenendo costante il numero di  $n$  di molecole per unità di volume, permette di separare i due contributi. La (5.64) dice che  $\kappa - 1$  in funzione di  $1/T$  varia linearmente: l'intercetta (estrapolata) con l'asse delle ordinate dà  $\alpha_e$  e il coefficiente angolare dà  $p_0^2$ . *due informazioni microscopiche ottenute da una misura macroscopica*, come è quella della costante dielettrica relativa di un gas.

**Esempio 5.11**

I dati relativi all'andamento della suscettività elettrica del vapor d'acqua in funzione della temperatura possono essere descritti dalla retta di equazione

$$\kappa - 1 = 0.25 \cdot 10^{-3} + \frac{1.47}{T}$$

Nella misura, eseguita a numero di molecole per unità di volume costante, quando la temperatura del vapor d'acqua è  $T = 393$  K la pressione è  $p = 0.75 \cdot 10^5$  Pa. Determinare i parametri microscopici che descrivono il meccanismo di polarizzazione della singola molecola d'acqua. Determinare inoltre, quando il vapore si trova nel particolare stato sopra indicato ed è sottoposto ad un campo  $E = 10^6$  V/m, quanto vale la sua polarizzazione.

**Soluzione**

Dalla (5.64) sappiamo che  $\kappa - 1 = n \alpha_e$  quando  $1/T = 0$  e quindi

$$n \alpha_e = 0.25 \cdot 10^{-3}$$

La pendenza della retta è

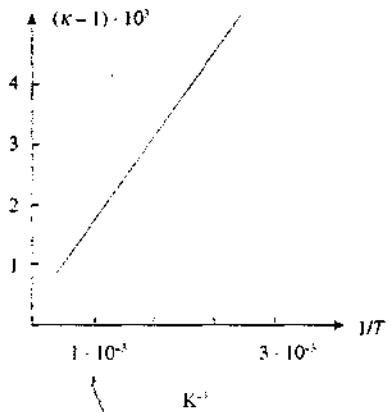
$$\frac{n p_0^2}{3\epsilon_0 k_B} = 1.47$$

Il numero di molecole per unità di volume si calcola a partire dalla formula  $n = N_A \rho / A$ , vista nell'esempio 5.10, e dall'equazione di stato per  $T = 393$  K e  $p = 0.75 \cdot 10^5$  Pa (trattando il vapor d'acqua come un gas ideale):

$$pT = n_m RT \Rightarrow p \frac{M}{\rho} = n_m RT \Rightarrow \rho = \frac{pM}{n_m RT} = \frac{pA}{RT}$$

$M$  è la massa di gas,  $n_m$  il numero di moli e  $M = n_m A$ . Quindi:

$$n = \frac{N_A \rho}{A} = \frac{N_A p}{RT} = \frac{p}{k_B T} = 1.38 \cdot 10^{25} \text{ molecole/m}^3$$

**Figura 5.43**

$$\alpha_e = 1.87 \cdot 10^{-29} \text{ m}^3, \quad p_0 = 6.25 \cdot 10^{-30} \text{ Cm} \quad .$$

Alla temperatura  $T = 393 \text{ K}$ , secondo (5.61),

$$\alpha_D = \frac{p_0^2}{3\epsilon_0 k_B T} = \frac{1.47}{n T} = 2.71 \cdot 10^{-28} \text{ m}^3, \quad ,$$

pari a  $14.7 \alpha_e$ : si verifica la preponderanza del meccanismo di polarizzazione per orientamento.

A  $T = 393 \text{ K}$  e  $p = 0.75 \cdot 10^5 \text{ Pa}$  la suscettività elettrica del vapor d'acqua vale  $\kappa - 1 = 4 \cdot 10^{-3}$  e la polarizzazione nel campo  $E$  dato vale

$$P = \epsilon_0 (\kappa - 1) E = 3.54 \cdot 10^{-8} \text{ C/m}^2 \quad .$$

Osserviamo che se i dipoli fossero tutti orientati, con  $n = 1.38 \cdot 10^{25} \text{ molecole/m}^3$  e  $p_0 = 6.25 \cdot 10^{-30} \text{ Cm}$ , sarebbe  $P^* = n p_0 = 8.63 \cdot 10^{-5} \text{ C/m}^2 = 2.44 \cdot 10^3 P$ . Nella realtà, è come se fosse orientato un solo dipolo  $p_0$  su 2440.

### 5.11 La costante dielettrica dei liquidi. Equazione di Clausius-Mossotti

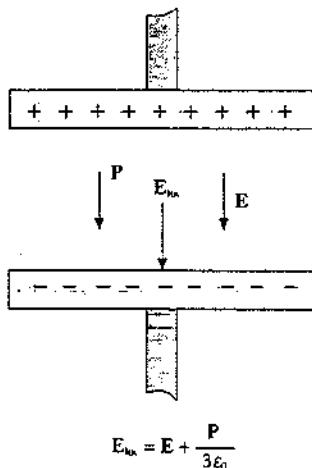


Figura 5.44

Nel paragrafo 5.10 abbiamo raggiunto la conclusione che sotto l'azione di un campo elettrico ogni molecola acquista il momento di dipolo  $p = \epsilon_0 \alpha E_{loc}$ , se  $E_{loc}$  è il campo elettrico che agisce sulla molecola; nel suo insieme il dielettrico acquista la polarizzazione

$$P = n p = \epsilon_0 n \alpha E_{loc} \quad . \quad (5.65)$$

Nei gas è lecito approssimare  $E_{loc}$  con il campo medio macroscopico e quindi le formule sono immediatamente utilizzabili.

Abbiamo già notato che il *campo microscopico locale comprende l'azione di tutti i dipoli del dielettrico escluso quello interessato*, mentre nel campo medio nessun contributo è escluso. Supponendo sferica una molecola, il campo locale può essere pensato come quello agente all'interno di una cavità sferica, campo che abbiamo calcolato nel paragrafo 5.8 ottenendo la (5.44). Assumiamo quindi che il campo realmente agente su una molecola sia

$$E_{loc} = E + \frac{P}{3\epsilon_0} \quad , \quad (5.66)$$

dove il secondo addendo rappresenta il *rinforzo del campo medio dovuto all'azione locale dei dipoli che circondano la molecola interessata*. Inserendo nella (5.65)

$$P = \epsilon_0 n \alpha \left( E + \frac{P}{3\epsilon_0} \right)$$

e risolvendo nella polarizzazione si ottiene

$$P = \epsilon_0 \frac{\frac{n \alpha}{n \alpha}}{1 - \frac{1}{3}} E \quad . \quad (5.67)$$

relazione che lega la polarizzazione nel dielettrico al campo medio macroscopico. Di conseguenza, da (5.11),

$$\chi = \kappa - 1 = \frac{\frac{n \alpha}{n \alpha}}{1 - \frac{1}{3}} \quad , \quad (5.68)$$

che è un'espressione più generale di (5.63).

Nei gas  $n \alpha / 3 \ll 1$  e  $\chi = n \alpha$ , come abbiamo scritto nel paragrafo 5.10. In effetti i valori misurati della suscettività elettrica sono inferiori a  $10^{-3}$ . Ciò equivale a dire che l'*effetto*

delle molecole circostanti la molecola interessata è trascurabile. Pertanto (5.67) è semplicemente  $P = \epsilon_0 n \alpha E$  e (5.66) diventa

$$E_{loc} = E + \frac{P}{3\epsilon_0} = \left(1 + \frac{\chi}{3}\right) E = \left(1 + \frac{n\alpha}{3}\right) E \approx E .$$

La situazione è diversa nei liquidi non polari in cui la suscettività elettrica ha valori prossimi all'unità. Per fissare le idee supponiamo che sia  $\chi = 0.6$  e quindi  $\chi/3 = 0.2$ . Il campo locale vale

$$E_{loc} = E + \frac{P}{3\epsilon_0} = \left(1 + \frac{\chi}{3}\right) E = (1 + 0.2) E :$$

L'effetto delle molecole circostanti la molecola interessata porta a un incremento del 20% del campo medio  $E$ .

Una verifica della relazione (5.68) si effettua nel modo seguente. L'argon gassoso, a temperatura ambiente e pressione atmosferica, ha una suscettività elettrica  $\chi_g = 0.545 \cdot 10^{-3}$  e quindi

$$(n\alpha)_g = \chi_g = 0.545 \cdot 10^{-3} .$$

Se ammettiamo che la polarizzazione sia la stessa nella fase gassosa e nella fase liquida, cioè sia indipendente dalla densità, deve essere

$$\frac{(n\alpha)_l}{(n\alpha)_g} = \frac{n_l}{n_g} = \frac{\rho_g}{\rho_l} .$$

Il valore misurato del rapporto delle densità è  $\rho_l/\rho_g = 810$ , per cui  $(n\alpha)_l = 0.44$ . Da (5.68)

$$\chi_l = \frac{(n\alpha)_l}{1 - \frac{1}{3}(n\alpha)_l} = 0.52 ,$$

in accordo molto buono con il valore sperimentale 0.54. L'uso della formula semplificata  $\chi = n\alpha$  anche per il liquido avrebbe portato al valore  $\chi = 0.44$ , inferiore di circa il 20% al valore reale. Abbiamo così provato che (5.68) descrive in modo adeguato la suscettività elettrica di un liquido (non polare).

La relazione (5.68) può essere riscritta esplicitando  $n\alpha$ :

$$\frac{\kappa - 1}{\kappa + 2} = \frac{n\alpha}{3}$$

Ricordando che  $n = N_A \rho / A$  otteniamo

$$\frac{1}{\rho} \frac{\kappa - 1}{\kappa + 2} = \frac{N_A \alpha}{3A} .$$

Equazione di  
Clausius-Mossotti

detta *equazione di Clausius-Mossotti*, nome riservato anche alla (5.68). Il secondo membro è caratteristico della sostanza, indipendentemente dal fatto che essa si trovi nella fase gassosa o liquida. Quindi anche il primo membro deve conservare lo stesso valore nelle due fasi, anche se  $\kappa$  e  $\rho$  hanno valori differenti.

Nella tabella 5.3 sono riportati i dati sperimentali per varie sostanze e si nota che l'accordo è buono, migliore per le molecole semplici che per le più complesse. Si tratta in ogni caso di molecole non polari.

L'equazione (5.69) cade in difetto se applicata all'acqua. La massa molecolare dell'acqua è  $A = 18$ , la densità è  $\rho_l = 10^3 \text{ kg/m}^3$  e quindi

$$n_l = \frac{N_A}{A} \rho_l = 3.35 \cdot 10^{28} \text{ molecole/m}^3 .$$

Nell'esempio 5.11 abbiamo visto che  $n_g = 1.38 \cdot 10^{25}$  molecole/m<sup>3</sup> e che, nel particolare stato indicato,  $\chi_g = (n\alpha)_g = 4 \cdot 10^{-3}$ . Pertanto

$$(n\alpha)_l = \frac{n_l}{n_g} (n\alpha)_g = \frac{n_l}{n_g} \chi_g = 9.71$$

	$\rho \left( \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right)$	$\kappa$	$\frac{1}{\rho} \frac{\kappa - 1}{\kappa + 2} \left( \frac{\text{m}^3}{\text{kg}} \right)$		$\rho \left( \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right)$	$\kappa$	$\frac{1}{\rho} \frac{\kappa - 1}{\kappa + 2} \left( \frac{\text{m}^3}{\text{kg}} \right)$
elio	0.178	1.000068	$1.27 \cdot 10^{-4}$		$0.15 \cdot 10^3$	1.055	$1.20 \cdot 10^{-4}$
azoto	1.251	1.000580	$1.55 \cdot 10^{-4}$		$0.81 \cdot 10^3$	1.454	$1.62 \cdot 10^{-4}$
ossigeno	1.429	1.000523	$1.22 \cdot 10^{-4}$		$1.19 \cdot 10^3$	1.507	$1.21 \cdot 10^{-4}$
argon	1.784	1.000545	$1.02 \cdot 10^{-4}$		$1.44 \cdot 10^3$	1.538	$1.06 \cdot 10^{-4}$
$\text{CS}_2$	3.39	1.0029	$2.85 \cdot 10^{-4}$		$1.29 \cdot 10^3$	2.641	$2.74 \cdot 10^{-4}$
$\text{CCl}_4$	4.89	1.0030	$2.04 \cdot 10^{-4}$		$1.59 \cdot 10^3$	2.238	$1.84 \cdot 10^{-4}$

e inserendo questo valore in (5.68) si ottiene  $\chi_i = -4.34$ , addirittura negativa, mentre la suscettività elettrica dell'acqua è  $\chi_e \approx 80$ .

Non si può dunque applicare l'equazione di Clausius-Mossotti alle molecole polari. In effetti nella fase liquida le molecole tendono a formare *catene* più o meno lunghe e non è più valida la teoria di Debye: non possiamo dunque fare ipotesi sull'egualanza della polarizzabilità nel gas e nel liquido. Inoltre non si può descrivere con il termine  $P / 3\epsilon_0$  il contributo locale al campo.

## 5.12 Cenno ai meccanismi di polarizzazione nei solidi

### Polarizzabilità ionica

I fenomeni di polarizzazione nei solidi sono molto vari e interessanti. In certi *cristalli* detti *ionici* (come ad esempio il cloruro di sodio) oltre alla polarizzabilità elettronica che è un fenomeno generale si manifesta la *polarizzabilità ionica*: gli ioni che formano il reticolo cristallino si spostano sotto l'azione del campo elettrico provocando la formazione di un momento di dipolo addizionale per unità di volume, cioè di una polarizzazione. La polarizzabilità totale è data da  $\alpha = \alpha_e + \alpha_i$  e di norma  $\alpha_i$  è maggiore di  $\alpha_e$ : entrambi i meccanismi non dipendono dalla temperatura.

### Elettreti

Più vistosi sono gli effetti nei solidi che hanno momenti di dipolo permanenti. Certe sostanze, dette *elettreti*, sottoposte a un campo elettrico molto intenso acquistano una notevole polarizzazione dovuta all'allineamento dei dipoli elementari e la conservano anche quando il campo viene spento. Esse generano nello spazio un campo di dipolo che però, se non si prendono particolari precauzioni, viene annullato da cariche libere presenti nell'aria che si depositano sul materiale e anche dallo spostamento di cariche all'interno.

### Piezoelettricità

Altre sostanze, come il quarzo, sottoposte a compressione o trazione presentano una polarizzazione, che non hanno in assenza di azioni meccaniche, e quindi generano un campo elettrico; viceversa, se sottoposte a un campo elettrico, esse si deformano. Il fenomeno si chiama *piezoelettricità* e ha notevoli e numerose applicazioni.

### Materiali ferroelettrici

Citiamo infine l'esistenza dei *materiali ferroelettrici*, particolari cristalli che hanno un momento di dipolo elettrico per ogni cella del reticolo cristallino e che in particolari condizioni presentano una *polarizzazione spontanea*, senza applicazione di campo elettrico, dovuta all'allineamento quasi completo dei dipoli elementari.

Un'ultima considerazione di carattere generale riguarda il comportamento dei dielettrici quando vengono sottoposti a campi elettrici variabili rapidamente nel tempo.

Con riferimento a una sostanza polare come l'acqua, il meccanismo di polarizzazione per orientamento presuppone la rotazione della molecola, che ha un dato momento d'inerzia e impiega un certo tempo per disporsi parallelamente al campo elettrico. Se il periodo con cui varia il campo è inferiore a un certo valore  $T$ , le molecole non riescono più a seguire il campo.  $\langle p_a \rangle$  risulta nullo e scompare il contributo della polarizzazione per orientamento. Resta soltanto il contributo dovuto alla polarizzazione elettronica, che è indipendente da  $T$  fino a valori dell'ordine di  $10^{-10}$  s, a causa della piccola inerzia degli elettroni i quali possono seguire senza ritardo le variazioni del campo. Per questo motivo la costante dielettrica relativa dell'acqua passa da  $\kappa = 81$  a  $\kappa = 1.75$  quando  $T$  scende al di sotto di  $10^{-9}$  s. Nel ghiaccio la riduzione avviene intorno a  $T = 10^{-4}$  s.

Vedremo che questa circostanza è di grande importanza nello studio della propagazione delle onde elettromagnetiche nei dielettrici.

# Corrente elettrica

## 6.1 Conduzione elettrica

I materiali conduttori solidi, le cui proprietà sono state descritte nel capitolo 4, sono costituiti da un reticolo spaziale ai cui vertici si trovano gli ioni positivi (atomi che hanno perso uno o più elettroni) e al cui interno si muovono gli elettroni liberi. In un metallo questi sono gli unici *portatori* mobili di carica e il loro numero per unità di volume si calcola come nell'esempio 5.10. Nel rame e nell'argento, in cui c'è un elettrone libero per atomo, abbiamo rispettivamente

$$n = \frac{N_A \rho}{A} = \frac{6.022 \cdot 10^{26} \cdot 8.96 \cdot 10^3}{63.55} = 8.49 \cdot 10^{28} \text{ elettroni / m}^3,$$

$$n = \frac{6.022 \cdot 10^{26} \cdot 10.5 \cdot 10^3}{107.87} = 5.86 \cdot 10^{28} \text{ elettroni / m}^3.$$

L'ordine di grandezza è lo stesso per tutti i conduttori metallici.

Il moto degli elettroni liberi in un conduttore in equilibrio elettrostatico è completamente disordinato. In qualsiasi volume  $\tau$ , piccolo su scala macroscopica, ma contenente un numero  $N$  di elettroni abbastanza elevato (con  $\tau = 10^{-18} \text{ m}^3 = 1 \mu \text{m}^3$ ,  $N = n \tau \approx 10^{29} \cdot 10^{-18} = 10^{11}$  elettroni), la velocità media è nulla:

$$\mathbf{v}_m = \frac{1}{N} \sum_i \mathbf{v}_i = 0 ,$$

indicando con  $\mathbf{v}_i$  le velocità dei singoli elettroni. Ciò vuol dire che non esiste una direzione di moto preferenziale per gli elettroni.

Se si mettono a contatto due conduttori  $C_1$  e  $C_2$ , isolati, a potenziali  $V_1$  e  $V_2$  diversi, si raggiunge una condizione di equilibrio in cui entrambi i conduttori si portano allo stesso potenziale  $V$ . Nel processo un certo numero di elettroni passa dal conduttore a potenziale minore a quello a potenziale maggiore, sotto l'azione del campo elettrico  $E$  dovuto alla d.d.p.  $\Delta V$ . Questo moto ordinato di elettroni in una certa direzione costituisce una *corrente elettrica* e il fenomeno è un esempio di *conduzione elettrica*.

La corrente elettrica in questo caso specifico dura soltanto un tempo molto breve: il limite inferiore è dato da una dimensione tipica del conduttore divisa per la velocità della luce; la breve durata impedisce l'esecuzione di studi sistematici del fenomeno.

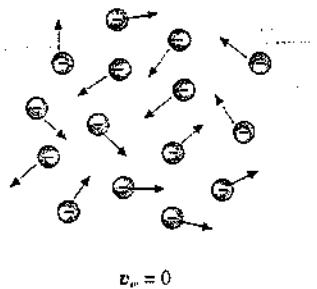


Figura 6.1

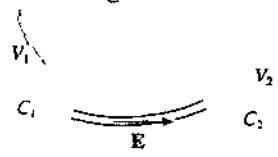


Figura 6.2

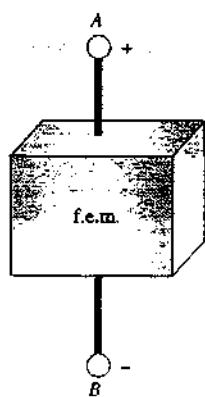


Figura 6.3

## Corrente continua

A tale scopo è necessario disporre di un dispositivo capace di mantenere una differenza di potenziale, e quindi un campo elettrico, tra due conduttori a contatto ovvero tra due punti di uno stesso conduttore. Così facendo il flusso di elettroni può durare per molto tempo e quindi nel conduttore si instaura una corrente elettrica stabile, in un regime di equilibrio dinamico e non più di equilibrio elettrostatico.

Un qualsiasi dispositivo con le caratteristiche appena descritte è definito come *generatore di forza elettromotrice* (f.e.m.). Storicamente il primo è quello inventato da Alessandro Volta nel 1800: esso permise da una parte lo studio della conduzione nei metalli e in altri mezzi conduttori, dall'altra la successiva scoperta degli effetti magnetici di una corrente elettrica (vedi capitolo 8).

Nella sua versione originale la cella o pila voltaica consta di una serie di elementi ciascuno dei quali è costituito da un disco di zinco, un tampone imbevuto di una soluzione acquosa di acido solforico e un disco di rame: il disco di rame risulta carico positivamente e quello di zinco negativamente. Se si misura con uno strumento elettrostatico, cioè senza far passare corrente, la d.d.p. tra i due dischi si trova un valore fisso, caratteristico della coppia di metalli e che con  $m$  elementi è  $m$  volte quello del singolo elemento: tale valore è detto f.e.m. della pila. Collegando alla estremità (o *poli*) della pila un conduttore, ad esempio un filo metallico, viene stabilita in questo una corrente elettrica costante nel tempo, denominata anche *corrente continua*; in realtà con una pila di Volta la corrente diminuisce lentamente nel tempo.

Esiste attualmente una grande varietà di pile, e tra queste le batterie automobilistiche, che funzionano sostanzialmente in base allo stesso principio scoperto da Volta. Il lavoro necessario per mantenere un moto ordinato di cariche in un circuito chiuso è ottenuto nella pila trasformando energia chimica in energia elettrica. In altri tipi di generatori di f.e.m. avviene invece la trasformazione di energia meccanica in energia elettrica.

Torneremo in seguito sul funzionamento della pila di Volta e sulle caratteristiche elettriche generali dei generatori di f.e.m.; per ora ci limitiamo a considerarli dispositivi in grado di mantenere una d.d.p. costante ai capi di un conduttore e quindi di una corrente elettrica continua attraverso di esso.

A fianco è indicato il simbolo che si usa per tali generatori; esso ricorda la pila (ma è valido qualunque sia il meccanismo di funzionamento interno) e il fatto che si addensano cariche di segno opposto alle due estremità A e B, dette appunto *polo positivo* e *polo negativo del generatore*.

La conduzione elettrica, che nei metalli è dovuta al moto degli elettroni, è possibile anche nei gas e nei liquidi se in essi sono contenuti portatori di carica.

Nei gas in condizioni ordinarie gli atomi sono neutri e quindi un gas non è un conduttore di corrente. Se però avviciniamo al gas un agente ionizzante, come può essere una fiamma o una sorgente radioattiva o di raggi X, si creano coppie ione positivo-elettrone appunto per il fenomeno della ionizzazione, cioè della cessione ad un elettrone di una quantità di energia tale da staccarlo dall'atomo. Nel moto completamente disordinato di queste cariche uno ione può catturare un elettrone ricostituendo un atomo o una molecola neutra (*fenomeno di ricombinazione*) e un elettrone può essere catturato da un atomo neutro formando uno ione negativo (*fenomeno di cattura*, importante nei gas elettronegativi come l'ossigeno). Si raggiunge in generale un equilibrio dinamico caratterizzato da  $n$  portatori positivi e  $n$  negativi per unità di volume, con velocità media nulla.

Una situazione simile a quella dei gas si può avere con liquidi dielettrici, come l'argon liquido; in una soluzione elettrolitica invece i sali o gli acidi si *dissociano spontaneamente* in modo che anche in essa sono contenute in media  $n$  coppie di segno opposto per unità di volume. Il moto di queste cariche è sempre completamente disordinato e la velocità media è nulla.

Quando nel gas o nel liquido ionizzato o nella soluzione elettrolitica vengono



immersi due elettrodi tra i quali viene mantenuta una d.d.p. tramite un generatore di f.e.m., nel fluido si manifesta una corrente elettrica continua dovuta al moto degli ioni positivi nel verso del campo elettrico  $E$  e degli ioni negativi nel verso opposto a  $E$ .

Infine sono molto importanti nella tecnologia elettronica i *semiconduttori*, materiali solidi isolanti nei quali con un trattamento opportuno di cui parleremo in seguito è possibile avere portatori di carica dei due segni e mantenere quindi una corrente elettrica se viene applicata una d.d.p.

In tutti i casi di conduzione elettrica che abbiamo citato il moto delle cariche è ostacolato dal mezzo in cui avviene il moto e l'analisi di questo fatto porta al concetto di *resistenza* del conduttore (paragrafo 6.5). È quindi sempre necessaria la spesa di un lavoro per vincere le forze che si oppongono al passaggio di corrente, lavoro che come abbiamo già notato è ottenuto a spese dell'energia interna del generatore di f.e.m.

L'unica eccezione si ha in alcuni metalli puri e leghe metalliche a temperature vicine allo zero assoluto e si parla di *supercondutività*: una corrente elettrica può essere mantenuta in essi per tempi molto lunghi senza spesa di potenza. Anche su questo argomento torneremo più avanti, sia in questo capitolo che quando descriveremo il comportamento degli elettroni nei metalli secondo le leggi della meccanica quantistica.

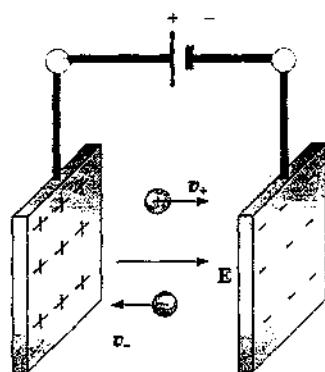


Figura 6.4

### Esempio 6.1

Calcolare la velocità quadratica media degli elettroni in un metallo, nell'ipotesi che il gas di elettroni si comporti come un gas ideale.

#### Soluzione

Se gli elettroni liberi potessero essere trattati come un gas ideale, la loro energia cinetica media alla temperatura  $T$  sarebbe

$$\frac{1}{2} m \bar{v}^2 = \frac{3}{2} k_B T$$

$m = 9.1 \cdot 10^{-31}$  kg è la massa dell'elettrone e  $k_B \approx 1.38 \cdot 10^{-23}$  J/mole K la costante di Boltzmann. Alla temperatura ambiente  $T = 293$  K

$$E = \frac{3}{2} \cdot 1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 293 = 0.61 \cdot 10^{-20} \text{ J} = 0.038 \text{ eV.}$$

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{2E}{m}} = 1.16 \cdot 10^5 \text{ m/s}$$

Questo valore risulta essere in completo disaccordo con quanto prevede la meccanica quantistica. Secondo la teoria di Fermi-Sommerfeld, che verrà discussa nel capitolo 19, gli elettroni all'interno di un metallo hanno una distribuzione di energie cinetiche che varia da un valore minimo ad un valore massimo  $E_F$ , detto energia di Fermi, caratteristico del tipo di conduttore. Nel rame  $E_F = 7.03$  eV, che è due ordini di grandezza superiore al valor medio previsto dalla teoria cinetica dei gas; in corrispondenza

$$v_F = \sqrt{\frac{2E_F}{m}} \approx 1.57 \cdot 10^6 \text{ m/s}$$

Tali risultati, validi per  $T = 0$ , non variano apprezzabilmente con la temperatura del conduttore. Osserviamo che se gli elettroni si comportassero come un gas ideale, per avere un'energia cinetica  $E_F$  dovrebbero essere portati alla temperatura

$$T_F = \frac{2E_F}{3k_B} = 54386 \text{ K}$$

L'esempio appena visto mette in luce una grossa discrepanza tra un modello classico e uno quantistico. Siccome la teoria quantistica spiega coerentemente tutta una serie di fenomeni che si osservano nei metalli, è ad essa e ai suoi risultati numerici che bisogna fare riferimento anche quando si costruisce un modello basato su concetti classici. Vedremo un esempio alla fine del paragrafo 6.5.

## 6.2 Corrente elettrica

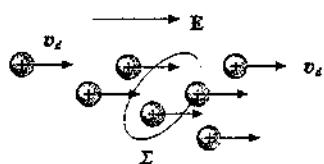


Figura 6.5

Supponiamo che in una certa regione di un conduttore ci siano  $n_+$  portatori di carica  $+e$  per unità di volume e che in essa agisca un campo elettrico  $\mathbf{E}$  prodotto da un generatore di f.e.m.; i portatori si muovono sotto l'azione della forza elettrica  $\mathbf{F} = e\mathbf{E}$ , dando origine a una corrente elettrica, e indichiamo con  $v_d$  la loro velocità lungo la direzione del campo elettrico  $\mathbf{E}$ , detta anche *velocità di deriva* (vedi paragrafo 6.4).

Consideriamo una superficie  $\Sigma$  tracciata all'interno del conduttore; detta  $\Delta q$  la carica che passa attraverso  $\Sigma$  nel tempo  $\Delta t$ , si definisce intensità di corrente la grandezza

$$i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt} . \quad (6.1)$$

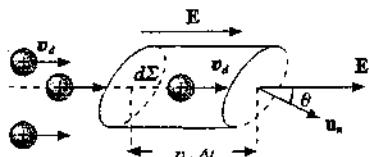


Figura 6.6

La definizione (6.1) è del tutto generale e vale anche per fenomeni variabili nel tempo.

Per mettere in relazione la corrente elettrica con il moto delle cariche ci riferiamo a una superficie infinitesima  $d\Sigma$  la cui normale  $\mathbf{u}_n$  formi un angolo  $\theta$  con il campo elettrico  $\mathbf{E}$  e quindi con la velocità  $\mathbf{v}_d$  delle cariche positive. Nel tempo  $\Delta t$  le cariche percorrono la distanza  $v_d \Delta t$  per cui la carica complessiva che passa attraverso  $d\Sigma$  nel tempo  $\Delta t$  è quella contenuta nel volume infinitesimo  $d\tau$  definito da  $d\Sigma$  e  $v_d \Delta t$ :

$$d\tau = v_d \Delta t d\Sigma \cos \theta , \quad \Delta q = n_+ e d\tau = n_+ e v_d d\Sigma \cos \theta \Delta t .$$

La carica che passa nell'unità di tempo attraverso  $d\Sigma$ , cioè l'intensità di corrente attraverso  $d\Sigma$ , è in base a (6.1)

$$di = n_+ e v_d d\Sigma \cos \theta .$$

Definiamo il vettore densità di corrente  $\mathbf{j}$  come

$$\mathbf{j} = n_+ e \mathbf{v}_d \quad (6.2)$$

e riscriviamo

$$di = \mathbf{j} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma . \quad (6.3)$$

L'intensità di corrente attraverso la superficie finita  $\Sigma$  si ottiene integrando (6.3):

$$i = \int_{\Sigma} \mathbf{j} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = \Phi_{\Sigma}(\mathbf{j}) ; \quad (6.4)$$

essa risulta eguale al flusso del vettore densità di corrente attraverso la superficie  $\Sigma$ .

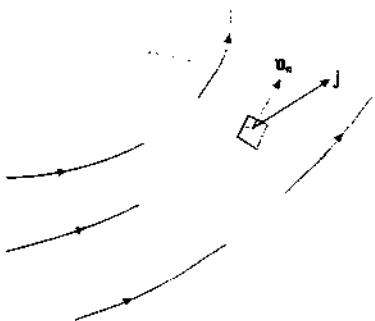


Figura 6.7

In particolare, se la superficie  $\Sigma$  è ortogonale a  $j$ , cioè a  $v_d$ , e  $j$  ha lo stesso valore in tutti i punti di  $\Sigma$ ,

$$i = j\Sigma \quad j = \frac{i}{\Sigma} \quad (6.5)$$

la densità di corrente è la corrente che attraversa l'unità di superficie perpendicolare alla direzione del moto delle cariche (e resta così giustificato il nome densità di corrente).

Se, come nei conduttori metallici, i portatori di carica sono negativi, fissata la direzione e il verso di  $E$  la velocità di deriva  $v_+$  è diretta in verso opposto rispetto al campo elettrico. Il vettore  $-ev_+$  ha invece lo stesso verso di  $E$  e la densità di corrente, detto  $n_-$  il numero di portatori per unità di volume, è

$$j = -n_- ev_- \quad , \quad (6.6)$$

parallela e concorde al campo elettrico.

Quando sono presenti, come nei fluidi ionizzati o nelle soluzioni elettrolitiche o nei semiconduttori, portatori positivi che hanno velocità di deriva  $v_+$  e portatori negativi che hanno velocità di deriva  $v_-$ , la densità di corrente è data da

$$j = n_+ ev_+ - n_- ev_- \quad ; \quad (6.7)$$

i due termini sono concordi e hanno lo stesso verso del campo elettrico.

Questo fatto, cioè che la densità di corrente sia sempre concorde a  $E$ , discende dalla definizione di  $j$  come prodotto della carica per unità di volume (con il suo segno) per la velocità di deriva e riflette la circostanza sperimentale che su scala macroscopica non è possibile correlare il verso della corrente al segno dei portatori di carica: fissata una data d.d.p. gli stessi effetti si hanno se la conduzione è dovuta a cariche positive con moto concorde a  $E$  oppure a cariche negative con moto discordo a  $E$ . Solo per mezzo di un effetto microscopico, l'effetto Hall che vedremo nel capitolo 8, è possibile, almeno nei conduttori metallici, riconoscere il segno dei portatori di carica.

In base a queste considerazioni si assume convenzionalmente come verso della corrente quello del moto delle cariche positive, ovvero quello che va dai punti a potenziale maggiore ai punti a potenziale minore.

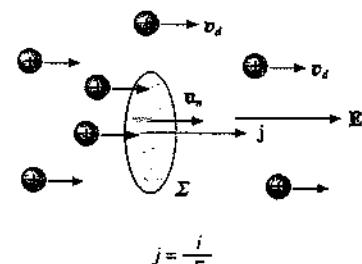


Figura 6.8

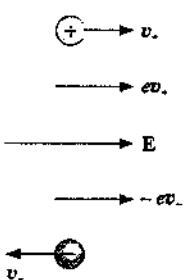


Figura 6.9

### Unità di misura

L'unità di misura della corrente elettrica nel sistema internazionale è l'ampere, simbolo A. Si ha l'intensità di corrente di 1 A quando, attraverso una data superficie, passa la carica di 1 C in 1 s:

$$A = \frac{C}{s}$$

Nella pratica sono molto usati i sottomultipli milliampere, microampere, nanoampere.

$$1 \text{ mA} = 10^{-3} \text{ A} \quad , \quad 1 \mu\text{A} = 10^{-6} \text{ A} \quad , \quad 1 \text{nA} = 10^{-9} \text{ A} \quad .$$

e, nelle applicazioni di potenza, i multipli chiloampere e megaampere:

$$1 \text{ kA} = 10^3 \text{ A} \quad , \quad 1 \text{ MA} = 10^6 \text{ A} \quad .$$

La densità di corrente si misura in A/m<sup>2</sup>.

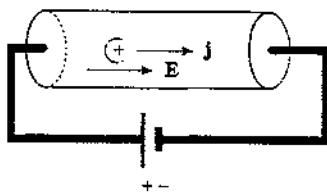
**Esempio 6.2**

Un conduttore cilindrico di rame, avente sezione di area  $\Sigma = 4 \text{ mm}^2$ , è percorso da una corrente di intensità  $i = 8 \text{ A}$ . Calcolare la velocità di deriva degli elettroni.

**Soluzione**

In base a (6.5) la densità di corrente vale

$$j = i / \Sigma = 2 \text{ A/mm}^2 = 2 \cdot 10^6 \text{ A/m}^2$$



**Figura 6.10**

È questo l'ordine di grandezza della densità di corrente massima che può fluire in un conduttore senza che abbiano origine apprezzabili effetti termici, i quali possono portare alla fusione del conduttore (si veda l'esempio 6.6). Ricordando che nel rame  $n = 8.49 \cdot 10^{28}$  elettroni /  $\text{m}^3$ , da (6.2).

$$v_d = j / n e = 1.47 \cdot 10^{-4} \text{ m/s} = 0.147 \text{ mm/s}$$

Il confronto della velocità di deriva con la velocità  $v_F$  calcolata nell'esempio 6.1 dà  $v_d / v_F = 10^{-10}$ . L'effetto della conduzione è quello di introdurre una *perturbazione molto piccola* della velocità di ogni singolo elettrone. Tuttavia questo *effetto collettivo ordinario*, in cui tutti gli elettroni hanno la stessa velocità di deriva, dà origine a un risultato macroscopico visibile, la corrente elettrica; per quanto piccola, la velocità media degli elettroni, coincidente con  $v_d$ , non è nulla come avviene in assenza di campo, e il numero di elettroni per unità di volume è molto grande.

Nei dielettrici abbiamo visto una situazione simile. Precisamente, nella polarizzazione elettronica l'effetto del campo elettrico su un atomo o su una molecola è quello di perturbare leggermente la distribuzione di carica, dando origine a un momento di dipolo elettrico molto piccolo; però il numero di dipoli per unità di volume è molto grande e l'effetto collettivo macroscopico, cioè la polarizzazione del dielettrico, è ben misurabile. Notiamo inoltre che la carica che può muoversi, per unità di volume, è

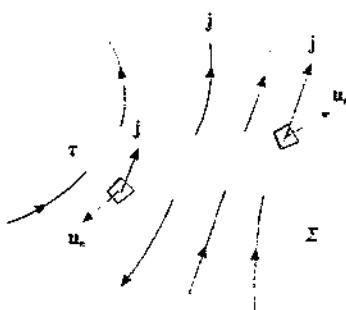
$$n e = 8.49 \cdot 10^{28} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} = 13.6 \cdot 10^9 \text{ C/m}^3 = 13.6 \text{ C/mm}^3$$

Si tratta di una carica molto grande, enorme dal punto di vista elettrostatico; però non è un eccesso di carica, che con valori simili non potrebbe mai stare insieme, bensì è una parte della carica costitutiva del materiale, finemente mescolata a una eguale carica di segno opposto (gli ioni del reticolo), per cui non si hanno effetti elettrostatici repulsivi. Il valore della densità di corrente dipende dalla velocità con cui questa carica si muove e quindi dal campo elettrico agente, come vedremo nel paragrafo 6.4.

### 6.3 Legge di conservazione della carica. Regime di corrente stazionaria

Consideriamo una regione di spazio di volume  $\tau$  delimitato da una superficie chiusa  $\Sigma$ , che orientiamo in modo che il versore della normale  $u_n$  sia in ogni punto diretto verso l'esterno. Se la regione è sede di una corrente elettrica, definita dal vettore densità di corrente  $j$ , la carica totale che passa nell'unità di tempo attraverso la superficie  $\Sigma$  è data, secondo (6.4), dal flusso di  $j$  attraverso  $\Sigma$ :

$$i = \oint j \cdot u_n d\Sigma$$



**Figura 6.11**

I contributi positivi all'integrale vengono da quelle parti di  $\Sigma$  in cui  $j \cdot u_n$  è positivo ( $j$  punta verso l'esterno) e rappresentano una *carica positiva* che *esce* da  $\Sigma$  o una negativa che *entra*, mentre i contributi negativi si hanno dove  $j \cdot u_n < 0$  ( $j$  punta verso l'interno) e sono dovuti a una *carica positiva* che *entra* in  $\Sigma$  o una negativa che *esce*.

Il principio di conservazione della carica richiede che  $i$ , pari alla carica che attraversa  $\Sigma$  nell'unità di tempo, sia eguale alla variazione nell'unità di tempo della carica complessiva contenuta all'interno di  $\Sigma$ : ovvero, in accordo formalmente anche con (6.1), deve essere

$$i = \oint \mathbf{j} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = -\frac{\partial q_{int}}{\partial t} \quad . \quad (6.8) \quad \text{Principio di conservazione della carica}$$

Il segno meno è giustificato dal fatto che se l'integrale è complessivamente positivo la carica all'interno diminuisce e quindi ha derivata negativa (e viceversa se l'integrale è negativo).

Un caso particolare, ma interessante e soprattutto molto diffuso nella pratica, si ha quando la carica contenuta all'interno della superficie non varia, per cui  $\partial q_{int}/\partial t = 0$ ; segue da (6.8) la cosiddetta condizione di stazionarietà:

$$\oint \mathbf{j} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = 0 \quad . \quad (6.9) \quad \text{Condizione di stazionarietà}$$

Prima di discutere il significato fisico della (6.9), ne ricaviamo la forma locale.

Scriviamo  $q_{int} = \int_{\tau} \rho d\tau$  e inseriamo questa espressione nella (6.8), scambiando contemporaneamente le operazioni di integrazione su  $\tau$  e di derivazione rispetto al tempo, che sono indipendenti in quanto  $\Sigma$  e  $\tau$  non variano nel tempo:

$$\oint \mathbf{j} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = - \int_{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau \quad .$$

Applichiamo il teorema della divergenza (3.22) all'integrale superficiale e otteniamo

$$\int_{\tau} \left( \nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) d\tau = 0 \quad .$$

Se questa relazione deve essere valida comunque si scelga il volume  $\tau$ , deve essere nullo l'integrando:

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad . \quad (6.10) \quad \text{Equazione di continuità}$$

La (6.10) è nota come *equazione di continuità della corrente elettrica* ed esprime in modo dinamico la *conservazione della carica elettrica*; essa è l'*espressione locale* della legge integrale (6.8).

In condizioni stazionarie  $\partial \rho / \partial t = 0$  e quindi

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad , \quad (6.11) \quad \text{Regime stazionario}$$

che è l'espressione locale di (6.9) e si chiama *equazione di continuità della corrente elettrica in regime stazionario*.

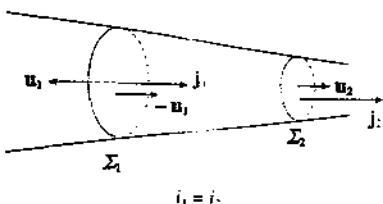
Come abbiamo discusso nel paragrafo 3.4, e visto ad esempio nel caso del vett-

tore induzione dielettrica in assenza di cariche libere, un vettore il cui flusso è nullo attraverso qualsiasi superficie chiusa, ovvero un vettore a divergenza identicamente nulla, si dice *solenoidale*. Le (6.9) e (6.11) affermano che il *vettore densità di corrente j in condizioni stazionarie è solenoidale*. Dalla (3.26) sappiamo che nel caso più generale ciò vuol dire che il flusso entrante in  $\Sigma$  è eguale al flusso uscente e così, appunto, la carica interna resta costante.

Particolarmente significativa è l'applicazione di questo risultato a un conduttore solido percorso da una corrente di densità  $j$ . La superficie  $\Sigma$  è costituita da due diverse sezioni  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  del conduttore e dalla superficie laterale del conduttore stesso (vedi figura 6.12), attraverso cui non passa corrente. Pertanto, in base a (6.9),

$$\oint \mathbf{j} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = \int_{\Sigma_1} \mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{u}_1 d\Sigma_1 + \int_{\Sigma_2} \mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{u}_2 d\Sigma_2 = 0 ,$$

Figura 6.12



ovvero

$$\int_{\Sigma_2} \mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{u}_2 d\Sigma_2 = \int_{\Sigma_1} \mathbf{j}_1 \cdot (-\mathbf{u}_1) d\Sigma_1 ,$$

che è l'applicazione di (3.26) al caso in esame. Di conseguenza

$$i_1 = i_2 : \quad (6.12)$$

*in condizioni stazionarie l'intensità di corrente è la stessa attraverso ogni sezione del conduttore.* Se il conduttore è a sezione variabile la densità di corrente, e quindi la velocità di deriva secondo (6.2), sono maggiori dove la sezione è minore, situazione che ricorda quella del moto di un fluido incomprensibile in regime stazionario lungo un condotto a sezione variabile.

È importante osservare che la condizione di stazionarietà non implica necessariamente che la corrente sia costante nel tempo: essa può variare purché la carica che per unità di tempo entra in una data superficie chiusa  $\Sigma$  sia eguale a quella che ne esce, sempre nell'unità di tempo. L'affermazione resta vera finché il tempo che caratterizza la variabilità della corrente è grande rispetto al tempo che impiegherebbe la luce ad attraversare il volume compreso in  $\Sigma$ . Questo criterio si fonda sul fatto che una perturbazione elettrica, ad esempio una variazione di carica, localizzata ad un certo istante in un dato punto, si *propaga* con velocità  $c = 3 \cdot 10^8$  m/s. Se il tempo di propagazione è piccolo rispetto agli altri tempi in gioco, si ammette che la perturbazione venga avvertita istantaneamente in ogni punto.

#### 6.4 Modello classico della conduzione elettrica. Legge di Ohm

Un modello classico della conduzione elettrica nei metalli fu proposto nel 1900 da Drude e successivamente sviluppato da Lorentz nel 1906. In questo modello si suppone che gli ioni del reticolo cristallino siano fissi e che gli elettroni si muovano attraverso il reticolo in modo completamente disordinato. Nel loro moto gli elettroni subiscono continue *interazioni* con gli ioni, che chiamiamo *urti*: tra un urto e il successivo il moto è libero e la traiettoria rettilinea, cosicché la traiettoria di ciascun elettrone è costituita da una successione di segmenti rettilinei, con direzione e lunghezza variabili. L'insieme delle traiettorie è completamente casuale e non si ha un flusso netto di carica, cioè una corrente, in nessuna direzione. Si possono definire un *tempo medio t* e un *cammino libero medio l* tra due urti successivi, legati dalla relazione

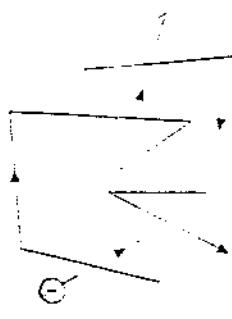


Figura 6.13

$$\tau = \frac{1}{v} t$$

(6.13)

essendo  $v$  la velocità degli elettroni nel metallo.

Quando si applica un campo elettrico  $E$  ciascun elettrone acquista un'accelerazione  $a = F/m = -eE/m$ , opposta al campo elettrico, e i tratti rettilinei tra due urti diventano archi di parabola, come abbiamo visto nell'esempio 2.4. Alla distribuzione casuale e isotropa delle velocità si sovrappone una *velocità  $v_d$  di deriva*; essendo questa velocità piccola rispetto a quella propria degli elettroni, il tempo medio  $\tau$  tra due urti consecutivi non cambia. Se diciamo  $v_i$  la velocità di un elettrone subito dopo un urto e  $v_{i+1}$  la velocità subito prima dell'urto successivo, abbiamo

$$v_{i+1} = v_i - \frac{eE}{m} \tau$$

Facciamo la media su un gran numero  $N$  di urti e definiamo la *velocità di deriva* come

$$v_d = \frac{1}{N} \sum_i v_{i+1} = \frac{1}{N} \sum_i v_i - \frac{eE}{m} \tau$$

La media non cambia il termine contenente il campo elettrico che è eguale per tutti gli elettroni; inoltre  $\sum_i v_i = 0$  in quanto dopo ogni urto la distribuzione delle velocità rimane casuale. Pertanto

$$v_d = -\frac{e\tau}{m} E \quad : \quad (6.14) \quad \text{Velocità di deriva}$$

per effetto del campo elettrico  $E$  ciascun elettrone nel metallo acquista una *velocità  $v_d$  nella direzione del campo elettrico*, che è *proporzionale al campo elettrico stesso*.

In sostanza si ammette che in media l'urto cancelli la direzione preferenziale del moto dovuta all'azione del campo elettrico e che questa venga ristabilita durante il tempo  $\tau$ . La (6.14) si può scrivere anche  $m v_d = -eE\tau$  e interpretare dicendo che l'elettrone acquista nel tempo  $\tau$  la quantità di moto  $m v_d$  pari all'impulso della forza, quantità di moto che viene persa nell'urto successivo e riacquistata dopo un altro intervallo di tempo  $\tau$ . Essendo  $\tau$  il tempo medio tra due urti, ciò vuol dire che gli elettroni hanno in media la componente di velocità  $v_d$  nella direzione del campo; questa risulta proporzionale alla forza agente (come avviene nel moto di un punto materiale sottoposto all'azione di una forza costante e di una forza resistente viscosa).

La densità di corrente che consegue a questo moto ordinato è, secondo (6.6),

$$j = -ne v_d = \frac{n e^2 \tau}{m} E \quad . \quad (6.15)$$

Indicando con

$$\sigma = \frac{n e^2 \tau}{m} \quad (6.16)$$

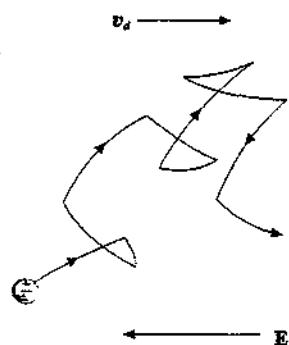


Figura 6.14

una grandezza caratteristica del materiale, detta *conduttività*, la (6.15) si scrive

Legge di Ohm

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \quad . \quad (6.17)$$

Benché la (6.14) sia stata dedotta considerando il moto degli elettroni in un metallo, si capisce che essa può essere generalizzata al moto di portatori dei due segni ottenendo

$$v_+ = \frac{e\tau_+}{m_+} \mathbf{E}, \quad v_- = -\frac{e\tau_-}{m_-} \mathbf{E},$$

dove a priori il tempo medio tra due urti può essere diverso per portatori positivi di massa  $m_+$  e negativi di massa  $m_-$ . La densità di corrente è data da

$$\mathbf{j} = n e v_+ - n e v_- = n e^2 \left( \frac{\tau_+}{m_+} + \frac{\tau_-}{m_-} \right) \mathbf{E} \quad . \quad (6.18)$$

Definiamo anche ora la *conduttività del mezzo* come

Conduttività del mezzo

$$\sigma = \frac{n e^2 \tau_+}{m_+} + \frac{n e^2 \tau_-}{m_-}$$

e la (6.18) assume la stessa forma di (6.17).

La (6.17) è nota come *legge di Ohm della conduzione elettrica*: essa stabilisce che il rapporto tra la densità di corrente  $\mathbf{j}$  e il campo elettrico applicato  $\mathbf{E}$  è dato da una grandezza caratteristica del conduttore. La dipendenza di  $\sigma$  da  $e^2$ , cioè il fatto che la conduttività sia intrinsecamente positiva, ribadisce il fatto che la densità di corrente è concorde al campo elettrico indipendentemente dal segno dei portatori di carica.

Molto spesso la (6.17) è scritta nella forma

$$\mathbf{E} = \rho \mathbf{j} \quad (6.19)$$

dove la grandezza

Resistività del conduttore

$$\rho = \frac{1}{\sigma} \quad (6.20)$$

è chiamata *resistività del conduttore*.

La potenza spesa dalla forza  $\mathbf{F} = e \mathbf{E}$  per mantenere in moto la carica  $e$  con velocità  $v_d$  è

$$P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}_d = e \mathbf{E} \cdot \mathbf{v}_d \quad .$$

Se nel conduttore ci sono  $n$  portatori per unità di volume, la *potenza spesa per unità di volume* è

Potenza trasferita agli ioni del reticolo

$$P_t = n P = n e v_d \cdot \mathbf{E} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \quad . \quad (6.21)$$

Applichiamo la legge di Ohm nella forma (6.17) o (6.19) e otteniamo

$$P_t = \sigma E^2 = \rho j^2 \quad . \quad (6.22)$$

In un conduttore metallico questa potenza viene trasferita tramite gli urti agli ioni del reticolo cristallino e in definitiva si ha una trasformazione di energia elettrica in energia interna del conduttore, con conseguente aumento di temperatura dello stesso e cessione di calore all'ambiente.

La legge di Ohm ha le caratteristiche di una *equazione di stato* che descrive le proprietà del materiale rispetto alla conduzione elettrica, così come, ad esempio, la (5.11) descrive il comportamento di un dielettrico lineare sottoposto a un campo elettrico. Il modello che porta alla (6.16) fornisce inoltre una descrizione della condutività, che è una grandezza macroscopica, in termini di grandezze che caratterizzano fenomeni microscopici, proprio come i modelli dei meccanismi di polarizzazione fanno per la suscettività elettrica.

### Esempio 6.3

Una corrente stazionaria passa attraverso due conduttori solidi, di conduttività  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ , a contatto lungo una superficie di separazione  $\Sigma_0$ . Determinare il comportamento dei vettori  $j$  e  $E$  nell'attraversamento di  $\Sigma_0$ .

#### Soluzione

Prendiamo una scatola cilindrica con asse ortogonale a  $\Sigma_0$  e basi infinitesime  $d\Sigma_1$  e  $d\Sigma_2$ , parallele a  $\Sigma_0$ , una nel primo conduttore e una nel secondo. Da (6.9) e (6.17) ricaviamo

$$\mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{u}_2 d\Sigma_2 + \mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{u}_1 d\Sigma_1 = (j_{2n} - j_{1n}) d\Sigma_0 = (\sigma_2 E_{2n} - \sigma_1 E_{1n}) d\Sigma_0 = 0 ,$$

in quanto assumiamo nullo il flusso attraverso la superficie laterale (sarebbe un infinitesimo di ordine superiore). Pertanto

$$j_{1n} = j_{2n} = \sigma_1 E_{1n} = \sigma_2 E_{2n} . \quad (6.23)$$

La componente normale a  $\Sigma_0$  della densità di corrente è continua, mentre è discontinua la componente normale del campo elettrico  $E$  che provoca il passaggio di corrente.

Osserviamo che se applichiamo lo stesso ragionamento in prossimità della superficie laterale di uno qualsiasi dei due conduttori, siccome all'esterno la condutività è nulla all'interno deve essere

$$j_n = \sigma E_n = 0 :$$

in prossimità della superficie del conduttore il campo elettrico e la densità di corrente sono paralleli alla superficie del conduttore (non c'è flusso di carica attraverso la superficie laterale).

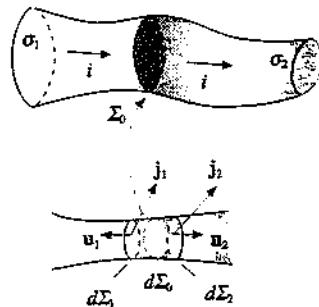


Figura 6.15

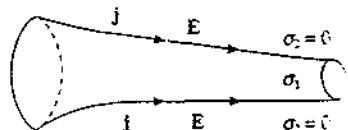


Figura 6.16

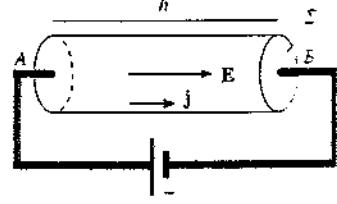


Figura 6.17

## 6.5 Legge di Ohm per i conduttori metallici. Resistenza elettrica. Effetto Joule

Applichiamo i risultati del paragrafo 6.4 ad un conduttore metallico cilindrico di lunghezza  $h$  e sezione  $\Sigma$ . Ai capi del conduttore è applicata, tramite un generatore di f.e.m., una d.d.p.  $V = V_A - V_B$  per cui il conduttore è sede di un campo elettrico  $E$ , parallelo all'asse del cilindro, ed è percorso da una corrente elettrica di densità

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\rho} \mathbf{E} = \sigma \mathbf{E} ,$$

secondo (6.17) e (6.19). Il regime è stazionario, l'intensità di corrente ha lo stesso valore attraverso qualsiasi sezione del conduttore e vale, in base a (6.5),

$$i = j \Sigma = \frac{\Sigma}{\rho} E \Rightarrow E = \frac{\rho}{\Sigma} i$$

Tra campo elettrico e d.d.p. sussiste la relazione (2.7)

$$V = V_A - V_B = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = Eh$$

e in definitiva

$$V = \frac{\rho h}{\Sigma} i \quad . \quad (6.24)$$

Chiamando *resistenza del conduttore* in esame la grandezza

Resistenza di un conduttore

$$R = \rho \frac{h}{\Sigma} \quad , \quad (6.25)$$

la (6.24) diviene

Legge di Ohm per i conduttori metallici

$$V = R i \quad , \quad (6.26)$$

nota come *legge di Ohm per i conduttori metallici*.

Se la sezione del conduttore è variabile, per un tratto lungo  $dh$  e di sezione  $\Sigma$  scriviamo

$$-dV = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \rho \frac{dh}{\Sigma} i$$

e integrando lungo tutto il conduttore otteniamo di nuovo (6.26) se definiamo come *resistenza del conduttore* la grandezza

$$R = \int_A^B \rho \frac{dh}{\Sigma} \quad (6.27)$$

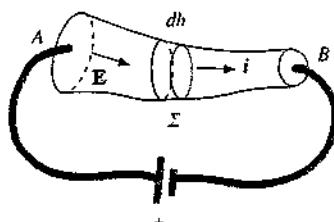


Figura 6.18

e ricordiamo che l'intensità di corrente è la stessa in ogni sezione.

Pertanto in regime stazionario il rapporto tra la d.d.p. applicata ai capi di un conduttore metallico e l'intensità di corrente che a seguito di ciò l'attraversa è pari a una grandezza, detta *resistenza del conduttore*, che dipende solamente dalla natura del conduttore (resistività  $\rho$ ) e dalle sue dimensioni. Come vedremo tra breve la resistenza è costante se la temperatura del conduttore è costante.

All'inverso della resistenza si dà il nome di *conduttanza* e il simbolo  $G$ :

Conduttanza

$$G = \frac{1}{R} \quad . \quad (6.28)$$

Da (6.25) e (6.20) vediamo che

$$G = \frac{\Sigma}{\rho h} = \frac{\sigma \Sigma}{h} \quad . \quad (6.29)$$

**Unità di misura**

L'unità di misura della resistenza si deduce da (6.26): ad essa è stato assegnato il nome di ohm e il simbolo  $\Omega$ :

$$\Omega = \frac{V}{A}$$

La resistività  $\rho$  si misura di conseguenza in  $\Omega\text{m}$ , da (6.25), la conduttanza in  $\Omega^{-1}$ , la conduttività in  $\Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$ . L'unità  $\Omega^{-1}$  è chiamata siemens (S). Sottomultipli e multipli dell'ohm comunemente usati sono i seguenti:

milliohm ( $m\Omega$ ) =  $10^{-3} \Omega$ , chiliohm ( $k\Omega$ ) =  $10^3 \Omega$ , megaohm ( $M\Omega$ ) =  $10^6 \Omega$ .

Nella tabella 6.1 sono riportati i valori della resistività alla temperatura  $t = 20^\circ\text{C}$  per alcuni materiali. La scala dei valori è molto estesa, dai buoni conduttori che hanno valori di  $\rho$  dell'ordine di  $10^{-8} \Omega\text{m}$  agli isolanti, con valori di  $\rho$  dell'ordine di  $10^{14} \div 10^{17} \Omega\text{m}$ .

**Tabella 6.1 Resistività e coefficienti termici della resistività**

Materiale	Resistività ( $\Omega \cdot \text{m}$ )	Coefficiente termico ( $^\circ\text{C}^{-1}$ )
argento	$1.59 \cdot 10^{-8}$	$4.1 \cdot 10^{-3}$
rame	$1.67 \cdot 10^{-8}$	$6.8 \cdot 10^{-3}$
oro	$2.35 \cdot 10^{-8}$	$4.0 \cdot 10^{-3}$
alluminio	$2.65 \cdot 10^{-8}$	$4.3 \cdot 10^{-3}$
tungsteno	$5.65 \cdot 10^{-8}$	$4.5 \cdot 10^{-3}$
zinco	$5.92 \cdot 10^{-8}$	$4.2 \cdot 10^{-3}$
nichel	$6.84 \cdot 10^{-8}$	$6.9 \cdot 10^{-3}$
ferro	$9.71 \cdot 10^{-8}$	$6.5 \cdot 10^{-3}$
platino	$10.6 \cdot 10^{-8}$	$3.9 \cdot 10^{-3}$
stagno	$11.0 \cdot 10^{-8}$	$4.7 \cdot 10^{-3}$
niobio	$12.5 \cdot 10^{-8}$	
piombo	$20.7 \cdot 10^{-8}$	$3.4 \cdot 10^{-3}$
mercurio	$98.4 \cdot 10^{-8}$	
carbonio (grafite)	$1.38 \cdot 10^{-5}$	$- 0.5 \cdot 10^{-3}$
germanio	0.46	$- 48 \cdot 10^{-3}$
silicio	$2.30 \cdot 10^3$	$- 75 \cdot 10^{-3}$
acqua	$2 \cdot 10^6$	
vetro	$10^{10} \div 10^{14}$	
zolfo	$2 \cdot 10^{15}$	
quarzo fuso	$10^{16} \div 10^{17}$	

### *Effetti termici*

La resistività nella maggior parte dei conduttori metallici puri è una funzione crescente della temperatura. In un intervallo limitato (qualche decina di gradi) intorno alla temperatura di  $20^\circ\text{C}$  la relazione è praticamente lineare.

$$\rho = \rho_{20} (1 + \alpha \Delta t) \quad , \quad (6.30)$$

dove  $\Delta t = t - 20$  e  $\rho_{20}$  è la resistività misurata a  $20^\circ\text{C}$  (la temperatura  $t$  è chiaramente espressa in gradi Celsius). Il coefficiente  $\alpha$ , chiamato *coefficiente termico*, è definito da (6.30) come

$$\alpha = \frac{1}{\rho_{20}} \frac{\Delta \rho}{\Delta t}$$

Coefficiente termico

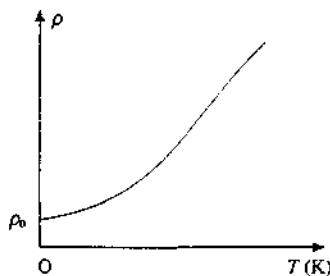


Figura 6.19

essendo  $\Delta \rho$  la variazione di resistività nell'intervallo  $\Delta t$ . In tabella 6.1 accanto ai valori della resistività sono riportati anche i valori del coefficiente termico. Come si è detto,  $\alpha$  è positivo nei metalli puri, mentre risulta negativo nel carbonio, germanio e silicio, indicando per questi elementi una decrescita della resistività all'aumentare della temperatura. Si possono produrre leghe come la *costantana* e il *nickelcromo* che hanno resistività tipica dei conduttori, ma un coefficiente  $\alpha$  un ordine di grandezza inferiore ( $\sim 10^{-4} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ ).

Nei conduttori l'andamento della resistività con la temperatura si scosta decisamente dalla linearità a basse temperature e la resistività tende a un valore finito  $\rho_0$  al tendere della temperatura allo zero assoluto, come mostrato in figura 6.19. Esiste però una classe di conduttori la cui resistività si annulla al di sotto di una certa temperatura, chiamata *temperatura critica*  $T_c$ : alcuni esempi sono riportati nella tabella 6.2; quando si trovano a  $T < T_c$  questi conduttori sono detti *superconduttori*. Proprietà fondamentale è che in essi si può mantenere una corrente, anche elevata, senza l'applicazione di una d.d.p.

Tabella 6.2 Temperatura critica di alcuni superconduttori

Materiale	$T_c$ (K)	Materiale	$T_c$ (K)
Nb, Ge	23.2	stagno	3.72
Nb <sub>3</sub> Sn	18.1	alluminio	1.18
niobio	9.25	zincio	0.88
piombo	7.23	cadmio	0.52
mercurio	4.15	iridio	0.14

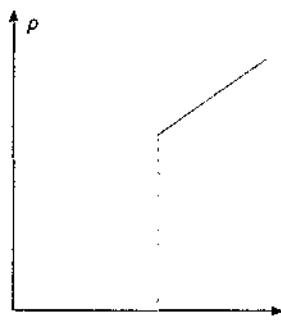


Figura 6.20

Citiamo infine che nei conduttori metallici la *conduttività*  $\sigma$  è legata dalla semplice legge di Wiedemann e Franz alla *conducibilità termica*  $k$  (vedi Vol. I, paragrafo 10.9): il rapporto  $k / \sigma$  è proporzionale alla temperatura assoluta,

$$\frac{k}{\sigma} = L T \quad (6.31)$$

Legge di Wiedemann-Franz

Il valore sperimentale della costante  $L$ , detta *numero di Lorenz*, si situa intorno a  $2.5 \cdot 10^{-8} \text{ J}^2 / \text{C}^2 \text{ K}^2$ .

Il fatto che ad una data temperatura la conducibilità termica sia proporzionale alla condutività elettrica indica che anche il flusso di energia termica dai punti più caldi a quelli più freddi di un conduttore è legato, come il trasporto della carica, alle proprietà degli elettronni di conduzione del metallo.

#### Esempio 6.4

La resistività del rame alla temperatura  $t = 20^\circ\text{C}$  è  $\rho = 1.67 \cdot 10^{-8} \Omega \text{ m}$ . Calcolare il valore del campo elettrico  $E$  necessario per mantenere in un conduttore di rame una

densità di corrente  $j = 2 \text{ A/mm}^2$  (vedi esempio 6.2). Dedurre i parametri microscopici relativi alla conduzione elettrica che compaiono nel modello sviluppato nel paragrafo 6.4.

#### Soluzione

Dalla (6.19) abbiamo  $E = \rho j = 1.67 \cdot 10^{-8} \cdot 2 \cdot 10^6 = 3.34 \cdot 10^{-2} \text{ V/m}$ : si vede che in un buon conduttore è sufficiente un valore molto piccolo di campo elettrico per mantenere la massima densità di corrente tollerabile (vedi esempio 6.6).

La condutività del rame si ricava da (6.20),  $\sigma = 0.60 \cdot 10^8 (\Omega \text{ m})^{-1}$ , e da (6.13, 6.16) calcoliamo il tempo medio tra due urti successivi,

$$\tau = \frac{m\sigma}{ne^2} = \frac{9.1 \cdot 10^{-31} \cdot 0.60 \cdot 10^8}{8.49 \cdot 10^{28} \cdot (1.6 \cdot 10^{-19})^2} = 2.51 \cdot 10^{-14} \text{ s},$$

e il cammino libero medio

$$l = \tau v_F = 2.51 \cdot 10^{-14} \cdot 1.58 \cdot 10^6 = 3.97 \cdot 10^{-8} \text{ m}.$$

In quest'ultimo calcolo abbiamo usato la velocità calcolata nell'esempio 6.1 in base al modello di Fermi. Siccome la distanza tra gli ioni del reticolo cristallino è  $2 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ , la lunghezza media degli archi di parabola percorsi da un elettrone tra un urto e il successivo è pari a circa 200 distanze interatomiche.

#### Esempio 6.5

Calcolare di quanto varia percentualmente la resistenza di un conduttore d'argento quando viene portato dalla temperatura ambiente alla temperatura  $t = 150^\circ\text{C}$ .

#### Soluzione

Utilizziamo la relazione (6.30) e i valori dati in tabella 6.1:

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta \rho}{\rho_{20}} = \alpha \Delta t = 4.1 \cdot 10^{-3} \cdot 130 = 0.533.$$

La variazione è notevole e questo effetto viene sfruttato per la costruzione di termometri. La sensibilità dipende dalla capacità di apprezzare piccole variazioni di resistenza; la variazione percentuale per grado è data proprio da  $\alpha$ .

Nella pratica sono utilizzate resistenze a filo di platino, che permettono di misurare temperature fino a  $\sim 1500 \text{ K}$ : sono anche molto usati i termistori, fatti con semiconduttori la cui resistività diminuisce con la temperatura (e di norma il modulo della variazione di resistività a parità di variazione di temperatura è maggiore che nei conduttori).

#### Potenza. Effetto Joule

La potenza che bisogna spendere per fare circolare la corrente elettrica  $i$  in un tratto di conduttore di sezione  $\Sigma$  e lungo  $dh$  è, in base a (6.22),

$$dP = P_r \Sigma dh = \rho \frac{i^2}{\Sigma} \Sigma dh = \rho \frac{dh}{\Sigma} i^2.$$

Per un conduttore di lunghezza finita abbiamo

$$P = i^2 \int_A^B \rho \frac{dh}{\Sigma}$$

e, ricordando l'espressione (6.27) della resistenza,

$$\boxed{P = R i^2} \quad (6.32)$$

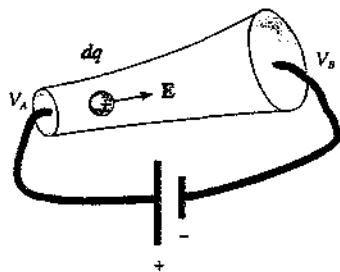


Figura 6.21

Alla formula (6.21) per la potenza siamo arrivati considerando grandezze locali come il campo elettrico che agisce sulle cariche e la densità di corrente che ne deriva. Aggiungendo la legge di Ohm abbiamo ottenuto (6.22) e quindi (6.32).

Agli stessi risultati si perviene anche considerando la carica  $dq$  che si muove attraversando la d.d.p.  $V = V_A - V_B$ : per questo spostamento viene compiuto il lavoro (2.8)

$$dW = V dq = V i dt$$

e spesa pertanto la potenza

$$P = \frac{dW}{dt} = V i \quad , \quad (6.33)$$

formula di carattere generale equivalente a (6.21). Se vale la legge di Ohm (6.26),

$$P = R i^2 = \frac{V^2}{R} \quad . \quad (6.34)$$

Il passaggio di corrente attraverso un conduttore metallico per un tempo  $t$  comporta dunque il lavoro

$$W = \int_0^t P dt = \int_0^t R i^2 dt \quad (6.35)$$

che, se la corrente è costante nel tempo, si riduce a

$$W = R i^2 t \quad . \quad (6.36)$$

Come abbiamo già notato nel paragrafo 6.4, questo lavoro è necessario per vincere la resistenza opposta dal reticolo cristallino al moto ordinato degli elettroni e, da un punto di vista termodinamico, esso viene assorbito dal conduttore la cui energia interna aumenta. Di conseguenza aumenta la temperatura del conduttore: se esso è isolato termicamente dall'ambiente il processo porta alla fusione del metallo; se invece il conduttore è in contatto termico con l'ambiente la sua temperatura cresce fino a che si raggiunge uno stato di equilibrio in cui l'energia interna non varia più e il lavoro elettrico viene ceduto all'ambiente sotto forma di calore (purché naturalmente la temperatura di equilibrio sia inferiore alla temperatura di fusione del conduttore).

L'effetto di riscaldamento di un conduttore percorso da corrente si chiama *effetto Joule*. La misura calorimetrica del calore ceduto dal conduttore e la verifica dell'egualanza con il lavoro speso per far circolare la corrente ha costituito una delle prove storiche fondamentali dell'equivalenza tra calore e lavoro.

**Esempio 6.6**

Un filo di stagno, lungo  $h = 1 \text{ m}$  e con sezione quadrata di area  $\Sigma = 1 \text{ mm}^2$ , è percorso dalla corrente  $i$ . La conducibilità termica esterna vale  $h' = 10 \text{ J/m}^2 \text{ K s}$ , la temperatura di fusione dello stagno è  $T_f = 232^\circ\text{C}$ , l'ambiente esterno è a  $T_0 = 20^\circ\text{C}$ . Calcolare il valore di  $i$  per cui la temperatura di equilibrio raggiunta dallo stagno è  $T_f$ .

**Soluzione**

Il lavoro elettrico provoca un aumento di temperatura del filo e una cessione di calore all'ambiente secondo l'equazione

$$R i^2 dt = m c dT + h' S (T - T_0) dt$$

$m$  è la massa del filo e  $c$  il suo calore specifico. L'ultimo termine esprime la legge di Newton relativa allo scambio di calore:  $S$  è la superficie esterna del filo (si veda il Vol. I, paragrafo 10.9).

In equilibrio  $dT = 0$  e abbiamo

$$R i^2 = h' S (T - T_0)$$

La resistenza del filo alla temperatura  $T$  è

$$R = \rho_0 [1 + \alpha (T - T_0)] \frac{h}{\Sigma}$$

e in conclusione

$$i^2 = \frac{(T - T_0) h' S}{\rho_0 [1 + \alpha (T - T_0)] \frac{h}{\Sigma}}$$

Prendendo dalla tabella 6.1 i valori di  $\rho_0$  e  $\alpha$  per lo stagno, ponendo  $S = 4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$  e  $T = T_f$ , si ottiene

$$i = 6.34 \text{ A} \quad , \quad j = \frac{i}{\Sigma} = 6.34 \cdot 10^6 \text{ A/m}^2$$

Anche se il calcolo è indicativo in quanto la legge di Newton non è più molto attendibile per grandi differenze di temperatura, si vede l'ordine di grandezza del limite imposto alla densità di corrente dagli effetti termici: il limite pratico è  $\sim 1 \div 2 \text{ A/mm}^2$ .

L'annullarsi della resistività nei superconduttori comporta che non occorre spendere potenza per mantenere la corrente. L'utilizzazione di cavi superconduttori per il trasporto dell'energia elettrica sarebbe quindi conveniente; purtroppo bisognerebbe mantenere tutto il cavo alla temperatura di pochi kelvin e quindi rinchiuderlo dentro un criostato isolato dall'ambiente: l'intera operazione richiede una notevole spesa di potenza e non è nemmeno semplice tecnologicamente. Negli ultimi anni sono stati scoperti materiali superconduttori già a temperature dell'ordine di 100 K e il loro uso sarebbe più conveniente; però essi sono disponibili soltanto in campioni di piccole dimensioni e si è ancora ben lontani dal poter produrre cavi utili al trasporto dell'energia.

**Conduttori non Ohmici**

La legge di Ohm (6.26) valida per i conduttori metallici è verificata in opportune condizioni anche nei gas ionizzati e nelle soluzioni elettrolitiche: vi sono altri conduttori che inve-

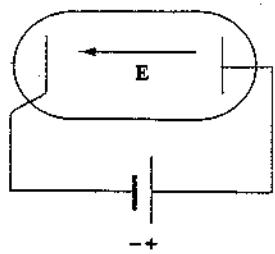


Figura 6.22

ce non seguono la (6.26), ovvero non sono caratterizzati da un andamento lineare della corrente che li percorre in funzione della d.d.p. applicata. Tra questi i più importanti nelle applicazioni sono i *dispositivi a semiconduttore*. Un altro esempio è costituito dal *diodo a emissione termoelettronica*, che descriviamo brevemente.

All'interno di un involucro di vetro in cui è praticato un alto vuoto ( $\sim 10^{-5}$  Pa) si trova un elettrodo, il *catodo*, formato da un filamento che è mantenuto ad alta temperatura e per questa ragione emette elettroni (*effetto termoelettronico*); con un filamento di tungsteno trattato con torio la temperatura di esercizio è  $\sim 1900$  K. Un secondo elettrodo, l'*anodo*, può essere portato a potenziale positivo rispetto al catodo e quindi raccogliere gli elettroni emessi da questo. Si trova che all'aumentare della d.d.p. tra anodo e catodo la corrente che attraversa il diodo segue la *legge di Child-Langmuir*

$$i = a V^{3/2}$$

fino a raggiungere un valore di saturazione (vedi figura 6.23); la costante  $a$  dipende dalla forma geometrica degli elettrodi. La densità di corrente di saturazione emessa dal catodo è data dalla *legge di Richardson*

$$j_s = A T^2 e^{-W_e/k_B T},$$

dove  $T$  è la temperatura assoluta,  $k_B$  la costante di Boltzmann e  $W_e$  il *lavoro di estrazione del metallo* che costituisce il catodo, pari al lavoro minimo che bisogna spendere per portare un elettrone di conduzione dall'interno all'esterno del metallo (conceitto che riprenderemo nel capitolo 19).  $A$  è una costante che dipende dal tipo di materiale catodico.

L'applicazione più semplice cui si presta un diodo è quella di interruttore veloce: a seconda del segno della d.d.p. tra anodo e catodo esso permette o vieta il passaggio della corrente. A parte casi particolari il diodo a vuoto è stato però sostituito dal *diodo a semiconduttore* che, pur funzionando secondo un principio diverso, svolge le stesse funzioni con minore spesa di potenza e minore ingombro.

È opportuno, come conclusione di questo paragrafo, fare alcune precisazioni. La prima è di carattere storico: Ohm scoprì la legge che porta il suo nome nel 1826 e gli effetti termici vennero investigati da Joule intorno al 1850; poco dopo vennero formulate le leggi di Kirchhoff (vedi paragrafo 6.10) e quindi la comprensione macroscopica del comportamento dei circuiti resistivi era ben consolidata alla fine del 1800. Il modello del gas elettronico venne proposto agli inizi del 1900, quando cominciarono a formarsi le idee sulla composizione elettronica della materia e la teoria quantistica di Fermi-Sommerfeld, su cui è basata la spiegazione moderna del comportamento degli elettroni nei metalli, fu sviluppata intorno al 1930.

Rimandiamo al capitolo 19 per una presentazione elementare della teoria di Fermi-Sommerfeld e dei principali effetti che si riscontrano nei metalli. In questo capitolo ci siamo serviti del modello classico per giustificare la legge di Ohm; abbiamo però notato che la previsione quantitativa della velocità degli elettroni è sbagliata. Aggiungiamo adesso che se, ad esempio, volessimo prevedere l'andamento della resistività con la temperatura, utilizzando (6.16, 6.20) e l'espressione  $v = \sqrt{3k_B T/m}$  della velocità quadratica media, otterremmo

$$\rho = \frac{m}{n e^2 \tau} = \frac{mv}{n e^2 l} = \frac{1}{n e^2 l} \sqrt{3m k_B T}.$$

La resistività dovrebbe dipendere dalla radice quadrata della temperatura assoluta, mentre sappiamo che la relazione è lineare, almeno per un certo intervallo di temperatura.

Questa situazione insoddisfacente in cui alcune proprietà vengono spiegate e altre non corrispondono alle previsioni è tipica dei modelli che cercano di applicare concetti classici per spiegare fenomeni microscopici, regolati invece da leggi quantitative.

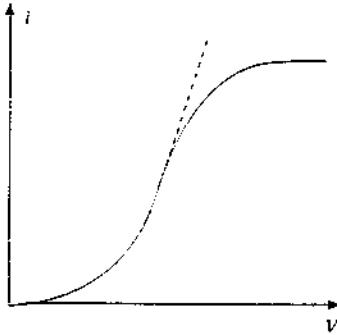


Figura 6.23

## 6.6 Resistori in serie e in parallelo

Conduttori ohmici caratterizzati da un determinato valore della resistenza (alla temperatura ambiente) sono elementi molto usati nei circuiti elettrici. Essi vengono chiamati *resistori* e oltre al valore della resistenza viene sempre precisato il *valore massimo della potenza* che può essere in essi dissipata senza causare alterazioni irreversibili.

Il simbolo che rappresenta un resistore in un circuito è indicato a fianco. Più resistori possono essere collegati tra loro, tipicamente da fili o piattine metallici, la cui resistenza è di norma completamente trascurabile (un centimetro di filo di rame con diametro di 1 mm ha una resistenza di  $\sim 2 \cdot 10^{-4} \Omega$ ). I *collegamenti di base* sono due, in *serie* e in *parallelo*, secondo una terminologia che abbiamo già usato per i condensatori.



### Resistori in serie

Due resistori sono collegati in serie quando hanno un estremo in comune: in regime stazionario l'intensità di corrente che li attraversa è la stessa. Applichiamo a ciascun resistore la legge di Ohm e sommiamo:

$$V_A - V_B = R_1 i \quad , \quad V_B - V_C = R_2 i \quad .$$

$$V_A - V_C = (R_1 + R_2) i = R_{eq} i \quad .$$

I due resistori in serie presentano la resistenza equivalente

$$R_{eq} = R_1 + R_2 \quad . \quad (6.37)$$

Tale relazione si generalizza subito a un qualsiasi numero di resistori in serie e afferma che la *resistenza equivalente di un sistema di resistori collegati in serie è eguale alla somma delle singole resistenze*;  $R_{eq}$  è pertanto sempre maggiore del valore di ciascuna resistenza.

La potenza totale spesa è

$$P = (V_A - V_C) i = (R_1 + R_2) i^2 = R_{eq} i^2 = P_1 + P_2$$

ed è pari alla somma delle potenze spese nelle singole resistenze. Anche questa formula si estende subito a un numero qualsiasi di resistori in serie.

### Resistori in parallelo

Due resistori si dicono in parallelo quando sono collegati tra loro in entrambi gli estremi. In questo caso l'elemento comune ai due resistori è la d.d.p.  $V = V_A - V_B$  e quindi, in base alla legge di Ohm, essi sono attraversati da due correnti  $i_1$  e  $i_2$ , diverse se sono diversi i valori delle resistenze  $R_1$  e  $R_2$ .

Nel punto A in cui la corrente si dirama nei due resistori possiamo generalizzare il ragionamento fatto nel paragrafo 6.3 e che ha portato alla (6.12). Basta considerare tre superficie  $\Sigma$ ,  $\Sigma_1$ ,  $\Sigma_2$ , con  $i$  che entra attraverso  $\Sigma$ ,  $i_1$  e  $i_2$  che escono rispettivamente attraverso  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$ ; per la *condizione di staziarietà*

$$i = i_1 + i_2 \quad .$$

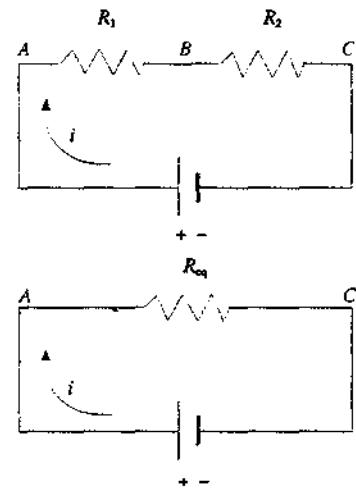
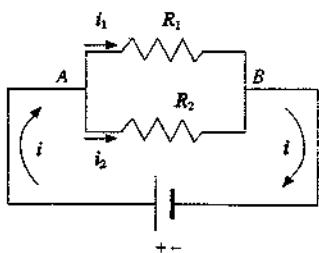


Figura 6.24

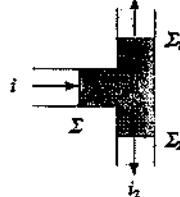


Pertanto

$$i = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} = V \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{V}{R_{eq}}$$

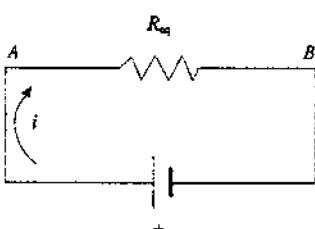
avendo posto

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (6.38)$$



Anche la (6.38) si estende a un numero qualsiasi di resistori tutti in parallelo tra loro e dice che il *reciproco della resistenza equivalente è eguale alla somma dei reciproci delle singole resistenze*:  $R_{eq}$  risulta dunque minore di ciascuna delle  $R_i$ .

Le correnti nei due resistori valgono



$$i_1 = \frac{V}{R_1} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i \quad , \quad i_2 = \frac{V}{R_2} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i$$

e la potenza spesa è

$$P = R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 = R_1 \frac{V^2}{R_1^2} + R_2 \frac{V^2}{R_2^2} = V^2 \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{V^2}{R_{eq}} = R_{eq} i^2 .$$

Figura 6.25

Attraverso combinazioni di serie e parallelo si può in pratica realizzare qualsiasi valore di resistenza. Come si è già notato nel caso dei condensatori, le connessioni hanno significato solo se i valori non sono molto diversi; altrimenti nella serie predomina la resistenza più grande e nel parallelo quella più piccola.

### Esempio 6.7

Nella rete elettrica di resistori, collegati come in figura 6.26, i valori delle resistenze sono  $R_1 = 3\Omega$  e  $R_2 = 9\Omega$ . Tra i terminali A e B è applicata una d.d.p.  $V = V_A - V_B = 17.4V$ . Calcolare la resistenza equivalente del circuito e la potenza spesa nel circuito stesso.

#### Soluzione

Il ramo CDEF consiste di tre resistori eguali di valore  $R_1$  e quindi, in base a (6.37) la sua resistenza equivalente è  $R' = 3R_1 = 27\Omega$ .  $R'$  a sua volta è in parallelo alla resistenza  $R_1$  del ramo CF e la resistenza equivalente è

$$\frac{1}{R''} = \frac{1}{R'} + \frac{1}{R_1} \quad , \quad R'' = \frac{R_1 R'}{R_1 + R'} = 2.7\Omega \quad .$$

Infine  $R''$  è in serie alle due resistenze  $R_1$  e la resistenza equivalente di tutta la rete è

$$R_{eq} = 2R_1 + R'' = 8.7\Omega \quad .$$

L'intensità di corrente che fluisce attraverso  $R_{eq}$  è

$$i = \frac{V}{R_{eq}} = 2A$$

e la potenza totale spesa è

$$P = R_{\text{eq}} i^2 = \frac{V^2}{R_{\text{eq}}} = 34.8 \text{ W}$$

La d.d.p. tra i punti C e F è

$$V_C - V_F = R'' i = 5.4 \text{ V}$$

e le correnti  $i_1$  e  $i_2$  (vedi figura 6.26) valgono

$$i_1 = \frac{V_C - V_F}{R_1} = 1.8 \text{ A} \quad , \quad i_2 = \frac{V_C - V_F}{R_2} = 0.2 \text{ A} \quad .$$

Si verifichi che la potenza spesa nei resistori è eguale alla potenza totale.

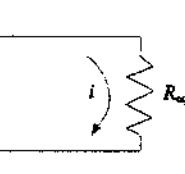
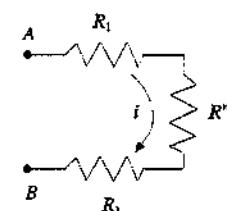
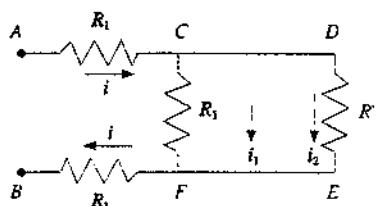
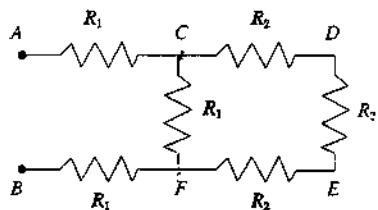


Figura 6.26 (Esempio 6.7)

## 6.7 Forza elettromotrice. Legge di Ohm generalizzata

Nel paragrafo 6.5 abbiamo visto che per un conduttore di resistenza  $R$  vale la legge di Ohm

$$V_A - V_B = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = R i \quad (6.26)$$

che mette in relazione l'intensità della corrente  $i$  nel conduttore con il campo elettrico  $\mathbf{E}$  prodotto da un generatore esterno, ai cui poli è collegato il conduttore. La (6.26) applicata a un *circuito chiuso* diventa

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = R_T i \quad , \quad (6.39)$$

essendo  $R_T$  la resistenza totale del circuito stesso. Il primo membro di (6.39) coincide con la definizione (2.6) di forza elettromotrice (f.e.m.) e pertanto la (6.39) afferma che per ottenere nel circuito una corrente di intensità  $i$  è necessaria la presenza nel circuito di una sorgente di f.e.m. ovvero di un campo  $\mathbf{E}$  la cui circuitazione non sia nulla. Ne segue che non può essere un campo elettrostatico  $\mathbf{E}_{\text{el}}$  a fare circolare le cariche nel circuito in quanto esso è conservativo e, secondo (2.10), la corrispondente f.e.m. è sempre nulla. La sorgente di f.e.m. deve invece avere al suo interno *forze* di natura non elettrostatica, *non conservative*, che possono determinare il moto continuo delle cariche.

Esaminiamo il circuito elettrico più semplice, formato da un conduttore collegato ai poli  $A$  e  $B$  di un generatore, sui quali sono accumulate le cariche  $+q$  e  $-q$ , come abbiamo detto nel paragrafo 6.1. Il campo elettrostatico  $\mathbf{E}_{\text{el}}$  prodotto da tali cariche è sempre diretto da  $A$  verso  $B$ , sia nel conduttore che all'interno del generatore, in accordo col fatto che

$$\oint \mathbf{E}_{\text{el}} \cdot d\mathbf{s} = \int_A^B (\mathbf{E}_{\text{el}} \cdot d\mathbf{s})_{\text{ext}} + \int_B^A (\mathbf{E}_{\text{el}} \cdot d\mathbf{s})_{\text{int}} = 0 :$$

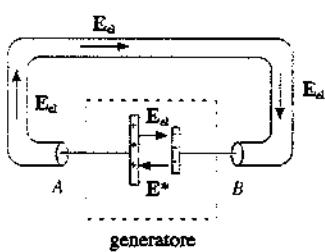


Figura 6.27

## Campo elettromotore

il *primo termine* è l'integrale calcolato lungo il *conduttore esterno* e il *secondo* l'integrale calcolato all'*interno del generatore*. Il passaggio di una carica positiva all'interno del generatore dal polo negativo *B* al polo positivo *A* (o di una carica negativa da *A* a *B*) non può quindi avvenire per effetto del campo  $\mathbf{E}_{el}$ ; deve esserci all'interno del generatore un campo  $\mathbf{E}^*$  di natura non elettrostatica, che chiamiamo *campo elettromotore*, per cui il campo elettrico  $\mathbf{E}$  che esiste nel circuito vale

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \mathbf{E}^* + \mathbf{E}_{el} && \text{all'interno del generatore} , \\ \mathbf{E} &= \mathbf{E}_{el} && \text{nel conduttore} .\end{aligned}\quad (6.40)$$

La f.e.m. del campo  $\mathbf{E}$  si scrive

$$\text{Forza elettromotrice} \quad \mathcal{E} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_A^B \mathbf{E}_{el} \cdot d\mathbf{s} + \int_B^A (\mathbf{E}^* + \mathbf{E}_{el}) \cdot d\mathbf{s} = \int_B^A \mathbf{E}^* \cdot d\mathbf{s} . \quad (6.41)$$

Il *campo E* definito dalle (6.40) dunque *non è conservativo* e la sua *f.e.m. coincide*, secondo la definizione (2.4), con la *tensione del campo elettromotore  $\mathbf{E}^*$  calcolata lungo una linea interna al generatore che va da *B* ad *A**, come dice la (6.41). Invece lungo una qualsiasi linea da *B* ad *A* esterna al generatore la tensione di  $\mathbf{E}^*$  è nulla, essendo  $\mathbf{E}^*$  nullo all'esterno del generatore.

Il dispositivo che genera il campo elettromotore, e quindi la f.e.m., può sfruttare azioni meccaniche, come vedremo nel paragrafo 6.8, reazioni chimiche (pile e accumulatori), il fenomeno dell'induzione elettromagnetica, come vedremo nel capitolo 10, o altri meccanismi ancora (pile termoelettriche, celle solari, ecc.).

In ogni caso all'interno del generatore una carica  $dq$  viene spostata da *B* verso *A* da una forza  $d\mathbf{F}^*$  che deve vincere la forza  $d\mathbf{F}_{el} = dq \mathbf{E}_{el}$  e il campo elettromotore  $\mathbf{E}^*$  viene definito come rapporto tra la forza  $d\mathbf{F}^*$  e la carica  $dq$ :

$$\mathbf{E}^* = \frac{d\mathbf{F}^*}{dq} . \quad (6.42)$$

Per avere un moto di cariche nel verso voluto all'interno del generatore deve essere  $|\mathbf{E}^*| > |\mathbf{E}_{el}|$  di modo che risulti

$$\int_B^A (\mathbf{E}^* + \mathbf{E}_{el}) \cdot d\mathbf{s} > 0 .$$

All'esterno invece il moto delle cariche lungo il conduttore è dovuto al campo  $\mathbf{E}_{el}$ , generato dall'azione del campo elettromotore  $\mathbf{E}^*$ .

Siccome la corrente  $i$  che attraversa il conduttore esterno passa anche nel generatore dal polo *B* al polo *A*, definiamo una grandezza caratteristica del generatore, la *resistenza interna r*, mediante la relazione

$$\text{Resistenza interna} \quad \int_B^A (\mathbf{E}^* + \mathbf{E}_{el}) \cdot d\mathbf{s} = ri , \quad (6.43)$$

che estende la legge di Ohm all'interno del generatore.

Pertanto un generatore è caratterizzato dalla f.e.m.  $\mathcal{E}$ , ovvero dalla tensione tra i due poli, e dalla resistenza interna  $r$ . Tenuto conto che nel conduttore esterno vale la (6.26), possiamo scrivere (6.41) come

$$\mathcal{E} = Ri + ri = (R + r)i \quad , \quad i = \frac{\mathcal{E}}{R+r} \quad ; \quad (6.44)$$

la corrente che circola nel circuito è data dal rapporto tra la f.e.m. fornita dal generatore e la resistenza totale. Dalla (6.44) ricaviamo inoltre

$$V_A - V_B = R i = \mathcal{E} - ri \quad ; \quad (6.45)$$

la d.d.p. misurata tra i poli A e B del generatore è minore della f.e.m.  $\mathcal{E}$ , se nel circuito passa corrente.

Quando si stacca il conduttore esterno (*circuito aperto*) nel generatore si instaura una condizione di equilibrio, in quanto l'accumulo di carica sui poli impedisce un ulteriore spostamento di carica (per repulsione eletrostatica). Di conseguenza, quando  $i = 0$ ,

$$\mathbf{E}^* + \mathbf{E}_{el} = 0 \quad , \quad V_A - V_B = \mathcal{E} \quad . \quad (6.46)$$

L'ultima relazione fornisce una *definizione operativa* della f.e.m. di un generatore: essa è eguale alla *d.d.p. misurata ai capi del generatore a circuito aperto*; vedremo nel paragrafo 6.11 che proprio su questa proprietà è basato un metodo di misura della f.e.m. di un generatore.

Nella figura 6.29 è riportata, per il circuito base finora considerato, la variazione del potenziale elettrico dal polo positivo A al polo negativo B, considerato a potenziale zero, lungo il resistore esterno, variazione che è lineare con la posizione se la sezione del conduttore è costante: in tal caso infatti la resistenza è proporzionale alla lunghezza secondo (6.25) e anche  $\Delta V$  lo è, in base a (6.26). All'interno del generatore la rappresentazione è soltanto schematica, con un salto brusco pari a  $\mathcal{E}$  e una diminuzione pari a  $r i$ : in effetti la f.e.m. può essere distribuita con continuità lungo tutto il generatore.

Poiché l'energia potenziale di una carica positiva  $q$  che percorre il circuito è  $qV$ , la stessa figura rappresenta anche l'andamento dell'energia potenziale: passando da B ad A all'interno del generatore la carica acquista ad opera del campo elettromotore l'energia potenziale  $q\mathcal{E}$  che perde parzialmente dentro il generatore stesso (effetto della resistenza interna) e poi nel resistore (effetto della resistenza esterna) così che in B la sua energia è nulla. Possiamo quindi affermare che la f.e.m. è numericamente *pari al lavoro fornito dal generatore alla carica unitaria che lo attraversa*.

Questo bilancio energetico è evidente se moltiplichiamo la (6.44) per  $dq = i dt$ :

$$\mathcal{E} i dt = R i^2 dt + r i^2 dt \quad .$$

Il lavoro fornito dal generatore viene dissipato nelle resistenze del circuito; in termini di potenza

$$\mathcal{E} i = R i^2 + r i^2 = R_T i^2 \quad . \quad (6.47)$$

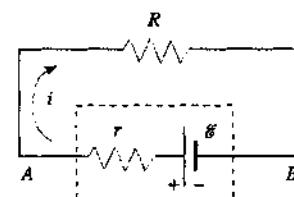


Figura 6.28

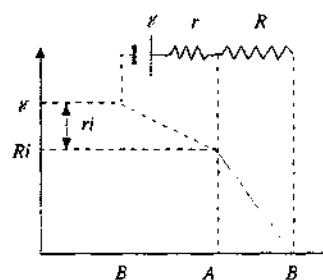


Figura 6.29

#### Esempio 6.8 Partitore resistivo

Nel circuito in figura 6.30 un generatore di f.e.m.  $\mathcal{E} = 100$  V e resistenza interna  $r = 10\Omega$  è collegato a tre resistori in serie di valori  $R_1 = 40\Omega$ ,  $R_2 = 50\Omega$ ,  $R_3 = 100\Omega$ . Calcolare la d.d.p. ai capi di ciascun resistore e ai capi del generatore.

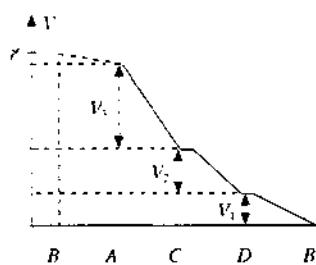
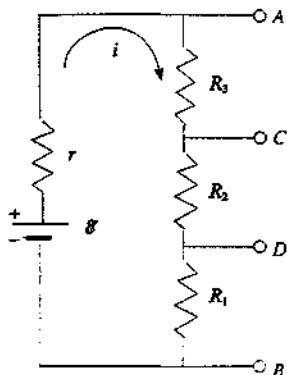


Figura 6.30

**Soluzione**

La resistenza totale del circuito è  $R_T = r + R_1 + R_2 + R_3 = 200 \Omega$  e nel circuito circola l'intensità di corrente (6.44)  $i = \varepsilon / R_T = 0.5 \text{ A}$ . La d.d.p. ai capi di ciascun resistore vale

$$V_1 = V_D - V_B = R_1 i = 20 \text{ V} .$$

$$V_2 = V_C - V_D = R_2 i = 25 \text{ V} ,$$

$$V_3 = V_A - V_C = R_3 i = 50 \text{ V} .$$

e ai capi del generatore abbiamo

$$V_A - V_B = \varepsilon - r i = V_1 + V_2 + V_3 = (R_1 + R_2 + R_3) i = 95 \text{ V} .$$

minore della f.e.m.  $\varepsilon$ .

Il circuito costituisce un *partitore resistivo*: esso consente di suddividere la tensione fornita da un generatore in parti determinate dai valori delle resistenze.

**Esempio 6.9**

Dimostrare che nel circuito elettrico della figura 6.31 si ottiene il massimo trasferimento di potenza su una resistenza esterna  $R$  quando  $R$  è eguale alla resistenza interna  $r$  del generatore.

**Soluzione**

L'intensità di corrente vale  $i = \varepsilon / (R + r)$  e la potenza dissipata in  $R$  è

$$P_R = R i^2 = \varepsilon^2 \frac{R}{(R + r)^2} .$$

Calcoliamo la derivata rispetto ad  $R$  e annulliamola:

$$\frac{dP_R}{dR} = \varepsilon^2 \frac{r - R}{(R + r)^3} = 0 \Rightarrow R = r .$$

Questo valore di  $R$  corrisponde a un massimo, in quanto  $d^2 P_R / dR^2$  è negativa per  $r = R$ . In condizioni di massimo trasferimento di potenza la corrente vale  $i = \varepsilon / 2r$  (inferiore al massimo valore possibile  $\varepsilon / r$ ); la potenza erogata dal generatore è  $P = \varepsilon i = \varepsilon^2 / 2r$  e la potenza spesa su  $R$ , pari a quella spesa su  $r$ , è  $P_R = \varepsilon^2 / 4r$ ; quindi al massimo può essere trasferito su una resistenza esterna solo il 50% della potenza erogata dal generatore. Nella figura 6.32 sono mostrate, in funzione del rapporto  $R/r$ , la potenza totale  $P$  e le potenze spese sulle resistenze  $P_R$  e  $P_r$ .

La resistenza esterna su cui si trasferisce la potenza è chiamata *resistenza di carico* e nella situazione  $R = r$  di massimo trasferimento di potenza si dice che la *resistenza di carico è adattata alla resistenza interna del generatore*. Osserviamo che  $R$  può essere il valore  $R_{eq}$  della resistenza equivalente di una rete resistiva connessa al generatore.

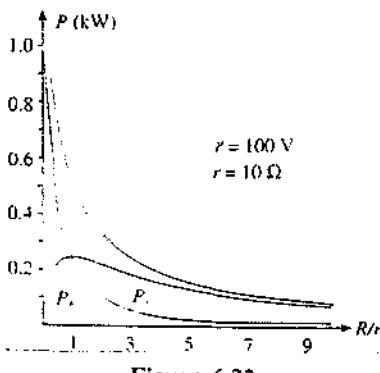


Figura 6.32

Consideriamo ora un tratto di circuito, che chiamiamo *ramo*, percorso dalla corrente  $i$  e costituito da un resistore  $R$  e da due generatori collegati come in figura 6.33. Applichiamo (6.26) e (6.45):

$$V_A - V_C = R i , \quad V_D - V_C = \varepsilon_1 - r_1 i \Rightarrow V_C - V_D = -\varepsilon_1 + r_1 i ,$$

$$V_D - V_B = \varepsilon_2 - r_2 (-i) = \varepsilon_2 + r_2 i .$$

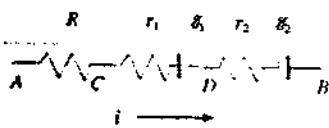


Figura 6.33

Sommendo membro a membro otteniamo

$$V_A - V_B = -\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + (R + r_1 + r_2) i ,$$

$$V_A - V_B + (\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2) = (R + r_1 + r_2) i = R_T i . \quad (6.48)$$

Notiamo che fissato il verso della corrente  $i$ , e quindi il verso secondo cui il potenziale elettrico diminuisce lungo la resistenza  $R_T$ , la f.e.m.  $\mathcal{E}_1$  compare col segno positivo perché nel generatore la corrente entra nel polo negativo e esce da quello positivo ( $\mathcal{E}_1$  da sola farebbe passare corrente nel verso scelto), mentre  $\mathcal{E}_2$  compare per questa ragione col segno negativo (se agisse da sola farebbe passare corrente nel verso opposto a quello scelto).

Con questa precisazione la (6.48) può essere estesa ad un ramo comprendente un numero qualunque di generatori:

$$V_A - V_B + \sum_k \mathcal{E}_k = R_T i , \quad (6.49)$$

Legge di Ohm generalizzata

dove  $R_T$  è la resistenza totale del ramo, somma della resistenza esterna  $R$  e delle resistenze interne di tutti i generatori, e nella sommatoria il segno delle f.e.m. è preso come detto sopra.

La (6.49) si chiama legge di Ohm generalizzata; da essa si possono ottenere tutti i casi che abbiamo già considerato. Se nel tratto  $A-B$  non ci sono generatori ( $\mathcal{E}_k = 0$ ,  $r_k = 0$ ) la (6.49) coincide con (6.26); se il circuito è chiuso ( $V_A = V_B$ ) otteniamo

$$\sum_k \mathcal{E}_k = R_T i , \quad (6.50)$$

cioè la prima delle (6.44) applicata al caso di più generatori.

#### Esempio 6.10

Nel circuito in figura 6.34  $R = 50\Omega$ ,  $\mathcal{E}_1 = 50$  V,  $r_1 = 20\Omega$ ,  $\mathcal{E}_2 = 100$  V,  $r_2 = 30\Omega$ . Calcolare l'intensità della corrente  $i$ , l'andamento del potenziale lungo il circuito e il bilancio energetico.

#### Soluzione

Fissiamo convenzionalmente come verso di percorrenza della corrente  $i$  quello orario e applichiamo (6.50):

$$i' = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{R + r_1 + r_2} = \frac{50 - 100}{50 + 20 + 30} = -0.5 \text{ A} .$$

Poiché il risultato è negativo, vuol dire che il verso della corrente è opposto a quello fissato:  $i = -i' = 0.5 \text{ A}$  (come si capisce subito guardando i valori delle f.e.m.). Le d.d.p. ai capi di ciascun elemento sono:

$$V_C - V_D = \mathcal{E}_2 - r_2 i = 85 \text{ V} . \quad V_B - V_C = -R i = -25 \text{ V} . \quad V_A - V_B = -\mathcal{E}_1 - r_1 i = -60 \text{ V} .$$

La potenza vale:

$$(\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1) i = (R + r_1 + r_2) i^2 \Rightarrow \mathcal{E}_2 i = \mathcal{E}_1 i + (R + r_1 + r_2) i^2 .$$

Il generatore di f.e.m.  $\mathcal{E}_2$  eroga la potenza  $\mathcal{E}_2 i = 50 \text{ W}$  che viene dissipata in parte sulla resistenza totale ( $R_T i^2 = 25 \text{ W}$ ) e in parte nel generatore di f.e.m.  $\mathcal{E}_1$  ( $\mathcal{E}_1 i = 25 \text{ W}$ ), nel quale la corrente viene forzata a passare dal polo positivo al polo negativo, contro il campo elettromotore: infatti in tale generatore la d.d.p. applicata dall'esterno (60 V) è maggiore della f.e.m. ( $\mathcal{E}_1 = 50 \text{ V}$ ), quindi  $|E_e| > |\mathcal{E}|$ .

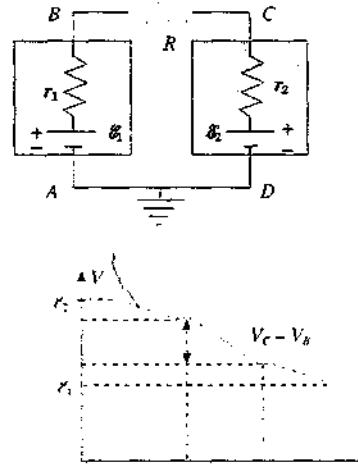


Figura 6.34

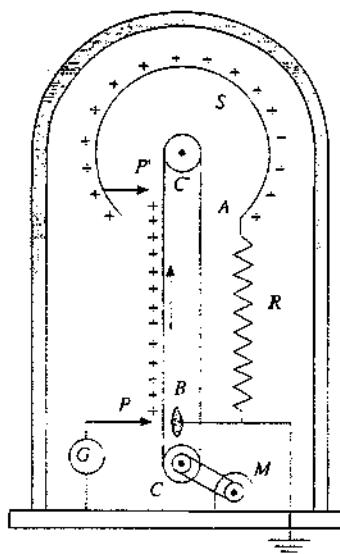


Figura 6.35

## 6.8 Il generatore Van de Graaf

Il generatore ideato da Van de Graaf nel 1929 sfrutta fenomeni elettrostatici, come l'induzione elettrostatica e l'effetto delle punte, per attuare una separazione di cariche e di conseguenza stabilire una d.d.p. tra due elettrodi. Il moto delle cariche all'interno del generatore, in verso contrario a quello che sarebbe determinato dal campo elettrostatico, è dovuto ad un intervento meccanico, come ora descriveremo. I generatori il cui funzionamento si basa su principi analoghi (trasformazione di lavoro meccanico in energia elettrostatica) sono detti *generatori elettrostatici*.

Gli elementi del generatore Van de Graaf (vedi figura 6.35) sono una *testa* conduttrice cava  $S$  di forma sferica, avente raggio  $R_0$ , sorretta da una colonna di resistenza elettrica  $R$ . Una cinghia di trasmissione tesa tra due puleggi  $C$  e  $C'$  è costituita da materiale isolante, due sistemi di punte  $P$  e  $P'$ . Un motore  $M$  mantiene in rotazione la puleggia  $C$  e quindi la cinghia. Tramite un generatore  $G$  viene stabilita una d.d.p. dell'ordine di  $10^4$  V tra le punte  $P$  (positive) e un elettrodo  $B$ ; il forte campo elettrico locale provoca la ionizzazione del gas circolante e gli ioni positivi vanno a depositarsi sulla cinghia e vengono trasportati verso la sommità del sistema. Passando di fronte alle punte  $P'$ , collegate alla testa sferica, le cariche positive *inducono* cariche negative sulle punte e positive sulla superficie sferica. Le cariche negative sfuggono dalle punte e depositandosi sulla cinghia ne annullano la carica, così che la cinghia quando esce dalla testa sferica è priva di carica.

Il processo elementare ora descritto, che sfrutta l'induzione elettrostatica per separare le cariche e accumulare cariche di un segno sulla superficie della testa, continua fino a che la sfera raggiunge rispetto alla terra un potenziale elettrostatico  $V_{\max}$  tale che il campo elettrico superficiale  $E_{\max} = V_{\max} / R_0$  egualgi la rigidità dielettrica  $E$ , del gas circostante (definita nell'esempio 5.4). Ha origine allora una dispersione di carica verso l'esterno e il potenziale  $V_{\max}$  non cresce più.

Se il gas circostante è aria, dalla tabella 5.1 vediamo che  $E = 3 \cdot 10^6$  V/m: con una sfera di diametro pari a 1 m  $R_0 = 0.5$  m e  $V_{\max} = E \cdot R_0 = 1.5 \cdot 10^6$  V = 1.5 MV. Tale valore viene aumentando chiudendo tutto il sistema in una campana in cui viene immesso gas ad alta pressione, in quanto la rigidità dielettrica di un gas aumenta con la pressione: con azoto a circa  $10^6$  Pa si può raggiungere il valore  $V_{\max} = 6$  MV. Nelle versioni più recenti si utilizza l'esofluoruro di zolfo SF<sub>6</sub>, fino a pressioni di  $7 \cdot 10^6$  Pa e si raggiungono valori di  $V_{\max}$  intorno a 16 MV. Si tratta dei massimi valori ottenuti finora per una d.d.p. continua.

Il generatore di Van de Graaf fu concepito, ed è tuttora usato, per l'accelerazione di ioni ai quali fornisce l'energia cinetica  $\frac{1}{2}mv^2 = qV_{\max}$ , se  $m$  e  $q$  sono la massa e la carica dello ione ( $q$  è pari ad un multiplo intero piccolo della carica elementare  $e$ ). Il dispositivo sperimentale è mostrato nella figura 6.36, in cui per semplicità non sono disegnate la cinghia e le punte. Una sorgente  $I$  di ioni positivi è posta all'interno della testa ed è allo stesso potenziale: gli ioni emessi dalla sorgente si muovono all'interno di un tubo verticale, nel quale è fatto il vuoto, e sono accelerati dal campo elettrostatico dovuto alla d.d.p.  $V_A - V_B$  tra la testa e la terra. Il tubo è costituito in realtà da una serie di tratti ceramici e di anelli conduttori, ciascuno connesso al partitore resistivo di resistenza totale  $R$ : in questo modo si assicura l'uniformità del campo accelerante lungo il tubo. All'uscita del tubo gli ioni sono deviati di 90° dall'azione di un campo magnetico  $B$  (vedi capitolo 7) e si muovono lungo una linea orizzontale; alla fine essi vengono fatti urtare contro un bersaglio e dallo studio delle modalità di interazione tra ioni e nuclei del bersaglio si ricavano informazioni sulle proprietà nucleari della materia (si riveda il paragrafo 1.7).

Discussiamo adesso un circuito contenente un generatore Van de Graaf alla luce di quanto visto nel paragrafo 6.7. Il circuito è schematizzato nella figura 6.35: le cariche elettriche passano da  $B$  ad  $A$  all'interno del generatore sospinte dal motore e successivamente dalla testa sferica alla base attraverso la serie di resistori esterni (come vedremo in seguito, il contributo della corrente ionica nel tubo dell'acceleratore è trascurabile): i punti  $A$  e  $B$  sono quindi i poli del generatore.

Il motore che fa girare la cinghia esercita su ogni carica  $q$  trasportata una forza meccanica  $F'$  che deve essere in modulo maggiore della forza  $qE_e$  esercitata su  $q$  dalle cariche positive presenti su  $S$ . Pertanto su  $q$  agisce la forza

$$F = F' + qE_e \quad \text{lungo la cinghia .}$$

$$F = qE_e \quad \text{lungo il resistore esterno .}$$

e il lavoro complessivo lungo il circuito vale

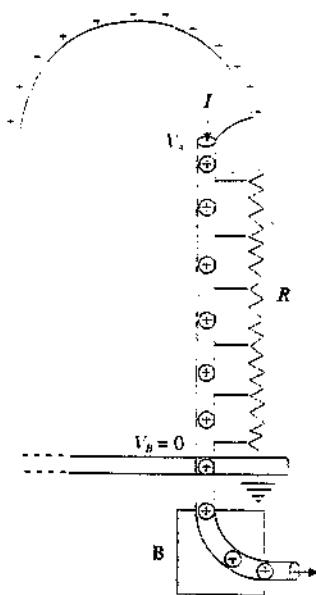


Figura 6.36

$$W = \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_B^A (\mathbf{F}' + q \mathbf{E}_{el}) \cdot d\mathbf{s} + \int_A^B q \mathbf{E}_{el} \cdot d\mathbf{s} = \int_B^A \mathbf{F}' \cdot d\mathbf{s} ,$$

in quanto  $\oint \mathbf{E}_{el} \cdot d\mathbf{s} = 0$ . Esso è quindi pari al lavoro meccanico fatto dal motore per muovere  $q$ , che è solidale alla cinghia. La f.e.m., pari al lavoro per unità di carica, è

$$\mathcal{E} = \frac{W}{q} = \int_B^A \frac{\mathbf{F}'}{q} \cdot d\mathbf{s} = \int_B^A \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{s} ,$$

dove  $\mathbf{E}' = \mathbf{F}' / q$  è il campo elettromotore (6.42). Abbiamo in sostanza ripetuto per il generatore in esame il ragionamento generale che ha portato alla (6.41).

Questa f.e.m., che è dovuta all'azione del motore ed è quindi di origine meccanica, fa circolare corrente nel resistore esterno e nel tubo in cui vengono accelerati gli ioni, oltre che nel gas isolante e lungo la cinghia che presenta anch'essa una resistenza elettrica (correnti di fuga).

Se stacchiamo il carico, costituito dal resistore e dal tubo, il motore continuerà a fare accumulare cariche sulla testa e a fare aumentare il campo elettrostatico  $\mathbf{E}_{el}$  fino a che

$$\mathbf{F}' + q \mathbf{E}_{el} = 0 :$$

oltre questo valore limite del campo elettrostatico (ammesso che sia inferiore alla rigidità dielettrica  $E_s$ ) il motore non riesce più ad esercitare una forza superiore a quella elettrostatica e quindi si arresta. La d.d.p. misurata in queste condizioni di corrente nulla coincide con la f.e.m. del generatore, come si è detto nel paragrafo 6.7, relazione (6.46).

L'energia elettrostatica immagazzinata sulla testa al potenziale  $\gamma$  è

$$W = \frac{1}{2} C \gamma^2 = \frac{1}{2} 4\pi \epsilon_0 R_0 \gamma^2 .$$

Con  $R_0 = 0.5$  m e  $\gamma = 6$  MV si ha  $W = 2 \cdot 10^3$  J.

La corrente erogata dal generatore si deduce dal calcolo della carica che può essere trasportata dalla cinghia. Supponiamo che questa sia larga  $h = 20$  cm e si muova con velocità  $v = 10$  m/s; supponiamo inoltre che la carica trasmessa con continuità dalla punta alla cinghia si distribuisca su questa con densità  $\sigma = 50 \cdot 10^{-6}$  C/m<sup>2</sup>. La carica  $dq$  trasportata, nel tempo  $dt$  vale

$$dq = \sigma d\Sigma = \sigma h ds = \sigma h v dt$$

e la corrente di convezione trasportata dalla cinghia è

$$i = \frac{dq}{dt} = \sigma h v = 50 \cdot 10^{-6} \cdot 0.2 \cdot 10 = 10^{-4} A = 100 \mu A :$$

essa dipende dalle caratteristiche costruttive del generatore ed è la corrente massima che il generatore può erogare (per una data velocità della cinghia). Dividendo  $\gamma$  per  $i$  abbiamo un'idea dell'ordine di grandezza della resistenza del circuito:  $\gamma/i = 6 \text{ MV} / 100 \mu \text{A} = 6 \cdot 10^{10} \Omega$ ; la potenza erogata è  $P = \gamma i = 600 \text{ W}$ .

Calcoliamo infine il valore della corrente ionica nel tubo acceleratore. Il numero massimo di ioni che possono essere accelerati è dell'ordine di  $10^{15}$  ioni/secondo a cui corrisponde la corrente

$$i_{ion} = 10^{15} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \frac{C}{s} = 1.6 \cdot 10^{-16} A = 1.6 \mu A .$$

quasi cento volte inferiore alla corrente di convezione della cinghia.

Il generatore Van de Graaf in conclusione è un generatore con f.e.m. molto elevata e corrente piuttosto bassa: per confronto osserviamo che un generatore tipo batteria per uso automobilistico, in cui la f.e.m. ha origine da processi chimici, presenta f.e.m. dell'ordine di 10 V e corrente dell'ordine di 10 A, costante nel tempo per molte ore.

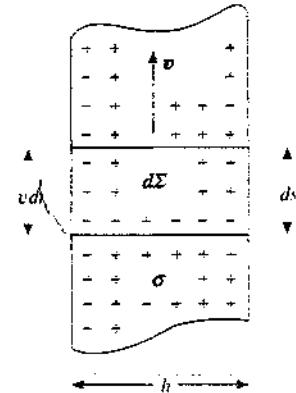


Figura 6.37

## 6.9 Carica e scarica di un condensatore attraverso un resistore

Nei circuiti visti finora la corrente elettrica era continua, cioè costante nel tempo. Prendiamo ora in esame alcuni semplici circuiti nei quali la corrente varia nel tempo, secondo una legge definita.

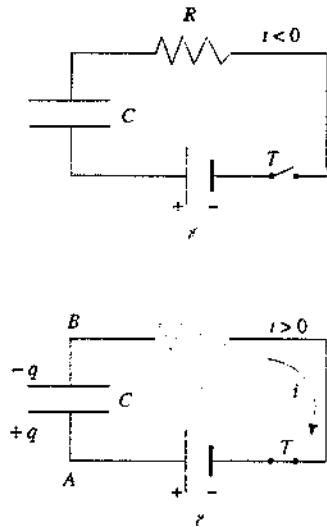


Figura 6.38

### Carica di un condensatore

Consideriamo il circuito costituito da un generatore  $\mathcal{E}$ , un resistore  $R$  e un condensatore  $C$ ; inizialmente l'interruttore  $T$  è aperto, nel circuito non circola corrente e il condensatore è scarico. Al tempo  $t = 0$  viene chiuso l'interruttore e il generatore inizia a prelevare cariche dai conduttori connessi al polo negativo e a portarle al polo positivo di modo che sulle armature del condensatore compaiono le cariche  $+q$  e  $-q$ . Il processo continua fino a quando la carica del condensatore raggiunge il valore massimo  $q_0 = C\mathcal{E}$ , cui corrisponde la d.d.p.  $V_A - V_B$  tra le armature, pari alla f.e.m.  $\mathcal{E}$  del generatore (il campo elettromotore è eguale in modulo al campo elettostatico).

In un istante generico  $t$  valgono le relazioni

$$\mathcal{E} = V_R + V_C = R i(t) + \frac{q(t)}{C}, \quad i(t) = \frac{dq(t)}{dt};$$

la prima è la (6.45) applicata al nostro caso, supponendo la resistenza interna del generatore trascurabile rispetto alla resistenza esterna (oppure compresa nel valore di  $R$ ) e considerando che c'è una d.d.p. anche ai capi del condensatore. Abbiamo pertanto

$$R \frac{dq}{dt} = \mathcal{E} - \frac{q}{C} \Rightarrow \frac{dq}{q - C\mathcal{E}} = - \frac{dt}{RC}.$$

Integriamo tra l'istante  $t = 0$  e l'istante generico  $t$ , ai quali corrispondono le cariche  $q = 0$  e  $q$ :

$$\int_0^t \frac{dq}{q - C\mathcal{E}} = - \frac{1}{RC} \int_0^t dt, \quad \ln \left( \frac{q - C\mathcal{E}}{-C\mathcal{E}} \right) = - \frac{t}{RC}.$$

Esplicitiamo infine la carica e otteniamo

$$\begin{aligned} q(t) &= C\mathcal{E}(1 - e^{-t/RC}) \\ V_C(t) &= \frac{q(t)}{C} = \mathcal{E}(1 - e^{-t/RC}) \\ i(t) &= \frac{dq}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/RC} \\ V_R(t) &= R i(t) = \mathcal{E} e^{-t/RC}. \end{aligned} \quad (6.51)$$

Quando si carica un condensatore connettendolo ad un generatore, la d.d.p. finale ai capi del condensatore è uguale alla f.e.m.  $\mathcal{E}$  del generatore e la carica finale è  $q_0 = C\mathcal{E}$ : questi valori massimi sono raggiunti asintoticamente. La corrente nel circuito è massima nell'istante  $t = 0$ , quando vale  $\mathcal{E}/R$ , e decresce esponenzialmente nel tempo annullandosi per  $t \rightarrow \infty$ . L'andamento temporale è regolato dalla costante di tempo  $\tau = RC$ . Ricordiamo (si veda il paragrafo 1.7 del volume I) che per la funzione  $e^{-t/\tau}$  in un intervallo di tempo  $\Delta t = \tau$  si ha una riduzione del valore pari a un fattore  $e$  ( $= 2.72$ ): dopo  $\tau$  secondi dall'istante iniziale essa vale 0.368, dopo  $2\tau$  0.135, dopo  $3\tau$  0.050, ecc; per la funzione  $1 - e^{-t/\tau}$  la differenza rispetto al valore asintotico è 0.368 dopo  $\tau$  secondi dall'istante  $t = 0$ , 0.135 dopo  $2\tau$ , 0.050 dopo  $3\tau$ , ecc. In pratica dopo un tempo  $t \approx 5\tau$  entrambe le funzioni hanno raggiunto il loro valore asintotico, rispettivamente 0 e 1 (l'errore è del 7 per mille). Ad esempio, se  $C = 2 \mu\text{F}$  e  $R = 5 \cdot 10^5 \Omega$ ,  $\tau = RC = 1 \text{ s}$  e dopo 5 s il condensatore si può considerare carico e la corrente nulla.

È facile verificare che il prodotto  $RC$  ha le dimensioni di un tempo:

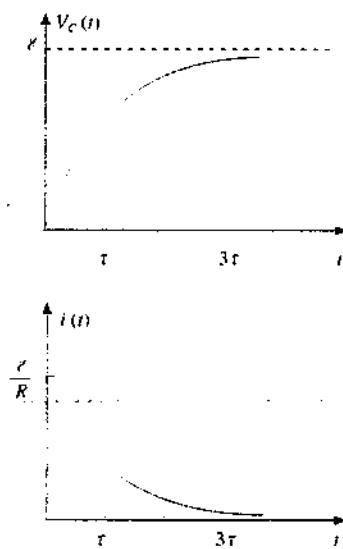


Figura 6.39

$$RC = \Omega F = \frac{V}{A} \frac{C}{V} = \frac{C}{A} = s .$$

La potenza istantanea erogata dal generatore vale

$$P_{\text{gen}} = \mathcal{E}i = \frac{\mathcal{E}^2}{R} e^{-iRC}$$

e quella spesa nel resistore è

$$P_R = R i^2 = \frac{\mathcal{E}^2}{R} e^{-2iRC} .$$

Il lavoro elementare di carica del condensatore, corrispondente ad un aumento dell'energia elettrostatica del condensatore, è  $V_C dq$  e la relativa potenza si scrive, ricorrendo alle (6.51),

$$P_C = V_C \frac{dq}{dt} = V_C i = \frac{\mathcal{E}^2}{R} e^{-iRC} - \frac{\mathcal{E}^2}{R} e^{-2iRC} = P_{\text{gen}} - P_R .$$

In ogni istante quindi

$$P_{\text{gen}} = P_R + P_C ,$$

in accordo col *principio di conservazione dell'energia*.

Il lavoro fornito dal generatore, quello consumato nella resistenza e l'energia elettristica del condensatore alla fine del processo valgono

Principio di conservazione dell'energia

$$\begin{aligned} W_{\text{gen}} &= \int_0^\infty P_{\text{gen}} dt = \int_0^\infty \frac{\mathcal{E}^2}{R} e^{-iRC} dt = C \mathcal{E}^2 , \\ W_R &= \int_0^\infty P_R dt = \frac{1}{2} C \mathcal{E}^2 , \quad \Delta U_e = \int_0^\infty P_C dt = \frac{1}{2} C \mathcal{E}^2 . \end{aligned}$$

Nella *carica di un condensatore* il 50% dell'energia fornita dal generatore va in energia elettristica, l'altra metà viene dissipata in calore, indipendentemente dai valori di  $R$  e  $C$ : questi determinano la durata del processo,  $C$  insieme a  $\mathcal{E}$  fissa la spesa energetica, però la ripartizione relativa è sempre la stessa.

Lo stesso risultato si può ottenere più rapidamente calcolando il lavoro fatto dal generatore come

$$W_{\text{gen}} = \int \mathcal{E} dq = \mathcal{E} \int_0^{q_0} dq = \mathcal{E} q_0 = C \mathcal{E}^2 ;$$

siccome  $\Delta U_e = \frac{1}{2} C \mathcal{E}^2$ , dalla conservazione dell'energia si deduce che sulla resistenza viene dissipato il lavoro  $\frac{1}{2} C \mathcal{E}^2$ .

È interessante notare l'analogia con i risultati già trovati nel paragrafo 4.9 e nell'esempio 5.8, relativi a processi a potenziale costante, cioè a processi in cui il condensatore è sempre connesso ad un generatore.

### *Scarica di un condensatore*

Consideriamo ora un condensatore  $C$ , con carica iniziale  $q_0$ , un resistore  $R$  e un interruttore inizialmente aperto. La d.d.p. ai capi del condensatore vale  $V_0 = q_0/C$  e l'energia elettristica in esso immagazzinata è  $U_e = q^2/2C$ . All'istante  $t = 0$  si chiude l'interruttore e le cariche si muovono dall'armatura a potenziale maggiore a quella a potenziale minore, dando luogo a una corrente positiva lungo il resistore data da  $i = -dq/dt$ , dove il segno meno è

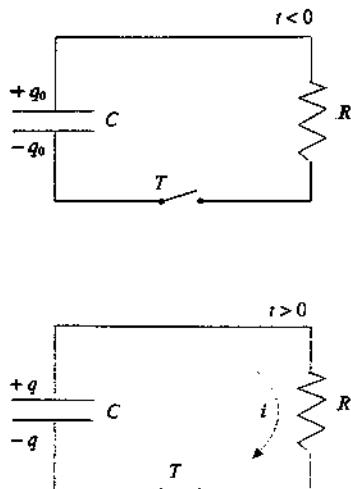


Figura 6.40

necessario in quanto la carica diminuisce nel tempo.

Nell'istante generico la d.d.p.  $V_C$  ai capi del condensatore è eguale a quella  $V_R$  ai capi del resistore e valgono quindi le relazioni

$$V_C = \frac{q}{C} = V_R = R i \quad , \quad i = -\frac{dq}{dt} \Rightarrow \frac{dq}{dt} = -\frac{q}{RC} \quad ,$$

$$\int_{q_0}^q \frac{dq}{q} = - \int_0^t \frac{dt}{RC} \quad , \quad \ln \frac{q}{q_0} = - \frac{t}{RC} \quad .$$

Le espressioni esplicite sono

$$q(t) = q_0 e^{-t/RC} \quad , \quad V_C(t) = \frac{q}{C} = \frac{q_0}{C} e^{-t/RC} = V_0 e^{-t/RC} \quad , \quad (6.52)$$

$$i(t) = -\frac{dq}{dt} = \frac{q_0}{RC} e^{-t/RC} = \frac{V_0}{R} e^{-t/RC} = \frac{V_C}{R} \quad .$$

La carica, la d.d.p. ai capi del condensatore e la corrente nel circuito diminuiscono esponenzialmente nel tempo con una rapidità caratterizzata dalla *costante di tempo*  $\tau = RC$ .

La potenza istantanea dissipata su  $R$  vale

$$P_R = R i^2 = \frac{V_0^2}{R} e^{-2t/RC}$$

e nell'intero processo viene dissipata l'energia

$$W_R = \int_0^\infty P_R dt = \frac{V_0^2}{R} \int_0^\infty e^{-2t/RC} dt = \frac{1}{2} C V_0^2 = \frac{q_0^2}{2C} \quad .$$

pari all'energia elettrostatica iniziale del condensatore.

Notiamo che la corrente di carica è eguale a quella di scarica (se si pone  $V_0 = 0$ ): siccome la stessa corrente produce gli stessi effetti, se nella scarica si ha egualanza in modulo tra variazione di energia del condensatore e energia dissipata nella resistenza, è giustificato il fatto che pure nella carica i due contributi siano numericamente eguali: la differenza sta nel fatto che ora essi hanno lo stesso segno e quindi devono essere forniti da una sorgente esterna (il generatore). In effetti le soluzioni ottenute mostrano che il processo di variazione di carica per unità di tempo nelle due situazioni è lo stesso, solo che in un caso avviene spontaneamente in un certo verso, nell'altro è forzato ad avvenire in verso contrario.

### Circuiti $RC$

I due circuiti semplici che abbiamo illustrato, detti comunemente *circuiti  $RC$* , mostrano realisticamente i processi di carica e scarica di un condensatore. Per caricare un condensatore occorre sempre un certo tempo (il processo non è istantaneo) perché c'è sempre resistenza nel circuito, se non altro quella interna del generatore; inoltre la spesa di energia è sempre maggiore di  $C V_0^2 / 2$ , per via della dissipazione resistiva (irreversibile). Nel caso della scarica occorre sottolineare che se questa avviene come descritto, cioè tramite un resistore, l'energia elettrostatica è completamente persa. Notiamo inoltre che un condensatore isolato non mantiene indefinitamente la sua carica, in quanto ci sono sempre processi conduttori attraverso il dielettrico o attraverso l'aria, che si possono schematizzare con una *resistenza di perdita  $R$* : dal valore di questa e della capacità dipende il tempo di scarica.

**Esempio 6.11**

Si riconsideri il sistema di due condensatori degli esempi 4.11 e 4.14 e si immagini che al tempo  $t = 0$ , quando la d.d.p. ai capi del condensatore  $C_1$  è  $V_1$  e ai capi di  $C_2$  è  $V_2$ , venga effettuata la connessione tra i due condensatori con un resistore  $R$ . Calcolare la corrente nel circuito e l'energia dissipata su  $R$ .

**Soluzione**

Supponiamo  $V_1 > V_2$ : dopo la connessione  $C_1$  si scarica e  $C_2$  si carica, per cui  $i = -dq_1/dt = dq_2/dt$ . In un istante generico

$$\frac{q_1}{C_1} = R i + \frac{q_2}{C_2}$$

Deriviamo rispetto al tempo e poniamo  $1/C = 1/C_1 + 1/C_2$ :

$$-\frac{i}{C_1} = R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C_2} \Rightarrow R \frac{di}{dt} = -\frac{i}{C} \quad , \quad \frac{di}{i} = -\frac{dt}{RC}$$

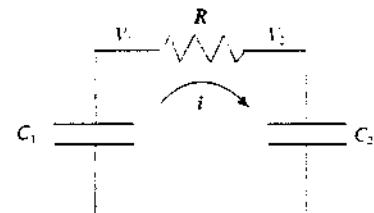
Integrando,  $i = i_0 e^{-t/RC}$  dove  $i_0$  è la corrente nell'istante iniziale, pari a  $(V_1 - V_2)/R$ . La soluzione è quindi

$$i(t) = \frac{V_1 - V_2}{R} e^{-t/RC}$$

La corrente decresce esponenzialmente e si annulla quando, a seguito dello spostamento di carica, le d.d.p. ai capi dei due condensatori sono uguali. L'energia dissipata su  $R$  è

$$W_R = \int_0^\infty R i^2 dt = \frac{(V_1 - V_2)^2}{R} \int_0^\infty e^{-2t/RC} dt = \frac{1}{2} C (V_1 - V_2)^2$$

e constatiamo che è eguale alla diminuzione dell'energia elettrostatica dei condensatori, calcolata nell'esempio 4.14.

**Figura 6.42**

L'introduzione di circuiti con corrente variabile nel tempo richiede un richiamo alla condizione di stazionarietà enunciata nel paragrafo 6.3. Noi abbiamo implicitamente ammesso che la corrente  $i(t)$  sia la stessa in ogni sezione del circuito e quindi soddisfi alla condizione di stazionarietà o, come si dice meglio in questo caso, di quasi stazionarietà. Ciò vuol dire che riteniamo il fenomeno di variabilità abbastanza lento per cui il tempo che impiegherebbe la luce ad attraversare il circuito è molto minore di  $\tau$ , tempo caratteristico del circuito  $RC$ . Se una dimensione tipica del circuito è dell'ordine di  $s = 10$  cm, il tempo di cui parliamo è  $\tau = s/c = 3.3 \cdot 10^{-10}$  s; fino a valori di  $\tau$  dell'ordine di  $10^{-9}$  s l'ipotesi di stazionarietà è valida.

Un altro problema, legato alla presenza di un condensatore nel circuito, è il seguente: il concetto di corrente è stato da noi associato a quello di movimento di cariche da una parte e a quello di circuito chiuso dall'altra, lungo cui le cariche si muovono; però attraverso lo spazio compreso tra le armature di un condensatore non c'è trasporto di cariche. La difficoltà si risolve considerando che per una variazione di carica  $dq$  su una armatura c'è una variazione  $-dq$  sull'altra (induzione completa) e ciò equivale a dire che quando una carica  $dq$  arriva su un'armatura, una carica  $dq$  lascia l'altra armatura, come se la carica  $dq$  fosse passata attraverso il condensatore. Il ragionamento è valido solo in regime variabile: con una f.e.m. costante e una corrente costante, anche la d.d.p.  $V_C$  deve essere costante, così come la carica sulle armature e quindi non può esserci corrente nel circuito. A parte il fenomeno transitorio, che dura poche costanti di tempo, nei circuiti  $RC$  come quelli esaminati non può sussistere un regime di corrente continua.

Formalmente, e facendo riferimento per semplicità a un condensatore piano vuoto ( $C = \epsilon_0 \Sigma / h$ ,  $E = V / h$ ), possiamo scrivere

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} (CV) = \epsilon_0 \frac{d}{dt} \left( \frac{\Sigma V}{h} \right) = \epsilon_0 \frac{d}{dt} (\Sigma E) = \epsilon_0 \frac{d\Phi}{dt} . \quad (6.53)$$

La corrente variabile viene dunque messa in relazione con la derivata rispetto al tempo del flusso del campo elettrico attraverso la sezione del condensatore. Vedremo nel paragrafo 10.10 che la (6.53) ha un significato più profondo di quello che ora potremmo attribuirle, l'essere cioè un artificio formale per dare un'espressione della corrente all'interno del condensatore.

## 6.10 Leggi di Kirchhoff per le reti elettriche

### Rete elettrica

Nei paragrafi precedenti è stato sempre considerato un circuito semplice, formato da un generatore di f.e.m. e da un resistore, che per quanto visto nel paragrafo 6.6 potrebbe essere l'equivalente di un insieme di resistori connessi tra loro in serie e in parallelo. Esistono d'altra parte circuiti con geometrie più complicate, che non possono essere ridotti ad un unico resistore equivalente soltanto con operazioni di serie e parallelo (si veda l'esempio 6.13). Sia il caso più semplice che quelli più complessi sono particolari esempi di *rete elettrica*.

Gli elementi geometrici distintivi di una *rete* sono i *nodi* e i *rami*. Un *nodo* è un punto nel quale convergono almeno tre conduttori; i nodi sono collegati da *rami*, in cui possono esserci componenti attive (generatori) e componenti passive (resistori). All'interno di una rete è possibile individuare determinati cammini chiusi, detti *maglie*, costituiti da più rami; un dato ramo può pertanto appartenere a più maglie.

L'analisi delle reti elettriche, cui accenniamo soltanto senza sviluppare a fondo l'argomento, che è materia di corsi specialistici, è semplificata dall'uso di due leggi generali, dette *leggi o principi di Kirchhoff*, relative ai nodi e alle maglie: esse sintetizzano quanto abbiano finora esposto sui circuiti elettrici resistivi percorsi da corrente elettrica stazionaria.

La *prima legge di Kirchhoff*, o *legge di nodi*, dice che la somma algebrica delle correnti che confluiscono in un nodo è nulla, se prendiamo con un dato segno le correnti che escono dal nodo e col segno opposto quelle che entrano:

### Prima legge di Kirchhoff

$$\sum_k i_k = 0 \quad . \quad (6.54)$$

Si tratta di una generalizzazione della (6.12), conseguenza del principio di conservazione della carica espresso per una corrente stazionaria dalla relazione (6.9).

Consideriamo ora una *maglia* di una rete, nella quale fissiamo arbitrariamente un verso di percorrenza; in ogni ramo della maglia viene a sua volta fissato un verso della corrente che lo percorre; la *seconda legge di Kirchhoff*, o *legge delle maglie*, stabilisce che

### Seconda legge di Kirchhoff

$$\sum_k R_k i_k = \sum_k \mathcal{E}_k : \quad (6.55)$$

la somma algebrica delle f.e.m. presenti nei rami della maglia è eguale alla somma algebrica dei prodotti  $R_k i_k$ , cioè delle d.d.p. ai capi dei resistori  $R_k$  situati nei rami della maglia (nella somma sono compresi anche i contributi delle resistenze interne dei generatori). I segni dei vari termini devono soddisfare le seguenti regole:

- se nel ramo  $k$ -esimo la corrente  $i_k$  è concorde al verso scelto nella maglia,  $R_k i_k$  ha segno positivo;
- in caso contrario  $R_k i_k$  ha segno negativo;
- se la sorgente di f.e.m.  $\mathcal{E}_k$  viene attraversata dal senso di percorrenza fissato nel verso che va dal polo negativo al polo positivo, essa va presa col segno positivo;
- in caso contrario  $\mathcal{E}_k$  va presa col segno negativo.

Prendiamo come esempio la maglia disegnata in figura 6.45, con i versi ivi specificati, e applichiamo la legge di Ohm generalizzata (6.49) ad ogni ramo:

$$R_1 i_1 = V_A - V_B + \mathcal{E}_1$$

$$R_2 i_2 = V_B - V_C - \mathcal{E}_2$$

$$-R_3 i_3 = V_C - V_D - \mathcal{E}_3$$

$$R_4 i_4 = V_D - V_A + \mathcal{E}_4 .$$

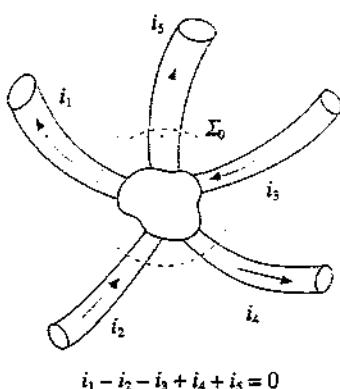


Figura 6.43

Sommando le quattro relazioni si ottiene

$$R_1 i_1 + R_2 i_2 - R_3 i_3 + R_4 i_4 = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3 + \mathcal{E}_4 ,$$

che corrisponde alla (6.55), se vengono soddisfatte le regole sui segni sopra enunciate.

L'applicazione delle due leggi di Kirchhoff ad una rete, formata da più maglie, porta a definire procedure di soluzione che sono applicabili in generale e alle quali accenneremo dopo gli esempi.

Se la rete ha  $N$  nodi ( $N \geq 2$ ) e  $L$  rami ( $L \geq 3$ ), utilizzando la (6.54) si possono scrivere  $N$  equazioni lineari tra le correnti che circolano negli  $L$  rami; di queste però solo  $N - 1$  sono indipendenti, come si può intuitivamente capire se si pensa che ogni corrente di un ramo afferisce sempre a due nodi, quelli terminali del ramo, e quindi, scritte  $N - 1$  equazioni (6.54), la  $N$ -esima ha tutti gli elementi che già compaiono in altre equazioni e non è una condizione realmente diversa da quelle già imposte (nel caso più semplice di rete con due nodi quanto detto è evidente: con le stesse correnti si scrivono due equazioni identiche e pertanto una sola è sufficiente).

Abbiamo così  $L$  incognite e  $N - 1$  condizioni per cui il numero di correnti indipendenti da determinare è

$$M = L - (N - 1) = L - N + 1 \quad (6.56)$$

Questo evidentemente è anche il numero di maglie indipendenti che si possono individuare nella rete ( $M \geq 2$ ). Un metodo semplice e pratico per individuare in una rete le  $M$  maglie indipendenti consiste nello scegliere le maglie in modo tale che ciascuna abbia almeno un ramo che non è parte delle maglie scelte precedentemente.

Individuate le  $M$  maglie si associa ad ogni maglia una corrente ( $i_1, i_2, \dots, i_M$ ) e un verso di percorrenza nella maglia e si scrivono le  $M$  equazioni (6.55): la soluzione di tale sistema lineare dà i valori delle correnti incognite, un segno negativo significando che la corrente nella maglia circola in verso opposto a quello scelto inizialmente. Infine la corrente in un singolo ramo è pari a una delle correnti calcolate se il ramo appartiene a una sola maglia oppure è la somma algebrica di più correnti se il ramo appartiene a più maglie.

La procedura esposta non è univoca, nel senso che a seconda della scelta delle maglie si hanno diversi sistemi di equazioni e diversi insiemi di correnti di maglia; però alla fine le correnti nei rami sono ovviamente sempre le stesse.

### Esempio 6.12

Nella rete elettrica della figura 6.46  $\mathcal{E}_1 = 18 \text{ V}$ ,  $\mathcal{E}_2 = 12 \text{ V}$ ,  $R_1 = 12 \Omega$ ,  $R_2 = 2 \Omega$ ,  $R_3 = 6 \Omega$ ,  $R_4 = 4 \Omega$ . Determinare l'intensità di corrente erogata da ciascun generatore e l'intensità di corrente attraverso il resistore  $R_3$ . Verificare inoltre il bilancio della potenza nella rete. Le resistenze interne dei generatori sono trascurabili.

#### Soluzione

I nodi della rete sono due,  $B$  e  $C$ , e i rami sono tre; quindi il numero di maglie indipendenti è  $M = 3 - 2 + 1 = 2$ . Sceglieremo le maglie  $ABCD$  e  $BEFC$ , con le relative correnti  $i_1$  e  $i_2$  nei versi indicati: nel ramo contenente  $R_3$  supponiamo che la corrente, pari a  $i_1 - i_2$ , vada da  $B$  a  $C$ . Scriviamo le equazioni (6.55):

$$-\mathcal{E}_1 = R_1 i_1 + R_3 (i_1 - i_2) \quad . \quad \mathcal{E}_2 = (R_2 + R_4) i_2 - R_3 (i_1 - i_2) \quad .$$

Riordiniamo evidenziando le incognite  $i_1$  e  $i_2$ :

$$\begin{aligned} (R_1 + R_3) i_1 - R_3 i_2 &= -\mathcal{E}_1 \\ -R_3 i_1 + (R_2 + R_3 + R_4) i_2 &= \mathcal{E}_2 \end{aligned} \quad (6.57)$$

Numericamente

$$\begin{aligned} 18 i_1 - 6 i_2 &= -18 \quad . \quad -6 i_1 + 12 i_2 = 12 \\ \Rightarrow i_1 &= -0.8 \text{ A} \quad . \quad i_2 = 0.6 \text{ A} \end{aligned}$$

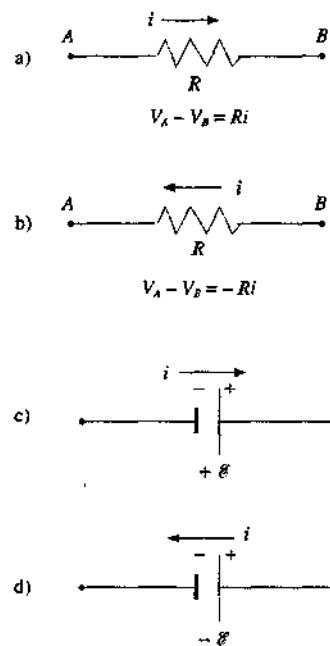


Figura 6.44

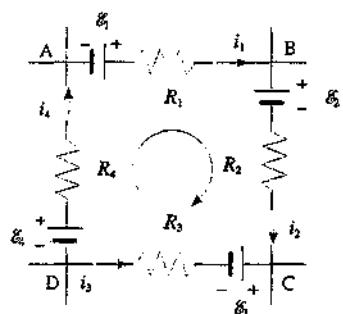


Figura 6.45

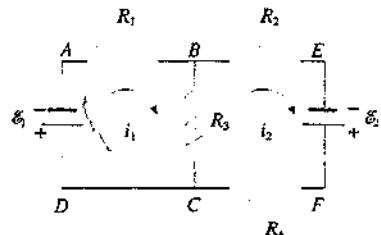


Figura 6.46

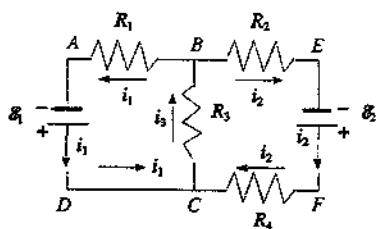


Figura 6.47

La corrente nella prima maglia circola pertanto in verso opposto a quello scelto: nel resistore  $R_1$  le correnti sono concordi e circolano quindi 1.4 A da C a B. La soluzione è illustrata nella figura 6.47.

La potenza erogata dai generatori è

$$P_{\text{gen}} = \mathcal{E}_1 i_1 + \mathcal{E}_2 i_2 = 21.6 \text{ W}$$

e nei singoli resistori si ha

$$P_R = 12 \cdot 0.64 + 2 \cdot 0.36 + 6 \cdot 1.96 + 4 \cdot 0.36 = 21.6 \text{ W}.$$

Si provi a risolvere l'esercizio considerando le maglie A B C D, A E F D e si troverà  $i_1 = -1.4 \text{ A}$ ,  $i_2 = 0.6 \text{ A}$ : nei singoli rami si hanno le stesse correnti prima calcolate.

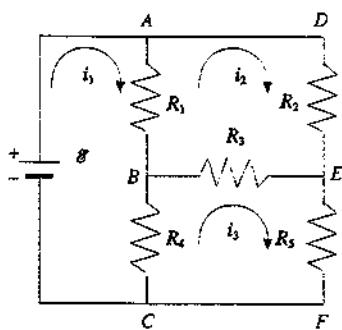


Figura 6.48

### Esempio 6.13

Nella rete elettrica della figura 6.48  $\mathcal{E} = 18 \text{ V}$ ,  $R_1 = 12 \Omega$ ,  $R_2 = 2 \Omega$ ,  $R_3 = 6 \Omega$ ,  $R_4 = 4 \Omega$ ,  $R_5 = 2 \Omega$ . Calcolare la potenza erogata dal generatore. La resistenza interna del generatore è trascurabile.

#### Soluzione

La rete ha  $N = 4$  nodi,  $L = 6$  rami,  $M = 3$  maglie indipendenti, che sceglieremo come in figura. Applichiamo (6.55):

$$\mathcal{E}_1 = R_1 (i_1 - i_2) + R_4 (i_1 - i_3)$$

$$0 = R_2 i_2 + R_3 (i_2 - i_3) - R_1 (i_1 - i_2)$$

$$0 = R_5 i_3 - R_4 (i_1 - i_3) - R_3 (i_2 - i_3)$$

Riordiniamo mettendo in evidenza le correnti incognite:

$$(R_1 + R_4) i_1 - R_1 i_2 - R_4 i_3 = \mathcal{E}_1$$

$$-R_1 i_1 + (R_1 + R_2 + R_3) i_2 - R_3 i_3 = 0 \quad (6.58)$$

$$-R_4 i_1 - R_3 i_2 + (R_3 + R_4 + R_5) i_3 = 0$$

La soluzione numerica è  $i_1 = 5.74 \text{ A}$ ,  $i_2 = 4.73 \text{ A}$ ,  $i_3 = 4.28 \text{ A}$ : tutte le correnti di maglia circolano pertanto nei versi ipotizzati.

Nei singoli resistori si hanno le correnti

$$i(R_1) = i_1 - i_2 = 1.01 \text{ A} \quad i(R_2) = i_2 \quad i(R_3) = i_2 - i_3 = 0.45 \text{ A}$$

$$i(R_4) = i_1 - i_3 = 1.46 \text{ A} \quad i(R_5) = i_3$$

La potenza erogata dal generatore è

$$P_{\text{gen}} = \mathcal{E} i_1 = 103.3 \text{ W}$$

ed è facile verificare che è pari alla somma delle potenze dissipate nelle singole resistenze.

Dal generatore il circuito è visto come un unico resistore di resistenza  $R_{\text{eq}} = \mathcal{E} / i_1 = 3.14 \Omega$ . Si osservi che questo valore non può essere ottenuto con operazioni di serie e parallelo sui resistori componenti.

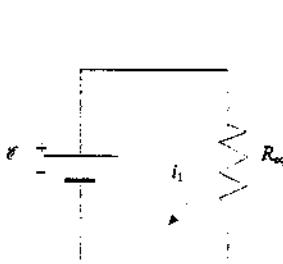


Figura 6.50

Le equazioni (6.57) e (6.58) hanno una forma che è generale: esse corrispondono alla cosiddetta *regola delle maglie*, seguendo la quale la scrittura è immediata. Individuate le  $M$  maglie indipendenti e fissati i versi delle correnti, l'equazione della  $j$ -esima maglia ha sempre questa struttura:

$$\pm R_{j1} i_1 \pm R_{j2} i_2 \pm \dots + (\sum_k R_k) i_j \pm \dots \pm R_{jM} i_M = \sum_k \mathcal{E}_k . \quad (6.59)$$

### Regola delle maglie

$R_{jm}$  è la somma dei valori delle resistenze che la  $j$ -esima maglia ha in comune con la  $m$ -esima maglia (se non ci sono resistenze in comune  $R_{jm} = 0$ ): il segno dipende dal fatto che le correnti  $j$ -esima e  $m$ -esima siano concordi o discordi.  $\sum_k R_k$  è la somma delle resistenze della  $j$ -esima maglia.  $\sum_k \mathcal{E}_k$  è la somma algebrica (secondo la solita regola) delle f.e.m. presenti nella  $j$ -esima maglia.

Tale procedura (*metodo delle maglie*) porta dunque alla scrittura diretta delle  $M$  equazioni che danno le correnti ed è valida per qualsiasi rete elettrica resistiva. Un metodo alternativo, detto *metodo dei nodi* e che citiamo soltanto, si basa invece sui potenziali dei nodi, assunti come variabili indipendenti, e porta a un sistema lineare di  $N - 1$  equazioni (infatti un nodo è assunto con riferimento): l'equazione relativa a ciascun nodo si scrive immediatamente in base a determinate regole. Data una rete conviene scegliere l'uno o l'altro metodo basandosi sul criterio di risolvere il sistema con minor numero di equazioni e si guarderà quindi quale dei valori  $M$  o  $N - 1$  è minore.

## 6.11 Alcuni circuiti particolari in corrente continua

Applichiamo alcune delle nozioni finora esposte a situazioni pratiche che si incontrano frequentemente in laboratorio e che riguardano la misura di correnti, differenze di potenziale, forze elettromotrici e resistenze.

### Misura dell'intensità di corrente

Uno strumento comune, che vedremo in dettaglio nell'esempio 7.3, è il galvanometro a bobina mobile. La parte essenziale è una bobina rettangolare di filo conduttore avvolta su un nucleo di ferro che è libera di ruotare attorno ad un asse ed è immersa in un campo magnetico generato da un piccolo magnete permanente. Si vedrà in seguito che una bobina percorsa da corrente e sottoposta all'azione di un campo magnetico è soggetta a una coppia di forze il cui momento è proporzionale alla corrente. Questo momento fa ruotare la bobina e se il sistema di sospensione è in grado di sviluppare un momento resistente elastico si raggiunge una posizione di equilibrio, caratterizzata da un angolo proporzionale all'intensità di corrente che percorre la bobina. Se alla bobina è solidale un indice che scorre su una scala graduata opportunamente tarata si ha la visualizzazione del valore della corrente.

La corrente massima misurabile è detta anche corrente di fondo scala  $i_f$ , in quanto porta l'indice all'estremità della scala di lettura; insieme alla resistenza interna  $r_g$  essa è una caratteristica costruttiva del galvanometro. Valori tipici sono  $i_f = 100 \mu\text{A}$ ,  $r_g = 10 \Omega$ .

Per eseguire una misura di intensità di corrente in un ramo di un circuito bisogna necessariamente interrompere il ramo in un punto e inserire il galvanometro nel ramo: così operando si altera il circuito preesistente in quanto viene variata la resistenza del ramo in questione.

Nel caso più semplice di circuito costituito da una sola maglia, di resistenza totale  $R$ , la corrente cambia da  $i$  a  $i_{\text{mis}}$ , valore misurato dal galvanometro:

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} \quad , \quad i_{\text{mis}} = \frac{\mathcal{E}}{R + r_g} \Rightarrow i_{\text{mis}} = \frac{R}{R + r_g} i = \frac{1}{1 + \frac{r_g}{R}} i \quad .$$

$$\frac{i - i_{\text{mis}}}{i} = \frac{r_g}{R + r_g} = \frac{r_g / R}{1 + \frac{r_g}{R}} \quad .$$

La corrente misurata è sempre minore di  $i$ , ma la variazione percentuale è tanto minore quanto più piccola è la resistenza interna del galvanometro rispetto alla resistenza totale del circuito.

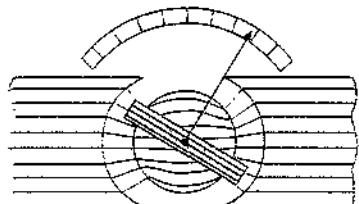


Figura 6.51

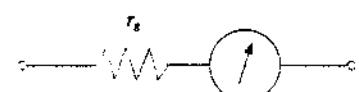


Figura 6.52

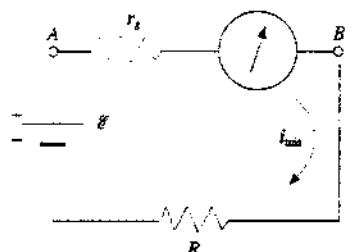
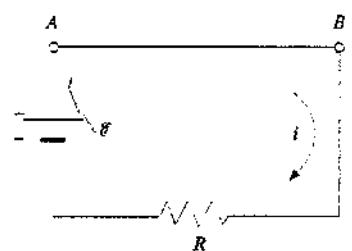


Figura 6.53

## Shunt

Si può aumentare la corrente massima misurabile collegando in parallelo al galvanometro un resistore chiamato *shunt*, di resistenza  $r_s$ , minore di  $r_g$ . Per i due rami in parallelo valgono le relazioni

$$i = i_g + i_s, \quad r_g i_g = r_s i_s,$$

$$\Rightarrow i = \frac{r_g + r_s}{r_s} i_g, \quad \frac{i}{i_g} = 1 + \frac{r_g}{r_s}. \quad (6.60)$$

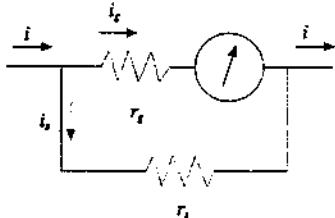


Figura 6.54

A seconda del valore  $r_s$  rispetto a  $r_g$  si determina il valore di  $i > i_{fs}$ , che porta lo strumento a fondo scala. Ad esempio:

$$r_{s1} = \frac{1}{9} r_g, \quad i_1 = 10 i_{fs}, \quad r_{s2} = \frac{1}{99} r_g, \quad i_2 = 100 i_{fs}.$$

Credendo lo strumento con varie resistenze di shunt (si veda l'esempio 6.14) si può variare notevolmente il campo di misura: a tale strumento si dà in generale il nome di *amperometro*. Essendo lo shunt in parallelo a  $r_g$  in ogni caso la *resistenza equivalente è minore di quella interna*, il che riduce la perturbazione prodotta dalla presenza del galvanometro.

## Misure di differenze di potenziale

Quando un galvanometro è percorso da una corrente  $i_g$ , la d.d.p. ai suoi capi vale  $V_g = r_g i_g$ ; con  $r_g = 10 \Omega$  e  $i_g = 10^{-4} \text{ A}$ ,  $V_g = 10^{-3} \text{ V} = 1 \text{ mV}$ . Se poniamo in serie al galvanometro un resistore  $R_V$  opportuno, dalla misura di  $i_g$  si risale alla d.d.p. ai capi dello strumento mediante la  $V_g = (R_V + r_g) i_g$ .

Supponiamo di voler misurare la d.d.p.  $V_A - V_B = R i$  esistente ai capi di un resistore  $R$  percorso da corrente. Collegiamo in parallelo al resistore il galvanometro con in serie  $R_V$ . La resistenza equivalente è

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_V + r_g} \Rightarrow R_{eq} = \frac{R(R_V + r_g)}{R + R_V + r_g}$$

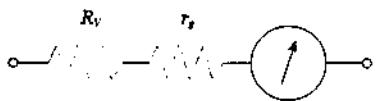


Figura 6.55

e la d.d.p. ai capi del parallelo vale

$$(V_A - V_B)_{mis} = R_{eq} i = \frac{R_V + r_g}{R + R_V + r_g} (V_A - V_B),$$

misurata dal galvanometro attraversato dalla corrente

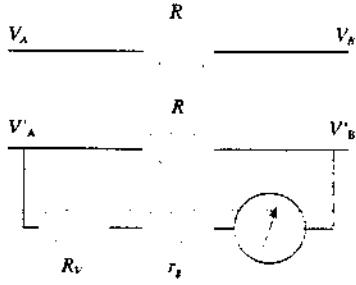


Figura 6.56

$$i_g = \frac{(V_A - V_B)_{mis}}{R_V + r_g} = \frac{V_A - V_B}{R + R_V + r_g}$$

La d.d.p.  $(V_A - V_B)_{mis}$  è minore della d.d.p.  $V_A - V_B$  esistente prima della connessione dello strumento. La variazione percentuale è

$$\frac{(V_A - V_B) - (V_A - V_B)_{mis}}{V_A - V_B} = \frac{R}{R + R_V + r_g} \approx \frac{R}{R_V + r_g} = \frac{R}{R_V},$$

tanto minore quanto più grande è  $R_V$  rispetto a  $R$  (di norma  $r_g$  è trascurabile).

A parità di corrente che attraversa il galvanometro, il valore della d.d.p. misurabile aumenta all'aumentare di  $R_V$ . Dotando il galvanometro di varie resistenze in serie (esempio 6.14) si ottiene uno strumento con un campo di misura molto ampio; esso è tarato direttamente in volt e prende il nome di *voltmetro*.

Riassumendo, un amperometro deve avere resistenza trascurabile rispetto a quelle del circuito e va sempre inserito in serie; invece un voltmetro deve avere resistenza molto mag-

giore di quelle del circuito ed essere sempre connesso in parallelo.

Menzioniamo soltanto che il galvanometro, corredata di un opportuno circuito, può essere utilizzato anche per misurare la resistenza di un resistore connesso esternamente ai suoi poli, svolgendo in tal caso la funzione di *ohmetro*. Si chiama *strumento universale* uno strumento con cui, selezionando la funzione e la scala desiderata, si possono eseguire misure di corrente, differenza di potenziale e resistenza.

### Strumento universale

#### Esempio 6.14

Un galvanometro di resistenza interna  $r_g = 100 \Omega$  e corrente di fondo scala  $i_{fs} = 100 \mu A$  deve essere usato come:

- amperometro con correnti di fondo scala  $i_1 = 0.1 A$ ,  $i_2 = 1 A$ ,  $i_3 = 10 A$ ;
- voltmetro con indicazioni di fondo scala  $V_1 = 1 V$ ,  $V_2 = 10 V$ ,  $V_3 = 100 V$ .

Si determinino i valori delle resistenze  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  degli schemi elettrici in figura 6.57 e 6.58.

#### Soluzione

Nell'utilizzazione come amperometro, quando la connessione al circuito esterno è fatta nei punti  $A$  e  $B_1$  la resistenza di shunt è  $R_1 + R_2 + R_3$ .

In base alla (6.60)

$$\frac{r_g}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{i_1}{i_{fs}} - 1 = 999 \Rightarrow R_1 + R_2 + R_3 = \frac{r_g}{999} = 0.1 \Omega$$

Da questa relazione si capisce che ognuna delle resistenze è molto minore di  $r_g$ . Quando la connessione è fatta tra  $A$  e  $B_2$ ,  $R_3$  è in serie a  $r_g$  e  $R_1 + R_2$  fungono da shunt:

$$\frac{r_g + R_3}{R_1 + R_2} = \frac{i_2}{i_{fs}} - 1 = 9999 \Rightarrow R_1 + R_2 = \frac{r_g + R_3}{9999} = \frac{r_g}{9999} = 0.01 \Omega.$$

Procedendo in modo analogo per la connessione fatta in  $A$  e  $B_3$

$$\frac{r_g + R_2 + R_3}{R_1} = \frac{i_3}{i_{fs}} - 1 = 99999 \Rightarrow R_1 = \frac{r_g}{99999} = 0.001 \Omega.$$

Si conclude che  $R_1 = 0.001 \Omega$ ,  $R_2 = 0.009 \Omega$ ,  $R_3 = 0.090 \Omega$ .

Nel collegamento come voltmetro la scala inferiore ( $V_1 = 0.1 V$ ) si ha quando lo strumento è connesso in  $A$  e  $B_1$  e in tal caso

$$(r_g + R_1) i_{fs} = V_1 \Rightarrow R_1 = \frac{V_1}{i_{fs}} - r_g = 9900 \Omega = 9.9 \text{ k}\Omega.$$

Con la connessione in  $A$  e  $B_2$ :

$$(r_g + R_1 + R_2) i_{fs} = V_2 = V_1 + R_2 i_{fs} \Rightarrow R_2 = \frac{V_2 - V_1}{i_{fs}} = 9 \cdot 10^4 \Omega = 90 \text{ k}\Omega.$$

Infine nel terzo collegamento

$$R_3 = \frac{V_3 - V_2}{i_{fs}} = 900 \text{ k}\Omega.$$

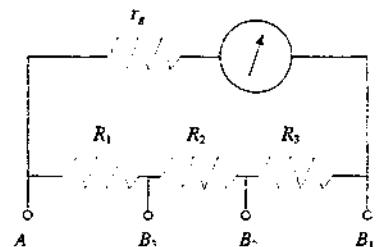


Figura 6.57

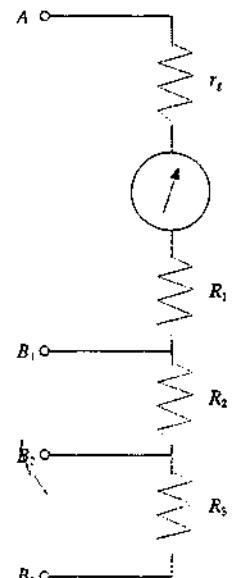


Figura 6.58

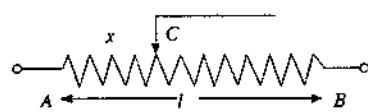


Figura 6.59

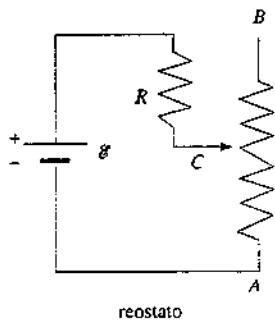


Figura 6.60

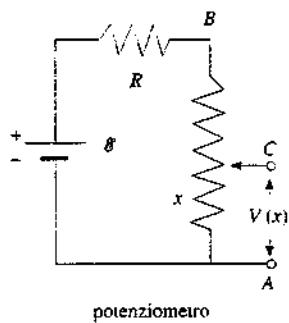


Figura 6.61

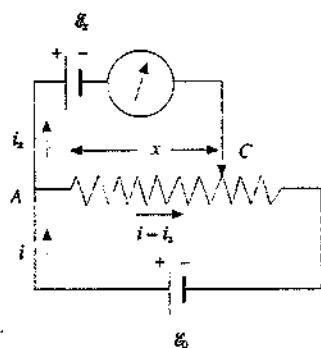


Figura 6.62

**Reostato e potenziometro. Misura di f.e.m.**

La resistenza di un conduttore omogeneo (resistività  $\rho$  uniforme), avente sezione  $\Sigma$  costante e lunghezza  $x$ , è proporzionale a  $x$  secondo (6.25):

$$R_x = \rho \frac{x}{\Sigma} = rx$$

indicando con  $r$  la resistenza per unità di lunghezza del conduttore.

Se disponiamo di un contatto mobile  $C$  che scorre sul conduttore (*cursore*), possiamo ottenere una resistenza variabile con continuità e con legge nota. Un tale dispositivo si chiama *reostato*: inserito in serie in un circuito permette di variare con continuità l'intensità di corrente,

$$i = \frac{\epsilon}{R + rx}$$

spostando il cursore tra la posizione  $x = 0$  (reostato escluso) e la posizione  $x = l$  (reostato completamente inserito).

Lo stesso dispositivo, collegato ad un generatore di f.e.m. come in figura 6.61, permette di ottenere tra il cursore  $C$  e il polo  $A$  una d.d.p. variabile linearmente:

$$V_C - V_A = V(x) = \frac{\epsilon}{R + rx} rx = vx$$

dove  $v$  è la d.d.p. per unità di lunghezza del sistema; questo prende il nome di *potenziometro*. Se tra  $A$  e  $C$  si inserisce un conduttore di resistenza  $R'$ , la d.d.p. tra  $C$  e  $A$  varia, poiché  $R'$  è in parallelo a  $R$ ,  $= rx$ , e non è più lineare in  $x$ ; solo se  $R' \gg rx$   $V(x)$  è ancora approssimativamente lineare.

Il circuito con potenziometro, mostrato nella figura 6.62, può essere usato per la misura della f.e.m. incognita  $\epsilon_0$ , secondo il *metodo detto di Poggendorf*. Ricordiamo dal paragrafo 6.7, relazione (6.46), che la f.e.m. di un generatore è pari alla d.d.p. misurata tra i suoi poli quando esso non è attraversato da corrente. La condizione di corrente zero si realizza applicando ai poli del generatore una d.d.p. eguale alla f.e.m. e con la stessa polarità. Nella pratica si cerca la posizione  $x$  del cursore in corrispondenza alla quale  $i_1$ , misurata dal galvanometro, è nulla; vuol dire che allora

$$\epsilon_1 = V_A - V_C = rx_1 i_1$$

dove  $i = \epsilon_0 / rx$  è la corrente erogata dal generatore  $\epsilon_0$  in queste condizioni. Se al posto di  $\epsilon_0$  si inserisce nel circuito un generatore di f.e.m.  $\epsilon_1$  nota e di opera nello stesso modo, cioè cercando la posizione  $x_1$  del cursore per cui  $i_1 = 0$ , si ha

$$\epsilon_1 = rx_1 i_1$$

la corrente  $i$  essendo la stessa del caso precedente. Dal rapporto tra le due relazioni,

$$\epsilon_1 = \epsilon_0 \frac{x_1}{x_0}$$

la misura di  $\epsilon_0$  relativa a  $\epsilon_1$  è quindi ricondotta alla misura delle lunghezze  $x$  e  $x_0$ .

**Ponte di Wheatstone**

Si tratta di un circuito adatto alla misura precisa della resistenza di un conduttore, per confronto con resistenze note. In figura 6.63 il generatore di f.e.m.  $\epsilon$  alimenta il circuito ABCD, costituito dai quattro resistori  $R_1, R_2, R_3, R_4$ ; il galvanometro nel ramo BD viene usato come rivelatore di zero. Si variano  $R_1$  e  $R_2$  finché il galvanometro non segna corrente,  $i_g = 0$ : il ponte

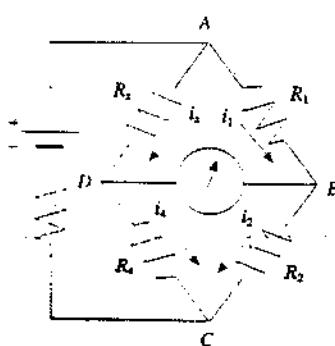


Figura 6.63

si dice allora in equilibrio e i punti  $B$  e  $D$  sono allo stesso potenziale,  $V_B = V_D$ .

Nei nodi  $B$  e  $D$ , in condizioni di equilibrio, la prima legge di Kirchhoff (6.54) dà  $i_1 = i_2$ ,  $i_x = i_4$ . Inoltre, da  $V_B - V_A = V_D - V_A$  e  $V_B - V_C = V_D - V_C$  si ha  $R_1 i_1 = R_x i_x$ ,  $R_2 i_2 = R_4 i_4$ . Dividendo membro a membro e sfruttando l'egualanza delle correnti, la condizione di equilibrio si esprime come

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_x}{R_4} \quad \text{oppure} \quad R_1 R_4 = R_x R_2$$

da cui si ricava

$$R_x = \frac{R_1 R_4}{R_2} \quad . \quad (6.61)$$

Le resistenze  $R_1$  e  $R_2$  possono essere sostituite da un filo calibro su cui scorre il cursore  $B$ : all'equilibrio il rapporto  $R_1 / R_2$  è semplicemente il rapporto tra le lunghezze  $l_1$  e  $l_2$  dei due tratti di filo  $AB$  e  $BC$ . In questa versione il circuito prende il nome di *ponte a filo*.

## 6.12 Calcolo della resistenza di conduttori tridimensionali

L'unica formula esplicita per il calcolo della resistenza di un conduttore che è stata finora usata è la (6.25), valida per un conduttore unidimensionale, in quanto la lunghezza è il solo parametro: l'applicazione tipica è a un conduttore di forma cilindrica, come un filo. L'estensione (6.27) tiene conto di variazioni della sezione ed è applicabile ad esempio a conduttori a forma di tronco di cono.

Sono però possibili altre situazioni geometriche: consideriamo allo scopo lo spazio tra due superficie sferiche conduttrici, di raggi  $a$  e  $b$ , e supponiamo che sia riempito con un mezzo conduttore di resistività  $\rho$ . La resistenza opposta al passaggio di una corrente radiale si può calcolare in questo modo: presa una superficie sferica di raggio  $r$  ( $a < r < b$ ) e un'altra di raggio  $r + dr$ , la resistenza  $dR$  dello strato di conduttore spesso  $dr$  si può pensare come il parallelo di infinite resistenze infinitesimali, ciascuna di valore  $\rho dr / d\Sigma$ , e quindi

$$\frac{1}{dR} = \int \frac{d\Sigma}{\rho dr} = \frac{4\pi r^2}{\rho dr} \Rightarrow dR = \frac{\rho dr}{4\pi r^2} \quad .$$

Tutti questi strati sono in serie e la resistenza complessiva vale

$$R = \int_a^b \frac{\rho dr}{4\pi r^2} = \frac{\rho}{4\pi} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \quad .$$

Confrontando con l'espressione (4.13) della capacità di un condensatore sferico vuoto, che ora scriviamo

$$C = 4\pi \epsilon_0 \frac{ab}{b-a} = 4\pi \epsilon_0 \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \quad .$$

ricaviamo la relazione

$$RC = \rho \epsilon_0 \quad (6.62)$$

tra resistenza, capacità e caratteristiche fisiche del mezzo.

Anche se esaminiamo la situazione geometrica del condensatore piano, supponendo che sia riempito con un mezzo conduttore, abbiamo

$$R = \rho \frac{h}{\Sigma} \quad , \quad C = \epsilon_0 \frac{\Sigma}{h} \quad , \quad RC = \rho \epsilon_0 \quad .$$

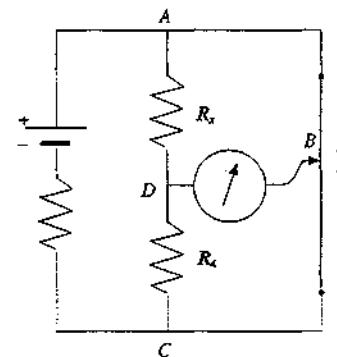


Figura 6.64

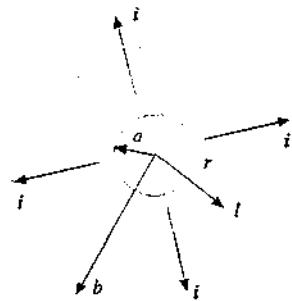
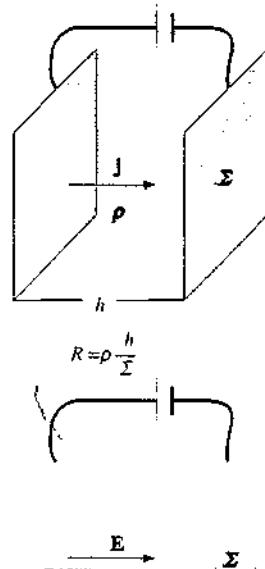


Figura 6.65



$$C = \epsilon_0 \frac{h}{\Sigma}$$

Figura 6.66

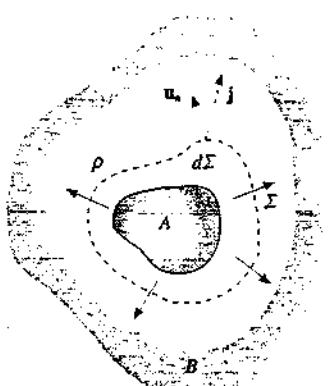
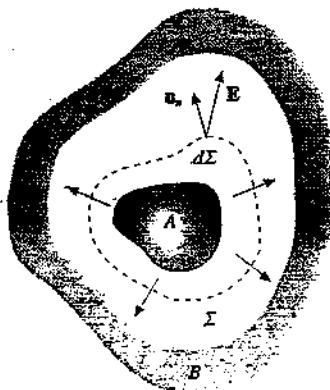


Figura 6.67

In effetti la (6.62) non contiene alcun elemento caratteristico della geometria del sistema, per cui si può pensare che abbia *validità generale*. Per dimostrarlo, consideriamo due conduttori *A* e *B* che costituiscono le armature di un condensatore di capacità *C* e ai quali è applicata la d.d.p.  $V_A - V_B$ . Detta  $\Sigma$  una qualunque superficie chiusa, tracciata nella regione compresa tra i due conduttori, che contenga *A* al suo interno, mentre *B* è esterno, in base alla legge di Gauss (3.8) abbiamo

$$\Phi(E) = \oint E \cdot u_n d\Sigma = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{C(V_A - V_B)}{\epsilon_0} .$$

Se ora immaginiamo che lo spazio tra *A* e *B* sia riempito da un mezzo conduttore di resistività  $\rho$ , possiamo scrivere in base a (6.19, 6.4, 6.26)

$$\Phi(E) = \oint E \cdot u_n d\Sigma = \rho \oint j \cdot u_n d\Sigma = \rho i = \rho \frac{V_A - V_B}{R} ,$$

dove *R* è la resistenza del conduttore. Dal confronto tra le due espressioni del flusso si ottiene la (6.62).

L'interesse di tale relazione sta nel fatto che essa permette di utilizzare espressioni di capacità di sistemi noti per il calcolo delle resistenze e viceversa. Ad esempio, la resistenza di un conduttore a forma di cilindro cavo che viene attraversato da una corrente radiale è data, per unità di lunghezza, da

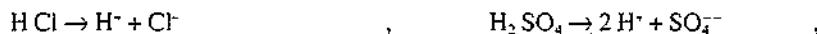
$$R = \frac{\rho \epsilon_0}{C} = \frac{\rho}{2\pi} \ln \frac{b}{a} ,$$

dove ci siano serviti di (4.18), con *a* e *b* raggio minore e maggiore.

### 6.13 Conduzione elettrolitica

La maggior parte dei liquidi presenta resistività elevata; nell'acqua distillata, ad esempio,  $\rho = 2 \cdot 10^9 \Omega \text{m}$  a  $20^\circ\text{C}$  (vedi tabella 6.1) e il fenomeno è dovuto principalmente al fatto che una piccolissima percentuale di molecole d'acqua è dissociata in uno ione  $\text{H}^+$  e uno ione  $\text{OH}^-$  ( $\text{H}_2\text{O} \rightarrow \text{H}^+ + \text{OH}^-$ ): il numero di molecole per unità di volume (vedi esempio 5.10 e 5.11) è  $\rho N_A / A = 3.35 \cdot 10^{28}$  molecole/  $\text{m}^3$ , mentre il numero di ioni di ciascun segno è  $\approx 6 \cdot 10^{19}$  ioni/  $\text{m}^3$ . A questo relativamente piccolo numero di portatori di carica è dovuta la conduttività dell'acqua.

La situazione cambia radicalmente se nell'acqua viene sciolta una quantità, anche piccola, di acido, base o sale. Il legame tra i componenti delle molecole di tali sostanze, dette *elettroliti*, è dovuto alla cessione di uno o più elettroni da parte di un atomo agli altri atomi ed è quindi di natura elettrostatica. Quando si forma una soluzione in acqua, detta *soluzione elettrolitica*, il legame risulta indebolito e si ha la dissociazione di una grande percentuale di molecole in ioni positivi e negativi; ad esempio



Dissociazione

Si potrebbe pensare che il legame sia indebolito perché in un mezzo con costante dielettrica così elevata il campo elettrico e quindi la forza tra i componenti della molecola sono ridotti, ma ciò non è corretto: infatti tale ragionamento è vero per il *campo medio macroscopico in un dielettrico*, ma non si può estendere ai *campi interni di una molecola*, perché non si può ipotizzare che le molecole d'acqua vadano a riempire lo spazio tra i componenti della molecola del soluto. Piuttosto ciò che avviene è che intorno ai componenti, ad esempio intorno a  $\text{Na}^+$  e  $\text{Cl}^-$ , si formino degli addensamenti di molecole d'acqua, polarizzate dai campi elettrici locali molto intensi, e che queste schermiscono parzialmente il campo tra sodio e cloro.

Ne risulta che negli urti tra molecole dovuti al moto di agitazione termica le molecole del soluto hanno una certa probabilità di scindersi, che aumenta con la temperatura in quanto dipende dal rapporto tra il fattore  $k_B T$  e l'energia (ridotta) del legame molecolare; di conseguenza nella soluzione troviamo ioni dei due segni e molecole non dissociate. Esiste anche una certa probabilità che avvenga *ricombinazione*, dipendente dalla concentrazione e crescente con questa, perché maggiore è la densità di ioni presenti più facile è che essi si trovino a una distanza tale da risentire fortemente della forza di attrazione.

Si raggiunge pertanto una *condizione di equilibrio* in cui dissociazione e ricombinazione si compensano e il numero di ioni per unità di volume resta costante. Quantitativamente, si definisce il *grado di dissociazione*

$$\alpha = n_i / n \quad (6.63) \quad \text{Grado di dissociazione}$$

come rapporto tra il numero di molecole dissociate e il numero totale di molecole del soluto (nell'acqua distillata senza soluti  $\alpha = 1.8 \cdot 10^{-9}$ ). Per quanto detto prima  $\alpha$  è funzione crescente della temperatura e decrescente della concentrazione. In condizioni normali di temperatura si chiamano *elettroliti forti* quelli con  $\alpha$  praticamente eguale a 1 anche per concentrazioni elevate, *deboli* quelli in cui  $\alpha$  si avvicina a 1 solo per piccolissime concentrazioni, esistendo naturalmente situazioni intermedie.

L'acqua è un solvente privilegiato per le soluzioni elettrolitiche in quanto in essa la dissociazione è notevole; questa avviene però anche in altri solventi, come alcool etilico e acetone, pur essendo minore a parità di condizioni. Invece esistono liquidi, come il benzene, che non sono ionizzanti; e ci sono molte sostanze, tipicamente quelle organiche, che non si dissociano in soluzione (ad esempio lo zucchero).

È evidente dai fatti esposti che le soluzioni elettrolitiche siano buoni conduttori, in quanto in esse sono presenti portatori mobili di carica dei due segni. Le proprietà di conduzione si studiano immergendo nella soluzione due elettroliti, ad esempio a forma di lastre parallele, e applicando tra questi tramite un generatore una differenza di potenziale; uno strumento di questo tipo si chiama *voltmetro* o *cella elettrolitica*.

Bisogna però sottolineare che la *dissociazione avviene anche in assenza di campo elettrico applicato*. Una prova di questa affermazione viene da misure di *pressione osmotica* (vedi nota alla fine del paragrafo), che, in una soluzione, dipende dai numeri di molecole del soluto; in una soluzione elettrolitica di  $N$  molecole, di cui  $\alpha N$  dissociate che danno origine a  $2\alpha N$  ioni e  $(1 - \alpha)N$  indivise, il numero di particelle è

$$2\alpha N + (1 - \alpha)N = (1 + \alpha)N$$

e in effetti si misura una pressione osmotica maggiore di quella attesa se le particelle fossero  $N$  (si noti che tali misure permettono di determinare il grado di dissociazione).

Caratteristica dei portatori è che la loro carica, dovuta a cessione o assorbimento di elettroni, è sempre un multiplo intero (piccolo) della carica elementare, il valore del multiplo essendo pari alla *valenza* degli elementi nel dato elettrolita. Ad esempio nella dissociazione del sale  $\text{CuSO}_4$  lo ione  $\text{Cu}^{2+}$  ha carica doppia positiva, essendo il rame *bivalente* in questo composto, e quindi lo ione negativo  $\text{SO}_4^{2-}$  ha anch'esso carica doppia (la molecola di partenza è neutra); nella dissociazione di  $\text{HCl}$  si hanno due ioni con una sola carica ciascuno, nella dissociazione di  $\text{H}_2\text{SO}_4$  lo ione negativo è bivalente, i due ioni idrogeno sono ciascuno monovalente, ma nel loro insieme trasportano una carica positiva doppia. In ogni caso, data la natura del processo, la *soluzione resta neutra*.

Applichiamo ora quanto detto nel paragrafo 6.4 nel caso di portatori di segno opposto: sotto l'azione di un campo elettrico si sovrappone al moto termico disordinato una componente di moto ordinato, concorde al campo elettrico per gli ioni positivi e discorde per gli ioni negativi; a causa dei continui urti il moto di deriva avviene con velocità proporzionale al campo elettrico:

$$v_+ = \mu_+ E, \quad v_- = \mu_- E \quad (6.64)$$

Introduciamo così la grandezza *mobilità degli ioni positivi e negativi*, come rapporto tra i moduli della velocità di deriva e del campo elettrico.

Da (6.18) utilizzando (6.64) scriviamo il modulo della densità di corrente

$$j = n' e (\mu_+ + \mu_-) E = \sigma E \quad (6.65)$$

e la *conduttività della soluzione elettrolita* vale pertanto

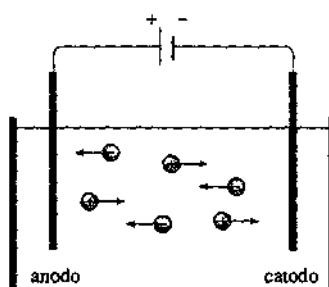


Figura 6.68

Valenza

## Conduttività di una soluzione elettrolitica

$$\sigma = n \cdot e (\mu_+ + \mu_-) \quad (6.66)$$

Il numero  $n'$  è pari al prodotto  $\alpha \cdot n f$ :  $\alpha \cdot n$ , secondo (6.63), è il *numero di ioni per unità di volume* e  $f$  la *valenza* degli ioni.

Le mobilità  $\mu_+$  e  $\mu_-$ , che in generale sono diverse a seconda del tipo di ione, dipendono anche da proprietà della soluzione, come viscosità e concentrazione, e dalla temperatura. Nella tabella 6.3 sono dati i valori, nelle unità  $(\text{m/s})/(\text{V/m}) = \text{m}^2/\text{Vs}$ , per alcuni ioni in soluzione acquosa contenente una massa di soluto pari a  $0.1 \text{ kg/m}^3$  per le sostanze che danno ioni monovalenti e a  $0.05 \text{ kg/m}^3$  per quelle che danno ioni bivalenti (così che il numero di valenze è lo stesso nei due casi).

Tabella 6.3 Mobilità in $\text{m}^2/\text{Vs}$ a $25^\circ\text{C}$			
$\text{H}^+$	$34 \cdot 10^{-8}$	$\text{Zn}^{++}$	$6 \cdot 10^{-8}$
$\text{OH}^-$	$18 \cdot 10^{-8}$	$\text{Cu}^{+-}$	$5 \cdot 10^{-8}$
$\text{SO}_4^{--}$	$8 \cdot 10^{-8}$	$\text{Na}^+$	$5 \cdot 10^{-8}$
$\text{Cl}^-$	$7 \cdot 10^{-8}$		

A questi valori delle mobilità corrispondono velocità di deriva molto piccole: anche con un campo elettrico relativamente alto per queste applicazioni,  $E = 10^3 \text{ V/m}$ , la velocità di uno ione  $\text{H}^+$  è  $3.4 \cdot 10^{-4} \text{ m/s} = 0.34 \text{ mm/s}$ , quella di uno ione  $\text{Cu}^{+-}$  è  $5 \cdot 10^{-5} \text{ m/s} = 0.05 \text{ mm/s}$ . Per confronto, da (6.14) e dai dati dell'esempio 6.4, la mobilità degli elettroni nel rame risulta  $4.4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2/\text{Vs}$ .

In una soluzione di cloruro di sodio completamente dissociata ( $f=1$ ,  $\alpha=1$ ), con concentrazione  $1 \text{ kg/m}^3 = 0.017 \text{ kmoli/m}^3$  ( $A = 58.44$ ), il numero di ioni per  $\text{m}^3$  è pari a

$$n = 0.017 \cdot 6.022 \cdot 10^{26} = 1.024 \cdot 10^{25} \text{ ioni/m}^3$$

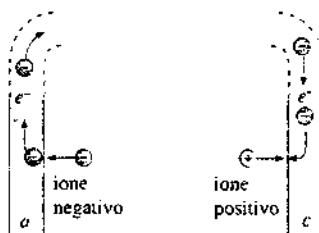


Figura 6.69

La conduttività della soluzione risulta essere  $\sigma = 0.17 (\Omega \text{m})^{-1}$  e quindi, dalla (6.66), si ricava  $\mu_+ + \mu_- = 10.4 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2/\text{Vs}$ . Il valore non è molto diverso da  $12 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2/\text{Vs}$  che si legge in tabella 6.3, valido per una concentrazione dieci volte minore. Evidentemente per tali valori, piuttosto piccoli, di concentrazione le mobilità non variano sensibilmente. Al citato valore della conduttività corrisponde la resistività  $\rho = 1/\sigma = 5.9 \Omega \text{m}$ . La conduttività aumenta notevolmente con la concentrazione: a  $1 \text{ kmole/m}^3$  essa vale  $7.7 (\Omega \text{m})^{-1}$  e si ricava  $\mu_+ + \mu_- = 8 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2/\text{Vs}$ .

Lo spazio tra gli elettrodi è dunque sede, in presenza di un campo elettrico, di una corrente elettrica avente densità (6.65). La continuità con la corrente nel circuito esterno è assicurata da uno scambio di carica che avviene agli elettrodi: al catodo (elettrodo negativo) arrivano ioni positivi che assorbono elettroni dal metallo e si neutralizzano, contemporaneamente all'anodo (elettrodo positivo) arrivano ioni negativi che cedono elettroni al metallo neutralizzandosi: torneremo tra breve sui dettagli di queste reazioni.

Variando la d.d.p. ai capi del voltmetro si osserva che la *soluzione elettrolita obbedisce alla legge di Ohm di linearità tra d.d.p. applicata e corrente*: con riferimento a (6.65) vuol dire che la conduttività  $\sigma$  non dipende dal campo elettrico e quindi non ne dipende anche la mobilità degli ioni.

### Reazioni agli elettrodi. Legge di Faraday. Polarizzazione

Un aspetto tipico del passaggio di corrente in una soluzione elettrolitica è lo spostamento di materia attraverso la soluzione. L'arrivo degli ioni agli elettrodi dà origine a varie reazioni chimiche, di cui vediamo alcuni esempi. Si tratta in ogni caso di *reazioni di ossidazione all'anodo* (che assorbe elettroni dalla soluzione) e di *riduzione al catodo* (che cede elettroni alla soluzione).

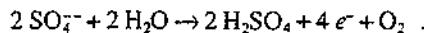
#### A. Soluzione acquosa di HCl. elettrodi inerti.

Gli ioni  $\text{Cl}^-$  si neutralizzano all'anodo e danno luogo allo sviluppo di cloro gassoso, mentre al catodo gli ioni  $\text{H}^+$  una volta neutralizzati sviluppano idrogeno gassoso. Le due reazioni sono:



**B. Soluzione acquosa di  $H_2SO_4$ , elettrodi inerti.**

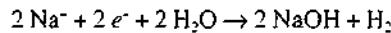
Il comportamento degli ioni idrogeno è lo stesso che in A. Invece gli ioni  $SO_4^{2-}$  all'anodo partecipano a una reazione con l'acqua in cui gli elettroni sono ceduti all'anodo, si riforma acido solforico e viene sviluppato ossigeno gassoso:



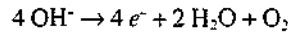
In totale è come se si scindesse l'acqua,  $2 H_2O \rightarrow 2 H_2 + O_2$ , con sviluppo dei suoi componenti agli elettrodi. Lo stesso risultato si otterrebbe con acqua distillata, però a causa della bassissima concentrazione di ioni la reazione sarebbe molto lenta. La presenza dell'acido solforico permette il trasporto di una carica per unità di tempo molto superiore e rende la reazione di scissione dell'acqua più veloce. Il termine di elettrolisi deriva originariamente da questo effetto di scissione del solvente facilitato dal passaggio di corrente nella soluzione.

**C. Soluzione acquosa di  $NaCl$ , elettrodi inerti.**

Il cloro di comporta come in A, invece il sodio al catodo reagisce con l'acqua secondo lo schema



e si ha formazione di idrossido di sodio e idrogeno gassoso. Questo processo fornisce uno dei metodi più comuni di produzione industriale di cloro. Analogamente, nella soluzione acquosa di  $NaOH$  si riforma  $NaOH$  al catodo con sviluppo di idrogeno, mentre all'anodo lo ione  $OH^-$  dà luogo alla reazione



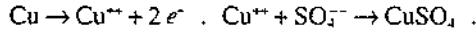
con sviluppo di ossigeno. Anche in questo caso è l'acqua che si scinde.

**D. Soluzione acquosa di  $CuSO_4$ , elettrodi inerti.**

Il rame si deposita sul catodo ( $Cu^{2+} + 2 e^- \rightarrow Cu$ ), lo ione  $SO_4^{2-}$  porta a sviluppo di ossigeno all'anodo come in B.

**E. Soluzione acquosa di  $CuSO_4$ , elettrodi di rame.**

Invece di elettrodi inerti, ad esempio di platino, utilizziamo elettrodi di rame. Al catodo il rame si deposita sul rame, all'anodo il rame scende in soluzione lasciando due elettroni e riformando solfato di rame:



Nulla cambia nella soluzione, l'anodo si assottiglia e il catodo si ingrossa.

Si vede che in realtà le reazioni non corrispondono sempre a un semplice deposito di materiale o svolgimento di gas, ma spesso coinvolgono il solvente (l'acqua). Al catodo ciò avviene se la reazione di riduzione degli ioni positivi è meno probabile della riduzione dell'acqua: questo è il caso ad esempio per sodio e potassio, i quali formano l'idrossido mentre è l'idrogeno dell'acqua che si riduce. Se invece è più probabile la riduzione dello ione, come è per rame o argento, questo si deposita sul catodo. Analogamente se all'anodo è più probabile la reazione di ossidazione dello ione rispetto all'acqua, come per cloro o rame, si ha formazione di  $Cl_2$  o entrata in soluzione del rame, altrimenti, come per  $SO_4^{2-}$ , si ossida l'acqua con produzione di ossigeno.

La chimica e la termodinamica delle soluzioni permettono di fissare le regole generali di questi processi, ma l'argomento esula dai nostri scopi.

Con un opportuno voltmetro si può dunque eseguire, oltre allo studio delle proprietà elettriche, la misura delle masse delle sostanze che si depositano sugli elettrodi o vengono emesse in fase gassosa. Per depositare una chilomole di una sostanza, che è composta da  $N_A$  molecole, occorre la neutralizzazione di  $N_A$  ioni, a cui corrisponde la carica  $N_A e f$ . Detta  $A$  la massa atomica o molecolare, per  $A$  chilogrammi occorre il passaggio di  $N_A e f$  coulomb: una massa  $m$  generica richiede  $q$  coulomb e vale la proporzione

$$\frac{m}{A} = \frac{q}{N_A e f} .$$

Definiamo adesso alcune grandezze, utili per questi processi:

- *equivalente chimico*  $A_c$ , rapporto tra massa molecolare  $A$  e valenza  $f$  (una massa  $A_c$  contiene pertanto  $N_A$  valenze);
- *costante di Faraday*  $F = N_A e$  (è la carica di una chilomole di elettroni ovvero di una massa di ioni pari ad  $A_c$ );
- *equivalente elettrochimico*  $A_e$ , rapporto tra  $A_c$  e  $F$ .

Possiamo allora riscrivere la relazione trovata in questo modo:

Legge di Faraday  
dell'elettrolisi

$$m = A_c \cdot \frac{q}{F} = A_e q \quad (6.67)$$

Costante di Faraday

*La massa depositata dal passaggio di una carica  $q$  è proporzionale alla carica stessa tramite l'equivalente elettrochimico della sostanza.*

La (6.67) si chiama *legge di Faraday dell'elettrolisi* ed è stata scoperta da Faraday molto tempo prima della formulazione dell'ipotesi ionica (Arrhenius, 1884). La *costante di Faraday* è una costante universale, eguale al valore della carica che deve passare attraverso la soluzione per liberare una massa pari all'equivalente chimico, qualunque sia il tipo di ione. Il suo valore attuale è, con un errore dell'ordine di 1 parte su  $10^9$ , usando  $N_A = 6.02213674 \cdot 10^{26}$  e il valore della tabella 1.1 per  $e$ ,

$$F = N_A e = 9.64853099 \cdot 10^7 C \quad ; \quad (6.68)$$

questa formula è molto importante perché mette in relazione tre costanti universali che possono essere determinate indipendentemente e serve quindi sia come verifica delle ipotesi di base che come mezzo per una determinazione precisa di una delle tre costanti a partire dalle due misurate con maggiore precisione (in questo caso  $N_A$  ed  $e$ ).

Come l'*equivalente chimico* è la *massa liberata dal passaggio di una carica  $F$* , così l'*equivalente elettrochimico* è la *massa liberata dal passaggio di 1 C*. Poiché in passato le misure di massa erano tra quelle più precise, la (6.67) è stata usata per definire l'unità di carica. In un voltmetro a nitrato di argento  $\text{AgNO}_3$ , con anodo di argento e catodo di platino, l'argento entra in soluzione all'anodo e si deposita sul catodo. La definizione elettrolitica del coulomb lo poneva eguale a quella carica il cui passaggio causava il deposito di 1.118 milligrammi di argento (1893). La massa atomica dell'argento è  $A = 107.868$ ; con  $F = 9.64853 \cdot 10^7 C$ , l'*equivalente elettrochimico* dell'argento risulta  $1.11797 \cdot 10^{-6} \text{ kg}$  e si vede che questo metodo non può essere molto preciso.

Ritornando agli esempi di reazioni agli elettrodi si osserva che, a parte casi analoghi al punto E o al voltmetro a nitrato d'argento, con un metallo che scende in soluzione e si deposita sul catodo, si producono alterazioni superficiali degli elettrodi, dovute ad esempio a fenomeni di adsorbimento di idrogeno al catodo o di ossigeno all'anodo, oppure all'attacco da parte degli alogeni. In corrispondenza si osserva anche che la corrente nel voltmetro diminuisce dal valore iniziale ad un valore stabile che viene raggiunto dopo un tempo dell'ordine del minuto. Tutto avviene come se a regime fosse presente una forza elettromotrice -  $\gamma$  che si oppone al passaggio della corrente, per cui la legge del tratto di circuito contenente il voltmetro è, in accordo con la forma generalizzata (6.49),

$$V_A - V_B - \gamma = R i \quad .$$

invece di  $V_A - V_B = R i$ : ed è da escludere che sia  $V_A - V_B = R' i$ , cioè non si tratta di un cambiamento di resistenza.

I valori di queste f.e.m. sono dell'ordine dei decimi di volt e il fenomeno si chiama *polarizzazione*. Se si esclude il generatore e si chiude il voltmetro su una resistenza esterna si osserva il passaggio di una corrente in senso inverso alla precedente dovuta al generatore, segno della presenza della f.e.m. di polarizzazione. Questa corrente si riduce rapidamente a zero perché ora nel voltmetro avvengono processi inversi che riportano gli elettrodi allo stato iniziale.

Concludiamo questo paragrafo con un cenno ad alcune applicazioni pratiche dei fenomeni descritti. Abbiamo già ricordato la produzione di cloro: storicamente, l'alluminio è diventato un metallo di uso corrente solo dopo l'invenzione di un metodo elettrolitico di produzione: il sodio e il magnesio sono ricavati con l'elettrolisi dei loro cloruri fusi (e non in soluzione acquosa).

Il deposito di un metallo al catodo viene usato nella cosiddetta *galvanoplastica* (o *elettrodepositazione*): l'anodo è formato dal metallo che si vuole depositare (oro, argento, rame, cromo, nichel) e nella soluzione c'è un sale di questo metallo, mentre il catodo è formato

Polarizzazione

dall'oggetto che si vuole ricoprire. Secondo lo stesso principio si esegue la *raffinazione eletrolitica di un metallo*: l'anodo è formato da metallo impuro, ma operando in modo opportuno è possibile fare depositare sul catodo solo il metallo voluto: tipico è il caso del rame.

#### Nota. La pressione osmotica

Consideriamo un solvente come l'acqua e una soluzione diluita acquosa, ad esempio di zucchero, contenuti in due recipienti diversi, separati da una *membrana semipermeabile*, la quale lascia passare le molecole d'acqua, ma non quelle del soluto. Si osserva che il volume del solvente puro diminuisce e quello della soluzione aumenta, segno del passaggio di acqua attraverso la membrana verso la soluzione, che si diluisce ulteriormente. Il passaggio si arresta quando il dislivello ha raggiunto un certo valore  $h$ , corrispondente a una pressione  $P = \rho g h$ , se  $\rho$  è la densità della soluzione (circa eguale a quella dell'acqua in condizioni di diluizione). Questa pressione dovuta alla presenza del soluto si chiama *pressione osmotica*; si può dimostrare con argomenti termodinamici che la pressione osmotica in una soluzione diluita non dipende dal tipo di soluto, ma soltanto dal numero di molecole del soluto, e obbedisce all'*equazione di Van't Hoff*

$$P V = n R T$$

formalmente eguale all'*equazione di stato dei gas ideali*, in cui  $V$  è il volume occupato dalla soluzione,  $n$  il numero di moli del soluto,  $R$  la costante dei gas,  $T$  la temperatura espressa in kelvin. Le molecole del soluto si comportano quindi come quelle di un gas ideale, in particolare esercitano una determinata pressione sulle pareti del contenitore. Sperimentalmente l'*equazione di Van't Hoff* è tanto più verificata quanto più la soluzione è diluita.

I valori della pressione osmotica possono essere notevoli: a 300 K con  $V = 1$  litro =  $10^{-3} \text{ m}^3$

$$P = 24.9 \cdot 10^5 n \text{ Pa} = 24.6 n \text{ atm}$$

Ad esempio una soluzione di 3.42 g di zucchero in un litro d'acqua ( $n = 0.01$  con  $A = 342$ ) presenta una pressione osmotica  $P = 0.246$  atm.

Nelle soluzioni elettrolitiche la pressione osmotica risulta superiore a quella calcolabile con l'*equazione di Van't Hoff* e numericamente l'aumento è in accordo con l'*ipotesi della dissociazione in ioni*: questi esercitano una pressione come se fossero molecole e quindi il numero effettivo  $n$  di moli deve contenere un fattore moltiplicativo (2, 3, ...) a seconda del numero di ioni in cui si dissocia la molecola del soluto. Inoltre, se il grado di dissociazione  $\alpha$  è minore di 1, bisogna tener conto anche di questo fatto nel calcolo di  $n$ .

Le anomalie della pressione osmotica delle soluzioni elettrolitiche hanno costituito un'importante verifica dell'*ipotesi di dissociazione ionica* formulata da Arrhenius.

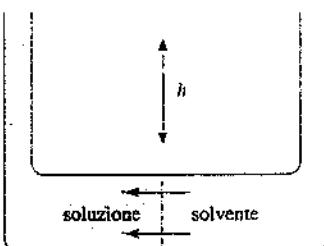


Figura 6.70

#### 6.14 Pile e accumulatori

Il passaggio di corrente attraverso un voltmetro comporta una spesa di energia da parte del generatore, energia che viene impiegata per fare avvenire reazioni chimiche. Nei casi in cui si manifestano fenomeni di polarizzazione occorre anche vincere l'*effetto della f.e.m. di polarizzazione*, che tenderebbe a far passare corrente nel verso opposto.

La *pila di Volta*, e tutti gli altri dispositivi simili che vennero in seguito realizzati, sfruttano invece la *trasformazione di energia chimica in energia elettrica*, impiegando cioè reazioni chimiche per dare origine a una f.e.m. tra due elettrodi immersi in una soluzione elettrolitica e quindi a una corrente elettrica quando i due elettrodi sono collegati all'esterno della pila con un conduttore.

La configurazione originale consistente in due dischi, uno di rame e uno di zinco, separati da un tampone imbevuto di acido solforico, può essere schematizzata più convenientemente con due elettrodi immersi in una soluzione, come in figura 6.71. L'elettrodo di zinco

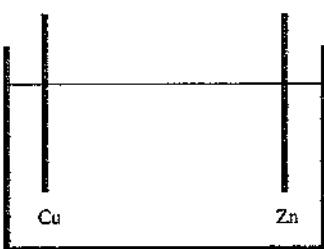


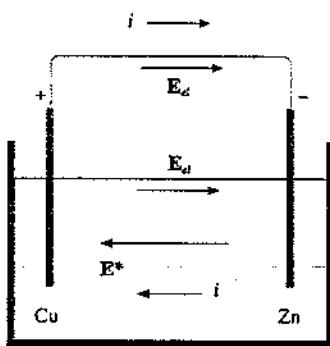
Figura 6.71

risulta carico negativamente a seguito del passaggio in soluzione di ioni di zinco secondo il processo  $Zn \rightarrow Zn^{2+} + 2e^-$ , processo che però viene rapidamente bloccato dall'attrazione elettrostatica dell'elettrodo carico negativamente, ovvero dall'equilibrio tra un campo eletromotore e un campo elettostatico. All'elettrodo di rame invece avviene il processo  $2H^+ + 2e^- \rightarrow H_2$ , per cui l'elettrodo si carica positivamente cedendo elettroni e si forma idrogeno: anche qui si raggiunge subito l'equilibrio tra processo chimico e attrazione elettrostatica. Globalmente non si ha passaggio di corrente, ma soltanto l'elettrodo di rame risulta positivo rispetto all'elettrodo di zinco. Quando si connette con un filo conduttore il rame allo zinco gli elettroni in eccesso sullo zinco passano al rame, il che corrisponde a un moto convenzionale di cariche positive dal rame allo zinco, e i processi chimici descritti possono avvenire con continuità. Lo zinco entrato in soluzione si combina con gli ioni  $SO_4^{2-}$  e la reazione complessiva è  $Zn + H_2SO_4 \rightarrow ZnSO_4 + H_2$ , con formazione di solfato di zinco e sviluppo di idrogeno gassoso intorno all'elettrodo di rame.

Riassumendo, durante il funzionamento con passaggio di corrente questa va dallo zinco al rame all'interno della pila e dal rame allo zinco all'esterno: secondo la terminologia che abbiamo usato, il rame è il *polo positivo* del generatore e funge da *catodo* nella soluzione, lo zinco è il *polo negativo* e funge da *anodo*. All'interno agisce un *campo eletromotore*, che è la somma dei campi elettromotori ai due elettrodi e consente il moto delle cariche in senso contrario a quello voluto dal campo elettostatico tra i due conduttori; la presenza del *campo eletromotore* è il *risultato delle reazioni chimiche che avvengono tra gli elettrodi metallici e la soluzione e permettono il trasporto di materia tra i due elettrodi*. Fenomeni analoghi si hanno con diverse coppie di metalli e sono tabulati i valori dei cosiddetti *potenziali normali o potenziali standard di riduzione* dei metalli rispetto ad un opportuno riferimento; per rame e zinco i valori sono rispettivamente  $+0.34\text{ V}$  e  $-0.76\text{ V}$  e in effetti la f.e.m. della pila rame-zinco di Volta è  $\mathcal{E} = 1.10\text{ V}$ . Ad ogni mole di zinco ( $A = 65.38$ ) che passa in soluzione corrisponde il lavoro

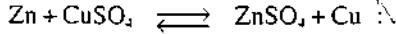
$$W = fF\mathcal{E} = 2 \cdot 9.6485 \cdot 10^4 \cdot 1.1 = 212.3\text{ kJ}$$

Figura 6.72



Anche nella pila di Volta si verifica il fenomeno della polarizzazione: si osserva infatti che la f.e.m. diminuisce durante il funzionamento portandosi a circa  $0.5\text{ V}$  e che il valore iniziale può essere ristabilito estraendo l'elettrodo di rame e pulendolo: l'effetto è attribuito all'adsorbimento di idrogeno nella superficie di rame. Dopo molte ore di funzionamento lo zinco in soluzione comincia ad arrivare al catodo depositandosi e alla fine ciò rende gli elettrodi eguali, per cui la pila cessa di funzionare. La connessione di un generatore esterno può forzare il passaggio di corrente nella pila in senso inverso se la f.e.m. del generatore è superiore a quella della pila, però non riporta la pila nello stato originario eliminando le cause della polarizzazione, perché adesso il rame entra in soluzione e si sviluppa idrogeno all'elettrodo di zinco ( $Cu + H_2SO_4 \rightarrow CuSO_4 + H_2$ ), reazione diversa da quella del funzionamento normale.

La prima *pila reversibile* fu quella concepita da Daniell nel 1836 (la pila di Volta è del 1800). I due elettrodi di rame e zinco sono immersi ciascuno in una cella elettrolitica, contenente rispettivamente  $CuSO_4$  e  $ZnSO_4$ : le celle sono separate da un setto poroso che permette il passaggio degli ioni, ma impedisce il mescolamento delle soluzioni. La reazione globale è



nel funzionamento come pila la freccia va da sinistra a destra, quando viene fatta circolare corrente nel verso contrario la reazione è quella con la freccia da destra a sinistra.

Le pile attualmente più diffuse, tipo Leclanché o a mercurio (queste ultime di dimensioni molto ridotte), utilizzano agenti depolarizzanti che impediscono l'alterazione del catodo e consentono una durata notevole con f.e.m. praticamente costante.

La pila reversibile è concettualmente molto interessante in quanto si possono alternare periodi di scarica, in cui essa funge da generatore fornendo energia elettrica a spese di energia chimica, e periodi di carica in cui, con spesa di energia elettrica dall'esterno, si invertono i processi immagazzinando energia chimica. Il principio è messo in pratica negli accumulatori.

Il più diffuso è l'*accumulatore a piombo*: l'anodo (polo negativo) è costituito da una griglia di piombo riempita con piombo spugnoso, il catodo (polo positivo) è anch'esso formato da una griglia di piombo riempita con ossido di piombo  $PbO_2$ . Gli elettrodi sono immersi in una soluzione acquosa di acido solforico. Le reazioni sono:

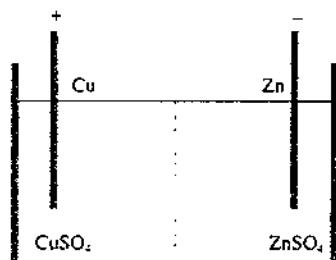
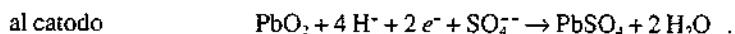
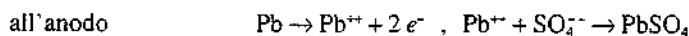


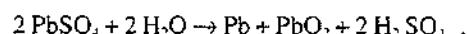
Figura 6.73

Accumulatore a piombo



Il piombo anodico scende in soluzione mentre al catodo il piombo si riduce da tetravalente a bivalente; ad entrambi gli elettrodi si forma solfato di piombo. Una cella di questo tipo dà una f.e.m. di 2 V; connettendo in serie sei celle si hanno gli accumulatori da 12 V (usati tipicamente nelle automobili).

Durante il funzionamento la soluzione si diluisce e oltre un certo limite la f.e.m. diminuisce; la cella però può essere ricaricata forzando il passaggio di corrente in senso contrario e la reazione inversa globale è



con il che si ricostituiscono i composti originari.

Si definisce *capacità di un accumulatore* la carica massima che esso è in grado di erogare a tensione costante. L'unità di misura usuale è l'ampere-ora (Ah), pari a 3600 C: ad esempio, un accumulatore da 100 Ah è capace di erogare una corrente di 10 A per 10 ore o di 1 A per 100 ore, ma non in generale una corrente di 100 A per un'ora. Il funzionamento descritto cioè è valido per correnti non troppo elevate, né in scarica né in carica. Il *rendimento energetico di un accumulatore* è dell'ordine di 0.8: occorre più energia per caricarlo di quanta esso possa fornire durante la scarica.

Sullo stesso principio sono fondati gli *accumulatori al nichel-cadmio*, molto più ridotti in peso e dimensioni, utilizzati negli apparecchi portatili.

# Forza magnetica. Campo magnetico

## 7.1 Primi fatti sperimentali sull'interazione magnetica

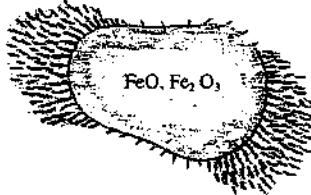


Figura 7.1

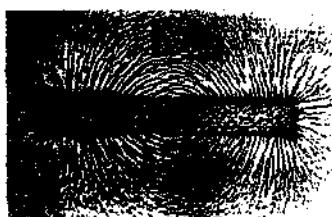


Figura 7.2

La proprietà di attrarre la limatura di ferro, mostrata da alcuni minerali di ferro e in particolare dalla *magnetite* (combinazione di ossidi di ferro,  $\text{FeO}\cdot\text{Fe}_2\text{O}_3$ ), era nota già nel VII secolo a.C.; il nome magnetite derivò da quello della città greca di Magnesia, in Asia minore, dove si trovavano giacimenti del minerale, e la proprietà osservata prese il nome di magnetismo.

Tale proprietà di attrazione non è uniformemente presente nel materiale, ma si manifesta principalmente in determinate parti ed è in particolare possibile costruire campioni cilindrici in cui essa è localizzata nella zona delle basi. Sia questi oggetti che altri con diversa geometria (ad esempio una sbarra piegata a forma di C) si indicano col nome di *magneti* e le parti in cui si localizza la proprietà di attrazione si chiamano i *poli del magnete*. Per ora ci riferiremo esclusivamente a magneti con due poli, pur essendo possibili altre configurazioni alle quali accenneremo.

Nel sedicesimo secolo W. Gilbert compì una serie di esperienze con magneti, aventi lo scopo di mettere in evidenza le caratteristiche del magnetismo e le differenze con i fenomeni di elettrostatica, da lui stesso studiati (vedi paragrafo 1.1). I risultati sullo studio delle interazioni tra poli magnetici, anche tenendo conto di successive osservazioni, sono riassunti nei punti seguenti.

A. Se ad un magnete sospeso nel centro tramite un filo, e quindi libero di ruotare, si avvicina un secondo magnete, tenuto ad esempio in mano, si osserva che questo esercita sul primo una certa forza. Come per le forze di natura elettrostatica, possiamo interpretare il fatto dicendo che un magnete genera un campo, chiamato *campo magnetico*, e che l'altro magnete risente dell'azione che il campo magnetico esercita nella posizione da esso occupata.

Un'analisi sistematica porta a stabilire che la forza di interazione tra i due magneti è attrattiva o repulsiva a seconda dei poli dei magneti che vengono affacciati e che esistono soltanto due specie di poli, detti *poli positivi* e *poli negativi*; inoltre si trova che *i poli di uno stesso magnete sono sempre di segno opposto*.

Le modalità di svolgimento di questo primo esperimento chiariscono che i fenomeni osservati non sono attribuibili in nessun modo a cariche elettriche fisse, localizzate in alcune regioni dei magneti. Infatti la magnetite è un conduttore e il secondo magnete, che è tenuto in mano, è certamente scarico, come del resto si può verificare con mezzi elettrostatici.

B. Se si avvicina a un pezzo di magnetite una bacchetta sottile di ferro, questo acquista la proprietà di attrarre la limatura di ferro, principalmente in vicinanza delle estremità: la bacchetta di ferro immersa nel campo magnetico generato dalla magnetite è diventata pertanto un magnete, ovvero si è *magnetizzata*. Essa viene chiamata *magnete artificiale* o *calamita* e presenta due poli magnetici di segno opposto. Soprattutto se è di piccole dimensioni la bacchetta viene anche detta *ago magnetico*.

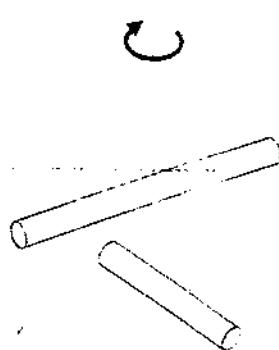


Figura 7.3

C. Se sospendiamo ad un filo l'ago magnetico sopra definito e lo lasciamo libero di ruotare, osserviamo che esso tende a disporsi approssimativamente parallelo al meridiano terrestre; spostato da questa posizione di equilibrio l'ago compie intorno ad essa oscillazioni, smorzate inevitabilmente dagli attriti.

L'esperienza mostra l'esistenza di un campo magnetico naturale, il *campo magnetico terrestre*, e mette in evidenza un comportamento dell'ago magnetico del tutto analogo a quello di un dipolo elettrico posto in un campo elettrico  $E$ , studiato nel paragrafo 2.9 e nell'esempio 2.14. L'ago magnetico, in altre parole, si comporta come un *dipolo magnetico* che lasciato libero si orienta nella direzione e verso del campo magnetico esistente nel punto dove è posto.

Il polo dell'ago che si orienta approssimativamente verso il nord geografico viene chiamato *polo nord* ( $N$ ) e gli si attribuisce segno *positivo*, l'altro è chiamato *polo sud* ( $S$ ) e gli si dà segno *negativo*. Accenneremo alle caratteristiche del campo magnetico terrestre nella nota alla fine del paragrafo 7.2.

Definiti nel modo detto i poli di un magnete ed eseguendo esperienze come quelle del punto A, si trova sempre che l'interazione tra *poli magnetici dello stesso segno è repulsiva*, quella tra *poli magnetici di segno opposto attrattiva*.

D. Lo studio quantitativo della forza magnetica tra i poli di due magneti, svolto da Coulomb con la stessa apparecchiatura con cui aveva ottenuto la legge per la forza tra cariche elettriche (paragrafo 1.3), dimostrò anche in tale caso un andamento inversamente proporzionale al quadrato della distanza, almeno per *poli puntiformi*, come sono con buona approssimazione quelli agli estremi di *sbarre lunghe e sottili*. Si potrebbe pertanto enunciare una *legge di Coulomb* per l'interazione magnetica tra due poli, data dalla forza

$$F = k_m \frac{q_1^* q_2^*}{r^2} \quad , \quad (7.1)$$

in cui i poli sono caratterizzati dalle *masse magnetiche*  $q_1^*$  e  $q_2^*$  e  $k_m$  è una costante il cui valore dipende dal mezzo in cui avviene l'interazione e dal sistema di unità di misura adottato; essa esprime l'*intensità dell'azione magnetica*, al pari della costante universale  $\gamma$  per l'interazione gravitazionale (1.1) e della costante  $k$  per l'interazione elettrostatica (1.2).

Sebbene la struttura di (7.1) sia identica a quella della forza tra due cariche elettriche o tra due masse, c'è tuttavia una differenza fondamentale. Una carica elettrica, positiva o negativa, può sempre essere isolata e ciò è una conseguenza dell'esistenza della carica elementare positiva portata dal protone e della carica elementare negativa portata dall'elettrone: la possibilità di separazione esiste cioè già a livello elementare. Anche la massa, sebbene non quantizzata e di un solo segno, è chiaramente isolabile a livello elementare. Invece non è mai stato possibile ottenere un polo magnetico isolato: i *poli magnetici sembrano esistere sempre a coppie di egual valore e segno opposto*, cioè si manifestano solamente sotto forma di *dipoli magnetici*.

L'indicazione classica, ottenuta quando ancora il quadro attuale della struttura elementare della materia non si era formato, è costituita dall'*esperimento della calamita spezzata*. Se si taglia a metà una calamita compaiono sempre due poli di segno opposto nella zona del taglio, che precedentemente a questo non mostrava la proprietà di attrarre limatura di ferro. Con il dispositivo sperimentale di Coulomb, dopo aver verificato l'egualanza in modulo dei poli preesistenti, si trova che i due nuovi poli sono quantitativamente eguali a questi. Ripetendo il taglio su pezzi sempre più piccoli si ottiene ogni volta lo stesso risultato, senza riuscire ad isolare un polo magnetico.

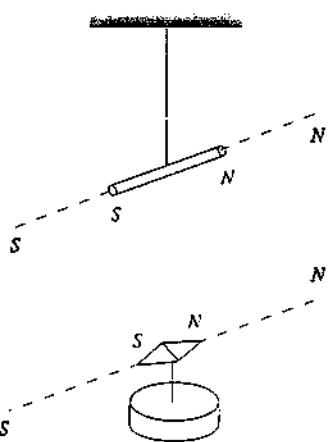


Figura 7.4

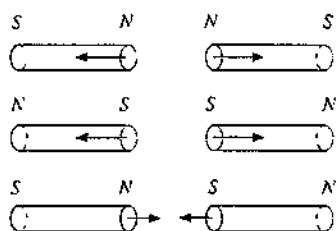


Figura 7.5

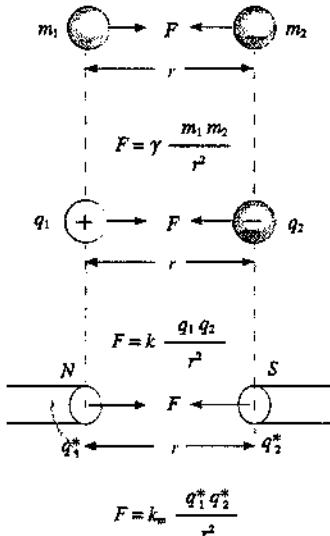


Figura 7.6

Esperimento della calamita spezzata

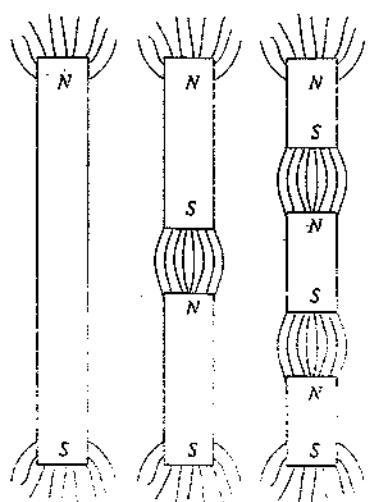


Figura 7.7

Accanto a tale esperienza sono significative quelle condotte con limatura di ferro posta in vicinanza di un magnete. I granelli di limatura si dispongono in modo ordinato lungo linee regolari, fatto che interpretiamo supponendo che ciascun granello venga magnetizzato dal campo magnetico del magnete e diventato un dipolo magnetico si orienti parallelamente al campo stesso.

L'insieme dei fatti sperimentali esposti suggerisce l'ipotesi che gli elementi costitutivi dei magneti siano i dipoli magnetici, cioè oggetti caratterizzati da massa magnetica nulla e da un momento di dipolo magnetico  $m$ . Siccome la non isolabilità degli ipotetici poli magnetici è confermata anche a livello elementare, siamo portati a supporre che *atomi e molecole*, come possiedono una struttura elettrica, abbiano anche un *momento di dipolo magnetico* (argomento che tratteremo estesamente nel capitolo 9).

Concludiamo pertanto che la (7.1) non riveste un ruolo fondamentale, come (1.1) e (1.2), essendo utilizzabile solo in situazioni particolari e riferendosi a grandezze come le masse magnetiche che non hanno una realtà fisica.

La prima relazione tra fenomeni magnetici ed elettrici fu scoperta da Oersted nel 1811 e successivamente l'argomento venne approfondito soprattutto da Ampère intorno al 1820. La sperimentazione fu resa possibile dall'utilizzazione della pila di Volta che permettendo la produzione di correnti elettriche costanti e intense aprì il campo dello studio dell'interazione sia tra un circuito percorso da corrente e un magnete che tra circuiti.

Oersted mostrò che un ago magnetico, posto in prossimità di un filo percorso da corrente, tende ad assumere una ben definita posizione di equilibrio. Alla luce di quanto visto finora il risultato si interpreta dicendo che il filo percorso da corrente produce un campo magnetico e che l'ago si orienta parallelamente al campo magnetico esistente nel punto in cui viene posto. In seguito Ampère dimostrò che anche due fili percorsi da corrente interagiscono e intuì che le *azioni magnetiche non sono altro che la manifestazione dell'interazione tra cariche elettriche in movimento*, ponendo le basi della teoria attuale del magnetismo.

L'interazione tra due circuiti percorsi da corrente è il risultato dell'interazione tra le cariche che costituiscono le due correnti, interazione avente caratteristiche diverse da quella tra cariche fisse. Per spiegare le azioni sui magneti bisogna pensare che in ogni atomo o in ogni molecola devono esistere delle *correnti microscopiche locali*, che prendono il nome di *correnti molecolari di Ampère* o *correnti amperiane*: l'interazione tra un circuito percorso da corrente e un magnete è allora il risultato delle interazioni tra gli elettroni liberi in moto nel conduttore e le microcorrenti presenti nel materiale magnetizzato. Infine l'interazione tra due magneti è il risultato delle interazioni tra le correnti microscopiche in essi presenti.

Si chiarisce così come non solo le masse magnetiche, ma anche la loro unione sotto forma di dipolo magnetico non abbiano realtà fisica: si può ricorrere ai dipoli soltanto per rappresentare il modo con cui si manifestano le interazioni magnetiche. In effetti Ampère provò, come vedremo in parte nel paragrafo 7.5, l'*equivalenza tra un circuito percorso da corrente e un dipolo magnetico*, sia rispetto alle forze subite ad opera di un campo magnetico, sia per quanto riguarda il campo magnetico prodotto (delle sorgenti del campo magnetico ci occuperemo nel capitolo 8). Avendo allora già sviluppato il formalismo relativo ai dipoli elettrici, è comodo utilizzarlo anche per le azioni magnetiche, senza dargli però un significato fisico profondo. Seguendo l'analogia, un magnete viene visto come un mezzo polarizzato e si spiega così perché sulle basi di un magnete cilindrico, dove non c'è compensazione tra dipoli consecutivi, si manifestino i fenomeni di attrazione della limatura di ferro: si spiega anche perché la somma delle ipotetiche masse magnetiche risulti sempre nulla, sia nei magneti dipolari che nei magneti con più poli (realizzabili con opportuni accorgimenti). Inoltre, proprio perché  $\sum q_i = 0$ , si può dire che il mo-

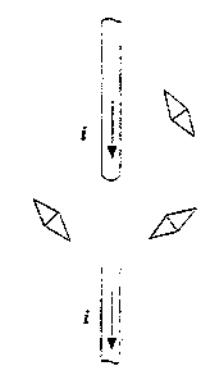


Figura 7.8



Figura 7.9

*mento di dipolo magnetico* dell'insieme di dipoli considerati è una *proprietà intrinseca del sistema*, come dimostrato nel paragrafo 2.8.

Vedremo infine che una proprietà fondamentale del *campo magnetico*, quella di essere *solenoidale*, si ricava facilmente sempre in analogia alle proprietà dei dipoli elettrici (paragrafo 7.2). Avvertiamo però che un circuito elettrico e un dipolo magnetico, pur essendo equivalenti sotto molti aspetti, *non sono lo stesso sistema fisico* per cui l'equivalenza non può essere completa. E infatti dimostreremo nel capitolo 8 che il *campo magnetico non è irrotazionale*, mentre tale dovrebbe essere se fosse dovuto a dipoli i cui costituenti obbediscono alla legge (7.1).

La possibilità che abbiano attualmente di misurare i momenti magnetici atomici e molecolari, cui abbiamo prima accennato, e la constatazione che essi sono riconducibili agli elettroni e al loro moto è una ulteriore conferma dell'intuizione di Ampère. L'ipotesi dell'esistenza fisica dei dipoli magnetici è così scartata anche a livello microscopico, ma con alcune eccezioni. Si è infatti scoperto che pure i costituenti dell'atomo, il protone, il neutrone e l'elettrone, possiedono un momento magnetico: ora, mentre ai primi due si attribuisce la *struttura a quark* (esempio 4.18) per cui il momento magnetico sarebbe riconducibile a questi, l'*elettrone* (come del resto i quark) entro i limiti delle nostre conoscenze attuali è *puntiforme per cui il momento magnetico appare proprio come una proprietà intrinseca*, peraltro *legata al momento angolare intrinseco (spin)*, non riconducibile a moti interni o a rotazioni su se stesso, impossibili per un oggetto puntiforme.

Ritornando allo sviluppo storico, negli anni successivi al 1820 Faraday dimostrò l'esistenza di una ulteriore connessione tra elettricità e magnetismo, provando che campi magnetici variabili nel tempo producono campi elettrici (non conservativi). Infine Maxwell, a cui è dovuta la sistemazione formale dell'elettromagnetismo classico, predisse il risultato simmetrico, cioè che campi elettrici variabili nel tempo danno origine a campi magnetici. Egli dimostrò pertanto che nel caso più generale un *campo elettrico e un campo magnetico non possono avere esistenza indipendente e vanno unificati nell'unico concetto di campo elettromagnetico*. Con lo sviluppo della teoria della relatività ristretta la nozione di campo elettromagnetico acquistò un ulteriore aspetto, nel senso che campo elettrico e campo magnetico hanno significato relativo: un'interazione magnetica in un sistema di riferimento inerziale può apparire elettrica in un altro sistema di riferimento inerziale e viceversa.

### Nota. Il monopolo magnetico

L'esistenza del *monopolo magnetico elementare* (e della sua antiparticella) non sarebbe in contrasto con le teorie quantistiche che descrivono il comportamento elementare della materia. Una possibile spiegazione della loro attuale assenza è la seguente: nel *big-bang* da cui ha avuto origine l'universo sono stati prodotti, insieme alle altre particelle, anche *monopoli e antimonopoli*: la maggior parte di questi, a seguito di processi di annichilazione particella-antiparticella è scomparsa in un tempo brevissimo liberando energia, ma alcuni però potrebbero essere sopravvissuti e sarebbero sparsi nell'universo, analogamente a quanto succede per i *neutrini* e per la cosiddetta *radiazione cosmica di fondo*. Altri *fossili* dei processi avvenuti negli istanti immediatamente successivi al *big-bang*. Poiché l'interazione di questi ipotetici monopoli con la materia dovrebbe dar luogo a un rilascio di energia notevole (su scala microscopica) sono stati costruiti esperimenti per segnalare l'eventuale passaggio di monopoli: uno di questi è installato nel laboratorio sotterraneo del Gran Sasso, dell'Istituto Nazionale di Fisica Nucleare. Caratteristica di tali laboratori è la schermatura, dovuta a chilometri di roccia, di buona parte della radiazione cosmica, con il che è facilitata la rivelazione di fenomeni rari dovuti a particelle extraterrestri penetranti: ad esempio nel laboratorio del Gran Sasso è stata di recente effettuata una misura diretta del flusso di neutrini prodotti nelle reazioni nucleari che avvengono all'interno del sole.



Figura 7.10

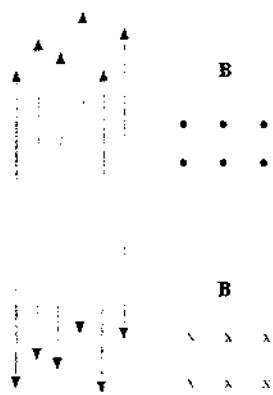


Figura 7.11

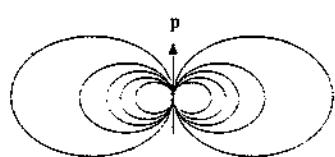


Figura 7.12

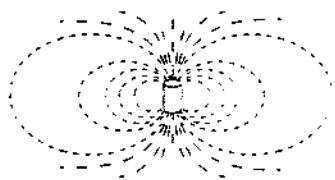


Figura 7.13

## 7.2 Linee di forza del campo magnetico. Legge di Gauss per il campo magnetico

La conclusione principale del paragrafo 7.1 è che le azioni magnetiche sono il risultato dell'interazione tra cariche in moto; adottando la rappresentazione tramite un campo, diciamo che l'azione magnetica è dovuta al fatto che un *sistema di cariche in moto genera un campo magnetico*, che indichiamo con il simbolo  $\mathbf{B}$ , e che l'altro sistema di cariche in moto risente di una forza in quanto immerso in  $\mathbf{B}$ .

Il legame tra  $\mathbf{B}$  e le correnti che lo generano sarà discusso nel capitolo 8 mentre delle forze subite da una o più cariche in campo magnetico parleremo a partire dal paragrafo 7.3; prima esaminiamo alcune proprietà generali del campo magnetico.

Innanzitutto occorre dire che la sperimentazione è consistente col fatto che il campo magnetico sia una grandezza vettoriale; è facile immaginare una verifica studiando il comportamento di un ago magnetico sottoposto all'azione di più magneti.

Determinare  $\mathbf{B}$  in una certa regione vuol dire quindi darne in ogni punto direzione, verso e modulo. In generale questi variano da punto a punto (campo non uniforme) e, in un dato punto, possono variare nel tempo (campo non costante); inoltre il valore di  $\mathbf{B}$  può dipendere dal mezzo che riempie lo spazio intorno alle sorgenti. Come per il campo elettrico, ci limitiamo all'inizio a considerare *fenomeni magnetici nel vuoto e stazionari*, indicando con quest'ultimo termine che il *campo magnetico è costante nel tempo* (o al più lentamente variabile).

Rinviamo ai prossimi paragrafi, dopo aver visto le formule esplicite delle forze magnetiche, la definizione operativa del campo magnetico  $\mathbf{B}$ . Possiamo anticipare adesso che la rappresentazione grafica dell'andamento di  $\mathbf{B}$  si fa tramite le *linee di forza*, cioè quelle linee che in ogni punto sono tangenti ed equidistanti al vettore  $\mathbf{B}$  esistente in quel punto. La situazione è analoga a quella descritta nel paragrafo 1.6 in relazione al campo elettostatico  $\mathbf{E}$  e valgono anche per  $\mathbf{B}$  le proprietà *a*, *b*, *c* là enunciate e inoltre pure la proprietà che un campo magnetico uniforme è rappresentato da linee parallele ed equidistanti (figura 7.10).

Una simbologia specifica, che qui adottiamo per il campo magnetico pur essendo applicabile in generale, riguarda il caso in cui le linee di forza sono ortogonali ad un piano (spesso coincidente col foglio che stiamo leggendo): con un *punto* si indica che il campo  $\mathbf{B}$  è *uscito dal foglio verso il lettore*, con una *croce* che è *entrante*, come mostrato nella figura 7.11.

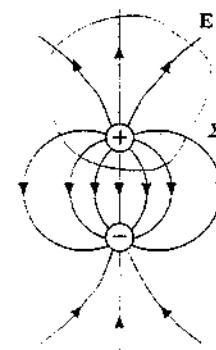
Una visualizzazione immediata della configurazione delle linee di forza di un campo magnetico si ha utilizzando limatura di ferro, come già accennato nel paragrafo 7.1: alla disposizione regolare dei granelli di limatura lungo le linee di  $\mathbf{B}$  si dà il nome di *spettro magnetico*. Ad esempio con questo sistema si osserva che le linee del campo magnetico in vicinanza di un magnete rettilineo hanno la stessa configurazione geometrica delle linee di forza del campo elettrico generato da un dipolo elettrico. Alternativamente, ma il principio è lo stesso, si può studiare l'andamento di  $\mathbf{B}$  con un piccolo ago magnetico: questo si orienta parallelamente a  $\mathbf{B}$  indicandone così la direzione, mentre il verso è quello dal polo sud al polo nord dell'ago; se l'ago è abbastanza piccolo si può supporre che  $\mathbf{B}$  non vari lungo l'ago e quindi la misura sia effettivamente puntuale e non mediata.

La proprietà più caratteristica delle linee di forza del campo elettostatico, di partire e terminare sulle cariche elettriche sorgenti del campo (proprietà *d* del paragrafo 1.6) non può invece essere estesa al campo magnetico: da questo punto di vista le linee dei due campi sono intrinsecamente diverse. Una prima giustificazione viene da una proprietà generale del campo magnetico che ora dimostriamo.

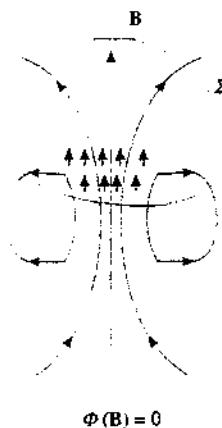
Consideriamo una superficie chiusa  $\Sigma$  che racchiude al suo interno un magnete o anche una parte di questo. L'equivalenza formale tra le correnti microscopiche e i dipoli magnetici, che abbiamo enunciato nel paragrafo 7.1, comporta che all'interno

no della superficie  $\Sigma$  sia contenuto sempre un *numero intero* di dipoli: una qualsiasi superficie *non può* cioè mai tagliare uno di questi ipotetici dipoli elementari. D'altra parte il campo magnetico dà luogo a una forza tra i componenti dei dipoli che ha la forma (7.1), condizione necessaria e sufficiente perché si possa formulare la legge di Gauss, studiata nel capitolo 3 per il campo  $E$ . Siccome, data la struttura dipolare, la somma delle masse magnetiche è sempre nulla, ne deriva

$$\oint \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = 0 \quad : \quad (7.2)$$



$$\Phi(E) = \frac{q}{\epsilon_0}$$



$$\Phi(B) = 0$$

Figura 7.14

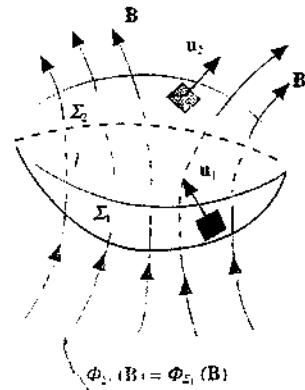
$$\int_{\Sigma_1} \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma_1 = \int_{\Sigma_2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma_2 = \dots = \int_{\Sigma_i} \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma_i \quad . \quad (7.4)$$

Proprietà analoghe sono state riscontrate per il vettore induzione dielettrica  $D$ , con la limitazione che  $D$  è solenoidale solo in assenza di cariche libere (paragrafo 5.5), mentre  $B$  è *sempre solenoidale*; ritorneremo su questo argomento nel capitolo 9.

Conseguenza di (7.2) è che presa una qualsiasi superficie chiusa per ogni linea di forza entrante deve esserci una linea di forza uscente: se così non fosse il flusso attraverso la superficie chiusa sarebbe diverso da zero. Questa considerazione, insieme alla non esistenza di masse magnetiche isolate e di dipoli magnetici reali, porta alla conclusione che le *linee di forza del campo magnetico B sono linee chiuse, senza né inizio né fine*: esse possono chiudersi al finito o al limite, in casi particolari, all'infinito. Vedremo vari esempi di queste configurazioni nel capitolo 8, insieme ad altre considerazioni sulla struttura delle linee di forza di  $B$ , e possiamo anzi dire che la forma *sempre chiusa* delle linee di forza del campo magnetico, comunque questo sia stato prodotto, è una conferma della generalità di (7.2).

#### Nota. Il campo magnetico terrestre (1)

Utilizzando un ago magnetico si possono determinare direzione e verso del campo magnetico terrestre e, se l'ago è opportunamente tarato, anche il modulo facendo oscillare l'ago attorno alla posizione di equilibrio, come descritto nel paragrafo 7.5 (questo in



$$\Phi_{\Sigma_1}(B) = \Phi_{\Sigma_2}(B)$$

Figura 7.15

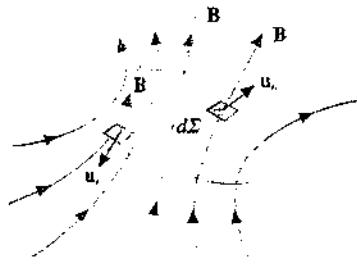


Figura 7.16

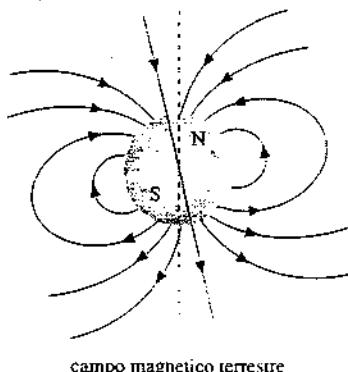


Figura 7.17

linea di principio: esistono metodi più semplici e precisi, come quello che descriveremo nell'esempio 10.4).

Il campo magnetico corrisponde approssimativamente al campo di un dipolo (mostrato nella figura 7.12) che forma con l'asse terrestre un angolo di circa  $15^\circ$ ; l'asse del dipolo incontra la superficie terrestre nel punto con latitudine  $75^\circ$  e longitudine  $291^\circ$ , a circa 2000 km dal polo Nord e nel punto simmetrico rispetto al centro della terra vicino al polo Sud; l'orientazione del dipolo è da nord a sud. In un dato punto il campo ha una componente tangente al meridiano e una radiale, in accordo con le figure 2.40 e 2.44 del paragrafo 2.7. Il valore delle due componenti, in vicinanza della superficie terrestre, è dell'ordine di qualche decimo di gauss (si veda la nota sulle unità di misura nel paragrafo 7.6).

Una bussola magnetica è costituita da un ago magnetico che si orienta concordemente alla componente orizzontale del campo magnetico terrestre: la prima applicazione risale al secolo 12°.

### 7.3 Forza magnetica su una carica in moto

Consideriamo ora una particella, di massa  $m$  e carica  $q$ , posta in un campo magnetico  $\mathbf{B}$ . Se la particella è ferma in un sistema di riferimento solidale alle sorgenti del campo magnetico si trova che su di essa non agisce nessuna forza, in accordo col fatto che l'interazione magnetica si manifesta solamente tra cariche in movimento. Se invece la particella è in moto con velocità  $\mathbf{v}$  rispetto al sistema di riferimento suddetto, si verifica che su di essa agisce la forza, detta *di Lorentz*.

Forza di Lorentz

$$\mathbf{F} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (7.5)$$

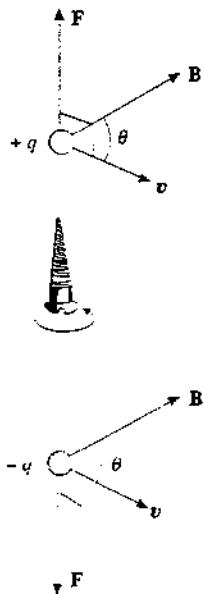


Figura 7.18

Il modulo della forza di Lorentz ha il valore

$$F = q v B \sin\theta \quad (7.6)$$

essendo  $\theta$  l'angolo tra  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{B}$ : la forza è dunque nulla se la velocità è parallela al campo magnetico ( $\theta = 0, \theta = \pi$ ) ed è massima, pari a  $qvB$ , quando  $\mathbf{v}$  è ortogonale a  $\mathbf{B}$  ( $\theta = \pi/2$ ). La direzione della forza è ortogonale al piano individuato dai vettori  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{B}$  e il verso è determinato dalla nota regola del prodotto vettoriale se la carica è positiva, mentre è opposto se la carica è negativa; ricordiamo che il verso del risultato di un prodotto vettoriale è quello di avanzamento di una vite destrorsa che nella sua rotazione porta  $\mathbf{v}$  su  $\mathbf{B}$  (*regola della vite*).

In particolare la forza è sempre ortogonale alla velocità, cioè alla traiettoria e pertanto in base alla definizione di lavoro e di energia cinetica si ha

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} m v_Q^2 - \frac{1}{2} m v_P^2 = W = \int_P^Q \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0 .$$

Per un qualsiasi spostamento dal punto  $P$  al punto  $Q$  nella regione in cui esiste il campo magnetico  $\mathbf{B}$  l'energia cinetica della particella resta costante in quanto la forza di Lorentz non compie lavoro sulla particella: essa non comunica alla particella un'accelerazione tangenziale, ma soltanto un'accelerazione centripeta. In altre parole, quando una particella carica si muove in campo magnetico la sua velocità cambia di direzione, ma non in modulo.

È bene mettere subito in evidenza le *differenze* tra la *forza magnetica* (7.5) e la *forza* (1.18) che una particella carica subisce in un *campo elettrostatico*. In tale campo, a meno che i punti  $P$  e  $Q$  coincidano o si trovino su una superficie equipotenziale, viene compiuto il lavoro (2.8)

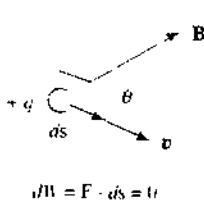


Figura 7.19

$$W = \int_P^Q \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = q \int_P^Q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = q(V_P - V_Q)$$

e l'energia cinetica della particella varia; in generale quindi la velocità può cambiare sia in modulo che in direzione.

Notiamo inoltre che la *forza elettrostatica* è parallela al campo  $\mathbf{E}$ , mentre la *forza magnetica* è ortogonale a  $\mathbf{B}$ . Non sarebbe quindi molto appropriato in questo caso parlare di linee di forza di  $\mathbf{B}$  nel senso inteso nel paragrafo 7.2; siccome anche la forza magnetica su una corrente, che vedremo nel paragrafo 7.4, è ortogonale a  $\mathbf{B}$ , come è intuitivo essendo la corrente un flusso di cariche, è preferibile nei fenomeni magnetici utilizzare la terminologia *linee di campo*, come faremo nel seguito.

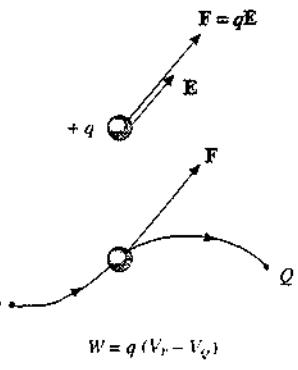


Figura 7.20

### Moto in un campo magnetico uniforme, $\theta = \pi/2$

Supponiamo che il campo magnetico  $\mathbf{B}$  sia uniforme in una certa regione e che la velocità iniziale della particella sia ortogonale a  $\mathbf{B}$ : la forza (7.5), anch'essa ortogonale a  $\mathbf{B}$ , produce una variazione della direzione della velocità ancora ortogonale a  $\mathbf{B}$  e quindi la velocità in qualsiasi istante successivo sta nel piano ortogonale a  $\mathbf{B}$  individuato dalla velocità iniziale. Il moto della particella si svolge dunque in tale piano e la legge del moto è, ponendo in (7.6)  $\sin\theta = 1$ .

$$\mathbf{F} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B} = m \mathbf{a}_n = m \frac{\mathbf{v}^2}{r} ,$$

da cui si ricava il *raggio di curvatura* della traiettoria:

$$r = \frac{mv}{qB} = \frac{p}{qB} , \quad (7.7) \quad \text{Raggio di curvatura}$$

dove  $p$  è il modulo della quantità di moto. Il raggio di curvatura è costante in quanto  $B$  è costante per definizione.  $q$  e  $m$  sono costanti, la velocità non cambia in modulo essendo la forza esclusivamente centripeta. La (7.7) nella forma  $r = p/qB$  è corretta per qualsiasi valore della velocità, con l'avvertenza che nei casi relativistici  $p$  è data da  $m\gamma v = mv/\sqrt{1-(v/c)^2}$  (vedi capitolo 3 del primo volume). Nel seguito ci limiteremo al caso non relativistico, salvo riprendere l'argomento nel paragrafo 7.8.

Essendo il raggio comunque costante, la *traiettoria è un arco di circonferenza* di raggio  $r$  dato da (7.7) o una circonferenza completa se la particella resta sempre nella regione in cui è definito  $\mathbf{B}$ . Il moto lungo la traiettoria è circolare uniforme con velocità eguale a quella iniziale e velocità angolare

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{qB}{m}$$

In termini vettoriali, ricordando l'espressione dell'accelerazione centripeta (formula (1.32) del volume primo) e la proprietà anticommutativa del prodotto vettoriale, si ha

$$q \mathbf{v} \times \mathbf{B} = m \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = -m \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}$$

ovvero

$$\boldsymbol{\omega} = -\frac{q}{m} \mathbf{B} \quad (7.8)$$

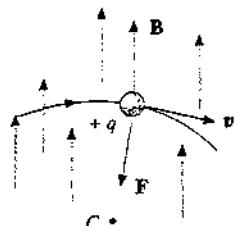


Figura 7.21

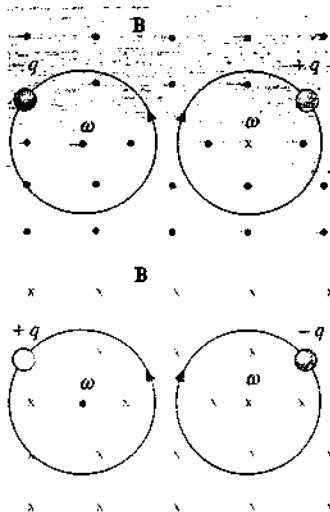


Figura 7.22

Questa relazione, *indipendente* dal valore dell'angolo  $\theta$  (per cui è valida anche se  $\theta \neq \pi/2$ ), mostra che la *velocità angolare* è sempre *parallela* a  $\mathbf{B}$ : se la *carica*  $q$  è *negativa*,  $\omega$  ha lo stesso verso di  $\mathbf{B}$  e quindi, dalla punta di  $\mathbf{B}$ , il moto appare *antiorario*, se la carica  $q$  è *positiva*,  $\omega$  è *opposta* a  $\mathbf{B}$  e il moto appare *orario*. Inoltre (7.8) non dipende dal valore della velocità: infatti  $r$  varia proporzionalmente a  $v$  secondo (7.7) e il loro rapporto resta costante. Di conseguenza, il tempo impiegato a percorrere una circonferenza ovvero il *periodo* del moto circolare uniforme (e la frequenza di rivoluzione) non dipendono dal raggio dell'orbita e dalla velocità con cui questa viene descritta, valendo sempre

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{qB}, \quad v = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{qB}{2\pi m}. \quad (7.9)$$

La relazione (7.7), riscritta come

$$B = \frac{mv}{qr},$$

si presta a una *definizione operativa* di  $\mathbf{B}$  basata sulla misura del raggio di curvatura della traiettoria percorsa da particelle con velocità e rapporto  $m/q$  noti. Il campo magnetico viene dato in funzione di grandezze meccaniche e della carica elettrica, senza dover definire prima grandezze quali la massa magnetica o il momento di doppio magnetico, come sarebbe necessario se ci si basasse sulla forza (7.1) tra poli di magneti o sull'azione orientatrice subita da un ago magnetico ad opera di un campo magnetico. Una versione più pratica della definizione operativa di  $\mathbf{B}$  attraverso la forza di Lorentz verrà esposta nell'esempio 7.1.

### Moto in un campo magnetico uniforme, $\theta$ generico

Se l'angolo  $\theta$  che la velocità della particella forma con il campo magnetico è qualsiasi, scomponiamo la velocità iniziale nelle due componenti  $v_n = v \sin \theta$  ortogonale a  $\mathbf{B}$  e  $v_p = v \cos \theta$  parallela a  $\mathbf{B}$ . La forza magnetica che agisce sulla particella è

$$\mathbf{F} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B} = q(v_n + v_p) \times \mathbf{B} = q v_n \times \mathbf{B}$$

in quanto  $v_p \times \mathbf{B} = 0$  essendo i fattori paralleli. Abbiamo pertanto in un piano ortogonale a  $\mathbf{B}$  un moto circolare uniforme con velocità  $v_n$ , eguale a quello descritto nel caso precedente; il raggio di curvatura è

$$r = \frac{mv_n}{qB} = \frac{mv \sin \theta}{qB} \quad (7.10)$$

e la velocità angolare è sempre data da (7.8), essendo indipendente da  $\theta$ . Siccome lungo  $\mathbf{B}$  non c'è forza,  $v_p$  resta costante e il moto proiettato nella direzione di  $\mathbf{B}$  è rettilineo uniforme. La composizione del moto circolare uniforme in un piano ortogonale a  $\mathbf{B}$  e del moto rettilineo uniforme lungo  $\mathbf{B}$  dà luogo a un *moto elicoidale uniforme* avente come asse la direzione di  $\mathbf{B}$ . Nel tempo (7.9), indipendente da  $v$  e pari al periodo del moto circolare uniforme, la particella si sposta lungo  $\mathbf{B}$  della quantità

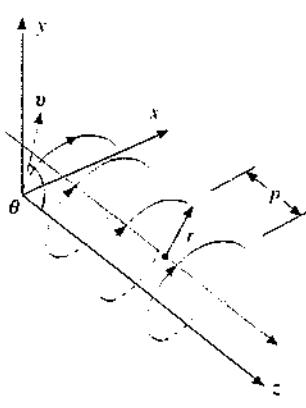


Figura 7.24

$$p = \mu T = \frac{2\pi m v \cos \theta}{B}$$

(7.11) Passo dell'elica

detta *passo dell'elica*. Fissato  $B$ , il verso di percorrenza dell'elica corrisponde al verso di percorrenza del moto circolare e quindi è dato dalla stessa regola trovata nel caso precedente.

#### Nota. Bottiglia magnetica e fasce di Van Allen

Quando il moto delle particelle avviene in un campo magnetico non uniforme si presentano situazioni complesse. Come esempio consideriamo un campo magnetico a simmetria assiale, più intenso alle estremità e più debole al centro, secondo lo schema della figura 7.25, in cui l'infittirsi e il diradarsi delle linee di campo indicano il valore del modulo di  $B$ . L'asse  $z$  è l'asse di simmetria e il campo magnetico ha la componente longitudinale  $B_z$  sempre dello stesso segno e la componente radiale  $B_r$ , che cambia segno passando da sinistra a destra; il disegno è lo stesso in ogni piano passante per l'asse  $z$ . Questa configurazione è nota come *bottiglia magnetica*.

Supponiamo di immettere nella zona a sinistra in alto una particella con carica positiva e velocità entrante nel foglio: essa è sottoposta alla forza  $q \mathbf{v} \times (\mathbf{B}_z + \mathbf{B}_r)$ , che ha inizialmente una componente radiale dovuta a  $\mathbf{B}_r$  e una componente lungo l'asse  $z$ , dovuta a  $\mathbf{B}_z$ . La particella comincia così ad avvitarsi intorno all'asse  $z$  portandosi verso una zona in cui  $B$  è minore e sono quindi maggiori il raggio di curvatura (7.10) e il passo dell'elica (7.11). In un istante generico abbiamo perciò un moto elicoidale con raggio e passo variabili:  $\mathbf{B}_r$  agisce solo sulla componente  $v_r$  della velocità,  $\mathbf{B}_z$  agisce sia su  $v_r$  che su  $v_p$ . Passato il centro  $B$ , cambia verso e cambia verso anche la forza lungo l'asse  $z$  che ora rallenta il moto della particella lungo l'asse  $z$ ; questa intanto si porta verso zone in cui  $B$  è maggiore per cui diminuiscono sia il raggio di curvatura che il passo dell'elica. È possibile che ad un certo istante  $v_r = v_p$  si annulli e poi cambi di segno: la particella torna indietro, percorrendo una traiettoria elicoidale diversa, però con lo stesso verso di rotazione. Questo effetto di *specchio magnetico* si ripete nel moto da destra a sinistra per cui la *particella resta intrappolata*.

Il sistema costituisce un *contenitore senza pareti* adatto ad esempio a mantenere confinato un *plasma di elettroni e ioni positivi* a temperature molto elevate ( $T > 10^7$  K), come sarebbe richiesto nelle applicazioni tipo *fusione termonucleare controllata*. Però nelle condizioni richieste per la fusione, e cioè densità di particelle caricate molto elevata, il *sistema non è stabile*: infatti il moto di queste cariche produce un campo magnetico che altera notevolmente la configurazione di campo magnetico desiderata: a causa di ciò molte particelle non sono più confinate e non si riesce ad ottenere la densità necessaria per la realizzazione dei processi di fusione. In altre parole la bottiglia magnetica funziona solo se la densità del plasma è tale da non disturbare la configurazione di  $B$  nella bottiglia. Le *fasce di Van Allen* sono un esempio di *effetto bottiglia magnetica dovuto al campo magnetico terrestre*, le cui linee hanno proprio un andamento come quello descritto, con gli estremi al polo Nord e al polo Sud. Particelle cariche, essenzialmente protoni ed elettroni, provenienti direttamente dall'esterno della terra o prodotte da interazioni di particelle cosmiche con l'atmosfera terrestre, entrano nella bottiglia magnetica e compiono il moto descritto restando intrappolate. Il confinamento non è perfetto e si raggiunge un equilibrio dinamico tra particelle entranti e particelle che sfuggono. Le zone di confinamento sono due: una zona interna, popolata da protoni ed elettroni derivanti dal decadimento di neutroni prodotti in interazioni particelle cosmiche-atmosfera, che si estende da 800 km a 4000 km dalla superficie terrestre, e una zona esterna, composta da particelle cosmiche provenienti dal sole, soprattutto elettroni, che si estende fino a 60.000 km dalla terra.

Le fasce di Van Allen furono scoperte nel 1958 esaminando i dati trasmessi dalle apparecchiature portate in orbita dal satellite americano Explorer 1 e successivamente studiate tramite altri satelliti americani e sovietici. Il nome deriva dal ricercatore responsabile della progettazione del primo esperimento su satellite ideato per misurare la distribuzione di particelle cariche nell'alta atmosfera terrestre.

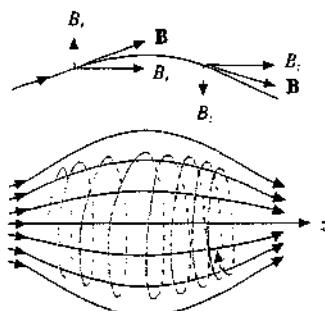


Figura 7.25

#### Fasce di Van Allen

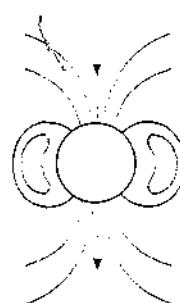


Figura 7.26

La densità di particelle caricate nelle fasce di Van Allen è dell'ordine di  $10^4 \div 10^5$  particelle/cm<sup>3</sup> (nell'aria a pressione atmosferica ci sono  $2.5 \cdot 10^{19}$  molecole/cm<sup>3</sup>): essa corrisponde alla densità di molecole che restano in un contenitore quando in esso si raggiunge il miglior vuoto attualmente realizzabile ( $\sim 10^{-10}$  Pa).

## 7.4 Forza magnetica su un conduttore percorso da corrente

La corrente elettrica in un conduttore è dovuta al moto degli elettroni sotto l'azione del campo elettrico applicato tramite un generatore; se  $n$  è il numero di elettroni liberi per unità di volume, ciascuno con carica  $-e$ , e  $v_d$  la loro velocità di deriva, la densità di corrente si scrive  $j = -n e v_d$  ed è parallela e concorde al campo elettrico applicato, come abbiamo discusso nel paragrafo 6.2.

Quando il conduttore percorso da corrente è immerso in un campo magnetico a ciascun elettrone è applicata la forza di Lorentz (7.5):

$$\mathbf{F}_L = -e \mathbf{v}_d \times \mathbf{B} .$$

Attraverso gli urti che gli elettroni in moto hanno con gli ioni del reticolo cristallino tale forza è *trasmessa* alla massa del filo conduttore, che ora e in seguito supponiamo indeformabile.

In un tratto di conduttore lungo  $ds$  e di sezione  $\Sigma$  sono contenuti  $n \Sigma ds$  elettroni e la forza risultante è

$$d\mathbf{F} = n \Sigma ds \mathbf{F}_L = -(\Sigma ds) n e \mathbf{v}_d \times \mathbf{B} = \Sigma ds \mathbf{j} \times \mathbf{B} .$$

Da questa espressione, essendo  $\Sigma ds$  eguale al volume infinitesimo  $d\tau$ , si vede che la *forza agente per unità di volume* sul conduttore è

$$\mathbf{F}_r = \mathbf{j} \times \mathbf{B} . \quad (7.12)$$

D'altra parte, riferendoci a un conduttore filiforme e ricordando che  $\Sigma j$  è la corrente  $i$  che percorre il filo, orientiamo  $ds$  come  $j$  e otteniamo

$$d\mathbf{F} = i ds \times \mathbf{B} . \quad (7.13)$$

Questa relazione si chiama *seconda legge elementare di Laplace* ed esprime il fatto che la forza magnetica su un tratto infinitesimo di filo percorso da corrente è ortogonale al filo e al campo magnetico ed è orientata rispetto a  $ds$  e  $\mathbf{B}$  secondo la regola della vite già ricordata nel paragrafo 7.3: il modulo è dato da  $dF = i B ds \sin\theta$ , essendo  $\theta$  l'angolo tra  $ds$  e  $\mathbf{B}$ . Osserviamo che le caratteristiche della forza non dipendono dal segno dei portatori di carica e che essa è in ogni caso proporzionale all'intensità di corrente.

Per ottenere la forza su un tratto di filo indeformabile di lunghezza finita, percorso dalla corrente (stazionaria)  $i$ , si integra la (7.13):

$$\mathbf{F} = i \int_P^Q ds \times \mathbf{B} . \quad (7.14)$$

I punti  $P$  e  $Q$  sono gli estremi del filo; l'integrale è esteso lungo il filo, nei cui punti  $\mathbf{B}$  può variare sia in modulo che in direzione che in verso; però si assume che  $\mathbf{B}$  sia lo stesso in tutti i punti di una qualsiasi sezione, appunto perché il *conduttore è filiforme*. La corrente si porta fuori dal segno di integrale in quanto stazionaria (o semistazionaria).

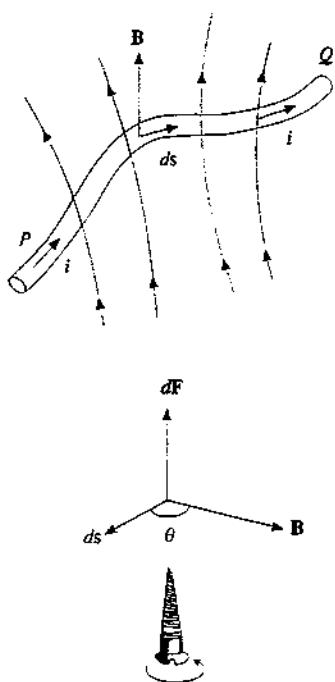


Figura 7.27

Seconda legge elementare  
di Laplace

Dato un campo magnetico qualsiasi, la legge (7.14) permette di calcolare la forza magnetica agente su un conduttore filiforme di forma generica, cioè curvilineo, percorso da corrente; in generale la forza è diversa da zero anche se il circuito è chiuso ( $P \equiv Q$ ). La struttura di (7.14) mostra che la forza risultante è dovuta alla somma di infiniti contributi infinitesimi; però a differenza di altri casi matematicamente simili, in cui il singolo contributo infinitesimo ha un significato fisico anche se preso singolarmente e isolato dagli altri (si pensi alla forza gravitazionale su una massa estesa o alla forza elettrica su una distribuzione di carica, che sono il risultato di interazioni elementari), nel caso di (7.14) il *singolo contributo* (7.13) non ha significato fisico: infatti non è possibile realizzare un tratto infinitesimo di conduttore percorso da corrente e misurare la forza su di esso, ma si ha sempre a che fare con tratti finiti di circuiti; in altre parole, non ha senso l'elemento infinitesimo aperto di corrente in un conduttore, se non come strumento matematico di calcolo. A livello elementare ha invece senso una corrente chiusa, come quella che percorre una spira infinitesima di Ampère (paragrafo 7.5) o quella dovuta ad un elettrone in moto intorno ad un nucleo (capitolo 9).

Un'altra osservazione importante è la seguente: la (7.14) è una legge macroscopica molto ben verificata sperimentalmente, che può essere assunta come *legge di base*; da essa si può ricavare (7.5) eseguendo a ritroso il ragionamento, una volta ammesso che la corrente sia dovuta a un flusso di cariche elementari. Così facendo si constata che la *velocità* da considerare nella (7.5) applicata agli elettroni di conduzione è quella, come abbiamo implicitamente ammesso, *di deriva*  $v_d$  e *non* la *velocità del moto termico*, molto maggiore di  $v_d$ . Questo fatto conferma l'idea che le velocità termiche siano distribuite in modo casuale per cui la risultante delle corrispondenti forze di Lorentz è nulla in ogni istante: si spiega così perché su un conduttore immerso in un campo magnetico, ma non percorso da corrente, non agisca nessuna forza magnetica, pur essendo gli elettroni in movimento. Viene in definitiva sottolineata l'importanza del *moto collettivo* con velocità  $v_d$  che dà luogo alla corrente e alla forza magnetica.

Studiamo ora alcuni casi particolari interessanti. Supponiamo che il campo magnetico sia uniforme e che il conduttore sia rettilineo, di lunghezza  $l$ . Allora la (7.14) si semplifica in

$$\mathbf{F} = i \left( \int_P^Q d\mathbf{s} \right) \times \mathbf{B}$$

in quanto sia il modulo del campo che l'angolo  $\theta$  formato con  $d\mathbf{s}$  sono costanti durante l'integrazione, e si ha

$$\mathbf{F} = i \mathbf{l} \times \mathbf{B} \quad , \quad \text{in modulo} \quad F = i l B \sin \theta \quad . \quad (7.15)$$

Se il conduttore è curvilineo, ma sta in un piano, è facile verificare che

$$\mathbf{F} = i \int_P^Q d\mathbf{s} \times \mathbf{B} = i \mathbf{PQ} \times \mathbf{B} \quad . \quad (7.16)$$

Basta scrivere

$$d\mathbf{s} = dx \mathbf{u}_x + dy \mathbf{u}_y \quad , \quad \mathbf{PQ} = \Delta x \mathbf{u}_x + \Delta y \mathbf{u}_y \quad , \quad \mathbf{B} = B_x \mathbf{u}_x + B_y \mathbf{u}_y + B_z \mathbf{u}_z \quad .$$

dove il piano  $x, y$  è quello in cui giace il filo,  $\Delta x = x_Q - x_P$ ,  $\Delta y = y_Q - y_P$ ,  $B_x, B_y, B_z$ , sono costanti; sviluppando i prodotti vettoriali e integrando a sinistra si constata subito l'eguaglianza. Pertanto la forza su un filo che giace in un piano ed è immer-

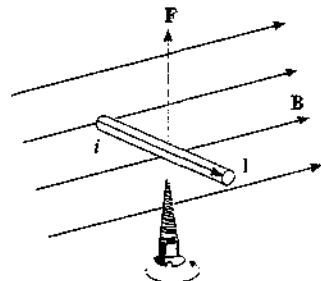
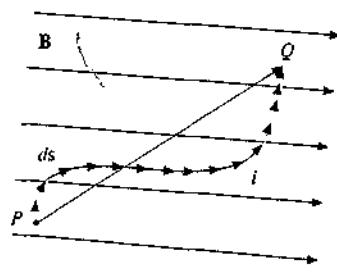


Figura 7.28



$F = i \mathbf{PQ} \times \mathbf{B}$

Figura 7.29

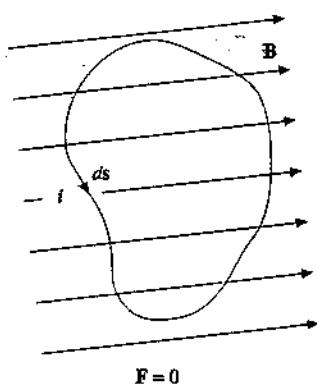


Figura 7.30

so in un campo magnetico uniforme non dipende dalla forma del filo, ma solo dai punti iniziale e finale; (7.15) si riconduce così a (7.16).

Se infine il filo che giace in un piano forma un circuito chiuso, la forza risulta evidentemente nulla, in quanto  $\mathbf{PQ} = 0$  (si veda l'esempio 7.2). Sia questo risultato che (7.16) sono validi in realtà anche se il filo non sta in un piano, come dimostreremo nel paragrafo 7.6 con un metodo differente.

Pur non essendo possibile realizzare un conduttore percorso da corrente isolato, in quanto la corrente fluisce sempre in un circuito chiuso, esistono vari modi per costruire un dispositivo in cui una parte di circuito sia mobile (vedi esempio 7.4) così da poter mettere in evidenza l'effetto della forza (7.14), oppure in cui le forze su vari tratti di circuito si compensino e resti soltanto l'effetto su un unico tratto, come vediamo nell'esempio 7.1.

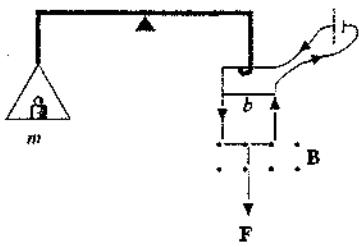


Figura 7.31

### Esempio 7.1

Al giogo di una bilancia è sospesa una spira rigida larga  $b = 5 \text{ cm}$ . La parte inferiore è immersa in un campo magnetico uniforme  $\mathbf{B}$  ortogonale al piano della spira. Se nella spira circola una corrente di intensità  $i = 1 \text{ A}$  con verso opportuno, si osserva che per riequilibrare la bilancia occorre mettere una massa  $m = 0.5 \text{ g}$  sul piatto. Calcolare il valore del modulo di  $\mathbf{B}$ .

#### Soluzione

Il lato orizzontale della spira immerso nel campo magnetico risente della forza (7.15)  $\mathbf{F} = i \mathbf{b} \times \mathbf{B}$ , che in modulo vale  $ibB$ , in quanto  $\mathbf{b}$  e  $\mathbf{B}$  sono ortogonali. Negli altri tratti di spira sottoposti al campo magnetico la corrente ha versi opposti e le forze date da (7.15) sono eguali e contrarie; esse hanno anche la stessa retta di azione, per cui non producono nessun effetto. Con i versi indicati nella figura 7.31  $\mathbf{F}$  è diretta verso il basso e viene equilibrata dalla forza peso  $mg$ . In conclusione

$$mg = ibB \Rightarrow B = \frac{mg}{ib} = 9.8 \cdot 10^{-2} \text{ T}$$

(per l'unità di misura del campo magnetico, il tesla (T), si veda il paragrafo 7.6).

Con questo metodo, o un analogo in cui la bilancia è sostituita da un *dinamometro*, è pertanto possibile determinare il valore di un campo magnetico misurando la forza agente su un tratto di conduttore percorso da corrente. Come avevamo detto, basandosi sulla legge di Laplace e quindi in definitiva sulla forza di Lorentz, si ha una *definizione operativa semplice e pratica del campo magnetico*. Oltre al modulo si possono trovare direzione e verso di  $\mathbf{B}$  orientando lo strumento (nella versione dinamometro) e cercando la posizione in cui la forza è massima.

### Esempio 7.2

In un circuito chiuso a forma di semicirconferenza di raggio  $R$  fluisce una corrente di intensità  $i$ . Il circuito è contenuto nel piano  $x, y$  con il tratto rettilineo  $PQ$  parallelo all'asse  $x$  ed è immerso in un campo magnetico  $\mathbf{B}$  uniforme parallelo all'asse  $y$ . Calcolare la forza magnetica sul tratto curvo e sul tratto rettilineo.

#### Soluzione

La forza sul tratto rettilineo  $PQ = 2Ru$ , immerso nel campo magnetico  $\mathbf{B} = Bu$ , è, secondo (7.15).

$$\mathbf{F} = i \mathbf{PQ} \times \mathbf{B} = 2iR B \mathbf{u}_x \times \mathbf{u}_y = 2iR B \mathbf{u}_z,$$

parallela e concorde all'asse  $z$ , uscente dal foglio.

Nel tratto curvilineo, seguendo il verso della corrente,  $ds = -dx \mathbf{u}_x + dy \mathbf{u}_y$ , e dalla (7.13)

$$d\mathbf{F} = i ds \times \mathbf{B} = -i B dx \mathbf{u}_x \times \mathbf{u}_y + i B dy \mathbf{u}_y \times \mathbf{u}_y = -i B dx \mathbf{u}_z ;$$

integrandolo lungo la semicirconferenza

$$\mathbf{F} = -i B \mathbf{u}_z \int_{-R}^R dx = -2i R B \mathbf{u}_z ,$$

eguale ed opposta a quella sul diametro.

Verifichiamo con questo esempio che in un campo uniforme la forza non dipende dalla forma del conduttore, purché stia in un piano, e che la forza su un circuito piano chiuso è nulla.

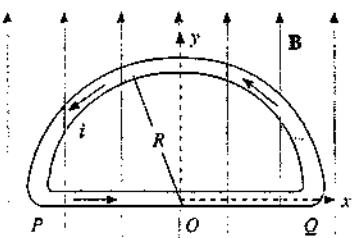


Figura 7.32

## 7.5 Momenti meccanici su circuiti piani.

### Principio di equivalenza di Ampère

Da un punto di vista meccanico la forza magnetica (7.14) deve considerarsi come la risultante di un sistema di forze applicate in punti diversi; essa provoca uno spostamento in accordo con il teorema del moto del centro di massa. In generale, oltre ad avere la risultante (7.14), il sistema di forze magnetiche presenta un momento risultante diverso da zero, per cui è possibile avere anche delle rotazioni.

In questo paragrafo ci occupiamo per semplicità soltanto di *circuiti piani rigidi* percorsi da corrente e *immersi in campo magnetico uniforme*; in tal caso la forza risultante è nulla e il circuito *non si sposta* (e non si deforma), però il momento risultante può essere diverso da zero e mettere in rotazione il circuito.

Consideriamo una spira rettangolare, di lati  $a$  e  $b$ , percorsa dalla corrente  $i$  e orientiamo il versore  $\mathbf{u}_n$  della normale al piano della spira in accordo con la convenzione descritta nel paragrafo 2.6, figura 2.33, rispetto al verso di percorrenza della corrente (è sempre la regola della vite). La spira è immersa in un campo magnetico  $\mathbf{B}$  uniforme, che forma l'angolo  $\theta$  con  $\mathbf{u}_n$ . Come si deduce dalla figura 7.33, le forze magnetiche  $\mathbf{F}_3$  e  $\mathbf{F}_4$  sui lati  $RS$  e  $PQ$  sono eguali e contrarie e hanno la stessa retta di azione: ciascuna di esse è la risultante di un sistema di forze parallele (7.13), applicata nel centro del lato, e nel loro insieme formano una coppia di braccio nullo e quindi di momento nullo. Le forze  $\mathbf{F}_1$  e  $\mathbf{F}_2$  sui lati  $QR$  e  $SP$ , ciascuna di modulo  $i a B$  secondo (7.15) in quanto  $\mathbf{B}$  è ortogonale ai lati  $a$ , sono anch'esse eguali e contrarie, ma costituiscono una coppia di braccio  $b \sin \theta$ . Il *momento della coppia* vale in modulo

$$M = b \sin \theta F = i a b B \sin \theta = i \sum B \sin \theta \quad (7.17)$$

ed è parallelo al piano della spira e orientato come in figura 7.33.

Definiamo *momento magnetico della spira* il vettore

$$\mathbf{m} = i \sum \mathbf{u}_n , \quad (7.18)$$

parallelo e concorde a  $\mathbf{u}_n$  e con modulo eguale al prodotto dell'intensità di corrente per l'area della spira. Il *momento meccanico*  $M$  può pertanto essere scritto, in accordo con (7.17),

$$\mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} = i \sum \mathbf{u}_n \times \mathbf{B} . \quad (7.19)$$

La (7.19), dedotta per una spira rettangolare, è valida in realtà per un *circuito*

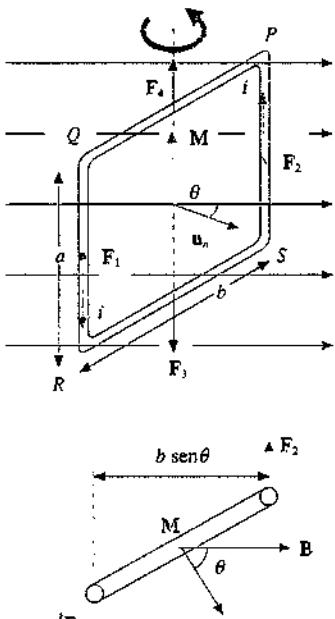


Figura 7.33

Momento magnetico  
di una spira

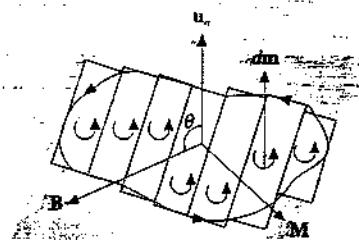


Figura 7.34

piano di forma qualunque immerso in un campo magnetico uniforme. Infatti il circuito si può sempre approssimare con  $n$  circuiti rettangolari adiacenti, tutti percorsi da una stessa corrente  $i$  con verso tale da avere le normali concordemente orientate; le correnti che passano nei lati in comune sono uguali ed opposte per cui gli effetti del campo magnetico si annullano e restano solo gli effetti prodotti sul contorno esterno, coincidente con il circuito. L'approssimazione è tanto migliore quanto più  $n$  è grande e al limite, per  $n$  tendente all'infinito, detto  $d\mathbf{m} = i d\Sigma \mathbf{u}_n$ , il momento magnetico del generico circuito rettangolare infinitesimo di area  $d\Sigma$ , su cui agisce il momento meccanico  $d\mathbf{M} = d\mathbf{m} \times \mathbf{B}$ , si ha per il momento meccanico risultante

$$\mathbf{M} = \int_{\Sigma} d\mathbf{M} = \int_{\Sigma} d\mathbf{m} \times \mathbf{B} = i \int_{\Sigma} d\Sigma \mathbf{u}_n \times \mathbf{B} = i \left( \int_{\Sigma} d\Sigma \right) \mathbf{u}_n \times \mathbf{B} = i \sum \mathbf{u}_n \times \mathbf{B} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} ,$$

coincidente con (7.19) se  $\mathbf{m}$  è definito come in (7.18).

Il momento (7.19) risulta nullo soltanto se  $\mathbf{m}$  è parallelo a  $\mathbf{B}$ : la posizione con  $\theta = 0$  è di *equilibrio stabile*, quella con  $\theta = \pi$  di *equilibrio instabile*. Per qualsiasi altro valore di  $\theta$   $\mathbf{M}$  tende a far ruotare la spira in modo che il momento magnetico  $\mathbf{m}$  diventi parallelo e concorde a  $\mathbf{B}$ . Sospendendo opportunamente la spira è possibile generare in questo modo un moto oscillatorio.

In particolare, prendiamo un asse di rotazione parallelo a  $\mathbf{M}$  e sia  $I$  il momento d'inerzia della spira rispetto a questo asse: supponiamo di spostare la spira dalla posizione di equilibrio stabile di un angolo  $\theta$  piccolo, così da poter confondere  $\sin \theta$  con  $\theta$ . Il teorema del momento angolare proiettato sull'asse di rotazione dà

$$M = -m B \theta = \frac{dL}{dt} = I \alpha = I \frac{d^2\theta}{dt^2} ,$$

dove il segno meno indica che il momento richiama sempre la spira verso la posizione di equilibrio. Abbiamo così ottenuto l'equazione

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2 \theta = 0 \quad \text{con} \quad \omega = \sqrt{\frac{m B}{I}}$$

e quindi le *piccole oscillazioni* della spira risultano armoniche con periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{m B}} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{i \sum B}} . \quad (7.20)$$

Anche la (7.20) si presta a una definizione operativa di  $B$ : tramite l'orientazione di un piccolo circuito si possono misurare direzione e verso di  $\mathbf{B}$  e dal periodo delle piccole oscillazioni si deduce il modulo del campo magnetico; l'area  $\Sigma$  deve essere sufficientemente piccola per poter ritenere  $\mathbf{B}$  uniforme su di essa.

Il comportamento oscillatorio della spira percorsa da corrente e immersa in campo magnetico ricalca esattamente quello di un dipolo elettrico posto in un campo elettrico, che abbiamo visto nel paragrafo 2.9 e nell'esempio 2.14. D'altra parte abbiamo ricordato più volte, nei paragrafi 7.1 e 7.2, che anche un ago magnetico ha un comportamento del tutto simile quando posto in un campo magnetico: anzi la formula (7.20) fornisce un metodo pratico per determinare il momento magnetico di un ago magnetico dalla misura del suo periodo di oscillazione in un campo magnetico noto.

Questa identità di comportamento tra spira e ago magnetico nei riguardi delle

azioni meccaniche subite quando posti in un campo magnetico uniforme venne generalizzata da Ampère sotto forma di un postulato, detto *principio di equivalenza di Ampère: una spira piana di area  $d\Sigma$  percorsa dalla corrente  $i$  equivale agli effetti magnetici a un dipolo elementare di momento magnetico*

$$dm = i d\Sigma \mathbf{u}_n \quad (7.21)$$

*perpendicolare al piano della spira e orientato rispetto al verso della corrente secondo la regola della vite.* Abbiamo appena constatato questa equivalenza per quanto riguarda un particolare tipo di moto in campo magnetico e vedremo nel capitolo 8 la sua validità anche rispetto al campo magnetico prodotto.

La (7.21) deve essere considerata uno strumento di calcolo molto utile perché permette di applicare a situazioni magnetiche concetti già sviluppati per i dipoli elettrici: non le si può però attribuire validità assoluta, come abbiamo già accennato e discuteremo nel capitolo 8.

Sempre in analogia con quanto visto per il dipolo elettrico, anche per il dipolo magnetico (spira o ago magnetico) si definisce una *energia potenziale*, legata alla posizione angolare rispetto alla direzione di  $\mathbf{B}$ .

$$U_p = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B} = -m B \cos\theta = -i \Sigma B \cos\theta \quad (7.22)$$

minima nella posizione di equilibrio stabile ( $\theta = 0$ ) e massima in quella di equilibrio instabile ( $\theta = \pi$ ). Tra momento meccanico  $M$  ed energia potenziale  $U_p$ , sussiste la relazione

$$M = -\frac{dU_p}{d\theta} = -m B \sin\theta \quad (7.23)$$

### Esempio 7.3 Il galvanometro

Nei paragrafo 6.11 è stato descritto il principio di funzionamento del galvanometro, che è alla base di *strumenti universali* per la misura di intensità di corrente, differenze di potenziale e resistenze. Richiamiamo nella figura 7.37, analoga alla 6.51, lo schema dello strumento.

La corrente  $i$  da misurare passa attraverso una bobina, costituita da  $N$  spire rettangolari di area  $\Sigma$  e sostenuta lungo l'asse da due molle. La bobina è sottoposta all'azione di un campo magnetico  $\mathbf{B}$  prodotto da un magnete che si esplicita in una coppia di forze applicate ai lati verticali. All'interno della bobina in posizione fissa è posto un cilindro  $C$  di ferro dolce e questo accorgimento, come vedremo nel capitolo 9, fa sì che le linee di campo di  $\mathbf{B}$  risultino sempre perpendicolari alla superficie del cilindro e quindi ai lati verticali della bobina, indipendentemente dalla posizione da essa assunta.

Il momento magnetico della bobina  $\mathbf{m} = N i \Sigma \mathbf{u}_n$  forma un angolo  $\theta = \pi/2$  con il campo magnetico  $\mathbf{B}$  agente sui lati verticali (è questo il campo che interessa e non quello nel ferro, che non è sentito dalla corrente). Di conseguenza la bobina è sottoposta al momento meccanico (7.17)  $M = Ni \Sigma B$  ed entra in rotazione. Le molle tramite cui la bobina è collegata al filo di sospensione esercitano un *momento elastico* di modulo  $k\theta$  che si oppone alla rotazione:  $k$  è una costante caratteristica del sistema. Si ha pertanto una posizione di *equilibrio* individuata dalla condizione

$$k\theta = Ni \Sigma B \Rightarrow \theta = \frac{Ni \Sigma B}{k} \quad (7.24)$$

L'indice solidae alla bobina serve per misurare l'angolo  $\theta$  di deviazione dalla posizione di riposo a corrente nulla osservando lo spostamento  $s$  su una scala graduata distante

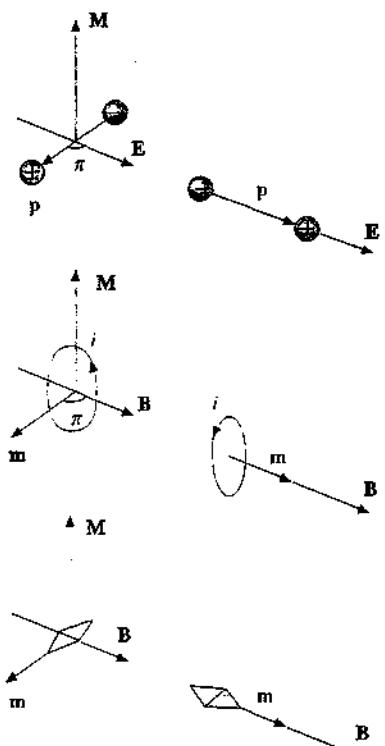


Figura 7.35

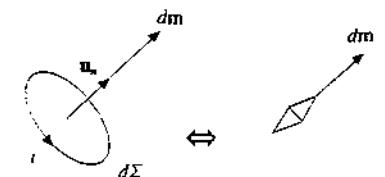


Figura 7.36

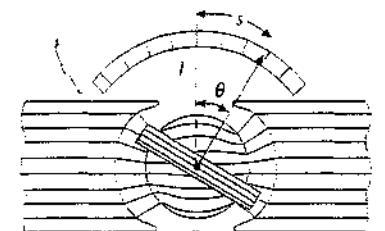
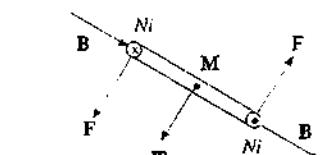


Figura 7.37



*i* dall'asse della bobina (quindi  $\theta = s/l$ ). Supponiamo che la scala sia graduata in modo tale che  $s = n s_0$ ; allora  $\theta = n s_0 / l$  e la (7.24) diventa

$$i = \left( \frac{k s_0}{N \Sigma B l} \right) n = S n \quad (7.25)$$

Sussiste dunque una *relazione di proporzionalità diretta* tra l'intensità di corrente  $i$  e il numero di divisioni  $n$  di cui si sposta l'indice sulla scala graduata. La costante  $S$  dipende dalle caratteristiche costruttive dello strumento e può essere misurata facendo attraversare lo strumento da una corrente di intensità nota. Indicativamente, se la *corrente di fondo scala* è  $i_{f0} = 50 \mu\text{A}$  e la scala ha  $n = 100$  divisioni,  $S = 50 \mu\text{A} / 100 = 0.2 \mu\text{A} / \text{divisione}$ . Si può ridurre  $S$ , rendendo lo strumento più sensibile, eliminando le molle e sospendendo la bobina direttamente con un filo: se questo è abbastanza sottile, la costante  $k$  di norma è minore che in presenza delle molle.

Invertendo il verso della corrente si inverte il senso di rotazione; si può quindi costruire un *galvanometro a zero centrale* che oltre a misurare la corrente ne indica anche il verso.

## 7.6 Espressioni di forza, momento e lavoro tramite il flusso magnetico

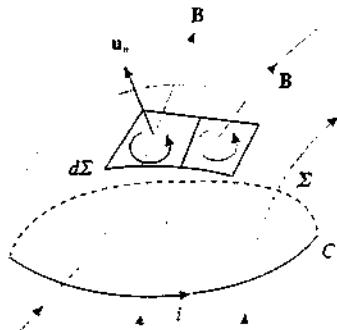


Figura 7.38

Energia potenziale  
di un circuito

I risultati sulle azioni meccaniche subite da un circuito percorso da corrente immerso in un campo magnetico, che abbiamo ottenuto nei paragrafi 7.4 e 7.5, possono essere generalizzati.

Consideriamo un circuito qualsiasi  $C$ , anche non piano, percorso dalla corrente  $i$  e una qualunque superficie  $\Sigma$  che abbia il circuito  $C$  come contorno  $\sigma$ , come si dice, che si *appoggia* sul circuito  $C$ . Estendiamo alla superficie  $\Sigma$  l'argomento della suddivisione in tanti piccoli circuiti rettangolari, tutti percorsi dalla stessa corrente  $i$  e concordemente orientati, che abbiamo utilizzato nel paragrafo 7.5. L'energia potenziale del generico circuito di area  $d\Sigma$ , in base a (7.22), è

$$dU_p = -d\mathbf{m} \cdot \mathbf{B} = -i \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = -i d\Phi(\mathbf{B}) \quad , \quad (7.26)$$

introducendo l'espressione del *flusso infinitesimo* di  $\mathbf{B}$  attraverso la superficie  $d\Sigma$ . L'*energia potenziale del circuito  $C$*  si ottiene integrando (7.26) sulla superficie  $\Sigma$ :

$$U_p = -i \int_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = -i \Phi(\mathbf{B}) \quad . \quad (7.27)$$

Il campo magnetico  $\mathbf{B}$  è solenoidale e pertanto, come abbiamo ricordato nel paragrafo 7.2, fissato il contorno  $C$  il flusso di  $\mathbf{B}$  non dipende dalla particolare superficie  $\Sigma$  che si appoggia su  $C$ . La (7.27) cioè è determinata fissato  $C$  e afferma che l'*energia potenziale di un circuito percorso da corrente  $i$  e immerso in un campo magnetico  $\mathbf{B}$  è eguale al prodotto cambiato di segno della corrente  $i$  per il flusso di  $\mathbf{B}$  concatenato col circuito*.

A seguito di uno spostamento rigido del circuito, in generale una rototraslazione, oppure di una deformazione che ne alteri il contorno il flusso attraverso il circuito può cambiare e indichiamo con  $d\Phi(\mathbf{B})$  la *variazione infinitesima*, notando che lo stesso simbolo ha ora un *significato diverso* (prima era un flusso infinitesimo, ora è una *variazione infinitesima di flusso*); essendo cambiato il flusso da  $\Phi$  a  $\Phi + d\Phi$ , cambia l'energia potenziale da  $U_p$  a  $U_p + dU_p$ , cioè della quantità  $dU_p = -i(\Phi + d\Phi - \Phi) = -i d\Phi$ , che è la (7.26) col significato appena specificato, e viene compiuto il *lavoro elementare*

$$dW = -dU_p = i d\Phi (\mathbf{B}) \quad (7.28)$$

Per una variazione finita da una configurazione iniziale a una finale il lavoro complessivo vale

$$W = i \Delta \Phi = i [\Phi_2 (\mathbf{B}) - \Phi_1 (\mathbf{B})] \quad (7.29)$$

Se esso risulta positivo è stato compiuto dalle forze del campo, se negativo contro le forze del campo.

*È essenziale la condizione che durante lo spostamento la corrente resti costante:* se ciò non avviene le formule scritte non sono più valide. L'importanza di questa precisazione deriva dall'esistenza di fenomeni, che vedremo nel capitolo 10, i quali provocano una variazione di corrente in un circuito quando varia il flusso magnetico concatenato col circuito stesso. Si capisce così che la condizione richiesta comporta necessariamente un intervento per mantenere costante la corrente e che quindi  $U_p$  non può essere l'unica forma di energia nei fenomeni magnetici (situazione che ricorda quella dei processi a potenziale costante in elettrostatica).

Passiamo ora ad esaminare alcuni casi specifici. Se il circuito compie una *traslazione rigida* lungo l'asse  $x$  il lavoro per uno spostamento infinitesimo  $dx$  è

$$dW = F_x dx = i \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx$$

per cui la componente lungo l'asse  $x$  della forza agente è

$$F_x = i \frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

Procedendo in modo analogo per le altre componenti si ottiene

$$\mathbf{F} = i \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \mathbf{u}_x + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \mathbf{u}_y + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \mathbf{u}_z \right) = i \nabla \Phi = -\nabla U_p \quad : \quad (7.30)$$

la forza agente sul circuito è proporzionale al gradiente del flusso magnetico attraverso il circuito. La (7.30) può essere ricavata da (7.28) ricordando la proprietà (2.40) del gradiente:

$$dW = i d\Phi = i \nabla \Phi \cdot ds = \mathbf{F} \cdot ds \Rightarrow \mathbf{F} = i \nabla \Phi$$

Si mette così in evidenza che la (7.30) è *indipendente* dal sistema di coordinate prescelto.

L'espressione della forza (7.30) è valida per un circuito di forma qualunque immerso in un campo magnetico qualsiasi, anche non uniforme; se  $\mathbf{B}$  è uniforme il suo flusso attraverso il circuito che compie una qualsiasi traslazione non varia con la posizione, il gradiente del flusso di conseguenza è nullo e la forza è nulla. Se ora immaginiamo di dividere il circuito in due parti (figura 7.39) e chiamiamo  $\mathbf{F}_1$  e  $\mathbf{F}_3$  le forze sulle due parti, deve essere  $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_3 = 0$  ovvero  $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_3$ ; anche se cambiamo la forma del tratto da  $P$  a  $Q$ , deve essere  $\mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 = 0$  cioè  $\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_3$  e in conclusione  $\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_2$ : la forza su un tratto di filo anche non piano dipende solo dai punti iniziale e finale e non dalla forma del filo, se il campo  $\mathbf{B}$  è uniforme. Abbiamo così esteso, con una dimostrazione diversa, i risultati visti per circuiti piani nel paragrafo 7.4.

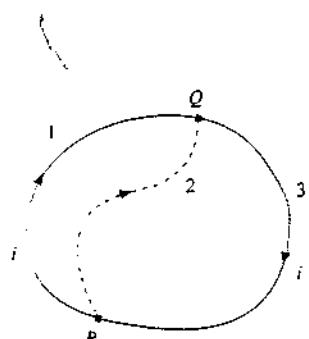


Figura 7.39

Quando il circuito compie una *rotazione rigida infinitesima*

$$dW = -dU_p = M_\theta d\theta = i \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} d\theta ,$$

se  $M_\theta$  è la componente del momento lungo l'asse di rotazione; risulta pertanto

$$M_\theta = i \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = - \frac{\partial U_p}{\partial \theta} . \quad (7.31)$$

Se il circuito è piano e il campo uniforme, il flusso è semplicemente  $B \Sigma \cos \theta$  e da (7.31) si ottiene (7.23).

Infine, nel caso di un circuito piano di area  $\Sigma$  molto piccola posto in un campo magnetico non uniforme, (7.30) e (7.31) diventano

$$\mathbf{F} = i \nabla (\mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_n \Sigma) = \nabla (\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}) , \quad (7.32)$$

$$M_\theta = i \frac{\partial}{\partial \theta} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_n \Sigma) = \frac{\partial}{\partial \theta} (\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}) ; \quad (7.33)$$

$\mathbf{m}$  è il momento magnetico del circuito, pari a  $i \Sigma \mathbf{u}_n$ , e si suppone che  $\mathbf{B}$ , pur non essendo uniforme, abbia lo stesso valore in tutti i punti di  $\Sigma$ . Queste formule, che potevano essere ricavate anche da (7.22), si applicano pure a un piccolo ago magnetico di momento  $\mathbf{m}$ ; si noti che (7.32) è analoga a (2.71) valida per un dipolo elettrico in campo  $\mathbf{E}$  non uniforme.

Riassumendo i risultati sulla forza subita da un circuito in campo non uniforme, noi abbiamo a disposizione due formule: la (7.14), basata direttamente sulla seconda legge elementare di Laplace (7.13), che utilizza un integrale esteso al circuito e la (7.30) la quale invece si serve del gradiente del flusso di  $\mathbf{B}$  attraverso una superficie appoggiata al circuito. Questa seconda procedura fornisce esplicitamente anche un'espressione per il lavoro e per il momento meccanico.

Per confrontare le due procedure, appliciamole a una spira circolare di raggio  $r$ , con centro sull'asse  $z$  e posta in un piano ortogonale all'asse  $z$ , percorsa dalla corrente  $i$ . Essa è sottoposta all'azione di un campo magnetico a simmetria assiale rispetto all'asse  $z$ , le cui linee di  $\mathbf{B}$  formano l'angolo  $\theta$  con l'asse  $z$  nei punti in cui è posta la spira (vedi figura 7.40). Calcoliamo la forza agente sulla spira servendoci prima della (7.13). Nel punto  $P$  abbiamo

$$ds = ds \mathbf{u}_z \quad \mathbf{B} = -B \sin \theta \mathbf{u}_x + B \cos \theta \mathbf{u}_y .$$

per cui la forza elementare è

$$d\mathbf{F}_P = i ds \times \mathbf{B} = i B ds (-\sin \theta \mathbf{u}_x - \cos \theta \mathbf{u}_y) .$$

Sull'elemento  $ds$  diametralmente opposto, cioè nel punto  $Q$ , si ha

$$d\mathbf{F}_Q = i (-ds \mathbf{u}_z) \times (B \sin \theta \mathbf{u}_x + B \cos \theta \mathbf{u}_y) = i B ds (-\sin \theta \mathbf{u}_x + \cos \theta \mathbf{u}_y) .$$

La forza risultante sui due elementi di circuito è

$$d\mathbf{F} = -2i B \sin \theta ds \mathbf{u}_z .$$

Notiamo che il risultato è indipendente dalla scelta degli assi  $x$  e  $y$ , come deve essere vista la simmetria del problema. La forza totale è diretta lungo l'asse  $z$  e si ottiene integrando lungo mezza spira, dato che sono state considerate coppie di elementi:

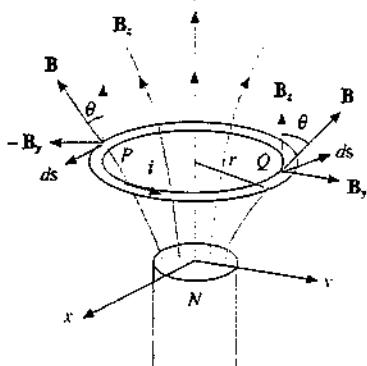


Figura 7.40

$$\mathbf{F} = -2iB \sin\theta \mathbf{u}_z \int_0^r ds = -2\pi r i B \sin\theta \mathbf{u}_z$$

La forza risulta *attrattiva*, per il dato verso della corrente ( $\mathbf{u}_z$  concorde a  $\mathbf{B}$ ); se la corrente circolasse in verso contrario la forza sarebbe repulsiva. Osserviamo che pur essendo la spira piana la forza non è nulla perché il campo magnetico *non* è uniforme; però, data la simmetria della configurazione, è certamente nullo il momento meccanico risultante (la spira non ruota).

Lo stesso risultato si ottiene partendo dalla relazione (7.30), riscritta come

$$F = F_z = i \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad ;$$

infatti, per ragioni di simmetria, la forza deve essere parallela all'asse  $z$ . Supponiamo ora che la spira compia una traslazione infinitesima  $dz$  lungo l'asse  $z$  e consideriamo una superficie chiusa a forma di scatola cilindrica avente come basi la superficie piana  $\Sigma$  racchiusa dalla spira prima dello spostamento e la corrispondente superficie  $\Sigma'$  dopo lo spostamento; la superficie laterale è una striscia di altezza  $dz$  e area  $2\pi r dz$ . Se orientiamo questa superficie verso l'esterno e chiamiamo  $\Phi'$  il flusso uscente attraverso  $\Sigma'$ ,  $-\Phi$  quello uscente attraverso  $\Sigma$  e  $\Phi$ , quello uscente attraverso la superficie laterale, deve essere in base a (7.2)

$$\Phi' - \Phi + \Phi_l = 0$$

La differenza  $\Phi' - \Phi$  rappresenta proprio la variazione di flusso attraverso il circuito causata dallo spostamento e quindi, in termini infinitesimi,

$$d\Phi = -\Phi_l = -2\pi r dz B \sin\theta \quad ;$$

infatti la componente di  $\mathbf{B}$  ortogonale alla superficie laterale è  $B \sin\theta$ , eguale su tutta la striscia data la simmetria cilindrica. In conclusione

$$F = i \frac{d\Phi}{dz} = -i \frac{d\Phi_l}{dz} = -2\pi r i B \sin\theta$$

e il segno meno indica che la forza è attrattiva (discorde all'asse  $z$ ): abbiamo così ritrovato la formula precedente. Se la corrente circola in senso contrario la normale alla spira è discorda al campo  $\mathbf{B}$  e cambiano i segni dei flussi: la forza diventa positiva, cioè repulsiva.

Al flusso attraverso la superficie laterale si dà normalmente il nome di *flusso tagliato*, in quanto corrisponde al flusso lungo le linee del campo magnetico attraversate (*tagliate*) dalla spira nel suo spostamento.

Qualora la spira sia di piccole dimensioni così che  $r \ll z$ , se  $z$  è la distanza dal polo più vicino del magnete che immaginiamo generi il campo  $\mathbf{B}$ , possiamo porre  $\sin\theta \approx \theta = r/z$  e la forza diventa

$$\mathbf{F} = -\frac{2\pi r^2 i B}{z} \mathbf{u}_z = -\frac{2B}{z} \mathbf{m} \quad .$$

indicando con  $\mathbf{m} = \pi r^2 i \mathbf{u}_z$  il momento magnetico della spira. Se inoltre il campo magnetico varia lungo l'asse  $z$  secondo la legge (7.1),  $B(z) = k/z^2$ , allora

$$\frac{dB}{dz} = -\frac{2k}{z^3} = -\frac{2B}{z}$$

e la forza sulla piccola spira si può scrivere

$$\mathbf{F} = \frac{dB}{dz} \mathbf{m} \quad ; \quad (7.34)$$

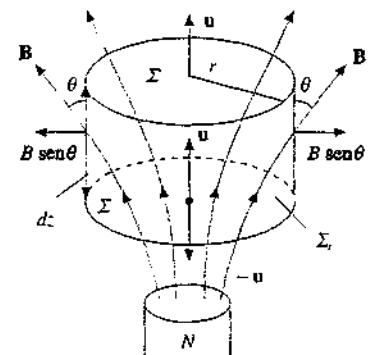


Figura 7.41

Flusso tagliato

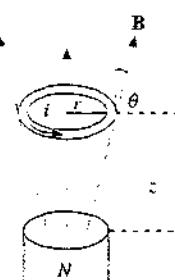


Figura 7.42

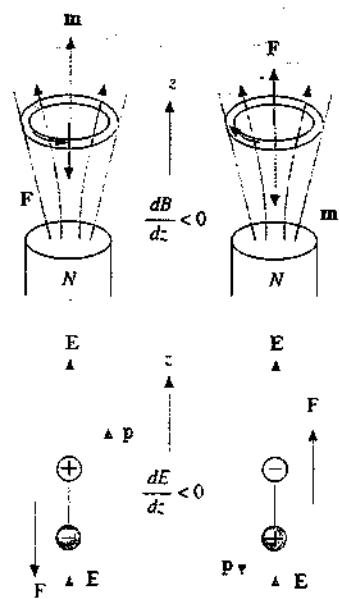


Figura 7.43

Essa è attrattiva, essendo  $dB/dz$  negativa; con la corrente circolante in verso opposto  $m$  e quindi  $F$  cambiano verso. Osserviamo che (7.34) discende da (7.32) se  $m$  e  $B$  sono paralleli e che la situazione, in tal caso, si può così sintetizzare: la spira tende a portarsi dove il campo magnetico è maggiore se  $m$  è concorde a  $B$ , mentre tende a portarsi dove il campo è minore se  $m$  è opposto a  $B$ . Tutto ciò si applica anche ad un ago magnetico: in particolare giustifica purché la limatura di ferro sia attratta dai poli di un magnete, dove il campo magnetico è maggiore.

Abbiamo ritrovato i risultati del paragrafo 2.9 relativi ai dipoli elettrici, completando il quadro delle analogie riscontrate, che riassumiamo nella tabella 7.1.

Tabella 7.1 Proprietà dei dipoli

	$\rightarrow p$	$\rightarrow m$
momento di dipolo momento meccanico energia potenziale	$p = qa$ $M = p \times E$ $U_p = -p \cdot E$	$m = i \sum u_n$ $M = m \times B$ $U_p = -m \cdot B$
periodo delle piccole oscillazioni	$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{pE}}$	$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{mB}}$
forza in un campo non uniforme parallelo al momento di dipolo	$F_x = p \frac{\partial E}{\partial x}$	$F_x = m \frac{\partial B}{\partial x}$

Oltre a traslazioni e rotazioni rigide un circuito può subire una deformazione, come abbiamo già menzionato, e ciò comporta in genere una variazione di flusso e un lavoro, dato da (7.29), sempre nell'ipotesi che la corrente resti costante durante il processo. Nell'esempio che segue trattiamo un caso particolare molto semplice, però interessante anche per successive applicazioni.

## Esempio 7.4

Un generatore in grado di mantenere una corrente costante  $i$  (indicato col simbolo della figura 7.44) alimenta un circuito formato da due conduttori rigidi rettilinei paralleli e da un filo rigido  $PQ$  lungo  $b$  che può scorrere senza attrito, restando sempre ortogonale ai due conduttori suddetti (che sono fissi, insieme al generatore). Il circuito è immerso in un campo magnetico  $B$  uniforme, entrante nel foglio. Calcolare la forza agente sul filo  $PQ$ .

## Soluzione

Il filo  $PQ$  risente della forza (7.15) che, con i versi dati, è parallela e concorde all'asse  $x$ :

$$\mathbf{F} = i \mathbf{PQ} \times \mathbf{B} = i b B \mathbf{u}_x$$

Tale forza è costante e il filo si muove di  *moto uniformemente accelerato*.

Lo stesso risultato si ottiene da (7.28): per uno spostamento  $dx$  il flusso attraverso il circuito,  $\Phi = \sum B = b x B$ , varia di  $d\Phi = b B dx$ , viene compiuto il lavoro  $dW = i b B dx$  e quindi  $F = i b B$ . Il flusso è positivo, perché la normale al circuito orientata secondo la regola della vite è concorde a  $B$ , e aumenta nello spostamento, per cui  $d\Phi$  e  $dW$  sono positivi e la forza risulta concorde all'asse  $x$ . Se la corrente avesse verso opposto  $\mathbf{u}_n$  e  $B$  sarebbero discordi, il flusso sarebbe negativo,  $\Phi = -b x B$ , e diminuirebbe a seguito dello spostamento, quindi  $d\Phi$  e  $dW$  sarebbero negativi e la forza risulterebbe discor-

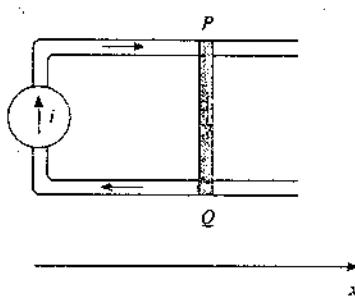


Figura 7.44

de all'asse  $x$ . È importante fare attenzione ai segni se, oltre al modulo, si vuole il verso della forza; da questo punto di vista il risultato ottenuto da (7.15) è più immediato. Osserviamo che la forza si può scrivere  $F = i d\Phi / dx$ , in accordo con (7.30) applicata al caso specifico. In effetti il fenomeno deriva da una traslazione, anche se solo di una parte del circuito, che comporta una variazione di flusso, pertanto siamo nel campo di validità di (7.30).

Ad ogni modo si conclude che il circuito si deforma sotto l'azione della forza magnetica e che il filo si sposta verso destra se  $\mathbf{u}_n$  e  $\mathbf{B}$  sono concordi (entrambi uscenti o entranti), mentre si sposta verso sinistra se  $\mathbf{u}_n$  e  $\mathbf{B}$  sono discordi. Si noti un fatto importante: lo spostamento sotto l'azione della forza magnetica è sempre *nel verso che fa aumentare il flusso attraverso il circuito*. Infatti lo spostamento verso destra fa aumentare l'area e quindi il flusso, che è positivo perché  $\mathbf{u}_n$  e  $\mathbf{B}$  sono concordi; ma anche nello spostamento verso sinistra il flusso, che è negativo perché  $\mathbf{u}_n$  e  $\mathbf{B}$  sono discordi, aumenta in quanto da un valore negativo tende a zero.

Il fatto notato alla fine dell'esempio appena svolto è di carattere generale: l'*azione delle forze magnetiche è sempre quella di fare evolvere il sistema, entro i limiti imposti dai vincoli, verso la configurazione in cui è massimo il flusso magnetico  $\Phi$  attraverso il circuito e quindi è minima l'energia potenziale  $U_p$* . Si verifica facilmente che tale condizione è soddisfatta in tutti i casi che abbiamo considerato, tenuto conto correttamente del segno del flusso.

### Unità di misura

Dalla (7.5) si vede che l'unità di misura del campo magnetico nel sistema internazionale è

$$\frac{\text{N}}{\text{C} \frac{\text{m}}{\text{s}}} = \frac{\text{N}}{\text{A m}} = \frac{\text{kg}}{\text{A s}^2} \quad .$$

a questa unità si dà il nome di *tesla* e il simbolo T. Sottomultipli molto usati, anche se non standard, sono il *gauss* (G), definito da  $1 \text{ G} = 10^{-4} \text{ T}$ , e il *chilogauss* (k G), pari a  $10^3 \text{ G} = 10^{-1} \text{ T}$ .

Abbiamo già detto che il campo magnetico terrestre sulla superficie terrestre è dell'ordine di  $10^{-5} \text{ T}$ , cioè  $10^{-1} \text{ G}$ . I massimi campi magnetici costanti che si è in grado di produrre attualmente utilizzando la tecnologia della *supercondutività* sono dell'ordine di  $10 \text{ T}$ . Il flusso del campo magnetico si misura in  $\text{T m}^2$  (campo per superficie) e questa unità si chiama *weber* (Wb). Quindi

$$\text{Wb} = \text{T m}^2 \quad , \quad \text{T} = \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2} \quad .$$

Dalla (7.29) si ha inoltre

$$\text{Wb} = \frac{\text{J}}{\text{A}} = \frac{\text{J s}}{\text{C}} = \text{V s} \Rightarrow \text{T} = \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} \quad .$$

L'unità del momento magnetico da (7.18) e (7.22) è

$$\text{A m}^2 = \frac{\text{J}}{\text{T}} \quad .$$

Ad esempio, la bobina di un galvanometro con  $N = 10$ ,  $\Sigma = 10 \text{ cm}^2$ ,  $i = 50 \mu\text{A}$ , ha il momento magnetico  $5 \cdot 10^{-7} \text{ A m}^2$ . I momenti magnetici delle correnti microscopiche atomiche e dell'elettrone sono dell'ordine di  $10^{-23} \text{ A m}^2$ , quello del protone è dell'ordine di  $5 \cdot 10^{-27} \text{ Am}^2$ . Per tali momenti magnetici elementari si può usare l'unità

$$\frac{\text{eV}}{\text{T}} = 1.6 \cdot 10^{-19} \frac{\text{J}}{\text{T}} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ A m}^2 \quad .$$

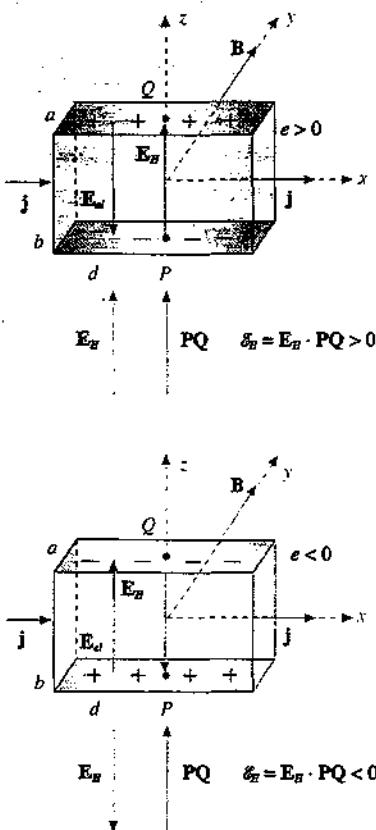


Figura 7.45

## Campo di Hall

## 7.7 Effetto Hall

Un conduttore a forma di nastro sottile, di sezione  $\Sigma = a b$ , è percorso da una corrente di intensità  $i$  con verso concorde all'asse  $x$ . La densità di corrente vale, secondo (6.2, 6.5),

$$\mathbf{j} = \frac{i}{a b} \mathbf{u}_x = n e \mathbf{v}_d$$

e, come abbiamo più volte notato, ha lo stesso verso qualunque sia il segno dei portatori di carica.

Se il nastro è sottoposto all'azione di un campo magnetico uniforme  $\mathbf{B}$ , che assumiamo perpendicolare a  $\mathbf{j}$  e concorde all'asse  $y$ , su ciascun portatore di carica agisce la forza di Lorentz (7.5)

$$\mathbf{F} = e \mathbf{v}_d \times \mathbf{B}$$

La struttura della formula mostra che sulla carica  $e$  agisce una forza  $\mathbf{F}$  non elettrostatica e pertanto definiamo in accordo con quanto discusso nel paragrafo 6.7 il *campo elettromotore*

$$\mathbf{E}_H = \frac{\mathbf{F}}{e} = \mathbf{v}_d \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{ne} \times \mathbf{B} \quad (7.35)$$

Questo è un aspetto molto importante della forza magnetica su una carica in movimento, la quale permette in ogni caso di definire un campo elettrico di origine magnetica ovvero un *campo elettromotore* dato dalla

$$\mathbf{E} = \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (7.36)$$

Come verificheremo tra poco e come è vero in generale tale *campo non è conservativo*.

Nel caso in esame  $\mathbf{E}_H$  ha la direzione dell'asse  $z$ , cioè quella del lato  $b$  del nastro: il verso dipende dal segno della carica: se  $e > 0$   $\mathbf{E}_H$  è concorde all'asse  $z$ , mentre è disconcreto all'asse  $z$  se  $e < 0$ . Ad ogni modo  $\mathbf{E}_H$ , che è noto come *campo di Hall* dal nome del fisico che nel 1879 lo mise per la prima volta in evidenza, provoca una deflessione nel moto delle cariche, aggiungendo una componente trasversa alla velocità di deriva, e di conseguenza tende ad accumulare cariche di segno opposto sulle due facce ortogonali a  $\mathbf{E}_H$ , cioè all'asse  $z$ . Si raggiunge subito un equilibrio in quanto tale accumulo dà origine a un campo elettostatico  $\mathbf{E}_d$  che si oppone a un ulteriore accumulo; la condizione è

$$\mathbf{E}_H + \mathbf{E}_d = 0$$

In equilibrio il dispositivo si comporta come un generatore in cui non circola corrente: la *tensione del campo*  $E_H$ , in base a (6.41), è

$$\mathcal{E}_H = \int_p^Q \mathbf{E}_H \cdot dz = \mathbf{E}_H \cdot \mathbf{PQ} = \pm E_H b$$

con segno positivo se  $e > 0$ , negativo se  $e < 0$ . In modulo la tensione di Hall vale

$$\mathcal{E}_H = E_H b = \frac{j B b}{n e} = \frac{i B}{n e a} = \frac{B b}{n e \rho} \frac{V_A - V_B}{d} \quad ; \quad (7.37)$$

L'ultima eguaglianza si ottiene ponendo, secondo (6.26) e (6.25),  $i = (V_A - V_B)/R$  e  $R = \rho d / \Sigma = \rho d / a b$ , con  $V_A - V_B$  d.d.p. ai capi del nastro lungo  $d$ .

Il fenomeno descritto, chiamato *effetto Hall trasversale*, si presta ad alcune interessanti applicazioni. Innanzitutto dal segno di  $\mathcal{E}_H$  si può determinare il *segno dei portatori di carica*: inoltre, noti i moduli di  $\mathcal{E}_H$  e  $B$  dalla (7.37) si può ricavare la *densità di carica ne dei portatori*. Per la maggior parte dei metalli i portatori di carica risultano negativi, in accordo con l'ipotesi che siano elettroni, e la densità di carica così misurata è in buon accordo con il

## Tensione di Hall

## Effetto Hall

numero di elettroni di valenza per unità di volume. Vi sono però alcuni metalli bivalenti tra cui lo zinco e materiali come i semiconduttori in cui il segno di  $\epsilon_H$  corrisponde a portatori positivi. La spiegazione di questa apparente anomalia è attribuita a una particolare modalità del moto di deriva degli elettroni in questi materiali: in sostanza gli elettroni vanno a riempire delle posizioni vuote, dette *lacune*, creando a loro volta delle lacune nelle posizioni che abbandonano; il passaggio di elettroni da una zona A neutra a una zona B con lacune è quindi positiva rende neutra la zona B e positiva la zona A e appare perciò come un moto di cariche positive nel verso opposto al moto degli elettroni. Solo con la meccanica quantistica si può dare una spiegazione completa di questi effetti.

Infine la (7.37), fornendo una relazione di proporzionalità tra la tensione  $\epsilon_H$  e il modulo  $B$  del campo magnetico, può essere utilizzata per costruire *misuratori di campo magnetico*, detti *sonde di Hall*; la costante di proporzionalità

$$\alpha = \frac{\epsilon_H}{B} = \frac{i}{n e a} = \frac{b(V_A - V_B)}{n e p d}$$

può essere calcolata da queste formule o meglio può essere determinata sperimentalmente introducendo la sonda in un campo magnetico di valore noto e misurando il valore della tensione di Hall.

### Esempio 7.5

Un nastro di rame, lungo  $d = 2$  cm e con lati  $a = 0.1$  cm,  $b = 1.5$  cm, è percorso dalla corrente  $i = 5$  A ed è immerso in un campo magnetico uniforme di modulo  $B = 1.5$  T, ortogonale al nastro. Calcolare il valore della tensione di Hall e della corrente che circola se tra i punti  $P$  e  $Q$  della figura 7.46 viene collegato un resistore con  $R = 10^4 \Omega$ .

#### Soluzione

Nel rame il numero di elettroni per unità di volume è  $n = 8.49 \cdot 10^{28}$  elettroni/m<sup>3</sup>, come visto nel paragrafo 6.1. Dalla (7.37) calcoliamo la tensione di Hall:

$$\epsilon_H = \frac{i B}{n e a} = \frac{5 \cdot 1.5}{8.49 \cdot 10^{28} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{-3}} = 5.52 \cdot 10^{-7} \text{ V.}$$

La costante  $\alpha$  sopra definita vale  $3.68 \cdot 10^{-7}$  V/T.

Quando tra i punti  $P$  e  $Q$  si collega una resistenza esterna  $R$  si forma un circuito in cui il nastro di rame percorso da corrente ed immerso in campo magnetico funge da generatore. Utilizzando la simbologia del paragrafo 6.7, il campo elettrico  $\mathbf{E}$  lungo il circuito vale  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_H + \mathbf{E}_d$  dentro il nastro,  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_d$  dentro il resistore esterno, e nel generatore  $\mathbf{E}_H$  in modulo è maggiore di  $\mathbf{E}_d$  perché il circuito non è più aperto e le cariche accumulate possono muoversi lungo il resistore esterno: all'equilibrio statico con corrente nulla si è sostituito un equilibrio dinamico con corrente costante. La forza elettromotrice è

$$\epsilon = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \oint \mathbf{E}_{ei} \cdot d\mathbf{s} + \int_P^Q \mathbf{E}_H \cdot dz = \epsilon_H$$

chiaramente coincidente con la tensione di Hall (e si vede che  $\mathbf{E}_H$  non è conservativo). La corrente che circola è

$$i_H = \frac{\epsilon_H}{r + R}$$

dove  $r$ , resistenza del blocco di rame lungo l'asse  $z$  si calcola con (6.25) e in base al dato della tabella 6.1:

$$r = \rho \frac{b}{a d} = 1.28 \cdot 10^{-5} \Omega$$

Lacune

Sonda di Hall

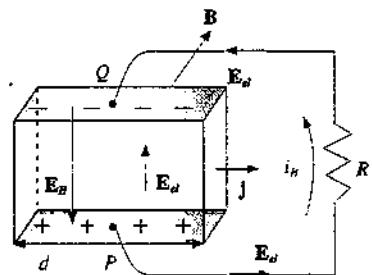


Figura 7.46

Quindi  $i_H = 4.9 \cdot 10^{-3}$  A, facilmente misurabile con un milliamperometro. La d.d.p. ai capi di  $R$ , cioè tra i punti  $P$  e  $Q$ , è

$$\Delta V = \mathcal{E} - r i_H = R i_H = 4.9 \cdot 10^{-7}$$

Col metodo descritto si può dalla misura di  $i_H$  e note  $r$  e  $R$  dedurre  $\mathcal{E}_H$  e quindi  $B$ ; la sensibilità della sonda in esame sarebbe  $i_H / B = 3.27$  mA/T. Una misura diretta di  $\mathcal{E}_H$  senza assorbimento di corrente è più difficile, data la piccolezza dei valori in gioco.

## 7.8 Esempi di moti di particelle cariche in campo magnetico uniforme

Esaminiamo adesso sia alcuni dispositivi che dall'analisi del moto di particelle cariche in un campo magnetico permettono di dedurre alcune proprietà delle particelle stesse che un particolare tipo di acceleratore di particelle. La legge del moto in campo magnetico è basata sulla forza (7.5) o, in caso di presenza contemporanea di un campo elettrico, sulla

Forza di Lorentz

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (7.38)$$

espressione completa della forza agente su una particella carica, cui ci si riferisce ancora col nome di *forza di Lorentz*.

È sottinteso che il moto delle particelle considerate, di norma ioni o elettroni, si svolge all'interno di contenitori in cui è stato praticato il vuoto per evitare l'azione di disturbo degli urti con le molecole dell'aria: questi farebbero avvenire il moto con caratteristiche molto diverse da quelle prevedibili in base a (7.38).

### Spettrometri di massa

Lo *spettrometro di massa* è uno strumento che separa ioni aventi la stessa carica e massa diversa o, più in generale, aventi rapporto carica su massa diverso. Esempio tipico è quello degli *isotopi*, atomi dello stesso elemento che hanno nuclei con lo stesso numero  $Z$  di protoni, ma un diverso numero  $N$  di neutroni, per cui il numero di massa  $A = Z + N$  è diverso. Essi sono collocati nello stesso posto della tavola periodica (dove il nome isotopi) e hanno identiche proprietà chimiche, però avendo una differente composizione nucleare presentano differenti proprietà fisiche.

Il primo *spettrometro di massa* venne concepito da Thomson intorno al 1912: in sostanza al dispositivo con cui aveva misurato nel 1897 il rapporto  $e/m$  degli elettroni (vedi esempio 2.4) egli aggiunse un campo magnetico parallelo al campo elettrico e utilizzò come sorgente un gas rarefatto in cui ioni positivi sono prodotti tramite scariche elettriche e accelerati da una d.d.p. dell'ordine di  $10^4$  V, che conferisce loro una velocità  $v$ . Con riferimento alla figura 7.47 in cui i campi sono discordi, la forza elettrica  $q\mathbf{E}$  causa una deviazione nel piano  $y-z$  e quella magnetica  $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  una deviazione nel piano  $x-z$ . Supponendo che gli ioni entrino nel dispositivo a  $z=0$  muovendosi lungo l'asse  $z$ , per  $z=L$  si ha

$$y = \frac{1}{2} \frac{qE}{m} \frac{L^2}{v^2}, \quad x = \frac{qBL^2}{2mv}$$

L'espressione di  $y$  è quella di un moto uniformemente accelerato, già vista nell'esempio 2.4 e da cui appunto fu determinato il rapporto  $e/m$  per gli elettroni. L'espressione di  $x$  è in realtà approssimata nell'ipotesi che il raggio di curvatura  $r$  data da (7.7) sia molto maggiore di  $L$ ; allora l'arco di circonferenza si può confondere con un arco di parabola, come se il moto fosse uniformemente accelerato, e risulta

$$x = \frac{1}{2} \frac{qvB}{m} \frac{L^2}{v^2}$$

Valori numerici tipici possono essere  $q = 1.6 \cdot 10^{-19}$  C,  $m = 20 \cdot 1.67 \cdot 10^{-27}$  kg,

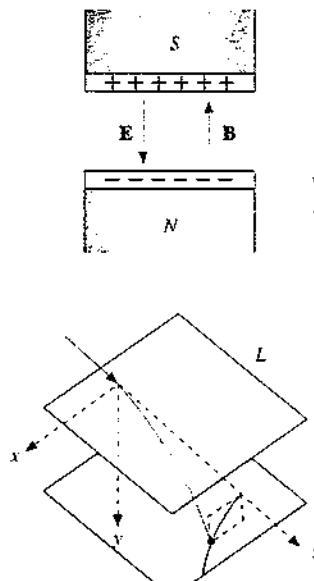


Figura 7.47

$v = \sqrt{2qV/m} = 3.1 \cdot 10^5 \text{ m/s}$ ,  $B = 0.1 \text{ T}$ ,  $r = 0.65 \text{ m}$  da paragonare con  $L = 0.1 \text{ m}$ ,  $E = 10^4 \text{ V/m}$ .

Il luogo dei punti  $x$ ,  $y$  all'uscita del dispositivo, o su uno schermo più distante, è una parabola: cioè, il punto d'uscita del fascetto di ioni positivi, a seconda del valore della velocità fissati gli altri parametri, si sposta lungo la parabola

$$y = \frac{2E}{L^2 B^2} \frac{m}{q} x^2$$

ioni egualmente ionizzati e con masse diverse cadono su parbole diverse.

In tal modo Thomson scoprì che ioni di neon cadevano su due parbole diverse, una corrispondente a  $A = 20$ , l'altra a  $A = 22$ ; inoltre dall'intensità delle tracce delle due parbole, registrata con una lastra fotografica impressionata dal deposito di energia degli ioni da essa assorbiti, dedusse che l'isotopo con massa 20 era circa 9 volte più frequente di quello con massa 22: e in effetti la media pesata con fattori 9 e 1 dà il noto valore 20.2 di  $A$  per il neon. Si capisce così l'origine dei valori di  $A$  abbastanza diversi da un numero intero: essi sono causati appunto dal fatto che un elemento si presenta come miscela di isotopi; ciascun isotopo invece ha un numero di massa  $A$  molto vicino ad un numero intero.

La scoperta di Thomson stimolò la crescita di questo campo di ricerca e vennero costruiti vari tipi di spettrometri più precisi in cui cioè, a parità di isotopi, la separazione dei punti di arrivo era più netta che nello spettrometro di Thomson. Un contributo notevole venne dato da Aston che intorno al 1920 sviluppò uno spettrometro in cui la zona di deviazione elettrica era distinta da quella di deviazione magnetica e che consentiva misure di massa con una precisione di almeno una parte su  $10^4$ . Aston scoprì un gran numero di isotopi e ne misurò le percentuali relative (le cosiddette abbondanze).

Uno spettrometro particolarmente adatto alla misura delle abbondanze è quello esclusivamente magnetico progettato sempre intorno al 1920 da Dempster. Gli ioni prodotti nella sorgente  $S$  passano attraverso una coppia di fenditure strette  $F_1$  e  $F_2$  che ne definiscono la traiettoria e tra le quali è applicata una d.d.p.  $V$  dell'ordine di  $10^3 \text{ V}$  (si veda la figura 7.48).

Spettrometro di Dempster

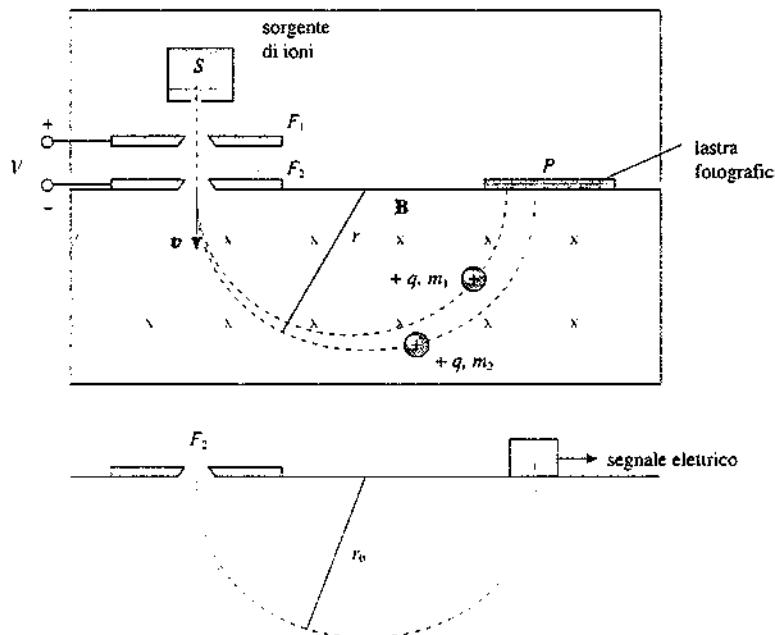


Figura 7.48

All'uscita di  $F_2$  tutti gli ioni, indipendentemente dalla loro massa se hanno la stessa carica e considerando trascurabile la velocità iniziale, possiedono l'*energia cinetica*

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 = q V \quad . \quad (7.39)$$

Si ottiene così un fascetto di *ioni isoenergetici* sottile e collimato che, dopo  $F_2$ , entra in una regione in cui agisce solamente un campo magnetico  $B$  uniforme, ortogonale al disegno ed entrante nel foglio se gli ioni sono positivi come supponiamo.

Per quanto detto nel paragrafo 7.3 gli ioni descrivono una traiettoria circolare di raggio  $r$  dato da (7.7),  $r = m v / q B$ . A parità di energia cinetica e di carica, a masse diverse corrispondono velocità diverse e quindi raggi diversi. Ricavando  $v$  in funzione di  $r$  e sostituendo nella (7.39) si ottiene

$$\frac{m}{q} = \frac{B^2 r^2}{2V}, \quad r = \sqrt{\frac{2V}{B^2} \frac{m}{q}} \quad . \quad (7.40)$$

Il rapporto  $m/q$  risulta quindi determinato per i vari tipi di ioni dalla misura di  $r$ , noti il campo magnetico e la d.d.p. acceleratrice; a sua volta  $r$  è dato da  $F_2 P = 2r$ , detto  $P$  il punto in cui termina la semicirconferenza descritta dagli ioni.

Supponiamo che il rivelatore di posizione sia una lastra fotografica e che nel fascio di ioni siano presenti due isotopi di massa atomica  $A_1$  e  $A_2$ ; dalla (7.40) ricaviamo

$$\frac{A_2}{A_1} = \left( \frac{r_2}{r_1} \right)^2$$

e si vede che il rapporto delle masse non dipende dalla conoscenza di  $V$  e di  $B$ . D'altra parte lo spettrometro può essere tarato direttamente inviando ioni di massa  $A_1$  nota e misurando  $r_1$ ; per gli ioni di massa  $A_2$  si ha

$$A_2 = \frac{A_1}{r_1^2} r_2^2 = k r_2^2 \quad .$$

Ad ogni punto  $P$  della lastra fotografica corrisponde una massa atomica.

Per esempio i due isotopi del potassio ( $A_1 = 39$ ,  $A_2 = 41$ ) accelerati con  $V = 10^3$  V acquistano, se ionizzati una volta sola, le velocità  $v_1 = 7.0 \cdot 10^4$  m/s,  $v_2 = 6.8 \cdot 10^4$  m/s e in un campo magnetico  $B = 0.1$  T i raggi di curvatura sono  $r_1 = 28.5$  cm,  $r_2 = 29.1$  cm con una differenza  $\Delta r = 0.6$  cm, facilmente rilevabile sulla lastra.

La (7.40) è una relazione *quadratica* tra grandezza incognita e grandezza misurata, fatto che si esprime dicendo che la *scala* dello strumento è *quadratica*. Per una data variazione  $dr$  la variazione  $dA$  è data da  $2k r dr$ : a parità di  $dr$ ,  $dA$  è maggiore a  $r$  maggiore, cioè a masse maggiori. ovvero la sensibilità dello strumento è maggiore a masse maggiori. Abbiamo già discusso questa situazione nell'esempio 4.20 a proposito dell'*elettrometro a bilancia*.

Invece di utilizzare una lastra fotografica si può praticare una fenditura molto sottile distante  $2r_0$  da  $F_2$ , dietro la quale è posto uno strumento che misura la carica. Riescono ad entrare nello strumento, fissati  $V$  e  $B$ , solo gli ioni che descrivono una semicirconferenza di raggio  $r_0$  fissato e quindi che hanno un ben preciso rapporto  $m/q$ . La misura in questo caso si effettua facendo variare  $V$ : sempre nel caso del potassio al crescere di  $V$  raggiungono il raggio  $r_0$  prima gli ioni con  $A = 41$  e poi quelli con  $A = 39$ , come si capisce da (7.40). Nella figura 7.49 è mostrato il risultato di una tale misura e si intuisce che con opportune procedure se ne può dedurre l'*abbondanza dei due isotopi* (Dempster trovò il rapporto 18:1).

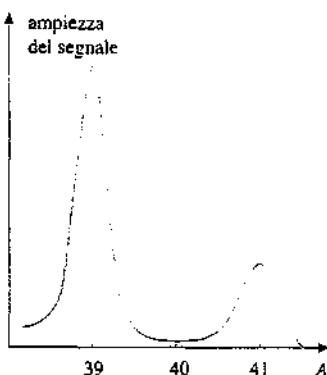


Figura 7.49

#### Selettore di velocità. Spettrometro di Bainbridge. Esperimento di Bucherer

Un fascio di ioni diversi con la stessa velocità, invece che con la stessa energia cinetica, si ottiene ponendo dopo la fenditura  $F_2$  un *selettore di velocità*: si fanno agire contemporaneamente nella stessa regione un campo elettrostatico  $E$  e un campo magnetico  $B$ , entrambi uniformi e ortogonali tra loro, ad esempio, come in figura 7.50, uno nel piano del disegno e uno entrante nel disegno. Se i moduli sono scelti in maniera tale che

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0 \Rightarrow \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0 \quad (7.41)$$

la forza sullo ione è nulla, indipendentemente dal valore e dal segno della carica: la defles-

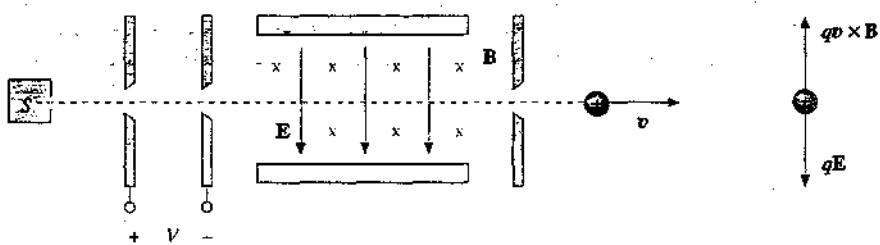


Figura 7.50

sione di uno ione in una data direzione e verso dovuta al campo elettrico è esattamente compensata dalla deflessione nella stessa direzione e in verso contrario dovuta al campo magnetico. La condizione (7.41) è verificata però solo per quegli ioni la cui velocità soddisfa alla

$$v = \frac{E}{B} \quad (7.42) \quad \text{Selettore di velocità}$$

Riassumendo, una particella carica può compiere un moto rettilineo uniforme in una regione in cui esistono un campo  $E$  e un campo  $B$  uniformi se questi sono ortogonali tra loro e alla velocità iniziale e se il modulo della velocità è eguale al rapporto dei moduli dei campi secondo (7.42); i versi dei campi devono essere tali che il prodotto  $E \times B$  abbia lo stesso verso di  $v$  (vedi figura 7.51). Variando uno o entrambi i valori dei campi è possibile scegliere un determinato valore di velocità. Con  $v = 10^5$  m/s e  $B = 0.1$  T deve essere  $E = 10^4$  V/m. Il sistema costituisce quindi un *selettore di velocità*.

Nello spettrometro di massa di Bainbridge (figura 7.52) le particelle cariche emesse dalla sorgente vengono accelerate, passano attraverso un *selettore di velocità* ed entrano in una regione in cui agisce solo un campo magnetico uniforme  $B_0$ , come nello spettrometro di Dempster. La traiettoria è una semicirconferenza di raggio  $r = m v / q B_0$  e combinando con (7.42) si ha

$$\frac{m}{q} = \frac{B_0 B}{E} r, \quad r = \frac{E}{B_0 B} \frac{m}{q} \quad (7.43)$$

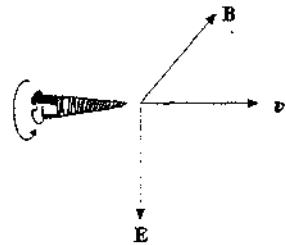


Figura 7.51

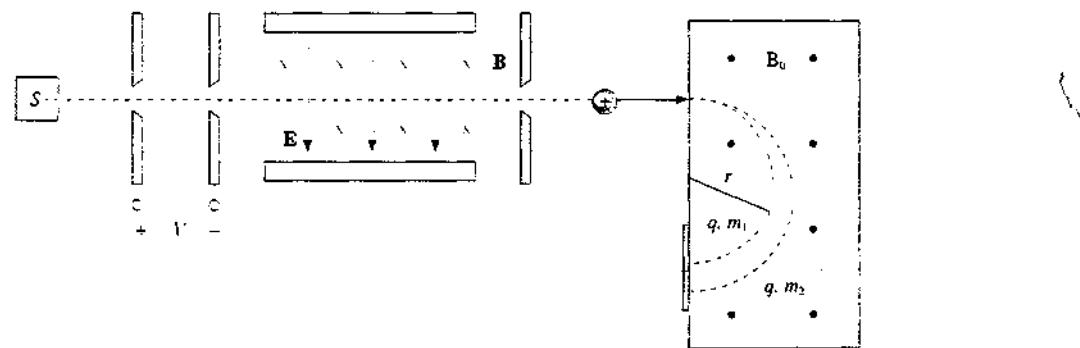


Figura 7.52

Valgono tutte le considerazioni fatte per lo spettrometro di Dempster circa l'utilizzo e la taratura se lo strumento viene impiegato per separare isotopi di uno stesso elemento e per la misura di masse di ioni in generale. È da notare che lo strumento è *lineare* in quanto la gran-

dezza  $m$  da misurare è direttamente proporzionale alla grandezza  $r$  misurata; la sensibilità è costante in tutto l'intervallo di misura.

Il rapporto  $e/m$  può essere misurato anche per gli elettroni se si utilizza come sorgente un filamento di tungsteno percorso da corrente, da cui vengono emessi elettroni per effetto termoelettronico (vedi paragrafo 6.5). Da (7.7) nella forma relativistica e da (7.42) si ha

$$r = \frac{m\gamma v}{eB_0} = \frac{m\gamma E}{eB_0 B} \quad , \quad \frac{e}{m} = \frac{\gamma E}{B_0 Br}$$

Il raggio di curvatura varia proporzionalmente a  $\gamma v$ , se il rapporto  $e/m$  è costante; nell'esperimento si varia la velocità degli elettroni tramite la d.d.p. acceleratrice e si misura nel selettore di velocità.

Nella figura 7.53 sono rappresentati alcuni dati sperimentali tratti dalla letteratura. In funzione di  $v/c$  vediamo in particolare che il rapporto tra la carica e la massa dell'elettrone resta costante, come previsto dalla teoria della relatività; il valore del rapporto è  $1.76 \cdot 10^{11} \text{ C/kg}$ , in accordo con la prima misura eseguita da Thomson (esempio 2.4).

L'esperimento descritto venne eseguito per la prima volta da Bucherer nel 1909, quattro anni dopo la pubblicazione della teoria di Einstein, e costituì così una importante verifica sperimentale della stessa. Il successivo esperimento di Millikan (paragrafo 1.8) rese possibile il calcolo preciso della massa dell'elettrone.

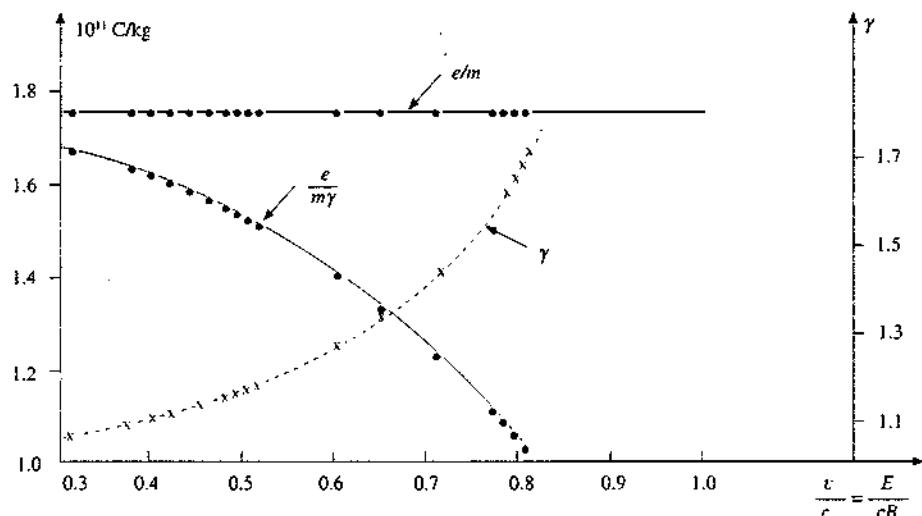


Figura 7.53

### Il ciclotrone

L'accelerazione di particelle caricate tramite campi elettrostatici ha un limite posto dalla massima d.d.p. raggiungibile, che è dell'ordine di  $10^5 \text{ V}$ , come discusso nel paragrafo 6.8 in relazione al generatore di Van de Graaf.

Un metodo alternativo, realizzato nel 1934 da Lawrence e Livingstone, consiste nella ripetuta applicazione di una d.d.p. variabile. La macchina si chiama *ciclotrone* e funziona secondo lo schema seguente (figura 7.54). Tra due cavità metalliche semicilindriche, chiamate D per la loro forma a *d* maiuscola, viene applicata una d.d.p. alternata  $V = V_0 \sin \omega_R t$ , detta *radiofrequenza*: le cavità sono immerse in un campo magnetico uniforme ad esse ortogonale.

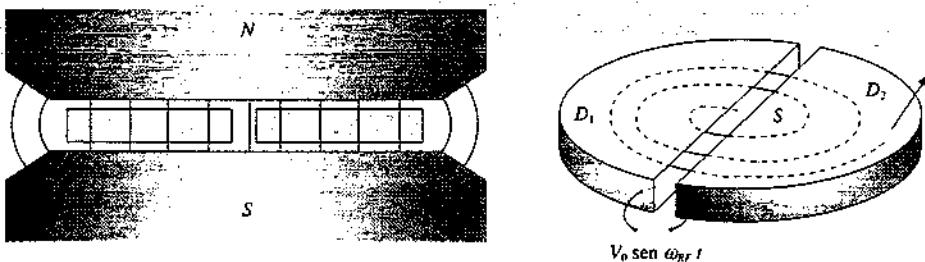


Figura 7.54

Uno ione di massa  $m$  e carica  $q$  viene iniettato nel sistema dalla sorgente  $S$  che si trova al centro e supponiamo che venga accelerato dalla d.d.p.  $V$  esistente in quell'istante tra le due  $D$ . Esso entra in  $D_1$ , al cui interno il campo elettrico è sostanzialmente nullo, e viene deviato dalla forza di Lorentz compiendo una semicirconferenza di raggio  $r_1 = m v_1 / q B$  dove  $v_1$  è la velocità acquistata, che si determina da  $1/2 m v_1^2 = q V$ ; dopo un tempo

$$t_1 = \frac{1}{2} \frac{2\pi r_1}{v_1} = \frac{\pi m}{q B}$$

lo ione esce da  $D_1$  per entrare in  $D_2$ . Se *nello stesso tempo* la radiofrequenza ha cambiato di segno lo ione subisce una seconda accelerazione tra  $D_1$  e  $D_2$  e si ha

$$\frac{1}{2} m v_2^2 = \frac{1}{2} m v_1^2 + q V = 2q V.$$

All'interno di  $D_2$  lo ione compie una semicirconferenza di raggio  $r_2 = m v_2 / q B > r_1$  nel tempo

$$t_2 = \frac{1}{2} \frac{2\pi r_2}{v_2} = \frac{\pi m}{q B} = t_1$$

Come del resto già sappiamo dal paragrafo 7.3: il *tempo (7.9) di percorrenza* di un'orbita circolare in campo magnetico *non dipende* dalla *velocità della particella*. Se intanto nel tempo  $t_1$  la radiofrequenza ha cambiato di nuovo segno il processo di accelerazione si ripete tra  $D_2$  e  $D_1$  e così via.

La condizione di funzionamento è dunque che il tempo  $t$  impiegato a percorrere mezzo giro sia eguale al semiperiodo della radiofrequenza ovvero

$$T_{RF} = \frac{2\pi}{\omega_{RF}} = 2t = \frac{2\pi m}{q B} \Rightarrow \omega_{RF} = \frac{q B}{m} = \omega \quad : \quad (7.44)$$

*la pulsazione  $\omega_{RF}$  della radiofrequenza, detta pulsazione di ciclotrone, deve essere eguale alla velocità angolare degli ioni (7.8).*

Il processo continua finché lo ione raggiunge il raggio massimo  $R$ , determinato dalle dimensioni del magnete del ciclotrone. A tale raggio corrisponde la velocità massima dello ione.

$$v_{max} = \frac{q B R}{m}$$

e quindi l'energia cinetica massima

$$E_{k,max} = \frac{1}{2} m v_{max}^2 = \frac{q^2 B^2 R^2}{2m} \quad : \quad (7.45)$$

Pulsazione di ciclotrone

Dal momento che ad ogni giro lo ione acquista l'energia cinetica  $2qV$ , il numero di giri per raggiungere l'energia cinetica massima è

$$N = \frac{E_{k,\max}}{2qV} = \frac{qB^2R^2}{4mV} \quad (7.46)$$

a cui corrisponde il tempo

$$t_N = \frac{2\pi m}{qB} N = \frac{\pi R^2 B}{2V} \quad (7.47)$$

A tal punto con un opportuno meccanismo il fascio di ioni accelerati viene deflesso all'esterno del ciclotrone e guidato verso la zona di utilizzazione e può avere inizio un nuovo ciclo di accelerazione; si dice che il *ciclorrone* è una macchina a funzionamento *pulsato*, cioè non continuo.

