

**Politecnico di Milano
A.A. 2010/2011**

**Appunti del corso di
ELETROTECNICA A**

Prof. L. Codecasa
A cura di
Gargano Eric
Macchi Matteo

1. Topologia circuitale

L'Elettrotecnica

L'Elettrotecnica è una materia molto vasta. In particolare, noi ci occuperemo solo di una branca dell'Elettrotecnica, rappresentata dallo studio dei circuiti elettrici e della teoria che ne sta alla base.

I circuiti elettrici

Significato di "circuito elettrico"

Definiamo "*circuito elettrico*" un oggetto costruito dall'uomo, il cui funzionamento è basato su fenomeni di natura elettromagnetica. In base a questa definizione, i circuiti elettrici possono avere dimensioni e caratteristiche molto varie. Sono esempi di circuiti elettrici gli impianti di illuminazione, i personal computer, i telefoni cellulari, ma anche gli impianti di comunicazione transoceanici.

Un circuito elettrico è costituito dalla connessione di diversi "*componenti elettrici*", che possono perciò essere considerati delle "parti" di un circuito elettrico. I componenti elettrici sono dotati di terminali che ci consentono di connettere componenti diversi. I terminali sono detti anche "poli" o "morsetti".

I modelli circuituali

A seguito della grande varietà di possibili circuiti è opportuno utilizzare dei "*modelli circuituali*" per la loro rappresentazione. Un modello circuituale è un'astrazione di un circuito reale, ovvero una rappresentazione astratta, simbolica, di un oggetto fisico (in particolare, un circuito elettrico).

I modelli circuituali che adotteremo utilizzano particolari simboli per la rappresentazione dei componenti elettrici del circuito stesso. Un componente elettrico è rappresentato da una regione di spazio, dalla quale "escono" dei terminali, i quali sono rappresentati tramite dei segmenti:

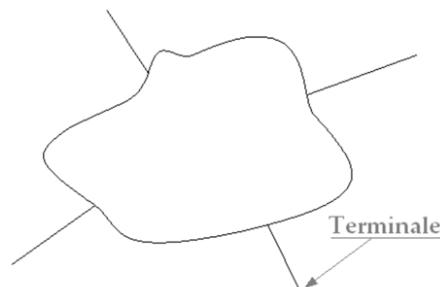


figura 1: modello di componente elettrico

Più componenti elettrici sono connessi tra loro mediante dei "nodi". Un nodo è quindi rappresentato da un pallino che unisce i terminali di due o più componenti, come in figura:

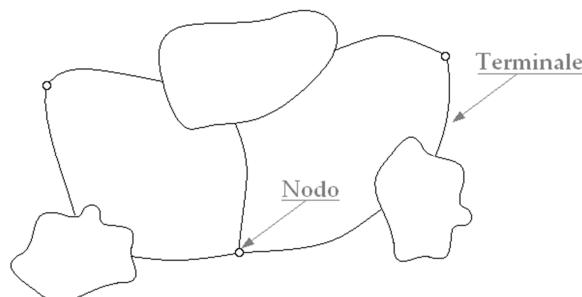


figura 2: modello di circuito elettrico

Naturalmente, come già messo in evidenza, quelli appena introdotti sono solo dei modelli: nella realtà il funzionamento del circuito è governato da campi elettromagnetici più o meno complessi. All'interno del circuito si avranno determinate grandezze fisiche, come la densità di corrente, il campo elettrico, e così via: i circuiti elettrici, naturalmente, rispettano i principi fisici dell'elettromagnetismo.

Esempio di circuito elettrico: la pila di Volta

Uno dei primi circuiti elettrici inventati fu la pila di Volta. Tale circuito era costituito da due componenti:

1. La pila vera e propria, a sua volta costituita da dischi di rame sovrapposti a dischi di zinco e separati tra loro tramite panni imbevuti di acqua salata, con due terminali agli estremi della pila.

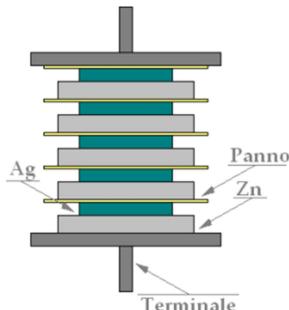


figura 3: struttura della pila

2. Lo stesso Volta, il quale, toccando con una mano uno dei due terminali della pila e con l'altra il terminale restante, sentiva "la scossa". I due terminali di questo "componente" erano dunque rappresentati dalle mani di una persona fisica, anche se può apparire molto strano.

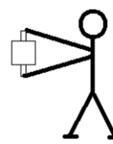


figura 4: la pila di Volta

Classificazione dei componenti elettrici

I componenti elettrici sono classificati in base al numero dei terminali elettrici che essi possiedono.

- **Bipolo**

Un bipolo è un componente che possiede due terminali.

- **Tripolo**

Un tripolo è un componente che possiede tre terminali.

- **Quadripolo**

Un quadripolo è un componente che possiede quattro terminali.

- **n-polo**

Un n-polo è un componente che possiede n terminali.

Simboli dei componenti elettrici

Quando abbiamo introdotto i modelli dei componenti elettrici abbiamo detto che essi sono rappresentati come delle "regioni di spazio". In realtà però ogni specifico tipo di componente elettrico possiede un simbolo diverso, che ci consente di distinguerlo da tutti gli altri. Le forme prima utilizzate (e che useremo ancora in questa parte introduttiva) sono dei simboli usati per indicare generici componenti elettrici.

A semplice scopo esemplificativo riportiamo alcuni simboli di componenti elettrici, che verranno in seguito analizzati nel dettaglio.

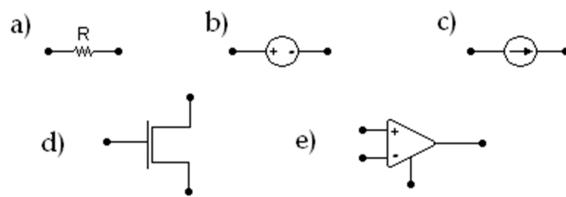


Figura 5: esempi di simboli di componenti

a) resistore; b) generatore di tensione; c) generatore di corrente; d) Mosfet; e) amplificatore operazionale

Il voltmetro e l'ampermetro

Il voltmetro e l'ampermetro sono particolari componenti, che consentono la rilevazione di grandezze elettriche. Di seguito analizzeremo in dettaglio le loro caratteristiche e le relative regole di inserzione, ovvero le regole da seguire per collegare in un circuito tali componenti. Se si sbagliano le regole di inserzione, il funzionamento del circuito risulta alterato.

Il voltmetro

Modello del componente

Il voltmetro è comunemente rappresentato attraverso un disegno del tipo di quello sotto riportato:



Figura 6: simbolo del Voltmetro

Regola di inserzione

L'inserimento del voltmetro all'interno di un circuito può avvenire scegliendo arbitrariamente una coppia di nodi (ad esempio, A e B) e connettendo uno dei terminali del voltmetro ad uno dei due nodi (ad esempio, A), e il restante terminale al nodo rimanente (nel caso, B).

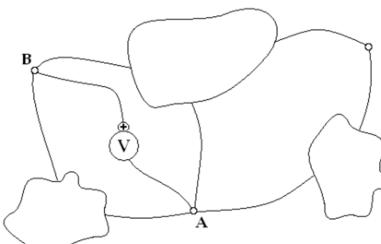


Figura 7: esempio di inserzione di un voltmetro in un circuito elettrico

Significato

Naturalmente è possibile inserire il voltmetro all'interno di un circuito in moltissime maniere diverse, a seconda dei nodi che si scelgono. Inoltre, una volta fissata una coppia di nodi, è possibile collegare il voltmetro in due diversi modi, a seconda del nodo al quale viene collegato il terminale con il segno "+".

Il voltmetro restituirà un valore numerico, il quale rappresenta la tensione elettrica tra i due nodi collegati, espressa in u.m. del S.I. (il Volt, V).

Si osserva inoltre che, siccome si tratta di strumenti ideali, l'inserimento di altri voltmetri all'interno del circuito non altera la lettura degli altri strumenti di misura eventualmente introdotti.

Rappresentazione semplificata

Al fine di semplificare la rappresentazione dell'inserimento di un voltmetro nel circuito è possibile utilizzare una simbologia più semplice e snella, equivalente a quella prima introdotta. È infatti possibile rappresentare l'inserimento del voltmetro anche solo attraverso una freccia:

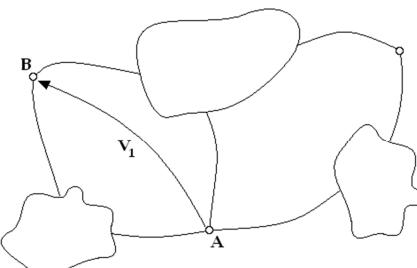


Figura 8: rappresentazione semplificata dell'inserzione di un voltmetro

L'ampermetro

Modello del componente

L'ampermetro è comunemente rappresentato attraverso un disegno del tipo di quello sotto riportato:



Figura 9: simbolo del Voltmetro

Regola di inserzione

Per inserire un ampermetro all'interno di un circuito occorre seguire i seguenti passi fondamentali:

1. Si sceglie un nodo del circuito (ad esempio, A).
2. Si dividono in due gruppi i terminali che si incontrano nel nodo scelto e si lasciano collegati al nodo selezionato tutti i terminali appartenenti ad uno dei due gruppi.
3. Si introduce un nodo ausiliario (ad esempio A') al quale si collegano tutti i terminali del secondo gruppo.
4. Si collegano i terminali dell'ampermetro l'uno al nodo A, l'altro al nodo A'.

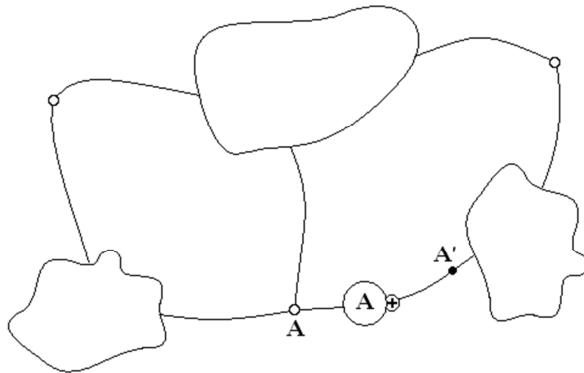


Figura 10: inserzione di un ampermetro in un circuito elettrico

Significato

Anche in questo caso è possibile ripetere la procedura di inserimento dell'ampermetro in un circuito in moltissimo modi diversi, a seconda del nodo scelto e del "verso" nel quale l'ampermetro viene inserito. In ogni caso, l'ampermetro restituisce un valore numerico, che indica una corrente elettrica. L'unità di misura del valore letto sarà l'Ampére (A).

Rappresentazione semplificata

Anche in questo caso è possibile semplificare la rappresentazione dell'inserimento di un ampermetro attraverso una freccia, che però viene disegnata sul terminale, nel modo seguente:

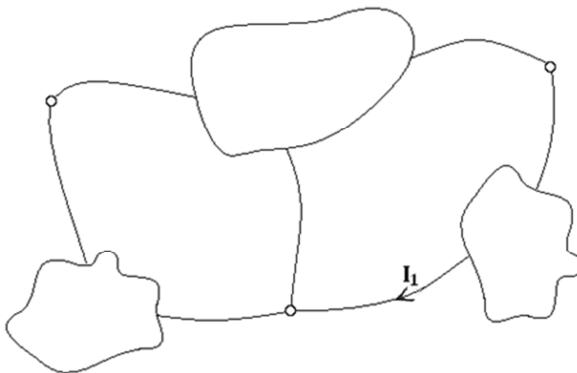


Figura 11: rappresentazione semplificata dell'inserzione di un ampermetro

Legge di Kirchhoff delle tensioni (KVL, o LKV)

Enunciato

Sia dato un circuito elettrico. Si consideri una qualsiasi linea chiusa γ orientata che non entri mai nei componenti del circuito e che sia costituita da linee che uniscono tra loro coppie di nodi. La somma algebrica delle tensioni lungo la linea γ è sempre nulla.

Per "somma algebrica" si considera la somma delle tensioni, considerate con il segno positivo se misurate con freccia concorde con l'orientamento della linea γ , mentre sono considerate con segno negativo se hanno verso opposto.

Esempi di applicazione

Consideriamo il circuito seguente e prendiamo la linea orientata γ indicata in colore verde in figura 12:

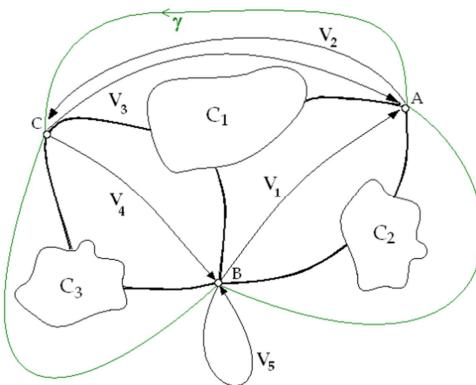


Figura 12: esempio di applicazione della KVL

Dall'applicazione della KVL possiamo dedurre le seguenti relazioni:

$$V_1 - V_3 + V_4 = 0$$

$$V_1 + V_2 + V_4 = 0$$

Dall'esempio si deduce che la legge di Kirchhoff può essere applicata più volte, ottenendo moltissime relazioni tra le tensioni di un circuito.

Inoltre, applicando la legge di Kirchhoff ad un solo nodo (ad esempio, il nodo B), si ottiene che la tensione misurata collegando allo stesso nodo entrambi i terminali del voltmetro è nulla:

$$V_5 = 0$$

Con riferimento allo stesso circuito appena analizzato, consideriamo ora la linea orientata γ' indicata in rosso nella figura 13:

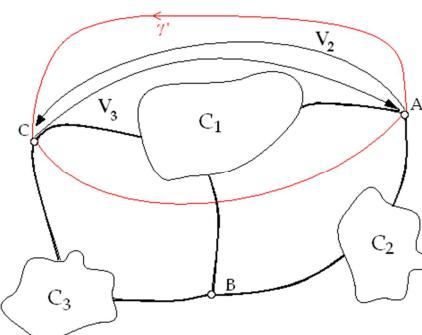


Figura 13: esempio di applicazione della KVL

Dall'applicazione della KVL deduciamo la relazione:

$$V_2 + V_3 = 0 \quad \rightarrow \quad V_2 = -V_3$$

Da questa applicazione possiamo ricavare una regola generale: se misuriamo due tensioni tra gli stessi nodi ma con frecce tra loro opposte, otteniamo due valori opposti.

Legge di Kirchhoff delle correnti (KCL, o LKC)

Enunciato

Sia dato un circuito elettrico. Si consideri una qualsiasi superficie chiusa σ orientata che non tagli mai i componenti del circuito. La somma algebrica delle correnti misurate nei terminali che tagliano il bordo della superficie è sempre nulla.

Per somma algebrica si intende che le correnti misurate con frecce che attraversano la superficie nel verso in cui quest'ultima è orientata sono considerate con il segno positivo, mentre le altre sono considerate con segno negativo.

Esempi di applicazione

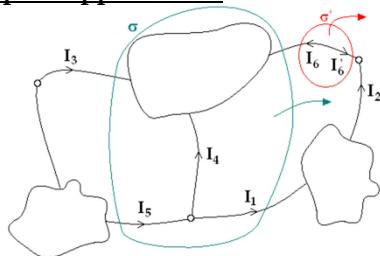


Figura 14: esempio di applicazione della KCL

Consideriamo il circuito in figura 14 e prendiamo la superficie σ indicata in rosso.

Dall'applicazione della KCL possiamo dedurre la seguente relazione:

$$I_1 - I_6 - I_3 - I_5 = 0$$

Analogamente possiamo applicare la KCL alla superficie σ' ottenendo:

$$I_6 - I_6' = 0 \quad \rightarrow \quad I_6 = I_6'$$

Dall'ultimo esempio possiamo ricavare una regola generale: se misuriamo due correnti sullo stesso terminale, ma con frecce tra loro opposte, otteniamo due valori opposti.

I potenziali di nodo

Potenziali di nodo

Si fissi un nodo arbitrario tra quelli del circuito, che prende il nome di "nodo di riferimento" (nel caso sotto rappresentato, il nodo D, rappresentato con il simbolo in figura 15).



Figura 15: simbolo del nodo di riferimento

Si introducono inoltre tutte le possibili tensioni tra un generico nodo del circuito (escluso quello di riferimento) ed il nodo di riferimento, che prendono il nome di "potenziali di nodo".

Equazioni di Kirchhoff mediante potenziali di nodo

Le equazioni di Kirchhoff mediante potenziali di nodo sono un sottoinsieme delle KVL, che ci permette di esprimere qualunque tensione del circuito come differenza tra potenziali di nodo. Si osserva perciò che esiste un set di grandezze elettriche che ci permette di determinare tutte le altre.

Inoltre tutte le relazioni tra tensioni previste dalle KVL discendono dalle equazioni di Kirchhoff mediante potenziali di nodo.

Per dimostrare quanto detto, consideriamo il circuito in figura 16. Dalle KVL discendono:

- 1) $V_{AC} = E_A - E_C$
- 2) $V_{CB} = E_C - E_B$
- 3) $V_{AB} = E_A - E_B$

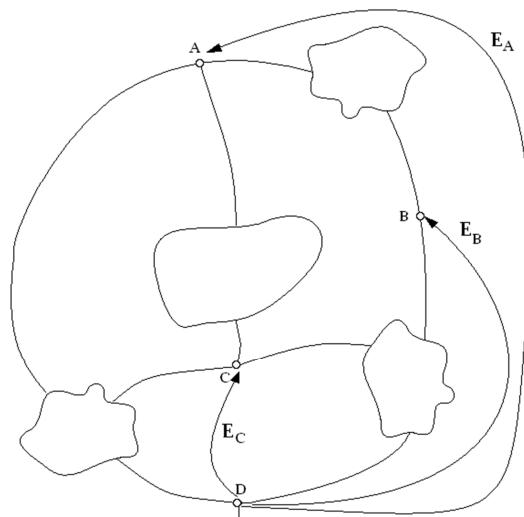


Figura 16: esempio di scelta del nodo di riferimento e fissazione dei potenziali di nodo

Si consideri ora una KVL:

$$V_{AC} + V_{CB} - V_{AB} = 0$$

Possiamo facilmente verificare che tale relazione può anche essere ricavata dalla relazioni 1), 2) e 3), sommando membro a membro la 1) e la 2) e sottraendo la 3):

$$V_{AC} + V_{CB} - V_{AB} = E_A - E_C + E_C - E_B - (E_A - E_B) = 0$$

Allo stesso modo, ogni KVL discende dalle KVL mediante potenziali di nodo.

KCL al nodo e al componente

Introduzione

Nel paragrafo precedente abbiamo individuato un sottoinsieme di KVL dalle quali discendono tutte le altre. Vogliamo a questo punto fare una cosa analoga per le correnti. Per fare ciò, ci occorrerà introdurre due particolari "tipologie" di KCL: le KCL al nodo e al componente.

KCL al nodo

Per ottenere una KCL ad un nodo occorre:

1. Scegliere un nodo del circuito (ad esempio, il nodo A).
2. Considerare una superficie orientata chiusa σ che contenga solo il nodo scelto. Per convenzione, si sceglie solitamente di orientare la superficie verso l'esterno.
3. Scrivere la legge di Kirchhoff delle correnti relativa alla superficie σ considerata.

Quella così ottenuta è la "KCL al nodo A". Naturalmente, potremo scrivere tante KCL ai nodi quanti sono i nodi del circuito in analisi.

KCL al componente

Per ottenere una KCL ad un componente occorre:

1. Scegliere un componente del circuito (ad esempio, il componente C_4 in figura 17).
2. Considerare una superficie orientata chiusa σ che contenga solo il componente scelto. Anche in questo caso, per convenzione, si sceglie solitamente di orientare la superficie verso l'esterno.
3. Scrivere la legge di Kirchhoff delle correnti relativa alla superficie σ considerata.

Abbiamo così ottenuto la "KCL al componente C_4 ". Potremo ripetere questo procedimento per tutti i componenti del circuito. Otterremo così tante KCL ai componenti quanti sono i componenti del circuito analizzato.

Importanza della KCL al nodo e al componente

Si osserva che se si scrivono tutte le KCL ai nodi e ai componenti relative ad un certo circuito si ottiene un insieme di equazioni dalle quali discendono tutte le altre KCL che riguardano il circuito stesso.

Possiamo verificare facilmente quanto appena detto in un caso particolare. Consideriamo il circuito già più volte analizzato, e riportato in figura 17.

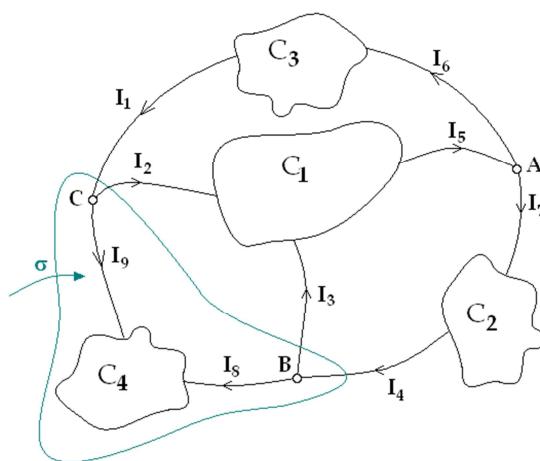


Figura 17: esempio di generica KCL ricavata tramite KCL ai nodi e ai componenti

Se consideriamo superficie σ rappresentata, otteniamo la KCL seguente:

$$I_1 - I_2 - I_3 + I_4 = 0$$

Consideriamo a questo punto le KCL ai nodi e ai componenti contenuti nella superficie σ , e otteniamo le 3 equazioni seguenti:

KCL al nodo B)	$I_3 - I_4 + I_8 = 0$
KCL al nodo C)	$-I_1 + I_2 + I_9 = 0$
KCL al componente C_4)	$-I_8 - I_9 = 0$

Sommando le 3 equazioni otteniamo:

$$-I_1 + I_2 + I_3 - I_4 = 0$$

E, cambiando di segno a tale equazione, otteniamo la KCL cercata, ovvero:

$$I_1 - I_2 - I_3 + I_4 = 0.$$

Minimo numero di KCL dalle quali ricavare tutte le altre KCL del circuito

Come abbiamo già visto, se scriviamo tutte le KCL ai nodi e ai componenti di un circuito, da esse possiamo ricavare tutte le KCL che è possibile scrivere per il circuito in analisi. A questo punto è però opportuno chiedersi se è possibile ridurre ulteriormente tale numero. In altri termini: le equazioni così ottenute, sono tutte linearmente indipendenti? La risposta è no.

Se infatti scriviamo tutte le KCL ai nodi e ai componenti di un circuito, orientando le superfici sempre con verso uscente, ogni corrente appare in due diverse equazioni (un'equazione al nodo e un'equazione al componente), una volta con segno positivo ed una con segno negativo. Sommando membro a membro tutte le equazioni così ottenute si otterrà perciò l'identità $0 = 0$. Come noto dall'Algebra Lineare, ciò implica che le equazioni considerate sono linearmente dipendenti.

È dimostrato che, nell'ipotesi che il circuito sia connesso, e cioè che non sia composto da sottoparti che siano esse stesse circuiti, se si toglie una qualsiasi equazione tra quelle in analisi, si ottiene un insieme di equazioni indipendenti. Nel caso di circuito non connesso, è sufficiente togliere una equazione per ciascun sottocircuito.

In genere l'equazione che viene "scartata" nel caso di circuito connesso è l'equazione al nodo di riferimento scelto per fissare i potenziali di nodo.

Possiamo così concludere che, dato un qualsiasi circuito, è possibile ottenere tutte le Leggi di Kirchhoff che lo riguardano scrivendo:

- Tutte le KVL mediante potenziali di nodo.
- Tutte le KCL ai nodi e ai componenti, escludendo una KCL al nodo o al componente per ciascun sottocircuito.

Potenza assorbita e potenza generata da un componente

Introduzione

Finora abbiamo considerato dei modelli ingegneristici dei circuiti elettrici. Tuttavia è da sottolineare che i circuiti elettrici sono strettamente legati alla fisica, perciò sono legati anche ai concetti di potenza e di energia.

Al fine di introdurre le definizioni di queste grandezze, consideriamo ora un generico circuito e, all'interno di tale circuito, fissiamo l'attenzione su un particolare componente. Negli esempi proposti si farà riferimento ad un tripolo, ma quanto vedremo potrà essere esteso ad un generico n-polo.

Definizione di potenza elettrica assorbita da un componente

Consideriamo un singolo componente. Introduciamo le correnti misurate in ciascuno dei terminali del componente, tutte con verso "entrante nel componente". Fissiamo inoltre un nodo di riferimento qualsiasi e introduciamo i potenziali di nodo relativi a tutti i nodi ai quali sono collegati i terminali del componente.

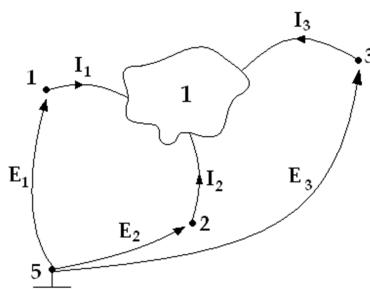


Figura 18: premessa per la definizione di potenza elettrica assorbita

Si dice potenza elettrica assorbita dal componente considerato la somma dei prodotti tra i potenziali di nodo e le corrispondenti correnti.

$$P_a = \sum_i (E_i \cdot I_i)$$

Nel caso della figura 18 avremo perciò: $P_a = E_1 \cdot I_1 + E_2 \cdot I_2 + E_3 \cdot I_3$. Come noto dalla Fisica, l'unità di misura della potenza è il Watt [W].

Definizione di potenza elettrica generata da un componente

Come nel caso precedente, consideriamo un singolo componente, fissiamo un nodo di riferimento qualsiasi e introduciamo i potenziali di nodo relativi a tutti i nodi ai quali sono collegati i terminali del componente. Introduciamo inoltre le correnti misurate su ciascuno dei terminali del componente in analisi, fissandole in questo caso tutte con verso uscente dal componente.

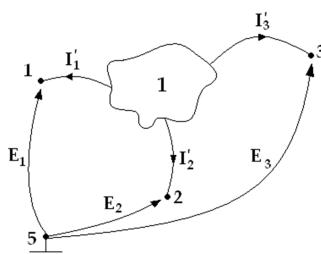


Figura 19: premessa per la definizione di potenza elettrica assorbita

Si dice potenza elettrica generata dal componente considerato la somma dei prodotti tra i potenziali di nodo e le corrispondenti correnti.

$$P_g = \sum_i (E_i \cdot I_i')$$

Nel caso della figura 19 avremo perciò: $P_g = E_1 \cdot I_1' + E_2 \cdot I_2' + E_3 \cdot I_3'$. Anche in questo caso, l'unità di misura è il watt [W].

Relazione tra potenza generata e potenza assorbita

Come abbiamo dimostrato attraverso la KCL applicata ad una superficie che contiene solo una porzione di un terminale, e non contiene né nodi, né componenti, vale, per ogni indice $i = 1, \dots, 3$:

$$I'_i = -I_i$$

Ne consegue che vale, per il componente, la relazione:

$$P_g = -P_a$$

Osservazione sulla terminologia

Spesso vengono utilizzate frasi del tipo "c'è una potenza assorbita" o, viceversa "si ha una potenza generata". Tuttavia, come evidente dalle definizioni appena introdotte, la potenza assorbita e la potenza generata sono numeri reali, che, come tali, possono essere sia positivi, sia negativi. Sarebbe quindi opportuno dire "la potenza assorbita è positiva", anziché "c'è una potenza assorbita".

Indipendenza della potenza dal nodo di riferimento

Nelle definizioni date i potenziali di nodo assumono un peso determinante. Si osserva però che essi dipendono dal nodo di riferimento scelto. Possiamo quindi domandarci: la potenza varia se si cambia il nodo di riferimento scelto? Naturalmente la risposta è no, perché altrimenti le definizioni date sarebbero mal poste. Possiamo ora dimostrarlo, considerando il componente in figura 20.

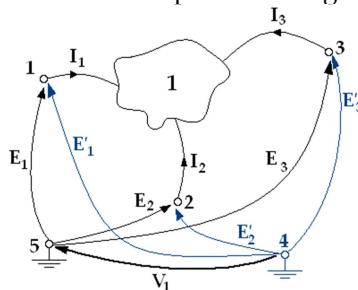


Figura 20: dimostrazione dell'indipendenza della potenza dal nodo di riferimento scelto

Consideriamo dapprima come nodo di riferimento il nodo 5. La potenza assorbita è quindi, da definizione:

$$P_a = E_1 \cdot I_1 + E_2 \cdot I_2 + E_3 \cdot I_3$$

Scegliamo ora come nodo di riferimento il 4 e indichiamo con l'apice i potenziali di nodo riferiti a tale nodo.

Valgono le seguenti relazioni, per la KVL:

$$\begin{aligned} E_1 - E'_1 + V_1 &= 0 & \rightarrow & E'_1 = E_1 + V_1 \\ E_2 - E'_2 + V_1 &= 0 & \rightarrow & E'_2 = E_2 + V_1 \\ E_3 - E'_3 + V_1 &= 0 & \rightarrow & E'_3 = E_3 + V_1 \end{aligned}$$

Se calcoliamo la potenza utilizzando tali potenziali di nodo, abbiamo:

$$\begin{aligned} P'_a &= E'_1 \cdot I_1 + E'_2 \cdot I_2 + E'_3 \cdot I_3 = (E_1 + V_1) \cdot I_1 + (E_2 + V_1) \cdot I_2 + (E_3 + V_1) \cdot I_3 = \\ &= (I_1 + I_2 + I_3)V_1 + E_1 \cdot I_1 + E_2 \cdot I_2 + E_3 \cdot I_3 = E_1 \cdot I_1 + E_2 \cdot I_2 + E_3 \cdot I_3 = P_a \end{aligned}$$

Si osserva che vale la relazione $I_1 + I_2 + I_3 = 0$ in virtù della KCL relativa al componente 1.

Ovviamente una dimostrazione analoga vale anche per la potenza generata.

Bipoli passivi

Un componente nel quale la potenza assorbita può essere positiva o al più nulla (e, viceversa, la potenza generata è non positiva), viene detto passivo.

I bipoli passivi sono caratterizzati da una curva caratteristica interamente appartenente al I-III quadrante del piano cartesiano.

Potenza elettrica assorbita e generata da un bipolo

Calcolo della potenza elettrica assorbita e generata da un bipolo

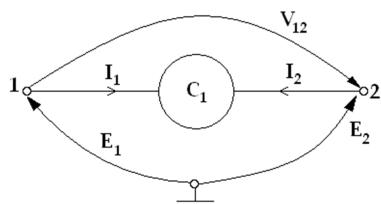


Figura 21: dipolo del quale calcolare la potenza assorbita

Consideriamo un bipolo come quello in figura 21.

Secondo la definizione di potenza assorbita, avremo:

$$P_a = E_1 \cdot I_1 + E_2 \cdot I_2$$

Se scriviamo la KCL al componente 1, abbiamo:

$$-I_1 - I_2 = 0 \rightarrow I_1 = -I_2$$

Sostituendo nella precedente equazione, otteniamo:

$$P_a = E_1 \cdot (-I_2) + E_2 \cdot I_2 = I_2 \cdot (E_2 - E_1)$$

Inoltre, per KVL applicata alla linea chiusa γ che passa per i nodi 1, 2 e per il nodo di massa:

$$V_{12} + E_1 - E_2 = 0 \rightarrow V_{12} = E_1 - E_2$$

Otteniamo così:

$$P_a = I_2 \cdot V_{12}$$

In maniera del tutta analoga, possiamo ripetere questo procedimento cambiando le tensioni e le correnti prese in considerazione. A tale scopo, riassumiamo in figura 22 le possibili correnti e tensioni da indicare sul bipolo in analisi.

Per la KCL relativa al componente 1 abbiamo:

$$I_1 = I_2' = -I_1' = -I_2$$

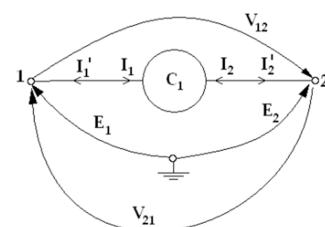


Figura 22: bipolo del quale calcolare la potenza assorbita, con l'indicazione di tutte le correnti e le tensioni

Ovvero: in un bipolo, la corrente entrante in un terminale è uguale alla corrente uscente dall'altro terminale.

Per la KVL abbiamo inoltre:

$$V_{12} = -V_{21}$$

Otterremo così anche le relazioni:

$$P_a = -I_2 \cdot V_{21} = -I_1' \cdot V_{12}$$

$$P_a = I_1' \cdot V_{12} = -I_1 \cdot V_{21}$$

$$P_a = -I_1 \cdot V_{12} = I_1 \cdot V_{21}$$

$$P_a = -I_2' \cdot V_{12} = I_2 \cdot V_{21}$$

Analogamente, otteniamo, per la potenza generata:

$$P_g = -I_2 \cdot V_{12} = I_2 \cdot V_{21}$$

$$P_g = -I_1' \cdot V_{12} = I_1' \cdot V_{21}$$

$$P_g = I_1 \cdot V_{12} = -I_1 \cdot V_{21}$$

$$P_g = I_2' \cdot V_{12} = -I_2' \cdot V_{21}$$

La convenzione degli utilizzatori

Si dice che una corrente ed una tensione relative ad un bipolo sono misurate con la "convenzione degli utilizzatori" se indico la loro misura con frecce aventi versi discordi. In sostanza quindi, per rilevare tali misure, si può fissare una tensione arbitraria. In seguito, si sceglie la corrente in modo tale che la freccia che indichi la corrente misurata sia opposta a quella della tensione.

Naturalmente, le possibilità sono molte: in primo luogo, possiamo orientare come preferiamo la tensione. Una volta fissata la tensione, possiamo poi scegliere se indicare la corrente su un terminale oppure sull'altro: come dimostrato, ciò è ininfluente, perché tali correnti sono sempre uguali per la KCL al componente stesso.

La convenzione dei generatori

Si dice che una corrente ed una tensione relative ad un bipolo sono misurate con la "convenzione dei generatori" se le frecce con cui indico la loro misura hanno versi concordi. In sostanza quindi occorre fissare dapprima una tensione arbitraria. In seguito, si sceglie la corrente in modo che la freccia che indichi la corrente misurata sia dello stesso verso di quella della tensione.

Semplificazione per il calcolo della potenza assorbita e generata da un bipolo

Se si misurano la corrente e la tensione su un bipolo rispettando la convenzione degli utilizzatori, la potenza assorbita dal bipolo stesso è il prodotto tra la corrente e la tensione misurate.

Se si rilevano la corrente e la tensione di un bipolo utilizzando la convenzione dei generatori, la potenza generata dal bipolo in analisi è il prodotto tra la corrente e la tensione misurate.

Si osserva che il nome "convenzione degli utilizzatori" è dovuto al fatto che spesso si misura la potenza assorbita da un utilizzatore, in quanto è positiva, e non la potenza generata, perciò si utilizza su questa tipologia di componenti la convenzione detta appunto "degli utilizzatori". Viceversa, la "convenzione dei generatori" si usa per il calcolo della potenza generata, come dice il nome stesso, viene calcolata soprattutto per i generatori, e da qui deriva il nome della convenzione. Naturalmente però si può calcolare in entrambi i casi sia la potenza assorbita, sia quella generata: cambierà solo il segno.

Equivalenza ed equivalenza topologica tra due circuiti

Definizione di circuiti topologicamente equivalenti

Due circuiti si dicono topologicamente equivalenti se:

1. È possibile associare a ciascun componente del primo circuito uno ed un solo componente del secondo circuito.
2. È possibile associare a ogni nodo del primo circuito uno ed uno solo nodo del secondo circuito.
3. È possibile associare a ciascun terminale di qualsiasi componente del primo circuito uno ed un solo terminale del corrispondente componente dell'altro circuito.
4. Se su un nodo del primo circuito incidono n terminali, sul corrispondente nodo del secondo circuito devono incidere tutti e soli gli n terminali ad essi corrispondenti.

Possiamo comprendere meglio con un esempio questo concetto. Osserviamo la figura 24.

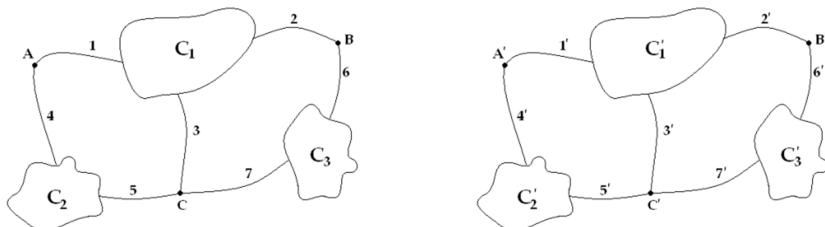


Figura 24: esempio di circuiti topologicamente equivalenti

I due circuiti, che sembrerebbero essere uguali, in realtà potrebbero avere funzionamenti completamente diversi: non sappiamo infatti quali siano i componenti, e potrebbero essere completamente diversi nell'uno e nell'altro circuito.

Significato

Se due circuiti sono topologicamente equivalenti, allora i due circuiti sono governati dalle stesse Leggi di Kirchhoff delle tensioni e delle correnti.

Per verificarlo, è sufficiente dimostrare che le KVL mediante potenziali di nodo, le KCL ai nodi e le KCL ai componenti sono uguali nei due circuiti topologicamente equivalenti, perché tutte le altre KVL e KCL deriveranno da esse.

Possiamo intuire con molta semplicità, a seguito della definizione di circuiti "topologicamente equivalenti", che se fissiamo come nodi di riferimento nei due circuiti due nodi tra loro corrispondenti, otteniamo le stesse KVL mediante potenziali di nodo.

Inoltre, siccome sui nodi corrispondenti incidono i terminali corrispondenti, fissando con lo stesso nome le correnti sui terminali tra i quali viene creata corrispondenza, si ottengono le stesse KCL ai nodi. Un ragionamento analogo può essere effettuato per le KCL ai componenti.

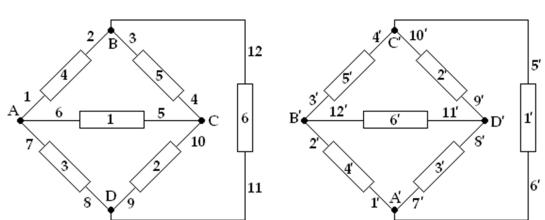


Figura 25: esempio di circuiti topologicamente equivalenti

Possiamo considerare anche un secondo esempio, rappresentato in figura 25. Se associamo al nodo A del primo il circuito il nodo A' del secondo, al terminale 1 nel primo circuito il terminale 1' del secondo, al componente 1 del primo circuito il componente 1' del secondo, e così via, possiamo osservare che tali circuiti sono topologicamente equivalenti.

Circuiti equivalenti

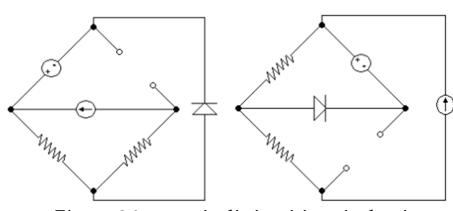


Figura 26: esempio di circuiti equivalenti

Due circuiti si dicono equivalenti se sono topologicamente equivalenti e se i componenti tra loro corrispondenti sono uguali.

Due circuiti equivalenti saranno perciò interessati dalle stesse tensioni e dalle stesse correnti. Due circuiti equivalenti sono indistinguibili ai fini del loro studio.

Da questo consegune che il modello circuitale che abbiamo adottato non fornisce informazioni sulla collocazione fisica nello spazio dei componenti.

Il teorema della conservazione della potenza elettrica (o di Tellegen)

Introduzione

Si dice che "la potenza fluisce in un circuito". Ciò significa che i componenti hanno delle tensioni e delle correnti, le quali danno origine ad una potenza elettrica che si trasmette da un componente all'altro. Ci sono perciò dei componenti che "generano potenza" e altri che "assorbono potenza", ovvero componenti con potenza generata positiva (e potenza assorbita negativa), e altri con potenza assorbita positiva (e potenza generata negativa).

I concetti appena introdotti richiamano ad un concetto di "bilancio". A tal proposito, si osserva che, come in fisica, vale il "principio di conservazione della potenza". In particolare, tale principio prende in Elettrotecnica il nome di "Teorema della conservazione della potenza elettrica".

Il nome di "teorema" è dovuto al fatto che questa relazione è una conseguenza delle leggi di Kirchhoff: esso può essere dimostrato a partire dalla KVL e dalla KCL. Tuttavia, a livello teorico avremmo anche potuto assumere come principi il teorema della conservazione della potenza elettrica e una delle leggi di Kirchhoff e considerare come teorema la restante legge di Kirchhoff.

Enunciato del teorema della conservazione della potenza elettrica

Il teorema della conservazione della potenza elettrica afferma che la somma delle potenze assorbite da ciascun componente di un circuito è sempre uguale a zero.

Naturalmente, da quanto appena detto segue anche che la somma delle potenze generate da ciascun componente di un circuito è sempre uguale a zero.

Il teorema della conservazione della potenza elettrica può anche essere enunciato in maniera leggermente diversa: dato un circuito qualsiasi, la potenza assorbita da un certo numero di componenti del circuito è uguale alla potenza generata dai restanti componenti.

Consideriamo ad esempio il circuito in figura 27.

Valgono, ad esempio, le relazioni:

$$\begin{aligned} P_{a1} + P_{a2} + P_{a3} &= 0 \\ P_{g1} + P_{g2} + P_{g3} &= 0 \\ P_{a1} + P_{a2} - P_{g3} &= 0 \\ P_{g1} - (P_{a2} + P_{a3}) &= 0 \\ P_{a2} - (P_{g1} + P_{g3}) &= 0 \end{aligned}$$

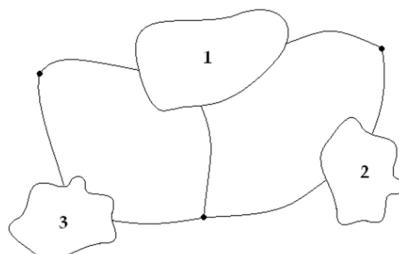


Figura 27: circuito elettrico al quale applicare il teorema di Tellegen

Dimostrazione del teorema della conservazione della potenza elettrica

Dimostreremo ora, sulla base delle leggi di Kirchhoff, il teorema della conservazione della potenza elettrica. Per facilitare tale dimostrazione adotteremo, solo in questo contesto, una particolare notazione per le correnti: indicheremo con I_i^j la corrente uscente dal nodo i -esimo ed entrante nel componente j -esimo.

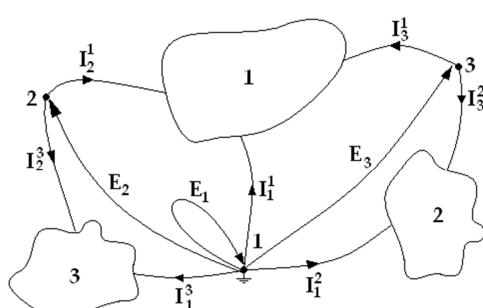


Figura 28: circuito usato nella dimostrazione

Con riferimento al circuito in figura 28, possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} P_{a1} &= E_1 I_1^1 + E_2 I_2^1 + E_3 I_3^1 \\ P_{a2} &= E_1 I_1^2 + E_2 I_2^2 + E_3 I_3^2 \\ P_{a3} &= E_1 I_1^3 + E_2 I_2^3 + E_3 I_3^3 \end{aligned}$$

Si osserva che alcune delle correnti che compaiono nelle formule sopra riportate non compaiono nel circuito, ma possiamo tranquillamente inserirle nella formula, considerandole poi nulle ai fini dei successivi calcoli.

Vogliamo ora dimostrare che la somma delle potenze assorbite è nulla.

Abbiamo:

$$P_{a2} + P_{a2} + P_{a3} = E_1 I_1^2 + E_2 I_2^2 + E_3 I_3^2 + E_1 I_1^2 + E_2 I_2^2 + E_3 I_3^2 + E_1 I_1^3 + E_2 I_2^3 + E_3 I_3^3$$

Ovvero, raccogliendo, ove possibile, i potenziali ai nodo:

$$P_{a2} + P_{a2} + P_{a3} = E_1 (I_1^1 + I_1^2 + I_1^3) + E_2 (I_2^1 + I_2^2 + I_2^3) + E_3 (I_3^1 + I_3^2 + I_3^3)$$

Ma, rispettivamente, le KCL ai nodi 1, 2 e 3 sono: $I_1^1 + I_1^2 + I_1^3 = 0$, $I_2^1 + I_2^2 + I_2^3 = 0$ e $I_3^1 + I_3^2 + I_3^3 = 0$. Ne consegue, in conclusione, che vale: $P_{a2} + P_{a2} + P_{a3} = 0$.

Osservazione

L'enunciato del teorema della conservazione della potenza elettrica è in realtà più generale rispetto a quello che abbiamo prima riportato. Tuttavia, il Teorema verrà nel seguito utilizzato solo nella forma già vista. Per completezza, vediamo però anche l'enunciato completo del Teorema. Prima però è opportuno dare la definizione di potenza virtuale.

La potenza virtuale

Consideriamo due circuiti topologicamente equivalenti, come quelli in figura.

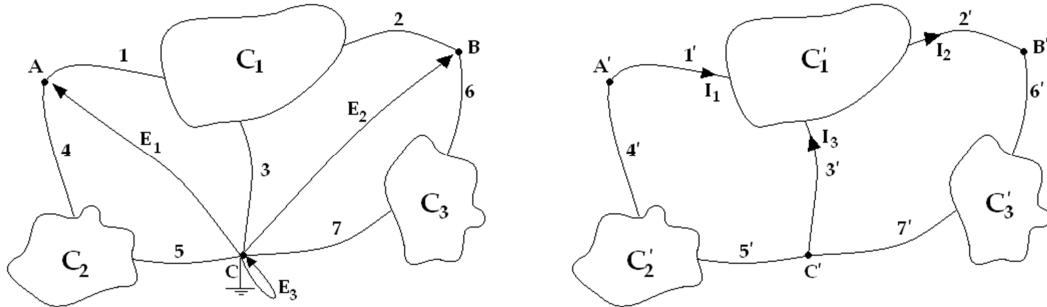


Figura 29: calcolo della potenza virtuale

Fissiamo come nodi di riferimento nei due circuiti due nodi tra loro corrispondenti nell'equivalenza topologica. Introduciamo quindi nel primo dei due circuiti i potenziali di nodo. Calcoliamo poi, nel secondo circuito, tutte le correnti entranti nei vari componenti.

Si dice **potenza virtuale assorbita** da una coppia di componenti C e C' , l'uno appartenente al primo circuito, l'altro appartenente al secondo, la somma dei prodotti tra i potenziali di nodo relativi ai nodi collegati ai terminali di C , e le relative correnti entranti nel componente C' .

Analogamente è possibile introdurre la definizione di **potenza virtuale generata** da una coppia di componenti, considerando le correnti uscenti da C' anziché quelle entranti in C' .

Ad esempio:

$$P_{a1} = E_1 I_1 - E_2 I_2 + E_3 I_3$$

L'enunciato completo del teorema della conservazione della potenza elettrica

Dati due circuiti elettrici topologicamente equivalenti, la somma delle potenze virtuali assorbite da tutte le coppie di componenti corrispondenti (appartenenti l'uno al primo circuito e l'altro al secondo), è sempre nulla.

Inoltre: dati due circuiti elettrici topologicamente equivalenti, la somma delle potenze virtuali generate da tutte le coppie di componenti corrispondenti, è sempre nulla. Oppure ancora: dati due circuiti elettrici topologicamente equivalenti, la somma delle potenze virtuali assorbite da un certo gruppo di coppie di componenti tra loro corrispondenti è sempre uguale alla somma delle potenze virtuali generate dalle restanti coppie di componenti corrispondenti.

2. Bipoli adinamici

I componenti

Introduzione

Iniziamo ora a descrivere le principali tipologie di componenti. Prima di fare questo però occorre fare un'importante osservazione riguardante il concetto di componente.

I componenti compositi

La definizione che abbiamo dato di componente è di fatto molto vaga. Da ciò consegue che il concetto di componente risulta in realtà molto generale. Diviene così possibile introdurre un nuovo concetto, ovvero quello di "componente composito".

Consideriamo un generico circuito e prendiamo poi una superficie chiusa che contenga un certo numero di componenti e simile a quelle utilizzate per la definizione di KCL. Se supponiamo di non essere più in grado di riconoscere ciò che c'è all'interno della superficie, possiamo considerare la superficie stessa, con il suo contenuto, come un nuovo ed unico componente composito, dotato di tanti terminali quanti sono quelli tagliati dalla superficie in analisi.

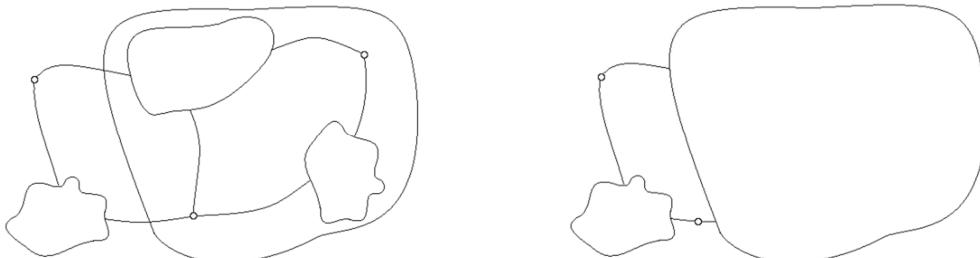


Figura 30: componenti composti

Viceversa, è anche possibile considerare un componente ed immaginarlo come se fosse costituito da più componenti: di fatto ciò equivale a ripetere il procedimento che abbiamo appena descritto, ma in direzione opposta.

In conclusione, non necessariamente ad un componente nel nostro modello circuitale corrisponde un solo componente fisico.

I bipoli resistivi (o adinamici)

Descrizione

Come dice il nome stesso, i bipoli resistivi o adinamici sono dei componenti a due terminali. Il termine "resistivi" ci indica invece che tali bipoli intervengono nel funzionamento del circuito imponendo una relazione definita tra la corrente e la tensione, del tipo:

$$f(V_1, I_1) = 0$$

In altri termini, è possibile tracciare un grafico corrente-tensione (o, viceversa, tensione-corrente), rappresentato dalla linea d'equazione $f(V_1, I_1) = 0$. Questa linea è detta "*linea caratteristica*" del componente.

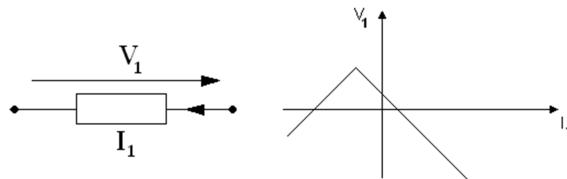


Figura 31: generico bipolo resistivo

Principali bipoli resistivi

Vedremo ora i seguenti bipoli resistivi:

1. Resistori (lineari).
2. Generatori indipendenti di tensione e di corrente.
3. Diodi (ideali).

Resistori (lineari)

Definizione

Si dice resistore un bipolo resistivo avente come relazione costitutiva tra la tensione e la corrente un'equazione di tipo lineare:

$$V = RI \quad (\text{legge di Ohm})$$

Oppure:

$$I = GV$$

Il resistore è molto frequentemente utilizzato, tanto che il nome della categoria dei bipoli resistivi è dovuto proprio al nome di questo specifico componente ad essa appartenente.

Simbolo e curva caratteristica

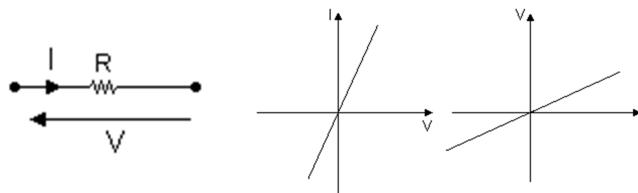


Figura 32: simbolo del resistore e relativa curva caratteristica

Nota: si osserva che le curve caratteristiche indicate, così come le relazioni $V = RI$ e $I = GV$, valgono solo se corrente e tensione vengono rilevate secondo la convenzione degli utilizzatori. Utilizzando invece la convenzione dei generatori e indicando con V' e I' le grandezze così rilevate, dovremmo scrivere $V' = -RI'$ e $I' = -GV'$.

Resistenza e conduttanza

Il coefficiente angolare R è detto "*resistenza*", o "*resistenza elettrica*", ed ha come unità di misura l'*Ohm* [$\Omega = V/A$]. Il coefficiente G è invece detto "*conduttanza*". Come è evidente, la conduttanza è il reciproco della resistenza:

$$G = \frac{1}{R}$$

Nel Sistema Internazionale, la conduttanza ha come unità di misura il Siemens [$S = A/V = \Omega^{-1}$].

Per individuare completamente la linea caratteristica di un conduttore, è sufficiente indicare uno dei due parametri R oppure G .

Cortocircuito (c.c.)

Un cortocircuito è un resistore avente resistenza nulla $R = 0 \Omega$. Nel caso del cortocircuito, non è possibile definire la conduttanza G . Ai capi di un cortocircuito, qualunque sia il valore di una corrente, si ha sempre una tensione nulla.

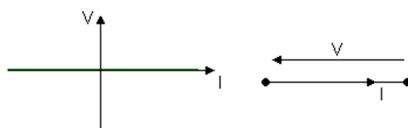


Figura 33: curva caratteristica e simbolo del cortocircuito

Circuito aperto (c.a.)

Un circuito aperto è un resistore avente conduttanza nulla $G = 0 S$. In un circuito aperto, non è possibile definire la resistenza R . La corrente in un circuito aperto è sempre nulla, qualunque sia il valore di tensione.

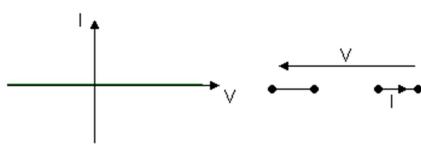


Figura 34: curva caratteristica e simbolo del circuito aperto

Il resistore, bipolo simmetrico

Si dice che il resistore è un bipolo simmetrico perché se si scambiano i due terminali del resistore stesso, il comportamento del componente all'interno del circuito risulta inalterato. Non si ha perciò distinzione, ai fini del funzionamento, tra un terminale e l'altro.

Generatori indipendenti

Generatori indipendenti di tensione

I generatori indipendenti di tensione sono bipoli resistivi governati da un'equazione del tipo

$$V = E$$

I generatori indipendenti di tensione perciò fissano la tensione ad un certo valore E , misurato in Volt.

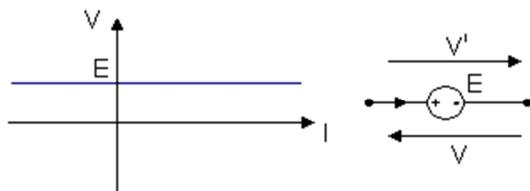


Figura 35: curva caratteristica e simbolo del generatore indipendente di tensione

Il generatore indipendente di tensione, a differenza del resistore, non è un componente simmetrico: se si scambiano tra loro i due terminali del componente, il generatore indipendente di tensione ha effetti diversi sul circuito.

Si osserva che la caratteristica sopra riportata è effettivamente corretta solo se la freccia della tensione è rivolta verso il + del generatore. Altrimenti il grafico dovrebbe essere il simmetrico a quello sopra riportato rispetto all'asse delle correnti (ovvero $V = -E$).

Si osserva inoltre che E può essere sia un valore positivo, sia un valore negativo.

Generatori indipendenti di corrente

I generatori indipendenti di corrente sono bipoli resistivi governati da un'equazione del tipo

$$I = A$$

I generatori indipendenti di corrente dunque fissano la corrente ad un certo valore A .

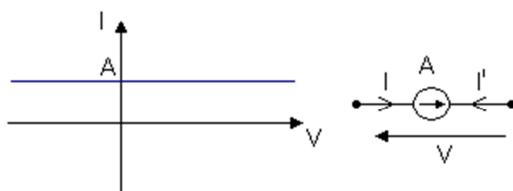


Figura 36: curva caratteristica e simbolo del generatore indipendente di corrente

Anche il generatore indipendente di corrente non è un componente simmetrico.

Perché la caratteristica sopra riportata sia effettivamente corretta è necessario che la freccia della corrente abbia verso concorde con quella riportata all'interno del simbolo del componente stesso. Altrimenti il grafico dovrebbe essere il simmetrico a quello sopra riportato rispetto all'asse delle tensioni (ovvero $I' = -A$).

Cortocircuito e circuito aperto

Gli unici casi in cui i generatori indipendenti risultano essere simmetrici si hanno:

- Per i generatori di tensione, quando $E = 0$. In tal caso la curva caratteristica del generatore coincide con quella del cortocircuito: di fatto si tratta appunto di un cortocircuito. Si osserva infatti che si ha una tensione nulla fissa, quindi la curva coincide con l'asse delle correnti, come visto per il cortocircuito.
- Per i generatori di corrente, quando $A = 0$. Il componente risulta perciò essere un circuito aperto. Si osserva infatti che si ha una corrente nulla fissa, quindi la curva coincide con l'asse delle tensioni, come visto per il circuito aperto.

Bipoli affini e lineari

Sia i resistori, sia i generatori indipendenti risultano essere dei "*bipoli affini*". Infatti vengono definiti "affini" tutti i bipoli la cui linea caratteristica è rettilinea. Si osserva che la distinzione tra i resistori e i generatori indipendenti è che la caratteristica dei resistori è una retta passante per l'origine (sono infatti caratterizzati da un'equazione lineare), mentre quella dei generatori indipendenti (salvo i casi particolari visti sopra) non passa per l'origine.

Un bipolo affine la cui linea caratteristica passa per l'origine è in particolare un *bipolo lineare*.

Diodo (ideale)

Caratteristiche del diodo

Il diodo è un bipolo resistivo nel quale la relazione tra tensione e corrente (a patto che vengano indicate come in figura) è la seguente:

$$\begin{aligned} \text{Se } V \leq 0 &\rightarrow I = 0; \\ \text{Se } I \geq 0 &\rightarrow V = 0. \end{aligned}$$

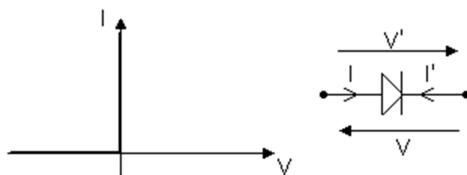


Figura 37: curva caratteristica e simbolo del diodo (ideale)

Si osserva che nella realtà la curva caratteristica di un diodo risulta diversa da quella riportata. La curva rappresentata nel grafico è un'approssimazione di quella che realmente si ha. Ciò è dovuto al fatto che noi consideriamo dei diodi ideali, e non reali.

Se scambiamo l'asse delle ascisse con l'asse delle ordinate o invertiamo le frecce con cui misuriamo la corrente e la tensione, il grafico non sarà più valido, e, più precisamente, avremo i seguenti casi:

- Se invertiamo la tensione, il grafico ottenuto sarà il simmetrico del grafico sopra riportato rispetto all'asse delle correnti.
- Se invertiamo la corrente, il grafico ottenuto sarà il simmetrico del grafico sopra riportato rispetto all'asse delle tensioni.
- Se invertiamo sia la tensione, sia la corrente, il grafico ottenuto sarà il simmetrico del grafico sopra riportato rispetto all'origine.
- Se scambiamo gli assi, il grafico ottenuto sarà il simmetrico del grafico sopra riportato rispetto alla bisettrice del I e III quadrante.

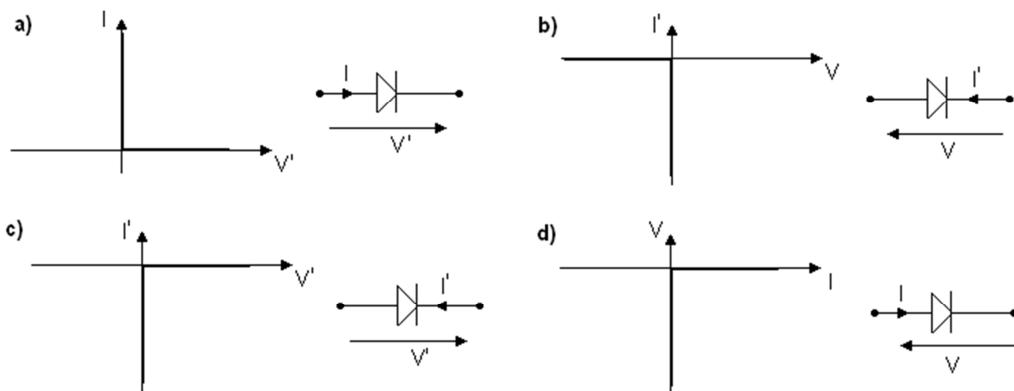


Figura 38: varianti della curva caratteristica del diodo in base alle indicazioni di I e di V

Cortocircuito e circuito aperto

Introduzione di cortocircuiti e circuiti aperti in un circuito

Abbiamo già definito i componenti "cortocircuito" e "circuito aperto". Vogliamo ora analizzare la loro influenza in un circuito.

Se consideriamo un qualsiasi circuito, è possibile introdurre un numero qualunque di cortocircuiti e/o circuiti aperti, lasciando inalterate tutte le leggi del circuito. In altri termini, è possibile introdurre cortocircuiti e circuiti aperti lasciando inalterato il funzionamento del circuito.

Affinché ciò accada è necessario che i circuiti aperti vengano inseriti nel circuito seguendo le stesse regole di inserzione che valgono per il voltmetro.

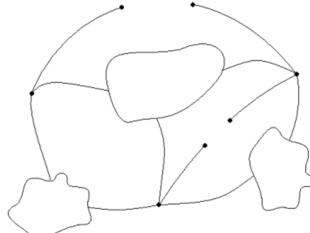


Figura 39: inserzione di due circuiti aperti (il circuito di riferimento è lo stesso degli esercizi precedenti)

Si osserva infatti che:

1. Le KVL mediante potenziali di nodo risulteranno essere le stesse, perché i nodi sono gli stessi.
2. Le KCL ai componenti preesistenti saranno invariate.
3. Le KCL ai nodi ai quali non sono collegati i terminali dei circuiti aperti inseriti risultano invariate.
4. Le KCL ai nodi ai quali sono collegati i terminali dei circuiti aperti inseriti presenteranno un termine in più, rappresentato dalla corrente relativa al terminale del circuito aperto. Tale corrente però è nulla, perciò ci si riconduce ancora alle KCL ai nodi che si avevano prima di inserire i circuiti aperti.

Siccome le Leggi di Kirchhoff sono le stesse e i componenti sono gli stessi, il circuito che si ottiene inserendo un numero arbitrario di circuiti aperti è equivalente se la regola di inserzione utilizzata è la stessa del voltmetro.

Se si vogliono inserire dei cortocircuiti senza alterare il funzionamento del circuito, occorre invece seguire le regole di inserzione relative all'ampermetro.

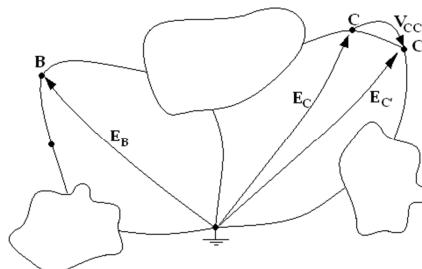


Figura 40: inserzione di due cortocircuiti (il circuito di riferimento è lo stesso degli esercizi precedenti)

Si osserva infatti che:

1. Le KVL mediante potenziali di nodo risulteranno essere le stesse. Consideriamo ad esempio l'inserzione del cortocircuito CC'. Nel circuito originario abbiamo $V_{CB} = E_B - E_C$. Nel nostro circuito abbiamo invece: $V_{CB} = E_B - E_C; V_{CC'} = E_C - E_C; V_{CC'} = 0$ (perché è un cortocircuito). Da queste relazioni ricaviamo: $V_{CB} = E_B - E_C = V_{CB}$.
2. Le KCL ai componenti sono le stesse, perché i componenti sono gli stessi.
3. Le KCL ai nodi in cui non incidono i terminali del cortocircuito sono invariate.
4. La KCL al nodo C non è la stessa. Tuttavia, scrivendo la KCL al componente cortocircuito si ottiene l'equazione corrispondente alla KCL (relativa al circuito iniziale) al nodo sul quale è stato inserito il cortocircuito.

Siccome le Leggi di Kirchhoff sono le stesse e i componenti sono gli stessi, il circuito che si ottiene inserendo un numero arbitrario di cortocircuiti è equivalente se la regola di inserzione utilizzata è la stessa dell'ampermetro.

Il metodo della caratteristica

Il metodo della caratteristica ci consente di risolvere circuiti composti da bipoli adinamici connessi tra loro in modo tale che i componenti siano tra loro collegati in una combinazione di connessioni serie e/o parallelo.

Definizione di circuito elementare

Si dice "circuito elementare" il più semplice circuito che abbia un senso considerare. Tale circuito è costituito da 2 bipoli resistivi collegati come in figura.

Il circuito elementare in figura mostra due componenti C_1 e C_2 che sono sia in parallelo sia in serie.

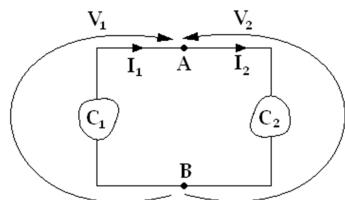


Figura 41: circuito elementare

Risoluzione di un circuito elementare

I dati del problema

Se vogliamo risolvere il circuito dato, naturalmente, dovremo conoscere come dati del problema le linee caratteristiche dei due componenti che costituiscono il circuito stesso. Potremo avere, ad esempio:

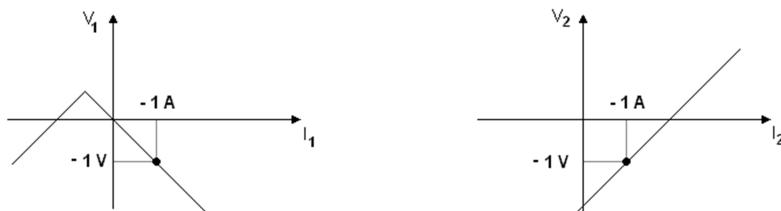


Figura 42: esempio di curve caratteristiche dei bipoli del circuito elementare

Utilizzo delle Leggi di Kircchhoff

La domanda che ci vogliamo porre è: possiamo, con questi dati, individuare tutte le tensioni e le correnti del circuito? La risposta è sì, perché, attraverso le leggi di Kirchhoff ricaviamo:

1. Dalla KCL al nodo A: $-I_1 + I_2 = 0$

Ricaviamo perciò la relazione: $I_1 = I_2$

2. Dalla KVL: $V_1 - V_2 = 0$

Ricaviamo perciò la relazione: $V_1 = V_2$

Possiamo perciò attribuire alle correnti e alle tensioni un unico simbolo:

$$I_1 = I_2 = I_3$$

$$V_1 = V_2 = V_3$$

Individuazione del punto di lavoro

Possiamo così pensare di sovrapporre le due linee caratteristiche dei componenti dati. Esse si intersecheranno in un punto Q, che chiameremo "*punto di lavoro*".

La corrente e la tensione che corrispondono a tale punto saranno, rispettivamente, i valori di V_3 e di I_3 .

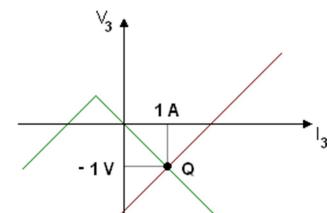


Figura 43: esempio di individuazione del punto di lavoro

In tal modo abbiamo determinato un metodo risolutivo applicabile per qualsiasi circuito elementare.

Osservazioni

Se anziché indicare le correnti come in figura 41 le avessimo, ad esempio, rappresentate con frecce discordi, avremmo dovuto prima di tutto ricondurci al caso analizzato, e solo in seguito avremmo dovuto procedere individuando l'intersezione tra le due curve caratteristiche.

Definizioni di bipoli in serie e in parallelo

Bipoli in parallelo

Due bipoli sono in parallelo se, in virtù della KVL, ai loro capi si misura la stessa tensione.

Bipoli in serie

Due bipoli sono in serie se, in virtù della KCL, sono attraversati dalla stessa corrente.

Esempio

Consideriamo il circuito in figura 44. Scrivendo la KCL alla superficie σ possiamo semplicemente dimostrare che i componenti 3 e 4 sono in serie ($I_3 = I_4$). Scrivendo invece la KVL alla linea γ otteniamo che i componenti 5 e 8 sono in parallelo ($V_5 = V_8$).

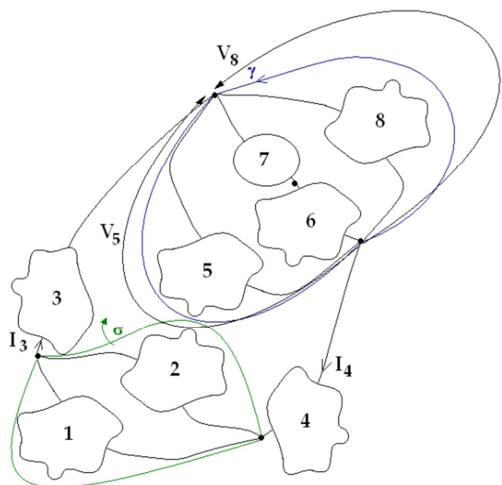


Figura 44: circuito di esempio contenente bipoli in serie e in parallelo

Bipoli in serie

Trasformazione serie

Consideriamo due bipoli resistivi in un circuito, connessi tra loro in serie come in figura 45. Possiamo semplificare questi due bipoli sostituendo ad essi un nuovo componente composito, che possiamo chiamare C_3 , che abbia un comportamento equivalente ai due che va a sostituire. Per ottenere tale componente (trasformazione serie) possiamo considerare una superficie che contenga solamente i due componenti in serie.

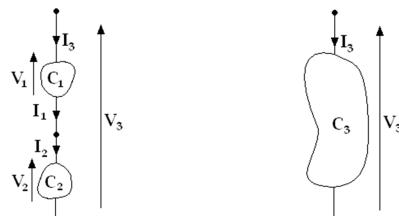


Figura 45: trasformazione serie

Per la KCL, abbiamo:

$$I_1 = I_2 = I_3$$

Per la KVL, abbiamo:

$$V_1 + V_2 = V_3$$

Il componente equivalente ai due bipoli resistivi in serie è dunque un terzo bipolo resistivo, nel quale la tensione è data dalla somma dei valori delle tensioni ai capi dei due bipoli di partenza, a parità di corrente.

Se vogliamo ottenere la caratteristica del componente C_3 dobbiamo eseguire quindi un'operazione di somma, che possiamo meglio rappresentare con l'esempio in figura 46.

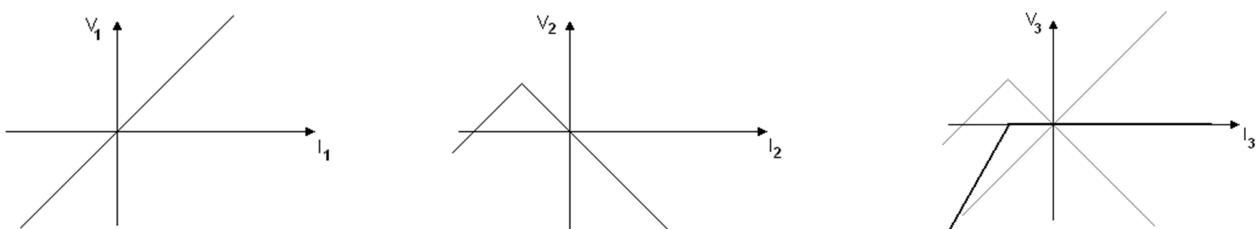


Figura 46: caratteristica del componente equivalente serie

Utilità della trasformazione serie

Per risolvere con maggiore facilità un circuito è talvolta possibile considerarlo come la connessione di un resistore e un bipolo complementare, ossia una parte di circuito risolvibile in una componente composita a due poli.

Questa procedura ci permette di semplificare circuiti complessi, riconducendoli ad un circuito elementare, per il quale conosciamo un metodo risolutivo.

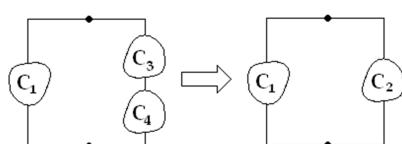


Figura 47: trasformazione serie per la riduzione di un circuito al circuito elementare

Bipoli in parallelo

Trasformazione parallelo

Consideriamo ora due bipoli resistivi connessi tra loro in parallelo, come in figura 48, ed inseriti in un circuito. Anche in questo caso possiamo considerare i due componenti come un unico componente composito C_3 . Per farlo (trasformazione parallelo) occorre però per prima cosa introdurre due cortocircuiti, come messo in evidenza nella figura.

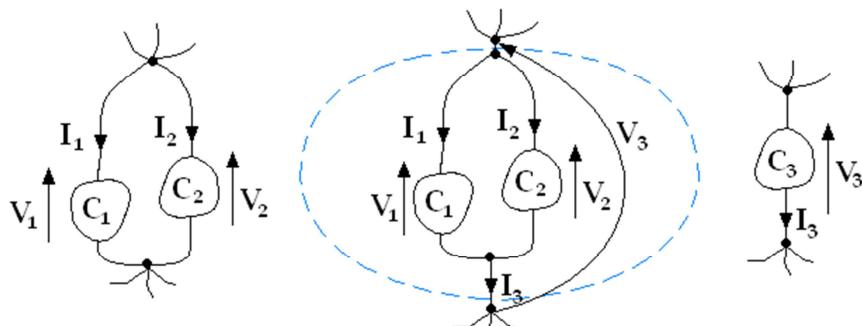


Figura 48: trasformazione parallelo

L'introduzione dei due cortocircuiti è indispensabile, perché altrimenti non potremmo individuare alcuna superficie chiusa contenente entrambi i componenti che ci consenta di ottenere un componente equivalente con due soli terminali. In tal modo invece, se consideriamo una superficie contenente solo i due componenti e i due nodi aggiuntivi inseriti, possiamo ottenere un come circuito equivalente un bipolo C_3 , come in figura 48.

Per la KCL, abbiamo: $I_1 + I_2 = I_3$

Per la KVL, abbiamo: $V_1 = V_2 = V_3$

Il componente equivalente ai due bipoli resistivi in parallelo è dunque un terzo bipolo resistivo, nel quale la corrente è data dalla somma dei valori delle correnti nei dei due bipoli di partenza, a parità di tensione.

In maniera analoga a quanto visto per la trasformazione serie, se vogliamo ottenere la caratteristica del componente C_3 dobbiamo eseguire quindi un'operazione di somma, che possiamo meglio rappresentare con l'esempio in figura 49.

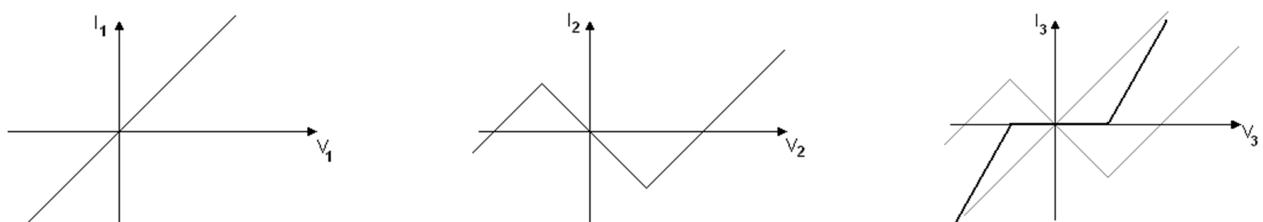


Figura 49: caratteristica del componente equivalente parallelo

Utilità della trasformazione parallelo

Come visto per la trasformazione serie, attraverso la trasformazione parallelo possiamo semplificare dei circuiti per ricondurli al circuito elementare, in modo tale da essere in grado di risolverli. Naturalmente, è possibile combinare le due trasformazioni, in modo da semplificare circuiti anche molto complessi.

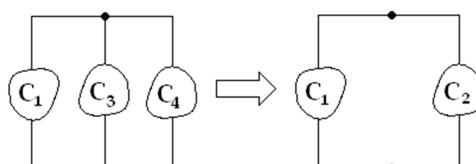


Figura 50: trasformazione parallelo per la riduzione di un circuito elementare

Serie e parallelo di bipoli affini

Resistori in serie

Consideriamo due resistori in serie, come in figura. Le loro curve caratteristiche saranno quelle rappresentate in figura 51. Seguendo il procedimento descritto al paragrafo precedente otteniamo che la curva caratteristica della trasformazione serie dei due resistori è la curva caratteristica di un terzo resistore, che ha però come "coefficiente angolare" la somma dei "coefficienti angolari" delle due caratteristiche di partenza. In altri termini, è un resistore la cui resistenza è la somma delle resistenze dei resistori dati.

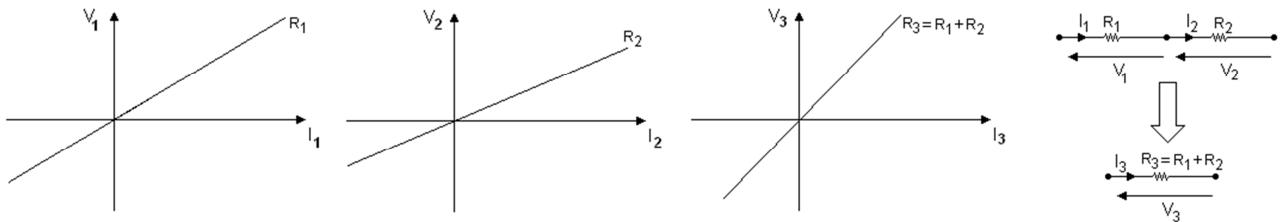


Figura 51: equivalente serie di due resistori

I passaggi algebrici che ci portano a tale conclusione sono i seguenti:

$$\text{Legge di Ohm per il resistore } R_1: \quad V_1 = I_1 R_1$$

$$\text{Legge di Ohm per il resistore } R_2: \quad V_2 = I_2 R_2$$

Siccome i resistori sono in serie:

$$I_1 = I_2 = I_3$$

$$V_3 = V_1 + V_2 = I_1 R_1 + I_2 R_2 = I_3 R_1 + I_3 R_2 = I_3 (R_1 + R_2)$$

In termini di conduttanze:

$$V_3 = I_3 (G_1 + G_2 / G_1 G_2)$$

Osservazione: se uno dei due resistori è un cortocircuito (resistenza nulla), allora l'equivalente serie dei due resistori è il secondo dei resistori dati (ovvero, quello che non è un cortocircuito).

Resistori in parallelo

Consideriamo due resistori in parallelo, come in figura. Le loro curve caratteristiche saranno quelle rappresentate in figura 52 (in questo caso abbiamo rappresentato sull'asse delle ascisse le tensioni, e non le correnti). Seguendo anche in questo caso il procedimento descritto al paragrafo precedente otteniamo che la curva caratteristica della trasformazione parallelo dei due resistori è la curva caratteristica di un terzo resistore, che ha però come "coefficiente angolare" la somma dei "coefficienti angolari" delle due caratteristiche di partenza. In altri termini, è un resistore la cui conduttanza è la somma delle conduttanze dei resistori dati.

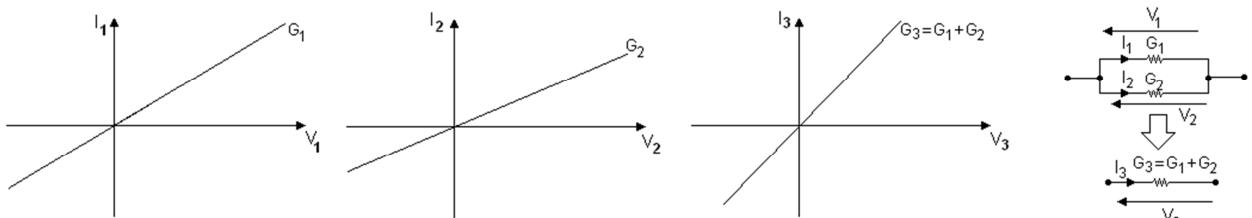


Figura 52: equivalente parallelo di due resistori

I passaggi algebrici che ci portano a tale conclusione sono i seguenti:

$$\text{Legge di Ohm per il resistore } R_1: \quad I_1 = V_1 G_1$$

$$\text{Legge di Ohm per il resistore } R_2: \quad I_2 = V_2 G_2$$

Siccome i resistori sono in parallelo:

$$V_1 = V_2 = V_3$$

$$I_3 = I_1 + I_2 = V_1 G_1 + V_2 G_2 = V_3 G_1 + V_3 G_2 = V_3 (G_1 + G_2)$$

In termini di resistenze:

$$I_3 = V_3 (R_1 + R_2 / R_1 R_2)$$

La resistenza dell'equivalente parallelo sarà perciò:

$$R_3 = \frac{1}{G_3} = \frac{1}{G_1 + G_2} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Osservazione: se uno dei due resistori è un circuito aperto (conduttanza nulla), allora l'equivalente parallelo dei due resistori è il secondo dei resistori dati (ovvero, quello che non è un circuito aperto).

Generatori indipendenti di tensione in serie

Consideriamo a questo punto due generatori di tensione in serie, come in figura 53.

Siccome sono generatori indipendenti di tensione: $V_1 = E_1$

$$V_2 = E_2$$

Siccome i generatori sono in serie: $I_1 = I_2 = I_3$

$$V_3 = V_1 + V_2 = E_1 + E_2$$

Perciò, l'equivalente serie di due generatori indipendenti di tensione E_1 ed E_2 è un generatore indipendente di tensione che forza la tensione ad un valore pari alla somma tra E_1 ed E_2 .

Si osserva che questo vale se i generatori sono collegati con i versi concordi. Se i due generatori fossero rivolti con versi tra loro opposti (fig. 53 b), la trasformazione serie dei due generatori di tensione sarebbe un generatore di tensione che forza il valore di V alla differenza tra E_1 ed E_2 , perché in tal caso avremmo:

$$V_3 = V_1 + V_2 = E_1 + (-E_2) = E_1 - E_2$$

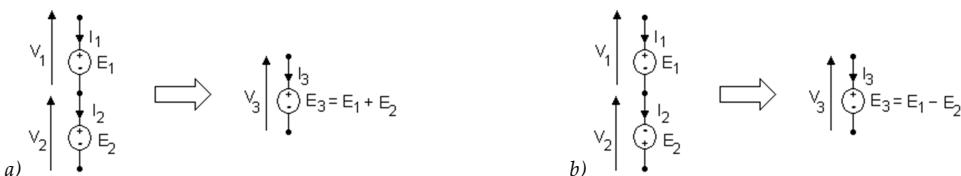


Figura 53: equivalente serie di due generatori indipendenti di tensione

Generatori indipendenti di tensione in parallelo

Proviamo ora a considerare due generatori di tensione collegati tra loro in parallelo.

Avremmo:

Siccome sono generatori indip. di tensione: $V_1 = E_1$

$$V_2 = E_2$$

Siccome i generatori sono in parallelo: $I_3 = I_1 + I_2$

$$V_3 = V_1 = V_2 = E_1 = E_2$$

???

Figura 54: generatori indipendenti di tensione in parallelo

Tale operazione non ha senso! In generale, le tensioni di uscita dei due generatori non saranno uguali. Si ha perciò una contraddizione. Questo modello infatti non è in grado di rappresentare ciò che succederebbe nella realtà connettendo i due generatori in parallelo, come in figura 54.

Parallelo tra un generatore indipendente di tensione ed un componente di altro tipo

Se consideriamo il parallelo tra un generatore di tensione ed un generico bipolo, purché esso non sia un generatore indipendente di tensione, avremo:

$$V_3 = V_2 = V_1 = E_1$$

Il parallelo di un generatore di tensione e un altro generico componente ha senso solo se tale componente ha almeno un punto della linea caratteristica in corrispondenza della tensione forzata dal generatore di tensione.

Perciò il parallelo di un generatore di tensione con un bipolo che non sia un generatore indipendente di tensione è un generatore di tensione che eroga la stessa tensione del generatore dato. Ma attenzione! La corrente che attraversa tale componente è diversa da quella che attraversa il generatore E_1 , e più precisamente vale la relazione:

$$I_3 = I_1 + I_2.$$

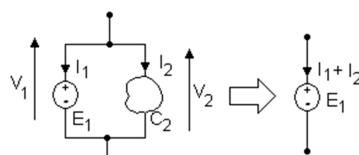


Figura 55: parallelo tra un generatore di tensione ed un diverso componente

Generatori indipendenti di corrente in serie

Come nel caso di generatori indipendenti di corrente in parallelo, questo collegamento non può nella realtà esser costituito, perché si avrebbe:

Relazioni costitutive dei generatori di corrente:

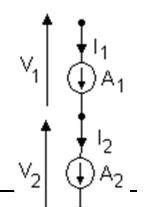
$$I_1 = A_1$$

$$I_2 = A_2$$

Siccome i generatori sono in serie:

$$I_3 = I_1 = I_2 = A_1 = A_2 \quad ???$$

$$V_3 = V_1 + V_2$$



Ma, naturalmente, ciò non ha senso.

Figura 56: equivalente di due generatori indipendenti di corrente in serie

Generatori indipendenti di corrente in parallelo

Passiamo ora ad analizzare due generatori indipendenti di corrente collegati in parallelo (fig. 58).

Siccome sono generatori indipendenti di corrente:

$$I_1 = A_1$$

$$I_2 = A_2$$

Siccome i generatori sono in parallelo:

$$I_3 = I_1 + I_2 = A_1 + A_2$$

$$V_3 = V_1 = V_2$$

Perciò, l'equivalente parallelo di due generatori indipendenti di corrente A_1 ed A_2 è un generatore indipendente di corrente $A_1 + A_2$.

Anche in questo caso, se i versi fossero opposti dovremmo eseguire in realtà la differenza.

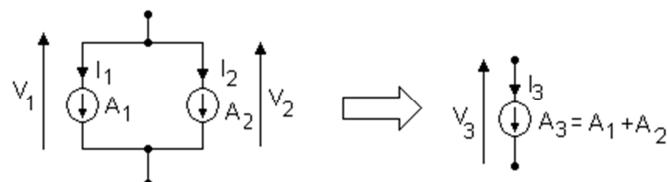


Figura 58: equivalente di due generatori indipendenti di corrente in parallelo

Serie tra un generatore indipendente di corrente ed un diverso componente

Se consideriamo la serie tra un generatore di corrente ed un generico bipolo, purché esso non sia un generatore indipendente di corrente, avremo:

$$I_3 = I_2 = I_1 = A_1$$

La serie di un generatore di corrente e un altro generico componente ha senso solo se tale componente ha almeno un punto della linea caratteristica in corrispondenza della corrente forzata dal generatore di corrente.

Perciò la serie di un generatore di corrente con un bipolo che non sia un generatore indipendente di corrente è un generatore di corrente con la stessa corrente del generatore dato. Anche in questo caso però bisogna prestare attenzione: la tensione ai capi di tale componente è diversa da quella del generatore A_1 , e più precisamente vale la relazione:

$$A_3 = A_1 + A_2$$

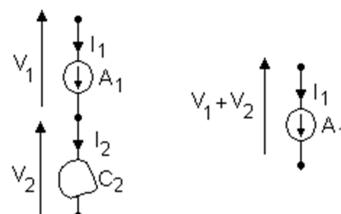


Figura 57: serie tra un generatore di corrente ed un diverso componente

Bipoli affini visti come componenti composti

Equivalenza con la serie tra un resistore ed un generatore indipendente di tensione

Consideriamo ora un generico bipolo affine C_3 , come in figura. Essendo un bipolo affine, esso avrà una relazione costitutiva del tipo:

$$V_3 = E_2 + R_1 I_1$$

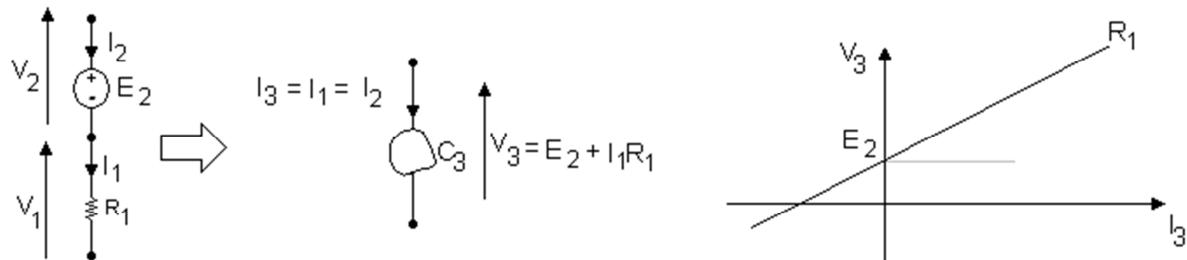


Figura 59: bipolo affine come serie tra un resistore ed un generatore indipendente di tensione

La sua linea caratteristica è dunque la stessa che si ottiene dalla serie di un generatore di tensione E_2 con un resistore di resistenza R_1 .