Anche questo metodo presenta una limitazione fondamentale. Al crescere della velocità delle particelle occorre usare formule relativistiche; da (7.7) risulta  $\omega = qB/m\gamma$ : per piccole velocità è corretta (7.44) in quanto  $\gamma \approx 1$ , ma quando  $v \geq 0.1 c$  l'effetto di  $\gamma$  non si può trascurare. Riferendoci, come si fa comunemente, alla frequenza di rivoluzione, scriviamo:

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{qB}{2\pi m\gamma} = \frac{\nu_0}{\pi} = \nu_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (7.48)$$

#### Frequenza di ciclotrone

dove  $\nu_0 = \omega_{RF}/2\pi = qB/2\pi m$  è la cosiddetta *frequenza di ciclotrone*. All'aumentare di  $v$  la frequenza  $\nu$  diminuisce (aumenta il periodo di rivoluzione) e si perde il sincronismo con la radiofrequenza che ha la frequenza fissa  $\nu_{RF} = \nu_0$ . Lo ione non risente più della stessa d.d.p. acceleratrice e finisce per presentarsi nell'intercapedine tra le due D in istanti in cui la d.d.p. è di segno sbagliato, venendo decelerato.

Il valore massimo di energia cinetica raggiungibile dagli ioni risulta dell'ordine di qualche decina di MeV. Risulta inoltre che il metodo è *inapplicabile agli elettroni* i quali, avendo massa molto inferiore a quella degli ioni (1836 volte inferiore a quella del protone, che è lo ione  $H^+$ , e ancora di più per ioni più pesanti), raggiungono molto presto velocità relativistiche.

La difficoltà descritta è stata parzialmente superata agendo su  $\nu_{RF}$  che viene opportunamente diminuita durante il processo di accelerazione, in modo da seguire la variazione della frequenza di rivoluzione; a questo punto però il limite viene posto dalle dimensioni del magnete, in quanto al crescere dell'energia deve crescere  $R$ . Il più grande ciclotrone a frequenza variabile, detto *sincrociclotrone*, ha raggiunto energie di circa 600 MeV con fasci di protoni.

Per ottenere energie superiori è stato inventato un diverso sistema magnetico, utilizzato sempre in combinazione con il principio dell'orbita circolare che consente di riapplicare la d.d.p. acceleratrice; la macchina è denominata *sincrotron* e la realizzazione maggiore attualmente funzionante permette di ottenere protoni con energia di  $1 \text{ TeV} = 10^{12} \text{ eV}$  (il raggio di curvatura è di circa 2 km). Accenneremo brevemente al principio costruttivo nel capitolo 9.

#### Esempio 7.6

Un ciclotrone ha raggio  $R = 0.5 \text{ m}$  e campo magnetico  $B = 1.3 \text{ T}$  e viene utilizzato per accelerare particelle  $\alpha$ , cioè ioni  $\text{He}^{++}$  con carica  $q = 2e$  e massa  $m = 6.64 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ . Calcolare l'energia cinetica massima, il numero di giri e il tempo di accelerazione: si ponga  $V = 10^4 \text{ V}$ .

#### Soluzione

Da (7.45) abbiamo

$$E_{k,\max} = \frac{(2 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 1.3 \cdot 0.5)^2}{2 \cdot 6.64 \cdot 10^{-27}} = 3.26 \cdot 10^{-12} \text{ J} = 20.4 \text{ MeV}$$

L'incremento di energia per giro è  $2qV = 4 \cdot 10^{-2}$  MeV; il numero totale di giri e il tempo di accelerazione, secondo (7.46) e (7.47), valgono

$$N = 510 \quad , \quad t_N = 5.1 \cdot 10^{-5} \text{ s}$$

La frequenza di ciclotrone delle particelle  $\alpha$  è

$$\nu_0 = \frac{qB}{2\pi m} = 9.971 \cdot 10^6 \text{ Hz}$$

e  $\nu_{RF}$  deve essere eguale a  $\nu_0$ .

Dato che la velocità massima alla fine del ciclo è

$$v_{max} = \sqrt{\frac{2E_{k,max}}{m}} = 3.13 \cdot 10^7 \text{ m/s}$$

la frequenza di ciclotrone secondo (7.48) è

$$\nu = 0.9945 \nu_0 = 9.916 \cdot 10^6 \text{ Hz} \quad ,$$

ovvero

$$\frac{\nu_0 - \nu}{\nu_0} = 5.5 \cdot 10^{-3} \quad ,$$

e quindi la *condizione di isocronismo* non è apprezzabilmente modificata. A rigore andrebbero usate nel calcolo di  $E_k$  e  $v$  formule relativistiche, però essendo  $v^2/c^2 \ll 1$  l'approssimazione classica è sufficiente (un elettrone con 20 MeV di energia ha invece  $v = 0.9997 c$ ).

Ricollegandoci a quanto detto all'inizio di questo paragrafo, osserviamo che il principio della riapplicazione della stessa d.d.p. non può essere esteso agli acceleratori elettrostatici: infatti il campo elettrostatico è conservativo e quindi il lavoro lungo un percorso chiuso è nullo. Se gli ioni, dopo essere stati accelerati da un dato campo, ovvero da una data d.d.p., venissero deviati con un campo magnetico per essere riportati al punto di partenza, essi dovrebbero attraversare in senso contrario la stessa d.d.p. e sarebbero decelerati fino al valore della velocità iniziale. Invece un campo elettrico variabile non è conservativo, come avremo modo di discutere in seguito, e quindi il suo integrale lungo una linea chiusa, pari a una f.e.m., può essere diverso da zero, rendendo possibile una fornitura positiva di lavoro ad ogni giro.



# Sorgenti del campo magnetico. Legge di Ampère

## 8.1 Campo magnetico prodotto da una corrente

Nel capitolo 7 abbiamo esposto alcune proprietà dell'interazione magnetica, sottolineando il fatto che essa si manifesta tra cariche elettriche in movimento, e abbiamo analizzato la forza su un circuito percorso da corrente partendo dalla forza di Lorentz (7.5). Seguendo un procedimento già visto in elettrostatica, la forza è espressa dal prodotto tra una grandezza caratteristica del sistema che subisce l'interazione (una carica in moto o una corrente in un circuito) e il campo **B** generato dalle sorgenti; si pensa cioè alla forza come il risultato di una interazione tra carica o corrente e campo.

In questo paragrafo ci occupiamo del legame esplicito tra il campo magnetico e le correnti che lo generano, arrivando a delle espressioni che hanno lo stesso significato di (1.16) e (1.22), relative al legame tra il campo elettrostatico e le cariche fisse che ne sono le sorgenti.

L'analisi dei primi esperimenti sulle caratteristiche del campo magnetico prodotto da correnti in conduttori filiformi indusse Laplace a formulare una legge, nota come *prima legge elementare di Laplace*, che esprime il campo magnetico prodotto da un tratto infinitesimo  $ds$  di filo, percorso dalla corrente  $i$ , in un punto  $P$  distante  $r$  dall'elemento di filo:

$$d\mathbf{B} = k_m i \frac{ds \times \mathbf{u}_r}{r^2} = k_m \frac{i ds}{r^2} \mathbf{u}_r \times \mathbf{u}_t ;$$

$\mathbf{u}_r$  è il versore della direzione orientata da  $ds$  a  $P$ ,  $\mathbf{u}_t$  il versore tangente al filo per cui  $ds = ds \mathbf{u}_t$ ,  $k_m$  è una costante che dipende dal sistema di unità di misura e dal mezzo materiale in cui si sperimenta. Assumendo di operare nel vuoto, come faremo in tutto questo capitolo, nel sistema internazionale si ha

$$k_m = 10^{-7} \frac{\text{Tm}}{\text{A}} = 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}} ,$$

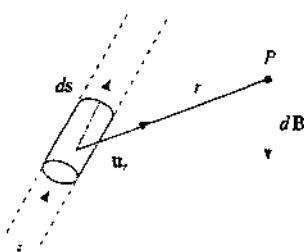


Figura 8.1

dove l'unità  $\text{H/m}$  (henry su metro) verrà giustificata alla fine del paragrafo 8.5. In realtà  $k_m$  viene sempre scritta come

$$k_m = \frac{\mu_0}{4\pi}$$

e la costante

$$\mu_0 = 4\pi k_m = 4\pi \cdot 10^{-7} = 1.26 \cdot 10^{-6} \frac{\text{H}}{\text{m}} \quad (8.1)$$

è chiamata *permeabilità magnetica del vuoto*.

La prima legge elementare di Laplace diventa pertanto

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{ds \times \mathbf{u}_r}{r^2} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{ds}{r^2} \mathbf{u}_r \times \mathbf{u}_r . \quad (8.2)$$

Permeabilità magnetica  
del vuoto

Prima legge elementare  
di Laplace

Il campo magnetico elementare di un tratto infinitesimo di circuito risulta proporzionale alla corrente e inversamente proporzionale al quadrato della distanza; l'orientazione di  $\mathbf{B}$  è legata al verso della corrente, cioè a  $\mathbf{u}_r$ , dalla regola del prodotto vettoriale che abbiamo già visualizzato con la *regola della vite*: una vite che avanza lungo la corrente indica con il suo verso di rotazione il verso delle linee di  $\mathbf{B}$ . Si usa spesso anche la cosiddetta *regola della mano destra*: se il pollice della mano destra, tenuta chiusa a pugno, punta nel verso della corrente, le linee di  $\mathbf{B}$  circondano la corrente nel verso indicato dalla punta delle altre dita (si veda la figura 8.2).

La formula (8.2) ha validità generale, però soltanto come strumento matematico di calcolo; valgono infatti in proposito osservazioni analoghe a quelle fatte per la seconda legge elementare di Laplace (7.13): sperimentalmente non è possibile misurare in alcun modo il contributo di un elemento infinitesimo di filo, che a sua volta non può esistere da solo.

Ciò che ha significato fisico, e si può misurare, è la sovrapposizione dei contributi (8.2), cioè l'integrale di (8.2) esteso a un circuito chiuso finito; il risultato costituisce la *legge di Ampère-Laplace*,

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint \frac{ds \times \mathbf{u}_r}{r^2} \quad (8.3)$$

Legge di Ampère-Laplace

che dà in ogni punto dello spazio il campo magnetico dovuto a un circuito chiuso di forma qualunque, percorso dalla corrente stazionaria  $i$ . La (8.3), che risulta verificata sperimentalmente in ogni situazione, fornisce il legame cercato tra il campo magnetico e la corrente che lo genera, se questa circola in un conduttore filiforme, la cui sezione è tale da poter ritenere su di essa costanti tutti i parametri che compaiono in (8.3).

Più in generale, se il conduttore non è filiforme, si considera un elemento lungo  $ds$ , di sezione  $d\Sigma$ , percorso da una corrente di densità  $\mathbf{j}(x, y, z)$ ; l'elemento di corrente della (8.2) si scrive

$$di ds = \mathbf{j} d\Sigma ds = \mathbf{j} d\tau$$

tenuto conto che  $\mathbf{j}$  è parallelo a  $ds$ . La (8.2) diventa

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{u}_r}{r^2} d\tau \quad (8.4)$$

e integrando a tutto il volume  $\tau$  in cui  $\mathbf{j}$  è diverso da zero si ottiene

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{u}_r}{r^2} d\tau \quad (8.5)$$

Se è nota la distribuzione delle correnti, (8.5) permette di calcolare il campo magnetico  $\mathbf{B}$  in tutto lo spazio.

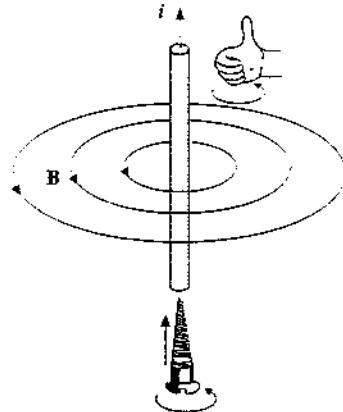


Figura 8.2

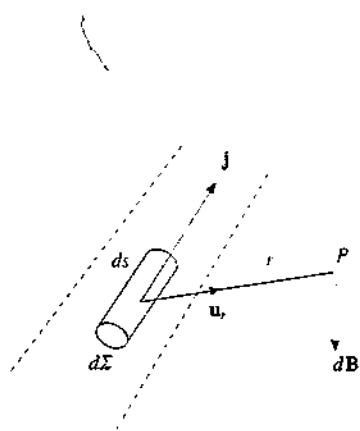


Figura 8.3

In caso di presenza di più circuiti il campo magnetico risultante si calcola sommando vettorialmente i termini (8.3) o (8.5) dovuti a ciascun circuito.

### Campo magnetico prodotto da una carica in moto

Ricordiamo che la densità di corrente è legata alla velocità dei portatori di carica e al loro numero per unità di volume dalla  $\mathbf{j} = n q \mathbf{v}$ ; sostituendo nella (8.4) abbiamo

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \mathbf{v} \times \mathbf{u}_r}{r^2} n d\tau$$

in cui  $n d\tau$  dà il numero di cariche contenute nel volume  $d\tau$  che con il loro moto producono il campo  $d\mathbf{B}$ . Allora il campo magnetico prodotto da una singola carica in moto è

Campo magnetico di una carica in moto

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \mathbf{v} \times \mathbf{u}_r}{r^2}, \quad (8.6)$$

misurato nel sistema di riferimento in cui la carica ha la velocità  $\mathbf{v}$ .

Il campo elettrico dovuto alla carica, nello stesso punto  $P$  in cui abbiamo calcolato il campo magnetico (8.6), è

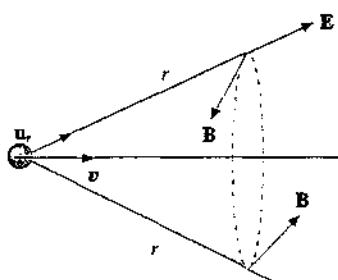


Figura 8.4

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \mathbf{u}_r,$$

ammettendo che continui a valere la formula elettrostatica anche se la carica è in moto. Segue che possiamo scrivere

$$\mathbf{B} = \epsilon_0 \mu_0 \mathbf{v} \times \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E}, \quad (8.7)$$

stabilendo così una stretta relazione tra campo elettrico e magnetico prodotti da una carica in moto. Nella (8.7) abbiamo posto

$$c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \Rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad (8.8)$$

essendo  $c = 3 \cdot 10^8$  m/s la *velocità della luce nel vuoto*. In effetti, se prendiamo i valori (1.6) e (8.1) delle costanti  $\epsilon_0$  e  $\mu_0$  troviamo che la (8.8) è soddisfatta. Torneremo alla fine del paragrafo 8.3 su questa importante relazione.

La (8.6) è verificata finché la velocità  $v$  è trascurabile rispetto a  $c$ , più precisamente finché  $(v/c)^2 \ll 1$ : anche l'espressione del campo elettrico ha le stesse limitazioni.

L'interesse di (8.6) risiede nel fatto che essa mette in evidenza come il campo magnetico dipenda dal moto delle cariche, indipendentemente dalle cause che producono il moto. Quindi c'è da attendersi che non solo una corrente in un conduttore generi un campo magnetico, ma anche un moto di cariche ottenuto con altri mezzi, quali quelli meccanici impiegati nell'acceleratore di Van de Graaf (cinghia carica mobile); tratteremo questo argomento nell'esempio 8.2.

## 8.2 Calcoli di campi magnetici prodotti da circuiti particolari

Applichiamo adesso la prima legge elementare di Laplace (8.2) ad alcune configurazioni in cui la corrente percorre un conduttore filiforme di forma semplice. In sostanza l'integrale che compare nella legge finita (8.3) è esteso ad una linea tale che il calcolo si riduca a quello di un integrale unidimensionale. Vedremo nel paragrafo 8.4 un metodo alternativo molto più semplice da applicare nei casi che presentino simmetrie.

### Filo rettilineo indefinito. Legge di Biot-Savart

Consideriamo un filo conduttore rettilineo, di lunghezza  $2a$ , percorso dalla corrente continua  $i$ , e poniamoci sull'asse mediano del filo nel punto  $P$  distante  $R$  dal filo (vedi figura 8.5). Un elemento di filo produce in  $P$  il campo magnetico

$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{ds \times \mathbf{u}_r}{r^2} \Rightarrow dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{ds \sin \theta}{r^2}$$

Osserviamo che

$$r \sin(\pi - \theta) = r \sin \theta = R \Rightarrow \frac{1}{r^2} = \frac{\sin^2 \theta}{R^2},$$

$$s \tan(\pi - \theta) = -s \tan \theta = R \Rightarrow ds = \frac{R d\theta}{\sin^2 \theta},$$

$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{\sin \theta d\theta}{R} = -\frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d(\cos \theta)}{R}.$$

Il tratto di filo di lunghezza  $a$  (mezzo filo) produce quindi il campo di modulo

$$B_a = -\frac{\mu_0 i}{4\pi R} \int_{\cos \theta_i}^0 d(\cos \theta) = \frac{\mu_0 i \cos \theta_i}{4\pi R}$$

e il campo di tutto il filo vale, esprimendo  $\cos \theta_i$  in funzione della lunghezza del filo,

$$B = 2B_a = \frac{\mu_0 i a}{2\pi R \sqrt{R^2 + a^2}}$$

Nel piano mediano il campo magnetico  $\mathbf{B}$  è costante su ogni circonferenza di raggio  $R$  ed è tangente a tale circonferenza. Detto  $\mathbf{u}_\phi$  il versore tangente alla circonferenza e orientato rispetto al verso della corrente secondo la regola della vite, possiamo scrivere

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i a}{2\pi R \sqrt{R^2 + a^2}} \mathbf{u}_\phi \quad (8.9)$$

Facciamo ora tendere la lunghezza  $a$  all'infinito ovvero  $\theta_i$  a zero e  $\cos \theta_i$  a 1. La (8.9) diventa

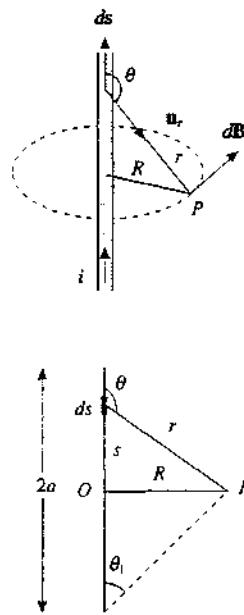


Figura 8.5

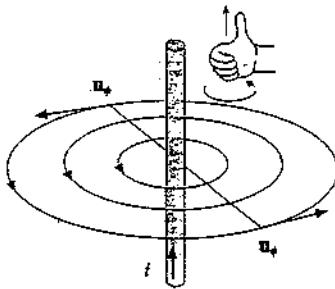


Figura 8.6

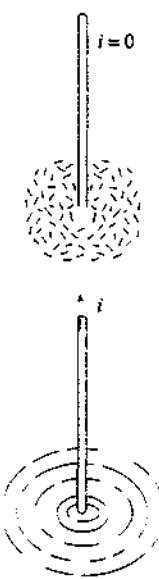


Figura 8.7

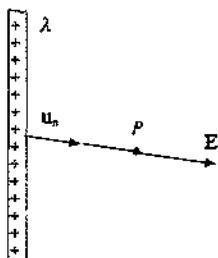


Figura 8.8

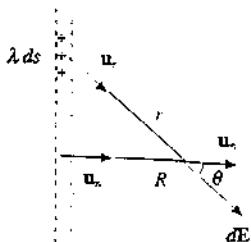


Figura 8.9

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \mathbf{u}_n = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \mathbf{u}_t \times \mathbf{u}_n \quad (8.10)$$

essendo  $\mathbf{u}_t$  il versore parallelo al filo e concorde alla corrente e  $\mathbf{u}_n$  il versore normale al filo diretto verso il punto  $P$ .

La (8.10), nota come *legge di Biot-Savart*, afferma che il campo magnetico di un filo rettilineo indefinito dipende solo dalla distanza dal filo, in modo inversamente proporzionale; le sue linee sono circonferenze concentriche al filo. La struttura delle linee di  $\mathbf{B}$  si mette facilmente in evidenza con limatura di ferro posta in un piano ortogonale al filo. Mentre in assenza di corrente non si nota una disposizione ordinata, quando nel filo passa una corrente continua i grani si addensano lungo circonferenze con centro sul filo. L'esperienza si può anche eseguire con aghi magnetici posti a eguale distanza  $R$  dal filo, che si orientano tangenzialmente a una circonferenza di raggio  $R$  (se rispetto al campo del filo si possono trascurare gli effetti del campo magnetico terrestre); invertendo il verso della corrente nel filo gli aghi ruotano di  $180^\circ$ .

Il filo indefinito è un sistema ideale; nella realtà si può avere un circuito con un tratto rettilineo abbastanza lungo e la (8.10) risulta verificata se ci si mette a una distanza dal filo molto inferiore alla lunghezza.

È interessante collegare il risultato (8.10) a quello visto nell'esempio 1.6, relativo al campo elettrico (1.29) prodotto da un filo rettilineo indefinito carico con densità uniforme  $\lambda$ :

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \mathbf{u}_t \times \mathbf{u}_n \quad \mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 R} \mathbf{u}_n$$

Il campo  $\mathbf{E}$  è stato ottenuto come sovrapposizione dei contributi ortogonali al filo degli elementi di filo con carica  $dq = \lambda ds$  (i contributi paralleli si elidono):

$$dE = \frac{\lambda ds}{4\pi \epsilon_0 r^2} \sin\theta$$

Si può allora ipotizzare che anche il campo magnetico, il cui modulo ha la stessa struttura di quello del campo elettrico, si possa ottenere sommando contributi elementari: sostituendo  $1/4\pi\epsilon_0$  con  $\mu_0/4\pi$ ,  $\lambda$  con  $i$  e abbiamo

$$dB = \frac{\mu_0 i ds}{4\pi r^2} \sin\theta$$

Sistemando la parte vettoriale in accordo con l'indicazione sperimentale sull'andamento delle linee di campo si ottiene (8.2).

Proprio da queste osservazioni è nata la prima legge elementare di Laplace, dimostratasi poi valida in qualsiasi circostanza.

### Esempio 8.1

Calcolare il campo magnetico prodotto da una spira quadrata di lato  $2a$  nei punti dell'asse della spira.

#### Soluzione

Ciascun lato della spira, ad esempio quello denominato 1, produce sull'asse  $x$ , normale alla spira, il campo magnetico  $B$ , dato da (8.9), di modulo

$$B_1 = \frac{\mu_0 i a}{2\pi R \sqrt{R^2 + a^2}}$$

la cui componente lungo l'asse  $x$  è (vedi figura 8.10)

$$B_{1,x} = \frac{\mu_0 i a \cos \alpha}{2\pi R \sqrt{R^2 + a^2}} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \left(\frac{a}{R}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{R^2 + a^2}}$$

Il campo risultante sull'asse è

$$\mathbf{B} = 4 \mathbf{B}_{1,x} = \frac{2\mu_0 i}{\pi} \frac{a^2}{(x^2 + a^2) \sqrt{x^2 + 2a^2}} \mathbf{u}_x ,$$

avendo sostituito  $x^2 + a^2$  a  $R^2$ ; esso è parallelo all'asse  $x$  in quanto, nei punti dell'asse, le quattro componenti ortogonali si elidono. Nel centro della spira ( $x = 0$ ) il campo magnetico è massimo e vale

$$\mathbf{B}_{\max} = \frac{\mu_0 \sqrt{2}}{\pi a} i \mathbf{u}_x ,$$

mentre per  $x$  tendente all'infinito il campo magnetico tende a zero.  
A grande distanza dalla spira  $x \gg a$  e quindi

$$\mathbf{B} = \frac{2\mu_0 i}{\pi} \frac{a^2}{x^3} \mathbf{u}_x .$$

Secondo la definizione (7.18) di momento magnetico di una spira piana, per la spira quadrata di lato  $2a$  si ha

$$\mathbf{m} = i \sum \mathbf{u}_n = 4 a^2 i \mathbf{u}_n$$

e il campo magnetico sull'asse ( $\mathbf{u}_n = \mathbf{u}_x$ ) si scrive

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2 \mathbf{m}}{r^3} , \quad (8.11)$$

identico come struttura a

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{2 \mathbf{p}}{r^3} ,$$

campo elettrico sull'asse di un dipolo elettrico (paragrafo 2.7). Il campo magnetico sull'asse di una spira piccola (come appare se  $x \gg a$ ) è un *campo di dipolo*. Ritneremo tra poco sull'argomento, ma diciamo fin d'ora che il risultato è valido per circuiti piani percorsi da corrente qualunque sia la loro forma e costituisce l'altro aspetto del principio di equivalenza di Ampère, secondo cui una spira e un dipolo sono equivalenti anche agli effetti del campo magnetico prodotto, oltre che delle forze subite in campo magnetico.

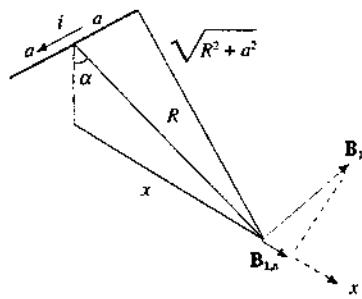
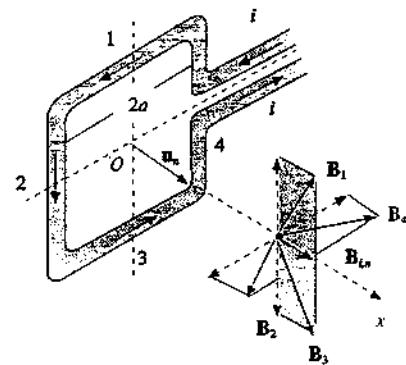


Figura 8.10

### Spira circolare

Passiamo ora a calcolare il campo magnetico sull'asse di una spira circolare di raggio  $R$ , percorsa dalla corrente  $i$ . Nel punto  $P$ , distante  $x$  dal centro  $O$  della spira, un elemento  $ds$  di spira genera il campo  $d\mathbf{B}$  di modulo

$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{|ds \times \mathbf{u}_r|}{r^2} = \frac{\mu_0 i ds}{4\pi r^2} ,$$

in quanto  $ds$  e  $\mathbf{u}_r$  sono ortogonali. La componente lungo l'asse  $x$  vale

$$dB_x = \frac{\mu_0 i ds}{4\pi r^2} \cos \theta ,$$

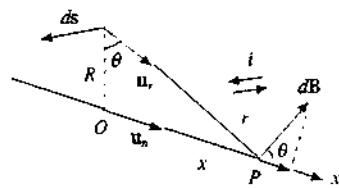


Figura 8.11

se  $\theta$  è l'angolo formato da  $d\mathbf{B}$  con l'asse  $x$ . Quando si considerano i contributi  $d\mathbf{B}$  di tutti gli elementi  $ds$  che formano la spira, le componenti parallele all'asse si sommano, mentre quelle trasversali si elidono a due a due, per la simmetria del problema. Nei punti dell'asse della spira il campo magnetico è dunque parallelo all'asse stesso e concorde a questo se l'orientazione corrisponde a quella della corrente secondo la regola della vite. In totale

$$\mathbf{B} = \oint \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{\cos\theta}{r^2} ds \mathbf{u}_n = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{\cos\theta}{r^2} 2\pi R \mathbf{u}_n ,$$

essendo  $\cos\theta$  e  $r$  costanti, fissato il punto  $P$ . Posto  $r^2 = x^2 + R^2$  e  $\cos\theta = R/r$ , si ottiene

Campo sull'asse di una spira circolare

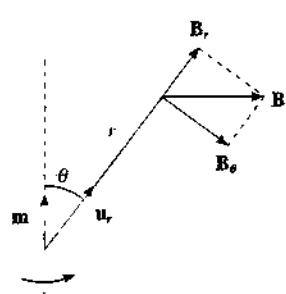
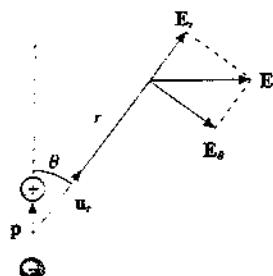


Figura 8.12

Osserviamo che  $\mathbf{B}$  ha lo stesso verso in tutti i punti dell'asse.

Nel centro della spira ( $x = 0$ ) il campo è massimo e vale

$$\mathbf{B}_{\max} = \frac{\mu_0 i}{2R} \mathbf{u}_n ; \quad (8.13)$$

per  $x \rightarrow \infty$  il campo tende a zero.

Quando è soddisfatta la condizione  $x \gg R$  la (8.12) diventa

$$\mathbf{B}(x) = \frac{\mu_0 i R^2}{2x^3} \mathbf{u}_n = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2i\pi R^2}{x^3} \mathbf{u}_n = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mathbf{m}}{r^3} \quad (8.14)$$

se indichiamo con  $\mathbf{m} = i \sum \mathbf{u}_n = i \pi R^2 \mathbf{u}_n$  il momento magnetico (7.18) della spira.

Anche nel caso della spira circolare ritroviamo il risultato (8.11) già visto nell'esempio 8.1, e cioè che il campo magnetico prodotto dalla spira nei punti dell'asse ha la stessa struttura del campo elettrico prodotto da un dipolo, purché ci si ponga a una distanza molto maggiore delle dimensioni del sistema. L'analogia non è limitata ai punti dell'asse, ma si trova che in generale l'andamento del campo magnetico  $\mathbf{B}$  della spira è identico a quello del campo elettrico  $\mathbf{E}$  di un dipolo, così che valgono le espressioni (2.61)

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m}}{r^3} (2 \cos\theta \mathbf{u}_r + \sin\theta \mathbf{u}_\theta) \quad (8.15)$$

in cui sono messe in evidenza la componente radiale e la componente trasversa, e (2.62)

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} [3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{u}_r) \mathbf{u}_r - \mathbf{m}] \quad (8.16)$$

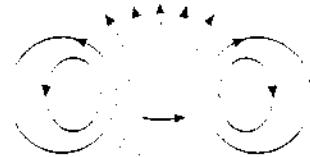


Figura 8.13

in cui il campo  $\mathbf{B}$  è dato come somma di una componente radiale e di una componente antiparallela al momento magnetico  $\mathbf{m}$ ; il verso di  $\mathbf{m}$  è legato a quello della corrente dalla solita convenzione.

Come nel caso del filo rettilineo i risultati possono essere verificati osservando con la limatura di ferro gli spettri magnetici oppure analizzando le linee di campo con un piccolo ago magnetico: si trova confermato pienamente il postulato di equivalenza di Ampère.

Se in un punto distante  $r$  da una spira di momento magnetico  $\mathbf{m}_1$ , lungo la direzione orientata individuata dal versore  $\mathbf{u}_1$ , viene posta una seconda spira di momento magnetico  $\mathbf{m}_2$ , l'energia potenziale magnetica si scrive seguendo (2.72):

$$U_p = -\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} [\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{m}_2 - 3(\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{u}_1)(\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{u}_1)] \quad (8.17)$$

La simmetria dell'espressione di  $U_p$  rispetto a  $\mathbf{m}_1$  e  $\mathbf{m}_2$  indica che (8.17) descrive l'*interazione mutua dipolo-dipolo nel caso magnetico*.

Per calcolare la *forza di interazione* tra due dipoli o il *momento* rispetto ad un asse di rotazione si utilizzano le (7.32), (7.33)

$$\mathbf{F} = -\nabla U_p = \nabla (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{B}_1) , \quad M_o = -\frac{\partial U_p}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{B}_1) \quad (8.18)$$

Valgono in particolare casi analoghi a quelli visti nel paragrafo 2.9 con riferimento alle figure 2.59 e 2.60.

Esiste però una differenza sostanziale tra le linee del campo elettrico di un dipolo elettrico e del campo magnetico di una spira nelle immediate vicinanze del sistema: le prime escono o entrano nelle cariche sorgenti, le seconde sono *continue senza inizio o fine* (si veda la figura 8.14). La struttura delle linee del campo elettrico dipolare è in accordo con la proprietà che la circuitazione di  $\mathbf{E}$  lungo una qualsiasi linea chiusa sia nulla; invece se prendiamo un percorso chiuso coincidente con una delle linee del campo  $\mathbf{B}$  di una spira circolare ci accorgiamo che il campo è sempre equiverso lungo tale linea e quindi la sua circuitazione non può essere nulla. Questa differenza non è legata al caso particolare, ma è una proprietà fondamentale del campo magnetico, come vedremo nel paragrafo 8.4: si trova qui il limite del principio di equivalenza di Ampère, dovuto sostanzialmente alla non esistenza dei dipoli magnetici.

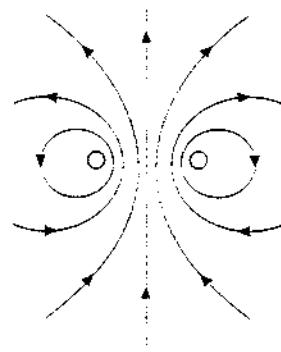
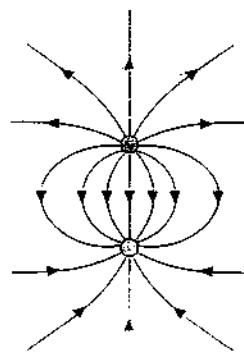


Figura 8.14

### Esempio 8.2 Disco di Rowland

Un disco di raggio  $R = 20$  cm possiede una carica elettrica distribuita uniformemente con densità  $\sigma = 10^{-6}$  C/m<sup>2</sup> e ruota intorno al proprio asse compiendo  $N = 200$  giri al secondo. Calcolare il campo magnetico prodotto sull'asse del disco a una distanza  $x = 1$  cm dal centro  $O$ .

#### Soluzione

La carica  $dq$  che si trova nella corona circolare compresa tra i raggi  $r$  e  $r + dr$  vale

$$dq = \sigma d\Sigma = 2\pi\sigma r dr ;$$

a causa della rotazione abbiamo una corrente equivalente

$$di = \frac{dq}{T} = \frac{\omega}{2\pi} 2\pi\sigma r dr = \omega\sigma r dr .$$

essendo  $T$  il periodo e  $\omega$  la velocità angolare del moto di rotazione. Tale spira di raggio  $r$  produce in un punto  $P$  dell'asse distante  $x$  dal centro il campo magnetico (8.12)

$$dB = \frac{\mu_0}{2} \frac{r^2}{(x^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 \omega \sigma}{2} \frac{r^3 dr}{(x^2 + r^2)^{3/2}} .$$

Il campo magnetico totale si ottiene integrando (ad esempio per parti) tra zero e  $R$ , considerando cioè il disco formato da infinite spire infinitesime, e risulta

$$B = \frac{\mu_0 \omega \sigma}{2} \left[ \frac{2x^2 + r^2}{(x^2 + r^2)^{1/2}} \right]_0^R = \frac{\mu_0 \omega \sigma}{2} \left[ \frac{2x^2 + R^2}{(x^2 + R^2)^{1/2}} \right] - 2x .$$

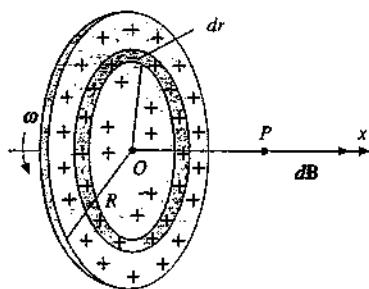


Figura 8.15

Se  $x^2 \ll R^2$ , come è nel nostro caso, il campo magnetico si può approssimare con l'espressione

$$B = \frac{\mu_0 \omega \sigma R}{2}$$

Numericamente, essendo  $\omega = 2\pi N = 4\pi \cdot 10^2$  rad/s,

$$B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 4\pi \cdot 10^2 \cdot 10^{-6} \cdot 0.2}{2} = 1.58 \cdot 10^{-10} \text{ T.}$$

Questo campo è molto piccolo rispetto al campo magnetico terrestre, che è dell'ordine di  $10^{-5}$  T, per cui la sua rivelazione pone notevoli problemi sperimentali. Tuttavia la misura fu eseguita da Rowland nel 1878 e mise in evidenza per la prima volta che gli effetti magnetici prodotti da un corpo carico in moto non differiscono qualitativamente da quelli delle correnti elettriche.

### Solenoidi rettilinei

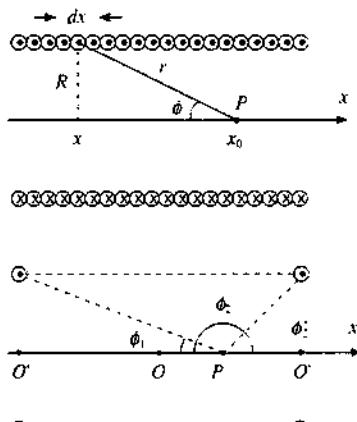


Figura 8.16

Un solenoide rettilineo è costituito da un filo conduttore avvolto a forma di elica cilindrica di piccolo passo. Sia  $d$  la lunghezza del solenoide,  $R$  il raggio,  $N$  il numero totale di spire,  $n = N/d$  il numero di spire per unità di lunghezza; se queste sono abbastanza fitte, così da poterle considerare distribuite con continuità, nel tratto  $dx$  ci sono  $n dx$  spire. Il valore del campo magnetico in un punto  $P$  sull'asse si calcola con la formula (8.12) del campo di una spira percorsa dalla corrente  $n i dx$ :

$$dB = \frac{\mu_0 i R^2 n}{2r^3} dx ;$$

esso è parallelo all'asse  $x$  ed è legato al verso della corrente dalla regola della vite. Introducendo la variabile  $\phi$  come in figura 8.16 si vede che

$$r \sin \phi = R , \quad x - x_0 = -R \operatorname{ctg} \phi , \quad dx = \frac{R d\phi}{\sin^2 \phi} \Rightarrow dB = \frac{\mu_0 n i}{2} \sin \phi d\phi .$$

Il campo magnetico nel punto  $P$  si ottiene sommando su tutte le spire ovvero integrando da  $\phi_1$  a  $\phi_2$ :

$$B = \frac{\mu_0 n i}{2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \sin \phi d\phi = \frac{\mu_0 n i}{2} (\cos \phi_1 - \cos \phi_2) = \frac{\mu_0 n i}{2} (\cos \phi_1 + \cos \phi_2') ,$$

in cui  $\phi_1$  e  $\phi_2' = \pi - \phi_2$  sono gli angoli sotto cui sono viste da  $P$  le spire terminali del solenoide.

Misurando  $x$  rispetto al centro del solenoide si ha

$$B(x) = \frac{\mu_0 n i}{2} \left[ \frac{d+2x}{\sqrt{(d+2x)^2 + 4R^2}} + \frac{d-2x}{\sqrt{(d-2x)^2 + 4R^2}} \right] . \quad (8.20)$$

Il campo magnetico è massimo al centro del solenoide ( $x=0$ ), dove vale

$$B_0 = \mu_0 n i \frac{d}{\sqrt{d^2 + 4R^2}} ; \quad (8.21)$$

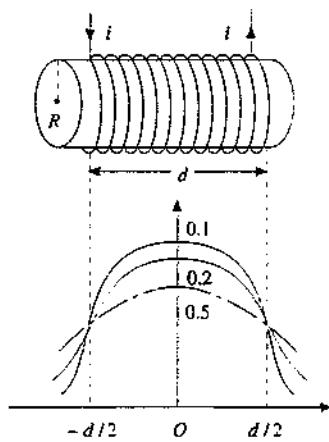


Figura 8.17

esso decresce simmetricamente rispetto al centro mantenendo su tutto l'asse lo stesso verso. Nel centro di una spira estrema, ad esempio quella di destra,  $x = d$ ,

$$\phi_2' = \pi/2, \cos\phi_2' = 0, \cos\phi_1 = d/\sqrt{d^2 + R^2} \text{ e quindi}$$

$$B_o = \frac{\mu_0 n i}{2} \frac{d}{\sqrt{d^2 + R^2}} \quad (8.22)$$

In particolare, se la lunghezza del solenoide è molto maggiore del raggio ( $d \gg R$ ), dal centro  $O$  le due spire terminali vengono viste sotto angoli quasi nulli, per cui  $\cos\phi_1 = \cos\phi_2' = 1$  e il campo magnetico in  $O$  vale

$$B_\infty = \mu_0 n i \quad (8.23)$$

risultato che si ottiene anche direttamente da (8.21); nel centro  $O$  delle spire terminali da (8.22) si ha  $B_o = \mu_0 n i / 2 = B_\infty / 2$ .

Nella figura 8.17 è riportato l'andamento del campo magnetico sull'asse del solenoide per vari valori del rapporto  $R/d$ . Quando tale rapporto è molto piccolo, al limite nullo (caso del solenoide indefinito), la zona in cui il campo magnetico ha all'incirca il valore  $B_\infty$  è piuttosto estesa; essa si restringe al crescere di  $R/d$  e contemporaneamente diminuisce il valore al centro, mentre si estende la regione all'esterno in cui c'è campo magnetico apprezzabilmente diverso da zero. È interessante notare, in vista di applicazioni che faremo nel capitolo 9, che la variazione  $dB/dx$  del campo magnetico sull'asse è massima in prossimità delle facce terminali del solenoide.

Le linee del campo  $\mathbf{B}$  prodotto da un solenoide, mostrate in figura 8.18, sono molto simili a quelle di un magnete cilindrico.

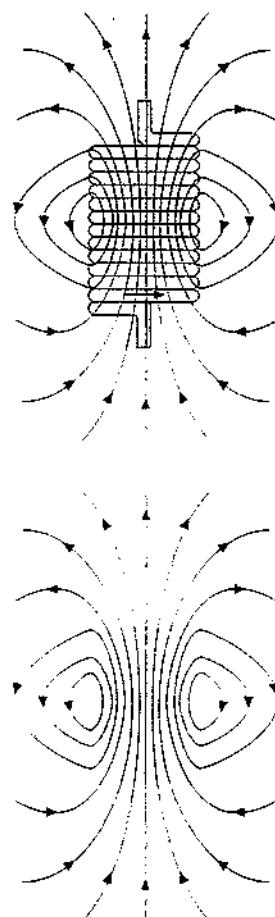


Figura 8.18

### Nota. Il campo magnetico terrestre (2)

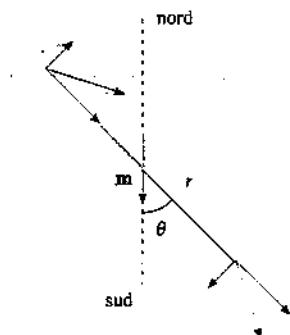
Nella nota alla fine del paragrafo 7.2 abbiamo accennato alle caratteristiche del campo magnetico terrestre. Alla luce di quanto stabilito adesso per il campo di una spira, possiamo dire che le componenti del campo magnetico terrestre sulla superficie terrestre ( $r = R_T = 6370 \text{ km}$ ) sono, in accordo con (8.15).

$$B_r = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2m \cos\theta}{R_T^3} \quad , \quad B_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m \sin\theta}{R_T^3} \quad ,$$

$m$  è il valore del momento magnetico del dipolo equivalente, sorgente del campo magnetico terrestre, detto *momento di dipolo geomagnetico*. Nell'emisfero nord  $B_r$  è negativa (punta verso la superficie terrestre) mentre è positiva nell'emisfero sud, confermando l'orientazione dal nord geografico al sud geografico del momento di dipolo  $m$ . Il valore di  $m$  si ricava dalla misura delle componenti del campo: ad esempio, all'angolo  $\theta = 105^\circ$  rispetto all'asse del dipolo geomagnetico queste hanno il valore

$$B_r = -2.16 \cdot 10^{-5} \text{ T} \quad , \quad B_\theta = 4.04 \cdot 10^{-5} \text{ T} \Rightarrow m = \frac{4\pi B_r R_T^3}{2\mu_0 \cos\theta} = \frac{4\pi B_\theta R_T^3}{\mu_0 \sin\theta} = 1.08 \cdot 10^{23} \text{ Am}^2.$$

All'equatore magnetico ( $\theta = \pi/2$ ),  $B_r = 0$  e  $B_\theta = \mu_0 m / 4\pi R_T^3 = 4.18 \cdot 10^{-5} \text{ T}$ , diretta dal sud al nord geografico (vedi figura 8.19): nei poli magnetici ( $\theta = 0$  e  $\theta = \pi$ )  $B_\theta = 0$  e  $B_r$  vale in modulo  $9.36 \cdot 10^{-5} \text{ T}$ . I poli magnetici distano circa 2000 km dai rispettivi poli geografici.



Si ritiene che le sorgenti del campo magnetico terrestre siano *correnti convettive* di ioni ed elettroni nel nucleo liquido della terra. Il fenomeno è legato anche al moto di rotazione: pianeti come Giove che ruotano più rapidamente della terra presentano un campo magnetico maggiore.

Diciamo infine che il campo magnetico terrestre non è costante nel tempo: vi sono variazioni periodiche dovute all'influenza del sole e della luna sui moti convettivi nel nucleo terrestre. Inoltre la posizione dei poli varia lentamente nel tempo: l'analisi di rocce ferromagnetiche di origine vulcanica ha rivelato che la direzione del campo magnetico terrestre si è invertita diverse volte nell'ultimo milione di anni.

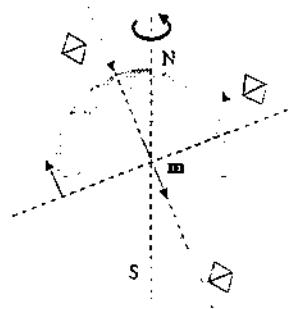
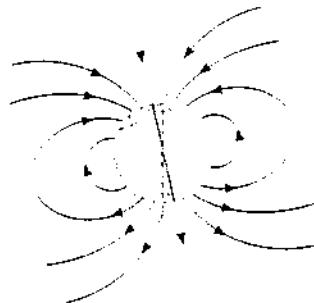


Figura 8.19 (Nota)

Forza tra due circuiti

### 8.3 Azioni elettrodinamiche tra circuiti percorsi da corrente

Calcoliamo ora la forza tra due circuiti percorsi da corrente, partendo dalle leggi elementari di Laplace (7.13) e (8.2). Detti  $ds_1$  e  $ds_2$  gli elementi di filo dei due circuiti e  $i_1$ ,  $i_2$  le rispettive correnti, la forza  $d\mathbf{F}_{1,2}$  agente sull'elemento  $ds_2$ , a causa del campo magnetico  $d\mathbf{B}_1$  prodotto da  $ds_1$  nel posto in cui si trova  $ds_2$ , è

$$d\mathbf{F}_{1,2} = i_2 ds_2 \times d\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{4\pi} \frac{ds_2 \times (ds_1 \times \mathbf{u}_1)}{r^2}$$

La forza esercitata da  $ds_2$  su  $ds_1$  è data da

$$d\mathbf{F}_{2,1} = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{4\pi} \frac{ds_1 \times (ds_2 \times \mathbf{u}_2)}{r^2}$$

Non è difficile trovare situazioni particolari in cui  $d\mathbf{F}_{1,2} \neq -d\mathbf{F}_{2,1}$ , in contrasto con il principio di azione e reazione; il fatto tuttavia non è preoccupante in quanto, come è stato notato, le leggi elementari di Laplace, considerate a sé, non si applicano a sistemi fisicamente realizzabili.

La forza risultante tra i due circuiti si ottiene con una doppia integrazione estesa ai due circuiti che tiene conto di tutte le coppie di elementi  $ds_1$  e  $ds_2$  tra i quali si esercitano le forze  $d\mathbf{F}$ :

$$\mathbf{F}_{1,2} = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{4\pi} \oint_1 \oint_2 \frac{ds_2 \times (ds_1 \times \mathbf{u}_1)}{r^2}, \quad \mathbf{F}_{2,1} = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{4\pi} \oint_2 \oint_1 \frac{ds_1 \times (ds_2 \times \mathbf{u}_2)}{r^2}. \quad (8.24)$$

Se ricordiamo la regola (3.35)

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c},$$

l'integrale che compare in  $\mathbf{F}_{1,2}$  si trasforma in

$$\oint_1 \oint_2 \frac{(ds_2 \cdot \mathbf{u}_1) ds_1}{r^2} - \oint_1 \oint_2 \frac{(ds_1 \cdot ds_2) \mathbf{u}_1}{r^2}.$$

Scrivendo  $\mathbf{u}_1 / r^2 = -\nabla(1/r)$ , il primo termine

$$\oint_1 \left[ \oint_2 \frac{ds_2 \cdot \mathbf{u}_1}{r^2} \right] ds_1 = - \oint_1 \left[ \oint_2 \nabla \left( \frac{1}{r} \right) \cdot ds_2 \right] ds_1$$

è nullo in quanto la circuitazione di un gradiente è sempre nulla.

Pertanto, dato che  $\mathbf{u}_1 = -\mathbf{u}_2$  e che gli integrali si possono scambiare,

$$\mathbf{F}_{1,2} = -\frac{\mu_0 i_1 i_2}{4\pi} \oint_1 \oint_2 \frac{(ds_1 \cdot ds_2) \mathbf{u}_1}{r^2} = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{4\pi} \oint_1 \oint_2 \frac{(ds_2 \cdot ds_1) \mathbf{u}_2}{r^2} = -\mathbf{F}_{2,1} : \quad (8.25)$$

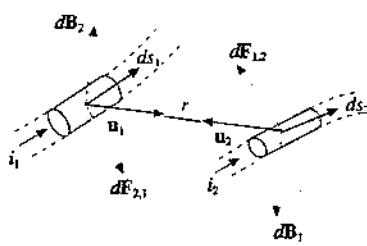


Figura 8.20

la forza tra i due circuiti obbedisce al principio di azione e reazione.

Esaminiamo in particolare due fili rettilinei molto lunghi e abbastanza vicini, così da poter essere considerati indefiniti, percorsi dalle correnti  $i_1$  e  $i_2$ . Se essi sono ortogonali la (8.25) dice subito che la forza è nulla ( $ds_1 \cdot ds_2 = 0$  ovunque). Se essi sono paralleli sempre da (8.25) si vede che nel caso le correnti siano *equiverse* ( $ds_1$  concorde a  $ds_2$ ) la forza è *attrattiva*:  $\mathbf{F}_{1,2}$  ha il verso di  $-\mathbf{u}_1$ ,  $\mathbf{F}_{2,1}$  di  $-\mathbf{u}_2$ ; se invece le correnti sono *discordi* la forza è *repulsiva*. Per il calcolo del modulo, detta  $r$  la distanza tra i fili, da (8.10) si ha che il campo magnetico del primo filo nei punti del secondo è  $B_2 = \mu_0 i_1 / 2\pi r$ ; su un tratto finito del secondo filo di lunghezza  $d$  si esercita allora la forza (7.15)

$$F_{1,2} = B_1 i_2 d = \frac{\mu_0 i_1 i_2 d}{2\pi r}$$

Per unità di lunghezza la forza subita dal secondo filo ad opera del primo vale

$$F_d = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi r} \quad (8.26)$$

ed è evidentemente eguale a quella subita dal primo filo ad opera del secondo.

L'undicesima Conferenza Internazionale di pesi e misure ha deciso nel 1960 di adottare come *grandezza elettrica fondamentale* l'intensità di corrente, definendone l'unità di misura in base a (8.26): ha l'*intensità di 1 A quella corrente che circolando in due fili rettilinei paralleli distanti  $r = 1 \text{ m}$  dà luogo a una forza  $F = \mu_0 / 2\pi$   $= 2 \cdot 10^{-7} \text{ N per metro di ciascun conduttore}$* . Si osservi che tale definizione fissa in pratica il valore di  $k_m$  ovvero fissa per la permeabilità magnetica del vuoto  $\mu_0$  il valore  $4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$ . Dalla (8.8), nota la velocità della luce nel vuoto, resta di conseguenza fissata  $\epsilon_0$ .

### Esempio 8.3 Elettrodinamometro assoluto a bilancia

Due spire circolari di raggio  $R = 30 \text{ cm}$  aventi lo stesso asse sono poste in piani paralleli orizzontali distanti  $a = 3 \text{ mm}$ . La spira superiore è appesa al giogo di una bilancia. Se nelle spire circola nello stesso verso la stessa corrente  $i = 1 \text{ A}$ , per ristabilire l'equilibrio occorre aggiungere sull'altro piatto della bilancia una massa  $m$  che ora determiniamo. Il rapporto tra la distanza  $a$  e la lunghezza  $2\pi R$  delle spire vale  $1.6 \cdot 10^{-3}$ : esso è molto piccolo e le due spire possono essere trattate come fili paralleli indefiniti. Tra di esse agisce allora la forza attrattiva

$$F = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi a} 2\pi R = \frac{\mu_0 R i^2}{a}$$

e l'equilibrio viene ristabilito se  $F = mg$ , cioè con una massa

$$m = \frac{\mu_0 R i^2}{a g} \approx 1.28 \cdot 10^{-5} \text{ kg} = 1.28 \cdot 10^{-2} \text{ g}$$

La forza e quindi la massa sono molto piccole e la misura si presenta difficile e con errori notevoli. A parità di corrente la forza aumenta se le due spire sono sostituite da due bobine compatte con  $n$  spire ciascuna: la geometria resta la stessa, ma la forza aumenta di un fattore  $n^2$ . Già con  $n = 10$  spire la massa diventa 1.28 g. più facile da determinare con elevata precisione.

In ogni caso, fissato il valore di  $\mu_0$  lo strumento permette di misurare la corrente attraverso misure di grandezze meccaniche: la *scala è quadratica*, come nell'elettrometro a bilancia (esempio 4.20).

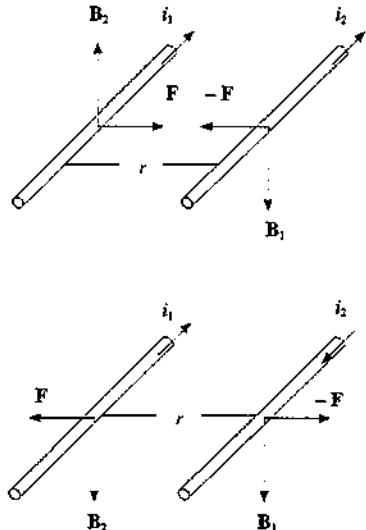


Figura 8.21

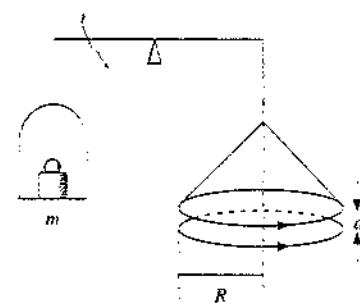
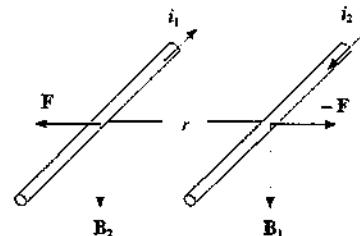


Figura 8.22

**Nota. I fattori  $4\pi$  nelle definizioni di  $\epsilon_0$  e  $\mu_0$** 

Detti  $k_e$  e  $k_m$  i coefficienti nelle espressioni delle forze tra due cariche e tra due correnti, vale la relazione

$$c^2 = k_e / k_m ,$$

come si vedrà quando deriveremo dalle equazioni di Maxwell l'esistenza delle onde elettromagnetiche. Le definizioni

$$k_e = 1 / 4\pi \epsilon_0 , \quad k_m = \mu_0 / 4\pi$$

trasformano la suddetta relazione nella (8.8),  $c^2 = 1/\epsilon_0 \mu_0$ .

Numericamente i valori delle grandezze elettriche e magnetiche non cambiano, però è diverso l'aspetto delle formule se si utilizzano  $k_e$  e  $k_m$  al posto di  $\epsilon_0$  e  $\mu_0$ . Ad esempio la legge di Gauss diventa

$$\Phi(\mathbf{E}) = 4\pi k_e q$$

e i campi elettrici nei casi a simmetria sferica, cilindrica e piana si scrivono rispettivamente

$$\mathbf{E} = \frac{k_e q}{r^2} \mathbf{u}_r , \quad \mathbf{E} = \frac{2k_e \lambda}{r} \mathbf{u}_r , \quad \mathbf{E} = 4\pi k_e \sigma \mathbf{u}_n .$$

Analogamente la legge di Biot-Savart (8.10) e il campo magnetico (8.23) all'interno di un solenoide rettilineo indefinito si scrivono

$$\mathbf{B} = \frac{2k_m i}{r} \mathbf{u}_r , \quad \mathbf{B} = 4\pi k_{mn} i \mathbf{u}_n .$$

Risulta che i fattori  $4\pi$  o  $2\pi$  non compaiono nelle forme relative a simmetrie circolari, dove i campi variano come  $1/r^2$  o  $1/r$ , ma si ritrovano nei campi costanti, dove le linee di campo sono rettilinee.

È da questo fatto che nacque la proposta di *razionalizzare* l'elettromagnetismo, sostituendo a  $k_e$  e  $k_m$  rispettivamente  $1/4\pi \epsilon_0$  e  $\mu_0 / 4\pi$ , con il che le formule assumono l'aspetto che abbiamo visto finora, con i fattori  $4\pi$  e  $2\pi$  presenti nei problemi in cui l'angolo solido e l'angolo piano hanno rilevanza, ma assenti negli altri casi. Alla razionalizzazione delle formule si accompagnò l'adozione del cosiddetto sistema Giorgi di unità di misura o *sistema m k s A razionalizzato*, in cui le unità fondamentali erano il *metro*, il *chilogrammo*, il *secondo* e l'*ampere*. Aggiungendo a queste le altre unità *Kelvin*, *mole* e *candela* si formò il *sistema internazionale*.

Osserviamo infine che la scelta del valore numerico di  $\mu_0$  e quindi di  $\epsilon_0$  fissa arbitrariamente i valori della costante dielettrica e della permeabilità magnetica dello spazio vuoto; l'effetto dei mezzi materiali è misurato rispetto a queste dalla *costante dielettrica relativa* e dalla *permeabilità magnetica relativa* (capitolo 9), i cui valori invece sono intrinseci e non dipendono dal sistema di unità di misura, essendo definiti tramite rapporti.

## 8.4 Legge di Ampère

Il legame tra le correnti e il campo magnetico da esse prodotto, che è dato dalle formule (8.3) e (8.5), può essere espresso attraverso un particolare integrale eseguito sul campo magnetico, così come avviene nel caso elettrostatico con la legge di Gauss (3.8).

Cominciamo col considerare un filo rettilineo indefinito percorso dalla corrente  $i$ , che produce il campo magnetico (8.10), e scriviamo il prodotto scalare tra il campo  $\mathbf{B}$  e un generico vettore infinitesimo  $ds$  posto nello spazio circostante il filo, a distanza  $r$  da questo:

$$\mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \mathbf{u}_\phi \cdot d\mathbf{s}$$

Ma  $\mathbf{u}_\phi \cdot d\mathbf{s}$  dà la proiezione di  $d\mathbf{s}$  lungo  $\mathbf{u}_\phi$ , che è eguale a  $r d\phi$ , e quindi

$$\mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} d\phi \quad :$$

il prodotto scalare indicato dipende dall'angolo piano sotto cui è vista la proiezione di  $d\mathbf{s}$  lungo la direzione di  $\mathbf{B}$ .

La circuitazione di  $\mathbf{B}$  estesa ad una linea chiusa è data da

$$\Gamma = \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \oint d\phi$$

Si presentano adesso due possibilità: o la *linea chiusa concatena il filo* (gli gira intorno), nel qual caso l'integrale a secondo membro vale  $2\pi$  per cui

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \pm \mu_0 i$$

dove il segno dipende dal fatto che l'orientazione della linea chiusa sia legata al verso della corrente nel filo dalla regola della vite (segno positivo) o sia opposta a questa (segno negativo). Oppure la *linea chiusa non concatena il filo* e allora l'integrale sull'angolo è nullo: infatti, per ogni trattino  $d\mathbf{s}$ , di curva con proiezione lungo  $\mathbf{B}$  vista sotto l'angolo  $d\phi$  c'è un altro trattino  $ds_2$ , con proiezione vista sotto l'angolo  $-d\phi$ , come è mostrato in figura 8.23.

Se la linea chiusa concatena più fili rettilinei percorsi dalle correnti  $i_1, i_2, \dots, i_n$  che producono i campi magnetici  $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_n$ , il campo magnetico in ogni punto dello spazio è dato da  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 + \dots + \mathbf{B}_n$  e quindi

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \oint (\sum_k \mathbf{B}_k) \cdot d\mathbf{s} = \sum_k \oint \mathbf{B}_k \cdot d\mathbf{s} = \sum_k \Gamma_k$$

Ciascuna circuitazione vale  $\mu_0 i_k$  o zero a seconda che la linea concatenti o no la corrente  $i_k$  e in conclusione possiamo scrivere che la circuitazione del campo magnetico è espressa dalla *legge detta di Ampère*

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 i \quad , \quad (8.27)$$

sottointendendo che la corrente a secondo membro è la *somma delle correnti concatenate*, ciascuna presa con il segno opportuno secondo la regola vista in precedenza.

Per quanto ricavata da noi nel caso del campo magnetico prodotto da fili indefiniti la legge di Ampère ha validità generale, qualunque sia la forma del circuito percorso da corrente, ed è una proprietà fondamentale del campo magnetico prodotto da correnti stazionarie.

Richiamiamo l'attenzione sul fatto che il campo magnetico che compare nell'integrale di linea è quello generato da *tutte* le correnti presenti: però la sua circuitazione dipende *solo* dalle correnti concatenate.

La (8.27) può essere scritta in forma diversa esprimendo ciascuna corrente tramite la relativa densità di corrente. Allo scopo prendiamo una generica superficie  $\Sigma$  appoggiata sulla linea lungo cui si esegue la circuitazione di  $\mathbf{B}$  e orientata, rispetto all'orientazione della linea, secondo la regola della vite; diciamo  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_k, \dots$  le intersezioni dei fili conduttori con la superficie  $\Sigma$  e scriviamo

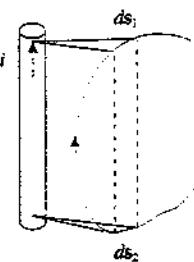
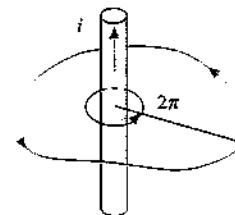
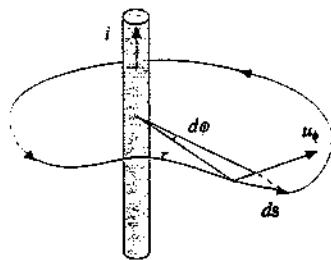


Figura 8.23

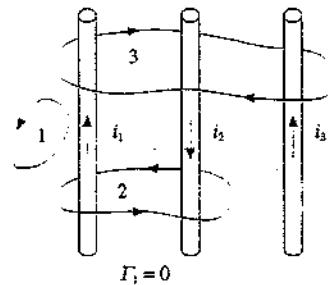


Figura 8.24

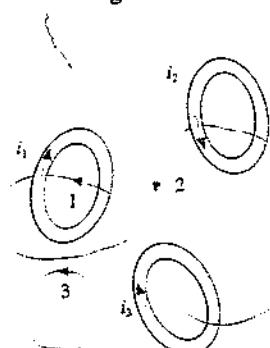


Figura 8.25

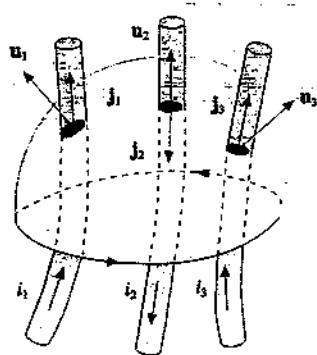


Figura 8.26

$$\oint_{\Sigma} \mathbf{j} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = \int_{\Sigma} \mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{u}_1 d\Sigma_1 + \dots + \int_{\Sigma} \mathbf{j}_k \cdot \mathbf{u}_k d\Sigma_k + \dots$$

come è possibile in quanto  $\mathbf{j}$  è diversa da zero solo sulle dette intersezioni, dove coincide con  $\mathbf{j}_1, \dots, \mathbf{j}_k, \dots$ . Ciascun integrale a secondo membro non dipende dalla particolare sezione considerata se la corrente è stazionaria (paragrafo 6.3) e coincide con la corrente che percorre il rispettivo filo. Di conseguenza

$$\oint_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \int_{\Sigma} \mathbf{j} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma \quad . \quad (8.28)$$

Il *teorema di Stokes* (2.53) permette di trasformare la circuitazione di  $\mathbf{B}$  lungo la linea nel flusso del rotore di  $\mathbf{B}$  attraverso la superficie  $\Sigma$  appoggiata sulla linea per cui

$$\oint_{\Sigma} (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = \mu_0 \int_{\Sigma} \mathbf{j} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma$$

e dovendo questa eguaglianza valere per qualsiasi superficie  $\Sigma$  deve essere

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \quad , \quad (8.29)$$

espressione *locale* della legge integrale (8.27).

Si verifica subito che la (8.29) è compatibile con la condizione di stazionarietà della corrente, espressa dalla  $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ , come visto nel paragrafo 6.3: infatti anche la divergenza del primo membro è nulla, in quanto  $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{B}$ , prodotto misto di tre vettori di cui due uguali, è identicamente nullo (paragrafo 3.6). Invece in condizioni non stazionarie, riassunte dalla (6.10)  $\nabla \cdot \mathbf{j} = -\partial \rho / \partial t$ , la (8.29) non può essere valida; questa inconsistenza venne superata da Maxwell che modificò la (8.29) rendendola valida in ogni circostanza, come dimostreremo nel capitolo 10.

Abbiamo già osservato che la legge di Ampère costituisce un legame tra sorgenti e campo analogo a quello fornito dalla legge di Gauss. Allo stesso modo, anche se in un contesto geometrico diverso, la legge di Ampère è utilizzabile per il calcolo esplicito del campo magnetico quando siano presenti particolari condizioni di simmetria. Conviene cercare in tal caso linee di integrazione lungo le quali il campo sia costante in modulo e orientato sempre allo stesso modo rispetto all'elemento di linea (tipicamente tangente o normale), di modo che il calcolo dell'integrale (8.27) sia immediato. Negli esempi che seguono, ad eccezione dell'8.4, mostriamo questa applicazione pratica della legge di Ampère in alcune situazioni già viste in due problemi nuovi.

#### Esempio 8.4

Verificare che il campo magnetico prodotto da una piccola spira di raggio  $R$  soddisfa la legge di Ampère (8.27).

#### Soluzione

Sceglieremo come cammino di integrazione quello indicato in figura 8.27, in cui il tratto curvilineo è una circonferenza di raggio  $r \gg R$ . Per l'integrale da  $A$  a  $B$  utilizziamo la (8.12):

$$\int_A^B \mathbf{B} \cdot d\mathbf{x} = \frac{\mu_0 i R^2}{2} \int_A^B \frac{dx}{(x^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 i R^2}{2} \left[ \frac{x}{R^2} \frac{1}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right]_r^r = \frac{\mu_0 i r}{\sqrt{r^2 + R^2}}$$

L'integrale da  $B$  a  $A$  lungo la circonferenza risulta da (8.15), in cui poniamo  $m = i\pi R^2$ ,

$$\oint_B^A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \int_B^A B_\theta r d\theta = \int_0^\pi \frac{\mu_0}{4\pi r^3} i\pi R^2 \sin\theta r d\theta = -\frac{\mu_0 i R^2}{4r^2} \int_0^\pi d(\cos\theta) = \frac{\mu_0 i R^2}{2r^2} .$$

Se  $r \gg R$  il contributo del tratto rettilineo vale  $\mu_0 i$ , mentre quello del tratto curvilineo si annulla. Se invece la condizione  $r \gg R$  non è soddisfatta, non possiamo utilizzare l'espressione (8.15) per il campo fuori dell'asse e non è così facile verificare (8.27), che però continua sempre a valere.

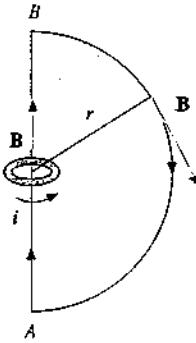


Figura 8.27

### Esempio 8.5 Filo rettilineo indefinito

Un filo rettilineo indefinito di raggio  $R$  è percorso da una corrente di intensità  $i$ . Calcolare il campo magnetico prodotto dal filo in funzione della distanza  $r$  dall'asse del filo.

#### Soluzione

La simmetria assiale del problema indica che il modulo del campo magnetico può dipendere solo dalla distanza dall'asse del filo, cioè  $B = B(r)$ ; questo fatto, insieme alla direzione e verso dati dalla prima legge elementare di Laplace, dice che le linee del campo  $\mathbf{B}$  sono circonferenze con centro sull'asse del filo e poste in piani ortogonali al filo. Ad una di queste circonferenze con raggio  $r > R$  applichiamo la (8.27):

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 2\pi r B = \mu_0 i \Rightarrow B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} ,$$

che è la legge di Biot-Savart (8.10); la corrente  $i$  è proprio quella che percorre il filo, concatenata dalla circonferenza prescelta. È interessante osservare che il campo magnetico all'esterno del filo non dipende dal raggio  $R$  del filo ed è eguale a quello di un filo a sezione trascurabile, coincidente con l'asse del filo.

Consideriamo adesso nella regione interna al filo una circonferenza analoga alla precedente, ma di raggio  $r < R$ : le considerazioni di simmetria sono le stesse, però la corrente concatenata, nell'ipotesi che la densità sia uniforme sulla sezione e valga  $j = i/\pi R^2$ , è

$$i(r) = j \pi r^2 = i \frac{r^2}{R^2} .$$

Dalla legge di Ampère

$$2\pi r B = \mu_0 j \pi r^2 = \mu_0 i \frac{r^2}{R^2} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 j r}{2} = \frac{\mu_0 i r}{2\pi R^2} \quad 0 \leq r \leq R . \quad (8.30)$$

Il modulo del campo  $\mathbf{B}$  è nullo sull'asse, cresce linearmente col raggio all'interno, è continuo per  $r = R$  e decresce come  $1/r$  all'esterno.

Se il filo fosse cavo, simile a una superficie cilindrica di spessore trascurabile, il campo magnetico all'esterno sarebbe sempre lo stesso, ma all'interno sarebbe nullo, come si prova facilmente con gli stessi argomenti usati finora.

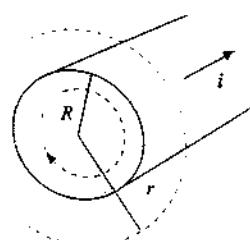


Figura 8.28

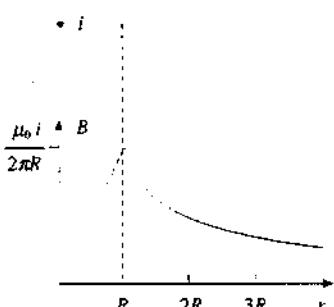


Figura 8.29

### Esempio 8.6 Solenoide rettilineo indefinito

Ricavare dalla legge di Ampère il campo magnetico prodotto da un solenoide rettilineo indefinito.

#### Soluzione

Dato che il sistema è indefinito e si suppone che la densità delle spire sia costante, il campo magnetico in ogni punto dell'asse, oltre ad essere parallelo all'asse, deve avere

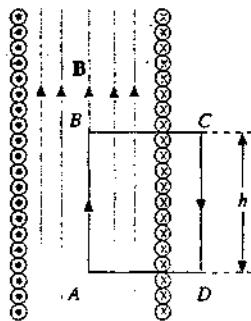


Figura 8.30

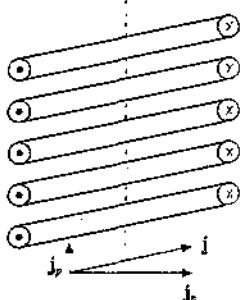


Figura 8.31

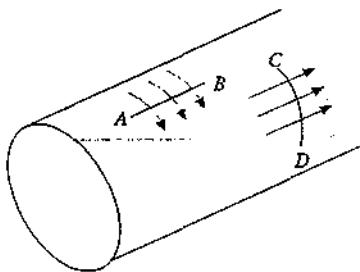


Figura 8.32

lo stesso valore. Più in generale il valore del campo nei punti di una data sezione deve essere eguale al valore nei punti corrispondenti di qualsiasi altra sezione, cioè non ci possono essere variazioni delle caratteristiche di  $\mathbf{B}$  lungo il solenoide purché le spire siano addossate. Una conseguenza di ciò è che, se prendiamo una scatola cilindrica coassiale al solenoide e situata tutta all'interno, il flusso  $\mathbf{B}$  entrante da una base è eguale a quello uscente dall'altra; siccome in totale il flusso attraverso la superficie della scatola è nullo, deve essere nullo quello uscente dalla superficie laterale, qualunque sia il raggio della scatola. Ciò può avvenire solo se  $\mathbf{B}$  è parallelo alla superficie laterale (se non lo fosse in un punto non lo sarebbe in nessun altro) e concludiamo che  $\mathbf{B}$  è parallelo all'asse anche nei punti fuori dall'asse. Le linee di campo sono dunque tutte confinate all'interno del solenoide e il campo all'esterno è nullo.

Fatte queste premesse si consideri il percorso chiuso ABCD della figura 8.30: la corrente concatenata è  $n h i$ , se  $n$  è il numero di spire per unità di lunghezza, e l'unico contributo alla circuitazione viene dal tratto AB in quanto negli altri tratti il campo magnetico o è ortogonale al percorso o è nullo.

Da (8.27) abbiamo

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = B h = \mu_0 n h i \Rightarrow B = \mu_0 n i .$$

che è la (8.23). Il risultato non cambia se il tratto AB non coincide con l'asse e quindi il *campo magnetico all'interno di un solenoide rettilineo indefinito è ovunque uniforme*: esso è parallelo all'asse del solenoide, orientato rispetto al verso della corrente secondo la regola della vite, e il modulo dipende dalla corrente e dalla densità delle spire, ma non dal raggio delle stesse.

In un solenoide di lunghezza finita questa situazione è approssimativamente vera nella zona intorno al centro, tanto meglio quanto minore è il rapporto tra raggio e lunghezza del solenoide. Come per gli altri casi di estensione infinita il solenoide indefinito è un caso ideale non fisico, utile come punto di riferimento per i calcoli.

Notiamo infine il fatto seguente: nella pratica l'*avvolgimento* di un solenoide è necessariamente disposto secondo un *elica cilindrica*, per cui il moto delle cariche può essere pensato come *sovraposizione* di un moto circolare e di un moto rettilineo parallelo all'asse del solenoide, moti che si svolgono su una superficie cilindrica di raggio  $R$ , coincidente con la superficie del solenoide. Se prendiamo un tratto AB come in figura 8.32, esso è attraversato da una corrente che si può esprimere come prodotto di una *densità lineare di corrente*  $j_n$  (misurata in A/m) per la distanza AB; si noti che nella (8.23) il termine  $n i$  ha proprio questo significato di densità lineare di corrente, corrente che percorre  $n$  spire disposte sulla lunghezza di un metro. Analogamente il tratto CD è attraversato da una corrente di densità lineare  $j_p$  e passando ai vettori la densità lineare di corrente del solenoide è  $\mathbf{j} = \mathbf{j}_n + \mathbf{j}_p$ . Ciascuna densità è proporzionale alla velocità delle cariche e il loro rapporto vale

$$\frac{j_p}{j_n} = \frac{v_p}{v_n} = \frac{p}{2\pi R}$$

in quanto nello stesso tempo in cui viene compiuta una circonferenza di raggio  $R$  c'è un avanzamento della quantità  $p$ , paria al passo dell'elica. Se il solenoide è indefinito la componente  $j_n$  dà luogo al campo magnetico di modulo  $B_0 = \mu_0 j_n$  all'interno e nullo all'esterno che abbiamo finora considerato. La componente  $j_p$  equivale a una corrente distribuita lungo una superficie cilindrica (vedi esempio 8.5 alla fine) e dà luogo a un campo nullo all'interno e pari all'esterno a quello di un filo indefinito percorso dalla corrente  $j_p / 2\pi R$ .

$$B = \frac{\mu_0 j_p 2\pi R}{2\pi r} = \mu_0 j_p \frac{R}{r} = \mu_0 \frac{j_n p}{2\pi R} \frac{R}{r} = B_0 \frac{p}{2\pi r} .$$

Normalmente  $p$  è molto minore di  $R$  e a maggior ragione di  $r$ , per cui  $B / B_0$  è molto minore di 1: quantitativamente l'effetto descritto non è rilevante.

**Esempio 8.7 Solenoide toroidale**

Un solenoide toroidale è costituito da  $N$  spire avvolte attorno ad una superficie a forma di ciambella (*toroide*). Calcolare il campo magnetico se nel sistema circola la corrente  $i$ .

**Soluzione**

La simmetria del problema suggerisce che le linee del campo magnetico all'interno del solenoide siano circonferenze con centro sull'asse del toroide e che il modulo di  $B$  dipenda solo dalla distanza  $r$  dall'asse. Applicando (8.27) a una tale circonferenza di raggio  $r$  si ha

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 2\pi r B = \mu_0 N i ,$$

in quanto la linea di integrazione concatena tutte le  $N$  spire. Quindi

$$B = \frac{\mu_0 N i}{2\pi r} .$$

Il campo magnetico è variabile come  $1/r$  all'interno della sezione del toroide; solo se la differenza tra i valori massimo e minimo di  $r$  è piccola rispetto al raggio medio  $r_m$  si può assumere che  $B$  sia uniforme in modulo nel toroide.

All'esterno, se le spire sono compatte, il campo può essere considerato nullo; in realtà, a causa del fatto che l'avvolgimento è disposto come un'elica, c'è una componente della densità di corrente che avanza lungo il toroide e che agli effetti magnetici equivale alla corrente in una spira di raggio circa pari a  $r_m$ , per cui c'è campo magnetico all'esterno, anche se piuttosto debole.

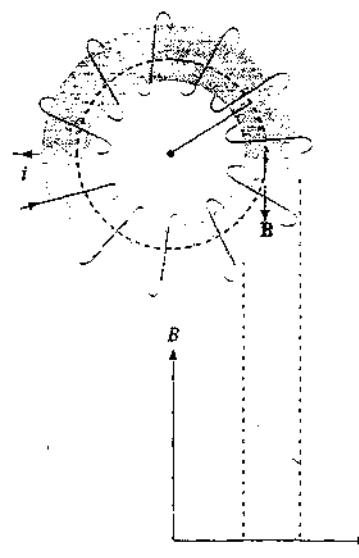


Figura 8.33

**Esempio 8.8 Corrente piana indefinita**

Molti fili rettilinei indefiniti sono disposti uno accanto all'altro su una superficie piana. Calcolare il campo magnetico da essi prodotto se ciascuno è percorso dalla corrente  $i$ .

**Soluzione**

Chiamiamo  $n$  il numero di fili per metro e quindi  $ni$  è il numero di ampere/metro che passa attraverso una linea ortogonale ai fili, cioè la densità lineare di corrente  $j$ , (vedi esempio 8.6). Il sistema potrebbe essere realizzato anche con una *lastra conduttrice continua*.

Considerando il sistema indefinito nelle due dimensioni il campo magnetico deve avere necessariamente la disposizione mostrata in figura 8.35 (se la corrente è uscente), cioè essere ovunque parallelo al piano della corrente con i versi indicati: questo perché ogni filo produce un campo in accordo con la legge di Biot-Savart e il campo in un dato punto  $P$  può essere pensato come la somma dei campi dovuti a infinite coppie di fili simmetrici rispetto a  $P$ : per ogni coppia le componenti parallele si sommano e quelle ortogonali si elidono.

La legge di Ampère applicata al percorso chiuso  $ABCD$ , con  $AB = h$ , dà

$$2Bh = \mu_0 ni h ;$$

infatti i contributi alla circuitazione vengono solo dai tratti  $AB$  e  $CD$ . Segue

$$B = \frac{\mu_0 n i}{2} = \frac{\mu_0 j}{2} .$$

in modulo, mentre vettorialmente si ha nelle due regioni

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0 j_1}{2} \mathbf{u}_x \quad \mathbf{B}_2 = -\frac{\mu_0 j_2}{2} \mathbf{u}_x . \quad (8.32)$$

Il risultato non dipende dalla posizione dei tratti  $AB$  e  $CD$  e in conclusione una corren-

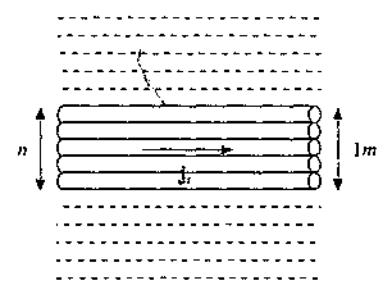


Figura 8.34

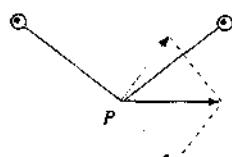
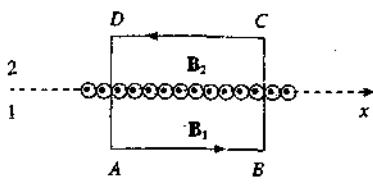


Figura 8.35

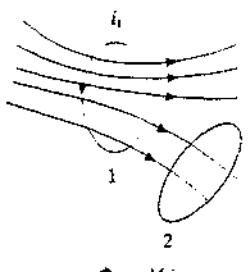
te piana indefinita produce un campo magnetico uniforme da ciascuna parte, parallelo al piano e ortogonale alle linee di corrente. Detto  $\mathbf{u}$ , il versore concorde a  $\mathbf{j}$ , e  $\mathbf{u}_n$  un versore ortogonale al piano, diretto dalla corrente al punto in cui si calcola il campo, le (8.32) si riuniscono nell'espressione

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 j_s}{2} \mathbf{u} \times \mathbf{u}_n . \quad (8.33)$$

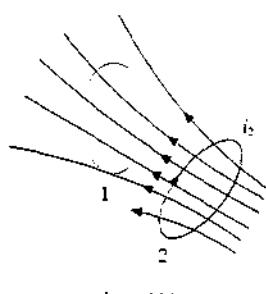
Anche se la corrente piana indefinita non è fisicamente realizzabile, ci si trova in pratica nella situazione descritta quando si considera un punto molto vicino a una corrente superficiale, che localmente appare piana e molto estesa.

L'argomento trattato, con la caratteristica discontinuità del campo  $\mathbf{B}$  nel passaggio attraverso una sorgente piana indefinita, ricorda quanto visto per il campo  $\mathbf{E}$  di una distribuzione piana di carica (esempi 1.8 e 3.4), pur essendo nei due casi diversa la direzione del campo: rituneremo su questa proprietà nel paragrafo 8.6.

L'esame degli esempi visti ci porta a una considerazione già fatta per gli analoghi casi elettrostatici: malgrado la legge elementare indichi una dipendenza tipo  $1/r^2$  del modulo del campo magnetico con la distanza, la composizione dei vari contributi può portare a dipendenze diverse. Nei casi a simmetria cilindrica il modulo del campo varia come  $1/r$ , nei casi a simmetria rispetto ad un piano si ha un campo uniforme (naturalmente le linee di campo sono completamente diverse per  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ ). Solo come curiosità citiamo il caso di simmetria radiale, che si otterrebbe con linee di corrente che divergono radialmente da un punto; in qualsiasi punto il contributo di tutti gli elementi di corrente si elide e il campo magnetico risulta nullo.



$$\Phi_{1,2} = M i_1$$



$$\Phi_{2,1} = M i_2$$

Figura 8.36

## 8.5 Flusso tra circuiti. Autoflusso

Il campo magnetico  $\mathbf{B}_1$  generato da un circuito percorso dalla corrente  $i_1$  determina un certo flusso magnetico  $\Phi_{1,2}$  attraverso un qualsiasi altro circuito presente nella regione in cui agisce  $\mathbf{B}_1$ . Mettendo insieme la definizione di flusso e la (8.3) si ottiene

$$\Phi_{1,2} = \int_{\Sigma_2} \left( \phi \frac{\mu_0 i_1}{4\pi} \frac{ds_1 \times \mathbf{u}_r}{r^2} \right) \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma_2 ,$$

dove  $\Sigma_2$  è una *qualsiasi superficie* che si appoggia sul secondo circuito,  $r$  è la distanza dall'elemento  $ds_1$  del primo circuito all'elemento di area  $d\Sigma_2$  e  $\mathbf{u}_r$  è il versore della direzione orientata  $r$ . L'espressione del flusso può essere riscritta sinteticamente

$$\Phi_{1,2} = M_{1,2} i_1$$

conglobando in  $M_{1,2}$  tutti i *fattori geometrici* e l'eventuale dipendenza dalle proprietà magnetiche del mezzo in cui sono immersi i circuiti; il flusso prodotto dal primo circuito e che attraversa il secondo è proporzionale alla corrente  $i_1$  che scorre nel primo circuito. In modo analogo si trova che

$$\Phi_{2,1} = M_{2,1} i_2$$

Nel paragrafo 8.7 tramite il potenziale vettore e nel capitolo 10 tramite un ragionamento energetico dimostreremo che  $M_{1,2} = M_{2,1} = M : M$  si chiama *coefficiente di mutua induzione* tra i due circuiti e dipende dalla forma dei circuiti e dalla loro posi-

Coefficiente  
di mutua induzione

zione relativa, oltre che dalle proprietà magnetiche del mezzo; esso è costante soltanto se i circuiti sono indeformabili e fissi uno rispetto all'altro. Possiamo dunque scrivere

$$\Phi_{1,2} = M i_1, \quad \Phi_{2,1} = M i_2, \quad (8.34) \quad \text{Flusso concatenato}$$

come espressioni del *flusso concatenato* con un circuito dovuto al campo magnetico di un altro circuito.

### Esempio 8.9

Due solenoidi rettilinei indefiniti sono coassiali; il primo ha  $n_1$  spire per unità di lunghezza e sezione  $\Sigma_1$ , il secondo ha  $n_2$  spire per unità di lunghezza e sezione  $\Sigma_2 > \Sigma_1$ . Calcolare il coefficiente di mutua induzione per unità di lunghezza.

#### Soluzione

Calcoliamo  $\Phi_{1,2}$ . Il primo solenoide produce il campo  $B_1 = \mu_0 n_1 i_1$  al suo interno, mentre all'esterno  $B_1 = 0$ : il flusso concatenato con il secondo solenoide è quello che attraversa la parte della sezione  $\Sigma_2$  che coincide con  $\Sigma_1$ . Quindi, nell'unità di lunghezza del secondo solenoide, che presenta  $n_2$  spire,

$$\Phi_{1,2} = n_2 \Sigma_2 B_1 = \mu_0 n_1 n_2 \Sigma_1 i_1 \Rightarrow M = \mu_0 n_1 n_2 \Sigma_1 .$$

Per calcolare  $\Phi_{2,1}$  osserviamo che il campo  $B_2 = \mu_0 n_2 i_2$  produce attraverso  $n_1$  spire del primo solenoide di sezione  $\Sigma_1$  il flusso

$$\Phi_{2,1} = n_1 \Sigma_1 B_2 = \mu_0 n_1 n_2 \Sigma_1 i_2 \Rightarrow M = \mu_0 n_1 n_2 \Sigma_1 .$$

Si capisce da questo esempio che è importante non tanto la sezione geometrica del circuito attraverso cui si calcola il flusso, quanto quella parte su cui il campo è diverso da zero: cioè, come è ovvio, è la *geometria del flusso* che interessa.

### Esempio 8.10

Un filo rettilineo indefinito coincide con l'asse di un solenoide toroidale avente  $N$  spire di sezione  $\Sigma$ , pari ad un rettangolo di lati  $a, b$ ; il raggio interno del toroide è  $R$ . Calcolare il coefficiente di mutua induzione del sistema.

#### Soluzione

Il filo indefinito produce il campo magnetico  $B = \mu_0 i / 2\pi r$ , ortogonale a ciascuna spira del solenoide. Il flusso attraverso una spira è

$$\Phi = \int_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \int_R^{R+b} \frac{a dr}{r} = \frac{\mu_0 i a}{2\pi} \ln \frac{R+b}{R}$$

e quindi il coefficiente di mutua induzione è

$$M = \frac{N\Phi}{i} = \frac{\mu_0 N a}{2\pi} \ln \frac{R+b}{R} .$$

Se invece partiamo dal campo del solenoide, dato da (8.31), il flusso di questo concatenato col circuito di cui fa parte il filo, che immaginiamo completato da un tratto molto lontano dal sistema, coincide col flusso attraverso una spira del solenoide toroidale, in quanto il campo esterno del solenoide è praticamente trascurabile. Si ritrova pertanto la stessa espressione di  $M$ .

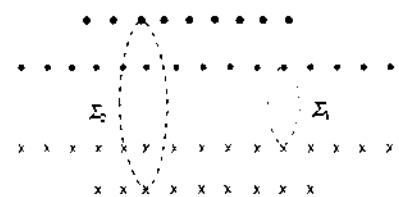


Figura 8.37

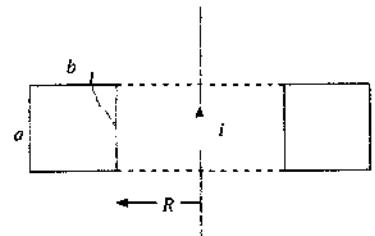


Figura 8.38

Negli esempi trattati è stato semplice verificare che  $M_{1,2} = M_{2,1}$ ; in altri casi la verifica potrebbe essere molto difficile. Se nell'esempio 8.10 invece del filo indefinito avessimo una spira di forma qualunque, il calcolo di  $\Phi_{2,1}$  (dal solenoide alla spira) sarebbe identico, ma quello di  $\Phi_{1,2}$  (dalla spira al solenoide) sarebbe proibitivo. In un calcolo di  $M$  conviene quindi esaminare attentamente il problema e, sfruttando il fatto che si hanno a disposizione due possibilità di calcolo, scegliere quella analiticamente più accessibile.

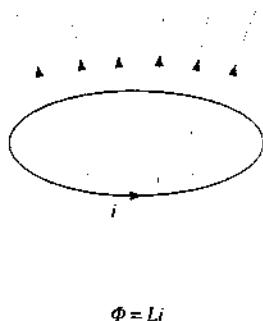


Figura 8.39

Coefficiente di autoinduzione

$$\Phi = Li \quad (8.35)$$

dove il fattore  $L$  si chiama *coefficiente di autoinduzione* del circuito. Esso dipende dalla forma del circuito e dalle proprietà magnetiche del mezzo ed è costante se il circuito è indeformabile.

### Esempio 8.11

Calcolare il coefficiente di autoinduzione di un solenoide toroidale e di un solenoide rettilineo indefinito (in quest'ultimo caso per unità di lunghezza).

#### Soluzione

Per il solenoide toroidale, se  $N$  sono le spire,  $\Sigma$  la sezione e  $R$  il raggio medio, si può scrivere

$$\Phi = N \Sigma B = N \Sigma \frac{\mu_0 N i}{2\pi R} \Rightarrow L = \frac{\mu_0 N^2 \Sigma}{2\pi R}$$

Questo è vero se il campo si può considerare uniforme sulla sezione; altrimenti bisogna conoscere la forma della sezione ed eseguire l'integrale del flusso, come si è visto nell'esempio 8.10. Con un solenoide toroidale appunto di quel tipo si avrebbe

$$\Phi = N \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = \frac{\mu_0 N^2 a i}{2\pi} \ln \frac{R+b}{R} \Rightarrow L = \frac{\mu_0 N^2 a}{2\pi} \ln \frac{R+b}{R}$$

Nel caso del solenoide rettilineo di sezione  $\Sigma$  si ha, per unità di lunghezza,

$$\Phi = n \Sigma B = n \Sigma \mu_0 n i \Rightarrow L = \mu_0 n^2 \Sigma \quad (8.36)$$

Quando si calcola l'autoflusso il versore normale alla superficie  $\Sigma$  è orientato rispetto al verso della corrente nel circuito secondo la regola della vite per cui il flusso attraverso  $\Sigma$  è positivo: in altre parole il coefficiente di autoinduzione  $L$  si assume sempre positivo. Diverso è il caso di  $M$ : normalmente si assume  $M$  positivo se il flusso concatenato dal primo circuito al secondo ha lo stesso segno dell'autoflusso.

flusso del secondo circuito; la questione diventa rilevante solo in presenza di flussi variabili nel tempo.

In effetti, le espressioni dei flussi tramite i coefficienti di mutua induzione e di autoinduzione, che abbiamo introdotto adesso come applicazioni delle formule che danno il campo magnetico prodotto da un circuito, risulteranno molto utili nel capitolo 10, quando tratteremo i fenomeni legati alle variazioni del flusso magnetico nel tempo.

### Unità di misura

I coefficienti  $M$  e  $L$  sono dati come rapporto tra un flusso magnetico e una corrente; la loro unità di misura pertanto è

$$\frac{\text{weber}}{\text{ampere}} = \frac{\text{volt secondo}}{\text{ampere}} = \text{ohm secondo} .$$

A tale unità si dà il nome di *henry*, simbolo H. Nei paragrafo 8.1 abbiamo visto che l'unità di  $\mu_0$  è Tm/A = Wb/Am e quindi ora giustifichiamo l'uso di H/m. Sono molto usati i sottomultipli

$$\text{millihenry} \quad mH = 10^{-3} \text{ H} \quad , \quad \text{microhenry} \quad \mu\text{H} = 10^{-6} \text{ H}.$$

Ad esempio, il coefficiente di autoinduzione per unità di lunghezza di un solenoide rettilineo con  $n = 10^3$  spire/metro e  $\Sigma = 100 \text{ cm}^2$  è, secondo (8.36),  $L = 4 \pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^3 \cdot 10^{-2} = 4 \pi \cdot 10^{-6} \text{ H/m}$ . In generale, quando si opera nel vuoto o in mezzi non ferromagnetici,  $M$  e  $L$  sono piuttosto piccoli. Vedremo nel capitolo 9 come si abbia un notevole incremento di  $M$  e  $L$  quando i circuiti sono avvolti su materiali ferromagnetici.

## 8.6 Proprietà del campo magnetostatico nel vuoto

Le caratteristiche dell'interazione magnetica nel vuoto dovuta a correnti stazionarie, ovvero della *magnetostatica* come comunemente si dice, sono riassunte dalle proprietà integrali (8.27) e (7.2)

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 i \quad , \quad \oint \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = 0 \quad ,$$

cui corrispondono le proprietà locali

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \quad , \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad , \quad (8.37)$$

dette *equazioni di Maxwell della magnetostatica*.

Il campo magnetico ha dunque la proprietà di essere sempre *solenoidale*, ma non è *irrotazionale*. Questa circostanza non rende possibile definire in modo univoco un potenziale scalare magnetico da cui derivare il campo attraverso l'operazione di gradiente, come discuteremo nel paragrafo 8.7.

L'espressione esplicita più generale del campo magnetico dovuto a una distribuzione di correnti è la (8.5) che riportiamo,

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_r \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{u}_r}{r^2} d\tau \quad , \quad (8.5)$$

e dalla quale si ricava (8.3) nel caso di conduttori filiformi.

Equazioni di Maxwell della magnetostatica

Il campo magnetico è solenoidale

La compatibilità tra (8.5) e (8.37) si dimostra applicando gli operatori rotore e divergenza alla (8.5). Utilizzando la  $\mathbf{u}_r / r^2 = -\nabla(1/r)$  abbiamo

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \cdot \int_{\tau} \mathbf{j} \times \nabla \left( \frac{1}{r} \right) d\tau = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau} \mathbf{j} \cdot \nabla \times \nabla \left( \frac{1}{r} \right) d\tau = 0 ;$$

infatti  $\nabla$  può essere portato sotto il segno di integrale e scambiato con  $\mathbf{j}$  (cambiando il segno del prodotto misto) ottenendo il rotore di un gradiente che è sempre nullo. In modo analogo, anche se abbastanza più complicato, si dimostra che se  $\mathbf{B}$  è dato da (8.5)  $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$ .

Accanto alle proprietà del campo magnetico va posta, per completare il quadro, la formula della forza subita da una carica in campo magnetico, cioè la *forza di Lorentz* (7.5):

$$\mathbf{F}_L = q \mathbf{v} \times \mathbf{B} .$$

### Discontinuità del campo magnetico

Nel paragrafo 3.3 abbiamo visto che il campo elettrostatico è discontinuo nell'attraversamento di una superficie carica. Analogamente dimostriamo adesso che il campo magnetico è discontinuo nell'attraversamento di una superficie sede di una corrente con densità lineare  $\mathbf{j}_s$ . Presi due punti  $P$  e  $Q$  molto vicini alla superficie, che quindi localmente appare piana, il campo magnetico dovuto alla corrente superficiale nei punti  $P$  e  $Q$  è dato da (8.32). A questo campo in generale si sovrappone un campo magnetico  $\mathbf{B}$  dovuto ad altre sorgenti, che nei punti  $P$  e  $Q$  molto vicini tra loro ha lo stesso valore. Il campo magnetico totale nei punti  $P$  e  $Q$  è pertanto diverso:

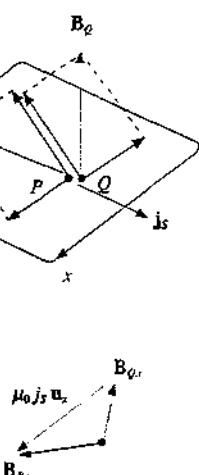


Figura 8.40

La discontinuità è data da

$$\mathbf{B}_P - \mathbf{B}_Q = \mu_0 j_s \mathbf{u}_x \quad (8.38)$$

ed è tangente alla superficie e ortogonale alle linee di corrente. Quindi la *componente normale del campo magnetico non varia nell'attraversamento della superficie sede di corrente mentre varia, in modulo e in direzione, la componente tangenziale*, come mostrato in figura 8.40.

La costanza della componente normale si prova facilmente anche applicando la legge di Gauss (7.2) a una scatola cilindrica con le basi parallele alla superficie e la superficie laterale infinitesima, seguendo un procedimento che abbiamo visto più volte.

Il risultato generale (8.38) si trova verificato in alcuni degli esempi precedenti. Alla fine dell'esempio 8.5 è stato considerato un tubo cavo percorso da una corrente  $i$  longitudinale: per  $r < R$   $B = 0$ , mentre appena all'esterno  $B = \mu_0 i / 2\pi R$ , tangente al tubo e ortogonale alle linee di corrente. In questo caso  $i / 2\pi R$  è proprio la densità lineare di corrente e la discontinuità di  $B$  passando dall'interno all'esterno è  $\mu_0 j_s \mathbf{u}_x$ , in accordo con (8.38) in quanto  $\mathbf{u}_x$  è ortogonale a  $\mathbf{j}_s$  come  $\mathbf{u}_x$ .

Anche in un solenoide rettilineo indefinito passando dall'esterno all'interno il campo varia di  $\mu_0 n i = \mu_0 j_s$  e la discontinuità è ortogonale alle linee di corrente.

In questi casi semplici in cui  $\mathbf{B}$  è ortogonale a  $\mathbf{j}_s$  ed è esclusivamente tangenziale la discontinuità si calcola direttamente applicando la legge di Ampère (8.27) ad

un percorso chiuso rettangolare che giace in un piano ortogonale a  $j_s$ , come nella figura 8.35:

$$B_1 h + B_2 h = \mu_0 j_s h$$

Essendo da una parte  $B_1 = 0$ , dall'altra in modulo  $B_2 = \mu_0 j_s$  e vettorialmente  $\mathbf{B}_2 = \mu_0 j_s \mathbf{u}_s$ ;  $\Delta \mathbf{B} = \mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2$  è in accordo con (8.38).

## 8.7 Potenziale vettore

Il fatto che il rotore del campo magnetico sia proporzionale alla densità di corrente e quindi non sia identicamente nullo, ovvero che la circuitazione di  $\mathbf{B}$  sia diversa da zero quando la linea di integrazione concatena una corrente, non permette di definire un potenziale scalare magnetico come invece è stato possibile in elettrostatica, dove  $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ .

Con riferimento alla figura 8.42, in cui sono considerati tre cammini dal punto  $P$  al punto  $Q$  e un circuito percorso da corrente, si ha

$$\Gamma_{1,2} = \int_P^Q (\mathbf{B} \cdot d\mathbf{s})_1 + \int_Q^P (\mathbf{B} \cdot d\mathbf{s})_2 = 0 \Rightarrow \int_P^Q (\mathbf{B} \cdot d\mathbf{s})_1 = \int_P^Q (\mathbf{B} \cdot d\mathbf{s})_2$$

$$\Gamma_{1,3} = \int_P^Q (\mathbf{B} \cdot d\mathbf{s})_1 + \int_Q^P (\mathbf{B} \cdot d\mathbf{s})_3 = \mu_0 i \Rightarrow \int_P^Q (\mathbf{B} \cdot d\mathbf{s})_1 = \mu_0 i + \int_P^Q (\mathbf{B} \cdot d\mathbf{s})_3$$

L'integrale di linea di  $\mathbf{B}$  dal punto  $P$  al punto  $Q$  è diverso a seconda del percorso considerato e non può essere posto eguale alla differenza tra i valori che una funzione  $V$  scalare univoca della posizione assume in  $Q$  e in  $P$ : lungo percorsi come 1 e 2  $\Delta V$  avrebbe sempre lo stesso valore, ma lungo percorsi come 3 a tale valore andrebbe aggiunto  $k \mu_0 i$ , con  $k = 1, 2, \dots$  a seconda che il percorso giri una o più volte intorno alla corrente  $i$ . Fissato arbitrariamente il valore  $V(P)$ ,  $V(Q)$  non è univocamente definito, ma può assumere infiniti valori differenti tra loro di multipli interi della quantità  $\mu_0 i$ .

Il campo magnetico soddisfa però alla condizione  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  e ciò vuol dire che esso può sempre essere espresso come *rotore* di un altro vettore  $\mathbf{A}$ , detto *potenziale vettore*:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad . \quad (8.39) \quad \text{Potenziale vettore}$$

Infatti, se applichiamo nella (8.39) l'operatore divergenza ad entrambi i membri troviamo un risultato identicamente nullo in quanto la divergenza di un rotore è sempre nulla (si veda il paragrafo 3.6). Le componenti di  $\mathbf{B}$  si ricavano per derivazione dalle componenti di  $\mathbf{A}$ , ad esempio applicando le (2.50) in coordinate cartesiane o le (2.57) in coordinate cilindriche.

La definizione (8.39) non determina completamente il potenziale vettore: infatti se consideriamo un nuovo campo vettoriale

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla S \quad . \quad (8.40)$$

dove  $S$  è una funzione scalare arbitraria, abbiamo

$$\nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \nabla S = \nabla \times \mathbf{A}$$

e quindi il campo magnetico derivato da  $\mathbf{A}'$  è eguale a quello derivato da  $\mathbf{A}$ . Il *potenziale vettore* è dunque *definito a meno del gradiente di una funzione scalare arbitraria*.

Questa parziale indeterminazione di  $\mathbf{A}$  può essere sfruttata per impostare una condizione che tornerà utile tra breve. Calcolando la divergenza di (8.40) si ottiene

$$\nabla \cdot \mathbf{A}' = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \cdot (\nabla S) = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla^2 S :$$

se allora si sceglie  $S$  in modo che soddisfi all'equazione  $\nabla^2 S + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ , risulta  $\nabla \cdot \mathbf{A}' = 0$ . In altre parole, se abbiamo un certo potenziale vettore  $\mathbf{A}$  e si sceglie la funzione  $S$  in modo tale da soddisfare alla  $\nabla^2 S = -\nabla \cdot \mathbf{A}$ , il potenziale vettore  $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla S$  è a divergenza nulla. Tutto ciò è possibile senza che cambi il campo magnetico  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A}'$ .

Pertanto la definizione completa di potenziale vettore del campo magnetico è

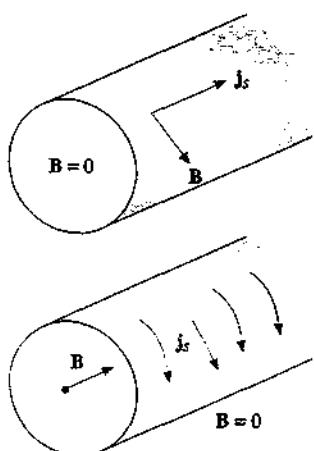


Figura 8.41

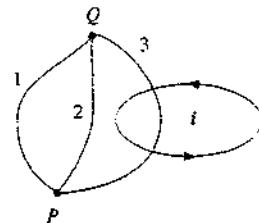


Figura 8.42



campo  $\mathbf{B}$  direttamente con (8.5) oppure con l'operazione di rotore sul potenziale vettore (8.44). È difficile dire a priori quale sia il metodo più semplice per calcolare  $\mathbf{B}$  perché in entrambi i casi devono essere eseguite integrazioni vettoriali. Ad ogni modo risulta chiaro sia il significato concettuale di  $\mathbf{A}$  che la ragione del nome potenziale vettore.

Il potenziale vettore è utilizzato soprattutto in applicazioni più avanzate. Vediamo tuttavia che esso ci permette di dimostrare in modo semplice che  $M_{1,2} = M_{2,1}$  (paragrafo 8.5). Mettiamo insieme (8.46) e (8.45) nei due casi:

$$\Phi_{1,2} = \oint_2 \mathbf{A}_{1,2} \cdot d\mathbf{s}_2 = \oint_2 \left( \oint_1 \frac{\mu_0 i_1 d\mathbf{s}_1}{4\pi r_{1,2}} \right) \cdot d\mathbf{s}_2 = \frac{\mu_0 i_1}{4\pi} \oint_2 \oint_1 \frac{d\mathbf{s}_1 \cdot d\mathbf{s}_2}{r_{1,2}},$$

$$\Phi_{2,1} = \oint_1 \mathbf{A}_{2,1} \cdot d\mathbf{s}_1 = \oint_1 \left( \oint_2 \frac{\mu_0 i_2 d\mathbf{s}_2}{4\pi r_{2,1}} \right) \cdot d\mathbf{s}_1 = \frac{\mu_0 i_2}{4\pi} \oint_1 \oint_2 \frac{d\mathbf{s}_2 \cdot d\mathbf{s}_1}{r_{2,1}}.$$

I due integrali all'ultimo membro sono uguali perché  $r_{1,2} = r_{2,1}$  e perché il risultato non dipende dall'ordine con cui è sviluppato il calcolo; ma allora

$$\Phi_{1,2} / i_1 = M_{1,2} = \Phi_{2,1} / i_2 = M_{2,1}.$$

### Calcoli di $\mathbf{A}$ in casi particolari

Due campi magnetici con andamento semplice che abbiamo già visto più volte sono quello di un solenoide rettilineo indefinito e quello di un filo rettilineo indefinito. Vogliamo determinare le corrispondenti espressioni del potenziale vettore.

Cominciando dal solenoide ricordiamo che, detto  $z$  l'asse del solenoide, il campo  $\mathbf{B}$  vale  $\mu_0 n i \mathbf{u}_z$  all'interno ed è nullo all'esterno. La componente  $j_z$  della densità di corrente è nulla e quindi, essendo nulla  $A_z$ , il potenziale vettore sta nel piano  $x, y$  ortogonale a  $\mathbf{B}$  e all'asse  $z$ . La situazione di simmetria assiale delle linee di  $\mathbf{A}$  rispetto a quelle di  $\mathbf{B}$ , suggerita dalla struttura del sistema, comporta che le linee di  $\mathbf{A}$  siano circonferenze che concatenano le linee di  $\mathbf{B}$  e che il modulo di  $\mathbf{A}$  dipenda solo dalla distanza dall'asse. Applicando (8.46) a una circonferenza di raggio  $r$  minore del raggio  $R$  del solenoide, posta nel piano  $x, y$  e coassiale al solenoide, si ha

$$2\pi r A = \pi r^2 B \Rightarrow A = \frac{1}{2} B r = \frac{1}{2} \mu_0 n i r.$$

Per  $r > R$  la circuitazione di  $\mathbf{A}$  cambia, ma il flusso di  $\mathbf{B}$  non cresce più:

$$2\pi r A = \pi R^2 B \Rightarrow A = \frac{1}{2} \frac{B R^2}{r} = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 n i R^2}{r}.$$

Il potenziale vettore cresce dal valore zero sull'asse al valore massimo per  $r = R$  in modo lineare e all'esterno, dove il campo magnetico è nullo, decresce con legge  $1/r$ .

Nel calcolo sono state usate implicitamente le coordinate cilindriche, che sono naturali per questo sistema: si ha  $A_r = 0$ ,  $A_\theta = A$ ,  $A_z = 0$ . In coordinate cartesiane, come si vede dalla figura 8.46,

$$A_x = -A \sin \theta = -A \frac{y}{r}, \quad A_y = A \cos \theta = A \frac{x}{r}, \quad A_z = 0.$$

e pertanto

$$r < R \quad A_x = -\frac{1}{2} B y, \quad A_y = \frac{1}{2} B x, \quad A_z = 0,$$

$$r > R \quad A_x = -\frac{1}{2} \frac{B R^2 y}{r^2}, \quad A_y = \frac{1}{2} \frac{B R^2 x}{r^2}, \quad A_z = 0,$$

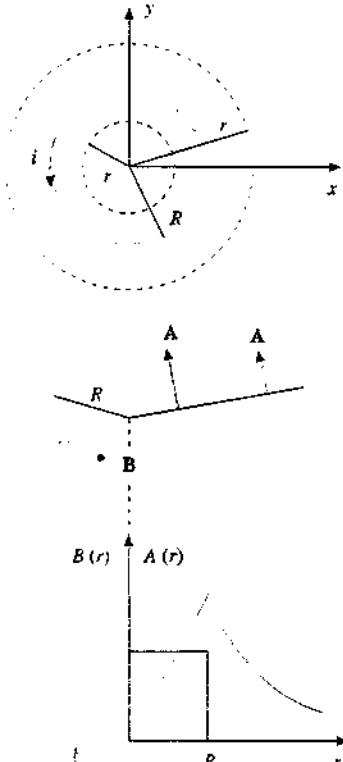


Figura 8.45

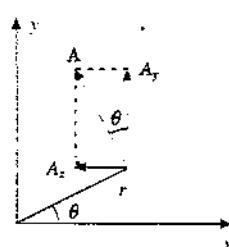
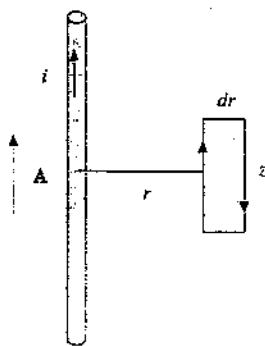


Figura 8.46



con  $B = \mu_0 n i$ . Si verifichi, utilizzando le componenti cartesiane (2.50) del rotore, che  $B_x = B_y = 0$ ,  $B_z = B$  all'interno e che  $B_x = B_y = B_z = 0$  all'esterno. Si verifichi inoltre che  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  ovunque.

Nel caso del filo rettilineo, che assumiamo parallelo all'asse  $z$ , è  $j_x = j_y = 0$ , cioè  $\mathbf{j} = j \mathbf{u}_z$ , e quindi  $A_x = A_y = 0$ ; il potenziale vettore è parallelo all'asse del filo e concorde al verso della corrente. Sempre per ragioni di simmetria il modulo può dipendere solo dalla distanza  $r$  dal filo. Ricordiamo di nuovo a (8.46) applicata al percorso rettangolare infinitesimo della figura 8.47; chiamiamo  $A$  il potenziale vettore a distanza  $r$  e  $A + dA$  quello a distanza  $r + dr$ ,  $z$  il lato finito del rettangolo,  $dr$  quello infinitesimo:

$$Az - (A + dA)z = B d\Sigma = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} z dr \Rightarrow dA = -\frac{\mu_0 i}{2\pi r} \frac{dr}{r}$$

Figura 8.47

Al crescere di  $r$  il potenziale diminuisce e su una distanza finita da  $r_1$  a  $r_2$

$$A_2 - A_1 = -\frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

Questo risultato potrebbe far ritenere che il potenziale vettore avesse il modulo

$$A(r) = -\frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln r$$

In realtà la situazione è più complicata; come succede nel caso del filo carico indefinito, un calcolo diretto tramite (8.44) o (8.45) dà un risultato infinito, appunto perché il sistema è infinito. La formula logaritmica è però utile per calcolare le variazioni del potenziale vettore.

Un argomento intuitivo per capire l'andamento delle linee di  $\mathbf{A}$  si basa sull'analogia matematica tra le equazioni  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  e  $\mu_0 \mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{B}$ . Come le linee rettilinee di  $\mathbf{j}$  danno un campo  $\mathbf{B}$  disposto lungo circonferenze (filo indefinito) così le linee rettilinee di  $\mathbf{B}$  danno un potenziale vettore  $\mathbf{A}$  disposto lungo circonferenze (solenoide indefinito); e come linee di  $\mathbf{j}$  circolari danno un campo  $\mathbf{B}$  rettilineo (solenoide indefinito), così linee di  $\mathbf{B}$  circolari danno un campo  $\mathbf{A}$  rettilineo (filo indefinito).

### Potenziale magnetico scalare

Abbiamo sottolineato le differenze tra le equazioni di Maxwell per l'elettrostatica e la magnetostatica e le loro conseguenze sulle proprietà dei campi  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ . Esiste però un caso in cui i problemi di magnetostatica si riconducono esattamente a quelli di elettrostatica e ciò avviene quando il campo  $\mathbf{B}$  è definito in una regione delimitata di spazio in cui non esistono correnti; vedremo nel capitolo 9 possibili realizzazioni pratiche. In tal caso le (8.37) diventano

$$\nabla \times \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (8.47)$$

Potenziale scalare magnetico

ed è possibile definire un *potenziale scalare magnetico*  $V_m$  tale che

$$\mathbf{B} = -\nabla V_m. \quad (8.48)$$

Il potenziale magnetico obbedisce all'equazione di Laplace

$$\nabla^2 V_m = \frac{\partial^2 V_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_m}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_m}{\partial z^2} = 0. \quad (8.49)$$

L'interesse di questa situazione particolare sta nel fatto che le soluzioni trovate in determinati problemi elettrostatici si possono trasportare esattamente al caso magnetico: la struttura geometrica delle superficie equipotenziali e delle linee di campo è la stessa. Resta ovviamente diversa la forza subita da una carica elettrica, pari a  $q \mathbf{E}$  nel caso elettrostatico e a  $q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$  nel caso magnetostatico.

## 8.8 Le trasformazioni dei campi elettrici e magnetici

Una carica  $q$  in moto con velocità  $v$  in un sistema di riferimento inerziale, che chiamiamo sistema del laboratorio, genera i campi

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \mathbf{u}_r, \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q v \times \mathbf{u}_r}{r^2},$$

che in ogni istante sono legati dalla relazione (8.7)

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E} \quad (8.7)$$

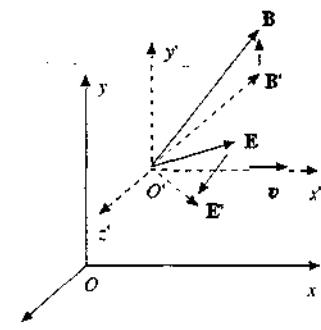


Figura 8.48

Come abbiamo detto nel paragrafo 8.1 queste formule sono valide se  $(v/c)^2 \ll 1$ .

Consideriamo ora un secondo sistema di riferimento inerziale che si muove rispetto al primo con velocità  $v$ , eguale a quella della carica  $q$ . Indichiamo sinteticamente con  $O$  il primo sistema e con  $O'$  il secondo sistema, in cui la carica è in quiete.

Una carica di prova  $q_0$  è sottoposta alla stessa forza nei due sistemi, appunto perché inerziali: per semplicità supponiamo che  $q_0$  abbia in un dato istante proprio la velocità  $v$  nel sistema  $O'$ . In  $O$  essa subisce la forza (7.38)

$$\mathbf{F} = q_0 (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

mentre nel sistema  $O'$  la forza sulla carica è soltanto elettrica,

$$\mathbf{F}' = q_0 \mathbf{E}'$$

in quanto, in  $O'$ , il campo magnetico  $\mathbf{B}'$  è nullo. Dall'eguaglianza tra le due forze si deduce

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

Per il campo  $\mathbf{B}'$  vale certamente la relazione

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E}$$

dato che  $\mathbf{B}'$  è nullo e tale è il secondo membro in accordo con (8.7).

Un altro esempio è il seguente: nel sistema del laboratorio  $O$  una carica è in quiete e un dispositivo che produce un campo magnetico è in moto con velocità  $v$ ; a tale dispositivo è solidale un sistema di riferimento  $O'$ . In  $O'$  la carica si muove con velocità  $-v$ , il campo elettrico  $\mathbf{E}'$  è nullo e la forza sulla carica si scrive

$$\mathbf{F}' = -q \mathbf{v} \times \mathbf{B}'$$

Nel sistema  $O$  il campo magnetico  $\mathbf{B}$  è eguale a  $\mathbf{B}'$ , la carica è in quiete, ma subisce una forza  $\mathbf{F}$  che deve essere eguale a  $\mathbf{F}'$ :

$$\mathbf{F} = q \mathbf{E} = \mathbf{F}' = -q \mathbf{v} \times \mathbf{B}' \Rightarrow \mathbf{E} = -v \times \mathbf{B}'$$

Le relazioni  $\mathbf{E} = -v \times \mathbf{B}'$  e  $\mathbf{B} = \mathbf{B}'$  possono essere scritte, dato che  $\mathbf{E}' = 0$ , nella forma

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}' - v \times \mathbf{B}', \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}' + \frac{1}{c^2} v \times \mathbf{E}'$$

Le espressioni delle trasformazioni dei campi che abbiamo ricavato nei casi particolari descritti hanno validità generale, indipendentemente dal sistema di cariche che genera i campi. Precisamente, i campi misurati nel sistema  $O'$  in moto con velocità  $v$  rispetto al sistema  $O$  sono dati da

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}' + \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad , \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}' - \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E} \quad . \quad (8.50)$$

Le relazioni inverse, relative ai campi nel sistema  $O$  in moto con velocità  $-\mathbf{v}$  rispetto a  $O'$ , sono

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}' - \mathbf{v} \times \mathbf{B}' \quad , \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}' + \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E}' \quad . \quad (8.51)$$

Trasformazioni galileiane dei campi  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$

Le (8.50) e (8.51) costituiscono le *trasformazioni galileiane dei campi elettrici e magnetici*; esse sono valide quando tutte le velocità considerate sono molto minori della velocità della luce.

La cosa più interessante da osservare è che nel passaggio da un sistema all'altro il campo  $\mathbf{E}$  e il campo  $\mathbf{B}$  non si trasformano indipendentemente; di conseguenza la forza su una carica può apparire soltanto elettrica o soltanto magnetica o risultante dei due effetti: la *classificazione del tipo di interazione cambia a seconda del sistema di riferimento, pur essendo la forza la stessa*.

### Esempio 8.12

Una carica  $q_0$  si muove con velocità  $v_r$  rispetto ad un sistema  $O'$  a sua volta in moto con velocità  $v$  rispetto al sistema  $O$ . Dimostrare che la forza agente su  $q_0$  non dipende dal sistema di riferimento.

#### Soluzione

In  $O'$  la carica  $q_0$  è soggetta alla forza

$$\mathbf{F}' = q_0 (\mathbf{E}' + \mathbf{v}_r \times \mathbf{B}')$$

mentre in  $O$ , dove la velocità della carica è  $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}$ , somma della velocità relativa e della velocità di trascinamento, la forza vale

$$\mathbf{F} = q_0 (\mathbf{E} + \mathbf{v}_0 \times \mathbf{B})$$

Sostituiamo nella formula di  $\mathbf{F}'$  le (8.50):

$$\begin{aligned} \mathbf{F}' &= q_0 \left[ \mathbf{E}' + \mathbf{v}_r \times \mathbf{B}' + \mathbf{v}_r \times \left( \mathbf{B}' - \frac{1}{c^2} \mathbf{v}_r \times \mathbf{E}' \right) \right] = q_0 \left[ \mathbf{E}' + (\mathbf{v}_r + \mathbf{v}) \times \mathbf{B}' - \frac{1}{c^2} \mathbf{v}_r \times (\mathbf{v} \times \mathbf{E}') \right] = \\ &= q_0 (\mathbf{E} + \mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}) - \frac{q_0}{c^2} \mathbf{v}_r \times (\mathbf{v} \times \mathbf{E}) \end{aligned}$$

Per ipotesi le velocità sono molto inferiori a  $c$  e l'ultimo termine risulta trascurabile, per cui  $\mathbf{F}' = \mathbf{F}$ .

La forma più completa delle trasformazioni dei campi è quella relativistica, di cui (8.50) è il limite per  $v \rightarrow 0$ . Accenneremo brevemente nel capitolo 10 al legame tra elettromagnetismo e relatività.

# Proprietà magnetiche della materia

## 9.1 Magnetizzazione della materia

Nel paragrafo 7.1, introducendo i fenomeni magnetici, abbiamo osservato che esistono in natura materiali, tipicamente composti del ferro, che sono sorgenti permanenti di campi magnetici o che, sottoposti all'azione di un campo magnetico, diventano a loro volta sorgenti di  $\mathbf{B}$ . Accanto a tali fenomeni vistosi, limitati a poche sostanze, ne avvengono altri molto più comuni, ma meno evidenti.

In questo capitolo discuteremo le proprietà magnetiche della materia, ovvero il comportamento della materia in presenza di un campo magnetico. Inizialmente daremo una descrizione fenomenologica e, introducendo il vettore magnetizzazione  $\mathbf{M}$ , vedremo come si modifichino le equazioni della magnetostatica. Nei paragrafi 9.11 e 9.12 accenneremo all'interpretazione microscopica classica della magnetizzazione della materia e alla necessità di una trattazione quantistica, come è naturale essendo il magnetismo nella materia un fenomeno in cui le proprietà atomiche giocano un ruolo fondamentale.

Consideriamo un solenoide rettilineo, di raggio  $R$  e lunghezza  $d$ , con  $n$  spire per unità di lunghezza, e disponiamolo con l'asse verticale. Sospendiamo tramite una molla una piccola bobina, costituita da  $N'$  spire di raggio  $r \ll R$  coassiali con le spire del solenoide e percorse dalla corrente  $i'$ ; supponiamo che la posizione di equilibrio della bobina, sotto l'azione della forza peso e della forza elastica, coincida con il centro  $O'$  della faccia terminale del solenoide. Quando nel solenoide circola la corrente  $i$  che produce nei punti dell'asse il campo magnetico (8.20), sulla bobina agisce la forza (7.34).

$$F = \pm m' \frac{dB}{dx} :$$

$m' = \pi r^2 N' i'$  è il momento magnetico della bobina secondo (7.18). È conveniente porre la bobina in  $O'$  perché, come abbiamo detto nel paragrafo 8.2, in  $O'$  è massima la derivata del campo magnetico. Se  $m'$  è concorde al campo  $\mathbf{B}$  del solenoide, cioè se  $i$  e  $i'$  sono equiverse, la forza sulla bobina è *attrattiva* e tende a portare la bobina verso l'interno del solenoide dove il campo è maggiore, se invece  $m'$  è discorda a  $\mathbf{B}$  la forza è *repulsiva* e spinge la bobina verso l'esterno dove il campo è minore. Tarando opportunamente la molla (*dinamometro*), dalla misura dello spostamento dalla posizione di equilibrio a campo nullo si determina il valore della forza magnetica.

Sospendiamo adesso al dinamometro, in modo che stiano nella posizione  $O'$ , campioni di vari materiali aventi piccole dimensioni, ad esempio prismetti con volume dell'ordine del  $\text{cm}^3$ . Quando nel solenoide circola corrente si osserva che su ciascun campione viene esercitata una forza.

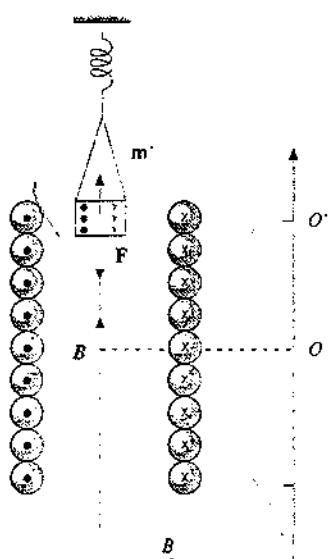


Figura 9.1

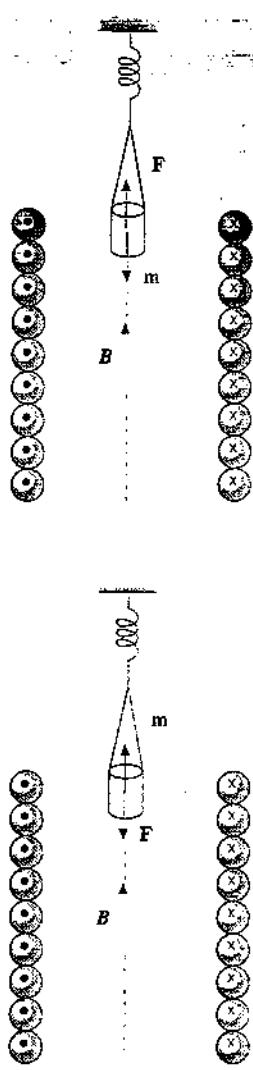


Figura 9.2

Sostanze diamagnetiche

Sostanze paramagnetiche

Sostanze ferromagnetiche

Qualitativamente, per la maggior parte delle sostanze la forza, pur facilmente misurabile, è molto piccola anche se il campo magnetico assume valori elevati (si veda l'esempio 9.4). Alcuni campioni sono attratti verso l'interno, altri respinti verso l'esterno, e ciò indipendentemente dal verso del campo magnetico, come si verifica invertendo il senso della corrente nel solenoide. L'insieme dei risultati si interpreta supponendo che alcune sostanze, sottoposte all'azione del campo magnetico  $\mathbf{B}$  del solenoide, acquistino un momento magnetico  $\mathbf{m}$  parallelo e concorde a  $\mathbf{B}$ , mentre in altre  $\mathbf{m}$  è parallelo e discorde a  $\mathbf{B}$ : le prime sono quelle attratte, le seconde quelle respinte. Tra le prime sostanze ve ne sono alcune, come il ferro, il nichel e il cobalto, per le quali la forza è molto grande, segno che il momento magnetico acquistato è molto grande.

Per un'analisi quantitativa facciamo riferimento a un dato volume  $\tau$ , eguale per tutti i campioni. La forza per unità di volume vale, in modulo,

$$F_\tau = \frac{F}{\tau} = \frac{m}{\tau} \frac{dB}{dx} = M \frac{dB}{dx}$$

La grandezza  $M$ , che rappresenta il *momento magnetico dell'unità di volume del materiale*, si chiama *magnetizzazione*; essa è definita vettorialmente come

$$\mathbf{M} = \frac{\mathbf{m}}{\tau} \quad (9.1)$$

Dalla misura sistematica di  $F_\tau$ , oltre alle differenze di segno e di modulo sopra riportate, si deducono ulteriori differenze di comportamento. Se facciamo variare l'intensità della corrente  $i$  nel solenoide, con il che variano  $B$  e  $dB/dx$ , ricaviamo ad esempio come  $M$  varia con  $B$ : mentre per la maggior parte delle sostanze si osserva che la magnetizzazione è direttamente proporzionale al valore del campo magnetico cui il campione è sottoposto, per il ferro e gli altri materiali con proprietà analoghe la dipendenza di  $M$  da  $B$  appare più complicata. Inoltre in alcuni materiali la forza dipende dalla temperatura, in altri è indipendente.

In base alle caratteristiche sperimentali descritte si può procedere a una suddivisione in tre classi alle quali, come vedremo in seguito, corrispondono diversi meccanismi microscopici di formazione del momento magnetico in presenza di un campo magnetico.

Sono dette *diamagnetiche* le sostanze che vengono *repunte* dal solenoide: la *magnetizzazione*  $M$  è *opposta* al campo magnetico  $\mathbf{B}$  esterno ed è ad esso proporzionale; l'effetto non dipende dalla temperatura, salvo poche eccezioni. È questa la classe più ampia a cui appartiene la maggior parte delle sostanze.

Si chiamano *paramagnetiche* le sostanze che vengono *attratte* dal solenoide, quelle cioè in cui la *magnetizzazione* è *concorde* al campo magnetico; anche ora  $M$  è proporzionale a  $\mathbf{B}$ . Si trova che in generale l'effetto aumenta al diminuire della temperatura, ma ci sono svariate eccezioni. In alcuni materiali paramagnetici la forza è dello stesso ordine di grandezza di quella subita dalle sostanze diamagnetiche, in altri è abbastanza superiore. In tutti i casi si tratta di forze piuttosto piccole, alle temperature ordinarie.

Infine sono dette *ferromagnetiche* le sostanze che sono *attratte fortemente* verso la zona in cui il campo magnetico è maggiore: anche in questi campioni la *magnetizzazione* è *concorde* al campo magnetico, però la relazione tra  $M$  e  $\mathbf{B}$  non è *lineare* e nemmeno univoca. Inoltre di norma i campioni rimangono magnetizzati anche dopo che il campo è stato spento, cosa che non accade con le sostanze diamagnetiche e paramagnetiche.

Il procedimento di ricondurre la forza alla magnetizzazione, cioè al momento magnetico per unità di volume, ricorda quanto già fatto nel caso dei dielettrici con riferimento al vettore polarizzazione  $\mathbf{P}$ , momento di dipolo elettrico per unità di volume. In effetti si vedrà nel resto del capitolo che il tipo di trattazione è abbastanza simile e che vi sono analogie formali tra i due casi, pur essendo i fenomeni molto diversi.

## 9.2 Permeabilità magnetica e suscettività magnetica

Il momento magnetico per unità di volume che si forma per l'azione del campo magnetico esterno causa una modifica del campo stesso: il mezzo magnetizzato cioè si aggiunge alle sorgenti di  $\mathbf{B}$  costituite dalle correnti di conduzione. Esaminiamo l'effetto in un solenoide indefinito il cui campo ha l'espressione (8.23),  $B_0 = \mu_0 n i$ : col simbolo  $B_0$  indichiamo il valore del campo magnetico nel vuoto. Tale campo può essere misurato con una sonda di Hall (paragrafo 7.7).

Supponiamo di riempire completamente il solenoide con un mezzo omogeneo; la misura di  $\mathbf{B}$  può di nuovo essere effettuata con una sonda di Hall che però va inserita in una cavità praticata nel mezzo, se questo è solido. Dimostreremo nel paragrafo 9.6 che la forma da dare alla cavità per misurare correttamente  $\mathbf{B}$  nel mezzo è quella di un disco sottile con le basi ortogonali alle linee di campo. Una cavità analoga può essere ricavata in un mezzo fluido mettendo il misuratore dentro un apposito contenitore.

Dalla misura di  $\mathbf{B}$  troviamo che esso è parallelo e concorde a  $\mathbf{B}_0$  e che il rapporto tra i moduli vale ovunque

$$\frac{B}{B_0} = \kappa_m \quad . \quad (9.2) \quad \text{Permeabilità magnetica relativa}$$

A questo rapporto diamo il nome di *permeabilità magnetica relativa* (al vuoto) del mezzo considerato. Quindi

$$B = \kappa_m B_0 = \mu_0 \kappa_m n i = \mu n i \quad (9.3)$$

definendo *permeabilità magnetica (assoluta)* la grandezza

$$\mu = \mu_0 \kappa_m \quad . \quad (9.4) \quad \text{Permeabilità magnetica}$$

Mentre  $\kappa_m$  è adimensionale,  $\mu$  ha la stessa unità di misura di  $\mu_0$ , H/m.

La relazione (9.2) risulta valida per circuiti di forma qualunque immersi in un mezzo indefinito. Anche la definizione (9.4) è generale, perché secondo la legge di Ampère-Laplace (8.3) il campo magnetico nel vuoto ha sempre il coefficiente moltiplicativo  $\mu_0$ . Possiamo quindi dire che *sperimentalmente* il campo magnetico esistente in un mezzo indefinito omogeneo in cui è immerso un circuito percorso da corrente è dato da

$$\mathbf{B} = \frac{\mu i}{4\pi} \oint \frac{ds \times \mathbf{u}_r}{r^2} \quad . \quad (9.5)$$

Al termine *omogeneo* diamo d'ora in poi un significato più ampio, intendendo che insieme alla densità è costante nel mezzo anche la *permeabilità magnetica relativa*.

La variazione del campo magnetico dovuta alla presenza del mezzo è dunque

$$B - B_0 = \kappa_m B_0 - B_0 = (\kappa_m - 1) B_0 = \chi_m B_0$$

Definiamo così una nuova grandezza, la *suscettività magnetica*

### Suscettività magnetica

$$\chi_m = \kappa_m - 1, \quad \kappa_m = 1 + \chi_m, \quad (9.6)$$

che in questo contesto ha il significato di variazione relativa del campo magnetico,  $\chi_m = (B - B_0) / B_0$ .

Ritornando alla (9.3) scriviamo

$$B = \kappa_m B_0 = (1 + \chi_m) B_0 = B_0 + \chi_m B_0 = \mu_0 n i + \mu_0 \chi_m n i$$

e vediamo che ne possiamo dare l'interpretazione seguente: dato che il termine  $\mu_0 n i$  è il campo magnetico prodotto dalla corrente di conduzione che circola nelle spire del solenoide, il secondo termine deve rappresentare l'effetto del mezzo magnetizzato, effetto che risulta identico a quello che sarebbe prodotto da un secondo solenoide eguale al primo, ma percorso dalla corrente di densità lineare  $\chi_m n i$  (fig. 9.3). Come vedremo nel paragrafo 9.3 questa interpretazione non è fitizia: sulla superficie del mezzo magnetizzato una corrente esiste realmente, anche se non è una corrente di conduzione, bensì il risultato di *correnti di origine atomica* che si formano per effetto del campo magnetico prodotto dalla corrente di conduzione. Tali correnti sono dette *amperiane*, in onore di Ampère che per primo ne intuì l'esistenza (vedi paragrafo 7.1).

È chiara l'analogia con quanto abbiamo trattato all'inizio del capitolo 5: la permeabilità magnetica gioca lo stesso ruolo della costante dielettrica e le correnti amperiane quello delle cariche di polarizzazione.

Però la varietà dei fenomeni magnetici è maggiore, come adesso proviamo supponendo di riempire il solenoide con sostanze diverse secondo la classificazione data nel paragrafo 9.1.

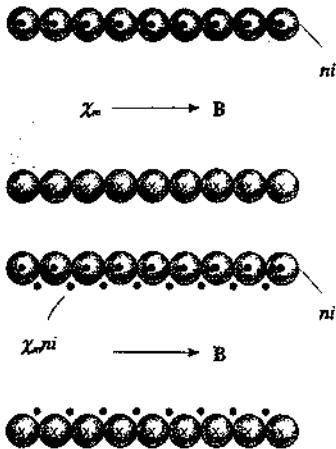


Figura 9.3

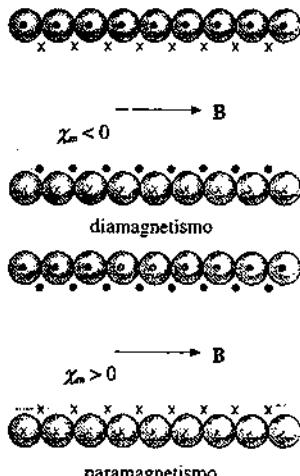


Figura 9.4

### Sostanze diamagnetiche

Dalla misura del campo  $B$  nel solenoide avvolto su una sostanza diamagnetica si ricava che la *permeabilità magnetica* relativa è costante al variare di  $B$  e minore di 1:

$$\kappa_m < 1 \Rightarrow \chi_m < 0 \quad (9.7)$$

Dal momento che  $B$  è minore di  $B_0$  le *correnti amperiane* devono dare un contributo opposto a  $B_0$ , circolando quindi in verso opposto rispetto a quelle di conduzione; ciò è coerente col fatto che il *momento magnetico* risulti opposto a  $B_0$  negli esperimenti di attrazione e repulsione descritti nel paragrafo 9.1, se ammettiamo che  $m$  nasca dalle correnti amperiane.

Nella tabella 9.1 sono riportati alcuni dati numerici; si noti che  $\chi_m$  dipende dalla densità del materiale, nel senso che è molto minore nei gas che nei liquidi e nei solidi. Per questi ultimi  $\chi_m$  ha valori dell'ordine di  $10^{-5}$ .

**Tabella 9.1 Suscettività di sostanze diamagnetiche**

argento	$-2.39 \cdot 10^{-5}$	acqua	$-0.90 \cdot 10^{-5}$
bismuto	$-16.42 \cdot 10^{-5}$	mercurio	$-2.80 \cdot 10^{-5}$
oro	$-3.46 \cdot 10^{-5}$		
piombo	$-1.58 \cdot 10^{-5}$	argon	$-1.10 \cdot 10^{-8}$
rame	$-0.98 \cdot 10^{-5}$	azoto	$-1.35 \cdot 10^{-8}$
silicio	$-0.42 \cdot 10^{-5}$	idrogeno	$-0.45 \cdot 10^{-8}$

**Sostanze paramagnetiche**

Per queste risulta che la *permeabilità magnetica* relativa è costante al variare di  $B$  e maggiore di 1:

$$\kappa_m > 1 \Rightarrow \chi_m > 0 ; \quad (9.8)$$

le *correnti amperiane* sono quindi *equiverse* alle correnti di conduzione e gli effetti magnetici si sommano. Si tratta anche in questo caso di effetti piccoli, come appare dalla tabella 9.2: i valori di  $\chi_m$  sono di norma compresi tra  $10^{-4}$  e  $10^{-5}$ , a temperatura ambiente.

**Tabella 9.2 Suscettività di sostanze paramagnetiche**

alluminio	$2.08 \cdot 10^{-5}$	titanio	$18.22 \cdot 10^{-5}$
calcio	$1.94 \cdot 10^{-5}$	tungsteno	$7.92 \cdot 10^{-5}$
magnesio	$1.17 \cdot 10^{-5}$	uranio	$40.92 \cdot 10^{-5}$
platino	$27.91 \cdot 10^{-5}$		
sodio	$0.85 \cdot 10^{-5}$	ossigeno	$387.4 \cdot 10^{-8}$

È importante la dipendenza dalla temperatura che obbedisce alla legge, detta *prima legge di Curie*.

$$\chi_m = \frac{C\rho}{T} , \quad (9.9) \quad \text{Prima legge di Curie}$$

dove  $\rho$  è la densità,  $T$  la temperatura espressa in Kelvin e  $C$  una costante. Soltanto alcuni metalli paramagnetici, con  $\chi_m$  dell'ordine di  $10^{-5}$ , non seguono (9.9) e hanno suscettività praticamente costante.

**Sostanze ferromagnetiche**

La permeabilità di una sostanza ferromagnetica può arrivare a valori dell'ordine di  $10^3 \div 10^5$  e inoltre essa dipende dal valore del campo esterno e dal modo con cui tale valore è stato raggiunto:  $\kappa_m$  e  $\chi_m$  non sono cioè funzioni univoche di  $B$ , come spiegheremo nel paragrafo 9.7. Le *correnti amperiane* sono *equiverse* a quelle di conduzione e il loro contributo al campo magnetico totale è di gran lunga superiore, dati i valori di  $\chi_m$ . Anche nel ferromagnetismo c'è dipendenza dalla temperatura nel senso che oltre una certa temperatura il comportamento diventa eguale a quello paramagnetico.

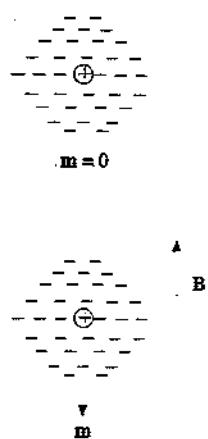


Figura 9.5

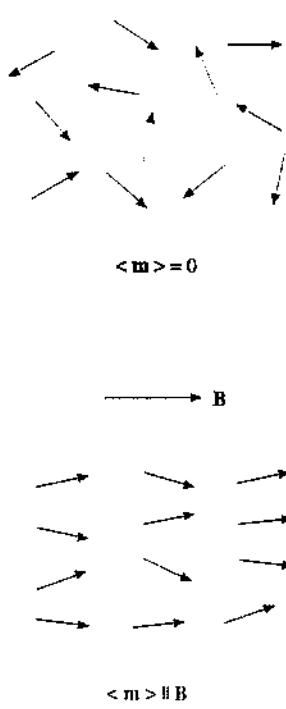


Figura 9.6

### 9.3 Correnti amperiane e magnetizzazione

Nel paragrafo 9.2 abbiamo introdotto la suscettività magnetica come grandezza macroscopica che permette di valutare l'importanza del processo di magnetizzazione in un materiale. D'altra parte abbiamo avanzato l'ipotesi che la comparsa della magnetizzazione fosse dovuta a correnti atomiche. Tratteremo per esteso questo argomento a partire dal paragrafo 9.10 e arriveremo tra l'altro ad espressioni della suscettività in funzione di grandezze microscopiche. Per ora diciamo semplicemente che il moto degli elettroni intorno al nucleo può essere assimilato a correnti microscopiche, alle quali è associato un momento magnetico. Nella maggior parte dei casi questi momenti si compensano e l'atomo non ha momento magnetico, mentre quando agisce un campo magnetico esterno il moto degli elettroni è perturbato e ha origine un momento magnetico che è opposto al campo esterno: questo è il meccanismo classico del diamagnetismo e si capisce che esso è sempre presente. La situazione ricorda il meccanismo di polarizzazione elettronica, anch'esso sempre presente sotto l'azione di un campo elettrico: e come nel caso elettrico l'effetto si oppone al campo che lo ha provocato, riducendo il campo magnetico effettivo nel mezzo (effetto smagnetizzante, analogo all'effetto depolarizzante).

In alcune sostanze vi sono condizioni di assimetria per cui le molecole possono avere un momento magnetico intrinseco. A causa dell'agitazione termica il momento magnetico medio è nullo, ma sotto l'azione di un campo magnetico esterno c'è un fenomeno di orientazione parziale e ha origine un momento magnetico parallelo e concorde al campo esterno, che supera l'effetto diamagnetico. Questo è ciò che accade nei materiali paramagnetici ed è evidente il parallelismo con il meccanismo della polarizzazione per orientamento nei dielettrici. La differenza sostanziale è che mentre il campo di dipolo elettrico all'interno del mezzo si oppone a  $E$ , il campo magnetico delle correnti elementari che generano i momenti magnetici è concorde al campo  $B$  (si veda la figura 8.14 per visualizzare l'effetto). Però, a parte il segno, si può eseguire la stessa trattazione matematica, come vedremo.

Sia nel diamagnetismo che nel paramagnetismo si arriva classicamente a capire l'origine dei fenomeni, ma le previsioni numeriche non sono precise perché la spiegazione corretta richiede la meccanica quantistica. Nel ferromagnetismo il fenomeno è più complesso e non esiste una spiegazione classica; anche ora vi sono dei momenti magnetici che vengono orientati concordemente al campo magnetico esterno, solo che basta un campo relativamente debole per ottenere una orientazione quasi completa dei momenti elementari, per cui gli effetti sono notevolissimi.

Senza approfondire ulteriormente l'argomento diciamo che in ogni caso tutti gli atomi o molecole del materiale acquistano sotto l'azione del campo  $B$  un *momento magnetico medio*  $\langle m \rangle$ , orientato parallelamente a  $B$ . Considerato un volumetto  $\Delta\tau$  nell'intorno di un punto  $P$ , in cui sono contenuti  $\Delta N$ , atomi (o molecole), il momento magnetico è

$$\Delta\mathbf{m} = \Delta N, \langle \mathbf{m} \rangle$$

e il momento magnetico per unità di volume, ovvero la magnetizzazione (9.1), vale

$$\mathbf{M} = \frac{\Delta\mathbf{m}}{\Delta\tau} = \frac{\Delta N}{\Delta\tau} \langle \mathbf{m} \rangle = n \mathbf{m} \quad (9.10)$$

dove  $n$  è il *numero di atomi (o di molecole) per unità di volume nell'intorno di  $P$* . Al tendere di  $\Delta\tau$  a zero viene definita la *magnetizzazione  $M$*  in funzione della posizione. Si parla di *magnetizzazione uniforme* quando  $M$  è costante nel mezzo; di norma ciò avviene, almeno per le *sostanze amorfe*, dotate di *simmetria spaziale*, quando esse sono immerse in un campo magnetico uniforme.

Supponiamo ora di avere un cilindro magnetizzato uniformemente con magnetizzazione  $\mathbf{M}$  parallela all'asse e isoliamo un disco di spessore  $dz$ . Suddividiamo il disco in prismetti di base  $d\Sigma$ , altezza  $dz$  e volume  $d\tau = d\Sigma dz$ . Ciascuno dei prismetti ha il momento magnetico, orientato come  $\mathbf{M}$ ,

$$d\mathbf{m} = \mathbf{M} d\tau = M d\Sigma dz \mathbf{u}_z .$$

Secondo il principio di equivalenza di Ampère (7.21) lo stesso momento magnetico è posseduto da una spira a forma di nastro, di area  $d\Sigma$  e altezza  $dz$ , percorsa da una corrente  $di_m$  tale che

$$d\mathbf{m} = di_m d\Sigma \mathbf{u}_z = M d\Sigma dz \mathbf{u}_z \Rightarrow di_m = M dz . \quad (9.11)$$

Come sappiamo, l'*equivalenza* è valida anche per quanto riguarda il campo magnetico prodotto.

Sostituiamo ogni prisma di materiale magnetizzato con l'equivalente circuito percorso dalla corrente  $di_m$ . Se  $\mathbf{M}$  è costante le correnti si elidono a due a due sui lati contigui dei circuiti elementari e rimangono attive solamente le correnti sulla superficie laterale del cilindro. Il *disco di materiale magnetizzato uniformemente è equivalente a tutti gli effetti ad un circuito percorso dalla corrente* (9.11). Procedendo nello stesso modo per tutti i dischi di altezza  $dz$  che costituiscono il cilindro magnetizzato di altezza  $h$ , concludiamo che esso equivale a una fascia di altezza  $h$  percorsa dalla corrente

$$i_m = \int_0^h M dz = M h , \quad (9.12)$$

ovvero percorsa dalla corrente di *densità lineare*

$$M = \frac{i_m}{h} = \frac{di_m}{dz} = j_{s.m} .$$

Vettorialmente il legame tra la densità lineare di corrente amperiana e la magnetizzazione, collegate tra loro dalla regola della vite per quanto riguarda i versi, si scrive

$$\mathbf{j}_{s.m} = \mathbf{M} \times \mathbf{u}_n , \quad (9.13)$$

indicando con  $\mathbf{u}_n$  il versore normale all'asse del cilindro e orientato verso l'esterno.

Un'altra forma della relazione tra magnetizzazione e correnti amperiane si ottiene considerando la figura 9.9 e eseguendo la circuitazione di  $\mathbf{M}$  lungo un *percorso chiuso* generico che *concateni* la corrente  $i_m$ . Dato che al di fuori del cilindro  $\mathbf{M} = 0$  e che all'interno, qualunque sia il percorso, vale (9.12), si ha

$$\oint \mathbf{M} \cdot d\mathbf{s} = i_m . \quad (9.14)$$

Nel caso più generale  $\mathbf{M}$  può non essere *uniforme* nel materiale. Allora in due prismetti contigui lungo l'asse  $x$  (vedi figura 9.10) abbiamo due componenti  $M_x$  e  $M'_x$  diverse, derivanti dalle correnti  $di_1 = M_x dz$  e  $di_2 = M'_x dz$ , per cui la *corrente effettiva* lungo l'asse  $y$ , cioè sulla faccia di contatto, è

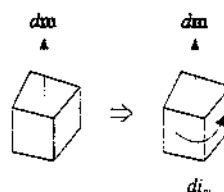
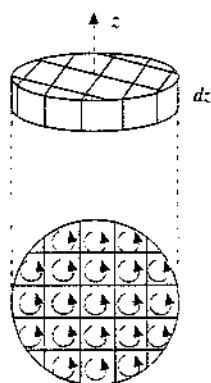
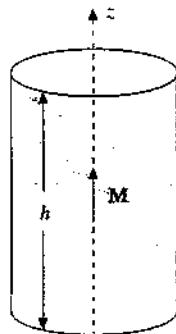


Figura 9.7

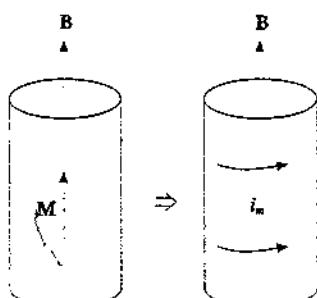


Figura 9.8

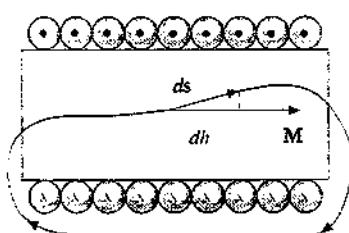


Figura 9.9

$$di_1 - di_2 = (M_z - M'_z) dz = - \frac{\partial M_z}{\partial x} dx dz$$

Ripetendo l'argomento per due prismetti contigui lungo l'asse  $z$  e per la componente  $M_x$  della magnetizzazione, vediamo dalla figura che lungo l'asse  $y$  c'è la corrente

$$di_4 - di_3 = (M'_x - M_x) dx = \frac{\partial M_x}{\partial z} dz dx$$

e in totale lungo l'asse  $y$  abbiamo la corrente

$$di_y = (di_4 - di_3) + (di_1 - di_2) = \left( \frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x} \right) dx dz .$$

L'elemento di area  $d\Sigma = dx dz$  è ortogonale all'asse  $y$  e quindi la componente lungo  $y$  della densità di corrente è

$$j_y = \frac{di_y}{dx dz} = \frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x} = (\nabla \times \mathbf{M})_y$$

Completando il ragionamento per gli altri due assi si ha

$$\mathbf{j}_m = \nabla \times \mathbf{M} \quad . \quad (9.15)$$

Si faccia attenzione al fatto che  $\mathbf{j}_m$  è una *densità di corrente*, definita in un volume e misurata in  $A/m^3$ , mentre  $j_{s,m}$  è una densità lineare di corrente, definita su una superficie e misurata in  $A/m$ .

Le (9.13) e (9.15) stabiliscono nel caso più generale la relazione tra il vettore magnetizzazione, introdotto per caratterizzare il momento magnetico acquistato dal mezzo, e le correnti amperiane, che sono l'aspetto macroscopico delle correnti atomiche originate nel mezzo dalla presenza di un campo magnetico esterno. Se ne deduce tra l'altro che gli effetti magnetici di un mezzo magnetizzato si possono calcolare a partire da una distribuzione superficiale di corrente con densità lineare  $j_{s,m}$  e da una distribuzione spaziale di corrente con densità  $j_m$ . In particolare è così che si può determinare all'interno di un mezzo magnetizzato il campo magnetico dovuto al mezzo stesso, inteso naturalmente come *campo macroscopico medio*.

Vedremo nel paragrafo 9.4 una utilizzazione formale di (9.13) e (9.15). Per ora notiamo l'analogia con la situazione di un dielettrico polarizzato in cui l'effetto del mezzo si calcola a partire da una distribuzione superficiale di carica di polarizzazione  $\sigma_p$  e da una distribuzione di volume con densità  $\rho_p$ , legate al vettore polarizzazione dalle (5.12) e (5.14):

$$\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}_n \quad , \quad \rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P} \quad .$$

#### 9.4 Equazioni generali della magnetostatica. Il campo $\mathbf{H}$

Le equazioni generali della magnetostatica nel vuoto, riepilogate nel paragrafo 8.6, devono essere in parte modificate quando sono presenti mezzi magnetizzati. Resta invariata la proprietà di  $\mathbf{B}$  di essere solenoidale mentre cambiano le equazio-

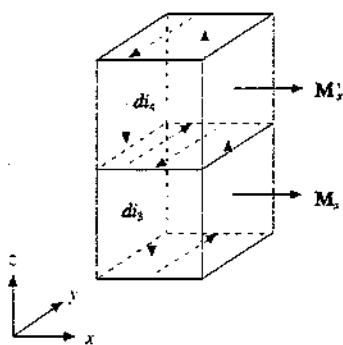
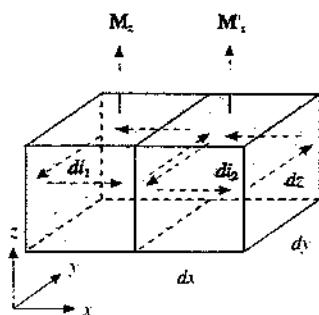


Figura 9.10

ni in cui compaiono le sorgenti, a seguito dell'introduzione delle correnti amperiane. Occorre pertanto scrivere, in forma integrale,

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 (i + i_m) = \mu_0 i + \mu_0 \oint \mathbf{M} \cdot d\mathbf{s} \quad (9.16)$$

e, in forma differenziale,

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{j} + \mathbf{j}_m) = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \nabla \times \mathbf{M} \quad (9.17)$$

dove ci siamo serviti di (9.14) e (9.15). Raccogliendo nello stesso membro i termini con  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{M}$  abbiamo

$$\oint (\mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{M}) \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 i \quad , \quad \nabla \times (\mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{M}) = \mu_0 \mathbf{j} \quad .$$

Se ora introduciamo il nuovo *campo vettoriale H* attraverso la definizione

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \quad \text{ovvero} \quad \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad , \quad (9.18) \quad \text{Campo vettoriale H}$$

vediamo che esso soddisfa alle relazioni

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = i \quad , \quad (9.19) \quad \text{Legge di Ampère per il campo H}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} \quad . \quad (9.20)$$

La (9.19) esprime la *legge di Ampère per il campo H*: la circuitazione di  $\mathbf{H}$  estesa ad una qualsiasi linea chiusa è eguale alla somma delle correnti di conduzione concatenate dalla linea. In termini locali il rotore di  $\mathbf{H}$  è eguale alla densità di corrente di conduzione.

Possiamo allora riscrivere le *equazioni della magnetostatica* in generale servendoci dei due campi  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{H}$ :

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma &= 0 \quad , \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad , \\ \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} &= i \quad , \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} \quad . \end{aligned} \quad \text{Equazioni della magnetostatica}$$

In esse formalmente sono sparite le correnti amperiane, ma per risolvere occorre un'ulteriore informazione. Infatti  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{H}$  sono sì legati dalla definizione (9.18), però in essa c'è anche il vettore  $\mathbf{M}$ : il problema per ora è stato soltanto spostato nel senso che il contributo delle correnti amperiane, nascosto con la riformulazione delle equazioni generali, ricompare nel legame tra  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{H}$ . C'è dunque bisogno dell'*equazione di stato del mezzo magnetizzato*, cioè della relazione esplicita tra  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{M}$  o tra  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{M}$ .

Per le ragioni che diremo tra poco si preferisce mettere in evidenza il legame tra  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{H}$  assumendo come relazione caratteristica del mezzo magnetizzato la

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \quad . \quad (9.21)$$

Come immediata conseguenza abbiamo

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0(\mathbf{H} + \chi_m \mathbf{H}) = \mu_0(1 + \chi_m) \mathbf{H} = \mu_0 \kappa_m \mathbf{H} = \mu \mathbf{H} \quad (9.22)$$

e, mettendo insieme (9.21) e (9.22),

$$\mathbf{M} = \frac{1}{\mu} \chi_m \mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\chi_m}{\kappa_m} \mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\kappa_m - 1}{\kappa_m} \mathbf{B} \quad . \quad (9.23)$$

Ci sono alcuni commenti da fare su tutta la procedura che abbiamo seguito. Da un punto di vista generale la (9.19) non definisce completamente il vettore  $\mathbf{H}$ , fissa soltanto la proprietà della sua circuitazione. Però in molti casi pratici interessanti, che vedremo negli esempi, le condizioni di simmetria permettono di ricavare  $\mathbf{H}$  direttamente da (9.19) senza doversi preoccupare della presenza del mezzo magnetizzato. Questa è una circostanza importante: dalla conoscenza delle correnti di conduzione, che sono sotto il nostro controllo, determiniamo  $\mathbf{H}$  e siamo quindi in grado di valutare l'effetto sul mezzo, tramite (9.21), e di calcolare il campo magnetico risultante da tutte le correnti presenti tramite (9.22). Si può dire che  $\mathbf{H}$  svolge il ruolo di *variabile indipendente* alla quale riferiamo gli effetti magnetici nei mezzi e ciò giustifica il fatto di utilizzare (9.21) come equazione di stato.

Per la verifica di (9.21) rimandiamo all'esempio 9.1; il significato fisico sta nell'assunzione che i momenti magnetici presenti nel mezzo magnetizzato siano sempre proporzionali al campo che li provoca e in effetti nella maggior parte dei materiali (9.21) e (9.22) sono vere relazioni lineari, con  $\chi_m$  e  $\mu$  costanti. Non è così nei mezzi ferromagnetici, in cui  $\chi_m$  è funzione non univoca di  $\mathbf{H}$  e non si può parlare di equazione di stato nei termini semplici di (9.21); la relazione tra  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{H}$  o tra  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{H}$  è espressa tramite il *ciclo di isteresi*, come vedremo nel paragrafo 9.7; solo in specifiche situazioni (9.21) e (9.22) restano valide con  $\chi_m$  e  $\mu$  costanti. Non cambiano invece i metodi di determinazione di  $\mathbf{H}$  in presenza di simmetrie poiché (9.19) non dipende dal mezzo.

Riepiloghiamo nella tabella 9.3 le caratteristiche fenomenologiche finora discusse;  $\mathbf{B}_0$  è il campo magnetico dovuto alle correnti di conduzione,  $\mathbf{B}$  il campo magnetico in presenza di un mezzo indefinito.

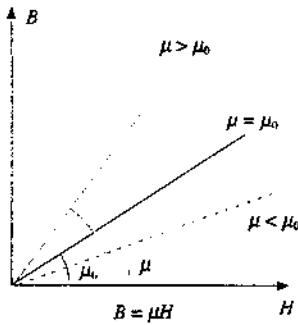


Figura 9.11

Tabella 9.3

sostanza	$\chi_m$	$\kappa_m$	$\chi_m, \kappa_m$	$\mathbf{M} \text{ e } \mathbf{H}$	$\mathbf{B} \text{ e } \mathbf{B}_0$
diamagnetica	$< 0$	$< 1$	costanti	$\mathbf{M}$ opposto a $\mathbf{H}$	$B < B_0$
paramagnetica	$> 0$	$> 1$	costanti	$\mathbf{M}$ concorde a $\mathbf{H}$	$B > B_0$
ferromagnetica	$\gg 0$	$\gg 1$	funzioni di $H$	$\mathbf{M}$ dipende da $\mathbf{H}$ (vedi paragrafo 9.9)	$B \gg B_0$

#### Unità di misura

La magnetizzazione, definita come momento magnetico per unità di volume, risulta anche eguale a una densità lineare di corrente; di conseguenza la sua unità di misura è A/m. La stessa unità è valida per il campo  $\mathbf{H}$ , detto talvolta *campo magnetizzante*: infatti vale la (9.21) e sappiamo dal paragrafo 9.2 che la suscettività magnetica, come pure la permeabilità magnetica relativa, è adimensionale. Ricordiamo che invece la permeabilità magnetica assoluta si misura in H/m (henry su metro).

**Esempio 9.1**

Un solenoide toroidale è riempito con un materiale avente permeabilità magnetica relativa  $\kappa_m$ . Calcolare i campi  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{B}$  nel suo interno.

**Soluzione**

Seguendo l'esempio 8.7, ma applicando il ragionamento al vettore  $\mathbf{H}$ , abbiamo in base a (9.19)

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = 2\pi r H = Ni \Rightarrow H = \frac{Ni}{2\pi r} u_o \quad (9.24)$$

Da questa e da (9.22)

$$\mathbf{B} = \mu_0 \kappa_m \mathbf{H} = \frac{\mu_0 \kappa_m N i}{2\pi r} u_o \quad (9.25)$$

Il campo  $\mathbf{H}$  non dipende dal mezzo che riempie il solenoide, il campo magnetico invece è cambiato di un fattore  $\kappa_m$  rispetto al valore (8.31) nel vuoto.

Nel paragrafo 9.2 avevamo trovato in generale il risultato  $B / B_0 = \kappa_m$  parlando di un mezzo indefinito in cui si immerge il circuito: siamo in pratica nello stesso caso perché, se trascuriamo il piccolo campo esterno al solenoide, tutto lo spazio in cui  $\mathbf{B}$  è diverso da zero è stato riempito con un mezzo omogeneo. Sappiamo dunque, indipendentemente da (9.22), che  $\mathbf{B} = \kappa_m \mathbf{B}_0$  e anche da (9.24) che  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0$ . Dato che nel vuoto  $\mathbf{M} = 0$ , da (9.18) abbiamo

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad , \quad \mathbf{B}_0 = \mu_0 \mathbf{H} \Rightarrow \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \kappa_m \mu_0 \mathbf{H} = (1 + \chi_m) \mu_0 \mathbf{H} \quad , \\ \mathbf{M} &= \chi_m \mathbf{H} \quad . \end{aligned}$$

Si verifica dunque che nel caso in esame (9.21) è soddisfatta e che la magnetizzazione si scrive

$$\mathbf{M} = \frac{\chi_m N i}{2\pi r} u_o \quad .$$

In effetti (9.21) è più generale di quanto possa sembrare da questo esempio.

**Esempio 9.2**

All'interno di un solenoide indefinito di raggio  $R$  è posto un cilindro indefinito di raggio  $r < R$ , coassiale al solenoide, avente permeabilità magnetica relativa  $\kappa_m$ . Calcolare i valori di  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{M}$  e la densità di corrente amperiana.

**Soluzione**

Tutti i campi, per ragioni di simmetria, sono paralleli all'asse del sistema. Il campo  $\mathbf{H}$  si calcola applicando (9.19) prima ad un percorso rettangolare che concatena la corrente  $n i$  e poi ad un secondo percorso che invece non concatena correnti di conduzione ( $n$  è il numero di spire per unità di lunghezza). Nei due casi si ha

$$\begin{cases} \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = H_1 h = n i h \Rightarrow H_1 = n i \quad , \\ \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = H_1 h - H_2 h = 0 \Rightarrow H_1 = H_2 \quad . \end{cases}$$

Pertanto il campo  $\mathbf{H}$  ha lo stesso valore

$$\mathbf{H} = n i u_z \quad (9.26)$$

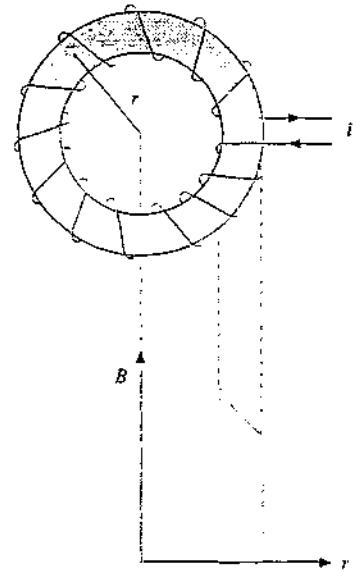


Figura 9.12

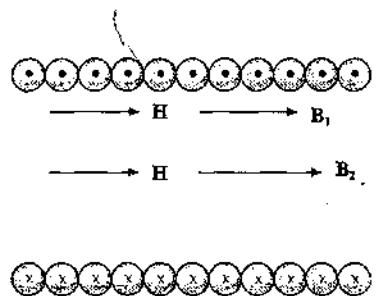


Figura 9.13

nella zona vuota del solenoide e nel cilindro magnetizzato.  
Il campo magnetico  $\mathbf{B}$  invece è diverso nelle due regioni:

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_1 &= \mu_0 \mathbf{H} = \mu_0 n i \mathbf{u}_z, \\ \mathbf{B}_2 &= \mu \mathbf{H} = \mu_0 \kappa_m n i \mathbf{u}_z = \kappa_m \mathbf{B}_1.\end{aligned}\quad (9.27)$$

La magnetizzazione è diversa da zero solo nel cilindro e vale

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} = \chi_m n i \mathbf{u}_z.$$

$\mathbf{M}$  è uniforme, per cui da (9.15)  $\nabla \times \mathbf{M} = 0$  e  $\mathbf{j}_{s.m} = 0$ : non ci sono correnti amperiane di volume, ma solo la corrente amperiana superficiale con densità lineare (9.13)

$$\mathbf{j}_{s.m} = \mathbf{M} \times \mathbf{u}_n = \chi_m n i \mathbf{u}_z \times \mathbf{u}_n. \quad j_{s.m} = \chi_m n i.$$

Essa ha lo stesso verso della corrente di conduzione contribuendo ad un aumento del campo magnetico nel materiale se  $\chi_m$  è positiva, mentre ha verso opposto se  $\chi_m$  è negativa, facendo diminuire il campo magnetico nel materiale.

Un metodo semplice per magnetizzare uniformemente un cilindro finito di ferro consiste nel metterlo al centro di un solenoide abbastanza lungo.

Se ad esempio  $n i = 10^3$  A/m consideriamo queste tre possibilità:

$$\begin{array}{lll}\chi_m = 10^{-4} & M = 0.1 \text{ A/m} & B_2 = 1.0001 B_1, \\ \chi_m = -10^{-4} & M = 0.1 \text{ A/m} & B_2 = 0.9999 B_1, \\ \chi_m = 10^2 & M = 10^5 \text{ A/m} & B_2 = 101 B_1.\end{array}$$

Si vede che l'effetto magnetico è notevole in un mezzo ferromagnetico.

### Esempio 9.3

Un filo conduttore indefinito, di raggio  $R$  e permeabilità magnetica relativa  $\kappa_{1.m}$ , è posto sull'asse di una guaina cilндrica indefinita, con raggio interno  $a$  e raggio esterno  $b$ , avente permeabilità magnetica relativa  $\kappa_{2.m}$ . Dare l'andamento di  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{B}$  in funzione della distanza  $r$  dall'asse quando il filo è percorso dalla corrente  $i$  e determinare la distribuzione delle correnti amperiane. Si supponga che entrambe le permeabilità siano maggiori di 1.

#### Soluzione

Dall'esempio 8.5, adattato al campo  $\mathbf{H}$ , abbiamo che questo vale

$$\mathbf{H} = \frac{i r}{2\pi R^2} \mathbf{u}_\phi \quad 0 \leq r \leq R, \quad \mathbf{H} = \frac{i}{2\pi r} \mathbf{u}_\phi \quad r \geq R,$$

essendo  $\mathbf{u}_\phi$  il versore tangente alle linee di campo, che sono circonferenze, orientato rispetto al verso della corrente secondo la regola della vite.

Da (9.22) ricaviamo le seguenti espressioni di  $\mathbf{B}$ , a seconda del mezzo:

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \frac{\mu_0 \kappa_{1.m} i r}{2\pi R^2} \mathbf{u}_\phi \quad 0 \leq r \leq R, & \mathbf{B} &= \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \mathbf{u}_\phi \quad R \leq r \leq a, \\ \mathbf{B} &= \frac{\mu_0 \kappa_{2.m} i}{2\pi r} \mathbf{u}_\phi \quad a \leq r \leq b, & \mathbf{B} &= \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \mathbf{u}_\phi \quad r \geq b.\end{aligned}$$

La magnetizzazione è diversa da zero soltanto nei due mezzi materiali:

$$\mathbf{M} = \frac{\chi_{1,m} i r}{2\pi R^2} \mathbf{u}_\phi \quad 0 \leq r \leq R \quad , \quad \mathbf{M} = \frac{\chi_{2,m} i}{2\pi r} \mathbf{u}_\phi \quad a \leq r \leq b \quad .$$

All'interno del filo, dove la densità di corrente di conduzione vale

$$\mathbf{j} = \frac{i}{\pi R^2} \mathbf{u}_z \quad ,$$

abbiamo secondo (9.15) e (9.20)

$$\mathbf{j}_m = \nabla \times \mathbf{M} = \chi_{1,m} \nabla \times \mathbf{H} = \chi_{1,m} \mathbf{j} \quad ;$$

la densità di corrente amperiana è costante nel volume del filo e corrisponde a una corrente  $i_m = j_m \pi R^2 = \chi_{1,m} i$ , equiversa ad  $i$ . Sulla superficie del filo, secondo (9.13),

$$\mathbf{j}_{s,m} = \mathbf{M} \times \mathbf{u}_n = \frac{\chi_{1,m} i}{2\pi R} \mathbf{u}_\phi \times \mathbf{u}_n = -\frac{\chi_{1,m} i}{2\pi R} \mathbf{u}_z$$

e la corrente superficiale vale  $i'_m = j_{s,m} 2\pi R = -\chi_{1,m} i = -i_m$ . Complessivamente la corrente amperiana nel filo è nulla e non ha alcun effetto all'esterno del filo.

Nella guaina  $\nabla \times \mathbf{H} = 0$  e quindi  $\nabla \times \mathbf{M} = 0$ , non c'è densità spaziale di corrente amperiana: ci sono soltanto due densità lineari sulle superfici cilindriche di raggi  $a$  e  $b$ , pari sempre secondo (9.13) a

$$\mathbf{j}_a = -\mathbf{M}(a) \times \mathbf{u}_n \quad , \quad \mathbf{j}_b = \mathbf{M}(b) \times \mathbf{u}_n \quad .$$

Infatti per  $r = a$  il versore normale al filo è  $-\mathbf{u}_n$ , per  $r = b$  è  $\mathbf{u}_n$ . La prima densità è concorde alla densità di corrente  $\mathbf{j}$  del filo, la seconda è discorde a  $\mathbf{j}$ . In modulo

$$j_a = M(a) = \frac{\chi_{2,m} i}{2\pi a} \quad , \quad j_b = M(b) = \frac{\chi_{2,m} i}{2\pi b}$$

e le due correnti corrispondenti sono

$$i_a = j_a 2\pi a = \chi_{2,m} i \quad , \quad i_b = -j_b 2\pi b = -\chi_{2,m} i \quad .$$

Anche nella guaina globalmente la corrente amperiana è nulla; per  $r < a$  essa non ha alcun effetto magnetico, per  $a \leq r \leq b$  la corrente  $i_b$  concorde ad  $i$  rinforza il campo magnetico (è come se sull'asse ci fosse una corrente  $i + \chi_{2,m} i = \kappa_{2,m} i$ ) e  $i_b$  non ha effetto, per  $r > b$  gli effetti delle due correnti sono eguali e contrari.

Se le suscettività sono negative cambiano i segni dei contributi, che però restano sempre confinati all'interno dei due mezzi.

Si osservi infine che il campo magnetico  $\mathbf{B}$ , esclusivamente tangenziale come del resto  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{M}$ , subisce tre discontinuità, una per  $r = R$ , una per  $r = a$  e una per  $r = b$ ; si verifichi che in ognuno dei tre casi la discontinuità, procedendo dall'interno verso l'esterno, è data da  $-\mu_0 j_{s,m}$ , dove  $j_{s,m}$  è la locale densità lineare di corrente amperiana. Ciò è in accordo, tenuto conto dei segni, con quanto visto nel paragrafo 8.6 e con quanto discuteremo nel paragrafo 9.5.

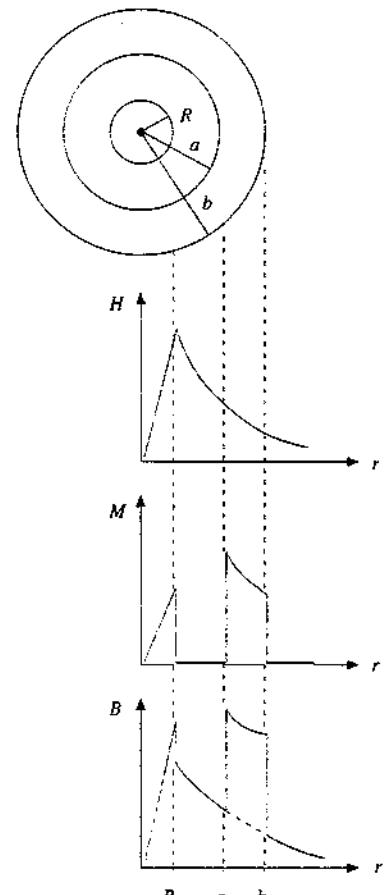


Figura 9.14

#### Esempio 9.4

Calcolare in funzione della suscettività del materiale la forza magnetica su un cilindretto di volume  $t = 1 \text{ cm}^3$  posto nel centro della faccia terminale di un solenoide lungo; il raggio del solenoide è  $r = 0.05 \text{ m}$  e la densità lineare di corrente è  $n i = 10^3 \text{ A/m}$ .

**Soluzione**

La derivata del campo magnetico (8.20) per  $x = d/2$  è

$$\frac{dB}{dx} = \mu_0 n i \left[ \frac{4R^2}{(4d^2 + 4R^2)^{3/2}} - \frac{1}{2R} \right] = -\frac{\mu_0 n i}{2R}$$

se  $d \gg R$ .

La forza sul cilindretto è data da (7.34), come detto nel paragrafo 9.1; utilizzando anche (9.1) e (9.23) si ha

$$F = m \frac{dB}{dx} = M\tau \frac{dB}{dx} = \frac{\chi_m \tau}{\mu_0 K_m} B \frac{dB}{dx}$$

All'estremità di un solenoide lungo il campo magnetico vale  $\mu_0 n i / 2$  (paragrafo 8.2) e in definitiva abbiamo, in modulo,

$$F = \frac{\chi_m}{K_m} \frac{\mu_0 \tau}{4R} (n i)^2 = \frac{\chi_m}{K_m} 6.28 \cdot 10^{-6} N$$

Con valori di  $\chi_m$  compresi tra  $10^{-4}$  e  $10^{-5}$  otteniamo forze dell'ordine di  $10^{-9} \div 10^{-10}$  N, molto piccole.

La forza aumenta se si aumenta il campo magnetico, come è possibile fare, a parità di corrente, avvolgendo il filo del solenoide su un materiale ferromagnetico; si raggiungono in tal modo forze dell'ordine di  $10^{-6} \div 10^{-7}$  N, più facilmente misurabili. Su questo principio sono basati metodi di misura della suscettività delle sostanze diamagnetiche e paramagnetiche.

La trattazione svolta non si può applicare direttamente a un campione ferromagnetico in quanto in generale non è valida (9.23) con  $\chi_m$  costante. La forza (attrattiva) dipende sempre da  $dB/dx$ , ma la magnetizzazione non è proporzionale al campo magnetico.

## 9.5 Discontinuità dei campi sulla superficie di separazione tra due mezzi magnetizzati. Campi all'interno di una cavità

Abbiamo già visto nel paragrafo 8.6 che il campo magnetico subisce una discontinuità tangenziale quando si passa da una parte all'altra di una superficie sede di una corrente di conduzione. Dobbiamo aspettarci un effetto analogo anche nel passaggio attraverso la superficie di separazione tra due mezzi magnetizzati diversi: infatti sulle rispettive superfici sono localizzate correnti amperiane, in generale diverse tra loro e quindi con somma non nulla (nell'esempio 9.3 è stata verificata una situazione di questo tipo, in cui un mezzo era il vuoto).

Detti  $H_1$  e  $B_1 = \mu_1 H_1$  i campi nel primo mezzo e  $u_n$  il versore della normale alla superficie di separazione in un dato punto  $P$ , resta individuato un piano in cui stanno i tre vettori  $u_n$ ,  $H_1$ ,  $B_1$  e anche la magnetizzazione  $M_1$ . La densità lineare di corrente amperiana  $j_{1,n}$  è ortogonale a questo piano e la discontinuità ad essa dovuta, ortogonale a  $j_{1,n}$  come sappiamo dal paragrafo 8.6, sta nel piano suddetto: quindi  $B_1$ , pur essendo discontinuo, resta nel medesimo piano, a differenza di quanto può succedere nel passaggio attraverso una corrente superficiale di conduzione che è a priori indipendente da  $B_1$ . Tutto ciò è corretto se il secondo mezzo è il vuoto, ma resta vero in generale anche in caso diverso, come si può intuire con un ragionamento di continuità, che faccia aumentare gradualmente la densità del secondo mezzo.

Ammettiamo dunque che  $H_1$ ,  $B_1 = \mu_1 H_1$ ,  $H_2$ ,  $B_2 = \mu_2 H_2$  siano tutti in uno stesso piano che contiene la normale alla superficie di separazione nel punto  $P$  considerato. L'applicazione della legge di Gauss del campo  $B$  ad una scatola cilindrica di

altezza infinitesima, con le basi nei due mezzi e parallele alla superficie, porta alla relazione

$$B_{1,n} = B_{2,n} \quad \text{ovvero} \quad B_1 \cos \theta_1 = B_2 \cos \theta_2 \quad , \quad (9.28)$$

indicando con  $\theta_1$  e  $\theta_2$  gli angoli che  $\mathbf{B}_1$  e  $\mathbf{B}_2$  formano con la normale. Il campo magnetico ha la stessa componente normale dalle due parti della superficie di separazione, come è ovvio potendo essere la discontinuità solo tangenziale. Da  $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu$  segue

$$\kappa_{1,m} H_{1,n} = \kappa_{2,m} H_{2,n} \quad : \quad (9.29)$$

la componente normale del campo  $\mathbf{H}$  è discontinua nel passaggio attraverso la superficie.

Successivamente applichiamo la legge di Ampère (9.19) ad un rettangolo che sta nel piano individuato dai campi, con due lati paralleli alla superficie di separazione e da parti opposte e gli altri due lati infinitesimi; si trova

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = H_{1,i} h - H_{2,i} h = 0$$

non essendoci correnti di conduzione concatenate e quindi

$$H_{1,i} = H_{2,i} \quad \text{ovvero} \quad H_1 \sin \theta_1 = H_2 \sin \theta_2 \quad . \quad (9.30)$$

Gli angoli sono gli stessi considerati in precedenza in quanto  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{B}$  sono paralleli in entrambi i mezzi. Mentre dunque la componente tangenziale di  $\mathbf{H}$  è continua, quella di  $\mathbf{B}$  è discontinua secondo la relazione

$$\frac{B_{1,i}}{\kappa_{1,m}} = \frac{B_{2,i}}{\kappa_{2,m}} \quad . \quad (9.31)$$

Combinando le relazioni trovate si ha, per il rapporto dei moduli dei campi,

$$\frac{B_2}{B_1} = \sqrt{\cos^2 \theta_1 + \left( \frac{\kappa_{2,m}}{\kappa_{1,m}} \right)^2 \sin^2 \theta_1} \quad , \quad (9.32)$$

$$\frac{H_2}{H_1} = \sqrt{\sin^2 \theta_1 + \left( \frac{\kappa_{1,m}}{\kappa_{2,m}} \right)^2 \cos^2 \theta_1} \quad .$$

Infine, dividendo membro a membro (9.28) e (9.30) si trova

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\kappa_{1,m}}{\kappa_{2,m}} \quad , \quad (9.33)$$

detta legge della rifrazione delle linee di campo magnetico nel passaggio da un mezzo ad un altro; se  $\kappa_{2,m}$  è maggiore di  $\kappa_{1,m}$  l'angolo  $\theta_2$  è maggiore di  $\theta_1$ ; le linee si allontanano dalla normale.

La deviazione è notevole nel passaggio dal vuoto o da qualsiasi altro mezzo ad un mezzo ferrormagnetico con  $\kappa_{2,m}/\kappa_{1,m}$  dell'ordine di  $10^2 \div 10^4$ :  $\theta_2$  è quasi eguale a

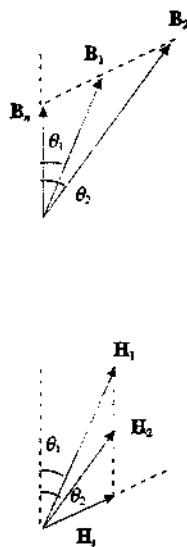


Figura 9.15

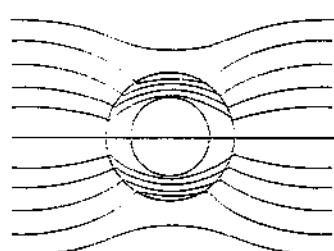


Figura 9.16

$90^\circ$  e  $\mathbf{B}_2$  quasi parallelo alla superficie di separazione. Su questo effetto è basato il cosiddetto *schermo magnetico*. Se poniamo un tubo cilindrico di ferro in un campo magnetico, nelle vicinanze del tubo e nelle pareti di questo le linee di  $\mathbf{B}$  hanno l'andamento mostrato in figura 9.16: esse si *addensano dentro il ferro*, segno che il campo assume nelle pareti un valore notevole, e sono quasi assenti all'interno. Lo *schermo non è perfetto* perché se  $\theta_1 = 0$  anche  $\theta_2 = 0$ : le linee esattamente perpendicolari alla superficie penetrano all'interno. Ciò nonostante l'accorgimento è utilizzato per schermare da campi magnetici strumenti il cui funzionamento sarebbe alterato dalla presenza di  $\mathbf{B}$ .

Un altro caso limite si ha quando le *linee di campo* sono *parallele* alla superficie di separazione ( $\theta_1 = \theta_2 = 90^\circ$ ): le componenti normali sono nulle e deve essere

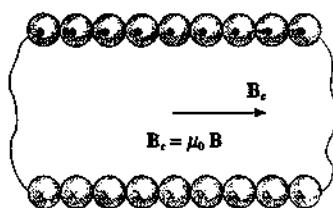
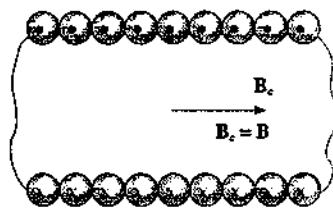


Figura 9.17

Le linee di  $\mathbf{B}$  sono più fitte nel mezzo a permeabilità maggiore. Una realizzazione pratica è quella dell'esempio 9.2, dove si ha il passaggio dal vuoto ( $\kappa_{1,m} = 1$ ) ad un mezzo magnetizzato.

I risultati sulle discontinuità dei campi  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{H}$  permettono di stabilire una *definizione operativa del campo magnetico  $\mathbf{B}$  macroscopico e del campo  $\mathbf{H}$  macroscopico all'interno della materia*. Se pratichiamo una cavità piatta ortogonale alle linee di  $\mathbf{B}$ , da (9.28) sappiamo che  $\mathbf{B}$  ha lo stesso valore sia nel mezzo che nella cavità e quindi basta misurare  $\mathbf{B}$  in una tale cavità per conoscerne il valore nel mezzo. Se invece si pratica una cavità sottile parallela alle linee di  $\mathbf{B}$ , è  $\mathbf{H}$  secondo (9.30) ad avere lo stesso valore nel mezzo e nella cavità: basta misurare  $\mathbf{B}$  nella cavità e dividerlo per  $\mu_0$  per avere il campo  $\mathbf{H}$  nella cavità e quindi conoscerne il valore nel mezzo.

### Esempio 9.5

Calcolare il campo magnetico  $\mathbf{B}$  all'interno di un cilindro uniformemente magnetizzato e utilizzare il risultato per determinare il campo magnetico all'interno di una cavità cilindrica parallela alle linee di  $\mathbf{B}$  praticata in un mezzo indefinito uniformemente magnetizzato.

#### Soluzione

Ricorriamo al calcolo eseguito nel paragrafo 8.2 per un solenoide rettilineo di lunghezza  $d$  e raggio  $R$ . Il campo  $\mathbf{B}$  in un punto dell'asse è dato dalla (8.19) in cui ora sostituiamo  $M$  al posto di  $n$ :

$$\mathbf{B} = \mu_0 \frac{M}{2} (\cos \phi_1 + \cos \phi_2) .$$

In particolare nel centro  $\phi_1 = \phi_2 = \phi_0$  e

$$\mathbf{B}_0 = \mu_0 M \cos \phi_0 :$$

al centro di una faccia terminale (un polo del cilindro), dove ad esempio  $\phi_2 = \pi/2$ .

$$\mathbf{B}_{\phi_0} = \mu_0 \frac{M}{2} \cos \phi_0 .$$

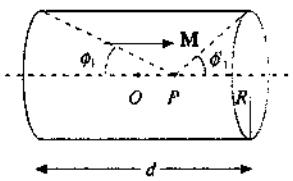


Figura 9.18

Nell'ipotesi che il cilindro sia sottile,  $R/d \ll 1$ , possiamo approssimare i coseni con le espressioni

$$\cos\phi_0 = 1 - \frac{\phi_0^2}{2} = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{R}{d/2} \right)^2 = 1 - 2 \frac{R^2}{d^2},$$

$$\cos\phi_1 = 1 - \frac{\phi_1^2}{2} = 1 - \frac{1}{2} \frac{R^2}{d^2}.$$

I valori del campo magnetico nei punti  $O$  e  $O'$  diventano

$$\mathbf{B}_O = \mu_0 \mathbf{M} \left( 1 - 2 \frac{R^2}{d^2} \right) \quad , \quad \mathbf{B}_{O'} = \mu_0 \frac{\mathbf{M}}{2} \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{R^2}{d^2} \right) \quad . \quad (9.34)$$

Se  $R^2/d^2 = 0$ , come in un magnete molto lungo,

$$\mathbf{B}_O = \mu_0 \mathbf{M} \quad , \quad \mathbf{B}_{O'} = \mu_0 \frac{\mathbf{M}}{2} \quad .$$

Osserviamo che la presenza dei poli, ovviamente sempre presenti in un magnete reale di lunghezza finita, ha come risultato la diminuzione del campo, cioè ha un *effetto smagnetizzante*.

Prendiamo ora un mezzo indefinito uniformemente magnetizzato in cui pratichiamo una cavità cilindrica lunga e sottile, della forma del magnete appena considerato. In base al principio di sovrapposizione il campo  $\mathbf{B}$  nel mezzo è eguale al campo  $\mathbf{B}_c$  nella cavità più il campo  $\mathbf{B}_o$  del blocco cilindrico corrispondente alla cavità (si veda la figura 5.29 del paragrafo 5.8 che tratta l'analogia problematica nel caso dei dielettrici):

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_c + \mathbf{B}_o \Rightarrow \mathbf{B}_c = \mathbf{B} - \mathbf{B}_o \quad .$$

Riunendo (9.18), (9.21) e (9.34) si ha

$$\mathbf{B}_c = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) - \mu_0 \mathbf{M} \left( 1 - 2 \frac{R^2}{d^2} \right) = \mu_0 \left( \mathbf{H} + 2 \frac{R^2}{d^2} \mathbf{M} \right) = \mu_0 \left( 1 + 2 \chi_m \frac{R^2}{d^2} \right) \mathbf{H} \quad .$$

Quando il secondo termine tra parentesi, dovuto alla presenza delle basi di raggio  $R$ , è trascurabile,  $\mathbf{B}_c = \mu_0 \mathbf{H}$  e si giustifica la definizione operativa di  $\mathbf{H}$  nel mezzo data in precedenza.

Quantitativamente deve essere

$$2 \chi_m \frac{R^2}{d^2} \ll 1 \Rightarrow \frac{R^2}{d^2} \ll \frac{1}{2 \chi_m} \quad .$$

D'altra parte le approssimazioni che portano alla (9.34) sono valide per angoli piccoli: ad esempio, con  $\phi_0 = 3^\circ$  risulta  $R/d = 2.5 \cdot 10^{-2}$ ,  $R^2/d^2 = 6.3 \cdot 10^{-4}$ . Valori di quest'ordine soddisfano sempre la diseguaglianza per i materiali diamagnetici e paramagnetici in cui  $|2 \chi_m| \ll 1$ . In un mezzo ferromagnetico, anche ammettendo di utilizzare le stesse formule, i valori di  $\chi_m$  possono essere così elevati da richiedere angoli molto piccoli: con  $\chi_m = 10^3$  la diseguaglianza è soddisfatta se  $R^2/d^2 < 10^{-4}$  ovvero  $\phi_0 \sim 1^\circ$ : la cavità deve essere molto sottile.

### Esempio 9.6

Calcolare il campo magnetico prodotto da una sfera magnetizzata uniformemente e utilizzare il risultato per determinare il campo magnetico all'interno di una cavità sferica praticata in un mezzo indefinito uniformemente magnetizzato.

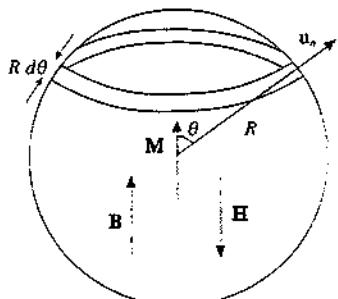


Figura 9.19

**Soluzione**

Il modulo della densità lineare di corrente amperiana sulla superficie della sfera è, da (9.13),  $j_{\text{am}} = M \sin \theta$ ; attraverso un tratto  $R d\theta$  passa la corrente  $di_m = M R \sin \theta d\theta$  che produce nel centro della sfera il campo magnetico (8.12) di una spira di raggio  $R \sin \theta$ , calcolato in un punto dell'asse distante  $R$  dai punti della spira:

$$dB = \frac{\mu_0}{2} \frac{di_m}{R^3} \frac{(R \sin \theta)^2}{R^3} = \frac{\mu_0 M}{2} \sin^3 \theta d\theta .$$

In totale, integrando da zero a  $\pi$  e dato che  $\int_0^\pi \sin \theta d\theta = 4/3$ ,

$$\mathbf{B}_0 = \mathbf{B}_{\text{int}} = \frac{2}{3} \mu_0 M . \quad (9.35)$$

Si dimostra che il campo magnetico ha tale valore anche negli altri punti interni alla sfera e si può enunciare questo risultato, valido per qualsiasi tipo di corrente (di conduzione o amperiana): data una superficie sferica e un diametro con direzione  $\mathbf{u}_z$ , una corrente superficiale distribuita con densità lineare  $\mathbf{j} = k \mathbf{u}_z \times \mathbf{u}_n$ , essendo  $\mathbf{u}_n$  il versore della normale alla superficie orientato verso l'esterno, produce all'interno della sfera il campo magnetico uniforme

$$\mathbf{B} = \frac{2}{3} \mu_0 k \mathbf{u}_z .$$

Il campo  $\mathbf{H}$  all'interno vale

$$\mathbf{H}_{\text{int}} = \frac{\mathbf{B}_{\text{int}}}{\mu_0} - \mathbf{M} = -\frac{1}{3} \mathbf{M}$$

e risulta pertanto opposto a  $\mathbf{M}$  e a  $\mathbf{B}$ .

Il momento magnetico della sfera, secondo la definizione (9.1), è

$$\mathbf{m} = \mathbf{M} \tau = \frac{4}{3} \pi R^3 \mathbf{M}$$

e sull'asse della sfera, avente direzione e verso di  $\mathbf{M}$ , il campo magnetico nei punti esterni si può calcolare con (8.14):

$$\mathbf{B}_{\text{ext}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2 \mathbf{m}}{r^2} = \frac{2}{3} \mu_0 \frac{R^3}{r^2} \mathbf{M} \Rightarrow \mathbf{H}_{\text{ext}} = \frac{\mathbf{B}_{\text{ext}}}{\mu_0} = \frac{2}{3} \frac{R^3}{r^2} \mathbf{M} .$$

Per  $r = R$  queste espressioni diventano

$$\mathbf{B}_{\text{ext}} = \frac{2}{3} \mu_0 M = \mathbf{B}_{\text{int}} \quad ; \quad \mathbf{H}_{\text{ext}} = \frac{2}{3} M = \mathbf{H}_{\text{int}} + \mathbf{M} \quad ;$$

il campo magnetico è continuo, invece il campo  $\mathbf{H}$  ha la discontinuità  $\mathbf{H}_{\text{ext}} - \mathbf{H}_{\text{int}} = \mathbf{M}$ . Il campo magnetico all'interno di una cavità sferica praticata in un mezzo indefinito uniformemente magnetizzato si calcola come nell'esempio 9.5:

$$\mathbf{B}_c = \mathbf{B} - \mathbf{B}_{\text{int}} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) - \frac{2}{3} \mu_0 M = \mu_0 \left( \mathbf{H} + \frac{\mathbf{M}}{3} \right) = \mu_0 \left( 1 + \frac{\chi_m}{3} \right) \mathbf{H} . \quad (9.36)$$

Analogamente a quanto fatto con i dielettrici, si può utilizzare questa espressione per il campo magnetico locale che agisce su un singolo atomo o molecola nel processo di magnetizzazione.

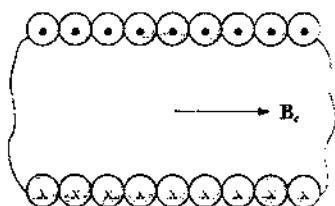


Figura 9.20

## 9.6 Confronto tra le leggi dell'elettrostatica e della magnetostatica in mezzi omogenei indefiniti

Abbiamo già notato varie volte nel corso di questo capitolo analogie con la trattazione delle proprietà dei dielettrici polarizzati, svolta nel capitolo 5. La ragione risiede nel fatto che, pur essendo i fenomeni fisici differenti, le equazioni che li descrivono hanno la stessa struttura e quindi le soluzioni sono matematicamente eguali, anche se si riferiscono a campi diversi.

Per effettuare il confronto dove è più appropriato, riscriviamo le equazioni dell'elettrostatica e della magnetostatica in mezzi indefiniti e in assenza di cariche elettriche libere ( $\rho = 0$ ) e di correnti di conduzione ( $j = 0$ ):

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\frac{\mathbf{D}}{\epsilon_0} = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0}$$

$$\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} = \mathbf{H} + \mathbf{M}$$

Equazioni dell'elettrostatica  
e della magnetostatica

Queste mettono in evidenza le corrispondenze formali

$$\mathbf{E} \rightleftarrows \mathbf{H}, \quad \frac{\mathbf{D}}{\epsilon_0} \rightleftarrows \frac{\mathbf{B}}{\mu_0}, \quad \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0} \rightleftarrows \mathbf{M} \quad (9.37)$$

Una verifica immediata la possiamo eseguire ricapitolando i risultati sulle discontinuità e sui campi nelle cavità, che abbiamo ottenuto separatamente nel capitolo 5 e in questo capitolo, ma che, avendo in mente (9.37), potevano adesso essere dedotti direttamente da quelli del capitolo 5.

### Discontinuità

Componenti tangenziali continue

$$E_{1,t} = E_{2,t}, \quad H_{1,t} = H_{2,t}$$

componenti normali discontinue

$$\kappa_1 E_{1,n} = \kappa_2 E_{2,n} \quad \kappa_{1,m} H_{1,n} = \kappa_{2,m} H_{2,n}$$

componenti normali continue

$$D_{1,n} = D_{2,n} \quad B_{1,n} = B_{2,n}$$

componenti tangenziali discontinue

$$\frac{D_{1,t}}{\kappa_1} = \frac{D_{2,t}}{\kappa_2} \quad \frac{B_{1,t}}{\kappa_{1,m}} = \frac{B_{2,t}}{\kappa_{2,m}}$$

### Cavità sottile parallela alle linee di campo

$$\mathbf{E}_c = \mathbf{E}$$

$$\mathbf{H}_c = \mathbf{H}$$

$$\mathbf{D}_c = \epsilon_0 \mathbf{E}_c \neq \mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

$$\mathbf{B}_c = \mu_0 \mathbf{H}_c \neq \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$$

Figura 9.21

### Cavità piatta ortogonale alle linee di campo

$$\mathbf{E}_c = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0}$$

$$\mathbf{H}_c = \mathbf{H} + \mathbf{M}$$

$$\mathbf{D}_c = \mathbf{D}$$

$$\mathbf{B}_c = \mathbf{B}$$

Figura 9.22

*Cavità sferica*

$$\rightarrow$$

$$\mathbf{E}_c = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0} \quad \mathbf{H}_c = \mathbf{H} + \frac{\mathbf{M}}{3}$$

$$\mathbf{D}_c = \epsilon_0 \mathbf{E}_c = \epsilon_0 \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{3} \neq \mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad \mathbf{B}_c = \mu_0 \mathbf{H}_c = \mu_0 \left( \mathbf{H} + \frac{\mathbf{M}}{3} \right) \neq \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$$

In generale, per una cavità di forma qualunque si può scrivere

Figura 9.23

$$\mathbf{E}_c = \mathbf{E} + \gamma \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0} \quad , \quad \mathbf{H}_c = \mathbf{H} + \gamma \mathbf{M} \quad , \quad (9.38)$$

dove  $\gamma$  è un *coefficiente* che varia con la forma della cavità ed è in particolare minimo con valore zero nella cavità del primo tipo e massimo con valore 1 nella cavità del secondo tipo.

Anche l'esempio 9.6 mostra lo stesso tipo di relazione. Il caso analogo sarebbe una sfera di dielettrico uniformemente polarizzata, come quella considerata nell'esempio 5.5; allora la situazione non è stata sviluppata completamente perché, salvo casi molto speciali, non è possibile realizzare una sfera polarizzata senza l'azione di un campo elettrico esterno, mentre invece è possibile, con un materiale ferromagnetico, avere una sfera magnetizzata senza l'azione continua di un campo magnetico esterno. È però facile verificare che sussistono le relazioni

$$\mathbf{E}_{int} = -\frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0} \quad , \quad \mathbf{E}_{ext} = \frac{2\mathbf{P}}{3\epsilon_0} \quad , \quad \mathbf{D}_{int} = \frac{2}{3} \mathbf{P} \quad , \quad \mathbf{D}_{ext} = \frac{2}{3} \mathbf{P} \quad ;$$

queste si ricavano con le stesse argomentazioni dell'esempio 9.6 e corrispondono alle relazioni là trovate se si applicano gli scambi (9.37).

Più in generale si può dire che quando si è risolto un problema che richiede soltanto l'applicazione delle equazioni generali scritte all'inizio, di norma esiste una formulazione parallela dello stesso problema che si ottiene con le (9.37).

*Mezzi lineari omogenei*

Nei mezzi lineari alle equazioni generali si aggiungono le equazioni di stato

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E} \quad , \quad \mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \quad ;$$

formalmente analoghe secondo (9.37). Il risultato dei processi di polarizzazione e magnetizzazione sono densità di carica collegate a  $\mathbf{P}$  e densità di corrente collegate a  $\mathbf{M}$ ; in particolare le distribuzioni di volume si ottengono con l'operatore divergenza applicato a  $\mathbf{P}$  e l'operatore rotore applicato a  $\mathbf{M}$  e qui non può esserci analogia diretta perché le proprietà sia matematiche che fisiche della carica e della corrente sono diverse. Però in entrambi i casi le densità di volume si annullano se i mezzi sono omogenei e se non ci sono cariche e correnti libere. Nel caso di  $\mathbf{P}$  ciò è stato dimostrato nel paragrafo 5.6, mentre per  $\mathbf{M}$  si procede così: da (9.21) e dalla terza delle (3.36) abbiamo

$$\nabla \times \mathbf{M} = \nabla \times (\chi_m \mathbf{H}) = \nabla \chi_m \times \mathbf{H} + \chi_m \nabla \times \mathbf{H} \quad ;$$

se il mezzo è omogeneo  $\nabla \chi_m = 0$  e se non ci sono correnti libere  $\nabla \times \mathbf{H} = 0$ , per cui  $\mathbf{j}_m = \nabla \times \mathbf{M} = 0$ . Per la validità del risultato non occorre che  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{M}$  siano uniformi.

Il tipo di analogia che abbiamo trattato è relativamente comune: ci sono svariati fenomeni che si riconducono allo stesso tipo di equazioni e che quindi sono descritti dallo stesso formalismo matematico: bisogna però essere molto cauti ad estendere l'analogia sul piano fisico. Nel caso che stiamo trattando non si deve ad esempio dare significato fisico alla corrispondenza matematica riguardante  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ , segnalata dalla prima delle (9.37): i campi fondamentali sono  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  in quanto è attraverso di essi che si esprime l'interazione tra le cariche, fisse o in moto.

I campi  $\mathbf{D}$  e  $\mathbf{H}$  sono utili variabili ausiliarie che permettono una struttura semplificata delle equazioni e che, quando sono applicabili le relazioni

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

portano alla soluzione del calcolo di  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ . L'utilità risiede nel fatto che il flusso di  $\mathbf{D}$  dipende solo dalle cariche libere e la circuitazione di  $\mathbf{H}$  dalle correnti di conduzione: nei casi in cui ci sono simmetrie ciò permette il calcolo diretto di  $\mathbf{D}$  e  $\mathbf{H}$  a partire dalle sole sorgenti libere. Nella pratica  $\mathbf{H}$  è in effetti molto usato perché in un circuito è sempre possibile conoscere la corrente; nei problemi di elettrostatica invece più che le cariche spesso sono noti i potenziali dei conduttori e allora si seguono procedimenti diversi.

Una considerazione volta a dissipare possibili dubbi è la seguente: il fatto che il flusso di  $\mathbf{D}$  e la circuitazione di  $\mathbf{H}$  dipendano solo dalle sorgenti libere non vuol dire che ciò sia vero anche per  $\mathbf{D}$  e  $\mathbf{H}$  in generale. Quando la conformazione geometrica delle sorgenti e dei mezzi non è più simmetrica ci si rende conto che  $\mathbf{D}$  e  $\mathbf{H}$ , come  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ , sono influenzati anche dalla presenza delle cariche di polarizzazione e delle correnti di magnetizzazione; basti pensare alle discontinuità attraverso una superficie tra due mezzi diversi nel caso più generale.

Ricordiamo infine che ci siamo già occupati alla fine del paragrafo 8.7 di un'altra analogia tra elettrostatica e magnetostatica, relativa al comportamento dei campi nel vuoto, sempre in assenza di cariche e correnti libere. Le equazioni  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ ,  $\nabla \times \mathbf{E} = 0$  e  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ,  $\nabla \times \mathbf{B} = 0$  sono identiche e si possono quindi utilizzare risultati ottenuti in elettrostatica risolvendo l'equazione di Laplace  $\Delta^2 V = 0$ , come vedremo nell'esempio 9.10.

## 9.7 Sostanze ferromagnetiche

Abbiamo già più volte accennato al fatto che le proprietà delle sostanze ferromagnetiche sono molto diverse da quelle delle altre sostanze e più complesse da trattare, anche soltanto da un punto di vista fenomenologico, in quanto le relazioni che legano  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{M}$  al campo  $\mathbf{H}$  in generale non soltanto non sono lineari, ma non sono nemmeno univoche. D'altra parte è nelle sostanze ferromagnetiche che gli effetti sono notevoli e rivestono importantissimi aspetti tecnologici, per cui il loro studio, oltre che interessante concettualmente, è molto utile.

Fin dal paragrafo 7.1 abbiamo detto che esistono in natura sostanze come la *magnetite*,  $\text{FeO} \cdot \text{Fe}_2\text{O}_3$ , che sottoposte all'azione di un campo magnetico si magnetizzano, diventando sorgenti permanenti di campo magnetico. Sperimentando con campi magnetici esterni noti si osserva innanzitutto che la magnetizzazione è elevata anche con valori dei campi, e quindi delle correnti di conduzione, non particolarmente elevati; inoltre tali effetti, che a temperatura ambiente sono presenti negli elementi ferro, nichel e cobalto, si ottengono pure con svariate leghe, sia contenenti almeno uno di questi elementi che prive di essi (e d'altra parte non tutte le leghe contenenti ferro, nichel o cobalto sono ferromagnetiche).

Le proprietà magnetiche delle leghe variano notevolmente con la composizione chimica (bastano piccolissime variazioni della composizione per causare grandi cambiamenti della permeabilità o addirittura fare scomparire le caratteristiche ferromagnetiche) e dipendono anche dai trattamenti termici subiti, per cui è richiesta grande accuratezza nella preparazione allo scopo di evitare che gradienti termici elevati in alcune fasi delle lavorazioni possano incidere negativamente sulle proprietà magnetiche della lega. Infine, per alcune leghe speciali ad alta permeabilità ( $\sim 10^4$ ) le proprietà magnetiche possono cambiare radicalmente sotto sollecitazioni meccaniche esterne. Tutti questi fatti inducono a ritenere che i fenomeni atomici che stanno alla base del ferromagnetismo dipendano fortemente dalla struttura cristallina e dalle sue modificazioni causate da agenti termici o meccanici.

Per trovare la relazione tra  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{H}$  serviamoci del solenoide toroidale descritto nell'esempio 9.1. Il campo  $\mathbf{H}$ , dato da (9.24), viene variato variando l'intensità di corrente nelle spire e il campo  $\mathbf{B}$  nel mezzo viene misurato con una sonda di Hall inserita in una cavità ortogonale alle linee di campo. Per ogni valore di  $H$  si misura

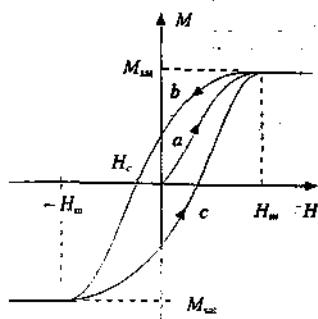


Figura 9.24

B. e si ricava il valore della magnetizzazione con (9.18),  $M = (B / \mu_0) - H$ . Tale esperimento fornisce quindi direttamente la funzione  $B(H)$  e indirettamente  $M(H)$ .

Supponiamo che inizialmente il materiale si trovi nello *stato vergine*, cioè non sia mai stato sottoposto a magnetizzazione, e che siano nulli tutti i campi. Facendo crescere  $H$  i valori di  $B$  e di  $M$  si dispongono lungo la curva  $a$ , detta *curva di prima magnetizzazione*; quando  $H$  supera il valore  $H_m$  la magnetizzazione resta costante al valore  $M_{sat}$  e il campo magnetico cresce linearmente con  $H$ , molto più lentamente di prima. Infatti, per  $M = M_{sat} = \text{costante}$ , la (9.18)  $B = \mu_0 (H + M_{sat})$  è una retta con pendenza  $\mu_0$ , cioè molto piccola. Si dice che per  $H > H_m$  il materiale ha raggiunto la *saturazione* e il valore  $M_{sat}$  si chiama *magnetizzazione di saturazione*: oltre  $H_m$  il campo  $B$  cresce solo per effetto dell'aumento della corrente di conduzione, perché il contributo del mezzo ha raggiunto il massimo valore possibile.

Non essendo la curva  $a$  una retta, le grandezze

$$\mu = \frac{B}{H} \quad , \quad \kappa_m = \frac{B}{\mu_0 H} = \frac{\mu}{\mu_0} \quad , \quad \chi_m = \kappa_m - 1$$

non sono costanti, ma *funzioni di  $H$* . Si definisce anche la *permeabilità differenziale*

$$\mu_d = \frac{dB}{dH} \quad o \quad \kappa_{m,d} = \frac{1}{\mu_0} \frac{dB}{dH} \quad ;$$

la prima coincide con la pendenza della curva. Si ha un aumento da un valore iniziale non nullo per  $H = 0$  fino ad un massimo in corrispondenza ad un flesso e poi una decrescita fino al valore  $\mu_0$  (o 1).

Se dopo aver raggiunto il valore  $H_m$  si fa decrescere  $H$ , i valori di  $B$  e di  $M$  si dispongono lungo una nuova curva  $b$  che si mantiene al di sopra della curva di prima magnetizzazione e interseca l'asse delle ordinate ( $H = 0$ ) col valore  $B_r$  o  $M_r$ , legati da

$$B_r = \mu_0 M_r \quad ;$$

si parla di *magnetizzazione residua* e di *campo magnetico residuo*, a significare il fatto fondamentale che il materiale è magnetizzato anche in assenza di corrente; è diventato cioè un *magnete permanente*.

Per annullare la magnetizzazione bisogna invertire il senso della corrente e far diminuire  $H$  fino al valore  $H_c$ , detto *campo coercitivo*, in corrispondenza del quale  $M = 0$  e  $B = \mu_0 H_c$ . Facendo ulteriormente decrescere  $H$  si osserva che oltre il valore  $-H_m$  la curva è rettilinea, come lo era oltre  $H_m$ , con la stessa pendenza: il materiale ha raggiunto la magnetizzazione di saturazione, ma con verso opposto.

Infine, se si riporta  $H$  al valore  $H_m$  si percorre la curva  $c$  fino al ricongiungimento con la curva  $a$ . La curva completa prende il nome di *ciclo di isteresi del materiale* e può essere data, come abbiamo visto, in termini di  $M$  (fig. 9.24) o in termini di  $B$  (fig. 9.25). Finché  $H$  varia nell'intervallo  $H_m, -H_m$  o maggiore si ottiene sempre il medesimo ciclo; se si riduce l'intervallo di variabilità si ottengono cicli più stretti, con i vertici sulla curva di prima magnetizzazione (fig. 9.26). Facendo descrivere al materiale la curva della figura 9.27 lo si riporta allo stato vergine: è questo il metodo che si utilizza in pratica per *smagnetizzare* un materiale.

Il ciclo di isteresi rappresenta il *diagramma di stato del materiale ferromagnetico*; però uno stato  $(H, B)$  può coincidere con un punto del ciclo solo se viene seguita la procedura descritta. Se invece in un dato istante del processo  $H$  viene portato a zero e poi riportato al suo valore, lo stato  $(H, B)$  raggiunto sta in un punto interno al ciclo: operando in modo opportuno tutti i punti interni sono raggiungibili

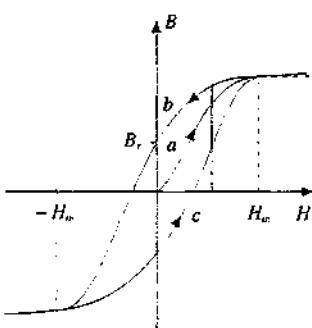


Figura 9.25

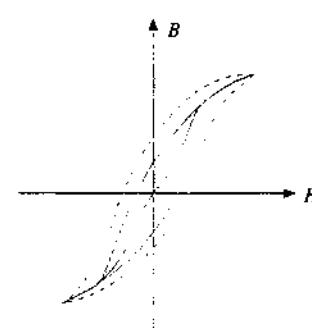


Figura 9.26

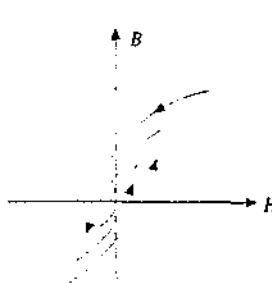


Figura 9.27

e il ciclo delimita quindi una regione luogo dei possibili stati del sistema. Ad un dato valore di  $H$  possono corrispondere infiniti valori di  $B$  compresi tra le curve  $b$  e  $c$ , situazione che viene riassunta dicendo che la *magnetizzazione di una sostanza ferromagnetica dipende dalla storia della sostanza, oltre che dal valore di  $H$* .

La forma del ciclo d'isteresi dipende fortemente dalla composizione della sostanza. Prendendo come parametri caratteristici i valori della magnetizzazione residua e del campo coercitivo, abbiamo i materiali cosiddetti *duri*, il cui *ciclo di isteresi* è piuttosto *largo* ( $M_r$  e  $H_c$  grandi): essi sono adatti per la costruzione di magneti permanenti, sia perché  $M_r$  è grande e quasi eguale a  $M_{sat}$ , sia perché è difficile smagnetizzarli ( $H_c$  grande). Nella situazione opposta sono i materiali cosiddetti *dolci* che hanno un *ciclo di isteresi molto stretto*: dato che  $H_c$  è piccolo, è facile magnetizzarli e smagnetizzarli; inoltre la permeabilità magnetica è quasi costante in un ampio intervallo di valori di  $H$ . Nel caso dell'isoperim, lega Fe-Ni-Cu,  $\kappa_m = 60$ . Tali materiali sono adatti per la costruzione di *elettromagneti* (vedi paragrafo 9.9), in quanto spegnendo  $H$  si porta  $B$  quasi a zero.

Altra proprietà fondamentale dei materiali ferromagnetici è che per ognuno di essi esiste una *temperatura critica*  $T_C$ , detta *temperatura di Curie*, al di sopra della quale il materiale diventa paramagnetico, con suscettività che segue la legge

$$\frac{\chi_m(T - T_C)}{\rho} = C = \text{costante} \quad , \quad (9.39)$$

nota come *seconda legge di Curie*;  $\rho$  è la densità della sostanza e  $C$  una costante, detta *costante di Curie*. La temperatura di Curie del ferro è  $T_C = 1043$  K =  $770^\circ\text{C}$ .

Nella tabella 9.4 sono riportati alcuni dati relativi a materiali ferromagnetici; si noti come le proprietà magnetiche dipendano fortemente dalla composizione.

Tabella 9.4

	$\kappa_{m,d}(H=0)$	$\kappa_{m,d}(\text{max})$	$H_c$ (A/m)	$\mu_0 M_{sat}$ (T)
ferro puro (99.95%)	$10^4$	$2 \cdot 10^5$	4	2.16
ferro-silicio (0.5%)	280	$3 \cdot 10^3$	72	2.14
ferro-silicio (6.5%)	1390	$6.7 \cdot 10^3$	16	1.81
ferro-nichel (45%)	$3.5 \cdot 10^3$	$5 \cdot 10^4$	5.6	1.60
ferro-nichel (65%)	$3 \cdot 10^4$	$10^6$	0.8	1.40
ferro-nichel (78%)	$8 \cdot 10^3$	$10^6$	4.0	1.08
ferro 16%-nickel 79%-molibdeno 5%	$10^5$	$10^6$	0.3	0.79

I valori di  $H_m$  (a cui si raggiunge la saturazione) sono in generale modesti, inferiori a  $10^3$  A/m e si vede che  $\mu_0 M_{sat} \gg \mu_0 H_m$ : il contributo del mezzo è largamente predominante. Si capisce anche come non sia conveniente operare oltre  $H_m$ : un aumento esiguo di  $B$  richiede enormi aumenti di corrente, con conseguente spesa di potenza; infatti raramente un mezzo ferromagnetico è usato oltre la saturazione.

Dovrebbe adesso risultare più chiaro il richiamo alla cautela nell'utilizzazione di (9.21) per i mezzi ferromagnetici: il valore della suscettività  $\chi_m$  dipende dallo stato ( $H, B$ ) in cui si trova il materiale e quindi non c'è semplice proporzionalità tra  $M$  e  $H$ . Formalmente si può conservare la scrittura  $M = \chi_m H$ , ma con un valore del coefficiente diverso in ogni stato: ad esempio, nel solenoide toroidale prima citato, se per un dato valore  $i$  della corrente si ha un valore di  $B$ , al valore  $2i$  non corrisponde un campo magnetico doppio, come avviene nel vuoto o in un comune mezzo magnetico, bensì bisogna conoscere il nuovo valore di  $\chi_m$  per calcolare  $B$ . Solo nel caso dei materiali con ciclo di isteresi stretto come in figura 9.28, curva 2, si può assumere  $\chi_m$  costante in un certo intervallo di  $H$ .

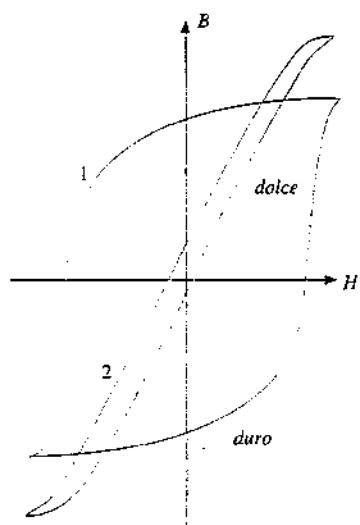


Figura 9.28

## 9.8 Circuiti magnetici

Il dispositivo con cui abbiamo eseguito la determinazione del ciclo di isteresi, descritta nel paragrafo 9.7, è il più semplice esempio di *circuito magnetico*. Le relazioni tra corrente  $i$  che percorre le  $N$  spire del solenoide, campo  $\mathbf{H}$  e campo  $\mathbf{B}$  sono

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = Ni, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H};$$

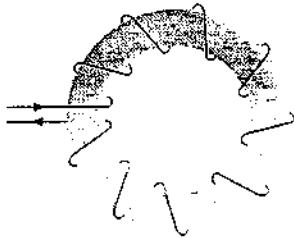


Figura 9.29

$\mu$  è la permeabilità del toroide di materiale ferromagnetico su cui sono avvolte le spire. Se  $\mu$  è abbastanza elevata le linee di  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{H}$  sono praticamente contenute tutte all'interno del mezzo e diciamo che attraverso la superficie esterna del toroide non c'è flusso del campo magnetico  $\mathbf{B}$  ovvero non c'è *flusso disperso* nel mezzo che circonda il toroide. Dato che  $\mathbf{B}$  è solenoidale, segue che il flusso di  $\mathbf{B}$  è costante attraverso qualsiasi sezione del materiale:

$$\Phi(\mathbf{B}) = \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = B\Sigma = \text{costante}$$

L'espressione  $B\Sigma$  vale se si può considerare  $\mathbf{B}$  costante sulla sezione oppure se si prende il valor medio di  $\mathbf{B}$  sulla sezione. Conseguenza del confinamento del campo magnetico è che non è essenziale avvolgere le spire su tutto l'anello, ma che è sufficiente concentrarle in una regione limitata, come mostrato in figura 9.30.

Mettiamo insieme le relazioni scritte, supponendo  $\mathbf{H}$  parallelo a  $d\mathbf{s}$  e ricordando che  $\Phi$  è costante:

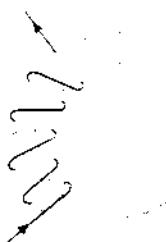


Figura 9.30

Se definiamo *forza magnetomotrice* (f.m.m.) e *riluttanza del circuito* rispettivamente le grandezze

Forza magnetomotrice

$$\mathcal{F} = \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = Ni, \quad (9.40)$$

Riluttanza

$$\mathcal{R} = \oint \frac{d\mathbf{s}}{\mu \Sigma}, \quad (9.41)$$

otteniamo la *legge di Hopkinson*

Legge di Hopkinson

$$\mathcal{F} = \mathcal{R}\Phi, \quad (9.42)$$

che è la legge fondamentale per il calcolo dei circuiti magnetici, riunendo in sé tutte le caratteristiche e le proprietà del sistema. La sua utilizzazione si può schematizzare come segue: nota la geometria del circuito e la permeabilità del mezzo, dalla conoscenza della corrente nell'avvolgimento si risale al flusso e quindi al valore (medio) del campo magnetico lungo il circuito oppure, al contrario, si può calcolare la corrente necessaria per produrre un dato campo magnetico. Naturalmente il valore della permeabilità dovrebbe essere quello corrispondente allo stato ( $H, B$ ) del materiale, dedotto dal ciclo di isteresi: ma nella (9.42) o  $H$  o  $B$  sono incogniti e la legge viene usata proprio per determinare uno essendo noto l'altro. Essa si può pertanto applicare utilmente solo a quei materiali ferromagnetici con ciclo di isteresi molto stretto e limitatamente alle regioni in cui l'andamento di  $B$  con  $H$  è lineare: oppure, per calcoli approssimati, si può utilizzare un appropriato valore medio di  $\mu$ . Vedremo nel paragrafo 9.9 un metodo di soluzione alternativo più generale.

Confrontiamo il risultato ottenuto con quanto sappiamo valere in un circuito elettrico percorso da una corrente continua:

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

$$\mathcal{F} = \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s}$$

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

$$i = \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma$$

$$\Phi = \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma$$

$$R = \oint \frac{ds}{\sigma \Sigma} \quad \mathcal{R} = \oint \frac{ds}{\mu \Sigma}$$

$$\mathcal{E} = R i$$

$$\mathcal{F} = \mathcal{R} \Phi$$

Si nota che le espressioni sono eguali se si scambiano tra loro

$$E, H \ j, B \ \sigma, \mu \ i, \Phi \ R, \mathcal{R} \ \mathcal{E}, \mathcal{F}$$

L'analogia è solo formale: in un circuito elettrico la corrente corrisponde ad un moto di cariche, mentre in un circuito magnetico non c'è nessun moto alla base del flusso di  $B$ . La f.e.m.  $\mathcal{E}$  fornisce l'energia necessaria al moto delle cariche, che viene dissipata nella resistenza  $R$ ; invece  $\mathcal{F}$  e  $\mathcal{R}$  non corrispondono fisicamente ad elementi che forniscono ed assorbono energia. Tuttavia l'analogia è utile perché ci permette di applicare ai circuiti magnetici i risultati ricavati per i circuiti elettrici, in particolare quelli relativi a collegamenti in serie e in parallelo.

Ad esempio, se nel circuito magnetico c'è un'interruzione in aria (detta *interferro o traferro*), di lunghezza  $s_2$  piccola rispetto alla lunghezza  $s_1$  del tratto in ferro e anche rispetto alle dimensioni trasverse del circuito, si può trascurare la deformazione delle linee di  $B$  dovuta alla rifrazione nel passaggio ferro-aria e supporre che il circuito abbia sempre la stessa sezione. La *riluttanza totale* è data dalla *somma delle due riluttanze in serie*.

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 = \frac{s_1}{\mu \Sigma} + \frac{s_2}{\mu_0 \Sigma} = \frac{s_1 + \kappa_m s_2}{\mu \Sigma}$$

e si vede che il piccolo tratto  $s_2$  tanto più contribuisce alla riluttanza totale quanto maggiore è  $\kappa_m$ . Facilmente si può avere che  $\kappa_m s_2$  sia maggiore di  $s_1$ : il tratto a permeabilità minore è il più importante, come in un circuito elettrico il conduttore a condutanza minore, ovvero resistenza maggiore, è predominante in un collegamento in serie.

### Unità di misura

La forza magnetomotrice si misura in ampere mentre la riluttanza  $\mathcal{R}/\Phi$  si misura in  $A/Wb = H^{-1}$ .

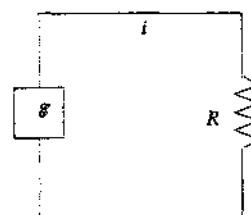
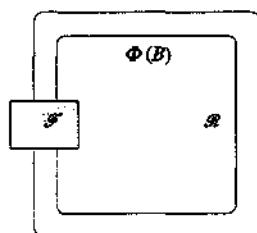


Figura 9.31

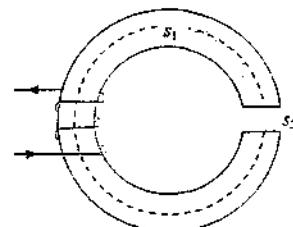


Figura 9.32

### Esempio 9.7

Una bobina di  $N = 200$  spire percorse dalla corrente  $i = 5$  A è avvolta su un anello toroidale di isoperme ( $\kappa_m = 60$ ), di lunghezza media  $L = 50$  cm e sezione  $\Sigma = 5$  cm $^2$ . Calcolare il valore del campo magnetico e ripetere il calcolo se nel circuito c'è un interferro di spessore  $h = 5$  mm.

#### Soluzione

Secondo (9.40), (9.41), (9.42)

$$\mathcal{F} = N i = 10^3 \text{ A} \quad , \quad \mathcal{R} = \frac{L}{\mu_0 \kappa_m \Sigma} = 1.33 \cdot 10^7 \text{ H}^{-1} \quad , \quad \Phi = \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{R}} = 7.54 \cdot 10^{-5} \text{ Wb} .$$

Il campo magnetico vale  $B = \Phi / \Sigma = 0.151$  T, risultato che si ottiene anche più rapidamente seguendo l'esempio 9.1. Però, in presenza di interferro, il metodo adesso sviluppato porta subito al risultato:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}' &= \frac{L - h}{\mu \Sigma} + \frac{h}{\mu_0 \Sigma} = \frac{L - h + \kappa_m h}{\mu_0 \kappa_m \Sigma} = \frac{L + (\kappa_m - 1) h}{\mu_0 \kappa_m \Sigma} = \mathcal{R} + \frac{(\kappa_m - 1) h}{\mu_0 \kappa_m \Sigma} = \\ &= 1.33 \cdot 10^7 + 0.78 \cdot 10^7 = 2.11 \cdot 10^7 \text{ H}^{-1} . \end{aligned}$$

$$\Phi' = \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{R}'} = 4.74 \cdot 10^{-5} \text{ Wb} \quad , \quad B' = \frac{\Phi'}{\Sigma} = 0.095 \text{ T} .$$

Si vede che 0.5 cm di aria su una lunghezza totale di 50 cm (effetto dell'1%) producono una riluttanza confrontabile con quella del ferro e una riduzione del campo magnetico al 63% del valore senza interferro ( $B' = 0.63 B$ ).

Il campo magnetico è lo stesso sia nel ferro che nell'aria, invece il campo  $H$  cambia:

$$H_1 = \frac{B'}{\mu_0 K_m} = 1.26 \cdot 10^3 \text{ A/m} \quad , \quad H_2 = \frac{B'}{\mu_0} = K_m H_1 = 7.56 \cdot 10^4 \text{ A/m} .$$

Si verifica che entro le approssimazioni di calcolo  $H_1(L-h) + H_2 h = N i$ . Se la permeabilità del materiale fosse maggiore, ad esempio di un ordine di grandezza, nel caso senza interferro la riluttanza diminuirebbe di un fattore 10 e il campo magnetico aumenterebbe di un fattore 10, a parità di forza magnetomotrice. Nel caso con interferro invece la riluttanza decresce poco, perché il contributo dell'interferro è praticamente costante, e il campo magnetico aumenta poco, portandosi a 0.216 T. Al limite, per  $K_m$  molto grande, mentre  $B$  cresce proporzionalmente,  $B'$  tende al valore  $\mu_0 N i / h$  indipendente da  $K_m$  e pari a 0.251 T; non è quindi molto utile, in questo caso, utilizzare materiali con  $K_m$  elevata.

### Esempio 9.8

Nel circuito magnetico della figura  $N = 200$ ,  $s_1 = 30 \text{ cm}$ ,  $s_2 = 20 \text{ cm}$ ,  $s = 10 \text{ cm}$ ,  $h = 3 \text{ mm}$ , la sezione del ferro è  $\Sigma = 5 \text{ cm}^2$ , la permeabilità relativa è  $K_m = 250$ . Calcolare l'intensità  $i$  della corrente nella bobina se il campo magnetico nell'interferro deve valere  $B = 5 \cdot 10^{-2} \text{ T}$ .

#### Soluzione

Il flusso di  $B$  attraverso qualsiasi sezione del ramo  $QRST$  deve essere

$$\Phi_2 = B\Sigma = 2.5 \cdot 10^{-5} \text{ Wb} .$$

Tale ramo è in parallelo al ramo  $QT$  e quindi  $\mathcal{A}_1 \Phi_1 = \mathcal{A}_2 \Phi_2$  con

$$\mathcal{A}_1 = \frac{s}{\mu_0 K_m \Sigma} = 6.37 \cdot 10^5 \text{ H}^{-1} \quad , \quad \mathcal{A}_2 = \frac{2s_2 + s - h}{\mu_0 K_m \Sigma} + \frac{h}{\mu_0 \Sigma} = 7.94 \cdot 10^6 \text{ H}^{-1} .$$

Segue  $\Phi_1 = \mathcal{A}_1 \Phi_2 / \mathcal{A}_2 = 3.12 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}$  e il flusso totale vale

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = 3.37 \cdot 10^{-4} \text{ Wb} .$$

La riluttanza del ramo  $TVPQ$  è

$$\mathcal{A}_3 = \frac{2s_1 + s}{\mu_0 K_m \Sigma} = 4.46 \cdot 10^6 \text{ H}^{-1}$$

e la riluttanza totale del circuito è

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_3 + \frac{\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2}{\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2} = 5.05 \cdot 10^6 \text{ H}^{-1} .$$

La f.m.m. necessaria è

$$\mathcal{F} = \mathcal{R}\Phi = 1.70 \cdot 10^3 \text{ A} \Rightarrow i = \frac{\mathcal{F}}{N} = 8.5 \text{ A} .$$

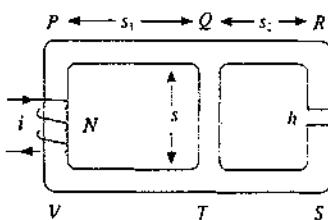


Figura 9.33

Gli esempi precedenti chiariscono il significato di (9.42) e il suo uso in analogia con la legge di Ohm (6.26). Il valore del campo magnetico ottenibile con una data corrente nell'avvolgimento è inversamente proporzionale alla riluttanza del circuito magnetico; poiché questa aumenta notevolmente se è presente un interferro, in tale evenienza viene ridotto il campo magnetico, a parità di corrente. Ciò può sembrare dannoso; bisogna però pensare che una delle ragioni per cui si producono campi magnetici intensi, impiegando materiali ferromagnetici per il grande apporto fornito dalla loro magnetizzazione, sta nella necessità di applicarli a sistemi che acquistano di conseguenza particolari proprietà o in cui si vogliono compiere misure che sfruttano la presenza di  $B$ . Occorre pertanto disporre di campi magnetici in aria e non soltanto nel ferro, dove non si possono introdurre apparecchiature.

Non si praticano invece interferri in quelle situazioni nelle quali si vuole semplicemente convogliare tutto il flusso magnetico attraverso un dato circuito. Ad esempio, se su un toroide di ferro si mettono due avvolgimenti, anche in posti diversi, praticamente tutto il flusso prodotto da uno è concatenato con l'altro. Con riferimento a quanto visto nel paragrafo 8.5, il coefficiente di mutua induzione tra i due avvolgimenti aumenta per la presenza del ferro, sia perché il campo magnetico è maggiore (a parità di corrente) sia perché, come appena detto, si ha una concatenazione quasi completa delle linee di campo tra i due circuiti; un'applicazione pratica si ha nei trasformatori (paragrafo 10.8 ed esempio 11.5). Il fatto di avvolgere il filo percorso da corrente su un materiale ferromagnetico ha anche, per le stesse ragioni, l'effetto di fare aumentare il coefficiente di autoinduzione del circuito stesso: per i casi trattati nell'esempio 8.11 l'aumento è di un fattore  $\kappa_m$ .

Un'osservazione di carattere diverso, che si ricollega a quanto detto verso la fine del paragrafo 9.6, è la seguente: nel circuito magnetico, purché senza interferro,  $H$  ha sempre lo stesso valore qualunque sia il mezzo, come dice la (9.24) per il caso del solenoide toroidale: esso cioè dipende solo dalla corrente di conduzione. Non appena si pratica un interferro  $H$  subisce una modifica ed è diverso nei due mezzi: questo senza aver cambiato la corrente  $i$ . Quando sono distrutte le condizioni di simmetria del mezzo si vede che  $H$  dipende dalle correnti di magnetizzazione.

In sostanza si può dire questo per spiegare i casi considerati: finché il mezzo è continuo,  $B$  dipende dalle correnti di conduzione secondo il fattore  $\mu_0(1 + \chi_m)$ .  $M$  ne dipende secondo il fattore  $\chi_m$  ed è evidente che  $B - \mu_0 M$  non dipende da  $\chi_m$ . Non appena viene introdotta una discontinuità del mezzo, che non sia tangente alle linee di campo, la situazione cambia: per semplicità, se la discontinuità del mezzo è ortogonale alle linee di campo,  $B$  non subisce variazione, ma  $M$  sì e  $B - \mu_0 M$  non può restare inalterato, anche se la configurazione delle correnti di conduzione è inalterata. Quindi in generale  $H$  dipende anche dalle correnti amperiane.

## 9.9 Elettromagneti. Magneti permanenti

Si è già osservato nel paragrafo 9.8 che il più semplice circuito magnetico è l'anello toroidale riempito di materiale ferromagnetico (vedi anche l'esempio 9.1). Se il valore di  $\mu$  è abbastanza elevato le linee di  $B$  e  $H$  stanno praticamente tutte all'interno del ferro, cioè nessuna attraversa la superficie esterna: si dice allora che non c'è flusso disperso verso l'esterno e, come conseguenza, il flusso di  $B$  è costante attraverso qualsiasi sezione del circuito. Non è pertanto necessario distribuire le spire lungo tutto l'anello, ma basta concentrarle in una regione limitata (fig. 9.30).

Queste considerazioni restano valide se nel circuito magnetico c'è una interruzione (interferro o traferro) di lunghezza  $h$  piccola rispetto alla lunghezza media complessiva  $s$  del circuito magnetico. Il sistema, mostrato in figura 9.34, costituisce lo schema di base degli *elettromagneti*, cioè di quei dispositivi che, alimentati da una o più bobine, producono un campo magnetico in una regione di spazio accessibile. Dalla costanza di  $\Phi(B)$  segue che nel passaggio ferro-aria  $B$  è continuo e  $H$  discontinuo secondo la relazione

$$B = \mu H = \mu_0 H_0$$

La legge di Ampère (9.19) applicata a una linea tutta interna al circuito e che conca-

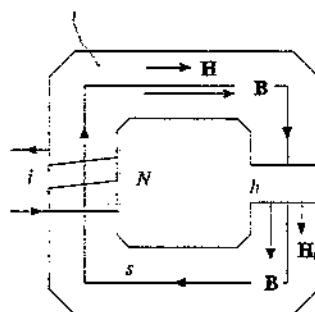


Figura 9.34

tene la bobina di alimentazione dà

$$H(s-h) + H_0 h = Ni$$

Facendo sistema con la legge di Ampère ed eliminando  $H_0$  otteniamo

$$B = -\frac{\mu_0}{h} \cdot s \cdot h \cdot H + \mu_0 \frac{Ni}{h}. \quad (9.43)$$

Nel ferro devono dunque valere contemporaneamente due relazioni tra  $H$  e  $B$ , quella corrispondente al ciclo di isteresi del materiale e la (9.43) derivata dalla legge di Ampère e dipendente dalle caratteristiche geometriche e dalla bobina.

Nel piano  $(H, B)$  la (9.43) è una retta a pendenza negativa,  $-\mu_0 (s-h)/h$ , in cui compaiono solo i parametri geometrici; le sue intercette sono

$$H^* = \frac{Ni}{s-h}, \quad B^* = \mu_0 \frac{Ni}{h}$$

Fissata la geometria, e quindi la pendenza, al variare della corrente la retta si sposta parallelamente a se stessa, essendo fissato il limite dal massimo valore di  $Ni$  di progetto, a sua volta dipendente dalla massima temperatura tollerabile nella bobina, dove viene dissipata energia per effetto Joule. I possibili punti di funzionamento sono determinati dall'intersezione della retta con il ciclo di isteresi; per una data corrente sono possibili tutte le soluzioni comprese tra  $c$  e  $b$ , a seconda di come è stato raggiunto il valore  $i$  della corrente.

Ad esempio, se partiamo con ferro nello stato vergine e corrente nulla, all'aumentare della corrente la soluzione è data dall'intersezione della retta con la curva di prima magnetizzazione: per una data corrente  $i_s$ , supponiamo che sia  $a$ . Aumentiamo ancora la corrente fino a che l'intersezione coincide con il punto  $S_1$ , dove inizia la saturazione, e poi riportiamo la corrente al valore  $i_o$ : questa volta il punto di funzionamento è  $b$ . Se portiamo la corrente a zero, ne invertiamo il verso, raggiungiamo l'intersezione  $S_2$  e torniamo indietro fino al valore  $i_o$ , il punto di funzionamento sarà  $c$ . Così procedendo, il punto di funzionamento coincide sempre con un punto del ciclo, ma con diverse procedure di variazione di corrente si può ottenere qualsiasi altro punto interno, cioè compreso tra  $c$  e  $b$ .

È interessante discutere l'effetto dell'interfero. Consideriamo inizialmente l'assenza di interfero,  $h = 0$ . La (9.43) è una retta di equazione  $H = Ni/s$  parallela all'asse  $B$ , che interseca il ciclo di isteresi lungo un tratto verticale, su cui stanno le possibili soluzioni: è la situazione già vista nella figura 9.25 del paragrafo 9.7, dove abbiamo introdotto il ciclo di isteresi. La presenza dell'interfero fa ruotare la retta in senso antiorario, tanto più quanto maggiore è l'interfero, pur dovendo restare  $h \ll s$ : nel caso considerato in figura 9.36 a parità di corrente i punti  $b$  e  $a$  scendono al di sotto di  $b'$  e  $a'$ , mentre  $c$  sale rispetto a  $c'$ , e quindi si può avere un campo magnetico che è minore o maggiore rispetto a quello senza interfero.

Osserviamo un'altra conseguenza della forma del ciclo di isteresi, che non si avrebbe con una relazione  $B, H$  univoca e passante per l'origine: sono possibili stati di funzionamento con vettori  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{B}$  opposti (punti nel secondo e quarto quadrante). Questo perché, una volta magnetizzato, il ferro conserva la propria magnetizzazione ed occorre un'azione contraria, a volte piuttosto intensa, per riportare a zero ed invertire la magnetizzazione: nelle fasi del processo si realizzano appunto situazioni con  $\mathbf{H}$  in un verso e  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{M}$  nell'altro o  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{H}$  in un verso e  $\mathbf{M}$  nell'altro, ovvero situazioni in cui la suscettività assume valori negativi. Bisogna però dire che i punti

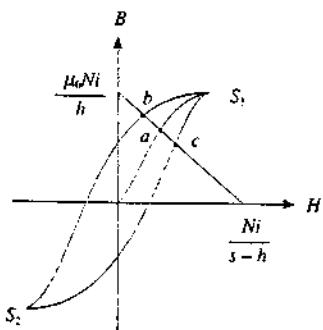


Figura 9.35

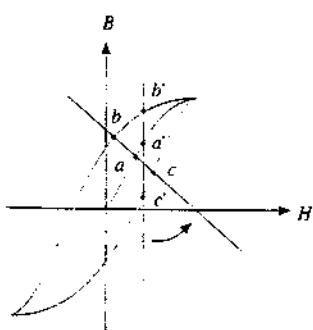


Figura 9.36

di funzionamento usuali sono quelli con  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{B}$  dello stesso verso, a correnti piuttosto elevate; gli altri stati sono attraversati se si effettua una transizione da  $\mathbf{B}$  a  $-\mathbf{B}$ , ma non sono comunemente usati per la semplice ragione che si cerca di ottenere il massimo valore di  $\mathbf{B}$ .

Come avviene per la maggior parte degli strumenti anche un elettromagnete viene acceso, portato a regime, dove resta durante il periodo di utilizzazione, e poi spento; questa successione di operazioni viene ripetuta un numero indefinito di volte, con la variante che il valore di  $\mathbf{B}$  può essere diverso di volta in volta, a seconda dello scopo specifico. È chiaro che sarebbe molto conveniente sia avere un campo residuo nullo quando la corrente è portata a zero sia essere in grado di conoscere il valore del campo per un dato valore di corrente, sebbene questo sia raggiunto. Dalla discussione finora svolta ricaviamo che tali proprietà richiedono un *ciclo di isteresi molto stretto*, come quello della figura 9.28 e, in effetti, le leghe utilizzate per la costruzione di elettromagneti vengono ottimizzate in tal senso.

Il valore massimo del campo magnetico ottenibile con un elettromagnete del tipo descritto è di circa 2 T; esso coincide sostanzialmente con  $\mu_0 M_{sat}$  (tab. 9.4) in quanto ulteriori aumenti possono venire soltanto dal termine  $\mu_0 H$ , cioè aumentando la corrente nell'avvolgimento ma, come si è già osservato, tali aumenti sono molto piccoli e richiedono grandi spese di energia. In pratica quindi i valori massimi sono limitati appunto a circa 2 T nei dispositivi che abbiamo descritto. Se è necessario disporre di un campo magnetico in volumi molto grandi si ricorre più spesso al solenoide in aria (ne sono stati realizzati con diametri di qualche metro e lunghezze pari a due o tre diametri), ma in tal caso si arriva nel centro a campi magnetici di  $0.5 \div 1$  T.

Questi limiti sono stati superati impiegando *bobine superconduttrici*, nelle quali si sfrutta l'annullamento della resistività di certi conduttori al di sotto di una temperatura critica (vedi paragrafo 6.5). È possibile quindi far circolare correnti molto elevate, dell'ordine di  $10^4$  A, senza avere i problemi di dissipazione di energia (effetto Joule) presenti nei conduttori ordinari. Basandosi su tale tecnologia sono stati costruiti solenoidi in aria molto grandi con campi magnetici vicini a 2 T e si sono raggiunti stabilmente campi di 10 T in magneti più compatti e con geometria diversa, realizzabili in quanto le sezioni dei conduttori restano limitate pur con correnti così intense. Il funzionamento dei magneti superconduttori richiede temperature di qualche Kelvin: pertanto le bobine devono essere termicamente isolate dall'ambiente e occorre un impianto criogenico, con impiego di elio liquido, per mantenere tali temperature. Tutto ciò ne limita l'impiego e si capisce l'interesse per la ricerca di materiali che siano superconduttori a temperature più elevate, come quella dell'azoto liquido (77 K) o addirittura dell'ambiente.

Il magnete della figura 9.34 è chiamato magnete a C per la forma del circuito magnetico: qui accanto è disegnato un magnete ad H. Le figure sono sezioni e si intende che il magnete si sviluppa ortogonalmente al foglio. La forma delle facce dell'interferro, chiamate poli dell'elettromagnete, è quella di un rettangolo, ma sono possibili sagome qualsiasi.

Quando i poli sono paralleli il campo magnetico nell'interferro è uniforme e ortogonale alle facce polari, ad eccezione delle zone vicine ai bordi, dove le linee di campo escono dall'interferro e il modulo del campo è minore. L'approssimazione di campo uniforme è tanto migliore quanto più lo spessore  $h$  è piccolo rispetto alle dimensioni trasverse, anche se le linee devono sempre incurvarsi verso l'esterno, altrimenti sarebbe violata la legge di Ampère (8.27). Infatti, per un percorso chiuso che non concateli nessuna corrente e sia parzialmente esterno all'interferro, la circolazione di  $\mathbf{B}$  deve essere nulla e ciò è possibile solo se  $\mathbf{B}$  ha un valore diverso da zero anche all'esterno dell'interferro (si veda l'analogo ragionamento fatto per il campo elettrico in un condensatore piano, paragrafo 4.5).

Se le facce polari non sono parallele il campo non è più uniforme, poiché è infe-

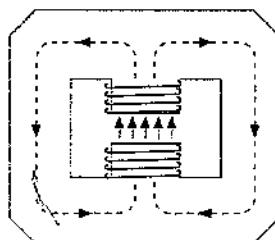


Figura 9.37

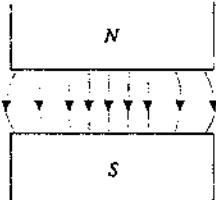


Figura 9.38

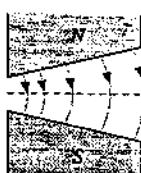


Figura 9.39

riore in modulo dove la spaziatura è maggiore (lo si dimostri sempre applicando la legge di Ampère) e acquista una componente trasversa.

I magneti con due poli sono detti *magneti dipolari* o anche semplicemente *dipoli*. Vedremo una disposizione con più poli nel successivo esempio 9.10.

### Esempio 9.9

Un magnete a C, con circuito magnetico di lunghezza complessiva  $s = 1.01 \text{ m}$  e interferro  $h = 1 \text{ cm}$ , è alimentato da  $N = 20$  spire percorse dalla corrente  $i$ . Il materiale di cui è costituito ha il ciclo di isteresi della figura 9.40. Calcolare il valore del campo magnetico se la corrente è portata al valore  $i = 500 \text{ A}$  partendo dallo stato vergine. Calcolare inoltre il valore di  $B$  per tale corrente, ma in assenza di interferro, e il valore di  $B$  con interferro e senza interferro quando la corrente viene portata a zero in modo tale che il sistema percorra la curva  $b$ .

#### Soluzione

La retta (9.43) ha l'equazione, per  $i = 500 \text{ A}$ ,

$$B = -1.257 \cdot 10^{-4} H + 1.257$$

e le sue intercette sono

$$H^* = 10^4 \text{ A/m} , \quad B^* = 1.257 \text{ T} .$$

Essa incontra la curva di prima magnetizzazione nel punto di coordinate

$$H_A = 2 \cdot 10^3 \text{ A/m} , \quad B_A = 1 \text{ T} ,$$

trovato per via grafica in figura 9.40; nell'interferro il valore di  $B$  è lo stesso che nel ferro.

Se non ci fosse interferro l'equazione della retta sarebbe

$$H = \frac{Ni}{s} = \frac{10^4}{1.01} = 10^4 \text{ A/m}$$

e dall'intersezione con il ciclo di isteresi, che è nella zona di saturazione, si ha  $B_s = 1.6 \text{ T}$ . Quando la corrente è ridotta a zero nel modo detto e siamo in presenza di interferro, la retta passa per l'origine e incontra il ciclo di isteresi nel punto  $P$  di coordinate

$$H_p = -2.8 \cdot 10^3 \text{ A/m} , \quad B_p \approx 0.35 \text{ T} .$$

Al punto  $P$  il sistema arriva percorrendo la curva  $A$  a  $S$   $b$   $P$ ; nell'interferro  $B$  ha lo stesso valore  $B_p$ .

Infine, in assenza di corrente e di interferro,  $B$  ha il valore residuo  $B_r = 1 \text{ T}$ , che si ricava dal grafico. In entrambi i casi il ferro resta permanentemente magnetizzato. Torneremo tra poco più in generale sull'argomento magneti permanenti.

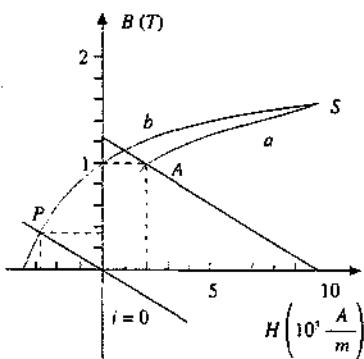


Figura 9.40

### Esempio 9.10 Quadrupolo magnetico

Consideriamo un magnete con quattro espansioni polari la cui sezione è mostrata in figura 9.41: la sagoma dei poli corrisponde all'equazione  $x y = \text{costante}$ , cioè è iperbolica. La situazione ricorda quella dell'esempio 4.25 e la figura 4.55 è identica alla 9.41. Riprendiamo quanto detto nel paragrafo 8.7 sul fatto che nel vuoto le equazioni dell'elettrostatica e della magnetostatica sono identiche e risolviamo il problema del calcolo magnetico nella zona centrale vuota rifacendoci alla soluzione dell'analogo problema elettrostatico. In questo i quattro poli sono quattro conduttori, ciascuno equipa-

tenziale con valore del potenziale  $V_0 = \pm kxy$ , che è l'equazione delle superfici equipotenziali coincidenti con i poli. La funzione  $V(x, y) = kxy$ , eguale su ciascun conduttore al potenziale del conduttore è, per il teorema di unicità, la soluzione dell'equazione di Laplace nel caso considerato e da essa si può ricavare il campo con l'operazione di gradiente. Passando direttamente al campo magnetico, le sue componenti sono

$$B_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -ky, \quad B_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -kx, \quad B_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = 0.$$

Quindi in un quadrupolo magnetico come quello della figura 9.41, che si sviluppa ortogonalmente al disegno lungo l'asse  $z$ , il campo magnetico sta nel piano  $x, y$  del disegno ed è dato da

$$\mathbf{B} = -ky\mathbf{u}_z - kx\mathbf{u}_y.$$

Le linee di campo sono indicate in figura; le assegnazioni nord e sud ai poli sono coerenti col fatto che le linee sono uscenti dai poli nord e entranti nei poli sud.

Una particella carica positivamente che esca ortogonalmente dal disegno con velocità  $v = v\mathbf{u}_z$  subisce la forza di Lorentz (7.5)

$$\mathbf{F} = qv \times \mathbf{B} = qv\mathbf{u}_z \times (-ky\mathbf{u}_z - kx\mathbf{u}_y) = kqv(x\mathbf{u}_x - y\mathbf{u}_y).$$

Si verifica facilmente che qualunque sia il punto  $P(x, y)$  la componente  $F_x$  allontana la particella dalla zona centrale, mentre la componente  $F_y$  la avvicina, essendo l'effetto proporzionale alla distanza. Si dice che il quadrupolo *defocalizza* in  $x$  e *focalizza* in  $y$ . Un quadrupolo ruotato di  $90^\circ$  (poli nord e sud scambiati) fa l'effetto opposto e si dimostra che l'effetto complessivo di una coppia di quadrupoli siffatti attraversati successivamente dalla particella è *focalizzante* sia in  $x$  che in  $y$ . Per questa ragione una coppia di quadrupoli magnetici è detta anche *lente magnetica convergente*.

Intuitivamente si capisce che la somma di un'azione divergente più una convergente è complessivamente convergente osservando la figura 9.42 che rappresenta la traiettoria idealizzata di una particella proiettata nel piano  $x, z$ . Il primo quadrupolo allontana la particella dall'asse  $z$  così che essa passa nel secondo a distanza maggiore dall'asse  $z$ : nel secondo l'azione è focalizzante ed è in modulo maggiore che nel primo perché la forza è lineare con la distanza; in totale la particella è riportata verso l'asse. Il ragionamento vale anche per la somma di un'azione convergente e di una divergente: per convincersi basta guardare la figura 9.42 da destra verso sinistra invece che da sinistra verso destra. E tutto può essere ripetuto per il quadrupolo eletrostatico dell'esempio 4.25.

Negli acceleratori circolari di particelle detti *sincrotroni* le particelle sono guidate lungo l'orbita da magneti dipolari, disposti lungo una circonferenza e con campo magnetico ortogonale al piano (orizzontale) della circonferenza: la forza di Lorentz  $qv \times \mathbf{B}$  esercita la necessaria azione centripeta. È però difficile tenere circa  $10^{13}$  particelle (protoni o elettroni) su un'orbita esatta eguale per tutte: oltre a una componente della velocità tangente alla circonferenza ideale esse hanno inevitabilmente una (piccola) componente trasversa, per cui l'orbita reale tende a divergere. Si ovvia a questo fatto con *coppie di quadrupoli*, intercalate tra i dipoli, che esercitano un'*azione focalizzante*: come risulta l'orbita reale delle particelle oscilla intorno all'orbita ideale e si riesce a mantenerle in orbita per tempi molto lunghi. Si noti che i campi magnetici descritti non danno mai accelerazione tangente; per comunicare energia alle particelle sono disposte lungo la macchina cavità acceleratrici in cui agiscono opportuni campi elettrici. D'altra parte per ovvie ragioni costruttive, avvenendo il moto delle particelle all'interno di un tubo in cui è praticato un altro vuoto, il raggio di curvatura deve rimanere costante: quindi, secondo (7.7), durante il processo di accelerazione il campo magnetico nei dipoli deve aumentare man mano che aumenta l'energia delle particelle.

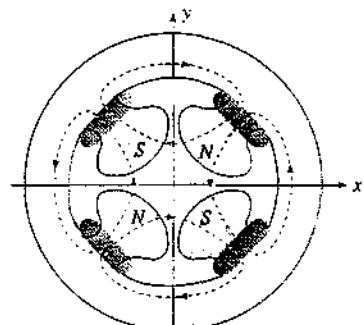


Figura 9.41

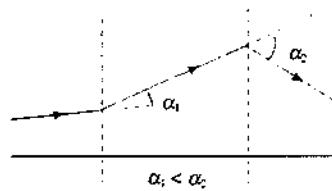


Figura 9.42

## Magneti permanenti

Ritorniamo all'elettromagnete a C e supponiamo, dopo averlo portato alla saturazione, di ridurre a zero la corrente, come descritto nell'esempio 9.9. Il ferro

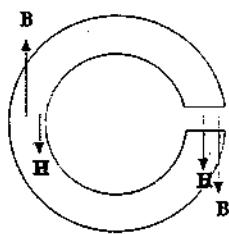
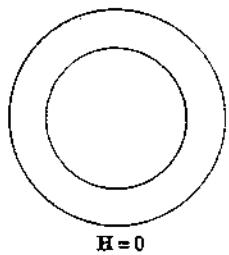
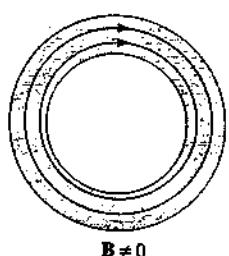


Figura 9.43

resta magnetizzato e il campo magnetico residuo è tanto maggiore quanto più quadrato è il ciclo di isteresi (e piccolo lo spessore dell'interferro); poiché in tal caso è generalmente grande il campo coercitivo, risulta difficile smagnetizzare il ferro.

Ponendo  $i = 0$  nella (9.43) si ha

$$\mathbf{B} = -\mu_0 \frac{s-h}{h} \mathbf{H}$$

Da una parte questa relazione ci permette di trovare graficamente il valore di  $\mathbf{B}$  col metodo dell'intersezione col ciclo di isteresi, dall'altra ci mostra che all'interno di un magnete permanente  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{H}$  sono *opposti*. In effetti, dato che nell'interferro  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{H}$  sono concordi, solo così è possibile soddisfare (9.19) con  $i = 0$ . Se non ci fosse interfero il campo magnetico avrebbe il valore residuo  $B_r$  della figura 9.25 e il campo  $\mathbf{H}$  sarebbe nullo. È la presenza dell'interfero che comporta  $\mathbf{H}$  diverso da zero e discontinuo all'interfaccia ferro-aria.

Una configurazione di magnete permanente completamente diversa dalla calamita a C è quella del *magnete cilindrico* (vedi figura 9.18). Ricordiamo che un cilindro di ferro magnetizzato uniformemente si ottiene ponendo il campione al centro di un solenoide rettilineo, dove esso acquista la magnetizzazione  $\mathbf{M}$ ; se il ciclo di isteresi è largo e quadrato possiamo assumere che il cilindro conservi la stessa magnetizzazione, praticamente  $\mathbf{M}_{sa}$ , anche quando è estratto dal solenoide. Il campo magnetico al centro ha l'espressione (9.34).

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{M} \left(1 - \frac{2R^2}{d^2}\right) = \mu_0 \mathbf{M} \left(1 - \frac{2\pi R^2}{\pi d^2}\right) = \mu_0 \mathbf{M} \left(1 - \frac{2\Sigma}{\pi d^2}\right)$$

dove  $\Sigma$  è l'area della sezione del cilindro; il campo  $\mathbf{H}$ , sempre al centro, vale

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} = -\frac{2\Sigma}{\pi d^2} \mathbf{M} \quad (9.44)$$

ed è opposto a  $\mathbf{B}$ .

Se il cilindro è lungo e sottile ( $R^2 / d^2 \ll 1$ ) il campo magnetico è praticamente eguale a  $\mu_0 \mathbf{M}$  in tutti i punti interni mentre  $\mathbf{H}$  in tali punti è nullo.

Più in generale, per un cilindro di dimensioni qualsiasi il campo magnetico si calcola in tutti i punti, interni ed esterni, come quello di un solenoide finito avvolto sulla superficie esterna del cilindro e percorso dalla corrente di densità lineare  $M$ . Le linee di  $\mathbf{B}$  sono mostrate nella figura 9.44, insieme a quelle di  $\mathbf{H}$  dedotte dalla definizione (9.18).

Notiamo che i tre vettori  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{M}$  non sono paralleli: a differenza di quanto abbiamo ammesso ad esempio per lo spazio interno di un solenoide toroidale o rettilineo indefinito oppure per la regione che circonda un filo rettilineo indefinito o anche per un anello ferromagnetico magnetizzato, le relazioni (9.21, 9.22, 9.23) non valgono adesso nemmeno formalmente; il risultato si estende ad un blocco ferromagnetico di forma qualsiasi uniformemente magnetizzato. Il fatto che la magnetizzazione  $\mathbf{M}$  non sia parallela al campo magnetico macroscopico locale (generato dal mezzo stesso) fa pensare che il momento magnetico per unità di volume e quindi i momenti magnetici elementari siano mantenuti in una direzione fissa da un'interazione che non è quella magnetica classica, come si vedrà nel paragrafo 9.12.

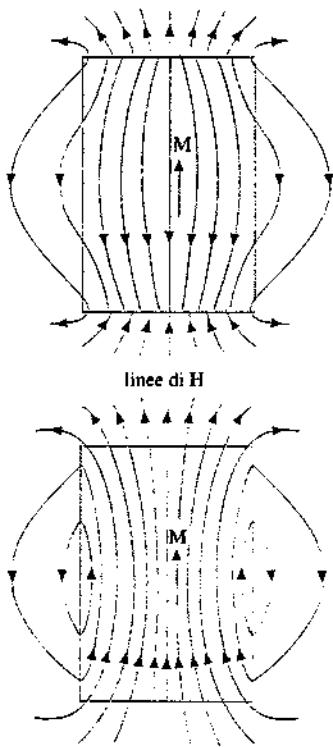


Figura 9.44

Ripetiamo che niente di simile si può realizzare con un mezzo non ferromagnetico: un cilindro uniformemente magnetizzato perché posto all'interno di un solenoide lungo si smagnetizza non appena è portato all'esterno in una regione dove il campo magnetico è nullo.

Se si realizzasse un cilindro dielettrico uniformemente polarizzato ( $P$  costante), le linee di  $E$  e  $D$  sarebbero eguali rispettivamente a quelle di  $H$  e  $B$  della figura 9.44.

Osserviamo infine che nel caso di un magnete permanente, di qualsiasi forma, il campo  $H$  è conservativo in quanto la sua circuitazione è sempre nulla in base a (9.19), non essendoci correnti di conduzione. Invece  $B$  non è conservativo: la sua circuitazione, secondo (9.16), è proporzionale a quella di  $M$  e quindi è nulla per percorsi completamente esterni al magnete, ma può essere diversa da zero per percorsi che passino all'interno del magnete.

### Poli magnetici

La (9.44) si presta a una deduzione che è interessante per ragioni di carattere storico. Detta  $r = d/2$  la distanza di ciascun polo dal centro del magnete, possiamo scrivere nel centro

$$H = -\frac{2\sum}{\pi d^2} M = 2 \left( -\frac{1}{4\pi} \frac{\sum}{r^2} M \right) = 2 \left( \frac{1}{4\pi} \frac{\Sigma M}{r^2} \right) u,$$

se  $u$ , è il versore dell'asse del cilindro, opposto a  $M$ , che va cioè dal polo nord al polo sud. Nel centro entrambi i poli contribuiscono allo stesso modo e se indichiamo con  $q^* = \sum M$  una quantità chiamata *massa magnetica del polo*, ricaviamo che un polo magnetico genera un campo  $H$  dato da

$$H = \frac{1}{4\pi} \frac{q^*}{r^2} u,$$

espressione che costituisce la *legge di Coulomb per il campo  $H$* . La magnetizzazione sarebbe la *massa magnetica per unità di superficie che si forma sui poli*.

A partire da tali densità di masse magnetiche poste sui poli dei magneti permanenti si può costruire una *magnetostatica dei magneti permanenti* che segue la trattazione elettrostatica e che arriva agli stessi risultati per i calcoli di  $B$  che si ottengono a partire dalle correnti amperiane. Il campo  $H$  in quanto coulombiano è conservativo (come affermato prima con ragionamento diverso) e il suo flusso attraverso una superficie chiusa dipende dalla massa magnetica interna alla superficie: per la forza tra due masse si ottiene una formula tipo (7.1). Però non è concettualmente conveniente proseguire su questa strada: innanzitutto la nozione di massa magnetica non corrisponde ad alcuna realtà fisica, ci sono sorgenti differenti dell'interazione magnetica, come le correnti di conduzione, che generano un campo  $H$  non conservativo ed, infine, è il campo  $B$  che regola la forza agente su una carica elettrica e  $B$  non ha in generale proprietà analoghe a quelle di  $E$ .

Per queste ragioni la trattazione dei fenomeni magnetici si basa in modo unitario sulle correnti (di conduzione e amperiane); di conseguenza utilizziamo la dizione polo magnetico solo per indicare le facce terminali di un magnete di dimensioni finite, senza attribuire al termine nessun altro significato. Gli stessi nomi nord e sud servono per indicare il verso delle linee di  $B$ .

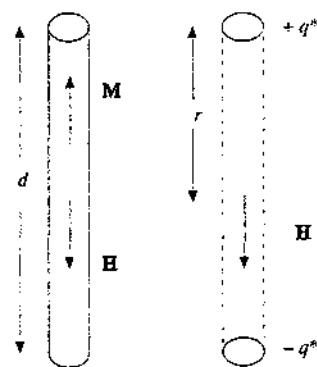


Figura 9.45

### Nota. Forza di Lorentz e campo magnetico

La forza di Lorentz su una particella carica è stata espressa tramite il campo magnetico  $B$ , ma nel vuoto possiamo anche esprimere la forza tramite il campo  $H$ :

$$\mathbf{F} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \mu_0 q \mathbf{v} \times \mathbf{H} .$$

Ci si può chiedere quale di queste due formulazioni sia rilevante e la questione si risolverebbe misurando la forza in un mezzo in cui  $B$  e  $H$  siano realmente diversi, come ad esempio in un blocco di ferro magnetizzato. L'esperimento non è facile da realizzare: in primo luogo esso è possibile solo con particelle cariche subatomiche, le uniche che possono attraversare uno spessore anche notevole. Si dovrebbe misurare la traiettoria delle particelle prima e dopo il blocco e dal calcolo della deviazione risalire alla forza agente. Siccome nell'attraversamento la particella interagisce con elettroni e nuclei, cedendo ad essi una parte della sua energia, occorre che la particella abbia una certa energia minima che dipende dallo spessore del blocco; e questo d'altra parte deve essere abbastanza spesso se si vuole avere un effetto di deviazione ben misurabile. Inoltre, poiché le interazioni suddette perturbano la traiettoria, disturbando la misura della deviazione magnetica, ma in modo che decresce con l'energia delle particelle, è bene che l'energia sia elevata anche per questo motivo.

Fino agli anni intorno al 1950 non esistevano acceleratori in grado di produrre particelle con energie sufficienti, però la questione venne risolta definitivamente nel 1944 utilizzando la radiazione cosmica. Nel 1937 era stata scoperta una componente carica penetrante nei raggi cosmici, con un ampio spettro di energia, successivamente identificata con il leptone  $\mu$  o muone e che si pensa principalmente originata dal decadimento di altre particelle prodotte in interazioni di protoni con i nuclei dei gas atmosferici. Misurando gli angoli di deflessione di muoni che attraversavano un blocco di ferro spesso 9 cm e magnetizzato con un campo interno  $B = 1.5$  T, Rasetti verificò che tali angoli erano in accordo col fatto che il campo agente fosse  $B$  e non  $H$ .

## 9.10 Correnti elettriche e momenti magnetici atomici

All'inizio del paragrafo 9.3 abbiamo anticipato che i fenomeni di magnetizzazione sono riconducibili ad alterazioni delle distribuzioni di correnti atomiche, dovute alla presenza di un campo magnetico. Prima di affrontare questo argomento, esaminiamo le correnti presenti in un atomo.

La struttura elettrica della materia è stata descritta nel paragrafo 1.2; la trattazione completa delle proprietà atomiche richiede l'impiego della meccanica quantistica. Tuttavia è sufficiente, per una spiegazione approssimata, ricorrere al modello di Bohr-Sommerfeld, in cui gli elettroni descrivono orbite circolari o ellittiche intorno al nucleo e soddisfano a determinate regole di quantizzazione (vedi paragrafo 2.3).

Consideriamo un elettrone che ruota attorno al nucleo lungo un'orbita circolare; il momento angolare  $L$  del moto orbitale, costante in quanto la forza è centrale, vale in modulo

$$L = m_e v r \quad , \quad (9.45)$$

essendo  $m_e$  la massa dell'elettrone,  $v$  la sua velocità e  $r$  il raggio dell'orbita; la direzione di  $L$  è ortogonale al piano dell'orbita. Tale moto di rivoluzione, di periodo  $T = 2\pi r/v$ , corrisponde a una corrente di intensità  $i = -e/T = -e v / 2\pi r$ , dove il segno meno indica che la corrente ha verso opposto al moto dell'elettrone. In base al principio di equivalenza di Ampère (7.21) a questa corrente è associato il momento magnetico  $m$  di modulo

$$m = i \pi r^2 = -\frac{e v r}{2} \quad , \quad (9.46)$$

anch'esso ortogonale al piano dell'orbita, ma opposto a  $L$ . Combinando (9.45) e (9.46) si ha

$$m = -\frac{e}{2m_e} L \quad (9.47)$$

che contiene soltanto costanti fondamentali. Questo fatto induce a sospettare che (9.47) sia *sempre valida* e in effetti si dimostra che è così, in qualsiasi sistema di forze centrali e anche se l'orbita non è circolare.

Concludiamo che ad ogni orbita elettronica sono associati un momento angolare e un momento magnetico, entrambi costanti e legati tra loro da (9.47). Il risultato ha un solido

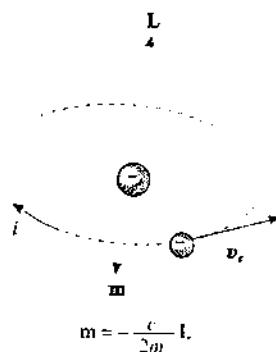


Figura 9.46

fondamento in quanto è valido anche nella trattazione quantistica. Sempre nel paragrafo 2.3 abbiamo visto che il valore di  $L$  è quantizzato secondo la regola  $L = (l + 1) \hbar$ : anche il momento magnetico orbitale è dunque quantizzato, in unità  $e \hbar / 2 m_e$ . Ricordiamo che

$$\hbar = 6.626 \cdot 10^{-34} \text{ Js} = 4.136 \cdot 10^{-15} \text{ eV s}$$

è la costante di Planck e che  $\hbar$ , da leggere *h tagliata*, è definita come

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.055 \cdot 10^{-34} \text{ Js} = 6.582 \cdot 10^{-16} \text{ eV s}.$$

Analogamente, dato che la normale al piano dell'orbita può assumere solo determinate orientazioni rispetto ad una certa direzione (*quantizzazione spaziale*) e che ciò si traduce nel fatto che la proiezione di  $L$  lungo quella direzione possa assumere solo i valori  $m \hbar$ , con  $m$  intero compreso tra  $-l$  e  $+l$ , anche la proiezione del momento magnetico orbitale lungo quella direzione è quantizzata, sempre in unità  $e \hbar / 2 m_e$ .

Oltre al momento angolare orbitale esiste un'altra causa di momento magnetico a livello atomico, che non ha equivalente nella fisica classica. L'elettrone possiede un momento angolare intrinseco, che è detto *spin* e ha il valore

$$|S| = \frac{1}{2} \hbar \quad . \quad (9.48)$$

Allo spin dell'elettrone è associato il momento magnetico intrinseco

$$\mu_e = -\frac{e}{m_e} S = -2 \left( \frac{e}{2 m_e} \right) S \Rightarrow \mu_e = \frac{e \hbar}{2 m_e} \quad . \quad (9.49)$$

La costante

$$\mu_B = \frac{e \hbar}{2 m_e} = 0.9274 \cdot 10^{-23} \text{ Am}^2 = 0.5788 \cdot 10^{-4} \frac{\text{eV}}{\text{T}} \quad (9.50)$$

è detta *magnetone di Bohr*. Sia dalla quantizzazione del momento magnetico orbitale che da (9.49) deduciamo che il magnetone di Bohr è il momento magnetico di riferimento per un elettrone atomico.

Anche il protone e il neutrone hanno uno spin, dato da (9.48), e un momento magnetico. Nell'unità

$$\mu_N = \frac{e \hbar}{2 m_p} = \frac{m_e}{m_p} \mu_B = 5.446 \cdot 10^{-4} \mu_B = 0.5051 \cdot 10^{-26} \text{ Am}^2,$$

detta *magnetone nucleare*, risulta

$$\mu_p = 2.793 \mu_N = 1.549 \cdot 10^{-3} \mu_B = 5.586 \frac{e}{2 m_p} |S|,$$

$$\mu_n = -1.913 \mu_N = -1.042 \cdot 10^{-3} \mu_B = -3.826 \frac{e}{2 m_p} |S|.$$

Si tratta di valori molto minori di  $\mu_B$  e per questa ragione i momenti magnetici legati ai componenti del nucleo vengono trascurati nella discussione del magnetismo atomico.

La presenza di un coefficiente diverso da 2 nella relazione tra  $\mu$  e  $S$  indica che il protone e il neutrone hanno una struttura non elementare, cioè non sono puntiformi come l'elettrone. Abbiamo già accennato alla struttura a *quark* (esempio 4.18) ed è alla dinamica dei costituenti che vanno attribuiti i valori cosiddetti *anomali* dei momenti magnetici dei nucleoni.



Figura 9.47

Se un atomo ha  $Z$  elettroni e per ogni orbita vale (9.47), la relazione tra il momento angolare orbitale risultante e il momento magnetico orbitale risultante è ancora (9.47), perché il fattore comune  $e / 2m_e$ , nella somma viene raccolto. Bisogna poi aggiungere il contributo che viene dai momenti magnetici intrinseci degli elettroni e in generale per un atomo in un certo stato il legame tra il momento angolare totale  $\mathbf{J}$  e il momento magnetico totale  $\mathbf{m}$  risulta essere

$$\mathbf{m} = -g \frac{e}{2m_e} \mathbf{J}, \quad (9.51)$$

dove  $g$  è un fattore caratteristico dello stato dell'atomo, che si chiama *rapporto giromagnetico* ed è sperimentalmente compreso tra 1 e 2: il valore è 1 se al momento angolare totale contribuiscono solo i moti orbitali, è 2 se invece il contributo viene solo dagli spin. La (9.51), che è quantisticamente corretta, afferma dunque che in un atomo il momento magnetico è sempre parallelo e discorde al momento angolare.

I possibili valori del momento angolare e quindi del momento magnetico di un atomo oltre che dalle regole di quantizzazione sono condizionati dal principio di Pauli, legge fondamentale della meccanica quantistica: esso afferma che *in un atomo due elettroni non possono stare nello stesso stato, cioè non possono avere tutti i numeri quantici eguali*. Ad esempio, nei primi tre elementi, idrogeno, elio, litio, considerati nello stato fondamentale, abbiamo che l'unico elettrone dell'idrogeno ha i numeri quantici  $n = 1, l = 0, m = 0$  e può avere  $m_s = 1/2$  o  $m_s = -1/2$ , indicando con  $m_s$  il numero quantico di spin; nell'atomo di elio i due elettroni hanno  $n = 1, l = 0, m = 0$  e pertanto devono avere gli spin opposti, da cui segue che anche i momenti magnetici di spin sono opposti: nel litio il terzo elettrone deve stare in uno stato  $n = 2, l = 0, m = 0$  (e  $m_s = \pm 1/2$ ) e così via. Si comprende l'importanza del principio di Pauli nella spiegazione delle proprietà che stanno alla base della *tavola periodica degli elementi*.

In definitiva, le situazioni che possono presentarsi per il momento magnetico di un atomo o di una molecola sono molteplici. Quando per ragioni di simmetria spaziale e a causa del principio di Pauli i momenti angolari orbitali e quelli di spin hanno risultante nulla (come avviene nei gas nobili) oppure si compensano dando ad ogni modo risultante nulla, abbiamo che il momento magnetico totale è nullo. Ciò avviene nella maggior parte delle sostanze e per queste l'unico effetto in presenza di un campo magnetico esterno è il *diamagnetismo*, come spiegheremo nel paragrafo 9.11.

Per alcune sostanze invece non c'è compensazione o direttamente a livello atomico (come avviene in certi elementi con numero dispari di elettroni) oppure a livello molecolare (un esempio è l'ossigeno  $O_2$ ) e abbiamo la presenza di *momenti magnetici elementari*, che sono dell'ordine di  $\mu_B$ . Sottoposte a campo magnetico queste sostanze danno luogo al *paramagnetismo*.

Ci sono poi alcuni elementi, ferro, cobalto, nichel, gadolinio e dispresio, nei quali un'interazione che si può spiegare solo con la meccanica quantistica porta all'allineamento in ogni atomo degli spin di alcuni elettroni dei livelli più interni, che non sono completamente riempiti. I singoli atomi possiedono quindi un momento magnetico non nullo e la misura del rapporto giromagnetico  $g$  fornisce un valore vicino a 2, confermando che il momento magnetico è dovuto agli spin. Nella fase solida la struttura cristallina è tale che al di sotto della temperatura di Curie la suddetta interazione allinea gli spin di un gran numero di atomi, dando luogo a una magnetizzazione locale. Vedremo nel paragrafo 9.12, in modo essenzialmente qualitativo, come partendo da questa proprietà si possano spiegare le principali caratteristiche del ferromagnetismo.

La dipendenza del ferromagnetismo da proprietà della struttura cristallina giustifica intuitivamente le osservazioni sperimentali riportate all'inizio del paragrafo 9.7 sull'influenza di sollecitazioni meccaniche e trattamenti termici e sull'importanza della composizione chimica delle leghe: a questo proposito è interessante il fatto che un elemento come il manganese, non ferromagnetico, ma vicino alle condizioni per cui si verifica il ferromagnetismo, forma delle *leghe*, dette di *Heusler* (ad esempio con rame, alluminio e piombo), che sono ferromagnetiche in quanto nella nuova struttura reticolare può avvenire il fenomeno di orientamento collettivo che nel manganese puro non avviene.

**Esempio 9.11**

Calcolare il valore della corrente che corrisponde al momento magnetico del moto orbitale dell'elettrone dell'atomo di idrogeno nel livello fondamentale.

**Soluzione**

La via più diretta è applicare (9.47) con  $L = \hbar$ , come avviene nello stato fondamentale dell'idrogeno ( $n = 1, l = 0, m = 0$ ); allora il momento magnetico coincide con il magneteone di Bohr (9.50) e dividendo per  $\pi r_0^2$ , con  $r_0 = 0.53 \cdot 10^{-10}$  m raggio dell'orbita dello stato fondamentale dell'idrogeno, si ottiene

$$i = \frac{\mu_B}{\pi r_0^2} = \frac{0.9274 \cdot 10^{-23}}{\pi (0.53 \cdot 10^{-10})^2} = 1.051 \cdot 10^{-3} \text{ A}$$

Oppure si può partire dal valore  $r_0$  del raggio dell'orbita e scrivere la legge del moto proiettata sul raggio.

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_0^2} = m_e \frac{v^2}{r_0} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{e}{4\pi\epsilon_0 m_e r_0}} = 2.186 \cdot 10^6 \text{ m/s}.$$

Il periodo del moto è  $T = 2\pi r_0/v = 1.523 \cdot 10^{-16}$  s e la corrente risulta

$$i = \frac{e}{T} = \frac{ev}{2\pi r_0} \approx 1.052 \cdot 10^{-3} \text{ A}$$

(si verifica che  $i \pi r_0^2 = \mu_B$ ). Notiamo che poiché il valore di  $r_0$  è stato ricavato imponendo  $L = \hbar$  (vedi paragrafo 2.3), in realtà il secondo metodo non è diverso dal primo. Il valore trovato per la velocità, circa  $3 \cdot 10^5$  c, giustifica il fatto di non usare, in prima approssimazione, formule relativistiche.

**Esempio 9.12**

Una sfera di raggio  $R$  e massa  $M$ , carica con una carica  $-q$  distribuita uniformemente sulla superficie, ruota con velocità angolare  $\omega$  attorno ad un suo diametro. Calcolare il momento magnetico della sfera e ripetere il calcolo supponendo che la carica sia distribuita uniformemente con densità  $-\rho$  in tutta la sfera.

**Soluzione**

In entrambi i casi il momento angolare vale

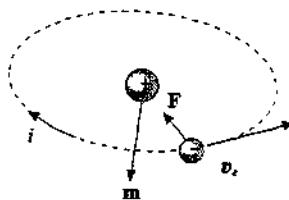
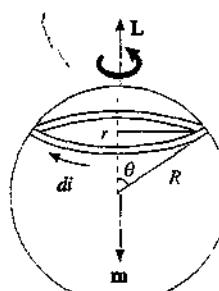
$$L = I\omega = \frac{2}{5} MR^2 \omega$$

dove  $I$  è il momento d'inerzia della sfera rispetto a un diametro, supponendo la massa distribuita uniformemente in tutto il volume della sfera.

Con la carica distribuita superficialmente, consideriamo una calotta sferica infinitesima di area  $d\Sigma = 2\pi r R d\theta = 2\pi R^2 \sin\theta d\theta$ , su cui si trova la carica  $-dq = -\sigma d\Sigma = -2\pi\sigma R^2 \sin\theta d\theta$ , che a causa della rotazione genera la corrente

$$di = -\frac{dq}{T} = -\frac{dq}{2\pi} \omega = -\omega \sigma R^2 \sin\theta d\theta$$

L'area di questa spira è  $\pi r^2 = \pi R^2 \sin^2\theta$  e il corrispondente momento magnetico è

**Figura 9.48****Figura 9.49**

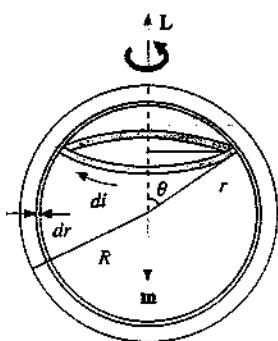


Figura 9.50

$$dm = \Sigma di = -\omega \sigma \pi R^4 \sin^3 \theta d\theta,$$

opposto al momento angolare. Integrando su tutta la sfera

$$m = -\omega \sigma \pi R^4 \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = -\frac{4}{3} \omega \sigma \pi R^4$$

Dato che  $\sigma = q / 4\pi R^2$  si ha

$$m = -\frac{1}{3} \omega R^2 q \Rightarrow m = -\frac{5}{3} \frac{q}{2M} L, g = \frac{5}{3}$$

Se invece la carica è distribuita in tutto il volume della sfera, applichiamo il ragionamento precedente a una calotta sferica infinitesima di raggio  $r$  (compreso tra zero e  $R$ , non è lo stesso di prima) in cui al posto della carica  $\sigma d\Sigma$  c'è la carica  $\rho d\tau = \rho d\Sigma dr$ . Quindi basta sostituire nell'espressione  $dm$  del momento magnetico a  $\sigma$  la quantità  $\rho dr$  e a  $R$   $r$  ottenendo

$$dm = -\omega \rho \pi r^4 \sin^3 \theta d\theta dr$$

Si integra tra zero e  $\pi$  e tra zero e  $R$ :

$$m = -\omega \rho \pi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \int_0^R r^4 dr = -\frac{4}{15} \omega \rho \pi R^5$$

Dato che  $\rho = q / \left( \frac{4}{3} \pi R^3 \right)$ ,

$$m = -\frac{1}{5} \omega R^2 q \Rightarrow m = -\frac{q}{2M} L, g = 1$$

Vediamo che nessuna delle due distribuzioni di carica porta al risultato visto per l'elettrone ( $g = 2$ ) e nemmeno per il protone ( $g = 2 \cdot 2.793$ ). D'altra parte i momenti magnetici dovuti allo spin sono effetti quantistici non attribuibili a rotazioni rispetto ad un asse e non si possono descrivere con ragionamenti classici.

### L'esperimento di Stern e Gerlach

La quantizzazione spaziale implica che, fissata una direzione  $z$ , la proiezione del momento angolare lungo  $z$  possa assumere solo un certo numero di valori diversi, spaziati di  $\hbar$ . Detto  $J_z$  uno qualsiasi di questi valori, il corrispondente valore della componente del momento magnetico è, secondo (9.51),

$$m_z = -g \frac{e}{2m_e} J_z = -g \mu_B j_z, \quad (9.52)$$

avendo posto  $J_z = j_z \hbar$ , con  $j_z$  numero intero o semintero.

Una tipica direzione significativa è quella del campo magnetico  $\mathbf{B}$  in cui l'atomo eventualmente si trovi e in questa situazione dunque il momento magnetico, proiettato sulla direzione di  $\mathbf{B}$ , può assumere solo un numero discreto di valori, non è cioè possibile un'orientazione qualsiasi. Ricordando l'espressione (7.22) dell'energia di un dipolo in campo magnetico, si ha che l'energia dell'atomo subisce una variazione a seconda dello stato in cui esso viene a trovarsi, data da

$$\Delta U = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B} = -m_z B = -g \mu_B j_z B. \quad (9.53)$$

Se ad esempio  $J_z = (\hbar, 0, -\hbar)$ ,  $j_z = (1, 0, -1)$ ,  $m_z = (-g \mu_B, 0, g \mu_B)$  e  $\Delta U = (g \mu_B B, 0, -g \mu_B B)$ . Detto  $U_0$  il livello di energia dell'atomo in assenza di campo magnetico, nel campo  $B$  si ha una separazione in tre livelli,

$$U_1 = U_0 + g \mu_B B \quad , \quad U_2 = U_0 \quad , \quad U_3 = U_0 - g \mu_B B \quad .$$

Schematicamente, l'esperimento di Stern e Gerlach, compiuto nel 1922, consiste nell'inviare un fascio collimato di raggi molecolari (vedi volume I, paragrafo 11.10) attraverso un campo magnetico costante fortemente non uniforme e rivelare la posizione del fascio dopo il magnete, come mostrato in figura 9.51, che ricorda per quanto riguarda la sagoma dei poli la figura 2.57 relativa a un campo elettrico non uniforme.

Se il singolo atomo ha un certo momento magnetico, inizialmente distribuito completamente a caso, questo passando attraverso il campo magnetico può assumere solo le proiezioni (9.52); siccome il campo non è uniforme sull'atomo agisce la forza (7.30) e, da (9.53),

$$F_z = \frac{\partial}{\partial z} (\Delta U) = -m_z \frac{\partial B}{\partial z} = -g \mu_B j_z \frac{\partial B}{\partial z} \quad ;$$

$F_z$  ha intensità e verso diversi a seconda del valore di  $m_z$ . Nell'ipotesi più semplice che  $m$  possa assumere solo due proiezioni,  $+m_z$  e  $-m_z$ , metà fascio sarà deviato verso l'alto e metà verso il basso: nel piano del rivelatore si vedranno due zone di impatto distinte. Classicamente invece, essendo possibile qualsiasi proiezione, la forza dovrebbe assumere un insieme continuo di valori e i punti di impatto dovrebbero distribuirsi in un'unica zona allargata.

Stern e Gerlach, con un fascio di atomi di argento, trovarono proprio due punti nettamente distinti, provando in questo modo l'esistenza della *quantizzazione spaziale*. Dalla misura della deviazione si può ricavare il valore di  $m_z$ , essendo noto il campo  $B$ , e quindi risalire al valore del rapporto giromagnetico  $g$ . Queste determinazioni furono successivamente rese molto precise da Rabi, che introdusse nel semplice apparato descritto una modifica sostanziale basata su un fenomeno di risonanza.

La linea di ricerca iniziale da Stern e Gerlach venne subito seguita da molti ricercatori; in particolare si trovò la divisione in due parti anche in un fascio di atomi di idrogeno, che sono il sistema atomico più semplice. L'analisi di questi risultati, insieme ad altri sulle caratteristiche dell'emissione di radiazione da parte degli atomi, portò nel 1925 all'ipotesi di esistenza dello spin dell'elettrone; sempre nel 1925 venne formulato il principio di esclusione e nell'anno successivo ebbe inizio la formulazione coerente della meccanica atomica ad opera di Schrödinger e Heisenberg. Restando nell'ambito dei numeri quantici di uno stato elettronico,  $n$ ,  $l$  e  $m$  introdotti in precedenza conservano il loro significato, anche se la quantizzazione del momento angolare orbitale è  $L = \sqrt{l(l+1)} \hbar$ , con  $l = 0, 1, \dots, n-1$ : è cioè possibile uno stato con  $L = 0$ , inesistente nel modello di Bohr-Sommerfeld. Nello stato fondamentale dell'idrogeno ( $n = 1$ ,  $l = 0$ ,  $m = 0$ ) il momento magnetico è quindi dovuto esclusivamente allo spin dell'elettrone e si spiega l'esistenza di due soli livelli in campo magnetico, messi in evidenza dagli esperimenti con i raggi molecolari (analogia spiegazione si ha per l'atomo di argento).

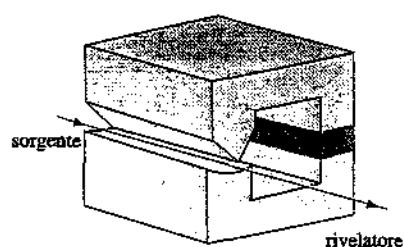


Figura 9.51

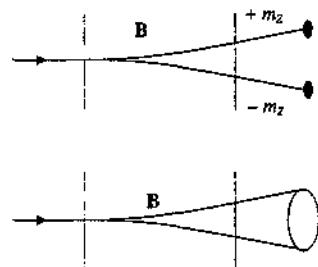


Figura 9.52

## 9.11 Teoria microscopica classica del diamagnetismo e del paramagnetismo

Nella prima parte del capitolo abbiamo discusso gli aspetti macroscopici del magnetismo nella materia assumendo che per le sostanze isotrope esista tra la magnetizzazione  $M$  e il campo  $H$  la relazione

$$M = \chi_m H \quad . \quad (9.21)$$

Il comportamento del mezzo sottoposto ad un campo magnetico esterno viene descritto dalla suscettività magnetica  $\chi_m$  e, basandosi su di essa, si ha la distinzione tra sostanze diamagnetiche ( $\chi_m < 0$ ,  $|\chi_m| \approx 10^{-2} + 10^{-3}$ ) e sostanze paramagnetiche ( $\chi_m > 0$ ,  $\chi_m = 10^{-3} + 10^{-5}$ ). Un caso a parte è costituito dalle sostanze ferromagnetiche, su cui ritorneremo nel paragrafo 9.12.

Nel paragrafo 9.10 abbiamo mostrato come nell'atomo possano esistere momenti magnetici, dovuti al moto e ai momenti magnetici intrinseci degli elettroni, constatando che il modello di Bohr-Sommerfeld, miscela di concetti classici e quantistici, è alla fine inadeguato per spiegare i fenomeni osservati e che sarebbe necessaria una corretta impostazione quantistica.

Adesso sviluppiamo un modello che permette di ottenere una *descrizione della suscettività magnetica dei materiali diamagnetici e paramagnetici in termini di grandezze microscopiche*. La trattazione non fa ricorso a concetti quantistici, che non possediamo, ma si basa sull'interazione classica tra campo magnetico e momenti magnetici (calcolati nel paragrafo 9.10) per il diamagnetismo e su una estensione della teoria della polarizzazione per orientamento (vista nel paragrafo 5.10) per il paramagnetismo. I risultati che si ottengono sono abbastanza vicini a quelli sperimentali, indicando che la descrizione di ciò che accade nei mezzi magnetizzati è nel complesso corretta, sebbene sussistano discrepanze e casi non spiegabili, poiché l'unico modo corretto di procedere sarebbe quello di ricorrere soltanto alla meccanica quantistica.

### Diamagnetismo

Cominciamo col considerare una sostanza in cui atomi o molecole non abbiano un momento magnetico intrinseco. Ad ogni elettrone che compie un'orbita con momento angolare  $\mathbf{L}$  è associato il momento magnetico (9.47). Se agisce un campo magnetico  $\mathbf{B}_{\text{loc}}$ , uniforme nella regione occupata dall'atomo, compare il momento meccanico

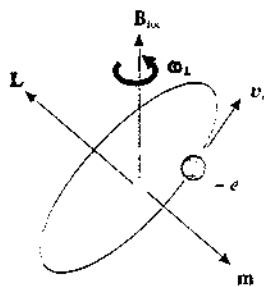
$$\mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}_{\text{loc}} = \frac{e}{2m_e} \mathbf{B}_{\text{loc}} \times \mathbf{L} ,$$

che ha come effetto una variazione del momento angolare secondo il teorema del momento angolare:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M} = \frac{e}{2m_e} \mathbf{B}_{\text{loc}} \times \mathbf{L} = \omega_L \times \mathbf{L} ,$$

con

$$\omega_L = \frac{e}{2m_e} \mathbf{B}_{\text{loc}} . \quad (9.54)$$



L'effetto di  $\mathbf{M}$  cioè non è quello di orientare  $\mathbf{L}$  e  $\mathbf{m}$  parallelamente a  $\mathbf{B}_{\text{loc}}$ , ma quello di fare compiere a  $\mathbf{L}$  e  $\mathbf{m}$  un *moto di precessione* con velocità angolare  $\omega_L$  attorno alla direzione di  $\mathbf{B}_{\text{loc}}$ , indipendentemente dall'orientazione di  $\mathbf{L}$  rispetto a  $\mathbf{B}_{\text{loc}}$  (vedi volume I, paragrafi 6.4 e 6.11). Ricordiamo che la deduzione è valida se la *velocità angolare di precessione*  $\omega_L$  è molto minore della velocità angolare  $\omega$  legata al moto di rivoluzione che dà origine a  $\mathbf{L}$ . Dall'esempio 9.11, relativo all'idrogeno, ricaviamo

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 4.13 \cdot 10^{16} \text{ rad/s}$$

e la condizione  $\omega_L \ll \omega$  diventa

$$\frac{e B_{\text{loc}}}{2m_e} \ll \omega \Rightarrow B_{\text{loc}} \ll \frac{2m_e \omega}{e} = 4.7 \cdot 10^8 \text{ T} .$$

Non c'è nessuna evidenza che all'interno dei materiali ordinari agiscano campi così intensi per cui possiamo ritenere largamente soddisfatta la diseguaglianza e non solo per l'idrogeno. Con  $B_{\text{loc}} = 1 \text{ T}$  abbiamo ad esempio

$$\omega_L = 8.8 \cdot 10^{16} \text{ rad/s} \cdot \frac{\omega_L}{\omega} = 2 \cdot 10^{-6} .$$

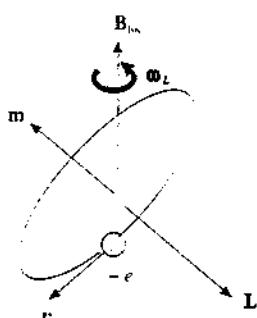


Figura 9.53

Al moto di precessione descritto si dà il nome di *precessione di Larmor*. Malgrado la perturbazione sia piccola, come risulta dall'esempio numerico, tutti i momenti angolari delle singole orbite precedono nello stesso verso attorno alla direzione di  $\mathbf{B}_{\text{loc}}$ , indipendentemente

dalla direzione dell'orbita e dal verso del moto di rivoluzione. I singoli effetti si sommano dando luogo ad un effetto globale su tutto l'atomo.

Alla precessione di Larmor di un elettrone corrisponde una corrente di intensità

$$\Delta i = -\frac{e}{T_L} = -\frac{e}{2\pi} \omega_L = -\frac{e^2 B_{loc}}{4\pi m_e}$$

opposta al verso di percorrenza dell'elettrone. Indicando con  $r$  il raggio della proiezione dell'orbita dell'elettrone sul piano perpendicolare a  $\omega_L$  e  $B_{loc}$ , a  $\Delta i$  corrisponde il momento magnetico

$$\Delta m = \Delta i \pi r^2 = -\frac{e^2 r^2}{4m_e} B_{loc}$$

L'orbita può avere una qualunque inclinazione rispetto a  $B_{loc}$  e quindi conviene prendere per  $r^2$  un valore medio. Assumendo per l'atomo una simmetria sferica e detto  $r$ , il raggio dell'orbita, si hanno per i valori medi le condizioni

$$\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 = r_i^2 \quad , \quad \bar{x}^2 = \bar{y}^2 = \bar{z}^2 = \frac{r_i^2}{3} \quad .$$

Posto che  $B_{loc}$  abbia la direzione dell'asse  $z$ , per il raggio medio dell'orbita proiettata nel piano  $x, y$  si ottiene

$$r^2 = \bar{x}^2 + \bar{y}^2 = \frac{2}{3} r_i^2$$

e in conclusione per effetto della precessione a ciascuna orbita si associa il momento magnetico

$$\Delta m = -\frac{e^2 r_i^2}{6m_e} B_{loc}$$

opposto al campo magnetico locale.

Se l'atomo ha  $Z$  elettroni il momento magnetico acquistato è

$$\mathbf{m}_a = \sum_i \Delta \mathbf{m}_i = -\frac{e^2}{6m_e} \left( \sum_i r_i^2 \right) \mathbf{B}_{loc} = -\frac{e^2 Z \bar{r}^2}{6m_e} \mathbf{B}_{loc} \quad . \quad (9.55)$$

avendo indicato con

$$\bar{r}^2 = \frac{1}{Z} \sum_i r_i^2$$

il raggio quadratrico medio dell'atomo. Osserviamo subito che nel caso dell'idrogeno ( $Z = 1$ ,  $r = 0.53 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ ) il momento magnetico (9.55) vale in modulo  $1.42 \cdot 10^{-6} \mu_B B_{loc}$ : in un campo dell'ordine del tesla esso è molto inferiore al magnetone di Bohr (9.50), a conferma della piccolezza dell'effetto.

La magnetizzazione, in quanto momento magnetico per unità di volume, si scrive secondo (9.10)

$$\mathbf{M} = n \mathbf{m}_a = -\frac{e^2 n Z \bar{r}^2}{6m_e} \mathbf{B}_{loc} \quad .$$

essendo  $n$  il numero di atomi per unità di volume. Come campo magnetico locale assumiamo il campo (9.36) all'interno di una cavità sferica.

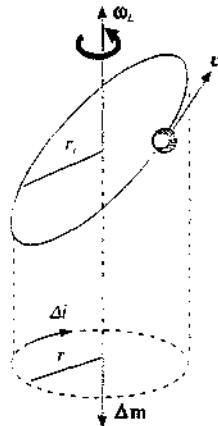


Figura 9.54

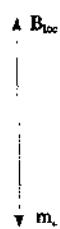


Figura 9.55

$$\mathbf{B}_{\text{loc}} = \mu_0 \left(1 + \frac{\chi_m}{3}\right) \mathbf{H} \cong \mu_0 \mathbf{H} = \mathbf{B}$$

esso coincide col campo magnetico macroscopico dato che nei diamagnetici  $\chi_m$  è al più dell'ordine di  $10^{-4}$ . La (9.56) diventa

$$\mathbf{M} = -\frac{e^2 n Z \bar{r}^2}{6m_e} \mu_0 \mathbf{H}$$

e ricorrendo alla (9.21) si arriva a

$$\chi_m = -n \mu_0 \frac{e^2 Z \bar{r}^2}{6m_e} = -n \alpha_m \quad . \quad (9.57)$$

Abbiamo quindi ottenuto un'espressione della *suscettività magnetica in termini delle grandezze microscopiche che compaiono nei singoli processi elementari di magnetizzazione*.

Il modello descritto, dovuto a Langevin, spiega il segno negativo di  $\chi_m$  riscontrato sperimentalmente e rende anche conto del fatto che la suscettività magnetica sia proporzionale alla densità del materiale ( $n = \rho N_A / A$ ). Quantitativamente però l'accordo non è buono: prendendo come esempio il rame, in cui  $n = 8.49 \cdot 10^{28}$  atomi/m<sup>3</sup> e  $\bar{r} = 1.41 \cdot 10^{-10}$  m (stimato supponendo che il volume di un atomo sia dato da  $1/n$ ), da (9.57) abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_m}{Z} &= \mu_0 \frac{e^2 \bar{r}^2}{6m_e} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot (1.6 \cdot 10^{-19})^2 \cdot (1.41 \cdot 10^{-10})^2}{6 \cdot 9.1 \cdot 10^{-31}} = 1.17 \cdot 10^{-34} \text{ m}^3, \\ \frac{\chi_m}{Z} &\approx -n \frac{\alpha_m}{Z} = -\frac{0.99}{Z} 10^{-5}. \end{aligned}$$

Valori analoghi si ottengono per altri materiali (argento  $-0.88 \cdot 10^{-5}/Z$ , mercurio  $-0.77 \cdot 10^5/Z$ ). Quindi, per ciascun elettrone, si ha circa  $10^{-5}$ , però se si moltiplica per  $Z$  il disaccordo è notevole: nel rame risulta  $\chi_m = -28.8 \cdot 10^{-5}$  rispetto al valore  $-0.98 \cdot 10^{-5}$  della tabella 9.1.

### Paramagnetismo

Consideriamo ora una sostanza le cui molecole abbiano un momento magnetico permanente  $\mathbf{m}_0$ , risultante dei momenti magnetici orbitali e di spin e legato al momento angolare dalla (9.51). Quando la sostanza viene posta in campo magnetico al comportamento diamagnetico prima descritto se ne sovrappone un altro che è predominante.

Mentre in assenza di campo magnetico i momenti magnetici  $\mathbf{m}_0$  delle singole molecole sono disposti in modo completamente disordinato e hanno risultante nulla, la presenza del campo magnetico causa un momento meccanico  $\mathbf{M} = \mathbf{m}_0 \times \mathbf{B}_{\text{loc}}$ . A questa azione si oppone l'agitazione termica e, per ogni temperatura, si raggiunge un equilibrio dinamico caratterizzato dal fatto che ogni singola molecola acquista in media un momento magnetico  $\langle \mathbf{m} \rangle$  diverso da zero, parallelo e concorde al campo magnetico  $\mathbf{B}_{\text{loc}}$ . Siamo nella stessa situazione trattata nel paragrafo 5.10 a proposito della polarizzazione per orientamento nei dielettrici e il formalismo utilizzato è lo stesso, per cui scriviamo direttamente il numero  $dN$  di molecole il cui momento  $\mathbf{m}_0$  forma con  $\mathbf{B}_{\text{loc}}$  un angolo compreso tra  $\theta$  e  $\theta + d\theta$  sostituendo semplicemente  $m_0$  a  $p_0$  e  $B_{\text{loc}}$  a  $E_{\text{loc}}$  nell'analogia espressione scritta per i dielettrici:

$$dN = A^* e^{m_0 B_{\text{loc}} \cos \theta / k_B T} d \cos \theta = A^* e^{a \cos \theta} d \cos \theta$$

Nella costante  $A^*$  sono congregate tutte le costanti che non interverranno nel risultato finale e la grandezza  $a$  è definita come

$$a = \frac{m_0 B_{\text{loc}}}{k_B T} \quad . \quad (9.58)$$

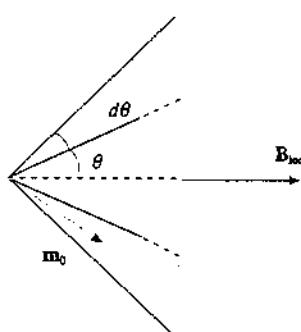


Figura 9.56

A questo punto però non operiamo l'approssimazione  $a \ll 1$ , che in realtà è verificata nei paramagnetici a temperatura ambiente, perché vogliamo trovare la soluzione generale in vista della sua applicazione al ferromagnetismo.

Ognuna delle  $dN$  molecole possiede nella direzione di  $\mathbf{B}_{\text{loc}}$  il momento magnetico  $m(\theta) = m_0 \cos \theta$  e in totale il momento acquistato è

$$dm = m_0 \cos \theta dN = m_0 \cos \theta A^* e^{a \cos \theta} d \cos \theta ;$$

le componenti trasverse invece si elidono per ragioni di simmetria. Il momento medio  $\langle m \rangle$  acquistato da ogni molecola concordemente a  $\mathbf{B}_{\text{loc}}$  risulta quindi

$$\langle m \rangle = \frac{\int_{-1}^{+1} dm}{\int_{-1}^{+1} dn} = m_0 \frac{\int_{-1}^{+1} \cos \theta e^{a \cos \theta} d \cos \theta}{\int_{-1}^{+1} e^{a \cos \theta} d \cos \theta} .$$

Il calcolo degli integrali porta alla formula finale

$$\langle m \rangle = m_0 \left( \frac{e^a + e^{-a}}{e^a - e^{-a}} - \frac{1}{a} \right) = m_0 \left( \operatorname{ctgh} a - \frac{1}{a} \right) = m_0 L(a) . \quad (9.59)$$

La magnetizzazione è

$$M = n \langle m \rangle = n m_0 L(a) = M_{\text{sat}} L(a) , \quad (9.60)$$

avendo indicato con  $M_{\text{sat}} = n m_0$  la *magnetizzazione di saturazione*, cioè la magnetizzazione massima che si ottiene quando tutti gli  $n$  momenti magnetici dell'unità di volume sono orientati concordemente a  $\mathbf{B}_{\text{loc}}$ .

La funzione  $L(a)$ , la cui definizione matematica si ricava da (9.59) e il cui significato fisico è dato da

$$L(a) = \frac{\langle m \rangle}{m_0} = \frac{M}{M_{\text{sat}}} . \quad (9.61)$$

si chiama *funzione di Langevin*. Essa è mostrata nella figura 9.57: per  $a = 0$  è nulla e cresce monotonamente al crescere di  $a$  tendendo a 1 per  $a$  tendente all'infinito (con  $B_{\text{loc}}$  costante ciò si ottiene facendo diminuire la temperatura).

Lo sviluppo in serie di  $L(a)$  nell'intorno di  $a = 0$  porge

$$L(a) = \frac{a}{3} - \frac{a^3}{45} + \dots$$

e se adesso imponiamo  $a \ll 1$ , analogamente a quanto è stato fatto nei dielettrici, ovvero approssimiamo  $L(a)$  con l'espressione  $a/3$ , che è una retta tangente alla curva nell'origine e con pendenza  $1/3$ , otteniamo

$$M = n m_0 \frac{a}{3} = \frac{n m_0^2}{3 k_B T} B_{\text{loc}} . \quad (9.62)$$

Ricorriamo infine a (9.36) nella forma  $\mathbf{B}_{\text{loc}} = \mu_0 \left( \mathbf{H} + \frac{\mathbf{M}}{3} \right)$  e abbiamo

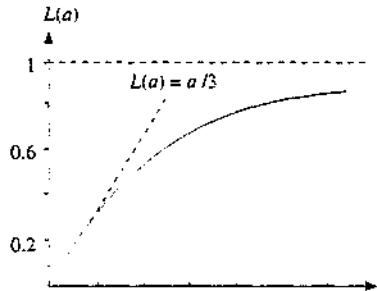


Figura 9.57



Dal confronto con (9.21) si ricava l'espressione della suscettività magnetica di un materiale paramagnetico che scriviamo nella forma compatta

$$\chi_m = \frac{C\rho}{T - T_0} \quad (9.64)$$

avendo posto

$$C\rho = \frac{\mu_0 n m_0^2}{3k_B} \quad , \quad T_0 = \frac{1}{3} C\rho = \frac{1}{3} \frac{\mu_0 n m_0^2}{3k_B} \quad ; \quad (9.65)$$

$\rho$  è la densità del materiale.  $C$  una costante nota come *costante di Curie*.

Per stimare i valori numerici di  $\chi_m$  in un solido, prendiamo  $n = 10^{29}$  molecole/m<sup>3</sup> e  $m_0 = \mu_B$ : abbiamo

$$C\rho = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^{29} \cdot (9.27)^2 \cdot 10^{-48}}{3 \cdot 1.38 \cdot 10^{-23}} = 0.26 \text{ K}, \quad T_0 = \frac{1}{3} C\rho = 0.09 \text{ K}$$

A temperature non troppo basse (9.64) si può quindi scrivere

$$\chi_m = \frac{C\rho}{T} \quad , \quad (9.66)$$

coincidente con (9.9). Il modello sviluppato è dunque in accordo con la dipendenza sperimentale di  $\chi_m$  dalla densità e dalla temperatura. Con  $T = 300$  K si avrebbe  $\chi_m \approx 10^{-3}$ . I valori misurati sono più piccoli, almeno di un ordine di grandezza, e ciò potrebbe indicare che  $m_0$  è minore di  $\mu_B$ , a causa di parziali compensazioni tra i vari momenti atomici; dobbiamo però ricordare che stiamo trattando in modo classico un problema quantistico.

Si osservi che, dati i valori sperimentali di  $\chi_m$  a temperature non troppo basse, si poteva utilizzare subito (9.36) nella forma  $B_{loc} = \mu_0 H$  come fatto per i diamagnetici, ottenendo direttamente (9.66).

La teoria di Langevin del paramagnetismo prevede il fenomeno della saturazione: in questo caso bisogna usare nel calcolo la forma completa della funzione  $L(a)$  poiché la variabile  $a$  può avere valori notevoli, argomento che riprenderemo nel paragrafo 9.12. Il fenomeno si verifica a bassissima temperatura ( $T = 1$  K) e la suscettività magnetica si avvicina all'unità, sotto l'azione di un campo  $H$  dell'ordine di  $10^6$  A/m.

### Esempio 9.13

La suscettività magnetica del cloruro di gadolinio  $GdCl_3$  a temperatura ambiente è  $\chi_m = 2.672 \cdot 10^{-3}$ , la densità è  $\rho = 2.4 \cdot 10^3$  Kg/m<sup>3</sup>, il numero di molecole per unità di volume  $n = 5.48 \cdot 10^{27}$  molecole/m<sup>3</sup>. Calcolare il momento magnetico intrinseco  $m_0$  e la magnetizzazione di saturazione  $M_{sat}$ .

### Soluzione

Gli elementi noti come *terre rare* hanno una struttura elettronica tale che i loro atomi possiedono un momento magnetico intrinseco dovuto agli spin di alcuni elettroni dei livelli più interni (il gadolinio e il disporio sono addirittura ferromagnetici). Con tali

elementi si formano sali paramagnetici, come il cloruro di gadolinio, che hanno  $\chi_m$  elevata, dell'ordine di  $10^{-3}$ , superiore a quella della maggior parte delle sostanze paramagnetiche.

Da (9.64) ricaviamo, sostituendo  $C\rho/3$  a  $T_0$ ,

$$C\rho = \frac{3T\chi_m}{3 + \chi_m} = T\chi_m = 0.80 \text{ K}$$

in accordo con (9.66) in quanto alla temperatura  $T = 300 \text{ K}$   $\chi_m$  è trascurabile rispetto a 3; e  $T_0 = C\rho/3 = 0.27 \text{ K}$  è certamente trascurabile rispetto a 300 K. Noto  $C\rho$ , dalla prima delle (9.65)

$$m_0 = \sqrt{\frac{3k_B C\rho}{\mu_0 n}} = 6.935 \cdot 10^{-23} \text{ Am}^2 = 7.5 \mu_B$$

La magnetizzazione di saturazione vale

$$M_{sat} = n m_0 = 3.80 \cdot 10^5 \text{ A/m} \Rightarrow \mu_0 M_{sat} = 0.48 \text{ T}$$

In condizioni ordinarie, con  $H = 10^5 \text{ A/m}$  e  $T = 300 \text{ K}$ ,  $M = \chi_m H = 267 \text{ A/m} \ll M_{sat}$ . Da (9.61)

$$\frac{\langle m \rangle}{m_0} = \frac{M}{M_{sat}} = 7.03 \cdot 10^{-4} \Rightarrow \langle m \rangle = 7.03 \cdot 10^{-4} m_0 = 5.27 \cdot 10^{-3} \mu_B$$

Anche se ciascuna molecola di  $\text{GdCl}_3$  ha un momento magnetico  $m_0$  particolarmente grande rispetto a  $\mu_B$ , a  $T = 300 \text{ K}$  l'effetto dell'agitazione termica porta a un momento magnetico medio molecolare  $7 \cdot 10^{-4}$  volte più piccolo. È come se soltanto 7 molecole su 10000 fossero orientate concordemente al campo, malgrado l'elevato valore di  $H$ .

Oltre al paramagnetismo descritto ne esiste un altro più debole, con  $\chi_m \approx 10^{-5}$ , che si manifesta in alcuni conduttori ed è attribuito ad un parziale orientamento degli spin degli elettroni di conduzione; il fenomeno è indipendente dalla temperatura.

Un'applicazione fondamentale della saturazione nei materiali paramagnetici, come i sali delle terre rare, è la seguente: si mantiene il materiale a contatto termico con un serbatoio alla temperatura  $T = 1 \text{ K}$  (elio liquido) e lo si magnetizza portandolo alla saturazione con un opportuno campo magnetico, così che tutti i momenti magnetici elementari siano paralleli e concordi a  $\mathbf{B}$ . Si isola termicamente il materiale e si diminuisce lentamente il campo magnetico, procedimento noto come *smagnetizzazione adiabatica*; a causa del moto di agitazione termica, per quanto ridotto, qualche momento elementare viene disallineato: però questo processo richiede energia ( $2 m_0 B$  se l'orientazione cambia di  $180^\circ$ ) che viene fornita a spese dell'energia interna del materiale, il quale si raffredda. Con tale sistema si riesce a portare la temperatura a  $\sim 10^{-3} \text{ K}$ .

Si noti che a  $T = 1 \text{ K}$  e  $B = 1 \text{ T}$  l'energia  $\mu_B B$  è dello stesso ordine di grandezza di  $k_B T$ , la variabile  $a$  di (9.58) vale cioè circa 1. Un'analogia condizione di allineamento con  $a = 1$  si può raggiungere per i momenti magnetici nucleari, però a una temperatura circa mille volte più piccola, cioè a  $\sim 10^{-3} \text{ K}$ , dato che i momenti nucleari sono circa mille volte più piccoli di  $\mu_B$  (paragrafo 9.10). Il sale paramagnetico a  $10^{-3} \text{ K}$  viene pertanto usato come serbatoio termico per raffreddare un materiale in cui a tale temperatura il magnetismo nucleare sia saturato; con un ulteriore processo di smagnetizzazione adiabatica si arriva a  $\sim 10^{-6} \text{ K}$ .

## Smagnetizzazione adiabatica

### 9.12 Cenno alla teoria del ferromagnetismo

Tra i materiali paramagnetici e quelli ferromagnetici esistono alcuni punti in comune. Se dalla tabella 9.4 ricaviamo il valore della magnetizzazione di saturazione del ferro puro,

$1.72 \cdot 10^6 \text{ A/m}$ , vediamo che esso non è molto diverso da quello di un mezzo paramagnetico vicino allo zero assoluto; inoltre a temperature superiori alla temperatura di Curie i materiali ferromagnetici si comportano come i paramagnetici. Sembra quindi naturale supporre che anche in un materiale ferromagnetico ci siano momenti magnetici intrinseci  $m_0 (= \mu_B)$  e provare ad applicare la teoria di Langevin. Gli elevati valori di magnetizzazione riscontrati sperimentalmente nei ferromagnetici a temperatura ambiente fanno presumere che la funzione  $L(a)$  definita da (9.61) possa assumere valori vicini all'unità, corrispondenti a valori elevati della variabile  $a$  definita da (9.58); ma a temperatura ambiente  $a$  è grande solo se il campo magnetico locale è eccezionalmente intenso: posto  $m_0 = \mu_B$ , con  $T = 300 \text{ K}$   $a = 10$  implica  $B_{\text{loc}} \approx 3000 \text{ T}$ . Siamo pertanto portati a ipotizzare una struttura tipo (9.38),

$$\mathbf{B}_{\text{loc}} = \mu_0 (\mathbf{H} + \gamma \mathbf{M}) ,$$

dove però  $\gamma$  non vale  $1/3$ , ma deve assumere un valore molto grande.

Weiss, a cui si deve questa teoria fenomenologica, postula appunto l'esistenza di un campo molecolare  $\mathbf{H}_w = \gamma \mathbf{M}$ , di gran lunga superiore al campo  $\mathbf{H}$  applicato dall'esterno, dovuto ad una azione orientatrice mutua che porta ad allineare i momenti magnetici  $\mathbf{m}_0$ .

Introduciamo l'espressione di  $\mathbf{B}_{\text{loc}}$  nella (9.58),

$$a = \frac{\mu_0 m_0}{k_B T} H + \frac{\gamma \mu_0 m_0 M_{\text{sat}}}{k_B T} \frac{M}{M_{\text{sat}}} ,$$

e da questa ricaviamo

$$\frac{M}{M_{\text{sat}}} = \frac{k_B T}{\gamma \mu_0 m_0 M_{\text{sat}}} a - \frac{H}{\gamma M_{\text{sat}}} . \quad (9.67)$$

Quindi, oltre alla relazione (9.61), tra  $M$  e  $a$  esiste anche la relazione lineare (9.67) che dipende dal campo esterno  $H$  e dal valore di  $\gamma$ . Nella figura 9.58 sono riportate le due relazioni e lo studio del sistema (9.61-9.67) può essere fatto per via grafica, ricavando la magnetizzazione per una data temperatura e un dato valore di  $H$  dall'intersezione tra le due curve.

Discussiamo innanzitutto l'effetto della temperatura in assenza di campo esterno,  $H = 0$ . La (9.67) si riduce all'equazione di una retta passante per l'origine,

$$\frac{M}{M_{\text{sat}}} = \frac{k_B T}{\gamma \mu_0 m_0 M_{\text{sat}}} a . \quad (9.68)$$

Abbiamo già osservato che la tangente nell'origine alla curva di Langevin ha l'equazione  $M/M_{\text{sat}} = a/3$  e la (9.68) coincide con tale tangente quando la temperatura assume il valore

$$T_C = \frac{\gamma \mu_0 m_0 M_{\text{sat}}}{3 k_B} . \quad (9.69)$$

Riscriviamo la (9.68) come

$$\frac{M}{M_{\text{sat}}} = \frac{1}{3} \frac{T}{T_C} a . \quad (9.70)$$

e vediamo allora che esistono due regioni di temperatura separate dal valore  $T_C$ , in cui il comportamento è diverso:

- per  $T > T_C$  la retta (9.70) non incontra mai la curva di Langevin e non esiste soluzione che non sia  $M/M_{\text{sat}} = 0$ ; a campo esterno nullo corrisponde magnetizzazione nulla;
- per  $T < T_C$  invece la retta interseca la curva di Langevin anche in un punto al di fuori dell'origine e quindi è prevista una *magnetizzazione spontanea*, anche *in assenza di campo H esterno*, dovuta al campo locale di Weiss  $H_w = \gamma M$ ; al di sotto di  $T_C$  cioè l'agi-

tazione termica non riesce a distruggere l'accoppiamento tra i vari momenti magnetici che si allineano parallelamente uno all'altro.

È plausibile identificare con la *temperatura di Curie* la temperatura  $T_c$  a cui avviene la transizione tra il regime di magnetizzazione spontanea e il regime paramagnetico in cui la magnetizzazione è nulla in assenza di campo esterno. Dai valori sperimentali per il ferro,

$$\mu_0 M_{\text{sat}} = 2.16 \text{ T} \Rightarrow M_{\text{sat}} = 1.72 \cdot 10^6 \text{ A/m}, T_c \approx 1043 \text{ K},$$

e ponendo  $m_0 = \mu_B$ , da (9.69) si ricava

$$\gamma = \frac{3k_B T_c}{\mu_0 m_0 M_{\text{sat}}} = 2156,$$

cui corrispondono un campo molecolare di Weiss e un campo magnetico

$$H_w = \gamma M_{\text{sat}} = 3.71 \cdot 10^9 \text{ A/m}, B_w = \mu_0 H_w = 4662 \text{ T}.$$

Si tratta di valori che sono circa mille volte superiori a quelli massimi realizzabili macroscopicamente.

Facendo aumentare la temperatura nell'intervallo  $0 < T \leq T_c$  la pendenza della retta (9.70) aumenta e il punto di intersezione si sposta nel verso delle  $a$  decrescenti: si determina così  $M/M_{\text{sat}}$  in funzione di  $T/T_c$  e si trova la curva tratteggiata della figura 9.60. Il massimo della magnetizzazione si ottiene per  $T = 0 \text{ K}$ ; ad ogni altra temperatura il valore di  $M$  rappresenta l'equilibrio tra l'azione orientatrice del campo di Weiss e l'agitazione termica; a  $T = T_c$  prevale il moto di agitazione termica e la magnetizzazione scompare (in assenza di  $H$ ).

Supponiamo ora il campo  $H$  esterno diverso da zero e riscriviamo (9.67) utilizzando (9.69):

$$\frac{M}{M_{\text{sat}}} = \frac{1}{3} \frac{T}{T_c} a - \frac{H}{\gamma M_{\text{sat}}} \quad (9.71)$$

Manteniamo la temperatura costante ad un valore inferiore a  $T_c$  e facciamo variare  $H$ : disegniamo inoltre (figura 9.61) la funzione  $L(a)$  anche per valori negativi della variabile  $a$ . La retta (9.71) incontra la curva in uno o due punti, che danno il valore della funzione  $M(H)$ : qualitativamente si ottiene un andamento simile a quello del ciclo di isteresi.

Se invece supponiamo che sia  $T > T_c$ , si ha che, a causa della grande pendenza della retta (9.71) e dei limitati valori di  $H$  esterno disponibili, l'intersezione è vicina all'origine dove si può approssimare  $L(a)$  con  $a/3$ . Eliminando  $a$  dal sistema delle due rette (9.71) e  $M/M_{\text{sat}} = a/3$  si ha

$$M = \frac{T_c}{T - T_c} \frac{H}{\gamma} \quad :$$

questo è il valore della magnetizzazione del materiale al variare di  $H$  e si vede che la suscettività magnetica  $\chi_m = M/H$  corrisponde alla legge (9.39), ponendo  $T_c/\gamma = C\rho$ . È dunque previsto il comportamento paramagnetico trovato sperimentalmente per i ferromagnetici a temperature superiori a quella di Curie. Non poteva essere diversamente in quanto formalmente è stato seguito lo stesso procedimento che ha portato alla (9.64): se si pone  $\gamma = 1/3$ ,  $T_c$  dato da (9.69) coincide con  $T_0$  dato da (9.65), essendo appunto  $T_c = 3\gamma T_0$ . Sono però i valori numerici che non tornano: nei ferromagnetici  $\gamma$  è dell'ordine di  $10^5$  e quindi l'interazione locale postulata da Weiss è molto superiore a quella calcolabile con la magnetostatica classica.

Riassumendo, la teoria di Weiss riesce a descrivere, almeno qualitativamente, il passaggio dal comportamento paramagnetico a quello ferromagnetico, l'andamento del ciclo di isteresi e la dipendenza della magnetizzazione dalla temperatura; in particolare per questo problema, al di sotto della temperatura di Curie la curva corretta, calcolata con la teoria quantistica e che è seguita con buona approssimazione dagli elementi ferromagnetici, è quella continua della figura 9.60. Classicamente però non si può dare nessuna spiegazione dell'elevato valore del campo locale che sarebbe necessario per il verificarsi della magnetizzazione spontanea oppure di quale possa essere l'eventuale altra causa del fenomeno.

Il problema è stato risolto nell'ambito della meccanica quantistica, anche se la chiarificazione dei punti fondamentali ha richiesto molti decenni e tuttora alcuni aspetti non sono spiegati.

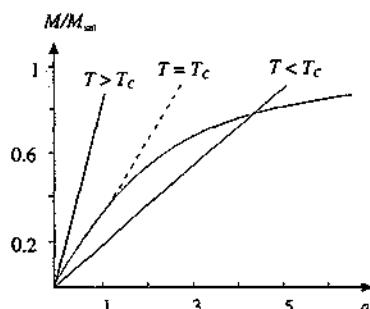


Figura 9.59

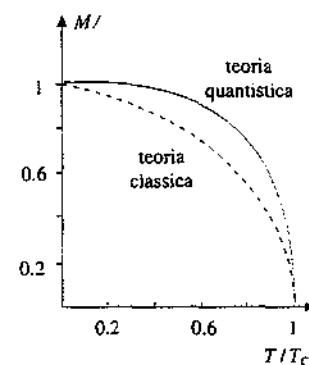


Figura 9.60

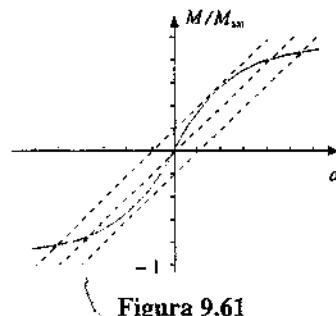


Figura 9.61

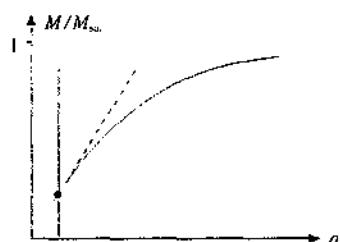


Figura 9.62



Figura 9.63

A livello atomico il *momento magnetico*  $m_0$  degli *elementi ferromagnetici* è dovuto quasi esclusivamente allo *spin* degli elettroni; nell'atomo si verifica una condizione particolare per cui non si ha una *compensazione* tra gli spin come ci si potrebbe aspettare dal principio di esclusione. Il fenomeno non è tipico soltanto degli elementi ferromagnetici, ma avviene anche in altri casi; a questo però si aggiunge che risulta energeticamente conveniente, cioè corrisponde a uno stato di energia minima, la configurazione per cui atomi adiacenti abbiano i momenti angolari paralleli e concordi. Si tratta di una condizione delicata, che dipende dal rapporto tra distanza interatomica nel reticolo e dimensioni atomiche e che è realizzata in pochissimi elementi. Non esiste quindi un campo magnetico locale elevatissimo, ma un'interazione quantistica tra gli spin.

In un cristallo di ferro (o di cobalto, nichel, ecc.) si hanno delle zone, dette *domini di Weiss*, con volume compreso tra  $10^{-12}$  e  $10^{-18} \text{ m}^3$  e contenenti perciò tra  $10^{17}$  e  $10^{11}$  atomi, nelle quali esiste una magnetizzazione spontanea, dovuta all'*interazione non magnetica* che *allinea gli spin*. All'interno del dominio la magnetizzazione è saturata ad un valore che dipende dalla temperatura secondo la curva di figura 9.60. Domini adiacenti non hanno la magnetizzazione nella stessa direzione: nella zona di confine, detta *parete di Bloch*, l'orientazione degli spin passa con continuità da quella di un dominio a quella del dominio adiacente. Un blocco di materiale ferromagnetico è composto di norma da molti cristalli orientati a caso (solido policristallino) e quindi, pur essendo localmente magnetizzato, può non manifestare alcun momento magnetico. La ragione di ciò, sia all'interno dei cristalli che del blocco, si può ancora spiegare in termini energetici, nel senso che una distribuzione casuale delle singole  $M$  è quella che rende minima l'energia totale del sistema.

Il reticolo cristallino del ferro è cubico centrato e l'orientazione spontanea preferenziale dei domini è quella parallela ai lati del cubo, come mostrato nella figura 9.64 in cui sono schematizzati quattro domini (si parla di assi di facile magnetizzazione). Quando si applica un campo magnetico dall'esterno si ha uno spostamento delle pareti di Bloch, con ingrandimento dei domini la cui magnetizzazione è concorde o quasi al campo esterno, e la magnetizzazione del blocco non è più nulla. All'aumentare del campo esterno si ha prima che in ogni cristallo c'è un'unica direzione di magnetizzazione, non necessariamente concorde ad  $\mathbf{H}$ , e successivamente che tutte le magnetizzazioni diventano parallele ad  $\mathbf{H}$ , con il che si raggiunge la saturazione in tutto il blocco. Nel singolo cristallo il valore istantaneo della magnetizzazione dipende dall'orientazione di  $\mathbf{H}$ , anche se non ne dipende la magnetizzazione di saturazione, che è caratteristica del materiale; invece dipende dall'orientazione di  $\mathbf{H}$  il valore  $H_{\max}$  per cui si raggiunge la saturazione.

Il processo di spostamento delle pareti di Bloch e di orientazione non è reversibile, se non per piccoli valori di  $\mathbf{H}$  a partire dallo stato vergine, a causa di imperfezioni dei cristalli e della presenza di impurezze, per cui quando si torna indietro dallo stato di saturazione non si ristabilisce la situazione di disordine dei singoli domini e resta una magnetizzazione residua.

Nella tabella 9.5 sono riportati per ferro, cobalto e nichel la temperatura di Curie, la magnetizzazione di saturazione, il numero di atomi per unità di volume e il numero medio di magnetoni di Bohr per ogni atomo, dedotto da  $M_{\text{sat}} = n m_0 = n n_B \mu_B$ .

Se confrontiamo i valori della magnetizzazione di saturazione nella tabella 9.5 con quello del sale paramagnetico  $\text{Gd Cl}_3$ , dell'esempio 9.13, pari a  $0.38 \cdot 10^6 \text{ A/m}$ , notiamo che essi sono dello stesso ordine di grandezza. È però opportuno ricordare di nuovo le diverse condizioni fisiche in cui viene raggiunto il completo allineamento dei momenti magnetici elementari. Da una parte l'effetto è ottenuto a temperatura ambiente e con valori di  $H$  dell'ordine di  $10 \text{ A/m}$ , dall'altra a circa  $1 \text{ K}$  con  $H \sim 10^6 \text{ A/m}$ ; di conseguenza la suscettività magnetica, che misura in sostanza la risposta del mezzo alla sollecitazione magnetica esterna, in un caso è dell'ordine di  $10^5$ , nell'altro di 1 e ciò mette in evidenza l'assoluta preponderanza nei ferromagnetici del contributo del mezzo rispetto a quello delle correnti di conduzione, mentre nei paramagnetici saturati i due contributi sono confrontabili. Inoltre, viste le condizioni estreme di temperatura e campo esterno, la saturazione paramagnetica trova soltanto applicazioni particolari, mentre quella ferromagnetica è di uso comune.

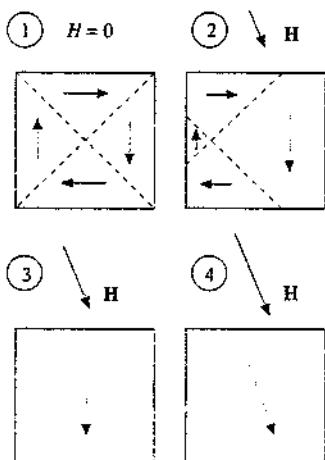


Figura 9.64

Tabella 9.5

	temp. di Curie	$\mu_0 M_{\text{sat}} (\text{T})$	$M_{\text{sat}} (10^6 \text{ A/m})$	$n (10^{23} \text{ atomi/m}^3)$	$n_B$
ferro	770°C 1043 K	2.16	1.72	8.48	2.2
cobalto	1131 1404	1.79	1.42	9.09	1.7
nichel	358 631	0.61	0.49	9.13	0.6

### *Effetto Einstein-de Haas*

Molte previsioni sullo stato di orientamento dello spin nei mezzi ferromagnetici sono state verificate facendo passare un fascio di neutroni, anch'essi dotati di spin, attraverso il materiale e studiando le caratteristiche delle *interazioni neutrone-elettrone, dipendenti dallo spin di entrambi*.

Una differente *verifica di carattere generale* venne ideata da *Einstein e de Haas*. Un cilindro di ferro sospeso verticalmente tramite un filo costituisce un pendolo di torsione che può ruotare attorno all'asse coincidente con il filo. Il cilindro è immerso in un solenoide e quando viene fatta passare corrente si osserva che il cilindro entra in rotazione.

La ragione è la seguente: il processo di magnetizzazione orienta i momenti angolari dei domini di Weiss, prima disordinati, per cui il cilindro acquista un momento angolare  $L$  parallelo all'asse; però il momento angolare totale del cilindro deve restare costante e quindi il cilindro entra in rotazione in modo tale che  $L$  totale, dovuto al moto collettivo e ai singoli atomi, resti nullo.

Il rapporto macroscopico  $m/L$  tra il momento magnetico del cilindro e il momento angolare della rotazione si misura sperimentalmente; d'altra parte secondo (9.51)  $m/L = ge/2m_e$ . Dal confronto con il dato sperimentale si trova  $g$  molto vicino a 2, a conferma che il contributo dominante è dovuto agli spin degli elettroni, anche se non si può escludere un piccolo contributo dovuto al moto orbitale.

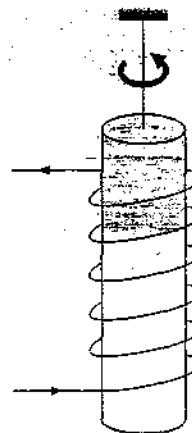


Figura 9.65

# Campi elettrici e magnetici variabili nel tempo

Le proprietà locali dei campi elettrici e magnetici costanti nel tempo, che abbiamo studiato nei capitoli precedenti, sono stabilite nel vuoto dalle quattro equazioni di Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad , \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad ,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad , \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \quad , \quad (10.1)$$

in cui le sorgenti sono rappresentate dalla densità di carica  $\rho(x, y, z)$  e dalla densità di corrente  $\mathbf{j}(x, y, z)$ , entrambe costanti nel tempo. La condizione di stazionarietà è evidenziata dal fatto che nelle (10.1) compaiono solo le derivate rispetto alle coordinate spaziali e non quelle rispetto al tempo. Nei capitoli 5 e 9 abbiamo visto le modifiche necessarie per tener conto della presenza di materiali.

Il campo elettrico statico  $\mathbf{E}$ , conservativo, è generato dalle cariche elettriche fisse e il campo magnetico statico  $\mathbf{B}$ , non conservativo, è generato dalle cariche elettriche in moto stazionario. A parte questo fatto che le sorgenti dei campi statici sono sempre le cariche elettriche, non esiste in un dato sistema di riferimento inerziale nessun'altra connessione tra i fenomeni elettrici e magnetici statici e le relative coppie di equazioni possono essere risolte separatamente.

Esperimenti condotti da Faraday in Inghilterra e indipendentemente da Henry negli Stati Uniti misero in evidenza una diversa connessione tra elettricità e magnetismo: un campo magnetico variabile nel tempo genera un campo elettrico non conservativo che in opportuni dispositivi può dar luogo a una forza elettromotrice e ad una corrente in un circuito chiuso; un fenomeno analogo si ottiene in casi di moto relativo tra un circuito e un campo magnetico costante. Successivamente Maxwell dimostrò che per rendere compatibili le equazioni dei fenomeni variabili con la legge di conservazione della carica nella sua forma più generale (6.10) occorre postulare che un campo elettrico variabile nel tempo dicesse origine ad un campo magnetico.

Maxwell arrivò così a una forma più generale delle equazioni che regolano i fenomeni elettrici e magnetici variabili, la quale contiene (10.1) come caso limite per fenomeni statici. Caratteristica fondamentale è che un campo elettrico e un campo magnetico variabili non possono esistere separatamente, ma vanno riuniti sotto il concetto più generale di *campo elettromagnetico*; inoltre la soluzione delle equazioni prevede che il campo elettromagnetico possa propagarsi con velocità che risulta eguale a quella della luce: quest'ultima viene pertanto identificata come un fenomeno elettromagnetico rapidamente variabile.

In questo capitolo studieremo i fenomeni elettrici e magnetici variabili nel tempo più caratteristici e formuleremo le equazioni di Maxwell nel modo più generale. Nel capitolo 13 vedremo come si deduca da esse l'esistenza delle onde elettromagnetiche.

Ricordiamo preliminarmente alcuni concetti e proprietà che utilizzeremo spesso in seguito.

La *forza elettromotrice* (f.e.m.) è definita come integrale del campo elettrico  $\mathbf{E}$  lungo una linea chiusa, cioè come la circuitazione di  $\mathbf{E}$ ,

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

e un suo valore non nullo implica che il campo elettrico non è conservativo (vedi paragrafo 2.1); nel capitolo 6 abbiamo discusso due particolari esempi di f.e.m., derivanti da un'azione meccanica (generatore di Van de Graaf) e da reazioni chimiche (pile e accumulatori). Nel paragrafo 7.7 si è studiata una f.e.m. dovuta alla forza di Lorentz (effetto Hall).

Il flusso del campo magnetico  $\mathbf{B}$  attraverso una superficie  $\Sigma$  è dato da

$$\Phi(\mathbf{B}) = \int_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma$$

La superficie  $\Sigma$  ha come contorno una linea chiusa  $s$  e anzi sono infinite le superfici  $\Sigma$  che hanno  $s$  come contorno. Siccome il campo  $\mathbf{B}$  è *solenoidale*, proprietà che non dipende dal fatto che i fenomeni studiati siano variabili nel tempo oppure no, il flusso attraverso le infinite superfici  $\Sigma$  con lo stesso contorno  $s$  è lo stesso, come abbiamo dimostrato nel paragrafo 3.4 e ripreso nel paragrafo 7.2: si parla pertanto di *flusso attraverso la linea chiusa  $s$  o concatenato con la linea chiusa  $s$* , essendo sottinteso così che il calcolo effettivo di  $\Phi$  può essere eseguito scegliendo una qualsiasi superficie delimitata da  $s$ . Fissato un verso di percorrenza su  $s$ , l'orientazione della normale  $\mathbf{u}_n$  a  $\Sigma$  segue la convenzione della vite destrogiara più volte adottata.

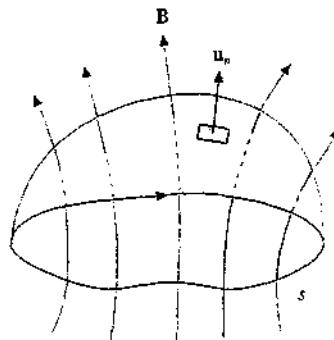


Figura 10.1

## 10.1 Legge di Faraday dell'induzione elettromagnetica

Consideriamo dapprima una spira  $A$  di filo conduttore connessa con un galvanometro a zero centrale (esempio 7.3). Se si avvicina un magnete alla spira l'indice del galvanometro si sposta in una certa direzione mentre se si allontana il magnete dalla spira l'indice del galvanometro si sposta nella direzione opposta; quando il magnete è fermo rispetto alla spira non si osserva nessuno spostamento dell'indice dello strumento. Gli effetti sono eguali se si tiene il magnete fermo e si avvicina o si allontana la spira. Se sostituiamo il magnete con una spira  $A'$  in cui è inserito un generatore che fa circolare corrente e muoviamo la spira  $A'$  rispetto alla spira  $A$  o questa rispetto alla spira  $A'$  si ottiene di nuovo lo stesso effetto. Da tali osservazioni si può concludere che in una spira compare una *corrente*, che chiamiamo *indotta*, ogni volta c'è un *moto relativo* tra la spira e un campo magnetico  $\mathbf{B}$ , generato da un magnete permanente o da un'altra spira percorsa da corrente.

Siccome per avere corrente in un circuito è necessario che in esso sia presente una sorgente di forza elettromotrice (paragrafo 6.7), diciamo meglio che dal moto relativo tra una spira e un campo magnetico ha origine una *forza elettromotrice*  $\mathcal{E}$ , che viene chiamata *indotta*. In base alla legge di Ohm (6.44) per un circuito chiuso, la presenza di  $\mathcal{E}$  nel circuito dà luogo alla corrente indotta messa in evidenza con il *galvanometro*.

Consideriamo ora un'altra esperienza eseguita per la prima volta da Faraday. Una spira connessa ad un galvanometro è posta nelle vicinanze di un solenoide di lunghezza finita con nucleo di ferro. Il solenoide è collegato ad un generatore e ad un interruttore  $T$  con il quale si può far passare o interrompere la corrente nel circuito. La spira e il solenoide sono entrambi fermi. Nell'istante in cui l'interruttore  $T$

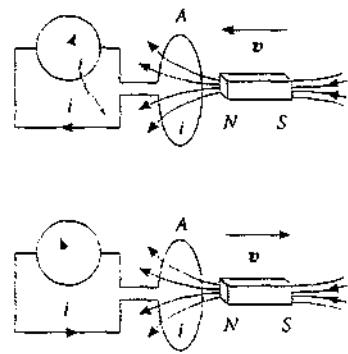


Figura 10.2

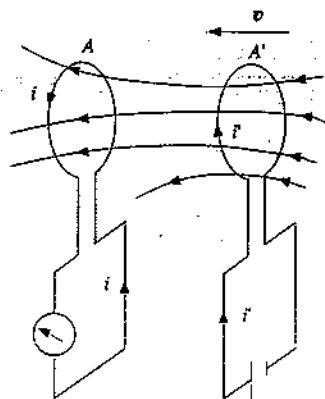


Figura 10.3

viene chiuso l'indice del galvanometro, in precedenza fermo sullo zero, si sposta in una certa direzione e poi torna sullo zero, dove resta mentre il solenoide è percorso da corrente costante. Quando l'interruttore  $T$  viene aperto l'indice del galvanometro si sposta nella direzione opposta alla precedente e poi torna a zero. La conclusione di Faraday fu che si può generare una f.e.m. in un circuito mediante un campo magnetico variabile nel tempo: essa si manifesta infatti nei brevi intervalli di tempo in cui il campo magnetico prodotto dal solenoide nei punti della spira cambia, passando da zero al valore  $B$  alla chiusura e da  $B$  a zero all'apertura, ma non compare quando la corrente e il campo  $B$  sono costanti.

Dall'esame quantitativo dei casi descritti e di tutte le altre situazioni in cui si manifesta il *fenomeno dell'induzione Faraday* dedusse che *ogni qual volta il flusso del campo magnetico  $\Phi(B)$  concatenato con un circuito varia nel tempo si ha nel circuito una forza elettromotrice indotta data dall'opposto della derivata del flusso rispetto al tempo:*

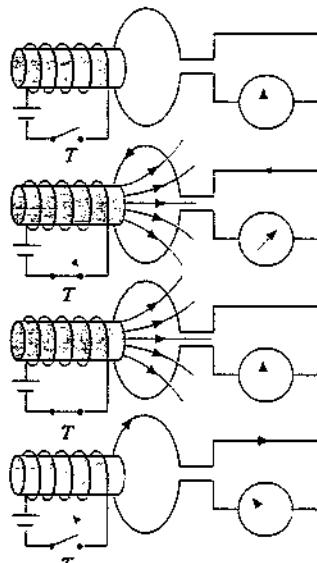
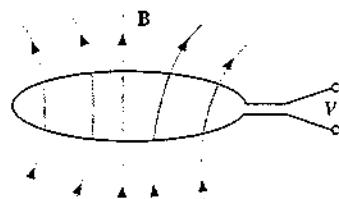


Figura 10.4



$$V = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Figura 10.5

La (10.2) si chiama *legge di Faraday dell'induzione elettromagnetica* (o anche *legge di Faraday-Neumann* o di *Faraday-Henry*). Se  $R$  è la resistenza del circuito, in esso circola la corrente

$$i = \frac{\xi_i}{R} = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi(B)}{dt} \quad . \quad (10.3)$$

Deve essere chiaro che l'*effetto principale* è quello dato da (10.2), mentre la *corrente* è un *effetto secondario* dipendente oltre che dalla variazione di flusso anche dalla resistenza del circuito.

Se si interrompe il circuito in un punto (circuito aperto,  $R = \infty$ ) e si collegano i due estremi ad un opportuno strumento senza alterare la forma geometrica del circuito, si constata che lo strumento segna una d.d.p. pari a  $V = \xi_i = -d\Phi/dt$ . La f.e.m. indotta si comporta quindi come la f.e.m. di un *generatore*: essa è eguale alla d.d.p. che si misura tra i poli del generatore quando nel circuito *non* passa corrente.

In effetti ciò è confermato dal seguente fatto sperimentale: quando un circuito di resistenza  $R$  e contenente un generatore di f.e.m.  $\xi$  è interessato da una variazione del flusso magnetico concatenato, la corrente è data dalla legge di Ohm (6.44):

$$i = \frac{\xi + \xi_i}{R} = \frac{\xi - \frac{d\Phi(B)}{dt}}{R} \quad ; \quad (10.4)$$

la f.e.m. indotta si somma alla f.e.m. del generatore.

Ricordando le definizioni di forza elettromotrice e flusso magnetico riportate nell'introduzione di questo capitolo, la (10.2) si può scrivere nella forma

$$\xi_i = \oint \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d\Phi(B)}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma \quad . \quad (10.5)$$

La variazione  $d\Phi/dt$  del flusso magnetico concatenato con una linea chiusa  $s$  dà origine ad un *campo elettrico indotto*  $\mathbf{E}_i$  la cui circuitazione lungo  $s$  è eguale a  $-d\Phi/dt$ .

$$\tau = -\frac{d\Phi}{dt} = Ri$$

Figura 10.6

Tale campo non è dunque conservativo; d'altra parte, come abbiamo già visto in generale nel paragrafo 6.7 e discusso in casi particolari (generatore Van de Graaf, effetto Hall), sono solamente i campi elettrici non conservativi che forniscono la possibilità di mantenere una corrente in un circuito tramite la loro f.e.m., che rappresenta il lavoro fornito all'unità di carica per ogni giro completo del circuito.

### Legge di Lenz

Il segno meno che compare nella (10.2) è molto importante e viene messo in evidenza con un enunciato particolare, detto legge di Lenz: l'effetto della f.e.m. indotta è sempre tale da opporsi alla causa che ha generato il fenomeno. Ad esempio, se in un circuito chiuso circola una corrente indotta, questa ha verso tale che il flusso del proprio campo magnetico concatenato col circuito si oppone alla variazione del flusso primario  $\Phi$ : se questo aumenta ( $d\Phi/dt > 0$ ) la f.e.m. indotta è negativa e la corrente ad essa dovuta genera un autoflusso che si oppone all'aumento di  $\Phi$ , così che il flusso complessivo attraverso il circuito cresce più lentamente; viceversa se  $\Phi$  diminuisce ( $d\Phi/dt < 0$ ), la f.e.m. indotta è positiva e la corrente indotta genera un autoflusso concorde a  $\Phi$ , per cui la diminuzione avviene più lentamente.

Vedremo in seguito che questo comportamento è in accordo con il principio di conservazione dell'energia.

### Unità di misura

Abbiamo visto nel paragrafo 7.6 che l'unità di flusso magnetico, il weber (Wb) è uguale a volt per secondo,  $Wb = Vs$ , e quindi  $Wb/s = V$ . Notiamo adesso che tale relazione discende direttamente da (10.2) e ricaviamo questa definizione: in un circuito ha luogo una variazione di flusso di 1 Wb quando questa variazione, avvenendo in 1 s, provoca una f.e.m. indotta di 1 V. Procedendo a ritroso possiamo poi definire il tesla come  $Wb/m^2$ .

## 10.2 Origine fisica della forza elettromotrice indotta

Riprendiamo l'espressione (10.5) della legge di Faraday mettendo in evidenza la relazione tra campo magnetico e campo elettrico indotto:

$$\oint \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{s} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma \quad (10.6)$$

$\Sigma$  è una qualsiasi superficie che si appoggia sulla linea chiusa  $s$  e questa può coincidere con un circuito conduttore chiuso, ma può anche essere una linea geometrica chiusa, senza alcun supporto materiale. Conviene qui ripetere l'osservazione fatta a proposito di (10.2) e (10.3): la variazione del flusso magnetico genera un campo elettrico indotto e questo è l'effetto principale; se poi il campo  $E$ , agisce all'interno di un conduttore che forma un circuito chiuso abbiamo in questo una corrente indotta, ma non si tratta dell'unica situazione possibile, anche se certamente è una delle più importanti dal punto di vista applicativo.

Il simbolo di derivata parziale nella (10.6) indica esplicitamente che è la variazione temporale del flusso concatenato a causare il fenomeno. Esaminiamo ora come si realizza una variazione di flusso nel tempo, elencando prima le varie possibilità e cercando poi una classificazione e una spiegazione fisica.

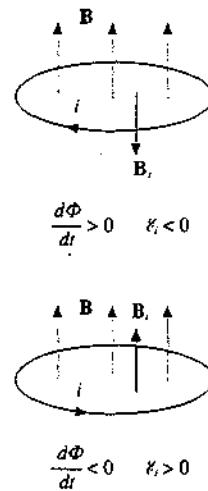


Figura 10.7

- a) Consideriamo innanzitutto un *circuito indeformabile* che compie un *moto rigido* in una zona in cui esiste un *campo magnetico  $\mathbf{B}$  costante nel tempo*. Se il moto è soltanto traslatorio e il campo magnetico è uniforme non si ha variazione di flusso: infatti sono costanti tutti i termini che compongono il flusso, in quanto  $\mathbf{B}$  è uniforme e costante, l'area non varia e l'angolo tra  $\mathbf{B}$  e il versore  $\mathbf{u}_n$  di ciascun elemento  $d\Sigma$  è fisso. Se invece il campo magnetico non è uniforme il flusso attraverso il circuito cambia al variare della posizione del circuito stesso e in questo nasce una f.e.m. indotta. Una situazione analoga si presenta se il moto è rotatorio: ad ogni modo, con  $\mathbf{B}$  uniforme o non uniforme, il flusso attraverso il circuito cambia in quanto cambia nel tempo l'orientazione del circuito rispetto al campo magnetico. Nel caso più generale di moto rototraslatorio il flusso di norma varierà nel tempo. *Quindi, a parte il caso di moto traslatorio in campo uniforme, si ha sempre una f.e.m. indotta in un circuito indeformabile che si muove in un campo magnetico.*
- b) Una seconda possibilità è che il *circuito venga deformato*; si ha il moto di ogni singola parte del circuito o anche soltanto di qualche parte e il flusso concatenato con il circuito in generale cambia nel tempo. Il fenomeno avviene sia in campo uniforme che in campo non uniforme.
- c) Il flusso attraverso un circuito può cambiare nel tempo anche quando si mantiene il *circuito fisso e si sposta la sorgente del campo magnetico*; precisamente si ha una f.e.m. indotta in tutti i casi, eccettuato quello di moto traslatorio di un campo magnetico uniforme.
- d) Con *circuito fisso e sorgenti di  $\mathbf{B}$  (uniforme o meno) fisse* il flusso concatenato cambia nel tempo se *si muove un mezzo ferromagnetico magnetizzato*: infatti questo movimento altera la distribuzione geometrica delle linee del campo  $\mathbf{B}$ .
- e) Infine, in assenza di qualsiasi moto relativo tra circuito e campo magnetico e di variazioni locali di permeabilità magnetica, si ha una variazione di flusso attraverso il circuito se il *campo magnetico, uniforme o no, varia nel tempo* a causa della variazione nel tempo dell'intensità della corrente che lo genera.

Le situazioni considerate possono essere prese come punti di riferimento: in sostanza si tratta dei casi più semplici in cui viene variata *una sola* delle tre grandezze che concorrono a formare il flusso, il campo magnetico, l'area e l'angolo tra  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{u}_n$ . Certamente è possibile realizzare fenomeni in cui la variazione del flusso è dovuta a più effetti sovrapposti, tuttavia sembra evidente che l'induzione elettromagnetica possa essere ricondotta a due cause distinte: il *moto di un conduttore* in un sistema di riferimento in cui le sorgenti del campo magnetico sono in quiete (punti a, b) e la *variazione nel tempo del campo magnetico* in un sistema di riferimento in cui il conduttore è in quiete (punti c, d, e).

Cominciando dalla *prima causa* dimostriamo che all'origine del fenomeno di induzione c'è la forza di Lorentz. Allo scopo consideriamo una spira conduttrice che si muove di moto traslatorio con velocità  $v$  in una regione in cui agisce un campo magnetico  $\mathbf{B}$  costante. Sugli elettroni di conduzione, che sono in moto con la velocità  $v$  della spira, agisce la forza di Lorentz (7.5) e si può definire, come nel paragrafo 6.7, il campo *elettromotore*

$$\mathbf{E}_i = \frac{\mathbf{F}}{-e} = \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad , \quad (10.7)$$

rapporto tra la forza sulla carica e la carica stessa. Sotto l'azione di  $\mathbf{E}_i$  le cariche

entrano in movimento lungo la spira e per uno spostamento corrispondente al tratto infinitesimo  $ds$  di spira viene compiuto sull'unità di carica il lavoro

$$d\mathcal{E}_i = \mathbf{E}_i \cdot ds = \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot ds \quad (10.8)$$

Ne segue, integrando lungo tutta la spira, la forza elettromotrice

$$\mathcal{E}_i = \oint \mathbf{E}_i \cdot ds = \oint \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot ds \quad (10.9)$$

Dato che nel tempo  $dt$  ogni elemento di spira si sposta di  $d\mathbf{r} = \mathbf{v} dt$ , la (10.9) può essere riscritta come

$$\mathcal{E}_i = \oint ds \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{B} = \oint ds \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \mathbf{B} \quad ,$$

in cui si è utilizzata la proprietà di poter permutare ciclicamente i fattori nel prodotto misto. Il vettore  $ds \times d\mathbf{r}$  ha modulo pari all'area del parallelogramma di lati  $ds$  e  $d\mathbf{r}$ , descritto da  $ds$  nel tempo  $dt$ , e possiamo scrivere  $d\Sigma' \mathbf{u}_n = ds \times d\mathbf{r}$ , essendo  $\mathbf{u}_n$  il versore normale al piano del parallelogramma. Pertanto

$$ds \times d\mathbf{r} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma' = d\Phi' \quad ,$$

rappresenta il flusso del campo magnetico attraverso il suddetto parallelogramma. Nella traslazione infinitesima di tutta la spira viene descritta complessivamente un'area  $d\Sigma$  attraverso cui si ha il flusso

$$d\Phi_i(\mathbf{B}) = \int d\Phi' = \oint ds \times d\mathbf{r} \cdot \mathbf{B} = \int_{d\Sigma} \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma' \quad .$$

Si osservi che l'integrazione è condotta lungo la spira, cioè su  $ds$ , e che  $d\Phi'$  è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a  $d\Phi_i$ . Detto  $\Phi_1(\mathbf{B})$  il flusso concatenato al circuito nella posizione iniziale e  $\Phi_2(\mathbf{B})$  quello nella posizione finale, assunta dopo la traslazione infinitesima, vale la relazione

$$\Phi_2(\mathbf{B}) - \Phi_1(\mathbf{B}) + d\Phi_i(\mathbf{B}) = 0 \quad .$$

Infatti, come si vede dalla figura 10.8, la traslazione della spira individua una superficie chiusa di cui  $d\Sigma$  può essere considerata la superficie laterale e il flusso complessivo uscente deve essere nullo in quanto  $\mathbf{B}$  è solenoidale. La variazione di flusso attraverso la spira vale dunque

$$d\Phi(\mathbf{B}) = \Phi_2(\mathbf{B}) - \Phi_1(\mathbf{B}) = -d\Phi_i(\mathbf{B})$$

e in definitiva abbiamo

$$\mathcal{E}_i = \oint \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot ds = \frac{d\Phi_i(\mathbf{B})}{dt} = -\frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt} \quad , \quad (10.10)$$

in accordo con la legge di Faraday (10.2).

Ricordando quanto visto nel paragrafo 7.6 vediamo che la f.e.m. indotta è data dalla variazione nel tempo del flusso tagliato dal circuito durante la traslazione.

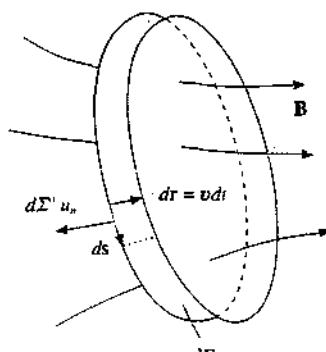


Figura 10.8

Se  $\Phi_1 = \Phi_2$  il flusso tagliato è nullo e non c'è f.e.m. indotta: in particolare questo è il caso della traslazione in campo magnetico uniforme.

In modo analogo si procede per una rotazione, arrivando di nuovo all'equivalenza tra (10.9) e (10.2); riprenderemo questo punto specifico nel paragrafo 10.3.

Il caso della *deformazione* può anch'esso essere affrontato in modo generale, con lo stesso risultato. Noi ci limitiamo a trattarlo con un esempio.

### Esempio 10.1

Un circuito rettangolare è costituito da due conduttori paralleli, chiusi a sinistra da un conduttore di resistenza  $R$  e a destra da una sbarretta conduttrice mobile di lunghezza  $b$  e resistenza  $r$ ; esso è posto in un campo magnetico  $\mathbf{B}$  uniforme e costante, ortogonale al piano contenente il circuito (si tratta dello stesso dispositivo dell'esempio 7.4, con il generatore sostituito dal resistore  $R$ ). Supponendo che la sbarretta si muova di moto traslatorio con velocità  $v$  nel verso indicato in figura 10.9, calcolare la f.e.m. e la corrente indotta nel circuito.

#### Soluzione

Sugli elettroni nella sbarretta agisce il campo elettrico indotto (10.7), la cui tensione ai capi della sbarretta è data dalla (2.4),

$$T = \int_M^N \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = -v B b ;$$

infatti  $v$  e  $\mathbf{B}$  sono ortogonali tra loro e  $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  è parallelo e discorde a  $MN$ , la cui orientazione è stata legata a quella di  $\mathbf{B}$  secondo la regola delle vite. Negli altri punti del circuito, che sono fermi,  $\mathbf{E}_i = 0$  e quindi la f.e.m. nel circuito vale

$$\xi_i = \oint \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \int_M^N \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = -v B b . \quad (10.11)$$

Detta  $x$  la distanza  $PN = QM$ , il flusso del campo magnetico attraverso il circuito vale

$$\Phi(\mathbf{B}) = \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = B b x$$

e in base a (10.2)

$$\xi_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -B b \frac{dx}{dt} = -B b v$$

che è la (10.11).

La f.e.m. indotta nel circuito è direttamente proporzionale alla velocità con cui si sposta la sbarretta; se questa viene mantenuta in moto con velocità costante la f.e.m. indotta è costante.

La corrente indotta, secondo (10.3), è

$$i = \frac{\xi_i}{r+R} = -\frac{v B b}{r+R} .$$

se consideriamo trascurabile la resistenza dei due conduttori paralleli. Il segno meno indica che il verso è da  $N$  a  $M$ : tale corrente genera un campo magnetico opposto a  $\mathbf{B}$ , contrastando così la variazione di flusso (legge di Lenz).

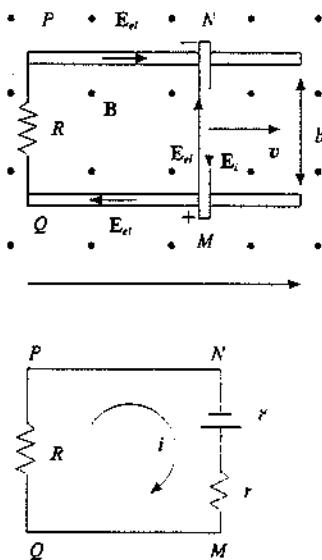


Figura 10.9

In sostanza il moto della sbarretta in campo magnetico ha dato luogo a un *generatore di f.e.m.*  $\mathcal{E}_i$ , come avviene nel generatore di Van de Graaf per trasporto meccanico o nelle pile per trasporto chimico. Il campo elettromotore (10.7) porta gli elettroni verso il punto  $N$  e i poli del generatore sono  $M$  (polo positivo) e  $N$  (polo negativo); il risultato di questa separazione di cariche è la produzione di un campo elettrostatico  $E_{el}$  per cui il campo elettrico nel circuito vale

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_i + \mathbf{E}_{el} = \mathbf{v} \times \mathbf{B} + \mathbf{E}_{el} \text{ tra } M \text{ e } N \text{ nella sbarretta ,}$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{el} \quad \text{nel resto del circuito dove } \mathbf{E}_i = 0 .$$

relazioni del tutto analoghe a quelle del paragrafo 6.7. La f.e.m. è

$$\mathcal{E}_i = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \oint \mathbf{E}_{el} \cdot d\mathbf{s} + \oint \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{s} = \int_M^N \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{s} = vBb$$

come abbiamo già ricavato. La d.d.p. che a circuito chiuso si misura tra  $M$  e  $N$  è

$$V_M - V_N = \mathcal{E}_i - ri$$

Quando, con la sbarretta in movimento, si apre il circuito, la corrente si annulla e la d.d.p. che si misura tra  $M$  e  $N$  è la f.e.m.  $\mathcal{E}_i$  del generatore. In tale situazione all'interno della sbarretta c'è uno *stato di equilibrio* con campo elettrico nullo, in quanto il campo elettrostatico dovuto alla separazione delle cariche è eguale ed opposto a  $E_i$ :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{el} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0 , \quad \mathbf{E}_{el} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B} .$$

Da quanto abbiamo dimostrato siamo portati alle seguenti conclusioni. Quando un elemento di materiale conduttore si muove in un campo magnetico fisso al suo interno avviene una separazione di cariche dovuta ad un *campo elettromotore che ha origine nella forza di Lorentz*. Se i singoli elementi formano un circuito chiuso questo diventa sede di una f.e.m.  $\mathcal{E}_i$  che di norma è diversa da zero e in esso circola una corrente indotta.  $\mathcal{E}_i$  è data da (10.9), ma in ogni caso si verifica che essa è anche eguale all'opposto della derivata rispetto al tempo del flusso magnetico concatenato con il circuito, secondo la legge di Faraday (10.2): nei casi considerati quindi il *fenomeno di induzione elettromagnetica viene ricondotto alla forza di Lorentz*. La f.e.m. si può pensare localizzata nei punti del circuito in movimento in cui  $\mathcal{E}_i$  è diverso da zero: può trattarsi di tutto il circuito o anche di una sola parte, come nell'esempio 10.1.

Anche il caso di un conduttore aperto, ai cui capi si misura una d.d.p. eguale alla tensione del campo elettromotore, è rappresentabile con il formalismo della (10.2) attraverso il concetto di flusso tagliato dal conduttore. È chiaro che in tutta questa classe di fenomeni la presenza del supporto materiale costituito dal conduttore, aperto o chiuso, è essenziale.

Passiamo ora a considerare la *seconda causa* di induzione e cioè la variazione del campo magnetico vista da un circuito fisso. Essendo nulla la velocità degli elementi di circuito sugli elettroni ora non agisce la forza  $\mathbf{F} = -e \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ ; poiché la forza su una carica è data in generale da (7.38),  $\mathbf{F} = -e (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ , la presenza della f.e.m. indotta si spiega con la presenza di un campo elettrico  $\mathbf{E}$ : dobbiamo cioè supporre che in una regione in cui il campo magnetico varia nel tempo venga indotto un campo elettrico.

Per trovare la relazione quantitativa tra i campi ritorniamo a (10.6) in cui portiamo il simbolo di derivata sotto il segno di integrale, operazione possibile in quanto il circuito è fisso:

$$\mathcal{E}_i = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma$$

Applichiamo alla circuitazione del campo elettrico il *teorema di Stokes* (2.53) ottenendo

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_S \nabla \times \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma$$

L'egualanza tra i due integrali superficiali deve essere vera per qualsiasi superficie che si appoggi al circuito e deve quindi valere la relazione

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (10.12)$$

che esprime il *legame locale tra la variazione nel tempo del campo magnetico e il campo elettrico indotto*.

Riassumendo, la legge integrale (10.2) si applica a tutte le situazioni in cui una linea chiusa sia interessata da una variazione del flusso magnetico concatenato. Localmente, il campo elettrico da cui calcoliamo la f.e.m. indotta può essere dovuto al moto in campo magnetico oppure alla variazione temporale del campo magnetico: questo secondo fenomeno è un fatto assolutamente nuovo, che si aggiunge alle proprietà dei campi studiate fino ad ora.

La (10.12), che esprime quantitativamente la relazione locale tra campo magnetico variabile e campo elettrico, è *una delle quattro equazioni di Maxwell nella forma più generale*. Essa è valida in qualsiasi mezzo e in particolare nel vuoto, in assenza di conduttori; vedremo un esempio di ciò nel paragrafo 10.3.

Nel paragrafo 8.7 abbiamo espresso il campo  $\mathbf{B}$  come rotore del potenziale vettore  $\mathbf{A}$ ; se inseriamo la (8.39) nella (10.12) otteniamo

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{A} = - \nabla \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \Rightarrow \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

In generale il campo  $\mathbf{E}$  può essere dovuto anche a cariche fisse e allora la sua espressione in funzione del potenziale scalare elettrostatico e del potenziale vettore si scrive

$$\mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla V \quad (10.13)$$

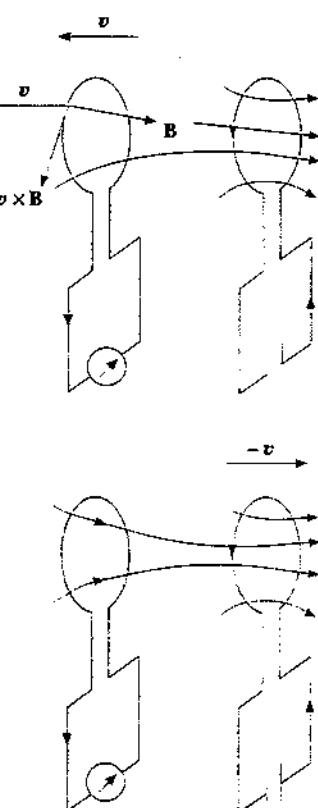


Figura 10.10

Formalmente (10.13) è ancora compatibile con (10.12) in quanto il rotore di un gradiente è identicamente nullo.

Per concludere, vogliamo far notare l'*aspetto relativistico* di alcune delle proprietà che abbiamo discusso. Sperimentalmente risulta che si misura la stessa forza elettromotrice nel sistema di riferimento in cui un circuito si muove con velocità  $v$  rispetto alla sorgente (fissa) di  $\mathbf{B}$  e nel sistema di riferimento in cui il circuito è fisso e la sorgente si muove con velocità  $-v$ ; nel primo sistema l'effetto è attribuito alla forza magnetica  $q(v \times B)$  agente su cariche in moto, nel secondo alla forza elettrica  $qE$  agente su cariche fisse, con  $E$  dato da (10.12), sebbene le due situazioni non siano

distinguibili perché danno origine alla stessa grandezza misurabile, che non dipende dal sistema di riferimento. Questa impossibilità di stabilire uno stato di moto assoluto è uno dei concetti fondamentali della teoria della relatività, di cui appunto i fenomeni suddetti costituiscono un'importante conferma.

Da tale contesto resta distinto soltanto il caso di assenza di qualsiasi moto relativo, in cui la variazione di corrente in un circuito fisso produce la variazione di flusso in un altro circuito fisso. Sappiamo che la legge di Faraday (10.2) conserva la sua validità e che il campo elettrico locale è ancora espresso da (10.12): ciò vuol dire in particolare che dalla sola misura di  $\mathcal{E}$  non si può stabilire se la variazione di  $\mathbf{B}$  nel tempo vista da un circuito fisso sia dovuta al moto di una sorgente di campo magnetico costante o ad una sorgente fissa con campo variabile.

### Esempio 10.2

Una bobina costituita da  $N = 100$  spire di area  $\Sigma = 100 \text{ cm}^2$  e resistenza complessiva  $R = 5 \Omega$  è posta tra le espansioni polari di un elettromagnete e giace in un piano ortogonale alle linee di  $\mathbf{B}$ . Il campo magnetico, uniforme nei punti di  $\Sigma$ , varia nel tempo aumentando linearmente dal valore zero al valore  $B_0 = 0.8 \text{ T}$  in un tempo  $t_0 = 10 \text{ s}$ . Calcolare la f.e.m. indotta nella bobina, la carica  $q$  che fluisce nella bobina durante il tempo  $t_0$  e il lavoro totale speso nello stesso tempo.

#### Soluzione

La legge di variazione del campo magnetico è  $B = B_0 t/t_0$  e di conseguenza il flusso attraverso la bobina (fissa) vale

$$\Phi(t) = N\Sigma B = \frac{N\Sigma B_0}{t_0} t$$

Il valore della f.e.m. indotta è

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -N\Sigma \frac{dB}{dt} = -\frac{N\Sigma B_0}{t_0} = -8 \cdot 10^{-2} \text{ V} ,$$

costante per tutto il tempo  $t_0$ , e la corrente nella bobina ha il valore

$$i = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = -1.6 \cdot 10^{-2} \text{ A} .$$

Esso circola in verso tale da opporsi con il suo campo alla variazione di  $\mathbf{B}$ .

La carica totale che passa attraverso una qualsiasi sezione del filo che costituisce la bobina è

$$q = \int i dt = i t_0 = 0.16 \text{ C} .$$

La potenza dissipata sulla resistenza  $R$  e il lavoro totale valgono

$$P = \mathcal{E}_i i = 1.28 \cdot 10^{-3} \text{ W} , \quad W = Pt_0 = \mathcal{E}_i i t_0 = \mathcal{E}_i q = 1.28 \cdot 10^{-2} \text{ J} .$$

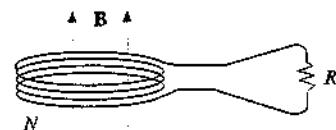


Figura 10.11

### 10.3 Applicazioni della legge di Faraday

In questo paragrafo discutiamo alcune applicazioni interessanti della legge di Faraday, occupandoci in particolare degli scambi energetici che si verificano nei fenomeni di induzione elettromagnetica.

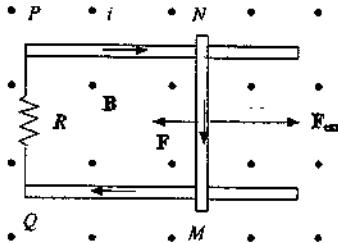


Figura 10.12

Resistenza di attrito elettromagnetico

#### Attrito elettromagnetico. Generatori

Riprendiamo in considerazione il circuito dell'esempio 10.1. Siccome manteniamo in moto la sbarretta con velocità  $v$  nel circuito compare la f.e.m.  $\mathcal{E}_i = -vBb$  e circola la corrente  $i = \mathcal{E}_i/(r+R)$ . Ma allora sulla sbarretta agisce la forza magnetica (7.15),

$$\mathbf{F} = iNM \times \mathbf{B} = -\frac{B^2 b^2}{r+R} v,$$

che ha verso opposto a quello del moto della sbarretta e modulo proporzionale alla velocità. La presenza del campo magnetico da una parte dà origine alla corrente, dall'altra a una **forza resistente di tipo viscoso**, comunemente chiamata **resistenza di attrito elettromagnetico**.

Per vincere la resistenza di attrito bisogna applicare una forza esterna, eguale e contraria a  $\mathbf{F}$ , spendendo la potenza

$$P = \mathbf{F}_{\text{ext}} \cdot \mathbf{v} = \frac{B^2 b^2 v^2}{r+R} = (r+R) i^2 = \mathcal{E}_i i$$

La potenza meccanica impiegata per fare avvenire il movimento viene ritrovata **integralmente** sotto forma di **potenza elettrica** spesa sulle resistenze del circuito. Il sistema può essere considerato come un **generatore** in cui la potenza erogata  $\mathcal{E}_i i$  proviene da un'azione meccanica esterna;  $r$  è la resistenza interna del generatore e  $R$  la resistenza esterna.

Se nella (10.2) ci fosse il segno positivo, ovvero se la corrente indotta circolasse in verso tale che la forza magnetica non fosse opposta al moto, basterebbe mettere in moto la sbarretta, ad esempio con un impulso, e successivamente il moto sarebbe mantenuto dalla stessa forza  $\mathbf{F}$ . Avremmo un generatore che fornisce potenza elettrica senza ricevere una quantità equivalente di potenza sotto altra forma, in contrasto con il principio di conservazione dell'energia. Vediamo qui il **significato energetico del segno meno della (10.2)**, cioè della **legge di Lenz**. Se quindi la sbarretta ricevesse un impulso essa si fermerebbe quando la sua energia cinetica iniziale si fosse trasformata tutta in lavoro elettrico e alla fine in calore; durante la fase di frenamento la velocità presenta un andamento esponenziale decrescente nel tempo (vedi vol. I, paragrafo 1.7) e lo stesso andamento caratterizza la f.e.m. e la corrente indotta.

Un altro dispositivo in cui si ha trasformazione di potenza meccanica in potenza elettrica è indicato in figura 10.13: esso è noto come **disco di Barlow**. Il disco conduttore di raggio  $a$ , libero di ruotare attorno all'asse passante per il centro  $O$  e ortogonale al disegno, è collegato ad un resistore  $R$  con due conduttori, uno fissato al centro del disco e l'altro a contatto col disco in un punto del bordo. Il sistema è immerso in un campo magnetico  $\mathbf{B}$  uniforme e costante, parallelo all'asse di rotazione e uscente dal foglio. Ad un certo istante sia  $\omega$  la velocità angolare del disco, dovuta ad un'azione esterna; il vettore  $\omega$  è uscente dal foglio, cioè la rotazione ci appare antioraria.

Il campo elettrico indotto in ciascun punto  $Q$  del segmento mobile  $OP$  è  $\mathbf{E}_i = \mathbf{v} \times \mathbf{B} = r\omega B \mathbf{u}_r$ , se  $\mathbf{u}_r$  è il versore del vettore  $OP$  e  $r$  la distanza di  $Q$  dal centro  $O$ . La f.e.m. indotta nel circuito è

$$\mathcal{E}_i = \oint \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{s} = \int_0^P r\omega B \mathbf{u}_r \cdot dr = \int_0^a \omega B r dr = \frac{1}{2} \omega B a^2$$

e la corrente indotta  $i = \mathcal{E}_i/R$ , dove  $R$  è la resistenza totale del circuito, circola dal centro verso il bordo, come si deduce dal verso della forza di Lorentz agente sugli elettroni che sono trascinati dal moto del disco (e come si misura sperimentalmente).

Sull'elemento radiale di corrente  $dr$ , distante  $r$  dal centro, agisce la forza elementare di Laplace (7.13)  $d\mathbf{F} = i dr \times \mathbf{B}$ , ortogonale a  $dr$  e rivolta verso sinistra, giacente nel piano del

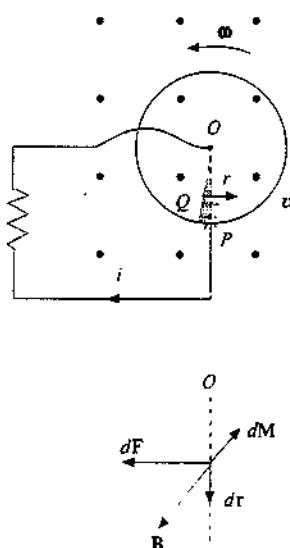


Figura 10.13

disco. Questa forza ha rispetto al centro il momento  $dM = r \times dF$ , ortogonale al disco e diretto verso il foglio, cioè opposto a  $\omega$ ; sviluppando si ottiene

$$dM = -\frac{B^2 a^2}{2R} r dr \omega$$

Il momento risultante, opposto a  $\omega$ , vale

$$M = \int_0^a dM = -\frac{B^2 a^4}{4R} \omega$$

Si tratta di un *momento frenante* che è proporzionale a  $\omega$ , quindi di *tipo viscoso*, detto *momento di attrito elettromagnetico*. Per mantenere in moto il disco bisogna applicare dall'esterno il momento  $M' = -M$  e spendere la potenza

$$P = -M \omega = -\frac{B^2 a^4 \omega^2}{4R} = \frac{\ell_i^2}{R} = R i^2$$

che risulta *eguale* alla *potenza elettrica* dissipata nel circuito.

Sia in questo caso che nel precedente le formule sono valide per qualsiasi tipo di moto; se la traslazione o la rotazione sono uniformi la f.e.m. e la corrente indotta sono costanti nel tempo, abbiamo cioè due *generatori di corrente continua*, altrimenti si può avere qualsiasi forma di variazione. Tuttavia i casi trattati sono essenzialmente dimostrativi; vediamo nell'esempio seguente una situazione più vicina alle realizzazioni pratiche effettive.

### Momento di attrito elettromagnetico

#### Esempio 10.3 Generatore di corrente sinusoidale

Una spira rettangolare, di lati  $MN = PQ = s$  e  $NP = QM = s'$ , ruota con velocità angolare costante  $\omega$  attorno ad un asse verticale passante per il centro di massa, parallelo al lato  $MN$ . Sulla spira agisce un campo magnetico  $B$  uniforme e costante, orizzontale; indichiamo con  $\theta$  l'angolo formato dalla normale alla spira con  $B$ :  $\theta = 0$  significa che il vettore  $u_n$ , orientato secondo la regola della vite, è parallelo e concorde a  $B$ . Calcoliamo la f.e.m. indotta con (10.9). Lungo i lati  $MN$  e  $PQ$   $v \times B$  è parallelo e concorde al verso di percorrenza del lato stesso per cui

$$v \times B \cdot MN = v \times B \cdot PQ = s v B \sin \theta$$

mentre lungo gli altri due lati

$$v \times B \cdot NP = v \times B \cdot QM = 0$$

in quanto  $v \times B$  è perpendicolare al lato. Quindi

$$\epsilon_i = 2 s v B \sin \theta$$

Siccome  $v = \omega s / 2$ ,  $s s' = \Sigma$  area della spira e  $\theta = \omega t$ , si ha

$$\epsilon_i = \omega B \Sigma \sin \omega t \quad (10.14)$$

espressione della f.e.m. indotta nella spira a causa della rotazione uniforme in campo magnetico. Lo stesso risultato si ottiene da (10.2):

$$\Phi(B) = \int_{\Sigma} B \cdot u_n d\Sigma = B \Sigma \cos \theta = B \Sigma \cos \omega t \Rightarrow \epsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = \omega B \Sigma \sin \omega t$$

La (10.14), applicabile anche a una spira piana di forma qualsiasi, mostra che la f.e.m.

#### Generatori di corrente continua

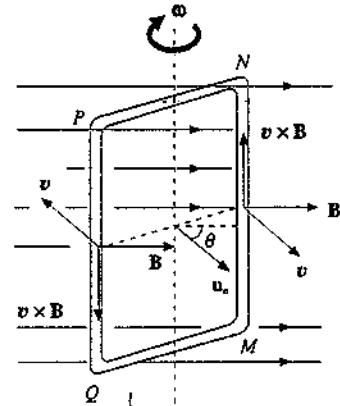


Figura 10.14

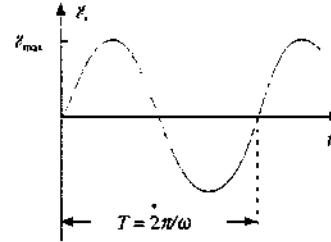


Figura 10.15

così ottenuta varia sinusoidalmente nel tempo, con valore massimo

$$\mathcal{E}_{\max} = \omega B \Sigma \quad (10.15)$$

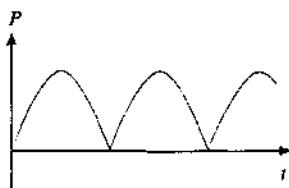
Se la spira viene collegata in serie ad un circuito avente resistenza complessiva  $R$ , compresa quella della spira, nel circuito passa la corrente

$$i = \frac{\mathcal{E}_t}{R} = \frac{\omega B \Sigma}{R} \sin \omega t$$

e viene spesa la potenza elettrica

$$P = \mathcal{E}_t i = R i^2 = \frac{\mathcal{E}_t^2}{R} = \frac{\mathcal{E}_{\max}^2}{R} \sin^2 \omega t \quad (10.16)$$

Figura 10.16



Dato che la spira percorsa dalla corrente  $i$  ha il momento magnetico  $m = i\Sigma$ , per mantenerla in rotazione contro il momento meccanico delle forze magnetiche che tende ad orientare  $\mathbf{m}$  parallelo e concorde a  $\mathbf{B}$  (vedi paragrafo 7.5) deve essere fornita la potenza meccanica

$$P = M\omega = (m B \sin \theta) \omega = i \omega B \Sigma \sin \omega t = \frac{\mathcal{E}_{\max}^2}{R} \sin^2 \omega t,$$

eguale a (10.16).

Si osservi che tale potenza deve essere sempre fornita al sistema. Infatti nel primo semiperiodo ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $\sin \theta \geq 0$ ) la corrente indotta circola nel verso di percorrenza prefissato e il momento magnetico  $\mathbf{m}$  forma l'angolo  $\theta$  con  $\mathbf{B}$ : aumentando  $\theta$  col tempo bisogna fornire lavoro per la rotazione che disallinea  $\mathbf{m}$  e  $\mathbf{B}$ . Nel secondo semiperiodo ( $\pi \leq \theta \leq 2\pi$ ,  $\sin \theta \leq 0$ ) la corrente cambia verso e  $\mathbf{m}$  forma con  $\mathbf{B}$  l'angolo  $\theta - \pi$ , ancora minore di  $\pi$  e crescente; di conseguenza occorre fornire lavoro come prima.

Agli effetti pratici si è interessati più che ai valori istantanei della potenza al suo *valor medio* in un periodo, tenuto conto che l'utilizzo normalmente avviene per tempi molto maggiore del periodo  $T$  di rotazione. Da (10.16) si vede che il valor medio della potenza è proporzionale al valor medio di  $\sin^2 \omega t$ . Sappiamo che questo vale  $1/2$  (vol. I, paragrafo 9.3) e quindi

$$P_m = \frac{\mathcal{E}_{\max}^2}{2R} \quad (10.17)$$

la *potenza media* in un periodo è pari alla *metà del valore massimo* della potenza istantanea (a rigore il valor medio è calcolato nel periodo di  $\sin^2 \omega t$  che è  $T/2$ , ma evidentemente il risultato è lo stesso nel periodo  $T$  della rotazione).

La potenza media (10.17) coincide con quella che sarebbe erogata, sulla medesima resistenza  $R$ , da un generatore di corrente continua con f.e.m.  $\mathcal{E}_{\text{eff}}$  tale che  $\mathcal{E}_{\text{eff}}^2 / R = \mathcal{E}_{\max}^2 / 2R$ . Da questo punto di vista il generatore di corrente sinusoidale è *equivalente* ad un generatore di corrente continua la cui f.e.m., detta *f.e.m. efficace*, vale

$$\mathcal{E}_{\text{eff}} = \frac{\mathcal{E}_{\max}}{\sqrt{2}} \quad (10.18)$$

Facciamo un esempio numerico: il circuito ruotante è costituito da una bobina con  $N = 20$  spire circolari di raggio  $r = 19.9$  cm, che ruota con frequenza  $v = 50$  Hz in un campo magnetico  $B = 0.4$  T. La f.e.m. massima, da (10.15), e la f.e.m. efficace, da (10.18), risultano:

$$\mathcal{E}_{\max} = \omega B \Sigma = 2 \pi v B N \pi r^2 = 312.6 \text{ V} \quad \mathcal{E}_{\text{eff}} = 221 \text{ V}$$

Una f.e.m. e una corrente sinusoidale sono casi particolari di grandezze alternate. Riprenderemo l'argomento nel capitolo 11.

### Motori

I processi descritti di trasformazione di energia meccanica in energia elettrica possono essere invertiti ottenendo movimento di corpi a spese di energia elettrica fornita da un generatore.

Nel dispositivo della figura 10.9 sostituiamo il resistore  $R$  con un generatore che fa circolare corrente nel verso indicato in figura 10.17. La situazione è la stessa dell'esempio 7.4 (sono cambiati di verso sia corrente che campo magnetico). Alla sbarretta attraversata da corrente è applicata la forza  $F_1 = i B b u_x$  ed essa si sposta verso destra; di conseguenza varia il flusso magnetico concatenato con il circuito e nasce la f.e.m. indotta (10.11), che tende a far diminuire la corrente nel circuito e quindi a frenare il moto della sbarretta.

Detta  $\mathcal{E}_0$  la f.e.m. del generatore, la legge di Ohm del circuito è

$$\mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_i = R i \Rightarrow i = \frac{\mathcal{E}_0 - v B b}{R}$$

se con  $R$  indichiamo la resistenza totale del circuito; ammettiamo dunque che la corrente (ma non la f.e.m.  $\mathcal{E}_0$ ) cambi durante il moto, discostandoci in ciò dall'esempio 7.4.

Supponiamo inoltre che alla sbarretta sia applicata anche la forza resistente costante  $F_0$ , opposta alla velocità: ad esempio la sbarretta tramite una fune e una carrucola solleva un corpo (e dentro  $F_0$  può essere conglobata un'eventuale forza di attrito radente). La legge del moto è

$$F = F_1 - F_0 = i B b - F_0 = m a = m \frac{dv}{dt}$$

e sostituendo per  $i$  l'espressione scritta sopra si ottiene l'equazione differenziale del moto della sbarretta, di massa  $m$ :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\mathcal{E}_0 - v B b}{m R} B b - \frac{F_0}{m}$$

Se per  $t = 0$  la sbarretta è in quiete, la soluzione è

$$v(t) = \left( \frac{\mathcal{E}_0}{B b} - \frac{R F_0}{B^2 b^2} \right) (1 - e^{-B^2 b^2 t / m R})$$

A regime, per tempi grandi rispetto alla costante di tempo  $\tau = m R / B^2 b^2$ , il moto della sbarretta è uniforme e la forza applicata è nulla ( $F_1 = F_0$ ). I valori di regime della velocità, della corrente e della f.e.m. sono

$$v_\infty = \frac{\mathcal{E}_0}{B b} - \frac{R F_0}{B^2 b^2}, \quad i_\infty = \frac{\mathcal{E}_0 - v_\infty B b}{R} = \frac{F_0}{B b}$$

$$\mathcal{E}_{i\infty} = -v_\infty B b = -\left( \frac{\mathcal{E}_0}{B b} - \frac{R F_0}{B b} \right)$$

La potenza erogata dal generatore per  $v = v_\infty$  è

$$P_\infty = \mathcal{E}_0 i_\infty = (R i_\infty - \mathcal{E}_{i\infty}) i_\infty = R i_\infty^2 - \mathcal{E}_{i\infty} i_\infty = R i_\infty^2 + F_0 v_\infty$$

Il primo termine corrisponde alla potenza dissipata nella resistenza, il secondo alla potenza meccanica necessaria per vincere la forza resistente  $F_0$ .

Secondo le stesse linee si svolge il ragionamento nel caso del disco di Barlow in cui al posto del resistore  $R$  è posto un generatore di f.e.m.  $\mathcal{E}_0$  e che deve vincere un momento meccanico esterno  $M_0$  (ad esempio sul disco è avvolta una fune che sostiene una massa). Il passaggio di corrente nel disco produce il momento meccanico di origine magnetica  $M_1 = i B a^2/2$ , che mette in rotazione il disco; ha origine allora la f.e.m. indotta  $\mathcal{E}_i = -B a^2 \omega/2$  e si ha

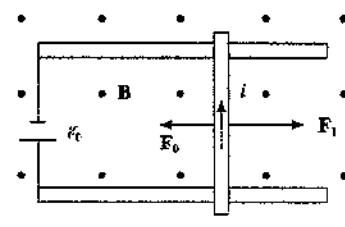


Figura 10.17

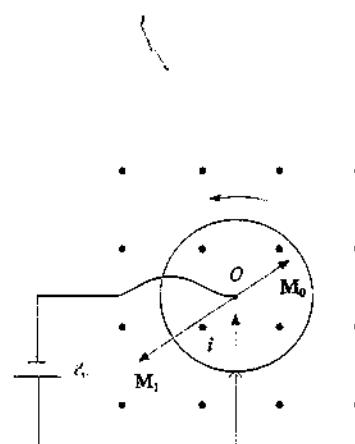


Figura 10.18

$$\xi_0 - \frac{1}{2} B a^2 \omega \\ \xi_0 + \xi_i = R i \Rightarrow i = \frac{\xi_0 - \frac{1}{2} B a^2 \omega}{R}$$

mentre l'equazione del moto è data dal teorema del momento angolare

$$I \frac{d\omega}{dt} = M_1 - M_0 = \frac{i B a^2}{2} - M_0 ,$$

essendo  $I$  il momento d'inerzia del disco rispetto all'asse di rotazione. Si trova anche in questo caso che a *regime* il *moto* del disco è *uniforme*; la *costante di tempo* è  $\tau = 4 I R / B^2 a^4$  e il *valore di regime della velocità angolare*, a cui è nullo il momento meccanico totale ( $M_1 = M_0$ ), è

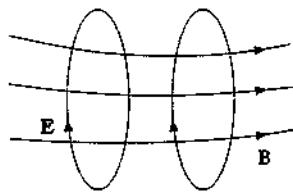
$$\omega_{\infty} = \frac{2}{B a^2} \left( \xi_0 - \frac{2 R M_0}{B a^2} \right)$$

La corrente, la f.e.m. indotta e la potenza erogata dal generatore a *regime* valgono

$$i_{\infty} = \frac{2 M_0}{B a^2} , \quad \xi_{i,\infty} = - \left( \xi_0 - \frac{2 R M_0}{B a^2} \right) , \quad P_{\infty} = R i_{\infty}^2 + M_0 \omega_{\infty}$$

I sistemi esaminati si comportano in definitiva come *motori* in cui una parte dell'energia fornita dal generatore viene trasformata in energia cinetica. Nella pratica i dispositivi possono essere molto differenti, ma i principi fondamentali sono quelli esposti.

Figura 10.19



#### Correnti di Foucault

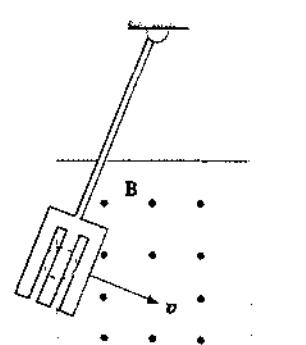
Un campo magnetico variabile produce un campo elettrico secondo (10.12): la struttura della relazione è tale che se le linee di  $B$  sono in una certa direzione le linee di  $E$  stanno in un piano ortogonale a tale direzione e concatenano quelle di  $B$ , come mostrato in figura 10.19. Quando il campo magnetico è variabile all'interno di un *conduttore metallico* il campo elettrico indotto dà origine a *correnti concatenate alle linee* di  $B$ , che possono essere molto intense dato che la resistività del metallo è piccola. Il fenomeno porta ad un riscaldamento del conduttore ed è sfruttato ad esempio nei *forni ad induzione* in cui si fondono metalli sottoponendoli a campi magnetici variabili con alta frequenza. Se invece si vogliono ridurre le correnti indotte, si lamina la massa del conduttore in fogli paralleli alle linee di  $B$  e separati da strati di vernice isolante, di modo che le correnti debbano attraversare tali strati.

Tecnicamente tali correnti si chiamano *correnti parassite* o *di Foucault*. Esse si manifestano anche quando una massa metallica si muove in un campo magnetico costante e sono dovute alla forza di Lorentz sugli elettroni. Secondo la legge di Lenz l'effetto rallenta il moto in campo magnetico (attrito elettromagnetico) ed è proprio per questo che viene utilizzato.

Una semplice dimostrazione si fa con una piastrina metallica sospesa a una sbarretta che viene fatta oscillare così da entrare e uscire da una regione in cui agisce un campo magnetico  $B$  ortogonale alla piastrina. La piastrina viene chiaramente frenata quando entra nella zona in cui c'è campo, non lo è più finché è nel campo, è di nuovo frenata quando esce: le variazioni di flusso danno luogo a correnti che si oppongono alle variazioni stesse. Se si praticano nella piastrina dei tagli in modo da interrompere la circolazione delle correnti indotte l'effetto frenante è molto ridotto.

Il *freno elettromagnetico* è utilizzato in molte metropolitane: un elettromagnete posto sotto una vettura in vicinanza delle rotaie viene acceso e il fatto genera correnti di Foucault nelle rotaie con conseguente frenamento del moto relativo e quindi della vettura. Il sistema è vantaggioso perché può essere facilmente regolato variando la corrente che eccita l'elettromagnete. Lo stesso accorgimento è applicato per smorzare oscillazioni, ad esempio in alcuni modelli di bilance.

Figura 10.20



### Il betatron

Il *betatrone* è un acceleratore che fornisce un fascio pulsato di elettroni con energia dell'ordine di 100 MeV; il principio di funzionamento venne formulato nel 1941 da Kerst. Nella figura 10.21 è riportato uno schema in sezione. Un elettromagnete, con le espansioni circolari opportunamente sagomate, produce un campo magnetico  $B$  non uniforme, ma a simmetria radiale, nel senso che il modulo di  $B$  è funzione della distanza  $r$  dall'asse di simmetria. Coassiale a tale asse è giacente nel piano mediano c'è una *cavità toroidale*  $C$  in cui viene praticato un vuoto spinto e in cui vengono immessi tangenzialmente elettroni con energia dell'ordine della decina di keV.

Supponiamo che il campo magnetico vari nel tempo; le linee del campo elettrico indotto secondo la legge (10.12) sono circonferenze coassiali all'asse di simmetria e ortogonali a questo. Il valore del campo elettrico nei punti della circonferenza di raggio  $R$  pari al raggio medio della cavità  $C$  si calcola dalla (10.6):

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 2\pi R E = -\frac{d}{dt} \int_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = -\frac{d}{dt} (\pi R^2 B_m) \quad ,$$

dove si è introdotto il valore medio  $B_m$  del campo magnetico nel piano dell'orbita. Quindi

$$E = \frac{R}{2} \frac{dB_m}{dt}$$

Un elettrone immesso lungo la detta circonferenza con verso opportuno, che tiene conto sia del fatto che la carica è negativa che del verso di  $\mathbf{E}$  dato dalla legge di Lenz, viene accelerato dalla forza tangenziale  $eE$  e la sua quantità di moto varia secondo la legge

$$\frac{dp}{dt} = eE = \frac{eR}{2} \frac{dB_m}{dt} \quad ,$$

per cui in un tempo finito

$$\Delta p = \frac{eR}{2} \Delta B_m \quad : \quad (10.19)$$

la variazione di quantità di moto è proporzionale alla variazione del *campo magnetico medio nel piano dell'orbita*.

Perché il moto sia circolare d'altra parte il campo magnetico locale  $B_{orb}$  che agisce sugli elettroni deve produrre la necessaria accelerazione centripeta, deve cioè valere la (7.7)  $p = eR B_{orb}$ . Se si vuole che il raggio  $R$  dell'orbita resti costante occorre che il valore di  $B_{orb}$  cresca in accordo con

$$\Delta p = eR \Delta B_{orb} \quad . \quad (10.20)$$

Quindi, affinché l'elettrone descriva orbite circolari di raggio costante sotto l'azione combinata del campo elettrico  $E$  che lo accelera tangenzialmente e del campo magnetico  $B_{orb}$  che lo accelera normalmente, deve valere l'egualanza tra (10.19) e (10.20), da cui si ricava

$$\Delta B_m = 2\Delta B_{orb} \quad :$$

la variazione del *campo magnetico medio nel piano dell'orbita* deve essere *doppia* della variazione del *campo magnetico locale* sull'orbita. In questo senso vanno sagomate le espansioni polari così da produrre un campo magnetico non uniforme che decresce radialmente.

Si osservi che la trattazione è *relativisticamente corretta*, come è richiesto dal fatto che l'energia raggiunta dagli elettroni è molto superiore alla loro energia a riposo  $m_c^2 = 0.5$  MeV: infatti sono state usate le formule  $dp/dt = F_e R = p/e B$ , valide in ogni caso. L'energia cinetica degli elettroni è, con ottima approssimazione, data dalla formula  $E_k = p c$ , dove  $c$  è la

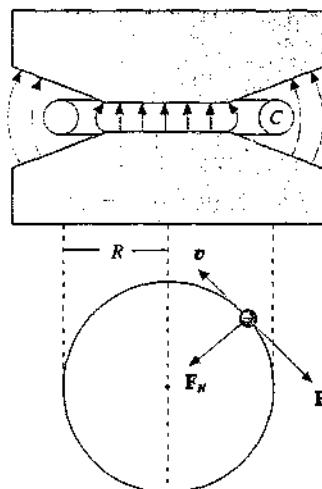


Figura 10.21

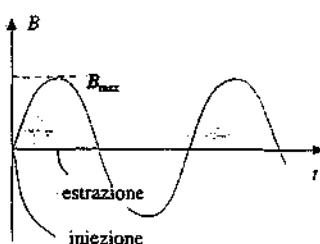


Figura 10.22

velocità della luce. Assumendo  $R = 1 \text{ m}$  e  $B_{\max} = 0.5 \text{ T}$ ,

$$E_{k,\max} = p_{\max} c \approx e R B_{\max} c = 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 1 \cdot 0.5 \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ J} = 1.5 \cdot 10^8 \text{ eV} = 150 \text{ MeV} ,$$

appunto molto maggiore di 0.5 MeV. La velocità degli elettroni a queste energie è praticamente eguale a  $c$  e per fare un giro, con le dimensioni date, essi impiegano un tempo  $t = 2\pi R/c = 21 \cdot 10^{-9} \text{ s}$ . Assumendo che la f.e.m. indotta valga 1000 V, ovvero che in un giro l'elettrone acquisti 1000 eV, occorrono per arrivare a 150 MeV  $1.5 \cdot 10^3$  giri, percorsi in  $3.2 \cdot 10^{-3} \text{ s}$ .

L'alimentazione del magnete di un betatrone viene fatta di norma con una corrente sinusoidale, ma soltanto un quarto di periodo è utile per il processo di accelerazione. Se la frequenza della corrente è 50 Hz, un quarto di periodo è  $5 \cdot 10^{-3} \text{ s}$ , pienamente compatibile con il valore  $3.2 \cdot 10^{-3} \text{ s}$  del tempo totale di accelerazione. Alla fine del quarto di periodo utile gli elettroni vengono *estratti* dal betatrone accendendo per un tempo molto breve un campo magnetico che ne devia le traiettorie verso l'esterno. Il fascio *estratto* di elettroni è dunque *pulsato* (non continuo) con frequenza eguale a quella della corrente di alimentazione.

Il funzionamento del betatrone è un esempio del fatto che nei fenomeni di induzione *non c'è necessariamente bisogno di un circuito conduttore*: in questo caso il campo elettrico indotto è prodotto nel vuoto e la f.e.m. indotta viene calcolata lungo una linea geometrica chiusa.

### Diamagnetismo

La spiegazione classica del *diamagnetismo*, trattata nel paragrafo 9.11, può essere ottenuta anche in base alla legge di Faraday. Consideriamo due orbite elettroniche eguali, ma percorse in versi opposti, e accendiamo un campo magnetico  $B$ , uniforme nel piano dell'orbita e ortogonale a questo. Lungo l'orbita di raggio  $r$  viene indotto il campo elettrico

$$E = \frac{r}{2} \frac{dB}{dt} ,$$

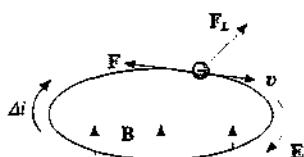


Figura 10.23

come abbiamo visto nel caso del betatrone. Il verso del campo elettrico è tale da decelerare l'elettrone della figura 10.23, che produce col suo moto un campo magnetico concorde a  $B$ , e accelerare l'elettrone della figura 10.24, che produce un campo magnetico discorde a  $B$ . In entrambi i casi è come se si aggiungesse alla corrente orbitale una corrente  $\Delta i$  in verso concorde a  $E$ , la quale produce un momento magnetico  $\Delta m$  opposto a  $B$ . Il *segno del diamagnetismo è dunque spiegato dalla legge di Lenz*.

Per il calcolo del modulo di  $\Delta m$  partiamo dall'equazione del moto dell'elettrone, considerato non relativistico; tangenzialmente all'orbita si ha

$$m \frac{dv}{dt} = e E = \frac{e r}{2} \frac{dB}{dt}$$

e la variazione di velocità corrispondente alla variazione del valore del campo magnetico da zero a  $B$  è

$$\Delta v = \frac{e r}{2m} B ,$$

qualunque sia l'andamento temporale. La velocità angolare subisce quindi la variazione

$$\Delta \omega = \frac{\Delta v}{r} = \frac{e B}{2m} .$$

La corrente supplementare  $\Delta i$  con cui rappresentiamo l'effetto del cambiamento di velocità dell'elettrone è pari a  $e/\Delta T = e \Delta \omega / 2 \pi$  e ad essa corrisponde il momento magnetico

$$\Delta m = \pi r^2 \Delta i = \frac{e^2 r^2}{4m} B .$$

Abbiamo così raggiunto, per un'orbita elettronica ortogonale a  $\mathbf{B}$ , lo stesso risultato del paragrafo 9.11. Quando si spegne il campo avviene il fenomeno contrario e l'effetto scompare.

Si verifica facilmente che il raggio dell'orbita resta lo stesso. Infatti all'attrazione coulombiana preesistente si somma la forza di Lorentz dovuta alla presenza del campo magnetico, con segno positivo nella situazione in cui la velocità sull'orbita aumenta (figura 10.24) e negativo nell'altra situazione (figura 10.23): la *forza di Lorentz fornisce cioè la variazione di forza centripeta necessaria per percorrere la stessa orbita con velocità diversa*. Quantitativamente, la forza centripeta corrispondente alla velocità  $v + \Delta v$  deve essere

$$m \frac{(v + \Delta v)^2}{r} = m \frac{v^2}{r} + 2 m v \frac{\Delta v}{r},$$

dove si è trascurato il termine contenente  $(\Delta v)^2$ . Il primo contributo è fornito dalla forza di Coulomb ed esiste anche quando  $B = 0$ , il secondo vale

$$2m v \frac{\Delta v}{r} = 2m v \Delta \omega = 2m v \frac{e B}{2m} = e v B$$

e risulta eguale alla forza di Lorentz (tralasciando il termine  $e \Delta v B$  rispetto a  $e v B$ ).

Se utilizziamo i dati dell'esempio 9.11, la variazione della velocità  $v = 2.2 \cdot 10^6$  m/s dell'elettrone nell'orbita fondamentale dell'atomo di idrogeno ( $r = 0.53 \cdot 10^{-10}$  m/s), dovuta ad un campo  $B = 1$  T, è

$$\Delta v = \frac{e r}{2m} B = 4.7 \text{ m/s}$$

La perturbazione è molto piccola, come del resto già sappiamo dal capitolo 9.

#### 10.4 Legge di Felici. Misure di campo magnetico

Abbiamo visto che quando una spira di resistenza  $R$  si muove in un campo magnetico  $\mathbf{B}$  in essa viene indotta una corrente data da (10.3),

$$i = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt}$$

Nell'intervallo di tempo da  $t_1$  a  $t_2$  nella spira fluisce una carica  $q$  data da

$$q = \int_{t_1}^{t_2} i(t) dt = -\frac{1}{R} \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} d\Phi = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{R} \quad (10.21) \quad \text{Legge di Felici}$$

Il valore della carica *non* dipende dalla legge temporale con cui varia il flusso, ma solamente dal valore iniziale e finale.

La (10.21), nota come *legge di Felici*, è molto importante nella pratica perché fornisce un metodo semplice di *misura dell'intensità del campo magnetico*.

Per un esempio di misura in una regione estesa vuota o riempita da un fluido rimandiamo al successivo esempio 10.4; vediamo invece ora come si può dedurre il valore del campo magnetico all'interno di un materiale solido utilizzando (10.21). Ricordiamo quanto visto nel paragrafo 9.6: per determinare il campo  $\mathbf{B}$  all'interno di un materiale occorre praticare una cavità sottile, ortogonale alle linee di  $\mathbf{B}$ , e misurare  $\mathbf{B}$  nella cavità. Supponiamo allora di introdurre in questa cavità una bobina piatta composta da  $N$  spire di area  $\Sigma$ , abbastanza piccola da poter considerare  $\mathbf{B}$

uniforme su tutta l'area. Il flusso di  $\mathbf{B}$  attraverso la bobina è

$$\Phi_1 = NB\Sigma$$

Estraendo rapidamente la bobina dalla cavità e portandola in una zona in cui il campo magnetico è nullo, e quindi è nullo il flusso  $\Phi_2$  attraverso la bobina, abbiamo da (10.21)

$$q = \frac{\Phi_1}{R} = \frac{NB\Sigma}{R} \Rightarrow B = \frac{qR}{N\Sigma}$$

La misura di  $B$  è ricondotta a quella della carica che fluisce nella bobina durante il processo di estrazione.

Un metodo classico per la misura di tale carica utilizza il cosiddetto *galvanometro balistico*. Rispetto al galvanometro normale dell'esempio 7.3 quello balistico ha momento d'inerzia grande e quindi periodo di oscillazione molto lungo. Se il fenomeno transitorio dura molto poco, in pratica la carica passa nella bobina dello strumento prima che essa si metta in movimento. Il momento angolare acquistato e la velocità angolare iniziale della bobina risultano proporzionali a  $q$ : detto  $m$  il momento magnetico della bobina,  $M$  il momento meccanico,  $I$  il momento d'inerzia,  $N'$  il numero di spire di area  $\Sigma'$  e  $B'$  il campo magnetico interno dello strumento abbiamo infatti

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= M = mB' = N'\Sigma'iB' \Rightarrow L = \int_0^t M dt = N'\Sigma'B' \int_0^t i dt = N'\Sigma'B'q \\ \omega_0 &= \frac{L}{I} = \frac{N'\Sigma'B'}{I}q \end{aligned}$$

La bobina del galvanometro entra pertanto in rotazione con velocità angolare  $\omega_0$ . Al moto si oppone il momento elastico del sistema di sospensione della bobina e anche un momento resistente proporzionale alla velocità angolare dovuto al fatto che la bobina taglia le linee di  $B'$  e diventa sede di una f.e.m. indotta (attrito elettromagnetico). Si avrebbe così un moto oscillatorio smorzato esponenzialmente (vol. I, paragrafo 9.7); se però si fa in modo che il sistema sia molto poco smorzato, si può assumere che nell'oscillazione iniziale si conservi l'energia, che si trasforma da cinetica a potenziale quando la bobina ha raggiunto la massima ampiezza di oscillazione:

$$\frac{1}{2}I\omega_0^2 = \frac{1}{2}k\theta_0^2 \Rightarrow \theta_0 = \sqrt{\frac{I}{k}} \quad \omega_0 = \frac{N'\Sigma'B'}{\sqrt{kI}}q$$

Se dunque si dispone di un galvanometro opportuno (grande  $I$ , piccolo smorzamento) e si opera in modo tale che il tempo di estrazione della bobina di misura sia piccolo rispetto al periodo di oscillazione della bobina del galvanometro, si determina  $q$  dalla misura dell'*ampiezza dell'oscillazione iniziale*.

### Flussometro

L'insieme bobina-galvanometro balistico prende il nome di *flussometro*. La resistenza  $R$  che compare nella (10.21) è la resistenza complessiva della serie dei due avvolgimenti. Il flussometro può essere tarato ponendo la bobina all'interno di un solenoide che produce un campo  $B_0$  noto, ortogonale al piano della bobina, e poi estraendola rapidamente; la misura della deviazione  $n_0$  dell'indice del galvanometro fornisce la determinazione della costante  $C = B_0/n_0$ . Ripetendo l'operazione in un campo magnetico incognito si ha  $B = Cn$ , se  $n$  è la deviazione dell'indice. La relazione tra grandezza misurata e grandezza da determinare risulta lineare.

Lo stesso sistema può essere utilizzato per misurare il campo nell'interferro di un elettromagnete, soprattutto se lo spessore è piccolo. Se invece c'è spazio a sufficienza, la misura di  $B$  può anche essere effettuata mantenendo in rotazione uniforme una bobina e determinando il valore efficace della corrente indotta (vedi esempio 10.3). Un caso di rotazione che sfrutta (10.21) è trattato nell'esempio che segue.

#### Esempio 10.4 Cerchio di Palmieri

Una bobina piatta è formata da  $N = 3000$  spire di area  $\Sigma = 4 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$  e resistenza complessiva  $R = 10^3 \Omega$ . Il montaggio meccanico è tale che l'asse di rotazione è orientabile in qualunque direzione. Poniamo la bobina in un piano orizzontale e ribaltiamola (rotazione di  $180^\circ$ ). La variazione di flusso è dovuta alla componente normale  $B_r$  del campo magnetico terrestre e la carica messa in movimento vale

$$q = \frac{\Delta\Phi}{R} = \frac{2N\Sigma B_r}{R} = 0.24 B_r$$

Se ad esempio nel luogo considerato  $B_r = 0.4 \cdot 10^{-4} \text{ T}$ ,  $q = 9.6 \cdot 10^{-6} \text{ C}$ .

Disponendo la bobina verticalmente e lungo un parallelo terrestre, con una rotazione di  $180^\circ$  si ha  $q = 0.24 B_r$  e si misura la componente tangente del campo magnetico terrestre (per i simboli si riveda la nota alla fine del paragrafo 8.2).

Il dispositivo si chiama *cerchio di Palmieri*; nella misure descritte, in cui viene accoppiato ad un galvanometro balistico, fornisce una precisione relativa dell'ordine del per cento.

#### 10.5 Autoinduzione

Nel paragrafo 8.5 abbiamo messo in evidenza come il campo magnetico generato dalla corrente che percorre un circuito dia luogo ad un flusso magnetico attraverso il circuito stesso, il cosiddetto *autoflusso*, che risulta proporzionale alla corrente  $i$  tramite il *coefficiente di autoinduzione*  $L$ , secondo (8.35). Il coefficiente  $L$  dipende dalla forma geometrica del circuito e dalla permeabilità magnetica del mezzo in cui il circuito è immerso.

La nozione di autoflusso acquista particolare importanza quando la corrente nel circuito non è costante nel tempo oppure quando viene variata la forma del circuito. In entrambi i casi, come nel caso più generale in cui le due variazioni avvengano contemporaneamente, il flusso concatenato col circuito cambia nel tempo e nel circuito compare una f.e.m. indotta che con i suoi effetti tende ad opporsi alla variazione che l'ha generata. Tale f.e.m., detta di autoinduzione, si calcola inserendo (8.35) in (10.2):

$$\mathcal{E}_L = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(L i) \quad . \quad (10.22) \quad \text{f.e.m. di autoinduzione}$$

Nei casi pratici più comuni il coefficiente di autoinduzione resta costante e la (10.22) assume la forma

$$\mathcal{E}_L = -L \frac{di}{dt} \quad . \quad (10.23)$$

La (10.23) fornisce operativamente la definizione del coefficiente  $L$  di un qualsiasi circuito, purché rigido, immerso in un mezzo qualunque. Si deve supporre però che le variazioni di corrente non siano così rapide da avvenire in un tempo paragonabile a quello impiegato dalla luce a percorrere la dimensione tipica del circuito, perché in tal caso la corrente non avrebbe più lo stesso valore su diverse sezioni del circuito.

Il coefficiente di autoinduzione di un circuito viene comunemente indicato anche con il termine *induttanza*. Un circuito con induttanza non nulla si dice *indut-*

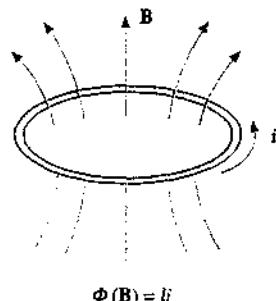


Figura 10.25

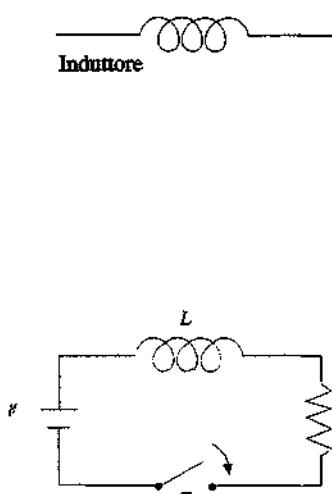


Figura 10.26

tivo; quando l'induttanza si può pensare concentrata in un tratto particolare del circuito, ad esempio perché il filo conduttore è avvolto così da formare un solenoide, si designa quel particolare conduttore con il nome di *induttore* e si utilizza per rappresentarlo il simbolo mostrato qui a lato.

Ricordiamo che l'unità di misura dell'induttanza è l'*henry*, definito nel paragrafo 8.5; in quell'occasione abbiamo notato che i valori di  $L$  sono normalmente piccoli, a meno che l'induttore non abbia un nucleo di materiale ferromagnetico (vedi paragrafo 9.8). Per questa ragione, anche se  $L$  è sempre diverso da zero a meno di particolari accorgimenti nella struttura geometrica del circuito, nei circuiti immersi in mezzi con permeabilità magnetica relativa quasi unitaria gli effetti dell'autoinduzione non sono molto rilevanti (e di fatto sono stati trascurati negli esempi del paragrafo 10.3).

Ad ogni modo, la presenza di un induttore in un circuito impedisce alla corrente di aumentare o diminuire istantaneamente in quanto, in base a (10.23), la variazione genera una f.e.m. che si oppone alla variazione stessa. Esaminiamo il problema nel circuito più semplice, detto *circuito RL in serie*, costituito da un generatore di f.e.m.  $\epsilon$  e resistenza interna trascurabile, da un induttore con induttanza  $L$  e da un resistore di resistenza  $R$ . Le variazioni di corrente sono causate inizialmente dall'apertura e dalla chiusura dell'interruttore  $T$ . Dato che queste variazioni danno luogo alla f.e.m. di autoinduzione (10.23), la legge di Ohm per il circuito deve essere scritta

$$\epsilon + \mathcal{E}_L = R i \Rightarrow \mathcal{E} = L \frac{di}{dt} + R i \quad (10.24)$$

Si separano le variabili e si integra ottenendo

$$\frac{di}{\mathcal{E} - R i} = \frac{dt}{L} \quad , \quad \ln(\mathcal{E} - R i) = -\frac{R}{L} t + \text{cost} \quad , \quad \mathcal{E} - R i = A e^{-Rt/L} \quad , \quad (10.25)$$

dove  $A$  è una costante di integrazione che si determina in base alle condizioni iniziali.

### a) Chiusura del circuito

Quando all'istante  $t = 0$  si chiude l'interruttore, la corrente, che era nulla in precedenza (circuito aperto), deve restare nulla essendo impossibile una variazione brusca, cioè per  $t = 0$   $i = 0$ . Risulta allora da (10.25)  $A = \mathcal{E}$  e quindi

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-Rt/L}) = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-t/\tau}) \quad , \quad (10.26)$$

avendo posto

Costante di tempo

$$\tau = \frac{L}{R} \quad ; \quad (10.27)$$

$\tau$  è la *costante di tempo* del circuito (vedi paragrafo 6.9).

In figura 10.27 è mostrato l'andamento della corrente  $i(t)$ : si vede che essa tende asintoticamente al valore di *regime*  $i_\infty = \mathcal{E}/R$ , corrispondente alla legge di Ohm per le correnti costanti. In pratica il raggiungimento di  $i_\infty$  è regolato dal valore

della costante di tempo  $\tau$ : maggiore è l'induttanza, più tempo è necessario per lo stabilizzarsi della corrente.

La f.e.m. di autoinduzione vale

$$\mathcal{E}_L = -L \frac{di}{dt} = -\mathcal{E} e^{-\nu t} \quad ;$$

l'effetto ritardante tende esponenzialmente a zero, naturalmente con costante di tempo  $\tau$ . Ad ogni istante la differenza tra valore asintotico e valore effettivo di corrente è dato da

$$i_{\infty} - i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/\tau} = -\frac{\mathcal{E}_L}{R} = i_L$$

e quindi  $i(t) = i_{\infty} - i_L$ ; durante la fase transitoria si manifesta un'altra corrente oltre a quella calcolabile con la semplice legge di Ohm applicata ad un resistore, detta *extracorrente di chiusura*.

Se  $R = 100 \Omega$ , con  $L = 10^{-6} \text{ H}$  si ha  $\tau = 10^{-8} \text{ s}$ , con  $L = 10^{-3} \text{ H}$   $\tau = 10^{-5} \text{ s}$ ; il regime di corrente costante viene raggiunto in tempi molto brevi con i valori di  $L$  presenti in un normale circuito resistivo. Se invece dovessimo chiudere un circuito contenente l'avvolgimento di un elettromagnete, che può avere  $L \sim 1 \text{ H}$  e  $R \sim 1 \Omega$ , la costante di tempo risulterebbe dell'ordine del secondo.

### b) Apertura del circuito

All'istante di apertura ( $t = 0$ ) la corrente ha il suo valore di regime  $i_{\infty} = \mathcal{E}/R$ . Supponiamo che aprendo l'interruttore la resistenza passi dal valore  $R$  al valore  $R'$  molto maggiore di  $R$  e che  $R'$  resti costante durante il transitorio in cui la corrente passa da  $i_{\infty}$  a zero. Nella (10.25) con  $R'$  al posto di  $R$  imponiamo  $i = i_{\infty}$  per  $t = 0$  e otteniamo

$$A = \mathcal{E} - R' i_{\infty} = \mathcal{E} - R' \frac{\mathcal{E}}{R} = \mathcal{E} \left( 1 - \frac{R'}{R} \right)$$

L'espressione della corrente risulta, posto  $\tau' = L/R'$ ,

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R'} (1 - e^{-t/\tau'}) + \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/\tau'} = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/\tau'} = i_{\infty} e^{-t/\tau'}$$

L'egualanza approssimata vale se  $R' \gg R$  e se il tempo  $t$  è abbastanza breve. La corrente tende a zero con costante di tempo  $\tau'$ , tanto minore quanto maggiore è  $R'$ .

La f.e.m. di autoinduzione vale

$$\mathcal{E}_L = -L \frac{di}{dt} = \frac{R'}{R} \mathcal{E} e^{-t/\tau'}$$

e risulta particolarmente elevata all'apertura: per  $t = 0$   $\mathcal{E}_L = R' \mathcal{E}/R \gg \mathcal{E}$ ; la corrente corrispondente è  $i_L = \mathcal{E}_L/R = i(t)$  e in effetti durante il processo l'unica f.e.m. agente è  $\mathcal{E}_L$ . Questa corrente, diversa da zero per un tempo molto breve, si chiama *extracorrente di apertura*.

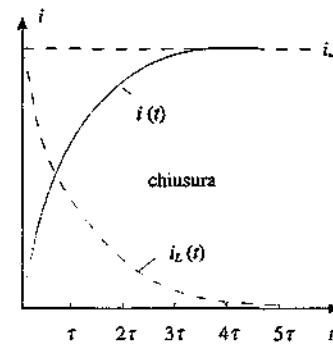


Figura 10.27

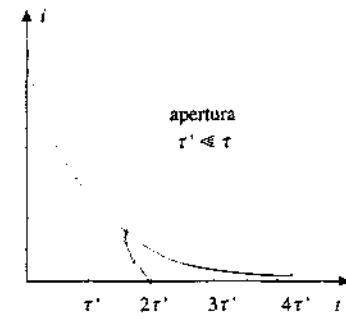


Figura 10.28

La f.e.m. si manifesta, quando si apre l'interruttore, come una d.d.p. tra i contatti di questo, che dà origine a una scintilla se il dielettrico è l'aria.  $R$  può essere pensata come *resistenza della scintilla* che mantiene chiuso il circuito per un breve tempo. Allo scopo di evitare questi fenomeni, che possono essere distruttivi negli interruttori di grossi impianti, come quelli di distribuzione dell'energia elettrica, si progettano speciali interruttori, ad esempio con i contatti immersi in olio: l'interruzione del circuito può avvenire così senza danni.

## 10.6 Energia magnetica

La presenza di una f.e.m. in un circuito implica, per definizione, un lavoro sulle cariche che costituiscono la corrente, positivo o negativo a seconda del segno della f.e.m.; negli esempi del paragrafo 10.3 abbiamo già calcolato alcuni bilanci energetici in presenza di f.e.m. indotte.

Riprendiamo ora in esame il circuito  $RL$  in serie del paragrafo 10.5 e scriviamo la legge di Ohm nella forma (10.24). La potenza erogata dal generatore quando la corrente ha il valore  $i$  è

$$\mathcal{E}i = R i^2 + L i \frac{di}{dt} \quad (10.28)$$

e il lavoro nel tempo  $dt$  vale

$$\mathcal{E}i dt = R i^2 dt + L i di \quad (10.29)$$

La (10.29) esprime il *bilancio energetico* del circuito. Il primo membro, pari a  $\mathcal{E}dq$ , è il lavoro compiuto dal generatore, secondo la definizione di f.e.m. di un generatore. Il termine  $R i^2 dt$  rappresenta il lavoro speso per fare circolare corrente nel circuito e trasformato in calore (effetto Joule), il termine  $L i di$  è il lavoro speso contro la f.e.m. di autoinduzione  $\mathcal{E}_L = -L di/dt$  per fare aumentare la corrente da  $i$  a  $i + di$ .

I valori dei tre termini della (10.28) sono mostrati in figura con  $i(t)$  data da (10.26). Fissato un qualunque valore di  $t$ , l'area sotto ciascuna curva tra zero e  $t$  fornisce il lavoro corrispondente. Quando la corrente ha raggiunto il valore di regime, il generatore continua a fornire la potenza

$$\mathcal{E}i_\infty = R i_\infty^2$$

necessaria per mantenere una corrente costante in un circuito resistivo.

Nell'intervallo di tempo in cui, a seguito della chiusura del circuito, la corrente passa da zero al valore  $i$  (che in particolare può essere quello di regime  $\mathcal{E}/R$ ), il generatore oltre al lavoro corrispondente all'effetto Joule deve spendere contro  $\mathcal{E}_L$  il lavoro

$$W = \int_0^i L i di = \frac{1}{2} L i^2$$

che non dipende dal modo in cui avviene la variazione di corrente, ma solo dai valori iniziale e finale. Possiamo quindi definire la cosiddetta *energia intrinseca della corrente*

$$U_L = \frac{1}{2} L i^2 \quad (10.30)$$

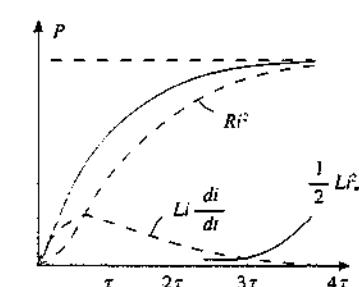


Figura 10.29

la cui variazione dà il lavoro fatto dal generatore contro la f.e.m. di autoinduzione durante la corrispondente variazione di corrente.

Nel passaggio da zero a  $i_\infty$   $U_L = L i_\infty^2 / 2$ ; se si apre il circuito la corrente torna a zero secondo la legge  $i = (\mathcal{E}/R) e^{-Rt/L}$  e nel resistore viene speso il lavoro

$$\int_0^\infty R i^2 dt = R \frac{\mathcal{E}^2}{R^2} \int_0^\infty e^{-2Rt/L} dt = \frac{1}{2} L \frac{\mathcal{E}^2}{R^2} = \frac{1}{2} L i_\infty^2$$

Durante la diminuzione il lavoro per fare circolare la corrente è fornito a spese dell'energia intrinseca: l'*energia immagazzinata nell'induttanza si ritrova alla fine dissipata sotto forma di calore nella resistenza*.

L'espressione (10.30) dell'energia intrinseca suggerisce che essa sia legata alla corrente e quindi localizzabile nel circuito in cui la corrente fluisce. D'altra parte questa energia viene ottenuta tramite il lavoro contro la f.e.m. autoindotta, legata alla variazione del flusso magnetico, che in questo caso è dovuta alla variazione del campo magnetico; alla fine della variazione, quando la corrente è costante, lo spazio intorno al circuito è sede di un campo magnetico che prima non esisteva. Viceversa, durante lo spegnimento, è la f.e.m. autoindotta che fornisce energia mantenendo la corrente e alla fine il campo magnetico è scomparso. Queste considerazioni fanno pensare di legare l'energia (10.30) al campo **B**, *localizzandola* nello spazio in cui esiste un campo magnetico: l'energia intrinseca della corrente appare cioè come *energia magnetica*, nello stesso senso con cui abbiamo definito un'energia elettrostatica legata al campo **E** (paragrafo 4.7).

Per provare che l'energia (10.30) è distribuita nello spazio con una densità che dipende dal valore locale del campo magnetico, consideriamo un tratto di solenoide rettilineo indefinito lungo  $d$ ; il coefficiente di autoinduzione per unità di lunghezza è dato da (8.36), il campo magnetico da (8.23). Si vede che

$$U_L = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} (\mu_0 n^2 \Sigma d) i^2 = \frac{B^2}{2\mu_0} \Sigma d = \frac{B^2}{2\mu_0} \tau$$

Lo stesso risultato si trova per il solenoide toroidale dell'esempio 8.11. In entrambi i casi la *densità di energia* risulta quindi

$$u_m = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

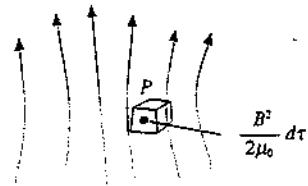
Data la struttura di questa espressione, che dipende solo dal valore del campo magnetico e dalla permeabilità del mezzo (che è il vuoto), siamo portati a concludere che il risultato trovato valga sempre, nel vuoto, qualunque sia l'andamento del campo magnetico e la sorgente che lo genera. Ricordando che nel vuoto  $B = \mu_0 H$ , diciamo che in una regione in cui esiste un campo magnetico è presente un'energia distribuita con densità

$$u_m = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{1}{2} \mu_0 H^2 = \frac{1}{2} HB \quad , \quad (10.31) \quad \text{Densità di energia magnetica}$$

che chiamiamo *densità di energia magnetica*. In un volume  $d\tau$  intorno al punto  $P$  in cui il campo magnetico vale  $\mathbf{B}$  c'è l'energia magnetica

$$dU_m = u_m d\tau = \frac{B^2}{2\mu_0} d\tau$$

e l'energia magnetica totale si ottiene integrando su tutto lo spazio in cui  $\mathbf{B}$  è diverso da zero:



$$U_m = \int_{\tau} \frac{B^2}{2\mu_0} d\tau \quad (10.32)$$

Figura 10.30

La formulazione (10.32) è in effetti la più generale; nei casi in cui si può definire l'induttanza la (10.30) porta agli stessi risultati di (10.32).

### Esempio 10.5

Un cavo coassiale è costituito da due superfici cilindriche coassiali di raggi  $R_1$  e  $R_2$ . Una corrente  $i$  fluisce in un verso nel conduttore interno e in verso opposto nel conduttore esterno. Calcolare l'induttanza e l'energia magnetica per unità di lunghezza del cavo.

#### Soluzione

Le linee del campo  $\mathbf{B}$  sono circonferenze di raggio  $r$  contenute in un piano ortogonale all'asse del sistema. Il campo magnetico è diverso da zero solo nell'intercapedine e ha l'espressione (8.10); in modulo

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \quad , \quad R_1 \leq r \leq R_2$$

Consideriamo il rettangolo infinitesimo lungo  $a$  e alto  $dr$ , di area  $d\Sigma = a dr$ , ortogonale alle linee di  $\mathbf{B}$ . Il flusso concatenato col rettangolo è

$$d\Phi = B d\Sigma = B a dr = \frac{\mu_0 i a}{2\pi} \frac{dr}{r}$$

Integrando tra  $R_1$  e  $R_2$ , sulla lunghezza  $a$  il flusso vale

$$\Phi = \frac{\mu_0 i a}{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 i a}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

Allora, per unità di lunghezza ( $a = 1$ ) abbiamo

$$L = \frac{\Phi}{i} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} \quad , \quad U_m = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} i^2 \quad . \quad (10.33)$$

Partendo invece da (10.32), la densità di energia magnetica nell'intercapedine è

$$u_m = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 i^2}{8\pi^2 r^2} \quad ;$$

nel volume infinitesimo  $d\tau$  costituito da un guscio cilindrico con superficie laterale  $2\pi r a$  e altezza  $dr$  c'è l'energia

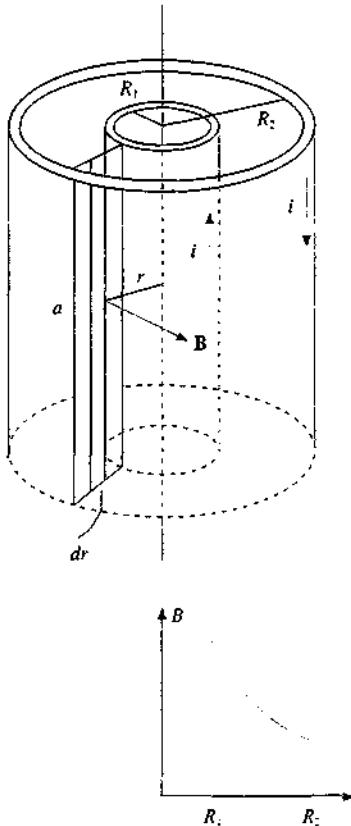


Figura 10.31

$$dU_m = u_m d\tau = \frac{\mu_0 i^2}{8\pi^2 r^2} 2\pi a r dr = \frac{\mu_0 i^2 a}{4\pi} \frac{dr}{r} ;$$

integrandi da  $R_1$  a  $R_2$  e ponendo  $a = 1$  si ottiene

$$U_m = \frac{\mu_0 i^2}{4\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 i^2}{4\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} ,$$

coincidente con l'espressione trovata prima.

Se il conduttore centrale è pieno e la corrente è distribuita sulla sezione con densità uniforme  $j = i/\pi R_1^2$ , nell'intercapedine non cambia nulla, ma all'interno, per  $0 \leq r \leq R_1$ , c'è il campo magnetico (8.30): in modulo

$$B = \frac{\mu_0 j r}{2} = \frac{\mu_0 i r}{2\pi R_1^2} .$$

Per unità di lunghezza si ha l'energia

$$U'_m = \frac{1}{2\mu_0} \int B^2 d\tau = \frac{1}{2\mu_0} \int_0^{R_1} \left( \frac{\mu_0 i r}{2\pi R_1^2} \right)^2 2\pi r dr = \frac{\mu_0}{16\pi} i^2 .$$

Confrontando con  $L i^2/2$  risulta che la parte interna dà il contributo  $\mu_0/8\pi$  all'induttanza per unità di lunghezza del cavo, che è dunque

$$L = \frac{\mu_0}{8\pi} + \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} = \frac{\mu_0}{2\pi} \left( \frac{1}{4} + \ln \frac{R_2}{R_1} \right) . \quad (10.34)$$

Il contributo interno non dipende dal raggio  $R_1$  e la sua importanza decresce al crescere del rapporto  $R_2/R_1$ .

Passiamo adesso ad esaminare il problema dell'energia magnetica in presenza di materiali magnetici. Per semplicità consideriamo un circuito magnetico toroidale avente  $N$  spire, con sezione di dimensioni piccole rispetto al diametro dell'anello, così da poter ritenere  $\mathbf{B}$  costante sulla sezione. Facendo passare la corrente dal valore zero al valore  $i$  il flusso concatenato con le  $N$  spire cambia e nasce la f.e.m.

$$\varepsilon_i = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{d}{dt} (N \sum B) = - N \sum \frac{dB}{dt} .$$

In un istante generico la legge del circuito è

$$\varepsilon = R i - \varepsilon_i = R i + N \sum \frac{dB}{dt}$$

e il lavoro speso dal generatore nel tempo  $dt$  è

$$\varepsilon i dt = R i^2 dt + N \sum i dB .$$

analoga alla (10.29). La variazione di energia magnetica è

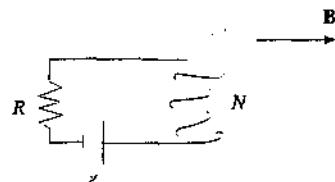


Figura 10.32

$$dU_m = N \sum i dB = H dB 2\pi r \Sigma ,$$

ricordando che  $H = N i / 2\pi r$ . Pertanto la variazione di energia magnetica per unità di volume risulta

$$du_m = H dB$$

e il lavoro fornito dal generatore per portare  $B$  da zero al valore finale è, per unità di volume,

$$u_m = \int_0^B H dB . \quad (10.35)$$

Il calcolo dell'integrale può essere eseguito se si conosce la relazione tra  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{H}$  (curva di magnetizzazione). Nei mezzi lineari  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ , con  $\mu$  costante indipendente da  $\mathbf{H}$  e quindi

$$u_m = \int_0^B H dB = \int_0^B \frac{B}{\mu} dB = \int_0^B \mu H dH \Rightarrow u_m = \frac{B^2}{2\mu} = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2} HB . \quad (10.36)$$

Le espressioni della densità di energia magnetica coincidono con (10.31), a parte la sostituzione di  $\mu_0$  con  $\mu$ ; esse hanno validità generale nei materiali diamagnetici e paramagnetici, mentre nei ferromagnetici si possono applicare solo in quelle situazioni in cui la permeabilità si può ritenere costante (ad esempio tratto lineare del ciclo di isteresi, figura 9.28).

L'energia magnetica totale si ottiene integrando (10.36) su tutto il volume in cui esiste il campo  $\mathbf{B}$ :

Energia magnetica

$$U_m = \int \frac{B^2}{2\mu} dV = \int \frac{1}{2} \mu H^2 dV . \quad (10.37)$$

$U_m$  corrisponde al lavoro speso dal generatore per produrre il campo magnetico, nel vuoto e nei materiali, in aggiunta al lavoro speso per fare circolare la corrente. Nei mezzi in cui (10.37) è valida l'energia magnetica viene completamente restituita nel processo inverso in cui il campo magnetico torna a zero: *nei mezzi lineari i processi di magnetizzazione e smagnetizzazione avvengono reversibilmente*.

Quando il materiale è ferromagnetico la relazione che lega  $\mathbf{B}$  ad  $\mathbf{H}$  non è analitica, ma è rappresentata dal ciclo di isteresi (paragrafo 9.7); l'integrale (10.35) non porta ad un risultato univoco.

Con riferimento alla figura 10.33 consideriamo la variazione di  $H$  da zero ad  $H_{max}$  che comporta lo spostamento del punto rappresentativo dello stato del sistema da  $P$  a  $Q$ ; in questo processo il generatore fornisce, per unità di volume, il lavoro

$$u_{PQ} = \int_P^Q H dB = \text{area del triangolo curvilineo } PQR ;$$

$u_{PQ}$  è positivo perché  $H$  è positivo e, siccome  $B$  cresce, anche  $dB$  è positivo. Se poi  $H$  torna da  $H_{max}$  a zero lo stato del sistema passa da  $Q$  a  $S$  e il lavoro vale

$$u_{QS} = \int_Q^S H dB = \text{area del triangolo curvilineo } RQS ,$$

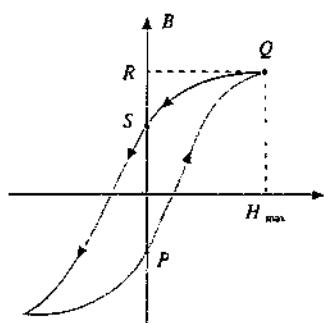


Figura 10.33

negativo ( $B$  diminuisce,  $dB < 0$ ). In totale e per unità di volume nel semiciclo descritto il generatore spende più di quanto riceve e la perdita è

$$u_{PQS} = u_{PQ} + u_{QS} = \text{area del triangolo curvilineo } PQS$$

Completando il ciclo, il lavoro speso e non recuperato per unità di volume del materiale è

$$W_t = \oint H dB$$

pari all'area racchiusa dalla curva che dà il ciclo di isteresi:  $W_t$  è assorbito dal materiale e trasformato in calore, segno che il processo di allineamento e disallineamento dei domini di Weiss non è reversibile. Nella Tabella 10.1 è riportato  $W_t$  per alcuni dei materiali già elencati nella Tabella 9.4.

**Tabella 10.1. Area del ciclo di isteresi**

	$W_t (\text{J/m}^3)$
ferro puro (99.95%)	30
ferro-silicio (0.5%)	230
ferro-nichel (45%)	120
ferro 16% - nichel 79% - molibdeno 5%	2

Se un materiale ferromagnetico deve essere sottoposto ad un campo magnetico variabile, come avviene ad esempio nei motori elettrici e nei trasformatori, conviene in generale che il ciclo di isteresi sia stretto, e quindi  $W_t$  piccolo, in modo da ridurre le perdite di energia.

#### Esempio 10.6

Il permalloy 45 ha un ciclo di isteresi con area  $W_t = 120 \text{ J/m}^3$ ; il calore specifico è  $c = 400 \text{ J/kg K}$ , la densità  $\rho = 8 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ . Supponendo il sistema termicamente isolato, calcolare l'innalzamento di temperatura in un secondo se il ciclo di isteresi viene eseguito con frequenza  $v = 50 \text{ Hz}$ .

#### Soluzione

Il lavoro assorbito in un secondo è

$$W_t v = 120 \cdot 50 = 6 \cdot 10^3 \text{ J/m}^3 \text{ s}$$

La capacità termica per unità di volume è  $c\rho$  per cui l'aumento di temperatura si ricava dall'eguaglianza

$$W_t v = c\rho \Delta T \Rightarrow \frac{6 \cdot 10^3}{4 \cdot 10^2 \cdot 8 \cdot 10^3} = 1.9 \cdot 10^{-3} \text{ K/s}$$

In un minuto la variazione sarebbe

$$\Delta T = 0.11 \text{ K} = 0.11^\circ\text{C}$$

## 10.7 Pressione magnetica. Forze su corpi magnetizzati

Nel paragrafo 4.9 abbiamo calcolato la forza tra le armature di un condensatore carico collegate ad un generatore che mantiene costante la d.d.p. tra di esse e nell'esempio 5.8 la forza con cui una lastra di materiale dielettrico viene attratta verso l'interno di un condensatore piano, sempre in una situazione di d.d.p. costante. In entrambi i casi abbiamo scritto il bilancio energetico del processo, in cui interviene anche il generatore, e abbiamo dimostrato che la componente della forza lungo una certa direzione  $x$  si calcola secondo (4.39) come derivata dell'energia elettrostatica rispetto a  $x$ ,

$$F_x = \left( \frac{\partial U_e}{\partial x} \right)_{V=\text{cost}}$$

In sostanza varia la capacità del sistema e la costanza della d.d.p. comporta uno spostamento di cariche con conseguente lavoro del generatore; la variazione dell'energia totale, somma dell'energia interna del generatore e dell'energia elettrostatica, risulta eguale ed opposta alla variazione dell'energia elettrostatica,  $dU = -dU_e$ .

Consideriamo ora un circuito, contenente un generatore e percorso dalla corrente  $i$ , nel quale avvenga una deformazione e l'induttanza cambi da  $L$  a  $L + dL$ ; supponiamo inoltre che il generatore sia in grado di mantenere costante la corrente, lavorando contro la f.e.m. indotta che compare nel circuito a seguito del cambiamento di induttanza.

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d}{dt} (L i) = -i \frac{dL}{dt}$$

Nel circuito avviene la variazione di energia magnetica

$$dU_m = \frac{i^2}{2} dL$$

e il generatore compie il lavoro

$$dW_{\text{gen}} = -\mathcal{E}_i i dt = i^2 dL = 2 dU_m$$

a spese della propria energia interna ( $dW_{\text{gen}} = -dU_{\text{gen}}$ ).

La variazione dell'energia totale, somma dell'energia interna del generatore e dell'energia magnetica, è

$$dU = dU_{\text{gen}} + dU_m = -dW_{\text{gen}} + dU_m = -dU_m$$

opposta alla variazione dell'energia magnetica. Ne segue

$$F_x = - \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)_{i=\text{cost}} = \left( \frac{\partial U_m}{\partial x} \right)_{i=\text{cost}} \quad (10.38)$$

come espressione della componente della forza secondo la direzione  $x$ . Se la variazione di induttanza è positiva e quindi l'*energia magnetica aumenta*, l'*energia totale diminuisce* e il *sistema compie lavoro*: esso *tende a evolvere spontaneamente verso stati in cui l'energia magnetica è massima*. Per fare avvenire il processo contrario bisogna invece applicare una forza dall'esterno, compiendo lavoro sul sistema. Nel resto del paragrafo applichiamo questo risultato ad alcuni casi interessanti.

### Pressione magnetica

Le spire di un solenoide rettilineo sono sottoposte a una forza radiale diretta verso l'esterno. Che debba essere così lo si capisce considerando la forza magnetica esercitata su una spira dalle altre: la forza elementare (7.13) su ciascun tratto di spira risulta sempre rivol-

ta verso l'esterno. Eseguiamo il calcolo applicando (10.38); l'energia magnetica contenuta in un tratto di solenoide lungo  $d$  e con sezione  $\Sigma = \pi r^2$  si ottiene da (10.32):

$$U_m = \frac{B^2}{2\mu_0} \Sigma d = \frac{B^2}{2\mu_0} \pi r^2 d ,$$

ammettendo che  $B$  sia uniforme. La forza vale

$$F = \left( \frac{dU_m}{dr} \right)_{i=\text{cost}} = \frac{B^2}{2\mu_0} 2\pi r d .$$

$S = 2\pi r d$  è la superficie laterale del tratto di solenoide lungo  $d$  e vediamo che su tale superficie agisce la pressione

$$p = \frac{F}{S} = \frac{B^2}{2\mu_0} . \quad (10.39) \quad \text{Pressione}$$

coincidente con la densità di energia magnetica nel solenoide. Abbiamo così ritrovato la struttura (4.37), che *eguaglia la pressione alla densità di energia*. Nel caso specifico  $B = \mu_0 n i = \mu_0 j_i$ , con  $j_i$  densità lineare di corrente, e quindi

$$p = \frac{1}{2} \mu_0 (n i)^2 = \frac{1}{2} \mu_0 j_i^2 .$$

Se il solenoide è avvolto su un mezzo con permeabilità magnetica  $\mu = \kappa_m \mu_0$ , l'energia magnetica e la forza sono  $\kappa_m$  volte quelle nel vuoto, a parità di corrente.

Nella progettazione meccanica di un solenoide bisogna tener conto della pressione magnetica. Ad esempio, in un solenoide capace di produrre un campo  $B = 1$  T, la pressione vale  $p = 1/8 \pi \cdot 10^{-7} \approx 4 \cdot 10^5$  Pa, cioè circa quattro volte la pressione atmosferica: su un'area di  $1 \text{ m}^2$  ciò equivale alla forza peso di una massa di circa 40 tonnellate (4 kg per  $\text{cm}^2$ ).

Come paragone, si consideri che la pressione eletrostatica sulla calotta sferica di un generatore Van de Graaf con  $R = 1$  m e campo  $E = 6 \cdot 10^6$  V/m è  $p = \epsilon_0 E^2/2 \approx 160$  Pa, tre ordini di grandezza inferiore.

### Forza su un materiale magnetizzato

Una sbarretta di materiale con permeabilità magnetica relativa  $\kappa_m = 1 + \chi_m$  è parzialmente inserita, per un tratto  $x$ , all'interno di un solenoide rettilineo lungo  $d$ , avente la stessa sezione della sbarretta. Agli effetti dei calcoli assumiamo che l'induttanza abbia l'espressione (8.36) valida per unità di lunghezza in un solenoide indefinito con densità di spire  $n$  e sezione  $\Sigma$ . Scriviamo pertanto, tenuto conto che nel tratto  $x$  c'è il materiale e nel tratto  $d - x$  il vuoto,

$$L = \mu n^2 \Sigma x + \mu_0 n^2 \Sigma (d - x)$$

L'energia magnetica è

$$U_m = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 \Sigma [d + (\kappa_m - 1)x] i^2 = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 \Sigma (d + \chi_m x) i^2 .$$

Secondo (10.38) la forza vale

$$F = \left( \frac{dU_m}{dx} \right)_{i=\text{cost}} = \frac{1}{2} \mu_0 \chi_m \Sigma n^2 i^2 = \frac{1}{2} \mu_0 \chi_m \Sigma H^2 . \quad (10.40)$$

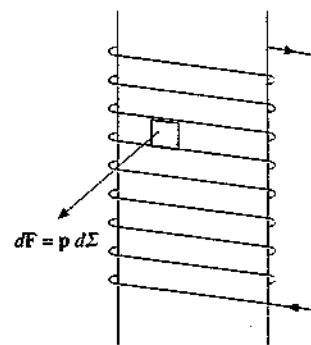


Figura 10.34

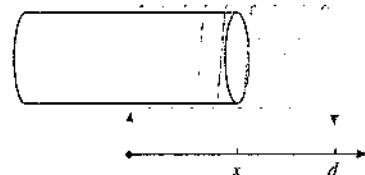


Figura 10.35

Se la suscettività magnetica  $\chi_m$  è *positiva* (materiali paramagnetici e ferromagnetici) l'energia magnetica aumenta con  $x$ , la *forza* è *positiva* e la *sbarretta* viene *attratta* dentro il solenoide, verso lo stato di massima energia magnetica, raggiunto quando  $x = d$ . Viceversa, se  $\chi_m$  è *negativa* (materiali diamagnetici), la *sbarretta* è *spinta verso l'esterno*. La forza agente non dipende dalla posizione, nell'approssimazione di solenoide indefinito. Si osservi che la struttura di (10.40) coincide con quella trovata nell'esempio 5.8,  $F = \varepsilon_0 \chi_m \sum E^2 / 2$ .

Alla stessa espressione della forza si arriva da (10.31). Nell'avanzamento della sbarretta della quantità  $dx$  all'interno del volume  $d\tau = \sum dx$  la densità di energia passa dal valore  $\mu_0 H^2 / 2$  al valore  $\mu H^2 / 2$ , per cui la variazione di energia magnetica è

$$dU_m = \frac{1}{2} (\mu - \mu_0) \sum H^2 dx = \frac{1}{2} \mu_0 \chi_m \sum H^2 dx \Rightarrow F = \frac{dU_m}{dx}$$

Notiamo che  $dU_m$  è la variazione di energia magnetica di *tutto* il sistema, in quanto, escluso  $d\tau$ , l'energia magnetica altrove non cambia.

Basandosi sull'azione di queste forze attrattive o repulsive si possono costruire sistemi di misura della suscettività  $\chi_m$ : ad esempio si può disporre il solenoide verticalmente ed equilibrare la forza magnetica (e la forza peso) con l'azione di una molla o di una bilancia; al solenoide si può sostituire un elettromagnete a C con le superfici polari verticali.

Ricordiamo, come detto nei capitoli precedenti, che le *forze* descritte *nascono* dall'*interazione* tra la *corrente* nel solenoide che produce il campo  $B$  e le *correnti microscopiche* generate nel mezzo dalla presenza di  $B$ .

### Esempio 10.7

Un piccolo campione di materiale magnetico avente volume  $\tau$  è posto sull'asse di un solenoide, in una zona in cui il campo magnetico dipende dalla posizione. Calcolare la forza agente e confrontare con il risultato dell'esempio 9.4.

#### Soluzione

In assenza del campione l'energia magnetica ha un dato valore. Quando il campione viene posto in un punto di coordinata  $x$  sull'asse del solenoide, nel volume  $\tau$  si ha la variazione di energia

$$\Delta U_m = \left( \frac{B^2}{2\mu} - \frac{B_0^2}{2\mu_0} \right) \tau$$

$B$  è il campo nel campione, di permeabilità  $\mu = \mu_0 \kappa_m$ , e  $B_0$  il campo nel vuoto, cioè prima dell'inserzione del campione. Se il campo magnetico fosse uniforme, tale variazione sarebbe indipendente da  $x$  ovvero spostando il campione l'energia magnetica non cambia e non si hanno forze. Però il campo dipende da  $x$  e la variazione di energia magnetica per uno spostamento  $dx$  coincide con la variazione di  $\Delta U_m$ : si ha

$$dU_m = \frac{\tau}{\mu_0} \left( \frac{B}{\kappa_m} \frac{dB}{dx} - B_0 \frac{dB_0}{dx} \right) dx = \frac{\tau B_0}{\mu_0} \left( \frac{dB}{dx} - \frac{dB_0}{dx} \right) dx = \frac{\tau}{\mu_0} \chi_m B_0 \frac{dB_0}{dx} dx$$

$$F = \frac{dU_m}{dx} = \frac{\tau}{m_0} \chi_m B_0 \frac{dB_0}{dx}$$

Nella dimostrazione abbiamo assunto  $B = \kappa_m B_0$ : il risultato coincide con quello trovato nell'esempio 9.4; tenuto conto che là  $dB/dx$  sta per  $dB_0/dx$  e che  $B/\kappa_m = B_0$ .

### Forza tra le superficie polari di un elettromagnete

Tra i poli di un magnete, ad esempio a C o ad H, si esercitano notevoli forze attrattive. In effetti l'energia magnetica aumenterebbe a seguito di una diminuzione dell'interfero, per-

ché aumenterebbe l'induttanza dell'avvolgimento (ad una parte in aria del circuito magnetico verrebbe sostituita una parte in materiale ferromagnetico). Generalizzando la nozione di pressione magnetica, si utilizza (10.39) con il valore di  $B$  nell'interferro e poi, nota la superficie, si ottiene la forza direttamente o tramite un integrale se il campo non è uniforme. Abbiamo già visto nel caso del solenoide come si possono avere pressioni dell'ordine di quella atmosferica con campi magnetici dell'ordine del tesla.

### Esempio 10.8

Un circuito magnetico è costituito da un tratto a forma di  $U$ , su cui sono avvolute  $N$  spire percorse dalla corrente  $i$ , e da un'ancora dello stesso materiale ferromagnetico del tratto a  $U$ , separata da questo da una piccola distanza  $x$ . Detta  $\Sigma$  la sezione del circuito magnetico e  $s + 2x$  la lunghezza totale del circuito magnetico, calcolare la forza con cui l'ancora è attrattata dal magnete a  $U$ .

#### Soluzione

Seguiamo il metodo esposto nel paragrafo 9.8 per calcolare il campo magnetico. Il teorema di Ampère per il campo  $\mathbf{H}$  dà

$$2x H_0 + s H = N i$$

mentre la relazione tra  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{H}$  è

$$B = \mu_0 H_0 = \mu H = \mu_0 \kappa_m H$$

dato che il campo magnetico è lo stesso lungo tutto il circuito mentre  $\mathbf{H}$  cambia. Pertanto

$$2x \frac{B}{\mu_0} + s \frac{B}{\mu_0 \kappa_m} = N i \Rightarrow B = -\frac{\mu_0 \kappa_m N i}{2 \kappa_m x + s}$$

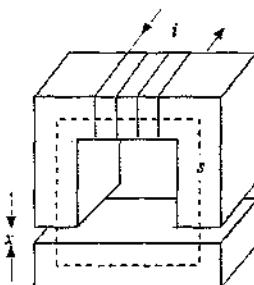


Figura 10.36

Le densità di energia magnetica nell'interferro e nel mezzo sono rispettivamente

$$u_0 = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{\kappa_m^2 (N i)^2}{(2 \kappa_m x + s)^2} \quad , \quad u_m = \frac{B^2}{2\mu} = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{\kappa_m (N i)^2}{(2 \kappa_m x + s)^2} \quad .$$

e l'energia magnetica totale del circuito magnetico è

$$U_m = u_0 2x \Sigma + u_m s \Sigma = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 \kappa_m \Sigma (N i)^2}{2 \kappa_m x + s} \quad .$$

La forza  $F$  esercitata sull'ancora vale

$$F = \frac{dU_m}{dx} = -\frac{\mu_0 \kappa_m^2 \Sigma (N i)^2}{(2 \kappa_m x + s)^2} = -2 \Sigma \frac{B^2}{2\mu_0}$$

dove si è usata l'espressione del campo magnetico trovata sopra. Dividendo per l'area  $2 \Sigma$  delle superfici che sono affacciate si ottiene l'espressione (10.39) per la *pressione magnetica*, che dunque risulta valida anche in questi casi. Il segno meno è dovuto al fatto che l'energia magnetica diminuisce all'aumentare di  $x$  e mostra che la forza è *attrattiva*.

Se l'ancora è fissata ad una molla che tende ad allontanarla dal magnete, riducendo la corrente a zero può predominare la forza elastica e l'ancora si stacca mentre aumentando la corrente predomina la forza magnetica e l'ancora aderisce al magnete. In questo modo si realizza un *movimento a comando elettromagnetico* che può servire per aprire e chiudere un interruttore, per sistemi di agganciamento o di sostegno e altre svariate applicazioni.

È interessante completare le considerazioni su forza ed energia magnetica svolte in questo paragrafo nel caso in cui il campo magnetico sia generato da un magnete permanente. A parità di valore di  $\mathbf{B}$  le forze misurate sono le stesse e si ricavano derivando l'energia magnetica, che a sua volta viene calcolata a partire dalla densità (10.31). Questa volta però le variazioni di energia magnetica sono le uniche fonti di lavoro, non essendoci generatori: se le forze del campo compiono un lavoro l'energia magnetica deve diminuire e, viceversa, se il lavoro è compiuto contro le forze del campo l'energia magnetica deve aumentare. L'energia magnetica deve avere pertanto un segno negativo (ammettendo che sia nulla dove non si sente l'interazione magnetica), ma la forza deve essere espressa come  $-\partial U_m / \partial x$  e i segni si cancellano.

## 10.8 Induzione mutua

Nel paragrafo 8.5 abbiamo definito il coefficiente di *induzione mutua* tra due circuiti secondo (8.34)

$$M = \frac{\Phi_{1,2}}{i_1} = \frac{\Phi_{2,1}}{i_2} ;$$

la dimostrazione dell'egualanza tra i due rapporti ( $M_{1,2} = M_{2,1}$ ), effettuata nel paragrafo 8.7 servendosi del potenziale vettore, verrà esposta in modo diverso più avanti, utilizzando un argomento energetico.

Due *circuiti* per i quali sia  $M \neq 0$  si dicono *accoppiati*: essi sono caratterizzati completamente dalla loro resistenza, dalla loro induttanza e dal *coefficiente di induzione mutua*, detto anche *induttanza mutua*. Quest'ultima dipende dalla forma dei circuiti e dalla loro posizione relativa, oltre che dalla permeabilità dei mezzi circostanti.

Come già affermato nel paragrafo 10.5 per il fenomeno dell'autoinduzione, l'induzione tra due circuiti diventa fondamentale quando si hanno variazioni di corrente e quindi di flusso concatenato tra un circuito e l'altro o anche quando c'è un movimento relativo. Supponendo che  $M$  sia costante (circuiti fissi e permeabilità invariabile), si ha per le f.e.m. indotte in un circuito dalla variazione di corrente nell'altro

$$\mathcal{E}_1' = -\frac{d\Phi_{2,1}}{dt} = -M \frac{di_2}{dt}, \quad \mathcal{E}_2' = -\frac{d\Phi_{1,2}}{dt} = -M \frac{di_1}{dt} . \quad (10.41)$$

Queste vanno sommate in ciascun circuito alle f.e.m. di autoinduzione

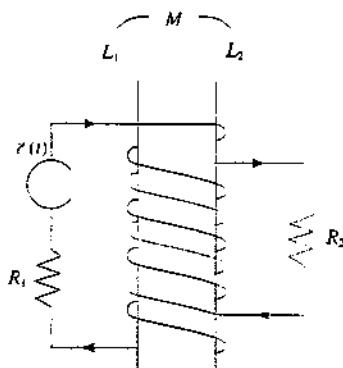


Figura 10.37

$$\mathcal{E}_1'' = -L_1 \frac{di_1}{dt}, \quad \mathcal{E}_2'' = -L_2 \frac{di_2}{dt} .$$

Abbiamo quindi per due circuiti come in figura, in cui c'è un generatore di f.e.m. variabile nel primo e nessun generatore nel secondo, le seguenti espressioni della legge di Ohm:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t) - L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} &= R_1 i_1 , \\ -L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} &= R_2 i_2 . \end{aligned} \quad (10.42)$$

Le (10.42) costituiscono un *sistema di equazioni differenziali accoppiate*: il termine di accoppiamento in ciascuna è quello contenente  $M$ . Vediamo che la presenza di una corrente  $i_2$  nel circuito senza generatore è possibile proprio grazie al processo di induzione mutua: si verifica in pratica uno *scambio di energia tra i due circuiti mediante il campo magnetico variabile*. Anche con un generatore di f.e.m. costante nel primo circuito si può avere corrente nel secondo circuito durante i fenomeni transitori che si verificano se si apre o chiude il primo circuito.

Un'applicazione fondamentale del fenomeno dell'induzione mutua si ha nei trasformatori; risolveremo esplicitamente le (10.42) applicate ad un trasformatore nell'esempio 11.5 con  $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \sin(\omega t + \phi)$ .

### Esempio 10.9

Una bobina compatta  $S_1$  è composta da  $N_1$  spire di raggio  $r_1$ . Una seconda bobina compatta  $S_2$ , costituita da  $N_2$  spire di raggio  $r_2 \ll r_1$ , è posta nell'intorno del centro della prima bobina. L'angolo tra i versori normali  $\mathbf{u}_1$  e  $\mathbf{u}_2$ , delle due bobine è  $\theta$ . Un generatore inserito nel circuito  $S_2$  fa circolare la corrente  $i = i_0 \cos \omega t$ . Calcolare la f.e.m. indotta nella bobina  $S_1$ .

#### Soluzione

Occorre innanzitutto calcolare l'induttanza mutua. Sfruttiamo l'egualanza  $M_{1,2} = M_{2,1}$  calcolando il flusso concatenato con  $S_2$  prodotto da una generica corrente  $i_1$  che circola in  $S_1$ . Sceglieremo cioè la situazione più conveniente, come consigliato nel paragrafo 8.5. Il campo magnetico nel centro della bobina  $S_1$  è dato da (8.13):

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0 N_1 i_1}{2r_1} \mathbf{u}_1$$

Con  $r_2 \ll r_1$ , possiamo supporre  $\mathbf{B}_1$  uniforme sulla sezione di  $S_2$  per cui

$$\Phi_{1,2} = N_2 \sum_2 \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = \frac{\mu_0 N_1 N_2 \pi r_2^2 \cos \theta}{2r_1} i_1$$

$$M = \frac{\Phi_{1,2}}{i_1} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 \pi r_2^2 \cos \theta}{2r_1}$$

Vediamo che il calcolo di  $\Phi_{1,2}$  è stato agevole mentre quello di  $\Phi_{2,1}$ , sarebbe stato praticamente impossibile.

La f.e.m. indotta secondo (10.41) è

$$\mathcal{E}_1(t) = -M \frac{di_2}{dt} = M \omega i_0 \sin \omega t = \frac{\mu_0 N_1 N_2 \pi r_2^2 \cos \theta}{2r_1} \omega i_0 \sin \omega t$$

Se la bobina  $S_2$  ruotasse con velocità angolare costante  $\Omega$  così che  $\cos \theta = \cos \Omega t$ , scritto  $M = A \cos \Omega t$  con  $A = \mu_0 N_1 N_2 \pi r_2^2 / 2r_1$ , sarebbe

$$\mathcal{E}_1(t) = -\frac{d}{dt} (M i_2) = -M \frac{di_2}{dt} - i_2 \frac{dM}{dt} = A i_0 (\omega \cos \Omega t \sin \omega t + \Omega \sin \Omega t \cos \omega t)$$

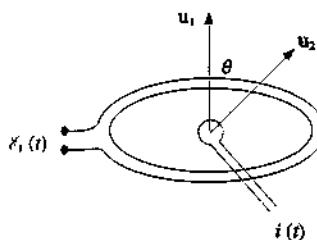


Figura 10.38

### 10.9 Energia magnetica di circuiti accoppiati

Anche per un sistema di due *circuiti accoppiati* si definisce un'energia magnetica in modo analogo a quanto visto per un circuito percorso da corrente nel para-

grafo 10.6. Supponiamo che inizialmente le correnti nei circuiti siano nulle e portiamo la corrente  $i_1$  al valore di regime mantenendo  $i_2 = 0$ ; per fare ciò il generatore del primo circuito spende il lavoro  $U_1 = L_1 i_1^2 / 2$ . Successivamente si porta la corrente  $i_2$  al valore di regime mentre  $i_1$  resta invariata: il generatore del secondo circuito spende  $U_2 = L_2 i_2^2 / 2$  e quello del primo, dovendo lavorare contro la f.e.m. di induzione mutua causata dalla variazione di  $i_2$ , spende

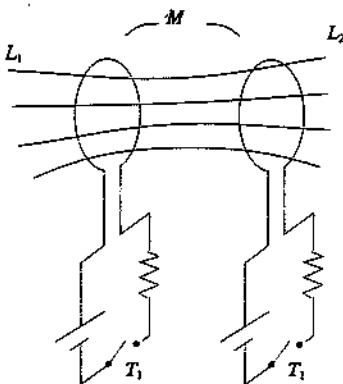


Figura 10.39

$$U_{2,1} = - \int \mathcal{E}_1 i_1 dt = \int M_{2,1} \frac{di_2}{dt} i_1 dt = M_{2,1} i_1 \int di_2 = M_{2,1} i_1 i_2$$

In totale il lavoro speso dai generatori che si è trasformato in energia legata alla presenza del campo magnetico è

$$\frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M_{2,1} i_1 i_2$$

Portando prima  $i_2$  a regime con  $i_1 = 0$  e poi  $i_1$  a regime con  $i_2$  costante il lavoro speso è

$$\frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M_{1,2} i_1 i_2$$

Poiché lo stato iniziale e lo stato finale sono rispettivamente eguali nei due casi, eguale deve essere la variazione di energia magnetica e si conclude che  $M_{1,2} = M_{2,1} = M$ , come già dimostrato per altra via.

L'espressione dell'*energia magnetica* del sistema di *due circuiti accoppiati* è dunque

Energia magnetica  
per due circuiti accoppiati

$$U_m = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2 \quad . \quad (10.43)$$

Oltre a  $U_m$  i generatori forniscono naturalmente il lavoro necessario per fare circolare le correnti  $i_1$  e  $i_2$ .

La (10.43) è strutturalmente simile all'espressione dell'energia elettrostatica di due sfere conduttrici, con raggi  $R_1$  e  $R_2$  e poste a distanza  $d$ , calcolata nell'esempio 4.16:

$$U_e = \frac{q_1^2}{8\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{q_2^2}{8\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 d} = \frac{q_1^2}{2C_1} + \frac{q_2^2}{2C_2} + \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 d} \quad ;$$

i primi due termini rappresentano l'energia elettrostatica dei due conduttori, considerati singolarmente, e il terzo termine è l'*energia di interazione mutua*.

Immaginiamo ora di spostare i due circuiti così che l'induttanza mutua vari di  $dM$ , restando però costanti le due correnti  $i_1$  e  $i_2$ . La variazione di energia magnetica è

$$dU_m = i_1 i_2 dM$$

e nei due circuiti si manifestano le f.e.m. indotte

$$\mathcal{E}_1 = -i_2 \frac{dM}{dt} \quad , \quad \mathcal{E}_2 = -i_1 \frac{dM}{dt}$$

I generatori devono pertanto spendere i lavori

$$dW_1 = -\mathcal{E}_1 i_1 dt = i_1 i_2 dM \quad , \quad dW_2 = -\mathcal{E}_2 i_2 dt = i_1 i_2 dM \quad ,$$

ovvero in totale

$$dW_{\text{gen}} = dW_1 + dW_2 = 2 i_1 i_2 dM = 2 dU_m \quad .$$

La variazione di energia magnetica rende dunque conto della metà del lavoro del generatore; l'altra metà deve corrispondere al lavoro meccanico nello spostamento dei circuiti,

$$dW_{\text{mecc}} = dU_m = i_1 i_2 dM = dU_{\text{acc}} \quad , \quad (10.44)$$

dove nell'ultima eguaglianza abbiamo messo in evidenza che in realtà la variazione dell'energia magnetica (10.43) è eguale alla variazione dell'energia di accoppiamento essendo  $U_1$  e  $U_2$  costanti.

In uno spostamento finito che comporti soltanto la variazione  $\Delta M$  dell'induttanza mutua si ha, integrando (10.44),

$$W_{\text{mecc}} = \Delta U_{\text{acc}} = i_1 i_2 \Delta M \quad , \quad W_{\text{gen}} = 2 i_1 i_2 \Delta M \quad .$$

Se in particolare i due circuiti sono inizialmente così lontani da poter supporre  $M = 0$  e vengono poi avvicinati fino a che l'induttanza mutua vale  $M$ , il lavoro corrispondente è  $M i_1 i_2$ , eguale all'energia di accoppiamento, mentre  $W_{\text{gen}} = 2 M i_1 i_2$ .

Concludiamo che nello spostamento dei due circuiti accoppiati c'è uno scambio di energia tra i generatori e il sistema: se  $dM > 0$  i generatori erogano lavoro e questo va in *aumento di energia magnetica e in lavoro meccanico compiuto dalle forze del campo*, se  $dM < 0$  i generatori assorbono energia, proveniente dalla *diminuzione di energia magnetica e dal lavoro compiuto (dall'esterno) contro le forze del campo*.

Nel bilancio energetico complessivo la variazione dell'energia totale è opposta alla variazione dell'energia magnetica, in quanto

$$dU = dU_{\text{gen}} + dU_m = -dW_{\text{gen}} + dU_m = -2 dU_m + dU_m = -dU_m \quad ,$$

e la componente della forza nella direzione  $x$  si scrive

$$F_x = \left( \frac{dU_m}{dx} \right)_{i=\text{cost}} = \left( \frac{dU_{\text{acc}}}{dx} \right)_{i=\text{cost}} \quad . \quad (10.45)$$

Dalle derivate spaziali dell'energia magnetica, coincidenti con quelle dell'energia di accoppiamento, si possono calcolare le componenti della forza magnetica agente su un circuito immesso nel campo di un altro circuito, nell'ipotesi che le correnti e i coefficienti di autoinduzione siano costanti. Si dimostra anche che se il circuito può ruotare rispetto ad un asse il momento della forza rispetto all'asse di rotazione è

$$M_\theta = \left( \frac{dU_m}{d\theta} \right)_{i=\text{cost}} = \left( \frac{dU_{\text{acc}}}{d\theta} \right)_{i=\text{cost}} \quad , \quad (10.46)$$

indicando con  $\theta$  l'angolo che descrive la rotazione: la proprietà discende da (10.44) e dalla relazione  $dW = M_\theta d\theta$  tra lavoro nella rotazione e momento della forza.

È importante precisare a questo punto che il coefficiente di induzione mutua, e di conseguenza l'energia di accoppiamento, vanno considerati con il segno:  $M$  cioè può essere positivo o negativo, a differenza di  $L$  che si assume sempre positivo. Fissato il verso dell'autoflusso  $L_1 i_1$  in un circuito, che è legato a quello della corrente  $i_1$  dalla regola la vite, il flusso  $M i_2$  dovuto all'altro circuito può essere *concordo* o *discorde* all'autoflusso: nel primo caso si assume  $M$  positivo e nel secondo negativo.

Giustifichiamo questa scelta con un esempio. Prendiamo due spire coassiali poste in piani paralleli distanti  $x$ : esse si *attirano* se percorse da *correnti concordi* e si *repellono* se percorse da *correnti discordi*; misuriamo  $x$  a partire dal centro della prima spira e supponiamo che le correnti siano concordi. Il coefficiente  $M$  aumenta in modulo al diminuire della distanza  $x$  e così fa l'energia di accoppiamento  $M i_1 i_2$ , la forza sulla seconda spira, derivata dell'energia rispetto a  $x$ , dovrebbe risultare negativa essendo attrattiva e quindi  $d U_{acc} / dx$  dovrebbe essere negativa. Ciò è garantito se  $M$  è positivo in quanto così  $M i_1 i_2$  è funzione decrescente di  $x$  e ha derivata negativa. In effetti la scelta enunciata sopra assegna valore positivo a  $M$  nel caso delle correnti concordi.

Il segno di  $M$  riflette il fatto che l'energia di accoppiamento possa essere positiva o negativa, ovvero la forza repulsiva o attrattiva; oltre che al verso della forza esso è collegato al senso della rotazione determinata dal momento (10.46). È naturalmente dal segno di  $M$  dipende quello delle f.e.m. indotte (10.41): si verifica facilmente che la convenzione sul segno di  $M$  comporta, nel caso di forza attrattiva, che le f.e.m. indotte si oppongono alle correnti  $i_1$  e  $i_2$ , come deve essere.

In definitiva il *valore* di  $M$  è completamente determinato dalla *configurazione geometrica*, dalla *permeabilità del mezzo* e dai *versi di percorrenza delle correnti nei circuiti*.

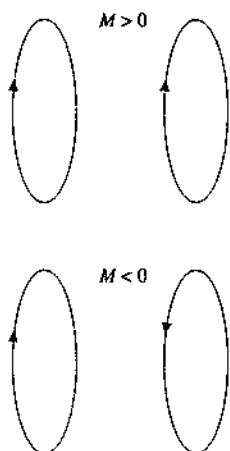


Figura 10.40

### Energia magnetica di $n$ circuiti accoppiati

Per estendere il calcolo dell'energia magnetica ad un sistema di  $n$  circuiti accoppiati riscriviamo la (10.43) in un modo che è suscettibile di generalizzazione: posto  $L_1 = M_{1,1}$ ,  $L_2 = M_{2,2}$ ,  $M_{1,2} = M_{2,1} = M$ , si ha

$$\begin{aligned} U_m &= \frac{1}{2} M_{1,1} i_1^2 + \frac{1}{2} M_{1,2} i_1 i_2 + \frac{1}{2} M_{2,1} i_1 i_2 + \frac{1}{2} M_{2,2} i_2^2 = \\ &= \frac{1}{2} i_1 (M_{1,1} i_1 + M_{2,1} i_2) + \frac{1}{2} i_2 (M_{1,2} i_1 + M_{2,2} i_2) = \frac{1}{2} (i_1 \Phi_1 + i_2 \Phi_2) \quad (10.47) \end{aligned}$$

avendo chiamato  $\Phi_1 = M_{1,1} i_1 + M_{2,1} i_2$  il flusso totale concatenato col primo circuito, dovuto al campo magnetico risultante  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2$  prodotto dai due circuiti, e analogamente  $\Phi_2 = M_{1,2} i_1 + M_{2,2} i_2$  il flusso totale concatenato col secondo circuito.

La (10.47) si applica a  $n$  circuiti accoppiati scrivendo

$$U_m = \frac{1}{2} \sum_1^n \sum_k M_{j,k} i_j i_k = \frac{1}{2} \sum_1^n i_j \Phi_j \quad (10.48)$$

La quantità

$$\Phi_j = \sum_1^n M_{j,k} i_k$$

dà il *flusso totale del campo magnetico*  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 + \dots + \mathbf{B}_n$  attraverso il circuito

$j$ -esimo e consta di un termine di autoflusso ( $k = j$ ) e di  $n-1$  termini di flusso di induzione mutua. I coefficienti con indici eguali,  $M_{j,j}$ , danno le *induttanze*  $L_j$  dei singoli circuiti e i coefficienti con indici diversi l'*induttanza mutua tra il circuito  $j$ -esimo e il circuito  $k$ -esimo*, per cui  $M_{j,k} = M_{k,j}$ .

Quando si sposta rigidamente il solo circuito  $j$ -esimo rispetto agli altri che restano fissi e si mantengono costanti tutte le correnti si ha:

$$\begin{aligned} dU_m &= d\left(\frac{1}{2} i_1 \Phi_1 + \frac{1}{2} i_2 \Phi_2 + \dots + \frac{1}{2} i_j \Phi_j + \dots + \frac{1}{2} i_n \Phi_n\right) = \\ &= \frac{1}{2} i_1 i_j dM_{1,j} + \frac{1}{2} i_2 i_j dM_{2,j} + \dots + \frac{1}{2} i_j d\Phi_j + \dots + \frac{1}{2} i_n i_j dM_{n,j} . \end{aligned}$$

Infatti in ciascun termine cambia solo l'energia di accoppiamento col circuito  $j$ -esimo; invece nel termine  $j$ -esimo cambiano tutte le energie di accoppiamento, cioè

$$d\left(\frac{1}{2} i_j d\Phi_j\right) = \frac{1}{2} i_j i_1 dM_{j,1} + \frac{1}{2} i_j i_2 dM_{j,2} + \dots .$$

e non cambia solo l'energia intrinseca  $\frac{1}{2} i_j^2 M_{j,j}$ . Pertanto il lavoro per uno spostamento rigido è

$$dW = dU_m = i_j d\Phi_j \quad . \quad (10.49)$$

Esso è dato dal prodotto della corrente che percorre il circuito per la variazione del flusso concatenato col circuito stesso: abbiamo così ritrovato il risultato (7.28) del paragrafo 7.6, che consigliamo di rileggere adesso, dopo aver chiarito cosa succede se si mantiene costante la corrente in un circuito interessato da una variazione di flusso magnetico. In particolare si noti che l'energia potenziale  $U_p$  dei paragrafi 7.5 e 7.6 coincide con l'energia magnetica se si trattano solo magneti permanenti e mezzi magnetizzati ed è l'opposto dell'energia magnetica nei sistemi costituiti da circuiti.

Da (10.49) si deducono forze e momenti utilizzando (10.45) e (10.46); ripetiamo che l'evoluzione spontanea del sistema è verso lo stato di massima energia magnetica, compatibilmente con i vincoli.

La (10.48) fornisce una descrizione dell'energia magnetica del sistema in termini delle correnti che circolano nei singoli circuiti e della configurazione geometrica, ovvero in termini delle sorgenti del campo magnetico. In questo senso è analoga a (2.26) per un sistema di cariche puntiformi o a (4.30) per un sistema di conduttori.

D'altra parte (10.37) lega direttamente l'energia magnetica al campo magnetico. Nei sistemi in cui si possono definire i coefficienti  $M_{j,k}$ , e quindi individuare le correnti che generano il campo, le due espressioni dell'energia magnetica portano allo stesso risultato e del resto la loro equivalenza si può dimostrare formalmente. Però la (10.37) è più generale in quanto è applicabile sempre e in particolare in tutti quei casi in cui si può definire un campo magnetico nello spazio, ma non è possibile localizzare le sorgenti che lo generano. È questa ad esempio la situazione dell'energia associata ad un'onda elettromagnetica che si propaga nello spazio, come abbiamo già ricordato alla fine del paragrafo 4.7 per l'energia eletrostatica nella forma (4.26).

**Esempio 10.10**

Un solenoide di lunghezza  $d_1$  molto grande è costituito da  $N_1$  spire di area  $\Sigma_1$  ed è percorso dalla corrente  $i_1$ . Un secondo solenoide di lunghezza  $d_2$ , costituito da  $N_2$  spire di area  $\Sigma_2 < \Sigma_1$  percorse dalla corrente  $i_2$ , si trova dentro il primo solenoide per un tratto  $x$ . Calcolare l'energia magnetica del sistema in funzione di  $x$  e la forza  $F$  di interazione tra i due solenoidi.

**Soluzione**

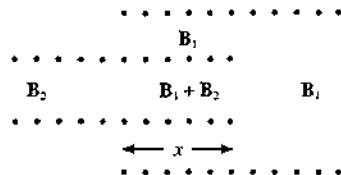
Calcoliamo dapprima l'energia magnetica utilizzando (10.43). Il coefficiente di induzione mutua si ricava dall'esempio 8.9 applicato alla lunghezza  $x$  di sovrapposizione:

$$M = \mu_0 n_1 n_2 \Sigma_2 x \quad , \quad n_1 = \frac{N_1}{d_1} \quad , \quad n_2 = \frac{N_2}{d_2}$$

I coefficienti di autoinduzione sono  $L_1 = \mu_0 n_1^2 \Sigma_1 d_1$  e  $L_2 = \mu_0 n_2^2 \Sigma_2 d_2$ , da (8.36). Quindi

$$U_m = \frac{1}{2} \mu_0 n_1^2 \Sigma_1 d_1 i_1^2 + \frac{1}{2} \mu_0 n_2^2 \Sigma_2 d_2 i_2^2 + \mu_0 n_1 n_2 \Sigma_2 x i_1 i_2$$

Figura 10.41



Ovviamente lo stesso risultato si ha da (10.47). I campi magnetici sono  $B_1 = \mu_0 n_1 i_1$ ,  $B_2 = \mu_0 n_2 i_2$  e di conseguenza

$$\Phi_1 = n_1 d_1 \Sigma_1 B_1 + n_1 x \Sigma_2 B_2 = \mu_0 n_1^2 \Sigma_1 d_1 i_1 + \mu_0 n_1 n_2 \Sigma_2 x i_2$$

$$\Phi_2 = n_2 d_2 \Sigma_2 B_2 + n_2 x \Sigma_1 B_1 = \mu_0 n_2^2 \Sigma_2 d_2 i_2 + \mu_0 n_1 n_2 \Sigma_2 x i_1$$

$$\frac{1}{2} (i_1 \Phi_1 + i_2 \Phi_2) = \frac{1}{2} \mu_0 n_1^2 \Sigma_1 d_1 i_1^2 + \frac{1}{2} \mu_0 n_2^2 \Sigma_2 d_2 i_2^2 + \mu_0 n_1 n_2 \Sigma_2 x i_1 i_2$$

Infine sempre allo stesso risultato si arriva da (10.32). Nella zona lunga  $d_1 - x$  c'è l'energia

$$\frac{1}{2} \frac{B_1^2}{\mu_0} \Sigma_1 (d_1 - x) = \frac{1}{2} \mu_0 n_1^2 i_1^2 \Sigma_1 (d_1 - x)$$

mentre nella zona lunga  $d_2 - x$  c'è l'energia

$$\frac{1}{2} \frac{B_2^2}{\mu_0} \Sigma_2 (d_2 - x) = \frac{1}{2} \mu_0 n_2^2 i_2^2 \Sigma_2 (d_2 - x)$$

Nel tratto  $x$ , dove agiscono entrambi i campi, l'energia vale

$$\frac{1}{2} \frac{B_1^2}{\mu_0} (\Sigma_1 - \Sigma_2) x + \frac{1}{2} \frac{(B_1 + B_2)^2}{\mu_0} \Sigma_2 x = \frac{1}{2} \mu_0 n_1^2 i_1^2 (\Sigma_1 - \Sigma_2) x + \frac{1}{2} \mu_0 n_1^2 i_1^2 \Sigma_2 x +$$

$$+ \frac{1}{2} \mu_0 n_2^2 i_2^2 \Sigma_2 x + \mu_0 n_1 n_2 i_1 i_2 \Sigma_2 x$$

Sommendo tutti i contributi si ottiene l'espressione già vista di  $U_m$ .

Al termine di accoppiamento  $\mu_0 n_1 n_2 \Sigma_2 x i_1 i_2$  va attribuito il segno, positivo se  $i_1$  e  $i_2$  sono concordi, negativo se sono discordi.

La forza tra i due solenoidi è

$$F = \frac{dU_m}{dx} = \frac{dU_{acc}}{dx} = \mu_0 n_1 n_2 \Sigma_2 i_1 i_2 = \frac{B_1 B_2 \Sigma_2}{\mu_0}$$

indipendente da  $x$ . Essa è *concorde* all'asse  $x$  e quindi *attrattiva*, se le correnti sono *concordi*, *repulsiva* se sono *discordi*. In ogni caso il sistema evolve verso le condizioni di massima energia magnetica.

**Esempio 10.11**

La bobina  $S_2$  dell'esempio 10.9 può ruotare attorno ad un asse che sta nel piano della bobina  $S_1$  e passa per il centro delle due bobine. Detto  $I$  il momento d'inerzia di  $S_2$  rispetto a tale asse, calcolare il periodo  $T$  delle piccole oscillazioni di  $S_2$  attorno alla posizione di equilibrio se le due bobine sono percorse dalle correnti  $i_1$  e  $i_2$  di eguale verso.

**Soluzione**

In equilibrio i versori normali  $\mathbf{u}_1$  e  $\mathbf{u}_2$  sono paralleli e concordi, se le correnti sono concordi. Per un generico angolo  $\theta$  tra le bobine l'energia di accoppiamento, utilizzando il risultato dell'esempio 10.9, è

$$U_{acc} = M i_1 i_2 = \frac{\mu_0 N_1 N_2 \pi r_2^2 i_1 i_2}{2r_1} \cos \theta = k \cos \theta ,$$

posto  $k = (\mu_0 N_1 N_2 \pi r_2^2 i_1 i_2) / 2r_1$ , costante. Gli altri termini dell'energia magnetica sono costanti e quindi il momento della forza rispetto all'asse di rotazione vale, secondo (10.46).

$$M_\theta = \frac{dU_m}{d\theta} = \frac{dU_{acc}}{d\theta} = -k \sin \theta .$$

Nell'ipotesi di piccole oscillazioni  $M_\theta = -k\theta$  e l'equazione del moto di rotazione risulta

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -k\theta \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0 , \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{I}} .$$

La bobina  $S_2$  compie quindi *oscillazioni armoniche* di periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{k}} .$$

Osserviamo che  $U_{acc}$  dipende solo dall'angolo e che pertanto non ci sono forze su  $S_2$  che tendano a spostarla dal centro della bobina  $S_1$ .

**10.10 Corrente di spostamento. Legge di Ampère-Maxwell**

Il campo magnetico nel vuoto soddisfa alla *legge di Ampère*

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 i = \mu_0 \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma , \quad (8.28)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} , \quad (8.29)$$

rispettivamente in forma integrale e differenziale, come si è dimostrato nel paragrafo 8.4. Nella (8.28) la superficie  $\Sigma$  attraverso cui si calcola il flusso della densità di corrente è una qualsiasi superficie avente come contorno la linea  $s$  che concatena la corrente  $i$  e lungo cui si calcola la circuitazione di  $\mathbf{B}$ .

Sempre nel paragrafo 8.4 abbiamo rilevato che (8.29) è in accordo con la conservazione della carica elettrica solo nel caso stazionario. Infatti calcolando la divergenza di entrambi i membri di (8.29) si ha

$$\mu_0 \nabla \cdot \mathbf{j} = \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{B} = 0 .$$

in quanto la divergenza del rotore di un qualsiasi vettore è sempre nulla (paragrafo 3.6). E appunto  $\nabla \cdot j = 0$  è la forma differenziale (6.11) della *legge di conservazione della carica elettrica* nei processi non dipendenti dal tempo. Nel caso generale in cui la densità di carica varii nel tempo la densità di corrente soddisfa l'*equazione di continuità*

$$\nabla \cdot j + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \text{ovvero} \quad \nabla \cdot j = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad ;$$

essa quindi ha divergenza non nulla, in contrasto con (8.29).

La non validità della legge di Ampère in condizioni non stazionarie si può constatare nel processo di carica di un condensatore. Nel paragrafo 6.9 abbiamo ammesso, applicando la legge di Ohm all'intero circuito, che durante il processo una corrente  $i(t)$  circolasse ovunque, senza tener conto che tra le armature del condensatore c'è un mezzo isolante e non può esserci corrente di conduzione. In realtà, come spiegato alla fine del paragrafo 6.9, su un'armatura del condensatore si verifica una variazione di carica nel tempo  $dq/dt$ , corrispondente alla corrente  $i$  entrante nell'armatura, e sull'altra armatura c'è una variazione, eguale in modulo e opposta in segno,  $-dq/dt$ , che corrisponde a una corrente uscente  $i = -(-dq/dt) = dq/dt$ . Attraverso una superficie chiusa che racchiude le armature abbiamo un flusso netto di carica che è nullo, come se ci fosse continuità nel circuito (purché la variazione non sia troppo rapida): ciò è stato sufficiente per risolvere l'equazione del circuito  $RC$ . Però, se consideriamo una superficie chiusa che racchiuda una sola armatura, non importa quale, il flusso di  $j$  non è nullo perché c'è una carica entrante o uscente, ma nello spazio tra le armature del condensatore non c'è nessun passaggio di carica. Tale superficie può essere divisa in due parti  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  come in figura 10.42. La circuitazione di  $B$  lungo la linea  $s$  è diversa da zero, però mentre attraverso  $\Sigma_1$  abbiamo

$$\int_{\Sigma_1} j \cdot u_n d\Sigma = i = \frac{dq}{dt} \quad ,$$

attraverso  $\Sigma_2$ , che si appoggia anch'essa su  $s$ , ma non incontra il filo, si ha

$$\int_{\Sigma_2} j \cdot u_n d\Sigma = 0 \quad .$$

Il vettore densità di corrente non è quindi solenoidale nel caso considerato, come invece dovrebbe essere secondo (8.28) e (8.29).

Per sanare queste contraddizioni Maxwell propose di estendere il significato della densità di corrente, ragionando nel modo seguente.

Esprimiamo la derivata della densità di carica che compare nella (6.10) utilizzando la legge di Gauss in forma locale,  $\nabla \cdot E = \rho/\epsilon_0$ , e invertiamo le due operazioni indipendenti di derivazione rispetto al tempo e di derivazione rispetto alle coordinate spaziali:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot E = \epsilon_0 \nabla \cdot \frac{\partial E}{\partial t} \quad .$$

La (6.10) diventa

$$\nabla \cdot j + \epsilon_0 \nabla \cdot \frac{\partial E}{\partial t} = \nabla \cdot \left( j + \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \right) = 0 \quad .$$

Il vettore

$$\mathbf{j}_{\text{tot}} = \mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (10.50) \quad \text{Densità di corrente totale}$$

risulta avere sempre divergenza nulla. Modifichiamo allora la legge di Ampère sostituendo alla densità di corrente di conduzione la densità  $\mathbf{j}_{\text{tot}}$ :

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \left( \mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = \mu_0 (i + i_s) \quad , \quad (10.51) \quad \text{Legge di Ampère-Maxwell}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left( \mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = \mu_0 (\mathbf{j} + \mathbf{j}_s) \quad . \quad (10.52)$$

Le quantità

$$\mathbf{j}_s = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad , \quad (10.53) \quad \text{Densità di corrente di spostamento}$$

$$i_s = \int \mathbf{j}_s \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = \epsilon_0 \int \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = \epsilon_0 \frac{\partial \Phi(\mathbf{E})}{\partial t} \quad (10.54) \quad \text{Corrente di spostamento}$$

si chiamano rispettivamente *densità di corrente di spostamento nel vuoto* e *corrente di spostamento nel vuoto*.

Con l'aggiunta del nuovo termine le difficoltà che avevamo segnalato vengono superate. L'applicazione della divergenza alla (10.52) dà risultato identicamente nullo sia a primo membro che a secondo membro. Nel circuito *RC*, sulla superficie  $\Sigma_2$  della figura 10.42 è nulla la densità di corrente di conduzione, ma è diverso da zero il campo elettrico generato dalle cariche che stanno sulle armature (tra le quali supponiamo ci sia il vuoto), per cui abbiamo

$$\int_{\Sigma_2} \mathbf{j}_{\text{tot}} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = \int_{\Sigma_2} \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = i_s$$

D'altra parte su  $\Sigma_1$ , dove possiamo pensare nullo  $\mathbf{E}$ ,

$$\int_{\Sigma_1} \mathbf{j}_{\text{tot}} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = \int_{\Sigma_1} \mathbf{j} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = i$$

Dato che  $\mathbf{j}_{\text{tot}}$  è solenoidale i due flussi devono essere uguali: la corrente che ha la densità data da (10.50) ha lo stesso valore lungo tutto il circuito: essa coincide con la corrente di conduzione nei cavi di collegamento e con la corrente di spostamento all'interno del condensatore. Formalmente avevamo già trovato questa egualanza con la (6.53).

La (10.51) è chiamata *legge di Ampère-Maxwell*: essa attribuisce gli stessi effetti magnetici di una corrente di conduzione alle variazioni temporali del campo elettrico. Il termine corrente di spostamento, coniato da Maxwell, non deve trarre

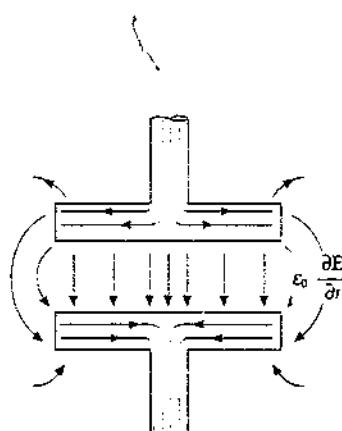


Figura 10.43

in inganno: alla densità (10.53) non è collegato nessun moto di carica.

Vedremo nel successivo esempio 10.12 come si possa verificare il nuovo effetto ipotizzato da Maxwell. La conferma più significativa della correttezza del ragionamento viene però dall'esistenza delle *onde elettromagnetiche*; come dimostreremo formalmente nel capitolo 13 esse derivano proprio dal fatto che la variazione temporale di un campo dà origine all'altro campo:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \rightarrow \mathbf{E} \text{ legge di Faraday} \quad , \quad \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \rightarrow \mathbf{B} \text{ legge di Ampère-Maxwell} \quad .$$

I campi  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  prodotti sono a loro volta variabili e in opportune condizioni ha luogo una propagazione.

### Esempio 10.12

Un condensatore piano con armature circolari di raggio  $R$  è collegato ad un generatore che stabilisce tra le armature il campo elettrico  $E = E_0 \sin \omega t$ . Calcolare il campo magnetico  $\mathbf{B}$  all'interno del condensatore in funzione della distanza  $r$  dall'asse e la f.e.m. indotta in un solenoide toroidale di raggio medio  $r$  coassiale alle armature.

#### Soluzione

Consideriamo una circonferenza di raggio  $r < R$  all'interno del condensatore, con centro sull'asse del sistema; lungo di essa la circuitazione di  $\mathbf{B}$  è  $2\pi r B$ , in quanto per ragioni di simmetria le linee di  $\mathbf{B}$  sono circonferenze come quella data. Ad un certo istante il campo  $\mathbf{E}$  è uniforme nel piano della circonferenza e la legge (10.51) si scrive

$$2\pi r B = \epsilon_0 \mu_0 \int \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \Phi(\mathbf{E})}{\partial t} = \epsilon_0 \mu_0 \pi r^2 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad .$$

L'espressione di  $\mathbf{B}$ , utilizzando anche (8.8), è

$$B(r) = \frac{1}{2} \epsilon_0 \mu_0 r \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{r \omega E_0}{2c^2} \cos \omega t \quad : \quad (10.55)$$

il modulo del campo magnetico varia linearmente con il raggio, per  $0 \leq r \leq R$ , come avviene all'interno di un filo percorso da corrente. In effetti la (10.55) è identica alla (8.30) con  $j = \epsilon_0 \partial E / \partial t = j$ .

La f.e.m. indotta nella  $N$  spire del solenoide toroidale, ammesso che la dimensione radiale della sezione  $\Sigma'$  sia piccola rispetto a  $r$ , è

$$\mathcal{E}_i = -N \Sigma' \frac{\partial B}{\partial t} = \frac{N \Sigma' r \omega^2 E_0}{2c^2} \sin \omega t \quad .$$

Ponendo ad esempio  $r = 10$  cm,  $\Sigma' = 3$  cm $^2$ ,  $N = 600$ ,  $E_0 = 10^3$  V/m e  $\omega = 10^7$  rad/s, si ha

$$B = 5.6 \cdot 10^{-9} \cos 10^7 t \text{ T} \quad , \quad \mathcal{E}_i = 0.01 \sin 10^7 t \text{ V} \quad .$$

Da un punto di vista quantitativo l'effetto diretto della corrente di spostamento è difficile da mettere in evidenza. L'apporto alla circuitazione di  $\mathbf{B}$  nella (10.51),

$$\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \Phi(\mathbf{E})}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi(\mathbf{E})}{\partial t} \quad ,$$

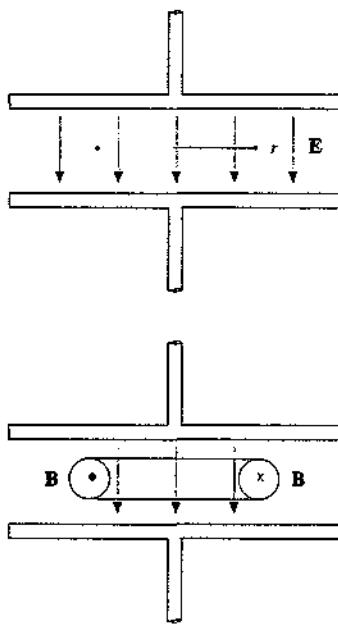


Figura 10.44

risente del fattore  $1/c^2 = 1.1 \cdot 10^{17} \text{ s}^2/\text{m}^2$ , che solo una variazione del campo elettrico molto rapida nel tempo può in parte controbilanciare. Nell'esempio 10.12, in cui la corrente di spostamento è l'unica sorgente di  $\mathbf{B}$ , l'effetto nel vuoto diventa misurabile solo con frequenze elevate, superiori a  $10^5 \text{ Hz}$ .

La trattazione precedente non considera la presenza di mezzi materiali. Se invece lo spazio è riempito da un mezzo dielettrico conviene servirsi del vettore *induzione dielettrica*  $\mathbf{D}$ : la sua divergenza è legata alla densità di carica libera dalla (5.23),  $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ , e la densità di corrente a divergenza nulla è

$$\mathbf{j}_{\text{tot}} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad , \quad (10.56)$$

La legge di Ampère-Maxwell si scrive

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \int \left( \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = \mu_0 (i + i_s) \quad , \quad (10.57)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left( \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = \mu_0 (\mathbf{j} + \mathbf{j}_s) \quad , \quad (10.58)$$

con

$$\mathbf{j}_s = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad , \quad (10.59)$$

$$i_s = \int \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = \frac{\partial \Phi(\mathbf{D})}{\partial t} \quad , \quad (10.60)$$

*densità di corrente di spostamento e corrente di spostamento nel mezzo*. Nel vuoto  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$  e si ritrovano tutte le relazioni precedenti.

Se infine nella densità di corrente  $\mathbf{j}_{\text{tot}}$  deve essere compresa anche la densità di corrente amperiana  $\mathbf{j}_m = \nabla \times \mathbf{M}$ , fatto che non altera la solenoidalità di  $\mathbf{j}_{\text{tot}}$ , sappiamo che il termine contenente la magnetizzazione può essere fatto scomparire formalmente ricorrendo al vettore  $\mathbf{H} = (\mathbf{B} / \mu_0) - \mathbf{M}$  e la legge di Ampère-Maxwell, che scriviamo solo in termini differenziali, diventa

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad . \quad (10.61)$$

## 10.11 Equazioni di Maxwell

Nello spazio vuoto, in presenza di cariche e di correnti di conduzione distribuite rispettivamente con densità  $\rho$  e  $\mathbf{j}$ , le *equazioni di Maxwell* si scrivono

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad , \quad \nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (10.62)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad , \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad .$$

Rispetto alle (10.1) sono comparsi i fenomeni dipendenti dal tempo.

La prima equazione stabilisce il legame tra carica elettrica e campo elettrico: la struttura è la stessa sia per campi statici che per campi variabili; la seconda equazione mostra che anche un campo magnetico variabile è sorgente di un campo elettrico. La terza equazione afferma che il campo magnetico è sempre solenoidale e che quindi non esistono cariche magnetiche e infine la quarta individua come sorgenti del campo magnetico le correnti di conduzione e le variazioni del campo elettrico.

Applicando la divergenza alla quarta equazione e utilizzando la prima, si ottiene l'equazione di continuità

$$\nabla \cdot j + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 , \quad (6.10)$$

espressione dinamica della *conservazione della carica*, proprietà che dunque è compresa nelle (10.62).

La forza su una carica  $q$  è la *forza di Lorentz*

Legge di Lorentz

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (7.38)$$

e il moto della carica obbedisce alla *legge di Newton*

Legge di Newton

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} ,$$

scritta in forma relativisticamente corretta; per velocità piccole rispetto alla velocità della luce  $d\mathbf{p}/dt = m\mathbf{a}$ , con  $m$  massa della carica  $q$ .

Ai campi  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  è associata la *densità di energia elettromagnetica*

Densità di energia elettromagnetica

$$u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0} ,$$

espressione che resta valida anche con campi variabili nel tempo.

Tutte le proprietà generali che abbiamo studiato finora, comprese quelle dei campi statici, sono racchiuse nelle (10.62). Situazioni specifiche sono descritte da relazioni speciali, che caratterizzano il particolare sistema e hanno spesso validità limitata: ad esempio in un conduttore percorso da corrente non troppo rapidamente variabile la densità di corrente e il campo elettrico sono legati dalla legge di Ohm (6.17),

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} .$$

Nei mezzi materiali la presenza dei campi  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  provoca la formazione di cariche di polarizzazione e di correnti di magnetizzazione, le cui densità sono esprimibili in termini dei vettori  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{M}$ . Tali densità modificano i valori di  $\rho$  e  $j$  nelle (10.62); esse vengono eliminate dalle equazioni tramite i vettori

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} , \quad \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} .$$

e le equazioni di Maxwell, se i mezzi sono in quiete, assumono la forma seguente, in cui appaiono solo le cariche libere e le correnti di conduzione:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \end{aligned} \quad (10.64) \quad \text{Equazioni di Maxwell}$$

A queste bisogna però aggiungere le relazioni esplicite tra  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{D}$  e tra  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{H}$ . Nei mezzi isotropi si ha

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} = \epsilon_0 \kappa \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \mu_0 \kappa_m \mathbf{H},$$

e le (10.64) si riconducono alle (10.62) con  $\epsilon$  al posto di  $\epsilon_0$  e  $\mu$  al posto di  $\mu_0$ .

Una situazione particolarmente significativa si ha nello spazio vuoto privo di correnti e di cariche, in cui le (10.62) diventano

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (10.65) \quad \text{Equazioni di Maxwell nel vuoto in assenza di sorgenti}$$

La struttura di queste equazioni è simmetrica rispetto ai due campi e si vede che, a parte la soluzione banale  $\mathbf{E} = \mathbf{B} = 0$ , è possibile solo una soluzione con campi variabili nel tempo e nello spazio, situazione che come vedremo porta alla *propagazione del campo elettromagnetico*. Il fenomeno si ricava anche da (10.62) e (10.64), sia in vicinanza delle sorgenti che lontano da esse e in uno spazio riempito da mezzi materiali, eventualmente sovrapposto a campi statici, però il caso (10.65) è il più semplice concettualmente.

La teoria di Maxwell, pubblicata nella sua forma completa nel 1873, costituisce uno dei risultati scientifici più importanti della fisica classica. Con essa viene compiuta la sistemazione teorica dei fenomeni elettrici e magnetici e la loro unificazione concettuale: tali fenomeni, che nel caso più generale non possono esistere separatamente, sono gli aspetti di un'unica interazione fondamentale, legata all'esistenza della carica elettrica.

Le equazioni di Maxwell non sono però soltanto il punto di arrivo di un processo conoscitivo iniziato circa cento anni prima. La previsione dell'esistenza delle onde elettromagnetiche, verificata sperimentalmente da Herz nel 1888, e della coincidenza della loro velocità con quella della luce permise di spiegare la natura della luce e aprì un campo fondamentale di ricerca e applicazione.

Un ultimo aspetto che vogliamo notare riguarda la connessione della teoria di Maxwell con la teoria della relatività ristretta enunciata da Einstein nel 1905. Secondo il principio di relatività tutte le leggi della Fisica, e non solo quelle della meccanica, devono avere la stessa espressione in *sistemi di riferimento inerziali*; inoltre la legge di trasformazione delle coordinate spaziali e del tempo tra due sistemi inerziali è quella di Lorentz (vedi vol. I, paragrafo 3.8): quindi le *leggi della Fisica* devono essere *invarianti per una trasformazione di Lorentz*. Sappiamo che ciò non è vero per le *leggi* della meccanica newtoniana, invarianti per trasformazioni galileiane che sono il limite per  $v \ll c$  delle trasformazioni di Lorentz. Invece le *equazioni di Maxwell sono relativisticamente invarianti*; tale fatto era stato notato ben prima del 1905, nel senso che si era trovato formalmente quali trasformazioni lasciavano invariate le equazioni, però non era stato compreso. Intuitivamente non è sorprendente che una teoria la quale tratta correttamente campi che si propagano

con la velocità della luce sia in accordo con la teoria della relatività. Una discussione sull'argomento esula però dai limiti di questo libro.

### Equazioni per i potenziali

Nei problemi statici i campi  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  possono essere derivati dai potenziali scalare e vettore attraverso le formule (2.36) e (8.39):

$$\mathbf{E} = -\nabla V, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

I potenziali obbediscono alle equazioni (3.27) e (8.42) in cui compaiono le sorgenti:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}$$

Ricordiamo dal paragrafo 8.7 che il *potenziale vettore* è definito a meno del gradiente di una funzione scalare, per cui  $\mathbf{A}$  può essere scelto in modo da soddisfare alla condizione  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ .

Quando i campi sono variabili le relazioni tra campi e potenziali diventano

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla V, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad . \quad (10.66)$$

La prima relazione, coincidente con (10.13), va intesa in senso più esteso di quanto visto nel paragrafo 10.2. Dato che

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Rightarrow \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{A} \Rightarrow \nabla \times \left( \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad ,$$

al vettore  $\mathbf{E} + \partial \mathbf{A} / \partial t$  può essere aggiunto il gradiente di una funzione scalare senza che il rotore cambi:

$$\nabla \times \left( \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla V \right) = 0 \Rightarrow \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla V \quad .$$

La (10.13) resta dunque vera anche se  $V$  è funzione del tempo; per campi statici essa coincide con (2.36).

Abbiamo già notato che se  $\mathbf{A}$  diventa  $\mathbf{A} + \nabla S$  il campo  $\mathbf{B}$  non cambia; però cambia il campo  $\mathbf{E}$ . Ciò può essere evitato se a  $V$  viene aggiunta  $-\frac{\partial S}{\partial t}$ :

$$\mathbf{E}' = -\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{A} + \nabla S) - \nabla \left( V - \frac{\partial S}{\partial t} \right) = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \nabla S - \nabla V + \nabla \frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla V = \mathbf{E} \quad .$$

Nei fenomeni variabili le sostituzioni

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla S, \quad V \rightarrow V - \frac{\partial S}{\partial t}$$

non alterano i campi. Il potenziale vettore quindi è definito a meno del gradiente di una funzione scalare e il potenziale scalare a meno della derivata rispetto al tempo della stessa funzione. Come nel caso statico questa indeterminazione viene sfruttata per definire in modo conveniente  $\nabla \cdot \mathbf{A}$ . Precisamente, per una ragione che vedremo subito, si impone che sia

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} \quad , \quad (10.67)$$

condizione che contiene il caso statico ( $V = \text{costante}$ ).

Per dedurre le (10.65) abbiamo utilizzato le equazioni di Maxwell  $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$  e  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ; per trovare le equazioni cui obbediscono i potenziali nel caso generale utilizziamo le altre due equazioni di Maxwell inserendo le (10.66):

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot \left( -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla V \right) = \frac{\rho}{\epsilon_0} ,$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla V \right)$$

Sviluppando si ottiene

$$\nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} ,$$

$$\nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \mu_0 \epsilon_0 \nabla \frac{\partial V}{\partial t}$$

in cui abbiamo fatto ricorso per il rotore di un rotore alla prima delle (3.36) e abbiamo scambiato, come sempre, le operazioni di derivazione spaziale e di derivazione temporale. A questo punto risulta evidente la convenienza della condizione (10.67) in base alla quale le equazioni dei potenziali diventano

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{j} , \quad \nabla^2 V - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} . \quad (10.68) \quad \text{Equazioni per i potenziali}$$

Per una data distribuzione di cariche e correnti possiamo ottenere i campi  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  o direttamente dalle equazioni di Maxwell (10.62) o risolvendo le *equazioni per i potenziali* e ricavando i campi da queste tramite (10.66). Nello spazio vuoto privo di cariche e correnti

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0 , \quad \nabla^2 V - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0 . \quad (10.69)$$

Le (10.68) e (10.69) sono particolarmente interessanti perché mostrano esplicitamente una struttura tipo equazione delle onde (vol. I, paragrafo 9.10 e seguenti), anche se più generale. Riprenderemo l'argomento nel capitolo 13.

# Oscillazioni elettriche. Correnti alternate

## 11.1 Oscillazioni smorzate in un circuito $RL$

Abbiamo già incontrato alcuni esempi di correnti variabili nel tempo studiando i circuiti  $RC$  e  $RL$ , rispettivamente nei paragrafi 6.9 e 10.5. Nel primo caso, quando le armature di un condensatore carico vengono collegate con un resistore, si ha una corrente dall'armatura positiva a quella negativa che scarica il condensatore. Diciamo  $V_C$  la d.d.p. ai capi del condensatore, avente valore massimo  $V_0$  nell'istante iniziale, quando viene chiuso il circuito; in ogni istante successivo la d.d.p. ai capi del condensatore è uguale a quella ai capi del resistore e valgono le equazioni

$$V_C = \frac{q}{C} = R i \quad , \quad i = -\frac{dq}{dt} \quad .$$

Derivando rispetto al tempo si ottiene

$$\frac{di}{dt} = -\frac{i}{R C} \Rightarrow i(t) = \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad ,$$

con  $\tau = RC$ . L'energia elettrica  $CV_0^2/2$  viene dissipata per effetto Joule nel resistore.

Analogamente, se un induttore percorso da una corrente costante  $i_0$  viene chiuso su un resistore, l'equazione del circuito è

$$\mathcal{E}_i = -L \frac{di}{dt} = R i$$

e la corrente decresce nel tempo secondo la legge

$$i(t) = i_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

con  $\tau = L/R$ . L'energia magnetica  $L i_0^2/2$  è dissipata per effetto Joule nel resistore.

In entrambi i casi l'equazione del circuito è del tipo

$$\frac{di}{dt} = -k i \quad ,$$

equazione differenziale lineare del prim'ordine a coefficienti costanti, la cui soluzione più generale è

$$i(t) = A e^{-kt} \quad ,$$

essendo determinata la costante  $A$  dalla condizione iniziale. La diminuzione della corrente è causata dalla presenza dell'elemento dissipativo  $R$  che assorbe la potenza  $R i^2$ .

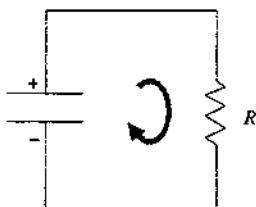


Figura 11.1

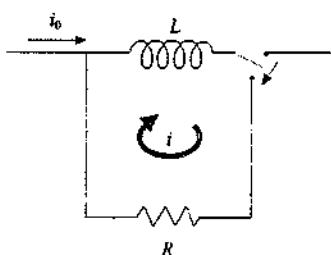


Figura 11.2

Se invece dei processi di scarica si considerano i corrispondenti *processi di carica*, realizzati inserendo nel circuito un generatore di f.e.m. costante, abbiamo ancora una corrente decrescente esponenzialmente nel tempo per il circuito *RC*, nel quale a regime la corrente è nulla, mentre nel circuito *RL* la corrente ha l'espressione

$$i(t) = i_0(1 - e^{-\nu t}) ,$$

tendente al valore costante di regime. Il lavoro necessario per mantenere queste correnti è fornito dal generatore, che inoltre eroga le energie immagazzinate nel condensatore o nell'induttore.

In ogni caso si tratta di fenomeni transitori, la cui durata tipica è regolata dalla costante di tempo, pari a  $RC$  o a  $L/R$ .

Prendiamo ora in esame il caso di un condensatore carico che all'istante  $t = 0$  viene connesso ad un induttore e ad un resistore in serie; il *circuito* si chiama *RLC in serie*. Alla chiusura del circuito in questo inizia a passare una corrente e nell'induttore compare la f.e.m. di autoinduzione  $-L \frac{di}{dt}$ ; la d.d.p. ai capi del resistore non è più eguale a quella ai capi del condensatore, vale bensì l'eguaglianza

$$\frac{q}{C} - L \frac{di}{dt} = R i \quad . \quad (11.1)$$

Deriviamo rispetto al tempo ponendo  $i = -dq/dt$  e otteniamo

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = 0 \quad , \quad (11.2)$$

equazione differenziale lineare del second'ordine a coefficienti costanti. Definendo

$$\gamma = \frac{R}{2L} \quad , \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad , \quad (11.3)$$

detti rispettivamente *coefficiente di smorzamento* e *pulsazione propria*, la (11.2) si scrive

$$\frac{d^2i}{dt^2} + 2\gamma \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = 0 \quad . \quad (11.4)$$

Si tratta della stessa equazione che regola il moto dell'*oscillatore armonico smorzato* da una forza di attrito proporzionale alla velocità (attrito viscoso), studiato nel capitolo 9 del primo volume. Rivediamo pertanto i risultati già trovati adattandoli al caso elettrico.

La soluzione più generale di (11.4) ha la forma

$$i(t) = A e^{-\alpha_1 t} + B e^{-\alpha_2 t} \quad , \quad (11.5)$$

dove  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  sono le soluzioni dell'*equazione caratteristica*

$$\alpha^2 + 2\gamma\alpha + \omega_0^2 = 0 \quad ,$$

Circuito *RLC in serie*

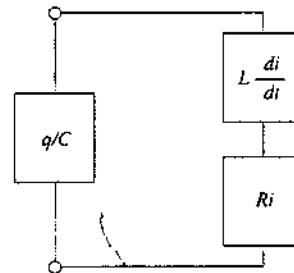
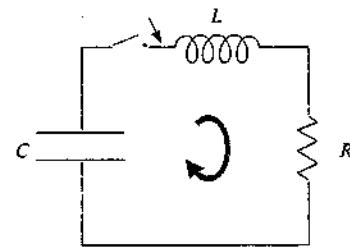


Figura 11.3

ovvero

$$\alpha_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}, \quad \alpha_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \quad . \quad (11.6)$$

La corrente (11.5) ha un andamento temporale differente a seconda della relazione tra  $\gamma$  e  $\omega_0$ . Si considerano tre situazioni:

*smorzamento forte*  $\gamma^2 > \omega_0^2 \Rightarrow R^2 > 4L/C$

$$i(t) = e^{-\gamma t} (A e^{i\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} + B e^{-i\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t}) \quad (11.7)$$

*smorzamento critico*  $\gamma^2 = \omega_0^2 \Rightarrow R^2 = 4L/C$

$$i(t) = e^{-\gamma t} (A + Bt) \quad (11.8)$$

*smorzamento debole*  $\gamma^2 < \omega_0^2 \Rightarrow R^2 < 4L/C$

$$i(t) = D e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \phi), \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \quad . \quad (11.9)$$

Nei primi due casi ( $\gamma^2 \geq \omega_0^2$ ) l'andamento predominante è esponenziale decrescente, nel terzo caso si ha un'oscillazione smorzata. Le costanti  $A, B, D, \phi$  sono determinate dalle condizioni iniziali sul valore della corrente e della derivata prima della corrente. Si tratta sempre di un fenomeno transitorio in quanto è dominante il fattore di smorzamento  $e^{-\gamma t}$ ; il ruolo dell'attrito viscoso è svolto nel caso elettrico dalla resistenza del circuito. La quantità  $R_c = 2\sqrt{L/C}$  prende il nome di *resistenza critica*.

### Esempio 11.1

In un circuito *RLC* in serie la capacità vale  $C = 4 \text{ nF}$  e l'induttanza vale  $L = 2.56 \text{ mH}$ . Supponendo che all'istante  $t = 0$  il condensatore, carico alla d.d.p.  $V_0 = 100 \text{ V}$ , venga chiuso sulla serie *RL*, determinare la corrente nel circuito nei tre casi  $R = 5 \cdot 10^3 \Omega$ ,  $R = 1.6 \cdot 10^3 \Omega$ ,  $R = 0.5 \cdot 10^3 \Omega$ .

#### Soluzione

La quantità  $4L/C$  vale  $2.56 \cdot 10^6 \Omega^2$  e quindi la *resistenza critica* del circuito è  $R_c = 1.6 \cdot 10^3 \Omega$ : avremo per  $R = 5 \cdot 10^3 \Omega$  e  $R = 1.6 \cdot 10^3 \Omega$  un andamento esponenziale smorzato e per  $R = 0.5 \cdot 10^3 \Omega$  un andamento oscillatorio smorzato. La pulsazione propria del circuito è  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC} = 31.25 \cdot 10^4 \text{ rad/s}$ .

Le condizioni iniziali sono le seguenti: la corrente, nulla un istante prima della chiusura, non può cambiare istantaneamente per la presenza dell'induttanza e perciò  $i(0) = 0$ . Dall'equazione (11.1) si ricava allora che per  $t = 0$

$$\left( \frac{di}{dt} \right)_{t=0} = \frac{q_0}{CL} = \frac{V_0}{L} = 3.91 \cdot 10^4 \frac{\text{A}}{\text{s}} \quad .$$

Nel caso  $R = 5 \cdot 10^3 \Omega$  ( $\gamma = 9.77 \cdot 10^5 \text{ s}^{-1}$ ), imponendo le condizioni iniziali alla (11.7) si trova

$$A + B = 0, \quad A = \frac{V_0}{2L\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} = 21.1 \cdot 10^{-3} \text{ A} \quad ,$$

$$i(t) = 21.1 \cdot 10^{-3} e^{-0.52 \cdot 10^5 t} - 21.1 \cdot 10^{-3} e^{-19.02 \cdot 10^5 t} \text{ A} \quad .$$

La corrente passa da zero al valore massimo di  $18.5 \cdot 10^{-3}$  A, raggiunto nell'istante  $t = 1.95 \cdot 10^{-6}$  s (come si ottiene annullando la derivata  $di/dt$ ), e poi tende a zero con costante di tempo  $\tau = 1/0.52 \cdot 10^3 = 19.2 \cdot 10^{-6}$  s; si noti infatti che il primo esponenziale ha costante di tempo molto maggiore del secondo, praticamente nullo dopo un tempo dell'ordine di  $2 \cdot 10^{-6}$  s.

Quando  $R = R_c = 1.6 \cdot 10^3$  ( $\gamma = \omega_0 = 31.25 \cdot 10^4$  s $^{-1}$ ) la corrente ha l'espressione (11.8); con le date condizioni iniziali risulta  $A = 0$  e  $B = V_0/L$  per cui

$$i(t) = \frac{V_0}{L} t e^{-\gamma t} = 3.91 \cdot 10^4 t e^{-31.25 \cdot 10^4 t} \text{ A}$$

Anche ora la corrente partendo da zero raggiunge un valore massimo ( $46 \cdot 10^{-3}$  A) a  $t = 1/\gamma = 3.2 \cdot 10^{-6}$  s) e poi decresce fino a zero; la costante di tempo è  $\tau = 3.2 \cdot 10^{-6}$  s. Nelle condizioni di smorzamento critico la scarica del condensatore avviene più rapidamente che negli altri casi.

Infine, con  $R = 500 \Omega$  ( $\gamma = 9.77 \cdot 10^4$  s $^{-1}$ ) l'espressione di riferimento è la (11.9), con  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = 29.68 \cdot 10^4$  s $^{-1}$ . In base alle condizioni iniziali

$$D = \frac{V_0}{\omega L} = 131.7 \cdot 10^{-3} \text{ A} \quad , \quad \phi = 0$$

e quindi

$$i(t) = \frac{V_0}{\omega L} e^{-\gamma t} \sin \omega t = 131.7 \cdot 10^{-3} e^{-9.77 \cdot 10^4 t} \sin 29.68 \cdot 10^4 t \text{ A}$$

L'oscillazione avviene con *pseudoperiodo*  $T = 2\pi/\omega = 21.2 \cdot 10^{-6}$  s ed è smorzata con costante di tempo  $\tau = 1/\gamma = 10.2 \cdot 10^{-6}$  s. Il valore massimo della corrente,  $82.8 \cdot 10^{-3}$  A, è raggiunto al tempo  $t = 4.2 \cdot 10^{-6}$  s.

Nella figura 11.4 sono mostrati gli andamenti corrispondenti ai tre diversi regimi. All'inizio la corrente sembra descrivere un'oscillazione, però con  $R \geq R_c$ , lo smorzamento è tale che dopo il massimo si ha una decrescita monotona verso lo zero; solo con smorzamento debole si instaura una vera oscillazione smorzata.

Un'altra condizione iniziale si realizza chiudendo un'induttore percorso da una corrente costante  $i_0$  su una serie  $RC$  con il condensatore inizialmente scarico: si ha  $i(0) = i_0$  e  $(di/dt)_{t=0} = -R i_0 / L$ . L'andamento asintotico è lo stesso.

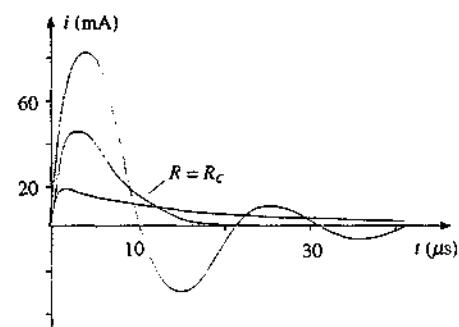


Figura 11.4

## Il circuito LC

Una situazione limite, difficile da realizzare in pratica, si ha quando  $R = 0$ . Le (11.1) e (11.2) diventano

$$\frac{q}{C} = L \frac{di}{dt}, \quad \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{i}{LC} = 0$$

La corrente obbedisce all'equazione dell'oscillatore armonico e varia nel tempo secondo la legge

$$i(t) = A \sin(\omega t + \phi) \quad (11.10)$$

mentre la d.d.p. ai capi del condensatore, eguale ed opposta alla f.e.m. indotta nell'induttore, è

$$V_C(t) = \frac{q(t)}{C} = \omega L A \cos(\omega t + \phi) \quad (11.11)$$

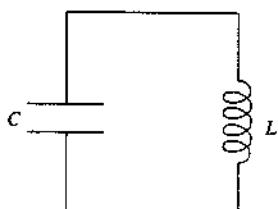


Figura 11.5

La pulsazione vale  $\omega = 1/\sqrt{LC}$ , le costanti  $A$  e  $\phi$  si determinano dalle condizioni iniziali. Ad esempio, se un condensatore carico viene chiuso su un'induttore,  $i(0) = 0$  e  $(di/dt)_{t=0} = V_0/L$  per cui

$$i = \frac{V_0}{\omega L} \sin \omega t \quad , \quad V_C = V_L = V_0 \cos \omega t \quad .$$

Se invece si chiude un'induttore percorso da corrente su un condensatore scarico  $i(0) = i_0$ ,  $(di/dt)_{t=0} = 0$  e

$$i = i_0 \cos \omega t \quad , \quad V_C = V_L = -\omega L i_0 \sin \omega t \quad .$$

Si trova sempre che quando la corrente è massima  $V_C$  è nulla e viceversa che quando  $V_C$  è massima la corrente è nulla, come deve essere viste le (11.10) e (11.11): le due grandezze sono in *quadratura di fase*, seguendo la terminologia introdotta nel paragrafo 9.4 del volume primo.

Nell'istante in cui il condensatore è carico con  $V_C = V_0$  tutta l'energia è elettrica non essendoci energia magnetica ( $i = 0$ ); successivamente il condensatore si scarica, la corrente cresce, l'energia è in parte elettrica e in parte magnetica fino a che  $V_C = 0$ ,  $i = i_0$ , istante in cui tutta l'energia è magnetica. Questo fenomeno richiede un quarto di periodo; nel successivo quarto di periodo la corrente si riduce a zero e la d.d.p. ai capi del condensatore raggiunge il valore  $-V_0$ ; adesso di nuovo tutta l'energia è elettrica. Dopo di che il condensatore inizia a scaricarsi e si carica l'induttore, con corrente che fluisce in verso opposto a quello precedente; infine, nell'ultimo quarto di periodo, si torna alla condizione iniziale  $V_C = V_0$ ,  $i = 0$ .

Il bilancio energetico in un istante generico è

$$\frac{1}{2} C V_C^2 + \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} C V_0^2 = \frac{q_0^2}{2 C} = \frac{1}{2} L i_0^2 \quad (11.12)$$

e i valori massimi sono legati dalle relazioni

$$V_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} i_0 = \omega L i_0 = \frac{i_0}{\omega C} \quad , \quad q_0 = CV_0 = \sqrt{LC} i_0 = \frac{i_0}{\omega} \quad . \quad (11.13)$$

Il circuito  $LC$  è dunque sede di un'oscillazione elettrica permanente (cioè non smorzata) e per questa ragione viene anche chiamato circuito oscillante. La situazione è matematicamente identica a quella di una massa  $m$  sottoposta all'azione di una forza elastica  $-kx$ : le varie formule mettono in evidenza una corrispondenza soltanto formale, tra queste grandezze:

$$q \leftrightarrow x \quad , \quad i = \frac{dq}{dt} \leftrightarrow v = \frac{dx}{dt} \quad , \quad L \leftrightarrow m \quad , \quad C \leftrightarrow \frac{1}{k} \quad .$$

La stessa osservazione può essere estesa anche ai sistemi oscillatore smorzato, circuito  $RLC$  aggiungendo la corrispondenza tra la resistenza  $R$  e il coefficiente  $\lambda$  della forza di attrito viscoso ( $F = -\lambda v$ ).

RiconSIDERANDO sotto l'aspetto energetico il circuito *RLC* alla luce di quanto visto per il circuito ideale *LC*, possiamo dire che nel caso di oscillazione elettrica smorzata si hanno trasformazioni di energia dalla forma elettrica a quella magnetica e viceversa, anche se ad ogni ciclo una parte dell'energia viene dissipata nella resistenza e alla fine il fenomeno si spegne; inoltre  $i(t)$  e  $V_C(t)$  non sono in quadratura di fase. Nei casi con andamento soltanto esponenziale, come quelli considerati nell'esempio 11.1, una parte di energia elettrica viene momentaneamente trasformata in energia magnetica, anche se il condensatore in seguito non si ricarica (la d.d.p.  $V_C$  tende a zero e non cambia mai di segno): alla fine tutta l'energia è stata assorbita dalla resistenza.

## 11.2 Oscillazioni permanenti in un circuito *RLC*. Risonanza

Per mantenere un'oscillazione elettrica permanente in un circuito *RLC* occorre fornire con continuità la potenza che viene dissipata nel resistore. Allo scopo si connette al circuito un generatore di f.e.m. variabile, ad esempio secondo la legge  $\varepsilon = \varepsilon_0 \cos(\omega t + \phi)$ . L'equazione del circuito è

$$\varepsilon_0 \cos(\omega t + \phi) - L \frac{di}{dt} = \frac{q}{C} + R i \quad ,$$

generalizzazione di (6.50): a primo membro abbiamo le f.e.m. presenti nel circuito e a secondo membro le d.d.p. ai capi del condensatore e del resistore. Deriviamo rispetto al tempo ponendo  $i = dq/dt$  e otteniamo

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = -\frac{\omega \varepsilon_0}{L} \sin(\omega t + \phi) \quad . \quad (11.14)$$

La soluzione più generale di questa equazione è la somma della soluzione generale (11.5) dell'equazione omogenea associata e di una soluzione particolare di (11.14), che cerchiamo nella forma  $i = i_0 \cos \omega t$ . Infatti, dato che il fenomeno transitorio rappresentato da (11.5) scompare dopo un certo tempo, a regime resterebbe così solo la soluzione particolare oscillante. Per verificare se ciò è possibile inseriamo la suddetta espressione della corrente nella (11.14) che diventa

$$-\omega^2 i_0 \cos \omega t - \frac{R}{L} \omega i_0 \sin \omega t + \frac{i_0}{LC} \cos \omega t = -\frac{\omega \varepsilon_0}{L} (\sin \omega t \cos \phi + \cos \omega t \sin \phi) \quad ,$$

$$\Rightarrow -\frac{R}{L} \omega i_0 \sin \omega t + i_0 \left( \frac{1}{LC} - \omega^2 \right) \cos \omega t = -\frac{\omega \varepsilon_0}{L} \cos \phi \sin \omega t - \frac{\omega \varepsilon_0}{L} \sin \phi \cos \omega t \quad .$$

L'egualanza deve essere valida in qualsiasi istante e quindi devono essere eguali i coefficienti di  $\sin \omega t$  a primo e a secondo membro; lo stesso deve valere per i coefficienti di  $\cos \omega t$  e imponendo queste due identità si ottiene

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \quad , \quad (11.15)$$

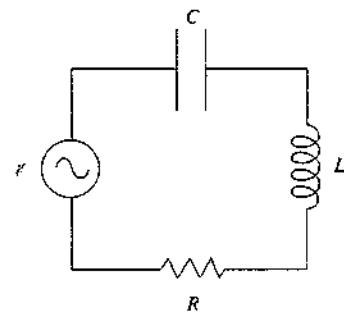


Figura 11.7

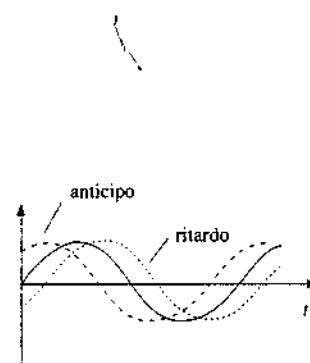


Figura 11.8

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad (11.16)$$

È dunque possibile instaurare un'oscillazione elettrica permanente nel circuito  $RLC$ : applicando la f.e.m. variabile  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t + \phi)$  si ha nel circuito la corrente  $i = i_0 \cos \omega t$ , con la stessa pulsazione  $\omega$  della f.e.m. applicata e ampiezza dipendente da  $\mathcal{E}_0$ ,  $\omega$  e dai parametri del circuito, ma non dalle condizioni iniziali; ad una sollecitazione sinusoidale il circuito risponde in modo sinusoidale. La f.e.m. però è sfasata rispetto alla corrente di un angolo  $\phi$ , anch'esso dipendente da  $\omega$  e dai parametri del circuito.

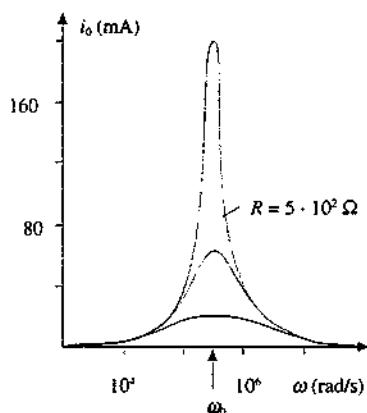


Figura 11.9

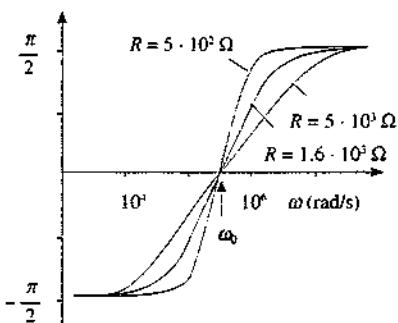


Figura 11.10

**Esempio 11.2**

Al circuito dell'esempio 11.1 applichiamo la f.e.m.  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t + \phi)$  con  $\mathcal{E}_0 = 100$  V. Determinare l'andamento della corrente massima  $i_0$  e dello sfasamento  $\phi$  in funzione di  $\omega$ , per i dati valori di  $R$ .

**Soluzione**

A seconda del valore della pulsazione della f.e.m. applicata la risposta del circuito è diversa, sia in ampiezza che in fase, come mostrano (11.15) e (11.16). Nelle figure sono mostrati i grafici delle funzioni  $i_0(\omega)$  e  $\phi(\omega)$  nei tre casi proposti.

Se  $\omega < \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$   $\operatorname{tg}\phi$  è negativa, cioè  $\phi$  è compresa tra  $-\pi/2$  e zero ( $0 < \omega < \omega_0$ ,  $-\pi/2 < \phi < 0$ ): la corrente è in anticipo sulla f.e.m. applicata. Se  $\omega = \omega_0$   $\operatorname{tg}\phi = 0$ , cioè la corrente è circa in fase con la f.e.m., essendolo esattamente se  $\omega = \omega_0$ . Se  $\omega > \omega_0$   $\operatorname{tg}\phi$  è positiva,  $\phi$  è compresa tra zero e  $\pi/2$  ( $\omega_0 < \omega < \infty$ ,  $0 < \phi < \pi/2$ ) e la corrente è in ritardo rispetto alla f.e.m. applicata.

Data la struttura di (11.16) si vede che il denominatore ha un minimo, e quindi  $i_0$  un massimo, per  $\omega L = 1/\omega C$  ovvero  $\omega^2 = 1/LC = \omega_0^2$ . Il massimo è tanto più accentuato quanto più  $R$  è piccola. Numericamente nei tre casi  $i_0 = 20 \cdot 10^{-3}$  A,  $62.5 \cdot 10^{-3}$  A,  $200 \cdot 10^{-3}$  A se  $\omega = \omega_0$ .

Osserviamo che (11.15) e (11.16) non cambierebbero se la f.e.m. e la corrente avessero le espressioni  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin(\omega t + \phi)$  e  $i = i_0 \sin \omega t$ ; se invece si volesse mettere in evidenza lo sfasamento della corrente rispetto alla f.e.m., scrivendo ad esempio  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$  e  $i = i_0 \cos(\omega t + \phi)$ , l'unico cambiamento sarebbe un segno negativo davanti al secondo membro della (11.15), come è ovvio.

**Risonanza**

Il risultato trovato nell'esempio 11.2 ha validità generale: la corrente nel circuito  $RLC$  è massima quando la pulsazione della f.e.m. applicata è eguale alla pulsazione propria del circuito; in tali condizioni lo sfasamento tra corrente e f.e.m. è nullo. Il fenomeno è detto *risonanza*: esso diventa sempre più accentuato al diminuire della resistenza del circuito.

In condizioni di risonanza

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}, i_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{R}, i = i_0 \cos \omega t = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \cos \omega t = \frac{\mathcal{E}}{R} \quad : \quad (11.17)$$

Risonanza

il circuito si comporta come se fosse *puramente resistivo* (si veda per questo anche il paragrafo 11.3).

Si definisce *larghezza della risonanza* la differenza tra i valori  $\omega_2$  e  $\omega_1$ , il primo maggiore e il secondo minore di  $\omega_0$ , in corrispondenza dei quali la corrente massima assume il valore  $\mathcal{E}_0 / R \sqrt{2}$ , ridotto di un fattore  $\sqrt{2}$  rispetto al valore di risonanza. Imponendo

$$\frac{\mathcal{E}_0}{R \sqrt{2}} = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}$$

si vede che l'eguaglianza avviene per i valori di  $\omega$  tali che  $R^2 = (\omega L - 1/\omega C)^2$ .

Da questa si ricava

$$\begin{aligned} \omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C} &= R \quad , \quad \omega_1^2 - \frac{R}{L} \omega_1 - \omega_0^2 = 0 \quad , \quad \omega_2 = \frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \omega_0^2} \quad , \\ \omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C} &= -R \quad , \quad \omega_1^2 + \frac{R}{L} \omega_1 - \omega_0^2 = 0 \quad , \quad \omega_1 = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \omega_0^2} \quad . \end{aligned}$$

Le soluzioni col segno meno davanti alla radice vanno scartate perché danno pulsazioni negative e in conclusione

$$\omega_2 = \frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \omega_0^2} \quad , \quad \omega_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \omega_0^2} \quad .$$

Notiamo che  $\omega_1, \omega_2 = \omega_0^2$ :  $\omega_0$  cioè è il medio proporzionale di  $\omega_1$  e  $\omega_2$  ( $\omega_1, \omega_0 = \omega_0 : \omega_2$ ),  $\omega_1$  e  $\omega_2$  non sono equidistanti da  $\omega_0$ , la curva di risonanza non è simmetrica. Notiamo anche come in corrispondenza a  $\omega_1$  e  $\omega_2$  sia rispettivamente  $\operatorname{tg}\phi = -1$ ,  $\phi = -45^\circ$  e  $\operatorname{tg}\phi = +1$ ,  $\phi = 45^\circ$ .

La *larghezza della risonanza* risulta dunque

$$\omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L} = \frac{\omega_0}{Q} \quad , \quad (11.18) \quad \text{Larghezza della risonanza}$$

dove la quantità

$$Q = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{\omega_0 L}{R}$$

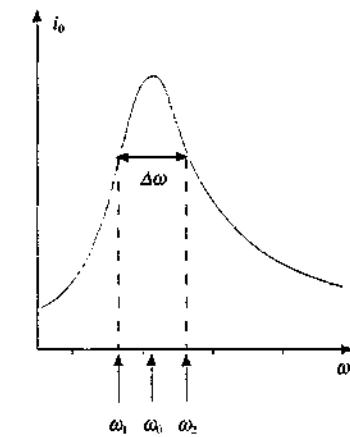


Figura 11.11

si chiama *fattore di merito della risonanza*: essa è tanto maggiore quanto più stretta è la risonanza, cioè quanto più piccola è la resistenza rispetto a  $\omega_0 L$ . Non è difficile raggiungere valori di  $Q$  dell'ordine di 100: ciò vuol dire ad esempio che con  $\omega_0 = 10^6$  rad/s la risonanza è larga  $10^4$  rad/s.

Un circuito *RLC* con un alto fattore di merito è molto selettivo nella risposta: in esso circola una corrente notevole in pratica soltanto quando la pulsazione esterna  $\omega$  coincide con quella propria  $\omega_0$ . Il fenomeno è molto utile per mettere in evidenza segnali deboli: esso è sfruttato nei *sintonizzatori* impiegati per la ricezione radiofonica e televisiva.

Fattore di merito  
della risonanza

Con riferimento a quanto detto nel paragrafo 9.8 del primo volume per la risonanza in un oscillatore armonico forzato ad oscillare da una forza esterna sinusoidale, notiamo una differenza sostanziale: nell'oscillatore meccanico si ha risonanza solo se  $\omega_0^2 > 2\gamma$ , cioè con smorzamenti deboli, mentre nell'oscillatore elettrico *RLC* in serie si può sempre avere risonanza (più o meno pronunciata).

### 11.3 Circuiti in corrente alternata. Impedenza

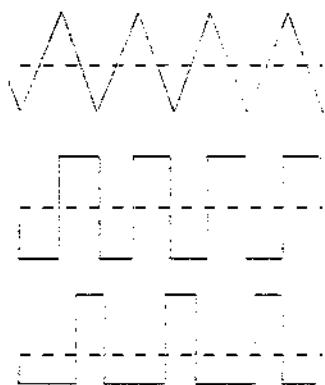


Figura 11.12

Una f.e.m. e una corrente che variano nel tempo proporzionalmente a  $\sin \omega t$  o  $\cos \omega t$  sono dette *alternate*. Per definizione si chiama *alternata* una grandezza *periodica* che ha *valor medio nullo in un periodo*; alcuni esempi sono mostrati in figura 11.12. Nell'uso comune il termine è riservato alle variazioni sinusoidali, che sono un caso particolare.

In questo paragrafo esaminiamo il comportamento in regime alternato sia dei singoli elementi di circuito (resistore, induttore, condensatore) che di alcune semplici combinazioni in *serie* e in *parallelo*; in particolare ritroveremo i risultati del paragrafo 11.2 relativi al circuito *RLC* in serie. Supponiamo sempre che le variazioni nel tempo siano sufficientemente lente così da poter considerare in ogni istante la corrente eguale in qualsiasi punto del circuito: detta *d* una dimensione tipica del circuito e *c* la velocità della luce, il periodo di oscillazione deve essere tale che  $T = 2\pi/\omega \gg d/c$ .

#### Resistore *R*

Applicando ai capi di un resistore una f.e.m.  $\varepsilon = \varepsilon_0 \cos \omega t$  si ha un passaggio di corrente in accordo con la legge di Ohm:

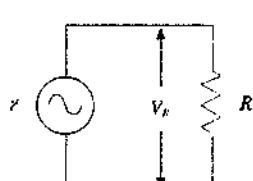


Figura 11.13

$$\varepsilon = R i \Rightarrow i = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{\varepsilon_0}{R} \cos \omega t = i_0 \cos \omega t$$

La corrente è in fase con la f.e.m. e tra i valori massimi sussiste la relazione  $i_0 = \varepsilon_0 / R$ .

Nel caso di un resistore facente parte di un circuito più complesso e attraversato dalla corrente  $i = i_0 \cos \omega t$  possiamo dire che ai capi del resistore compare la tensione

$$V_R = R i = R i_0 \cos \omega t = V_0 \cos \omega t$$

in fase con la corrente e che tra i valori massimi sussiste la relazione

$$V_0 = R i_0$$

Osserviamo che il comportamento di un resistore in regime alternato non dipende dal valore della pulsazione  $\omega$ .

#### Induttore *L*

L'equazione di un circuito contenente una f.e.m. alternata e un induttore con resistenza nulla è

$$\varepsilon - L \frac{di}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{\varepsilon}{L} = \frac{\varepsilon_0}{L} \cos \omega t$$

e quindi la corrente nel circuito vale

$$i = \frac{\varepsilon_0}{\omega L} \sin \omega t = \frac{\varepsilon_0}{\omega L} \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right) :$$

il valore massimo è dato da  $i_0 = \varepsilon_0 / \omega L$  e lo sfasamento vale  $-\pi/2$  (corrente in quadratura e in ritardo rispetto alla f.e.m. ovvero f.e.m. in anticipo di  $\pi/2$  sulla corrente).

L'equazione del circuito, riscritta come  $\varepsilon = L di/dt$ , ci permette di affermare che ai capi dell'induttore percorso da corrente compare la tensione  $V_L = L di/dt$ , così come ai capi di un resistore compare  $V_R$ . Pertanto in un induttore inserito in un circuito generico e attraversato dalla corrente alternata  $i = i_0 \cos \omega t$  si ha

$$V_L = L \frac{di}{dt} = -\omega L i_0 \sin \omega t = \omega L i_0 \cos \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) = V_0 \cos \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) :$$

la tensione  $V_L$  è in anticipo di  $\pi/2$  sulla corrente e tra i valori massimi sussiste la relazione

$$V_0 = \omega L i_0$$

Reattanza dell'induttore

Il termine  $\omega L$  si chiama *reattanza dell'induttore* e notiamo che, mentre lo sfasamento è indipendente da  $\omega$ , la reattanza cresce linearmente con  $\omega$ : il comportamento dell'induttore varia al variare della pulsazione.

### Condensatore C

Ai capi di un condensatore carico c'è la tensione  $V_C = q/C$  e l'equazione del circuito, in caso di connessione ad una f.e.m. alternata e supponendo nulla la resistenza complessiva, è

$$\varepsilon = \frac{q}{C} \Rightarrow q = C \varepsilon = C \varepsilon_0 \cos \omega t$$

La corrente vale

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{d\varepsilon}{dt} = -\omega C \varepsilon_0 \sin \omega t = \omega C \varepsilon_0 \cos \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) :$$

essa è in anticipo di  $\pi/2$  sulla f.e.m. applicata e il suo valore massimo è  $i_0 = \omega C \varepsilon_0$ . Pertanto, per un condensatore inserito in un circuito qualsiasi e attraversato dalla corrente  $i = i_0 \cos \omega t$ , possiamo scrivere, dato che  $i = C dV_C/dt$ ,

$$V_C = \frac{i_0}{\omega C} \sin \omega t = \frac{i_0}{\omega C} \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right) = V_0 \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right) . \quad V_0 = \frac{i_0}{\omega C}$$

Il termine  $1/\omega C$  è detto *reattanza del condensatore*. Anche ora notiamo che la relazione di fase tra  $i$  e  $V_C$  è indipendente dalla pulsazione, mentre ne dipende la relazione tra i valori massimi.

In conclusione, l'applicazione di una f.e.m. alternata provoca nei tre casi esami-

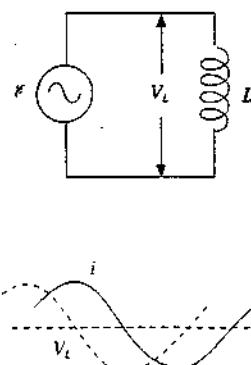


Figura 11.14

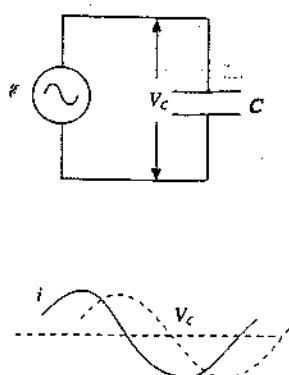


Figura 11.15

nati il passaggio di una corrente alternata; nell'induttore e nel condensatore, a differenza del resistore, la corrente non è proporzionale alla tensione che compare ai capi dell'elemento stesso, bensì è sfasata e precisamente in quadratura. La relazione di proporzionalità sussiste solo tra i valori massimi.

Come esempio successivo consideriamo due elementi in serie: essi sono attraversati dalla stessa corrente  $i = i_0 \cos \omega t$ , ma le tensioni ai capi degli elementi non sono in fase tra loro, essendo sfasate rispetto alla corrente di angoli diversi ( $0$  nel resistore,  $\pi/2$  nell'induttore,  $-\pi/2$  nel condensatore). La tensione totale ai capi della serie si ottiene sommando due grandezze sinusoidali, di eguale pulsazione, diversa ampiezza e diversa fase. Per eseguire la somma ci serviamo del *metodo dei vettori rotanti di Fresnel*, illustrato nel paragrafo 9.4 del primo volume.

### Serie $RL$

Applicando una f.e.m. alternata alla serie di un resistore e di un induttore abbiamo:

$$i = i_0 \cos \omega t \quad , \quad V_R = R i_0 \cos \omega t \quad , \quad V_L = \omega L i_0 \cos \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$

$V_R$  e  $V_L$  sono rappresentati da due vettori rotanti, con  $V_L$  che precede  $V_R$  di  $\pi/2$  come mostrato nella figura 11.16 (si assume che il verso di rotazione sia antiorario); in questa figura il vettore rotante che rappresenta la corrente è parallelo e concorde a  $V_R$ . La somma  $V_R + V_L$ , tensione ai capi della serie, è data dal vettore risultante  $V$ , il cui modulo  $V_0$  e la cui fase  $\phi$  rispetto ad  $i$  sono espressi da

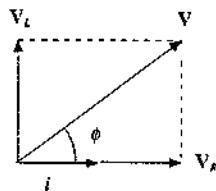


Figura 11.16

$$V_0 = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} i_0 \quad , \quad \tan \phi = \frac{\omega L}{R}$$

La proiezione  $V = V_0 \cos(\omega t + \phi)$  è il risultato cercato. Tale tensione è in *anticipo di fase* sulla corrente e i valori massimi sono proporzionali tra loro. Lo sfasamento dipende dal rapporto  $\omega L / R$  e tende a  $\pi/2$  se  $R \ll \omega L$  (circuito praticamente soltanto induttivo) oppure a zero se  $R \gg \omega L$  (circuito praticamente soltanto resistivo); in corrispondenza  $V_0$  tende rispettivamente a  $\omega L i_0$  oppure a  $R i_0$ . Si noti che l'importanza relativa del termine  $\omega L$  rispetto a  $R$  dipende dalla pulsazione e aumenta con questa. Fissati i valori di  $L$  e  $R$ , il comportamento del circuito passa da resistivo ( $R \gg \omega L$ ) a induttivo ( $R \ll \omega L$ ) al crescere di  $\omega$ . Ad esempio, con  $R = 10 \Omega$  e  $L = 10^{-5} \text{ H}$ , il termine induttivo è praticamente trascurabile fino a  $\omega = 10^4 \text{ rad/s}$  (frequenza  $v = \omega/2\pi \approx 1590 \text{ Hz}$ ).

### Serie $RC$

Adottando la stessa costruzione, con  $V_C$  che segue  $V_R$  di  $\pi/2$ , si ha:

$$i = i_0 \cos \omega t \quad , \quad V_R = R i_0 \cos \omega t \quad , \quad V_C = \frac{i_0}{\omega C} \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$V = V_0 \cos(\omega t + \phi) \quad , \quad V_0 = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} i_0 \quad , \quad \tan \phi = -\frac{1}{\omega C R}$$

La fase è negativa in quanto  $\mathbf{V}$  è sempre in ritardo rispetto a  $\mathbf{V}_R$  (vedi figura 11.17); la tensione dunque è in ritardo rispetto alla corrente e i valori massimi sono proporzionali tra loro. L'importanza relativa dei termini  $R$  e  $1/\omega C$  dipende dalla pulsazione, oltre che dai valori di  $R$  e  $C$ . Fissati questi,  $1/\omega C$  predomina al diminuire di  $\omega$  (comportamento capacitivo), mentre al crescere di  $\omega$  il comportamento tende a diventare resistivo. Con  $R = 10 \Omega$  e  $C = 10^{-6} F$ ,  $1/\omega C$  diventa trascurabile rispetto a  $R$  per pulsazioni superiori a  $\omega = 10^7$  rad/s.

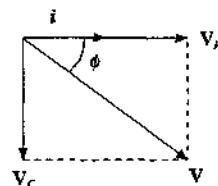


Figura 11.17

### Serie LC

In questo caso abbiamo solo i vettori  $\mathbf{V}_L$  e  $\mathbf{V}_C$ , paralleli e discordi, entrambi ortogonali al vettore  $i$ :

$$i = i_0 \cos \omega t, \quad V_L = \omega L i_0 \cos \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right), \quad V_C = \frac{i_0}{\omega C} \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right) ;$$

$$\text{se } \omega L > \frac{1}{\omega C} \quad V = V_0 \cos \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right), \quad V_0 = \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) i_0 ;$$

$$\text{se } \omega L < \frac{1}{\omega C} \quad V = V_0 \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right), \quad V_0 = \left( \frac{1}{\omega C} - \omega L \right) i_0 .$$

A seconda della relazione tra  $\omega L$  e  $1/\omega C$ , dipendente dalla pulsazione, il circuito si comporta come un induttore di induttanza  $L'$  tale che  $\omega L' = \omega L - 1/\omega C$  ovvero  $L' = L - 1/\omega^2 C$  o come un condensatore di capacità  $C' = C/(1 - \omega^2 LC)$ . Il comportamento induttivo si ha per  $\omega > \omega_0$ , quello capacitivo per  $\omega < \omega_0$ , con  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ . Se  $\omega = \omega_0$ , cioè se  $\omega L = 1/\omega C$ ,  $V_L$  e  $V_C$  sono eguali ed opposti per cui la tensione ai capi della serie  $LC$  è uguale a zero.

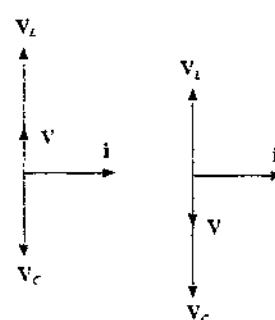


Figura 11.18

### Serie RLC

Ridiscutiamo ora la serie  $RLC$  già trattata nel paragrafo 11.2. Abbiamo:

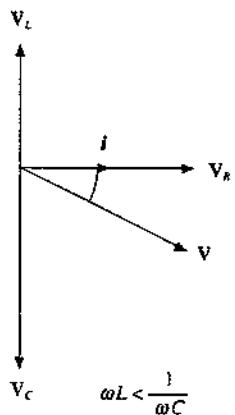
$$i = i_0 \cos \omega t, \quad V_R = R i_0 \cos \omega t, \quad V_L = \omega L i_0 \cos \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) ;$$

$$V_C = \frac{i_0}{\omega C} \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right) .$$

$$V = V_0 \cos(\omega t + \phi), \quad V_0 = \sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} i_0, \quad \operatorname{tg} \phi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} .$$

Tali relazioni, ottenute con la costruzione di Fresnel relativa ai tre vettori  $\mathbf{V}_R$ ,  $\mathbf{V}_L$ ,  $\mathbf{V}_C$ , coincidono con (11.15) e (11.16).

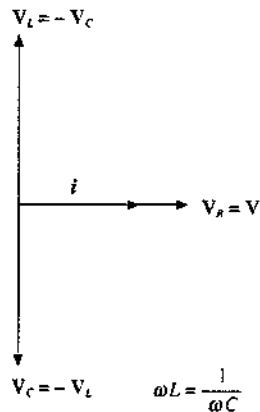
Si vede come al crescere di  $\omega$  il circuito passi dalla situazione in cui  $1/\omega C$  è preponderante rispetto a  $\omega L$  (comportamento capacitivo,  $\phi < 0$ , come se fosse una serie  $RC$ ) a quella in cui  $\omega L$  è preponderante rispetto a  $1/\omega C$  (comportamento induttivo,  $\phi > 0$ , come se fosse una serie  $RL$ ). La condizione di risonanza è quella in cui c'è la transizione da un regime all'altro:  $\omega L = 1/\omega C$ ,  $\phi = 0$ , il comportamento è resistivo. Dallo studio della serie  $LC$  ricaviamo che ciò corrisponde all'annullarsi di due contributi opposti ( $V_L = -V_C$ ).



Dato che in un circuito reale, anche se privo di resistori, sono sempre presenti le resistenze dei fili di collegamento e degli eventuali avvolgimenti che costituiscono gli induttori e che in un circuito soltanto resistivo esistono sempre una certa induttanza, dovuta all'autoflusso, e capacità parassite derivanti dalla vicinanza tra i vari conduttori, i circuiti  $RL$ ,  $RC$  e  $RLC$  sono quelli più realistici. Gli elementi puri  $L$ ,  $C$  e  $LC$  sono idealizzazioni alle quali tanto più ci si avvicina quanto più le reattanze  $\omega L$  e  $1/\omega C$  sono dominanti rispetto a  $R$ .

Tutti i risultati trovati possono essere riassunti nel modo seguente: quando attraverso uno o più elementi  $R$ ,  $L$ ,  $C$  in serie viene fatta passare una corrente alternata  $i = i_0 \cos \omega t$ , ad esempio perché si collega alla serie un generatore di f.e.m. alternata, la tensione ai capi della serie è

$$V = V_0 \cos(\omega t + \phi)$$



Il valore massimo  $V_0$  è legato al valore massimo  $i_0$  della corrente dalla relazione di proporzionalità

$$V_0 = Z_0 i_0 \quad (11.19)$$

Sia il valore della grandezza  $Z_0$ , detta *impedenza della serie*, che della fase  $\phi$  dipendono dai parametri del circuito e dalla pulsazione  $\omega$ .

La (11.19) stabilisce tra i valori massimi di tensione e corrente una relazione che è analoga alla legge di Ohm (6.26). Osserviamo che tali valori massimi non sono raggiunti nello stesso istante, in quanto  $V$  e  $i$  sono sfasate, e ripetiamo che l'impedenza non è una costante caratteristica del circuito in quanto dipende da  $\omega$ . Per avere la relazione completa tra corrente e tensione occorre conoscere  $Z_0$  e  $\phi$  al dato valore di  $\omega$ .

Nella tabella 11.1 sono riassunti i casi finora esaminati.

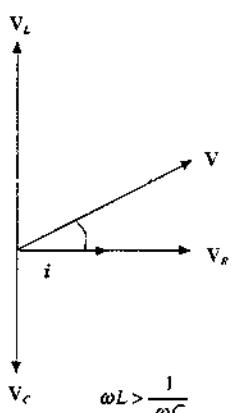


Figura 11.19

Tabella 11.1 Impedenza e sfasamento per elementi $R$ , $L$ , $C$ in serie		
	$Z_0$	$\phi$
$R$	$R$	0
$L$	$\omega L$	$\pi/2$
$C$	$1/\omega C$	$-\pi/2$
$RL$	$\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$	$\arctg \omega L/R$
$RC$	$\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}$	$\arctg -1/\omega CR$
$LC$	$\omega L - \frac{1}{\omega C}$	$\pm \pi/2$
$RLC$	$\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$	$\arctg \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}$



$$V = V_0 \cos(\omega t + \phi)$$

$$i = i_0 \cos \omega t$$

$$V_0 = Z_0 i_0$$

Figura 11.20

Riepiloghiamo anche quanto trovato per l'andamento dell'impedenza in funzione della pulsazione. Solo in un resistore l'impedenza, che coincide con la resi-

stenza, è costante. In un induttore l'impedenza, che coincide con la reattanza, cresce monotonicamente con la pulsazione da zero (circuito in corrente continua) all'infinito: ciò è dovuto al fatto che la f.e.m. di autoinduzione, che si oppone alla variazione di corrente, è tanto più grande quanto più questa è rapida, essendo proporzionale a  $di/dt$  e quindi, in regime alternato, a  $\omega$ . Di conseguenza, a parità di valore di f.e.m. applicata, nell'induttore passa una corrente che decresce al crescere della pulsazione.

In un condensatore l'impedenza, che di nuovo coincide con la reattanza, decrese monotonicamente al crescere di  $\omega$  dal valore infinito assunto per  $\omega = 0$  (corrente continua) a zero. Il passaggio della corrente variabile nel condensatore comporta una variazione di carica sulle armature e i valori massimi sono legati dalla (11.13),  $V_0 = q_0/C = i_0/\omega C$ : per avere una data  $i_0$ , a bassa pulsazione deve avvenire un notevole spostamento di carica (grandi  $q_0$  e  $V_0$ ) mentre ad alta pulsazione lo stesso effetto si ottiene con un piccolo spostamento di carica (piccoli  $q_0$  e  $V_0$ ); ciò spiega il comportamento in funzione di  $\omega$  del rapporto  $V_0/i_0 = Z$ . A parità di f.e.m. applicata la corrente nel condensatore aumenta al crescere della pulsazione.

Quando si mettono due elementi diversi in serie si ha un effetto combinato, con comportamento sempre induttivo o capacitivo. Solo nella serie  $RLC$  (e al limite nella serie  $LC$ ) si ha risonanza e cambiamento del comportamento al variare della pulsazione.

### Elementi in parallelo. Ammettenza

Considerazioni analoghe a quelle svolte per gli elementi in serie si possono fare per elementi in parallelo. La tensione  $V = V_0 \cos \omega t$  è eguale per tutti i rami del parallelo, mentre nei singoli rami passano correnti in genere sfasate tra loro e rispetto alla tensione comune. Per ogni elemento  $R$ ,  $L$ ,  $C$  valgono le relazioni trovate in precedenza, anche se questa volta si somma sulle correnti per trovare la corrente totale assorbita dal parallelo; il metodo di somma è sempre quello di Fresnel.

Nel seguito trattiamo, in modo schematico, i tre possibili paralleli tra  $R$ ,  $L$ ,  $C$  e l'unico parallelo  $RLC$ .

### Parallelo $RL$

$$V = V_0 \cos \omega t \quad , \quad i_R = \frac{V}{R} = \frac{V_0}{R} \cos \omega t \quad , \quad i_L = \frac{V_0}{\omega L} \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right) \quad ,$$

$$i = i_R + i_L = i_0 \cos(\omega t + \psi) \quad , \quad i_0 = V_0 \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{\omega^2 L^2}} \quad , \quad \operatorname{tg} \psi = -\frac{R}{\omega L} \quad .$$

Nel complesso il comportamento è induttivo in quanto la corrente  $i$  è in ritardo rispetto alla tensione e l'impedenza

$$Z_0 = \frac{V_0}{i_0} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{\omega^2 L^2}}} = \frac{\omega L R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

cresce con  $\omega$ , dal valore zero per  $\omega = 0$  al valore  $R$  per  $\omega = \infty$ . Pertanto la corrente assorbita diminuisce al crescere di  $\omega$ , come del resto si intuisce dal fatto che, nel parallelo, la reattanza  $\omega L$  del ramo induttivo cresce con  $\omega$  mentre la resistenza  $R$  non dipende da  $\omega$ .

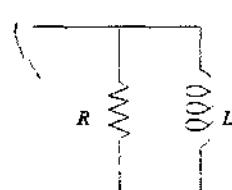


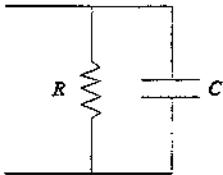
Figura 11.21

*Parallelo RC*

$$V = V_0 \cos \omega t \quad , \quad i_R = \frac{V}{R} = \frac{V_0}{R} \cos \omega t \quad , \quad i_C = \omega C V_0 \cos \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) \quad ,$$

$$i = i_R + i_C = i_0 \cos(\omega t + \psi) \quad , \quad i_0 = V_0 \sqrt{\frac{1}{R^2} + \omega^2 C^2} \quad , \quad \operatorname{tg} \psi = \omega CR$$

La corrente è in *anticipo* sulla tensione e l'impedenza



$$Z_0 = \frac{V_0}{i_0} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \omega^2 C^2}} = \frac{R}{\sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2}}$$

Figura 11.22

diminuisce al crescere di  $\omega$  dal valore  $R$  per  $\omega = 0$  al valore zero per  $\omega = \infty$ ; la corrente assorbita cresce quindi con  $\omega$ . Si può dire che il comportamento è capacitivo.

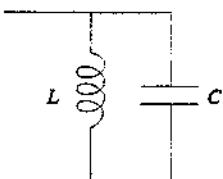
*Parallelo LC*

$$V = V_0 \cos \omega t \quad , \quad i_L = \frac{V_0}{\omega L} \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right) \quad ,$$

$$i_C = \omega C V_0 \cos \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) \quad ,$$

$$i = i_L + i_C = i_0 \cos(\omega t + \psi) \quad , \quad i_0 = V_0 \left( \omega C - \frac{1}{\omega L} \right) \quad ,$$

$$\operatorname{tg} \psi = -\frac{\pi}{2} \quad \text{se } \omega L > \frac{1}{\omega C} \quad , \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{\pi}{2} \quad \text{se } \omega L < \frac{1}{\omega C} \quad ,$$



$$Z_0 = \frac{V_0}{i_0} = \frac{1}{\omega C - \frac{1}{\omega L}} = \frac{\omega L}{\omega^2 L C - 1}$$

Figura 11.23

Il comportamento è diverso a seconda che sia  $\omega < \omega_0$  oppure  $\omega > \omega_0$  con  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ . Per  $\omega = \omega_0$ , l'impedenza diventa infinita e la corrente si annulla, essendo  $i_L = -i_C$ .

*Parallelo RLC*

$$V = V_0 \cos \omega t \quad , \quad i_R = \frac{V_0}{R} \cos \omega t \quad , \quad i_L = \frac{V_0}{\omega L} \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right) \quad ,$$

$$i_C = \omega C V_0 \cos \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) \quad ,$$

$$i = i_R + i_L + i_C = i_0 \cos(\omega t + \psi) \quad , \quad i_0 = V_0 \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left( \omega C - \frac{1}{\omega L} \right)^2} \quad ,$$

$$\operatorname{tg} \psi = R \left( \omega C - \frac{1}{\omega L} \right) , \quad Z_0 = \frac{V_0}{i_0} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left( \omega C - \frac{1}{\omega L} \right)^2}}$$

Il circuito si comporta come un parallelo  $RC$  se  $\omega C > 1/\omega L$  e come un parallelo  $RL$  se  $\omega C < 1/\omega L$ . Quando  $\omega C = 1/\omega L$  il comportamento è resistivo, l'impedenza ha un massimo e la corrente un minimo: si parla di *antirisonanza* e lo stesso termine si può applicare all'analogia situazione del parallelo  $LC$ .

In ognuno dei casi esaminati la corrente totale assorbita dal parallelo è sfasata rispetto alla tensione ai capi del parallelo; si usa scrivere la relazione tra il valore massimo della corrente e il valore massimo della d.d.p. nella forma

$$i_0 = Y_0 V_0 \quad , \quad (11.20)$$

definendo una nuova grandezza, l'*ammettenza*  $Y_0$ . Dal confronto con (11.19) risulta

$$Y_0 = \frac{1}{Z_0} \quad : \quad (11.21) \quad \text{Ammettenza}$$

*L'ammettenza è l'inverso dell'impedenza.* Naturalmente, come per l'impedenza, l'ammettenza dipende dai parametri del circuito e dalla pulsazione; lo stesso vale per l'angolo di sfasamento  $\psi$ .

Riassumiamo nella Tabella 11.2 le espressioni di  $Y_0$  e  $\psi$  per i singoli elementi  $R, L, C$  e per i paralleli appena visti.

Tabella 11.2 Ammettenza e sfasamento per elementi  $R, L, C$  in parallelo

	$Y_0$	$\psi$
$R$	$1/R$	0
$L$	$1/\omega L$	$-\pi/2$
$C$	$\omega C$	$\pi/2$
$RL$	$\sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{\omega^2 L^2}}$	$\operatorname{arctg} -R/\omega L$
$RC$	$\sqrt{\frac{1}{R^2} + \omega^2 C^2}$	$\operatorname{arctg} \omega CR$
$LC$	$\omega C - \frac{1}{\omega L}$	$\mp \pi/2$
$RLC$	$\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left( \omega C - \frac{1}{\omega L} \right)^2}$	$\operatorname{arctg} R \left( \omega C - \frac{1}{\omega L} \right)$

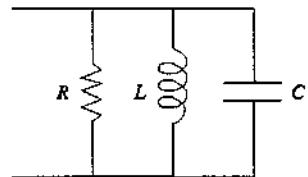


Figura 11.24

## Conduttanza, suscettanza

L'inverso della resistenza si chiama *conduttanza* (paragrafo 6.5) e l'inverso della reattanza è detto *suscettanza*.

L'analisi condotta su circuiti semplici può essere estesa a configurazioni fatte da serie e paralleli degli elementi  $R$ ,  $L$ ,  $C$  e anche da strutture più complicate, non riconducibili immediatamente a serie e paralleli. Noi però tratteremo il problema generale (e anche quelli particolari già visti) con un formalismo differente, più potente in quanto permette di estendere ai circuiti in corrente alternata i principi di Kirchhoff e i metodi di risoluzione che da essi derivano, esposti nel paragrafo 6.10 per i circuiti resistivi in corrente continua.

## 11.4 Metodo simbolico per i circuiti in corrente alternata

Ripetiamo ancora una volta il risultato più importante che abbiamo ottenuto in questo capitolo: quando ad un elemento  $R$ ,  $L$ ,  $C$  o ad una serie o parallelo di tali elementi si applica una f.e.m. alternata, la corrente assorbita dal circuito è alternata, con la stessa pulsazione della f.e.m. applicata. Tra le due grandezze non c'è una relazione di linearità, in quanto esse risultano sfasate; la linearità sussiste tra i valori massimi. Abbiamo

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t + \phi), \quad i = i_0 \cos\omega t, \quad \mathcal{E}_0 = Z_0 i_0.$$

L'effetto dell'elemento attraversato dalla corrente è espresso dall'impedenza  $Z_0$  e dallo sfasamento  $\phi$ . Negli elementi singoli si è trovato:

$$\begin{array}{lll} R & Z_0 = R & \phi = 0 \\ L & Z_0 = \omega L & \phi = \pi/2 \\ C & Z_0 = 1/\omega C & \phi = -\pi/2 \end{array}.$$

In un circuito composto da più elementi l'effetto complessivo è dato da una  $Z_0(\omega)$  e da una  $\phi(\omega)$ . Invece che dell'impedenza ci si può servire dell'ammittenza  $Y_0 = 1/Z_0$  e dello sfasamento  $\psi$  della corrente rispetto alla d.d.p. che è ovviamente eguale a  $-\phi$ .

Osserviamo adesso, ritornando all'equazione (11.14), che se scrivessimo la f.e.m. applicata come  $\mathcal{E}_0 e^{i(\omega t + \phi)}$ , l'equazione avrebbe l'aspetto

$$\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{I}{LC} = i \omega \frac{\mathcal{E}_0}{L} e^{i(\omega t + \phi)}$$

e una soluzione particolare sarebbe  $I = I_0 e^{i\omega t}$  (nel resto del capitolo indicheremo la corrente con la lettera maiuscola  $I$  per evitare confusione con l'unità immaginaria  $i = \sqrt{-1}$ ). Infatti, sostituendo questa espressione nell'equazione si trova

$$\begin{aligned} -\omega^2 I_0 e^{i\omega t} + \frac{R}{L} i \omega I_0 e^{i\omega t} + \frac{I_0}{LC} e^{i\omega t} &= i \omega \frac{\mathcal{E}_0}{L} e^{i(\omega t + \phi)} \\ \Rightarrow -\omega^2 I_0 + \frac{R}{L} i \omega I_0 + \frac{I_0}{LC} &= i \omega \frac{\mathcal{E}_0}{L} e^{i\phi}. \end{aligned}$$

Utilizzando la *formula di Eulero*

Formula di Eulero

$$e^{i\phi} = \cos\phi + i \sin\phi \quad (11.22)$$

l'eguaglianza assume la forma  $a + i b = c + i d$  e imponendo  $a = c$ ,  $b = d$  si trovano le relazioni (11.15) e (11.16).

Pertanto, quando si considera una f.e.m. complessa  $\mathcal{E}_0 e^{i(\omega t + \phi)}$  l'equazione del circuito ammette come soluzione una corrente complessa  $I_0 e^{i\omega t}$ . Per la formula di Eulero (11.22)

$$\mathcal{E}_0 e^{i(\omega t + \phi)} = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t + \phi) + i \mathcal{E}_0 \sin(\omega t + \phi),$$

$$I_0 e^{i\omega t} = I_0 \cos\omega t + i I_0 \sin\omega t;$$

d'altra parte già sappiamo che quando la f.e.m. applicata è  $E_0 \cos(\omega t + \phi)$  la soluzione è  $I_0 \cos\omega t$ . Concludiamo quindi che, trovata la soluzione complessa corrispondente alla data sollecitazione complessa, la parte reale della soluzione complessa è a sua volta una soluzione, corrispondente alla parte reale della sollecitazione (e un risultato analogo vale per la parte immaginaria).

Una proprietà fondamentale delle grandezze complesse è la seguente: scritta la f.e.m. complessa come

$$\mathcal{E} = E_0 e^{i(\omega t + \phi)} = E_0 e^{i\phi} e^{i\omega t}$$

e sostituendo a  $\mathcal{E}_0$ , in accordo con quanto trovato nel paragrafo 11.3, la quantità

$$Z_0 I_0 = \sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} I_0$$

si ha

$$\mathcal{E} = Z_0 e^{i\phi} I_0 e^{i\omega t} = Z I \quad ; \quad (11.23) \quad \text{Impedenza complessa}$$

le grandezze complesse  $\mathcal{E}$  e  $I$  sono tra loro proporzionali. Il coefficiente di proporzionalità  $Z$  è detto *impedenza complessa* del circuito.

In definitiva, per il circuito in esame, che è la serie *RLC*, abbiamo questi risultati: se rappresentiamo le grandezze alternate f.e.m. e corrente con numeri complessi, aventi modulo eguale al valore massimo e fase eguale alla fase della corrispondente grandezza alternata (così che f.e.m. e corrente sono le parti reali di questi numeri complessi), la relazione tra la f.e.m. complessa e la corrente complessa è lineare. Il coefficiente di proporzionalità (impedenza complessa) riassume in sè l'effetto del circuito: infatti il suo modulo dà il rapporto tra i valori massimi di f.e.m. e corrente e la sua fase dà lo sfasamento introdotto dal circuito tra f.e.m. e corrente reali.

Relazioni analoghe alla (11.23) si possono stabilire per i singoli elementi  $R$ ,  $L$ ,  $C$ . Il caso del resistore è il più semplice: esso non introduce sfasamento, per cui l'impedenza ha solo la parte reale, eguale a  $R$ , e abbiamo  $V_R = Z I = R I$ .

In un induttore, posto  $I = I_0 e^{i\omega t}$ ,

$$V_L = L \frac{dI}{dt} = i \omega L I_0 e^{i\omega t} = i \omega L I, Z = i \omega L = \omega L e^{i\pi/2} \quad ;$$

l'impedenza complessa di un induttore è immaginaria pura.

In un condensatore, posto  $V_C = V_0 e^{i(\omega t + \phi)}$ ,

$$I = I_0 e^{i\omega t} = \frac{dq}{dt} = C \frac{dV_C}{dt} = i \omega C V_0 e^{i(\omega t + \phi)} = i \omega C V.$$

$$Z = \frac{1}{i \omega C} = -\frac{i}{\omega C} = \frac{1}{\omega C} e^{-i\pi/2} \quad ;$$

anche l'impedenza complessa di un condensatore è immaginaria pura.

Riassumendo, per ciascun elemento  $R$ ,  $L$ ,  $C$  vale la relazione  $V = Z I$  tra tensione complessa e corrente complessa e i valori dell'impedenza complessa sono:

$$R \quad Z = R \quad Z_0 = R \quad \phi = 0 \quad (11.24)$$

$$L \quad Z = i \omega L = \omega L e^{i\pi/2} \quad Z_0 = \omega L \quad \phi = \pi/2 \quad (11.25)$$

$$C \quad Z = \frac{1}{i \omega C} = \frac{1}{\omega C} e^{-i\pi/2} \quad Z_0 = \frac{1}{\omega C} \quad \phi = -\pi/2 \quad (11.26)$$

Se confrontiamo con lo schema dato all'inizio del paragrafo troviamo conferma che l'impedenza complessa riassume nel suo modulo e nella sua fase l'effetto dell'elemento  $R$ ,  $L$  o  $C$ .

L'aver stabilito una relazione lineare tra tensione e corrente (complesse) anche per un induttore e per un condensatore permette di estendere i risultati trovati nel capitolo 6 per le serie e i paralleli di resistenze alle serie e ai paralleli di impedenze: quando gli elementi sono in serie l'impedenza totale è la somma delle singole impedenze, quando sono in parallelo l'inverso dell'impedenza totale è la somma degli inversi delle singole impedenze. Introducendo l'ammettenza complessa

$$Y = \frac{I}{V} = \frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_0} e^{-i\phi} = Y_0 e^{-i\phi} \quad ,$$

abbiamo che per elementi in parallelo l'ammettenza totale è la somma delle ammettenze mentre per elementi in serie si sommano gli inversi delle ammettenze.

Più in generale pure i principi di Kirchhoff (paragrafo 6.10) e i metodi di soluzione da essi derivati, come il metodo delle maglie, validi per reti resistive in regime continuo, possono essere estesi a reti comunque complicate di elementi  $R$ ,  $L$ ,  $C$  (reti lineari) in regime alternato. A calcolo concluso si hanno le correnti e le tensioni in ciascun elemento e, a questo punto, basta prendere le parti reali per avere i valori effettivi.

Tale tipo di trattazione, che formalmente generalizza la legge di Ohm nel campo complesso, è detto *metodo simbolico*.

### Esempio 11.3

Calcolare le impedenze e le ammettenze complesse delle serie  $RL$ ,  $RC$ ,  $LC$ ,  $RLC$  e dei corrispondenti paralleli.

#### Soluzione

Per la serie  $RL$  ricorriamo a (11.24) e (11.25):

$$Z = Z_R + Z_L = R + i\omega L = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} e^{i\phi} \quad ,$$

$$\operatorname{tg} \phi = \omega L / R \quad ;$$

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R + i\omega L} = \frac{R - i\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} e^{-i\phi} \quad .$$

Negli altri casi utilizziamo anche (11.26):

$$Z = Z_R + Z_C = R - \frac{i}{\omega C} = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} e^{i\phi} \quad , \quad \operatorname{tg} \phi = -\frac{1}{\omega C R}$$

$$Z = Z_L + Z_C = i\omega L - \frac{i}{\omega C} = \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) e^{i\phi}$$

$$Z = Z_R + Z_L + Z_C = R + i \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) = \sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} e^{i\phi} \quad .$$

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \quad .$$

Si noti come si ritrovino molto rapidamente tutti i risultati del paragrafo 11.3, tabella 11.1. Le ammettenze si calcolano tramite (11.27), come abbiamo fatto esplicitamente per la serie  $RL$ : il modulo è l'inverso del modulo dell'impedenza, la fase è opposta. Per i casi in parallelo abbiamo:

$$Y = Y_R + Y_L = \frac{1}{R} + \frac{1}{i\omega L} = \frac{1}{R} - \frac{i}{\omega L} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{\omega^2 L^2}} e^{i\phi} = \frac{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}{\omega L R} e^{i\phi} \quad .$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \psi &= -\frac{R}{\omega L} \quad , \quad Z = \frac{1}{Y} = \frac{\omega L R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} e^{-i\psi} \quad ; \\ Y = Y_R + Y_C &= \frac{1}{R} + i \omega C = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \omega^2 C^2} e^{i\psi} = \frac{\sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2}}{R} e^{i\psi} \\ \operatorname{tg} \psi &= \omega C R \quad , \quad Z = \frac{1}{Y} = \frac{R}{\sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2}} e^{-i\psi} \quad ; \\ Y = Y_L + Y_C &= \frac{1}{i\omega L} + i \omega C = i \left( \omega C - \frac{1}{\omega L} \right) = \left( \omega C - \frac{1}{\omega L} \right) e^{i\pi/2} \\ Z = \frac{1}{Y} &= -\frac{i\omega L}{\omega^2 LC - 1} = \frac{\omega L}{\omega^2 LC - 1} e^{-i\pi/2} \quad ; \\ Y = Y_R + Y_L + Y_C &= \frac{1}{R} + i \left( \omega C - \frac{1}{\omega L} \right) = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left( \omega C - \frac{1}{\omega L} \right)^2} e^{i\psi} \quad , \\ \operatorname{tg} \psi &= \left( \omega C - \frac{1}{\omega L} \right) R \quad , \quad Z = \frac{1}{Y} = \frac{\omega L R}{\sqrt{\omega^2 L^2 + R^2 (\omega^2 L C - 1)^2}} e^{-i\psi} \end{aligned}$$

Di nuovo possiamo dire che i risultati del paragrafo 11.3 (Tabella 11.2) sono stati ottenuti in modo semplice e rapido.

L'impedenza totale di un generico circuito ha sempre una parte reale  $Z_r$  e una parte immaginaria  $Z_i$ , che viene chiamata *reattanza* e indicata di norma con la lettera  $X$ :

$$Z = Z_0 e^{i\phi} = Z_r + iX \quad , \quad Z_0 = \sqrt{Z_r^2 + X^2} \quad , \quad \operatorname{tg} \phi = \frac{X}{Z_r} \quad .$$

Sia  $Z$ , che  $X$  sono in generale funzioni della pulsazione. Analogamente per l'ammettenza dello stesso circuito si scrive

$$Y = Y_0 e^{-i\phi} = G + iB \quad , \quad Y_0 = \sqrt{G^2 + B^2} \quad , \quad \operatorname{tg} \phi = -\frac{B}{G} \quad .$$

e sia la parte reale  $G$ , detta conduttanza, che la parte immaginaria  $B$ , detta suscettanza, sono funzioni della pulsazione. Servendosi della relazione  $Z_r + iX = 1/(G + iB)$  è immediato ricavare le espressioni di  $G$  e  $B$  in funzione di  $Z_r$  e  $X$  e viceversa.

#### Esempio 11.4

Calcolare per il circuito in figura, a cui è applicata la f.e.m.  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$ , con  $\mathcal{E}_0 = 10 \text{ V}$  e  $\omega = 500 \text{ rad/s}$ , il valore della corrente nei singoli rami e quello della corrente totale. Si ponga  $R = 8 \Omega$ ,  $C = 100 \mu\text{F}$ ,  $L = 1.6 \cdot 10^{-2} \text{ H}$ .

**Soluzione**

L'impedenza del ramo  $RC$  è

$$Z_1 = R + \frac{i}{\omega C} = 8 - i 20 = 21.541 e^{i\phi_1} \quad ,$$

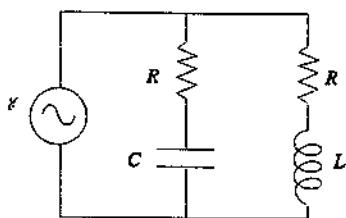


Figura 11.25

$$\operatorname{tg} \phi_1 = -2.5, \quad \phi_1 = -68.2^\circ.$$

Al ramo è applicata la f.e.m.  $10 e^{i\omega t}$  e in esso circola la corrente

$$I_1 = \frac{10 e^{i\omega t}}{21.541 e^{i\phi_1}} = 0.464 e^{i(\omega t - \phi_1)},$$

la cui parte reale è  $0.464 \cos(500t + 68.2^\circ)$  A.

Nel ramo  $RL$  l'impedenza è

$$Z_2 = R + i\omega L \approx 8 + i8 = 11.314 e^{i\phi_2}, \quad \operatorname{tg} \phi_2 = 1, \quad \phi_2 = 45^\circ,$$

e la corrente vale

$$I_2 = \frac{10 e^{i\omega t}}{11.314 e^{i\phi_2}} = 0.884 e^{i(\omega t - \phi_2)},$$

con parte reale  $0.884 \cos(500t - 45^\circ)$  A.

L'impedenza totale del circuito è

$$Z = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} = 12.186 e^{i13.7^\circ}$$

e la corrente totale assorbita dal circuito è

$$I = \frac{E}{Z} = \frac{10 e^{i\omega t}}{12.186 e^{i13.7^\circ}} = 0.821 e^{i(\omega t - 13.7^\circ)}.$$

La parte reale vale  $0.821 \cos(500t - 13.7^\circ)$  A: la corrente effettiva risulta quindi sfasata in ritardo rispetto alla f.e.m. applicata. L'impedenza reale equivalentemente del circuito è  $12.186 \Omega$ .

Alternativamente si poteva calcolare l'ammettenza totale come somma delle ammettenze  $Y_1, Y_2$  e ottenere la corrente  $I$  come  $Y_E$  (mentre  $I_1 = Y_1 E$  e  $I_2 = Y_2 E$ ).

Si verifichi che quando  $\omega = 1/\sqrt{LC}$  l'impedenza diventa reale e vale  $\frac{1}{2} \left( R + \frac{L}{RC} \right) = 14 \Omega$ .

### Nota. Richiamo sui numeri complessi

Un numero complesso può essere rappresentato nelle due maniere, cartesiana e polare:

$$z = x + iy = \rho e^{i\phi} = \rho \cos \phi + i \rho \sin \phi;$$

$x$  e  $iy$  sono la parte reale e la parte immaginaria,  $\rho$  il modulo e  $\phi$  la fase. Si ha

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} \phi = \frac{y}{x}, \quad x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi.$$

Il complesso coniugato di  $z$  è

$$z^* = x - iy = \rho e^{-i\phi}$$

e sussiste la proprietà

$$zz^* = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = \rho^2.$$

L'inverso di un numero complesso è

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{x}{x^2+y^2} - i \frac{y}{x^2+y^2} = \frac{1}{\rho e^{i\phi}} = \frac{1}{\rho} e^{-i\phi}$$

il modulo dell'inverso  $1/z$  è l'inverso del modulo di  $z$  e la fase dell'inverso  $1/z$  è l'opposto della fase di  $z$ .

Alcune utili relazioni di cui ci siamo serviti nel corso del paragrafo, sono  $1/i = -i$  e  $\pm i = e^{\pm i\pi/2}$ , ricavate rispettivamente dalla definizione  $i^2 = -1$  e dalla formula di Eulero (11.22).

La grandezza complessa funzione del tempo

$$\rho e^{i\omega t} = \rho \cos \omega t + i\rho \sin \omega t$$

è rappresentata, nel piano  $(x, iy)$  della figura 11.26, da un punto che al passare del tempo descrive in senso antiorario una circonferenza di raggio  $\rho$ , con moto uniforme; le proiezioni sugli assi, che danno parte reale e parte immaginaria, descrivendo due moti armòniici.

È evidente il legame con la costruzione di Fresnel dei vettori rotanti. Nel caso più elementare della somma di due grandezze sinusoidali sfasate, come possono essere le tensioni ai capi di due elementi in serie o le correnti in due elementi in parallelo, è chiaro che la somma di due vettori sfasati porta allo stesso risultato della somma di due numeri complessi.

Però il metodo simbolico è più potente in quanto, stabilendo una relazione lineare tra tensione e corrente sinusoidali complesse, cosa impossibile nel campo reale, permette di riprendere i metodi più generali di soluzione delle reti lineari, come abbiamo già osservato.

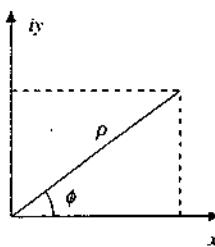


Figura 11.26

## 11.5 Alcune applicazioni

Consideriamo in questo paragrafo alcuni esempi relativi ad applicazioni pratiche molto comuni. Per risolvere i circuiti utilizziamo il metodo simbolico esposto nel paragrafo 11.4.

### Trasformatore

Riprendiamo le equazioni (10.42) del paragrafo 10.8 e la relativa figura 10.37. Introduciamo le grandezze complesse

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 e^{i\omega t}, \quad I_1 = I_{0,1} e^{i(\omega t + \phi_1)}, \quad I_2 = I_{0,2} e^{i(\omega t + \phi_2)}$$

e riscriviamo così le (10.42):

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= R_1 I_1 + i \omega L_1 I_1 + i \omega M I_2 & (R_1 + i \omega L_1) I_1 + i \omega M I_2 &= \mathcal{E} \\ 0 &= R_2 I_2 + i \omega L_2 I_2 + i \omega M I_1 & \Rightarrow & i \omega M I_1 + (R_2 + i \omega L_2) I_2 &= 0 \end{aligned}$$

La soluzione di questo sistema è

$$I_1 = \frac{(R_2 + i \omega L_2) \mathcal{E}}{(R_1 + i \omega L_1)(R_2 + i \omega L_2) + \omega^2 M^2}, \quad I_2 = \frac{-i \omega M \mathcal{E}}{(R_1 + i \omega L_1)(R_2 + i \omega L_2) + \omega^2 M^2}$$

Entrambe le correnti possono essere ricondotte alla forma  $I_0 e^{i(\omega t + \phi)}$  e si determinano così i valori massimi delle correnti e il loro sfasamento rispetto alla f.e.m. del generatore.

Esaminiamo in particolare il caso in cui  $R_1$  sia trascurabile rispetto a  $\omega L_1$ ; inoltre supponiamo che l'induttore  $L_1$  sia costituito da  $N_1$  spire avvolte su un nucleo di ferro di sezione  $\Sigma$  e lungo  $d$ , che analogamente l'induttore  $L_2$  abbia  $N_2$  spire avvolte sullo stesso nucleo e che si

possano utilizzare le espressioni degli esempi 8.9 e 8.11 con  $\mu$  al posto di  $\mu_0$ :

$$L_1 = \mu \frac{N_1^2}{d} \Sigma, \quad L_2 = \mu \frac{N_2^2}{d} \Sigma, \quad M = \mu \frac{N_1 N_2}{d} \Sigma = \sqrt{L_1 L_2}$$

Le correnti nel circuito primario e secondario diventano

$$I_1 = \frac{R_2 + i \omega L_2}{i \omega L_1 R_2} \varepsilon = \frac{\omega L_2 - i R_2}{\omega L_1 R_2} \varepsilon, \quad I_2 = -\frac{M}{L_1 R_2} \varepsilon = -\frac{N_2}{N_1} \frac{\varepsilon}{R_2}$$

$I_1$  è in ritardo di fase rispetto a  $\varepsilon$ , con  $\operatorname{tg} \phi = -R_2 / \omega L_2$ ,  $I_2$  è in opposizione di fase rispetto a  $\varepsilon$  (risultato che dipende dal segno di  $M$ : con  $M$  negativo  $I_2$  risulta in fase rispetto a  $\varepsilon$ ). Ai capi di  $R_2$  c'è la tensione

$$V_2 = R_2 I_2 = -\frac{N_2}{N_1} \varepsilon \Rightarrow -\frac{V_2}{\varepsilon} = -\frac{N_2}{N_1};$$

ne segue che il rapporto tra i moduli di  $V_2$  e  $\varepsilon$  dipende dal rapporto tra il numero di spire del secondario e del primario, mentre  $V_2$  è in opposizione di fase rispetto a  $\varepsilon$  (o in fase se  $M < 0$ ).

Il rapporto tra le correnti vale, qualunque sia il valore di  $R_1$ ,

$$\frac{I_2}{I_1} = -\frac{i \omega M}{R_2 + i \omega L_2} = -\frac{\omega M (\omega L_2 + i R_2)}{R_2^2 + \omega^2 L_2^2};$$

quanto più  $R_2$  è piccolo rispetto a  $\omega L_2$ , tanto più  $I_2 / I_1$  tende a  $-M / L_2 = -N_1 / N_2$ .

### Esempio 11.5

Nel circuito con trasformatore mostrato in figura 11.27  $\varepsilon = \varepsilon_0 \cos \omega t$ ,  $\varepsilon_0 = 312.6$  V,  $\omega = 314.2$  rad/s,  $L_1 = 10^{-1}$  H,  $L_2 = 10^{-3}$  H,  $M = \sqrt{L_1 L_2} = 10^{-2}$  H,  $R_2 = 1 \Omega$ . Calcolare i valori delle correnti e della tensione ai capi di  $R_2$ .

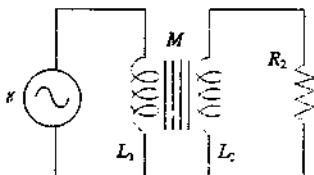


Figura 11.27

#### Soluzione

La corrente nel circuito primario vale

$$I_1 = \frac{\omega L_2 - i R_2}{i \omega L_1 R_2} \varepsilon = 3.33 \cdot 10^{-2} e^{-i 72.6^\circ} \cdot 312.6 e^{i \omega t} = 10.41 e^{i(\omega t - 72.6^\circ)},$$

quella nel circuito secondario è

$$I_2 = -\frac{M}{L_1 R_2} \varepsilon = 31.26 e^{i(\omega t - 180^\circ)}$$

Le parti reali sono, rispettivamente,

$$10.41 \cos(\omega t - 72.6^\circ) \text{ A}, \quad 31.26 \cos(\omega t - 180^\circ) = -31.26 \cos \omega t \text{ A}$$

Ai capi di  $R_2$  c'è la tensione

$$V_2 = R_2 I_2 = 31.26 e^{i(\omega t - 180^\circ)} \Rightarrow \frac{V_2}{\varepsilon} = -\frac{1}{10}$$

La parte reale di  $V_2$  è  $-31.26 \cos \omega t$  V; il valore del rapporto  $V_2 / \varepsilon$  mostra che tra numero di spire  $N_1$  nel circuito primario e numero di spire  $N_2$  nel circuito secondario c'è la relazione  $N_1 = 10 N_2$ .

L'uso di un trasformatore collegato ad un generatore nel circuito primario permette in sostanza di disporre nel circuito secondario di una f.e.m. con valore variabile entro larghi limiti, avente la stessa pulsazione di quella primaria e fase in generale diversa. Si noti che il riferimento di terra nei due circuiti può essere diverso, in quanto essi non sono collegati condutivamente; ad esempio, mentre la f.e.m. del primario oscilla intorno a zero, nel secondario può oscillare rispetto ad un valore  $V_0$ , positivo o negativo. In tal caso la d.d.p. media tra le spire  $N_1$  e le spire  $N_2$  non è zero, ma è  $V_0$  ed è necessario un adeguato isolamento.

### Ponte capacitivo

Un circuito come quello indicato nella figura 11.28 è detto *ponte*. Anche se più esattamente tale nome andrebbe riservato al ramo  $BC$ . Quando in tale ramo non passa corrente vuol dire che i punti  $B$  e  $C$  sono equipotenziali e che attraverso  $Z_1$  e  $Z_3$  passa la stessa corrente  $I_1$  e analogamente attraverso  $Z_2$  e  $Z_4$  passa la stessa corrente  $I_2$ . In formule

$$V_{AB} = V_{AC} \Rightarrow Z_1 I_1 = Z_2 I_2 \quad , \quad V_{BD} = V_{CD} \Rightarrow Z_3 I_1 = Z_4 I_2 ;$$

dividendo membro a membro.

$$\frac{Z_1}{Z_3} = \frac{Z_2}{Z_4} \Rightarrow Z_1 Z_4 = Z_2 Z_3 .$$

Tale condizione tra le impedenze è detta la *condizione di equilibrio del ponte*; si noti che si tratta di una generalizzazione di quanto visto per il ponte di Wheatstone nel paragrafo 6.11.

Questi circuiti sono usati per misurare un'impedenza, note le altre tre. Un esempio semplice è mostrato in figura 11.29: il valore della capacità  $C_4$  incognita si ricava da

$$R_1 \frac{1}{i \omega C_4} = R_3 \frac{1}{i \omega C_2} \Rightarrow C_4 = \frac{R_1 C_2}{R_3} .$$

L'equilibrio si raggiunge facendo variare una delle resistenze e si verifica osservando il misuratore di corrente inserito nel ponte. In modo analogo si realizza un ponte induttivo. Nel caso più generale la condizione di equilibrio si traduce in due equazioni, una relativa all'egualanza delle parti reali dei due membri e l'altra relativa all'egualanza delle parti immaginarie.

### Linea di trasmissione, cavo coassiale

Consideriamo un circuito indefinito, costituito da induttori e condensatori, collegati come in figura 11.30. Nella figura 11.31 è mostrata quella che possiamo considerare la cella

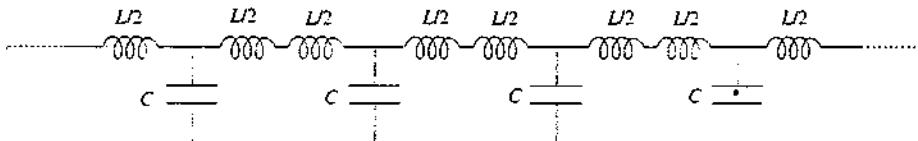


Figura 11.30

di base, ripetuta infinite volte. Detta  $Z$  l'impedenza complessa, essa non cambia se si aggiunge una cella, appunto perché il circuito è indefinito. Simbolicamente indichiamo questo fatto col seguente disegno:

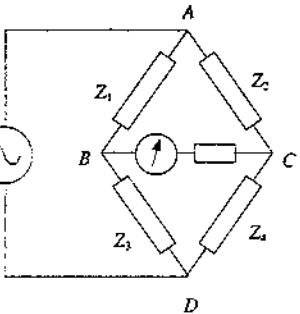


Figura 11.28

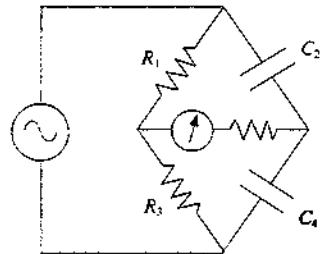


Figura 11.29

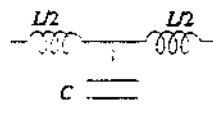


Figura 11.31

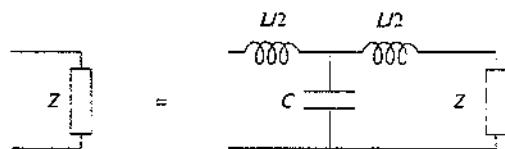


Figura 11.32

Utilizzando le espressioni per impedenze in serie e in parallelo si ha:

$$Z = i \omega \frac{L}{2} + \frac{\frac{-i}{\omega C} \left( i \omega \frac{L}{2} + Z \right)}{-\frac{i}{\omega C} + i \omega \frac{L}{2} + Z} \Rightarrow Z^2 = \frac{L}{C} - \frac{\omega^2 L^2}{4}$$

Il quadrato dell'impedenza è dunque un numero reale e sono possibili due soluzioni, a seconda del valore della pulsazione:

a)  $\omega^2 < \frac{4}{LC}$ ,  $Z^2 > 0$ , l'impedenza  $Z$  è reale

b)  $\omega^2 > \frac{4}{LC}$ ,  $Z^2 < 0$ , l'impedenza  $Z$  è immaginaria pura.

Se la pulsazione è inferiore al cosiddetto *valore di taglio*,

Pulsazione di taglio

$$\omega_t = \frac{2}{\sqrt{LC}}$$

la rete della figura 11.30 si comporta cioè come un resistore, di valore

$$Z_1 = \frac{L}{2} \sqrt{\frac{4}{LC} - \omega^2}$$

per  $\omega = \omega_t$ , l'impedenza è nulla e per  $\omega > \omega_t$ , il comportamento è come quello di un'induttanza di valore

$$Z_2 = i \frac{L}{2} \sqrt{\omega^2 - \frac{4}{LC}}$$

Tra le due situazioni esiste un'altra differenza sostanziale che ora evidenziamo. Applichiamo alla rete un generatore: tra i punti  $A$  e  $B$  fluisce la corrente  $I$  e la tensione vale

$$V_A - V_B = \left( i \omega \frac{L}{2} + i \omega \frac{L}{2} \right) I = i \omega L I$$

Inoltre, siccome da  $A$  verso destra si vede l'impedenza  $i \omega L/2$  in serie all'impedenza  $Z$ , cioè l'impedenza  $Z + i \omega L/2$ , abbiamo

$$V_A = \left( Z + i \omega \frac{L}{2} \right) I \quad , \quad I = \frac{V_A}{Z + i \omega \frac{L}{2}} \quad , \quad V_A - V_B = \frac{i \omega L V_A}{Z + i \omega \frac{L}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{V_B}{V_A} = 1 - \frac{i \omega L}{Z + i \omega \frac{L}{2}} = \frac{Z - i \omega \frac{L}{2}}{Z + i \omega \frac{L}{2}}$$

Se  $Z$  è reale il rapporto  $V_B/V_A$ , che è lo stesso per qualsiasi coppia di punti come  $A$  e  $B$ , cioè è lo stesso lungo la rete, è un numero complesso rapporto di due numeri complessi coniugati: il suo modulo è 1, la sua fase è  $2\phi$ , dove  $\phi$  è tale che  $\operatorname{tg}\phi = -\omega L/2Z$ . In tutti i punti  $A, B, C, D \dots$  della rete è lo stesso, ma da un punto all'altro c'è uno sfasamento costante  $2\phi$ : la rete non introduce attenuazione, ma solo sfasamento.

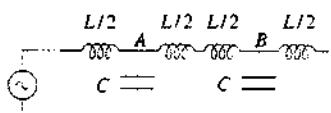


Figura 11.33

Se invece  $Z$  è immaginaria pura, cioè  $Z = iX$ ,  $V_B/V_A$  è un numero reale, pari a  $(X - \omega L/2)/(X + \omega L/2)$ , e quindi è minore di 1: nella rete c'è attenuazione; inoltre  $V_B$  è in fase o in opposizione di fase rispetto a  $V_A$  a seconda del segno positivo o negativo di  $V_B/V_A$ .

Abbiamo pertanto che se  $\omega < \omega_0$  ai capi di tutti i condensatori della rete si ritrova in istanti diversi la stessa  $V$  diversa da zero, mentre se  $\omega > \omega_0$  la rete è in pratica scarica: dopo un certo numero di celle non c'è d.d.p. ai capi dei condensatori.

Dato che la rete ha un'impedenza  $Z$  definitiva, nella pratica non c'è bisogno che essa sia indefinita; essa può essere interrotta alla fine di qualsiasi cella e chiusa su un'impedenza  $Z$ : il comportamento è lo stesso, come indicato in figura 11.32.  $Z$  è detta *impedenza caratteristica della rete*.

L'induttanza e la capacità della rete sono concentrate negli elementi  $L$  e  $C$ ; abbiamo studiato un diverso sistema fisico, il *cavo coassiale* (esempio 10.5), in cui invece *l'induttanza e la capacità sono distribuite*. Per unità di lunghezza si ha, in accordo con (10.33) e (4.18),

$$L_x = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}, \quad C_x = \frac{2\pi \epsilon_0}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

La capacità è distribuita in parallelo, tra il conduttore interno e quello esterno, mentre l'induttanza è distribuita in serie; in un tratto  $\Delta x$  abbiamo l'induttanza  $L_x \Delta x$  e la capacità  $C_x \Delta x$  per cui l'impedenza caratteristica è

$$Z = \sqrt{\frac{L_x \Delta x}{C_x \Delta x} - \frac{\omega^2 (L_x \Delta x)^2}{4}}$$

Passando al limite per  $\Delta x \rightarrow 0$  si ottiene l'*impedenza caratteristica del cavo coassiale*,

$$Z = \sqrt{\frac{L_x}{C_x}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \cdot \frac{1}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} = 60 \ln \frac{R_2}{R_1} \Omega$$

La pulsazione di taglio, per  $\Delta x \rightarrow 0$ , è

$$\omega_t = \frac{2}{\sqrt{L_x C_x (\Delta x)^2}} = \infty$$

L'*impedenza del cavo coassiale è quindi reale per ogni pulsazione*, come del resto si è appena trovato, e il cavo non introduce attenuazione (almeno nel caso ideale di conduttori con resistenza nulla).

Le reti che stiamo esaminando, per  $\omega < \omega_0$ , assorbono potenza con continuità dal generatore, in quanto si comportano come una resistenza: questa potenza, non essendoci attenuazione, può servire solo a caricare gli induttori e i condensatori lungo la rete e così siamo portati all'idea che ci sia *propagazione di energia lungo la rete*. Se invece  $\omega > \omega_0$  (cosa che però non può succedere nel cavo coassiale)  $Z$  è immaginaria pura e non c'è assorbimento di potenza: infatti c'è attenuazione, la rete è scarica, l'energia non si propaga. Per tali ragioni, e più propriamente quando  $Z$  è reale, queste reti sono chiamate *linee di trasmissione*, a costanti concentrate o a costanti distribuite.

L'esistenza di un fenomeno di propagazione si prova facilmente. Con riferimento al cavo coassiale, e ritornando alle notazioni usate in precedenza, la variazione di tensione lungo un tratto  $dx$  di cavo, dovuta all'autoinduzione, è

$$dV = L_x dx \frac{di}{dt} \Rightarrow \frac{dV}{dx} = L_x \frac{di}{dt}$$

La corrente di carica del conduttore di capacità  $C_x dx$  è

$$di = \frac{d}{dt} (dq) = \frac{d}{dt} (C_x dx V) = C_x dx \frac{dV}{dt} \Rightarrow \frac{di}{dx} = C_x \frac{dV}{dt}$$

**Impedenza caratteristica della rete**

**Cavo coassiale**

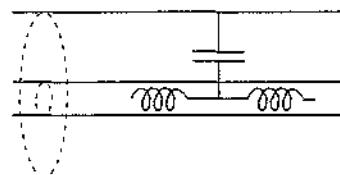


Figura 11.34

**Impedenza caratteristica del cavo assiale**

**Linee di trasmissione**

Pertanto

$$\frac{d^2V}{dx^2} = L_x \frac{d^2i}{dx dt} = L_x \frac{d}{dt} \frac{di}{dx} = L_x C_x \frac{d^2V}{dt^2}$$

Analogamente si trova

$$\frac{d^2i}{dx^2} = L_x C_x \frac{d^2i}{dt^2}$$

Quindi sia la tensione tra i conduttori che la corrente lungo i conduttori obbediscono all'*equazione delle onde piane*, che abbiamo visto nel capitolo 9 del primo volume e riprenderemo nel capitolo 12. La velocità di propagazione è

Velocità di propagazione

$$v = \frac{1}{\sqrt{L_x C_x}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = c$$

cioè *eguale alla velocità della luce nel vuoto*. Troviamo qui per la prima volta che *una perturbazione elettromagnetica si propaga con la velocità della luce*. Se lo spazio tra i conduttori è riempito da un mezzo con costante dielettrica  $\kappa = \kappa \epsilon_0$  (e permeabilità magnetica praticamente eguale a  $\mu_0$ ), la velocità è

$$v = \frac{1}{\sqrt{L_x \kappa C_x}} = \frac{1}{\sqrt{\kappa \epsilon_0 \mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\kappa}} < c$$

In un comune cavo coassiale  $v = 2.10^8$  m/s e  $Z = 50 \Omega$ . Ciò vuol dire che  $\kappa = 2.25$  e  $R_2/R_1 = 3.5$ .

La corrente  $i$  e la tensione  $V$ , in quanto soluzioni dell'equazione delle onde, sono funzioni della posizione e del tempo,  $i(x, t)$  e  $V(x, t)$ . Ad un dato istante la corrente lungo i conduttori e la d.d.p. tra i conduttori non sono le stesse in tutti i punti del cavo.

### 11.6 Potenza in regime alternato

L'applicazione di una f.e.m. alternata ad una rete lineare provoca il passaggio di una corrente alternata e l'erogazione di una potenza il cui valore istantaneo è dato dal prodotto  $\mathcal{E}(t) i(t)$ . Con i metodi descritti nei paragrafi precedenti siamo in grado di calcolare la  $i(t)$  per una data  $\mathcal{E}(t)$  e quindi la potenza.

Riferendoci ad un generico circuito o ad una qualsiasi sua parte e chiamando  $V(t)$  la tensione ai capi quando la corrente vale  $i(t)$  e  $\phi$  lo sfasamento tra le due grandezze, abbiamo

$$\begin{aligned} P(t) &= V_0 \cos(\omega t + \phi) i_0 \cos \omega t = V_0 i_0 (\cos \omega t \cos \phi - \sin \omega t \sin \phi) \cos \omega t = \\ &= V_0 i_0 \cos \phi \cos^2 \omega t - V_0 i_0 \sin \phi \sin \omega t \cos \omega t = \\ &= V_0 i_0 \cos \phi \cos^2 \omega t - V_0 i_0 \sin \phi \frac{1}{2} \sin 2\omega t . \end{aligned}$$

Il *valore medio* in un periodo è

$$P = \frac{1}{2} V_0 i_0 \cos \phi , \quad (11.29)$$

in quanto il valore medio di  $\cos^2 \omega t$  è  $\frac{1}{2}$  (vedi paragrafo 9.3 del primo volume), mentre il valore medio di  $\sin 2\omega t$  è zero.

Come fatto nell'esempio 10.3, relazione (10.18), introduciamo il *valore efficace* di una grandezza alternata, pari al valore massimo diviso per  $\sqrt{2}$ ,

$$V_{\text{eff}} = \frac{V_0}{\sqrt{2}} , \quad i_{\text{eff}} = \frac{i_0}{\sqrt{2}} ,$$

e otteniamo

$$P = V_{\text{eff}} i_{\text{eff}} \cos \phi \quad (11.30) \quad \text{Formula di Galileo Ferraris}$$

detta *formula di Galileo Ferraris*; il termine  $\cos \phi$  è chiamato *fattore di potenza*.

La potenza media, detta *potenza reale*, dissipata nel circuito è in generale diversa da zero, a meno che non sia  $\phi = \pi/2$ , fatto che si verifica solo per un induttore o per un condensatore o per una loro combinazione, qualora si possano trascurare le resistenze intrinseche di tali elementi e quelle dei collegamenti. La condizione  $\phi = 0$ ,  $\cos \phi = 1$  viceversa si realizza quando la reattanza del circuito è nulla, come avviene per un circuito puramente resistivo o in particolari situazioni, come quelle di risonanza o antirisonanza.

La (11.30) può essere applicata a qualsiasi elemento particolare di un circuito, considerando la corrente che lo attraversa e la tensione ai capi, come a tutto un circuito, nel qual caso  $V_{\text{eff}}$  è il valore efficace della f.e.m. del generatore e  $i_{\text{eff}}$  il valore efficace della corrente totale da questo erogata.

Il termine istantaneo  $V_0 i_0 \cos \phi \cos^2 \omega t$  che porta a (11.29) è sempre positivo; invece il termine  $\frac{1}{2} V_0 i_0 \sin \phi \sin 2\omega t$  a valor medio nullo è alternativamente positivo e negativo e corrisponde ad energia ceduta dal generatore al circuito, immagazzinata in questo e successivamente restituita al generatore. Il valore massimo

$$Q = \frac{1}{2} V_0 i_0 \sin \phi = V_{\text{eff}} i_{\text{eff}} \sin \phi$$

Potenza reattiva

è anche chiamato *potenza reattiva*, in quanto presente solo se la reattanza del circuito è diversa da zero. La somma

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \frac{1}{2} V_0 i_0 = V_{\text{eff}} i_{\text{eff}}$$

Potenza apparente

è la *potenza apparente*.

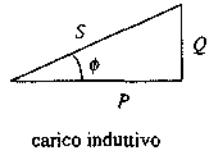
In sostanza  $S$  ha il significato di massima potenza istantanea richiesta al generatore; questo infatti deve essere dimensionato in modo tale da poter fornire con una data f.e.m.  $V_0$  almeno la corrente  $i_0$ , anche se poi nel circuito non viene mediamente utilizzata tutta la potenza disponibile a causa dello sfasamento. In generale è conveniente che  $\cos \phi$  sia vicino a 1, per non dover disporre di un generatore capace di erogare molta più potenza di quella realmente necessaria; graficamente, nella figura 11.35 il cateto  $Q$  non dovrebbe essere paragonabile al cateto  $P$  per non avere una  $S$  abbastanza superiore a  $P$ , indice di un notevole scambio energetico col circuito senza una dissipazione effettiva. Per questa ragione se un circuito ha  $\phi$  significativamente diverso da zero si inseriscono tra il generatore e il circuito opportuni elementi induttiivi o capacitivi che non assorbono potenza media, ma cambiano lo sfasamento complessivo avvicinandolo a zero (operazione di rifasamento). D'altra parte non è nemmeno conveniente lavorare con  $\phi = 0$ , perché è meglio lasciare una certa quantità di potenza inutilizzata e disponibile in caso di variazione dell'assorbimento di potenza media da parte del circuito.

Queste considerazioni non sono molto significative se si hanno piccoli carichi di potenza, facilmente erogabili da un generatore anche modesto; esse diventano invece molto importanti per grossi carichi, come sono quelli rappresentati dalle reti di distribuzione dell'energia elettrica, i quali hanno anche la caratteristica di essere variabili.

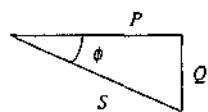
La differenza di significato delle tre potenze  $P$ ,  $Q$  e  $S$  viene messa in evidenza anche con i nomi delle unità di misura loro attribuite nella pratica: mentre  $P$  si esprime nell'unità standard, il watt, per  $Q$  si usa l'unità var, detta *voltampere reattivo*, e per  $S$  l'unità va, *voltampere re*; esse sono identiche numericamente al watt.

Le (11.29) e (11.30) sono scritte nella forma più generale; però per un dato circuito o per un dato elemento di circuito  $V_0$  e  $i_0$  sono legati dalla (11.19), dove  $Z_0$  è il modulo dell'impenetranza complessa; analogamente  $V_{\text{eff}} = Z_0 i_{\text{eff}}$ . Si può pertanto scrivere

$$P = \frac{1}{2} \frac{V_0^2}{Z_0} \cos \phi = \frac{1}{2} Z_0 i_0^2 \cos \phi = \frac{V_{\text{eff}}^2}{Z_0} \cos \phi = Z_0 i_{\text{eff}}^2 \cos \phi \quad (11.31)$$



carico induttivo



carico capacitivo

Figura 11.35

In particolare per un elemento resistivo  $\phi = 0$  e  $P_r = R i_{\text{eff}}^2 = \frac{V_{\text{eff}}^2}{R}$ , formalmente identica a

(6.34): i valori efficaci di corrente e tensione sono tali da dare per la potenza (media) dissipata in un resistore la stessa formula valida per la corrente continua.

### Esempio 11.6

Per il trasformatore dell'esempio 11.5 si dimostri che la potenza erogata dal generatore nel circuito primario è eguale a quella dissipata nel resistore  $R_2$  del circuito secondario.

#### Soluzione

Dalla trattazione del trasformatore con  $R_s \approx 0$ , fatta nel paragrafo 11.5, abbiamo che nel primario f.e.m. e corrente valgono

$$\varepsilon = \varepsilon_0 e^{i\omega t} \quad , \quad I_1 = \frac{\omega L_2 - i R_2}{\omega L_1 R_2} \varepsilon \quad ,$$

e hanno i valori massimi

$$\varepsilon_0 \quad , \quad I_{1,0} = \frac{\sqrt{\omega^2 L_2^2 + R_2^2}}{\omega L_1 R_2} \varepsilon_0 \quad .$$

Inoltre

$$\operatorname{tg} \phi = - \frac{R_2}{\omega L_2} \Rightarrow \cos \phi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \phi}} = \frac{\omega L_2}{\sqrt{\omega^2 L_2^2 + R_2^2}}$$

e la potenza (11.29) erogata nel primario dal generatore è

$$P_1 = \frac{\varepsilon_0 I_{1,0}}{2} \cos \phi = \frac{L_2}{L_1} \cdot \frac{\varepsilon_0^2}{2R_2} = \frac{N_2^2}{N_1^2} \cdot \frac{\varepsilon_0^2}{2R_2} \quad .$$

Nel secondario, secondo (11.31),

$$P_2 = \frac{R_2 I_{2,0}^2}{2} = \frac{R_2}{2} \left( \frac{N_2}{N_1} \cdot \frac{\varepsilon_0}{R_2} \right)^2 = \frac{N_2^2}{N_1^2} \cdot \frac{\varepsilon_0^2}{2R_2} = P_1 \quad .$$

La potenza disponibile nel primario, e ivi non spesa per l'assenza di elementi dissipativi, è trasferita tramite il campo magnetico variabile nel secondario, dove è spesa su  $R_2$ . Nel caso reale una piccola percentuale di potenza sarà dissipata sulla resistenza sempre presente nel primario e una parte assorbita da fenomeni di isteresi nel nucleo di ferro; inoltre non sarà possibile realizzare in generale un accoppiamento magnetico perfetto e si avrà del flusso disperso. L'insieme di questi fattori impedisce, nel circuito in esame, il completo trasferimento di potenza dal primario al secondario, anche se di norma l'efficienza è piuttosto alta.

Con i dati numerici dell'esempio 11.5

$$P_1 = \frac{312.6 \cdot 10.41}{2} \cos 72.6^\circ = 486.6 \text{ W} \quad , \quad P_2 = \frac{1 \cdot 31.26^2}{2} = 488.6 \text{ W} \quad ,$$

e si verifica che entro le approssimazioni numeriche i valori sono eguali. Si noti che nel secondario la corrente è maggiore che nel primario; è questo un uso classico dei trasformatori in cui, giocando soprattutto sul rapporto del numero di spire, si passa da una situazione di grande f.e.m. e piccola corrente nel primario a una situazione di piccola f.e.m. equivalente e grande corrente nel secondario (o viceversa), rispettando la conservazione dell'energia.

Per il calcolo della potenza non abbiamo adottato una notazione complessa: in effetti la procedura di eseguire il prodotto  $VI$  tra tensione e corrente complessa e poi prendere la parte reale del risultato sarebbe errata in quanto la potenza è eguale al prodotto delle parti reali di  $V$  e  $I$ , che non è la parte reale del prodotto  $VI$ . Il metodo simbolico si applica correttamente solo a relazioni lineari tipo  $V = ZI$  o a somme di tali relazioni e trova la sua radice nel fatto che l'equazione cui obbedisce la corrente (equazione del circuito) è un'equazione differenziale lineare; nulla di simile si può dire per la potenza.

Però è possibile attribuire il significato di potenza complessa alla metà del prodotto  $VI^*$  tra la tensione complessa e il complesso coniugato della corrente complessa:

$$\frac{1}{2} VI^* = \frac{1}{2} V_0 e^{i(\omega t + \phi)} I_0 e^{-i\omega t} = \frac{1}{2} V_0 I_0 e^{i\phi} = V_{\text{eff}} i_{\text{eff}} e^{i\phi}$$

Il modulo di questo numero è la potenza apparente  $S = V_{\text{eff}} i_{\text{eff}}$ , la parte reale è la potenza media effettiva  $P = V_{\text{eff}} i_{\text{eff}} \cos \phi$ , la parte immaginaria è la potenza reattiva  $Q = V_{\text{eff}} i_{\text{eff}} \sin \phi$ . Osserviamo che  $VI^*/2$  riassume le informazioni sui valori massimi e sul valore medio della potenza, ma che, essendo un numero costante, non dice nulla sulla potenza istantanea.

## 11.7 Generatori e motori

Abbiamo già trattato nell'esempio 10.3 un caso ideale di circuito che, a causa di un movimento rotatorio in un campo magnetico, diventa sede di una f.e.m. alternata, data dalla (10.14). Riprendiamo adesso la questione per accennare a sistemi più realistici con cui produrre una f.e.m. alternata: l'argomento ha rilevanza tecnologica fondamentale, in quanto è alla base della produzione di energia elettrica, e costituisce uno dei capitoli più importanti dell'elettrotecnica.

### Alternatore

Lo schema più elementare di *alternatore* consiste in un magnete al cui interno può ruotare un cilindro sul quale è avvolta una bobina; il cilindro è formato da lamierini di ferro, incollati tra loro con materiale isolante e disposti in modo da minimizzare le correnti di Foucault. Lo spessore di aria tra il cilindro e i poli del magnete è molto piccolo, per ridurre la dispersione di flusso magnetico, e la bobina è situata in una scanalatura praticata nel cilindro.

La bobina non è chiusa su se stessa, ma è collegata in modo opportuno al circuito esterno di utilizzazione, ad esempio come mostrato nella figura 11.37. Il filo della bobina è interrotto e ciascun capo è fissato ad un anello conduttore che ruota rigidamente insieme alla bobina: su questi anelli sono poggiati due contatti strisciati (*spazzole*) ai quali sono connessi i terminali del circuito esterno.

Un alternatore come quello descritto è detto *monofase* e fornisce la f.e.m.  $\varepsilon_0 \sin \omega t$ , dove la pulsazione  $\omega$  coincide con la velocità angolare della bobina. Se nel cilindro sono praticate tre scanalature che ospitano tre bobine identiche e indipendenti, poste in piani a  $120^\circ$  l'uno rispetto all'altro, le f.e.m. fornite dalle tre bobine sono

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_0 \sin \omega t, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_0 \sin \left( \omega t + \frac{2}{3}\pi \right), \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_0 \sin \left( \omega t + \frac{4}{3}\pi \right) \quad . \quad (11.32)$$

Lo sfasamento è appunto dovuto alla diversa posizione, ad un dato istante, rispetto alle linee del campo magnetico.

In questo caso l'alternatore si dice *trifase*: una possibile connessione all'esterno, detta connessione a stella, è mostrata in figura 11.38. La tensione tra ciascun terminale, ovvero tra ciascuna fase, e il punto in comune, detto *neutro*, ha la stessa ampiezza  $\varepsilon_0$ ; invece la tensione tra due fasi qualsiasi risulta avere ampiezza  $\sqrt{3} \varepsilon_0$ , come si prova facilmente calcolando  $\varepsilon_2 - \varepsilon_1$  o  $\varepsilon_3 - \varepsilon_1$  o  $\varepsilon_3 - \varepsilon_2$ . Se ad esempio  $\varepsilon_0 = 311$  V così che il suo valore efficace è 220 V, tra due fasi l'ampiezza è  $\sqrt{3} \varepsilon_0 = 539$  V con valore efficace 381 V.

Il movimento rotatorio della bobina può essere generato in vari modi: nei piccoli alternatori montati sulle automobili è il motore stesso che provoca la rotazione, negli alternatori di media potenza spesso sono appositi motori diesel che provvedono al funzionamento. Nelle

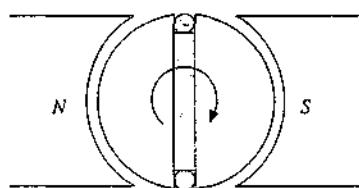


Figura 11.36

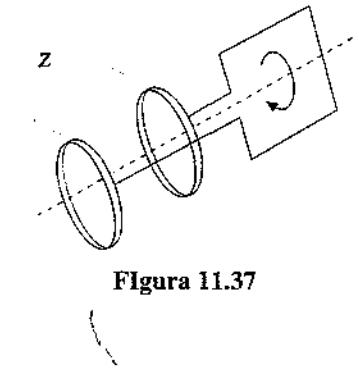


Figura 11.37

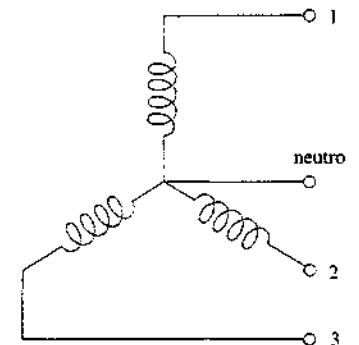


Figura 11.38

centrali elettriche il movimento è comunicato da una turbina che a sua volta è mossa da acqua che ha acquistato velocità per caduta su un certo dislivello (*centrali idroelettriche*) oppure da vapore ad alta temperatura (*centrali termiche a carbone, a petrolio, a metano e centrali nucleari*). In queste ultime il calore deriva dalla perdita di energia cinetica dei neutroni emessi nelle reazioni di *fissione* e frenati in un mezzo materiale.

Nei grossi alternatori vengono fatte muovere le parti che producono il campo magnetico e mantenute fisse le bobine in cui viene generata la f.e.m.; in tal modo le connessioni sono più semplici e sicure.

La distribuzione dell'energia elettrica all'utenza normale avviene in Europa a una frequenza di 50 Hz e una tensione efficace monofase di 220 V (trifase di 381 V), mentre negli Stati Uniti la frequenza è 60 Hz e la tensione efficace 115 V (trifase 199 V).

### Dinamo

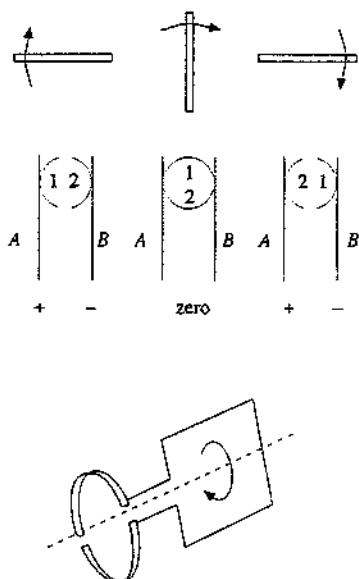


Figura 11.39

Seguendo lo stesso principio di funzionamento dell'alternatore si può produrre una f.e.m. più o meno costante. Il caso più semplice è la *dinamo*, mostrata schematicamente in figura 11.39; i capi della bobina sono connessi a due semianelli i quali durante la rotazione entrano in contatto prima con una spazzola e poi con l'altra. Teniamo presente che ad ogni mezzo giro si invertono le polarità dei semianelli: pertanto se ad esempio in un certo istante il capo positivo è a contatto con la spazzola A, dopo mezzo giro esso, che è diventato negativo, tocca la spazzola B mentre la spazzola A è toccata dall'altro capo che, nel mezzo giro, da negativo è diventato positivo. Di conseguenza la spazzola A è sempre positiva rispetto alla spazzola B e la tensione ha l'andamento della figura 11.40. Non si ha più una grandezza alternata, ma una grandezza il cui valor medio è  $(2/\pi) \xi_0 = 0.64 \xi_0$ . Con più avvolgimenti ad un certo angolo tra loro o con un unico avvolgimento che equivale alla somma di più avvolgimenti è possibile avere una tensione quasi costante in uscita.

Le pile chimiche e le dinamo non sono gli unici sistemi capaci di generare una f.e.m. continua. Con vari mezzi elettronici è possibile *raddrizzare* una tensione sinusoidale e generare f.e.m. continue in un intervallo molto ampio di valori. Questi strumenti, detti *alimentatori in continua*, hanno vastissime applicazioni sia in laboratorio che nelle più svariate apparecchiature industriali e domestiche, come radio, televisori, calcolatori. Le f.e.m. fornite possono essere di qualche volt come di centinaia di volt o di decine di chilovolt: le potenze erogabili possono variare da qualche watt a centinaia o migliaia di watt.

### Motori in continua

Sempre nel capitolo 10 abbiamo visto come il passaggio di corrente in un opportuno circuito immerso in campo magnetico possa mantenere in moto il circuito o alcune sue parti. Su questo principio sono basati i *motori elettrici*, che si dividono in due categorie distinte a seconda che il moto sia dovuto al passaggio di una corrente continua o di una corrente alternata.

Schematicamente il *motore in corrente continua* è un dispositivo simile alla dinamo, con la differenza che il circuito esterno è costituito da un generatore di f.e.m. continua: la corrente erogata dal generatore circola nell'avvolgimento mobile in campo magnetico passando attraverso le spazzole e i semianelli. Con riferimento alla figura 11.39, guardata da sinistra a destra, la bobina ruota per effetto delle forze magnetiche e tende a portarsi con il momento magnetico parallelo e concorde a B, che supponiamo orizzontale. In tale posizione essa arriva con una certa velocità angolare, pertanto prosegue nel suo moto e dovrebbe venire frenata dalle forze magnetiche; però contemporaneamente è avvenuta l'inversione dei contatti, la corrente ha cambiato verso e si ripete la situazione precedente: la bobina continua a ruotare nello stesso verso.

Le equazioni che permettono di calcolare la velocità angolare di regime sono le seguenti:

$$M_m - M_{\text{ext}} = I \frac{d\omega}{dt} \quad , \quad M_m = k i \quad , \quad i = \frac{\xi_0 - \xi_i(\omega)}{R}$$

$M_m$  è il momento delle forze magnetiche, sempre proporzionale alla corrente.  $M_{\text{ext}}$  è il momento resistente esterno.  $I$  il momento d'inerzia della parte mobile.  $\xi_0$  la f.e.m. del gene-

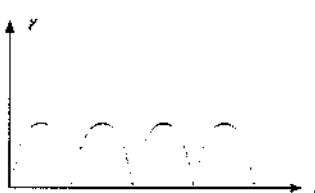


Figura 11.40

ratore,  $\xi_i$  la f.e.m. indotta legata alla variazione di flusso magnetico dovuta alla rotazione e quindi funzione della velocità angolare,  $R$  la resistenza complessiva del circuito. La velocità varia da zero al valore di regime  $\omega_m$ ; a regime  $M_m = M_{ext}$ , la corrente assorbita ha il valore costante  $i_m = M_{ext}/k$ , la potenza erogata dal generatore è  $R i_m^2 + M_{ext} \omega_m$ .

All'inizio del funzionamento  $\xi_i(\omega)$ , che cresce con  $\omega$ , è piccola e quindi la corrente assorbita può essere notevole, tanto da danneggiare l'avvolgimento; per questa ragione nella fase di avviamento è inserita in serie una resistenza variabile (reostato), il cui valore viene diminuito all'aumentare di  $\omega$ .

Ricordiamo che nel paragrafo 10.3 abbiamo trattato alcuni casi particolari simili.

### *Motori in alternata*

Un primo tipo di motore che funziona se alimentato con corrente alternata è il *motore sincrono*; nel caso più semplice lo schema è quello dell'alternatore monofase in cui tramite un generatore esterno viene fatta passare una corrente alternata. Si dimostra che è possibile una rotazione con velocità angolare costante  $\omega$  eguale alla pulsazione della corrente alternata (ciò giustifica il nome di motore sincrono). All'avviamento è necessario un motore supplementare, o un dispositivo equivalente, che porti la velocità angolare da zero ad un valore vicino a quello di regime.

L'altro tipo di motore in corrente alternata è il *motore asincrono*. Esso si basa sulle seguenti considerazioni. Prendiamo tre avvolgimenti fissi, posti a  $120^\circ$  uno rispetto all'altro (figura 11.41) e li alimentiamo con una corrente trifase; nella zona centrale i campi magnetici prodotti dagli avvolgimenti percorsi dalle correnti (11.32) sono

$$B_1 = B_0 \sin \omega t, \quad B_2 = B_0 \sin \left( \omega t + \frac{2}{3} \pi \right), \quad B_3 = B_0 \sin \left( \omega t + \frac{4}{3} \pi \right)$$

e il campo risultante ha le componenti

$$B_x = -\frac{3}{2} B_0 \cos \omega t, \quad B_y = \frac{3}{2} B_0 \sin \omega t, \quad B_z = 0$$

Il vettore che rappresenta il campo magnetico ruota nel piano  $x, y$  con velocità angolare  $\omega$  (si parla di *campo rotante*).

Poniamo ora nella zona centrale una bobina con asse di rotazione parallelo all'asse  $z$ , che potrebbe pertanto seguire  $B$  nella sua rotazione. In effetti il campo rotante, producendo un flusso magnetico variabile attraverso la bobina, induce in questa una f.e.m. e, in dipendenza della resistenza e dell'induttanza della bobina, una corrente: il passaggio di corrente provoca a sua volta l'azione di forze magnetiche sulla bobina che viene messa in rotazione con velocità angolare che raggiunge un valore di regime inferiore a  $\omega$  e dipendente dal momento resistente che il motore deve vincere.

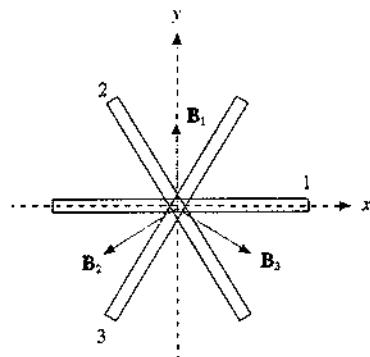
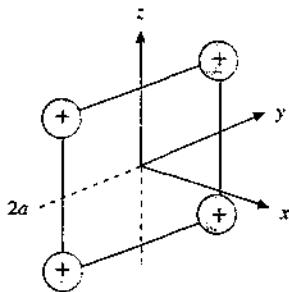


Figura 11.41



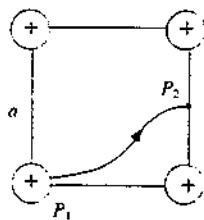
# Problemi di Elettromagnetismo

- 1.1 Quattro cariche puntiformi di egual valore  $q$ , due positive e due negative, sono poste nei vertici di un quadrato di lato  $2a$  che giace nel piano  $y, z$ , con la disposizione mostrata in figura. Calcolare la forza esercitata dalle altre tre cariche sulla carica  $+q$  posta nel vertice  $(a, a)$  e le espressioni del potenziale e del campo elettrostatico lungo l'asse  $x$ . Dimostrare che a grandi distanze il campo elettrostatico sull'asse  $x$  coincide con quello di un dipolo di momento  $\mathbf{p} = 4qa\mathbf{u}_z$  posto nel centro del quadrato.



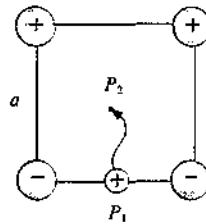
- 1.2 Quattro cariche puntiformi positive, di egual valore  $q = 10^{-8}$  C, sono disposte come nel problema 1, con  $2a = 10$  cm. Calcolare la forza esercitata dalle altre tre cariche sulla carica posta nel vertice  $(a, a)$  e le espressioni del potenziale e del campo elettrostatico lungo l'asse  $x$ . Calcolare inoltre l'energia cinetica con la quale passa per il centro un elettrone abbandonato con velocità nulla in un punto dell'asse  $x$  distante  $x_0 = 2a$  dal centro.

- 1.3 Quattro cariche puntiformi di egual valore  $q = 10^{-8}$  C sono poste ai vertici di un quadrato di lato  $a = 10$  cm. Calcolare l'energia potenziale elettrostatica del sistema e il lavoro necessario per spostare una delle cariche dalla posizione iniziale  $P_1$  al punto  $P_2$  indicato in figura e situato nel centro del lato.

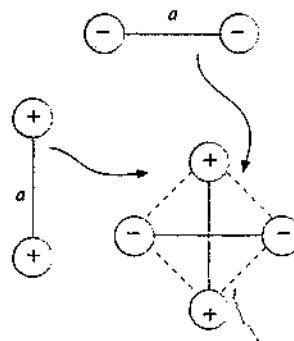


- 1.4 Due cariche positive  $q$  e due cariche negative  $-q$ , eguali in modulo, sono poste nei vertici di un quadrato di lato  $a = 14.1$  cm, come in figura. L'energia elettrostatica del

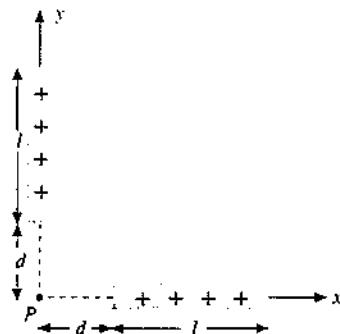
sistema vale  $U_e = -3.6 \cdot 10^{-5}$  J. Una carica  $q^*$  viene spostata da  $P_1$  a  $P_2$  compiendo un lavoro  $W = 2.8 \cdot 10^{-7}$  J contro le forze del campo elettrostatico. Calcolare i valori di  $q$  e  $q^*$ . Calcolare inoltre il lavoro che bisogna spendere per allontanare una delle quattro cariche dalle altre tre che rimangono fisse.



- 1.5 Due cariche positive eguali, di valore  $q = 10^{-9}$  C, sono mantenute fisse a una distanza  $a = 5$  cm; esse sono molto lontane da un'altra coppia di cariche negative eguali, di valore  $q = -10^{-9}$  C, mantenute anch'esse a distanza  $a = 5$  cm. Quanto lavoro compiono le forze elettrostatiche per avvicinare le due strutture in maniera da formare il rombo mostrato nella figura?

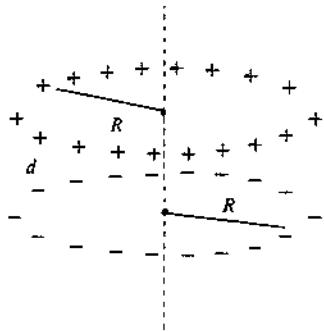


- 1.6 Due sbarrette sottili di materiale isolante, lunghe  $l = 0.5$  m, sono disposte perpendicolarmente tra loro; la

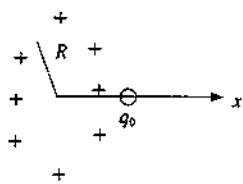


distanza del punto  $P$  dalle estremità delle due sbarrette è  $d = 0.1$  m. Determinare il valore del campo elettrostatico in  $P$  se su ciascuna sbarretta è distribuita uniformemente la carica  $q = 0.5 \cdot 10^{-9}$  C.

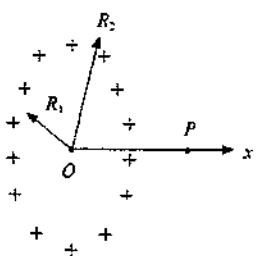
- 1.7 Due cariche  $q_1 = 1.88 \cdot 10^{-8}$  C e  $q_2 = -7.54 \cdot 10^{-8}$  C sono distribuite uniformemente su due anelli eguali di raggio  $R = 30$  cm, disposti come in figura su due piani paralleli distanti  $d = 3$  mm. Calcolare la forza  $F$  tra i due anelli e il lavoro che bisogna compiere per allontanarli di 2 mm.



- 1.8 Una particella di massa  $m = 10^{-3}$  kg e carica  $q_0 = -10^{-10}$  C è posta al centro di un anello di raggio  $R = 10$  cm, su cui è distribuita uniformemente la carica  $q = 10^{-8}$  C. La particella viene spostata di un tratto  $x_0 = 0.5$  cm lungo l'asse e abbandonata. Dimostrare che la particella oscilla con moto armonico intorno all'origine e determinare il periodo  $T$  delle piccole oscillazioni e l'energia cinetica della particella quando passa per l'origine.

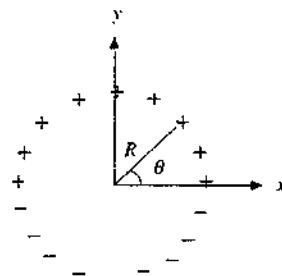


- 2.1 Una carica  $q = 1.39 \cdot 10^{-8}$  C è distribuita con densità superficiale uniforme  $\sigma$  su una corona circolare piana di raggio interno  $R_1 = 20$  cm e raggio esterno  $R_2 = 30$  cm. Determinare le espressioni del campo elettrostatico  $E(x)$  e del potenziale  $V(x)$  sull'asse della corona. Calcolare l'energia cinetica con la quale un elettrone lasciato libero in un punto  $P$  di coordinata  $x = 20$  cm raggiunge il centro  $O$  e la forza agente su un dipolo elettrico di momento  $\mathbf{p} = p_0 \mathbf{u}_x$ , con  $p_0 = 10^{-10}$  Cm, posto in  $O$ . Calcolare infine la frequenza delle piccole oscillazioni



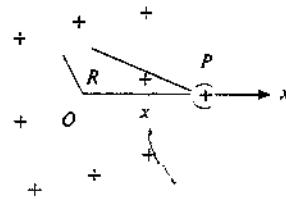
lungo l'asse  $x$  intorno al centro  $O$  di una particella di massa  $m$  e carica  $-q_0$ .

- 2.2 Un anello sottile di raggio  $R$ , posto nel piano  $x-y$  e con centro nell'origine, possiede una carica distribuita con densità  $\lambda = \lambda_0 \sin\theta$ , dove  $\theta$  è l'angolo formato con l'asse  $x$ . Determinare il campo elettrostatico nel centro e a grande distanza sia lungo l'asse  $x$  che lungo l'asse  $y$ .

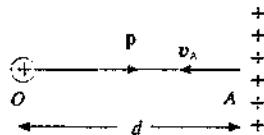


- 2.3 Si consideri l'anello del problema 2.2, con  $R = 10$  cm e  $\lambda_0 = 10^{-8}$  C/m, e si calcoli il momento risultante  $M$  delle forze agenti sull'anello in presenza di un campo elettrostatico uniforme  $E = 10^4$  V/m, che forma un angolo  $\alpha = 30^\circ$  con l'asse  $x$ .

- 2.4 In un foglio isolante piano indefinito, carico con densità superficiale uniforme  $\sigma = 10^{-6}$  C/m<sup>2</sup>, è praticato un foro circolare di raggio  $R = 0.1$  m. Sull'asse del foro, in un punto  $P$  distante  $x = R$  dal centro  $O$  del foro, è sospesa in equilibrio, tramite un filo attaccato al bordo superiore del foro, una sferetta di massa  $m = 10^{-3}$  kg e carica  $q$ . Calcolare il valore di  $q$  e il lavoro che occorre spendere per spostare la sferetta, se lasciata libera, da  $P$  ad  $O$ . Determinare inoltre il lavoro necessario per far compiere lo stesso spostamento a un dipolo di momento  $\mathbf{p} = p_0 \mathbf{u}_x$ , con  $p_0 = 10^{-10}$  Cm.



- 2.5 Una carica positiva  $q$  dista  $d = 40$  cm da un piano indefinito carico uniformemente con densità  $\sigma = 8.86 \cdot 10^{-10}$  C/m<sup>2</sup>. Un dipolo elettrico di momento  $\mathbf{p} = 10^{-12}$  Cm, parallelo e concorde al vettore  $OA$ , equidistante dalla carica e dal piano, è soggetto alla forza  $F = 2.25 \cdot 10^{-9}$  N.

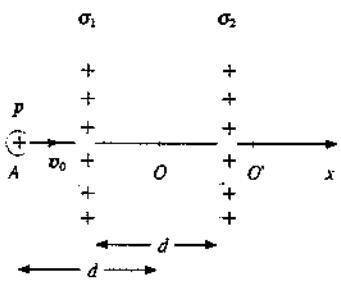


Calcolare il valore della carica  $q$  e la velocità con cui un elettrone, che parte da  $A$  con velocità  $v_A = 3 \cdot 10^6$  m/s, arriva nel punto  $B$  distante  $d/4$  dalla carica.

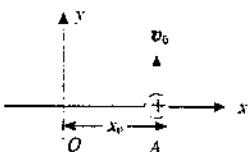
- 2.6 Tre piani indefiniti paralleli sono carichi con densità uniformi  $\sigma_1 = \sigma$ ,  $\sigma_2 = -2\sigma$ ,  $\sigma_3 = \sigma$ , con  $\sigma = 8.86 \cdot 10^{-8}$  C/m<sup>2</sup>. Determinare il campo elettrostatico nello spazio esterno ai piani e nelle intercapedini tra i piani.

$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_3$
+	-	+
+	-	+
$P_1$	$P_2$	$P_3$ $P_4$
+	-	+
+	-	+
+	-	+
+	-	+

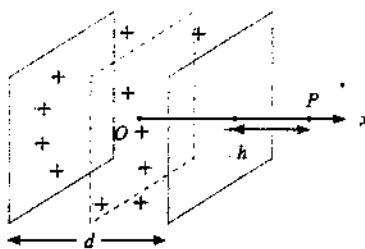
- 2.7 Due piani indefiniti paralleli, distanti  $d = 20$  cm, sono carichi con densità uniformi  $\sigma_1 = 17.72 \cdot 10^{-8}$  C/m<sup>2</sup> e  $\sigma_2 = \sigma_1 / 2$ . Determinare il potenziale  $V(x)$ , ponendolo eguale a zero nel punto di mezzo  $O$  tra i due piani, origine delle coordinate. Determinare inoltre l'energia cinetica minima  $E_{k,\min}$  che deve avere un protone nel punto  $A$  ( $x = -d$ ) per giungere in un generico punto  $O'$ . Se un elettrone viene lasciato libero in  $A$  con velocità nulla, dove arriva?



- 2.8 In una regione di spazio il potenziale elettrostatico è espresso dalla relazione  $V = V_0 (x^2 + y^2)$  con  $V_0 = 10^7$  V/m<sup>2</sup>. Una particella con rapporto carica su massa pari a  $q/m = 5 \cdot 10^6$  C/kg si trova all'istante  $t = 0$  nel punto  $A$  di coordinate  $(x_0, 0)$  con velocità  $v = v_0 \mathbf{u}_z$ ; i valori numerici sono  $x_0 = 1$  cm,  $v_0 = 10^5$  m/s. Determinare la traiettoria della particella.

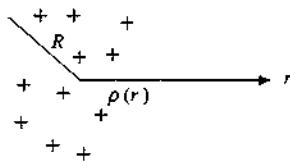


- 3.1 Una carica puntiforme  $q = 1.5 \cdot 10^{-8}$  C si trova nel piano mediano di una carica distribuita uniformemente con densità  $\rho = 10^{-8}$  C/m<sup>3</sup> tra due piani paralleli indefiniti distanti  $d = 2$  cm. Calcolare il lavoro fatto dalle forze del campo elettrostatico per trasportare la carica  $q$  in un

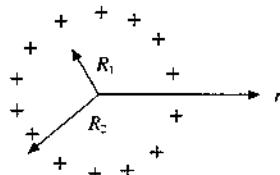


punto  $P$ , situato all'esterno della regione carica e distante  $h = 3$  cm dal piano più vicino.

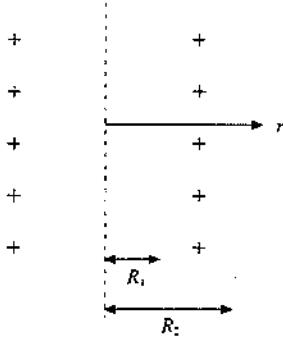
- 3.2 Una carica è distribuita all'interno di una sfera di raggio  $R$  con densità non uniforme  $\rho(r) = c/r$ , essendo  $c$  una costante. Determinare le espressioni del campo elettrostatico  $E(r)$  e del potenziale  $V(r)$  per  $0 \leq r \leq \infty$ .



- 3.3 Tra due superficie sferiche concentriche di raggio  $R_1 = 10$  cm e  $R_2 = 20$  cm è distribuita una carica elettrica con densità uniforme  $\rho = 26.58 \cdot 10^{-8}$  C/m<sup>3</sup>. Determinare l'espressione del campo elettrostatico  $E(r)$  in funzione della distanza  $r$  dal centro del sistema. Se un elettrone viene abbandonato sulla superficie esterna, quanto tempo impiega ad attraversare la cavità interna?

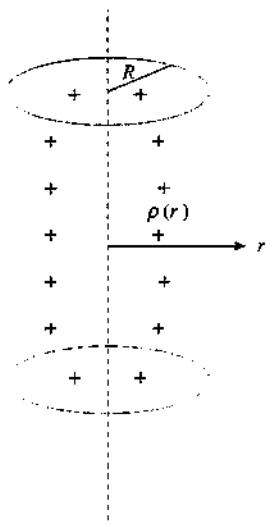


- 3.4 Tra due superficie cilindriche indefinite coassiali, di raggi  $R_1 = 10$  cm e  $R_2 = 20$  cm, è distribuita una carica con densità costante  $\rho = 17.72 \cdot 10^{-8}$  C/m<sup>3</sup>. Determinare l'espressione del campo elettrostatico in funzione della distanza  $r$  dall'asse del sistema e calcolare il lavoro che



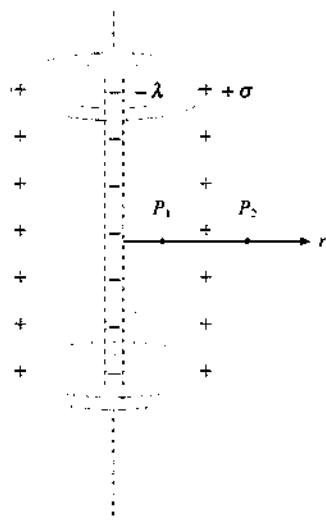
bisogna compiere per portare un protone dalla superficie esterna all'asse.

- 3.5 Una carica è distribuita all'interno di una superficie cilindrica indefinita con densità  $\rho = \rho_0 (a - b r)$ , essendo  $r$  la distanza dall'asse e  $\rho_0, a, b$  costanti. Determinare l'espressione del campo elettrostatico in funzione di  $r$ .

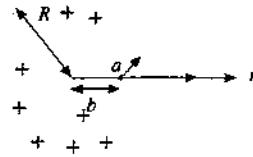


- 3.6 Dimostrare che un elettrone abbandonato in quiete all'interno di una distribuzione uniforme di carica contenuta tra due piani paralleli, all'interno di un cilindro indefinito uniformemente carico e all'interno di una sfera uniformemente carica, compie un moto armonico la cui pulsazione è  $\omega = \sqrt{\gamma \rho e / m \epsilon_0}$ , dove  $\gamma = 1$  per la distribuzione piana,  $\gamma = 1/2$  per la distribuzione cilindrica e  $\gamma = 1/3$  per la distribuzione sferica.

- 3.7 Un filo rettilineo indefinito è carico con densità lineare  $-\lambda$ ; una superficie cilindrica indefinita, di raggio  $R_0 = 2$  cm, avente il filo come asse, è carica con densità superficiale  $\sigma$ . Se la d.d.p.  $\Delta V$  tra un punto  $P_1$ , distante  $R_1 = 1$  cm dall'asse e un punto  $P_2$  distante  $R_2 = 4$  cm dall'asse è nulla, quanto vale il rapporto  $\sigma / \lambda$ ?

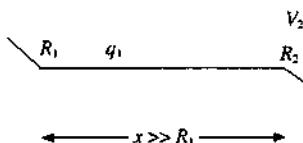


- 3.8 Entro un cilindro di raggio  $R$  è praticato un foro cilindrico parallelo all'asse, di raggio  $r \leq R/4$ ; la distanza tra l'asse del cilindro e l'asse del foro è  $b$ . Se il cilindro è carico con densità  $\rho$  costante, calcolare come varia il campo elettrostatico nel foro lungo la congiungente i due assi. Ripetere il calcolo per un foro sferico di raggio  $r$  distante  $b$  dal centro di una sfera uniformemente carica di raggio  $R$ .

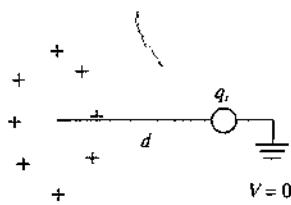


- 3.9 Dimostrare che la funzione  $V(x, y) = ax^2 + bxy - cy^2$ , con  $a$  e  $b$  costanti, può rappresentare una funzione potenziale. Determinare il campo elettrostatico e la densità di carica  $\rho(x, y)$ .

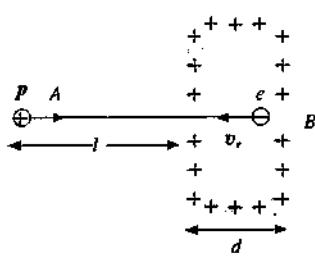
- 4.1 Due sfere conduttrici  $S_1$  e  $S_2$ , di raggi  $R_1$  e  $R_2$ , sono poste nel vuoto ad una distanza  $x$  tra i centri molto grande rispetto a  $R_1$  e  $R_2$ . La sfera  $S_1$ , isolata, ha una carica  $q_1$  e la sfera  $S_2$  è mantenuta al potenziale  $V_2$  rispetto all'infinito. Calcolare il potenziale  $V_1(x)$  della sfera  $S_1$ , la carica  $q_2(x)$  della sfera  $S_2$  e la forza  $F(x)$  tra le sfere in funzione della distanza  $x$ .



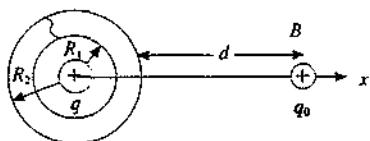
- 4.2 Una piccola sfera conduttrice di raggio  $r = 1$  mm è posta sull'asse di un disco di raggio  $R = 10$  cm, uniformemente carico con densità  $\sigma = 10^{-11} \text{ C/m}^2$ ; il centro della sferetta dista  $d = 30$  cm dal centro del disco. La sferetta è collegata a terra da un sottile filo conduttore, così che il suo potenziale è nullo. Calcolare la carica  $q_1$  indotta sulla sferetta.



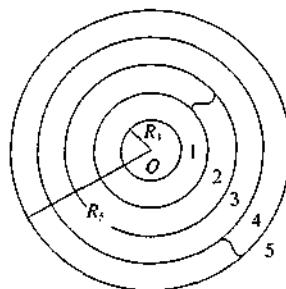
- 4.3 Una lastra piana conduttrice molto estesa è cava, con distanza  $d = 50$  cm tra le facce; essa è carica con densità superficiale costante  $\sigma = 8.86 \cdot 10^{-8} \text{ C/m}^2$ . Determinare l'energia cinetica minima  $E_{k,\min}$  che deve avere un protone nel punto  $A$  per arrivare fino al punto  $B$ , passando per un piccolo foro praticato su una faccia. Quanto tempo impiega un elettrone, lasciato libero in  $B$  con energia cinetica  $E_{k,\min}$ , per arrivare in  $A$ ? La distanza di  $A$  dalla lastra è  $l = 20$  cm (il disegno non è in scala).



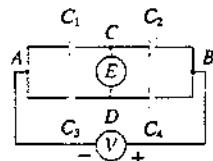
- 4.4 Due fogli metallici sferici di spessore trascurabile, concentrici, aventi raggi  $R_1 = 2$  cm e  $R_2 = 5$  cm, sono collegati con un sottile filo conduttore. Una carica  $q = 10^{-10}$  C è posta al centro del sistema e una carica  $q_0 = q$  è posta in un punto  $B$  a distanza  $d = 25$  cm dal foglio esterno. Calcolare la forza esercitata da  $q_0$  su ciascun foglio e il lavoro che occorre compiere per portare  $q_0$  dal punto  $B$  al punto  $A$  distante  $x_0 = 0.5$  cm dal centro del sistema.



- 4.5 Cinque fogli metallici sferici di spessore trascurabile, tutti concentrici, aventi raggi pari rispettivamente a 1, 2, 3, 4, 5 cm, sono collegati con sottili fili conduttori come in figura. Il sistema è inizialmente scarico. Una carica  $q = 10^{-10}$  C è depositata sulla superficie più interna. Calcolare la carica presente su ciascuna superficie sferica e l'energia elettrostatica  $U$ , dell'intero sistema. Determinare inoltre come variano il campo elettrostatico e l'energia elettrostatica quando: la sfera 1 è posta in contatto con la sfera 2, la sfera 3 è posta in contatto con la sfera 4, la sfera 5 è collegata a terra.

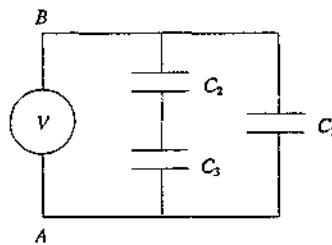


- 4.6 Quattro condensatori sono disposti come mostrato in figura. Un generatore è collegato ai terminali  $A$  e  $B$  e un elettroscopio tra  $C$  e  $D$ , per misurare la d.d.p.  $V_C - V_D$ . Dimostrare che l'elettroscopio segna zero se  $C_1 / C_2 = C_3 / C_4$  (questa disposizione, nota come ponte capacitivo).



tivo, permette di misurare la capacità di un condensatore (note le altre tre).

- 4.7 Tre condensatori di capacità  $C_1 = 2 \mu\text{F}$ ,  $C_2 = 2 \mu\text{F}$ ,  $C_3 = 4 \mu\text{F}$  sono collegati come in figura. La d.d.p. applicata tra  $A$  e  $B$  è  $V = 100$  V. Calcolare la capacità equivalente tra  $A$  e  $B$ , la carica e la d.d.p. per ciascun condensatore, l'energia elettrostatica totale del sistema.



- 4.8 Dopo aver caricato due condensatori di capacità  $C_1 = 5 \mu\text{F}$  e  $C_2 = 4 \mu\text{F}$  alle d.d.p.  $V_1 = 300$  V e  $V_2 = 250$  V, si collegano tra loro le armature positive e le armature negative e viene posto in parallelo ai primi due un terzo condensatore, scarico, di capacità  $C = 1 \mu\text{F}$ . Determinare la carica presente alla fine su ciascun condensatore e la variazione di energia elettrostatica nel processo.

- 4.9 Un condensatore piano di capacità  $C_0 = 0.6 \mu\text{F}$ , avente le armature di area  $\Sigma$  distanti  $h = 1$  cm, viene collegato ad un generatore che fornisce la d.d.p.  $V_0 = 10^3$  V. Una lastra conduttrice a facce piane e parallele di area  $\Sigma$ , spessa  $x = 4$  mm, viene inserita parallelamente tra le armature. Calcolare di quanto varia la capacità e quanto lavoro compiono le forze del campo se durante il processo resta costante la carica sulle armature o la d.d.p. tra le stesse.

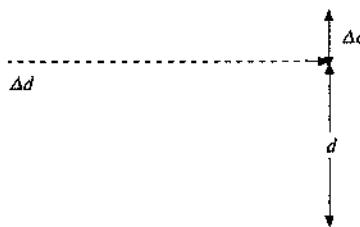


- 4.10 Tre conduttori piani molto sottili, di area  $\Sigma = 0.1 \text{ m}^2$ , paralleli tra loro, sono collegati come in figura ad un generatore di d.d.p.  $V$ . Il foglio centrale, di massa  $m = 10^2$  kg, può muoversi verticalmente restando parallelo



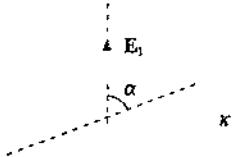
agli altri due, la cui distanza è  $d = 6 \text{ mm}$ . Si trova che il foglio centrale è in equilibrio quando dista  $d/4$  dal foglio superiore. Calcolare il valore di  $V$ , la carica del conduttore centrale e l'energia elettrostatica del sistema. Il conduttore centrale viene successivamente spostato così da essere equidistante dagli altri due conduttori. Calcolare il lavoro compiuto dalle forze del campo elettrostatico se il generatore rimane collegato durante lo spostamento oppure no.

- 4.11 Un condensatore è formato da due armature quadrate di lato  $l$ , leggermente inclinate come in figura, in modo tale che  $\Delta d \ll d$  e quindi le linee di forza possano considerarsi parallele. Calcolare la capacità del condensatore in funzione di  $\Delta d/d$  e di  $C_0$ , capacità con le armature allineate. Nell'ipotesi che  $C_0 = 0.5 \mu\text{F}$ ,  $\Delta d/d = 0.2$  e che il condensatore abbia la carica  $q = 10^{-4} \text{ C}$ , calcolare il lavoro necessario per allineare le armature, a carica costante.



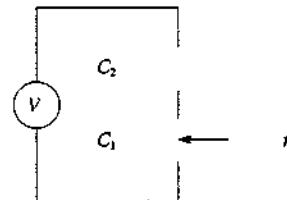
- 4.12 Un pallone sferico di raggio  $R_1 = 0.5 \text{ m}$  è fatto con un materiale elastico metallizzato. Se si comunica al pallone la carica  $q = 10^{-10} \text{ C}$  si osserva una dilatazione fino al raggio  $R_2 = 0.7 \text{ m}$ . Calcolare la pressione elettrostatica finale sulla superficie del pallone e il lavoro delle forze del campo elettrostatico nell'espansione.

- 5.1 In un materiale dielettrico di costante dielettrica relativa  $\kappa = 3$  esiste un campo elettrostatico uniforme  $E_1 = 2 \cdot 10^3 \text{ V/m}$ . Una cavità lunga e sottile, orientata rispetto a  $E_1$  come in figura, è praticata nel dielettrico. Calcolare il campo elettrostatico  $E_2$  all'interno della cavità se  $\alpha = 30^\circ$ .

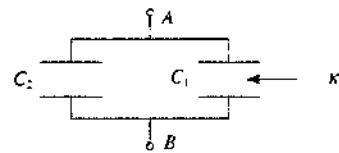


- 5.2 Un condensatore piano, con armature quadrate di area  $\Sigma = 400 \text{ cm}^2$  distanti  $d = 2 \text{ mm}$ , è riempito per metà da mica ( $\kappa_1 = 5$ ) e per metà da paraffina ( $\kappa_2 = 2$ ). Calcolare la capacità del condensatore. Se viene applicata una d.d.p.  $V = 2 \cdot 10^3 \text{ V}$  tra le armature calcolare la densità di carica sulle armature, la densità di carica di polarizzazione sulle superficie del dielettrico, l'energia elettrostatica del condensatore.

- 5.3 A due condensatori piani di capacità  $C_1 = 500 \text{ pF}$  e  $C_2 = 1000 \text{ pF}$ , connessi in serie, è collegato un generatore che mantiene una d.d.p. costante  $V = 400 \text{ V}$ . Una lastra di dielettrico, con costante dielettrica relativa  $\kappa = 4$ , viene inserita in  $C_1$ , così da riempirlo completamente. Calcolare la variazione della carica di  $C_2$ , la variazione della d.d.p. ai capi di  $C_1$ , la carica di polarizzazione su ciascuna faccia del dielettrico, l'energia fornita dal generatore nel processo.



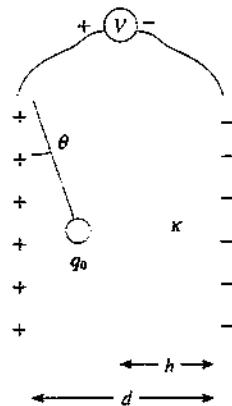
- 5.4 Due condensatori di capacità  $C_1 = 200 \text{ pF}$  e  $C_2 = 1000 \text{ pF}$  sono connessi in parallelo e caricati a una d.d.p.  $V_0 = 400 \text{ V}$ . Successivamente lo spazio tra le armature di  $C_1$  viene completamente riempito di acqua distillata ( $\kappa = 80$ ). Calcolare la variazione della carica di  $C_1$ , la variazione della d.d.p. ai capi di  $C_2$ , la carica di polarizzazione sulle facce del dielettrico, la variazione di energia elettrostatica del sistema.



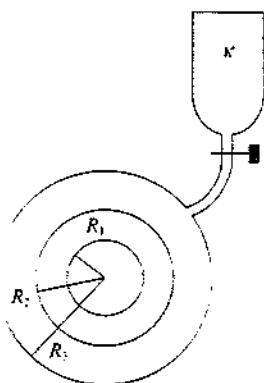
- 5.5 Due condensatori piani eguali, aventi armature quadrate di lato  $l = 20 \text{ cm}$  distanti  $h \approx 5 \text{ mm}$ , sono connessi a due generatori che mantengono una d.d.p.  $V_1 = 500 \text{ V}$  ai capi del primo e  $V_2 = 1000 \text{ V}$  ai capi del secondo. Una lastra di dielettrico, di dimensioni  $20 \cdot 20 \cdot 0.5 \text{ cm}^3$ , densità  $\rho = 1.5 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$  e costante dielettrica relativa  $\kappa = 5$ , può scorrere senza attrito tra le armature, mantenendo sempre un estremo dentro un condensatore e uno dentro l'altro. Calcolare il tempo impiegato dalla lastra per compiere un tratto  $x = 5 \text{ cm}$  se al tempo  $t = 0$  è ferma e la densità di carica di polarizzazione sulla lastra.



- 5.6 Un condensatore piano, avente armature verticali di area  $\Sigma = 500 \text{ cm}^2$  distanti  $d = 1 \text{ cm}$ , è collegato ad un generatore di d.d.p.  $V = 10^3 \text{ V}$ . Una lastra di dielettrico, di spessore  $h = 0.6 \text{ cm}$  e costante dielettrica relativa  $\kappa = 4$ , è inserita tra le armature ed è addossata a quella carica negativamente. All'armatura positiva è appesa tramite un filo sottile isolante, una pallina di massa  $m = 10^{-3} \text{ kg}$  e carica  $q_0 = 5 \cdot 10^{-9} \text{ C}$ , che rimane in equilibrio con il filo ad angolo  $\theta$  rispetto alla verticale. Calcolare il valore del campo elettrico che agisce sulla pallina, dell'angolo  $\theta$  di equilibrio, della carica presente sulle armature e della carica di polarizzazione presente sulla superficie del dielettrico.

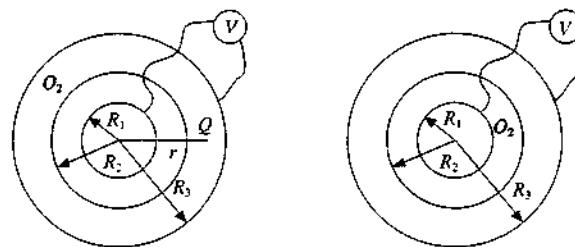


- 5.7 Tre conduttori sferici cavi concentrici, di spessore trascurabile, hanno raggi  $R_1 = 1 \text{ cm}$ ,  $R_2 = 2 \text{ cm}$ ,  $R_3 = 4 \text{ cm}$ . Una carica  $q$  è depositata sul conduttore più interno e si osserva che tra i due condensatori più esterni c'è una d.d.p.  $V_2 - V_3 = 9 \cdot 10^3 \text{ V}$ . Si riempie completamente l'intercapedine compresa tra i conduttori di raggio  $R_2$  e  $R_3$  con un liquido dielettrico di costante dielettrica relativa  $\kappa$  e si osserva che la d.d.p.  $V_2 - V_3$  scende al valore  $3 \cdot 10^3 \text{ V}$ . Calcolare il valore di  $\kappa$ , la variazione percentuale di energia elettrostatica nel processo di riempimento, la carica di polarizzazione sulla superficie del dielettrico. Alla fine è variata la d.d.p.  $V_1 - V_2$  tra i due conduttori più interni e il potenziale del conduttore esterno?

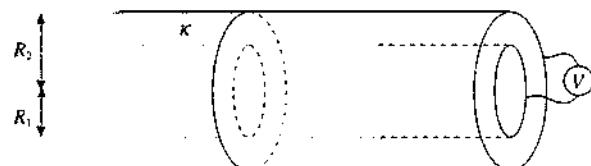


- 5.8 Tre conduttori sferici cavi concentrici, di spessore trascurabile, hanno raggi  $R_1 = 10 \text{ cm}$ ,  $R_2 = 20 \text{ cm}$ ,  $R_3 = 40$

cm. All'inizio l'intercapedine compresa tra  $R_2$  e  $R_3$  è riempita di ossigeno liquido (suscezività  $\chi = 0.5$ , massa molare  $A = 32$ , densità  $\rho = 1.2 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ ) e la d.d.p. tra il conduttore interno e quello esterno è mantenuta fissa a  $V = 600 \text{ V}$ . Calcolare la carica  $q$  del conduttore interno, il valore della polarizzazione  $P$  in un punto  $Q$  distante  $r = 25 \text{ cm}$  dal centro, il valore della componente del momento di dipolo  $p$  della molecola di  $O_2$  in direzione di  $E$ , sempre a distanza  $r = 25 \text{ cm}$  dal centro. Successivamente si vuota l'intercapedine tra  $R_2$  e  $R_3$  e si riempie l'intercapedine tra  $R_1$  e  $R_2$ . Quanto lavoro compie il generatore durante il processo di travaso del liquido?



- 5.9 Un condensatore cilindrico molto lungo, le cui armature hanno raggio  $R_1 = 2 \text{ cm}$  e  $R_2 = 4 \text{ cm}$ , è parzialmente riempito da un guscio di dielettrico, con raggi  $R_1$  e  $R_2$  e costante dielettrica relativa  $\kappa = 5$ . Un generatore mantiene la d.d.p.  $V = 5 \cdot 10^3 \text{ V}$  tra le armature. Calcolare la forza con cui il dielettrico è risucchiato nel condensatore e, per un avanzamento  $x = 5 \text{ cm}$ , la variazione di energia elettrostatica.

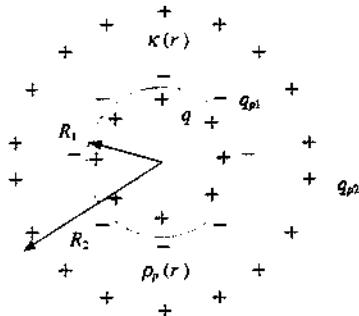


- 5.10 Un cilindro conduttore di diametro  $d = 5 \text{ cm}$  è sospeso verticalmente ad una molla di costante elastica  $k = 0.1$

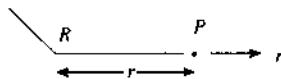


N/m: la parte inferiore è contenuta in un secondo cilindro cavo conduttore, di diametro interno  $D = 6 \text{ cm}$ , coaxiale con il primo. Lo spazio tra i conduttori è riempito da un dielettrico di costante dielettrica relativa  $\kappa = 4$ . Quando tra i cilindri si applica la d.d.p.  $V = 4 \cdot 10^3 \text{ V}$  tramite un generatore si osserva che il primo cilindro si abbassa di  $\Delta x$ . Calcolare il valore di  $\Delta x$  e la carica di polarizzazione per unità di lunghezza sulle superficie del dielettrico a contatto con i conduttori.

- 5.11 Una sfera conduttrice di raggio  $R_1 = 1 \text{ cm}$  possiede una carica  $q = 6 \cdot 10^{-8} \text{ C}$  ed è circondata da un involucro sferico di dielettrico non omogeneo di raggio interno  $R_1$  e raggio esterno  $R_2 = 3 \text{ cm}$ . La costante dielettrica relativa dell'invilucro varia con la distanza dal centro della sfera secondo la legge  $\kappa = c / r^2$  con  $c = 9 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ . Calcolare il campo elettrostatico  $E(r)$  in tutto lo spazio, l'energia elettrostatica del sistema e le densità di carica di polarizzazione, verificando che la carica totale di polarizzazione è nulla.



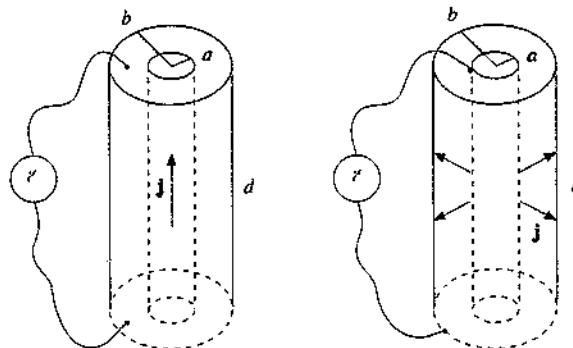
- 5.12 Un piccolo cilindro di materiale dielettrico ( $\kappa = 3$ ) è posto a distanza  $r = 5R$  dal centro di una sfera conduttrice isolata di raggio  $R = 1 \text{ cm}$ , al potenziale  $V = 2 \cdot 10^4 \text{ V}$ . Il volume del cilindro è  $\tau = 20 \text{ mm}^3$  e le sue dimensioni sono trascurabili rispetto a  $R$ . Calcolare la forza che agisce sul cilindro.



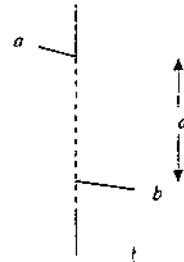
- 6.1 Un acceleratore lineare accelera elettroni portandoli all'energia  $E_k = 45 \text{ GeV}$ . La macchina funziona in regime impulsivo: in ciascun impulso che dura  $\tau = 1 \mu\text{s}$  sono accelerati  $N = 10^{14}$  elettroni; la frequenza di ripetizione è  $v = 500 \text{ Hz}$ . Calcolare l'intensità di corrente massima  $i_{\max}$  e quella media  $i_{\text{med}}$  del fascio di elettroni, la potenza massima  $P_{\max}$  e media  $P_{\text{med}}$ . Nell'ipotesi che il fascio abbia un diametro  $d = 3 \text{ mm}$  calcolare inoltre la densità di corrente massima  $j_{\max}$  e media  $j_{\text{med}}$ , la densità di elettroni  $n_e$  massima e media. Si assume che gli elettroni abbiano velocità  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ .
- 6.2 Dai risultati dell'esempio 6.2 si ricava che in un filo di rame percorso da una corrente di densità  $j = 2 \text{ A/mm}^2$  la

velocità di deriva degli elettroni è  $v_d = 0.15 \text{ mm/s}$ . Calcolare il valore del campo elettrico  $E$  che mantiene la corrente nel filo, l'accelerazione  $a$  degli elettroni di conduzione tra due urti consecutivi, il tempo  $t$  impiegato da un elettrone per raggiungere  $v_d$ , la potenza  $P_t$  per unità di volume spesa per far circolare la corrente. La resistività del rame è  $\rho = 1.67 \cdot 10^{-8} \Omega \text{m}$ .

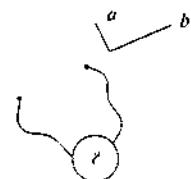
- 6.3 Un conduttore cilindrico cavo di lunghezza  $d = 2 \text{ cm}$  ha raggi  $a = 2 \text{ mm}$  e  $b = 5 \text{ mm}$ ; esso è costituito da una sostanza con resistività  $\rho = 2 \Omega \text{m}$ . Una f.e.m.  $\gamma = 20 \text{ V}$  può essere applicata al conduttore in modo che la corrente fluisca parallelamente all'asse del cilindro o radialmente dalla superficie interna a quella esterna. Calcolare nei due casi l'intensità di corrente  $i$  che percorre il conduttore, la potenza dissipata e la densità di corrente sulle superficie terminali.



- 6.4 Un resistore ha la forma di un tronco di cono lungo  $d$  e con raggi estremi  $a$  e  $b$ . Calcolare la resistenza  $R$  e verificare la formula per  $a = b$ .

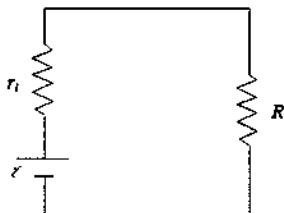


- 6.5 Un guscio semisferico di silicio ( $\rho = 2300 \Omega \text{m}$ ) ha il raggio interno  $a = 1 \text{ cm}$  e il raggio esterno  $b = 2 \text{ cm}$ ; esso è collegato ad un generatore che mantiene la d.d.p.  $V = 2 \text{ V}$  tra le superficie che lo delimitano. Calcolare la resistenza.



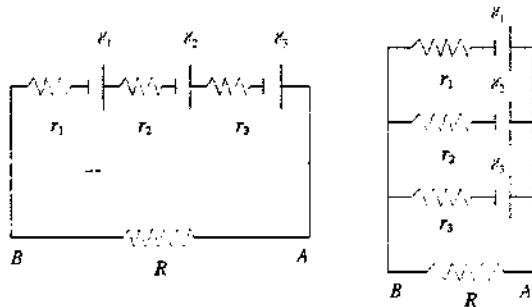
za  $R$  del guscio, la corrente che lo percorre e la potenza dissipata, la densità di corrente attraverso le superficie esterne. Queste sono ricoperte da un sottile strato d'oro così da poterle assumere a potenziale costante.

- 6.6 Nel circuito in figura il generatore ha f.e.m.  $\mathcal{E} = 0.5 \text{ V}$  e resistenza interna  $r_i = 1 \Omega$ ; il resistore  $R$  è costituito da un filo di alluminio lungo  $d = 5 \text{ m}$  e di sezione  $\Sigma = 0.5 \text{ mm}^2$ ; la resistività e il coefficiente termico sono riportati nella tabella 6.1. Calcolare la corrente  $i_1$  nel circuito a  $0^\circ\text{C}$ , la temperatura  $t$  per cui la corrente vale  $i_2 = 0.95 i_1$ , la potenza dissipata su  $R$  nelle due situazioni. Si suppone  $r_i$  costante.

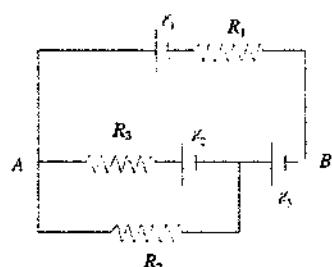


- 6.7 Un filo di nichelcromo ( $\alpha = 4 \cdot 10^{-4} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ ) di una stufa dissipava una potenza  $P_1 = 500 \text{ W}$  quando la d.d.p. applicata è  $V = 200 \text{ V}$  e la temperatura  $t_1 = 800^\circ\text{C}$ . Supponendo che esso venga mantenuto alla temperatura  $t_2 = 200^\circ\text{C}$  immersandolo in un bagno d'olio, calcolare la potenza  $P_2$  dissipata e la corrente che percorre il filo nei due casi.

- 6.8 Tre batterie aventi la stessa f.e.m.  $\mathcal{E} = 6 \text{ V}$  e la stessa resistenza interna  $r_i = 1 \Omega$  possono essere collegate tutte in serie o tutte in parallelo ad un resistore con  $R = 6 \Omega$ . Calcolare nei due casi la resistenza complessiva dei generatori vista dai capi  $A$  e  $B$  di  $R$ , la corrente che circola attraverso  $R$ , la potenza complessivamente erogata dai generatori e quella trasferita su  $R$ .

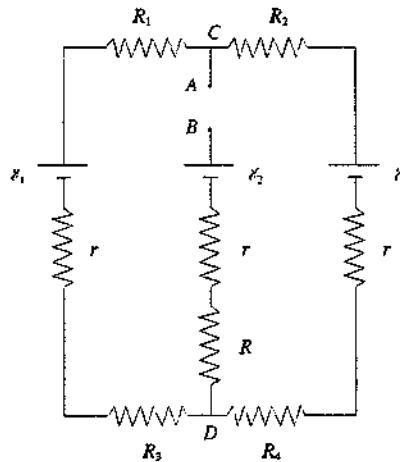


- 6.9 Nel circuito in figura  $\mathcal{E}_1 = 12 \text{ V}$ ,  $\mathcal{E}_2 = 10 \text{ V}$ ,  $\mathcal{E}_3 = 8 \text{ V}$ ,  $R_1 = 50 \Omega$ ,  $R_2 = 20 \Omega$ ,  $R_3 = 10 \Omega$ . Calcolare la corrente in cia-

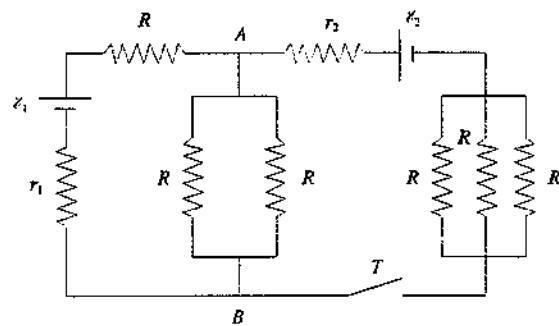


scun resistore, la d.d.p. tra i punti  $A$  e  $B$ , la potenza totale dissipata nel sistema, verificando che è eguale a quella erogata dai generatori.

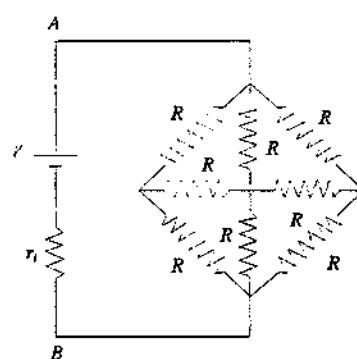
- 6.10 Nel circuito in figura  $\mathcal{E}_1 = 4 \text{ V}$ ,  $\mathcal{E}_2 = 8 \text{ V}$ ,  $\mathcal{E}_3 = 12 \text{ V}$ ,  $r = 1 \Omega$ ,  $R_1 = 4 \Omega$ ,  $R_2 = 2 \Omega$ ,  $R_3 = 2 \Omega$ ,  $R_4 = 2 \Omega$ ,  $R = 8 \Omega$ . Calcolare la d.d.p. tra i punti  $A$  e  $B$  e tra i punti  $C$  e  $D$ . I punti  $A$  e  $B$  vengono collegati con un filo; calcolare la d.d.p.  $V_C - V_D$ , la potenza erogata dai tre generatori, la potenza trasferita sul sistema  $R_1, R_2, R_3, R_4, R$ .



- 6.11 Nel circuito in figura  $\mathcal{E}_1 = 3 \text{ V}$ ,  $r_1 = 1 \Omega$ ,  $\mathcal{E}_2 = 6 \text{ V}$ ,  $r_2 = 2 \Omega$ ,  $R = 6 \Omega$ . Calcolare, prima con l'interruttore  $T$  aperto e poi con  $T$  chiuso, la d.d.p.  $V_A - V_B$  e la potenza erogata dai generatori.

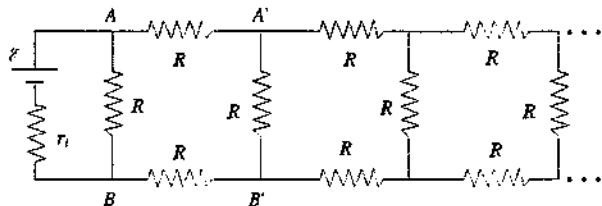


- 6.12 Un generatore di f.e.m.  $\mathcal{E} = 9 \text{ V}$  e resistenza interna  $r_i = 2 \Omega$  è collegato a una rete di resistenze tutte uguali di valore  $R = 6 \Omega$ . Calcolare la resistenza equivalente  $R_{eq}$ .

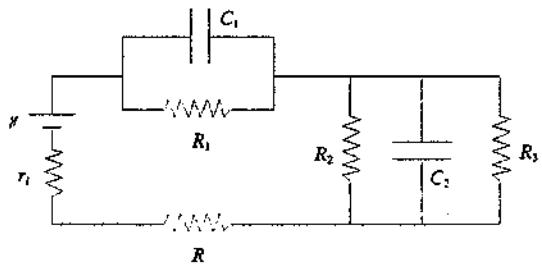


della rete vista dal generatore, la corrente  $i$  che circola nelle singole resistenze, la potenza complessiva trasferita dal generatore alla rete.

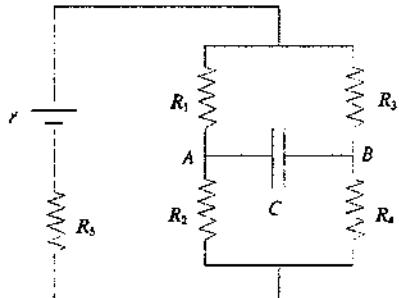
- 6.13 In figura è mostrata una catena infinita di resistenze tutte uguali, di valore  $R = 10 \Omega$ . Calcolare la resistenza equivalente  $R_{eq}$  della catena e la potenza trasferita alla catena se ai suoi capi viene connesso un generatore con f.e.m.  $\epsilon = 9 \text{ V}$  e resistenza interna  $r_i = 2 \Omega$ .



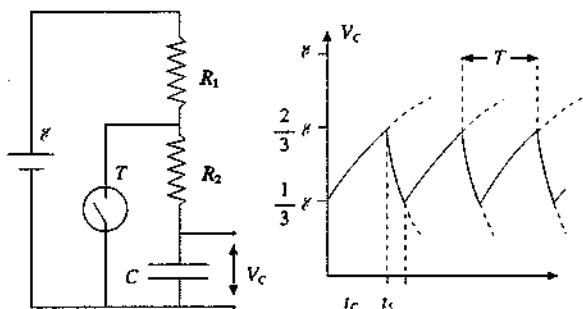
- 6.14 Nel circuito in figura  $\epsilon = 12 \text{ V}$ ,  $r_i = 2 \Omega$ ,  $R = 10 \Omega$ ,  $R_2 = 12 \Omega$ ,  $R_3 = 24 \Omega$ , la corrente che circola nel generatore è  $i = 0.5 \text{ A}$ . L'energia elettrostatica immagazzinata in  $C_1$  e  $C_2$  vale rispettivamente  $U_1 = 4 \cdot 10^{-6} \text{ J}$  e  $U_2 = 2 \cdot 10^{-6} \text{ J}$ . Calcolare il valore di  $R_1$ ,  $C_1$  e  $C_2$ .



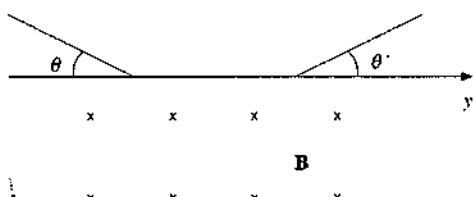
- 6.15 Nel circuito in figura  $\epsilon = 25 \text{ V}$ ,  $R_1 = 1 \Omega$ ,  $R_2 = 4 \Omega$ ,  $R_3 = 8 \Omega$ ,  $R_4 = 2 \Omega$ ,  $R_5 = 5 \Omega$ ,  $C = 3 \mu\text{F}$ . Calcolare la d.d.p.  $V_B - V_A$  in condizioni stazionarie e, se si sconnette il generatore, in quanto tempo la carica del condensatore si riduce a un decimo di quella iniziale.



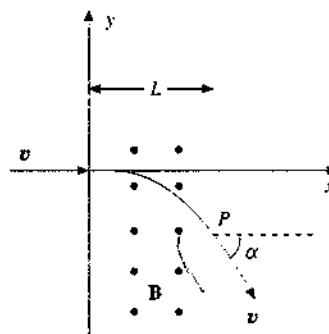
- 6.16 L'interruttore  $T$  del circuito in figura si chiude quando  $V_C = 2 \frac{\epsilon}{3}$  e si apre quando  $V_C = \frac{\epsilon}{3}$ . Il risultato è che  $V_C$  ha l'andamento mostrato. Se  $R_1 = 40 \Omega$ ,  $R_2 = 10 \Omega$ ,  $C = 2 \cdot 10^{-6} \text{ F}$ , calcolare quanto valgono il tempo di carica  $t_c$ , il tempo di scarica  $t_s$  e il periodo dell'oscillazione.



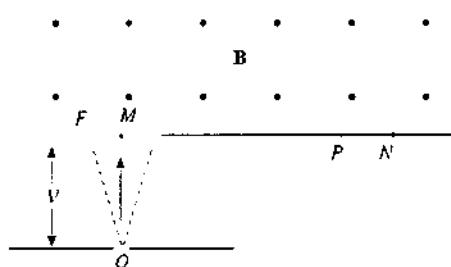
- 7.1 Un protone di energia cinetica  $E_k = 6 \text{ MeV}$  entra in una regione di spazio in cui esiste un campo magnetico  $B = 1 \text{ T}$  ortogonale al piano della traiettoria, formando con l'asse  $y$  l'angolo  $\theta = 30^\circ$ . Calcolare l'angolo  $\theta'$  della direzione di uscita con l'asse  $y$  e la distanza lungo  $y$  tra punto d'uscita e punto di ingresso.



- 7.2 Un protone di energia cinetica  $E_k = 50 \text{ MeV}$  si muove lungo l'asse  $x$  ed entra in un campo magnetico  $B = 0.5 \text{ T}$ , ortogonale al piano  $xy$ , che si estende da  $x = 0$  a  $x = L = 1 \text{ m}$ . Calcolare all'uscita del magnete l'angolo che la velocità del protone forma con l'asse  $x$  e la coordinata  $y$  del punto  $P$ .



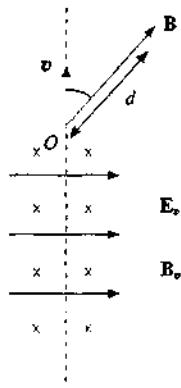
- 7.3 Nel dispositivo in figura un fascetto di ioni, con carica  $q = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$  e massa  $m$ , accelerato da una d.d.p.



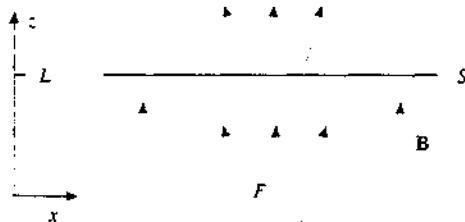
$V = 24.5$  V, penetra attraverso una fenditura  $F$  in una regione in cui esiste un campo magnetico  $B = 10^{-2}$  T uniforme, ortogonale al disegno. Gli ioni che attraversano perpendicolarmente la fenditura nel punto  $M$  arrivano su un rivelatore  $R$  nel punto  $N$ , con  $MN = 35$  cm. Quelli che attraversano  $F$  in una direzione che forma con la normale un angolo  $\theta$  piccolo arrivano sul rivelatore in un punto  $P$ , distante  $d$  da  $N$ . Calcolare la massa  $m$  degli ioni e il valore  $\theta$  per cui risulta  $d/MN = 10^{-3}$ . L'unità di massa atomica vale  $m_u = 1.661 \cdot 10^{-27}$  kg.

7.4

Da un selettor di velocità, che opera in un campo elettrico  $E_v = 10^5$  V/m e in un campo magnetico  $B_v = 0.5$  T, esce un fascio collimato di ioni  ${}^7\text{Li}^+$ . Nel punto  $O$  il fascio entra in una regione in cui esiste un campo magnetico  $B$  uniforme, parallelo al piano del disegno e formante l'angolo  $\theta$  con l'asse  $x$ . Dopo un tempo  $t = 6.28 \cdot 10^{-6}$  s una particella si è allontanata da  $O$  di una distanza  $d = 62.8$  cm percorrendo 10 giri attorno a  $B$ . Calcolare la velocità degli ioni, il valore di  $B$ , il valore di  $\theta$ , il raggio  $r$  della traiettoria elicoidale.

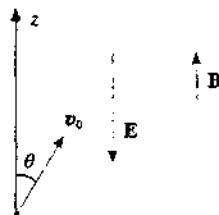


7.5 Nel dispositivo mostrato in figura attraverso la fenditura  $F$  escono elettroni accelerati da una d.d.p.  $V \approx 3 \cdot 10^3$  V. Lungo l'asse  $z$ , nella regione oltre la fenditura, c'è un campo magnetico  $B$  uniforme parallelo all'asse  $z$  e uno schermo fluorescente  $S$  distante  $L = 2$  cm da  $F$ . Se l'angolo  $\theta$  è piccolo, regolando opportunamente  $B$  è possibile che alla distanza  $L$  le traiettorie degli elettroni incontrino lo schermo  $S$  coprendo la stessa area che in  $F$ . Determinare i valori di  $B$  a ciò necessari.



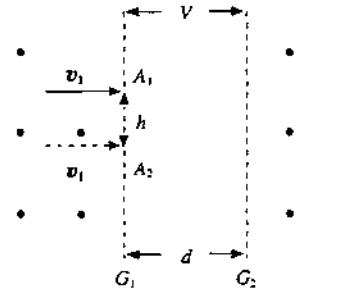
7.6 Una regione di spazio è sede di un campo elettrico  $E = -E \mathbf{u}_x$  con  $E = 10^5$  V/m e di un campo magnetico  $B = Bu_z$ ,

con  $B = 0.1$  T. Un protone viene immesso nella regione con velocità  $v_0 = 5 \cdot 10^6$  m/s formante un angolo  $\theta = 30^\circ$  con l'asse  $z$ . Mostrare che il protone percorre un'orbita elicoidale, il cui asse è parallelo all'asse  $z$ , calcolando il raggio  $r$  dell'elica e la distanza  $z_1$  percorsa dal protone nel primo giro. Calcolare inoltre la distanza  $z_0$  percorsa prima che il protone inverta il suo moto lungo l'asse  $z$ .



7.7

Due griglie  $G_1$  e  $G_2$  metalliche parallele molto estese, distanti  $d = 4$  cm, tra le quali è applicata una d.d.p.  $V$ , separano due regioni in cui esiste un campo magnetico  $B = 0.8$  T uniforme, ortogonale al disegno. In un punto  $A_1$ , viene iniettato un protone con velocità  $v_1$ , che all'istante  $t = 0$  attraversa la griglia  $G_1$  perpendicolarmente. Dopo un tempo  $t = 1.22 \cdot 10^{-7}$  s il protone rientra in  $G_1$  nello stesso verso in un punto  $A_2$ , distante  $h = 5.2$  cm da  $A_1$ . Descrivere la traiettoria percorsa dal protone tra  $A_1$  e  $A_2$  e calcolare la d.d.p.  $V$  applicata tra le griglie e le velocità  $v_1$  e  $v_2$  del protone nelle due regioni in cui c'è campo magnetico.



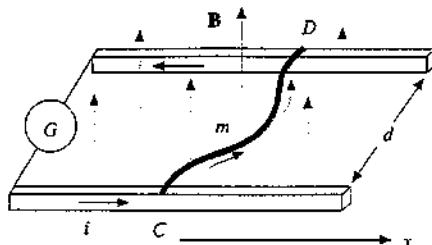
7.8

Un ciclotrone con magnete superconduttore ha un raggio  $R = 80$  cm e un campo magnetico  $B = 4.2$  T. Nell'ipotesi che esso acceleri ioni  ${}^7\text{Li}^+$  ( $q/m = 1.38 \cdot 10^7$  C/kg) calcolare la velocità massima  $v_{max}$  e l'energia cinetica  $E_{kin,max}$  raggiungibili dagli ioni, il valore  $V$  della d.d.p. acceleratrice affinché un ciclo di accelerazione duri  $t = 42.2 \mu\text{s}$ , il numero  $N$  di giri compiuti in un ciclo, la frequenza  $v$  di rivoluzione. Se si considera la correzione relativistica, di quanto varia percentualmente la frequenza di rivoluzione tra l'inizio e la fine del ciclo?

7.9

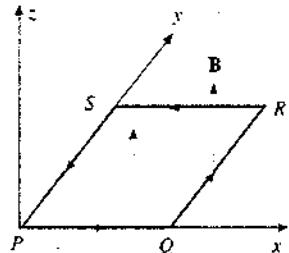
Facendo passare una corrente  $i = 20$  A in un conduttore con sezione quadrata di area  $\Sigma = 4 \cdot 10^{-2}$  cm $^2$  immerso in un campo magnetico  $B = 0.8$  T si crea una tensione di Hall  $\epsilon_H = 0.85 \cdot 10^{-6}$  V. Calcolare la densità  $n$  dei portatori di carica, la velocità  $v_d$  di deriva degli elettroni, il campo elettrico  $E$  che mantiene in moto gli elettroni se la condutività del materiale è  $\sigma = 6.14 \cdot 10^7$   $\Omega^{-1}$  m $^{-1}$ , il rapporto tra  $E$  e il campo di Hall  $E_H$ .

- 7.10 Un filo metallico rigido di forma qualunque ha i due estremi  $C$  e  $D$  che possono scorrere senza attrito su due rotaie orizzontali distanti  $d = 20$  cm. Le rotaie sono poste in un campo magnetico  $B = 0.5$  T uniforme e verticale. Il circuito è percorso da una corrente costante  $i = 2$  A fornita dal generatore  $G$ . Se la massa del filo è  $m = 2$  g calcolare la velocità  $v$  del filo e lo spazio  $x$  percorso dopo un tempo  $t_1 = 0.1$  s, nell'ipotesi che per  $t = 0$  il filo sia fermo.

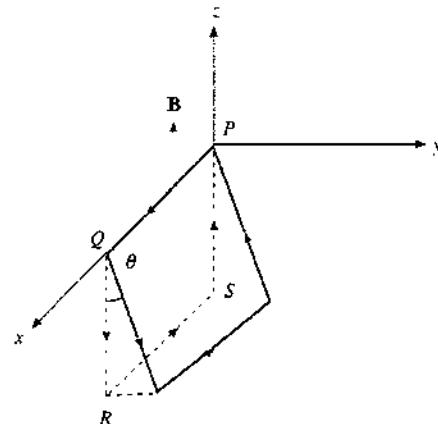


- 7.11 Una spira quadrata di lato  $a = 5$  cm è percorsa da una corrente  $i$ . Il momento magnetico della spira è  $\mathbf{m} = m_x \mathbf{u}_x + m_y \mathbf{u}_y$ , con  $m_x = 0.6 \cdot 10^{-3}$  Am<sup>2</sup>,  $m_y = -0.8 \cdot 10^{-3}$  Am<sup>2</sup>. La spira è immersa in un campo magnetico uniforme  $\mathbf{B} = B_x \mathbf{u}_x + B_z \mathbf{u}_z$ , con  $B_x = 0.25$  T,  $B_z = 0.30$  T. Calcolare il valore della corrente  $i$ , il modulo del momento meccanico  $M$ , l'angolo  $\alpha$  tra  $\mathbf{m}$  e  $\mathbf{B}$ , l'energia potenziale magnetica  $U_p$ .

- 7.12 Una spira quadrata di lato  $a = 20$  cm è posta nel piano  $x$ ,  $y$  ed è percorsa dalla corrente  $i = 5$  A nel verso indicato. Essa risente dell'azione del campo magnetico  $\mathbf{B} = \alpha x \mathbf{u}_z$ , con  $\alpha = 0.2$  T/m. Calcolare la forza  $\mathbf{F}$  che agisce sulla spira e l'energia potenziale magnetica  $U_p$ .