Di conseguenza, se abbiamo un bipolo affine, possiamo sempre sostituirlo con la serie di due componenti noti: un resistore ed un generatore indipendente di tensione, tra loro in serie.

Equivalenza con il parallelo tra un resistore ed un generatore indipendente di corrente

Osserviamo che è possibile anche rappresentare la curva caratteristica di figura 59 come in figura 60, semplicemente scambiando gli assi.

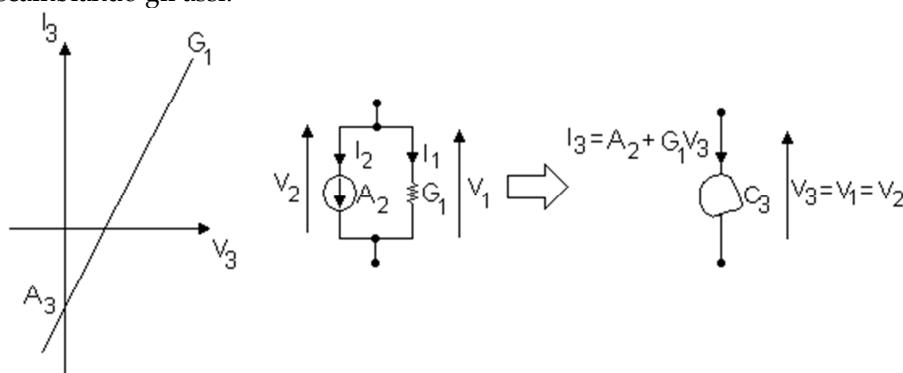


Figura 60: bipolo affine come parallelo tra un resistore ed un generatore indipendente di corrente

Si osserva perciò che la linea caratteristica di un generico bipolo affine è la stessa di un generatore di corrente in parallelo ad un resistore di resistenza G_1 .

Di conseguenza, se abbiamo un bipolo affine, possiamo sempre sostituirlo con il parallelo di due componenti noti: un resistore ed un generatore indipendente di corrente, tra loro in parallelo.

$$I_3 = A_2 + G_1 V_3$$

Trasformazione di generatori indipendenti

Un generatore di tensione collegato in serie ad un resistore è equivalente ad un generatore di corrente collegato in parallelo allo stesso resistore.

Ciò consegue naturalmente da quanto abbiamo appena visto. Naturalmente, occorrerà però scegliere opportuni generatori di corrente e di tensione. Consideriamo la figura 61.

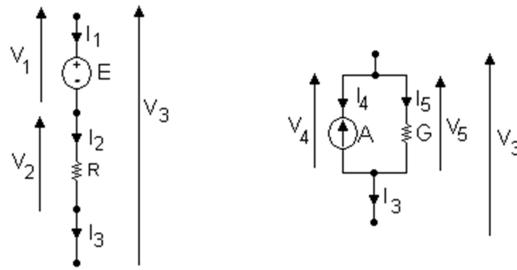


Figura 61 e 62: trasformazione da un generatore di tensione (61) ad un generatore di corrente (62)

Come noto, per il circuito in figura 61 vale la relazione:

$$V_3 = E + R I_3$$

Per il circuito in figura 62abbiamo invece:

$$I_3 = -A + G V_3$$

Confrontando le due equazioni, si ottiene:

$$A = \frac{E}{R}$$

e:

$$G = \frac{1}{R}$$

E di conseguenza:

$$E = \frac{A}{G}$$

Possiamo così sostituire alla porzione di circuito in figura 61 quella rappresentata in figura 62, purché vengano rispettate le due condizioni sopra riportate.

Leggi di partitore di tensione e di corrente

Legge del partitore di corrente relativo al parallelo di resistori

Supponiamo di avere due resistori in parallelo, rispettivamente di conduttanza G_1 e G_2 .

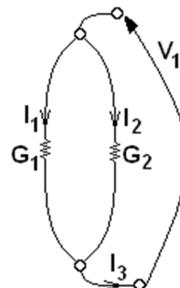


Figura 63: partitore di corrente relativo al parallelo di resistori

Per la relazione costitutiva dei resistori, abbiamo:

$$I_1 = G_1 V_1$$

$$I_2 = G_2 V_1$$

Inoltre, per la KLC, abbiamo:

$$I_3 = I_1 + I_2 = G_1 V_1 + G_2 V_1 = V_1 (G_1 + G_2)$$

Da ciò possiamo ricavare che:

$$V_1 = \frac{I_3}{G_1 + G_2}$$

Sostituendo questa relazione nelle precedenti, otteniamo:

$$I_1 = G_1 V_1 = \frac{G_1}{G_1 + G_2} I_3$$

$$I_2 = G_2 V_1 = \frac{G_2}{G_1 + G_2} I_3$$

Ovvero, considerando le resistenze anziché le conduttanze:

$$I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I_3$$

$$I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I_3$$

Legge del partitore di tensione relativo alla serie di resistori

Supponiamo ora di avere due resistori in serie, rispettivamente di resistenza R_1 e R_2 .

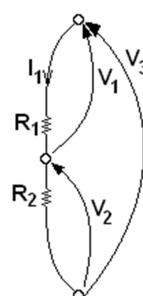


Figura 64: partitore di tensione relativo alla serie di resistori

Per la relazione costitutiva dei resistori, abbiamo:

$$V_1 = R_1 I_1$$

$$V_2 = R_2 I_1$$

Inoltre, per la KLV, abbiamo:

$$V_3 = V_1 + V_2 = R_1 I_1 + R_2 I_1 = I_1 (R_1 + R_2)$$

Da ciò possiamo ricavare che:

$$I_1 = \frac{V_3}{R_1 + R_2}$$

Sostituendo questa relazione nelle precedenti, otteniamo:

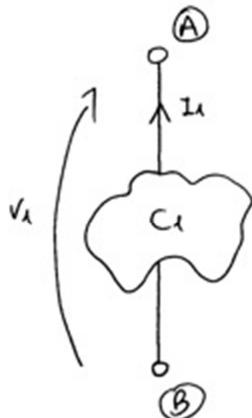
$$V_1 = R_1 I_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_3$$

$$V_2 = R_2 I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_3$$

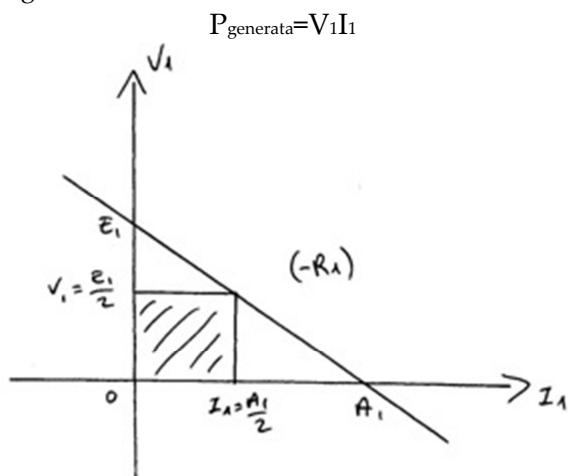
Si osserva che in questo caso non scriviamo l'analogia relazione in funzione delle conduttanze, anche se naturalmente potremmo farlo. Ciò è dovuto al fatto che la resistenza è una grandezza largamente più utilizzata: sui componenti in commercio è infatti riportato il valore di resistenza, non quello di conduttanza.

Teorema massimo trasferimento di potenza

Preso in considerazione un bipolo affine, ovvero un componente che abbia una linea caratteristica rettilinea, se V_1 e I_1 sono misurate con la convenzione dei generatori:

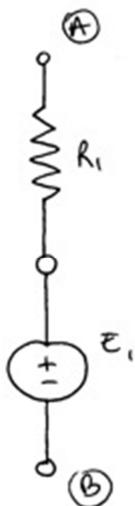


Assumendo come ipotesi che il bipolo abbia come linea caratteristica una retta non parallela agli assi e a pendenza negativa, la potenza generata è:



La potenza generata, graficamente, è rappresentata come l'area descritta dalle coordinate V_1 e I_1 .

Il bipolo affine può anche essere rappresentato come una serie tra un resistore e un generatore indipendente di tensione:

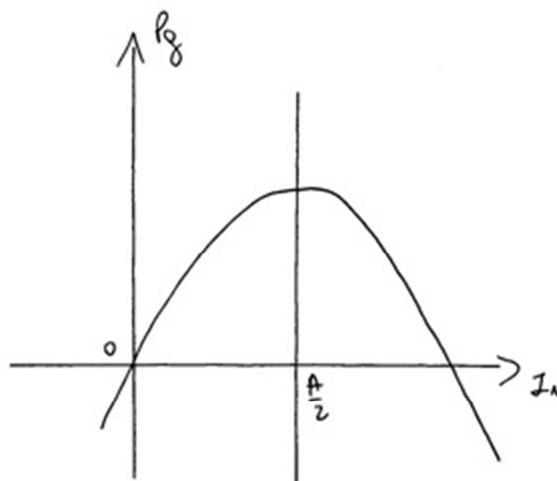


Valendo ora la relazione $V_1 = E_1 - R_1 I_1$

La potenza generata può quindi essere espressa come:

$$P_{\text{generata}} = E_1 I_1 - R_1 I_1^2$$

Rappresentando in un piano cartesiano l'equazione così ottenuta, si ottiene una parabola con concavità rivolta verso il basso:



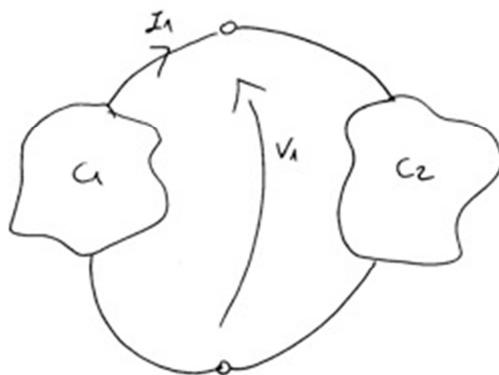
Da ciò è possibile osservare che la potenza generata ha il massimo in corrispondenza di $I_1 = E_1 / 2R_1$ cioè $I_1 = A_1 / 2$ essendo $A_1 = E_1 / R_1$, $G_1 = 1 / R_1$ la corrente e la conduttanza del generatore equivalente Norton.

Dalla relazione costitutiva segue che la tensione nel punto di massimo è $V_1 = E_1 - R_1 A_1 / 2 = E_1 / 2$.

Si giunge ad avere l'equazione della massima potenza generata:

$$P_{\text{max generata}} = V_1 I_1 = E_1 A_1 / 4 = E_1^2 / 4R_1 = A_1^2 / 4G_1$$

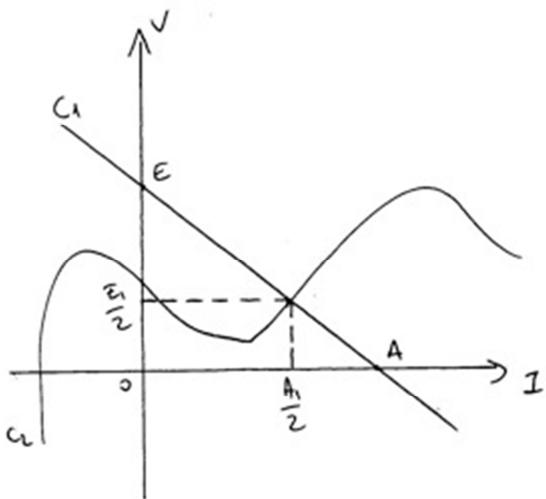
Per esempio, in un circuito come quello nella seguente figura:



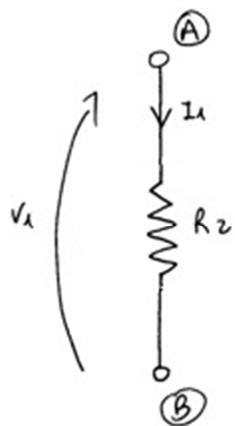
C_2 assorbe potenza massima, quando C_1 genera potenza massima. Ovvero valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} V_1 &= E_1 / 2 \\ I_1 &= A_1 / 2 \end{aligned}$$

Disegnando ora le linee caratteristiche dei due componenti, è possibile determinare se la potenza assorbita dal componente C_2 , pari alla potenza erogata da C_1 , è pari alla massima potenza erogabile da C_1 , ovvero quando il punto di lavoro (intersezione delle due linee caratteristiche) ha le coordinate trovate ($V_1 = E_1 / 2$, $I_1 = A_1 / 2$).



Prendendo C_2 come resistore, vale per esso la legge di Ohm:



$$V_1 = R_2 I_1$$

Sostituendo V_1 e I_1 con i valori precedentemente ottenuti, si giunge a:

$$\begin{aligned} E_1/2 &= R_2 A_1/2 \\ R_2 &= E_1/A_1 = R_1 \end{aligned}$$

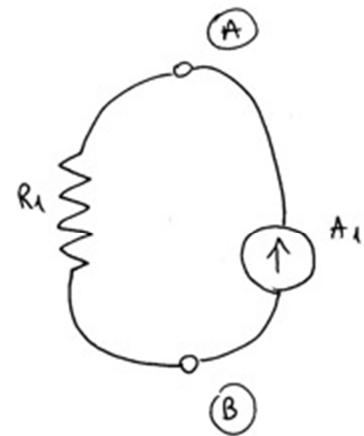
Si può dunque osservare che la potenza massima assorbita sarà tale quando il resistore C_2 ha resistenza uguale al resistore del componente composito $C_{1.a}$.

Rendimento di un Generatore Reale

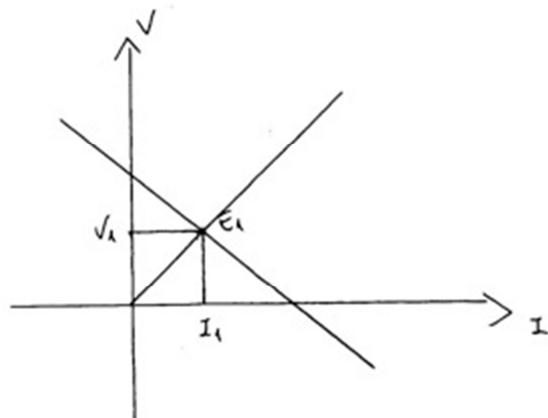
Nello studio teorico si considerano in genere i generatori come ideali. Un generatore ideale è in grado di produrre qualunque tensione e corrente senza alcun limite ed è privo di resistenza interna. Il valore di corrente o tensione generato è indipendente dal carico applicato.

Nella realtà non esistono generatori ideali, poiché qualunque dispositivo ha una sua resistenza interna intrinseca.

Un generatore reale di tensione può essere rappresentato come un generatore ideale di tensione con esplicitata in serie la resistenza interna, mentre il generatore reale di corrente può essere rappresentato come un generatore ideale di corrente con in parallelo la resistenza interna.



Si può quindi capire che in un generatore reale (a differenza di quello ideale) la potenza generata viene in parte dissipata all'interno del generatore stesso, si introduce quindi il concetto di "rendimento" del generatore reale (ovvero il rapporto tra la potenza realmente erogata e la potenza generata):
 $\eta = V_1 I_1 / E_1 I_1$



Dal grafico sopra riportato si può osservare come quando I_1 tende a 0, ovvero $V_1 \approx E_1$, $\eta \rightarrow 1$ quindi il rendimento è massimo.

Nel caso del generatore reale di tensione, la potenza erogata dal generatore rappresenta la potenza assorbita dal bipolo C_2 (utilizzatore).

Tale potenza è la differenza della potenza erogata dal generatore ideale di tensione interno a C_1 e dalla potenza assorbita dal resistore R_1 interno a C_1 .

La potenza effettivamente assorbita dal carico è però minore, essendo diminuita della potenza assorbita da R_1 entro C_1 .

Il rapporto tra le due potenze V_1 , E_1 è compreso tra 0 e 1 e viene definito rendimento del generatore reale di tensione. Se si desidera massimizzare il rendimento, cioè renderlo prossimo a 1 si vuole che il rendimento sia prossimo a 1

Ciò si ottiene quando $R_2 \gg R_1$ in questo modo il punto di lavoro del circuito si sposta verso il punto di coordinate $(0, E_1)$.

La massimizzazione del rendimento è una condizione diversa rispetto a quella della massimizzazione della potenza erogata da C_1 (problema a cui risponde il teorema di trasferimento di potenza).

Il teorema del massimo trasferimento di potenza si usa soprattutto nell'elettronica di potenza, dove si hanno potenze piccole in gioco, e si vuole massimizzare la potenza in assorbita dal carico.

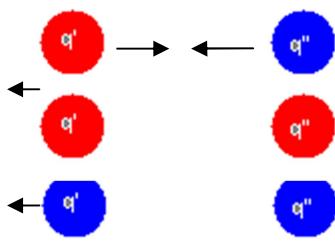
La massimizzazione del rendimento si usa soprattutto nell'elettrotecnica dove si hanno in gioco grosse potenze e si vuole evitare di perderne frazioni rilevanti."

3. Dal modello fisico al circuito elettrico

Carica e campo elettrico

Carica elettrica

Per carica elettrica è un proprietà fondamentale delle particelle elementari che si manifesta come la capacità di un corpo di attrarre o respingerne un altro. Si può infatti trovare in due forme, convenzionalmente indicate come positiva e negativa.



Non tutti i materiali, però, si comportano allo stesso modo. Si nota, infatti, che materiali della stessa natura presentano una forza repulsiva tra di loro.

Ne consegue che esistono due tipi diversi di cariche: quella che per convenzione viene chiamata positiva e quella che per convenzione viene chiamata negativa. Due cariche dello stesso segno si respingono, mentre due diverse si attraggono, a differenze delle masse che presentano solo forza di tipo attrattivo.

L'unità di misura della carica elettrica nel SI è il Coulomb [C]. L'unità fondamentale è definita come la quantità di carica trasportata da un elettrone, ed è pari a $e = -1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$. Le cariche assumono valori che sono multipli di questo valore base.

Campo elettrico

Le forze elettriche agenti su una carica q (carica puntiforme e ferma rispetto ad un sistema di riferimento inerziale, detta "carica campion") dovute alle cariche circostanti si sommano come vettori, considerando l'effetto della risultante come sovrapposizione delle singole forze simultanee.

Quello che si osserva sperimentalmente è che una carica elettrica Q modifica lo spazio che lo circonda, in particolare modifica le proprietà in un punto P nel quale ipotizziamo sia posta una seconda carica q che non modifica il sistema in cui si trova.

Questa regione di spazio viene chiamata "**campo elettrico**" : la carica q avverte una forza elettrica che è dovuta alle nuove proprietà della zona in cui si trova. Questo campo è generato da un sistema di cariche ed è definita come la forza elettrica F che agisce su una carica di prova divisa per la carica stessa.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \quad \left[\frac{\text{N}}{\text{C}} \right] \text{ o } \left[\frac{\text{V}}{\text{m}} \right]$$

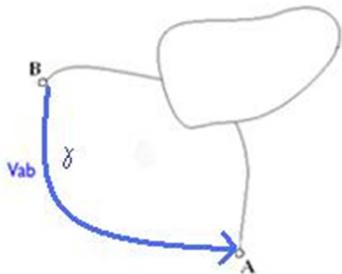
Il vettore campo elettrico è una grandezza vettoriale il cui modulo è dato dal rapporto sopra espresso e che viene rappresentata mediante le *linee di campo*, che sono linee in cui in ciascun punto il campo elettrico E è tangente alla traiettoria e il cui verso di percorrenza indica il verso del campo stesso.

La tensione elettrica

La tensione del campo elettrico \vec{E} lungo la linea orientata γ , verrà indicata per semplicità come V_{AB} ed è quindi il lavoro che compie il campo elettrico su una carica interna per muoverla lungo γ secondo il verso prescelto, in questo caso da A verso B.

$$V_{AB} = \int_{\gamma} \vec{E} \cdot \vec{t} \cdot ds$$

L'unità di misura della tensione nel sistema internazionale (S.I) è il Volt [V]



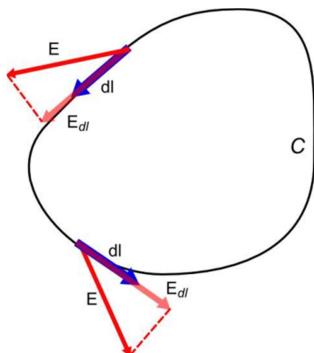
Per rappresentare la tensione che si esercita lungo la linea orientata γ si usa utilizzare una freccia lungo la linea stessa, avente come coda il punto finale (nella fig., B) e come testa il punto finale della linea (A).

La definizione di tensione elettrica può applicarsi anche al caso di linea chiusa. In questo caso gli estremi A e B coincidono. La tensione elettrica lungo una linea chiusa, che indicheremo con C, prende il nome di circuitazione del campo elettrico

$$\oint_C \vec{E} \cdot \vec{t} \cdot ds$$

Dove il simbolo $\oint(\dots)$ indica che l'integrale di linea è esteso a una linea chiusa. L'integrale di linea lungo C sarà dato dalla sommatoria di integrali di linea lungo i tratti $\gamma', \gamma'' \dots$ che compongono la linea chiusa.

Legge di irrotationalità del campo elettrico



Considerata una linea chiusa C in condizioni stazionarie (in modo che le grandezze elettriche quindi rimangano costanti, la circuitazione del campo elettrico lungo una qualsiasi linea chiusa è sempre nulla

$$\Gamma = \oint_C \vec{E} \cdot \vec{t} \cdot ds = 0$$

Suddividendo la linea chiusa C in un numero n di tratti:

$$\oint_C \vec{E} \cdot \vec{t} \cdot ds = \int_{\gamma'} \vec{E} \cdot \vec{t} \cdot ds + \int_{\gamma''} \vec{E} \cdot \vec{t} \cdot ds + \dots + \int_{\gamma^n} \vec{E} \cdot \vec{t} \cdot ds = 0$$

Ad esempio dividendo la linea chiusa con tre punti A, B, C osserviamo che:

$$V_{AB} + V_{BC} + V_{AC} = 0$$

Tenuto conto di come abbiamo definito la tensione elettrica, si ha come immediata conseguenza che la tensione elettrica lungo una linea aperta non dipende dal percorso scelto ma solo dagli estremi della linea.

Densità di corrente elettrica

La densità volumetrica di carica elettrica rappresenta la quantità di carica netta che è presente in una regione di spazio τ di valore $|\tau|$.

$$\rho = \frac{\sum_1^n q_i}{|\tau|} \quad \left[\frac{C}{m^3} \right]$$

Inoltre, il movimento che viene impresso dalla forza elettrica sulle cariche permette a ciascuna di esse di assumere una certa velocità v_i di cui viene assunto un valore medio che viene definito come *velocità media della carica* nella regione τ .

$$\bar{v} = \frac{\sum_1^n v_i}{q}$$

Essendo:

$$q = \sum_{i=1}^n q_i$$

dove n definisce il numero di cariche elettriche considerate nella regione di spazio.

A partire da queste due grandezze è possibile definire una grandezza vettoriale

Definiamo cioè la **densità di corrente elettrica** \bar{J}

$$\bar{J} = \rho \cdot \bar{v}$$

Vediamo subito che \bar{J} è direttamente proporzionale alla quantità di carica elettrica e ha direzione e verso del vettore velocità media

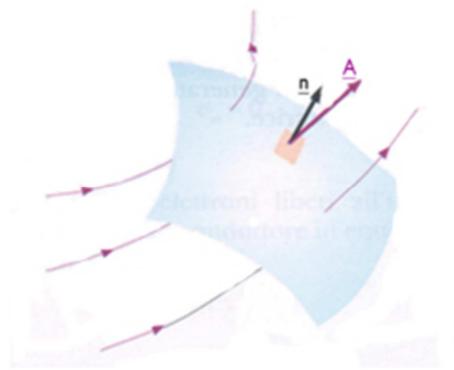
Flusso di un campo vettoriale

In un conduttore, cioè un materiale in cui le cariche elettriche si muovono liberamente, quest'ultime sono soggette a un campo elettrico \vec{E} : le cariche si muovono sotto l'azione di una forza elettrica $F = qE$ acquistando una certa velocità media \bar{v} . Tale moto dà origine a quella che viene definita come corrente elettrica.

La corrente elettrica è una grandezza fisica legata al moto delle cariche elettriche nello spazio. Per definirla si utilizza il concetto matematico di flusso.

Il flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie è definito come l'integrale del prodotto scalare del campo con il versore normale della superficie, attraverso l'intera superficie Σ :

$$\phi(\vec{A}) = \int_{\Sigma} \vec{A} \cdot \vec{n} \, d\Sigma$$



Flusso di un campo vettoriale \vec{A} generico

dove \vec{A} è il campo vettoriale di cui si vuole definire il flusso, \vec{n} è la normale alla superficie e Σ è la superficie che consideriamo. Nel caso più semplice, l'integrale è quello di un campo A uniforme e di una superficie piana la normale è unica e si riduce al prodotto $\vec{A} \cdot \vec{n} \cdot |\Sigma|$.

In un caso generico quindi dobbiamo ricondurre il flusso del campo alla sommatoria di n termini, dove sia possibile dividere la superficie in n superfici piane, con approssimazione migliore del valore per n tendente a infinito

$$\phi(\vec{A}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n=\infty} \vec{A}_i \cdot \vec{n}_i \cdot |\Sigma_i|$$

Legge di continuità (solenoidalità) della carica elettrica

La legge di continuità della carica elettrica (affine alla Legge di conservazione della carica elettrica) e afferma che : il flusso della densità di corrente elettrica (cioè l'intensità) attraverso una qualunque superficie chiusa Σ è pari alla variazione della carica contenuta nel volume racchiuso dalla superficie Σ .

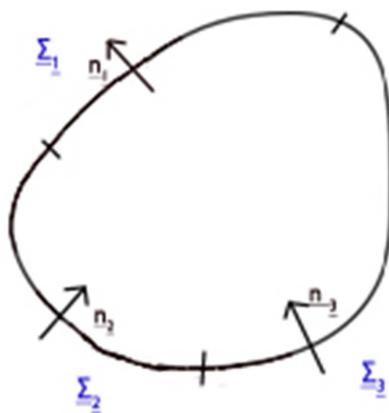
Detto più semplicemente, quello che esce da una superficie chiusa doveva essere già al suo interno.

Non si crea nessuna carica elettrica, le cariche elettriche si conservano globalmente, anche se cariche positive e negative si possono elidere dato che possiedono segni opposti.

In condizioni stazionarie la carica in una regione non costante, quindi dato che la quantità di carica che attraversa una superficie orientata chiusa Σ è 0

$$\int_{\Sigma} \vec{J} \cdot \vec{n} d\Sigma = 0$$

La legge di continuità è alla base della Legge di Kirchhoff delle correnti la quale afferma che , definita una superficie chiusa che attraversi un circuito elettrico, la somma algebrica delle correnti che attraversano la superficie è nulla. Verifichiamo cosa succede in un caso fisico



Data la superficie $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$ per la legge di continuità avremo che

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \vec{J} \cdot \vec{n} d\Sigma &= \int_{\Sigma_1} \vec{J} \cdot (-\vec{n}_1) d\Sigma_1 + \int_{\Sigma_2} \vec{J} \cdot (\vec{n}_2) d\Sigma_2 + \int_{\Sigma_3} \vec{J} \cdot (\vec{n}_3) d\Sigma_3 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{Quindi } I_{TOT} = (I_1 + I_2 + I_3) = 0$$

L'espressione è analoga a quella della KCL (legge di Kirchhoff delle correnti). Come visto per la legge di irrotationalità della tensione: osserviamo quindi che le leggi di Kirchhoff sono applicabili a partire da fenomeni fisici.

Legge di continuità della carica

Ma che relazione esiste tra le forze elettriche necessarie per mettere in moto le cariche e la velocità media che queste assumono? In un materiale conduttore, la densità di corrente \vec{J} è legata al campo elettrico \vec{E} dalla relazione:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

con σ una grandezza caratteristica del conduttore (in cui si muovono le cariche), detta conduttività elettrica [$S \cdot m$] Tale legge è nota come legge d Ohm in forma locale.

La legge si può scrivere anche nella forma seguente:

$$\vec{E} = \rho \vec{J}$$

dove la grandezza $\rho = 1/\sigma$ è chiamata resistività [$\Omega \cdot m$] del conduttore. A parità di campo elettrico, minore è la resistività del conduttore, maggiore è la densità di corrente che può circolare in esso.

Può succedere che oltre al campo elettrico intervenga una campo E_m che chiamiamo campo elettromotore capace di mettere in moto i portatori di carica. La legge diventerà

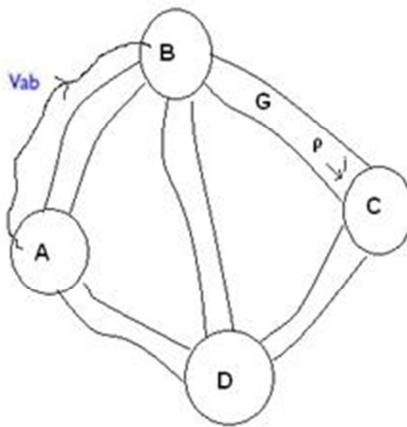
$$\vec{J} = \sigma \cdot (\vec{E} + \vec{E}_m)$$

Il circuito fisico

Dal modello fisico al circuito elettrico

Consideriamo le regioni A, B, C, D a resistività nulla ($\rho = 0 \Omega \cdot m$) - che siano cioè dei buoni conduttori - e ipotizziamo che le restanti regioni siano a resistività ρ non nulla, con la regione G avente campo elettromotore E_m capace di spostare cariche elettriche. Si tratta, quindi, dal punto di vista circuitale, di un generatore.

In mezzo a queste regioni è presente l'aria, cattivo conduttore (o un isolante perfetto) che ipotizziamo abbia conducibilità elettrica nulla ($\sigma = 0 S \cdot m$): non sarà possibile cioè che in questa regione di spazio passi corrente.



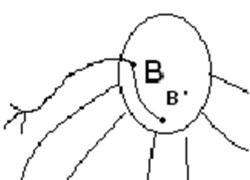
Modello fisico di un circuito elettrico

Per cercare di risolvere questo modello fisico, introduciamo delle tensioni elettriche tra coppie di punti che stanno all'interno dei conduttori ideali a resistenza nulla. Si ha ad esempio che:

$$\int_{\Gamma} \vec{E} \cdot \vec{t} d\Gamma = V_{AB}$$

dove \vec{t} è il vettore tangente alla linea in ciascun punto. La tensione non dipende né dalla linea, né dal punto interno alla regione in cui arriva.

Difatti, se consideriamo una regione a $\rho = 0$ e tracciamo una linea da un punto B ad un punto B', con B e B' interni alla medesima regione si ha:



$$\int_{\Gamma_{AB}} \vec{E} \cdot \vec{t} \cdot d\Gamma = \int_{\Gamma_{AB}} \vec{E} \cdot \vec{t} \cdot d\Gamma + \int_{\Gamma_{BB'}} \vec{E} \cdot \vec{t} \cdot d\Gamma$$

tra B e B' il campo vale zero, dato che $\vec{E} = \rho \cdot \vec{J}$, ma, all'interno della medesima regione $\rho = 0$.

Quindi:

$$\int_{\Gamma_{BB'}} \vec{E} \cdot \vec{t} \cdot d\Gamma = 0 \rightarrow \int_{\Gamma_{AB}} \vec{E} \cdot \vec{t} \cdot d\Gamma = \int_{\Gamma_{AB}} \vec{E} \cdot \vec{t} \cdot d\Gamma$$

Se, invece, si scelgono due linee differenti, si ottiene:

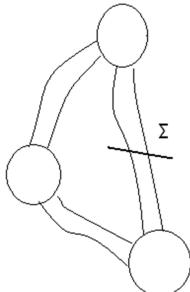
$$\int_{\Gamma_{AB}} \vec{E} \cdot \vec{t} \cdot d\Gamma = \int_{\Gamma'_{AB}} \vec{E} \cdot \vec{t} \cdot d\Gamma$$

Ciò è dovuto all'irrotationalità del campo elettrico. Infatti, se si assumono due versi differenti, abbiamo

$$\int_{\Gamma_{AB} - \Gamma'_{AB}} \vec{E} \cdot \vec{t} \cdot d\Gamma = 0 \rightarrow \int_{\Gamma_{AB}} \vec{E} \cdot \vec{t} \cdot d\Gamma - \int_{\Gamma'_{AB}} \vec{E} \cdot \vec{t} \cdot d\Gamma = 0$$

Da cui l'equazione precedentemente riportata.

Dal punto di vista circuitale la freccia usata nel modello può essere considerata come una semplificazione dello strumento di misura (il voltmetro) inserito in parallelo tra i punti di cui si vuole misurare la tensione.



Per quanto riguarda la corrente, se sezioniamo una regione a $\sigma \neq 0$ e calcoliamo il flusso della densità di corrente elettrica lungo la superficie. Consideriamo che le regioni esterne al sistema abbiano conducibilità nulla, pertanto non permettano alle cariche di uscire dalle regioni (il circuito è isolato).

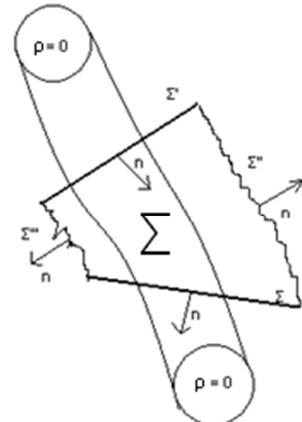
Si ha che:

$$I = \int_{\Sigma} \vec{J} \cdot \vec{n} \cdot d\Sigma$$

Se spostiamo la superficie Σ in modo che tagli lo stesso componente, l'integrale di linea non varia, per il principio di solenoidalità.

$$I = \int_{\Sigma} \vec{J} \cdot \vec{n} \cdot d\Sigma = 0$$

$$\int_{\Sigma \cup \Sigma' \cup \Sigma''} \vec{J} \cdot \vec{n} \cdot d\Sigma = \int_{\Sigma} \vec{J} \cdot \vec{n} \cdot d\Sigma - \int_{\Sigma'} \vec{J} \cdot \vec{n} \cdot d\Sigma - \int_{\Sigma''} \vec{J} \cdot \vec{n} \cdot d\Sigma$$

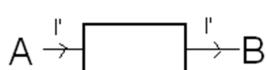


Essendo, però $\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E}$ e le regioni Σ' e Σ'' a conducibilità nulla, si ha:

$$\int_{\Sigma} \vec{J} \cdot \vec{n} \cdot d\Sigma - \int_{\Sigma'} \vec{J} \cdot \vec{n} \cdot d\Sigma = 0$$

Da cui:

$$\int_{\Sigma} \vec{J} \cdot \vec{n} \cdot d\Sigma = \int_{\Sigma'} \vec{J} \cdot \vec{n} \cdot d\Sigma$$



La corrente, pertanto, non cambia al variare della sezione purché si rimanga all'interno del medesimo componente. Difatti, su ogni conduttore posso definire una sola intensità di corrente.

Queste considerazioni ci portano ad affermare come esista una corrispondenza tra il modello fisico che abbiamo ipotizzato e quello circuitale (elettrico) a cui stiamo cercando di arrivare. In particolare vediamo come le regioni a resistività $\rho = 0 \Omega \cdot m$, in un circuito sono i nodi. Osservato precedentemente come le leggi di Kirchhoff siano deducibili dalle leggi di irrotationalità e di continuità, resta da discutere sulle relazioni costitutive.

Sappiamo che le relazioni che legano il campo elettrico con la densità di corrente elettrica sono:

$$\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E} \quad \text{ed} \quad \vec{E} = \rho \cdot \vec{J}$$

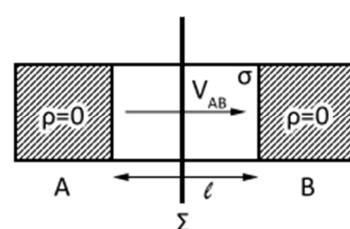
da questi deriva un legame tra corrente e tensione

$$I_{AB} = G \cdot V_{AB} \quad \text{e} \quad V_{AB} = R \cdot I_{AB}$$

dove G è la conduttanza, mentre R è la resistenza.

Lo dimostreremo nel seguente importante esempio.

- Esempio



Utilizziamo questo modello semplificativo del ramo del circuito.
La relazione in ogni punto è data da $\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E}$, non nulla

Se consideriamo l'unica componente x, avremo che:

$$V_{AB} = \int_0^l E_x \cdot dx = E_x \cdot l$$

Essendo $E_x = \rho \cdot \bar{J}_x$, $V_{AB} = l \cdot \rho \cdot \bar{J}_x$

Consideriamo una superficie Σ tale che la normale abbia la direzione dell'asse x

$$I_A = \int_{\Sigma} \bar{J} \cdot \bar{n} d\Sigma = \bar{J}_x \cdot S \quad \bar{J}_x = I_A / S \quad , \quad S = \text{area superficie}$$

Riprendendo la relazione di prima:

$$V_{AB} = l \cdot \rho \cdot \bar{J}_x = l \cdot \rho \cdot (I_A / S) = R \cdot I_A$$

dove $R = \rho \cdot l / S$

Prendiamo infine in rassegna il caso del generatore (componente elettromotore), la cui relazione è
 $\bar{J} = \sigma \cdot (\bar{E} + \bar{E}_m)$

Il generatore reale è espresso da un resistore R in serie con un generatore indipendente di tensione V_m
Riconducendoci alla figura sopra, sappiamo che

$$\bar{J}_x = \sigma (\bar{E}_x + \bar{E}_{m_x})$$

(Il moto delle cariche per ipotesi è interno al conduttore quindi \bar{E}_{m_x} è l'unico componente)

$$V_{AB} = l \cdot \bar{E}_x = l (\rho \cdot \bar{J}_x - \bar{E}_{m_x})$$

e quindi $V_{AB} = R \cdot I_A - l \cdot \bar{E}_{m_x} = R \cdot I_A + V_m$

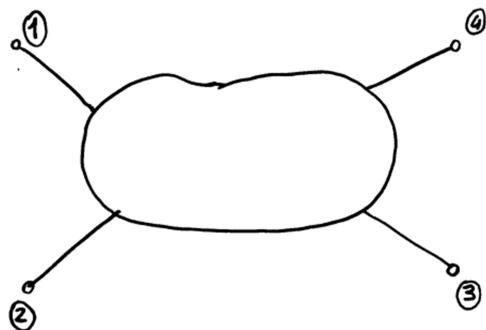
Dato un problema elettrico posso calcolare tutte le tensioni e le correnti attraverso il modello circuitale ottenuto.

-- Limitazioni : \bar{E} e \bar{J} devono essere costanti nel tempo

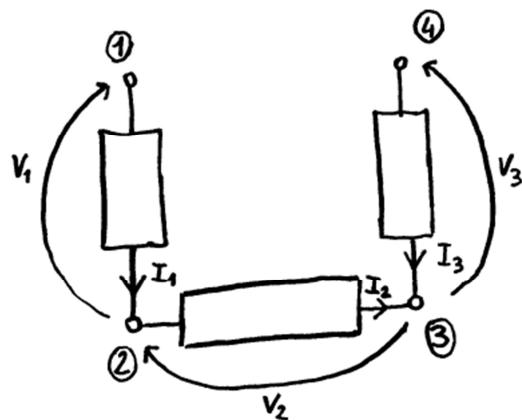
4. n-poli resistivi

Un n-polo resistivo è così detto perché le relazioni che legano tra loro le correnti e le tensioni sono relazioni finite (ovvero si tratta di equazioni lineari tra le tensioni e le correnti stesse).

Per arrivare a scrivere le sopra citate equazioni, partiremo con l'analizzare il caso di un qualsiasi quadripolo resistivo, che rappresenteremo genericamente in questo modo:



Per analizzarlo ora passeremo ad utilizzare il metodo dei bipoli fittizi, ovvero analizzeremo il quadripolo come un componente composito composto da $n-1$ bipoli (nel nostro caso 3) posti nel modo seguente:

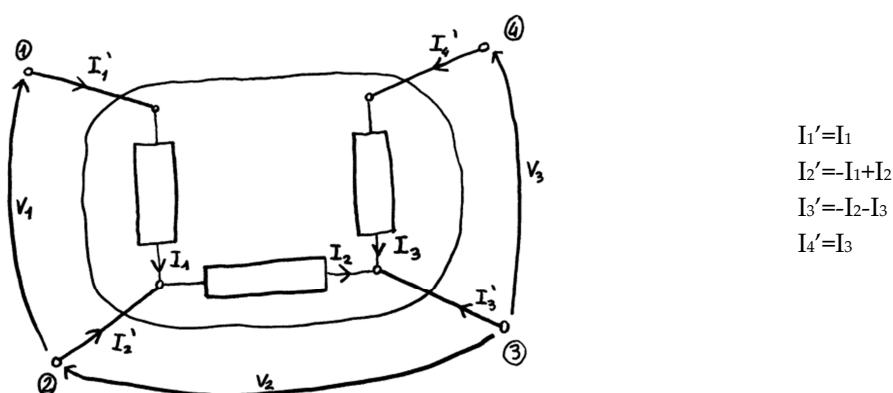


Questo tipo di rappresentazione è chiamata "albero di bipoli fittizi", e si può notare come tensioni e correnti siano state poste con la convenzione degli utilizzatori.

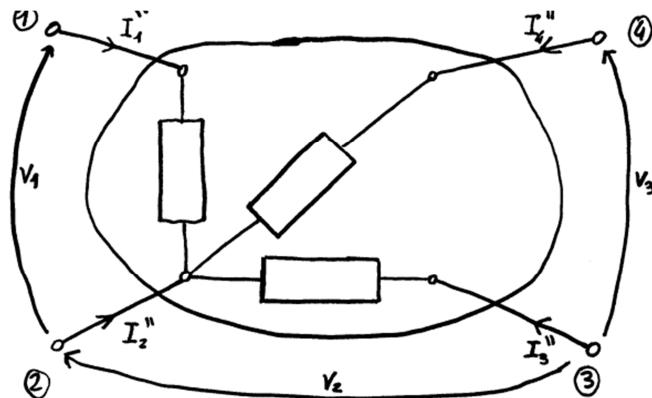
Con questo metodo possiamo arrivare a scrivere le equazioni del quadripolo in questione come:

$$\begin{cases} f_1(V_1, V_2, V_3, I_1, I_2, I_3) = 0 \\ f_2(V_1, V_2, V_3, I_1, I_2, I_3) = 0 \\ f_3(V_1, V_2, V_3, I_1, I_2, I_3) = 0 \end{cases}$$

Avendo però il semplice quadripolo resistivo da analizzare, si giunge al problema di conoscere i valori delle correnti e delle tensioni nei bipoli fittizzi. Per risolvere questo problema si procede in questo modo:



Questo metodo di rappresentazione di bipoli fittizi non è però l'unico possibile, possono esisterne molti altri, tra cui uno significativo è il cosiddetto "cespuglio di bipoli fittizi", che viene così rappresentato:

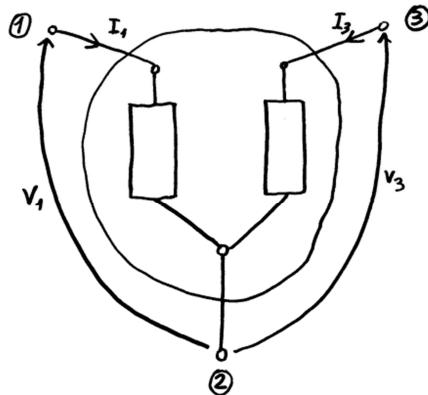


Grazie alla rappresentazione per bipoli fittizi, si può anche giungere alla formulazione della potenza assorbita e della potenza generata per il quadripolo resistivo:

$$P_{\text{assorbita}} = V_1 I_1 + V_2 I_2 + V_3 I_3$$

$$P_{\text{generata}} = V_1 (-I_1) + V_2 (-I_2) + V_3 (-I_3)$$

Lo stesso metodo lavorativo per bipoli fittizi può essere applicato anche al caso del tripolo resistivo:



In questo caso il nodo 2 è stato scelto come "nodo comune", e si giunge alla seguente formulazione:

$$\begin{cases} f_1(V_1, V_2, I_1, I_2) = 0 \\ f_2(V_1, V_2, I_1, I_2) = 0 \end{cases}$$

n-polo resistivo (o adinamico)

Possiamo generalizzare quanto appena visto per il quadripolo e il tripolo resistivo anche per n-poli resistivi con n generico. Introducendo correnti e tensioni secondo la stessa modalità usata per quadripolo e tripolo avremo infatti $n - 1$ tensioni e $n - 1$ correnti. Le equazioni che leggeranno tra loro tensioni e correnti indicandoci il comportamento dell'n-polo saranno $n - 1$, e saranno del tipo:

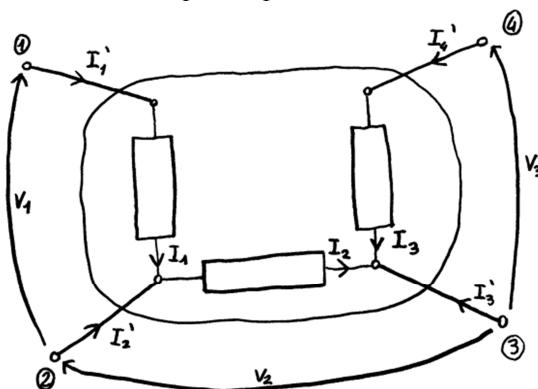
$$\begin{cases} f_1(V_1, V_2, \dots, V_{n-1}, I_1, I_2, \dots, I_{n-1}) = 0 \\ f_2(V_1, V_2, \dots, V_{n-1}, I_1, I_2, \dots, I_{n-1}) = 0 \\ \dots \\ f_n(V_1, V_2, \dots, V_{n-1}, I_1, I_2, \dots, I_{n-1}) = 0 \end{cases}$$

Doppio bipolo resistivo

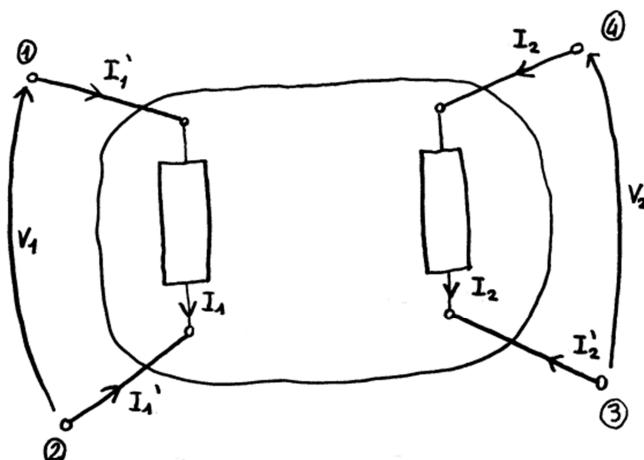
Definizione di bipolo resistivo

Un doppio bipolo resistivo è un componente che ha 4 terminali (un quadripolo) e nel quale le tensioni e le correnti sono legate tra loro da relazioni finite e lineari (perciò è detto resistivo).