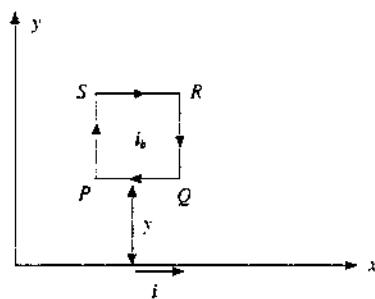


- 7.13 Una spira rettangolare rigida, di lati  $PQ = RS = a = 20$  cm e  $QR = SP = b = 10$  cm, ha una massa per unità di lunghezza  $\delta = 5 \cdot 10^{-2}$  g/cm ed è percorsa da una corren-

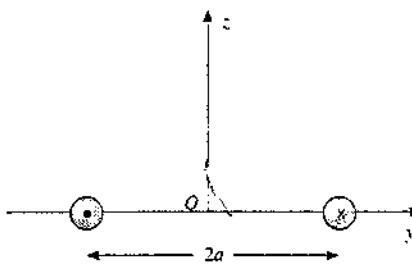


te  $i$ . Essa può ruotare senza attrito intorno a  $PQ$  che è parallelo all'asse  $x$  orizzontale. Quando sulla spira agisce un campo magnetico uniforme e verticale  $\mathbf{B} = Bu$ , con  $B = 2 \cdot 10^{-2}$  T, essa ruota di un angolo  $\theta = 30^\circ$ . Calcolare il valore della corrente  $i$  e il lavoro  $W$  fatto dalle forze magnetiche durante la rotazione.

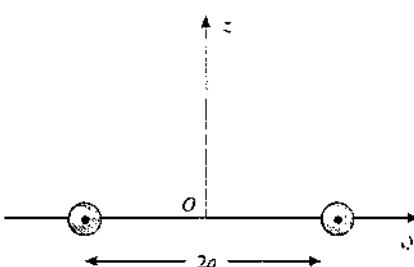
- 8.1 Una bobina rigida quadrata di lato  $a = 2$  cm, formata da  $N = 20$  spire compatte, è percorsa da una corrente  $i_b = 2$  A ed è posta a distanza  $y$  da un filo indefinito percorso da una corrente  $i = 50$  A. I versi delle correnti sono indicati nella figura. Calcolare la forza magnetica  $\mathbf{F}(y)$  che agisce sulla bobina, dimostrando che per  $y \gg a$ ,  $\mathbf{F} = m dB/dy$ , se  $m$  è il momento magnetico della bobina e  $B$  il campo del filo. Calcolare inoltre il lavoro  $W_1$  compiuto dalla forza magnetica per spostare la bobina da  $y_1 = 1$  cm a  $y_2 = 2$  cm e il lavoro  $W_2$  compiuto dalla forza magnetica per ruotare di  $180^\circ$  la bobina, quando  $y = y_3 = 20$  cm.



- 8.2 Due fili indefiniti distanti  $2a = 4$  cm, paralleli all'asse  $x$ , sono percorsi dalla stessa corrente  $i = 50$  A con i versi indicati in figura. Calcolare il campo magnetico  $\mathbf{B}(z)$  sull'asse dei due fili e a quale distanza dal centro  $O$  si arresta un piccolo magnete lanciato con velocità  $v_0 = 7.1 \cdot 10^{-2}$  m/s da  $O$  lungo l'asse  $z$ , di massa  $m_p = 3.97 \cdot 10^{-2}$  kg e momento magnetico  $m = 0.2$  Am<sup>2</sup>, parallelo e concorde a  $\mathbf{B}$ . Si assuma che l'asse  $z$  sia orizzontale.

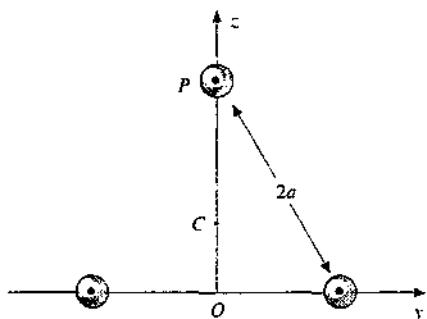


- 8.3 Due fili indefiniti distanti  $2a = 4$  cm, paralleli all'asse  $x$ , sono percorsi dalla stessa corrente  $i = 50$  A, concorde

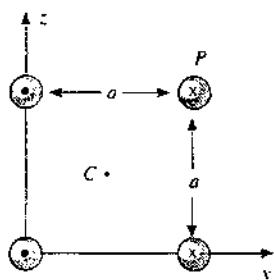


all'asse  $x$ . Calcolare il campo magnetico  $B(z)$  sull'asse dei due fili e a quale distanza dal centro  $O$  un piccolo ago magnetico orientato parallelamente a  $\mathbf{B}$  risente di una forza nulla.

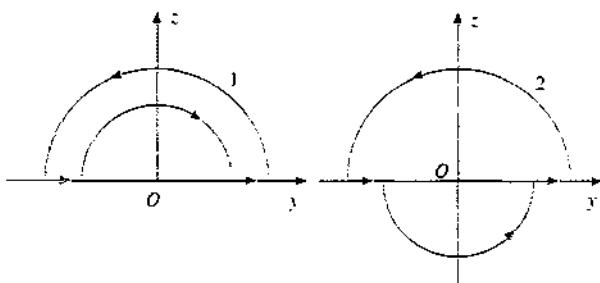
- 8.4 Tre lunghi fili conduttori sono tra loro paralleli e disposti ai vertici di un triangolo equilatero di lato  $2a = 15$  cm. Essi sono percorsi dalla stessa corrente  $i = 10$  A concorde all'asse  $x$ . Calcolare il campo magnetico  $\mathbf{B}_c$  nel centro  $C$  del triangolo e la forza  $\mathbf{F}$  per unità di lunghezza sul filo disposto in  $P$ .



- 8.5 Quattro lunghi fili conduttori sono tra loro paralleli e disposti ai vertici di un quadrato di lato  $a = 20$  cm; in ogni filo circola la corrente  $i = 30$  A, con i versi mostrati in figura. Calcolare il campo magnetico  $\mathbf{B}_c$  nel centro  $C$  del quadrato, il campo magnetico  $\mathbf{B}_P$  nel vertice  $P(a, a)$  del quadrato e la forza  $\mathbf{F}$  per unità di lunghezza sul filo disposto in  $P$ .

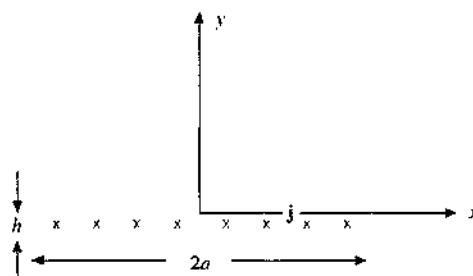


- 8.6 Nei due circuiti in figura i raggi delle semicirconferenze sono  $a = 10$  cm e  $b = 15$  cm. Se la corrente vale  $i = 20$  A calcolare per entrambi il campo magnetico  $\mathbf{B}_o$  nel centro  $O$  delle semicirconferenze e il momento magnetico  $\mathbf{m}$ .

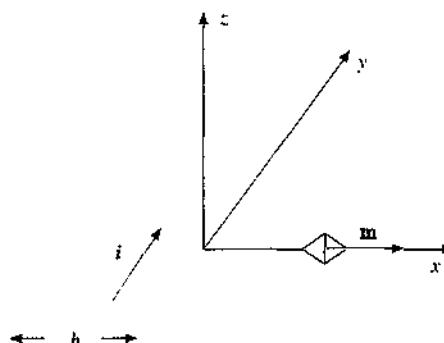


- 8.7 Una lamina conduttrice infinitamente lunga, di sezione rettangolare con lati  $2a = 10$  cm e  $h = 0.1$  cm (mostrata

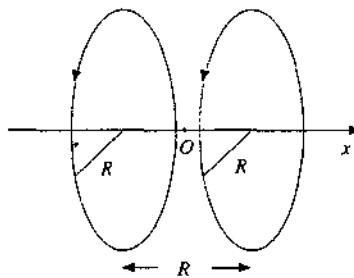
in figura), è percorsa da una corrente di densità uniforme  $j = 2$  A/mm<sup>2</sup>. Calcolare il campo magnetico lungo l'asse  $y$  della lamina e il momento meccanico  $\mathbf{M}$  che agisce su un piccolo ago magnetico di momento  $\mathbf{m} = 0.2 \cdot \mathbf{u}_y$  Am<sup>2</sup>, posto a distanza  $y_0 = 4$  cm dalla lamina. Dimostrare che per  $a$  tendente all'infinito si ottengono i risultati dell'esempio 8.8 e per  $2a \ll y$  i risultati dell'esempio 8.5.



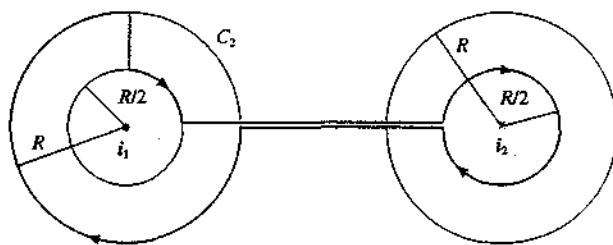
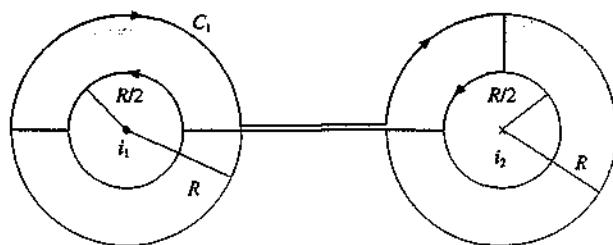
- 8.8 Una sottile striscia metallica di larghezza  $h = 2$  cm è percorsa dalla corrente  $i = 10$  A. Calcolare il valore del campo magnetico  $B(x)$  a distanza  $x$  dal bordo della striscia (in particolare per  $x \gg h$ ) e il momento meccanico  $\mathbf{M}$  che agisce su un piccolo ago magnetico di momento  $\mathbf{m} = 0.1 \mathbf{u}_x$  Am<sup>2</sup>, posto a distanza  $x = 1$  cm.



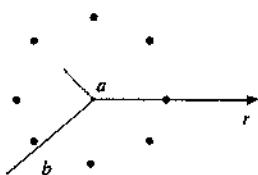
- 8.9 Due spire circolari di raggio  $R$  hanno lo stesso asse e giacciono in piani paralleli distanti  $2d = R$ ; esse sono percorse nello stesso verso dalla stessa corrente  $i$ . Detto  $\mathbf{B}_o$  il valore di  $\mathbf{B}$  nel punto  $O$  di mezzo tra le due spire, dimostrare che in un punto  $P$  distante  $x$  da  $O$  il campo magnetico  $\mathbf{B}(x)$  differisce da  $\mathbf{B}_o$  solo per termini del quarto ordine in  $x/R$  e di ordine superiore. Calcolare inoltre a quale distanza  $x_0$  da  $O$  il campo  $\mathbf{B}(x_0)$  differisce da  $\mathbf{B}_o$  dell'1%. Il dispositivo è noto come bobine di Helmholtz.



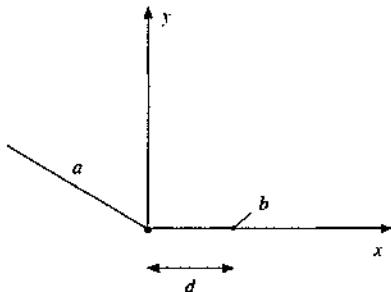
- 8.10** Due conduttori cilindrici molto lunghi di raggio  $R$ , paralleli tra loro e a notevole distanza l'uno dall'altro, sono percorsi dalle correnti  $i_1$  e  $i_2$  in versi opposti. La circuitazione del campo magnetico lungo i percorsi chiusi  $C_1$  e  $C_2$  indicati in figura vale rispettivamente  $\Gamma_1(\mathbf{B}) = 0$  e  $\Gamma_2(\mathbf{B}) = -20\pi \cdot 10^{-7}$  Tm. Calcolare  $i_1$  e  $i_2$ .



- 8.11** Un conduttore cilindrico cavo di raggi  $a$  e  $b$  è percorso da una corrente distribuita uniformemente. Calcolare il campo magnetico  $B(r)$  in funzione della distanza  $r$  dall'asse e verificare che per  $a = 0$  si ottengono i risultati dell'esempio 8.5 relativi ad un conduttore cilindrico pieno.

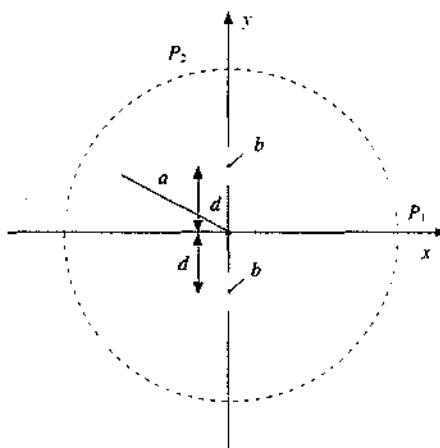


- 8.12** Un conduttore cilindrico molto lungo di raggio  $a \approx 2$  cm ha nel suo interno una cavità cilindrica di raggio  $b = 0.3$



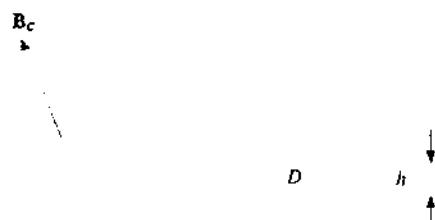
cm, essa pure molto lunga. Gli assi dei due cilindri sono paralleli e distano  $d = 1$  cm. Nel conduttore fluisce una corrente  $i = 20$  A, distribuita uniformemente. Dimostrare che il campo magnetico  $\mathbf{B}$  all'interno della cavità è costante, calcolandone modulo e direzione. Calcolare inoltre l'energia magnetica e l'induttanza per unità di lunghezza del conduttore.

- 8.13** Si consideri un conduttore cavo con le stesse dimensioni di quello visto nel problema 8.12 con in più una seconda cavità eguale alla prima e disposta simmetricamente rispetto all'asse; i centri delle cavità stanno sull'asse  $y$ . Il conduttore è percorso da una corrente distribuita uniformemente. La circuitazione del campo magnetico lungo una circonferenza di raggio  $h = 2.5$  cm concentrica al conduttore vale  $\Gamma(\mathbf{B}) = 10^{-5}$  Tm. Calcolare la densità di corrente  $j$ , il campo magnetico  $\mathbf{B}$  nei punti  $P_1(h, 0)$  e  $P_2(0, h)$ , l'espressione del campo magnetico a distanze  $r \gg d$ .



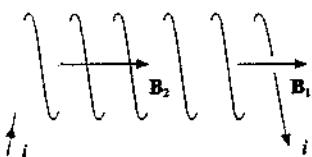
- 9.1** Un ago magnetico a forma di sbarretta con sezione  $\Sigma = \pi \cdot 10^{-2} \text{ cm}^2$  e lunghezza  $d = 4$  cm è sottoposto ad un campo magnetico  $B = 10^{-4}$  T; si trova che il momento meccanico massimo che agisce sull'ago vale  $M_0 = 10^{-5}$  Nm. Calcolare la magnetizzazione  $M$  dell'ago nell'ipotesi che sia uniforme, la corrente amperiana, il momento magnetico medio di ogni atomo se il materiale di cui è fatto l'ago è ferro ( $A = 55.85$ ,  $\rho = 7.9 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ ).

- 9.2** Due anelli toroidali uguali sono formati dallo stesso materiale ferromagnetico magnetizzato uniformemente; la lunghezza media è  $d = 20$  cm. Il primo anello  $C$  è continuo, il secondo anello  $D$  ha un interferro di spesso-

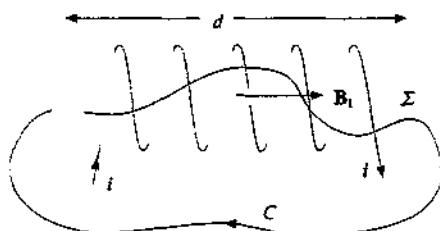


re  $h = 5$  mm. Il campo magnetico nel primo anello è  $B_C = 0.314$  T. Calcolare il campo  $H_C$  nel primo anello e quando valgono nel secondo anello il campo magnetico  $B_D$ , il campo  $H_0$  nell'interferro e il campo  $H_D$  nel ferro, la pressione magnetica sulle facce dell'interferro.

- 9.3** Due guaine cilindriche conduttrici, indefinite, coassiali, di spessore trascurabile, sono percorse entrambe e nello stesso verso da una corrente  $i$ . I raggi delle due guaine sono  $a = 2$  cm,  $b = 4$  cm. L'intercapedine tra di esse, inizialmente vuota, viene completamente riempita con un materiale di permeabilità magnetica relativa  $\kappa_m$  e l'energia magnetica per unità di lunghezza aumenta di  $\Delta U_m = 1.73 \cdot 10^{-3}$  J/m. Sapendo che la circuitazione di  $B$  lungo una circonferenza di raggio  $r > b$ , concentrica al sistema, è  $\Gamma(B) = 2\pi \cdot 10^{-5}$  Tm calcolare i valori della corrente  $i$ , della permeabilità  $\kappa_m$  e della densità di corrente amperiana sulle superficie del materiale.
- 9.4** In un materiale ferromagnetico contenuto all'interno di un solenoide molto lungo sono praticate due piccole cavità cilindriche, entrambe coassiali al solenoide. Nella prima, larga e piatta, si misura  $B_2 = 7.54 \cdot 10^{-2}$  T, nella seconda, sottile e allungata, si misura  $B_1 = 1.26 \cdot 10^{-3}$  T. Calcolare la suscettività magnetica del materiale e la sua magnetizzazione.



- 9.5** Un cilindro di ferro, di sezione  $\Sigma = 10 \text{ cm}^2$  e lunghezza  $d = 20$  cm, è magnetizzato uniformemente ad opera di un avvolgimento disposto sulla sua superficie e formato da  $N = 200$  spire percorse dalla corrente  $i$ . Il campo magnetico misurato in una cavità nel ferro, sottile e allungata, con l'asse parallelo all'asse del cilindro, è  $B_1 = 2.51 \cdot 10^{-3}$  T e la circuitazione del campo magnetico lungo la linea C è  $\Gamma(B) = 3 \cdot 10^{-3}$  Tm. Calcolare la corrente  $i$  che alimenta il solenoide, la magnetizzazione  $M$  e la suscettività magnetica  $\chi_m$  del ferro. l'energia magnetica del sistema.

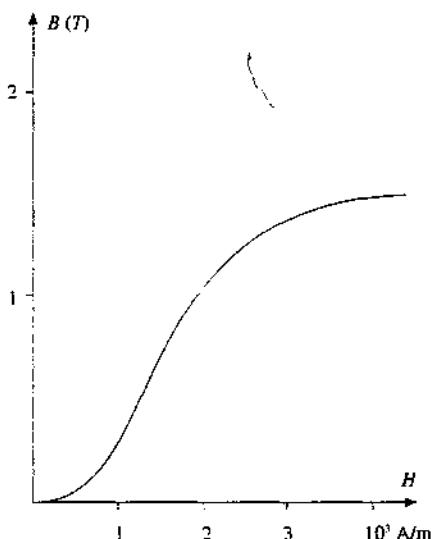


- 9.6** Un elettromagnete è costituito da un avvolgimento di  $N = 500$  spire, percorse da una corrente  $i = 10$  A, disposte su un anello toroidale di materiale ferromagnetico dolce (isoperm) avente permeabilità magnetica relativa  $\kappa_m = 60$ , costante in un ampio intervallo di valori di  $H$ .

L'anello, di sezione  $\Sigma = 100 \text{ cm}^2$ , ha lunghezza media  $d = 132$  cm, in cui è compreso un interferro di spessore  $h = 2$  cm. Calcolare i valori dei campi  $B$ ,  $H$ ,  $M$  nel ferro, il valore del campo  $H_0$  nell'interferro, la corrente di magnetizzazione  $i_m$ , l'energia magnetica immagazzinata nel sistema e il coefficiente di autoinduzione.

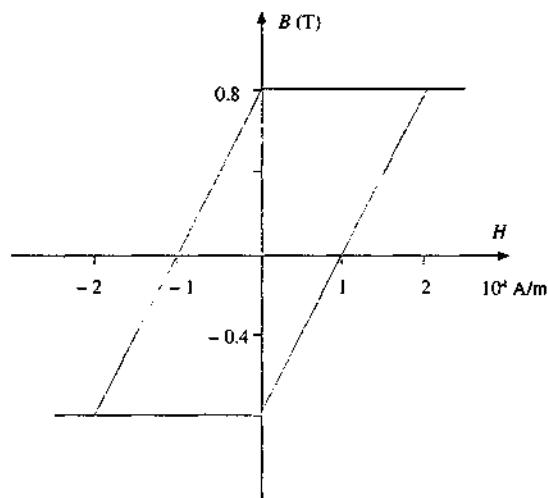
- 9.7** Su un anello toroidale di materiale ferromagnetico di lunghezza  $d$ , sezione  $\Sigma = 1 \text{ cm}^2$ , suscettività magnetica  $\chi_m$ , sono avvolte  $N = 100$  spire. Quando nelle spire circola la corrente  $i_1$  il campo magnetico vale  $B$  e l'energia magnetica del sistema è  $U_1$ . Se si toglie un dischetto di materiale di spessore  $h = 5$  mm, in modo da realizzare un interferro, bisogna aumentare la corrente al valore  $i_2$  per mantenere lo stesso valore di  $B$ ; in questa configurazione l'energia magnetica vale  $U_2$ . Sapendo che  $\Delta i = i_2 - i_1 = 10\pi$  A e  $\Delta U = U_2 - U_1 = 4\pi \cdot 10^{-2}$  J calcolare il campo magnetico  $B$ , la suscettività magnetica  $\chi_m$ , la magnetizzazione  $M$  del materiale.
- 9.8** Un elettromagnete toroidale ha lunghezza  $d = 40.5$  cm, nella quale sono compresi due interferri, diametralmente opposti, di spessore  $h = 2.5$  mm e sezione  $\Sigma = 4\pi \text{ cm}^2$ . Esso è alimentato tramite  $N = 100$  spire da un generatore che fornisce una corrente  $i = 27$  A. Le proprietà magnetiche del ferro sono esprimibili tramite la relazione  $B = \alpha H$  con  $\alpha = 4\pi \cdot 10^{-5}$  Tm/A. Calcolare il campo magnetico  $B_C$  all'interno di una piccola cavità sferica praticata nel ferro e la forza totale  $F$  con cui si attraggono i poli. Per effetto di questa forza i poli si congiungono e si forma un anello toroidale di lunghezza  $d' = 40$  cm; nel processo  $i$  rimane costante. Calcolare il campo magnetico  $B'_C$  nella stessa cavità e il lavoro fatto dal generatore nel processo.

- 9.9** Un elettromagnete ha una lunghezza magnetica complessiva  $d = 101$  cm in cui è compreso un interferro di spessore  $h = 1$  cm; esso è alimentato tramite  $N = 50$  spire da un generatore di corrente. La curva di prima magnetizzazione è riportata in figura. Calcolare il valore della corrente  $i$  per avere nell'interferro un campo magnetico  $B = 0.7$  T, la corrente  $i$  necessaria per generare lo stesso

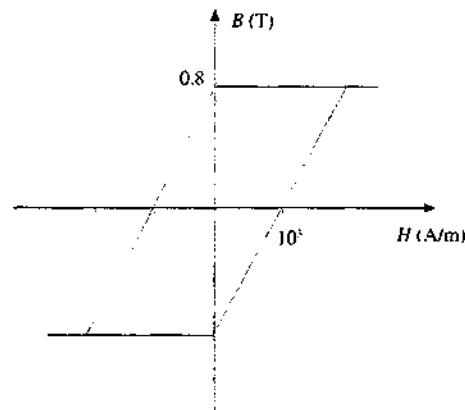


campo magnetico in assenza di interferro, di quanto varia il campo magnetico  $B$  nell'interferro se  $i$  viene dimezzata o raddoppiata, la forza  $F$  con cui si attraggono i poli dell'elettromagnete in questi ultimi due casi (la sezione è  $\Sigma = 10 \text{ cm}^2$ ).

- 9.10** Un magnete permanente di lunghezza media  $d = 110 \text{ cm}$ , nella quale è compreso un interferro spesso  $h = 10 \text{ cm}$ , è costituito da una materia che ha il ciclo di isteresi schematicamente rappresentato in figura. Calcolare il valore del campo magnetico  $B$ , il valore del campo  $H$  nell'interferro, il rapporto tra l'energia magnetica contenuta nell'interferro e quella contenuta nel materiale.

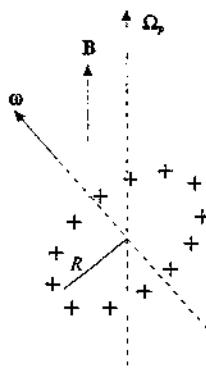


- 9.11** Lo spazio interno di un solenoide toroidale è riempito completamente da una materia ferromagnetico con il ciclo di isteresi mostrato schematicamente in figura. Il solenoide è alimentato con una corrente sinusoidale di frequenza  $v = 50 \text{ Hz}$  e di intensità tale che i valori di  $H$  e  $B$  nel materiale si trovano in ogni istante sul ciclo di isteresi (e non in punti interni). Calcolare, nell'ipotesi che il sistema sia termicamente isolato, l'innalzamento in un secondo della temperatura del materiale, la cui densità è  $\rho = 8 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$  e il cui calore specifico è  $c = 400 \text{ J/kg K}$ .

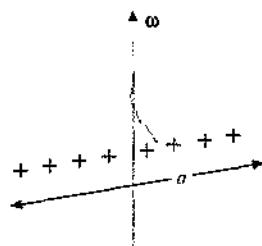


- 9.12** Le molecole di un materiale paramagnetico hanno un momento magnetico intrinseco  $m_0 = 5 \cdot 10^{-23} \text{ Am}^2$ . Se esso viene posto in un campo magnetico  $B = 0.5 \text{ T}$  calcolare a quale temperatura l'energia cinetica media di traslazione di una molecola è eguale all'energia necessaria per rovesciare un tale dipolo magnetico e a quale temperatura la magnetizzazione del materiale è pari al 50% e all'80% della magnetizzazione di saturazione.

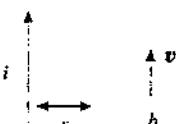
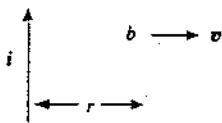
- 9.13** Un anello sottile di raggio  $R$ , massa  $M$  e carica  $q$  distribuita uniformemente, ruota con velocità angolare  $\omega$  attorno ad un asse ortogonale al piano in cui giace l'anello e passante per il centro. Calcolare il momento magnetico dell'anello e il rapporto giomagnetico. Ripetere il calcolo supponendo che la carica sia invece uniformemente distribuita su un disco sottile. Calcolare infine la velocità angolare di precessione se l'anello e il disco vengono posti in un campo magnetico.



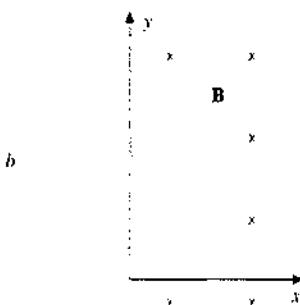
- 9.14** Una sottile sbarretta isolante lunga  $a$ , di massa  $M$  e carica  $q$  distribuita uniformemente con densità  $\lambda$  su tutta la lunghezza, ruota con velocità angolare  $\omega$  intorno ad un asse ortogonale passante per il suo centro. Calcolare il momento magnetico della sbarretta e il rapporto giomagnetico.



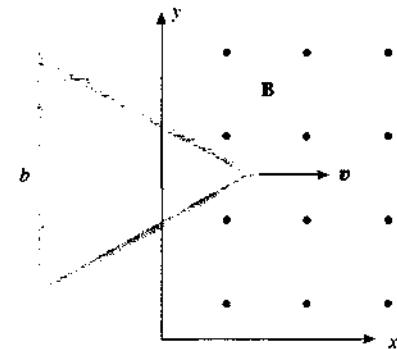
- 10.1** Una sbarretta conduttrice di lunghezza  $b$  si muove con velocità  $v$  costante e ortogonale ad un filo rettilineo indefinito percorso dalla corrente  $i$ . Calcolare la tensione ai capi della sbarretta in funzione della distanza  $r$  dal filo. Ripetere il calcolo quando la sbarretta si muove con velocità costante e parallela al filo e l'estremo più vicino al filo dista da questo  $r$ .



- 10.2** Una spira conduttrice quadrata, di lato  $b = 20 \text{ cm}$ , massa  $m = 4 \text{ g}$ , resistenza  $R = 25 \Omega$ , si muove senza attrito sul piano  $x, y$  con velocità costante  $v_0 = 4 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}$ . Per  $x \geq 0$  esiste un campo magnetico uniforme e costante di valore  $B = 0.5 \text{ T}$  e la spira entra in questa regione all'istante  $t = 0$ ; il verso del campo è indicato in figura. Calcolare la velocità  $v_1$  raggiunta dalla spira dopo  $t_1 = 2.9 \text{ s}$  sapendo che in quell'istante la spira è ancora soltanto parzialmente inserita nel campo. L'energia dissipata nel circuito fino al tempo  $t_1$ , la velocità  $v_2$  con cui la spira si muove dopo essere entrata completamente nel campo magnetico, l'istante  $t_2$  in cui viene raggiunta la velocità  $v_2$ , la carica  $q$  che circola nella spira durante l'intero processo.



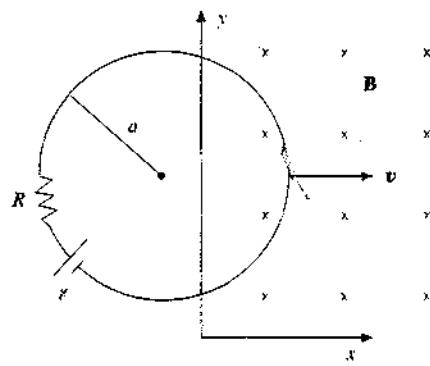
- 10.3** Un circuito a forma di triangolo equilatero di lato  $b = 20 \text{ cm}$ , massa  $m = 10 \text{ g}$  e resistenza  $R = 0.5 \Omega$ , si muove con velocità costante  $v_0 \approx 5 \text{ m/s}$  lungo l'asse  $x$ . Nel semipiano  $x \geq 0$  esiste un campo magnetico  $B = 0.8 \text{ T}$  uniforme e costante, perpendicolare al piano contenente il circuito, mentre per  $x < 0$   $B = 0$ . Calcolare la velocità della spira in funzione della distanza  $x$  percorsa dal vertice dall'istante  $t = 0$  in cui inizia ad entrare nel campo magnetico, la velocità  $v$ , con cui la spira continua il suo



moto una volta entrata completamente nel campo magnetico, la carica  $q$  che percorre il circuito nell'intero processo.

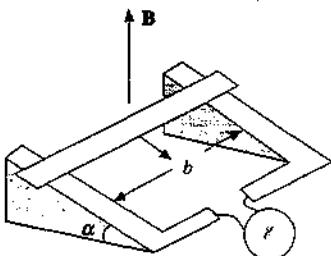
- 10.4** Una spira quadrata di lato  $b = 9 \text{ cm}$ , massa  $m = 5 \text{ g}$  e resistenza  $R = 10^{-3} \Omega$ , si muove con velocità costante  $v_0 = 5 \text{ m/s}$  lungo l'asse  $x$ . All'istante  $t = 0$  il suo lato anteriore comincia ad entrare nella regione  $x \geq 0$  in cui esiste un campo magnetico  $B$ , ortogonale al piano della spira, dipendente da  $x$  secondo la legge  $B(x) = \alpha x$  con  $\alpha = 2 \text{ T/m}$ . Calcolare la forza  $F(x)$  che agisce sulla spira, la velocità  $v(x)$  della spira e in particolare  $v(x = b)$ , la carica  $q$  che circola nella spira.

- 10.5** Una spira circolare di raggio  $a = 20 \text{ cm}$ , resistenza  $R = 20 \Omega$ , alimentata da un generatore di f.e.m.  $\mathcal{E} = 2 \text{ V}$  collegato come in figura, si muove su un piano orizzontale con velocità costante  $v = 20 \text{ m/s}$  nella direzione  $x$ . Ortagonale al piano ed entrante in esso esiste un campo magnetico, uniforme e costante con valore  $B = 0.25 \text{ T}$  per  $x \geq 0$  e nullo per  $x < 0$ . Calcolare il valore della corrente  $i(x)$  che percorre la spira e della forza  $F(x)$  che agisce sulla spira. Nell'ipotesi che la velocità della spira venga sempre mantenuta eguale al valore iniziale calcolare la distanza  $x$  alla quale  $F(x)$  è nulla e la carica che percorre la spira.

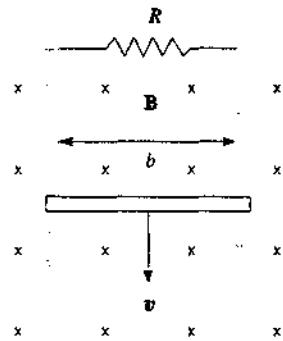


- 10.6** Una sbarra orizzontale di lunghezza  $b = 20 \text{ cm}$ , sezione  $\Sigma$ , densità  $d = 3 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ , resistività  $\rho = 2 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$ , può scivolare senza attrito su due guide parallele, separate dalla distanza  $b$  e inclinate di un angolo  $\alpha = 30^\circ$  rispetto al piano orizzontale. Le due guide, di resistenza trascurabile, sono collegate ad un generatore di f.e.m.  $\mathcal{E}$ . Il sistema è immerso in un campo magnetico uniforme  $B = 0.3 \text{ T}$  diretto secondo la verticale. Calcolare il valore

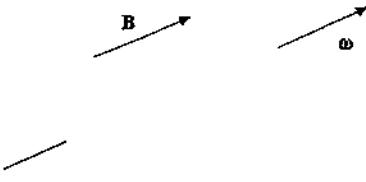
di  $\ell$  affinché la sbarra rimanga ferma, la velocità limite  $v_0$  con cui la sbarra scende se il generatore viene sostituito da un corto circuito, la potenza dissipata nella sbarra quando essa scende con velocità  $v_0$  (per quest'ultima domanda si assuma  $\Sigma = 1 \text{ cm}^2$ ).



- 10.7** Due guide conduttrici parallele, distanti  $b = 20 \text{ cm}$ , sono chiuse ad un estremo da un resistore con  $R = 4 \Omega$ . Lungo le guide può scivolare senza attrito, sotto l'azione del proprio peso, una sbarretta conduttrice di massa  $m = 10^{-2} \text{ kg}$ . Il dispositivo è immerso in un campo magnetico  $B = 1 \text{ T}$  uniforme e costante, ortogonale al piano del circuito. Calcolare come variano nel tempo la velocità  $v(t)$  della sbarretta e la corrente  $i(t)$ , i valori limite  $v_0$  e  $i_0$ , l'energia  $W$  dissipata nel circuito per ogni centimetro percorso dalla sbarretta in queste ultime condizioni.

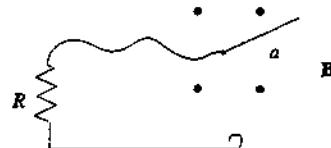


- 10.8** Un cilindro di materiale isolante, di raggio  $R = 5 \text{ cm}$ , lunghezza  $a = 20 \text{ cm}$  e costante dielettrica relativa  $\kappa_r = 3$ , ruota intorno al proprio asse con velocità angolare  $\omega = 10^3 \text{ rad/s}$  ed è immerso in un campo magnetico  $B = 0.5 \text{ T}$ , uniforme e costante, parallelo all'asse. Calcolare la densità di carica di polarizzazione  $\sigma_p$  che si forma sulla superficie del cilindro, la densità di carica di polarizzazione  $\rho_p$  che si forma all'interno e le corrispondenti cariche totali di polarizzazione  $q_\sigma$  e  $q_\rho$ .

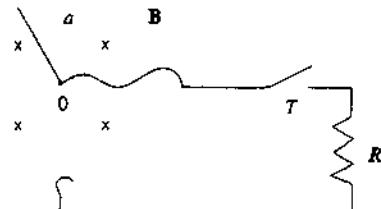


- 10.9** Al centro e al bordo di un disco metallico di raggio  $a = 15 \text{ cm}$  sono collegati due contatti strisciati e il circuito

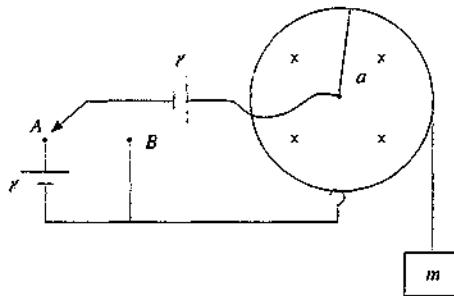
viene chiuso su un resistore; la resistenza totale risulta  $R = 8 \cdot 10^{-2} \Omega$ . Il disco è immerso in un campo magnetico uniforme e costante  $B = 0.03 \text{ T}$  parallelo all'asse. Calcolare il momento  $M$  da applicare al disco per mantenerlo in rotazione ad una frequenza  $\nu = 1800 \text{ giri/minuto}$ , la potenza  $P$  dissipata nel circuito in queste condizioni e la carica  $q$  che passa nel circuito in un minuto.



- 10.10** Un disco conduttore, di raggio  $a = 0.1 \text{ m}$  e momento d'inerzia  $I = 0.5 \cdot 10^{-2} \text{ kgm}^2$  rispetto all'asse ortogonale al disco e passante per il centro, ruota rispetto a tale asse con velocità angolare  $\omega_0$ ; esso è immerso in un campo magnetico  $B$  uniforme e costante parallelo all'asse. Tramite due contatti strisciati al centro e al bordo, un resistore e un interruttore si forma un circuito la cui resistenza, con  $T$  chiuso, è  $R = 9.23 \cdot 10^{-2} \Omega$ . L'interruttore viene chiuso per  $t = 0$  e riaperto all'istante  $t_1 = 20 \text{ s}$ . In questo intervallo di tempo nel circuito viene dissipata l'energia  $W = 75 \text{ J}$  e la velocità angolare si riduce a  $\omega_1 = \omega_0 / 2$ . Calcolare il valore del campo magnetico  $B$ , la velocità angolare iniziale  $\omega_0$ , il numero  $N$  di giri compiuti dal disco nell'intervallo  $t_1$ , la carica totale che passa nel circuito in tale intervallo.



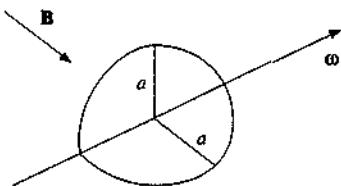
- 10.11** Nel dispositivo in figura il raggio del disco è  $a = 20 \text{ cm}$  e una massa  $m = 10^{-2} \text{ kg}$  è appesa al disco tramite un filo. Il campo magnetico che agisce sul disco è  $B = 0.05 \text{ T}$ . Con il commutatore nella posizione  $A$  il disco è fermo. Quando si passa nella posizione  $B$  dopo un certo tempo il disco ruota con velocità angolare costante  $\omega_0 = 200 \text{ rad/s}$ . Calcolare la f.e.m.  $\mathcal{E}$  dei due generatori, la resi-



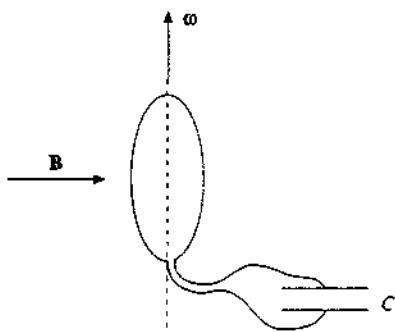
stenza  $R$  del circuito, la carica  $q$  che attraversa il circuito ad ogni giro del disco quando  $\omega$  è costante.

- 10.12** Una bobina quadrata, di lato  $a = 2$  cm e resistenza  $R = 0.1 \Omega$ , disposta con due lati verticali, ruota con velocità angolare costante  $\omega$  attorno all'asse verticale passante per il centro. Essa è immersa in un campo magnetico  $B = 0.6$  T uniforme e costante, ortogonale all'asse di rotazione, ed è alimentata da un generatore di resistenza interna nulla che fornisce la f.e.m.  $\xi = 0.2 + 0.24 \sin \omega t$  V. Si osserva che durante il moto la corrente  $i$  nella bobina resta costante. Calcolare la corrente  $i$  e la velocità angolare  $\omega$ .

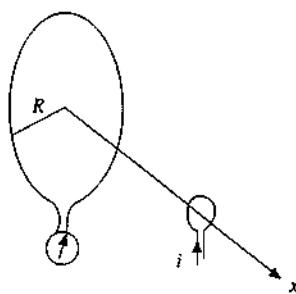
- 10.13** Una bobina è formata da  $N = 20$  spire, le quali sono disposte secondo due semicirconferenze eguali, di raggi  $a = 10$  cm, situate in due piani ortogonali tra loro. Tale bobina ruota con velocità angolare  $\omega = 100$  rad/s attorno all'asse individuato dall'intersezione dei due piani ed è immersa in un campo magnetico  $B = 0.5$  T uniforme e costante, ortogonale all'asse di rotazione. Calcolare la f.e.m.  $\xi$ , il suo valore massimo  $\xi_{\max}$ , la potenza media sviluppata se la resistenza totale della bobina è  $R = 10 \Omega$ .



- 10.14** Una bobina circolare, formata da  $N = 50$  spire con area  $\Sigma = 0.1 \text{ m}^2$ , ruota con velocità angolare costante  $\omega = 80$  rad/s attorno ad un asse coincidente con un diametro; essa è posta in un campo magnetico uniforme e costante  $B = 0.5$  T, ortogonale all'asse di rotazione, ed è opportunamente collegata in serie ad un condensatore di capacità  $C = 2 \mu\text{F}$ . Calcolare la potenza istantanea  $P(t)$ , il momento meccanico istantaneo  $M(t)$  e i valori medi  $P_m$  e  $M_m$ .

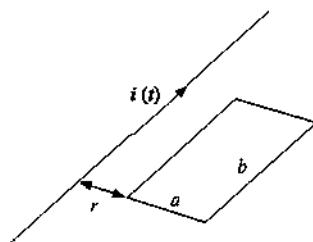


- 10.15** Una bobina circolare compatta, formata da  $N_1 = 3 \cdot 10^3$  spire di raggio  $R = 25$  cm, è collegata ad un misuratore di f.e.m.; una seconda bobina compatta, coassiale alla prima e ad essa parallela, composta da  $N_2 = 100$  spire di raggio  $r = 0.5$  cm, è percorsa dalla corrente  $i = 15$  A e si

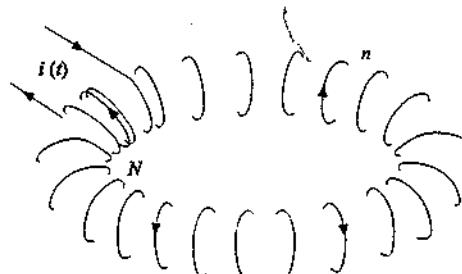


muove lungo l'asse  $x$  con velocità costante. Calcolare il coefficiente di mutua induzione  $M(x)$  in funzione della distanza  $x$  tra i centri e il valore  $\xi(x)$  misurato nella prima bobina quando la seconda ha velocità  $v = 20$  m/s.

- 10.16** Un filo rettilineo indefinito è percorso dalla corrente  $i(t) = i_0 e^{-t/\tau}$ , con  $i_0 = 10$  A e  $\tau = 5$  s, e si trova in un piano in cui c'è una spira rettangolare di lati  $a = 6$  cm,  $b = 12$  cm, con il lato più vicino parallelo al filo alla distanza  $r = 4$  cm. Calcolare la f.e.m. indotta nella spira e la carica  $q$  che percorre la spira nell'intervallo di tempo da zero a  $+\infty$ , se essa ha una resistenza  $R = 2 \Omega$ .

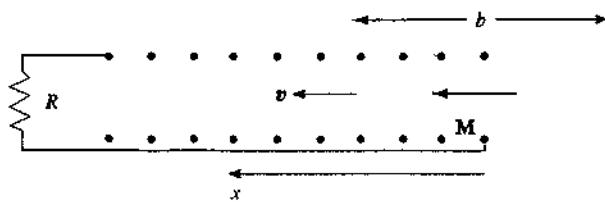


- 10.17** Una bobina formata da  $N = 5$  spire è concatenata ad un solenoide toroidale di sezione  $\Sigma = 10 \text{ cm}^2$  e con densità di spire  $n = 10$  spire/cm, avvolto su un nucleo di ferro di permeabilità magnetica relativa  $\kappa_m = 10^3$ . Se la corrente nella bobina varia secondo la legge  $i(t) = i_0 - \alpha t$ , con  $i_0 = 10$  A e  $\alpha = 10^{-2}$  A/s, calcolare la f.e.m. indotta nel solenoide toroidale, la corrente indotta  $I$  se la resistenza del solenoide è  $R = 10 \Omega$ , la carica indotta nell'intervallo di tempo in cui la corrente varia da  $i_0$  a zero.

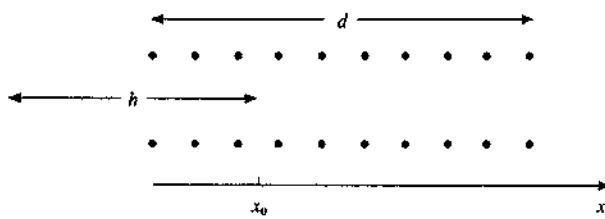


- 10.18** Un magnete permanente, di raggio  $r_1 = 5$  mm e lunghezza  $b = 20$  cm, magnetizzato uniformemente con  $M = 5 \cdot 10^5$  A/m, si muove alla velocità  $v = 10$  m/s, costante durante tutto il processo, lungo l'asse di un solenoide molto lungo, con  $n = 10$  spire/cm e resistenza  $R = 5 \Omega$ . Calcolare l'intensità di corrente indotta nel solenoide, la

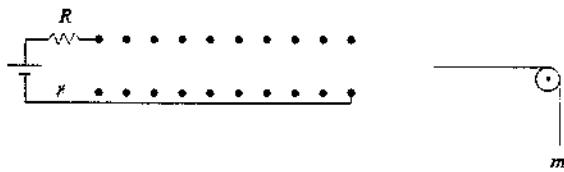
carica totale indotta dal momento in cui il magnete inizia ad entrare al momento in cui è completamente all'interno del solenoide, il lavoro speso nello stesso intervallo di tempo.



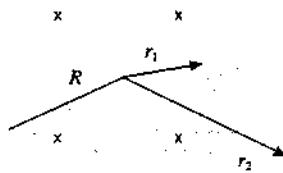
- 10.19 Un solenoide di lunghezza  $d = 80$  cm e sezione  $\Sigma = 4 \text{ cm}^2$ , con  $n = 20$  spire/cm, è alimentato da un generatore che mantiene la corrente costantemente al valore  $i = 10$  A. Una sbarretta di materiale ferromagnetico, con densità  $\rho = 8 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ , permeabilità magnetica relativa  $\kappa_m = 500$ , lunghezza  $h = 20$  cm, sezione eguale a quella del solenoide, è trattenuata dall'esterno con un tratto  $x_0 = 5$  cm nell'interno del solenoide. All'istante  $t = 0$  la sbarretta viene lasciata libera e inizia a entrare nel solenoide; trascorso un tempo  $t_0$  essa ritorna nella posizione che aveva all'istante  $t = 0$ . Calcolare la forza  $F$  che agisce sulla sbarretta durante il moto e il tempo  $t_0$ .



- 10.20 Un solenoide molto lungo, di sezione  $\Sigma = 10 \text{ cm}^2$  con  $n = 10$  spire/cm, è alimentato da un generatore di f.e.m.  $\mathcal{E}$ ; la resistenza complessiva del circuito è  $R = 15 \Omega$ . Parzialmente all'interno si trova una sbarra di ferro ( $\kappa_m = 10^3$ ) con la stessa sezione. La sbarra è collegata tramite un filo e una carrucola con un corpo di massa  $m = 6.4 \text{ kg}$  e si osserva che essa si muove verso l'esterno con velocità costante  $v = 10 \text{ m/s}$ . Calcolare il valore della corrente  $i$  che percorre il solenoide e la potenza  $P$  erogata dal generatore.

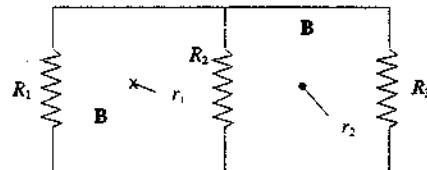


- 10.21 Un campo magnetico variabile nel tempo con la legge  $B = 0.05 t^2 - 0.2 t$  T è definito in una regione cilindrica di raggio  $R = 5$  cm; in tale regione il campo è uniforme e parallelo all'asse (nel disegno è entrante). Calcolare la forza  $F_1$  che agisce su un elettrone a distanza  $r_1 = 0.04$  m dal centro all'istante  $t_1 = 4$  s, la forza  $F_2$  che agisce nello stesso istante su un elettrone a distanza  $r_2 = 0.07$  m dal

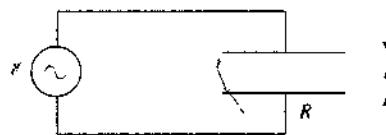


centro, l'istante in cui a qualsiasi distanza la forza è nulla.

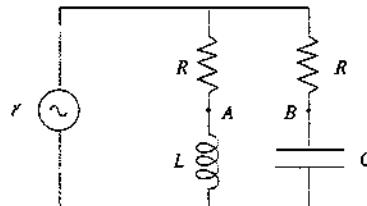
- 10.22 Nel circuito in figura le due maglie sono quadrate e i due solenoidi, mostrati in sezione in quanto perpendicolari al disegno, hanno raggi  $r_1 = 0.1$  m e  $r_2 = 0.15$  m; gli assi dei solenoidi passano per il centro dei quadrati. Il campo magnetico dei solenoidi, col verso indicato, cresce linearmente nel tempo con derivata  $\alpha = 10 \text{ T/s}$ . I valori delle resistenze sono  $R_1 = 6 \Omega$ ,  $R_2 = 3 \Omega$ ,  $R_3 = 5 \Omega$ . Calcolare le correnti che circolano nelle resistenze, le d.d.p. ai capi delle singole resistenze, la potenza totale spesa nel circuito.



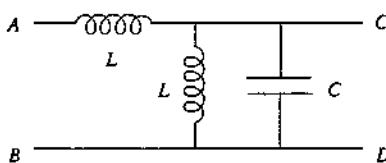
- 10.23 Le due armature piane circolari di un condensatore hanno area  $\Sigma = 0.1 \text{ m}^2$ , distano  $d$  e sono collegate ad un generatore di f.e.m.  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin \omega t$  con  $\mathcal{E}_0 = 200 \text{ V}$ ,  $\omega = 100 \text{ rad/s}$ . La corrente massima di conduzione nei fili è  $i_0 = 8.86 \mu\text{A}$ . Calcolare i valori massimi della corrente di spostamento e della densità di corrente di spostamento, i valori massimi di  $d\Phi(\mathbf{D})/dt$  e  $d\Phi(\mathbf{E})/dt$ , la distanza  $d$  tra le armature, il valore massimo del campo magnetico in funzione della distanza  $r$  dal centro del condensatore.



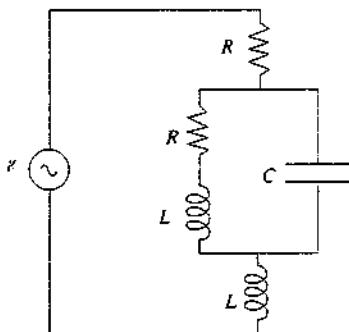
- 11.1 Nel circuito in figura il generatore fornisce la f.e.m.  $\mathcal{E} = 311 \cos 314 t$  V, le resistenze valgono  $R = 100 \Omega$ ,  $L = 0.50 \text{ H}$ ,  $C = 10^{-4} \text{ F}$ . Calcolare le correnti nei due rami, la corrente totale e la d.d.p.  $V_A - V_B$ .



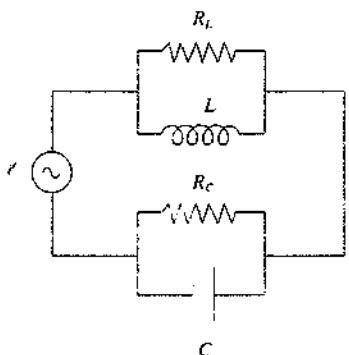
- 11.2 Nel circuito in figura calcolare per quale valore di  $\omega$  si ha che  $V_C - V_D = V_A - V_B$ .



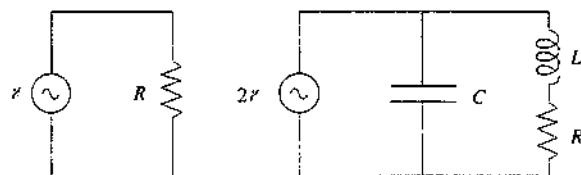
- 11.3 Dimostrare che per il circuito in figura la pulsazione di risonanza è  $\omega = 1/\sqrt{LC}$  e che in risonanza l'impedenza del circuito è  $R + L/CR$ .



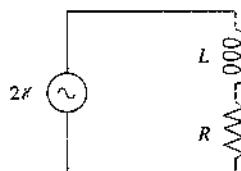
- 11.4 Determinare per il circuito in figura l'espressione della pulsazione di risonanza e calcolarla in particolare per  $R_L = R_C = 1 \Omega$ ,  $L = 10^{-3} \text{ H}$ ,  $C = 10^{-9} \text{ F}$ . Se  $R_L$  e  $R_C$ , pur restando eguali, assumono un qualsiasi valore diverso da 1 il risultato cambia?



- 11.5 Un resistore con  $R = 100 \Omega$  è connesso ad un generatore di f.e.m. alternata  $\zeta = \zeta_0 \cos \omega t$  con  $\omega = 314 \text{ rad/s}$ . Successivamente esso è connesso ad un generatore con  $2\zeta = 2\zeta_0 \cos \omega t$  secondo lo schema della figura. Si vuole che anche in questo secondo collegamento la corrente erogata dal generatore sia in fase con la f.e.m. e che la d.d.p. ai capi di  $R$  valga  $\zeta$ . Calcolare i valori di  $L$  e  $C$ .



- 11.6 Nel circuito del problema 11.5, con  $R = 100 \Omega$ ,  $L = 0.55 \text{ H}$ ,  $C = 13.8 \mu\text{F}$ ,  $2\zeta = 311 \text{ V}$ , si supponga di connettere prima l'induttanza e poi la capacità. Calcolare, quando è connessa solo l'induttanza, i valori della potenza reale, della potenza reattiva e della potenza apparente. Ripetere il calcolo per il circuito completo.



# Guida alla risoluzione dei problemi di Elettromagnetismo.

## Risultati numerici

$$1.1 \quad \mathbf{F} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{4a^2} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{4}\right) \mathbf{u}_y - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{4a^2} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right) \mathbf{u}_z$$

$$\mathbf{E}(x) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4qa}{(x^2 + 2a^2)^{3/2}} \mathbf{u}_z, \quad V(x) = 0 \quad \text{su tutto l'asse.}$$

$$\text{Per } x \gg a \quad \mathbf{E}(x) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4qa}{r^3} \mathbf{u}_z = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{u}_z$$

$$1.2 \quad \mathbf{F} = 1.22 \cdot 10^{-4} (\mathbf{u}_y + \mathbf{u}_z) \text{ N}$$

$$\mathbf{E}(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4qx}{(x^2 + 2a^2)^{3/2}} \mathbf{u}_x, \quad V(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4q}{(x^2 + 2a^2)^{1/2}}$$

$$E_k = 3.45 \cdot 10^{-16} \text{ J} = 2158 \text{ eV.}$$

$$1.3 \quad U_c = \frac{1}{2} \sum_i \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{2q^2}{4\pi\epsilon_0 a} \left(2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 4.87 \cdot 10^{-5} \text{ J}$$

$$W = 1.97 \cdot 10^{-5} \text{ J.}$$

$$1.4 \quad U_e = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sqrt{2}q^2}{a} \text{ da cui } q = 2 \cdot 10^{-8} \text{ C. Il lavoro svolto contro le forze del campo è } W = -q^* [V(P_1) - V(P_2)] = -q^* V(P_1) \text{ in quanto } V(P_2) = 0, V(P_1) = -2823 \text{ V e } q^* = 10^{-10} \text{ C.}$$

$$1.5 \quad W = \frac{4\sqrt{2}q^2}{4\pi\epsilon_0 a} = 10.15 \cdot 10^{-7} \text{ J.}$$

$$1.6 \quad E = \frac{\sqrt{2}q}{4\pi\epsilon_0 d(d+l)}, \quad E(P) = 106.1 \text{ V/m.}$$

1.7 Essendo  $d \ll R$  calcoliamo la forza come se i fili fossero rettilinei:

$$dF_{12} = E_1 \lambda_2 ds_2 = \frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_0 d} \lambda_2 ds_2,$$

$$F_{12} = \frac{\lambda_1 \lambda_2 R}{\epsilon_0 d} = \frac{q_1 q_2}{4\pi^2 \epsilon_0 d R} = 4.5 \cdot 10^{-3} \text{ N.}$$

$$\text{Il lavoro è } W = 6.9 \cdot 10^{-6} \text{ J.}$$

1.8 Il campo sull'asse dell'anello, per  $(x/R)^2 \ll 1$ , è  $E(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qx}{R^3}$  ;

la forza agente su  $q_0$  è attrattiva e lineare con la distanza per cui il moto è armonico, di equazione

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{R^3} x = 0$$

La pulsazione è  $\omega = \sqrt{qq_0 / 4\pi\epsilon_0 m R^3}$  e il periodo è  $T = 2\pi/\omega = 66.2$  s. L'energia cinetica vale  $E_k = 1.13 \cdot 10^{-10}$  J.

2.1 La densità di carica vale  $\sigma = q / \pi(R_2^2 - R_1^2) = 8.86 \cdot 10^{-8}$  C/m<sup>2</sup>. Dall'esempio 2.9,

$$V(x) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ \sqrt{x^2 + R_2^2} - \sqrt{x^2 + R_1^2} \right] ,$$

$$\mathbf{E}(x) = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\sqrt{x^2 + R_1^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + R_2^2}} \right] \mathbf{u}_x .$$

$E_k = 107.2$  eV. Per il doppolo :

$$F = p_0 \left( \frac{\partial E}{\partial x} \right)_{x=0} = p_0 \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = 8.33 \cdot 10^{-7}$$
 N.

Infine, con  $x = 0$        $E(x) = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) ,$

$$F(x) = q_0 E(x) = -m \omega^2 x \text{ e } v = \omega / 2\pi = \sqrt{\sigma(R_2 - R_1) q_0 / 2m\epsilon_0 R_1 R_2} .$$

2.2  $\mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{\lambda_0 \sin\theta R d\theta}{R^2} \cos\theta \mathbf{u}_x - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{\lambda_0 \sin\theta R d\theta}{R^2} \sin\theta \mathbf{u}_y$  se  $\theta \mathbf{u}_y = -\frac{\lambda_0}{4\epsilon_0 R} \mathbf{u}_y .$

Dividendo l'anello in strisce parallele all'asse y, ciascuna striscia equivale a un doppolo di momento  $d\mathbf{p} = \lambda R d\theta \cdot 2R \sin\theta$  e integrando tra 0 e  $\pi$ ,  $\mathbf{p} = \lambda_0 \pi R^2 \mathbf{u}_y$ . Detta  $q$  la carica del semianello positivo,  $q = \int_0^\pi \lambda_0 \sin\theta R d\theta = 2R \lambda_0$ , per cui  $\mathbf{p} = \frac{1}{2} q \pi R \mathbf{u}_y$ .

A grande distanza lungo l'asse x  $\mathbf{E} = -\mathbf{p} / 4\pi\epsilon_0 x^3$  e lungo l'asse y  $\mathbf{E} = 2\mathbf{p} / 4\pi\epsilon_0 y^3$ .

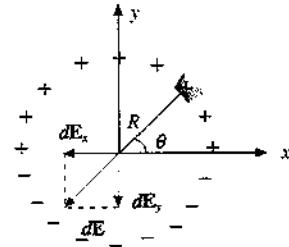
2.3  $\mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$  con  $\mathbf{p} = \lambda_0 \pi R^2 \mathbf{u}_y$  (vedi problema 2.2). Il momento delle forze è diretto lungo l'asse z e vale in modulo  $\lambda_0 \pi R^2 E \sin 60^\circ = 2.72 \cdot 10^{-6}$  Nm.

2.4 Ragionando come nel problema 2.1 e ricordando l'esempio 1.8,

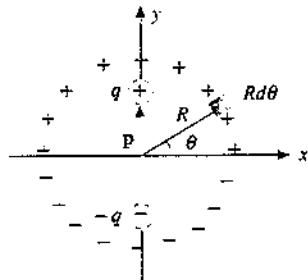
$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{piano}} - \mathbf{E}_{\text{doppolo}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \mathbf{u}_x . \quad E(P) = \sigma / 2\sqrt{2}\epsilon_0 .$$

Dalla condizione di equilibrio:  $q = 2.46 \cdot 10^{-7}$  C.  $W = 5.7 \cdot 10^{-4}$  J.

Per il doppolo,  $dW = F dx = p \frac{dE}{dx} dx = p dE$ ,  $W = 4 \cdot 10^{-6}$  J.



Soluzione 2.2



Soluzione 2.3

2.5 Detto  $\mathbf{u}$ , il versore di OA,

$$\mathbf{E} = \left( \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \right) \mathbf{u}_r, \quad F = p \frac{dE}{dr} = -2p q / 4\pi\epsilon_0 r^3,$$

cioè rivolta verso O; risulta  $q = 10^{-9}$  C. La d.d.p. vista dall'elettrone è

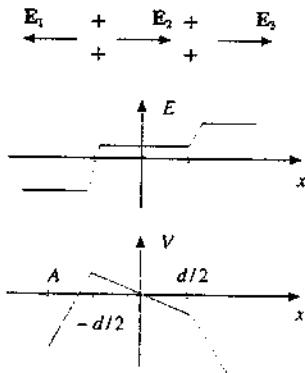
$$\left( \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \frac{d}{4}} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d} \right) - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{3}{4} d = 52.5 \text{ V per cui } v_B = 5.24 \cdot 10^6 \text{ m/s}.$$

2.6 All'esterno  $\mathbf{E}(P_1) = \mathbf{E}(P_4) = \left( -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{2\sigma}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \right) \mathbf{u}_x = 0$ , nelle intercapedini

$$\mathbf{E}(P_2) = \left( \frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{2\sigma}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \right) \mathbf{u}_x = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{u}_x = 10^4 \mathbf{u}_x \frac{\text{V}}{\text{m}},$$

$$\mathbf{E}(P_3) = -\mathbf{E}(P_2).$$

## 2.7 Nelle tre regioni abbiamo



Soluzione 2.7

$$x < -\frac{d}{2} \quad \mathbf{E}_1 = -\frac{3\sigma_2}{2\epsilon_0} \mathbf{u}_x = -1.5 \cdot 10^4 \mathbf{u}_x \frac{\text{V}}{\text{m}}, \quad V_1(x) = \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} (3x + 2d),$$

$$-\frac{d}{2} < x < \frac{d}{2} \quad \mathbf{E}_2 = \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} \mathbf{u}_x = 0.5 \cdot 10^4 \mathbf{u}_x \frac{\text{V}}{\text{m}}, \quad V_2(x) = -\frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} x,$$

$$x > \frac{d}{2} \quad \mathbf{E}_3 = \frac{3\sigma_2}{2\epsilon_0} \mathbf{u}_x = 1.5 \cdot 10^4 \mathbf{u}_x \frac{\text{V}}{\text{m}}, \quad V_3(x) = \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} (-3x + d),$$

$\Delta V = V_1(-d/2) - V_1(A) \approx 3\sigma_2 d / 4\epsilon_0 = 1500 \text{ V}$ ,  $E_{k,\min} = 1.5 \text{ KeV}$ . L'elettrone si ferma nel punto dell'asse x positivo tale che  $V(x) = V(A)$  ovvero

$$\frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} (-3x + d) = -\frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} d, \quad \text{per cui } x = 2d/3 \approx 13.3 \text{ cm}.$$

## 2.8 Le equazioni del moto sono

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = q E_x = -q \frac{\partial V_0}{\partial x} = -2q V_0 x,$$

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = q E_y = -q \frac{\partial V}{\partial x} = -2q V_0 y;$$

tenuto conto delle condizioni iniziali le soluzioni si scrivono  $x = x_0 \cos \omega t$ ,  $y = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$

senza con  $\omega = \sqrt{2qV_0/m} = 10^7 \text{ rad/s}$ . Poiché  $x_0 = v_0/\omega$  la traiettoria è una circonferenza di raggio  $x_0$ .

3.1 Applicando la legge di Gauss, per  $0 \leq x \leq \frac{d}{2}$   $\mathbf{E}(x) = \frac{\rho x}{\epsilon_0} \mathbf{u}_x$ .

per  $x \geq \frac{d}{2}$   $\mathbf{E}(x) = \frac{\rho d}{2\epsilon_0} \mathbf{u}_x$ .

$$V(0) - V(d/2) = \frac{\rho d^2}{8\epsilon_0} , \quad V(d/2) - V(h) = \frac{\rho dh}{2\epsilon_0} ,$$

$$\Delta V = 0.4 \text{ V}, \quad W = 0.6 \cdot 10^{-8} \text{ J}.$$

3.2 All'interno, per  $r \leq R$ ,  $4\pi r^2 E_{\text{int}} = q(r)/\epsilon_0$  con  $q(r) = \int_0^r \frac{c}{r} 4\pi r^2 dr = 2\pi c r^2$ ,

$E_{\text{int}} = c/2\epsilon_0$ , costante. All'esterno, per  $r \geq R$ ,  $E_{\text{ext}} = q/4\pi\epsilon_0 r^2$  con  $q = 2\pi c R^2$  per cui

$$E_{\text{ext}} = cR^2/2\epsilon_0 r^2 . \quad V(r \geq R) = \int_0^\infty E_{\text{ext}} dr = cR^2/2\epsilon_0 r, \text{ in particolare } V(R) = cR/2\epsilon_0 .$$

Per  $r \leq R$   $V(r) - V(R) = \int_r^R E_{\text{int}} dr = \frac{c}{2\epsilon_0} (R-r)$ ,  $V(r) = \frac{c}{2\epsilon_0} (2R-r)$ ; al centro

$$V(0) = \frac{cR}{\epsilon_0} .$$

3.3 Per  $r \leq R_1$ ,  $E = 0$ ; per  $R_1 \leq r \leq R_2$ ,  $4\pi r^2 E_{\text{int}} = q(r)/\epsilon_0$  con  $q(r) = \rho \frac{4}{3} \pi (r^3 - R_1^3)$ ,

$$E_{\text{int}} = \rho (r^3 - R_1^3)/3\epsilon_0 r^2 ; \text{ per } r \geq R_2 \quad q = \rho \frac{4}{3} \pi (R_2^3 - R_1^3),$$

$$E_{\text{ext}} = q/4\pi\epsilon_0 r^2 = \rho (R_2^3 - R_1^3)/3\epsilon_0 r^2 .$$

$$\Delta V = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left[ \frac{R_2^3 - R_1^3}{2} - R_1^3 \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \right] = 100 \text{ V} ,$$

$$E_k = 100 \text{ eV} = 1.6 \cdot 10^{-17} \text{ J} , \quad v = 5.93 \cdot 10^6 \text{ m/s} , \quad t = 33.7 \text{ ns}.$$

3.4 Per  $r \leq R_1$ ,  $E = 0$ ; per  $R_1 \leq r \leq R_2$  la carica per unità di lunghezza è  $q(r) = \pi\rho(r^2 - R_1^2)$ , mentre per  $r \geq R$   $q = \pi\rho(R_2^2 - R_1^2)$ , quindi  $2\pi r E_{\text{int}} = q(r)/\epsilon_0$ ,

$$E_{\text{int}} = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \frac{r^2 - R_1^2}{r} , \quad 2\pi r E_{\text{ext}} = q/\epsilon_0 , \quad E_{\text{ext}} = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \frac{R_2^2 - R_1^2}{r} .$$

$$\Delta V = \int_{R_1}^{R_2} E_{\text{int}} dr = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left[ \frac{R_2^3 - R_1^3}{2} - R_1^3 \ln \frac{R_2}{R_1} \right] = 80.7 \text{ V},$$

$$W = 80.7 \text{ eV} = 1.29 \cdot 10^{-17} \text{ J}.$$

3.5 La carica per unità di lunghezza fino al raggio  $r \leq R$  è

$$q(r) = 2\pi \rho_0 r^2 \left( \frac{a}{2} - \frac{b}{3} r \right) ,$$

per cui  $E_{\text{int}} = q(r)/2\pi\epsilon_0 r = \frac{\rho_0 r}{2\epsilon_0} \left( a - \frac{2}{3} b r \right)$ ,

mentre all'esterno  $E_{\text{ext}} = q/2\pi\epsilon_0 r = \frac{\rho_0 R^2}{2\epsilon_0 r} \left( a - \frac{2}{3} b R \right)$ .

3.6 Nei tre casi citati applicando la legge di Gauss si trova

$$\mathbf{E} = \gamma \rho \frac{r}{\epsilon_0} \mathbf{u}, \text{ con } \gamma = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \text{ rispettivamente per la distribuzione piana, cilindrica,}$$

sferica. La forza sull'elettrone è  $-e\mathbf{E} = -e\gamma\rho\frac{r}{\epsilon_0}\mathbf{u}_r$ , centrale di tipo elastico e pertanto, visto che l'elettrone è inizialmente in quiete, il moto è armonico con la pulsazione data nel testo.

- 3.7 Campo del filo  $\mathbf{E}_\lambda = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\mathbf{u}_r$ , campo della superficie nullo per  $r \leq R_0$  e pari a

$$\mathbf{E}_\sigma = \frac{\sigma R_0}{\epsilon_0 r}\mathbf{u}_r \text{ per } r \geq R_0.$$

$$\Delta V = \int_{R_1}^{R_2} \mathbf{E}_\lambda \cdot d\mathbf{r} + \int_{R_0}^{R_2} \mathbf{E}_\sigma \cdot d\mathbf{r} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{\sigma R_0}{\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_0} = 0,$$

$$\frac{\sigma}{\lambda} = 15.9 \text{ m}^{-1}.$$

- 3.8 Il campo elettrostatico nella cavità si può pensare come somma del campo di un cilindro pieno di raggio  $R$ , carico positivamente, e del campo di un cilindro avente le dimensioni del foro, carico negativamente. A distanza  $r$  dal centro lungo la congiungente i due assi  $\mathbf{E} = \frac{\rho r}{2\epsilon_0}\mathbf{u}_r - \frac{\rho}{2\epsilon_0}(r-b)\mathbf{u}_r = \frac{\rho b}{2\epsilon_0}\mathbf{u}_r$ , indipendente da  $r$ .

$$\text{Analogamente per la sfera si trova } \mathbf{E} = \frac{\rho b}{3\epsilon_0}\mathbf{u}_r.$$

- 3.9 Si calcola il campo elettrostatico  $\mathbf{E} \left( -\frac{\partial V}{\partial x}, -\frac{\partial V}{\partial y} \right)$  e si verifica che

$$\nabla \times \mathbf{E} = \left( \frac{\partial E_y}{\partial y} - \frac{\partial E_x}{\partial x} \right) \mathbf{u}_z = 0. \text{ Risulta inoltre } \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0 \text{ e quindi}$$

$\rho(x, y) = 0$ . Si vede anche che la funzione proposta è soluzione dell'equazione di Laplace.

$$4.1 \quad V_1(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1}{R_1} + \frac{q_2(x)}{x} \right), \quad V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_2(x)}{R_2} + \frac{q_1}{x} \right) \text{ da cui}$$

$$q_2(x) = 4\pi\epsilon_0 R_2 V_2 - \frac{R_2 q_1}{x}, \quad V_1(x) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{R_2}{x^2} \right) + \frac{R_2 V_2}{x},$$

$$F(x) = \frac{q_1 q_2(x)}{4\pi\epsilon_0 x^2} = \frac{R_2 q_1}{4\pi\epsilon_0 x^2} \left( 4\pi\epsilon_0 V_2 - \frac{q_1}{x} \right).$$

- 4.2 Dove c'è la sferetta  $V_{\text{disco}} = 9 \cdot 10^{-3} \text{ V}$  e inoltre  $V_i = q_i / 4\pi\epsilon_0 r$ , imponendo  $V_{\text{disco}} + V_i = 0$  risulta  $q_i = -10^{-15} \text{ C}$ .

- 4.3  $E_{k,\text{min}} = 2 \text{ KeV}$ ,  $v_c = 2.65 \cdot 10^7 \text{ m/s}$ ,  $t_1 = d/v_c = 1.87 \cdot 10^{-8} \text{ s}$ ,  $t_2 = 2l/v_c = 1.51 \cdot 10^{-8} \text{ s}$ ,  $t = t_1 + t_2 = 3.38 \cdot 10^{-8} \text{ s}$ .

- 4.4 Per l'azione di schermo elettrostatico  $q_0$  esercita una forza solo sul foglio esterno:  $F = 10^{-9} \text{ N}$ .  $V_A - V_B = 150 \text{ V}$ ,  $W = 1.5 \cdot 10^{-8} \text{ J}$ .

- 4.5  $q_1 = q_3 = q_5 = q = 10^{-10} \text{ C}$ ,  $q_2 = q_4 = -q = -10^{-10} \text{ C}$ ,  $E = q / 4\pi\epsilon_0 r^2$  nelle zone A, B, C (nelle altre è nullo).

$$U_e = U_A + U_B + U_C = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4} \right) + \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R_5} = 3.51 \cdot 10^{-9} \text{ J}.$$

Se si mettono in contatto le superficie 1 e 2, il campo si annulla nella zona A e si annulla anche  $U_A$ ,  $\Delta U_e = U_A = 2.25 \cdot 10^{-9}$  J, negativa; nelle zone esterne non succede nulla, per le proprietà di schermo. Se si mettono in contatto le superficie 3 e 4, il campo si annulla nella zona B,  $U_B = 0$ ,  $\Delta U_e = -0.36 \cdot 10^{-9}$  J, all'interno e all'esterno non avviene nulla. Infine se si mette a terra la superficie 5, il campo all'esterno è nullo,  $U_C = 0$ ,  $\Delta U_e = -0.90 \cdot 10^{-9}$  J, all'interno non cambia nulla.

$$4.6 \quad V_C = V_A + \frac{q_1}{C_1} , \quad V_D = V_A + \frac{q_3}{C_3} , \quad V_B = V_C + \frac{q_2}{C_2} , \quad V_B = V_D + \frac{q_4}{C_4} .$$

All'equilibrio  $\frac{q_1}{C_1} = \frac{q_3}{C_3}$ ,  $\frac{q_2}{C_2} = \frac{q_4}{C_4}$ ; inoltre le due capacità  $C_1$  e  $C_2$  risultano in serie per cui  $q_1 = q_2$  e analogamente  $q_3 = q_4$ : segue  $C_1 / C_2 = C_3 / C_4$ .

$$4.7 \quad C_{eq} = C_1 + \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3} = 3.33 \mu F , \quad V_1 = V , \quad q_1 = C_1 V = 2 \cdot 10^{-4} C .$$

La carica totale è  $q = C_{eq} V = 3.33 \cdot 10^{-4} C$  e  $q_2 = q_3 = q - q_1 = 1.33 \cdot 10^{-4} C$ .  $V_2 = q_2 / C_2 = 66.7$  V,  $V_3 = q_3 / C_3 = 33.3$  V.

$$U_e = \frac{1}{2} C_{eq} V^2 = 1.67 \cdot 10^{-2} J .$$

$$4.8 \quad q_1 = 1.5 \cdot 10^{-3} C , \quad q_2 = 1.0 \cdot 10^{-3} C , \quad q = q_1 + q_2 = 2.5 \cdot 10^{-3} C , \\ U_{in} = 0.350 J . \text{ Alla fine } V_{fin} = q / (C_1 + C_2 + C_3) = 250 V , \quad q'_1 = 1.25 \cdot 10^{-3} C , \\ q'_2 = 1.00 \cdot 10^{-3} C , \quad q'_3 = 0.25 \cdot 10^{-3} C , \quad U_{fin} = 0.313 J , \quad \Delta U = -0.037 J .$$

$$4.9 \quad \frac{1}{C} = \frac{x_1}{\epsilon_0 \Sigma} + \frac{x_2}{\epsilon_0 \Sigma} = \frac{h-x}{\epsilon_0 \Sigma} , \quad C = \frac{\epsilon_0 \Sigma}{h-x} , \text{ mentre } C_0 = \frac{\epsilon_0 \Sigma}{h} \text{ e quindi } C = C_0 \frac{h}{h-x} \\ = 1 \mu F . \text{ La carica iniziale è } q_0 = 0.6 \cdot 10^{-3} C \text{ e } U_{in} = 0.30 J ; \text{ a carica costante } U_{fin} = 0.18 J , \Delta U = -0.12 J . \text{ La diminuzione di energia elettrostatica corrisponde al lavoro speso per attirare la lastra. Se resta costante il potenziale al valore } V_0 , \quad q_{fin} = 10^{-3} C , \\ U_{fin} = 0.5 J , \Delta U = 0.20 J . \text{ Il lavoro compiuto dal generatore è } W_{gen} = 0.40 J : \text{ la metà va in aumento di energia elettrostatica e la restante metà in lavoro per attirare la lastra.}$$

$$4.10 \quad \text{Equilibrio delle forze } \frac{1}{2} \epsilon_0 E_1^2 \Sigma = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_2^2 \Sigma + mg \text{ con } E_1 = 4V/d \text{ e } E_2 = 4V/3d :$$

$$V = \frac{3}{8} d \sqrt{\frac{mg}{\epsilon_0 \Sigma}} = 748 \text{ V.}$$

Capacità iniziale  $C_{in} = 788 \text{ pF}$ ,  $q_{in} = 5.89 \cdot 10^{-7} \text{ C}$ ,  $U_{in} = 2.20 \cdot 10^{-4} \text{ J}$ .

Capacità finale  $C_{fin} = 591 \text{ pF}$ .

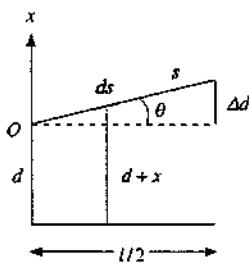
- *Potenziale costante*:  $U_{fin} = 1.65 \cdot 10^{-4} \text{ J}$ ,  $\Delta U_e = -0.55 \cdot 10^{-4} \text{ J} = W$   
(si verifichi che  $W_{gen} = 2 \Delta U_e$ )

- *Carica costante*:  $U_{fin} = 2.93 \cdot 10^{-4} \text{ J}$ ,  $\Delta U_e = 0.73 \cdot 10^{-4} \text{ J} = -W$ .

$$4.11 \quad dC = \frac{\epsilon_0 l ds}{d+x} , \text{ con } s \sin \theta = x , \quad \sin \theta \approx \tan \theta = \frac{2\Delta d}{l} , \quad ds = \frac{dx}{\sin \theta} = \frac{l}{2} \frac{dx}{\Delta d} ;$$

$$dC = \frac{\epsilon_0 l^2}{2\Delta d} \frac{dx}{d+x} ; \text{ considerando tutti i condensatori elementari in parallelo e}$$

integrandolo,

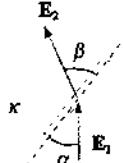


$$C = \int_{-\Delta d}^{+\Delta d} dC = \frac{C_0}{2} \frac{d}{\Delta d} \ln \frac{1 + \frac{\Delta d}{d}}{1 - \frac{\Delta d}{d}}, \text{ con } C_0 = \frac{\epsilon_0 l^2}{d}$$

$\Delta U_e = \frac{q^2}{2C} - \frac{q^2}{2C_0} = \frac{q^2}{2C} \frac{\Delta C}{C_0} = 1.35 \cdot 10^{-4} \text{ J, pari al lavoro compiuto per allineare le armature.}$

### Soluzione 4.11

$$4.12 p = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left( \frac{q}{4\pi \epsilon_0 R_2^2} \right)^2 = 1.5 \cdot 10^{-11} \text{ Pa}, \quad W = 2.57 \cdot 10^{-11} \text{ J.}$$



### Soluzione 5.1

$$\sigma_2 = \epsilon_0 \kappa_2 E = 1.77 \cdot 10^{-5} \text{ C/m}^2, \quad \sigma_{1p} = \frac{\kappa_1 - 1}{\kappa_1} \sigma_1 = 3.54 \cdot 10^{-5} \text{ C/m}^2,$$

$$\sigma_{2p} = \frac{\kappa_2 - 1}{\kappa_2} \sigma_2 = 8.86 \cdot 10^{-6} \text{ C/m}^2, \quad W = 1.24 \cdot 10^{-3} \text{ J.}$$

5.3  $C_{in} = 333.3 \text{ pF}, \quad q_{in} = 1.33 \cdot 10^{-7} \text{ C};$  dopo l'inserzione  $C'_1 \approx \kappa C_1$  e  $C_{fin} = 666.7 \text{ pF},$   $q_{fin} = 2.67 \cdot 10^{-7} \text{ C}, \quad \Delta q_2 = 1.34 \cdot 10^{-7} \text{ C}, \quad V'_1 = q_{fin} / C'_1 = 133 \text{ V}$  mentre  $V_1 = q_{in} / C_1 = 266 \text{ V}, \quad \Delta V_1 = -133 \text{ V}; \quad W_{gen} = V \Delta q = V (q_{fin} - q_{in}) = 5.36 \cdot 10^{-5} \text{ J.}$

$$q_p = \frac{\kappa - 1}{\kappa} q_{fin} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ C.}$$

5.4 Inizialmente  $q_1 = 8 \cdot 10^{-8} \text{ C}, \quad q_2 = 40 \cdot 10^{-8} \text{ C}, \quad q = 48 \cdot 10^{-8} \text{ C}, \quad C = 1.2 \cdot 10^{-9} \text{ F},$   $U_e = 9.60 \cdot 10^{-5} \text{ J.}$  Dopo l'inserzione  $C'_1 = 1.6 \cdot 10^{-8} \text{ F}, \quad C' = 1.7 \cdot 10^{-8} \text{ F}, \quad V = 28.2 \text{ V},$   $q'_1 = 45.2 \cdot 10^{-8} \text{ C}, \quad \Delta q_1 = 37.2 \cdot 10^{-8} \text{ C}, \quad \Delta V_2 = \Delta V = -371.8 \text{ V}, \quad U'_e = 0.68 \cdot 10^{-5} \text{ J},$   $\Delta U_e = -8.92 \cdot 10^{-5} \text{ J},$

$$q_p = \frac{\kappa - 1}{\kappa} q'_1 = 44.6 \cdot 10^{-8} \text{ C.}$$

5.5 La forza sul dielettrico è  $F = \frac{\epsilon_0 (\kappa - 1) l}{2h} (V_2^2 - V_1^2) = 5.32 \cdot 10^{-4} \text{ N;}$  la massa è  $m = \rho l^2 h = 0.3 \text{ kg;}$   $a = F / m = 1.77 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2, \quad t = 7.5 \text{ s,}$

$$\sigma_{1p} = \epsilon_0 (\kappa - 1) \frac{V_1}{h} = 3.54 \cdot 10^{-6} \text{ C}, \quad \sigma_{2p} = \epsilon_0 (\kappa - 1) \frac{V_2}{h} = 7.09 \cdot 10^{-6} \text{ C.}$$

5.6  $E_1 = 1.82 \cdot 10^6 \text{ V/m;}$  dalla condizione di equilibrio:  $\theta = 5.31^\circ;$   $q = \sigma \Sigma = \epsilon_0 E_1 \Sigma = 8.06 \cdot 10^{-8} \text{ C}, \quad q_p = 6.04 \cdot 10^{-8} \text{ C.}$

5.7 La costante dielettrica relativa del liquido è pari al rapporto tra la d.d.p. iniziale e finale,

$$\kappa = 9 \cdot 10^3 / 3 \cdot 10^3 = 3. \quad \text{Da } \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} \right) = 9 \cdot 10^3 \text{ V, } q = 4 \cdot 10^{-8} \text{ C.}$$

$$\text{Inizialmente } U_1 = \frac{q^2}{8\pi \epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = 3.6 \cdot 10^{-4} \text{ J,}$$

$$U_2 = \frac{q^2}{8\pi \epsilon_0} \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} \right) = 1.8 \cdot 10^{-4} \text{ J,} \quad U_3 = \frac{q^2}{8\pi \epsilon_0} \frac{1}{R_3} = 1.8 \cdot 10^{-4} \text{ J,}$$

$U_e = U_1 + U_2 + U_3 = 7.2 \cdot 10^{-4} \text{ J}$ . Nel processo varia solo  $U_2$ :  $U'_2 = U_2 / \kappa = 0.6 \cdot 10^{-4} \text{ J}$ ,  $U'_e = 6.0 \cdot 10^{-4} \text{ J}$ ,  $\Delta U_e = -0.167$ .  $q_p = 2.67 \cdot 10^{-8} \text{ C}$ . La d.d.p.  $V_1 - V_2$  e il potenziale  $V_3$  non cambiano.

5.8  $q = 10^{-8} \text{ C}$ ,  $P(Q) = \frac{\kappa-1}{\kappa} \frac{q}{4\pi r^2} = 0.42 \cdot 10^{-8} \text{ C/m}^2$ ,  $n = 2.26 \cdot 10^{28} \text{ molecole/m}^3$ ,  
 $p = P/n = 1.85 \cdot 10^{-37} \text{ Cm}$ . Dopo il travaso  $q' = 1.14 \cdot 10^{-8} \text{ C}$ ,  $W_{\text{gen}} = 0.84 \cdot 10^{-6} \text{ J}$ .

5.9  $F = \frac{\pi \epsilon_0}{\ln(R_2/R_1)} (\kappa-1) V^2 = 4.0 \cdot 10^{-3} \text{ N}$ ,  $W = 2 \cdot 10^{-4} \text{ J}$  (il generatore deve fornire  $4 \cdot 10^{-4} \text{ J} = \Delta U_e + W$ ).

5.10  $F = \frac{\pi \epsilon_0 \kappa V^2}{\ln(R_2/R_1)}$ ;  $F = K \Delta x$ ,  $\Delta x = 9.8 \text{ cm}$ .

Per unità di lunghezza  $q = CV = \frac{2\pi \epsilon_0 \kappa V}{\ln(D/d)} = 4.9 \cdot 10^{-6} \text{ C}$ ,  $q_p = 3.7 \cdot 10^{-6} \text{ C}$ .

5.11  $D(r) = q / 4\pi r^2$  per  $r \geq R_1$ . Per  $R_1 \leq r \leq R_2$ ,  $E(r) = D/\kappa = q / 4\pi \epsilon_0 c$ , per  $r \geq R_2$ ,  $E(r) = q / 4\pi \epsilon_0 r^2$ .

$$U_e = \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2} \epsilon_0 \kappa E^2 d\tau + \int_{R_2}^{\infty} \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 d\tau \text{ con } d\tau = 4\pi r^2 dr :$$

$$U_e = 3.6 \cdot 10^{-4} \text{ J} + 5.4 \cdot 10^{-4} \text{ J} = 9.0 \cdot 10^{-4} \text{ J}$$

$$P(r) = \frac{\kappa-1}{\kappa} D = \frac{(c-r^2) q}{4\pi c r^2}, q_{1p} = -4\pi R_1^2 P(R_1) = -\frac{c-R_1^2}{c} q = -5.33 \cdot 10^{-8} \text{ C}$$

$$q_{2p} = 4\pi R_2^2 P(R_2) = \frac{c-R_2^2}{c} q = 0, q_{1p} + q_{2p} = \frac{q}{c} (R_1^2 - R_2^2) = -5.33 \cdot 10^{-8} \text{ C}$$

Essendo diversa da zero la carica superficiale di polarizzazione, nel volume deve esserci una densità  $\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P}$  che calcoliamo tramite (3.23):

$$\rho_p = -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r^2 P) = \frac{q}{2\pi c r}$$

La carica di polarizzazione contenuta nel volume è

$$q_p = \int_{R_1}^{R_2} \rho_p(r) 4\pi r^2 dr = \frac{q}{c} (R_2^2 - R_1^2) = +5.33 \cdot 10^{-8} \text{ C}; \text{ in totale la carica di polarizzazione è nulla.}$$

5.12 Il campo interno è  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 - \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0}$ , con  $\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E}$ , per cui  $\mathbf{P} = \epsilon_0 \frac{\kappa-1}{\kappa} \mathbf{E}_0$  e il momento

di dipolo del cilindro è  $p = P\tau$  :  $E_0 = q / 4\pi \epsilon_0 r^2$  e  $p = \frac{\kappa-1}{\kappa} \frac{q\tau}{4\pi r^2}$ .

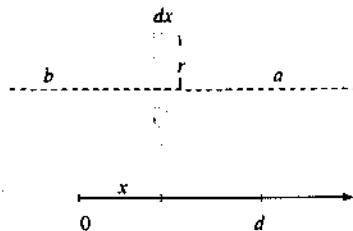
La forza sul dipolo è  $F = p \frac{dE_0}{dr} = -\frac{\kappa-1}{\kappa} \frac{q^2 \tau}{8\pi^2 \epsilon_0 r^5}$ , attrattiva.

La carica della sfera è  $q = 4\pi \epsilon_0 R V$  e risulta in definitiva

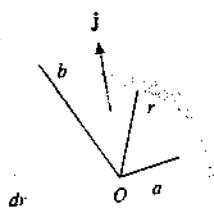
$$F = \frac{9.44 \cdot 10^{-15}}{r^5} : \text{ con } r = 5R \quad F = -3.08 \cdot 10^{-8} \text{ N.}$$

6.1  $i_{\max} = Ne / \tau = 16 \text{ A}, \quad i_{\text{med}} = NE / T = Nev = 8 \cdot 10^{-3} \text{ A} = 8 \text{ mA};$   
 $P_{\max} = Vi_{\max} = 45 \cdot 10^9 \cdot 16 = 7.2 \cdot 10^{11} \text{ W} = 720 \text{ GW},$   
 $P_{\text{med}} = Vi_{\text{med}} = 3.6 \cdot 10^8 \text{ W} = 360 \text{ MW};$   
 $\Sigma = \pi d^2 / 4, \quad j_{\max} = i_{\max} / \Sigma = 2.26 \cdot 10^6 \text{ A/m}^2, \quad j_{\text{med}} = 1.13 \cdot 10^3 \text{ A/m}^2,$   
 $j = nec, \quad (ne)_{\max} = j_{\max} / c = 7.53 \cdot 10^{-3} \text{ C/m}^3, \quad (ne)_{\text{med}} = 3.77 \cdot 10^{-6} \text{ C/m}^3.$

6.2  $E = \rho j = 3.34 \cdot 10^{-2} \text{ V/m}, \quad a = eE / m = 5.87 \cdot 10^9 \text{ m/s}^2, \quad \tau = v_d / a = 2.56 \cdot 10^{-14} \text{ s},$   
 $P_r = jE = 6.68 \cdot 10^4 \text{ W/m}^3 = 6.68 \cdot 10^{-5} \text{ W/mm}^3.$



#### Soluzione 6.4



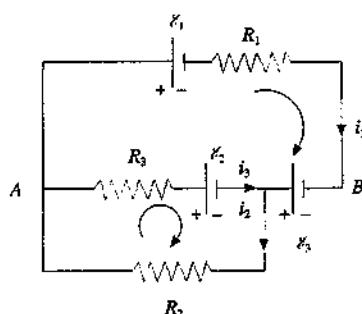
6.3 caso 1  $R = \rho d / \pi(b^2 - a^2) = 606.3 \Omega, \quad i = 33 \text{ mA}, \quad P = Ri^2 = 0.66 \text{ W},$   
 $j = i / \pi(b^2 - a^2) = 500 \text{ A/m}^2$ , eguale in entrata e in uscita

caso 2  $dR = \rho dr / 2\pi r d, \quad R = \int_a^b dR = \frac{\rho}{2\pi d} \ln \frac{b}{a} = 14.6 \Omega$ , si può anche ricavare da (6.62):  $i = 1.37 \text{ A}, \quad P = 27.4 \text{ W}, \quad j_o = i / 2\pi a d = 5.45 \cdot 10^3 \text{ A/m}^2,$   
 $j_b = 2.17 \cdot 10^3 \text{ A/m}^2.$

6.4  $r = b - \frac{b-a}{d}x, \quad dR = \frac{\rho dx}{\pi r^2} = \frac{\rho dx}{\pi [b - (b-a)x/d]^2},$

$$R = \int_0^d dR = \frac{\rho d}{\pi(b-a)} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = \frac{\rho d}{\pi a b} \quad (\text{come se fosse un conduttore a sezione ellittica costante}): \text{ se } a = b \quad R = \rho d / \pi a^2, \quad \text{formula corretta per un conduttore cilindrico.}$$

#### Soluzione 6.5



6.5  $dR = \rho dr / 2\pi r^2, \quad R = \int_a^b dR = \frac{\rho}{2\pi} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = 18.3 \text{ k}\Omega, \quad i = 0.11 \text{ mA},$

$$P = 0.22 \text{ W}, \quad j_o = i / 2\pi a^2 = 0.175 \text{ A/m}^2, \quad j_b = 0.044 \text{ A/m}^2.$$

6.6  $R_0 = \rho_{20} (1 - \alpha 20) d / \Sigma = 0.24 \Omega, \quad i_1 = \mathcal{E} / (r_i + R_0) = 0.403 \text{ A}$   
 $R + r_i = (R_0 + r_i) / 0.95, \quad R = 0.305 \Omega = \rho_{20} (1 + \alpha \Delta t) l / \Sigma,$   
 $\Delta t = 35.1^\circ \text{C}, \quad l = 55.1 \text{ cm}$   
 $P_1 = R_0 i_1^2 = 3.9 \cdot 10^{-2} \text{ W}, \quad P_2 = R i_2^2 = 4.5 \cdot 10^{-2} \text{ W.}$

6.7  $P_2 = P_1 \cdot \frac{R_1}{R_2} = P_1 \cdot \frac{[1 + \alpha(800 - 20)]}{[1 + \alpha(200 - 20)]} = 612 \text{ W}$

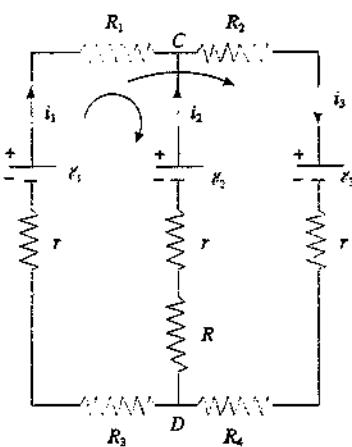
$$i_1 = P_1 / V = 2.5 \text{ A}, \quad i_2 = P_2 / V = 3.06 \text{ A.}$$

6.8 caso 1  $r_{AB} = 3r_i = 3 \Omega, \quad i = 3 \mathcal{E} / (3r_i + R) = 2 \text{ A},$   
 $P_{\text{gen}} = 3\mathcal{E} i = 36 \text{ W}, \quad P_R = R i^2 = 24 \text{ W}, \quad P_R / P_{\text{gen}} = 0.67$

caso 2  $r_{AB} = r_i / 3 = 0.33 \Omega, \quad i = \mathcal{E} / (r_{AB} + R) = 0.95 \text{ A.}$   
 $P_{\text{gen}} = \mathcal{E} i = 5.70 \text{ W}, \quad P_R = R i^2 = 5.42 \text{ W.}$   
 $P_R / P_{\text{gen}} = 0.95.$

6.9  $-\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3 = R_1 i_1 - R_3 i_3, \quad -\mathcal{E}_2 = R_2 i_2 + R_3 i_3, \quad i_3 + i_1 = i_2, \quad i_1 = 0.047 \text{ A},$   
 $i_2 = -0.318 \text{ A}, \quad i_3 = -0.365 \text{ A},$   
 $V_A - V_B = \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3 + R_3 i_3 = 14.35 \text{ V}$   
 $R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 + R_3 i_3^2 = 3.46 \text{ W}, \quad -\mathcal{E}_1 i_1 + \mathcal{E}_3 i_1 - \mathcal{E}_2 i_3 = 3.46 \text{ W}; \text{ i segni nell'ultima relazione sono in accordo con i versi preventivamente scelti per le correnti, poi i segni effettivi dipendono dalla soluzione trovata (i}_2 \text{ e } i_3 \text{ sono negativi).}$

#### Soluzione 6.9



#### Soluzione 6.10

6.10  $\mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_1 = (R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + 2r)i. \quad i = 0.667 \text{ A.} \quad V_A = V_C = V_D + (R_1 + R_3 + r)i + \mathcal{E}_1.$

$$\begin{aligned}
 V_B &= V_D + \mathcal{E}_2, \quad V_A - V_B = 0.67 \text{ V}, \quad V_C - V_D = 8.67 \text{ V} \\
 \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 &= (R_1 + R_3 + r)i_1 - (R + r)i_2, \quad \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_3 = (R_1 + R_3 + r)i_1 + (R_2 + R_4 + r)i_3, \\
 i_1 + i_2 &= i_3, \quad i_1 = -0.643 \text{ A}, \quad i_2 = -0.056 \text{ A}, \quad i_3 = -0.699 \text{ A}, \quad V_C - V_D = \mathcal{E}_2 - (r + R) \\
 i_2 &= 8.50 \text{ V} \\
 P_{\text{gen}} &= \mathcal{E}_1 i_1 + \mathcal{E}_2 i_2 + \mathcal{E}_3 i_3 = 5.37 \text{ W}, \quad P_{\text{res}} = (R_1 + R_3)i_1^2 + R i_2^2 + (R_2 + R_4)i_3^2 = 4.46 \text{ W}, \\
 \text{per verifica } P_r &= r(i_1^2 + i_2^2 + i_3^2) = 0.91 \text{ W} = P_{\text{gen}} - P_{\text{res}}
 \end{aligned}$$

6.11  $T$  aperto  $R_{\text{eq}} = r_1 + R + R/2 = 10 \Omega$ ,  $i = \mathcal{E}_1 / R_{\text{eq}} = 0.3 \text{ A}$ ,  
 $V_A - V_B = Ri/2 = 0.9 \text{ V}$ ,  $P_{\text{gen}} = \mathcal{E}_1 i = 0.9 \text{ W}$

$T$  chiuso  $\mathcal{E}_1 = (r_1 + R)i + Ri_1/2$ ,  $-\mathcal{E}_2 = (r_2 + R/3)i_2 - Ri_1/2$ ,  $i = i_1 + i_2$ ,  
 $i_1 = 0.885 \text{ A}$ ,  $i_2 = -0.836 \text{ A}$ ,  $i = 0.049 \text{ A}$ ,  $V_A - V_B = Ri_1/2 = 2.66 \text{ V}$ ,  
 $P_{\text{gen}} = \mathcal{E}_1 i - \mathcal{E}_2 i_2 = 5.16 \text{ W}$ .

6.12 I punti  $C$ ,  $O$ ,  $D$  sono allo stesso potenziale per cui le resistenze dei rami  $CO$  e  $OD$  non sono percorse da corrente;  $R_{\text{eq}} = 2(R/3) = 4 \Omega$ ,  $i_T = \mathcal{E} / (R_{\text{eq}} + r_i) = 1.5 \text{ A}$ ,  $i_R = 0.5 \text{ A}$  in ogni resistenza,  $P_R = R_{\text{eq}} i_T^2 = 6R i_R^2 = 9 \text{ W}$ .

6.13 La resistenza vista da  $AB$  o da qualsiasi altra coppia di punti  $A'B'$  è sempre la stessa perché la catena è infinita, per cui  $1/R_{\text{eq}} = 1/R + 1/(2R + R_{\text{eq}})$ ,  $R_{\text{eq}} = (-1 \pm \sqrt{3})R = (\sqrt{3}-1)R = 0.73R = 7.3 \Omega$ ,  $i = \mathcal{E} / (r_i + R_{\text{eq}}) = 0.97 \text{ A}$ ,  $P = R_{\text{eq}} i^2 = 6.87 \text{ W}$ .

6.14  $R_{\text{eq}} = R_2 R_3 / (R_2 + R_3) = 8 \Omega$ ,  $R_T = r_i + R_1 + R_{\text{eq}} + R = \mathcal{E} / i = 24 \Omega$ ,  $R_1 = 4 \Omega$ ;  
 $V_1 = R_1 i = 2 \text{ V}$ ,  $C_1 = 2 U_1 / V_1 = 2 \cdot 10^{-6} \text{ F}$ ,  $V_2 = R_{\text{eq}} i = 4 \text{ V}$ ,  
 $C_2 = 2 U_2 / V_2 = 0.25 \cdot 10^{-6} \text{ F}$ .

6.15  $R_T = R + R_{\text{eq}} = R + \frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} = \frac{25}{3} \Omega$ ,  $i = \mathcal{E} / R_T = 3 \text{ A}$

$$(R_1 + R_2)i_1 = (R_3 + R_4)i_2, \quad i_1 + i_2 = i, \quad i_1 = 2 \text{ A}, \quad i_2 = 1 \text{ A}, \quad V_A - V_Q = R_2 i_1 = 8 \text{ V}, \\ V_B - V_Q = R_4 i_2 = 2 \text{ V}, \quad V_B - V_A = -6 \text{ V};$$

resistenza di scarica  $R_s = \frac{(R_1 + R_3)(R_2 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} = 3.6 \Omega$ ,  $\tau = R_s C = 10.8 \mu\text{s}$ ,  
 $t = \tau \ln 10 = 24.9 \mu\text{s}$ .

6.16 La carica avviene attraverso  $R_1 + R_2$  con  $V_C$  che passa da  $\mathcal{E}/3$  all'istante  $t_1$  a  $2\mathcal{E}/3$  all'istante  $t_2$ ;  $\tau_c = (R_1 + R_2)C = 100 \mu\text{s}$ ,  $t_c = t_2 - t_1 = \tau_c \ln 2 = 69.3 \mu\text{s}$ ; la scarica da  $2\mathcal{E}/3$  a  $\mathcal{E}/3$  avviene attraverso  $R_2$ ,  $\tau_s = R_2 C = 20 \mu\text{s}$ ,  $t_s = \tau_s \ln 2 = 13.9 \mu\text{s}$ ;  $T = t_c + t_s = 83.2 \mu\text{s}$ ,  $v = 1/T = 12.0 \text{ kHz}$ .

7.1  $\theta' = \theta = 30^\circ$ ;  $E_k = 6 \text{ MeV} = 9.6 \cdot 10^{-13} \text{ J}$ ,  $p = mv = \sqrt{2mE_k} = 5.67 \cdot 10^{-20} \text{ kg m/s}$ ,  
 $r = mv/qB = 0.354 \text{ m}$ ,  $y = 2r \sin \theta = 0.354 \text{ m}$ .

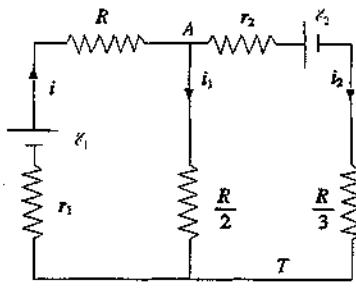
7.2  $E_k = 50 \text{ MeV} = 8.0 \cdot 10^{-12} \text{ J}$ ,  $mv = \sqrt{2mE_k} = 1.64 \cdot 10^{-19} \text{ kg m/s}$ ,  $r = mv/qB = 2.04 \text{ m}$ .  
 $\sin \alpha = L/r = 0.489$ ,  $\alpha = 29.3^\circ$ ,  $y = -r(1 - \cos \alpha) = -0.26 \text{ m}$ .

7.3  $mv^2/2 = qV$ ,  $mv/qB = r$ ,  $m/q = B^2 r^2/2V = 6.25 \cdot 10^{-8} \text{ kg/C}$ ,  $m = 10^{-26} \text{ kg} = 6$

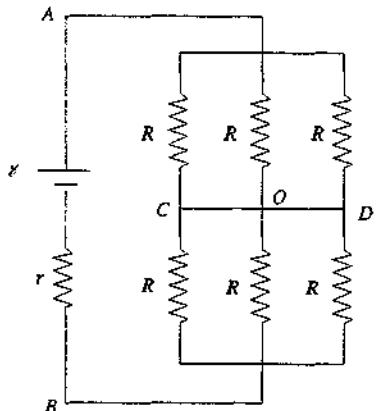
unità di massa atomica  $m_u$ ;  $r \cos \theta \approx r \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right)$  se  $\theta$  è piccolo.  $d/MN =$

$$\frac{2r - 2r \cos \theta}{2r} = \frac{\theta^2}{2} = 10^{-2}. \quad \theta = 0.0447 \text{ rad} = 2.56^\circ. \quad \text{Si tratta di un esempio di focalizzazione magnetica.}$$

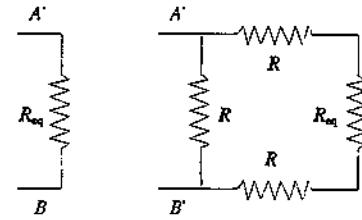
7.4  $q/m = e/7$ ,  $m_u = 1.38 \cdot 10^7 \text{ C/kg}$ ;  $v = E_v/B_v = 2 \cdot 10^5 \text{ m/s}$ ;  $\omega = qB/m$ ,  $T = 2\pi m/qB = 1/N = 6.28 \cdot 10^{-7} \text{ s}$ ,  $B = 2\pi m/qT = 0.73 \text{ T}$ ;  $d = v \cos \theta t$ ,  $\cos \theta = d/vt = 0.5$ ,  $\theta = 60^\circ$ ,  $r = mv \sin \theta / qB = 17.3 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ .



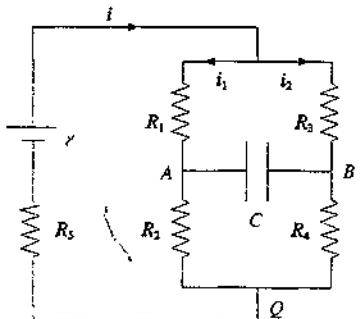
Soluzione 6.11



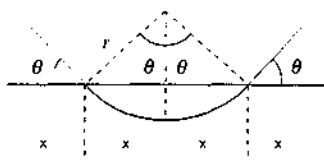
Soluzione 6.12



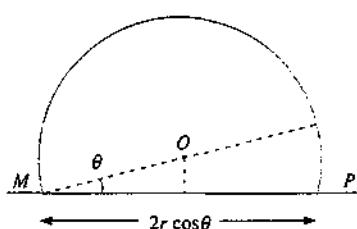
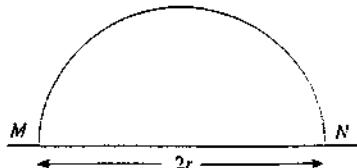
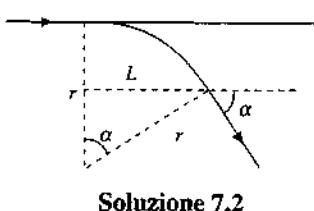
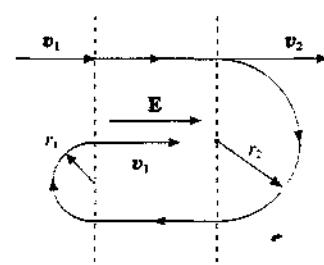
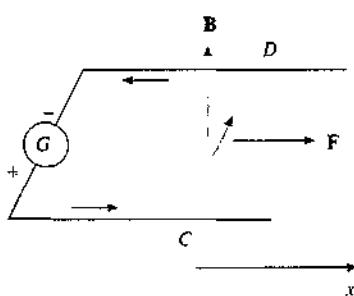
Soluzione 6.13



Soluzione 6.15



Soluzione 7.1

**Soluzione 7.3****Soluzione 7.7****Soluzione 7.10**

- 7.5  $v_x = v \sin \theta = v\theta, v_z = v \cos \theta = v(1 - \theta^2/2) \approx v = \sqrt{2eV/m}, r = mv \sin \theta / eB \approx mv\theta / eB$ , passo dell'elica  $h = v_z T = 2\pi v_z / \omega = 2\pi v m / eB$ : se  $\theta$  è piccolo le traiettorie elicoidali hanno raggi diversi, ma passi eguali; da  $L = nh$  con  $n$  intero si ha

$$B = \frac{2\pi m v}{eh} = \frac{n \pi}{L} \sqrt{\frac{8mV}{e}} = n 5.8 \cdot 10^{-2} \text{ T. Le traiettorie si avvitano intorno alle linee del campo magnetico e non divergono.}$$

- 7.6 Lungo l'asse  $z$  moto uniformemente accelerato con equazione  $m dv_z / dt = -qE$ .

$$v_z = v_0 \cos \theta - \frac{qE}{m} t, z = v_0 \cos \theta t - \frac{1}{2} \frac{qE}{m} t^2; \text{ ortogonalmente all'asse } z$$

$$m \frac{dv_\perp}{dt} = q v_\perp \times \mathbf{B} \text{ . moto circolare uniforme, } r = mv \sin \theta / qB, \omega = qB / m, T = 2\pi / \omega.$$

Il passo dell'elica non è costante. Numericamente  $r = 0.26 \text{ m}, \omega = 9.58 \cdot 10^6 \text{ rad/s}, T = 6.56 \cdot 10^{-7} \text{ s}, z_1 = 0.78 \text{ m}, z_0 = mv_0^2 \cos^2 \theta / 2qE = 0.98 \text{ m.}$

- 7.7  $t = 2t_{1,2} + \frac{2\pi m}{qB}, t_{1,2} = 2 \cdot 10^{-8} \text{ s}, v_1 + v_2 = \frac{2d}{t_{1,2}} = 4 \cdot 10^6 \text{ m/s};$

$$h = 2(r_2 - r_1) = \frac{2m}{qB}(v_2 - v_1), v_2 - v_1 = \frac{qBh}{2m} = 2 \cdot 10^6 \text{ m/s}, v_2 = 3 \cdot 10^6 \text{ m/s},$$

$$v_1 = 1 \cdot 10^6 \text{ m/s; } V = \frac{m}{2q}(v_2^2 - v_1^2) = 4.18 \cdot 10^4 \text{ V.}$$

- 7.8  $v_{\max} = qBR/m = 4.63 \cdot 10^7 \text{ m/s} (\beta_{\max} = v_{\max} / c \approx 0.1545), E_{k,\max} = 1.25 \cdot 10^{-11} \text{ J} = 77.8 \text{ MeV}; t = \pi R^2 B / 2V, V = \pi R^2 B / 2t = 10^5 \text{ V}, N = E_{k,\max} / 2qV = 390 \text{ giri}; v = qB / 2\pi m = 9.21 \text{ MHz. Il fattore relativistico è } \gamma_{\max} = 1/\sqrt{1 - \beta_{\max}^2} = 1.012 \text{ e } \Delta v / v = (1 - \gamma) / \gamma = -0.012 = -1.2\%.$

- 7.9  $E_H = \epsilon_H / \sqrt{\Sigma} = 4.24 \cdot 10^{-4} \text{ V/m}, j = i / \Sigma = 5 \cdot 10^6 \text{ A/m}^2, n = jB / e, E_H = 5.9 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}; v_d = j/ne = 0.53 \text{ mm/s}, E = j / \sigma = 8.1 \cdot 10^{-2} \text{ V/m}, E/E_H = 191.$

- 7.10  $\mathbf{F} = i \int_C^D ds \times \mathbf{B} = i \mathbf{CD} \times \mathbf{B} = iB du_y, v = iB dt, l/m = 10 \text{ m/s}, x = iB d t_1^2 / 2m = 0.5 \text{ m.}$

- 7.11  $m = \sqrt{m_x^2 + m_y^2} = 10^{-3} \text{ Am}^2, i = m / a^2 = 0.4 \text{ A}; B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = 0.39 \text{ T}; \mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} = m_x B_x \mathbf{u}_x - m_y B_x \mathbf{u}_y - m_y B_x \mathbf{u}_z, M = \sqrt{(m_x^2 + m_y^2) B_x^2 + m_y^2 B_z^2} = 0.36 \cdot 10^{-3} \text{ Nm; in modulo } M = m B \sin \alpha, \sin \alpha = M / m B = 0.923, \alpha = 67.4^\circ; U_p = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B} = -m_x B_x = -1.5 \cdot 10^{-4} \text{ J.}$

- 7.12  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{SP} + \mathbf{F}_{PQ} + \mathbf{F}_{QR} + \mathbf{F}_{RS} = 0 - \frac{i \alpha a^2}{2} \mathbf{u}_z + i \alpha a^2 \mathbf{u}_x + \frac{i \alpha a^2}{2} \mathbf{u}_y = i \alpha a^2 \mathbf{u}_x,$

in modulo  $F = 0.04 \text{ N}$ , diversa da zero perché  $\mathbf{B}$  non è uniforme, tende a spostare la spira in modo che il flusso magnetico aumenti;

$$U_p = - \int_S d\mathbf{m} \cdot \mathbf{B} = - \int_0^a i \alpha dx \mathbf{u}_z \cdot \alpha x \mathbf{u}_z = -i \alpha a \int_0^a x dx = -\frac{-i \alpha a^3}{2} = -4 \cdot 10^{-3} \text{ J.}$$

- 7.13  $\mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} = i a b B \cos \theta \mathbf{u}_x, \mathbf{M}_{\text{peso}} = -2\delta(a+b) \frac{b}{2} g \sin \theta \mathbf{u}_x, \text{ in equilibrio}$

$$\mathbf{M} + \mathbf{M}_{\text{peso}} = 0, \quad i = \frac{\delta g}{B} \frac{a+b}{a} \operatorname{tg}\theta = 2.12 \text{ A};$$

$$W = \int_0^6 M d\theta = i a b B \int_0^{30^\circ} \cos\theta d\theta = i a b B \sin 30^\circ = 4.24 \cdot 10^{-4} \text{ J}.$$

8.1  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{PQ} + \mathbf{F}_{RS} = \frac{\mu_0 N i i_b a}{2\pi} \left( \frac{1}{y} - \frac{1}{y+a} \right) \mathbf{u}_y = \frac{\mu_0 N i i_b a^2}{2\pi y (y+a)} \mathbf{u}_y$ , repulsiva (se la

spira si allontana il flusso di  $\mathbf{B}$  diventa meno negativo, cioè aumenta); per  $y \gg a$

$$\mathbf{F} = \frac{\mu_0 N i i_b a^2}{2\pi y^2} \mathbf{u}_y; \text{ dato che } m = -N i_b a^2 \text{ e } B = \mu_0 i / 2\pi y, \text{ si vede che } F = m dB/dy.$$

$$W_1 = \int_{y_1}^{y_2} F dy = \frac{\mu_0 N i i_b a^2}{2\pi} \int_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{y(y+a)} = \frac{\mu_0 N i i_b a}{2\pi} \ln \frac{y_2(y_1+a)}{y_1(y_2+a)} = 3.24 \cdot 10^{-6} \text{ J};$$

$$W_2 = -\Delta U_p = 2mB(y_3) = 2Ni_b a^2 \frac{\mu_0 i}{2\pi y_3} = 1.6 \cdot 10^{-6} \text{ J}, \text{ positivo perché } \mathbf{m} \text{ si porta parallelo e concorde a } \mathbf{B}.$$

8.2  $\mathbf{B} = 2 \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \cos\alpha \mathbf{u}_z = \frac{\mu_0 i a}{\pi(a^2+z^2)} \mathbf{u}_z;$

$$\frac{1}{2} m_g v_0^2 - \frac{m \mu_0 i}{\pi a} = -\frac{m \mu_0 i a}{\pi(a^2+z^2)}, \quad z = 2 \text{ cm.}$$

8.3  $\mathbf{B} = -\frac{\mu_0 i z}{\pi(a^2+z^2)} \mathbf{u}_y; F = m \frac{dB}{dz} = 0 \text{ per } z = a = 2 \text{ cm, in questo punto il modulo di } B(z) \text{ è massimo.}$

8.4  $\mathbf{B}_C = 0; \text{ dal problema 8.3 } \mathbf{B}_P = -\frac{\mu_0 i \sqrt{3}}{4\pi a} \mathbf{u}_y \text{ (infatti } z = a\sqrt{3}),$

$$\mathbf{F} = i \mathbf{u}_x \times \mathbf{B}_P = -\frac{\mu_0 i^2 \sqrt{3}}{4\pi a} \mathbf{u}_z, \quad F = 2.31 \cdot 10^{-4} \text{ N/m.}$$

8.5  $\mathbf{B}_C = \frac{2\mu_0 i}{\pi a} \mathbf{u}_z, \quad B_C = 1.2 \cdot 10^{-4} \text{ T}; \quad \mathbf{B}_P = \frac{\mu_0 i}{4\pi a} \mathbf{u}_y + \frac{3\mu_0 i}{4\pi a} \mathbf{u}_z = (1.5 \cdot 10^{-5} \mathbf{u}_y + 4.5 \cdot 10^{-5} \mathbf{u}_z) \text{ T}; \quad \mathbf{F} = -i \mathbf{u}_x \times \mathbf{B}_P = (1.35 \cdot 10^{-3} \mathbf{u}_y - 4.5 \cdot 10^{-4} \mathbf{u}_z) \text{ N/m}, \quad F = 1.42 \cdot 10^{-3} \text{ N/m}, \quad \alpha = 18.4^\circ.$

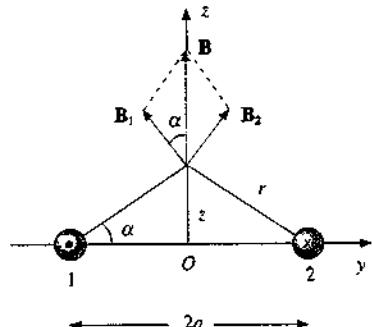
8.6 caso 1  $\mathbf{B}_O = \frac{\mu_0 i}{4b} \mathbf{u}_z - \frac{\mu_0 i}{4a} \mathbf{u}_x = \frac{\mu_0 i}{4} \left( \frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) \mathbf{u}_z, \quad B_O = -2.1 \cdot 10^{-5} \text{ T}$

(i tratti rettilinei danno contributo nullo);

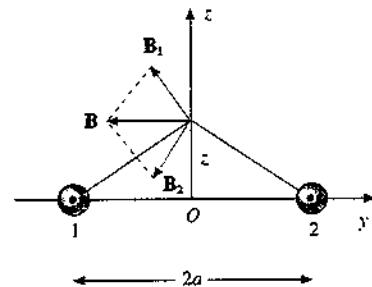
$$\mathbf{m} = i \frac{\pi}{2} (b^2 - a^2) \mathbf{u}_x, \quad m = 0.39 \text{ Am}^2$$

caso 2  $\mathbf{B}_O = \frac{\mu_0 i}{4} \left( \frac{1}{b} + \frac{1}{a} \right) \mathbf{u}_x, \quad B_O = 10.5 \cdot 10^{-5} \text{ T.}$

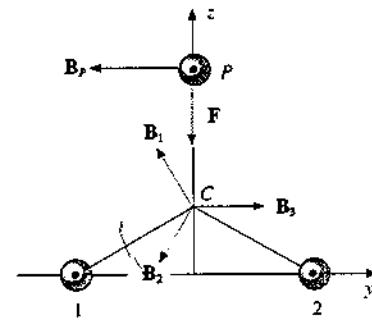
$$\mathbf{m} = i \frac{\pi}{2} (b^2 + a^2) \mathbf{u}_x, \quad m = 1.02 \text{ Am}^2.$$



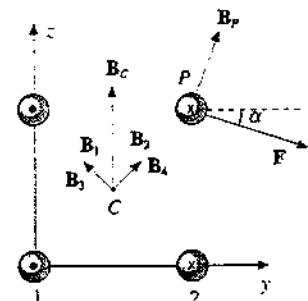
Soluzione 8.2



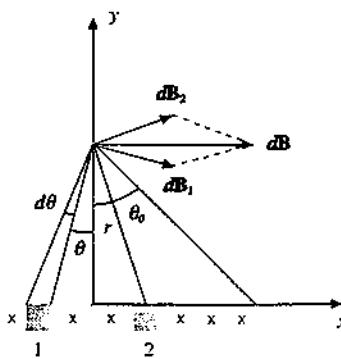
Soluzione 8.3



Soluzione 8.4



Soluzione 8.5



Soluzione 8.7

8.7  $di = j h dx$ ,  $d\mathbf{B} = 2 \frac{\mu_0 di}{2\pi r} \cos\theta \mathbf{u}_x$  (problema 8.2), dalla figura risulta

$$dx \cos\theta = r d\theta, \quad d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 j h}{\pi} d\theta \mathbf{u}_x,$$

$$\mathbf{B} = \int_0^{\theta_0} d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 j h}{\pi} \theta_0 \mathbf{u}_x = \frac{\mu_0 j h}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{a}{y} \mathbf{u}_x;$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} = -\frac{m \mu_0 j h}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{a}{y_0} \mathbf{u}_z, \quad M = 2.87 \cdot 10^{-4} \text{ Nm};$$

$$a \rightarrow \infty, \quad \theta_0 \rightarrow \pi/2, \quad \mathbf{B} \rightarrow \frac{\mu_0 j h}{2} \mathbf{u}_x; \quad a \ll y, \quad \theta_0 \approx \frac{a}{y}, \quad \mathbf{B} \approx \frac{\mu_0 i}{2\pi y} \mathbf{u}_x.$$

8.8  $di = i ds / h$ ,  $d\mathbf{B} = -\frac{\mu_0 di}{2\pi(x+s)} \mathbf{u}_z = -\frac{\mu_0 i}{2\pi h} \frac{ds}{x+s} \mathbf{u}_z,$

$$\mathbf{B} = \int_0^h d\mathbf{B} = -\frac{\mu_0 i}{2\pi h} \ln \frac{x+h}{x} \mathbf{u}_z, \quad \text{per } h \ll x \quad \ln \left(1 + \frac{h}{x}\right) = \frac{h}{x},$$

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0 i}{2\pi h} \frac{h}{x} \mathbf{u}_z = -\frac{\mu_0 i}{2\pi x} \mathbf{u}_z, \quad \text{campo di un filo indefinito};$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} = m \mathbf{u}_x \times (-B \mathbf{u}_z) = m B \mathbf{u}_y, \quad M = \frac{m \mu_0 i}{2\pi h} \ln 3 = 1.1 \cdot 10^{-5} \text{ Nm}.$$

 $\rightarrow ds \leftarrow$ 

Soluzione 8.8

8.9  $B(x) = \frac{\mu_0 i R^2}{2} \left[ \frac{1}{[R^2 + (d+x)^2]^{3/2}} + \frac{1}{[R^2 + (d-x)^2]^{3/2}} \right]; \quad B_0 = B(0) = \frac{8\mu_0 i}{5\sqrt{5} R}.$

Sviluppando in serie nell'intorno di  $x=0$ 

$$B(x) = B_0 \left[ 1 + \frac{3}{2} \frac{4d^2 - R^2}{(R^2 + d^2)} x^2 - \frac{15}{8} \frac{8d^4 - 12d^2R^2 + R^4}{(R^2 + d^2)^4} x^4 + \dots \right];$$

$$\text{ponendo } d = R/2, \quad B(x) = B_0 \left[ 1 - \frac{144}{125} (x/R)^4 + \dots \right];$$

$$\frac{B_0 - B(x_0)}{B_0} = 1.15 (x_0/R)^4 = 0.01, \quad x_0 \approx 0.305 R.$$

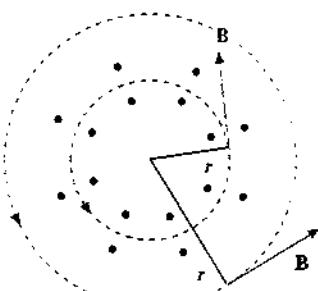
8.10  $\Gamma_1(\mathbf{B}) = -\frac{3}{8} \mu_0 \left( i_1 - \frac{i_2}{2} \right) = 0, \quad \Gamma_2(\mathbf{B}) = -\frac{\mu_0}{4} \left( \frac{13}{4} i_1 - i_2 \right) = -20\pi \cdot 10^{-7} \text{ Tm},$

$$i_1 = 16 \text{ A}, \quad i_2 = 32 \text{ A}.$$

8.11 Si applica il teorema di Ampère ad una circonferenza di raggio  $r$ :

$$r \leq a \quad B(r) = 0, \quad a \leq r \leq b \quad B(r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi(b^2 - a^2)} \frac{r^2 - a^2}{r} = \frac{\mu_0 j}{2} \frac{r^2 - a^2}{r},$$

$$r \geq b \quad B(r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}; \quad \text{con } a=0 \quad B(r) = \frac{\mu_0 j r}{2}.$$



Soluzione 8.11

- 8.12** Si ricorre al principio di sovrapposizione, immaginando che tutta la sezione sia interessata da una densità di corrente  $j_+$  e solo la cavità da una densità di corrente  $j_- = -j_+$ . Pertanto

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \frac{\mu_0 j r_+}{2} (-\sin \alpha_+ \mathbf{u}_x + \cos \alpha_+ \mathbf{u}_y) + \frac{\mu_0 j r_-}{2} (\sin \alpha_- \mathbf{u}_x + \cos \alpha_- \mathbf{u}_y) = \\ &= \frac{\mu_0 j}{2} (-r_+ \sin \alpha_+ + r_- \sin \alpha_-) \mathbf{u}_x + \frac{\mu_0 j}{2} (r_+ \cos \alpha_+ + r_- \cos \alpha_-) \mathbf{u}_y = \frac{\mu_0 j d}{2} \mathbf{u}_y = \\ &= \frac{\mu_0 i d}{2\pi(a^2 - b^2)} \mathbf{u}_y, \quad B = 1.02 \cdot 10^{-4} \text{ T}; \end{aligned}$$

$$j = i / \pi (a^2 - b^2) = 1.63 \cdot 10^4 \text{ A/m}^2, \quad i_+ = j \pi a^2 = 20.46 \text{ A}, \quad i_- = j \pi b^2 = 0.46 \text{ A}.$$

$$U_m = \frac{\mu_0}{16\pi} (i_+^2 - i_-^2) = 1.05 \cdot 10^{-5} \text{ J/m}, \quad L = 2 U_m / i^2 = \frac{\mu_0}{8\pi} \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} = 5.2 \cdot 10^{-8} \text{ H/m}.$$

- 8.13**  $i = \Gamma(\mathbf{B}) / \mu_0 = 8 \text{ A}, \quad j = i / \pi (a^2 - b^2) = 6.67 \cdot 10^3 \text{ A/m}^2;$   
 $i_+ = j \pi a^2 = 8.38 \text{ A}, \quad i_- = j \pi b^2 = 0.19 \text{ A},$

$$\text{in } P_1 \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \left( \frac{i_+}{h} - \frac{2i_- h}{h^2 + d^2} \right) \mathbf{u}_y = B_1 \mathbf{u}_y, \quad B_1 = 0.644 \cdot 10^{-4} \text{ T},$$

$$\text{in } P_2 \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \left( -\frac{i_+}{h} + \frac{i_-}{h-d} + \frac{i_-}{h+d} \right) \mathbf{u}_x = B_2 \mathbf{u}_x, \quad B_2 = -0.634 \cdot 10^{-4} \text{ T};$$

$$\text{per } h \gg d \text{ in modulo } B_1 = B_2 = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i_+ - 2i_-}{h} = \frac{\mu_0 i}{2\pi h}.$$

- 9.1**  $m = M_0 / B = 0.1 \text{ Am}^2, \quad M = m / \Sigma d = 7.96 \cdot 10^5 \text{ A/m}; \quad i_m = Md = 3.18 \cdot 10^4 \text{ A} \text{ (esclusivamente superficiale); } n = \rho N_A / A = 8.52 \cdot 10^{28} \text{ atomi/m}^3, \quad \langle n \rangle = M / n = 9.34 \cdot 10^{-24} \text{ Am}^2.$

- 9.2**  $B_C = \mu_0 M, \quad M = 2.5 \cdot 10^5 \text{ A/m}, \quad H_C = 0; \quad B_D d = \mu_0 i_m = \mu_0 M (d-h), \quad B_D = \mu_0 M (1 - h/d) = 0.306 \text{ T}; \quad H_0 = B_D / \mu_0 = 2.44 \cdot 10^5 \text{ A/m}, \quad H_D = -H_0 h / (d-h) = -6.26 \cdot 10^3 \text{ A/m}; \quad p = B_D^2 / 2 \mu_0 = 0.37 \cdot 10^5 \text{ Pa}.$

- 9.3**  $i = \Gamma(\mathbf{B}) / 2 \mu_0 = 25 \text{ A}; \quad \Delta U_m = \frac{\mu_0 i^2}{4\pi} (\kappa_m - 1) \ln \frac{b}{a}, \quad \kappa_m = 40.9;$

$$H = i / 2\pi r, \quad M_1 = \chi_m i / 2\pi a = 7.94 \cdot 10^3 \text{ A/m}, \quad M_2 = M_1 a / b = 3.97 \cdot 10^3 \text{ A/m}.$$

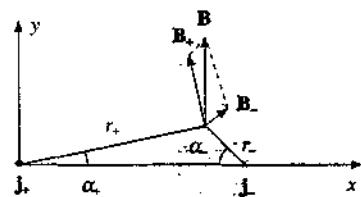
- 9.4**  $B_1 = \mu_0 H, \quad B_2 = \mu_0 (H + M) = \mu_0 (1 + \chi_m) H, \quad \chi_m = \frac{B_2 - B_1}{B_1} = 58.8,$   
 $M = (B_2 - B_1) / \mu_0 = 5.9 \cdot 10^4 \text{ A/m}.$

- 9.5**  $H = B_1 / \mu_0 = 2 \cdot 10^5 \text{ A/m}, \quad i = Hd / N = 2 \text{ A}; \quad \Gamma(\mathbf{B}) = \mu_0 (M d + Ni), \quad M = (\Gamma / \mu_0 - Ni) / d = 9.94 \cdot 10^3 \text{ A/m}, \quad \chi_m = M / H = 4.97; \quad U_m = 1/2 \mu_0 \kappa_m H^2 \Sigma d = 3.0 \cdot 10^{-3} \text{ J}.$

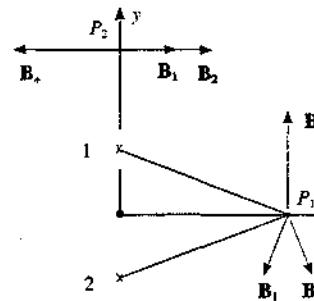
- 9.6**  $B = -\mu_0 \frac{d-h}{h} H + \mu_0 \frac{Ni}{h} = \mu_0 (-65 H + 2.5 \cdot 10^5), \quad B = \mu_0 \kappa_m H = \mu_0 60 H,$

$$B = 0.15 \text{ T}, \quad H = 2 \cdot 10^5 \text{ A/m}, \quad M = \chi_m H = 1.18 \cdot 10^5 \text{ A/m};$$

$$H_0 = B / \mu_0 = 1.2 \cdot 10^5 \text{ A/m}; \quad i_m = \oint \mathbf{M} \cdot d\mathbf{s} = M (d-h) = 1.53 \cdot 10^5 \text{ A};$$



Soluzione 8.12



Soluzione 8.13

$$U_m = \frac{B^2 \Sigma}{2\mu_0 \kappa_m} (d + \chi_m h) = 3.73 \text{ J}, \quad L = 2 U_m / l^2 = 7.46 \cdot 10^{-2} \text{ H.}$$

9.7  $U_1 = \frac{B^2 \Sigma d}{2\mu_0 \kappa_m}, \quad B = \mu_0 \kappa_m \frac{Ni_1}{d}, \quad U_2 = \frac{B^2 \Sigma}{2\mu_0 \kappa_m} (d + \chi_m h), \quad \frac{B}{\mu_0 \kappa_m} (d - h) +$   
 $+ \frac{B}{\mu_0} h = Ni_2, \quad \Delta U = \frac{B^2 \Sigma h \chi_m}{2\mu_0 \kappa_m}, \quad \Delta i = \frac{B h \chi_m}{\mu_0 \kappa_m N}, \quad B = \frac{2}{N \Sigma} \frac{\Delta U}{\Delta i} = 0.8 \text{ T};$   
 $\frac{\chi_m}{\kappa_m} = \frac{\mu_0 N \Delta i}{B h} = \frac{2\mu_0 \Delta U}{B^2 \Sigma h} = 0.987, \quad \chi_m = 75.9; \quad M = \chi_m \frac{B}{\mu_0 \kappa_m} = 1.18 \cdot 10^5 \text{ A/m.}$

9.8  $\alpha = \mu_0 \kappa_m, \quad \kappa_m = 100, \quad \chi_m = 99; \quad H(d - 2h) + \kappa_m H 2h = Ni, \quad H = 3 \cdot 10^5 \text{ A/m},$

$$M = \chi_m H = 2.97 \cdot 10^5 \text{ A/m}, \quad B_C = \mu_0 \left( H + \frac{M}{3} \right) = 0.128 \text{ T};$$

$$B = \mu_0 \kappa_m H = 0.377 \text{ T}, \quad F = 2 \left( \frac{B^2}{2\mu_0} \Sigma \right) = 142 \text{ N};$$

$$H = Ni / d = 6.75 \cdot 10^3 \text{ A/m}, \quad M' = \chi_m H' = 6.68 \cdot 10^5 \text{ A/m}, \quad B'_C = 0.288 \text{ T};$$

$$B' = \mu_0 \kappa_m H' = 0.848 \text{ T}, \quad U = \frac{B^2 \Sigma}{2\mu_0 \kappa_m} (d + 2\chi_m h) = 0.64 \text{ J},$$

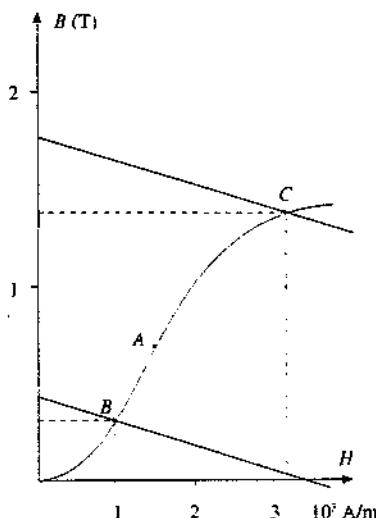
$$U' = \frac{B'^2 \Sigma d'}{2\mu_0 \kappa_m} = 1.44 \text{ J}, \quad W_{\text{gen}} = 2\Delta U = 1.6 \text{ J.}$$

9.9 Dal grafico se  $B_A = 0.7 \text{ T}$ ,  $H_A = 1500 \text{ A/m}$ ,  $H_0 = B_A / \mu_0 = 5.57 \cdot 10^5 \text{ A/m}$ ,  $Ni = H_0 h + H_A (d - h) = 7070 \text{ A}$ ,  $i = 141.4 \text{ A}$ ;  $i = H_A d / N = 30.3 \text{ A}$ ;

$$B = -\mu_0 \frac{d-h}{h} H + \mu_0 \frac{Ni}{h} = -4\pi \cdot 10^{-5} H + 2\pi \cdot 10^{-3} i; \quad \text{se } i = 70.7 \text{ A si trova}$$

$$B = -1.257 \cdot 10^{-4} H + 0.444 \text{ e dall'intersezione con la curva di prima magnetizzazione } B_B \approx 0.32 \text{ T}, \quad H_B \approx 10^3 \text{ A/m, se } i = 282.8 \text{ A} \quad B = -1.257 \cdot 10^{-4} H + 1.777,$$

$$B_C \approx 1.38 \text{ T}, \quad H_C \approx 3.2 \cdot 10^3 \text{ A/m}; \quad F = \frac{B^2}{2\mu_0} \Sigma, \quad F_B = 40.7 \text{ N}, \quad F_C \approx 757.7 \text{ N.}$$



9.10 Dal circuito magnetico  $B = -\mu_0 \frac{d-h}{h} H = -4\pi \cdot 10^{-5} H$ , dal ciclo di isteresi  $B = -0.8 + 0.8 \cdot 10^{-4} H$  (tratto a destra),  $B = 0.8 + 0.8 \cdot 10^{-4} H$  (tratto a sinistra); risolvendo il sistema si ha  $H = 8.64 \cdot 10^3 \text{ A/m}$ ,  $B = -0.11 \text{ T}$  oppure  $H = -8.64 \cdot 10^3 \text{ A/m}$ ,  $B = 0.11 \text{ T}$ ;

$$H_0 = -\frac{d-h}{h} H = -10 \quad H = \mp 8.64 \cdot 10^3 \text{ A/m}; \quad \frac{1}{2} B H_0 \Sigma h / \frac{1}{2} B H \Sigma (d-h) = 1.$$

### Soluzione 9.9

9.11 L'area del ciclo è  $3.2 \cdot 10^3 \text{ TA/m} = 3.2 \cdot 10^3 \text{ J/m}^2$ , la potenza assorbita per unità di volume è  $P = 3.2 \cdot 10^3 \cdot 50 = 1.6 \cdot 10^5 \text{ W/m}^3$ , eguale al calore assorbito per unità di volume e per secondo  $\rho c \Delta T$ ,  $\Delta T = 0.05 \text{ K/s} = 0.05^\circ \text{ C/s}$ .

9.12  $W = 2m_0 B = 3/2 k_B T, \quad T = 4 m_0 B / 3 k_B = 2.41 \text{ K}$ ; dalla figura 9.57 con  $M / M_{\text{sat}} = 0.5$   $a = 1.8$ , con  $M / M_{\text{sat}} = 0.8$   $a = 4.6$ ; dato che  $a = m_0 B / k_B T$ , nei due casi  $T \approx 1 \text{ K}$  e  $T = 0.4 \text{ K}$ .

9.13 anello  $i = q / T = q\omega / 2\pi$ ,  $\mathbf{m} = q \frac{\omega}{2\pi} \pi R^2 = \frac{1}{2} qR^2 \omega$ ,  $\mathbf{L} = MR^2 \omega$ ,

$$m / L = q / 2M, g = 1$$

disco  $d\mathbf{m} = dq \frac{r^2}{2} \omega$ ,  $dq = 2\pi \sigma r dr$ ,  $\mathbf{m} = \int_0^R d\mathbf{m} = \frac{\pi \sigma R^4}{4} \omega = \frac{q R^2}{4} \omega$ ,

$$\mathbf{L} = \frac{1}{2} M R^2 \omega, m / L = q / 2M, g = 1$$

in entrambi i casi  $\Omega_p = g B = qB / 2M$ .

9.14  $di = dq / T = \lambda ds \omega / 2\pi$ ,  $d\mathbf{m} = \frac{\lambda ds}{2\pi} \pi s^2 \omega$ ,

$$\mathbf{m} = \int_{-a^2}^{a^2} d\mathbf{m} = \frac{\lambda a^3}{24} \omega = \frac{q a^2}{24} \omega, \mathbf{L} = \frac{1}{12} M a^2 \omega, m / L = q / 2M, g = 1.$$

10.1  $\varepsilon_1 = \int_0^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^b \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{\mu_0 i v b}{2\pi r}$ ; con riferimento alla figura è positivo l'estremo più alto.

$$\varepsilon_2 = \int_r^{r+b} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_r^{r+b} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{\mu_0 i v}{2\pi} \int_r^{r+b} \frac{dr}{r} = -\frac{\mu_0 i v}{2\pi} \ln \left( 1 + \frac{b}{r} \right);$$

il segno indica che è positivo l'estremo più vicino al filo. Si arriva ai risultati anche ragionando col flusso tagliato.

10.2  $\varepsilon = v b B$ ,  $i = v b B / R$ ,  $F = i b B = \frac{b^2 B^2}{R} v$  opposta al moto, che risulta esponenzialmente smorzato con costante di tempo  $\tau = m R / b^2 B^2 = 10$  s,  $v_1 = v_0 e^{-t_1/\tau} = 3 \cdot 10^{-2}$  m/s;

$$W = \frac{1}{2} m (v_0^2 - v_1^2) = 1.4 \cdot 10^{-6} \text{ J};$$

$$v(x) = v_0 - \frac{x}{\tau}, \text{ per } x = b, v_2 = 2 \cdot 10^{-2} \text{ m/s, resta costante};$$

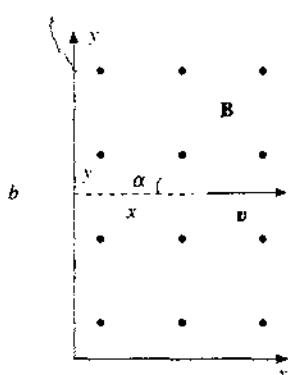
$$v_2 = v_0 e^{-t_2/\tau}, t_2 = 6.9 \text{ s (e si verifica che è maggiore di } t_1\text{)}; \text{ si applica la legge di Faraday, } q = \frac{B b^2}{R} = 8 \cdot 10^{-4} \text{ C.}$$

10.3  $\varepsilon = \oint \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 2B v y = 2B v x \tan \alpha$ , funzione di  $x$ ,  $i = \varepsilon / R$ ,  $F = 4 B^2 \tan^2 \alpha v x^2 / R$  opposta al moto.

$$v(x) = v_0 - \frac{4B^2 \tan^2 \alpha}{3m R} x^3 = 5 - 56.89 x^3 \text{ m/s};$$

$$x_{\max} = b \cos \alpha = 0.173 \text{ m}, v_1 = 4.71 \text{ m/s};$$

$$q = \frac{\Delta \Phi}{R} = \frac{B \Sigma}{R} = \frac{B}{R} \frac{\sqrt{3}}{4} b^2 = 2.78 \cdot 10^{-2} \text{ C.}$$



Soluzione 10.3

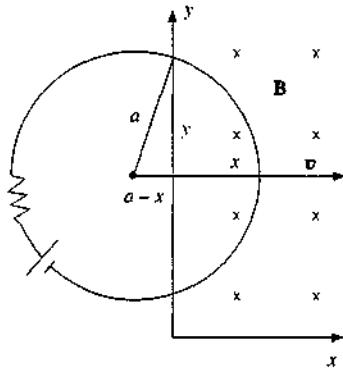
10.4  $\xi_i(x) = v b \alpha x$ ,  $i(x) = v b \alpha x / R$ ,  $F(x) = b^2 \alpha^2 x^2 v / R$  opposta al moto;

$$v(x) = v_0 - \frac{b^2 \alpha^2}{3mR} x^3 = 5 - 2.16 \cdot 10^3 x^3, \text{ per } x = b \quad v = 3.43 \text{ m/s; si noti che con la}$$

spira quadrata e campo lineare in  $x$  si ha lo stesso andamento che con la spira triangolare e campo costante (problema 10.3), in quanto la variazione di flusso è la stessa;

$$q = \frac{1}{R} b \int_0^b \alpha x dx = \frac{\alpha b^3}{2R} = 0.73 \text{ C.}$$

10.5  $\xi_i = \oint \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = -2Bv y \approx -2Bv \sqrt{x(2a-x)}$ , il segno risulta opposto a quello



Soluzione 10.5

$$\text{di } \xi_i, i(x) = \frac{\xi + \xi_i(x)}{R} = \frac{1}{R} (\xi - 2Bv \sqrt{x(2a-x)});$$

$$F(x) = 2iB y = \frac{2B}{R} \left[ \xi - 2Bv \sqrt{x(2a-x)} \right] \sqrt{x(2a-x)}, \text{ si annulla per } x = 0.2 \text{ m};$$

$$t = \frac{2a}{v} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ s}, q = \frac{\xi}{R} t - \frac{B \pi a^2}{R} = 4.3 \cdot 10^{-4} \text{ C};$$

$\xi_i$  cresce fino ad egualare  $\xi$  per  $x = 0.2 \text{ m}$ , poi decresce fino a zero.

10.6  $\frac{\xi}{R} B b \cos \alpha = mg \sin \alpha$ ,  $\xi = \frac{\rho \delta b g}{B} \tan \alpha = 0.226 \text{ V}$ ; velocità limite quando la forza magnetica e forza peso sono eguali in modulo,

$$\frac{B^2 b^2 \cos^2 \alpha}{R} v_0 = mg \sin \alpha, v_0 = \frac{\rho \delta g}{B^2} \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} = 4.36 \text{ m/s};$$

$$P = mg \sin \alpha v_0 = \delta \sum b g \sin \alpha v_0 = 1.28 \text{ W.}$$

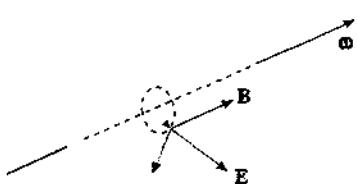
$$10.7 \quad \xi_i = v b B, \frac{dv}{dt} = g - \frac{i B b}{m} = g - \frac{B^2 b^2}{m R} v,$$

$$v(t) = \frac{mg R}{B^2 b^2} (1 - e^{-B^2 b^2 t / m R}) = 9.8 (1 - e^{-t}) \text{ m/s, al limite } v_0 = \frac{mg R}{B^2 b^2} = 9.8 \text{ m/s;}$$

$$i(t) = \frac{mg}{B b} (1 - e^{-B^2 b^2 t / m R}) = 0.49 (1 - e^{-t}) \text{ A, al limite } i_0 = \frac{mg}{B b} = 0.49 \text{ A;}$$

$$W_x = mg x = R i_0^2 t = \frac{R i_0^2 x}{v_0} = 9.8 \cdot 10^{-2} x \text{ J, per } x = 10^{-2} \text{ m } W_1 = 9.8 \cdot 10^{-4} \text{ J.}$$

10.8  $\mathbf{E} = \mathbf{v} \times \mathbf{B} = (\omega \times \mathbf{r}) \times \mathbf{B} = \omega r B \mathbf{u}_r$ , diretto verso l'esterno se  $\mathbf{B}$  è concorde a  $\omega$ ,  $\mathbf{P}(r) = \epsilon_0 (\kappa_r - 1) \mathbf{E} = \epsilon_0 (\kappa_r - 1) \omega r B \mathbf{u}_r$ ,  $\sigma_p = \epsilon_0 (\kappa_r - 1) \omega R B = 4.43 \cdot 10^{-10} \text{ C/m}^2$ ;  $\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P} = -\epsilon_0 (\kappa_r - 1) \omega B \nabla \cdot \mathbf{r} = -2 \epsilon_0 (\kappa_r - 1) \omega B = -1.77 \cdot 10^{-8} \text{ C/m}^3$ ;  $q_\sigma = \sigma 2 \pi R a = 2.78 \cdot 10^{-11} \text{ C}$ ,  $q_p = \rho_p \pi R^2 a = -2.78 \cdot 10^{-11} \text{ C}$ ,  $q_\sigma + q_p = 0$ . Si noti che il campo  $\mathbf{E}$  non è un campo elettrostatico.



Soluzione 10.8

10.9  $\xi_i = B a^2 \omega / 2$ ,  $i = \xi / R$ ,  $dM = i B r dr$ ,  $M = B^2 a^4 \omega / 4R$ , che si oppone al moto; bisogna quindi applicare un momento esterno eguale e contrario, con  $\omega = 2\pi v = 188.5 \text{ rad/s}$   $M = 2.68 \cdot 10^{-4} \text{ Nm}$ ;  $P = M \omega = 5.1 \cdot 10^{-2} \text{ W}$ ;  $i = \sqrt{P/R} = 0.80 \text{ A}$ ,  $q = 60 i = 48 \text{ C}$ .

10.10 Moto smorzato esponenzialmente con costante di tempo  $\tau = \frac{4 R I}{B^2 a^4}$ ,

$$\omega_1 = \omega_0 e^{-\tau/\tau} = \omega_0/2, \quad \tau = 28.9 \text{ s}, \quad B = 0.8 \text{ T}; \quad W = \frac{1}{2} I (\omega_0^2 - \omega_1^2),$$

$$\omega_0 = 200 \text{ rad/s}; \quad \omega(\theta) = \omega_0 - \frac{\theta}{\tau} = \omega_1 = \frac{\omega_0}{2}, \quad \theta = 2890 \text{ rad}, \quad N = 460 \text{ giri};$$

$$q = \frac{1}{R} B \left( \frac{1}{2} a^2 \theta \right) = 125.2 \text{ C.}$$

10.11 Sia in equilibrio statico che in equilibrio dinamico alla velocità angolare  $\omega_0$  il momento della forza applicata è eguale ed opposto al momento della forza peso,  $i B a^2 / 2 = m g a$ ,  $i = 2 m g / B a = 19.6 \text{ A}$ ; segue  $2 \xi = \xi + \xi_i = \xi + B a^2 \omega_0 / 2 = 0.2 \text{ V}$ ;

$$R = 2 \xi / i = 2 \cdot 10^2 \Omega; \quad q = i \frac{2\pi}{\omega_0} = 0.62 \text{ C.}$$

10.12  $\xi_i = -B \sum \omega \sin \omega t = -0.24 \sin \omega t$ ,  $\omega = 10^3 \text{ rad/s}$ ;

$$i = \frac{\xi(t) + \xi_i}{R} = \frac{0.2}{R} \approx 2 \text{ A.}$$

10.13  $\Phi(t) = N B \frac{\pi a^2}{2} \cos \omega t + N B \frac{\pi a^2}{2} \cos \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) = N B \frac{\pi a^2}{\sqrt{2}} \cos \left( \omega t + \frac{\pi}{4} \right)$ ,

$$\xi_i = -\frac{d\Phi}{dt} = \omega N B \frac{\pi a^2}{\sqrt{2}} \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{4} \right), \quad \xi_{\max} = \omega N B \frac{\pi a^2}{\sqrt{2}} = 22.2 \text{ V};$$

$$P_m = \frac{\xi_i^2}{2R} = \frac{\xi_{\max}^2}{R} = 24.7 \text{ W.}$$

10.14  $\xi_i = N \sum B \omega \sin \omega t = \frac{q}{C}, \quad i = \frac{dq}{dt} = C N \sum B \omega^2 \cos \omega t,$

$$P = \xi_i i = C (N \sum B)^2 \omega^3 \sin \omega t \cos \omega t = \frac{C}{2} (N \sum B)^2 \omega^3 \sin 2 \omega t = 3.2 \sin 160 t \text{ W};$$

$$M = \frac{P}{\omega} = 0.04 \sin 160 t \text{ Nm}; \quad P_m = 0, \quad M_m = 0.$$

10.15  $M(x) = \frac{\mu_0 N_1 N_2 R^2 \pi r^2}{2(x^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{9.25 \cdot 10^{-7}}{(x^2 + 6.25 \cdot 10^{-2})^{3/2}} \text{ H};$

$$\xi(x) = -\frac{d\Phi}{dt} = -i \frac{dM}{dt} = 3 \mu_0 i N_1 N_2 R^2 \pi r^2 \frac{x v}{(x^2 + R^2)^{5/2}} = \frac{1.11 \cdot 10^{-4} x}{(x^2 + 6.25 \cdot 10^{-2})^{5/2}} \text{ V}$$

10.16  $\Phi = \frac{\mu_0 i b}{2\pi} \ln \left( 1 + \frac{a}{r} \right), \quad \xi_i = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_0 i b}{2\pi \tau} e^{-t/\tau} \ln \left( 1 + \frac{a}{r} \right) = 4.4 \cdot 10^{-8} e^{-t/5} \text{ V};$

$$\text{nella spira } I = \xi_i / R \approx 2.2 \cdot 10^{-8} e^{-t/5} \text{ A}, \quad q = \int_0^{\infty} I dt = 1.1 \cdot 10^{-7} \text{ C.}$$

10.17  $M = \mu_0 \kappa_m N n \Sigma = 6.28 \cdot 10^{-3} \text{ H}$ ,  $\Phi = M i$ ,  $\dot{\varphi}_i = -d\Phi/dt = M \alpha = 6.28 \cdot 10^{-5} \text{ V}$ ;  $i = \dot{\varphi}_i/R = 6.28 \cdot 10^{-6} \text{ A}$ ;  $t = i_0/\alpha = 10^3 \text{ s}$ ,  $q = It = 6.28 \cdot 10^{-3} \text{ C}$ .

10.18  $d\Phi(x) = \mu_0 M \pi r_1^2 n dx$ ,  $\dot{\varphi}_i = -d\Phi/dt = -\mu_0 M \pi r_1^2 n v = -0.49 \text{ V}$  (con i suoi effetti si oppone al moto);  $i = \dot{\varphi}_i/R = 9.8 \cdot 10^{-2} \text{ A}$ , costante durante il processo che dura  $t = b/v = 2 \cdot 10^{-2} \text{ s}$ ;  $q = it = 1.96 \cdot 10^{-3} \text{ C}$ ;  $W = R i^2 t = 9.6 \cdot 10^{-4} \text{ J}$ .

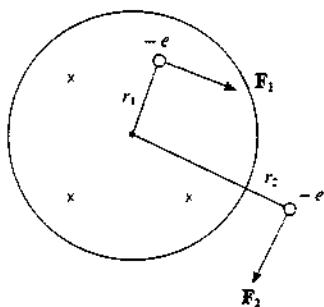
10.19  $F = (dU_m/dx)_{i=\text{cost}} = \frac{1}{2} \mu_0 \chi_m (ni)^2 \Sigma = 50.2 \text{ N}$ , costante per tutto il tempo in cui la sbarretta è parzialmente inserita nel solenoide e attrattiva verso l'interno,  $F = 0$  quando la sbarretta è completamente inserita;  $m = \rho h \Sigma = 0.64 \text{ kg}$ ,  $a = F/m = 78.1 \text{ m/s}^2$ .

$$t_1 = \sqrt{\frac{2(h-x_0)}{a}} = 6.2 \cdot 10^{-2} \text{ s}, v_1 = a t_1 = 4.84 \text{ m/s}, t_2 = (d-h)/v_1 = 8.3 \cdot 10^{-2} \text{ s}.$$

$$t_0 = 4t_1 + 2t_2 = 0.41 \text{ s}.$$

10.20  $\frac{1}{2} \mu_0 \chi_m (ni)^2 \Sigma = m g$ ,  $i = 10 \text{ A}$ ;  $dW_{\text{gen}} = 2dU_m = 2 \frac{1}{2} \mu_0 \chi_m (ni)^2 \Sigma dx$ ,

$$P = R i^2 + dW_{\text{gen}}/dt = (R + \mu_0 \chi_m n^2 \Sigma v) i^2 = 2.76 \text{ kW}.$$



Soluzione 10.21

10.21  $0 \leq r \leq R$   $E = -\frac{r}{2} \frac{dB}{dt} = -\frac{r}{2} (0.1t - 0.2)$ , forza sulla carica  $-e$

$$F_1 = \frac{e r_1}{2} (0.1t_1 - 0.2) = 6.4 \cdot 10^{-22} \text{ N}, \text{ in senso orario nella figura}; R \leq r$$

$$E = -\frac{R^2}{2r} \frac{dB}{dt} = -\frac{R^2}{r} (0.1t - 0.2), F_2 = \frac{e R^2}{2r_2} (0.1t_1 - 0.2) = 5.7 \cdot 10^{-22} \text{ N},$$

sempre in senso orario;  $F = 0$  per  $t = 2 \text{ s}$ .

10.22 Nelle due maglie compaiono rispettivamente le f.e.m. indotte  $\dot{\varphi}_1 = \pi r_1^2 \alpha = 0.314 \text{ V}$ ,  $\dot{\varphi}_2 = \pi r_2^2 \alpha = 0.707 \text{ V}$ , che rappresentiamo in ciascuna maglia con quattro generatori equivalenti aventi i segni indicati e i valori  $\dot{\varphi}_1' = \dot{\varphi}_1/4$ ,  $\dot{\varphi}_2' = \dot{\varphi}_2/4$ . Le equazioni del circuito sono quindi:

$$\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2 = R_1 i_1 + R_2 i_2, \quad \dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_1 = R_2 i_2 + R_3 i_3, \quad i_2 = i_1 + i_3,$$

$$i_1 = 0.025 \text{ A}, \quad i_2 = 0.144 \text{ A}, \quad i_3 = 0.089 \text{ A};$$

$$R_1 i_1 = \Delta V(R_1) + \dot{\varphi}_1, \quad \Delta V(R_1) = R_1 i_1 - \dot{\varphi}_1 = 0.072 \text{ V}.$$

$$\Delta V(R_2) = R_2 i_2 - (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_1') = 0.087 \text{ V}, \quad \Delta V(R_3) = R_3 i_3 - \dot{\varphi}_2 = 0.268 \text{ V};$$

$$R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 + R_3 i_3^2 = 3 \dot{\varphi}_1 i_1 + 3 \dot{\varphi}_2 i_3 + (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) i_2 = 8.24 \cdot 10^{-2} \text{ W}.$$

10.23  $i_{s,0} = i_0 = 8.86 \mu\text{A} = 8.86 \cdot 10^{-6} \text{ A}$ ;  $j_{s,0} = i_{s,0}/\Sigma = 8.86 \cdot 10^{-5} \text{ A/m}^2$ ;  $[d\Phi(\mathbf{D})/dt]_{\text{max}} = i_{s,0} = 8.86 \cdot 10^{-6} \text{ A}$ ;  $[d\Phi(\mathbf{E})/dt]_{\text{max}} = i_{s,0}/\epsilon_0 = 10^6 \text{ Vm/s}$ ;

$$i_s = \frac{d\Phi(\mathbf{D})}{dt} = \frac{dq}{dt} = C \frac{d\varphi}{dt} = C \omega \varphi_0 \cos \omega t, \quad i_{s,0} = \frac{\epsilon_0 \Sigma}{d} \omega \varphi_0, \quad d = 2 \text{ mm};$$

$$R = \sqrt{\Sigma/\pi} = 0.178 \text{ m}, \quad 0 \leq r \leq R \quad B(r) = \frac{\mu_0 i_s r}{2\pi R^2}, \quad B_{\text{max}} = 5.59 \cdot 10^{-11} r \text{ T}.$$

$$R \leq r \quad B(r) = \frac{\mu_0 i_s}{2\pi r}, \quad B_{\text{max}} = \frac{1.77 \cdot 10^{-12}}{r} \text{ T}.$$

$$11.1 \quad Z_1 = R + i \omega L = 100 + i 157 = 186.1 e^{j57.5^\circ},$$

$$Z_2 = R + \frac{1}{i \omega C} = 100 - i 31.8 = 104.9 e^{-i 17.6^\circ}$$

$$I_1 = \frac{314 e^{i 0^\circ}}{186.1 e^{i 57.5^\circ}} = 1.67 e^{-i 57.5^\circ} = 0.90 - i 1.41, \quad I_2 = \frac{314 e^{i 0^\circ}}{104.9 e^{-i 17.6^\circ}} = 2.96 e^{i 17.6^\circ} =$$

$2.82 + i 0.90$  (si tralascia  $e^{i \omega t}$ , le grandezze sono espresse in V, A,  $\Omega$ );  
 $I = I_1 + I_2 = 3.72 - i 0.51 = 3.75 e^{-i 7.8^\circ}$ ; alternativamente

$$Z = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}, \quad I = \mathcal{E} / Z; \text{ la corrente totale ha il valore massimo } 3.75 \text{ A ed è sfasata}$$

rispetto a  $\mathcal{E}$  di  $7.8^\circ$  in ritardo;

$$V_A = i \omega L I_1 = 262.2 e^{i 32.5^\circ} = 221.4 + i 140.9,$$

$$V_B = \frac{1}{i \omega C} I_2 = 94.1 e^{-i 72.4^\circ} = 28.5 - i 89.7,$$

$V_A - V_B = 300.6 e^{i 50.1^\circ} = 192.9 + i 230.6$ : la d.d.p.  $V_A - V_B$  ha valore massimo 300.6 V ed è sfasata rispetto a  $\mathcal{E}$  di  $50.1^\circ$  in anticipo.

$$11.2 \quad \text{Impedenza totale } Z = i \omega L + \frac{i \omega L - \frac{1}{i \omega C}}{i \omega L + \frac{1}{i \omega C}} = i \omega L \frac{2 - \omega^2 L C}{1 - \omega^2 L C},$$

$$\text{impedenza del parallelo } Z' = \frac{i \omega L}{1 - \omega^2 L C}, \quad V_C - V_D = \frac{V_A - V_B}{Z} Z' = \frac{V_A - V_B}{2 - \omega^2 L C}.$$

$$2 - \omega^2 L C = 1, \quad \omega^2 = 1 / L C.$$

$$11.3 \quad Z = R + i \omega L = \frac{(R + i \omega L) \frac{1}{i \omega C}}{R + i \omega L + \frac{1}{i \omega C}}, \quad \text{la parte immaginaria è}$$

$$\omega L - \frac{\frac{L}{C} \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) + \frac{R^2}{\omega C}}{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} \quad \text{e si annulla se } \omega L = \frac{1}{\omega C};$$

$$\text{la parte reale è } R + \frac{\frac{L R}{C} - \frac{R}{\omega C} \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} \quad \text{e in risonanza vale } R + \frac{L}{C R}.$$

$$11.4 \quad Z = \frac{R_C \frac{1}{i \omega C}}{R_C + \frac{1}{i \omega C}} + \frac{R_L i \omega L}{R_L + i \omega L}; \quad \text{Imm}(Z) = -\frac{\omega R_C^2 C}{1 + \omega^2 R_C^2 C^2} + \frac{\omega L R_L^2}{R_L^2 + \omega^2 L^2}.$$

si annulla per  $\omega^2 = \frac{R_L^2}{L C R_C^2} - \frac{C R_C^2 - L}{C R_L^2 - L}$  : se  $R_C = R_L$   $\omega^2 = \frac{1}{LC}$ ,

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 10^6 \text{ rad/s.}$$

11.5 Sfasamento nullo vuol dire  $\text{Im } (Z) = 0$  a  $\omega = 314 \text{ rad/s}$ , deve essere

$$\omega^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2} ; I_R = \frac{2\epsilon}{R + i\omega L}, V_R = \frac{2\epsilon R}{R + i\omega L} \text{, in modulo deve essere}$$

$$\text{eguale a } \epsilon, L = \sqrt{3} \frac{R}{\omega} = 0.55 \text{ H, } C = 13.8 \mu\text{F.}$$

$$11.6 I_R = \frac{2\epsilon}{R + i\omega L} = 0.78 - i 1.35 = 1.56 e^{-j60^\circ}; V_{\text{eff}} = 220 \text{ V, } I_{\text{eff}} = 1.1 \text{ A,}$$

$P = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \phi = 121 \text{ W, } Q = 209.6 \text{ VAR, } S = 242 \text{ VA} = 2P$ ; connettendo il condensatore si porta a zero  $\phi$ :  $Z_{\text{tot}} = 398 \text{ W, } I_{\text{tot}} = 2\epsilon / Z_{\text{tot}} = 0.78 \text{ A, } I_{\text{eff}} = 0.55 \text{ A, } P = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} = 121 \text{ W, } Q = 0, S = P$ : su  $R$  viene spesa la stessa potenza.



**ONDE**

# Fenomeni ondulatori



## 12.1 Descrizione di un'onda. Equazione differenziale delle onde piane

La propagazione di una grandezza fisica tramite *onde* è uno dei fenomeni più caratteristici e importanti della Fisica. Abbiamo già incontrato alcuni esempi nel corso del primo volume, relativi alla propagazione di onde elastiche in una sbarra solida, in una corda tesa e in una colonna di gas, mentre un caso di onde legate a fenomeni elettromagnetici è stato trattato nel paragrafo 11.5.

Per comodità di consultazione i paragrafi dedicati alle onde nel primo volume sono riportati integralmente nel secondo paragrafo di questo capitolo e ne consigliamo una lettura attenta, in quanto vi sono esposte le prime nozioni fondamentali dei fenomeni ondulatori, cui faremo riferimento e che talvolta ripeteremo per maggior chiarezza, e vi sono ricavate molte formule necessarie per gli sviluppi successivi.

Diamo dunque per noti gli argomenti richiamati nel paragrafo 12.2 e iniziamo l'esposizione delle proprietà generali dei fenomeni ondulatori.

Le *onde elastiche* hanno bisogno di un mezzo materiale per propagarsi e la loro propagazione è dovuta all'interazione tra gli atomi o le molecole del mezzo: ad esempio un'onda sonora in un gas si trasmette attraverso gli urti tra le molecole. Però in nessuno dei casi citati la propagazione comporta un trasporto effettivo di materia: gli atomi o le molecole oscillano attorno ad una posizione di equilibrio. Vengono invece trasportate energia e quantità di moto, come si deduce dal fatto che l'arrivo di un'onda elastica può mettere in movimento un corpo materiale opportunamente collegato al mezzo in cui avviene la propagazione; su questo effetto sono basati strumenti capaci di rivelare la presenza di un'onda di pressione (*trasduttori*).

Di origine meccanica sono anche le *onde sismiche* generate nei terremoti e le *onde sulla superficie di un liquido*, che tratteremo nel paragrafo 12.6.

Esistono altri tipi di onde che non hanno bisogno di un mezzo materiale per propagarsi; tra queste vi sono le *onde elettromagnetiche* cui abbiamo accennato più volte e che saranno discusse nel capitolo 13. Sono onde elettromagnetiche quelle utilizzate nelle trasmissioni radiotelevisive, le onde luminose visibili, infrarosse e ultraviolette, i raggi X. Tali onde si propagano nel vuoto con velocità  $c = 3 \cdot 10^8$  m/s e possono attraversare anche mezzi materiali, nei quali la propagazione avviene con velocità sempre inferiore a  $c$ .

In generale si definisce come *onda* una qualsiasi perturbazione, impulsiva o periodica, che si propaga con una velocità ben definita. Le onde hanno origine da una sorgente, in cui si produce la perturbazione: questa può consistere in una vibrazione di un corpo materiale che mette in movimento le molecole di un mezzo (onde elastiche) o in un movimento di cariche elettriche (onde elettromagnetiche).

Da quanto detto si intuisce che la varietà dei fenomeni che danno luogo ad una propagazione ondosa è notevole. Vi sono però delle caratteristiche generali, comuni a tutti i tipi di onde, che ne permettono una descrizione matematica unificata.

Formalmente un'onda si riconduce alla perturbazione delle condizioni di equi-

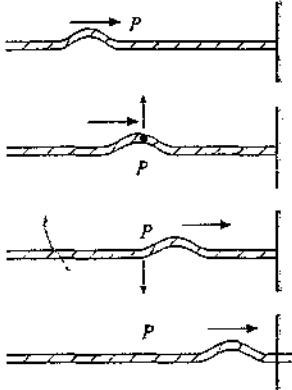


Figura 12.1

## Campo

librio di un campo che descrive una proprietà di un sistema fisico. Ricordiamo che con il nome di *campo* si indica una grandezza fisica che può essere definita in ogni istante in ciascun punto dello spazio.

La temperatura, la pressione, la densità di un fluido, pensato come un mezzo continuo, sono esempi già incontrati di campi, descrivibili mediante funzioni del tipo

$$T(x, y, z, t) , \quad p(x, y, z, t) , \quad \rho(x, y, z, t) .$$

Questi *campi* vengono detti *scalari* perché basta una sola funzione per definirli completamente: il valore del campo in un punto  $(x, y, z)$  in un certo istante  $t$  è quindi un numero.

Il campo elettrico e il campo magnetico  $\mathbf{E}(x, y, z, t)$ ,  $\mathbf{B}(x, y, z, t)$ , nel vuoto o in mezzi materiali, sono esempi di *campi vettoriali*; per definirli in un dato sistema cartesiano occorrono tre funzioni,

$$E_x(x, y, z, t) , \quad E_y(x, y, z, t) , \quad E_z(x, y, z, t) ,$$

$$B_x(x, y, z, t) , \quad B_y(x, y, z, t) , \quad B_z(x, y, z, t) .$$

Altri esempi di campi vettoriali sono il campo delle velocità in un fluido  $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ , che diventa  $\mathbf{v}(x, y, z)$  in regime stazionario, e il campo gravitazionale  $\mathbf{G}$ .

Un'onda sonora è una perturbazione dello stato di equilibrio della pressione e della densità che si propaga in un gas; un'onda elastica in una sbarra è una deformazione locale, rappresentabile con uno spostamento dalla posizione di equilibrio di una sezione della sbarra e con una variazione di pressione, che si propaga lungo la sbarra stessa; un'onda elettromagnetica è una perturbazione del campo elettrico e del campo magnetico, prodotta da cariche in moto, che si propaga nello spazio circostante. Si ipotizza, anche se non c'è ancora una verifica sperimentale sicura, che variazioni nella distribuzione spaziale di una massa diano luogo a una perturbazione del campo gravitazionale  $\mathbf{G}$  che si dovrebbe propagare nello spazio sotto forma di *onde gravitazionali*, con velocità nel vuoto eguale a  $c$ .

La perturbazione di un campo che, prodotta da una sorgente, si propaga nello spazio viene rappresentata con la funzione  $\xi(x, y, z, t)$ , detta *funzione d'onda*. Il simbolo  $\xi$  può rappresentare sia lo spostamento di un elemento del sistema dalla posizione di equilibrio, che ha luogo in tutte le onde elastiche, che una variazione  $\Delta p$  di pressione o  $\Delta \rho$  di densità e anche una forza  $F$  o una potenza  $P$ . A partire dal paragrafo 12.3 utilizzeremo la lettera  $\xi$  per le discussioni generali e ci serviremo di un simbolo specifico per le singole grandezze (ad esempio  $s$  per gli spostamenti).

Una situazione particolare, che comprende tutte quelle finora studiate, è costituita dalle cosiddette *onde piane*, descritte dalla funzione  $\xi(x, t)$ , spazialmente *unidimensionale*, cioè dipendente dalla sola coordinata spaziale  $x$  oltre che dal tempo. Il nome di onda piana deriva dal fatto che la perturbazione in un certo istante  $t_0$  assume lo stesso valore  $\xi(x_0, t_0)$  in tutti i punti del piano di equazione  $x = x_0$ , ortogonale all'asse di propagazione  $x$  e quindi parallelo al piano  $y, z$ .

Limitandoci per ora a considerare soltanto onde piane, abbiamo trovato che la funzione d'onda soddisfa sempre all'equazione differenziale

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad \text{ovvero} \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} , \quad (12.1)$$

## Equazione delle onde piane

che è detta appunto *equazione delle onde piane* o *equazione di d'Alembert*; il coefficiente  $v^2$  è il quadrato della velocità di propagazione.

La (12.1) è una equazione differenziale alle derivate parziali del secondo ordine, omogenea, a coefficienti costanti, *lineare* nella funzione incognita  $\xi$  (questa cioè compare soltanto alla prima potenza). L'origine fisica della proprietà di linearità, nel caso delle onde elastiche, risiede nel fatto che i fenomeni sono dovuti a piccole perturbazioni che provocano piccoli spostamenti dallo stato di equilibrio. Chiaramente esistono situazioni diverse, che possono dare origine a equazioni non lineari, anche se i fenomeni più comuni, come le onde sonore, rientrano nell'ambito descritto matematicamente dalla (12.1). Nel caso delle onde elettromagnetiche la linearità deriva dalla linearità delle equazioni di Maxwell.

Si dimostra che le funzioni soluzioni di (12.1) possono essere di qualsiasi tipo, però la dipendenza dalle variabili  $x$  e  $t$  deve assumere una delle due forme

$$\xi(x-vt), \xi(x+vt) \quad \text{ovvero} \quad \xi\left(t-\frac{x}{v}\right), \quad \xi\left(t+\frac{x}{v}\right), \quad (12.2)$$

L'argomento di  $\xi$  deve cioè contenere le variabili  $x$  e  $t$  sotto forma di combinazione lineare. Pertanto

$$\xi = (x-vt)^2, \quad \xi = \xi_0 \operatorname{senk}(x-vt), \quad \xi = \xi_0 e^{k(x+vt)}$$

sono tutte possibili soluzioni di (12.1), mentre non lo sono  $\xi = xvt$ ,  $\xi = x/vt$  e simili.

Nel paragrafo 9.10 del primo volume, richiamato nel paragrafo 12.2, si è dimostrato direttamente che le funzioni tipo (12.2) sono soluzioni di (12.1); accettiamo senza dimostrazione che si tratti delle sole soluzioni. Dalla linearità di (12.1) segue inoltre che la somma di due soluzioni è ancora soluzione. La soluzione più generale di (12.1) si ottiene quindi come

$$\xi(x, t) = \xi_1(x-vt) + \xi_2(x+vt), \quad (12.3)$$

cioè come somma delle soluzioni indipendenti (12.2).

Il significato fisico delle funzioni (12.2) sta nel fatto che esse rappresentano, per via della loro struttura, un *fenomeno di propagazione* lungo l'asse  $x$  con velocità  $v$ . Riprendendo quanto già visto nel suddetto paragrafo 9.10, il valore  $\xi_0$  assunto dalla funzione  $\xi$  all'istante  $t_0$  nella posizione  $x_0$ ,  $\xi_0 = \xi(x_0 - vt_0)$ , si ritrova in qualsiasi istante successivo  $t > t_0$  nel punto  $x$  che soddisfa alla condizione

$$x - vt = x_0 - vt_0 \quad \text{ovvero} \quad x = x_0 + v(t - t_0),$$

relazione che esprime un moto rettilineo lungo l'asse  $x$  con velocità  $v$ . Analogamente  $\xi(x+vt)$  rappresenta una grandezza che si propaga con velocità  $v$  lungo il verso negativo dell'asse  $x$ . In entrambi i casi si tratta di una *traslazione rigida*, nel senso che la funzione non cambia mai forma (si riveda la figura 8.19 del paragrafo 12.2). Questa invarianza della forma durante la propagazione è una caratteristica delle singole funzioni che sono soluzioni di (12.1).

### Esempio 12.1

Una perturbazione che si propaga in una corda tesa ha l'espressione

$$\xi = \frac{10^{-2}}{(x-2t)^2 + 1}$$

Essa rappresenta lo spostamento trasversale dei punti della corda. Trovare la forma della

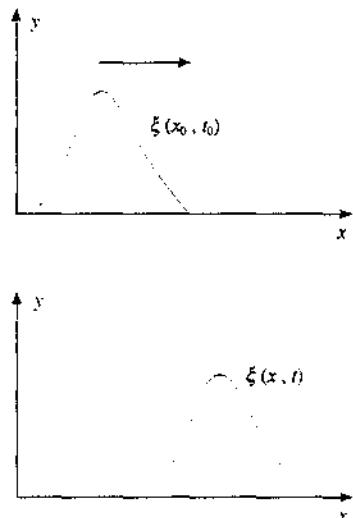


Figura 12.2

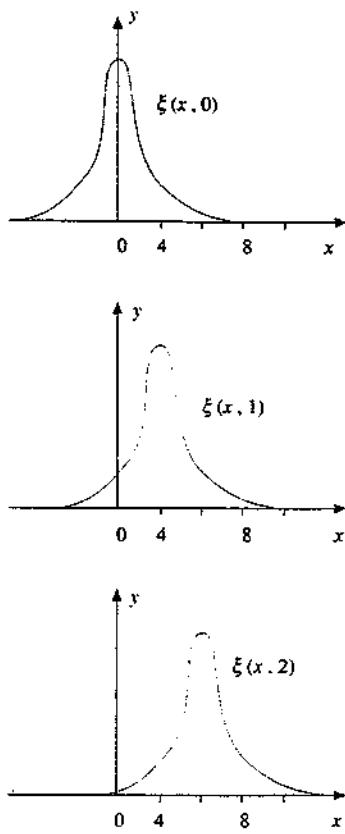


Figura 12.3 (Esempio 12.1)

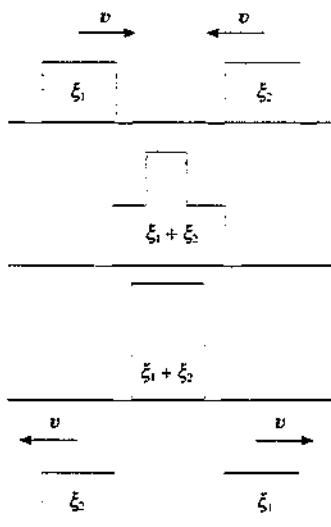


Figura 12.4

corda per  $t = 0$ ,  $t = 1$ ,  $t = 2$ .  $\xi$  e  $x$  sono espresse in metri,  $t$  in secondi.

### Soluzione

Osserviamo innanzitutto che la funzione è del tipo  $\xi(x - vt)$  e che la velocità di propagazione, lungo l'asse  $x$  positivo, è di 2 m/s. Nei diversi istanti la funzione ha le espressioni:

$$\begin{aligned} t = 0 \quad \xi(x, 0) &= \frac{10^{-2}}{x^2 + 1}, \\ t = 1 \quad \xi(x, 1) &= \frac{10^{-2}}{(x - 2)^2 + 1}, \\ t = 2 \quad \xi(x, 2) &= \frac{10^{-2}}{(x - 4)^2 + 1}. \end{aligned}$$

Si tratta di curve che hanno tutte la stessa forma, ottenute una dall'altra con una traslazione  $x' = x + a$ , dove  $a = 0, 2, 4$ .

Abbiamo già detto che la somma di due funzioni tipo (12.2) è soluzione dell'equazione delle onde (12.1): la *sovraffosizione* di due onde è ancora un'onda che si ottiene in ogni istante e in ogni punto effettuando l'operazione di somma. Se ciò avviene vuol dire che due onde, anche se agiscono insieme, restano indipendenti, non vengono modificate l'una dalla presenza dell'altra, perché se così fosse il risultato non sarebbe la semplice somma delle due perturbazioni, ciascuna considerata come se l'altra non ci fosse.

Una situazione che permette di verificare queste affermazioni è mostrata nella figura 12.4. In una corda tesa due onde  $\xi_1(x - vt)$  e  $\xi_2(x + vt)$  si propagano in versi opposti; la forma delle onde è eguale. Quando esse si sovrappongono ciò che si osserva è proprio la somma  $\xi_1 + \xi_2$  e quando la sovrapposizione cessa le onde continuano a propagarsi come facevano prima della sovrapposizione. Nella figura 12.4  $\xi_1$  e  $\xi_2$  hanno lo stesso segno e l'onda risultante è maggiore delle due considerate singolarmente, nella figura 12.5 i segni sono opposti e durante la sovrapposizione si ha elisione completa.

Le onde che soddisfano (12.1) obbediscono dunque al *principio di sovrapposizione*; abbiamo incontrato lo stesso risultato in altre situazioni regolate da equazioni differenziali lineari, come sono l'equazione del moto armonico e le stesse equazioni di Maxwell.

La sovrapposizione di due o più onde in una regione dello spazio può dar luogo, in particolari condizioni, ai *fenomeni di interferenza* che studieremo nel capitolo 15.

## 12.2 Richiamo sulle onde elastiche

In questo paragrafo sono riportati integralmente i paragrafi del capitolo 9 del primo volume dedicati alla propagazione di onde piane elastiche. Il primo caso esaminato è quello di una *sbarra solida* sollecitata ad una estremità. La formula (7.2) cui si fa riferimento dà la deformazione  $d\xi$  di un elemento di sbarra lungo  $dx$  quando è applicata la forza  $F$ :

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{E} \frac{F}{S} \quad (7.2)$$

$S$  è la sezione della sbarra,  $E$  il modulo di elasticità detto anche modulo di Young.

Il secondo esempio di propagazione è quello in una *corda tesa*. Si tratta sempre di un sistema unidimensionale; nel fenomeno non interviene nessuna costante elastica, è sufficiente che la corda sia sottoposta a una tensione meccanica  $T$ .

Infine il terzo esempio riguarda le onde nei gas, precedute da un richiamo sulle proprietà elastiche dei gas.

## 9.10 Introduzione ai fenomeni ondulatori

Le realizzazioni meccaniche di un oscillatore armonico alle quali abbiamo fatto riferimento sono il punto materiale attaccato ad una molla, in cui l'oscillazione è dovuta alla forza elastica della molla, il pendolo di torsione, dove agisce il momento elastico di torsione del filo, e i pendoli che oscillano a causa della forza peso: a questi possiamo assimilare la massa d'acqua oscillante dell'esempio 9.6. In qualche caso l'oscillazione è armonica anche se ampia, in altri l'ampiezza deve essere limitata, altrimenti il moto è oscillatorio, ma non armonico. Bisogna poi nella pratica forzare l'oscillazione che viene smorzata dai vari effetti dissipativi sempre presenti.

Caratteristica comune dei suddetti dispositivi è il fatto che l'oscillazione sia, per così dire, macroscopica. Tutto il sistema nel suo insieme oscilla e nel fenomeno non entrano in modo determinante proprietà legate alla struttura microscopica.

Gli esempi citati, e i molti altri di natura simile, non esauriscono le possibilità di produzione di moti oscillatori, in particolare armonici. Oscillazioni locali, sia armoniche che qualsiasi, possono essere provocate in una zona specifica di un corpo continuo elastico, solido o fluido (che viene chiamato *mezzo*). Facciamo tre esempi:

- in un punto della superficie di una massa d'acqua in quiete viene fatto oscillare verticalmente un piccolo corpo;
- ad una estremità di un tubo pieno d'aria viene fatta vibrare una membrana (come quella di un altoparlante);
- la base di una sbarra metallica viene colpita da una piccola punta.

Nel primo esempio, che è quello visivamente più immediato, si osserva che l'oscillazione del corpo provoca un'oscillazione dell'acqua (innalzamento e abbassamento locale della superficie) che non resta localizzata, ma si allontana con simmetria circolare dal centro. Nel secondo, se si mette all'altro estremo del tubo un opportuno rivelatore di vibrazioni (come un microfono) si trova che esso entra in vibrazione con un certo ritardo rispetto all'istante in cui ha iniziato a vibrare la membrana. Analogamente nel terzo esempio una puntina appoggiata all'altra estremità della sbarra si mette a vibrare. Come nel primo caso, ciò che avviene nel gas e nel metallo è che il movimento della membrana o della punta causa il movimento degli elementi contigui del mezzo elastico e che questi a loro volta interagiscono con altri elementi a loro contigui mettendoli in movimento e così via.

Questa volta non abbiamo un movimento macroscopico di materia, il mezzo nel suo complesso resta fermo. Invece l'oscillazione, indotta localmente dall'esterno, si propaga nel mezzo: i vari elementi del mezzo oscillano attorno alla loro posizione di equilibrio, con un certo ritardo rispetto alla *sorgente* che dipende dalla distanza dalla sorgente e dalla velocità di propagazione. Un fenomeno di questo tipo viene chiamato *ondulatorio* e l'oscillazione che si propaga nel mezzo con una ben definita velocità costituisce un'onda.

Nel seguito descriviamo alcune caratteristiche distintive, sia fisiche che matematiche, dei fenomeni ondulatori. L'argomento, che è di fondamentale importanza in tutti i campi della Fisica, verrà ripreso e trattato a fondo nel secondo volume.

Premettiamo che limiteremo le nostre considerazioni al caso unidimensionale, in cui la propagazione avviene lungo una determinata direzione, ad esempio l'asse  $x$  (quindi non ci occuperemo più di situazioni come quella del primo esempio). L'oscillazione, che chiamiamo perturbazione (del mezzo), può essere una qualsiasi funzione  $f(x, t)$  della posizione e del tempo. In particolare  $f(0, t)$ , cioè la funzione nell'origine che supponiamo coincidente con la sorgente, dà l'oscillazione iniziale, che dipende dalla sollecitazione esterna; si può trattare di una funzione impulsiva, con una forma come quella della figura 9.20, oppure periodica, per esempio sinusoidale:  $f(0, t) = A \sin(\omega t + \phi)$ .

Riprendiamo il terzo esempio e la funzione  $f$  sia lo spostamento  $\xi$  dalla posizione di equilibrio degli elementi della base della sbarra metallica colpita impulsivamente da una punta:  $f(0, t) = \xi(0, t)$  rappresenta ciò che vede al passare del tempo un osservatore nell'origine; la base si sposta di una certa quantità, normalmente molto piccola, e poi torna nella configurazione iniziale (tutto ciò senza che la sbarra nel suo insieme si muova). Analogamente  $f(x, t)$  rappresenta l'andamento temporale della perturbazione in una diversa posizione  $x$ ; se assu-

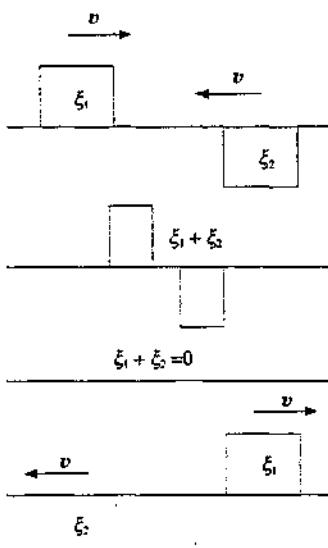


Figura 12.5

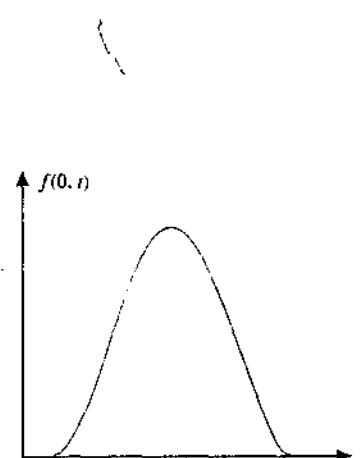


Figura 9.20

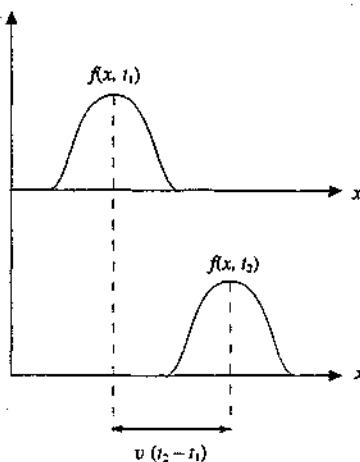


Figura 9.21

Equazione delle onde piane

miamo che la perturbazione si propaghi senza subire deformazioni, la forma in funzione del tempo deve essere la stessa. La figura 9.20 è quindi la stessa in qualsiasi posizione dell'asse  $x$ , con questa avvertenza: un osservatore in  $x_1$  vede la perturbazione con un ritardo rispetto all'osservatore nell'origine dato dal tempo  $x_1/v$ , essendo  $v$  la velocità di propagazione dell'onda.

Diverso è il significato di  $f(x, t_1)$ : ora si tratta dei valori che la perturbazione assume nei vari punti dell'asse  $x$  ad un certo istante (è la fotografia istantanea di  $f$ ). Nella parte alta della figura 9.21 è mostrata  $f(x, t_1)$ : in quell'istante c'è una posizione  $x$  particolare in cui la perturbazione è massima, mentre subito prima e dopo si ha un andamento decrescente e nel resto dell'asse non si ha nessuna perturbazione. Nella parte bassa della figura si vede la perturbazione in un istante successivo  $t_2$ : essa interessa con le stesse modalità un'altra zona dell'asse  $x$ , mentre la zona precedente è ora imperturbata; la distanza tra i due massimi è  $v(t_2 - t_1)$ .

Come vedremo nei paragrafi successivi in cui trattiamo casi specifici, ogni qual volta si verificano le condizioni per la propagazione si trova che la perturbazione soddisfa all'equazione differenziale, detta *equazione delle onde*.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \quad (9.29)$$

Questo vuol dire che la funzione  $f$ , per rappresentare un fenomeno ondulatorio, deve avere una proprietà precisa: la derivata seconda rispetto allo spazio deve essere proporzionale alla derivata seconda rispetto al tempo (il coefficiente deve avere le dimensioni dell'inverso di una velocità al quadrato e per questo viene scritto  $1/v^2$ ).

Si dimostra che una funzione  $f$  con tale proprietà, e quindi soluzione di (9.29), ha una particolare dipendenza dallo spazio e dal tempo: precisamente l'argomento di  $f$  deve avere la struttura  $x - vt$  o  $x + vt$ . La funzione  $f$  cioè non può dipendere dal prodotto  $xt$  o dal rapporto  $x/t$ , tanto per fare due esempi, ma deve dipendere dalla combinazione lineare delle due variabili. Pertanto

$$\sin k(x - vt) \quad , \quad e^{-k(x+vt)} \quad , \quad 1/(x - vt)^2$$

sono possibili soluzioni della (9.29), mentre non lo sono

$$(x^2 + v^2 t^2) \quad , \quad x vt \quad , \quad x^3/v^2 t^2$$

Possiamo dire che (9.29) non è una condizione sulla forma della funzione (come abbiamo trovato nelle altre equazioni differenziali finora incontrate), bensì *una condizione sull'argomento della funzione*, la quale può invece avere qualsiasi forma.

È semplice verificare che la funzione  $f(x - vt)$  è soluzione di (9.29). Infatti, posto  $z = x - vt$ , per cui  $\partial z / \partial x = 1$  e  $\partial z / \partial t = -v$ , si ha:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f(z) &= \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z} \quad , \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(z) = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad , \\ \frac{\partial}{\partial t} f(z) &= \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = -v \frac{\partial f}{\partial z} \quad , \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(z) = -v \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \frac{\partial z}{\partial t} = v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad , \end{aligned}$$

e quindi  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(z) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(z)$  sono eguali. Nello stesso modo si prova che  $g(x + vt)$  è soluzione. Dalla dimostrazione si ha la conferma che la forma effettiva di  $f$  non ha influenza sul risultato.

È invece argomento dei casi di Analisi Matematica la prova che solo le funzioni  $f(x - vt)$  e  $g(x + vt)$  sono soluzioni, cioè che non esistono altre soluzioni diverse. Si dimostra anche che la soluzione più generale di (9.29) è data dalla somma

$$G(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt)$$

Discussiamo ora il significato fisico della funzione  $f(x - vt)$ , soluzione di (9.29). Consideriamo un valore costante dell'argomento, supponiamo cioè che sia  $x - vt = k$ , e chia-

miamo  $F$  il valore della funzione:  $F = f(k)$ . È chiaro che la funzione  $f$  assume il valore  $F$  in tutti i punti dell'asse  $x$  che soddisfano alla condizione

$$x = k + vt \quad ,$$

equazione di un moto uniforme lungo il verso positivo dell'asse  $x$ . Quindi al tempo  $t = 0$   $f$  vale  $F$  nel punto  $x = k$ , al tempo  $t_1$ ,  $f$  vale  $F$  nel punto  $x_1 = k + vt_1$  e così via. Concludiamo che una funzione  $f(x - vt)$  rappresenta un fenomeno che si propaga lungo il verso positivo dell'asse  $x$  con velocità  $v$ , senza subire deformazioni; possiamo paragonare questo moto ad una traslazione rigida, per citare una situazione che conosciamo. Analogamente  $g(x + vt)$  rappresenta una propagazione lungo il verso negativo dell'asse  $x$ . Si capisce così perché (9.29) sia chiamata equazione delle onde e si chiarisce anche il significato della costante  $v$  che compare nella (9.29): è la velocità di propagazione della perturbazione.

Più esattamente l'equazione differenziale (9.29) è detta *equazione delle onde piane*, per il fatto che la funzione  $f$ , dipendendo solo da  $x$ , ha lo stesso valore nei punti di un piano ortogonale all'asse  $x$  (piano  $y, z$ ).

Nei paragrafi che seguono trattiamo tre casi classici di onde elastiche: le onde che si propagano lungo una sbarra solida, lungo un filo teso e lungo una colonna di gas. Alla fine discuteremo alcune ulteriori proprietà dei fenomeni ondulatori.

### 9.11 Onde elastiche in una sbarra solida

Supponiamo di deformare il tratto iniziale di una sbarra solida applicando una forza impulsiva; tale tratto iniziale, compresso dalla forza, successivamente si dilata comprimendo l'elemento contiguo e questo fenomeno, dovuto alle proprietà elastiche del mezzo, interessa via via tutta la sbarra fino a raggiungere l'altro estremo. Vogliamo dare una veste matematica a questa propagazione di una perturbazione elastica e calcolarne la velocità.

Consideriamo un elemento di sbarra a distanza  $x$  dall'estremo colpito e lungo  $dx$ ; nella figura 9.22 esso è rappresentato come un cilindretto di base  $S$ , sezione della sbarra, e altezza  $dx$ . Sulle due basi di questo cilindretto agiscono le forze  $F(x)$  e  $F(x + dx)$  esercitate rispettivamente dagli elementi di sbarra che stanno a sinistra e a destra del cilindretto. Nel processo di propagazione la forza  $F$  non è costante lungo la sbarra, ma varia sia lungo l'asse  $x$  che nel tempo.

Sotto l'azione di queste forze ogni sezione cambia, seppur di poco, posizione; indichiamo con  $\xi(x, t)$  la funzione che descrive lo spostamento dalla posizione iniziale, all'ascissa  $x$  e al tempo  $t$ , e con  $\xi(x + dx, t)$  lo spostamento nello stesso istante all'ascissa  $x + dx$ . Le configurazioni del cilindretto sono mostrate in figura 9.23, la lunghezza, che era  $dx$ , diventa

$$x + dx + \xi(x + dx, t) - x - \xi(x, t) = dx + d\xi$$

in quanto  $\xi(x + dx, t) = \xi(x, t) + d\xi$ . L'allungamento relativo del cilindretto è  $d\xi/dx$  o, meglio,  $\partial\xi/\partial x$ : il simbolo di derivata parziale evidenzia che stiamo considerando una variazione solo rispetto a  $x$  e non rispetto al tempo. Dalla (7.2) abbiamo quindi:

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} = \frac{1}{E} \frac{F}{S} \Rightarrow F(x) = ES \frac{\partial\xi}{\partial x}$$

Utilizzando questa relazione possiamo scrivere la risultante delle forze che agiscono sul cilindretto come

$$F(x + dx) - F(x) = \frac{\partial F}{\partial x} dx = ES \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx$$

D'altra parte il moto del cilindretto, di massa  $dm = \rho S dx$ , avviene con accelerazione  $a = \partial^2 \xi / \partial t^2$  e, per la legge di Newton,

$$ES \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx = \rho S \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} dx$$

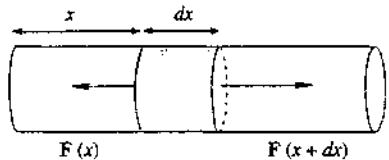


Figura 9.22

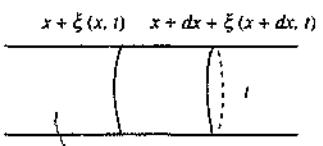
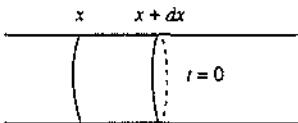


Figura 9.23

In definitiva si ottiene l'equazione

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}, \quad (9.30)$$

avendo indicato con

Velocità di propagazione

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (9.31)$$

una grandezza che ha necessariamente le dimensioni di una velocità.

Abbiamo così trovato che lo spostamento  $\xi$  dalla posizione di equilibrio dei punti di una sezione della sbarra sollecitata ad una estremità obbedisce all'equazione delle onde (9.29): lungo la sbarra si ha un'onda di spostamento, con velocità di propagazione (9.31) che dipende dalle proprietà elastiche ( $E$ ) e di inerzia ( $\rho$ ) della sbarra.

#### Esempio 9.8

Le densità di alluminio, ferro, piombo, rame, sono, rispettivamente,  $2.7 \cdot 10^3$ ,  $7.9 \cdot 10^3$ ,  $11.4 \cdot 10^3$ ,  $9.0 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ . Calcolare le velocità di propagazione di un'onda elastica in una sbarra costituita da tali metalli.

#### Soluzione

Nella tabella 7.1 si trovano i valori del modulo di Young, che riportiamo nell'ordine:  $0.7 \cdot 10^{11}$ ,  $2.0 \cdot 10^{11}$ ,  $0.14 \cdot 10^{11}$ ,  $1.1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$ . Da (9.31) abbiamo:  $v_{Al} = 5090$ ,  $v_{Fe} = 5030$ ,  $v_{Pb} = 1110$ ,  $v_{Cu} = 3500 \text{ m/s}$ .

Insieme allo spostamento  $\xi$  dalla posizione di equilibrio si propaga lungo la sbarra anche la forza  $F$ . Infatti dalla relazione  $F = ES \frac{\partial \xi}{\partial x}$  e da (9.30) si ricava:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = ES \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} = ES \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = ES v^2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

dove il secondo passaggio è reso possibile dal noto teorema di analisi secondo cui una derivata mista non dipende dall'ordine con cui si eseguono le derivate. Inoltre

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = ES \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} = ES \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

e si conclude che

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$$

Lungo la sbarra abbiamo anche un'onda di forza o, meglio, di pressione se ricordiamo che nei processi di compressione è significativo il rapporto  $F/S$ .

Sia lo spostamento  $x$  ( $x \mp vt$ ) che la forza  $F$  ( $x \mp vt$ ), che descrivono le onde che si propagano lungo l'asse  $x$ , sono paralleli a questo asse. Onde che hanno una tale proprietà si dicono *longitudinali*.

Onda longitudinale

### 9.12 Onde in una corda tesa

Quando si sposta rapidamente l'estremità di una corda tesa, che abbia ad esempio l'altra estremità fissa, come in figura 9.24, si ha una perturbazione che si propaga lungo la corda, visualizzata da una *gobba* che si sposta progressivamente da un'estremità all'altra. Anche in questo caso lo spostamento dalla posizione di equilibrio si manifesta dapprima nell'estremo in cui si esercita la perturbazione esterna e successivamente e progressivamente negli altri punti della corda.

Supponiamo di spostare di poco la corda dalla sua posizione di equilibrio, coincidente con l'asse  $x$ , e di chiamare  $\xi(x, t)$  la funzione che descrive lo spostamento dall'equilibrio. Consideriamo un piccolo tratto di corda  $dl$  sottoposto ad una tensione  $T$  che agisce ad entrambi gli estremi e siano  $\alpha$  e  $\alpha'$  gli angoli formati con l'asse  $x$  dalla tangente all'elemento  $dl$  negli estremi, ovvero dalla tensione  $T$ . La risultante delle forze di tensione agenti su  $dl$  ha una componente parallela all'asse  $x$  e una all'asse  $y$ :

$$F_x = T(\cos\alpha' - \cos\alpha) ,$$

$$F_y = T(\sin\alpha' - \sin\alpha) .$$

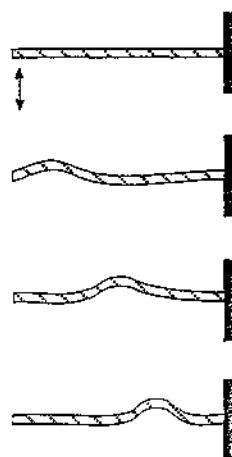


Figura 9.24

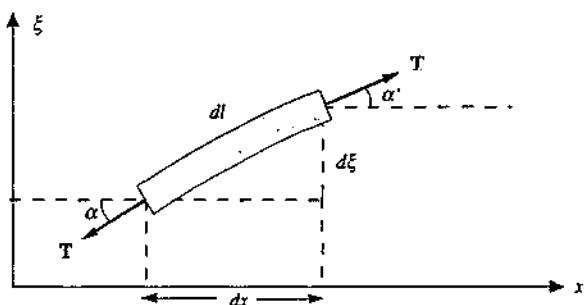


Figura 9.25

Se gli spostamenti della corda sono piccoli, come abbiamo ipotizzato, anche la curvatura della corda è piccola: allora nello sviluppo in serie delle funzioni

$$\sin\alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \dots , \quad \cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \dots ,$$

$$\tan\alpha = \alpha + \frac{\alpha^3}{3!} + \dots ,$$

si possono trascurare tutti i termini di ordine superiore al primo. Di conseguenza

$$\sin\alpha = \tan\alpha = \alpha , \quad \sin\alpha' = \tan\alpha' = \alpha' ,$$

$$\cos\alpha = 1 , \quad \cos\alpha' = 1$$

e per le componenti della forza agente sull'elemento  $dl$  si ottiene

$$F_x = 0 , \quad F_y = T(\tan\alpha' - \tan\alpha) = T \frac{\partial}{\partial x} (\tan\alpha) dx ,$$

ammettendo che, a causa della piccolezza di  $dx$ ,  $\alpha$  e  $\alpha'$  siano poco diversi così che

$$\tan\alpha' = \tan\alpha + \frac{\partial}{\partial x} (\tan\alpha) dx .$$

Il risultato  $F_x = 0$  dice che non c'è spostamento lungo la direzione della corda ovvero che

il moto di ogni elemento di corda avviene in direzione perpendicolare all'asse  $x$  sotto l'azione della forza  $F_y$ . Poiché, come si vede in figura 9.25 e come discende dalla definizione di derivata,  $\tan \alpha = \partial \xi / \partial x$ , abbiamo

$$F_y = T \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx .$$

La massa dell'elemento di corda  $dl$  è

$$dm = \rho S dl = \rho S \frac{dx}{\cos \alpha} = \rho S dx = \rho_i dx ,$$

indicando con  $\rho_i = dm/dx = \rho S$  la *densità lineare di massa* (paragrafo 6.3), costante se la corda è omogenea ( $\rho$  = costante) e calibra ( $S$  = costante, sezione della corda). L'accelerazione dello stesso elemento è  $a = \partial^2 \xi / \partial t^2$  e, per la legge di Newton,

$$T \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx = \rho_i dx \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho_i} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} ,$$

che è ancora la (9.29); la velocità di propagazione risulta data da

Velocità di propagazione

$$v = \sqrt{\frac{T}{\rho_i}} . \quad (9.32)$$

Lo spostamento trasversale, provocato in un estremo della corda, si propaga lungo la corda con una velocità  $v$ , che dipende dalla tensione della corda e dalla massa per unità di lunghezza.

In un filo di acciaio di raggio 1 mm e  $\rho_i = 0.025 \text{ kg/m}$ , se  $T = 10 \text{ N}$ , risulta  $v \approx 20 \text{ m/s}$ .

Osserviamo che le approssimazioni fatte per  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$ ,  $\tan \alpha$  non sono particolarmente stringenti: fino a  $15^\circ$   $\sin \alpha$  differisce da  $\tan \alpha$  al più del 3.5%, come del resto della stessa percentuale  $\cos \alpha$  differisce da 1.

Onda trasversale

L'*onda di spostamento* lungo la corda si dice *trasversale* poiché la grandezza che si propaga giace in un piano perpendicolare alla direzione di propagazione.

### 9.13 Proprietà elastiche dei gas. Onde nei gas

Abbiamo descritto nel paragrafo 7.5 le proprietà elastiche di un fluido e introdotto con la (7.8) il modulo di compressibilità  $\beta$ , considerando anche esplicitamente un gas che segua la legge isotermica di Boyle.

Riprendiamo la definizione di modulo di compressibilità:

$$\frac{dV}{V} = -\frac{1}{\beta} dp \Rightarrow \beta = -V \frac{dp}{dV} .$$

A una variazione di volume si accompagna una variazione di densità e poiché  $V\rho = m$  = costante abbiamo

$$\Rightarrow \rho dV + V d\rho = 0 \Rightarrow \frac{dV}{V} = -\frac{d\rho}{\rho} .$$

Segue che il *modulo di compressibilità* si può scrivere

$$\beta = \rho \frac{dp}{d\rho} . \quad (9.33)$$

e questa è la definizione termodinamica di modulo di compressibilità. Il valore di  $\beta$  dipende da come la pressione varia con la densità, cioè dalla forma della funzione  $p(\rho)$ .

In un gas ideale, se il processo di compressione è isotermo abbiamo già ricavato nel paragrafo 7.5 la (7.10), che riscriviamo:

$$\beta_T = p \quad ,$$

dove con la lettera  $T$  vogliamo ricordare che la relazione è vera solo se la temperatura rimane costante.

Vedremo nel capitolo 11 che per mantenere un gas a temperatura costante sono necessari scambi di calore tra il gas e l'ambiente esterno. Un processo di compressione o di espansione può però essere molto rapido, così da non consentire scambi di calore; si parla di questo caso di condizioni adiabatiche e la (7.10) non è più valida. Anticipando un risultato del paragrafo 11.6, diciamo che in un processo adiabatico di un gas ideale vale la legge di Poisson  $pV^\gamma = \text{costante}$ , invece della legge isoterna di Boyle. La grandezza  $\gamma$  è una costante caratteristica del tipo di gas. Procedendo come nel paragrafo 7.5 abbiamo:

$$pV^\gamma = \text{costante} \Rightarrow p/\rho^\gamma = \text{costante} \Rightarrow p = C\rho^\gamma \quad ,$$

$$\frac{dp}{d\rho} = \gamma C \rho^{\gamma-1} = \frac{\gamma C \rho^\gamma}{\rho} = \frac{\gamma p}{\rho} \quad ,$$

$$\beta_s = \gamma p \quad . \quad (9.34)$$

Modulo di compressibilità adiabatica

Viene così definito il *modulo di compressibilità adiabatica*, sempre maggiore del modulo di compressibilità isoterna  $\beta_T$  essendo  $\gamma$  sempre maggiore di uno.

Alla pressione atmosferica  $p = 1.013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$  e alla temperatura  $T = 273.15 \text{ K}$  e considerando l'aria come un gas ideale biammonico ( $\gamma = 1.4$ , vedi paragrafo 11.5) abbiamo

$$\beta_s = 1.418 \cdot 10^5 \text{ Pa} \quad , \quad \beta_T = 1.013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

(il valore citato della temperatura, espresso in kelvin, corrisponde a  $0^\circ\text{C}$ ; parleremo della temperatura e delle sue unità di misura nel capitolo 10).

### Propagazione di onde in un gas

Abbiamo constatato che un gas è un sistema con notevoli proprietà elastiche. È quindi naturale che come una perturbazione elastica si propaga in una sbarra solida (paragrafo 9.11), così si debba propagare in un gas. La velocità di propagazione nella sbarra è data da (9.11),

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad ,$$

che, come già rilevato, evidenzia la dipendenza del fenomeno dalla proprietà elastica del materiale, descritta dal modulo di Young  $E$ , e dalla densità, cioè dalla massa per unità di volume, come è prevedibile trattandosi pur sempre del moto di particelle con una certa massa a cui è stata applicata la legge di Newton. Per un gas ci attendiamo

$$v = \sqrt{\frac{\beta}{\rho}}$$

essendo  $\beta$  il modulo di compressibilità (adiabatico o isotermo).

Per verificare che anche in un gas si ha un fenomeno di propagazione regolato da un'equazione tipo (9.29), consideriamo una massa di gas contenuta in un lungo tubo a pareti rigide, disposto lungo l'asse  $x$ , e indichiamo con  $\rho_0$  e  $p_0$  i valori di equilibrio della densità e della pressione. Con il rapido spostamento di un pistone o di una membrana elastica si comprime il volumetto di gas immediatamente adiacente alla sorgente della perturbazione, producendo una variazione locale  $d\rho$  della densità e  $dp$  della pressione: la variazione di pressione determina un movimento del gas che comporta la compressione dell'elemento di gas con-

tiguo. In tal modo le perturbazioni  $d\rho$  e  $dp$  vengono trasmesse da un elemento al successivo; la descrizione matematica di questo meccanismo ci porterà all'equazione tipica della propagazione.

Supponiamo che le variazioni di densità e pressione siano piccole: i rispettivi valori modificati si scrivono allora

$$\rho = \rho_0 + d\rho, \quad p = p_0 + dp;$$

inoltre siano piccoli gli spostamenti dalla posizione di equilibrio, indicati dalla funzione  $s(x, t)$ , così come la derivata di questa funzione rispetto a  $x$ ,  $\partial s / \partial x$ .

Consideriamo una massa di gas contenuta tra due piani perpendicolari all'asse  $x$ , intersecanti l'asse nei punti di coordinate  $x$  e  $x + dx$ : assumendo unitaria la sezione del cilindro la massa di gas è  $dm = \rho_0 dx$ . A seguito della perturbazione  $dm$  subisce uno spostamento e la troviamo, in un istante  $t$  immediatamente successivo, tra

$$x + s(x, t) \quad \text{e} \quad x + dx + s(x + dx, t),$$

così che la dimensione lineare di  $dm$  passa da  $dx$  a

$$dx + s(x + dx, t) - s(x, t) = dx + \frac{\partial s}{\partial x} dx.$$

La situazione geometrica è quella descritta nella figura 9.23.

La stessa massa occupa pertanto un volume diverso e la sua densità è cambiata da  $\rho_0$  a  $\rho_0 + d\rho$ . Quindi

$$dm = (\rho_0 + d\rho) \left( dx + \frac{\partial s}{\partial x} dx \right) = \left( \rho_0 + \rho_0 \frac{\partial s}{\partial x} + d\rho + d\rho \frac{\partial s}{\partial x} \right) dx.$$

Trascuriamo il quarto termine rispetto ai primi tre in quanto infinitesimo di ordine superiore ed eguagliamo a  $dm = \rho_0 dx$ ; otteniamo

$$d\rho = \rho - \rho_0 = -\rho_0 \frac{\partial s}{\partial x} \quad (9.35)$$

che rappresenta il collegamento tra moto del gas e variazione di densità. Il segno meno indica correttamente che se il volumetto è compresso ( $\partial s / \partial x < 0$ ) la densità aumenta ( $d\rho > 0$ ), mentre se il gas si espande la densità diminuisce.

A una variazione di densità corrisponde una variazione di pressione data da (9.33) che riscriviamo:

$$dp = p - p_0 = \frac{\beta}{\rho_0} d\rho$$

e utilizzando (9.35)

$$p = p_0 - \beta \frac{\partial s}{\partial x} \quad (9.36)$$

La variazione di pressione causa un movimento del gas: la forza risultante che agisce su  $dm$  (ricordiamo che la sezione è unitaria) vale

$$p(x, t) - p(x + dx, t) = -\frac{\partial p}{\partial x} dx = \beta \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} dx$$

avendo introdotto (9.36): questa forza provoca l'accelerazione  $\partial^2 s / \partial t^2$  secondo la legge del moto

$$\beta \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} dx = dm \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \rho_0 dx \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$$

e in conclusione

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{\beta}{\rho_0} \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} \quad (9.37)$$

Lo spostamento  $s(x, t)$  dalla posizione di equilibrio soddisfa l'equazione (9.29) delle onde piane: lungo la colonna di gas si propaga un'onda di spostamento con velocità data da

$$v = \sqrt{\frac{\beta}{\rho_0}} \quad (9.38)$$

come avevamo anticipato.

Dalla (9.36) derivando rispetto a  $x$  e rispetto al tempo si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} &= -\beta \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = -\rho_0 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} &= -\beta \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial s}{\partial x} = -\beta \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}, \\ \Rightarrow \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} &= \frac{\beta}{\rho_0} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

In modo analogo, derivando la densità  $\rho$  data dalla (9.35), si ottiene

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \frac{\beta}{\rho_0} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}$$

Lungo la colonna di gas si propagano anche un'onda di pressione e una perturbazione della densità del gas, tutte con la stessa velocità data da (9.38).

La rapidità con cui avviene il fenomeno induce a ritenere adiabatici i processi di compressione e di espansione del gas, per cui il modulo di compressibilità è quello adiabatico (9.34) e la velocità (9.38) ha l'espressione

$$v = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}} \quad (9.39)$$

Nelle cosiddette condizioni standard ( $T = 273.15$  K,  $p = 1.01325 \cdot 10^5$  Pa) la densità dell'aria vale  $\rho = 1.29$  Kg/m<sup>3</sup>; con  $\gamma = 1.4$   $v = 331.61$  m/s; il valore misurato in queste condizioni è 331.45 m/s. L'ottimo accordo giustifica le ipotesi fatte di perturbazioni di piccolo valore e con un'alta velocità di propagazione, sostanzialmente adiabatiche.

In un gas ideale la pressione e la densità sono legate alla temperatura dall'equazione  $p/\rho = RT/A$  dove  $R$  è la costante dei gas e  $A$  la massa molecolare (vedi paragrafo 11.1). Introducendo questa espressione nella (9.39) si ottiene infine

$$v = \sqrt{\frac{\gamma R T}{A}} = \alpha \sqrt{T} \quad (9.40)$$

che dà la dipendenza della velocità di propagazione in un gas ideale dalla temperatura.

I valori della velocità di propagazione di un'onda elastica in alcuni gas (ideali) alla temperatura  $T = 300$  K sono riportati nella tabella 9.1. L'unità di misura della costante  $\alpha$  è ms<sup>-1</sup> K<sup>-1/2</sup>.

Tabella 9.1 Velocità di propagazione di un'onda elastica nei gas a 300 K

gas	$\alpha$	$v$ (m/s)
idrogeno	76.288	1321
elio	58.857	1019
azoto	20.389	353
ossigeno	19.072	330

È attraverso il meccanismo ora descritto che avviene la propagazione del suono nei gas, in particolare nell'aria, anche se il fenomeno va trattato tridimensionalmente. Dai dati precedenti si ricava nell'aria  $\alpha = 20.055 \text{ ms}^{-1} \text{ K}^{-1/2}$  e quindi la velocità del suono nell'aria a 20°C è  $\sim 343 \text{ m/s}$ .

Nei casi della voce, la perturbazione che genera il suono è prodotta da vibrazioni rapide della laringe, che agisce come una lamina vibrante. La sensazione sonora ha origine sul timpano, che è anch'esso una membrana elastica e segue i processi rapidi di vibrazione dell'aria. Ci rendiamo conto che nell'onda sonora, come in qualsiasi onda elastica, c'è trasporto di energia e quantità di moto, visto che essa è capace di fare entrare in vibrazione un corpo materiale come il timpano. Il valore minimo dell'ampiezza delle oscillazioni delle molecole del gas che l'orecchio è capace di percepire è dell'ordine di  $10^{-10} \text{ m}$ , cioè delle dimensioni atomiche, a cui corrisponde una variazione di pressione di  $10^{-4} \text{ Pa}$  rispetto alla pressione atmosferica, cioè  $\Delta p / p = 10^{-9}$ .

### 9.14 Ulteriori considerazioni sulle onde

Riprendiamo, dopo gli esempi, il discorso sulle proprietà generali dei fenomeni ondulatori. Intanto ripetiamo che si ha una propagazione ondosa ogni volta l'evoluzione spaziale e temporale di una grandezza fisica obbedisce a un'equazione del tipo (9.29): la funzione soluzione si propaga lungo l'asse  $x$  conservando la stessa forma (figura 9.21) e con una velocità che non dipende dalla perturbazione, ma solo dalle caratteristiche del mezzo.

È interessante osservare come si è arrivati alla (9.29) nei casi considerati. Nella propagazione in una sbarra il risultato si ottiene unendo l'equazione caratteristica del fenomeno elastico considerato (compressione) alla legge del moto di Newton; lo stesso avviene in altri fenomeni elastici, come per esempio nelle onde di pressione in un gas. Invece in una corda (o in una membrana) tesa basta la sola equazione del moto per dimostrare la propagazione.

Questi risultati fanno vedere che, mentre normalmente la soluzione dell'equazione del moto  $F = ma$  descrive il moto di un corpo dotato di massa e quindi un *movimento di materia*, in alcuni casi porta a predire nuovi fenomeni in cui la *materia*, pur muovendosi, *rimane mediamente ferma* e invece si ha la propagazione di una *perturbazione locale*, che si trasmette cioè progressivamente da un elemento al successivo.

Esemplifichiamo di nuovo questo fatto, approfittando dell'esempio per introdurre al posto di una perturbazione impulsiva una perturbazione armonica. All'estremo libero della corda della figura 9.24 applichiamo la perturbazione

$$\xi(x_0, t) = \xi_0 \operatorname{sen} k(x_0 - vt) ;$$

con  $k$  costante opportuna e  $\xi_0$  sufficientemente piccola da poter ritenere validi i risultati del paragrafo 9.12. La perturbazione si propaga lungo la corda con legge

$$\xi(x, t) = \xi_0 \operatorname{sen} k(x - vt) ;$$

che chiaramente è soluzione di (9.29). In un punto  $P_1$  di coordinata  $x_1$

$$\xi(x, t) = \xi_0 \operatorname{sen} k(x_1 - vt) ;$$

il punto  $P_1$  compie oscillazioni armoniche di ampiezza  $\xi_0$  intorno alla posizione di equilibrio. Si tratta delle stesse oscillazioni dell'estremo con  $x = x_0$ , solo che avvengono con un certo ritardo, dovuto al tempo di propagazione: la differenza di fase tra le due oscillazioni è  $k(x_1 - x_0)$ .

Se eseguiamo una fotografia del sistema all'istante  $t_0$  (figura 9.26 in alto), la posizione di tutti i punti della corda è data da

$$\xi(x, t_0) = \xi_0 \operatorname{sen} k(x - vt_0) ;$$

la corda pertanto assume la forma di una sinusoide di ampiezza  $\xi_0$ . In istanti successivi  $t$  la forma è la stessa, però è spostata verso destra di  $v(t - t_0)$ . La corda nel suo complesso in media rimane ferma: nessun punto si muove verso un estremo o l'altro. *non si ha spostamento netto di materia*.

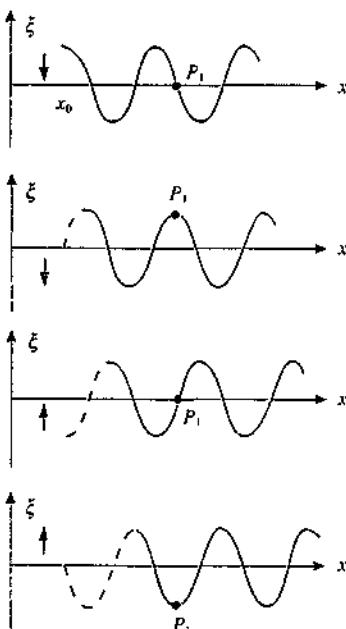


Figura 9.26

Le variazioni della grandezza che si propaga possono avvenire in direzione parallela alla direzione di propagazione (onde in un gas e in una sbarra) oppure in direzione ortogonale (onde in una corda e sulla superficie di un liquido). Si parla rispettivamente, come già detto, di *onde longitudinali e onde trasversali*.

Questa caratteristica dipende dalle proprietà elastiche e quindi in definitiva da proprietà microscopiche del mezzo. In un fluido indefinito non c'è resistenza ad uno sforzo di taglio e l'unica proprietà elastica è la compressione: un tale mezzo può essere sede soltanto di onde longitudinali. In una sbarra solida invece possono esserci sia onde longitudinali, generate col già visto meccanismo della compressione e che si propagano con velocità  $\sqrt{E/\rho}$ , che onde trasversali: queste si provocano sollecitando un estremo della sbarra ortogonalmente all'asse e si propagano con un meccanismo di scorrimento, come è evidenziato dall'espressione  $\sqrt{G/\rho}$  della velocità di propagazione, dove  $G$  è il modulo di rigidità. La sbarra, bloccata ad una estremità e sollecitata all'altra con un momento di torsione variabile, trasmette anche onde torsionali, la cui velocità di propagazione è di nuovo  $\sqrt{G/\rho}$ .

Alla fine del paragrafo 9.13 abbiamo osservato che un'onda elastica deve trasportare energia e quantità di moto in quanto è capace di fare entrare in movimento corpi materiali investiti dall'onda. La trasmissione di energia e quantità di moto avviene inizialmente dalla sorgente di vibrazione agli elementi contigui del mezzo e poi da un elemento al successivo; il fatto stesso che un elemento precedentemente indisturbato entri in oscillazione dimostra il trasporto di energia e quantità di moto da parte dell'onda. Altra prova ne è la registrazione dell'arrivo dell'onda fatta con un rivelatore esterno che ha una parte sensibile alle vibrazioni del mezzo, capace di tradurle normalmente in un segnale elettrico. Se la sollecitazione dovuta alla sorgente è impulsiva, le oscillazioni locali dovute al passaggio dell'onda possono essere considerate come un fenomeno transitorio; se invece la sollecitazione è periodica, abbiamo un fenomeno tipo di oscillazione forzata. Le espressioni esplicative dell'energia e della quantità di moto trasportate da un'onda elastica saranno determinate nel secondo volume.

### 12.3 Onde piane armoniche

Un tipo particolare, ma molto importante, di onda piana è l'*onda armonica*, la cui funzione d'onda si scrive

$$\xi(x, t) = \xi_0 \operatorname{sen} k(x - vt) \quad \text{oppure} \quad \xi(x, t) = \xi_0 \cos k(x - vt) . \quad (12.4)$$

$\xi_0$  è l'ampiezza dell'onda e la costante  $k$ , inserita per ragioni dimensionali in quanto l'argomento di un seno o di un coseno deve essere espresso in radianti e non in metri, è detta *numero d'onda*. Di norma il numero d'onda  $k$  viene portato all'interno della parentesi e le (12.4) diventano

$$\xi(x, t) = \xi_0 \operatorname{sen}(kx - \omega t), \quad \xi(x, t) = \xi_0 \cos(kx - \omega t) , \quad (12.5)$$

in cui

$$\omega = kv \quad (12.6)$$

Pulsazione

è chiamata pulsazione dell'onda armonica. Naturalmente quanto detto è valido anche se l'argomento della funzione d'onda è  $k(x + vt) = kx + \omega t$ .

Abbiamo già rilevato che una funzione con la struttura di (12.5) si sposta rigidamente lungo l'asse  $x$  con velocità  $v$  (pari a  $\omega/k$ ). Se fissiamo un determinato istante  $t_0$  la (12.5) dà, in quell'istante, il valore della funzione d'onda  $\xi(x, t_0)$  in tutti i punti dell'asse  $x$ ; si tratta evidentemente di una sinusoida nella variabile  $x$ , che si ripete identica per ogni coppia di punti consecutivi aventi coordinate  $x_1$  e  $x_2$  tali che  $k(x_1 - x_2) = 2\pi$ . La distanza  $\lambda = x_2 - x_1$  data da

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \quad \left( \Rightarrow k = \frac{2\pi}{\lambda} \right) \quad (12.7)$$

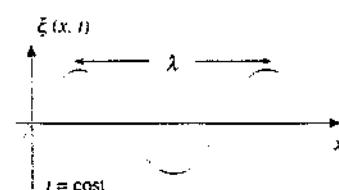


Figura 12.6

è detta *lunghezza d'onda* dell'onda armonica; essa dà la periodicità spaziale di (12.5). Da (12.7) si deduce che  $k$  è eguale al numero di lunghezze d'onda che stanno su una distanza uguale a  $2\pi$  metri e da questa proprietà deriva il nome di numero d'onde.

Se invece fissiamo una determinata posizione  $x = x_0$  la (12.5) dà, nel punto di coordinata  $x_0$ , la variazione nel tempo della funzione d'onda  $\xi(x_0, t)$ . Trattandosi di una variazione armonica la funzione d'onda ha lo stesso valore in due istanti successivi  $t_1$  e  $t_2$  tali che  $\omega(t_2 - t_1) = 2\pi$ . L'intervallo di tempo  $T = t_2 - t_1$  è il *periodo* dell'onda armonica ed è legato alla pulsazione dalla relazione

Periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (12.8)$$

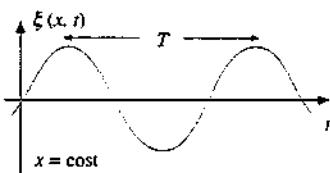


Figura 12.7

Le figure 12.6 e 12.7 illustrano le due funzioni  $\xi(x, t_0)$  e  $\xi(x_0, t)$ ; la prima è come una fotografia ad un dato istante della funzione d'onda, la seconda è il diagramma orario della perturbazione in un determinato punto. Se si tratta di un'onda in una corda tesa, la figura 12.6 mostra la posizione assunta dai vari punti della corda in un certo istante e la figura 12.7 mostra il moto di un qualsiasi punto in funzione del tempo, consistente in una oscillazione armonica completa rispetto alla posizione di equilibrio, svolta in un tempo  $T$ .

Mettendo insieme (12.6), (12.7), (12.8) si trova che i due periodi, spaziale e temporale, sono legati dalla relazione

$$\lambda = v T \quad (12.9)$$

da cui, ricordando che la frequenza di oscillazione  $v$  è l'inverso del periodo  $T$ ,  $v = 1/T$ , si arriva a

$$\lambda v = v \quad (12.10)$$

Le espressioni (12.6), (12.9) e (12.10) mostrano, in tre modi diversi, il legame che esiste in un'onda armonica tra la velocità di propagazione, il periodo spaziale (espresso tramite  $\lambda$  o  $k$ ) e il periodo temporale (espresso tramite  $T$  o  $v$  o  $\omega$ ): le tre grandezze non sono dunque indipendenti.

Riprendendo la figura 9.26 del paragrafo 12.2 in cui è rappresentata una sinusoide che avanza con velocità  $v$  (si tratta in sostanza della figura 12.6 ripetuta negli istanti  $t_0, t_0 + T/4, t_0 + T/2, t_0 + 3T/4$ ), si vede che nel tempo  $T$  la sinusoide avanza di  $\lambda$ : la lunghezza d'onda ha quindi il significato di *distanza percorsa da un'onda armonica in un periodo*, come è specificato dalla legge (12.9).

Nel seguito dovremo spesso considerare onde armoniche del tipo

Onda armonica

$$\xi(x, t) = \xi_0 \sin(kx - \omega t + \delta)$$

dove  $\delta$  è il valore dell'argomento per  $x = 0$  e  $t = 0$  e per qualunque altra coppia di valori  $x, t$  tali che  $kx - \omega t = 0$ . L'argomento completo della funzione

Fase dell'onda armonica

$$\phi(x, t) = kx - \omega t + \delta \quad (12.11)$$

si chiama *fase dell'onda armonica*. La (12.11) esprime la propagazione della fase dell'onda che assume lo stesso valore per  $x = x_0, t = t_0$  e per  $x, t$  tali che  $x = x_0 + v(t - t_0)$ ; si tratta di un diverso modo di dire che la sinusoide  $\xi(x, t)$  avanza con velocità  $v$ .

Tenuto conto di (12.7) e (12.8) abbiamo vari modi equivalenti per scrivere l'espressione generale della funzione d'onda armonica:

$$\begin{aligned}\xi(x, t) &= \xi_0 \sin(kx - \omega t + \delta) = \xi_0 \sin\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) + \delta\right] = \\ &= \xi_0 \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt) + \delta\right]\end{aligned}\quad (12.12)$$

## 12.4 Analisi di Fourier

Un'onda armonica è un'onda molto particolare; essa fa parte della classe più generale delle *onde periodiche*, rappresentate lungo l'asse di propagazione da una forma che si ripete sempre eguale e in un punto da un'oscillazione periodica generica. Vi sono poi le *onde impulsive*, in cui la funzione d'onda non è periodica.

Per quanto questi casi possano apparire molto diversi, essi sono collegati dal *teorema di Fourier*, che abbiamo enunciato nel paragrafo 9.9 del primo volume. Ricordiamo dunque che una qualsiasi funzione periodica  $f(t)$ , la quale deve soddisfare alla condizione che l'intervallo  $T$ , pari al suo periodo, sia divisibile in un numero finito di tratti in cui la funzione è continua e monotona, è sempre esprimibile come somma di una serie di termini sinusoidali e cosinusoidali:

$$f(t) = a_0 + \sum_m (a_m \sin m\omega t + b_m \cos m\omega t) \quad (12.13)$$

I coefficienti di questo sviluppo in serie si calcolano a partire dalla  $f(t)$  stessa:

$$a_m = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin m\omega t \, dt, \quad b_m = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos m\omega t \, dt.$$

Il termine  $a_0$  è il valore medio di  $f(t)$ :

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \, dt.$$

La pulsazione  $\omega$  è pari a  $2\pi/T$ ,  $m$  è un numero intero positivo.

Il teorema di Fourier si applica anche a una funzione  $f(x)$ , periodica con periodo  $\lambda$ , come può essere una perturbazione che si propaga lungo l'asse  $x$  quando viene considerata in un istante determinato, ad esempio  $t = 0$ . Per questa funzione la (12.13) si scrive

$$f(x) = a_0 + \sum_m (a_m \sin mx + b_m \cos mx), \quad (12.14)$$

con  $k = 2\pi/\lambda$  e i coefficienti dati da

$$a_m = \frac{2}{\lambda} \int_0^\lambda f(x) \sin mx \, dx, \quad b_m = \frac{2}{\lambda} \int_0^\lambda f(x) \cos mx \, dx, \quad a_0 = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda f(x) \, dx.$$

Il formalismo dello sviluppo in serie di Fourier si estende anche alle *funzioni non periodiche* (si veda sempre il paragrafo 9.9 del primo volume):

$$f(t) = \int_0^\infty [a(\omega) \sin \omega t + b(\omega) \cos \omega t] \, d\omega, \quad (12.15)$$

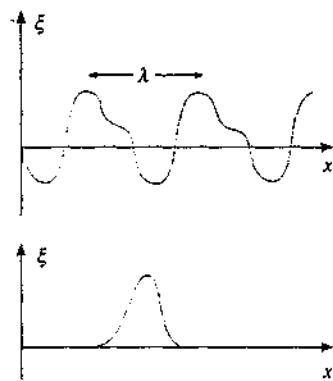


Figura 12.8

Serie di Fourier

$$a(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \omega t dt, \quad b(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt,$$

$$f(x) = \int_0^{+\infty} [a(k) \sin kx + b(k) \cos kx] dk, \quad (12.16)$$

$$a(k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin kx dx, \quad b(k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos kx dx.$$

La funzione non periodica è descritta come sovrapposizione di un insieme continuo di termini armonici, i cui contributi sono dati dalle funzioni  $a$  e  $b$ , continue nelle variabili  $\omega$  o  $k$ .

Per completezza citiamo una diversa forma di sviluppo di Fourier. Dalla formula di Eulero (11.22) si ricava

$$\sin m \omega t = \frac{1}{2i} (e^{im\omega t} - e^{-im\omega t}), \quad \cos m \omega t = \frac{1}{2} (e^{im\omega t} + e^{-im\omega t})$$

e quindi il termine  $m$ -esimo di (12.13) diventa

$$a_m \sin m \omega t + b_m \cos m \omega t = c_m e^{im\omega t} + c_{-m} e^{-im\omega t},$$

dove i coefficienti  $c$  sono numeri complessi coniugati:

$$c_m = \frac{b_m - i a_m}{2}, \quad c_{-m} = \frac{b_m + i a_m}{2}.$$

In conclusione, posto  $c_0 = a_0$ , si ha

$$\text{Serie complessa di Fourier} \quad f(t) = \sum_m c_m e^{im\omega t}, \quad c_m = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-im\omega t} dt. \quad (12.17)$$

La (12.17) rappresenta la *serie complessa di Fourier* relativa a una funzione reale periodica  $f(t)$ ; una formula analoga vale per  $f(x)$ . Infine, per una funzione non periodica si ottiene

$$f(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} c(z) e^{izu} dz, \quad c(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-izu} du, \quad (12.18)$$

avendo indicato con  $u$  e  $z$  una coppia di variabili che corrispondono a  $t$ ,  $\omega$  oppure a  $x$ ,  $k$ .

Prendiamo ora in considerazione un'onda piana  $\xi(x, t)$  e supponiamo che la perturbazione sia prodotta in  $x = 0$  dove ha quindi l'andamento temporale  $\xi(0, t)$ . A seconda che questa funzione sia periodica o no avremo i vari sviluppi (12.13), (12.17) oppure (12.15), (12.18). Se ciascun termine armonico si propaga lungo l'asse alla stessa velocità, la somma rimane ovunque la stessa e si può scrivere, ad esempio,

$$\xi(x, t) = \xi(kx - \omega t) = a_0 + \sum_m [a_m \sin m(kx - \omega t) + b_m \cos m(kx - \omega t)],$$

valida per  $x = 0$  e per qualsiasi altro punto. La forma di  $\xi(x, t)$  resta cioè sempre eguale, come abbiamo ammesso. Notiamo però che è possibile una situazione diversa, in cui la forma della perturbazione cambia durante la propagazione, se la velocità delle singole onde armoniche, tutte di pulsazione diversa, dipende dalla pulsazione.

Si comprende pertanto in generale l'importanza dell'analisi di Fourier e delle onde armoniche. Se dobbiamo studiare la propagazione di un'onda di forma qualunque in un mezzo, si esegue l'analisi di Fourier della funzione d'onda e si esamina come si comportano le diverse onde armoniche. La soluzione del problema si ottiene sommando i singoli termini. Per tale motivo in seguito daremo particolare rilievo alle onde armoniche.

## 12.5 Onde longitudinali. Onde trasversali. Polarizzazione

Un'onda piana è caratterizzata da un'unica direzione di propagazione, che per semplicità abbiamo identificato con l'asse  $x$ . Se tutte le grandezze significative relative alla perturbazione che si propaga hanno direzione di variazione che coincide con l'asse  $x$ , ovvero se non c'è nessun'altra direzione fisicamente importante diversa da  $x$ , l'onda si dice *longitudinale*. Gli esempi visti finora riguardano un'onda elastica che si propaga lungo una sbarra solida o lungo una colonna di gas.

Invece in una corda tesa può avvenire la propagazione di una perturbazione consistente in uno spostamento trasversale rispetto all'asse  $x$ , che coincide con la posizione di quiete della corda oltre che con la direzione di propagazione. La perturbazione è funzione soltanto di  $x$  e del tempo, anche se avviene in un piano ortogonale a  $x$ , cioè lungo una direzione diversa da  $x$ . Un altro esempio molto importante di questo tipo di onda piana, che è detta *trasversale*, è costituito dalle onde elettromagnetiche piane.

In una qualunque onda trasversale, fissati arbitrariamente gli assi  $y$  e  $z$  in un piano ortogonale all'asse  $x$ , la funzione d'onda  $\xi(x, t)$  è rappresentabile come un vettore  $\xi(x, t)$ , le cui componenti sono  $\xi_y(x, t)$  e  $\xi_z(x, t)$ . Il vettore  $\xi$  può assumere ad un dato istante nei vari punti dell'asse  $x$  qualsiasi direzione ortogonale a  $x$  ovvero, fissato un punto, in esso al passare del tempo il vettore d'onda può assumere qualsiasi direzione ortogonale a  $x$ . In questo caso di dipendenza completamente casuale della direzione di  $\xi$  da  $x$  e  $t$  l'onda si dice *non polarizzata*. Oppure la variazione di direzione di  $\xi$  nel piano  $y, z$  in funzione di  $x$  e di  $t$  può essere espressa da una legge precisa e allora si dice che l'onda è *polarizzata*.

Considerando un'onda piana trasversale armonica le componenti si scrivono

$$\xi_y = \xi_{0y} \sin(kx - \omega t), \quad \xi_z = \xi_{0z} \sin(kx - \omega t + \delta), \quad (12.19)$$

in cui  $\delta$  rappresenta la differenza di fase tra le due onde componenti. Le ampiezze  $\xi_{0y}$  e  $\xi_{0z}$  insieme a  $\delta$  permettono di costruire ovunque e in ogni istante la funzione d'onda  $\xi$ .

Esaminiamo prima alcuni casi in cui  $\delta$  ha un valore costante. Quando  $\delta = 0$  (componenti dell'onda in fase), in ogni punto dell'asse  $x$  e in ogni istante il vettore d'onda  $\xi$  ha direzione fissa, formante con l'asse  $y$  l'angolo  $\theta$  tale che

$$\tan \theta = \frac{\xi_z}{\xi_y} = \frac{\xi_{0z}}{\xi_{0y}} = \text{costante}$$

Polarizzazione rettilinea

Se  $\delta = \pi$  (componenti dell'onda in opposizione di fase) la situazione è la stessa, solo che la direzione di  $\xi$  forma con l'asse  $y$  l'angolo  $-\theta$ . In un dato istante l'onda è rappresentata da una sinusode posta in un piano passante per l'asse  $x$  e formante l'angolo  $\theta$  ( $0 - \theta$ ) col piano  $x, y$ . Detta  $\xi_0$  l'ampiezza dell'onda, le ampiezze delle componenti sono  $\xi_{0y} = \xi_0 \cos \theta$ ,  $\xi_{0z} = \xi_0 \sin \theta$  e le componenti stesse si scrivono

$$\xi_y = \xi_0 \cos \theta \sin(kx - \omega t), \quad \xi_z = \pm \xi_0 \sin \theta \sin(kx - \omega t), \quad (12.20)$$

dove il segno positivo corrisponde a  $\delta = 0$  e quello negativo a  $\delta = \pi$ . In una posizione fissata la perturbazione è un'oscillazione armonica nel suddetto piano di giacitura di  $\xi$ .

Quando, come nel caso appena descritto, il vettore  $\xi$  ha direzione fissa si dice che l'onda piana è *polarizzata rettilineamente* o *linearmente*: la direzione fissa di  $\xi$  è chiamata *direzione di polarizzazione* e il piano fisso in cui giace  $\xi$  è chiamato *piano di polarizzazione*.

Poniamo ora  $\delta = \pi/2$ : le (12.19) diventano

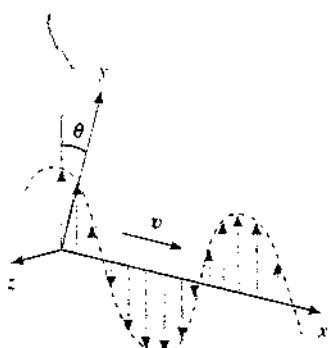


Figura 12.9

## Polarizzazione ellittica

$$\xi_y = \xi_{0y} \sin(kx - \omega t), \quad \xi_z = \xi_{0z} \cos(kx - \omega t) \quad (12.21)$$

In una data posizione  $P$  di coordinata  $x_0$  le componenti dell'onda soddisfano in qualsiasi istante alla

$$\frac{\xi_y^2}{\xi_{0y}^2} + \frac{\xi_z^2}{\xi_{0z}^2} = 1, \quad (12.22)$$

che è l'equazione di un'ellisse nel piano  $y, z$  con centro nell'origine e assi paralleli agli assi coordinati. Pertanto nel punto  $P$  al passare del tempo si vede la punta del vettore  $\xi$  descrivere un'ellisse; il periodo di rotazione è  $2\pi/\omega$ , il verso di rotazione appare orario guardando lungo il verso di propagazione, il modulo del vettore d'onda varia tra i valori  $\xi_{0y}$  e  $\xi_{0z}$ ; in qualsiasi istante modulo e direzione di  $\xi$  in  $P$  si ricavano da (12.21) in cui il termine  $kx$  è costante e vale  $kx_0$ .

In un dato istante  $t_0$  la direzione del vettore  $\xi$ , che ha le componenti (12.21) nei vari punti dell'asse  $x$ , è mostrata in figura 12.10: la punta del vettore  $\xi$  sta su una superficie che possiamo chiamare cilindrica con sezione ellittica e la proiezione sul piano  $y, z$  è sempre l'ellisse (12.22). Se ad esempio in un punto  $x$  il vettore  $\xi$  è parallelo e concorde all'asse  $y$ , esso ha la stessa direzione, verso e modulo nel punto di coordinate  $x + \lambda$ , mentre nei punti intermedi direzione, verso e modulo si ricavano da (12.21) in cui il termine  $\omega t$  è costante e vale  $\omega t_0$ .

Con  $\delta = 3\pi/2$  il fenomeno è lo stesso, ma il verso di rotazione è antiorario. Si parla in entrambi i casi di *onda polarizzata ellitticamente*.

Visivamente si deve immaginare che la figura 12.10, fotografia di  $\xi$  ad un certo istante, compia nel tempo una traslazione rigida, senza ruotare, lungo l'asse  $x$  con velocità pari alla velocità  $v = \omega/k$  dell'onda. È allora chiaro che in un qualsiasi piano fisso ortogonale a  $x$  attraversato dall'onda noi vediamo nei diversi istanti i vettori  $\xi$  relativi a diversi punti e che quindi  $\xi$  appare compiere un moto di rotazione.

Un caso particolare, con  $\delta = \pi/2$  o  $\delta = 3\pi/2$ , si ha quando  $\xi_{0y} = \xi_{0z} = \xi_0$ : l'equazione (12.22) dell'ellisse degenera in quella di una circonferenza,

$$\xi_y^2 + \xi_z^2 = \xi_0^2,$$

e l'onda è detta *polarizzata circolarmente*. L'ampiezza dell'onda è costante, per il resto valgono tutte le considerazioni fatte per la polarizzazione ellittica.

Più in generale, se lo sfasamento  $\delta$  ha un valore costante generico, la polarizzazione è ancora ellittica, ma gli assi dell'ellisse non sono paralleli agli assi coordinati.

Osserviamo che i vari casi esposti sono strettamente collegati alla composizione di moti armonici su assi ortogonali, che abbiamo studiato nel paragrafo 9.5 del primo volume.

Ritornando a quanto detto all'inizio del paragrafo concludiamo che le (12.19) con  $\delta$  costante costituiscono un preciso legame tra le componenti dell'onda armonica trasversale e quindi forniscono la legge di variazione della direzione e del modulo di  $\xi$ . Sull'esistenza di una tale legge si basa appunto la definizione di polarizzazione dell'onda trasversale. Risulta anche evidente che il concetto di polarizzazione perde significato per un'onda longitudinale.

Formalmente le (12.19) si usano anche per rappresentare un'onda piana armonica trasversale non polarizzata, ammettendo che  $\delta$  possa assumere qualsiasi valore al variare di  $x$  e  $t$ .

Gli argomenti trattati in questo paragrafo trovano un'applicazione molto importante nei fenomeni connessi con la propagazione delle onde elettromagnetiche, che studieremo nel capitolo 13 e in quelli successivi.

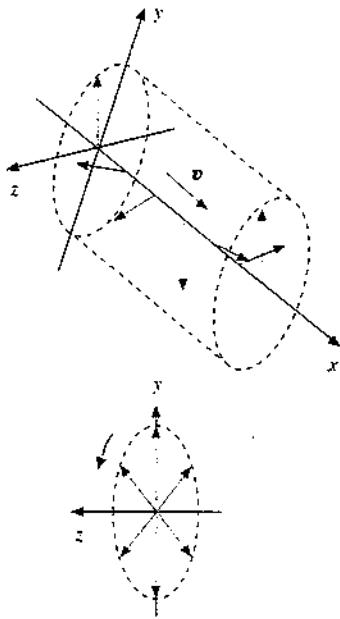


Figura 12.10

## Polarizzazione circolare

## Onda trasversale non polarizzata

## 12.6 Onde sulla superficie di un liquido

Come ulteriore esempio di onda piana in un sistema materiale consideriamo le onde sulla superficie di un liquido. Pur essendo questo il fenomeno da cui ha origine il nome di onda, poi esteso a tutti gli altri campi, nella realtà è forse il caso più complicato da trattare analiticamente.

Un'onda piana sulla superficie di un liquido può essere generata da una piccola asta piatta che viene fatta oscillare verticalmente. Da questa sorgente hanno origine delle onde che si allontanano lungo la superficie; nella figura 12.11 sono mostrate le creste, che hanno un andamento rettilineo, parallelo all'asta; esse sono separate da una distanza pari alla lunghezza d'onda  $\lambda$ .

Qualitativamente, quando si applica una perturbazione sulla superficie di un liquido, si produce un moto degli elementi di liquido che stanno vicino alla superficie, come schematizzato nella figura 12.12. Gli spostamenti di ogni singolo elemento hanno componente sia orizzontale che verticale; che debba esserci anche un moto orizzontale lo si intuisce dal fatto che, essendo il liquido praticamente incompressibile, una parte del liquido deve spostarsi dagli avvallamenti verso le creste. In particolare un elemento sulla cresta e uno nell'avvallamento hanno soltanto moto orizzontale con verso opposto. Si dimostra che le traiettorie dei singoli elementi sono circolari, per cui lo spostamento orizzontale locale è in media nullo e quindi anche in queste onde (né longitudinali né trasversali) non si ha uno spostamento effettivo globale di materia sulla superficie.

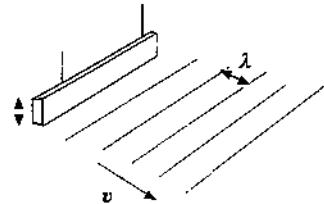


Figura 12.11

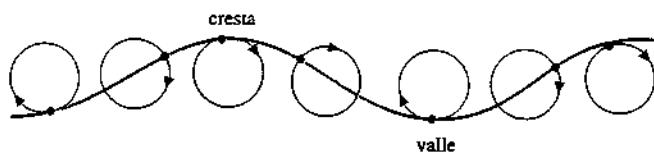


Figura 12.12

Nella dinamica intervengono vari tipi di forze: la forza peso del liquido, la pressione atmosferica, la tensione superficiale (vedi paragrafo 8.15 del primo volume). Un altro parametro importante è la profondità  $h$  del liquido che si confronta, come vedremo, con la lunghezza d'onda  $\lambda$  dell'onda che si propaga. Invece si possono trascurare gli effetti della viscosità, almeno per liquidi poco viscosi come l'acqua.

Riportiamo soltanto il risultato relativo alla velocità di propagazione, valido per onde armoniche di piccola ampiezza:

$$v = \sqrt{\left(\frac{g \lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\tau}{\rho\lambda}\right) \operatorname{tgh} \frac{2\pi h}{\lambda}} ; \quad (12.23) \quad \text{Velocità di propagazione}$$

$\rho$  è la densità del liquido,  $\tau$  la tensione superficiale. La tangente iperbolica è definita come

$$\operatorname{tgh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Discussiamo la (12.23) in alcuni casi di interesse. Se la profondità  $h$  è molto maggiore della lunghezza d'onda, per cui  $2\pi h \gg \lambda$ , la tangente iperbolica assume valore unitario e la velocità di propagazione diventa

$$v = \sqrt{\frac{g \lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\tau}{\rho\lambda}} . \quad (12.24)$$

Onde in acqua profonda:  
velocità di propagazione

Nella figura 12.13 è rappresentata la (12.24) nell'acqua per valori di  $\lambda$  da  $10^{-4}$  m a  $10^2$  m e nella tabella a fianco sono riportati alcuni dati numerici, anche relativi alla frequenza, calcolata per ogni coppia di valori  $\lambda$ ,  $v$  tramite la (12.10).

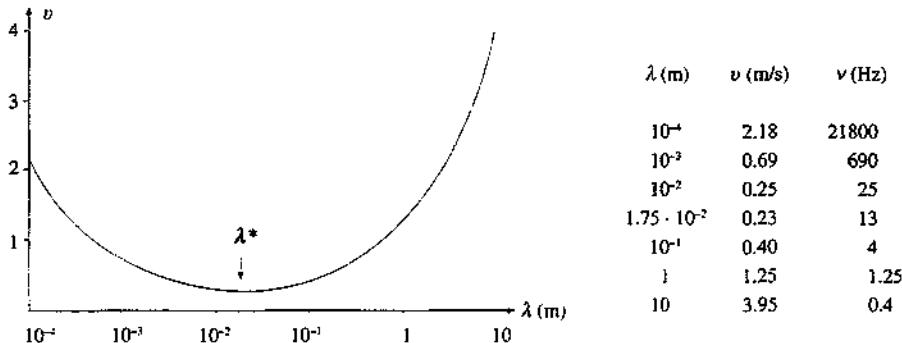


Figura 12.13

Il valore minimo della velocità si ha per quella lunghezza d'onda  $\lambda^*$  tale che i due termini sotto radice nella (12.24) siano eguali:

$$\frac{g \lambda^*}{2\pi} = \frac{2\pi \tau}{\rho \lambda^*} \Rightarrow \lambda^* = 2\pi \sqrt{\frac{\tau}{\rho g}}$$

Nell'acqua  $\tau = 75.6 \cdot 10^{-3}$  N/m,  $\rho = 10^3$  kg/m<sup>3</sup>,  $\lambda^* = 1.75 \cdot 10^{-2}$  m,  $v_{min} = 0.233$  m/s.  
Per  $\lambda \gg \lambda^*$  la *velocità di propagazione* vale

Onde di gravità:  
velocità di propagazione

$$v = \sqrt{\frac{g \lambda}{2\pi}} \quad . \quad (12.25)$$

È questo il caso di maggiore interesse pratico, nel mare o nei laghi; l'effetto preponderante è dovuto alla gravità, per cui queste onde prendono anche il nome di *onde di gravità*.

Quando  $\lambda \ll \lambda^*$  la (12.24) diventa

Onde capillari:  
velocità di propagazione

$$v = \sqrt{\frac{2\pi \tau}{\rho \lambda}} \quad . \quad (12.26)$$

Nell'acqua, con  $\lambda = 10^{-3}$  m  $v = 0.69$  m/s. Queste onde sono dette anche *onde capillari*. Ad esempio si tratta delle increspature che si osservano sulla superficie del mare quando soffia un vento leggero che provoca perturbazioni di piccola lunghezza d'onda e grande frequenza.

Supponiamo ora che la profondità del liquido sia piccola rispetto alla lunghezza d'onda:  $2\pi h \ll \lambda$  e dal confronto con (12.25) si vede che, a parità di lunghezza d'onda, la velocità è maggiore dove il liquido è profondo.

La (12.24) mostra una caratteristica particolare delle onde di superficie in un liquido profondo, completamente diversa in confronto a tutti i casi esaminati nei paragrafi precedenti: la velocità di propagazione è funzione della lunghezza d'onda, ovvero della frequenza. Questo fatto è molto importante per un'onda di forma qualunque: in base allo sviluppo in serie di Fourier essa è data da una sovrapposizione di termini armonici, ciascuno dei quali ha una frequenza diversa e pertanto si propaga con velocità diversa. La forma dell'onda viene così modificata durante la propagazione e si dice che l'onda tende a disperdersi.

Un mezzo in cui la velocità di propagazione dipende dalla frequenza si dice *dispersivo*. Ritorneremo sull'argomento nel paragrafo 12.11.

#### Nota. Altri casi di onde meccaniche

Accanto alle varie situazioni studiate ve ne sono altre in cui si hanno fenomeni di propagazione, in parte già richiamate alla fine del paragrafo 12.2.

In una sbarra solida oltre alle onde longitudinali si possono generare onde trasversali, applicando ad una estremità una sollecitazione ortogonale alla sbarra, e anche onde torsionali: queste si ottengono facendo agire su una base un momento torcente variabile nel tempo. Nell'onda torsionale lo spostamento di un singolo punto della sbarra consiste in una (piccola) rotazione attorno all'asse della sbarra, che è la direzione di propagazione. La velocità di entrambi i tipi di onda è  $v = \sqrt{G/\rho}$ , dove  $G$  è il modulo di rigidità; i valori sono dello stesso ordine di grandezza di quelli delle onde longitudinali.

Invece in una colonna di gas non si possono avere onde trasversali in quanto il modulo di rigidità è praticamente nullo: un gas non reagisce ad uno sforzo di taglio, che comporta lo scorrimento di un elemento rispetto ad un altro.

Una molla tesa può essere sede di onde longitudinali, che si propagano con velocità  $v = \sqrt{k d / m}$  se  $k$  è la costante elastica della molla,  $d$  la lunghezza e  $m$  la massa.

## 12.7 Propagazione dell'energia. Intensità di un'onda

È semplice mettere in evidenza, con alcuni esempi, come alla propagazione di un campo che descrive un'onda si accompagni sempre una propagazione di energia. Se appendiamo un piccolo corpo ad una corda tesa e sollecitiamo un'estremo con un impulso osserviamo che la massa si sposta quando passa l'onda per poi tornare in quiete negli istanti successivi. Allo stesso modo una barca in quiete viene messa momentaneamente in oscillazione dalle onde prodotte dal passaggio di un motoscafo. Oppure possiamo mantenere in moto oscillatorio armonico con una certa frequenza la membrana di un altoparlante e le onde che si propagano nell'aria circostante mantengono in movimento la membrana di un ricevitore o il timpano di un orecchio umano.

Per ottenere un'espressione del flusso di energia legato alla propagazione di un'onda piana armonica consideriamo una corda tesa con tensione  $T$  e densità lineare  $\rho_l$ : l'onda di spostamento trasversale è data dall'espressione

$$s = A \sin(kx - \omega t) \quad (12.28)$$

e si propaga con velocità

$$v = \sqrt{\frac{T}{\rho_l}} \quad . \quad (12.29)$$

Seguendo la figura 12.15 indichiamo con  $T$  la forza esercitata su un elemento di corda centrato nel punto  $P$  da parte dell'elemento immediatamente a sinistra e con  $ds$  lo spostamento infinitesimo trasversale. Il lavoro infinitesimo vale  $dW = T \cdot ds$  e la corrispondente potenza è

$$P = \frac{dW}{dt} = T \cdot \frac{\partial s}{\partial t} = T \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \frac{\partial s}{\partial t} = -T \sin \alpha \frac{\partial s}{\partial t} \quad .$$

Questa è la potenza trasferita dall'onda all'elemento di corda, che acquista la velocità  $ds / dt$ . Come già visto nel paragrafo 12.2, si può porre  $\sin \alpha \approx \tan \alpha = \frac{ds}{dx}$  e l'espressione della potenza diventa

$$P = -T \frac{\partial s}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial t} = TA^2 \omega k \cos^2(kx - \omega t) \quad . \quad (12.30)$$

dove abbiamo utilizzato le derivate parziali di (12.28)

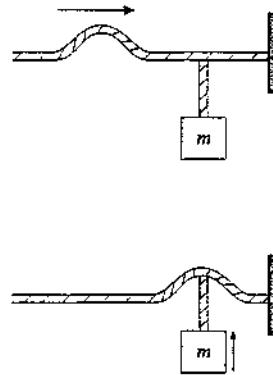


Figura 12.14

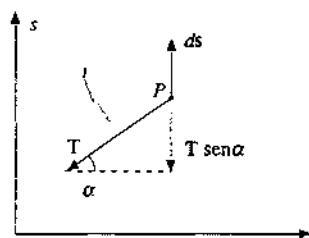


Figura 12.15

$$\frac{\partial s}{\partial x} = kA \cos(kx - \omega t) \quad , \quad \frac{\partial s}{\partial t} = -\omega A \cos(kx - \omega t)$$

La forma di (12.30) indica che la potenza si propaga lungo la corda con la stessa velocità dell'onda di spostamento: abbiamo dunque trasporto di energia e conseguentemente di quantità di moto.

La potenza media trasmessa in un periodo, ricordando che il valore medio della funzione  $\cos^2 \theta$  è 1/2, risulta

$$P_m = \frac{1}{2} T \omega k A^2 \quad ;$$

utilizziamo (12.29) per  $T$ , (12.6) per  $k$  e otteniamo

$$P_m = \frac{1}{2} \rho_l \omega^2 A^2 v \quad . \quad (12.31)$$

Sappiamo che a causa del passaggio dell'onda l'elemento di corda descrive un'oscillazione armonica di ampiezza  $A$  e pulsazione  $\omega$  rispetto alla posizione di equilibrio. La velocità massima del moto di oscillazione è  $v_{\max} = \omega A$  e quindi l'energia meccanica dell'elemento di corda, in accordo con quanto visto nel paragrafo 9.3 del primo volume, è

$$dU_{\text{mecc}} = \frac{1}{2} dm v_{\max}^2 = \frac{1}{2} \rho_l dx \omega^2 A^2 \quad ;$$

essa è costante durante l'oscillazione trasformandosi alternativamente da cinetica a potenziale. L'energia meccanica per unità di lunghezza è

$$w_l = \frac{dU_{\text{mecc}}}{dx} = \frac{1}{2} \rho_l \omega^2 A^2$$

per cui la potenza media (12.31) diventa

$$P_m = w_l v \quad , \quad (12.32)$$

prodotto della densità lineare di energia meccanica per la velocità di propagazione.

Consideriamo ora una sbarra di densità  $\rho$ , modulo di elasticità  $E$  e sezione  $\Sigma$ , in cui si propaga con velocità

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad . \quad (12.33)$$

un'onda di spostamento longitudinale data ancora da (12.28). La forza esercitata su un elemento di sbarra da parte dell'elemento immediatamente a sinistra è la (7.2) del paragrafo 12.2 e la potenza è data da

$$P = \mathbf{F} \cdot \frac{\partial s}{\partial t} = -F \frac{\partial s}{\partial t} = -E \Sigma \frac{\partial s}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial t} \quad ;$$

abbiamo tenuto conto del fatto che forza e spostamento sono paralleli e discordi (vedi figura 9.22 del paragrafo 12.2) e sostituito  $\Sigma$  a  $S$ . Deriviamo (12.28), utilizz-

ziamo (12.33) e (12.6), eseguiamo la media e otteniamo

$$P_m = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 v \Sigma$$

Infine, definendo la densità di volume di energia meccanica,

$$w_\tau = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2$$

arriviamo a

$$P_m = w_\tau v \Sigma \quad . \quad (12.34)$$

La stessa espressione si ottiene per un'onda che si propaga in una colonna di gas (paragrafo 12.8). Per un'onda piana superficiale, come quelle descritte nel paragrafo 12.6, la potenza media si scrive

$$P_m = w_\Sigma v l \quad , \quad (12.35)$$

$w_\Sigma$  è la densità superficiale di energia meccanica,  $l$  è la sezione lineare dell'onda (nella figura 12.11 sarebbe una lunghezza confrontabile con quella dell'asta).

La potenza media trasportata dall'onda nel caso tridimensionale, cioè la (12.34), può essere ricavata anche con un ragionamento di questo tipo: presa una superficie di area  $\Sigma$ , ortogonale alla direzione di propagazione dell'onda piana, nel tempo  $T$  passa attraverso  $\Sigma$  tutta l'energia contenuta nel volume (a monte di  $\Sigma$ ) che ha base  $\Sigma$  e altezza  $\lambda$ , essendo  $\lambda$  lo spazio percorso dall'onda nel tempo  $T$ . Il valore del volume è  $\Sigma \lambda = \Sigma v T$  e in esso è contenuta l'energia  $w_\tau \Sigma v T$ . Nel tempo  $T$  la potenza che passa attraverso  $\Sigma$  è  $w_\tau v \Sigma$ .

Dividendo (12.34) per  $\Sigma$  otteniamo una grandezza che dipende solo dalla densità di energia e dalla velocità di propagazione; questa grandezza si chiama *intensità dell'onda* e rappresenta il valore medio dell'energia che passa attraverso una sezione ortogonale alla direzione di propagazione per unità di tempo e per unità di area. L'espressione dell'intensità è

$$I = \frac{1}{\Sigma} \left( \frac{dU_{\text{mecc}}}{dt} \right)_m = \frac{P_m}{\Sigma} = w_\tau v = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 v \quad . \quad (12.36)$$

In modo analogo nel caso bidimensionale si definisce intensità dell'onda

$$I = \frac{1}{l} \left( \frac{dU_{\text{mecc}}}{dt} \right)_m = \frac{P_m}{l} = w_\Sigma v \quad ; \quad (12.37)$$

il valore medio dell'energia che passa per unità di tempo attraverso l'unità di lunghezza posta perpendicolarmente alla direzione di propagazione. E, infine, nel caso unidimensionale, l'intensità coincide con la potenza media:

$$I = \left( \frac{dU_{\text{mecc}}}{dt} \right)_m = P_m = w_l v \quad . \quad (12.38)$$

Possiamo dire che vale sempre la formula generale

$$I = w_i v \quad (i = \tau, \Sigma, l)$$

Intensità di un'onda

dove  $w_i$  è la densità di energia relativa alla dimensione del sistema considerato, cioè energia per unità di volume, di superficie o di lunghezza. Bisogna notare che l'unità di misura dell'intensità non è la stessa nei tre casi, ma è rispettivamente  $\text{W/m}^2$ ,  $\text{W/m}$ ,  $\text{W}$ .

Nelle onde meccaniche esaminate l'energia, e quindi anche la densità di energia, è proporzionale a  $\omega^2$  e ad  $A^2$ : pertanto l'intensità di tali onde è *proporzionale al quadrato della pulsazione* (ovvero *della frequenza*) e al *quadrato dell'ampiezza dell'onda*.

### Esempio 12.2

In una corda, tesa con tensione  $T = 96 \text{ N}$  e avente densità lineare  $\rho_i = 6 \cdot 10^{-2} \text{ Kg/m}$ , si vogliono produrre onde armoniche di frequenza  $v = 5 \text{ Hz}$  e ampiezza  $A = 5 \text{ cm}$ . Determinare tutti i parametri che descrivono l'onda, la velocità massima dei punti della corda e l'intensità dell'onda.

#### Soluzione

La velocità di propagazione dell'onda secondo (12.29) vale

$$v = \sqrt{\frac{T}{\rho_i}} = 40 \text{ m/s}$$

Gli altri parametri sono:

$$\omega = 2\pi v = 31.4 \text{ rad/s}, k = \frac{\omega}{v} = 0.785 \text{ rad/m}, \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi v}{\omega} = \frac{v}{\omega} = 8 \text{ m}$$

La velocità massima dei punti della corda risulta

$$v_{\max} = \omega A = 1.57 \text{ m/s}$$

ed è bene notare che tale valore non deve essere confuso con la velocità di propagazione dell'onda  $v = 40 \text{ m/s}$  (le due velocità sono legate dalla relazione  $v_{\max} = \omega A = k v A$ , ma hanno chiaramente significato fisico ben diverso).

La densità lineare di energia vale

$$w_i = \frac{1}{2} \rho_i \omega^2 A^2 = 7.4 \cdot 10^{-2} \text{ J/m}$$

e l'intensità, pari alla potenza media, è

$$I = w_i v = 2.96 \text{ W}$$

L'origine del flusso di energia che abbiamo caratterizzato con la grandezza *intensità* è nella sorgente delle onde: in essa viene compiuto un certo lavoro meccanico che poi compare come energia trasportata dall'onda. Se questa è impulsiva, nel senso che la perturbazione ha una breve durata, troviamo ovviamente la stessa caratteristica nel trasporto di energia: un elemento del sistema in quiete viene messo in moto attraverso una cessione di energia da parte dell'elemento che lo precede e poi cede la stessa energia all'elemento successivo ritornando in quiete. Se invece il fenomeno è continuo, come in un'onda armonica, c'è un flusso continuo di energia che non si accumula in nessun punto del sistema: un elemento continua a ricevere una data energia dall'elemento precedente e la cede integralmente a quello successivo, restando però in movimento appunto perché il flusso di energia è continuo.

La trasmissione integrale di energia è sempre un caso limite: sia a causa di attriti interni che della cessione di energia all'ambiente l'energia trasmessa diminuisce mentre l'onda avanza. Si parla di *assorbimento*, ma per ora ci limitiamo soltanto a menzionare il fenomeno.

## 12.8 Intensità delle onde sonore. Battimenti

Ripetiamo per un'onda sonora in una colonna di gas il calcolo dell'intensità con lo scopo di mostrare che il risultato (12.36) è valido anche in tale sistema. Dalla (9.36) del primo volume riportata nel paragrafo 12.2 abbiamo che la forza su un elemento della colonna, di sezione  $\Sigma$ , è

$$(p - p_0) \Sigma = -\beta \frac{\partial s}{\partial x} \Sigma ,$$

avendo indicato con  $\beta$  il modulo di compressibilità e con  $s = A \sin(kx - \omega t)$  l'onda armonica di spostamento che si propaga con velocità

$$v = \sqrt{\frac{\beta}{\rho_0}} . \quad (12.39)$$

La potenza è

$$P = -\beta \frac{\partial s}{\partial x} \Sigma \frac{\partial s}{\partial t}$$

ovvero, derivando l'espressione di  $s$  e passando al valor medio,

$$P_m = \frac{1}{2} \beta \omega k A^2 \Sigma .$$

Si usano (12.39), (12.6) e si ottiene anche ora

$$P_m = \frac{1}{2} \rho_0 \omega^2 A^2 v \Sigma = w_r v \Sigma . \quad I = w_r v = \frac{1}{2} \rho_0 \omega^2 A^2 v .$$

All'onda di spostamento si accompagna un'onda di pressione; sempre dalla (9.36) sopra citata abbiamo

$$\Delta p = p - p_0 = -\beta \frac{\partial s}{\partial x} = -\beta k A \cos(kx - \omega t) = \rho_0 v \omega A \sin\left(kx - \omega t + \frac{\pi}{2}\right) :$$

L'onda di pressione è in quadratura di fase con l'onda di spostamento e la sua ampiezza vale

$$(\Delta p)_{max} = \rho_0 v \omega A .$$

Per l'intensità possiamo quindi avere le due espressioni equivalenti

$$I = \frac{1}{2} \rho_0 \omega^2 A^2 v = \frac{(\Delta p)_{max}^2}{2\rho_0 v} .$$

Poiché vogliamo riferirci alle onde sonore in aria percepite dall'orecchio umano, esprimiamo  $\omega$  in funzione della frequenza  $v$ , come si fa correntemente, e otteniamo

$$(\Delta p)_{max} = 2\pi v \rho_0 v A , \quad (12.40)$$

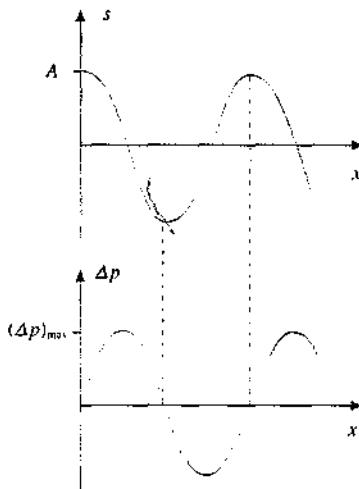


Figura 12.16

$$I = 2\pi^2 v^2 A^2 \rho_0 v = \frac{(\Delta p)_{\max}^2}{2\rho_0 v} \quad (12.41)$$

I dati numerici di riferimento per l'aria a 20° C sono  $\rho_0 = 1.29 \text{ Kg/m}^3$  e  $v = 343 \text{ m/s}$ .

### Caratteristiche fisiche dell'orecchio. Fonometria

L'apparato rivelatore del suono negli esseri umani è l'orecchio e più precisamente il timpano, una membrana elastica che viene posta in vibrazione dalla pressione esercitata su di essa dall'onda sonora. Per essere messo in movimento il timpano ha bisogno di un'intensità minima. Nella figura 12.17 la curva inferiore rappresenta la *soglia di udibilità* in funzione della frequenza, intesa come intensità minima al di sotto della quale il suono non è udibile. La curva superiore rappresenta, sempre in funzione della frequenza, la *soglia del dolore*, cioè l'intensità al di sopra della quale si percepisce una sensazione dolorosa; per intensità molto più grandi della soglia del dolore si possono produrre lesioni permanenti nel timpano. L'ordinata a sinistra dà l'intensità in  $\text{W/m}^2$ , quella a destra la corrispondente ampiezza dell'onda di pressione, in Pa. Si osservi che le scale sono logaritmiche in base 10. L'ascissa va da 20 a 20000 Hz, che sono approssimativamente i limiti dell'intervallo delle frequenze udibili; le curve sono disegnate da circa 25 a circa 15000 Hz. Il limite superiore 20000 Hz in effetti non è facilmente raggiungibile e in ogni caso scende rapidamente a 15000 Hz e anche al di sotto con l'età.

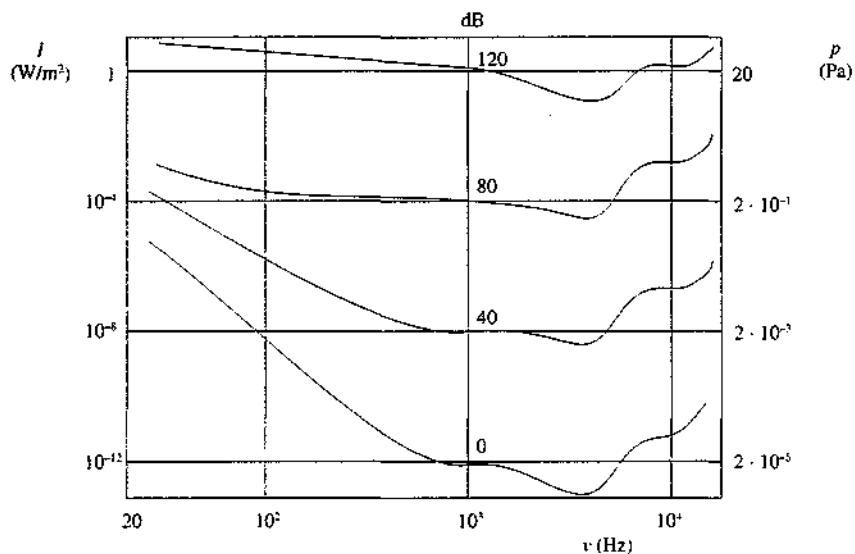


Figura 12.17

Normalmente si assume come soglia minima dell'udibilità l'intensità  $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$  alla frequenza  $\nu = 10^3 \text{ Hz}$ . Il corrispondente valore dell'ampiezza dell'onda di pressione, secondo (12.41), è

$$(\Delta p)_{\max} = \sqrt{2 \rho_0 v I_0} = 2.97 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}$$

L'orecchio umano è pertanto in grado di percepire fluttuazioni relative della pressione atmosferica dell'ordine di  $(\Delta p)_{\max}/p_0 = 2.97 \cdot 10^{-5}/1.01 \cdot 10^5 \approx 3 \cdot 10^{-10}$ , cioè di 3 parti su  $10^{10}$ . L'ampiezza delle oscillazioni delle molecole d'aria in corrispondenza alla soglia minima e a  $10^3 \text{ Hz}$  si ricava da (12.40):

$$A = \frac{(\Delta p)_{\max}}{2\pi v \rho_0 v} = 1.07 \cdot 10^{-11} \text{ m}$$

inferiore al diametro delle molecole, che è dell'ordine di  $10^{-10}$  m.

All'altro estremo, se eseguiamo gli stessi calcoli con  $I = 1 \text{ W/m}^2$ , si ha:

$$(\Delta p)_{\max} = 29.7 \text{ Pa}, A = 1.07 \cdot 10^{-5} \text{ m} = 10.7 \mu\text{m}$$

Riassumendo, la capacità uditiva dell'orecchio si estende su 3 ordini di grandezza in frequenza, 12 ordini di grandezza in intensità e 6 ordini di grandezza in ampiezza di oscillazione.

Rispetto alla soglia di udibilità  $I_0$  si definisce il *livello sonoro B* di una certa intensità  $I$  tramite la formula

$$B = 10 \log \frac{I}{I_0} ; \quad (12.42)$$

con il simbolo log mettiamo in evidenza che si tratta di logaritmi decimali. Per  $I = 10 I_0$   $B = 10$ , per  $I = 100 I_0$   $B = 20$  e così via; l'unità di misura di  $B$  è il *decibel* (simbolo dB). Dalla (12.42) si ricava che il livello sonoro dell'intensità di riferimento è zero e che l'intensità corrispondente a un livello sonoro di  $B$  dB rispetto al riferimento è data da

$$I = I_0 10^{B/10} ;$$

in particolare  $B = 1 \text{ dB}$  vuol dire  $I = I_0 10^{1/10} \approx 1.256 I_0$ .

Nella figura 12.17 sono segnati, in corrispondenza a  $v = 10^3 \text{ Hz}$ , i livelli sonori rispetto al valore  $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$ ; il livello sonoro della soglia del dolore è 120 dB.

Notiamo che, essendo definito tramite un rapporto, il livello sonoro non dipende dai valori di riferimento  $I_0$  e quindi nemmeno dalla frequenza. La curva di soglia di udibilità della figura 12.17 mostra che l'intensità minima è funzione della frequenza,  $I_0(v)$ , anche se un certo livello sonoro  $B$  individua un determinato rapporto tra  $I$  e  $I_0$ , che è lo stesso a qualsiasi frequenza. Naturalmente, a parità di  $B$ , se varia  $I_0$  varia  $I$ : eguale livello sonoro non vuol dire eguale intensità, ma eguale intensità relativa.

Una definizione logaritmica tipo (12.42) è utile quando si hanno notevoli variazioni delle grandezze in esame come nel caso dell'intensità cui è sensibile l'orecchio; e infatti l'unità decibel è estesa ad altre situazioni simili (ad esempio si esprime in dB l'amplificazione di un circuito amplificatore) e viene utilizzata anche quando invece di esponenti positivi (come  $10^n I_0$ ) si hanno esponenti negativi ( $10^{-n} I_0$ ): in tal caso il numero di dB è negativo.

L'andamento della curva di soglia di udibilità mostra che la sensibilità dell'orecchio varia notevolmente con la frequenza; essa inoltre dipende dal livello sonoro. Nella figura 12.17 sono mostrate due altre curve che sono costruite nel modo seguente. Supponiamo di produrre a 1000 Hz un livello sonoro  $B = 40 \text{ dB}$ , che dà una certa sensazione sonora; si cerca poi alle altre frequenze quali livelli sonori producano la stessa sensazione uditiva. Si trova che non si tratta sempre di  $B = 40 \text{ dB}$ ; ad esempio alle basse frequenze la stessa sensazione uditiva è ottenuta con valori di  $B$  inferiori: a 100 Hz si ha con  $I = 10^2 I_0$  la stessa sensazione prodotta a 1000 Hz da  $I = 10^4 I_0$ . I valori di  $B$  che producono la stessa sensazione uditiva di  $B = 40 \text{ dB}$  a 1000 Hz stanno su una curva che è detta *isofonica*, diversa come forma dalla curva di minima udibilità. Allo stesso modo è costruita la curva isofonica con  $B = 80 \text{ dB}$  a 1000 Hz, ancora diversa dalla precedente. È chiaro che in queste misure c'è un notevole grado di soggettività e che esse vanno mediate su molte determinazioni.

Le curve isofoniche sono dunque curve di eguale *sensazione sonora S* e non curve di eguale livello sonoro  $B$ , sempre con riferimento alla curva di minimo. Il valore della sensazione sonora si assume eguale a quello del livello sonoro a 1000 Hz, ma si indicano con una unità diversa, il *fon*: le due curve disegnate sono perciò le curve isofoniche a 40 fon e a 80 fon.

Le due grandezze  $S$ , fisiologica, e  $B$ , fisica, non sono quindi proporzionali: però oltre 1000 Hz le curve sono abbastanza simili, quasi ottenibili per traslazione una dall'altra. Se ciò fosse rigorosamente vero varrebbe la legge

$$S = k B = k 10 \log \frac{I}{I_0} = k' \log \frac{I}{I_0} ; \quad (12.43)$$

detta *legge psicofisica di Fechner e Weber*. La (12.43) si scrive anche

$$S_2 - S_1 = k' \log \frac{I_2}{I_1} ;$$

la variazione di sensazione sonora è proporzionale al logaritmo del rapporto tra le intensità che hanno prodotto le sensazioni.

Nella realtà la risposta dell'orecchio (sensazione sonora) all'intensità che lo colpisce è approssimativamente logaritmica alle medie ed alte frequenze, dove è proporzionale al livello sonoro, ma si discosta sostanzialmente da questo comportamento al di sotto di 1000 Hz.

Le misure di intensità sonora e livello sonoro possono esser eseguite con strumenti, detti *fonometri*, opportunamente tarati in fon o in dB. Nella tabella 12.1 sono riportati alcuni valori indicativi di livello sonoro di varie sorgenti, percepite alle distanze usuali del loro ascolto.

Tabella 12.1 Livelli sonori	
Sorgente del suono	Livello sonoro (dB)
motore a reazione (nelle vicinanze)	150
martello pneumatico	130
concerto rock	120
traffico intenso	80
conversazione normale	50
sussurro	20

La normativa italiana fissa a 80 dB il valore massimo del rumore negli ambienti di lavoro, quali ad esempio le officine meccaniche in cui operano macchine utensili.

### Ultrasuoni

Le onde sonore con frequenza superiore al limite di udibilità ( $2 \cdot 10^4$  Hz) sono dette *ultrasuoni*. Questo termine viene utilizzato fino a frequenze dell'ordine di  $10^9$  Hz, oltre le quali si parla di *ipersuoni*; le massime frequenze ottenute arrivano a  $10^{11}$  Hz.

Alle frequenze degli ultrasuoni corrispondono, nei mezzi di propagazione più comuni, che sono l'aria ( $v = 340$  m/s) e l'acqua ( $v = 1500$  m/s), lunghezze d'onda molto piccole e ciò permette di formare fasci di ultrasuoni sottili e ben collimati, che non subiscono diffrazione in modo apprezzabile (vedi capitolo 16) e sono utilizzati in numerose applicazioni.

Nella tecnica gli ultrasuoni vengono usati ad esempio per studi di imperfezioni di metalli, per pulire a fondo superficie di svariati materiali, per misurare la distanza di eventuali ostacoli in condizioni di non visibilità (*sonar*); anche in medicina l'uso è diffuso, sia per terapie che per indagini diagnostiche (*ecografia*).

### Battimenti

Il fenomeno dei *battimenti* tra due oscillazioni armoniche di pulsazione diversa è stato trattato nel paragrafo 9.4 del primo volume. Esso si verifica anche nella propagazione delle onde e quindi riprendiamo l'argomento, con particolare riferimento alle onde sonore. In queste infatti i battimenti sono facilmente osservabili; bisogna ricordare però che essi si possono verificare con qualsiasi tipo di onda.

Nel paragrafo 12.11 vedremo il fenomeno in generale; adesso invece concentriamo l'attenzione su ciò che accade in un punto  $P$ , che potrebbe essere un orecchio o uno strumento di ricezione, interessato da due onde sonore piane armoniche di eguale ampiezza e pulsazioni diverse.  $\omega_1 = 2\pi\nu_1$  e  $\omega_2 = 2\pi\nu_2$ , con  $\omega_1 > \omega_2$ , che arrivano in  $P$  dalla stessa direzione. Sappiamo che in un punto fisso la funzione d'onda descrive un'oscillazione armonica e scriviamo semplicemente

$$s_1 = A \sin \omega_1 t \quad , \quad s_2 = A \sin \omega_2 t \quad .$$

ammettendo anche che lo sfasamento sia nullo. La sovrapposizione delle due oscillazioni dà

$$s = s_1 + s_2 = 2A \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \sin \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \quad .$$

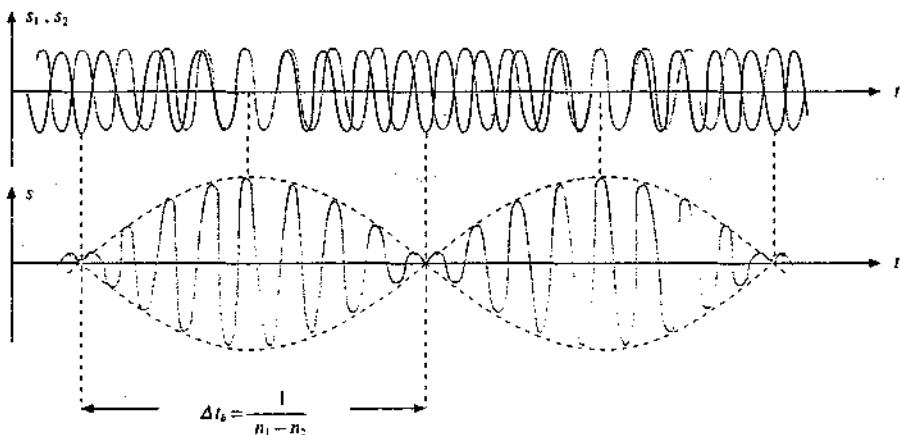


Figura 12.18

Definendo

$$\Omega = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}, \quad \omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$$

si ha

$$s = 2A \cos \Omega t \sin \omega t \quad (12.44)$$

L'oscillazione nel punto  $P$  non è più armonica in quanto l'ampiezza non è costante, ma a sua volta varia in modo armonico nel tempo (*modulazione di ampiezza*). Se le due pulsazioni sono quasi eguali la pulsazione  $\omega$  è molto prossima sia a  $\omega_1$  che a  $\omega_2$ , mentre la pulsazione  $\Omega$  è molto inferiore a  $\omega$ .

Nell'intervallo delle frequenze udibili l'orecchio percepisce un suono di frequenza

$$v = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{v_1 + v_2}{2},$$

la cui intensità varia periodicamente nel tempo. La legge di variazione dell'intensità, che è proporzionale al quadrato dell'ampiezza di (12.44), ha la forma

$$I = I_{\max} \cos^2 \Omega t = I_{\max} \cos^2 2\pi \frac{v_1 - v_2}{2} t.$$

Il periodo della funzione  $\cos^2 \Omega t$  è la metà del periodo della funzione  $\cos \Omega t$  e quindi la corrispondente frequenza è doppia; l'orecchio percepisce una variazione dell'intensità con frequenza

$$v_b = v_1 - v_2,$$

Frequenza di battimento

detta *frequenza di battimento*, molto inferiore a  $v$  se  $v_1$  e  $v_2$  sono poco diverse.

Supponiamo ad esempio che sia  $v_1 = 438$  Hz e  $v_2 = 442$  Hz; l'orecchio percepisce la frequenza  $v = 440$  Hz e la frequenza di battimento  $v_b = 4$  Hz, sente cioè variare l'intensità 4 volte al secondo (si noti che questa frequenza  $v_b$  non è quella di vibrazione del timpano). Il limite fisiologico è  $v_b = 10$  Hz: per valori superiori le variazioni dell'intensità sono troppo rapide per essere percepiti. Con questo esempio si precisa il quadro delle caratteristiche dell'orecchio come ricevitore sonoro.

Il fenomeno dei battimenti può essere usato per confrontare una frequenza non nota  $v$  poco diversa da una frequenza nota  $v_b$ : dalla frequenza di battimento si risale al valore di  $v$ .

## 12.9 Onde in più dimensioni

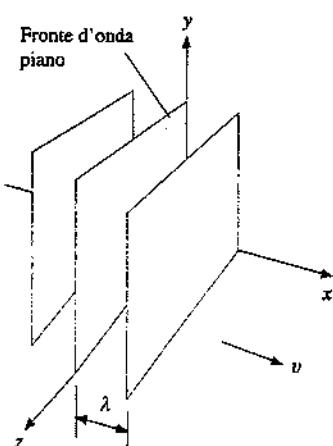


Figura 12.19

Nei paragrafi precedenti abbiamo definito un'onda piana come un'onda che si propaga in un'unica direzione. Se la direzione di propagazione coincide con l'asse  $x$  e l'onda è armonica, la funzione d'onda si scrive  $\xi = \xi_0 \sin(kx - \omega t)$ . Il valore della funzione è costante su ogni piano ortogonale alla direzione di propagazione; nei punti di un tale piano è quindi costante la fase  $\phi = kx - \omega t$ : tutti i punti del piano oscillano in fase tra loro. E in effetti, quando diciamo che l'onda si propaga lungo l'asse  $x$ , non intendiamo che il fenomeno sia localizzato nei punti dell'asse  $x$ , ma che è lo stesso in tutti i punti con la stessa  $x$ : in una sbarra o in una colonna di gas di sezione finita oscillano in fase tutti gli elementi appartenenti alla stessa sezione  $\Sigma$  ortogonale all'asse  $x$ .

Si definisce come *fronte d'onda* una superficie su cui in un certo istante la fase è costante. Per un'onda piana il fronte d'onda è un piano o quanto meno una porzione di piano. Il fronte d'onda piano si sposta con la velocità  $v$  di propagazione dell'onda, in accordo con (12.11), percorrendo una distanza pari alla lunghezza d'onda  $\lambda$  in un tempo pari al periodo  $T$  dell'onda; due fronti d'onda consecutivi, tra i quali ci sia la differenza di fase  $2\pi$ , distano tra loro di  $\lambda$ . I segmenti tracciati nella figura 12.11 possono essere interpretati come fronti d'onda distanti  $\lambda$ .

Per caratterizzare la direzione di propagazione dell'onda piana, che dipende da come è fatta la sorgente, ma non dal sistema di coordinate, si introduce il *vettore di propagazione*  $\mathbf{k}$ , che ha modulo  $k = 2\pi/\lambda$  e direzione e verso eguali a quelli di  $\mathbf{v}$ . Detto  $\mathbf{r}$  il raggio vettore che individua un punto  $P$  di un certo fronte d'onda piano, abbiamo

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = kr \cos \theta = kx$$

e la funzione d'onda si può scrivere

$$\xi = \xi_0 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \quad . \quad (12.45)$$

L'invarianza del prodotto scalare  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$  assicura che (12.45) costituisce l'espressione generale di un'onda armonica piana, indipendentemente dal sistema di coordinate prescelto per la descrizione analitica; la direzione di propagazione è quella del vettore  $\mathbf{k}$ , i fronti d'onda sono i piani ortogonali a tale direzione, luogo dei punti in cui è costante la fase  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t$ .

In un generico sistema di coordinate cartesiane

$$\mathbf{k} = k_x \mathbf{u}_x + k_y \mathbf{u}_y + k_z \mathbf{u}_z, \quad \mathbf{r} = x \mathbf{u}_x + y \mathbf{u}_y + z \mathbf{u}_z$$

e la (12.45) diventa

$$\xi = \xi_0 \sin(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t) \quad . \quad (12.46)$$

con

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2 = \frac{\omega^2}{v^2} \quad . \quad (12.47)$$

In tale sistema di coordinate l'*equazione generale delle onde piane* è

Equazione generale  
delle onde piane

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad . \quad (12.48)$$

Si verifica facilmente, servendosi anche di (12.47), che (12.46) è soluzione di (12.48). Se l'ambiente in cui avviene la propagazione è bidimensionale, ad esempio il piano  $x, y$ , (12.48) diventa

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} . \quad (12.49)$$

Nel caso di onde piane le (12.48) e (12.49) possono essere sempre ricondotte, con una trasformazione di coordinate, alla forma (12.1) tipica dell'onda piana.

L'interesse di (12.48) e (12.49) sta però nel fatto che esse ammettono soluzioni diverse da quelle tipo onda piana. Precisamente, nel caso tridimensionale sono soluzioni di (12.48) anche onde con *fronte d'onda sferico* e onde con *fronte d'onda cilindrico*: le prime sono emesse da sorgenti con simmetria sferica, al limite puntiformi, le seconde da una sorgente distribuita lungo una linea. Il fronte d'onda può essere sferico solo se la velocità di propagazione della perturbazione è la stessa in tutte le direzioni; nel caso di simmetria cilindrica la velocità deve essere la stessa almeno per tutte le direzioni ortogonali all'asse su cui sta la sorgente. Onde circolari in due dimensioni si hanno da una sorgente al limite puntiforme se la velocità di propagazione non dipende dall'angolo. Un mezzo isotropo soddisfa certamente alla condizione che la velocità sia la stessa in tutte le direzioni.

Alla simmetria del fronte d'onda non si accompagna necessariamente una simmetria dell'intensità. Avremo modo di vedere come in un'onda sferica si possa avere un'intensità che varia con l'angolo rispetto ad una certa direzione significativa; tale proprietà dipende dalla sorgente più che dal mezzo.

La nozione di fronte d'onda piano, sferico, cilindrico o di qualsiasi altra forma, porta con sé quella di *raggio*. Si chiama così la *linea ortogonale al fronte d'onda in un dato punto che rappresenta, in quel punto, la direzione di propagazione dell'onda e dell'energia ad essa associata*. Per fronti d'onda generici i raggi possono essere linee curve; nel caso di fronti d'onda piani essi sono rette ortogonali ai fronti d'onda, per fronti d'onda sferici sono le semirette uscenti dal centro delle superficie sferiche, per fronti d'onda cilindrici le semirette ortogonali all'asse delle superficie cilindriche.

Molte proprietà delle onde possono essere descritte per mezzo dei raggi, come vedremo soprattutto nella propagazione delle onde luminose.

### Onde elastiche in una membrana tesa

Per dimostrare come si possa arrivare direttamente all'equazione (12.49) consideriamo una membrana piana tesa con tensione  $T$ . Questa tensione, che è una forza per unità di lunghezza, può essere messa in evidenza praticando un piccolo taglio lungo  $d$ : per mantenere uniti i bordi bisogna applicare ortogonalmente al taglio due forze eguali e contrarie, ciascuna pari in modulo a  $Td$ . La situazione ricorda quella della tensione superficiale di un liquido (paragrafo 8.15 del volume primo).

La perturbazione consiste in uno spostamento  $s(x, y, t)$  di un elemento di membrana di area  $dx dy$  e massa  $dn = \rho_x d\Sigma = \rho_x dx dy$ , dove  $\rho_x$  è la densità superficiale; lo spostamento è ortogonale al piano  $x, y$ . Sui due lati lunghi  $dx$ , distanti tra loro  $dy$ , agiscono le due forze  $(T dx)_1$  e  $(T dx)_2$ , uguali in modulo, ma diverse in direzione. La situazione è identica a quella della corda tesa vista nel paragrafo 12.2 e concludiamo che la risultante lungo l'asse  $z$  è

$$dF_1 = T dx \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} dy = T \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} dx dy .$$

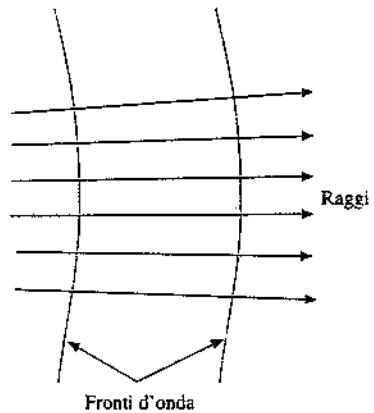


Figura 12.21

Raggio

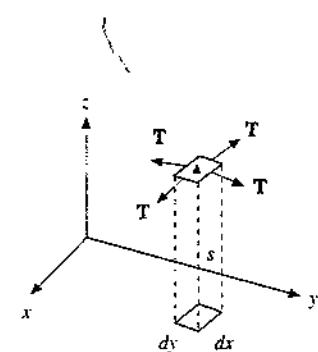


Figura 12.22

Analogamente, per le forze agenti sui lati lunghi  $dy$  e distanti tra loro  $dx$ , la risultante è

$$dF_2 = T dy \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} dx = T \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} dx dy .$$

In totale la forza lungo l'asse z è

$$dF_1 + dF_2 = T \left( \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} \right) dx dy$$

e deve essere eguale al prodotto massa per accelerazione dell'elemento:

$$T \left( \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} \right) dx dy = \rho_z dx dy \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} = \frac{\rho_z}{T} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} ,$$

coincidente con (12.49). Si tratta di onde elastiche trasversali che si propagano con velocità  $v = \sqrt{T/\rho_z}$ .

La forma dei fronti d'onda dipende da come viene generata la perturbazione.

### Onde sferiche e circolari

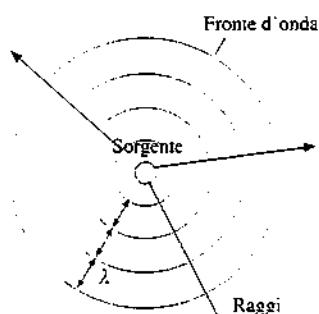


Figura 12.23

Un'onda prodotta da una sorgente puntiforme posta nel punto  $O$  si propaga in tutte le direzioni e il fronte d'onda risulta sferico con centro in  $O$  se la velocità di propagazione è la stessa in tutte le direzioni, cioè se il mezzo è isotropo.

La funzione d'onda di un'onda sferica armonica è

$$\xi(r, t) = A(r) \sin(kr - \omega t) ;$$

$r$  è la distanza da  $O$  e l'ampiezza  $A$  può essere funzione di  $r$ , ma non della direzione di emissione, per ragioni di simmetria essendo la sorgente puntiforme.

Dai risultati del paragrafo 12.7 sappiamo che l'intensità dell'onda è proporzionale al quadrato dell'ampiezza,  $I(r) = CA^2(r)$ , dove la costante  $C$  dipende dalla natura dell'onda. La potenza media trasmessa attraverso una superficie sferica di raggio  $r$  è

$$P_m = I \Sigma = CA^2(r) 4 \pi r^2$$

e deve risultare costante qualunque sia il valore di  $r$ , in quanto corrisponde alla potenza media emessa dalla sorgente. Pertanto  $A(r)$  risulta inversamente proporzionale a  $r$ ,  $A(r) = \xi_0/r$ , e la funzione d'onda dell'onda sferica armonica ha la struttura

$$\xi(r, t) = \frac{\xi_0}{r} \sin(kr - \omega t) . \quad (12.50)$$

Di conseguenza l'intensità è inversamente proporzionale al quadrato della distanza dalla sorgente. Ripetiamo che le relazioni

Onda sferica armonica

Ampiezza e intensità di un'onda sferica

$$A = \frac{\xi_0}{r} , \quad I = \frac{I_0}{r^2} \quad (12.51)$$

derivano soltanto dalla conservazione dell'energia e dalla geometria del problema.

Per una sorgente a simmetria sferica reale, che non può essere puntiforme, ma ha raggio  $r_0$ , le considerazioni fatte valgono per  $r \gg r_0$ .

Se l'onda sferica è sonora, dal paragrafo 12.8 e da (12.50) abbiamo, detta  $A_0$  la costante  $\xi_0$ ,

$$\Delta p = \frac{\rho_0 v \omega A_0}{r} \cos(kr - \omega t), I(r) = \frac{1}{2} \rho \omega^2 \frac{A_0^2}{r^2} v .$$

L'ampiezza delle oscillazioni delle molecole del gas e l'ampiezza dell'onda di pressione diminuiscono come  $1/r$ .

La (12.50) può essere ricavata direttamente. Ammettendo la simmetria sferica vale la (3.30),

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \nabla^2 \xi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial \xi}{\partial r}$$

ed è semplice provare che l'ultimo membro è eguale a  $\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r \xi)}{\partial r^2}$ . Abbiamo quindi da (12.48)

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r \xi)}{\partial r^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 (r \xi)}{\partial r^2} = \frac{r}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 (r \xi)}{\partial t^2} ,$$

essendo lecito l'ultimo passaggio in quanto la derivata parziale rispetto al tempo è fatta a  $r$  costante. Abbiamo così dimostrato che in presenza di simmetria sferica la funzione  $r \xi$  è soluzione dell'equazione delle onde unidimensionale in  $r$  e  $t$ ; ne segue che  $r \xi$  è eguale a una  $f(r \pm vt)$ . Nel caso di onde armoniche

$$\xi(r, t) = \frac{\xi_0}{r} \sin(kr \pm \omega t) .$$

### Esempio 12.3

La potenza media di un'onda sonora sferica uscente da un altoparlante è  $P_m = 10 \text{ W}$ . Calcolare l'intensità  $I_1$  alla distanza di 1 m e la distanza  $r_2$  alla quale il livello sonoro è  $B_2 = 40 \text{ dB}$ .

#### Soluzione

Per  $r = 1 \text{ m}$   $I_1 = P_m / 4 \pi r_1^2 = 0.796 \text{ W/m}^2$ . Detta  $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$  la soglia di udibilità, il livello sonoro a 1 m è  $B_1 = 10 \log (I_1 / I_0) \approx 119 \text{ dB}$ , corrispondente all'incirca alla soglia del dolore.

Il livello sonoro  $B_2 = 40 \text{ dB}$  corrisponde a un'intensità  $I_2$  tale che

$$\log \frac{I_2}{I_0} = \frac{B_2}{10} = 4 \quad . \quad I_2 = 10^4 I_0 = 10^{-8} \text{ W/m}^2$$

e quindi  $r_2 = \sqrt{P_m / 4 \pi I_2} = 8921 \text{ m} = 8.921 \text{ km}$ .

In realtà, a causa dei processi di assorbimento, l'intensità diminuisce molto più rapidamente allontanandosi dalla sorgente. Il fenomeno avviene anche per le onde piane, che teoricamente dovrebbero avere ampiezza costante.

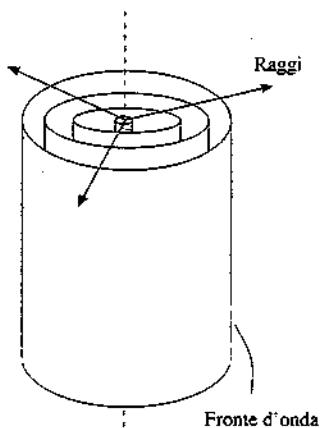


Figura 12.24

All'aumentare della distanza dalla sorgente i fronti d'onda sferici hanno raggio sempre maggiore per cui, se si considera una porzione limitata del fronte d'onda, la superficie sferica tende a confondersi con un piano; lontano dalla sorgente ogni piccola porzione di onda sferica può quindi essere approssimata con un'onda piana. In queste condizioni l'ampiezza dell'onda sferica può essere considerata costante, come richiede la definizione di onda piana, se ci si limita a variazioni di distanza non troppo grandi. Nella pratica spesso un'onda piana viene generata a partire da un'onda sferica, delimitando con un opportuno diaframma un fronte sferico molto distante dalla sorgente o, come si fa in ottica, utilizzando una lente (Capitolo 17).

Quanto detto per le onde sferiche si ripete, con le ovvie modifiche, per le onde circolari in un piano. In particolare valgono le (12.51) per la dipendenza dell'ampiezza e dell'intensità dalla distanza  $r$  dalla sorgente.

### Onde cilindriche

Le onde cilindriche hanno fronti d'onda che sono superficie cilindriche coassiali: sull'asse delle superficie è posta la sorgente. Nella pratica la produzione di onde cilindriche può avvenire da parte di una serie di sorgenti puntiformi distribuite lungo un asse e che oscillano tutte con la stessa fase.

Detta  $r$  la distanza dalla sorgente, misurata lungo un raggio ortogonale alla sorgente, e supponendo che le onde siano armoniche, possiamo ripetere il ragionamento sull'intensità già fatto per le onde sferiche. Presa una superficie cilindrica  $\Sigma = 2\pi rh$ , cioè di raggio  $r$  e altezza  $h$ , la potenza media che la attraversa è

$$P_m = I(r) \Sigma = CA^2(r) 2\pi rh$$

e deve essere costante al variare di  $r$ : ciò comporta che l'intensità sia inversamente proporzionale a  $r$  e l'ampiezza a  $\sqrt{r}$ . La funzione d'onda di un'onda cilindrica armonica è

Onda cilindrica armonica

$$\xi(r, t) = \frac{\xi_0}{\sqrt{r}} \sin(kr - \omega t) \quad (12.52)$$

e l'intensità ha l'espressione

Intensità di un'onda cilindrica

$$I = \frac{I_0}{r} \quad . \quad (12.53)$$

A grande distanza dalla sorgente vale localmente l'approssimazione con un'onda piana, come discusso per le onde sferiche.

### Caratteristiche delle onde meccaniche in relazione al mezzo

L'esame delle proprietà delle onde esposte finora mette in evidenza che alcune dipendono dalla sorgente, come la frequenza, l'ampiezza e la distribuzione dell'intensità nelle varie direzioni, mentre altre dipendono dal mezzo, come la velocità di propagazione.

Dalla sorgente, ma anche dal mezzo, dipende la proprietà delle onde di poter essere longitudinali o trasversali. In un fluido ideale le onde possono essere solo longitudinali, poiché un'oscillazione trasversale non può propagarsi. Invece in un solido, che ha modulo di rigidità diverso da zero, possono propagarsi onde sia longitudinali che

trasversali; in una corda e in una membrana tesa le onde sono soltanto trasversali.

Con onde trasversali si può avere *polarizzazione*: l'emissione di onde polarizzate può essere una caratteristica della sorgente oppure la polarizzazione può essere ottenuta in mezzi particolari, che ad esempio selezionano una direzione di vibrazione rispetto alle altre.

Nel vuoto non è possibile avere propagazione di onde meccaniche, essendo questa dovuta alle interazioni tra gli elementi del mezzo.

### Assorbimento

La verifica sperimentale in un mezzo materiale della costanza (onde piane) o della decrescita dell'intensità secondo le leggi  $1/r^2$  (onde sferiche) o  $1/r$  (onde cilindriche) mostra che l'intensità decresce più rapidamente di quanto previsto. Questo fatto viene attribuito ad un *assorbimento dell'energia* trasportata dall'onda da parte del mezzo attraversato e da parte di eventuali altri mezzi circostanti. Considerando l'assorbimento del mezzo, esso è dovuto a fenomeni di attrito interno; le misure portano alla conclusione che su uno spessore  $dx$  attraversato tra  $x$  e  $x + dx$  la diminuzione di intensità è proporzionale all'intensità in  $x$  e allo spessore  $dx$ :

$$dI = -\alpha I(x) dx ,$$

dove il segno negativo indica appunto che si tratta di diminuzione e  $\alpha$  è una grandezza caratteristica del mezzo, detta *coefficiente di assorbimento*. Integrando su uno spessore finito e supponendo  $\alpha$  costante si ha

$$\int_{I_0}^I \frac{dI}{I} = -\alpha \int_0^x dx , \ln \frac{I(x)}{I_0} = -\alpha x , I(x) = I_0 e^{-\alpha x} . \quad (12.54)$$

La decrescita dell'intensità è esponenziale;  $\alpha$  è il parametro che caratterizza la rapidità di decrescita, come abbiamo visto più volte in casi analoghi. La distanza  $x_0 = 1/\alpha$ , detta *lunghezza di assorbimento*, misura la distanza tra due punti tali che  $I(x_2)/I(x_1) = 1/e \approx 0.368$ .

Dato che l'ampiezza varia come  $\sqrt{I}$ , la funzione d'onda in un mezzo che assorbe energia secondo (12.54) è:

$$\begin{aligned} \text{onde piane} \quad & \xi = \xi_0 e^{-\alpha x/2} \sin(kx - \omega t) , \\ \text{onde sferiche} \quad & \xi = \xi_0 \frac{e^{-\alpha r/2}}{r} \sin(kr - \omega t) , \\ \text{onde cilindriche} \quad & \xi = \xi_0 \frac{e^{-\alpha r/2}}{\sqrt{r}} \sin(kr - \omega t) . \end{aligned} \quad (12.55)$$

Per dare un'idea quantitativa dell'entità del fenomeno, diciamo che nell'aria l'intensità di un'onda sonora alla frequenza di 400 Hz viene attenuata di circa 2 dB/km, cui corrisponde un coefficiente di assorbimento  $\alpha = 4.6 \cdot 10^{-4} \text{ m}^{-1}$ , ovvero una lunghezza di assorbimento  $1/\alpha = 2.2 \text{ km}$ . Infatti, detta  $A$  l'attenuazione in decibel sulla distanza  $x$ , lungo cui l'intensità passa dal valore  $I_1$  al valore  $I_2 < I_1$ , abbiamo in base alle definizioni (12.42) e (12.54),

$$A = -10 \log \frac{I_2}{I_1} , \alpha x = -\ln \frac{I_2}{I_1} = -\ln 10 \log \frac{I_2}{I_1} \Rightarrow \alpha = 0.23 \frac{A}{x} .$$

Questo valore, relativamente costante per umidità relative comprese tra 50% e 100%, cresce con la frequenza. A  $2 \cdot 10^3$  Hz  $A = 6.3$  dB/km, mentre alla frequenza ultrasonica  $8 \cdot 10^4$  Hz  $A = 3 \cdot 10^3$  dB/km.

### Pacchetto d'onde

Abbiamo finora parlato di onde armoniche che, per definizione, non hanno né inizio né fine, cioè hanno lunghezza e durata infinita. Tutte le sorgenti in generale emettono onde attraverso processi che hanno una durata  $\Delta t$  finita e quindi nella realtà un'onda, anche se ha un andamento praticamente armonico, ha sempre una durata e un'estensione spaziale finite. Definiamo come *pacchetto d'onde o impulso un'onda di durata e lunghezza finite*.

Nella figura 12.25 è rappresentato, a confronto con un'onda armonica di lunghezza d'onda  $\lambda$  e periodo  $T = 1/v = \lambda/v$ , un pacchetto d'onde armonico, visto ad un certo istante (in funzione di  $x$ ) o in una certa posizione (in funzione di  $t$ ). Pur essendo simile a un'onda armonica, il pacchetto ha lunghezza  $\Delta x$  e durata  $\Delta t$  finite, legate tra loro da  $\Delta x = v\Delta t$ , se  $v$  è la velocità di propagazione dell'onda. Il numero di oscillazioni (cicli) contenute nel pacchetto è determinato dalle

$$\Delta x = N\lambda \quad , \quad \Delta t = NT$$

ed esprimiamo il numero d'onde  $k$  e la pulsazione  $\omega$  del pacchetto come

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi N}{\Delta x} \quad , \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi N}{\Delta t}$$

Se ammettiamo, come mostra la figura 12.25, che  $N$  non sia completamente fissato, ma abbia una certa indeterminazione che esprimiamo con  $\Delta N = 1$ , deriviamo le seguenti indeterminazioni per  $k$  e  $\omega$ ,

$$\Delta k = \frac{2\pi}{\Delta x} \quad , \quad \Delta \omega = \frac{2\pi}{\Delta t} \Rightarrow \Delta v = \frac{1}{\Delta t} \quad ,$$

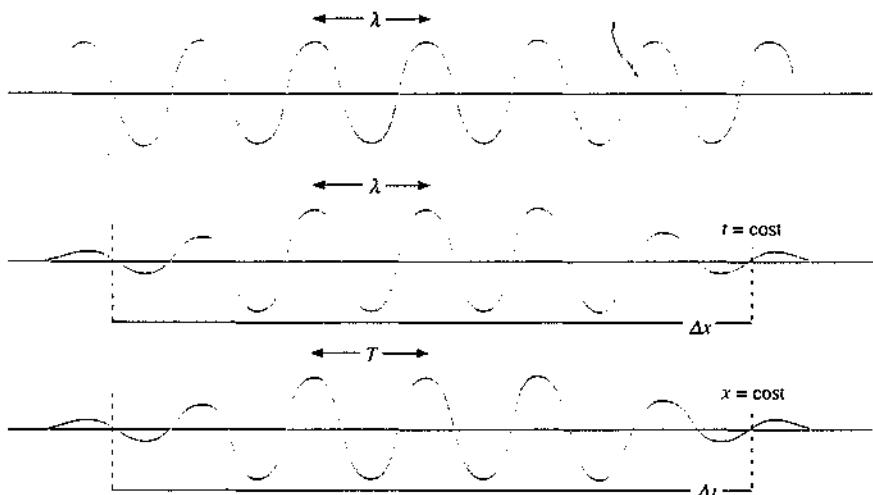


Figura 12.25

che possono essere riscritte come

$$\Delta k \Delta x = 2\pi, \quad \Delta \omega \Delta t = 2\pi, \quad \Delta v \Delta t = 1. \quad (12.56)$$

Queste relazioni mettono in evidenza la sostanziale differenza tra l'onda armonica e il pacchetto d'onde armonico: mentre la prima ha una lunghezza d'onda  $\lambda$  e una frequenza  $v$  ben definite che la descrivono completamente, nel secondo è presente una *banda di frequenze*  $\Delta v = 1/\Delta t$  nell'intorno della frequenza  $v$  e un *intervallo di numeri d'onda*  $\Delta k = 2\pi/\Delta x$  nell'intorno di  $k = 2\pi/\lambda$ . Maggiori sono  $\Delta x$  e  $\Delta t$  minori risultano queste bande (e al limite per  $\Delta x$  e  $\Delta t$  tendenti all'infinito si ottiene l'onda armonica), ma per brevi durate e lunghezze nel pacchetto sono contenute lunghezze d'onda e frequenze significativamente diverse da  $\lambda$  e  $v$ .

Relazioni analoghe alle (12.56) valgono per pacchetti d'onde di forma qualunque. Esse sono ricavate con un procedimento matematico rigoroso che naturalmente si basa sull'analisi di Fourier e verrà esposto più avanti.

Vediamo prima alcuni esempi relativi alle (12.56), per stabilirne numericamente l'importanza. Supponiamo che venga emesso in aria un suono di frequenza  $v = 500$  Hz e che la durata dell'emissione sia  $\Delta t = 0.1$  s; il numero di cicli è quindi  $\sim 50$ . Da (12.56)

$$\Delta v = \frac{1}{\Delta t} = 10 \text{ Hz}, \quad \frac{\Delta v}{v} = \frac{10}{500} = 0.02$$

L'intervallo di frequenze che compongono il pacchetto ha una larghezza pari al 2% della frequenza media  $v = 500$  Hz, andando da 495 a 505 Hz. Nell'aria a  $20^\circ\text{C}$   $v = 343$  m/s e quindi  $\Delta x = v \Delta t = 34.3$  m è la lunghezza del pacchetto. Da questo valore si può calcolare  $\Delta k = 0.183$  rad/m e poi  $\Delta \lambda$ ; oppure da (12.10) si ha in modulo

$$\Delta \lambda = \frac{v}{v^2} \Delta v = 0.014 \text{ m}.$$

Rispetto al valore centrale  $\lambda = v/v = 0.686$  m abbiamo l'intervallo  $\Delta \lambda$  tra 0.693 m e 0.679 m ( $\Delta \lambda / \lambda = \Delta v / v$ ).

Come vedremo nel paragrafo 13.8 le sorgenti delle onde luminose sono gli atomi e la durata di emissione di un impulso luminoso è  $\Delta t = 10^{-8}$  s. Per la luce gialla  $v = 5 \cdot 10^{14}$  Hz e da (12.56) otteniamo

$$\Delta v = \frac{1}{\Delta t} \approx 10^8 \text{ Hz}, \quad \frac{\Delta v}{v} \approx 2 \cdot 10^{-7}.$$

La velocità della luce nel vuoto è  $c = 3 \cdot 10^8$  m/s e quindi  $\Delta x = c \Delta t = 3$  m. Per motivi che verranno chiariti nel capitolo 15, in cui tratteremo i fenomeni di interferenza delle onde,  $\Delta t$  e  $\Delta x$  sono chiamati rispettivamente *tempo di coerenza* e *lunghezza di coerenza*.

Nel 1960 è stato messo a punto per la prima volta il processo di amplificazione di luce per mezzo di emissione stimolata di radiazioni da parte degli atomi, detto processo *laser* dalle iniziali in lingua inglese: *light amplification by stimulated emission of radiation*; si tratta di un effetto quantistico che sarà descritto nel capitolo 18. Caratteristica di una sorgente laser è una larghezza relativa  $\Delta v/v$  dell'ordine di  $10^{-12} \div 10^{-13}$ ; essa è capace di emettere impulsi luminosi di durata notevole: ad esempio, alla stessa frequenza prima considerata e con  $\Delta v/v = 10^{-12}$ ,

$$\Delta t = \frac{1}{\Delta v} = \frac{1}{v} \frac{v}{\Delta v} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ s}.$$

Tempo di coerenza  
Lunghezza di coerenza

Laser

Il corrispondente  $\Delta x$  è  $c \Delta t = 6 \cdot 10^5 \text{ m} = 600 \text{ km}$ . Il tempo di coerenza e la lunghezza di coerenza della luce laser sono almeno 5 ordini di grandezza maggiori di quelli delle ordinarie sorgenti atomiche.

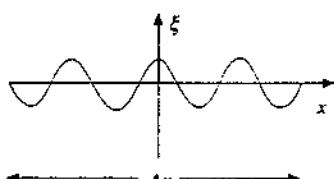


Figura 12.26

Vediamo adesso come si ricavano in modo rigoroso le (12.56). Definiamo un pacchetto d'onde armonico di lunghezza  $\Delta x$ , nell'istante  $t = 0$ :

$$\xi(x) = \xi_0 \cos k_0 x \quad -\frac{\Delta x}{2} \leq x \leq \frac{\Delta x}{2}, \quad \xi(x) = 0 \quad |x| > \frac{\Delta x}{2}.$$

Utilizziamo l'integrale di Fourier (12.16); nel caso specifico si può dimostrare che, essendo la funzione un coseno, (12.16) non contiene l'integrale con il seno:

$$\xi(x) = \int_0^{+\infty} b(k) \cos k x dk.$$

La funzione  $b(k)$  è data da

$$\begin{aligned} b(k) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi(x) \cos k x dx = \frac{\xi_0}{\pi} \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} \cos k_0 x \cos k x dx \\ &= \frac{\xi_0}{2\pi} \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} [\cos(k+k_0)x + \cos(k-k_0)x] dx. \end{aligned}$$

Il primo integrale vale

$$\frac{2}{k+k_0} \sin(k+k_0) \frac{\Delta x}{2} = \Delta x \frac{\sin(k+k_0) \frac{\Delta x}{2}}{(k+k_0) \frac{\Delta x}{2}}$$

e pertanto il risultato finale è

$$b(k) = \frac{\xi_0 \Delta x}{2\pi} \left[ \frac{\sin(k+k_0) \frac{\Delta x}{2}}{(k+k_0) \frac{\Delta x}{2}} + \frac{\sin(k-k_0) \frac{\Delta x}{2}}{(k-k_0) \frac{\Delta x}{2}} \right].$$

Se  $k$  e  $k_0$  sono abbastanza simili e  $\Delta x$  non è troppo piccolo, il denominatore del primo termine è molto maggiore di quello del secondo e concludiamo che

$$b(k) = \frac{\xi_0 \Delta x}{2\pi} \frac{\sin(k-k_0) \frac{\Delta x}{2}}{(k-k_0) \frac{\Delta x}{2}}.$$

Questa funzione, che dà al variare di  $k$  il contributo di ciascuno degli infiniti termini armonici che compongono il pacchetto d'onde, è massima per  $k = k_0$  dove vale

$b(k) = \xi_0 \Delta x / 2\pi$  in quanto  $\sin \theta / \theta$  vale 1 per  $\theta = 0$ . Essa è rappresentata in figura 12.27 e si vede che decresce rapidamente per  $k \neq k_0$ . Nell'intervallo di valori di  $k$  definito dalla condizione

$$-\frac{\pi}{2} < (k - k_0) \frac{\Delta x}{2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{\Delta x} < k - k_0 < \frac{\pi}{\Delta x}$$

risulta

$$\frac{b(k)}{b(k_0)} > \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} = 0.637 ,$$

ossia in tale intervallo  $b(k)$  è maggiore del 63.7% del valore massimo. Se assumiamo che le onde armoniche contenute nel detto intervallo, largo  $\Delta k = 2\pi/\Delta x$ , siano quelle che contribuiscono maggiormente a  $\xi(x)$ , concludiamo che tra larghezza dell'intervallo significativo e lunghezza dell'impulso sussiste la relazione  $\Delta k \Delta x = 2\pi$ . La stessa procedura, applicata ai parametri temporali  $\Delta t$  durata dell'impulso e  $\omega_0$  pulsazione dello stesso, fornisce  $\Delta\omega \Delta t = 2\pi$  ovvero  $\Delta\nu \Delta t = 1$ .

Definendo opportunamente gli intervalli  $\Delta k$  e  $\Delta\omega$  è chiaro che relazioni simili alle (12.56) si possono trovare per qualunque pacchetto d'onde.

Sottolineamo che il significato fisico delle (12.56) sta nel mettere in relazione la durata spaziale e temporale con gli intervalli di  $k$  e  $\nu$  in cui si trovano i contributi sostanziali delle onde armoniche che compongono il pacchetto d'onde. Minori sono tali durate e più largo è lo spettro di numeri d'onde e frequenze necessari per rappresentare il pacchetto.

Il ragionamento appena svolto per dimostrare le (12.56) suggerisce che queste in realtà debbano essere considerate limiti inferiori e che la forma più corretta sia

$$\Delta k \Delta x \geq 2\pi, \Delta\omega \Delta t \geq 2\pi, \Delta\nu \Delta t \geq 1 \quad (12.57)$$

## 12.11 Velocità di fase e velocità di gruppo

La discussione sui pacchetti d'onde e sulle relazioni (12.56) che abbiamo svolto nel paragrafo 12.10 si basa sull'applicazione dell'integrale di Fourier a una funzione non periodica dello spazio e del tempo. La particolarità della funzione di avere durata e lunghezza finite e, in generale, piuttosto contenute, permette di limitare la banda delle componenti armoniche importanti. Osserviamo che le proprietà di propagazione non intervengono nel calcolo.

Adesso invece vogliamo vedere quali conseguenze nascano dal fatto che il pacchetto d'onde, e tutte le sue componenti armoniche, una volta prodotti dalla sorgente si propaghi nello spazio. In sostanza si presentano due possibilità: la velocità di propagazione della perturbazione non dipende dalla frequenza della stessa oppure  $v$  è funzione della frequenza.

Nel primo caso si dice che la propagazione avviene in un *mezzo non dispersivo*; in queste condizioni tutte le componenti del pacchetto d'onde hanno la stessa velocità e quindi la somma, cioè il pacchetto, viaggia con tale velocità e non cambia forma. Nella relazione (12.6)  $v$  è una costante che non dipende da  $\omega$  e quindi nemmeno da  $k$ :  $\omega$  e  $k$  sono semplicemente proporzionali. Sono esempi di propagazione in mezzi non dispersivi:

- le onde elastiche in un gas (onde sonore)

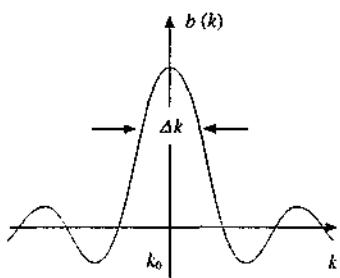


Figura 12.27

## Mezzi dispersivi

- le onde elastiche in una sbarra solida, in una corda tesa, in una membrana tesa
- le onde elettromagnetiche nel vuoto.

Quando la velocità di propagazione è una  $v(v)$  o  $v(\lambda)$  si parla di *mezzo dispersivo* e di *fenomeno di dispersione*. In questo caso le componenti del pacchetto, che hanno pulsazioni diverse, si propagano con velocità diverse e la forma del pacchetto cambia durante la propagazione: con un'espressione visivamente intuitiva si dice che le onde si disperdonno. La velocità del pacchetto non può più essere identificata con quella delle componenti e anzi il problema, che dobbiamo affrontare, è di determinare con quale velocità avanza il pacchetto: ciò è essenziale in quanto il fenomeno fisico effettivo è il pacchetto stesso ed è con la velocità del pacchetto che si propaga ad esempio l'energia dell'onda. Tale velocità, che adesso calcoliamo, è detta *velocità di gruppo* (si intende del gruppo d'onde che formano il pacchetto); la velocità delle singole componenti è detta *velocità di fase*.

Esempi di propagazione in mezzi dispersivi sono:

- le onde elettromagnetiche in mezzi materiali o in cavità conduttrici
- le onde sulla superficie di un liquido

Per esemplificare il concetto di velocità di gruppo consideriamo un caso semplice, e cioè un pacchetto formato da due sole onde armoniche, di eguale ampiezza  $A$ , numeri d'onda  $k_1$  e  $k_2$ , pulsazioni  $\omega_1$  e  $\omega_2$ :

$$\xi(x, t) = A \sin(k_1 x - \omega_1 t) + A \sin(k_2 x - \omega_2 t) .$$

Abbiamo già esaminato questa situazione nel paragrafo 12.8 in relazione al fenomeno dei battimenti in una posizione definita. Adesso ci occupiamo di come si propaga  $\xi(x, t)$ . Poniamo

$$\Delta k = k_1 - k_2 , \quad k_m = \frac{k_1 + k_2}{2} , \quad \Delta\omega = \omega_1 - \omega_2 , \quad \omega_m = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$$

e trasformiamo  $\xi(x, t)$  secondo le regole trigonometriche di somma:

$$\xi(x, t) = 2A \cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t\right) \sin(k_m x - \omega_m t) . \quad (12.58)$$

Il grafico in funzione di  $x$  in un certo istante è rappresentato nella figura 12.28.

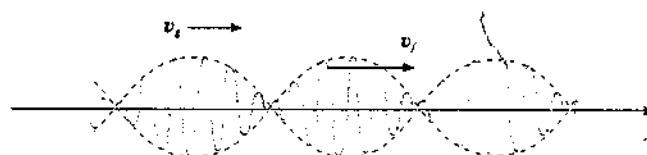


Figura 12.28

La velocità di fase media dell'onda è

Velocità di fase

$$v_f = \frac{\omega_m}{k_m}$$

ed è all'incirca eguale a quelle delle onde componenti,  $v_1 = \omega_1/k_1$  e  $v_2 = \omega_2/k_2$ , se  $\omega_1 \approx \omega_2$  e  $k_1 \approx k_2$ . L'ampiezza dell'onda

$$\xi_0 = 2A \cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t\right)$$

non è costante e presenta una struttura di tipo ondulatorio  $f(x - vt)$ , con velocità

$$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2} = \frac{k_1 v_1 - k_2 v_2}{k_1 - k_2}$$

La velocità  $v_g$  con cui si propaga l'ampiezza è la velocità del pacchetto delle due onde ed è appunto la velocità di gruppo nel caso considerato.

In sostanza, il moto relativo di un'onda rispetto all'altra produce la sovrapposizione mostrata nella figura 12.29: la curva rapidamente oscillante all'interno cambia durante il moto, ma l'inviluppo conserva la stessa forma propagandosi con velocità  $v_g$ .

L'esempio del pacchetto formato da due sole componenti, pur essendo utile per introdurre la nozione di velocità di gruppo, non è molto realistico; tra l'altro ha anch'esso la caratteristica di essere indefinito come le onde componenti e non si presta a rappresentare un segnale fisico.

Un pacchetto reale emesso da una sorgente ha durata finita e contiene sempre un gran numero di componenti, determinabili con l'analisi di Fourier in forma integrale, come si è visto nel paragrafo 12.10.

In un mezzo dispersivo la velocità di fase delle singole componenti dipende da  $k$  e (12.6), che è ancora valida, si scrive

$$\omega(k) = v_f(k)k \quad (12.59) \quad \text{Relazione di dispersione}$$

ed è chiamata *relazione di dispersione* del mezzo in esame. La definizione di *velocità di gruppo* viene precisata come

Velocità di gruppo

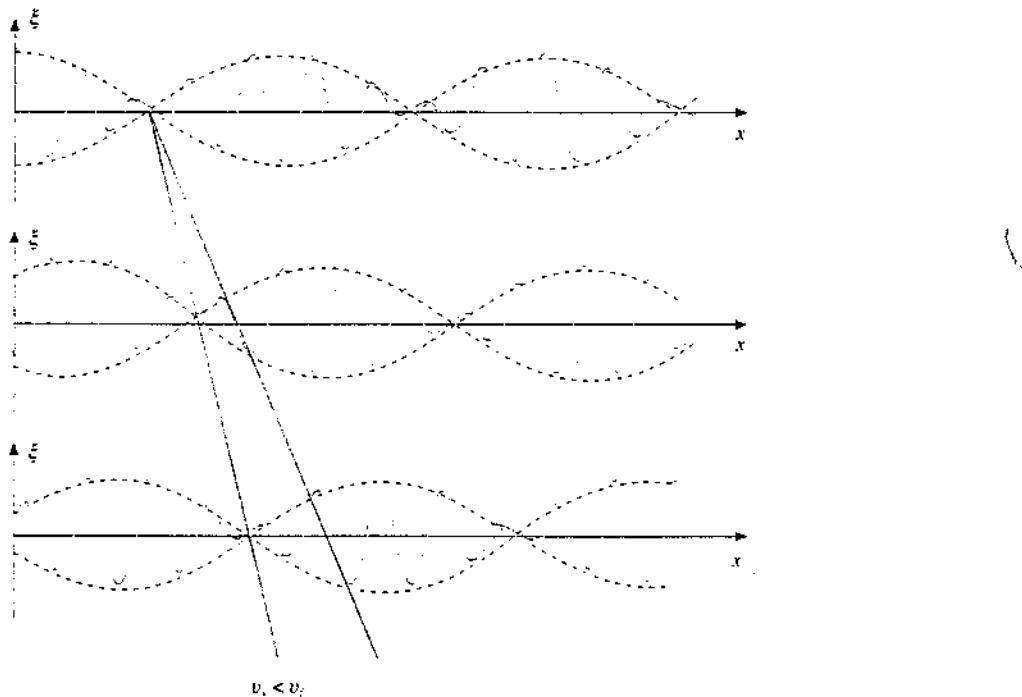


Figura 12.29

$$v_g = -\frac{d\omega}{dk} \quad . \quad (12.60)$$

Esplicitando tramite (12.59) e servendosi delle relazioni  $dk/k = -d\lambda/\lambda = dv/v$  si ottiene

$$v_g = v_f + k \frac{dv_f}{dk} = v_f - \lambda \frac{dv_f}{d\lambda} = v_f + v \frac{dv_f}{dv} \quad . \quad (12.61)$$

La velocità di gruppo può essere minore o maggiore di  $v_f$  a seconda del segno della derivata di  $v_f$  rispetto alla variabile considerata. Nella (12.61) è compreso anche il caso del mezzo non dispersivo, nel quale  $v_g = v_f$  in quanto  $dv_f/dk = 0$ .

Abbiamo già detto che una conseguenza della dipendenza della velocità di fase da  $k$  è che la struttura del pacchetto in generale si modifica durante la propagazione. In effetti la stessa velocità di gruppo può dipendere da  $k$ , a seconda della forma della funzione  $v_f(k)$ , e quindi essere variabile all'interno del pacchetto; l'esistenza stessa di una banda  $\Delta k$  comporta una banda  $\Delta v_g$ . Per un pacchetto di larghezza zero la larghezza dopo un tempo  $t$  sarebbe  $\Delta v_g t$  e quindi in prima approssimazione concludiamo che un pacchetto, emesso con larghezza  $\Delta x$  al tempo  $t = 0$ , al tempo  $t$  è largo  $\Delta x + \Delta v_g t$ .

#### Esempio 12.4

Calcolare la velocità di gruppo per un pacchetto d'onde sulla superficie di un liquido nell'ipotesi che il liquido sia profondo ( $h \gg \lambda$ ).

#### Soluzione

La velocità di fase nel caso in esame è data da (12.24) che riscriviamo sotto forma di relazione di dispersione:

$$\omega = v_f k = \sqrt{\frac{g}{k} + \frac{k \tau}{\rho}} \quad k = \sqrt{gk + \frac{k^3 \tau}{\rho}} \quad .$$

Nella regione in cui predomina il termine  $gk$

$$\omega = \sqrt{gk} \quad , \quad v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{1}{2} v_f \quad .$$

Invece nella regione in cui predomina il termine  $k^3 \tau / \rho$

$$\omega = \sqrt{\frac{k^3 \tau}{\rho}} \quad , \quad v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{k \tau}{\rho}} = \frac{3}{2} v_f \quad .$$

La velocità di gruppo varia con  $k = 2\pi/\lambda$ : all'aumentare di  $\lambda$  si ha un passaggio graduale da  $v_g = 3 v_f / 2$  a  $v_g = v_f / 2$ . Chiaramente ci deve essere un valore di  $\lambda$  per cui  $v_g = v_f$ . Dato che  $v_g = v_f - \lambda dv_f / d\lambda$  e che  $v_f$  ha un minimo per  $\lambda = \lambda^*$  (paragrafo 12.6),  $v_f = v_g$  proprio per  $\lambda = \lambda^*$ . A seconda della banda di lunghezze d'onda presenti nel pacchetto la velocità di gruppo è maggiore o minore della velocità di fase e nell'intorno di  $\lambda^*$  è circa eguale a  $v_f$ .

Se sulla superficie dell'acqua si produce tramite una breve perturbazione un pacchetto d'onde nei regime onde di gravità ( $v_g = v_f / 2$ ), si riesce ad osservare che all'interno del pacchetto le singole creste avanzano con velocità superiore a quella del pacchetto.

## 12.12 Effetto Doppler. Onda d'urto

Quando una sorgente di onde  $S$  e un rivelatore di onde  $R$  si muovono l'una rispetto all'altro, la frequenza percepita dal rivelatore risulta in generale diversa dalla frequenza propria della sorgente. Il fenomeno venne evidenziato per la prima volta con le onde sonore e chiamato *effetto Doppler*, dal nome dello scopritore; esso si osserva con tutti i tipi di onde, anche quelle elettromagnetiche e in particolare luminose, come vedremo nel paragrafo 13.11.

Chiamiamo  $\lambda_0$  e  $v_0$  la lunghezza d'onda e la frequenza delle onde sferiche armoniche emesse dalla sorgente; queste si propagano isotropicamente nel mezzo con velocità  $v$  e vengono percepite dal rivelatore. Supponiamo inizialmente che, fissato un determinato sistema di riferimento, sorgente, rivelatore e mezzo siano in quiete.

Ricordiamo che abbiamo definito fronte d'onda una superficie, in questo caso sferica, su cui la fase è costante; supponendo di far coincidere un fronte d'onda con una cresta d'onda, la successiva cresta è distante  $\lambda_0$ , come spazio e  $T_0$  come tempo dalla prima, con differenza di fase  $2\pi$ . In un tempo  $\Delta t$  l'onda avanza di  $v\Delta t$  e in questa distanza sono contenuti  $N = v\Delta t/\lambda_0$  fronti d'onda tutti in fase tra loro. Quindi il rivelatore nel tempo  $\Delta t$  viene attraversato da questi  $N$  fronti d'onda ovvero percepisce  $N$  oscillazioni nel tempo  $\Delta t$ : ciò equivale a dire che misura la frequenza (numero di oscillazioni al secondo)

$$v_R = \frac{N}{\Delta t} = \frac{v\Delta t}{\lambda_0 \Delta t} = \frac{v}{\lambda_0} = v_0 \quad ,$$

coincidente con la frequenza propria della sorgente.

La descrizione precedente viene modificata quando vi è uno stato di moto relativo tra sorgente e rivelatore. Vediamo il problema prima in modo qualitativo. Supponiamo che la sorgente si muova con velocità  $v_s$ , inferiore alla velocità di propagazione delle onde, lungo la retta congiungente  $S$  con  $R$  e nel verso da  $S$  a  $R$ . Nella figura 12.31 sono rappresentati alcuni fronti d'onda emessi dalla sorgente a intervalli di tempo pari a  $T_0$ ; in ogni periodo  $T_0$  la sorgente si è spostata di  $v_s T_0$  che è minore di  $\lambda_0$  in quanto  $v_s < v$ . Si vede chiaramente che nella zona in cui si trova  $R$  i fronti d'onda sono più vicini tra loro di quando la sorgente è ferma; la distanza tra due consecutivi è minore di  $\lambda_0$  e quindi  $R$  nell'unità di tempo è interessato da un numero maggiore di fronti d'onda e misura una frequenza  $v_R$  superiore a  $v_0$ . Se  $R$  fosse nella posizione  $R'$  (sorgente che si allontana invece di avvicinarsi) la frequenza misurata risulterebbe inferiore a  $v_0$  poiché la distanza tra i fronti d'onda è maggiore di  $\lambda_0$ .

Quantitativamente, la distanza tra due fronti d'onda consecutivi quando la sorgente si muove non è più  $\lambda_0$  bensì  $\lambda_0 - v_s T$  per cui la lunghezza d'onda e la frequenza misurata da  $R$  sono

$$\lambda_R = \lambda_0 - v_s T_0 = \frac{v}{v_0} - \frac{v_s}{v_0} = \frac{v - v_s}{v_0}, \quad v_R = \frac{v}{\lambda_R} = \frac{v}{v - v_s} v_0 \quad ; \quad (12.62)$$

oppure, alternativamente,

$$v_R = \frac{N}{\Delta t} = \frac{v \Delta t}{\lambda_R} = \frac{1}{\Delta t} = \frac{v}{\lambda_R} = \frac{v}{\lambda_0 - v_s T_0} = \frac{v}{v - v_s} v_0 \quad .$$

La formula vale sia in caso di avvicinamento ( $v_s > 0, v_R > v_0$ ) che di allontanamento ( $v_s < 0, v_R < v_0$ ).

Supponiamo adesso che la sorgente sia ferma e che invece sia in moto il rivelatore, con velocità  $v_R$  lungo la retta congiungente  $S$  con  $R$ ; supponiamo inoltre che  $R$  si stia allontanando da  $S$ . Nel dato sistema di riferimento la distanza tra i fronti d'onda è sempre  $\lambda_0$ , però il numero di fronti d'onda che interessano il rivelatore è  $N = (v - v_R) \Delta t / \lambda_0$ , in quanto la velocità dell'onda rispetto a  $R$  è  $v - v_R$ . Quindi

$$v_R = \frac{N}{\Delta t} = \frac{v - v_R}{\lambda_0} = \frac{v - v_R}{v} v_0 \quad . \quad (12.63)$$

Se  $R$  si allontana da  $S$  la frequenza percepita è minore, se invece  $R$  si avvicina  $v_R$  cambia

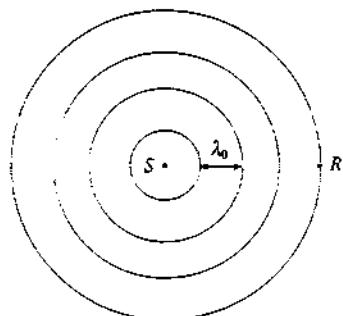


Figura 12.30

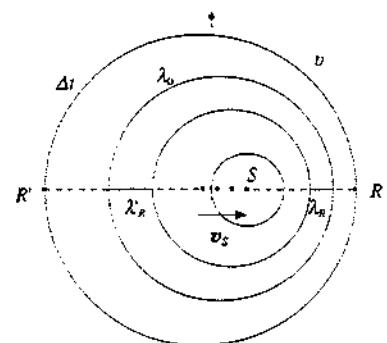


Figura 12.31

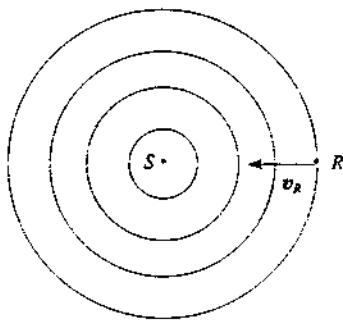


Figura 12.32.

segno e la frequenza percepita è maggiore.

Le equazioni (12.62) e (12.63) possono essere compendiate in un'unica formula, relativa al caso in cui la sorgente  $S$  si muova con velocità  $v_S$  e il rivelatore con velocità  $v_R$ , parallele tra loro. Si applicano entrambe le correzioni viste: la velocità dell'onda relativa al rivelatore è  $v - v_R$ , la distanza tra i fronti d'onda è  $\lambda_0 - v_S T_0 = (v - v_S) T_0$  e si ottiene

$$v_R' = \frac{v + v_R}{v - v_S} v_0 \quad (12.64)$$

Si intende sempre che la velocità della sorgente e del rivelatore siano minori in modulo della velocità di propagazione.

Osserviamo che se  $v_R$  e  $v_S$  hanno stesso modulo e stesso verso  $v_R = v_0$ : ciò che è importante è il moto relativo. Tuttavia (12.62), (12.63), e (12.64) che le riassume, non sono simmetriche: l'effetto non è lo stesso se la sorgente è ferma e il rivelatore si avvicina ( $v_S = 0$ ,  $v_R = -v_0$ ) o se il rivelatore è fermo e la sorgente gli si avvicina ( $v_S = v_0$ ,  $v_R = 0$ ). Si ha infatti

$$v_R' = \frac{v + v_0}{v}, \quad v_R'' = \frac{v}{v - v_0} = \frac{v + v_0}{v \left(1 - \frac{v_0^2}{v^2}\right)} = \frac{v_R'}{1 - \frac{v_0^2}{v^2}}$$

e  $v_R''$  non è eguale a  $v_R'$  a meno che non sia  $v_0^2 \ll v^2$ . Solo per velocità piccole rispetto a  $v$  le formule (12.62) e (12.63) danno risultati praticamente coincidenti e non è possibile stabilire se è in moto la sorgente o il rivelatore.

La *non simmetria* dell'effetto Doppler nelle onde meccaniche risulta dalla trattazione dei due casi che abbiamo svolto all'inizio: la velocità dell'onda vista dal rivelatore non è la stessa nei due casi.

### Esempio 12.5

Una sirena emette un suono di frequenza  $v_0 = 500$  Hz. Calcolare la frequenza misurata da un rivelatore che si muove verso la sorgente ferma con  $v_R = 124$  km/ora, da un rivelatore fermo se la sorgente si muove verso il rivelatore con velocità  $v_S = 124$  km/ora, da un rivelatore che si muove con velocità  $v_R = 62$  km/ora verso la sorgente che a sua volta si muove verso il rivelatore con velocità  $v_S = 62$  km/ora.

#### Soluzione

Applichiamo (12.64) nei tre casi enunciati; la velocità del suono è 343 m/s e i due valori dati nel testo sono 124 km/ora = 34.4 m/s, 62 km/ora = 17.2 m/s.

a)  $v_S = 0 \quad v_R = -34.4$  m/s

$$v_R = \frac{343 + 34.4}{343} 500 = 1.100 \cdot 500 = 550 \text{ Hz}$$

b)  $v_S = 34.4$  m/s  $v_R = 0$

$$v_R = \frac{343}{343 - 34.4} 500 = 1.111 \cdot 500 = 556 \text{ Hz}$$

c)  $v_S = 17.2$  m/s  $v_R = -17.2$  m/s

$$v_R = \frac{343 - 17.2}{343 + 17.2} 500 = 1.106 \cdot 500 = 553 \text{ Hz}.$$

L'effetto è notevole, circa del 10%, anche se le differenze tra i tre casi sono piuttosto piccole, dell'ordine dell'1% e per metterle in evidenza occorre un rivelatore con una precisione migliore dell'1%. Si noti che la velocità relativa di  $S$  rispetto a  $R$ ,  $v_S - v_R$ , è la stessa nei tre casi.

La condizione di parallelismo tra le velocità  $v_s$  e  $v_r$  può essere naturalmente rilasciata. Se  $v_s$  forma l'angolo  $\alpha$  con la retta congiungente  $S$  e  $R$ , a  $v_s$  si sostituisce  $v_s \cos \alpha$  e se  $v_r$  forma con la medesima retta l'angolo  $\beta$  a  $v_r$  si sostituisce  $v_r \cos \beta$ . Infine, se il mezzo in cui si propaga l'onda ha velocità  $v_m$ , alla velocità  $v$  dell'onda va sostituita la velocità  $v + v_m$ , poi opportunamente proiettata lungo la direzione di interesse.

### Onda d'urto

Esaminiamo ora cosa succede quando la velocità  $v_s$  con cui si muove la sorgente è maggiore della velocità di propagazione  $v$  dell'onda del mezzo.

Nella figura 12.33 sono rappresentati alcuni fronti d'onda  $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots$  emessi dalla sorgente negli istanti  $t_1, t_2, \dots$  quando essa si trova nelle posizioni  $S_1, S_2, \dots$ . Questi fronti d'onda ammettono un inviluppo, che è rappresentato dalle due semirette convergenti in  $S_n$ . In due dimensioni la figura 12.33 si riferisce a onde circolari sulla superficie di un liquido; nel caso tridimensionale (ad esempio onde sferiche sonore in un gas) essa rappresenta la sezione di un cono. L'inviluppo è il luogo dei punti di egual fase per le onde emesse dalla sorgente durante il moto e costituisce esso stesso il fronte d'onda.

Per trovare i valori degli angoli  $\theta$  e  $\theta'$  di figura 12.34 consideriamo due posizioni  $S_1$  e  $S_2$  della sorgente e i corrispondenti punti  $P$  e  $Q$  sul fronte d'onda: l'onda emessa in  $S_1$  ha nel punto  $P$  la stessa fase che ha nel punto  $Q$  l'onda emessa in  $S_2$ . Se  $P$  e  $Q$  sono punti di egual fase tali sono  $S'_1$  e  $S'_2$ , in quanto equidistanti da  $P$  e  $Q$ . Ora  $S'_1$  e  $S'_2$  possono avere la stessa fase solo se il tempo che impiega l'onda a percorrere il segmento  $S_1 S'_1$  è eguale al tempo che impiega la sorgente a percorrere il segmento  $S_1 S_2$ ; infatti a tempi eguali corrispondono eguali differenze di fase (non dimentichiamo che l'oscillazione dell'onda che si propaga è eguale a quella della sorgente che la produce). Detta  $a$  la distanza  $S_1 S_2$  abbiamo  $S_1 S'_1 = a \cos \theta$  e l'eguaglianza dei tempi si traduce nell'eguaglianza

$$\frac{a}{v_s} = \frac{a \cos \theta}{v} \Rightarrow \cos \theta = \frac{v}{v_s}$$

Essendo il triangolo  $S_1 P S_n$  rettangolo segue

$$\sin \theta' = \cos \theta = \frac{v}{v_s} \quad (12.65)$$

Si vede che la costruzione si può fare solo se  $v < v_s$ , come ipotizzato. Quindi la superficie conica di egual fase esiste solo se la sorgente si muove più rapidamente dell'onda e l'angolo di apertura  $\theta'$  dipende dal rapporto  $v/v_s$ , diminuendo al crescere di  $v_s$ . Questo fronte d'onda si chiama *onda d'urto* o *onda balistica* e accompagna la sorgente nel suo moto conservando la propria forma: la sorgente occupa il vertice del cono. Il rapporto  $v_s/v$  è detto *numero di Mach* e a volte è usato per esprimere la velocità della sorgente: per esempio nell'aria mach 1 = 343 m/s = 1235 km/ora, mach 2 = 2470 km/ora.

Nel caso delle onde meccaniche non occorre che l'oggetto in movimento sia effettivamente una sorgente di onde: è il moto stesso con velocità superiore a  $v$  a causare perturbazioni lungo la traiettoria che hanno la superficie conica come superficie d'onda. Se pure con un meccanismo diverso il fenomeno esiste anche per le onde eletromagnetiche (paragrafo 13.11).

L'onda d'urto si osserva facilmente quando un motoscafo solca la superficie di un lago: le scie di prua e di poppa sono proprio le onde in questione, che risultano tanto più strette quanto maggiore è la velocità del motoscafo. Anche il moto di un aereo supersonico è accompagnato da due onde balistiche: nel caso del Concorde, che viaggia a velocità circa doppia di quella del suono nell'aria (mach 2),  $\sin \theta' = v/v_s = 0.5$ ,  $\theta' = 30^\circ$ . Quando l'onda di prua raggiunge l'osservatore la pressione atmosferica varia di  $\Delta p$  in un tempo  $\tau \sim 3$  ms; la pressione poi diminuisce fino a  $-\Delta p$  durante il tempo  $t_1 = l/v_s$  in cui il velivolo si è spostato di una distanza pari alla sua lunghezza  $l$  e ritorna al valore di equilibrio quando arriva l'onda di coda. A causa della sua forma il diagramma della pressione in funzione del tempo è detto diagramma a *N*. Nel Concorde  $t_1$  è dell'ordine del decimo di secondo. L'arrivo delle due onde è percepito come un forte rumore (*boom sonoro*).

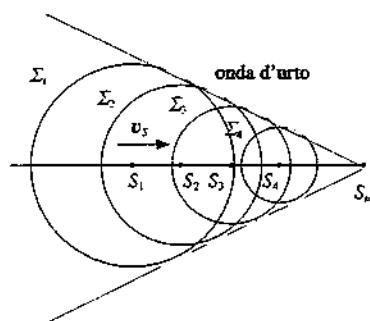


Figura 12.33

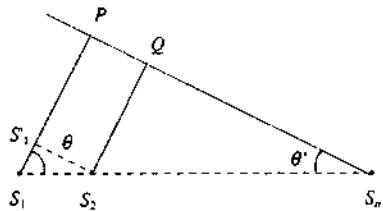


Figura 12.34

### Onda d'urto

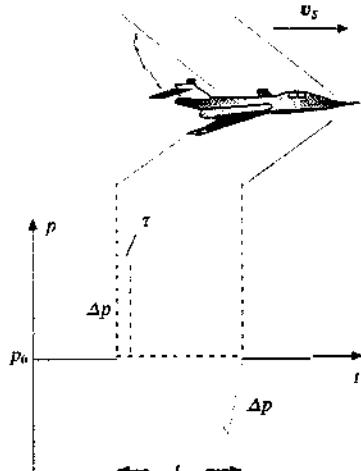


Figura 12.35

# Onde elettromagnetiche

## 13.1 Onde elettromagnetiche piane

Nel capitolo 12 sono state trattate alcune proprietà generali delle onde che non dipendono dal tipo di onda; gli esempi d'altra parte sono stati tratti soprattutto dalle onde meccaniche, che hanno origine da una perturbazione locale di un mezzo materiale e si propagano in virtù delle proprietà elastiche del mezzo o, come per le onde sulla superficie di un liquido, di proprietà meccaniche tipiche del mezzo.

Abbiamo già menzionato l'esistenza delle *onde elettromagnetiche* (e non solo nel capitolo 12) e alcune loro caratteristiche: la proprietà di propagarsi nel vuoto, in assenza di materia, di essere *trasversali* in tali condizioni e di essere prodotte da cariche elettriche in moto con accelerazione molto grande; aggiungiamo che possono essere rivelate a grande distanza dalla sorgente ad esempio sfruttando l'interazione del campo elettrico e del campo magnetico di cui sono composte con le cariche elettriche libere presenti in un conduttore.

Vogliamo adesso dimostrare come nelle equazioni di Maxwell siano in effetti contenuti fenomeni ondulatori e definire le onde elettromagnetiche nel caso più semplice, che è quello di *onda piana*.

Consideriamo un mezzo indefinito e omogeneo di costante dielettrica  $\epsilon$  e permeabilità magnetica  $\mu$ , nel quale non ci siano cariche libere e correnti di conduzione per cui  $\rho = 0$  e  $\mathbf{j} = 0$ . In queste ipotesi le equazioni di Maxwell hanno la forma (10.65) con  $\epsilon$  al posto di  $\epsilon_0$  e  $\mu$  al posto di  $\mu_0$ :

$$\begin{array}{lll} \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 & \text{(a)} & \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 & \text{(b)} \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \text{(c)} & \nabla \times \mathbf{B} = \epsilon \mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} & \text{(d)} \end{array} \quad (13.1)$$

Invece di cercare la soluzione più generale, limitiamoci a cercare una soluzione particolare in cui il campo elettrico  $\mathbf{E}$  e il campo magnetico  $\mathbf{B}$  dipendano, in un determinato sistema di riferimento cartesiano, solo dal tempo e dalla coordinata  $x$ , assumendo quindi lo stesso valore nei punti di un piano ortogonale all'asse  $x$  (soluzione di *onda piana*). Tenendo presente che nelle nostre ipotesi sono nulle tutte le derivate parziali rispetto a  $y$  e  $z$ , otteniamo dalle (13.1):

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 & \frac{\partial E_x}{\partial x} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 & \frac{\partial B_x}{\partial x} &= 0 \\ (\nabla \times \mathbf{E})_x &= \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t} & \frac{\partial B_x}{\partial t} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\nabla \times \mathbf{E})_y &= \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} & \frac{\partial B_y}{\partial t} &= \frac{\partial E_z}{\partial x} \\
 (\nabla \times \mathbf{E})_z &= \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} & \frac{\partial B_z}{\partial t} &= -\frac{\partial E_y}{\partial x} \\
 (\nabla \times \mathbf{B})_x &= \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \epsilon\mu \frac{\partial E_x}{\partial t} & \frac{\partial E_x}{\partial t} &= 0 \\
 (\nabla \times \mathbf{B})_y &= \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = \epsilon\mu \frac{\partial E_y}{\partial t} & \frac{\partial E_y}{\partial t} &= -\frac{1}{\epsilon\mu} \frac{\partial B_z}{\partial x} \\
 (\nabla \times \mathbf{B})_z &= \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = \epsilon\mu \frac{\partial E_z}{\partial t} & \frac{\partial E_z}{\partial t} &= \frac{1}{\epsilon\mu} \frac{\partial B_y}{\partial x}
 \end{aligned}$$

Le relazioni  $\partial E_x / \partial x = 0$ ,  $\partial E_x / \partial t = 0$  permettono di dedurre che la componente  $E_x(x, t)$  del campo elettrico è costante. Un tale campo potrebbe essere prodotto da una distribuzione di cariche stazionarie; siccome però escludiamo l'esistenza di sorgenti di questo tipo in quanto interessati a campi variabili nel tempo, concludiamo che  $E_x(x, t) = 0$ . Allo stesso modo, da  $\partial B_x / \partial x = 0$ ,  $\partial B_x / \partial t = 0$  e dall'esclusione di correnti stazionarie concludiamo che  $B_x(x, t) = 0$ .

Questo è un primo risultato molto importante: se dimostreremo che le altre componenti soddisfano all'equazione delle onde in  $x$ ,  $y$ , queste onde saranno necessariamente trasversali, in quanto i campi stanno nel piano  $y, z$ .

Allo scopo riassumiamo le precedenti relazioni sulle derivate:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial E_z}{\partial x} &= \frac{\partial B_y}{\partial t} & (a) & \frac{\partial E_y}{\partial x} &= -\frac{\partial B_z}{\partial t} & (c) \\
 \frac{\partial E_z}{\partial t} &= \frac{1}{\epsilon\mu} \frac{\partial B_y}{\partial x} & (b) & \frac{\partial E_y}{\partial t} &= -\frac{1}{\epsilon\mu} \frac{\partial B_z}{\partial x} & (d)
 \end{aligned} \tag{13.2}$$

Queste mostrano una correlazione tra  $E_y$  e  $B_z$  e tra  $E_z$  e  $B_y$ , cioè tra componenti mutuamente ortogonali. Deriviamo (13.2a) rispetto a  $x$  e (13.2b) rispetto a  $t$ :

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 B_y}{\partial x \partial t}, \quad \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon\mu} \frac{\partial^2 B_y}{\partial t \partial x}.$$

Le due derivate miste di  $B_y$  sono eguali e quindi si ottiene

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = \epsilon\mu \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}.$$

Allo stesso modo, se deriviamo (13.2a) rispetto a  $t$  e (13.2b) rispetto a  $x$  si arriva a

$$\frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} = \epsilon\mu \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2}.$$

Per la coppia di equazioni (13.2c) e (13.2d) si ha

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \epsilon\mu \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} = \epsilon\mu \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2}.$$

Ognuna delle componenti del campo elettrico  $\mathbf{E}$  e del campo magnetico  $\mathbf{B}$  soddisfa all'equazione differenziale delle onde piane (12.1)

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \epsilon\mu \frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} \quad (\xi = E_y, E_z, B_y, B_z). \quad (13.3)$$

I campi  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  si propagano pertanto lungo l'asse  $x$  sotto forma di onde piane con velocità

Velocità delle onde elettromagnetiche

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \frac{1}{\sqrt{\kappa_e \kappa_m}} = \frac{c}{\sqrt{\kappa_e \kappa_m}}, \quad (13.4)$$

dove

Velocità delle onde elettromagnetiche nel vuoto

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 2.99792458 \cdot 10^8 \text{ m/s} \quad (13.5)$$

è la velocità della perturbazione elettromagnetica nello spazio vuoto ( $\kappa_e = \kappa_m = 1$ ).

Dunque le equazioni di Maxwell prevedono come soluzione particolare campi elettrici e magnetici che si propagano con le caratteristiche di onde piane trasversali e con velocità che assume nel vuoto un preciso valore e che in un dielettrico dipende dalle caratteristiche elettriche e magnetiche del mezzo, risultando sempre minore che nel vuoto. Poiché  $c$  coincide con il valore misurato della velocità della luce nel vuoto, Maxwell fu portato a ipotizzare che la *luce* sia essa stessa un'*onda composta da un campo elettrico e da un campo magnetico*.

Deduciamo ora le relazioni che sussistono in ogni istante e in ogni punto tra  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ . Ricordiamo che nell'ipotesi di propagazione lungo il verso positivo dell'asse  $x$  le soluzioni delle (13.3) sono del tipo

$$E_y = E_y(x - vt), \quad E_z = E_z(x - vt), \quad B_y = B_y(x - vt), \quad B_z = B_z(x - vt),$$

ovvero, in forma vettoriale

$$\mathbf{E} = E_y(x - vt) \mathbf{u}_y + E_z(x - vt) \mathbf{u}_z, \quad \mathbf{B} = B_y(x - vt) \mathbf{u}_y + B_z(x - vt) \mathbf{u}_z.$$

Detto  $u = x - vt$  l'argomento delle funzioni, per cui  $\partial u / \partial x = 1$  e  $\partial u / \partial t = -v$ , da (13.2a) abbiamo

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial E_z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial E_z}{\partial u},$$

$$B_y = \int \frac{\partial B_y}{\partial t} dt = \int \frac{\partial E_z}{\partial u} dt = -\frac{1}{v} \int \frac{\partial E_z}{\partial u} du = -\frac{E_z}{v} + \text{costante}.$$

Poniamo eguale a zero la costante di integrazione, che descrive una situazione stazionaria a cui non siamo interessati; in definitiva

$$B_y(x-vt) = -\frac{1}{v} E_z(x-vt) .$$

Procedendo analogamente a partire da (13.2) si ottiene

$$B_z(x-vt) = \frac{1}{v} E_y(x-vt) .$$

Le componenti del campo **B** risultano pertanto dipendenti da quelle del campo **E** e i due vettori si possono scrivere nella forma

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= E_y(x-vt) \mathbf{u}_y + E_z(x-vt) \mathbf{u}_z, \\ v \mathbf{B} &= -E_z(x-vt) \mathbf{u}_y + E_y(x-vt) \mathbf{u}_z , \end{aligned} \quad (13.6)$$

da cui deduciamo tutte le relazioni tra **E** e **B** in un'onda elettromagnetica piana.

Dalla seconda si ricava la relazione tra i moduli dei campi, valida in ogni istante e in ogni punto:

$$\begin{aligned} B^2 &= B_y^2 + B_z^2 = \frac{1}{v^2} (E_y^2 + E_z^2) = \frac{E^2}{v^2} \\ \Rightarrow B &= \frac{E}{v} , \quad E = v B , \quad \frac{E}{B} = v . \end{aligned} \quad (13.7)$$

Dal prodotto scalare si ottiene

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} &= E_y B_y + E_z B_z = \frac{1}{v} (-E_y E_z + E_z E_y) \\ \Rightarrow \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} &= 0 : \end{aligned} \quad (13.8)$$

i due vettori sono sempre perpendicolari tra loro. Invece il prodotto vettoriale vale

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \times \mathbf{B} &= \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ 0 & E_y & E_z \\ 0 & -\frac{E_z}{v} & \frac{E_y}{v} \end{vmatrix} = \frac{1}{v} (E_y^2 + E_z^2) \mathbf{u}_x \\ \Rightarrow \mathbf{E} \times \mathbf{B} &= \frac{E^2}{v} \mathbf{u}_x = v B^2 \mathbf{u}_x = E B \mathbf{u}_x ; \end{aligned} \quad (13.9)$$

esso dà la direzione e il verso di propagazione, essendo parallelo e concorde all'asse *x*.

Riassumiamo le proprietà appena trovate per la propagazione di un'onda elettromagnetica piana, cioè di un campo elettrico e di un campo magnetico, in un mezzo omogeneo e isotropo privo di correnti e cariche libere (al limite nel vuoto):  
a) **E** e **B** si propagano con la stessa velocità *v*, che nel vuoto vale  $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} =$

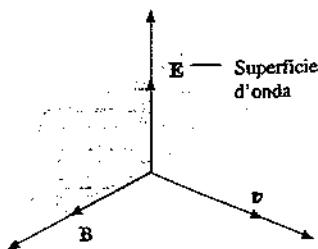


Figura 13.1

## Campo elettromagnetico

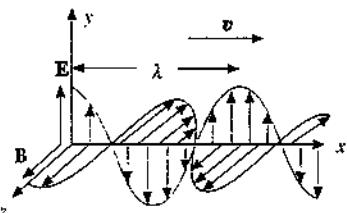


Figura 13.2

## Impedenza caratteristica del mezzo

## Impedenza caratteristica del vuoto

- $3 \cdot 10^8 \text{ m/s};$
- i moduli dei campi sono legati dalla relazione di proporzionalità  $B = E/v$ , nel vuoto  $B = E/c$ ;
  - $E$  e  $B$  sono ortogonali tra loro e alla direzione di propagazione: nel caso specifico le onde elettromagnetiche sono onde *trasversali* e per esse è significativo il concetto di *polarizzazione*;
  - il verso del prodotto vettoriale  $E \times B$  definisce il verso di propagazione, mentre il modulo è proporzionale al quadrato del modulo di  $E$  o di  $B$ .

Queste proprietà dei campi, sebbene siano state dedotte operando in coordinate cartesiane, hanno validità in qualsiasi altro sistema di coordinate, in quanto proprietà di vettori.

Notiamo, come del resto è evidente nelle (13.1 c, d), che in un fenomeno variabile quale la propagazione i campi  $E$  e  $B$  sono inscindibili: la presenza di uno comporta la presenza dell'altro; è per questo che non si parla di un'onda di campo elettrico e di un'onda di campo magnetico, bensì di un'onda elettromagnetica. Nella teoria di Maxwell i due campi sono unificati in un solo campo, il *campo elettromagnetico*, a cui sono dovuti i fenomeni osservati in regime variabile, in particolare quelli in cui sono implicate le onde elettromagnetiche.

Le linee di  $E$  e  $B$  sono mostrate nella figura 13.2 per un'onda armonica; i massimi e i minimi cadono negli stessi punti, come deriva da (13.6).

Nella maggior parte dei mezzi ordinari la suscettività magnetica è tale che  $|\kappa_m - 1| < 10^{-5}$ , per cui possiamo porre  $\kappa_m = 1$  nella (13.4) e definire il rapporto

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\kappa_e} \quad , \quad (13.10)$$

tra la velocità di un'onda elettromagnetica nel vuoto e in un mezzo in cui le onde possano propagarsi, cioè trasparente alle onde elettromagnetiche. Nello studio della propagazione della luce  $n$  prende il nome di *indice di rifrazione assoluto del mezzo*; esso può essere misurato indipendentemente dalla relazione che lo lega a  $\kappa_e$ .

Quando si può scrivere  $B = \mu H$  la (13.7) assume la forma

$$\frac{E}{H} = \mu v = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = Z \quad . \quad (13.11)$$

La quantità  $Z$ , che ha le dimensioni di un'impedenza, è detta *impedenza caratteristica del mezzo*. Nel vuoto l'*impedenza caratteristica* è

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 377 \Omega \quad . \quad (13.12)$$

Nei mezzi trasparenti alle onde con  $\kappa_m = 1$  sussiste la relazione

$$Z = \frac{Z_0}{\sqrt{\kappa_e}} = \frac{Z_0}{n} \quad , \quad (13.13)$$

che tornerà utile quando tratteremo l'energia associata al campo elettromagnetico.

Prima di continuare lo studio delle onde elettromagnetiche è importante ripetere che, nel procedimento finora seguito, un mezzo dielettrico omogeneo è stato trat-

tato come il vuoto, a parte la sostituzione di  $\epsilon_0, \mu_0$  con  $\epsilon, \mu$ . In realtà sarebbe necessario esaminare il comportamento del mezzo, esprimibile attraverso il vettore polarizzazione  $P$ , stabilire la relazione tra  $P$  ed  $E$  e dimostrare l'esistenza di una soluzione ondulatoria delle equazioni di Maxwell nel mezzo, con velocità (13.4). Ciò in effetti è verificato, purché la pulsazione  $\omega$  delle onde obbedisca ad una specifica condizione; dato che nella maggior parte dei casi di interesse la condizione è soddisfatta, assumeremo nel seguito la validità generale delle formule (13.4) e (13.10), rimandando al paragrafo 13.9 per una discussione più completa di tutto questo argomento.

### Nota. Il legame tra $c, \mu_0, \epsilon_0$

Dimostriamo quanto affermato nella nota alla fine del paragrafo 8.3. Consideriamo lo spazio vuoto e non esplicitiamo i coefficienti che compaiono nella forza di Coulomb e nella forza tra due correnti, conservando le espressioni generiche  $k_e$  e  $k_m$ ; allora la (13.1d) ha la forma  $\nabla \times B = (k_m/k_e) \partial E / \partial t$ . D'altra parte abbiamo dimostrato che il coefficiente nella (13.1d) è eguale al coefficiente  $1/v^2$  nell'equazione delle onde piane (13.3) e quindi nel vuoto si ha la relazione

$$c = \sqrt{k_e / k_m}$$

che si trasforma nella (13.5) ponendo  $k_e = 1/4\pi \epsilon_0$  e  $k_m = \mu_0 / 4\pi$ .

La (13.5) è l'unico legame che esiste tra  $c, \mu_0, \epsilon_0$  (ovvero tra  $c, k_m, k_e$ ): in essa  $c$  è una costante universale, mentre  $\mu_0$  e  $\epsilon_0$  possono essere scelte arbitrariamente, con l'unica condizione di obbedire a (13.5). Come sappiamo, la scelta è stata di assumere  $k_m = 10^{-7} \text{ H/m}$  ( $\Rightarrow \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$ ) con il che resta determinata  $\epsilon_0 = 1/\mu_0 c^2$ .

## 13.2 Polarizzazione delle onde elettromagnetiche piane

Le sorgenti elettromagnetiche di maggiore interesse emettono *pacchetti d'onde armonici* di durata definita, del tipo considerato nel paragrafo 12.10. Se la durata  $\Delta t$  del pacchetto è tale che la banda delle frequenze  $\Delta v = 1/\Delta t$  che lo costituiscono è molto piccola rispetto alla frequenza media  $v$ , possiamo trattare per molti aspetti il pacchetto d'onde come un'onda armonica di lunghezza d'onda  $\lambda$  e frequenza  $v$  definite.

Per un'onda elettromagnetica piana, come quelle descritte nel paragrafo 13.1, si definisce la *polarizzazione* seguendo esattamente quanto visto nel paragrafo 12.5; allo scopo è sufficiente specificare il comportamento del campo elettrico  $E$  dal momento che il campo magnetico  $B$  è sempre ortogonale a  $E$ . Descriviamo pertanto un'onda armonica piana tramite le equazioni (12.19):

$$E_y(x, t) = E_{0y} \sin(kx - \omega t), \quad E_z(x, t) = E_{0z} \sin(kx - \omega t + \delta). \quad (13.14)$$

Valgono le solite relazioni

$$\omega = kv = 2\pi v, \quad \lambda v = v, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (13.15)$$

Riscriviamo, nei casi già visti nel paragrafo 12.5, le formule significative.

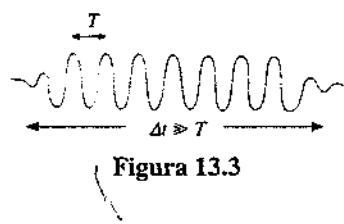


Figura 13.3

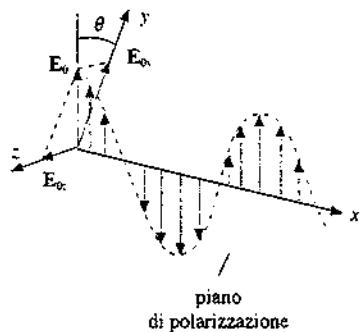


Figura 13.4

A. Polarizzazione rettilinea,  $\delta = 0, \delta = \pi$ .

Le componenti del campo elettrico hanno le espressioni (12.20):

$$E_y = E_{0y} \sin(kx - \omega t), E_z = \pm E_{0z} \sin(kx - \omega t) \quad (13.16)$$

e il loro rapporto è costante

$$\frac{E_z}{E_y} = \pm \frac{E_{0z}}{E_{0y}} = \tan \theta$$

Il campo  $\mathbf{E}$  giace sempre nel piano di polarizzazione passante per l'asse  $x$  e formante l'angolo  $\theta$  con il piano  $x, y$ . In questo piano esso oscilla con ampiezza

$$E_0 = \sqrt{E_{0y}^2 + E_{0z}^2} \Rightarrow E_{0y} = E_0 \cos \theta, E_{0z} = E_0 \sin \theta \quad (13.17)$$

B. Polarizzazione ellittica,  $\delta = \pi/2, \delta = 3\pi/2$ .

In accordo con (12.21) scriviamo

$$E_y = E_{0y} \sin(kx - \omega t), E_z = \pm E_{0z} \cos(kx - \omega t) \quad ; \quad (13.18)$$

il modulo del campo vale  $E = \sqrt{E_y^2 + E_z^2}$  e varia tra i valori  $E_{0y}$  e  $E_{0z}$ ; la direzione di  $\mathbf{E}$  cambia lungo l'asse  $x$ , descrivendo un giro completo su una distanza  $\lambda$ . Nel piano  $y, z$  al passare del tempo la punta di  $\mathbf{E}$  descrive l'ellisse (12.22) di semiassi  $E_{0y}, E_{0z}$ . Se  $\delta$  è costante, ma con valore qualsiasi, l'ellisse ha gli assi inclinati rispetto agli assi coordinati.

C. Polarizzazione circolare.

Le equazioni dell'onda sono

$$E_y = E_0 \sin(kx - \omega t), E_z = \pm E_0 \cos(kx - \omega t) \quad . \quad (13.19)$$

Il campo elettrico ha ampiezza costante  $E_0$ ; in funzione di  $x$  e  $t$  la sua variabilità è analoga a quella descritta per la polarizzazione ellittica, con l'ellisse che degenera in una circonferenza.

D. Onda elettromagnetica piana non polarizzata

Se la differenza di fase  $\delta$  varia in maniera *casuale* non si può stabilire una legge di variazione per la direzione di  $\mathbf{E}$ : lo stato di polarizzazione, pur essendo definibile in ogni istante e in ogni posizione, non lo è più *in media* nel tempo. Poiché in generale la misura dello stato di polarizzazione dell'onda in una certa posizione è fatta in un intervallo di tempo che, per quanto breve, è sempre molto maggiore dei tempi in cui avvengono le variazioni di  $\delta$ , il risultato è che mediamente l'onda appare non polarizzata. Onde elettromagnetiche non polarizzate sono quelle che costituiscono la luce solare e la luce emessa da una normale lampadina a incandescenza. In questi casi la causalità della direzione di  $\mathbf{E}$  è dovuta ai meccanismi di emissione delle onde da parte della sorgente, come vedremo in seguito.

In conclusione possiamo dire che la polarizzazione di un'onda elettromagnetica nasce dalla sovrapposizione di due onde *coerenti* che si propagano giacendo in due piani ortogonali, se definiamo *coerenti due onde per le quali la differenza di fase rimane costante nel tempo*.

### Esempio 13.1

Un'onda elettromagnetica piana di frequenza  $v = 7.5 \cdot 10^{14}$  Hz si propaga nel vuoto lungo l'asse  $x$ . Essa è polarizzata rettilineamente con il campo elettrico  $\mathbf{E}$  che forma

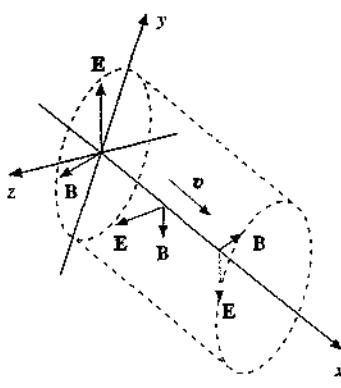


Figura 13.5

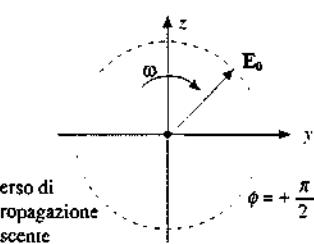


Figura 13.6

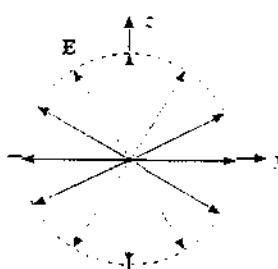


Figura 13.7

l'angolo  $\theta = 30^\circ$  con il piano  $x, y$  ed ha ampiezza  $E_0 = 10^3 \text{ V/m}$ . Scrivere l'equazione di quest'onda e calcolare l'ampiezza del campo magnetico.

### Soluzione

I parametri caratteristici dell'onda si ricavano da (13.15):

$$\lambda = \frac{c}{v} = 0.4 \cdot 10^{-6} \text{ m} , \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = 1.57 \cdot 10^7 \text{ rad/m} , \quad \omega = 2\pi v = 4.71 \cdot 10^{15} \text{ rad/s} .$$

Si tratta di una radiazione visibile che corrisponde al colore violetto (estremo inferiore delle lunghezze d'onda visibili). Le ampiezze delle componenti del campo elettrico sono

$$E_{0y} = E_0 \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} 10^3 \text{ V/m} ,$$

$$E_{0z} = E_0 \sin \theta = \frac{1}{2} 10^3 \text{ V/m}$$

e quindi

$$E_y = \frac{\sqrt{3}}{2} 10^3 \sin (1.57 \cdot 10^7 x - 4.71 \cdot 10^{15} t) \text{ V/m}$$

$$E_z = \frac{1}{2} 10^3 \sin (1.57 \cdot 10^7 x - 4.71 \cdot 10^{15} t) \text{ V/m}.$$

Da (13.6) le ampiezze delle componenti del campo magnetico sono

$$B_{0y} = \frac{E_{0z}}{c} = 1.67 \cdot 10^{-6} \text{ T} , \quad B_{0z} = \frac{E_{0y}}{c} = 2.89 \cdot 10^{-6} \text{ T} \Rightarrow B_0 = 3.34 \cdot 10^{-6} \text{ T} .$$

### Esempio 13.2

Un'onda elettromagnetica piana polarizzata ellitticamente, che si propaga nel vuoto lungo l'asse  $x$ , ha i due semiassi di valore  $E_{0x} = \sqrt{3} E_0$ ,  $E_{0z} = \sqrt{2} E_0$ , con  $E_0 = 10^3 \text{ V/m}$ . La frequenza è  $v = 4.3 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$ . Scrivere l'equazione di quest'onda.

### Soluzione

I parametri sono  $\lambda = 0.7 \cdot 10^{-6} \text{ m}$  (luce di colore rosso),  $k = 0.9 \cdot 10^7 \text{ rad/m}$ ,  $\omega = 2.7 \cdot 10^{15} \text{ rad/s}$ . Da (13.8), lasciando impreciso se  $\delta = \pi/2$  o  $\delta = 3\pi/2$ ,

$$E_x = \sqrt{3} E_0 \sin (kx - \omega t) = 1.73 \cdot 10^3 \sin (0.9 \cdot 10^7 x - 2.7 \cdot 10^{15} t) \text{ V/m} ,$$

$$E_z = \pm \sqrt{2} E_0 \cos (kx - \omega t) = \pm 1.41 \cdot 10^3 \cos (0.9 \cdot 10^7 x - 2.7 \cdot 10^{15} t) \text{ V/m} .$$

Con il segno positivo l'ellisse è descritta in senso orario, guardando lungo la direzione di propagazione. L'equazione dell'ellisse è

$$\left( \frac{E_x}{1.73 \cdot 10^3} \right)^2 + \left( \frac{E_z}{1.41 \cdot 10^3} \right)^2 = 1 .$$

Il campo magnetico associato all'onda vale, secondo (13.6).

$$B_x = \mp \frac{\sqrt{2} E_0}{c} \cos (kx - \omega t) = \mp 4.71 \cdot 10^{-6} \cos (kx - \omega t) \text{ T} ,$$

$$B_z = \frac{\sqrt{3} E_0}{c} \sin (kx - \omega t) = 5.77 \cdot 10^{-6} \sin (kx - \omega t) \text{ T} .$$

### 13.3 Energia di un'onda elettromagnetica piana. Vettore di Poynting

La presenza di un campo elettrico  $\mathbf{E}$  e di un campo magnetico  $\mathbf{B}$  in una regione comporta la presenza di un certa quantità di energia distribuita nello spazio con densità  $u$ .

In un mezzo omogeneo le densità sono date da (5.48) e (10.36),

$$u_e = \frac{1}{2} \epsilon E^2 \quad , \quad u_m = \frac{B^2}{2\mu}$$

e la densità istantanea di energia elettromagnetica è

$$u = \frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{B^2}{2\mu}$$

Per un'onda elettromagnetica piana, tenuto conto di (13.7) e (13.4), abbiamo

$$u_m = \frac{B^2}{2\mu} = \frac{E^2}{2\mu v^2} = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = u_e$$

per cui

$$u = 2u_e = \epsilon E^2 \quad . \quad (13.20)$$

L'energia elettromagnetica risulta per metà dovuta al campo elettrico e per metà al campo magnetico. Il risultato è vero in generale, anche per onde non piane.

Consideriamo adesso un elemento di superficie  $d\Sigma$  il cui versore normale  $\mathbf{u}_n$  forma l'angolo  $\alpha$  con la direzione di propagazione definita da  $\mathbf{v}$  ovvero dal vettore  $\mathbf{k}$ . Nel tempo  $dt$  passa attraverso  $d\Sigma$  tutta l'energia contenuta nel volume del prisma elementare di base  $d\Sigma$  e altezza  $vdt$ , ossia

$$dU = u dt = u d\Sigma \cos \alpha v dt = \epsilon E^2 v \cos \alpha d\Sigma dt \quad .$$

La potenza che attraversa  $d\Sigma$  è pertanto

$$dP = \epsilon E^2 v \cos \alpha d\Sigma \quad .$$

Questa relazione permette di definire il vettore

$$\mathbf{S} = \epsilon E^2 \mathbf{v} \quad , \quad (13.21)$$

avente la proprietà che il suo flusso attraverso la superficie  $d\Sigma$  dà la potenza istantanea attraverso  $d\Sigma$ :

$$dP = \mathbf{S} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = \epsilon E^2 v \cos \alpha d\Sigma = \epsilon E^2 v d\Sigma_0 = S d\Sigma_0 \quad ,$$

dove  $d\Sigma_0$  è la superficie infinitesima ortogonale a  $\mathbf{v}$ , pari a  $d\Sigma \cos \alpha$ .

La definizione (13.21) si può anche scrivere, in base a (13.9),

Vettore di Poynting

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad (13.22)$$

e quindi

$$dP = \frac{1}{\mu} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma .$$

Integrando su una superficie finita  $\Sigma$ , la potenza istantanea che la attraversa è data dal flusso di  $S$ :

$$P = \int_{\Sigma} \mathbf{S} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = \int_{\Sigma} \frac{1}{\mu} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma . \quad (13.23)$$

Il vettore  $\mathbf{S}$  così definito è chiamato *vettore di Poynting*. Esso ha dunque direzione e verso coincidenti con quelli della velocità di propagazione e il suo modulo rappresenta l'energia elettromagnetica che per unità di tempo passa attraverso l'unità di superficie ortogonale alla direzione di propagazione. Vediamo che  $S$  si misura nelle stesse unità  $\text{W/m}^2$  dell'intensità di un'onda, definita nel paragrafo 12.7.

Applichiamo questi risultati validi per una qualsiasi onda elettromagnetica piana ad un'onda piana armonica polarizzata rettilineamente, rappresentata nel piano di polarizzazione da

$$E = E_0 \sin(kx - \omega t) .$$

Il modulo del vettore di Poynting è

$$S = \epsilon E^2 v = \epsilon v E_0^2 \sin^2(kx - \omega t) .$$

Nella pratica, fissata una certa superficie ortogonale a  $x$ , è importante calcolare non tanto il flusso istantaneo di energia quanto il flusso medio. Il motivo è che la pulsazione delle onde elettromagnetiche è in generale molto elevata (in particolare nella luce visibile  $\omega \approx 10^{15} \text{ rad/s}$ ) e gli strumenti di misura riescono a determinare soltanto il valor medio dell'energia che li colpisce, non potendo essere sensibili a variazioni così rapide.

Il valore medio del vettore di Poynting è

$$S_m = \epsilon v \langle E^2 \rangle_m = \epsilon v \frac{1}{T} \int_0^T E_0^2 \sin^2(kx - \omega t) dt = \frac{1}{2} \epsilon v E_0^2 ,$$

dove il tempo  $T$  corrisponde a moltissimi periodi dell'onda; il risultato non dipende dal valore di una eventuale fase iniziale  $\delta_0$  che si somma a  $kx - \omega t$ . Ricordando la definizione di valore efficace di una grandezza sinusoidale (paragrafo 11.6) e la definizione di intensità (paragrafo 12.7), concludiamo che l'intensità trasportata da un'onda elettromagnetica piana armonica polarizzata rettilineamente vale

$$I = S_m = \epsilon v \langle E^2 \rangle_m = \frac{1}{2} \epsilon v E_0^2 = \epsilon v E_{\text{eff}}^2 . \quad (13.24)$$

Poiché il campo elettrico di un'onda piana polarizzata può essere pensato, secondo (13.14), come la somma vettoriale di due campi elettrici sfasati, ortogonali tra loro e alla direzione di propagazione, appliciamo (13.24) a ciascuna componente:

$$I_y = \frac{1}{2} \epsilon v E_{0y}^2 , \quad I_z = \frac{1}{2} \epsilon v E_{0z}^2 .$$

L'intensità totale, pari alla somma delle intensità trasportate dalle componenti,

$$I = I_y + I_z = \frac{1}{2} \epsilon v (E_{0y}^2 + E_{0z}^2) , \quad (13.25)$$

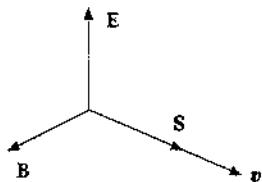


Figura 13.9

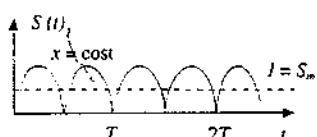


Figura 13.10

risulta *indipendente dallo sfasamento tra le componenti* e quindi dallo stato di polarizzazione (rettilinea, ellittica o circolare).

Se l'onda non è polarizzata, se cioè il campo elettrico ha direzione che varia casualmente, in media le componenti  $E_y$  e  $E_z$  sono eguali tra loro; la (13.25) resta ancora valida purché si considerino i valori medi dei quadrati delle ampiezze.

Da (13.11), (13.10), (13.13) ricaviamo

$$\varepsilon v = \varepsilon \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} = \frac{1}{Z} = \frac{n}{Z_0}$$

per cui possiamo porre (13.24) nella forma

$$I = \frac{1}{2} \frac{n}{Z_0} E_0^2 = \frac{n}{Z_0} E_{\text{eff}}^2 \quad . \quad (13.26)$$

### Esempio 13.3

Dedurre l'espressione dell'intensità delle onde elettromagnetiche piane considerate negli esempi 13.1 e 13.2. Trovare inoltre un'espressione per l'intensità di un'onda elettromagnetica piana polarizzata circolarmente e non polarizzata. Si consideri  $n = 1$ .

#### Soluzione

Applichiamo ai casi da esaminare la definizione  $I = S_m = \varepsilon v (E^2)_m$ .

A. *Onda piana polarizzata rettilineamente* (esempio 13.1).

Sappiamo già, da (13.24) o (13.26) che

$$I = \frac{1}{2} \varepsilon v E_0^2 = \frac{E_0^2}{2 Z_0} \quad . \quad (13.27)$$

Da (13.17) abbiamo

$$I = \frac{1}{2} \varepsilon v [(E_0 \cos \theta)^2 + (E_0 \sin \theta)^2] = I \cos^2 \theta + I \sin^2 \theta$$

e quindi le componenti dell'intensità che compaiono in (13.25) sono

$$I_y = I \cos^2 \theta, \quad I_z = I \sin^2 \theta \quad . \quad (13.28)$$

B. *Onda piana polarizzata ellitticamente* (esempio 13.2).

Ricorriamo in questo caso a (13.18):

$$I = S_m = \varepsilon v (E^2)_m = \varepsilon v (E_y^2 + E_z^2)_m = \varepsilon v [E_{0y}^2 \sin^2(kx - \omega t) + E_{0z}^2 \cos^2(kx - \omega t)]_m \quad .$$

L'intensità dell'onda è dunque

$$I = I_y + I_z = \frac{1}{2} \varepsilon v E_{0y}^2 + \frac{1}{2} \varepsilon v E_{0z}^2 = \frac{E_{0y}^2}{2 Z_0} + \frac{E_{0z}^2}{2 Z_0} \quad . \quad (13.29)$$

C. *Onda piana polarizzata circolarmente*.

Il risultato si ottiene direttamente da (13.29) ponendo  $E_{0y} = E_{0z} = E_0$ :

$$I = \varepsilon v E_0^2 = \frac{E_0^2}{Z_0} \quad , \quad I_y = I_z = \frac{I}{2} = \frac{1}{2} \varepsilon v E_0^2 = \frac{E_0^2}{2 Z_0} \quad . \quad (13.30)$$

D. *Onda piana non polarizzata*.

Abbiamo detto prima che in media le componenti  $E_y$  e  $E_z$  devono essere eguali tra loro e quindi eguali a  $E/\sqrt{2}$ , ovvero deve valere l'eguaglianza

$$(E_y^2)_m = (E_z^2)_m = \frac{1}{2} (E^2)_m ,$$

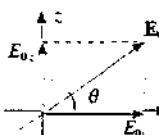
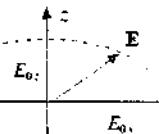
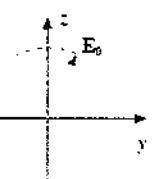
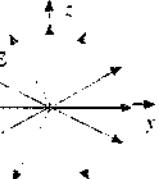
e pertanto

$$I_y = I_z = \frac{1}{2} \cdot I = \varepsilon v (E^2)_m = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon v (E_0^2)_m = \frac{(E_0^2)_m}{2 Z_0} . \quad (13.31)$$

È stata così verificata la validità di (13.25) nei vari casi possibili e sono state trovate le espressioni esplicite di  $I_y$  e  $I_z$ .

I risultati ottenuti nel paragrafo 13.2 e in questo paragrafo forniscono una descrizione completa degli stati di polarizzazione di un'onda elettromagnetica piana armonica. Essi verranno usati spesso in seguito e perciò li abbiamo riassunti nella tabella 13.1.

**Tabella 13.1 Stati di polarizzazione di un'onda elettromagnetica piana**

Stato di polarizzazione	Equazione dell'onda	Intensità dell'onda
onda rettilinea	$E_y = E_0 \cos \theta \sin(kx - \omega t)$  $E_z = E_0 \sin \theta \sin(kx - \omega t)$	$I_y = \frac{1}{2} \frac{n}{Z_0} E_0^2 \cos^2 \theta$ $I_z = \frac{1}{2} \frac{n}{Z_0} E_0^2 \sin^2 \theta$ $I = I_y + I_z = \frac{1}{2} \frac{n}{Z_0} E_0^2$
onda ellittica	$E_y = E_{0y} \sin(kx - \omega t)$  $E_z = E_{0z} \cos(kx - \omega t)$	$I_y = \frac{1}{2} \frac{n}{Z_0} E_{0y}^2$ $I_z = \frac{1}{2} \frac{n}{Z_0} E_{0z}^2$ $I = I_y + I_z = \frac{1}{2} \frac{n}{Z_0} (E_{0y}^2 + E_{0z}^2)$
onda circolare	$E_y = E_0 \sin(kx - \omega t)$  $E_z = E_0 \cos(kx - \omega t)$	$I_y = \frac{1}{2} \frac{n}{Z_0} E_0^2$ $I_z = I_y$ $I = I_y + I_z = \frac{n}{Z_0} E_0^2$
onda non polarizzata	$E_y = (E_{0y})_m \sin(kx - \omega t)$  $E_z = (E_{0z})_m \sin[(kx - \omega t) + \delta(t)]$	$I_y = \frac{1}{2} \frac{n}{Z_0} (E_{0y})_m^2$ $I_z = I_y$ $I = I_y + I_z = \frac{1}{2} \frac{n}{Z_0} (E_0^2)_m$

L'intensità dell'onda armonica è sempre proporzionale al quadrato del valore medio dell'ampiezza del campo elettrico.

### 13.4 Quantità di moto di un'onda elettromagnetica piana. Pressione di radiazione

Per dimostrare che le onde elettromagnetiche trasportano quantità di moto oltre che energia, consideriamo una superficie piana  $\Sigma$  ortogonale alla direzione di propagazione (asse  $x$ ) di un'onda piana nel vuoto. Questa volta però facciamo l'ipotesi che si tratti di una superficie materiale su cui è distribuita una carica elettrica con densità superficiale  $\sigma$ . La forza di Lorentz per unità di superficie, esercitata dai campi che costituiscono l'onda, è

$$\mathbf{F}_\sigma = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v}_\sigma \times \mathbf{B}),$$

dove  $\mathbf{v}_\sigma$  è la velocità comunicata alle cariche dalla forza elettrica. L'unità di superficie assorbe perciò la potenza

$$\mathbf{F}_\sigma \cdot \mathbf{v}_\sigma = \sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{v}_\sigma + \sigma \mathbf{v}_\sigma \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{v}_\sigma = \sigma v_\sigma E.$$

Il termine contenente  $\mathbf{B}$  si annulla perché nei prodotti misti due vettori sono eguali e dunque  $\mathbf{B}$  non contribuisce alla potenza assorbita. Questa risulta sempre positiva perché  $\sigma \mathbf{E}$  e  $\mathbf{v}_\sigma$  sono in ogni istante paralleli e concordi. In media l'energia assorbita per unità di tempo e per unità di superficie, cioè l'intensità ceduta dall'onda, vale

$$I = \sigma(v_\sigma E)_m. \quad (13.32)$$

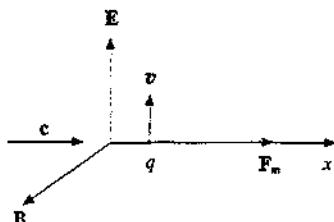


Figura 13.11

A questo assorbimento non corrisponde un effetto meccanico globale sulla superficie perché il campo  $\mathbf{E}$  è parallelo alla superficie e tale è la forza elettrica.

Invece la forza magnetica dà origine ad un effetto meccanico, pur non assorbendo energia in quanto sempre ortogonale a  $\mathbf{v}_\sigma$ . Essa è normale alla superficie  $\Sigma$  su cui stanno  $\mathbf{v}_\sigma$  e  $\mathbf{B}$  ed è concorde a  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ , cioè al versore  $\mathbf{u}_x$ , qualunque sia il segno di  $\sigma$ . Passando direttamente ai valori medi abbiamo, per unità di superficie,

$$\mathbf{F}_m = \sigma(\mathbf{v}_\sigma \times \mathbf{B})_m = \sigma(v_\sigma B)_m \mathbf{u}_x = \frac{\sigma}{c} (v_\sigma E)_m \mathbf{u}_x = \frac{I}{c} \mathbf{u}_x,$$

dove abbiamo usato (13.7) e (13.32). Questa forza media per unità di superficie corrisponde a una pressione media, detta *pressione di radiazione*, che viene esercitata dall'onda sulla superficie  $\Sigma$ :

$$P_{rad} = \frac{I}{c}. \quad (13.33)$$

D'altra parte  $\mathbf{F}_m \Delta t$  è l'impulso per unità di superficie dovuto all'onda e siamo portati ad ammettere che l'onda ceda per unità di tempo e per unità di superficie la quantità di moto  $\mathbf{F}_m$ : in conclusione, con riferimento alle unità di tempo e superficie, se l'onda cede a  $\Sigma$  l'energia  $I$ , essa cede anche la quantità di moto  $I/c$ .

I risultati trovati sono validi nel caso in cui la superficie colpita sia *completamente assorbente*, cioè assorba tutta l'energia che la colpisce. Come discuteremo in seguito, una superficie in generale in parte assorbe e in parte riflette l'energia elettromagnetica incidente. L'assorbimento completo è un caso limite; l'altro caso limite è la *superficie perfettamente riflettente*, che non assorbe energia. In questa situazione l'onda che incide normalmente su  $\Sigma$  dopo la riflessione si propaga lungo  $-\mathbf{u}_x$ , la quantità di moto cambia di verso e l'impulso comunicato a  $\Sigma$  è doppio rispetto al caso dell'assorbimento completo. La pressione di radiazione risulta

$$P_{rad} = \frac{2I}{c}. \quad (13.34)$$

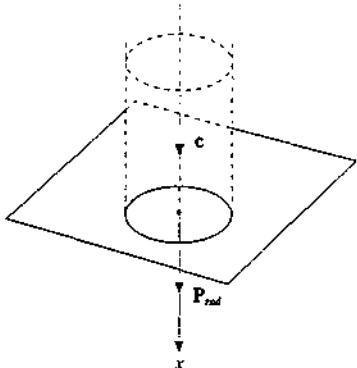


Figura 13.12

Infine supponiamo che la direzione di propagazione dell'onda piana incidente formi l'angolo  $\theta$  con la normale alla superficie  $\Sigma$ . Rispetto ai casi precedenti abbiamo due differenze: la componente della quantità di moto dell'onda che partecipa all'interazione con la

superficie è la componente normale e ciò comporta un fattore moltiplicativo  $\cos\theta$ ; in secondo luogo, a parità di sezione dell'onda incidente, l'area colpita è maggiore e quindi la pressione minore, ancora di un fattore  $\cos\theta$ . Si ha:

assorbimento completo

$$P_{rad} = \frac{I}{c} \cos^2\theta , \quad (13.35)$$

riflessione completa

$$P_{rad} = \frac{2I}{c} \cos^2\theta .$$

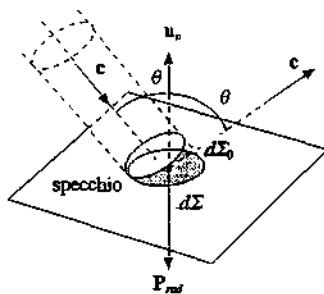


Figura 13.13

#### Esempio 13.4

Su una superficie piana incidono più onde, distribuite isotropicamente nell'intervallo  $0 \leq \theta \leq \pi/2$ , essendo  $\theta$  l'angolo tra direzione di incidenza e normale alla superficie. Calcolare la pressione di radiazione nei due casi di superficie completamente assorbente e completamente riflettente.

#### Soluzione

Calcoliamo il valore medio della pressione nell'angolo solido visto dalla superficie piana, che è metà dell'angolo totale:

$$(P_{rad})_m = \frac{1}{\Omega} \int_0^{\Omega} k \cos^2\theta d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/2} k \cos^2\theta 2\pi \sin\theta d\theta = -k \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta d\cos\theta = \frac{k}{3} .$$

Quindi, valendo  $k = I/c$  o  $2I/c$ ,

$$\text{assorbimento completo } (P_{rad})_m = \frac{I}{3c} , \quad (13.36)$$

$$\text{riflessione completa } (P_{rad})_m = \frac{2I}{3c} .$$

L'azione della pressione di radiazione si mette in evidenza con il dispositivo mostrato nella figura 13.14. In una bilancia di torsione (paragrafo 9.4 del primo volume) agli estremi dell'asta sono fissati un disco riflettente, ad esempio costituito da uno specchio, e uno assorbente, che si può realizzare con una lamina metallica ricoperta di nerofumo. Illuminando il sistema con un'onda luminosa di sufficiente intensità si osserva una rotazione della bilancia nel verso indicato, segno che la pressione sullo specchio è maggiore che sul disco nero, come dicono (13.33) e (13.34).

Nel contenitore di vetro che contiene lo strumento è praticato un vuoto spinto. Se ci fosse aria o un altro gas, si osserverebbe una rotazione in senso contrario. Infatti il disco nero, che assorbe energia, si riscalda e cede calore al gas che lo circonda facendo aumentare localmente la velocità quadratica media delle molecole: queste tramite urti esercitano sul disco nero una pressione che è maggiore di quella esercitata sul disco speculare, in cui l'assorbimento di energia dall'onda è quasi trascurabile. Questo effetto maschera completamente l'effetto contrario dovuto alla pressione di radiazione.

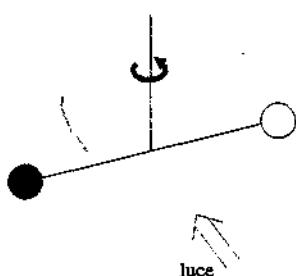


Figura 13.14

#### Riepilogo su energia e quantità di moto di un'onda elettromagnetica

Riassumiamo e ampliamo i risultati raggiunti in questo paragrafo e nel precedente, considerando per semplicità la propagazione nel vuoto.

Un'onda elettromagnetica piana trasporta una certa quantità di energia  $U$ , che è distribuita con la densità istantanea  $u$  data da (13.20). Agli effetti pratici è più utile calcolare un valore medio e si ricorre all'intensità  $I$ , energia dell'onda che passa attraverso una superficie ortogonale alla direzione di propagazione per unità di tempo e per unità di superficie.

All'energia trasportata dall'onda è insindibilmente legato un trasporto di quantità di moto e, con un'estensione di (13.33), possiamo scrivere:

$$\text{quantità di moto di un'onda di energia } U \quad \mathbf{p} = \frac{U}{c} \mathbf{u}_x \quad .$$

$$\text{quantità di moto per unità di volume (istantanea)} \quad \mathbf{p}_v = \frac{u}{c} \mathbf{u}_x \quad ,$$

$$\text{quantità di moto media per unità di superficie e di tempo} \quad \mathbf{p}_t = \frac{I}{c} \mathbf{u}_x \quad .$$

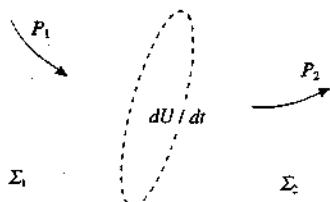


Figura 13.15

L'espressione (13.23) che dà la potenza trasportata da un'onda come flusso del vettore di Poynting, si presta a un'estensione notevole. Consideriamo che la superficie  $\Sigma$  sia chiusa e supponiamo che attraverso  $\Sigma_1$  entri nel volume  $\tau$  delimitato da  $\Sigma$  la potenza  $P_1$  e che attraverso  $\Sigma_2$  esca la potenza  $P_2$ , con  $P_1$  in generale diversa da  $P_2$ . La differenza  $P_1 - P_2$  corrisponde a potenza ceduta al volume  $\tau$ :

$$P_1 - P_2 = \frac{dU}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\tau} u \, d\tau \quad .$$

I singoli termini, applicando (13.23) a  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$ , con  $\mathbf{u}_n$  diretto sempre verso l'esterno, valgono

$$P_1 = - \int_{\Sigma_1} \mathbf{S} \cdot \mathbf{u}_n \, d\Sigma_1 \quad , \quad P_2 = \int_{\Sigma_2} \mathbf{S} \cdot \mathbf{u}_n \, d\Sigma_2 \quad \Rightarrow \quad P_1 - P_2 = - \int_{\Sigma} \mathbf{S} \cdot \mathbf{u}_n \, d\Sigma \quad .$$

Applichiamo il teorema della divergenza (3.22) e otteniamo

$$\int_{\Sigma} \mathbf{S} \cdot \mathbf{u}_n \, d\Sigma = \int_{\tau} \nabla \cdot \mathbf{S} \, d\tau = - \frac{\partial}{\partial t} \int_{\tau} u \, d\tau = - \int_{\tau} \frac{\partial u}{\partial t} \, d\tau \quad .$$

Questa eguaglianza comporta che localmente sia

$$\nabla \cdot \mathbf{S} = - \frac{\partial u}{\partial t} \quad :$$

la divergenza del vettore di Poynting è eguale all'opposto della variazione temporale della densità di energia. Un flusso netto di energia elettromagnetica attraverso una superficie chiusa deve corrispondere a una diminuzione o ad un aumento dell'energia distribuita entro la superficie.

Si dimostra che quando sono presenti anche cariche elettriche, le quali sotto l'azione del campo elettrico danno luogo a una corrente di densità  $\mathbf{j}$ , il bilancio energetico completo si scrive

$$\nabla \cdot \mathbf{S} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} = - \frac{\partial u}{\partial t} \quad : \quad (13.37)$$

da una parte c'è la variazione di energia, dall'altra l'energia scambiata tramite onde e l'energia spesa per mantenere le cariche in movimento. Infatti, per unità di volume, la potenza spesa è  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = \rho \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{j}$ , tenuto conto che  $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$  (paragrafo 6.2).

La (13.37) è la relazione con struttura analoga che si può scrivere per la quantità di moto: sono molto importanti concettualmente: esse mostrano che nei problemi in cui sono coinvolte onde elettromagnetiche occorre mettere nel bilancio l'energia e la quantità di moto trasportate dalle onde.

Aggiungiamo solo per conoscenza che le onde elettromagnetiche trasportano anche momento angolare e che questo fatto va considerato in eventuali applicazioni della relativa legge di conservazione.

Queste proprietà, ricavate dalle leggi generali della meccanica e dell'elettromagnetismo classico, sono confermate, anche se in un quadro molto diverso, dalla trattazione quantistica.

### 13.5 Onde elettromagnetiche piane, sferiche, cilindriche

Riprendendo i risultati del paragrafo 12.9, un'onda elettromagnetica piana armonica che si propaga in una qualunque direzione si può rappresentare come

$$\mathbf{E} = E_0 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) ;$$

$\mathbf{r}$  è il raggio vettore che unisce il punto  $O$  con un punto  $P$  del fronte d'onda e  $\mathbf{k}$  è il vettore di propagazione, di modulo  $k = 2\pi/\lambda$  e direzione e verso coincidenti con quelli di propagazione dell'onda.

In un sistema di coordinate cartesiane abbiamo

$$E(x, y, z, t) = E_0 \sin(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t) , \quad (13.38)$$

$$k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v} . \quad (13.39)$$

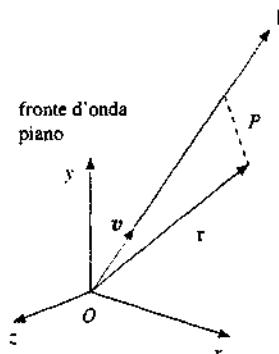


Figura 13.16

In un mezzo indefinito omogeneo e isotropo le equazioni di Maxwell prevedono anche onde sferiche, con funzione d'onda

$$\mathbf{E} = \frac{E_0}{r} \sin(kr - \omega t) , \quad (13.40)$$

dove  $E_0$  numericamente è eguale all'ampiezza del campo elettrico per  $r = 1$  m.

Il campo elettrico e il campo magnetico si propagano con velocità  $v$  lungo i raggi vettori  $\mathbf{r}$  uscenti dal punto  $O$  in cui è posta la sorgente, idealmente puntiforme. Considerato un piano perpendicolare ad un certo raggio  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  appartengono a questo piano (l'onda è trasversale) e in ogni istante continuano a valere le relazioni

$$\mathbf{E} = \mathbf{B} v , \quad \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0 , \quad \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{E^2}{v} \mathbf{u}_r .$$

Il vettore di Poynting è sempre definito da

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$$

e l'intensità risulta

$$I = \frac{1}{2} \epsilon v \frac{E_0^2}{r^2} = \frac{n}{2 Z_0} \frac{E_0^2}{r^2} , \quad (13.41) \quad \text{Intensità di un'onda sferica}$$

inversamente proporzionale al quadrato della distanza  $r$  dalla sorgente.

Una sorgente rettilinea lunga e sottile può dare origine a un'onda cilindrica per la quale valgono le relazioni

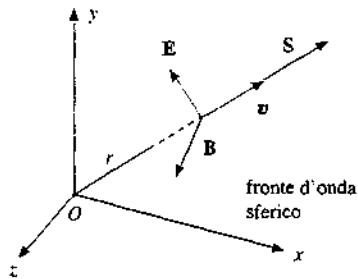


Figura 13.17

## Intensità di un'onda cilindrica

$$\frac{E}{E_0} = \frac{\sin(kr - \omega t)}{\sqrt{r}}, \quad I = \frac{1}{2} \epsilon v \frac{E^2}{r} = \frac{n}{2Z_0} \frac{E_0^2}{r} \quad (13.42)$$

con  $E_0$  ampiezza del campo elettrico per  $r = 1 \text{ m}$  e  $r$  distanza dall'asse su cui giace la sorgente.

Limitando il fronte d'onda sferico o cilindrico e ponendosi a grande distanza dalla sorgente si ottiene un fronte d'onda piano e l'ampiezza dell'onda è approssimativamente costante su tratti non troppo lunghi.

Ricordiamo che le direzioni lungo cui si propagano le onde individuano una serie di *raggi, ortogonali* in ogni punto ai fronti d'onda; si rivedano le figure 12.21, 12.23 e 12.24.

## Nota. Radiazione solare. Origine dell'energia solare

Il sole è una sorgente molto intensa di onde elettromagnetiche. Discuteremo più avanti l'origine di questa emissione; diciamo intanto che sulla superficie terrestre l'intensità della radiazione solare vale circa  $I = 1.4 \cdot 10^3 \text{ W/m}^2$ . Dato il grande valore della distanza sole-terra ( $r \approx 1.5 \cdot 10^{11} \text{ m}$ ) consideriamo localmente piane le onde emesse dal sole e da (13.26), (13.7) calcoliamo le ampiezze dei campi  $E$  e  $B$  sulla superficie terrestre:

$$E_0 = \sqrt{2 Z_0 I} = \sqrt{2 \cdot 377 \cdot 1.4 \cdot 10^3} = 1.03 \cdot 10^3 \text{ V/m},$$

$$B_0 = \frac{E_0}{c} \approx 3.43 \cdot 10^{-6} \text{ T}.$$

La pressione della radiazione solare su un oggetto, in base a (13.33) e (13.34), vale

$$P_{\text{rad}} = \frac{I}{c} = 4.67 \cdot 10^{-6} \text{ Pa}, \quad P_{\text{rad}} = \frac{2 I}{c} = 9.34 \cdot 10^{-6} \text{ Pa},$$

rispettivamente per un corpo assorbente e per un corpo riflettente. Si tratta di valori inferiori di circa 11 ordini di grandezza rispetto alla pressione atmosferica, ma che possono essere facilmente messi in evidenza come descritto nel paragrafo 13.4.

Se immaginiamo che l'intensità misurata sulla superficie terrestre sia distribuita uniformemente su una superficie sferica di raggio  $r = 1.5 \cdot 10^{11} \text{ m}$ , abbiamo una stima della potenza della sorgente solare, detta anche luminosità del sole:

$$P_{\text{sole}} = I 4 \pi r^2 = 3.96 \cdot 10^{26} \text{ W}.$$

Sorgente dell'energia solare sono i processi di  *fusione nucleare* che avvengono all'interno del sole. Si ritiene che il processo principale sia la  *fusione di quattro nuclei di idrogeno in un nucleo di elio* attraverso una catena di reazioni successive. La differenza di massa tra stato iniziale e stato finale è

$$\Delta m = 4 m_{\text{H}} - m_{\text{He}} = 4 \cdot 1.6726 \cdot 10^{-27} - 6.6420 \cdot 10^{-27} = 0.0484 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

e a questa corrisponde l'energia liberata

$$\Delta U = \Delta m c^2 = 4.356 \cdot 10^{-12} \text{ J} = 27.3 \text{ MeV}.$$

La temperatura all'interno del sole, costituito principalmente da idrogeno, è di circa  $1.5 \cdot 10^7 \text{ K}$ ; l'energia del moto di agitazione termica dei nuclei di idrogeno è tale da permettere a questi di superare la repulsione elettrica e di avvicinarsi talmente tra loro da risentire della forza nucleare attrattiva, causa della fusione di due nuclei. L'energia liberata dalle fusioni compare sotto forma di energia cinetica delle particelle

che vengono emesse durante le reazioni (tra cui neutrini) e di energia elettromagnetica; essa è in massima parte riassorbita dal mezzo circostante. L'insieme di tutti i processi consente una situazione di equilibrio dinamico, con un flusso di energia dall'interno verso la superficie del sole, che si trova a circa  $6 \cdot 10^3$  K, temperatura troppo bassa perché avvengano processi di fusione. La radiazione che noi riceviamo è emessa dagli atomi degli strati superficiali, eccitati tramite urti termici.

Una stima dal numero di fusioni al secondo necessarie per generare la potenza emessa è

$$n_f = \frac{P_{\text{sole}}}{\Delta U} = \frac{3.96 \cdot 10^{26}}{4.36 \cdot 10^{-12}} = 9.1 \cdot 10^{37} \text{ fusioni/s}$$

e in un secondo viene consumata una massa di idrogeno pari a

$$M_H = 4 m_H n_f = 6.1 \cdot 10^{11} \text{ Kg/s} ,$$

ovvero in un anno  $1.9 \cdot 10^{19}$  Kg. La massa del sole è  $2 \cdot 10^{30}$  Kg: per consumarne metà, cioè per consumarne  $1 \cdot 10^{30}$  Kg, occorrono  $\approx 5 \cdot 10^{10}$  anni.

Abbiamo menzionato l'emissione di neutrini. Questi riescono ad attraversare la massa solare e la misura del loro flusso sulla terra, attraverso esperimenti molto raffinati, permette di verificare le ipotesi del *modello solare* attualmente accettato. Si è già accennato a questi argomenti nella nota del paragrafo 7.1.

Terminiamo qui l'esposizione di alcune delle proprietà generali delle onde elettromagnetiche nel vuoto o in un mezzo dielettrico indefinito omogeneo e isotropo, per iniziare ad occuparci di come esse vengono generate. Nei prossimi paragrafi studieremo alcuni *meccanismi di emissione di radiazioni elettromagnetiche* (termine correntemente usato per indicare le onde elettromagnetiche). Una parte degli argomenti richiederebbe nozioni di meccanica quantistica e di relatività. Come abbiamo già fatto altre volte useremo invece, quando è possibile e non è fuorviante, un modello classico per ottenere almeno una comprensione limitata dei fenomeni; altrimenti ci limiteremo a esporre i risultati senza spiegazioni.

### 13.6 Radiazione elettromagnetica prodotta da un dipolo elettrico oscillante

La prima sorgente di radiazione che prendiamo in esame è il *dipolo elettrico con momento variabile sinusoidalmente nel tempo*. Lo studio della radiazione di dipolo elettrico è particolarmente importante in quanto su di essa è basato il funzionamento delle *antenne* utilizzate per la trasmissione di onde elettromagnetiche. Dall'espressione della potenza irradiata da un dipolo elettrico oscillante è possibile dedurre (paragrafo 13.7) una relazione per la potenza irradiata da una *carica elettrica in moto accelerato*, che da un punto di vista classico si può considerare la *vera sorgente elementare di onde elettromagnetiche*. L'altra classe di sorgenti fondamentali di radiazione elettromagnetica è costituita dagli *atomi* e dalle *molecole*: di questo argomento ci occuperemo in parte nel paragrafo 13.8 e più estesamente nel capitolo 18.

Il dipolo elettrico oscillante viene schematizzato come un segmento di lunghezza  $a$ , che poniamo parallelo all'asse  $z$ . La carica è concentrata agli estremi (le due sferette della figura 13.18) e un opportuno generatore la fa variare sinusoidalmente:

$$q = q_0 \sin \omega t , \quad i = \frac{dq}{dt} = \omega q_0 \cos \omega t = i_0 \cos \omega t .$$

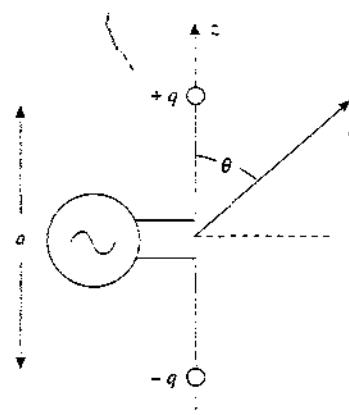


Figura 13.18

La corrente varia nel tempo, ma viene ritenuta costante in un certo istante su tutta la lunghezza  $a$ , se questa è molto minore della lunghezza d'onda  $\lambda = cT = 2\pi c / \omega$  della perturbazione generata dal dipolo.

Riprendendo (2.58) definiamo il valore istantaneo del momento di dipolo elettrico:

$$\mathbf{p} = q a \mathbf{u}_z = q_0 a \sin \omega t \mathbf{u}_z = p_0 \sin \omega t \mathbf{u}_z , \quad p_0 = q_0 a = \frac{i_0 a}{\omega} .$$

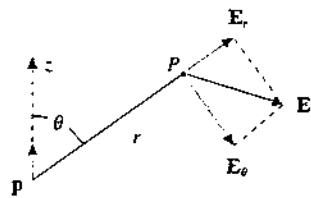


Figura 13.19

Tale momento, secondo i risultati del paragrafo 2.7, produrrebbe un campo elettrico con componenti radiale e trasversa date da (2.60):

$$E_r = \frac{2 p \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 r^3} = \frac{2 p_0 \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 r^3} \sin \omega t , \quad E_\theta = \frac{p \sin \theta}{4\pi \epsilon_0 r^3} = \frac{p_0 \sin \theta}{4\pi \epsilon_0 r^3} \sin \omega t .$$

Queste espressioni si possono ritenere valide in vicinanza del dipolo, per distanze grandi rispetto alla dimensione  $a$  del dipolo, ma piccole rispetto alla lunghezza d'onda  $\lambda$ : infatti in tale regione le variazioni temporali del campo elettrico dovute alle variazioni del momento di dipolo si manifestano senza apprezzabile ritardo.

A distanza  $r \gg \lambda$  il fatto che la propagazione della perturbazione elettromagnetica prodotta dal dipolo avvenga con velocità finita, anche se molto grande, comporta una soluzione delle equazioni di Maxwell molto diversa. Precisamente, nell'ipotesi  $r \gg \lambda \gg a$  si trova che, fissata una direzione orientata  $\mathbf{r}$  che parte dal centro del dipolo e forma l'angolo  $\theta$  con  $\mathbf{p}$ , lungo questa si propaga un'onda sferica trasversale:  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  hanno direzione e verso come indicato in figura 13.20,  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  dà direzione e verso della propagazione. I moduli dei campi sono:

$$E = E_\theta = \frac{p_0 \sin \theta}{4\pi \epsilon_0 c^2} \frac{\omega^2}{r} \sin(kr - \omega t) = \frac{\pi p_0 \sin \theta}{\epsilon_0} \frac{1}{\lambda^2 r} \sin(kr - \omega t) ,$$

$$B = B_\theta = E/c . \quad (13.43)$$

Figura 13.20

La dipendenza  $1/r^3$  dalla distanza è sostituita dalla dipendenza  $1/r$ , tipica dell'onda sferica, la componente  $E_\theta$  è nulla; la velocità di propagazione nel vuoto è  $c = \omega/k$ . I valori dei campi dipendono, oltre che dalla distanza  $r$ , dall'angolo  $\theta$  e sono nulli in particolare per  $\theta = 0$  e  $\theta = \pi$ , cioè lungo l'asse del dipolo. Non c'è dipendenza dall'angolo  $\phi$ , cioè la simmetria è cilindrica (il simbolo  $B_\theta$  indica solo che  $\mathbf{B}$  è diretto trasversalmente a  $\mathbf{E}$ , non che dipende da  $\phi$ ).

Per discutere almeno qualitativamente la formazione delle onde elettromagnetiche abbiamo riportato nella figura 13.21 la configurazione delle linee del campo elettrico prodotto dal dipolo, assumendo come istante iniziale  $t$  quello in cui il momento di dipolo vale  $\mathbf{p} = p_0 \mathbf{u}_z$  e le linee di  $\mathbf{E}$  hanno l'andamento tipico della situazione statica descritta nel paragrafo 2.7, figura 2.44. All'istante  $t + T/4$  il momento di dipolo è nullo per cui non esistono linee di campo che hanno gli estremi sul dipolo. Fisicamente è successo che le linee create nell'intervallo  $T/4$  si sono allontanate dal dipolo, si sono chiuse su se stesse e continuano ad allontanarsi. Intanto si formano nuove linee di campo con il verso opposto (nell'istante  $t + T/2$  il momento di dipolo vale  $-p_0 \mathbf{u}_z$ ) e all'istante  $t + 3T/4$ , quando il momento di dipolo è di nuovo nullo, anche questo sistema di linee si chiude e si allontana, deformando le linee di campo formate in precedenza. Si potrebbe dimostrare che la chiusura delle linee di campo nell'intorno del dipolo è dovuta alla presenza di una componente radiale  $E_r$ , che diminuisce con la distanza come  $1/r^2$ .

Se si considera una porzione limitata del fronte d'onda sferico a grande distanza

dal dipolo, dove può essere ritenuto piano, risulta che le direzioni di  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  sono fissate, ovvero che l'onda elettromagnetica è polarizzata rettilineamente, con il campo  $\mathbf{E}$  contenuto nel piano meridiano, come in figura 13.20.

L'intensità dell'onda emessa dal dipolo si calcola da (13.26) con  $E_0$  dato da (13.43),  $E_0(r, \theta) = p_0 \sin \theta \omega^2 / 4\pi \epsilon_0 c^2 r$ :

$$I(r, \theta) = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2 = \frac{p_0^2 \omega^4}{32 \pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{\sin^2 \theta}{r^2} = \frac{I_0}{r^2} \sin^2 \theta \quad , \quad (13.44)$$

$$I_0 = \frac{p_0^2 \omega^4}{32 \pi^2 \epsilon_0 c^3} = \frac{p_0^2 \pi^2 v^4}{2 \epsilon_0 c^3} \quad . \quad (13.45)$$

Essa dipende da  $1/r^2$ , come richiesto per un'onda sferica, e da  $\sin^2 \theta$ : l'intensità irradiata da un dipolo elettrico oscillante è nulla lungo l'asse ed è massima nel piano equatoriale, dove vale

$$I_{\max} = \frac{p_0^2 \omega^4}{32 \pi^2 \epsilon_0 c^3 r^2} = \frac{I_0}{r^2} \quad .$$

Il termine costante  $I_0$  dipende soltanto da caratteristiche della sorgente; si noti la forte dipendenza da  $\omega$ .

In figura 13.22 è rappresentato un *diagramma polare* della funzione  $I(\theta)$ : con  $r$  costante, per ogni valore di  $\theta$  si riporta dal centro del dipolo un segmento di lunghezza proporzionale a  $I(\theta)$ . Le punte dei segmenti stanno sulla curva disegnata, avente simmetria cilindrica rispetto all'asse del dipolo. Si dice che il dipolo elettrico oscillante presenta un diagramma di intensità con due *lobi*. È questo un esempio di fronte d'*onda sferica con intensità non uniforme sul fronte*.

Calcoliamo ora la potenza complessiva emessa dal dipolo:

$$P = \int I(\theta) d\Sigma \quad .$$

L'integrale è esteso a una superficie sferica di raggio  $r$  con centro nel dipolo; l'elemento di superficie sferica in coordinate polari è  $d\Sigma = r^2 \sin \theta d\theta d\phi$  per cui

$$P = \frac{p_0^2 \omega^4}{32 \pi^2 \epsilon_0 c^3} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{p_0^2 \omega^4}{16 \pi \epsilon_0 c^3} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \quad .$$

Tenuto conto che

$$\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \int_0^\pi \sin^2 \theta \sin \theta d\theta = - \int_1^{-1} (1 - \cos^2 \theta) d\cos \theta = \frac{4}{3} \quad ,$$

risulta in conclusione

$$P = \frac{p_0^2 \omega^4}{12 \pi \epsilon_0 c^3} = \frac{4 \pi^3 p_0^2 v^4}{3 \epsilon_0 c^3} = \frac{8 \pi}{3} I_0 \quad . \quad (13.46)$$

Fissato il valore di  $p_0$ , anche la potenza irradiata dipende dalla quarta potenza della pulsazione, ovvero della frequenza.



$t, \mathbf{p} = \mathbf{p}_0$



$t + \frac{T}{4}, \mathbf{p} = 0$



$t + \frac{T}{2}, \mathbf{p} = -\mathbf{p}_0$



$t + \frac{3T}{4}, \mathbf{p} = 0$



$t + T, \mathbf{p} = \mathbf{p}_0$

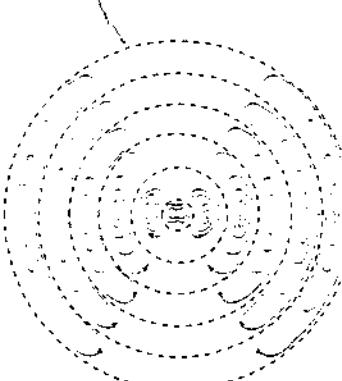


Figura 13.21

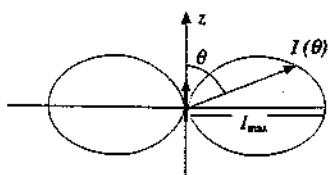


Figura 13.22

La (13.46) viene scritta anche in modo differente. Detto  $i_0$  il valore massimo della corrente circolante nel dipolo oscillante, che possiamo chiamare *antenna dipolare*, abbiamo visto all'inizio del paragrafo che  $P_0 = a i_0 / \omega$ . Sostituendo nella (13.45) ottenendo

$$I_0 = \frac{a^2 i_0^2 \omega^2}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3}$$

e quindi, da (13.46),

$$P = \frac{8\pi}{3} I_0 = \frac{1}{2} \left( \frac{a^2 \omega^2}{6\pi \epsilon_0 c^3} \right) i_0^2 = \frac{1}{2} R_{\text{ant}} i_0^2 = R_{\text{ant}} i_{\text{eff}}^2 .$$

La potenza irradiata dall'antenna è espressa in funzione dell'intensità massima della corrente (o dell'intensità efficace) e di una grandezza  $R_{\text{ant}}$ , chiamata *resistenza d'antenna* e definita come

$$R_{\text{ant}} = \frac{a^2 \omega^2}{6\pi \epsilon_0 c^3} = \frac{2\pi}{3} Z_0 \frac{a^2}{\lambda^2} = 789.5 \frac{a^2}{\lambda^2} \Omega .$$

Dimensionalmente  $R_{\text{ant}}$  è una resistenza e la formula della potenza in funzione della corrente efficace è eguale alla formula della potenza dissipata in una resistenza ohmica. Si tratta però di una eguaglianza formale, in quanto  $R_{\text{ant}}$  caratterizza il processo di emissione di potenza sotto forma di radiazioni elettromagnetiche e non ha nulla a che vedere con la resistenza ohmica dell'antenna, così come  $P$  non è la potenza dissipata nell'antenna per effetto Joule.

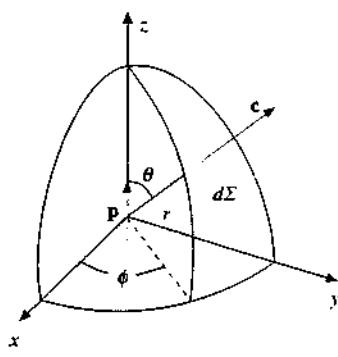


Figura 13.23

### Esempio 13.5

Un'antenna radio lunga  $a = 20$  m trasmette su una frequenza  $v = 8 \cdot 10^5$  Hz e invia ad un apparecchio radio posto a distanza  $r = 10$  km in direzione ortogonale rispetto all'antenna un segnale di ampiezza  $E_0 = 0.1$  V/m. Calcolare la potenza irradiata dall'antenna, trattata come un dipolo elettrico oscillante, e la resistenza d'antenna.

#### Soluzione

Osserviamo subito che è soddisfatta la condizione  $r \gg \lambda \gg a$  essendo

$$r = 10^4 \text{ m} , \lambda = \frac{c}{v} = 375 \text{ m} , a = 20 \text{ m} .$$

L'intensità che arriva alla radio, con  $E_0 = 0.1$  V/m, è

$$I = \frac{1}{2 Z_0} E_0^2 \approx 1.33 \cdot 10^{-5} \text{ W/m}^2 .$$

Quindi, con  $\theta = \pi/2$  e  $r = 10^4$  m, da (13.44) e (13.46)

$$I_0 = r^2 I = 1.33 \cdot 10^3 \text{ W/m}^2 , P = 11.1 \cdot 10^3 \text{ W} .$$

La resistenza d'antenna risulta

$$R_{\text{ant}} = 789.5 \frac{a^2}{\lambda^2} = 2.25 \Omega$$

e dal suo valore deduciamo che il valore massimo della corrente è

$$i_0 = \sqrt{\frac{2P}{R_{\text{ant}}}} = 99.3 \text{ A} \quad (i_{\text{eff}} = i_0 / \sqrt{2} = 70.2 \text{ A}) .$$

In modo analogo viene trattata la radiazione di un dipolo magnetico, costituito da una spira di area  $\Sigma$ , percorsa dalla corrente  $i = i_0 \sin \omega t$  e avente momento magnetico  $m = m_0 \sin \omega t$  con  $m_0 = i_0 \Sigma$ . A grande distanza dal dipolo si ha una situazione simile a quella descritta, in cui però le posizioni dei campi sono quelle mostrate nella figura 13.24. I campi valgono

$$E = E_\phi = \frac{\mu_0 m_0 \sin \theta}{4\pi c} \frac{\omega^2}{r} \sin(kr - \omega t), \quad B = B_\theta = E/c.$$

L'intensità e la potenza sono

$$I = \frac{m_0^2 \omega^4}{32\pi \epsilon_0 c^5} \frac{\sin^2 \theta}{r^2}, \quad P = \frac{m_0^2 \omega^4}{12\pi \epsilon_0 c^5}$$

e la resistenza di antenna si scrive

$$R_{\text{ant}} = \frac{\Sigma^2 \omega^4}{6\pi \epsilon_0 c^5} = \frac{8\pi^3}{3} Z_0 \frac{\Sigma^2}{\lambda^4} = 3.12 \cdot 10^4 \frac{\Sigma^2}{\lambda^4} \Omega.$$

Se immaginassimo di far percorrere alla stessa corrente dell'esempio 13.5 lo stesso percorso, ma lungo una circonferenza, se cioè avessimo un dipolo magnetico di circonferenza  $a = 20$  m, e quindi con resistenza di antenna  $R_{\text{ant}} = 1.6 \cdot 10^{-3} \Omega$  alla data lunghezza d'onda, la potenza emessa sarebbe 7.9 W, circa 1400 volte inferiore a quella emessa dal dipolo elettrico di lunghezza  $a$ . E infatti in generale

$$\frac{P_{\text{el}}}{P_{\text{mag}}} = \left( \frac{cp_0}{m_0} \right)^2 = \left( \frac{ca}{\omega \Sigma} \right)^2 = \left( \frac{\lambda a}{2\pi \Sigma} \right)^2.$$

A parità di dimensioni  $\Sigma \sim a^2$  e il rapporto vale  $(\lambda / 2\pi a)^2$ ; siccome  $\lambda \gg a$  esso è molto grande, a favore del dipolo elettrico.

### 13.7 Radiazione emessa da una carica elettrica in moto accelerato

Un dipolo elettrico oscillante può essere rappresentato anche con una carica  $-q$  fissa nell'origine e una carica  $+q$  che si muove lungo l'asse  $z$  con legge  $z = z_0 \sin \omega t$ , che oscilla cioè con moto armonico tra  $+z_0$  e  $-z_0$ . L'accelerazione della carica  $+q$  è il valor medio del suo quadrato sono

$$a = \frac{d^2 z}{dt^2} = -\omega^2 z_0 \sin \omega t, \quad a^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \omega^2 z_0^2 \sin^2 \omega t dt = \frac{\omega^4 z_0^2}{2}.$$

Il valore massimo del momento di dipolo è

$$p_0 = q z_0 \Rightarrow p_0^2 \omega^4 = q^2 z_0^2 \omega^4 = 2 q^2 a^2;$$

ricorrendo alla (13.46) abbiamo la potenza irradiata da una particella carica in moto accelerato:

$$P_{\text{Larm}} = \frac{q^2 a^2}{6\pi \epsilon_0 c^3} \quad . \quad (13.47) \quad \text{Formula di Larmor}$$

La (13.47) è nota come *formula di Larmor* e non è relativistica: la velocità della carica deve essere sempre molto minore di  $c$ . L'emissione è nulla lungo la direzione del moto e avviene preferibilmente in direzione perpendicolare al moto.

La formula relativisticamente corretta per la potenza irradiata da una particella carica in moto con velocità e accelerazione qualsiasi è stata ricavata da Liénard: se  $v$  e  $a$  sono velocità

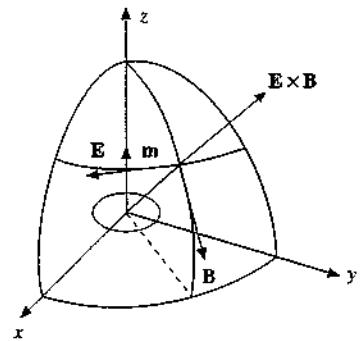
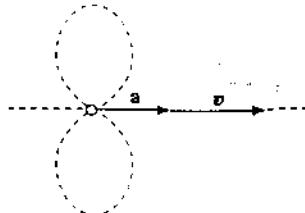


Figura 13.24

e accelerazione della particella avente carica  $q$ , la potenza emessa vale



$$P_{\text{Lien}} = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \frac{\frac{a^2 - (v \times a)^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^3} = \frac{q^2 a^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \frac{1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2\theta}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^3} \quad (13.48)$$

Quando  $v$  è trascurabile rispetto a  $c$  la formula di Liénard si riduce a quella di Larmor.

Figura 13.25

### Esempio 13.6

Nel modello di Bohr, descritto nel paragrafo 2.3, esempio 2.5, l'elettrone dell'atomo di idrogeno compie un'orbita circolare di raggio  $r = 0.53 \cdot 10^{-10}$  m. Calcolare la perdita di energia per irraggiamento e il tempo che impiegherebbe l'elettrone per emettere un'energia pari a metà dell'energia di legame.

#### Soluzione

Riprendiamo i risultati dell'esempio 2.5: l'elettrone percorre l'orbita con velocità e accelerazione

$$v = 2.19 \cdot 10^6 \text{ m/s} \quad a = \frac{v^2}{r} = 9.02 \cdot 10^{22} \text{ m/s}^2.$$

Si vede che si possono usare formule non relativistiche dato che  $v^2 / c^2 \ll 1$ . Allora, dalla formula di Larmor (13.47) si ha

$$P_{\text{Larm}} = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} a^2 = 5.68 \cdot 10^{-54} a^2 \text{ W} = 3.55 \cdot 10^{-35} a^2 \text{ eV/s} \quad ,$$

passando all'unità eV/s per la potenza. Inserendo il valore calcolato di  $a$ ,

$$P_{\text{Larm}} = 2.88 \cdot 10^{-11} \text{ eV/s} \quad .$$

Se ammettiamo una perdita di energia costante nel tempo, l'energia  $\Delta U = U / 2 = 13.6 / 2 = 6.8$  eV verrebbe persa nel tempo

$$\Delta t = \frac{\Delta U}{P_{\text{Larm}}} = 2.36 \cdot 10^{-11} \text{ s} \quad .$$

Un calcolo dettagliato mostrerebbe che questa perdita di energia, accompagnata da una diminuzione di velocità, porterebbe l'elettrone a spiraleggiare intorno al protone fino ad urtarlo sempre in un tempo dell'ordine di  $10^{-11}$  s.

*Secondo la fisica classica dunque un atomo non potrebbe essere stabile*, contrariamente all'evidenza sperimentale. La difficoltà è rimossa dalla meccanica quantistica: nel modello quantistico non ha senso parlare di orbite circolari o ellittiche con relative accelerazioni, l'elettrone occupa stati stazionari di energia nei quali non irradia.

A parte il caso dei moti all'interno degli atomi e delle molecole, in cui non sono applicabili, le formule (13.47) e (13.48) mostrano che ci può essere un irraggiamento notevole quando una particella carica subisce una grande accelerazione. In effetti fenomeni di questo tipo avvengono comunemente quando si impiegano fasci di elettroni, come vedremo tra breve; invece è praticamente impossibile osservare emissione da parte dei protoni: questo perché a parità di forza l'accelerazione è tanto minore quanto maggiore è la massa della particella e noi sappiamo che  $m_p = 1836 m_e$ .

### Raggi X di frenamento. Radiazione di frenamento

Uno dei meccanismi responsabili della produzione di *raggi X*, detti anche *raggi Roentgen* dal nome del loro scopritore, è appunto la radiazione elettromagnetica emessa da elettroni decelerati.

Il dispositivo per la produzione di raggi X, detto *tubo di Coolidge*, è schematizzato in figura 13.26. Un fascio di elettroni, emessi da un filamento incandescente per effetto termoelettronico (paragrafo 6.5), viene accelerato da una d.d.p. tipicamente compresa tra 10 e 100 kV e colpisce un bersaglio di materiale pesante (rame, piombo). Gli elettroni, penetrando nei primi strati del bersaglio, risentono dei fortissimi campi elettrici locali presenti all'interno del materiale e subiscono notevoli decelerazioni. Ciò porta all'emissione di una radiazione elettromagnetica, secondo la figura 13.25 e in accordo con la formula di Larmor, che è valida in quanto elettroni con energia cinetica inferiore a 100 keV non sono ancora relativistici.

Le frequenze emesse hanno uno *spettro continuo* fino ad un valore massimo  $v_{\max}$  proporzionale alla d.d.p. utilizzata per accelerare gli elettroni. Alla frequenza massima corrisponde la lunghezza d'onda minima  $\lambda_{\min} = c / v_{\max}$ , molto inferiore rispetto alle lunghezze d'onda della luce visibile. Ad esempio, con  $V = 50 \text{ kV}$  si ha  $v_{\max} = 1.2 \cdot 10^{19} \text{ Hz}$  e  $\lambda_{\min} = 2.5 \cdot 10^{-11} \text{ m}$ .

Un altro meccanismo di produzione di raggi X con frequenze analoghe, ma caratteristiche diverse, verrà discusso nei paragrafi 13.12 e 18.6.

La radiazione emessa dagli elettroni frenati nell'attraversamento di un mezzo materiale è detta in generale *radiazione di frenamento*, traduzione del termine originale tedesco *bremssstrahlung*, comunemente usato in tutte le lingue per indicare il fenomeno. Nel caso di elettroni relativistici (energie superiori a qualche centinaio di keV) l'emissione segue la legge (13.48) con  $a$  parallelo e discorde a  $v$  ed avviene nell'emisfero anteriore, in modo tanto più pronunciato quanto maggiore è l'energia. Con elettroni di energia  $U$  molto superiore all'energia a riposo  $m c^2$  ( $\sim 0.5 \text{ MeV}$ ), le direzioni di emissione stanno su una superficie conica avente  $v$  come asse e semiapertura  $\theta = m c^2 / U$ : con  $U = 1 \text{ GeV}$   $\theta = 0.03^\circ = 5 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$ . Lo spettro delle frequenze emesse nel processo di frenamento è *continuo*, con valore massimo che dipende dall'energia dell'elettrone.

### Radiazione di sincrotrone

Consideriamo adesso un elettrone relativistico che si muove con velocità angolare  $\omega$  costante lungo un'orbita circolare di raggio  $r$ ; l'accelerazione è centripeta e vale  $\omega^2 r$ . Ricordiamo la definizione delle due grandezze

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{\omega r}{c} \quad , \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

La potenza emessa è data da (13.48) con  $\sin \theta = 1$  essendo l'accelerazione ortogonale alla velocità:

$$P_{\text{Lien}} = \frac{e^2 a^2}{6\pi \epsilon_0 c^3} \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^2} = \frac{e^2 \omega^2}{6\pi \epsilon_0 c} \beta^2 \gamma^4 = \frac{e^2 \omega^2}{6\pi \epsilon_0 c} \gamma^4$$

L'ultima eguaglianza è valida con ottima approssimazione per elettroni con energia superiore a 10 MeV (a tale energia  $\beta = 0.999$ ).

L'energia emessa in un giro completo, percorso nel tempo  $T = 2\pi/\omega$ , è  $P_{\text{Lien}} T = P_{\text{Lien}} 2\pi/\omega$  e risulta

$$\Delta U = \frac{e^2}{3\epsilon_0 r} \beta^3 \gamma^4 = \frac{e^2}{3\epsilon_0 r} \gamma^4 = \frac{6.03 \cdot 10^{-9}}{r} \gamma^4 \text{ eV}$$

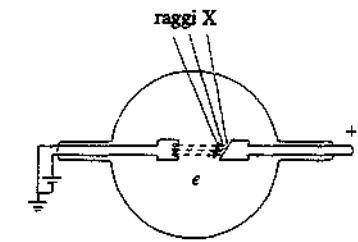


Figura 13.26

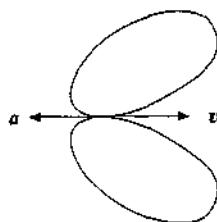


Figura 13.27



Radiazione di sincrotrone

La radiazione emessa è detta *radiazione di sincrotrone*, dal nome dell'acceleratore circolare di particelle (paragrafo 9.9) in cui viene più facilmente osservata. Essa è molto colli-

mata, essendo compresa, in ogni punto della traiettoria, dentro un cono con asse tangente alla traiettoria e semiapertura  $\theta = 1/\gamma$ . Lo spettro delle frequenze è continuo fino al valore massimo che è dell'ordine di  $\pi \omega \gamma^3 \approx \pi c \gamma^3 / r$ .

Come esempio, consideriamo un sincrotrone avente raggio  $r = 20$  m e in cui circolano elettroni con energia massima  $U = 1.5$  GeV; il fattore  $\gamma$ , oltre che essere eguale a  $(1 - \beta^2)^{-1/2}$ , è anche pari a  $U/mc^2$ , cioè al rapporto tra l'energia della particella e l'energia a riposo della particella stessa: nel nostro caso vale  $1500 \text{ MeV}/0.5 \text{ MeV} = 3 \cdot 10^3$ . In un giro completo l'energia emessa per radiazione di sincrotrone è

$$\Delta U = \frac{6.03 \cdot 10^{-9}}{20} (3 \cdot 10^3)^4 = 2.44 \cdot 10^4 \text{ eV} .$$

Lo spettro in frequenza della radiazione termina al valore massimo

$$\nu_{\max} = \pi \frac{c}{r} \gamma^3 = 1.27 \cdot 10^{18} \text{ Hz} \Rightarrow \lambda_{\min} = \frac{c}{\nu_{\max}} = 2.36 \cdot 10^{-10} \text{ m} .$$

Negli ultimi anni sono stati costruiti vari sincrotroni, con parametri simili a quelli dell'esempio, in cui la radiazione prodotta in una piccola porzione dell'anello da un fascio di  $\sim 10^{11}$  elettroni viene utilizzata per illuminare campioni di oggetti di cui si vuole conoscere la struttura microscopica. Le indagini spaziano dalla fisica dello stato solido alla biofisica e alla biochimica (studi di macromolecole) e recentemente alla diagnostica medica precoce di noduli tumorali. Si sfrutta in tutto ciò la piccolezza della lunghezza d'onda, se confrontata con quella della luce visibile ( $\sim 0.5 \cdot 10^{-6}$  m); ma per la discussione sul potere risolutivo di una radiazione di lunghezza d'onda  $\lambda$  rimandiamo al capitolo 16. È da notare che in questo campo di lunghezze d'onda non esistono in pratica sorgenti naturali con prestazioni paragonabili.

La radiazione di sincrotrone d'altra parte pone serie limitazioni alla costruzione di sincrotroni per elettroni di energia molto grande, fondamentali per lo studio delle proprietà dei costituenti elementari della materia. Durante il moto circolare gli elettroni irradiano energia e dunque, per mantenerli su un'orbita stabile, occorre fornire ad essi una quantità di energia eguale a quella persa. Siccome esistono limiti tecnologici sull'energia che può essere fornita per giro, la perdita  $\Delta U$  non può superare tali limiti. Abbiamo visto che  $\Delta U$  è proporzionale a  $\gamma^4$ , cioè a  $(U/mc^2)^4$ , e quindi, essendo  $\Delta U$  fissato dalle considerazioni appena fatte, resta fissata  $U$ . In altre parole, anche potendo fornire una certa quantità di energia agli elettroni in ogni giro, l'energia stessa non può crescere oltre un certo limite perché si raggiunge una situazione di equilibrio in cui l'energia fornita viene persa per radiazione di sincrotrone. Si trova che l'energia limite è molto inferiore a quella teoricamente raggiungibile con il dato raggio di curvatura e con i valori di campo magnetico normalmente disponibili.

L'unico modo per fare aumentare il valore dell'energia è quello di diminuire la perdita  $\Delta U$  aumentando il raggio di curvatura. Il sincrotrone per elettroni più grande esistente al mondo è il LEP del CERN di Ginevra, che ha un anello di 26.7 km di lunghezza e in cui gli elettroni raggiungono l'energia di 50 GeV ( $\gamma = 10^5$ ). Il raggio di curvatura nei magneti è  $3.3 \cdot 10^3$  m e l'energia persa per giro è  $\sim 190$  MeV.

Come abbiamo anticipato, questi fenomeni sono trascurabili per i protoni. L'energia a riposo di un protone è 0.938 GeV e, pur nel sincrotrone per protoni più grande in cui questi raggiungono l'energia di 1000 GeV (Tevatron del Laboratorio Fermi presso Chicago),  $\gamma$  vale  $\sim 10^3$ ; il raggio di curvatura è  $\sim 10^3$  m e la perdita di energia vale  $\sim 6$  eV/giro, assolutamente trascurabile. Questa differenza di prestazioni (1000 GeV con raggio  $10^3$  m contro 50 GeV con raggio  $3 \cdot 10^3$  m) è unicamente dovuta alla differenza di massa che rende così diversa l'importanza della radiazione di sincrotrone. È in progetto la costruzione al CERN, lungo l'anello di LEP, di un sincrotrone per protoni che dovrebbe raggiungere l'energia di 8000 GeV; la perdita  $\Delta U$  sarebbe soltanto  $7.5 \cdot 10^3$  eV/giro.

### 13.8 Radiazione emessa dagli atomi. Diffusione della luce

Oltre che dalle sorgenti per così dire macroscopiche, come le antenne o altri circuiti oscillanti, e dalle sorgenti costituite da singole cariche accelerate, le onde elettromagnetiche hanno origine da fenomeni a livello atomico e nucleare.

Gli elettroni legati di singoli atomi liberi o di atomi aggregati in molecole possono esse-

re eccitati, cioè ricevere energia: i meccanismi di eccitazione sono svariati, andando dagli urti dovuti al moto di agitazione termica agli urti con particelle cariche che attraversano il mezzo o con altri elettroni (come avviene in una scarica elettrica in un gas) e all'assorbimento di radiazione elettromagnetica. Successivamente l'elettrone eccitato si dissecchia emettendo energia sotto forma di radiazione elettromagnetica con frequenza

$$\nu = \frac{\Delta U}{h} , \quad (13.49)$$

dove  $\Delta U$  è la differenza di energia tra i livelli energetici iniziale e finale dell'elettrone che si dissecchia e  $h$  la costante di Planck. I valori di  $\Delta U$  sono caratteristici dei sistemi atomici e dei meccanismi di eccitazione e si possono avere emissioni con frequenze discrete e ben distinte oppure con frequenze molto ravvicinate.

Il modello atomico di Bohr è stato il primo che ha spiegato in modo preciso gli spettri di frequenze emessi dagli atomi e misurati sperimentalmente. In esso venne introdotta la struttura energetica discontinua, caratterizzata dai livelli energetici  $U_n$  (vedi paragrafo 2.3), e ipotizzato l'assorbimento o l'emissione di radiazioni in accordo con (13.49) ogni qual volta un elettrone veniva eccitato o si dissecchia. Come sappiamo il modello di Bohr è stato poi superato dalla meccanica quantistica, che fornisce l'unica spiegazione soddisfacente di tutti i fenomeni osservati nell'emissione di onde elettromagnetiche da sorgenti atomiche e molecolari. Torneremo sull'argomento nel capitolo 18.

Altre sorgenti elementari di radiazione elettromagnetica sono fenomeni nucleari e interazioni tra particelle subatomiche; anche in questi casi non esiste una interpretazione classica.

La luce visibile, cui è sensibile la retina dell'occhio, è una particolare radiazione elettromagnetica emessa da atomi nel seguente campo di frequenze e di lunghezze d'onda (nel vuoto):

$$3.85 \cdot 10^{14} \leq \nu \leq 7.89 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

$$0.78 \cdot 10^{-6} \geq \lambda \geq 0.38 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

$$2.42 \cdot 10^{15} \leq \omega \leq 4.96 \cdot 10^{15} \text{ rad/s} .$$

L'estremo superiore delle lunghezze d'onda (inferiore delle frequenze) corrisponde alla luce rossa, l'estremo inferiore delle lunghezze d'onda (superiore delle frequenze) alla luce violetta.

Malgrado l'impossibilità di fornire una spiegazione completa della radiazione di origine atomica, accenniamo lo stesso al *modello classico dell'atomo* come sorgente di radiazione perché certi risultati siano utilizzabili per la comprensione almeno parziale di alcuni fenomeni.

Riprendiamo pertanto il modello sviluppato nel paragrafo 5.10 per spiegare la polarizzabilità elettronica. Con riferimento all'atomo di idrogeno, il protone, di carica  $e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ , si trova al centro di una nube elettronica sferica di raggio  $R = 10^{-10} \text{ m}$  in cui è distribuita uniformemente la carica  $-e = -1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ . In seguito ad assorbimento di energia dall'esterno i centri delle due cariche, prima coincidenti, si spostano l'uno rispetto all'altro di  $z$ . Il campo elettrico della carica negativa e la forza sul protone, entrambi concordi all'asse  $z$ , sono

$$E = \frac{\rho z}{3\epsilon_0} = \frac{e}{4\pi R^3} \frac{z}{3\epsilon_0} = \frac{ez}{4\pi \epsilon_0 R^3} , \quad F = \frac{e^2 z}{4\pi \epsilon_0 R^3} ,$$

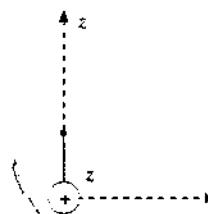


Figura 13.28

dove per il campo abbiamo usato il risultato (3.12). La forza di richiamo del protone sulla carica negativa è  $-F$  e pertanto l'equazione del moto della nube elettronica è

$$m_e \frac{d^2 z}{dt^2} = -\frac{e^2 z}{4\pi \epsilon_0 R^3} \Rightarrow \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 m_e R^3} z = 0 .$$

Si tratta di un'oscillazione armonica di ampiezza  $z_0$  e pulsazione e frequenza date da

$$\omega = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 m_e R^3}} , \quad \nu = \frac{\omega}{2\pi} = \sqrt{\frac{e^2}{16\pi^3 \epsilon_0 m_e R^3}} . \quad (13.50)$$

Sostituendo i valori delle diverse costanti si trova

$$\omega = 1.59 \cdot 10^{16} \text{ rad/s}, \nu = 2.53 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$$

Questa frequenza in effetti non è molto diversa da qualcuna delle frequenze emesse dall'idrogeno gassoso per cui come valore medio il modello non è lontano dalla realtà (che però si spiega in modo ben diverso).

La situazione descritta è assimilabile a quella di un dipolo elettrico oscillante con frequenza  $\nu$  e momento di dipolo elettrico massimo  $p_0 = e z_0$ . La potenza irradiata, secondo (13.46) è

$$P = \frac{e^2 z_0^2 \omega^4}{12\pi \epsilon_0 c^3} = \frac{e^2 \omega^2}{6\pi \epsilon_0 m_e c^3} U$$

dove l'ultima eguaglianza tiene conto del fatto che l'energia totale del nostro oscillatore armonico è  $U = 1/2 m_e \omega^2 z_0^2$ . Ma l'emissione di energia elettromagnetica deve comportare una diminuzione di  $U$ , cioè deve valere la relazione  $P = -dU/dt$ . Ricaviamo pertanto

$$\begin{aligned} \frac{dU}{U} &= -\frac{e^2 \omega^2}{6\pi \epsilon_0 m_e c^3} dt, \quad U = U_0 e^{-\tau/\tau}, \\ \tau &= \frac{6\pi \epsilon_0 m_e c^3}{e^2 \omega^2} = \frac{3\epsilon_0 m_e c^3}{2\pi e^2 \nu^2} = \frac{4.04 \cdot 10^{21}}{\nu^2}. \end{aligned}$$

Il fenomeno è dunque schematizzato nel modo seguente: a seguito dell'eccitazione, avvenuta nell'istante  $t = 0$ , l'oscillatore acquista l'energia  $U_0$  e successivamente, per effetto dell'irraggiamento, l'energia diminuisce con andamento esponenziale avente costante di tempo  $\tau$ . Inserendo il valore  $\nu = 2.53 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$  trovato prima, si ha  $\tau = 0.63 \cdot 10^{-9} \text{ s}$ .

Anche la potenza emessa diminuisce esponenzialmente e ciò comporta una diminuzione dell'ampiezza del campo elettrico della radiazione. Possiamo allora dire che l'*atomo emette un pacchetto d'onde* con frequenza centrale  $\nu$  e durata dell'ordine di  $5\tau$ : lo spettro di frequenze ha un'ampiezza  $\Delta\nu = 1/5\tau = 3.2 \cdot 10^8 \text{ Hz}$  e la larghezza relativa è  $\Delta\nu/\nu = 1.3 \cdot 10^{-7}$  (vedi paragrafo 12.10). Tutti questi risultati numerici sono abbastanza prossimi a quelli misurati sperimentalmente.

Il meccanismo di emissione da dipolo oscillante spiega in maniera semplice perché una piccola sorgente emetta un fronte d'onda sferico con intensità uniforme sul fronte. Una sorgente costituita da un gas, per quanto di piccole dimensioni, contiene sempre un numero di atomi molto grande: ricordiamo che a pressione atmosferica ci sono in  $1 \text{ mm}^3$  dell'ordine di  $10^{16}$  atomi. Nell'emissione i momenti di dipolo dei singoli atomi hanno direzioni completamente casuali e le distribuzioni non simmetriche dell'intensità si compensano: il fronte d'onda, risultante dei fronti d'onda dei singoli dipoli, sarà quindi una superficie sferica con centro nella sorgente e intensità uniforme. È anche chiaro che un'onda di questo tipo non è in generale polarizzata.

### Diffusione della luce

Secondo il modello classico dell'atomo come oscillatore quando un campo elettrico  $E$  variabile sinusoidalmente nel tempo, qual è quello associato ad un'onda elettromagnetica armonica, agisce sull'atomo questo assume il momento di dipolo elettrico dato dalla (5.53),

$$p_o = \epsilon_0 \alpha_e E_0 \sin \omega t = p_0 \sin \omega t.$$

Il dipolo elettrico formatosi parallelamente al campo incidente  $E$  irradia onde elettromagnetiche con la stessa pulsazione di  $E$  e con intensità data da (13.44): la potenza è espressa da (13.46) e sostituendo in questa  $p_0 = \epsilon_0 \alpha_e E_0$ ,  $\omega = 2\pi c/\lambda$ , otteniamo

$$P = \frac{4\pi^3 \epsilon_0 \alpha_e^2 c E_0^2}{3\lambda^4}. \quad (13.51)$$

Se l'onda elettromagnetica che colpisce l'atomo non è polarizzata la direzione di  $p_a$  varia casualmente nel tempo per cui alla dipendenza da  $\sin^2 \theta$ , presentata dalla (13.44), si sostituisce una distribuzione sferica. Ad esempio, se un'onda piana non polarizzata incide su un piccolo volume di gas, composto da  $N$  atomi, da esso viene emessa un'onda elettromagnetica, detta *onda diffusa*, che è un'onda sferica con la stessa lunghezza d'onda dell'onda incidente, intensità uniformemente distribuita e potenza data dalla (13.51) moltiplicata per  $N$ . L'argomento sulla formazione dell'onda sferica è lo stesso presentato prima: solo che là ci si riferiva a un meccanismo di eccitazione casuale qualsiasi, anche impulsivo, mentre ora la causa dell'eccitazione è un'onda piana armonica non polarizzata.

Nella (13.51) la polarizzabilità elettronica  $\alpha_e$  non è costante, ma funzione di  $\omega$ , come vedremo nel paragrafo 13.9. Tuttavia, se ci riferiamo all'intervallo abbastanza ristretto di frequenze della luce visibile, possiamo ritenere  $\alpha_e$  costante. In questo caso la potenza diffusa dipende semplicemente da  $\lambda^{-4}$ . Se la radiazione incidente contiene tutte le lunghezze d'onda comprese tra il rosso e il violetto, come avviene per la luce bianca solare, la (13.51) mette in evidenza che la luce viola-azzurra viene diffusa maggiormente rispetto alla luce rossa:

$$\frac{P_V}{P_R} = \left( \frac{\lambda_R}{\lambda_V} \right)^4 = \left( \frac{0.70}{0.44} \right)^4 = 6.4$$

La predominanza delle lunghezze d'onda nell'intervallo viola-azzurro nella luce diffusa dalle molecole dell'aria e di altre particelle sospese nell'atmosfera determina il *colore azzurro del cielo sereno*. Se nell'aria sono presenti goccioline d'acqua avvengono fenomeni d'interferenza della luce diffusa dalle goccioline e si riduce questa prerogativa; un cielo nuvoloso appare bianco-grigio.

Supponiamo ora di osservare la luce diffusa a vari angoli rispetto alla direzione di un'onda piana incidente sul gas, non polarizzata. La luce diffusa lungo la stessa direzione certamente non è polarizzata; se invece si osserva la luce diffusa a  $90^\circ$  questa è polarizzata rettilineamente. Infatti i dipoli, pur avendo orientazione casuale, sono ad ogni modo contenuti in un piano ortogonale alla direzione di propagazione dell'onda incidente, cioè in un fronte d'onda di questa; il campo elettrico dell'onda diffusa è in ogni istante contenuto in questo piano e quindi l'onda emessa a  $90^\circ$  è polarizzata rettilineamente.

Il fenomeno potrebbe essere visto osservando la luce solare diffusa in direzione perpendicolare ai raggi con uno strumento in grado di rivelare uno stato di polarizzazione; non si può avere nessun risultato con l'osservazione diretta in quanto l'occhio umano non è sensibile allo stato di polarizzazione della luce.

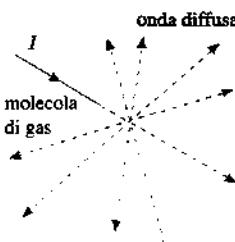


Figura 13.29

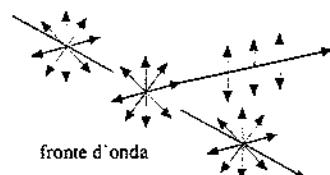


Figura 13.30

### Nota. Diffusione Thomson

Un'interessante estensione della formula di Larmor (13.47) si ha quando si considera un'onda elettromagnetica piana armonica che investe un elettrone libero, provocandone l'oscillazione con pulsazione  $\omega$ . I valori dell'accelerazione e della media del quadrato dell'accelerazione sono

$$a = \frac{e E}{m_e}, \quad a_{\text{med}}^2 = \frac{e^2}{m_e^2} (E^2)_m = \frac{e^2 E_0^2}{2 m_e^2}.$$

La potenza emessa vale quindi

$$P_{\text{Larm}} = \frac{e^2 a_m^2}{6 \pi \epsilon_0 c^3} = \frac{e^4 E_0^2}{12 \pi \epsilon_0 m_e^2 c^3}.$$

L'intensità dell'onda incidente, secondo (13.24), è  $I_0^i = 1/2 \epsilon_0 c E_0^2$ ; se definiamo

$$r_e = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{e^2}{m_e c^2} = 2.818 \cdot 10^{-15} \text{ m},$$

troviamo che  $P_{\text{Larm}}$  si scrive anche

$$P_T = \frac{8}{3} \pi r_e^2 I_0^i = \sigma_T I_0^i .$$

Questa è la potenza diffusa dall'elettrone e quindi sottratta all'onda incidente; il fenomeno si chiama *diffusione Thomson*.

$P_T$  è proporzionale all'intensità incidente secondo il coefficiente

$$\sigma_T = \frac{8}{3} \pi r_e^2 = 0.665 \cdot 10^{-28} \text{ m}^2 ,$$

detto *sezione d'urto Thomson*. Il nome deriva dal fatto che  $\sigma_T$ , grandezza misurata in  $\text{m}^2$ , può essere pensata come un'area avente la proprietà di assorbire dall'onda incidente la potenza  $P_T$  e di diffonderla. Dato che la dimensione lineare di tale area è all'incirca definita da  $r_e$ , dipendente soltanto da caratteristiche dell'elettrone, a quest'ultima grandezza è stato dato il nome di *raggio classico dell'elettrone*. Il significato è soltanto quello di misura dell'area diffondente creata dall'oscillazione dell'elettrone e non è in alcun modo legato alle dimensioni reali dell'elettrone che in tutti i fenomeni finora studiati appare essere *puntiforme*.

La misura dell'assorbimento subito da un'onda elettromagnetica che attraversa un *plasma* (gas rarefatto ionizzato) è un utile strumento diagnostico: essa permette di calcolare la densità degli elettroni liberi nel plasma, parametro importante per caratterizzare lo stato del plasma.

Il fenomeno descritto avviene fino a frequenze non molto maggiori di quelle della luce; per frequenze molto superiori (oltre  $10^{17} \div 10^{18}$  Hz) le modalità di diffusione sono totalmente differenti. Esse vennero spiegate da Compton come vedremo nel capitolo 18.

### 13.9 Propagazione di un'onda elettromagnetica in un mezzo dielettrico. Dispersione

Nel paragrafo 13.8 abbiamo visto alcune applicazioni della radiazione di dipolo a livello atomico. Nell'atomo eccitato impulsivamente l'oscillazione risulta smorzata dall'irraggiamento, mentre se l'eccitazione è continua, in quanto dovuta ad un'onda armonica incidente, si ha un'oscillazione forzata; in particolare questo caso è stato trattato anche per un elettrone libero.

Vogliamo adesso considerare formalmente il caso generale, in cui l'oscillatore atomico ha una pulsazione propria  $\omega_0$ , data da (13.50), ed è sottoposto ad una forza di attrito viscoso  $-m_e \gamma dz/dt$ , che riassume l'effetto dell'irraggiamento e di una eventuale interazione con gli atomi circostanti. Inoltre al sistema, che sarebbe un oscillatore libero smorzato, è applicato un campo elettrico parallelo all'asse  $z$  e variabile sinusoidalmente, come quello di un'onda elettromagnetica piana armonica, polarizzata rettilineamente lungo  $z$ . L'elettrone oscillante è soggetto all'accelerazione  $-eE/m_e$  e l'equazione del moto è quella dell'oscillatore forzato

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \gamma \frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z = -\frac{e}{m_e} E .$$

Utilizziamo per il campo elettrico sinusoidale la notazione complessa già introdotta nel capitolo 11 e riscriviamo l'equazione dell'oscillatore come

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \gamma \frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z = -\frac{e E_0}{m_e} e^{-i\omega t} .$$

La soluzione di questa equazione, oscillante con la stessa pulsazione del campo elettrico, è

$$z(t) = -\frac{e E_0}{m_e (\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega)} e^{-i\omega t} . \quad (13.52)$$

come si verifica facilmente per sostituzione. L'ampiezza complessa di  $z(t)$  contiene l'informazione sull'ampiezza reale e sullo sfasamento.

Il momento di dipolo elettrico indotto  $p_e = -ez$  è eguale per (5.53) a  $\epsilon_0 \alpha E$  e quindi la polarizzabilità elettronica vale

$$\alpha(\omega) = \frac{e^2}{\epsilon_0 m_e (\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega)} ;$$

essa risulta funzione della pulsazione del campo elettrico, come si era anticipato nel paragrafo 13.8.

In un materiale dielettrico gassoso, contenente  $N$  atomi per unità di volume, la relazione (5.55) tra la polarizzazione  $P$  e il campo elettrico  $E$  è data da

$$P(\omega) = \epsilon_0 N \alpha(\omega) E = \frac{Ne^2}{m_e} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} E_0 e^{-i\omega t}$$

La presenza del coefficiente immaginario implica che tra  $P$  ed  $E$  ci sia una differenza di fase  $\delta$ :

$$P(\omega) = \frac{Ne^2}{m_e} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}} E_0 e^{-i(\omega t - \delta)} = P_0(\omega) e^{-i(\omega t - \delta)}$$

con  $\operatorname{tg}\delta = \gamma\omega / (\omega_0^2 - \omega^2)$ . La polarizzazione segue le variazioni di  $E$  con un ritardo di fase, che è trascurabile se  $\omega \ll \omega_0$  ed è massimo ( $\delta = \pi/2$ ) se  $\omega_0 = \omega$ .

Le equazioni di Maxwell nel dielettrico gassoso, con il comportamento appena descritto per  $P(\omega)$  e in assenza di sorgenti ( $\rho = 0, j = 0$ ), prevedono l'esistenza di onde elettromagnetiche piane del tipo

$$E_z = E_0 e^{i(kz - \omega t)} .$$

Poiché la velocità di fase (12.59) è data da  $v(\omega) = \omega/k$ , l'indice di rifrazione risulta  $n(\omega) = c/v(\omega) = kc/\omega$  e l'onda piana si può scrivere

$$E_z = E_0 e^{i(\omega t - kz)} . \quad (13.53)$$

La sostituzione di (13.53) nelle equazioni di Maxwell con  $P_z = \epsilon_0 N \alpha(\omega) E_z$  porta all'equazione

$$n^2(\omega) = 1 + N\alpha(\omega)$$

e, dal confronto con (5.56), si stabilisce la seguente relazione fondamentale

$$n(\omega) = \sqrt{1 + \chi_e(\omega)} = \sqrt{\kappa_e(\omega)} , \quad (13.54)$$

che ha validità generale.

L'assunzione fatta nel paragrafo 13.1, di trattare il dielettrico come il vuoto con  $\epsilon, \mu$  al posto di  $\epsilon_0, \mu_0$ , e che aveva portato alla (13.10) formalmente eguale alla (13.54), è valida nell'ipotesi  $\omega \ll \omega_0, \delta = 0$ , quando  $P$  e anche  $D$  oscillano in fase con  $E$ .

La (13.54) è verificata sperimentalmente fino alle massime frequenze (microonde) alle quali  $n(\omega)$  e  $\kappa_e(\omega)$  sono misurabili indipendentemente. Alle frequenze della luce non sono possibili misure di  $\kappa_e(\omega)$ , ma la (13.54) rimane pur sempre valida.

Formalmente, vista l'espressione di  $\alpha(\omega)$ , l'indice di rifrazione e la costante dielettrica relativa sono numeri complessi:

$$n^2 = 1 + \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m_e} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} . \quad (13.55)$$

D'altra parte in un mezzo gassoso l'indice di rifrazione è poco diverso dall'unità, cioè il termine correttivo è poco diverso da zero, e vale l'approssimazione

$$n = \sqrt{1 + N\alpha} = 1 + \frac{N\alpha}{2} = 1 + \frac{Ne^2}{2\varepsilon_0 m_e} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \quad . \quad (13.56)$$

Prima di esaminare a fondo il significato di (13.56) calcoliamo il limite per  $\omega$  tendente a zero (*caso statico*); ricordando (13.50) si trova

$$\alpha(0) = \frac{e^2}{\varepsilon_0 m_e \omega_0^2} = 4\pi R^3 \quad , \quad \sqrt{\kappa_r(0)} = 1 + \frac{Ne^2}{2\varepsilon_0 m_e \omega_0^2} = 1 + 2\pi R^3 N$$

Vediamo che  $\alpha$  ha il valore (5.54) già trovato nel paragrafo 5.10 e che  $\kappa_r(0)$  coincide con la costante dielettrica calcolata nello stesso paragrafo.

Per  $\omega$  qualsiasi riscriviamo (13.56) nella forma generale

$$n = n_r + i n_i \quad , \quad (13.57)$$

dove la parte reale e la parte immaginaria sono date da

$$n_r = 1 + \frac{Ne^2}{2\varepsilon_0 m_e} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \quad , \quad n_i = \frac{Ne^2}{2\varepsilon_0 m_e} \frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \quad . \quad (13.58)$$

Sostituiamo ora (13.57) nella (13.53):

$$E_z = E_0 e^{i\omega(n_r + i n_i)x/c - it} = E_0 e^{-\omega n_i x/c} e^{i(\omega n_r x/c - \omega t)}$$

L'equazione di un'onda piana che si propaga nel dielettrico gassoso è dunque caratterizzata dal termine

$$e^{i(\omega n_r x/c - \omega t)} = e^{i(k_r x - \omega t)} \quad ,$$

che rappresenta la propagazione con velocità di fase  $v = \omega / k_r = c / n_r$ , e dal termine

$$E_0 e^{-\omega n_i x/c} = E_0 e^{-\beta x/2}$$

che rappresenta l'ampiezza dell'onda: si vede che questa *diminuisce esponenzialmente con la distanza*, indicando un *assorbimento di energia* da parte del dielettrico. Anche l'intensità, proporzionale al quadrato dell'ampiezza, diminuisce progressivamente con legge esponenziale:

$$I = I_0 e^{-\beta x} = I_0 e^{-x/l_{abs}}$$

Il coefficiente

Coefficiente d'assorbimento

$$\beta = \frac{2\omega n_i}{c} = \frac{Ne^2}{2\varepsilon_0 m_e c} \frac{\gamma\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \quad (13.59)$$

si chiama *coefficiente di assorbimento*. Il suo inverso  $l_{abs} = 1 / \beta$  è la *lunghezza di assorbimento* e ha il solito significato: dopo una distanza  $l_{abs}$  nel dielettrico l'intensità si è ridotta al valore  $I_0 / e = 0.37 I_0$  e in corrispondenza l'ampiezza è ridotta a  $E_0 / \sqrt{e} \approx 0.61 E_0$ . Da (13.59) e (13.58) si vede poi che

$$\beta = (n_r - 1) \frac{\gamma\omega^2}{c (\omega_0^2 - \omega^2)} \quad .$$

In conclusione, la propagazione dell'onda nel mezzo è descritta completamente dalla parte reale  $n_r$  dell'indice di rifrazione complesso, che d'ora in poi chiameremo semplicemente  $n$ , mentre la parte immaginaria  $n_i$  determina il coefficiente di assorbimento tramite (13.59).

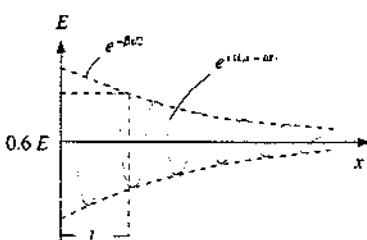


Figura 13.31

Questo è il significato fisico del procedimento seguito. La notazione complessa, che non è strettamente necessaria, è utile sia per la facilità di trattazione delle grandezze sinusoidali che per il fatto di compendiare in un'unica grandezza tutte le caratteristiche del fenomeno. L'ipotesi che nella (13.53)  $k$  e quindi  $n$  possano essere complessi permette di rendere conto con semplicità dell'attenuazione dell'onda e di mostrare che il coefficiente di assorbimento dipende dalle stesse grandezze da cui dipende l'indice di rifrazione.

L'energia che il dielettrico sottrae all'onda viene impiegata per mantenere in oscillazione l'elettrone, la cui accelerazione è, da (13.52),

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\omega^2 e E_0}{m_e (\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega)} e^{-i\omega t}$$

Se si prende il quadrato del modulo e si media nel tempo il quadrato della parte oscillante si trova

$$a_m^2 = \frac{e^2 E_0^2}{2m_e^2} \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2};$$

si sostituisce questa espressione nella (13.47) e si ha la potenza diffusa dall'oscillatore:

$$P = \frac{e^4 E_0^2}{12\pi \epsilon_0 m_e^2 c^3} \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} = \sigma_T \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} I_0^i \quad , \quad (13.60)$$

essendosi usata la sezione d'urto Thomson  $\sigma_T$ , ricavata nella nota alla fine del paragrafo 13.8, e l'intensità dell'onda piana incidente  $I_0^i$ .

Osserviamo che se  $\gamma = \omega_0 = 0$ , cioè se l'elettrone è libero, si ha  $P = \sigma_T I_0^i$ , che è la formula di Thomson; se invece  $\omega^2 \ll \omega_0^2$  e  $\gamma^2 \ll \omega_0^2$ , come avviene nelle molecole di un gas alle frequenze luminose, si trova  $P = \sigma_T I_0^i \omega^4 / \omega_0^4$ , che fatte le opportune sostituzioni risulta eguale alla (13.51).

L'espressione (13.58) trovata per  $n$  indica una dipendenza dalla pulsazione  $\omega$  dell'onda incidente. Se  $n$  varia con  $\omega$  anche la velocità di propagazione dell'onda  $v(\omega) = c/n(\omega)$  risulta funzione di  $\omega$  e il mezzo è dunque *dispersivo* (vedi paragrafo 12.11). In figura 13.32 sono riportate la curva di dispersione, che rappresenta  $n$  in funzione di  $\omega$ , e la curva che dà il coefficiente di assorbimento sempre in funzione di  $\omega$ ; tali curve sono state calcolate tramite le formule previste dal modello classico fin qui sviluppato, e cioè la prima delle (13.58) e la (13.59), avendo posto  $\gamma = 0.5 \omega_0$ . Nella curva di dispersione, eccetto che per l'intervallo  $\Delta\omega$  (definito tra breve) nell'intorno di  $\omega_0$ , il termine  $(\omega_0^2 - \omega^2)^2$  predomina rispetto a  $\gamma^2 \omega^2$  e la curva si confonde con quella prevista per  $\gamma = 0$ , segnata in nero nella figura. La curva del coefficiente di assorbimento mostra un massimo per  $\omega = \omega_0$ , con valore  $\beta_{\max} = Ne^2/\epsilon_0 m_e c \gamma$ . Si tratta di un tipico *andamento risonante*; al diminuire di  $\gamma$  la curva diventa più stretta ( $\Delta\omega$  diminuisce) e l'assorbimento aumenta; al limite, per  $\gamma = 0$ , ci sarebbe un assorbimento infinito.

L'intervallo  $\Delta\omega$  è definito come  $\omega_2 - \omega_1$  ( $\omega_2 > \omega_0 > \omega_1$ ) con  $\omega_1$  e  $\omega_2$  tali che  $\beta(\omega_1) = \beta(\omega_2) = \beta_{\max}/2$ . Si trova

$$\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{\gamma^2}{4}} + \frac{\gamma}{2} \quad , \quad \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{\gamma^2}{4}} - \frac{\gamma}{2} \quad , \quad \Delta\omega = \gamma$$

È la stessa definizione data nel paragrafo 9.8 del primo volume, con riferimento alla potenza meccanica, e nel paragrafo 11.2 di questo volume, con riferimento alla potenza elettrica, che hanno eguale andamento in  $\omega$  della funzione  $\beta$  ora definita. La larghezza relativa della risonanza  $\Delta\omega/\omega_0$  risulta eguale a  $\gamma/\omega_0$ .

Possiamo riassumere i risultati del modello classico, che considera l'atomo come oscillatore caratterizzato da una pulsazione propria  $\omega_0$  e da un coefficiente  $\gamma$ , dicendo che al di fuori di un certo intervallo  $\Delta\omega$  intorno a  $\omega_0$  l'indice di rifrazione  $n$  è una funzione crescente di  $\omega$  (maggiore di 1 per  $\omega < \omega_0$ , minore di 1 per  $\omega > \omega_0$ ) e l'assorbimento è trascurabile. In queste regioni di  $\omega$  la dispersione è detta *normale* e il mezzo è praticamente trasparente all'onda elettromagnetica che in esso si propaga. Nell'intervallo  $\Delta\omega$ , che in genere è molto

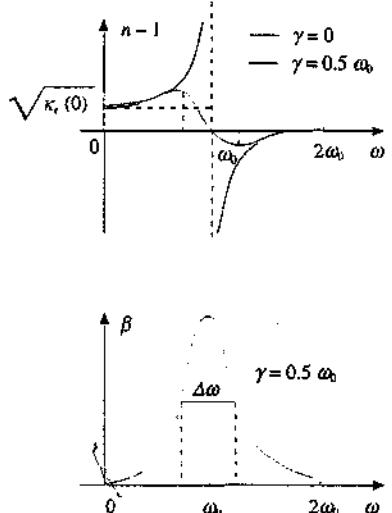


Figura 13.32

piccolo rispetto al valore di  $\omega_0$ , c'è assorbimento tanto maggiore quanto minore è il rapporto  $\gamma/\omega_0$ . In questo intervallo di *dispersione anomala* l'indice di rifrazione diminuisce all'aumentare di  $\omega$  e l'onda viene attenuata, anche notevolmente.

La teoria corretta per la descrizione dei fenomeni atomici, e quindi anche dell'indice di rifrazione, è la meccanica quantistica. Accenniamo brevemente ai risultati. Un atomo ha più pulsazioni proprie caratteristiche  $\omega_k$ ; ogni  $\omega_k$  è accompagnata da una costante  $\gamma_k$  e da un coefficiente  $f_k$ , minore di 1, detto impropriamente forza dell'oscillazione k-esima. Inoltre, se un atomo si trova all'interno di una molecola può descrivere oscillazioni e la molecola stessa può compiere rotazioni (ad esempio se è dotata di un momento di doppio intrinseco); tutti questi moti hanno le loro pulsazioni caratteristiche. Infine altri parametri importanti sono la massa  $m_k$  e la carica  $q_k$  effettive del sistema che oscilla. Si trova in definitiva per la polarizzabilità, l'indice di rifrazione e il coefficiente di assorbimento:

$$\begin{aligned}\alpha(\omega) &= \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_k \frac{f_k q_k^2}{m_k (\omega_k^2 - \omega^2 - i \gamma_k \omega)} \\ n(\omega) &= 1 + \frac{N}{2\varepsilon_0} \sum_k \frac{f_k q_k^2 (\omega_k^2 - \omega^2)}{m_k [(\omega_k^2 - \omega^2)^2 + \gamma_k^2 \omega^2]} \\ \beta(\omega) &= \frac{N}{\varepsilon_0 c} \sum_k \frac{f_k q_k^2 \gamma_k \omega^2}{m_k [(\omega_k^2 - \omega^2)^2 + \gamma_k^2 \omega^2]}\end{aligned}\quad (13.61)$$

$N$  è il numero di elettroni per unità di volume. Le  $f_k$ , che soddisfano alla condizione  $\sum_k f_k = 1$ , rappresentano dunque i pesi delle singole componenti oscillatorie, ovvero l'intensità relativa dell'accoppiamento tra il campo elettrico incidente e la pulsazione k-esima.

In figura 13.33 è data una rappresentazione della *curva di dispersione*  $n(\omega)$ : essa è puramente qualitativa, sia per quanto riguarda i valori delle ordinate che quelli delle ascisse: basti pensare che la scala delle  $\omega$  mostra va da  $\omega = 0$  a  $\omega \approx 10^{18}$  rad/s. In corrispondenza di ciascuna pulsazione propria  $\omega_k$  si hanno le caratteristiche già viste per  $\omega_0$  e cioè due tratti della curva  $n(\omega)$  a dispersione normale e un tratto a dispersione anomala; in corrispondenza di quest'ultimo l'assorbimento ha un massimo. Nelle regioni in cui la sostanza è trasparente  $n(\omega)$  è crescente. Per pulsazioni molto grandi, in alcuni tratti a dispersione anomala e per  $\omega > \omega_0$  anche in tratti a dispersione normale l'indice di rifrazione risulta minore di 1, cosicché la velocità  $v = c/n$  è maggiore di  $c$ , in apparente contrasto con la teoria della relatività ristretta. Torneremo su questo punto in seguito, quando discuteremo la velocità di gruppo.

Rispetto all'intervallo della luce visibile, che è indicato nella figura 13.33 in modo esageratamente largo tra  $\omega_1$  e  $\omega_3$ , le pulsazioni proprie  $\omega_1$  e  $\omega_3$  corrispondono a moti rotazionali e vibrazionali; queste pulsazioni hanno valori relativamente modesti perché al moto partecipano la molecola o l'atomo, che hanno massa molto maggiore dell'elettrone e sappiamo che in un oscillatore  $\omega_0$  è inversamente proporzionale alla massa. La pulsazione propria  $\omega_0$  si trova nella regione dell'ultravioletto ed è legata all'eccitazione degli elettroni più esterni dell'atomo; le successive pulsazioni  $\omega_4, \dots, \omega_n$  corrispondono all'eccitazione di elettroni più interni. Oltre  $\omega_n$  non c'è più assorbimento e il mezzo è trasparente. Intervengono però altri fenomeni quantistici che comportano sempre un'interazione tra radiazione e materia.

Se il mezzo in cui si propaga l'onda elettromagnetica è *denso*, tra la polarizzazione  $P$  e il campo elettrico  $E$  sussiste la (5.67)

$$P = \varepsilon_0 N \alpha E / \left(1 - \frac{N \alpha}{3}\right)$$

che si traduce nell'equazione di Clausius-Mossotti per la costante dielettrica relativa (paragrafo 5.11). Estendendo la trattazione a pulsazioni non nulle e ponendo  $n^2 = \kappa_r$ , si trova che l'indice di rifrazione complesso obbedisce a

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{N \alpha}{3} = \frac{N}{3\varepsilon_0} \sum_k \frac{f_k q_k^2}{m_k (\omega_k^2 - \omega^2 - i \gamma_k \omega)} .$$

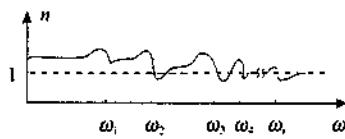


Figura 13.33

### Dispersione della luce

Consideriamo adesso in particolare il comportamento di un dielettrico gassoso nell'intervallo di pulsazioni che caratterizzano la luce visibile:

$$2.42 \cdot 10^{15} \leq \omega \leq 4.96 \cdot 10^{15} \text{ rad/s}$$

La dispersione del mezzo è normale, si è in un tratto della curva di dispersione in cui  $\omega_0^2 - \omega^2 \gg \gamma$ ,  $\omega$  è l'indice di rifrazione (13.61) è dato da

$$n(\omega) = 1 + \frac{Ne^2}{2\epsilon_0 m_e} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} = 1 + \frac{Ne^2}{2\epsilon_0 m_e \omega_0^2} \frac{1}{1 - (\omega/\omega_0)^2}$$

In sostanza si ha contributo soltanto dal termine della sommatoria legato alla pulsazione propria più vicina, che è  $\omega_0$ ; si ritrova la (13.58) con  $\omega_0 = \omega_3$ . Dato che  $\omega_3$  è dell'ordine di  $10^{16}$  rad/s,  $(\omega/\omega_3)^2$  è molto minore di 1 e si può scrivere

$$\frac{1}{1 - (\omega/\omega_3)^2} \approx 1 + (\omega/\omega_3)^2$$

Con questa approssimazione l'indice di rifrazione diventa

$$n(\omega) = 1 + \frac{Ne^2}{2\epsilon_0 m_e \omega_3^2} + \frac{Ne^2}{2\epsilon_0 m_e \omega_3^2} \omega^2$$

Esprimiamo  $\omega$  in funzione della lunghezza d'onda nel vuoto,  $\omega = 2\pi c/\lambda$ , e otteniamo la cosiddetta *formula di Cauchy*:

$$n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2}$$

(13.62) Formula di Cauchy

$$A = 1 + \frac{Ne^2}{2\epsilon_0 m_e \omega_3^2}, \quad B = \frac{2\pi^2 c^2 Ne^2}{2\epsilon_0 m_e \omega_3^2}$$

La (13.62) è verificata sperimentalmente per tutte le sostanze trasparenti alla luce, anche dense come i vetri. In figura 13.34 è rappresentata  $n(\lambda)$  per il quarzo (fuso e solidificato); dal grafico si possono ricavare i valori delle costanti,  $A = 1.446$ ,  $B = 3.5 \cdot 10^{-3} \mu\text{m}^2$ .

Per quanto riguarda l'assorbimento della luce nei mezzi trasparenti abbiamo che un valore tipico per l'aria è  $\beta \approx 10^{-4} \text{ m}^{-1}$  da cui  $l_{\text{ass}} = 10^4 \text{ m} = 10 \text{ km}$ : su questa distanza viene assorbito il 63% dell'energia. Nei vetri ottici ordinari  $l_{\text{ass}}$  è dell'ordine delle decine di metri.

### Velocità di gruppo

Abbiamo definito nel paragrafo 12.11 la velocità di gruppo come la velocità con cui si propaga un pacchetto d'onde in un mezzo dispersivo: invece la velocità di fase è quella di una singola onda di pulsazione fissata. Le relative formule sono (12.61) e (13.10):

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = v + k \frac{dv}{dk}, \quad v_f = v = \frac{c}{n}$$

Sappiamo che

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dk} &= \frac{dv}{d\omega} \frac{d\omega}{dk} = v_g \frac{dv}{d\omega}, \quad \frac{dv}{d\omega} = c \frac{d(1/n)}{d\omega} = -\frac{c}{n^2} \frac{dn}{d\omega} \\ \Rightarrow v_g &= v + k v_g \frac{dv}{d\omega} = v - \frac{ck}{n^2} v_g \frac{dn}{d\omega} = v - \frac{\omega}{n} v_g \frac{dn}{d\omega} \end{aligned}$$

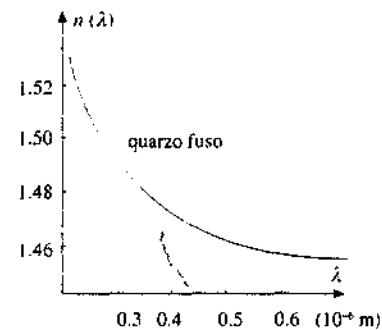


Figura 13.34

Nell'ultimo passaggio abbiamo tenuto conto che  $k$  deve essere calcolato nel mezzo di indice di rifrazione  $n$ . Detto  $k_0$  il valore nel vuoto è

$$\omega = k_0 c = k v = k \frac{c}{n} \Rightarrow k = n k_0 = n \frac{\omega}{c}$$

Risolvendo rispetto a  $v_g$  otteniamo infine

$$v_g = \frac{v}{1 + \frac{\omega}{n} \frac{dn}{d\omega}} = \frac{c}{n + \omega \frac{dn}{d\omega}} \quad (13.63)$$

La velocità di fase e di gruppo coincidono quando  $dn/d\omega = 0$ , cioè quando l'indice di rifrazione non dipende da  $\omega$  o quando passa per un massimo o minimo.

Da (13.63) si vede che:

$$\text{dispersione normale } \frac{dn}{d\omega} > 0, \quad v_g < v,$$

$$\text{dispersione anomala } \frac{dn}{d\omega} < 0, \quad v_g > v.$$

Nelle zone di dispersione normale dunque la velocità di gruppo è minore della velocità di fase ed è sempre minore di  $c$ , anche quando  $n < 1$  e  $v > c$ , come avviene a pulsazioni molto elevate: dimostreremo ciò tra poco. Però in presenza di dispersione anomala, cioè in vicinanza di una pulsazione caratteristica,  $n < 1$ ,  $v > c$  e quindi anche  $v_g$ , che è maggiore di  $v$ , risulta maggiore di  $c$ . Per quel che riguarda la velocità di fase non desta preoccupazione trovarla in qualche situazione maggiore di  $c$ , in quanto essa è la velocità di un'onda armonica indefinita, che non ha realtà fisica effettiva. Invece il fatto che possa essere  $v_g > c$  contrasta con l'idea che la velocità di gruppo sia la velocità con cui si propaga l'energia, ovvero la velocità con cui si propaga un segnale fisico, e di conseguenza non debba essere superiore a  $c$ .

Un'analisi accurata di cosa avviene in un pacchetto d'onde quando le pulsazioni sono vicine ad una  $\omega_k$  mostra che in queste condizioni il pacchetto d'onde è molto distorto e il concetto stesso di velocità di gruppo perde significato; si trova che per  $\omega \approx \omega_k$ , mentre sia  $v$  che  $v_g$  definite nella solita maniera sono superiori a  $c$ , la *velocità effettiva del segnale fisico costituito dal pacchetto è sempre minore di  $c$* . Quando invece  $\omega$  è molto diverso da  $\omega_k$  e l'indice di rifrazione è una funzione lentamente variabile e crescente di  $\omega$ , la stessa analisi restituisce a  $v_g$  il suo noto significato fisico e dimostra che è sempre  $v_g < c$ .

Esaminiamo, come anticipato, il caso  $\omega \gg \omega_k$ , dove  $\omega_k$  è l'ultima pulsazione caratteristica di un mezzo dielettrico. In questa zona la (13.61) dà, trascurando tutti i contributi dovuti a  $\omega_k$  lontane,

$$n(\omega) = 1 + \frac{Ne^2}{2\varepsilon_0 m_e} \frac{\omega_i^2 - \omega^2}{(\omega_i^2 - \omega^2)^2 + \gamma_i^2 \omega^2} = 1 + \frac{Ne^2}{2\varepsilon_0 m_e} \left( \frac{-\omega^2}{\omega^4} \right) = 1 - \frac{Ne^2}{2\varepsilon_0 m_e} \frac{1}{\omega^2}$$

L'indice di rifrazione è minore di 1 e pertanto la velocità di fase è maggiore di  $c$ :

$$v = \frac{c}{n} = \frac{c}{1 - \frac{Ne^2}{2\varepsilon_0 m_e \omega^2}} = c \left( 1 + \frac{Ne^2}{2\varepsilon_0 m_e \omega^2} \right),$$

dove abbiamo sfruttato la circostanza che  $Ne^2 / 2\varepsilon_0 m_e \omega^2 \ll 1$ . Dall'espressione calcolata per  $n(\omega)$  ricaviamo

$$\frac{dn}{d\omega} = \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m_e \omega^3} \Rightarrow n + \omega \frac{dn}{d\omega} = 1 + \frac{Ne^2}{2\varepsilon_0 m_e \omega^2}$$

e da (13.63)

$$v_g = \frac{c}{1 + \frac{Ne^2}{2\epsilon_0 m_e \omega^2}}$$

La velocità di gruppo alle altissime pulsazioni, dove la dispersione è normale e l'indice di rifrazione è minore di 1, è minore di  $c$ . Si trova pure che  $v_g v = c^2$ .

### 13.10 Onde elettromagnetiche nei conduttori

Il modello sviluppato nel paragrafo 13.9 per i dielettrici può essere modificato per i materiali conduttori, considerando le proprietà degli elettroni di conduzione discusse nel paragrafo 6.4 e ammettendo che soltanto questi siano importanti nell'interazione con l'onda elettromagnetica incidente.

In un conduttore gli elettroni di conduzione sono liberi, però nel loro moto interagiscono con il reticolo cristallino; pertanto possiamo porre  $\omega_0 = 0$ , ma  $\gamma$  è diversa da zero e l'equazione del moto dell'elettrone sottoposto al campo elettrico dell'onda incidente è

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \gamma \frac{dz}{dt} = -\frac{e}{m_e} E .$$

Procedendo come per i dielettrici si arriva a definire l'indice di rifrazione complesso, posto  $\omega_0 = 0$  nella (13.55):

$$n^2 = 1 + \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m_e} \frac{1}{-\omega^2 - i\gamma\omega} = 1 - \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m_e \omega} \frac{1}{\omega + i\gamma} \quad (13.64)$$

Riprendiamo ora alcune nozioni del paragrafo 6.4. Nella deriva sotto l'azione di un campo elettrico la velocità di deriva è legata al tempo medio  $\tau$  che intercorre tra due urti consecutivi dell'elettrone con il reticolo dalla (6.14):

$$v_d = -\frac{eE}{m_e} \tau .$$

D'altra parte l'equazione del moto, che è reso uniforme dall'attrito ( $d^2z/dt^2 = 0$ ), è

$$\gamma \frac{dz}{dt} = \gamma v_d = -\frac{e}{m_e} E .$$

Dal confronto tra le due relazioni si ricava

$$\gamma = \frac{1}{\tau} .$$

Inoltre abbiamo anche visto la relazione (6.16) tra  $\tau$  e la condutività  $\sigma$ :

$$\sigma = \frac{Ne^2}{m_e} \tau .$$

Utilizzando questi risultati la (13.64) assume la forma

$$n^2 = 1 - \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega} \frac{1}{\omega \tau + i} = 1 - \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega} \frac{\omega \tau - i}{1 + \omega^2 \tau^2} . \quad (13.65)$$

Per una discussione quantitativa facciamo riferimento al rame, con i dati numerici dell'esempio 6.4:

$$\sigma = 6 \cdot 10^7 \Omega^{-1} m^{-1} \Rightarrow \frac{\sigma}{\epsilon_0} = 6.78 \cdot 10^{18} s^{-1}, N = 8.5 \cdot 10^{28} \text{ elettroni/m}^3,$$

$$\tau = 2.51 \cdot 10^{-14} s \Rightarrow \gamma = 1/\tau = 4 \cdot 10^{13} s^{-1}.$$

Consideriamo innanzitutto due casi estremi, le basse frequenze e le alte frequenze.

1) Approssimazione delle basse frequenze  $\omega \tau \ll 1$

Supponiamo che la pulsazione dell'onda elettromagnetica incidente soddisfi alla condizione

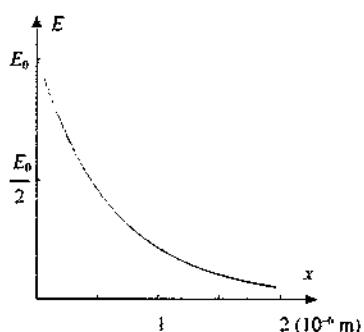
$$\omega \ll \frac{1}{\tau} = 4 \cdot 10^{13} s^{-1}.$$

Di conseguenza è anche vero che  $\omega \ll \sigma/\epsilon_0$ . Vediamo che si tratta di pulsazioni che sono almeno tre ordini di grandezza inferiori a quelle della luce visibile; in particolare siamo nel campo delle onde emesse dalle antenne.

In questa ipotesi nella (13.65) trascuriamo  $\omega^2 \tau^2$  rispetto a 1, per cui

$$n^2 = 1 - \frac{\sigma \tau}{\epsilon_0} + i \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega}.$$

La parte reale vale  $\sim 1.7 \cdot 10^5$  mentre  $\sigma/\epsilon_0 \omega$  vale almeno  $1.7 \cdot 10^6$  e cresce al diminuire di  $\omega$ . Possiamo quindi scrivere



$$n^2 = \frac{i \sigma}{\epsilon_0 \omega} \quad \omega \tau \ll 1.$$

Facciamo uso dell'identità  $\sqrt{i} = (1+i)/\sqrt{2}$  e otteniamo

$$n = \sqrt{i} \sqrt{\frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega}} = \sqrt{\frac{\sigma}{2\epsilon_0 \omega}} + i \sqrt{\frac{\sigma}{2\epsilon_0 \omega}} = n_r + i n_i.$$

Ricordiamo dal paragrafo 13.9 che la parte immaginaria dell'indice di rifrazione determina l'assorbimento dell'onda: l'ampiezza diminuisce secondo la legge

Figura 13.35

$$E_0 e^{-\omega n_r x / c} = E_0 e^{-\beta x / 2} = E_0 e^{-x / 2l_{abs}}.$$

Nel rame la lunghezza di assorbimento risulta

$$l_{abs} = \frac{c}{2\omega n_i} = \sqrt{\frac{\epsilon_0 c^2}{2\sigma \omega}} = \frac{8.14 \cdot 10^{-2}}{\sqrt{\omega}} = \frac{3.25 \cdot 10^{-2}}{\sqrt{\nu}} \text{ m}.$$

Questa  $l_{abs}$  è riferita all'intensità; per l'ampiezza del campo elettrico l'analogia lunghezza è  $2l_{abs}$ .

In figura 13.35 è mostrata la decrescita di  $E_0$  nel rame a una frequenza  $\nu = 10^{16} \text{ Hz}$ , mentre nella figura 13.36 abbiamo l'andamento di  $l_{abs}$  nel rame in funzione della frequenza fino a  $\nu = 10^{12} \text{ Hz}$ , in scala doppio-logaritmica.

Si conclude che nel campo delle basse frequenze le onde elettromagnetiche penetrano nel conduttore per uno spessore molto piccolo: *il conduttore non è trasparente*.

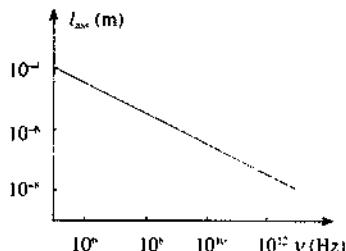


Figura 13.36

2) Approssimazione delle alte frequenze  $\omega \tau \gg 1$

Supponiamo che sia ora  $\omega \gg 1/\tau = 4 \cdot 10^{13} \text{ s}^{-1}$ , per cui nella (13.65)  $\omega \tau + i = \omega \tau$  e

$$n^2 = 1 - \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega^2 \tau} = 1 - \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m_e \omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} ,$$

avendo definito la quantità  $\omega_p$ , chiamata *pulsazione di plasma*, come

$$\omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{\epsilon_0 m_e}} .$$

Pulsazione di plasma

Per  $\omega < \omega_p$ , risulta  $n^2 < 1$  e l'indice di rifrazione è immaginario, il che comporta l'assorbimento delle onde elettromagnetiche. Quando  $\omega$  supera  $\omega_p$  l'indice di rifrazione è reale, non c'è assorbimento e il metallo diventa trasparente alle onde; il comportamento è dispersivo in quanto  $n$  dipende da  $\omega$ .

Nel rame

$$\omega_p = 1.64 \cdot 10^{16} \text{ rad/s} , \quad v_p = \frac{\omega_p}{2\pi} = 2.62 \cdot 10^{15} \text{ Hz} , \quad \lambda_p = \frac{c}{v_p} = 0.115 \cdot 10^{-6} \text{ m} .$$

Per lunghezze d'onda minori di  $\lambda_p$  (che corrisponde alla regione dell'ultravioletto, come vedremo nel paragrafo 13.12) il rame è trasparente.

A frequenze molto maggiori di quella di plasma intervengono altri fenomeni di interazione tra la radiazione elettromagnetica e le cariche del mezzo, come abbiamo già fatto presente nel caso dei dielettrici; accenneremo all'argomento nel capitolo 18.

Dalla discussione precedente, e sempre con riferimento numerico al rame, ricaviamo che se la pulsazione è inferiore a  $\sim 5 \cdot 10^{12}$  rad/s si ha soltanto assorbimento, mentre oltre  $\sim 10^{16}$  rad/s il mezzo è trasparente. Nella regione intermedia, che comprende anche la luce, bisogna tener conto di entrambi i fenomeni, assorbimento e propagazione, ed è importante lo spessore che si considera per valutare quanta parte dell'energia dell'onda viene assorbita.

I risultati ottenuti possono essere estesi ad altri sistemi di particelle cariche libere; un caso molto interessante è quello della *ionosfera*. Si chiama così quella parte dell'atmosfera situata all'incirca tra 100 e 400 km dalla superficie terrestre, in cui l'aria è parzialmente ionizzata per l'azione della radiazione ultravioletta proveniente dal sole (è questo uno dei fenomeni non previsti nel nostro modello). Il gas è complessivamente neutro, anche se una qualsiasi perturbazione può causare una *separazione locale* delle cariche (elettroni e ioni positivi): non appena questa separazione avviene, agisce una forza elettrica di richiamo sulle cariche. Con buona approssimazione possiamo considerare solo il moto degli elettroni (gli ioni essendo molto più pesanti) e immaginare la situazione descritta nella figura 13.37: da una zona neutra si è avuto uno spostamento di elettroni che dà origine a uno strato carico negativamente e lascia dall'altra parte uno strato carico positivamente. Se  $N$  è il numero di cariche libere per unità di volume e  $x$  lo spessore dello strato carico, questo equivale a una distribuzione superficiale di carica con densità  $Nex$ , per cui il campo elettrico nello spazio intermedio è  $E = Nex / \epsilon_0$ . La forza sugli elettroni è  $-eE$  e la loro equazione del moto risulta

$$m_e \frac{d^2x}{dt^2} = -eE = -\frac{Nex^2}{\epsilon_0} x \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{Nex^2}{\epsilon_0 m_e} x = 0 .$$

Una volta causata la perturbazione ha luogo un moto armonico con pulsazione  $\omega = \sqrt{Nex^2 / \epsilon_0 m_e} = \omega_p$ . I valori di  $N$  sono compresi tra  $10^{12}$  e  $10^{13}$  elettroni/m<sup>3</sup>; ponendo  $N = 3 \cdot 10^{12}$  si trova  $\omega_p = 10^8$  rad/s,  $v_p \approx 1.6 \cdot 10^7$  Hz,  $\lambda_p = 18.7$  m.

La frequenza di plasma  $v_p$  è una cosiddetta *frequenza di taglio*: onde con frequenze inferiori non riescono a penetrare la ionosfera e si dimostra che l'energia viene in realtà riflessa, mentre onde con frequenze superiori passano quasi indisturbate attraverso la ionosfera. È proprio questo fatto a rendere possibile la trasmissione a grande distanza di onde con frequenze intorno a  $10^6$  Hz, tipiche delle trasmissioni radiofoniche in modulazione di ampiezza: un'antenna da un punto della terra riesce ad inviare un segnale ad un ricevitore ben oltre l'orizzonte proprio perché le onde emesse vengono riflesse dalla ionosfera. Invece le onde con frequenze intorno a  $10^8$  Hz, tipiche delle trasmissioni in modulazione di frequenza (radio e televisione) passano attraverso la ionosfera e quindi un'antenna deve vedere il ricevitore perché ci sia trasmissione del segnale; d'altra parte ciò rende possibili le comunicazioni

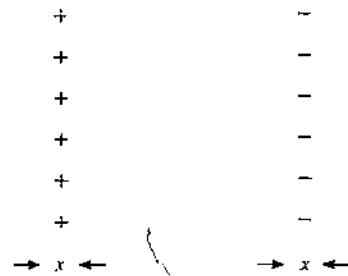


Figura 13.37

ni con i satelliti artificiali inviati oltre la ionosfera. La luce solare ( $v = 10^{14} \div 10^{15}$  Hz) passa la ionosfera, come ovviamente constatiamo ogni giorno; invece la componente ultravioletta della radiazione solare, pur avendo frequenze ben superiori a  $\nu_p$ , è parzialmente assorbita per un effetto quantistico di cui nel modello descritto non si tiene conto.

La ragione fisica dell'esistenza di una frequenza di taglio in questi sistemi come un plasma o un conduttore metallico sta nella capacità degli elettroni di reagire al campo elettrico incidente. Estrapolando quanto avviene in un conduttore in equilibrio elettrostatico, dove un campo applicato causa una ridistribuzione della carica fino a che il campo interno è nullo, una situazione simile di campo nullo nel mezzo (e quindi di non propagazione) avviene finché gli elettroni riescono a seguire le variazioni del campo e a ridistribuirsi nel mezzo; ma se la frequenza dell'onda è troppo elevata ciò non è possibile e il mezzo diventa trasparente. La frequenza di separazione tra i due regimi è la frequenza di plasma, che è una sorta di frequenza propria degli elettroni; il tempo di riaggiustamento è  $\sim 1/\nu_p$ .

Quando è trasparente la ionosfera è un mezzo dispersivo. La relazione di dispersione è la  $n^2 = 1 - (\omega_p^2 / \omega^2)$  che si riscrive come

$$\omega^2 n^2 = \omega^2 \frac{c^2}{v^2} = k^2 c^2 = \omega^2 - \omega_p^2 \Rightarrow \omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2 .$$

La velocità di fase è

$$v = \frac{\omega}{k} = \sqrt{c^2 + \frac{\omega_p^2}{k^2}} = \frac{c}{n} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} > c ,$$

mentre la velocità di gruppo è

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c^2 k}{\omega} = \frac{c^2}{v} = \frac{c^2}{\sqrt{c^2 + \frac{\omega_p^2}{k^2}}} < c .$$

Come nei dielettrici a frequenze molto elevate si trova  $v_g v = c^2$ . A parte i valori numerici, le stesse relazioni valgono per un conduttore quando  $\omega > \omega_p$ .

### 13.11 Effetto Doppler. Effetto Cerenkov

Nel paragrafo 12.12 abbiamo studiato l'effetto Doppler per le onde sonore: esso si osserva quando una sorgente di onde e un rivelatore si muovono l'una rispetto all'altro. Abbiamo anche mostrato nell'esempio 12.5 che, disponendo di uno strumento abbastanza sensibile, è possibile distinguere se è la sorgente che si muove rispetto al mezzo o il rivelatore. Il fatto sostanziale è che la velocità di propagazione si compone con le varie velocità in gioco ovvero, detto diversamente, che la velocità di propagazione dipende dal sistema di riferimento.

Nel caso delle onde elettromagnetiche il concetto di velocità rispetto al mezzo perde significato, potendosi le onde elettromagnetiche propagare anche nel vuoto; inoltre, secondo la teoria della relatività ristretta, la velocità delle onde elettromagnetiche nel vuoto è sempre  $c$ , in qualsiasi sistema di riferimento e indipendentemente dal moto della sorgente e del rivelatore. Allora l'unico parametro può essere solo la velocità relativa tra sorgente e rivelatore e l'effetto Doppler deve essere simmetrico.

Per dimostrare questa affermazione seguiamo, con le necessarie modifiche, i ragionamenti del paragrafo 12.12. Quando la sorgente  $S$  di onde elettromagnetiche si muove verso il rivelatore  $R$  con velocità  $v_s$ , non è sufficiente prendere la (12.62) e sostituire alla velocità di propagazione  $v$  la velocità della luce  $c$ , scrivendo  $v = v_0 c / (c - v_s) = v_0 / (1 - v_s/c)$ . Dato che sono possibili velocità della sorgente non del tutto trascurabili rispetto a  $c$ , bisogna tener presente che si sta osservando un fenomeno che avviene in un sistema di riferimento in moto con velocità  $v_s$  e che, secondo la teoria della relatività ristretta, i tempi nei due sistemi non sono eguali. Come descritto nel paragrafo 3.8 del primo volume, i fenomeni nel sistema della sorgente appaiono, nel sistema del rivelatore, dilatati nel tempo: al periodo  $T$  bisogna sostituire  $T / \sqrt{1 - v_s^2/c^2}$  e alla frequenza  $v_0$ , che è il reciproco del periodo, la frequenza

$v_0 \sqrt{1 - v_s^2/c^2}$ . La (12.62) diventa quindi

$$v_R = \frac{v_0 \sqrt{1 - \frac{v_s^2}{c^2}}}{1 - \frac{v_s}{c}}$$

Oltre alla correzione dovuta al moto relativo c'è la correzione derivante dalla *trasformazione di Lorentz del tempo*.

Se è invece il rivelatore  $R$  ad andare verso la sorgente  $S$  con velocità  $-v_s$ , il periodo misurato nel sistema di  $S$  appare nel sistema di  $R$  più breve,  $T \sqrt{1 - v_s^2/c^2}$  invece di  $T$ , e quindi  $v_0$  diventa  $v_0 / \sqrt{1 - v_s^2/c^2}$ . La (12.63), scritta  $v_R = v_0(c + v_s)/c = v_0(1 + v_s/c)$ , si trasforma nella

$$v_R = \frac{v_0 \left(1 + \frac{v_s}{c}\right)}{\sqrt{1 - \frac{v_s^2}{c^2}}}$$

Dal confronto si vede subito che le due frequenze sono uguali: non c'è modo di decidere se si muove  $S$  rispetto a  $R$  o viceversa.

Quando la velocità relativa è piccola rispetto a  $c$ , così che  $v_s^2/c^2 \ll 1$ , si riottengono le formule trovate nel paragrafo 12.12; esse danno ancora lo stesso risultato perché, se  $v_s^2/c^2$  è trascurabile rispetto a 1, con la stessa approssimazione  $1 + v_s/c \approx 1/(1 - v_s/c)$ . Quando si considerano onde elettromagnetiche le due misure di frequenza coincidono sempre, qualunque sia il valore di  $v_s$ . Invece, nel caso delle onde sonore (12.62) e (12.63) coincidono solo se  $v_s \ll v$ , ma danno risultati diversi nelle altre situazioni.

Riassumendo, detta  $v$  la velocità con cui una sorgente di onde elettromagnetiche si muove rispetto ad un osservatore e  $v_0$  la frequenza quando  $v = 0$ , la frequenza misurata dall'osservatore è

$$v = \frac{1 \pm \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} v_0 \quad . \quad (13.66)$$

Il segno positivo è valido quando la sorgente si avvicina all'osservatore e il segno negativo quando si allontana. La corrispondente variazione di lunghezza d'onda si ricava da

$$\lambda = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 \pm \frac{v}{c}} \lambda_0 \quad . \quad (13.67)$$

Quindi la frequenza aumenta e la lunghezza d'onda diminuisce se sorgente e osservatore si avvicinano, mentre succede il contrario se si allontanano.

Supponiamo che la sorgente si allontani, per cui  $\lambda > \lambda_0$ , e indichiamo con

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0}$$

L'aumento percentuale di lunghezza d'onda osservato. Inserendo la (13.67), risolvendo in  $v/c$  e scartando una soluzione che dà  $v/c = 1$ , si ottiene

$$\frac{v}{c} = \frac{\left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} + 1\right)^2 - 1}{\left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} + 1\right)^2 + 1} \quad (13.68)$$

Dalla misura di  $\Delta\lambda / \lambda_0$  è possibile pertanto ricavare la velocità con cui la sorgente si allontana.

Un esempio classico di questo effetto è costituito dalla misura della *velocità con cui si allontanano le galassie*. Come abbiamo già detto nel paragrafo 13.8, gli atomi di un elemento in fase gassosa opportunamente eccitati emettono radiazioni luminose e le lunghezze d'onda di queste radiazioni sono caratteristiche dell'elemento. Nella radiazione proveniente dalle galassie si riconoscono le serie di lunghezze d'onda tipiche di determinati elementi, però tutte con valori di lunghezza d'onda *maggiori* di quelli misurati in laboratorio: si osserva cioè un generale *spostamento verso il rosso*. Si deduce quindi, essendo  $\Delta\lambda / \lambda_0 > 0$ , che le galassie si allontanano dalla terra e dalla misura di  $\Delta\lambda / \lambda_0$  si può risalire alla velocità  $v$  della galassia (vedi esempio 13.7).

Hubble effettuò misure sistematiche di questo tipo dimostrando che la velocità di allontanamento aumenta con la distanza della galassia e che la relazione tra velocità e distanza della galassia è la stessa in qualsiasi direzione di osservazione. I dati si possono interpretare con l'ipotesi che l'*universo sia in espansione* e che la velocità di espansione sia la stessa in tutte le direzioni (espansione isotropa). Secondo questo modello cosmologico inizialmente tutta la materia era concentrata in un unico punto e ad un certo istante, che si può far risalire a circa  $15 \cdot 10^9$  anni fa, si è verificato il *big-bang*. Da allora l'universo ha continuato ad espandersi raggiungendo una dimensione dell'ordine di  $3 \cdot 10^{24}$  m =  $3 \cdot 10^8$  anni-luce (1 anno-luce =  $9.45 \cdot 10^{15}$  m, spazio percorso dalla luce in un anno).

### Esempio 13.7

Alcune lunghezze d'onda provenienti da una galassia della costellazione della Vergine hanno un valore superiore di circa il 4% rispetto a quello osservato in laboratorio. Calcolare la velocità di allontanamento.

#### Soluzione

Direttamente da (13.68), essendo  $\Delta\lambda / \lambda_0 = 4 \cdot 10^{-3}$ .

$$\frac{v}{c} = \frac{(1.004)^2 - 1}{(1.004)^2 + 1} = 4 \cdot 10^{-3} \Rightarrow v = 4 \cdot 10^{-3} c = 1.2 \cdot 10^6 \text{ m/s}$$

Osserviamo che con valori così piccoli di  $\Delta\lambda / \lambda_0$  la (13.68) si può correttamente approssimare con la  $v/c = \Delta\lambda / \lambda_0$ .

### *Effetto Cerenkov*

Anche con le onde elettromagnetiche si ha un fenomeno analogo a quello dell'onda d'urto, descritto nel paragrafo 12.12. Quando una particella carica, ad esempio un elettrone, si muove con velocità  $v$  in un mezzo dielettrico, il campo elettrico della particella eccita gli atomi del mezzo disposti lungo la traiettoria: questi acquistano un momento di dipolo elettrico che scompare subito dopo il passaggio della particella, diventando così *sorgenti impulsive di onde elettromagnetiche*. In pratica possiamo considerare ogni punto della traiettoria come sorgente di onde sferiche e, con la stessa costruzione della figura 12.33, si dimostra che queste onde possono ammettere un fronte d'onda comune di forma conica avente come asse la traiettoria della particella.

Detta  $c/n$  la velocità delle onde nel mezzo, l'angolo al vertice  $\theta$  della figura 13.39 è tale che

$$\sin \theta = \frac{c}{n v} = \frac{1}{n \beta}$$

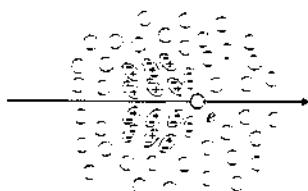


Figura 13.38

dove  $\beta = v/c$  è il rapporto tra la velocità della particella e la velocità della luce nel vuoto. I raggi ortogonali al fronte d'onda formano con la traiettoria della particella l'angolo  $\theta_c$  complementare di  $\theta$  per cui

$$\cos \theta_c = \frac{1}{n\beta}, \quad (13.69)$$

espressione nota come *relazione di Cerenkov*.

La condizione perché esista il fronte d'onda è dunque  $\cos \theta_c \leq 1$  ovvero  $n\beta \geq 1$ . Siccome  $\beta$  è sempre minore di 1, l'emissione avviene solo se l'indice di rifrazione è maggiore di 1. Quindi

$$\beta > \beta_{\min} = \frac{1}{n} \Rightarrow v > \frac{c}{n} :$$

la velocità della particella deve essere maggiore di un valore minimo che corrisponde alla velocità della luce nel mezzo o, in termini di  $\beta$ , questa deve superare un valore minimo che è fissato dal reciproco dell'indice di rifrazione.

Osserviamo che per un dato  $n$  al crescere di  $\beta$  diminuisce  $\cos \theta_c$  e pertanto aumenta l'angolo di emissione  $\theta_c$ : il valore limite si ha per  $\beta = 1$  ed è  $\theta_{c,\max} = \arccos(1/n)$ .

Le frequenze emesse dal mezzo sotto forma di radiazione Cerenkov hanno uno spettro molto ampio: in particolare viene emessa luce visibile. L'intensità è piuttosto ridotta e occorrono strumenti molto sensibili per rivelare l'impulso di luce. Nell'acqua, che alle frequenze ottiche ha  $n = 4/3$ , il valore minimo di  $\beta$  è  $1/n = 0.75$ : la particella incidente deve avere almeno la velocità  $v = 0.75 c = 2.25 \cdot 10^8$  m/s. L'angolo  $\theta_c$  varia da zero a  $\theta_{c,\max} = 41.4^\circ$  quando  $\beta$  varia da 0.75 a 1.

La misura dell'angolo  $\theta_c$  permette dunque di determinare la velocità della particella. Su questo principio sono costruiti i cosiddetti *contatori a effetto Cerenkov*, costituiti da un mezzo, liquido o gassoso, in cui la particella incidente può provocare l'emissione di radiazione, da un sistema ottico adatto a focalizzare la luce emessa su un rivelatore e appunto da un rivelatore sensibile all'impulso di luce (tipicamente un *fotomoltiplicatore*, strumento basato sull'effetto fotoelettrico che vedremo nel capitolo 18). Tali contatori, molto usati nella fisica subnucleare, permettono innanzitutto di rivelare il passaggio di una particella carica, se questa ha  $\beta > \beta_{\min}$ : se non hanno altre funzioni sono detti contatori a soglia, se invece sono dotati di sofisticati sistemi ottici capaci di misurare  $\theta_c$  sono detti contatori differenziali.

### 13.12 Spettro delle onde elettromagnetiche

L'intervallo delle frequenze delle onde elettromagnetiche è molto ampio e si estende dalle onde hertziane (limite inferiore  $\sim 10^2$  Hz) ai raggi  $\gamma$ , che hanno frequenze superiori a  $10^{21}$  Hz.

Nella figura 13.40 è riportata una rappresentazione schematica dello spettro: la frequenza  $\nu$  è nella scala di sinistra, mentre a destra c'è la corrispondente lunghezza d'onda  $\lambda$  nel vuoto, calcolata con la formula  $\lambda = c/\nu$ .

Lo spettro è suddiviso convenzionalmente in una successione di bande: *onde hertziane*, *microonde*, *infrarosso*, *visibile*, *ultravioletto*, *raggi X*, *raggi  $\gamma$* . Le separazioni non sono nette e gli intervalli delle singole bande hanno zone di sovrapposizione, come avviene ad esempio alle altissime frequenze tra raggi  $X$  e raggi  $\gamma$ . Le differenti denominazioni hanno origine storica e sono talvolta legate al modo di produzione o di rilevazione delle onde (è il caso delle onde hertziane e del visibile). Nella zona inferiore dello spettro la produzione delle onde avviene con circuiti elettronici (almeno sulla terra), il limite massimo essendo intorno a  $10^{12}$  Hz; le onde di frequenza superiore derivano da fenomeni a livello atomico e nucleare, spontanei o provocati.

In ogni caso è sempre la frequenza che determina le proprietà fisiche; anche quando l'onda attraversa un mezzo materiale e la sua velocità varia, è la lunghezza

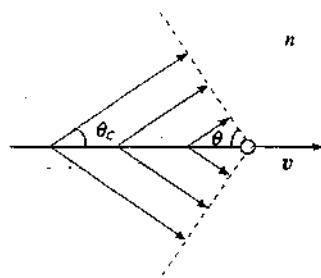


Figura 13.39

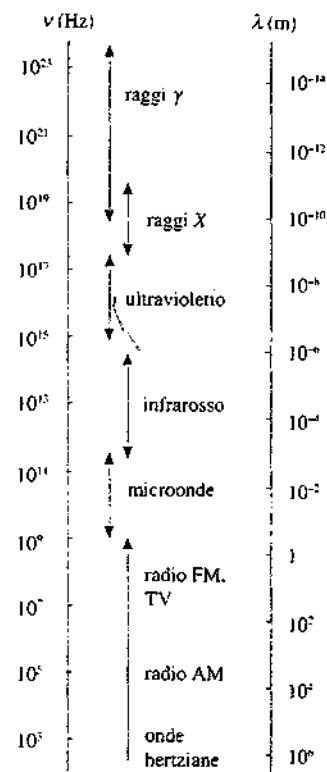


Figura 13.40

d'onda che cambia, ma il numero di oscillazioni al secondo resta invariato.

Per avere una comprensione completa dello spettro delle onde elettromagnetiche è opportuno introdurre la *descrizione quantistica*, che riprenderemo nel capitolo 18; essa è essenziale per spiegare alcune proprietà non riconducibili alle proprietà ondulatorie.

Secondo la meccanica quantistica l'energia elettromagnetica ha una struttura discreta come la materia e non continua come previsto dalla teoria ondulatoria di Maxwell. Essa è costituita da *quanti di energia* detti *fotoni*, ognuno dei quali ha l'energia

Fotoni

$$U = h \nu \quad , \quad (13.70)$$

dove  $h = 6.626 \cdot 10^{-34}$  Js è la costante di Planck, già richiamata nei paragrafi 2.3 e 9.10, e  $\nu$  la frequenza dell'onda. I fotoni si muovono in qualsiasi sistema di riferimento con velocità  $c = 3 \cdot 10^8$  m/s e hanno massa a riposo nulla. La loro quantità di moto è

$$p = \frac{U}{c} = \frac{h \nu}{c} = \frac{h}{\lambda} \quad . \quad (13.71)$$

Un'onda elettromagnetica piana di intensità  $I$  è composta da un flusso di  $N$  fotoni per metro quadro e per secondo, con

$$N = \frac{I}{h \nu} \quad . \quad (13.72)$$

Senza approfondire per il momento questo argomento, diremo che la teoria di Maxwell delle onde elettromagnetiche dà una descrizione *media* dei fenomeni tanto più appropriata quanto minore è l'energia dei fotoni e maggiore il loro numero. Nelle onde hertziane e nelle microonde l'energia dei quanti è così piccola e il numero così grande che non è possibile rivelare sperimentalmente il singolo quanto. Nel campo del visibile si presentano fenomeni interpretabili solamente con la descrizione quantistica, ma l'aspetto ondulatorio è più evidente. Nei raggi X e nei raggi  $\gamma$  l'effetto quantistico è predominante e le proprietà ondulatorie possono essere messe in evidenza solo in qualche caso e con raffinati esperimenti.

Avendo in mente questi aspetti diamo una descrizione delle diverse bande che compongono lo spettro elettromagnetico.

Onde hertziane  $3 \cdot 10^6 \geq \lambda \geq 0.3$  m,  $10^2 \leq \nu \leq 10^9$  Hz,  $\sim 0 \leq U \leq 4 \cdot 10^{-6}$  eV

L'energia dei quanti è molto piccola e non può dare origine a processi singoli osservabili, per cui la descrizione classica dell'onda è appropriata. Queste onde sono prodotte con dispositivi elettronici, principalmente circuiti oscillanti, e sono utilizzate nelle trasmissioni radiofoniche e televisive. Per questa ragione si parla anche di onde radio o di radiofrequenze.

Microonde  $0.3 \geq \lambda \geq 10^{-3}$  m,  $10^9 \leq \nu \leq 3 \cdot 10^{11}$  Hz,  $4 \cdot 10^{-6} \leq U \leq 1.2 \cdot 10^{-3}$  eV

Vengono prodotte con dispositivi elettronici o da fenomeni atomici (*maser*): sono utilizzate principalmente per comunicazioni e sistemi radar. Prevale la descri-

zione classica, ma alle frequenze più elevate l'energia dei fotoni è sufficiente per alcuni studi di strutture molecolari, in quanto è dello stesso ordine di grandezza delle differenze di energia tra livelli molecolari. Il *maser* ad ammoniaca emette una frequenza  $v = 2.4 \cdot 10^{10}$  Hz ( $\lambda = 1.25$  cm) e la corrispondente energia dei fotoni è  $U = 10^{-4}$  eV.

Infrarosso  $10^{-3} \geq \lambda \geq 0.78 \cdot 10^{-6}$  m,  $3 \cdot 10^{11} \leq v \leq 3.8 \cdot 10^{14}$  Hz,  $1.2 \cdot 10^{-3} \leq U \leq 1.5$  eV

Questa regione viene suddivisa in tre parti: l'estremo infrarosso da  $10^{-3}$  a  $3 \cdot 10^{-5}$  m, il medio infrarosso da  $3 \cdot 10^{-5}$  a  $3 \cdot 10^{-6}$  m e il vicino infrarosso da  $3 \cdot 10^{-6}$  a  $0.78 \cdot 10^{-6}$  m, soglia del visibile. La radiazione infrarossa è prodotta da corpi caldi, in cui gli atomi vengono eccitati tramite gli urti causati dall'agitazione termica, e contiene in modo praticamente continuo moltissime frequenze (si veda la figura 13.41 e la relativa spiegazione). Con sorgenti *laser* si ottengono invece frequenze molto precise, in un campo che va da  $10^{-4}$  m fino al visibile. Se assorbiti da una molecola, i quanti hanno energia sufficiente a provocare un moto vibrazionale, che si traduce in aumento di temperatura. L'emissione infrarossa provocata è utilizzata in medicina in terapie fisiche; quella spontanea è sfruttata ad esempio nella fotografia infrarossa. Nella ricerca ci si serve dei raggi infrarossi nella spettroscopia vibrazionale, cioè nello studio dei livelli energetici vibrazionali delle molecole.

Luce visibile  $0.78 \cdot 10^{-6} \geq \lambda \geq 0.38 \cdot 10^{-6}$  m,  $3.8 \cdot 10^{14} \leq v \leq 7.9 \cdot 10^{14}$  Hz,  
 $1.6 \leq U \leq 3.3$  eV

È la banda di frequenze cui è sensibile l'occhio della maggior parte degli esseri viventi. La luce visibile è prodotta nei moti di agitazione termica ad alta temperatura, da scariche in un gas (ad esempio in lampade a incandescenza e in lampade a scarica rispettivamente), in generale da processi in cui vengono eccitati gli elettroni più esterni degli atomi. Si ha anche emissione di radiazione di sincrotrone visibile con elettroni di energia dell'ordine di 100 MeV (paragrafo 13.7).

Il sole è la più importante sorgente di luce visibile vicina a noi; l'energia elettromagnetica ha origine dall'agitazione termica degli atomi che si trovano sulla superficie ad una temperatura di circa 6000 K. Lo spettro  $F(\lambda)$  della radiazione solare è mostrato in figura 13.41. Vediamo che esso inizia nel vicino ultravioletto, ha un massimo nel visibile per  $\lambda \approx 0.5 \cdot 10^{-6}$  m e si estende abbastanza nell'infrarosso. Per ogni intervallo  $d\lambda$  la quantità  $dI(\lambda) = F(\lambda) d\lambda$ , area sotto la curva, rappresenta l'intensità riferita a quell'intervallo  $d\lambda$ . La curva di  $F(\lambda)$  è tipica dell'*emissione termica di un corpo caldo*: a temperature più basse la curva si sposta verso destra, nell'infrarosso, a temperature più alte verso sinistra, nell'ultravioletto. Lo spettro delle frequenze è continuo, ma non tutte sono emesse con la stessa intensità, come mostra  $F(\lambda)$  che dà l'energia per unità di superficie, unità di tempo e intervallo unitario di lunghezza d'onda ( $\text{W/m}^3$ ).

Quando il meccanismo di emissione è diverso da quello termico si hanno spettri formati da una o più frequenze ben distinte (luce emessa da una lampada a gas o da un laser).

Le diverse sensazioni che la luce produce nell'occhio dipendono dalla lunghezza d'onda e vengono classificate come colori; i relativi intervalli di  $\lambda$ ,  $v$  e il valore centrale di  $U$  sono riportati nella tabella 13.2. La curva della sensibilità relativa dell'occhio è mostrata in figura 13.42; il massimo si ha per la luce giallo-verde con  $\lambda \approx 0.56 \cdot 10^{-6}$  m.

Le caratteristiche ondulatorie della luce sono alla base dei fenomeni che costituiscono il campo di studio dell'*ottica* (interferenza, diffrazione, riflessione e rifrazione, ecc.); ad essi sono dedicati i capitoli 14, 15, 16 e 17. È bene osservare che

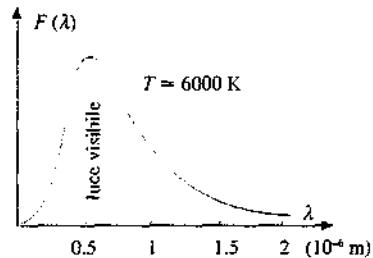


Figura 13.41

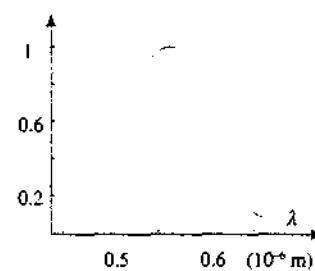


Figura 13.42

con strumenti opportuni gli stessi fenomeni si possono osservare per tutte le onde elettromagnetiche, almeno fino alle frequenze dei raggi  $X$ , e in generale per tutti i tipi di onde. Invece per la spiegazione di altri fenomeni che sono provocati dalla luce visibile, come l'effetto fotoelettrico (capitolo 18), la descrizione quantistica è essenziale.

Tabella 13.2 Colori della luce visibile			
colore	$\lambda (10^{-7} \text{ m})$	$\nu (10^{14} \text{ Hz})$	$E (\text{eV})$
rosso	0.780 – 0.622	3.85 – 4.82	1.79
arancione	0.622 – 0.597	4.82 – 5.03	2.04
giallo	0.597 – 0.577	5.03 – 5.20	2.12
verde	0.577 – 0.492	5.20 – 6.10	2.34
azzurro	0.492 – 0.455	6.10 – 6.59	2.62
violetto	0.455 – 0.380	6.59 – 7.89	2.99

Ultravioletto  $0.38 \cdot 10^{-6} \geq \lambda \geq 6 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ ,  $7.9 \cdot 10^{14} \leq \nu \leq 5 \cdot 10^{17} \text{ Hz}$ ,  $3.3 \leq U \leq 2 \cdot 10^3 \text{ eV}$

La radiazione ultravioletta è emessa da atomi eccitati con i mezzi già detti, in particolare anche con il meccanismo del laser, e da particelle cariche accelerate (*radiazione di sincrotrone*). L'applicazione scientifica principale si ha nello studio di strutture atomiche; questa dell'utilizzazione negli studi strutturali è una caratteristica comune alle varie bande e si basa sull'egualanza dell'energia dei fotoni con le differenze in energia tra livelli atomici o molecolari, che possono essere eccitati solo da fotoni incidenti con quella data energia; come già notato questo uso si ha a partire dalle microonde. I raggi ultravioletti hanno anche svariate applicazioni tecnologiche.

Il sole è una sorgente di radiazioni ultraviolette (vedi figura 13.41); una parte notevole di essa viene assorbita nell'atmosfera, oltre i 100 km di altezza, attraverso fenomeni di ionizzazione e dà luogo alla formazione della ionosfera (paragrafo 13.10). Un ulteriore assorbimento si ha soprattutto tra 20 e 30 km di altezza, dove si realizzano le condizioni ottimali per la reazione di formazione dell'ozono,  $3 \text{ O}_2 \rightarrow 2 \text{ O}_3$ , fortemente endotermica e resa possibile appunto dall'apporto energetico della radiazione ultravioletta. L'ozono prodotto successivamente si scinde riformando ossigeno e diffonde anche verso gli strati più bassi dove ad ogni modo reagisce con altre sostanze (l'ozono è un ossidante molto forte); tra formazione e scomparsa si ha un equilibrio dinamico che mantiene una determinata concentrazione di ozono, massima intorno ai 25 km di altezza.

L'assorbimento atmosferico dei raggi ultravioletti solari è fondamentale per la vita sulla terra in quanto questa radiazione in grandi quantità risulta letale. È noto il dibattito scientifico iniziato negli anni ottanta sull'assottigliamento dello strato di ozono e sulla sua scomparsa sopra l'Antartide; una possibile causa è l'immissione nell'atmosfera di clorofluorocarburi (CFC), contenuti negli impianti frigoriferi, in molti tipi di plastica e nelle bombolette spray, che reagiscono con l'ozono distruggendolo.

Uno dei risultati dell'esposizione alla piccola parte della radiazione ultravioletta solare che raggiunge la superficie terrestre è l'abbronzatura della pelle: i fotoni infatti hanno un'energia sufficiente per formare, nell'interazione con le molecole dei primi strati della pelle, la melanina, cioè la sostanza che dà la colorazione scura alla pelle.

Raggi X  $6 \cdot 10^{-10} \geq \lambda \geq 6 \cdot 10^{-12}$  m,  $5 \cdot 10^{17} \leq \nu \leq 5 \cdot 10^{19}$  Hz,  $2 \cdot 10^3 \leq U \leq 2 \cdot 10^5$  eV

Le onde elettromagnetiche denominate raggi X vengono prodotte con due meccanismi differenti. Il primo è già stato discusso nel paragrafo 13.7 e consiste nel frenamento di elettroni accelerati da d.d.p. al massimo dell'ordine di 100 kV. In un fascio di raggi X così prodotti sono presenti fotoni con energie da un minimo di circa  $10^3$  eV fino ad un massimo corrispondente all'energia massima degli elettroni, cioè circa  $10^5$  eV.

Raggi X di questo tipo sono utilizzabili per indagini radiografiche. L'assorbimento dei raggi X è diverso nei vari tessuti che costituiscono il corpo umano e soprattutto nelle ossa; il flusso di raggi X che emerge dal corpo sottoposto a irraggiamento X è pertanto diverso a seconda del tessuto attraversato e una lastra fotografica viene più o meno impressionata in corrispondenza. Avendo la possibilità di interagire con le molecole depositando una grande quantità di energia, i fotoni X possono distruggere i tessuti viventi: fasci ben focalizzati e molto intensi sono usati nella terapia contro i tumori.

Anche per mezzo della radiazione di sincrotrone si ha emissione nella banda dei raggi X di frenamento.

I raggi X caratteristici (vedi paragrafo 18.6) sono invece emessi da atomi eccitati in corrispondenza a transizioni di elettroni dei livelli più interni; di conseguenza le frequenze, ovvero le energie dei fotoni, sono ben definite e caratteristiche dell'elemento; esse hanno una dipendenza quadratica dal numero atomico dell'elemento. Le lunghezze d'onda sono confrontabili con le distanze interatomiche ( $\sim 10^{-10}$  m) e questi raggi vengono pertanto usati per studi di strutture cristalline. Proprio l'interazione con strutture cristalline ha dimostrato che i raggi X hanno proprietà ondulatorie, in quanto subiscono il fenomeno della diffrazione (vedi paragrafo 16.10); la natura corpuscolare è però predominante.

Raggi  $\gamma$        $\lambda \leq 10^{-10}$  m .  $\nu \geq 3 \cdot 10^{18}$  Hz ,  $U \geq 1.2 \cdot 10^4$  eV

I raggi  $\gamma$  sono prodotti in processi nucleari, quali decadimenti radioattivi e reazioni tra nuclei, e nelle reazioni e nei decadimenti di particelle subnucleari; vengono però chiamati  $\gamma$  anche i fotoni emessi per bremsstrahlung da elettroni di alta energia e in generale tutti i fotoni la cui energia è superiore a qualche centinaio di keV, comunque emessi. I raggi  $\gamma$  prodotti nei processi nucleari hanno energie che al massimo valgono qualche MeV mentre quelli originati in fenomeni subnucleari possono assumere in pratica qualsiasi energia, i limiti essendo posti naturalmente dalla legge di conservazione dell'energia nelle reazioni di produzione. La massima energia per raggi  $\gamma$  prodotti in laboratorio è dell'ordine di  $10^{11}$  eV =  $10^2$  GeV, a cui corrisponde  $\nu = 2.4 \cdot 10^{25}$  Hz ovvero  $\lambda = 1.25 \cdot 10^{-17}$  m. In reazioni causate dalla radiazione cosmica sono stati trovati fotoni con energie ancora superiori (oltre  $10^{12}$  eV).

L'intensità di raggi  $\gamma$  emessa da una sorgente nucleare (*radioattività  $\gamma$* ) può essere molto elevata e tali sorgenti vanno utilizzate con cautela, poiché l'assorbimento di questi  $\gamma$  può causare seri danni in un organismo vivente. D'altra parte, come i raggi X, i raggi  $\gamma$  nucleari trovano applicazioni in terapie antitumorali: è diffuso l'uso dei raggi  $\gamma$  emessi dall'isotopo del cobalto  $^{60}\text{Co}$ , aventi energia intorno a MeV.

Nella loro interazione con la materia i raggi  $\gamma$  manifestano soltanto la natura corpuscolare, non essendo possibile per ora misurare lunghezze d'onda così corte.

**Esempio 13.8**

Dare una descrizione quantistica della radiazione solare nell'ipotesi semplificativa che essa abbia una lunghezza d'onda definita, data dal valore medio  $\lambda_m = 0.5 \cdot 10^{-6}$  m a cui l'emissione è massima.

**Soluzione**

La frequenza dell'onda è  $\nu_m = c/\lambda_m = 6 \cdot 10^{14}$  Hz per cui il singolo fotone ha energia (13.70) e quantità di moto (13.71):

$$U = h \nu_m = 3.98 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 2.49 \text{ eV} ,$$

$$p = \frac{h}{\lambda_m} = 1.33 \cdot 10^{-27} \text{ Ns} = 0.83 \cdot 10^{-8} \text{ eV/c} .$$

Il flusso di fotoni incidenti sulla superficie terrestre, da (13.72) e dal valore  $I = 1.4 \cdot 10^3$  W/m<sup>2</sup> dato nella nota del paragrafo 13.5, risulta

$$N = \frac{I}{U} = 3.52 \cdot 10^{21} \text{ fotoni/m}^2 \text{ s} .$$

La quantità di moto complessiva portata dai fotoni per metro quadro e per secondo è

$$N_p = \frac{I}{U} p = \frac{I}{c} = 4.67 \cdot 10^{-6} \text{ Pa} ,$$

ovviamente in accordo col risultato del paragrafo 13.5. La pressione di radiazione ha origine dall'urto di questi fotoni contro la superficie del materiale. L'urto è anelastico con  $p_{fin} = 0$  se il materiale è assorbente ed è elastico ( $p_{fin} = -p$  con incidenza normale) se il materiale è perfettamente riflettente.

**13.13 La velocità della luce**

La velocità della luce nel vuoto è una costante fondamentale della fisica. Ricordiamo che il suo valore è

$$c = 2.99792458 \cdot 10^8 \text{ m/s} \quad (13.5)$$

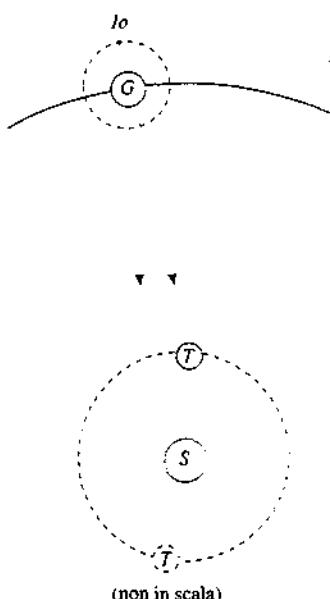


Figura 13.43

È provato sperimentalmente che *il vuoto non è dispersivo*, cioè che tutte le onde elettromagnetiche si propagano nel vuoto con velocità  $c$ , indipendentemente dalla loro frequenza.

La velocità  $c$ , che non dipende dal sistema di riferimento, è la massima velocità con cui può propagarsi un segnale fisico di qualsiasi natura: nessun corpo materiale raggiunge la velocità  $c$ .

Le prime misure di  $c$  furono dedotte da osservazioni astronomiche. Nel 1676 Roemer osservando le eclissi di una luna (*Io*) di Giove, causate dal cono d'ombra di Giove stesso, trovò che il periodo di tali eclissi, cioè l'intervallo di tempo tra un'eclisse e la successiva, variava durante l'anno e precisamente aumentava quando la terra si allontanava da Giove e diminuiva quando i due pianeti si avvicinavano. Il valore medio del periodo era di circa 42 ore e la massima variazione di circa 20 minuti. Roemer capì che l'aumento apparente di periodo dipendeva dal fatto che la luce doveva percorrere un cammino più lungo per arrivare sulla terra quando questa si allontanava da Giove. La differenza tra i valori massimo e minimo del periodo di *Io* era principalmente legata al diametro dell'orbita terrestre e con i dati allora disponibili Roemer calcolò  $c = 2.143 \cdot 10^8$  m/s. Il valore corretto, con i dati odierini, risulta  $c = 2.998 \cdot 10^8$  m/s, praticamente eguale a (13.5), ma non così preciso.

Nel 1728 Bradley riuscì a spiegare un apparente piccolo movimento (aberrazione) delle stelle nel corso di un anno riconducendolo giustamente al fatto che il fenomeno è osservato da un riferimento mobile, la terra. Nel ragionamento, che non riportiamo, è importante la spiegazione del perché per osservare una stella allo zenith è necessario inclinare il tubo di un telescopio di un angolo  $\alpha$  (figura 13.44). La luce della stella arriva verticalmente nel punto A, estremo del telescopio, ma questo si muove, ad esempio da sinistra verso destra, con la

velocità  $v_t$  della terra; la luce non raggiungerebbe direttamente l'occhio dell'osservatore in  $B$  se sarebbe assorbita dalle pareti, se il tubo non fosse inclinato di un angolo  $\alpha$  tale che

$$\tan \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{v_t}{c}$$

Dai valori  $\alpha \approx 10^{-4}$  rad e  $v_t \approx 3 \cdot 10^4$  m/s si ricava  $c$ , che risulta del corretto ordine di grandezza. Pur non essendo precisa la misura mette in evidenza che la luce ha una velocità finita (circa  $10^8 v_t$ ) e che la terra si muove rispetto alle stelle fisse.

Durante il 1800 vennero sviluppati metodi di misura terrestri che, oltre ad essere più precisi, permisero di calcolare il valore della velocità di propagazione della luce anche in mezzi materiali. Il primo metodo è dovuto a Fizeau (1849). Molto schematicamente, un raggio luminoso percorre un cammino  $2h$  tramite la riflessione su uno specchio piano: sul cammino della luce è interposta una ruota dentata, che ruota con velocità angolare  $\omega$ . La luce può superare la ruota, essere riflessa dallo specchio e superare di nuovo la ruota solo se sia all'andata che al ritorno passa nello spazio tra due denti della ruota. Detto  $\Delta\phi$  l'intervallo angolare tra due posizioni di passaggio della luce, deve essere soddisfatta la condizione  $\Delta\phi / \omega = 2h/c$ : se la ruota ha  $n$  denti (e  $n$  spazi),  $\Delta\phi$  al minimo vale  $\pi/n$  quando gli spazi di passaggio sono consecutivi per cui  $c = 2n h \omega / \pi$ . La misura è fattibile con  $h$  dell'ordine della decina di chilometri e  $\omega \approx 10^3 \div 10^4$  rad/s.

Quasi contemporaneamente Foucault (1850) mise a punto un metodo simile di osservazione intermittente basato su uno specchio rotante: il sistema fu perfezionato da Michelson nel 1927, che ottenne il valore  $c = 2.99796 \cdot 10^8$  m/s con un errore relativo di  $\sim 10^{-5}$  (4000 m/s). Descriveremo l'esperimento nel capitolo 17, per non dover anticipare nozioni spiegate in quel capitolo.

Le misure più precise sono ormai ottenute dalla relazione  $c = \lambda v$ , misurando con estrema precisione sia la lunghezza d'onda che la frequenza; l'errore attuale è inferiore a 1 m/s e per questo il valore (13.5) viene assunto come esatto. Tra l'altro è con questo sistema che viene provata l'indipendenza di  $c$  dalla frequenza.

Un ultimo argomento di carattere fondamentale riguardante la velocità della luce consiste nella spiegazione fisica delle variazioni della velocità di fase rispetto a  $c$  quando l'onda si propaga in un mezzo materiale. Un aspetto del problema è che non c'è nessuna ragione per ritenere che un atomo isolato nel vuoto emetta una radiazione che si propaga con velocità  $c$  mentre un atomo circondato da altri atomi in un mezzo materiale emetta una radiazione che si propaga con velocità  $v$  diversa da  $c$ : in ogni caso la velocità dell'onda è sempre  $c$ , qualunque sia il mezzo. Però tra la situazione di un'onda nel vuoto e quella di un'onda in un mezzo materiale c'è una differenza sostanziale: in un mezzo l'onda incidente eccita l'emissione degli atomi e pertanto il campo effettivo agente sul singolo atomo non è soltanto quello incidente, bensì la sovrapposizione di tutti i campi emessi dagli atomi eccitati e del campo incidente. Dobbiamo quindi aspettarci che l'emissione del generico atomo non sia in fase con l'onda incidente e che l'onda risultante sia la sovrapposizione di un gran numero di onde tutte sfasate tra loro.

In base a queste ipotesi, che la velocità sia sempre  $c$  e che ci sia sfasamento tra onda incidente e onde diffuse, si dimostra che l'effetto è una modifica della fase dell'onda nel mezzo: in un qualsiasi punto in cui ci attenderemmo una data fase  $\phi$  se la velocità dell'onda fosse  $c$ , troviamo invece la fase  $\phi \pm \delta$  formalmente ciò coincide con il dire che la velocità dell'onda nel mezzo è minore o maggiore di  $c$  (macroscopicamente l'effetto è riassunto dall'indice di rifrazione  $n = c/v$ ).

Quanto detto vale per la velocità di fase di un'onda armonica, cioè infinita e quindi non fisica. In un segnale fisico reale a tutto ciò bisogna aggiungere le considerazioni già fatte che portano a stabilire che la velocità del segnale non supera mai  $c$ .

### Esempio 13.9

Un'onda luminosa piana armonica si propaga lungo l'asse  $x$ : la sua equazione è  $E = E_0 \cos(kx - \omega t)$ . Interponiamo sul cammino dell'onda una lastra di vetro, avente spessore  $\Delta x$  e indice di rifrazione  $n$ , e supponiamo che la velocità di fase dell'onda nel vetro sia  $v = c/n$ , minore di  $c$ . Scrivere l'equazione dell'onda in un punto a valle della lastra ed

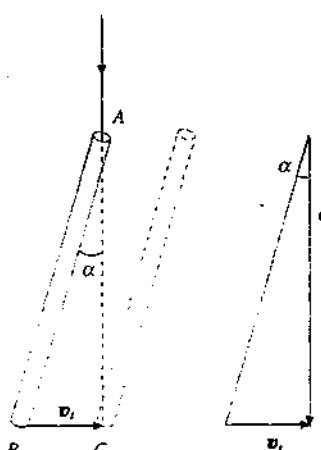


Figura 13.44

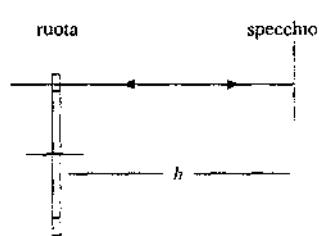


Figura 13.45

esaminare come si può esprimere il risultato se l'effetto della lastra è piccolo.

### Soluzione

Il tempo impiegato dall'onda ad attraversare lo spessore  $\Delta x$  della lastra è  $t_2 = \Delta x / v$  mentre nel vuoto il tempo sarebbe stato  $t_1 = \Delta x / c$ . Dall'uscita della lastra l'onda è in ritardo di

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \Delta x \left( \frac{1}{v} - \frac{1}{c} \right) = \frac{\Delta x}{c} (n - 1)$$

rispetto alla situazione senza la lastra. Nel generico punto a valle l'equazione dell'onda, adottando la stessa origine del tempo che utilizzeremmo in assenza di lastra, risulta

$$E = E_0 \cos [kx - \omega(t + \Delta t)] = E_0 \cos \left[ kx - \omega t - \frac{\omega}{c} (n - 1) \Delta x \right] ;$$

l'onda appare sfasata in ritardo di

$$\delta = \frac{\omega}{c} (n - 1) \Delta x = \frac{2\pi}{\lambda} (n - 1) \Delta x \quad (13.73)$$

rispetto al caso in cui fosse  $\Delta x = 0$ .

Se  $\delta$  è piccolo, perché  $n$  è poco diverso da 1 o perché la lastra è molto sottile, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} E &= E_0 \cos(kx - \omega t - \delta) = E_0 \cos(kx - \omega t) \cos \delta + E_0 \sin(kx - \omega t) \sin \delta \\ &= E_0 \cos(kx - \omega t) + E_0 \delta \sin(kx - \omega t) = E_0 \cos(kx - \omega t) + E_0 \delta \cos \left( kx - \omega t - \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned}$$

Al limite l'onda incidente viene modificata da un contributo infinitesimo, sfasato di  $\pi/2$ . In sostanza questi calcoli mostrano come lo sfasamento misurato, che è in perfetto accordo con (13.73), possa essere formalmente attribuito a una variazione della velocità di fase; però l'effetto è dovuto al sovrapporsi di piccoli contributi, aventi la stessa velocità dell'onda incidente, ma in quadratura di fase con questa, così che l'onda risultante ha una fase che varia gradualmente avanzando nel mezzo.

# Riflessione e rifrazione delle onde

## 14.1 Introduzione

Le velocità di propagazione dei vari tipi di onde che abbiamo finora considerato dipende da proprietà fisiche del mezzo in cui avviene la propagazione. Dobbiamo pertanto aspettarci che nel passaggio di un'onda da un mezzo ad un altro la velocità di propagazione cambi; si osserva che in corrispondenza cambia di norma la direzione di propagazione (fenomeno della *rifrazione*) e che insieme alla rifrazione si verifica la *riflessione* dell'onda.

La situazione generale è dunque la seguente: l'incidenza di un'onda sulla superficie di separazione tra due mezzi dà origine a un'*onda riflessa* che si propaga all'indietro nello stesso mezzo in cui si propaga l'onda incidente e ad un'*onda rifratta* che si propaga nel secondo mezzo. Quest'onda è detta anche *trasmessa*, dal primo al secondo mezzo, e noi utilizzeremo indifferentemente i due termini.

Le relazioni che legano la direzione dell'onda riflessa e quella dell'onda trasmessa alla direzione dell'onda incidente saranno ricavate nel paragrafo 14.3 e risulteranno *indipendenti* dalla natura dell'onda. Invece le relazioni che legano l'ampiezza dell'onda incidente  $\xi$ , all'ampiezza dell'onda riflessa  $\xi_r$ , e all'ampiezza dell'onda trasmessa  $\xi_t$ , dipendono dalla natura dell'onda; esse saranno dedotte nel paragrafo 14.4.

Sebbene riflessione e rifrazione si verifichino con tutti i tipi di onde, noi ci occuperemo soprattutto del caso delle onde elettromagnetiche luminose in quanto la riflessione e la rifrazione della luce sono alla base dell'*ottica geometrica* (trattata nel capitolo 17). È questo il ramo della fisica che si occupa della propagazione della luce in uno o più mezzi trasparenti e delle proprietà degli strumenti ottici.

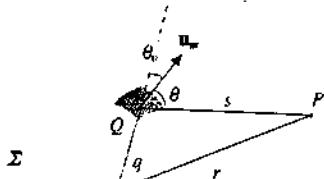
Nel paragrafo 14.2 enunceremo senza dimostrazione il *teorema di Kirchhoff*, che fornisce la formulazione matematica di un *postulato* introdotto originariamente da *Huygens* e modificato da *Fresnel*. Questo teorema può essere assunto come base di tutti i fenomeni che si incontrano nella propagazione delle onde, fenomeni che comprendono non solo la riflessione e la rifrazione, ma anche l'interferenza e la diffrazione, trattate nei capitoli 15 e 16.

## 14.2 Teorema di Kirchhoff. Principio di Huygens-Fresnel

Il *teorema di Kirchhoff* afferma che la perturbazione  $\xi_P(t)$  prodotta da un insieme di sorgenti in un punto  $P$  si può calcolare, pur ignorando la distribuzione spaziale delle sorgenti, quando, data una superficie chiusa  $\Sigma$  arbitraria che racchiude le sorgenti, si conoscano i valori di  $\xi$  e della sua derivata normale  $\partial\xi / \partial n$  in tutti i punti di  $\Sigma$ ; per derivata normale si intende la variazione di  $\xi$  per uno spostamento normale alla superficie.

Più precisamente, consideriamo la situazione mostrata in figura 14.1. In  $O$  è posta una sorgente puntiforme che produce in un punto qualsiasi  $Q$  della superficie  $\Sigma$  contenente  $O$  la perturbazione (12.50):

$$\xi(q, t) = \frac{\xi_0}{q} \cos(kq - \omega t) = \frac{\xi_0}{q} \cos \omega \left( \frac{q}{v} - t \right) ;$$



$q$  è la distanza di  $Q$  da  $O$ . Nel punto  $P$ , distante  $r$  da  $O$  e  $s$  da  $Q$ , il teorema di Kirchhoff fornisce la seguente espressione della perturbazione:

$$\xi_P(r, t) = \frac{\xi_0}{2\lambda} \oint \frac{1}{qs} (\cos \theta_0 + \cos \theta) \cos \left[ k(q+s) - \omega t - \frac{\pi}{2} \right] d\Sigma . \quad (14.1)$$

Figura 14.1

Nella (14.1)  $d\Sigma$  è l'elemento di superficie situato nell'intorno di  $Q$ .  $\theta_0$  e  $\theta$  gli angoli che  $OQ$  e  $QP$  formano con il versore  $u_n$  normale a  $d\Sigma$  e orientato verso l'esterno.  $\lambda$  è la lunghezza d'onda.

Nel caso specifico l'integrale a secondo membro della (14.1) deve portare al risultato

$$\xi_P(r, t) = \frac{\xi_0}{r} \cos(kr - \omega t)$$

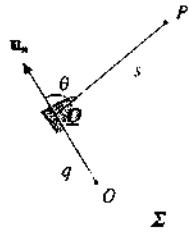


Figura 14.2

e possono nascere dubbi sull'effettiva utilità di (14.1). In realtà questa formula ha conseguenze molto importanti, come ora discutiamo in un caso di grande interesse.

Supponiamo che  $\Sigma$  coincida con una superficie sferica di raggio  $q$  emessa dalla sorgente  $O$ , posta quindi nel centro di  $\Sigma$  (figura 14.2); in questa ipotesi  $\theta_0 = 0$  e ponendo

$$A = \frac{\xi_0}{\lambda q} , \quad f(\theta) = \frac{1 + \cos \theta}{2} ,$$

la (14.1) si scrive

Teorema di Kirchhoff

$$\xi_P(r, t) = \oint \frac{A}{s} f(\theta) \cos \left[ k(q+s) - \omega t - \frac{\pi}{2} \right] d\Sigma .$$

La quantità

$$d\xi_P = \frac{A}{s} f(\theta) d\Sigma \cos \left[ k(q+s) - \omega t - \frac{\pi}{2} \right] \quad (14.2)$$

rappresenta un'onda sferica infinitesima, dove con questo termine intendiamo un'onda emessa dall'elemento infinitesimo di superficie  $d\Sigma$  e avente ampiezza infinitesima

$$dA^* = \frac{A}{s} f(\theta) d\Sigma = \xi_0 \frac{f(\theta) d\Sigma}{\lambda q s} , \quad (14.3)$$

con la dipendenza  $1/s$  tipica delle onde sferiche.

Nella fase dell'onda infinitesima, che ha la struttura generale (12.11), il termine spaziale  $k(q+s)$  corrisponde alla schematizzazione di una propagazione da  $O$  a  $Q$  e da  $Q$  a  $P$ ; inoltre è presente uno sfasamento fisso di  $\pi/2$  in *anticipo* rispetto all'onda primaria emessa dalla sorgente.

La funzione  $f(\theta)$ , detta *fattore di obliquità* o di *inclinazione*, implica una dipendenza dell'ampiezza dell'onda infinitesima dalla direzione di emissione: l'ampiezza assume il valore massimo  $A d\Sigma / s$  per  $\theta = 0$  e diminuisce monotonicamente al crescere dell'angolo  $\theta$  fino ad annullarsi per  $\theta = \pi$ , come mostrato in figura 14.3. In ciascun punto di  $\Sigma$  non si ha cioè un'onda infinitesima che si propaga verso la sorgente  $O$ .

L'insieme dei risultati si riassume nel modo seguente: *ogni elemento  $d\Sigma$  di una superficie d'onda  $\Sigma$  si può considerare formalmente come una sorgente di onde secondarie sferiche la cui ampiezza, proporzionale all'ampiezza dell'onda primaria e all'area  $d\Sigma$ , varia con l'angolo secondo la funzione  $f(\theta)$ . La perturbazione prodotta in un punto  $P$  si può sempre ottenere come sovrapposizione di tutte le onde sferiche elementari che raggiungono  $P$ .*

Tale enunciato costituisce la formulazione moderna del *principio di Huygens-Fresnel*, introdotto empiricamente per interpretare i fenomeni osservati nella propagazione delle onde elastiche; la giustificazione formale e l'aspetto analitico vengono appunto dal teorema di Kirchhoff (14.1).

Il principio di Huygens-Fresnel è uno *strumento di calcolo* molto utile: esso consente di determinare un nuovo fronte d'onda ad un certo istante a partire da un fronte d'onda precedente, sia quando l'onda si propaga liberamente, sia quando essa viene limitata da un ostacolo impenetrabile.

Nel caso che l'onda si muova attraverso lo spazio libero, noto all'istante  $t$  il fronte d'onda  $\Sigma$ , piano o sferico come nelle figure 14.4 e 14.5, per costruire il fronte d'onda  $\Sigma'$  in un istante successivo  $t' > t$  si considerano i punti di  $\Sigma$  come sorgenti di onde sferiche secondarie, emesse tutte nello stesso istante. Per ogni punto si traccia una semicirconferenza di raggio  $v(t' - t) = v \Delta t$  e il nuovo fronte d'onda  $\Sigma'$ , luogo dei punti di egual fase ovvero di eguale differenza di fase rispetto ai punti di  $\Sigma$ , risulta essere l'involucro di tutte queste onde. Con tale costruzione si ritrova un risultato del paragrafo 12.9, quello secondo cui la perturbazione si propaga per raggi rettilinei, normali ai fronti d'onda.

Nel caso che l'onda incontri uno *schermo impenetrabile* all'onda stessa e nel quale sia stata praticata un'apertura si può calcolare il fronte d'onda al di là dell'apertura eliminando le sorgenti che stanno su quella parte del fronte d'onda che non coincide con l'apertura, come mostrato nella figura 14.6. Se l'*apertura* ha una *larghezza d* grande rispetto alla *lunghezza d'onda*  $\lambda$ , l'onda che emerge dall'apertura conserva la forma del fronte d'onda incidente e possiamo dire che la *propagazione è rettilinea*. Se invece  $d$  è dell'ordine di  $\lambda$  o *inferiore* a  $\lambda$ , la considerazione delle singole onde elementari porta anche qualitativamente a far vedere che l'onda uscente tende a propagarsi in tutte le direzioni. Si dice che l'onda è stata *diffratta* dall'apertura e si comprende come in tal caso non abbia senso parlare di propagazione rettilinea (questa c'è prima e dopo l'apertura, ma non nel passaggio attraverso l'apertura). Tratteremo il fenomeno della diffrazione nel capitolo 16 e vedremo come il teorema di Kirchhoff sia fondamentale, in quanto permette sempre di calcolare l'ampiezza dell'onda diffratta in funzione della direzione di propagazione al di là dell'apertura e del rapporto  $\lambda / d$ .

Concludiamo questo paragrafo osservando che se lungo la direzione di propagazione di un'onda poniamo uno schermo che coincide con un fronte d'onda e su questo schermo pratichiamo  $n$  *aperture* aventi tutte la stessa area  $\Delta\Sigma$ , otteniamo in base al teorema di Kirchhoff un *sistema di n sorgenti*  $S_1, \dots, S_n$  di onde sferiche, ciascuna di ampiezza (14.3). Preso un punto  $P$  oltre lo schermo che dista  $s_i$  da  $S_i$  e  $s_j$  da  $S_j$ , la differenza di fase in  $P$  delle due onde emesse da  $S_i$  e  $S_j$  risulta

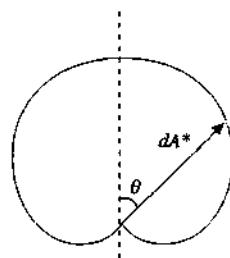


Figura 14.3

## Principio di Huygens-Fresnel

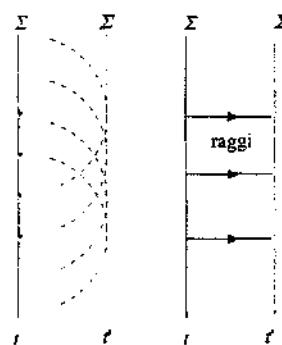


Figura 14.4

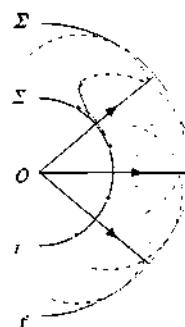
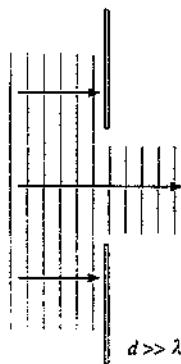


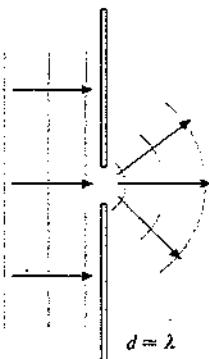
Figura 14.5



$$\phi_{i,j} = \left[ k(q + s_i) - \omega t - \frac{\pi}{2} \right] - \left[ k(q + s_j) - \omega t - \frac{\pi}{2} \right] = k(s_i - s_j)$$

e quindi è *costante nel tempo*; il ragionamento è valido per qualsiasi coppia di sorgenti. Dato che due onde la cui differenza di fase in un punto  $P$  risulti costante nel tempo si dicono *coerenti*, le  $n$  aperture costituiscono un *sistema di sorgenti coerenti*.

### 14.3 Le leggi della riflessione e della rifrazione



Quando un'onda attraversa una superficie di separazione tra due mezzi la sua velocità di propagazione varia. Se l'onda è un'onda armonica, caratterizzata da frequenza  $v$ , pulsazione  $\omega$ , lunghezza d'onda  $\lambda$  e numero d'onde  $k$ , nell'attraversamento della superficie pulsazione e frequenza non variano, in quanto determinate dalla sorgente che ha prodotto l'onda, e di conseguenza variano  $\lambda$  e  $k$ .

Dette  $v_1$  e  $v_2$  le velocità di propagazione dell'onda nei due mezzi, dal paragrafo 12.2 abbiamo

$$\omega = 2\pi v , \quad \lambda_1 v = v_1 , \quad \lambda_2 v = v_2 ,$$

$$k_1 = \frac{\omega}{v_1} = \frac{2\pi}{\lambda_1} , \quad k_2 = \frac{\omega}{v_2} = \frac{2\pi}{\lambda_2} \quad (14.4)$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{v_1}{v_2} , \quad \frac{k_1}{k_2} = \frac{v_2}{v_1} . \quad (14.5)$$

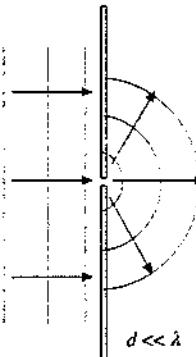


Figura 14.6

Se ad esempio  $v_1$  è maggiore di  $v_2$  allora  $\lambda_1 > \lambda_2$ : la lunghezza d'onda diminuisce nel passaggio da un mezzo in cui la velocità è maggiore ad uno in cui la velocità è minore.

In particolare, per un'onda elettromagnetica armonica che passi dal vuoto ( $v_1 = c$ ,  $\lambda_1 = \lambda_0$ ,  $k_1 = k_0$ ) ad un mezzo trasparente ( $v_2 = c/n$ ,  $\lambda_2 = \lambda$ ,  $k_2 = k$ ) valgono le relazioni

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n} , \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda_0} n = k_0 n , \quad (14.6)$$

se  $n$  è l'indice di rifrazione del mezzo, che supponiamo maggiore di 1, come avviene per la luce visibile; se è così la *lunghezza d'onda in un mezzo è sempre minore della lunghezza d'onda nel vuoto*.

Consideriamo ora un'onda piana, rappresentata dalla (12.45),

$$\xi_i = \xi_0 \cos(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega t) ,$$

che incida lungo la direzione individuata dal vettore  $\mathbf{k}_i$  sulla superficie di separazione tra due mezzi in cui le velocità di propagazione siano  $v_1$  e  $v_2$ . Dall'onda incidente ha origine un'onda riflessa

$$\xi_r = \xi_0 r \cos(\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} - \omega t) ,$$

che si muove nella direzione di  $\mathbf{k}_r$  con velocità  $v_1$  nel primo mezzo, e un'onda rifratta

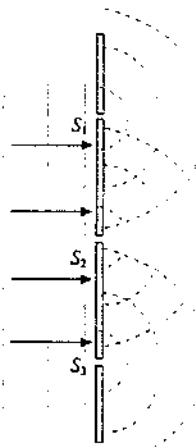


Figura 14.7

$$\xi_r = \xi_0 \cos(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega t) ,$$

che si muove nel secondo mezzo con velocità  $v_2$  lungo la direzione di  $\mathbf{k}_r$ .

Sulla superficie di separazione le *fasi* delle tre onde devono risultare in *ogni istante eguali*,  $\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega t = \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} - \omega t = \mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r} - \omega t$ , e quindi

$$\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r} . \quad (14.7)$$

Questa condizione assicura in ogni istante il necessario raccordo tra l'onda incidente, l'onda riflessa e l'onda rifratta.

Supponiamo che la superficie di separazione coincida con il piano  $xy$ , di equazione  $z = 0$ , su cui pertanto si trovano sia l'origine  $O$  che il punto  $P(x, y)$  di incidenza, e che il vettore  $\mathbf{k}_i$  giaccia nel piano  $yz$ . Si tratta di ipotesi che non influenzano i risultati ricavabili da (14.7) in quanto questa, come relazione vettoriale, non dipende dal sistema di riferimento. Scriviamo allora

$$\mathbf{r} = x \mathbf{u}_x + y \mathbf{u}_y , \quad \mathbf{k}_i = k_{iy} \mathbf{u}_y + k_{iz} \mathbf{u}_z ,$$

$$\mathbf{k}_r = k_{rx} \mathbf{u}_x + k_{ry} \mathbf{u}_y + k_{rz} \mathbf{u}_z , \quad \mathbf{k}_n = k_{nx} \mathbf{u}_x + k_{ny} \mathbf{u}_y + k_{nz} \mathbf{u}_z ,$$

e da (14.7) ricaviamo

$$k_{iy} y = k_{nx} x + k_{ny} y = k_{nx} x + k_{ny} y .$$

Queste eguaglianze devono valere per *qualsiasi valore* di  $x$  e  $y$ , cioè per qualsiasi posizione di  $P$  sul piano, e quindi deve essere:

$$k_{nx} = k_{ny} = 0 , \quad (14.8)$$

$$k_{iy} = k_{ry} = k_{ny} . \quad (14.9)$$

Definito come *piano di incidenza* il piano ortogonale alla superficie di separazione individuato da  $\mathbf{k}_i$  e da  $\mathbf{u}_z$ , nel nostro caso parallelo al piano  $yz$ , da (14.8) si deduce che anche  $\mathbf{k}_r$  e  $\mathbf{k}_n$  devono stare sul piano di incidenza e si enuncia pertanto la *prima legge della riflessione e della rifrazione*:

1) le direzioni di propagazione dell'onda incidente, dell'onda riflessa e dell'onda rifratta giacciono nel piano di incidenza, individuato dalla direzione di incidenza e dalla normale alla superficie di separazione nel punto di incidenza.

Nella figura 14.10 sono indicati gli angoli  $\theta_i$  di incidenza,  $\theta_r$  di riflessione e  $\theta_n$  di rifrazione, formati dai vettori di propagazione con la normale alla superficie di separazione; osserviamo che tali angoli sono sempre minori di  $\pi/2$ . Da (14.4)

$$k_{iy} = k_i \sin \theta_i = \frac{\omega}{v_1} \sin \theta_i , \quad k_{ry} = \frac{\omega}{v_1} \sin \theta_r , \quad k_{ny} = \frac{\omega}{v_2} \sin \theta_n ,$$

e inserendo in (14.9) troviamo

$$\sin \theta_i = \sin \theta_r , \quad \frac{1}{v_1} \sin \theta_i = \frac{1}{v_2} \sin \theta_n .$$

Poiché gli angoli sono minori di  $\pi/2$  in conclusione troviamo

$$\theta_i = \theta_r , \quad (14.10) \quad \text{Riflessione}$$

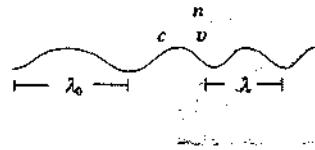


Figura 14.8

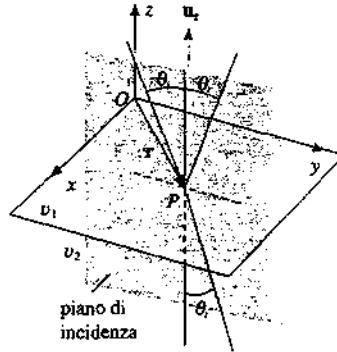


Figura 14.9

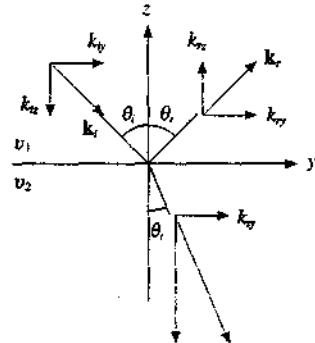


Figura 14.10

## Rifrazione

$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_r} = \frac{v_1}{v_2}, \quad (14.11)$$

relazioni che costituiscono la *seconda legge della riflessione e della rifrazione*:

- 2) l'angolo di riflessione è eguale all'angolo di incidenza;
- 3) il rapporto tra il seno dell'angolo di incidenza e il seno dell'angolo di rifrazione è costante ed eguale al rapporto tra le velocità di propagazione.

Queste tre leggi, dedotte da considerazioni sulla continuità della fase dell'onda incidente, riflessa e rifratta, sono valide per tutti i tipi di onde. Se la superficie è curva la costruzione geometrica è la stessa, prendendo come piano  $xy$  il piano tangente alla superficie nel punto di incidenza.

## Esempio 14.1

Dedurre dalle relazioni trovate il legame tra i moduli dei vettori  $\mathbf{k}$  e tra le componenti lungo l'asse  $z$ .

## Soluzione

Sappiamo che  $k_i = \omega / v_1$ ,  $k_r = \omega / v_1$  e  $k_o = \omega / v_2$ ; quindi i moduli di  $\mathbf{k}_i$  e  $\mathbf{k}_o$  sono uguali e per le componenti  $z$  si ha  $k_{iz} = -k_{oz}$ . Vediamo poi che

$$k_i v_1 = k_o v_2 \Rightarrow \frac{k_i}{k_o} = \frac{v_2}{v_1},$$

che è la (14.5). Per le componenti  $z$  troviamo

$$k_{iz} = -k_i \cos \theta_i, \quad k_{oz} = k_o \cos \theta_r,$$

$$\Rightarrow \frac{k_{iz}}{k_{oz}} = -\frac{v_2 \cos \theta_r}{v_1 \cos \theta_i} = -\frac{\sin \theta_i \cos \theta_r}{\sin \theta_r \cos \theta_i} = -\frac{\tan \theta_r}{\tan \theta_i}.$$

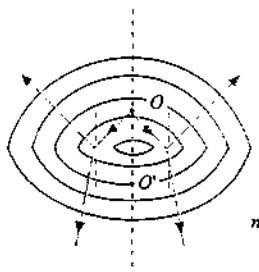


Figura 14.11

Considerando una superficie di separazione piana e un'onda incidente piana che rappresentiamo tramite raggi paralleli, i raggi riflessi sono tra loro paralleli e lo stesso avviene per i raggi rifratti, secondo (14.10) e (14.11): concludiamo così che i *fronti d'onda riflessi e rifratti sono piani*. Il mantenimento della forma del fronte d'onda non si verifica per un'onda sferica incidente sulla superficie piana. Ragionando soltanto per via grafica, come mostrato nella figura 14.11, i raggi riflessi ammettono un centro comune (come se provenissero dal punto  $O'$ ) per cui l'onda riflessa è sferica, anche se ciò non accade per i raggi rifratti: l'onda rifratta non è sferica. Se la superficie di separazione non è piana, la forma d'onda incidente viene in generale alterata, sia in riflessione che in rifrazione.

## Riflessione e rifrazione della luce

Per un'onda luminosa piana che attraversa la superficie di separazione tra due mezzi trasparenti aventi indici di rifrazione  $n_1$  e  $n_2$  la (14.11) si può scrivere

$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_r} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{c}{n_1} \cdot \frac{n_2}{c} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Uniformando la simbologia scriviamo  $\theta_1 = \theta_i$ ,  $\theta_2 = \theta_r$ , con il che

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{n_2}{n_1} = n_{2,1} \quad \text{ovvero} \quad n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad (14.12) \quad \text{Legge di Snell}$$

Il rapporto  $n_{2,1} = n_2 / n_1$  si chiama *indice di rifrazione relativo del secondo mezzo rispetto al primo*. Nella forma (14.12) la legge di rifrazione della luce è nota come *legge di Snell* e viene enunciata dicendo che il *rappporto tra il seno dell'angolo di incidenza e il seno dell'angolo di rifrazione è costante ed eguale all'indice di rifrazione relativo tra i due mezzi*.

È bene precisare che la costanza del rapporto (14.12), come del rapporto (14.11), è verificata per un'onda di ben determinata lunghezza d'onda; se cambia la lunghezza d'onda può cambiare il rapporto  $\sin \theta_1 / \sin \theta_2$  nel caso che il secondo mezzo sia dispersivo. Ritorneremo tra breve sull'argomento.

Osserviamo che la (14.12) può essere assunta come *definizione operativa* dell'indice di rifrazione di una sostanza trasparente relativo ad un mezzo campione, ovvero dell'indice assoluto rispetto al vuoto; per eseguire la misura, che è ricondotta alla misura dei due angoli  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , effettuabile con buona precisione, deve essere possibile definire una superficie di separazione tra il mezzo in esame e il mezzo esterno con indice di rifrazione noto. Il metodo quindi non si applica ai gas, per i quali la misura dell'indice di rifrazione si effettua con grande precisione tramite un dispositivo che vedremo nel paragrafo 15.4. Rimandiamo alla tabella 17.1 del capitolo 17 per i valori numerici dell'indice di rifrazione di alcune sostanze trasparenti alla luce visibile.

Nella legge della riflessione (14.10) non compare alcuna caratteristica del mezzo in cui si propaga l'onda incidente e l'onda riflessa, in particolare non compare l'indice di rifrazione: l'angolo di riflessione è sempre lo stesso, eguale all'angolo di incidenza, qualunque sia la lunghezza d'onda della luce incidente e non c'è dispersione.

Per completezza menzioniamo che le leggi (14.10) e (14.12) sono ricordate anche come *leggi di Cartesio* (Descartes).

### Riflessione totale

Quando un'onda luminosa piana si propaga da un mezzo con indice di rifrazione  $n_1$  ad un mezzo con indice di rifrazione  $n_2 > n_1$ , da (14.12) si ha

$$\sin \theta_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_1 \Rightarrow \theta_2 < \theta_1 \quad \text{se} \quad n_2 > n_1 .$$

Nell'attraversamento della superficie di separazione la direzione di propagazione dell'onda piana trasmessa si *avvicina* alla normale alla superficie. Ciò si verifica ad esempio quando un fascio di luce che si propaga nel vuoto (o nell'aria che ha anch'essa praticamente  $n = 1$ ) incontra la superficie di una sostanza trasparente con indice di rifrazione  $n$ , come mostrato nella figura 14.12; essendo  $n_1 = 1$  e  $n_2 = n$  la legge della rifrazione si scrive  $\sin \theta_2 = \sin \theta_1 / n$ .

Nel caso in cui l'onda passi da un mezzo con indice di rifrazione  $n_1$  ad un mezzo con indice di rifrazione  $n_2 < n_1$ ,

$$\sin \theta_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_1 \Rightarrow \theta_2 > \theta_1 \quad \text{se} \quad n_2 < n_1 .$$

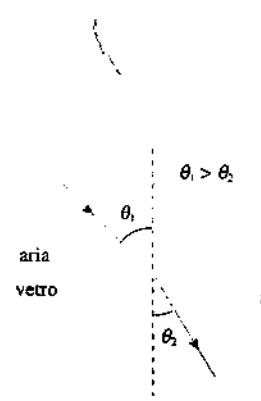


Figura 14.12

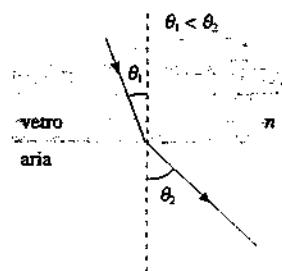


Figura 14.13

La direzione di propagazione dell'onda piana trasmessa si *allontana* dalla normale alla superficie di separazione. Seguendo lo stesso esempio di prima ciò si verifica nel passaggio della luce da un mezzo trasparente ( $n_1 = n$ ) al vuoto o all'aria ( $n_2 = 1$ ) e si ha  $\sin \theta_2 = n \sin \theta_1$ .

La seconda situazione ( $\theta_2 > \theta_1$ ) presenta un *caso limite*, illustrato nella figura 14.14; al crescere dell'angolo di incidenza  $\theta_1$ , l'angolo di trasmissione  $\theta_2$ , che cresce più rapidamente, raggiunge ad un certo punto il valore  $\pi/2$ , precisamente in corrispondenza al valore  $\theta_0$  dell'angolo di incidenza tale che

$$\sin \theta_0 = \frac{n_2}{n_1} . \quad (14.13)$$

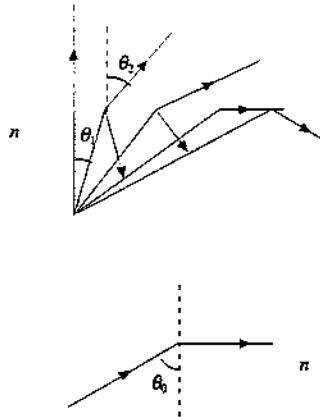


Figura 14.14

Per valori di  $\theta_1$  maggiori di  $\theta_0$  non esistono valori reali di  $\theta_2$  e ciò significa che l'onda rifratta non si forma più, ovvero che l'onda incidente è *totalmente riflessa* all'interno del primo mezzo. Il fenomeno si chiama riflessione totale e l'angolo  $\theta_0$  è detto *angolo limite*.

In un vetro con indice di rifrazione  $n_1 = 1.5$  l'angolo limite se il mezzo esterno è l'aria ( $n_2 = 1$ ) è  $\theta_0 = \arcsen(1/1.5) = 41.8^\circ$ , se invece il mezzo esterno è l'acqua ( $n_2 = 1.33$ )  $\theta_0 = \arcsen(1.33/1.5) = 62.7^\circ$ ; per la coppia acqua-aria infine si ha  $\theta_0 = \arcsen(1/1.33) = 48.6^\circ$ .

Un'utilizzazione interessante del fenomeno della riflessione totale si ha nel trasporto di un fascio luminoso lungo un determinato percorso tramite una *guida di luce* costituita ad esempio da un cilindro pieno di vetro o di materiale plastico trasparente immerso in un mezzo con indice di rifrazione inferiore. La luce che penetra nel cilindro attraverso una base incide sulle pareti laterali formando un angolo superiore all'angolo limite e viene riflessa totalmente molte volte, senza apprezzabili perdite, fino ad uscire dall'altra base. La struttura può essere anche curva e, se si usano sottili *fibre di vetro* che sono molto flessibili, in pratica può essere compiuto qualsiasi percorso. Questa tecnica è usata in medicina per l'osservazione di organi interni (*endoscopia*): con un fascio di fibre si convoglia la luce di una sorgente esterna sulla parte da osservare e con un altro fascio si riceve la luce diffusa dalla parte illuminata. Un'altra applicazione importante e in rapido sviluppo si ha nel campo delle *telecomunicazioni*.

#### *Dispersione della luce in un mezzo trasparente*

Nell'enunciare la legge (14.12) della rifrazione abbiamo detto che il rapporto  $\sin \theta_1 / \sin \theta_2$  è costante: ciò è rigorosamente vero se la luce incidente ha una sola lunghezza d'onda ovvero, come si dice, se è *monocromatica*. Qualora nel fascio incidente siano contenute più lunghezze d'onda, il secondo membro della (14.12) assume valori diversi per ogni lunghezza d'onda: ad un dato angolo di incidenza corrispondono più angoli di rifrazione.

Se ad esempio un sottile fascio di luce bianca, che contiene tutte le lunghezze d'onda visibili, incide su una lastra di vetro, la luce riflessa è ancora bianca mentre il fascio trasmesso nel vetro è composto da una serie di raggi di colore diverso, ognuno con un diverso angolo di rifrazione (figura 14.16). Nel paragrafo 13.9 abbiamo determinato la dipendenza dell'indice di rifrazione dalla lunghezza d'onda, espressa dalla *legge di Cauchy* (13.62). L'indice diminuisce al crescere della lunghezza d'onda per cui, a parità di  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  è più piccolo per il violetto che per il rosso: il raggio rifratto violetto è più vicino alla normale e quindi è più deviato di quanto lo sia il raggio rosso. È proprio questo aspetto del fenomeno che ha dato origine al termine *dispersione della luce*.



Figura 14.15



Figura 14.16

**Esempio 14.2**

Un sottile fascio luminoso monocromatico di lunghezza d'onda  $\lambda_0 = 0.589 \mu\text{m}$  incide con un angolo  $\theta_1 = 30^\circ$  su una lastra di vetro flint spessa  $h = 2 \text{ cm}$  e con indice di rifrazione  $n = 1.66$  alla lunghezza d'onda  $\lambda_0$ . Determinare la posizione del fascio di luce all'uscita dalla lastra. Discutere qualitativamente il caso della luce bianca.

**Soluzione**

La legge di Snell (14.12) applicata alle due superficie della lastra con i simboli della figura 14.17 dà

$$\sin \theta_2 = \frac{1}{n} \sin \theta_1, \quad \sin \theta_3 = n \sin \theta_2 \Rightarrow \theta_3 = \theta_1.$$

La lastra non altera la direzione di propagazione del fascio incidente, ma provoca uno spostamento laterale  $d$  pari a

$$d = \frac{h \sin (\theta_1 - \theta_2)}{\cos \theta_2},$$

come si verifica facilmente. Tenuto conto che  $\sin (\theta_1 - \theta_2) = \sin \theta_1 \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \sin \theta_2$  e che  $\sin \theta_2 = \sin \theta_1 / n$ , si arriva all'espressione

$$d = h \sin \theta_1 \left( 1 - \frac{\cos \theta_1}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_1}} \right).$$

Numericamente  $d = 4.53 \text{ mm}$ .

Se la luce non è monocromatica, avviene il fenomeno della dispersione e lo spostamento è funzione di  $\lambda$ ,  $d(\lambda)$ : si hanno in uscita vari raggi paralleli di diverso colore. Misurando la funzione  $d(\lambda)$  è possibile ricavare  $n(\lambda)$  e verificare la formula di Cauchy con buona precisione.

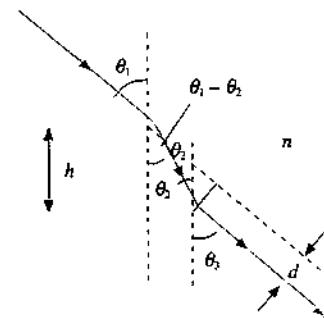


Figura 14.17

**Nota. Deduzione delle leggi della riflessione e della rifrazione dal principio di Huygens-Fresnel**

In figura 14.18  $AB$  è la traccia del fronte d'onda di un'onda piana che incide con angolo di incidenza  $\theta_1$  su una superficie piana di separazione tra due mezzi in cui le velocità di propagazione sono  $v_1$  e  $v_2$ . Poniamo  $t = 0$  nell'istante in cui il punto  $A$  del fronte d'onda incidente si trova sulla superficie di separazione; il punto  $B$  dello stesso fronte d'onda raggiunge la posizione  $C$  sulla superficie di separazione nell'istante  $t = BC/v_1$ . Nello stesso intervallo di tempo l'onda elementare emessa in  $A$  verso il primo mezzo, secondo il principio di Huygens-Fresnel, compie il percorso  $AD = v_1 t = v_1 BC/v_1 = BC$ , mentre l'onda elementare emessa verso il secondo mezzo compie il percorso  $AE = v_2 t = v_2 BC/v_1$ . Pertanto  $D$  e  $C$  da una parte,  $E$  e  $C$  dall'altra sono punti di egual fase, cioè stanno sullo stesso fronte d'onda. Siamo certi che questi fronti d'onda (riflesso e rifratto) sono piani in quanto, pur non conoscendo a priori le leggi che legano tra loro gli angoli di incidenza  $\theta_1$ , riflessione  $\theta_r$ , e rifrazione  $\theta_t$ , assumiamo che raggi incidenti paralleli vengano riflessi e rifratti allo stesso modo e cioè restino paralleli dopo la riflessione e dopo la rifrazione. Tali piani sono gli inviluppi delle onde sferiche elementari emesse dai vari punti compresi tra  $A$  e  $C$  raggiunti in istanti successivi dal fronte d'onda  $AB$ . Consideriamo ora i triangoli  $ABC$  e  $ACD$  della figura 14.19. Essi sono eguali in quanto sono rettangoli e hanno due cateti eguali: ne segue che sono eguali agli angoli al vertice e quindi in particolare  $\theta_r = \theta_t$ . Dai triangoli  $ABC$  e  $ACE$  si ricava

$$\sin \theta_r = \frac{BC}{AC}, \quad \sin \theta_t = \frac{AE}{AC} \Rightarrow \frac{\sin \theta_r}{\sin \theta_t} = \frac{BC}{AE} = \frac{t v_1}{t v_2} = \frac{v_1}{v_2}.$$

Abbiamo così ritrovato le relazioni (14.10) e (14.11).

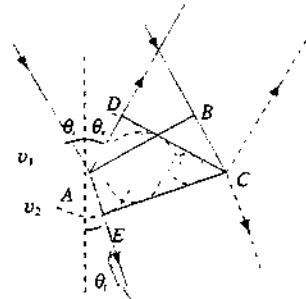


Figura 14.18

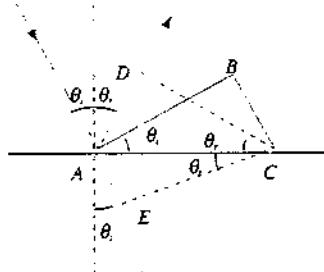


Figura 14.19

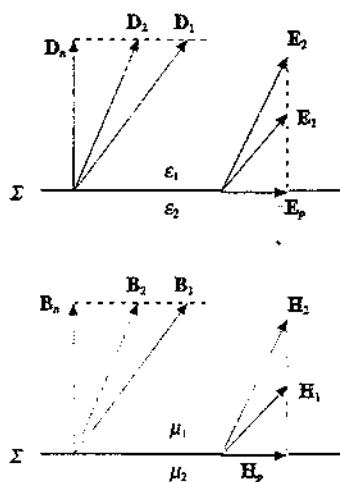


Figura 14.20

#### 14.4 Intensità delle onde elettromagnetiche riflesse e rifratte. Formule di Fresnel

Nel paragrafo 14.3 abbiamo visto le relazioni geometriche tra le direzioni di propagazione dell'onda elettromagnetica incidente, riflessa e rifratta, indipendenti dall'ampiezza dell'onda incidente:

$$\theta_i = \theta_r, \quad \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_r} = \frac{n_2(\omega)}{n_1(\omega)} = \sqrt{\frac{\kappa_2(\omega)}{\kappa_1(\omega)}} \quad (14.14)$$

L'ultima eguaglianza sfrutta la relazione (13.10), ovvero (13.54), tra indice di rifrazione  $n(\omega)$  e costante dielettrica relativa  $\kappa_e(\omega)$ .

Le relazioni tra le ampiezze si ricavano dalle equazioni di Maxwell, precisamente dalle condizioni di continuità dei campi, già derivate a partire dalle suddette equazioni. Ricordiamo che dati due dielettrici omogenei e isotropi, di costanti dielettriche  $\epsilon_1 = \epsilon_0 \kappa_1$ ,  $\epsilon_2 = \epsilon_0 \kappa_2$  e permeabilità magnetiche  $\mu_1$  e  $\mu_2$ , è possibile stabilire relazioni tra le componenti del campo elettrico  $\mathbf{E}$ , dell'induzione dielettrica  $\mathbf{D}$ , del campo magnetico  $\mathbf{B}$  e del campo  $\mathbf{H}$  in un mezzo e nell'altro, in punti molto vicini alla superficie di separazione  $\Sigma$  tra i mezzi. Individuando col simbolo  $p$  le componenti parallele a  $\Sigma$  e col simbolo  $n$  le componenti normali, si ha

$$\frac{D_{1,p}}{\epsilon_0 \kappa_1} = E_{1,p} = E_{2,p} = \frac{D_{2,p}}{\epsilon_0 \kappa_2}, \quad H_{1,n} = \frac{B_{1,p}}{\mu_1} = \frac{B_{2,p}}{\mu_2} = H_{2,p}, \\ D_{1,n} = \epsilon_0 \kappa_1 E_{1,n} = \epsilon_0 \kappa_2 E_{2,n} = D_{2,n}, \quad B_{1,n} = \mu_1 H_{1,n} = \mu_2 H_{2,n} = B_{2,n}; \quad (14.15)$$

sono cioè continue le componenti parallele di  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  e le componenti normali di  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$ , discontinue le altre. Le relazioni (14.15) sono state ricavate nei paragrafi 5.7, 9.5 e valgono sia nei casi statici che nei casi *dinamici*, cioè quando i campi dipendono dal tempo.

Se sulla superficie  $\Sigma$  incide un'onda elettromagnetica piana

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_{0,i} \sin(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega t),$$

essa dà origine ad un'onda riflessa e un'onda trasmessa,

$$\mathbf{E}_r = \mathbf{E}_{0,r} \sin(\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} - \omega t), \quad \mathbf{E}_t = \mathbf{E}_{0,t} \sin(\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r} - \omega t).$$

Su  $\Sigma$  l'onda riflessa si somma all'onda incidente dando il campo elettrico risultante nel primo mezzo,  $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r$ ; nel secondo mezzo il campo elettrico vale  $\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_t$ . Analoghe relazioni valgono per i campi magnetici,  $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_i + \mathbf{B}_r$ ,  $\mathbf{B}_2 = \mathbf{B}_t$ . A questi campi, e ai campi ausiliari  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \kappa \mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H} = \mathbf{B} / \mu$ , si applicano le relazioni (14.15).

Dal momento che sulla superficie  $\Sigma$  la fase di tutte le onde implicate è la stessa, le (14.15) si trasformano in relazioni tra le ampiezze dei campi incidenti, riflessi e rifratti.

#### Intensità riflessa e rifratta per onde polarizzate nel piano di incidenza

Nella figura 14.21 è indicata la situazione particolare in cui il campo elettrico incidente è *polarizzato rettilineamente nel piano  $\pi$  di incidenza*; dimostriamo innanzitutto che, come mostrato in figura, il *campo elettrico riflesso* e quello *rifratto* sono anch'essi *polarizzati nel piano  $\pi$* . Per ipotesi il campo magnetico  $\mathbf{B}_i$  è

ortogonale al disegno e rivolto verso il lettore; inoltre il campo  $\mathbf{B}$  è continuo nel passaggio attraverso  $\Sigma$  in quanto assumiamo trascurabili le proprietà magnetiche dei dielettrici ( $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ ). Dunque  $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_i + \mathbf{B}_r = \mathbf{B}_2 = \mathbf{B}_t$ . Allora se  $\mathbf{B}_r$ , pur restando ortogonale alla direzione di propagazione del raggio riflesso, non fosse ortogonale al piano  $\pi$  acquistando ad esempio una componente  $B^*$  nel piano  $\pi$ , anche  $\mathbf{B}_t$  per continuità dovrebbe acquistare la stessa componente e non risulterebbe più ortogonale alla direzione di propagazione del raggio rifratto (figura 14.22). Quindi  $\mathbf{B}_r$  e  $\mathbf{B}_t$  devono essere ortogonali a  $\pi$  come  $\mathbf{B}_i$  e  $\mathbf{E}_i$ , ed  $\mathbf{E}_t$  devono stare su  $\pi$ .

Chiamiamo  $E_{0,\pi}^i, E_{0,\pi}^r, E_{0,\pi}^t$  le ampiezze dei campi e applichiamo le (14.15):

$$E_{0,\pi}^i \cos \theta_i - E_{0,\pi}^r \cos \theta_i = E_{0,\pi}^t \cos \theta_t .$$

$$\kappa_1 E_{0,\pi}^i \sin \theta_i + \kappa_1 E_{0,\pi}^r \sin \theta_i = \kappa_2 E_{0,\pi}^t \sin \theta_t .$$

Tenuto conto della (14.14)  $\kappa_2 / \kappa_1 = (n_2 / n_1)^2 = (\sin \theta_i / \sin \theta_r)^2$ , si ricava per le ampiezze incognite  $E_{0,\pi}^r = r_\pi E_{0,\pi}^i, E_{0,\pi}^t = t_\pi E_{0,\pi}^i$ , con

$$r_\pi = \frac{E_{0,\pi}^r}{E_{0,\pi}^i} = \frac{n_2 \cos \theta_i - n_1 \cos \theta_r}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_r} = \frac{\sin \theta_i \cos \theta_i - \sin \theta_r \cos \theta_r}{\sin \theta_i \cos \theta_i + \sin \theta_r \cos \theta_r} = \frac{\tan(\theta_i - \theta_r)}{\tan(\theta_i + \theta_r)} ,$$

$$t_\pi = \frac{E_{0,\pi}^t}{E_{0,\pi}^i} = \frac{2 n_1 \cos \theta_i}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_r} = \frac{2 \sin \theta_i \cos \theta_i}{\sin \theta_i \cos \theta_i + \sin \theta_r \cos \theta_r} = \frac{2 \sin \theta_i \cos \theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_r) \cos(\theta_i - \theta_r)} .$$
(14.16)

Le (14.16), dette *formule di Fresnel nel piano  $\pi$* , definiscono i coefficienti  $r_\pi$  e  $t_\pi$  che permettono di calcolare a partire dall'ampiezza incidente le ampiezze riflesse e rifatte: essi dipendono soltanto dall'angolo di incidenza e dall'angolo di rifrazione, ovvero dall'angolo di incidenza e dall'indice di rifrazione relativo.

Ciascuna delle onde considerate ha un'intensità data da (13.26),

$$I_\pi^i = \frac{n_1}{2 Z_0} (E_{0,\pi}^i)^2, I_\pi^r = \frac{n_1}{2 Z_0} (E_{0,\pi}^r)^2, I_\pi^t = \frac{n_2}{2 Z_0} (E_{0,\pi}^t)^2 ,$$

e una corrispondente potenza che scriviamo

$$W_\pi^i = \Sigma_i I_\pi^i, W_\pi^r = \Sigma_r I_\pi^r = , W_\pi^t = \Sigma_t I_\pi^t .$$

$\Sigma_i$  è la sezione del fascio incidente: la sezione del fascio riflesso è eguale,  $\Sigma_r = \Sigma_i$ , come si deduce dalla figura 14.23, mentre per la sezione del fascio trasmesso si ha:

$$\Sigma_t = \Sigma_0 \cos \theta_i, \Sigma_r = \Sigma_0 \cos \theta_r \Rightarrow \frac{\Sigma_t}{\cos \theta_i} = \frac{\Sigma_r}{\cos \theta_r} \Rightarrow \frac{\Sigma_r}{\Sigma_t} = \frac{\cos \theta_i}{\cos \theta_r} .$$

La percentuale di potenza riflessa è

$$\frac{W_\pi^r}{W_\pi^i} = \frac{\Sigma_r I_\pi^r}{\Sigma_i I_\pi^i} = \left( \frac{E_{0,\pi}^r}{E_{0,\pi}^i} \right)^2 = r_\pi^2$$

e questo rapporto si chiama *coefficiente di riflessione* nel piano  $\pi$ :

$$R_\pi = \frac{W_\pi^r}{W_\pi^i} = r_\pi^2 = \frac{\tan^2(\theta_i - \theta_r)}{\tan^2(\theta_i + \theta_r)} .$$
(14.17)

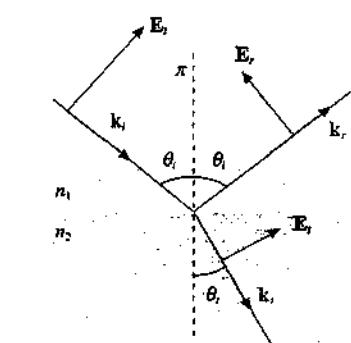


Figura 14.21

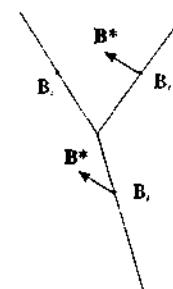


Figura 14.22

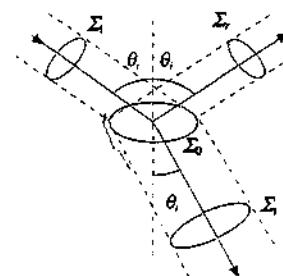


Figura 14.23

Coeficiente di riflessione  
nel piano  $\pi$

In modo analogo si procede per la percentuale di potenza trasmessa, facendo attenzione al fatto che  $\Sigma_i$  e  $\Sigma_t$  non sono eguali:

$$\frac{W_\pi^t}{W_\pi^i} = \frac{\Sigma_t I_\pi^t}{\Sigma_i I_\pi^i} = \frac{n_2 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i} \left( \frac{E_{0,\pi}^t}{E_{0,\pi}^i} \right)^2 = \frac{n_2 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i} t_\pi^2 ;$$

il coefficiente di trasmissione nel piano  $\pi$  è quindi

Coefficiente di trasmissione  
nel piano  $\pi$

$$T_\pi = \frac{W_\pi^t}{W_\pi^i} = \frac{n_2 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i} t_\pi^2 = \frac{\sin 2\theta_i \sin 2\theta_i}{\sin^2(\theta_i + \theta_r) \cos^2(\theta_i - \theta_r)} \quad (14.18)$$

Si verifica che

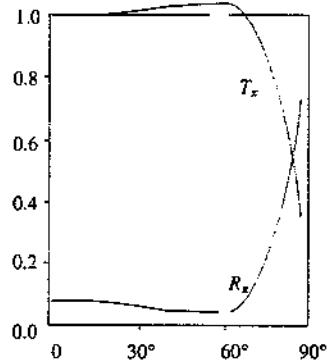


Figura 14.24

in accordo con il principio di conservazione dell'energia. Nella pratica si approfitta di (14.19) per calcolare solo  $R_\pi$  e ottenere  $T_\pi$  come  $1 - R_\pi$ , o viceversa.

La figura 14.24 mostra  $R_\pi$  e  $T_\pi$  in funzione di  $\theta_i$  nel caso aria-vetro ( $n_1 = 1$ ,  $n_2 = 1.5$ ). La maggior parte della luce viene trasmessa, salvo che per angoli di incidenza vicini a  $90^\circ$ . Si nota che per un particolare valore di  $\theta_i$  non c'è luce riflessa; e infatti analizzando le (14.16) si trova che  $r_\pi$  può essere nullo, mentre  $t_\pi$  non si annulla mai. Torneremo per esteso su questo punto nel seguito del paragrafo. Vedremo anche cosa succede se  $\theta_i = \theta_r = 0$ .

#### Intensità riflessa e rifratta per onde polarizzate ortogonalmente al piano di incidenza

Supponiamo ora che il campo elettrico incidente sia polarizzato rettilineamente ortogonalmente al piano di incidenza  $\pi$ . Nella figura 14.25 il campo elettrico è rivolto verso il lettore e il campo magnetico è orientato di conseguenza, in accordo con (13.9). Anche in questo caso si dimostra che i campi elettrici riflesso e rifratto mantengono la polarizzazione del campo elettrico incidente, per cui i campi magnetici stanno tutti su  $\pi$ . Dalle (14.15) si ha, per le componenti parallele e normali di  $\mathbf{B}$ ,

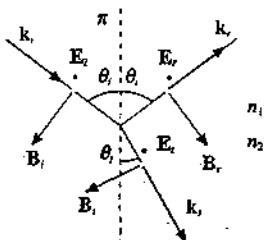


Figura 14.25

$$-\frac{B_{0,\pi}^i}{\mu_1} \cos \theta_i + \frac{B_{0,\pi}^r}{\mu_1} \cos \theta_i = -\frac{B_{0,\pi}^t}{\mu_2} \cos \theta_i , \\ B_{0,\pi}^i \sin \theta_i + B_{0,\pi}^r \sin \theta_i = B_{0,\pi}^t \sin \theta_i .$$

Dato che in modulo  $B = E / v$  e che con ottima approssimazione  $\mu_1 = \mu_2$ , ricaviamo per i campi elettrici

$$-E_{0,\sigma}^i \cos \theta_i + E_{0,\sigma}^r \cos \theta_i = -v_1/v_2 E_{0,\sigma}^t \sin \theta_i ,$$

$$E_{0,\sigma}^i \sin \theta_i + E_{0,\sigma}^r \sin \theta_i = v_1/v_2 E_{0,\sigma}^t \sin \theta_i ;$$

col simbolo  $\sigma$  indichiamo che il campo elettrico è parallelo ad un piano  $\sigma$  ortogonale al piano di incidenza  $\pi$ . Tenuto conto di (14.11) e (14.12) si ottiene  $E_{0,\sigma}^r = r_\sigma E_{0,\sigma}^i$ ,  $E_{0,\sigma}^t = t_\sigma E_{0,\sigma}^i$ , con i coefficienti dati dalle formule di Fresnel nel piano  $\sigma$ :

$$r_\sigma = \frac{E_{0,\sigma}}{E_{0,i}^i} = \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_r}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_r} = -\frac{\sin \theta_i \cos \theta_i - \sin \theta_r \cos \theta_r}{\sin \theta_i \cos \theta_i + \sin \theta_r \cos \theta_r} = -\frac{\sin(\theta_i - \theta_r)}{\sin(\theta_i + \theta_r)}, \quad (14.20)$$

$$t_\sigma = \frac{E_{0,\sigma}}{E_{0,i}^i} = \frac{2 n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_r} = \frac{2 \sin \theta_i \cos \theta_i}{\sin \theta_i \cos \theta_i + \sin \theta_r \cos \theta_r} = \frac{2 \sin \theta_i \cos \theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_r)}.$$

Procedendo esattamente come nel caso precedente si trovano le espressioni per i coefficienti di riflessione e di trasmissione nel piano  $\sigma$ :

$$R_\sigma = \frac{W_\sigma^i}{W_\sigma^i} = \frac{I_\sigma^i}{I_\sigma^i} = r_\sigma^2 = \frac{\sin^2(\theta_i - \theta_r)}{\sin^2(\theta_i + \theta_r)}, \quad (14.21)$$

Coefficienti di riflessione  
e trasmissione nel piano  $\sigma$

$$T_\sigma = \frac{W_\sigma^i}{W_\sigma^i} = \frac{\Sigma_i I_\sigma^i}{\Sigma_i I_\sigma^i} = \frac{n_2 \cos \theta_r}{n_1 \cos \theta_i} \quad t_\sigma^2 = \frac{\sin 2\theta_i \sin 2\theta_r}{\sin^2(\theta_i + \theta_r)}, \quad (14.22)$$

$$R_\sigma + T_\sigma = 1 \Rightarrow r_\sigma^2 + \frac{n_2 \cos \theta_r}{n_1 \cos \theta_i} t_\sigma^2 = 1. \quad (14.23)$$

Il coefficiente di riflessione  $R_\sigma$  è maggiore di  $R_\pi$ , come si vede confrontando le figure 14.26 e 14.24, ma anche in questo caso la trasmissione è predominante. Inoltre entrambi i coefficienti  $r_\sigma$  e  $t_\sigma$  sono sempre diversi da zero.

Discussiamo brevemente il segno dei coefficienti  $r_\pi$ ,  $t_\pi$ ,  $r_\sigma$ ,  $t_\sigma$  definiti dalle formule di Fresnel (14.16) e (14.20). I coefficienti  $t_\pi$  e  $t_\sigma$  sono sempre positivi, indicando che i campi elettrici trasmessi hanno proprio il verso disegnato nelle figure 14.21 e 14.25. Il coefficiente  $r_\sigma$  ha sempre lo stesso segno, che è negativo se  $n_1 < n_2$  e positivo se  $n_1 > n_2$ . Infine il coefficiente  $r_\pi$  al crescere di  $\theta_i$  è dapprima positivo, poi si annulla e diventa negativo, se  $n_1 < n_2$ , e ha un comportamento esattamente contrario come segno se  $n_1 > n_2$ . Un segno negativo significa che il campo elettrico in questione ( $E_\pi$  o  $E_\sigma$ ) ha verso opposto a quello fissato nelle figure.

Nel caso  $n_1 > n_2$  bisogna ricordare che superato l'angolo limite si ha solo riflessione, nel caso  $n_1 < n_2$  tutto l'intervallo da zero a  $\pi/2$  è disponibile per trasmissione e riflessione, escluso il valore estremo  $\theta_i = \pi/2$  in cui l'onda prosegue indisturbata e la nostra trattazione non si applica.

Per concludere citiamo una proprietà generale dei coefficienti di Fresnel. Supponiamo di avere il passaggio di un'onda piana luminosa dal mezzo con indice di rifrazione  $n_1$  al mezzo con indice di rifrazione  $n_2$ :  $\theta_i$  è l'angolo di incidenza,  $\theta_r$  l'angolo di rifrazione,  $r_1$  e  $t_1$  i coefficienti di Fresnel (nel piano  $\pi$  o nel piano  $\sigma$ ). Se invece l'onda si propaga dal mezzo con  $n_2$  al mezzo con  $n_1$  e l'angolo di incidenza è  $\theta_r$ , l'angolo di trasmissione vale  $\theta_i$ , come si è già notato. In tal caso è immediato provare che i coefficienti  $r_2$  e  $t_2$  sono legati ai precedenti dalle relazioni

$$r_2 = -r_1, \quad t_1 t_2 = 1 - r_1^2 = 1 - r_2^2,$$

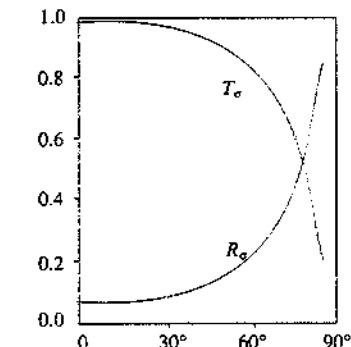


Figura 14.26

Relazioni di Stokes

dette *relazioni di Stokes*, valide sia nel piano  $\pi$  che nel piano  $\sigma$ . Un'utile applicazione si ha nell'attraversamento di una lastra a facce piane e parallele (esempio 14.4).

È bene sottolineare che le relazioni di Stokes non sono valide se l'angolo di incidenza nei due casi è lo stesso, a meno che non si tratti di incidenza normale,  $\theta_i = \theta_r = 0$ .

Passando ai coefficienti di riflessione e trasmissione si ha

$$R_1 = R_2, \quad T_1 = 1 - R_1 = T_2 = 1 - R_2.$$

**Nota. Intensità trasmessa nella riflessione totale**

Nel paragrafo 14.3 abbiamo trattato la riflessione totale soltanto da un punto di vista geometrico; riprendiamo adesso l'argomento considerando i campi e l'intensità. Secondo (14.8)  $k_n = 0$  e perciò il valore del vettore di propagazione dell'onda trasmessa obbedisce alla relazione

$$k_i^2 = \frac{\omega^2}{v_i^2} = \frac{\omega^2}{c^2} n_2^2 = k_\eta^2 + k_n^2 .$$

Sappiamo poi da (14.9) che

$$k_n = k_\eta = \frac{\omega}{v_i} \sin \theta_i = \frac{\omega}{c} n_1 \sin \theta_i ,$$

per cui

$$k_c^2 = k_i^2 - k_\eta^2 = \frac{\omega^2}{c^2} (n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i) .$$

L'angolo limite della riflessione totale è definito dalla (14.13),  $n_2 = n_1 \sin \theta_0$ ; per valori  $\theta_i > \theta_0$  è  $n_2 < n_1 \sin \theta_i$ , di conseguenza  $n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i$  è minore di zero e  $k_c$  risulta immaginario puro.

Poniamo pertanto  $k_c = i |k_c|$  e scriviamo il campo elettrico trasmesso nella notazione simbolica:

$$E_t = E_{0,i} e^{i(k_i z - \omega t)} = E_{0,i} e^{i(k_n z + k_c z - \omega t)} = E_{0,i} e^{-|k_c|z} e^{i(k_n z - \omega t)} .$$

L'ampiezza del campo è smorzata esponenzialmente, con una lunghezza di smorzamento pari a  $1/|k_c|$ . Dato che  $|k_c|$  non è molto diverso da  $2\pi/\lambda$ , a distanza  $z = \lambda$  dalla superficie di separazione il campo trasmesso è praticamente nullo.

Ad esempio, nel passaggio vetro-aria ( $n_1 = 1.5$ ,  $n_2 = 1$ ) con  $\theta_i = 45^\circ$  si ha

$$\frac{1}{|k_c|} = \frac{\lambda}{2\pi \sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_i - n_2^2}} = 0.45 \lambda .$$

Con  $\lambda = 0.6 \mu\text{m}$ , a distanza  $z = 5 (0.45 \lambda) = 2.25 \lambda = 1.35 \mu\text{m}$  l'ampiezza è ridotta a  $6.7 \cdot 10^{-3} E_{0,i}$ .

Per l'intensità la lunghezza di assorbimento è  $1/2 |k_c|$ , pari a  $\sim 0.2 \lambda$  nel caso numerico appena visto.

La verifica sperimentale dell'esistenza dell'onda trasmessa in una regione di profondità circa eguale alla lunghezza d'onda è stata fatta accostando parallelamente ad una interfaccia piana vetro-aria un'altra interfaccia piana aria-vetro. Si illumina la prima interfaccia in condizioni di riflessione totale e si osserva trasmissione di luce attraverso il sottile strato d'aria, con la prevista decrescita esponenziale in funzione dello spessore d'aria. Le due superficie di vetro affacciate devono essere accuratamente lavorate, con una deviazione dal piano ideale ben al di sotto di  $\lambda$ , cioè di  $0.5 \mu\text{m}$ . Chiaramente l'esperimento è più facile operando con microonde ( $\lambda \approx 1 \text{ cm}$ ), le quali presentano anche il fenomeno della riflessione totale, ad esempio nel passaggio paraffina-aria.

**Incidenza normale alla superficie di separazione**

Quando l'angolo di incidenza è nullo la direzione di incidenza coincide con la normale alla superficie di separazione e la nozione di piano di incidenza perde significato. I campi elettrici dell'onda incidente, dell'onda riflessa e dell'onda trasmessa sono paralleli tra loro e alla superficie e le (14.15) si riducono all'unica condizione

$$E_1 = E_i + E_r = E_2 = E_t$$

Inoltre, per la conservazione dell'energia,

$$I_i = I_r + I_t \Rightarrow n_1 E_i^2 = n_1 E_r^2 + n_2 E_t^2$$

Questo sistema di due equazioni in due incognite ammette la soluzione

$$E_r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} E_i \quad , \quad E_t = \frac{2 n_1}{n_1 + n_2} E_i$$

e le formule di Fresnel sono

$$r = \frac{E_r}{E_i} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \quad , \quad t = \frac{E_t}{E_i} = \frac{2 n_1}{n_1 + n_2} \quad (14.24)$$

Mentre  $t$  è sempre positivo ( $E_t$  concorde a  $E_i$ ),  $r$  è negativo se  $n_1 < n_2$  e positivo se  $n_1 > n_2$ . Nel primo caso, che si verifica ad esempio nel passaggio aria-vetro, aria-acqua, acqua-vetro, il campo elettrico riflesso è opposto al campo elettrico incidente, nel secondo caso (passaggio inverso) il campo riflesso è concorde al campo incidente. Le due situazioni sono mostrate nella figura 14.27. Il segno negativo di  $E_r$  si elimina aggiungendo  $\pi$  alla fase (geometricamente si rende conto così della rotazione di  $\pi$  di  $E_r$  rispetto a  $E_i$ ) e il risultato si enuncia in questo modo: in condizioni di incidenza normale il campo elettrico riflesso alla superficie di separazione tra un mezzo meno rifrangente e un mezzo più rifrangente è sfasato di  $\pi$  rispetto al campo elettrico incidente, mentre se la riflessione avviene da un mezzo più rifrangente ad uno meno rifrangente il campo riflesso è in fase col campo incidente. In base a (13.9) il campo magnetico segue un comportamento opposto a quello del campo elettrico. Vedremo una conseguenza interessante di questi risultati nei fenomeni di interferenza trattati nel paragrafo 15.7.

I coefficienti di riflessione e di trasmissione in condizioni di incidenza normale sono:

$$R = \frac{W_r}{W_i} = \frac{I_r}{I_i} = r^2 = \left( \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 \quad , \quad (14.25)$$

$$T = \frac{W_t}{W_i} = \frac{I_t}{I_i} = \frac{n_2}{n_1} r^2 = \frac{4 n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}$$

Si verifica subito che

$$\left( \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 + \frac{4 n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2} = R + T = 1$$

Notiamo che le formule (14.25) danno lo stesso risultato per il passaggio  $n_1 \rightarrow n_2$  e per il passaggio inverso  $n_2 \rightarrow n_1$ : le percentuali di energia riflessa e trasmessa sono le stesse nei due casi, non dipendendo il risultato dalla fase dei campi. Questa simmetria non esiste più se  $\theta_i \neq 0$ ; il risultato è in accordo con le relazioni di Stokes prima discusse.

Per renderci conto dei valori in gioco esaminiamo due casi comuni:

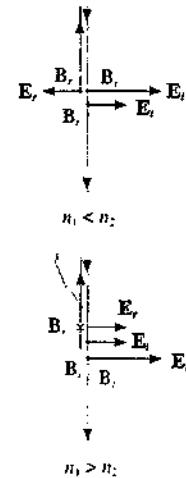


Figura 14.27

$$\begin{array}{lllllll} \text{aria-vetro} & n_1 = 1 & n_2 = 1.5 & r = -0.2 & t = 0.8 & R = 0.04 & T = 0.96 \\ \text{aria-acqua} & n_1 = 1 & n_2 = 1.33 & r = -0.143 & t = 0.857 & R = 0.02 & T = 0.98 \end{array}$$

Solo una piccola parte percentuale di energia viene riflessa, la maggior parte è trasmessa.

I risultati trovati continuano a valere approssimativamente per piccoli angoli di incidenza e si possono ottenere anche dalle formule già ricavate nel piano  $\pi$  e nel piano  $\sigma$  ponendo  $\cos\theta \approx 1$  e  $\sin\theta = \theta$ .

### Intensità riflessa e rifratta. Caso generale

Le situazioni di riflessione e rifrazione finora discusse hanno una caratteristica in comune: negli stati finali la luce conserva la polarizzazione che aveva nello stato iniziale. Un'onda incidente polarizzata rettilineamente nel piano  $\pi$  o nel piano  $\sigma$  dà luogo a due onde, riflessa e rifratta, polarizzate entrambe rettilineamente nel piano  $\pi$  o nel piano  $\sigma$ . Nel caso di incidenza normale il risultato non dipende in alcun modo dal piano di vibrazione istantaneo del campo elettrico incidente e quindi le onde, riflessa e rifratta, hanno la stessa polarizzazione dell'onda incidente o non sono polarizzate se questa non è polarizzata.

In generale, data un'onda incidente con  $\theta_i \neq 0$  e non polarizzata in  $\pi$  o in  $\sigma$ , il calcolo della polarizzazione e dell'intensità per l'onda riflessa e per l'onda rifratta si può eseguire ricorrendo a quanto abbiamo discusso nei paragrafi 13.2, 13.3 e sintetizzato nella tabella 13.1. Si considera la scomposizione dell'onda incidente in due componenti nel piano  $\pi$  e nel piano  $\sigma$ ,

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_\pi^i + \mathbf{E}_\sigma^i, \quad I_i = I_\pi + I_\sigma,$$

con relazione di fase definita se l'onda è polarizzata e casuale se l'onda non è polarizzata. A ciascuna componente incidente si applicano le formule appena ricavate di modo che si calcolano le componenti riflesse e le componenti rifratte sia nel piano  $\pi$  che nel piano  $\sigma$ : queste vengono ricomposte per dare l'onda riflessa e l'onda rifratta. Siccome il comportamento in  $\pi$  e in  $\sigma$  è diverso, non possiamo attenderci a priori che nella ricomposizione si riproducano le caratteristiche dell'onda incidente.

Seguendo la procedura già adottata nei piani  $\pi$  e  $\sigma$  possiamo scrivere subito i coefficienti di riflessione e di trasmissione, che sono definiti allo stesso modo anche nel caso generale:

$$R = \frac{W_r}{W_i} = \frac{I_r}{I_i} = \left( \frac{E_{0,r}}{E_{0,i}} \right)^2, \quad T = \frac{W_t}{W_i} = \frac{\cos\theta_i I_i}{\cos\theta_i I_i} = \frac{n_2 \cos\theta_i}{n_1 \cos\theta_i} \left( \frac{E_{0,r}}{E_{0,i}} \right)^2. \quad (14.26)$$

I moduli e le componenti dei campi elettrici incidente, riflesso e rifratto sono:

$$E_{0,i}(E'_{0,\pi}, E'_{0,\sigma}), \quad E_{0,r}(E'_{0,\pi}, E'_{0,\sigma}), \quad E_{0,t}(E'_{0,\pi}, E'_{0,\sigma}).$$

Ricorriamo ai coefficienti  $r_\pi$ ,  $r_\sigma$ ,  $t_\pi$ ,  $t_\sigma$  definiti dalle (14.16) e (14.20). Nella riflessione  $E'_{0,\pi} = r_\pi E_{0,\pi}$ ,  $E'_{0,\sigma} = r_\sigma E_{0,\sigma}$  e la prima delle (14.26) diventa

$$R = \left( \frac{E_{0,r}}{E_{0,i}} \right)^2 = \frac{(E'_{0,\pi})^2 + (E'_{0,\sigma})^2}{(E_{0,i})^2} = r_\pi^2 \left( \frac{E'_{0,\pi}}{E_{0,i}} \right)^2 + r_\sigma^2 \left( \frac{E'_{0,\sigma}}{E_{0,i}} \right)^2.$$

I rapporti nell'ultimo membro sono eguali a  $I'_\pi / I_i$  e  $I'_\sigma / I_i$ , cioè alle percentuali di energia incidente nel piano  $\pi$  e nel piano  $\sigma$ . Il coefficiente di riflessione vale dunque, ricorrendo anche a (14.17) e (14.21),

$$R = \frac{W_r}{W_i} = \frac{I_r}{I_i} = R_\pi \frac{I'_\pi}{I_i} + R_\sigma \frac{I'_\sigma}{I_i}. \quad (14.27)$$

Analogamente, utilizzando (14.18) e (14.22), si trova per il *coefficiente di trasmissione*

$$\frac{T}{W} = \frac{\cos\theta_i I_i}{W} \frac{n_2 \cos\theta_r}{n_1 \cos\theta_i} \left( T_\pi \frac{I_\pi^i}{I_i} + T_\sigma \frac{I_\sigma^i}{I_i} \right) = T_\pi \frac{I_\pi^i}{I_i} + T_\sigma \frac{I_\sigma^i}{I_i} \quad (14.28) \quad \text{Coefficiente di trasmissione}$$

Possiamo dire che i *coefficienti di riflessione e di trasmissione sono la somma pesata dei coefficienti nel piano } \pi e nel piano } \sigma, il peso essendo determinato dalla percentuale di energia associata alla componente incidente che giace su quel piano.*

Noti l'intensità incidente e i coefficienti  $R$  e  $T$ , che dipendono da  $\theta_i$  e  $\theta_r$ , le (14.27) e (14.28) permettono di calcolare  $I_i$  e  $I_r$ ; se è data la sezione del fascio incidente si ha  $W_i$  e si calcolano anche  $W_\pi$  e  $W_\sigma$ . Conviene sempre servirsi nella pratica delle relazioni  $R + T = 1$ ,  $W_\pi + W_\sigma = W_i$  o per ridurre i calcoli o per verificarli.

Passiamo adesso in rassegna le varie possibilità che si presentano.

#### A. Onda incidente polarizzata rettilineamente

Supponiamo che il campo elettrico incidente formi l'angolo  $\beta$  con il piano di incidenza  $\pi$  (figura 14.28); nel piano  $\pi$  c'è l'intensità  $I_\pi \cos^2 \beta$  e nel piano  $\sigma$  l'intensità  $I_\sigma \sin^2 \beta$  (vedi tabella 13.1). Otteniamo subito da (14.27) e (14.28)

$$R = R_\pi \cos^2 \beta + R_\sigma \sin^2 \beta, \quad T = T_\pi \cos^2 \beta + T_\sigma \sin^2 \beta.$$

L'onda riflessa è polarizzata rettilineamente, però il campo elettrico  $E_r$  forma col piano  $\pi$  un angolo  $\beta_r$  diverso da  $\beta$ . Infatti, detti  $\mathbf{u}_\pi$  e  $\mathbf{u}_\sigma$  due opportuni versori giacenti su  $\pi$  e  $\sigma$  e ortogonali tra loro e alla direzione di propagazione dell'onda riflessa, si ha:

$$\mathbf{E}_r = \mathbf{E}'_\pi + \mathbf{E}'_\sigma = E_{0,r} \cos\beta_r \mathbf{u}_\pi + E_{0,r} \sin\beta_r \mathbf{u}_\sigma = E'_{0,\pi} \mathbf{u}_\pi + E'_{0,\sigma} \mathbf{u}_\sigma = r_\pi E'_{0,\pi} \mathbf{u}_\pi + r_\sigma E'_{0,\sigma} \mathbf{u}_\sigma$$

$$\Rightarrow \tan\beta_r = \frac{E'_{0,\sigma}}{E'_{0,\pi}} = \frac{r_\sigma E'_{0,\sigma}}{r_\pi E'_{0,\pi}} = \frac{r_\sigma}{r_\pi} \tan\beta = - \frac{\cos(\theta_i - \theta_r)}{\cos(\theta_i + \theta_r)} \tan\beta.$$

Allo stesso modo l'onda trasmessa è polarizzata rettilineamente, ma con il campo  $E_t$ , ad angolo  $\beta_t \neq \beta$  col piano  $\pi$ :

$$\tan\beta_t = \frac{I_\sigma}{I_\pi} \tan\beta = \cos(\theta_i - \theta_t) \tan\beta.$$

Il tipo di polarizzazione è lo stesso, anche se nella riflessione e nella rifrazione si ha una (diversa) *rotazione del piano di polarizzazione*.

#### B. Onda incidente polarizzata ellitticamente

Trattiamo questo caso solo qualitativamente. Le onde riflessa e rifratta sono anch'esse polarizzate ellitticamente, ma l'*eccentricità* delle relative ellissi è diversa da quella dell'onda incidente perché i semiassi cambiano in modo diverso e il rapporto non si conserva. In particolare si può ottenere un'onda riflessa o un'onda rifratta polarizzate circolarmente.

#### C. Onda incidente polarizzata circolarmente

Il problema è trattato per esteso nell'esempio 14.3. Anticipiamo che l'onda riflessa e l'onda trasmessa *non* sono in generale circolari, sempre perché le due componenti dell'onda incidente nel piano  $\pi$  e nel piano  $\sigma$  non si comportano allo stesso modo sia nella riflessione che nella trasmissione. Per le intensità si ha  $I_\pi^i / I_i = I_\sigma^i / I_i = 1/2$ , e quindi

$$R = \frac{1}{2} (R_\pi + R_\sigma), \quad T = \frac{1}{2} (T_\pi + T_\sigma).$$

#### D. Onda incidente non polarizzata

L'onda incidente è descritta in termini di due *onde incoerenti* che vibrano in  $\pi$  e in  $\sigma$  e

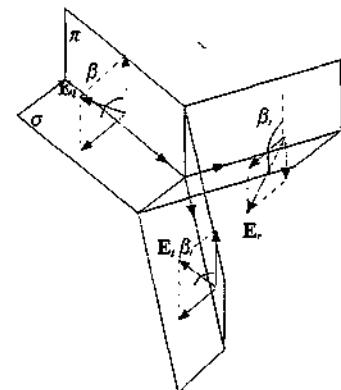


Figura 14.28

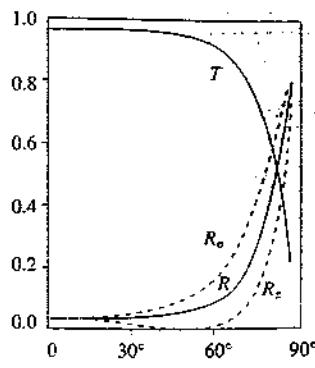


Figura 14.29

Grado di polarizzazione

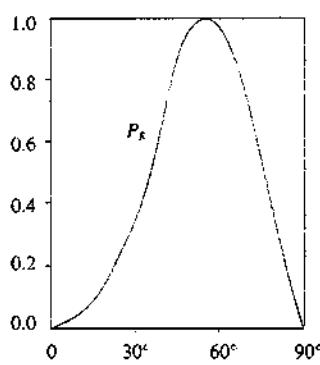


Figura 14.30

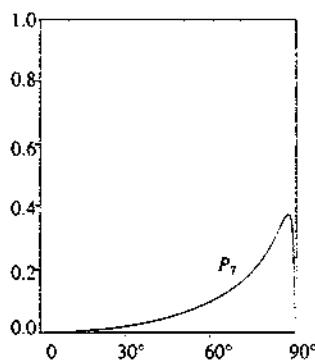


Figura 14.31

Angolo di Brewster

trasportano ciascuna metà dell'intensità dell'onda. Le (14.27) e (14.28) diventano

$$R = \frac{1}{2} (R_x + R_\pi) = \frac{1}{2} (r_x^2 + r_\pi^2), \quad T = \frac{1}{2} (T_x + T_\pi) = \frac{1}{2} \frac{n_2 \cos \theta}{n_1 \cos \theta} (t_x^2 + t_\pi^2) \quad (14.29)$$

L'andamento di  $R$  in funzione di  $\theta$ , per la riflessione aria-vetro è riportato nella figura 14.29, insieme a  $R_x$  e  $R_\pi$  presi dalle figure 14.24 e 14.26. I valori sono apprezzabilmente diversi da zero solo per grandi angoli di incidenza.L'onda riflessa non è polarizzata anche se, come risulta dalla figura, essendo  $R_\sigma$  maggiore di  $R_\pi$ , predomina la componente associata alla vibrazione ortogonale al piano di incidenza. Si dice in tal caso che l'onda riflessa è *parzialmente polarizzata* e si definisce il *grado di polarizzazione* come

$$P_R = \frac{W'_\sigma - W'_\pi}{W'_\sigma + W'_\pi} = \frac{R_\sigma - R_\pi}{R_\sigma + R_\pi} = \frac{r_\sigma^2 - r_\pi^2}{r_\sigma^2 + r_\pi^2} \quad (14.30)$$

Nella figura 14.30 è mostrato, sempre per il caso aria-vetro, il grado di polarizzazione  $P_R$  in funzione dell'angolo di incidenza: esso ha un massimo pari a 1 quando  $\theta_i$  è uguale all'*angolo di Brewster*  $\theta_B$  che definiremo tra poco. Per  $\theta_i = 0$  e  $\theta_i = \pi/2$   $r_\sigma^2 = r_\pi^2 = r^2$  e  $P_R = 0$ .Anche la luce trasmessa è *parzialmente polarizzata* con grado di polarizzazione

$$P_T = \frac{W'_x - W'_\pi}{W'_x + W'_\pi} = \frac{t_\pi^2 - t_\sigma^2}{t_\pi^2 + t_\sigma^2} \quad (14.31)$$

Nella figura 14.31 è riportato, per l'aria-vetro,  $P_T$ ; si vede che la luce trasmessa non è mai completamente polarizzata, anzi il suo grado di polarizzazione è piuttosto basso.

Qualora, seguendo (14.30) e (14.31), il risultato fosse negativo, come grado di polarizzazione si prende il modulo del valore ottenuto.

**Angolo di Brewster. Polarizzazione per riflessione**Abbiamo segnalato in precedenza che dei quattro coefficienti espressi da (14.16) e (14.20) solo  $r_\pi$  si annulla all'interno dell'intervallo di definizione di  $\theta_i$ , che va da zero a  $\pi/2$ . Ciò avviene quando è soddisfatta la condizione  $\theta_i + \theta_r = \pi/2$ ; infatti

$$r_\pi = \frac{\operatorname{tg}(\theta_i - \theta_r)}{\operatorname{tg}(\theta_i + \theta_r)} = \frac{\operatorname{tg}(\theta_i - \theta_r)}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}} = 0$$

L'angolo di incidenza  $\theta_B$  per il quale si verifica  $r_\pi = 0$  si ricava dalla legge di Snell (14.12):

$$\frac{\operatorname{sen} \theta_B}{\operatorname{sen} \theta_{iB}} = \frac{\operatorname{sen} \theta_B}{\operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{2} - \theta_B \right)} = \frac{\operatorname{sen} \theta_B}{\operatorname{cos} \theta_B} = \frac{n_2}{n_1}$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} \theta_B = \frac{n_2}{n_1}, \quad \theta_B = \operatorname{arctg} \frac{n_2}{n_1} \quad (14.32)$$

L'angolo  $\theta_B$  è detto *angolo di Brewster* e la (14.32) legge di Brewster.

Elichiamo schematicamente alcune proprietà caratteristiche.

1) Essendo definito da  $\operatorname{tg} \theta_B = n_2 / n_1$  l'angolo di Brewster esiste per qualsiasi

coppia di valori di indici di rifrazione, cioè per qualsiasi coppia di mezzi trasparenti.

- 2)  $\theta_B$  è sempre maggiore di  $45^\circ$  se  $n_1 < n_2$  e sempre minore di  $45^\circ$  se  $n_1 > n_2$ .
- 3) Dato che  $\theta_B + \theta_{i,B} = \pi/2$ , l'angolo tra il raggio riflesso e il raggio rifratto vale  $\pi/2$  (figura 14.32). Questa proprietà permette di trovare sperimentalmente  $\theta_B$  anche se non si conoscono  $n_1$  e  $n_2$  e anzi può fornire un metodo di misura di  $n_2/n_1$ .

4) Se  $\theta_B$  è l'angolo di Brewster nel passaggio  $n_1 \rightarrow n_2$  e  $\theta'_B$  quello nel passaggio inverso  $n_2 \rightarrow n_1$ , si ha  $\tan \theta_B = n_2/n_1$  e  $\tan \theta'_B = n_1/n_2$ , dalle quali si ricava  $\theta_B + \theta'_B = \pi/2$  e quindi  $\theta'_B = \theta_{i,B}$ . Pertanto, determinati  $\theta_B$  e il corrispondente angolo di rifrazione  $\theta_{i,B}$  nel passaggio  $n_1 \rightarrow n_2$ ,  $\theta_{i,B}$  e  $\theta_B$  sono rispettivamente l'angolo di Brewster e l'angolo di rifrazione nel passaggio inverso  $n_2 \rightarrow n_1$  (i ruoli si scambiano). La proprietà si dimostra subito anche per via grafica. Per il passaggio  $n_2 \rightarrow n_1$  non c'è bisogno di una nuova figura, basta riconsiderare la figura 14.32 e guardarla dal basso verso l'alto (figura 14.33, frecce nere). Si vede che, se  $\theta_{i,B}$  è l'angolo di Brewster, viene soddisfatta la condizione che l'angolo tra raggio riflesso e raggio rifratto sia pari a  $\pi/2$ ; siccome il problema ha una sola soluzione, questa che abbiamo trovato è la soluzione.

L'insieme delle proprietà discusse costituisce l'*aspetto geometrico* della condizione  $r_\pi = 0$ . Per quanto riguarda i campi e le intensità, abbiamo che in condizioni di Brewster la componente dell'onda incidente che vibra nel piano di incidenza  $\pi$  non viene riflessa, ma totalmente trasmessa, la componente che vibra nel piano  $\sigma$  ortogonale al piano  $\pi$  viene sia riflessa che trasmessa. Di conseguenza nella luce riflessa troviamo solo quest'ultima componente: per  $\theta_i = \theta_B$  la luce riflessa è polarizzata rettilineamente nel piano  $\sigma$ . Il risultato è vero *qualunque sia lo stato di polarizzazione dell'onda incidente*; ovviamente non si ha luce riflessa solo se l'onda incidente è polarizzata rettilineamente in  $\pi$ .

I coefficienti di riflessione e trasmissione in  $\pi$  e  $\sigma$  sono:

$$r_\pi = 0, \quad t_\pi = 1/\tan \theta_B, \quad r_\sigma = \cos 2\theta_B, \quad t_\sigma = 2 \cos^2 \theta_B,$$

$$R_\pi = 0, \quad R_\sigma = r_\sigma^2 = \cos^2 2\theta_B = (1 - \sin^2 \theta_B)^2 = \left( \frac{n_1^2 - n_2^2}{n_1^2 + n_2^2} \right)^2,$$

$$T_\pi = 1 - R_\pi = 1, \quad T_\sigma = 1 - R_\sigma = 4 \sin^2 \theta_B \cos^2 \theta_B = \left( \frac{2 n_1 n_2}{n_1^2 + n_2^2} \right)^2.$$

Inserendoli nelle (14.27) e (14.28) si hanno i *coefficienti di riflessione e di trasmissione* per qualsiasi tipo di onda incidente. Osserviamo che le formule danno lo stesso risultato per il passaggio  $n_1 \rightarrow n_2$  e per il passaggio inverso  $n_2 \rightarrow n_1$ .

In particolare, con un fascio incidente non polarizzato di potenza  $W_i$ , suddivisa per metà su  $\pi$  e per metà su  $\sigma$ , e applicando (14.29) in cui  $R_\pi = 0$ , si ha

$$W_r = R W_i = \frac{1}{2} R_\sigma W_i, \quad W_t = T W_i = (1 - R) W_i = \left( 1 - \frac{1}{2} R_\sigma \right) W_i.$$

Il *grado di polarizzazione* della luce trasmessa si calcola con (14.31): il numeratore  $W'_\pi - W'_\sigma$  è pari a  $W_r$ , il denominatore  $W'_\pi + W'_\sigma$  a  $W_t$  e quindi

$$P_T = \frac{W_r}{W_t} = \frac{R_\sigma}{2 - R_\sigma}.$$

Numericamente, nel caso aria-vetro,  $n_1 = 1$  e  $n_2 = 1.5$ , otteniamo

$$\tan \theta_B = 1.5, \quad \theta_B = 56.3^\circ, \quad \theta_{i,B} = 33.7^\circ, \quad R_\sigma = 0.148.$$

$$R = 0.074, \quad T = 0.926, \quad P_T = 0.08.$$

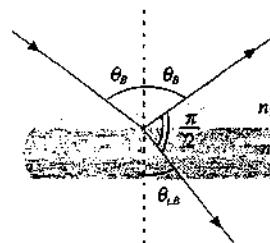


Figura 14.32

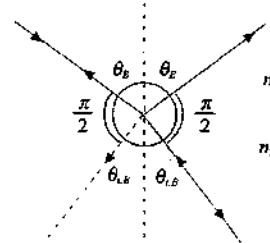


Figura 14.33

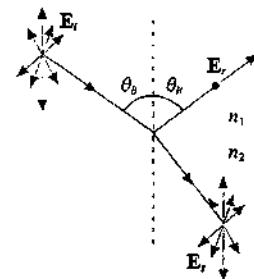


Figura 14.34

Concludiamo che, operando in *condizioni di Brewster*, da un fascio di luce ordinaria derivano un *fascio riflesso poco intenso polarizzato rettilineamente* e un *fascio trasmesso più intenso con basso grado di polarizzazione*.

Come commento finale agli argomenti trattati in questo paragrafo diciamo che le leggi di Cartesio e le formule di Fresnel permettono di calcolare le percentuali di energia e gli stati di polarizzazione delle onde riflesse e trasmesse, in funzione di  $\theta_i$ ,  $n_1$ ,  $n_2$  e dello stato di polarizzazione dell'onda incidente. Le caratteristiche previste per l'onda riflessa e l'onda trasmessa possono essere misurate con grande precisione e sono in realtà verificate molto bene. Abbiamo così una dimostrazione convincente che le proprietà di riflessione e rifrazione delle onde luminose sono completamente spiegate dalle equazioni di Maxwell.

### Esempio 14.3

Un fascio di luce polarizzata circolarmente di intensità  $I = 1 \text{ W/cm}^2$  e sezione  $\Sigma_0 = 5 \text{ cm}^2$  incide con un angolo  $\theta_i = 80^\circ$  su una lastra piana di vetro ( $n = 1.5$ ). Determinare lo stato di polarizzazione del fascio riflesso e del fascio trasmesso e le relative potenze.

#### Soluzione

In accordo con la tabella 13.1 l'onda incidente si rappresenta come

$$E_x^i = E_{0,x}^i \sin(k_z \cdot r - \omega t), \quad E_\sigma^i = E_{0,\sigma}^i \cos(k_z \cdot r - \omega t),$$

con  $E_{0,x}^i = E_{0,\sigma}^i = E_0$ . Dato che  $E_{0,x}^i = r_x E_{0,x}^i$ ,  $E_{0,\sigma}^i = r_\sigma E_{0,\sigma}^i$ , l'onda riflessa ha le componenti

$$E_x^r = r_x E_0 \sin(k_z \cdot r - \omega t), \quad E_\sigma^r = r_\sigma E_0 \cos(k_z \cdot r - \omega t),$$

e risulta quindi *polarizzata ellitticamente*: la differenza tra i coefficienti  $r_x$  e  $r_\sigma$  distrugge la simmetria circolare iniziale.

Il rapporto tra i *semiasse* dell'ellisse, cioè l'*eccentricità*, è eguale al modulo del rapporto delle ampiezze dei campi:

$$\varepsilon_r = \left| \frac{r_\sigma}{r_x} \right| = \left| \frac{\cos(\theta_i - \theta_r)}{\cos(\theta_i + \theta_r)} \right|.$$

Anche l'onda trasmessa risulta *polarizzata ellitticamente con eccentricità*

$$\varepsilon_t = \left| \frac{t_\sigma}{t_x} \right| = \left| \cos(\theta_i - \theta_t) \right|.$$

In numeri  $\sin \theta_i = \sin 80^\circ / n = \sin 80^\circ / 1.5 = 0.657$ ,  $\theta_r = 41.0^\circ$ ,  $\varepsilon_r = 1.51$ ,  $\varepsilon_t = 0.78$ .

La potenza dell'onda incidente è  $W_i = I \Sigma_0 = 5 \text{ W}$  ed è suddivisa in parti eguali tra le due componenti. Possiamo quindi usare la relazione (14.29) valida per la luce ordinaria. Essendo  $R_x = 0.237$ ,  $R_\sigma = 0.539$ , si trova  $R = 0.388$  (e  $T = 0.612$ ); pertanto  $W_r = 1.94 \text{ W}$ ,  $W_t = W_i - W_r = 3.06 \text{ W}$ .

Osserviamo che per  $\theta_i = \theta_r$  l'eccentricità  $\varepsilon_r$  dell'onda riflessa va all'infinito, l'ellisse cioè degenera in un segmento: e infatti l'onda riflessa è *polarizzata rettilineamente* nel piano  $\sigma$ . Osserviamo infine che per  $\theta_i = 0$   $\varepsilon_r = \varepsilon_t = 1$ : le onde riflessa e rifratta sono entrambe polarizzate circolarmente, come avevamo detto discutendo l'incidenza normale.

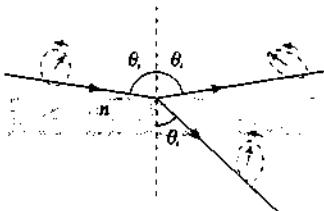


Figura 14.35

**Esempio 14.4**

Un sottile fascio di luce ordinaria di potenza  $W$ , incide con angolo  $\theta_i = 30^\circ$  su una lastra di vetro a facce piane e parallele, avente indice di rifrazione  $n = 1.66$ ; il mezzo esterno è l'aria. Calcolare la potenza dei vari raggi riflessi e trasmessi ed estendere il risultato al caso in cui la lastra presenta assorbimento.

**Soluzione**

Da un raggio incidente hanno origine numerosi raggi riflessi e trasmessi, come mostrato in figura 14.36. Questi sono tutti paralleli tra loro e formano l'angolo  $\theta_r$  con la normale alla lastra; l'angolo  $\theta_r$  vale  $17.5^\circ$ .

Il coefficiente di riflessione aria-vetro, secondo (14.29), è

$$R = \frac{1}{2} (R_x + R_\sigma) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\operatorname{tg}^2(\theta_i - \theta_r)}{\operatorname{tg}^2(\theta_i + \theta_r)} + \frac{\operatorname{sen}^2(\theta_i - \theta_r)}{\operatorname{sen}^2(\theta_i + \theta_r)} \right] = 0.064$$

Il coefficiente di riflessione vetro-aria, con  $\theta'_i = \theta_i = 30^\circ$  e  $\theta'_r = \theta_r = 17.5^\circ$ , è lo stesso, in quanto si scambiano  $\theta_i$  e  $\theta_r$ , ma l'espressione è invariante rispetto allo scambio (si ricordino le relazioni di Stokes).

Nella prima riflessione e trasmissione la frazione  $R$  di  $W$ , viene riflessa in aria e forma il raggio  $r_1$ , la frazione  $1 - R$  viene trasmessa nel vetro. Di questa, la frazione  $1 - R$  viene trasmessa in aria, formando il raggio  $t_1$ , che porta con sé  $(1 - R)^2 W_i$ , e la frazione  $R$  viene riflessa nel vetro, con potenza  $R(1 - R)W_i$ . Così proseguendo si trovano le seguenti frazioni di  $W_i$  nei vari raggi:

$r_1$	$R$	$6.4 \cdot 10^{-2}$ ,	$t_1$	$(1 - R)^2$	$0.876$
$r_2$	$R(1 - R)^2$	$5.6 \cdot 10^{-2}$ ,	$t_2$	$R^2(1 - R)^2$	$3.6 \cdot 10^{-3}$
$r_3$	$R^3(1 - R)^2$	$2.3 \cdot 10^{-4}$ ,	$t_3$	$R^4(1 - R)^2$	$1.5 \cdot 10^{-5}$
$r_4$	$R^5(1 - R)^2$	$9.4 \cdot 10^{-7}$ ,	$t_4$	$R^6(1 - R)^2$	$6.0 \cdot 10^{-8}$
...	...	...	...	...	...

In pratica, oltre al primo raggio trasmesso, solo i primi due raggi riflessi hanno potenza non trascurabile.

La frazione totale di potenza riflessa è

$$R_{\text{tot}} = R + (1 - R)^2 (R + R^3 + R^5 + \dots) = R + R(1 - R)^2 (1 + R^2 + R^4 + \dots) = \\ R + R(1 - R)^2 \frac{1}{1 - R^2} = \frac{2R(1 - R)}{1 - R^2}$$

mentre quella trasmessa vale

$$T_{\text{tot}} = (1 - R)^2 (1 + R^2 + R^4 + \dots) = \frac{(1 - R)^2}{1 - R^2}$$

I valori sono  $R_{\text{tot}} = 0.120$ ,  $T_{\text{tot}} = 0.880$ .

Se teniamo conto dell'assorbimento nella lastra, ad ogni attraversamento va conteggiato nell'intensità un fattore  $e^{-h/\cos\theta_r/l_{\text{ass}}}$ , essendo  $h$  lo spessore e  $l_{\text{ass}}$  la lunghezza di assorbimento. Si trova

$$R'_{\text{tot}} = R + \frac{R(1 - R)^2 e^{-2h/\cos\theta_r/l_{\text{ass}}}}{1 - R^2 e^{-2h/\cos\theta_r/l_{\text{ass}}}}, \quad T'_{\text{tot}} = \frac{(1 - R)^2 e^{-h/\cos\theta_r/l_{\text{ass}}}}{1 - R^2 e^{-2h/\cos\theta_r/l_{\text{ass}}}},$$

dove  $h' = h / \cos\theta_r$ . Con gli stessi dati numerici precedenti, per una lastra spessa  $h = 10$  cm fatta di un materiale trasparente con  $l_{\text{ass}} = 1$  m, risulta  $R'_{\text{tot}} = 0.110$  e  $T'_{\text{tot}} = 0.792$ . La frazione  $1 - (R'_{\text{tot}} + T'_{\text{tot}})$  = 0.098 dell'intensità incidente è assorbita.

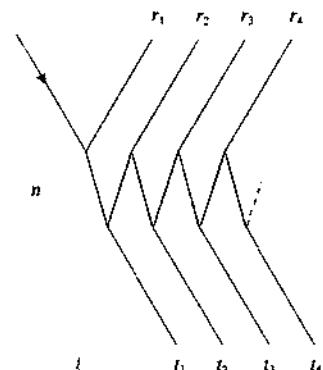


Figura 14.36

### 14.5 Riflessione e rifrazione di onde elastiche

I fenomeni di riflessione e di rifrazione (trasmissione) si verificano con qualsiasi tipo di onda, in particolare con le onde elastiche, quando si ha una superficie di discontinuità per le grandezze che caratterizzano la velocità di propagazione.

Consideriamo una corda tesa costituita da due parti con caratteristiche fisiche diverse unite nel punto  $O$  in cui poniamo l'origine dell'asse  $x$ ; coincidente con la corda in condizioni statiche. Le velocità  $v_1$  e  $v_2$  di propagazione nei due mezzi sono diverse mentre la frequenza  $\nu$  e la pulsazione  $\omega$  sono le stesse, come ricordato nel paragrafo 14.3. Dette  $\rho_1$  e  $\rho_2$  le masse per unità di lunghezza delle due parti e  $T$  la tensione della corda, le velocità sono date da (12.29) e abbiamo

$$k_1 = \frac{\omega}{v_1} = \omega \sqrt{\frac{\rho_1}{T}} \quad , \quad k_2 = \frac{\omega}{v_2} = \omega \sqrt{\frac{\rho_2}{T}}$$

L'onda che si propaga dalla prima alla seconda parte.

$$\xi_i = \xi_{0,i} \sin(k_1 x - \omega t)$$

quando giunge nel punto di discontinuità dà origine ad un'onda riflessa che si propaga nella prima parte e ad un'onda trasmessa che si propaga nella seconda parte:

$$\xi_r = \xi_{0,r} \sin(k_1 x + \omega t) \quad , \quad \xi_t = \xi_{0,t} \sin(k_2 x - \omega t)$$

Nel punto di contatto  $x = 0$  deve risultare in ogni istante

$$\xi_i + \xi_r = -\xi_{0,i} \sin \omega t + \xi_{0,r} \sin \omega t = \xi_t = -\xi_{0,t} \sin \omega t$$

$$\Rightarrow \xi_{0,i} - \xi_{0,r} = \xi_{0,t}$$

Inoltre nel punto di contatto la forza  $F$ , deve avere lo stesso valore: la sua espressione è  $T \partial \xi / \partial x$  (vedi paragrafo 12.2) per cui

$$T \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\xi_i + \xi_r) \right]_{x=0} = T \left[ \frac{\partial \xi}{\partial x} \right]_{x=0}$$

$$\Rightarrow k_1 \xi_{0,i} \cos(-\omega t) + k_1 \xi_{0,r} \cos \omega t = k_2 \xi_{0,t} \cos(-\omega t) \quad , \quad k_1 (\xi_{0,i} + \xi_{0,r}) = k_2 \xi_{0,t}$$

Risolvendo il sistema delle due relazioni tra le ampiezze delle onde si ottiene

$$\xi_{0,r} = \frac{k_2 - k_1}{k_2 + k_1} \xi_{0,i} = \frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2} \xi_{0,i} \quad , \quad \xi_{0,t} = \frac{2 k_1}{k_2 + k_1} \xi_{0,i} = \frac{2 v_1}{v_1 + v_2} \xi_{0,i}$$

Utilizziamo le espressioni delle velocità e calcoliamo i coefficienti  $r$  e  $t$ :

$$r = \frac{\xi_{0,r}}{\xi_{0,i}} = \frac{\sqrt{\rho_2} - \sqrt{\rho_1}}{\sqrt{\rho_2} + \sqrt{\rho_1}} \quad , \quad t = \frac{\xi_{0,t}}{\xi_{0,i}} = \frac{2 \sqrt{\rho_1}}{\sqrt{\rho_2} + \sqrt{\rho_1}}$$

Osserviamo che  $t$  è sempre positivo per cui l'onda trasmessa è in fase con l'onda incidente; invece  $r$  è positivo o negativo a seconda che sia  $\rho_2 > \rho_1$  o  $\rho_2 < \rho_1$ . Per  $x = 0$  abbiamo  $\xi_i = -\xi_{0,i} \sin \omega t$ ,  $\xi_r = r \xi_{0,i} \sin \omega t$  e quindi se

$\rho_2 < \rho_1 \quad , \quad r < 0 \quad , \quad$  l'onda riflessa è in fase con l'onda incidente.

$\rho_2 > \rho_1 \quad , \quad r > 0 \quad , \quad$  l'onda riflessa è in opposizione di fase con l'onda incidente.

Nel caso limite  $\rho_2 \rightarrow \infty$ , cioè corda fissata ad un estremo, troviamo  $t = 0$ ,  $r = 1$ : non c'è onda trasmessa e l'onda riflessa è in opposizione di fase con l'onda incidente: l'onda torna indietro capovolta con la stessa ampiezza.

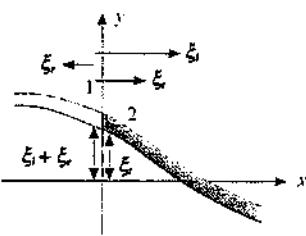


Figura 14.37

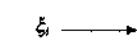


Figura 14.38

Le intensità delle varie onde sono date da (12.36):

$$I_i = \frac{1}{2} \rho_1 \omega^2 v_1 \xi_{0,i}^2 = \frac{1}{2} \sqrt{T\rho_1} \omega^2 \xi_{0,i}^2 ,$$

$$I_r = \frac{1}{2} \rho_1 \omega^2 v_1 \xi_{0,r}^2 = \frac{1}{2} \sqrt{T\rho_1} \omega^2 r^2 \xi_{0,r}^2 ,$$

$$I_t = \frac{1}{2} \rho_2 \omega^2 v_2 \xi_{0,t}^2 = \frac{1}{2} \sqrt{T\rho_2} \omega^2 t^2 \xi_{0,t}^2 .$$

Definiamo anche ora i *coefficienti di riflessione e di trasmissione*:

$$R = \frac{I_r}{I_i} = \frac{\xi_{0,r}^2}{\xi_{0,i}^2} = r^2 = \left( \frac{\sqrt{\rho_2} - \sqrt{\rho_1}}{\sqrt{\rho_2} + \sqrt{\rho_1}} \right)^2 ,$$

$$T = \frac{I_t}{I_i} = \frac{\rho_2 v_2 \xi_{0,t}^2}{\rho_1 v_1 \xi_{0,i}^2} = \frac{\sqrt{\rho_2}}{\sqrt{\rho_1}} t^2 = \frac{2 \sqrt{\rho_1} \sqrt{\rho_2}}{(\sqrt{\rho_2} + \sqrt{\rho_1})^2} .$$

Coefficiente di riflessione  
e trasmissione

È sempre verificata la condizione  $R + T = 1$ .

A titolo di esempio consideriamo due corde dello stesso materiale avente densità  $\rho$ , con raggi  $R_1$  e  $R_2$  diversi, tali che  $R_1 / R_2 = 5$ . Su una lunghezza  $d$  la massa è  $m = \rho \pi R^2 d$  e quindi le densità lineari sono  $\rho_1 = m_1 / d = \rho \pi R_1^2$ ,  $\rho_2 = \rho \pi R_2^2$ . Il coefficiente di riflessione vale

$$R = \left( \frac{\sqrt{\rho \pi R_2^2} - \sqrt{\rho \pi R_1^2}}{\sqrt{\rho \pi R_2^2} + \sqrt{\rho \pi R_1^2}} \right)^2 = \left( \frac{R_2 - R_1}{R_2 + R_1} \right)^2 = \left( \frac{1 - \frac{R_1}{R_2}}{1 + \frac{R_1}{R_2}} \right)^2 = \frac{4}{9} = 0.444 .$$

Pertanto il 44.4% dell'energia viene riflesso e il 55.6% trasmesso. Al diminuire del rapporto  $R_1 / R_2$  aumenta l'energia trasmessa e al limite per  $R_1 = R_2$  (corda omogenea)  $R = 0$ , non c'è riflessione.

Gli stessi risultati si ottengono con due sbarre di materiali diversi: nelle formule bisogna sostituire  $\sqrt{Y\rho}$  a  $\sqrt{\rho}$ :  $Y$  è il *modulo di elasticità* e  $\rho$  la *densità* (vedi paragrafo 12.2). Ritornando alle onde elettromagnetiche, onde riflesse e onde trasmesse si hanno anche quando si connettono due cavi coassiali con impedanze caratteristiche diverse (paragrafo 11.5).

I coefficienti  $r$ ,  $t$ ,  $R$ ,  $T$ , hanno la stessa struttura degli analoghi coefficienti ricavati nel paragrafo 14.4 per un'onda luminosa che incide normalmente alla superficie di separazione tra due mezzi trasparenti: nel caso della corda  $\sqrt{\rho}$  gioca il ruolo dell'indice di rifrazione  $n$  ( $\sqrt{\rho} \leftrightarrow n$ , ovvero  $\rho \leftrightarrow n^2 = \kappa$ ).

Storicamente, anche le formule di Fresnel per  $\theta \neq 0$  del paragrafo 14.4 furono ricavate con un procedimento simile a quello appena illustrato e, data la buona verifica sperimentale, rafforzarono l'ipotesi che la luce fosse la vibrazione di un vettore, la cui natura fisica restava ignota: secondo la visione meccanica allora dominante (siamo nella prima metà del 1800) la propagazione doveva avvenire in un mezzo elastico, chiamato *etero*, che riempiva tutto lo spazio come un fluido, ma le cui proprietà erano peculiari, visto che era capace di propagare una vibrazione trasversale. Le equazioni di Maxwell chiarirono la natura fisica della luce, ma non quella dell'etero, anche se lo ridussero ad un sistema di riferimento privilegiato in cui la velocità della luce era  $c$ . L'idea di un sistema privilegiato fu messa in crisi dagli esperimenti di Michelson e Morley (1887), dai quali si deduce che la *velocità della luce non dipende dal sistema di riferimento*, e la nozione di etero scomparve definitivamente con la pubblicazione nel 1905 della *teoria della relatività ristretta* da parte di Einstein.

#### 14.6 Propagazione di un'onda piana elettromagnetica in un mezzo anisotropo. Birifrangenza

Come abbiamo detto nel paragrafo 5.6, i dielettrici lineari, per i quali esiste una relazione di proporzionalità tra vettore polarizzazione e campo elettrico data dalla (5.11), sono dotati di simmetria spaziale, sono cioè *isotropi*: qualunque sia la direzione del campo elettrico applicato le proprietà elettriche non cambiano.

Esistono anche sostanze le cui proprietà elettriche dipendono dalla direzione di  $\mathbf{E}$ : tra queste citiamo la maggior parte dei *cristalli* e alcune *materie plastiche artificiali*, costituite da molecole lunghe e orientate preferibilmente in una certa direzione. Per quanto riguarda quei cristalli che sono dielettrici anisotropi naturali ricordiamo dal paragrafo 5.6 che in essi i vettori  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$  non sono paralleli e che la suscettività elettrica  $\chi$  non è un numero, bensì un *tensores simmetrico* con sei componenti; lo stesso vale per la costante dielettrica relativa  $\kappa = 1 + \chi$ . Queste costanti caratterizzano completamente le proprietà elettriche dei cristalli anisotropi che per il resto supponiamo non conduttori ( $\sigma = 0$ ) e privi di proprietà magnetiche ( $\kappa_m = 1$ ).

Ricordiamo inoltre che in ogni cristallo esistono tre direzioni, ortogonali tra loro, note come *assi cristallografici* o *assi ottici del cristallo*. Se si scelgono questi assi come assi coordinati ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ ) i tensori  $\chi$  e  $\kappa$  sono *diagonalni* e la relazione tra  $\mathbf{D}$  e  $\mathbf{E}$  si scrive secondo (5.34)

$$D_x = \epsilon_0 \kappa_1 E_x , \quad D_y = \epsilon_0 \kappa_2 E_y , \quad D_z = \epsilon_0 \kappa_3 E_z .$$

I vettori  $\mathbf{D}$  ed  $\mathbf{E}$  non sono paralleli in quanto generalmente  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$ ,  $\kappa_3$  sono diverse; solo quando  $\mathbf{E}$  è parallelo a uno degli assi ottici, e ha quindi una sola componente non nulla,  $\mathbf{D}$  risulta parallelo a  $\mathbf{E}$ . Le tre costanti dielettriche relative caratteristiche degli assi ottici si chiamano *costanti dielettriche relative principali*.

Definiamo ora, nel sistema di riferimento degli assi ottici, l'*ellissoide degli indici di rifrazione del materiale*: i tre semiassi sono  $n_1 = \sqrt{\kappa_1}$ ,  $n_2 = \sqrt{\kappa_2}$ ,  $n_3 = \sqrt{\kappa_3}$  e l'equazione dell'ellissoide è

$$\frac{x^2}{n_1^2} + \frac{y^2}{n_2^2} + \frac{z^2}{n_3^2} = 1 . \quad (14.33)$$

Ellissoide degli indici di rifrazione

Precisiamo che gli assi ottici non sono assi particolari localizzati in qualche parte del cristallo, sono direzioni: fissato un qualsiasi punto del cristallo, esso si può pensare come centro dell'ellissoide degli indici di rifrazione.

Fresnel riuscì a dimostrare, molto prima della formulazione delle equazioni di Maxwell e della teoria elettromagnetica della luce, che le proprietà ottiche dei cristalli anisotropi potevano essere descritte servendosi dell'ellissoide degli indici di rifrazione, come ora mostreremo; naturalmente noi aggiungeremo alcune nozioni sul comportamento dei campi  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{D}$  delle onde.

Con riferimento all'ellissoide degli indici di rifrazione i cristalli esistenti in natura si possono dividere in tre categorie.

a) Sostanze con  $n_1 = n_2 = n_3 = n$ : l'ellissoide (14.33) è una sfera di raggio pari a  $n$ . Non si possono definire assi ottici, poiché l'intersezione del fronte d'onda con la sfera è sempre una circonferenza di raggio  $n$ , su cui non è possibile individuare assi particolari. La velocità di propagazione nel cristallo è  $v = c/n$ , non c'è birifrangenza. Appartengono a questa categoria i cristalli del sistema cubico, come cloruro di sodio e diamante, che si comportano pertanto come sostanze isotrope.

b) Sostanze con  $n_1 \neq n_2 \neq n_3$ : l'ellissoide degli indici di rifrazione è un ellissoide di rotazione intorno all'asse principale caratterizzato dall'indice di rifrazione  $n_1$ . Questo asse è detto *asse ottico* del cristallo ed è un *asse di simmetria del cristallo*. I cristalli con tale proprietà, detti *monoassici*, sono quelli dei sistemi romboedrico, esagonale, tetragonale, tra i quali si trovano la calcite  $\text{CaCO}_3$  (detta anche spato d'Islanda) e il quarzo.

c) Sostanze con  $n_1 \neq n_2 \neq n_3$ : l'ellissoide (14.33) non ha particolari simmetrie. Troviamo in questa categoria i cristalli del sistema rombico, monoclinico, triclinico (ad esempio mica e topazio).

Noi ci occuperemo soltanto dei *cristalli monoassici* che presentano le applicazioni più interessanti. Per essi si usa indicare col nome *indice di rifrazione straordinario* e col simbolo  $n_s$  l'indice di rifrazione  $n_1$  relativo all'asse ottico, mentre si indica col nome di *indice di rifrazione ordinario* e col simbolo  $n_o$  l'indice di rifrazione  $n_2$  relativo ad un qualsiasi asse

Cristalli monoassici

ortogonale all'asse ottico.

L'equazione (14.33) dell'ellissoide degli indici di rifrazione diventa

$$\frac{x^2}{n_s^2} + \frac{y^2 + z^2}{n_o^2} = 1 \quad (14.34)$$

essendo  $x$  la direzione dell'asse ottico.

Si distinguono due tipi di cristalli monoassici:

1) cristalli *positivi* per i quali  $n_s > n_o$ ; l'*ellissoide* (14.34) è *allungato* nella direzione dell'asse ottico;

2) cristalli *negativi* per i quali  $n_s < n_o$ ; l'*ellissoide* è *schiazzato* nella direzione dell'asse ottico.

Come esempio diamo i valori per due cristalli, uno positivo e uno negativo, alla lunghezza d'onda  $\lambda = 0.589 \mu\text{m}$ :

quarzo (positivo)	$n_s = 1.5533$	$n_o = 1.5442$ ;
calcite (negativa)	$n_s = 1.4864$	$n_o = 1.6585$ ;

nella calcite si ha uno dei  $\Delta n$  maggiori e per questo essa è tra i materiali birifrangenti più usati.

Vediamo ora l'utilità dell'impiego dell'ellissoide (14.34). Tracciamo il fronte d'onda piano di un'onda che si propaga nel cristallo monoassico e facciamolo passare per il centro dell'ellissoide; l'intersezione con questo è un'ellisse, di assi  $AA'$  e  $BB'$  (figura 14.39); i corrispondenti valori dei semiassi sono  $n_s$  e  $n_o$ . Essendo l'ellissoide (14.34) di rotazione (*ellissoide rotondo*), un semiasse dell'ellisse è sempre eguale a  $n_o$ , indipendentemente dall'orientazione del fronte d'onda, mentre la lunghezza  $n_s$  dell'altro semiasse è variabile con la direzione del versore  $u_n$  normale al fronte d'onda ed è compresa tra  $n_o$  e  $n_s$ .

Si dimostra che possono avere tale fronte d'onda due onde polarizzate rettilineamente con il vettore  $D$  vibrante lungo la direzione  $AA'$  ( $D_s$ ) o lungo la direzione  $BB'$  ( $D_o$ );  $n_s$  e  $n_o$  sono i valori dell'indice di rifrazione per queste due onde, le quali quindi si propagano nel cristallo con velocità di fase  $v_s = c/n_s$  e  $v_o = c/n_o$ .

L'onda associata all'indice di rifrazione  $n_o$  è detta *onda ordinaria*; per quello che si è detto la velocità di fase nel cristallo è sempre  $v_o = c/n_o$ , qualunque sia l'orientazione di  $u_n$ . La *polarizzazione* è *ortogonale all'asse ottico*, i campi  $E_o$  e  $D_o$  sono *sempre paralleli e stanno sul fronte d'onda*, che è perpendicolare alla direzione di propagazione.

L'onda associata all'indice di rifrazione  $n_s$  è detta *straordinaria* e la velocità di fase  $v_s = c/n_s$  dipende dall'orientazione di  $u_n$ , variando tra  $v_s = c/n_s$  e  $v_s = c/n_o$ . Il campo elettrico  $E_s$  non è parallelo a  $D_s$  e non sta come questo sul fronte d'onda;  $E_s$  però è sempre ortogonale alla direzione di propagazione e pertanto *fronte d'onda e direzione di propagazione non sono ortogonali tra loro*. In particolare, quando  $u_n$  è parallelo all'asse ottico l'intersezione ellittica degenera in una circonferenza di raggio  $n_o$  ( $n_s$  è eguale a  $n_o$ ) e si ha una sola velocità  $v_o$ . Quando  $u_n$  è perpendicolare all'asse ottico l'intersezione del fronte d'onda con l'ellissoide è un'ellisse coincidente con la sezione massima (semiassi  $n_o$  e  $n_s$ ) e l'onda straordinaria ha velocità  $v_s = c/n_s$ .

Per un angolo  $\theta$  generico tra  $u_n$  e l'asse ottico (asse  $x$ ) il punto  $P$  dell'ellissoide distante  $n_s$  dal centro ha coordinate tali che  $x^2 = (n_s \sin \theta)^2$  e  $y^2 + z^2 = (n_s \cos \theta)^2$ , per cui da (14.34)

$$\frac{n_s^2 \sin^2 \theta}{n_s^2} + \frac{n_s^2 \cos^2 \theta}{n_o^2} = 1 \Rightarrow \frac{\sin^2 \theta}{n_s^2} + \frac{\cos^2 \theta}{n_o^2} = \frac{1}{n_s^2} .$$

relazione che permette di calcolare  $n_s$  in funzione di  $\theta$ . Introducendo  $v_s$ ,  $v_o$  e  $v_s$  si ottiene l'espressione equivalente

$$v_s^2 = v_s^2 \sin^2 \theta + v_o^2 \cos^2 \theta .$$

Riassumendo, per qualsiasi orientazione del fronte d'onda rispetto all'asse ottico di un cristallo monoassico, siamo in grado di determinare l'indice di rifrazione e la velocità di propagazione per un'onda polarizzata ortogonalmente all'asse ottico (onda ordinaria, indice fisso  $n_o$ ) e per l'onda a questa ortogonale, cioè polarizzata in un piano contenente l'asse ottico (onda straordinaria, indice variabile).

Dopo questa lunga, ma necessaria premessa, descriviamo in cosa consiste il fenomeno della *birifrangenza*. Consideriamo un cristallo monoassico, che per semplicità supponiamo

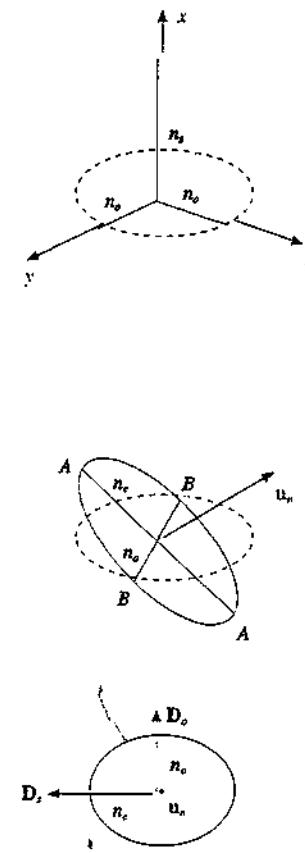


Figura 14.39

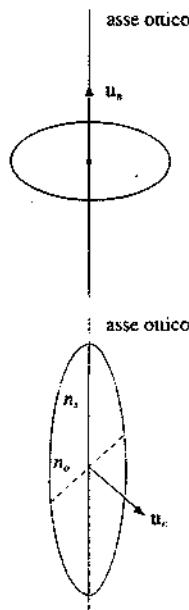


Figura 14.40

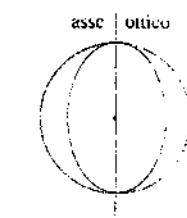
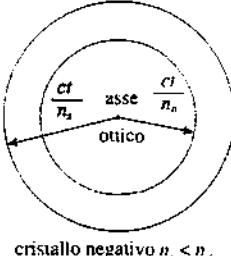
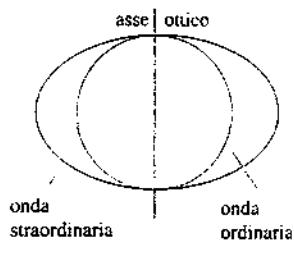


Figura 14.41

tagliato in modo da formare una lastra a facce piane e parallele, e un'onda luminosa piana non polarizzata che incide su una faccia del cristallo. Si trova che in generale dal cristallo escono due onde separate, polarizzate rettilineamente lungo due direzioni tra loro perpendicolari, e l'insieme dei fatti osservati si spiega coerentemente ammettendo che all'interno del cristallo l'onda incidente si *scinda* nelle due onde sudette, le quali si propagano nel cristallo con velocità diverse e in direzioni diverse. Risulta che un'onda obbedisce in ogni situazione alla legge di Snell (14.12) con valore  $n_o$  dell'indice di rifrazione e per tale ragione viene chiamata *onda ordinaria*; essa è polarizzata ortogonalmente all'asse ottico del cristallo. L'altra onda invece *non obbedisce* alla legge di Snell ed è come se vedesse il cristallo con indice di rifrazione variabile con la direzione di propagazione tra due valori estremi  $n_o$  e  $n_s$ ; quest'onda, che è polarizzata perpendicolarmente all'onda ordinaria, è detta *straordinaria*.

Sia questa fenomenologia che quella più complicata dei cristalli biossici suggerirono a Fresnel il metodo di calcolo degli indici di rifrazione e delle velocità nel cristallo dei due fronti d'onda, ordinario e straordinario, che abbiamo descritto solo nel caso dei cristalli monoassici.

Determiniamo ora le *direzioni di propagazione* all'interno del cristallo dell'onda ordinaria e dell'onda straordinaria. Allo scopo ci serviamo del *principio di Huygens-Fresnel* considerando ogni punto della superficie del cristallo colpito dall'onda piana incidente come sorgente di due onde elementari, una ordinaria e una straordinaria. L'onda ordinaria elementare emessa dal punto  $O$  ha fronte d'onda sferico in quanto la velocità è la stessa in tutte le direzioni (per l'onda ordinaria il cristallo è isotropo); preso come istante  $t = 0$  l'istante di incidenza, al tempo  $t$  i punti di egual fase stanno su una superficie sferica diraggio  $OP = v_o t = ct / n_o$ , la cui equazione è

$$x^2 + y^2 + z^2 = v_o^2 t^2 .$$

Lo stesso ragionamento non si può fare per l'onda straordinaria elementare emessa da  $O$ : al tempo  $t$  lo spazio percorso è  $OQ$  ed è diverso a seconda della direzione considerata in quanto la velocità non è isotropa. Si dimostra che i punti  $Q$  stanno su una superficie la cui equazione è

$$\frac{x^2}{v_o^2} + \frac{y^2 + z^2}{v_s^2} = t^2 ; \quad (14.36)$$

si tratta di un'*ellissoide di rotazione attorno all'asse ottico* (infatti lungo qualsiasi direzione ortogonale all'asse ottico la velocità dell'onda straordinaria è sempre  $v_s = c / n_s$ ). Il *fronte d'onda straordinario* è dunque un *ellissoide*: siccome nella direzione corrispondente all'asse ottico l'onda straordinaria ha la stessa velocità dell'onda ordinaria, la superficie d'onda sferica e quella ellissoidale sono tangenti nei punti che stanno sull'asse ottico. I casi corrispondenti a  $n_s > n_o$  e  $n_s < n_o$  sono mostrati nella figura 14.41. Sulla sezione massima contenente l'asse ottico si vedono la traccia circolare dell'onda ordinaria e quella ellittica dell'onda straordinaria; nella sezione equatoriale ortogonale all'asse ottico le tracce delle due onde sono entrambe circolari.

Esaminiamo le varie situazioni che si possono presentare a seconda della direzione dell'asse ottico e dell'onda incidente rispetto alla normale alla superficie del cristallo. Avendo in mente la calcite supponiamo  $n_s < n_o$ .

#### A. Asse ottico obliquo rispetto alla superficie del cristallo

##### 1) Incidenza normale alla superficie (figura 14.42)

La direzione di incidenza e l'asse ottico stanno nel piano del disegno. Per due punti del fronte d'onda incidente, coincidente con la superficie del cristallo, disegniamo esplicitamente l'onda sferica ordinaria e l'onda ellissoidale straordinaria, anche se la costruzione è estesa a tutti i punti interessati. L'inviluppo delle onde sferiche, ovvero il piano di traccia  $PP'$ , individua il *fronte d'onda ordinario* e l'inviluppo delle onde ellissoidali, che è il piano di traccia  $QQ'$ , individua il *fronte d'onda straordinario*; entrambi i fronti d'onda risultano paralleli al fronte d'onda incidente.

L'intersezione del fronte d'onda con la singola onda elementare determina la direzione

del raggio corrispondente; si vede che i raggi  $OP$  ordinari conservano la direzione incidente e sono ortogonali al fronte d'onda ordinario, mentre i raggi  $OQ$  straordinari non sono ortogonali al fronte d'onda straordinario. Il raggio ordinario segue cioè la legge di Snell, ma non fa così il raggio straordinario.

Per quanto riguarda i campi,  $D_o$  ed  $E_o$  sono paralleli tra loro e ortogonali al piano del disegno,  $D_s$  sta nel piano del disegno ed è parallelo al fronte d'onda straordinario,  $E_s$  è ortogonale alla direzione di propagazione  $OQ$  e non è parallelo a  $D_s$ .

L'angolo  $\alpha$  che il raggio  $OQ$  forma con la normale e con il raggio  $OP$  dipende dall'angolo  $\psi$  tra l'asse ottico e la normale. Esso è nullo solo se  $\psi = 0$  (asse ottico parallelo alla normale, vedi successivo caso B.1) oppure se  $\psi = \pi/2$  (asse ottico ortogonale alla normale ovvero parallelo alla superficie del cristallo, vedi successivo caso C.1). Il valore massimo è di circa  $4^\circ$  (nella calcite).

La velocità di fase dell'onda straordinaria si calcola da (14.35), in cui l'angolo  $\theta$  tra normale al fronte d'onda e asse ottico vale nel nostro caso  $\psi$ . Notiamo che secondo la definizione  $v_s$  è la velocità con cui avanza il fronte d'onda, cioè con cui la fase si sposta ortogonalmente al fronte d'onda, e non è la velocità lungo la direzione di propagazione (lungo il vettore di Poynting), che viene chiamata *velocità di raggio*  $v_r$ . La differenza tra le due velocità è mostrata in figura 14.43; dato che  $OQ = v_r t$  è facile ricavare da (14.36), così come da (14.34) si ricava (14.35), l'espressione

$$\frac{1}{v_r^2} = \frac{\cos^2(\psi + \alpha)}{v_o^2} + \frac{\sin^2(\psi + \alpha)}{v_s^2}$$

essendo  $\psi + \alpha$  l'angolo tra raggio straordinario e asse ottico. Tra  $v_s$  e  $v_r$  sussiste la relazione  $v_s = v_r \cos \alpha$ .

## 2) Incidenza obliqua nel piano individuato dalla normale e dall'asse ottico (figura 14.44)

Assumendo come istante  $t = 0$  quello in cui il raggio  $SO$  raggiunge la superficie del cristallo, nel tempo  $t = O'M/c$  in cui il raggio  $S'O'$  raggiunge  $M$  i due fronti d'onda emessi da  $O$  hanno compiuto i cammini  $OP = v_o t$  e  $OQ = v_s t$ , che è maggiore di  $OP$  perché la velocità dell'onda straordinaria è maggiore di quella dell'onda ordinaria ( $n_s < n_o$ ). L'angolo di rifrazione ordinaria  $\theta_o$  che  $OP$  forma con la normale obbedisce alla legge di Snell  $\sin \theta_o / \sin \theta_s = n_s$ ; la direzione del raggio  $OP$  si può quindi disegnare subito e il punto  $P$  si trova tracciando la perpendicolare da  $M$  al raggio ordinario. Noto  $P$  si disegna la circonferenza ordinaria e la corrispondente ellisse straordinaria; il punto  $Q$  è individuato tracciando la tangente da  $M$  all'ellisse e così è nota anche la direzione del raggio straordinario. Le tracce dei fronti d'onda sono dunque  $MP$  e  $MQ$ ; il fronte d'onda straordinario non è ortogonale alla direzione di propagazione. I campi  $E$  e  $D$  hanno le direzioni mostrate in figura 14.44.

## 3) Asse ottico non contenuto nel piano di incidenza

La ricerca delle direzioni dei raggi ordinario e straordinario si fa come descritto in precedenza. A differenza del caso A.2 il piano di incidenza taglia l'ellissoide (14.36) secondo una sezione generica e si trova che la costruzione dell'inviluppo delle onde straordinarie elementari porta ad una normale al fronte d'onda e ad una direzione di propagazione che sono diverse tra loro e non stanno sul piano di incidenza. Il raggio ordinario invece segue le leggi usuali.

## B. Asse ottico ortogonale alla superficie del cristallo

### 1) Incidenza normale

L'onda ordinaria e l'onda straordinaria si propagano nella stessa direzione e con la stessa velocità e all'uscita del cristallo si ricompongono dando un'onda eguale a quella incidente, senza produrre birifrangenza. La costruzione sarebbe la stessa della figura 14.42, ma con l'asse ottico normale al cristallo ( $\psi = 0$ ), come indicato nella figura 14.45; l'indice di rifrazione è  $n_o$ .

Questa proprietà indica il modo con cui si può ricercare la direzione dell'asse ottico, definita operativamente come l'unica direzione lungo cui non si ha birifrangenza.

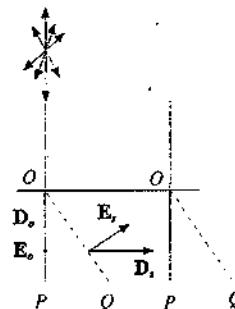
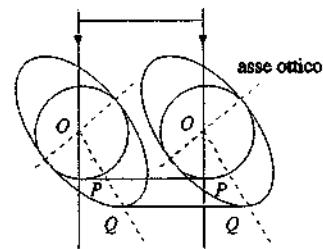


Figura 14.42

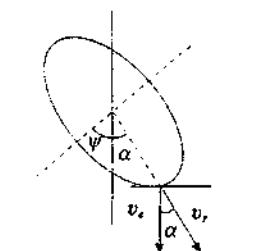


Figura 14.43

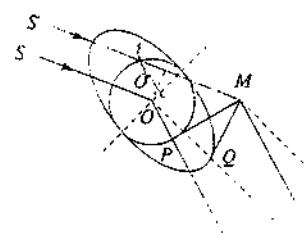


Figura 14.44

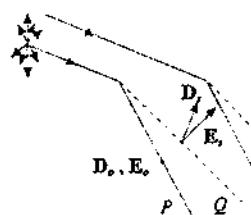


Figura 14.45

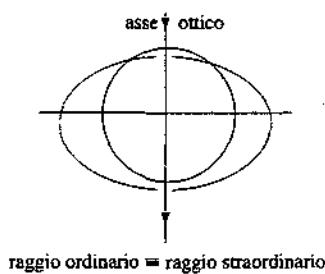


Figura 14.45

## 2) Incidenza obliqua

L'asse ottico sta nel piano di incidenza, per ogni raggio incidente si hanno due raggi rifratti, entrambi nel piano di incidenza, determinabili analogamente al caso A.2, figura 14.44.

## C. Asse ottico parallelo alla superficie del cristallo

La normale alla superficie e l'asse ottico individuano un piano ortogonale alla superficie del cristallo che viene chiamato *sezione principale*.

## 1) Incidenza normale

I raggi ordinario e straordinario hanno la stessa direzione, eguale a quella incidente, però si propagano nel cristallo con le velocità  $v_o = c / n_o$  e  $v_s = c / n_s$ . I fronti d'onda sono piani ortogonali alla direzione di propagazione. L'onda ordinaria è polarizzata ortogonalmente all'asse ottico, quella straordinaria parallelamente all'asse ottico, i campi  $E_o$  e  $E_s$  sono paralleli.

Nella figura 14.46 sono mostrate due viste, a  $90^\circ$  tra loro, della situazione che è la stessa comunque la si guardi (ricordiamo che con incidenza normale non è definibile il piano di incidenza e c'è simmetria cilindrica).

## 2) Piano di incidenza parallelo alla sezione principale

Il caso, mostrato in figura 14.47, è analogo ai casi A.2 e B.2.

## 3) Piano di incidenza ortogonale alla sezione principale

Le sezioni delle superficie d'onda elementari con il piano di incidenza sono due circonferenze, una di raggio proporzionale a  $1/n_o$ , l'altra di raggio proporzionale a  $1/n_s$  (figura 14.48). Con B.1 e C.1 è l'unico caso in cui per il raggio straordinario valgono le stesse regole che per il raggio ordinario e quindi abbiamo

$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_o} = n_o, \quad \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_s} = n_s,$$

relazioni utili per la determinazione sperimentale di  $n_o$  e  $n_s$ . I fronti d'onda sono piani ortogonali alla direzione di propagazione, le polarizzazioni sono le stesse del caso C.1.

## 4) Piano di incidenza ad angolo qualsiasi con la sezione principale

È un caso analogo ad A.3, con il raggio straordinario che esce dal piano di incidenza.

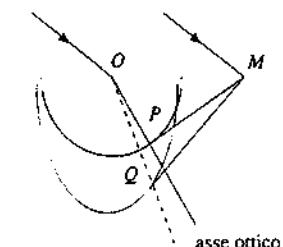


Figura 14.47

## Esempio 14.5

Un'onda luminosa piana non polarizzata di lunghezza d'onda  $\lambda = 0.589 \mu\text{m}$  incide con un angolo  $\theta_i = 45^\circ$  su una lastra di calcite spessa  $h = 2 \text{ cm}$ , tagliata con le due facce parallele all'asse ottico. Il piano di incidenza è ortogonale all'asse ottico. Calcolare la separazione tra il raggio ordinario e il raggio straordinario all'uscita dalla lastra.

## Soluzione

Siamo nel caso C.3; prendiamo i valori dati in precedenza degli indici di rifrazione  $n_o$  e  $n_s$  e utilizziamo il risultato dell'esempio 14.2:

$$d_o = h \sin \theta_i \left( 1 - \frac{\cos \theta_i}{\sqrt{n_o^2 - \sin^2 \theta_i}} \right) = 0.75 \text{ cm},$$

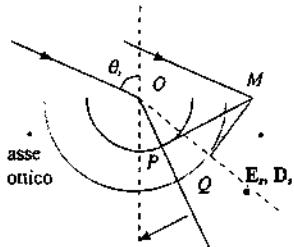


Figura 14.48

$$d_s = h \sin \theta_i \left( 1 - \frac{\cos \theta_i}{\sqrt{n_s^2 - \sin^2 \theta_i}} \right) = 0.65 \text{ cm} ,$$

$$\Delta d = d_o - d_s = 0.10 \text{ cm} = 1 \text{ mm} .$$

Le polarizzazioni dei due raggi sono indicate nella figura 14.49.

## 14.7 Applicazioni della birifrangenza

Vi sono numerose e interessanti applicazioni della birifrangenza riguardanti la polarizzazione della luce: esse vanno dalla produzione di luce polarizzata all'analisi dello stato di polarizzazione di un'onda luminosa.

### Prisma di Nicol

Il *prisma di Nicol* è composto da due lastre eguali di calcite tagliate come in figura 14.50 e incollate tra loro con una resina chiamata *balsamo del Canada*, avente indice di rifrazione  $n = 1.55$  intermedio tra i due indici  $n_o$  e  $n_s$  della calcite. La direzione dell'asse ottico è indicata dalla linea tratteggiata e siamo nella situazione del caso A.2 del paragrafo 14.6: l'asse ottico sta nel piano di incidenza e non coincide con la normale alla faccia  $AB$  del cristallo, con cui forma un angolo di  $45^\circ$ . Il raggio incidente non polarizzato si scinde in un raggio ordinario e in un raggio straordinario che si propagano in direzioni diverse, il raggio ordinario essendo deviato di più di quello straordinario. Il raggio ordinario, quando incontra la superficie di separazione tra calcite e balsamo del Canada, passa da un mezzo più rifrangente ( $n_o = 1.66$ ) ad un mezzo meno rifrangente ( $n = 1.55$ ), per i quali l'angolo limite di riflessione totale (14.13) è  $\theta = \arcsen(n/n_o) = 69^\circ$ . Nelle condizioni geometriche della figura 14.50  $\theta_i = 22^\circ$ ,  $\theta_o = 13^\circ$  e l'angolo di incidenza del raggio ordinario sul balsamo è  $90^\circ - 13^\circ = 77^\circ$ , maggiore dell'angolo limite; esso viene pertanto *totalmente riflesso* e poi assorbito da una superficie annerita. Il raggio straordinario passa invece da un mezzo meno rifrangente a uno più rifrangente e *non subisce riflessione totale*; esso attraversa il secondo prisma ed infine esce dal sistema con direzione parallela a quella di incidenza, senza subire un assorbimento apprezzabile.

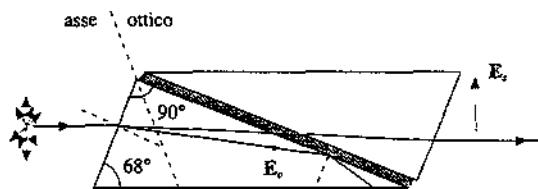


Figura 14.50

L'onda uscente è *polarizzata rettilineamente* nel piano di incidenza, per cui il prisma di Nicol, detto comunemente *nicol*, costituisce un *polarizzatore*. Pur dipendendo gli indici di rifrazione dalla lunghezza d'onda le condizioni descritte sono verificate in tutto l'intervallo di lunghezze d'onda visibili e il *nicol* non altera la composizione spettrale dell'onda piana incidente. Se questa è costituita da luce bianca in uscita dal *nicol* si ha luce bianca polarizzata rettilineamente. L'intensità trasmessa, trascurando le riflessioni, è la metà di quella incidente, l'altra metà essendo associata all'onda ordinaria.

### Cristalli dicroici. Polarizzatori e analizzatori

Consideriamo una lamina di una sostanza monoassica tagliata parallelamente all'asse ottico, cioè a forma di lastra a facce piane e parallele tra loro e all'asse ottico, e un'onda

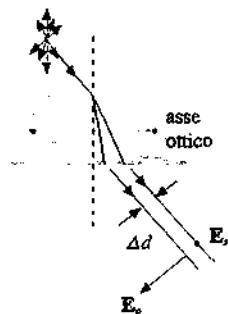


Figura 14.49

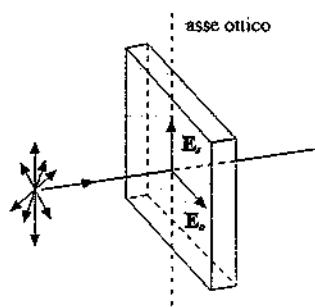


Figura 14.51

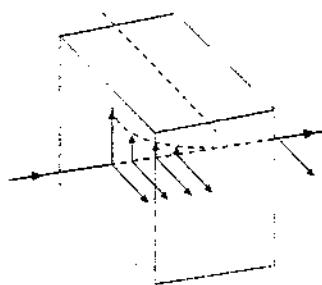


Figura 14.52

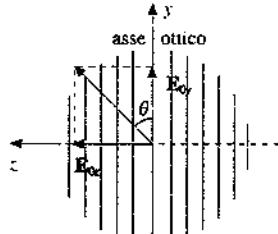


Figura 14.53

piana luminosa non polarizzata che incide normalmente ad una faccia della lastra (caso C.1 del paragrafo 14.6). Nella lamina hanno origine un'onda ordinaria polarizzata ortogonalmente all'asse ottico e un'onda straordinaria polarizzata parallelamente all'asse ottico (figura 14.51). Entrambe le onde si propagano nella direzione  $u_o$  dell'onda incidente, con velocità diverse; ciascuna trasporta metà dell'intensità incidente.

Nella maggior parte dei cristalli monoassici si ha attenuazione trascurabile, almeno per piccoli spessori; esistono però in natura sostanze che assorbono in proporzioni molto diverse l'onda ordinaria e l'onda straordinaria, nelle quali cioè l'assorbimento dipende dall'angolo che la direzione di oscillazione del campo elettrico forma con una particolare direzione tipica della sostanza. Dai risultati del paragrafo 13.8 possiamo avere la spiegazione del fenomeno: se le molecole che costituiscono la sostanza sono allungate avremo un grande assorbimento quando il campo elettrico  $E$  dell'onda è parallelo all'asse della molecola e un assorbimento molto minore quando  $E$  è perpendicolare all'asse. Una delle due onde viene pertanto progressivamente assorbita e diffusa e se lo spessore è sufficiente praticamente scompare, mentre l'altra prosegue. Il fenomeno è detto *dicroismo* e le sostanze che lo presentano si chiamano *dicroiche*.

Tra queste ricordiamo la *formalina* (borosilicato di alluminio che cristallizza nel sistema romboedrico) e l'*eraparite* (cristalli di iodosolfato di chinino, materiale organico artificiale). La prima assorbe l'onda ordinaria, il che significa che le molecole sono allungate ortogonalmente all'asse ottico, la seconda assorbe l'onda straordinaria, avendo l'asse delle molecole parallelo all'asse ottico. Cristalli di erapatite orientati parallelamente e impaccati tra due fogli di materiale trasparente, vetro e nitrocellulosa, costituiscono una lamina di materiale dicroico, detta *polaroid*; con lo stesso nome sono chiamate anche lamine dicroiche formate da molecole molto lunghe di *alcool polivinilico* inserite in una pellicola che viene sottoposta a tensione meccanica per ottenere l'allineamento delle molecole.

Le lame di polaroid assorbono in modo praticamente completo una componente e trasmettono oltre il 70% dell'intensità dell'altra, nell'intervallo di lunghezze d'onda da 0.5 a 0.7  $\mu\text{m}$ . Nell'uso pratico sono più comode dei nicol, che però sono più trasparenti.

In ogni caso una lamina dicroica è un dispositivo che fornisce un'onda polarizzata rettilineamente lungo una direzione che chiamiamo *asse ottico della lamina*, anche se in qualche caso non coincide con l'asse ottico definito nel paragrafo 14.6; infatti non è possibile fare confusione tra i due concetti. Il nome generale con cui si indica un sistema che produce un'onda polarizzata rettilineamente è *polarizzatore*. Nel seguito supporremo che in un polarizzatore non ci sia attenuazione per l'onda che emerge.

Immaginiamo ora che l'onda incidente normalmente sul polarizzatore sia polarizzata rettilineamente e che il campo elettrico  $E_0$  formi l'angolo  $\theta$  con l'asse ottico del polarizzatore, come indicato in figura 14.53 dove l'onda che si sta propagando lungo l'asse  $x$  esce dal foglio. Scomponendo l'onda incidente secondo  $y$  e  $z$ , l'onda di ampiezza  $E_{0y} = E_0 \cos \theta$  avente campo elettrico parallelo all'asse ottico del polarizzatore passa inalterata e l'onda di ampiezza  $E_{0z} = E_0 \sin \theta$  avente campo elettrico ortogonale all'asse ottico viene completamente assorbita.

Detta  $I_0$  l'intensità dell'onda polarizzata incidente, proporzionale a  $E_0^2$ , l'intensità  $I_1$  dell'onda uscente, polarizzata lungo l'asse ottico del polarizzatore, è proporzionale a  $E_0^2 \cos^2 \theta$  e possiamo scrivere la relazione

$$I_1 = I_0 \cos^2 \theta \quad (14.37)$$

### Legge di Malus

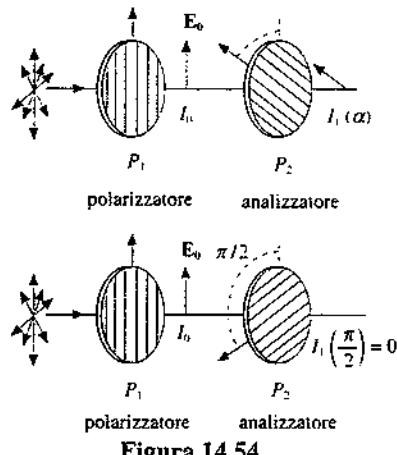


Figura 14.54

nota come *legge di Malus*. L'intensità uscente da un polarizzatore colpito da luce rettilineamente polarizzata varia proporzionalmente al quadrato del coseno dell'angolo tra la direzione di polarizzazione incidente e l'asse ottico del polarizzatore.

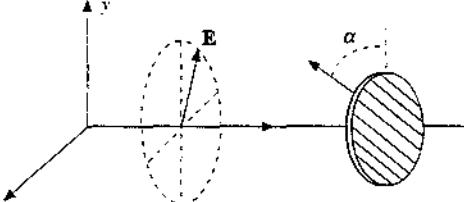
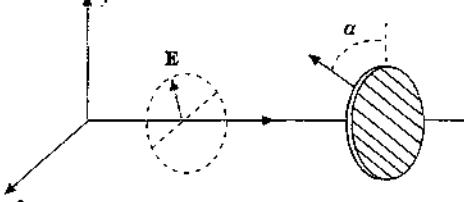
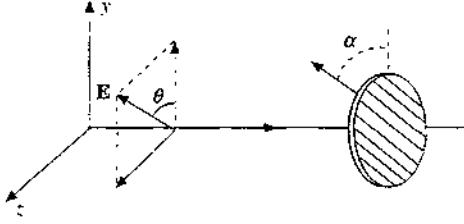
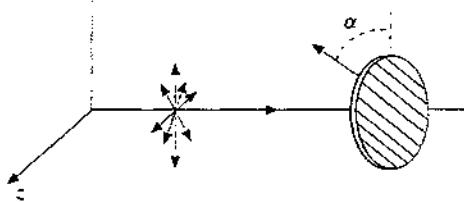
Se prendiamo in considerazione il seguente sistema (figura 14.54), onda non polarizzata incidente normalmente su un polarizzatore  $P_1$ , onda polarizzata uscente da  $P_1$  che incide a sua volta normalmente su un secondo polarizzatore  $P_2$ , detto *analizzatore*, troviamo una proprietà caratteristica: ruotando l'asse dell'analizzatore così che l'angolo  $\alpha$  tra gli assi ottici di  $P_1$  e  $P_2$  passi da zero a  $2\pi$ , l'intensità trasmessa è massima per  $\alpha = 0$  e  $\alpha = \pi$  ed è nulla per  $\alpha = \pi/2$  e  $\alpha = 3\pi/2$ . Con gli assi ottici paralleli si ha il massimo di trasmissione, con gli assi ottici incrociati la trasmissione è nulla. Questo comportamento, la cui spiegazione è ovvia sulla base della descrizione data e della legge di Malus (14.37), è esclusivo di un'onda polarizzata rettilineamente, come si vedrà dopo la successiva tabella 14.1: se si interpone un analizzatore su un fascio luminoso e ruotandolo si osserva che ci sono due posizioni di estinzione a  $180^\circ$  tra loro, si può senz'altro concludere che la luce incidente è polarizzata rettilineamente.