Essendo un quadripolo resistivo, ci aspettiamo che il doppio bipolo resistivo imponga tre equazioni tra 3 tensioni e 3 correnti, sulla base di quanto visto al paragrafo precedente, dove tali grandezze vengono introdotte con il metodo dei bipoli fittizi. In realtà però i doppi bipoli resistivi sono componenti particolari, che ci consentono di operare ulteriori semplificazioni, ma partiamo ora ad analizzarlo come se fosse un quadripolo resistivo che si presenterebbe dunque in questo modo:



Nel doppio bipolo però, la corrente I_2 è uguale a zero, e di conseguenza la sua rappresentazione potrebbe essere semplificata in questo modo:



Le porte e l'introduzione di correnti e tensioni

Per l'introduzione di correnti e tensioni in un doppio bipolo, si suddividono i suoi terminali in due gruppi che prendono il nome di *porte*, ciascuno composto da due terminali. Introduciamo quindi le correnti e le tensioni come in figura precedente.

Al fine di introdurre correnti e tensioni, possiamo anche pensare di nascondere uno dei due gruppi di terminali alla volta. Ciò che rimane è, come evidente dalla figura 68, un bipolo resistivo. Possiamo dunque introdurre correnti e tensioni analogamente a quanto faremmo per il bipolo resistivo così ottenuto.

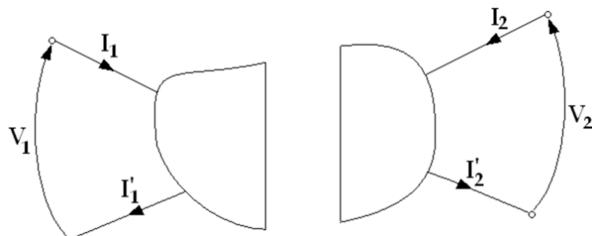


Figura 68: Doppio bipolo resistivo considerato separando le due porte

Interpretazione del doppio bipolo come quadripolo

Il doppio bipolo resistivo impone le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} f_1(V_1, V_2, I_1, I_2) = 0 \\ f_2(V_1, V_2, I_1, I_2) = 0 \end{cases}$$

Osserviamo che, introducendo le correnti, le tensioni e le equazioni in questo modo, abbiamo solamente 2 tensioni, 2 correnti e 2 equazioni per un doppio bipolo, mentre ci aspettavamo 3 tensioni, 3 correnti e 3 equazioni per un quadripolo. In realtà però questo accade solo apparentemente.

Oltre alle due equazioni scritte abbiamo infatti le due relazioni:

$$\begin{aligned} I_1 &= I'_1 \\ I_2 &= I'_2 \end{aligned}$$

Delle quali una può essere ricavata dall'altra tramite KLC al componente doppio bipolo. Scegliamo quindi di considerare solo la prima. Le equazioni perciò sono esattamente 3. Inoltre in tal modo le correnti che vengono introdotte sono 3, perché occorre aggiungere I'_1 .

Riassumendo, otteniamo:

$$\begin{cases} f_1(V_1, V_2, I_1, I_2) = 0 \\ f_2(V_1, V_2, I_1, I_2) = 0 \\ I_1 = I'_1 \end{cases}$$

Esempi di doppi bipoli resistivi

Trasformatore (ideale)

Definizione

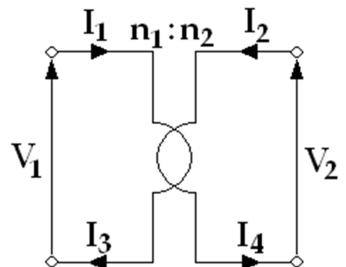
Un trasformatore è un doppio bipolo resistivo il cui simbolo è indicato in figura 72. Essendo un doppio bipolo, valgono le relazioni:

$$I_1 = I_3 \quad I_2 = I_4$$

Per tale ragione, in seguito si parlerà semplicemente delle correnti I_1 e I_2 . Le relazioni costitutive del trasformatore sono le seguenti:

$$\begin{cases} V_1 = \frac{n_1}{n_2} V_2 \\ I_2 = -\frac{n_1}{n_2} I_1 \end{cases}$$

Figura 72: Simbolo del trasformatore



Si osserva che il trasformatore è caratterizzato dai parametri n_1 ed n_2 , che vengono indicati nel modo $n_1 : n_2$. Per comprenderne il significato è opportuno introdurre brevemente la struttura del trasformatore fisico.

Struttura del trasformatore

Ciascuna delle due porte del trasformatore è costituita da un filo metallico che dà origine ad un certo numero di spire. All'interno della porta 1, si avranno perciò n_1 spire, mentre nella porta 2 se ne avranno n_2 . La porta 1 è detta anche "circuito primario", mentre la porta 2 è detta "circuito secondario". All'interno delle spire è posto del materiale ferromagnetico.

Sotto opportune condizioni fisiche, l'oggetto appena descritto risponde alle equazioni che abbiamo introdotto per il doppio bipolo trasformatore ideale.

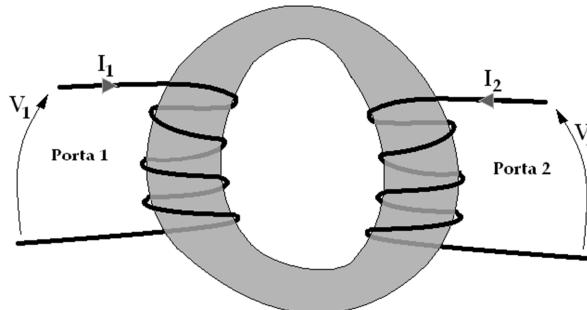


Figura 73: Struttura schematizzata di un trasformatore

Semplificazione nella rappresentazione del parametro

Spesso il parametro $n_1 : n_2$ è rappresentato in maniera più semplice, ovvero nella forma $n : 1$, dove $n = \frac{n_1}{n_2}$ rappresenta il rapporto tra n_1 e n_2 . Naturalmente, le equazioni resteranno di fatto invariate, ma assumeranno così una forma più semplice, ovvero:

$$\begin{cases} V_1 = n V_2 \\ I_2 = -n I_1 \end{cases}$$

Osserviamo inoltre che affinché le relazioni scritte siano valide, è necessario che correnti e tensioni vengano indicate esattamente come in figura 72.

Potenza assorbita e generata dal trasformatore

Possiamo applicare la formula generale ricavata per il calcolo della potenza assorbita da un qualsiasi doppio bipolo:

$$P_a = V_1 I_1 + V_2 I_2 = n V_2 I_1 - n V_2 I_1 = 0$$

In conclusione, la potenza assorbita (e dunque anche la potenza generata) da un trasformatore ideale è sempre nulla. Nella pratica infatti il trasformatore serve a trasformare livelli di tensioni e correnti in altri livelli di tensioni e correnti ad essi proporzionali, senza però assorbire potenza: il trasformatore si limita a trasferire potenza. In altri termini, non fa altro che cambiare la "scala" delle tensioni e delle correnti.

Amplificatore Operazionale (ideale)

Definizione

L'amplificatore operazionale (A.O.) ideale è un doppio bipolo resistivo la cui relazione costitutiva è la seguente e il cui simbolo è riportato in figura 74.

$$\begin{cases} V_1 = 0 \\ I_1 = 0 \end{cases}$$

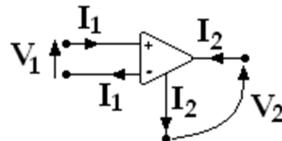


Figura 74: Simbolo dell'amplificatore operazionale

Terminologia

La porta 1 (ovvero quella costituita dai terminali contraddistinti con i simboli + e -) è costituita dai "terminali di ingresso", mentre la porta 2 è costituita dai "terminali di uscita".

Si osserva inoltre che, siccome abbiamo $V_1 = 0$, si parla di "cortocircuito virtuale". Inoltre, siccome si ha anche $I_1 = 0$, diciamo che si ha un "circuito aperto virtuale".

Nota sul numero di terminali

Essendo un doppio bipolo resistivo, l'amplificatore operazionale ha 4 terminali. Nonostante questo, in molti casi esso viene rappresentato con soli tre terminali, nel modo seguente:

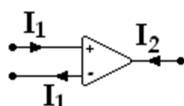


Figura 75: Errata rappresentazione dell'amplificatore operazionale

Tale rappresentazione, anche se molto usata soprattutto in Elettronica, è in realtà errata e rischia di trarre in inganno. Pensiamo ad esempio a cosa accadrebbe scrivendo la KLC al componente. Trascurando il terminale che non è stato rappresentato, avremmo:

$$I_1 - I_1 - I_2 = 0 \quad \rightarrow \quad I_2 = 0$$

Ma, naturalmente, nella realtà non è vero che vale la relazione $I_2 = 0$.

Si osserva inoltre che in laboratorio si hanno componenti amplificatori operazionali con 5 o più terminali. Tuttavia, possiamo sostituire ai morsetti in aggiunta un unico terminale, perciò tale caso può in realtà essere ricondotto alla situazione precedentemente illustrata, con 4 terminali.

Generatore pilotati (o controllati, o dipendenti)

I generatori pilotati (o controllati, o dipendenti) sono quattro tipologie di componenti. Essi verranno ora elencati e descritti.

Generatore di corrente controllato in tensione (VCCS)

Un generatore di corrente controllato in tensione (VCCS, dall'inglese Voltage Controlled Current Source), è un doppio bipolo resistivo il cui simbolo è riportato in figura 76 e le cui equazioni caratteristiche sono:

$$\begin{cases} I_1=0 \\ I_2=g_m V_1 \end{cases}$$

Dove g_m è un parametro detto transconduttanza, la cui u.m. è il siemens [S].

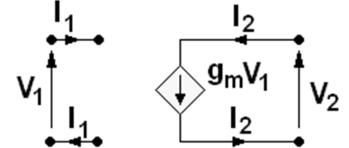
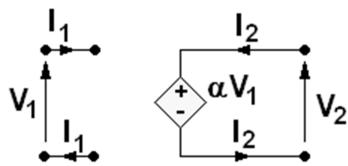


Figura 76: Generatore pilotato di corrente controllato in tensione (VCCS)

Generatore di tensione controllato in tensione (VCVS)

Un generatore di tensione controllato in tensione (VCVS, dall'inglese Voltage Controlled Voltage Source), è un doppio bipolo resistivo il cui simbolo è riportato in figura 77 e le cui equazioni caratteristiche sono:

$$\begin{cases} I_1=0 \\ V_2=\alpha V_1 \end{cases}$$



Dove α è un parametro detto guadagno di tensione (oppure guadagno in tensione). Il parametro α è adimensionale.

Figura 77: Generatore pilotato di tensione controllato in tensione (VCVS)

Generatore di corrente controllato in corrente (CCCS)

Un generatore di corrente controllato in corrente (CCCS, dall'inglese Current Controlled Current Source), è un doppio bipolo resistivo il cui simbolo è riportato in figura 78 e le cui equazioni caratteristiche sono:

$$\begin{cases} V_1=0 \\ I_2=\beta I_1 \end{cases}$$

Dove β è un parametro detto guadagno di corrente (oppure guadagno in corrente). Il parametro β è adimensionale.

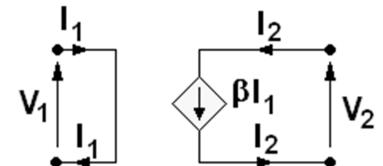


Figura 78: Generatore pilotato di corrente controllato in corrente (CCCS)

Generatore di tensione controllato in corrente (CCVS)

Un generatore di tensione controllato in corrente (CCVS, dall'inglese Current Controlled Voltage Source), è un doppio bipolo resistivo il cui simbolo è riportato in figura 79 e le cui equazioni caratteristiche sono:

$$\begin{cases} V_1=0 \\ V_2=r_m I_1 \end{cases}$$

Dove r_m è un parametro detto transresistenza, la cui u.m. è l'Ohm [Ω].

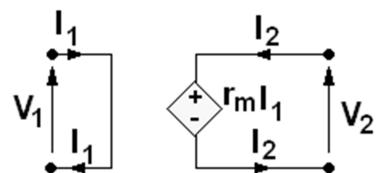


Figura 79: Generatore pilotato di tensione controllato in corrente (CCVS)

Osservazione

Questi componenti vengono spesso rappresentati solo attraverso la porta 2. Ciononostante, essi sono dei quadripoli, e non dei bipoli, ed è quindi opportuno tenere presente questa loro caratteristica anche nel caso in cui venga adottata tale simbologia.

5. Metodi risolutivi dei circuiti

Il metodo dell'analisi nodale (modificata)

Introduzione al metodo dell'analisi nodale

Introdurremo ora un metodo per la risoluzione dei circuiti. Tale metodo, che fu introdotto da Maxwell, risulta essere applicabile per ogni circuito connesso, ossia non divisibile in due parti che costituiscono circuiti autonomi. Si osserva in particolare che questo metodo è concettualmente molto semplice, perché introduce un algoritmo costituito da una serie di passi che si possono eseguire indipendentemente dal circuito analizzato.

Proprio per questa ragione il metodo dell'analisi nodale è comunemente usato dai software per la risoluzione circuitale. Tuttavia il suo utilizzo risulta algebricamente molto complesso, perciò spesso il suo utilizzo in altri contesti è sconsigliato.

Il procedimento da seguire per il metodo dell'analisi nodale pura

Per applicare il metodo dell'analisi nodale, occorre seguire i seguenti passi, che vengono esemplificati attraverso la risoluzione del circuito in figura 80:

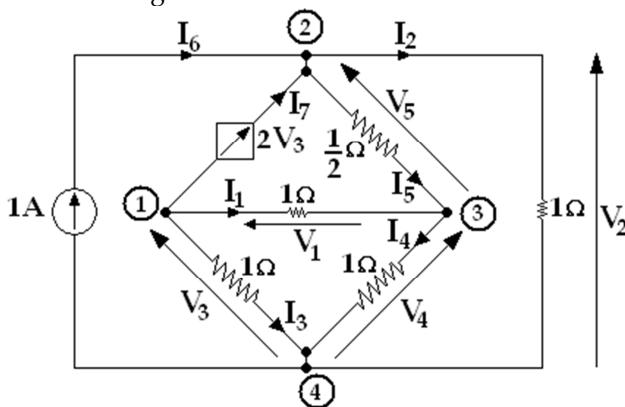


Figura 80: Circuito da risolvere con il metodo dell'analisi nodale

- Si sceglie un nodo di riferimento e si introducono i potenziali di nodo.
Nel nostro caso, scegliamo come nodo di riferimento il nodo 4 e indichiamo i potenziali ai nodi 1, 2 e 3 con i simboli E₁, E₂ ed E₃.
- Si scrivono le relazioni costitutive di tutti i componenti del circuito, indicando le correnti in funzione delle tensioni.

Nel circuito in figura 80, abbiamo:

$$I_1 = V_1 \cdot 1 S$$

$$I_2 = V_2 \cdot 1 S$$

$$I_3 = V_3 \cdot 1 S$$

$$I_4 = V_4 \cdot 1 S$$

$$I_5 = V_5 \cdot 2 S$$

$$I_6 = 1 A$$

$$I_7 = 2 \cdot V_3$$

- Tutte le tensioni comparse nelle relazioni scritte al punto 2 vengono espresse come differenza di potenziali di nodo.

$$V_1 = E_1 - E_3$$

$$V_2 = E_2$$

$$V_3 = E_1$$

$$V_4 = E_3$$

$$V_5 = E_2 - E_3$$

- Per ciascun nodo del circuito, escluso il nodo di riferimento, si scrive la KLC.

$$I_1 + I_3 + I_7 = 0$$

$$I_2 + I_5 - I_6 - I_7 = 0$$

$$-I_1 - I_5 + I_4 = 0$$

5. Si combinano tra loro le relazioni individuate ai punti 3, 4 e 5. In particolare, si sostituiscono alle correnti delle KCL individuate al punto 4 le corrispondenti espressioni determinate al punto 2 (le relazioni costitutive dei componenti), esprimendo le tensioni come differenza tra potenziali di nodo.

Nel nostro caso, otterremo:

$$\begin{cases} E_1 \cdot 1S - E_3 \cdot 1S + E_1 \cdot 1S + E_1 \cdot 2S = 0 \\ E_2 \cdot 1S + E_2 \cdot 2S - E_3 \cdot 2S - 1A + E_1 \cdot 2S = 0 \\ -E_1 \cdot 1S + E_3 \cdot 1S + E_3 \cdot 1S - E_2 \cdot 2S + E_3 \cdot 2S = 0 \end{cases}$$

6. Si spostano al secondo membro tutti i termini noti. Quelle così ottenute sono le equazioni dell'analisi nodale, che costituiscono il cosiddetto "sistema dell'analisi nodale".

Nel nostro caso, otterremo:

$$\begin{cases} E_1 \cdot 4S - E_3 \cdot 1S = 0 \\ E_1 \cdot 2S + E_2 \cdot 3S - E_3 \cdot 2S = 1A \\ -E_1 \cdot 1S - E_2 \cdot 2S + E_3 \cdot 4S = 0 \end{cases}$$

7. Possiamo a questo punto risolvere il sistema così ottenuto. Verranno in tal modo individuati tutti i potenziali di nodo, dai quali potremo ricavare ogni altra variabile incognita del circuito mediante le equazioni ai punti 2 e 3 precedenti.

Possiamo a tal proposito scrivere il sistema in forma matriciale. Nel nostro caso, otterremo:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nella pratica le equazioni al punto 5 vengono scritte direttamente senza scrivere esplicitamente le equazioni ai punti precedenti.

L'analisi nodale modificata

Osserviamo però che il metodo dell'analisi nodale pura presenta una importante limitazione: essa richiede che ogni relazione costitutiva venga espressa in modo tale che la corrente sia funzione della tensione. Tuttavia sappiamo che questo non sempre è possibile. Ne è un esempio tipico il generatore indipendente di tensione.

In tali casi è quindi necessario introdurre il metodo dell'analisi nodale modificata, il quale prevede che, nel caso in cui non si riesca ad esprimere una corrente in funzione delle tensioni, la corrente in questione venga lasciata come incognita. In tal modo però, ovviamente, il numero di incognite del sistema sarebbe superiore rispetto al numero di equazioni del sistema stesso, perciò il sistema risulterebbe probabilmente indeterminato. Occorre perciò aggiungere tante equazioni quante sono le correnti lasciate come incognite. In particolare, le equazioni aggiunte saranno le relazioni costitutive che non siamo riusciti a scrivere nella forma che evidenzi la corrente in funzione della tensione.

Possiamo perciò dire che: dato un generico n-polo resistivo, possiamo introdurre n-1 tensioni rispetto ad un nodo di riferimento e n-1 correnti, attraverso la modalità "a cespuglio". L'n-polo sarà caratterizzato da n-1 equazioni:

$$\begin{cases} f_1(V_1, V_2, \dots, V_{n-1}, I_1, I_2, \dots, I_{n-1}) = 0 \\ f_2(V_1, V_2, \dots, V_{n-1}, I_1, I_2, \dots, I_{n-1}) = 0 \\ \dots \\ f_n(V_1, V_2, \dots, V_{n-1}, I_1, I_2, \dots, I_{n-1}) = 0 \end{cases}$$

Supponiamo ora che delle n-1 correnti introdotte m possano essere espresse in funzione delle tensioni del circuito. Avremo così la situazione:

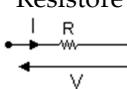
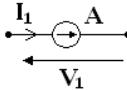
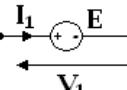
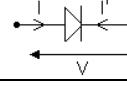
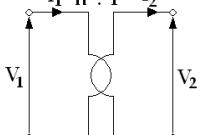
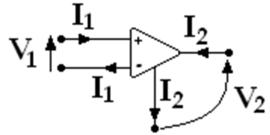
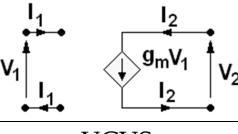
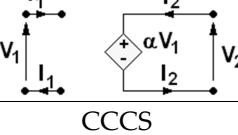
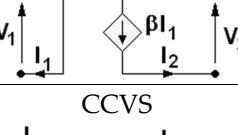
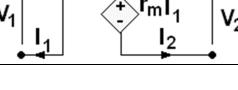
$$\begin{cases} I_1 = h_1(V_1, V_2, \dots, V_{n-1}) \\ I_2 = h_2(V_1, V_2, \dots, V_{n-1}) \\ \dots \\ I_m = h_m(V_1, V_2, \dots, V_{n-1}) \\ k_1(V_1, V_2, \dots, V_{n-1}, I_1, I_2, \dots, I_{n-1}) = 0 \\ k_2(V_1, V_2, \dots, V_{n-1}, I_1, I_2, \dots, I_{n-1}) = 0 \\ \dots \\ k_{n-m-1}(V_1, V_2, \dots, V_{n-1}, I_1, I_2, \dots, I_{n-1}) = 0 \end{cases}$$

Dovremo dunque aggiungere n - m - 1 correnti come incognite ed aggiungere n - m - 1 equazioni. In particolare, le incognite da aggiungere saranno $I_{m+1}, I_{m+2}, \dots, I_{n-1}$.

Naturalmente, nel caso particolare in cui m = n - 1, possiamo applicare l'analisi nodale pura.

Componenti per i quali è necessaria l'analisi nodale modificata

Nella seguente tabella riportiamo i componenti finora studiati e riportiamo per ognuno di essi se è possibile applicare l'analisi nodale pura oppure no. In quest'ultimo caso, si riporta inoltre l'elenco delle incognite e delle equazioni da aggiungere.

Componente	Analisi nodale	Incognite aggiuntive	Equazioni aggiuntive
Resistore 	Pura	-	-
Generatore indipendente di corrente 	Pura	-	-
Generatore indipendente di tensione 	Modificata	I_1	$V_1 = E$
Diodo ideale 	Modificata	I_1	$f(V_1, I_1) = 0$
Trasformatore ideale 	Modificata	I_1, I_2	$V_1 = n V_2$ $I_2 = n I_1$
Amplificatore operazionale ideale 	Modificata	I_2	$V_1 = 0$
VCCS 	Pura	-	-
VCVS 	Modificata	I_2	$V_2 = \alpha V_1$
CCCS 	Modificata	I_1, I_2	$V_1 = 0$ $I_2 = \beta I_1$
CCVS 	Modificata	I_2	$V_1 = r_m I_1$

Definizione di circuiti e componenti lineari

Componenti lineari

Abbiamo già dato la definizione di bipolo lineare, che possiamo ora riprendere: un bipolo si dice lineare se la sua caratteristica è rettilinea e passa per l'origine.

Allo stesso modo, possiamo parlare di "n-polo resistivo lineare". Un n-polo resistivo si dice lineare se le sue n-1 equazioni caratteristiche sono tutte lineari, ovvero del tipo:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{11}V_1 + c_{12}V_2 + \dots + c_{1,n-1}V_{n-1} + d_{11}I_1 + d_{12}I_2 + \dots + d_{1,n-1}I_{n-1} = 0 \\ c_{21}V_1 + c_{22}V_2 + \dots + c_{2,n-1}V_{n-1} + d_{21}I_1 + d_{22}I_2 + \dots + d_{2,n-1}I_{n-1} = 0 \\ \dots \\ c_{n-1,1}V_1 + c_{n-1,2}V_2 + \dots + c_{n-1,n-1}V_{n-1} + d_{n-1,1}I_1 + d_{n-1,2}I_2 + \dots + d_{n-1,n-1}I_{n-1} = 0 \end{array} \right.$$

Esempi di componenti lineari sono il resistore, l'amplificatore operazionale, il trasformatore ideale; esempi di componenti non lineari sono il diodo e i generatori di corrente e di tensione indipendenti.

Circuiti lineari

Un circuito si dice lineare se è costituito solo da componenti lineari e, eventualmente, da generatori indipendenti di tensione e/o corrente.

Il Principio (teorema) di Sovrapposizione degli Effetti (PSE)

Esempio introduttivo

Consideriamo il seguente circuito lineare connesso (figura 81), nel quale vogliamo calcolare V_1 .

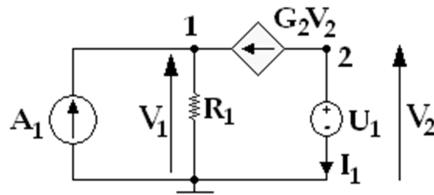


Figura 81: Circuito utilizzato per l'introduzione del PSE

KLC al nodo 1:

$$-A_1 + \frac{E_1}{R_1} - G_2 E_2 = 0$$

KLC al nodo 2:

$$I_1 + G_2 E_2 = 0$$

Relazione costitutiva del generatore indip. di tensione:

$$U_1 = E_2$$

Otteniamo così:

$$\frac{E_1}{R_1} = A_1 + G_2 E_2 \quad \rightarrow \quad V_1 = E_1 = R_1(A_1 + G_2 E_2)$$

Ovvvero:

$$V_1 = R_1 A_1 + (R_1 G_2) U_1$$

Chiamando $H_1 = R_1$ e $K_1 = R_1 G_2$:

$$V_1 = H_1 A_1 + K_1 U_1$$

Il principio di sovrapposizione degli effetti

Il principio di sovrapposizione degli effetti può essere applicati solo per circuiti lineari. Esso afferma che, se si vuole calcolare una qualsiasi variabile circuitale (corrente o tensione) all'interno di un circuito lineare:

1. La variabile circuitale considerata è combinazione lineare delle tensioni e delle correnti forzate dai generatori indipendenti del circuito.
2. I coefficienti di tale combinazione lineare dipendono solo dai valori dei parametri dei componenti lineari del circuito.
3. Se vengono spenti tutti i generatori del circuito tranne uno, iterando questo procedimento tante volte quanti sono i generatori indipendenti del circuito (in modo tale ciascuno dei generatori sia l'unico ad essere acceso una e una sola volta) e si calcola di volta in volta il valore della variabile circuitale incognita in tali condizioni, il valore della variabile circuitale incognita all'interno del circuito di partenza è la somma dei valori così ottenuti.

Osservazione

Il nome "principio di sovrapposizione degli effetti" sta ad indicare che la variabile circuitale incognita (chiamiamola y) è determinata come somma (ovvero come sovrapposizione, appunto) della stessa variabile circuitale in altri circuiti più semplici rispetto a quello di partenza.

Si osserva inoltre che il PSE non può essere applicato per il calcolo della potenza.

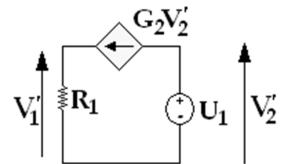
Risoluzione del circuito di esempio applicando il PSE

Se applichiamo il PSE, otteniamo:

1. Spegnendo il generatore di corrente (ovvero sostituendolo con un circuito aperto) abbiamo:

$$V_1' = (R_1 G_2) E_2 = K_1 E_2$$

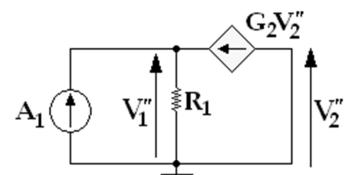
Figura 82: Circuito ottenuto spegnendo (nel circuito in figura 81) il generatore di corrente



2. Spegnendo il generatore di tensione (ovvero sostituendolo con cortocircuito)abbiamo:

$$V_1'' = R_1 A_1 = H_1 A_1$$

Figura 83: Circuito ottenuto spegnendo (nel circuito in figura 81) il generatore di tensione



3. In conclusione:

$$V_1 = V_1' + V_1'' = H_1 A_1 + K_1 U_1$$

Dimostrazione del PSE

Pensiamo di avere un generico circuito lineare costituito da n_A generatori indipendenti di corrente e n_E generatori indipendenti di tensione. Indichiamo con U_1, U_2, \dots, U_{n_E} le tensioni forzate dai generatori indipendenti di tensione e con A_1, A_2, \dots, A_{n_A} le correnti dei generatori indipendenti di corrente.

Possiamo pensare di scrivere l'equazione dell'analisi nodale per il circuito dato nella forma matriciale:

$$A X = B$$

Dove X è il vettore delle incognite, B il vettore dei termini noti ed A la matrice dei coefficienti. Avremo perciò:

$$AX = B_1 A_1 + B_2 A_2 + \dots + B_{n_A} A_{n_A} + C_1 U_1 + C_2 U_2 + \dots + C_{n_E} U_{n_E}$$

Dove con $B_1, B_2, \dots, B_{n_A}, C_1, C_2, \dots, C_{n_E}$ sono stati indicati vettori colonna opportuni, in modo che si abbia:

$$B_1 A_1 + B_2 A_2 + \dots + B_{n_A} A_{n_A} + C_1 U_1 + C_2 U_2 + \dots + C_{n_E} U_{n_E} = B$$

Dalla precedente equazione, moltiplicando da sinistra entrambi i membri per l'inversa di A , otteniamo:

$$A^{-1}AX = A^{-1}(B_1 A_1 + B_2 A_2 + \dots + B_{n_A} A_{n_A} + C_1 U_1 + C_2 U_2 + \dots + C_{n_E} U_{n_E})$$

$$X = A^{-1}B_1 A_1 + A^{-1}B_2 A_2 + \dots + A^{-1}B_{n_A} A_{n_A} + A^{-1}C_1 U_1 + A^{-1}C_2 U_2 + \dots + A^{-1}C_{n_E} U_{n_E}$$

Se la variabile circuitale incognita è y , possiamo avere due casi: y può essere una delle incognite nel vettore X , oppure può non appartenervi. Se y compare nel vettore X , possiamo supporre che sia rappresentata al suo interno sull' i -esima riga. Per le proprietà note dall'Algebra che riguardano il prodotto tra un vettore riga e un vettore colonna, se indichiamo con D un vettore riga costituito da opportuni coefficienti, avremo:

$$y = D \cdot X$$

Sostituendo la relazione precedentemente individuata:

$$y = D \cdot (A^{-1}B_1 A_1 + A^{-1}B_2 A_2 + \dots + A^{-1}B_{n_A} A_{n_A} + A^{-1}C_1 U_1 + A^{-1}C_2 U_2 + \dots + A^{-1}C_{n_E} U_{n_E})$$

$$y = (DA^{-1}B_1)A_1 + (DA^{-1}B_2)A_2 + \dots + (DA^{-1}B_{n_A})A_{n_A} + (DA^{-1}C_1)U_1 + (DA^{-1}C_2)U_2 + \dots + (DA^{-1}C_{n_E})U_{n_E}$$

La relazione appena scritta ci conferma che la variabile incognita y è combinazione lineare delle correnti e delle tensioni forzate dai generatori indipendenti. Inoltre i coefficienti (indicati tra parentesi) dipendono solamente dai parametri dei componenti lineari del circuito.

Se invece y non compare nel vettore X , essa può comunque essere ottenuta mediante le equazioni al punto 2 e 3 dell'analisi nodale che, dato che il circuito è lineare, sono lineari.

In sostanza, quindi, se è dato un circuito lineare costituito da n_A generatori indipendenti di corrente e n_E generatori indipendenti di tensione, lo si può risolvere nel seguente modo: per prima cosa, si modifica il circuito prendendo in considerazione un solo generatore (di tensione o di corrente) e lo si modifica spegnendo tutti i generatori indipendenti, sia di tensione, sia di corrente, escluso quello considerato. Il circuito così ottenuto, naturalmente, è molto diverso da quello di partenza. Indichiamo con y' la variabile che corrisponde alla variabile y del circuito dato. È possibile calcolare il valore di y' più facilmente rispetto al valore di y nel circuito di partenza, perché esso, spegnendo i generatori, risulta molto semplificato.

Si ripete quindi questo procedimento per tutti i generatori indipendenti presenti nel circuito, per un totale di $n_A + n_E$ volte, indicando le variabili calcolate nei circuiti così ottenuti con $y'', y''', \dots, y^{(n_A+n_E)}$. Il valore di y all'interno del circuito di partenza sarà dato dalla somma di tutte le variabili così ottenute:

$$y = y' + y'' + y''' + \dots + y^{(n_A+n_E)}$$

Il Teorema di Thevenin e il Teorema di Norton

Introduzione

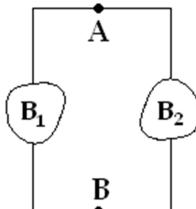
Il teorema di Thevenin e il teorema di Norton sono due teoremi che discendono dal PSE. Nonostante questo, paradossalmente, hanno una validità più ampia, in quanto possono essere applicati per circuiti qualsiasi, e non solo per circuiti lineari.

Ipotesi comuni ai due teoremi

Entrambi i teoremi, affinché possano essere applicati, necessitano che si verifichino alcune ipotesi:

1. Il circuito considerato deve essere un qualsiasi circuito resistivo, visto come connessione di due bipoli.
2. Uno dei due bipoli può essere un bipolo resistivo qualsiasi, mentre il bipolo restante deve essere composto solamente da componenti resistivi lineari e, al più, generatori indipendenti.

Figura 84: Circuito in cui valgono le ipotesi dei teoremi di Norton e Thevenin, purché entrambi i bipoli siano resistivi e B_1 (oppure B_2) sia costituito solo da componenti lineari (e, al più, generatori indipendenti)



Il teorema di Thevenin

Terza ipotesi

Consideriamo il circuito in figura 85, nel quale valgono le due ipotesi sopra enunciate.

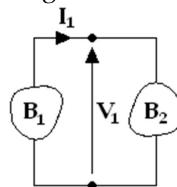
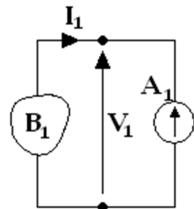


Figura 85: Circuito al quale applicare il teorema di Thevenin

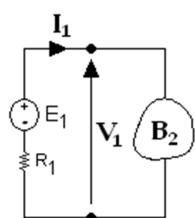
Supponiamo che il bipolo costituito solo da componenti lineari o generatori indipendenti sia B_1 . Oltre alle due ipotesi comuni a entrambi i teoremi, il Teorema di Thevenin richiede che valga una terza ipotesi, ovvero:

3. Il circuito ottenuto sostituendo a B_2 un generatore di corrente $A_1 \neq 0$ (vedi figura 86), deve avere una e una sola soluzione.

Figura 86: Terza ipotesi del teorema di Thevenin.



Il Teorema



Se valgono le tre ipotesi del teorema, allora tutte le variabili circuitali che misuro all'interno di B_2 nel circuito di partenza (in figura 85) sono le stesse che si misurano nel circuito in figura 87. In altri termini, è possibile sostituire al bipolo B_1 un bipolo composito, costituito dalla serie di un resistore R_1 e un generatore indipendente di tensione E_1 , con opportuni valori di R_1 e E_1 .

Figura 87: Applicazione del teorema di Thevenin.

Vediamo ora come avviene il calcolo di R_1 e E_1 .

- Il valore di E_1 è pari al valore di V_1 calcolato nel circuito in figura 88.
- Il valore di R_1 viene ottenuto considerando il circuito in figura 89. Ciò significa che tale valore è il rapporto tra la tensione V_1 indicata in figura e la corrente A_1 . Il circuito da analizzare è ottenuto spegnendo all'interno di B_1 tutti i generatori indipendenti (di tensione e di corrente) e collegando il bipolo B_1 a un generatore di corrente arbitrario $A_1 \neq 0$.

$$R_1 = \frac{V_1}{A_1}$$

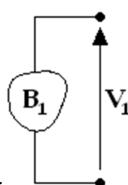


Figura 88:

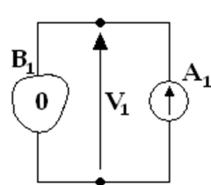


Figura 89:

Calcolo della resistenza tensione equivalente (88) e della resistenza equivalente (89) mediante il teorema di Thevenin

Dimostrazione

Per dimostrare la validità del teorema di Thevenin, possiamo considerare che il circuito riportato in figura 86 è un circuito lineare, perciò possiamo applicare il PSE. Otterremo:

$$V_1 = K_1 A_1 + K_2 A_2 + \cdots + K_{n_A} A_{n_A} + H_1 U_1 + H_2 U_2 + \cdots + H_{n_E} U_{n_E} = K_1 A_1 + E_1$$

Siccome, per la LKC ad uno qualsiasi dei nodi del circuito in figura 86, abbiamo:

$$A_1 = -I_1$$

Possiamo scrivere:

$$V_1 = E_1 - K_1 I_1$$

Quella così ottenuta è dunque la relazione costitutiva di B_1 . È così evidente che si tratta della relazione costitutiva di un bipolo affine che, come noto, può sempre essere rappresentato attraverso la serie tra un generatore indipendente di tensione e un resistore.

Se azzeriamo il generatore A_1 nel circuito analizzato, otteniamo: $V_1 = E_1$. Di conseguenza, vale la relazione:

$$E_1 = V_1$$

Inoltre, se azzeriamo tutti i generatori di corrente del bipolo B_1 e lasciamo solo A_1 , otteniamo:

$$V_1 = K_1 A_1$$

Se chiamiamo $R_1 = K_1$, otteniamo $V_1 = R_1 A_1$, da cui ricaviamo la relazione:

$$R_1 = \frac{V_1}{A_1}$$

In questo modo è possibile esprimere la tensione V_1 nel modo seguente:

$$V_1 = E_1 - R_1 I_1$$

Tale equazione è, come noto, la relazione costitutiva di un generatore di tensione E_1 in serie a un resistore di resistenza R_1 , collegati come in figura 87.

Possiamo a questo punto osservare che, risolvendo i circuiti in figura 88 e 89 per il calcolo della resistenza e della tensione equivalente Thevenin, si risolve in sostanza il circuito in figura 86 per particolari valori di tensioni e correnti. Se si trova una soluzione per una particolare scelta di tensioni e correnti, si è certi che il circuito in analisi avrà una e una sola soluzione per ogni scelta di tensioni e correnti, come conseguenza del PSE. Di conseguenza, non è necessario verificare direttamente la validità della terza ipotesi richiesta dal teorema di Thevenin: semplicemente, se si riesce a calcolare la resistenza e la tensione equivalente, allora tale ipotesi è verificata.

Il teorema di Norton

Terza ipotesi

Consideriamo il circuito in figura 90, nel quale valgano le due ipotesi comuni enunciate per i teoremi di Norton e Thevenin.

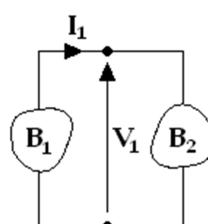


Figura 90: Circuito al quale applicare il teorema di Norton

Supponiamo che il bipolo costituito solo da componenti lineari o generatori indipendenti sia B_1 . Oltre alle due ipotesi comuni a entrambi i teoremi, il Teorema di Norton richiede che valga una terza ipotesi, ovvero:

3. Il circuito ottenuto sostituendo a B_2 un generatore indipendente di tensione $E_1 \neq 0$ (vedi figura 91), deve avere una e una sola soluzione.

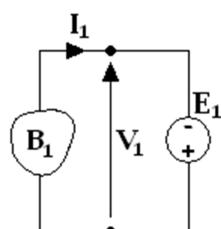


Figura 91: Terza ipotesi del teorema di Norton.

Il Teorema

Se valgono le tre ipotesi del teorema, allora tutte le variabili circuituali che misuro all'interno di B_2 nel circuito di partenza (in figura 90) sono le stesse che si misurano nel circuito in figura 92. In altri termini, è possibile sostituire al bipolo B_1 un bipolo composito, costituito dal parallelo di un resistore di conduttanza G_1 e un generatore indipendente di corrente A_1 , con opportuni valori di G_1 e A_1 .

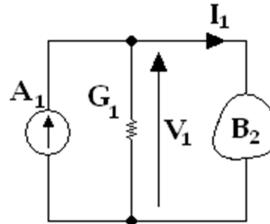


Figura 92: Applicazione del teorema di Norton.

Vediamo ora come avviene il calcolo di G_1 e A_1 .

- Il valore di A_1 è pari al valore della corrente di cortocircuito, ovvero è il valore della corrente I_1 indicata nel circuito in figura 93.
- Il valore di G_1 viene ottenuto considerando il circuito in figura 94. Più precisamente, tale valore è il rapporto tra la corrente I_1 indicata in figura e la tensione E_1 . Il circuito da analizzare è ottenuto spegnendo all'interno di B_1 tutti i generatori indipendenti (di tensione e di corrente) e collegando il bipolo B_1 a un generatore di tensione arbitrario $E_1 \neq 0$.

$$G_1 = \frac{I_1}{E_1}$$

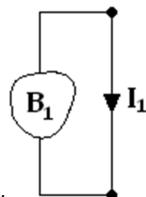


Figura 93:

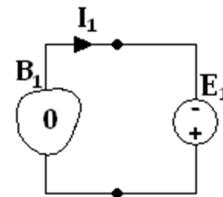


Figura 94:

Calcolo della corrente equivalente (93) e della conduttanza equivalente (94) mediante il teorema di Norton

Dimostrazione

Per dimostrare la validità del teorema di Norton, possiamo considerare che il circuito riportato in figura 91 è un circuito lineare, perciò possiamo applicare il PSE. Otterremo:

$$I_1 = K_1 E_1 + K_2 E_2 + \dots + K_{n_E} E_{n_E} + H_1 A_1 + H_2 A_2 + \dots + H_{n_A} A_{n_A}$$

Possiamo chiamare:

$$K_2 E_2 + \dots + K_{n_E} E_{n_E} + H_2 A_2 + \dots + H_{n_A} A_{n_A} = A_1$$

Otteniamo dunque:

$$I_1 = K_1 E_1 + A_1$$

Siccome, per la KLV, vale la relazione:

$$V_1 = -E_1$$

Possiamo scrivere:

$$I_1 = A_1 - K_1 V_1$$

Quella così ottenuta è dunque la relazione costitutiva di B_1 . È così evidente che si tratta della relazione costitutiva di un bipolo affine che, come noto, può sempre essere sostituito con il parallelo tra un generatore indipendente di corrente ed un resistore.

Se poniamo $E_1 = 0$ nel circuito analizzato, otteniamo: $I_1 = A_1$. Di conseguenza, vale la relazione:

$$I_1 = A_1$$

Inoltre, se azzeriamo tutti i generatori indipendenti del bipolo B_1 e lasciamo solo A_1 , otteniamo:

$$I_1 = -K_1 V_1 = K_1 E_1$$

Ricaviamo da quanto appena scritto la relazione:

$$K_1 = \frac{I_1}{E_1}$$

Possiamo a questo punto chiamare $G_1 = K_1$. Abbiamo in tal modo giustificato il Teorema di Norton.