Nella tabella 14.1 sono ripresi i risultati della tabella 13.1, che descrivono dal punto di vista dell'intensità i diversi stati di polarizzazione di un'onda piana eletromagnetica, e vengono riportati gli andamenti dell'intensità trasmessa da un analizzatore.  $I$  è l'intensità incidente, la propagazione avviene lungo l'asse  $x$ ,  $\alpha$  è l'angolo tra l'asse ottico dell'analizzatore e l'asse  $y$ .

Nel caso che la luce incidente sia polarizzata rettilineamente, con il campo elettrico ad angolo  $\theta$  rispetto all'asse  $y$ , l'intensità indicata nella tabella 14.1 è ottenuta direttamente dalla legge di Malus (14.37). Per la polarizzazione ellittica si è ripreso, come detto, il contenuto della tabella 13.1, immaginando l'onda scomposta in due componenti  $y$  e  $z$ , sfasate di  $\pi/2$ ; gli altri casi discendono da questo ponendo  $I_y = I_z = I/2$ .

È possibile ottenere gli stessi risultati direttamente, ragionando nel modo seguente. Consideriamo le componenti del campo elettrico di un'onda ellittica incidente,  $E_y = E \cos \theta$ .

**Tavola 14.1 Intensità  $I_p(\alpha)$  trasmessa dall'analizzatore**

Polarizzazione	Intensità incidente	Intensità trasmessa
ellittica		$I = I_y + I_z$ $I_p(\alpha) = I_y \cos^2 \alpha + I_z \sin^2 \alpha$
circolare		$I_y = I_z = \frac{I}{2}$ $I_p(\alpha) = \frac{I}{2}$ costante al variare di $\alpha$
rettilinea		$I_y = I \cos^2 \theta$ , $I_z = I \sin^2 \theta$ $I_p(\alpha) = I \cos^2(\theta - \alpha)$
luce ordinaria		$I_y = I_z = \frac{I}{2}$ $I_p(\alpha) = \frac{I}{2}$ costante al variare di $\alpha$

$E_z = E \sin \theta$ , dove  $\theta$  è variabile nel tempo. La proiezione sull'asse dell'analizzatore è

$$E_\alpha = E_y \cos \alpha + E_z \sin \alpha = E \cos \theta \cos \alpha + E \sin \theta \sin \alpha = E \cos(\theta - \alpha)$$

e il quadrato di questa ampiezza vale

$$E_\alpha^2 = E^2 \cos^2 \theta \cos^2 \alpha + E^2 \sin^2 \theta \sin^2 \alpha + 2 E^2 \sin \theta \cos \theta \sin \alpha \cos \alpha.$$

D'altra parte è anche vero che  $E_y = E \cos \theta = E_{0y} \cos \omega t$ ,  $E_z = E \sin \theta = E_{0z} \sin \omega t$ , per cui

$$E_\alpha^2 = E_{0y}^2 \cos^2 \omega t \cos^2 \alpha + E_{0z}^2 \sin^2 \omega t \sin^2 \alpha + 2 E_{0y} E_{0z} \sin \omega t \cos \omega t \sin \alpha \cos \alpha.$$

Di qui segue

$$I_\alpha = \frac{n}{Z_0} (E_\alpha^2)_m = \frac{1}{2} \frac{n}{Z_0} E_{0y}^2 \cos^2 \alpha + \frac{1}{2} \frac{n}{Z_0} E_{0z}^2 \sin^2 \alpha = I_y \cos^2 \alpha + I_z \sin^2 \alpha,$$

in quanto il valor medio del terzo membro è evidentemente nullo, essendo la parte variabile  $2 \sin \omega t \cos \omega t$  eguale a  $\sin 2\omega t$ .

Se l'onda incidente è polarizzata rettilineamente  $\theta$  è costante e conviene rifarsi all'espressione  $E_\alpha = E \cos(\theta - \alpha)$  da cui ricaviamo

$$I_\alpha = \frac{n}{Z_0} (E_\alpha^2)_m = \frac{n}{Z_0} \cos^2(\theta - \alpha) (E^2)_m = I \cos^2(\theta - \alpha).$$

Dall'esame delle espressioni dell'intensità trasmessa è confermato che solo se la luce è polarizzata rettilineamente si può avere intensità nulla; per la luce ellittica si ha soltanto una variazione dell'intensità, che non si annulla mai, e negli altri due casi non si ha nessuna variazione. Occorrono quindi altri metodi per analizzare gli stati di polarizzazione non rettilinei, come vedremo tra poco.

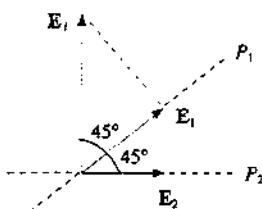


Figura 14.55

#### Esempio 14.6

Un'onda luminosa piana di intensità  $I_0$  polarizzata rettilineamente incide normalmente su un sistema formato da due polarizzatori  $P_1$  e  $P_2$  i cui assi ottici formano un angolo  $\theta = \pi/4$ . L'angolo tra il campo elettrico  $E_i$  dell'onda incidente e l'asse ottico di  $P_1$  è ancora  $\theta = \pi/4$ . Determinare la percentuale di energia trasmessa dal sistema  $P_1 P_2$ .

#### Soluzione

Si applica in successione la legge di Malus (14.37): da  $P_1$  esce un'onda di intensità  $I_1 = I_0 \cos^2 \theta = I_0 / 2$  e da  $P_2$  un'onda di intensità  $I_2 = I_1 \cos^2 \theta = I_0 / 4$ , per cui l'energia trasmessa è il 25% di quella incidente; il resto è stato assorbito e diffuso.

Il sistema permette di ruotare la direzione di polarizzazione dell'onda di  $90^\circ$ ; al variare degli angoli si possono ovviamente realizzare situazioni differenti. Vedremo tra poco un diverso dispositivo, la *lamina a mezz'onda*, con cui si può ruotare la direzione di polarizzazione di un'onda piana senza perdite significative; però il funzionamento dipende dalla lunghezza d'onda.

#### Esempio 14.7

Un'onda luminosa piana non polarizzata di intensità  $I = 10 \text{ W/cm}^2$  incide con un angolo  $\theta_i = 70^\circ$  sulla superficie di una lastra di vetro con indice di rifrazione  $n = 1.5$ . Un analizzatore è posto ortogonalmente alla direzione di propagazione dell'onda riflessa. Detto  $\alpha$  l'angolo che l'asse ottico dell'analizzatore forma col piano di incidenza, calcolare l'intensità trasmessa dall'analizzatore in funzione di  $\alpha$ .

**Soluzione**

L'angolo di rifrazione si ricava da  $\sin \theta_r / \sin \theta_i = n$  e risulta  $\theta_r = 38.8^\circ$ . L'onda riflessa è la sovrapposizione di due onde incoerenti, le cui intensità si calcolano con (14.29). La prima onda, con il campo elettrico contenuto nel piano di incidenza, ha intensità

$$I'_x = \frac{1}{2} r_x^2 I = \frac{1}{2} \left[ \frac{\tan^2(70^\circ - 38.8^\circ)}{\tan^2(70^\circ + 38.8^\circ)} \right] 10 = 0.21 \text{ W/cm}^2,$$

L'intensità della seconda onda, con il campo elettrico contenuto in un piano ortogonale al piano di incidenza, è

$$I'_\sigma = \frac{1}{2} r_\sigma^2 I = \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin^2(70^\circ - 38.8^\circ)}{\sin^2(70^\circ + 38.8^\circ)} \right] 10 = 1.50 \text{ W/cm}^2.$$

L'onda riflessa ha intensità  $I_r = I'_x + I'_\sigma = 1.71 \text{ W/cm}^2$  ed è parzialmente polarizzata, con grado di polarizzazione (14.30)

$$P_R = \frac{I'_\sigma - I'_x}{I'_\sigma + I'_x} = 0.754$$

L'intensità trasmessa dall'analizzatore, ottenuta applicando (14.37), è

$$I_P(\alpha) = I'_x \cos^2 \alpha + I'_\sigma \sin^2 \alpha = 0.21 \cos^2 \alpha + 1.50 \sin^2 \alpha$$

e l'onda uscente è polarizzata parallelamente all'asse ottico dell'analizzatore. L'intensità trasmessa è massima per  $\alpha = \pi/2, 3\pi/2$  e vale  $I_{\max} = 1.50 \text{ W/cm}^2$ , è minima per  $\alpha = 0, \pi$  e vale  $I_{\min} = 0.21 \text{ W/cm}^2$ .

Osserviamo che l'intensità trasmessa avrebbe lo stesso andamento del caso in cui l'onda riflessa fosse polarizzata ellitticamente: con un cristallo dicroico non si può distinguere la luce parzialmente polarizzata dalla luce polarizzata ellitticamente.

L'esempio giustifica l'uso degli *occhiali da sole Polaroid* per minimizzare la quantità di luce, riflessa da superficie come quella del mare, che raggiunge gli occhi. Le lenti sono montate con l'asse ottico verticale, in modo che sia contenuto nel piano di incidenza. Così, indipendentemente dall'angolo di incidenza, non viene trasmessa all'occhio la componente perpendicolare al piano di incidenza, quantitativamente sempre di intensità maggiore rispetto alla componente che giace nel piano di incidenza essendo  $r_\sigma^2 > r_x^2$  nei casi come quello descritto (vedi paragrafo 14.3). È bene osservare che si tratta solamente di una diminuzione dell'intensità della luce riflessa che arriva all'occhio e non di un effetto di polarizzazione. I *coni* e i *bastoncelli* che costituiscono gli elementi sensori della retina sono *amorfi* e pertanto non sono in grado di distinguere lo stato di polarizzazione della luce che li colpisce.

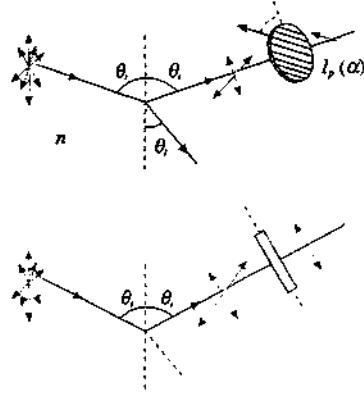


Figura 14.56

**Lamine di ritardo**

Consideriamo una lamina  $L$  di cristallo monoassico non dicroico, caratterizzata dagli indici di rifrazione  $n_o$  e  $n_s$ , tagliata con le superficie parallele all'asse ottico. Assumiamo che la lamina stia nel piano  $y, z$  e che il suo asse ottico sia parallelo all'asse  $y$  (figura 14.57). Un'onda piana elettromagnetica polarizzata rettilineamente, quale quella che si ottiene facendo passare un'onda piana elettromagnetica non polarizzata attraverso un polarizzatore  $P$ , si propaga lungo l'asse  $x$  e incide normalmente sulla lamina (caso C.1, paragrafo 14.6). Se indichiamo con  $\theta$  l'angolo formato dal campo elettrico  $E$  con l'asse ottico e utilizziamo i risultati della tabella 13.1, possiamo scrivere l'onda incidente come

$$E_y = E_0 \cos \theta \cos(kx - \omega t), \quad E_z = E_0 \sin \theta \cos(kx - \omega t).$$

In queste espressioni  $k = 2\pi/\lambda$  e  $\lambda$  è la lunghezza d'onda nel vuoto (o nell'aria).

Dopo aver attraversato la lamina, di spessore  $d$ , l'onda è rappresentata da

$$E_{\text{out}} = E_y = E_0 \cos \theta \cos(kx + k_s d - \omega t), \quad E_{\text{out}} = E_z = E_0 \sin \theta \cos(kx + k_o d - \omega t),$$

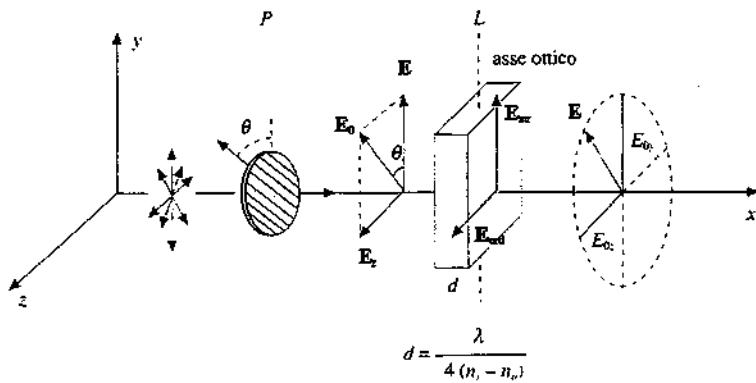


Figura 14.57

dove  $k_s$  e  $k_o$  sono i numeri d'onda dell'onda straordinaria e dell'onda ordinaria. In base a (14.6)  $k_s = kn_s$ ,  $k_o = kn_o$ : vediamo che, mentre le componenti dell'onda entrante sono in fase, la componente straordinaria e la componente ordinaria dell'onda uscente sono sfasate. Il fenomeno è dovuto alla differente velocità delle due onde che impiegano un tempo diverso a percorrere lo spessore  $d$ .

Dette  $\phi_s$  e  $\phi_o$  le rispettive fasi, lo sfasamento è

$$\Delta\phi = \phi_s - \phi_o = (k_s - k_o)d = k_s(n_s - n_o)d = \frac{2\pi}{\lambda}(n_s - n_o)d \quad : \quad (14.38)$$

L'onda straordinaria è in *anticipo* su quella ordinaria nei cristalli positivi, in ritardo in quelli negativi. Di conseguenza riscriviamo l'onda uscente come

$$E_y = E_0 \cos\theta \cos(kx + k_s d - \omega t), \quad E_z = E_0 \sin\theta \cos(kx + k_s d - \omega t - \Delta\phi). \quad (14.39)$$

In base a quanto visto nei paragrafi 12.5 e 13.2 l'onda emergente dalla lamina risulta in generale *polarizzata ellitticamente*, se l'onda entrante è polarizzata rettilineamente. Sono interessanti alcuni particolari che adesso studiamo.

#### a) Lamina quarto d'onda

Supponiamo che lo sfasamento  $\Delta\phi$  introdotto dalla lamina sia un multiplo intero dispari di  $\pi/2$  ed esprimiamo lo spessore  $d$  a ciò necessario tramite (14.38):

Lamina quarto d'onda

$$\Delta\phi = (2m+1)\frac{\pi}{2}, \quad d = \frac{\lambda}{4(n_s - n_o)}(2m+1), \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad . \quad (14.40)$$

L'equazione dell'onda uscente dalla lamina è

$$E_y = E_0 \cos\theta \cos(kx + k_s d - \omega t), \quad E_z = E_0 \sin\theta \sin(kx + k_s d - \omega t).$$

cioè l'onda è *polarizzata ellitticamente* con gli assi dell'ellisse paralleli agli assi coordinati  $y$  e  $z$ : i semiassi valgono  $E_{0y} = E_0 \cos\theta$ ,  $E_{0z} = E_0 \sin\theta$ . Se  $\theta = \pi/4$

$$E_y = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \cos(kx + k_s d - \omega t), \quad E_z = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \sin(kx + k_s d - \omega t)$$

e l'onda risulta polarizzata circolarmente con il campo elettrico costantemente eguale a  $E_0/\sqrt{2}$ .

Queste lame, dette *quarto d'onda* perché lo spessore è proporzionale a  $\lambda/4$ , trasformano quindi un'onda piana polarizzata rettilineamente in una polarizzata ellitticamente in generale e in una polarizzata circolarmente quando l'angolo tra il campo elettrico  $\mathbf{E}$

dell'onda incidente e l'asse ottico della lamina è  $\theta = \pi/4$ . È vero anche il viceversa: un'onda incidente polarizzata circolarmente esce dalla lamina polarizzata rettilineamente a  $45^\circ$  rispetto all'asse ottico della lamina, se invece la polarizzazione è ellittica l'onda esce polarizzata ad un angolo  $\theta$  tale che  $\operatorname{tg}\theta = E_0 / E_{0r}$ .

Nei calcoli precedenti abbiamo assunto  $\Delta\phi = \pi/2$ ; se fosse  $\Delta\phi = 3\pi/2$   $E_z$  cambierebbe di segno. Sia da questo fatto che dal segno di  $\Delta\phi$ , derivante dal segno di  $\Delta n = n_s - n_o$ , dipendono i versi di rotazione sull'ellisse o sulla circonferenza, fissato il segno di  $\theta$ , ovvero viceversa, fissato il verso di rotazione, dipende il segno di  $\theta$ . Per quanto riguarda lo spessore, la (14.40) come scritta vale per cristalli positivi e, prendendo il modulo di  $\Delta n$ , per qualsiasi cristallo.

### b) Lamina mezz'onda

Consideriamo adesso uno sfasamento multiplo dispari di  $\pi$ :

$$\Delta\phi = (2m+1)\pi, \quad d = \frac{\lambda}{2(n_s - n_o)} (2m+1), \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (14.41)$$

La lamina si chiama *mezz'onda* in quanto lo spessore è proporzionale a  $\lambda/2$ ; essa trasforma l'onda polarizzata rettilineamente nell'onda

$$E_x = E_0 \cos\theta \cos(kx + k, d - \omega t), \quad E_z = -E_0 \sin\theta \cos(kx + k, d - \omega t).$$

polarizzata rettilineamente ad angolo  $-\theta$  con l'asse ottico della lamina. La direzione di vibrazione è *ruotata* quindi di un angolo  $\beta = 2\theta$ ; se  $\theta = 45^\circ$  la rotazione è di  $90^\circ$ .

Dato che l'effetto della lamina mezz'onda è quello di cambiare il segno di una delle due componenti dell'onda, quando la luce incidente è polarizzata ellitticamente o circolarmente si ha semplicemente un'inversione del senso di rotazione.

Si noti che se lo sfasamento introdotto dalla lamina fosse un *multiplo pari di  $\pi$*  ( $2\pi, 4\pi, \dots$ ), la lamina sarebbe ininfluente.

Sull'argomento lame di ritardo facciamo alcune considerazioni conclusive. L'assorbimento è molto piccolo e in pratica trascurabile; possiamo assumere che le lame non attenuino né l'onda ordinaria né l'onda straordinaria e che l'intensità in uscita sia eguale all'intensità  $I_s + I_o$  dell'onda incidente. Come sottolineato nel paragrafo 13.3 in relazione alla (13.25) una differenza di fase  $\Delta\phi$  non influisce sui valori medi dell'energia, come sono quelli di cui parliamo. *L'effetto della lamina si ha solo sullo stato di polarizzazione di un'onda piana polarizzata.*

Lo spessore per avere un dato effetto dipende da  $\lambda$  e quindi una lamina è quarto d'onda o mezz'onda per una data lunghezza d'onda, cioè per un fascio monocromatico. Gli spessori minimi sono abbastanza piccoli: nella calcite si tratta di  $0.86 \mu\text{m}$  ( $\lambda/4$ ) e di  $1.71 \mu\text{m}$  ( $\lambda/2$ ) se  $\lambda = 0.59 \mu\text{m}$ , nel quarzo i corrispondenti valori sono  $16.18 \mu\text{m}$  e  $32.36 \mu\text{m}$ .

Se la luce incidente non è polarizzata la lamina non ha nessun effetto: l'introduzione di uno sfasamento tra due componenti che sono incoerenti non altera l'incoerenza intrinseca. In definitiva una lamina agisce solamente se c'è un rapporto di fase determinato tra le due componenti, situazione che costituisce la definizione di onda polarizzata.

### Lamina mezz'onda

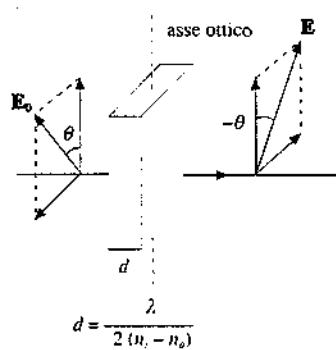


Figura 14.58

### Esempio 14.8

Un'onda piana luminosa di intensità  $I$  e lunghezza d'onda  $\lambda = 0.5 \mu\text{m}$  incide su un analizzatore: si osserva che ruotando l'analizzatore l'intensità  $I_p$  trasmessa non varia. Mostrare come l'aggiunta di una lamina quarto d'onda per la luce in esame, ad esempio di calcite, permetta di determinare lo stato di polarizzazione della luce.

### Soluzione

Seguendo la tabella 14.1 stabiliamo che la luce incidente può essere polarizzata circolarmente o non polarizzata. Se non è polarizzata la lamina quarto d'onda non ha effetto e l'intensità trasmessa dall'analizzatore non varia ruotandolo. Se invece la luce è polarizzata circolarmente, all'uscita della lamina quarto d'onda abbiamo un'onda polarizzata rettilineamente con il campo elettrico a  $\pm 45^\circ$  rispetto all'asse ottico della lamina.

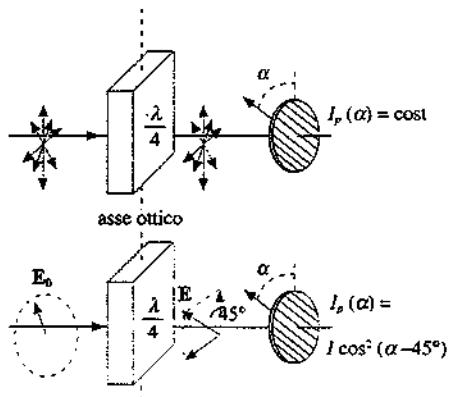


Figura 14.59

come si è appena visto. Ruotando l'analizzatore e detto  $\alpha$  l'angolo tra l'asse ottico dell'analizzatore e l'asse ottico della lamina, l'intensità trasmessa dall'analizzatore è, secondo (14.37),

$$I_p(\alpha) = I \cos^2\left(\alpha \mp \frac{\pi}{4}\right).$$

Con il segno meno essa è nulla per  $\alpha = 3\pi/4, 7\pi/4$ , con il segno più per  $\alpha = \pi/4, 5\pi/4$ , ed è massima nelle rispettive porzioni intermedie.

Con lo stesso sistema si può distinguere se un fascio luminoso è parzialmente polarizzato o ellitticamente polarizzato.

Lo spessore minimo richiesto per la lamina, se è di calcite, vale

$$d = \frac{\lambda}{4(n_o - n_s)} = 0.73 \mu\text{m}.$$

Nella sostanza il funzionamento non cambia aggiungendo uno spessore  $2d, 4d, \dots$  per cui gli spessori utili sono  $0.73 \mu\text{m}, 2.19 \mu\text{m}, 3.65 \mu\text{m}$ , ecc.

## 14.8 Birifrangenza elettrica, magnetica e meccanica

Quasi tutte le sostanze trasparenti isotrope diventano birifrangenti quando sono sottoposte ad un campo elettrico: il comportamento è quello di un cristallo monoassico con asse ottico parallelo al campo elettrico; il fenomeno si chiama *effetto Kerr*.

Sperimentalmente si trova che la differenza tra gli indici di rifrazione straordinario e ordinario è data da

Effetto Kerr

$$n_s - n_o = K \lambda E^2 ; \quad (14.42)$$

$E^2$  è il quadrato del modulo del campo elettrico applicato,  $\lambda$  la lunghezza d'onda incidente e  $K$  una costante, detta costante di Kerr, che dipende dalla temperatura, decrescendo al crescere di questa.

I valori di  $K$  sono dell'ordine di  $10^{-14} \text{ mV}^{-2}$ : ad esempio nell'acqua  $K = 5.22 \cdot 10^{-14} \text{ mV}^{-2}$ . Uno dei valori maggiori si ha nel nitrobenzolo molto puro, in cui  $K = 2.5 \cdot 10^{-12} \text{ mV}^{-2}$ . Con  $E = 10^6 \text{ V/m}$  e  $\lambda = 0.6 \mu\text{m}$ ,  $n_s - n_o = 1.5 \cdot 10^{-6}$ ; per confronto nel quarzo birifrangente naturale  $n_s - n_o = 9.1 \cdot 10^{-3}$ .

Una *cella di Kerr* è schematizzata nella figura 14.60. Un condensatore piano ha come dielettrico nitrobenzolo e il sistema è posto tra due *polarizzatori incrociati*: in assenza di campo elettrico tra le armature l'intensità trasmessa dal secondo polarizzatore è nulla. Quando tramite l'applicazione di una tensione si genera un campo elettrico  $E$  tra le armature, viene introdotto lo sfasamento (14.38) che, utilizzando (14.42), si scrive

$$\Delta\phi = 2\pi d K E^2 ;$$

$d$  è la lunghezza delle armature nel verso della propagazione.

In generale all'uscita della cella l'onda luminosa è *polarizzata ellitticamente* e il secondo polarizzatore trasmette solamente la componente parallela al suo asse ottico.

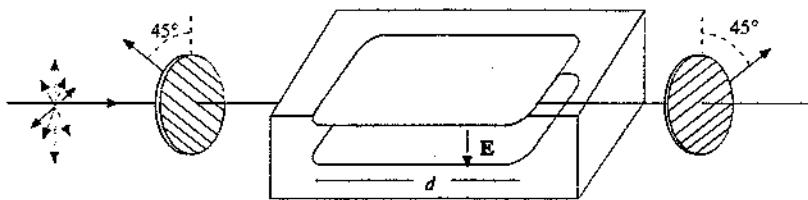


Figura 14.60

La tensione applicata può essere alternata per cui ad esempio  $E = E_0 \cos \omega t$ ; con  $E_0 = 10^6 \text{ V/m}$  e  $d = 0.2 \text{ m}$  si ha

$$\Delta\phi = 2\pi \cdot 0.2 \cdot 2.5 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{12} \cos^2 \omega t = \pi \cos^2 \omega t$$

Lo sfasamento assume nel tempo tutti i valori compresi tra 0 e  $\pi$  e all'uscita della cella la polarizzazione presenta tutte le possibili configurazioni corrispondenti; il secondo polarizzatore trasmette un'intensità modulata dalla tensione applicata.

Se  $d$  è tale per cui  $\Delta\phi = \pi$  l'onda resta polarizzata rettilineamente e soltanto ruotata. Scegliendo pari a  $\pi/4$  l'angolo tra l'asse ottico del primo polarizzatore e il campo elettrico, la direzione di polarizzazione viene ruotata di  $\pi/2$  e l'onda è integralmente trasmessa dal secondo polarizzatore. Spegnendo il campo la trasmissione è bloccata e si può realizzare così un *interruttore rapido* per un fascio luminoso.

Alcune sostanze presentano un effetto analogo che però dipende *linearmente* dal campo elettrico e si verifica sia con una disposizione eguale a quella della cella di Kerr sia con il campo elettrico parallelo alla direzione di propagazione. Si parla di *effetto Pockels, trasversale o longitudinale*; come l'effetto Kerr, l'effetto Pockels è usato per modulare o interrompere fasci luminosi e trova notevoli applicazioni nel campo dei laser.

In vari liquidi si ha anche una *birifrangenza magnetica* (*effetto Cotton-Mouton*), che è massima quando  $B$  è ortogonale alla direzione di propagazione e segue una legge analoga alla (14.42),  $n_r - n_o = C \lambda B^2$ ; nel nitrobenzolo  $C = 25 \cdot 10^{-3} \text{ m}^{-1} \text{ T}^{-2}$ , per cui, con  $\lambda = 0.6 \cdot 10^{-6} \text{ m}$  e  $B = 1 \text{ T}$ ,  $n_r - n_o = 1.5 \cdot 10^{-8}$ .

Infine, materiali isotropi come il vetro e il plexiglas diventano birifrangenti se sottoposti a *sollecitazioni meccaniche*. Una sostanza sottoposta a compressione o a trazione si comporta come un cristallo monoassiso con asse ottico parallelo alla forza: la differenza  $n_r - n_o$  è proporzionale alla pressione. La proprietà viene usata per studiare la distribuzione degli sforzi interni in un corpo, realizzandone un modello in materiale trasparente. Ad esempio, didatticamente è molto interessante l'esame di strutture come gli archi delle cattedrali gotiche.

## 14.9 Attività ottica

Alcune sostanze hanno la proprietà di *ruotare* la direzione di polarizzazione di un'onda luminosa piana polarizzata rettilineamente che le attraversi. Osservando lungo il verso di propagazione la luce trasmessa, queste sostanze sono dette *destrogira* o *levogira* a seconda che la *rotazione* avvenga in senso *orario* o *antiorario*.

Tale proprietà, nota come *attività ottica*, è posseduta da soluzioni di sostanze come lo zucchero, la canfora, la trementina e da cristalli come il quarzo, che in natura esiste in due forme, una destrogira e una levogira (nel quarzo è conveniente osservare il fenomeno con luce che si propaga nella direzione dell'asse ottico, così da non avere effetti di birifrangenza). L'attività ottica è ricondotta a particolari forme di simmetria delle molecole, ma non alla loro disposizione all'interno della sostanza per quanto riguarda soluzioni e liquidi puri, e a specifiche strutture cristalline nei cristalli.

L'angolo di rotazione  $\alpha$  della direzione di polarizzazione e lo spessore  $h$  attraversato sono legati dalla legge

$$\alpha = K h$$

in cui la costante  $K$ , detta *potere rotatorio*, viene di norma espressa in gradi/cm (invece che in rad/m); si trova che  $K$  dipende notevolmente dalla lunghezza d'onda. Nelle soluzioni vale la *legge di Biot*

$$\alpha = k c h \quad \text{ovvero} \quad K = k c$$

dove  $c$  è la *concentrazione*; la costante  $k$ , chiamata *potere rotatorio specifico della soluzione*, rappresenta l'angolo di rotazione per unità di percorso e unità di concentrazione. Dalla misura di  $\alpha$ , noto  $k$ , si determina la concentrazione di sostanze otticamente attive. Lo strumento (*polarimetro*) è in sostanza una cella contenente la soluzione posta tra due polarizzatori incrociati; dalla rotazione del secondo polarizzatore necessaria per ottenere l'estinzione si determina  $\alpha$ .

Alla lunghezza d'onda  $\lambda = 0.589 \mu\text{m}$   $K = 217$  gradi/cm nel quarzo e  $6.65$  gradi/cm in una soluzione di  $1 \text{ g/cm}^3$  di saccarosio in acqua.

## Effetto Cotton-Mouton

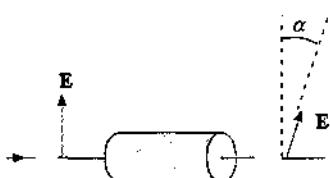


Figura 14.61

## Potere rotatorio

Fresnel ipotizzò che il fenomeno fosse dovuto a una *birifrangenza circolare*, nel senso che ora precisiamo. Un'onda polarizzata rettilineamente si può sempre pensare come sovrapposizione di due onde polarizzate circolarmente di eguale ampiezza, una destrogiro e una levogiro. Supponendo che la propagazione avvenga lungo l'asse  $x$  e che la polarizzazione dell'onda incidente sia lungo l'asse  $z$ , abbiamo

$$\mathbf{E} = 2 E_0 \cos(kx - \omega t) \mathbf{u}_z = \begin{aligned} & E_0 \sin(kx - \omega t) \mathbf{u}_y + E_0 \cos(kx - \omega t) \mathbf{u}_z \\ & -E_0 \sin(kx - \omega t) \mathbf{u}_y + E_0 \cos(kx - \omega t) \mathbf{u}_z \end{aligned}$$

A secondo membro i primi due termini rappresentano un'onda circolare levogiro, gli altri due un'onda circolare destrogiro, la somma totale è l'onda incidente rettilineo.

Seguendo Fresnel, ammettiamo che le due componenti circolari si propaghino nel mezzo otticamente attivo con velocità diversa (dove il nome di *birifrangenza circolare*) date da  $v_r = c/n_r$  e  $v_d = c/n_d$ . All'uscita tra di esse c'è la differenza di fase (14.38).

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} (n_r - n_d) h ,$$

e possiamo scrivere

$$\begin{aligned} & E_0 \sin(kx - \omega t + \Delta\phi) \mathbf{u}_y + E_0 \cos(kx - \omega t + \Delta\phi) \mathbf{u}_z & \text{onda levogiro} \\ & -E_0 \sin(kx - \omega t) \mathbf{u}_y + E_0 \cos(kx - \omega t) \mathbf{u}_z & \text{onda destrogiro} \end{aligned}$$

Sommando le componenti si ottiene

$$E_y = 2 E_0 \sin \frac{\Delta\phi}{2} \cos \left( kx - \omega t + \frac{\Delta\phi}{2} \right), \quad E_z = 2 E_0 \cos \frac{\Delta\phi}{2} \cos \left( kx - \omega t + \frac{\Delta\phi}{2} \right)$$

che è un'onda polarizzata rettilineamente ad angolo  $\alpha$  rispetto all'onda incidente tale che

$$\tan \alpha = \frac{E_y}{E_z} = \tan \frac{\Delta\phi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\Delta\phi}{2} = \frac{\pi}{\lambda} (n_r - n_d) h = K h .$$

Si spiega così la legge trovata sperimentalmente e si dà un'espressione esplicativa per il potere rotatorio.

Dai dati numerici precedenti risulta:

$$\text{quarzo } n_r - n_d = 4.07 \cdot 10^{-5}, \quad \text{soluzione di saccarosio } n_r - n_d = 1.25 \cdot 10^{-4} .$$

### *Effetto Faraday*

Alcune sostanze che non presentano attività ottica diventano otticamente attive quando sono sottoposte ad un campo magnetico. Il fenomeno è detto *effetto Faraday* e per esso vale la *legge di Verdet*:

#### Legge di Verdet

$$\alpha = V B h \cos \theta_B :$$

$\theta_B$  è l'angolo tra  $B$  e la direzione di propagazione dell'onda piana incidente polarizzata rettilineamente,  $V$  la costante di Verdet. L'effetto è massimo se la luce si propaga parallelamente a  $B$ .

Nell'acqua  $V = 2.18 \cdot 10^2$  gradi/mT, nel solfuro di carbonio  $V = 7.24 \cdot 10^2$  gradi/mT. In quest'ultima sostanza, con  $h = 12.4$  cm,  $B = 1$  T e  $\theta_B = 0$  si ottiene  $\alpha = 90^\circ$ .

Tra attività ottica naturale e magnetica c'è una differenza importante. Nel primo caso, se la direzione di polarizzazione ruota di  $\alpha$  per un certo verso di percorrenza, la rotazione è di  $-\alpha$  per propagazione in verso opposto e un'onda che ripercorre il campione nei due versi, ad esempio perché riflessa da uno specchio, non subisce nessuna rotazione. In altre parole, se la rotazione è destrorsa andando nel verso di  $x$ , è ancora destrorsa andando nel verso di  $-x$ : nello stesso sistema di riferimento, prima è  $\alpha$ , dopo è  $-\alpha$ . Nell'attività magnetica invece la rotazione è sempre dello stesso segno e risulta di  $2\alpha$  per un'onda che ripercorre il campione nei due versi.

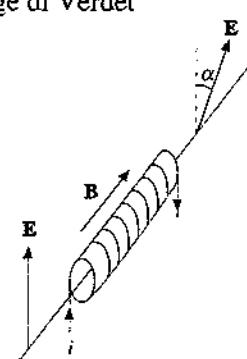


Figura 14.62

### 14.10 Riflessione su una superficie metallica

Nei paragrafi precedenti abbiamo visto le proprietà di riflessione e rifrazione delle onde elettromagnetiche, essenzialmente nel campo visibile, quando esse incontrano un mezzo dielettrico. Vogliamo adesso discutere brevemente la riflessione da parte di una superficie metallica, fenomeno su cui si basa tra l'altro il funzionamento degli *specchi*.

Abbiamo trattato nel paragrafo 13.10 il comportamento di un'onda elettromagnetica in un mezzo conduttore. In particolare riprendiamo la parte che riguarda le alte frequenze, quando per l'indice di rifrazione si trova l'espressione approssimata

$$n^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} .$$

Le pulsazioni di plasma hanno valori dell'ordine di  $10^{16}$  rad/s per cui le pulsazioni visibili obbediscono alla  $\omega^2 < \omega_p^2$  e in corrispondenza  $n^2$  risulta minore di 1. Ricaviamo quindi il valore immaginario puro

$$n = i \sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1} = i n_i \quad , \quad n_i = \sqrt{\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{\omega^2}} .$$

Sappiamo già che in questa situazione non può esserci propagazione nel metallo. Per semplicità mettiamoci in condizioni di incidenza normale dal vuoto al metallo, così che per i campi elettrici vale la (14.24):

$$\frac{E_r}{E_i} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} = \frac{1 - i n_i}{1 + i n_i} = \frac{\sqrt{1 + n_i^2} - e^{-i\phi}}{\sqrt{1 + n_i^2} + e^{i\phi}} = e^{-2i\phi} ,$$

dove abbiamo usato la notazione polare  $\rho e^{i\phi}$  per un numero complesso (vedi nota alla fine del paragrafo 11.4). Il rapporto  $I_r / I_i$  delle intensità riflesse e incidente è eguale al rapporto dei quadrati dei moduli e vale 1, in quanto il modulo di un esponenziale complesso è sempre unitario: l'intensità riflessa è eguale a quella incidente, non c'è trasmissione.

In effetti, scriviamo il campo trasmesso come  $E_t = E_0 e^{i(kz - \omega t)}$ , essendo  $z$  l'asse di incidenza, normale alla superficie del metallo. Però

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{\omega}{c} n = i \frac{\omega}{c} n_i$$

e nel metallo si ha un campo che decresce esponenzialmente.

$$E_t = E_0 e^{-z/z_0} e^{i\omega t} \quad , \quad z_0 = \frac{c}{\omega n_i} = \frac{c}{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}} .$$

Con luce visibile ( $\omega = 4 \cdot 10^{15}$  rad/s) su rame ( $\omega_p = 1.6 \cdot 10^{16}$  rad/s),  $z_0 = 2 \cdot 10^{-8}$  m: dopo uno spessore di circa  $10^{-7}$  m il campo è praticamente nullo.

La situazione reale è leggermente diversa: il coefficiente di riflessione è vicino a 1, ma non esattamente 1: l'approssimazione adottata non è evidentemente sufficiente. Ad ogni modo il risultato vale anche per incidenza obliqua e indica che una superficie metallica riflette quasi tutta l'energia luminosa che la colpisce.

I metalli che hanno il maggior coefficiente di riflessione nel visibile, pari a circa 0.95, sono l'argento e l'alluminio. Andando verso l'ultravioletto il coefficiente diminuisce: si ricordi che per  $\omega > \omega_p$  i metalli sono trasparenti (paragrafo 13.10); invece nell'infrarosso la riflessione è praticamente totale.

Dato che l'alluminio, se esposto all'aria per tempi molto lunghi, resta sostanzialmente inalterato a differenza dell'argento, gli specchi vengono fatti preferibilmente con una sottile pellicola di alluminio, depositata per evaporazione sotto vuoto su un supporto della forma voluta, ad esempio piana, sferica, cilindrica, parabolica. Negli specchi di uso comune non scientifico l'alluminio è depositato sul retro di una lastra di vetro per non esporre la superficie speculare a danneggiamenti.

# Interferenza

## 15.1 Somma di onde. Fenomeni di interferenza. Sorgenti coerenti e incoerenti

Nell'esposizione delle proprietà delle onde abbiamo incontrato varie situazioni in cui due o più onde della stessa natura si sovrapponevano in una certa regione di spazio e in particolare in un punto. Secondo il *principio di sovrapposizione*, basato sulla linearità dell'equazione differenziale delle onde, la perturbazione complessiva prodotta in un dato istante in un determinato punto da un insieme di sorgenti di onde è la somma delle singole perturbazioni che ciascuna sorgente produrrebbe da sola, agendo in assenza delle altre sorgenti; perché il risultato sia vero è necessario che la presenza contemporanea di più sorgenti non modifichi il comportamento della singola sorgente.

Un esempio di sovrapposizione è quello descritto col nome di *battimento* (paragrafi 12.8 e 12.11): due onde piane armoniche di frequenza diversa, entrambe propagantis lungo l'asse  $x$ , danno luogo in un punto fisso a una particolare oscillazione non armonica ovvero a una certa struttura che si propaga lungo l'asse  $x$  con velocità diversa da quella delle onde componenti. Più in generale la somma di molte onde può costituire un *pacchetto d'onde* (paragrafo 12.10). In questi casi la differenza di fase tra le varie onde, pur non essendo costante, obbedisce a una legge precisa, cioè non è casuale.

Anche il fenomeno dell'*onda d'urto* (paragrafo 12.12) si spiega con la somma di numerose onde emesse lungo la traiettoria dell'oggetto che causa la perturbazione, il quale si muove nel mezzo con velocità superiore a quella delle onde meccaniche tipiche del mezzo. Classicamente la stessa spiegazione è valida per l'analogo effetto che si presenta con le onde elettromagnetiche (*effetto Cerenkov*, paragrafo 13.11). Con riferimento a quest'ultimo, possiamo dire che la radiazione emessa dai dipoli indotti dal passaggio della particella carica non ammette una superficie d'onda se la velocità  $v$  della particella è inferiore alla velocità  $c/n$  della luce nel mezzo, mentre se  $v > c/n$  esiste una superficie su cui le singole onde sono tutte in fase: in una situazione la somma delle onde dà risultato nullo, nell'altra la somma si propaga nel mezzo causando un effetto (impulsivo) osservabile.

In questo capitolo vogliamo sviluppare la descrizione dei fenomeni che avvengono quando un certo numero di onde della stessa natura si sovrappongono in un punto  $P$  dello spazio. Assumeremo che le onde siano armoniche e abbiano tutte la stessa frequenza e vedremo che le caratteristiche della sovrapposizione in  $P$  dipendono dalla direzione di propagazione, dalla direzione di vibrazione e dalla differenza di fase tra le varie onde.

La differenza di fase tra due onde che interessano il punto  $P$  in generale contiene due contributi: una *differenza di fase intrinseca* tra le due sorgenti che inviano onde in  $P$  e una differenza di fase dovuta all'eventuale *differenza nel percorso* compiuto da ciascuna onda per andare dalla sorgente al punto  $P$ , differenza che può

essere soltanto geometrica o dipendere anche dalla natura fisica dei mezzi attraversati, come risulterà chiaro in seguito.

Quando la differenza di fase tra due onde in un qualsiasi punto è costante nel tempo le sorgenti delle due onde si dicono *coerenti*. Quando invece questa circostanza non si verifica ovvero si verifica per tempi molto brevi rispetto all'intervallo di osservazione, le sorgenti sono dette *incoerenti*.

Il termine *interferenza* è riferito propriamente a quei fenomeni di sovrapposizione ottenuti con onde emesse da due o più sorgenti coerenti. La possibilità di produrre interferenza è una caratteristica generale delle grandezze che si propagano per onde; ne è conferma il fatto che l'interferenza si verifica con ogni tipo di onda e che la trattazione analitica è indipendente dalla natura delle onde in esame. Anzi l'interferenza è considerata una proprietà così caratteristica delle onde che la sua osservazione viene presa come prova definitiva della natura ondulatoria di una grandezza. Che la luce si propagasse per onde venne accettato solo dopo gli esperimenti di interferenza compiuti da Young nel 1801; anche l'esistenza delle onde elettromagnetiche previste dalla teoria di Maxwell venne provata per la prima volta da Hertz nel 1888 con un esperimento di interferenza.

I metodi per individuare o realizzare sorgenti coerenti atte a produrre interferenza sono invece dipendenti dal tipo di onda e addirittura per uno stesso tipo di onde, quelle elettromagnetiche, variano a seconda della frequenza, come vedremo nel paragrafo 15.2 per le onde sonore e le onde hertziane e nel paragrafo 15.3 per le onde luminose. In questi paragrafi e in quelli successivi esporremo numerose e interessanti applicazioni dell'interferenza; soltanto per citare alcuni casi, ci occuperemo della determinazione delle lunghezze d'onda e degli indici di rifrazione, della misura precisa delle lunghezze, dell'emissione di antenne, della produzione dei suoni di uno strumento musicale, della formazione dei colori su una sottile pellicola (bolla di sapone, velo d'olio sull'acqua) illuminata dalla luce del sole.

Nella trattazione analitica è essenziale l'operazione di somma di due grandezze variabili sinusoidalmente lungo lo stesso asse, aventi la stessa pulsazione e differenza di fase costante, cioè coerenti. Richiamiamo perciò i metodi che abbiamo introdotto nel primo volume e in questo.

Il primo *metodo*, chiamato *vettoriale* o dei *vettori rotanti* o dei *fasori*, è stato descritto nel paragrafo 9.4 del primo volume a proposito della somma di moti armonici e ripreso nel paragrafo 11.3 per l'analisi di circuiti lineari in regime alternato. Lo applichiamo adesso per calcolare la somma di due onde in un punto  $P$ . Supponiamo che le onde si propaghino entrambe lungo l'asse  $x$ , che vibrino lungo la stessa direzione e che il punto  $P$  disti  $x_1$  dalla sorgente della prima onda e  $x_2$  dalla sorgente delle seconde; le espressioni delle due onde in  $P$  sono

$$\xi_1 = A_1 \cos(kx_1 - \omega t + \phi_1) = A_1 \cos(\omega t - kx_1 - \phi_1) = A_1 \cos(\omega t + \alpha_1),$$

$$\xi_2 = A_2 \cos(kx_2 - \omega t + \phi_2) = A_2 \cos(\omega t - kx_2 - \phi_2) = A_2 \cos(\omega t + \alpha_2).$$

Le costanti  $\phi_1$  e  $\phi_2$  dipendono solo dalle sorgenti, invece le costanti  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  contengono anche la fase dovuta al percorso. Ciascuna oscillazione in  $P$  è rappresentata come la proiezione sull'asse orizzontale di un vettore rotante con velocità angolare  $\omega$  e la somma si calcola come proiezione della risultante dei vettori (figura 15.1). Essa ha l'espressione

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = A \cos(\omega t + \alpha)$$

dove modulo  $A$  e fase  $\alpha$  sono dati da

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2 \cos \delta}, \quad \delta = \alpha_1 - \alpha_2 = \phi_2 - \phi_1 + k(x_2 - x_1) \quad (15.1)$$

Sorgenti coerenti

Interferenza

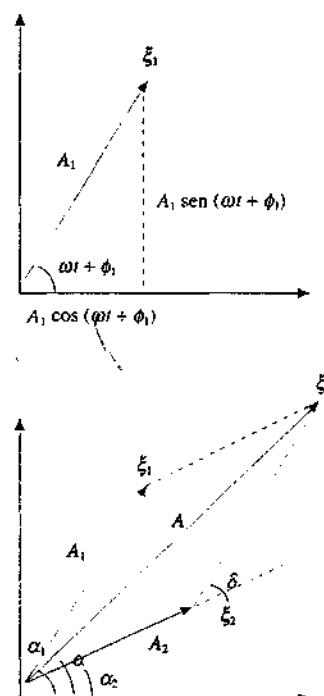


Figura 15.1

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{A_1 \operatorname{sen} \alpha_1 + A_2 \operatorname{sen} \alpha_2}{A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2} \quad (15.2)$$

Poiché l'intensità è proporzionale al quadrato dell'ampiezza, l'intensità misurata nel punto  $P$  è

$$I = I_1 + I_2 + 2 \sqrt{I_1 I_2} \cos \delta \quad , \quad (15.3)$$

indicando con  $I_1$  e  $I_2$  rispettivamente l'intensità misurata in  $P$  dovuta all'onda  $\xi_1$  e all'onda  $\xi_2$ . Notiamo esplicitamente che  $A$  e  $I$  non dipendono dal segno di  $\delta$ .

Nel caso particolare di eguali ampiezze  $A_1 = A_2 = A_0$  si ha

$$A = \sqrt{2 A_0^2 (1 + \cos \delta)} = 2 A_0 \cos \frac{\delta}{2} \quad (15.4)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha_1 + \operatorname{sen} \alpha_2}{\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2} = \frac{\frac{\operatorname{sen} \alpha_1 + \operatorname{sen} \alpha_2}{2} \cos \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}}{\frac{\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2}{2} \cos \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}} = \operatorname{tg} \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \quad (15.5)$$

L'onda risultante, servendosi di (15.4), (15.5), (15.1) e delle espressioni di  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ , si può scrivere

$$\begin{aligned} \xi &= A \cos(\omega t + \alpha) = 2 A_0 \cos \frac{\delta}{2} \cos \left( \omega t + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \right) = \\ &= 2 A_0 \cos \left[ \frac{\phi_2 - \phi_1}{2} + \frac{k(x_2 - x_1)}{2} \right] \cos \left[ \frac{\phi_1 + \phi_2}{2} + \frac{k(x_1 + x_2)}{2} - \omega t \right] \end{aligned} \quad (15.6)$$

Per l'intensità abbiamo, con  $I_1 = I_2 = I_0$ ,

$$I = 2 I_0 (1 + \cos \delta) = 4 I_0 \cos^2 \frac{\delta}{2} \quad . \quad (15.7)$$

Il risultato più importante è che l'ampiezza della somma dipende dalla differenza di fase: il valore *massimo* della somma si ha quando le onde sono *in fase*, il *minimo* quando le onde sono in *opposizione di fase*. I vari casi sono riassunti nella tabella 15.1.

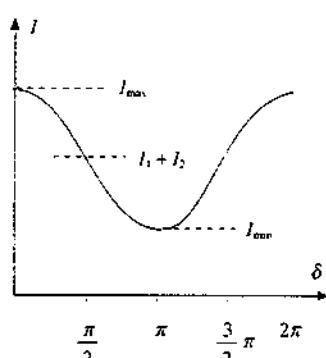


Figura 15.2

Tabella 15.1. Somma di due oscillazioni armiche sullo stesso asse			
sfasamento	ampiezze diverse	ampiezze eguali	
max	$\delta = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$	$A = A_1 + A_2 \quad I = I_1 + I_2 + 2 \sqrt{I_1 I_2}$	$A = 2A_0 \quad I = 4I_0$
min	$\delta = \pi, 3\pi, 5\pi, \dots$	$A =  A_1 - A_2  \quad I = I_1 + I_2 - 2 \sqrt{I_1 I_2}$	$A = 0 \quad I = 0$

L'altro metodo di somma è il *metodo simbolico*, che utilizza i numeri complessi, ma che nella sostanza è simile al metodo vettoriale (paragrafo 11.4). Usando gli stessi simboli abbiamo:

$$\xi_1 = A_1 e^{i(\omega t + \alpha_1)} = A_1 \cos(\omega t + \alpha_1) + i A_1 \sin(\omega t + \alpha_1) ,$$

$$\xi_2 = A_2 e^{i(\omega t + \alpha_2)} = A_2 \cos(\omega t + \alpha_2) + i A_2 \sin(\omega t + \alpha_2) ,$$

$$\begin{aligned} \xi = \xi_1 + \xi_2 &= (A_1 e^{i\alpha_1} + A_2 e^{i\alpha_2}) e^{i\omega t} = [A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2 + i(A_1 \sin \alpha_1 + \\ &+ A_2 \sin \alpha_2)] e^{i\omega t} . \end{aligned}$$

Il quadrato del modulo di  $\xi$  si ottiene moltiplicando  $\xi$  per il suo complesso coniugato  $\xi^*$ :

$$\begin{aligned} \xi \xi^* &= (A_1 e^{i\alpha_1} + A_2 e^{i\alpha_2}) e^{i\omega t} (A_1 e^{-i\alpha_1} + A_2 e^{-i\alpha_2}) e^{-i\omega t} = \\ &= A_1^2 + A_2^2 + A_1 A_2 [e^{i(\alpha_1 - \alpha_2)} + e^{-i(\alpha_1 - \alpha_2)}] = A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2) . \end{aligned}$$

Abbiamo ritrovato (15.1); anche per la fase di  $\xi$  si arriva a (15.2).

Sia il metodo vettoriale che il metodo simbolico possono essere iterati per ottenere la somma di un numero qualsiasi di onde emesse da sorgenti coerenti.

Ripetiamo che entrambi i metodi si applicano a oscillazioni con fasi diverse, ma che avvengono sullo stesso asse: quindi se le oscillazioni sono dovute a onde longitudinali le direzioni di propagazione devono coincidere, se le onde sono trasversali esse devono oscillare nella stessa direzione.

Osserviamo infine che la condizione di massimo o di minimo o di qualsiasi altro valore intermedio realizzata in un punto si mantiene nel tempo fintanto che la differenza di fase rimane costante: l'oscillazione risultante ha sempre la stessa ampiezza e la stessa fase e l'intensità, risultato di una media su molti periodi, è costante. L'interferenza cioè è un *fenomeno stazionario*, funzione della posizione del punto, ma non del tempo.

## 15.2 Interferenza prodotta da due sorgenti.

### Caso delle onde hertziane e delle onde sonore

Consideriamo due sorgenti coerenti  $S_1$  e  $S_2$  di onde armoniche sferiche: queste hanno la stessa pulsazione  $\omega$  e si propagano in un mezzo indefinito isotropo con velocità  $v$ , per cui la loro lunghezza d'onda è  $\lambda = v/\nu = 2\pi v/\omega$  e il loro numero d'onde è  $k = \omega/v = 2\pi/\lambda$ .

Se le sorgenti hanno la stessa potenza  $P$ , le onde in un punto  $Q$  distante  $r_1$  da  $S_1$  e  $r_2$  da  $S_2$  sono rappresentate da

$$\xi_1 = \xi_{01} \cos(kr_1 - \omega t) = \frac{\xi_0}{r_1} \cos(kr_1 - \omega t) ,$$

$$\xi_2 = \xi_{02} \cos(kr_2 - \omega t) = \frac{\xi_0}{r_2} \cos(kr_2 - \omega t) ,$$

### Metodo simbolico

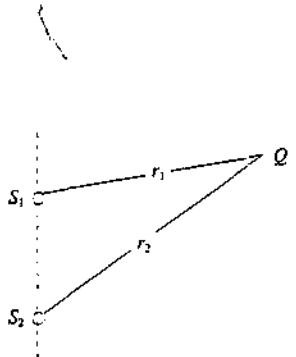


Figura 15.3

in accordo con (12.50) che dà la dipendenza dalla distanza dell'ampiezza dell'onda; abbiamo anche sottinteso che la differenza di fase intrinseca sia nulla ( $\phi_1 = \phi_2$ ).

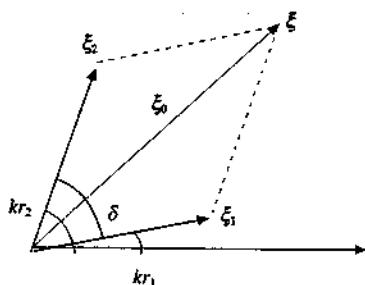


Figura 15.4

Supponiamo per il momento che le onde siano trasversali e che nel punto  $Q$  abbiano la stessa direzione di vibrazione (ortogonale al piano della figura 15.3), così da poterle trattare nella somma come quantità scalari. Secondo la (15.1) l'ampiezza dell'onda risultante nel punto  $Q$  è

$$\xi_0 = \sqrt{\xi_{01}^2 + \xi_{02}^2 + 2 \xi_{01} \xi_{02} \cos \delta} \quad (15.8)$$

e la differenza di fase costante, dovuta soltanto alla differenza di cammino, è

$$\delta = k(r_2 - r_1) = \frac{2\pi}{\lambda} (r_2 - r_1) \quad . \quad (15.9)$$

L'intensità (15.3) nel punto  $Q$  risulta

Intensità

$$I = I_1 + I_2 + 2 \sqrt{I_1 I_2} \cos \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (r_2 - r_1) \right] \quad , \quad (15.10)$$

essendo  $I_1 = P / 4\pi r_1^2$  e  $I_2 = P / 4\pi r_2^2$  le intensità nel punto  $Q$  dovute rispettivamente alle sorgenti  $S_1$  e  $S_2$ .

La differenza di fase tra le due onde che interferiscono, l'ampiezza e l'intensità dell'onda risultante hanno un valore costante nel tempo in qualsiasi punto  $Q$ , ma variano da punto a punto, essendo funzioni di  $r_2 - r_1$ .

Si dice che l'*interferenza* è *costruttiva* nei punti in cui le onde sono in fase; secondo la tabella 15.1 e la (15.9) ciò si verifica se

Interferenza costruttiva

$$\delta = 2m\pi \quad , \quad \Delta r = r_2 - r_1 = m \lambda \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (15.11)$$

cioè quando la differenza di cammino è un multiplo intero della lunghezza d'onda. In questa situazione l'intensità assume il valore massimo

$$I_{\max} = I_1 + I_2 + 2 \sqrt{I_1 I_2} \quad .$$

L'*interferenza* è *distruttiva* nei punti in cui le onde sono in opposizione di fase e ciò comporta che la differenza di cammino sia un multiplo dispari di mezza lunghezza d'onda:

Interferenza distruttiva

$$\delta = (2m' + 1)\pi \quad , \quad \Delta r = r_2 - r_1 = (2m' + 1) \frac{\lambda}{2} \quad m' = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad . \quad (15.12)$$

Il valore minimo dell'intensità è

$$I_{\min} = I_1 + I_2 - 2 \sqrt{I_1 I_2} \quad .$$

In un qualsiasi piano contenente le due sorgenti  $S_1$  e  $S_2$  la condizione  $r_2 - r_1 =$  costante individua una coppia di iperboli aventi  $S_1$  e  $S_2$  come fuochi; siccome il problema è simmetrico rispetto all'asse passante per  $S_1$  e  $S_2$ , il luogo dei punti  $r_2 - r_1 =$  costante è costituito da due iperbolidi di rotazione rispetto a tale asse. Le superficie di massima intensità  $r_2 - r_1 = m\lambda$  si dicono *superficie ventrali*, quelle di minima intensità  $r_2 - r_1 = (2m' + 1)\lambda/2$  *superficie nodali*.

Supponiamo ora che, detta  $d$  la distanza tra le due sorgenti, il punto  $Q$  si trovi a distanza  $r$  dal punto medio tra  $S_1$  e  $S_2$  molto maggiore di  $d$  (figura 15.6). Abbiamo  $r_1 \approx r_2 \approx r$ , le due direzioni di propagazione si possono ritenere parallele e quindi

$$r_2 - r_1 = d \sin\theta, \quad \delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin\theta \quad (15.13)$$

In questa approssimazione, detta delle grandi distanze, le ampiezze e le intensità delle due onde sono eguali; da (15.4), (15.7) e (15.13) si ricava

$$\xi_0 = \sqrt{2 \xi_{01} (1 + \cos\delta)} = 2 \xi_{01} \cos \frac{\delta}{2} = 2 \xi_{01} \cos \frac{\pi d \sin\theta}{\lambda},$$

$$I(r, \theta) = 4 I_1 \cos^2 \frac{\delta}{2} = 4 I_1 \cos^2 \frac{\pi d \sin\theta}{\lambda}, \quad I_1 = \frac{P}{4\pi r^2} \quad (15.14)$$

Le condizioni (15.11) e (15.12) di massima e minima intensità diventano

$$\begin{aligned} \max \quad \sin\theta &= m \frac{\lambda}{d} & m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, I_{\max} &= 4 I_1 \\ \min \quad \sin\theta &= (2m+1) \frac{\lambda}{2d} & m' = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, I_{\min} &= 0 \end{aligned} \quad (15.15)$$

Nella figura 15.7 è riportata  $I(\theta)$  per una distanza  $r$  fissata. Si vede che esistono direzioni in cui l'intensità massima è pari a quattro volte l'intensità prodotta da una singola sorgente intervallate da direzioni in cui l'intensità è nulla.

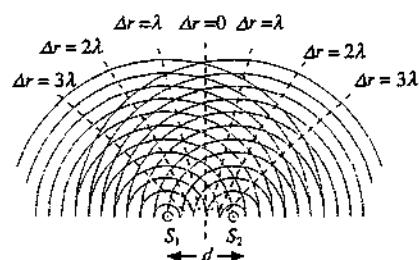


Figura 15.5

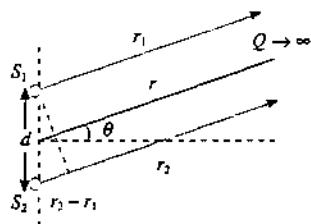


Figura 15.6

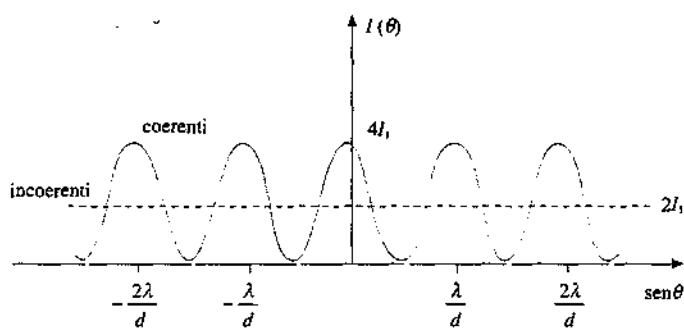


Figura 15.7

I valori di  $m$  e  $m'$  nelle (15.15) non possono crescere indefinitamente: infatti deve essere soddisfatta la condizione  $\sin\theta \leq 1$  ovvero  $\theta \leq \pi/2$  se  $m$  e  $m'$  sono positivi e le equivalenti diseguaglianze se  $m$  e  $m'$  sono negativi (il problema è simmetrico rispetto a  $\theta=0$ ). Se la lunghezza d'onda è minore o uguale alla separazione tra le sorgenti,  $\lambda/d \leq 1$ ,  $m$  può assumere, oltre al valore zero che è sempre possibile, almeno un altro valore, ci sono cioè almeno due direzioni di massima intensità; se invece  $\lambda > d$  c'è solo il massimo a  $\theta=0$  ( $m=0$ ). Analogamente, se  $\lambda > 2d$  non c'è nessun minimo mentre se  $\lambda \leq 2d$  c'è almeno un minimo. Vedremo due casi numerici negli esempi 15.1 e 15.2.

Se le sorgenti  $S_1$  e  $S_2$  hanno una differenza di fase intrinseca  $\phi_2 - \phi_1$  costante nel tempo le conclusioni non cambiano salvo che  $\delta$  è data dalla somma di  $\phi_2 - \phi_1$  e di

$k(r_2 - r_1)$  e di conseguenza cambiano le (15.11) e (15.12): ad esempio il massimo di intensità per  $\delta = 0$  non implica più  $r_1 = r_2$ , bensì  $r_2 - r_1 = (\phi_1 - \phi_2)\lambda/2\pi$ . Una situazione di questo tipo verrà descritta nell'esempio 15.8.

Invece il fenomeno è molto diverso se la differenza di fase intrinseca varia *casualmente* nel tempo, cioè se le due sorgenti sono *incoerenti*. A  $\delta$  costante bisogna sostituire una  $\delta'(t) = \delta + \Delta\phi(t)$  e l'intensità in una certa direzione, nel caso di grande distanza, si ottiene da (15.14) mediando sul termine variabile:

$$I(r, \theta) = 4 I_1 \left[ \cos^2 \frac{\delta'(t)}{2} \right]_m = 2 I_1 \quad ;$$

essa non dipende più da  $\theta$  e risulta in ogni punto eguale alla somma delle intensità prodotte indipendentemente dalle singole sorgenti (vedi figura 15.7). *Con le sorgenti incoerenti non c'è più interferenza*. Lo stesso risultato si ottiene da (15.10) essendo la media del coseno eguale a zero. È implicito che le variazioni della fase avvengono in tempi molto brevi rispetto al tempo medio di osservazione del fenomeno.

Dal confronto tra i diversi comportamenti con sorgenti coerenti e incoerenti si conclude che la *coerenza* tra le due onde *opera una ridistribuzione della potenza complessiva*  $P_R = 2P$  emessa dalle due sorgenti, che viene concentrata in certe direzioni e rarefatta in altre, nel rispetto però della conservazione dell'energia. Infatti integrando l'intensità su una superficie sferica di raggio  $r$  si ha nei due casi:

$$(P_R)_{\text{incoer}} = 2 I_1 4 \pi r^2 = 2 \frac{P}{4\pi r^2} 4\pi r^2 = 2 P \quad ,$$

$$\begin{aligned} (P_R)_{\text{coer}} &= \oint I(r, \theta) d\Sigma = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi 4 \frac{P}{4\pi r^2} \cos^2 \left( \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda} \right) r^2 \sin \theta d\theta d\phi = \\ &= 2 P \int_0^\pi \cos^2 \left( \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda} \right) \sin \theta d\theta = 2 P \quad ; \end{aligned}$$

L'ultimo integrale è eguale a 1 in quanto

$$\begin{aligned} F &= \int_0^\pi (\cos^2 x + \sin^2 x) \sin \theta d\theta = \int_0^\pi \sin \theta d\theta = \int_{-1}^1 d(\cos \theta) = 2 \quad , \\ \int_0^\pi \cos^2 x \sin \theta d\theta &= \int_0^\pi \sin^2 x \sin \theta d\theta = \frac{F}{2} = 1 \quad . \end{aligned}$$

Il risultato si estende ad un numero qualunque di sorgenti a due a due incoerenti per cui l'intensità complessiva in un dato punto prodotta da  $N$  sorgenti incoerenti, ciascuna di intensità  $I_i$ , è rispettivamente nel caso di sorgenti diverse e di sorgenti eguali

Intensità per  $N$  sorgenti incoerenti

$$I_R = \sum_i^N I_i \quad , \quad I_R = N I_1 \quad . \quad (15.16)$$

Nel paragrafo 15.5 esamineremo il problema dell'interferenza di  $N$  sorgenti coerenti.

### Onde hertziane

Le antenne dipolari che abbiamo studiato nel paragrafo 13.6 sono un esempio di sorgenti di onde elettromagnetiche con frequenze inferiori a  $10^9$  Hz (onde hertziane). Due sorgenti di questo tipo possono essere fatte oscillare in fase, o con una differenza di fase costante, pilotandole con un unico generatore di tensione alternata; le lunghezze dei cavi che portano la corrente alternata dal generatore alle antenne vengono regolate così da produrre la differenza di fase intrinseca voluta. Di norma il punto  $Q$  in cui misuriamo l'intensità è molto lontano dalle antenne e possiamo applicare l'approssimazione delle grandi distanze. Un caso pratico è trattato nell'esempio che segue, dove per semplicità sono considerate antenne con emissione isotropa.

#### Esempio 15.1

Due antenne poste a distanza  $d = 10$  m emettono in fase alla frequenza  $v = 3 \cdot 10^7$  Hz. La potenza irradiata isotropicamente da ciascuna antenna vale  $P_1 = 100$  kW. Calcolare come varia l'intensità a 10 km dalle sorgenti e i valori massimi dei campi elettrico e magnetico a tale distanza.

#### Soluzione

La lunghezza d'onda è  $\lambda = c/v = 10$  m, eguale a  $d$ . Da (15.15) segue:

$$\begin{array}{lll} \text{max} & \sin\theta = m & \text{due direzioni} \\ & m = 0, \theta = 0 & m = 1, \theta = 90^\circ \\ \text{min} & \sin\theta = m' + 0.5 & \text{una direzione} \\ & m' = 0, \theta = 30^\circ & \end{array} .$$

A 10 km di distanza l'intensità di ciascuna sorgente è  $I_1 = P_1 / 4\pi r^2 = 7.96 \cdot 10^{-5}$  W/m<sup>2</sup> e quindi  $I_{\text{max}} = 4I_1 = 3.18 \cdot 10^{-4}$  W/m<sup>2</sup>,  $I_{\text{min}} = 0$ . Nella figura 15.8 è riportato il diagramma dell'intensità, secondo la stessa rappresentazione della figura 13.22: la curva tratteggiata dà l'intensità  $2I_1 = 1.59 \cdot 10^{-4}$  W/m<sup>2</sup> che si otterrebbe se le sorgenti fossero incoerenti. La figura è stata completata tenendo conto della simmetria rispetto a  $\theta = 0$  e della simmetria rispetto all'asse contenente le sorgenti; rispetto a questo asse c'è anche simmetria di rotazione nello spazio.

L'espressione analitica (15.14) in funzione di  $\theta$  a  $r$  fisso dà  $I(\theta) = 4I_1 \cos^2(\pi \sin\theta) = 3.18 \cdot 10^{-4} \cos^2(3.14 \sin\theta)$  W/m<sup>2</sup>.

L'ampiezza del campo elettrico e del campo magnetico di ciascuna sorgente è, da (13.26) e (13.7),

$$E_1 = E_2 = \sqrt{2 Z_0 I_1} = 0.245 \text{ V/m} \quad , \quad B_1 = B_2 = \frac{E_1}{c} = 8.17 \cdot 10^{-10} \text{ T} \quad .$$

Nelle direzioni  $\theta = 0$  e  $\theta = 90^\circ$  lungo cui l'interferenza è costruttiva risulta:

$$E = 2 E_1 = 0.490 \text{ V/m} \quad , \quad B = 2 B_1 = 1.63 \cdot 10^{-9} \text{ T} \quad .$$

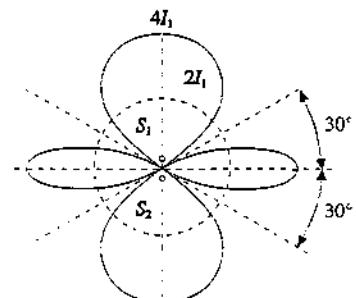


Figura 15.8

### Onde sonore

L'approssimazione delle grandi distanze ci consente di utilizzare l'espressione semplice (15.13) per la differenza  $r_2 - r_1$  in funzione della distanza tra le sorgenti e dell'angolo di osservazione e di assumere eguali le ampiezze delle sorgenti, se queste hanno eguale potenza. Nel caso delle onde sonore, che sono longitudinali, c'è un ulteriore vantaggio: le direzioni di propagazione e quindi quelle di vibrazione si possono ritenere parallele e ciò permette di applicare direttamente i risultati del paragrafo 15.1, come abbiamo fatto per le onde sferiche trasversali: nelle vicinanze delle sorgenti la trattazione analitica sarebbe più complicata.

Fatta questa premessa, alle onde sonore si estendono tutte le considerazioni fatte finora, come si vede nell'esempio 15.2, che ricalca il caso esposto nell'esempio 15.1.

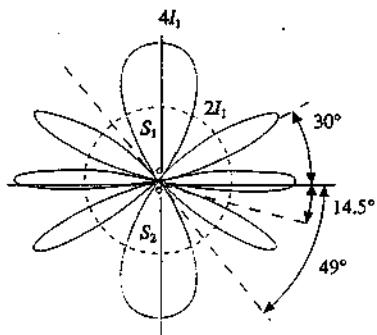


Figura 15.9

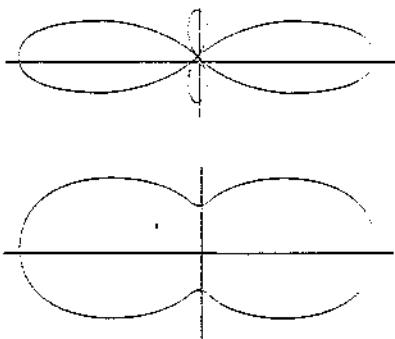


Figura 15.10

**Esempio 15.2**

Due altoparlanti distanti  $d = 1$  m sono eccitati in fase da un amplificatore alla frequenza  $v = 688$  Hz. Le onde emesse dagli altoparlanti sono sferiche e si propagano con velocità  $v = 344$  m/s; la potenza di ciascun altoparlante è  $P_1 = 5$  W, emessa isotropicamente. Calcolare come varia l'intensità  $I(\theta)$  con la direzione di ascolto ad una distanza  $r = 100$  m dagli altoparlanti.

**Soluzione**

La lunghezza d'onda del suono è  $\lambda = v/v = 0.5$  m per cui  $\lambda/d = 0.5$ . Abbiamo da (15.15):

$$\max \quad \sin\theta = 0.5 \text{ m} \quad m = 0, \theta = 0 \quad m = 1, \theta = 30^\circ \quad m = 2, \theta = 90^\circ ,$$

$$\min \quad \sin\theta = 0.5 \text{ m} + 0.25 \quad m' = 0, \theta = 14.48^\circ \quad m' = 1, \theta = 48.59^\circ ,$$

$$\text{con } I_{\max} = 4 P_1 / 4\pi r^2 = 1.59 \cdot 10^{-4} \text{ W/m}^2, I_{\min} = 0.$$

All'intensità massima corrisponde il livello sonoro (12.42)

$$B = 10 \log \frac{I_{\max}}{I_0} = 82 \text{ dB} .$$

L'intensità varia con  $\theta$  secondo la (15.14):

$$I(\theta) = 4 I_1 \cos^2(2\pi \sin\theta) \approx 1.59 \cdot 10^{-4} \cos^2(6.28 \sin\theta) \text{ W/m}^2 .$$

Il diagramma è riportato in figura 15.9; come in figura 15.8 la linea tratteggiata si riferisce a due sorgenti incoerenti. Rispetto al caso dell'esempio 15.1 il diagramma dell'intensità presenta più lobis, cioè più direzioni di massimo (e di minimo) perché il rapporto  $\lambda/d$  è minore. Nella figura 15.10 sono riportati i casi  $\lambda = 1.5 d$  e  $\lambda = 3 d$ .

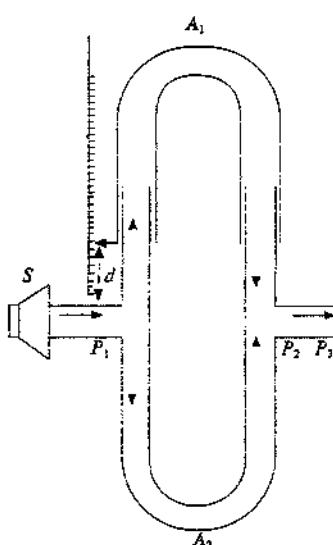
**Tubo di Quincke**

Figura 15.11

Un dispositivo completamente diverso con cui si produce l'interferenza di due onde sonore è il *tubo di Quincke*, riportato in figura 15.11. Un suono di determinata frequenza, prodotto da un altoparlante  $S$ , viene inviato tramite un tubo in un punto  $P_1$ , dove c'è un giunto a forma di  $T$ . Se i diametri dei due tubi sono eguali l'onda in  $T$  si divide in due onde di eguale ampiezza, necessariamente coerenti, che si propagano nei due rami  $A_1$  e  $A_2$  per ricongiungersi nel punto  $P_2$ . Lungo il tubo  $P_2 P_3$  si hanno due onde sovrapposte la cui differenza di fase, che determina l'ampiezza dell'onda risultante, dipende dalla differenza dei cammini  $r_1$  e  $r_2$  nei due rami  $A_1$  e  $A_2$ .

La lunghezza del cammino  $r_2$  è mantenuta fissa e si varia  $r_1$  facendo scorrere il tubo  $A$  che è telescopico. Quando la differenza  $\Delta r = r_1 - r_2$  è zero o un multiplo intero della lunghezza d'onda  $\lambda$  si percepisce in  $P_3$  un massimo dell'intensità sonora; se invece  $\Delta r$  è un multiplo intero dispari di  $\lambda/2$  in  $P_3$  non si percepisce alcun suono.

La differenza tra i valori di  $r_1$  che danno luogo a due massimi consecutivi o a due minimi consecutivi è uguale alla lunghezza d'onda dell'onda sonora. Nota la frequenza  $v$  del suono emesso dalla sorgente si deduce la velocità di propagazione  $v = \lambda v$  dell'onda nel gas contenuto nel tubo. Variando la pressione e calcolando la densità del gas nel tubo è possibile verificare la (9.39) del paragrafo 12.2; in un determinato stato termodinamico dalla misura di  $v$  si può ricavare  $\gamma$ , rapporto tra il calore specifico a pressione costante e il calore specifico a volume costante.

Ad esempio, supponiamo che sia  $v = 1715$  Hz; con  $v = 343$  m/s (tubo pieno d'aria a 20°C) risulta  $\lambda = 0.2$  m = 20 cm. Posto lo zero della scala indicata in figura 15.11 nella posizione per cui  $r_1 = r_2$ , per uno spostamento  $d = 5$  cm si ha  $\Delta r = 10$  cm =  $\lambda/2$  e in  $P_3$  non si percepisce nulla; nella posizione  $d = 10$  cm invece  $\Delta r = 20$  cm =  $\lambda$  e in  $P_3$  c'è un massimo di intensità, come con  $d = 0$ ; e così via, per ogni successivo spostamento di 5 cm si ha un'alternanza di massimi e minimi. La valutazione di queste posizioni può essere fatta direttamente con l'orecchio con un'incertezza di qualche millimetro; siccome  $\Delta\lambda/\lambda = \Delta d/d \approx 2 \text{ mm}/50 \text{ mm} = 0.04$ , la misura della lunghezza d'onda, e quindi della velocità nota la frequenza, avviene con una precisione dell'ordine di qualche per cento.

### 15.3 Interferenza di due onde luminose. Esperimento di Young

Nel caso delle onde luminose per produrre due o più sorgenti coerenti bisogna procedere in modo diverso da quello indicato per le antenne e gli altoparlanti, a causa della natura stessa delle comuni sorgenti di questo tipo di onde.

Le sorgenti di luce ordinaria, quali il sole e le lampade a incandescenza, sono composte da un numero enorme di atomi che oscillano a frequenze dell'ordine di  $v_0 = 5 \cdot 10^{14}$  Hz emettono onde luminose; l'emissione di un singolo atomo avviene in un tempo dell'ordine di  $\Delta t = 10^{-8}$  s (paragrafi 12.10 e 13.8) e non può quindi essere monocromatica. Si tratta piuttosto di un *pacchetto d'onda*, lungo  $c\Delta t \approx 3$  m. Però il rapporto tra l'intervallo  $\Delta v = (\Delta t)^{-1}$  di frequenze che costituiscono il pacchetto e la frequenza centrale  $v_0$  è  $\Delta v / v_0 \approx 10^{-7}$ , per cui l'effetto non è percepibile con strumentazione normale. Scriviamo pertanto l'onda come  $E = E_0 \cos(\omega_0 t + \phi)$ ; durante il tempo  $\Delta t$  la direzione di  $E$  e la fase  $\phi$  restano costanti. Un altro atomo si disegnita in modo *scorrelato* rispetto al primo, emettendo un pacchetto d'onda con gli stessi  $E_0$  e  $\omega_0$ , ma con il piano di polarizzazione e la fase  $\phi$  diversi dai precedenti; questo è vero per qualsiasi coppia di atomi presa in considerazione.

L'onda emessa da una *sorgente ordinaria* è dunque la risultante dei pacchetti d'onda elementari emessi dai singoli atomi: le rispettive fasi sono distribuite in maniera completamente casuale così che la fase dell'onda varia con frequenza molto elevata; inoltre l'onda non è polarizzata.

In conclusione, sia le onde provenienti da due punti di una sorgente estesa che le onde provenienti da due sorgenti diverse risultano essere incoerenti e non danno luogo a fenomeni di interferenza. L'intensità totale prodotta in un punto  $Q$  da un insieme di  $N$  sorgenti di luce ordinaria, come  $N$  lampadine, si calcola tramite (15.16) sommando semplicemente le intensità prodotte in  $Q$  dalle singole sorgenti.

Osserviamo che in un tempo dell'ordine di  $10^{-8}$  s, durante il quale l'onda emessa dalla sorgente elementare compie circa  $10^6$  oscillazioni, due onde emesse da due atomi diversi sono coerenti, con una differenza di fase intrinseca  $\phi_2 - \phi_1$  che è costante. Esse possono quindi interferire e le corrispondenti variazioni spaziali di intensità, simili a quelle calcolate nel paragrafo 15.2, possono essere rivelate se si dispone di strumenti con le caratteristiche adatte, capaci cioè di misurare un'intensità luminosa in un tempo così breve. In effetti questo esperimento è stato compiuto nel 1956 da Hanbury Brown e Twiss dando il risultato atteso. Se invece lo strumento con cui si misura l'intensità, non avendo una risoluzione temporale così elevata, deve attendere un tempo notevolmente maggiore di  $\Delta t$  per dare il risultato, avviene che si sovrappone l'interferenza di due pacchetti con una certa  $\Delta\phi$  con quella di due altri pacchetti con un'altra  $\Delta\phi$  e così via: le posizioni che sono di massimo in un caso possono essere di minimo in un altro e alla fine si osserva solo un'intensità costante. È come avere un grandissimo numero di figure tipo 15.7, spostate una rispetto all'altra: il risultato che si ottiene è la media, cioè l'intensità indicata dalla linea tratteggiata, e le sorgenti appaiono incoerenti.

Un metodo per ottenere due o più sorgenti coerenti di luce ordinaria è quello esposto alla fine del paragrafo 14.2, consistente nell'introdurre lungo il cammino di un'onda sferica uno schermo opaco in cui sono praticati  $N$  fori: le onde emesse da tali fori hanno differenza di fase costante. In sostanza con questo artificio da un singolo pacchetto d'onda hanno origine  $N$  pacchetti tutti con le stesse caratteristiche: si tratta sempre della stessa onda che viene suddivisa e per questa ragione il metodo si chiama *divisione del fronte d'onda*. Le singole sorgenti secondarie hanno la stessa fase e la stessa polarizzazione: una variazione di fase della sorgente primaria si trasmette allo stesso modo alle sorgenti secondarie e altrettanto fa una variazione del piano di polarizzazione. Concludiamo che gli  $N$  fori sono  $N$  sorgenti coerenti di luce ordinaria.

Il principio di Huygens-Fresnel nella formulazione di Kirchhoff fornisce una

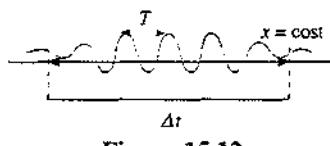


Figura 15.12

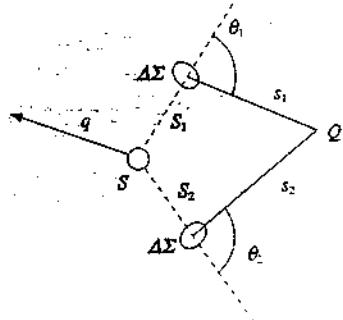


Figura 15.13

descrizione quantitativa completa delle onde emesse dalle sorgenti secondarie; in particolare l'ampiezza è data dalla (14.3), riassunta nella figura 15.13.

### L'esperimento di Young

Il primo a produrre in laboratorio l'interferenza di due onde luminose fu Young nel 1801, con il dispositivo mostrato schematicamente nella figura 15.14. Un fascio di luce ordinaria monocromatica incide su uno schermo in cui è praticata una fessura  $S_0$  lunga e sottile, che funge da sorgente primaria dell'esperimento. Le

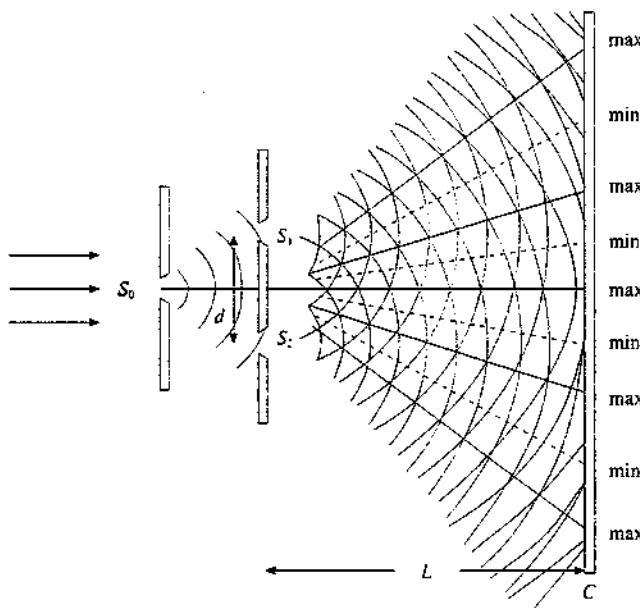


Figura 15.14

onde uscenti da questa fessura arrivano su un secondo schermo in cui sono praticate due fessure sottili  $S_1$  e  $S_2$ , parallele alla precedente ed equidistanti dall'asse del dispositivo (asse  $z$ ): le due fessure agiscono come una coppia di sorgenti coerenti. La luce emessa da  $S_1$  e  $S_2$  produce su uno schermo  $C$ , posto a distanza  $L$  dalle sorgenti grande rispetto alla loro separazione  $d$ , una figura visibile, detta figura di interferenza, che consiste in una serie di strisce chiare e scure, parallele alle fessure, chiamate *frange di interferenza*. Le *frange chiare* corrispondono a *massimi di intensità* (interferenza costruttiva), ottenuti nei punti in cui le onde arrivano in fase, mentre le *frange scure* segnalano i *minimi di intensità* (interferenza distruttiva), ottenuti nei punti in cui le onde arrivano in opposizione di fase. Sull'intersezione dell'asse del dispositivo con lo schermo si osserva una frangia chiara. La figura 15.15 mostra l'aspetto delle frange con luce rossa ordinaria.

Applichiamo ora i risultati del paragrafo 15.2 per calcolare le posizioni dei massimi e minimi e le variazioni dell'intensità luminosa sullo schermo in funzione della distanza  $x$  dal centro  $O$  (figura 15.16). Nell'ipotesi  $L \gg d$  si può scrivere  $\sin\theta = \tan\theta \approx \theta = x/L$  e quindi, dalle (15.14) e (15.15),

$$I(x) = 4I_0 \cos^2 \frac{\pi d n x}{\lambda_0 L} \quad (15.17)$$

Frange di interferenza

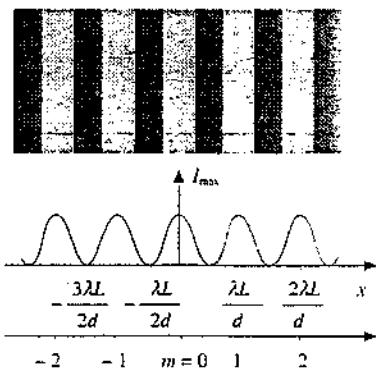


Figura 15.15

$$\max \quad \theta = m \frac{\lambda_0}{nd} \quad , \quad x = m \frac{\lambda_0 L}{nd} \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (15.18)$$

$$\min \quad \theta = (2m' + 1) \frac{\lambda_0}{2nd} \quad , \quad x = (2m' + 1) \frac{\lambda_0 L}{2nd} \quad m' = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

In queste formule  $\lambda_0$  è la lunghezza d'onda nel vuoto e  $\lambda = \lambda_0 / n$  è la lunghezza d'onda nel mezzo di indice di rifrazione  $n$  in cui si esegue l'esperimento.

Nei dispositivi interferenziali si dà il nome di *frangia centrale* a quella corrispondente a una *differenza di fase nulla*; le altre frange chiare sono numerate partendo da quella centrale:  $m = \pm 1$  individua le due frange adiacenti a quella centrale,  $m = \pm 2$  le due immediatamente successive e così via. Nel dispositivo di Young la frangia centrale sta sull'asse del sistema.

Essendo certamente  $d \gg \lambda$  (tipicamente  $d$  è dell'ordine del millimetro mentre  $\lambda$  è dell'ordine di  $10^{-5}$  mm), la successione di massimi e minimi è molto più frequente di quanto visto negli esempi del paragrafo 15.2. Il passo dei massimi è  $\Delta x = \lambda_0 L / nd$  e la sua misura in aria, noti  $L$  e  $d$ , fornisce  $\lambda_0$ : fu così che Young determinò per la prima volta la lunghezza d'onda di una radiazione luminosa.

L'intensità massima  $I_{\max} = 4I_0$  è costante nelle diverse frange chiare se l'intensità  $I_0$  di ciascuna sorgente non dipende da  $\theta$ . In realtà sappiamo che nell'intensità  $I$  compare il quadrato del *fattore di inclinazione* (paragrafo 14.2).

$$f^2(\theta) = \left( \frac{1 + \cos\theta}{2} \right)^2$$

L'effetto però non è molto grande: con  $\theta = 30^\circ$   $f^2(\theta) = 0.87$ . Un effetto quantitativamente più rilevante, che discuteremo nel paragrafo 16.2, proviene dalla larghezza finita delle fenditure  $S_1$  e  $S_2$ , che provoca una diminuzione ben più marcata dell'intensità all'aumentare di  $\theta$ . Per tali motivi la figura di interferenza effettivamente osservata consiste in un numero limitato di frange nell'intorno dell'asse del sistema ( $\theta = 0$ ).

Due ulteriori considerazioni sono necessarie, a causa della natura delle onde elettromagnetiche che interferiscono.

La prima riguarda la condizione  $d \ll L$ , essenziale per l'osservazione delle frange di interferenza quando l'esperimento viene eseguito con luce ordinaria non polarizzata. Ricordiamo che un'onda non polarizzata, come quelle emesse da  $S_1$  e da  $S_2$ , si può sempre scomporre in due onde di eguale intensità, polarizzate secondo direzioni ortogonali tra loro e alla direzione di propagazione: prendiamo queste due direzioni una ortogonale al piano del disegno (figura 15.17) e l'altra nel piano del disegno. Affinché si formi la figura di interferenza occorre che i campi elettrici  $E_1$  e  $E_2$  delle due onde siano polarizzati secondo la medesima direzione: questo è sempre vero per le componenti di  $E_1$  e  $E_2$  ortogonali al piano del disegno, ma lo è per le componenti nel piano del disegno solo se  $d \ll L$ , come mostrato nella figura.

La seconda considerazione deriva dal fatto che le onde emesse da  $S_1$  e  $S_2$  non sono onde armoniche e come tali di durata e lunghezza infinita. Supponendo che la sorgente sia costituita da un singolo atomo, questo è un emettitore di impulsi di durata  $\Delta t \approx 10^{-8}$  s e di lunghezza  $\Delta x \approx 3$  m. Per poter osservare interferenza in un certo punto dello schermo è necessario che in quel punto si sovrappongano quasi totalmente i due pacchetti d'onde provenienti da  $S_1$  e  $S_2$ , originati dallo stesso pacchetto proveniente da  $S_0$ : solo così la differenza di fase e il piano di polarizzazione dei due campi elettrici rimangono costanti durante tutto il tempo in cui si sovrappongono. Questa condizione è verificata finché la differenza di cammino che i due

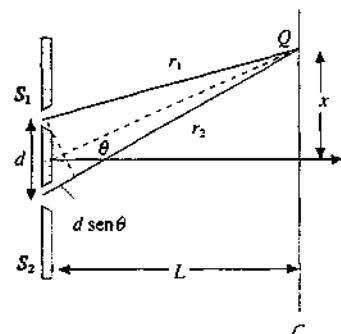
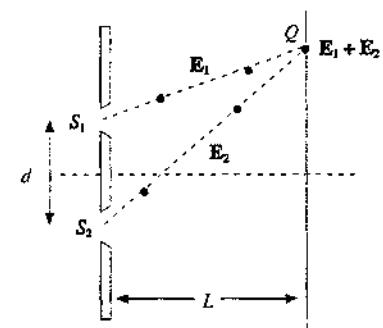


Figura 15.16



## Fattore di inclinazione

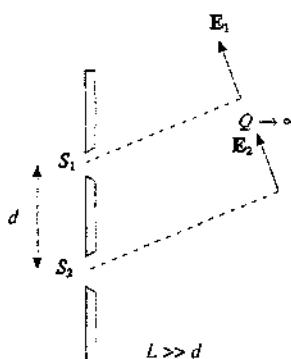
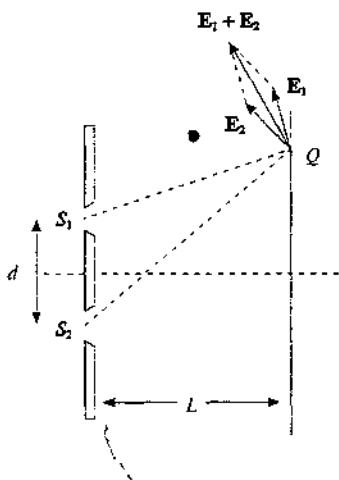


Figura 15.17

pacchetti devono percorrere per raggiungere lo stesso punto dello schermo è molto minore della loro lunghezza  $\Delta x$ .

Il ragionamento rimane valido a maggior ragione per una sorgente composta da un grandissimo numero di atomi dal momento che la figura di interferenza è il risultato di numerosissimi processi elementari, in ognuno dei quali interferiscono i due pacchetti d'onde ricavati da un singolo processo di emissione atomica. Per questa ragione  $\Delta t$  e  $\Delta x$  sono chiamati *tempo e lunghezza di coerenza*.

Nell'esperimento di Young le differenze di cammino sono pari al massimo a qualche decina di lunghezza d'onda e la suddetta considerazione non è essenziale; essa lo diventa in quei dispositivi in cui le differenze di cammino possono arrivare al metro. Esperimenti di interferenza con grandissime differenze di cammino si realizzano con la luce *laser* che ha tempi di coerenza dell'ordine di  $10^{-3}$  s e lunghezze di coerenza dell'ordine di centinaia di chilometri (paragrafo 12.10).

### Esempio 15.3

In un dispositivo di Young la distanza tra le fenditure è  $d = 0.5$  mm e lo schermo dista  $L = 80$  cm dal piano delle fenditure. Se la lunghezza d'onda incidente è  $\lambda_0 = 400$  nm calcolare la posizione dei massimi di interferenza quando l'esperimento è eseguito in aria ( $n = 1$ ) e in acqua ( $n = 1.33$ ).

#### Soluzione

Da (15.18) calcoliamo le posizioni dei massimi di interferenza nei due casi:

$$\text{aria} \quad x = \frac{\lambda_0 L}{d} m = 0.64 \text{ m in millimetri} \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\text{acqua} \quad x = \frac{\lambda_0 L}{nd} m = 0.48 \text{ m in millimetri} \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

I massimi di intensità distano 0.64 mm in un caso e 0.48 mm nell'altro. L'effetto dell'aumento dell'indice di rifrazione è quello di addensare maggiormente le frange: si passa da 1.56 frange / mm a 2.08 frange / mm. Su questo fatto si basa un metodo di misura dell'indice di rifrazione.

### Esempio 15.4

In un dispositivo di Young con  $n = 1$  si osserva che la distanza tra le due frange di ordine  $m = 5$  e  $m = -5$  è  $\Delta x_1 = 12$  mm quando la lunghezza d'onda è  $\lambda_1 = 600$  nm, mentre è  $\Delta x_2 = 8$  mm quando la lunghezza d'onda è  $\lambda_2$ . Calcolare  $\lambda_2$ .

#### Soluzione

Dato che  $x(m=5) = 5 \lambda_1 L / d$  e  $x(m=-5) = -5 \lambda_1 L / d$  si ha:

$$\Delta x_1 = \frac{10 \lambda_1 L}{d} \Rightarrow \Delta x_2 = \frac{10 \lambda_2 L}{d} \quad , \quad \lambda_2 = \lambda_1 \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = \frac{2}{3} \lambda_1 = 400 \text{ nm} .$$

L'esempio fornisce un metodo per misure relative di lunghezze d'onda. Non si tratta di un metodo molto preciso ( $\Delta \lambda / \lambda \approx 1\%$ ) principalmente perché le frange non sono sottili e quindi la distanza tra i massimi non è ben definibile. Vedremo in seguito altri dispositivi interferenziali che permettono di eseguire misure più accurate.

**Esempio 15.5**

Un dispositivo di Young ( $d = 0.2 \text{ mm}$ ,  $L = 40 \text{ cm}$ ,  $n = 1$ ) è illuminato da una sorgente di luce naturale nella quale sono contenute, approssimativamente con la stessa intensità, tutte le lunghezze d'onda da  $\lambda_R = 700 \text{ nm}$  (rosso) a  $\lambda_V = 400 \text{ nm}$  (violetto). Sullo schermo in corrispondenza dell'asse del dispositivo si osserva una frangia chiara, ai lati della quale c'è una successione di frange colorate. Descrivere la formazione di queste frange.

**Soluzione**

La *frangia centrale* è *bianca* in quanto la posizione del massimo di ordine  $m = 0$  non dipende dalla lunghezza d'onda; invece ne dipendono le posizioni degli altri massimi, secondo (15.18). Precisamente si trova prima il massimo di ordine  $m = 1$  per la luce di lunghezza d'onda minore (violetto) e via via tutti gli altri massimi fino al rosso. Per tre specifiche lunghezze d'onda abbiamo, utilizzando anche (15.17),

$$\begin{array}{lll} \lambda_V = 400 \text{ nm} & x_{\max} = 0.8, 1.6, 2.4, \dots & I_V / 4 I_1 = \cos^2(3.93x) \\ \lambda_G = 550 \text{ nm} & x_{\max} = 1.1, 2.2, 3.3, \dots & I_G / 4 I_1 = \cos^2(2.86x) \\ \lambda_R = 700 \text{ nm} & x_{\max} = 1.4, 2.8, 4.2, \dots & I_R / 4 I_1 = \cos^2(2.24x) \end{array} \text{ } x \text{ in millimetri.}$$

Nella figura 15.18 sono mostrate le intensità relative per le lunghezze d'onda  $\lambda_V$  e  $\lambda_R$ , che stanno agli estremi della banda visibile.

La *colorazione* dopo la frangia bianca centrale è ottenuta per *sottrazione*: appena fuori dal centro le lunghezze d'onda più brevi sono le prime a passare dall'interferenza costruttiva a quella distruttiva e il relativo colore diminuisce fino a scomparire dallo spettro, per poi ricomparire mentre lo stesso fenomeno si ripete per altre lunghezze d'onda; quindi in ogni punto vengono a mancare dalla luce bianca alcune lunghezze d'onda che interferiscono in modo più distruttivo di altre. La successione dei colori, detta *successione di Newton*, è caratteristica di tutti i dispositivi a frangia centrale bianca: dal bianco si passa al marrone chiaro, rosso, blu, verde, arancione, rosso, violetto, verde, violetto.

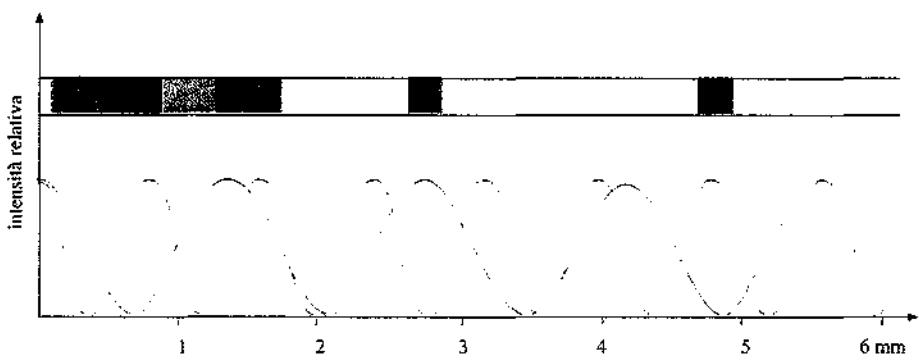


Figura 15.18

**Esempio 15.6**

In un esperimento di Young con luce ordinaria monocromatica di lunghezza d'onda  $\lambda$  si pone davanti a ciascuna fenditura un polarizzatore. Detto  $\alpha$  l'angolo tra gli assi dei polarizzatori e  $I$ , l'intensità trasmessa da una singola fenditura, calcolare come varia l'intensità sullo schermo in funzione di  $\alpha$ . In particolare per  $\alpha = 0$  e  $\alpha = \pi/2$  trovare i valori di  $I_{\max}$  e  $I_{\min}$ .

**Soluzione**

Indichiamo con  $E_1 = E_0 \cos \omega t$  e  $E_2 = E_0 \cos(\omega t + \delta)$  i valori dei campi elettrici in un punto dello schermo; i vettori  $\mathbf{E}_1$  e  $\mathbf{E}_2$  formano un angolo  $\alpha$  tra loro per cui il quadrato del valore del campo elettrico risultante è

$$E^2 = E_0^2 \cos^2 \omega t + E_0^2 \cos^2 (\omega t + \delta) + 2 E_0^2 \cos \omega t \cos (\omega t + \delta) \cos \alpha .$$

Il terzo termine si scrive

$$2 E_0^2 \cos \omega t \cos \alpha (\cos \omega t \cos \delta - \sin \omega t \sin \delta) = 2 E_0^2 (\cos^2 \omega t \cos \alpha \cos \delta - \sin \omega t \cos \omega t \cos \alpha \sin \delta) .$$

Nell'operazione di media che porta all'intensità contribuisce solo la parte quadratica in  $\cos \omega t$ . Pertanto

$$(E^2)_m = E_0^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cos \alpha \cos \delta \right) = E_0^2 (1 + \cos \alpha \cos \delta) ,$$

$$I = \varepsilon v (E^2)_m = \varepsilon v E_0^2 (1 + \cos \alpha \cos \delta) = 2 I_1 (1 + \cos \alpha \cos \delta) ,$$

$$\text{essendo } I_1 = \frac{1}{2} \varepsilon v E_0^2 .$$

Con  $\alpha = 0$ , assi dei polarizzatori paralleli.

$$I = 2 I_1 (1 + \cos \delta) = 4 I_1 \cos^2 \frac{\delta}{2} . \quad I_{\max} = 4 I_1 , \quad I_{\min} = 0 .$$

che è il risultato (15.14): l'*interferenza è completa*.

Quando gli assi dei polarizzatori sono ortogonali,  $\alpha = \pi/2$ , si ottiene

$$I = 2 I_1$$

e l'intensità è costante, qualunque sia il valore di  $\delta$ : non c'è *interferenza*.

Per qualsiasi altro valore di  $\alpha$  l'intensità  $I = 2 I_1 (1 + \cos \alpha \cos \delta)$  dipende dalla differenza di fase  $\delta$  in modo meno netto che per  $\alpha = 0$ . A seconda del punto dello schermo che si considera  $I$  varia tra i valori

$$I_{\max} = 2 I_1 (1 + \cos \alpha) , \quad I_{\min} = 2 I_1 (1 - \cos \alpha) ,$$

non si ha mai  $I = 0$  e possiamo dire che l'*interferenza è parziale*.

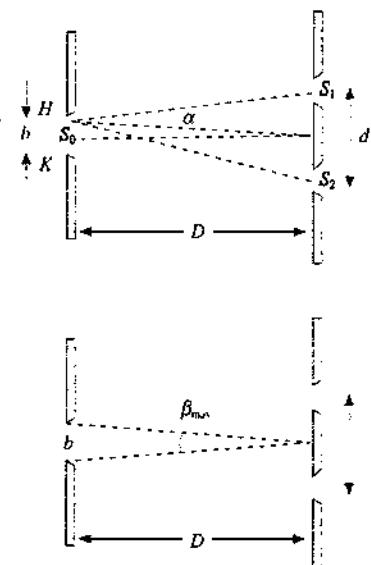


Figura 15.19

#### Nota. Limite sulla larghezza della sorgente $S_0$ nell'esperimento di Young

Supponiamo che la fenditura  $S_0$ , la quale funge da sorgente primaria, sia larga  $b$  e disti  $D$  dal piano delle fenditure  $S_1$  e  $S_2$ .  $S_0$  equivale a una serie di sorgenti rettilinee di larghezza infinitesima. Se consideriamo la sorgente vicina all'estremo  $H$  di  $S_0$ , questa dà origine in  $S_1$  e  $S_2$  a due onde aventi una differenza di fase (intrinseca)

$$\phi_H = \frac{2\pi}{\lambda} \alpha d = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{b}{2D} d = \frac{\pi b d}{\lambda D}$$

dato che la differenza di cammino è  $\alpha d$  e che  $\alpha D = b/2$  (vedi figura 15.19). La sorgente vicina all'estremo  $K$  dà origine a due onde con la differenza di fase

$$\phi_K = -\phi_H = -\frac{\pi b d}{\lambda D}$$

Sullo schermo queste due coppie di sorgenti provocano ciascuna un sistema di frange.

Quando

$$\phi = \phi_H - \phi_K = \frac{2\pi b d}{\lambda D}$$

vale  $\pi$ , le frange chiare di un sistema coincidono con quelle scure dell'altro. Chiaramente, si vuole restare lontano da questa situazione così che, a maggiore ragione, ne resti lontana qualsiasi altra coppia di sorgenti elementari comprese tra  $H$  e  $K$ . Pertanto vogliamo

$$\frac{2\pi b d}{\lambda D} < \pi \Rightarrow \frac{b}{D} < \frac{\lambda}{2d} = 2\alpha = \beta_{\max}$$

L'angolo  $\beta$  sotto cui la sorgente è vista dal centro del sistema  $S_1$ ,  $S_2$  deve essere inferiore a  $\beta_{\max}$ . Con i dati numerici dell'esempio 15.3  $\beta_{\max} = 0.4 \cdot 10^{-3}$  rad: se  $D = 1$  m,  $b$  deve essere inferiore a 0.4 mm.

### Cammino ottico

Prima di esaminare alcune applicazioni del metodo interferenziale sviluppato da Young, chiariamo un concetto già introdotto implicitamente nel capitolo 14 e utilizzato in particolare nella (14.38).

La differenza di fase dovuta a una *differenza di cammino geometrico* è in generale

$$\delta = k_2 r_2 - k_1 r_1$$

dove gli indici di  $k$  tengono conto della possibilità che i cammini avvengano in mezzi diversi. Rispetto al vuoto  $k_1 = n_1 k_0$ ,  $k_2 = n_2 k_0$  e quindi

$$\delta = k_0 (n_2 r_2 - n_1 r_1) = \frac{2\pi}{\lambda_0} (n_2 r_2 - n_1 r_1) \quad . \quad (15.19)$$

Il prodotto  $nr$  si definisce *cammino ottico* e la differenza di fase risulta proporzionale alla differenza dei cammini ottici. Infatti sullo sfasamento non influisce soltanto il cammino geometrico, ma anche la velocità con cui tale cammino viene percorso. Nel vuoto  $n_1 = n_2 = 1$  e (15.19) diventa (15.9).

### Cammino ottico

### Lenti e specchi

Nel seguito compariranno, descrivendo alcuni strumenti, lenti e specchi. La descrizione del funzionamento di questi elementi ottici è fatta nel capitolo 17. Per ora basta ricordare una proprietà delle *lenti sottili convergenti*: un fascio di raggi paralleli all'asse della lente viene fatto convergere da questa in un punto  $F$  detto *fuoco*, distante  $f$  dalla lente, mentre un fascio di raggi formanti un angolo  $\theta$  piccolo con l'asse della lente converge in un punto  $Q$  del piano focale, che è il piano ortogonale all'asse passante per il fuoco. Siccome in particolare il raggio passante per il centro della lente non viene deviato, si vede che il punto  $Q$  nel piano focale è individuato dalla  $f \operatorname{tg} \theta = f\theta = x$ . La distanza  $f$  è detta *distanza focale* della lente. Altra caratteristica fondamentale di una lente è di non introdurre sfasamenti tra i vari raggi.

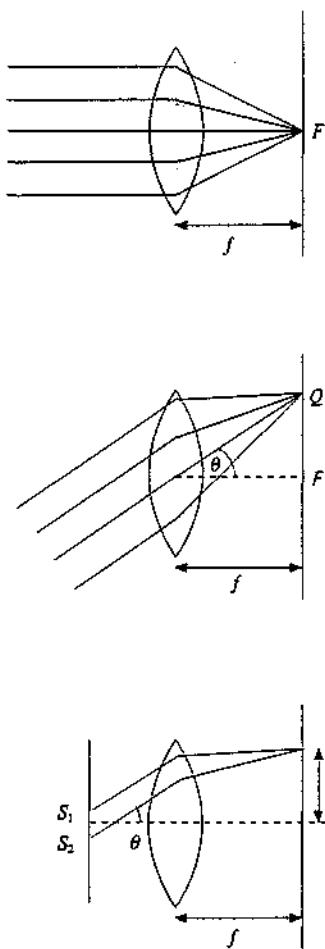


Figura 15.20

L'uso di una lente convergente nel dispositivo di Young permette di soddisfare alla condizione di considerare paralleli i raggi emergenti dalle fenditure  $S_1$  e  $S_2$  senza dover mettere lo schermo molto distante. I raggi uscenti all'angolo  $\theta$ , aventi perciò differenza di cammino  $d \sin \theta$ , sono fatti convergere dalla lente, senza alterare la differenza di fase, nel punto  $Q$  del piano focale dove interferiscono. Per osservare la figura di interferenza basta che lo schermo coincida col piano focale. Valgono ancora le espressioni (15.18) per le posizioni dei massimi e dei minimi, con  $f$  al posto di  $L$ . Con valori di  $f$  dell'ordine di 10 cm e ponendo la lente accostata alle fenditure le dimensioni dell'apparato vengono considerevolmente ridotte.

Per quanto riguarda gli specchi, si tratta per ora soltanto di *specchi piani*, ai quali si applica la legge della riflessione (14.10). Dato un punto  $S$  che invia raggi allo specchio, i raggi riflessi sembrano provenire da un punto  $S'$  che è il simmetrico di  $S$  rispetto al piano dello specchio (si veda la figura 15.21 del paragrafo 15.4).  $S'$  si chiama *immagine virtuale* del punto  $S$  fornita dallo specchio piano.

#### 15.4 Applicazioni del metodo di Young

Il metodo sviluppato da Young per realizzare due sorgenti coerenti di onde luminose, consistente nell'utilizzazione di una sola sorgente primaria e nella divisione dei fronti d'onda, venne ripreso sotto varie forme. Citiamo come esempi tre dispositivi, dovuti a *Fresnel* e a *Lloyd*, senza entrare in dettagli analitici, per altro facilmente immaginabili. Le sorgenti secondarie sono ottenute per riflessione e per rifrazione, non per diffrazione come nelle fenditure di Young; in ogni caso si ottiene la figura di interferenza e questo prova che il fenomeno dipende dalla coerenza delle sorgenti e non dalle modalità con cui queste vengono realizzate.

#### Specchi di Fresnel (figura 15.21)

La luce emessa da una sorgente puntiforme  $S_0$  incide su due specchi piani  $M_1$  e  $M_2$ , che formano tra loro un angolo  $\alpha$  molto piccolo. Una situazione particolare con due raggi che arrivano nel punto  $Q$  mostra come si genera la differenza di cammino e quindi la differenza di fase. È come se la luce provenisse dalle due immagini virtuali di  $S_0$  date dagli specchi, le quali fungono da sorgenti coerenti di onde di eguale intensità che interferiscono nella regione comune in cui si propagano le onde riflesse.

Ad esempio, la figura di interferenza a frange chiare e scure, se la luce è monocromatica, si osserva su uno schermo  $C$  posto a distanza  $L$  dal piano su cui stanno  $S_1$  e  $S_2$  grande rispetto alla separazione  $d$  tra le sorgenti. Naturalmente bisogna impedire che la luce emessa da  $S_0$  giunga direttamente sullo schermo.

#### Specchio di Lloyd (figura 15.22)

La luce monocromatica proveniente da una fenditura illuminata  $S_1$ , posta a distanza  $d/2$  sopra il piano di una lastra di vetro, raggiunge lo schermo  $C$  sia direttamente che per riflessione sulla lastra con grande angolo di incidenza (coefficiente di riflessione vicino all'unità). Le sorgenti coerenti sono  $S_1$  e la sua immagine virtuale  $S_2$ , che si trova dall'altra parte della superficie riflettente, a distanza  $d/2$ . La distanza  $L$  dello schermo dalle sorgenti è grande rispetto alla loro separazione  $d$ . La frangia centrale che si forma in  $O$  è scura: infatti, pur essendo nulla la differenza di cammino, nella riflessione sulla lastra c'è uno sfasamento di  $\pi$  (vedi paragrafo 14.4) e quindi  $\delta = k(r_2 - r_1) + \pi$ ; di conseguenza le posizioni dei *massimi* e dei *minimi* sono *invertite*. In luce bianca è diversa la successione dei colori di sottrazione: dal nero si passa al grigio-blu, bianco verdastro, giallo, porpora, blu, verde, giallo-verde, rosso, verde.

#### Biprisma di Fresnel (figura 15.23)

Due lastre di vetro a sezione triangolare (*prismi*) sono accostate lungo le basi. La sorgente  $S_0$  invia luce verso lo schermo  $C$  e, a causa della rifrazione sui prismi, la luce sembra pro-

venire dai due punti  $S_1$  e  $S_2$ , che sono le sorgenti virtuali del sistema. Sia l'angolo al vertice dei prismi che l'apertura del fascio luminoso emesso da  $S_0$  sono piccoli. Al solito lo schermo è posto a distanza grande rispetto alla separazione tra le sorgenti. Le frange osservate sono simili a quelle ottenute con gli specchi di Fresnel.

Oltre agli sviluppi appena descritti dal metodo di Young sono derivate varie applicazioni pratiche; ne descriviamo due, nelle quali si può apprezzare l'elevata sensibilità delle misure interferometriche.

#### Interferometro per la misura degli indici di rifrazione dei gas

Lo strumento mostrato nella figura 15.24 consta di questi elementi: una lente  $L_1$  che trasforma il fascio di luce divergente da una sottile fenditura  $S_0$  illuminata, posta nel fuoco della lente, in un fascio parallelo, due tubi  $T_1$  e  $T_2$  paralleli eguali, di lunghezza  $h$ , con finestre trasparenti, due fenditure  $S_1$  e  $S_2$  parallele a  $S_0$  e infine una lente  $L_2$  che permette la formazione su uno schermo  $C$  posto nel suo piano focale della figura di interferenza prodotta da  $S_1$  e  $S_2$ .

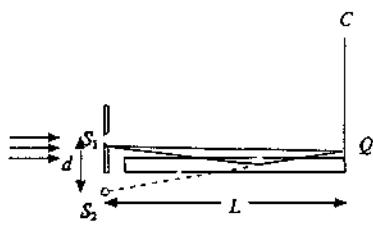


Figura 15.22

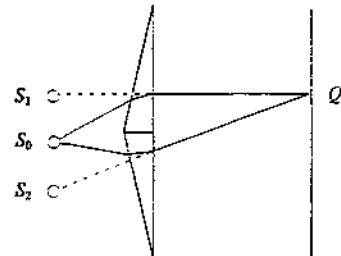


Figura 15.23

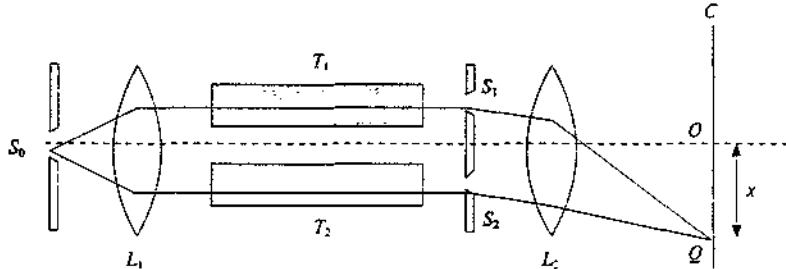


Figura 15.24

Supponiamo che inizialmente nei tubi ci sia il vuoto; nel centro  $O$  dello schermo si forma la frangia chiara di ordine zero e la frangia di ordine  $m$  si forma nel punto  $Q$  dello schermo tale che  $r_1 - r_2 = m \lambda_0$ ; la differenza di fase deriva unicamente dalla differenza di cammino geometrico dopo le fenditure. Se  $T_1$  è riempito con un gas a pressione tale che l'indice di rifrazione sia  $n$ , i cammini ottici nei tubi non sono eguali e viene introdotta la differenza di fase

$$k_1 h - k_0 h = n k_0 h - k_0 h = k_0 (n - 1) h .$$

Nel punto  $Q$  c'è ancora una frangia chiara di ordine  $m'$  se

$$(n - 1) h + (r_1 - r_2) = m' \lambda_0 .$$

Si vede che  $m'$  è maggiore di  $m$ : al massimo di ordine  $m$  nel punto  $Q$  si è sostituito il massimo di ordine  $m'$  che nella situazione con entrambi i tubi vuoti cade nel punto  $Q'$  tale che  $r_1 - r_2 = m' \lambda_0$ . Tutto il *sistema di frange* si è cioè spostato rigidamente verso l'alto di una quantità

$$N = m' - m = \frac{(n - 1) h}{\lambda_0} .$$

In particolare anche la frangia centrale di ordine zero si è spostata verso l'alto e sta nella posizione corrispondente a

$$(n - 1) h + (r_1 - r_2) = 0 \Rightarrow r_1 - r_2 = -(n - 1) h :$$

$r_1$  è minore di  $r_2$  per compensare il cammino ottico di  $T_1$ , maggiore di quello in  $T_2$ . L'effetto è equivalente all'introduzione di una differenza di fase intrinseca tra  $S_1$  e  $S_2$ .

Misurando  $N$ , come si fa ad esempio contando le frange che passano attraverso  $Q$  man mano che il gas entra nel tubo e raggiunge la pressione alla quale ha l'indice di rifrazione  $n$ , si deduce

$$n = 1 + \frac{N}{h} \lambda_0$$

Ad esempio, con  $h = 50$  cm,  $\lambda_0 = 600$  nm e  $N = 10$ ,  $n = 1.000012$ . Se siamo capaci di apprezzare lo spostamento di una frangia ( $N = 1$ ),  $n - 1 = 1.2 \cdot 10^{-6}$ : con questo strumento è possibile misurare valori di  $n$  che differiscono da quello nel vuoto per una parte su un milione. La sensibilità è dunque buona: l'errore, che al minimo è dato da  $\Delta N = 1$  nel conteggio delle frange, è piccolo solo se  $N$  è grande: un indice  $n = 1.0001$  è misurabile con un errore dell'1%.

Lo stesso metodo è utilizzabile per misurare l'indice di rifrazione di un foglio sottile di materiale trasparente: basta coprire con esso una delle due fenditure e valutare lo spostamento del sistema di frange.

### Interferometro di Fizeau

Questo interferometro venne concepito per misurare la separazione angolare tra due fasci di luce provenienti da sorgenti molto lontane, ad esempio due stelle. Dopo le due fenditure  $S_1$  e  $S_2$  di un dispositivo di Young è posta una lente convergente e uno schermo, coincidente col piano focale della lente (figura 15.25).

Ciascuna sorgente lontana produce una figura di interferenza sullo schermo: quella dovuta alla luce che proviene dalla direzione formante angolo  $\theta$  con l'asse del sistema corrisponde all'interferenza di due sorgenti aventi uno sfasamento intrinseco causato dalla differenza di cammino  $\theta d$ . È quindi possibile che i massimi di una figura coincidano con i minimi dell'altra, dando uno *schermo uniformemente illuminato* se l'intensità delle sorgenti è la stessa o, se non è così, facendo apparire zone più chiare e zone meno chiare.

La condizione di scomparsa della figura di interferenza si verifica supponendo che le due sorgenti lontane emettano luce della stessa lunghezza d'onda, quando la differenza di cammino lungo la direzione inclinata è multipla, secondo un numero intero dispari, di  $\lambda/2$  ovvero quando

$$\theta = \frac{\lambda}{2d} (2m+1)$$

L'angolo minimo misurabile si ha per  $m = 0$  e vale  $\theta_{\min} = \lambda/2d$ .

La misura della separazione angolare tra due stelle si fa nel modo seguente. Si aumenta la distanza  $d$  tra le due fenditure fino a raggiungere il valore  $d_1$  tale che lo schermo sia uniformemente illuminato, per cui vale la

$$\theta = \frac{\lambda}{2d_1} (2m+1)$$

Si aumenta di nuovo  $d$  fino al nuovo valore  $d_2$  per il quale lo schermo è di nuovo uniformemente illuminato: vuol dire che

$$\theta = \frac{\lambda}{2d_2} [2(m+1)+1]$$

Combinando le due equazioni si trova

$$m = \frac{3d_1 - d_2}{2(d_2 - d_1)} , \quad \theta = \frac{\lambda}{d_2 - d_1}$$

La migliore sensibilità si ha quando  $d_2 - d_1$  è massima: per questo  $d_2$  deve coincidere col diametro  $D$  della lente e  $d_1$  deve essere minima, cioè corrispondere al valore  $m = 0$ . Ne segue  $d_1 = d_2/3 = D/3$  e

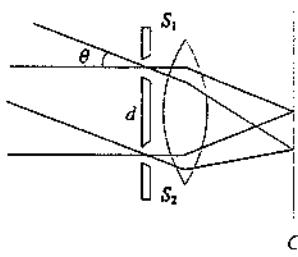


Figura 15.25

$$\theta = \frac{3\lambda}{2D}$$

Il metodo fu applicato da Michelson al telescopio di Monte Wilson, che ha  $D = 2.5$  m; con luce di lunghezza d'onda  $\lambda = 570$  nm risulta  $\theta = 3.42 \cdot 10^{-7}$  rad =  $1.96 \cdot 10^{-5}$  gradi = 0.070 secondi d'arco. Questa sensibilità fu ulteriormente migliorata con un artificio ottico che aumentava il valore di  $D$  e nel 1920 Michelson riuscì a misurare un diametro stellare, neutralizzando la figura di interferenza prodotta da mezzo disco stellare con quella prodotta dall'altro mezzo disco.

Si faccia attenzione al fatto che le due sorgenti lontane sono incoerenti e che le due figure di interferenza sono indipendenti tra loro: l'illuminazione uniforme è ottenuta sovrapponendo due figure sfalsate.

## 15.5 Interferenza prodotta da $N$ sorgenti coerenti

Consideriamo  $N$  sorgenti eguali di onde sferiche, coerenti, disposte lungo una retta ed equipziate di una distanza  $d$ . Supponiamo di osservare la loro interferenza ad una distanza molto grande rispetto alla dimensione lineare  $(N-1)d$  del sistema, così da poter utilizzare le stesse approssimazioni introdotte nel paragrafo 15.2. Detto  $\theta$  l'angolo formato tra la direzione di osservazione e la normale alla linea contenente le sorgenti, tra due onde emesse da due sorgenti consecutive esiste la differenza di fase (15.13)

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta ,$$

nell'ipotesi che la differenza di fase intrinseca tra le sorgenti sia nulla.

In un punto  $Q$  le ampiezze  $\xi_i$  delle singole onde sferiche sono eguali, data la lontananza di  $Q$  dal sistema di sorgenti; non sono invece eguali le fasi, a causa delle differenze di cammino. Per calcolare l'ampiezza risultante  $\xi_R$  utilizziamo il metodo dei vettori rotanti. Con riferimento alla figura 15.26, le singole ampiezze si dispongono lungo una poligonale regolare di  $N$  lati, che è circoscritibile con una circonferenza di centro  $O$  e raggio  $\rho$ ; l'angolo al centro che sottende il singolo vettore è  $\delta$ , quello che sottende la poligonale è  $N\delta$ . Pertanto

$$\xi_i = 2\rho \sin \frac{\delta}{2} , \quad \xi_R = 2\rho \sin \frac{N\delta}{2}$$

e combinando queste relazioni si ha il valore dell'ampiezza risultante in funzione dell'ampiezza  $\xi_i$  di ciascuna sorgente e dello sfasamento  $\delta$  tra due onde emesse da sorgenti consecutive:

$$\xi_R = \xi_i \frac{\sin \frac{N\delta}{2}}{\sin \frac{\delta}{2}} . \quad (15.20)$$

L'intensità dell'onda risultante nel punto  $Q$  è proporzionale al quadrato di  $\xi_R$ :

$$I_R(\theta) = I_i \left( \frac{\sin \frac{N\delta}{2}}{\sin \frac{\delta}{2}} \right)^2 = I_i \left( \frac{\sin \frac{N\pi d \sin \theta}{\lambda}}{\sin \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda}} \right)^2 ; \quad (15.21) \quad \text{Intensità risultante}$$

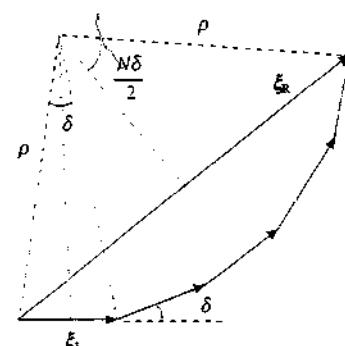
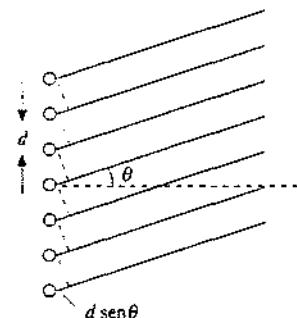


Figura 15.26

$I_1$  è l'intensità che la singola sorgente produce nel punto  $Q$ . Ponendo  $N = 2$  si ritrova la (15.14):

$$I_R(\theta) = I_1 \left( \frac{\sin \delta}{\frac{\sin \frac{\delta}{2}}{2}} \right)^2 = 4 I_1 \cos^2 \frac{\delta}{2}$$

L'intensità (15.21) varia con l'angolo di osservazione. Per prima cosa consideriamo  $\theta = 0$ , direzione lungo la quale le onde sono tutte in fase: l'intensità in queste condizioni è massima e vale  $I_{\max} = N^2 I_1$ , in quanto

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin Nx}{\sin x} = \frac{N \cos Nx}{\cos x} = N \Rightarrow \xi_R = N \xi_1, \quad I_R = N^2 I_1.$$

La stessa situazione si ripete tutte le volte che  $\pi d \sin \theta / \lambda$  egualia  $\pi, 2\pi, 3\pi, \dots$  per cui concludiamo che l'intensità  $I_R$  presenta nell'intervallo  $0 \leq \theta \leq \pi/2$  un certo numero di *massimi principali*, caratterizzati dalle proprietà

$$\begin{aligned} \text{Massimi principali} \quad \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda} &= m \pi \Rightarrow d \sin \theta = m \lambda, \quad \sin \theta = m \frac{\lambda}{d}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \\ &I_{\max} = N^2 I_1, \quad \xi_{\max} = N \xi_1. \end{aligned} \quad (15.22)$$

Al di fuori dei valori di  $\sin \theta$  dati da (15.22) il denominatore di (15.21) non si annulla mai. Invece il numeratore si annulla anche quando sono soddisfatte le condizioni

$$\begin{aligned} \text{Minimi} \quad \frac{N \pi d \sin \theta}{\lambda} &= m' \pi \Rightarrow d \sin \theta = m' \frac{\lambda}{N} \lambda, \quad \sin \theta = m' \frac{\lambda}{Nd} \\ &m' = 1, 2, \dots, N-1, N+1, \dots, 2N-1, 2N+1, \dots \end{aligned} \quad (15.23)$$

dovendosi escludere i valori  $0, N, 2N, \dots$  per i quali si hanno i massimi principali. Tra due massimi principali si hanno dunque  $N-1$  minimi nei quali  $I=0$ .

Essendo l'intensità una funzione di  $\theta$  sempre positiva, tra due minimi deve esistere un massimo, detto secondario, e di conseguenza tra due massimi principali ci sono  $N-2$  *massimi secondari*. Le posizioni dei massimi secondari si ottengono quando il numeratore di (15.21) vale 1 ovvero in corrispondenza a

$$\frac{N \pi d \sin \theta}{\lambda} = (2m'' + 1) \frac{\pi}{2} \Rightarrow d \sin \theta = (2m'' + 1) \frac{\lambda}{2N}, \quad (15.24)$$

$$\text{Massimi secondari} \quad \sin \theta = (2m'' + 1) \frac{\lambda}{2Nd} \quad m'' = 1, 2, \dots, N-2, N+1, \dots, 2N-2, 2N+1, \dots$$

Il valore dell'intensità dei massimi secondari è

$$I_m = \frac{I_1}{\left[ \sin \frac{(2m'' + 1)\pi}{2N} \right]^2} = \frac{I_{\max}}{N^2 \left[ \sin \frac{(2m'' + 1)\pi}{2N} \right]^2} \quad (15.25)$$

Nella figura 15.27 è rappresentata l'intensità nell'interferenza di 2, 4, 8 e molte sorgenti; la distanza  $d$  tra due sorgenti consecutive e la lunghezza d'onda sono sempre le stesse. Ricordiamo che la figura è simmetrica rispetto a  $\theta = 0$ : accanto ai valori di  $m, m', m''$  dati sopra vanno considerati anche i valori opposti.

Vedremo nei successivi esempi alcuni casi numerici; riassumiamo ora le principali caratteristiche del fenomeno appena descritto.

1) La posizione dei massimi principali, nei quali è concentrata la maggior parte della potenza emessa, è determinata dal rapporto  $\lambda/d$  e non dipende dal numero  $N$  delle sorgenti. Il numero di massimi si ricava da (15.22): esso è dato dal più grande tra i valori di  $m$  per il quale  $\sin\theta = m\lambda/d$  non supera l'unità e non dipende da  $N$ .

2) L'intensità dei massimi principali dipende dal numero  $N$  delle sorgenti e cresce con questo secondo  $I_{\max} = N^2 I_1$ .

3) L'ampiezza angolare dei massimi principali diminuisce all'aumentare di  $N$ , proprietà nettamente evidenziata dalla figura 15.27. L'ampiezza o *larghezza angolare di un massimo principale* si può definire come distanza tra i due minimi adiacenti al massimo: da (15.23) si vede che questa definizione corrisponde ad un incremento di 2 nel numero  $m'$  e pertanto

$$\Delta(\sin\theta) = \frac{2\lambda}{Nd} \quad . \quad (15.26) \quad \text{Larghezza angolare}$$

4) Gli  $N - 1$  minimi e gli  $N - 2$  massimi secondari compresi tra due massimi principali sono equispaziati nella variabile  $\sin\theta$ : l'intervallo tra un minimo e un massimo secondario è  $\lambda/2N d$ , l'intervallo tra due estremi consecutivi dello stesso tipo è  $\lambda/N d$  (figura 15.28). L'intensità dei massimi secondari decresce come  $1/N^2$

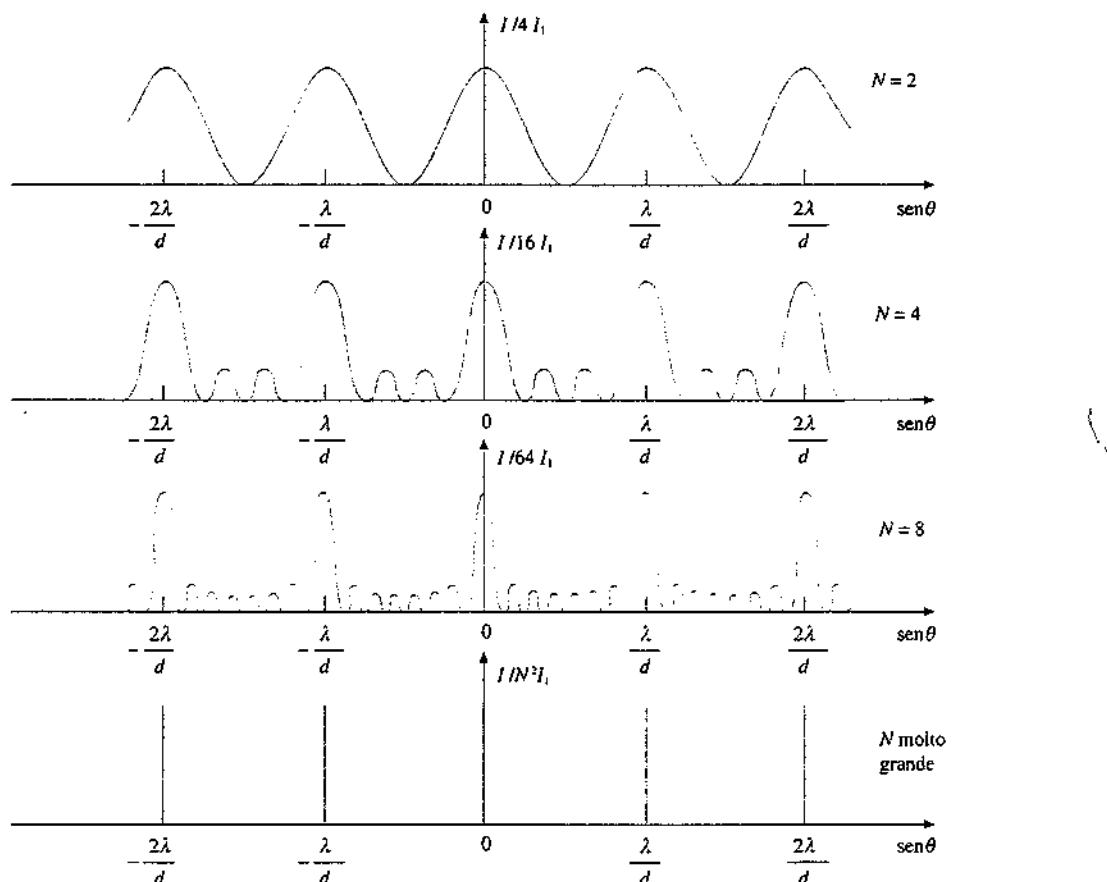


Figura 15.27

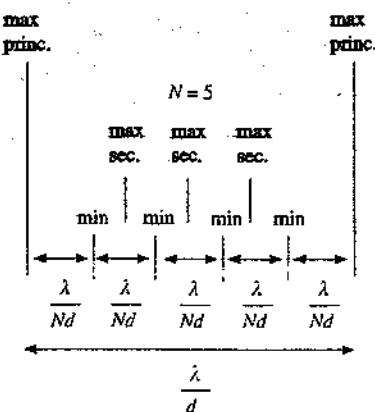


Figura 15.28

all'aumentare di  $N$ : in pratica per  $N$  abbastanza grande si ha intensità solo nei massimi principali. Inoltre, come appare da (15.25), l'intensità dei massimi secondari varia col numero d'ordine  $m''$  del massimo.

Sfruttando l'interferenza è dunque possibile, in maniera tanto più efficace quanto maggiore è  $N$ , inviare l'intensità soltanto in certe direzioni regolando la distanza  $d$  tra le sorgenti: si parla in tal senso di *emissione direzionale*. Ricordiamo, dalla (15.16), che  $N$  sorgenti incoerenti produrrebbero un'intensità  $N I_1$  costante in tutte le direzioni. L'*interferenza* tra le onde prodotte da sorgenti coerenti opera, come si è già rilevato, una *ridistribuzione dell'energia* che viene soprattutto concentrata nelle regioni corrispondenti ai massimi principali; la potenza è sempre  $N P_1$ , sia che le sorgenti siano coerenti sia che esse siano incoerenti.

Possiamo capire fin da ora che la proprietà (15.26), cioè il restringersi dei massimi principali al crescere del numero delle sorgenti, sia fondamentale per aumentare la sensibilità delle misure effettuate con metodi interferenziali. Vedremo alcuni esempi nei prossimi paragrafi e nel capitolo 16; anche se le situazioni saranno diverse, il metodo di base sarà quello di fare interferire molte onde. Vogliamo riprendere in modo diverso e intuitivo questa proprietà della somma (15.20), che è una proprietà generale della somma di  $N$  sinusoidi eguali sfasate, con  $N$  grande. A meno che non siano esattamente in fase,  $N$  funzioni  $\sin x$  danno sempre una somma praticamente nulla: infatti, in qualsiasi punto dell'asse  $x$  ci si metta, si fa la somma di  $N$  valori diversi della funzione  $\sin x$ , cioè se ne fa la media che sappiamo essere nulla. Alternativamente, considerando il metodo dei vettori rotanti, o gli  $N$  vettori eguali sono esattamente in fase, nel qual caso la somma è  $N \xi_1$ , oppure essi, considerati applicati nello stesso punto, si aprono a ventaglio e danno somma chiaramente nulla. Tutto ciò è vero per qualsiasi valore di  $\delta$  che non sia proprio  $0, 2\pi, 4\pi, \dots$ .

### Esempio 15.7

Quattro antenne in fase poste a distanza  $d = 10$  m sono eccitate da un oscillatore alla frequenza  $v = 30$  MHz. Ciascuna antenna irradia isotropicamente la potenza  $P_1 = 100$  kW. Calcolare come varia l'intensità a 10 km dalle sorgenti e i valori massimi dei campi elettrico e magnetico a tale distanza.

#### Soluzione

Si tratta dell'esempio 15.1 ripetuto per 4 sorgenti. Ricordiamo che  $\lambda = d = 10$  m e che alla distanza di 10 km  $I_1 = 7.96 \cdot 10^{-5}$  W/m<sup>2</sup>,  $I_{\max} = 4 I_1 = 3.18 \cdot 10^{-4}$  W/m<sup>2</sup>; oltre al massimo centrale c'era un altro massimo a  $90^\circ$  e un solo minimo intermedio (figura 15.8). Con quattro sorgenti si hanno ancora gli stessi massimi a  $\theta = 0$  e  $\theta = 90^\circ$ , però con intensità  $I_{\max} = 16 I_1 = 1.27 \cdot 10^{-3}$  W/m<sup>2</sup>. Tra i massimi principali ci sono tre minimi; da (15.23)

$$\sin \theta = \frac{m' \lambda}{Nd} = \frac{m'}{4} \quad , \quad m' = 1 \quad \theta = 14.5^\circ \quad , \quad m' = 2 \quad \theta = 30.0^\circ \quad , \quad m' = 3 \quad \theta = 48.6^\circ \quad .$$

I massimi secondari sono due, nelle direzioni indicate da (15.24):

$$\sin \theta = (2m'' + 1) \frac{\lambda}{2Nd} = \frac{2m'' + 1}{8}$$

$$m'' = 1 \quad \theta = 22.0^\circ \quad , \quad m'' = 2 \quad \theta = 38.7^\circ \quad .$$

Le intensità relative (15.25) dei massimi secondari sono:

$$\frac{I_m}{I_{\max}} = \frac{1}{16 \sin^2 \frac{3\pi}{8}} = 0.073 \quad , \quad \frac{I_m}{I_{\max}} = \frac{1}{16 \sin^2 \frac{5\pi}{8}} = 0.073 \quad .$$

Nel caso di due massimi esse sono eguali, ma nei casi con più di due massimi ( $N > 4$ ), si ha variazione. Ad esempio, per  $N = 5$  le intensità relative in funzione di  $m^n$  sarebbero 0.061, 0.040, 0.061 e con  $N = 8$ , che è uno dei casi indicati nella figura 15.27, si avrebbe 0.051, 0.023, 0.016, 0.016, 0.023, 0.051.

La legge di variazione dell'intensità con  $\theta$  è

$$I(\theta) = I_1 \left[ \frac{\sin(4\pi \sin\theta)}{\sin(\pi \sin\theta)} \right]^2 ;$$

il diagramma è riportato in figura 15.29. Nella variabile  $\sin\theta$  la larghezza è la stessa per entrambi i massimi e vale 0.5, in accordo con (15.26). Nell'angolo  $\theta$ , dato che il primo minimo è a  $\pm 14.5^\circ$ , la larghezza del massimo principale di ordine zero è  $\Delta\theta = 29^\circ$ ; per il massimo di ordine 1  $\Delta\theta = 82.8^\circ$ . Gli stessi dati con  $N = 2$  sono  $A(\sin\theta) = 1$ ,  $\Delta\theta = 60^\circ$  e  $\Delta\theta = 120^\circ$ : già passando da  $N = 2$  a  $N = 4$  si ha un notevole restringimento dei massimi principali.

I campi nelle direzioni dei massimi sono  $E_{\max} = 4 E_1 = 0.98 \text{ V/m}$ .

$B_{\max} = 4 B_1 = 3.27 \cdot 10^{-9} \text{ T}$ .

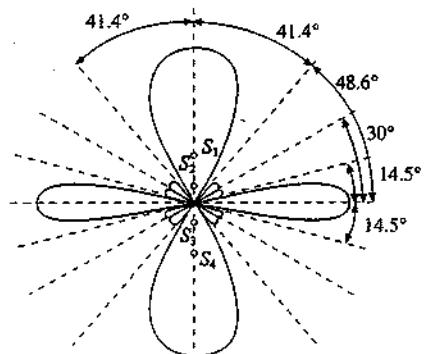


Figura 15.29

### Esempio 15.8

Quattro antenne in fase sono poste a distanza  $d = \lambda/4$ . Calcolare come varia l'intensità a grande distanza dal sistema. Ripetere il calcolo nel caso in cui le antenne siano eccitate dall'oscillatore in modo tale da essere sfasate di  $\pi/2$  l'una rispetto alla successiva.

#### Soluzione

Essendo  $\lambda > d$  si può formare solo il massimo principale di ordine zero; con  $m = 1 \sin\theta$  risulterebbe maggiore di 1; da (15.23) si vede poi che c'è un solo minimo a  $\theta = 90^\circ$ , se fosse  $\lambda > Nd$  non ci sarebbe nemmeno il minimo nullo (si riveda la figura 15.10). Non ci sono ovviamente massimi secondari; il diagramma dell'intensità è mostrato in figura 15.30.

Si noti che con la condizione  $\lambda > d$  si riesce a convogliare la potenza in una sola direzione.

Se tra una sorgente e la successiva c'è lo sfasamento  $\phi = \phi_2 - \phi_1$  lo sfasamento complessivo  $\delta$  è composto da due termini:

$$\delta = k(r_1 - r_2) + (\phi_1 - \phi_2) = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin\theta - \phi .$$

La trattazione prosegue come nei casi precedenti, fatta questa sostituzione. In particolare il massimo di ordine zero, che si ha per  $\delta = 0$ , non corrisponde più a  $\theta = 0$ , ma all'angolo  $\theta$  tale che

$$\frac{2\pi}{\lambda} d \sin\theta - \phi = 0 \Rightarrow \sin\theta = \frac{\lambda\phi}{2\pi d} .$$

Scegliendo opportunamente  $\phi$  si può variare tale direzione. Nel nostro caso  $\phi = \pi/2$ ,  $d = \lambda/4$  per cui  $\sin\theta = 1$ ,  $\theta = 90^\circ$ . L'espressione dell'intensità è

$$I_R(\theta) = I_1 \left[ \frac{\sin \frac{N}{2} \left( \frac{2\pi}{\lambda} d \sin\theta - \phi \right)}{\sin \frac{1}{2} \left( \frac{2\pi}{\lambda} d \sin\theta - \phi \right)} \right]^2 = I_1 \left[ \frac{\sin \frac{\pi}{2} (\sin\theta - 1)}{\sin \frac{\pi}{4} (\sin\theta - 1)} \right]^2 .$$

Oltre all'unico massimo principale per  $\sin\theta = 1$ , c'è un minimo per  $\theta = 0$  e per  $\theta = 3/2\pi (= -\pi/2)$ ; tra questi minimi c'è un massimo secondario per  $\theta = 11/6\pi$  (e simmetricamente per  $\theta = 7/6\pi$ ). La situazione è mostrata nel diagramma della figura 15.31. C'è sempre simmetria rispetto all'asse delle sorgenti, ma non più rispetto a  $\theta = 0$ .

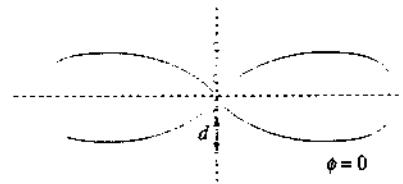


Figura 15.30

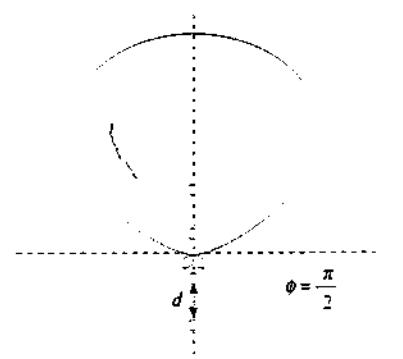


Figura 15.31

## 15.6 Interferenza delle onde luminose su lamine sottili

L'interferenza dovuta alla riflessione della luce sulle due superficie di una *lamina sottile* di una sostanza trasparente è forse il caso di interferenza più facilmente osservabile nella vita comune. Storicamente, la prima osservazione documentata di frange d'interferenza avvenne in questo modo ad opera di Boyle (1663) e, pochi anni dopo, di Newton.

Supponiamo di osservare a piccoli angoli rispetto alla normale una lamina sottile spessa  $d$ , formata da una sostanza trasparente con indice di rifrazione  $n_2$  e immersa in un mezzo con indice di rifrazione  $n_1$ . Una parte della luce incidente sulla lamina è riflessa dalla superficie superiore; l'onda trasmessa si propaga nella lamina ed è parzialmente riflessa dalla superficie inferiore; la parte riflessa riaattraversa la lamina ed emerge nel primo mezzo con direzione parallela a quella del primo raggio riflesso. Le due onde giungono all'occhio sfasate sia per la differenza di cammino ottico che per lo sfasamento di  $\pi$  subito alla prima o alla seconda riflessione (a seconda che sia  $n_1 < n_2$  o  $n_1 > n_2$ ) e interferiscono sulla retina.

Per un calcolo quantitativo riferiamoci all'incidenza normale (figura 15.33). L'interferenza è prodotta da due onde sfasate complessivamente di  $\delta = k(r_1 - r_2) + \pi$ ; la differenza di cammino ottico è  $2n_2d$  e quindi

$$\delta = \frac{4\pi n_2 d}{\lambda_0} + \pi$$

L'interferenza è costruttiva o distruttiva se

$$\begin{aligned} \delta &= 2m\pi & d &= (2m-1)\frac{\lambda_0}{4n_2} & m &= 1, 2, \dots \\ \delta &= (2m'+1)\pi & d &= m'\frac{\lambda_0}{2n_2} & m' &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (15.27)$$

Lo spessore minimo per osservare interferenza costruttiva è  $\lambda_0/4n_2 = \lambda/4$ , essendo  $\lambda$  la lunghezza d'onda nella lamina; infatti così  $2d = \lambda/2$ , cammino a cui corrisponde uno sfasamento di  $\pi$ , e aggiungendo lo sfasamento  $\pi$  dovuto alla riflessione si ha  $\delta = 2\pi$ . La condizione si ripete per multipli dispari di  $\lambda/4$  mentre per spessori eguali a  $\lambda/2$  o a multipli interi di  $\lambda/2$  si ha interferenza distruttiva. Se avessimo considerato uno sfasamento  $-\pi$ , ci sarebbe al posto di  $2m-1$  il termine  $2m+1$  con  $m = 0, 1, 2, \dots$ : il fatto è irrilevante.

In questo caso le sorgenti coerenti non sono separate lateralmente, come nell'esperimento di Young, ma sono *separate in profondità*: è come se i due raggi che interferiscono provenissero da due sorgenti poste oltre la lamina lungo la retta normale alla lamina coincidente con la direzione di osservazione; le due sorgenti sono distanti  $2n_2d$  e hanno uno sfasamento intrinseco di  $\pi$ . Il processo che genera due sorgenti virtuali è la suddivisione di un raggio incidente in due raggi riflessi e si parla di interferenza ottenuta per *divisione di ampiezza* (invece che divisione del fronte d'onda). Ci si limita normalmente a considerare soltanto due raggi perché gli altri raggi riflessi all'interno della lamina hanno intensità molto piccole rispetto ai primi due (vedi esempio 14.4). Vedremo nel paragrafo 15.7 un sistema per avere l'interferenza di molte onde, sempre col metodo della divisione di ampiezza.

Calcoliamo adesso il rapporto tra l'intensità riflessa dalla lamina e l'intensità incidente. I coefficienti che descrivono i rapporti tra i valori dei campi elettrici nella riflessione e nella trasmissione sulle due superficie sono dati da (14.24):

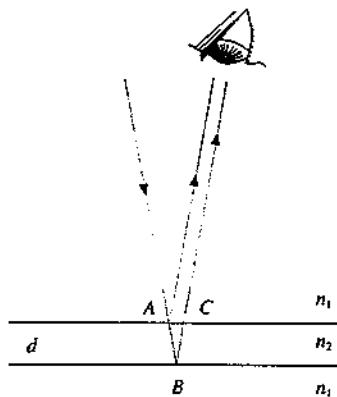


Figura 15.32

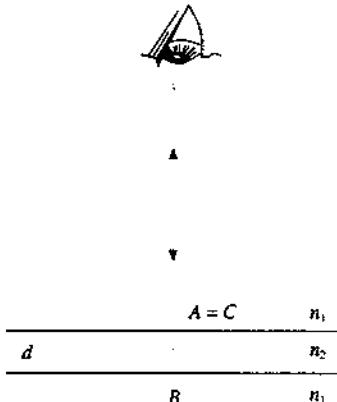


Figura 15.33

$$r_1 = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}, \quad t_1 = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}, \quad r_2 = \frac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2}, \quad t_2 = \frac{2n_2}{n_1 + n_2};$$

ricordiamo che valgono le *relazioni di Stokes* (paragrafo 14.4)  $r_1^2 = r_2^2$ ,  $1 - r_1^2 = 1 - r_2^2 = t_1 t_2$ .

Schematizziamo il comportamento del campo elettrico, ricorrendo alla rappresentazione simbolica:

campo incidente  $E = E_0 e^{i\omega t}$

campo riflesso dalla prima superficie  $r_1 E$

campo trasmesso dalla prima superficie  $t_1 E$ , che dopo lo spessore  $d$  diventa  $t_1 e^{i\phi} E$   
avendo acquistato uno sfasamento dato da  $\phi = 2\pi n_2 d / \lambda$

campo riflesso dalla seconda superficie  $r_2 t_1 e^{i\phi} E$ , che a sua volta rientrando la lamina acquista lo sfasamento  $\phi$  diventando  $r_2 t_1 e^{2i\phi} E$

campo trasmesso dalla prima superficie  $E_2 = r_2 t_1 t_2 e^{2i\phi} E = -r_1 (1 - r_1^2) e^{2i\phi} E$ .

Il campo riflesso è

$$E_r = E_1 + E_2 = r_1 [1 - r_1 (1 - r_1^2) e^{2i\phi}] E = r_1 (1 - r_1 e^{2i\phi}) E;$$

abbiamo trascurato  $r_1^2$  rispetto a  $r_1$ , coerentemente col fatto di trascurare altri raggi riflessi. Il quadrato del modulo di  $E_r$  è

$$E_r E_r^* = r_1^2 (1 - r_1 e^{2i\phi}) (1 - r_1 e^{-2i\phi}) E E^* = 4 r_1^2 E_0^2 \sin^2 \phi.$$

Infine il rapporto tra intensità riflessa e intensità incidente, ricorrendo anche al coefficiente di riflessione (14.25), è

$$r^2 = \frac{E_r E_r^*}{E E^*} = 4 r_1^2 \sin^2 \phi = 4 R \sin^2 \frac{2\pi n_2 d}{\lambda_0}. \quad (15.28)$$

L'intensità riflessa varia con lo spessore e cercando le condizioni di massimo e di minimo si ritrovano le (15.27). Il procedimento tiene conto automaticamente dello sfasamento di  $\pi$  che si ritrova nella differenza di segno tra  $r_1$  e  $r_2$ .

Con lamina di vetro immersa in aria,  $n_1 = 1$ ,  $n_2 = 1.5$ ,  $R = 0.04$  e la percentuale di intensità riflessa varia tra il 16% e zero. Se  $\lambda = 600$  nm si ha

$$\max \quad d = 0.1, 0.3, 0.5, \dots \quad \min \quad d = 0.2, 0.4, 0.6, \dots \text{ in } \mu\text{m}.$$

Si tratta di spessori molto piccoli, più facilmente realizzabili con *pellicole di materiale plastico o di liquido* (bolle di sapone, veli d'olio). D'altra parte gli spessori non possono essere grandi perché in tal caso, a meno che la luce non sia perfettamente monocromatica, si riesce ad avere interferenza costruttiva per una lunghezza d'onda e distruttiva per una lunghezza d'onda poco diversa così che il fenomeno scompare.

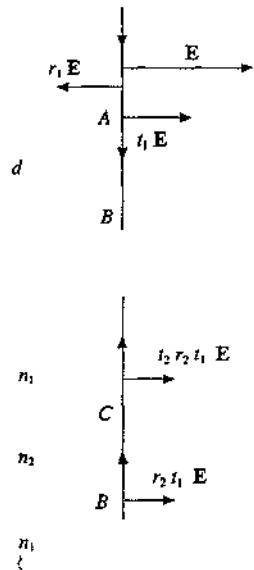


Figura 15.34

### Esempio 15.9

Un fascio di luce ordinaria di intensità  $I$  incide normalmente su una sottile lamina di materiale trasparente ( $n_2 = 1.5$ ), spessa  $d = 1.25 \mu\text{m}$  e immersa in aria. Nel fascio incidente sono presenti con eguale intensità tutte le lunghezze d'onda compresa tra  $\lambda_i = 400$  nm e  $\lambda_c = 700$  nm. Calcolare la percentuale di luce riflessa.

**Soluzione**

Il fascio incidente si può immaginare composto da infiniti fasci infinitesimi monocromatici con intensità  $dI$  distribuita nell'intervallo di lunghezza d'onda  $d\lambda$ . A ciascuno applichiamo la (15.28):

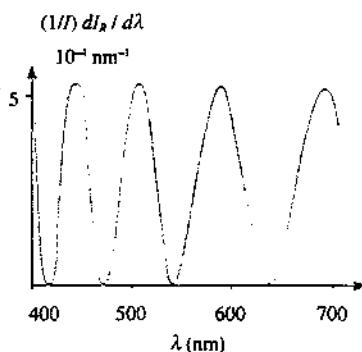
$$dI_R = r^2 dI = 4 R \sin^2 \frac{2\pi n_2 d}{\lambda} dI .$$

Essendo  $I$  distribuita uniformemente, è vero che

$$\frac{dI}{d\lambda} = \frac{I}{\lambda_2 - \lambda_1} = \text{costante} \Rightarrow dI = \frac{I}{\lambda_2 - \lambda_1} d\lambda ,$$

$$\frac{dI_R}{d\lambda} = 4 R \sin^2 \frac{2\pi n_2 d}{\lambda} \frac{I}{\lambda_2 - \lambda_1} .$$

L'intensità della luce riflessa non è più distribuita uniformemente in funzione di  $\lambda$ , in quanto per certe lunghezze d'onda si ha interferenza costruttiva tra le onde riflesse sulle due facce della lamina e per certe altre interferenza distruttiva. Ciò avviene quando



**Figura 15.35**

$$\max \quad \frac{2\pi n_2 d}{\lambda} = (2m+1) \frac{\pi}{2} , \quad \lambda = \frac{4 n_2 d}{2m+1} = \frac{7500}{2m+1} \text{ nm}$$

$$\min \quad \frac{2\pi n_2 d}{\lambda} = m' \pi , \quad \lambda = \frac{2 n_2 d}{m'} = \frac{3750}{m'} \text{ nm} .$$

Nell'intervallo tra  $\lambda_1 = 400$  nm e  $\lambda_2 = 700$  nm si hanno questi valori:

$$\begin{array}{llll} \max & m=5 & \lambda=681.8 \text{ nm} & , \quad m=6 \quad \lambda=576.9 \text{ nm} \\ & m=7 & \lambda=500.0 \text{ nm} & , \quad m=8 \quad \lambda=441.2 \text{ nm} \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \min & m'=6 & \lambda=625.0 \text{ nm} & , \quad m'=7 \quad \lambda=535.7 \text{ nm} \\ & m'=8 & \lambda=468.8 \text{ nm} & , \quad m'=9 \quad \lambda=416.7 \text{ nm} \end{array} .$$

In figura 15.35 è rappresentata la funzione

$$\frac{1}{I} \frac{dI_R}{d\lambda} = 5.33 \cdot 10^{-4} \sin^2 \frac{11781}{\lambda} \text{ nm}^{-1} ;$$

per  $R$ , trascurando la dispersione, si è assunto il valore 0.04. Si vede che a causa dell'interferenza lo spettro continuo incidente dà origine a uno spettro riflesso con quattro bande: la luce riflessa ha cioè quattro colori dominanti (colori di sottrazione).

L'intensità riflessa in totale vale

$$I_R = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} dI_R = \frac{4R I}{\lambda_2 - \lambda_1} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sin^2 \frac{2\pi n_2 d}{\lambda} d\lambda \approx \frac{1}{2} 4 R I \Rightarrow \frac{I_R}{I} = 2 R \approx 0.08 ;$$

all'incirca l'8% dell'energia incidente viene riflessa.

### Strati antiriflettenti

Supponiamo che la superficie superiore di una lastra di vetro ( $n_2$ ), immersa in aria ( $n_1$ ), sia ricoperta da una sottile pellicola di spessore  $d$  trasparente, il cui indice di rifrazione  $n_3$  è tale che  $n_1 < n_3 < n_2$ . Sulle due superficie della pellicola abbiamo

$$r_1 = \frac{n_1 - n_3}{n_1 + n_3}, \quad r_2 = \frac{n_3 - n_2}{n_2 + n_3};$$

data la condizione sugli indici di rifrazione  $r_1$  e  $r_2$  hanno lo stesso segno e gli sfasamenti di  $\pi$  si compensano. La percentuale di intensità riflessa si calcola come abbiamo appena visto e si ottiene

$$r^2 = r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos \frac{4\pi n_3 d}{\lambda_0} = R_1 + R_2 + 2\sqrt{R_1 R_2} \cos \frac{4\pi n_3 d}{\lambda_0}; \quad (15.29)$$

i coefficienti di riflessione questa volta sono diversi. Si vede che lo sfasamento è dovuto solo alla differenza di cammino ottico  $2n_3d$ . L'interferenza è *costruttiva* se

$$\frac{4\pi n_3 d}{\lambda_0} = 2m\pi \quad d = m \frac{\lambda_0}{2n_3} \quad m = 1, 2, \dots$$

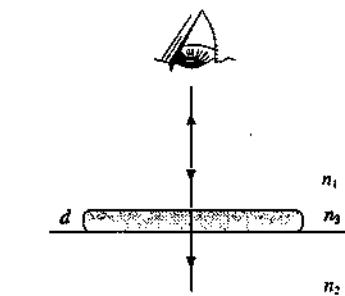


Figura 15.36

Interferenza costruttiva

ed è *distruttiva* se

$$\frac{4\pi n_3 d}{\lambda_0} = (2m'+1)\pi \quad d = (2m'+1) \frac{\lambda_0}{4n_3} \quad m' = 0, 1, 2, \dots$$

Interferenza distruttiva

Il minimo di intensità non è nullo perché in generale  $r_1 \neq r_2$  e quindi  $I_{\min} = r^2 I = (r_1 - r_2)^2 I > 0$ . Soltanto se  $r_1 = r_2$  ovvero se

$$n_3 = \sqrt{n_1 n_2}$$

si può avere intensità riflessa nulla in corrispondenza a uno spessore che sia di minimo per una data lunghezza d'onda.

Su questo principio sono basati gli *strati antiriflettenti* di cui vediamo un calcolo esplicito nell'esempio 15.10. Con una opportuna scelta del valore di  $n_3$  è anche possibile aumentare la percentuale di energia riflessa invece che ridurla a zero.

Strati antiriflettenti

### Esempio 15.10

Sulla lastra dell'esempio 15.9 è depositato uno strato di fluoruro di magnesio  $MgF_2$  ( $n_3 = 1.38$ ) con lo scopo di minimizzare l'energia riflessa alla lunghezza d'onda  $\lambda_G = 550$  nm. Calcolare lo spessore minimo  $h$  dello strato e la percentuale di intensità riflessa, nelle stesse condizioni di illuminazione.

#### Soluzione

Applichiamo allo strato di fluoruro di magnesio la procedura dell'esempio 15.9, utilizzando (15.29):

$$\frac{dl_R}{d\lambda} = \left( r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos \frac{4\pi n_3 h}{\lambda} \right) \frac{I}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

Lo spessore minimo  $h$  che annulla la riflessione della luce di lunghezza d'onda  $\lambda_G$  è

$$h = \frac{\lambda_G}{4n_3} \approx 100 \text{ nm} = 0.1 \mu\text{m}$$

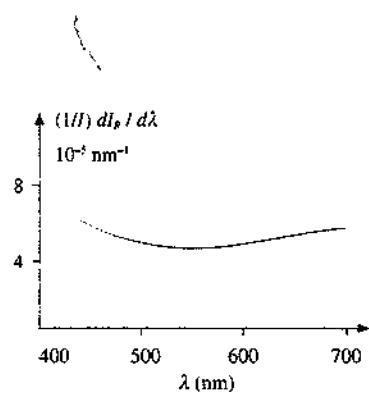


Figura 15.37

e la funzione che dà la distribuzione relativa dell'intensità riflessa ha il valore numerico

$$\frac{1}{I} \cdot \frac{dI_R}{d\lambda} = \left( 9.07 + 4.43 \cos \frac{1734.2}{\lambda} \right) \cdot 10^{-5} \text{ nm}^{-1}.$$

Essa è rappresentata in figura 15.37; la presenza della pellicola altera profondamente la figura 15.35: ora si ha un minimo largo nell'intorno di  $\lambda_G$ . La colorazione in riflessione appare bluastra per la predominanza di lunghezze d'onda inferiori a 500 nm. Se  $n_3$  soddisfasse alla condizione di essere eguale a  $\sqrt{n_1 n_2} = 1.225$  il minimo sarebbe nullo. Integrando per via grafica la funzione della figura 15.37 si ottiene  $\sim 0.016$ : questa è la percentuale di intensità riflessa, da confrontare con il valore 0.08 ottenuto senza strato antiriflettente.

Una delle utilizzazioni più comuni degli strati antiriflettenti si ha nelle lenti degli obiettivi di macchine fotografiche e telecamere.

### Esempio 15.11

Le celle solari di silicio hanno indice di rifrazione  $n_2 = 3.5$  e vengono normalmente ricoperte con una pellicola sottile di SiO, avente indice di rifrazione  $n_3 = 1.45$ . Calcolare lo spessore minimo  $h$  dell'ossido in grado di produrre riflessione minima alla lunghezza d'onda  $\lambda_G = 550$  nm, cioè nel massimo dello spettro solare, e il guadagno ottenuto nella luce trasmessa all'interno della cella.

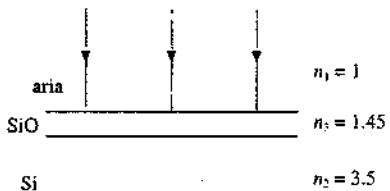


Figura 15.38

### Soluzione

In assenza dell'ossido il coefficiente di riflessione per incidenza normale sulla faccia superiore della cella è

$$R = r^2 = \left( \frac{1 - 3.5}{1 + 3.5} \right)^2 = 0.309$$

e la percentuale di luce che entra nella cella è il 69.1%.

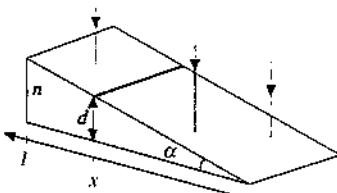
Lo spessore minimo per eliminare in riflessione la lunghezza d'onda  $\lambda_G$  è

$$h = \frac{\lambda_G}{4 n_3} = 94.8 \text{ nm}$$

e la percentuale di luce riflessa per  $\lambda = \lambda_G$  si calcola da (15.29):

$$r_2 = r_1^2 + r_2^2 - 2 r_1 r_2 = (r_1 - r_2)^2 = \left( \frac{n_1 - n_3}{n_1 + n_3} - \frac{n_3 - n_2}{n_2 + n_3} \right)^2 = 0.053$$

Nella zona centrale dello spettro solare entra nella cella il 94.7% della luce incidente invece del 69.1%: il rivestimento permette di sfruttare quasi tutta l'energia incidente. Sull'intero spettro il guadagno sarà un po' minore.



### Cuneo sottile

Si chiama *cuneo* una lamina trasparente a facce piane, ma non parallele, bensì formanti un certo angolo  $\alpha$ , che supponiamo piccolo (tipicamente inferiore a  $10^{-3}$  rad). Ad ogni punto del cuneo distante  $x$  dall'estremo dove lo spessore è nullo è associato uno spessore  $d = \alpha x$ , per cui il cuneo si può considerare come una lamina con spessore variabile da zero a  $\alpha d$  (figura 15.39).

Illuminiamo il cuneo con una sorgente estesa in incidenza quasi normale e osserviamo la luce riflessa. Data la piccolezza della pupilla dell'occhio, quando si fissa un punto del cuneo si è in sostanza nella situazione della figura 15.33 e si possono utilizzare le (15.27), che scriviamo con  $2m+1$  al posto di  $2m-1$ :

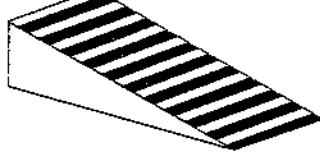


Figura 15.39

$$\max d = (2m+1) \frac{\lambda_0}{4n_2} \quad x = (2m+1) \frac{\lambda_0}{4n_2 \alpha} \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

$$\min d = m' \frac{\lambda_0}{2n_2} \quad x = m' \frac{\lambda_0}{2n_2 \alpha} \quad m' = 0, 1, 2, \dots$$

I luoghi dei punti  $d = \text{costante}$ , nei quali l'intensità è costante, sono segmenti paralleli ai bordi del cuneo. Si vede quindi sulla superficie del cuneo una successione di *frange chiare e scure*, dette *frange localizzate di eguale spessore*, in quanto ogni frangia è caratterizzata da un valore di  $d$ . Il *bordo del cuneo* dove  $d = 0$  è *nero*, cioè la prima frangia è scura, a conferma del fatto che nella riflessione ad una delle due superficie c'è uno sfasamento di  $\pi$ : se  $d = 0$  questo è l'unico sfasamento e l'interferenza è distruttiva. Se si illumina il cuneo con luce bianca si formano frange colorate (colori di sottrazione) secondo quanto visto nell'esempio 15.9.

Un dispositivo analogo, che dà frange circolari, è costituito da una lente di vetro piano-convessa posata su una lastra piana di vetro, illuminata dall'alto. La regione compresa tra la lastra e la lente è una lamina d'aria ( $n_2 = 1$ ) a simmetria circolare, con spessore variabile. A distanza  $r$  dal centro lo spessore  $d$  d'aria è

$$d = R - \sqrt{R^2 - r^2} = R - R \sqrt{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2} = R - R \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] = \frac{r^2}{2R},$$

dove abbiamo supposto che fosse  $(r/R)^2 \ll 1$ ;  $R$  è il raggio di curvatura della superficie sferica (figura 15.40). Si osservano anelli chiari e anelli scuri rispettivamente per

$$d = (2m+1) \frac{\lambda_0}{4} \quad , \quad r = \sqrt{(2m+1) \frac{R \lambda_0}{2}} \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

$$d = m' \frac{\lambda_0}{2} \quad , \quad r = \sqrt{m' R \lambda_0} \quad m' = 0, 1, 2, \dots$$

Siccome il raggio dipende dal numero d'ordine secondo una radice quadrata, le frange si addensano verso il bordo della lente.

Il centro della figura di interferenza è un dischetto nero, per la stessa ragione per cui è nera la prima frangia nel cuneo. In luce bianca si osserva una colorazione di sottrazione con il centro nero.

Queste frange di eguale spessore sono note come *anelli di Newton*; pur avendole studiate in termini quantitativi Newton non riuscì a darne una spiegazione soddisfacente, essendo convinto che la luce non fosse un fenomeno ondulatorio.

### Esempio 15.12

In un dispositivo adatto per osservare gli anelli di Newton il raggio di curvatura della lente è  $R = 5\text{m}$ , il diametro della lente  $D = 20\text{ mm}$ , la lunghezza d'onda incidente è  $\lambda_0 = 689\text{ nm}$ . Calcolare il raggio delle frange chiare e scure e il loro numero. Discutere quali modifiche si hanno se l'intercapedine è riempita d'acqua ( $n_2 = 1.33$ ).

### Soluzione

Dalle formule precedenti otteniamo:

$$\text{anelli chiari} \quad r = 1.31 \sqrt{2m+1} \text{ mm} = 1.31, 2.27, 2.93, 3.47, \dots \text{ mm}$$

$$\text{anelli scuri} \quad r = 1.86 \sqrt{m'} \text{ mm} = 0, 1.86, 2.63, 3.22, 3.72, \dots \text{ mm}.$$

Per calcolare il numero di anelli si scrive

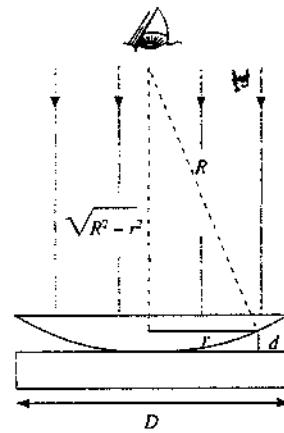


Figura 15.40

$$\frac{D}{2} = 1.31 \sqrt{2m+1} \Rightarrow m = 28.6 \text{ ovvero 29 anelli chiari}$$

$$\frac{D}{2} = 1.86 \sqrt{m'} \Rightarrow m' = 28.9 \text{ ovvero 28 anelli scuri oltre il centro.}$$

Quando la lamina è d'acqua nelle formule che danno i raggi compare  $n_2$  a denominatore sotto radice: i raggi diminuiscono e il numero di frange aumenta. Si ha

anelli chiari  $r = 1.14 \sqrt{2m+1}$  mm numero totale 39

anelli scuri  $r = 1.61 \sqrt{m'}$  mm numero totale 38 oltre il centro.

Su questo fenomeno si può basare una misura dell'indice di rifrazione di un liquido.

La formazione degli anelli di Newton fornisce un semplice ed efficace mezzo di verifica dell'accuratezza di lavorazione di una lente sferica. Gli anelli chiari e scuri hanno un aspetto regolare solo se  $R$  è costante (purché il piano di appoggio sia lavorato con precisione almeno dell'ordine di un decimo di lunghezza d'onda, ~ 50 nm). Piccole irregolarità della superficie sferica producono una deviazione dalla forma circolare degli anelli: addirittura una zona chiara può diventare scura se localmente lo spessore della lamina varia di  $\lambda_0 / 4$  (~ 140 nm per la luce gialla). Questo valore, se pari a qualche per cento dello spessore della lamina, deriverebbe da un errore di qualche per cento su  $R$ .

Vogliamo fare una precisazione sulle *frange di eguale spessore* (note anche come frange di Fizeau) relativamente al fatto che siano denominate *frange localizzate sulla lamina*. Fissiamo l'attenzione sul cuneo, illuminato da una sorgente estesa con incidenza non troppo obliqua; su di esso l'occhio vede effettivamente una serie di frange chiare e scure. Come abbiamo già accennato, la piccolezza della pupilla dell'occhio fa sì che in un dato punto della retina arrivino raggi provenienti da una sola zona del cuneo, caratterizzata da un certo spessore e perciò da una precisa differenza di fase; ci sono così punti della retina su cui arrivano raggi in fase e altri su cui arrivano raggi in opposizione di fase e sulla retina si forma la figura di interferenza, pensata come immagine di un oggetto posto sulla lamina. Se al posto dell'occhio mettessimo un semplice schermo, dato che la sorgente è estesa in un dato punto dello schermo, arriverebbero svariate coppie di raggi provenienti da diverse zone del cuneo e quindi con diverse differenze di fase: di conseguenza non si avrebbe sullo schermo nessuna figura di interferenza. Il ruolo dell'occhio è dunque essenziale nell'osservazione delle frange; al posto dell'occhio si può mettere un obiettivo e osservare le frange nel piano focale, sempre come immagine della superficie della lamina.

Esempio di frange non localizzate sono invece quelle prodotte col metodo di Young, osservabili nella zona di propagazione comune alle due onde.

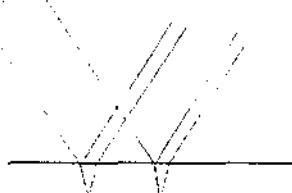


Figura 15.41

#### *Frange di eguale inclinazione*

Riprendiamo in esame una lamina trasparente a facce piane e parallele, con indice di rifrazione  $n_2$ , spessa  $d$ , immersa in aria. Se la illuminiamo con una sorgente estesa e la osserviamo in riflessione, vediamo che ogni raggio proveniente dalla sorgente dà origine a due raggi riflessi paralleli di intensità paragonabile (tralasciamo gli altri raggi riflessi di intensità molto minore). Dato che dalla sorgente arrivano molti raggi secondo una certa direzione e che queste direzioni sono tante, abbiamo in pratica per ogni direzione di osservazione della luce riflessa molte coppie di raggi, tutte con la stessa differenza di fase. Si noti che in una coppia i raggi ovviamente possono interferire, ma che i raggi di coppie diverse sono incocrenti e non interferiscono.

L'interferenza si osserva all'*infinito*, ovvero nel piano focale di una lente, e le frange sono dette *frange di eguale inclinazione* (o di Haidinger) *localizzate all'infinito*: il termine eguale inclinazione deriva dal fatto che in una frangia interferiscono due raggi paralleli originati da un raggio con un determinato angolo di incidenza. Questo è il parametro che conta e che varia da frangia a frangia, mentre lo spessore è costante: invece nelle frange di eguale spessore l'inclinazione è costante (~ 0°) e il parametro importante è lo spessore della lamina.

La differenza di fase tra due raggi paralleli comprende un termine  $\pi$ , dovuto alla diversità delle condizioni di riflessione, e un termine proveniente dalla differenza di cammino ottico che ora calcoliamo. Nella figura 15.42 tracciamo la linea  $CE$  ortogonale alla direzione dei raggi riflessi: un raggio compie il cammino da  $A$  a  $C$  nel mezzo, l'altro da  $A$  a  $E$  nell'aria ( $n_2 = 1$ ), quindi

$$\Delta r = 2n_2 AB - AE$$

Siccome

$$AB = \frac{d}{\cos \theta_i} , \quad AE = AC \sin \theta_i = 2AB \sin \theta_i, \quad \sin \theta_i = 2n_2 AB \sin^2 \theta_i ,$$

otteniamo

$$\Delta r = 2n_2 d \cos \theta_i . \quad (15.30)$$

La differenza di cammino ottico è massima per incidenza normale e decresce all'aumentare dell'angolo di incidenza e quindi dell'angolo  $\theta_i$  di trasmissione.

Al variare dell'inclinazione si hanno massimi e minimi di intensità riflessa; tenuto conto dello sfasamento di  $\pi$  si trova

$$\max \quad 2n_2 d \cos \theta_i = (2m+1) \frac{\lambda}{2} , \quad \cos \theta_i = (2m+1) \frac{\lambda}{4n_2 d} \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

$$\min \quad 2n_2 d \cos \theta_i = m' \lambda , \quad \cos \theta_i = m' \frac{\lambda}{2n_2 d} \quad m' = 0, 1, 2, \dots$$

Valori piccoli di  $m$  e  $m'$  corrispondono a grandi valori di  $\theta_i$  e viceversa per piccoli valori di  $\theta_i$  si hanno grandi valori di  $m$  e  $m'$ .

Per angoli di incidenza non troppo grandi, così che il coefficiente di riflessione si mantenga piccolo, dell'ordine di qualche per cento, il calcolo dell'intensità riflessa si fa secondo le linee che portano alla (15.28). Posto  $\phi = 2\pi \Delta r / \lambda$  e utilizzando, per luce incidente naturale, il valore di  $R$  dato da (14.29), si ha

$$\frac{I_R}{I} = 4R \sin^2 \frac{\phi}{2} = 4R \sin^2 \frac{2\pi n_2 d \cos \theta_i}{\lambda}$$

Questa formula non è più valida quando, al crescere dell'angolo di incidenza, il coefficiente di riflessione aumenta tendendo a 1. Bisogna considerare in questo caso anche i successivi raggi riflessi e, con lo stesso metodo simbolico applicato in precedenza, effettuare la somma di una serie infinita di campi sfasati.

Ponendo una lente con asse ortogonale alla lamina, nel suo piano focale si osserva un sistema di *frange circolari chiare e scure*; il centro è scuro. Come si è detto, ad ogni frangia corrisponde un particolare valore di  $\theta_i$ . Le frange sono equispaziate nella variabile  $\cos \theta_i$ ; dato che eguali intervalli di  $\cos \theta_i$  comportano, al crescere di  $\theta_i$ , intervalli sempre più piccoli di  $\theta_i$ , le frange si addensano al crescere di  $\theta_i$ . Sotto questo aspetto esse sono simili agli anelli di Newton.

Notiamo infine che anche in questo caso, se la lamina non è sottile, occorre luce ben monocromatica per osservare le frange; altrimenti, a parità di inclinazione, per una lunghezza d'onda si può avere un massimo e per una vicina un minimo.

### Interferometro di Michelson

L'interferometro di Michelson è costituito da due specchi  $M_2$  e  $M_1$ , il primo fisso e il secondo mobile, da una lastra di vetro  $M$  avente una faccia semiriflettente e da una seconda lastra di vetro  $G$ , dello stesso spessore di  $M$ . Un fascio di luce proveniente dalla sorgente estesa lontana  $S$  attraversa la lastra  $M$  e incide sulla faccia semiriflettente: una parte è riflessa verso lo specchio  $M_1$ , una parte eguale è trasmessa verso lo specchio  $M_2$ , che raggiunge passando attraverso la lastra  $G$ . I fasci riflessi dagli specchi tornano verso la faccia semiriflettente di  $M$ : quello proveniente da  $M_1$ , parzialmente trasmesso, e quello proveniente da  $M_2$ , parzialmente riflesso, arrivano attraverso un telescopio sulla retina dell'osservatore, dove interferiscono;

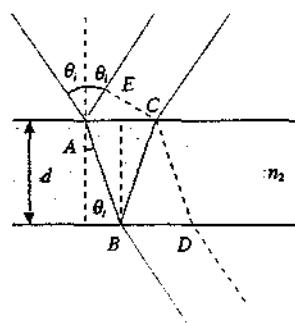


Figura 15.42

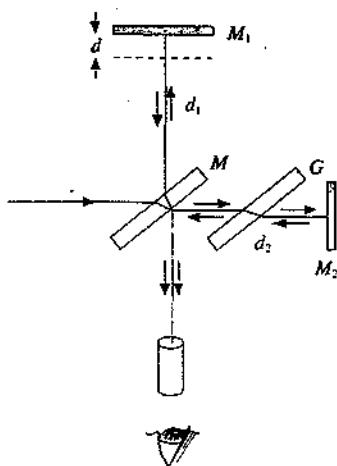


Figura 15.43

essi sono coerenti in quanto ottenuti da un'unica sorgente per divisione di ampiezza.

La lastra  $G$ , detta *lastra di compensazione*, fa sì che entrambi i raggi che interferiscono attraversino lo stesso spessore di vetro, eliminando effetti di dispersione: infatti se non ci fosse  $G$  la differenza di fase tra un raggio e l'altro dovuta al diverso spessore di vetro attraversato dipenderebbe dalla lunghezza d'onda, perché l'indice di rifrazione dipende da  $\lambda$ . La lastra  $G$  è dunque necessaria se si illumina con luce bianca; in luce monocromatica non sarebbe indispensabile, però è utile mantenerla in quanto così la differenza di cammino ottico tra i raggi dipende, con qualsiasi illuminazione, soltanto da  $d_1 - d_2$ , eguale alla differenza tra i cosiddetti *bracci* dell'interferometro.

Se i due specchi sono esattamente perpendicolari tra loro, l'effetto osservato è equivalente a quello di una lamina d'aria di spessore  $d = d_1 - d_2$ : la luce proveniente da  $M_2$  gioca il ruolo di luce riflessa sulla superficie inferiore della lamina, quella proveniente da  $M_1$  di luce riflessa sulla faccia superiore della lamina. Nella figura 15.43 la lamina d'aria equivalente è quella sotto lo specchio  $M_1$  e la linea tratteggiata, bordo inferiore della lamina, è l'immagine di  $M_2$  data dallo specchio semiriflettente.

In questa situazione si osservano *frange di eguale inclinazione circolari* con il centro chiaro perché non ci sono cause aggiuntive di sfasamento tra i due raggi. La differenza di cammino  $\Delta r$  causata dalla lamina d'aria è data da (15.30) con  $n_2 = 1$  e  $\theta_i = \theta_r$ , angolo di incidenza dei raggi provenienti dalla sorgente:

$$\Delta r = 2d \cos\theta_i = 2(d_1 - d_2) \cos\theta_i$$

$$\max \quad 2d \cos\theta_i = m\lambda, \quad \cos\theta_i = m \frac{\lambda}{2d}$$

$$\min \quad 2d \cos\theta_i = (2m+1) \frac{\lambda}{2}, \quad \cos\theta_i = (2m+1) \frac{\lambda}{4d}.$$

Per un dato valore di  $d$  osserviamo la posizione di una certa frangia chiara  $F_m$ , caratterizzata da un valore di  $\theta_i$  e dal numero d'ordine  $m$ ; se allontaniamo  $M_1$ , mantenendolo parallelo alla posizione iniziale,  $d$  aumenta e nella posizione della frangia  $F_m$  subentra un'altra frangia  $F_{m'}$ , con  $m'$  maggiore di  $m$ , mentre la frangia  $F_m$  si porta verso l'esterno in una posizione caratterizzata da un valore minore di  $\cos\theta_i$ . Man mano che la distanza  $d$  viene aumentata si possono contare le frange chiare che passano nella posizione prefissata: il conteggio delle frange si traduce così in una misura di lunghezza, in quanto al passaggio di una frangia corrisponde una variazione di  $d$  quasi eguale a  $\lambda/2$ , essendo  $\lambda$  la lunghezza d'onda della luce monocromatica utilizzata. L'errore assoluto che si commette è dell'ordine di metà della distanza che dà luogo allo spostamento di una frangia, cioè dell'ordine di  $\lambda/4$ .

Anche se molto più elaborato nella pratica, fu questo il metodo seguito da Michelson per confrontare la lunghezza del metro campione con la lunghezza d'onda di una riga rossa emessa da atomi di cadmio ( $\lambda = 643.8$  nm); egli trovò che il metro era pari a  $1.5531635 \cdot 10^9$  di tali lunghezze d'onda, con un errore relativo stimato di  $\sim 3 \cdot 10^{-7}$ . In tal modo Michelson pose le basi per la *definizione ottica dell'unità di lunghezza*, adottata definitivamente nel 1960 (vedi paragrafo 15.7).

Nella sua misura Michelson non effettuò il confronto direttamente col metro campione: a parte il problema di contare oltre tre milioni di frange, la distanza  $d = 1$  m è vicina alla *lunghezza di coerenza* della luce normale emessa dagli atomi e non si può conservare la figura di interferenza su una tale lunghezza. Invece Michelson misurò uno spessore molto più piccolo che poi riportò con grande abilità, senza peggiorare l'errore, alla lunghezza del metro campione. Per contro, la limitazione sugli spessori derivante da scarsa monocromaticità della sorgente non sussisteva, avendo Michelson scelto una riga estremamente stretta, quasi perfettamente monocromatica.

Un risultato concettualmente fondamentale ottenuto con l'interferometro di Michelson fu la prova che la *velocità della luce non dipende dal sistema di riferimento* (esperimenti di Michelson e Morley, conclusi nel 1887). Supponiamo che il percorso  $MM_1$  sia parallelo alla velocità della terra (e quindi il percorso  $MM_1$  ortogonale a questa velocità). Per una data lunghezza geometrica dei percorsi si calcola quale deve essere la figura di interferenza tenendo conto del fatto che la velocità  $c$  della luce dovrebbe comporsi con la velocità  $v$  della terra risultando ad esempio  $c - v$  nel tratto  $MM_1$  e  $c + v$  nel tratto  $M_1M$ : lo sfasamento tra le onde che interferiscono deve cioè essere determinato inserendo gli appropriati valori di velocità di propagazione della luce in accordo con la composizione galileiana delle velocità, in entrambi i bracci. Una rotazione di  $90^\circ$  dell'interferometro, che giace in un piano orizzontale, scam-

### Definizione ottica dell'unità di lunghezza

bria il ruolo dei due percorsi  $MM_2$  e  $MM_1$ , e si dovrebbe osservare uno spostamento delle frange, essendo variato lo sfasamento tra le onde che interferiscono. Lo spostamento atteso era di circa mezza frangia, ma gli autori non riuscirono ad osservare nessuno spostamento. L'esperimento fu ripetuto nelle più diverse condizioni, sempre con lo stesso risultato, e portò alla conclusione, posta da Einstein come una delle basi della teoria della relatività ristretta, che *la velocità della luce è la stessa in qualsiasi sistema di riferimento inerziale*.

### 15.7 Interferenza con riflessioni e trasmissioni multiple

Abbiamo accennato più volte nel corso del paragrafo 15.6 alla proprietà della riflessione e della trasmissione della luce da parte di una lastra a facce piane e parallele per cui da un raggio incidente hanno origine in teoria infiniti raggi riflessi e trasmessi, ma nella pratica l'intensità si ritrova principalmente nel primo raggio trasmesso e, in misura molto minore, nei primi due raggi riflessi. Il calcolo quantitativo dell'intensità dei singoli raggi è stato fatto nell'esempio 14.4. Abbiamo anche detto che la situazione si modifica se l'angolo di incidenza è grande, nel senso che si può avere interferenza di più raggi con intensità paragonabile.

Una modifica radicale si ha se le facce della lastra sono ricoperte con un deposito semiriflettente o se si considera il dispositivo illustrato in figura 15.44: due lastre piane di vetro parallele tra loro, con le superficie affacciate ricoperte da un deposito *semiriflettente*. Un raggio che entri nella lastra d'aria compresa tra le due lastre di vetro viene riflesso moltissime volte, qualunque sia l'angolo di incidenza; ad ogni riflessione una piccola parte dell'intensità, tipicamente qualche per cento, passa attraverso lo strato semiriflettente e si genera così un gran numero di raggi paralleli con intensità poco diverse, uscenti attraverso l'una o l'altra lastra di vetro. La figura d'interferenza di tali raggi è caratterizzata da *righe luminose sottili separate da larghe zone di buio*, secondo la proprietà, già messa in evidenza nel paragrafo 15.5, di diminuzione della larghezza dei massimi all'aumentare del numero di onde che interferiscono.

Una possibile configurazione sperimentale è illustrata in figura 15.45. Una sorgente estesa illumina le lastre: un generico raggio che incide sulla prima lastra con angolo  $\theta_i$  entra, per quanto attenuato, nella lastra d'aria con angolo  $\theta_t$  e subisce le riflessioni, dando in particolare origine a moltissimi raggi trasmessi oltre la seconda lastra di vetro, dalla quale escono sempre formando l'angolo  $\theta_f$  con la normale. Questi raggi sono portati a interferire nel piano focale di una lente dove formano frange di eguale inclinazione molto nette e ben separate; le frange sono circolari e il centro è chiaro. Lo strumento si chiama *interferometro di Fabry-Pérot*.

Le condizioni di massimo e minimo si ricavano da (15.30) con  $n_2 = 1$ :

$$\max \quad 2d \cos \theta_i = m\lambda \quad , \quad \min \quad 2d \cos \theta_i = (2m+1) \frac{\lambda}{2} \quad ;$$

$d$  è lo spessore della lamina d'aria.

La precisione delle misure di lunghezza effettuate con metodi interferometrici portò nel 1960 ad adottare ufficialmente per il metro una definizione basata su una particolare lunghezza d'onda, quella rosso-arancione emessa dagli atomi dell'isotopo  $^{86}\text{Kr}$  del gas nobile kripton nella transizione tra due ben determinati *livelli energetici*, con il gas alla temperatura del punto triplo dell'azoto (63K). Secondo questa nuova definizione il *metro è pari a 1650763.73 volte la suddetta lunghezza d'onda*, il cui valore è quindi 605.780211 nm. La precisione relativa è di circa  $2 \cdot 10^{-8}$  (20 nm su un metro). Con la luce emessa da un laser a elio-neon ( $\lambda = 632.8$  nm) è stata successivamente raggiunta una precisione di 10 nm sulla lunghezza di un metro.

Notiamo che il campione ottico delle lunghezze ha requisiti di precisione, riproducibilità, accessibilità nettamente superiori a quelli del regolo di platino-iridio. Ricordiamo d'altra parte che un ulteriore miglioramento nella precisione relativa ( $10^{-9}$ ) è stato ottenuto legando la definizione del metro alla velocità della luce.

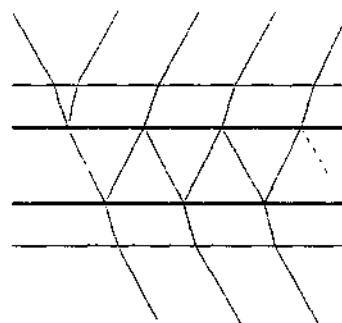


Figura 15.44

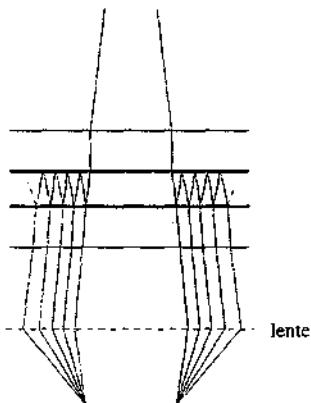


Figura 15.45

Definizione ottica di metro  
campione

**Esempio 15.13**

Un interferometro di Fabry-Perot con  $d = 1$  cm è illuminato da una sorgente estesa monocromatica di lunghezza d'onda  $\lambda = 632.8$  nm. Calcolare per quale angolo rispetto alla normale si forma la 14ª frangia chiara e di quanto cambia il numero d'ordine della frangia ottenuta a quel dato angolo se  $d$  viene portato a 21 cm.

**Soluzione**

La frangia centrale chiara si ha per  $\theta_i = 0$ , cioè  $\cos\theta_i = 1$ : la differenza di cammino corrispondente è  $2d = 2$  cm e il numero d'ordine è  $m = 2d/\lambda = 31606$ . Gli altri massimi si formano per differenze di cammino minori; per la 14ª frangia, oltre il centro, si ha

$$m_{14} = m - 14 = 31592 \Rightarrow \theta_i = \arcsin \frac{m_{14} \lambda}{2d} = 1.68^\circ.$$

A parità di angolo se cambia  $d$  abbiamo

$$2\Delta d \cos\theta_i = \lambda \Delta m \Rightarrow \Delta m = \frac{2 \cos\theta_i}{\lambda} \Delta d = 3.1592 \cdot 10^6 \Delta d$$

Con  $\Delta d = 0.2$  m si conta il passaggio di 631840 frange. Già apprezzando lo spostamento di mezza frangia si avrebbe

$$\Delta d = \frac{0.5\lambda}{2 \cos\theta_i} = \frac{\lambda}{4 \cos\theta_i} = \frac{\lambda}{4} = 158.2 \text{ nm} :$$

la distanza di 20 cm sarebbe nota con un errore di 158 nm, cioè con un errore relativo di  $8 \cdot 10^{-7}$  ( $= 0.5/631840$ ). In realtà, dato che le frange sono nette e ben separate, si riesce ad apprezzare uno spostamento del sistema di frange pari a una piccola parte della separazione tra due frange, a cui corrisponde un  $\Delta d$  eguale a qualche centesimo di  $\lambda$ . La miglior precisione raggiungibile è dell'ordine di  $10^{-8}$ .

## 15.8 Onde stazionarie in una corda tesa

La sovrapposizione di onde che si propagano nella stessa direzione in versi opposti può portare ad una situazione stazionaria che descriviamo in questo paragrafo e in quelli successivi, considerando anche casi bidimensionali e tridimensionali. La caratteristica saliente è l'instaurarsi di una *oscillazione collettiva* del sistema, con le modalità che vedremo, senza che avvenga un fenomeno di propagazione.

Prendiamo una corda tesa di lunghezza  $L$  fissata nell'estremo  $O$ , in cui poniamo l'origine dell'asse  $x$ ; se l'estremo libero è legato ad un *diapason* che vibrare con frequenza  $v$  e con ampiezza piccola, lungo la corda si propagano onde in entrambi i versi.

Un diapason è una bacchetta di acciaio di sezione rettangolare piegata ad  $U$ , con gli estremi liberi. Esso ha la proprietà di entrare in oscillazione, se colpito ad esempio con un martelletto di gomma, e di vibrare per un tempo abbastanza lungo: l'oscillazione è con buona approssimazione sinusoidale con frequenza fissa. Il diapason funge quindi da sorgente di onde sonore nell'aria o, come nel caso in esame, in una corda tesa fissata ad un suo estremo; riprenderemo brevemente il funzionamento del diapason alla fine del paragrafo.

Indichiamo con

$$s_1(x, t) = a \sin(kx + \omega t)$$

la perturbazione trasversale prodotta dal diapason che si propaga lungo la corda verso l'estremo  $O$ ; in questo la perturbazione è  $s_1(0, t) = a \sin \omega t$ . Il punto  $O$  deve

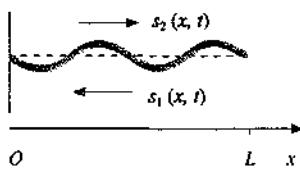


Figura 15.46

restare fisso e dunque la reazione del vincolo genera un'onda riflessa  $s_2$  tale che

$$s_1(0, t) + s_2(0, t) = 0 \Rightarrow s_2(0, t) = -a \sin \omega t ;$$

abbiamo già trovato questa situazione fisica nel paragrafo 14.5.

L'onda riflessa si propaga nel verso positivo dell'asse  $x$  con equazione

$$s_2(x, t) = a \sin(kx - \omega t) ,$$

per cui la perturbazione complessiva lungo l'asse  $x$  è

$$s(x, t) = s_1(x, t) + s_2(x, t) = a [\sin(kx + \omega t) + \sin(kx - \omega t)] = 2a \sin kx \cos \omega t . \quad (15.31)$$

Onda stazionaria

In questa espressione non compare l'argomento  $kx \pm \omega t$ , tipico di un fenomeno di propagazione. E in effetti (15.31) rappresenta un'oscillazione armonica semplice, di pulsazione  $\omega$  eguale in ogni punto della corda e con ampiezza che invece è funzione della posizione,

$$A(x) = 2a \sin kx = 2a \sin \frac{2\pi}{\lambda} x . \quad (15.32)$$

Ogni punto della corda compie cioè un'oscillazione armonica, con la pulsazione tipica delle onde originarie e ampiezza che a seconda della coordinata del punto varia tra il massimo  $2a$  e il minimo zero. I massimi di oscillazione si hanno nei punti, chiamati *ventri*, tali che  $\sin kx = 1$ , ovvero dove

$$kx = \frac{2\pi}{\lambda} x = (2m+1) \frac{\pi}{2} , \quad x = (2m+1) \frac{\lambda}{4} \quad m = 0, 1, 2, \dots . \quad (15.33) \quad \text{Venti}$$

L'ampiezza dell'oscillazione è nulla nei punti, chiamati *nodi*, tali che  $\sin kx = 0$ :

$$kx = \frac{2\pi}{\lambda} x = m' \pi , \quad x = m' \frac{\lambda}{2} \quad m' = 0, 1, 2, \dots ; \quad (15.34) \quad \text{Nodi}$$

nei nodi la corda resta ferma, in qualsiasi istante.

La distanza tra due nodi o due ventri consecutivi è  $\lambda/2$  mentre la distanza tra un nodo e un ventre contigui è  $\lambda/4$ . Tutti i punti compresi tra  $x=0$  e  $x=\lambda/2$  oscillano in fase tra loro; quelli compresi tra  $x=\lambda/2$  e  $x=\lambda$  oscillano in fase tra loro, ma in opposizione di fase rispetto ai precedenti, e così via.

Come si vede, tale movimento della corda, che è chiamato *onda stazionaria*, è ben diverso dalla situazione in cui una singola onda armonica si propaga lungo la corda: in questo caso ogni punto descrive un'oscillazione completa di ampiezza  $a$ , tutti i punti compiono la stessa oscillazione, anche se in istanti diversi, non c'è nessun punto sempre fermo.

L'effettiva formazione delle onde stazionarie è disturbata dalle riflessioni multiple che hanno origine ogni volta l'onda giunge ad uno dei due estremi della corda. Soltanto se la lunghezza  $L$  della corda soddisfa alle condizioni che tra poco esamineremo il fenomeno viene esaltato.

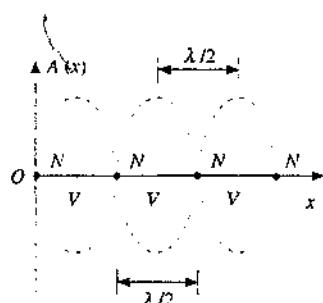


Figura 15.47

*Corda tesa con entrambi gli estremi fissi*

È questa la configurazione più interessante, realizzata ad esempio in tutti gli *strumenti musicali a corde*, nei quali la corda vibrante è sorgente di onde sonore che si propagano nell'aria. Sia il punto fisso coincidente con l'origine che il punto di coordinata  $x = L$  sono nodi e in base a (15.34) deve essere

$$kL = \frac{2\pi}{\lambda} L = m\pi \quad , \quad L = m \frac{\lambda}{2} \quad \text{ovvero} \quad \lambda = \frac{2L}{m} \quad m = 1, 2, \dots$$

Fissata la lunghezza  $L$  della corda, in questa possono aver luogo soltanto le onde stazionarie di lunghezza d'onda e frequenza

Serie armonica

$$\lambda_m = \frac{2L}{m} \quad , \quad v_m = \frac{v}{\lambda_m} = \frac{v}{\frac{2L}{m}} = \frac{v}{2L} m = v_1 m \quad , \quad (15.35)$$

avendo indicato con

Frequenza fondamentale

$$v_1 = \frac{v}{2L} = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{\rho_l}} \quad (15.36)$$

la minima frequenza possibile; per la velocità di propagazione abbiamo utilizzato la (12.29).

In una corda tesa esiste dunque una serie discreta di lunghezze d'onda  $\lambda_m$  e di frequenze  $v_m$ , detta *serie armonica*, in cui la frequenza più bassa  $v_1$  è detta *frequenza fondamentale* o *prima armonica* della corda e le altre, multiple intere di  $v_1$ , sono dette *armoniche superiori*; il valore di  $v_1$  dipende dalla lunghezza  $L$ , dalla massa per unità di lunghezza  $\rho_l$  e dalla tensione applicata alla corda.

Nella figura 15.48 è rappresentata la corda quando vibra nelle prime quattro

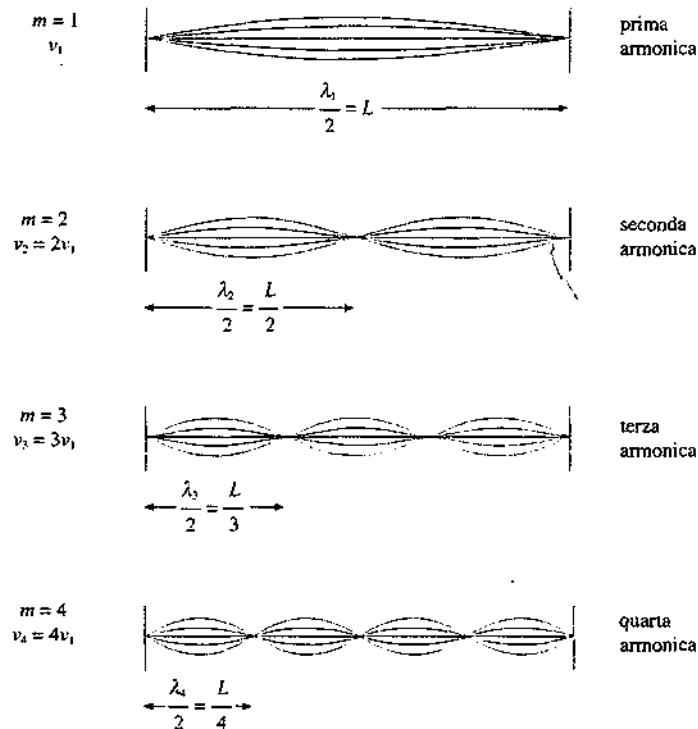


Figura 15.48

configurazioni date da (15.35). Visivamente si capisce bene la condizione che la lunghezza sia un multiplo intero di  $\lambda/2$ , in quanto  $\lambda/2$  è la distanza minima tra due nodi e i nodi, con due estremi fissi, possono essere due, tre, quattro, ecc. Ciascuna linea continua rappresenta la corda ad un dato istante: in ogni figura sono mostrati cinque istanti, quello di massima oscillazione per tutti i punti della corda, un istante intermedio, l'istante in cui la corda è nella posizione coincidente con la posizione di equilibrio statico, un altro istante intermedio e infine l'istante di massima oscillazione di segno opposto alla precedente (tra la prima e l'ultima configurazione c'è una differenza in tempo di mezzo periodo). Si vede anche chiaramente il fatto che le oscillazioni contenute in  $\lambda/2$  (tra due nodi) sono sfasate di  $\pi$  rispetto a quelle contenute nella  $\lambda/2$  successiva.

Una determinata onda stazionaria, con due, tre, quattro o più nodi è detta anche *modo* della corda: una corda tesa ha pertanto  $\infty$  modi discreti. Un particolare modo può essere eccitato pizzicando opportunamente la corda oppure con un diapason, come già mostrato nella figura 15.46. Se consideriamo una particolare cresta d'onda generata nell'istante  $t$  dal diapason, quando essa arriva all'altro estremo viene riflessa e quando torna indietro viene di nuovo riflessa dal diapason, che funge da nodo se la sua ampiezza di vibrazione è piccola. Siccome ad ogni riflessione l'onda si capovolge, dopo due riflessioni essa ha lo stesso segno di partenza; se è soddisfatta la (15.35) il tempo impiegato dalla cresta per ritornare al diapason è  $2L/v = m\lambda/v = mT$ , multiplo intero del periodo dell'onda. Pertanto questa cresta è in fase con la cresta d'onda che il diapason emette all'istante  $t + mT$  e l'ampiezza risultante è doppia di quella emessa dal diapason. Questa situazione si ripete ad intervalli  $mT$  e l'ampiezza di oscillazione continua ad aumentare; il limite è posto da vari effetti di smorzamento, quali vincoli non ideali e attriti. Se la (15.35) non è soddisfatta nella corda si stabilisce un'onda, risultante di tutte le onde che hanno origine nelle varie riflessioni, la cui ampiezza praticamente coincide con quella del diapason.

Nel caso di coincidenza tra la frequenza del diapason e una delle frequenze (15.35) si ha quindi un *fenomeno di risonanza*: il diapason è in risonanza con la corda. Il fenomeno è analogo a quello trattato nel paragrafo 9.8 del volume primo e anche ora in condizioni di risonanza si ha il massimo trasferimento di potenza dal diapason alla corda.

Risonanza

#### Esempio 15.14

La lunghezza di una corda di chitarra è  $L = 60$  cm e la massa è  $m = 0.6$  g; essa vibra alla frequenza fondamentale  $v_{si} \approx 246.94$  Hz (si tratta di un *si*). Calcolare la tensione della corda. Calcolare inoltre a quale distanza dal capocorda bisogna premere per fare vibrare la corda con  $v_{mi} = 329.63$  Hz e con  $v_{fa} = 349.23$  Hz.

#### Soluzione

La massa per unità di lunghezza è  $\rho_i = m/L = 10^{-3}$  kg/m; dato che la frequenza fondamentale è  $v_{si}$ , la tensione della corda, secondo (15.36), è

$$T = 4L^2 v_{si}^2 \rho_i \approx 87.81 \text{ N} .$$

Se si vogliono produrre vibrazioni di frequenza diversa occorre variare la lunghezza della corda. Da (15.35) ricaviamo che, a parità di tensione e quindi di velocità,

$$\frac{L_{mi}}{L_{si}} = \frac{v_{si}}{v_{mi}} \Rightarrow L_{mi} = L_{si} \frac{v_{si}}{v_{mi}} = 44.9 \text{ cm} , \quad L_{fa} = L_{si} \frac{v_{si}}{v_{fa}} = 42.4 \text{ cm} .$$

Nei due casi bisogna premere la corda rispettivamente a 15.1 cm e a 17.6 cm dal capocorda.

Valutiamo quanto influisce una variazione di tensione della corda sulla frequenza. Dato che la relazione tra tensione e frequenza è quadratica, si ha

$$\frac{\Delta T}{T} = 2 \frac{\Delta v}{v} \Rightarrow \frac{\Delta v}{v} = \frac{1}{2} \frac{\Delta T}{T}$$

Una variazione del 2% nella tensione (nel nostro caso 1.76 N) comporta una variazione dell'1% nella frequenza, cioè di circa 3 Hz per le note considerate. Notiamo che, essendo  $\Delta v / v = \Delta L / L$ , un errore dell'1% sulla frequenza si ha premendo la corda con un errore  $\Delta L = 10^{-2} L \approx 4.5$  mm: si tratta di circa un quarto della distanza tra le posizioni del *mi* e del *fa* considerati.

I valori delle frequenze indicate per le suddette note corrispondono ad assumere il valore 440 Hz per la nota *la*<sub>3</sub>, che è scelta come campione; con questa scelta il *do*<sub>3</sub>, che è il *do* centrale del pianoforte, ha la frequenza 261.63 Hz. Per completezza diamo le frequenze delle note da *la*<sub>2</sub> a *la*<sub>3</sub>, in Hz:

$$\begin{aligned} la_2 & 220.00, si_2 246.94, do_3 261.63, re_3 293.66, mi_3 329.63, \\ fa_3 & 349.23, sol_3 392.00, la_3 440.00. \end{aligned}$$

Un intervallo di frequenza che comporta un raddoppio di frequenza si chiama *ottava*. Tra una nota e una successiva c'è un rapporto  $2^{1/6}$  (*tono*), salvo che tra *si* e *do* e tra *mi* e *fa* nel qual caso il rapporto è  $2^{1/12}$  (*semitono*): un'ottava corrisponde a 12 semitonni.

### Corda tesa con una estremità libera

Una corda tesa con un estremo libero si realizza come mostrato nella figura 15.49: l'estremo libero è fissato ad un filo sottile tramite il quale la corda è mantenuta in tensione; maggiore è il rapporto tra le densità lineari della corda e del filo e più l'estremo si può considerare libero.

Già dalla figura 15.48 si può intuire quale sarà la condizione per avere onde stazionarie stabili in questo sistema: dato che un estremo deve essere un nodo e l'altro un ventre, la lunghezza minima è  $\lambda/4$  e le altre lunghezze possibili sono  $3\lambda/4, 5\lambda/4, \dots$ , cioè multipli dispari di  $\lambda/4$ , se  $\lambda = v/v$  è la lunghezza d'onda corrispondente alla frequenza della vibrazione che si vuole ottenere.

Il risultato si ricava analiticamente da (15.32) imponendo che per  $x = L$  ci sia un ventre:

$$kL = \frac{2\pi}{\lambda} L = (2m+1) \frac{\pi}{2},$$

$$L = (2m+1) \frac{\lambda}{4} \quad \text{ovvero} \quad \lambda = \frac{4L}{2m+1} \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Pertanto, fissata la lunghezza  $L$ , nella corda si hanno onde stazionarie con lunghezze d'onda e frequenze date da

$$\text{Serie armonica} \quad \lambda_m = \frac{4L}{2m+1}, \quad v_m = \frac{v}{\lambda_m} = \frac{v}{4L} (2m+1) = v_1 (2m+1). \quad (15.37)$$

La frequenza fondamentale è



Figura 15.49

$$\nu_1 = \frac{v}{4L} = \frac{1}{4L} \sqrt{\frac{T}{\rho}} \quad (15.38) \quad \text{Frequenza fondamentale}$$

La *serie armonica* è costituita da  $\nu_1, 3\nu_1, 5\nu_1, \dots$ , cioè dalla *frequenza fondamentale*, pari a metà di quella di una corda eguale con estremi fissi, e dai suoi *multipli dispari*. Alcune configurazioni sono mostrate nella figura 15.50, che va confrontata con la figura 15.48.

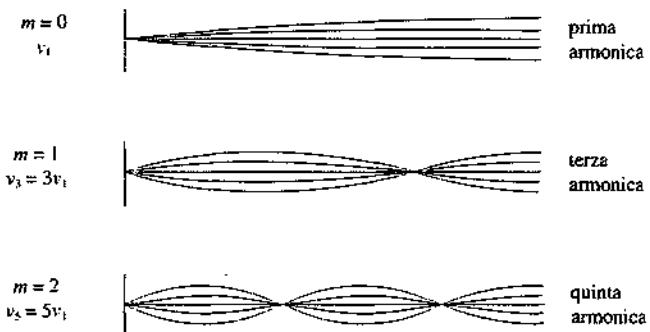


Figura 15.50

Come si è visto nel paragrafo 14.5 l’onda che arriva all’estremità libera viene riflessa senza capovolgersi; è invece capovolta dal diapason quando torna indietro e pertanto una cresta emessa dal diapason risulta capovolta dopo aver subito due riflessioni. D’altra parte il tempo necessario per percorrere due volte la corda è

$$\frac{2L}{v} = (2m+1) \frac{\lambda}{2v} = (2m+1) \frac{T}{2} = mT + \frac{T}{2}$$

e quindi la cresta che ritorna è in fase con la cresta emessa dal diapason in quell’istante. Si realizza anche ora la condizione di risonanza e si possono ripetere le stesse considerazioni fatte per la corda con gli estremi fissi.

Dopo aver discusso la formazione delle onde stazionarie in una corda tesa si può capire il funzionamento del *diapason*. Se  $L$  è la lunghezza della bacchetta, fissa al centro e libera agli estremi, la frequenza minima di vibrazione è determinata da  $L = \lambda/2$  e quindi  $v = v/\lambda = v/2L$ , essendo  $v$  la velocità delle onde elastiche nel metallo di cui è fatta la bacchetta; caratteristica del diapason è di emettere un suono che sostanzialmente è composto solo dalla frequenza  $v$ , il che significa che in esso si realizza soltanto la prima configurazione, con due ventri e un nodo.

Invece le corde tese dei vari strumenti musicali emettono un suono che contiene molti termini della serie armonica, in dipendenza della struttura dello strumento. Il numero di armoniche superiori e l’intensità di ciascun termine armonico caratterizzano il *timbro* di uno strumento musicale: è questa proprietà che rende così diversa all’udito la stessa nota suonata ad esempio da un violino, da un violoncello o da un pianoforte. L’argomento verrà ripreso nella nota alla fine del paragrafo 15.9.

Diapason

Concludiamo questo primo paragrafo sulle onde stazionarie con alcune note di

carattere matematico. La funzione (15.31), in quanto somma di soluzioni dell'equazione delle onde piane (12.1), è ancora soluzione di (12.1). Ciò non è in contrasto con quanto affermato in precedenza, e cioè che la soluzione più generale è del tipo  $f(x-vt) + g(x+vt)$ , mostra soltanto che la sovrapposizione di due onde può dar luogo in certi casi ad un'onda che si propaga e in altri ad un fenomeno stazionario. Questo però non è una soluzione semplice, cioè non si ottiene con un'onda sola, ma necessariamente con la somma di due o più onde.

Supponiamo ora di imporre che una funzione del tipo  $s(x, t) = A(x) \cos \omega t$  sia soluzione dell'equazione (12.1) delle onde piane; deve essere soddisfatta la condizione

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{d^2 A}{dx^2} \cos \omega t = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = -\frac{\omega^2}{v^2} A(x) \cos \omega t ,$$

ovvero in ogni istante deve essere

$$\frac{d^2 A}{dx^2} + \frac{\omega^2}{v^2} A(x) = 0 \Rightarrow A(x) = a_1 \operatorname{sen} kx + a_2 \operatorname{cos} kx .$$

Si conclude che l'ampiezza di una soluzione tipo onda stazionaria deve essere una funzione sinusoidale di  $x$ ; dipende poi dalle condizioni al contorno che la forma effettiva sia  $a_1 \operatorname{sen} kx$  o  $a_2 \operatorname{cos} kx$  o più in generale  $a \operatorname{sen}(kx + \alpha)$ .

### 15.9 Onde stazionarie in una colonna di gas

Si può produrre il regime di onda stazionaria anche in una colonna di gas, come quella contenuta in una canna d'organo o più in generale in uno strumento a fiato.

Prendiamo come esempio una *canna d'organo*; l'onda longitudinale nell'aria è prodotta ad un estremo inviando una corrente d'aria contro lo spigolo tagliente dell'apertura  $O$ : il moto vorticoso dell'aria in prossimità di  $O$  genera una perturbazione e a tale estremo c'è un massimo dell'ampiezza di spostamento (ventre). L'onda di pressione, sfasata di  $90^\circ$  rispetto all'onda di spostamento come abbiamo visto nel paragrafo 12.8, ha nello stesso estremo un nodo. Se l'altra estremità della canna è aperta possiamo assumere che si tratti ancora di un nodo per la pressione, coincidente quindi nei due estremi con la pressione atmosferica  $p_0$ ; per l'onda di spostamento l'estremo aperto coincide invece con un ventre.

In sostanza, con la *canna d'organo aperta* si realizzano agli estremi le stesse condizioni per la *pressione* (due nodi) e per lo *spostamento* (due ventri); la situazione pertanto è la stessa già vista per la corda con entrambi gli estremi fissi e concludiamo che nella colonna d'aria contenuta nella canna di lunghezza  $L$  si possono avere onde stazionarie con lunghezze d'onda e frequenze date da (15.35):

$$\lambda_m = \frac{2L}{m} , \quad v_m = \frac{v}{2L} m \quad m = 1, 2, \dots ;$$

$v$  è la velocità di propagazione dell'onda sonora nel gas, data dalla (11.46) riportata nel paragrafo 12.2, cioè  $v = \sqrt{\gamma p_0 / \rho_0}$ . La serie armonica è composta dalla frequenza fondamentale  $v_1 = v / 2L$  e dai suoi multipli interi.

Se la *canna è chiusa* all'altra estremità (canna d'organo chiusa), là si ha un ventre di pressione e un nodo di spostamento e siamo nelle stesse condizioni della corda tesa con un estremo fisso e uno libero; valgono quindi le (15.37) per lunghezza d'onda e frequenza dell'onda stazionaria:

$$\lambda_m = \frac{4L}{2m+1} , \quad v_m = \frac{v}{4L} (2m+1) \quad m = 0, 1, 2, \dots .$$

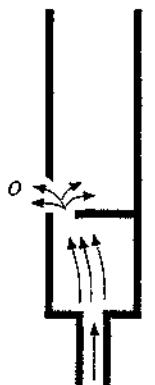


Figura 15.51

Canna aperta

Canna chiusa

La serie armonica è composta da  $v_1 = v / 4L$  e dai suoi multipli dispari; a parità di lunghezza la fondamentale è la metà della fondamentale con estremità aperta. Regolando le lunghezze in modo che una canna aperta e una chiusa abbiano la stessa fondamentale, il *timbro* sarà ad ogni modo diverso vista la diversità delle serie armoniche.

Le condizioni di funzionamento descritte sono ideali; in una canna aperta nella realtà il nodo di pressione si forma un po' oltre l'apertura finale, ad una distanza  $\Delta L$  che vale circa  $0.6 R$ , se  $R$  è il raggio della canna. Si definisce una *lunghezza efficace della canna*,

$$L_{\text{eff}} = L + \Delta L ,$$

e  $\Delta L$  si chiama *correzione di bocca*.

Correzione di bocca

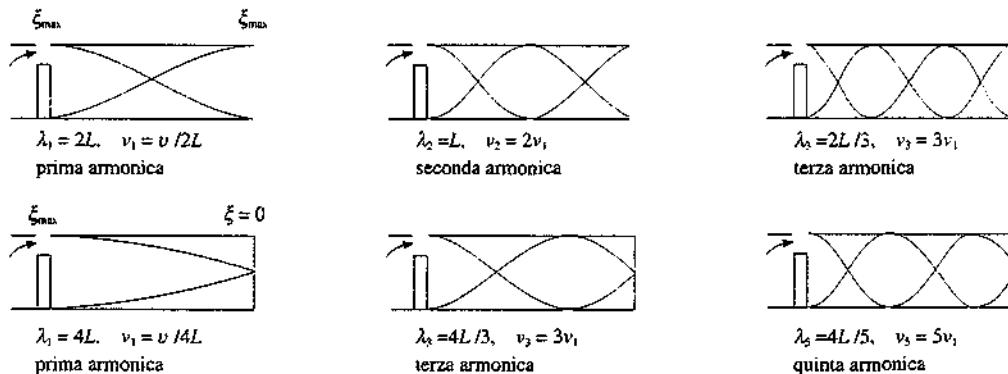


Figura 15.52

### Esempio 15.15

Nel dispositivo schematizzato in figura 15.53 l'altezza della colonna d'aria  $L$  può essere variata regolando il livello del liquido che riempie parzialmente il tubo. Un diapason di frequenza  $v_0 = 880$  Hz vibra in prossimità della bocca. Variando  $L$  varia l'intensità sonora per tre valori successivi di  $L$ ,  $L_1 = 28.5$  cm,  $L_2 = 47.5$  cm,  $L_3 = 66.5$  cm. Calcolare la velocità del suono nella colonna d'aria.

#### Soluzione

La colonna d'aria ha un estremo chiuso e uno aperto e quindi la sua condizione di risonanza è  $L = (2m+1)\lambda_0/4$ . Tenendo conto della correzione di bocca scriviamo:

$$L_1 + \Delta L = (2m+1)\lambda_0/4 ,$$

$$L_2 + \Delta L = [2(m+1)+1]\lambda_0/4 = (2m+3)\lambda_0/4 ,$$

$$L_3 + \Delta L = [2(m+2)+1]\lambda_0/4 = (2m+5)\lambda_0/4 .$$

La differenza tra due lunghezze corrispondenti ai massimi è  $2(\lambda_0/4) = \lambda_0/2$ , indipendente da  $\Delta L$ . Secondo i dati del problema questa distanza è pari a 19 cm per cui  $\lambda_0 = 38$  cm e

$$v = \lambda_0 v_0 = 334.4 \text{ m/s} ;$$

evidentemente l'esperimento è condotto ad una temperatura di circa 10°C (283 K). Essendo  $\lambda_0/4 = 9.5$  cm, notiamo che  $L_1 = 3\lambda_0/4$ ,  $L_2 = 5\lambda_0/4$ ,  $L_3 = 7\lambda_0/4$ :  $v_0$  dunque è la terza armonica per il tubo lungo  $L_1$ , la quinta per il tubo lungo  $L_2$  e la settima per il tubo lungo  $L_3$ . Solo se la colonna fosse lunga  $L_0 = 9.5$  cm essa avrebbe come frequenza fondamentale  $v_0$ .

Lo strumento descritto è stato effettivamente usato per misurare la velocità del suono nell'aria.

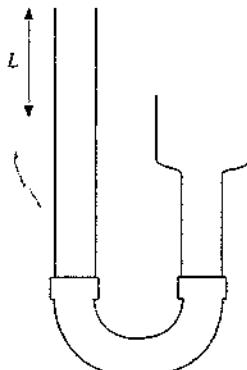


Figura 15.53

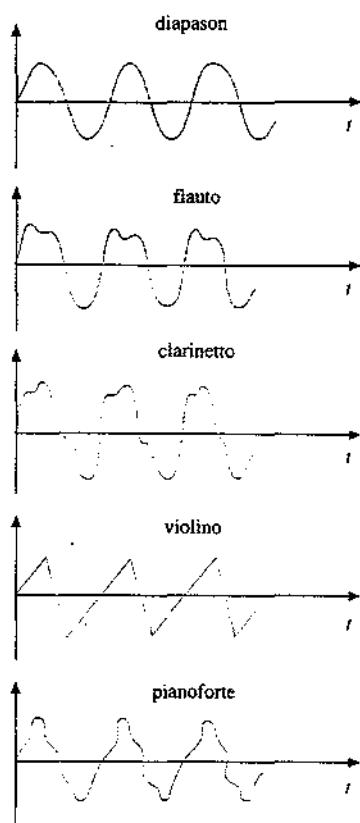


Figura 15.54

**Nota. Sintesi del suono**

Dallo studio effettuato sulle onde stazionarie ricaviamo che uno strumento a corda o a fiato fornisce un massimo di potenza quando la frequenza di eccitazione, che genera l'onda stazionaria, coincide con una delle frequenze della serie armonica. Se il sistema è caratterizzato dalla frequenza fondamentale  $\nu = \omega/2\pi$ , mediante il meccanismo delle riflessioni multiple vengono esaltate le pulsazioni  $2\omega, 3\omega, 4\omega \dots$  (o  $3\omega, 5\omega, 7\omega, \dots$ ) mentre le altre vengono smorzate e risultano praticamente assenti. La funzione che esprime il suono emesso dallo strumento si può esprimere tramite la (12.13) con  $a_0 = 0$ .

$$f(t) = \sum_m (a_m \sin m\omega t + b_m \cos m\omega t) ;$$

la funzione  $f(t)$ , avente periodo  $T = 2\pi/\omega$ , presenta una forma dipendente dal numero di armoniche superiori che la compongono; i pesi di queste sono dati dai coefficienti  $a_m$  e  $b_m$  o meglio da  $a_m^2 + b_m^2$ , che è proporzionale all'intensità dell' $m$ -esima componente. La stessa nota, di frequenza fondamentale  $\nu = \omega/2\pi = 1/T$ , emessa da diversi strumenti, ha una diversa composizione di armoniche e provoca una sensazione sonora diversa: questa proprietà, come abbiamo già ricordato, si chiama *timbro*. Nella figura 15.54 sono riportate per una stessa nota le forme d'onda di un diapason (suono puro, privo di armoniche superiori) e di alcuni strumenti musicali.

I moderni sintetizzatori elettronici possono riprodurre qualsiasi timbro, generando e miscelando opportunamente le varie armoniche; l'operazione si chiama *sintesi del suono*.

**15.10 Onde elettromagnetiche stazionarie. Esperienza di Hertz**

Il primo esperimento di formazione di onde elettromagnetiche stazionarie fu realizzato nel 1888 da Hertz operando con lunghezze d'onda nella regione delle radiofrequenze ( dette appunto onde hertziane). Tale esperimento fornì la prova dell'esistenza delle onde elettromagnetiche previste da Maxwell oltre vent'anni prima e ne diede la velocità di propagazione, che risultò  $c = 3 \cdot 10^8$  m/s, coincidente con la velocità della luce dedotta da misure astronomiche e da più precise misure terrestri (vedi paragrafo 13.13). Veniva così alla fine risolto il problema dell'identificazione della grandezza fisica responsabile dei fenomeni di interferenza e di diffrazione della luce, la cui osservazione era iniziata verso il 1650 con Grimaldi ed era stata portata a livello quantitativo da Young nel 1800 con la prima determinazione della lunghezza d'onda: i fenomeni luminosi dovevano essere attribuiti a onde elettromagnetiche con frequenza compresa in una determinata banda.

Il dispositivo di Hertz è schematizzato nella figura 15.55. Le due sfere  $S_1$  e  $S_2$ ,

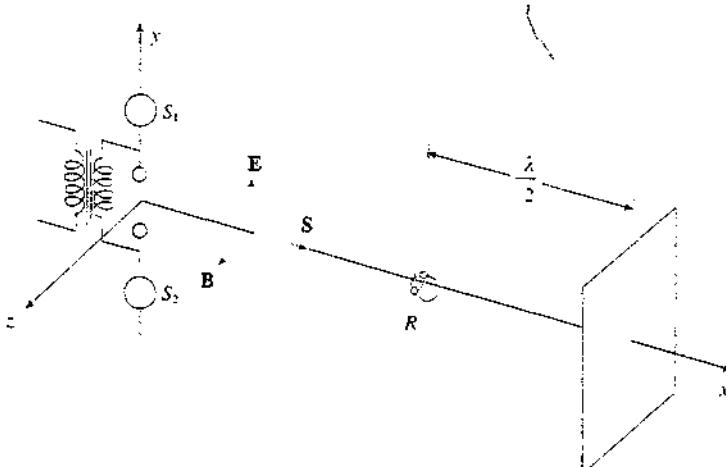


Figura 15.55

vengono caricate dal secondario di un trasformatore sino al valore della tensione di innesto della scintilla nello spinterogeno costituito dalle due sfere più piccole. Il sistema si può assimilare ad un *dipolo elettrico oscillante*: infatti con lo scoccare della scintilla ha origine una scarica oscillante di frequenza  $\nu$  e pulsazione  $\omega = 2\pi\nu$ , caratteristiche del circuito elettrico e quindi note (precisamente  $\nu = 4 \cdot 10^7$  Hz). Dal dipolo oscillante vengono emessi un campo elettrico  $E$  e un campo magnetico  $B$  che si propagano nello spazio, con le proprietà già viste nel paragrafo 13.6. Lungo una direzione di propagazione  $x$ , che giace nel piano equatoriale del dipolo, è posta una lastra di materiale conduttore, ortogonale a  $x$  e al vettore di Poynting  $S$ , distante circa 13 m dalla sorgente.

Quando il campo  $E$  incide sul conduttore, ha origine un campo elettrico  $E_r$ , tale che in ogni istante  $E + E_r = 0$  sulla superficie del conduttore, in quanto su questa non può sussistere un campo elettrico ad essa parallelo. La *lastra di conduttore* funge quindi da *superficie nodale per il campo elettrico*; il campo riflesso  $E_r$  si propaga in verso opposto ad  $E$  e, in analogia con quanto visto nel paragrafo 15.8, si ha la formazione di un'onda stazionaria espressa da

$$E = 2 E_0 \operatorname{sen} kx \cos \omega t u_y .$$

Sulla superficie del conduttore si invertono contemporaneamente il verso di  $E$  e il verso di propagazione dell'onda, cioè del vettore di Poynting; il *campo magnetico*  $B = (E/c) u_z$ , quindi non si inverte (figura 15.56), ovvero la superficie del conduttore è una superficie ventrale per il campo magnetico. Pertanto la corrispondente onda stazionaria si scrive

$$B = 2 \frac{E_0}{c} \cos kx \cos \omega t u_z .$$

Abbiamo dunque lungo l'asse  $x$  un'onda stazionaria elettromagnetica; dove il campo elettrico ha un ventre il campo magnetico ha un nodo e viceversa dove il campo elettrico ha un nodo il campo magnetico ha un ventre.

Per trovare le posizioni dei ventri e dei nodi del campo magnetico Hertz utilizzò, nel modo che ora descriveremo, una piccola spira  $R$  di area  $\Sigma$ , interrotta in un punto. Si pone la spira in un piano ortogonale all'asse  $z$  e la si sposta lungo l'asse  $x$ ; in una data posizione il flusso attraverso la spira è

$$\Phi(B) = \frac{2E_0 \Sigma}{c} \cos kx \cos \omega t$$

e nella spira ha origine la f.e.m. indotta

$$\varepsilon = - \frac{d\Phi}{dt} = \frac{2E_0 \Sigma \omega}{c} \cos kx \operatorname{sen} \omega t .$$

Il modulo di  $\varepsilon$  varia da un massimo  $\varepsilon_0 = 2 E_0 \Sigma \omega / c$  nei ventri ad un minimo nullo nei nodi del campo magnetico. Se si regola la distanza tra gli estremi del filo di modo che scocchi una scintilla quando la tensione nella spira ha il valore  $\varepsilon_0$ , cioè quando la spira si trova nei pressi di un ventre, si può misurare la distanza tra due ventri, che sappiamo essere pari a  $\lambda/2$ ; in particolare un ventre deve trovarsi a distanza  $\lambda/2$  dalla lastra. Alternativamente, se nella spira è inserito un misuratore di tensione, si deve verificare che la variazione del modulo della f.e.m. con la posizione è data da  $\varepsilon_0 \cos kx$  (figura 15.57).

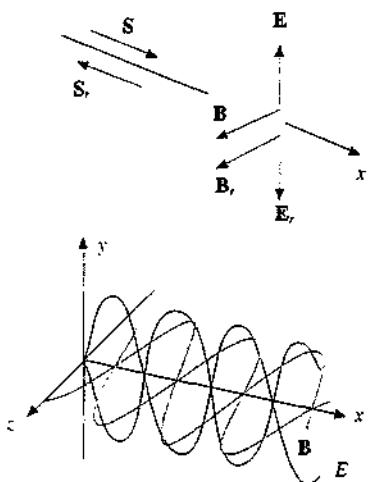


Figura 15.56

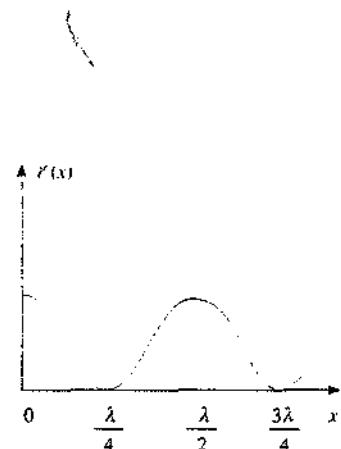


Figura 15.57

Operando secondo queste linee Hertz trovò effettivamente i ventri e misurò  $\lambda$ ; da questa, nota la frequenza del generatore di onde, calcolò la velocità di propagazione  $c = \lambda\nu$  delle onde che davano origine all'onda stazionaria.

Se si pone la spira in corrispondenza ad un ventre e la si ruota in modo che la normale formi un angolo  $\theta$  con l'asse  $z$  (figura 15.58), la f.e.m. indotta deve variare con la legge  $\mathcal{E}(\theta) = E_0 \cos \theta$ ; anche questo andamento venne verificato, determinando la direzione di  $\mathbf{B}$  e provando che il campo magnetico è trasversale rispetto alla direzione di propagazione.

Le stesse misure si possono compiere con un rivelatore sensibile ad un campo elettrico e si trovano le proprietà previste.

È importante sottolineare come un fenomeno stazionario consenta di ricavare la velocità di propagazione delle onde che concorrono a generarlo; abbiamo trovato lo stesso risultato anche in una situazione diversa, dovuta a sovrapposizione di onde progressive, e cioè nel tubo di Quincke (paragrafo 15.2). Alla base ci sono la ripetizione spaziale di particolari condizioni di interferenza, che permettono di misurare la lunghezza d'onda, e la relazione fondamentale  $\lambda\nu = v$ .

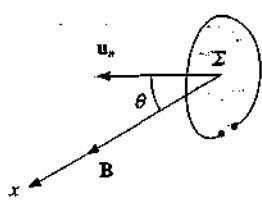


Figura 15.58

### 15.11 Onde stazionarie bidimensionali e tridimensionali. Radiazione di cavità

Onde che si propagano in un piano o nello spazio possono dare origine a sistemi di onde stazionarie di grande interesse sia concettuale che pratico. In questo paragrafo considereremo alcune situazioni semplici e ci soffermeremo in particolare sulle onde elettromagnetiche stazionarie all'interno di una *cavità*, problema concettuale che è stato di importanza fondamentale per compiere il passaggio dall'elettromagnetismo classico alla teoria quantistica della radiazione.

#### Onde stazionarie in una membrana rettangolare tesa

Abbiamo mostrato nel paragrafo 12.9 che in una membrana tesa si propaga un'onda trasversale piana di spostamento del tipo

$$s = s_0 \sin(k_1 x + k_2 y - \omega t)$$

in cui il vettore  $\mathbf{k} = k_1 \mathbf{u}_x + k_2 \mathbf{u}_y$  dà la direzione di propagazione; la lunghezza d'onda e la frequenza sono

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \quad \text{con} \quad k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2} \quad , \quad \nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{v}{\lambda} = \frac{kv}{2\pi} \quad \text{con} \quad v = \sqrt{\frac{T}{\sigma}} \quad ;$$

$v$  è la velocità di propagazione,  $\sigma$  la massa per unità di superficie e  $T$  la tensione cui è sottoposta la membrana (forza per unità di lunghezza).

Supponiamo che la membrana rettangolare di lati  $a_1$  e  $a_2$  sia tesa su un telaio in maniera tale che i suoi bordi siano fissi (figura 15.59). L'onda che si muove da  $A$  verso  $B$  viene riflessa in  $B$  lungo la direzione  $BC$ , viene successivamente riflessa in  $C$  lungo la direzione  $CD$  e nuovamente riflessa in  $D$ : ad ogni riflessione l'angolo di incidenza e l'angolo di riflessione sono eguali e nella figura è indicato come cambiano in ciascuna riflessione le componenti del vettore  $\mathbf{k}$ . Si hanno le quattro onde

$$s_1 = s_{01} \sin(k_1 x + k_2 y - \omega t) \quad , \quad s_2 = s_{02} \sin(k_1 x - k_2 y - \omega t) \quad ,$$

$$s_3 = s_{03} \sin(-k_1 x - k_2 y - \omega t) \quad , \quad s_4 = s_{04} \sin(-k_1 x + k_2 y - \omega t) \quad .$$

L'onda risultante  $s_R$  è la somma di queste quattro onde; imponendo la condizione che in ogni istante i punti dell'asse  $x$  ( $y = 0$ ) e i punti dell'asse  $y$  ( $x = 0$ ) siano fissi, cioè che gli assi siano linee nodali, si ottiene

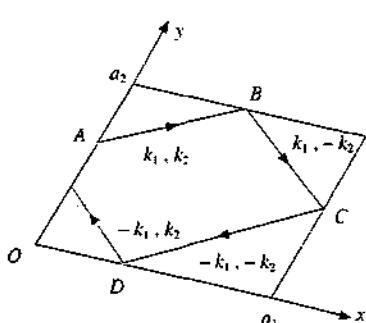


Figura 15.59

$$\delta \xi = 4 \xi_0 \sin(k_1 x) \sin(k_2 y) \sin(\omega t) \quad (15.39)$$

generalizzazione bidimensionale di (15.31).

Dovendosi imporre la condizione che anche gli altri due lati,  $x = a_1$  e  $y = a_2$ , siano linee nodali, bisogna scrivere

$$k_1 a_1 = n_1 \pi \quad , \quad k_1 = n_1 \frac{\pi}{a_1} \quad n_1 = 1, 2, \dots$$

$$k_2 a_2 = n_2 \pi \quad , \quad k_2 = n_2 \frac{\pi}{a_2} \quad n_2 = 1, 2, \dots$$

La membrana può diventare sede di onde stazionarie nelle quali il numero d'onde, la lunghezza d'onda e la frequenza sono dati dalle relazioni

$$k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2} = \pi \sqrt{\frac{n_1^2}{a_1^2} + \frac{n_2^2}{a_2^2}} \quad ,$$

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{k}{2\pi} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{n_1^2}{a_1^2} + \frac{n_2^2}{a_2^2}} \quad , \quad n_1, n_2 = 1, 2, 3, \dots \quad (15.40)$$

$$v = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{2} \sqrt{\frac{n_1^2}{a_1^2} + \frac{n_2^2}{a_2^2}} \quad .$$

Ogni frequenza possibile è caratterizzata da una *coppia di numeri* interi  $n_1, n_2$  e ad ogni frequenza corrisponde una differente configurazione della membrana; i singoli punti della membrana oscillano con frequenza  $v$  e ampiezza variabile da punto a punto secondo (15.39). Al crescere di  $n_1$  e  $n_2$  si hanno *linee nodali* anche all'interno della membrana e non solo sui bordi.

In figura 15.60 sono riportate, per una *membrana quadrata* di lato  $a$ , alcune configurazioni corrispondenti alle prime frequenze possibili

$$v_{n_1, n_2} = \frac{v}{2a} \sqrt{n_1^2 + n_2^2} \quad n_1, n_2 = 1, 2, 3, \dots \quad (v_{n_1, n_2} = v_{n_2, n_1}) \quad .$$

La frequenza più bassa  $v_{1,1}$  è detta *fondamentale* o *prima armonica*; le altre *armoniche*  $v_{1,2}, v_{2,2}, \dots$ , dette *superiori*, non sono multipli interi di  $v_{1,1}$  per cui questo insieme di frequenze non forma una serie armonica.

Anche nel caso bidimensionale ogni onda stazionaria è chiamata *modo del sistema*; una membrana tesa ha  $\infty^2$  modi.

Il problema di una *membrana circolare*, come quella di un tamburo o di un altro strumento a percussione, è più complicato da trattare, ma i risultati sono simili: soltanto certe frequenze sono possibili e il loro insieme non forma una serie armonica. Il timbro risulta sempre dalla sovrapposizione delle varie armoniche che vengono eccitate e dai rispettivi pesi.

I valori delle frequenze dipendono dalla tensione e dalla massa per unità di superficie; a parità di tensione sono più elevate le frequenze di un tamburello rispetto a quelle di un timpano.

### Onde stazionarie tridimensionali

Un'onda piana  $\xi = \xi_0 \sin(k_1 x + k_2 y + k_3 z - \omega t)$  che si propaghi in una cavità a forma di parallelepipedo di lati  $a_1, a_2, a_3$ , le cui facce siano piani nodali, dà origine a sei onde piane che interferiscono formando un sistema di onde stazionarie se

$$k_1 a_1 = n_1 \pi \quad , \quad k_2 a_2 = n_2 \pi \quad , \quad k_3 a_3 = n_3 \pi \quad n_1, n_2, n_3 = 1, 2, 3, \dots$$

generalizzazione delle corrispondenti relazioni bidimensionali. Queste onde stazionarie hanno numero d'onde, lunghezza d'onda e frequenza dati da

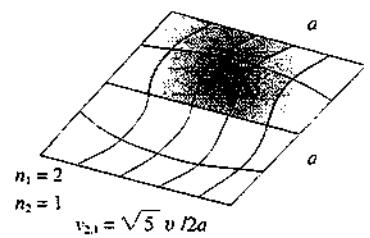
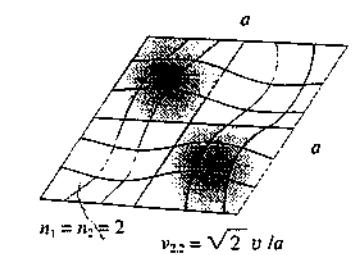
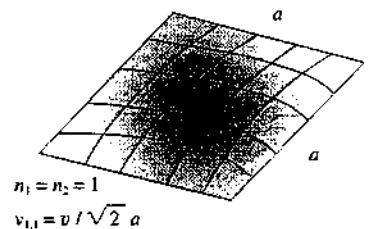


Figura 15.60

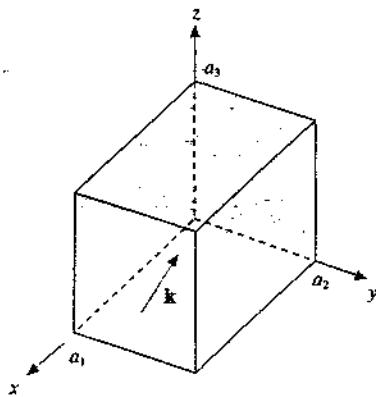


Figura 15.61

$$\begin{aligned} \lambda &= \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2} = \pi \sqrt{\frac{n_1^2}{a_1^2} + \frac{n_2^2}{a_2^2} + \frac{n_3^2}{a_3^2}} \\ \frac{1}{\lambda} &= \frac{k}{2\pi} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{n_1^2}{a_1^2} + \frac{n_2^2}{a_2^2} + \frac{n_3^2}{a_3^2}} \quad n_1, n_2, n_3 = 1, 2, 3, \dots \\ v &= \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{2} \sqrt{\frac{n_1^2}{a_1^2} + \frac{n_2^2}{a_2^2} + \frac{n_3^2}{a_3^2}} \end{aligned} \quad (15.41)$$

Seguendo la terminologia già adottata, i modi della cavità sono  $\infty^3$ .

Esempi pratici possono essere onde sonore in una cavità rigida e onde elettromagnetiche in una cavità conduttrice; di quest'ultimo caso, molto importante per le applicazioni pratiche, ci occuperemo nel paragrafo 15.12.

### *Radiazione di cavità*

Consideriamo una *cavità cubica* con pareti perfettamente riflettenti, mantenuta alla temperatura uniforme  $T$ . Gli atomi che costituiscono le pareti interne della cavità si comportano come *oscillatori elementari* che emettono e assorbono radiazioni elettromagnetiche, isotropicamente, per cui in condizioni di equilibrio nella cavità è distribuita energia elettromagnetica con densità media costante  $u$ . La *densità di energia elettromagnetica relativa all'intervallo di lunghezze d'onda* comprese tra  $\lambda$  e  $\lambda + d\lambda$  si scrive

$$u_\lambda d\lambda = \frac{du}{d\lambda} d\lambda \quad (15.42)$$

e ovviamente

$$u = \int_0^\infty u_\lambda d\lambda \quad (15.43)$$

Pratichiamo nella cavità un foro  $F$  di area  $d\Sigma$  molto piccola, così da non alterare l'equilibrio esistente nella cavità. La radiazione che esce dal foro ha le caratteristiche di quella nella cavità e viene detta *radiazione di cavità* o anche *radiazione di corpo nero*. Il foro  $F$ , che si può assumere come sorgente di questa radiazione verso l'esterno, prende il nome di *corpo nero*; vedremo nel capitolo 18 il perché di questa terminologia.

Si definisce *potere emissivo specifico*  $\epsilon_\lambda$  del corpo nero la grandezza tale che  $\epsilon_\lambda d\lambda$  rappresenti l'energia emessa dal corpo nero per unità di tempo e per unità di superficie nell'intervallo di lunghezze d'onda compreso tra  $\lambda$  e  $\lambda + d\lambda$ . Il *potere emissivo*  $\epsilon$ , energia emessa per unità di tempo e per unità di superficie, è l'integrale del potere emissivo specifico su tutte le lunghezze d'onda:

$$\epsilon = \int_0^\infty \epsilon_\lambda d\lambda \quad , \quad \epsilon_\lambda = \frac{d\epsilon}{d\lambda} \quad (15.44)$$

Il potere emissivo ha la stessa unità di misura dell'intensità,  $\text{W/m}^2$ , mentre  $\epsilon_\lambda$  si misura in  $\text{W/m}^3$ .

L'energia emessa per unità di tempo dal corpo nero è eguale all'energia che arriva nell'unità di tempo sul foro dai diversi punti della cavità. Come adesso dimostreremo, la relazione tra potere emissivo e densità di energia all'interno della cavità è

$$\epsilon_\lambda d\lambda = \frac{c}{4} u_\lambda d\lambda \quad , \quad \epsilon = \frac{c}{4} u \quad . \quad (15.45)$$

Il fattore  $c$ , velocità della luce, deriva dalla relazione che esiste tra intensità e densità di energia (paragrafo 13.3), il fattore  $1/4$  è dovuto al fatto che la radiazione raggiunge il foro provenendo da direzioni diverse.

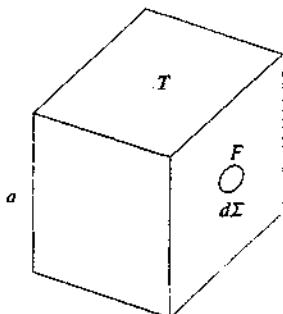


Figura 15.62

Potere emissivo  
Potere emissivo specifico

Allo scopo supponiamo che la cavità sia sferica (ipotesi irrilevante, come vedremo, ma utile per il calcolo). Diciamo  $d\Sigma'$  un elemento della superficie interna della cavità e  $d\Omega'$  l'angolo solido sotto cui è visto  $d\Sigma'$  dal foro  $F$ . Nella regione delimitata da  $d\Omega'$  la densità di energia è  $u d\Omega' / 4\pi$ , dato che l'energia nella cavità è distribuita isotropicamente su tutto l'angolo solido  $4\pi$  ( $d\Omega' / 4\pi$  è la frazione di angolo solido che stiamo considerando). Il vettore di Poynting relativo all'energia emessa da  $d\Sigma'$  che si propaga verso il foro  $F$  è  $cud\Omega' / 4\pi = dS$ , per cui l'energia emessa da  $d\Sigma'$  che nell'unità di tempo attraversa il foro  $F$  di area  $d\Sigma$  è

$$dS \cdot u_n d\Sigma = cu \frac{d\Omega'}{4\pi} d\Sigma \cos\theta ,$$

dove  $\theta$  è l'angolo tra la direzione che congiunge  $F$  a  $d\Sigma'$  e il diametro passante per  $F$ . Infine, per unità di superficie ed esprimendo  $d\Omega'$  in coordinate polari,

$$dE = \frac{cu}{4\pi} \cos\theta \sin\theta d\theta d\phi$$

Si integra su  $\phi$  da zero a  $2\pi$  e su  $\theta$  da zero a  $\pi/2$  e si ha tutta l'energia che arriva nell'unità di tempo sull'unità di area del foro, cioè il potere emissivo del foro,

$$\epsilon = \frac{cu}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta d\theta = \frac{cu}{4}$$

che è la seconda delle (15.45); la prima si ottiene differenziando in  $\lambda$ .

Queste relazioni, pur essendo state dedotte per una cavità sferica, valgono per cavità di qualsiasi forma, in quanto si è ragionato soltanto sull'angolo solido sotto cui sono visti i punti della cavità dal foro  $F$ .

Per ricavare la forma analitica di  $\epsilon_\lambda$  supponiamo che le onde elettromagnetiche nella cavità cubica di lato  $a$  formino un sistema di onde stazionarie. Le frequenze possibili si ricavano da (15.41) adattata alla forma cubica ( $a_1 = a_2 = a_3 = a$ ):

$$v = \frac{c}{2a} \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2} \Rightarrow n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = \frac{4a^2 v^2}{c^2}$$

Il numero di modi che hanno frequenza compresa tra la fondamentale  $v_1 = \sqrt{3} c / 2a$  e una generica frequenza  $v$  si ottiene contando tutte le combinazioni possibili di numeri interi  $n_1, n_2, n_3$  tali che

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 \leq \frac{4a^2 v^2}{c^2} = \frac{4a^2}{\lambda^2}$$

Con il segno di eguaglianza questa è l'equazione di una superficie sferica di raggio  $R = 2a / \lambda = 2av/c$  in uno spazio tridimensionale di coordinate  $n_1, n_2, n_3$ . Assumiamo che  $R$  sia molto grande, ovvero che sia molto grande il numero di combinazioni dei numeri  $n_1, n_2, n_3$  che soddisfano alla diseguaglianza: questa ipotesi equivale a supporre  $\lambda \ll a$ , il che è plausibile trattandosi di radiazioni emesse e assorbite da atomi. Le tre variabili discrete  $n_1, n_2, n_3$  possono allora essere trattate come continue: fissato un raggio  $r$  minore di  $R$ , il numero di combinazioni rappresentate da punti compresi nella corteccia sferica tra  $r$  e  $r + dr$  è semplicemente eguale al volume della corteccia sferica e pertanto il numero totale di combinazioni è dato da un ottavo del volume della sfera di raggio  $R$  (un ottavo perché  $n_1, n_2, n_3$  assumono solo valori positivi). In conclusione il numero di modi con frequenza minore o eguale a  $v$  è

$$N_v = \frac{1}{8} \left( \frac{4}{3} \pi R^3 \right) = \frac{4\pi v^3}{3c^3} a^3$$

e, per unità di volume,

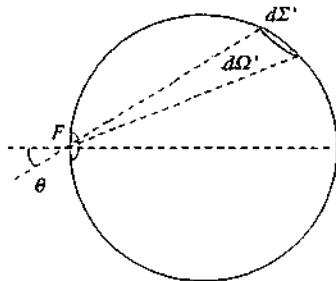


Figura 15.63

$$n_v = \frac{N_v}{a^3} = \frac{4 \pi v^3}{3 c^3}$$

Questo numero va moltiplicato per due in quanto, per ogni modo, sono possibili due stati indipendenti di *polarizzazione*; siamo così arrivati al risultato che, in condizioni di equilibrio, il campo elettromagnetico all'interno della cavità può essere rappresentato come un insieme di oscillatori la cui densità di volume, in funzione della frequenza o della lunghezza d'onda, è

$$n_v = \frac{8\pi v^3}{3c^3} = n_\lambda = \frac{8\pi}{3\lambda^3}$$

Nell'intervallo di frequenze tra  $v$  e  $v + dv$ , ovvero di lunghezze d'onda tra  $\lambda$  e  $\lambda - d\lambda$ , gli oscillatori per unità di volume sono

$$dn_v = \frac{8\pi v^2}{c^3} dv = dn_\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^4} d\lambda$$

e hanno l'energia

$$u_\lambda d\lambda = dn_\lambda w_m = \frac{8\pi}{\lambda^4} w_m d\lambda$$

dove con  $w_m$  è indicata l'*energia media* di ogni oscillatore. Da (15.45) il potere emissivo specifico si esprime come

$$\varepsilon_\lambda d\lambda = \frac{2\pi c}{\lambda^4} w_m d\lambda \quad . \quad (15.47)$$

Classicamente, dato un insieme di oscillatori in equilibrio alla temperatura  $T$ , la probabilità che un oscillatore abbia energia compresa tra  $w$  e  $w + dw$  è data dall'*espressione di Boltzmann*

$$e^{-w/k_B T} dw \quad ,$$

che abbiamo già utilizzato nel paragrafo 5.10. Se l'energia dell'oscillatore può assumere con continuità tutti i valori tra zero e infinito, il *valore medio* è

$$w_m = \frac{\int_0^\infty w e^{-w/k_B T} dw}{\int_0^\infty e^{-w/k_B T} dw} = k_B T$$

dato che  $\int x e^{-wx} dx = \frac{e^{-wx}}{\alpha^2} (\alpha x - 1)$ ,  $\int e^{-wx} dx = \frac{e^{-wx}}{\alpha}$ . Sostituendo nella (15.47) otteniamo

Formula di Rayleigh-Jeans

$$\varepsilon_\lambda d\lambda = \frac{2\pi c}{\lambda^4} k_B T d\lambda \quad . \quad (15.48)$$

nota come *formula di Rayleigh-Jeans*.

Il potere emissivo specifico di un corpo nero ad una data temperatura può essere determinato con notevole precisione e i risultati possono essere confrontati con la (15.48). Nella figura 15.64 è mostrata una misura effettuata a  $T = 2000$  K e la corrispondente previsione della formula di Rayleigh-Jeans. Soltanto per grandi valori di  $\lambda$  gli andamenti tendono a

coincidere, ma in complesso il disaccordo è completo: il potere emissivo specifico misurato ha un massimo ad una certa lunghezza d'onda e poi tende a zero al diminuire di  $\lambda$  ovvero all'aumentare della frequenza, mentre la formula di Rayleigh-Jeans non prevede massimi e addirittura diverge per  $\lambda$  tendente a zero. Il potere emissivo, dato dall'area sotto la curva, è ovviamente finito, ma secondo (15.48) esso sarebbe infinito, in contrasto con la conservazione dell'energia:

$$\varepsilon = \int_0^{\infty} \varepsilon_{\lambda} d\lambda = 2\pi c k_B T \int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{\lambda^4} = \frac{2}{3} \pi c k_B T \left[ \frac{1}{\lambda^3} \right]_0^{\infty} = \infty$$

D'altra parte, il procedimento con cui è ricavata la (15.48) è ineccepibile dal punto di vista classico. La soluzione venne trovata da Planck nel 1901: non è corretto assumere che l'energia degli oscillatori rappresentativi della radiazione elettromagnetica all'interno della cavità possa assumere con continuità qualsiasi valore tra zero e infinito; l'*energia di un oscillatore di frequenza  $v$  può assumere invece un insieme discreto di valori che sono zero o  $hv$  o un multiplo intero di  $hv$* . Questa ipotesi, che introduce per la prima volta l'idea di una energia quantizzata, permette di calcolare in modo diverso  $\varepsilon_{\lambda}$ , che compare nella (15.47) e fornisce un risultato in perfetto accordo con i dati sperimentali, come discuteremo per esteso nel capitolo 18.

## 15.12 Cavità risonanti. Guide d'onda

Nel paragrafo 15.11 abbiamo considerato le onde stazionarie tridimensionali e le condizioni (15.41). Vogliamo adesso descrivere solo qualitativamente un caso di onde elettromagnetiche stazionarie all'interno di una *cavità* perfettamente conduttrice di forma *cilindrica*, con lunghezze d'onda al limite tra onde hertziane e microonde.

Una possibile configurazione dei campi elettrico e magnetico ad un dato istante è mostrata nella figura 15.65: le linee di  $E$  sono rette parallele all'asse del cilindro e sono tutte equiveverse, il modulo di  $E$  decresce monotonicamente dall'asse alla parete, su cui è nullo (l'andamento è approssimativamente sinusoidale). Le linee di  $B$  sono circonferenze in piani ortogonali all'asse, con verso legato al verso di  $\partial E / \partial t$  dalla solita convenzione della vite destrogiro; il modulo di  $B$ , che è nullo sull'asse, varia come mostrato nella figura 15.66. Al passare del tempo la configurazione delle linee di campo resta la stessa, anche se i moduli dei campi variano come  $\sin \omega t$  o  $\cos \omega t$  e quindi i versi cambiano; ad esempio, con riferimento alla figura 15.65, i vettori  $E$  diminuiscono in lunghezza riducendosi a zero, poi cambiano verso e crescono fino ad un massimo per poi diminuire e invertirsi di nuovo.

Il modo mostrato è quello a frequenza più bassa appartenente alla classe dei modi *TM* (dall'inglese *transverse magnetic*), così chiamati perché  $B$  giace nel piano ortogonale all'asse. Si dimostra che la frequenza di questo modo è legata al raggio della cavità dalla relazione

$$v = 0.383 \frac{c}{r} \approx \frac{1.15 \cdot 10^8}{r} \text{ Hz} \Rightarrow \lambda = \frac{c}{v} \approx 2.61 r \text{ m}$$

Ad esempio, con  $r = 0.5 \text{ m}$ ,  $\lambda = 1.31 \text{ m}$ ,  $v = 2.3 \cdot 10^8 \text{ Hz} = 230 \text{ MHz}$  e il periodo di oscillazione vale  $T = 1/v = 4.35 \cdot 10^{-9} \text{ s} = 4.35 \text{ ns}$ .

Nei modi descritti il campo elettrico è nullo sulle pareti cilindriche, rispettando il fatto che non può esserci un campo elettrico diverso da zero parallelo ad una superficie conduttrice; rispetto alle basi  $E$  è ortogonale (in accordo con la stessa regola) e pertanto sulle basi devono esserci cariche di segno opposto, positive sulla base inferiore e negative su quella superiore nell'istante rappresentato in figura 15.65. Dato che il campo elettrico varia e si inverte queste cariche variano nel tempo e di conseguenza devono esserci correnti verticali variabili sulle pareti cilindriche, il che tra l'altro è in accordo con la discontinuità del campo magnetico sulle pareti laterali. Da tali considerazioni si capisce che per eccitare nella cavità questa risonanza con frequenza  $v$  occorre mantenere opportune correnti sulle pareti; per un funzionamento stabile è necessario fornire potenza con continuità, a causa dell'assorbimento ohmico dei conduttori. Di norma il fattore di merito  $Q = \omega / \Delta\omega = v / \Delta\nu$  (vedi paragrafo 11.2) della risonanza è molto grande, con valori superiori a  $10^4$ .

Naturalmente sono possibili altri modi di oscillazione con configurazioni dei campi diverse, modi *TM* con frequenze superiori e modi *TE* (*transverse electric*) con una frequenza

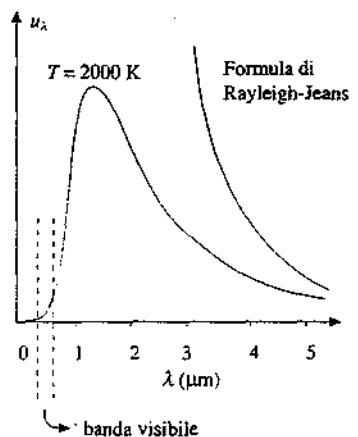


Figura 15.64

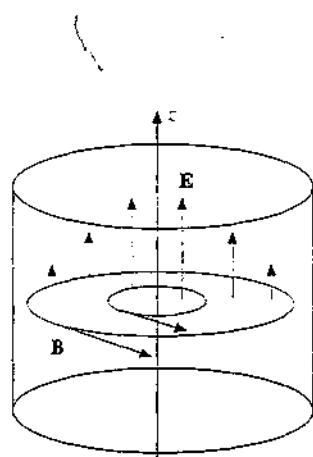


Figura 15.65

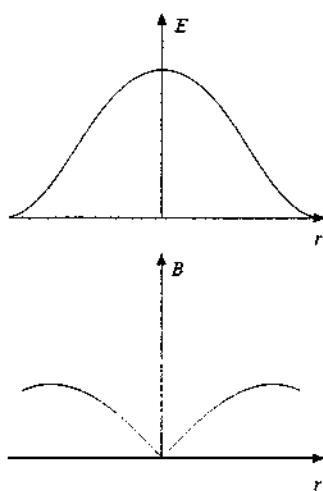


Figura 15.66

fondamentale poco diversa dalla  $v$  sopra citata e con le varie armoniche superiori; non si hanno mai serie armoniche.

Le cavità risonanti nel modo  $TM$  sono utilizzate negli *acceleratori di particelle* per comunicare energia alle particelle stesse (vedi paragrafo 9.9). Si sincronizza il moto delle particelle, ad esempio protoni, in modo che esse passino lungo l'asse della cavità, alta  $z$ , con velocità parallela e concorde all'asse proprio in quella frazione del periodo di oscillazione in cui il campo elettrico è anch'esso concorde all'asse: in tale caso il campo elettrico compie il lavoro  $qEz$  sulla particella e l'energia cinetica di questa aumenta; se le particelle da accelerare sono elettroni, bisogna che il verso di  $E$  sia opposto a quello del moto, dato che gli elettroni sono negativi. Il problema è più complicato di quanto tali semplici cenni possano mostrare, però il principio è questo ed è in sostanza l'unico utilizzato finora nelle grandi macchine acceleratrici moderne.

#### Guide d'onda

Le onde stazionarie in una cavità derivano dalla sovrapposizione di onde che vengono riflesse dalle pareti; è quindi concepibile che si possa trovare una soluzione in cui le onde sovrapponendosi diano luogo ad un'onda progressiva invece che stazionaria. La cavità diventa in tal caso una guida d'onda e si parla di onde guidate lungo una cavità.

Abbiamo già trattato un problema di questo tipo parlando del *cavo coassiale* come linea di trasmissione nel paragrafo 11.5. Lungo il cavo si hanno onde di potenziale e di corrente con velocità eguale a  $c$  se il dielettrico è il vuoto e inferiore a  $c$  se il dielettrico ha costante dielettrica  $\kappa$  ( $v = c / \sqrt{\kappa}$ ). La differenza di potenziale tra i conduttori implica la presenza di un campo elettrico trasversale e le correnti nei conduttori di un campo magnetico, anch'esso trasversale: il cavo coassiale è sede di un'onda elettromagnetica trasversale che si propaga in un dielettrico omogeneo delimitato da due cilindri conduttori coassiali; la velocità di propagazione non dipende dalla frequenza. Nella pratica i cavi coassiali sono utilizzati fino a frequenze dell'ordine di  $10^9$  Hz.

Rispetto al cavo coassiale un *tubo conduttore* a sezione circolare o *rettangolare* avrà presumibilmente un comportamento diverso, se non altro perché non c'è il conduttore centrale; d'altra parte, per quanto visto nelle cavità risonanti, è presumibile che ci sia un fenomeno di propagazione.

Il caso più semplice si presenta con una guida a sezione rettangolare (figura 15.67). Se ammettiamo che esista un'onda progressiva, la forma più immediata è del tipo

$$E(z, x) = E_0 \sin k_z z \cos(k_x x - \omega t) \quad , \quad (15.49)$$

con  $E$  parallelo all'asse  $y$ . Il termine  $\sin k_z z$  assicura che il campo sia nullo sulle pareti verticali, purché sia almeno  $k_z a = \pi$ ; il termine  $\cos(k_x x - \omega t)$  dà la propagazione lungo  $x$ .

Questo campo deve soddisfare all'equazione tridimensionale delle onde (12.48) e per sostituzione diretta otteniamo

$$k_x^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad .$$

Per  $k_z$  abbiamo il vincolo  $k_z = \pi/a$  e quindi

$$k_x = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2}} \quad . \quad (15.50)$$

Questa relazione comporta che si abbia propagazione solo se  $\omega^2/c^2 > \pi^2/a^2$ , ovvero se

$$\omega > \frac{\pi c}{a} \Rightarrow v > \frac{c}{2a} \quad .$$

La frequenza  $v_r = c/2a$ , legata alla dimensione trasversale (rispetto a  $E$ ) della guida, è detta *frequenza di taglio*: l'onda descritta si propaga nella guida solo se la frequenza è maggiore di  $v_r$ ; se invece  $v$  è minore di  $v_r$ ,  $k_x$  diventa immaginario puro e abbiamo già visto qual è il significato (paragrafo 14.4): l'onda non è più sinusoidale, diventa esponenziale decrescente e si

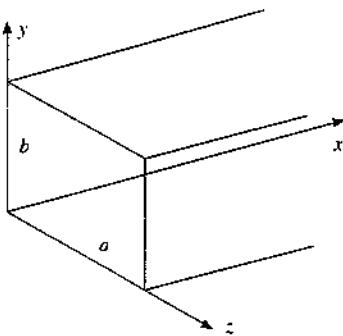


Figura 15.67

annulla dopo una certa distanza, così che non si può più parlare di propagazione.

La *velocità di fase* dell'onda guidata è

$$v_f = \frac{\omega}{k_x} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_i^2}{c^2 - a^2}}} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_i^2}{c^2 - c^2}}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_i}{\omega}\right)^2}} ;$$

Velocità di fase

essa dipende da  $\omega$ , cioè la *guida è dispersiva*, e per  $\omega > \omega_i$ , quando c'è propagazione, risulta  $v_f > c$ . La *velocità di gruppo* (12.61) è

$$v_g = \frac{d\omega}{dk_x} = \frac{d}{dk_x} \sqrt{c^2 k_x^2 + \omega_i^2} = c \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_i}{\omega}\right)^2} ,$$

Velocità di gruppo

minore di  $c$ ; il prodotto  $v_f v_g$  è eguale a  $c^2$ .

Una proprietà che rende la propagazione dell'onda guidata completamente differente dagli altri casi visti finora è relativa al campo magnetico. L'andamento di  $\mathbf{E}$ , la presenza delle pareti e la legge  $\nabla \times \mathbf{B} = (1/c) \partial \mathbf{E} / \partial t$  fanno sì che le linee di  $\mathbf{B}$  siano disposte come mostrato nella figura 15.68: quando il campo elettrico è trasversale rispetto a  $x$  il campo magnetico ha una componente lungo la direzione di propagazione, cosa che non avviene in un mezzo indefinito.

Quello descritto è un particolare modo di propagazione di tipo *TE*; è possibile anche avere modi *TM*, con il campo magnetico ortogonale all'asse  $x$ : in questo caso il campo elettrico ha una componente longitudinale.

Risolviamo ora un caso classico, in modo da dimostrare come si arriva a un'espressione tipo (15.49). Consideriamo due piani conduttori paralleli tra loro e all'asse  $x$ , separati da una distanza  $a$ ; l'asse  $z$  è ortogonale ai piani, l'asse  $y$  è entrante nel foglio (figura 15.69). Un'onda piana di equazione

$$E_y = E_0 \sin(k_x x + k_z z - \omega t) ,$$

con il campo elettrico polarizzato lungo l'asse  $y$ , si propaga nello spazio tra i piani ad un certo angolo con l'asse  $x$  che dipende dai valori delle componenti  $k_x$  e  $k_z$  del vettore di propagazione  $\mathbf{k}$ . In  $A$  l'onda viene riflessa e ha equazione

$$E_A = E_{0A} \sin(k_x x - k_z z - \omega t) .$$

In  $B$  succede lo stesso e la nuova onda riflessa ha lo stesso vettore  $\mathbf{k}$  dell'onda incidente  $E_y$ . Nello spazio tra i piani abbiamo quindi le due onde tipo  $E$  ed  $E_A$  e l'onda risultante si scrive

$$E_R = E_0 \sin(k_x x + k_z z - \omega t) + E_{0A} \sin(k_x x - k_z z - \omega t) .$$

Nei punti  $z = 0$  il campo  $E_R$  deve essere nullo, per cui  $E_{0A} = -E_0$  e in definitiva

$$E_R = E_0 [\sin(k_x x + k_z z - \omega t) - \sin(k_x x - k_z z - \omega t)] = 2 E_0 \sin k_z z \cos(k_x x - \omega t) ,$$

che è la (15.49). Imponendo che anche il piano  $z = a$  sia un piano nodale ( $E_R = 0$ ) si ha  $k_z a = n \pi$ , cioè  $k_z = n \pi / a$  con  $n = 1, 2, \dots$ , e l'espressione finale dell'onda è

$$E_R = 2 E_0 \sin \frac{n \pi z}{a} \cos(k_x x - \omega t) .$$

L'andamento del modulo del campo elettrico per i due modi con  $n = 1$  e  $n = 2$  è mostrato in figura 15.70. Per  $n = 2$  si ha un piano nodale anche in coincidenza col piano mediano tra i due conduttori: la frequenza di taglio è  $\nu' = 2 v_g = c/a$ . I modi di ordine superiore hanno frequenze di taglio maggiori.

*Guide d'onda metalliche* sono usate nel campo delle onde elettromagnetiche centimetriche e millimetriche (microonde) per trasmettere energia da un generatore ad un utilizzatore; anche le *fibre ottiche* si comportano come guide d'onda per le onde elettromagnetiche visibili. Una guida d'onda naturale per le onde radio (frequenze intorno a  $10^6$  Hz) è fornita dalla

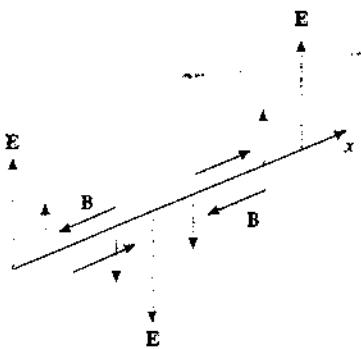


Figura 15.68

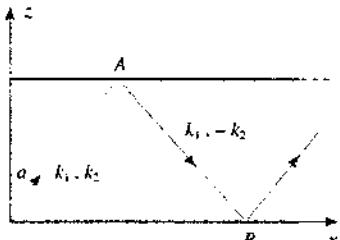


Figura 15.69

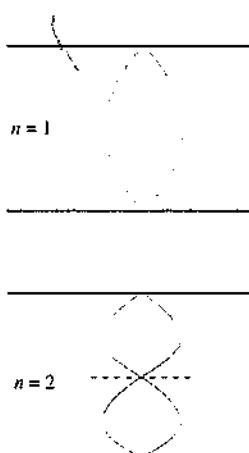


Figura 15.70

superficie terrestre e dalla ionosfera: onde radio emesse per esempio in Europa, riflettendosi alternativamente sulla zona inferiore della ionosfera e sulla superficie terrestre, possono raggiungere l'Australia.

Concetti analoghi si sviluppano anche nel caso delle onde sonore.

# Diffrazione



## 16.1 Fenomeni di diffrazione di Fraunhofer e di Fresnel

La *diffrazione* è un particolare fenomeno di interferenza che si verifica quando un'onda incontra nel suo percorso un ostacolo o un'apertura. Ad esempio l'apertura può essere costituita da un foro circolare o rettangolare, praticato in uno schermo assorbente per le onde in esame, un ostacolo da un filo, un disco assorbente o più in generale da un qualsiasi oggetto. Qualitativamente, nello spazio oltre l'ostacolo o l'apertura le onde si propagano anche lungo direzioni *diverse* da quella di incidenza e hanno origini differenti di cammino tra onde che si sovrappongono in un dato punto; possono quindi avvenire fenomeni di interferenza con conseguente ridistribuzione dell'energia nei punti dello spazio, da cui risultano le caratteristiche *figure di diffrazione*. Gli effetti della diffrazione sono di norma tanto più vistosi quanto più le dimensioni dell'apertura o dell'ostacolo sono vicine al valore della lunghezza d'onda delle onde incidenti.

I fenomeni di diffrazione si verificano con tutti i tipi di onde; essi si osservano facilmente nel caso delle onde sulla superficie di un liquido e delle onde sonore, aventi lunghezze d'onda prossime alle dimensioni di molti oggetti comuni. Più difficile è l'osservazione nel caso delle onde luminose, proprio a causa della piccola lunghezza d'onda ( $\lambda = 0.4 \div 0.7 \mu\text{m}$ ); però la fenomenologia e le applicazioni sono molto interessanti e per questa ragione ci occuperemo soprattutto della diffrazione della luce. Le argomentazioni generali tuttavia restano valide per qualsiasi tipo di onda.

Storicamente la diffrazione venne osservata per la prima volta da Grimaldi nella seconda metà del diciassettesimo secolo, in un'epoca che sarebbe stata dominata dalla teoria di Newton, la quale attribuiva alla luce una natura corpuscolare, in contrasto con la teoria ondulatoria di Huygens. L'ipotesi ondulatoria si affermò solamente dopo oltre cent'anni, a seguito degli esperimenti di Young e Fresnel.

Nella figura 16.1 è illustrato un caso comune in cui si osserva diffrazione: un'onda arriva su uno schermo opaco nel quale è praticato un foro di dimensioni confrontabili con la lunghezza d'onda della luce incidente; uno schermo *C*, o una pellicola fotografica, riceve la luce che ha attraversato il foro.

Per il calcolo dell'ampiezza luminosa in un punto *P* dello schermo si ricorre al *principio di Huygens-Fresnel-Kirchhoff*, enunciato nel paragrafo 14.2. La superficie dell'apertura viene suddivisa in infiniti elementi di area  $d\Sigma$ , ciascuno dei quali rappresenta una sorgente elementare di onde, avente l'ampiezza di campo elettrico

$$dE = \frac{Af(\theta) d\Sigma}{s} \quad , \quad f(\theta) = \frac{1 + \cos\theta}{2} \quad . \quad (16.1)$$

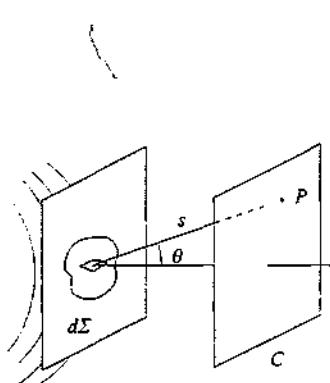


Figura 16.1

L'ampiezza risultante in  $P$  si ottiene sommando vettorialmente i contributi  $dE$  provenienti da tutte le sorgenti che costituiscono il foro illuminato, sorgenti che sono intrinsecamente coerenti, esattamente in fase se la superficie del foro coincide con una parte del fronte d'onda incidente e con differenza di fase costante negli altri casi.

Se l'onda incide su un ostacolo opaco, ad esempio un disco, per il calcolo dell'ampiezza dell'onda in un punto  $P$  oltre l'ostacolo si procede nello stesso modo, considerando le parti del fronte d'onda non interessate dall'ostacolo.

Tra i possibili modi con cui si realizza e si osserva la diffrazione prodotta da aperture e ostacoli illuminati se ne considerano essenzialmente due, legati ai nomi di Fraunhofer e di Fresnel.

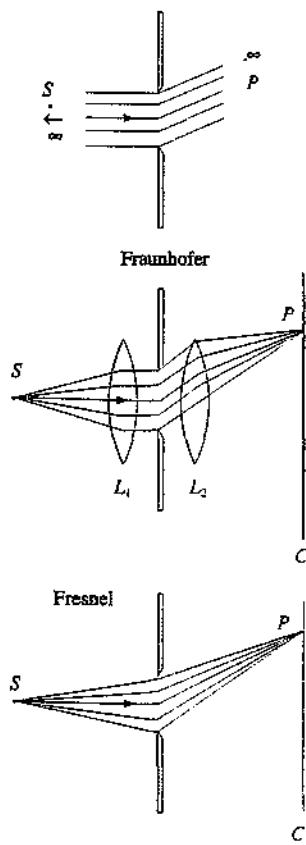


Figura 16.2

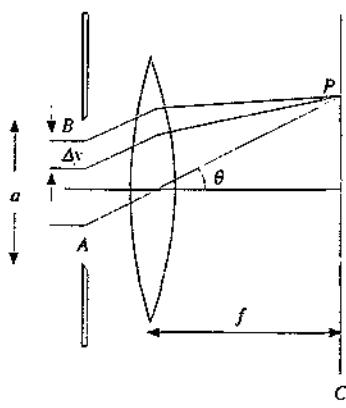


Figura 16.3

La sorgente di luce  $S$  e lo schermo  $C$  sono a grande distanza dall'apertura. I fronti d'onda che giungono su questa sono piani e tali sono anche i fronti d'onda che giungono in  $P$  provenienti dall'apertura. Questa configurazione, che è la più semplice da trattare analiticamente, si realizza in laboratorio con due lenti: la prima  $L_1$  trasforma l'onda sferica proveniente da  $S$  in un'onda piana con fronte d'onda che contiene l'apertura, la seconda  $L_2$  focalizza in un punto  $P$  i raggi provenienti dall'apertura secondo una stessa direzione.

### b) Diffrazione di Fresnel

La sorgente  $S$  e lo schermo  $C$  sono a distanza finita dall'apertura, i fronti d'onda non sono piani e i raggi che arrivano in  $P$  non sono paralleli; la stessa situazione può essere considerata per un ostacolo generico.

Nel seguito tratteremo per primi i fenomeni di Fraunhofer, che tra l'altro sono interessanti per le loro implicazioni riguardanti strumenti ottici semplici e composti. Ci occuperemo successivamente della diffrazione di Fresnel in casi matematicamente semplici, ma significativi.

## 16.2 Diffrazione ad una fenditura rettilinea

Cominciamo a discutere la diffrazione di Fraunhofer considerando un foro rettangolare praticato in uno schermo opaco, di larghezza  $a = AB$  e lunghezza  $L \gg a$ , foro che viene chiamato fenditura rettilinea (indefinita); nella figura 16.3 la fenditura si sviluppa ortogonalmente al disegno.

Supponiamo che sulla fenditura incida un'onda piana di lunghezza d'onda  $\lambda$ , con il fronte d'onda parallelo al piano contenente la fenditura, e suddividiamo questa in  $N$  strisce parallele di larghezza  $\Delta y$ . Ciascuna striscia funge da sorgente di onde secondarie e contribuisce con l'ampiezza  $\Delta E$  al campo elettrico risultante  $E_R$  in un punto  $P$  dello schermo individuato dai raggi uscenti ad angolo  $\theta$  rispetto alla normale al piano della fenditura. I contributi  $\Delta E$  relativi a due strisce adiacenti hanno nel punto  $P$  la differenza di fase

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta y \sin\theta ,$$

derivante dalla differenza di cammino  $\Delta y \sin\theta$ .

Per il calcolo di  $E_R$  si procede come nel caso di  $N$  sorgenti coerenti (paragrafo

15.5), attraverso la costruzione della poligonale degli *N vettori rotanti* rappresentanti le onde che si sovrappongono. Adesso però bisogna far tendere  $N$  all'infinito ovvero  $\Delta\theta$  a zero, per cui la poligonale diventa un arco di circonferenza di raggio  $\rho$  con angolo al centro

$$\alpha = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin \theta , \quad (16.2)$$

eguale alla differenza di fase tra le onde emesse nei punti estremi  $A$  e  $B$  della fenditura. Dalla figura 16.4 risulta

$$E_R = 2\rho \sin \frac{\alpha}{2}$$

La lunghezza dell'arco di circonferenza è  $E_{\max} = \rho\alpha$  e corrisponde all'ampiezza massima che si osserva al centro dello schermo, quando  $\theta = 0$  e tutte le onde emesse dalle singole strisce sono in fase. In definitiva

$$E_R = f(\theta) E_{\max} \frac{\sin \alpha / 2}{\alpha / 2} ,$$

espressione nella quale abbiamo evidenziato il fattore di inclinazione  $f(\theta)$  in quanto tutte le ampiezze emesse ad angolo  $\theta \neq 0$  vanno moltiplicate per  $f(\theta)$ .

L'intensità è proporzionale al quadrato dell'ampiezza; ricorriamo a (16.2) e abbiamo

$$I(\theta) = I_{\max} f^2(\theta) \left[ \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}} \right]^2 = I_{\max} f^2(\theta) \left[ \frac{\sin \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}}{\frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}} \right]^2 . \quad (16.3) \quad \text{Intensità}$$

La funzione  $I(\theta)$  è mostrata in figura 16.5 per i valori  $a = 10\lambda$ ,  $a = 5\lambda$ ,  $a = \lambda$ .

L'intensità trasmessa dalla fenditura si annulla nei cosiddetti *minimi di diffrazione*, quando

$$\frac{\pi a \sin \theta}{\lambda} = m\pi \quad , \quad \sin \theta = m \frac{\lambda}{a} \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (16.4)$$

I primi minimi, a destra e a sinistra del massimo centrale, si hanno per  $\sin \theta = \pm \lambda/a$  e la quantità

$$\Delta(\sin \theta) = \frac{2\lambda}{a}$$

si chiama *larghezza angolare del massimo centrale di diffrazione*. Si vede che per  $a >> \lambda$  il massimo è molto stretto e l'effetto della diffrazione è quasi trascurabile, ma che il massimo si allarga se  $a$  diminuisce tendendo a  $\lambda$ . Se fosse  $a = \lambda$  il primo ed unico minimo si formerebbe a  $\theta = 90^\circ$  e con  $a < \lambda$  l'intensità non si annullerebbe mai: cioè con  $a \leq \lambda$  tutto lo spazio al di là della fenditura è illuminato.

Nella figura 16.6 è ripreso l'andamento di  $I(\theta)$  in un caso  $a > \lambda$ , insieme ad una

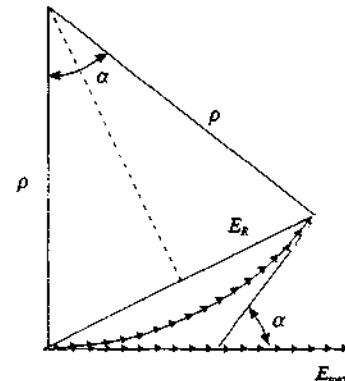


Figura 16.4

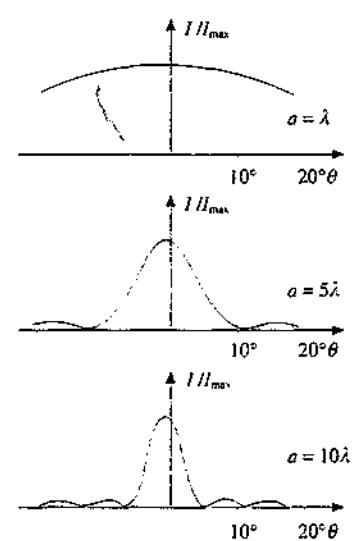


Figura 16.5

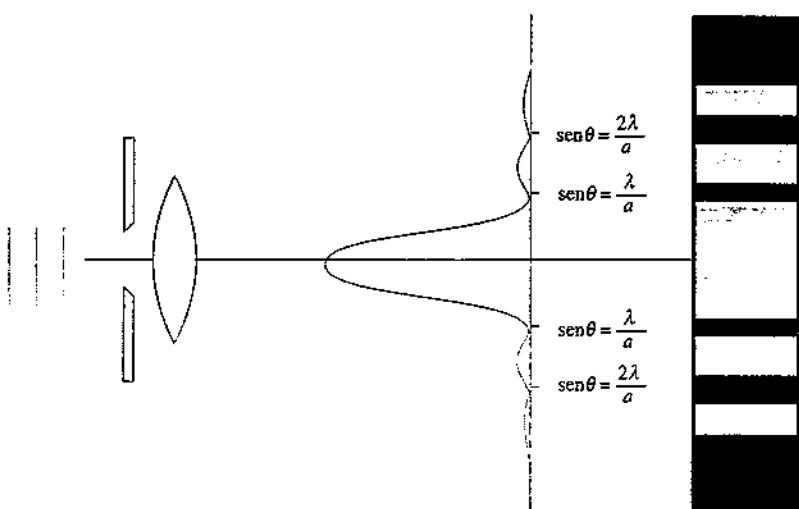


Figura 16.6

fotografia che mostra l'effetto visivo su uno schermo. Dato che la maggior parte della potenza (~80%) è concentrata nella frangia centrale, si usa dire che questa rappresenta l'*immagine della fenditura*.

Tra due minimi d'intensità esiste un *massimo secondario*, la cui posizione si calcola cercando i massimi della funzione  $(\sin^2 \beta) / \beta^2$ , che sintetizza l'andamento dell'intensità. Si trova la condizione  $\operatorname{tg} \beta = \beta$ , equazione trascendente risolvibile con un metodo grafico (a parte il caso ovvio  $\beta = 0$ ). Risulta però molto buona l'approssimazione di considerare massima l'intensità quando è massimo  $\sin^2(\pi a \sin \theta / \lambda)$ , ovvero quando

$$\frac{\pi a \sin \theta}{\lambda} = (2m' + 1) \frac{\pi}{2}, \quad \sin \theta = (2m' + 1) \frac{\lambda}{2a} \quad m' = 1, 2, 3, \dots$$

L'intensità dei massimi secondari risulta pertanto, trascurando il fattore di inclinazione,

$$\frac{I_m}{I_{\max}} = \frac{1}{\left[ (2m' + 1) \frac{\pi}{2} \right]^2} \approx \frac{0.4}{(2m' + 1)^2}$$

Già nel primo massimo,  $m' = 1$ , si ha  $I_1 / I_{\max} = 0.045$ , ovvero l'intensità è molto minore rispetto al massimo centrale; per  $m' = 2$  il rapporto vale 0.016, per  $m' = 3$  vale 0.008 e così via. I rapporti sono ulteriormente depressi se si introduce il fattore  $f^2(\theta)$ . I massimi secondari non sono quindi ben visibili: se  $\lambda$  non è molto diversa da  $a$  essi sono abbastanza separati dal massimo centrale e i primi sono percepibili, se invece  $\lambda \ll a$  essi cadono molto vicino alla direzione  $\theta = 0$  e anche per tale ragione sono praticamente invisibili.

#### Esempio 16.1

Un'onda luminosa piana di lunghezza d'onda  $\lambda = 0.59 \cdot 10^{-6}$  m attraversa una fenditura di larghezza  $a$ . La larghezza dell'immagine della fenditura, osservata nel piano focale di una lente di distanza focale  $f = 60$  cm, è  $\Delta x \approx 7.5$  mm. Calcolare il valore di  $a$ .

**Soluzione**

Semilarghezza dell'immagine, distanza focale e angolo  $\theta$  a cui si ha il primo minimo sono legati dalla relazione

$$f \operatorname{tg} \theta = \frac{\Delta x}{2} \Rightarrow \operatorname{tg} \theta = 6.25 \cdot 10^{-3}$$

Pertanto  $\operatorname{tg} \theta = \operatorname{sen} \theta = \theta = 6.25 \cdot 10^{-3} \text{ rad} = 0.36^\circ$  e da (16.4) con  $m = 1$

$$\frac{\lambda}{a} = 6.25 \cdot 10^{-3}, \quad a = 0.094 \text{ mm} = 159 \lambda$$

È come se, per effetto della diffrazione, la fenditura fosse stata ingrandita del fattore  $7.5/0.094 \approx 79$ .

Se volessimo  $a = \Delta x$  si troverebbe  $a^2 = 2f\lambda$ ; con i dati del problema  $a = 0.84 \text{ mm}$ : per tale valore di  $a$  l'immagine sarebbe larga quanto la fenditura.

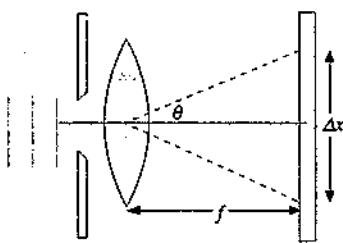


Figura 16.7

**Esempio 16.2**

Un piccolo porto è completamente chiuso eccetto che per un'apertura larga  $a = 20 \text{ m}$ . Dall'esterno arrivano in direzione perpendicolare all'apertura onde con lunghezza d'onda  $\lambda = 1.4 \text{ m}$ . Determinare i luoghi dei punti all'interno del porto nei quali il moto ondoso è minimo.

**Soluzione**

Applichiamo alle onde marine la trattazione precedente, valida se sono rispettate le stesse condizioni geometriche. I minimi di intensità si osservano nelle direzioni date da (16.4):

$$\operatorname{sen} \theta = m \frac{\lambda}{a} = 0.07 \text{ m}, \quad \theta_1 = \pm 4.0^\circ, \quad \theta_2 = \pm 8.0^\circ, \quad \theta_3 = \pm 12.1^\circ, \dots$$

il massimo centrale è compreso tra  $+4.0^\circ$  e  $-4.0^\circ$ .

All'interno del porto l'intensità del moto ondoso diminuisce con la distanza dell'apertura in quanto le onde secondarie sono circolari; inoltre l'intensità diminuisce fortemente con l'angolo, come si è visto.

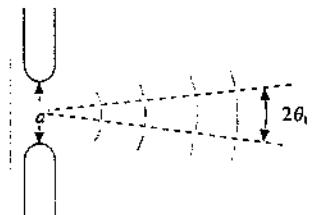


Figura 16.8

**Esempio 16.3**

Una fenditura rettilinea larga  $a = 5 \cdot 10^{-2} \text{ mm}$  è illuminata con luce bianca nella quale sono presenti con la stessa intensità tutte le lunghezze d'onda dal rosso  $\lambda_R = 0.7 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$  al violetto  $\lambda_V = 0.4 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$ . La figura di diffrazione si forma su uno schermo posto nel piano focale di una lente con  $f = 50 \text{ cm}$ . Descrivere l'immagine della fenditura.

**Soluzione**

Il centro dell'immagine è bianco in quanto in esso si realizza la condizione di massimo di interferenza indipendentemente dalla lunghezza d'onda. Invece la variazione di intensità sullo schermo e le posizioni dei minimi e dei massimi secondari dipendono dalla lunghezza d'onda. Dato che in ogni caso  $\lambda \ll a$ , si può fare l'approssimazione  $\operatorname{sen} \theta \approx \operatorname{tg} \theta \approx \theta$  e scrivere  $f\theta = x$  essendo  $x$  la posizione sullo schermo in corrispondenza all'angolo  $\theta$ . Pertanto

$$\frac{\pi a \operatorname{sen} \theta}{\lambda} \approx \frac{\pi a \theta}{\lambda} = \frac{\pi a x}{f \lambda} = 10^{-4} \frac{\pi x}{\lambda}$$

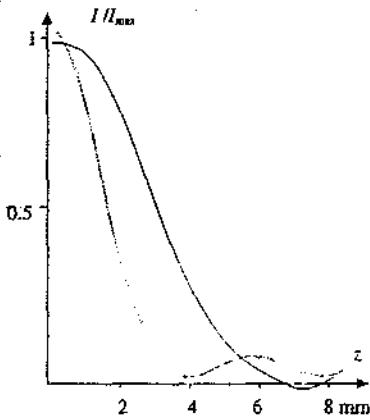


Figura 16.9

e la (16.3) si scrive

$$\frac{I}{I_{\max}} = \left[ \frac{\sin \frac{10^{-4} \pi x}{\lambda}}{\frac{10^{-4} \pi x}{\lambda}} \right]^2$$

Alle tre lunghezze d'onda

$$\lambda_V = 0.4 \cdot 10^{-3} \text{ mm}, \quad \lambda_G = 0.55 \cdot 10^{-3} \text{ mm}, \quad \lambda_R = 0.7 \cdot 10^{-3} \text{ mm},$$

il primo minimo si ha per

$$x_V = 4.0 \text{ mm}, \quad x_G = 5.5 \text{ mm}, \quad x_R = 7.0 \text{ mm}.$$

Nella figura 16.9 sono rappresentate le intensità relative per le due lunghezze d'onda  $\lambda_V$  e  $\lambda_R$ . Spostandosi dal centro si osserva una colorazione di sottrazione, che va dal rossastro al violaceo, tipica dei fenomeni di interferenza e determinata in ogni punto dalla mancanza di alcune lunghezze d'onda e dalla presenza più marcata di altre.

### 16.3 Difrazione ad un foro circolare e da parte di un disco opaco

Quando l'*apertura* attraverso cui facciamo passare l'onda piana incidente è *circolare* la figura di diffrazione, per ragioni di simmetria, consta di un *disco luminoso centrale* circondato da una serie di corone circolari alternativamente scure e chiare. Queste frange, osservate in condizioni di Fraunhofer, presentano molte analogie con quanto visto nel caso dell'apertura rettilinea; lo studio analitico è però più complicato e non lo sviluppiamo.

Si trova in particolare che l'angolo a cui cade il primo minimo di intensità, corrispondente al bordo del disco centrale della figura di diffrazione, è dato da

$$\sin \theta = 1.22 \frac{\lambda}{D} = 0.61 \frac{\lambda}{R}, \quad (16.6)$$

Primo minimo di diffrazione

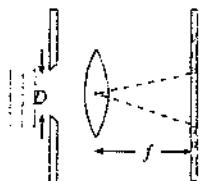
se  $D$  e  $R$  sono rispettivamente il diametro e il raggio del foro circolare. Questa formula va confrontata con la (16.4) che dà, per una fenditura rettilinea larga  $a$ ,  $\sin \theta = \lambda/a$  come direzione lungo cui si ha il primo minimo.

Il fattore 1.22 deriva appunto dal calcolo eseguito secondo il principio di Huygens-Fresnel-Kirchhoff, che integra su tutte le sorgenti secondarie infinitesime anulari in cui viene suddiviso il foro circolare. Il fattore numerico per il secondo minimo è 2.23, per il terzo 3.24: non si ha una successione regolare come in (16.4).

In molte applicazioni  $\lambda \ll D$  e si può scrivere

$$\theta = 1.22 \frac{\lambda}{D} = 0.61 \frac{\lambda}{R}; \quad (16.7)$$

Figura 16.10



$2\theta$  è la *larghezza angolare del massimo centrale*.

L'andamento dell'intensità è mostrato in figura 16.11; anche ora si verifica che oltre l'80% dell'energia trasmessa dall'apertura è concentrata nel disco centrale luminoso, per cui gli anelli chiari concentrici al massimo centrale non sono ben visibili. Si può dire che il disco centrale, il cui bordo è visto dal centro del foro sotto l'angolo  $2\theta$ , rappresenta l'immagine del foro stesso.

Questi risultati si applicano chiaramente ad una *lente di apertura*  $D$  (ovvero di raggio  $R$ ), per cui l'immagine di una sorgente puntiforme molto lontana è data, nel piano focale di una lente convergente, da un piccolo disco luminoso le cui dimensioni sono determinate dal rapporto  $f/D$  tra distanza focale e apertura della lente.

#### Esempio 16.4

L'obiettivo di una macchina fotografica, di apertura  $D = 2.5$  cm e distanza focale  $f = 5$  cm, è illuminato da una sorgente puntiforme lontana  $S$ , che emette luce di lunghezza d'onda  $\lambda = 0.55 \mu\text{m}$ . Calcolare le dimensioni dell'immagine  $S$  nel piano focale dell'obiettivo.

#### Soluzione

Siamo di sicuro nella condizione  $\lambda \ll D$  e utilizziamo (16.7): l'apertura angolare  $2\theta$  dell'immagine vista dal centro della lente è

$$2\theta = 2.44 \frac{\lambda}{D} = 5.37 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$$

L'immagine di  $S$  è un dischetto di diametro

$$d = 2\theta f = 2.44 \lambda \frac{f}{D} = 2.68 \mu\text{m}$$

A causa della diffrazione il fuoco non è un punto geometrico, bensì acquista una dimensione finita, per quanto piccola e in molte applicazioni trascurabile.

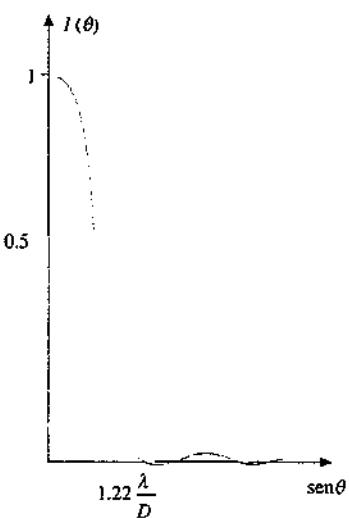


Figura 16.11

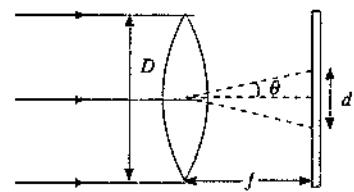


Figura 16.12

#### Diffrazione da parte di un disco opaco

Consideriamo un'onda piana monocromatica che incide su un'apertura circolare  $G$  di diametro  $h$  molto maggiore di  $\lambda$ . A grande distanza, su uno schermo  $C$ , non si osserva diffrazione in quanto  $h \gg \lambda$ : il campo elettrico  $E_G(\theta)$  e l'intensità sono diversi da zero solo lungo la direzione individuata da  $\theta = 0$ , ortogonale al piano di  $G$ .

Poniamo adesso sull'apertura  $G$  un *disco opaco*  $A$  di diametro  $h$  avente al centro un foro circolare di diametro  $D$ . In un punto  $P$  dello schermo, visto sotto l'angolo  $\theta$ , si osserva un campo elettrico di ampiezza  $E_A(\theta)$  e un'intensità  $I_A(\theta)$  proporzionale a  $E_A^2(\theta)$ . Se invece di  $A$  poniamo, nella stessa posizione in cui c'era il foro di  $A$ , un *disco opaco*  $B$  di diametro  $D$ , nel punto  $P$  si osservano un campo elettrico di ampiezza  $E_B(\theta)$  e un'intensità  $I_B(\theta)$  proporzionale a  $E_B^2(\theta)$ ; la luce raggiunge lo schermo passando attraverso un'apertura anulare compresa tra il raggio  $D/2$  e il raggio  $h/2$ .

Notiamo che le *aperture* costituite dal foro nel disco  $A$  e dall'anello dovuto alla presenza del disco  $B$  sono *complementari*, ossia non hanno nessuna zona in comune: se sovrapponiamo i loro effetti è come se ci fosse soltanto l'apertura  $G$ . Pertanto

$$E_G(\theta) = E_A(\theta) + E_B(\theta) :$$

d'altra parte  $E_G(\theta) = 0$  per  $\theta \neq 0$  e concludiamo che

$$E_B(\theta) = -E_A(\theta), \quad I_B(\theta) = I_A(\theta) \quad \text{per } \theta \neq 0.$$

Questo risultato, noto come *principio di Babinet*, stabilisce che, con l'esclusio-

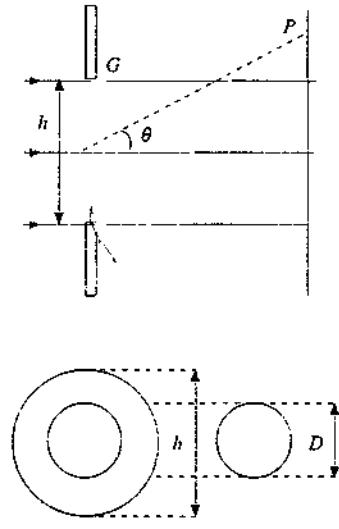


Figura 16.13

Principio di Babinet

ne della direzione  $\theta = 0$ , la figura di diffrazione prodotta da un disco opaco di diametro  $D$  coincide con la figura di diffrazione prodotta da un foro circolare di diametro  $D$  praticato in uno schermo opaco. Discuteremo nel paragrafo 16.8 cosa succede per  $\theta = 0$ .

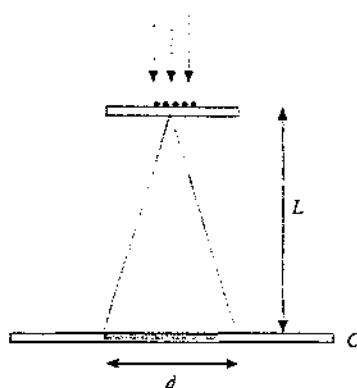


Figura 16.14

### Esempio 16.5

In una ristretta zona di un vetrino è depositato un sottile strato di polvere. Il vetrino è illuminato con luce rossa di lunghezza d'onda  $\lambda = 0.633 \mu\text{m}$  (laser elio-neon). Su uno schermo  $C$  posto a distanza  $L = 2 \text{ m}$  dal vetrino si osserva un disco rosso di diametro  $d = 15.4 \text{ cm}$ . Stimare il diametro  $D$  dei granelli di polvere.

#### Soluzione

Ciascun granello può essere schematizzato come un dischetto opaco di diametro  $D$  e sullo schermo si osserva la figura di diffrazione. Applichiamo il principio di Babinet e usiamo le stesse formule dell'esempio 16.4, con  $L$  al posto di  $f$ :

$$d = 2.44 \lambda \frac{L}{D} \Rightarrow D = 2.44 \lambda \frac{L}{d} = 20 \mu\text{m}$$

Si vede come la diffrazione possa essere utilizzata per stimare le dimensioni di oggetti opachi. Perché si possa effettuare la misura deve formarsi il primo minimo, che delimita l'immagine, e quindi deve essere soddisfatta secondo (16.6) la condizione

$$\sin \theta = 1.22 \frac{\lambda}{D} \leq 1 \Rightarrow \lambda \leq \frac{D}{1.22}$$

Sono dunque misurabili oggetti di dimensioni confrontabili con la lunghezza d'onda della luce; se  $D$  è inferiore a  $\sim 5 \cdot 10^{-7} \text{ m}$  bisogna ricorrere a radiazioni elettromagnetiche con lunghezza d'onda inferiore, come la radiazione di sincrotrone e i raggi X. Vedremo alcuni esempi nel capitolo 18.

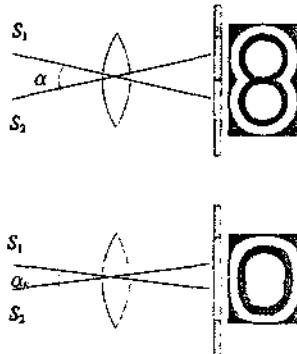


Figura 16.15

### 16.4 Limite di risoluzione delle lenti

Il fatto che l'immagine di un punto data da una lente sia un dischetto è importante quando si vogliono distinguere due oggetti puntiformi, visti dalla lente sotto un piccolo angolo. La figura 16.15 mostra due sorgenti puntiformi incoerenti  $S_1$  e  $S_2$ , molto lontane, viste dalla lente  $L$  sotto un angolo  $\alpha$ . Se  $\alpha \gg \theta = 1.22 \lambda / D$  non c'è sovrapposizione tra i due dischetti che rappresentano le immagini di  $S_1$  e  $S_2$  e quindi le due sorgenti appaiono distinte ovvero, come si dice, risolte. Al diminuire di  $\alpha$  le due figure di diffrazione cominciano a sovrapporsi e ad un certo punto diventa impossibile distinguerle.

Quando  $S_1$  e  $S_2$  sono viste dalla lente sotto un angolo

$$\alpha_R = 1.22 \frac{\lambda}{D} \quad (16.8)$$

Criterio di Rayleigh

il primo minimo della figura di diffrazione di una sorgente coincide con il centro del massimo dell'altra sorgente e si dice che le due sorgenti sono *appena risolte*. Questo criterio di distinzione è noto come *criterio di Rayleigh* ed è comunemente usato in ottica; esso è applicabile anche alle immagini date da una fenditura parallela, senza il fattore 1.22.

L'angolo  $\alpha_R$  definito da (16.8) si chiama *angolo minimo risolvibile* e il suo inverso

$$\rho = \frac{1}{\alpha_R} = \frac{D}{1.22 \lambda} \quad (16.9)$$

è detto *potere risolutivo o separatore della lente*.

In figura 16.16 sono rappresentate le figure di diffrazione prodotte separatamente dalle due sorgenti in varie situazioni angolari:  $\alpha > \alpha_R$  curve risolte,  $\alpha = \alpha_R$  curve appena risolte,  $\alpha < \alpha_R$  curve non risolte. La linea tratteggiata mostra l'intensità totale, ottenuta come somma dei due contributi.

Nel capitolo 17 descriveremo il funzionamento di alcuni strumenti ottici fondamentali, quali il telescopio, il microscopio e lo stesso occhio umano. Un aspetto qualificante è la capacità di separare, cioè di osservare come distinti, due punti luminosi separati, siano essi due stelle o due parti di una piccola struttura. Una conseguenza della discussione svolta finora è che una delle principali cause che limita la risoluzione di una lente è la diffrazione, fatto intrinseco in quanto legato alla natura ondulatoria della luce e quindi non eliminabile.

Esaminiamo adesso il potere separatore per i tre strumenti suddetti, considerati come semplici lenti di apertura  $D$  e focale  $f$ .

#### Potere separatore di un telescopio

Il potere separatore (16.9) non dipende dalla distanza focale della lente, ma soltanto dalla sua apertura, e migliora al crescere di questa.

La stessa formula è valida quando il fascio luminoso, invece di essere rifratto da una lente, è riflesso da uno specchio sferico di apertura  $D$  e focale  $f$ . Il maggior telescopio ottico a riflessione del mondo, situato sul Monte Palomar negli USA, ha  $D = 5$  m; con  $\lambda = 0.589 \cdot 10^{-6}$  m

$$\alpha_R = 1.44 \cdot 10^{-7} \text{ rad} \approx 0.03'' , \rho = \frac{1}{\alpha_R} = 6.95 \cdot 10^6 \text{ rad}^{-1} .$$

Sia  $\alpha_R$  che  $\rho$  dipendono dalla lunghezza d'onda, essendo peggiori le prestazioni con luce rossa e migliori con luce violetta:

$$\lambda_R = 0.7 \cdot 10^{-6} \text{ m} , \alpha_R = 1.71 \cdot 10^{-7} \text{ rad} , \rho = 5.85 \cdot 10^6 \text{ rad}^{-1} ,$$

$$\lambda_V = 0.4 \cdot 10^{-6} \text{ m} , \alpha_R = 0.98 \cdot 10^{-7} \text{ rad} , \rho = 1.03 \cdot 10^7 \text{ rad}^{-1} .$$

#### Potere separatore di un microscopio

In un microscopio invece della separazione angolare è più conveniente specificare la distanza minima  $s$  tra due punti distinguibili. Se i due punti sono nel piano focale anteriore dell'obiettivo (vedi paragrafo 17.8), essi sono visti sotto l'angolo  $\theta = s/f$ ; utilizzando per  $\theta$  il valore numerico  $\alpha_R$  otteniamo

$$s = f \alpha_R = 1.22 \lambda \frac{f}{D} = 0.61 \lambda \frac{f}{R} .$$

Questa relazione viene scritta di solito in funzione dell'angolo  $\phi$  di accettanza dell'obiettivo, definito da  $\sin \phi = R/f$ , per cui

$$s = \frac{0.61 \lambda}{\sin \phi} = \frac{0.61 \lambda_0}{n \sin \phi} ,$$

dove l'ultimo passaggio tiene conto della possibilità che l'oggetto e la parte frontale dello strumento siano immersi in un mezzo con indice di rifrazione  $n$ ;  $\lambda$  è la lunghezza d'onda in questo mezzo e  $\lambda_0$  la lunghezza d'onda nel vuoto della luce usata per illuminare l'oggetto. Il

Potere risolutivo

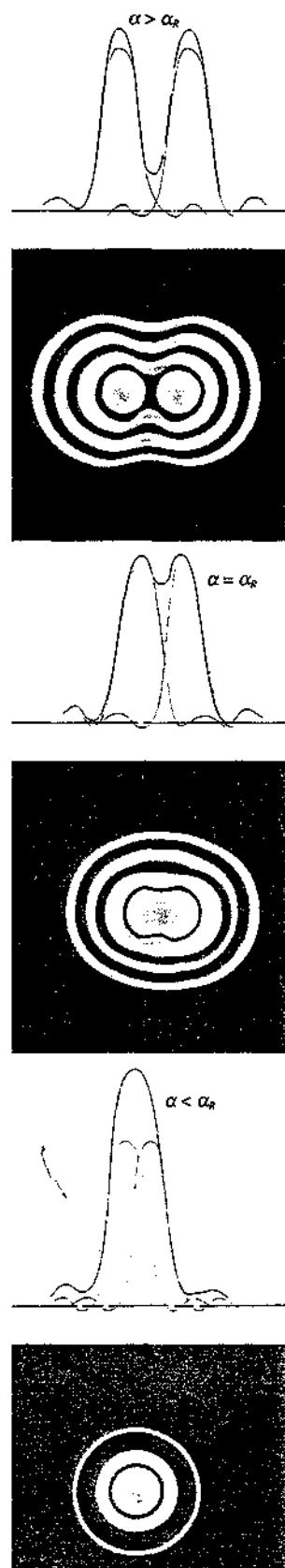


Figura 16.16

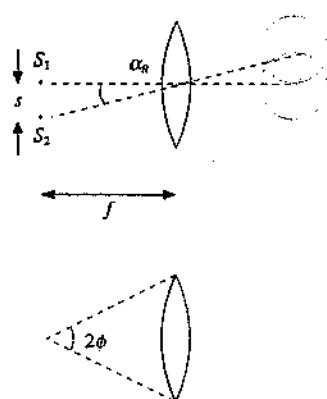


Figura 16.17

prodotto  $n \sin \phi$  si chiama *apertura numerica*  $A_n$  dello strumento e in definitiva abbiamo, per la minima distanza  $s$  risolvibile e per il suo inverso, detto *potere risolutivo lineare*,

$$s = \frac{0.61 \lambda_0}{A_n} \quad , \quad \rho_l = \frac{1}{s} = \frac{A_n}{0.61 \lambda_0}$$

Un valore tipico di  $A_n$  è 1.4 e con  $\lambda_0 = 0.55 \cdot 10^{-6} \text{ m}$   $s = 0.24 \mu\text{m}$ ,  $\rho_l = 4.2 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$ . Anche in questo caso le prestazioni dipendono dalla lunghezza d'onda e sono migliori con luce violetta.

#### Potere separatore dell'occhio umano

Il diametro della pupilla dell'occhio umano varia all'incirca tra i limiti  $D = 8 \text{ mm}$  e  $D = 2 \text{ mm}$  (vedi paragrafo 17.8); con luce di lunghezza d'onda  $\lambda_0 = 0.55 \cdot 10^{-6} \text{ m}$  si ha da (16.8)

$$0.84 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \leq \alpha_R \leq 3.36 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$$

Nel caso più sfavorevole,  $D = 2 \text{ mm}$ , la minima distanza tra due punti ancora distinguibili dall'occhio, posti alla distanza  $L = 25 \text{ cm}$  detta di *visione distinta*, è

$$s = L \alpha_R = 250 \cdot 3.36 \cdot 10^{-4} = 84 \mu\text{m}$$

Con  $D = 8 \text{ mm}$  si troverebbe  $s = 21 \mu\text{m}$ .

Sperimentalmente il potere separatore angolare dell'occhio è più vicino a  $4 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$  e la distanza  $s$  appena calcolata risulta di circa  $100 \mu\text{m}$ ; l'occhio cioè non arriva a  $s = 20 \mu\text{m}$ , come dovrebbe in base alla sola diffrazione. Questo fatto dipende dalla struttura granulare dell'elemento sensibile, la *retina*, posta nella parte posteriore dell'occhio: essa è costituita da piccoli sensori, i *coni* e i *bastoncelli*, che ricevono l'immagine trasmessa dal cristallino e la inviano al cervello tramite il *nervo ottico*; due punti sono visti come distinti quando la luce da essi emessa colpisce due sensori diversi. Non basta quindi che i dischetti di diffrazione siano appena risolvibili, come si è implicitamente ammesso per il telescopio e il microscopio, supponendo di avere nel piano focale un mezzo di rivelazione in grado di distinguere le due immagini. Occorre, nell'occhio, che i dischetti di diffrazione abbiano raggio paragonabile alla distanza  $s$  tra i sensori: questa condizione fissa la risoluzione. Ora è veramente notevole che la distanza tra i coni nella parte più sensibile della retina, la *fovea*, valga circa  $10 \mu\text{m}$  e che il raggio dei dischetti di diffrazione, con  $D = 2 \text{ mm}$ , sia anch'esso di circa  $10 \mu\text{m}$ : la *granularità della retina* è perfettamente corrispondente al potere risolutivo del cristallino, nel senso che due punti risolvibili secondo il criterio di Rayleigh producono dischetti che interessano due sensori distinti. D'altra parte, quando  $D = 8 \text{ mm}$ , i dischetti di diffrazione di due punti risolvibili secondo Rayleigh ( $s = 20 \mu\text{m}$ ) sono si ridotti, ma sono più vicini e non colpiscono due sensori distinti: la risoluzione del cristallino non trova corrispondenza in quella della retina, che non distingue i due punti.

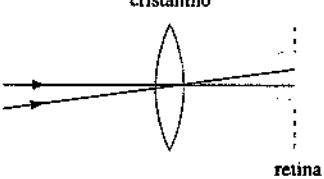


Figura 16.18

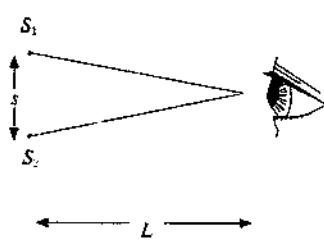


Figura 16.19

#### Esempio 16.6

Determinare qual è la distanza  $L$  dall'occhio umano alla quale di notte appaiono distinti i fari di un'automobile, separati tra loro da  $s = 1.4 \text{ m}$ . Si assuma  $D = 2 \text{ mm}$  e  $\lambda_0 = 0.55 \mu\text{m}$ .

#### Soluzione

Per effetto della diffrazione l'angolo minimo di risoluzione è  $\alpha_R = 3.3 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$  come calcolato sopra e quindi

$$L = s / \alpha_R = 4.17 \text{ km}$$

Con il valore medio  $\alpha_R \sim 4 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$  risulta  $L = 3.5 \text{ km}$ ; invece se fosse  $\alpha_R = 0.84 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$  si otterebbe  $L = 16.7 \text{ km}$ , certamente non corrispondente all'esperienza.

## 16.5 Reticolo di diffrazione

Nei paragrafi precedenti abbiamo considerato la diffrazione di Fraunhofer prodotta da un'apertura rettangolare o circolare e da un disco opaco. Se disponiamo in modo regolare  $N$  fenditure rettilinee, ciascuna di larghezza  $a$ , e quiespaziate di una distanza  $d$ , realizziamo un sistema di  $N$  sorgenti, la cui interferenza abbiamo già studiato nel paragrafo 15.5 e nel quale dobbiamo però introdurre il fatto che a causa della diffrazione l'intensità emessa da ciascuna sorgente ha l'andamento descritto nel paragrafo 16.2.

Il dispositivo, chiamato *reticolo di diffrazione*, si può realizzare tracciando delle linee parallele molto sottili su una lastra di vetro per mezzo di un opportuno utensile; lo spazio che rimane tra una linea e la successiva costituisce una fenditura. La distanza  $d$  tra due fenditure è detta *passo del reticolo* e la larghezza complessiva è  $Nd$ .

Nella figura 16.20 un'onda piana di lunghezza d'onda  $\lambda$  incide sul reticolo, che sta in un piano d'onda (l'incidenza cioè è normale); dopo il reticolo si pone una lente convergente e si osserva la figura di interferenza nel piano focale della lente. Fissato un punto  $P$  sullo schermo, individuato dall'angolo  $\theta$ , l'intensità in  $P$  si calcola con (15.21), in cui l'intensità  $I_1(\theta)$  della singola fenditura è data dalla (16.3) che riscriviamo:

$$I_1(\theta) = I_0 \left[ \frac{\sin \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}}{\frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}} \right]^2 ;$$

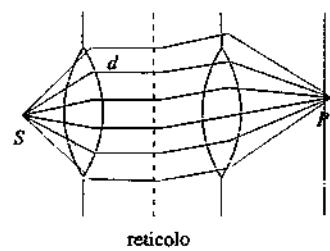


Figura 16.20

$I_0$  è l'intensità a  $\theta = 0$  ed è stato trascurato il contributo del fattore di inclinazione  $f(\theta)$ , non importante per le considerazioni che vogliamo svolgere. Pertanto l'intensità in  $P$  è

$$I(\theta) = I_0 \left[ \frac{\sin \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}}{\frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}} \right]^2 \left[ \frac{\sin \frac{N \pi d \sin \theta}{\lambda}}{\frac{\pi d \sin \theta}{\lambda}} \right]^2 ; \quad (16.10) \quad \text{Intensità}$$

Questa funzione è rappresentata nella figura 16.21 con  $N = 8$ , come nel terzo caso della figura 15.27; usualmente si sintetizza il risultato dicendo che l'*intensità della figura di interferenza è modulata dalla diffrazione*.

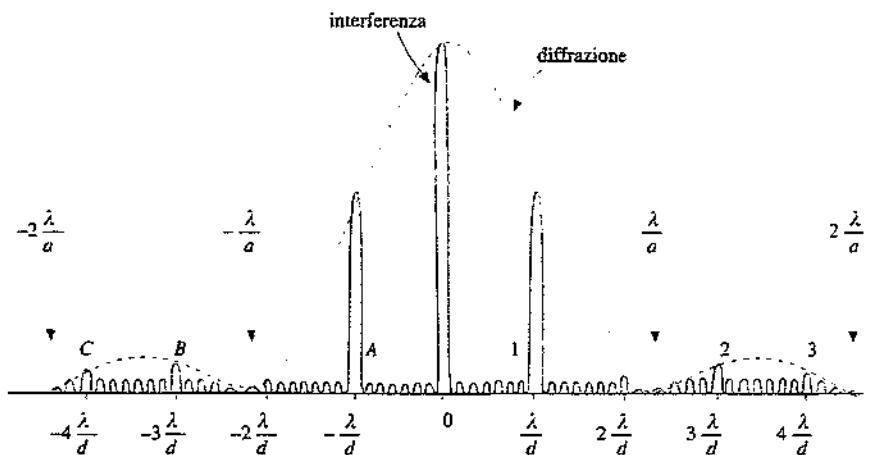


Figura 16.21

Riprendendo i punti salienti già enunciati nel paragrafo 15.5, precisiamo le caratteristiche dell'intensità trasmessa da un reticolo di diffrazione.

a) I *massimi principali* si hanno lungo le direzioni (15.22),

Massimi principali

$$\frac{\sin \theta}{\lambda} = m \frac{a}{d}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (16.11)$$

b) La distanza angolare tra un massimo principale e il minimo ad esso adiacente è, secondo (15.26),

$$\Delta(\sin \theta) = \frac{\lambda}{Nd} = \frac{\lambda}{L},$$

detta  $L$  la larghezza del reticolo. Si può porre  $\Delta(\sin \theta) = \cos \theta \Delta \theta$ , dato che  $\lambda \ll L$  e quindi la variazione è piccola; abbiamo allora per la *larghezza angolare di un massimo principale*

Larghezza angolare  
del massimo

$$\Delta \theta_m = 2 \Delta \theta = \frac{2\lambda}{L \cos \theta_m} = \frac{2\lambda}{N d \cos \theta_m}; \quad (16.12)$$

maggior è il numero di fenditure del reticolo, più strette sono le frange prodotte.

c) L'intensità della frangia centrale ( $m = 0$ ) aumenta proporzionalmente a  $N^2$ ; l'intensità degli altri massimi è invece ridotta a causa della diffrazione: sostituendo (16.11) in (16.10) abbiamo in corrispondenza ad un valore  $m \neq 0$  che

Intensità dei massimi principali

$$R_m = \frac{I_{\max}(m)}{I_{\max}(m=0)} = \left[ \frac{\sin m \pi \frac{a}{d}}{m \pi \frac{a}{d}} \right]^2. \quad (16.13)$$

Il rapporto  $R_m$  dipende dunque dal rapporto tra la larghezza  $a$  delle fenditure e la loro distanza  $d$ . In particolare quando un minimo di diffrazione coincide con un massimo di interferenza, cioè quando per lo stesso valore di  $\theta$  sono soddisfatte le due condizioni

$$d \sin \theta = m \lambda \quad a \sin \theta = m_a \lambda$$

il rapporto  $a/d$  vale  $m_a/m$  e  $R_m$  risulta eguale a zero: non si ha il massimo di ordine  $m = m_a(d/a)$ . Nella figura 16.21 la condizione di scomparsa di una frangia è approssimativamente realizzata per  $m = 4$ ,  $m_a = 2$  e pertanto nel reticolo cui la figura si riferisce  $a \approx d/2$ : la larghezza è circa pari alla metà del passo. Notiamo anche che la figura 16.21, per comodità di spiegazione, non è esattamente in scala: sappiamo infatti che l'intensità del primo massimo secondario di diffrazione è all'incirca il 4% di quella della frangia centrale, mentre nel disegno è  $\sim 10\%$ .

Un valore tipico della densità di linee in un reticolo è 4000 linee/cm: ad esempio con una larghezza  $L = 2.5$  cm si hanno  $N = 10^4$  linee con passo  $d = L/N = 2.5 \mu\text{m}$ ; la larghezza delle singole fenditure è dell'ordine di  $1 \mu\text{m}$ . Il valore massimo di densità raggiunge  $10^4$  linee/cm ( $d = 1 \mu\text{m}$ ,  $a < 1 \mu\text{m}$ ); le linee vengono tracciate con una punta di diamante il cui movimento è comandato da una macchina utensile molto

precisa. Tale metodo di produzione di reticolati di grande precisione è stato sviluppato da Rowland verso il 1880.

### Esempio 16.7

Un reticolo di diffrazione contiene  $N = 4000$  linee su una larghezza  $L = 2$  cm; la larghezza delle fenditure è  $a = 1 \mu\text{m}$ . La luce di lunghezza d'onda  $\lambda = 0.5 \mu\text{m}$  trasmessa dal reticolo viene osservata nel piano focale di una lente con  $f = 20$  cm. Calcolare la posizione delle frange osservate, la loro larghezza e la loro intensità relativa all'intensità della frangia centrale.

#### Soluzione

Il passo del reticolo è  $d = L/N = 5 \mu\text{m}$  e  $a/d = 1/5 = 0.2$ . Per effetto della sola interferenza si dovrebbero osservare 20 massimi principali oltre al massimo di ordine zero:

$$\sin \theta_m = m \frac{\lambda}{d} = 0.1 \text{ m}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 10.$$

Invece a causa della diffrazione risulta da (16.13)  $R_5 = R_{10} = 0$  e  $R_6, \dots, R_9 \leq 0.04$ ; pertanto in condizioni normali vengono osservati solamente il massimo centrale e gli otto massimi simmetricamente adiacenti.

Nella tabella sono riportati gli angoli  $\theta_m$  ai quali si osservano i massimi, le larghezze angolari (16.12), le posizioni sullo schermo  $z_m = f \tan \theta_m$ , le larghezze  $\Delta z_m = f \Delta \theta$  delle frange e le intensità relative  $R_m$ .

$m$	$\sin \theta_m$	$\theta_m$ (gradi)	$\Delta \theta$ (rad)	$z_m$ (cm)	$\Delta z_m$ ( $\mu\text{m}$ )	$R_m$
0	0	0	$5 \cdot 10^{-4}$	0	10	1
1	0.1	5.74	$5.03 \cdot 10^{-4}$	2.01	10.06	0.88
2	0.2	11.54	$5.10 \cdot 10^{-4}$	4.08	10.20	0.57
3	0.3	17.46	$5.24 \cdot 10^{-4}$	6.29	10.48	0.25
4	0.4	23.58	$5.46 \cdot 10^{-4}$	8.73	10.92	0.05

L'immagine è una serie di 9 righe luminose molto sottili ( $\sim 10 \mu\text{m}$ ), ben distanziate, con intensità decrescente, su uno sfondo nero.

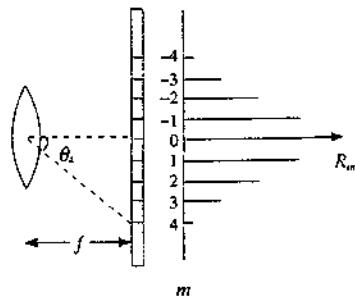
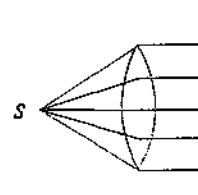


Figura 16.22

### Esempio 16.8

In un esperimento di Young le due fenditure distano  $d = 30 \mu\text{m}$  e sono larghe  $a = 3 \mu\text{m}$ . Determinare il numero di frange effettivamente osservabili nell'ipotesi che si riescano a rivelare solo intensità luminose superiori al 5% dell'intensità della frangia di ordine zero.

#### Soluzione

Ponendo  $n = 2$  nella (16.10) si ottiene

$$I(\theta) = 4 I_0 \left[ \frac{\sin \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}}{\frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}} \right]^2 \cos^2 \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda},$$

che differisce dalla (15.14) per il termine tra parentesi dovuto alla diffrazione a ciascuna delle fenditure. Quando  $a$  è molto minore di  $\lambda$  si ha

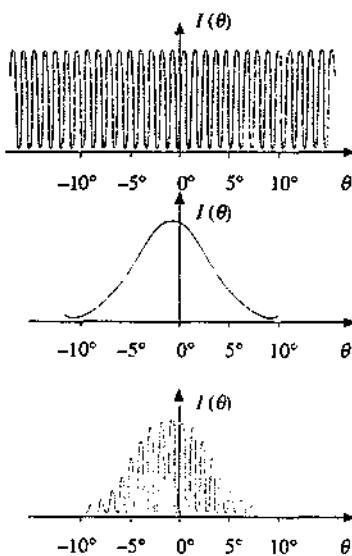


Figura 16.23

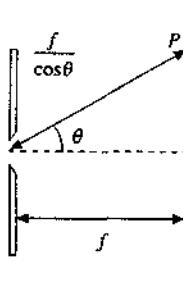


Figura 16.24

$$\lim_{a/\lambda \rightarrow 0} \left[ \frac{\sin \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}}{\frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}} \right]^2 = 1$$

e si ritrova appunto la (15.14), dedotta nell'ipotesi che l'intensità di ciascuna sorgente fosse costante al crescere di  $\theta$ .

Nella figura 16.23, calcolata numericamente per  $\lambda = 0.5 \mu\text{m}$ , sono riportati separatamente i vari termini. Poiché  $a/d = 1/10$  la decima frangia è assente; le frange corrispondenti a  $m = 8$  e  $m = 9$  hanno, applicando (16.13),  $R_8 = 0.055$  e  $R_9 = 0.012$ . Sono così osservabili, nell'ipotesi  $R_m > 0.05$ , la frangia centrale e  $8 \times 2 = 16$  frange laterali. È dunque la diffrazione dovuta all'apertura finita delle fenditure la causa fisica principale che limita l'osservazione di un gran numero di frange d'interferenza.

Gli altri fattori correttivi finora trascurati interverrebbero solamente se si potessero osservare frange ad angoli molto grandi. Essi sono dovuti al fattore di inclinazione e alla maggior distanza dalla fenditura dei punti dello schermo lontani dal centro; nell'ipotesi che una fenditura emetta un'onda cilindrica, l'intensità diminuisce come  $1/r$  e rispetto al centro invece che  $1/f$  ci vuole  $1/(f/\cos\theta) = \cos\theta/f$ , come si vede nella figura 16.24. Complessivamente il fattore di riduzione angolare risulta  $f^2(\theta) \cos\theta$ ; alcuni valori sono riportati nella tabella.

$\theta$	$f^2(\theta)$	$\cos\theta$	$f^2(\theta) \cos\theta$
0°	1	1	1
5°	0.996	0.996	0.992
15°	0.966	0.966	0.933
30°	0.871	0.866	0.754
45°	0.729	0.707	0.515
60°	0.563	0.500	0.282

Per valori piccoli di  $\theta$  la correzione è quasi trascurabile (< 1% fino a 5.7°, < 5% fino a 12.9°), c'è solo l'effetto della diffrazione.

Il reticolo descritto finora è detto *reticolo funzionante in trasmissione*; se le incisioni vengono fatte su una superficie riflettente abbiamo un reticolo funzionante in riflessione, per il quale si svolgono considerazioni analoghe.

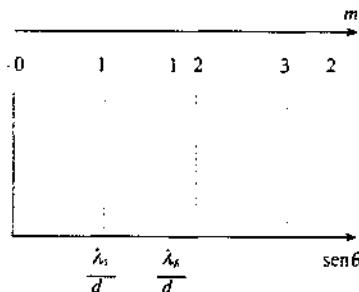


Figura 16.25

## 16.6 Potere dispersivo e potere risolutivo di un reticolo di diffrazione

Se la sorgente che illumina il reticolo non emette luce monocromatica, le differenti lunghezze d'onda che compongono la luce incidente producono massimi principali ad angoli diversi, in quanto la (16.11) dipende dalla lunghezza d'onda; solo il massimo di ordine zero si forma a  $\theta = 0$  per tutte le lunghezze d'onda.

Questa dipendenza dell'angolo di formazione dei massimi dalla lunghezza d'onda si chiama dispersione angolare, in analogia con la dispersione che si verifica nella trasmissione attraverso una superficie di discontinuità dell'indice di rifrazione, anche se si tratta di fenomeni ben diversi.

Fissato un valore dell'ordine  $m$ , l'insieme dei massimi che si formano per le diverse lunghezze d'onda prende il nome di spettro di ordine  $m$ , per cui si ha uno spettro del prim'ordine ( $m = 1$ ), uno del secondo ordine ( $m = 2$ ) e così via.

Quando l'illuminazione è in luce bianca, nella quale si trovano con continuità tutte le lunghezze d'onda comprese tra il viola  $\lambda_v = 0.4 \mu\text{m}$  e il rosso  $\lambda_R = 0.7 \mu\text{m}$ , lo spettro del prim'ordine è l'unico cosiddetto *puro*, dato che ad un certo angolo cor-

risponde un solo colore (questo perché  $\lambda_R < 2\lambda_V$ ). Invece negli spettri di ordine superiore si ha sovrapposizione tra spettri di ordine diverso. Ad esempio, nella direzione  $\theta_2$  alla quale si osserva il massimo del secondo ordine della luce rossa si osserva contemporaneamente il massimo del terz'ordine per la lunghezza d'onda  $\lambda$  tale che

$$\operatorname{sen}\theta_2 = \frac{2\lambda_R}{d} = \frac{3\lambda}{d} \Rightarrow \lambda = \frac{2}{3} \lambda_R \approx 0.47 \mu\text{m} ,$$

corrispondente al colore blu. Per questo motivo ai lati dei due spettri del prim'ordine, simmetrici rispetto al massimo di ordine zero e caratterizzati da una successione di colori dal violetto al rosso ( $\operatorname{sen}\theta_{1,V} < \operatorname{sen}\theta_{1,R}$ ), non si vede riprodotta la stessa successione di colori.

Da quanto detto risulta evidente la capacità del reticolo di diffrazione di analizzare la composizione della luce che lo colpisce, proprietà sfruttata per studiare le caratteristiche della sorgente luminosa. Allo scopo di discutere tale proprietà introduciamo il potere dispersivo e il potere risolutivo del reticolo.

### Potere dispersivo di un reticolo

Date due onde monocromatiche le cui lunghezze d'onda differiscono di  $d\lambda$ , i due massimi principali dello stesso ordine si formano a due angoli che differiscono di  $d\theta$ . Si definisce come *potere dispersivo* o semplicemente *dispersione* di un reticolo la grandezza

$$D = \frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{1}{d} \frac{m}{\cos\theta_m} , \quad (16.14) \quad \text{Dispersione}$$

dove l'ultima eguaglianza è stata ottenuta ricorrendo a (16.11). La dispersione aumenta al diminuire del passo del reticolo e, per un dato reticolo, all'aumentare dell'ordine dello spettro.

### Potere risolutivo di un reticolo

Per distinguere onde luminose con lunghezze d'onda molto vicine i massimi principali relativi a queste lunghezze d'onda devono avere larghezza angolare più piccola possibile. Il *potere risolutivo* si definisce seguendo il criterio di Rayleigh, utilizzato nel paragrafo 16.3 per definire il potere separatore di una lente.

Consideriamo due lunghezze d'onda  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , con  $\lambda_2 > \lambda_1$ , e un reticolo di passo  $d$  con  $N$  fenditure; i massimi principali di ordine  $m$  e i minimi ad essi adiacenti si formano agli angoli

$$\operatorname{sen}\theta_{m,i} = m \frac{\lambda_i}{d} , \quad \operatorname{sen}\theta'_{m,i} = m \frac{\lambda_i}{d} \pm \frac{\lambda_1}{Nd} ,$$

$$\operatorname{sen}\theta_{m,2} = m \frac{\lambda_2}{d} , \quad \operatorname{sen}\theta'_{m,2} = m \frac{\lambda_2}{d} \pm \frac{\lambda_2}{Nd} .$$

I due massimi sono appena risolvibili quando sono soddisfatte le condizioni

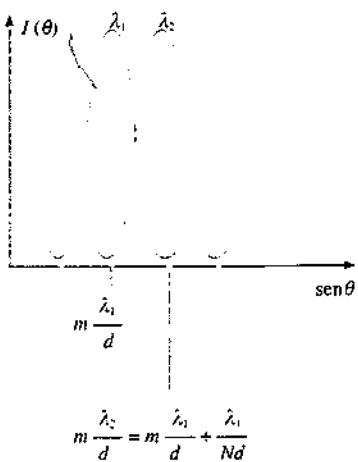


Figura 16.26

$$m \frac{\lambda_1}{d} + \frac{\lambda_1}{Nd} \approx m \frac{\lambda_2}{d} \Rightarrow m(\lambda_2 - \lambda_1) = \frac{\lambda_1}{N} ,$$

$$m \frac{\lambda_1}{d} = m \frac{\lambda_2}{d} - \frac{\lambda_2}{Nd} \Rightarrow m(\lambda_2 - \lambda_1) \approx \frac{\lambda_2}{N} .$$

Sommando si ottiene  $m(\lambda_2 - \lambda_1) \approx (\lambda_1 + \lambda_2)/2N$ ; si pone  $\lambda = (\lambda_1 + \lambda_2)/2$ ,  $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$  e si definisce *potere risolutivo* del reticolo all'ordine  $m$  la grandezza

Potere risolutivo

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = mN , \quad (16.15)$$

la quale esprime, per una data  $\lambda$ , la differenza  $\Delta\lambda$  risolvibile. Il *potere risolutivo* risulta *proporzionale al numero totale di fenditure* e aumenta con l'ordine dello spettro, ma non dipende dal passo del reticolo.

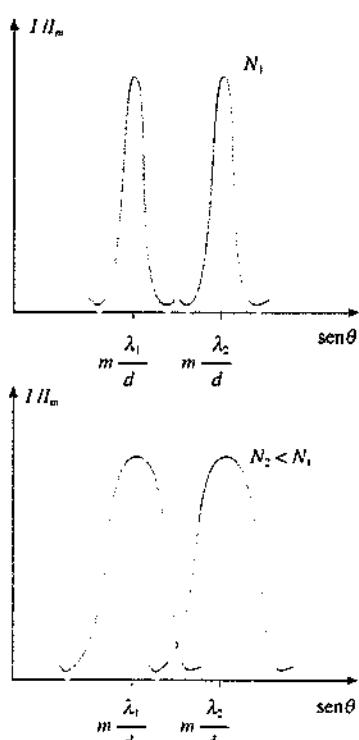


Figura 16.27

Osserviamo che la dispersione e il potere risolutivo si riferiscono a proprietà diverse: un reticolo con passo piccolo ha una buona dispersione, ma se è piccolo anche il numero di fenditure (al limite  $N = 2$ ) esso non è adatto a separare lunghezze d'onda molto vicine: i centri dei massimi sono ben distanziati, ma i massimi stessi sono larghi. Invece un reticolo con passo maggiore, ma con un gran numero di fenditure, ha dispersione minore e potere risolutivo superiore, essendo i massimi molto stretti.

Nella figura 16.27 sono riportate le intensità dei massimi di ordine  $m$  di due lunghezze d'onda, generati da due reticolari aventi la stessa dispersione e potere risolutivo diverso; tali reticolari hanno evidentemente passo eguale e differiscono per il numero totale di fenditure ovvero per la larghezza:  $N_1 > N_2$ ,  $L_1 = N_1 d > L_2 = N_2 d$ . È chiaro che con  $d$  piccolo e  $N$  grande si ha il risultato migliore sia per  $D$  che per  $R$ .

C'è da dire infine che malgrado la dispersione e la risoluzione non dipendano esplicitamente dalla larghezza  $a$  delle fenditure, questo parametro fissa in pratica il massimo valore di  $m$  utilizzabile e quindi i massimi valori di  $D$  e  $R$ , come si è visto nella discussione sull'intensità degli spettri di ordine superiore (paragrafo 16.5).

### Esempio 16.9

Una lampada al sodio, contenente sodio gassoso eccitato con una scarica elettrica, emette due lunghezze d'onda molto vicine, di valori  $\lambda_1 = 589.0$  nm e  $\lambda_2 = 589.6$  nm. Quante linee deve avere un reticolo affinché  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  siano appena risolvibili nello spettro del second'ordine?

### Soluzione

Si richiede un potere risolutivo

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{589.3}{0.6} = 982 \approx 10^3 .$$

Da (16.15) con  $m = 2$  si ricava  $N = 500$ .

**Esempio 16.10**

Un reticolo di diffrazione lungo  $L = 2.5$  cm ha  $N = 4000$  fenditure. Esso è illuminato con una luce verde di lunghezza d'onda  $\lambda = 0.546 \mu\text{m}$ , emessa da una lampada a vapori di mercurio. Calcolare il potere dispersivo al second'ordine e la minima differenza  $\Delta\lambda$  nell'intorno di  $\lambda$  che è risolvibile, sempre al second'ordine.

**Soluzione**

Il passo del reticolo è  $d = 6.25 \mu\text{m}$  e il massimo del second'ordine si forma per  $\sin\theta_2 = 2\lambda/d = 0.175$ , per cui  $\theta_2 = 0.176 \text{ rad} = 10.1^\circ$ . La larghezza angolare (16.12) vale

$$\Delta\theta_2 = \frac{2\lambda}{L \cos\theta_2} = 4.4 \cdot 10^{-5} \text{ rad} = 2.5 \cdot 10^{-3} \text{ gradi}$$

Il potere dispersivo e il potere risolutivo al second'ordine sono

$$D = \frac{2}{d \cos\theta_2} = 0.325 \text{ rad}/\mu\text{m} = 18.6 \text{ gradi}/\mu\text{m} \quad , \quad R = 2 \cdot 4000 = 8 \cdot 10^5$$

L'intervallo  $\Delta\lambda$  che si può risolvere vale

$$\Delta\lambda = \lambda/R = 6.83 \cdot 10^{-5} \text{ mm} = 6.83 \cdot 10^{-2} \text{ nm}$$

$$(\Delta\lambda/\lambda = 1.25 \cdot 10^{-4})$$

Utilizzando i valori trovati di  $\Delta\lambda$  e della dispersione  $D$  si ha, per la separazione angolare corrispondente a  $\Delta\lambda$ ,

$$\Delta\theta = D \Delta\lambda = 2.2 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$$

e si verifica che questo valore, essendo pari a metà della larghezza angolare  $\Delta\theta_2$  prima calcolata, è giustamente la separazione angolare che ci sarebbe tra due massimi dovuti alle lunghezze d'onda  $\lambda$  e  $\lambda + \Delta\lambda$  in condizioni di Rayleigh.

## 16.7 Spettroscopia con il reticolo di diffrazione

I reticolari di diffrazione hanno un'utilizzazione molto importante nell'analisi della radiazione elettromagnetica visibile emessa dalle varie sostanze opportunamente eccitate, *analisi* che viene chiamata *spettroscopica*.

L'apparecchio usato per la misura delle lunghezze d'onda emesse da una sorgente è mostrato schematicamente in figura 16.28; esso costituisce un esempio di spettroscopia a reticolo di diffrazione.

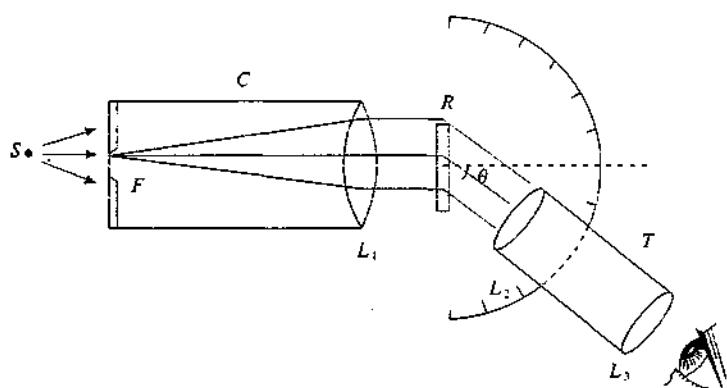


Figura 16.28

La luce emessa dalla sorgente  $S$  passa attraverso una sottile fenditura  $F$  posta nel piano focale della lente  $L_1$ ; l'insieme fenditura-lente costituisce il *collimatore C*. Da  $L_1$  emerge un fascio di raggi paralleli che incide ortogonalmente sul reticolo  $R$ . I raggi trasmessi dal reticolo secondo una certa direzione  $\theta$  sono focalizzati dal sistema di lenti  $L_2$  e  $L_3$  che costituiscono il *telescopio T* e possono essere osservati direttamente con l'occhio. Muovendo il telescopio non si osserva nulla a meno che esso non sia posizionato secondo una direzione  $\theta_\lambda$  che soddisfa alla (16.11):

$$\sin \theta_\lambda = m \frac{\lambda}{d}$$

Noto il passo  $d$  del reticolo, misurato l'angolo  $\theta_\lambda$  con un goniometro di precisione e individuato l'ordine  $m$ , si determina il valore della lunghezza d'onda.

In corrispondenza ad ogni angolo  $\theta_\lambda$  si osserva una *riga colorata*, caratteristica della lunghezza d'onda  $\lambda$ , che è l'*immagine della fenditura F data dallo spettroscopio*; a questa riga si dà il nome di *riga spettrale* (si veda la nota alla fine del paragrafo). L'insieme delle righe spettrali forma lo *spettro di emissione della sostanza* che costituisce la sorgente. Gli spettri di emissione si distinguono in:

1) *spettri a righe* corrispondenti ad una successione discreta di lunghezze d'onda e quindi di righe spettrali;

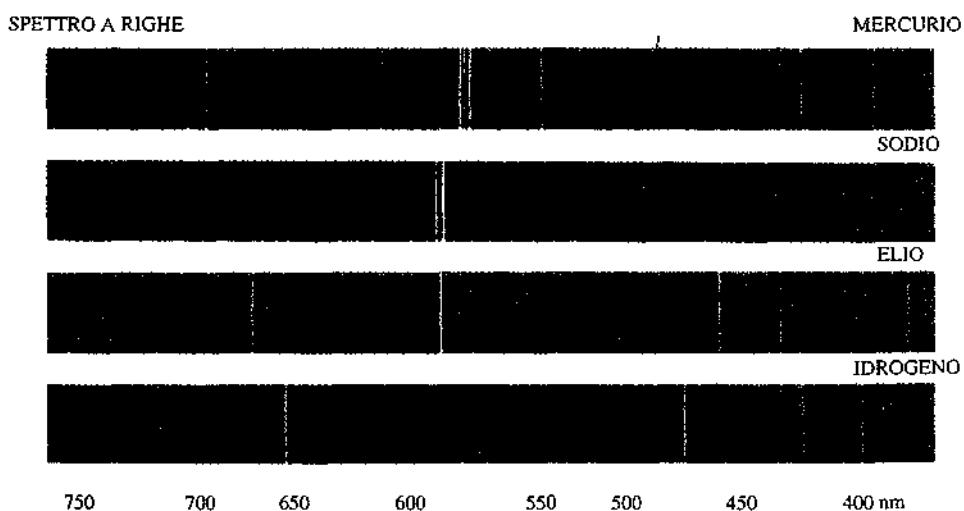
2) *spettri a bande* nei quali le righe sono addensate con continuità nell'intorno di certe lunghezze d'onda, formando delle bande di lunghezze d'onda tra loro separate;

3) *spettri continui*, consistenti in una successione continua di lunghezze d'onda all'interno di un intervallo relativamente largo.

Gli spettri a righe e gli spettri a bande sono emessi da *gas e vapori a pressione non troppo elevata*; i primi sono dovuti ad atomi isolati, i secondi a molecole biameriche o pluriatomiche. L'eccitazione può essere provocata dall'alta temperatura di una fiamma, come avviene ad esempio bruciando il sodio, oppure dal passaggio di corrente elettrica, come si realizza nelle lampade a scarica contenenti idrogeno, elio, neon, mercurio, sodio. Nella figura 16.29 sono riportati gli spettri a righe per l'idrogeno monoatomico, l'elio, il sodio e il mercurio.

Gli spettri a righe e a bande sono caratteristici degli elementi che li emettono; non vi sono spettri comuni a due elementi e neppure singole righe. Su questo fatto è basata l'analisi spettroscopica per il riconoscimento degli elementi. Come avremo modo di approfondire nel capitolo 18, lo spettro di emissione a righe è una conseguenza diretta della struttura dell'atomo, in cui gli elettroni possono occupare stati di energia quantizzati (vedi paragrafi 2.3 e 13.8). La conoscenza dello spettro di emissione di un atomo permette così di avere una conoscenza diretta dei *livelli energetici*.

### Spettri d'emissione



Gli spettri continui sono invece emessi da solidi e liquidi portati a temperatura elevata; un esempio sono i filamenti delle comuni lampadine a incandescenza (vedi figura 13.41). Le caratteristiche di questi spettri di emissione dipendono dalla temperatura di equilibrio e anzi si può dire con buona approssimazione che ad una stessa temperatura tutti i corpi hanno lo stesso spettro di emissione.

Il *deuterio*, isotopo dell'idrogeno con il nucleo formato da un protone e da un neutrone invece che da un solo protone, venne scoperto nel 1932 analizzando con uno spettroscopio a reticolo lo spettro di una lampada contenente idrogeno. Accanto alla riga azzurra con  $\lambda = 486.1$  nm, tipica dell'idrogeno, venne osservata per la prima volta una riga molto debole, separata soltanto di  $0.13$  nm, correttamente interpretata come il segnale della presenza, in piccola percentuale, di una diversa specie atomica. Il potere risolutivo necessario per questa misura è dell'ordine di  $4 \cdot 10^3$ .

### Spettri di assorbimento

Se esaminiamo con uno spettrometro a reticolo la luce emessa da un filamento incandescente e puntiamo il telescopio nella regione angolare corrispondente alle direzioni dello spettro del prim'ordine, osserviamo una striscia continua di colori dal violetto al rosso. Supponiamo ora di interporre tra la lampada e il reticolo un recipiente di vetro trasparente riempito ad esempio con vapori di sodio: lo spettro

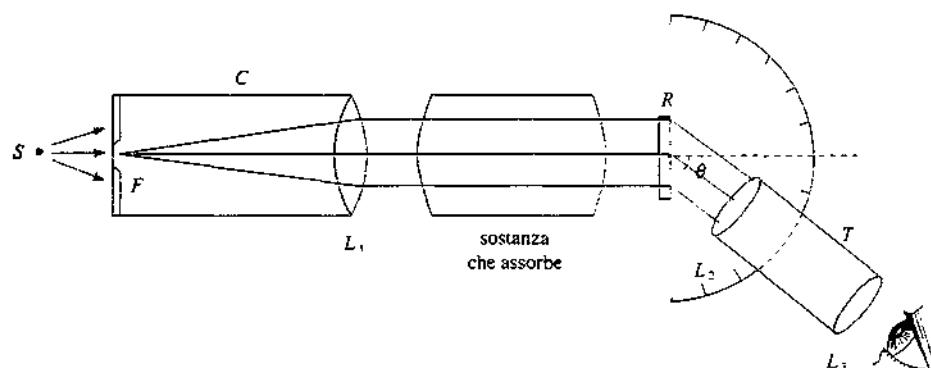


Figura 16.30

continuo colorato appare solcato da due linee nere, in una posizione che corrisponde alle due lunghezze d'onda citate nell'esempio 16.9. Si dice che il sodio ha *assorbito* le due lunghezze d'onda e le due linee nere vengono chiamate *righe di assorbimento*. Interponendo varie sostanze si osserva ogni volta una serie diversa di righe di assorbimento che nel loro complesso costituiscono uno *spettro di assorbimento*.

Spettri di assorbimento

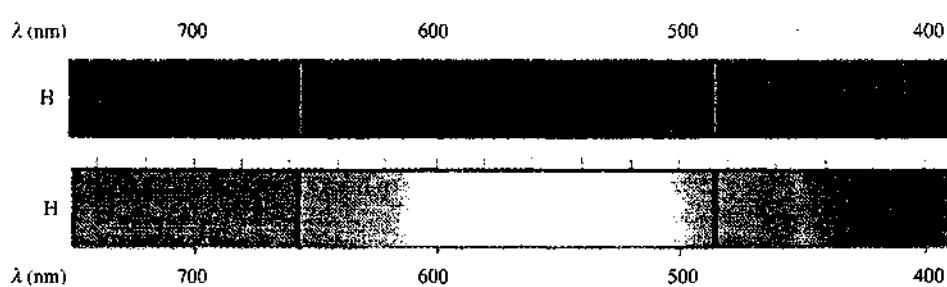
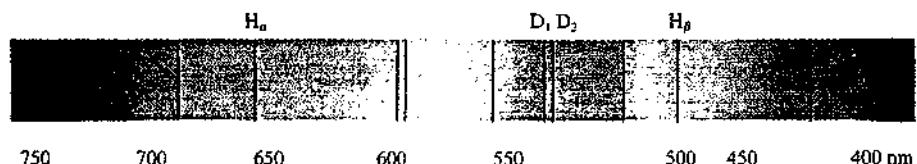


Figura 16.31

## Regola di Kirchhoff

Anche l'assorbimento è dovuto agli atomi e alle molecole della sostanza interposta e di nuovo gli spettri sono rispettivamente a righe e a bande. Nella figura 16.31 si osserva una corrispondenza tra righe di assorbimento e righe di emissione e a questo proposito vale la *regola di Kirchhoff*, giustificata nel capitolo 18, secondo cui ogni sostanza è in grado di assorbire le radiazioni che, nelle stesse condizioni, è capace di emettere.



**Figura 16.32** Tra le righe di Fraunhofer sono indicate in particolare due righe dell'idrogeno e due del sodio.

La figura 16.32 mostra lo spettro solare: in esso si osservano un gran numero di righe nere (*righe di Fraunhofer*) che rappresentano lo spettro di assorbimento dell'insieme degli elementi presenti sulla superficie solare (*cromosfera*) su un fondo continuo che corrisponde all'emissione di un corpo alla temperatura  $T = 6000\text{ K}$ . Anche gli spettri di assorbimento possono quindi essere utilizzati per il riconoscimento degli elementi.

La radiazione assorbita dagli atomi della sostanza interposta viene da questi diffusa in tutte le direzioni, indipendentemente dalla direzione di propagazione della luce incidente (possiamo riferirci al meccanismo descritto nel paragrafo 13.6). Lo si verifica facilmente analizzando ad esempio la luce diffusa dai vapori di sodio prima citati, nella quale si ritrovano principalmente le due lunghezze d'onda corrispondenti alle righe di assorbimento.

#### Nota. Larghezza delle righe spettrali

Abbiamo già detto nel paragrafo 12.10 che l'emissione luminosa da parte di un atomo può essere rappresentata con un pacchetto d'onde di durata  $\Delta t = 10^{-8}\text{ s}$  nel quale sono necessariamente presenti molte lunghezze d'onda in un intervallo  $\Delta\lambda$  centrato intorno al valor medio  $\lambda$ , con  $\Delta\lambda/\lambda = 10^{-7}$ . L'argomento classico è confermato dalla trattazione quantistica, che porta ai valori suddetti.

Ad un certo intervallo  $\Delta\lambda$  è associata, in base a (16.11), una variazione  $\Delta\theta_\lambda$  dell'angolo  $\theta_\lambda$  al quale si osserva il massimo di ordine  $m$  e in prima approssimazione, se gli angoli sono piccoli, possiamo porre

$$\Delta\theta_\lambda = \frac{m}{d} \Delta\lambda .$$

Confrontiamo questa *larghezza*  $\Delta\theta_\lambda$ , che è *intrinseca della riga* e si può chiamare *larghezza naturale* della riga, con la *larghezza strumentale* (16.12) introdotta dal reticolo:

$$\frac{\Delta\theta_\lambda}{\Delta\theta} = \frac{m}{d} \Delta\lambda \frac{Nd}{2\lambda} = m N \frac{1}{2} \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = m N 0.5 \cdot 10^{-7} .$$

In un reticolo con  $N = 10^4$  e all'ordine  $m = 2$   $\Delta\theta_\lambda/\Delta\theta = 10^{-5}$ : la larghezza naturale è trascurabile rispetto alla larghezza strumentale, ovvero la larghezza osservata è esclusivamente quella strumentale.

Osserviamo anche che il suddetto reticolo ha il potere risolutivo  $R = m N = 2 \cdot 10^4$  e che quindi  $\Delta\lambda/\lambda = 1/R = 5 \cdot 10^{-5}$ , molto maggiore di  $\Delta\lambda/\lambda = 10^{-7}$ : il reticolo può risolvere due righe vicine, ma non misurare la larghezza naturale; una riga cioè appare di sicuro monocromatica.

## 16.8 Fenomeni di diffrazione di Fresnel

Abbiamo già osservato nel paragrafo 16.1 che i fenomeni di diffrazione di Fresnel hanno luogo quando o la sorgente delle onde o il punto di osservazione o entrambi sono a distanza finita dall'apertura o dall'ostacolo che perturbano il fronte d'onda.

Dato che la trattazione analitica è abbastanza complicata, ci limitiamo a discutere alcuni casi in cui un'onda piana incide su un'apertura praticata su uno schermo opaco o su un ostacolo e l'osservazione avviene a distanza finita da questi, ma pur sempre grande rispetto alla lunghezza  $\lambda$  della luce incidente. Per il calcolo utilizziamo un metodo elaborato dallo stesso Fresnel che consiste nel suddividere il fronte d'onda piano incidente in zone opportunamente definite, ognuna delle quali viene vista dal punto  $P$  in cui calcoliamo gli effetti della diffrazione come sorgente di onde sferiche secondarie. Si tratta cioè di una applicazione particolare del principio di Huygens-Fresnel, adatta al problema che si vuole risolvere.

Con riferimento alla figura 16.33 consideriamo un fronte d'onda piano che si propaga verso  $P$  e indichiamo con  $r_0 = OP$  la distanza di  $P$  dal fronte d'onda. Suddividiamo questo in tante zone anulari concentriche aventi  $O$  come centro, definite dalla condizione che le distanze da  $P$  del bordo interno e del bordo esterno di ciascuna zona differiscano di  $\lambda/2$ . Pertanto il bordo del disco centrale, detto *prima zona di Fresnel*, dista da  $P$   $r_1 = r_0 + \lambda/2$ , il bordo esterno del primo anello, detto *seconda zona di Fresnel*, dista da  $P$   $r_2 = r_1 + \lambda/2 = r_0 + \lambda$  e così via, come indicato nella figura. In generale quindi

$$r_n = r_{n-1} + \frac{\lambda}{2} = r_0 + n \frac{\lambda}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

I raggi delle circonferenze che delimitano le *zone di Fresnel* sono dati da

$$R_n^2 = r_n^2 - r_0^2 = \left( r_0 + n \frac{\lambda}{2} \right)^2 - r_0^2 = n r_0 \lambda + n^2 \frac{\lambda^2}{4} = n r_0 \lambda \quad . \quad (16.16)$$

dove l'approssimazione è consistente con l'ipotesi  $\lambda \ll r_0$ .

Il campo elettrico in  $P$  si ottiene come somma dei campi elettrici  $E_n$  provenienti dalle singole zone. Osserviamo che le aree delle zone di Fresnel,

$$\Sigma_n = \pi (R_n^2 - R_{n-1}^2) = \pi [n r_0 \lambda - (n-1) r_0 \lambda] = \pi r_0 \lambda \quad ,$$

risultano tutte eguali tra loro, non dipendendo da  $n$ . Quindi le ampiezze delle onde emesse dalle varie zone sono diverse in  $P$  soltanto a causa del *fattore di inclinazione* e della distanza, diminuendo al crescere dell'ordine  $n$  della zona.

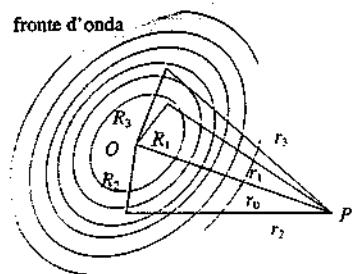
La valutazione del campo elettrico risultante  $E_P$  viene compiuta applicando il metodo dei vettori rotanti. Ciascuna zona finita è considerata a sua volta come formata da un numero infinito di elementi di superficie anulari infinitesimi, ognuna delle quali emette un'onda di ampiezza infinitesima. La differenza di fase tra le onde emesse dai bordi interno ed esterno di ciascuna zona è

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} (r_n - r_{n-1}) = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{2} = \pi \quad .$$

Ciò significa che disegnando gli infiniti vettori infinitesimi relativi alla prima zona di Fresnel otteniamo una semicirconferenza il cui diametro  $OA$  dà il campo elettrico  $E_1$  dell'onda emessa dalla prima zona (vedi figura 16.34). Per la seconda zona di Fresnel, partendo da  $A$  abbiamo ancora una semicirconferenza il cui diametro  $AB$  rappresenta il campo  $E_2$ ; il punto  $B$  non coincide con  $O$  in quanto il modulo  $E_2 < E_1$ , come si è giustificato sopra. Proseguendo con la stessa costruzione si intuisce che il punto finale è il punto  $O'$ , centro del segmento  $OA$ , per cui  $OO'$ , rappresentazione di  $E_P$ , è la metà di  $OA$ , rappresentazione di  $E_1$ :

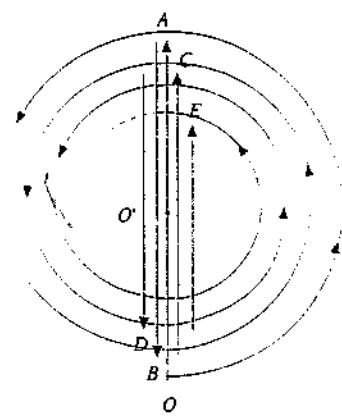
$$E_P = \frac{1}{2} E_1, \quad I_P = \frac{1}{4} I_1 \quad .$$

L'intensità luminosa in  $P$  prodotta da un fronte d'onda indefinito è pari ad un quarto dell'intensità prodotta dalla prima zona: la diminuzione è dovuta all'interferenza distruttiva tra le varie zone.



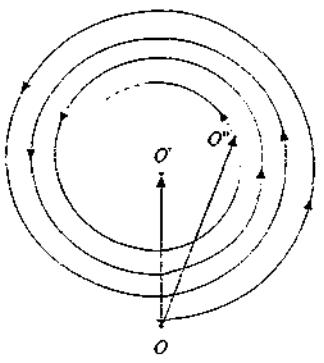
$$r_1 = r_0 + \frac{\lambda}{2}, \quad r_2 = r_0 + \lambda, \\ r_3 = r_0 + 3 \frac{\lambda}{2}, \quad \dots$$

Figura 16.33



$$OA = E_1, \quad AB = E_2, \\ BC = E_3, \dots \\ OO' = E_P$$

Figura 16.34



$$E_P = E_1 - E_2 + E_3 - E_4 + \dots$$

Figura 16.35

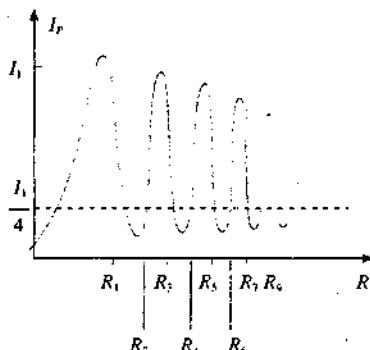


Figura 16.36

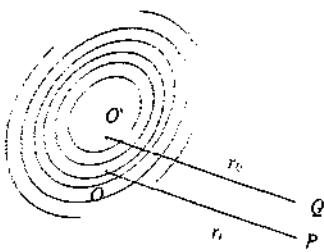


Figura 16.37



Figura 16.38

Lo stesso risultato si ottiene anche scrivendo

$$E_P = E_1 - E_2 + E_3 - E_4 + \dots = \frac{1}{2} E_1 + \frac{1}{2} (E_1 - 2E_2 + E_3) + \frac{1}{2} (E_3 - 2E_4 + E_5) + \dots = \frac{1}{2} E_1 .$$

I segni più e meno alternati sono dovuti alle successive differenze di fase di  $\pi$  e i termini tra parentesi si considerano nulli in quanto si ammette che per effetto dell'interferenza il contributo di ciascuna zona di Fresnel con  $n$  pari sia compensato dai contributi delle due semizone dispari adiacenti.

### Difrazione di un foro circolare

Per quanto detto è evidente che, fissato un punto  $P$  distante  $r_0$  dal piano d'onda, ad ogni disco di raggio  $R$  ( $0 \leq R < \infty$ ) tracciato sul piano come in figura 16.33 è associato, sulla curva a spirale dei vettori rotanti un punto  $O''$ , ovvero un vettore  $OO''$  la cui ampiezza dà l'ampiezza del campo elettrico  $E_P$  prodotto in  $P$  dalla porzione del fronte d'onda coincidente col disco. Quando  $R$  egualia il raggio di una delle zone di Fresnel il punto  $O''$  sta sulla verticale passante per  $O$ .

Il ragionamento svolto finora può apparire puramente formale; se ne scopre però l'utilità non appena si interpone sul fronte d'onda, a distanza  $r_0$  da  $P$ , uno schermo opaco con un foro di raggio  $R$ :  $OO''$  dà l'ampiezza del campo elettrico trasmesso dal foro e l'intensità  $I_P$  è proporzionale a  $(OO'')^2$ . Facendo variare con continuità  $R$  da zero a infinito si ottiene per  $I_P$  l'andamento mostrato in figura 16.36: a causa dell'interferenza tra le varie porzioni del fronte d'onda l'intensità dipende fortemente dal raggio del foro. I punti di massima intensità si hanno quando il foro comprende esattamente un numero dispari di zone di Fresnel, cioè per raggi  $R$  pari a  $R_1 = \sqrt{r_0 \lambda}$ ,  $R_3 = \sqrt{3} R_1$ ,  $R_5 = \sqrt{5} R_1$ , ... secondo (16.16); i punti di minima intensità si osservano invece con i raggi  $R_2 = \sqrt{2} R_1$ ,  $R_4 = 2R_1$ ,  $R_6 = \sqrt{6} R_1$ , ..., cioè quando il foro ricopre esattamente un numero pari di zone di Fresnel; la linea tratteggiata rappresenta l'intensità in assenza dello schermo col foro. I valori dei massimi sono decrescenti e quelli dei minimi crescenti perché le ampiezze dei campi decrescono all'aumentare di  $R$ :

$$E_1 > E_1 - E_2 + E_3 > E_1 - E_2 + E_3 - E_4 + E_5 > \dots , E_1 - E_2 < E_1 - E_2 + E_3 - E_4 < \dots .$$

Quanto discusso avviene sull'asse del foro. Per determinare l'intensità in un punto  $Q$  che non sta sull'asse  $OP$  occorre tener presente che il sistema di zone di Fresnel è caratteristico del punto di osservazione: spostandosi da  $P$  a  $Q$  parallelamente al piano del foro le zone di Fresnel si spostano rigidamente con  $Q$ . In una generica posizione l'ampiezza  $E_Q$  risulta dalla sovrapposizione dei campi di quelle porzioni di zone intersecate dal foro (figura 16.37). Anche quando il punto  $Q$  è nella zona d'ombra geometrica in esso si osserva un'intensità non nulla.

La figura di diffrazione completa osservata sullo schermo distante  $r_0$  dal foro consta di una serie di corone circolari alternativamente chiare e scure, con il centro chiaro se  $R = R_1, R_3, R_5, \dots$  scuro se  $R = R_2, R_4, R_6, \dots$ . Due esempi sono mostrati in figura 16.38.

Supponiamo ora di cambiare la distanza  $r_0$  mantenendo costanti la lunghezza d'onda  $\lambda$  e il raggio  $R$  del foro. Ad ogni valore di  $r_0$  è associato un sistema d'azione di Fresnel in quanto i raggi delle zone dipendono da  $r_0$  secondo (16.16); ci sono valori di  $r_0$  per i quali nel foro cadono un numero dispari di zone e valori per i quali invece le zone coincidenti col foro sono in numero pari: ai primi valori corrispondono massimi di intensità sull'asse, ai secondi minimi di intensità. Trattiamo numericamente questa situazione nel successivo esempio.

### Esempio 16.11

Un'onda piana monocromatica di lunghezza d'onda  $\lambda = 0.685 \mu\text{m}$  incide su un'apertura circolare di raggio  $R = 2 \text{ mm}$ . Determinare a quali distanze lungo l'asse del foro si osservano massimi di intensità e a quali distanze minimi di intensità.

#### Soluzione

Fissato un punto  $P$  sull'asse del foro a distanza  $r_0$ , costruiamo il corrispondente sistema di zone di Fresnel. Se  $r_0$  è tale che  $R^2 = r_0 \lambda$ , il foro corrisponde alla prima zona di

Fresnel e in  $P$  si ha un massimo di intensità. Nel nostro caso

$$r_0 = \frac{R^2}{\lambda} = \frac{4 \cdot 10^{-6}}{0.685 \cdot 10^{-6}} = 5.84 \text{ m}$$

Al crescere di  $r_0$  i raggi delle zone di Fresnel crescono e quindi se  $r_0$  supera 5.84 m il foro coincide con una parte interna alla prima zona di Fresnel: ciò vuol dire che all'aumentare di  $r_0$  oltre 5.84 m l'intensità decresce monotonicamente senza presentare massimi o minimi.

Osserviamo che per  $r_0 = 5.84 \text{ m}$  i raggi che provengono dal bordo del foro hanno rispetto all'asse un'inclinazione

$$\theta = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{5.84} = 3.4 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \approx 0.02 \text{ gradi}$$

e possono essere considerati praticamente paralleli. Guardando la figura di diffrazione su uno schermo posto oltre 5.84 m si nota che essa tende, allontanando lo schermo, alla figura di diffrazione di Fraunhofer, discussa nel paragrafo 16.3.

Avviciniamo ora lo schermo riducendo il valore di  $r_0$  al di sotto di 5.84 m. Troviamo *massimi di intensità* nel punto  $P$  ogni volta  $R^2 = nr_0\lambda$  con  $n$  dispari, ovvero quando

$$r_0 = \frac{R^2}{n\lambda} \quad n = 3, 5, 7, \dots$$

$$r_3 = 1.95 \text{ m}, r_5 = 1.17 \text{ m}, r_7 = 0.83 \text{ m}, \dots$$

Si hanno invece *minimi di intensità* per quelle distanze  $r_0$  che soddisfano alla condizione

$$r_0 = \frac{R^2}{n\lambda} \quad n = 2, 4, 6, \dots$$

$$r_2 = 2.92 \text{ m}, r_4 = 1.46 \text{ m}, r_6 = 0.97 \text{ m}, \dots$$

Le distanze tra le posizioni di massimi e minimi diminuiscono avvicinandosi al foro e diminuiscono anche le intensità dei massimi perché sono sempre di più le zone di Fresnel che contribuiscono. Le figure di diffrazione sono sempre costituite da corone circolari alternativamente chiare e scure, con il centro chiaro alle distanze  $r_1, r_3, r_5, \dots$  e scuro alle distanze  $r_2, r_4, r_6, \dots$ .

Ponendosi in una posizione di massimo abbastanza vicina al foro, in modo che questo copra molte zone di Fresnel, si trova che la variazione radiale dell'intensità è quella mostrata in figura 16.39: i massimi corrispondono alle corone circolari chiare e i minimi alle corone circolari scure (vedi figura 16.38). Detto  $I_0$  il valore medio dell'intensità si vede che in corrispondenza al bordo del foro l'intensità è  $I_0 / 4$  e che c'è intensità nella zona d'ombra geometrica.

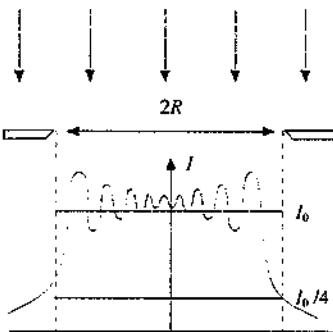


Figura 16.39

### Reticolo zonato di Soret

Nel punto  $P$  si può avere un'intensità notevole se si interpone sul fronte d'onda, a distanza  $r_0$  da  $P$ , una sottile lastra di vetro in cui sono tracciate una serie di corone circolari opache disposte in modo da intercettare, per quel valore di  $r_0$  e  $\lambda$ , le zone dispari di Fresnel lasciando scoperte quelle di ordine pari o viceversa. In tali condizioni si ha solo interferenza costruttiva ( $E_P = E_2 + E_4 + E_6 + \dots$  oppure  $E_P = E_1 + E_3 + E_5 + \dots$ ) e l'intensità in  $P$  risulta molto maggiore che se si lasciassero interferire tutte le porzioni del fronte d'onda.

Il dispositivo è detto *reticolo zonato di Soret*. Se fissiamo la lunghezza d'onda  $\lambda$  e le dimensioni del dischetto centrale, cioè il raggio  $R_1$ , sono automaticamente fissati tutti i raggi delle zone di Fresnel dalla condizione che le aree delle corone circolari siano eguali ed è fis-

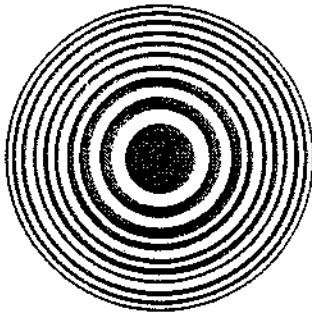


Figura 16.40

sata la distanza  $r_0$  che corrisponde a questo sistema di zone. Un'onda piana monocromatica incidente con quella data  $\lambda$  viene in parte concentrata nel punto  $P$  distante  $r_0$  dal centro del reticolo zonato e quindi possiamo considerare che questo si comporti come una *lente convergente* di focale

$$f = r_0 = \frac{R^2}{\lambda} = \frac{R^2}{n\lambda} \quad (16.17)$$

Sappiamo che per una distanza  $r < r_0$  i raggi delle zone di Fresnel relative a  $r$  sono inferiori ai raggi delle corrispondenti zone relative a  $r_0$ . Quindi esiste una distanza  $r < r_0$  tale che in una corona circolare trasparente del reticolo zonato cadano tre zone di Fresnel invece che una, oppure cinque o sette o in generale un numero dispari di zone maggiore di uno. Per tutte le distanze che soddisfano a questa condizione abbiamo un massimo secondario di intensità: a differenza della lente che dà una sola immagine il reticolo zonato ne può dare molte.

#### *Diffrazione di un disco opaco*

Consideriamo ora la diffrazione subita da un'onda piana di lunghezza d'onda  $\lambda$  che incide ortogonalmente su un disco opaco di raggio  $R$ , osservando cosa succede in un punto  $P$  posto a distanza  $r_0$  dal disco.

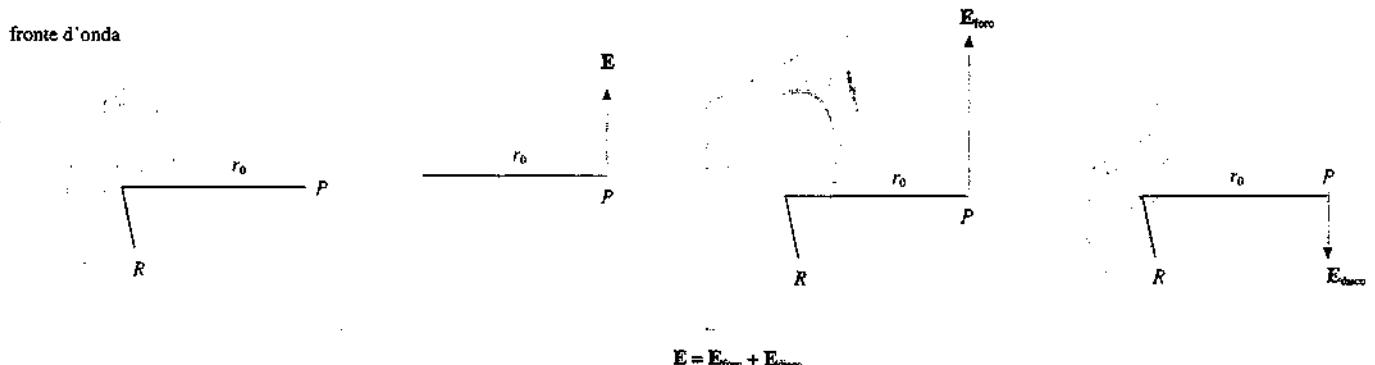


Figura 16.41

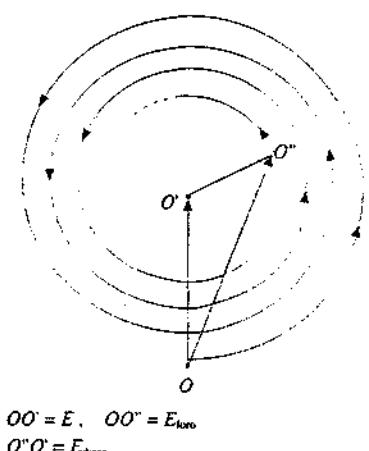


Figura 16.42

Il campo elettrico  $E_{\text{disc}}$  dell'onda diffritta si ottiene utilizzando il principio di sovrapposizione schematizzato in figura 16.41. Detto  $\mathbf{E}$  il campo elettrico nella situazione senza ostacoli, si può porre

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{disc}} + \mathbf{E}_{\text{foro}} \Rightarrow \mathbf{E}_{\text{disc}} = \mathbf{E} - \mathbf{E}_{\text{foro}}$$

Ricordiamo che  $E \approx E_0 / 2$ , rappresentato dal vettore  $OO'$ , e che  $E_{\text{foro}}$  è rappresentato da  $O''O$ ; seguendo la figura 16.42 deduciamo che  $E_{\text{disc}}$  è rappresentato da  $O''O'$ .

All'aumentare del raggio  $R$ ,  $O''$  tende a  $O'$ , l'intensità  $I_{\text{disc}}$ , proporzionale a  $(O''O')^2$ , tende a zero, restando però sempre diversa da zero per dimensioni finite. Quindi in  $P$ , indipendentemente dal raggio del disco, si osserva sempre un punto luminoso.

Tale punto luminoso situato dietro un ostacolo era stato osservato per la prima volta da Maraldi verso il 1700, ma il fatto venne dimenticato. Quando Fresnel nel 1818 presentò la sua teoria della diffrazione, sostenendo quindi la natura ondulatoria della luce, Poisson dedusse matematicamente che, se la teoria era vera, doveva esserci un punto luminoso dietro un ostacolo opaco e concluse che la teoria era inverosimile. Invece Arago eseguì l'esperimento, ritrovò il punto luminoso di Maraldi e confermò la validità delle ipotesi di Fresnel. Per ironia della sorte il punto luminoso in questione è chiamato *punto luminoso di Poisson*.

**Esempio 16.12**

Un'onda piana con  $\lambda = 0.685 \mu\text{m}$  incide perpendicolarmente su un disco opaco di raggio  $R = 2 \text{ mm}$ . Confrontare l'intensità osservata in un punto  $P_1$  sull'asse del disco alla distanza  $r_1 = 5.84 \text{ m}$  con l'intensità  $I_0$  in assenza del disco. Ripetere il calcolo per un punto  $P_2$  distante  $r_2 = 2.92 \text{ m}$ .

**Soluzione**

Nella posizione  $r_1$ , riprendendo i risultati dell'esempio 16.11, il disco opaco copre la prima zona di Fresnel relativa a  $P_1$ , per cui  $E_{\text{fres}} = 2E$  se  $E$  è l'ampiezza che sarebbe prodotta dal fronte d'onda completo. Pertanto

$$E_{\text{disco}} = E - E_{\text{fres}} = -E, \quad I_{\text{disco}} \approx I.$$

l'intensità in  $P_1$  è la stessa di quella in assenza del disco opaco. In  $P_2$ , a distanza  $r_2 = r_1/2$ ,  $E_{\text{fres}} = 0$  per cui

$$E_{\text{disco}} = E - E_{\text{fres}} = E, \quad I_{\text{disco}} = I$$

e si ha la stessa intensità che a distanza  $r_1$ .

La figura di diffrazione completa consiste ancora di una serie di anelli scuri e chiari che circondano *in ogni caso* un dischetto centrale chiaro.

**Diffrazione di un ostacolo piano**

Prendiamo infine in considerazione un ostacolo piano opaco delimitato da uno spigolo netto, come potrebbe essere il bordo di una fenditura rettilinea indefinita o il filo di una lama. L'onda incidente è piana e monocromatica, con fronte d'onda parallelo al piano contenente l'ostacolo.

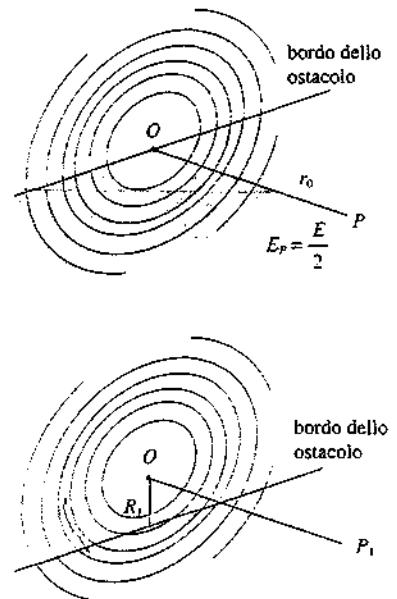
Ponendosi in un punto  $P$  a distanza  $r_0$  dal bordo e costruendo il relativo sistema di zone di Fresnel, si osserva che queste sono tutte tagliate a metà dal bordo dell'ostacolo. Se  $E$  è l'ampiezza del campo elettrico prodotto in  $P$  dall'intero fronte d'onda, l'ampiezza in presenza dell'ostacolo è  $E_P = E/2$  e l'intensità  $I_P = I/4$ . In un punto  $P_1$ , posizionato come mostrato in figura 16.43 e distante da  $P$   $R_1 = \sqrt{r_0 \lambda}$ , la prima zona di Fresnel contribuisce completamente all'intensità; per le altre si può dire che ciascuna zona pari è tagliata un po' meno della successiva zona dispari, così che il contributo da sottrarre è minore che in assenza dell'ostacolo e l'intensità in  $P_1$  risulta maggiore dell'intensità  $I$  senza ostacolo. Nella figura 16.44 è mostrato l'andamento dell'intensità trasversalmente all'asse  $OP$ : si vede che c'è intensità nella zona d'ombra geometrica, che le variazioni si hanno in vicinanza della proiezione del bordo e che allontanandosi da questa l'intensità tende al valore costante  $I$ . Analogamente al crescere della distanza  $r_0$  questi effetti di diffrazione tendono a scomparire. Infine nella figura 16.45 è mostrata la figura di diffrazione di una fenditura (due bordi con spigolo netto) in vicinanza della stessa e all'infinito, dove si ritrova il risultato di Fraunhofer.

**16.9 Olografia**

Un'onda piana monocromatica che si propaga lungo l'asse  $x$  e incide su una lastra fotografica produce su questa un annerimento che dipende localmente dall'intensità che ha colpito la lastra durante il tempo di esposizione e che quindi, per l'onda piana, è uniforme. Supponiamo che in un punto  $P$ , posto a distanza  $x_0$  dalla lastra, ci sia una sferetta molto piccola, la quale diffonde, attraverso un meccanismo del tipo discusso nel paragrafo 13.8, la luce incidente dando origine ad un'onda sferica coerente con l'onda primaria e quindi capace di interferire con essa.

In un punto  $Q$  della lastra  $L$  distante  $r$  da  $P$  e  $z$  dall'asse  $x$  si osserva pertanto l'interferenza tra l'onda primaria  $E_{\text{rif}}$ , che chiamiamo *onda di riferimento*, e l'onda sferica  $E_{\text{ogg}}$  proveniente da  $P$ , che chiamiamo *onda oggetto*:

$$E_{\text{rif}} = E_0 \cos(kx_0 - \omega t), \quad E_{\text{ogg}} = E(r) \cos(kr - \omega t).$$

**Figura 16.43**

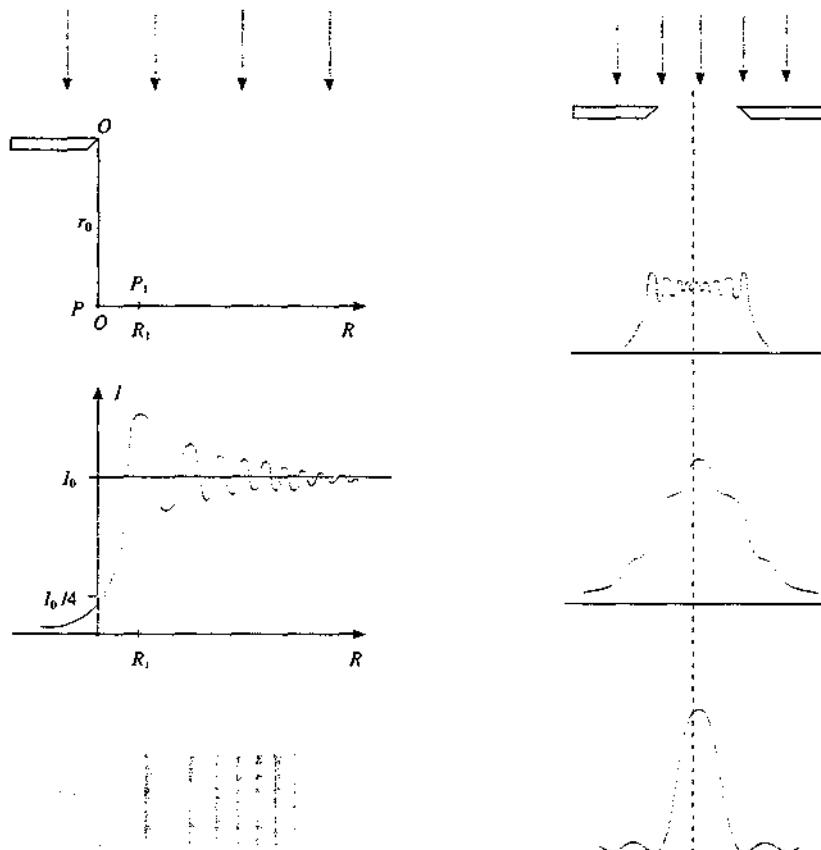


Figura 16.44

Figura 16.45

La differenza di fase tra le onde nel punto  $Q$  è

$$\delta(r) = k(r - x_0) = \frac{kz^2}{2x_0} ,$$

dove si è usata l'approssimazione, valida se  $z \ll x_0$ ,

$$r = \sqrt{x_0^2 + z^2} = x_0 \sqrt{1 + \frac{z^2}{x_0^2}} = x_0 \left(1 + \frac{z^2}{2x_0^2}\right)^{1/2} .$$

L'intensità della luce nel punto  $Q$ , ovvero nei punti di una circonferenza di raggio  $z$ , è proporzionale a

$$E_0^2 + E^2(r) + 2E_0 E(r) \cos \delta(r) \approx E_0^2 \left[1 + 2 \frac{E(r)}{E_0} \cos \frac{kz^2}{2x_0}\right] ,$$

tralasciando  $E^2(r)$  rispetto a  $E_0^2$ .

La lastra fotografica registra la figura di interferenza in forma di anelli alternativamente scuri e chiari che compaiono su di essa dopo lo sviluppo: le zone scure corrispondono a massimi di interferenza, le zone chiare a minimi. I raggi  $z$  sono:

$$\max \quad \cos \delta = 1 \quad , \quad \frac{kz^2}{2x_0} = 2m\pi \quad , \quad z = \sqrt{2m\lambda x_0} \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (16.18)$$

$$\min \quad \cos \delta = -1 \quad , \quad \frac{kz^2}{2x_0} = (2m+1)\pi \quad , \quad z = \sqrt{(2m+1)\lambda x_0} \quad , \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

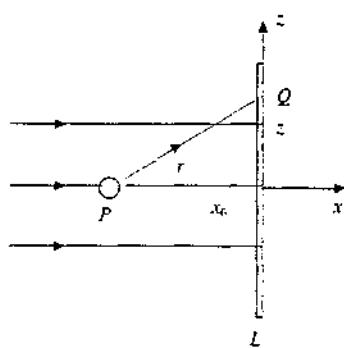


Figura 16.46

Nella figura 16.47 sulla lastra sono colorate le zone in cui si hanno i massimi, mentre sono state lasciate bianche le zone dei minimi (non nulli); gli anelli accanto rappresentano il negativo della lastra.

Osserviamo che nella figura di interferenza sono registrate le informazioni sull'ampiezza e sulla fase dell'onda diffusa che ha contribuito ad impressionare la lastra: l'informazione sull'ampiezza è data dal *grado di annerimento* e quella sulla fase è contenuta nella coordinata  $z$ , legata a  $\delta$ . A questa figura di interferenza si dà il nome di *ologramma* dell'oggetto puntiforme  $P$ .

Supponiamo di illuminare la lastra fotografica sviluppata con lo stesso fascio di luce con cui l'abbiamo prodotta (fascio di riferimento). La struttura degli anelli chiari e scuri che costituiscono l'ologramma è quella caratteristica di un reticolo zonato di Soret (paragrafo 16.7); il raggio del dischetto scuro centrale, eguale al raggio della prima posizione di minimo, vale secondo (16.18)  $z_1 = \sqrt{\lambda} x_0$  ed è quindi anche eguale al raggio  $R_1$  della prima zona di Fresnel relativa ad un punto  $P'$  distante  $x_0$  dall'oggetto, secondo (16.16). Pertanto le onde diffratte dalle aperture anulari (anelli chiari) vengono focalizzate, in accordo con (16.17), nel punto distante

$$f = \frac{z_1^2}{\lambda} = x_0$$

Si dice che  $P'$ , simmetrico del punto  $P$  in cui era stata posta la sferetta durante la produzione dell'ologramma, è l'*immagine reale* dell'oggetto puntiforme  $P$ . Nella figura 16.48 sono disegnati anche i raggi diffratti allo stesso angolo di quelli convergenti in  $P'$ , ma lungo la direzione simmetrica; tali raggi sembrano provenire dalla posizione in cui era stato posto l'oggetto  $P$  e per questa ragione si dice che l'ologramma fornisce anche un'*immagine virtuale* dell'oggetto, situata nella stessa posizione e completamente indistinguibile da questo. In effetti i raggi che sembrano provenire da  $P$  soddisfano alle stesse condizioni di coerenza valide per i raggi che convergono in  $P'$  e portati a interferire sulla retina danno anch'essi un massimo. In un certo senso ciascun raggio dell'onda di riferimento che arriva su un anello trasparente si comporta come se arrivasse alla fenditura di un reticolo e dà due raggi corrispondenti ai massimi del prim'ordine, uno convergente in  $P'$  e uno che sembra divergere da  $P$ .

Se in luogo di un oggetto puntiforme nell'intorno di  $P$  è posto un oggetto vero e proprio trasparente, ciascun elemento dà origine alla sua figura di interferenza e quindi al suo reticolo di Soret e l'ologramma è la sovrapposizione di un numero grandissimo di tali reticolli. Osservato ad occhio nudo o con un microscopio, l'ologramma si presenta complicato e di difficile interpretazione. Invece se lo si illumina con lo stesso fascio di luce con cui è stato prodotto esso dà origine a due immagini, una virtuale nella posizione in cui era posto l'oggetto e una reale in posizione simmetrica. L'*immagine reale*, che ha le stesse proprietà rispetto all'oggetto dell'*immagine* data da uno specchio piano, può essere osservata mettendola a fuoco su uno schermo. L'*immagine virtuale* è visibile ad occhio nudo guardando attraverso l'ologramma. Si tratta, è bene notarlo, di *immagini veramente tridimensionali*: spostando l'occhio si vede cambiare l'*immagine*, proprio come avviene con un oggetto reale. Le stesse immagini, anche se con una risoluzione ottica minore, si ottengono illuminando soltanto una parte dell'ologramma, in quanto questa contiene un'informazione, seppure parziale, su tutti i punti dell'oggetto.

L'originalità della procedura olografica consiste nella registrazione dell'informazione completa relativa al fronte d'onda emesso dall'oggetto e successivamente nella possibilità di ricostruire questo fronte d'onda come se fosse emesso dall'oggetto stesso; la normale fotografia è soltanto una registrazione di intensità. Il principio di funzionamento è conseguenza diretta della natura ondulatoria della luce e delle proprietà di coerenza delle onde che interferiscono. Nella produzione di un ologramma le onde interferiscono dopo aver compiuto cammini a volte molto differenti come lunghezza ed è quindi necessario che la sorgente abbia un'elevata lunghezza di coerenza (vedi paragrafi 12.10 e 15.3). Per questa ragione, anche se l'idea dell'olografia risale al 1948 (D. Gabor), essa ha trovato reali applicazioni a partire dal 1963, solo dopo la realizzazione del laser (1960).

Nella pratica per la produzione e l'osservazione susseguente dell'ologramma si adottano configurazioni geometriche differenti da quella cosiddetta in linea trattata prima. Tra l'altro, nell'osservazione dell'*immagine virtuale* per trasparenza attraverso l'ologramma si ha lo svantaggio di guardare in direzione del laser utilizzato per la ricostruzione.

Un possibile dispositivo che non utilizza lenti è mostrato in figura 16.50. Lungo il cammino di un fascio laser viene posto uno specchio semiriflettente che dà origine al fascio trasmesso di riferimento e al fascio riflesso che colpisce l'oggetto di cui si intende fare l'olo-

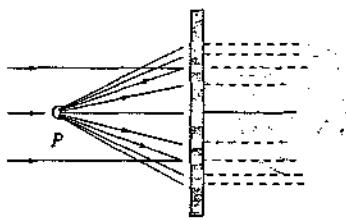


Figura 16.47

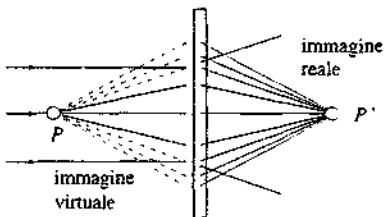


Figura 16.48

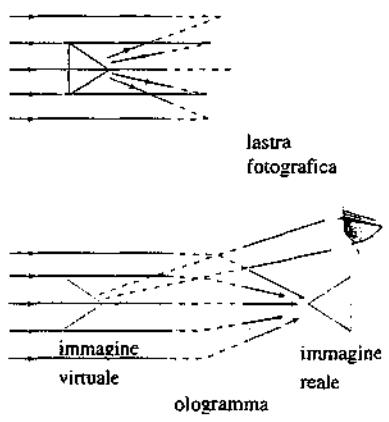


Figura 16.49

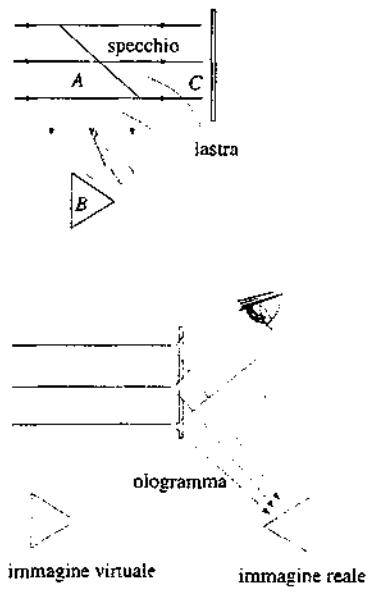


Figura 16.50

gramma. La luce diffusa da ciascun punto dell'oggetto si sovrappone sulla pellicola fotografica all'onda di riferimento formando l'ologramma relativo. La figura di interferenza è un po' più complicata da descrivere analiticamente, anche se la struttura rimane sostanzialmente la stessa. Quando l'ologramma viene illuminato con lo stesso fascio laser si osservano ancora due immagini: una virtuale nella posizione occupata dall'oggetto durante la registrazione e una reale in posizione simmetrica. La differenza di cammino  $AB + BC - AC$  può essere dell'ordine del metro per cui l'utilizzo del laser come sorgente di onde coerenti è essenziale.

Applicazioni dell'ografia si hanno nel campo della microscopia, per osservare conformazioni tridimensionali di piccoli oggetti come le cellule, e nel campo della medicina, dove ad esempio l'ologramma dell'occhio permette di osservare contemporaneamente retina e cristallino. Sono possibili oogrammi anche con gli ultrasuoni, esistendo attualmente sorgenti altamente coerenti e rivelatori adatti; gli oogrammi ultrasonici permettono di osservare parti di organi interni del corpo umano.

### Esempio 16.13

Per il dispositivo schematizzato in figura 16.46 calcolare l'ologramma di un punto materiale distante  $x_0 = 50$  cm dalla lastra; la luce laser di riferimento ha lunghezza d'onda  $\lambda = 0.633$  mm.

#### Soluzione

La differenza di fase, come abbiamo dimostrato, è

$$\delta = k(r - x_0) = \frac{kz^2}{2x_0} = \frac{\pi z^2}{\lambda x_0}$$

e i massimi di interferenza si hanno per

$$\delta = 2m\pi \Rightarrow z_{\max} = \sqrt{2m\lambda x_0} = 0.80\sqrt{m} \text{ mm.}$$

L'ologramma sviluppato è costituito da una serie di corone circolari concentriche annrate di raggi

$$z = 0.80, 1.13, 1.39, 1.60, \dots \text{ mm};$$

il primo minimo si forma per  $z = 0.56$  mm e all'interno di questo si trova il dischetto centrale scuro.

Il massimo con  $m = 100$ , che è l'ordine di grandezza del numero di corone circolari effettivamente realizzabili, dato che esse si infittiscono al crescere di  $m$ , ha  $z = 8$  mm: l'approssimazione  $z \ll x_0$  è ancora ampiamente verificata.

## 16.10 Difrazione dei raggi X

I raggi X occupano la banda di radiazioni elettromagnetiche con lunghezze d'onda inferiori a  $10^{-9}$  m; essi vengono prodotti dal frenamento in un materiale pesante di elettroni accelerati da d.d.p. superiori a qualche migliaio di volt oppure quando un elettrone compie una transizione verso uno dei livelli energetici più interni di un atomo, come abbiamo accennato nel paragrafo 13.12.

In un normale reticolo di diffrazione ottico i raggi X non vengono praticamente diffratti: ad esempio, con  $\lambda = 10^{-10}$  m e  $d = 10^{-6}$  m il massimo del prim'ordine si forma all'angolo  $\theta = \lambda/d = 10^{-4}$  rad =  $5.7 \cdot 10^{-3}$  gradi, troppo vicino al massimo di ordine zero per essere osservato. Invece un reticolo spaziale naturale adatto a produrre la diffrazione dei raggi X è un reticolo cristallino, in cui gli atomi sono disposti secondo strutture regolari con distanze reciproche molto piccole.

In un cristallo di sal gemma gli ioni  $\text{Na}^+$  e  $\text{Cl}^-$  formano un reticolo cubico di lato  $a$ . Ciascuno ione è al centro di una cella cubica di lato  $a$  e il volume di ogni cella elementare è  $a^3$ . Una mole di  $\text{NaCl}$  ha una massa di  $A = 58.45$  kg e contiene  $2N_A = 2 \cdot 6.022 \cdot 10^{26}$  ioni, occupando quindi un volume  $V = 2N_A a^3$ . La densità del sal gemma è  $\rho = 2.17 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$  per cui

$$A = 2 N_A a^3 \rho , \quad a = \left( \frac{A}{2 N_A \rho} \right)^{1/3} = 2.82 \cdot 10^{-10} \text{ m} = 0.282 \text{ nm} .$$

La distanza  $a$  è detta *costante reticolare* e il suo valore è indicativo delle distanze interatomiche nei cristalli.

Quando un fascio di raggi X di lunghezza d'onda  $\lambda$  incide su questa struttura di atomi, gli elettronni che circondano ogni singolo nucleo si comportano come dipoli oscillanti, emettendo radiazione elettromagnetica di lunghezza d'onda  $\lambda$  in tutte le direzioni. Il cristallo si comporta quindi come un sistema tridimensionale di sorgenti coerenti e nello spazio circostante si osserva l'interferenza delle onde emesse da queste sorgenti.

Consideriamo una serie di piani paralleli passanti per gli atomi; le tracce di questi piani, detti piani reticolari, sono segnate nella figura 16.52. Detta  $d$  la *distanza tra due piani reticolari*, questa risulta in generale minore della costante reticolare  $a$ ; solo per quei piani reticolari che sono orizzontali e verticali nella figura si ha  $d = a$ .

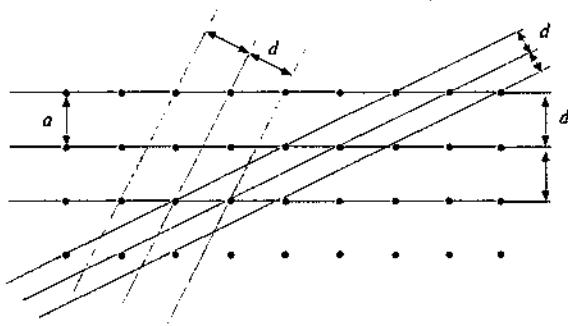


Figura 16.52

Un'onda piana, che incide formando l'angolo  $\theta$  (*angolo di radenza*) con un insieme di piani reticolari distanti  $d$ , vede la serie di atomi, uno per piano reticolare, che appartengono ad una retta ortogonale ai piani reticolari, come un reticolo unidimensionale. Se ci poniamo nella direzione di osservazione che forma l'angolo  $\theta$  rispetto ai piani reticolari, le differenze di cammino

$$B B' B'' , \quad C C' C'' - B B' B'' , \quad D D' D'' - C C' C''$$

tra le onde emesse da due sorgenti contigue come  $A$  e  $B'$ ,  $B'$  e  $C'$ ,  $C'$  e  $D'$  sono eguali a  $2d \sin \theta$ . Secondo (15.11) abbiamo interferenza costruttiva quando

$$2d \sin \theta = m\lambda \quad \text{ovvero} \quad \sin \theta = \frac{m\lambda}{2d} \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad , \quad (16.19) \quad \text{Legge di Bragg}$$

relazione detta *legge di Bragg*. Per angoli diversi il fascio risulta notevolmente attenuato o addirittura soppresso a causa dell'interferenza distruttiva, proprio come avviene per i reticolli ottici.

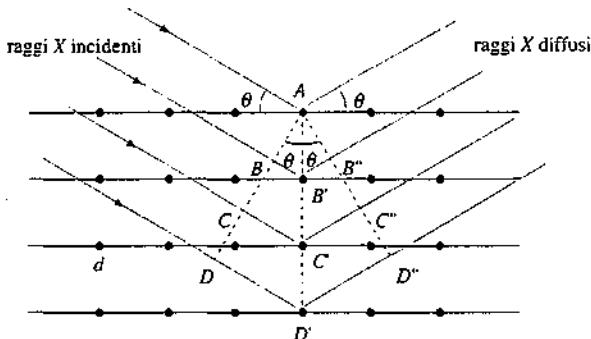


Figura 16.53

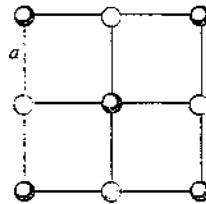
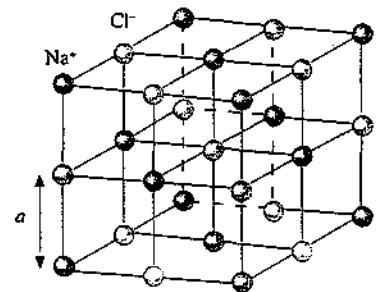


Figura 16.51

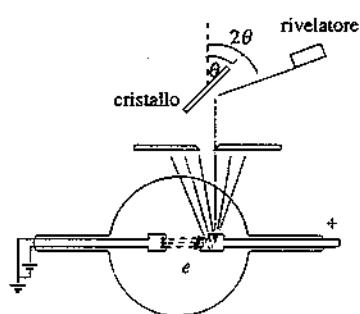


Figura 16.54

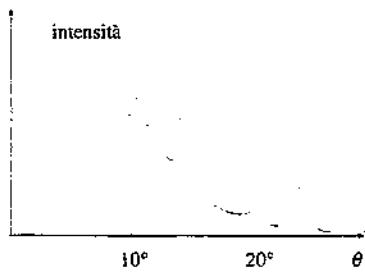


Figura 16.55

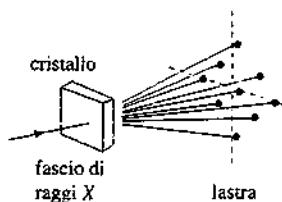


Figura 16.56

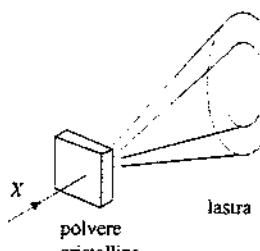


Figura 16.57

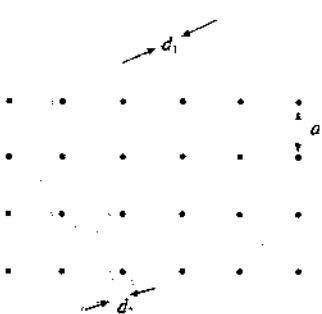


Figura 16.58

Un dispositivo per l'osservazione della diffrazione di raggi X è lo *spettrografo a cristallo* della figura 16.54, ideato da Bragg. In corrispondenza ad una determinata serie di piani reticolari, cioè ad un certo valore di  $d$ , si varia l'angolo  $\theta$  e misurando gli angoli dei massimi si deduce dalla (16.19) lo spettro delle lunghezze d'onda del fascio di raggi X. Si verifica così l'esistenza della componente continua alla radiazione di frenamento, alla quale è sovrapposta la componente a righe caratteristica della struttura atomica del materiale emettitore. In figura 16.55 è mostrato uno dei primi spettri ottenuti da Bragg nel 1913: sono visibili gli spettri del primo e del second'ordine, ciascuno con tre righe. Viceversa, utilizzando un fascio monocromatico di raggi X si possono determinare le varie distanze  $d$ , acquisendo informazioni sulla struttura cristallina del materiale usato come bersaglio nello spettrografo.

Se il fascio incidente può incontrare nel cristallo diverse famiglie di piani reticolari l'aspetto della figura di diffrazione è molto diverso. In effetti la prima evidenza sperimentale sulla natura ondulatoria dei raggi X venne ottenuta da von Laue nel 1912, con l'apparato schematizzato in figura 16.56. Un fascio di raggi X con piccola sezione incide su un sottile cristallo di solfuro di zinco; su una lastra fotografica si osserva la figura di diffrazione. Questa consta di un insieme di punti disposti in modo regolare intorno al fascio centrale trasmesso; ciascun punto è la traccia di una direzione lungo cui si è avuto un massimo. Infatti una lunghezza d'onda  $\lambda$  incidente può trovare una coppia di valori  $d$ ,  $\theta$ , per i quali è soddisfatta (16.19) con un certo valore intero positivo  $m$ : vuol dire che la direzione di incidenza forma l'angolo di radenza  $\theta$  con una famiglia di piani reticolari aventi tra loro distanza  $d$ , e che  $2d \cdot \sin\theta = m\lambda$ ; il raggio diffratto impressiona la lastra in una zona ristretta, quasi puntiforme. Data  $\lambda$  la (16.19) può essere soddisfatta anche per una terza di valori  $d$ ,  $\theta$ ,  $m$  diversa dalla precedente e il fatto si può ripetere per le altre lunghezze d'onda incidenti. Si forma così lo *spettrogramma a punti di Laue* nel quale ad ogni punto è dunque associata una famiglia di piani reticolari; esso è caratteristico della struttura cristallina illuminata col fascio di raggi X.

Invece che da un cristallo supponiamo che il materiale diffondente sia costituito da una polvere contenente un gran numero di microcristalli, orientati in maniera casuale. Se la condizione (16.19) è soddisfatta per una data famiglia di piani reticolari di un particolare microcristallo, essa viene soddisfatta anche da moltissimi altri microcristalli e al posto di un punto abbiamo sulla lastra fotografica una circonferenza. È come prendere una particolare situazione realizzata col metodo di Laue e ruotare il cristallo attorno all'asse del fascio: infatti nella polvere cristallina si trovano tutte le orientazioni che corrisponderebbero ad una tale rotazione. Lo *spettrogramma*, detto di *Debye-Scherrer*, contiene una serie di circonferenze, ognuna generata come descritto con una diversa famiglia di piani reticolari.

La diffrazione dei raggi X, oltre che per la spettroscopia dei raggi X stessi e per indagini sui cristalli, è utilizzato anche per lo studio di strutture microscopiche come quelle di molecole biologiche complesse, tipo DNA.

#### Esempio 16.14

Un fascio di raggi X di lunghezza d'onda  $\lambda = 0.1$  nm incide su un cristallo di NaCl che funge da bersaglio nello spettrografo a cristallo. Calcolare gli angoli  $\theta$  ai quali si formano i massimi di interferenza per i due sistemi di piani reticolari mostrati in figura.

#### Soluzione

Dalla figura si ricava, essendo  $a = 0.282$  nm,

$$d_1 = a / \sqrt{5} = 0.126 \text{ nm}, \quad d_2 = a / \sqrt{10} = 0.089 \text{ nm}.$$

I massimi si formano per

$$\sin\theta = \frac{m\lambda}{2d_1} = 0.397 m, \quad \theta_1 = 23.4^\circ, \quad \theta_2 = 52.7^\circ, \quad \sin\theta = \frac{m\lambda}{2d_2} = 0.562 m, \quad \theta_1 = 34.2^\circ.$$

**Esempio 16.15**

Un fascio di raggi X, contenente tutte le lunghezze d'onda comprese nell'intervallo tra 0.01 nm e 1 nm, incide su un cristallo di NaCl come mostrato in figura. Per le due serie di piani reticolari indicati calcolare in quali direzioni si formano i massimi di interfe- renza e per quali lunghezze d'onda.

**Soluzione**

Essendo  $a = 0.282 \text{ nm}$ ,  $d_1 = a / \sqrt{2} = 0.199 \text{ nm}$ ,  $d_2 = a / \sqrt{5} = 0.126 \text{ nm}$ . Inoltre  $\tan \theta_1 = 1$ ,  $\theta_1 = 45^\circ$ ,  $\alpha_1 = 2\theta_1 = 90^\circ$ ,  $\tan \theta_2 = 0.5$ ,  $\theta_2 = 26.57^\circ$ ,  $\alpha_2 = 2\theta_2 = 53.13^\circ$ .

Le lunghezze d'onda che interferiscono costruttivamente per il primo sistema di piani reticolari si ricavano da

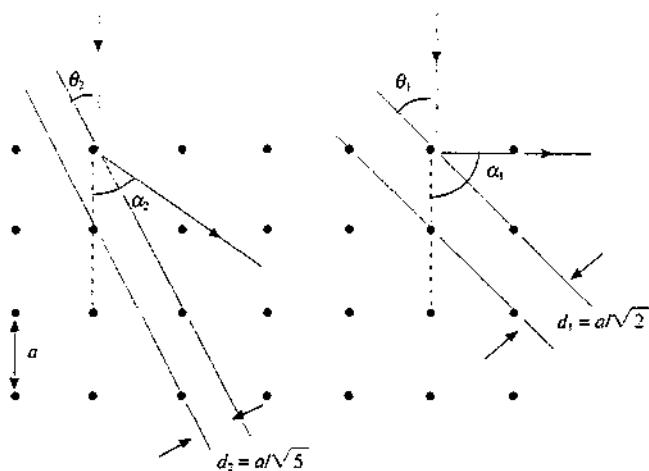
$$2d_1 \sin \theta_1 = 0.282 = m \lambda \text{ in nm} ;$$

visti i limiti su  $\lambda$   $m$  è un numero intero compreso tra 0.282 e 28.2, quindi

$$\lambda = \frac{0.282}{m} \text{ nm} \quad m = 1, 2, \dots, 28 .$$

Per la seconda serie di piani reticolari

$$2d_2 \sin \theta_2 = 0.113 = m \lambda \text{ in nm} \quad \lambda = \frac{0.113}{m} \text{ nm} \quad m = 1, 2, \dots, 11 .$$



**Figura 16.59**

Vogliamo notare, per concludere, che il termine diffrazione dei raggi X, per quanto comunemente usato, non è appropriato. Si tratta piuttosto di *diffusione*; ciò che si osserva, e che dimostra la natura ondulatoria dei raggi X, è l'*interferenza tra i raggi diffusi lungo date direzioni*.

# Ottica geometrica

## 17.1 Leggi della riflessione e della trasmissione

I fenomeni più interessanti nella propagazione della luce, come l'interferenza, la diffrazione e la polarizzazione, sono manifestazioni dirette del carattere ondulatorio della luce. Anche altre proprietà più semplici, ma non per questo meno importanti, e cioè quelle connesse con la propagazione rettilinea della luce in un mezzo trasparente omogeneo e isotropo e l'attraversamento della superficie di separazione tra due mezzi diversi, si spiegano con la teoria ondulatoria. Però è possibile interpretare la maggior parte delle osservazioni anche basandosi sul concetto di *raggio luminoso* e sulle due semplici leggi della riflessione e della trasmissione. Questo è il campo dell'*Ottica Geometrica*, così chiamata perché tutte le deduzioni si fanno con costruzioni geometriche che obbediscono alle leggi suddette.

Abbiamo già trattato l'argomento della riflessione e della trasmissione nel paragrafo 14.3, sia in generale che con particolare riguardo alla luce. Richiamiamo i risultati ottenuti che sono essenziali per il resto del capitolo.

Partiamo dunque dall'ipotesi che la luce emessa da una sorgente si propaghi in linea retta all'interno di un *mezzo trasparente* omogeneo e isotropo: il termine *omogeneo* indica la costanza della densità mentre *isotropo* significa che il comportamento della luce è lo stesso in tutte le direzioni. L'aria, il vetro, l'acqua soddisfano di norma a queste condizioni.

Il percorso seguito dalla luce viene disegnato tramite *raggi*, cioè semirette uscenti dalla sorgente. Nella figura 17.1 è mostrata una sorgente puntiforme *S* che emette luce in tutte le direzioni e un diaframma *D* che delimita un fascio di raggi divergenti.

La luce emessa dalla sorgente può essere *monocromatica*, cioè con una ben precisa lunghezza d'onda, o *policromatica*: in tal caso può contenere un numero discreto di lunghezze d'onda o bande continue di lunghezze d'onda. In particolare si dice *bianca* la luce che contiene tutte le lunghezze d'onda nel campo visibile. Lo spettro di lunghezze d'onda di un raggio luminoso ha importanza nella trasmissione della luce, a causa del fenomeno della dispersione (vedi paragrafi 13.9 e 14.3).

Il mezzo attraversato dai raggi può essere delimitato da una particolare superficie su cui avviene il fenomeno della *riflessione* dei raggi luminosi, descritto nella figura 17.2 nel caso di superficie riflettente piana. Queste superficie sono in genere costituite da un sottile ( $\sim 10^{-6}$  m) deposito metallico, ad esempio di alluminio o di argento, sopra una superficie di supporto accuratamente levigata, che nei casi più comuni è piana o sferica. Il raggio incidente sulla superficie e la normale alla superficie nel punto *O* di incidenza individuano un *piano* detto *di incidenza*; il *raggio riflesso* sta in questo piano e forma con la normale un angolo  $\theta_i$ , eguale all'angolo  $\theta_r$  formato con la normale dal raggio incidente:

Figura 17.1

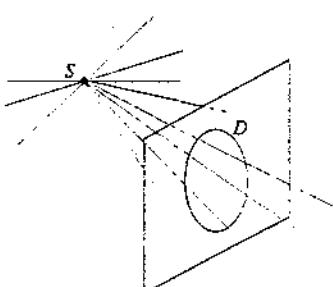


Figura 17.2



$$\theta_i = \theta_r \quad (17.1)$$

La (17.1) si chiama *legge della riflessione*; essa non dipende dalla lunghezza d'onda della luce incidente.

Alla superficie di separazione tra due mezzi trasparenti diversi la luce viene in parte riflessa e in parte trasmessa: da un raggio luminoso incidente hanno origine un raggio riflesso, che sta nel primo mezzo e segue la legge (17.1), e un raggio trasmesso nel secondo mezzo, che giace nel piano di incidenza e forma con la normale l'angolo  $\theta_t$ , dati dalla *legge della trasmissione*

$$\frac{\sin \theta_r}{\sin \theta_i} = \frac{n_1}{n_2} \quad . \quad (17.2)$$

Il fenomeno si chiama anche *rifrazione* e si parla di *raggio rifratto*, angolo di rifrazione e *legge della rifrazione*.

Le grandezze  $n_1$  e  $n_2$ , *indici di rifrazione assoluti* rispettivamente del primo e del secondo mezzo, sono definiti da (13.10) come rapporto tra la velocità  $c$  della luce nel vuoto e la velocità  $v$  della luce nel mezzo:

$$n = \frac{c}{v} \quad . \quad (17.3)$$

Per la luce visibile l'indice di rifrazione è sempre maggiore di 1 ed è funzione della lunghezza d'onda, nella maggior parte dei casi debolmente decrescente all'aumentare della lunghezza d'onda. Pertanto la velocità della luce in un mezzo è sempre minore di  $c$  e dipende dalla lunghezza d'onda (*dispersione*). In un mezzo omogeneo l'indice di rifrazione non varia con la posizione.

Si vede da (17.2) che  $\theta_r = \theta_i$  solo per incidenza normale, cioè  $\theta_i = \theta_r = 0$ . Altrimenti ci sono due possibilità:

a) la trasmissione avviene da un mezzo con indice di rifrazione minore a un mezzo con indice di rifrazione maggiore,  $n_1 < n_2$ , e pertanto  $\theta_r < \theta_i$ , il raggio trasmesso si avvicina alla normale, come nella figura 17.4;

b) la trasmissione avviene nelle condizioni opposte,  $n_1 > n_2$  e allora  $\theta_r > \theta_i$ , il raggio trasmesso si allontana dalla normale (Figura 17.5).

Nel caso  $n_1 > n_2$  esiste un particolare angolo di incidenza  $\theta_L$  tale che sia  $\theta_r = 90^\circ$  (ciò non è possibile se  $n_1 < n_2$ ). Tale angolo  $\theta_L$  è detto *angolo limite* e il suo valore si ricava da (17.2) imponendo  $\sin \theta_r = 1$ :

$$\sin \theta_L = \frac{n_2}{n_1} \quad , \quad \theta_L = \arcsen \frac{n_2}{n_1} \quad . \quad (17.4)$$

Per valori di  $\theta_i$  maggiori di  $\theta_L$  non esiste raggio trasmesso e la luce viene tutta riflessa: il fenomeno si chiama *riflessione totale*.

Nella tabella 17.1 sono dati gli indici di rifrazione di alcune sostanze, per luce di

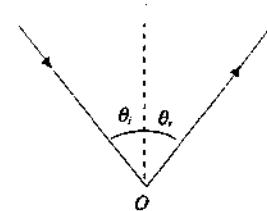


Figura 17.3

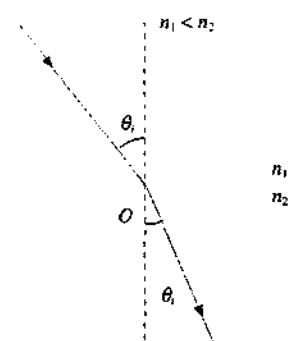


Figura 17.4

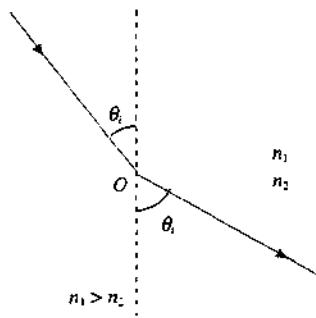


Figura 17.5

Riflessione totale

Tabella 17.1 Indici di rifrazione

fluorite $\text{CaF}_2$	1.434	acqua	1.333
vetro	1.46÷1.96	alcool etilico	1.361
quarzo fuso	1.458	idrogeno liquido (20 K)	1.110
quarzo	1.544	azoto liquido (83 K)	1.205
ioduro di sodio $\text{NaI}$	1.775	vapor d'acqua	1.00025
diamante	2.419	idrogeno	1.00013
plexiglass	1.50	azoto	1.00030
		aria	1.00029

lunghezza d'onda  $\lambda = 589 \text{ nm}$  (giallo). Si intende che i gas siano in condizioni standard (pressione atmosferica,  $T = 273 \text{ K}$ ).

Con riferimento a (17.4), vediamo che alla data  $\lambda$  l'angolo limite nel passaggio acqua-aria è di  $48.6^\circ$ , nel passaggio vetro ( $n = 1.5$ ) – aria è di  $41.8^\circ$ .

Ricordiamo che le leggi (17.1) e (17.2) sono note come *leggi di Cartesio*; la (17.2) è nota pure come *legge di Snell*, che in effetti la stabilì sperimentalmente intorno al 1620.

#### Reversibilità dei raggi

Una caratteristica molto importante di queste leggi è la cosiddetta *reversibilità*: se nelle figure 17.3, 17.4, 17.5 si inverte il verso di propagazione della luce, si scambiano semplicemente i ruoli di raggio incidente e raggio riflesso o raggio trasmesso. Si osservi in particolare che la figura 17.4 con verso di propagazione invertito dà il caso esaminato nella figura 17.5 e viceversa. Questa proprietà di reversibilità è estremamente utile nella pratica, in quanto riduce il numero di casi da trattare, come si vedrà in numerosi esempi. Essa è già stata utilizzata nel paragrafo 14.4 a proposito dell'angolo di Brewster.

## 17.2 Definizioni e convenzioni

La situazione fisica che vogliamo esaminare è la costruzione di immagini di determinati oggetti effettuata con strumenti ottici in cui la luce emessa dagli oggetti subisce riflessione e rifrazione. Ciò allo scopo, ad esempio, di osservare oggetti lontani tramite cannocchiali o telescopi, oppure di cogliere particolari strutturali di oggetti molto piccoli tramite microscopi o di fissare le immagini su pellicole tramite obiettivi fotografici. L'occhio stesso, non dimentichiamolo, è uno strumento ottico molto sofisticato, che spesso ha bisogno di correzioni esterne tramite lenti.

L'oggetto per uno strumento ottico è un corpo, puntiforme o esteso, che emette luce direttamente o diffonde la luce emessa da un altro corpo. I raggi luminosi vengono seguiti attraverso lo strumento applicando le leggi (17.1) e (17.2) e si esamina se essi convergono in una figura, detta *immagine* dell'oggetto dato. Quando i raggi uscenti da un punto dell'oggetto si incontrano in un solo punto dell'immagine lo strumento è definito *stigmatico* rispetto a quella coppia di punti, che sono chiamati *punti coniugati*. L'*immagine* è *reale* se i raggi si incontrano fisicamente nei suoi punti, mentre è detta *virtuale* se per essa passano i prolungamenti dei raggi, ma non i raggi stessi. Un'immagine, reale o virtuale, può fungere da oggetto (reale o virtuale) per un successivo strumento ottico.

Lo stigmatismo, condizione essenziale per una buona definizione dell'immagine, è difficile da ottenere: l'immagine di un punto è quasi sempre estesa, cioè non puntiforme. Solo se si considerano fasci di *raggi di piccola apertura e parassiali*, cioè vicini all'asse dello strumento ottico e formanti con questo angoli molto piccoli, è possibile raggiungere con buona approssimazione una situazione di stigmatismo. Nei casi pratici che studieremo a partire dal paragrafo 17.3 supportiamo sempre valida tale approssimazione.

Le *superficie* che la luce incontra sono dette *catottriche* o *specchi* quando su di esse avviene solo riflessione; poiché la (17.1) non dipende dall'indice di rifrazione, i raggi di qualsiasi lunghezza d'onda propagantesi nella stessa direzione subiscono tutti la stessa deviazione.

#### Specchi

Si chiamano invece *superficie diottiche* o *diottri* le superficie su cui avviene la trasmissione della luce da un mezzo all'altro; data la dipendenza di (17.2) dall'indice di rifrazione raggi propagantis in la stessa direzione e con diversa lunghezza d'onda subiscono deviazioni diverse (è il già citato fenomeno della dispersione). Di un unico oggetto si possono avere più immagini distinte (e colorate) e il sistema non è quindi stigmatico. Questo difetto intrinseco si chiama *cromatismo* e può essere corretto con una opportuna successione di superficie diottiche; se ciò avviene lo

#### Diottri

strumento complessivo si dice *acromatico*. Il problema non sussiste per gli specchi, che sono per loro natura acromatici, come abbiamo già notato.

Su una superficie diottrica avviene sempre anche riflessione; noi però trascureremo questi raggi riflessi, considerando quindi i due tipi di superficie con un'unica funzione, o riflettente o rifrangente. In condizioni di riflessione totale naturalmente la superficie diottrica è puramente riflettente. Come giustificazione ricordiamo, dal paragrafo 14.4, che la quantità di energia riflessa su una superficie diottrica è dell'ordine di qualche percento dell'energia incidente, se gli angoli di incidenza non sono grandi, situazione nella quale ci troveremo in effetti ad operare nei prossimi paragrafi.

Nella costruzione delle immagini è conveniente adottare alcune convenzioni sui segni delle distanze e degli angoli che permettono di trattare tutti gli svariati casi che si presentano allo stesso modo e senza ambiguità.

Fissata una superficie di discontinuità, catottrica o diottrica, che nella figura 17.6 è assunta sferica, e detto  $V$  il suo vertice, cioè l'intersezione con l'*asse ottico* che coincide con l'*asse di simmetria*, ci atteniamo a queste regole.

1. La luce incidente proviene da sinistra.
2. La distanza  $p$  di un oggetto  $P$  dal vertice  $V$  è positiva se l'oggetto si trova a sinistra del vertice, negativa se l'oggetto è a destra di  $V$ .
3. La distanza  $q$  dell'immagine  $Q$  dal vertice  $V$  è positiva se l'immagine si trova a destra del vertice, negativa se l'immagine è a sinistra di  $V$ .
4. Il raggio di curvatura  $R$  della superficie sferica è positivo se il centro di curvatura si trova a destra di  $V$  (superficie sferica convessa), negativo se il centro di curvatura è a sinistra di  $V$  (superficie sferica concava).
5. A sinistra di  $V$  gli angoli che i raggi formano con l'asse sono positivi se considerati nel verso antiorario a partire dall'asse; a destra di  $V$  il verso positivo è quello orario.
6. Le distanze dall'asse sono positive per punti al di sopra dell'asse, negative per punti al di sotto, se si tratta di oggetti; per le immagini vale il contrario.

Come per tutte le convenzioni (ricordiamo quella sui segni degli scambi di calore e lavoro in termodinamica) non bisogna assegnare significato fisico alle scelte che si adottano. Ogni scelta ha una sua giustificazione logica e si potrebbe anche ragionare al di fuori di qualsiasi convenzione. Noi però, per chiarezza e uniformità di metodo, seguiremo coerentemente le regole sopra esposte. Notiamo esplicitamente che le strutture delle equazioni relative ai vari strumenti ottici non dipendono dalla convenzione adottata, però ne dipendono i segni davanti ai vari termini; bisogna quindi fare attenzione quando si confrontano testi che possono usare convenzioni diverse.

### 17.3 Specchi

Consideriamo una superficie catottrica sferica concava, ovvero uno specchio sferico concavo. Il termine concavo (o convesso) naturalmente è riferito a quella faccia della superficie sferica che è speculare ed è rivolta alla luce incidente.

Poniamo un oggetto  $P$  puntiforme sull'asse dello specchio a sinistra del centro di curvatura  $O$  e tracciamo un raggio emesso da  $P$  ad angolo  $\theta$  con l'asse. Il raggio incide sullo specchio nel punto  $H$  e il raggio riflesso incontra l'asse nel punto  $Q$ , immagine di  $P$ . In base alla nota proprietà che un angolo esterno di un triangolo è eguale alla somma dei due angoli interni non adiacenti, abbiamo dalla figura 17.9  $\theta + \theta_i = \alpha$  nel triangolo  $PHO$ ,  $\alpha + \theta' = \theta'$  nel triangolo  $OHQ$ , dalle quali, eliminando  $\theta_i$ ,

$$\theta + \theta' = 2\alpha \quad (17.5)$$

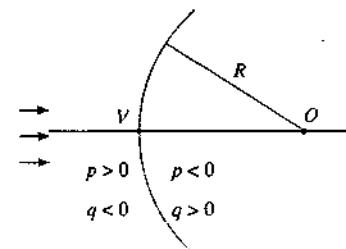


Figura 17.6

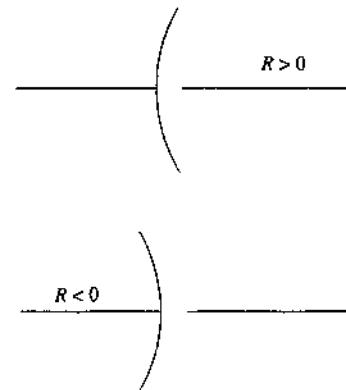


Figura 17.7

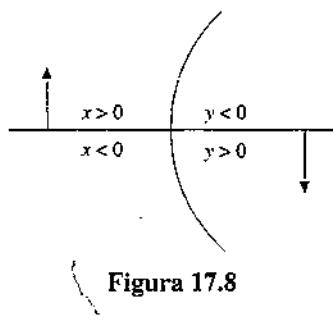


Figura 17.8

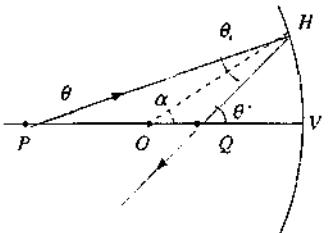


Figura 17.9

Questa relazione è sempre valida. Supponiamo ora che gli angoli siano molto piccoli, così da poter confondere il seno e la tangente dell'angolo con il valore dell'angolo stesso. L'arco  $HV$  può essere confuso con il segmento di perpendicolare da  $H$  all'asse, di lunghezza  $h$ , e pertanto possiamo scrivere

$$h = PV \operatorname{tg} \theta = PV \theta, \quad h = QV \operatorname{tg} \theta' = QV \theta', \quad h = OV \operatorname{tg} \alpha = OV \alpha.$$

Secondo le nostre convenzioni

$$PV = p, \quad QV = -q, \quad OV = -R,$$

mentre gli angoli  $\theta, \theta', \alpha$  sono positivi; quindi

$$\theta = \frac{h}{p}, \quad \theta' = -\frac{h}{q}, \quad \alpha = -\frac{h}{R}$$

e la (6.5) diventa

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = -\frac{2}{R}, \quad (17.6)$$

Equazione dello specchio sferico concavo

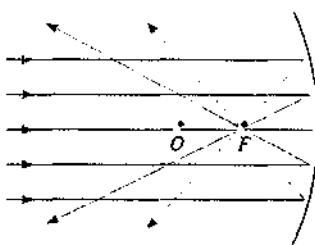


Figura 17.10

che è l'*equazione dello specchio sferico concavo* nell'approssimazione parassiale. Nella (17.6) non compaiono gli angoli e quindi essa è valida per raggi di qualsiasi inclinazione, purché piccola: dato lo specchio, cioè  $R$ , e posto l'oggetto a distanza  $p$  dal vertice, i raggi riflessi si incontrano tutti nel punto  $Q$  la cui distanza  $q$  dal vertice si ricava da (17.6). Nell'approssimazione parassiale lo specchio sferico concavo è dunque stigmatico; per costruire l'immagine di  $P$  basta seguire un solo raggio e vedere dove esso incontra l'asse dopo la riflessione (resta così giustificata a posteriori, purché gli angoli siano piccoli, l'affermazione fatta all'inizio che  $Q$  è l'immagine di  $P$ ).

Studiamo dove si forma l'immagine al variare della posizione dell'oggetto; i risultati si intuiscono subito per via grafica e si hanno facilmente per via analitica tramite (17.6). Iniziamo da  $p = +\infty$ , cioè raggi incidenti paralleli all'asse; da (17.6) risulta

$$q = \frac{R}{2} = f : \quad (17.7)$$

i raggi si incontrano tutti nel punto  $F$  posto a distanza  $R/2$  dal vertice, a metà strada tra  $O$  e  $V$ . Tale punto si chiama *fuoco* dello specchio sferico concavo e la distanza  $f = -FV$  è detta *distanza focale* dello specchio. La (17.6) può essere scritta, utilizzando la distanza focale,

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{f}. \quad (17.8)$$

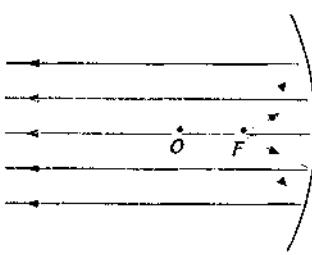


Figura 17.11

Quando  $P$  si avvicina al centro di curvatura  $O$ ,  $Q$  si sposta da  $F$  verso  $O$ . Se  $P$  è posto in  $O$ , anche  $Q$  cade in  $O$ , oggetto e immagine coincidono: il punto  $O$  è l'unico che gode di questa proprietà. Quando  $P$  si sposta da  $O$  a  $F$ ,  $Q$  va da  $O$  a  $-\infty$  (si ricordi che la distanza  $q$  è negativa): rispetto al caso precedente le posizioni di oggetto e immagine sono scambiate (esempio della proprietà di reversibilità dei cammini ottici, citata alla fine del paragrafo 17.1). In particolare, quando  $p = -f$ , cioè l'oggetto è nel fuoco,  $q = -\infty$ , l'immagine si forma all'infinito, i raggi riflessi sono paralleli all'asse.

Le posizioni finora esaminate hanno tutte in comune il fatto che i raggi riflessi si incontrano fisicamente nel punto  $Q$  che è pertanto un'immagine reale dell'oggetto reale  $P$ . Una situazione diversa si ha per l'ultima possibilità rimasta, quando  $P$  si trova tra il fuoco  $F$  e il vertice  $V$ . L'immagine  $Q$  si forma oltre lo specchio: i raggi riflessi sembrano provenire da  $Q$ , che è il punto d'incontro dei prolungamenti dei raggi; ciò vuol dire che per  $P$  compreso tra il fuoco e il vertice l'immagine è virtuale. In effetti nella (17.8) se  $p$  è minore di  $-f$ ,  $q$  deve essere positiva, cioè  $Q$  deve stare oltre il vertice; notiamo anche che mentre  $P$  descrive il segmento  $FV$ ,  $Q$  descrive tutta la semiretta oltre lo specchio da  $+\infty$  a  $V$ .

L'applicazione della proprietà di reversibilità a questo caso è molto interessante. Se la luce, invece di uscire da  $P$  e proseguire dopo la riflessione come se provenesse da  $Q$ , percorre il cammino in senso inverso, abbiamo un fascio di raggi convergenti che colpisce lo specchio e si incontra fisicamente in  $P$ , mentre i prolungamenti si incontrano nel punto  $Q$ : ora però  $P$  è l'immagine, che è reale, e  $Q$  è l'oggetto, che è virtuale. Con il semplice scambio oggetto-immagine e l'inversione del verso di propagazione abbiamo risolto il problema del comportamento dello specchio con luce convergente.

Riepilogando i risultati ottenuti, se l'oggetto è reale, cioè se la luce che colpisce lo specchio diverge da un punto posto sull'asse, l'immagine può essere reale, situata tra  $-\infty$  e  $F$ , oppure virtuale, situata tra  $V$  e  $+\infty$ ; se invece la luce che arriva sullo specchio è convergente (oggetto virtuale che può trovarsi ovunque oltre lo specchio) l'immagine è reale e si forma tra il fuoco e il vertice. La situazione complessiva è riassunta nella tabella 17.2 e nella figura 17.13, che rappresenta il grafico della funzione  $q(p)$  come si ricava da (17.6), con  $R < 0$ .

Tabella 17.2 Relazione tra oggetto e immagine nello specchio sferico concavo

oggetto		immagine
A $+\infty$	$\geq p \geq -R$	reale
B $-R \leq p \leq -R/2$		reale
C $-R/2 \leq p > 0$		reale
D $0 > p \geq -\infty$		virtuale
	$R/2 \leq q \leq R$	reale
	$R \leq q \geq -\infty$	reale
	$+\infty \geq q > 0$	virtuale
	$0 > q \geq R/2$	reale

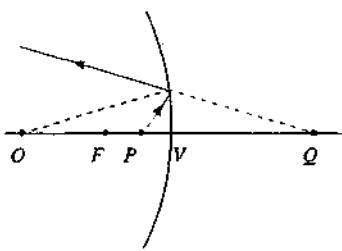


Figura 17.12

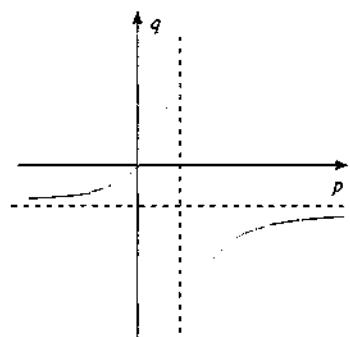


Figura 17.13

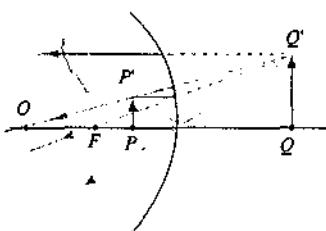
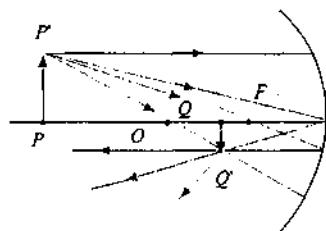


Figura 17.14

Per un punto  $P'$  fuori dall'asse dello specchio, ma molto vicino all'asse stesso, si possono ripetere le deduzioni relative a un punto sull'asse, prendendo come riferimento un nuovo asse passante per il punto  $P'$  e il centro di curvatura. Si ritrova l'equazione (17.6) e si conclude pertanto che un segmento  $PP'$  ortogonale all'asse, purché di piccole dimensioni, ha come immagine il segmento  $QQ'$ , anch'esso ortogonale all'asse, essendo le posizioni dei punti  $P$  e  $Q$  legate dalla (17.6).

Nella pratica, la posizione del segmento  $QQ'$  si ottiene graficamente considerando due raggi emessi da  $P'$  per i quali sia immediatamente tracciabile il percorso dopo la riflessione, ad esempio il raggio passante per il centro di curvatura, che si riflette su se stesso, e il raggio passante per il fuoco, che dopo la riflessione è parallelo all'asse dello specchio, oppure il raggio parallelo all'asse che dopo la riflessione passa per il fuoco o infine il raggio che si riflette nel vertice simmetricamente rispetto alla direzione incidente. Queste quattro possibilità sono indicate nella figura 17.14 (ma basta tracciarne solo due); individuato  $Q'$  è nota anche la posizione di  $Q$  sull'asse.

Quando l'immagine è reale, essa è capovolta rispetto all'oggetto, mentre l'immagine virtuale risulta diritta. Le costruzioni mostrate in figura 17.14 sono valide in qualsiasi piano passante per l'asse dello specchio, esiste cioè simmetria cilindrica.

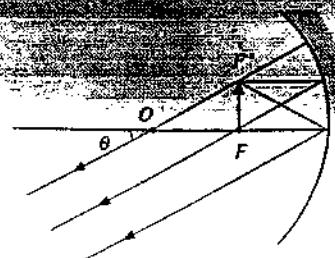


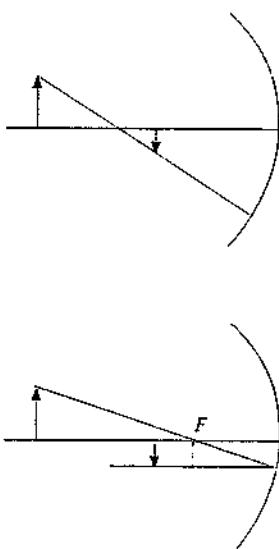
Figura 17.15

drica. Un piccolo disco con centro in  $P$  ha come immagine un piccolo disco con centro in  $Q$ .

La luce emessa da un punto  $F'$  che sta nel piano ortogonale all'asse passante per il fuoco  $F$  dopo la riflessione forma un fascio di raggi paralleli tra loro, ad angolo  $\theta$  rispetto all'asse; se  $d$  è la distanza di  $F'$  da  $F$ , vale la relazione  $d = |f| \operatorname{tg} \theta = |f| \theta$ . Viceversa, un fascio di raggi paralleli provenienti da infinito ad angolo  $\theta$  con l'asse si incontra dopo la riflessione nel punto  $F'$ . Il luogo dei punti  $F'$  così individuati, che occupa una piccola parte del piano sopra definito, si chiama *piano focale* dello specchio.

Un esame della figura 17.14 mostra che la dimensione dell'immagine è diversa da quella dell'oggetto. Il rapporto tra la lunghezza  $y$  del segmento  $QQ'$  e la lunghezza  $x$  del segmento  $PP'$  si chiama *ingrandimento trasversale* dello specchio sferico:

$$I = \frac{y}{x} \quad (17.9)$$



Alla (17.9) possono essere date varie espressioni, a seconda della costruzione geometrica che si utilizza, basata in ogni caso su triangoli simili. Nella figura 17.16 sono mostrati quattro esempi a partire dai raggi particolari della figura 17.14. Si trova:

$$I = \frac{q - R}{p + R} = -\frac{R}{2p + R} = -\frac{f}{p + f} = \frac{2q - R}{R} = \frac{q - f}{f} = \frac{q}{p} \quad . \quad (17.10)$$

In corrispondenza ai quattro casi della tabella 17.2 abbiamo:

<i>A</i>	$1 \geq I \geq 0$	immagine capovolta e rimpicciolita
<i>B</i>	$I \geq 1$	immagine capovolta e ingrandita
<i>C</i>	$I < -1$	immagine diritta e ingrandita
<i>D</i>	$-1 < I \leq 0$	immagine diritta e rimpicciolita.

Lo specchio sferico concavo dà dunque di figure contenute in un piano un'immagine che è contenuta in un altro piano, con un determinato rapporto di similitudine dipendente dalla posizione, che è l'ingrandimento trasversale. Uno strumento ottico che presenta questa proprietà si dice *aplanatico* (rispetto alla data copia di piani).

#### Specchio sferico convesso

Questo specchio non ha bisogno di uno studio specifico in quanto tutte le situazioni geometriche hanno una corrispondenza con situazioni già viste per lo specchio concavo. Ad esempio il caso di oggetto reale corrisponde graficamente al caso *C* prima esaminato in cui si suppone speculare l'altra faccia della superficie sferica, si scambiano i ruoli di oggetto e immagine e il cammino della luce avviene lungo quelli che nella figura 17.12 sono i prolungamenti dei raggi. Ovvero, si ruota la figura 17.12 di  $180^\circ$ , si rende speculare la faccia convessa della superficie che guarda verso sinistra, da dove proviene la luce, si scambia l'oggetto con l'immagine e si ottiene la figura 17.17, relativa allo specchio sferico convesso con oggetto reale (e immagine sempre virtuale).

Il fuoco è virtuale, a distanza  $R/2$  dal vertice: un fascio incidente di raggi paralleli all'asse dopo la riflessione sembra divergere dal punto  $F$  posto dietro lo specchio.

L'equazione dello specchio è sempre (17.6) o (17.8), con l'avvertenza che ora  $R$

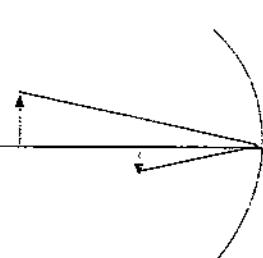


Figura 17.16

e  $f = R/2$  sono positivi. Si provi a verificarlo per esercizio partendo, nella figura 17.17, dai triangoli  $PHQ$  e  $PHO$  e ricordando le convenzioni sui segni degli angoli oltre il vertice  $V$ .

Anche il problema dell'illuminazione convergente si risolve senza sforzo. Quando l'oggetto è tra il vertice e il fuoco vale la figura 17.17 a cui si applica la proprietà di reversibilità; quando l'oggetto va dal fuoco all'infinito, la situazione grafica è quella dei casi *A* e *B* dello specchio sferico concavo, con le dovute sostituzioni che ad esempio trasformano la figura 17.9 nella figura 17.19.

Compiliamo per lo specchio convesso la tabella 17.3, analoga alla tabella 17.2.

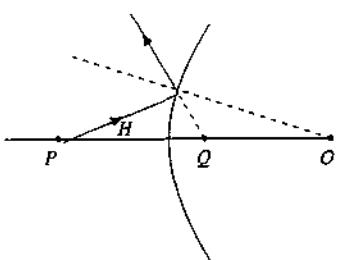


Figura 17.17

**Tabella 17.3 Relazione tra oggetto e immagine nello specchio sferico convesso**

oggetto	immagine
<i>E</i> $+ \infty \geq p > 0$	reale
<i>F</i> $0 > p \geq -R/2$	virtuale
<i>G</i> $-R/2 \geq p \geq -R$	virtuale
<i>H</i> $-R \geq p \geq -\infty$	virtuale
<i>R/2 \geq q &gt; 0</i>	virtuale $\rightarrow C$
<i>O</i> $> q \geq -\infty$	reale $\rightarrow D$
$+ \infty \geq q \geq R$	virtuale $\rightarrow A$
$R \geq q \geq R/2$	virtuale $\rightarrow B$

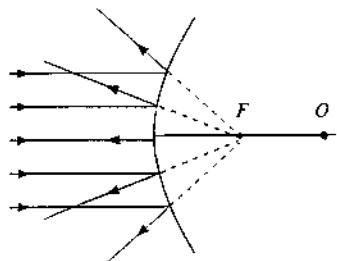


Figura 17.18

Il grafico di  $q(p)$  con  $R > 0$  è dato in figura 17.20, che coincide con la figura 17.13 ruotata rispetto alla retta  $p = q$ .

L'immagine di un segmento si ottiene con una procedura analoga a quella illustrata nella figura 17.14, considerando raggi tracciabili con facilità. Per l'ingrandimento si adattano i risultati dello specchio concavo: basta cercare il caso corrispondente e sostituire l'immagine ingrandita con quella rimpicciolita e viceversa. Ad esempio nel caso *E*, equivalente al caso *C*, l'immagine è diritta e rimpicciolita, nel caso *G* l'immagine è capovolta e ingrandita.

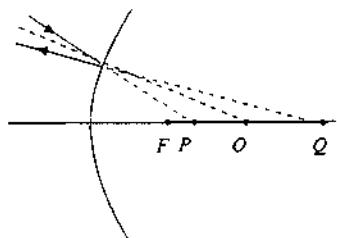


Figura 17.19

### Specchio piano

Lo specchio piano può essere considerato come il caso limite dello specchio sferico concavo per  $R \rightarrow -\infty$ : il fuoco va all'infinito, l'oggetto è sempre tra fuoco e vertice e l'immagine è sempre virtuale. La (17.6) diventa

$$p = q , \quad (17.11)$$

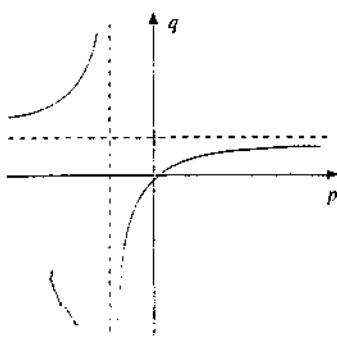


Figura 17.20

equazione dello specchio piano. L'immagine si forma dietro lo specchio in posizione simmetrica a quella dell'oggetto, di cui conserva le dimensioni ( $I = -1$ ).

La (17.11) può essere dedotta direttamente dalla figura 17.22 utilizzando (17.1) e le proprietà di congruenza dei triangoli.

Lo specchio piano è stigmatico e aplanatico senza alcuna limitazione ed è l'unico strumento ad avere queste proprietà unite all'acromaticità. Gli specchi sferici, anch'essi acromatici, sono stigmatici e aplanatici solo in approssimazione parassiale.

L'immagine virtuale diritta data da uno specchio piano, nota come speculare, ha l'importante caratteristica di avere la destra scambiata con la sinistra (come ci si convince subito guardando la propria immagine in uno specchio). In figura 17.23 è mostrata l'immagine speculare di una terna cartesiana normale (dall'asse  $z$  la rotazione che porta  $x$  su  $y$  è vista come antioraria) ovvero destrorsa (se l'indice della mano destra punta lungo l'asse  $x$  e il medio, disposto a  $90^\circ$ , punta lungo l'asse  $y$ , la direzione e il verso dell'asse  $z$  sono indicati dal pollice tenuto diritto). Notiamo che

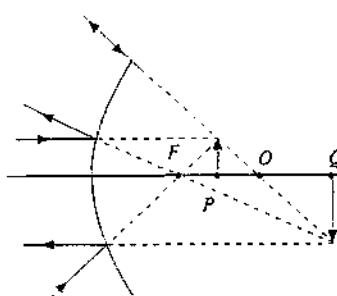


Figura 17.21

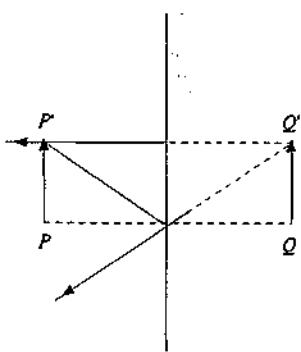


Figura 17.22

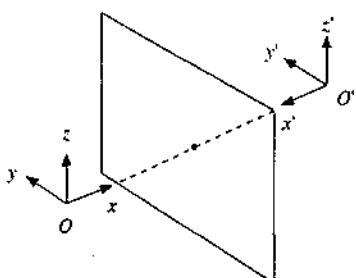


Figura 17.23

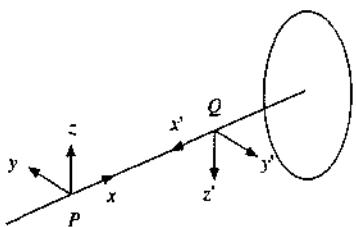


Figura 17.24

l'immagine è sinistrorsa, dall'asse  $z'$  si vede andare l'asse  $x'$  sull'asse  $y'$  con rotazione oraria. Un osservatore, che postosi con le spalle allo specchio osservi l'oggetto, vede l'asse  $z$  puntare vero l'alto, l'asse  $x$  verso di sé e l'asse  $y$  da sinistra a destra; quando si gira e guarda l'immagine, l'asse  $x'$  è ancora rivolto verso di lui e l'asse  $z'$  verso l'alto, ma l'asse  $y'$  va da destra a sinistra.

Lo stesso tipo di immagine si ha con uno specchio concavo nel caso C (è questa la situazione di osservazione negli specchi da toilette, che danno un'immagine ingrandita) e con uno specchio convesso nel caso E (situazione degli specchi stradali posti negli incroci con scarsa visibilità e che danno un'immagine diritta e rimpicciolita).

L'immagine reale di un oggetto reale è sempre capovolta. Se l'oggetto è piano, l'immagine conserva le caratteristiche dell'oggetto, è soltanto ruotata di  $180^\circ$ ; lo stesso non succede per oggetti tridimensionali, come si vede dalla figura 17.24.

#### Esempio 17.1 Ingrandimento longitudinale

Un oggetto esteso lungo l'asse di uno specchio sferico concavo, diciamo un segmento  $P_1P_2$ , ha come immagine il segmento  $Q_1Q_2$  che è in generale di lunghezza diversa. Si definisce *ingrandimento longitudinale* il rapporto

$$\frac{\Delta q}{\Delta p} = \frac{q_2 - q_1}{p_2 - p_1} . \quad (17.12)$$

Risolviamo la (17.6) esplicitando  $q = pR/(2p + R)$  e sostituiamo nella (17.12); utilizziamo la seconda delle espressioni (17.10) ottenendo

$$\frac{\Delta q}{\Delta p} = I_1 I_2 , \quad (17.13)$$

dove  $I_1$  è l'ingrandimento trasversale per  $p = p_1$  e  $I_2$  per  $p = p_2$ . Se l'oggetto è molto corto  $I_1 \approx I_2$  e

$$\frac{dq}{dp} = I^2 , \quad (17.14)$$

essendo  $I$  calcolato in un punto interno all'intervallo  $dp$ . In ogni caso l'ingrandimento longitudinale è diverso dall'ingrandimento trasversale: l'immagine di un oggetto che non sta in un piano ortogonale all'asse è sempre deformata, se lo specchio è sferico. Solo in un intorno del centro di curvatura  $I = 1$  e l'ingrandimento longitudinale è eguale a quello trasversale.

In uno specchio piano l'ingrandimento longitudinale è sempre unitario.

La trattazione delle proprietà degli specchi è stata svolta in questo paragrafo in modo molto discorsivo, più grafico che analitico, per acquisire familiarità con le procedure di costruzione delle immagini e con le varie definizioni e convenzioni. Per i casi dei paragrafi successivi l'esposizione sarà più sintetica essendo i metodi sostanzialmente gli stessi, anche se basati sulla (17.2) invece che sulla (17.1).

## 17.4 Diottri

Esamineremo, come secondo esempio di strumento ottico semplice, il comportamento di una *superficie diottrica sferica convessa* che separa un mezzo con indice di rifrazione  $n_1$ , posto a sinistra della superficie, da un mezzo con indice di rifrazio-

ne  $n_2$  e supponiamo inoltre che sia  $n_1 < n_2$ . Le relazioni tra gli angoli, seguendo il procedimento visto per la figura 17.9, sono

$$\theta + \alpha = \theta_i, \quad \theta_i + \theta' = \alpha.$$

A queste va aggiunta la  $n_1\theta_i = n_2\theta'$ , che è la (17.2) scritta nell'approssimazione parassiale. Segue

$$n_1\theta + n_2\theta' = (n_2 - n_1)\alpha.$$

Gli angoli considerati sono tutti positivi e anche  $R$  è positivo, come le distanze  $p$  e  $q$ ; pertanto, detta  $h = HV = HK$ ,

$$\theta = \frac{h}{p}, \quad \theta' = \frac{h}{q}, \quad \alpha = \frac{h}{R}$$

e l'*equazione del diottro sferico convesso* si scrive

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{R}. \quad (17.15)$$

Nell'*ipotesi parassiale* la relazione tra  $p$  e  $q$  non dipende dagli angoli formati dai raggi con l'asse e si conclude che il *diottro sferico è stigmatico*.

Quando l'oggetto è posto a distanza infinita ( $p = +\infty$ ), l'immagine reale si forma oltre il vertice a distanza

$$f_2 = \frac{n_2 R}{n_2 - n_1}, \quad (17.16)$$

nel punto  $F_2$  detto *fuoco posteriore* del diottro. L'immagine si forma all'infinito ( $q = +\infty$ ) quando l'oggetto è nel punto  $F_1$ , detto *fuoco anteriore* del diottro, posto a sinistra del vertice e distante da questo

$$f_1 = \frac{n_1 R}{n_2 - n_1}. \quad (17.17)$$

Le quantità positive  $f_1$  e  $f_2$  sono le distanze focali anteriore e posteriore del diottro. Esse sono sempre diverse e il loro rapporto è pari al rapporto degli indici di rifrazione,  $f_1/f_2 = n_1/n_2$ . Utilizzando (17.16) e (17.17) l'*equazione del diottro sferico* diventa

$$\frac{f_1}{p} + \frac{f_2}{q} = 1. \quad (17.18)$$

Riportiamo nella tabella 17.4 e nella figura 17.27 le varie situazioni possibili. Nella figura 17.28 è mostrata la funzione  $q(p)$  data da (17.15).

**Tabella 17.4 Relazione fra oggetto e immagine del diottro sferico convesso**

oggetto	con $n_1 < n_2$	immagine
$+\infty \geq p \geq f_1$	reale	$f_2 \leq q \leq +\infty$ reale
$f_1 \geq p > 0$	reale	$-\infty \leq q < 0$ virtuale
$0 > p \geq -\infty$ virtuale		$0 < q \leq f_2$ reale

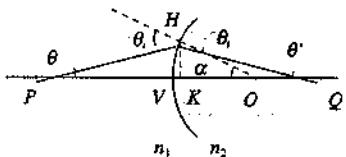


Figura 17.25

Equazione del diottro sferico

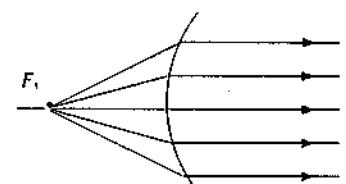
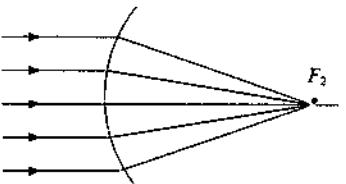


Figura 17.26

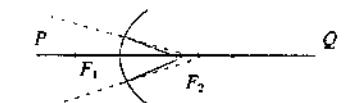
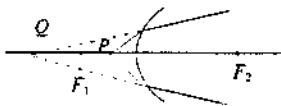
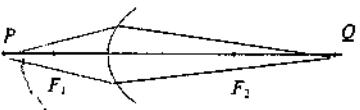


Figura 17.27

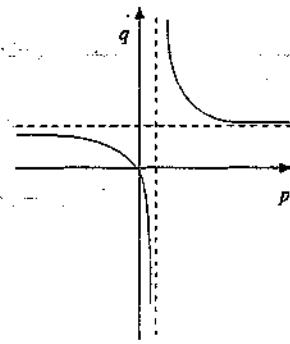


Figura 17.28

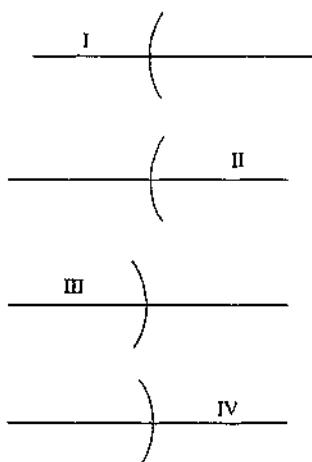


Figura 17.29

Dopo questo caso sono possibili altri tre casi e l'insieme è mostrato nella figura 17.29; non occorre però eseguire altri studi. Infatti il secondo caso si ottiene dal primo in questo modo: operiamo lo scambio  $p \rightarrow -q$  e  $q \rightarrow -p$  per cui (17.15) diventa

$$-\frac{n_1}{q} - \frac{n_2}{p} = \frac{n_2 - n_1}{R} \rightarrow \frac{n_2}{p} + \frac{n_1}{q} = \frac{n_1 - n_2}{R},$$

che è appunto l'*equazione di un diottro sferico convesso* in cui la luce passa da un mezzo con indice di rifrazione maggiore a uno con indice di rifrazione minore. Le costruzioni grafiche per il secondo caso si ottengono pertanto da quelle della figura 17.27 scambiando l'oggetto con l'immagine e facendo propagare la luce lungo i prolungamenti dei raggi.

Infine III si ottiene da II e IV da I con la proprietà di reversibilità (scambio oggetto-immagine) e ricordando che  $R$  diventa negativo.

Non compiliamo altre tabelle, ma mostriamo le costruzioni corrispondenti nella figura 17.30 e le funzioni  $q(p)$  nella figura 17.31.

In conclusione, l'equazione (17.15) rende conto di tutti i casi possibili. Il termine noto  $(n_2 - n_1)/R$  si chiama *potere convergente o diottrico*: se esso è positivo (casi I e IV) il diottro si dice convergente, se esso è negativo (casi II e III) il diottro si dice divergente. La terminologia deriva dal fatto che nel primo caso diminuisce, nel passaggio attraverso la superficie diottrica, l'angolo del raggio con l'asse mentre nel secondo caso aumenta.

Nei diottri convergenti i fuochi sono reali mentre in quelli divergenti i fuochi sono virtuali e le loro posizioni sono scambiate:  $F_1$  è a destra del vertice,  $F_2$  è a sinistra. I piani ortogonali all'asse nei punti  $F_1$  e  $F_2$  si chiamano piani focali: i loro punti sono le immagini di punti all'infinito che inviano un fascio di raggi paralleli tra loro e ad un certo angolo con l'asse.

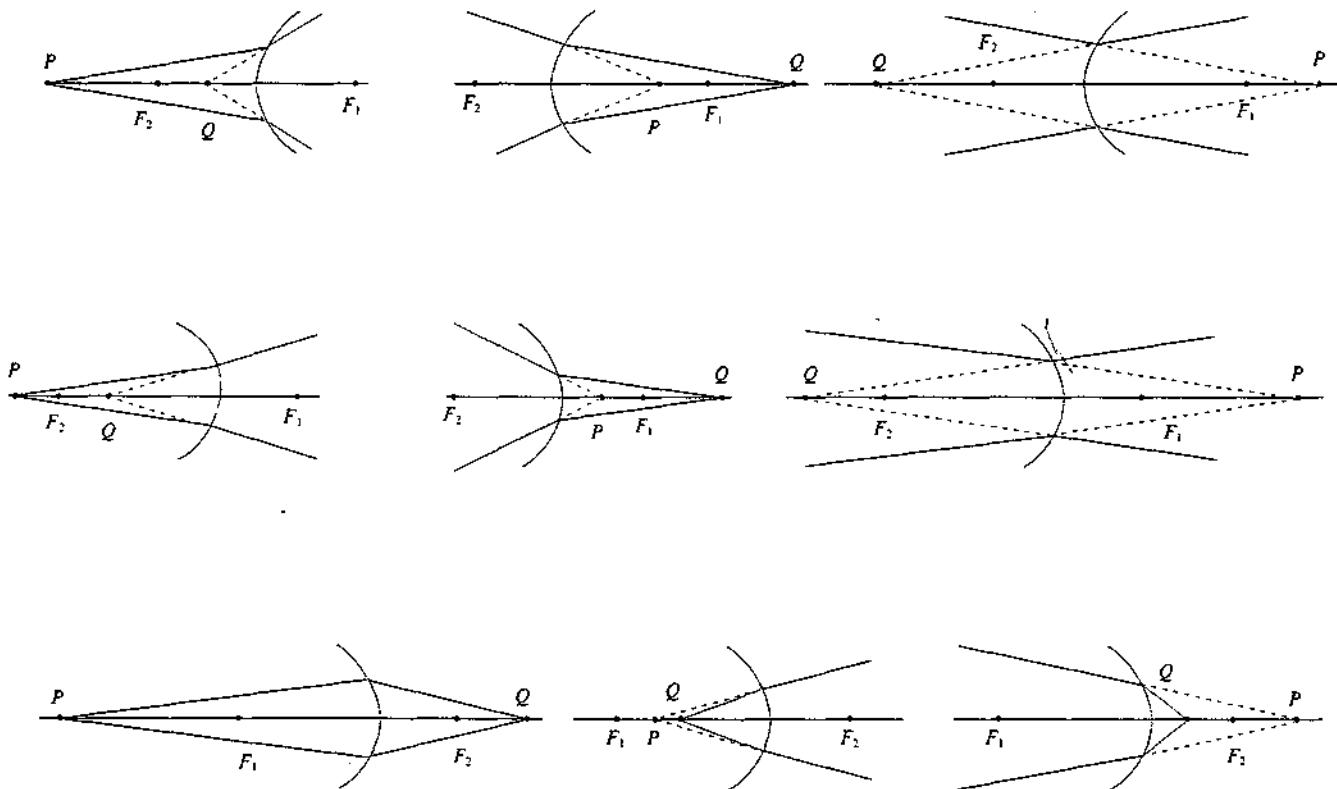


Figura 17.30

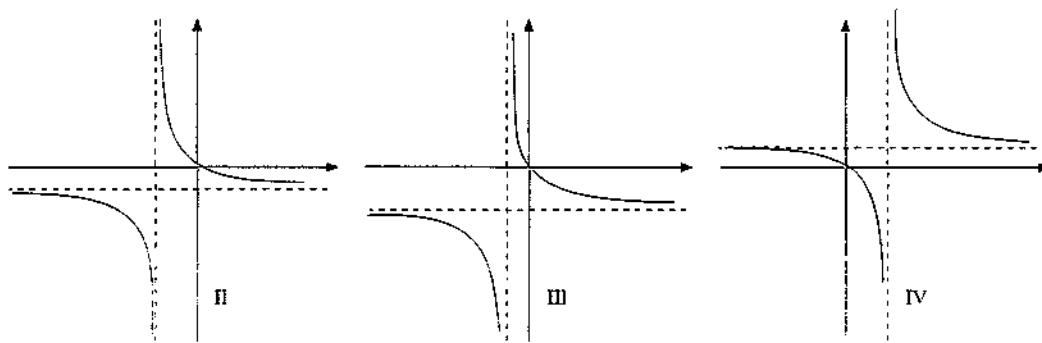


Figura 17.31

L'immagine di un segmento ortogonale all'asse si ottiene con costruzioni grafiche analoghe a quelle delle figure 17.14 e 17.22: si disegnano raggi particolari come quello passante per il centro di curvatura (l'unico non deviato) e quelli passanti per i fuochi. Le immagini reali di oggetti reali e quelli virtuali di oggetti virtuali sono capovolte rispetto all'oggetto mentre negli altri casi sono diritte.

L'*ingrandimento trasversale* ha le espressioni

$$I = \frac{y}{x} = \frac{q - R}{p + R} = \frac{f_1}{p - f_1} = \frac{q - f_2}{f_2} = \frac{n_1 q}{n_2 p} \quad , \quad (17.19)$$

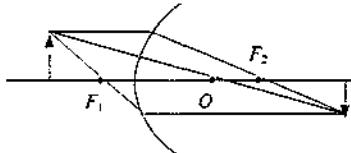


Figura 17.32

che si ricavano dai rapporti tra i lati di triangoli simili in figure come la 17.32.

L'*ingrandimento longitudinale*, seguendo la procedura dell'esempio 17.1, risulta, servendosi di (17.15) e (17.19),

$$\frac{\Delta q}{\Delta p} = \frac{q_2 - q_1}{p_2 - p_1} = -\frac{n_2}{n_1} I_1 I_2 \Rightarrow \frac{dq}{dp} = -\frac{n_2}{n_1} I^2 \quad . \quad (17.20)$$

### Diotto piano

Se il raggio della superficie diottica tende all'infinito il diotto diventa piano e la sua equazione è

$$q = \frac{n_2}{n_1} p \quad (17.21)$$

Un oggetto reale dà sempre un'immagine virtuale mentre un oggetto virtuale dà sempre un'immagine reale; il potere diottico è nullo, l'ingrandimento trasversale è  $-1$ , quello longitudinale  $-n_2/n_1$ .

## 17.5 Lenti sottili

Due superficie diottriche aventi lo stesso asse individuano tre regioni distinte: la luce proveniente da sinistra si propaga nel primo mezzo avente indice di rifrazione  $n_1$ , viene trasmessa dal primo diotto e attraversa il mezzo con indice di rifrazione  $n_2$ , e infine, dopo la trasmissione al secondo diotto, si propaga nel mezzo con indice di rifrazione  $n_3$ . Le superficie diottriche possono essere piane o sferiche, convergenti o divergenti.

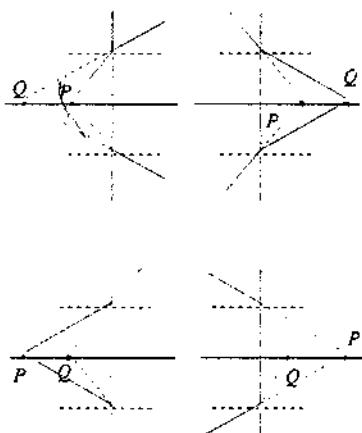


Figura 17.33

Il blocco di materiale trasparente con indice di rifrazione  $n_2$ , delimitato dalle due superficie diottriche, si chiama *lente semplice*. Lo studio del sistema è abbastanza complesso, anche per la grande varietà di situazioni possibili. Noi assumeremo in generale che il primo e il terzo mezzo siano eguali, cioè che sia  $n_3 = n_1$  (questo è il caso di gran lunga più comune), e inizieremo lo studio dalla cosiddetta *lente sottile*, nella quale le superficie diottriche sono molto vicine; nel paragrafo successivo tratteremo il caso della lente semplice spessa e delle lenti composte.

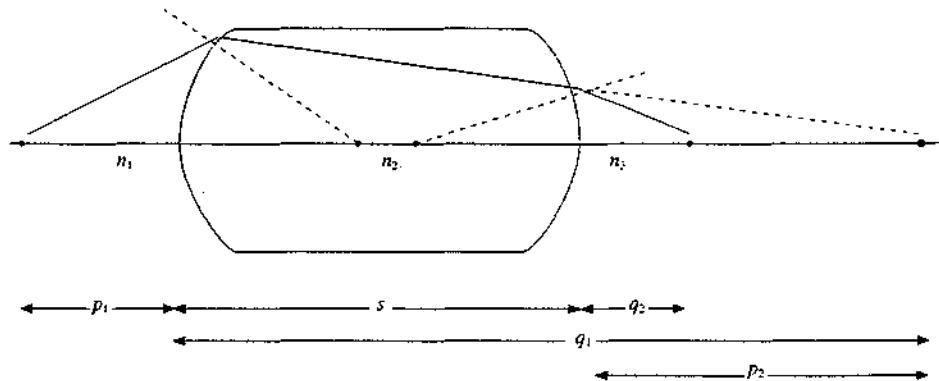


Figura 17.34

Nell'approssimazione parassiale, le equazioni che descrivono il sistema della figura 17.34 sono

$$\frac{n_1}{p_1} + \frac{n_2}{q_1} = \frac{n_2 - n_1}{R_1} , \quad \frac{n_2}{p_2} + \frac{n_3}{q_2} = \frac{n_3 - n_2}{R_2} , \quad p_2 = s - q_1 \quad (17.22)$$

Le prime due sono la (17.15) applicata al primo diottro di raggio di curvatura  $R_1$  e al secondo di raggio  $R_2$ , la terza esprime il fatto che l'immagine data dal primo diottro funge da oggetto per il secondo;  $s$  è la distanza tra i vertici dei diottri, cioè lo spessore della lente.

Ponendo  $s = 0$  e  $n_3 = n_1$  otteniamo dalle (17.22)

$$\frac{n_1}{p_1} + \frac{n_1}{q_1} = (n_2 - n_1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) .$$

Poiché i vertici dei diottri sono praticamente coincidenti tra loro e col centro della lente,  $p_1$  e  $q_1$  sono le distanze dell'oggetto e dell'immagine finale dal centro della lente e li chiamiamo più semplicemente  $p$  e  $q$ . Poniamo inoltre

$$\frac{1}{f} = \frac{n_2 - n_1}{n_1} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \Rightarrow f = \frac{n_1}{n_2 - n_1} \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \quad (17.23)$$

e otteniamo l'*equazione della lente sottile*

Equazione della lente sottile

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} . \quad (17.24)$$

Se l'oggetto è posto all'infinito l'immagine si forma nel punto  $F_2$  a distanza  $f$  dal centro, mentre se l'oggetto è posto nel punto  $F_1$  a distanza  $f$  dal centro l'immagine si

forma all'infinito: per questo  $f$  è chiamata *distanza focale* o brevemente *focale* della lente sottile (si veda la successiva figura 17.37).  $F_1$  e  $F_2$  sono equidistanti dal centro della lente.

La quantità  $1/f$  è detta *potere convergente* della lente: a seconda dei segni e dei valori dei raggi di curvatura e dei valori degli indici di rifrazione,  $1/f$  può essere positivo e allora la lente si dice *convergente* oppure negativo e in tal caso la lente si dice *divergente*.

Nella figura 17.35 sono indicate le combinazioni di raggi di curvatura che danno potere convergente positivo o negativo, se  $n_2 > n_1$ . Si osservi che sono convergenti le lenti più spesse al centro che al bordo, divergenti quelle più sottili al centro che al bordo. Se è  $n_2 < n_1$ , i ruoli si scambiano: essendo in generale una lente fatta di vetro e immersa in aria, il caso  $n_2 > n_1$  è quello più comune. A seconda della forma le lenti si denominano *biconvessi*, *biconcavi*, *piano-convesse*, *piano-concave*, *convesso-concave*; quando  $R_2 = -R_1$ , la lente è detta simmetrica e la sua focale vale

$$f = \frac{n_1}{n_2 - n_1} \frac{R}{2}$$

La tabella 17.5 riporta la relazione tra posizione dell'oggetto e dell'immagine per i due tipi di lenti, illustrata nella figura 17.36. In particolare le costruzioni relative ai fuochi sono mostrate nella figura 17.37: si vede che i fuochi delle lenti divergenti sono virtuali e sono scambiati, come posizione, rispetto ai fuochi della lente convergente. I piani ortogonali all'asse nei punti  $F_1$  e  $F_2$  si chiamano piani focali della lente.

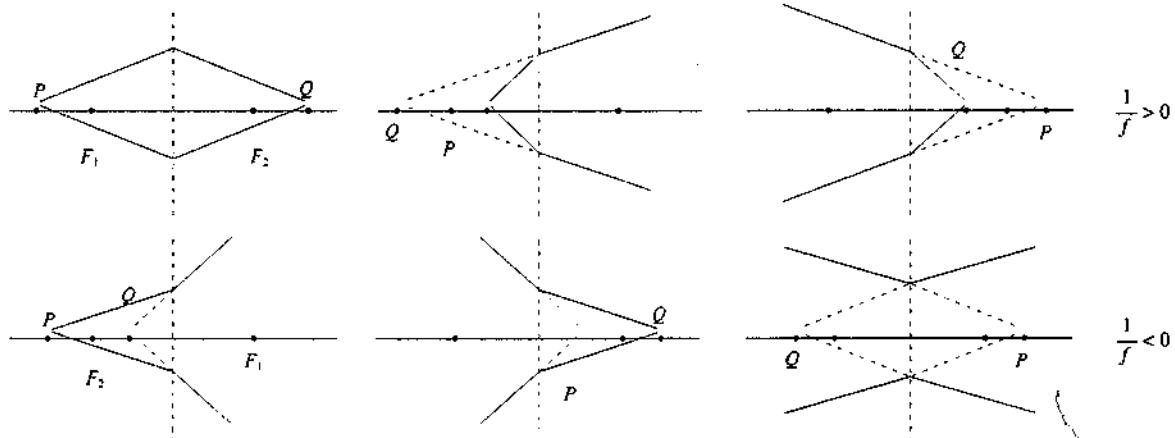


Figura 17.36

Tabella 17.5 Relazione tra oggetto e immagine per una lente sottile

oggetto		immagine	
$+\infty$	$\geq p \geq f$	reale	$f \geq q \leq +\infty$
$f$	$\geq p > 0$	reale	$-\infty \leq q < 0$
$0$	$> p \geq -\infty$	virtuale	$0 < q \leq f$
			$\frac{1}{f} > 0$
$+\infty$	$\geq p > 0$	reale	$f \leq q < 0$
$0$	$> p \geq f$	virtuale	$0 < q \leq +\infty$
$f$	$\geq p \geq -\infty$	virtuale	$-\infty \leq q \leq f$
			$\frac{1}{f} < 0$

Distanza focale

Potere convergente

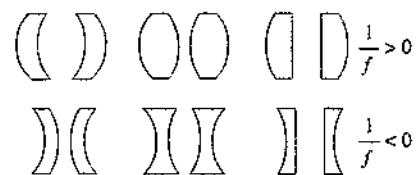


Figura 17.35

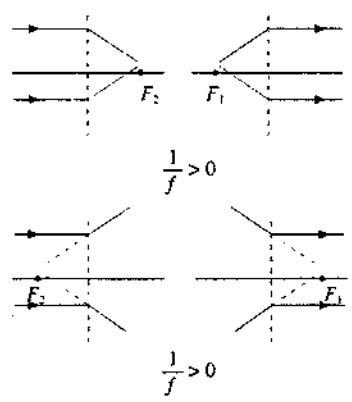


Figura 17.37

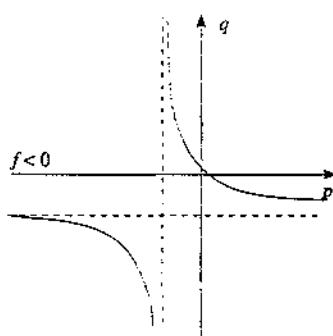
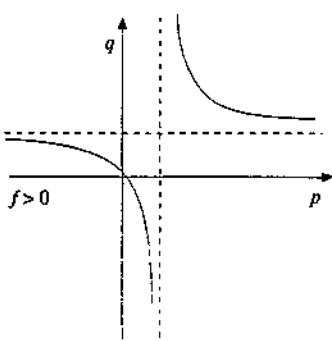


Figura 17.38

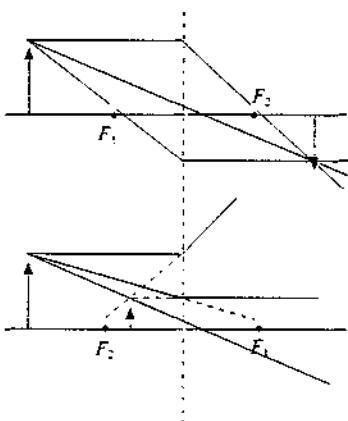


Figura 17.39

La funzione  $q(p)$  data da (17.24) è infine rappresentata in figura 17.38 nei due casi  $f > 0$  e  $f < 0$ .

La costruzione dell'immagine di un segmento ortogonale all'asse si avvale di raggi facilmente tracciabili, come quelli che passano per i fuochi e quello passante per il centro della lente, che non viene deviato (si veda l'esempio 17.4). Da figure come la 17.39 si ricavano le espressioni dell'*ingrandimento trasversale*:

$$I = \frac{y}{x} = \frac{q-f}{f} = \frac{f}{p-f} = \frac{q}{p} \quad . \quad (17.25)$$

L'*ingrandimento longitudinale* vale

$$\frac{\Delta q}{\Delta p} = \frac{q_2 - q_1}{p_2 - p_1} = -I_1 I_2 \quad .$$

### Esempio 17.2

Una lente convergente simmetrica ( $R_1 = 0.3$  m,  $R_2 = -0.3$  m) è fatta di vetro con indice di rifrazione  $n_2 = 1.5$ . Essa è immersa in aria ( $n_1 = 1$ ) o in acqua ( $n_1 = 1.33$ ). Calcolare nei due casi il valore della focale.

#### Soluzione

La (17.23) mostra che la focale, oltre che dal fattore geometrico  $R_1 R_2 / (R_2 - R_1)$ , dipende dagli indici di rifrazione e aumenta al diminuire della differenza  $n_2 - n_1$ : il potere convergente è minore se è minore la differenza degli indici di rifrazione. Nei due casi proposti:

$$f_1 = \frac{1}{1.5 - 1} \cdot \frac{-0.3 \cdot 0.3}{-0.3 - 0.3} = 2 \cdot 0.15 = 0.30 \text{ m} = 30 \text{ cm} \quad ,$$

$$f_2 = \frac{1.33}{1.5 - 1} \cdot 0.15 = 7.82 \cdot 0.15 \approx 1.173 \text{ m} = 117.3 \text{ cm} \quad .$$

### Esempio 17.3

La lente dell'esempio 17.2 è posta tra l'aria e l'acqua. Determinare l'equazione della lente e le sue distanze focali.

#### Soluzione

Nelle (17.22) possiamo solo porre  $s = 0$  e ricaviamo l'equazione

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_3}{q} = \frac{n_2 - n_1}{R_1} + \frac{n_3 - n_2}{R_2} \quad .$$

Da questa per  $q = \infty$  e per  $p \approx \infty$  si hanno le distanze focali

$$f_1 = \frac{n_1 R_1 R_2}{(n_2 - n_1) R_2 + (n_3 - n_2) R_1} \quad , \quad f_2 = \frac{n_3 R_1 R_2}{(n_2 - n_1) R_2 + (n_3 - n_2) R_1} \quad .$$

che soddisfano alla relazione  $f_1/f_2 = n_1/n_3$ , indipendente da  $n_2$ . Nel caso numerico proposto

$$\frac{1}{p} + \frac{1.33}{q} = 2.23 \quad , \quad f_1 = 0.448 \text{ m} \quad , \quad f_2 = 0.596 \text{ m} \quad .$$

**Esempio 17.4**

Una lastra di vetro a facce piane e parallele di spessore  $s$  è immersa in aria. Descrivere il comportamento di un raggio che la attraversa, in particolare se  $s$  è molto piccolo. Ricavare l'equazione della lastra nell'approssimazione parassiale.

**Soluzione**

Un generico raggio che incide sulla lastra con angolo  $\theta_i$  rispetto alla normale esce dalla lastra conservando la direzione incidente, ma spostato lateralmente, come è mostrato nella figura 17.40; la direzione è la stessa in quanto le due deviazioni subite nell'attraversamento delle superficie diottriche si compensano: infatti, essendo il mezzo a destra eguale a quello di sinistra, la (17.2) viene applicata in condizioni opposte nei due casi. Lo spostamento laterale è (vedi anche esempio 14.2):

$$d = AB \sin(\theta_i - \theta_r) = \frac{s}{\cos \theta_i} \sin(\theta_i - \theta_r) .$$

Se lo spessore è trascurabile,  $d = 0$  e la lastra in sostanza non ha influenza sul percorso del raggio. Questi risultati sono validi per qualsiasi angolo di incidenza.

Nella zona vicina al centro una lente può essere approssimata a una lastra a facce piane e parallele, che sarebbero i piani tangententi alle superficie diottriche nel vertice; se la lente è sottile, un raggio passante per il centro non è deviato e ciò è tanto più vero quanto minore è l'angolo che il raggio forma con l'asse della lente.

Se nelle (17.22) poniamo  $R_1 = \infty$  e  $R_2 = \infty$  abbiamo

$$q_1 = -\frac{n_2}{n_1} p_1 , \quad q_2 = -\frac{n_1}{n_2} p_2 , \quad p_2 = s - q_2 \Rightarrow q = -\frac{n_1}{n_2} s - p ;$$

$p$  è la distanza dell'oggetto dalla faccia anteriore e  $q$  la distanza dell'immagine da quella posteriore.

Dall'esame dell'equazione della lastra si vede che per oggetti reali ( $p > 0$ ) l'immagine è sempre virtuale ( $q < 0$ ). Per oggetti virtuali, cioè quando la lastra è illuminata con luce convergente, l'immagine è ancora virtuale se  $p$ , che è negativo, è compreso nell'intervallo tra zero e  $-n_1 s / n_2$ ; per  $p$  inferiore a questo limite l'immagine è reale. Lasciamo per esercizio le costruzioni relative. Se  $s = 0$   $q = -p$ , l'immagine coincide con l'oggetto.

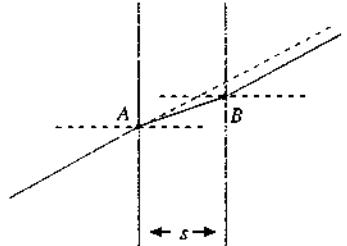


Figura 17.40

## 17.6 Lenti spesse. Sistemi diottrici centrati

Quando lo spessore della lente non è trascurabile si parla di *lente spessa*: per trovare la relazione tra posizione dell'oggetto e dell'immagine ci si serve ancora delle (17.22) con  $s > 0$ . Supponendo che il mezzo a sinistra e a destra della lente sia lo stesso ( $n_1 = n_3$ ), troviamo che se si pone l'oggetto all'infinito l'immagine si forma nel punto  $F_2$  distante  $q_0$  dal secondo diottro, mentre se si mette l'oggetto nel punto  $F_1$  distante  $p_0$  dal primo diottro l'immagine si forma all'infinito, le distanze  $p_0$  e  $q_0$  essendo date da

$$p_0 = \frac{n_1 R_1}{n_2 - n_1} \frac{(n_2 - n_1)s + n_2 R_2}{(n_2 - n_1)s + n_2(R_2 - R_1)} , \quad (17.26)$$

$$q_0 = -\frac{n_1 R_2}{n_2 - n_1} \frac{(n_2 - n_1)s - n_2 R_1}{(n_2 - n_1)s + n_2(R_2 - R_1)} .$$

come è facile verificare. I valori di  $p_0$  e  $q_0$  sono in generale diversi, a meno che non sia  $s = 0$ , nel qual caso si ritrova la (17.23), oppure la lente sia simmetrica ( $R_2 = -R_1$ ).

Lo schema dei raggi passanti per i fuochi  $F_1$  e  $F_2$  è mostrato in figura 17.41. Dall'esame dei triangoli simili  $F_1 B_1 V_1$ ,  $F_1 A_1 P_1$  e  $D_1 B_1 V_1$ ,  $D_1 C_1 V_2$  ricaviamo

$$B_1 V_1 / A_1 P_1 = F_1 V_1 / F_1 P_1 = p_0 / f_1 ,$$

$$B_1 V_1 / C_1 V_2 = D_1 V_1 / D_1 V_2 = -q_0 / p_2 ,$$

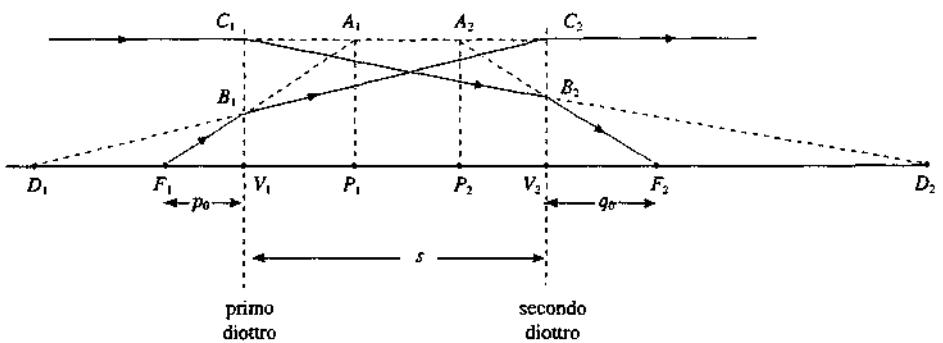


Figura 17.41

avendo definito  $f_1$  la distanza del primo fuoco dal punto  $P_1$ , e indicato con  $q_1$  la distanza dell'immagine virtuale di  $F_1$ , data dal primo diottro, la quale funge da oggetto per il secondo, da cui dista  $p_2 = s - q_1$ . Siccome  $A_1 P_1 = C_2 V_2$  si trova

$$f_1 = -\frac{P_2}{q_1} p_0 = -\frac{s - q_1}{q_1} p_0 .$$

D'altra parte l'equazione del primo diottro con l'oggetto in  $F_1$  è

$$\frac{n_1}{p_0} + \frac{n_2}{q_1} = \frac{n_2 - n_1}{R_1} ;$$

da questa si ricava  $q_1$  e lo si sostituisce nell'espressione di  $f_1$  insieme alla prima delle (17.26), ottenendo

$$f_1 = \frac{n_1 n_2}{n_2 - n_1} \frac{R_1 R_2}{(n_2 - n_1) s + n_2 (R_2 - R_1)} . \quad (17.27)$$

Se si ripete la procedura riferendosi al secondo fuoco  $F_2$  si trova lo stesso risultato per la distanza  $f_2 = P_2 F_2$ . Si conclude che esistono due punti  $P_1$  e  $P_2$  tali che rispetto ad essi le distanze dei fuochi sono uguali. La quantità  $f = f_1 = f_2 = F_1 P_1 = P_2 F_2$  si chiama *distanza focale* della lente spessa.

I punti  $A_1$  e  $A_2$  hanno la seguente proprietà: se consideriamo  $A_1$  un oggetto e cerchiamo qual è la sua immagine data dalla lente spessa, troviamo che questa si trova in  $A_2$ . Ciò risulta chiaro dalla figura 17.42 che mostra, per una data retta parallela all'asse della lente, come si costruiscono i punti  $A_1$  e  $A_2$ . Fissata la retta,  $A_1$  è il punto di questa retta individuato dalla direzione del raggio che partendo da  $F_1$  esce dalla lente secondo tale retta, mentre  $A_2$  è individuato dalla direzione del raggio che entra in  $F_2$  provenendo da infinito lungo la stessa retta. Anche se il percorso effettivo dei raggi all'interno della lente è diverso, come si vede nella figura 17.41, la costruzione è sempre possibile: essa mostra che alle due deviazioni reali sulle superficie diottriche si può sostituire una sola deviazione equivalente, in  $A_1$  per il raggio parallelo uscente e in  $A_2$  per il raggio parallelo entrante.

Poiché nell'approssimazione parassiale i diottri sono aplanatici, tutti i punti del piano passante per  $A_1$  e ortogonale all'asse hanno l'immagine nel piano passante per  $A_2$  e ortogonale all'asse: ovvero, per qualsiasi retta parallela all'asse i punti individuati dalla costruzione in figura 17.42 stanno sempre negli stessi due piani. Tali piani sono detti *piani principali* della lente e i punti  $P_1$  e  $P_2$ , intersezioni con l'asse, *punti principali*. La proprietà più importante è già stata enunciata: *i fuochi della lente, che non hanno in generale la stessa distanza dai vertici della lente, hanno invece la stessa distanza dai piani principali*.

Data una lente qualsiasi, noti cioè i parametri geometrici ( $R_1, R_2, s$ ) e l'indice di rifrazione della lente e del mezzo, le formule trovate per  $p_0, q_0, f$  permettono di determinare le posizioni dei fuochi e dei punti principali, che possono essere interni o esterni alla lente. La costruzione dell'immagine per un dato oggetto si esegue allora come in figura 17.43 e con i metodi visti nei paragrafi precedenti si dimostra che l'equazione della lente è

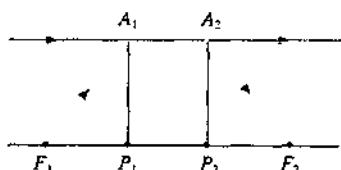


Figura 17.42

Piani principali

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \quad , \quad (17.28)$$

misurando le distanze degli oggetti rispetto a  $P_1$  e quelle delle immagini rispetto a  $P_2$ ; per l'ingrandimento trasversale valgono le relazioni (17.25).

In una lente sottile i piani principali coincidono tra loro e con il piano in cui si considera localizzata la lente. Confrontando la figura 17.43 con la figura 17.39, si comprende l'utilità dei piani principali per la costruzione delle immagini: il procedimento è lo stesso, anche se l'ingresso e l'uscita dei raggi dal sistema avvengono su due piani distinti, la cui distanza dipende dallo spessore della lente.

Nel caso particolare in cui uno dei due diottri sia piano, l'espressione della distanza focale  $f$  è semplificata rispetto a (17.27): si trova subito passando al limite

$$f(R_1 = \infty) = -\frac{n_1 R_2}{n_2 - n_1} \quad , \quad f(R_2 = \infty) = \frac{n_1 R_1}{n_2 - n_1}$$

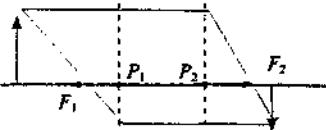


Figura 17.43

### Esempio 17.5

Calcolare la distanza  $x$  tra i piani principali di una lente spessa e stabilire quando  $x$  è eguale a zero e quando è eguale allo spessore della lente.

#### Soluzione

La distanza tra i fuochi della lente può essere scritta nelle due maniere equivalenti

$$p_0 + s + q_0 = f + x + f$$

Sostituendo le espressioni (17.26) e (17.27) si trova

$$x = s \left( \frac{n_2 - n_1}{n_2 - n_1} \right) \frac{s + R_2 - R_1}{(n_2 - n_1)s + n_2(R_2 - R_1)} \quad (17.29)$$

La distanza tra i piani principali è quindi nulla per una lente sottile oppure per una lente spessa, se  $s = R_1 - R_2$  con  $R_1 - R_2 > 0$  dovendo essere  $s > 0$ . Questa condizione si può realizzare sempre con una lente biconvessa, a seconda dei valori dei raggi con una lente concavo-convessa e mai con una lente biconcava.

Si verifica facilmente che la distanza  $x$  tra i piani principali risulta eguale allo spessore  $s$  della lente solo se  $R_1 = R_2$  e questo è possibile solo con una lente concavo-convessa. Quando uno dei raggi va all'infinito  $x = s(n_2 - n_1)/n_2$  e non può mai essere eguale a zero o eguale a  $s$ .

### Esempio 17.6

Calcolare la posizione dei piani principali per una lente sferica biconvessa ( $R_1 = R$ ,  $R_2 = -R$ ,  $s = 2R$ ), una lente sferica biconcava ( $R_1 = -R$ ,  $R_2 = R$ ,  $s = 2R$ ) e per una lente sferica concavo-convessa ( $R_1 = R_2 = -R$ ,  $s = 2R$ ). Si ponga  $n_1 = 1$  e  $n_2 = 1.5$ . La quantità  $R$  è positiva.

#### Soluzione

Nel primo caso l'applicazione delle (17.26) e (17.27) dà

$$p_0 = q_0 = \frac{R}{2} \quad , \quad f = \frac{3}{2}R$$

e quindi i piani principali devono coincidere tra loro e con la sezione mediana della sfera. Ciò è in accordo con quanto ricavato nell'esempio 17.5; del resto con i nostri dati  $x = 0$ .

Nel secondo caso

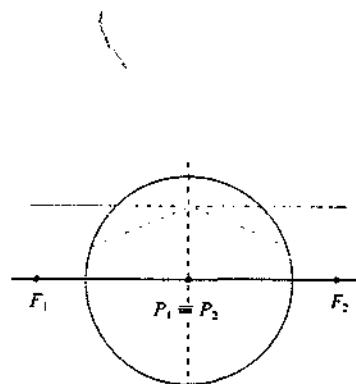


Figura 17.44

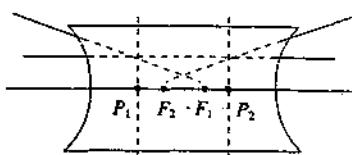


Figura 17.45

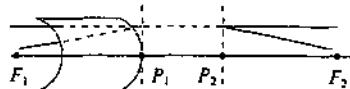


Figura 17.46

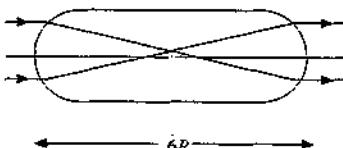


Figura 17.47

**Sistema diottrico centrato**

$$p_0 = q_0 = -1.25 R, \quad f = -0.75 R, \quad x = R.$$

I fuochi sono virtuali e i piani principali sono interni alla lente.  
Infine nel terzo caso

$$p_0 = R, \quad q_0 = 5 R, \quad f = 3 R, \quad x = s.$$

La distanza tra i piani principali è eguale allo spessore della lente, in quanto  $R_1 = R_2$  (vedi esempio 17.5), anche se i piani principali non coincidono con i diottri. In effetti si dimostra subito che questa coincidenza, cioè  $f = p_0 = q_0$ , si realizza solo se  $s = 0$ , lente sottile.

**Esempio 17.7**

Determinare in quali casi la distanza focale di una lente spessa ha valore infinito.

**Soluzione**

Escludiamo la lastra piana a facce parallele, trattata nell'esempio 17.4, per la quale è chiaro che se l'oggetto va all'infinito anche l'immagine va all'infinito e viceversa. Dalla (17.27) vediamo che  $f = \infty$  se

$$(n_2 - n_1)s + n_2(R_2 - R_1) = 0 \Rightarrow s = \frac{n_2}{n_2 - n_1}(R_1 - R_2).$$

Supponendo  $n_1 = 1$  e  $n_2 = 1.5$ ,  $s = 3(R_1 - R_2)$  e, per una lente simmetrica biconvessa,  $s = 6R$ . Il percorso effettivo dei raggi paralleli all'asse è mostrato in figura 17.47. Vediamo che il problema può essere impostato diversamente, imponendo che il fuoco posteriore del primo diottro coincida con il fuoco anteriore del secondo diottro.

La definizione di piani e punti principali e le relative costruzioni illustrate nelle figure 17.42 e 17.43 si estendono a un sistema composto da più lenti, sottili o spesse, aventi lo stesso asse, che è indicato col nome di *sistema diottrico centrato*. Le posizioni dei fuochi si determinano sperimentalmente, illuminando con luce parallela all'asse, e i piani principali possono essere trovati col metodo della figura 17.42. In realtà quando si acquista una lente, semplice o composta, il costruttore di norma fornisce il valore della distanza focale per cui dalla determinazione della posizione dei fuochi si risale alla posizione dei piani principali. Vale sempre, rispetto a questi, l'equazione (17.28), ma non le formule (17.26) e (17.27); per il calcolo della distanza focale di una successione di superficie diottiche esistono formule più generali.

Quasi tutti gli strumenti ottici sono composti da più lenti e presentano una grande varietà di strutture. Noi ci limitiamo a trattare nell'esempio che segue il caso di una lente composta da due lenti sottili; nel paragrafo 17.8 accenneremo ad alcuni strumenti di uso comune e al funzionamento ottico dell'occhio umano.

**Esempio 17.8**

Date due lenti sottili, una di focale  $f_1$  e una di focale  $f_2$ , aventi lo stesso asse e distanti  $h$ , determinare la distanza focale della lente composta dalle due lenti sottili. Discutere in particolare il caso in cui le due lenti siano una convergente e una divergente, di focale rispettivamente  $f_0$  e  $-f_0$ , e vengano illuminate con luce parallela all'asse.

**Soluzione**

Le equazioni del sistema completo sono

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} = \frac{1}{f_1}, \quad p_2 = h - q_1, \quad \frac{1}{p_2} + \frac{1}{q_2} = \frac{1}{f_2}.$$

Ponendo  $q_2 = \infty$  si trova la distanza  $p_0$  dalla prima lente del primo fuoco  $F_1$  (fuoco anteriore), mentre ponendo  $p_1 = \infty$  si ha la distanza  $q_0$  dalla seconda lente del secondo fuoco  $F_2$  (fuoco posteriore):

$$p_0 = \frac{f_1(h - f_2)}{h - f_1 - f_2}, \quad q_0 = \frac{f_2(h - f_1)}{h - f_1 - f_2}.$$

Partendo dalla stessa costruzione della figura 17.41 possiamo scrivere

$$f = -\frac{p_2}{q_1} p_0 = -\frac{h - q_1}{q_1} p_0,$$

in cui  $q_1$  si ricava dall'equazione della prima lente:

$$\frac{1}{p_0} + \frac{1}{q_1} = \frac{1}{f_1} \Rightarrow q_1 = \frac{p_0 f_1}{p_0 - f_1}.$$

In conclusione

$$f = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2 - h}, \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{h}{f_1 f_2}. \quad (17.30)$$

Se le lenti sottili sono addossate  $h = 0$  e

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}.$$

Calcolata la focale e noti  $p_0$  e  $q_0$  si possono determinare le posizioni dei piani principali.

Nel caso particolare proposto,  $f_1 = f_0$  e  $f_2 = -f_0$ , abbiamo

$$p_0 = \frac{f_0(h + f_0)}{h}, \quad q_0 = \frac{-f_0(h - f_0)}{h}, \quad f = \frac{f_0^2}{h}.$$

La focale è sempre positiva, come  $p_0$ , mentre  $q_0$  può anche essere nulla ( $h = f_0$ ) o negativa ( $h > f_0$ ). Pertanto i fuochi sono esterni ai piani principali, il fuoco anteriore  $F_1$  è a sinistra della prima lente, ma il fuoco posteriore  $F_2$ , a seconda del valore della distanza tra le lenti, può essere a destra della seconda lente, coincidente con questa o alla sua sinistra: in quest'ultimo caso esso è virtuale.

I risultati si ricavavano facilmente anche dallo studio della tabella 17.5. Il fuoco posteriore  $F$  della lente convergente è l'oggetto per la lente divergente. Se essa è posizionata tra la lente convergente e  $F$ , l'oggetto è virtuale e l'immagine è reale; in caso contrario l'immagine è virtuale perché l'oggetto è reale, come mostrato in figura 17.48.

Se scambiamo la posizione delle lenti, il fuoco posteriore è sempre reale mentre quello anteriore è reale se  $h < f_0$  e virtuale se  $h > f_0$  (per capirlo basta applicare la proprietà di reversibilità alla figura 17.48).

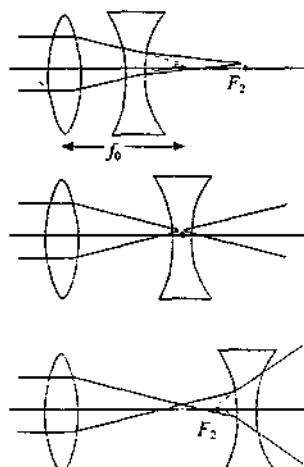


Figura 17.48

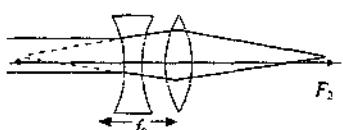


Figura 17.49

## 17.7 Aberrazioni

Le equazioni ricavate per la riflessione su una superficie catottrica e la trasmissione su una o più superficie diottriche sono valide solo nell'approssimazione parassiale. Quando consideriamo raggi con angoli grandi rispetto all'asse oppure fasci di luce che contengono raggi lontani dall'asse, anche se a piccolo angolo, o infine utilizziamo luce non monocromatica, anche se parassiale, le immagini ottenute si discostano da quelle calcolate con la teoria parassiale. Il fenomeno si chiama *aberrazione* (dell'immagine vera rispetto a quella calcolata) e ne elenchiamo brevemente i vari aspetti.

### A. Aberrazione cromatica

L'indice di rifrazione dipende dalla lunghezza d'onda e, quindi, per una data direzione di

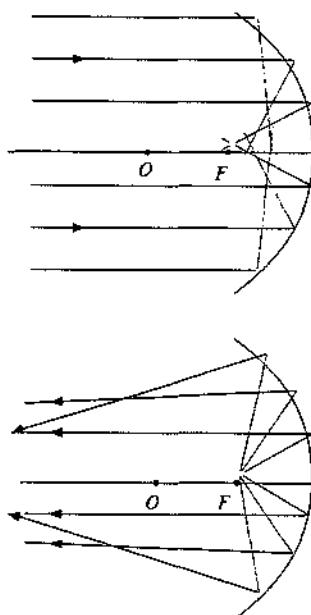


Figura 17.50

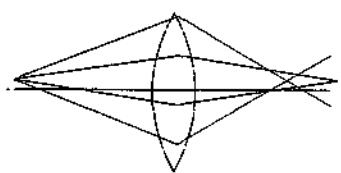


Figura 17.51

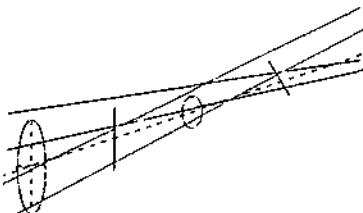


Figura 17.52

incidenza, sono diverse le direzioni di trasmissione ad una superficie diottrica. Un sistema formato da lenti, anche in approssimazione parassiale, dà di un oggetto che emette luce bianca tante immagini colorate, a distanze diverse e con ingrandimenti diversi; la distanza focale di una lente è funzione dell'indice di rifrazione ed è di norma minore per lunghezze d'onda minori, perché per queste è maggiore l'indice di rifrazione.

La correzione del cromatismo si effettua in varie maniere; le più comuni consistono nell'uso dei cosiddetti *doppietti acromatici*. Ad esempio si dimostra che se si utilizzano, al posto di un'unica lente, due lenti sottili poste a contatto, una convergente e una divergente, fatte di vetro diverso, tali da avere la stessa focale complessiva per due lunghezze d'onda diverse; il sistema è rigorosamente acromatico per queste due componenti della luce e lo è approssimativamente per lunghezze d'onda vicine. Lo stesso risultato si ottiene nell'intorno di una data  $\lambda_0$  se si usano due lenti dello stesso vetro, ma con focale diversa, poste a una distanza pari alla semisomma delle focali, calcolate per la data  $\lambda_0$ .

Gli specchi, come abbiamo ricordato, sono esenti dall'aberrazione cromatica in quanto la (17.1) non contiene l'indice di rifrazione.

#### B. Aberrazione di sfericità

Consideriamo prima uno specchio sferico per il quale venga utilizzata una notevole parte della superficie riflettente e non soltanto una piccola zona attorno al vertice. Nella figura 17.50 è mostrato cosa succede ai raggi paralleli all'asse provenienti dall'infinito e ai raggi emessi dal fuoco. È evidente che una superficie catottrica sferica non è stigmatica per fasci di grande apertura. Poiché il problema è di interesse rilevante in astronomia (i telescopi riflettori hanno un grande specchio sferico che raccoglie la luce proveniente da oggetti a distanza infinita), sono stati escogitati efficaci metodi di correzione, che consistono nell'introduzione di una lente opportuna sul cammino dei raggi. Oppure bisogna rinunciare alla superficie sferica e adottare uno specchio a forma di paraboloido di rotazione: in tal caso si dimostra che i raggi paralleli all'asse sono tutti riflessi nello stesso punto dell'asse, fuoco del paraboloido, senza approssimazioni. Viceversa la luce uscente dal fuoco esce parallela da uno specchio parabolico, proprietà usata nei proiettori. Naturalmente gli stessi problemi si presentano anche per oggetti posti a distanza finita; va detto che quando l'immagine è osservata con l'occhio questo limita di molto l'apertura del fascio di raggi e l'immagine sulla retina è in generale nitida.

L'aberrazione di sfericità è presente pure in una lente, anche in luce monocromatica. L'effetto è sia longitudinale che trasversale: i punti di incontro dei raggi emessi da un oggetto puntiforme sull'asse sono distribuiti lungo una certa zona dell'asse e, se consideriamo le intersezioni dei raggi con un piano ortogonale all'asse, esse stanno in una zona circolare che varia di diametro a seconda di dove mettiamo il piano. Esiste una posizione in cui il diametro è minimo e in corrispondenza si ha l'immagine migliore, cioè meno confusa. L'aberrazione di sfericità in una lente si riduce mettendo un diaframma che elimini i raggi più lontani dall'asse; così facendo si riduce però la quantità di luce che raggiunge l'immagine.

#### C. Coma, astigmatismo, curvatura di campo

Quando l'oggetto puntiforme non è sull'asse l'immagine non è più un dischetto circolare, ma assume una forma allungata che ricorda la forma di una cometa (dove il nome coma). Accanto a questo effetto ve ne è un altro longitudinale, detto astigmatismo: spostando lungo l'asse uno schermo ortogonale all'asse della lente si osserva che i raggi emessi da un punto al di fuori dell'asse prima si incontrano nei punti di un segmento verticale, poi stanno su un disco e successivamente si incontrano nei punti di un segmento orizzontale (figura 17.52). L'immagine meglio definita è quella a forma di disco. Se poi l'oggetto è una figura piana ortogonale all'asse, i dischetti immagine dei vari punti stanno su una superficie curva (convessa verso la lente) e questa ulteriore aberrazione è detta curvatura di campo.

Gli effetti descritti si presentano di norma tutti insieme e una correzione simultanea è praticamente impossibile per una sola lente e difficile per un sistema: l'uso di diaframmi che limitano i fasci è di aiuto, ma occorre impiegare anche altri metodi più sofisticati.

#### D. Distorsione

L'ultimo effetto che consideriamo è dovuto alla variazione dell'ingrandimento trasversale con la distanza dall'asse, per cui l'immagine di un oggetto esteso piano non gli è simile. Se l'ingrandimento cresce con la distanza si ha la *distorsione a cuscinetto* (figura 17.53a), se

diminuisce la *distorsione a barilotto* (figura 17.53b); l'oggetto di cui mostriamo le immagini distorte è un quadrato. Si trova che la distorsione è introdotta da un uso non appropriato di diaframmi che tagliano una parte dei raggi che concorrono a formare l'immagine e che essa scompare se si sostituisce la lente con due lenti simmetriche rispetto ad un diaframma.

A conclusione di questo paragrafo facciamo alcune osservazioni. I fenomeni descritti che non sono dovuti a difetti di costruzione, come ad esempio superficie che non sono perfettamente sferiche, discendono dal fatto che con superficie sferiche non si possono raggiungere esattamente i requisiti di stigmatismo in una regione estesa di spazio. I risultati sono tanto migliori quanto più numerose sono le superficie diottriche adoperate, anche se ovviamente c'è un limite pratico ed economico al numero di lenti. Si comprende così un aspetto positivo dell'utilizzo di un sistema diottico centrato al posto di una singola lente, anche quando apparentemente questa potrebbe dare gli stessi risultati: con più lenti è sempre possibile una migliore correzione delle aberrazioni. Poiché però una correzione perfetta è impossibile, nella pratica gli interventi sono mirati agli scopi che si vogliono raggiungere: ad esempio, entro certi limiti, la distorsione si può tollerare in un cannocchiale, ma deve essere eliminata in un obiettivo fotografico.

## 17.8 Strumenti ottici. L'occhio

In questo paragrafo accenniamo soltanto agli strumenti che permettono all'occhio di osservare meglio i particolari di oggetti grandi molto lontani (cannocchiale) e di oggetti piccoli vicini (microscopio). Poiché una parte delle caratteristiche di questi strumenti dipende dal fatto che l'utilizzazione avviene tramite l'occhio, descriviamo innanzitutto il funzionamento ottico dell'occhio.

### L'occhio umano

La luce entra nell'occhio attraverso una superficie diottica sferica di raggio  $R_1 = 0.8$  cm, la *cornea*, che separa l'aria ( $n_1 = 1$ ) dall'*umore acqueo*, spesso  $s_1 = 0.3$  cm e con indice di rifrazione  $n_2 = 1.34$ . Segue il *cristallino*, che è una lente biconvessa (quasi) simmetrica con raggio di curvatura  $R_2$  e indice di rifrazione  $n_3 = 1.44$ , e l'*umore vitreo*, spesso  $s_2 = 1.9$  cm e con indice di rifrazione  $n_2$ . Alla fine dell'*umore vitreo* c'è la *retina*; il raggio del *cristallino* cambia a seconda della distanza dell'oggetto (processo di accomodamento) in modo che l'immagine si forma sempre sulla retina. Immediatamente prima del *cristallino* si trova l'*iride* al cui centro c'è un'apertura, la *pupilla*, il cui diametro varia tra 8 e 2 mm a seconda della quantità di luce che arriva all'occhio (processo di adattamento).

L'*occhio normale* (*emmetropo*) è in grado di dare immagini nitide di oggetti posti tra l'*infinito* (punto remoto) e il cosiddetto punto prossimo, che dista dall'occhio circa  $d = 25$  cm; questa distanza in realtà varia con l'età, da  $\sim 10$  cm a  $\sim 60$  cm. Vogliamo calcolare di quanto varia il raggio di curvatura del *cristallino* quando l'occhio è accomodato all'*infinito* o sta fissando il punto prossimo. Le equazioni da utilizzare sono:

$$\frac{1}{p_1} + \frac{n_2}{q_1} = \frac{n_2 - 1}{R_1} \quad \text{trasmissione sulla cornea ,}$$

$$\frac{1}{p_2} + \frac{1}{q_2} = \frac{n_3 - n_2}{n_2} \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{-R_2} \right) \quad \text{effetto del cristallino .}$$

In quest'ultima si tiene conto che il *cristallino*, trattato come una lente sottile, è immerso in un mezzo con indice di rifrazione  $n_2$  (e non in aria). Inoltre  $p_2 = s_1 - q_1$  e  $q_2 = s_2$ , in quanto l'immagine si forma sulla retina. Si trova:

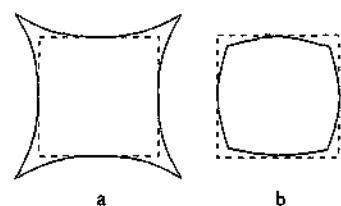


Figura 17.53

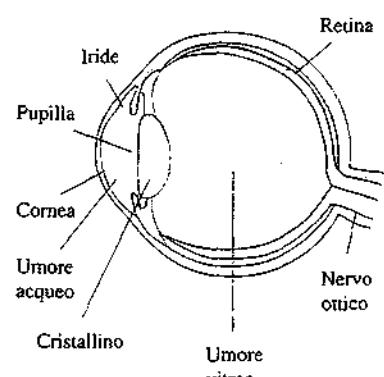


Figura 17.54

$$\begin{array}{ll} p_1 = +\infty & q_1 = 3.15 \text{ cm} \\ p_1 = 25 \text{ cm} & q_1 = 3.48 \text{ cm} \end{array} \quad \begin{array}{ll} p_2 = -2.85 \text{ cm} & R_2 = 0.85 \text{ cm} \\ p_2 = -3.18 \text{ cm} & R_2 = 0.70 \text{ cm} \end{array}$$

Le immagini date dalla cornea si formerebbero quindi oltre la retina, ma interviene l'azione convergente del cristallino. Nell'esempio numerico proposto, che dà un'idea dei valori in gioco, la variazione relativa del raggio del cristallino è del 18%.

L'occhio ipermetropo ha il punto prossimo più lontano di 25 cm: esso è cioè troppo poco convergente e ha bisogno di una lente convergente; l'occhio miope ha il punto remoto a distanza finita, essendo troppo convergente, e ha bisogno di una lente divergente. È questa la funzione principale degli occhiali da vista che coraggono i due difetti. Un altro possibile difetto dell'occhio è l'astigmatismo (da non confondere con l'aberrazione che porta questo nome), dovuto al fatto che la cornea non è esattamente sferica per cui, ad esempio, è più convergente nel piano orizzontale che nel piano verticale; la correzione avviene per mezzo di lenti cilindriche, che però ci limitiamo a menzionare.

La migliore visione di un oggetto si ha quando questo si trova all'incirca nel punto prossimo, per cui la distanza  $d$  è anche detta *distanza di visione distinta*: in tal caso l'oggetto è osservato sotto un angolo  $\alpha$  per il quale vale la relazione  $\tan \alpha = y/d$  e l'occhio è al massimo dell'accomodamento.

Gli strumenti costruiti con lo scopo di permettere all'occhio di cogliere particolari degli oggetti che altrimenti non gli sarebbe possibile vedere consentono in sostanza un angolo  $\beta$  di osservazione maggiore. Il rapporto

Distanza di visione distinta

Ingrandimento visuale

$$V = \tan \beta / \tan \alpha \quad (17.31)$$

è detto *ingrandimento visuale*.

### Lente di ingrandimento. Microscopio

Lo strumento più semplice che realizza la suddetta condizione è la lente di ingrandimento. Si tratta di una lente convergente con focale  $f$  minore della distanza di visione distinta  $d$ : l'oggetto è posizionato nelle vicinanze del fuoco anteriore della lente in modo da ottenere un'immagine virtuale diritta che è vista dall'occhio, situato tra la lente e il fuoco posteriore, come se fosse nel punto remoto (l'occhio lavora così in condizione di minimo accomodamento, ovvero, come si dice, di riposo). Dalla figura 17.56 risulta che l'angolo  $\beta$  sotto cui è vista l'immagine è tale che  $\tan \beta = y/f$  mentre  $\tan \alpha = y/d$  per cui da (17.31), esprimendo  $f$  in centimetri,

$$V = \frac{d}{f} = \frac{25}{f}$$

Con una lente semplice si arriva a valori di  $V$  dell'ordine di 3 ( $f = 8 \text{ cm}$ ); per ingrandimenti maggiori bisogna usare lenti composte corrette per le aberrazioni e si raggiungono valori di  $V$  compresi tra 10 e 20.

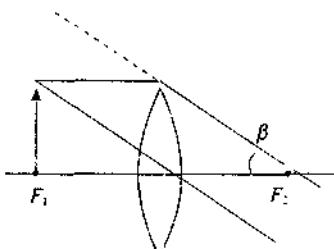


Figura 17.56

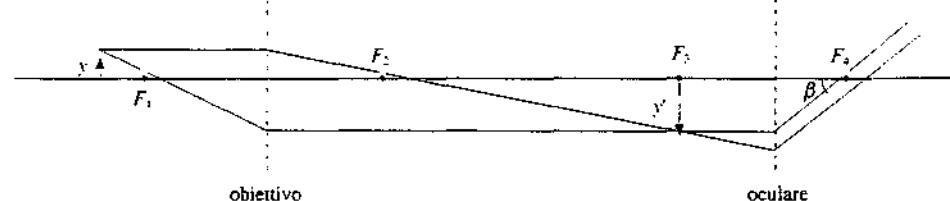


Figura 17.57

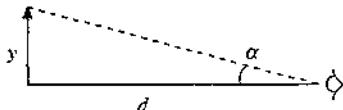


Figura 17.55

Prestazioni migliori si ottengono con il *microscopio*. Lo schema di principio è mostrato in figura 17.57: la prima lente convergente di focale  $f_1$ , è detta obiettivo e la seconda lente convergente, di focale  $f_2$ , è detta oculare (entrambe in realtà sono lenti composte, corrette per le aberrazioni). L'oggetto si pone poco oltre il fuoco anteriore dell'obiettivo e la distanza tra le lenti è regolata in modo tale che l'immagine reale data dall'obiettivo cada nel piano focale dell'oculare. Questo funziona quindi come una lente di ingrandimento, mentre l'obiettivo ha il compito di ingrandire trasversalmente l'oggetto: per questa ragione, ricordando (17.25), conviene che sia  $p \approx f_1$  in modo che  $I$  sia molto grande. Dalla figura si vede che  $\tan \beta = -y'/f_2$ ; è sempre  $\tan \alpha = y/d$ , per cui l'*ingrandimento visuale* (17.31) è

$$V = -\frac{y'}{y} \frac{d}{f_2} = -IV_2 \quad ,$$

prodotto dell'ingrandimento trasversale dell'obiettivo e dell'ingrandimento visuale dell'oculare. Il segno meno è dovuto al fatto che  $\alpha$  e  $\beta$  hanno segno opposto. Non è difficile raggiungere valori di  $V$  compresi tra  $10^2$  e  $10^3$ .

### Cannocchiale

Il *cannocchiale* serve per osservare oggetti lontani e pertanto assumiamo che l'immagine si formi nel piano focale posteriore dell'obiettivo, che è una lente convergente. Nel *cannocchiale di Keplero* anche la seconda lente, l'oculare, è convergente e ha il piano focale anteriore coincidente col piano focale posteriore dell'obiettivo: anche in questo caso l'oculare funziona come una lente di ingrandimento. La distanza totale tra le lenti, cioè la lunghezza del cannocchiale, è  $f_1 + f_2$ . Il percorso dei raggi relativi alla punta dell'oggetto è mostrato in figura 17.58.

### Microscopio

### Cannocchiale di Keplero

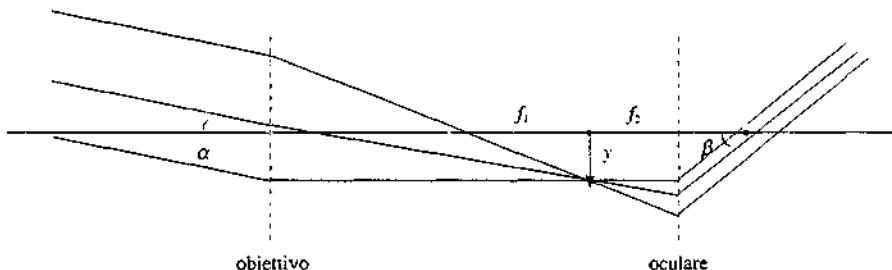


Figura 17.58

L'angolo  $\alpha$  sotto cui arrivano i raggi è tale che  $\tan \alpha = y/f_1$ , mentre  $\tan \beta = -y/f_2$ ; quindi

$$V = -\frac{y}{f_2} \frac{f_1}{y} = -\frac{f_1}{f_2}$$

L'immagine che l'occhio vede è capovolta rispetto all'oggetto, il che non è molto importante nelle osservazioni astronomiche, ma è scomodo in quelle terrestri.

L'immagine è invece diritta nel *cannocchiale di Galileo* (figura 17.59), che ha per oculare una lente divergente. L'ingrandimento visuale è sempre  $-f_1/f_2$ , positivo perché  $f_2$  è negativa.

### Cannocchiale di Galileo

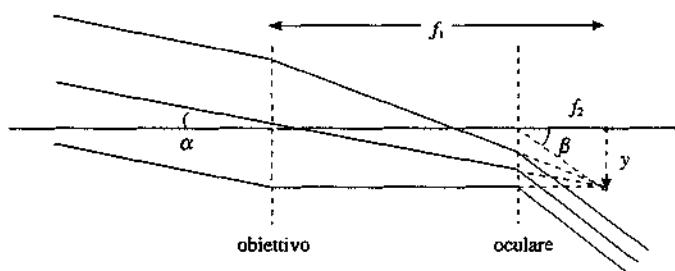


Figura 17.59

Galileo costruì il suo primo cannocchiale nel 1609, dopo aver avuto notizia di sistemi costruiti con due lenti semplici in Olanda; già nel 1610 aveva perfezionato lo strumento arrivando a un ingrandimento dell'ordine di 20. Il cannocchiale di Keplero fu ideato nel 1611.

Gli esempi discussi in questo paragrafo mostrano chiaramente quante possibilità vengono offerte dall'uso di sistemi di lenti rispetto a ciò che può essere ottenuto con una singola lente; è questo il principale aspetto positivo dei sistemi diottrici centrati, oltre a quello già citato di permettere una buona correzione delle aberrazioni.

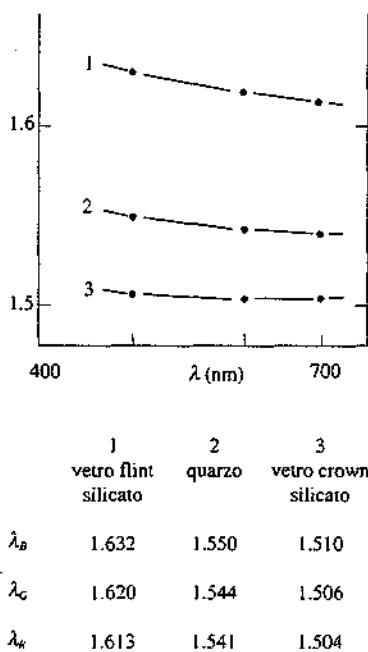


Figura 17.60

#### Unità di misura

Potere convergente o diottrico: si esprime in  $m^{-1}$ , unità che nel campo dell'ottica si chiama *dioptria*.

### 17.9 Dispersione. Prisma

Abbiamo citato più volte la dipendenza dell'indice di rifrazione dalla lunghezza d'onda, fenomeno noto come dispersione. Nella figura 17.60 è mostrata la variazione di  $n$  per alcuni materiali trasparenti: i valori a tre lunghezze d'onda specifiche, una nel blu ( $\lambda_B = 486 \text{ nm}$ ), una nel giallo ( $\lambda_G = 589 \text{ nm}$ ) e una nel rosso ( $\lambda_R = 656 \text{ nm}$ ) sono indicati a fianco. L'andamento di  $n$  con  $\lambda$  segue la *legge di Cauchy* (13.62):

$$n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2} \quad (17.32)$$

Il dispositivo più importante con cui si mette in evidenza la dispersione è il *prisma*, costituito da una lastra di materiale trasparente a facce piane formanti un angolo  $\alpha$ , detto angolo di apertura del prisma. Nella figura 17.61 è mostrato come avvenga la separazione di un raggio in vari raggi colorati, che dopo il prisma hanno direzioni diverse.

Consideriamo un particolare raggio trasmesso che esce dal prisma con angolo  $\theta_i$  rispetto alla normale alla superficie; il corrispondente angolo di incidenza è  $\theta_i$ . L'angolo  $\delta$  tra le direzioni entrante e uscente è detto *angolo di deviazione* dovuto al prisma (figura 17.62). Per la relazione tra angoli interni ed esterni di un triangolo possiamo scrivere

$$\alpha = \theta_i + \theta_2, \quad \delta = \theta_i - \theta_1 + \theta_e - \theta_2$$

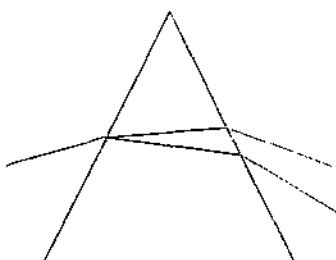


Figura 17.61

e quindi l'angolo di deviazione vale

$$\delta = \theta_i + \theta_e - \alpha .$$

Al variare di  $\theta_e$ ,  $\delta$  cambia e dimostriamo ora che esiste un valore minimo di  $\delta$ . Le leggi della trasmissione sulle due superficie del prisma sono

$$\sin \theta_i = n \sin \theta_1 , \quad \sin \theta_e = n \sin \theta_2 ,$$

dove con  $n = n_2 / n_1$  è indicato il rapporto tra gli indici di rifrazione del materiale di cui è costituito il prisma e del mezzo in cui il prisma è immerso (se il mezzo è l'aria,  $n$  è l'indice di rifrazione del prisma). Sommando le due equazioni otteniamo

$$\begin{aligned} \sin \theta_i + \sin \theta_e &= 2 \sin \frac{\theta_i + \theta_e}{2} \cos \frac{\theta_i - \theta_e}{2} = n (\sin \theta_1 + \sin \theta_2) = \\ &= 2 n \sin \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \cos \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} . \end{aligned}$$

Poiché  $\theta_i + \theta_e = \delta + \alpha$  e  $\alpha = \theta_1 + \theta_2$  concludiamo che

$$\frac{\sin \frac{\delta + \alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} = n \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}} \frac{\cos \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}}{\cos \frac{\theta_i - \theta_e}{2}} . \quad (17.33)$$

Potendosi esprimere  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  e  $\theta_e$  in funzione di  $n$  e  $\theta_i$ , la (17.33) dà la dipendenza di  $\delta$  da  $\theta_i$ . Se  $\theta_i \neq \theta_e$  il rapporto tra i coseni è sempre maggiore di 1. Infatti se  $\theta_i > \theta_e$  la deviazione  $\theta_i - \theta_1$  alla prima superficie diottica è maggiore della deviazione  $\theta_e - \theta_2$  alla seconda superficie diottica in quanto la deviazione è funzione crescente dell'angolo di incidenza, come si può dimostrare dalla (17.2). Da  $\theta_i - \theta_1 > \theta_e - \theta_2$  segue  $\theta_i - \theta_e > \theta_1 - \theta_2$ . Se invece è  $\theta_i < \theta_e$ ,  $\theta_e - \theta_i > \theta_2 - \theta_1$ ; in ogni caso il rapporto dei coseni è maggiore di 1. Soltanto quando  $\theta_i = \theta_e$ , e di conseguenza  $\theta_1 = \theta_2$ , il rapporto vale 1. Pertanto il *valore minimo dell'angolo di deviazione*  $\delta$  si ha quando l'angolo di incidenza è eguale all'angolo di emissione: è evidente che in tal caso il raggio all'interno del prisma deve essere ortogonale alla bisettrice di  $\alpha$  (la situazione è simmetrica) e quindi parallelo alla base del prisma, se questo è isoscele, come in figura 17.61. Inserendo la condizione  $\theta_i = \theta_e$  nella (17.33) si ha

$$\frac{\sin \frac{\delta_{\min} + \alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} = n \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}} . \quad (17.34)$$

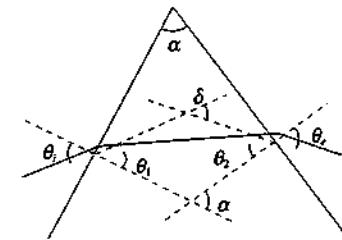


Figura 17.62



Angolo di deviazione minimo

Inoltre  $\delta_{\min} = 2 \theta_i + \alpha$ , per cui quando la deviazione introdotta dal prisma è minima  $\sin \theta_i = n \sin (\alpha / 2)$ .

La proprietà descritta permette una determinazione dell'indice di rifrazione del materiale di cui è costituito il prisma: si misura  $\alpha$ , poi  $\delta_{\min}$  ponendosi in condizioni di minima deviazione e da (17.34) si calcola  $n$  per la particolare lunghezza d'onda impiegata. La misura può essere estesa ai fluidi utilizzando un prisma cavo, riempiendo cioè di fluido lo spazio tra due lastre di vetro a facce piane e parallele, poste ad angolo  $\alpha$  tra loro.

Se l'angolo di apertura del prisma è piccolo (17.33) e (17.34) in pratica coincidono e si scrivono

$$\delta = \delta_{\min} = (n - 1) \alpha \quad . \quad (17.35)$$

Tutte le relazioni ottenute finora dipendono dalla lunghezza d'onda; in particolare la (17.35), scritta per le tre lunghezze d'onda citate in precedenza, dà tre diverse deviazioni  $\delta_B$ ,  $\delta_G$ ,  $\delta_R$ . Si chiama *dispersione del prisma* la differenza  $\delta_B - \delta_R$  mentre la deviazione media è  $\delta_G$ . Il loro rapporto è detto *potere dispersivo* del prisma e vale, in base a (17.35),

$$D = \frac{\delta_B - \delta_R}{\delta_G} = \frac{n_B - n_R}{n_G - 1} \quad . \quad (17.36)$$

## Potere dispersivo

Per i materiali della figura 17.60 il potere dispersivo è rispettivamente  $3.06 \cdot 10^{-2}$ ,  $1.65 \cdot 10^{-2}$ ,  $1.19 \cdot 10^{-2}$ ; esso esprime in sostanza la variazione relativa della deviazione,  $\Delta\delta/\delta$ , nel campo del visibile.

Sfruttando il fenomeno della dispersione è possibile mettere in evidenza la composizione della luce emessa da una sorgente, in quanto le diverse lunghezze d'onda subiscono deviazioni diverse. Su questo principio è costruito lo *spettrometro a prisma*, in cui la luce emessa da una sorgente è resa parallela da una lente (acromatica) e attraversa un prisma: le varie componenti escono formando ciascuna un fascio parallelo e sono focalizzate da una lente in punti diversi del piano focale; nella figura 17.63 è mostrato il caso di due componenti.

Una caratteristica importante di un prisma è la *dispersione angolare*; essa è definita come  $d\delta/d\lambda$ , cioè come la variazione della deviazione minima con la lunghezza d'onda, e si ottiene derivando (17.34):

$$\frac{d\delta}{d\lambda} = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\delta + \alpha}{2}} \frac{dn}{d\lambda}$$

Dalla figura 17.63 si deduce  $\delta + \alpha = \pi - 2\theta$ ,  $\cos \frac{\delta + \alpha}{2} = \cos \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) = \operatorname{sen} \theta = \frac{d}{l}$

e  $l \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} = \frac{L}{2}$ , indicando con  $L$  la base del prisma, con  $l$  il suo lato e con  $d$  la larghezza del fascio. Pertanto

## Dispersione angolare

$$\frac{d\delta}{d\lambda} = \frac{L}{d} \frac{dn}{d\lambda} \quad . \quad (17.37)$$

Un'altra grandezza importante è il *potere risolutivo R*, definito come  $\lambda / \Delta\lambda$ , rapporto tra la lunghezza d'onda  $\lambda$  e la minima differenza tra lunghezze d'onda diverse apprezzabile in un intorno di  $\lambda$ , come già fatto per il reticolo di diffrazione nel paragrafo 16.6. A questo punto entra in gioco una considerazione che finora abbiamo ignorato, ma che riprenderemo nel paragrafo 17.11: il fascio che viene focalizzato dalla seconda lente dello spettrometro ha una larghezza  $d$  e quindi dobbiamo aspettarci nel piano focale della lente un'immagine della sorgente, tipicamente una fenditura, allargata dalla diffrazione. In base al criterio di Rayleigh, illustrato nel paragrafo 16.4, possiamo apprezzare una separazione angolare  $\Delta\delta$ , corrispondente a una differenza  $\Delta\lambda$  dell'ordine di  $\lambda/d$ . Inserendo nella (17.37) otteniamo

## Potere risolutivo del prisma

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = L \left| \frac{dn}{d\lambda} \right| \quad , \quad (17.38)$$

in cui si è considerato il modulo di  $dn/d\lambda$  in quanto il potere risolutivo è una grandezza essenzialmente positiva.

### Esempio 17.9

Determinare per un prisma fatto di vetro flint silicato il potere risolutivo nell'intorno di  $\lambda = 600 \text{ nm}$ . Si assuma che la base del prisma sia  $L = 2 \text{ cm}$ .

#### Soluzione

Dobbiamo calcolare  $dn/d\lambda$  e pertanto determinare la funzione  $n(\lambda)$ . Applichiamo (17.32) ai dati della figura 17.60 per ricavare le costanti.

Da  $n(\lambda_B) - n(\lambda_R) = B(1/\lambda_B^2 - 1/\lambda_R^2)$  si deduce  $B = 10^4 \text{ nm}^2$  e quindi  $A = 1.59$ , che si ottiene da (17.32) per  $\lambda = \lambda_B$  o  $\lambda = \lambda_G$  o  $\lambda = \lambda_R$ . La funzione  $n(\lambda)$  è data dunque, per il vetro flint silicato, da

$$n = 1.59 + \frac{10^4}{\lambda^2},$$

con  $\lambda$  espressa in nanometri. Segue, alla lunghezza d'onda  $\lambda = 600 \text{ nm}$ ,

$$\frac{dn}{d\lambda} = -\frac{2B}{\lambda^3} = -9.26 \cdot 10^{-5} \text{ nm}^{-1} = -9.26 \cdot 10^3 \text{ cm}^{-1},$$

e il potere risolutivo vale, secondo (17.38),

$$R = 1.85 \cdot 10^3.$$

Siccome  $R = \lambda / \Delta\lambda$ ,  $\Delta\lambda = 0.32 \text{ nm}$ : nell'intorno di  $\lambda = 600 \text{ nm}$  possono essere separate due lunghezze d'onda diverse di  $0.32 \text{ nm}$ .

Ad esempio le due righe gialle del sodio, citate nell'esempio 16.9 e aventi  $\Delta\lambda = 0.6 \text{ nm}$ , possono essere separate con questo spettrometro a prisma. Il potere risolutivo richiesto,  $R = 982$ , si otterebbe già con  $L = 1 \text{ cm}$ .

## 17.10 Il principio di Fermat

Le leggi (17.1) e (17.2) si ricavano facilmente nell'ambito della teoria ondulatoria della luce. Esse però si possono dimostrare anche in base a una legge di tipo diverso, il *principio di Fermat*, il quale afferma che *il percorso seguito dalla luce è quello che corrisponde al minimo tempo di percorrenza*.

Nella riflessione, figura 17.64, un raggio che parte da  $A$  e arriva in  $B$ , dopo essere stato riflesso in  $O$ , percorre il cammino

$$s = \sqrt{x^2 + h^2} + \sqrt{(d-x)^2 + h^2}$$

e il tempo impiegato è  $t = s/v$ . Imponiamo  $dt/dx = 0$ , cioè  $ds/dx = 0$  e troviamo

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + h^2}} = \frac{d-x}{\sqrt{(d-x)^2 + h^2}} \Rightarrow x^2 = (d-x)^2.$$

L'unica soluzione possibile è  $x = d/2$ ; si verifica che  $d^3/dx^2$  è positiva e quindi quello trovato è effettivamente un minimo. Il punto  $O$  deve stare nel punto di mezzo del segmento  $A'B'$  e pertanto l'angolo di incidenza è eguale all'angolo di riflessione.

Nella trasmissione, figura 17.65, il tempo impiegato da  $A$  a  $B$  passando per  $O$  è

$$t = \frac{\sqrt{x^2 + h_1^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(d-x)^2 + h_2^2}}{v_2},$$

essendo  $v_1$  e  $v_2$  le velocità della luce nei due mezzi diversi. Imponendo anche ora  $dt/dx = 0$

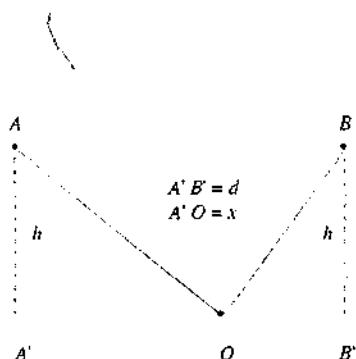


Figura 17.64

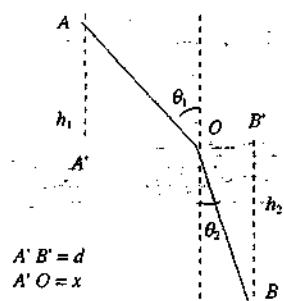


Figura 17.65

si ricava

$$\frac{x}{v_1 \sqrt{x^2 + h_1^2}} = \frac{d-x}{v_2 \sqrt{(d-x)^2 + h_2^2}} \Rightarrow \frac{\sin \theta_1}{v_1} = \frac{\sin \theta_2}{v_2},$$

che è la (17.2), posto  $n_1 = c/v_1$  e  $n_2 = c/v_2$ . La derivata seconda è ancora positiva.

Passiamo ora a considerare una superficie diottica curva e facciamo riferimento alla figura 17.25 e ai due percorsi luminosi  $PVQ$  e  $PHQ$ : vogliamo dimostrare che il tempo impiegato dalla luce lungo i due percorsi è lo stesso. Stabiliamo innanzitutto la relazione tra  $p = PV$  e  $p' = PH$  e tra  $q = VQ$  e  $q' = HQ$ , nell'approssimazione parassiale. Si ha

$$p' \cos \theta = p + VK, \quad VK = R(1 - \cos \alpha).$$

Essendo gli angoli piccoli,  $\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2}$ ,  $\cos \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2}$ ; inoltre  $p' \sin \theta = p' \theta = HK =$

$R \sin \alpha = R \alpha$  e  $\theta + \alpha = \theta_i$ . In conclusione

$$p = p' - \frac{1}{2} p' \theta \theta_i$$

e procedendo allo stesso modo si trova

$$q = q' + \frac{1}{2} p' \theta \theta_i.$$

I tempi di percorrenza sono

$$t_1 = \frac{p}{v_1} + \frac{q}{v_2} = \frac{p'}{v_1} - \frac{1}{2} p' \theta \frac{\theta_i}{v_1} + \frac{q'}{v_2} + \frac{1}{2} p' \theta \frac{\theta_i}{v_2}$$

$$t_2 = \frac{p'}{v_1} + \frac{q'}{v_2}$$

e la loro differenza vale

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{1}{2} p' \theta \left( \frac{\theta_i}{v_1} - \frac{\theta_i}{v_2} \right).$$

Pertanto, se vale il principio di Fermat, che nella forma parassiale comporta la condizione  $\theta_i/v_1 = \theta_i/v_2$ ,  $\Delta t = 0$ ; i due raggi che seguono i due percorsi indicati non subiscono sfasamento ed i cammini ottici sono eguali. A conclusioni analoghe si arriva per gli specchi sferici.

## 17.11 Note e commenti

Raccogliamo in questo paragrafo alcuni argomenti ai quali abbiamo accennato nei capitoli precedenti, riservandoci un approfondimento dopo lo studio dell'ottica geometrica, nonché qualche commento conclusivo.

### Forma dell'immagine della luce Cerenkov

Una particella carica in moto in un mezzo dielettrico con velocità  $v$  superiore alla velocità  $c/n$  della luce nel mezzo provoca un'emissione di onde elettromagnetiche da parte del mezzo stesso; è l'effetto Cerenkov, menzionato nel paragrafo 13.11. Considerando una traiettoria rettilinea, abbiamo dei raggi luminosi emessi lungo la stessa, tutti paralleli tra loro e formanti con la traiettoria l'angolo  $\theta_c$  dato da (13.69): essi sono mostrati in un piano nella figura 13.39, ma lo stesso disegno vale per qualsiasi piano passante per la traiettoria, essendo simmetria cilindrica.

Uno specchio sferico concavo, avente l'asse coincidente con la traiettoria, focalizza i raggi che stanno nel piano della figura 17.66 nei punti  $F_1$  e  $F_2$  del piano focale, come già

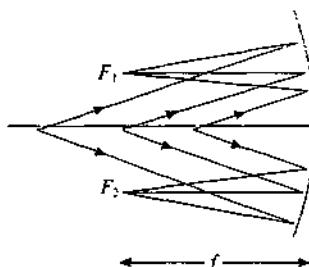


Figura 17.66

mostrato nella figura 17.15; sia  $F_1$  che  $F_2$  distano dall'asse della quantità

$$R_C = f \operatorname{tg} \theta_C = f \sqrt{n^2 \beta^2 - 1}$$

A causa della simmetria cilindrica i punti  $F_1$  e  $F_2$  stanno in realtà su una circonferenza di raggio  $R_C$  e concludiamo che l'immagine data dallo specchio è una circonferenza, il cui raggio dipende dalla velocità della particella e ne permette la misura.

### Esperimento di Michelson per la misura di $c$

L'apparato di Michelson e collaboratori, citato nel paragrafo 13.13, è mostrato nelle sue linee essenziali in figura 17.67. Il fascio luminoso, emesso dalla sorgente  $S$  e reso parallelo con una lente, viene prima riflesso da un prisma ottagonale con le facce speculari, poi dallo specchio piano  $S_2$  e successivamente focalizzato con una lente nel fuoco dello specchio sferico  $S_3$ ; pertanto i raggi, deviati dallo specchio piano  $S_2$  verso  $S_3$ , escono da questo ancora paralleli. Essi vengono infine riflessi dallo specchio piano  $S_4$  e ripercorrendo a ritroso lo stesso cammino ritornano verso la sorgente dove si trova un osservatore (sorgente e osservatore possono essere resi compatibili con l'artificio di uno specchio semiriflettente). Facendo ruotare il prisma con un'elevata velocità angolare l'osservatore non vede l'immagine della sorgente a meno che, nel tempo impiegato dalla luce per andare da  $P$  a  $S_4$  e ritornare in  $P$ , il prisma abbia compiuto un ottavo di giro. In una delle versioni dell'esperimento il percorso era lungo complessivamente  $L = 70.820 \cdot 10^3$  m (in massima parte dovuto al tratto  $S_3 - S_4 - S_3$ ) e il prisma doveva ruotare con frequenza  $v = 529$  Hz per poter osservare l'effetto; un ottavo di periodo era pari a  $t = 2.363 \cdot 10^{-4}$  s e il rapporto  $L/t$  risultava  $2.977 \cdot 10^8$  m/s. Tenuto conto dell'effettiva precisione dei valori misurati, delle possibili cause di errori e della correzione dovuta alla presenza dell'aria, il risultato è  $c = (2.99796 \pm 0.00004) \cdot 10^8$  m/s; il miglior valore di  $c$  attualmente disponibile è dato da (13.5).

### Uso delle lenti negli esperimenti di interferenza e diffrazione

Nei capitoli 15 e 16 abbiamo visto un uso frequente delle lenti, ad esempio negli esperimenti tipo Young, negli esperimenti di diffrazione di Fraunhofer, in strumenti come gli interferometri e lo spettrometro a reticolo. La proprietà che si sfrutta è quella delle lenti convergenti di trasformare in raggi paralleli i raggi divergenti da una sorgente coincidente con un punto del piano focale e viceversa di trasformare raggi paralleli in raggi convergenti verso un punto del piano focale, cioè la proprietà di focalizzazione. Il vantaggio evidente sta nella possibilità di fare interferire a breve distanza dalla sorgente onde per le quali è facile calcolare la differenza di fase, come sono quelle che seguono percorsi paralleli tra loro.

### Influenza della diffrazione

Per calcolare il potere risolutivo del prisma abbiamo dovuto introdurre l'effetto della diffrazione; come abbiamo già rilevato nel capitolo 16, si tratta di un fatto *intrinseco alla natura ondulatoria* della luce. Con opportune correzioni è possibile ridurre di molto le aberrazioni (ciò avviene comunemente negli strumenti ottici). In linea di principio si potrebbe pensare di sviluppare un metodo di calcolo, magari utilizzando superficie non sferiche, in grado di eliminare le aberrazioni senza dover considerare solo raggi parassiali. Eppure lo stigmatismo assoluto non si può raggiungere: l'immagine di un punto non è mai un punto, ma una figura di diffrazione consistente in un *dischetto chiaro* circondato da anelli concentrici alternativamente scuri e chiari; questo a causa della limitazione dei fronti d'onda dovuta a diagrammi e alle stesse lenti.

I poteri risolutivi degli strumenti ottici sono le grandezze che maggiormente risentono dell'effetto della diffrazione, come abbiamo discusso nei paragrafi 16.4, 16.6 e 17.9. In particolare, nel caso del microscopio, il limite posto dalla diffrazione è stato superato solo abbandonando la luce visibile come mezzo di illuminazione e ricorrendo alla microscopia elettronica, la quale sfrutta le proprietà ondulatorie degli elettroni, caratterizzate da valori molto inferiori della lunghezza d'onda (vedi capitolo 18).

Se però usciamo dal campo delle misure da effettuare con telescopi, microscopi e spettrometri, e ci poniamo come scopo la realizzazione di immagini di grande qualità di oggetti comuni, l'imprecisione dovuta alla diffrazione è spesso trascurabile (si veda l'esempio 16.4) e invece bisogna curare la correzione delle aberrazioni.

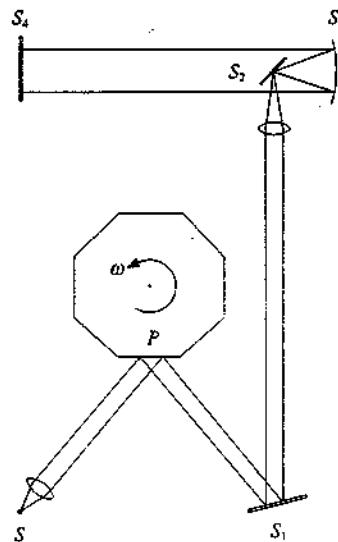


Figura 17.67

# Proprietà corpuscolari e ondulatorie della radiazione e della materia

## 18.1 Introduzione

Nei capitoli precedenti abbiamo più volte accennato al fatto che nell'interazione tra radiazione elettromagnetica e materia avvengono fenomeni non spiegabili con le leggi dell'elettromagnetismo classico. Ad esempio, mentre alle altissime frequenze la previsione classica è che la materia diventi completamente trasparente alla radiazione (paragrafo 13.9), si verifica invece che la radiazione viene assorbita con una legge esponenziale (paragrafo 18.5). Ancora, le radiazioni emesse da un atomo presentano un caratteristico *spettro a righe* (paragrafo 16.7), che non rientra in una serie armonica per le frequenze e non è riconducibile a nessun fenomeno classico. Infine il calcolo classico per la densità di energia elettromagnetica all'interno di una cavità in equilibrio termodinamico porta ad un risultato assurdo, come abbiamo visto nel paragrafo 15.11.

Proprio la soluzione di quest'ultimo problema è stato il punto di partenza per il passaggio dalla fisica classica alla fisica quantistica. Nel seguito esamineremo brevemente i principali fenomeni che hanno fornito l'evidenza per una *visione corpuscolare della radiazione elettromagnetica* e il primo modello quantistico dell'emissione e dell'assorbimento delle radiazioni da parte di un atomo. Vedremo inoltre come sia stata introdotta e verificata l'ipotesi che anche la *materia* presenti in certi fenomeni *proprietà ondulatorie* e come si possa dedurre da queste premesse il principio di indeterminazione di Heisenberg, che è una delle basi concettuali della fisica quantistica.

## 18.2 Radiazione termica. Corpo nero

Qualsiasi corpo solido o liquido che si trovi ad una temperatura  $T$  emette radiazioni elettromagnetiche: lo spettro appare continuo e si osserva che al crescere della temperatura aumenta l'intensità emessa e diminuisce il valor medio delle lunghezze d'onda contenute nello spettro ovvero cresce il valor medio delle frequenze. Quantitativamente l'emissione si caratterizza con il *potere emissivo specifico*, definito nel paragrafo 15.11 come energia emessa per unità di superficie e unità di tempo nell'intervallo unitario di lunghezza d'onda.

Accanto all'emissione bisogna considerare l'assorbimento, cioè il fatto che un corpo assorbe una certa frazione dell'energia della radiazione termica che lo colpisce; la percentuale di energia assorbita per unità di superficie e di tempo nell'intervallo unitario di lunghezza d'onda definisce il *coefficiente di assorbimento specifico*  $a_\lambda$ .

Per un corpo generico sia l'emissione che l'assorbimento dipendono, oltre che dalla temperatura, dalle caratteristiche chimiche e fisiche della superficie. Si dimostra però che il rapporto tra il potere emissivo specifico e il coefficiente di assorbimento specifico è, per qualsiasi coppia di valori di  $\lambda$  e di  $T$ , una funzione universale.

Coefficiente di assorbimento specifico

le, eguale per tutti i corpi. Questa proprietà è nota come *legge di Kirchhoff* e si scrive

$$\frac{\varepsilon_\lambda}{a_\lambda} = F(\lambda, T) \quad . \quad (18.1)$$

Allo scopo consideriamo un corpo a temperatura  $T$  all'interno di una cavità a temperatura  $T$ : esso è in equilibrio, nel senso che in ogni intervallo di lunghezza d'onda emette ed assorbe la stessa quantità di energia per unità di superficie e di tempo. D'altra parte l'energia che colpisce il corpo è legata alla densità di energia esistente all'interno della cavità e questa è una funzione universale di  $\lambda$  e  $T$ , come si deduce dal ragionamento del paragrafo 15.11; la forma esplicita corretta verrà ricavata nel successivo paragrafo 18.3. Possiamo quindi scrivere che l'energia specifica assorbita è

$$r_\lambda = a_\lambda F(\lambda, T) \quad .$$

Ma in equilibrio termico l'energia assorbita è eguale a quella emessa, per cui

$$\varepsilon_\lambda = r_\lambda = a_\lambda F(\lambda, T)$$

e si trova la (18.1).

Si definisce *corpo nero* un corpo con coefficiente di assorbimento unitario per qualsiasi valore di  $\lambda$  e  $T$ , cioè *assorbe completamente qualsiasi radiazione che lo colpisca*. Posto  $a_{\lambda, cn} = 1$  segue da (18.1) che per un corpo nero  $\varepsilon_{\lambda, cn} = F(\lambda, T)$ : la funzione universale  $F$  è eguale al potere emissivo specifico del corpo nero e la legge di Kirchhoff si scrive

Corpo nero

$$\frac{\varepsilon_\lambda}{a_\lambda} = \varepsilon_{\lambda, cn} \quad ; \quad (18.2) \quad \text{Legge di Kirchhoff}$$

il corpo nero risulta essere il migliore assorbitore e il migliore emettitore termico.

Noto il potere emissivo specifico del corpo nero è noto anche il potere emissivo specifico di qualsiasi altro corpo di cui si conosca il coefficiente di assorbimento; è dato che  $a_\lambda < 1$ , è sempre  $\varepsilon_\lambda < \varepsilon_{\lambda, cn}$ . Inoltre, se  $\varepsilon_{\lambda, cn}$  è diverso da zero, deve essere diverso da zero  $a_\lambda$ : pertanto un corpo è in grado di assorbire tutte le radiazioni che in determinate condizioni è capace di emettere. Si giustifica così la regola di Kirchhoff, già menzionata nel paragrafo 16.7. Non è vero il contrario, cioè un corpo in generale non è in grado di emettere quelle radiazioni che è capace di assorbire.

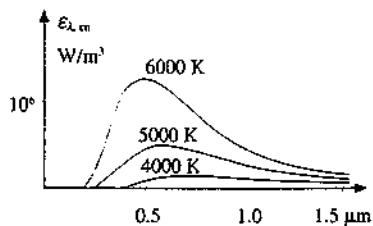
Per capire come si possa realizzare un corpo nero, riprendiamo l'argomento radiazione di cavità, cioè lo stato di equilibrio di un campo elettromagnetico all'interno di una cavità ad una data temperatura, esaminato nel paragrafo 15.11. Abbiamo visto che un piccolo foro praticato nella parete della cavità non altera l'equilibrio esistente all'interno e che il potere emissivo specifico del foro è proporzionale alla densità di energia esistente all'interno secondo (15.45). Se consideriamo ora il coefficiente di assorbimento del foro, siamo portati a pensare che la radiazione che colpisce il foro ed entra nella cavità subisce molteplici interazioni con le pareti e resta essenzialmente all'interno; ne può uscire solo una quantità dipendente dal rapporto tra superficie del foro e superficie delle pareti, che possiamo rendere molto piccola e trascurabile a tutti gli effetti.

Il foro è pertanto con ottima approssimazione un corpo nero e concludiamo che il potere emissivo di un corpo nero è legato alla densità di energia elettromagnetica

all'interno della cavità, indipendente dalla natura delle pareti e dalla forma della cavità.

Sperimentalmente il potere emissivo di un corpo nero venne misurato con notevole precisione verso la fine del 1800; l'andamento di  $\varepsilon_{\lambda, \text{em}}$  è stato mostrato nella figura 13.41 ed è ripresentato nella figura 18.1. Le misure permisero di stabilire le seguenti proprietà.

### 1) Legge di Stefan-Boltzmann



Il potere emissivo integrale, dato dall'area sotto la curva, è proporzionale alla quarta potenza della temperatura assoluta del corpo nero:

$$\varepsilon_{\text{cn}} = \int_0^{\infty} \varepsilon_{\lambda, \text{em}} d\lambda = \sigma T^4 \quad . \quad (18.3)$$

Figura 18.1

La costante  $\sigma$  è detta costante di Stefan e vale

$$\sigma = 5.6705 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{ K}^4 \quad .$$

### 2) Prima legge di Wien

L'ascissa del massimo della curva del potere emissivo specifico è inversamente proporzionale alla temperatura:

$$\lambda_{\max} T = 2.8978 \cdot 10^{-3} \text{ mK} = 2.8978 \cdot 10^3 \mu\text{m K} \quad . \quad (18.4)$$

Al crescere della temperatura aumenta l'emissione (legge di Stefan-Boltzmann) e il massimo di  $\varepsilon_{\lambda, \text{em}}$  si sposta verso le lunghezze d'onda minori; ad esempio il massimo è nel visibile ( $\lambda_{\max} = 0.55 \text{ mm}$ ) con  $T = 5267 \text{ K}$ .

### 3) Seconda legge di Wien

L'ordinata del massimo della curva di  $\varepsilon_{\lambda, \text{em}}$  è proporzionale alla quinta potenza della temperatura:

$$(\varepsilon_{\lambda, \text{em}})_{\max} = a T^5 \quad , \quad a = 1.287 \cdot 10^{-5} \text{ W/m}^2 \text{ K}^5 \quad . \quad (18.5)$$

Ritornando alla legge di Stefan-Boltzmann, il potere emissivo di un corpo generico è

$$\varepsilon = \int_0^{\infty} \varepsilon_{\lambda} d\lambda = \int_0^{\infty} a_{\lambda} \varepsilon_{\lambda, \text{em}} d\lambda \quad ,$$

sempre minore di  $\varepsilon_{\text{cn}}$  essendo  $a_{\lambda} < 1$  per qualsiasi valore di  $\lambda$ . Si può scrivere

$$\varepsilon = e \varepsilon_{\text{cn}} = e \sigma T^4 \quad \text{con} \quad e = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{\text{cn}}} < 1 \quad . \quad (18.6)$$

### Emissività

Il coefficiente adimensionale  $e$ , detto *emissività del corpo*, dipende dal materiale che costituisce il corpo e dalla natura della sua superficie; l'emissività inoltre dipende dalla temperatura a cui si trova il corpo che emette (si veda la tabella 18.1).

Seguendo lo stesso ragionamento svolto per arrivare alla (18.1), ma esteso a tutto lo spettro, dall'eguaglianza tra energia emessa  $e \sigma T^4$  ed energia assorbita

$a\sigma T^4$ , dove  $a$  è il coefficiente di assorbimento globale, si trova

$$e = a \text{ ovvero } e = a \varepsilon_{\text{en}} :$$

L'emissività di un corpo ad una certa temperatura  $T$  è eguale al coefficiente di assorbimento del corpo quando viene investito dalla radiazione termica caratteristica della temperatura  $T$ .

Nella Tabella 18.1 sono riportati i coefficienti di assorbimento di alcuni materiali.

**Tabella 18.1 Coefficienti di assorbimento di superficie pulite**

materiale	temperatura (K)	$a$
alluminio	520	0.04
alluminio	900	0.06
amianto	600	0.95
cromo	320	0.08
cromo	830	0.26
ferro	420	0.05
ferro	1300	0.37
ghiaccio secco	270	0.97
nickel	700	0.09
rame	370	0.02
tungsteno	300	0.03
tungsteno	3500	0.35

Quando un corpo ad una certa temperatura non è in equilibrio con l'ambiente che lo circonda, non sussiste l'egualanza tra energia emessa ed energia assorbita. Un corpo più caldo dell'ambiente tenderebbe pertanto a raffreddarsi, se non si provvedesse con altri mezzi (sorgenti di calore o di lavoro) a mantenere costante la sua temperatura. Nel caso limite di una sferetta nera a temperatura  $T$  dentro una cavità a temperatura  $T_0 < T$ , il potere emissivo netto è  $\sigma(T^4 - T_0^4)$ , mentre per un corpo generico si può scrivere  $e\sigma(T^4 - T_0^4)$ , se tra  $T_0$  e  $T$  i valori di  $e$  non sono significativamente diversi.

Al meccanismo dell'emissione termica si riconduce la *trasmissione di calore per irraggiamento*, menzionata nel paragrafo 10.9 del volume primo.

### Esempio 18.1

Una sferetta di tungsteno di raggio  $r = 1 \text{ cm}$  è sospesa al centro di un grande recipiente cavo alla temperatura  $T_0 = 300 \text{ K}$  che la circonda completamente. Determinare la potenza richiesta per mantenere la sferetta a una temperatura  $T = 2000 \text{ K}$ . Si assuma che a questa temperatura il coefficiente di assorbimento del tungsteno sia  $a = 0.35$ .

#### Soluzione

La potenza necessaria è

$$P = a \sum \sigma (T^4 - T_0^4) = 4\pi r^2 a \sigma (T^4 - T_0^4) = 400 \text{ W}.$$

L'assorbimento di energia da parte della sferetta è trascurabile rispetto all'emissione:

$$\frac{a \sum \sigma T_0^4}{a \sum \sigma T^4} = \left( \frac{T_0}{T} \right)^4 = 5 \cdot 10^{-4}.$$

**Esempio 18.2**

Il raggio del sole è  $R_s = 6.96 \cdot 10^8$  m e la potenza emessa dalla sua superficie è  $P = 3.77 \cdot 10^{26}$  W. Assumendo che la superficie solare emetta come un corpo nero calcolare la sua temperatura, la lunghezza d'onda  $\lambda_{\max}$  alla quale è massimo il potere emissivo specifico e il valore di quest'ultimo.

**Soluzione**

Il potere emissivo della superficie solare è  $\varepsilon_{\text{en}} = P / \Sigma = P / 4\pi R_s^2 = 6.19 \cdot 10^7$  W/m<sup>2</sup>. Dalle (18.3), (18.4) e (18.5)

$$T_s^4 = \frac{\varepsilon_{\text{en}}}{\sigma} = 1.09 \cdot 10^{15} \text{ K}^4, \quad T_s = 5748 \text{ K},$$

$$\lambda_{\max} = 2.8978 \cdot 10^{-3} / T_s = 0.504 \mu\text{m},$$

$$(\varepsilon_{\text{en}})_{\max} = 1.287 \cdot 10^{-5} T_s^5 = 8.08 \cdot 10^{13} \text{ W/m}^3 = 8.08 \cdot 10^7 \text{ W/m}^2 \text{ mm}.$$

**18.3 Legge di Planck**

Le leggi enunciate nel paragrafo 18.2 riproducono accuratamente i dati sperimentali; esse però non hanno una spiegazione soddisfacente in ambito classico né è possibile giustificare in alcun modo i valori delle costanti.

La spiegazione che cerchiamo per l'andamento della curva misurata di  $\varepsilon_{\lambda, \text{en}}$  e per le leggi relative deve discendere dalla forma esplicita della densità di energia elettromagnetica all'interno di una cavità. Abbiamo già visto nel paragrafo 15.11 il calcolo classico di Rayleigh-Jeans e il suo completo fallimento alle lunghezze d'onda corte, noto come *catastrofe ultravioletta*.

La soluzione fu trovata da Planck e resa nota nel dicembre del 1900. Riprendiamo la (15.47), scritta anche in funzione della frequenza utilizzando le relazioni

$$\varepsilon(\lambda) d\lambda = -\varepsilon(v) dv, \quad \frac{dv}{d\lambda} = -\frac{c}{\lambda^2}, \quad \varepsilon(\lambda) = -\varepsilon(v) \frac{dv}{d\lambda} = \varepsilon(v) \frac{c}{\lambda^2};$$

$$\varepsilon_{\lambda, \text{en}} = \frac{2\pi c}{\lambda^4} w_m, \quad \varepsilon_{v, \text{en}} = \frac{2\pi v^3}{c^2} w_m.$$

Seguendo Planck, ammettiamo che l'energia di ciascuno degli infiniti oscillatori che rappresentano i modi di vibrazione del campo elettromagnetico nella cavità possa assumere soltanto valori discreti dati da  $n h v$ , dove  $v$  è la frequenza,  $n$  un numero intero positivo o nullo e  $h$  è una costante (denominata in seguito *costante di Planck*).

L'energia media deve allora essere *calcolata attraverso sommatorie* e non attraverso integrali come fatto nel paragrafo 15.11:

$$w_m = \frac{\sum_0^\infty n h v e^{-nhv/k_B T}}{\sum_0^\infty e^{-nhv/k_B T}}.$$

Sviluppando il calcolo si ottiene

$$w_m = \frac{h\nu e^{-h\nu k_B T}}{1 - e^{-h\nu k_B T}} = \frac{h\nu}{e^{h\nu k_B T} - 1}$$

per cui l'espressione calcolata del potere emissivo specifico si scrive

$$\varepsilon_{\lambda, \text{cn}} = \frac{2\pi c^2 h}{\lambda^5} \frac{1}{e^{h c / \lambda k_B T} - 1}, \quad \varepsilon_{\nu, \text{cn}} = \frac{2\pi h}{c^2} \frac{\nu^3}{e^{h\nu / k_B T} - 1} \quad (18.7) \quad \text{Legge di Planck}$$

L'accordo di (18.7) con i dati è ottimo; da esso si ricava il valore  $h = 6.626 \cdot 10^{-34}$  Js. Inoltre da una o dall'altra delle due formule, entrambe note come *legge di Planck*, per derivazione e per integrazione si ottengono le leggi di Stefan-Boltzmann e di Wien e si predicono i valori delle relative costanti, come ora vediamo nell'esempio 18.3.

Notiamo prima che se  $h\nu / k_B T \ll 1$  (basse frequenze ovvero lunghezze d'onda grandi) l'esponenziale nell'espressione del valor medio  $w_m$  si può approssimare con  $1 + (h\nu / k_B T)$  e quindi  $w_m = k_B T$ : quando  $h\nu$ , che è l'intervallo minimo tra due possibili valori dell'energia di un oscillatore, è piccolo rispetto al valor medio di  $w_m$  previsto dalla teoria classica, cioè quando la quantizzazione dell'energia diventa praticamente inapprezzabile, la legge di Planck dà la formula di Rayleigh-Jeans.

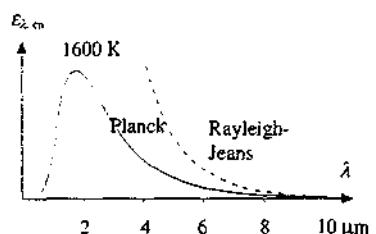


Figura 18.2

### Esempio 18.3

Ricavare dalla legge (18.7) le leggi (18.3), (18.4), (18.5).

#### Soluzione

Il potere emissivo si ottiene integrando l'espressione (18.7) di  $\varepsilon_{\lambda, \text{cn}}$ :

$$\varepsilon_{\text{cn}} = \int_0^{\infty} \varepsilon_{\lambda, \text{cn}} d\lambda = \int_0^{\infty} \frac{2\pi c^2 h}{\lambda^5} \frac{1}{e^{h c / \lambda k_B T} - 1} d\lambda$$

Poniamo  $x = \frac{h c}{k_B \lambda T}$  e quindi  $dx = -\frac{h c}{k_B \lambda^2 T} d\lambda$ :

sostituendo risulta

$$\varepsilon_{\text{cn}} = -2\pi c \int_{\infty}^0 \frac{k_B T}{\lambda^3} \frac{1}{e^x - 1} dx = \frac{2\pi k_B^4 T^4}{h^3 c^2} \int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx.$$

L'integrale vale  $\pi^4/15$  e si ottiene sia la legge di Stefan-Boltzmann che l'espressione esplicita di  $\sigma$  in funzione di costanti universali:

$$\varepsilon_{\text{cn}} = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15 c^2 h^3} T^4 \quad \sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15 c^2 h^3} = 5.6705 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{ K}^4.$$

Per ricavare la prima legge di Wien si deriva (18.7) rispetto a  $\lambda$  e si pone eguale a zero la derivata: si arriva così all'equazione trascendente

$$5e^{-x} + x = 5,$$

dove  $x = h c / k_B \lambda T$  come prima. La soluzione numerica è  $x_{\max} = 4.9651$  e quindi

$$\lambda_{\max} T = \frac{h c}{4.9651 k_B} = 0.20141 \frac{h c}{k_B} = 2.8978 \cdot 10^{-3} \text{ mK} .$$

Infine, introducendo il valore  $\lambda_{\max} = h c / k_B T x_{\max}$  in (18.7), si ha

$$(\varepsilon_{\lambda, \text{cn}})_{\max} = \frac{2\pi k_B^5 x_{\max}^5}{h^4 c^3} \frac{1}{e^{x_{\max}} - 1} T^5 = a T^5 , \quad a = 1.287 \cdot 10^{-5} \text{ W/m}^3 \text{ K}^5 .$$

La legge di Planck ha costituito il primo passo fondamentale per il passaggio dalla fisica classica alla fisica quantistica, necessaria per spiegare i fenomeni atomici. Nella trattazione che porta alla (18.7) compare per la prima volta il concetto di *quantizzazione* di una grandezza fisica, cioè l'idea che una grandezza possa assumere solo valori discontinui.

Originariamente l'ipotesi di Planck venne formulata in relazione all'energia degli elettroni degli atomi costituenti le pareti della cavità, considerati come oscillatori, e successivamente estesa al campo elettromagnetico nella cavità, con cui gli oscillatori atomici sono in equilibrio attraverso uno scambio di energia. Bisogna dire che da un punto di vista formale la teoria di Planck della radiazione di corpo nero non è soddisfacente: infatti viene utilizzato un procedimento classico basato sulla statistica di Boltzmann e in questo viene introdotta la quantizzazione dell'energia degli oscillatori. Tuttavia la trattazione quantistica rigorosa, pur se condotta in modo completamente diverso, porta alla stessa legge (18.7).

#### 18.4 Effetto fotoelettrico

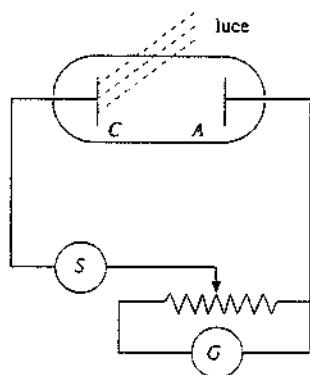


Figura 18.3

Nel corso dei suoi esperimenti relativi alle onde elettromagnetiche (paragrafo 15.10) Hertz scoprì che la scarica tra due elettrodi mantenuti ad una certa differenza di potenziale veniva facilitata se gli elettrodi stessi erano illuminati con luce ultravioletta. Successivamente Hallwachs e Lenard dimostrarono che l'incidenza di luce ultravioletta causava emissione di elettroni da parte di una superficie metallica; il fenomeno venne chiamato *effetto fotoelettrico*.

Un semplice dispositivo sperimentale con cui si mettono in evidenza le caratteristiche dell'effetto fotoelettrico è mostrato in figura 18.3. All'interno di un contenitore in cui è fatto il vuoto si trovano due elettrodi metallici; tra l'anodo A e il catodo C è applicata la d.d.p.  $V$  tramite il generatore G e la corrente nel circuito è misurata dallo strumento S.

Quando il catodo è illuminato con luce di opportuna frequenza, che supponiamo entri nel contenitore attraverso una finestra trasparente, l'andamento della corrente in funzione della d.d.p. applicata è quello della figura 18.4: non si misura corrente in assenza di illuminazione. La corrente nel vuoto è dovuta all'emissione di elettroni dal catodo e alla loro raccolta da parte dell'anodo, che è positivo rispetto al catodo; l'efficienza di raccolta aumenta all'aumentare della d.d.p. e la corrente raggiunge un valore costante quando tutti gli elettroni emessi sono raccolti (saturation). Si trova però che c'è corrente anche con l'anodo negativo rispetto al catodo e ciò si attribuisce al fatto che gli elettroni vengono emessi con una certa energia cinetica e sono in grado di superare la d.d.p.  $-V_0$  che li decelera. Al valore  $-V_0$  per il quale la corrente si annulla si dà il nome di *potenziale d'arresto*.

La distribuzione delle energie cinetiche  $E_k$  degli elettroni emessi si ricava dalla figura 18.4. Ad un intervallo  $dE_k = e dV$  corrisponde un incremento di corrente  $di = d(ne)$ , per cui

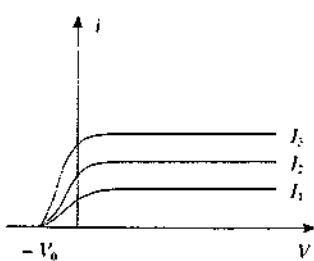


Figura 18.4

$$\frac{dn}{dE_k} = \frac{1}{e^2} \frac{di}{dV} :$$

il numero  $dn$  di elettroni emessi per secondo nell'intervallo  $dE_k$  è dato dalla pendenza  $di/dV$  della curva della corrente in funzione della d.d.p. applicata. Al potenziale d'arresto corrisponde l'energia massima con cui vengono emessi gli elettroni dal catodo:

$$E_{k,\max} = e V_0 \quad (18.8) \quad \text{Potenziale d'arresto}$$

La figura 18.4 mostra, in ogni caso, che all'interno del conduttore gli elettroni hanno una distribuzione di energia che varia tra zero ed un valore massimo noto come energia di Fermi  $E_F$ . Ritorneremo sull'argomento nel Capitolo 19.

Se si aumenta l'intensità del fascio luminoso incidente, a parità di frequenza, si ottiene una maggiore corrente di saturazione, segno che vengono emessi più elettroni, anche se l'origine della curva  $i(V)$  è la stessa, in corrispondenza a  $-V_0$ . Infine si trova che al variare della frequenza varia il valore di  $V_0$  necessario per annullare la corrente: al crescere di  $\nu$  crescono linearmente  $V_0$  e quindi, secondo (18.8), l'energia cinetica massima di emissione. In particolare, se la frequenza  $\nu$  scende sotto un valore  $\nu_0$ , detto di soglia e dipendente dal tipo di materiale catodico, non si ha effetto fotoelettrico, qualunque sia l'intensità della luce incidente. L'andamento del potenziale di arresto con  $\nu$  è mostrato in figura 18.5.

I risultati descritti sono assolutamente incomprensibili sulla base della teoria classica della radiazione elettromagnetica. Se supponiamo che un elettrone venga estratto dal metallo per effetto del campo elettrico della radiazione incidente, un aumento di intensità di questa, producendo un campo elettrico maggiore, dovrebbe facilitare l'emissione; e invece sotto soglia qualunque sia l'intensità non si ha emissione. Altrettanto inspiegabile è la dipendenza del fenomeno dalla frequenza. Inoltre sopra soglia una luce poco intensa dovrebbe provocare un'emissione ritardata nel tempo rispetto ad una luce molto intensa, perché minore è la cessione di energia per unità di tempo; si trova però che l'emissione è praticamente istantanea in entrambi i casi ( $\sim 10^{-9}$  s di ritardo tra arrivo della luce e uscita degli elettroni, vedi esempio 18.6).

Tutte le caratteristiche vennero spiegate da Einstein nel 1905. Estendendo l'ipotesi di Planck egli ipotizzò che la radiazione elettromagnetica fosse composta da quanti di energia  $U = h\nu$ , detti *fotoni*, e che nell'interazione della radiazione con la materia un elettrone potesse assorbire un solo fotone. Il bilancio energetico più favorevole per l'elettrone nell'assorbimento e nella successiva emissione è

$$E_{k,\max} = h\nu - W_e : \quad (18.9) \quad \text{Relazione di Einstein}$$

$W_e$  rappresenta il *lavoro di estrazione del metallo*, cioè l'energia minima che bisogna comunicare all'elettrone per rompere il suo legame col metallo. Chiaramente  $W_e$  è riferito a quegli elettroni che all'interno del conduttore hanno l'energia cinetica massima e che pertanto escono con  $E_{k,\max}$  data da (18.9). Combinando quest'ultima con (18.8) si ha

$$E_{k,\max} = h\nu - W_e = eV_0 \Rightarrow V_0 = \frac{h}{e}\nu - \frac{W_e}{e} \quad (18.10)$$

Viene così giustificata la linearità di  $V_0$  con  $\nu$  e si trova che la pendenza della retta (18.10) è una costante universale, indipendente dal metallo. Sempre da (18.9) risulta chiaro che il fenomeno avviene solo se  $h\nu \geq W_e$  e che quindi la frequenza di soglia è

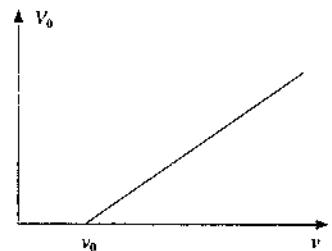


Figura 18.5

Soglia fotoelettrica

$$\nu_0 = \frac{W_e}{h}, \quad (18.11)$$

caratteristica del metallo catodico.

Un aumento di intensità, a parità di frequenza, corrisponde ad un aumento del numero di fotoni incidenti per unità di superficie ed unità di tempo e quindi causa l'emissione di un maggior numero di elettroni; però se  $\nu \leq \nu_0$  l'emissione non può avvenire, qualunque sia il numero di fotoni. Infine, trattandosi di un processo elementare di assorbimento, in cui si assorbe una quantità finita di energia una sola volta e non una successione continua di quantità infinitesime, l'emissione è praticamente istantanea.

La teoria di Einstein venne pienamente confermata da misure molto accurate eseguite da Millikan nel 1914; il rapporto  $h/e$ , cioè la pendenza della retta (18.10), fu determinato e, noto il valore della carica elementare, da poco misurato dallo stesso Millikan (paragrafo 1.8), si ottenne per  $h$  un valore in accordo con quello ricavato da Planck nella trattazione della radiazione di corpo nero.

Nella tabella 18.2 sono riportati per alcuni metalli i valori del lavoro di estrazione (in elettronvolt), della corrispondente soglia fotoelettrica  $\nu_0$  e della lunghezza d'onda  $\lambda_{\max} = c/\nu_0$  al di sopra della quale non si ha emissione.

**Tabella 18.2 Lavori di estrazione e soglie fotoelettriche**

materiale	$W_e$ (eV)	$\nu_0$ ( $10^{15}$ Hz)	$\lambda_{\max}$ (nm)
argento	4.8	1.16	258
cesio	1.8	0.44	681
cromo	4.6	1.11	270
litio	2.1	0.51	588
nickel	4.6	1.11	270
platino	5.3	1.28	234
potassio	2.2	0.53	566
sodio	1.8	0.44	681
tantalio	4.2	1.02	294
tungsteno	4.5	1.09	275

#### Esempio 18.4

La lunghezza d'onda massima per una data superficie metallica è  $\lambda_{\max} = 480$  nm. Determinare il lavoro di estrazione del metallo. Se viene utilizzata una radiazione con  $\lambda = 300$  nm, qual è il potenziale di arresto  $V_0$ ?

#### Soluzione

Il lavoro di estrazione è dato da (18.11):

$$W_e = h \nu_0 = h \frac{c}{\lambda_{\max}} = 4.14 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 2.6 \text{ eV} .$$

L'energia di un fotone di lunghezza d'onda  $\lambda = 300$  nm è

$$U = h\nu = h \frac{c}{\lambda} = 6.62 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 4.1 \text{ eV} ,$$

l'energia cinetica massima (18.9) risulta

$$E_{k,\max} = U - W_e = 2.48 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 1.5 \text{ eV}$$

e pertanto da (18.8)  $V_0 = 1.5$  V.

**Esempio 18.5**

Un fascio luminoso con  $\lambda = 500 \text{ nm}$  ha intensità  $I = 10^6 \text{ W/cm}^2$ ; esso incide su una superficie di cesio avente un'area  $\Sigma = 20 \text{ cm}^2$ . Calcolare l'energia cinetica massima degli elettroni emessi. Supponendo che l'efficienza del processo di emissione sia 0.12 (efficienza quantica) calcolare la massima corrente ottenibile.

**Soluzione**

L'energia del singolo fotone è

$$U = h \frac{c}{\lambda} = 3.97 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 2.5 \text{ eV} :$$

dalla tabella 18.2 si ricava  $W_r = 1.8 \text{ eV}$ , per cui  $E_{k,\max} = 0.7 \text{ eV}$ . Il numero di fotoni che colpiscono la superficie in un secondo è

$$N = \frac{I\Sigma}{U} = 5.04 \cdot 10^{13} ,$$

il numero di elettroni emessi è  $0.12 N$  e a questi corrisponde la corrente di saturazione

$$i = \frac{q}{t} = 0.12 Ne = 0.97 \cdot 10^{-6} \text{ A} .$$

Un'efficienza minore di 1 significa che non tutti i fotoni incidenti danno luogo ad un processo di emissione, cioè che l'effetto fotoelettrico ha una certa *probabilità* di avvenire. L'argomento verrà ripreso alla fine del paragrafo 18.5.

**Esempio 18.6**

Inviando un fascio di luce di intensità  $I = 0.1 \text{ W/m}^2$  e lunghezza d'onda  $\lambda = 0.396 \mu\text{m}$  su un catodo di potassio ( $W_r = 2.2 \text{ eV}$ ), si osserva che l'anodo inizia a raccogliere elettroni dopo un tempo  $\Delta t = 175 \text{ ns}$ ; la distanza tra catodo e anodo è  $d = 10 \text{ cm}$  (ci si riferisca alla figura 18.3). Verificare che il risultato è in accordo con la teoria di Einstein.

**Soluzione**

Con  $\lambda = 0.396 \mu\text{m}$ ,  $h\nu = hc/\lambda = 5.02 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 3.13 \text{ eV}$  e quindi

$$E_{k,\max} = 3.13 - 2.2 = 0.93 \text{ eV} = 1.49 \cdot 10^{-19} \text{ J} ,$$

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2E_{k,\max}}{m}} = 5.72 \cdot 10^5 \text{ m/s} , \quad t_{\min} = \frac{d}{v_{\max}} = 175 \cdot 10^{-9} \text{ s} .$$

L'accordo col valore previsto mostra inoltre che la durata  $\Delta t_0$  del fenomeno di emissione è trascurabile; in effetti sappiamo che  $\Delta t_0 \approx 10^{-9} \text{ s}$ .

Si osservi che classicamente l'elettrone sarebbe emesso se assorbisse almeno l'energia

$$W_e = I \pi r^2 \Delta t_0 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{W_e}{I \pi \Delta t_0}} = 3.3 \cdot 10^{-5} \text{ m} .$$

L'elettrone cioè dovrebbe avere un raggio dell'ordine di  $10^{-5} \text{ m}$ ,  $10^5$  volte maggiore dei raggi atomici. Il risultato mostra la completa inadeguatezza del modello classico di interazione tra radiazione e materia.

### Nota. Il fotomoltiplicatore

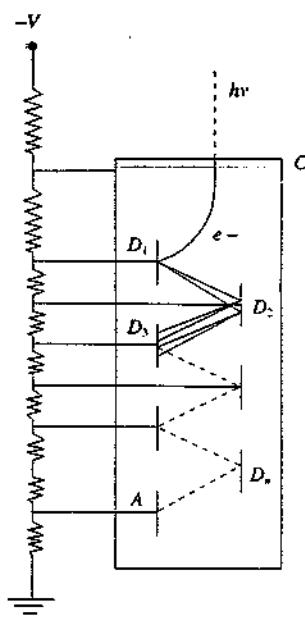


Figura 18.6

Il dispositivo della figura 18.3 è chiamato cella o *cellula fotoelettrica*; esso è impiegato nella rivelazione in tempi rapidi di flussi luminosi, anche di debole intensità. Un'applicazione particolare è quella di utilizzare una cella fotoelettrica come interruttore rapido in un circuito, che si chiude quando è illuminato da luce di opportuna frequenza. Per aumentare la sensibilità di rivelazione, cioè per essere in grado di vedere un flusso luminoso molto debole nel visibile e nel vicino ultravioletto, si ricorre al *fotomoltiplicatore*, che è schematizzato nella figura 18.6. Sul lato interno di una base di un cilindro di vetro in cui è fatto il vuoto è depositato un photocatodo *C*; esso emette elettroni quando è colpito da fotoni che attraversano il vetro (o il quarzo) di cui è fatta la base e gli elettroni emessi vengono attirati dall'elettrodo *D<sub>1</sub>*, posto a una d.d.p. positiva rispetto al catodo. Questo elettrodo, detto primo dinodo, è costituito da un materiale avente la proprietà di emettere  $\delta$  elettroni quando viene colpito da un elettrone. I  $\delta$  elettroni emessi sono attirati dal secondo dinodo *D<sub>2</sub>* che, colpito, ne emette  $\delta^2$  e così via. Con  $n$  stadi di moltiplicazione si hanno  $\delta^n$  elettroni: se  $\delta = 4$  e  $n = 14$  il fattore di moltiplicazione è  $G = \delta^n = 2.7 \cdot 10^8$ . Gli elettroni emessi dall'ultimo dinodo vengono raccolti dall'anodo *A* che è connesso ad un circuito esterno.

Ad esempio, prendiamo un photocatodo con efficienza quantica del 25% che viene colpito da 10 fotoni in un intervallo di tempo di  $5 \cdot 10^{-9}$  s. La carica che arriva all'anodo, se il fattore di moltiplicazione vale  $G = 10^8$ , è

$$q = 0.25 \cdot 10 \cdot 10^8 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} = 0.4 \cdot 10^{-10} \text{ C}$$

e la corrispondente corrente in uscita dall'anodo è

$$i = \frac{q}{\Delta t} = \frac{0.4 \cdot 10^{-10}}{5 \cdot 10^{-9}} = 8 \cdot 10^{-3} \text{ A} .$$

Supponendo che questa corrente attraversi un resistore con  $R = 50 \Omega$ , ai capi di questo si sviluppa durante il tempo  $\Delta t$  la tensione media  $V = Ri = 0.4 \text{ V}$ . Si vede che il fotomoltiplicatore è in grado di rivelare un singolo fotone, seppure con una certa efficienza. Segnali luminosi di pochi fotoni possono essere prodotti da una particella relativistica carica per effetto Cerenkov; il mezzo in cui avviene l'emissione e il fotomoltiplicatore che la amplifica e la rende misurabile costituiscono un contatore Cerenkov (vedi paragrafo 13.11).

### 18.5 Effetto Compton. Produzione di coppie

Il successo della spiegazione data da Einstein per il meccanismo del fenomeno di emissione fotoelettrica porta ad assegnare alla radiazione elettromagnetica incidente proprietà corpuscolari. La radiazione viene rappresentata con un flusso di fotoni, ciascuno dei quali ha energia  $U$  dipendente dalla frequenza, si muove con la velocità  $c$  della luce nel vuoto avendo di conseguenza massa nulla, e possiede una quantità di moto  $p$ :

$$U = hv = h \frac{c}{\lambda} , \quad p = \frac{U}{c} = \frac{hv}{c} = \frac{h}{\lambda} . \quad (18.12)$$

L'espressione della quantità di moto è in accordo con la relazione generale stabilita nella teoria della relatività ristretta tra energia, quantità di moto e massa di una particella,

$$U = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} \quad (18.13)$$

applicata ad una particella con massa nulla. Notiamo che l'espressione di  $p$  valida per un fotone coincide con quella che si ricava per la quantità di moto trasportata da un'onda elettromagnetica (paragrafo 13.4).

Queste caratteristiche, che sono tanto più evidenti quanto più elevata è l'energia del singolo fotone, furono definitivamente provate da Compton nel 1923 in un esperimento in cui un fascio di raggi  $X$ , con energia dei singoli fotoni dell'ordine di 20 keV, veniva inviato su un bersaglio di grafite e si misuravano a diversi angoli l'intensità e la lunghezza d'onda dei raggi  $X$  diffusi. Compton scoprì che i raggi  $X$  diffusi ad angolo diverso da zero rispetto alla direzione incidente avevano lunghezza d'onda maggiore, tanto maggiore quanto più grande era l'angolo di diffusione, risultato non spiegabile in modo classico in quanto, se una radiazione elettromagnetica mette in oscillazione un elettrone, questo emette alla stessa frequenza (diffusione Thomson, paragrafo 13.8).

Seguendo la proposta di Einstein, Compton ipotizzò che il fascio di raggi  $X$  fosse formato da fotoni con le proprietà (18.12) e che questi fotoni venissero diffusi dagli elettroni contenuti nella grafite attraverso un processo elementare di urto elastico fotone-elettrone; l'elettrone urtato si poteva considerare libero, essendo l'energia del fotone incidente molto maggiore dell'energia di legame degli elettroni di valenza nel carbonio.

La cinematica di un urto elastico fotone-elettrone si basa sulle leggi di conservazione dell'energia e della quantità di moto. Nello stato iniziale, prima dell'urto, scriviamo, con riferimento alla figura 18.7, parte sinistra,

$$\text{fotone} \quad U_0 = h\nu = h \frac{c}{\lambda_0} , \quad \mathbf{p}_0 = \frac{h}{\lambda_0} \mathbf{u}_x ,$$

$$\text{elettrone} \quad U = m c^2 , \quad \mathbf{p} = 0 .$$

Dopo l'urto, in cui si verifica una cessione di energia e quantità di moto dal fotone all'elettrone, avremo la configurazione a destra:

$$\text{fotone} \quad U_1 = h \frac{c}{\lambda_1} , \quad \mathbf{p}_1 = \frac{h}{\lambda_1} \quad \text{ad angolo } \theta \quad \text{rispetto a } \mathbf{p}_0$$

$$\text{elettrone} \quad U_2 , \quad \mathbf{p}_2 \quad \text{ad angolo } \phi \quad \text{rispetto a } \mathbf{p}_0 .$$

In accordo con le leggi di conservazione deve essere

$$U_0 + U = U_1 + U_2 , \quad \mathbf{p}_0 = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 .$$

Riscriviamo la conservazione dell'energia utilizzando (18.13):

$$p_0 c + m c^2 = p_1 c + \sqrt{p_2^2 c^2 + m^2 c^4} \Rightarrow p_2^2 = (p_0 - p_1)^2 + 2(p_0 - p_1)m c .$$

Dalla conservazione della quantità di moto si ha

$$\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_1 \Rightarrow p_2^2 = p_0^2 + p_1^2 - 2 p_0 p_1 \cos\theta .$$

Eguagliamo le due espressioni di  $p_2^2$  e otteniamo

$$p_0 - p_1 = \frac{p_0 p_1}{m c} (1 - \cos\theta) .$$

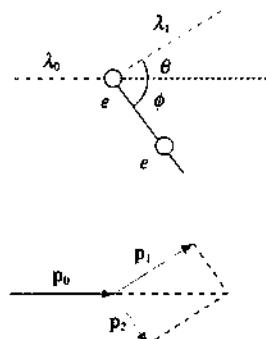


Figura 18.7

Esprimendo infine le quantità di moto dei fotoni in funzione delle lunghezze d'onda tramite (18.12) si arriva alla relazione di Compton

### Relazione di Compton

$$\frac{\lambda_1 - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{h}{mc} (1 - \cos\theta) \quad (18.14)$$

Il fotone diffuso ha lunghezza d'onda maggiore di quella del fotone incidente e quindi frequenza ovvero energia inferiore, a seguito della cessione di energia all'elettrone. La differenza  $\Delta\lambda$  cresce con l'angolo di diffusione e la legge (18.14) corrisponde perfettamente alle misure sperimentali.

Il coefficiente della (18.14) ha le dimensioni di una lunghezza ed è detto *lunghezza d'onda Compton dell'elettrone*; il suo valore è

### Larghezza d'onda Compton dell'elettrone

Si vede che le differenze di lunghezza d'onda dovute all'effetto Compton sono molto piccole, dell'ordine dei picometri. La variazione relativa  $\Delta\lambda / \lambda_0$  è apprezzabile solo se  $\lambda_0$  non è molto diversa da  $\lambda_c$ . Se  $U_0 = 20 \text{ keV} = 3.2 \cdot 10^{-15} \text{ J}$ ,  $\lambda_0 = hc / U_0 = 0.62 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ ,  $\Delta\lambda / \lambda_0 = 0.04$  con  $\theta = 90^\circ$ . Notiamo che  $\lambda_c$  dipende da costanti universali e dalla massa dell'elettrone, non da proprietà del materiale diffondente, a conferma del fatto che nella diffusione Compton possiamo considerare gli elettroni come liberi.

Fissato un certo angolo  $\theta$ , oltre ai fotoni con lunghezza d'onda  $\lambda_1 < \lambda_0$  diffusi secondo il meccanismo appena descritto, si trovano anche fotoni diffusi con lunghezza d'onda  $\lambda_0$  invariata (picco di sinistra nella figura 18.8). Questa presenza si spiega attribuendo il processo di diffusione ad un elettrone legato: si suppone cioè che in tali casi il fotone urti un atomo per cui nella (18.14) alla massa dell'elettrone si deve sostituire la massa dell'atomo, che è circa  $10^4$  volte superiore; è allora evidente come  $\lambda_1$  risulti praticamente eguale a  $\lambda_0$ .

Nella diffusione della radiazione elettromagnetica abbiamo così due fenomeni. Uno è la diffusione senza cambiamento di lunghezza d'onda, che avviene nelle condizioni appena descritte (lunghezze d'onda corte, dell'ordine di  $10^{-10} \text{ m}$  o inferiori, urto contro un elettrone fortemente legato) oppure a lunghezze d'onda maggiori, dall'ultravioletto fino al visibile, alle microonde e alle onde radio, per le quali la variazione  $\Delta\lambda$  è completamente trascurabile rispetto a  $\lambda$ , sia con elettroni liberi che con elettroni legati. Vediamo che per  $\lambda$  grandi il risultato quantistico coincide con quello classico, calcolato da Thomson (paragrafo 13.8). L'altro fenomeno è la diffusione Compton che avviene su elettrone libero, con variazione misurabile di lunghezza d'onda; essa è tanto più evidente quanto maggiore è l'energia dei fotoni.

L'interpretazione di Compton venne confermata in esperimenti successivi, nei quali si misurarono anche la direzione di moto e l'energia cinetica dell'elettrone libero colpito dal fotone. Un caso numerico è sviluppato nell'esempio 18.7.

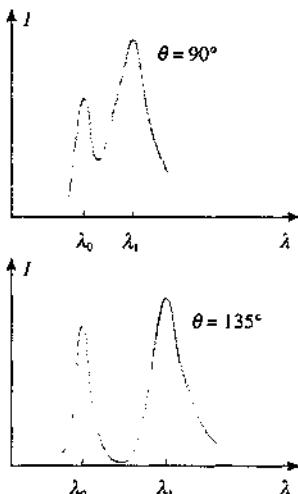


Figura 18.8

### Esempio 18.7

Un fotone con energia  $U_0 = 100 \text{ keV}$  incide su un elettrone libero. Supponendo che l'angolo di diffusione sia  $\theta = 90^\circ$  calcolare la direzione di moto e l'energia cinetica dell'elettrone subito dopo l'urto.

#### Soluzione

Calcoliamo innanzitutto  $\lambda_0$  e, per  $\theta = 90^\circ$ ,  $\lambda_1$  e  $U_1$ :

$$\lambda_0 = \frac{hc}{U_0} = 12.40 \cdot 10^{-12} \text{ m} , \quad \lambda_1 = \lambda_0 + \Delta\lambda = \lambda_0 + \lambda_c = 14.83 \cdot 10^{-12} \text{ m} ,$$

$$U_1 = \frac{hc}{\lambda_1} = 83.6 \text{ keV} .$$

Applichiamo la legge di conservazione della quantità di moto alle componenti lungo la direzione di incidenza e ortogonalmente a questa:

$$p_0 = p_1 \cos\theta + p_2 \cos\phi , \quad 0 = p_1 \sin\theta - p_2 \sin\phi$$

$$\Rightarrow \tan\phi = \frac{p_1 \sin\theta}{p_0 - p_1 \cos\theta} = \frac{\lambda_0 \sin\theta}{\lambda_1 - \lambda_0 \cos\theta} .$$

Con  $\theta = 90^\circ$   $\tan\phi = \lambda_0 / \lambda_1$ ,  $\phi = 39.9^\circ$ .

Per l'energia dell'elettrone abbiamo

$$U_2 = U_0 + mc^2 - U_1 = \frac{hc}{\lambda_0} - \frac{hc}{\lambda_1} + mc^2 = hc \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0 \lambda_1} + mc^2 .$$

Questa è l'energia totale dell'elettrone: sottraendo l'energia di massa  $mc^2$  resta l'energia cinetica, chiaramente eguale a  $U_0 - U_1$ :

$$E_k = U_2 - mc^2 = U_0 - U_1 = hc \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0 \lambda_1} .$$

Sempre ponendo  $\theta = 90^\circ$   $E_k = hc \lambda_c / \lambda_0 \lambda_1 = 16.4 \text{ keV}$ .

In sostanza, noti l'energia incidente e l'angolo di diffusione, si possono calcolare l'energia cinetica acquistata dall'elettrone e la sua direzione di moto. La verifica sperimentale conferma le previsioni.

### Produzione di coppie

Un ulteriore fenomeno quantistico di interazione tra radiazione e materia avviene quando un fotone con energia superiore a  $2mc^2 = 1.02 \text{ MeV}$ , cioè al doppio dell'energia a riposo dell'elettrone, urta un nucleo atomico. Si osserva che il fotone scompare e che la sua energia si materializza in due particelle, un elettrone e un positrone; quest'ultimo ha massa eguale a quella dell'elettrone e carica opposta (è l'antiparticella dell'elettrone). Il bilancio energetico del processo è

$$hv = 2mc^2 + E_k^- + E_k^+ ,$$

in cui  $hv$  è l'energia del fotone incidente,  $E_k^-$  l'energia cinetica dell'elettrone,  $E_k^+$  l'energia cinetica del positrone. Il nucleo, di massa molto maggiore, non assorbe praticamente energia, anche se la sua presenza è essenziale per il bilancio della quantità di moto; si può infatti dimostrare facilmente che nel vuoto il processo descritto non è possibile in quanto non conserva contemporaneamente energia e quantità di moto.

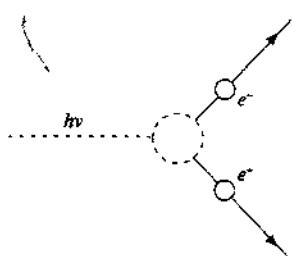


Figura 18.9

### Coefficiente di assorbimento

Nella trattazione classica dei paragrafi 13.9 e 13.10 l'indice di rifrazione tende a uno quando la frequenza della radiazione elettromagnetica assume valori molto superiori a quelli tipici della luce visibile ( $\sim 10^{14} \text{ Hz}$ ), indicando così una sostanziale trasparenza asintotica della materia alla radiazione. Invece nella realtà ciò non avviene: a frequenze elevate accadono nuovi fenomeni non prevedibili e non spiegabili in modo classico, nei quali si manifesta l'aspetto corpuscolare della radiazione.

Si tratta di fenomeni concorrenti, ognuno con una determinata probabilità di avvenire che è funzione dell'energia. Fino a valori dell'ordine di 100 keV l'effetto predominante è quello fotoelettrico, nel senso che quando un fotone interagisce con la materia la probabilità che dia luogo a effetto fotoelettrico è maggiore di quella che subisca effetto Compton. Tra 100 keV e 10 MeV l'effetto fotoelettrico diventa trascurabile e resta praticamente soltanto l'effetto Compton; oltre i 10 MeV anche la probabilità dell'effetto Compton tende a zero e l'interazione radiazione-materia si manifesta attraverso la produzione di coppie, la cui probabilità cresce da zero alla soglia fino ad un valore costante (si veda più avanti la figura 18.11).

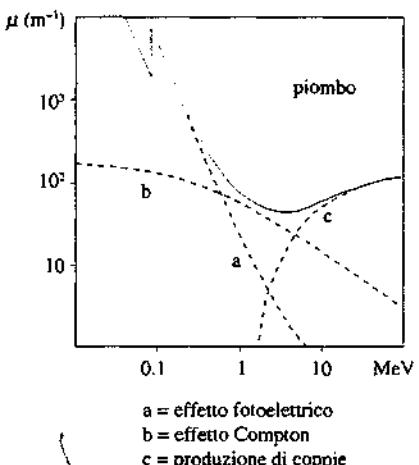
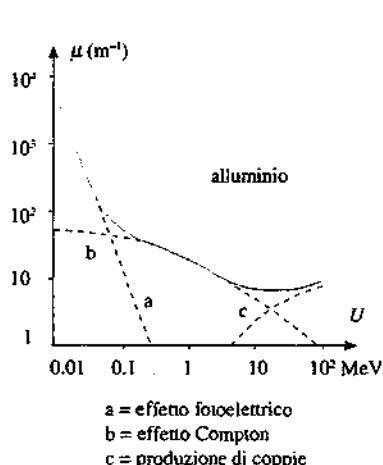
L'insieme dei fenomeni descritti porta ad un assorbimento dei fotoni: essi scompaiono in quanto vengono assorbiti da un elettrone o si trasformano in una coppia elettrone-positrone oppure in quanto vengono deviati e quindi rimossi dalla direzione originale di propagazione.

In termini macroscopici medi, cioè considerando un gran numero di fotoni incidenti, si trova che il numero  $N$  di fotoni per unità di superficie e unità di tempo ovvero l'intensità  $I$  del fascio, pari al prodotto di  $N$  per l'energia  $hv$  del singolo fotone, diminuisce con legge esponenziale in funzione dello spessore  $x$  del materiale attraversato:

$$I(x) = I_0 e^{-\mu x} \quad (18.15)$$

$I_0$  è l'intensità incidente e  $\mu$  il coefficiente di assorbimento: dopo uno spessore  $x = 1/\mu$  l'intensità è ridotta a  $I_0/e$ .

Il coefficiente di assorbimento dipende dal materiale assorbitore e per un dato materiale non è costante, bensì dipende dall'energia dei fotoni; esso è mostrato in figura 18.10 nel caso dell'alluminio. Le linee tratteggiate mostrano i contributi calcolati dell'effetto fotoelettrico, dell'effetto Compton e della produzione di coppie, la linea continua il valore globale misurato. L'andamento è tipico anche di altri materiali, con i valori maggiori nella regione dominata dall'effetto fotoelettrico, un minimo nella regione intermedia e una ricrescita che tende ad un valore di saturazione. Possiamo dire che il coefficiente di assorbimento rappresenta macroscopicamente la probabilità del processo di assorbimento.



### Esempio 18.8

Determinare lo spessore di uno strato di piombo con cui si vogliono assorbire fotoni con energie 50 keV, 500 keV, 5 MeV, 50 MeV, in modo che l'intensità venga ridotta di un fattore  $10^4$ . La curva del coefficiente di assorbimento del piombo è mostrata in figura 18.11.

### Soluzione

Lo spessore richiesto deve essere tale che  $e^{-\mu x} = 10^{-4}$ , cioè  $\mu x = 9.21$ .

Dalla figura si ricavano approssimativamente i valori di  $\mu$  alle varie energie (le scale sono logaritmiche in base 10); nella tabella li riportiamo insieme alla lunghezza di assorbimento  $l_{\text{as}} = 1/\mu$  e allo spessore richiesto  $x = 9.21/\mu$ .

50 keV	$\mu = 7.8 \cdot 10^3 \text{ m}^{-1}$	$l_{\text{ass}} = 1.3 \cdot 10^{-4} \text{ m}$	$x = 0.12 \text{ cm}$
500 keV	$\mu = 1.9 \cdot 10^2 \text{ m}^{-1}$	$l_{\text{ass}} = 5.3 \cdot 10^{-3} \text{ m}$	$x = 4.8 \text{ cm}$
5 MeV	$\mu = 45 \text{ m}^{-1}$	$l_{\text{ass}} = 2.2 \cdot 10^{-2} \text{ m}$	$x = 20.5 \text{ cm}$
50 MeV	$\mu = 1.1 \cdot 10^2 \text{ m}^{-1}$	$l_{\text{ass}} = 9.1 \cdot 10^{-3} \text{ m}$	$x = 8.4 \text{ cm}$

Lo spessore maggiore si ha ovviamente dove il coefficiente di assorbimento è minore: nel piombo i fotoni più difficili da assorbire sono quelli con energia dell'ordine di qualche MeV. Nell'alluminio (figura 18.10) ciò avviene intorno a 10 MeV; essendo però  $\mu$  molto minore gli spessori richiesti di alluminio sono molto maggiori, a parità di assorbimento.

Calcoli di questo tipo sono utilizzati per valutare gli spessori con cui devono essere schermati gli ambienti dove si producono raggi X o contenenti macchine che in generale possono produrre radiazioni elettromagnetiche di alta energia.

### Aspetto ondulatorio e aspetto corpuscolare della radiazione

La caratteristica certamente più sorprendente della radiazione è la diversità di comportamento a seconda delle situazioni. Ad esempio, con un fascio luminoso di lunghezza d'onda nella regione blu-violetta, possiamo eseguire esperimenti di interferenza e diffrazione, sebbene quando lo portiamo a interagire con un materiale opportuno esso provochi l'emissione di elettroni secondo regole che non si possono spiegare con proprietà ondulatorie. Allo stesso modo, un fascio di raggi X subisce diffusione Compton, spiegabile solo con l'ipotesi corpuscolare, anche se la lunghezza d'onda del fotone diffuso viene misurata con uno spettrometro di Bragg, che si basa su proprietà ondulatorie.

Formalmente il legame tra i due aspetti è dato dalle relazioni (18.12),

$$E = h\nu , \quad p = h/\lambda .$$

Nella sostanza, l'idea che si è affermata con lo sviluppo della meccanica quantistica è che il *dualismo di comportamento sia una proprietà intrinseca della radiazione*; l'argomento è molto generale e si riferisce anche alla materia, come vedremo nel paragrafo 18.7. Lo riprenderemo pertanto in quella occasione, per discuterlo in modo unificato.

L'*aspetto ondulatorio* della radiazione elettromagnetica è quello che storicamente si è affermato per primo con una solida base sperimentale e con la formulazione teorica che discende dalle equazioni di Maxwell. Successivamente, quando è diventato possibile investigare l'interazione tra radiazione e materia, si è manifestato anche l'*aspetto corpuscolare*; esso è più evidente se l'energia dei singoli fotoni è elevata, e si rivela già nelle microonde, nell'infrarosso e nel visibile, come abbiamo ricordato nel paragrafo 13.12 e come discuteremo brevemente tra poco.

Le intuizioni che hanno aperto la strada alla comprensione dell'interazione tra radiazione e materia sono quelle di Planck e di Einstein. Nel paragrafo 18.7 descriveremo gli inizi del cammino che ha portato alla teoria quantistica della materia.

## 18.6 Righe spettrali. Modello di Bohr. Livelli energetici

Nei paragrafi precedenti, dopo la trattazione della radiazione termica, abbiamo illustrato i principali effetti nei quali è essenziale l'ipotesi che la radiazione elettro-

magnetica, nell'interazione con la materia, sia formata da fotoni di energia  $h\nu$ : ciascun effetto è dovuto all'interazione individuale di un fotone con un elettrone o con un nucleo. Riprendiamo ora l'esposizione delle caratteristiche di emissione di radiazione elettromagnetica considerando l'emissione da parte di atomi liberi, quali sono quelli di un gas abbastanza rarefatto.

Come già detto nel paragrafo 16.7 l'aspetto sperimentale più notevole è la scoperta che lo spettro di emissione non è continuo, bensì è formato da righe, cioè da singole frequenze ben definite, e che esistono regolarità nella successione delle frequenze delle righe; in ogni caso non si tratta di serie armoniche.

Uno studio completo effettuato sullo spettro dell'idrogeno atomico portò verso il 1890 alla formula empirica proposta da Rydberg, generalizzazione della prima formula di questo tipo trovata da Balmer nel 1885: le lunghezze d'onda delle righe dello spettro obbediscono alla relazione

Formula di Rydberg

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left( \frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right) , \quad (18.16)$$

in cui  $n_1$  e  $n_2$  sono numeri interi, con  $n_1 > n_2$ , e  $R_H$  una costante, detta di Rydberg, che vale, se  $\lambda$  è espressa in nanometri,

$$R_H = 1.0967758 \cdot 10^{-2} \text{ nm}^{-1} .$$

Assegnando a  $n_2$  i valori 1, 2, 3, 4, 5 si hanno cinque serie di righe che prendono il nome dai loro scopritori; alcune di queste serie furono scoperte molto dopo, ma risultarono in perfetto accordo con (18.16), per le ragioni che adesso vedremo. Nella tabella 18.3 sono indicati i valori delle prime tre lunghezze d'onda di ogni serie e il limite inferiore, cioè il limite di (18.16) per  $n$  tendente all'infinito; si noti che la prima serie è nell'ultravioletto, la seconda nel visibile, le altre nell'infrarosso.

Tabella 18.3 Serie spettrali dell'idrogeno atomico

serie di Lyman	$\frac{1}{\lambda} = R_H \left( \frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2} \right)$	$n = 2, 3, 4, \dots$	121.6	102.6	97.3	$\rightarrow$	91.2 nm
Balmer	$\frac{1}{\lambda} = R_H \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right)$	$n = 3, 4, 5, \dots$	656.5	486.3	434.2	$\rightarrow$	364.7 nm
Paschen	$\frac{1}{\lambda} = R_H \left( \frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2} \right)$	$n = 4, 5, 6, \dots$	1875.6	1282.2	1094.1	$\rightarrow$	820.6 nm
Brackett	$\frac{1}{\lambda} = R_H \left( \frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2} \right)$	$n = 5, 6, 7, \dots$	4052.3	2625.9	2166.1	$\rightarrow$	1458.8 nm
Pfund	$\frac{1}{\lambda} = R_H \left( \frac{1}{5^2} - \frac{1}{n^2} \right)$	$n = 6, 7, 8, \dots$	7459.9	4653.8	3740.6	$\rightarrow$	2279.4 nm

In termini di frequenze, essendo  $v = c / \lambda$ , la (18.16) si scrive come differenza tra  $cR_H/n_2^2$  e  $cR_H/n_1^2$ . Relazioni analoghe si trovano anche per le frequenze delle righe

emesse da altri elementi, che risultano sempre esprimibili come differenza di due termini caratteristici dell'elemento stesso: questa regola generale è detta *principio di combinazione di Rydberg e Ritz*.

La prima spiegazione soddisfacente dello spettro dell'idrogeno atomico venne data da Bohr nel 1913, quando era nota soltanto la serie di Balmer. Notiamo che tra il 1885 e il 1913 erano intervenute varie scoperte. Nel 1897 Thomson aveva identificato l'elettrone come uno dei costituenti fondamentali della materia, nel 1900 e nel 1905 Planck e Einstein avevano ipotizzato la struttura discontinua della radiazione elettromagnetica, come abbiamo discusso nei paragrafi precedenti, e infine nel 1911 Rutherford aveva formulato il modello nucleare dell'atomo, costituito da un nucleo positivo, praticamente puntiforme rispetto alle dimensioni dell'atomo ( $10^{-15}$  m contro  $10^{-10}$  m), e circondato da una nuvola negativa di elettroni, che venivano pensati in moto lungo orbite stazionarie intorno al nucleo (vedi paragrafo 1.7).

Il modello atomico di Rutherford non era però sostenibile in modo classico: un'orbita elettronica, pur potendo essere di equilibrio da un punto di vista puramente meccanico, non lo poteva essere da un punto di vista elettrodinamico, a causa dell'emissione da parte di una carica che si muove con moto accelerato. Gli elettroni dovrebbero perciò compiere orbite spiraleggianti andando a finire sul nucleo in un tempo molto breve, dell'ordine di  $10^{-11}$  s (vedi esempio 13.6), e in questo moto dovrebbero emettere una radiazione con spettro continuo. Tutto ciò è contrario all'evidenza sperimentale di stabilità degli atomi: le loro dimensioni sono certamente costanti e non si riducono rapidamente a quelle del nucleo; inoltre, quando emettono, lo spettro non è continuo.

Nel suo modello dell'atomo di idrogeno Bohr postulò che l'elettrone potesse descrivere orbite circolari attorno al protone e che queste orbite fossero stazionarie, senza emissione di radiazione, ammettendo che a livello atomico le leggi che regolano gli stati stazionari siano diverse da quelle della fisica classica. Inoltre egli impose la *quantizzazione del momento angolare*, da cui deriva la quantizzazione del raggio dell'orbita e dell'energia, come abbiamo descritto nel paragrafo 2.3. In tal modo egli ottenne l'espressione

$$U_n = -\frac{1}{2} \frac{me^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2 n^2} = -\frac{13.6}{n^2} \text{ eV} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (18.17) \quad \text{Energia di legame}$$

per l'energia di legame dell'elettrone in funzione del numero quantico  $n$ .

L'energia dell'elettrone risulta pertanto quantizzata: in una situazione normale l'atomo è nello stato fondamentale ( $n = 1$ ) e l'energia di legame dell'elettrone vale  $U_1 = -13.6$  eV; a seguito di un trasferimento di energia, che può ad esempio essere provocato da un urto contro un'altra particella, l'atomo passa in uno stato eccitato, con energia di legame dell'elettrone pari a  $U_2 = -3.4$  eV,  $U_3, \dots$ . Dallo stato eccitato l'atomo torna allo stato fondamentale in un tempo molto breve ( $\sim 10^{-9}$  s) direttamente, mediante un solo salto quantico, o passando attraverso livelli energetici intermedi. L'ulteriore ipotesi fondamentale di Bohr è che in un qualsiasi passaggio da uno stato con  $n = n_1$  ad uno stato con  $n = n_2 < n_1$ , cioè nel processo di diseccitazione, l'atomo emetta un quanto di energia elettromagnetica

$$h\nu = U_{n_1} - U_{n_2} = \frac{me^4}{2(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2} \left( \frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right) = 13.6 \left( \frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right) \text{ eV} \quad . \quad (18.18)$$

Viene così incorporata nel modello, per spiegare l'emissione, la stessa ipotesi fatta da Einstein per l'assorbimento nell'effetto fotoelettrico: lo scambio di energia avviene per quantità discrete  $h\nu$ .

La struttura della formula di Bohr (18.18) è identica a quella di (18.16): dal confronto si ricava l'espressione esplicita della costante di Rydberg,

$$R_H = \frac{1}{hc} \frac{me^4}{2(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2} = \frac{me^4}{8\epsilon_0^2 \hbar^3 c} = 1.0973732 \cdot 10^{-2} \text{ nm}^{-1},$$

che è molto simile al valore misurato sperimentalmente. L'accordo diventa perfetto se al posto della massa  $m$  dell'elettrone si sostituisce la massa ridotta del sistema protone-elettrone, pari a  $mm_p / (m + m_p)$ , tenendo così conto che il moto avviene attorno al centro di massa del sistema (vedi paragrafo 5.6 del volume primo).

*Lo spettro a righe dell'idrogeno atomico riflette pertanto la struttura quantizzata dell'energia di legame dell'elettrone.* La serie di Lyman ( $n_2 = 1$ ) si ottiene quando l'elettrone da uno stato eccitato torna direttamente nello stato fondamentale, quella di Balmer quando l'elettrone nella diseccitazione passa attraverso il primo livello eccitato ( $n_2 = 2$ ) e così via. Nella figura 18.12 sono mostrati gli schemi dei livelli e delle rispettive serie di emissione; si riveda l'analogia figura 2.21.

Dato che l'energia del sistema protone-elettrone può assumere solo i valori (18.17), che sono detti *livelli energetici* del sistema stesso, un fotone può essere assorbito solo se ha un'energia  $hv$  che corrisponde ad un salto quantico tra i livelli (18.17). In altre parole la (18.18) vale per l'emissione secondo lo schema  $U_{n_1} \rightarrow U_{n_2} + hv$ , in cui il numero quantico diminuisce, e vale anche per l'assorbimento secondo lo schema contrario in cui il numero quantico aumenta:  $hv + U_{n_2} \rightarrow U_{n_1}$ . È quindi ovvio che lo spettro di assorbimento sia eguale a quello di emissione (si riveda la figura 16.31). Nell'idrogeno atomico in condizioni normali gli atomi sono nello stato fondamentale e in assorbimento si osservano solo le righe della serie di Lyman; se invece una certa percentuale di atomi è in uno stato eccitato si osservano in assorbimento anche righe delle altre serie. Uno stato eccitato può essere popolato ad esempio portando il gas ad alta temperatura (eccitazione per urti termici); allo scopo è necessario che  $k_B T$  sia dell'ordine di  $\Delta U$  e, se prendiamo  $\Delta U = U_2 - U_1 = 10.2 \text{ eV}$ , si trova  $T = 1.18 \cdot 10^5 \text{ K}$ ; in effetti la serie di Balmer in assorbimento è stata osservata nell'atmosfera di certe stelle.

Oltre che all'idrogeno il modello di Bohr fu applicato con successo agli atomi idrogenoidi, cioè aventi un solo elettrone di valenza; esso venne successivamente ampliato e perfezionato da Sommerfeld, secondo le linee descritte nel paragrafo 2.3. Tuttavia la sua estensione ad atomi più complessi non era facile, restava da un punto di vista teorico l'incongruenza di utilizzare alcuni concetti classici come quelli di orbite circolari ed ellittiche di equilibrio e di rifiutarne altri, come l'emissione di radiazione durante il moto degli elettroni lungo tali orbite; in seguito si pose il problema di come inquadrare lo spin nel modello (paragrafo 9.10) ed altri ancora. Una coerente formulazione quantistica venne raggiunta solo nel 1925 da Schrödinger e poi da Heisenberg e Born.

### Livelli energetici

Malgrado i suoi difetti il modello di Bohr ha avuto un'enorme importanza per la comprensione dei fenomeni atomici e rimangono valide le ipotesi che un atomo possa esistere solo in stati quantizzati di energia e che l'emissione e l'assorbimento di energia elettromagnetica avvengano sotto forma di quanti aventi energia pari a quella di un salto quantico tra due livelli. Il concetto è esteso a qualsiasi sistema atomico, anche nella materia condensata. Quando gli atomi non sono liberi la loro interazione porta ad un aumento del numero di livelli e ad un avvicinamento degli stessi: lo spettro dei livelli può essere così fatto che la radiazione emessa può apparire continua, come succede per la radiazione termica, risultato sempre di emissioni atomiche, ma appunto tra livelli distribuiti praticamente con continuità.

Nelle molecole sono quantizzati anche gli stati che corrispondono a configurazioni geometriche diverse da quella fondamentale (stati vibrazionali e stati rotazionali). Si hanno dun-

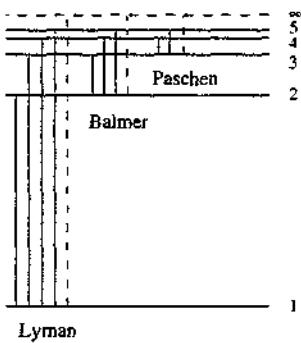


Figura 18.12

que anche per tali stati processi di emissione e assorbimento attraverso salti quantici, ma con valori di  $h\nu$  molto piccoli, che arrivano al campo delle microonde. Nella tabella 18.4 riportiamo gli ordini di grandezza di alcune energie tipiche, con i relativi valori di frequenza e lunghezza d'onda.

ORDINI DI GRANDEZZA DI ALCUNE ENERGIE TIPICHE					
$\geq$	1 KeV	$2.42 \cdot 10^{17}$ Hz	$1.24 \cdot 10^{-9}$ m	stato fondamentale di atomi complessi	
10	eV	$2.42 \cdot 10^{15}$	$1.24 \cdot 10^{-7}$	stato fondamentale dell'idrogeno	
1	eV	$2.42 \cdot 10^{14}$	$1.24 \cdot 10^{-6}$	energia di legame dell'elettrone di valenza dei metalli alcalini	
0.1	eV	$2.42 \cdot 10^{13}$	$1.24 \cdot 10^{-5}$	$\Delta U$ tra stati vibrazionali	
0.01	eV	$2.42 \cdot 10^{12}$	$1.24 \cdot 10^{-4}$	$\Delta U$ tra stati rotazionali	

Tutto lo spettro delle onde elettromagnetiche che va dalle microonde ai raggi X è utile per lo studio delle separazioni  $\Delta U$  tra livelli energetici atomici e molecolari attraverso fenomeni di assorbimento; in ogni caso si manifesta l'aspetto quantistico della radiazione.

L'esistenza di livelli energetici anche in atomi diversi dall'idrogeno venne provato nel 1914, subito dopo la pubblicazione del modello di Bohr, da Franck e Hertz (soltanto omonimo dell'Hertz scopritore delle onde elettromagnetiche). Il dispositivo sperimentale, molto semplice, è illustrato in figura 18.13. Dentro un bulbo contenente vapori di mercurio a bassa pressione sono disposti tre elettrodi, il catodo C che emette elettroni per effetto termoelettronico (paragrafo 6.5), una griglia G positiva che attira gli elettroni e un anodo A leggermente negativo rispetto alla griglia (circa  $-0.5$  V di d.d.p.). La corrente che si misura nel galvanometro all'aumentare della d.d.p. tra griglia e catodo mostra dei picchi caratteristici, separati da 4.9 V ovvero, in termini di energia degli elettroni accelerati, da 4.9 eV. Il risultato si spiega così. Un elettrone con energia cinetica  $E_k$  inferiore alla differenza  $U_2 - U_1$  tra le energie del primo livello eccitato e del livello fondamentale dell'atomo di mercurio non riesce ad eccitare l'atomo, contro cui compie urti elastiche conservando la propria energia cinetica. All'aumentare di  $V_G - V_C$  si raccolgono sempre più elettroni e questi riescono a superare la d.d.p. decelerante  $V_A - V_G$ : la corrente misurata cresce. Quando l'elettrone, nelle vicinanze di G, ha energia cinetica che eguaglia o supera di poco  $U_2 - U_1$ , l'urto può essere anelastico con perdita totale o quasi totale dell'energia cinetica da parte dell'elettrone e questo, dopo l'urto, non ha energia sufficiente per raggiungere l'anodo: la corrente cala bruscamente. Facendo aumentare ancora  $V_G - V_C$  oltre il valore critico 4.9 V, l'elettrone raggiunge l'energia cinetica  $E_k = 4.9$  eV in un punto intermedio tra catodo e griglia, può compiere lì un urto anelastico perdendo la propria  $E_k$  ed essere ancora accelerato, superare la griglia e raggiungere l'anodo: la corrente cresce di nuovo. Però con  $V_G - V_C = 9.8$  V l'elettrone può compiere due urti anelastici, di cui il secondo in prossimità della griglia e siamo così nelle condizioni precedenti, in cui la corrente subisce un nuovo calo; e così via. Ad ogni urto anelastico l'atomo di mercurio compie una transizione verso uno stato eccitato e poi si disegnita: e in effetti si osserva che solo quando la d.d.p.  $V_G - V_C$  raggiunge il valore 4.9 V il mercurio comincia ad emettere una riga la cui lunghezza d'onda è proprio  $\lambda = c/v = ch/\Delta U = 253$  nm. Si tratta di una ben nota riga dello spettro del mercurio e l'esperimento conferma l'esistenza dei livelli energetici atomici.

### *Ionizzazione*

Il trasferimento di energia ad un atomo può anche causare il distacco di un elettrone e la formazione di una coppia ione positivo-elettrone libero. Il fenomeno si chiama *ionizzazione* e l'energia minima che deve essere ceduta perché ciò avvenga si chiama energia di ionizzazione o anche potenziale di ionizzazione  $I$ . Nell'idrogeno  $I = 13.6$  eV, evidentemente eguale al valore dell'energia di legame dell'elettrone nello stato fondamentale, nell'elio  $I = 24.6$  eV. Se l'energia ceduta è maggiore di  $I$ , la parte eccedente è acquistata dall'elettrone sotto forma di energia cinetica.

In particolare la causa della ionizzazione può essere l'assorbimento di un fotone (*fotoionizzazione*) e il bilancio energetico formalmente è eguale a quello scritto per l'effetto fotoelettrico:  $h\nu = I + E_k$ . Lo spettro di assorbimento è continuo, in quanto l'elettrone non passa ad

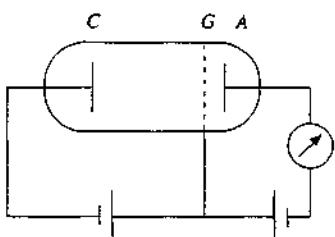


Figura 18.13

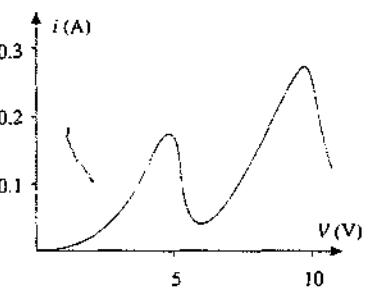


Figura 18.14

un altro livello energetico, ma può assumere un qualsiasi valore di energia, eguale a  $h\nu - I$ . Il processo inverso della fotoionizzazione è la *cattura radiativa*, in cui un elettrone libero viene catturato da uno ione positivo, si forma un atomo neutro ed è emesso un fotone che porta via l'eccesso di energia.

Il passaggio di una particella carica attraverso un gas comporta una serie di urti contro le molecole del gas con conseguenti fenomeni di ionizzazione; mediamente in un gas a pressione atmosferica il numero di coppie ione-elettrone formate in un centimetro di percorso è compreso tra 10 e 100. Con un'opportuna disposizione di campo elettrico si possono raccogliere gli elettroni liberati moltiplicandone il numero e ottenendo un segnale elettrico rivelabile. Su questo principio sono basati svariati rivelatori di particelle ionizzanti, utilizzati sia per mettere in evidenza il passaggio di una singola particella che per misure integrali di flusso (camere a ionizzazioni e contatori di Geiger-Müller per misure di radioattività).

### Raggi X caratteristici

Anche la produzione dei raggi X caratteristici è originata da un fenomeno di ionizzazione. Quando gli elettroni accelerati nel dispositivo della figura 13.26 urtano il bersaglio, che è composto normalmente da un metallo pesante i cui atomi hanno il nucleo circondato da molti elettroni, essi possono causare l'emissione degli elettroni più interni in quanto hanno energie sufficienti per rompere il legame elettrone-nucleo; si tratta di energie di legame che arrivano fino a 100 keV (nell'uranio 117 keV). Un elettrone posto in un livello energetico superiore scende ad occupare il livello inferiore vuoto causando l'emissione di un fotone con energia  $h\nu = \Delta U$ ; a sua volta l'elettrone sceso di livello lascia libero un posto e con lo stesso meccanismo viene emesso un altro fotone. Quando il livello di arrivo è il più basso possibile si hanno le righe della cosiddetta serie K, per livelli di arrivo superiori si hanno le serie L, M, N ... Tali serie sono caratteristiche dell'elemento bersaglio.

La discontinuità a circa 90 keV nella curva del coefficiente di assorbimento del piombo (figura 18.11) segnala una maggior probabilità di assorbimento dei fotoni in corrispondenza dell'energia di legame del livello K del piombo, assorbimento a cui seguono l'emissione di un elettrone e di un fotone X della serie K.

Per quanto riguarda lo spettro continuo di raggi X emesso con il meccanismo del frenamento discusso nel paragrafo 13.7, il fotone di massima energia viene emesso quando l'elettrone perde la sua energia cinetica  $eV$  in un unico processo. Per un tubo di Coolidge a cui è applicata la d.d.p.  $V = 50$  KV,

$$E_{k,\max} = h\nu_{\max} = 50 \text{ KeV} = 8 \cdot 10^{-15} \text{ J} , \\ \nu_{\max} = 1.21 \cdot 10^{19} \text{ Hz} , \lambda_{\min} = c / \nu_{\max} = 2.48 \cdot 10^{-11} \text{ m} .$$

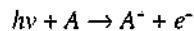
I fotoni di energia inferiore sono emessi in processi in cui l'elettrone perde una parte della propria energia.

La produzione di raggi X caratteristici può essere indotta anche facendo urtare su un bersaglio un fascio di protoni con energia cinetica dell'ordine del MeV. Essendo la massa dei protoni molto maggiore di quella degli elettroni ( $m_p / m_e = 1836$ ), i protoni sono meno accelerati dai campi elettrici presenti all'interno del bersaglio e quindi il rapporto tra energia spesa nel processo di emissione di raggi X caratteristici ed energia spesa nel processo di emissione di raggi X di frenamento è migliore per i protoni che per gli elettroni.

La tecnica PIXE (dalle iniziali in lingua inglese, Proton Induced X rays Emission) è utilizzata ad esempio in misure di inquinamento per riconoscere la presenza di materiali pesanti in campioni prelevati dall'ambiente.

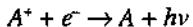
### Nota. Ionusfera. Fascia di ozono

Abbiamo citato nel paragrafo 13.10 l'esistenza della ionosfera e l'assorbimento atmosferico dei raggi ultravioletti. Nella ionosfera il principale meccanismo di formazione di cariche libere è la fotoionizzazione



dove  $A$  è un atomo di azoto o di ossigeno. I rispettivi potenziali si ionizzazione sono  $I_1 = 7.4 \text{ eV}$  e  $I_2 = 5.1 \text{ eV}$ ; le lunghezze d'onda per ionizzare azoto e ossigeno sono  $\lambda_1 = c / \nu = hc / I_1 = 167.5 \text{ nm}$  e  $\lambda_2 = 243 \text{ nm}$  o valori minori; esse si collocano nell'ultravioletto.

Accanto alla ionizzazione c'è la cattura radiativa



e tra i due processi si raggiunge un equilibrio con una certa densità di carica libera. La fascia di ozono tra 20 e 30 km di quota esiste a causa dei seguenti processi chimici, nei quali è fondamentale l'apporto energetico della radiazione ultravioletta:

- a) formazione di ossigeno atomico,  $h\nu + O_2 \rightarrow O + O$ ,  $\lambda \approx 200 \text{ nm}$ ;
- b) formazione di ozono,  $O + O_2 \rightarrow O_3$ ;
- c) scissione dell'ozono,  $h\nu + O_3 \rightarrow O + O_2$ ,  $\lambda \approx 300 \text{ nm}$ .

Tra processo di formazione e processo di scissione, che avviene anche con altri meccanismi ricordati nel paragrafo 13.12, c'è un equilibrio delicato.

### Laser e maser

Nel 1917 Einstein analizzò le possibilità di interazione tra un fotone e un atomo. Considerando due livelli energetici  $U_1$  e  $U_2$ , tali che  $U_2 - U_1 = h\nu$ , egli prese in esame tre possibili processi:

- transizione spontanea da  $U_2$  a  $U_1$  con emissione di un fotone  $h\nu$ ;
- assorbimento di un fotone  $h\nu$  e transizione da  $U_1$  a  $U_2$ ;
- emissione stimolata da  $U_2$  a  $U_1$ : in questo caso l'arrivo del fotone, che non viene assorbito, stimola il decadimento con emissione di un fotone identico a quello incidente.

Einstein dimostrò che le probabilità per l'assorbimento e per l'emissione stimolata sono eguali. In un sistema ordinario in cui gli atomi sono tutti nel livello  $U_1$  si osserva solo assorbimento; se però si riesce a popolare anche il livello  $U_2$  si deve osservare con eguale probabilità anche l'emissione stimolata.

Il funzionamento del *laser* si basa proprio su questa proprietà e sull'esistenza in certi atomi di *livelli energetici metastabili*. Con questo termine si indicano livelli eccitati i quali vivono per un tempo molto maggiore di  $10^{-9} \div 10^{-8} \text{ s}$ , che è la durata tipica di un livello eccitato normale; un livello metastabile può avere una vita di  $10^{-6} \text{ s}$ , in certi casi anche di  $10^{-3} \text{ s}$ .

Uno schema di principio (che non è l'unico) è il seguente. Si abbia un sistema atomico a tre livelli, indicati nella figura 18.16: 1 è il livello fondamentale, 2 il livello eccitato normale, 3 il livello eccitato metastabile. L'atomo, a seguito di un processo di assorbimento, passa da 1 a 2, poi rapidamente da 2 a 3 e in 3 resta un tempo lungo; l'arrivo di un fotone con energia  $h\nu = U_3 - U_1$  provoca l'emissione stimolata. Con un'opportuna fornitura di energia (*pompaggio ottico*) si spopola lo stato 1 e si popola lo stato 3 (passando per 2): si realizza così l'inversione di popolazione, nel senso che gli atomi nel livello metastabile sono in numero maggiore di quelli nel livello fondamentale. Se inoltre con un adeguato sistema di specchi si riesce ad intrappolare all'interno del materiale emettitore la maggior parte dei fotoni emessi nella transizione 3-1, questi provocano emissione stimolata e il fenomeno si amplifica, purché appunto il livello metastabile sia continuamente riempito. Rendendo semitransparente uno degli specchi si ha la fuoriuscita della luce laser.

Si osservi che mentre gli atti di emissione spontanea in una sorgente sono incoerenti, cioè casuali e scoordinati, nel *laser* le emissioni atomiche sono tutte in fase, poiché il fotone emesso per emissione stimolata è coerente con il fotone stimolante.

Esempio di laser a tre livelli è il laser a rubino ( $Al_2O_3$ ) in cui alcuni atomi di alluminio sono sostituiti da atomi di cromo, che presentano lo schema di livelli richiesto. Il pompaggio ottico è effettuato con luce gialla di lunghezza d'onda  $\lambda = 550 \text{ nm}$  ( $U_2 - U_1 = 2.3 \text{ eV}$ ), il livello metastabile vive circa  $10^{-3} \text{ s}$ . La luce laser è rossa con  $\lambda = 694.3 \text{ nm}$  ( $U_3 - U_1 = 1.8 \text{ eV}$ ).

Il processo di amplificazione attraverso emissione stimolata di radiazione si ha anche nel campo delle microonde (processo *maser*). Il sistema emettitore è una molecola, il livello 3 è un livello rotazionale e la differenza  $U_3 - U_1$  vale  $10^{-2} \text{ eV}$  o anche meno.

### 18.7 Onde materiali. Relazione di de Broglie

Nel 1924 de Broglie, di fronte all'evidenza degli aspetti corpuscolari della radiazione elettromagnetica, avanzò l'ipotesi che in natura vi fosse una simmetria

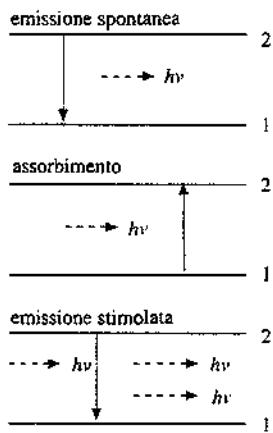


Figura 18.15

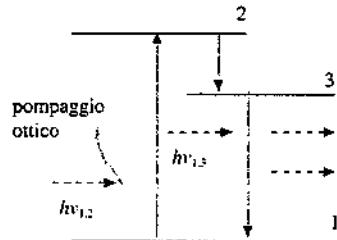


Figura 18.16

di comportamento tra radiazione e materia. Come ad un campo elettromagnetico che si propaga per onde di frequenza  $v$  e lunghezza d'onda  $\lambda$  viene associata una particella di massa nulla, il fotone, avente energia e quantità di moto  $U = hv$ ,  $p = hv/c = h/\lambda$ , così de Broglie propose di associare ad una particella di massa  $m$  e quantità di moto  $p$  un campo di materia che presentasse proprietà ondulatorie, con lunghezza d'onda e frequenza date dalle relazioni

Relazione di de Broglie

$$\lambda = \frac{h}{p} , \quad v = \frac{U}{h} ; \quad (18.19)$$

la prima in particolare è nota come *relazione di de Broglie*.

Calcoliamo subito il valore di  $\lambda$  per un elettrone non relativistico, accelerato da una d.d.p.  $V$ ; abbiamo

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = eV , \quad p = mv = \sqrt{2mE_k} = \sqrt{2meV}$$

e pertanto la lunghezza d'onda espressa in metri vale

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2meV}} = \frac{1.226 \cdot 10^{-9}}{\sqrt{V}} = \frac{1.226 \cdot 10^{-9}}{\sqrt{E_k(\text{eV})}} ;$$

in queste formule la d.d.p.  $V$  è espressa in volt e l'energia cinetica in elettronvolt. Si trova ad esempio

$V = 100 \text{ V}$	$E_k = 100 \text{ eV}$	$\lambda = 122.6 \text{ pm}$
$V = 10^3 \text{ V}$	$E_k = 1 \text{ keV}$	$\lambda = 38.8 \text{ pm}$
$V = 10^4 \text{ V}$	$E_k = 10 \text{ keV}$	$\lambda = 12.3 \text{ pm}$

Abbiamo visto nel paragrafo 16.10 che le distanze interatomiche in un cristallo sono dell'ordine di 100 pm; le onde elettroniche dovrebbero pertanto subire gli stessi fenomeni che sono stati descritti per i raggi X. E in effetti Davisson e Germer ritrovarono, facendo incidere un fascio di elettroni di 54 eV su un cristallo, uno spettrogramma analogo a quello di Laue (figura 16.56), mentre G. P. Thomson ritrovò, utilizzando una polvere cristallina, uno spettrogramma analogo a quello di Debye-Scherrer (figura 16.57). Misure di lunghezza d'onda, eseguite secondo il metodo di Bragg, diedero i valori previsti dalla relazione di de Broglie.

La (18.19) vale per qualsiasi tipo di particella e quindi anche per i neutroni. In particolare, se consideriamo neutroni termici, chiamati così perché la loro energia cinetica è dell'ordine di

$$E_k = \frac{3}{2}k_B T = 6.21 \cdot 10^{-21} \text{ J} = 3.88 \cdot 10^{-2} \text{ eV} \quad (\text{con } T = 300 \text{ K}) ,$$

troviamo la lunghezza d'onda

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE_k}} = \frac{2.86 \cdot 10^{-11}}{\sqrt{E_k(\text{eV})}} = 1.45 \cdot 10^{-10} \text{ m} = 145 \text{ pm} ,$$

di nuovo dell'ordine di grandezza delle costanti reticolari dei cristalli.

La diffrazione di neutroni termici ( $E_k \sim 10^{-2} \text{ eV}$ ,  $v \sim 10^3 \text{ m/s}$ ) è stata uno strumento molto importante per lo studio di strutture di corpi solidi. E le proprietà ondulatorie degli elettroni hanno permesso di superare il limite ottico nel potere

risolutivo lineare di un microscopio (paragrafo 16.4): data la dipendenza diretta da  $\lambda$  il miglioramento è stato di oltre tre ordini di grandezza.

### Esempio 18.9

Un fascio di neutroni con energia cinetica  $E_k = 50 \text{ MeV}$  incide su un foglio di grafite. Misurando il numero di neutroni diffusi da urti con i nuclei di carbonio in funzione dell'angolo  $\theta$  tra la direzione uscente e la direzione incidente, si trova una tipica figura di diffrazione con il primo minimo a  $\theta = 55.3^\circ$ . Calcolare il raggio del nucleo di carbonio.

#### Soluzione

I neutroni non sono relativistici ( $E_k \ll mc^2 = 939.6 \text{ MeV}$ ) e possiamo usare la formula appena scritta per la lunghezza d'onda dei neutroni:

$$\lambda = \frac{2.86 \cdot 10^{-11}}{\sqrt{50 \cdot 10^6}} = 4.045 \cdot 10^{-15} \text{ m} .$$

Consideriamo un nucleo di carbonio come un disco opaco e, applicando il principio di Babinet, utilizziamo la (16.6):

$$\sin \theta = 0.61 \frac{\lambda}{R} \Rightarrow R = 3.0 \cdot 10^{-15} \text{ m} .$$

Ancora una volta vediamo come, disponendo della lunghezza d'onda adatta, sia possibile avere informazioni strutturali con esperimenti di diffrazione.

Un aspetto interessante di (18.19) è la sua applicazione al modello di Bohr: se pensiamo all'elettrone, che è in uno stato stazionario lungo un'orbita circolare, come ad un'onda, la lunghezza della circonferenza deve essere eguale ad un multiplo intero della lunghezza d'onda, così come in una corda o in una canna d'organo la lunghezza d'onda deve essere in un certo rapporto con la dimensione del sistema se si vuole mantenere un'onda stazionaria. Quindi, affinché l'onda elettronica sia stazionaria, deve essere

$$n\lambda = 2\pi r \Rightarrow n \frac{\hbar}{p} = 2\pi r , \quad pr = L = n \frac{\hbar}{2\pi} :$$

il momento angolare risulta quantizzato. La natura ondulatoria dell'elettrone servirebbe in questo modo da giustificazione per una delle ipotesi fondamentali del modello di Bohr.

Un'altra considerazione riguarda la velocità di fase e la velocità di gruppo delle onde di materia. Limitandoci al caso non relativistico abbiamo

$$v = \frac{U}{h} = \frac{E_k}{h} = \frac{p^2}{2mh} , \quad \lambda v = \frac{\hbar}{p} \frac{p^2}{2mh} = \frac{p}{2m} = \frac{v}{2} :$$

la velocità di fase  $\lambda v$  è eguale a metà della velocità della particella. Questo risultato paradossale in realtà si applica ad un'onda sinusoidale, cioè indefinita, mentre possiamo ritenere più appropriata la descrizione di una particella tramite un pacchetto d'onde, che ha in sé il concetto di localizzazione. Si trova, utilizzando la (12.60) e la (18.19),

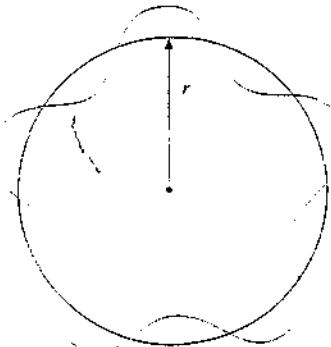


Figura 18.17

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{2\pi}{k} \Rightarrow dk = \frac{2\pi}{h} dp, v = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{U}{h} \Rightarrow d\omega = \frac{2\pi}{h} dU,$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{dU}{dp} = \frac{p}{m} = v :$$

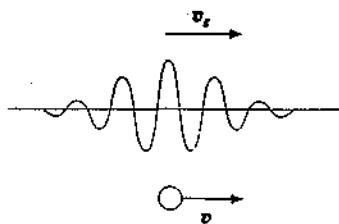


Figura 18.18

la velocità di gruppo, cioè la velocità del pacchetto d'onda, coincide con la velocità della particella. Il risultato resta vero anche se si utilizza la relazione relativistica  $U = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$  invece di  $U = p^2 / 2m$ .

### Principio di complementarietà

Nel comportamento delle particelle (elettroni, protoni, neutroni, ecc.) si ritrova il dualismo tra aspetto corpuscolare e aspetto ondulatorio che si è presentato per la radiazione. L'aspetto ondulatorio è stato messo in evidenza per la prima volta delimitando il fronte d'onda con ostacoli di dimensioni paragonabili alla lunghezza d'onda; dalle formule scritte per elettroni e neutroni si vede che questi effetti si ottengono con piccoli valori dell'energia, cioè con piccole velocità. Al crescere dell'energia le lunghezze d'onda diventano troppo corte perché si possano osservare fenomeni di diffrazione nel modo usuale.

Consideriamo ad esempio un elettrone con energia  $U$  molto maggiore dell'energia a riposo  $U_0 = mc^2 = 0.5$  MeV; la quantità di moto è  $p = m\gamma v = m\gamma\beta c$ , dove abbiamo scritto la velocità  $v$  come  $\beta c$  e  $\gamma = U/U_0$ . Ricordando la definizione di lunghezza d'onda Compton dell'elettrone data nel paragrafo 18.5, la lunghezza d'onda è

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{\lambda_c}{\gamma\beta} \approx \frac{\lambda_c}{\gamma} = \frac{2.43 \cdot 10^{-12}}{\gamma} \text{ m},$$

in quanto se  $U \gg U_0$ ,  $\beta \approx 1$ . Con  $U = 1$  GeV  $\gamma = 2 \cdot 10^3$  e  $\lambda = 1.22 \cdot 10^{-15}$  m, confrontabile con le dimensioni di un protone; con  $U = 100$  GeV, massima energia oggi raggiungibile (nel LEP del CERN, paragrafo 13.7),  $\gamma = 2 \cdot 10^5$  e  $\lambda = 1.2 \cdot 10^{-17}$  m.

D'altra parte a bassa energia, dove è facile verificare il comportamento ondulatorio, ci sono fenomeni come il moto in campi elettrici e magnetici nei quali la spiegazione avviene in termini corpuscolari.

In conclusione, sia nel caso della radiazione che nel caso di una particella materiale, certi fenomeni possono essere spiegati solo ricorrendo al concetto di onda ed altri solo al concetto di particella. È però essenziale notare che in un particolare fenomeno la spiegazione si ha utilizzando l'uno o l'altro dei due aspetti, ma non entrambi: se in un esperimento si mette in evidenza l'aspetto corpuscolare non si può mettere in evidenza nello stesso esperimento l'aspetto ondulatorio e viceversa.

Un esempio decisivo è il seguente: in un esperimento di Young riduciamo l'intensità della luce incidente ad un punto tale che, in termini corpuscolari, possiamo dire che l'apparato è attraversato da un fotone per volta. Ci si potrebbe aspettare che in queste condizioni il fotone, comportandosi come un punto materiale, passi per una fenditura o per l'altra e che sullo schermo, realizzato con una pellicola fotografica, si formino dopo un certo tempo due macchie. Invece sullo schermo si forma la figura di interferenza, segno che ogni singolo fotone si comporta come un'onda e che l'interferenza si ha tra le due parti del fronte d'onda delimitate dalle fenditure (lo stesso esperimento è stato condotto con elettroni che attraversano un cristallo: anche se passa un elettrone alla volta si osserva diffrazione, che è dovuta all'interferenza tra le varie parti del fronte d'onda del singolo elettrone). Se però in

un qualsiasi modo cerchiamo di rivelare da che parte è passato il fotone troviamo che la figura di interferenza scompare; *non appena si mette in evidenza un aspetto, l'altro non è più osservabile contemporaneamente.*

La situazione è stata riassunta da Bohr in un *principio detto di complementarietà: gli aspetti corpuscolare e ondulatorio sono complementari e le caratteristiche di radiazione e materia hanno bisogno di entrambi gli aspetti per essere spiegate in modo completo.*

### 18.8 Il principio di indeterminazione

La rappresentazione di una particella tramite un pacchetto d'onda porta con sé una dimensione spaziale  $\Delta x$  e una durata temporale  $\Delta t$  all'interno delle quali pensiamo localizzata la particella. Dalla discussione del paragrafo 12.10 sappiamo che i valori di  $\Delta x$  e  $\Delta t$  sono legati alle larghezze delle bande di lunghezza d'onda e di pulsazione significative dalle relazioni (12.57)

$$\Delta x \Delta k \geq 1 , \quad \Delta t \Delta \omega \geq 1 .$$

Con riferimento alla prima ricordiamo che un pacchetto spazialmente molto stretto contiene numerosissime lunghezze d'onda e che se invece le lunghezze d'onda sono poche il pacchetto è largo; al limite, con una sola lunghezza d'onda il pacchetto è una pura sinusode che si estende da  $-\infty$  a  $+\infty$ .

Questi risultati classici, applicati alle onde di materia per le quali valgono le relazioni di de Broglie (18.19), acquistano un'importanza fondamentale. Effettuando le sostituzioni

$$\Delta k = \Delta \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right) = \Delta \left( \frac{2\pi p}{h} \right) = \frac{2\pi}{h} \Delta p ,$$

$$\Delta \omega = \Delta (2\pi v) = \Delta \left( \frac{2\pi U}{h} \right) = \frac{2\pi}{h} \Delta U ,$$

le (12.57) diventano

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{h}{2\pi} = \hbar , \quad \Delta t \Delta U \geq \frac{h}{2\pi} = \hbar . \quad (18.20)$$

Relazioni di indeterminazione

Dall'aspetto ondulatorio della materia deriva una *indeterminazione* per le grandezze tipiche dell'aspetto corpuscolare come posizione spaziale e temporale, quantità di moto, energia. Le (18.20) hanno infatti questo significato: *l'incertezza  $\Delta x$  con cui si localizza spazialmente una particella e l'incertezza  $\Delta p$  con cui se ne misura simultaneamente la quantità di moto (lungo l'asse  $x$ ) non sono indipendenti, in quanto il loro prodotto non può scendere al di sotto di  $\hbar$ .* Se la misura spaziale è molto precisa, diventa molto imprecisa la misura della quantità di moto e viceversa; lo stesso vale per le incertezze con cui si misurano simultaneamente tempo ed energia.

Le relazioni (18.20) sono l'applicazione alle coppie di variabili  $(x, p_x)$  e  $(t, U)$  del *principio di indeterminazione di Heisenberg*, la cui prima formulazione risale al 1927 e che è uno dei capisaldi della fisica quantistica: relazioni analoghe valgono per le coppie  $(y, p_y)$ ,  $(z, p_z)$  e, più in generale, per opportune coppie di variabili determinate in base al formalismo quantistico.

Il principio di indeterminazione comporta una revisione sostanziale di alcuni concetti che, validi nel mondo macroscopico, non possono essere trasportati nei fenomeni atomici. Per il punto materiale della meccanica classica ammettiamo di poter *misurare simultaneamente* posizione e quantità di moto *con la massima precisione possibile* e, nota la legge del moto, di poter dedurre esattamente dallo stato iniziale l'evoluzione successiva. Le verifiche sperimentali sono innumerevoli e non abbiamo dubbi che tale impostazione, detta *deterministica*, sia perfettamente adeguata. L'operazione di misura o non perturba o perturba in modo prevedibile il sistema in esame.

A *livello atomico* tutto ciò non è più sostenibile: il procedimento stesso di misura può

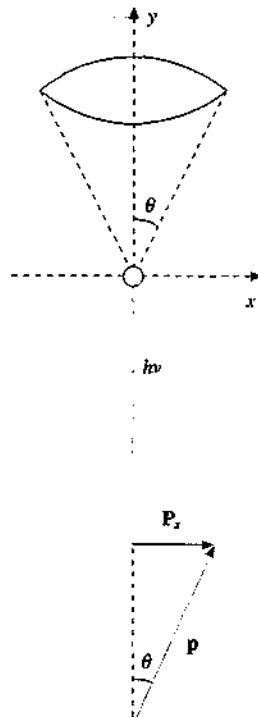


Figura 18.19

provocare una *perturbazione* tale che l'effettuazione di una determinazione precisa di una grandezza ha come risultato l'impossibilità di conoscere simultaneamente con precisione un'altra grandezza. Non si tratta di una limitazione strumentale, ma di un effetto intrinseco alla misura, che deriva dalla natura ondulatoria della materia. Una conseguenza è che lo stato iniziale non può essere completamente determinato: ad esempio si conoscono  $x$  e  $t$ , ma allora sono indeterminate, entro i limiti (18.20),  $p$  e  $U$  o viceversa; l'indeterminazione iniziale si riflette sugli stati successivi e bisogna abbandonare il determinismo adottando invece leggi probabilistiche, cui accenneremo alla fine del paragrafo.

Le due situazioni che abbiamo illustrato non sono in reale contrasto, dato il valore di  $\hbar = 1.0546 \cdot 10^{-34}$  Js. Si ammette la validità generale del principio di indeterminazione; esso però comporta effettive limitazioni nella determinazione delle grandezze interessate solo per particelle atomiche e subatomiche e non per oggetti macroscopici, come risulterà più avanti da una serie di esempi numerici. Esaminiamo prima alcune situazioni idealizzate, ma non impossibili, che chiariscono il significato del principio di indeterminazione.

Un esempio, dovuto a Bohr, riguarda la perturbazione comunicata ad un elettrone di cui si vuole conoscere la posizione. L'elettrone viene illuminato ed è osservato con un microscopio; la situazione limite, al di sotto della quale non c'è la misura stessa, è quella in cui si utilizza un fotone che urta l'elettrone e viene da questo diffuso, come nell'effetto Compton. Rispetto alla direzione incidente (asse  $y$  della figura 18.19) il fotone diffuso può formare al massimo l'angolo  $\theta$ , se deve essere rivelato dal microscopio; detta  $p$  la sua quantità di moto, la componente  $p_x$  lungo l'asse  $x$  può variare tra  $-p \sin \theta$  e  $p \sin \theta$ , per cui assumiamo

$$\Delta p_x = p \sin \theta = \frac{\hbar}{\lambda} \sin \theta .$$

Prima dell'urto la quantità di moto totale lungo l'asse  $x$  era nulla e tale deve essere l'urto; quindi dopo l'urto l'elettrone possiede una quantità di moto con componente  $-p_x$  e con relativa indeterminazione  $\Delta p_x$ . Sappiamo dal paragrafo 16.4 che, a causa della diffrazione, il microscopio dà un'immagine estesa di un oggetto puntiforme e che la minima distanza tra due punti risolvibili è espressa dal potere risolutivo lineare, che nel nostro caso vale

$$\Delta x = \frac{\lambda}{\sin \theta} .$$

Interpretiamo  $\Delta x$  come l'incertezza sul luogo di origine dei fotoni e pertanto risulta

$$\Delta x \Delta p_x = \hbar ,$$

in accordo col limite (18.20) e indipendentemente da  $\theta$  e da  $\lambda$ ; variando questi parametri si può migliorare uno dei fattori, ma si peggiora allo stesso modo l'altro.

Osserviamo che nella misura bisogna utilizzare l'aspetto corpuscolare della radiazione; non avrebbe senso parlare di intensità incidente piccola a piacere, per non perturbare l'elettrone, perché il limite inferiore è  $hc / \lambda$ . Nella determinazione dell'immagine utilizziamo invece l'aspetto ondulatorio, in base al quale il singolo fotone si comporta nel microscopio come un'onda. Ripetendo l'esperimento più volte l'intensità si distribuirebbe sul piano focale secondo la figura di diffrazione; in sé la misura del punto di arrivo del singolo fotone non dà informazione.

Un secondo esempio considera la diffrazione degli elettroni: si abbia un fascio parallelo di elettroni (figura 18.20) e si interponga una fenditura di larghezza  $a$  confrontabile con la lunghezza d'onda degli elettroni, calcolata dalla loro quantità di moto con (18.19). A valle della fenditura, se si misura con un opportuno rivelatore il numero di elettroni che colpiscono i diversi punti di un piano ortogonale all'asse della fenditura, si osserva una figura di diffrazione il cui primo minimo si forma all'angolo  $\theta$  tale che  $a \sin \theta = \lambda$ . La maggior parte degli elettroni colpisce il piano nella regione tra i due primi minimi e, come nell'esempio precedente, possiamo dire che un elettrone passando attraverso la fenditura acquista una componente  $p_y$  della quantità di moto, la cui incertezza è

$$\Delta p_y = p_y = p \sin \theta = p \frac{\lambda}{a} = \frac{\hbar}{a} .$$

La larghezza  $a$  della fenditura corrisponde all'incertezza  $\Delta y$  di localizzazione lungo l'asse  $y$  e anche in questo caso

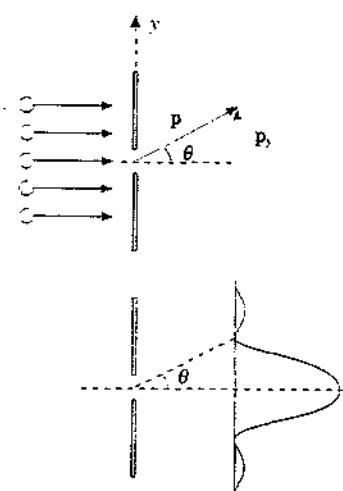


Figura 18.20

$$\Delta y \Delta p_y = h .$$

Si tratta evidentemente di esperimenti ideali, sebbene siano significativi nell'indicare come vanno trattati questi problemi; in particolare essi mettono in evidenza il *comportamento probabilistico* del sistema dopo la misura su cui, come già detto, torneremo più avanti.

Con il principio di indeterminazione si completa anche l'affermazione fatta alla fine del paragrafo 18.7 a proposito dell'esperienza di Young in cui nell'apparato passa un solo fotone per volta. Si può infatti dimostrare che il tentativo di rivelare attraverso quale fenditura passi il fotone, senza perturbarlo in modo tale che la figura di interferenza scompaia, comporta la condizione  $\Delta x \Delta p_x \ll \hbar$ , incompatibile con (18.20). C'è quindi *uno stretto legame tra principio di complementarietà e principio di indeterminazione*.

Dopo avere esaminato le implicazioni delle operazioni di misura a livello microscopico, vediamo alcune conseguenze del principio di indeterminazione.

Nel paragrafo 18.6 abbiamo parlato dei livelli energetici eccitati, distinguendo tra quelli a vita corta ( $\sim 10^{-8}$  s) e quelli metastabili, con vita molto più lunga, fino a  $\sim 10^{-3}$  s. La durata dello stato di eccitazione, considerata come un'incertezza sulla localizzazione temporale, comporta un'indeterminazione dell'energia dello stato stesso secondo (18.20):

$$\Delta t = 10^{-8} \text{ s} , \quad \Delta U = \frac{\hbar}{\Delta t} = 10^{-26} \text{ J} = 6.6 \cdot 10^{-8} \text{ eV} ,$$

$$\Delta t = 10^{-3} \text{ s} , \quad \Delta U = 10^{-31} \text{ J} = 6.6 \cdot 10^{-13} \text{ eV} .$$

Questa indeterminazione a sua volta implica un'indeterminazione nella frequenza della riga emessa nel processo di diseccitazione verso lo stato fondamentale:

$$\Delta t = 10^{-8} \text{ s} , \quad \Delta v = \frac{\Delta U}{\hbar} = \frac{1}{2\pi \Delta t} = 1.6 \cdot 10^7 \text{ Hz} ,$$

$$\Delta t = 10^{-3} \text{ s} , \quad \Delta v = 1.6 \cdot 10^2 \text{ Hz} .$$

A tale indeterminazione  $\Delta v$  non contribuisce lo stato fondamentale che, essendo stabile ( $\Delta t = \infty$ ), è ben definito ( $\Delta U = 0$ ).

Ci si riferisce a questo fenomeno con i nomi di larghezza di un livello e *larghezza naturale di una riga spettrale*; la larghezza misurata risulta più grande per l'intervento di altri fenomeni, tra i quali l'effetto Doppler, dovuto al fatto che generalmente l'emissione avviene da parte di atomi in movimento continuo e disordinato. Ad ogni modo si vede il grande vantaggio dell'emissione laser, che sfrutta livelli metastabili, anche per quanto riguarda la monocromaticità di una riga.

Con  $\lambda = 600 \text{ nm}$  ( $v = 5 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$ ) si avrebbe rispettivamente

$$\Delta \lambda / \lambda = 3.2 \cdot 10^{-8} , \quad \Delta \lambda / \lambda = 3.2 \cdot 10^{-13} ,$$

come larghezze naturali relative (si veda la nota alla fine del paragrafo 16.7).

Un altro risultato interessante è legato alle dimensioni dei sistemi atomici e nucleari. Consideriamo ad esempio un nucleo di deuterio, composto da un protone e da un neutrone legati tra loro dalla forza nucleare. Essi sono localizzati entro una dimensione dell'ordine del raggio nucleare ( $\Delta x = 10^{-15} \text{ m}$ ) e da ciò deriva un'indeterminazione nella quantità di moto pari almeno a

$$\Delta p = \frac{\hbar}{\Delta x} = 10^{-19} \text{ Ns} \approx 190 \text{ MeV/c} ,$$

dove abbiamo utilizzato per la quantità di moto l'unità

$$1 \frac{\text{MeV}}{\text{c}} = \frac{10^6 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}}{3 \cdot 10^8} = 0.53 \cdot 10^{-21} \text{ Ns} .$$

Con esperimenti di diffusione di particelle accelerate, ad esempio protoni, su nuclei di deuterio si trova che la quantità di moto del protone o del neutrone che funge da bersaglio in que-

sto urto ha uno spettro di valori che è in accordo col  $\Delta p$  che abbiamo calcolato. Quando cioè con l'urto localizziamo la particella bersaglio, troviamo dalle leggi di conservazione che la sua quantità di moto ha una certa indeterminazione.

### **La costante di Planck**

In tutti i fenomeni studiati in questo capitolo, che trovano spiegazione soltanto introducendo le condizioni di quantizzazione e il dualismo di comportamento di materia e radiazione, compare la *costante di Planck*  $h$ .

Sostanzialmente  $h$  da una parte costituisce il legame tra l'aspetto corpuscolare e l'aspetto ondulatorio attraverso le relazioni di de Broglie e, con il principio di indeterminazione, fissa l'effetto dell'aspetto ondulatorio sulla precisione con cui sono conoscibili le grandezze relative all'aspetto corpuscolare. Dall'altra  $h$  determina i valori di quantizzazione del momento angolare e correla i salti quantici con le frequenze emesse (paragrafi 9.10 e 18.6).

Il valore di  $h$ , che ricordiamo ancora una volta,

$$h = 6.626 \cdot 10^{-34} \text{ Js} = 4.136 \cdot 10^{-15} \text{ eV s} ,$$

fa sì che gli effetti quantistici non siano apprezzabili nel mondo macroscopico e anche, in determinate condizioni, per particelle microscopiche. A questo argomento sono dedicati i prossimi esempi.

### **Esempio 18.10**

Un oscillatore armonico, di massa  $m = 1 \text{ kg}$  e costante elastica  $k = 100 \text{ N/m}$ , oscilla con ampiezza  $A = 10^{-2} \text{ m}$ . Calcolare il numero quantico  $n$  e la variazione relativa di energia per una variazione  $\Delta n = 1$ .

#### **Soluzione**

La frequenza è  $v = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = 1.59 \text{ Hz}$  per cui  $hv = 1.054 \cdot 10^{-33} \text{ J}$ , l'energia totale  $U = \frac{1}{2}kA^2 = 5 \cdot 10^{-3} \text{ J}$ .

Ponendo  $U = nhv$  si ottiene  $n = U/hv = 4.75 \cdot 10^{30}$ . Un salto quantico con  $\Delta n = 1$  comporta  $\Delta U/U = hv/nhv = 1/n = 2.11 \cdot 10^{-31}$ , variazione assolutamente non misurabile. Per numeri quantici così grandi la quantizzazione dell'energia non è osservabile e il comportamento del sistema è puramente classico. Solo quando  $hv$  si avvicina al valore dell'energia del sistema, gli effetti quantistici sono evidenti; dato il valore di  $h$  finora ciò è stato verificato solo in sistemi microscopici. La sensibilità massima che attualmente si raggiunge con oscillatori macroscopici a frequenze di 1 kHz ( $hv = 4.14 \cdot 10^{-12} \text{ eV}$ ) arriva a  $\Delta n = 10^3$  ( $\Delta n hv = 4.14 \cdot 10^{-9} \text{ eV}$ ).

### **Esempio 18.11**

Una goccia d'olio, come quelle utilizzate nell'esperimento di Millikan (paragrafo 1.8), ha massa  $m = 5 \cdot 10^{-6} \text{ kg}$  e raggio  $r = 10^{-6} \text{ m}$ . Supponendo che essa scenda con velocità  $v = 10^{-4} \text{ m/s}$  calcolare la sua lunghezza d'onda di de Broglie e l'indeterminazione sulla sua velocità.

#### **Soluzione**

La quantità di moto è  $p = m v = 5 \cdot 10^{-10} \text{ Ns}$  e quindi

$$\lambda = \frac{h}{p} = 1.33 \cdot 10^{-24} \text{ m} ;$$

con un valore così basso è impossibile mettere in evidenza l'aspetto ondulatorio, ad

esempio con esperimenti che richiedono fenditure di larghezza paragonabile a  $\lambda$ . A maggior ragione l'impossibilità è verificata per oggetti come biglie o proiettili. L'indeterminazione nella posizione della gocciolina si può assumere eguale al raggio ( $\Delta x = 10^{-6}$  m) per cui l'indeterminazione sulla quantità di moto è al minimo

$$\Delta p = \frac{\hbar}{\Delta x} = 10^{-28} \text{ Ns} \Rightarrow \Delta v = \frac{\Delta p}{m} = 0.2 \cdot 10^{-22} \text{ m/s},$$

non misurabile rispetto alla velocità di caduta. Viceversa, se pensiamo di poter misurare  $v$  con una precisione  $\Delta v = 10^{-6}$  m/s, troviamo  $\Delta x = \hbar / m \Delta v = 0.2 \cdot 10^{-22}$  m, non misurabile rispetto a  $r$ .

Concludiamo che non c'è nessun limite reale posto dal principio di indeterminazione nel caso di corpi macroscopici: l'indeterminazione che si calcola è sempre estremamente più piccola di quanto si possa ragionevolmente mettere in evidenza con gli strumenti a nostra disposizione.

### Esempio 18.12

Un elettrone non relativistico ha energia cinetica  $E_k \approx 1 \text{ keV}$  e la sua velocità è nota all'1%. Calcolare il valore limite per  $\Delta x$ . Se invece la sua posizione è conosciuta entro  $\Delta x = 10^{-6}$  m, calcolare l'incertezza relativa della velocità.

#### Soluzione

Nel primo caso abbiamo

$$E_k = \frac{1}{2} mv^2, v = 1.88 \cdot 10^7 \text{ m/s}, \Delta v = 1.88 \cdot 10^5 \text{ m/s},$$

$$\Delta p = m \Delta v = 1.71 \cdot 10^{-25} \text{ Ns}, \Delta x = \frac{\hbar}{\Delta p} = 6.2 \cdot 10^{-10} \text{ m}.$$

Questo limite di precisione è per ora sperimentalmente irraggiungibile, essendo possibile una misura assoluta con  $\Delta x$  dell'ordine di  $10^{-6}$  m. Per tale valore

$$\Delta p = \frac{\hbar}{\Delta x} = 10^{-28} \text{ Ns}, \Delta v = \frac{\Delta p}{m} \approx 116 \text{ m/s}, \frac{\Delta v}{v} \approx 6 \cdot 10^{-6},$$

e anche questa precisione relativa non è ottenibile nella misura di una velocità che vale all'incirca  $10^7$  m/s. Gli elettroni dell'esempio 2.4 (separatore elettrostatico) si trovano nelle condizioni descritte.

I risultati dell'ultimo esempio mostrano che anche con gli elettroni, come del resto con le altre particelle atomiche e subatomiche, non è semplice verificare direttamente i limiti imposti dal principio di indeterminazione. Nel caso della posizione gli strumenti che permettono di misurare la traiettoria di una particella non sono ancora in grado di arrivare al limite quantistico, che diventa sempre più lontano al crescere dell'energia. È più facile la verifica indiretta attraverso l'aspetto ondulatorio (ad esempio con esperimenti di diffrazione), avendoci fornito la natura, tramite i cristalli, un mezzo di localizzazione adatto, quando le energie in gioco sono basse.

Invece gli elettroni legati negli atomi, e quindi confinati in dimensioni lineari dell'ordine di  $10^{-10}$  m, risentono fortemente dell'indeterminazione nella quantità di moto (allo scopo si ragiona come nell'esempio del nucleo di deuterio, discusso in precedenza) e il loro comportamento non può essere descritto in modo deterministico, come adesso illustriamo brevemente.

*Funzione d'onda. Equazione di Schrödinger*

La nozione di *comportamento probabilistico* venne introdotta per la prima volta da Einstein a proposito dei fotoni. Riprendiamo in considerazione un esperimento di interferenza o di diffrazione realizzato con intensità molto bassa, al limite con un solo fotone che attraversa l'apparato. Il fotone viene rivelato, con un processo corpuscolare, in un punto dello schermo, la cui posizione non possiamo prevedere a priori. Se però attendiamo abbastanza tempo in modo da accumulare un grande numero di singoli eventi si trova che i punti di arrivo sullo schermo sono distribuiti in accordo con la figura di interferenza o di diffrazione che si otterrebbe immediatamente se l'intensità incidente fosse alta: sullo schermo l'intensità è grande dove sono arrivati tanti fotoni ed è piccola dove ne sono arrivati pochi; nelle zone di minimo non arriva nessun fotone. La relazione  $I = Nhv$  che abbiamo usato più volte va vista in questo senso:  $N$ , numero medio di fotoni che attraversano nell'unità di tempo l'unità di superficie, può essere pensato proporzionale alla probabilità di trovare un fotone in una determinata posizione ad un dato istante e questa interpretazione è trasferita all'intensità, purché il numero di fotoni sia sufficientemente grande da rendere significativa la media. Data l'originaria definizione di intensità, concludiamo che il *valor medio del quadrato del campo elettrico*, cioè della funzione che definisce il comportamento ondulatorio classico, è legato alla probabilità di trovare un fotone nell'intorno di un certo istante.

Questa visuale è di carattere generale, ovvero non è limitata all'esempio trattato; in ogni caso dobbiamo attenderci che con grandi intensità non ci siano scostamenti significativi dalla media (la descrizione classica è soddisfacente), mentre se le intensità sono basse si possa manifestare il comportamento quantistico discontinuo.

L'interpretazione probabilistica è stata estesa alle onde di materia, introducendo per una particella una *funzione d'onda*  $\psi(x, y, z, t)$ , tale che il *valor medio del quadrato dà la densità di probabilità di trovare la particella all'istante  $t$  in un intorno del punto di coordinate  $x, y, z$* . La determinazione di  $\psi$  per una particella avente energia potenziale  $E_p$  avviene tramite la soluzione di un'equazione differenziale alla quale  $\psi$  obbedisce, così come il campo elettrico obbedisce all'equazione delle onde. Questa equazione delle onde di materia è l'*equazione di Schrödinger*, valida per particelle non relativistiche. Nel caso unidimensionale l'equazione per la funzione  $\psi(x, t)$  è

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + E_p(x, t) \psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} ,$$

in cui  $i$  è l'unità immaginaria e  $m$  la massa della particella.

In generale un problema di fisica atomica si impone scrivendo l'energia potenziale appropriata per il sistema e risolvendo la corrispondente equazione di Schrödinger. Dal valore di  $\psi$  si calcolano le probabilità che il sistema si trovi nei vari stati accessibili dallo stato iniziale. L'equazione di Schrödinger assume perciò il ruolo delle equazioni del moto della meccanica classica, con la grande differenza che la descrizione del moto non è più deterministica. Tutto l'argomento esula però dai limiti di questo libro.

**Nota. Alcune formule utili**

Nel corso del capitolo ci siamo spesso serviti di formule miste dal punto di vista delle unità di misura, nel senso che non tutte le grandezze sono espresse nel sistema internazionale: ad esempio una lunghezza è espressa in metri e un'energia in elettronvolt invece che in joule. Inoltre si usa raggruppare le varie costanti in un unico numero e bisogna quindi fare attenzione ad applicare correttamente le formule al sistema cui si riferiscono. Dato che si tratta di formule molto utili nei problemi, le richiamiamo in questa nota che va impiegata come riferimento.

Legame tra lunghezza d'onda ed energia di un fotone  
La relazione è  $U = hv = hc / \lambda$ ; sappiamo che

$$1 \text{ eV} = e \text{ J} , \quad 1 \text{ J} = \frac{1}{e} \text{ eV} ,$$

(dove  $e$  è la carica elementare) per cui, esprimendo l'energia in elettronvolt,

$$U \text{ (eV)} = \frac{hc}{e\lambda} = \frac{1.24 \cdot 10^{-6}}{\lambda \text{ (m)}} = \frac{1.24}{\lambda \text{ (\mu m)}} = \frac{1.24 \cdot 10^3}{\lambda \text{ (nm)}}$$

Queste formule tornano utili ovviamente anche per calcolare la lunghezza d'onda emessa in un salto quantico (o assorbita).

Relazione di de Broglie

Ricordiamo in questo caso il rapporto tra le unità della quantità di moto:

$$1 \frac{\text{eV}}{\text{c}} = 0.53 \cdot 10^{-27} \text{ Ns} , \quad 1 \text{ Ns} = 1.87 \cdot 10^{27} \frac{\text{eV}}{\text{c}}$$

Quindi:

$$p \text{ (Ns)} = \frac{6.626 \cdot 10^{-34}}{\lambda \text{ (m)}} , \quad p \left( \frac{\text{eV}}{\text{c}} \right) = \frac{1.24 \cdot 10^{-6}}{\lambda \text{ (m)}}$$

Lunghezza d'onda di una particella di massa  $m$ , non relativistica

Supponiamo di conoscere l'energia cinetica  $E_k$ ; da  $E_k = p^2 / 2m$  ricaviamo

$$\lambda \text{ (m)} = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE_k}} = \frac{h}{\sqrt{2e}} \frac{1}{\sqrt{m}} \frac{1}{\sqrt{E_k \text{ (eV)}}} = \frac{1}{\sqrt{m \text{ (kg)}}} \frac{1.17 \cdot 10^{-24}}{\sqrt{E_k \text{ (eV)}}}$$

Inserendo i valori delle masse si ritrovano le formule già calcolate:

$$\lambda \text{ (m)} = \frac{1.226 \cdot 10^{-9}}{\sqrt{E_k \text{ (eV)}}} \text{ per elettroni} ,$$

$$\lambda \text{ (m)} = \frac{2.86 \cdot 10^{-11}}{\sqrt{E_k \text{ (eV)}}} \text{ per neutroni.}$$

Lunghezza d'onda di una particella di massa  $m$ , relativistica

Scriviamo la relazione generale tra energia totale, quantità di moto ed energia cinetica:

$$U = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} = E_k + mc^2$$

Sviluppando ricaviamo

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{hc}{\sqrt{E_k^2 + 2E_k mc^2}}$$

Se  $E_k \ll mc^2$  si ottiene la precedente formula non relativistica; se invece  $E_k \gg mc^2$  (limite ultrarelativistico)

$$\lambda \text{ (m)} = \frac{hc}{E_k} = \frac{1.24 \cdot 10^{-12}}{E_k \text{ (MeV)}} = \frac{1.24 \cdot 10^{-15}}{E_k \text{ (GeV)}} ,$$

indipendentemente dalla massa della particella. In tale situazione  $U \approx E_k = pc$ .



# Proprietà degli elettroni nei solidi

## 19.1 Introduzione

In questo capitolo conclusivo descriveremo le proprietà degli elettroni nei solidi per arrivare a spiegare i fenomeni connessi con la conduzione elettrica. Allo scopo tratteremo prima la struttura elettronica degli atomi e i diversi tipi di legami tra gli atomi; passeremo poi alla teoria di Fermi per il gas di elettroni liberi e alle sue modifiche, necessarie per tener conto che gli elettroni si trovano all'interno di un reticolo cristallino. Potremo così spiegare la differenza tra isolanti, conduttori e semiconduttori. Infine ci occuperemo di alcuni effetti caratteristici dei conduttori metallici e accenneremo alla supercondutività.

Il primo grande successo della meccanica quantistica è stato proprio l'inquadramento teorico coerente della fenomenologia atomica e molecolare, in cui hanno trovato soluzione i molteplici problemi connessi con gli argomenti elencati. Dovremo quindi di volta in volta impostare l'appropriata equazione di Schrödinger (paragrafo 18.8) e studiarne le soluzioni. Dato che questo tipo di sviluppo esula dagli scopi del libro, ci limiteremo nella maggior parte dei casi a dare i risultati discutendone il significato fisico e le conseguenze.

## 19.2 Struttura elettronica degli atomi

L'interpretazione dello spettro a righe dell'idrogeno con il modello di Bohr (paragrafo 18.6) fornisce la prova che nella meccanica atomica erano necessarie regole di quantizzazione. La soluzione completa del problema e la giustificazione delle regole di quantizzazione si hanno applicando al moto dell'elettrone nel campo coulombiano del protone l'equazione di Schrödinger. Si trovano soluzioni finite che corrispondono a stati legati solo se l'energia e il momento angolare dell'elettrone sono quantizzati. Precisamente la funzione d'onda dell'elettrone risulta dipendente da tre numeri interi  $n$ ,  $\ell$ ,  $m_\ell$  che hanno i seguenti significati.

Il numero quantico principale  $n$  è legato alla quantizzazione dell'energia secondo l'espressione (18.7) già trovata da Bohr,

$$U_n = -\frac{m_e c^4}{2(4\pi \epsilon_0)^2 \hbar^2 n^2}$$

in cui  $m_e$  è la massa ridotta del sistema elettrone-protone; i valori possibili di  $n$  sono 1, 2, 3, ... .

Il numero quantico azimutale  $\ell$  è legato alla quantizzazione del momento angolare orbitale dell'elettrone, che vale

$$L = \sqrt{\ell(\ell+1)} \hbar$$

dato  $n$ .  $\ell$  può assumere gli  $n$  valori 0, 1, 2, ...,  $n-1$ .

Il numero quantico magnetico  $m_\ell$  è legato alla quantizzazione della componente  $L_z$  del momento angolare orbitale lungo una qualsiasi direzione  $z$ :  $L_z = m_\ell \hbar$  e, data  $\ell$ ,  $m_\ell$  può assumere i  $2\ell+1$  valori  $-\ell, -\ell+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, \ell-1, \ell$ .

Lo stato fondamentale dell'atomo di idrogeno è lo stato  $n=1$ ,  $\ell=0$ ,  $m_\ell=0$ ; in esso l'energia è minima (-13.6 eV) e il momento angolare orbitale è nullo. L'energia di qualsiasi altro stato eccitato accessibile dipende solo da  $n$  secondo la formula data e non dagli altri numeri quantici.

La funzione d'onda  $\psi$  soluzione dell'equazione di Schrödinger in corrispondenza della terza di numeri quantici ( $n, \ell, m_\ell$ ) permette di calcolare, attraverso il modulo del suo quadrato, la probabilità di trovare in una data posizione l'elettrone, che è nello stato individuato da  $n, \ell, m_\ell$ . La probabilità infinitesima di trovarlo in un volume infinitesimo  $d\tau$  si può scrivere  $dp = f d\tau$  dove  $f$ , detta densità di probabilità, è una funzione delle coordinate calcolabile a partire da  $\psi$ . Nello stato fondamentale dell'atomo di idrogeno si ha che la densità di probabilità è funzione solo della distanza  $r$  dal nucleo (simmetria sferica) ed è massima per  $r = r_1 = 0.529 \cdot 10^{-10}$  m, valore eguale al raggio di Bohr, che dunque assume questo nuovo significato nella visione ondulatoria.

Il metodo di Schrödinger, molto soddisfacente in tutti gli altri aspetti, non prevede lo spin dell'elettrone. Formalmente ciò è dovuto al fatto che l'equazione di Schrödinger non è relativistica, mentre lo spin è una proprietà puramente relativistica, come dimostrò Dirac nel 1929. In effetti impostando il problema in modo relativisticamente corretto l'equazione risolutiva contiene anche il numero quantico di spin. Da un punto di vista pratico per noi è sufficiente considerare, nell'identificazione di uno stato dell'elettrone, l'aggiunta ai tre numeri quantici già descritti del *numero quantico di spin*  $m_s$ , il quale può assumere solo i valori  $1/2, -1/2$ : ciò significa che la componente del momento angolare intrinseco dell'elettrone misurata lungo una qualsiasi direzione presenta soltanto i valori  $\pm \hbar/2$ . Nello stato fondamentale l'unico elettrone dell'atomo di idrogeno può dunque avere i numeri quantici  $1, 0, 0, 1/2$  o  $1, 0, 0, -1/2$ .

L'esistenza dello spin ha anche conseguenze sull'energia degli stati, che però in prima approssimazione sono trascurabili per le considerazioni che ci interessano e che quindi non menzioneremo più nel seguito.

L'approccio di Schrödinger ha il grande vantaggio di poter essere applicato, con le opportune modifiche, a tutti gli atomi e non soltanto all'idrogeno. In generale si trova che lo stato di un elettrone in un atomo contenente molti elettroni è sempre individuato dai quattro numeri quantici  $n, \ell, m_\ell, m_s$ , che hanno lo stesso significato appena illustrato. Però adesso interviene un fatto fondamentale e cioè il *principio di esclusione di Pauli*, già citato nel paragrafo 9.10, secondo cui *in un atomo due elettroni non possono stare nello stesso stato ovvero non possono avere tutti i numeri quantici uguali*. Di conseguenza gli  $Z$  elettroni di un atomo avente nel nucleo  $Z$  protoni non possono coesistere tutti in un unico stato, ma devono disporsi in  $Z$  stati diversi con una precisa distribuzione di numeri quantici che descriveremo tra poco e che giustifica le proprietà periodiche della tavola degli elementi, la cui prima stesura, dovuta a Mendeleev, risale al 1869.

Le dimensioni di un atomo con molti elettroni non sono molto diverse da quelle dell'atomo di idrogeno; si trova una variazione di circa un fattore 3 passando da  $Z = 1$  a  $Z = 90$ . Ciò vuol dire che all'aumentare di  $Z$  gli elettroni interni sono più vicini al nucleo di quanto avviene nell'idrogeno e quindi le loro energie di legame sono, in valore assoluto, più elevate; la conferma si ha dai valori grandi, rispetto a 13.6 eV, delle energie dei raggi X caratteristici (paragrafo 18.6).

L'energia di un elettrone nell'atomo indisturbato risulta dipendere, se  $Z \neq 1$ , sia da  $n$  che da  $\ell$ ; essa è crescente con  $n$  e, fissato  $n$ , aumenta con  $\ell$  (ricordiamo che energia crescente significa energia meno negativa).

Prima di iniziare la descrizione di come siano disposti gli elettroni e le loro energie in un atomo con  $Z \neq 1$ , riassumiamo quanto detto per i numeri quantici e fissiamo la terminologia e i simboli. I valori ammessi per  $n, \ell, m_\ell, m_s$  sono:

$$\begin{aligned} n &= 1, 2, 3, 4, \dots \\ \ell &= 0, 1, 2, \dots, n-1 \\ m_\ell &= -\ell, -\ell+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, \ell-1, \ell \\ m_s &= 1/2, -1/2. \end{aligned}$$

Valori dei numeri quantici

Gli elettroni aventi lo stesso numero quantico principale  $n$  si dicono appartenenti allo stesso guscio e per tali gusci si utilizzano questi simboli:

$n$	1	2	3	4	5	6	7	...
simbolo	$K$	$L$	$M$	$N$	$O$	$P$	$Q$	

Alternativamente a guscio e sottoguscio (vedi oltre) sono usati anche i termini strato e sottostrato.

Dentro un guscio ( $n$  fissato) si distinguono  $n$  sottogusci, uno per ciascun valore di  $\ell$ , in ogni sottoguscio ( $n$  e  $\ell$  fissati) ci sono  $2\ell + 1$  valori possibili di  $m_\ell$  e, per ciascuno di questi,

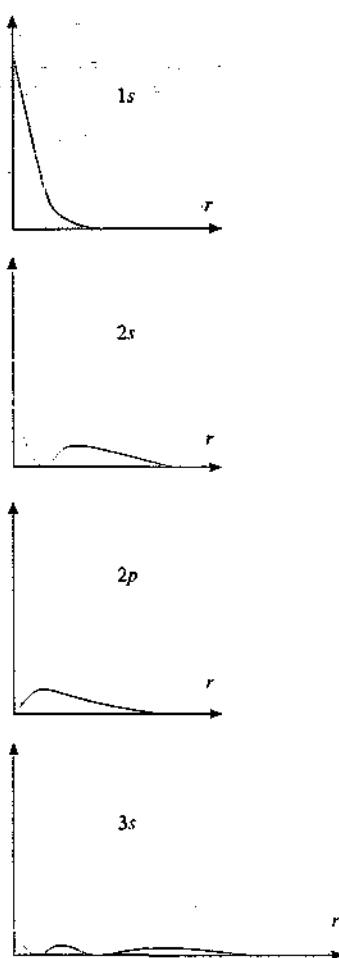


Figura 19.1

due valori possibili di  $m_\ell$ . Pertanto in un sottoguscio sono contenuti  $2(2\ell+1)$  stati possibili per gli elettroni. Il valore di  $\ell$  si individua con una lettera secondo la convenzione seguente:

$\ell$	0	1	2	3	4	...
simbolo	$s$	$p$	$d$	$f$	$g$	...

I sottogusci vengono indicati con un numero che dà il valore di  $n$  e una lettera che dà il valore di  $\ell$ ; in ordine di  $n$  crescente abbiamo

simbolo	$1s; 2s, 2p; 3s, 3p, 3d; 4s, 4p, 4d, 4f, \dots$
numero degli stati	2 2 6 2 6 10 2 6 10 14 ...

Gli stati contenuti in un guscio sono infine

$$2 \sum_0^{n-1} (2\ell + 1) = 2n^2;$$

infatti la sommatoria corrisponde alla somma dei primi  $n$  numeri dispari, che è eguale a  $n^2$ .

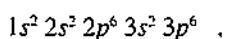
Uno stato energetico permesso, individuato dai tre numeri  $n$ ,  $\ell$ ,  $m_\ell$ , viene chiamato *orbitale*; in base a quanto visto in un guscio ci sono  $n^2$  orbitali e in un sottoguscio  $2\ell+1$  orbitali. In ciascun orbitale possono trovare posto al massimo due elettroni e in questo caso essi devono avere gli spin antiparalleli. Ad un orbitale corrisponde una funzione d'onda  $\psi$  soluzione dell'equazione di Schrödinger e quindi una densità di probabilità che indica statisticamente le posizioni spaziali occupate dall'elettrone; la forma della funzione  $\psi$  si chiama forma dell'orbitale. Nella figura 19.1 sono mostrate in sezione le densità di probabilità per gli orbitali  $1s$ ,  $2s$ ,  $3s$  e  $2p$  dell'idrogeno (a parte il primo gli altri sono stati eccitati). Gli orbitali  $s$  sono a simmetria sferica, l'orbitale  $2p$  è a simmetria cilindrica rispetto all'asse  $z$ : in realtà gli orbitali  $2p$  sono tre, però hanno la stessa forma e basta disegnarne uno: gli altri due sono disposti lungo l'asse  $x$  e lungo l'asse  $y$ . Si vede come la forma dell'orbitale dipenda da  $\ell$ , mentre da  $m_\ell$  dipende la sua orientazione nello spazio. Invece della distribuzione della densità di probabilità si usa spesso, per dare la forma dell'orbitale, disegnare un contorno che mostra l'andamento della funzione e la contiene, ad esempio, al 90%, in cui gli orbitali  $s$  sono sfere, ed un orbitale  $2p$  appare come in figura 19.2.

Consideriamo adesso un atomo con tanti elettroni; gli orbitali in cui si dispongono gli elettroni, sempre obbedendo al principio di Pauli, sono tali che l'energia totale del sistema risulti minima. Quindi, in linea di principio, prima è occupato il guscio  $K$ , poi il guscio  $L$  e così via. Elenchiamo le prime possibilità, da  $Z=1$  a  $Z=14$ , nella tabella 19.1. Con l'occasione abbiamo introdotto un ulteriore simbolo, l'esponente della lettera che individua  $\ell$ : si tratta del numero di elettroni contenuti nel sottoguscio, che va da 1 a 2 ( $2\ell+1$ ); la somma degli esponenti nello schema completo dà ovviamente  $Z$ .

Al crescere di  $Z$  gli orbitali occupati dagli elettroni si hanno dunque riempiendo progressivamente i vari sottogusci, in ordine di energia crescente come detto. In un sottoguscio non  $s$ , e quindi con più orbitali, si riempiono prima gli orbitali distinti con elettroni aventi gli spin paralleli e poi si completa ciascun orbitale con un secondo elettrone con spin antiparallelo (*regola di Hund*).

Premesso che la distribuzione dei valori delle energie degli orbitali è caratteristica di ogni atomo, ricordiamo che l'energia dipende da  $n$  e da  $\ell$ ; in un sottoguscio essa è, in prima approssimazione, eguale per tutti i  $2\ell+1$  orbitali. Nell'andamento dell'energia si verificano quelle regolarità che avevamo anticipato: ad esempio, in qualsiasi atomo, l'energia del sottoguscio  $1s$  è inferiore a quella del sottoguscio  $2s$ , questa è inferiore a quella del sottoguscio  $3s$ , ecc.; inoltre dentro un guscio, come il guscio  $M$  ( $n=3$ ), le energie crescono passando da  $3s$  a  $3p$  e poi a  $3d$ . Però non è detto che l'energia del sottoguscio  $3d$ , ultimo sottoguscio di  $M$ , sia inferiore all'energia del sottoguscio  $4s$ , primo sottoguscio di  $N$ .

In effetti accade proprio il contrario per cui, una volta riempiti i sottogusci fino al  $3p$ , arrivati cioè all'argon il cui schema completo è



l'elemento successivo, il potassio, non ha il 19° elettrone nel sottoguscio  $3d$ , ma nel sottoguscio  $4s$  e il suo schema è

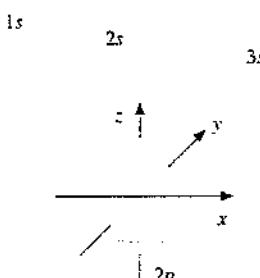


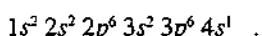
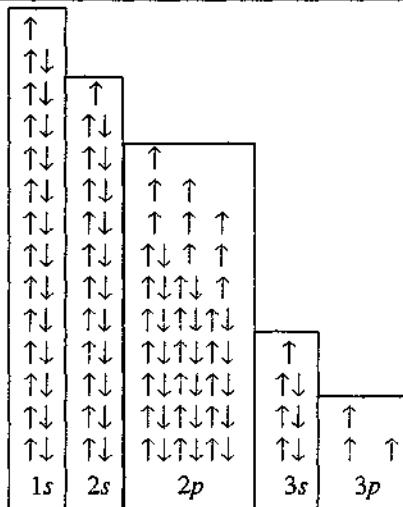
Figura 19.2

### Figura 19.2b - Configurazione elettronica dei primi quattordici elementi

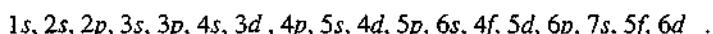
Dati: simboli degli elementi, numeri atomici, configurazioni elettroniche.

Presentazione dello spin.

1	idrogeno	$1s$	$1s^1$
2	elio	$1s$	$1s^2$
3	litio	$2s$	$1s^2 2s^1$
4	berillio	$2s$	$1s^2 2s^2$
5	boro	$2p$	$1s^2 2s^2 2p^1$
6	carbonio	$2p$	$1s^2 2s^2 2p^2$
7	azoto	$2p$	$1s^2 2s^2 2p^3$
8	ossigeno	$2p$	$1s^2 2s^2 2p^4$
9	fluoro	$2p$	$1s^2 2s^2 2p^5$
10	neon	$2p$	$1s^2 2s^2 2p^6$
11	sodio	$3s$	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^1$
12	magnesio	$3s$	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2$
13	alluminio	$3p$	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^1$
14	silicio	$3p$	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^2$



Simili scavalcamenti si hanno più volte procedendo per  $Z$  crescenti e l'ordine effettivo di riempimento dei sottogusci degli elementi è il seguente:



Esso è mostrato nella figura 19.3 che, nella scala delle energie, è puramente qualitativa.

La serie completa degli elementi è riportata nella tabella 19.2.  $Z$  cresce lungo le righe, da sinistra a destra; il simbolo del sottoguscio a sinistra dei vari gruppi di caselle (2, 6, 10, 14 a seconda dei casi) mostra qual è il sottoguscio che si va riempiendo all'aumentare di  $Z$ , esattamente secondo la successione della figura 19.3. Ciascuna riga si chiama periodo; ogni periodo finisce con un gas nobile. Nella tabella 19.2b sono indicate le configurazioni elettroniche degli elementi, secondo lo schema già utilizzato nella tabella 19.1. Allo scopo di evitare ripetizioni è mostrata la configurazione dei sottogusci esterni a quelli del gas nobile precedente che costituisce il nocciolo di tutto il periodo successivo. In generale gli elettroni esterni a tale nocciolo, cioè quelli indicati esplicitamente, sono detti elettroni di valenza.

Nel riempimento si notano alcune anomalie, segnalate con un asterisco, come quelle del cromo e del rame, dovute a particolari situazioni di energia nell'atomo considerato. A questo proposito va anche chiarito che le inversioni energetiche tra i sottogusci  $3d$  e  $4s$ ,  $4d$  e  $5s$  e così via si verificano solo quando tali sottogusci sono esterni, come avviene ad esempio per gli elementi potassio, magnesio, scandio, titanio, ecc., ovvero quando essi sono i sottogusci effettivamente in fase di riempimento. Invece in un elemento ad alto  $Z$ , come il mercurio o l'uranio, in cui tali sottogusci sono pieni e ben interni alla struttura elettronica, l'ordine è quello atteso: l'energia del sottoguscio  $3d$  è inferiore a quella del  $4s$ , l'energia del  $4d$  è inferiore a quella del  $5s$ .

Gli schemi elettronici della tabella 19.2, la quale altro non è che la tavola di Mendeleev aggiornata, rappresentano per l'atomo del dato elemento lo stato fondamentale; le energie degli orbitali occupati costituiscono l'insieme dei livelli energetici degli elettroni nello stato fondamentale. Gli elettroni più esterni possono essere eccitati andando ad occupare un orbitale permesso, ma vuoto, e nei successivi processi di diseccitazione si ha emissione di fotoni. Con elementi in fase gassosa sono emessi spettri di righe caratteristici dell'elemento (oppure si osservano i corrispondenti spettri di assorbimento).

L'esame della tabella 19.2 permette di spiegare molte proprietà degli elementi; come sappiamo, questo è uno degli argomenti più importanti trattati nei corsi di Chimica. Proprio per questo accenniamo nel seguito soltanto ad alcune caratteristiche salienti.