Casi nei quali non è possibile applicare i teoremi di Thevenin e Norton

Non in tutti i casi posso applicare i teoremi di Norton o Thevenin.

- Un bipolo che non ammette l'equivalente Thevenin è un generatore indipendente di corrente.

Osserviamo infatti che, affinché un bipolo ammetta l'equivalente Thevenin, è necessario che il circuito ottenuto connettendo i due terminali del bipolo stesso ai terminali di un generatore indipendente di corrente non nulla, abbia una e una sola soluzione. Tuttavia, se il bipolo è un generatore indipendente di corrente, si ottengono due generatori indipendenti di corrente tra loro in serie. Come già messo in evidenza, però, questo circuito non ha senso.

- Un bipolo che non ammette l'equivalente Norton è un generatore indipendente di tensione.

Osserviamo infatti che, affinché un bipolo ammetta l'equivalente Norton, è necessario che il circuito ottenuto connettendo i due terminali del bipolo stesso ai terminali di un generatore indipendente di tensione non nulla, abbia una e una sola soluzione. Tuttavia, se il bipolo è un generatore indipendente di tensione, si ottengono due generatori indipendenti di tensione tra loro in parallelo. Come già messo in evidenza, però, questo circuito non ha senso.

Quanto appena detto può anche essere verificato in una maniera diversa.

- Un generatore indipendente di corrente ha una caratteristica del tipo in figura 95.a, con equazione $I_1 = A_1$. La caratteristica di un generico bipolo equivalente Thevenin è del tipo in figura 95.b ed è rappresentata dall'equazione:

$$V_1 = E_1 - R_1 I_1$$

Come noto dalla Geometria Analitica, però, tale equazione non può rappresentare rette parallele all'asse delle tensioni, perché il coefficiente angolare (ovvero la resistenza) $-R_1$ dovrebbe essere infinito.

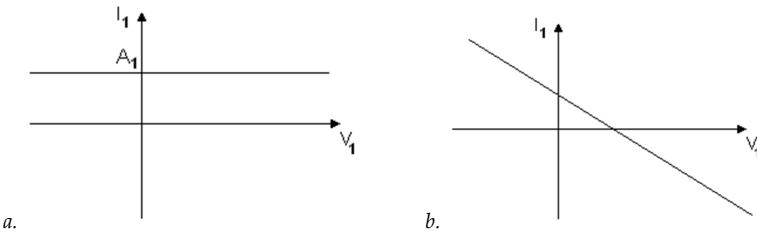


Figura 95: Caratteristiche del generatore indipendente di corrente (a) e del bipolo equivalente Thevenin (b) messe a confronto

- Un generatore indipendente di tensione ha una caratteristica del tipo in figura 96.a, con equazione $V_1 = E_1$. La caratteristica di un generico bipolo equivalente Norton è del tipo in figura 96.b ed è rappresentata dall'equazione:

$$I_1 = A_1 - G_1 V_1$$

Come noto dalla Geometria Analitica, però, tale equazione non può rappresentare rette parallele all'asse delle correnti, perché il coefficiente angolare (ovvero la conduttanza) $-G_1$ dovrebbe essere infinito.

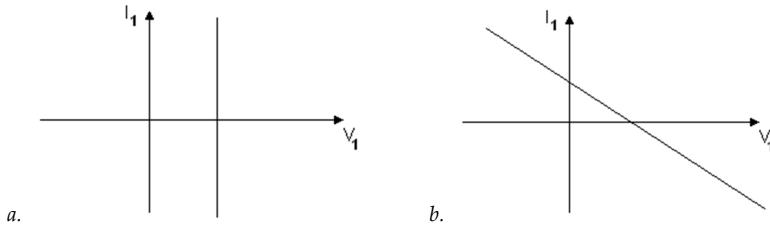


Figura 96: Caratteristiche del generatore indipendente di tensione (a) e del bipolo equivalente Norton (b) messe a confronto

6. Teorema di rappresentazione dei doppi bipoli

Introduzione

Il teorema di rappresentazione dei doppi bipoli è una generalizzazione dei teoremi di Norton e di Thevenin, che riguarda i quadripoli anziché i bipoli. Nonostante questo, nella pratica il teorema di rappresentazione dei doppi bipoli risulta essere meno impiegato, perché introduce modelli equivalenti piuttosto complessi. Vedremo ora l'enunciato di questo teorema. Tuttavia, il teorema presenta 6 diversi possibili casi da analizzare. Noi ci limiteremo ad analizzare 4 di queste 6 varianti. Prima di entrare nel dettaglio, vediamo quali sono le ipotesi comuni a tutti i 4 casi che introdurremo.

Le ipotesi comuni ai vari casi

Le 4 varianti del teorema richiedono che valgano due ipotesi comuni:

- Sia dato un circuito costituito da 3 componenti (eventualmente composti): due bipoli B_1 e B_2 ed un quadripolo Q , connessi come mostrato in figura 97.

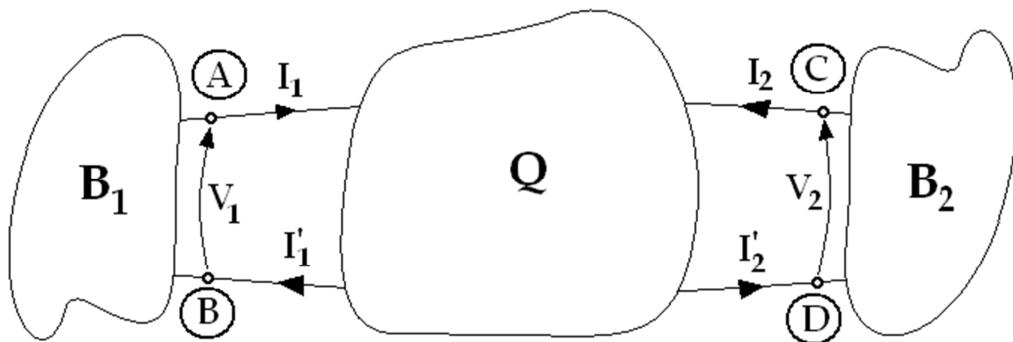


Figura 97: Prima ipotesi del teorema di rappresentazione dei doppi bipoli.

- Sia il quadripolo Q un componente composto esclusivamente da componenti lineari e/o generatori indipendenti di corrente o di tensione; siano invece i bipoli B_1 e B_2 due componenti costituiti da componenti resistivi qualsiasi.

Caso 1: Rappresentazione R (o delle resistenze)

La terza ipotesi

Valga, oltre alle due ipotesi precedentemente enunciate, anche una terza ipotesi:

- Il circuito rappresentato in figura 98 (ottenuto a partire da quello in figura 97 sostituendo ai due bipoli generici due generatori di corrente A_1 ed A_2) ammetta una e una sola soluzione.

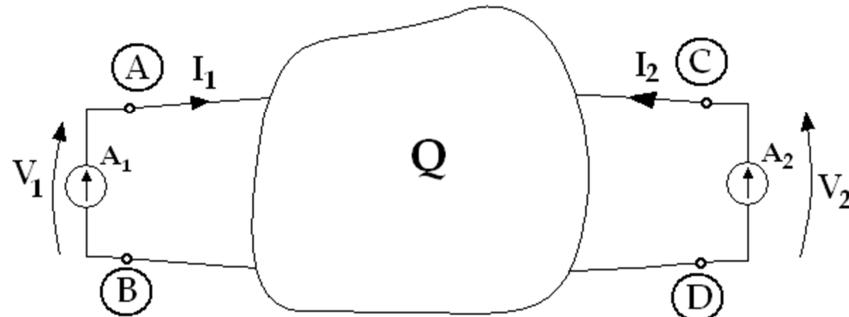


Figura 98: Terza ipotesi del teorema di rappresentazione dei doppi bipoli nel caso della rappresentazione R.

La tesi del teorema

Allora, vale la seguente tesi: nel circuito riportato in figura 97 è possibile sostituire al posto del quadripolo Q un modello equivalente (ovvero un quadripolo equivalente Q') del tipo riportato in figura 99, in modo tale che tutte le variabili circuituali misurate in ciascuno dei due bipoli del circuito iniziale risultino invariate.

Naturalmente sarà necessario calcolare in maniera opportuna tutti i parametri presenti nel quadripolo composito Q' .

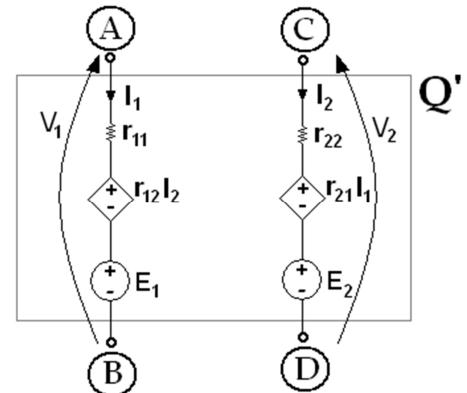


Figura 99: Il quadripolo equivalente ottenuto con la rappresentazione R .

Osservazione: doppio bipolo

Possiamo scrivere le seguenti relazioni, per la legge di Kirchhoff delle tensioni:

$$\begin{aligned}V_1 &= I_1 r_{11} + I_2 r_{12} + E_1 \\V_2 &= I_2 r_{22} + I_1 r_{21} + E_2\end{aligned}$$

Osserviamo inoltre dal circuito in figura 97 che, per la KLC ai due bipoli, abbiamo:

$$\begin{aligned}I_1 &= I'_1 \\I_2 &= I'_2\end{aligned}$$

Possiamo perciò osservare che l'equivalente R è un doppio bipolo.

Calcolo dei parametri dell'equivalente R attraverso le "prove semplici"

Per il calcolo dei parametri dell'equivalente R dobbiamo risolvere 3 circuiti:

- Circuito 1: Risolviamo il circuito riportato in figura 100.

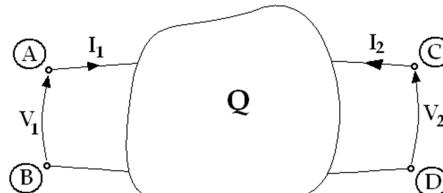


Figura 100: Risoluzione del primo circuito per il calcolo dei parametri dell'equivalente R .

Abbiamo così: $E_1 = V_1$ e $E_2 = V_2$.

- Circuito 2: Risolviamo il circuito in figura 101, ottenuto spegnendo tutti i generatori indipendenti di tensione e di corrente all'interno di Q e forzando alla porta 1 una corrente arbitraria $A_1 \neq 0$.

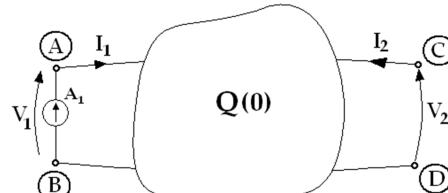


Figura 101: Risoluzione del secondo circuito per il calcolo dei parametri dell'equivalente R .

Otteniamo:

$$r_{11} = \frac{V_1}{A_1} \quad r_{21} = \frac{V_2}{A_1}$$

- Circuito 3: Risolviamo il circuito in figura 102, ottenuto spegnendo tutti i generatori indipendenti di tensione e di corrente all'interno di Q e forzando alla porta 2 una corrente arbitraria $A_2 \neq 0$.

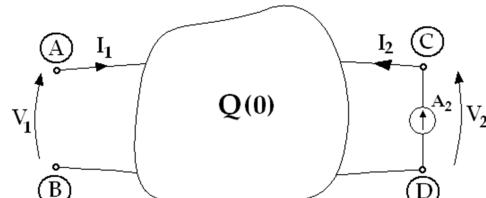


Figura 102: Risoluzione del terzo circuito per il calcolo dei parametri dell'equivalente R .

Otteniamo:

$$r_{22} = \frac{V_2}{A_2} \quad r_{12} = \frac{V_1}{A_2}$$

Dimostrazione

Consideriamo il circuito riportato in figura 98. Indichiamo con n_e il numero di generatori indipendenti di tensione contenuti in tale circuito e con n_a il numero di generatori indipendenti di corrente contenuti nel circuito stesso. Applicando il PSE possiamo ottenere la relazione:

$$V_1 = K_{11}A_1 + K_{12}A_2 + (K_{13}A_3 + \dots + K_{1n_a}A_{n_a} + H_{11}U_1 + \dots + K_{1n_e}U_{n_e})$$

Indicando:

$$E_1 = K_{13}A_3 + \dots + K_{1n_a}A_{n_a} + H_{11}U_1 + \dots + K_{1n_e}U_{n_e}$$

Possiamo scrivere:

$$V_1 = K_{11}A_1 + K_{12}A_2 + E_1$$

In maniera analoga, possiamo scrivere anche:

$$V_2 = K_{21}A_1 + K_{22}A_2 + (K_{23}A_3 + \dots + K_{2n_a}A_{n_a} + H_{21}U_1 + \dots + K_{2n_e}U_{n_e})$$

Indicando:

$$E_2 = K_{23}A_3 + \dots + K_{2n_a}A_{n_a} + H_{21}U_1 + \dots + K_{2n_e}U_{n_e}$$

Possiamo scrivere:

$$V_2 = K_{21}A_1 + K_{22}A_2 + E_2$$

Per la KCL, abbiamo inoltre:

$$I_1 = A_1$$

E

$$I_2 = A_2$$

Troviamo dunque:

$$V_1 = K_{11}I_1 + K_{12}I_2 + E_1$$

$$V_2 = K_{21}I_1 + K_{22}I_2 + E_2$$

Osserviamo che queste relazioni sono le stesse che caratterizzano il quadripolo Q' , purché si ponga:

$$K_{11} = r_{11}$$

$$K_{12} = r_{12}$$

$$K_{22} = r_{22}$$

$$K_{21} = r_{21}$$

Abbiamo in tal modo verificato che sostituendo Q' a Q nel circuito di partenza, non cambia la sua relazione costitutiva. Rimane ora da verificare il procedimento indicato per il calcolo dei parametri.

Osserviamo dalle relazioni precedentemente scritte che se poniamo $I_1 = 0$ e $I_2 = 0$, abbiamo:

$$V_1 = E_1$$

$$V_2 = E_2$$

Perciò, sostituendo nel circuito in figura 98 due circuiti aperti al posto dei generatori indipendenti di tensione e misurando le due tensioni di porta, otteniamo rispettivamente E_1 ed E_2 .

Se poniamo invece $E_1 = 0$ (e ciò equivale a spegnere tutti i generatori indipendenti presenti nel bipolo Q) e $I_2 = 0$, abbiamo:

$$\begin{aligned} V_1 &= K_{11}A_1 & \rightarrow & K_{11} = r_{11} = \frac{V_1}{A_1} \\ V_2 &= K_{21}A_1 & \rightarrow & K_{21} = r_{21} = \frac{V_2}{A_1} \end{aligned}$$

Osserviamo inoltre che la situazione sopra descritta ($E_1 = 0$ e $I_2 = 0$) equivale alla situazione rappresentata nel circuito in figura 101.

Infine, se poniamo $E_1 = 0$ (e ciò equivale a spegnere tutti i generatori indipendenti presenti nel bipolo Q) e $I_1 = 0$, abbiamo, in maniera analoga a quanto fatto al punto precedente:

$$\begin{aligned} V_1 &= K_{12}A_2 & \rightarrow & K_{12} = r_{12} = \frac{V_1}{A_2} \\ V_2 &= K_{22}A_2 & \rightarrow & K_{22} = r_{22} = \frac{V_2}{A_2} \end{aligned}$$

Osserviamo inoltre che la situazione sopra descritta ($E_1 = 0$ e $I_1 = 0$) equivale alla situazione rappresentata nel circuito in figura 102.

Osservazione sull'applicazione del teorema e sulla validità degli equivalenti

Il teorema di rappresentazione dei doppi bipoli può essere applicato solamente per circuiti particolari, che rispettino la topologia che abbiano introdotto all'inizio della trattazione di tale argomento. Questo accade perché il teorema richiede che valgano le relazioni $I_1 = I_1'$ e $I_2 = I_2'$. Tale relazione viene imposta dal fatto che i terminali di Q sono connessi a due a due ai due bipoli B_1 e B_2 , come mostrato in figura 97.

Dunque una differenza fondamentale tra i teoremi di Norton e Thevenin ed il teorema di rappresentazione dei doppi bipoli è che, mentre nel caso dei teoremi di Thevenin e Norton si ottengono per ogni bipolo degli equivalenti che possono essere sostituiti al bipolo dal quale sono stati ottenuti indipendentemente dal circuito nel quale esso è inserito, nel caso del teorema di rappresentazione dei doppi bipoli l'equivalente che si ottiene dipende anche dal circuito in cui il quadripolo stesso è connesso. Ad esempio, anche ammettendo che il quadripolo Q e i due bipoli B_1 e B_2 inseriti nei due circuiti in figura 103 siano gli stessi, i quadripoli equivalenti che si otterranno dai due circuiti per il quadripolo Q saranno tra loro diversi (otterremo due equivalenti che possiamo indicare con Q' e Q'' , e che saranno tra loro differenti per i parametri che li costituiscono).

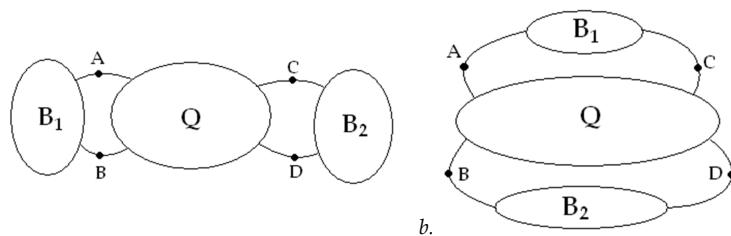


Figura 103: Esempio di circuiti diversi costituiti dagli stessi componenti composti ma connessi in maniera diversa, che perciò daranno quadripoli equivalenti R tra loro differenti.

Osservazione sulla terza ipotesi del teorema

Si vuole inoltre mettere in evidenza che, come nel caso dei teoremi di Thevenin e di Norton, non è necessario verificare la terza ipotesi del teorema di rappresentazione dei doppi bipoli in maniera esplicita, in quanto è sufficiente cercare di risolvere i tre circuiti riportati in figura 100, 101 e 102: se anche solo uno di tali circuiti ammette una e una sola soluzione saremo certi che anche i circuiti ottenuti fissando qualsiasi altro valore per i due generatori di corrente presenti nel circuito di figura 98 avrà una e una sola soluzione.

Scrittura matriciale

Le relazioni costitutive del doppio bipolo equivalente Q' sono spesso scritte in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix}$$

Dove la matrice

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix}$$

È detta "matrice R" o "matrice delle resistenze", mentre il vettore:

$$E = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix}$$

È semplicemente detto "termine noto".

Calcolo dei parametri dell'equivalente R senza utilizzare le "prove semplici"

Per il calcolo dei parametri del doppio bipolo equivalente R, che indichiamo con Q' , è possibile anche scegliere di non utilizzare le "prove semplici" (ovvero il metodo precedentemente illustrato, che consiste nella risoluzione di tre diversi circuiti), ma possiamo scegliere di lasciare indicati i parametri A_1 ed A_2 e risolvere il circuito in figura 98 ottenendo le due tensioni V_1 e V_2 in funzione di A_1 ed A_2 . Quelle ottenute saranno proprio le relazioni costitutive di Q' . Tale metodo risulta però simbolico e non verrà ulteriormente analizzato.

Caso 2: Rappresentazione G (o delle conduttanze)

Introduzione

Andiamo ora ad analizzare il secondo dei casi possibili. In questo caso, così come nei successivi, non andremo a ripercorrere in dettaglio tutti i passaggi fatti per la rappresentazione R e non ripeteremo le osservazioni già introdotte nel caso precedente.

La terza ipotesi

Valga, oltre alle due ipotesi comuni a tutti i 4 casi del teorema, anche una terza ipotesi:

- Il circuito rappresentato in figura 104 (ottenuto a partire da quello in figura 97 sostituendo ai due bipoli generici due generatori di tensione E_1 ed E_2) ammetta una e una sola soluzione.

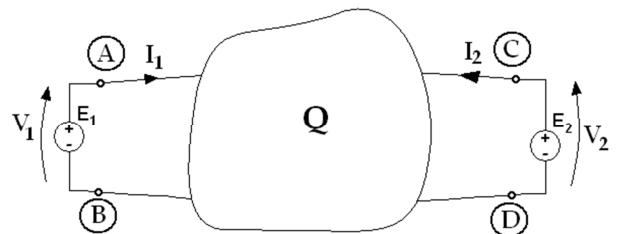


Figura 104: Terza ipotesi del teorema di rappresentazione dei doppi bipoli nel caso della rappresentazione G.

La tesi del teorema

Allora, vale la seguente tesi: nel circuito riportato in figura 97 è possibile sostituire al posto del quadripolo Q un modello equivalente (ovvero un quadripolo equivalente Q') del tipo riportato in figura 105, in modo tale che tutte le variabili circuituali misurate in ciascuno dei due bipoli del circuito iniziale risultino invariate.

Sarà necessario calcolare in maniera opportuna tutti i parametri presenti nel quadripolo composito Q' .

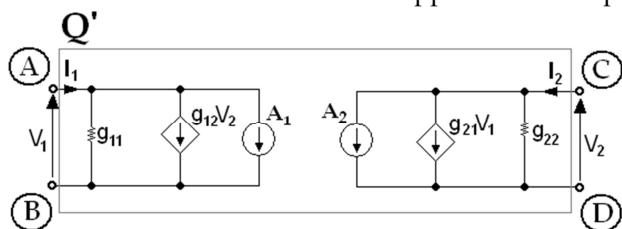


Figura 105: Il quadripolo equivalente ottenuto con la rappresentazione G.

Rappresentazione matriciale:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

Dove la matrice

$$G = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}$$

Prende il nome di "matrice delle conduttanze".

Calcolo dei parametri dell'equivalente G attraverso le "prove semplici"

Per il calcolo dei parametri dell'equivalente G dobbiamo risolvere 3 circuiti:

- Circuito 1: Risolviamo il circuito riportato in figura 106.

Abbiamo così: $A_1 = I_1$ e $A_2 = I_2$.

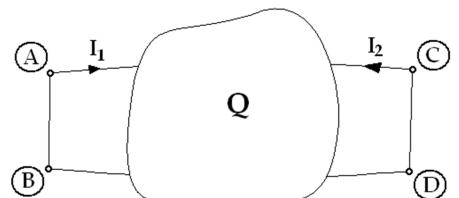
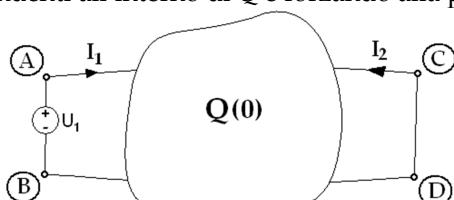


Figura 106: Risoluzione del primo circuito per il calcolo dei parametri dell'equivalente G.

- Circuito 2: Risolviamo il circuito riportato in figura 107, ottenuto spegnendo tutti i generatori indipendenti all'interno di Q e forzando alla porta 1 una tensione arbitraria $U_1 \neq 0$.

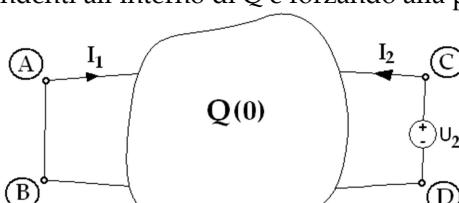


$$g_{11} = \frac{I_1}{U_1}$$

$$g_{21} = \frac{I_2}{U_1}$$

Figura 107: Risoluzione del secondo circuito per il calcolo dei parametri dell'equivalente G.

- Circuito 3: Risolviamo il circuito riportato in figura 108, ottenuto spegnendo tutti i generatori indipendenti all'interno di Q e forzando alla porta 2 una tensione arbitraria $U_2 \neq 0$.



$$g_{12} = \frac{I_1}{U_2}$$

$$g_{22} = \frac{I_2}{U_2}$$

Figura 108: Risoluzione del terzo circuito per il calcolo dei parametri dell'equivalente G.

Caso 3: Rappresentazione H (o ibrida 1)

La terza ipotesi

Valga, oltre alle due ipotesi comuni a tutti i 4 casi del teorema, anche una terza ipotesi:

3. Il circuito rappresentato in figura 109 (ottenuto a partire da quello in figura 97 sostituendo ai due bipoli generici un generatore di corrente A_1 e un generatore di tensione U_2) ammetta una e una sola soluzione.

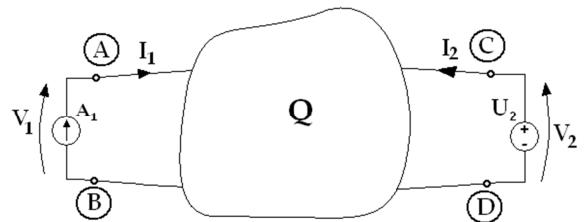
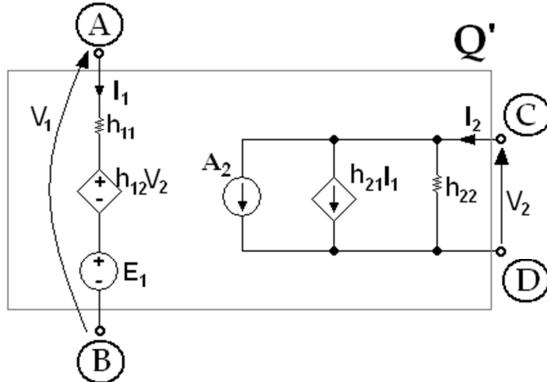


Figura 109: Terza ipotesi del teorema di rappresentazione dei doppi bipoli nel caso della rappresentazione H.

La tesi del teorema

Allora, vale la seguente tesi: nel circuito riportato in figura 97 è possibile sostituire al posto del quadripolo Q un modello equivalente (ovvero un quadripolo equivalente Q') del tipo riportato in figura 110, in modo tale che tutte le variabili circuituali misurate in ciascuno dei due bipoli del circuito iniziale risultino invariate.

Sarà necessario calcolare in maniera opportuna tutti i parametri presenti nel quadripolo composito Q' .



Rappresentazione matriciale:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$$

Dove i valori della matrice H hanno u.m.:

h_{11} : [Ω] (Ohm)

h_{12} : Adimensionale

h_{21} : Adimensionale

h_{22} : [Ω] (Ohm)

Figura 110: Il quadripolo equivalente ottenuto con la rappresentazione H.

Calcolo dei parametri dell'equivalente H attraverso le "prove semplici"

Per il calcolo dei parametri dell'equivalente H dobbiamo risolvere 3 circuiti:

- Circuito 1: Risolviamo il circuito riportato in figura 111.

Abbiamo così: $E_1 = V_1$ e $A_2 = I_2$.

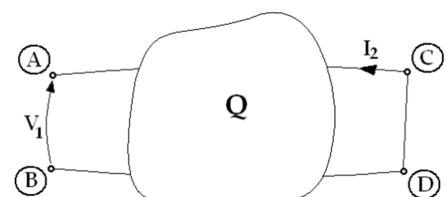
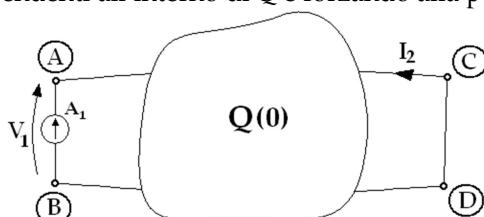


Figura 111: Risoluzione del primo circuito per il calcolo dei parametri dell'equivalente H.

- Circuito 2: Risolviamo il circuito riportato in figura 112, ottenuto spegnendo tutti i generatori indipendenti all'interno di Q e forzando alla porta 1 una corrente arbitraria $A_1 \neq 0$.

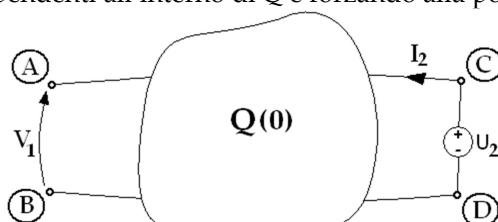


$$h_{11} = \frac{V_1}{A_1}$$

$$h_{21} = \frac{I_2}{A_1}$$

Figura 112: Risoluzione del secondo circuito per il calcolo dei parametri dell'equivalente H.

- Circuito 3: Risolviamo il circuito riportato in figura 113, ottenuto spegnendo tutti i generatori di indipendenti all'interno di Q e forzando alla porta 2 una tensione arbitraria $U_2 \neq 0$.



$$h_{12} = \frac{V_1}{U_2}$$

$$h_{22} = \frac{I_2}{U_2}$$

Figura 113: Risoluzione del terzo circuito per il calcolo dei parametri dell'equivalente H.

Caso 4: Rappresentazione H' (o ibrida 2)

La terza ipotesi

Valga, oltre alle due ipotesi comuni a tutti i 6 casi del teorema, anche una terza ipotesi:

4. Il circuito rappresentato in figura 114 (ottenuto a partire da quello in figura 97 sostituendo ai due bipoli generici un generatore di tensione U_1 e un generatore di corrente A_2) ammetta una e una sola soluzione.

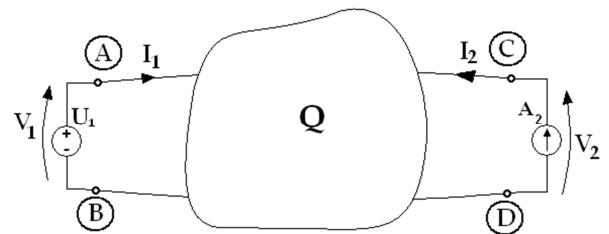


Figura 114: Terza ipotesi del teorema di rappresentazione dei doppi bipoli nel caso della rappresentazione H' .

La tesi del teorema

Allora, vale la seguente tesi: nel circuito riportato in figura 97 è possibile sostituire al posto del quadripolo Q un modello equivalente (ovvero un quadripolo equivalente Q') del tipo riportato in figura 115, in modo tale che tutte le variabili circuituali misurate in ciascuno dei due bipoli del circuito iniziale risultino invariate. Sarà necessario calcolare in maniera opportuna tutti i parametri presenti nel quadripolo composito Q' .

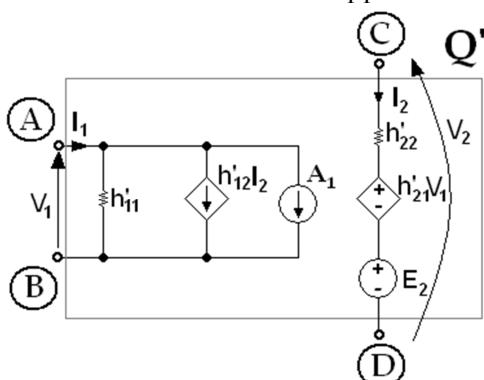


Figura 115: Il quadripolo equivalente ottenuto con la rappresentazione H' .

Rappresentazione matriciale:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h'_{11} & h'_{12} \\ h'_{21} & h'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_1 \\ E_2 \end{bmatrix}$$

Dove i valori della matrice H' hanno u.m.:

h'_{11} : [S] (Siemens)

h'_{12} : Adimensionale

h'_{21} : Adimensionale

h'_{22} : [Ω] (Ohm)

Calcolo dei parametri dell'equivalente H' attraverso le "prove semplici"

Per il calcolo dei parametri dell'equivalente H' dobbiamo risolvere 3 circuiti:

- Circuito 1: Risolviamo il circuito riportato in figura 116.

Abbiamo così: $A_1 = I_1$ e $E_2 = V_2$.

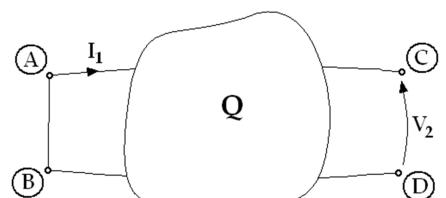
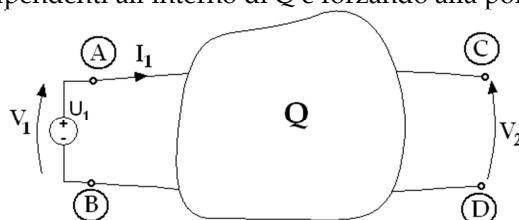


Figura 116: Risoluzione del primo circuito per il calcolo dei parametri dell'equivalente H' .

- Circuito 2: Risolviamo il circuito riportato in figura 117, ottenuto spegnendo tutti i generatori indipendenti all'interno di Q e forzando alla porta 1 una tensione arbitraria $U_1 \neq 0$.

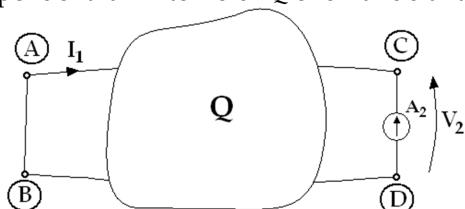


$$h'_{11} = \frac{I_1}{U_1}$$

$$h'_{21} = \frac{V_2}{U_1}$$

Figura 117: Risoluzione del secondo circuito per il calcolo dei parametri dell'equivalente H' .

- Circuito 3: Risolviamo il circuito riportato in figura 118, ottenuto spegnendo tutti i generatori indipendenti all'interno di Q e forzando alla porta 2 una corrente arbitraria $A_2 \neq 0$.



$$h'_{12} = \frac{I_1}{A_2}$$

$$h'_{22} = \frac{V_2}{A_2}$$

Figura 118: Risoluzione del terzo circuito per il calcolo dei parametri dell'equivalente H' .

Rappresentazione equivalente di un tripolo

Il teorema di rappresentazione di un tripolo

Quanto abbiamo visto nei precedenti paragrafi a riguardo dei quadripoli può essere esteso anche al caso di un tripolo.

A tal fine, si consideri un tripolo T_1 , costituito esclusivamente da componenti lineari e al più generatori indipendenti di corrente e/o tensione, connesso ad un tripolo qualsiasi T_2 (eventualmente composito).

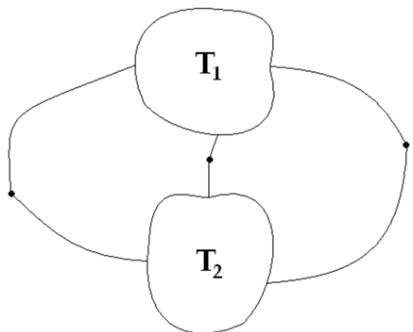


Figura 119: Le ipotesi per la rappresentazione equivalente di un tripolo

Analogamente a quanto visto per i quadripoli, possiamo sostituire al tripolo T_1 un tripolo equivalente T'_1 , in modo tale che tutte le variabili circitali all'interno del tripolo T_2 risultino inalterate.

L'applicazione del teorema

Il tripolo T'_1 da sostituirsì a T_1 può essere ottenuto in maniera analoga a quanto visto per i quadripoli: anche nel caso del tripolo avremo perciò 6 diverse possibili rappresentazioni, delle quali ne verranno qui affrontate solamente 4.

Potremo ottenere la rappresentazione del tripolo riconducendoci al caso generale del quadripolo: a tal fine, è sufficiente trasformare il tripolo T_1 in un quadripolo, attraverso l'introduzione di un nuovo terminale, ottenuto "sdoppiando" uno dei terminali del tripolo stesso.

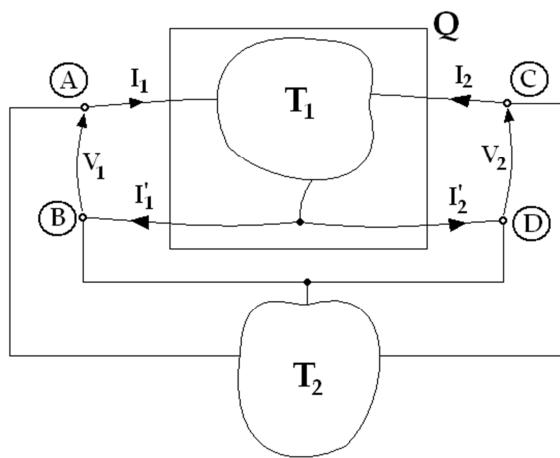


Figura 120: Trasformazione del tripolo in un quadripolo al fine di applicare il teorema di rappresentazione dei doppi bipoli

Siccome possiamo supporre $I_1 = I'_1$ e $I_2 = I'_2$, possiamo rappresentare Q come quadripolo. Dall'applicazione del teorema di rappresentazione dei doppi bipoli otterremo, ad esempio, la rappresentazione R del tripolo.

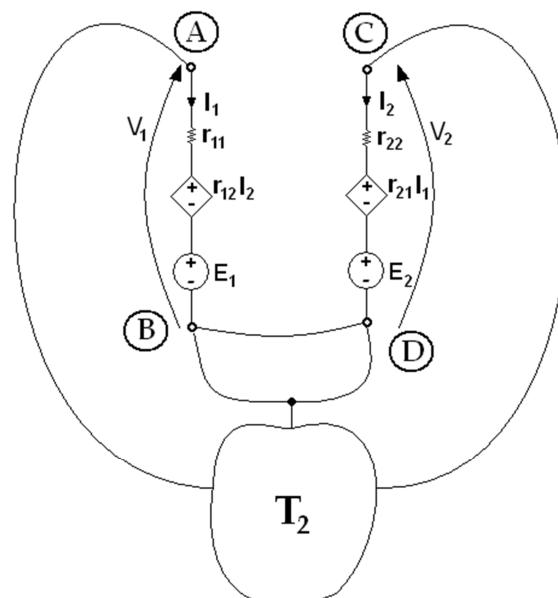


Figura 121: Sostituzione della rappresentazione R all'interno del circuito dato.

Possiamo poi eliminare il cortocircuito introdotto, in modo tale da ottenere effettivamente un tripolo, che possiamo considerare connesso al tripolo T_2 (vedi figura 122).

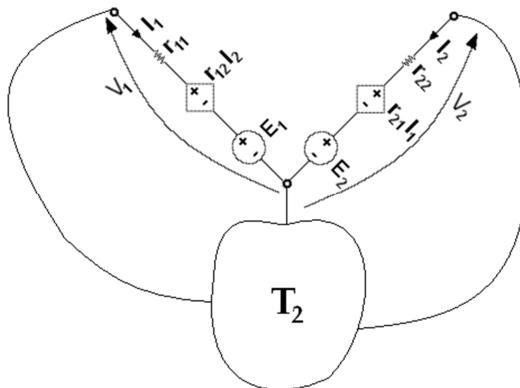


Figura 122: Eliminazione del cortocircuito.

Naturalmente in genere nello svolgimento degli esercizi è possibile saltare i passaggi precedenti e sostituire direttamente il tripolo equivalente nel circuito.

Possibili rappresentazioni per un tripolo

Come già messo in evidenza, si avranno per ogni tripolo le 4 possibili rappresentazioni già introdotte per i quadripoli: la rappresentazione R, la rappresentazione G e le due rappresentazioni ibride H e H'. Oltre a tali possibilità però nel caso del tripolo il modello ottenuto dipende anche dal terminale che si decide di "sdoppiare", come evidenziato in figura 123.

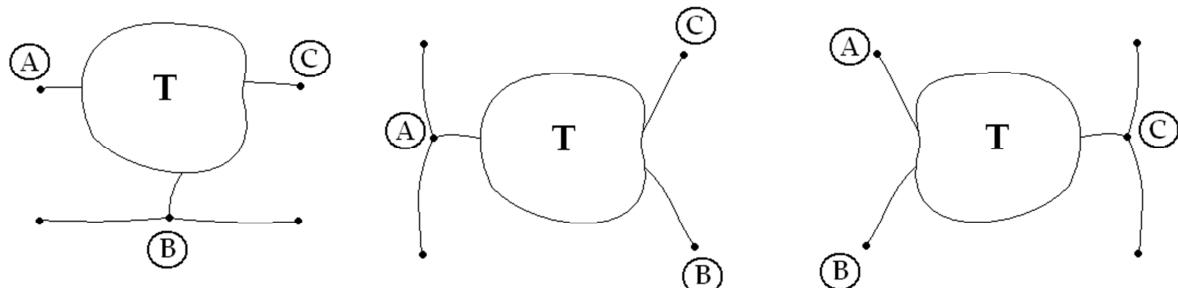


Figura 123: Possibili scelte del nodo da "sdoppiare".

Per ogni tripolo avremo così $3 \times 4 = 12$ possibili rappresentazioni tra loro diverse. Ciò che differenzia il caso del tripolo da quello del quadripolo è che ciascuno di questi modelli è indipendente dal resto del circuito.

Trasformazione stella-triangolo

Introduzione

Come esempio di applicazione di quanto appena visto, affrontiamo ora la dimostrazione di alcune formule che possono essere applicate per risolvere alcuni circuiti, trasformando un tripolo detto di tipo "stella" in un tripolo di tipo "triangolo".

Tripolo stella e tripolo triangolo

Il tripolo stella e il tripolo triangolo sono costituiti entrambi da tre resistenze, connesse come in figura 124.

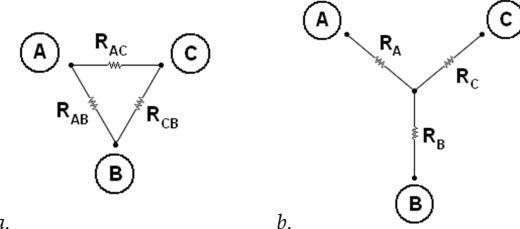


Figura 124: Tripolo triangolo (a) e tripolo stella (b).

Rappresentazione G del tripolo stella

Otteniamo ora la trasformazione G del tripolo stella. Per farlo, dobbiamo risolvere i seguenti circuiti:

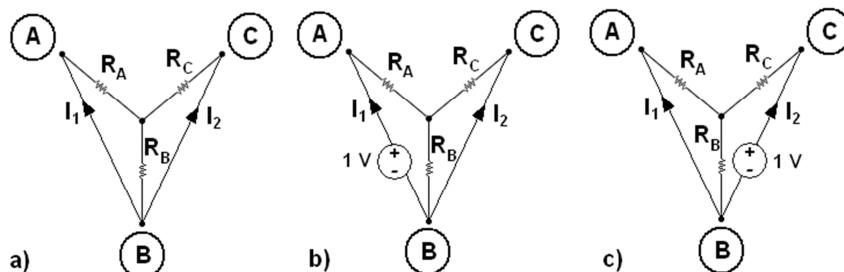


Figura 125: Circuiti per ottenere la rappresentazione G del tripolo stella.

- a) Nel circuito a) non sono presenti generatori indipendenti, perciò possiamo dire che abbiamo:

$$I_1 = I_2 = 0$$

Da cui segue:

$$A_1 = A_2 = 0$$

- b) Risolviamo ora il circuito in figura 125 b):

Possiamo sostituire alle tre resistenze una sola resistenza, data dalla serie tra la resistenza R_A e l'equivalente parallelo delle resistenze R_B ed R_C. Applicando poi la legge di Ohm, otteniamo:

$$I_1 = \frac{1V}{R_A + \frac{R_B R_C}{R_B + R_C}} = \frac{1V}{R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C}$$

Possiamo poi determinare I₂ applicando il partitore di corrente:

$$I_2 = -I_1 \frac{R_B}{R_B + R_C} = -\frac{R_B + R_C}{R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C} \cdot \frac{R_B}{R_B + R_C} = -\frac{R_B}{R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C}$$

Ricaviamo in tal modo:

$$g_{11} = \frac{R_B + R_C}{R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C} \quad g_{21} = -\frac{R_B}{R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C}$$

- c) Risolviamo il circuito in figura 125 c) in modo analogo a quanto visto per il circuito b):

Sostituiamo alle 3 resistenze una sola resistenza, data dalla serie tra la resistenza R_C e l'equivalente parallelo delle resistenze R_B ed R_A. Applicando poi la legge di Ohm, otteniamo:

$$I_2 = \frac{1V}{R_C + \frac{R_B R_A}{R_B + R_A}} = \frac{1V}{R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C}$$

Possiamo poi determinare I₁ applicando il partitore di corrente:

$$I_1 = -I_2 \frac{R_B}{R_A + R_B} = -\frac{R_B + R_A}{R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C} \cdot \frac{R_B}{R_A + R_B} = -\frac{R_B}{R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C}$$

Ricaviamo in tal modo:

$$g_{22} = \frac{R_B + R_A}{R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C} \quad g_{12} = -\frac{R_B}{R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C}$$

Rappresentazione G del tripolo triangolo

Otteniamo ora la trasformazione G del tripolo triangolo. Per farlo, dobbiamo risolvere i seguenti circuiti:

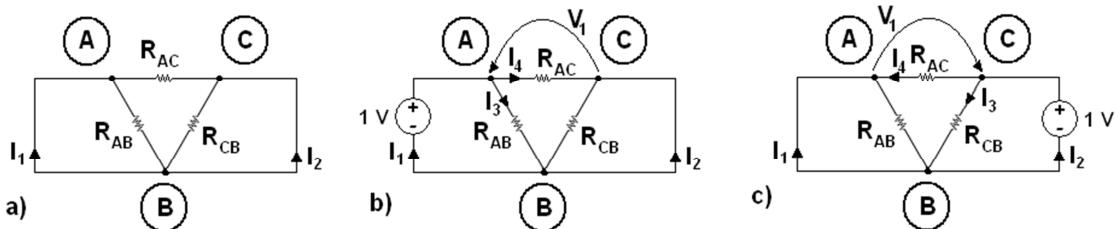


Figura 126: Circuiti per ottenere la rappresentazione G del tripolo triangolo.