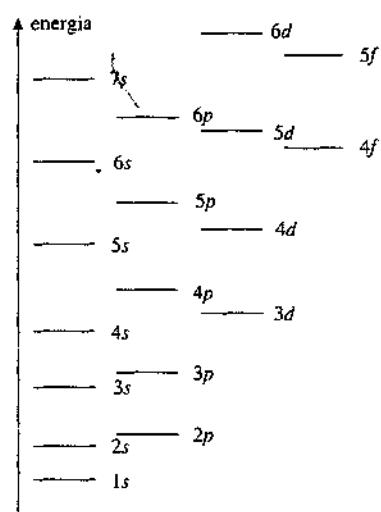
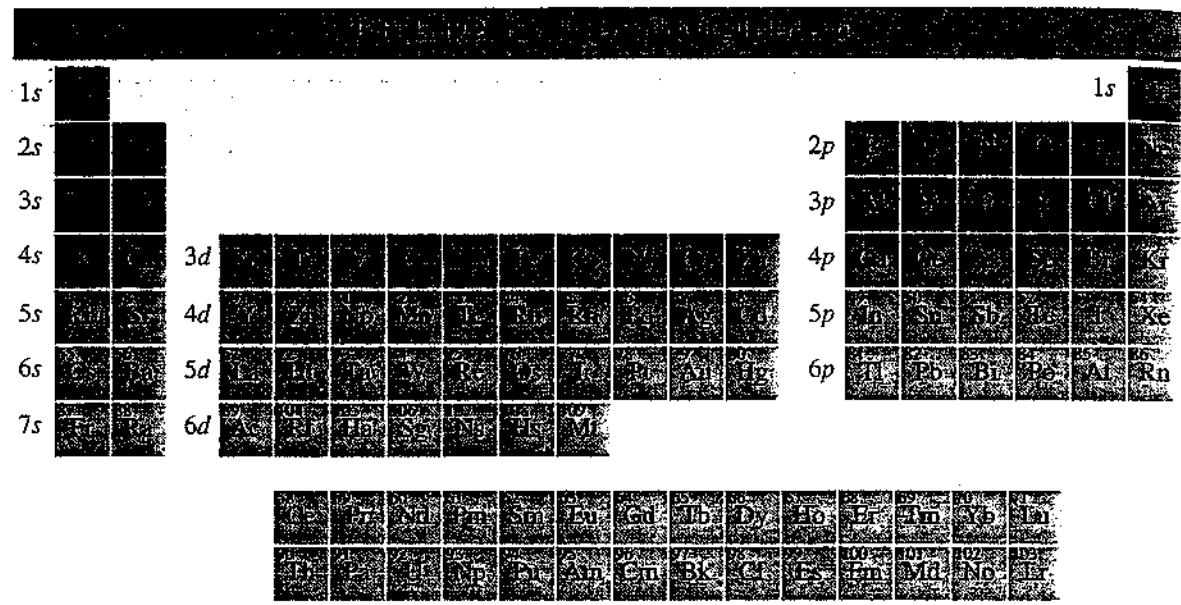


Figura 19.3



### Osservazioni sulla tavola periodica

La struttura a sottogusci, dovuta essenzialmente al principio di esclusione, rende conto della ripetizione di certe proprietà al crescere di  $Z$ . Tra i tanti esempi alcuni sono particolarmente interessanti.

Il primo è quello dei gas nobili (o gas rari) elio, neon, argon, kripton, xenon e radon. Essi si trovano in una posizione della tavola che corrisponde ad un sottoguscio completamente pieno, di tipo  $p$  a parte l'elio, e ad un salto abbastanza alto di energia rispetto al sottoguscio successivo (in tutti i casi  $n$  cambia di una unità). Ciò comporta una struttura elettronica particolarmente stabile, che richiede una notevole energia per rimuovere uno degli elettroni esterni. Inoltre la simmetria della configurazione elettronica fa sì che il campo elettrico e il campo magnetico all'esterno dell'atomo siano mediamente nulli, per cui le interazioni di un atomo di gas nobile con altri atomi sono molto deboli: la conseguenza è che la molecola di gas nobile è monoatomica ed è molto difficile formare composti stabili contenenti gas nobili. Le temperature di liquefazione e di solidificazione sono molto basse, proprio perché il debole legame tra questi atomi è facilmente rotto dall'agitazione termica.

Nella posizione immediatamente successiva ai gas nobili ci sono i metalli alcalini litio, sodio, potassio, rubidio, cesio e francio. In essi si ha un solo elettrone all'esterno della struttura stabile e simmetrica tipica dei gas nobili: sono cioè atomi di tipo idrogenoide in cui l'elettrone esterno risente praticamente dell'attrazione di una carica elementare, pari alla somma della carica positiva  $Ze$  del nucleo e della carica negativa  $-(Z-1)$  degli elettroni interni. Il legame è abbastanza debole (l'energia di ionizzazione è soltanto di pochi eV) e questi elementi hanno la tendenza a formare ioni positivi ( $\text{Li}^+$ ,  $\text{Na}^+$ , ecc.), restando con la configurazione elettronica di un gas nobile. Bisogna dire che le proprietà alcaline del francio sono in parte dedotte dalla sua posizione nella tavola, trattandosi di un elemento rarissimo.

La situazione in un certo senso simmetrica è quella degli alogenzi fluoro, cloro, bromo, iodio e astato. Essi si trovano nella posizione immediatamente precedente ai gas nobili e hanno una struttura elettronica quasi completa: di qui la forte affinità elettronica, cioè la tendenza a catturare un elettrone formando uno ione negativo ( $\text{F}^-$ ,  $\text{Cl}^-$ , ecc.) raggiungendo in tal modo la configurazione elettronica di un gas nobile. Per l'astato vale lo stesso commento fatto per il francio.

Un altro esempio, completamente diverso, che rivela ancora maggiore somiglianza di proprietà chimiche si ha negli elementi che vanno dal cerio al lutezio, detti terre rare: in essi è pieno il sottoguscio  $6s$  mentre si va riempiendo il sottoguscio  $4f$  che è spazialmente più interno. Quindi le loro proprietà chimiche, che dipendono soprattutto dal sottoguscio esterno, sono molto simili. Lo stesso succede per i cosiddetti attinidi che vanno dal torio al lawrenzio.

Abbiamo accennato in precedenza alle dimensioni degli atomi con molti elettroni e al significato ondulatorio di raggio di un atomo. Nella figura 19.4 mostriamo l'andamento

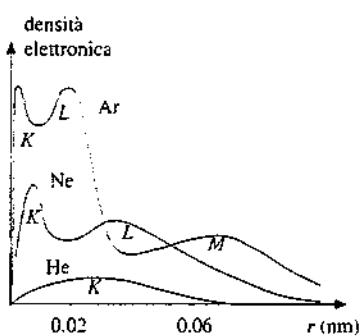


Figura 19.4

Tavola 19.2b. Configurazione elettronica degli elementi.

simbolo	configurazione	simbolo	configurazione	simbolo	configurazione
1 H	$1s^1$	37 Rb	(Kr) $5s^1$	73 Ta	(Xe) $6s^2 4f^{14} 5d^3$
2 He	$1s^2$	38 Sr	$5s^2$	74 W	$6s^2 4f^{14} 5d^4$
3 Li	(He) $2s^1$	39 Y	$5s^2 4d^1$	75 Re	$6s^2 4f^{14} 5d^5$
4 Be	$2s^2$	40 Zr	$5s^2 4d^2$	76 Os	$6s^2 4f^{14} 5d^6$
5 B	$2s^2 2p^1$	41 Nb*	$5s^1 4d^4$	77 Ir	$6s^2 4f^{14} 5d^7$
6 C	$2s^2 2p^2$	42 Mo*	$5s^1 4d^5$	78 Pt*	$6s^1 4f^{14} 5d^9$
7 N	$2s^2 2p^3$	43 Tc	$5s^2 4d^5$	79 Au*	$6s^1 4f^{14} 5d^{10}$
8 O	$2s^2 2p^4$	44 Ru*	$5s^1 4d^7$	80 Hg	$6s^2 4f^{14} 5d^{10}$
9 F	$2s^2 2p^5$	45 Rh*	$5s^1 4d^8$	81 Tl	$6s^2 4f^{14} 5d^{10} 6p^1$
10 Ne	$2s^2 2p^6$	46 Pd*	$4d^{10}$	82 Pb	$6s^2 4f^{14} 5d^{10} 6p^2$
11 Na	(Ne) $3s^1$	47 Ag*	$5s^1 4d^{10}$	83 Bi	$6s^2 4f^{14} 5d^{10} 6p^3$
12 Mg	$3s^2$	48 Cd	$5s^2 4d^{10}$	84 Po	$6s^2 4f^{14} 5d^{10} 6p^4$
13 Al	$3s^2 3p^1$	49 In	$5s^2 4d^{10} 5p^1$	85 At	$6s^2 4f^{14} 5d^{10} 6p^5$
14 Si	$3s^2 3p^2$	50 Sn	$5s^2 4d^{10} 5p^2$	86 Rn	$6s^2 4f^{14} 5d^{10} 6p^6$
15 P	$3s^2 3p^3$	51 Sb	$5s^2 4d^{10} 5p^3$	87 Fr	(Rn) $7s^1$
16 S	$3s^2 3p^4$	52 Te	$5s^2 4d^{10} 5p^4$	88 Ra	$7s^2$
17 Cl	$3s^2 3p^5$	53 I	$5s^2 4d^{10} 5p^5$	89 Ac	$7s^2 6d^1$
18 Ar	$3s^2 3p^6$	54 Xe	$5s^2 4d^{10} 5p^6$	90 Th	$7s^2 6d^2$
19 K	(Ar) $4s^1$	55 Cs	(Xe) $6s^1$	91 Pa	$7s^2 5f^2 6d^1$
20 Ca	$4s^2$	56 Ba	$6s^2$	92 U	$7s^2 5f^3 6d^1$
21 Sc	$4s^2 3d^1$	57 La	$6s^2 5d^1$	93 Np	$7s^2 5f^4 6d^1$
22 Ti	$4s^2 3d^2$	58 Ce	$6s^2 5f^1 5d^1$	94 Pu	$7s^2 5f^6$
23 V	$4s^2 3d^3$	59 Pr	$6s^2 4f^3$	95 Am	$7s^2 5f^7$
24 Cr*	$4s^1 3d^5$	60 Nd	$6s^2 4f^4$	96 Cm	$7s^2 5f^7 6d^1$
25 Mn	$4s^2 3d^5$	61 Pm	$6s^2 4f^5$	97 Bk	$7s^2 5f^9$
26 Fe	$4s^2 3d^6$	62 Sm	$6s^2 4f^6$	98 Cf	$7s^2 5f^{10}$
27 Co	$4s^2 3d^7$	63 Eu	$6s^2 4f^7$	99 Es	$7s^2 5f^{11}$
28 Ni	$4s^2 3d^8$	64 Gd	$6s^2 4f^7 5d^1$	100 Fm	$7s^2 5f^{12}$
29 Cu*	$4s^1 3d^{10}$	65 Tb	$6s^2 4f^9$	101 Md	$7s^2 5f^{13}$
30 Zn	$4s^2 3d^{10}$	66 Dy	$6s^2 4f^{10}$	102 No	$7s^2 5f^{14}$
31 Ga	$4s^2 3d^{10} 4p^1$	67 Ho	$6s^2 4f^{11}$	103 Lr	$7s^2 5f^{14} 6d^1$ ?
32 Ge	$4s^2 3d^{10} 4p^2$	68 Er	$6s^2 4f^{12}$	104 Rf	$7s^2 5f^{14} 6d^2$ ?
33 As	$4s^2 3d^{10} 4p^3$	69 Tm	$6s^2 4f^{13}$	105 Ha	$7s^2 5f^{14} 6d^3$ ?
34 Se	$4s^2 3d^{10} 4p^4$	70 Yb	$6s^2 4f^{14}$	106 Sg	$7s^2 5f^{14} 6d^4$ ?
35 Br	$4s^2 3d^{10} 4p^5$	71 Lu	$6s^2 4f^{14} 5d^1$	107 Ns	$7s^2 5f^{14} 6d^5$ ?
36 Kr	$4s^2 3d^{10} 4p^6$	72 Hf	$6s^2 4f^{14} 5d^2$	108 Hs	$7s^2 5f^{14} 6d^6$ ?
				109 Mt	$7s^2 5f^{14} 6d^7$ ?

radiale della densità elettronica in elio, neon e argon, ottenuta sovrapponendo gli andamenti per i vari orbitali: essa è legata alla probabilità di trovare un qualsiasi elettrone a distanza  $r$ . I massimi sono attribuiti agli elettroni con lo stesso numero quantico principale e si può dire che visualizzano i gusci  $K$ ,  $L$ ,  $M$ . Al crescere di  $Z$  si ha una notevole contrazione del guscio  $K$ , a causa dell'aumento dell'attrazione da parte del nucleo ( $\sim 0.3 \cdot 10^{-10}$  m nell'elio,  $\sim 0.07 \cdot 10^{-10}$  m nel neon,  $\sim 0.02 \cdot 10^{-10}$  m nell'argon).

La crescita delle dimensioni atomiche non è regolare; essa segue l'andamento disegnato nella figura 19.5, che è realistica per quanto riguarda i metalli alcalini e gli alogenzi e qualitativa per il resto. Lungo un periodo la dimensione addirittura diminuisce, ma cresce passando da un periodo al successivo per gli atomi con le stesse caratteristiche.

Ricordiamo infine che gli elementi dopo l'uranio vengono prodotti artificialmente; l'e-

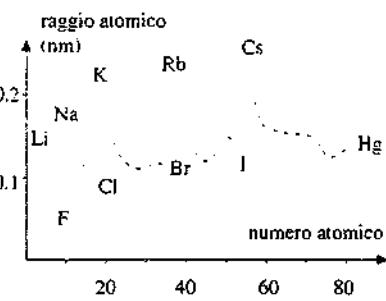


Figura 19.5

lemento più pesante finora evidenziato ha  $Z = 109$ . Complessivamente l'intervallo coperto dal numero quantico principale va da 1 a 7 mentre il numero quantico azimutale va da zero a 3 e il sottoguscio più energetico è il  $6d$ , almeno tra gli elementi conosciuti. I nomi di questi sono riportati nella nota alla fine del capitolo.

### 19.3 Legami nelle molecole e nei solidi. Bande di energia

Nei solidi cristallini le interazioni tra gli atomi sono in grado di mantenere gli atomi stessi in posizioni fisse, rispetto alle quali sono possibili soltanto delle oscillazioni. Poiché si tratta dell'estensione su larga scala delle stesse interazioni che concorrono a legare gli atomi tra loro permettendo la formazione delle molecole, descriviamo innanzitutto i casi più importanti di tali legami; per questo compito torneranno utili le nozioni sulle configurazioni elettroniche degli atomi in quanto le interazioni suddette, che sono di natura elettromagnetica, hanno caratteristiche determinate essenzialmente dagli elettroni degli orbitali più esterni, cioè dagli elettroni di valenza.

Un primo tipo di legame è il *legame ionico* indicato anche come *eteropolare*. L'esempio classico è quello della molecola composta da un metallo alcalino e da un alogeno, come NaCl: in sostanza l'unico elettrone esterno del sodio è ceduto al cloro e abbiamo i due ioni  $\text{Na}^+$  e  $\text{Cl}^-$  che sono legati tra loro a causa della presenza di una forza elettrica attrattiva. L'energia potenziale del sistema è minima per  $r = r_0 = 2.5 \cdot 10^{-10}$  m, distanza di equilibrio tra gli ioni alla quale si bilanciano l'attrazione dovuta allo scambio dell'elettrone e la repulsione tra le cariche dello stesso segno che si manifesta quando i due ioni iniziano a competere tra loro (la somma dei raggi dei due ioni è  $\sim 2.8 \cdot 10^{-10}$  m).

Una molecola ionica ha un momento di dipolo elettrico a causa dell'asimmetria della distribuzione di carica: si parla di molecola polare. Nel caso di NaCl si calcolerebbe  $p = er_0 = 4 \cdot 10^{-30}$  C · m, mentre il valore misurato è  $3 \cdot 10^{-30}$  C · m, segno che la cessione dell'elettrone non è completa. La densità di probabilità dell'elettrone ceduto non è concentrata esclusivamente intorno al nucleo di cloro, ma ha valori non nulli anche vicino al sodio. Più che di cessione si dovrebbe parlare di condivisione dell'elettrone con preponderanza del cloro sul sodio, concetto che riprenderemo più avanti.

Altri esempi, oltre a quelli dei composti tra alcalini e alogenii come LiF, KF, RbCl, CsI, si hanno con elementi della seconda colonna come il magnesio ( $\text{MgO}$ ,  $\text{MgCl}_2$ ) che cede i due elettroni  $3s$ , oppure con altri elementi come l'argento ( $\text{AgCl}$ ) che cede l'elettrone  $5s$ , l'oro che cede l'elettrone  $6s$ , lo zinco che cede i due elettroni  $4s$ , l'alluminio che cede i tre elettroni  $3s^2 3p$ .

Un secondo tipo di legame è il *legame covalente* che, nella forma più semplice, ha origine dallo scambio di elettroni tra due atomi: ciascun atomo mette a disposizione un elettrone, i due elettroni si possono considerare come appartenenti ad entrambi gli atomi e questa situazione comporta una forza attrattiva.

L'esempio più immediato si ha nella molecola di idrogeno  $\text{H}_2$ , in cui gli elettroni messi in comune sono quelli  $1s$  dei due atomi. La trattazione quantistica del problema mostra che esiste una soluzione con energia negativa, quindi corrispondente ad uno stato legato, nella quale ciascun elettrone ha una probabilità finita di trovarsi tra i due protoni e non soltanto vicino all'uno o all'altro: in questa configurazione di equilibrio la distanza tra i due protoni è  $r_0 = 0.74 \cdot 10^{-10}$  m (~ 1.4 volte il raggio di Bohr) e l'energia di legame è  $-4.5$  eV. Esiste anche una seconda soluzione con energia positiva che non porta alla formazione della molecola; in essa la densità di probabilità ha valore nullo nella zona centrale tra i due protoni.

In termini di orbitali si può dire che dall'interazione tra i due atomi che dà origine alla molecola nascono due orbitali molecolari, uno legante e uno non legante, la cui forma è mostrata nella figura 19.6. Lo schema energetico qualitativo (figura 19.7) evidenzia come l'energia dell'orbitale legante sia inferiore rispetto a quella dell'orbitale atomico; i due elettroni messi in comune occupano l'orbitale legante e, per il principio di esclusione, hanno gli spin antiparalleli.

La situazione è tale per cui non si può attribuire un elettrone ad un singolo atomo; più che come insieme di due atomi la molecola va vista come un insieme di due protoni e di due elettroni in uno stato di equilibrio dovuto all'interazione tra le cariche. La localizzazione dei due elettroni nello spazio tra i protoni dà luogo a una forza attrattiva tra elettroni e protoni che bilancia le forze di repulsione tra i due protoni e tra i due elettroni.

Riassumendo, un legame covalente semplice è dovuto a una coppia di elettroni con spin antiparalleli localizzata principalmente tra i due nuclei. Altri esempi sono forniti da molecole come  $\text{Li}_2$ ,  $\text{O}_2$ ,  $\text{N}_2$ ,  $\text{F}_2$ ,  $\text{Cl}_2$ ; non si tratta però di casi eguali, in quanto nella molecola

#### Legame ionico

Un primo tipo di legame è il *legame ionico* indicato anche come *eteropolare*. L'esempio classico è quello della molecola composta da un metallo alcalino e da un alogeno, come NaCl: in sostanza l'unico elettrone esterno del sodio è ceduto al cloro e abbiamo i due ioni  $\text{Na}^+$  e  $\text{Cl}^-$  che sono legati tra loro a causa della presenza di una forza elettrica attrattiva. L'energia potenziale del sistema è minima per  $r = r_0 = 2.5 \cdot 10^{-10}$  m, distanza di equilibrio tra gli ioni alla quale si bilanciano l'attrazione dovuta allo scambio dell'elettrone e la repulsione tra le cariche dello stesso segno che si manifesta quando i due ioni iniziano a competere tra loro (la somma dei raggi dei due ioni è  $\sim 2.8 \cdot 10^{-10}$  m).

Una molecola ionica ha un momento di dipolo elettrico a causa dell'asimmetria della distribuzione di carica: si parla di molecola polare. Nel caso di NaCl si calcolerebbe  $p = er_0 = 4 \cdot 10^{-30}$  C · m, mentre il valore misurato è  $3 \cdot 10^{-30}$  C · m, segno che la cessione dell'elettrone non è completa. La densità di probabilità dell'elettrone ceduto non è concentrata esclusivamente intorno al nucleo di cloro, ma ha valori non nulli anche vicino al sodio. Più che di cessione si dovrebbe parlare di condivisione dell'elettrone con preponderanza del cloro sul sodio, concetto che riprenderemo più avanti.

Altri esempi, oltre a quelli dei composti tra alcalini e alogenii come LiF, KF, RbCl, CsI, si hanno con elementi della seconda colonna come il magnesio ( $\text{MgO}$ ,  $\text{MgCl}_2$ ) che cede i due elettroni  $3s$ , oppure con altri elementi come l'argento ( $\text{AgCl}$ ) che cede l'elettrone  $5s$ , l'oro che cede l'elettrone  $6s$ , lo zinco che cede i due elettroni  $4s$ , l'alluminio che cede i tre elettroni  $3s^2 3p$ .

Un secondo tipo di legame è il *legame covalente* che, nella forma più semplice, ha origine dallo scambio di elettroni tra due atomi: ciascun atomo mette a disposizione un elettrone, i due elettroni si possono considerare come appartenenti ad entrambi gli atomi e questa situazione comporta una forza attrattiva.

L'esempio più immediato si ha nella molecola di idrogeno  $\text{H}_2$ , in cui gli elettroni messi in comune sono quelli  $1s$  dei due atomi. La trattazione quantistica del problema mostra che esiste una soluzione con energia negativa, quindi corrispondente ad uno stato legato, nella quale ciascun elettrone ha una probabilità finita di trovarsi tra i due protoni e non soltanto vicino all'uno o all'altro: in questa configurazione di equilibrio la distanza tra i due protoni è  $r_0 = 0.74 \cdot 10^{-10}$  m (~ 1.4 volte il raggio di Bohr) e l'energia di legame è  $-4.5$  eV. Esiste anche una seconda soluzione con energia positiva che non porta alla formazione della molecola; in essa la densità di probabilità ha valore nullo nella zona centrale tra i due protoni.

In termini di orbitali si può dire che dall'interazione tra i due atomi che dà origine alla molecola nascono due orbitali molecolari, uno legante e uno non legante, la cui forma è mostrata nella figura 19.6. Lo schema energetico qualitativo (figura 19.7) evidenzia come l'energia dell'orbitale legante sia inferiore rispetto a quella dell'orbitale atomico; i due elettroni messi in comune occupano l'orbitale legante e, per il principio di esclusione, hanno gli spin antiparalleli.

La situazione è tale per cui non si può attribuire un elettrone ad un singolo atomo; più che come insieme di due atomi la molecola va vista come un insieme di due protoni e di due elettroni in uno stato di equilibrio dovuto all'interazione tra le cariche. La localizzazione dei due elettroni nello spazio tra i protoni dà luogo a una forza attrattiva tra elettroni e protoni che bilancia le forze di repulsione tra i due protoni e tra i due elettroni.

Riassumendo, un legame covalente semplice è dovuto a una coppia di elettroni con spin antiparalleli localizzata principalmente tra i due nuclei. Altri esempi sono forniti da molecole come  $\text{Li}_2$ ,  $\text{O}_2$ ,  $\text{N}_2$ ,  $\text{F}_2$ ,  $\text{Cl}_2$ ; non si tratta però di casi eguali, in quanto nella molecola

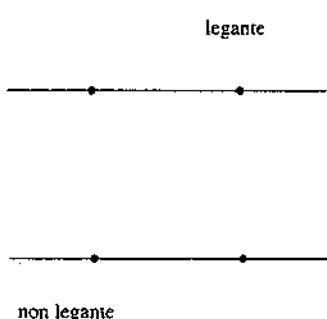


Figura 19.6

$O_2$  il legame è doppio e nella molecola  $N_2$  è triplo (due coppie e tre coppie di elettroni in comune, rispettivamente). La forza del legame è diversa da caso a caso: in termini di energia, il legame semplice dell'idrogeno (4.5 eV) è più forte di quello del litio (1.0 eV), del fluoro (1.6 eV), del cloro (2.5 eV), nei quali le cariche sono mediamente più distanti; ma il legame semplice è più debole in generale di quello doppio (5.1 eV nell'ossigeno) e di quello triplo (9.8 eV nell'azoto).

Oltre ai legami covalenti tra due atomi eguali esistono quelli tra due atomi diversi, come nelle molecole CO, HF, HCl. In questi casi si verifica una asimmetria di carica lungo la congiungente i due atomi, appunto perché questi sono diversi, e la molecola è polare, cioè ha un momento di dipolo elettrico permanente, che certamente invece non esiste nei casi simmetrici come  $H_2$ . Nell'ossido di carbonio si ha  $p = 0.4 \cdot 10^{-30} C \cdot m$ ; con una distanza media  $r_0 = 1.13 \cdot 10^{-10} m$  risulta una carica equivalente  $q = p/r_0 = 0.02 e$ ; nell'acido cloridrico i numeri corrispondenti sono  $p = 3.6 \cdot 10^{-30} C \cdot m$ ,  $r_0 = 1.27 \cdot 10^{-10} m$ ,  $q = 0.18 e$ . La condivisione non simmetrica degli elettroni, che sposta il centro della distribuzione di carica verso uno dei due atomi, fa acquistare al legame covalente un parziale carattere ionico; ricordiamo d'altra parte che in una molecola ionica come NaCl la carica equivalente è  $q = 0.75 e$ . Anche la struttura energetica degli orbitali non è simmetrica come nella figura 19.7; nella figura 19.8 è mostrato, sempre qualitativamente, lo schema degli orbitali leganti e non leganti dell'acido fluoridrico, insieme agli orbitali atomici dei due elettroni condivisi che non sono eguali.

Infine nelle molecole poliatomiche ci sono legami covalenti di un atomo con vari altri atomi, come nell'acqua  $H_2O$ , nell'anidride carbonica  $CO_2$ , nell'ammoniaca  $NH_3$ , nel metano  $CH_4$ , in generale in tutte le molecole organiche. A seconda della forma della molecola, ovvero della distribuzione simmetrica o asimmetrica delle cariche, si hanno molecole polari ( $H_2O$ ,  $NH_3$ ) e non polari ( $CO_2$ ,  $CH_4$ ). Discuteremo più avanti i fattori che determinano la forma delle molecole poliatomiche.

Con la descrizione della molecola  $H_2$  abbiamo visto il prototipo di legame covalente. Un esempio in cui tale legame non esiste si ha con l'elemento successivo, l'elio. Il sistema di due atomi di elio possiede i due orbitali molecolari della figura 19.7 (le energie però sono diverse) e in essi i quattro elettroni si dispongono a coppie: ne derivano due contributi eguali ed opposti all'energia di legame e la molecola biatomica non si forma. Passando al litio abbiamo la stessa situazione dell'elio per quanto riguarda gli elettroni  $1s$ , anche se, analogamente a quanto avviene nell'idrogeno, i due elettroni  $2s$  dei due atomi di litio danno luogo ad altri due orbitali molecolari, uno legante pieno e uno non legante vuoto; si forma così la molecola  $Li_2$  (in fase gassosa).

La sistematica degli orbitali molecolari è abbastanza complessa e pertanto ci limitiamo a descrivere i primi orbitali delle molecole biatomiche formate da atomi eguali. Oltre al valore dell'energia bisogna considerare il momento angolare: si trova che la componente  $L_z$  lungo l'asse che congiunge i due nuclei è conservata in quanto lungo tale asse è sempre nullo il momento delle forze agenti sugli elettroni; il numero quantico  $m_l$  può assumere i valori  $0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Gli orbitali con  $m_l = 0$  si chiamano  $\sigma$  e ciascuno può contenere al massimo due elettroni ( $m_l = 0, m_s = \pm 1/2$ ); essi sono leganti, con la coppia di elettroni localizzata principalmente tra i due nuclei, o non leganti, nel qual caso si usa il simbolo  $\sigma^*$ . I due orbitali della molecola  $H_2$  rappresentati nella figura 19.7 sono  $\sigma_{1s}$  e  $\sigma_{1s}^*$ , con  $\sigma_{1s}^*$  vuoto; nel simbolo è aggiunta la terminologia dell'orbitale atomico da cui provengono gli elettroni.

Gli orbitali con  $m_l = \pm 1$  si chiamano  $\pi$ ; si tratta di due orbitali con la stessa energia che in totale possono ospitare quattro elettroni ( $m_l = \pm 1, m_s = \pm 1/2$ ); anche ora ci sono orbitali leganti e orbitali non leganti, indicati col simbolo  $\pi^*$ . La forma degli orbitali  $\pi$  leganti mostra che gli elettroni in essi contenuti stanno preferibilmente tra i due atomi, non lungo la congiungente dove ci sono gli orbitali  $\sigma$ , ma intorno ad essa.

Nella figura 19.9 è riportata la struttura energetica degli orbitali molecolari che si formano nell'interazione tra due atomi eguali, dall'idrogeno al neon. A sinistra ci sono gli orbitali atomici di partenza, al centro gli orbitali molecolari il cui riempimento è mostrato nelle caselle di destra insieme al simbolo della molecola corrispondente. La logica è la stessa vista negli atomi con molti elettroni: il riempimento avviene per orbitali di energia crescente, con due elettroni per volta, e a parità di energia nei due orbitali  $\pi$  vale la regola di Hund: arrivati ad un certo livello si intende che gli orbitali più bassi siano tutti pieni. Completato un blocco di orbitali non si ha legame, in quanto non c'è prevalenza di orbitali leganti: ciò avviene per l'elio, il berillio e il neon che infatti non formano molecole biatomiche. Nelle molecole successive ad un blocco completo il legame è dovuto agli elettroni

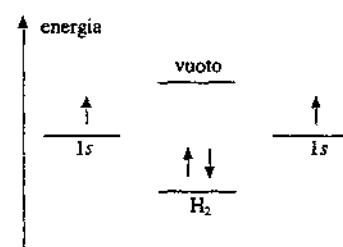


Figura 19.7

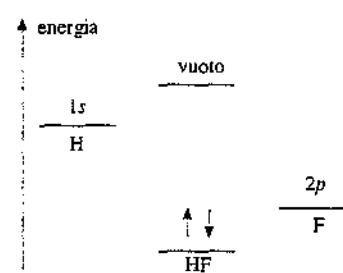


Figura 19.8

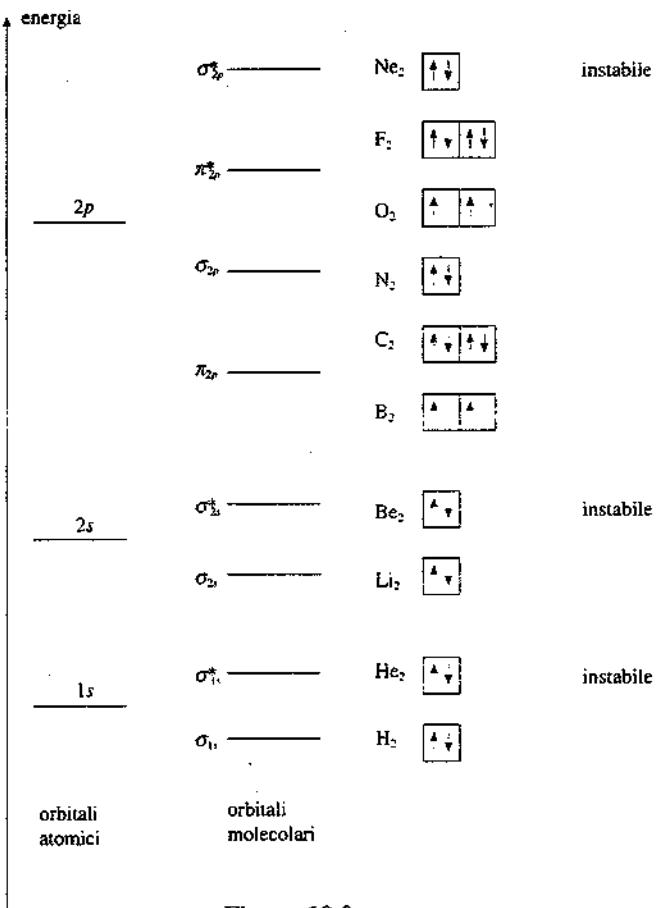
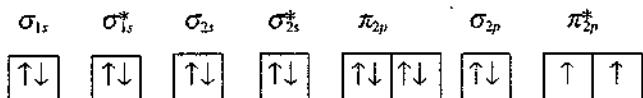


Figura 19.9

esterni: si conferma che sono questi i responsabili delle interazioni.

Citiamo esplicitamente la configurazione elettronica della molecola  $\text{O}_2$ :



Gli ultimi due elettroni hanno gli spin paralleli: questo fatto conferisce alla molecola di ossigeno un momento di dipolo magnetico permanente che rende conto delle notevoli proprietà paramagnetiche dell'ossigeno gassoso. L'idrogeno ( $\sigma_{1s}$ ), l'azoto (che arriva a  $\sigma_{2p}$ ) e il fluoro (che ha  $\pi_{2p}^*$  pieno) sono invece diamagnetici; si confrontino le tabelle 9.1 e 9.2 del paragrafo 9.2.

Quando si passa alle molecole poliameriche il legame più diretto tra due atomi ha sempre le caratteristiche di un legame  $\sigma$ , con gli elettroni localizzati tra i nuclei. Esistono anche i legami tipo  $\pi$  e qui può accadere un fatto nuovo, cioè che gli elettroni non siano condivisi tra due soli atomi, ma tra più atomi: gli orbitali moleculari corrispondenti sono estesi su molti atomi e si dice che gli elettroni in essi contenuti siano delocalizzati. Ciò avviene ad esempio in alcune molecole organiche caratterizzate da una struttura esagonale piana con ai vertici atomi di carbonio, come il benzene  $\text{C}_6\text{H}_6$ : ciascun atomo di carbonio è legato ai due atomi di carbonio adiacenti e all'atomo di idrogeno da legami  $\sigma$ , indicati da linee nella figura 19.10, e in più esiste un legame  $\pi$  a cui ciascun atomo di carbonio fornisce un elettrone, che viene indicato con una circonferenza per significare che i suoi elettroni sono delocalizzati e possono muoversi lungo l'anello: in particolare da ciò deriva il forte diamagnetismo del benzene.

Un altro punto fondamentale che riguarda le molecole poliameriche è la comprensione della loro forma ovvero della disposizione spaziale degli atomi che le compongono, questione che ovviamente non si pone per le molecole biatomiche. Nella figura 19.11 sono mostrate le molecole di  $\text{CO}_2$ ,  $\text{H}_2\text{O}$ ,  $\text{NH}_3$  e  $\text{CH}_4$ : le prime due costituiscono esempi delle sole strutture possibili per le molecole triatomiche, quella lineare e quella non lineare (con un angolo tra i legami caratteristico della molecola). La molecola di ammoniaca ha l'atomo di

azoto al vertice di una piramide e gli atomi di idrogeno ai vertici della base triangolare della piramide, mentre nella molecola di metano l'atomo di carbonio è al centro di un tetraedro regolare ai cui vertici stanno gli atomi di idrogeno.  $\text{NH}_3$  e  $\text{CH}_4$  sono quindi molecole non piane; esistono peraltro molecole con quattro o più atomi che sono piane, come quella dell'etilene  $\text{C}_2\text{H}_4$ .

L'orientazione nello spazio dei legami disegnati nella figura 19.11 è regolata essenzialmente dalla condizione che ci sia equilibrio tra tutte le forze elettriche che si esercitano tra le varie cariche, tenendo presente per quanto riguarda gli elettroni degli orbitali esterni che oltre a quelli localizzati lungo i legami ce ne sono altri che non partecipano al legame. Ad esempio, nell'ammoniaca i tre elettroni  $2p$  dell'azoto formano i legami covalenti con gli atomi di idrogeno mentre due elettroni  $2s$  restano spaiati e ciò contribuisce ad una struttura non trirettangola (legami lungo gli assi  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ) come sarebbe suggerito dalla forma degli orbitali  $p$  (figura 19.2); analogamente la struttura della molecola d'acqua non ha i legami a  $90^\circ$  a causa della presenza nell'atomo di ossigeno di quattro elettroni di valenza che non partecipano ai legami covalenti con l'idrogeno. L'equilibrio comporta anche determinate simmetrie, evidenziate nelle figure dall'egualanza degli angoli tra i legami in  $\text{NH}_3$  e  $\text{CH}_4$ . L'impostazione quantitativa del problema porta al calcolo della forma degli orbitali nelle molecole e alla spiegazione delle strutture in figura 19.11 e di tutte le varie altre misurate.

A conclusione dell'esame delle principali caratteristiche del legame covalente ritorniamo su un punto cui abbiamo accennato senza spiegazioni, e cioè sul numero di legami che un atomo può formare. Prendendo come riferimento la tabella 19.1, l'esistenza di molecole come  $\text{NH}_3$  (tre legami),  $\text{H}_2\text{O}$  (due legami) e  $\text{HF}$  (un legame) appare riconducibile alla presenza nell'azoto, nell'ossigeno e nel fluoro rispettivamente di tre, due e uno elettrone  $2p$ , che non sono accompagnati da un secondo elettrone con spin antiparallelo. A tale struttura va ricondotta anche la forza del legame delle molecole  $\text{N}_2$ ,  $\text{O}_2$ ,  $\text{F}_2$  che abbiamo già ricordato essere decrescente passando dall'azoto al fluoro. Non riusciamo però a capire, da questa semplice osservazione, la formazione di molecole come  $\text{CH}_4$ ,  $\text{CCl}_4$  e simili; in realtà, a differenza dei casi precedenti, il carbonio ha un orbitale  $2p$  completamente vuoto: nell'interazione con l'idrogeno o con il cloro uno dei due elettroni  $2s$  passa in questo orbitale e l'atomo di carbonio presenta quattro elettroni (uno  $2s$  e tre  $2p$ ) non accoppiati, capaci di partecipare ciascuno ad un legame covalente. In altre parole, nell'interazione si ha una deformazione degli orbitali il cui effetto spaziale è la forma tetraedrica della molecola  $\text{CH}_4$ ; in modo analogo si spiega la formazione dell'etilene  $\text{C}_2\text{H}_4$  (molecola lineare con un legame triplo) e dell'acetilene  $\text{C}_2\text{H}_2$  (molecola lineare con un legame triplo), schematicamente mostrate in figura 19.12. La procedura matematica che corrisponde a questi processi si chiama *ibridizzazione degli orbitali*.

I legami covalente e ionico, estesi ad un gran numero di atomi, sono responsabili della struttura di molti materiali solidi, come discuteremo tra breve. Vi sono però dei solidi in cui gli elementi costitutivi sono molecole: il ghiaccio ne è un esempio. Passiamo pertanto in rassegna anche i tipi di forze che possono svilupparsi tra molecole e portare in opportune condizioni ad un legame stabile.

Le forze intermolecolari danno origine in generale a legami che sono molto più deboli di quelli esistenti all'interno delle molecole stesse; esse nascono infatti da interazioni tra dipoli elettrici (si riveda allo scopo il paragrafo 2.9).

Un primo caso è quello del legame tra due molecole polari, che hanno cioè un momento di dipolo elettrico permanente, come ad esempio quelle di  $\text{HCl}$ . Vi sono poi molecole come  $\text{CH}_4$  e  $\text{CO}_2$  le quali, pur non possedendo un momento permanente, presentano un momento istantaneo, prodotto dalla configurazione istantanea degli elettroni, che a sua volta induce un momento di dipolo in una molecola vicina: ne risulta una forza attrattiva.

Queste interazioni, chiamate normalmente *forze di van der Waals*, hanno un andamento con la distanza  $r$  tra le molecole tale che l'energia potenziale vari come  $1/r^6$  e quindi si manifestano solo se le molecole sono praticamente a contatto, come avviene in fase liquida e in fase solida. Alla stessa causa sono dovute le deboli forze che si sviluppano tra atomi di un gas nobile.

Un caso differente, che porta a legami relativamente più forti, è il cosiddetto *legame a idrogeno*, che ha somiglianza con il legame ionico tra atomi. In una molecola polare contenente uno o più atomi di idrogeno questi assumono in pratica lo stato di ione, a causa dell'asimmetria della distribuzione della carica nel legame covalente, e possono attirare l'estremo negativo di un'altra molecola: si parla della formazione di un *ponte a idrogeno*. Tipico è il caso dell'acqua, che porta tra l'altro alla struttura del ghiaccio, mostrata in figura

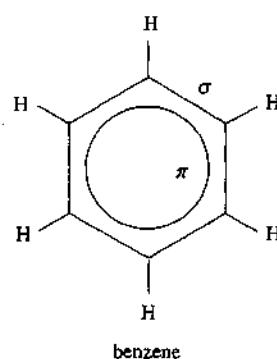


Figura 19.10

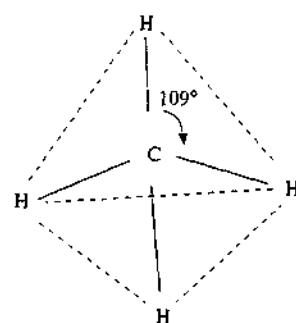
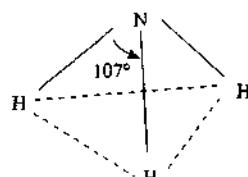
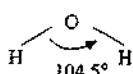
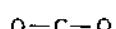


Figura 19.11

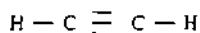
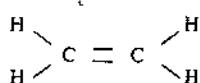
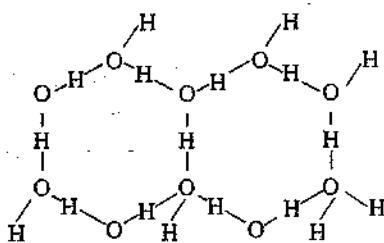


Figura 19.12

Legame a idrogeno



Nella struttura tridimensionale ogni ossigeno ha due ponti a idrogeno

Figura 19.13

19.13 (proiezione piana). Si tratta di una struttura molto aperta che spiega come mai la densità del ghiaccio sia minore di quella dell'acqua (nella fase liquida il legame non è rigido e l'impaccamento delle molecole è maggiore); si comprende pure come aumentando la pressione si faciliti la rottura del legame, con conseguente diminuzione della temperatura di fusione (volume primo, paragrafo 11.9). Un altro esempio di ponte a idrogeno si ha tra molecole di ammoniaca.

Nella tabella 19.3 sono elencate le energie necessarie per rompere i legami di alcuni casi corrispondenti a legami ionici, covalenti e intermolecolari.

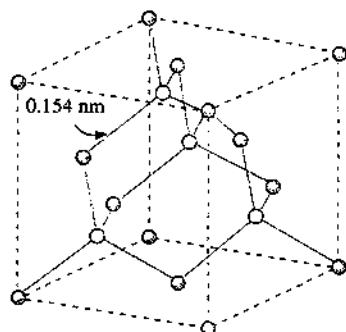
Tabella 19.3 Energie di legame			
molecole con legame ionico	KF NaCl CsI	5.2 eV 4.2 eV 3.6 eV	molecole con legame covalente
			H <sub>2</sub> 4.5 eV O <sub>2</sub> 5.1 eV N <sub>2</sub> 9.8 eV
ponti a idrogeno	~ 0.1 eV		legami tra atomi di gas nobili ~ 0.01 eV

### Solidi ionici

Vediamo adesso l'applicazione delle proprietà di legame, discusse in precedenza, alla formazione di un solido e cominciamo dai cosiddetti *solidi ionici*. Questi sono costituiti da ioni positivi e negativi, ovviamente di atomi diversi, formatisi attraverso la cessione e l'acquisto di elettroni, che sono la caratteristica del legame ionico; gli ioni stanno ai vertici di un reticolo cristallino in una situazione di equilibrio tra le attrazioni e le repulsioni elettriche delle varie cariche ioniche. Il caso del cloruro di sodio è già stato mostrato nella figura 16.51; la distanza minima tra due ioni diversi è  $2.8 \cdot 10^{-10}$  m, leggermente superiore a quella nella molecola semplice, in quanto l'equilibrio avviene in condizioni diverse.

La struttura elettronica degli atomi che partecipano al legame ionico acquista simmetria sferica e questi si impaccano nel cristallo come se fossero sfere; ne derivano forme cristalline cubiche o esagonali.

Nei solidi ionici non ci sono elettroni liberi e quindi essi sono cattivi conduttori dell'elettricità e del calore. Essendo il legame ionico piuttosto forte questi composti sono solidi a temperatura ambiente e anzi la loro temperatura di fusione è piuttosto elevata (1073 K per NaCl). Dato che un'eventuale eccitazione degli elettroni a livelli superiori di energia richiederebbe una notevole energia, spesso questi solidi sono trasparenti alla luce visibile: si trova che invece assorbono nell'infrarosso, a energie dei fotoni paragonabili all'energia di eccitazione di stati vibrazionali del cristallo.



Gli atomi ai vertici e al centro delle facce della cella cubica hanno legami covalenti con atomi al di fuori della cella

Figura 19.14

### Solidi covalenti

In un *sólido covalente* gli atomi sono tenuti in posizioni fisse da legami covalenti che, a differenza del legame ionico, sono direzionali: basta rivedere ad esempio la struttura della molecola di metano (figura 19.11). Di conseguenza non si ha un impaccamento secondo sfere, poiché la struttura è determinata dalla geometria del legame. Nel diamante, che è una delle due forme in cui il carbonio si trova nella fase solida, i legami covalenti tra gli atomi di carbonio si dispongono come indicato nella figura 19.14 e la stessa struttura vale per il silicio e per il germanio: ogni atomo è legato da legami semplici del tipo  $\sigma$  ad altri quattro atomi.

I solidi covalenti, come del resto quelli ionici, sono difficili da deformare perché il legame è forte: presentano però fragilità, a causa della direzionalità dei legami. Sono anch'essi cattivi conduttori dell'elettricità e del calore per mancanza di elettroni liberi nel reticolato e presentano elevate temperature di fusione. La trasparenza alla luce dipende dagli stati eccitati accessibili agli elettroni; nel diamante sarebbe richiesta un'energia notevole e infatti esso è trasparente anche nel visibile, mentre il silicio è trasparente a grandi lunghezze d'onda ed è opaco nel visibile.

Il carbonio si presenta in un'altra forma di solido, sempre covalente: la grafite. La struttura cristallina è completamente diversa da quella del diamante: gli atomi di carbonio sono



Figura 19.15

disposti ai vertici di esagoni che giacciono sullo stesso piano (figura 19.15) ed ogni atomo ha tre legami di tipo  $\sigma$  con altrettanti atomi e un quarto legame di tipo  $\pi$  che risulta delocalizzato. L'orbitale  $\pi$  cioè è esteso e questo permette agli elettroni in esso contenuti una libertà di movimento lungo il piano; infatti la grafite è conduttrice lungo i piani contenenti gli esagoni; invece gli elettroni non passano da un piano all'altro e ciò è confermato dal fatto che la grafite non è conduttrice ortogonalmente ai suddetti piani. Il legame tra tali piani, del tipo van der Waals, è molto debole ed essi possono scorrere facilmente uno rispetto all'altro: di qui la proprietà della grafite come lubrificante.

### Solidi metallici

I solidi cristallini con proprietà metalliche sono costituiti da atomi caratterizzati dall'avere uno o più elettroni esterni debolmente legati. Il *legame metallico* si può considerare come un caso limite del legame covalente in cui tutti gli atomi del reticolto mettono in comune gli elettroni suddetti e questi riempiono gli spazi interatomici. Tali elettroni non sono legati ad una particolare coppia di atomi, ma appartengono a tutto il cristallo, sono delocalizzati; essi hanno nel metallo una distribuzione uniforme, ma dinamica nel senso che possono muoversi all'interno del metallo pur restando intatto il legame generale.

La forza del legame metallico è compresa in un ampio spettro (vedi tabella 19.4); alla temperatura ambiente i metalli sono solidi, con l'eccezione del mercurio. L'impaccamento nel cristallo avviene di norma per sfere, in quanto dopo la cessione degli elettroni la struttura elettronica resta a simmetria sferica.

I metalli sono buoni conduttori di elettricità e calore, avendo elettroni liberi all'interno del reticolto; essi assorbono la luce visibile in quanto gli elettroni possono facilmente passare in stati eccitati accessibili, come discuteremo nei paragrafi successivi.

### Solidi molecolari

Sono quelli formati da molecole, legate dalle forze di origine dipolare: l'anidride carbonica solida (ghiaccio secco), il metano, l'idrogeno, l'ossigeno, l'azoto solidi costituiscono alcuni esempi. Allo stesso tipo di legame è dovuta l'esistenza della fase solida dei gas nobili. Essendo il legame piuttosto debole tali solidi sono facilmente comprimibili e deformabili e la temperatura di fusione è bassa: per azoto e argon si ha, rispettivamente, 63 K e 83 K.

Tra i solidi molecolari è compreso il ghiaccio; a causa del legame più forte la temperatura di fusione è decisamente più alta.

Data la loro struttura i solidi molecolari non sono conduttori.

Nella tabella 19.4 sono elencate, per alcuni solidi covalenti e metallici, l'energia di dissociazione (cioè l'energia necessaria per ottenere la fase gassosa dalla fase solida), la temperatura di fusione e la resistività.

Tabella 19.4

	$W_{\text{dis}}$ (kJ/mole)	$T_f$ (K)	$\rho$ ( $\Omega \cdot \text{m}$ )
silicio	456.0	1700	$2.3 \cdot 10^3$
germanio	374.7	1232	0.46
litio	161.6	452	$8.55 \cdot 10^{-8}$
argento	284.3	1234	$1.59 \cdot 10^{-8}$
alluminio	329.5	932	$2.65 \cdot 10^{-8}$
rame	337.9	1356	$1.67 \cdot 10^{-8}$
platino	566.1	2045	$10.6 \cdot 10^{-8}$

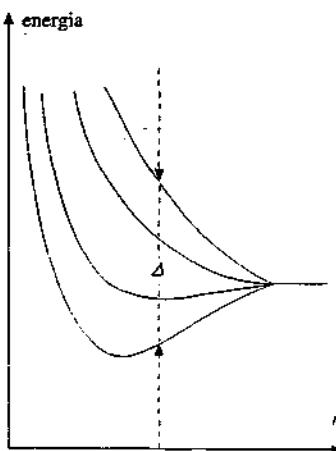


Figura 19.16

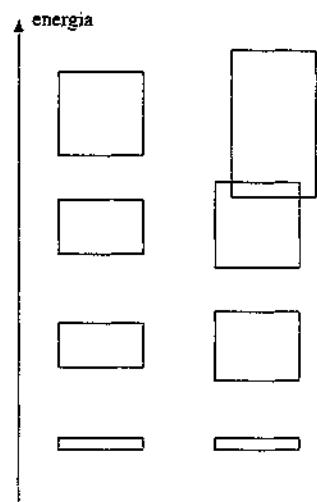


Figura 19.17

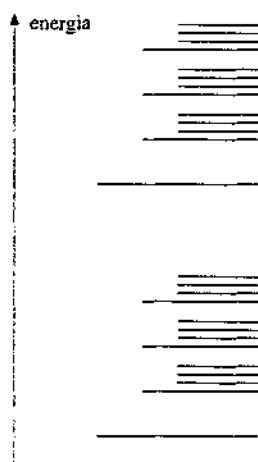


Figura 19.18

### Bande di energia

Quando due atomi formano una molecola i livelli energetici a disposizione degli elettroni si modificano e lo abbiamo visto ad esempio nel caso della molecola di idrogeno: al singolo livello  $1s$  di ciascun atomo corrispondono i due livelli  $\sigma_1s$  e  $\sigma_2s$  della molecola, uno inferiore e uno superiore nel valore dell'energia rispetto al livello  $1s$  (figura 19.7).

Il fatto è di carattere generale e presenta alcune caratteristiche che sono mostrate nella figura 19.16, riferita ad un ipotetico insieme di quattro atomi. Ciascun livello energetico del singolo atomo origina, per l'insieme di  $N$  atomi molto vicini tra loro, una *banda* di  $N$  livelli. La larghezza  $\Delta$  della banda dipende dal grado di sovrapposizione delle funzioni d'onda; con una data distanza interatomica la sovrapposizione è maggiore per gli elettroni dei livelli più esterni e minore per quelli dei livelli più interni, che restano mediamente più vicini al nucleo: corrispondentemente la larghezza  $\Delta_{\text{ex}}$  è maggiore della larghezza  $\Delta_{\text{in}}$ . Nella pratica, il numero  $N$  di atomi è vicino al numero di Avogadro e le larghezze  $\Delta$  sono dell'ordine di qualche elettronvolt, per cui la separazione tra gli  $N$  livelli di una singola banda è molto piccola e l'energia dei livelli si può considerare una variabile continua all'interno della banda.

In figura 19.17 sono evidenziati due possibili casi di disposizione delle bande derivanti dai livelli dei singoli atomi di un cristallo: alcune bande sono separate oppure sovrapposte parzialmente. Si usa anche chiamare *banda proibita* l'intervallo di energia tra una banda e la successiva nel quale non ci sono livelli accessibili per gli elettroni.

Vedremo nel seguito che questa nozione di bande di energia, applicata in particolare agli elettroni di valenza, sarà fondamentale per caratterizzare un solido come conduttore o come isolante.

### Nota. Vibrazioni e rotazioni molecolari. Vibrazioni di un cristallo

I livelli energetici molecolari di cui abbiamo finora parlato sono i più importanti, ma non sono gli unici all'interno di una molecola. Le posizioni relative dei nuclei possono variare nel tempo (*moti vibrazionali*) e la molecola può compiere rotazioni attorno agli assi centrali d'inerzia (*moti rotazionali*). Entrambi i tipi di moto sono quantizzati ed è quantizzata l'energia totale  $U$  di uno stato molecolare, somma dei tre contributi, l'energia potenziale elettronica, l'energia vibrazionale e l'energia rotazionale:  $U = U_{\text{el}} + U_{\text{vib}} + U_{\text{rot}}$ . Nella figura 19.18 viene mostrato uno schema qualitativo dei livelli: al di sopra di un livello elettronico si trovano una serie di livelli vibrazionali, caratterizzati da una separazione  $\Delta U_{\text{vib}} \approx 0.1$  eV, e tra due livelli vibrazionali si situano i livelli rotazionali, caratterizzati da  $\Delta U_{\text{rot}} \approx 10^{-4}$  eV; la situazione si ripete per i vari livelli elettronici, la cui separazione è tipicamente  $\Delta U_{\text{el}} > 1$  eV.

Anche nei cristalli si hanno moti vibratori degli atomi attorno alle loro posizioni di equilibrio. Ad una data temperatura si ha una certa configurazione di oscillazioni, la cui energia è quantizzata: pertanto uno scambio di energia può avvenire solo per quantità discrete e questi quanti di energia si chiamano *fononi*. Lo sviluppo quantitativo di tali concetti ha permesso di spiegare il comportamento del calore specifico dei solidi cristallini in funzione della temperatura e le proprietà della conduzione del calore nei cristalli isolanti, cioè nei casi in cui il fenomeno è dovuto alle vibrazioni del reticollo e non alla presenza di elettroni di conduzione. Anche la propagazione e l'assorbimento di onde elastiche e le interazioni di elettroni, neutroni e fotoni con un reticollo cristallino vengono descritte facendo uso del concetto di fonone.

### 19.4 Il gas di elettroni liberi di Fermi

In un solido conduttore ciascun atomo rilascia uno o più elettroni, detti di conduzione, che pur essendo responsabili del legame metallico sono delocalizzati: essi appartengono a tutto il solido e non ad un particolare atomo. Dallo studio di questo sistema, detto gas di elettroni e assimilato ad un gas ideale, vennero dedotte alcune proprietà dei conduttori.

principalmente la legge di Ohm, come già discusso nel Capitolo 6, ma si incontrano difficoltà insormontabili per spiegare altre proprietà, su cui torneremo più avanti in questo paragrafo.

La prima trattazione quantistica è dovuta a Fermi, che la sviluppò secondo le linee seguenti. Si considera che gli elettroni siano rinchiusi in una scatola cubica di lato  $a$ , grande rispetto alle dimensioni atomiche, all'interno della quale la loro energia potenziale è costante: essi quindi non sono sottoposti a forze, salvo che non possono uscire dalla scatola.

Ciascun elettrone ha quantità di moto ed energia cinetica

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{hk}{2\pi} , \quad E_k = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{8\pi^2 m} , \quad (19.1)$$

dove si è utilizzata la relazione di de Broglie (18.19) con  $\lambda = 2\pi/k$ . Le onde elettroniche hanno un nodo sulle pareti della scatola e ciò fissa i possibili valori delle lunghezze d'onda, come si è visto nella trattazione delle onde stazionarie. Seguendo (15.41) con  $a_1 = a_2 = a_3 = a$  possiamo scrivere

$$k^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = \frac{\pi^2}{a^2} (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) \quad n_1, n_2, n_3 = 1, 2, 3, \dots$$

L'energia cinetica è dunque quantizzata secondo l'espressione

$$E_k = \frac{\hbar^2}{8ma^2} (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) = \frac{\hbar^2}{8ma^2} R^2 ;$$

$R$  rappresenta il raggio di una sfera in uno spazio tridimensionale di coordinate  $n_1, n_2, n_3$  e in funzione di  $E_k$  si ha

$$R = (8mE_k)^{1/2} \frac{a}{\hbar} ; \quad dR = \left( \frac{8m}{E_k} \right)^{1/2} \frac{a}{2\hbar} dE_k .$$

Il numero di valori di  $E_k$  compresi tra  $R$  e  $R + dR$ , cioè il numero di livelli che hanno numeri quantici compresi tra  $n_1$  e  $n_1 + dn_1$ ,  $n_2$  e  $n_2 + dn_2$ ,  $n_3$  e  $n_3 + dn_3$ , è eguale al volume della corteccia sferica compresa tra  $R$  e  $R + dR$ :

$$dN = 4\pi R^2 dR = \frac{16\pi a^3}{h^3} (2m)^{3/2} E_k^{1/2} dE_k .$$

Gli stati accessibili sono però quelli con  $n_1, n_2, n_3$  positivi, ovvero il volume da considerare è un ottavo di quello calcolato; inoltre ciascun livello è occupabile da due elettroni soltanto, in accordo col principio di esclusione di Pauli. Quindi il numero di elettroni per unità di volume la cui energia è compresa tra  $E_k$  ed  $E_k + dE_k$  è

$$dn = \frac{2dN}{8a^3} = \frac{4\pi}{h^3} (2m)^{3/2} E_k^{1/2} dE_k = 6.812 \cdot 10^{27} E_k^{1/2} dE_k , \quad (19.2)$$

il valore numerico essendo valido se le energie sono espresse in elettronvolt. Notiamo che la distribuzione  $dn/dE_k$  dipende solo dal valore dell'energia e non da caratteristiche del solido.

Nell'unità di volume ci sono  $n_0$  elettroni liberi; se immaginiamo che il solido sia alla temperatura  $T = 0$  K, il valore minimo della loro energia cinetica è zero ed il valore massimo  $E_F$  si ottiene integrando (19.2):

$$n_0 = \int_0^{E_F} dn = \frac{8\pi}{3h^3} (2m)^{3/2} E_F^{3/2} = 4.541 \cdot 10^{27} E_F^{3/2} ,$$

## Energia di Fermi

$$E_F = \frac{\hbar^2}{8m} \left( \frac{3n_0}{\pi} \right)^{2/3} = 3.646 \cdot 10^{-19} n_0^{2/3} \text{ eV} . \quad (19.3)$$

Tale valore massimo si chiama *energia di Fermi* ed è caratteristico del conduttore in quanto dipendente da  $n_0$ .

Se non valesse il principio di Pauli gli elettroni, pur avendo a disposizione moltissimi livelli, starebbero tutti nel livello più basso con energia nulla, se la temperatura fosse  $T = 0$ . Invece, proprio a causa del principio di esclusione gli elettroni non possono avere tutti la stessa energia; anche a  $T = 0$   $n_0$  elettroni occupano  $n_0/2$  livelli diversi, nei quali sono distribuiti secondo (19.2). Chiamando stato fondamentale del sistema questa distribuzione tra  $E_{k,\min} = 0$  ed  $E_{k,\max} = E_F$ , possiamo definire l'energia di Fermi come l'energia cinetica del più alto livello occupato nello stato fondamentale degli  $n_0$  elettroni.

Alcuni valori di  $E_F$ , calcolati tramite (19.3), sono elencati nella tabella 19.5; la densità elettronica  $n_0$  è determinata a partire dalla densità di atomi  $n_a = \rho N_A / A$  con la formula  $n_0 = n_r n_a$ , dove  $\rho$  è la densità del materiale,  $N_A$  il numero di Avogadro,  $A$  la massa molare e  $n_r$  il numero di elettroni ceduti da ciascun atomo.

Tabella 19.5 Energia di Fermi

metallo	$\rho (\text{kg/m}^3)$	$A (\text{kg/mole})$	$n_r$	$n_0 (\text{elettroni/m}^3)$	$E_F (\text{eV})$
Cu	$8.93 \cdot 10^3$	63.54	1	$8.46 \cdot 10^{28}$	7.03
Ag	$10.50 \cdot 10^3$	107.87	1	$5.86 \cdot 10^{28}$	5.50
Zn	$7.13 \cdot 10^3$	65.37	2	$13.14 \cdot 10^{28}$	9.42
Al	$2.70 \cdot 10^3$	26.98	3	$18.08 \cdot 10^{28}$	11.66
Pb	$11.34 \cdot 10^3$	207.19	4	$13.18 \cdot 10^{28}$	9.44

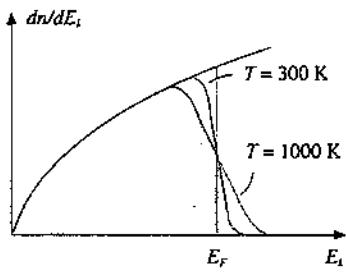
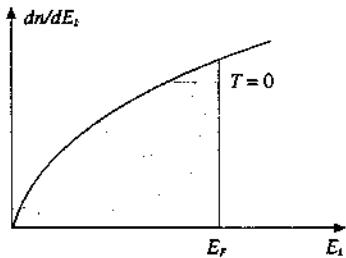


Figura 19.19

Quando la temperatura è maggiore di zero gli elettroni possono essere eccitati verso un livello superiore, purché questo sia vuoto. L'energia comunicabile per via termica, attraverso urti con gli ioni del reticolo, è dell'ordine di  $k_B T$ , che alla temperatura ambiente  $T = 300$  K vale 0.026 eV, oltre cento volte inferiore ai valori tipici dell'energia di Fermi. Quindi solo gli elettroni con energia molto vicina a  $E_F$  possono, ricevendo  $k_B T$ , superare  $E_F$  e andare ad occupare un livello vuoto, lasciando libero il livello di partenza; gli elettroni nei livelli più profondi invece non hanno tale possibilità in quanto gli stati distanti circa  $k_B T$  dalla loro energia sono già occupati. In sostanza è molto piccola la percentuale di elettroni che possono essere eccitati termicamente (vedi esempio 19.1) e pertanto la distribuzione degli stati occupati a temperatura  $T > 0$  non è molto diversa da quella degli stati occupati a  $T = 0$ . Nella figura 19.19 sono mostrate la funzione  $dn/dE_k$  calcolata tramite (19.2) e, qualitativamente, le modifiche a  $T = 300$  K e  $T = 1000$  K, modifiche appunto localizzate intorno a  $E_F$ .

Il calcolo quantitativo delle curve modificate si esegue partendo dall'espressione delle probabilità che ha un elettrone di occupare un livello con energia  $E_k$ ; questa risulta

$$p(E_k, T) = \frac{1}{e^{(E_k - E_F)/k_B T} + 1} , \quad (19.4)$$

in base al calcolo quantistico effettuato nell'ambito della cosiddetta *statistica di Fermi-Dirac*. La distribuzione effettiva è dunque

$$\frac{dn(T)}{dE_k} = p(E_k, T) \frac{dn(T=0)}{dE_k} .$$

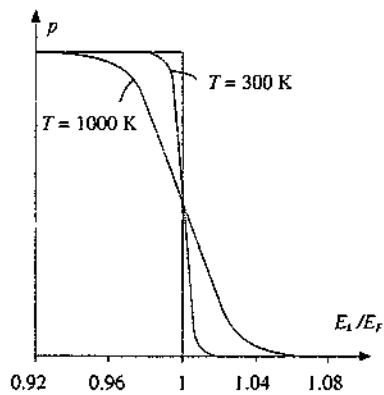


Figura 19.20

L'andamento di  $p(E_k, T)$  a  $T = 0$ ,  $T = 300$  K e  $T = 1000$  K è mostrato per il rame in prossimità di  $E_F$  nella figura 19.20; in particolare si noti che per  $T = 0$   $p(E_k, 0) = 1$  se  $E_k < E_F$  e  $p(E_k, 0) = 0$  se  $E_k > E_F$ : la curva  $dn(T=0)/dE_k$ , matematicamente non limitata, è in effetti tagliata a  $E_k = E_F$ .

**Esempio 19.1**

Calcolare, nel rame, quanti elettroni hanno energia compresa tra  $E = E_F - k_B T$  e  $E_F$  con  $T_1 = 300 \text{ K}$  e con  $T_2 = 1000 \text{ K}$ .

**Soluzione**

Dato che  $k_B T_1 = 0.026 \text{ eV}$ ,  $k_B T_2 = 0.086 \text{ eV}$  e, da (19.3),  $E_F = 7.026 \text{ eV}$ ,  $E_1 = E_F - k_B T_1 = 7.0 \text{ eV}$ ,  $E_2 = E_F - k_B T_2 = 6.94 \text{ eV}$ .

Integriamo la (19.2):

$$n = \int_{E_1}^{E_F} dn = \frac{8\pi}{3h^3} (2m)^{3/2} (E_F^{3/2} - E_1^{3/2}) = 4.541 \cdot 10^{27} (E_F^{3/2} - E_1^{3/2})$$

$$\Rightarrow n_1 = 4.69 \cdot 10^{26} \text{ m}^{-3} = 0.55\% \text{ di } n_0 \quad , \quad n_2 = 1.55 \cdot 10^{27} \text{ m}^{-3} = 1.83\% \text{ di } n_0$$

Si vede che la percentuale di elettroni suscettibile di subire eccitazione termica è limitata ( $n_0$  è stato preso dalla tabella 19.5).

Nella figura 19.21 è riportata la probabilità (19.4) per valori positivi di  $\Delta E = E_k - E_F$ , misurata in unità di  $k_B T$ ; per  $\Delta E = 7k_B T$  la probabilità di occupazione è già inferiore a  $10^{-3}$ . Nel nostro caso con  $7k_B T = 0.182 \text{ eV}$  a  $T = 300 \text{ K}$ , meno di un elettrone su mille ha energia cinetica superiore a  $E_F + 7k_B T = 7.208 \text{ eV}$ .

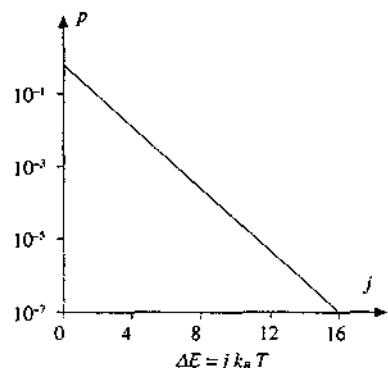


Figura 19.21

**Esempio 19.2**

Calcolare l'energia cinetica complessiva e l'energia cinetica media del gas di elettroni liberi a  $T = 0$ .

**Soluzione**

L'energia cinetica di  $dn$  elettroni aventi energia cinetica  $E_k$  è, da (19.2),

$$E_k dn = \frac{4\pi}{h^3} (2m)^{3/2} E_k^{3/2} dE_k$$

e quindi in totale

$$E_{k,\text{tot}} = \int_0^{E_F} E_k dn = \frac{4\pi}{h^3} (2m)^{3/2} \frac{2}{5} E_F^{5/2}$$

D'altra parte il numero totale di elettroni è già stato calcolato,

$$n = \frac{8\pi}{3h^3} (2m)^{3/2} E_F^{3/2} \quad ,$$

e si riconosce che

$$E_{k,\text{tot}} = \frac{3}{5} n E_F \quad .$$

Dividendo per  $n$  si ha l'energia media di un elettrone a  $T = 0$ :

$$E_{k,m} = \frac{3}{5} E_F = 0.6 E_F \quad .$$

Da quanto detto in precedenza si deduce inoltre che  $E_{k,\text{tot}}$  e  $E_{k,m}$  sono praticamente indipendenti dalla temperatura. Detta  $v_F$  la velocità corrispondente a  $E_F$  e  $v_m$  la velocità media, si ha

$$v_F = \sqrt{\frac{2E_F}{m}} \quad , \quad v_m = \sqrt{0.6} \quad v_F = 0.77 v_F \quad .$$

Nel rame  $E_F = 7.03 \text{ eV}$ ,  $v_F = 1.57 \cdot 10^6 \text{ m/s}$  e  $v_m = 1.21 \cdot 10^6 \text{ m/s}$  (si riveda l'esempio 6.1).

In conclusione il gas di elettroni liberi si comporta in maniera molto diversa dal gas ideale classico. Gli elettroni si muovono con energie comprese entro uno spettro determinato e l'energia di ciascuno non cambia a meno che esso non riesca ad assorbire una quantità di energia tale da portarlo in un livello vuoto. Per la maggior parte di essi occorrerebbe un'energia di molti elettronvolt, che non può essere comunicata per via termica, e pertanto essi restano in una situazione per così dire dinamicamente bloccata. L'energia cinetica complessiva non è proporzionale alla temperatura e anzi varia molto poco con questa; a temperatura ambiente l'energia cinetica media è maggiore di  $k_B T$  per almeno due ordini di grandezza.

Il modello di Fermi ha aperto la strada alla soluzione del problema reale degli elettroni nei metalli, in cui occorre considerare anche l'interazione con gli ioni del reticolo, come accenneremo nel paragrafo 19.5. Esso inoltre ha fornito la prima spiegazione di un problema irrisolto nella teoria cinetica classica, quello del calore specifico dei metalli: il valore limite di questo è noto essere  $3R$ , come ci si aspetta da un sistema con 6 gradi di libertà (vedi volume primo, paragrafi 10.7 e 11.10), ma non si capiva come, in aggiunta a tale contributo del reticolo, non ci fosse un contributo degli elettroni liberi di muoversi, pari a quello di un gas monoatomico e cioè  $3R/2$ . La ragione è stata vista prima: essendo molto piccola la percentuale che può assorbire energia possiamo dire che gli elettroni non vengono eccitati termicamente e quindi è come se non ci fossero.

Anche il debole paramagnetismo osservato nella maggior parte dei metalli si spiega facilmente. Gli elettroni hanno un momento angolare intrinseco  $S$  e un momento magnetico  $\mu_e$  opposto a  $S$  (paragrafo 9.10). In un campo magnetico esterno  $B$  essi tendono ad orientarsi con  $\mu_e$  parallelo e concorde a  $B$  (stato di minima energia magnetica) oppure con  $\mu_e$  parallelo e discorde a  $B$  (stato di massima energia magnetica). L'energia viene modificata, diventando rispettivamente  $E_k - \mu_e B$  ed  $E_k + \mu_e B$ ; in corrispondenza la curva di distribuzione della figura 19.19 si sposta verso sinistra o verso destra. Nella figura 19.22 l'effetto è esagerato, in quanto  $\mu_e B$  con  $B = 1 \text{ T}$  vale  $5.8 \cdot 10^{-5} \text{ eV}$ . Nel complesso si trova che in ogni intervallo di energia ci sono più elettroni con  $\mu_e$  concorde a  $B$  che elettroni con  $\mu_e$  discorde a  $B$ . Questo fatto porta ad un momento magnetico risultante, dovuto agli elettroni liberi, che è concorde a  $B$ , cioè ad un comportamento paramagnetico; gli ioni del reticolo da soli darebbero un effetto diamagnetico. Il calcolo quantitativo dà una suscettività magnetica in accordo, come ordine di grandezza, con i valori misurati.

Infine mettiamo in evidenza il collegamento con il *lavoro di estrazione*: questo risulta eguale all'energia che occorre comunicare all'elettrone che si trova nel livello occupato più alto per uscire dal metallo; a  $T = 0$  tale livello coincide con l'energia di Fermi. Visto che le proprietà del gas di elettroni dipendono poco dalla temperatura, si deduce che ne dipenderà poco anche il lavoro di estrazione, come in effetti si verifica.

Nella figura 19.23 è mostrata l'energia totale minima di un elettrone, pari a  $-eV_0$  rispetto ad un livello zero corrispondente ad un elettrone non chiuso dentro il metallo, ma fermo in un punto immediatamente esterno; l'energia totale massima è  $-eV_0 + E_F$ . Il lavoro di estrazione, secondo la definizione data sopra è

$$W = 0 - (-eV_0 + E_F) = eV_0 - E_F ;$$

dalla misura di  $W$  e dal calcolo di  $E_F$  si può determinare il valore di  $eV_0 = W + E_F$ , modulo dell'energia potenziale degli elettroni chiusi nella scatola. Ad esempio nel rame, con  $W = 4.1 \text{ eV}$  e  $E_F = 7.0 \text{ eV}$ , si trova  $eV_0 = 11.1 \text{ eV}$ . D'altra parte  $eV_0$  può essere ottenuta in modo indipendente, come spiegato nella nota, e quindi noto  $W$ , ad esempio dall'effetto fotoelettrico, si può calcolare  $E_F$  e verificare (19.3).

#### Nota. Determinazione di $eV_0$

In un esperimento di diffrazione di elettroni (paragrafo 18.7) lo studio della figura di diffrazione permette di calcolare la lunghezza d'onda  $\lambda$  degli elettroni incidenti. Questi, accelerati da una d.d.p.  $V$ , hanno quantità di moto  $p$  ed energia cinetica  $E_k = p^2/2m = eV$ ; quindi

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2meV}}$$

Se il bersaglio è un cristallo metallico l'accordo tra il valore misurato di  $\lambda$  e quello così calcolato risulta ottimizzato scrivendo

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2me(V + V_0)}}$$

e ciò si interpreta ammettendo che gli elettroni siano ulteriormente accelerati entrando nel metallo da una d.d.p. interna  $V_0$ ; questa  $V_0$  è la stessa che impedisce agli elettroni di conduzione di uscire dal cristallo.

Osserviamo che nella figura 19.23 sono importanti le differenze e non i valori assoluti; se il conduttore assume un potenziale  $V_c$ , ai valori delle energie va aggiunto il termine costante  $-eV_c$  e il lavoro necessario per estrarre un elettrone non cambia.

Dalle considerazioni precedenti si capisce anche qualitativamente l'esistenza dell'effetto termoelettronico (paragrafo 6.5). Ad alta temperatura il numero di elettroni con energia abbastanza superiore a  $E_F$  diventa significativo; quando l'eccesso di energia  $E_k - E_F$  supera  $W$  gli elettroni possono uscire dal metallo.

## 19.5 Gas di elettroni all'interno di un reticolo cristallino

Dato che la trattazione del gas di elettroni è importante per spiegare il comportamento degli elettroni di conduzione, bisogna rappresentare l'effetto della presenza del reticolo in maniera più realistica, e cioè non semplicemente con la scatola del paragrafo 19.4.

L'energia potenziale di un elettrone non può essere costante, in quanto essa dipende dalla distanza dagli ioni del reticolo. Per rendere l'idea consideriamo un ipotetico reticolo unidimensionale formato da una fila di ioni equispaziati; il grafico dell'energia potenziale è mostrato nella figura 19.24: essa ha un massimo locale nel punto di mezzo tra due ioni, tende a  $-\infty$  nelle immediate vicinanze di uno ione e alla fine del reticolo aumenta, con ciò indicando che per estrarre un elettrone dal cristallo occorre spendere un certo lavoro (nella scatola il dislivello sarebbe infinito). Più concretamente diciamo che all'interno di un reticolo un elettrone è soggetto ad un potenziale che varia con la stessa periodicità del reticolo.

La soluzione dell'equazione di Schrödinger con un potenziale che gode di questa proprietà mostra che le onde elettroniche possono propagarsi liberamente nel cristallo se il reticolo è perfetto, nel senso che discuteremo più avanti. Il fatto nuovo più importante è che i livelli energetici non sono distribuiti senza interruzione da un valore minimo ad un valore massimo, come avviene per gli elettroni liberi. La relazione tra energia e numero d'onde non è più quella data da (19.1), graficamente rappresentata da una parabola, ma è più complicata. Limitandoci di nuovo al reticolo lineare, si trova la situazione della figura 19.25. L'energia, che ora non è solo cinetica, presenta discontinuità ai valori  $k = \pm \pi/a, \pm 2\pi/a, \pm 3\pi/a, \dots$ , essendo  $a$  il passo del reticolo (il segno di  $k$  significa moto concorde o discorde all'asse  $x$ ). Formalmente, in corrispondenza ai suddetti valori di  $k$  non esistono soluzioni ondulatorie dell'equazione di Schrödinger; in effetti avviene che a quelle particolari lunghezze d'onda le onde elettroniche subiscono riflessioni in modo tale da dar luogo a onde stazionarie, che non possono rappresentare un moto progressivo degli elettroni.

I valori possibili dell'energia risultano così raggruppati in bande di livelli. Il risultato era prevedibile, secondo quanto esposto alla fine del paragrafo 19.3, essendo il reticolo formato da un insieme di atomi. In particolare, nel caso di un elemento come litio, sodio, rame, argento, i cui atomi si privano di un elettrone, il livello atomico corrispondente ( $2s, 3s, \dots$ ) dà luogo a una banda di  $N$  livelli, se  $N$  sono gli atomi considerati, in cui possono stare  $2N$  elettroni: siccome gli atomi partecipanti ne hanno ceduti  $N$  la banda è semipiena. Invece i livelli inferiori formano bande piene: in un livello atomico pieno ci sono due elettroni e quindi  $N$  atomi forniscono  $2N$  elettroni che riempiono gli  $N$  livelli disponibili. L'energia di Fermi, sempre intesa come energia del più alto livello pieno, cade a metà dell'ultima banda.

Quando nel conduttore agisce un campo elettrico esterno, gli elettroni che acquistano energia sono solo quelli vicini alla sommità della banda semipiena, in quanto possono portarsi in livelli vuoti: in sostanza si tratta dello stesso ragionamento svolto per l'eccitazione termica (per il calcolo numerico si veda il successivo esempio 19.3).

In un reticolo reale l'aumento di energia è limitato da due fatti che comportano uno scambio di energia tra elettrone e reticolo. Nel reticolo ci sono imperfezioni, costituite da impurezze (atomi di elementi estranei) e da irregolarità geometriche, dovute a come si è formato il reticolo e a quali sollecitazioni è stato sottoposto: inoltre gli ioni possono oscillare.

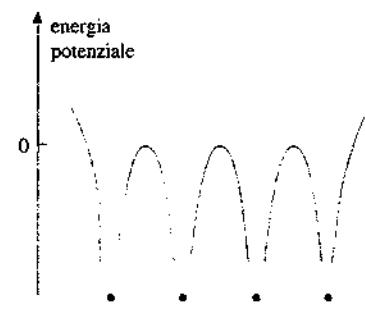


Figura 19.24

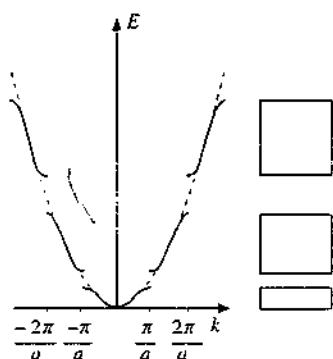


Figura 19.25



Figura 19.26

Le interazioni sia con le impurezze che con i fononi (tramite cui si rappresentano i moti oscillatori) causano una perdita di energia e l'elettrone ritorna in un livello di minore energia, annullando l'effetto del campo elettrico. Tra il processo di cessione di energia all'elettrone da parte del campo elettrico e i processi di perdita di energia si stabilisce un regime di equilibrio dinamico, caratterizzato da un moto di deriva degli elettroni con velocità costante invece che con accelerazione costante ovvero, in termini quantitativi, dalla legge di Ohm che scriviamo nella forma (6.17).

La conduttività ha un'espressione formalmente eguale a (6.16),

$$\sigma = \frac{n e^2 \tau}{m^*} , \quad (19.5)$$

ma con significato dei simboli un po' diverso;  $n$  è il numero effettivo di elettroni per unità di volume che partecipano al processo di conduzione,  $\tau$  il tempo medio tra due collisioni e  $m^*$  la *massa efficace dell'elettrone*, così definita: posto che sull'elettrone, la cui accelerazione istantanea è  $a$ , agiscono sia una forza elettrica esterna  $F_e$  che una forza  $F_i$  dovuta all'interazione col reticolo, così che  $F_e + F_i = ma$ , la massa efficace è  $m^* = F_e/a$ . All'applicazione della forza esterna l'elettrone reagisce come se avesse massa  $m^*$  e in questa grandezza è contenuto l'effetto del reticolo; solo se l'elettrone fosse libero sarebbe  $m^* = m$ . In generale  $m^*$  dipende dall'energia dell'elettrone, ma di norma viene calcolata all'energia di Fermi, poiché gli elettroni di conduzione hanno all'incirca sempre questa energia. In un buon conduttore come il rame è  $m^* \approx 1.1 m$ ; nel ferro invece l'interazione col reticolo è tale per cui  $m^* \approx 10 m$  e ne deriva una condutività molto inferiore a quella del rame.

Il tempo medio  $\tau$  è legato alla distanza media  $\ell$  tra due collisioni dalla relazione  $\tau = \ell/v_F$ , dove  $v_F$  è la velocità di Fermi.

### Esempio 19.3

La condutività del rame a temperatura ambiente è  $\sigma = 5.88 \cdot 10^7 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$ ; assumendo  $n = 8.46 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$  e  $m^* = m$ , calcolare  $\tau$  e  $\ell$ . Ripetere il calcolo a  $T = 4 \text{ K}$  dove, se il rame è ultrapuro, si misura una condutività 10<sup>5</sup> volte maggiore. Calcolare inoltre, a temperatura ambiente, l'energia comunicata ad un elettrone da un campo elettrico  $E = 1 \text{ V/m}$ .

#### Soluzione

Da (19.5) e da  $v_F = 1.57 \cdot 10^6 \text{ m/s}$  (esempio 19.2) abbiamo

$$\tau = \frac{m\sigma}{ne^2} = 2.47 \cdot 10^{-14} \text{ s} , \quad \ell = \tau v_F = 3.88 \cdot 10^{-8} \text{ m} :$$

la distanza media tra due collisioni è oltre 100 volte maggiore della distanza interatomica. A  $T = 4 \text{ K}$ ,  $\ell$ , come  $\sigma$ , aumenta di un fattore 10<sup>5</sup> e vale  $3.88 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 4 \text{ mm}$ : il reticolo ostacola molto poco il moto degli elettroni.

Su una distanza  $\ell$  l'energia comunicata dal campo elettrico è

$$e E \ell = 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 1 \cdot 3.88 \cdot 10^{-8} \text{ J} = 3.88 \cdot 10^{-27} \text{ eV} .$$

Si tratta di un valore molto inferiore all'energia di Fermi. D'altra parte già un campo elettrico così basso dà luogo ad una densità di corrente molto elevata ( $5.88 \cdot 10^7 \text{ A/m}^2$ ), non sopportabile dal rame in condizioni normali.

I due processi che disturbano il moto degli elettroni sono diversamente influenzati dalla temperatura: l'effetto delle imperfezioni in pratica non dipende da  $T$ , mentre ne dipende l'effetto dovuto alle oscillazioni. La resistività  $\rho = 1/\sigma$  si può esprimere, secondo la *formula di Matthiessen*, come somma di due termini,

$$\rho = \rho_i + \rho_s .$$

Confrontando con (19.5), per il tempo di rilassamento si può scrivere

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_i} + \frac{1}{\tau_f}$$

Sperimentalmente a temperature vicine allo zero assoluto si ha il comportamento della figura 19.27. Da un lato si vede che per  $T \rightarrow 0$  il contributo  $\rho_i$  delle oscillazioni si spegne e resta il contributo costante  $\rho_r$ , detta anche resistività residua; dall'altro  $\rho_f$  risulta crescere linearmente con la temperatura: ne consegue in particolare che  $\tau_f$  va come  $1/T$ .

L'apporto delle impurezze e dei difetti reticolari alla resistività aumenta al crescere della densità nel cristallo di tali imperfezioni e ciò suggerisce la possibilità di ottenere, a prezzo di un aumento di resistività, un conduttore la cui resistività dipenda poco dalla temperatura. Il risultato si raggiunge, ad esempio, con una soluzione solida disordinata di due metalli; la costantana, lega rame-nichel, ha una resistività a temperatura ambiente che è superiore di circa 30 volte a quella del rame e di circa 7 volte a quella del nichel, ma ha un coefficiente di temperatura (vedi paragrafo 6.5) che è oltre un ordine di grandezza inferiore.

## 19.6 Conduttori e isolanti. Semiconduttori

La distribuzione dei livelli energetici degli elettroni in bande separate da intervalli proibiti è la principale caratteristica elettronica dei solidi. Al comportamento metallico, definibile come possibilità per gli elettroni di accedere a livelli vuoti ricevendo energia da un campo elettrico con conseguente formazione di una densità di corrente concorde al campo, corrisponde la struttura a bande già riportata nella figura 19.26: l'ultima banda in cui ci sono elettroni non è completamente riempita e quindi esistono livelli permessi vuoti e accessibili; a questa banda si dà il nome di *banda di conduzione* del metallo. Gli elettroni delle bande inferiori, che sono tutte piene, non possono acquistare energia e non partecipano al processo di conduzione.

Quella descritta non è l'unica possibilità per avere proprietà di conduzione. Può anche avvenire che l'ultima banda contenente elettroni sia completamente piena, ma sia parzialmente sovrapposta alla successiva banda vuota; allora gli elettroni hanno a disposizione i livelli della banda vuota e il solido è un conduttore. A questa categoria, detta dei *semimetallici*, appartengono ad esempio il magnesio, lo zinco, l'antimonio e il bismuto. Nel caso dello zinco sono delocalizzati i due elettroni  $4s$  e la banda corrispondente è piena; però la banda  $4p$ , che è vuota, è sovrapposta alla banda  $4s$ .

Non possono invece essere conduttori i solidi in cui l'ultima banda contenente elettroni è completamente piena e non è sovrapposta alla banda successiva; in effetti questa è la configurazione che caratterizza gli isolanti. L'ampiezza  $E_g$  della zona proibita (detta in inglese *gap*) è sufficientemente grande e non è possibile agli elettroni superarla né per eccitazione termica né per eccitazione elettrica. Nel diamante, che è un ottimo isolante,  $E_g = 5.33$  eV; nel cloruro d'argento, solido ionico,  $E_g = 3.2$  eV. Non possiamo in questo caso parlare di gas di elettroni, almeno nel senso originario di elettroni liberi di muoversi nel reticolo cristallino; gli elettroni di valenza sono tutti bloccati a formare i legami e non possono essere eccitati. L'ultima banda piena si chiama *banda di valenza* e la successiva banda vuota *banda di conduzione*.

### Semiconduttori intrinseci

Il silicio e il germanio, che hanno la stessa struttura reticolare del diamante, presentano un minor valore di  $E_g$ , 1.1 eV nel silicio e 0.66 eV nel germanio. A temperature prossime allo zero assoluto anche questi elementi si comportano come isolanti, anche se al crescere della temperatura non è del tutto trascurabile la probabilità che gli elettroni della parte superiore della banda di valenza possano passare, per eccitazione termica, nella banda di conduzione. I solidi con questa proprietà si chiamano *semiconduttori*.

Gli elettroni che, ad una certa temperatura, popolano la banda di conduzione hanno lo stesso comportamento degli elettroni di conduzione di un metallo: sotto l'azione di un campo elettrico acquistano energia e danno luogo ad una densità di corrente  $j$ . D'altra parte ogni elettrone che passa dalla banda di valenza alla banda di conduzione lascia nella banda di valenza un livello vuoto che viene chiamato *lacuna* (in inglese *hole*); l'esistenza delle lacune rende disponibili livelli che possono essere occupati da altri elettroni della banda di valenza e quindi si può avere un moto ordinato di cariche sotto l'azione di un campo elet-

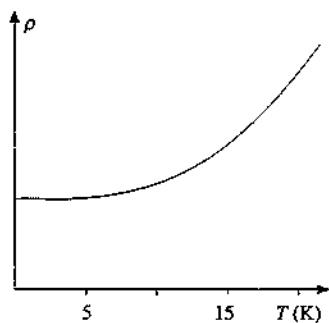


Figura 19.27

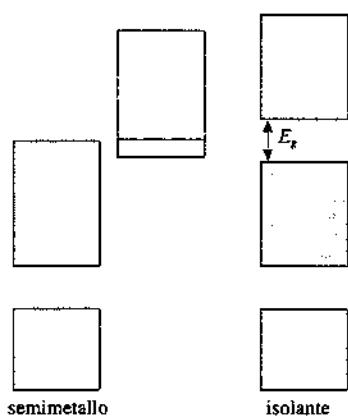


Figura 19.28

trico anche nella banda di valenza. Il passaggio di un tale elettrone da uno stato di energia  $-U_i$  ad uno stato di energia  $-U_j > -U_i$  equivale al passaggio di una carica elementare positiva dal livello  $U_i$  al livello  $U_j > U_i$ : si può dire equivalentemente che una lacuna ha acquistato energia e parlare di una densità di corrente  $j_h$  nella banda di valenza.

Possiamo pertanto così visualizzare il moto delle cariche nel semiconduttore in presenza di un campo elettrico esterno: abbiamo un flusso di carica negativa dovuto agli elettroni nella banda di conduzione e, rispetto alla nuvola stazionaria degli elettroni di valenza, abbiamo un flusso di carica positiva dovuto alle lacune nella banda di valenza. Chiamando  $n_e$ ,  $n_h$  le concentrazioni degli elettroni e delle lacune e  $v_e$ ,  $v_h$  le rispettive velocità di deriva, una opposta e una concorde al campo elettrico  $E$ , la densità di corrente si scrive secondo (6.7)

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_e + \mathbf{j}_h = (-e) n_e \mathbf{v}_e + e n_h \mathbf{v}_h .$$

I moduli delle velocità di deriva dei portatori di carica sono legati al modulo del campo elettrico dalle relazioni

$$v_e = \mu_e E , \quad v_h = \mu_h E ,$$

in cui le mobilità sono a priori da considerare diverse in quanto i moti dei due tipi di carica avvengono in condizioni fisiche diverse. Pertanto

$$\mathbf{j} = e (n_e \mu_e + n_h \mu_h) \mathbf{E} .$$

Si noti che le formule sono eguali a quelle sviluppate nel paragrafo 6.13 a proposito della conduzione elettrolitica.

Il processo di formazione delle cariche libere che abbiamo descritto comporta  $n_e = n_h = n$ , e questa condizione è la definizione di semiconduttore intrinseco, nel quale cioè le cariche sono quelle fornite esclusivamente dagli atomi del semiconduttore stesso. In conclusione si ha per la densità di corrente e per la condutività

$$\mathbf{j} = e n_i (\mu_e + \mu_h) \mathbf{E} , \quad \sigma = e n_i (\mu_e + \mu_h) . \quad (19.6)$$

Nella tabella 19.6 riportiamo per il silicio, il germanio e l'arsenuro di gallio i valori delle grandezze appena introdotte e di  $\sigma_0$ , definita più avanti.

Tabella 19.6 Alcune proprietà di semiconduttori a  $T=300$  K

	$E_g$ (eV)	$\mu_e$ ( $\text{m}^2/\text{Vs}$ )	$\mu_h$ ( $\text{m}^2/\text{Vs}$ )	$n_i$ ( $\text{m}^{-3}$ )	$\sigma$ ( $\Omega^{-1} \text{m}^{-1}$ )	$\sigma_0$ ( $\Omega^{-1} \text{m}^{-1}$ )
Si	1.11	0.135	0.05	$1.5 \cdot 10^{16}$	$4.4 \cdot 10^{-4}$	$0.93 \cdot 10^6$
Ge	0.66	0.39	0.19	$2.3 \cdot 10^{19}$	2.13	$0.75 \cdot 10^6$
GaAs	1.43	0.80	0.03	$7.5 \cdot 10^{12}$	$10^{-6}$	$1.03 \cdot 10^6$

Ricordiamo che nel rame a temperatura ambiente  $\sigma = 5.88 \cdot 10^7 \Omega^{-1} \text{m}^{-1}$  e  $n = 8.46 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$ ; confrontando le espressioni della condutività (19.5) e (19.6) in cui poniamo  $\mu_h = 0$  troviamo che la mobilità degli elettroni di conduzione nel rame è  $\mu = e \tau/m^* = e \tau/m = 4.34 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{Vs}$  (il valore di  $\tau$  è preso dall'esempio 19.3).

La concentrazione  $n_i$  dei portatori di carica dipende, come si è già detto, dalla temperatura: risulta che essa cresce con  $T$  secondo la legge

$$n_i = C (k_B T)^{3/2} e^{-E_g/2k_B T} , \quad (19.7)$$

dove  $C$  è una costante che dipende dal materiale. La (19.7) è valida se  $E_g >> k_B T$ , condizione che è sempre verificata in tutto l'intervallo di temperature in cui il materiale è solido. Il peso del termine esponenziale è preponderante nella variazione di  $n_i$  e, in prima approssimazione, scriviamo queste espressioni per la conduttività e la resistività:

$$\sigma = \sigma_0 e^{-E_F/2k_B T}, \quad \rho = \frac{1}{\sigma} = \rho_0 e^{E_F/2k_B T}. \quad (19.8)$$

La misura della resistività in funzione della temperatura fornisce un metodo per la determinazione di  $E_F$ .

#### Esempio 19.4

Ricavando dalla tabella 19.6 i valori della resistività e della concentrazione  $n_i$  nel silicio e nel germanio a  $T_0 = 300$  K, calcolarne i valori a  $T_1 = 200$  K e a  $T_2 = 400$  K.

#### Soluzione

A 300 K  $\rho(\text{Si}) = 1/\sigma = 2.27 \cdot 10^3 \Omega\text{m}$ ,  $\rho(\text{Ge}) = 0.47 \Omega\text{m}$ ,  $n_i(\text{Si}) = 1.5 \cdot 10^{16} \text{ m}^{-3}$ ,  $n_i(\text{Ge}) = 2.3 \cdot 10^{19} \text{ m}^{-3}$ . Applicando (19.8) si ottiene

$$\begin{aligned} \text{silicio} \quad & \rho(T_1)/\rho(T_0) = 4.6 \cdot 10^4 \Rightarrow \rho(200 \text{ K}) = 1.04 \cdot 10^8 \Omega\text{m} \\ & \rho(T_2)/\rho(T_0) = 4.7 \cdot 10^3 \Rightarrow \rho(400 \text{ K}) = 10.7 \Omega\text{m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{germanio} \quad & \rho(T_1)/\rho(T_0) = 5.9 \cdot 10^2 \Rightarrow \rho(200 \text{ K}) = 277 \Omega\text{m} \\ & \rho(T_2)/\rho(T_0) = 4.1 \cdot 10^2 \Rightarrow \rho(400 \text{ K}) = 1.93 \cdot 10^2 \Omega\text{m} \end{aligned}$$

Per le concentrazioni il rapporto è l'inverso di quello delle resistività e quindi i calcoli sono immediati; si verifica che le variazioni sono notevoli. Se si usasse la formula completa con il fattore  $(k_B T)^{3/2}$  si troverebbe che i risultati dati sopra sono approssimati entro un fattore 2.

L'esame della formula (19.8) e gli esempi numerici appena visti mostrano come la resistività di un semiconduttore diminuisca al crescere della temperatura. Notiamo che nei metalli si ha l'effetto contrario, cioè un aumento della resistività con la temperatura; dato che nei metalli il numero di elettroni che partecipano alla conduzione è quasi indipendente dalla temperatura, deduciamo da (19.5) che l'aumento è da ricondursi alla decrescita del tempo  $\tau$  al crescere di  $T$  (le collisioni si fanno più frequenti).

Infine menzioniamo soltanto che l'energia di Fermi nei semiconduttori intrinseci si colloca a metà dell'intervallo proibito tra la banda di valenza e la banda di conduzione.

#### Semiconduttori estrinseci

Nel silicio a temperatura ambiente la concentrazione  $n_i$  dei portatori intrinseci di carica è molto inferiore alla concentrazione atomica. Questa vale, essendo la densità del silicio  $\delta = 2.33 \cdot 10^{23} \text{ kg/m}^3$  e la massa molare  $A = 28.09 \cdot 10^{-3} \text{ kg/mole}$ ,  $n_{ai} = \delta N_A / A = 5.0 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$ . Il calcolo analogo per il germanio ( $\delta = 5.32 \cdot 10^{23} \text{ kg/m}^3$ ,  $A = 72.60 \cdot 10^{-3} \text{ kg/mole}$ ) dà  $n_{ai} = 4.4 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$ . Si ottiene quindi

$$\frac{n_i}{n_{ai}} = \frac{1.5 \cdot 10^{16}}{5.0 \cdot 10^{28}} = 3.0 \cdot 10^{-13} \text{ nel silicio}, \quad \frac{n_i}{n_{ai}} = \frac{2.3 \cdot 10^{19}}{4.4 \cdot 10^{28}} = 5.2 \cdot 10^{-10} \text{ nel germanio}.$$

Tali valori mostrano che la conduzione intrinseca può essere evidenziata soltanto in un cristallo molto puro; se esiste una concentrazione di determinate impurezze (atomi estranei) a livelli paragonabili o superiori a  $n_i$ , il loro contributo alla conduzione attraverso cessione di elettroni o di lacune si aggiunge al contributo intrinseco e può mascherarlo completamente.

In effetti è proprio con l'immissione controllata di opportune impurezze che si riesce ad ottenere un notevole aumento della concentrazione di elettroni o di lacune, modificando così le proprietà elettriche del semiconduttore. Su questo processo, chiamato di *drogaggio* (in inglese *doping*), sono basate le importantissime applicazioni dei semiconduttori nel campo dei dispositivi elettronici.

Supponiamo di inserire in un reticolo di silicio un atomo di un elemento *pentavalente*, come il fosforo, l'arsenico, l'antimonio, al posto di un atomo di silicio. Quattro elettroni del-

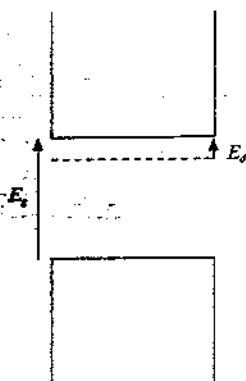


Figura 19.29

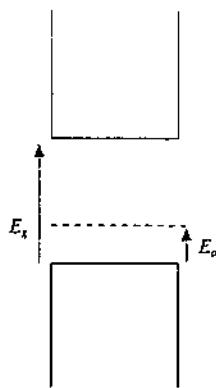


Figura 19.30

l'impurezza vanno a costituire quattro legami covalenti con i circostanti atomi di silicio e restano fortemente legati; invece l'energia di legame del quinto elettrone è molto bassa, 0.045 eV nel caso del fosforo, e quindi è molto probabile che il legame venga rotto. Nell'usuale schema delle bande abbiamo la situazione della figura 19.29: il livello del quinto elettrone si colloca poco al di sotto della banda di conduzione ed è sufficiente l'eccitazione termica per causare il passaggio dell'elettrone nella banda di conduzione. In questo modo la presenza di impurezze pentavalenti permette di popolare la banda di conduzione lasciando inalterata la banda di valenza (la lacuna prodotta dall'elettrone è lontana dalla banda di valenza). Con una concentrazione di un atomo di impurezza su  $10^6$  atomi di silicio si hanno circa  $10^{22}$  elettroni/m<sup>3</sup> in banda di conduzione, rispetto ai  $10^{16}$  intrinseci a  $T = 300$  K: l'effetto dell'impurezza è dominante.

Nel caso ora descritto le impurezze si chiamano *donori* (esse donano elettroni) e il semiconduttore è detto di tipo *n*, per indicare che le cariche donate sono negative. Si dice anche che i portatori maggioritari sono gli elettroni e le (19.6) si scrivono, trascurando la conduzione intrinseca,

$$j = n_d e \mu_e E, \quad \sigma = n_d e \mu_e ; \quad (19.9)$$

$n_d$  è la concentrazione dovuta ai donori.

Se invece sostituiamo un atomo di silicio con un'impurezza *trivalente* (boro, gallio, indio) tre elettroni formano legami covalenti, ma resta un legame covalente non saturato che funge da lacuna. Il livello di questo stato vuoto si colloca poco sopra la fine della banda di valenza (0.045 eV per il boro) e per eccitazione termica tali livelli vengono occupati da elettroni della banda di valenza che lasciano dietro di sé altrettante lacune. Questo secondo tipo di drogaggio popola pertanto di lacune la banda di valenza senza agire sulla banda di conduzione. Le impurezze sono dette *accettori* (accettano elettroni), il semiconduttore è di tipo *p*, in quanto i portatori maggioritari sono le lacune positive. Abbiamo

$$j = n_a e \mu_h E, \quad \sigma = n_a e \mu_h , \quad (19.10)$$

dove  $n_a$  è la concentrazione dovuta agli accettori.

Le stesse considerazioni valgono per il germanio o per un altro semiconduttore; i materiali così trattati sono chiamati *semiconduttori estrinseci*.

I valori delle differenze di energia  $E_d$ ,  $E_a$  (figure 19.29, 19.30) in silicio e in germanio sono riportati in tabella 19.7.

Tabella 19.7 Dislivelli energetici per donori e accettori

drogante	$E_d$ (Si) eV	$E_d$ (Ge) eV	drogante	$E_d$ (Si) eV	$E_d$ (Ge) eV
As	0.049	0.013	B	0.045	0.010
P	0.045	0.012	Ga	0.065	0.011
Sb	0.039	0.010	In	0.157	0.011

Le espressioni (19.9) e (19.10) della condutività vanno intese come relazioni di saturazione, ovvero valori limite della condutività ottenuti quando tutti gli elettroni o tutte le lacune sono state cedute; siccome la mobilità ha una dipendenza piuttosto debole dalla temperatura, la condutività di saturazione può essere considerata costante. Dai valori della tabella 19.7 si nota che  $E_d$  e  $E_a$  sono paragonabili al valore di  $k_B T$  a temperatura ambiente ( $\approx 0.025$  eV) e quindi si può assumere che già a tale temperatura si abbia saturazione.

A basse temperature, definite da  $k_B T \ll E_d$ , la concentrazione  $n$  di elettroni in un semiconduttore di tipo *n* con una concentrazione  $n_d$  di donori cresce con la temperatura secondo una legge simile a (19.7):

$$n = C_n n_d (k_B T)^{3/2} e^{-E_d/2k_B T} . \quad (19.11)$$

Analogamente in un semiconduttore di tipo *p* con una concentrazione  $n_a$  di accettori la concentrazione  $p$  di lacune è, se  $k_B T \ll E_a$ ,

$$p = C_p n_a (k_B T)^{3/2} e^{-E_a / 2k_B T} . \quad (19.12)$$

$C_n$  e  $C_p$  sono costanti che dipendono dal materiale. Vogliamo precisare che (19.7), (19.11) e (19.12) sono il risultato di un equilibrio statistico tra un processo di formazione e un processo di ricombinazione, ad esempio tra la creazione di una coppia elettrone-lacuna e la loro riunione oppure tra la ionizzazione di un'impurezza donore e la cattura di un elettrone donatore.

Raggiunta la saturazione della conduttività estrinseca, la conduttività del semiconduttore può aumentare ancora con la temperatura quando la conduttività intrinseca diventa paragonabile a quella estrinseca.

### Esempio 19.5

Calcolare la conduttività di saturazione del silicio quando viene introdotta una quantità di antimonio corrispondente ad una concentrazione relativa di 1 su  $10^6$  e determinare il rapporto con la conduttività intrinseca a  $T = 300$  K. Ripetere i calcoli per una contaminazione di boro di 1 su  $10^{10}$ .

#### Soluzione

Nella (19.9) dobbiamo calcolare  $n_d$ ; dato che nel silicio  $n_{si} = 5.0 \cdot 10^{23} \text{ m}^{-3}$ ,  $n_d = 10^{-6} n_{si} = 5.0 \cdot 10^{17} \text{ m}^{-3}$  e la conducibilità di saturazione risulta

$$\sigma = n_d e \mu_e = 5.0 \cdot 10^{22} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 0.135 = 1.08 \cdot 10^3 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1} .$$

Rispetto alla conducibilità intrinseca a  $T = 300$  K,  $\sigma_i = 4.4 \cdot 10^{-1} \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$ , l'aumento è di un fattore  $2.5 \cdot 10^6$ .

Nel caso del boro  $n_d = 10^{-10} n_{si} = 5.0 \cdot 10^{18} \text{ m}^{-3}$ ,

$$\sigma = n_d e \mu_h = 5.0 \cdot 10^{18} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 0.05 = 0.04 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1} ,$$

$$\sigma / \sigma_i = 90.9 .$$

Anche in presenza di una bassissima concentrazione di impurezze, la conduttività estrinseca è superiore a quella intrinseca a temperatura ambiente. È necessario quindi un processo di purificazione molto spinto per ottenere un semiconduttore intrinseco.

### Esempio 19.6

Calcolare la concentrazione di gallio in germanio tale che a  $T = 500$  K la conduttività intrinseca egualgi quella estrinseca di saturazione.

#### Soluzione

Impostiamo l'eguaglianza tra (19.10) e (19.8):

$$n_a e \mu_h = \sigma_0 e^{-E_s / 2k_B T} .$$

con  $\mu_h$ ,  $\sigma_0$  e  $E_s$  presi dalla tabella 19.6. Si ricava

$$n_a = 1.2 \cdot 10^{22} \text{ m}^{-3} .$$

Rispetto a  $n_{si} = 4.4 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$  la concentrazione relativa è  $2.7 \cdot 10^{-7}$ .

Segnaliamo infine che se si esegue una misura di effetto Hall (paragrafo 7.7) in un semiconduttore di tipo  $n$  o di tipo  $p$  si trova che il segno dei portatori di carica risulta rispettivamente negativo o positivo. Attraverso (7.37) è possibile determinare la concentrazione dei portatori maggioritari.

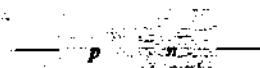


Figura 19.31

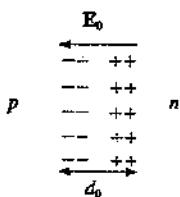


Figura 19.32

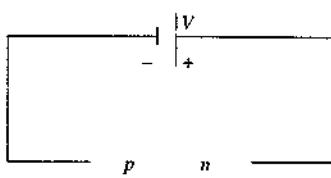


Figura 19.33

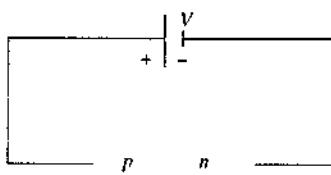


Figura 19.34

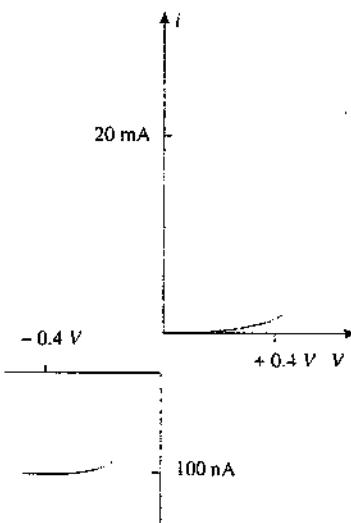
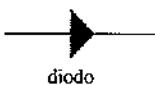


Figura 19.35



Ricordiamo inoltre che l'effetto Hall indica portatori positivi in alcuni conduttori, ad esempio nello zinco. Si tratta in effetti di semimetalli, nei quali il passaggio degli elettroni dalla banda di valenza piena alla banda di conduzione vuota, ma parzialmente sovrapposta alla banda di valenza, lascia lacune nella banda di valenza. La conduzione è dovuta sia agli elettroni che alle lacune, ma queste risultano avere una mobilità maggiore, per cui il loro contributo alla densità di corrente e alla tensione di Hall è preponderante.

### *La giunzione p - n*

La più semplice applicazione delle proprietà dei semiconduttori alla costruzione di un elemento di circuito è la *giunzione p - n*, consistente in un semiconduttore di tipo *p* a stretto contatto con un semiconduttore di tipo *n*. Nella pratica ciò si realizza con un unico pezzo di semiconduttore drogato in maniere diverse; in tal modo non c'è nessuna discontinuità nel reticolato, ma soltanto nella concentrazione di impurezze. La giunzione propriamente detta è la zona molto stretta in cui si passa dalla concentrazione predominante di lacune alla concentrazione predominante di elettroni.

La differenza di concentrazione dei portatori dalle due parti della giunzione dà luogo a una diffusione; gli elettroni, la cui concentrazione è maggiore dalla parte *n* dove sono portatori estrinseci che dalla parte *p* dove sono portatori intrinseci, diffondono verso la parte *p* e analogamente le lacune diffondono dalla parte *p* alla parte *n*. Questo processo porta ad una separazione di carica nella zona della giunzione (figura 19.32) e alla formazione di una d.d.p.  $V_0$ , detta di contatto, sulla distanza  $d_0$  ovvero di un campo elettrico  $E_0$ , che contrasta la diffusione. Nello stesso tempo le coppie elettrone-lacuna, che per effetto termico si formano nello spessore  $d_0$  (portatori intrinseci), migrano sotto l'azione di  $E_0$ , con gli elettroni che si portano verso la zona *n* e le lacune verso la zona *p*. Nel complesso si ha un equilibrio tra diffusione dei portatori maggioritari e deriva di quelli minoritari, con corrente elettrica globale nulla.

Il valore del potenziale di contatto è

$$V_0 = \frac{k_B T}{e} \ln \frac{n_a n_d}{n_i^2} :$$

ad esempio, con concentrazioni relative di donori e accettori eguali tra loro e pari a  $10^{16}$ , si ha in silicio  $V_0 = 0.8$  V e in germanio  $V_0 \approx 0.4$  V, a temperatura ambiente. Lo spessore  $d_0$  è dell'ordine di 1  $\mu\text{m}$  e il valore medio del campo elettrico è  $E_0 = V_0 / d_0 = 1 \text{ V}/10^{-6} \text{ m} = 10^6 \text{ V/m}$ .

La zona spessa  $d_0$  nell'intorno della giunzione si chiama anche *zona di svuotamento*: infatti in essa per effetto della presenza del campo elettrico non ci sono praticamente più cariche libere; nel silicio da circa  $10^{16}$  portatori intrinseci per unità di volume si scende a circa  $10^8$ .

Supponiamo ora di applicare alla giunzione la d.d.p. esterna  $V$  con i segni di figura 19.33 (*polarizzazione inversa*). In questo modo si esalta l'effetto di  $V_0$  con le seguenti conseguenze: la diffusione è ridotta in quanto la d.d.p. che elettroni e lacune devono superare è diventata  $V_0 + V$ , la zona di svuotamento si amplia e al crescere di  $V$  può arrivare a coincidere con l'intero semiconduttore (~ 1 mm); invece la corrente di deriva dovuta agli effetti termici non cambia in quanto dipendente solo dalla temperatura. Quindi non si ha più equilibrio tra le correnti di diffusione e di deriva e attraverso la giunzione c'è una corrente non nulla, praticamente coincidente con la corrente di deriva, con valore dell'ordine di 100 nA. Se la d.d.p.  $V$  supera un determinato valore si instaura una notevole corrente, detta di scarica, che può danneggiare irreparabilmente la giunzione.

Se invece si applica la d.d.p.  $V$  con i segni di figura 19.34 (*polarizzazione diretta*) si ha un effetto che contrasta  $V_0$  e la corrente di diffusione aumenterà notevolmente, in modo esponenziale fino a quando  $V$  non supera  $V_0$ ; oltre questo valore la corrente varia linearmente con la d.d.p. applicata (si passa da un comportamento non ohmico ad un comportamento ohmico).

Il grafico  $i(V)$  è mostrato nella figura 19.35, separando i regimi di polarizzazione inversa e diretta, in quanto i valori di corrente sono molto diversi. In sostanza la giunzione *p - n* agisce come un conduttore unidirezionale di corrente; normalmente viene chiamata *diodo a semiconduttore* e indicata con il simbolo a lato. Un altro tipo di diodo, quello ad effetto termoelettronico, storicamente precedente, è stato discusso nel paragrafo 6.5.

Un'ulteriore applicazione consiste nella serie di giunzioni *n - p - n* e *p - n - p*, che costituiscono i *transistor* più semplici; ma questi argomenti esulano dagli scopi del libro.

## 19.7 Superconduttività

Al tendere a zero della temperatura la resistività di un conduttore prima diminuisce linearmente con  $T$  e poi raggiunge un valore costante, come già mostrato nella figura 19.27; questo è il comportamento riscontrato in alcuni elementi che sono tra i migliori conduttori a temperatura ambiente (argento, rame, oro). Vi sono però altri conduttori, sia elementi puri che leghe, i quali hanno un comportamento molto diverso: la resistività diminuisce linearmente con la temperatura, ma subisce una brusca diminuzione intorno al *valore critico*  $T_c$ , al di sotto del quale si annulla. Nella figura 6.20 e nella tabella 6.2 del paragrafo 6.5 abbiamo riportato un esempio di andamento della resistività e alcuni valori di temperature critiche.

Il fenomeno si chiama *superconduttività*; esso venne scoperto da Kamerlingh Onnes nel 1911. La teoria quantistica che ha posto le basi per la comprensione delle caratteristiche più importanti è stata formulata nel 1957 da Bardeen, Cooper e Schrieffer.

Nell'intervallo di temperatura tra  $T = 0$  e  $T = T_c$  la resistività di un superconduttore è inferiore a qualsiasi valore misurabile e si assume eguale a zero; ciò è confermato dal fatto che quando si stabilisce una corrente in un circuito superconduttore questa non provoca effetto Joule e continua a circolare per un tempo estremamente lungo senza diminuire d'intensità. Esperimenti molto accurati hanno evidenziato limiti inferiori del tempo di durata di una supercorrente pari ad oltre  $3 \cdot 10^{12}$  s (oltre 10<sup>5</sup> anni). Essendo nulla la resistività, è nullo il campo elettrico qualunque sia la densità di corrente (si ricordi che  $E = \rho j$ ).

Notevolissimo è anche il comportamento di un superconduttore in presenza di un campo magnetico. Supponiamo di effettuare il raffreddamento del materiale all'interno di un campo magnetico: quando avviene la transizione dallo stato normale allo stato superconduttore si osserva che *il campo magnetico viene espulso dal superconduttore*, nel cui interno  $B = 0$ . Alternativamente, portiamo il materiale nello stato di superconduttività in assenza di campo magnetico e poi immersiamolo in un campo magnetico; di nuovo si osserva che all'interno  $B = 0$ . Il fenomeno si chiama *effetto Meissner*.

Nell'effettuare questi esperimenti si scopre che la temperatura critica dipende dal campo magnetico. In effetti la transizione verso lo stato superconduttore è osservata a  $T = T_c$  solo se non c'è campo magnetico; in presenza di campo la transizione avviene ad una temperatura inferiore e si trova che per ogni temperatura  $T < T_c$  esiste un valore critico  $B_c$  al di sopra del quale la transizione non avviene. La curva della figura 19.37, riferita al mercurio, delimita appunto la zona in cui può esistere uno stato di superconduttività dalla zona in cui il comportamento è normale.

La tabella 19.8 riporta per alcuni elementi superconduttori i valori della temperatura critica (a  $B = 0$ ) e del massimo campo magnetico critico (che si ha per  $T = 0$ ); è riportata anche l'energia  $E_g$  che verrà definita nel seguito.

Tabella 19.8 Parametri di alcuni superconduttori

elemento	$T_c$ (K)	$B_c$ (T)	$E_g$ ( $10^{-3}$ eV)
Al	1.18	0.011	0.34
Zn	0.88	$5.3 \cdot 10^{-3}$	0.24
Nb	9.25	0.198	3.05
Sn	3.72	0.031	1.15
Hg	4.15	0.041	1.65
Pb	7.23	0.080	2.73

Se  $B = 0$  all'interno di un superconduttore immerso in campo magnetico, vuol dire che la magnetizzazione del mezzo è tale da produrre un campo magnetico  $\mu_0 M$  eguale ed opposto al campo esterno. In funzione del campo applicato il modulo di  $\mu_0 M$  ha quindi l'andamento della figura 19.38; per  $B > B_c$  il comportamento è normale e il materiale, che non è ferromagnetico, ha magnetizzazione trascurabile (in modulo  $\chi \ll 1$ ). Notiamo che nello stato di superconduttività dobbiamo assumere  $\chi = -1$ : il superconduttore è un mezzo diametnetico perfetto.

Il comportamento magnetico che abbiamo finora descritto è seguito da una classe di materiali, detti superconduttori di 1<sup>a</sup> specie (tra questi si trovano gli elementi elencati

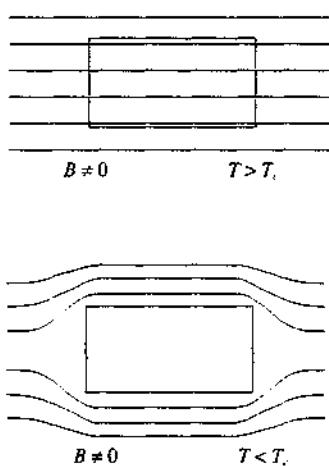


Figura 19.36

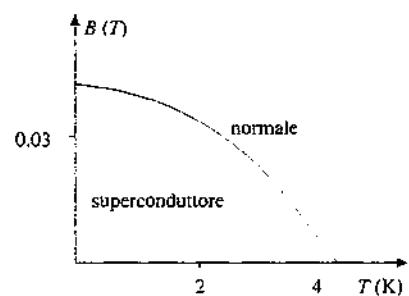


Figura 19.37

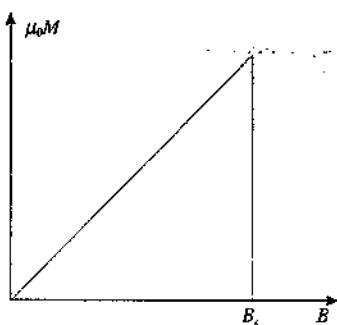


Figura 19.38

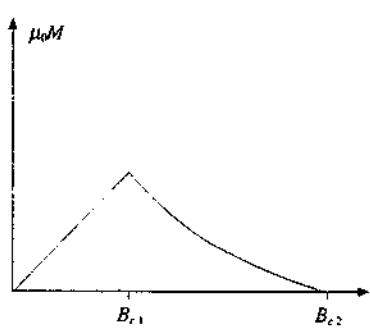


Figura 19.39

nella tabella 19.8). Esiste un'altra classe di superconduttori, detti di 2<sup>a</sup> specie, tipicamente leghe metalliche, che hanno proprietà diverse. La temperatura critica in assenza di campo magnetico di norma è maggiore ( $T_c = 18.1$  K in Nb<sub>3</sub>Sn), ma è soprattutto nella risposta ad un campo magnetico che essi si distinguono dai superconduttori di 1<sup>a</sup> specie. La loro magnetizzazione si oppone esattamente al campo applicato fino ad un valore  $B_{c1}$ ; successivamente essa decresce fino ad annullarsi quando il campo applicato vale  $B_{c2}$  (figura 19.39). Nell'intervallo tra  $B_{c1}$  e  $B_{c2}$  il materiale è sempre superconduttore, ma esiste campo magnetico all'interno (si parla di effetto Meissner incompleto), mentre oltre  $B_{c2}$  lo stato di conduzione è normale. I valori di  $B_{c2}$  possono essere molto elevati; ad esempio in Nb<sub>3</sub>Sn al di sotto di 14 K  $B_{c2}$  è superiore a 10 T.

La scoperta dei superconduttori di 2<sup>a</sup> specie ha permesso di costruire avvolgimenti superconduttori per magneti (ad esempio solenoidi) raggiungendo, in assenza di ferro, elevati valori di campo magnetico (1 ÷ 10 T). Infatti in questi avvolgimenti è possibile far circolare correnti molto intense (10<sup>3</sup> ÷ 10<sup>4</sup> A) senza che il campo magnetico da esse stesse prodotto superi il valore  $B_{c2}$ . Invece nei superconduttori di 1<sup>a</sup> specie le correnti sono limitate a causa dei bassi valori di  $B_c$ .

Studi recenti hanno messo in evidenza l'esistenza di materiali con temperature critiche piuttosto alte (intorno a 100 K), cioè superconduttori alla temperatura dell'azoto liquido invece che a quella dell'elio liquido e quindi in teoria di più semplice utilizzazione. Un esempio è il composto YBa<sub>2</sub>Cu<sub>3</sub>O<sub>x</sub>, che ha  $T_c = 92$  K. Tuttavia le proprietà meccaniche di questi composti pongono serie difficoltà nel loro impiego sotto forma di fili; come si può immaginare si ha in questo campo un'intensa attività di ricerca.

### Esempio 19.7

Un sottile anello superconduttore è immerso in un campo magnetico uniforme e costante, di modulo  $B = 10^{-2}$  T, ortogonale al piano dell'anello. L'area coperta dall'anello è  $\Sigma = 8 \cdot 10^{-3}$  m<sup>2</sup> e il coefficiente di autoinduzione è  $L = 4 \cdot 10^{-7}$  H. Ad un certo istante il campo magnetico viene spento. Calcolare la corrente indotta nell'anello.

#### Soluzione

Il flusso magnetico attraverso l'anello è  $\Phi = B\Sigma = 8 \cdot 10^{-5}$  Wb. Durante la variazione del campo magnetico esterno si dovrebbe avere nell'anello la f.e.m. indotta

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = Ri$$

Però la resistenza dell'anello è nulla e quindi il flusso attraverso l'anello non può cambiare ( $d\Phi/dt = 0, \Phi = \text{cost}$ ). Nell'anello deve pertanto circolare una corrente di verso e modulo tali da produrre un autoflusso che rimpiazza  $\Phi$ :

$$Li = \Phi = B\Sigma \quad , \quad i = \frac{B\Sigma}{L} = 200 \text{ A}$$

L'esempio descritto mostra un possibile modo per instaurare una determinata intensità di corrente in un circuito superconduttore.

Menzioniamo un risultato quantistico molto interessante: il flusso magnetico attraverso un circuito superconduttore è quantizzato in unità  $h/2e = 2.07 \cdot 10^{-15}$  Wb, cioè  $\Phi = nh/2e$  con  $n$  intero. La verifica sperimentale è stata eseguita con un circuito di diametro 10 µm, macroscopico anche se piccolo, misurandone il momento magnetico e scoprendolo quantizzato.

Una discussione anche soltanto qualitativa della teoria della supercondutività è piuttosto complessa e per questa ragione ci limitiamo a pochi cenni. Il fenomeno è dovuto ad una particolare interazione tra gli elettroni di conduzione e le vibrazioni del reticolo, diversa da un insieme di semplici urti elettrone-ione indipendenti uno dall'altro.

Supponiamo che l'interazione attrattiva tra un elettrone e una porzione del reticolo causi una vibrazione che si propaga attraverso il cristallo; ad essa si accompagna una variazione locale della densità di carica elettrica positiva che può alterare il moto di un secondo elet-

trone attirandolo. Con questo meccanismo avviene un'interazione tra due elettroni mediata dal reticolo, interazione che è in grado di superare la repulsione coulombiana ed è quindi attrattiva. Il risultato è la formazione di una coppia legata di elettroni, detta *coppia di Cooper*, avente carica totale  $-2e$ , spin totale nullo in quanto i due elettroni legati risultano avere spin opposto, energia di legame dell'ordine di  $3k_B T_c$  (cioè circa  $10^{-3}$  eV) e lunghezza del legame dell'ordine di  $10^{-6}$  m, molto grande rispetto alle distanze interatomiche ( $= 10^{-10}$  m).

In termini quantistici si dice che un elettrone ha emesso un fonone e che questo è stato assorbito dal secondo elettrone. In tale scambio il bilancio della quantità di moto è complessivamente in parità e quindi la quantità di moto della coppia nel suo moto attraverso il reticolo resta costante.

L'esistenza della supercondutività è dovuta alla possibilità, dimostrata nella teoria, di formazione di un gran numero di coppie di Cooper: anzi la probabilità di uno stato fisico formato da coppie di Cooper è tanto maggiore quanto più alto è il numero di coppie, purché queste abbiano tutte la stessa quantità di moto. La teoria prevede dunque che al di sotto della temperatura critica si formi uno stato molto ordinato formato da coppie di Cooper aventi tutte la stessa  $p$ , eguale a zero in assenza di perturbazioni esterne (è il centro di massa di ciascuna coppia che è fermo) e diversa da zero se c'è stata una perturbazione elettrica che ha comunicato un impulso. La supercorrente si mantiene proprio in quanto nel loro moto di insieme le coppie, pur continuando ad interagire col reticolo, mantengono costante  $p$ . La presenza di tante coppie nello stesso stato quantico non è in contrasto col principio di Pauli che non si applica a particelle con spin intero, in particolare nullo.

È interessante notare come siano superconduttori materiali in cui l'interazione elettrone-reticolo è notevole e che quindi, a temperatura ambiente, non sono ottimi conduttori. Viceversa materiali con una debole interazione elettrone-reticolo, come l'argento e il rame, appunto per questo non diventano superconduttori. L'importanza di questa osservazione è anche provata dalla relazione prevista dalla teoria tra massa atomica del materiale e temperatura critica  $M^a T_c = \text{costante}$ :  $T_c$  varia con la massa del particolare isotopo considerato. Quindi al limite se il reticolo non potesse vibrare, se cioè esso si presentasse agli elettroni come un corpo di massa infinita, non ci sarebbe nemmeno superconduttività perché  $T_c$  sarebbe nulla: la superconduttività è strettamente legata alle vibrazioni reticolari.

Da un punto di vista energetico lo stato di superconduttività a  $T = 0$  è caratterizzato dall'impossibilità di ricevere energia al di sotto di un certo valore  $E_g$ : esiste cioè una banda proibita di ampiezza  $E_g$  che separa lo stato di superconduttività dallo stato di condutività normale. Il valore di  $E_g$  è in pratica eguale all'energia di legame delle coppie di Cooper ( $\approx 3k_B T_c$ ), come del resto è intuitivo: il sistema viene distrutto solo se si fornisce energia sufficiente per rompere le coppie. Abbiamo riportato  $E_g$  nella tabella 19.8.

Al crescere della temperatura  $E_g$  diminuisce e si annulla per  $T = T_c$ , dove si ha la transizione verso lo stato normale; per  $T \geq T_c$  l'agitazione termica non permette la formazione delle coppie di Cooper.

In presenza di un campo magnetico si ha un'interazione tra campo ed elettroni di conduzione, evidente per il fatto che essi reagiscono in modo tale da originare un campo eguale e contrario. Ciò comporta una cessione di energia allo stato superconduttivo e se il campo supera un valore critico, decrescente al crescere della temperatura, non si ha più superconduttività.

Gli elettroni che effettivamente partecipano al processo di superconduttività sono quelli molto vicini all'energia di Fermi, entro un intervallo dell'ordine di  $k_B T_c$ . Questo perché il processo stesso di scambio di fononi comporta variazioni di livello energetico dei singoli membri delle coppie e tali variazioni possono aver luogo solo se ci sono stati vuoti accessibili. Stati di questo tipo si trovano oltre l'energia di Fermi; viste le energie in gioco, possono accedervi gli elettroni che stanno immediatamente al di sotto di  $E_F$ , entro  $k_B T_c$ . Anche a  $T = 0$  la distribuzione dei livelli occupati dagli elettroni di conduzione in un superconduttore non ha un aspetto come quello della figura 19.18a, ma piuttosto quello della figura 19.18b; infatti la formazione di coppie di Cooper è energeticamente conveniente in quanto la cessione di energia dovuta alla formazione è maggiore dell'energia necessaria per superare il livello di Fermi.

La stima del numero di elettroni in gioco si calcola dal rapporto  $k_B T_c / E_F \approx 10^{-3} / 10 = 10^{-4}$ ; dato che ci sono  $\sim 10^{28}$  elettroni/m<sup>3</sup>, partecipano alla superconduttività  $\sim 10^{24}$  elettroni/m<sup>3</sup>. Se assegnamo ad una coppia un volume eguale al cubo della sua dimensione lineare,  $(10^{-6})^3 = 10^{-18}$  m<sup>3</sup>, in questo volume ci sono  $\sim 10^6$  altre coppie parzialmente sovrapposte, oltre a  $\sim 10^{10}$  ioni. Anche sotto tale aspetto le coppie di Cooper sono ben diverse dagli altri sistemi legati che abbiamo studiato.

### 19.8 Effetto Volta. Effetti termoelettrici

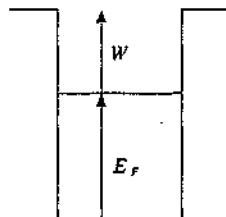


Figura 19.40

Esaminiamo adesso alcuni effetti che si verificano nei conduttori metallici, per la cui spiegazione è sufficiente rifarsi al modello di Fermi del gas elettronico.

Ricordiamo prima la nozione di lavoro di estrazione e la figura 19.23, che ridisegniamo nella forma più usuale, detta buca di potenziale: i livelli elettronici riempiono la banda di energia di ampiezza  $E_F$ , partendo dal livello più basso a cui corrisponde soltanto l'energia potenziale  $-eV_0$  rispetto alla superficie del conduttore, e la differenza rispetto al livello zero di riferimento è il lavoro di estrazione  $W$ .

Se ora consideriamo due metalli isolati tra loro, alla stessa temperatura e allo stesso potenziale, l'aspetto delle rispettive buche di potenziale è diverso a causa dei diversi valori di  $W$ ,  $E_F$ ,  $-eV_0$ . Portando i metalli a contatto si verifica che tra di essi si stabilisce una d.d.p.  $V_1 - V_2$ ; nel caso della figura 19.41 è il metallo 1 che risulta positivo rispetto al metallo 2.

Nella descrizione del gas di Fermi (paragrafo 19.4) abbiamo supposto che gli elettroni di conduzione di un metallo fossero confinati dentro una scatola dalle pareti insormontabili, pur notando come ciò non fosse realistico (esempio dell'emissione termoelettronica o fotoelettrica, concetto stesso di lavoro di estrazione). Più correttamente, e con riferimento diretto alla figura 19.41, si dice che gli elettroni si trovano di fronte ad una *barriera di potenziale*: in questa situazione le onde elettroniche sono in parte riflesse e in parte trasmesse dalla barriera, per cui esiste una probabilità finita se lo spessore  $a$  della barriera è piccolo (metalli a contatto) che un elettrone possa passare da un metallo all'altro. Tale probabilità dipende anche dall'altezza  $W$  della barriera, crescendo al diminuire di questa; quindi nel caso specifico è maggiore la probabilità di passaggio da 1 a 2 che da 2 a 1 e si ha un flusso netto di elettroni da 1 a 2. Per questa ragione il metallo 1, che cede elettroni, diventa positivo rispetto al metallo 2, che li assorbe: i due metalli non sono più allo stesso potenziale. Il processo continua fino a quando resta energeticamente conveniente, con il lavoro  $W_2$  fornito dall'elettrone che entra in 2 maggiore del lavoro  $W_1 + e(V_1 - V_2)$  assorbito dall'elettrone per uscire da 1, e si arresta nel momento in cui  $W_2 = W_1 + e(V_1 - V_2)$ , cioè quando la d.d.p. tra i due metalli raggiunge il valore

$$V_1 - V_2 = \frac{W_2 - W_1}{e} .$$

Poiché  $V_1 > V_2$ ,  $-eV_1 < -eV_2$ : rispetto al livello di riferimento del metallo 1 la buca di potenziale del metallo 2 si è innalzata della quantità  $e(V_1 - V_2)$ . In equilibrio le energie di Fermi si trovano alla stessa quota e l'altezza effettiva della barriera è la stessa da tutte e due le parti; la probabilità di passaggio è la stessa nei due sensi.

È importante precisare la localizzazione della d.d.p.  $V_1 - V_2$ . Dato che il lavoro di estrazione è il lavoro necessario per portare un elettrone con energia prossima al livello di Fermi da un punto interno del metallo ad un punto immediatamente esterno alla superficie, si deve intendere che  $V_1 - V_2$  si stabilisce tra due punti nel vuoto, ciascuno molto vicino alla superficie del metallo.

Il fenomeno descritto si chiama *effetto Volta*; esso venne scoperto nella seconda metà del 1700 da Volta, che ne formulò le leggi fenomenologiche. Innanzitutto egli si rese conto che la d.d.p. dipendeva soltanto dal tipo di conduttore e dalla temperatura, purché si curasse bene lo stato delle superficie a contatto; invece non c'è dipendenza dalla forma, dall'area della zona di contatto, da un'eventuale d.d.p. rispetto alla terra applicata ai conduttori.

Prendendo un particolare elemento come riferimento si costruisce la cosiddetta *serie voltaica*, in cui gli elementi sono disposti a seconda della loro d.d.p. rispetto all'elemento di riferimento, in ordine decrescente. Ciascun elemento è detto elettropositivo rispetto al successivo ed elettronegativo rispetto al precedente. Nella tabella 19.9 ci sono alcuni elementi della serie voltaica riferita al rame; la d.d.p. tra due qualsiasi elementi si ottiene per differenza delle loro d.d.p. rispetto al rame e così si può costruire la serie voltaica riferita a qualsiasi altro elemento (si noti che l'ordine è sempre lo stesso).

Con due pezzi di metalli diversi, ad esempio zinco e rame, mantenuti alla stessa temperatura e posti in contatto in due punti, come mostrato nella figura 19.43, si forma un circuito bimetallico isotermo. In entrambi i punti di contatto A e B si ha lo stesso salto di potenziale passando dallo zinco al rame e quindi è nulla la circuitazione del campo elettrico lungo una linea chiusa interna che segue il circuito: questo non è sede di una f.e.m. e in esso non circola corrente. Se il circuito è aperto in B, tra due punti immediatamente esterni ai metalli si misura  $V_1 - V_2$ .

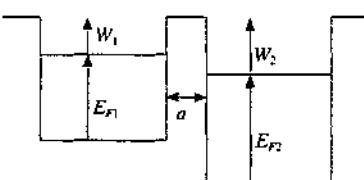


Figura 19.41

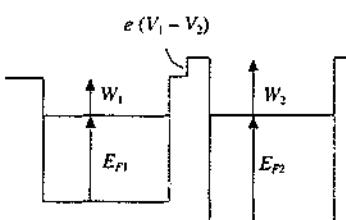


Figura 19.42

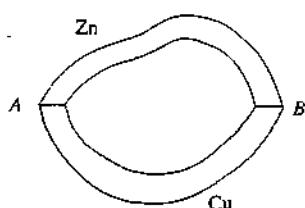


Figura 19.43

Tavola 19.9 - Serie voltaica			
elemento	d.d.p. (V)	elemento	d.d.p. (V)
sodio	2.37	rame	0.00
magnesio	1.20	argento	- 0.05
zinco	0.78	oro	- 0.16
piombo	0.54	platino	- 0.24
stagno	0.35		
ferro	0.13		
rame	0.00		

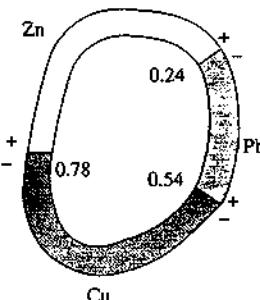


Figura 19.44

Le stesse proprietà continuano a valere per un circuito multimetallico isoterma, formato da più tratti di metalli diversi. In figura 19.44 è indicato l'esempio di tre elementi, ma in ogni caso la f.e.m. è nulla e nel circuito chiuso non circola corrente. Se si apre il circuito in corrispondenza al contatto tra due metalli, tra questi c'è la d.d.p. che ad essi compete, indipendentemente dal resto del circuito; in particolare se i due metalli sono eguali non c'è d.d.p. L'insieme di queste affermazioni costituisce la *legge di Volta*.

Le d.d.p. di Volta sono piuttosto difficili da misurare direttamente; un sistema ingegnoso venne trovato dallo stesso Volta, che mise a punto il cosiddetto *elettroscopio condensatore*. Un piatto di zinco è poggiato sopra un piatto di rame: lo zinco è connesso all'involucro di un elettroscopio a foglie (paragrafo 1.1), il rame è connesso alle foglie; tra i due metalli si stabilisce la d.d.p. di Volta (0.74 V). Allontanando lo zinco la carica resta costante, ma diminuisce la capacità tra i due piatti, per cui aumenta la d.d.p. e si osserva una deviazione delle foglie, dalla quale si deduce una valutazione (piuttosto imprecisa) dell'effetto.

### Effetto Peltier

In un circuito bimetallico inseriamo un generatore che fa circolare corrente. Si osserva che una giunzione si riscalda e l'altra si raffredda; invertendo il verso della corrente si invierte il fenomeno, che quindi risulta indipendente dall'effetto Joule; quest'ultimo, quadratico nella corrente, avviene con le stesse modalità qualunque sia il verso della corrente.

Questo processo termico che avviene ad ogni giunzione tra metalli diversi si chiama *effetto Peltier*; esso venne scoperto nel 1834. Se  $i$  è l'intensità della corrente, la potenza che bisogna scambiare in una giunzione per mantenere costante la temperatura è

$$P = \pi_{1,2} i ,$$

dove  $\pi$  è il *coefficiente di Peltier* relativo alla coppia di metalli; esso dipende dalla temperatura e dai materiali, ma non dalle caratteristiche geometriche del contatto e dall'intensità di corrente. Se si inverte il verso della corrente la potenza resta eguale in modulo e cambia segno, ovvero

$$\pi_{1,2} = -\pi_{2,1} :$$

L'effetto Peltier è reversibile.

Si assume per convenzione che il coefficiente  $\pi_{1,2}$  sia positivo quando la corrente, passando da 1 a 2, produce un assorbimento di potenza, come se nella giunzione 1 - 2 agisse una f.e.m. concorde al verso della corrente. Formalmente  $\pi$ , essendo pari al rapporto  $P/i$ , è in effetti una f.e.m. e si misura in volt. I valori sono piuttosto piccoli,

$$\pi_{Cu-Zn} = 4 \cdot 10^{-4} \text{ V} , \quad \pi_{Cu-Fe} = 2.3 \cdot 10^{-3} \text{ V} , \quad \pi_{Bi-Sb} = 1.8 \cdot 10^{-2} \text{ V} ,$$

e fanno pensare che si tratti di un fenomeno diverso dall'effetto Volta.

Con i metalli a contatto e in equilibrio non dovrebbe essere necessario uno scambio supplementare di potenza quando avviene un passaggio di corrente, essendo le energie di Fermi allo stesso livello. Però a temperature diverse dallo zero assoluto le distribuzioni delle energie elettroniche nei due metalli superano il livello di Fermi e le piccole differenze esistenti dalle due parti rendono conto dell'effetto Peltier.

Un'applicazione pratica interessante si ha nell'uso come serbatoio freddo di una giun-

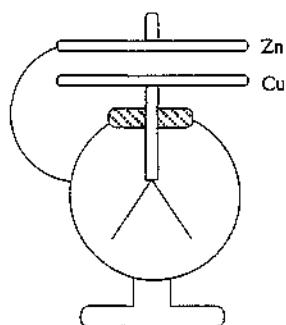


Figura 19.45

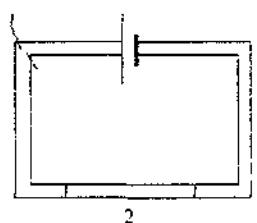


Figura 19.46

zione che si raffredda per effetto Peltier. Con i metalli l'assorbimento di calore dall'ambiente da raffreddare sarebbe troppo piccolo, ma intorno al 1960 si è trovato che certe giunzioni tra due semiconduttori estrinseci presentano coefficienti  $\pi$  elevati: ad esempio con  $\text{Bi}_2\text{Te}_3$  ( $p$ ) e  $\text{Bi}_2\text{Te}_3$  ( $n$ ) si ha  $\pi = 7.0 \cdot 10^{-2}$  V; impiegando correnti dell'ordine di 10 A e utilizzando 10 giunzioni si ottengono trasferimenti di potenza termica dell'ordine di 10 W.

### Effetto Thomson

Quando lungo un filo percorso da corrente si mantiene un gradiente di temperatura si osserva uno scambio di calore supplementare non spiegabile con l'effetto Joule: tutto avviene come se nel tratto interessato dal gradiente di temperatura  $dT/ds$  comparisse un gradiente di potenziale  $dV/ds$  proporzionale al gradiente di temperatura:

$$\frac{dV}{ds} = \sigma \frac{dT}{ds} ;$$

il coefficiente  $\sigma$  dipende dalla temperatura e dal materiale. Nel filo vi è un assorbimento di potenza se il gradiente di potenziale favorisce la corrente e una produzione di potenza in caso contrario.

La potenza che bisogna scambiare per mantenere imperturbata la temperatura del tratto  $ds$  è

$$dP = i dV = i \sigma dT ;$$

si assume  $\sigma$  positivo se  $dP$  corrisponde ad una potenza assorbita quando la corrente è di verso opposto rispetto al gradiente di  $T$ .

Consideriamo ad esempio il filo della figura 19.47, in cui  $T_1 > T_2$  e la corrente fluisce in verso contrario al gradiente di temperatura. Se  $\sigma > 0$   $V_1$  è maggiore di  $V_2$  e si ha uno sviluppo di calore che è minore rispetto a quello atteso per effetto Joule; il contrario succede se  $\sigma < 0$ . Invertendo il verso della corrente i calori cambiano di segno (l'effetto è reversibile).

Alcuni valori indicativi dell'entità del fenomeno sono i seguenti:

rame	$\sigma = 1.5 \cdot 10^{-6}$ V/K ,	argento	$\sigma = 1.3 \cdot 10^{-6}$ V/K ,
piombo	$\sigma = -0.7 \cdot 10^{-6}$ V/K ,	platino	$\sigma = -9.0 \cdot 10^{-6}$ V/K .

La piccolezza di  $\sigma$ , e quindi del calore scambiato, rende difficile la misura, nella quale bisogna anche tener conto correttamente del calore prodotto per effetto Joule e del calore che viene scambiato per conduzione lungo il filo. Dopo una lunga serie di tentativi l'effetto venne messo chiaramente in evidenza da Thomson nel 1854; il coefficiente  $\sigma$  è detto *coefficiente di Thomson*.

Notiamo che in un circuito chiuso composto da un unico materiale l'effetto Thomson non produce una f.e.m.: questa proprietà è stata verificata sperimentalmente da Magnus.

Microscopicamente, la variazione di temperatura provoca un'alterazione delle distribuzioni energetiche locali degli elettroni, ma la spiegazione non è immediata.

### Effetto Seebeck

Riprendiamo un circuito bimetallico senza generatore e, invece di mantenerlo isotermo, portiamo alla temperature  $T_A$  e  $T_B$  le due giunzioni  $A$  e  $B$ . In queste condizioni lo strumento rivela un passaggio di corrente, dovuto evidentemente ad una f.e.m. che si è sviluppata nel circuito a causa della differenza di temperatura tra le giunzioni. Il fenomeno si chiama *effetto Seebeck* (1821) e la f.e.m. è detta *f.e.m. termoelettrica*.

La f.e.m. dipende dalla differenza di temperatura secondo il grafico della figura 19.50:  $T_A$  è mantenuta costante e si fa variare  $T_B = T$ . Si osserva un andamento parabolico con un massimo a  $T = T_n = (T_A + T_B)/2$  e un punto di inversione a  $T = T_c$ , così chiamato perché  $\epsilon$  cambia segno. La derivata  $d\epsilon/dT$ , che è funzione di  $T$ , è detta *potere termoelettrico*: nel punto di massimo essa è nulla e per questa ragione  $T_n$  si chiama *temperatura neutra*.

La f.e.m.  $\epsilon$  è data dalla d.d.p. che si misura tra due punti apre il circuito, ad esempio tra i punti  $P$  e  $Q$  della figura 19.49, supponendo di eliminare lo strumento. Da  $P$  ad  $A$

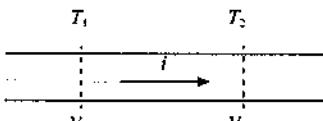


Figura 19.47

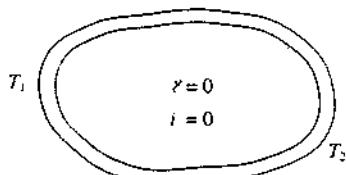


Figura 19.48

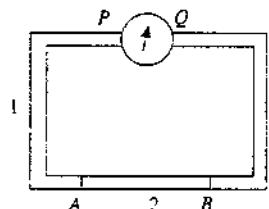


Figura 19.49

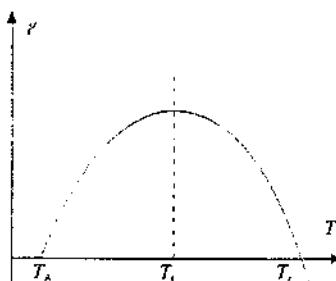


Figura 19.50

abbiamo effetto Thomson, in A effetto Peltier, da A a B effetto Thomson, in B effetto Peltier e infine da B a Q effetto Thomson. Pertanto, detta  $T_0$  la temperatura di P e Q,

$$V_Q = V_P + \int_{T_0}^{T_A} \sigma_1 dT + \pi_{1,2}(T_A) + \int_{T_A}^{T_B} \sigma_2 dT + \pi_{2,1}(T_B) + \int_{T_B}^{T_0} \sigma_1 dT ,$$

in cui mettiamo in evidenza la dipendenza dalla temperatura dei coefficienti di Peltier. Siccome

$$\int_{T_0}^{T_A} \sigma_1 dT + \int_{T_B}^{T_0} \sigma_1 dT = - \int_{T_A}^{T_0} \sigma_1 dT - \int_{T_0}^{T_B} \sigma_1 dT = - \int_{T_A}^{T_B} \sigma_1 dT \quad \text{e} \quad \pi_{2,1}(T_B) = -\pi_{1,2}(T_B)$$

si ottiene

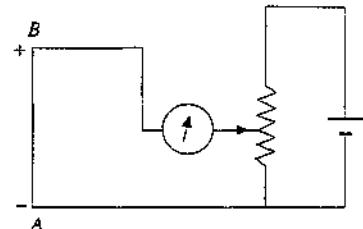
$$\gamma = V_Q - V_P = \pi_{1,2}(T_A) - \pi_{1,2}(T_B) + \int_{T_A}^{T_B} (\sigma_2 - \sigma_1) dT .$$

La f.e.m. termoelettrica nasce dalla differenza tra le f.e.m. di Peltier alle due giunzioni e dalla differenza tra i coefficienti di Thomson dei due materiali. In un circuito formato da un solo materiale non c'è effetto Peltier, è  $\sigma_1 = \sigma_2$  e risulta  $\gamma = 0$ , come si è già detto.

Un'applicazione della f.e.m. termoelettrica si ha nei *generatori termoelettrici*: la corrente nel circuito è mantenuta dall'esistenza di una differenza di temperatura tra le giunzioni. Se il circuito è metallico il rapporto tra la potenza elettrica prodotta e la potenza termica che bisogna fornire, cioè il rendimento, è molto basso: infatti, dato che all'elevata condutività elettrica del conduttore posto tra le giunzioni corrisponde un'elevata conducibilità termica secondo la legge (6.31) di Wiedemann e Franz, la potenza termica da impiegare per mantenere la differenza di temperatura è notevole. Un sostanziale miglioramento si ha con coppie metallo-semiconduttore ed è seguendo questa strada che vengono costruiti generatori termoelettrici di piccola e media potenza.

La prima e tuttora più estesa applicazione si è avuta nel campo delle misure di temperatura con il *termometro a termocoppia* (volume primo, paragrafo 10.3); la caratteristica termometrica è la f.e.m. che compare nel circuito quando una giunzione è tenuta in contatto termico con un serbatoio alla temperatura di riferimento e l'altra a contatto termico con il corpo di cui si vuole misurare la temperatura.  $\gamma$  viene determinata portando a zero la corrente per mezzo di una f.e.m. regolabile di segno contrario; la taratura si effettua tramite alcuni punti fissi. La termocoppia di platino e lega di platino (90%) - rodio (10%) è utilizzata come termometro di riferimento per temperature intorno a 1000 K.

Proprietà importanti delle termocoppe sono la bassa capacità termica, che consente di perturbare minimamente il sistema e di ottenere una risposta pronta, la grande sensibilità (capacità di apprezzare piccole variazioni di temperatura) e l'ampio intervallo di  $T$  esplorabile: con la termocoppia platino-platinorodio si può andare da 400 K a 1900 K. Alcuni valori tipici del potere termoelettrico  $d\gamma/dT$  a temperature lontane dalla temperatura neutra sono  $\sim 10^{-5}$  V/K per la coppia ferro-rame,  $\sim 5 \cdot 10^{-5}$  V/K per la coppia ferro-costantana e  $\sim 10^{-4}$  V/K per la coppia antimonio-bismuto.



Metodo di Poggendorf  
(vedi paragrafo 6.11)

Figura 19.51

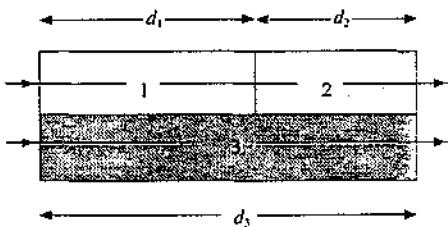
**Nota. Numero atomico, simbolo e nome degli elementi conosciuti**

Z	simbolo	nome	Z	simbolo	nome	Z	simbolo	nome
1	H	idrogeno	38	Sr	stronzio	75	Re	renio
2	He	elio	39	Y	ittrio	76	Os	osmio
3	Li	litio	40	Zr	zirconio	77	Ir	iridio
4	Be	berillio	41	Nb	niobio	78	Pt	platino
5	B	boro	42	Mo	molibdeno	79	Au	oro
6	C	carbonio	43	Tc	tecnezio	80	Hg	mercurio
7	N	azoto	44	Ru	rutenio	81	Tl	tallio
8	O	ossigeno	45	Rh	rodio	82	Pb	piombo
9	F	fluoro	46	Pd	palladio	83	Bi	bismuto
10	Ne	neon	47	Ag	argento	84	Po	polonio
11	Na	sodio	48	Cd	cadmio	85	At	astato
12	Mg	magnesio	49	In	indio	86	Rn	radon
13	Al	alluminio	50	Sn	stagno	87	Fr	francio
14	Si	silicio	51	Sb	antimonio	88	Ra	radio
15	P	fosforo	52	Te	tellurio	89	Ac	attinio
16	S	zolfo	53	I	iodio	90	Th	torio
17	Cl	cloro	54	Xe	xenon	91	Pa	protoattinio
18	Ar	argon	55	Cs	cesio	92	U	uranio
19	K	potassio	56	Ba	bario	93	Np	nettunio
20	Ca	calcio	57	La	lantanio	94	Pu	plutonio
21	Sc	scandio	58	Ce	cerio	95	Am	americio
22	Ti	titanio	59	Pr	praseodimio	96	Cm	curio
23	V	vanadio	60	Nd	neodimio	97	Bk	berkelio
24	Cr	cromo	61	Pm	prometeo	98	Cf	californio
25	Mn	manganese	62	Sm	samario	99	Es	einsteinio
26	Fe	ferro	63	Eu	europio	100	Fm	fermio
27	Co	cobalto	64	Gd	gadolino	101	Md	mendelevio
28	Ni	nickel	65	Tb	terbio	102	No	nobelio
29	Cu	rame	66	Dy	disprosio	103	Lr	lawrenzio
30	Zn	zinco	67	Ho	olmio	104	Rf	rutherfordio
31	Ga	gallio	68	Er	erbio	105	Ha	hahnio
32	Ge	germanio	69	Tm	tulio	106	Sg	seaborgio
33	As	arsenico	70	Yb	itterbio	107	Ns	nielsbohrino
34	Se	selenio	71	Lu	lutezio	108	Hs	assio
35	Br	bromo	72	Hf	afnio	109	Mt	meitnerio
36	Kr	kripton	73	Ta	tantalio			
37	Rb	rubidio	74	W	tungsteno			

# Problemi di Onde

- 12.1 Una sbarra d'acciaio ( $\rho = 7.8 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ ,  $E = 2.1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$ ) di diametro  $d = 4 \text{ mm}$  è utilizzata per trasmettere onde longitudinali generate da un oscillatore; tali onde sono armoniche di frequenza  $v = 10 \text{ Hz}$  e ampiezza  $\xi_0 = 0.2 \text{ mm}$ . Calcolare la velocità massima dei singoli punti della sbarra e confrontarla con la velocità di propagazione dell'onda lungo la sbarra. Calcolare inoltre la densità di energia nella sbarra, l'intensità dell'onda che si propaga lungo la sbarra e la potenza dell'oscillatore necessaria per mantenere l'onda in assenza di assorbimento.

- 12.2 Tre sbarre di alluminio ( $\rho_1 = 2.7 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ ,  $E_1 = 7 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$ ), piombo ( $\rho_2 = 11.3 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ ,  $E_2 = 1.4 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$ ), rame ( $\rho_3 = 8.8 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ ,  $E_3 = 11 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$ ), sono disposte come in figura; le lunghezze sono  $d_1$ ,  $d_2$  e  $d_3 = d_1 + d_2 = 120 \text{ cm}$ . Due onde sonore di eguale frequenza  $v = 10^3 \text{ Hz}$  si propagano lungo il sistema; inizialmente esse sono in fase, ma all'uscita l'onda che si propaga nelle sbarre 1 e 2 risulta sfasata rispetto a quella che si propaga nella sbarra 3 di  $\Delta\phi = 60^\circ$ . Calcolare la differenza tra i tempi di propagazione e le lunghezze  $d_1$  e  $d_2$ .



- 12.3 Un'onda sonora piana armonica di pulsazione  $\omega = 2 \cdot 10^3 \text{ rad/s}$  e intensità  $I = 10^{-6} \text{ W/m}^2$  si può propagare in tre mezzi: aria, acqua e ferro, per i quali densità e velocità di propagazione sono rispettivamente  $\rho_1 = 1.29 \text{ kg/m}^3$ ,  $v_1 = 344 \text{ m/s}$ ,  $\rho_2 = 10^3 \text{ kg/m}^3$ ,  $v_2 = 1493 \text{ m/s}$ ,  $\rho_3 = 7.8 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ ,  $v_3 = 5130 \text{ m/s}$ . Calcolare nei tre mezzi i valori della lunghezza d'onda  $\lambda$ , dell'ampiezza  $\xi$  dell'onda di spostamento e dell'ampiezza  $\Delta p$  dell'onda di pressione.

- 12.4 Un'onda sonora piana armonica di frequenza  $v = 500 \text{ Hz}$  e ampiezza  $\xi_0 = 10^{-8} \text{ m}$  si propaga in aria a pressione normale e temperatura  $t_1 = 20^\circ\text{C}$ . Calcolare l'ampiezza dell'onda di pressione  $\Delta p$ , l'ampiezza dell'onda di densità  $\Delta\rho$ , l'intensità  $I$  dell'onda e il suo livello sonoro  $B$ , la variazione di  $I$  e  $B$  se la temperatura aumenta di  $\Delta t = 20^\circ\text{C}$ .

- 12.5 Un altoparlante produce nell'aria a  $20^\circ\text{C}$  un suono di frequenza  $v = 2 \cdot 10^3 \text{ Hz}$  e intensità  $I_1 = 5.6 \cdot 10^{-4} \text{ W/m}^2$  a distanza  $r_1 = 6 \text{ m}$ . Nell'ipotesi di emissione isotropa calcolare l'intensità  $I_2$  alla distanza  $r_2 = 30 \text{ m}$ , l'ampiezza

dell'onda di pressione  $\Delta p$  a  $r_1 = 6 \text{ m}$  e  $r_2 = 30 \text{ m}$ , l'ampiezza di spostamento alle stesse distanze.

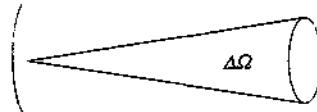
- 12.6 Un aereo a reazione vola con velocità  $v_a = 1.5 \text{ Mach}$ . L'onda d'urto raggiunge il suolo nell'istante  $t = 11 \text{ s}$  dopo il passaggio dell'aereo sulla verticale. Calcolare l'angolo  $\theta$  che l'onda d'urto forma con la direzione di volo dell'aereo e l'altezza  $h$  dell'aereo. Si assuma  $v = 330 \text{ m/s}$  come velocità del suono nell'aria.

- 12.7 Una sirena emette nell'aria a  $20^\circ\text{C}$  un suono di frequenza  $v_0 = 1080 \text{ Hz}$  e si muove alla velocità  $v_s = 10.8 \text{ m/s}$ , allontanandosi dall'ascoltatore e dirigendosi verso una collina. Calcolare la frequenza del suono proveniente direttamente dalla sirena e la frequenza del suono riflesso dalla collina. Determinare inoltre la frequenza di battimento dei due suoni specificando se tali battimenti sono rivelabili con l'orecchio.

- 13.1 Un'onda elettromagnetica piana polarizzata ellitticamente, di intensità  $I = 20 \text{ W/m}^2$  e con rapporto tra le ampiezze delle due componenti del campo elettrico  $E_{0x}/E_{0y} = \sqrt{3}$ , si propaga in una lastra di vetro con indice di rifrazione  $n = 1.5$ . Scrivere l'equazione dell'onda nel mezzo sapendo che la lunghezza d'onda nel mezzo è  $\lambda = 0.4 \cdot 10^{-6} \text{ m}$ . Ripetere il problema supponendo che la stessa onda si propaghi nell'aria.

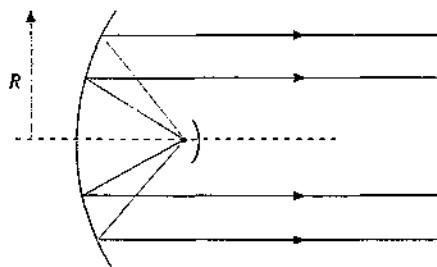
- 13.2 Una lampada da  $500\text{W}$  irradia tale potenza isotropicamente con un'efficienza dell'80%. Calcolare alla distanza  $r = 5 \text{ m}$  l'intensità  $I$ , i valori massimi  $E_0$  del campo elettrico e  $B_0$  del campo magnetico, la forza  $F$  esercitata su un dischetto di raggio  $a = 5 \text{ cm}$ , perfettamente riflettente, ortogonale alla direzione di propagazione delle onde.

- 13.3 Un trasmettitore emette onde elettromagnetiche in un cono che copre un angolo solido  $\Delta\Omega = 2 \cdot 10^{-2} \text{ sr}$ . A distanza  $r_1 = 2 \text{ km}$  dal trasmettitore l'ampiezza massima del campo elettrico è  $E_1 = 20 \text{ V/m}$ . Calcolare l'ampiezza  $B_1$  del campo magnetico, la potenza  $P$  del trasmettitore, le ampiezze  $E_2$  e  $B_2$  alla distanza  $r_2 = 10 \text{ km}$ .



- 13.4 Una sorgente puntiforme di microonde produce impulsi di frequenza  $v = 20 \text{ GHz}$  e di durata  $t = 1 \text{ ns}$ . La sorgente è posta nel fuoco di un paraboloidale conduttore di apertura  $2R = 20 \text{ cm}$ , così che si ottiene in uscita un fascio di

microonde approssimativamente parallelo all'asse del paraboloido. La potenza media di ogni impulso è  $P = 25$  kW. Calcolare la lunghezza d'onda delle microonde, l'energia totale di ciascun impulso, l'intensità del fascio di microonde, la densità media di energia di ciascun impulso, l'ampiezza del campo elettrico e del campo magnetico del fascio, la forza esercitata durante un impulso su una superficie perfettamente riflettente ortogonale al fascio.



- 13.5 Un'antenna parabolica ha un'apertura di 15 m e riceve in direzione normale un segnale radio proveniente da una sorgente molto lontana, di ampiezza  $E_0 = 4 \cdot 10^{-7}$  V/m. Assumendo che l'antenna assorba tutta la radiazione che la colpisce calcolare la forza esercitata dall'onda sull'antenna.
- 13.6 Una stazione trasmittente emette una potenza  $P = 30$  kW alla frequenza  $\nu = 100$  MHz. Calcolare l'energia  $E$ , dei fotoni emessi dall'antenna e il loro flusso. Supponendo che la stazione ricevente non possa rivelare ampiezze di campo elettrico inferiori a  $E_0 = 0.05$  V/m, calcolare l'intensità minima dei fotoni rivelabile, il raggio massimo di ricezione nell'ipotesi che l'emissione sia isotropa e nell'ipotesi che essa avvenga entro un cono di semiapertura  $\alpha = 30^\circ$ .
- 13.7 Un laser emette pacchetti d'onda di durata  $\Delta t = 10^{-3}$  s, con valore centrale della lunghezza d'onda  $\lambda = 0.6936$  μm; l'intensità media è  $I = 2 \cdot 10^5$  W/m<sup>2</sup>. Calcolare l'ampiezza  $E_0$  del campo elettrico, l'intervallo  $\Delta\nu$  delle frequenze e  $\Delta\lambda$  delle lunghezze d'onda che costituiscono il singolo pacchetto, la densità media di energia del fascio laser, l'energia  $E$ , del singolo fotone, l'intensità media di fotoni del fascio.
- 13.8 Una navicella spaziale di massa  $m = 1.5 \cdot 10^3$  kg viaggia nel vuoto in assenza di campo gravitazionale e utilizza un fascio laser di potenza  $P = 10$  kW, montato in coda, come propulsore. Calcolare di quanto aumenta la velocità della navicella in ogni giorno di navigazione.
- 13.9 Un granello di polvere cosmica nel sistema solare si trova soggetto da parte del sole sia alla forza di attrazione gravitazionale che alla forza dovuta alla pressione di radiazione. Supponendo che la particella sia sferica ed in grado di assorbire tutta la radiazione, calcolare il valore minimo  $a_0$  del raggio al di sotto del quale la particella sarebbe spinta fuori del sistema solare. I valori numerici sono: massa del sole  $M = 2 \cdot 10^{30}$  kg, potenza solare  $P = 3.96 \cdot 10^{26}$  W, densità del granello  $\rho = 2.7 \cdot 10^3$  kg/m<sup>3</sup>.

- 13.10 Una sorgente gassosa emette luce di lunghezza d'onda  $\lambda = 0.55 \cdot 10^{-6}$  m. Assumendo che ogni molecola si comporti come un dipolo oscillante di momento elettrico massimo  $p_0 = e z_0$  con  $z_0 = 10^{-10}$  m, calcolare la potenza emessa da una singola molecola.

- 13.11 L'indice di rifrazione dell'idrogeno gassoso in condizioni standard di temperatura e pressione vale  $n_1 = 1 + 1.4 \cdot 10^{-4}$  alla lunghezza d'onda  $\lambda_1 = 0.546$  μm e  $n_2 = 1 + 1.547 \cdot 10^{-4}$  con  $\lambda_2 = 0.254$  μm. Supponendo che l'atomo di idrogeno abbia, in vicinanza di queste lunghezze d'onda, una sola pulsazione di risonanza  $\omega_3$  calcolare il valore di  $\omega_3$ , il numero  $N$  di molecole per unità di volume del gas, l'indice di rifrazione  $n'$  per la lunghezza d'onda  $\lambda_1$  alla pressione  $p' = 10$  atm e alla temperatura  $t_1 = 40^\circ\text{C}$ , i coefficienti  $A$  e  $B$  della formula di Cauchy in condizioni standard.

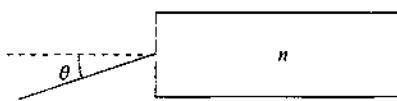
- 13.12 Una pulsar emette periodicamente un impulso radio che può essere rivelato mediante un radiotelescopio. Quando la sintonia del radiotelescopio viene cambiata da  $\nu_1 = 150$  MHz a  $\nu_2 = 200$  MHz l'impulso arriva  $\Delta t = 1.25$  s prima. Assumendo che l'impulso radio si propaghi in uno spazio interstellare assimilabile ad un plasma in cui vi siano  $N = 5 \cdot 10^4$  elettroni/m<sup>3</sup>, calcolare la distanza  $d$  della pulsar dalla terra. Se invece si conoscesse  $d' = 1500$  anni-luce, calcolare quale densità  $N$  di elettroni causerebbe la stessa differenza  $\Delta t$ .

- 13.13 Una lunghezza d'onda nella banda del rosso ha il valore  $\lambda_R = 0.6$  μm e un'altra, nella banda del verde, ha il valore  $\lambda_V = 0.5$  μm. A quale velocità bisogna viaggiare affinché la luce rossa appaia verde?

- 13.14 Un fascio di microonde ( $\lambda_0 = 0.1$  m) viene riflesso da un aeroplano che si avvicina alla sorgente di onde. I battimenti tra le onde emesse dalla sorgente e quelle riflesse dall'aeroplano hanno la frequenza  $\nu_b = 990$  Hz. Calcolare la velocità dell'aeroplano.

- 14.1 Un osservatore posto sul fondo di una piscina profonda  $h = 3$  m guarda verso l'alto. Tutti gli oggetti che stanno al di sopra della superficie dell'acqua sono visti entro un cono di semiapertura  $\theta$  con centro nell'occhio dell'osservatore. Anche gli oggetti posti sul fondo della piscina sono visti egualmente bene, per riflessione, purché a distanza maggiore di  $d_{\min}$  dall'osservatore. Calcolare i valori di  $\theta$  e  $d_{\min}$ . L'indice di rifrazione dell'acqua è  $n = 1.33$ .

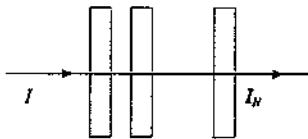
- 14.2 Un sottile fascio di luce incide come in figura su una faccia di una lastra di plexiglas ( $n = 1.48$ ). Calcolare per quali valori dell'angolo di incidenza  $\theta$  la luce arriva all'altro estremo della lastra dopo essersi riflessa totalmente più volte sulle pareti della stessa. Discutere cosa succede per  $n < \sqrt{2}$ .



- 14.3** L'indice di rifrazione dell'aria è  $n = 1.00028$ . Una stella invia luce secondo una direzione che forma l'angolo  $\theta_0 = 45^\circ$  rispetto allo zenit. In quale direzione  $\theta$  dovrà essere puntato un telescopio per vedere la stella al centro del suo campo?

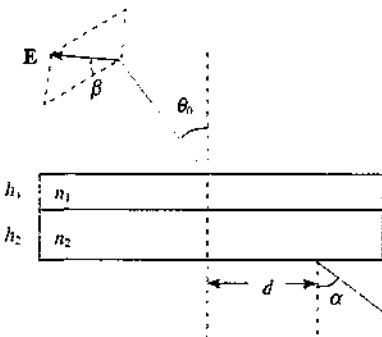
- 14.4** L'angolo limite per lo zaffiro è  $\theta_0 = 34.4^\circ$ . Calcolare l'indice di rifrazione dello zaffiro, l'angolo di Brewster  $\theta_B$  dello zaffiro, la relazione generale tra  $\theta_0$  e  $\theta_B$ .

- 14.5** Un fascio di luce attraversa normalmente una serie di sottili lastre trasparenti a facce piane e parallele, tra loro distanziate, costituite da un materiale con indice di rifrazione  $n = 1.5$ . Trascurando le riflessioni multiple e l'assorbimento, calcolare il numero  $N$  di lastre per cui l'intensità del fascio trasmesso risulta attenuata del 30% oppure del 60%.



- 14.6** Un fascio di luce attraversa una lastra di vetro perfettamente trasparente, di spessore  $d = 2 \text{ cm}$  e indice di rifrazione  $n = 1.73$ . Calcolare la percentuale dell'intensità incidente  $T_1$  trasmessa dalla lastra senza tener conto delle riflessioni multiple all'interno della lastra e l'analogia percentuale  $T_2$  tenuto invece conto delle riflessioni multiple interne. Rispondere alle stesse domande nell'ipotesi che il vetro abbia una lunghezza di assorbimento  $l_{ass} = 40 \text{ cm}$ .

- 14.7** Un fascio di luce di potenza  $W = 10 \mu\text{W}$ , polarizzato rettilineamente in un piano che forma con il piano di incidenza l'angolo  $\beta = 60^\circ$ , incide con angolo di incidenza  $\theta_0 = 30^\circ$  su un sistema di due lastre addossate perfettamente trasparenti; la prima ha spessore  $h_1 = 0.8 \text{ cm}$  e indice di rifrazione  $n_1 = 1.2$ , la seconda ha  $h_2 = 1.2 \text{ cm}$ ,  $n_2 = 1.5$ . Trascurando le riflessioni multiple calcolare in quale direzione e in quale punto il fascio emerge dalla seconda lastra, per quale valore dell'angolo di incidenza il fascio non esce dalla seconda lastra, la potenza del fascio trasmesso.

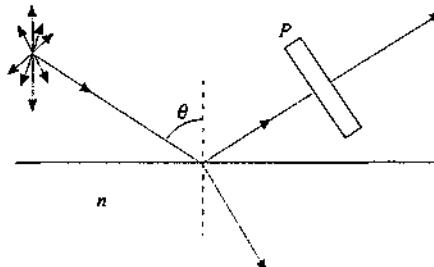


- 14.8** Un fascio di luce non polarizzata incide su una serie di dischi polarizzatori. Calcolare di quanto si riduce l'intensità in ciascuna delle seguenti condizioni: tre

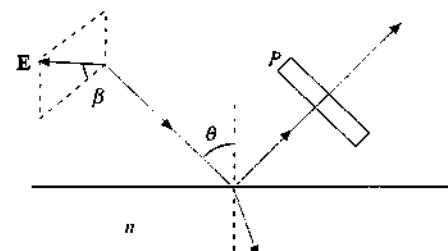
dischi con l'asse ottico di ciascun disco ruotato di  $45^\circ$  rispetto al precedente, quattro dischi con gli assi ruotati di  $30^\circ$ , sette dischi con gli assi ruotati di  $15^\circ$ ; cosa succede, nelle stesse condizioni, se il numero di dischi è molto grande?

- 14.9** Un fascio di luce parzialmente polarizzata, con grado di polarizzazione  $P = (I_{\max} - I_{\min})/(I_{\max} + I_{\min})$ , incide su un polarizzatore. Calcolare l'espressione dell'intensità  $I$  trasmessa dal polarizzatore in funzione di  $I_{\max}$ , di  $P$  e dell'angolo  $\alpha$  formato dall'asse del polarizzatore con la direzione lungo cui si misura  $I_{\max}$ .

- 14.10** Un fascio di luce non polarizzata di intensità  $I = 100 \text{ W/m}^2$  incide con un angolo  $\theta = 60^\circ$  sulla superficie di una lastra piana trasparente di indice di rifrazione  $n$ . Il fascio riflesso viene analizzato con un polarizzatore e si trova che questo trasmette l'intensità  $I_P(\alpha) = I_0 \sin^2 \alpha$ , se  $\alpha$  è l'angolo formato dall'asse del polarizzatore con il piano di incidenza. Calcolare l'indice di rifrazione della lastra, l'intensità massima  $I_0$  trasmessa dal polarizzatore, l'intensità  $I$  del fascio trasmesso dalla superficie della lastra, le ampiezze dei campi elettrici e magnetici incidenti, riflessi e trasmessi sulla superficie della lastra.

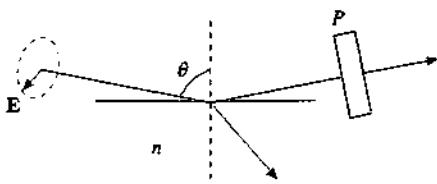


- 14.11** Un fascio di luce di potenza  $W = 20 \text{ W}$ , polarizzato rettilineamente in un piano che forma l'angolo  $\beta = 30^\circ$  rispetto al piano di incidenza, incide con un angolo  $\theta = 45^\circ$  su una lastra di materiale trasparente avente indice di rifrazione  $n = 1.73$ . Calcolare la potenza  $W_r$  dell'onda riflessa, lo stato di polarizzazione dell'onda riflessa, la potenza  $W_P(\alpha)$  trasmessa da un polarizzatore posto normalmente sulla direzione del fascio riflesso in funzione dell'angolo  $\alpha$  formato dall'asse del polarizzatore con il piano di incidenza. Ripetere il problema con  $\theta = 60^\circ$ .

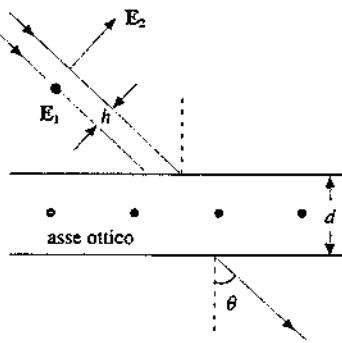


- 14.12** Un fascio di luce polarizzato circolarmente, di potenza  $W = 1 \text{ W}$ , incide con angolo  $\theta = 80^\circ$  sulla superficie di una lastra trasparente con indice di rifrazione  $n = 1.5$ .

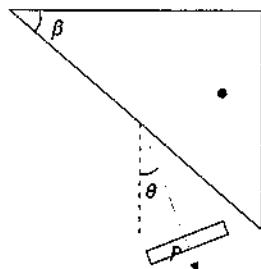
Calcolare le potenze dei fasci riflesso e trasmesso, lo stato di polarizzazione dell'onda riflessa e dell'onda trasmessa, la potenza  $W_p(\alpha)$  trasmessa da un polarizzatore posto normalmente alla direzione del fascio riflesso in funzione dell'angolo  $\alpha$  formato dall'asse del polarizzatore con il piano di incidenza.



- 14.13 Una lastra spessa  $d = 0.8 \text{ cm}$  è tagliata da un materiale uniassico ( $n_s = 1.6$ ,  $n_o = 1.4$ ) con le facce parallele all'asse ottico, ortogonale al disegno. Due onde luminose piane, aventi eguale lunghezza d'onda  $\lambda = 0.6 \mu\text{m}$  ed eguale intensità, coerenti, polarizzate la prima nel piano di incidenza e la seconda ortogonalmente a questo, si propagano lungo due raggi paralleli distanti  $h$  ed incidono con un angolo  $\theta = 45^\circ$  sulla lastra. Calcolare il valore di  $h$  affinché all'uscita della lastra le due onde si propaghi sovrapposte lungo la stessa direzione e determinare la polarizzazione dell'onda risultante all'uscita della lastra.

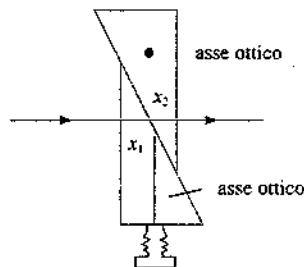


- 14.14 Un prisma di calcite ( $n_s = 1.4864$ ,  $n_o = 1.6585$ ) è tagliato come in figura, con l'asse ottico ortogonale al disegno; l'angolo tra le facce è  $\beta = 40^\circ$ . Un'onda piana non polarizzata di potenza  $W = 8 \text{ W}$  incide normalmente sulla faccia superiore. Calcolare l'angolo  $\theta$  formato dalla

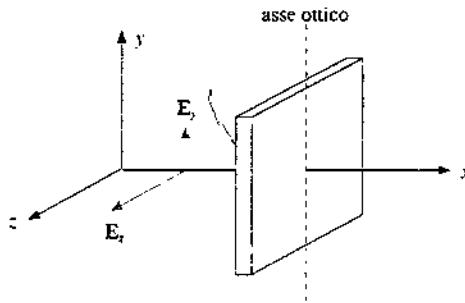


direzione dell'onda uscente rispetto alla direzione di incidenza, la potenza trasmessa  $W_n$ , la potenza  $W_p(\alpha)$  in uscita da un analizzatore posto ortogonalmente alla direzione dell'onda trasmessa in funzione dell'angolo  $\alpha$  tra l'asse dell'analizzatore e il piano di trasmissione (piano del disegno).

- 14.15 Un compensatore di Babinet consiste di due cunei di quarzo ( $n_s = 1.5533$ ,  $n_o = 1.5442$ ) che possono scorrere l'uno sull'altro. I cunei sono tagliati in modo tale che i due assi ottici siano perpendicolari. Un'onda piana non polarizzata incide normalmente sulla prima faccia. Detto  $x_1$  lo spessore attraversato nel primo cuneo e  $x_2$  lo spessore attraversato nel secondo, calcolare la differenza di fase  $\Delta\phi$  tra le onde in uscita in funzione di  $\Delta x = x_1 - x_2$ . Fissato  $x_2 = 2 \text{ mm}$  calcolare inoltre il valore minimo di  $x_1$  per cui il sistema si comporta come una lamina quarto d'onda con  $\lambda_1 = 0.55 \mu\text{m}$  e per cui si comporta invece come una lamina mezz'onda con  $\lambda_2 = 0.6 \mu\text{m}$ .

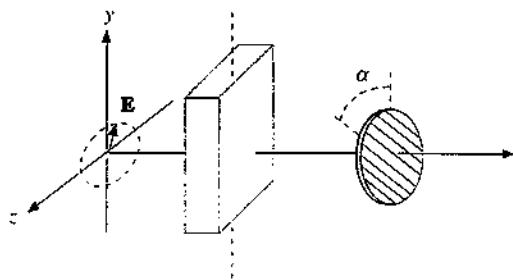


- 14.16 Un'onda piana luminosa, di frequenza  $v = 6 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$  e intensità  $I = 50 \text{ W/m}^2$ , è rappresentata dalle espressioni  $E_y = E_0 \sin(kx - \omega t)$ ,  $E_z = 2E_0 \sin(kx - \omega t)$ . Essa incide normalmente su una lamina birifrangente ( $n_s = 1.55$ ,  $n_o = 1.50$ ) con l'asse ottico parallelo all'asse  $y$ . Calcolare l'espressione dell'onda e la sua intensità  $I_{11}$  all'interno della lamina, l'espressione dell'onda e il suo stato di polarizzazione all'uscita della lamina se questa ha uno spessore  $d = 2.5 \mu\text{m}$ , l'intensità  $I_{12}$  trasmessa dalla lamina, trascurando l'assorbimento.

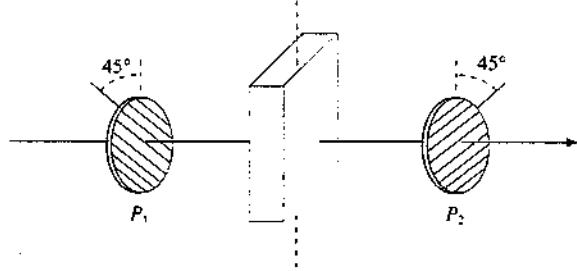


- 14.17 Una lamina di calcite è quarto d'onda per la luce di lunghezza d'onda  $\lambda = 0.6 \mu\text{m}$ . Un'onda con tale  $\lambda$  e intensità  $I = 400 \text{ W/m}^2$  incide normalmente sulla lamina; essa è espressa da  $E_y = E_0 \cos(kx - \omega t)$ ,  $E_z = \sqrt{3} E_0 \sin(kx - \omega t)$ , l'asse  $y$  essendo parallelo all'asse ottico della lamina. Calcolare lo spessore minimo della lamina e lo stato di polarizzazione dell'onda uscente. Se ortogonalmente alla direzione di questa viene posto un polarizzatore il

cui asse forma l'angolo  $\alpha = 80^\circ$  con l'asse  $y$ , determinare l'intensità trasmessa dal polarizzatore trascurando gli effetti delle riflessioni e dell'assorbimento.

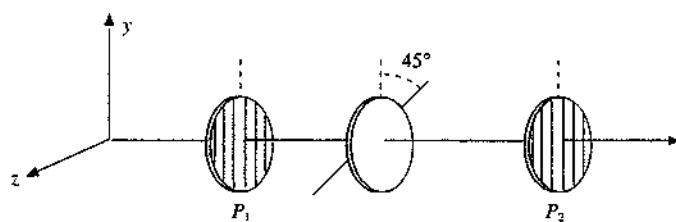


- 14.18 Un fascio di luce contenente tutte le lunghezze d'onda comprese tra  $\lambda_1 = 0.6 \mu\text{m}$  e  $\lambda_2 = 0.7 \mu\text{m}$  incide su un sistema di due polaroidi  $P_1$  e  $P_2$  incrociati, cioè con gli assi ottici a  $90^\circ$  tra loro. Tra i polaroidi è posta una lamina di quarzo, spessa  $d = 600 \mu\text{m}$ , tagliata parallelamente all'asse ottico, con il quale gli assi dei polaroidi formano ciascuno un angolo di  $45^\circ$ . Assumendo che gli indici di rifrazione non dipendano dalla lunghezza d'onda, calcolare per quali lunghezze d'onda nell'intervallo indicato la luce esce dalla lamina polarizzata rettilineamente e quali di tali lunghezze d'onda vengono trasmesse dal polarizzatore  $P_2$ .

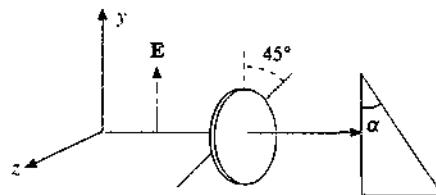


- 14.19 Un fascio di luce polarizzata circolarmente, contenente tutte le lunghezze d'onda comprese tra  $\lambda_1 = 0.4 \mu\text{m}$  e  $\lambda_2 = 0.5 \mu\text{m}$ , incide normalmente su una lamina di calcite, spessa  $d_1 = 20 \mu\text{m}$ , tagliata parallelamente all'asse ottico. Calcolare per quali lunghezze d'onda la luce uscente dalla lamina è ancora polarizzata circolarmente. Si interpone sul fascio uscente una seconda lamina di calcite, spessa  $d_2 = 30 \mu\text{m}$ . Quali delle suddette lunghezze d'onda escono dalla seconda lamina polarizzate rettilineamente?

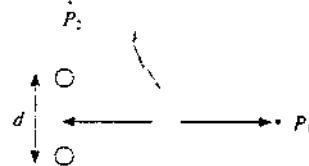
- 14.20 Un fascio di luce polarizzata ellitticamente, comprendente tutte le lunghezze d'onda tra  $\lambda_1 = 0.4 \mu\text{m}$  e  $\lambda_2 = 0.6 \mu\text{m}$ , è rappresentato per ogni  $\lambda$  dalle espressioni  $E_x = \sqrt{3} E_0 \cos(kx - \omega t)$ ,  $E_y = E_0 \sin(kx - \omega t)$ . Esso incide su un sistema di due polarizzatori  $P_1$  e  $P_2$ , entrambi con l'asse ottico parallelo all'asse  $y$ . L'intensità trasmessa dai due polarizzatori è  $I_1 = 9 \cdot 10^2 \text{ W/m}^2$ . Calcolare l'intensità  $I$  incidente. Tra  $P_1$  e  $P_2$  viene inserita una lamina di un cristallo uniassico ( $n_s = 1.62$ ,  $n_o = 1.61$ ) di spessore  $d = 80 \mu\text{m}$ , con l'asse ottico che forma l'angolo  $\alpha = 45^\circ$  con l'asse  $y$ . Detta  $I_2$  l'intensità uscente da  $P_2$  in queste condizioni, calcolare le lunghezze d'onda per cui  $I_2 = I_1$ ,  $I_2 = I_1/2$ ,  $I_2 = 0$ .



- 14.21 Un fascio di luce polarizzata rettilineamente con il campo elettrico  $E$  parallelo all'asse  $y$  è composto dalle lunghezze d'onda  $\lambda_1 = 0.792 \mu\text{m}$  e  $\lambda_2 = 0.396 \mu\text{m}$ ; le relative potenze sono  $W_1 = 5 \text{ W}$  e  $W_2 = 2.5 \text{ W}$ . La luce incide normalmente su una lamina di quarzo, spessa  $d = 21.8 \mu\text{m}$  e con l'asse ottico a  $45^\circ$  con l'asse  $y$ ; all'uscita della lamina essa incontra un prisma di vetro con  $n = 1.6$ , disposto come in figura; l'angolo  $\alpha$  vale  $32^\circ$ . Calcolare lo stato di polarizzazione dell'onda uscente dalla lamina per  $\lambda_1$  e per  $\lambda_2$ , lo stato di polarizzazione in uscita dal prisma, la potenza trasmessa dal prisma, trascurando l'assorbimento e le riflessioni sulla lamina.



- 15.1 Due sorgenti di onde sonore, di eguale frequenza  $v = 680 \text{ Hz}$  ed eguale potenza  $W$ , poste a distanza  $d = 12.5 \text{ cm}$ , emettono in fase onde sferiche che si propagano nell'aria circostante con velocità  $v = 340 \text{ m/s}$ . In un punto  $P_1$  dell'asse, distante  $r = 5 \text{ m}$  dal punto di mezzo tra le sorgenti, l'onda di spostamento ha l'ampiezza  $\xi_{P_1} = 10^{-8} \text{ m}$ . Calcolare l'ampiezza  $\xi_r$  dell'onda di spostamento di ciascuna sorgente in  $P_1$ , la potenza  $W$  di ciascuna sorgente, l'ampiezza  $\Delta p_1$  dell'onda di pressione in  $P_1$ . Considerato il punto  $P_2$  che sta sulla retta congiungente le due sorgenti alla stessa distanza  $r$  dal centro, calcolare in  $P_2$  l'intensità  $I_2$ , l'ampiezza  $\xi_{P_2}$  e l'ampiezza  $\Delta p_2$ .

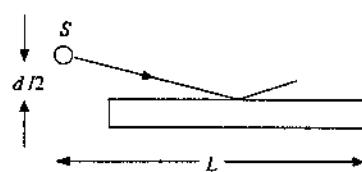


- 15.2 Le onde di una stazione radio di potenza  $W = 50 \text{ kW}$  e frequenza  $v = 10^6 \text{ Hz}$  arrivano ad un ricevitore distante  $D = 20 \text{ km}$  percorrendo due cammini diversi, l'uno diretto e l'altro comprendente anche una riflessione su un ostacolo posto direttamente dietro il ricevitore. Calcolare la distanza minima  $d$  tra ricevitore e ostacolo per la quale si ha la minima percezione del segnale e l'ampiezza  $E$  del segnale in questa situazione nell'ipotesi che il segnale riflesso sia attenuato del 10%.

- 15.3 Due sorgenti  $S_1$  e  $S_2$ , coerenti, separate dalla distanza  $a = \lambda$ , emettono isotropicamente onde elettromagnetiche;

ciascuna sorgente ha una potenza  $W_1 = 100 \text{ W}$  e inoltre  $S_2$  è sfasata rispetto a  $S_1$  di  $\pi/2$ . Calcolare le direzioni lungo cui si rivelano i massimi e i minimi di interferenza e tracciare il diagramma polare dell'intensità. Calcolare inoltre l'ampiezza del campo elettrico alla distanza  $D = 1 \text{ km}$  nella direzione dei massimi.

- 15.4** In un esperimento di Young le due fenditure sono illuminate con luce di lunghezza d'onda  $\lambda_1 = 0.55 \cdot 10^{-6} \text{ m}$  e il sistema di frange d'interferenza osservate ha una densità  $N_1 = 12.5 \text{ frange/cm}$ . Calcolare per quale valore  $\lambda_2$  si ha una densità di frange  $N_2 = 15.5 \text{ frange/cm}$  e come variano le densità se il dispositivo è immerso in acqua ( $n = 1.33$ ).
- 15.5** In un dispositivo di Young la distanza tra le fenditure è  $d = 5 \text{ mm}$  e queste distano  $L = 1.2 \text{ m}$  dallo schermo. Si osservano due figure di interferenza, una dovuta a luce con  $\lambda_1 = 0.48 \mu\text{m}$  e l'altra a luce con  $\lambda_2 = 0.6 \mu\text{m}$ . Calcolare quanto distano sullo schermo le frange di interferenza del quinto ordine delle due diverse figure e quali frange delle due figure si sovrappongono. Si copre una delle due fenditure con una sottile lamina di mica ( $n = 1.58$ ) e si osserva che la settima frangia luminosa della figura di  $\lambda_1$  si sposta al centro dello schermo. Calcolare lo spessore  $d$  della lamina e di quante frange si è spostata la figura di  $\lambda_2$ .
- 15.6** Un'onda elettromagnetica piana di lunghezza d'onda  $\lambda = 5 \text{ cm}$  incide ortogonalmente su un dispositivo di Young, con distanza tra i fori pari a  $d$ . Davanti ai due fori sono posti due opportuni polarizzatori con gli assi paralleli tra loro. Con un rivelatore a distanza  $L \gg d$  si osserva che l'intensità del massimo di ordine zero ( $\theta = 0$ ) vale  $I_0 = 10 \text{ W/m}^2$  e che per  $\theta = 7.18^\circ$  l'intensità vale  $I(\theta) = I_0/2$ . Calcolare il minimo valore di  $d$ , le ampiezze dei campi  $E$  e  $B$  di ciascuna sorgente all'angolo  $\theta$ , il valore dell'intensità  $I$  osservata per  $\theta = 0$  e  $\theta = 7.18^\circ$  se uno dei polarizzatori viene ruotato di  $90^\circ$ .
- 15.7** In un dispositivo di Young si utilizza luce polarizzata rettilineamente con  $\lambda = 0.5 \mu\text{m}$ . Una lamina di calcite, di spessore  $d$ , tagliata parallelamente all'asse ottico, viene posta davanti a una delle aperture, con l'asse ottico parallelo alla direzione di polarizzazione della luce, e si osserva sullo schermo uno spostamento di  $N$  frange; quando si ruota la lamina di  $90^\circ$  si osserva uno spostamento di  $N_c$  frange, con  $N_c - N = 5$ . Calcolare lo spessore  $d$  della lamina.
- 15.8** In un sistema a due fenditure una fenditura è larga il doppio dell'altra. Detta  $I_{\max}$  l'intensità massima osservata sullo schermo, calcolare l'espressione dell'intensità  $I(\theta)$  in funzione dell'angolo di emissione.
- 15.9** Nel paragrafo 15.4 è stato illustrato il dispositivo noto come specchio di Lloyd. La sorgente  $S$  si trova a distanza  $d/2 = 2.5 \text{ mm}$  dal piano dello specchio e a distanza  $L = 120 \text{ cm}$  dallo schermo. Se  $\lambda = 0.68 \mu\text{m}$  calcolare la distanza della prima frangia chiara dalla superficie dello specchio e la densità  $N$  delle frange che si formano sullo schermo.



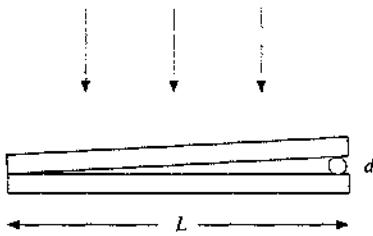
- 15.10** In un interferometro per la misura degli indici di rifrazione dei gas, del tipo descritto nel paragrafo 15.4, i tubi sono lunghi  $d = 20 \text{ cm}$  e inizialmente vuoti. Utilizzando luce di lunghezza d'onda  $\lambda = 0.5893 \mu\text{m}$  si osserva che una variazione isotermica della pressione dell'aria contenuta in uno dei due tubi da  $p_1 = 60.5 \cdot 10^2 \text{ Pa}$  a  $p_2 = 871.5 \cdot 10^2 \text{ Pa}$  causa uno spostamento di  $M = 80$  frange di interferenza. Calcolare come varia l'indice di rifrazione dell'aria in funzione della pressione, l'indice di rifrazione dell'aria in condizioni standard ( $p = 1.013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ ). La variazione  $\Delta p$  di pressione che produce lo spostamento di una frangia.
- 15.11** Quattro onde sonore di frequenza  $v = 400 \text{ Hz}$  si propagano lungo l'asse  $x$ : esse sono rappresentate dalle espressioni:
- $$\xi_1 = \xi_0 \cos(kx - \omega t),$$
- $$\xi_2 = \frac{\xi_0}{3} \cos\left(kx - \omega t + \frac{\pi}{2}\right),$$
- $$\xi_3 = \frac{\xi_0}{4} \cos\left(kx - \omega t + \pi\right),$$
- $$\xi_4 = \frac{\xi_0}{2} \cos\left(kx - \omega t + \frac{3}{2}\pi\right),$$
- con  $\xi_0 = 10^{-10} \text{ m}$ . Calcolare l'espressione dell'onda risultante, la sua intensità e il suo livello sonoro.
- 15.12**  $N$  sorgenti sincrone di onde sonore sferiche, descritte dall'espressione  $\xi = (\xi_0/r) \cos(kr - \omega t)$ , sono disposte lungo una linea: la frequenza è  $v = 688 \text{ Hz}$ , la distanza tra le sorgenti è  $d$ , la potenza totale del sistema è  $W = 500 \text{ W}$ ; la propagazione avviene in aria, con  $v = 344 \text{ m/s}$ . Si osservano massimi di intensità di eguale valore agli angoli  $\theta = 0^\circ, 11.53^\circ, 23.58^\circ, 36.86^\circ, \dots$  rispetto alla direzione normale alla linea delle sorgenti: la larghezza angolare del massimo centrale è  $\Delta\theta = 4.58^\circ$ . Calcolare il numero  $N$  di sorgenti, la dimensione complessiva  $L$  del sistema, l'intensità  $I_M$  e il livello sonoro dei massimi alla distanza  $r = 5 \text{ km}$  dal sistema, l'ampiezza  $\xi_0$  che caratterizza ciascuna sorgente e l'ampiezza di pressione  $\Delta p$  sempre alla distanza  $r$ .
- 15.13**  $N$  sorgenti coerenti, equispaziate della distanza  $d$ , sono disposte lungo l'asse  $x$ . Calcolare la relazione tra  $d$  e  $\lambda$  affinché si abbia un solo massimo principale quando le sorgenti sono in fase, quanto deve valere la differenza di fase  $\phi$  tra due sorgenti consecutive per ottenere, con  $d = \lambda/2$ , un massimo di intensità lungo l'asse  $x$ , il numero e la posizione dei massimi principali per  $d = \lambda/2$ ,  $\phi = -\pi/2$ .

- 15.14** *N* trasmettitori sincroni di eguale potenza possono emettere segnali di frequenza  $v_1 = 30 \text{ GHz}$  e  $v_2 = 24 \text{ GHz}$ . Si osserva che il secondo massimo secondario nell'intorno del massimo principale di ordine  $m = 1$  per la frequenza  $v_1$ , cade allo stesso angolo del massimo principale di ordine  $m = 1$  per la frequenza  $v_2$ . Calcolare il numero  $N$  di sorgenti e il rapporto tra l'ampiezza del campo elettrico  $E_2$  del massimo secondario e l'ampiezza  $E_{\max}$  del massimo principale.

- 15.15** Una sottile lamina trasparente, di indice di rifrazione  $n = 1.4$  e spessore  $d$ , è immersa in aria. In incidenza normale si osserva un massimo di intensità nella luce riflessa per  $\lambda_1 = 500 \text{ nm}$  e un minimo per  $\lambda_2 = 375 \text{ nm}$ , senza che si osservino altri massimi e minimi tra  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ . Calcolare lo spessore  $d$  della lamina e le percentuali di luce riflessa e trasmessa per  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ .

- 15.16** Una sottile lamina trasparente, di indice di rifrazione  $n = 1.5$  e spessore  $d = 0.40 \mu\text{m}$ , immersa in aria, è illuminata perpendicolarmente alla sua superficie con luce bianca ( $0.4 \mu\text{m} \leq \lambda \leq 0.7 \mu\text{m}$ ). Calcolare le lunghezze d'onda per cui si hanno massimi e minimi di intensità in riflessione e la percentuale  $I_r/I_t$  di luce riflessa in funzione della lunghezza d'onda.

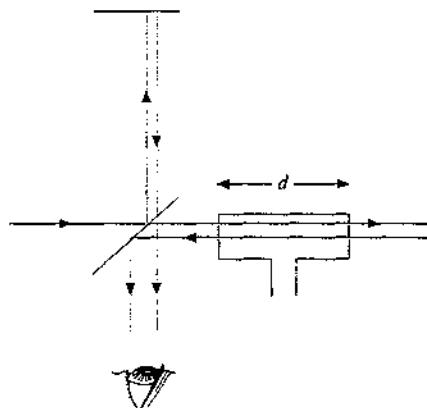
- 15.17** Una sorgente estesa di luce di lunghezza d'onda  $\lambda = 0.68 \mu\text{m}$  illumina perpendicolarmente due lastre di vetro lunghe  $L = 120 \text{ mm}$  che si toccano ad un estremo e all'altro sono separate da un filo di diametro  $d = 0.048 \text{ mm}$ . Calcolare le posizioni delle frange chiare e delle frange scure, il loro numero totale e la loro densità.



- 15.18** In un dispositivo per produrre anelli di Newton l'intercapedine tra la lastra piana e la lente, che ha raggio di curvatura  $R = 2 \text{ m}$  e diametro  $D = 20 \text{ mm}$ , è riempita di un liquido il cui indice di rifrazione  $n$  è intermedio tra gli indici di rifrazione  $n_1$  della lente e  $n_2$  della lastra ( $n_1 < n < n_2$ ). Illuminando con luce di lunghezza d'onda  $\lambda = 0.65 \mu\text{m}$  si osserva che due anelli chiari successivi hanno diametri  $d_1 = 4.84 \text{ mm}$  e  $d_2 = 5.23 \text{ mm}$  (con gli errori di misura). Calcolare il valore dell'indice di rifrazione  $n$  del liquido, con una stima dell'errore di misura in base ai dati, e il numero di anelli chiari che si formano.

- 15.19** Una lastra spessa di vetro d'indice di rifrazione  $n_1 = 1.76$  è ricoperta da una sottile pellicola trasparente di spessore  $d$  e indice di rifrazione  $n_2$ . Un fascio di luce bianca incide in aria perpendicolarmente alla superficie della lastra e si osserva che per la lunghezza d'onda  $\lambda_G = 0.55 \mu\text{m}$  la lastra è perfettamente trasparente. Calcolare il valore di  $n_2$  e dello spessore (minimo)  $d$ ; calcolare inoltre la percentuale di luce trasmessa per  $\lambda_R = 0.7 \mu\text{m}$  e  $\lambda_T = 0.4 \mu\text{m}$  e confrontare con i valori che si avrebbero in assenza della pellicola.

- 15.20** Nell'interferometro di Michelson (paragrafo 15.6) spostando lo specchio mobile di  $\Delta x = 0.356 \text{ mm}$  si misura lo spostamento di  $N_1 = 1304$  frange. Calcolare il valore della lunghezza d'onda della luce impiegata. Si supponga che uno dei fasci dell'interferometro attraversi un piccolo contenitore di vetro lungo  $d = 1.4 \text{ cm}$  in cui inizialmente è fatto il vuoto; facendo fluire gas nel contenitore fino ad un certo valore della pressione si misura lo spostamento di  $N_2 = 51$  frange. Calcolare l'indice di rifrazione del gas.



- 15.21** Un filo di rame, lungo  $L = 0.8 \text{ m}$  e di raggio  $r = 1 \text{ mm}$ , è teso con tensione  $T = 10^3 \text{ N}$ . Calcolare la frequenza fondamentale di vibrazione e la corrispondente lunghezza d'onda. Determinare di quanto varia il valore di  $v$  se si raddoppia la forza, si raddoppia la massa per unità di lunghezza, si raddoppia il raggio, si raddoppia la lunghezza.

- 15.22** In una corda tesa esiste un'onda stazionaria rappresentata dall'espressione

$$y(x, t) = 0.5 \sin 0.2x \cos 300t$$

dove le lunghezze sono date in centimetri e il tempo in secondi. Calcolare la lunghezza d'onda e la frequenza dell'onda, la velocità  $v$  delle onde trasversali sulla corda, la lunghezza  $L$  della corda se essa vibra nella sua quarta armonica.

- 15.23** Due armoniche successive di una canna d'organo hanno lunghezza d'onda  $\lambda_1 = 36 \text{ cm}$  e  $\lambda_2 = 28 \text{ cm}$ . Determinare se la canna d'organo è chiusa o aperta e calcolare la lunghezza  $L$  della canna e la frequenza fondamentale se la temperatura ambiente è  $t = 27^\circ\text{C}$ .

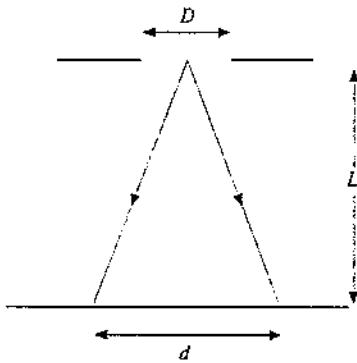
- 15.24** L'orecchio umano può avvertire, se opportunamente allenato, battimenti di intensità che hanno un periodo  $\tau = 2 \text{ s}$ . Calcolare la precisione con cui bisogna accordare due pianoforti, che devono suonare insieme, alle due frequenze  $v_1 = 400 \text{ Hz}$  e  $v_2 = 1000 \text{ Hz}$ .

- 16.1** Una fenditura di larghezza  $a = 6 \text{ cm}$  è praticata su uno schermo di materiale assorbente ed è investita da un'onda elettromagnetica piana di frequenza  $\nu = 7.5 \text{ GHz}$ . Calcolare l'andamento dell'intensità in funzione di  $\theta$  a grandi distanze, l'angolo  $\theta_{\min}$  a cui si ha il primo minimo, il rapporto  $I/I_0$  per  $\theta = \theta_{\min}/2$  se  $I_0$  è l'intensità per  $\theta = 0$ . Due sorgenti di questo tipo, separate dalla distanza  $d = 20 \text{ cm}$ , sono poste dietro il piano contenente la fenditura. Calcolare la distanza massima  $L$  tra il piano delle sorgenti e il piano della fenditura affinché esse possano essere risolte a grande distanza.



- 16.2** Una fenditura di larghezza  $a$  è illuminata con luce monocromatica di lunghezza d'onda  $\lambda = 0.5 \mu\text{m}$ . L'immagine della fenditura su uno schermo posto nel piano focale di una lente di focale  $f = 80 \text{ cm}$ , addossata alla fenditura, è una striscia luminosa centrale di larghezza  $\Delta y = 8 \text{ mm}$ . Calcolare la larghezza  $a$  della fenditura. Quando sulla stessa fenditura incide luce bianca ( $0.4 \mu\text{m} \leq \lambda \leq 0.7 \mu\text{m}$ ) si constata che in una certa zona dello schermo si sovrappongono due bande di lunghezze d'onda: per la prima banda la zona è di minima intensità e per l'altra di primo massimo secondario di intensità. Calcolare le due bande di lunghezze d'onda interessate e la zona  $\Delta y$ , sullo schermo in cui avviene la sovrapposizione.

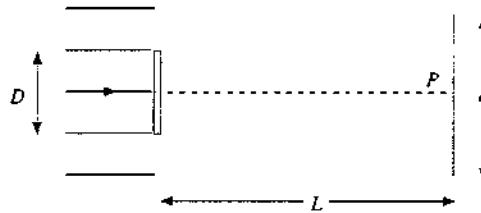
- 16.3** Una sorgente sottomarina di ultrasuoni, usata per la localizzazione dei sottomarini, ha un diaframma circolare di diametro  $D = 50 \text{ cm}$  ed emette segnali di frequenza  $\nu_s = 25 \text{ kHz}$ . La sorgente è a  $L = 200 \text{ m}$  dal fondo e la velocità di propagazione del suono in acqua è  $v = 1450 \text{ m/s}$ . Calcolare il diametro  $d$  dell'immagine del diaframma sul fondo marino e quale sarebbe l'ampiezza della zona del fondo marino interessata dal segnale se la frequenza fosse  $\nu_s = 3538 \text{ Hz}$ .



- 16.4** Determinare il diametro dell'immagine di una stella formata da una lente di macchina fotografica, con diametro

$D_1 = 2.5 \text{ cm}$  e focale  $f_1 = 7.5 \text{ cm}$ , e dall'obiettivo di un cannocchiale di diametro  $D_2 = 15 \text{ cm}$  e focale  $f_2 = 150 \text{ cm}$ . Si assuma  $\lambda = 0.57 \mu\text{m}$ .

- 16.5** Un'onda piana elettromagnetica di frequenza  $\nu = 10 \text{ GHz}$  incontra un disco assorbente di diametro  $D = 60 \text{ cm}$ , ortogonale alla direzione di propagazione dell'onda. Calcolare nell'intorno di un punto  $P$ , situato sull'asse del disco a distanza  $L = 5 \text{ m}$ , il diametro  $d$  della zona in cui viene percepito il segnale prodotto dall'onda.



- 16.6** Nelle notti di foschia attorno alla luna si osserva un anello rosastro con diametro  $D_R$  dell'ordine di 1.5 volte il diametro della luna, dovuto alla diffrazione della luce sulle goccioline d'acqua presenti nell'atmosfera terrestre. Calcolare la dimensione  $D$  delle goccioline di acqua e il diametro  $D_B$  dell'anello bluastro che si potrebbe osservare attorno alla luna. La distanza terra-luna è  $L = 3.8 \cdot 10^5 \text{ km}$  e il raggio lunare è  $R_L = 1.72 \cdot 10^3 \text{ km}$ .

- 16.7** In condizioni ideali determinare la distanza  $h$  di due punti sulla superficie della luna che possono essere appena risolti da un osservatore sulla terra usando l'occhio nudo e usando il telescopio di Monte Palomar. Per le aperture nei due casi si prenda  $d_1 = 5 \text{ mm}$ ,  $d_2 = 5 \text{ m}$ ; la distanza terra-luna è data nel problema 16.6; infine si assuma  $\lambda = 0.5 \mu\text{m}$ .

- 16.8** L'obiettivo di una macchina fotografica ha distanza focale  $f = 50 \text{ mm}$ ; la sua apertura varia da un massimo  $D_1 = 25 \text{ mm}$  ( $f/2$ ) ad un minimo  $D_2 = 3 \text{ mm}$  ( $f/16$ ). Calcolare per una luce di lunghezza d'onda  $\lambda_C = 0.55 \mu\text{m}$  il limite di risoluzione angolare imposto dalla diffrazione e il numero di righe/mm che è possibile risolvere sulla pellicola, nei due casi. Ripetere il calcolo per  $\lambda_V = 0.4 \mu\text{m}$  e  $\lambda_R = 0.68 \mu\text{m}$ .

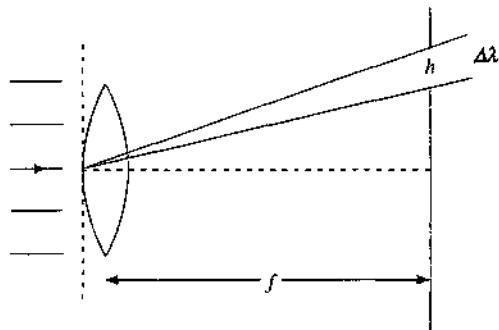
- 16.9** Due fessure di larghezza  $a = 0.030 \text{ mm}$  distanti  $d = 0.15 \text{ mm}$  sono illuminate da luce di lunghezza d'onda  $\lambda = 0.55 \mu\text{m}$ . Calcolare il numero  $N$  di frange di interferenza che si formano tra i primi minimi di diffrazione adiacenti al massimo centrale, il rapporto di intensità tra la frangia del terzo ordine e la frangia centrale, la larghezza angolare  $\Delta\theta$  della frangia centrale.

- 16.10** Un reticolo di diffrazione avente una larghezza  $L = 2.4 \text{ cm}$  contiene  $N = 1.6 \cdot 10^3$  linee di larghezza  $a$  minore di  $\lambda = 0.41 \mu\text{m}$ . Calcolare le posizioni angolari dei massimi di interferenza, la larghezza angolare del massimo di interruzione di ordine zero, la dispersione angolare  $D$  al primo e al secondo ordine, il potere risolutivo  $R$  al primo

e al secondo ordine, l'intervallo  $\Delta\lambda$  e l'intervallo  $\Delta\nu$  risolvibile agli stessi ordini.

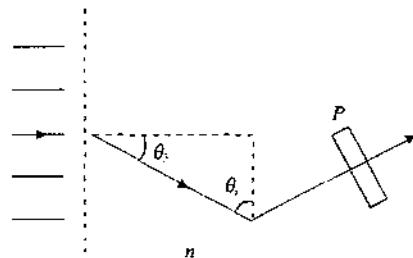
- 16.11** Un reticolo avente  $N$  fenditure larghe  $a$  e distanti  $d$  viene illuminato con un'onda piana di lunghezza d'onda  $\lambda = 0.6 \mu\text{m}$ . La figura di interferenza si forma nel piano focale di una lente di focale  $f = 50 \text{ cm}$ , addossata al reticolo, e si osserva che la riga corrispondente al massimo principale del secondo ordine è a distanza  $y_2 = 2 \text{ cm}$  dal centro, che la riga corrispondente al massimo del quarto ordine manca e che la riga centrale ha una larghezza  $\Delta y = 20 \mu\text{m}$ . Calcolare i valori di  $d$  e  $a$ , la larghezza  $L$  del reticolo, l'intervallo  $\Delta\lambda$  nell'intorno di  $\lambda$  che si riesce a separare al secondo ordine, il rapporto tra l'intensità della riga del secondo ordine e l'intensità della riga centrale.

- 16.12** Un reticolo di diffrazione avente  $n = 500$  linee/mm viene illuminato con luce bianca ( $0.4 \mu\text{m} \leq \lambda \leq 0.7 \mu\text{m}$ ). Su uno schermo posto nel piano focale di una lente di focale  $f = 50 \text{ cm}$  si pratica un foro quadrato di lato  $h = 14 \text{ mm}$ , con un bordo distante  $y_1 = 12.9 \text{ cm}$  dalla riga bianca centrale. Calcolare l'intervallo  $\Delta\lambda$  delle lunghezze d'onda trasmesse dal foro; ripetere il calcolo con un foro di lato  $h = 0.5 \text{ mm}$ .



- 16.13** Il potere risolutivo di un reticolo di diffrazione è  $R = \lambda / \Delta\lambda = mN$ . Calcolare il corrispondente intervallo di frequenza  $\Delta\nu$  risolvibile, la differenza  $\Delta t$  di tempo di volo tra i due raggi estremi diffratti dal reticolo in condizioni di massimo di interferenza, la relazione tra  $\Delta\nu$  e  $\Delta t$ .

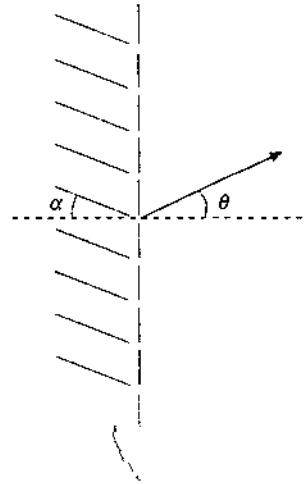
- 16.14** Un reticolo di diffrazione largo  $L = 1 \text{ cm}$  ha  $N = 2500$  fenditure larghe  $a = 2 \mu\text{m}$ . Esso è illuminato con luce monocromatica non polarizzata. La luce trasmessa dal reticolo nella direzione  $\theta_3$ , corrispondente al massimo principale del terzo ordine, incide con angolo  $\theta$  su una



lastra di materiale trasparente di indice di rifrazione  $n = 1.732$  e la parte riflessa viene analizzata da un polarizzatore. L'intensità trasmessa dal polarizzatore segue la legge  $I_p(\alpha) = 0.5 \sin^2 \alpha \text{ W/cm}^2$ , essendo  $\alpha$  l'angolo tra l'asse ottico del polarizzatore e il piano di incidenza. Calcolare l'intensità  $I_3$  del massimo principale del terzo ordine, la lunghezza d'onda  $\lambda$ , l'intensità del massimo principale di ordine zero e la sua larghezza angolare.

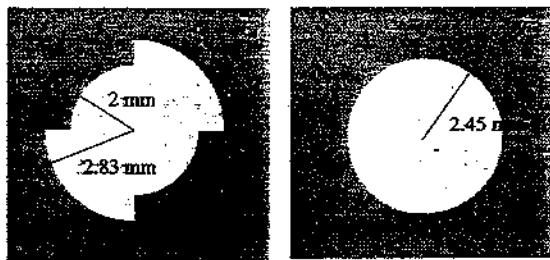
- 16.15** Un reticolo ideale, con larghezza delle fenditure  $a \ll \lambda$ , ha passo  $d$  ed è costituito da  $N$  fenditure. Davanti alle fenditure sono posti due polarizzatori che coprono rispettivamente la prima metà e la seconda metà delle fenditure (ciascuno copre cioè  $N/2$  fenditure). Detta  $I_1$  l'intensità prodotta da una fenditura, calcolare, nel caso che i polarizzatori abbiano gli assi paralleli e nel caso in cui li abbiamo incrociati, l'intensità in funzione dell'angolo di osservazione, le posizioni angolari dei massimi principali, le posizioni angolari dei minimi e il loro numero tra due massimi principali consecutivi.

- 16.16** Luce bianca ( $0.4 \mu\text{m} \leq \lambda \leq 0.7 \mu\text{m}$ ) incide su un reticolo di diffrazione largo  $L = 1.5 \text{ cm}$  e avente  $N = 7500$  fenditure secondo un angolo  $\alpha = 30^\circ$  rispetto alla normale. Calcolare le posizioni angolari dei massimi principali e la larghezza angolare del massimo principale di ordine zero per la lunghezza d'onda  $\lambda = 0.6 \mu\text{m}$ . Determinare inoltre quali lunghezze d'onda danno un massimo d'intensità per  $\theta = 0$ .

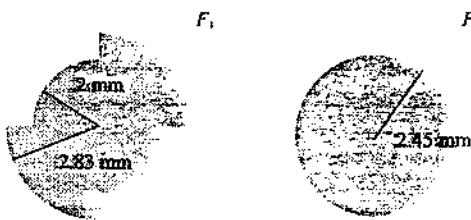


- 16.17** Un'onda luminosa piana di lunghezza d'onda  $\lambda = 0.5 \mu\text{m}$  incide su un foro di raggio  $a = 0.1 \text{ mm}$ . Calcolare a quale distanza dal foro bisogna porsi lungo l'asse affinché l'apertura corrisponda a tre o quattro zone di Fresnel e qual è il punto più prossimo allo schermo in cui l'intensità è minima. Ripetere il calcolo con un foro di raggio  $a = 2 \text{ mm}$ .

- 16.18** Un'onda luminosa piana di lunghezza d'onda  $\lambda = 0.4 \mu\text{m}$  incide su uno schermo opaco in cui è praticata un'apertura della forma  $F_1$  o  $F_2$ , indicata in figura. In un punto distante  $r = 10 \text{ m}$  dal centro del foro lungo l'asse l'ampiezza del campo elettrico vale  $E = \alpha E_0$  e l'intensità  $I = \alpha^2 I_0$ , essendo  $E_0$  e  $I_0$  i valori misurati in assenza dello schermo. Calcolare il coefficiente  $\alpha$  per  $F_1$  e per  $F_2$ .



- 16.19 Si riprenda il problema 16.18 sostituendo alle aperture ostacoli della stessa forma; alla stessa distanza  $r$  l'ampiezza del campo elettrico e l'intensità sono  $E = \beta E_0$ ,  $I = \beta^2 I_0$ , dove  $E_0$  e  $I_0$  sono i valori in assenza dell'ostacolo. Calcolare il coefficiente  $\beta$  per  $F_1$  e  $F_2$ .

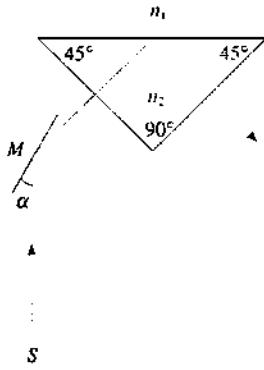


- 16.20 Un fascio di raggi  $X$  monocromatici, con  $\lambda = 0.2\text{nm}$ , incide su un cristallo di KI ( $A = 166$ ,  $\rho = 3.13 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ ). I piani cristallini interessati nella diffrazione sono quelli principali, la cui distanza è pari alla costante reticolare  $a$ , cioè alla dimensione della cella elementare. Calcolare il valore di  $a$  e per quali valori dell'angolo di radenza si osserva la diffrazione di Bragg.

- 16.21 Confrontando due lunghezze d'onda di raggi  $X$   $\lambda_1$  e  $\lambda_2 = 97 \text{ pm}$ , si nota che  $\lambda_1$  dà un massimo del primo ordine per un angolo di radenza  $\theta_1 = 30^\circ$  mentre  $\lambda_2$  dà un massimo del terz'ordine per  $\theta_2 = 60^\circ$ . Calcolare la distanza  $d$  tra i piani reticolari interessati e il valore di  $\lambda_1$ .

- 16.22 Un fascio di raggi  $X$ , contenente tutte le lunghezze d'onda tra  $90$  e  $130 \text{ pm}$ , incide con angolo di radenza  $\theta = 45^\circ$  su un cristallo con distanza tra i piani reticolari  $d = 0.275 \text{ nm}$ . Calcolare se ci sono fasci diffratti e per quali lunghezze d'onda.

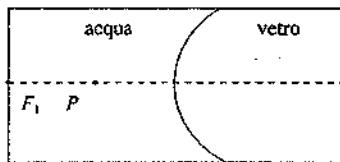
- 17.1 Nel sistema ottico mostrato in figura il fascio emesso



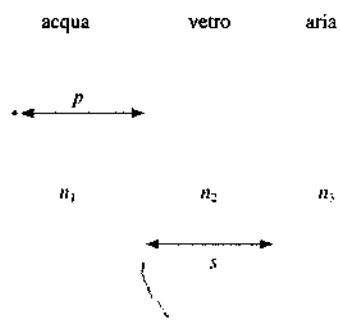
dalla sorgente  $S$  e riflesso dallo specchio piano  $M$  incide ortogonalmente sulla faccia del prisma; si vuole che la riflessione sulla base del prisma sia totale, sapendo che  $n_1 = 1.33$ . Calcolare il valore minimo che deve avere l'indice di rifrazione  $n_2$  del prisma; calcolare inoltre il valore dell'angolo  $\alpha$  di inclinazione dello specchio.

- 17.2 Un piccolo oggetto posto sull'asse di uno specchio sferico concavo dista dal vertice  $p = 21 \text{ cm}$ . Si osserva che l'ingrandimento trasversale dell'immagine è  $I = -2.11$ . Calcolare dove si forma l'immagine di un sottile fascio di raggi paralleli che incide sullo specchio formando un angolo  $\theta = 3.5^\circ$  con l'asse.

- 17.3 Una superficie diottica sferica di raggio  $R = 10 \text{ cm}$  separa acqua ( $n_1 = 1.33$ ) e vetro ( $n_2 = 1.5$ ). La profondità dell'acqua è eguale alla distanza focale anteriore del diottro. Determinare dove si forma l'immagine di un oggetto posto sull'asse a metà del recipiente pieno d'acqua e quanto vale l'ingrandimento trasversale.



- 17.4 Una lastra piana di vetro, spessa  $s = 3 \text{ cm}$  e con indice di rifrazione  $n_2 = 1.5$ , è a contatto con acqua a sinistra e con aria a destra. Un oggetto in acqua dista  $p = 10 \text{ cm}$  dalla lastra. Determinare dove si forma l'immagine.



- 17.5 Una lente sottile convergente simmetrica, costituita da un vetro con indice di rifrazione  $n = 1.58$ , ha le superficie con raggio di curvatura che vale in modulo  $R = 46.4 \text{ mm}$ . Si utilizza questa lente per ottenere su uno schermo immagini di oggetti la cui distanza dalla lente varia da  $+\infty$  a  $25 \text{ cm}$ . Calcolare qual è il corrispondente intervallo di distanze tra lente e schermo.

- 17.6 Un occhio ipermetropo ha il punto prossimo a distanza  $q_p$ , maggiore di  $25 \text{ cm}$ ; un occhio miope ha il punto remoto a distanza finita  $q_r$ , invece che all'infinito. Determinare nei due casi il tipo di lente necessaria per la correzione; numericamente si ponga  $q_p = 100 \text{ cm}$ ,  $q_r = 50 \text{ cm}$ .

- 17.7 Due lenti sottili, di focali  $f_1 = 24 \text{ cm}$  e  $f_2 = -20 \text{ cm}$ , distano  $h = 16 \text{ cm}$ . Calcolare la focale del sistema e la posizione dei piani principali. Ripetere il calcolo con  $h = 30 \text{ cm}$ .
- 17.8 Due lenti sottili di eguale focale  $f_1 = f_2 = f_0 = 10 \text{ cm}$  distano  $h$ . Calcolare la focale del sistema e la posizione dei piani principali per  $h = 0, 5, 10, 15, 20, 30 \text{ cm}$ .
- 17.9 Due lenti sottili di focali opposte  $f_1 = f_0 = 10 \text{ cm}$ ,  $f_2 = -f_0$ , distano  $h$ . Calcolare la focale del sistema e la posizione dei piani principali per  $h = 5, 10, 15 \text{ cm}$ .
- 17.10 Riprendendo la definizione di potere dispersivo  $D$  data nel paragrafo 17.9 si dimostri che tra le distanze focali  $f_R, f_G, f_B$  di una lente, rispettivamente per luce rossa, gialla e blu, sussiste la relazione  $f_B - f_R = f_G D$ ; si ammetta che  $f_B f_R = f_G^2$ . Si calcoli l'effetto per una lente sottile convergente simmetrica con raggio di modulo  $R = 50 \text{ mm}$ , fatta di vetro che ha  $n_B = 1.524$ ,  $n_G = 1.517$ ,  $n_R = 1.514$  alle lunghezze d'onda  $\lambda_B = 486 \text{ nm}$ ,  $\lambda_G = 589 \text{ nm}$ ,  $\lambda_R = 656 \text{ nm}$ .
- 17.11 Date due lenti sottili addossate ( $h = 0$ ) di materiale diverso trovare qual è la condizione per le focali affinché il sistema non abbia aberrazione cromatica; si assuma sempre  $f_B f_R = f_G^2$ .
- 18.1 Una lampada di potenza  $P = 60 \text{ W}$  emette sotto forma di luce visibile di lunghezza d'onda  $\lambda = 0.55 \mu\text{m}$  il 5% dell'energia che assorbe: l'emissione è isotropa. La pupilla di un osservatore, che è posto a distanza  $r = 1 \text{ km}$ , ha diametro  $d = 2 \text{ mm}$ . Calcolare il numero di fotoni che passano attraverso la pupilla.
- 18.2 Su un satellite che orbita intorno alla terra è montato un pannello solare di area  $\Sigma = 2 \text{ m}^2$ , in posizione perpendicolare ai raggi solari. Se l'intensità della radiazione solare sul pannello è  $I = 1.33 \text{ kW/m}^2$ , calcolare il numero di fotoni che colpiscono il pannello nell'unità di tempo e quanto tempo occorre affinché il pannello assorba una mole di fotoni; si assuma  $\lambda = 0.55 \mu\text{m}$ .
- 18.3 Nella fotosintesi clorofilliana, in cui l'anidride carbonica si trasforma in carboidrati e ossigeno, vi è un assorbimento di energia solare  $W = 3.68 \cdot 10^4 \text{ J}$  per grammo di  $\text{CO}_2$  che si trasforma. Assumendo che la radiazione abbia lunghezza d'onda  $\lambda = 0.65 \mu\text{m}$  (quella a cui l'assorbimento è massimo), calcolare quanti fotoni sono necessari per dissociare una singola molecola di  $\text{CO}_2$ , la cui massa molecolare è  $A = 44$ .
- 18.4 Un resistore, costituito da un filo annerito di raggio  $R = 1 \text{ mm}$  e lunghezza  $d = 2 \text{ cm}$ , è in equilibrio con l'ambiente a temperatura  $T_0 = 27^\circ\text{C}$  quando viene percorso da una corrente che provoca una dissipazione  $P = 0.5 \text{ W}$ . Supponendo che lo scambio di energia con l'ambiente avvenga solo per irraggiamento calcolare la temperatura  $T$  del filo, la lunghezza d'onda alla quale è massima l'emissione e il valore del potere emissivo specifico massimo.
- 18.5 L'interno di un appartamento è ad una temperatura  $T_0 = 20^\circ\text{C}$  mentre la temperatura esterna è  $T_e = 0^\circ\text{C}$ . Calcolare la perdita netta di energia attraverso una finestra di area  $\Sigma = 3 \text{ m}^2$  durante 12 ore e la lunghezza d'onda alla quale la perdita è massima.
- 18.6 L'intensità della radiazione emessa da una stella ha un massimo per  $\lambda = 600 \text{ nm}$ ; la potenza totale emessa dalla stella è  $P = 5 \cdot 10^{30} \text{ W}$ . Assumendo che la stella irradia come un corpo nero, calcolare la temperatura  $T$  della superficie della stella, il raggio  $R$ , il potere emissivo specifico massimo e il potere emissivo totale.
- 18.7 Quando su una certa superficie metallica incide una radiazione luminosa con  $\lambda = 625 \text{ nm}$  gli elettroni emessi hanno velocità compresa tra zero e il valore massimo  $v_{\max} = 2.17 \cdot 10^5 \text{ m/s}$ . Calcolare il lavoro di estrazione del metallo  $W_e$ , la frequenza di soglia  $v_0$  e la corrispondente lunghezza d'onda massima  $\lambda_{\max}$ .
- 18.8 Illuminando una superficie metallica con luce verde di lunghezza d'onda  $\lambda_V = 546.1 \text{ nm}$ , si misura un potenziale di arresto  $V_0 = 0.70 \text{ V}$ . Calcolare il lavoro di estrazione del metallo e il potenziale di arresto che si misurerrebbe con la luce gialla  $\lambda_G = 587.5 \text{ nm}$ .
- 18.9 Una radiazione di lunghezza d'onda  $\lambda = 450 \text{ nm}$  incide su un metallo. Gli elettroni emessi si muovono in un campo magnetico uniforme di modulo  $B = 1.75 \cdot 10^{-4} \text{ T}$  e il raggio di curvatura massimo vale  $r = 1.98 \text{ cm}$ . Calcolare il lavoro di estrazione del metallo.
- 18.10 Un fascio di luce ultravioletta di intensità  $I = 5.5 \cdot 10^{-2} \text{ W/m}^2$  incide perpendicolarmente su una superficie metallica. Il lavoro di estrazione del metallo è  $W_e = 3.44 \text{ eV}$  e gli elettroni emessi hanno una velocità massima  $v_{\max} = 4.2 \cdot 10^5 \text{ m/s}$ . Nell'ipotesi che i fotoni incidenti non siano riflessi dalla superficie, calcolare quale potrebbe essere il flusso massimo di elettroni emessi e la pressione di radiazione sulla superficie.
- 18.11 Un fascio di raggi X di energia  $U_0 = 300 \text{ keV}$  subisce diffusione Compton. Calcolare l'energia dei raggi X diffusi all'angolo  $\theta = 35^\circ$  e l'energia cinetica comunicata all'elettrone.
- 18.12 Un fotone avente energia  $U_0 = 10 \text{ keV}$  urta contro un elettrone libero in quiete e viene diffuso ad un angolo  $\theta = 60^\circ$ . Calcolare l'energia cinetica, la quantità di moto e la direzione dell'elettrone dopo l'urto.
- 18.13 In un processo Compton un fotone con energia  $U_0 = 10 \text{ MeV}$  colpisce un elettrone libero e lo mette in moto lungo la direzione incidente ( $\phi = 0$ ); il fotone diffuso rimbalza indietro ( $\theta = 180^\circ$ ). Calcolare l'energia e la lunghezza d'onda del fotone diffuso e l'energia cinetica dell'elettrone.
- 18.14 Un elettrone in un atomo isolato di idrogeno occupa il livello corrispondente a  $n = 30$ . Calcolare il raggio dell'atomo di idrogeno e l'energia di legame in questa configurazione; calcolare inoltre la lunghezza d'onda massima di un fotone per ionizzare l'atomo.

- 18.15** Il *positrionio* è un sistema tipo atomo di idrogeno in cui al posto del protone c'è un *positrone* (carica  $+e$ , massa eguale a quella dell'elettrone). Usando il modello di Bohr trovare le espressioni per il raggio e l'energia di legame. Calcolare inoltre l'energia necessaria per far passare il positrionio dallo stato fondamentale al primo livello eccitato.
- 18.16** Il *muone* è una particella con carica eguale a quella dell'elettrone e massa  $m_\mu = 206.8 m_e$ ; esso può essere catturato da un protone e si ha la formazione dell'*idrogeno mesico*, con il muone al posto dell'elettrone. Calcolare secondo il modello di Bohr il raggio e l'energia di legame, nonché la differenza di energia tra il livello fondamentale ed il primo livello eccitato.
- 18.17** Il protone ha un raggio medio  $r_p = 0.8 \cdot 10^{-15}$  m. Calcolare l'energia cinetica di un protone e di un elettrone la cui lunghezza d'onda di de Broglie sia  $\lambda = r_p / 10$ .
- 18.18** Un fascio di elettroni di energia cinetica  $E_k = 65$  eV viene diffratto da un cristallo, come nel caso dei raggi X; il massimo del prim'ordine viene osservato per  $\theta = 45^\circ$ . Calcolare la distanza  $d$  tra i piani del cristallo.
- 18.19** Uno spettrografo a neutroni utilizza un cristallo di berillio; la distanza tra i piani reticolari è  $d = 0.732 \cdot 10^{-10}$  m. Calcolare per neutroni incidenti con energia cinetica  $E_k = 4$  eV il valore dell'angolo di Bragg al prim'ordine.
- 18.20** L'indeterminazione nella posizione di un elettrone in un atomo di idrogeno non può essere maggiore del diametro  $2 r_i = 1.058 \cdot 10^{-10}$  m. Calcolare la minima indeterminazione  $\Delta p$  della quantità di moto dell'elettrone nell'atomo e il valore dell'energia cinetica dell'elettrone se esso avesse quantità di moto  $p$  eguale a  $\Delta p$ .

# Guida alla risoluzione dei problemi di Onde.

## Risultati numerici

12.1  $\omega = 2\pi v = 62.8 \text{ rad/s}$ ,  $v_{\max} = \omega \xi_0 = 1.26 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}$ ,  $v = E / \rho = 5189 \text{ m/s}$ ,  
 $v_{\max} / v = 2.4 \cdot 10^{-6}$ ;  
 $w = \frac{1}{2} \rho \omega^2 \xi_0^2 = \frac{1}{2} \rho v_{\max}^2 = 0.62 \text{ J/m}^3$  ;  $I = w v = 3.21 \cdot 10^3 \text{ W/m}^2$  ;  
 $P = I \Sigma = I \pi (d/2)^2 = 4 \cdot 10^{-2} \text{ W}$ .

12.2  $\Delta\phi = k_1 d_1 + k_2 d_2 + k_3 d_3 = \omega \left( \frac{d_1}{v_1} + \frac{d_2}{v_2} - \frac{d_3}{v_3} \right) = \omega \Delta t = \frac{\pi}{3}$  ,  
 $\Delta t = \pi / 3 \omega = 1/6 v = 1.67 \cdot 10^{-4} \text{ s}$  ;  
 $v_1 = 5092 \text{ m/s}$ ,  $v_2 = 1113 \text{ m/s}$ ,  $v_3 = 3536 \text{ m/s}$ ,  $\frac{d_1}{v_1} + \frac{d_2}{v_2} - \frac{d_3}{v_3} = \Delta t$  ,  
 $d_1 + d_2 = d_3$ ,  $d_1 = 0.815 \text{ m}$ ,  $d_2 = 0.385 \text{ m}$ .

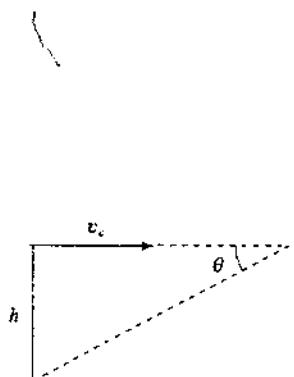
12.3  $\lambda = 2\pi v / \omega$ ,  $\lambda_1 = 1.08 \text{ m}$ ,  $\lambda_2 = 4.69 \text{ m}$ ,  $\lambda_3 = 16.12 \text{ m}$  ;  
 $I = w v = \frac{1}{2} \rho \omega^2 \xi_0^2 v$ ,  $\xi_{01} = 3.36 \cdot 10^{-8} \text{ m}$ ,  $\xi_{02} = 5.8 \cdot 10^{-10} \text{ m}$  ,  
 $\xi_{03} = 1.1 \cdot 10^{-10} \text{ m}$  ;  $\Delta p = \rho v \omega \xi_0$ ,  $\Delta p_1 = 0.03 \text{ Pa}$ ,  $\Delta p_2 = 1.73 \text{ Pa}$  ,  
 $\Delta p_3 = 8.80 \text{ Pa}$ .

12.4  $\omega = 2\pi v = 3.14 \cdot 10^3 \text{ rad/s}$ ,  $v_1 = \alpha \sqrt{T_1} = 20.055 \sqrt{293} = 343 \text{ m/s}$  ,  
 $\Delta p = \rho_1 v_1 \omega \xi_0 = 1.39 \cdot 10^{-2} \text{ Pa}$  ,  $\Delta \rho = \Delta p / v_1^2 = 1.18 \cdot 10^{-7} \text{ kg/m}^3$  ;  
 $I_1 = \frac{1}{2} \rho_1 \omega^2 \xi_0^2 v_1 = 2.18 \cdot 10^{-7} \text{ W/m}^2$  ,  $B_1 = 10 \log \frac{I_1}{I_0} = 53.4 \text{ dB}$  ;  
 $\frac{I_2}{I_1} = \frac{\rho_2 v_2}{\rho_1 v_1} = \frac{T_2 \sqrt{T_2}}{T_1 \sqrt{T_1}} = \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{1/2} = 0.93$  ,  $B_2 = 53.1 \text{ dB}$  .

12.5  $I_2 = I_1 (r_1 / r_2)^2 = 2.24 \cdot 10^{-5} \text{ W/m}^2$  ;  
 $\Delta p_1 = \sqrt{2 \rho v I_1} = 0.70 \text{ Pa}$  ,  $\Delta p_2 = \Delta p_1 \sqrt{I_2 / I_1} = 0.14 \text{ Pa}$  ;  
 $\xi_{01} = \sqrt{2 I_1 / \rho v \omega^2} = \sqrt{I_1 / 2 \rho v \pi^2 v^2} = 1.27 \cdot 10^{-8} \text{ m}$  ,  
 $\xi_{02} = \xi_{01} \sqrt{I_2 / I_1} = 2.54 \cdot 10^{-8} \text{ m}$ .

12.6  $\sin \theta = u / v_a = 1/1.5$  ,  $\theta = 41.8^\circ$  ;  $v_a = 495 \text{ m/s}$  ,  $h = v_a t \tan \theta = 4868 \text{ m}$  .

12.7  $v_R = \frac{v}{v + v_s} v_0 = 1047 \text{ Hz}$  ,  $v'_R = \frac{v}{v - v_s} v_0 = 1115 \text{ Hz}$  ;  
 $v_b = v'_R - v_R = 68 \text{ Hz}$  , non avvertibile perché troppo alta.



Soluzione 12.6

13.1 Nel vetro  $k = 2\pi/\lambda = 1.57 \cdot 10^7 \text{ rad/m}$ ,  $\omega = k v = k c / n = 3.14 \cdot 10^{15} \text{ rad/s}$ ;  $I_y/I_z = 3$ ,  $I_y + I_z = 20 \text{ W/m}^2$ ,  $I_y = 15 \text{ W/m}^2$ ,  $I_z = 5 \text{ W/m}^2$ ,

$E_{0y} = \sqrt{2 Z_0 I_y / n} = 86.8 \text{ V/m}$ ,  $E_{0z} = E_{0y} / \sqrt{3} = 50.1 \text{ V/m}$ , pertanto  $E_y = 86.8 \cos(1.57 \cdot 10^7 x - 3.14 \cdot 10^{15} t)$ ,  $E_z = 50.1 \sin(1.57 \cdot 10^7 x - 3.14 \cdot 10^{15} t) \text{ V/m}$ ; nell'aria  $\lambda_0 = n \lambda = 0.6 \cdot 10^{-6} \text{ m}$ ,  $k_0 = 2\pi/\lambda_0 = k/n = \omega/c = 1.05 \cdot 10^7 \text{ rad/m}$ ,  $E_{0y} = \sqrt{2 Z_0 I_y} = 106.3 \text{ V/m}$ ,  $E_{0z} = 61.4 \text{ V/m}$ .

13.2  $P = 0.8 \cdot 500 = 400 \text{ W}$ ,  $I = P / 4\pi r^2 = 1.27 \text{ W/m}^2$ ,  $E_0 = \sqrt{2 Z_0 I} = 30.9 \text{ V/m}$ ,

$$B_0 = E_0 / c = 10.3 \cdot 10^{-8} \text{ T}; F = \frac{2I}{c} \pi a^2 = 6.65 \cdot 10^{-11} \text{ N}.$$

13.3  $B_1 = 6.67 \cdot 10^{-8} \text{ T}$ ;  $I_1 = E_1^2 / 2 Z_0 = 0.53 \text{ W/m}^2$ ,  $P = I_1 r_1^2 \Delta\Omega = 42.4 \text{ kW}$ ;  $E_2 = E_1 (r_1 / r_2) = 4 \text{ V/m}$ ,  $B_2 = 1.33 \cdot 10^{-8} \text{ T}$ .

13.4  $\lambda = c/v = 1.5 \text{ cm}$ ;  $\Delta U = P t = 2.5 \cdot 10^{-5} \text{ J}$ ;  $I = P / \pi R^2 = 7.96 \cdot 10^5 \text{ W/m}^2$ ;  $u = I/c = 2.65 \cdot 10^{-3} \text{ J/m}^3$ ;  $E_0 = \sqrt{2 Z_0 I} = 2.45 \cdot 10^4 \text{ V/m}$ ,  $B_0 = 8.17 \cdot 10^{-8} \text{ T}$ ;  $F = 2P/c = 1.67 \cdot 10^{-4} \text{ N}$ .

13.5  $I = E_0^2 / 2 Z_0 = 2.1 \cdot 10^{-16} \text{ W/m}^2$ ,  $P = I \pi R^2 = 3.75 \cdot 10^{-14} \text{ W}$ ,  $F = P/c = 1.25 \cdot 10^{-22} \text{ N}$ .

13.6  $E_\gamma = h\nu = 6.63 \cdot 10^{-26} \text{ J} = 4.14 \cdot 10^{-7} \text{ eV}$ ;  $N_\gamma = P/E_\gamma = 4.5 \cdot 10^{29} \text{ fotoni/s}$ ;  $I_{\min} = E_0^2 / 2 Z_0 = 3.3 \cdot 10^{-6} \text{ W/m}^2$ ,  $n_{\min} = I_{\min}/E_\gamma = 5 \cdot 10^{19} \text{ fotoni/m}^2 \text{ s}$ ;  $P = 4\pi r^2 I_{\min}$ ,  $r = 26.9 \text{ km}$ ;  $\Delta\Omega = 2\pi(1 - \cos\alpha) = 0.842 \text{ sr}$ ,  $P = r^2 \Delta\Omega I_{\min}$ ,  $r = 104 \text{ km}$ .

13.7  $E_0 = \sqrt{2 Z_0 I} = 12.3 \cdot 10^3 \text{ V/m}$ ;  $\Delta\nu = 1/\Delta t = 10^3 \text{ Hz}$ , in modulo  $\Delta\lambda/\lambda = \Delta\nu/v$ ,  $\Delta\lambda = \lambda^2 \Delta\nu/c = 1.6 \cdot 10^{-12} \mu\text{m}$ ;  $u = I/c = 6.67 \cdot 10^{-4} \text{ J/m}^3$ ;  $E_\gamma = h c / \lambda = 2.86 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 1.79 \text{ eV}$ ;  $N_\gamma = I/E_\gamma = 0.7 \cdot 10^{16} \text{ fotoni/mm}^2 \text{ s}$ .

13.8  $m \Delta v = F \Delta t$ ,  $F = F_{\text{rad}} = P/c$ ,  $\Delta v = P \Delta t / mc = 1.92 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}$ .

13.9  $F_{\text{rad}} = p_{\text{rad}} \pi a^2 = (P / 4\pi r^2 c) \pi a^2$ ,  $F_g = \gamma \frac{M}{r^2} \rho \frac{4}{3} \pi a^3$ , da  $F_{\text{rad}} \geq F_g$   
 $a \leq a_0 = 3P / 16\pi\gamma c\rho M = 0.22 \mu\text{m}$ .

13.10  $P = e^2 z_0^2 \omega^4 / 12\pi\epsilon_0 c^3 = 2.84 \cdot 10^{-24} \text{ W}^4$ ;  $\omega = 2\pi v = 2\pi c/\lambda = 3.43 \cdot 10^{15} \text{ rad/s}$ ,  $P = 3.93 \cdot 10^{-12} \text{ W}$ .

13.11  $n - 1 = C / (\omega_3^2 - \omega^2)$  con  $c = Ne^2 / 2\epsilon_0 m_e$ ;  $\frac{n_1 - 1}{n_2 - 1} = \frac{\omega_3^2 - \omega_1^2}{\omega_3^2 - \omega_2^2}$ ,

$\omega_1 = 21.6 \cdot 10^{15} \text{ rad/s}$ ;  $C = 6.37 \cdot 10^{28} \text{ rad}^2/\text{s}^2$ ,  $N = 4.0 \cdot 10^{24} \text{ molecole/m}^3$  (dall'equazione di stato dei gas ideali si otterebbe  $N = 2.7 \cdot 10^{25}$ );

$$\frac{n'_1 - 1}{n_1 - 1} = \frac{N'}{N} = \frac{\rho'}{\rho} = \frac{p' T}{p T} = 10 \frac{273}{313} = 8.72 \quad n'_1 - 1 = 12.2 \cdot 10^{-4}:$$

$$A = 1 + 1.36 \cdot 10^{-4}, B = 1.21 \cdot 10^{-6} \mu\text{m}^2.$$

13.12  $\omega_1 = 9.43 \cdot 10^8 \text{ rad/s}$ ,  $\omega_2 = 12.57 \cdot 10^8 \text{ rad/s}$ ,  $\omega_p = \sqrt{Ne^2 / \epsilon_0 m_e} = 1.26 \cdot 10^4 \text{ rad/s}$ .

molto minore di  $\omega_1$  e  $\omega_2$ : quindi  $v_p = c / \sqrt{1 + \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} = c / \left(1 + \frac{\omega_p^2}{2\omega^2}\right)$ :

$$\Delta t = \frac{d}{v_{g1}} - \frac{d}{v_{g2}} = \frac{d}{c} \cdot \frac{\omega_p^2}{2} \left( \frac{1}{\omega_1^2} - \frac{1}{\omega_2^2} \right) = \frac{d}{c} \cdot \frac{Ne^2}{2\varepsilon_0 m_e} \left( \frac{1}{\omega_1^2} - \frac{1}{\omega_2^2} \right) = 1.25 \text{ s},$$

$d/c = 3.196 \cdot 10^{10} \text{ s} \approx 1013 \text{ anni}$ ,  $d = 1013 \text{ anni-luce}$ ;  
 $Nd = N d$ ,  $N = 3.38 \cdot 10^4 \text{ elettroni/m}^3$ .

- 13.13 Si misura una  $\lambda$  minore di quella emessa dalla sorgente e quindi l'osservatore si sta avvicinando alla sorgente; da

$$\lambda = \frac{\sqrt{1-v^2/c^2}}{1+v/c} \lambda_0 \text{ con } \lambda = \lambda_v \text{ e } \lambda_0 = \lambda_R \text{ si ricava } \frac{v}{c} = \frac{1-(\lambda_v/\lambda_R)^2}{1+(\lambda_v/\lambda_R)^2},$$

$$v/c = 0.18, v = 0.54 \cdot 10^8 \text{ m/s}.$$

- 13.14 Supponendo che si tratti di battimenti di intensità  $v_b = \left(1 + \frac{v}{c}\right) v_0 - v_0 = \frac{v}{c} v_0$ :

$v$  è la velocità dell'aereo e si è trascurato  $v^2/c^2$  rispetto a 1:  
 $v_0 = c/\lambda_0 = 3 \cdot 10^9 \text{ Hz}, v = 99 \text{ m/s} = 356 \text{ km/ora}$ .

- 14.1  $\theta$  è l'angolo limite,  $\sin\theta = 1/n$ ,  $\theta = 48.6^\circ$ ;  $d_{\min} = 2h \tan\theta = 6.8 \text{ m}$ .

- 14.2  $\sin\theta' = \frac{\sin\theta}{n}$ ,  $\sin\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta'\right) = \cos\theta'$  deve essere maggiore di  $\frac{1}{n}$ :

$$\sqrt{1 - \sin^2\theta'} = \sqrt{1 - \frac{\sin^2\theta}{n^2}} > \frac{1}{n}, \sin\theta < \sqrt{n^2 - 1} = 1.09, \text{ relazione}$$

sempre soddisfatta per cui  $\theta$  può essere qualunque; se  $n = \sqrt{2}, \sqrt{n^2 - 1} = 1$ , con  $n < \sqrt{2}$  c'è un angolo di incidenza  $\theta_{\max}$  oltre il quale nella lastra non si verifica riflessione totale.

- 14.3  $\sin\theta_0 / \sin\theta = n$ ,  $\theta = \theta_0 + \Delta\theta$  con  $\Delta\theta \ll \theta_0$ ,  $\sin\theta = \sin(\theta_0 + \Delta\theta) =$

$$\sin\theta_0 \cos\Delta\theta + \cos\theta_0 \sin\Delta\theta = \sin\theta_0 + \Delta\theta \cos\theta_0, \Delta\theta = \frac{\sin\theta - \sin\theta_0}{\cos\theta_0} =$$

$$\frac{1-n}{n} \tan\theta_0 = -2.8 \cdot 10^{-4} \text{ rad} = -0.016 \text{ gradi} \approx -1', \text{ misurabile.}$$

- 14.4  $\sin\theta_0 = 1/n$ ,  $n = 1.77$ ,  $\tan\theta_B = n$ ,  $\theta_B = 60.53^\circ$ :  $\sin\theta_0 = \cot\theta_B$ .

- 14.5  $R = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 = 0.04$ ,  $T = 1-R = 0.96$  e per ogni lastra che ha due facce,

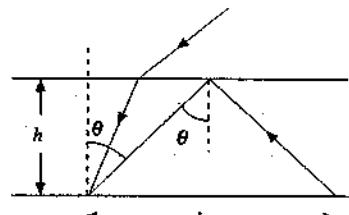
$$I_{\text{tot}}/I_i = 0.96^2 = 0.92 : 0.92^N = 0.7, N = 4, 0.92^N = 0.4, N \approx 11.$$

- 14.6  $R = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 = 7.15 \cdot 10^{-2}$ ,  $T = 1-R$ ,  $T_1 = T^2 = 0.862$ :

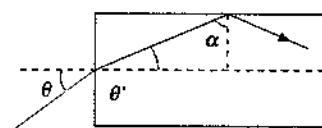
$$T_2 = \frac{T_1}{1-R^2} = 0.866 \text{ (vedi esempio 14.4); } e = e^{-d/l_{\text{las}}} = 0.951.$$

$$T_1 = \epsilon T_2 = 0.820, T_2 = T_1 \epsilon / (1 - \epsilon^2 R^2) = 0.824.$$

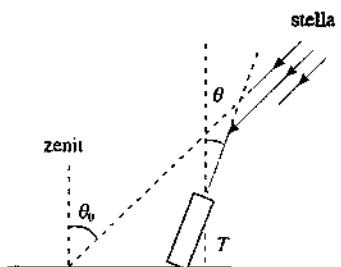
- 14.7  $\sin\theta_0 = n_1, \sin\theta_1 = n_2, \sin\theta_2 = \sin\alpha, \alpha = \theta_0 = 30^\circ$ ;  
 $\theta_1 = 24.62^\circ, \theta_2 = 19.47^\circ, d = h_1 \tan\theta_1 + h_2 \tan\theta_2 = 0.79 \text{ cm}$ :



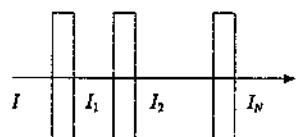
Soluzione 14.1



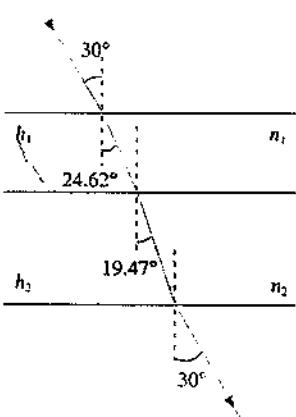
Soluzione 14.2



Soluzione 14.3



Soluzione 14.5



Soluzione 14.7

$\theta_0$  può assumere qualsiasi valore tra zero e  $\pi/2$ , non si ha mai riflessione totale nella seconda lastra;

utilizzando le formule per  $R_\pi$  e  $R_\sigma$  nei tre cambiamenti di mezzo si trova  $R_{\pi 1} = 4.5 \cdot 10^{-3}$ ,  $R_{\pi 2} = 8.7 \cdot 10^{-3}$ ,  $R_{\pi 3} = 25.3 \cdot 10^{-3}$ ,  $R_{\sigma 1} = 13.2 \cdot 10^{-3}$ ,  $R_{\sigma 2} = 16.6 \cdot 10^{-3}$ ,  $R_{\sigma 3} = 57.8 \cdot 10^{-3}$ ,  $W_r = [(1 - R_{\pi 1})(1 - R_{\pi 2})(1 - R_{\pi 3}) \cos^2 \beta + (1 - R_{\sigma 1})(1 - R_{\sigma 2})(1 - R_{\sigma 3}) \sin^2 \beta] W = 0.926 W = 9.26 \mu W$ .

$$14.8 \quad I_n = \frac{I}{2} \left[ \cos^2 \left( \frac{90^\circ}{n-1} \right) \right]^{n-1} : n=3 \quad I_3 = 0.125 I, \quad n=4 \quad I_4 = 0.211 I, \quad n=7$$

$I_7 = 0.330 I$ ; per  $n$  grande il coseno tende a 1 e  $I_n$  a  $0.5 I$ .

$$14.9 \quad I = I_{\max} \cos^2 \alpha + I_{\min} \sin^2 \alpha; \text{ dall'espressione di } P \text{ si ricava } I_{\min} \text{ in funzione di } P \text{ e } I_{\max}, \text{ si sostituisce e si trova } I = \frac{I_{\max}}{1+P} (1+P \cos 2\alpha).$$

$$14.10 \quad \text{Condizioni di Brewster, } n = \operatorname{tg} \theta = 1.732; \quad \theta_i = 90^\circ - \theta = 30^\circ, \quad r_\pi = 0, \quad r_\sigma = -0.5, \\ t_\pi = 0.577, \quad t_\sigma = 0.5, \quad I_0 = R_\sigma I_\sigma^i = 0.5 t_\sigma^2 I = 12.5 \text{ W/m}^2; \\ I_i = 0.5 n I (t_\pi^2 + t_\sigma^2) = 50.5 \text{ W/m}^2; \\ E_{0i} = \sqrt{2 Z_0 I_i} = 274.6 \text{ V/m}, \quad E_{0r} = \sqrt{2 Z_0 I_0} = 97.1 \text{ V/m}, \\ E_{0t} = \sqrt{2 Z_0 I_i / n} = 148.3 \text{ V/m}, \quad B_{0i} = E_{0i} / c = 9.16 \cdot 10^{-7} \text{ T}, \\ B_{0r} = E_{0r} / c = 3.24 \cdot 10^{-7} \text{ T}, \quad B_{0t} = E_{0t} / n / c = 8.57 \cdot 10^{-7} \text{ T}.$$

$$14.11 \quad \operatorname{sen} \theta_i = \operatorname{sen} \theta / n, \quad \theta_i = 24.1^\circ, \quad r_\pi = 0.146, \quad r_\sigma = -0.382, \quad W_r = (R_\pi \cos^2 \beta + R_\sigma \sin^2 \beta) W = 1.67 \text{ W}; \quad \operatorname{tg} \beta = E_\sigma' / E_\pi' = (r_\sigma / r_\pi) \operatorname{tg} \beta, \quad \beta_i = -56.5^\circ, \text{ polarizzazione rettilinea ad angolo } \beta_i \text{ rispetto al piano di incidenza}; \quad W_p(\alpha) = W, \quad \cos^2(\alpha - \beta_i) = 1.67 \cos^2(\alpha + 56.5^\circ) W; \quad \theta = 60^\circ \text{ condizioni di Brewster, } r_\pi = 0, \quad r_\sigma = -0.5, \quad W_r = R_\sigma \sin^2 \beta W = 3.75 \text{ W, polarizzazione rettilinea nel piano } \sigma; \quad W_p(\alpha) = W, \cos^2 \left( \alpha - \frac{\pi}{2} \right) = W, \quad \sin^2 \alpha = 3.75 \sin^2 \alpha W.$$

$$14.12 \quad \operatorname{sen} \theta_i = \operatorname{sen} \theta / n, \quad \theta_i = 41^\circ, \quad r_\pi = -0.487, \quad r_\sigma = -0.734, \quad t_\pi = 0.342, \quad t_\sigma = 0.266, \quad W_r = 0.5 (R_\pi + R_\sigma) W = 0.388 \text{ W}, \quad W_i = 0.612 \text{ W}; \text{ polarizzazione ellittica in entrambi i casi, con rapporto dei semiassi } r_\pi / r_\sigma = 0.633, \quad t_\pi / t_\sigma = 1.286; \quad W_p(\alpha) = 0.5 (R_\pi \cos^2 \alpha + R_\sigma \sin^2 \alpha) W = 0.199 \cos^2 \alpha + 0.269 \sin^2 \alpha W.$$

$$14.13 \quad \operatorname{sen} \theta_s = \operatorname{sen} \theta / n_s, \quad \theta_s = 26.23^\circ, \quad \operatorname{sen} \theta_o = \operatorname{sen} \theta / n_o, \quad \theta_o = 30.34^\circ, \quad h = d (\operatorname{tg} \theta_o - \operatorname{tg} \theta_s) \cos \theta = 0.52 \cdot 10^{-3} \text{ m}; \text{ differenza di cammino ottico } x = h \operatorname{tg} \theta + d n_s / \cos \theta_s + d n_o / \cos \theta_o = 1.81 \cdot 10^{-3} \text{ m}, \quad \Delta \phi = 2 \pi x / \lambda = 3016.7 \cdot 2 \pi \text{ equivalente a } 0.7 \cdot 2 \pi = 4.4 \text{ rad, polarizzazione ellittica.}$$

$$14.14 \quad \text{L'angolo limite nel passaggio della calcite all'aria è } 42.28^\circ \text{ per l'onda straordinaria, } 37.08^\circ \text{ per l'onda ordinaria; essendo l'angolo di incidenza sulla faccia obliqua } \beta = 40^\circ \text{ l'onda ordinaria è totalmente riflessa; } n_s \operatorname{sen} \beta = \operatorname{sen} \theta_s, \quad \theta_s = 72.83^\circ, \text{ l'onda straordinaria esce a } 32.83^\circ \text{ rispetto alla direzione primaria di incidenza: alla prima superficie } R_{s1} = (1 - n_s)^2 / (1 + n_s)^2 = 0.038, \text{ alla seconda } R_{s2} = \operatorname{sen}^2(\beta - \theta_s) / \operatorname{sen}^2(\beta + \theta_s) = 0.346, \quad W_r = 0.5 W (1 - R_{s1})(1 - R_{s2}) = 2.52 \text{ W; l'onda straordinaria è polarizzata parallelamente all'asse ottico del prisma. } W_p(\alpha) = W_r \operatorname{sen}^2 \alpha.$$

$$14.15 \quad \text{Nel passaggio dal primo al secondo cuneo l'onda ordinaria diventa straordinaria e viceversa, per cui } \Delta \phi = (k_s - k_o) x_1 - (k_s - k_o) x_2 = \frac{2\pi}{\lambda} (n_s - n_o) \Delta x; \\ \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{\lambda_s} (n_s - n_o) \Delta x, \quad \Delta x = 1.51 \cdot 10^{-5} \text{ m} = 0.0151 \text{ mm}, \quad x_1 = 2.0151 \text{ mm};$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{\lambda_s} (n_s - n_o) \Delta x, \quad \Delta x = 1.51 \cdot 10^{-5} \text{ m} = 0.0151 \text{ mm}, \quad x_1 = 2.0151 \text{ mm};$$

$$\pi = \frac{2\pi}{\lambda_2} (n_s - n_o) \Delta x, \Delta x = 3.30 \cdot 10^{-5} \text{ m} = 0.0330 \text{ mm}, x_1 = 2.0330 \text{ mm}.$$

- 14.16  $I_y = 10 \text{ W/m}^2 \approx I/5, I_z = 40 \text{ W/m}^2, E_0 = \sqrt{2 Z_0 I_y} = 86.8 \text{ V/m}, t_{s1} = 2 / (1 + n_s) = 0.784, t_{o1} = 2 / (1 + n_o) = 0.800, E_y = t_{s1} E_0 \sin(k_s x - \omega t), E_z = 2 t_{o1} E_0 \sin(k_o x - \omega t);$

$$I_n = \frac{n_s}{2Z_0} (t_{s1} E_0)^2 + \frac{n_o}{2Z_0} (2 t_{o1} E_0)^2 = \frac{E_0^2}{2Z_0} (n_s r_{s1}^2 + 4 n_o r_{o1}^2) = I_y (n_s r_{s1}^2 + 4 n_o r_{o1}^2)$$

$$= 47.93 \text{ W/m}^2; t_{s2} = 2 n_s / (1 + n_s) = 1.215, t_{o2} = 1.2, E_y = t_{s2} t_{s1} \sin(kx - \omega t),$$

$$E_z = 2 t_{o2} t_{o1} \sin(kx - \omega t + \phi); \phi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta n d = \pi/2, \text{ polarizzazione ellittica con}$$

rapporto dei semiassi  $t_{s1} t_{s2} / t_{o1} t_{o2} = 0.496 : I_o = I_y (t_{s1}^2 t_{s2}^2 + 4 t_{o1}^2 t_{o2}^2) = 45.95 \text{ W/m}^2$ ; la differenza rispetto a  $I$  è dovuta esclusivamente alle riflessioni.

- 14.17  $\Delta n = 0.172, d = \lambda/4 \Delta n = 0.87 \mu\text{m}; \text{ polarizzazione rettilinea, tra E e l'asse y c'è l'angolo } \beta = \arctg \sqrt{3} = 60^\circ; I_p = I \cos^2(80^\circ - 60^\circ) = 353 \text{ W/m}^2.$

- 14.18  $\Delta n = 9.1 \cdot 10^{-3}, \text{ la lamina deve essere mezz'onda o onda intera, } \frac{2\pi}{\lambda} d \Delta n = m\pi,$

$\lambda = 10.92/m \mu\text{m}, m = 16 \lambda = 0.683 \mu\text{m}, m = 17 \lambda = 0.642 \mu\text{m}, m = 18 \lambda = 0.607 \mu\text{m}; \text{ solo per } m = 17 \text{ il piano di polarizzazione della luce trasmessa da } P_1 \text{ viene ruotato di } 90^\circ, \text{ quindi solo } \lambda = 0.642 \mu\text{m è trasmessa da } P_2.$

- 14.19  $\frac{2\pi}{\lambda} d_1 \Delta n = m\pi \text{ con } \Delta n = 0.172, \lambda = 6.884/m \mu\text{m} : m = 14 \lambda = 0.492 \mu\text{m},$

$m = 15 \lambda = 0.459 \mu\text{m}, m = 16 \lambda = 0.430 \mu\text{m}, m = 17 \lambda = 0.405 \mu\text{m}; \text{ la prima e la terza conservano il verso di rotazione, la seconda e la quarta lo invertono;}$

$$\frac{2\pi}{\lambda} d_2 \Delta n = (2m+1) \frac{\pi}{2}, \lambda = 20.64/(2m+1) \mu\text{m}. \text{ soddisfatta da } \lambda = 0.459 \mu\text{m} (m = 22), \lambda = 0.405 \mu\text{m} (m = 25).$$

- 14.20  $I_1 = \frac{1}{2Z_0} - 3 E_0^2 = I_y, I_z = I_y / 3, I = I_y + I_z = \frac{4}{3} I_y = 12 \cdot 10^2 \text{ W/m}^2;$

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} d \Delta n, I_2 = I_1 \text{ se } \Delta\phi = 2m\pi, \text{ soddisfatta per } m = 2, \lambda = 0.4 \mu\text{m}.$$

$I_2 = 0.5 I_1$  se  $\Delta\phi = (2m+1)\pi/2$ , soddisfatta per  $m = 3, \lambda = 0.457 \mu\text{m}, I_2 = 0$  se  $\Delta\phi = (2m+1)\pi$ , soddisfatta per  $m = 1, \lambda = 0.533 \mu\text{m}.$

- 14.21  $\Delta\phi = 2\pi d \Delta n / \lambda$  con  $\Delta n = 9.1 \cdot 10^{-3}$ ; per  $\lambda_1, \Delta\phi = \pi/2$ , la lamina è quarto d'onda e la luce esce polarizzata circolarmente; per  $\lambda_2, \Delta\phi = \pi$ , la lamina è mezz'onda e la luce esce polarizzata rettilineamente lungo  $z$ ; nel prisma  $\lambda_1$  è ancora polarizzata circolarmente dopo l'attraversamento della prima superficie e incide sulla seconda in condizioni di Brewster, in quanto  $\tan 32^\circ = 1/n$ , per cui certamente dopo la trasmissione la polarizzazione è ellittica;  $\lambda_2$  invece conserva la polarizzazione rettilinea lungo  $z$ ;

$$W_n = (1 - R_1)(1 - R_\sigma) \frac{W_1}{2} + (1 - R_1) \frac{W_1}{2} = (1 - R_1)(2 - R_\sigma) \frac{W_1}{2} \text{ con } R_1 = (1 - n)^2$$

$$/ (1+n)^2 = 0.053, R_\sigma = \sin^2(32^\circ - 58^\circ) = 0.192 \text{ in quanto } n \sin\alpha = \sin\theta, \theta = 58^\circ, W_n = 4.28 \text{ W}; W_2 = (1 - R_1)(1 - R_\sigma) W_1 = 1.91 \text{ W}.$$

15.1  $r_1 = r_2 = r$ ,  $I_1 = 4I$ ,  $\xi_1 = \xi_{p1}/2 = 0.5 \cdot 10^{-8} \text{ m}$ ;  $I = 1/2 \rho v \omega^2 \xi_1^2 = 10^{-7} \text{ W/m}^2$ ,  $W = 4\pi r^2 I = 3.14 \cdot 10^{-5} \text{ W}$ ;  $\Delta p_1 = \rho v \omega \xi_{p1} = 1.87 \cdot 10^{-2} \text{ Pa}$ ; dato che  $\lambda = 0.5 \text{ m}$ ,  $d = \lambda/4$ ,  $\phi = \pi/2$ ,  $\cos\phi = 0$  e in  $P_2$   $I_2 = 2I_1 = 2 \cdot 10^{-7} \text{ W/m}^2$ ,  $\xi_{p2} = \xi_{p1}/\sqrt{2} = 0.707 \cdot 10^{-8} \text{ m}$ ,  $\Delta p_2 = \Delta p_1/\sqrt{2} = 1.32 \cdot 10^{-2} \text{ Pa}$ .

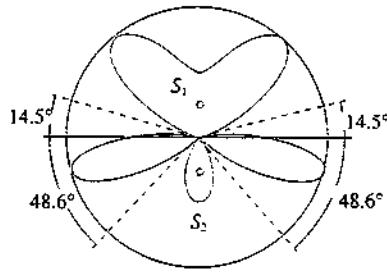
15.2  $k(D+2d) - kD = \pi$ ,  $d = \lambda/4 = c/4v = 75 \text{ m}$ ;  $I_1 = W/4\pi D^2 = 9.95 \cdot 10^{-6} \text{ W/m}^2$ ,  $E_1 = \sqrt{2Z_0 I_1} = 8.66 \cdot 10^{-2} \text{ V/m}$ ,  $E_r = 0.9 E_1$ ,  $E = E_1 - E_r = 0.1 E_1 = 8.66 \cdot 10^{-3} \text{ V/m}$ .

15.3  $\delta = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin\theta + \frac{\pi}{2} = 2\pi \sin\theta + \frac{\pi}{2}$ ,  $I = 4I_1 \cos^2 \frac{\delta}{2}$ ;

$$\max \delta = 2m\pi, \sin\theta_{\max} = m - \frac{1}{4}, m=0 \quad \theta_{\max} = -14.5^\circ, m=1 \quad \theta_{\max} = 48.6^\circ;$$

$$\min \delta = (2m+1)\pi, \sin\theta_{\min} = m + \frac{1}{4}, m=0 \quad \theta_{\min} = 14.5^\circ, m=-1$$

$\theta_{\min} = -48.6^\circ$ : il diagramma è mostrato in figura: tracciandolo si trova anche un massimo secondario a  $\theta = -90^\circ$ ;  $I_1 = W/4\pi D^2 = 7.96 \cdot 10^{-6} \text{ W/m}^2$ ,  $E_1 = 7.75 \cdot 10^{-2} \text{ V/m}$ ,  $E_{\max} = 2E_1 = 0.155 \text{ V/m}$ .



Soluzione 15.3

15.4 Posizioni dei massimi  $y = m \lambda L / d$ , densità  $N = d / \lambda L$ ,  $\lambda_2 / \lambda_1 = N_1 / N_2$ ,  $\lambda_2 = 0.393 \mu\text{m}$ ; nell'acqua la lunghezza d'onda è  $\lambda / n$ ,  $N_1 = n N_1 = 16.6 \text{ frange/cm}$ ,  $N_2 = n N_2 = 23.3 \text{ frange/cm}$ .

15.5  $y = m \lambda L / d$ ,  $\Delta y = 5L(\lambda_2 - \lambda_1) / d = 0.14 \text{ mm}$ ;  $m_1 \lambda_1 = m_2 \lambda_2$ ,  $m_1 / m_2 = 1.25$ ,  $m_1 = 5$ ,  $m_2 = 4$ ,  $m_1 = 10$ ,  $m_2 = 8, \dots$ ;  $(n-1)d = 7\lambda_1$ ,  $d = 5.79 \mu\text{m}$ ;  $(n-1)d = N\lambda_2$ ,  $N = 5.6 \text{ frange}$ .

15.6  $I(\theta) = I_0 \cos^2 \frac{\pi d \sin\theta}{\lambda} = \frac{I_0}{2}, \frac{\pi d \sin\theta}{\lambda} = \frac{\pi}{4}, d = 2\lambda = 10 \text{ cm}$ :

$$I_1 = \frac{I_0}{4} = 2.5 \text{ W/m}^2, E_1 = 43.4 \text{ V/m}, B_1 = 1.45 \cdot 10^{-7} \text{ T}; I = 2I_1 = 5 \text{ W/m}^2 \text{ in tutta la zona centrale dello schermo.}$$

15.7  $(n_s - 1)d = N_s \lambda$ ,  $(n_o - 1)d = N_o \lambda$ ,  $d = (N_o - N_s) \lambda / (n_o - n_s) = 14.5 \mu\text{m}$ .

15.8  $I(\theta) = I_1 + 4I_1 \cos\delta$ ,  $I_{\max} = 9I_1$ ,  $I(\theta) = \frac{I_{\max}}{9} \left( 1 + 8 \cos^2 \frac{\delta}{2} \right) = \frac{I_{\max}}{9} \left( 1 + 8 \cos^2 \frac{\pi a \sin\theta}{\lambda} \right)$ .

15.9  $d \sin\theta = \lambda/2$ ,  $\sin\theta = \theta = y/L$ ,  $y = \lambda L / 2d = 81.6 \mu\text{m}$ ;  $N = 1/2y = d/\lambda L = 6.13 \text{ frange/mm}$ .

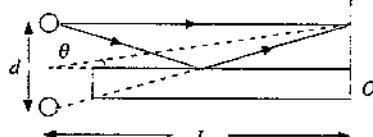


Figura 15.9

15.10  $n = 1 + \frac{Ne^2}{2\varepsilon_0 m_e} \frac{1}{\omega_3^2 - \omega^2}$ , numero di molecole per unità di volume  $N = p/k_B T$ .

$$n = 1 + ap; [n(p_1) - 1]d = m_1 \lambda, [n(p_2) - 1]d = m_2 \lambda, [n(p_2) - n(p_1)]d = a(p_2 - p_1)d = (m_2 - m_1)\lambda = M\lambda, a = M\lambda / (p_2 - p_1)d = 2.91 \cdot 10^{-9} \text{ Pa}, n = 1 + 2.91 \cdot 10^{-9} \cdot 1.013 \cdot 10^5 = 1.000295; \Delta p = (p_2 - p_1)/M = 1014 \text{ Pa}$$

15.11 Col metodo dei vettori rotanti:  $\xi_R = \xi_0 \sqrt{\left(1 - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)^2} = 0.768 \xi_0$ ,

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{1/3 - 1/2}{1 - 1/4} = -0.222, \quad \phi = -0.219 \text{ rad} = -12.5^\circ,$$

$$\xi = 0.768 \xi_0 \cos(kx - \omega t - 0.219); I = \frac{1}{2} \rho v \omega^2 (0.768 \xi_0)^2 = 8.17 \cdot 10^{-12} \text{ W/m}^2,$$

$$B = 9.1 \text{ dB}.$$

15.12  $\operatorname{sen} \theta = m \lambda / d, m = 1 \lambda / d = \operatorname{sen} 11.53^\circ = 0.2, \lambda = v / \nu = 0.5 \text{ m}, d = 2.5 \text{ m},$   
 $\operatorname{sen}(\Delta \theta / 2) = \lambda / Nd, N = 5; L = (N - 1)d = 10 \text{ m}; W_1 = 100 \text{ W},$   
 $I_1 = W_1 / 4 \pi r^2 = 3.18 \cdot 10^{-7} \text{ W/m}^2, I_M = 25 I_1 = 7.96 \cdot 10^{-5} \text{ W/m}^2,$

$$B = 79 \text{ dB}; I_1 = \frac{1}{2} \rho v \omega^2 \frac{\xi_0^2}{r^2}, \xi_0 = 4.4 \cdot 10^{-5} \text{ m}; \Delta p = \sqrt{2 \rho v I_M} = 0.266 \text{ Pa}.$$

15.13  $\operatorname{sen} \theta = \lambda / d > 1, d < \lambda; \frac{2\pi}{\lambda} d \operatorname{sen} \theta + \phi = 0 \text{ con } d = \lambda / 2 \text{ e } \theta = 90^\circ,$

$$\phi = -\pi; \frac{2\pi}{\lambda} d \operatorname{sen} \theta - \frac{\pi}{2} = 2m\pi, \operatorname{sen} \theta = 2m + \frac{1}{2}, m = 0, \theta = 30^\circ,$$

un solo massimo.

15.14  $\operatorname{sen} \theta_1 = (2m+1) \frac{\lambda_1}{2Nd} = \operatorname{sen} \theta_2 = \frac{\lambda_2}{d} \text{ con } m = N+2, \frac{\lambda_1}{d} + \frac{5\lambda_1}{2Nd} = \frac{\lambda_2}{d},$

$$N = \frac{5\lambda_1}{2(\lambda_2 - \lambda_1)} = \frac{5\nu_2}{2(\nu_1 - \nu_2)} = 10; \frac{I_2}{I_{\max}} = \frac{1}{N^2} \frac{1}{\left[\operatorname{sen} \frac{(2m+1)\pi}{2N}\right]^2} = 0.02,$$

$$\frac{E_2}{E_{\max}} = \sqrt{0.02} = 0.14.$$

15.15  $\frac{m \lambda_2}{2n} = (2m-1) \frac{\lambda_1}{4n}, m = \frac{\lambda_1}{2(\lambda_1 - \lambda_2)} = 2, d = \frac{2\lambda_2}{2n} = 0.27 \mu\text{m} = \frac{3\lambda_1}{4n};$

$R = (1-n)^2 / (1+n)^2 = 0.028$ : per  $\lambda_1$  è riflessa la percentuale  $4R = 0.112$  ed è trasmessa la percentuale 0.888, per  $\lambda_2$  si ha solo trasmmissione.

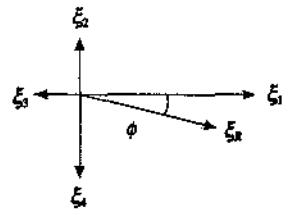
15.16 min  $\lambda = \frac{2nd}{m} = \frac{1.2}{m} \mu\text{m}, m = 2 \lambda = 0.6 \mu\text{m}, m = 3 \lambda = 0.4 \mu\text{m},$

$$\max \lambda = \frac{4nd}{2m+1} = \frac{2.4}{2m+1} \mu\text{m}, m = 2 \lambda = 0.48 \mu\text{m};$$

$$R = 0.04, \frac{I_r}{I} = 4 R \operatorname{sen}^2 \frac{2\pi n d}{\lambda} = 0.16 \operatorname{sen}^2 \frac{3.77}{\lambda} \text{ con } \lambda \text{ in } \mu\text{m}.$$

15.17 Cuneo d'aria,  $n = 1, \alpha = d/L, x_{\max} = (2m+1) \lambda L / 4d = (2m+1) 0.425 \text{ mm}$ ,  
 $x_{\min} = m \lambda L / 2d = m 0.850 \text{ mm}$ ; distanza tra due frange dello stesso tipo  $\lambda L / 2d = 0.850 \text{ mm}$ , densità  $N = 2d / \lambda L = 1.176 \text{ frange/mm}$ ; numero di frange scure  $L / 0.850 = 141$ , numero di frange chiare 140.

15.18 Le riflessioni avvengono nelle stesse condizioni,  $r_{\max} = \sqrt{m \lambda R / n}, (d_2/d_1)^2 = (m+1)/m, m \approx 6, n = 6 \lambda R / r_1^2 = 1.332, n = 7 \lambda R / r_2^2 = 1.331$ ,  
 $\Delta n / n = 7.5 \cdot 10^{-4}, D/2 = \sqrt{N \lambda R / n}, N = 102.4, 102 \text{ anelli chiari}.$



Soluzione 15.11

15.19  $n_2 = \sqrt{n_1} = 1.327$ ;  $d = \lambda_G / 4$ ;  $n_2 = 0.104 \mu\text{m}$ ;  $r_1 = r_2 = -0.140$ ,  $R = 0.0197$ ,

$$T = 1 - 4R \cos^2 \frac{2\pi n_2 d}{\lambda} = 1 - 0.079 \cos^2 \frac{0.867}{\lambda} \text{ con } \lambda \text{ in } \mu\text{m}, T_R = 0.992,$$

$$T_V = 0.975; R = (1 - n_1)^2 / (1 + n_1)^2 = 0.076, T = 1 - R = 0.924.$$

15.20  $2\Delta x = N_1 \lambda$ ,  $\lambda = 0.546 \mu\text{m}$ ;  $(n-1)2d = N_2 \lambda$ ,  $n = 1.00154$ .

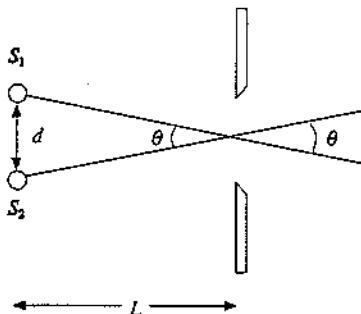
15.21  $\rho_l = \rho \pi r^2 = 2.83 \cdot 10^{-2} \text{ kg/m}$ ,  $v = \sqrt{T/\rho_l} = 188 \text{ m/s}$ ,  $\nu = v/2L = 117.5 \text{ Hz}$ ,  $\lambda = 2L = 1.6 \text{ m}$ ;  $v' = v\sqrt{2} = 166.2 \text{ Hz}$ ,  $\nu' = v/\sqrt{2} = 83.1 \text{ Hz}$ ,  $v' = v/2 = 58.8 \text{ Hz}$ ,  $v' = v/2$ .

15.22  $k = 0.2 \text{ cm}^{-1}$ ,  $\lambda = 2\pi/k = 31.4 \text{ cm}$ ,  $\omega = 300 \text{ rad/s}$ ,  $\nu = 47.75 \text{ Hz}$ ,  $v = \omega/k = \lambda\nu = 15 \text{ m/s}$ ,  $L = 4\lambda/2 = 2\lambda = 62.8 \text{ cm}$ .

15.23 Se la canna è aperta deve essere  $n\lambda_1/2 = (n+1)\lambda_2/2$ ,  $n = 7/2$ , il che non è possibile; se la canna è chiusa deve essere  $(2n+1)\lambda_1 = (2n+3)\lambda_2$ ,  $n = 3$ : la canna è chiusa;  $L = 7\lambda_1/4 = 63 \text{ cm}$ ;  $v = 20.05\sqrt{300} = 347.3 \text{ m/s}$ ,  $v_0 = v/4L = 137.8 \text{ Hz}$ .

15.24  $v_b = \Delta\nu = 1/\tau = 0.5 \text{ Hz}$ ,  $\nu = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\rho_l}}$ ,  $\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{1}{2} \frac{\Delta T}{T}$ ,

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{2v_b}{v} = \frac{1}{v}: v_1 = 400 \text{ Hz}, \Delta T/T = 2.5 \cdot 10^{-3}, v_2 = 1000 \text{ Hz}, \Delta T/T = 10^{-3}$$



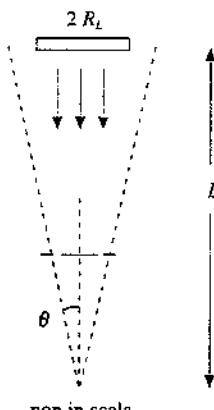
### Soluzione 16.1

16.1  $\lambda = c/v = 4 \text{ cm}$ ,  $\lambda/a = 2/3$ ,  $\frac{l}{I_0} = \left[ \frac{\sin \frac{3}{2}\pi \sin \theta}{\frac{3}{2}\pi \sin \theta} \right]^2$ ;  $\sin \theta_{\min} = \frac{\lambda}{a}$ ,

$$\theta_{\min} = 41.8^\circ; \frac{I(\theta_{\min})}{I_0} = 0.35; \text{ per risolvere a grande distanza } \sin \theta = \frac{\lambda}{a}, \text{ inoltre}$$

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{d}{2L}, L = 26.2 \text{ cm}.$$

16.2  $f\theta = \Delta y/2$ ,  $\theta = \lambda/a$ ,  $a = 2f\lambda/\Delta y = 0.1 \text{ mm}$ ;  $a \sin \theta = \lambda_1 = 3/2 \lambda_2$ , la banda di minimo ( $0.6 \mu\text{m} \leq \lambda_1 \leq 0.7 \mu\text{m}$ ) è sovrapposta alla banda di primo massimo secondario ( $0.4 \mu\text{m} \leq \lambda_2 \leq 0.467 \mu\text{m}$ );  $\Delta y = f\Delta\lambda_1/a = 0.8 \text{ mm}$ .



### Soluzione 16.6

16.3  $\lambda_1 = v/v_1 = 5.8 \cdot 10^{-2} \text{ m} \ll D$ ,  $\sin \theta \approx \tan \theta = \theta = 1.22 \lambda_1/D$ ,  $d = 2L\theta = 56.6 \text{ m}$ ; se non si utilizzasse l'approssimazione si troverebbe  $d = 57.0 \text{ m}$ ;  $\lambda_2 = v/v_2 = 0.41 \text{ m}$ ,  $1.22 \lambda_2/D = 1$ ,  $\sin \theta = 1$ ,  $\theta = \pi/2$ : è interessato tutto il fondo marino, in linea di principio.

16.4  $d_1 = 2f_1 \cdot 1.22 \lambda/D_1 = 4.17 \mu\text{m}$ ,  $d_2 = 13.91 \mu\text{m}$ .

16.5  $\lambda = c/v = 3 \text{ cm}$ ,  $\sin \theta \approx \theta = 1.22 \lambda/D = 0.061$ ,  $d = 2L\theta = 61 \text{ cm}$ .

16.6 L'anello rossastro si forma in corrispondenza del minimo di diffrazione per la luce blu-viola con  $\lambda_B = 0.45 \mu\text{m}$ : esso è visto sotto l'angolo  $\theta = 1.22 \lambda_B/D = 1.5 R_L/L = 6.79 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$ ,  $D = 81 \mu\text{m}$ ; con  $\lambda_R = 0.65 \mu\text{m}$ ,  $D_R = D_R \lambda_R / \lambda_B = 1.44 D_R$ , circa due volte il diametro lunare.

16.7  $\alpha_R = 1.22 \lambda/d_1 = h_1/L$ ,  $h_1 = 46.4 \text{ km}$ ; con  $d_2 = 5 \text{ m}$ ,  $h_2 = 46.4 \text{ m}$ .

16.8  $\alpha_1 = 1.22 \lambda_c / D_1 = 2.68 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$ ,  $\alpha_2 = \alpha_1 D_1 / D_2 = 2.24 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$ ;  
 $N_1 = 1/f \alpha_1 = 746 \text{ righe/mm}$ ,  $N_2 = 1/f \alpha_2 = 90 \text{ righe/mm}$ ;  
per la luce blu  $\alpha_1 = 1.95 \cdot 10^{-5}$ ,  $\alpha_2 = 1.63 \cdot 10^{-4}$ ,  $N_1 = 1026$ ,  $N_2 = 124$ ;  
per la luce rossa  $\alpha_1 = 3.31 \cdot 10^{-5}$ ,  $\alpha_2 = 2.77 \cdot 10^{-4}$ ,  $N_1 = 603$ ,  $N_2 = 73$ .

16.9  $a/d = 1/5$ , il quinto massimo coincide col primo minimo di diffrazione, quindi  
 $N = 2 \cdot 4 + 1 = 9$ ;  $R_3 = [\sin(3\pi a/d) / (3\pi a/d)]^2 = 0.255$ ;  $\Delta\theta = \lambda/d = 3.7 \cdot 10^{-3} \text{ rad} = 0.21 \text{ gradi}$ .

16.10  $d = L/N = 1.5 \mu\text{m}$ ,  $\sin\theta = m \lambda/d = 0.273 \text{ m}$ ,  $\theta = 0, 15.84^\circ, 33.09^\circ, 54.98^\circ$ ;  
 $\Delta\theta = 2\lambda/L = 3.42 \cdot 10^{-5} \text{ rad} = 1.96 \cdot 10^{-3} \text{ gradi}$ ;  $D_1 = 1/d \cos\theta_1 = 6.93 \cdot 10^3 \text{ rad/cm}$ ,  $D_2 = 2/d \cos\theta_2 = 1.59 \cdot 10^4 \text{ rad/cm}$ ;  $R = mN$ ,  $R_1 = 1.6 \cdot 10^4$ ,  $R_2 = 3.2 \cdot 10^4$ ;  $\Delta\lambda_1 = \lambda/R_1 = 2.56 \cdot 10^{-5} \mu\text{m}$ ,  $\Delta\lambda_2 = 1.28 \cdot 10^{-5} \mu\text{m}$ ;  $v = c/\lambda = 7.31 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$ ,  $\Delta v/v = \Delta\lambda/\lambda$ ,  $\Delta v = v/R$ ,  $\Delta v_1 = 4.57 \cdot 10^{10} \text{ Hz}$ ,  $\Delta v_2 = 2.28 \cdot 10^{10} \text{ Hz}$ .

16.11  $\theta_2 \approx y_2/f = 2\lambda/d$ ,  $d = 30 \mu\text{m}$ ;  $a = d/4 = 7.5 \mu\text{m}$ ;  $\Delta\theta = 2\lambda/L = \Delta y/f$ ,  $L = 3 \text{ cm}$ ;  $N = L/d = 10^3$ ,  $\Delta\lambda = \lambda/2N = 3 \cdot 10^{-4} \mu\text{m}$ ;  $I_2/I_0 = (\sin\pi/2)^2/(\pi/2)^2 = 0.405$ .

16.12 Il foro è nella zona in cui si trovano i massimi principali del primo ordine:  $\tan\theta_1 = y_1/f$ ,  $\theta_1 = 14.47^\circ$ ,  $\lambda_1 = d \sin\theta_1 = 1/n \sin\theta_1 = 0.5 \mu\text{m}$ ;  $\tan\theta_2 = (y_1 + h)/f$ ,  $\theta_2 = 15.96^\circ$ ,  $\lambda_2 = 1/n \sin\theta_2 = 0.55 \mu\text{m}$ ;  $\Delta\lambda = 0.05 \mu\text{m}$ ,  $\Delta\lambda/\lambda = 9.52 \cdot 10^{-2}$ ; con  $h = 0.5 \text{ mm}$   $\tan\theta_2 = 0.259$ ,  $\theta_2 = 14.52^\circ$ ,  $\lambda'_2 = 0.5014 \mu\text{m}$ : dato che  $\lambda_1$  vale esattamente  $0.4996 \mu\text{m}$ ,  $\Delta\lambda' = 0.0018 \mu\text{m}$ ,  $\Delta\lambda'/\lambda \approx 3.6 \cdot 10^{-3}$ . Il metodo descritto è utile per selezionare un fascio di luce con composizione nota.

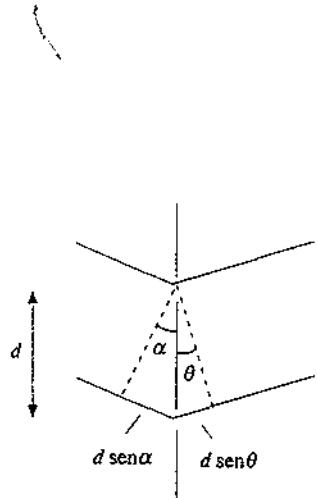
16.13  $\Delta v/v = \Delta\lambda/\lambda$ ,  $\Delta v = v/R = c/\lambda m N$ ;  $\Delta t = N d \sin\theta/c = N m \lambda/c$ ;  $\Delta v \Delta t = 1$ , indipendentemente dai parametri del reticolo.

16.14 La riflessione avviene in condizioni di Brewster,  $\tan\theta_i = n$ ,  $\theta_i = 60^\circ$ ,  $\theta_3 = 30^\circ$ ,  $R_\sigma = \sin^2 30^\circ = 0.25$ ,  $I_\sigma = I_0/R_\sigma = 2 \text{ W/cm}^2$ ,  $I_3 = 4 \text{ W/cm}^2$ ;  $d = L/N = 4 \mu\text{m}$ ,  $\lambda = d \sin\theta_3/3 = 0.67 \mu\text{m}$ ;  $I_3/I_0 = (\sin 3\pi/2)^2/(3\pi/2)^2 = 0.045$ ,  $I_0 = 88.8 \text{ W/cm}^2$ ;  $\Delta\theta = 2\lambda/L = 1.34 \cdot 10^{-4} \text{ rad} = 7.7 \cdot 10^{-3} \text{ gradi}$ .

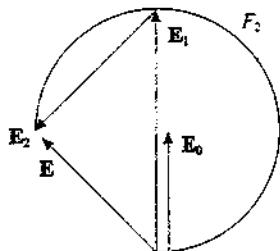
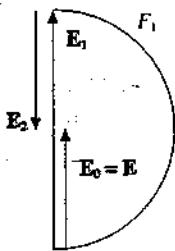
16.15 Assi paralleli  $I = I_1 \left[ \frac{\sin \frac{N\pi d \sin\theta}{\lambda}}{\sin \frac{\pi d \sin\theta}{\lambda}} \right]^2$ , assi incrociati  $I = 2I_1 \left[ \frac{\sin \frac{N}{2} \frac{\pi d \sin\theta}{\lambda}}{\sin \frac{\pi d \sin\theta}{\lambda}} \right]^2$ , infatti si sommano gli effetti di due reticolati, ciascuno con  $N/2$  fenditure, e con i campi vibranti a  $90^\circ$  tra loro; massimi principali per  $\sin\theta = m\lambda/d$  in entrambi i casi, però con intensità  $N^2 I_1$  e  $N^2 I_1/2$ ; anche le espressioni delle direzioni dei minimi sono le solite, con  $N$  in un caso e  $N/2$  nell'altro, per cui ci sono  $N-1$  minimi in un caso e  $N/2-1$  nell'altro tra due massimi principali.

16.16  $d = L/N = 2 \mu\text{m}$ ,  $d(\sin\theta + \sin\alpha) = m\lambda$ ,  $\sin\theta = -\sin\alpha + m \frac{\lambda}{d} = -0.5 + 0.3 \text{ m}$ ;  
 $m = -1 \quad \theta = -53.13^\circ$ ,  $m = 0 \quad \theta = -30^\circ$ ,  $m = 1 \quad \theta = -11.54^\circ$ ,  $m = 2 \quad \theta = 5.74^\circ$ ,  $m = 3 \quad \theta = 23.58^\circ$ ,  $m = 4 \quad \theta = 41.42^\circ$ ,  $m = 5 \quad \theta = 90^\circ$ ; il massimo di ordine zero si ha dunque per  $\theta = -30^\circ$  ed è largo  $\Delta\theta = 2\lambda/L = 8 \cdot 10^{-5} \text{ rad} = 4.6 \cdot 10^{-3} \text{ gradi}$ ;  $d \sin\alpha = m\lambda = 1 \mu\text{m}$ ,  $\lambda = 0.5 \mu\text{m}$ .

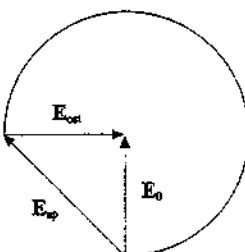
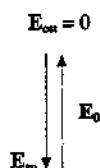
16.17  $a = 0.1 \text{ mm}$ ,  $a^2 = n\lambda r_n$ ,  $r_n = 20/n \text{ mm}$ ;  $r_3 = 6.67 \text{ mm}$ ,  $r_4 = 5 \text{ mm}$ ,  $r_2 = 10 \text{ mm}$ ;  
 $a = 2 \text{ mm}$ ,  $r_n = 8/n \text{ m}$ ,  $r_3 = 2.67 \text{ m}$ ,  $r_4 = 2 \text{ m}$ ,  $r_2 = 4 \text{ m}$ .



Soluzione 16.16



Soluzione 16.18



Soluzione 16.19

- 16.18  $\lambda r = 4 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$  per cui  $R_1 = 2 \text{ mm}$  e  $R_2 = \sqrt{8} \text{ mm} = 2.83 \text{ mm}$  sono i raggi delle prime due zone di Fresnel relative al punto distante  $r$ ; però la seconda zona è attiva per metà:  $E_1 = 2E_0$ ,  $E_2 = 1/2 E_1$ ,  $E = E_1 - E_2 = E_0$ ,  $\alpha = 1$ ,  $I = I_0$ ; nel caso di  $F_2$ , l'area è la stessa e di nuovo la seconda zona è attiva per metà, ma radialmente: dalla figura  $E = \sqrt{2} E_0$ ,  $\alpha = \sqrt{2}$ ,  $I = 2 I_0$ .

- 16.19 Per  $F_1$ , da  $E_{\text{ext}} + E_{\text{ap}} = E_0$  e dal fatto che  $E_{\text{ap}} = E_0$  segue  $E_{\text{ext}} = 0$ ,  $\beta = 0$ ,  $I = 0$ ; per  $F_2$ , dal disegno si vede che  $E_{\text{ext}} = E_0$ ,  $\beta = 1$ ,  $I = I_0$ .

- 16.20  $a = (A / 2 \rho N_A)^{1/3} = 0.353 \text{ nm}$ ;  $2a \sin \theta = m \lambda$ ,  $\theta = 16.46^\circ, 34.51^\circ, 58.20^\circ$ .

- 16.21  $2d \sin \theta_2 = 3\lambda_2$ ,  $d = 168 \text{ pm}$ ;  $\lambda_1 = 2d \sin \theta_1 = 168 \text{ pm}$ : si tratta dell'unico massimo possibile escludendo  $\theta_1 = 90^\circ$ .

- 16.22  $2 \cdot 275 \sin 45^\circ = m\lambda$ ,  $\lambda = \frac{389}{m}$  in pm:  $m = 3 \lambda = 129.7 \text{ pm}$ ,  $m = 4\lambda = 97.3 \text{ pm}$ .

- 17.1 L'angolo limite deve valere al massimo  $45^\circ$ :  $\sin 45^\circ = n_1 / n_2$ ,  $n_2 = 1.885$ ; il fascio è deviato di  $2\alpha = 45^\circ$ ,  $\alpha = 22.5^\circ$ .

- 17.2  $I = -q/p$ ,  $q = 44.3 \text{ cm}$ , l'immagine è virtuale; da  $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = -\frac{2}{R}$

$R = -79.9 \text{ cm}$ ,  $f = R/2 = -39.9 \text{ cm}$ ; l'immagine richiesta si forma nel piano focale, a distanza dal fuoco in modulo  $d = f \tan \theta = 2.4 \text{ cm}$ .

- 17.3  $f_1 = n_1 R / (n_2 - n_1) = 78.2 \text{ cm}$ ,  $p = 39.1 \text{ cm}$ ,  $\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{R}$ ,

$q = -88.2 \text{ cm}$ , immagine virtuale, diritta e ingrandita in quanto  $I = n_1 q/n_2 q = -2$ .

- 17.4 Equazioni dei diottri piani:  $\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q_1} = 0$ ,  $\frac{n_2}{p_2} + \frac{n_3}{q} = 0$ ,  $p_2 = s - q_1$ ; si ricava

$q = -\frac{n_3}{n_2} \left( s + \frac{n_2}{n_1} p \right) = -\frac{1}{1.5} (s + 1.125 p) = -9.5 \text{ cm}$ ; l'immagine virtuale si forma a  $-9.5 \text{ cm}$  dalla faccia destra della lastra, ovvero a  $-6.5 \text{ cm}$  dalla faccia sinistra.

- 17.5  $R_1 = -R_2 = R$ ,  $f = 40 \text{ mm}$ ; per  $p = +\infty$   $q = f = 40 \text{ mm}$ , per  $p = 25 \text{ cm}$   $q = 47.6 \text{ mm}$ ,  $\Delta q = 7.6 \text{ mm}$ .

- 17.6 Per l'occhio ipermetropo si vuole che un oggetto posto a distanza  $p = 25 \text{ cm}$  dia una immagine virtuale alla distanza  $q_p$ :  $\frac{1}{25} - \frac{1}{q_p} = \frac{1}{f} \cdot f = \frac{25 q_p}{q_p - 25}$ .

positiva, quindi lente convergente: con  $q_p = 100 \text{ cm}$   $f = 33.3 \text{ cm} = 0.333 \text{ m}$ ,  $\frac{1}{f} = 3 \text{ diottrie}$ . Per l'occhio miope si vuole che un oggetto all'infinito dia un'immagine virtuale a distanza  $q_r$ , quindi  $f = -q_r$ , lente divergente; con  $q_r = 50 \text{ cm}$ .

$f = -50 \text{ cm} = -0.5 \text{ m}$ ,  $\frac{1}{f} = -2 \text{ diottrie}$ .

- 17.7  $\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{h}{f_1 f_2}$ ,  $f = 40 \text{ cm}$ ; il fuoco anteriore dista dalla prima lente

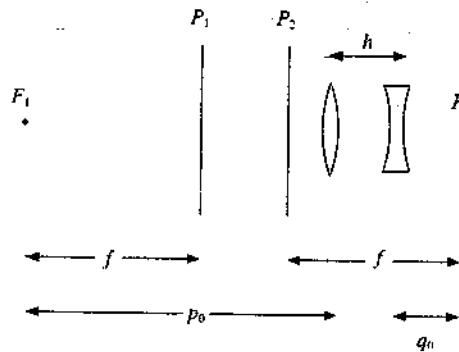


figura a

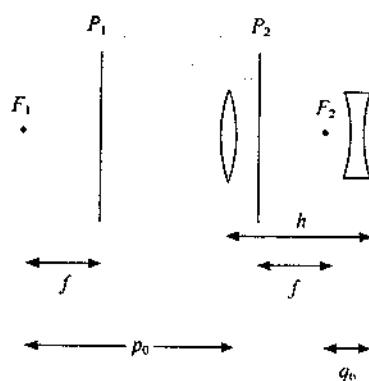


figura b

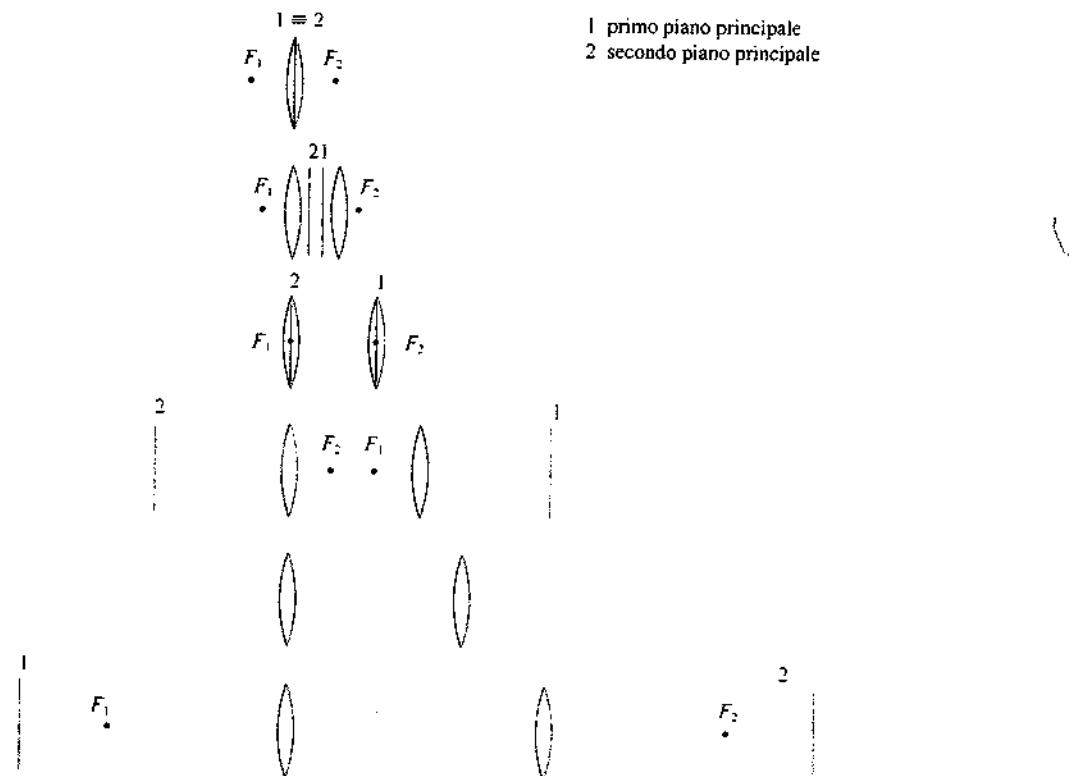
**Soluzione 17.7**

$p_0 = f_1 (h - f_2) / (h - f_1 - f_2) = 72 \text{ cm}$ , il fuoco posteriore dista dalla seconda lente  $q_0 = f_2 (h - f_1) / (h - f_1 - f_2) = 13.3 \text{ cm}$ , i piani principali distano  $f$  dai fuochi e la situazione è mostrata nella figura a, il sistema è convergente; con  $h = 30 \text{ cm}$   $f = 18.5 \text{ cm}$ ,  $p_0 = 46.2 \text{ cm}$ ,  $q_0 = -4.6 \text{ cm}$ , il fuoco posteriore è virtuale (figura b), il sistema è divergente.

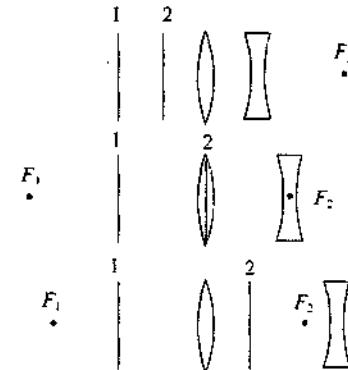
- 17.8  $f = f_0^2 / (2f_0 - h)$ ,  $p_0 = q_0 = f_0 (h - f_0) / (h - 2f_0) = f(f_0 - h) / f_0$ , il sistema è simmetrico; tabuliamo i risultati per i vari valori di  $h$ :

$h = 0 \text{ cm}$	$f = 5 \text{ cm}$	$p_0 = q_0 = 5 \text{ cm}$	come un'unica lente convergente di focale $f_0 / 2$
5	6.7	3.3	convergente
10	10	0	come un'unica lente di focale $f_0$ , però spessa $f_0$
15	20	-10	divergente
20	$\infty$	$\infty$	
30	-10	20	convergente

Per  $h > 2f_0$  il comportamento è simile a quello per  $h = 30 \text{ cm}$ .

**Soluzione 17.8**

17.9  $f = f_0^2 / h$ ,  $p_0 = f_0(h + f_0) / h$ ,  $q_0 = -f_0(h - f_0) / h$ , il sistema non è simmetrico;  
 $h = 5 \text{ cm}$        $f = 20 \text{ cm}$        $p_0 = 30 \text{ cm}$        $q_0 = 10 \text{ cm}$  convergente  
 10                  10                  20                  0  
 15                  6.7                  16.7                  -3.3 divergente



Soluzione 17.9

17.10  $\frac{1}{f} = (n - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$ ,  $\left( \frac{1}{f_B} - \frac{1}{f_R} \right) / \frac{1}{f_G} = -\frac{f_B - f_R}{f_G} = \frac{n_B - n_R}{n_G - 1} = D$ ;

la quantità  $f_B - f_R$  è detta aberrazione cromatica longitudinale, essa non è mai nulla per una singola lente; con  $R_1 = -R_2 = R = 50 \text{ mm}$ ,  $f_B = 47.71 \text{ mm}$ ,  $f_R = 48.64 \text{ mm}$ ,  $f_G = 48.36 \text{ mm}$ ;  $D = 0.0193$  e si verifica la relazione trovata;  $\Delta f = f_B - f_R = 0.93 \text{ mm}$ . A parità degli altri fattori  $\Delta f$  aumenta con  $R$  linearmente.

17.11  $\frac{1}{f_R} = \frac{1}{f_{R1}} + \frac{1}{f_{R2}}$ ,  $\frac{1}{f_B} = \frac{1}{f_{B1}} + \frac{1}{f_{B2}}$ ,  $\frac{1}{f_R} - \frac{1}{f_B} = \frac{f_B - f_R}{f_C^2} =$   
 $\frac{f_{B1} - f_{R1}}{f_{G1}^2} + \frac{f_{B2} - f_{R2}}{f_{G2}^2} = \frac{D_1}{f_{G1}} + \frac{D_2}{f_{G2}}$ ;

per il sistema composto è possibile  $\Delta f = 0$ , cioè  $f_B = f_R$ , se  $f_{G1}/f_{G2} = -D_1/D_2$ : quindi le due focali hanno segno opposto, una lente è convergente e l'altra è divergente e i materiali devono essere diversi. Il sistema si chiama doppietto acromatico.

18.1  $I = 5 \cdot 10^{-2} P / 4 \pi r^2 = 2.4 \cdot 10^{-7} \text{ W/m}^2$ ,  $N = I / h\nu = 2.4 \cdot 10^{-7} / 3.6 \cdot 10^{-19} = 6.7 \cdot 10^{11} \text{ fotoni/m}^2\text{s}$ ,  $\Sigma = \pi d^2 / 4$ ,  $N_m = N\Sigma = 2.1 \cdot 10^6 \text{ fotoni/s}$ . Si noti che  $h\nu = 1.24/0.55 = 2.25 \text{ eV} = 3.6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ .

18.2  $N = I\Sigma / h\nu = 7.37 \cdot 10^{21} \text{ fotoni/s}$ ,  $t = N_A / N = 81.7 \text{ s}$ .

18.3 Molecole per grammo  $N = N_A / A = 1.37 \cdot 10^{22}$ ,  $W_1 = W / N = 2.69 \cdot 10^{-18} \text{ J} = 16.8 \text{ eV}$ ;  $U = h\nu = 1.24/0.65 = 1.9 \text{ eV}$ ,  $N_f = W_1 / U = 9 \text{ fotoni}$ .

18.4  $P = \sigma (T^4 - T_0^4) 2 \pi R d$ ,  $T = 529 \text{ K}$ ;  $\lambda_{\max} = 2.8978 \cdot 10^{-3} / T = 5.48 \mu\text{m}$ ;  $(\varepsilon_{\lambda, \text{cn}})_{\max} = 1.287 \cdot 10^{-5} T^5 = 5.33 \cdot 10^8 \text{ W/m}^3 = 5.33 \cdot 10^2 \text{ W/m}^2 \mu\text{m}$ .

18.5  $W = \sigma (T_1^4 - T_0^4) \Sigma \Delta t = 1.33 \cdot 10^7 \text{ J}$ ;  $\lambda_{\max} = 2.8978 \cdot 10^{-3} / T_1 = 9.9 \mu\text{m}$ .

18.6  $T = 2.8978 \cdot 10^{-3} / \lambda_{\max} = 4830 \text{ K}$ ;  $P = \sigma T^4 4 \pi R^2$ ,  $R = 1.135 \cdot 10^{11} \text{ m}$ ;  $(\varepsilon_{\lambda, \text{cn}})_{\max} = 1.287 \cdot 10^{-5} T^5 = 3.38 \cdot 10^{13} \text{ W/m}^3 = 3.38 \cdot 10^7 \text{ W/m}^2 \mu\text{m}$ ;  $\varepsilon_{\text{cn}} = \sigma T^4 = 3.09 \cdot 10^7 \text{ W/m}^2$ .

18.7  $E_{k,\max} = 1/2 mv^2 = 0.134 \text{ eV}$ ;  $U = h\nu = 1.24/0.625 = 1.984 \text{ eV}$ ,  $W_e = U - E_{k,\max} = 1.850 \text{ eV} = 2.96 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ ;  $\nu_0 = W_e/h = 4.47 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$ ,  $\lambda_{\max} = 0.670 \mu\text{m}$ .

18.8  $U_V = 1.24/0.5461 = 2.27 \text{ eV}$ ,  $W_e = U_V - e V_0 = 1.57 \text{ eV}$ ;  $U_G = 1.24/0.5875 = 2.11 \text{ eV}$ ,  $e V'_0 = U_G - W_e = 0.54 \text{ eV}$ ,  $V'_0 = 0.54 \text{ V}$ .

18.9  $p = e Br = 5.55 \cdot 10^{-25} \text{ Ns}$ ,  $E_k = p^2/2m = 1.056 \text{ eV}$ ,  $U = 1.24/0.450 = 2.756 \text{ eV}$ ,  $W_e = U - E_k = 1.7 \text{ eV}$ .

18.10  $E_{k,\max} = 0.50 \text{ eV}$ ,  $U = E_{k,\max} + W_e = 3.94 \text{ eV} = 6.31 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ ,  $N = I/U = 8.71 \cdot 10^{16} \text{ fotoni/m}^2\text{s} = 8.71 \cdot 10^{16} \text{ elettroni/m}^2\text{s} = 0.014 \text{ A/m}^2$ ;  $p = I/c = 1.83 \cdot 10^{-10} \text{ Pa}$ .

18.11  $\lambda_0 = hc/U_0 = 1.24 \cdot 10^{-6}/3 \cdot 10^5 = 4.13 \cdot 10^{-12} \text{ m}$ ,  $\Delta\lambda = \lambda_c(1 - \cos\theta) = 4.39 \cdot 10^{-13} \text{ m}$ ,  $\lambda = 4.57 \cdot 10^{-12} \text{ m}$ ,  $U = 1.24 \cdot 10^{-6}/\lambda = 271.3 \text{ keV}$ ,  $E_k = U_0 - U = 28.7 \text{ keV}$ .

18.12  $\lambda_0 = 1.240 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ ,  $\Delta\lambda = \lambda_c(1 - \cos\theta) = 1.21 \cdot 10^{-12} \text{ m}$ ,  $\lambda = 1.252 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ ,  $U = 9.9 \text{ keV}$ ,  $p = U/c = 5.29 \cdot 10^{-24} \text{ Ns}$ ,  $E_{k,el} = U_0 - U = 100 \text{ eV}$ ,  
 $p_{el} = \sqrt{2mE_{k,el}} = 5.40 \cdot 10^{-24} \text{ Ns}$ ,  $p \sin\theta = p_{el} \sin\phi$ ,  $\phi = 58^\circ$ .

18.13  $\lambda_0 = 1.24 \cdot 10^{-13} \text{ m}$ ,  $\Delta\lambda = 2\lambda_c = 4.85 \cdot 10^{-12} \text{ m}$ ,  $\lambda = 4.97 \cdot 10^{-12} \text{ m}$ ,  $U = 0.25 \text{ MeV}$ ,  $E_k = U_0 - U = 9.75 \text{ MeV}$ .

18.14 Detto  $r_1 = 0.529 \cdot 10^{-10} \text{ m}$  il raggio di Bohr,  $r_{30} = r_1 \cdot 30^2 = 4.76 \cdot 10^{-8} \text{ m}$ ;  
 $U_{30} = -13.6/30^2 = -15.1 \cdot 10^{-3} \text{ eV}$ ;  $\lambda_{\max} = 1.24 \cdot 10^{-6}/15.1 \cdot 10^{-3} = 82.1 \mu\text{m}$ .

18.15 Massa ridotta  $m_{el} m_{pos} / (m_{el} + m_{pos}) = 0.5 m_{el} = 0.5 m$ ,  
 $r_n = 2 r_1 n^2 = 1.058 \cdot 10^{-10} n^2 \text{ m}$ ,

$$U_n = 0.5 (U_{n,idr}) = -\frac{6.8}{n^2} \text{ eV}, \Delta U = U_2 - U_1 = \frac{3}{4} U_1 = 5.1 \text{ eV} (\Rightarrow \lambda = 243 \text{ nm}).$$

18.16 Massa ridotta  $m_\mu m_p / (m_\mu + m_p) = 185.9 m_{el} = 185.9 m$ , valore da sostituire a  $m$   
nelle formule dell'atomo di idrogeno:  $r_n = \frac{r_1}{185.9} n^2 = 2.85 \cdot 10^{-13} n^2 \text{ m}$ ,

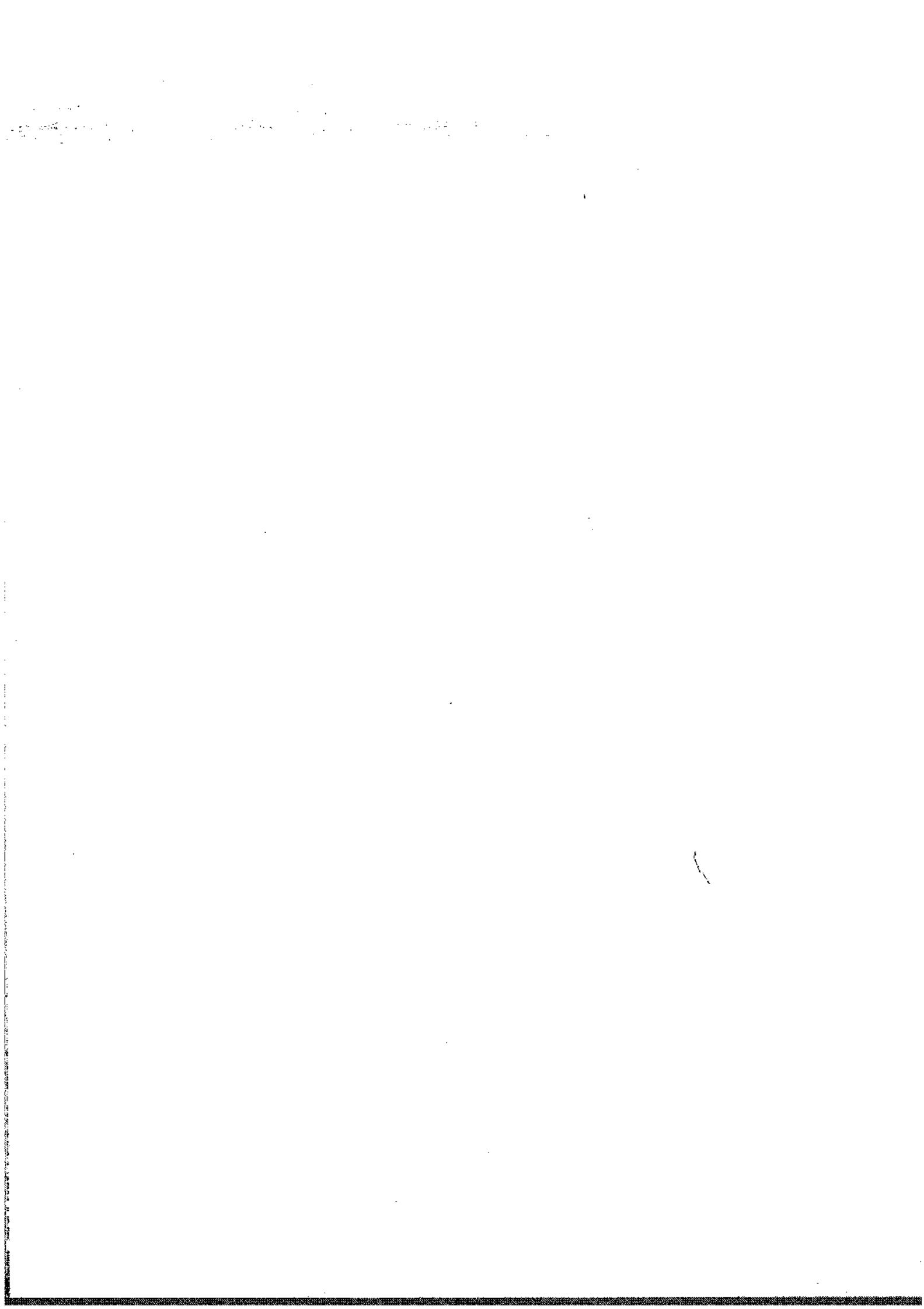
$$U_n = -185.9 \frac{13.6}{n^2} \text{ eV} = -\frac{2.53}{n^2} \text{ keV}; \Delta U = U_2 - U_1 = 1.9 \text{ keV}.$$

18.17  $p = h/\lambda = 10 h/r_p = 8.28 \cdot 10^{-18} \text{ Ns} = 15.48 \text{ GeV/c}$ ; nella formula relativistica  
 $U = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$  il termine contenente  $m$  è trascurabile rispetto al termine  
contenente  $p$ , per cui  $U = pc = 15.48 \text{ GeV}$ ; l'energia cinetica è  $E_k = U - mc^2$ ,  $E_{k,p} = 14.54 \text{ GeV}$ ,  $E_{k,el} = 15.48 \text{ GeV}$ .

18.18  $\lambda = 1.226 \cdot 10^{-9} / \sqrt{65} = 1.52 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ ,  $d = \lambda/2 \sin\theta = 1.075 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ .

18.19  $\lambda = 2.86 \cdot 10^{-11} / \sqrt{4} = 1.43 \cdot 10^{-11} \text{ m}$ ,  $\sin\theta = \lambda/2d$ ,  $\theta = 5.62^\circ$ .

18.20  $\Delta p = \hbar/2r_1 \approx 10^{-24} \text{ Ns}$ ,  $E_k = (\Delta p)^2/2m = 3.4 \text{ eV}$ .



# Indice analitico

## A

aberrazioni 681  
accumulatore 206  
ago magnetico 208, 226  
alternatore 395  
ammettenza 381  
  complessa 384  
amperometro 196  
ampiezza di un'onda  
  cilindrica 478  
  di pressione 469  
  sferica 476  
analisi di Fourier 459  
analizzatore 568  
anelli di Newton 607  
anello (spira)  
  campo elettrico 17  
  campo magnetico 245  
  potenziale 49  
angolo  
  di Brewster 556  
  di deviazione minima 687  
  limite 546, 663  
  solido 69, 71  
anodo 178, 202  
antenna dipolare 510, 585  
antirisonanza 381  
apertura numerica 640  
armoniche superiori 614, 617, 618  
asse ottico  
  di un cristallo monoassico 562  
  di un polarizzatore 568  
  di un sistema ottico 665  
assorbimento 479, 520, 706  
atomo 3, 23, 130, 211, 304  
  di Bohr 9, 42, 44, 512, 709  
  di Thomson 23  
attività ottica 575  
attrito elettromagnetico 328, 329  
autoflusso 260  
autoinduzione 337, 340, 346

## B

banda/e

di conduzione 743  
di livelli 736, 741  
di valenza 743  
battimenti 472  
betatrone 333  
birifrangenza 564  
  circolare 576  
  elettrica 574  
  magnetica 575  
  meccanica 575  
biprisma di Fresnel 594  
bottiglia magnetica 217  
bremsstrahlung 513

C

calamita 208  
cammino ottico 593  
campo 28, 86, 444  
  coercitivo 290  
  di Hall 230  
  di Weiss 314  
  irrotazionale 55, 86  
  solenoidale 82, 87  
campo elettrico 12, 15  
  in un dielettrico polarizzato 128, 134  
  in una cavità 145, 287  
  di un dipolo 58  
  indotto 90, 320, 326  
campo elettromagnetico 341, 363, 493  
campo elettromotore 29, 182, 187, 230, 322  
campo magnetico 212, 213, 216, 220, 241, 271  
  in una cavità 284, 287  
  di un dipolo 245, 246  
  di una carica in moto 242  
  residuo 290  
  rotante 397  
  terrestre 209, 213, 249  
campo **H** 277, 290, 296, 300, 301  
canna d'organo 618  
cannocchiale 685  
capacità 91, 101, 102, 103, 129  
  per unità di lunghezza 103  
carica elettrica 2, 4, 27  
  elementare 3, 8, 25  
  immagine 120

- catodo 178, 202  
 campo costante 627  
 lavoro di scissione 149, 291  
 cella di Kerr 574  
 cerchio di Palmieri 337  
 ciclo di isteresi 290, 296, 345  
 ciclotrone 236  
 circuitazione del  
   campo elettrico 30, 31, 320  
   campo magnetico 253  
 circuito/i  
   accoppiati 350, 352  
   elettrico 181  
   LC 369, 377, 380, 385  
   magnetico 292  
   oscillante 370  
   RC 190, 366, 376, 380, 384  
   RL 338, 366, 376, 379, 384  
   RLC 367, 377, 380, 384  
 coefficiente/i  
   di assorbimento 479, 520, 706  
     specifico 693  
   di autoinduzione 260, 337, 352, 354  
   di capacità 99  
   di induzione 99  
   di mutua induzione 258, 352, 354  
   di Peltier 753  
   di potenziale 99  
   di riflessione 549, 551, 553, 554, 561  
   di smorzamento 367  
   di Thomson 754  
   di trasmissione 550, 551, 553, 555, 561  
   termico 174  
 coerenza 496  
 condensatore/i 101, 375, 383  
   carica di un 188  
   cilindrico 102  
   energia di un 108  
   in parallelo 104  
   in serie 105  
   piano 103  
   scarica di un 189  
   sferico 102, 109  
 condizioni di stazionarietà 167, 168  
 conducibilità termica 174  
 conduttanza 175, 382, 385  
 conduttività 169, 201, 742  
 conduttore/i 1, 89, 161  
   cavo 93, 95  
   in equilibrio 89, 94  
   non ohmico 178  
   sferico 92  
   sistemi di 98  
 conduzione-elettrica  
   nei gas 162  
   nei metalli 161, 168  
   nelle soluzioni elettrolitiche 200  
 configurazione elettronica 727, 729  
 conservazione  
   della carica 4, 167, 362  
   dell'energia 37, 189, 550  
 coppia di Cooper 751  
 corda tesa 451, 465, 560, 614, 616  
 corpo nero 624, 627, 693  
 corrente elettrica 161, 164  
   alternata 374  
   complessa 382  
   continua 162  
   di spostamento 192, 359, 361  
   indotta 320  
   piana indefinita 257  
 correnti  
   amperiane 210, 272, 274  
   di Foucault 332  
 costante  
   di Boltzmann 155, 163, 178, 310  
   di Curie 312  
   di Faraday 204  
   di Kerr 574  
   di Planck 44, 303, 515, 532, 696, 699, 709, 720  
   di Rydberg 708, 710  
   di Stefan 694  
   di tempo 188, 338  
   di Verdet 576  
   dielettrica assoluta 129  
     assoluta del vuoto 7  
   dielettrica relativa 128, 153, 157, 519  
   reticolare 659  
 criterio di Rayleigh 636  
 cristalli  
   dicroici 568  
   monoassici 562  
   cuneo sottile 606
- D**
- decibel 471  
 densità di carica 14, 15  
   di polarizzazione 132, 133  
 densità di corrente 164, 167, 201  
   amperiana 275, 276  
   di spostamento 359, 361  
 densità di energia

del campo elettrico 109, 148  
 del campo magnetico 341, 344  
 elettromagnetica 362, 498  
 deuterio 649  
 diamagnetismo 270, 272, 274, 304, 308, 334  
 diapason 612, 617  
 dicroismo 568  
 dielettrico 128  
     anisotropo 140, 562  
     lineare 131, 138  
 diffrazione 631, 691  
     degli elettroni 714  
     dei raggi X 658  
     di Fraunhofer 632, 636, 641  
     di Fresnel 651, 654, 655  
 diffusione  
     della luce 516  
     Thomson 517  
 diodo  
     a effetto termoelettronico 178  
     a semiconduttore 748  
 dinamo 396  
 diotri 664, 670  
 dipolo elettrico 57, 130, 228  
     oscillante 507, 516, 621  
 dipolo magnetico 209, 223, 228, 246  
     oscillante 511  
 disco di  
     Barlow 328  
     Rowland 247  
 disco carico  
     campo elettrico 18  
     potenziale 49  
 discontinuità del  
     campo **D** 141, 287, 548  
     campo elettrico 78, 141, 287, 548  
     campo **H** 283, 287, 548  
     campo magnetico 262, 283, 287, 548  
 dispersione 464, 484, 521  
     angolare 688  
     del reticolo 645  
     del prisma 686  
     della luce visibile 523, 546, 663  
 dissociazione 200  
 distanza  
     di visione distinta 640, 684  
     focale 593, 666, 671, 675, 678  
 distribuzione di carica  
     cilindrica 75  
     piana 76  
     sferica 73, 113, 124  
 divergenza 80, 81, 87

domini di Weiss 316  
 doppietto acromatico 682  
 doppio prodotto vettore 88  
 dualismo onda-corpuscolo 707  
  
**E**  
 effetto  
     Cerenkov 530, 690  
     Compton 702  
     Cotton-Mouton 575  
     Doppler 487, 529  
     Einstein-de Haas 317  
     Faraday 576  
     fotoelettrico 698  
     Hall 230  
     Joule 176  
     Kerr 574  
     Meissner 749  
     Peltier 753  
     Pockels 575  
     Seebeck 754  
     termoelettronico 178  
     Thomson 754  
     Volta 752  
 elettreti 160  
 elettrodinamometro assoluto 251  
 elettroliti 200  
 elettromagneti 295, 349  
 elettrometro a bilancia di Thomson 119  
 elettrone 3, 8, 211, 303, 308, 316, 513, 704, 714  
 elettronvolt 39  
 elettroscopio a foglie 2, 96, 107, 753  
 ellissoide degli indici di rifrazione 562, 563  
 emissività 694  
 energia  
     di accoppiamento 353  
     di Fermi 163, 738  
     di ionizzazione 43  
     di legame 43, 709  
     di un fotone 532  
     elettrostatica 108, 111, 148  
     intrinseca della corrente 340  
     magnetica 342, 344, 352, 354  
     potenziale elettrostatica 31, 33, 37, 63  
     potenziale magnetica 223, 224  
     trasmessa per onde 465, 498  
 equazione/i  
     delle onde piane 444, 448, 474  
     di Clausius-Mossotti 159  
     di continuità 167, 362

- di Laplace 83, 124
- di Maxwell 82, 261, 361, 363, 490
- di Poisson 83
- di Schrödinger 722
- di Van t'Hoff 205
- equilibrio in un campo elettrico 77
- equivalente
  - chimico 204
  - elettrochimico 204
- esperienza, esperimento di
  - Bucherer 236
  - Franck e Hertz 711
  - Hanbury Brown e Twiss 587
  - Hertz 620
  - Michelson 691
  - Michelson e Morley 610
  - Millikan 25
  - Rutherford 23, 29
  - Stern e Gerlach 306
  - Young 588
- F**
- fasce di Van Allen 217
- fase (differenza di fase)
  - di un'oscillazione 371, 377, 378, 381
  - di un'onda 458, 461, 578, 582
- fattore di
  - depolarizzazione 146
  - inclinazione 540, 589
  - merito 373
  - potenza 393
  - smorzamento 368
- ferroelettrici 160
- ferromagnetismo 270, 273, 274, 289, 304, 314
- filo rettilineo
  - campo elettrico 16
  - campo magnetico 243, 255
  - potenziale 48
- flusso
  - concatenato 82, 213, 259
  - del campo elettrico 68, 70
  - del campo magnetico 213, 224, 226, 227, 258
  - dell'induzione dielettrica 136
  - tagliato 227, 323
- flussometro 336
- fon 471
- fonometro 472
- fononi 736
- formula/e di
  - Cauchy 523, 686
- Eulero 382
- Fresnel 549, 551, 553
- Galileo Ferraris 393
- Larmor 511
- Liénard 512
- Mathiessen 742
- Rayleigh-Jeans 626
- Rydberg 708
- forza/e
  - di Lorentz 214, 232
  - di Van der Waals 733
  - elettrica 9, 13
    - su un dipolo 64
    - su una lastra di dielettrico 151
    - tra le armature di un condensatore 116, 118
  - magnetica 218, 225, 346, 347, 353
    - su un dipolo 247
    - tra circuiti 250, 251
    - tra i poli di un magnete 349
- forza elettromotrice 30, 181, 183
  - alternata 374
  - complessa 382
  - di autoinduzione 337
  - dimutua induzione 350
  - indotta 320, 323
  - termoelettrica 754
- forza magnetomotrice 292
- fotomoltiplicatore 702
- fotoni 532, 699, 702, 709
- frange di interferenza 588, 591, 599
  - di eguale inclinazione 608, 611
  - di eguale spessore 607
- frequenza
  - di battimento 473
  - di ciclotrone 238
  - di soglia photoelettrica 700
  - di un'onda 458, 481, 532
  - fondamentale 614, 617, 618
- fronte d'onda 474, 475
- funzione/i
  - armoniche 124
  - d'onda 444, 445, 457, 474, 476, 495, 722, 725
  - di distribuzione di Boltzmann 155, 310, 626
  - di Langevin 311
- fuoco 593, 666, 671, 675, 678
- G**
- galvanometro 195, 223
  - balistico 336
- gas di Fermi 736

generatore di f.e.m. 162, 328, 329

di Van de Graaf 186

termoelettrico 755

giunzione p-n 748

gradiente 46, 57, 51, 86

grado di

dissociazione 201

polarizzazione 556

guida

d'onda 628

di luce 546

## I

immagine

reale 657, 664

virtuale 594, 657, 664

impedenza 378

caratteristica del vuoto 494

di un mezzo 494, 500, 501

di una linea 391

complessa 383

indice di rifrazione 494

di un dielettrico 519, 523, 596, 663

di un metallo 525, 577

ordinario 562

relativo 545

straordinario 562

induttanza 260, 337, 352, 354

per unità di lunghezza 343

induttore 338, 374, 383

induzione

completa 95

dielettrica 136, 141, 145

elettromagnetica 320, 323, 326

elettrostatica 5, 90

infrarosso 533

ingrandimento

longitudinale 670, 673, 676

trasversale 668, 673, 676

visuale 684, 685

intensità

delle onde riflesse e trasmesse 548, 561

di un'onda elastica 467, 469, 476, 478

di un'onda elettromagnetica 501, 505, 506

emessa da un dipolo oscillante 509, 510, 511

nell'interferenza 580, 582, 584, 588, 597

nella diffrazione 633, 641

interazione tra dipoli 66, 247

interferenza 579, 581, 587, 597, 602, 611

interferometro

di Fabry-Perot 611

di Fizeau 596

di Michelson 609

per la misura dell'indice di rifrazione 595

interfero (traferro) 293

invarianza relativistica

della carica 27

delle equazioni di Maxwell 363

ioni 4, 200

ionizzazione 4, 162, 711

ionosfera 527

ipersuoni 472

isolante 1, 127

isotopi 232

## L

lacune 231, 743

lamina/e

di ritardo 571, 572, 573

sottile 602

lunghezza

angolare 599, 633, 636, 642

della sorgente (limite) 592

della risonanza 373

di una riga spettrale 650, 719

laser 481, 713

lavoro

della forza elettrica 29, 32, 176, 183

magnetica 225

di estrazione 178, 699, 740

legame

a idrogeno 733

covalente 730

dipolare 733

ionico 730

metallico 735

legge/i di

Ampère 253, 277

Ampère-Laplace 241, 271

Ampère-Maxwell 359, 361

Biot 575

Biot-Savart 244

Bragg 659

Cartesio 543, 545

Child-Langmuir 178

Coulomb 6, 9, 28, 94, 209, 301

Curie 273 (prima), 291 (seconda)

Faraday (elettrolisi) 204

Faraday (induzione elettromagnetica) 320, 326

Fechner e Weber 471

- Felici 335  
 Gauss 70, 136  
 Hopkinson 292  
 Kirchhoff (circuiti) 192, 384  
 Kirchhoff (radiazione) 693  
 Lenz 321  
 Malus 568  
 Ohm 170, 172, 202  
     complessa 383  
     generalizzata 185  
 Planck 697  
 Richardson 178  
 Snell 545  
 Stefan-Boltzmann 694  
 Verdet 576  
 Volta 753  
 Wiedemann e Franz 174  
 Wien (prima e seconda) 694  
 leggi della riflessione e rifrazione 543, 544, 662, 663  
     elementari di Laplace 241 (prima), 218 (seconda)  
 lente  
     di ingrandimento 684  
     elettrostatica 126  
     magnetica 299  
     sottile 593, 638, 673  
     spessa 677  
 linea di trasmissione 389  
 linee del  
     campo elettrico 20  
     campo magnetico 212, 247, 301  
 livelli energetici 44, 709, 710  
     rotazionali 736  
     vibrazionali 736  
 livello sonoro 471  
 luce visibile 533  
 lunghezza  
     d'assorbimento 479, 520, 706  
     d'onda 458, 542  
         Compton 704  
         di de Broglie 714  
     di coerenza 481, 590
- M**
- maglia 192  
 magnete permanente 290, 300  
 magnetite 208  
 magnetizzazione 270, 274, 277, 278, 310, 312  
     di saturazione 290, 311  
     residua 290  
     spontanea 314
- magnetone  
     di Bohr 303  
     nucleare 303  
 maser 532, 713  
 massa magnetica 209, 301  
 meccanismi di polarizzazione 152, 154, 160  
 membrana tesa 475, 622  
 metodo  
     dei vettori rotanti 376, 579  
     di Poggendorf 198, 755  
     simbolico 382, 581  
 mezzo  
     dispersivo 464, 484, 521  
     non dispersivo 483  
 microonde 532  
 microscopio 639, 685  
 mobilità 201  
 modello  
     atomico di Bohr-Sommerfeld 44, 709  
     classico della conduzione elettrica 168  
 modo di vibrazione 615, 623, 624, 627  
 modulazione d'ampiezza 473  
 moduli elastici 446, 453, 457  
 momento  
     angolare 44, 302, 304  
     di dipolo elettrico 57, 130, 153, 154, 156, 228  
         magnetico 210, 211, 221, 228, 274, 302,  
             304, 309, 311, 316  
     meccanico su un dipolo 63, 247  
         su un circuito 221, 222, 226, 353  
 monopolio magnetico 211, 221  
 moto di una carica in un campo  
     elettrico 21, 37  
     magnetico 215, 216, 237  
 motori elettrici 331, 396, 397
- N**
- neutrini solari 211, 507  
 neutrone 3, 8, 303, 317, 714  
 nodo di  
     un'onda stazionaria 613, 614, 617, 619, 621  
     una rete 192  
 nucleo atomico 3, 4, 23  
 numeri complessi 386  
 numero  
     atomico 3, 154, 161, 756  
     d'onde 457, 542  
     di Lorenz 174  
     di Mach 489  
     di massa 3

quantico azimutale 44, 724  
di spin 725  
magnetico 44, 724  
principale 44, 724

**O**

occhio 640, 683  
oggetto 655, 664  
ohmetro 197  
olografia 655  
onda/e 443  
capillari 464  
cilindriche 478, 506  
d'urto 489  
di gravità 464  
di pressione 469  
emesse da un dipolo oscillante 508, 511  
elettromagnetiche piane 493, 495, 562  
guidate 628  
hertziane 532, 585, 600  
in un cavo coassiale 392  
in una colonna di gas 453, 585  
corda tesa 451  
membrana tesa 475  
molla 465  
sbarra solida 449, 465  
longitudinali 450, 461  
materiali 713  
ordinaria 563  
piana 444  
armonica 457  
polarizzata 461  
sferiche 476, 505, 540  
stazionarie 612, 618, 620, 622, 623, 627  
straordinaria 563  
sulla superficie di un liquido 463  
torsionali 465  
trasversali 452, 461, 494  
operatore  
di Laplace 83  
vettoriale del 46, 47, 87  
orbitale  
atomico 726  
molecolare 730  
oscillazioni  
in un campo elettrico 63  
magnetico 222  
in un circuito RLC  
permanenti 370, 371  
smorzate 366, 368

oscilloscopio 41  
ozono 534, 712

**P**

pacchetto d'onde 480, 495, 516  
paramagnetismo 270, 273, 274, 304, 310  
nei metalli 313, 740  
parete di Bloch 316  
partitore  
capacitivo 105  
resistivo 184  
periodo di un'onda 458  
permeabilità magnetica  
assoluta 271  
assoluta del vuoto 240  
differenziale 290  
relativa 271  
piano/i  
di incidenza 543  
indefinito, campo elettrico 19  
potenziale 50  
principali 678  
piezoelettricità 160  
pila  
di Volta 162, 205  
reversibile 206  
polarimetro 575  
polarizzabilità  
elettronica 153, 519  
ionica 160  
per orientamento 156  
polarizzatore 567, 568  
polarizzazione  
di un dielettrico 130, 131, 138, 140, 153, 156  
elettronica 130, 153  
per orientamento 130, 154  
di un'onda 461  
circolare 462, 496, 501, 572, 576  
ellittica 462, 496, 501, 572  
parziale 556  
per riflessione 557  
rettilinea 461, 496, 501, 557, 571  
elettrolitica 204, 206  
poli magnetici 208, 301  
ponte  
capacitivo 389  
di Wheatstone 199  
potenza di un'onda  
cilindrica 478  
piana 466, 467

sferica 476  
potenza elettrica 170, 176, 340  
apparente 393  
media 330, 392, 393  
reale 393  
reattiva 393  
potenza irradiata  
da un dipolo oscillante 509, 510, 511  
da una carica in moto accelerato 511, 512  
per radiazione di sincrotrone 513  
potenziale  
d'arresto 698  
elettrico 31, 33, 34, 46, 364  
di dipolo 57  
di un campo uniforme 38  
di un dielettrico polarizzato 133  
di un sistema di cariche 60  
magnetico scalare 266  
vettore 263, 364  
potenziometro 198  
potere  
convergente 672, 675  
dispersivo 645, 688  
emissivo 624, 693  
risolutivo 639, 640, 646, 688  
rotatorio 575  
termoelettrico 754  
precessione di Larmor 308  
pressione  
di radiazione 502  
elettostatica 117  
magnetica 347  
osmotica 201, 205  
principio di  
Babinet 637  
combinazione di Rydberg e Ritz 709  
complementarietà 716  
equivalenza di Ampère 223, 246  
esclusione di Pauli 304, 725  
Fermat 689  
Huygens-Fresnel 541, 587, 631  
indeterminazione 717  
sovraposizione 11, 33, 446, 578  
prisma 686  
di Nicol 567  
problema di Dirichlet 125  
prodotto misto di tre vettori 88  
produzione di copie 705  
protone 3, 8, 303  
pulsazione  
di ciclotrone 237  
di plasma 527

di taglio 390  
di un'onda armonica 457  
propria 367, 518, 522

## Q

quadrupolo  
elettostatico 126  
magnetico 298  
quantità di moto  
di un fotone 532, 702  
di un'onda elettromagnetica 502, 504  
quantizzazione  
del momento angolare 44, 303  
dell'energia 44, 515, 532, 696  
della carica 3  
spaziale 44, 303, 306  
quark 115, 211, 303

## R

radiazione  
degli atomi 515  
di cavità 624  
di frenamento 513  
di sincrotrone 513  
di un'una carica accelerata 511, 512  
di un'antenna dipolare 510, 511  
solare 506, 536  
termica 627, 692  
raggio, raggi  
classico dell'elettrone 115, 517  
del nucleo 4  
di curvatura in campo magnetico 215  
(onde) 475, 506, 662  
parassiali 664  
X caratteristici 535, 712  
di frenamento 513, 535  
 $\gamma$  535  
ramo di una rete 184, 192  
rapporto giromagnetico 304  
reatanza 375, 385  
regola  
della vite 52, 55, 82, 214, 235, 241  
delle maglie 195, 384  
di Hund 726  
di Kirchhoff 650, 693  
relazione/i di  
de Broglie 714  
dispersione 485

- Stokes 551, 603  
 reostato 198  
 resistenza  
     critica 368  
     d'antenna 510, 511  
     di carico 184  
     di conduttori tridimensionali 199  
     di un conduttore metallico 172  
     interna 182  
 resistività 179, 374, 383  
 resistore 179, 374, 383  
 rete elettrica 192, 384  
 reticolo  
     cristallino 658  
     di diffrazione 641  
     zonato di Soret 653  
 riflessione  
     della luce 544, 602, 611  
     di onde elastiche 560, 612  
     metallica 577  
     totale 545, 552, 663  
 rifrazione  
     della luce 545, 611  
     di onde elastiche 560  
 righe spettrali 648, 650, 708  
 rigidità dielettrica 129, 144  
 riluttanza 292  
 risonanza 372, 521, 615  
 rotore 54, 56, 86
- S**
- schermo  
     elettrostatico 95  
     magnetico 284  
 selettore di velocità 234  
 semiconduttori 743  
 sensazione sonora 471  
 separatore elettrostatico 40  
 serie  
     armonica 614, 616, 618  
     di Fourier 459  
         complessa 460  
     spettrali 708  
 sezione principale 566  
 shunt 196  
 sincrociclotrone 238  
 sincrotron 238, 299  
 sintesi del suono 620  
 sistema diottico centrato 680  
 smagnetizzazione adiabatica 313
- solenoide  
     rettilineo 248, 256, 279  
     toroidale 257, 279  
 solidi  
     covalenti 734  
     ionici 734  
     metallici 735  
     molecolari 735  
 soluzione elettrolitica 200  
 sonda di Hall 231  
 sorgenti coerenti 542, 579, 587, 602, 611  
 specchio, specchi 664  
     di Fresnel 594  
     di Lloyd 594  
     piano 594, 669  
     sferico 665, 668
- spettro  
     delle onde elettromagnetiche 531  
     di assorbimento 649, 710  
     di emissione 648, 708
- spettrogramma  
     di Debye-Scherrer 660  
     di Laue 660
- spettrografo a cristallo 660
- spettrometro  
     a prisma 688  
     a reticolo 647  
     di massa 232, 233, 235
- spettroscopia 647
- spin 211, 303
- spira (anello)  
     campo elettrico 17  
     campo magnetico 245  
     potenziale 49
- strato antiriflettente 605
- strumento universale 197
- suscettanza 382, 385
- suscettività  
     elettrica 128, 153, 156, 519  
     magnetica 272, 290, 310, 312, 347
- superconduttività 174, 297, 749
- superficie equipotenziale 51, 90
- T**
- tavola periodica 728
- telescopio 639
- temperatura  
     di Curie 291, 315  
     critica 174
- tempo di coerenza 481, 590

sferi  
potenz:  
appa:  
med:  
real:  
reat:  
potenz:  
da t:  
da t:  
per:  
potenz:  
d'ai:  
elet:  
ma:  
vet:  
poten:  
potere:  
co:  
dis:  
em:  
ris:  
rot:  
ter:  
prece:  
press:  
di:  
el:  
m:  
os:  
princ:  
B:  
cc:  
cc:  
·ec:  
e:  
F:  
E:  
ii:  
s:  
pris:  
d:  
prol:  
proc:  
proc:  
proc:  
pul:  
c:  
c:

tensione elettrica 29, 182  
di Hall 230  
tensoro suscettività elettrica 140  
teorema  
del gradiente 46  
della divergenza 81, 86, 87  
di Coulomb 90  
di Fourier 459  
di Kirchhoff 540  
di Stokes 55, 87  
termometro a termocoppia 755  
timbro 617, 620  
trasformatore 387, 394  
trasformazioni galileiane di E e B 268  
tubo di  
Coolidge 513  
Quincke 586

**U**

ultrasuoni 472  
ultravioletto 534

**V**

valenza 201  
valore efficace 330, 392, 499  
velocità  
della luce 242, 252, 392, 493, 495, 536, 610,  
di deriva 164, 169, 218  
di fase 484, 629  
di Fermi 163  
di gruppo 486, 523, 629, 716  
di propagazione 392, 444, 450, 452, 455, 463  
465, 476  
ventre di un'onda stazionaria 613, 614, 617, 619  
vettore di  
Poynting 498  
propagazione 474  
voltmetro 201, 204  
voltmetro 196

**Z**

zone di Fresnel 651