- a) Nel circuito a) non sono presenti generatori indipendenti, perciò possiamo dire che abbiamo:

$$I_1 = I_2 = 0$$

Da cui segue:

$$A_1 = A_2 = 0$$

- b) Risolviamo ora il circuito in figura 126 b):

Abbiamo, per la legge di Ohm:

$$I_3 = \frac{1V}{R_{AB}} = \frac{1}{R_{AB}}$$

Siccome la tensione ai capi del cortocircuito è nulla, possiamo applicare la KVL, dalla quale ricaviamo:

$$V_1 = 1V$$

Per la legge di Ohm:

$$I_4 = \frac{V_1}{R_{AC}} = \frac{1}{R_{AC}}$$

Siccome poi la tensione ai capi di R_{CB} è nulla, in virtù della legge di Ohm anche la corrente è nulla. Ne ricaviamo, applicando la KCL ai nodi A e C:

$$I_1 = \frac{1}{R_{AB}} + \frac{1}{R_{AC}}$$

$$I_2 = -\frac{1}{R_{AC}}$$

Da cui otteniamo:

$$g_{11} = \frac{1}{R_{AB}} + \frac{1}{R_{AC}}$$

$$g_{21} = -\frac{1}{R_{AC}}$$

- c) Risolviamo il circuito in figura 126 c) in modo analogo a quanto visto per il circuito b):

Abbiamo, per la legge di Ohm:

$$I_3 = \frac{1V}{R_{CB}} = \frac{1}{R_{CB}}$$

Siccome la tensione ai capi del cortocircuito è nulla, possiamo applicare la KVL, dalla quale ricaviamo:

$$V_1 = 1V$$

Per la legge di Ohm:

$$I_4 = \frac{V_1}{R_{AC}} = \frac{1}{R_{AC}}$$

Siccome poi la tensione ai capi di R_{AB} è nulla, in virtù della legge di Ohm anche la corrente è nulla. Ne ricaviamo, applicando la KCL ai nodi A e C:

$$I_1 = -\frac{1}{R_{AC}}$$

$$I_2 = \frac{1}{R_{AC}} + \frac{1}{R_{CB}}$$

Da cui otteniamo:

$$g_{12} = -\frac{1}{R_{AC}}$$

$$g_{22} = \frac{1}{R_{AC}} + \frac{1}{R_{CB}}$$

Dimostrazione delle formule

Abbiamo così ricavato gli equivalenti del tripolo stella e del tripolo triangolo. A patto che le resistenze siano opportunamente dimensionate, i due tripoli saranno perciò equivalenti ad uno stesso tripolo ottenuto dalla loro rappresentazione G. In tal caso, potremo sostituire al tripolo stella il tripolo triangolo.

Le relazioni che devono legare le resistenze possono essere ricavate uguagliando i parametri degli equivalenti G appena ottenuti:

- Uguagliamo i parametri g_{21} :

$$-\frac{R_B}{R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C} = -\frac{1}{R_{AC}}$$

Otteniamo così:

$$R_{AC} = \frac{R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C}{R_B} = R_A + R_C + \frac{R_A R_C}{R_B}$$

- Uguagliamo i parametri g_{11} :

$$\frac{R_B + R_C}{R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C} = \frac{1}{R_{AB}} + \frac{1}{R_{AC}}$$

Otteniamo così:

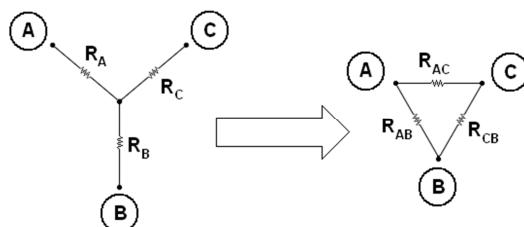
$$\begin{aligned} \frac{1}{R_{AB}} &= \frac{R_B + R_C}{R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C} - \frac{1}{R_{AC}} = \\ \frac{1}{R_{AB}} &= \frac{\frac{R_B + R_C}{R_B + R_C} R_B + R_C}{R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C} - \frac{R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C}{R_B} = \\ \frac{R_{AB}}{R_C} &= \frac{R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C}{R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C} = R_A + R_B + \frac{R_A R_B}{R_C} \end{aligned}$$

- Uguagliamo i parametri g_{22} :

$$\begin{aligned} \frac{R_B + R_A}{R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C} &= \frac{1}{R_{AC}} + \frac{1}{R_{CB}} \\ \frac{1}{R_{CB}} &= \frac{\frac{R_B + R_A}{R_B + R_A} R_B + R_A}{R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C} - \frac{R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C}{R_B} = \\ R_{CB} &= \frac{R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C}{R_A} = R_C + R_B + \frac{R_C R_B}{R_A} \end{aligned}$$

Riepilogo delle formule

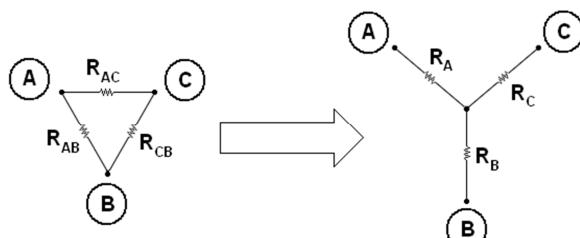
Possiamo così riassumere le formule ricavate:



$$\begin{aligned} R_{AB} &= R_A + R_B + \frac{R_A R_B}{R_C} \\ R_{AC} &= R_A + R_C + \frac{R_A R_C}{R_B} \\ R_{CB} &= R_C + R_B + \frac{R_C R_B}{R_A} \end{aligned}$$

Figura 127: Trasformazione stella-triangolo.

Possiamo inoltre dimostrare le formule inverse attraverso un procedimento analogo, ma calcolando le rappresentazioni R del tripolo stella e del tripolo triangolo. Riportiamo di seguito il risultato di tali calcoli:

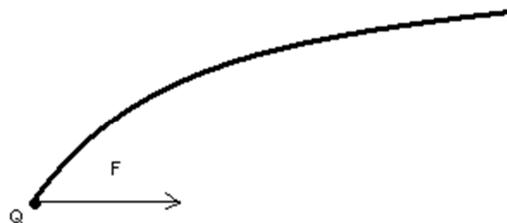


$$\begin{aligned} R_A &= \frac{R_{AB} R_{AC}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{AC}} \\ R_B &= \frac{R_{AB} R_{BC}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{AC}} \\ R_C &= \frac{R_{BC} R_{AC}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{AC}} \end{aligned}$$

Figura 128: Trasformazione triangolo-stella.

7. Fenomeni e circuiti fisico-magnetici

La legge del campo elettrico afferma che il campo è dato dal rapporto tra la forza \vec{F} e la quantità di carica Q , dove per forza \vec{F} si intende quella applicata sulla carica stessa.



Da ciò si ottiene il seguente rapporto: $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q}$ da cui: $\vec{F} = Q \cdot \vec{E}$

Queste leggi valgono nel caso di carica non di prova q ferma in un sistema di riferimento inerziale. Come si trasformano le relazioni nel caso di cariche in moto?

Si parla, in questi casi, di fenomeni elettromagnetici, secondo cui $\vec{F} = Q \cdot \vec{E} + Q\vec{v} \times \vec{B}$, dove \vec{v} e \vec{B} indicano rispettivamente il vettore velocità e il vettore induzione magnetica. La forza risulta, quindi, essere uguale alla forza in situazione statica, sommata alla forza $Q\vec{v} \times \vec{B}$, detta forza di Lorentz, data dal prodotto vettoriale tra vettore velocità e vettore induzione magnetica, moltiplicati per la quantità di carica.

Un fenomeno magnetico può essere descritto, in ogni istante, da due campi:

- \vec{B} : è l'induzione magnetica e si misura in Tesla [T] = [V s m⁻²]
- \vec{H} : è il campo magnetico e si misura in Ampere per metro [A m]

I due campi sono collegati dalla relazione $\vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$, dove μ è il coefficiente di conducibilità del materiale.

Come visto in precedenza, le leggi a cui rispondono i fenomeni elettrostatici sono tre:

- Legge di irrotationalità del campo elettrico: $\int_{\Gamma} \vec{E} \cdot \vec{t} \cdot d\Gamma = 0$
- Legge di solenoidalità: $\int_{\Sigma} \vec{J} \cdot \vec{n} \cdot d\Sigma = 0$
- Legge di Ohm: $\vec{j} = \sigma \cdot (\vec{E} + \vec{E}_m)$

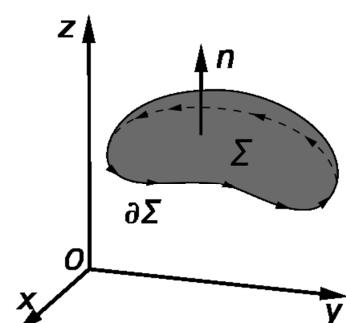
In maniera del tutto equivalente, il campo elettrico risponde a tre leggi:

- Legge di solenoidalità dell'induzione magnetica: come per il campo elettrico possiamo trovare una proprietà integrale che descriva il vettore di induzione magnetica lungo una superficie $d\Sigma$.

Questa proprietà è quella che più avanti indicheremo come flusso magnetico. A differenza di quanto accade per il campo elettrico, non è mai stata osservata una particella che si comporti come un monopolo magnetico, dunque il flusso di B è nullo (esistendo bipoli di segno opposto).

$$\int_{\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{n} \cdot d\Sigma = 0$$

- Legge di Ampere: mette in relazione il campo magnetico \vec{H} e la



densità di corrente elettrica \vec{J} . Presa una superficie Σ e una linea $\Gamma = \partial\Sigma$, orientata e condotta sul bordo della superficie, orientiamo di conseguenza, tramite la regola della mano destra (è indicata con un punto se uscente dal piano, con una x se entrante).

Si ha che:

$$\int_{\Gamma} \vec{H} \cdot \vec{t} \cdot d\Gamma = \int_{\Sigma} \vec{J} \cdot \vec{n} \cdot d\Sigma$$

Nel caso in figura, il vettore \vec{J} ha verso uscente dalla sezione, per la regola della mano destra.

$$\int_{\Gamma} \vec{H} \cdot \vec{t} \cdot d\Gamma = \int_{\Sigma} \vec{J} \cdot \vec{n} \cdot d\Sigma = I$$

Consideriamo adesso una superficie chiusa, ad esempio una sfera. Si ha che

$$\int_{\Gamma} \vec{H} \cdot \vec{t} \cdot d\Gamma = 0$$

Quindi

$$\int_{\Sigma} \vec{J} \cdot \vec{n} \cdot d\Sigma = 0$$

ovvero si verifica la legge di solenoidalità di \vec{J} .

Legge di Ampere applicata alla superficie Σ

- Legge locale (di Ohm magnetica): Il campo magnetico e l'induzione magnetica sono in proporzione, a meno di due costanti:

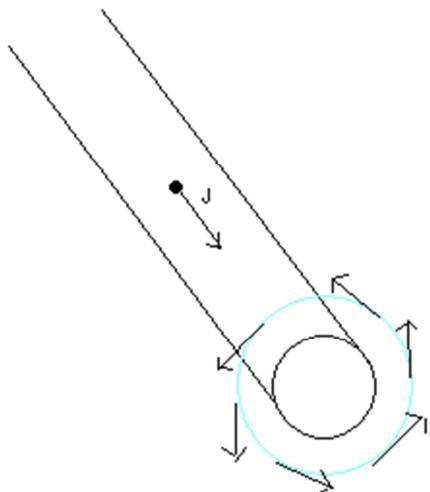
$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$$

dove μ è detta permeabilità magnetica e si misura in [H/m] e

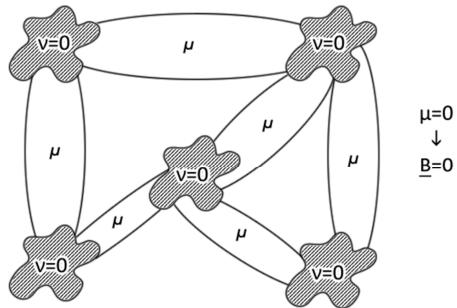
$$\vec{H} = \nu \vec{B}$$

on μ_0 si intende il coefficiente di permeabilità nel vuoto.

Con $\nu = 1/\mu$ si indica la relattività magnetica.



Circuiti magnetici



Gli elementi del circuito presentano proprietà magnetiche.
In questo caso le regioni tratteggiate presentano un valore di $\mu = \infty$, pertanto $v = 0$.

Modello fisico con componenti magnetici

Le ipotesi sono le seguenti:

- Campo magnetico nelle regioni pari a zero
- Nell'aria il coefficiente $\mu = 0$, pertanto $\vec{B} = 0$
- $\vec{J} = 0$ in tutte le regioni con $\mu \neq 0$: queste regioni non sono attraversate da corrente

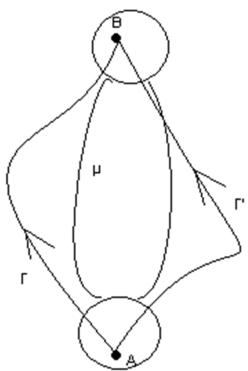
Per Tensione magnetica intendiamo

$$\int_{\Gamma} \vec{H} \cdot \vec{t} \cdot d\Gamma = F_{AB}$$

e si valuta tra regioni a $v = 0$.

Se consideriamo un diverso punto di arrivo all'interno della regione ($\Gamma_{AB} \neq \Gamma_{AB'}$), l'integrale di linea resta invariato, poiché tra B e B' si ha $v = 0$, in quanto la regione non varia e, di conseguenza, $\vec{H} = v \cdot \vec{B} = 0 \rightarrow \int_{\Gamma} \vec{H} \cdot \vec{t} \cdot d\Gamma = 0$.

Questo è il motivo per cui possiamo considerare la regione come un unico punto. La tensione magnetica non dipende dalla linea tracciata, ma solo dal punto di partenza e di arrivo, in quanto qualsiasi punto preso all'interno della regione stessa mantiene invariate le proprietà.



$$\int_{\Gamma_{AB} U (-\Gamma'_{AB})} \vec{H} \cdot \vec{t} \cdot d\Gamma = 0$$

Con flusso magnetico si definisce l'integrale

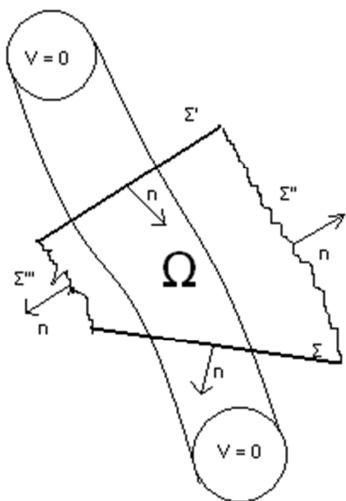
$$\int_{\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{n} \cdot d\Sigma = \varphi$$

Per la scelta della superficie Σ si utilizzano le sezioni delle regioni con $\mu \neq 0$.

Cambiando la sezione il valore del flusso magnetico resta invariato

$$\int_{\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{n} \cdot d\Sigma = \int_{\Sigma'} \vec{B} \cdot \vec{n} \cdot d\Sigma$$

Se si considerano due sezioni con le estremità racchiuse in una regione Ω



$$\int_{\Sigma \cup (-\Sigma') \cup \Sigma''} \vec{B} \cdot \vec{n} \cdot d\Sigma = 0$$

$$\int_{\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{n} \cdot d\Sigma - \int_{\Sigma'} \vec{B} \cdot \vec{n} \cdot d\Sigma + \int_{\Sigma''} \vec{B} \cdot \vec{n} \cdot d\Sigma = 0$$

In Σ'' , le linee si trovano in regione con $\mu = 0$ e quindi $\vec{\beta} = \mu \cdot \vec{H} = 0$. Ne consegue che

$$\int_{\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{n} \cdot d\Sigma = \int_{\Sigma'} \vec{B} \cdot \vec{n} \cdot d\Sigma$$

In generale

$$F_{AB} = R_0 \cdot \varphi$$

dove R_0 prende il nome di *riluttanza* [H^{-1}], essendo $P=1/R$,
 $\varphi = P \cdot F_{AB}$

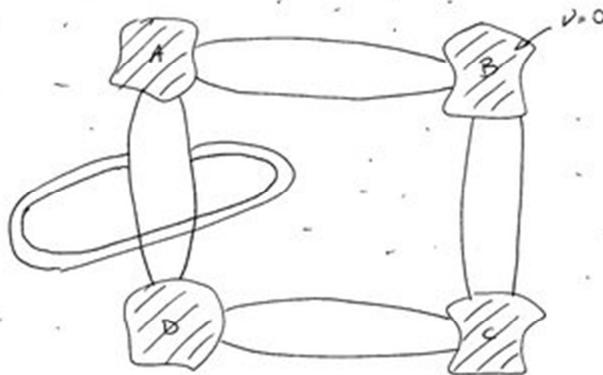
Relazioni costitutive del campo di induzione magnetica e il campo magnetico:

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\vec{H} = \nu \vec{B}$$

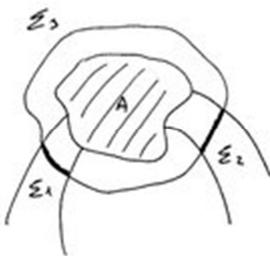
REGOLA PRATICA per il passaggio da circuito fisico magnetico ad uno schema circuitale:

A partire da un circuito fisico magnetico di questo tipo:



Consideriamo le regioni A, B, C, D a riluttività nulla $v=0$ [m/H], e ipotizziamo che le restanti regioni siano a permeabilità e riluttività non nulle. In mezzo a queste regioni vi è un materiale a permeabilità nulla $\mu=0$. Intorno ad una regione a riluttività e permeabilità non nulle consideriamo un circuito elettrico come quello studiato in precedenza, che genera un campo elettrico producendo nel circuito fisico una tensione magnetica.

Considerando una regione Ω attorno ad un nodo del circuito (come visto per il flusso magnetico), possiamo scrivere la seguente legge:



$$\int_{\Sigma_1} \vec{B} \cdot \vec{n} \cdot d\Sigma^1 + \int_{\Sigma_2} \vec{B} \cdot \vec{n} \cdot d\Sigma^2 + \int_{\Sigma_3} \vec{B} \cdot \vec{n} \cdot d\Sigma^3 = 0$$

Essendo:

$$\int_{\Sigma_3} \vec{B} \cdot \vec{n} \cdot d\Sigma^3 = 0$$

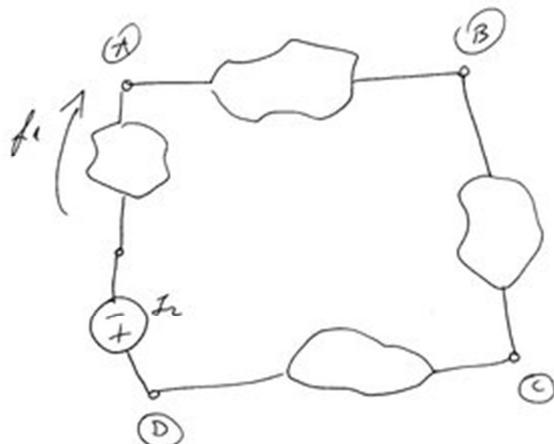
In quanto $\mu=0$, si può riscrivere la formula come:

$$\phi_1 + \phi_2 = 0$$

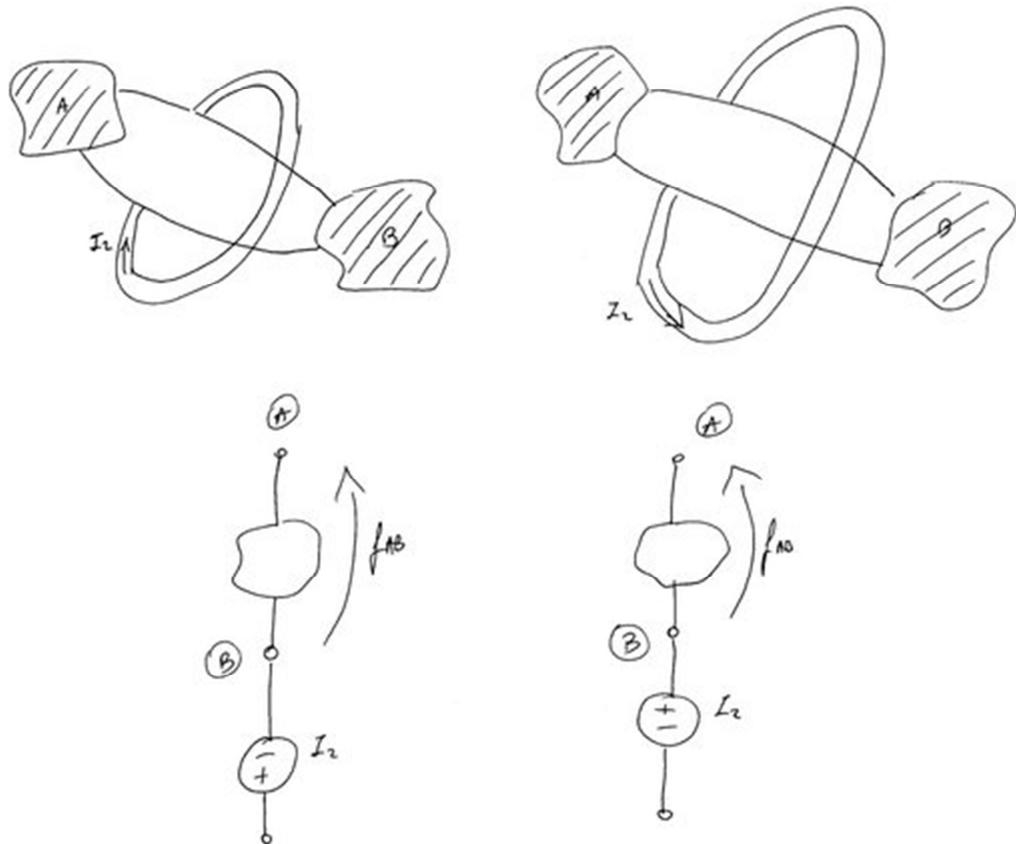
Considerando invece la maglia sul circuito (linea chiusa che attraversa i quattro nodi) otteniamo la seguente equazione:

$$\int_{\Gamma_1} \vec{H} \cdot \vec{t} \cdot d\Gamma_1 + \int_{\Gamma_2} \vec{H} \cdot \vec{t} \cdot d\Gamma_2 + \int_{\Gamma_3} \vec{H} \cdot \vec{t} \cdot d\Gamma_3 + \int_{\Gamma_4} \vec{H} \cdot \vec{t} \cdot d\Gamma_4 = \int_{\Gamma} \vec{H} \cdot \vec{t} \cdot d\Gamma = \int_{\Sigma} \vec{J} \cdot \vec{n} \cdot d\Sigma$$

Non essendo tale relazione uguale a zero, si è pensato di modificare lo schema circuitale inserendo un generatore di tensione magnetica che forza una corrente nel circuito.



Per determinare le caratteristiche del generatore inserito si procede come nel seguente schema:

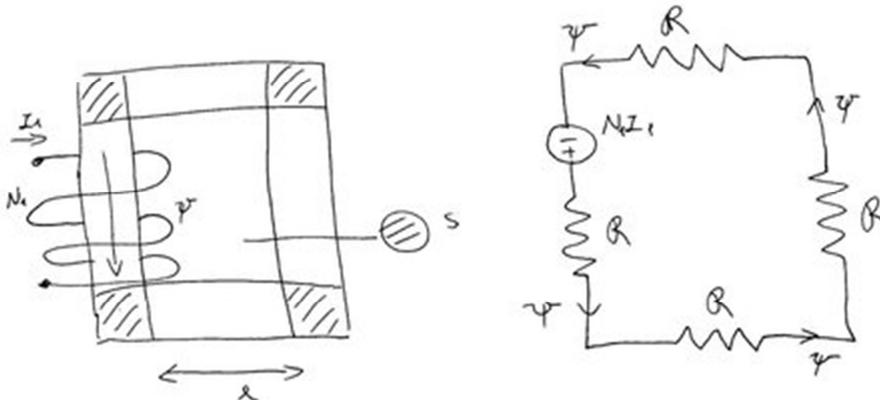


Per quanto riguarda il verso del generatore invece, si può notare come sia stata utilizzata la "regola della mano destra".

Per stabilire invece il valore delle riluttanze negli altri componenti (resistenze del circuito), si utilizza la seguente formula:

$$R = \frac{l}{S} \cdot \frac{1}{\mu}$$

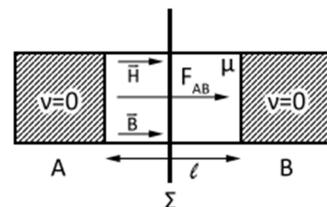
Dove l è la lunghezza del tratto, ed S è la superficie della sezione.



- *Esempio*

Definiamo flusso e tensione magnetica in figura:

$$\begin{aligned} F_{AB} &= \int_{\Gamma_{AB}} \vec{H} \cdot \vec{t} = \vec{H}_x \cdot l \\ \varphi_{AB} &= \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{n} = \vec{B}_x \cdot S \end{aligned}$$



Data la relazione $\vec{B}_x = \mu \cdot \vec{H}_x$ possiamo dire che:

$$\varphi_{AB} = \mu \cdot S \cdot \vec{H}_x = (\mu \cdot \frac{S}{l}) F_{AB}, \text{ oppure che } F_{AB} = \frac{l}{\mu S} \cdot \varphi_{AB}$$

dove $R_0 = L/\mu S$

R_0 è la riluttanza, e il suo inverso è la permettanza P_0 e le relazioni costitutive:

$$\begin{aligned} F_{AB} &= R_0 \cdot \varphi_{AB} \\ \varphi_{AB} &= P_0 \cdot F_{AB} \end{aligned}$$

- **Campi variabili (fenomeni di elettro-magnetismo)**

Se i campi variano nel tempo, i fenomeni elettrici e magnetici si influenzano. Le due tipologie di campo non saranno più considerabili come indipendenti ma all'interno di un unico fenomeno, detto appunto fenomeno elettromagnetico.

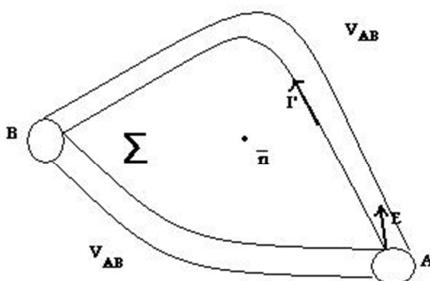
Le leggi dei campi costanti, però, non sono più valide nei circuiti magnetici, ad eccezione della solenoidalità del campo elettrico. Tuttavia è possibile modificare le leggi per applicarle al circuito magnetico.

Generalizzazione della legge di irrotationalità del campo magnetico: Faraday – Neumann - Lens

Consideriamo una linea orientata chiusa. La circolazione vale:

$$\int_{\Gamma} \vec{E} \cdot \vec{t} \cdot d\Gamma = - \frac{d}{dt} \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{n} \cdot d\Sigma$$

dove Γ è il bordo .



Per il principio di irrotazionalità del campo elettrico, se consideriamo una linea orientata chiusa la circolazione risulta essere nulla. Ciò vale per Γ e Σ superfici e linee fisse.

Da questa legge è intuitibile che la tensione elettrica è, in qualche modo, influenzata dai fenomeni magnetici.

In particolare per la legge di Faraday avremo che :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{n} \cdot d\Sigma = 0$$

(legge di solenoidalità di \vec{B})

Legge di Ampere – Maxwell

La circolazione del campo magnetico lungo la linea Γ non è dato solo dal flusso di J lunga la linea Σ . Bisogna, infatti, considerare ciò che deriva dal campo elettrico, ovvero:

$$\int_{\Gamma} \vec{H} \cdot \vec{t} \cdot d\Gamma = \int_{\Sigma} \vec{J} \cdot \vec{n} \cdot d\Sigma + \frac{d}{dt} \int_{\Sigma} \vec{D} \cdot \vec{n} \cdot d\Sigma$$

alla Legge di Ampere osservata nei paragrafi precedenti si aggiunge quindi un termine che viene definito come vettore di spostamento elettrico o induzione dielettrica.

Da ciò si ricava che laddove $\vec{B} = \mu \cdot \vec{H} = 0$:

$$\int_{\Sigma} \vec{J} \cdot \vec{n} \cdot d\Sigma + \frac{d}{dt} \int_{\Sigma} \vec{D} \cdot \vec{n} \cdot d\Sigma = 0$$

Oltre a modificare le due leggi che già abbiamo studiato per il circuito magnetico, dobbiamo però discutere il comportamento dei materiali del circuito in un campo variabile. Continuano a valere le seguenti relazioni:

1) $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ (proprietà conduttore) 2) $\vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$ (proprietà magnetica)

A queste due relazioni se ne aggiunge un'altra che lega campo elettrico e vettore spostamento elettrico \vec{D} :

3) $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ (proprietà dielettrica del materiale)

dove ϵ è la costante dielettrica.

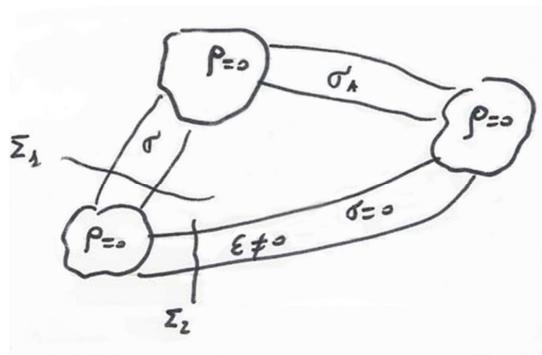
Da queste relazioni noi consideriamo i casi in cui $\mu = 0 \text{ F/m}$ per cui $\vec{B} = \mu \cdot \vec{H} = 0$: l'induzione in questo caso è nulla e la legge di Faraday si ridurrà alla forma della legge di continuità della carica $\int_{\Gamma} \vec{E} \cdot \vec{t} \cdot d\Gamma = 0$

Allo stesso modo possiamo ipotizzare che un materiale non abbia proprietà dielettriche, ovvero che $\epsilon = 0$, quindi $\vec{D} = \epsilon \vec{E} = 0$. La legge di Ampere-Maxwell torna alla sua forma della legge di Ampere:

$$\int_{\Gamma} \vec{H} \cdot \vec{t} \cdot d\Gamma = \int_{\Sigma} \vec{J} \cdot \vec{n} \cdot d\Sigma$$

Le formule viste evidenziano quindi il legame che esiste tra campo magnetico e campo elettrico e rientrano in quelle che sono le equazioni di Maxwell, ovvero delle leggi che studiano la concomitanza di questi due fenomeni.

Modello fisico di un condensatore



Considerando le due ipotesi che abbiamo preso in considerazione prima, studiamo il circuito in figura: le regioni a resistività ρ nulla sono collegate tramite conduttori (conduttività non nulla)

Una di queste regioni in particolare ha proprietà dielettriche ($\epsilon = 0$ e $\sigma \neq 0$)

Analizziamo le correnti nei due materiali con caratteristiche differenti:

Corrente calcolata in Σ_1 :

$$I_1 = \int_{\Sigma_1} \vec{J} \cdot \vec{n} \cdot d\Sigma + \frac{d}{dt} = \int_{\Sigma_1} \vec{J} \cdot \vec{n} \cdot d\Sigma$$

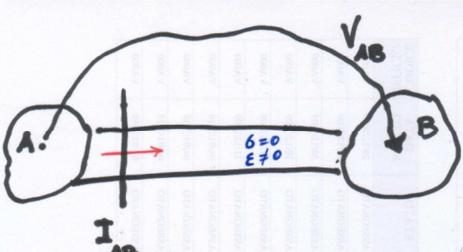
il primo termine è la corrente di conduzione mentre la seconda è il vettore corrente di spostamento la quale, in questo caso specifico, è nulla. Abbiamo la definizione di corrente elettrica

Corrente calcolata in Σ_2 :

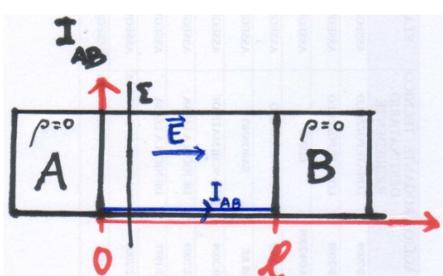
$$I_2 = \int_{\Sigma_2} \vec{J} \cdot \vec{n} \cdot d\Sigma + \frac{d}{dt} \int_{\Sigma_2} \vec{D} \cdot \vec{n} \cdot d\Sigma = \frac{d}{dt} \int_{\Sigma_2} \vec{D} \cdot \vec{n} \cdot d\Sigma$$

infatti, poiché $\vec{J} = \sigma \vec{E} = 0$ la corrente si riduce al secondo termine: non si tratta di una corrente cosiddetta elettrica ma dell'effetto di un campo elettrico in un quel dato componente. Malgrado questa differenza la corrente è ancora solenoidale e soddisfa la legge di Kirchhoff delle correnti.

Studiamo in particolare il "ramo" del circuito fisico avente proprietà dielettriche.



Per rendere lo studio più semplice lo rappresentiamo come un parallelepipedo (come nella figura qui sotto)



Il campo elettrico \vec{E} è costante.

Vogliamo calcolare la corrente I_{AB} e la tensione V_{AB} : l'unica componente (in questo caso) è quella lungo l'asse delle ascisse.

Inoltre teniamo presente che $\vec{D}_x = \epsilon \vec{E}_x$

$$V_{AB} = \int_{\Gamma_{AB}} \vec{E} \cdot \vec{t} \cdot d\Gamma = \vec{E}_x \cdot l$$

$$I_{AB} = \frac{d}{dt} \int_{\Sigma} \vec{D} \cdot \vec{n} \cdot d\Sigma = \frac{d}{dt}$$

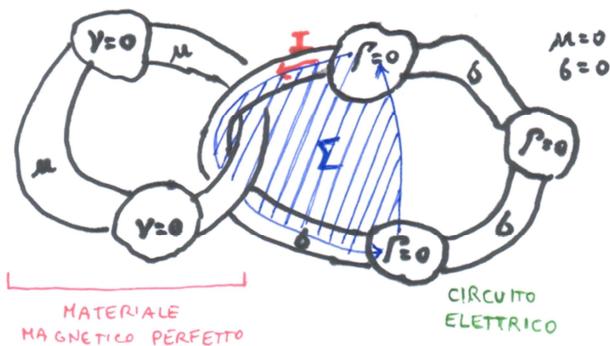
dove S è l'area della superficie

$$I_{AB} = S \cdot \frac{d}{dt} D_x \rightarrow (\text{dato che } \vec{D}_x = \epsilon \vec{E}_x) : \quad I_{AB} = S \cdot \epsilon \cdot \frac{d}{dt} \vec{E}_x = \left(\frac{S \epsilon}{l} \right) \cdot \frac{d}{dt} V_{AB}$$

Il termine $C = \frac{S \epsilon}{l}$ è una costante (definita come *capacità*) che dipende dalle particolari caratteristiche del materiale preso come condensatore. La sua unità di misura è il Farad [F]. La relazione caratteristica del condensatore sarà quindi $I_{AB} = \frac{d}{dt} V_{AB}$.

Modello fisico di un induttore

Immaginiamo ora che un circuito elettrico sia concatenato attraverso una regione di spazio conduttriva ($\sigma = 0$) a un particolare componente magnetico perfetto costituito da regioni a resistività magnetica nulla ($\nu = 0$) collegate tra loro da componenti a permeabilità μ definita.



Circuito elettrico concatenato con componente magnetico perfetto

Per la legge di Faraday:

$$\int_{\Gamma} \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot d\Gamma = - \frac{d}{dt} \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{n} \cdot d\Sigma$$

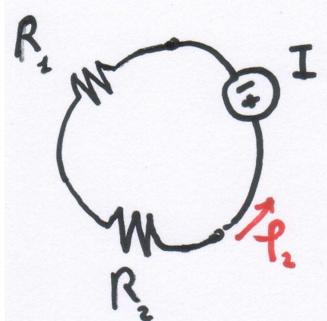
con $\int_{\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{n} \cdot d\Sigma = \varphi_2$ (flusso magnetico)

Quindi $V_{AB} = - \frac{d}{dt} \varphi_2$: abbiamo cioè espresso la tensione elettrica tra i componenti A e B a ρ nullo della regione che congiunta al componente magnetico.

Se rappresento questa parte del circuito con un modello circuitale (magnetico) possiamo esplicitare il flusso secondo la relazione che lega tensione e flusso magnetico: $\varphi_2 = \frac{I}{R_1 + R_2} = \frac{-I}{R}$

dove R è la riluttanza magnetica.

Quindi : $V_{AB} = \frac{1}{R} \frac{d}{dt} I$



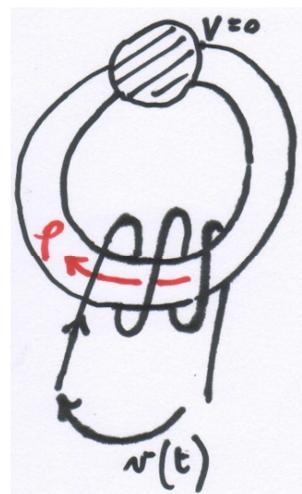
Il flusso dipende però anche dal numero N di avvolgimenti intorno al componente magnetico. Le formule generalizzate saranno quindi le seguenti:

$$\varphi = \frac{N \cdot I}{R}$$

$$\begin{aligned} V_{AB} &= \frac{d}{dt} (N \cdot \varphi) \\ &= (N^2 / R) \cdot \frac{dI}{dt} \end{aligned}$$

dove indichiamo $N^2 / R = L$, coefficiente definito come *induttanza* o coefficiente di auto-induzione. Questo fattore dipende quindi dalle proprietà del circuito (forma e proprietà magnetiche) e si misurerà in H (Henry).

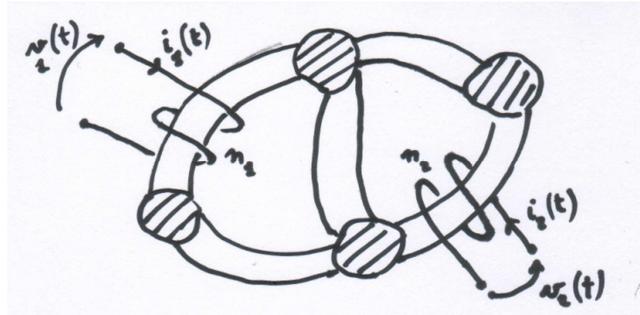
La relazione tra tensione e corrente sarà quindi $V_{AB} = L \cdot \frac{dI}{dt}$



Induttori mutuamente accoppiati

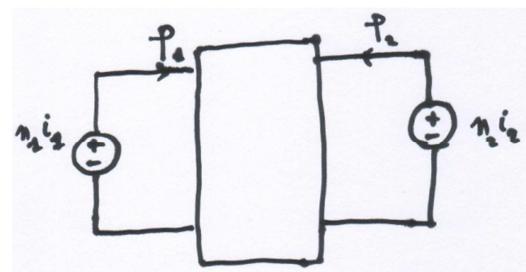
Se nel circuito sono presenti più induttori, cioè più avvolgimenti nel circuito magnetico, non si manifesta unicamente quello che abbiamo definito con auto-induzione ma un fenomeno ulteriore dovuto all'effetto che esercita ciascun induttore sugli altri.

Prendiamo come esempio il seguente circuito dove sono presenti due induttori:



$$v_1 = \frac{d}{dt} (n_1 \cdot \varphi_1)$$

$$v_2 = \frac{d}{dt} (n_2 \cdot \varphi_2)$$



Consideriamo il circuito magnetico (vedi figura sopra) come un doppio bipolo magnetico in cui al componente composito (formato da riluttanze) sono legati i due generatori di tensione magnetica (a cui si associano le correnti i_1 e i_2)

Per determinare il valore delle tensioni e correnti utilizziamo la rappresentazione G del doppio bipolo:

$$\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \cdot i_1 \\ n_2 \cdot i_2 \end{bmatrix}$$

Nella matrice G: $\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}$ in particolare possiamo considerare che $g_{12} = g_{21}$ (nei circuiti reciproci).

La rappresentazione matriciale per la relazione dell'induttanza diventa:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1^2 \cdot g_{11} & n_1 n_2 \cdot g_{12} \\ n_2 n_1 \cdot g_{21} & n_2^2 \cdot g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1' \\ i_2' \end{bmatrix}$$

con $n_1 n_2 \cdot g_{12} = n_2 n_1 \cdot g_{21}$ per l'ipotesi vista prima

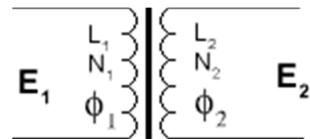
Sviluppando i calcoli possiamo vedere come ciascuna tensione dipenda - oltre che dalla corrente del proprio induttore - anche da quella concatenata dall'altro induttore.

I termini della matrice dei coefficienti sono rispettivamente:

$$n_1 n_2 \cdot g_{12} = n_2 n_1 \cdot g_{21} = M \text{ (coefficiente di } \text{mutua induzione)}$$

$$n_1^2 \cdot g_{11} = L_1 \text{ (induttanza del primo induttore)}$$

$$n_2^2 \cdot g_{22} = L_2 \text{ (induttanza del secondo induttore)}$$



Un particolare esempio di mutua induzione è rappresentato dal trasformatore (per particolari valori di M).

8. Componenti resistivi tempo-varianti e componenti dinamici tempo-invarianti

Introduzione: il concetto di tempo

Le categorie di circuiti fino ad ora introdotti non sono sufficienti a rappresentare la totalità dei circuiti presenti nella realtà. Fino a questo momento infatti non è stato introdotto il concetto di "tempo": in alcuni casi le grandezze circuituali (correnti e tensioni) possono variare in funzione del tempo, a differenza di quanto finora visto. Per rendere realistici i nostri modelli dovremo dunque introdurre il concetto di tempo e, con esso, una serie di componenti che non abbiamo ancora descritto.

Consideriamo ad esempio il circuito in figura 129.

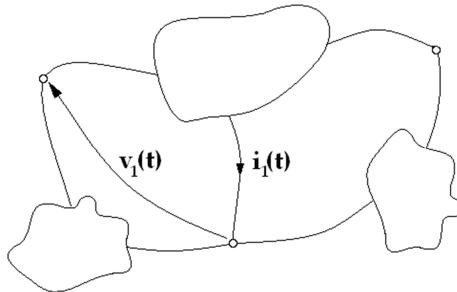


Figura 129: Circuito in cui tensioni e correnti variano in funzione del tempo.

Le tensioni che rileviamo all'interno del circuito non sono costanti nel tempo. Ciò che misuriamo quindi non è più un "numero", avente come unità di misura il Volt, bensì una funzione nella variabile indipendente "tempo". Analogamente, anche la corrente sarà così una funzione del tempo. Potremo dunque rappresentare nel piano tali funzioni, come ad esempio mostrato in figura 130.

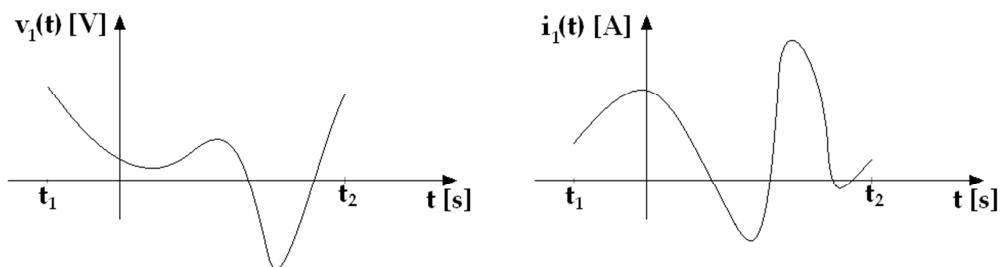


Figura 130: Esempi di grafici che illustrano come variano tensioni e correnti in un circuito in funzione del tempo.

La notazione

La notazione adottata per indicare le variabili circuituali vuole che le variabili indicate con la lettera maiuscola siano variabili che non dipendono dal tempo; se invece una grandezza varia al variare del tempo, la si indica con la lettera minuscola e si evidenzia la dipendenza dal tempo in maniera esplicita, indicando tramite la parentesi che si tratta di una funzione di t .

Di conseguenza, V_1 indicherà una tensione costante nel tempo, mentre $v_1(t)$ indicherà una tensione che varia nel corso del tempo.

Validità delle leggi di Kirchhoff

La legge di Kirchhoff delle tensioni

La legge di Kirchhoff delle tensioni ha, naturalmente, una giustificazione fisica, legata alla proprietà di irrotationalità propria del campo elettrico. Tale proprietà però viene a mancare nel caso in cui le grandezze in gioco dipendano dal tempo. Nonostante questo, i modelli circuituali presuppongono che, anche in condizioni in cui le grandezze variano nel tempo, continui a valere la legge di Kirchhoff delle tensioni.

Naturalmente le equazioni che otterremo metteranno in relazione delle funzioni e non dei numeri, e saranno verificate istante per istante.

Un esempio è riportato in figura 131. Supponendo che l'andamento delle tensioni $v_1(t)$ e $v_2(t)$ sia quello riportato nei primi due grafici, la tensione $v_3(t)$ avrà l'andamento indicato nel grafico più in basso, in virtù proprio della legge di Kirchhoff delle tensioni.

Nel circuito sottostante, possiamo scrivere la LKV:

$$v_1(t) - v_2(t) - v_3(t) = 0$$

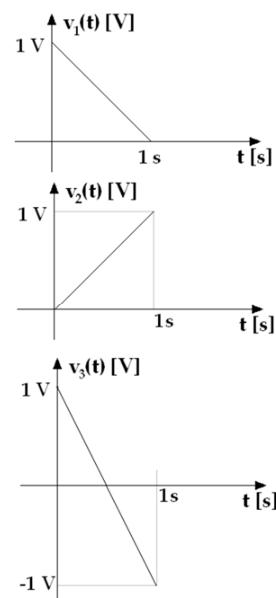
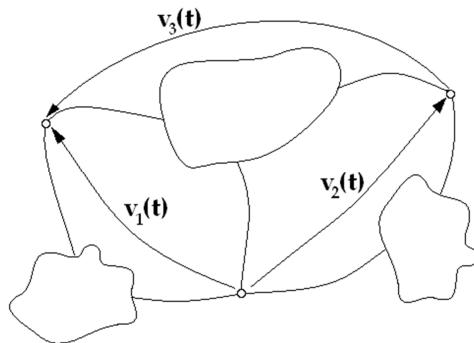


Figura 131: Circuito al quale applicare la KVL con tensioni variabili nel tempo e relativi grafici.

La legge di Kirchhoff delle correnti

Anche la legge di Kirchhoff delle correnti è legata ad opportune proprietà fisiche. In questo caso, essa dipende dalla solenoidalità delle correnti (ovvero dal fatto che il flusso attraverso una superficie chiusa è nullo). Se la corrente varia nel tempo però tale legge fisica non vale più. Sulla base di opportune ipotesi fisiche (che non verranno in questo contesto analizzate) possiamo tuttavia considerare valida la legge di Kirchhoff delle correnti anche in condizione di variabilità nel tempo delle correnti stesse.

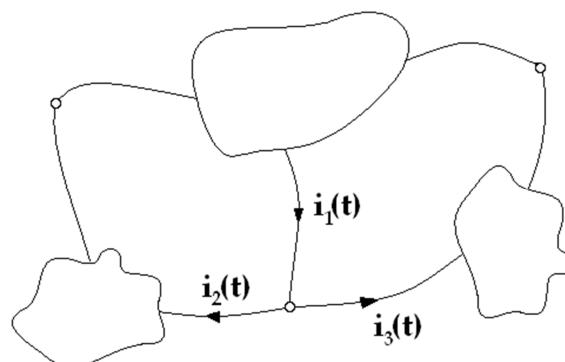


Figura 132: Circuito al quale applicare la KCL con correnti variabili nel tempo.

Ad esempio, nel circuito riportato in figura 132 potremo scrivere la KCL seguente:

$$-i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) = 0$$

Componenti tempo-varianti e tempo-invarianti

Componenti tempo-invarianti

Come accennato, affinché in un circuito ci siano variabili dipendenti dal tempo è necessario che si abbiano componenti in grado di determinare tali variazioni. Tutti i componenti fino ad ora analizzati sono però tempo-invarianti. Un componente resistivo si dice *tempo-invariante* se nella sua relazione costitutiva non compare la variabile tempo.

Ad esempio, un bipolo tempo-invariante avrà una relazione costitutiva del tipo:

$$f(V, I) = 0$$

Oppure, analogamente, se è inserito in un circuito in cui tensioni e correnti variano nel tempo, scriveremo (con riferimento al bipolo in figura 133):

$$f(v(t), i(t)) = 0$$

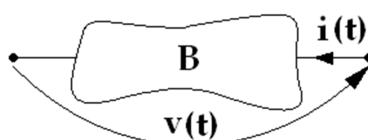


Figura 133: Generico bipolo.

Ad esempio, potremo scrivere la relazione costitutiva di un resistore attraversato da corrente $i_1(t)$ avente ai suoi capi una tensione $v_1(t)$ rilevate con la convenzione degli utilizzatori nella forma:

$$v_1(t) = R \cdot i_1(t)$$

Componenti tempo-varianti

Un componente resistivo si dice *tempo-variante* se nella sua relazione costitutiva compare anche la variabile tempo. Ad esempio, la relazione costitutiva di un bipolo tempo-variante sarà quindi del tipo (ancora con riferimento alla figura 133):

$$f(v(t), i(t), t) = 0$$

I più importanti componenti tempo-varianti sono i generatori indipendenti di tensione e di corrente e gli interruttori.

Generatore indipendente di tensione tempo-variante

Un generatore indipendente di tensione tempo-variante è un bipolo la cui relazione costitutiva è formalmente identica a quella di un generatore indipendente di tensione tempo-invariante, ma, in questo caso, la tensione ai capi del componente non è fissata ad un certo valore costante, bensì ad una funzione del tempo, che possiamo indicare con $e(t)$.

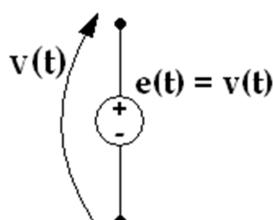


Figura 134: Generatore indipendente di tensione tempo-variante.

Generatore indipendente di corrente tempo-variante

Un generatore indipendente di corrente tempo-variante è un bipolo la cui relazione costitutiva è formalmente identica a quella di un generatore indipendente di corrente tempo-invariante, ma, in questo caso, la corrente che attraversa il componente non è fissata ad un certo valore costante, bensì ad una funzione del tempo, che possiamo indicare con $a(t)$.

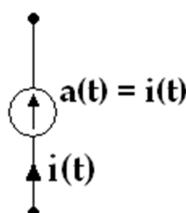


Figura 135: Generatore indipendente di corrente tempo-variante.

Interruttore (ideale)

L'interruttore ideale è un componente resistivo tempo-variante, caratterizzato dal suo "stato". Lo stato dell'interruttore può essere aperto oppure chiuso:

- Se l'interruttore è aperto, esso ha la stessa relazione costitutiva di un circuito aperto.
- Se l'interruttore è chiuso, esso è caratterizzato dalla relazione costitutiva di un cortocircuito.

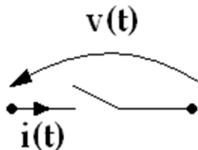


Figura 136: Simbolo dell'interruttore ideale.

Per indicare lo stato dell'interruttore viene introdotta una funzione nella variabile tempo, che chiamiamo **funzione di stato $s(t)$** . La funzione $s(t)$, per nostra convenzione, potrà assumere solamente i valori 0 ed 1: il valore $s(t) = 0$ indicherà che l'interruttore è chiuso, mentre con $s(t) = 1$ indicheremo che l'interruttore è aperto.

Possiamo quindi scrivere formalmente la relazione costitutiva dell'interruttore ideale nel seguente modo:

$$\begin{cases} s(t) = 0 \rightarrow v(t) = 0 \\ s(t) = 1 \rightarrow i(t) = 0 \end{cases}$$

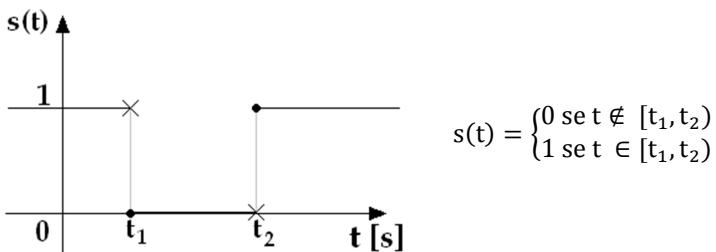


Figura 137: Esempio di funzione di stato.

Risoluzione di circuiti con componenti tempo-varianti

Descrizione della risoluzione di circuiti con componenti tempo-varianti

La risoluzione di circuiti con componenti tempo-varianti può avvenire fissando un preciso istante di tempo e applicando poi le tecniche note, già adottate per circuiti costituiti solo da componenti tempo-invarianti.

Esempio

Consideriamo come esempio il circuito riportato in figura 138 a). È noto che si ha:

$$s(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t < 1s \\ 0 & \text{se } t \geq 1s \end{cases}$$

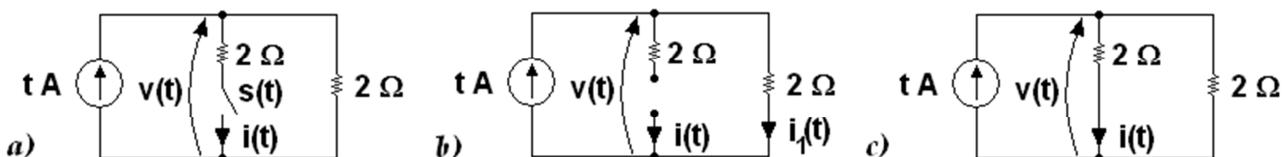


Figura 138: Esempio di risoluzione di un circuito tempo-variante.

Possiamo quindi dire che, se $t < 1s$, il circuito è equivalente al circuito in figura 138 b, mentre se $t \geq 1s$ è possibile sostituire all'interruttore un cortocircuito, come in figura 138 c).

Quindi:

- Se $t < 1s$: per la relazione costitutiva del c.a.: $i(t) = 0$
per la KCL: $i_1(t) = t A$
per la legge di Ohm: $v(t) = 2t V$
- Se $t \geq 1s$: per il partitore di corrente: $i(t) = t \frac{2}{2+2} = \frac{1}{2}t A$
per la legge di Ohm: $v(t) = \frac{1}{2}t \cdot 2 = t V$

Sostituendo poi nelle relazioni così individuate l'istante di tempo nel quale vogliamo conoscere il valore delle grandezze in esame, otterremo il risultato desiderato in quel particolare istante.

Componenti dinamici

Introduzione

Secondo i modelli che abbiamo finora introdotti, quanto avviene in un particolare istante è del tutto indipendente da ciò che avviene all'istante precedente oppure all'istante successivo. Si tratta dunque di un modello che, in molti casi, non può essere considerato realistico. Stiamo ora per introdurre, proprio per rendere più ragionevoli i modelli adottati, una nuova categoria di componenti, che prende il nome di **componenti dinamici**. Proprio in contrapposizione a tale categoria, i componenti fino ad ora studiati sono invece detti **adinamici**.

Categorie di componenti dinamici

I componenti dinamici sono suddivisi in 3 categorie (o classi):

1. Componenti dinamici capacitivi (condensatori).
2. Componenti dinamici induttivi (induttori).
3. Memristori.

Di queste verranno in seguito analizzate solamente le prime due. In particolare, analizzeremo solamente bipoli di tali categorie, anche se esistono in realtà anche condensatori e induttori a più di 2 terminali.

Componenti dinamici capacitivi (condensatori)

La carica elettrica

Prima di introdurre la relazione costitutiva di un bipolo dinamico capacitivo, è opportuno introdurre una nuova grandezza elettrica, la **carica elettrica** $q(t)$, che è definita dalla relazione:

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

Tale relazione può analogamente essere espressa nella forma:

$$q(t) = q(t_0) + \int_{t_0}^t i(t) dt$$

La carica elettrica conserva memoria della corrente che fluisce nel circuito. Ad esempio, se supponiamo:

$$\begin{aligned} q(0) &= 1 \\ i(t) &= 1 \end{aligned}$$

Avremo, sulla base della definizione di carica, la relazione seguente:

$$q(t) = 1 + t$$

L'unità di misura della carica elettrica è il Coulomb [C = A s].

La relazione costitutiva di un condensatore

Un condensatore è un componente nel quale la tensione e la carica elettrica sono legate tra loro da una relazione finita. Possiamo perciò dire che la relazione costitutiva di un condensatore è una relazione finita tra carica e tensione, del tipo:

$$f(v(t), q(t)) = 0$$

Osserviamo così che si tratta di componenti dinamici tempo-invarianti.

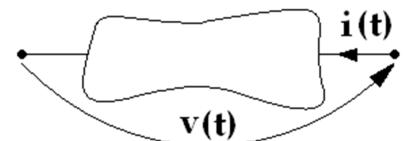


Figura 139: Bipolo in riferimento al quale è stata introdotta la relazione costitutiva di un generico condensatore.

Lavoro di un condensatore

La potenza assorbita da un condensatore, come nel caso di qualsiasi altro bipolo, può essere calcolata, purché corrente e tensione vengano rilevate con la convenzione degli utilizzatori, tramite la formula:

$$p_a(t) = v(t) \cdot i(t)$$

Come noto dalla fisica, il lavoro assorbito dal condensatore in un intervallo di tempo $[t_1, t_2]$ (avente come unità di misura il Joule [J]) può essere calcolato con la formula:

$$L_a[t_1 t_2] = \int_{t_1}^{t_2} p_a(t) dt$$

Analogamente, il lavoro generato dal condensatore si potrà calcolare:

$$L_g[t_1 t_2] = \int_{t_1}^{t_2} p_g(t) dt$$

Utilizzando la relazione che lega corrente e carica elettrica, possiamo riscrivere la formula del lavoro assorbito nel modo seguente:

$$L_a[t_1 t_2] = \int_{t_1}^{t_2} v(t) \cdot i(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} v(t) \cdot \frac{dq(t)}{dt} dt$$

Possiamo ipotizzare che sia possibile esprimere la tensione in funzione della carica, nel modo:

$$v(t) = g[q(t)]$$

Si osserva che in realtà questa ipotesi non serve, perché è matematicamente possibile dimostrare quanto scriveremo sotto tale condizione anche nel caso più generale. Per evitare le complicazioni matematiche però consideriamo ora solo questo caso particolare, che comunque non è particolarmente limitativo.

Sotto tale ipotesi, avremo:

$$L_a[t_1 \ t_2] = \int_{t_1}^{t_2} v(t) \cdot \frac{dq(t)}{dt} dt = \int_{q(t_1)}^{q(t_2)} g(q) \cdot dq = \int_{q_1}^{q_2} g(q) \cdot dq$$

Introduciamo ora la definizione di **energia immagazzinata dal condensatore**, data dalla relazione:

$$W(q) = \int_0^q g(q) \cdot dq$$

L'energia immagazzinata può essere scritta sia come $W(q(t))$, sia con il simbolo $w(t)$.

Possiamo così esprimere il lavoro assorbito come differenza tra l'energia immagazzinata dal condensatore all'istante finale e all'istante iniziale. Otteniamo ciò tramite semplici passaggi matematici:

$$\begin{aligned} L_a[t_1 \ t_2] &= \int_{q_1}^{q_2} g(q)dq = \int_{q_1}^0 g(q)dq + \int_0^{q_2} g(q)dq = \int_0^{q_2} g(q)dq - \int_0^{q_1} g(q)dq = W[q(t_2)] - W[q(t_1)] = \\ &= w(t_2) - w(t_1) \end{aligned}$$

Condensatori lineari

Un condensatore lineare è un condensatore nel quale la relazione tra tensione e carica è una funzione lineare.

La relazione costitutiva di un condensatore lineare sarà perciò del tipo:

$$q(t) = C \cdot v(t)$$

I condensatori lineari sono perciò la categoria più semplice di condensatori. I condensatori lineari sono anche l'unica categoria di componenti dinamici capacitivi che verrà analizzata in dettaglio.

La relazione costitutiva del condensatore lineare può anche essere scritta nella forma seguente, che mette in evidenza la dipendenza della tensione dai valori di tensione precedenti all'interno del circuito:

$$\begin{aligned} q(t_0) + \int_{t_0}^t i(t)dt &= C \cdot v(t) \quad \rightarrow \quad v(t) = v(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(t)dt \\ \text{O anche: } i(t) &= C \frac{dv(t)}{dt} \end{aligned}$$

La capacità elettrica

Il coefficiente C introdotto per esprimere la relazione costitutiva del condensatore lineare prende il nome di **capacità elettrica**, a patto che la tensione e la corrente dalla quale viene ricavata la carica elettrica vengano misurate con la convenzione degli utilizzatori.

L'unità di misura della capacità elettrica prende il nome di Farad [F]:

$$[F] = \left[\frac{C}{V} \right] = \left[\frac{A \cdot s}{V} \right]$$

Simbolo del condensatore lineare

Il simbolo del condensatore lineare è riportato in figura 140. Si osserva che i due simboli riportati sono tra loro equivalenti. Nella figura è anche riportato il grafico della relazione costitutiva del condensatore stesso. Chiaramente, nel caso il grafico sia illustrato nel piano cartesiano $v(t) / q(t)$ il coefficiente angolare assume valore $1/C$.

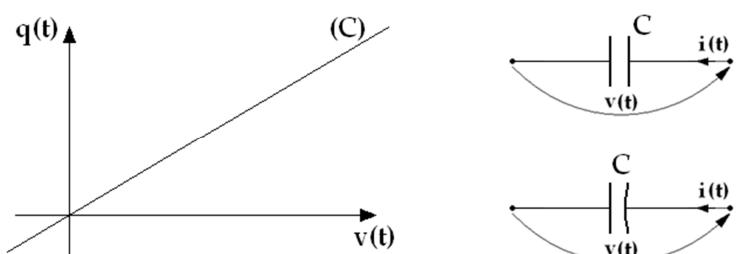


Figura 140: Simbolo e relazione costitutiva del condensatore lineare.

Energia immagazzinata, lavoro assorbito e lavoro generato da un condensatore lineare

Nel caso di condensatore lineare, avremo:

$$L_a[t_1 \ t_2] = \int_{q_1}^{q_2} g(q) \cdot dq = \int_{q_1}^{q_2} \frac{q}{C} \cdot dq = \left[\frac{q^2}{2C} \right]_{q_1}^{q_2} = \frac{[q(t_2)]^2 - [q(t_1)]^2}{2C} = \frac{1}{2} C[v(t_2)]^2 - \frac{1}{2} C[v(t_1)]^2$$

L'energia immagazzinata dal condensatore è dunque: $W(q) = \frac{[q(t)]^2}{2C} = \frac{C}{2} [v(t)]^2$

Il lavoro generato dal condensatore lineare sarà invece: $L_g[t_1 \ t_2] = W(q_1) - W(q_2) = \frac{[q(t_1)]^2 - [q(t_2)]^2}{2C}$

Componenti dinamici induttivi (induttori)

Il flusso magnetico

Prima di introdurre la relazione costitutiva di un bipolo dinamico induttivo, introduciamo una nuova grandezza elettrica, il **flusso magnetico** $\varphi(t)$, che è definita dalla relazione:

$$v(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt}$$

Tale relazione può analogamente essere espressa nella forma:

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^t v(t) dt$$

Osserviamo dunque che $\varphi(t)$ dipende da $\varphi(t_0)$ e da tutti i valori di $v(t)$ nell'intervallo $[t_0, t]$, perciò possiamo dire che il flusso magnetico tiene memoria degli avvenimenti passati nel circuito.

L'unità di misura del flusso magnetico è il Weber [Wb = V s].

La relazione costitutiva di un induttore

Un induttore è un componente nel quale la corrente e il flusso magnetico sono grandezze tra loro legate da una relazione finita. Possiamo perciò dire che la relazione costitutiva di un induttore è una relazione finita tra corrente e flusso magnetico, del tipo:

$$f(i(t), \varphi(t)) = 0$$

Osserviamo così che si tratta di componenti dinamici tempo-invarianti.

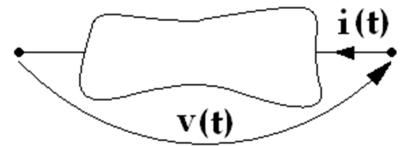


Figura 141: Bipolo in riferimento al quale è stata introdotta la relazione costitutiva di un generico induttore.

Lavoro di un induttore

Anche nel caso dell'induttore potremo scrivere:

$$L_a[t_1 t_2] = \int_{t_1}^{t_2} p_a(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} v(t) \cdot i(t) dt$$

Utilizzando la relazione tra flusso magnetico e tensione, potremo scrivere:

$$L_a[t_1 t_2] = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\varphi(t)}{dt} \cdot i(t) dt$$

Ipotizzando che sia possibile esprimere la corrente in funzione del flusso magnetico, nel modo:

$$i(t) = g[\varphi(t)]$$

Sotto tale ipotesi, avremo:

$$L_a[t_1 t_2] = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\varphi(t)}{dt} \cdot i(t) dt = \int_{\varphi(t_1)}^{\varphi(t_2)} g(\varphi) \cdot d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} g(\varphi) \cdot d\varphi$$

Introduciamo ora la definizione di **energia immagazzinata dall'induttore**, data dalla relazione:

$$W(\varphi) = \int_0^\varphi g(\varphi) \cdot d\varphi$$

Oppure:

$$w(t) = \int_0^{\varphi(t)} g(\varphi) \cdot d\varphi$$

Possiamo così esprimere il lavoro assorbito come differenza tra l'energia immagazzinata dall'induttore all'istante finale e all'istante iniziale. Otteniamo ciò tramite semplici passaggi matematici:

$$L_a[t_1 t_2] = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varphi(\varphi) \cdot d\varphi = \int_{\varphi_1}^0 g(\varphi) \cdot d\varphi + \int_0^{\varphi_2} g(\varphi) \cdot d\varphi = \int_0^{\varphi_2} g(\varphi) d\varphi - \int_0^{\varphi_1} g(\varphi) d\varphi = W[\varphi(t_2)] - W[\varphi(t_1)]$$

Induttori lineari

Un induttore lineare è un induttore nel quale la relazione tra flusso magnetico e corrente è una funzione lineare. La relazione costitutiva di un induttore lineare sarà perciò del tipo:

$$\varphi(t) = L \cdot i(t)$$

Gli induttori lineari sono perciò la più semplice categoria di induttori (e anche l'unica categoria di componenti dinamici induttivi che verrà analizzata in dettaglio).

Possiamo anche scrivere:

$$\begin{aligned} L \cdot i(t) &= \varphi(t_0) + \int_{t_0}^t v(t) dt \\ i(t) &= \frac{\varphi(t_0)}{L} + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v(t) dt = i(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v(t) dt \end{aligned}$$

Questa modalità di esprimere la relazione costitutiva dell'induttore lineare evidenzia l'effetto memoria di tale componente. Si può inoltre scrivere:

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

L'induttanza

Il coefficiente L introdotto per esprimere la relazione costitutiva dell'induttore lineare è detto **induttanza**, a patto che la corrente e la tensione dalla quale viene ricavato il flusso magnetico vengano misurate con la convenzione degli utilizzatori.

L'unità di misura dell'induttanza è l'Henry [H]: $[H] = \left[\frac{Wb}{A} \right] = \left[\frac{V \cdot s}{A} \right]$

Simbolo dell'induttore lineare

L'induttore lineare ha il simbolo riportato in figura 142.

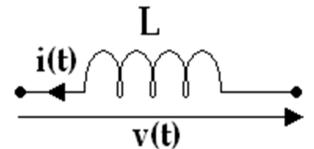


Figura 142: Simbolo dell'induttore lineare.

Energia immagazzinata e lavoro assorbito da un induttore lineare

Nel caso di un induttore lineare, avremo:

$$L_a[t_1 t_2] = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} g(\varphi) \cdot d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\varphi}{L} \cdot d\varphi = \left[\frac{\varphi^2}{2L} \right]_{\varphi_1}^{\varphi_2} = \frac{[\varphi(t_2)]^2 - [\varphi(t_1)]^2}{2L}$$

L'energia immagazzinata dall'induttore è dunque:

$$W(\varphi) = \frac{[\varphi(t)]^2}{2L} = \frac{1}{2} [i(t)]^2$$

Risoluzione di circuiti dinamici

Vogliamo a questo punto analizzare il comportamento di un circuito nel quale siano presenti condensatori e induttori. Noi non ci addentreremo a fondo in tale studio, ma ci limiteremo a due casi particolari:

1. La soluzione sinusoidale di un circuito dinamico.
2. La risoluzione di circuiti dinamici del primo ordine.

Consideriamo un generico circuito dinamico, come ad esempio quello riportato in figura 142.

Abbiamo già visto che per tale circuito valgono le KCL e le KVL. Potremo, ad esempio, scrivere:

$$\begin{aligned} -i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) + i_4(t) &= 0 \\ v_1(t) - v_2(t) + v_3(t) &= 0 \end{aligned}$$

Conosciamo inoltre le relazioni costitutive di tutti i componenti presenti nel circuito. Ad esempio:

$$v_2(t) = R \cdot i_5(t)$$

$$v_3(t) = -e(t)$$

$$i_2(t) = a(t)$$

$$v_1(t) = \frac{d\varphi_1(t)}{dt} \quad \text{con} \quad \varphi_1(t) = L \cdot i_1(t)$$

Tale relazione può essere anche scritta nella forma:

$$v_1(t) = L \frac{d i_1(t)}{dt}$$

Ciò di cui però non disponiamo è un metodo per la risoluzione del circuito. Ciò che rende più complessa la risoluzione del circuito è la presenza delle derivate: le equazioni che ne regolano il funzionamento sono perciò di tipo algebrico-differenziali, e ciò rende matematicamente complessa la risoluzione circuitale.

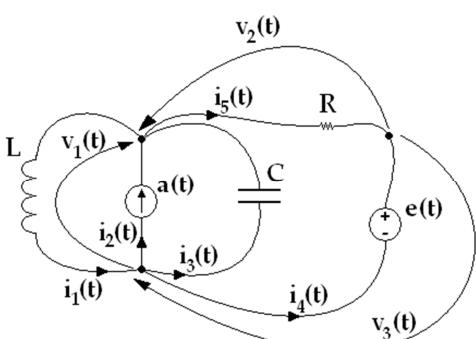


Figura 143: Esempio di circuito dinamico.

9. Circuiti in regime sinusoidale

Ipotesi per la soluzione sinusoidale di un circuito dinamico

Questo metodo di soluzione di un circuito può essere applicato nel caso in cui siano verificate le seguenti ipotesi:

1. Il circuito è lineare. Il circuito da analizzare può perciò essere costituito da componenti lineari (compresi condensatori e induttori lineari) e, al più, generatori indipendenti di tensione e/o corrente.
2. I generatori indipendenti forzano tensioni e correnti **sinusoidali isofrequenziali**.

Una grandezza si dice sinusoidale se è una funzione del tipo:

$$a(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

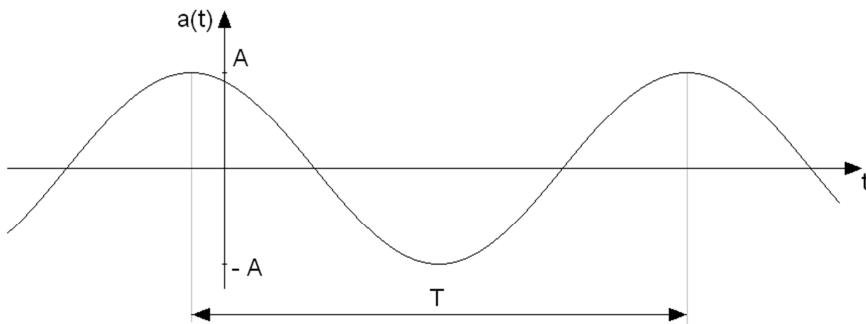


Figura 144: Esempio di funzione sinusoidale.

Dove:

- "A" prende il nome di **ampiezza della sinusoide**. La sua unità di misura sarà la stessa della grandezza in analisi (se la grandezza è una tensione, il Volt; se è una corrente, l'Ampère).
- " φ " prende il nome di **fase** e si misura in radianti.
- "T" prende il nome di **periodo** e si misura in secondi.
- "f" prende il nome di **frequenza**, ed è il reciproco del periodo:

$$f = \frac{1}{T}$$

La sua unità di misura è perciò l'hertz [Hz] = $\left[\frac{1}{s}\right]$.

- " ω " prende il nome di **pulsazione** e si misura in radianti al secondo [rad/s]. ω si calcola con la formula:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

Osserviamo che, applicando le formule di addizione, le grandezze sinusoidali possono anche essere espresse nella forma:

$$a(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi) = A \cdot \cos(\omega t) \cos(\varphi) - A \cdot \sin(\omega t) \sin(\varphi)$$

Possiamo inoltre indicare con B e C le due costanti moltiplicative:

$$\begin{aligned} B &= A \cdot \cos(\varphi) \\ C &= A \cdot \sin(\varphi) \end{aligned}$$

E in tal modo, scriveremo:

$$a(t) = B \cdot \cos(\omega t) - C \cdot \sin(\omega t)$$

Diciamo invece che le grandezze di un circuito sono isofrequenziali se tutti i generatori indipendenti di tensione e corrente hanno lo stesso valore di pulsazione (ovvero sono tutte alla stessa frequenza).

Cercare le soluzioni sinusoidali significa andare a ricercare delle soluzioni (tensioni o correnti) che sono sinusoidi alla stessa pulsazione delle grandezze date dai generatori indipendenti.

In queste ipotesi cerchiamo una soluzione sinusoidale del circuito.

I fasori

È sempre possibile rappresentare una funzione sinusoidale in un circuito isofrequenziale attraverso l'introduzione di un numero complesso \bar{A} , avente modulo A (anche se finora non è stato specificato che A fosse non negativo) e fase φ .

$$\bar{A} = A \cdot e^{j\varphi}$$

Osserviamo che l'unità immaginaria viene indicata nell'ambito dell'Ingegneria dell'Informazione con la lettera j anziché con la lettera i , che viene solitamente utilizzata per indicare le correnti.

Il numero complesso \bar{A} che deriva dalla grandezza sinusoidale è detto **fasore associato alla sinusoide**. Come si può osservare, i fasori vengono indicati con un trattino sopra alla lettera maiuscola associata alla grandezza in questione (la barra sta ad indicare dunque che si tratta di un fasore, non che si tratta di un numero complesso).

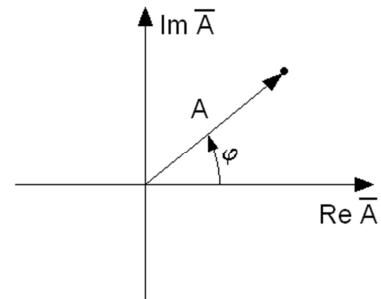


Figura 145: Rappresentazione di un fasore nel piano di Gauss.

Nota la pulsazione, il fasore ci permette di ricostruire interamente la sinusoide, attraverso la formula:

$$a(t) = \operatorname{Re}(\bar{A} \cdot e^{j\omega t})$$

Perché, infatti:

$$\operatorname{Re}(\bar{A} \cdot e^{j\omega t}) = \operatorname{Re}(A \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t}) = A \cdot \operatorname{Re}[e^{j(\omega t + \varphi)}] = A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

Possiamo anche scrivere il fasore direttamente a partire dalla sinusoide espressa nella forma:

$$a(t) = B \cdot \cos(\omega t) - C \cdot \sin(\omega t)$$

In tal caso, il fasore sarà, in forma algebrica:

$$\bar{A} = B + j \cdot C$$

Infatti:

$$\bar{A} = A \cdot e^{j\varphi} = A \cdot (\cos\varphi + j \cdot \sin\varphi) = B + j \cdot C$$

Leggi di Kirchhoff espresse tramite fasori

Legge di Kirchhoff delle tensioni

Riprendiamo il circuito dinamico inizialmente analizzato, e riportato nuovamente in figura 146.

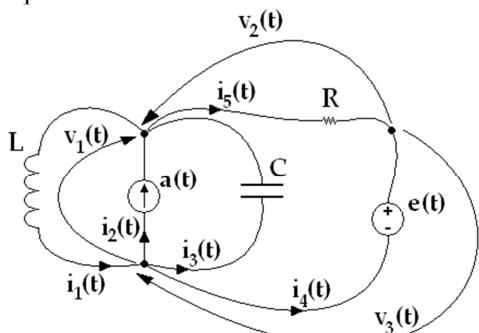


Figura 146: Esempio di circuito dinamico.

Poniamo:

$$a(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

$$e(t) = E \cdot \cos(\omega t + \psi)$$

Introduciamo per ciascuna delle grandezze il relativo fasore. Avremo così, ad esempio:

$$a(t) = \operatorname{Re}(\bar{A} \cdot e^{j\omega t})$$

$$e(t) = \operatorname{Re}(\bar{E} \cdot e^{j\omega t})$$

$$v_1(t) = \operatorname{Re}(\bar{V}_1 \cdot e^{j\omega t})$$

Possiamo scrivere la KVL seguente:

$$v_1(t) - v_2(t) + v_3(t) = 0$$

Per quanto precedentemente visto, possiamo anche scrivere:

$$\operatorname{Re}(\bar{V}_1 \cdot e^{j\omega t}) - \operatorname{Re}(\bar{V}_2 \cdot e^{j\omega t}) + \operatorname{Re}(\bar{V}_3 \cdot e^{j\omega t}) = 0$$

$$\operatorname{Re}(\bar{V}_1 \cdot e^{j\omega t} - \bar{V}_2 \cdot e^{j\omega t} + \bar{V}_3 \cdot e^{j\omega t}) = 0$$

$$\operatorname{Re}[(\bar{V}_1 - \bar{V}_2 + \bar{V}_3) \cdot e^{j\omega t}] = 0$$

Siccome, dato un generico fasore \bar{A} , abbiamo:

$$\operatorname{Re}(\bar{A} \cdot e^{j\omega t}) = 0 \rightarrow A \cdot \cos(\omega t + \varphi) = 0 \rightarrow A = 0 \rightarrow \bar{A} = 0$$

Possiamo scrivere:

$$\bar{V}_1 - \bar{V}_2 + \bar{V}_3 = 0$$

Da questa relazione deduciamo che dato un qualsiasi circuito dinamico, di cui cerchiamo una soluzione sinusoidale isofrequenziale, possiamo scrivere una qualunque KVL in funzione dei fasori, semplicemente sostituendo nella KVL in funzione delle tensioni funzioni del tempo, i relativi fasori.

Legge di Kirchhoff delle correnti

Possiamo scrivere anche la KCL seguente:

$$-i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) + i_4(t) = 0$$

Per quanto precedentemente visto, possiamo anche scrivere:

$$\begin{aligned} -\operatorname{Re}(\bar{I}_1 \cdot e^{j\omega t}) + \operatorname{Re}(\bar{I}_2 \cdot e^{j\omega t}) + \operatorname{Re}(\bar{I}_3 \cdot e^{j\omega t}) + \operatorname{Re}(\bar{I}_4 \cdot e^{j\omega t}) &= 0 \\ \operatorname{Re}(-\bar{I}_1 \cdot e^{j\omega t} + \bar{I}_2 \cdot e^{j\omega t} + \bar{I}_3 \cdot e^{j\omega t} + \bar{I}_4 \cdot e^{j\omega t}) &= 0 \\ \operatorname{Re}[(-\bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 + \bar{I}_4) \cdot e^{j\omega t}] &= 0 \\ -\bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 + \bar{I}_4 &= 0 \end{aligned}$$

Da questa relazione deduciamo che quanto detto per le KVL vale anche per le KCL: dato un qualsiasi circuito dinamico di cui cerchiamo soluzione sinusoidale isofrequenziale, possiamo scrivere una qualunque KCL in funzione dei fasori, semplicemente sostituendo nella KCL in funzione delle correnti i relativi fasori.

Relazioni costitutive dei componenti di un circuito in funzione dei fasori

Generatore indipendente di corrente

Consideriamo il generatore di corrente presente nel circuito in figura 146. Abbiamo $i_2(t) = a(t)$, ovvero:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\bar{I}_2 \cdot e^{j\omega t}) &= \operatorname{Re}(\bar{A} \cdot e^{j\omega t}) \\ \operatorname{Re}(\bar{I}_2 \cdot e^{j\omega t}) - \operatorname{Re}(\bar{A} \cdot e^{j\omega t}) &= 0 \\ \operatorname{Re}(\bar{I}_2 \cdot e^{j\omega t} - \bar{A} \cdot e^{j\omega t}) &= 0 \\ \operatorname{Re}[(\bar{I}_2 - \bar{A}) \cdot e^{j\omega t}] &= 0 \\ \bar{I}_2 - \bar{A} &= 0 \\ \bar{I}_2 &= \bar{A} \end{aligned}$$

Anche nel caso della relazione costitutiva di un generatore indipendente di corrente è perciò sufficiente sostituire formalmente alle funzioni del tempo in essa presenti i relativi fasori.

Generatore indipendente di tensione

Consideriamo il generatore di tensione presente nel circuito in figura 146. Abbiamo $v_3(t) = -e(t)$, ovvero:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\bar{V}_3 \cdot e^{j\omega t}) &= -\operatorname{Re}(\bar{E} \cdot e^{j\omega t}) \\ \operatorname{Re}(\bar{V}_3 \cdot e^{j\omega t}) + \operatorname{Re}(\bar{E} \cdot e^{j\omega t}) &= 0 \\ \operatorname{Re}(\bar{V}_3 \cdot e^{j\omega t} + \bar{E} \cdot e^{j\omega t}) &= 0 \\ \operatorname{Re}[(\bar{V}_3 + \bar{E}) \cdot e^{j\omega t}] &= 0 \\ \bar{V}_3 &= -\bar{E} \end{aligned}$$

Anche nel caso della relazione costitutiva di un generatore indipendente di tensione è perciò sufficiente sostituire formalmente alle funzioni del tempo in essa presenti i relativi fasori.

Resistori

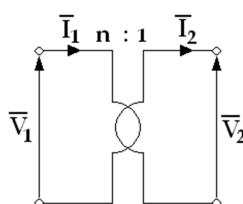
Consideriamo il resistore presente nel circuito in figura 146. Abbiamo $v_2(t) = R \cdot i_5(t)$, ovvero:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\bar{V}_2 \cdot e^{j\omega t}) &= R \cdot \operatorname{Re}(\bar{I}_5 \cdot e^{j\omega t}) \\ \operatorname{Re}(\bar{V}_2 \cdot e^{j\omega t}) - \operatorname{Re}(R \cdot \bar{I}_5 \cdot e^{j\omega t}) &= 0 \\ \operatorname{Re}(\bar{V}_2 \cdot e^{j\omega t} - R \cdot \bar{I}_5 \cdot e^{j\omega t}) &= 0 \\ \operatorname{Re}[(\bar{V}_2 - R \cdot \bar{I}_5) \cdot e^{j\omega t}] &= 0 \\ \bar{V}_2 &= R \cdot \bar{I}_5 \end{aligned}$$

Anche nel caso della relazione costitutiva di un resistore dunque è sufficiente sostituire formalmente alle funzioni in essa presenti i relativi fasori.

In generale...

Più in generale si può dimostrare che anche le relazioni costitutive dei doppi bipoli e di tutti i componenti adinamici sono le stesse viste nel dominio del tempo, purché si sostituiscano alle funzioni presenti all'interno di tali equazioni i corrispondenti fasori. Ad esempio:



$$\begin{cases} \bar{V}_1 = n \bar{V}_2 \\ \bar{I}_2 = n \bar{I}_1 \end{cases}$$

Figura 147: Trasformatore nel dominio dei fasori.

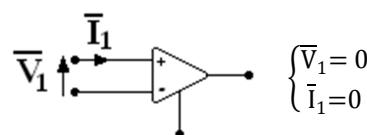


Figura 148: Amplificatore operazionale nel dominio dei fasori.

Condensatori

Consideriamo il condensatore presente nel circuito in figura 146. Abbiamo:

$$i_3(t) = C \cdot \frac{dv_1(t)}{dt}$$

Ovvero:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\bar{I}_3 \cdot e^{j\omega t}) &= C \cdot \operatorname{Re}\left[\frac{d}{dt}(\bar{V}_1 \cdot e^{j\omega t})\right] \\ \operatorname{Re}(\bar{I}_3 \cdot e^{j\omega t}) &= \operatorname{Re}\left[C \cdot \bar{V}_1 \cdot \frac{d}{dt}e^{j\omega t}\right] \end{aligned}$$

Per il principio di permanenza delle proprietà formali, abbiamo:

Così come vale la relazione con α reale:

$$\frac{d}{dt}e^{\alpha t} = \alpha \cdot e^{\alpha t}$$

Vale anche, con z complesso:

$$\frac{d}{dt}e^{zt} = z \cdot e^{zt}$$

Perciò possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\bar{I}_3 \cdot e^{j\omega t}) &= \operatorname{Re}[C \cdot \bar{V}_1 \cdot j\omega \cdot e^{j\omega t}] \\ \operatorname{Re}(\bar{I}_3 \cdot e^{j\omega t}) - \operatorname{Re}[C \cdot \bar{V}_1 \cdot j\omega \cdot e^{j\omega t}] &= 0 \\ \operatorname{Re}[\bar{I}_3 \cdot e^{j\omega t} - C \cdot \bar{V}_1 \cdot j\omega \cdot e^{j\omega t}] &= 0 \\ \operatorname{Re}[(\bar{I}_3 - C \cdot \bar{V}_1 \cdot j\omega) \cdot e^{j\omega t}] &= 0 \\ \bar{I}_3 - C \cdot \bar{V}_1 \cdot j\omega &= 0 \\ \bar{I}_3 &= C \cdot \bar{V}_1 \cdot j\omega \\ \bar{I}_3 &= j\omega C \cdot \bar{V}_1 \end{aligned}$$

Chiamando $Y_C = j\omega C$, abbiamo:

$$\bar{I}_3 = Y_C \cdot \bar{V}_1$$

Abbiamo ottenuto così una relazione algebrica, molto più semplice della relazione iniziale. Osserviamo anche che tale relazione è molto simile a quella di un resistore.

La grandezza Y_C è detta **ammittenza**, si misura in Siemens e può essere considerata una generalizzazione della conduttanza.

Induttori

Consideriamo l'induttore presente nel circuito in figura 146. Abbiamo:

$$v_1(t) = L \cdot \frac{di_1(t)}{dt}$$

Ovvero:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\bar{V}_1 \cdot e^{j\omega t}) &= L \cdot \operatorname{Re}\left[\frac{d}{dt}(\bar{I}_1 \cdot e^{j\omega t})\right] \\ \operatorname{Re}(\bar{V}_1 \cdot e^{j\omega t}) &= \operatorname{Re}\left[L \cdot \bar{I}_1 \cdot \frac{d}{dt}e^{j\omega t}\right] \\ \operatorname{Re}(\bar{V}_1 \cdot e^{j\omega t}) &= \operatorname{Re}[L \cdot \bar{I}_1 \cdot j\omega \cdot e^{j\omega t}] \\ \operatorname{Re}(\bar{V}_1 \cdot e^{j\omega t}) - \operatorname{Re}[L \cdot \bar{I}_1 \cdot j\omega \cdot e^{j\omega t}] &= 0 \\ \operatorname{Re}[\bar{V}_1 \cdot e^{j\omega t} - L \cdot \bar{I}_1 \cdot j\omega \cdot e^{j\omega t}] &= 0 \\ \operatorname{Re}[(\bar{V}_1 - L \cdot \bar{I}_1 \cdot j\omega) \cdot e^{j\omega t}] &= 0 \\ \bar{V}_1 - L \cdot \bar{I}_1 \cdot j\omega &= 0 \\ \bar{V}_1 &= L \cdot \bar{I}_1 \cdot j\omega \\ \bar{V}_1 &= j\omega L \cdot \bar{I}_1 \end{aligned}$$

Chiamando $Z_L = j\omega L$, abbiamo:

$$\bar{V}_1 = Z_L \cdot \bar{I}_1$$

Abbiamo ottenuto così una relazione algebrica, molto più semplice della relazione iniziale. Osserviamo anche che tale relazione è molto simile alla relazione costitutiva di un resistore (legge di Ohm).

La grandezza Z_L è detta **impedenza**, si misura in Ohm e può essere considerata una generalizzazione della resistenza.

Passaggio dal dominio del tempo al dominio dei fasori

A questo punto possiamo ridisegnare il nostro circuito, in modo tale da passare dal "dominio del tempo" (circuito in figura 146) al "dominio dei fasori" (circuito in figura 149).

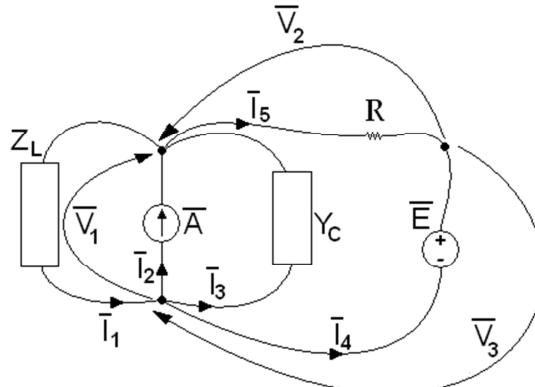


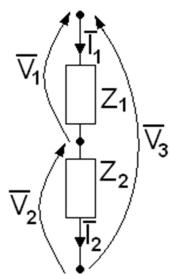
Figura 149: Passaggio del circuito in figura 146 nel dominio dei fasori.

Tale passaggio avviene, come mostrato in figura 149, lasciando inalterati i componenti adinamici e sostituendo ai componenti dinamici delle "scatole" con le relative ammettenze o impedenze indicate al fianco dei componenti stessi. Per la risoluzione del circuito si potranno poi utilizzare tutte le tecniche che già abbiamo adottato per risolvere circuiti nel dominio del tempo.

Validità dei metodi risolutivi dei circuiti già adottati anche nel dominio dei fasori

Equivalenti serie

Dati due generici bipoli con impedenze Z_1 e Z_2 collegati in serie come in figura 150, possiamo sostituire tali bipoli con un unico bipolo di impedenza $Z_3 = Z_1 + Z_2$. Infatti:



Per la KCL:

Per le relazioni costitutive dei componenti:

$$\bar{I}_1 = \bar{I}_2$$

$$\bar{V}_1 = Z_1 \bar{I}_1$$

$$\bar{V}_2 = Z_2 \bar{I}_2 = Z_2 \bar{I}_1$$

Per la KVL:

$$\bar{V}_3 = \bar{V}_1 + \bar{V}_2 = Z_1 \bar{I}_1 + Z_2 \bar{I}_1 = (Z_1 + Z_2) \bar{I}_1$$

Possiamo perciò porre:

$$Z_3 = Z_1 + Z_2$$

E abbiamo:

$$\bar{V}_3 = Z_3 \bar{I}_1$$

Figura 150: Impedenze in serie.

Equivalenti parallelo

Dati due generici bipoli con ammettenze Y_1 e Y_2 collegati in parallelo come in figura 151, possiamo sostituire tali bipoli con un unico bipolo di ammettenza $Y_3 = Y_1 + Y_2$. Infatti:

Per la KVL:

$$\bar{V}_1 = \bar{V}_2$$

Per le relazioni costitutive dei componenti:

$$\bar{I}_1 = Y_1 \bar{V}_1$$

$$\bar{I}_2 = Y_2 \bar{V}_2 = Y_2 \bar{V}_1$$

Per la KCL:

$$\bar{I}_3 = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 = Y_1 \bar{V}_1 + Y_2 \bar{V}_1 = (Y_1 + Y_2) \bar{V}_1$$

Possiamo perciò porre:

$$Y_3 = Y_1 + Y_2$$

E abbiamo:

$$\bar{I}_3 = Y_3 \bar{V}_1$$

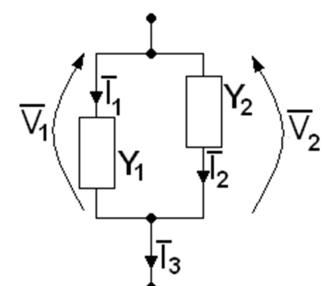


Figura 151: Ammettenze in parallelo.

Relazione tra impedenza ed ammettenza

Come la resistenza è il reciproco della conduttanza, anche l'impedenza è il reciproco dell'ammettenza. Abbiamo infatti:

$$\bar{V} = Z \bar{I} \quad \rightarrow \quad \bar{I} = \frac{1}{Z} \bar{V}$$

Siccome abbiamo anche:

$$\bar{I} = Y \bar{V}$$

Possiamo scrivere:

$$Y = \frac{1}{Z} \quad \rightarrow \quad Z = \frac{1}{Y}$$

Partitore di tensione

Consideriamo due generici bipoli con impedenze Z_1 e Z_2 collegati in serie come in figura 152, e aventi ai capi una tensione totale \bar{V}_3 . Possiamo applicare le formule del partitore di tensione per calcolare il fasore della tensione ai capi di ciascuna impedenza.

Abbiamo infatti:

$$\bar{V}_3 = \bar{V}_1 + \bar{V}_2 = Z_1 \bar{I}_1 + Z_2 \bar{I}_1 = (Z_1 + Z_2) \bar{I}_1$$

Da cui segue:

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{V}_3}{Z_1 + Z_2}$$

Possiamo infine scrivere:

$$\bar{V}_1 = Z_1 \bar{I}_1 = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \bar{V}_3$$

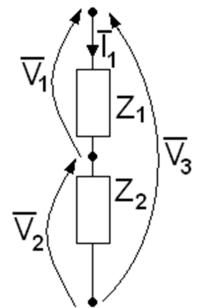


Figura 152: Partitore di tensione.

Partitore di corrente

Consideriamo due generici bipoli con ammettenze Y_1 e Y_2 collegati in parallelo come in figura 153. Possiamo applicare le formule del partitore di corrente per calcolare il fasore della corrente che attraversa ciascuna ammettenza. Abbiamo infatti:

$$\bar{I}_3 = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 = Y_1 \bar{V}_1 + Y_2 \bar{V}_1 = (Y_1 + Y_2) \bar{V}_1$$

Da cui segue:

$$\bar{V}_1 = \frac{\bar{I}_3}{Y_1 + Y_2}$$

Possiamo infine scrivere:

$$\bar{I}_1 = Y_1 \bar{V}_1 = \frac{Y_1}{Y_1 + Y_2} \bar{I}_3 = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \bar{I}_3$$

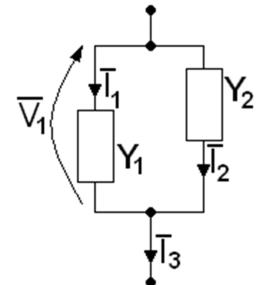


Figura 153: Partitore di corrente.

Trasformazione serie-parallelo di un generatore indipendente con una generica impedenza

È possibile trasformare la serie tra un generatore indipendente di tensione ed una impedenza Z nel parallelo tra un generatore indipendente di corrente e l'impedenza stessa Z , nel modo seguente:

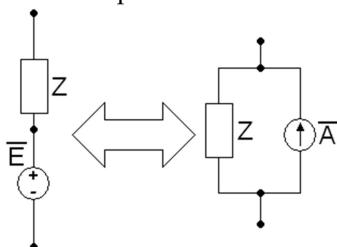


Figura 154: Trasformazione di generatori indipendenti.

Occorrerà porre:

$$\bar{A} = \frac{\bar{E}}{Z} \quad Z = \frac{1}{Y}$$

Oppure, per la trasformazione inversa:

$$\bar{E} = \bar{A} \quad Y = \frac{1}{Z}$$

Principio di sovrapposizione degli effetti

Dato un circuito lineare, costituito perciò solo da componenti lineari e da n_A generatori indipendenti di tensione e n_E generatori indipendenti di corrente, potremo applicare il PSE, che ci consentirà di esprimere il fasore di una tensione o corrente come combinazione lineare a coefficienti complessi dei fasori delle tensioni e correnti fissate dai generatori indipendenti presenti nel circuito. Ad esempio:

$$\bar{V}_1 = K_1 \bar{E}_1 + \dots + K_{n_E} \bar{E}_{n_E} + H_1 \bar{A}_1 + \dots + H_{n_A} \bar{A}_{n_A}$$

In cui $\bar{E}_1, \dots, \bar{E}_{n_E}, \bar{A}_1, \dots, \bar{A}_{n_A}$ sono i fasori delle tensioni e delle correnti forzati dai generatori e K_1, \dots, K_{n_E} , H_1, \dots, H_{n_A} sono dipendenti dai solo componenti lineari.

Teorema di Thevenin

Consideriamo un circuito lineare, costituito da 2 bipoli generici, eventualmente compositi (figura 155). Se vale la seguente ipotesi:

- Il bipolo B_1 è controllabile in corrente, ovvero il circuito ottenuto connettendo il bipolo stesso ad un generatore di corrente, come mostrato in figura 156, ammette una e una sola soluzione.

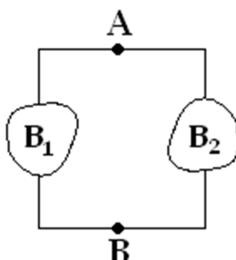


Figura 155: Prima ipotesi del teorema di Thevenin.

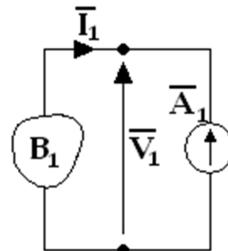
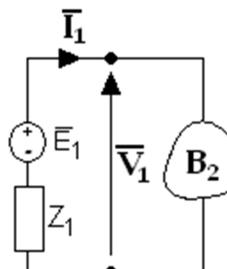


Figura 156: Seconda ipotesi del teorema di Thevenin.

Allora, possiamo sostituire al bipolo B_1 un altro bipolo, che chiameremo "equivalente Thevenin", in modo tale che i fasori delle tensioni e delle correnti in B_2 risultino inalterati (vedi figura 157).



Per il calcolo dei parametri introdotti in tale circuito, sarà necessario risolvere due circuiti: il primo, riportato in figura 158, consente il calcolo del fasore del generatore indipendente di tensione, e più precisamente avremo $\bar{E}_1 = \bar{V}_1$; il secondo, nel quale vengono spenti tutti i generatori indipendenti contenuti in B_1 e si collega ai capi del bipolo stesso un generatore di corrente con $\bar{A}_1 \neq 0$ arbitrario, permette di calcolare l'impedenza Z_1 come:

$$Z_1 = \frac{\bar{V}_1}{\bar{A}_1}$$

Figura 157: Sostituzione nel circuito di partenza dell'equivalente Thevenin.

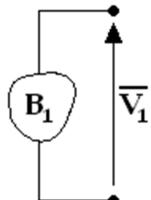


Figura 158: Calcolo del fasore della tensione.

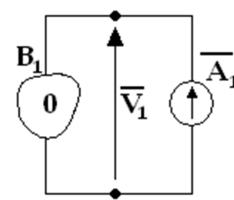


Figura 159: Calcolo dell'impedenza.

Anche in questo caso, così come nei circuiti resistivi, non è necessario verificare la controllabilità in corrente, dal momento che, affinché tale ipotesi sia verificata, è necessario e sufficiente verificare che i circuiti in figura 158 e 159 abbiano una e una sola soluzione.

Teorema di Norton

Consideriamo un circuito lineare, costituito da 2 bipoli generici, eventualmente compositi (figura 160). Se vale la seguente ipotesi:

- Il bipolo B_1 è controllabile in tensione, ovvero il circuito ottenuto connettendo il bipolo stesso ad un generatore di tensione, come mostrato in figura 161, ammette una e una sola soluzione.

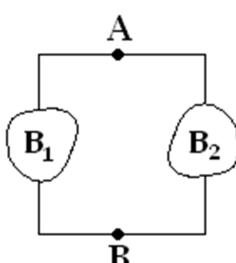


Figura 160: Prima ipotesi del teorema di Norton.

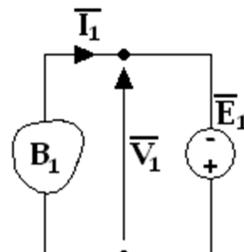
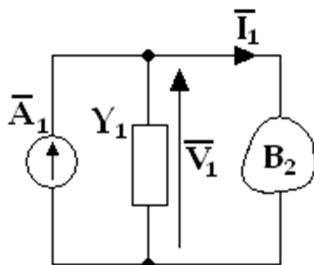


Figura 161: Seconda ipotesi del teorema di Norton.

Allora, possiamo sostituire al bipolo B_1 un altro bipolo, che chiameremo "equivalente Norton", in modo tale che i fasori delle tensioni e delle correnti in B_2 risultino inalterati (vedi figura 162).



Per il calcolo dei parametri introdotti in tale circuito, sarà necessario risolvere due circuiti: il primo, riportato in figura 163, consente il calcolo del fasore del generatore indipendente di corrente, e più precisamente avremo $\bar{A}_1 = \bar{I}_1$; il secondo, nel quale vengono spenti tutti i generatori indipendenti contenuti in B_1 e si collega ai capi del bipolo stesso un generatore di tensione con $\bar{E}_1 \neq 0$ arbitrario, permette di calcolare l'ammettenza Y_1 come:

$$Y_1 = \frac{\bar{I}_1}{\bar{E}_1}$$

Figura 162: Sostituzione nel circuito di partenza dell'equivalente Norton.

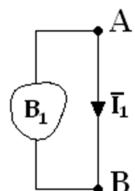


Figura 163: Calcolo del fasore della corrente.

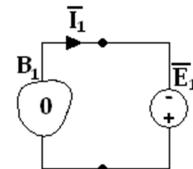


Figura 164: Calcolo dell'ammettenza.

Anche in questo caso, così come con i circuiti resistivi, non è necessario verificare la controllabilità in tensione, dal momento che, affinché tale ipotesi sia verificata, è necessario e sufficiente che i circuiti in figura 163 e 164 abbiano una e una sola soluzione.

Si mette in evidenza che il verso della corrente \bar{I}_1 misurata nei due circuiti per il calcolo dell'equivalente di Norton è da A verso B.

Teorema di rappresentazione dei doppi bipoli

Consideriamo un quadripolo Q , eventualmente composito, connesso a 2 bipoli qualsiasi, come in figura 165.

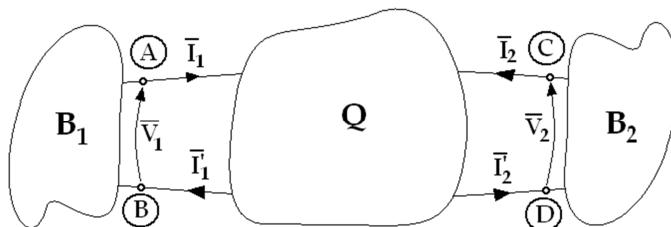


Figura 165: Prima ipotesi del teorema di rappresentazione dei doppi bipoli.

Allora, nel dominio dei fasori, è ancora possibile sostituire al quadripolo Q un suo equivalente, secondo le 4 rappresentazioni che abbiamo precedentemente introdotto, purché valgano le opportune ipotesi relative a ciascuno dei singoli casi.

In particolare, potremo ottenere per il nostro quadripolo la rappresentazione Z (che è l'analogo della rappresentazione R), la rappresentazione Y (corrispondente alla rappresentazione G) e le rappresentazioni ibride H e H' .

- *Rappresentazione Z:* Se il circuito ottenuto sostituendo ai due bipoli B_1 e B_2 due generatori di corrente che forzano due fasori delle correnti \bar{A}_1 ed \bar{A}_2 (come in figura 166) ammette una e una sola soluzione, allora è possibile sostituire al quadripolo Q nel circuito considerato un doppio bipolo equivalente del tipo raffigurato in figura 167.

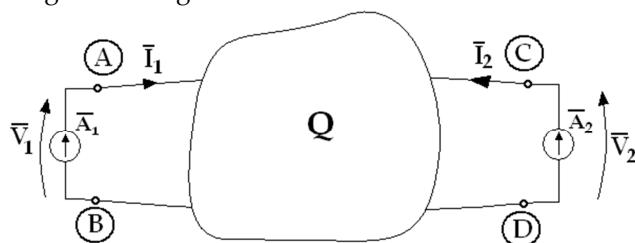


Figura 166: Ipotesi del teorema di rappresentazione dei doppi bipoli nel caso della rappresentazione Z.

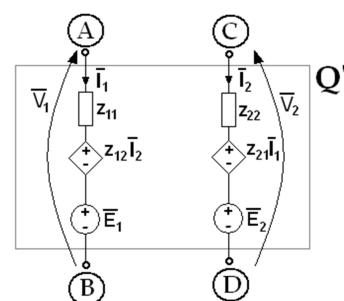


Figura 167: Equivalente Z.

I parametri dei componenti che costituiscono il doppio bipolo Q' possono essere calcolati con il metodo delle prove semplici, in maniera analoga a quanto visto con i circuiti resistivi.

Osserviamo che i generatori pilotati hanno come coefficienti delle impedenze (o meglio, delle transimpedenze). Come noto, le impedenze sono (in generale) dei numeri complessi. L'interpretazione fisica di questa tipologia di componenti risulta perciò molto difficile, tuttavia si ammette l'utilizzo di modelli come questi, che sono dunque una generalizzazione dei generatori pilotati.

Possiamo scrivere anche in questo caso la relazione costitutiva del doppio bipolo Q' in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} \bar{V}_1 \\ \bar{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{E}_1 \\ \bar{E}_2 \end{bmatrix}$$

- Rappresentazione Y: se il circuito ottenuto sostituendo ai due bipoli B_1 e B_2 due generatori indipendenti di tensione che forzano due fasori delle tensioni \bar{E}_1 ed \bar{E}_2 (come in figura 168) ammette una e una sola soluzione, allora è possibile sostituire al quadripolo Q nel circuito considerato un doppio bipolo equivalente del tipo rappresentato in figura 169.

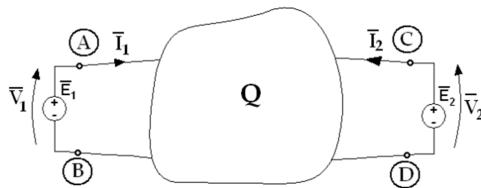


Figura 168: Ipotesi del teorema di rappresentazione dei doppi bipoli nel caso della rappresentazione Y.

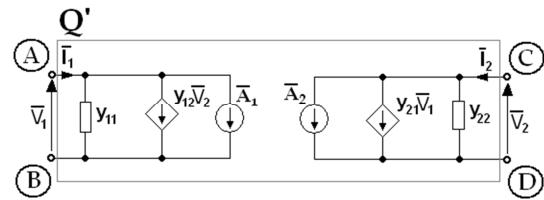


Figura 169: Equivalente Y.

Ancora una volta andremo a calcolare tutti i valori dei parametri presenti nel circuito mediante l'utilizzo di prove semplici, attraverso il procedimento ormai noto.

Possiamo inoltre scrivere ancora una volta la relazione costitutiva del doppio bipolo Q' in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{V}_1 \\ \bar{V}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{A}_1 \\ \bar{A}_2 \end{bmatrix}$$

Si osservi che in questo caso, a differenza del teorema di Norton, nelle prove semplici occorre misurare due correnti \bar{I}_1 da B ad A e \bar{I}_2 da D a C.

- Rappresentazione H e H': analogamente, possiamo considerare le rappresentazioni H e H', che discendono direttamente da quanto visto nel dominio del tempo: i passaggi formali saranno gli stessi (e perciò non vengono qui nuovamente riportati), ma le grandezze in questione non saranno tensioni, correnti e resistenze (o conduttanze), bensì fasori delle tensioni, fasori delle correnti e impedenze (o ammettenze).
- Teorema di rappresentazione del tripolo: anche nel dominio dei fasori vale, a riguardo del tripolo, quanto visto nel dominio del tempo: è possibile "sdoppiare" un nodo di un tripolo ottenendo un quadripolo e, se il tripolo è costituito solamente da componenti lineari e generatori indipendenti di tensione e/o corrente, possiamo poi applicare il teorema di rappresentazione dei doppi bipoli. Otterremo al termine un tripolo equivalente (dopo aver eliminato il cortocircuito introdotto per "sdoppiare" il nodo).

Trasformazione stella-triangolo e triangolo-stella

Anche nel dominio dei fasori valgono le formule per la trasformazione di un tripolo stella in un tripolo triangolo. Occorrerà però sostituire alle resistenze le relative impedenze, nel modo di seguito schematizzato:

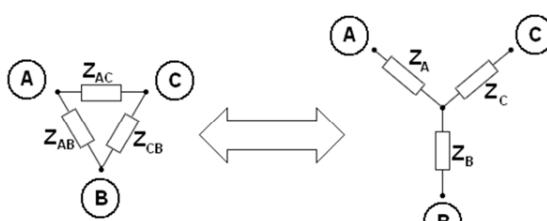


Figura 170: Trasformazione stella-triangolo e triangolo-stella.

Triangolo-stella:

$$\begin{aligned} Z_A &= \frac{Z_{AB}Z_{AC}}{Z_{AB} + Z_{BC} + Z_{AC}} \\ Z_B &= \frac{Z_{AB}Z_{BC}}{Z_{AB} + Z_{BC} + Z_{AC}} \\ Z_C &= \frac{Z_{BC}Z_{AC}}{Z_{AB} + Z_{BC} + Z_{AC}} \end{aligned}$$

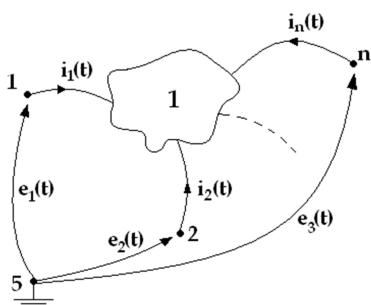
Stella-triangolo:

$$\begin{aligned} Z_{AB} &= Z_A + Z_B + \frac{Z_AZ_B}{Z_C} \\ Z_{AC} &= Z_A + Z_C + \frac{Z_AZ_C}{Z_B} \\ Z_{CB} &= Z_C + Z_B + \frac{Z_CZ_B}{Z_A} \end{aligned}$$

10. La potenza complessa

Potenza istantanea

Abbiamo già in passato introdotto il concetto di potenza istantanea assorbita da un certo componente. Riprendiamo ora brevemente questo concetto.



Dato un generico n -polo (vedi figura 170), possiamo introdurre i potenziali di nodo relativi ai vari nodi ai quali sono connessi i terminali dell' n -polo stesso, e possiamo introdurre la corrente, rilevata con verso entrante nel componente, su ognuno dei terminali del componente stesso. Diciamo potenza istantanea assorbita dall' n -polo:

$$p_a(t) = i_1(t) \cdot e_1(t) + i_2(t) \cdot e_2(t) + \cdots + i_n(t) \cdot e_n(t) = \sum_{k=1}^n [i_k(t) \cdot e_k(t)]$$

Figura 170: Potenza elettrica istantanea assorbita dall' n -polo.

Ricordiamo inoltre che la potenza istantanea generata da un n -polo è definita in maniera analoga, ma considerando correnti uscenti dai terminali dell' n -polo stesso. Proprio per tale ragione, possiamo anche dire che la potenza istantanea generata da un n -polo è l'opposto della potenza istantanea da esso assorbita.

Come noto, nel caso del bipolo la potenza assorbita può essere calcolata con una formula più semplice: misurando tensione e corrente sul bipolo con la convenzione degli utilizzatori, la potenza istantanea assorbita dal bipolo stesso sarà il prodotto tra la corrente e la tensione così rilevate.

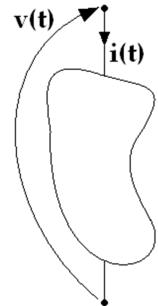


Figura 171: Potenza elettrica istantanea assorbita da un bipolo.

Una simile generalizzazione può inoltre essere adottata anche per gli n -poli, tramite l'introduzione delle tensioni "a cespuglio", che prevede che il nodo di riferimento sia un nodo tra quelli ai quali sono connessi i terminali dell' n -polo stesso (vedi figura 172). La potenza istantanea assorbita sarà così:

$$p_a(t) = i_1(t) \cdot v_1(t) + i_2(t) \cdot v_2(t) + \cdots + i_{n-1}(t) \cdot v_{n-1}(t) = \sum_{k=1}^{n-1} [i_k(t) \cdot v_k(t)]$$

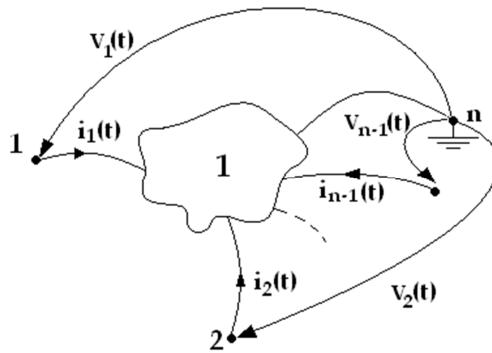


Figura 172: Potenza relativa istantanea assorbita da un bipolo.

Osserviamo che, supponendo di essere in regime sinusoidale, la potenza sarà in tal modo una somma di prodotti tra funzioni sinusoidali. Dall'Analisi matematica scopriamo così che, in generale, la potenza elettrica assorbita in un circuito in regime sinusoidale non è una sinusoide. Non potremo perciò introdurre dei fasori per rappresentare la potenza, anche se dovessimo trovarci in circuiti in regime sinusoidale. Tuttavia, se si sta risolvendo un circuito attraverso il metodo dei fasori può essere utile poter ragionare sulle potenze direttamente sul circuito rappresentato nel dominio dei fasori. A tale scopo introduciamo ora una nuova grandezza: la potenza complessa assorbita o erogata.

Potenza complessa

Definizione di potenza complessa assorbita da un n-polo

Dato un generico n-polo nel dominio dei fasori, introduciamo per ogni terminale dell'n-polo stesso la corrente misurata con verso entrante nel componente stesso; introduciamo inoltre il potenziale di nodo relativo ad ogni nodo al quale è connesso uno dei terminali del componente stesso.

Definiamo dunque potenza complessa assorbita dall'n-polo la grandezza S_a così calcolata:

$$S_a = \frac{1}{2} \bar{E}_1 \cdot (\bar{I}_1)^* + \frac{1}{2} \bar{E}_2 \cdot (\bar{I}_2)^* + \dots + \frac{1}{2} \bar{E}_n \cdot (\bar{I}_n)^* = \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{2} \bar{E}_k \cdot (\bar{I}_k)^* \right]$$

Dove con il simbolo “*” è stato indicato l'operatore “complesso coniugato”.

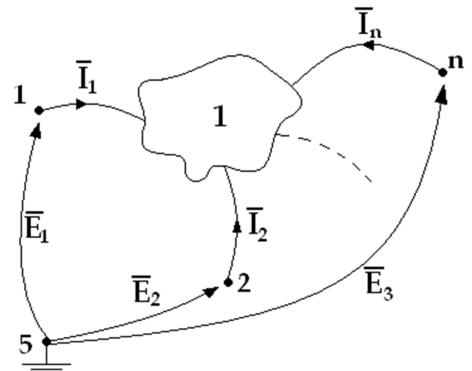


Figura 173: Potenza complessa assorbita da un n-polo.

Potenza complessa assorbita da un bipolo

Nel caso del bipolo vale una formula semplificata del tutto analoga a quella vista per la potenza istantanea:

$$S_a = \frac{1}{2} \bar{V} \cdot \bar{I}^*$$

Purché i fasori della corrente \bar{I} e della tensione \bar{V} siano indicati con la convenzione degli utilizzatori.

Tale formula può semplicemente essere dimostrata nel modo di seguito riportato.

Per la definizione di potenza complessa, abbiamo:

$$S_a = \frac{1}{2} \bar{E}_1 \cdot (\bar{I}_1)^* + \frac{1}{2} \bar{E}_2 \cdot (\bar{I}_2)^* = \frac{1}{2} \bar{E}_1 \cdot (-\bar{I}_2)^* + \frac{1}{2} \bar{E}_2 \cdot (\bar{I}_2)^*$$

Siccome il complesso coniugato dell'opposto di un numero è uguale all'opposto del complesso coniugato di quel numero, abbiamo

$$S_a = -\frac{1}{2} \bar{E}_1 \cdot (\bar{I}_2)^* + \frac{1}{2} \bar{E}_2 \cdot (\bar{I}_2)^* = \frac{1}{2} \bar{I}_2^* (\bar{E}_2 - \bar{E}_1) = \frac{1}{2} \bar{V} \cdot \bar{I}^*$$

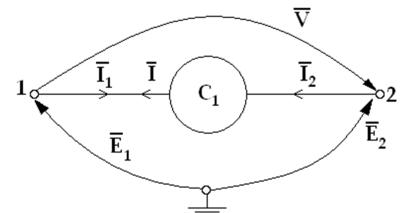


Figura 174: Potenza complessa assorbita dal bipolo

Semplificazione nel calcolo della potenza complessa di un n-polo

In maniera simile a quanto visto per la potenza istantanea, anche per il calcolo della potenza complessa possiamo ottenere una formula che ne semplifica il calcolo, attraverso l'introduzione delle tensioni “a cespuglio”. Sceglieremo come nodo di riferimento uno dei nodi ai quali sono connessi i terminali dell'n-polo; introduciamo per tutti i nodi restanti i fasori dei potenziali di nodo, e i fasori della corrente che attraversa il relativo terminale dell'n-polo, con verso entrante nel componente. Allora, la potenza complessa assorbita dal componente si calcola così:

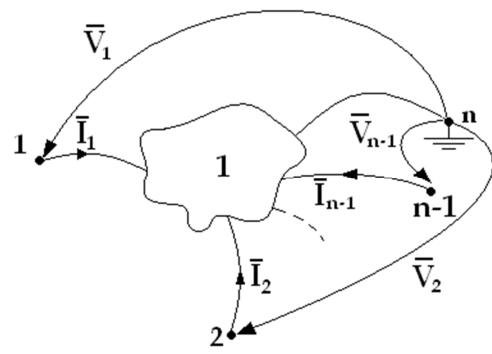


Figura 175: Potenza complessa assorbita dall'n-polo.

$$S_a = \frac{1}{2} \bar{V}_1 \cdot (\bar{I}_1)^* + \frac{1}{2} \bar{V}_2 \cdot (\bar{I}_2)^* + \dots + \frac{1}{2} \bar{V}_{n-1} \cdot (\bar{I}_{n-1})^* = \sum_{k=1}^{n-1} \left[\frac{1}{2} \bar{V}_k \cdot (\bar{I}_k)^* \right]$$

Potenza complessa di un doppio bipolo

Anche nel caso dei doppi bipolo possiamo calcolare in maniera semplificata la potenza complessa assorbita dal componente stesso, analogamente a quanto accadeva per la potenza istantanea. La potenza complessa assorbita dal doppio bipolo sarà infatti data dalla relazione:

$$S_a = \frac{1}{2} \bar{E}_1 \cdot (\bar{I}_1)^* + \frac{1}{2} \bar{E}_2 \cdot (\bar{I}_2)^*$$

Purché i fasori che vi compaiono siano indicati con i versi specificati in figura 176.

Figura 176: potenza complessa assorbita da un doppio bipolo.

Il teorema di Boucherot

Teorema di conservazione della potenza

Abbiamo già analizzato il teorema di conservazione della potenza (e il teorema di Tellegen, che ne è una generalizzazione). Ricordiamo che il teorema di conservazione della potenza afferma che: In un circuito qualsiasi, la somma delle potenze istantanee assorbite da tutti i componenti del circuito in ogni istante è sempre nulla. Detto m il numero dei componenti del circuito:

$$\sum_{k=1}^m [p_{ak}(t)] = 0$$

Oppure: la somma delle potenze istantanee generate da tutti componenti di un circuito qualunque è sempre nulla. Oppure ancora: la somma delle potenze istantanee assorbite da un certo numero di componenti di un circuito è sempre uguale alla somma delle potenze generate dai restanti componenti del circuito.

Enunciato del teorema di Boucherot

Quando rappresentiamo un circuito in regime sinusoidale nel dominio dei fasori, disponiamo di un teorema analogo rispetto al teorema di conservazione della potenza, che prende il nome di teorema di Boucherot.

Il teorema di Boucherot afferma che, dato un circuito qualsiasi, la somma delle potenze complesse assorbite dai componenti del circuito stesso è sempre nulla. In altri termini: la somma delle potenze complesse generate da tutti i componenti di un circuito è sempre nulla. Oppure ancora: la somma del potenze complesse assorbite da un certo numero di componenti di un circuito è sempre uguale alla somma delle potenze complesse generate dai restanti componenti del circuito.

Dimostrazione del teorema di Boucherot

Consideriamo come esempio il circuito riportato in fig. 177.

Nel circuito dato, possiamo introdurre le potenze complesse assorbite dai componenti del circuito:

$$\begin{aligned} S_{a_1} &= \frac{1}{2} \bar{E}_1 \cdot (\bar{I}_1^1)^* + \frac{1}{2} \bar{E}_2 \cdot (\bar{I}_2^1)^* + \frac{1}{2} \bar{E}_3 \cdot (\bar{I}_3^1)^* \\ S_{a_2} &= \frac{1}{2} \bar{E}_1 \cdot (\bar{I}_1^2)^* + \frac{1}{2} \bar{E}_3 \cdot (\bar{I}_3^2)^* \\ S_{a_3} &= \frac{1}{2} \bar{E}_1 \cdot (\bar{I}_1^3)^* + \frac{1}{2} \bar{E}_2 \cdot (\bar{I}_2^3)^* \end{aligned}$$

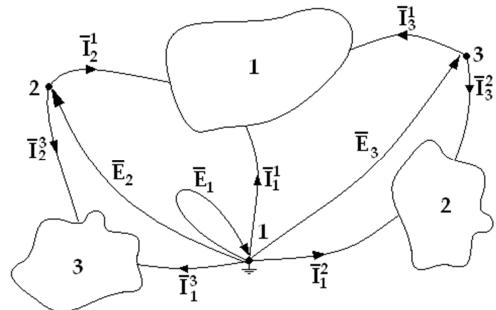


Figura 177: Circuito di esempio per la dimostrazione del teorema di Boucherot.

Perciò:

$$\begin{aligned} S_{a_1} + S_{a_2} + S_{a_3} &= \frac{1}{2} \bar{E}_1 \cdot \bar{I}_1^{1*} + \frac{1}{2} \bar{E}_2 \cdot \bar{I}_2^{1*} + \frac{1}{2} \bar{E}_3 \cdot \bar{I}_3^{1*} + \frac{1}{2} \bar{E}_1 \cdot \bar{I}_1^{2*} + \frac{1}{2} \bar{E}_3 \cdot \bar{I}_3^{2*} + \frac{1}{2} \bar{E}_1 \cdot \bar{I}_1^{3*} + \frac{1}{2} \bar{E}_2 \cdot \bar{I}_2^{3*} \\ S_{a_1} + S_{a_2} + S_{a_3} &= \frac{1}{2} \bar{E}_1 \cdot (\bar{I}_1^{1*} + \bar{I}_1^{2*} + \bar{I}_1^{3*}) + \frac{1}{2} \bar{E}_2 \cdot (\bar{I}_2^{1*} + \bar{I}_2^{2*}) + \frac{1}{2} \bar{E}_3 \cdot (\bar{I}_3^{1*} + \bar{I}_3^{2*}) \\ S_{a_1} + S_{a_2} + S_{a_3} &= \frac{1}{2} \bar{E}_1 \cdot (\bar{I}_1^1 + \bar{I}_1^2 + \bar{I}_1^3)^* + \frac{1}{2} \bar{E}_2 \cdot (\bar{I}_2^1 + \bar{I}_2^2)^* + \frac{1}{2} \bar{E}_3 \cdot (\bar{I}_3^1 + \bar{I}_3^2)^* \end{aligned}$$

Siccome i tre termini indicati in parentesi sono i primi membri delle leggi di Kirchhoff ai nodi 1, 2 e 3 (nello stesso ordine), possiamo sostituire il valore zero a tali termini, ottenendo così:

$$S_{a_1} + S_{a_2} + S_{a_3} = 0$$

Più in generale, se consideriamo un circuito costituito da m componenti e con n nodi:

$$\sum_{k=1}^m [S_{ak}] = \sum_{k=1}^m \left[\sum_{j=1}^n \left[\frac{1}{2} \bar{E}_j \cdot \bar{I}_j^{k*} \right] \right]$$

Siccome, matematicamente, possiamo scambiare l'ordine degli indici di sommatoria, possiamo scrivere:

$$\sum_{k=1}^m [S_{ak}] = \sum_{j=1}^n \left[\sum_{k=1}^m \left[\frac{1}{2} \bar{E}_j \cdot \bar{I}_j^k \right] \right] = \sum_{j=1}^n \left[\frac{1}{2} \bar{E}_j \cdot \sum_{k=1}^m [\bar{I}_j^k] \right] = \sum_{j=1}^n \left[\frac{1}{2} \bar{E}_j \cdot \left(\sum_{k=1}^m \bar{I}_j^k \right)^* \right]$$

Siccome poi la legge di Kirchhoff al nodo k può anche essere scritta nella forma:

$$\sum_{k=1}^m \bar{I}_j^k = 0$$

Abbiamo:

$$\sum_{k=1}^m [S_{ak}] = \sum_{j=1}^n \left[\frac{1}{2} \bar{E}_j \cdot 0 \right] = 0$$

Potenza attiva e potenza reattiva

La potenza complessa può essere scritta nella forma seguente:

$$S_a = P_a + j Q_a$$

In tal modo abbiamo evidenziato la parte reale P_a e la parte immaginaria Q_a della potenza complessa. È a questo punto opportuno introdurre la corretta terminologia adottata per tali grandezze:

- La parte reale della potenza complessa prende il nome di **potenza attiva**.
- La parte immaginaria della potenza complessa è detta **potenza reattiva**.

Naturalmente, trattandosi di potenze, sia P_a che Q_a si misurano in Watt. Tuttavia, si indica tale unità di misura con nomi diversi a seconda della grandezza in questione. In particolare, diremo che:

- La potenza complessa S_a si misura in Volt-Ampere (VA).
- La potenza attiva P_a si misura in Watt (W).
- La potenza reattiva Q_a si misura in Volt-Ampere Reattivi (VAR).

La motivazione di tale distinzione è storica, e serve fondamentalmente per consentire di riconoscere immediatamente la tipologia di grandezza indicata.

Interpretazione fisica della potenza attiva

Andremo ora ad analizzare il significato fisico della potenza attiva. Come vedremo, essa permette di mettere in relazione la potenza complessa con la potenza istantanea. Andiamo ora ad analizzare singolarmente la potenza complessa e la potenza istantanea. Dal confronto tra i risultati ottenuti saremo in grado di ricavare il significato fisico della potenza attiva.

La potenza istantanea

Consideriamo un generico componente costituito da n terminali.

La potenza istantanea da esso assorbita si calcolerà con la formula:

$$p_a(t) = i_1(t) \cdot e_1(t) + i_2(t) \cdot e_2(t) + \dots + i_n(t) \cdot e_n(t)$$

Se il circuito è in regime sinusoidale, abbiamo:

$$e_k(t) = |\bar{E}_k| \cdot \cos(\omega t + \arg \bar{E}_k) \quad i_k(t) = |\bar{I}_k| \cdot \cos(\omega t + \arg \bar{I}_k)$$

Perciò avremo:

$$i_k(t) \cdot e_k(t) = |\bar{E}_k| \cdot |\bar{I}_k| \cdot \cos(\omega t + \arg \bar{E}_k) \cdot \cos(\omega t + \arg \bar{I}_k)$$

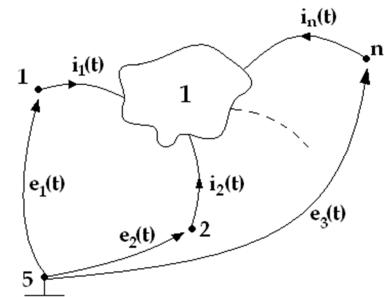


Figura 178: Potenza istantanea di un componente.

Si ricorda che, dalla Trigonometria, valgono le formule di Werner: $\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta)$

Possiamo quindi scrivere:

$$i_k(t) \cdot e_k(t) = \frac{1}{2} |\bar{E}_k| \cdot |\bar{I}_k| \cdot [\cos(\omega t + \arg \bar{I}_k + \omega t + \arg \bar{E}_k) + \cos(\omega t + \arg \bar{E}_k - \omega t - \arg \bar{I}_k)]$$

$$i_k(t) \cdot e_k(t) = \frac{1}{2} |\bar{E}_k| \cdot |\bar{I}_k| \cdot [\cos(2\omega t + \arg \bar{I}_k + \arg \bar{E}_k) + \cos(\arg \bar{E}_k - \arg \bar{I}_k)]$$

Sostituendo all'interno della definizione di potenza:

$$p_a = \sum_{k=1}^n [i_k(t) \cdot e_k(t)] = \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{2} |\bar{E}_k| \cdot |\bar{I}_k| \cdot [\cos(2\omega t + \arg \bar{I}_k + \arg \bar{E}_k) + \cos(\arg \bar{E}_k - \arg \bar{I}_k)] \right]$$

Ovvero:

$$p_a = \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{2} |\bar{E}_k| \cdot |\bar{I}_k| \cdot [\cos(\arg \bar{E}_k - \arg \bar{I}_k)] \right] + \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{2} |\bar{E}_k| \cdot |\bar{I}_k| \cdot [\cos(2\omega t + \arg \bar{I}_k + \arg \bar{E}_k)] \right]$$

Osserviamo che il primo termine, ovvero:

$$\sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{2} |\bar{E}_k| \cdot |\bar{I}_k| \cdot [\cos(\arg \bar{E}_k - \arg \bar{I}_k)] \right]$$

È semplicemente un numero, in quanto è indipendente dal tempo. Il secondo termine:

$$\sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{2} |\bar{E}_k| \cdot |\bar{I}_k| \cdot [\cos(2\omega t + \arg \bar{I}_k + \arg \bar{E}_k)] \right]$$

È invece una funzione sinusoidale avente frequenza doppia rispetto alla frequenza delle tensioni e delle correnti del circuito stesso. Possiamo così concludere che la potenza istantanea non è una funzione sinusoidale, ma è una sinusoide a cui è sommato un certo valore costante, ed ha frequenza doppia rispetto a quella delle tensioni e correnti del circuito (e quindi il suo periodo è la metà).

La potenza complessa

Analizziamo ora la potenza complessa. Abbiamo:

$$S_a = \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{2} \bar{E}_k \cdot \bar{I}_k^* \right]$$

Consideriamo ora solamente un generico termine della sommatoria:

$$\frac{1}{2} \bar{E}_k \cdot \bar{I}_k^*$$

La sua parte reale sarà:

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{2} \bar{E}_k \cdot \bar{I}_k^*\right) = \operatorname{Re}\left[\frac{1}{2} |\bar{E}_k| \cdot e^{j \arg(\bar{E}_k)} \cdot |\bar{I}_k| \cdot e^{-j \arg(\bar{I}_k)}\right] = \frac{1}{2} |\bar{E}_k| \cdot |\bar{I}_k| \cdot \operatorname{Re}[e^{j [\arg(\bar{E}_k) - \arg(\bar{I}_k)]}]$$

Perciò possiamo scrivere:

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{2} \bar{E}_k \cdot \bar{I}_k^*\right) = \frac{1}{2} |\bar{E}_k| \cdot |\bar{I}_k| \cdot \cos[\arg(\bar{E}_k) - \arg(\bar{I}_k)]$$

Siccome possiamo considerare:

$$S_a = \sum_{k=1}^n \left[\operatorname{Re}\left(\frac{1}{2} \bar{E}_k \cdot \bar{I}_k^*\right) + j \cdot \operatorname{Im}\left(\frac{1}{2} \bar{E}_k \cdot \bar{I}_k^*\right) \right] = \sum_{k=1}^n \left[\operatorname{Re}\left(\frac{1}{2} \bar{E}_k \cdot \bar{I}_k^*\right) \right] + j \sum_{k=1}^n \left[\operatorname{Im}\left(\frac{1}{2} \bar{E}_k \cdot \bar{I}_k^*\right) \right]$$

Possiamo ora prendere in analisi la parte reale della potenza complessa:

$$\operatorname{Re}(S_a) = \sum_{k=1}^n \left[\operatorname{Re}\left(\frac{1}{2} \bar{E}_k \cdot \bar{I}_k^*\right) \right] = \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{2} |\bar{E}_k| \cdot |\bar{I}_k| \cdot \cos[\arg(\bar{E}_k) - \arg(\bar{I}_k)] \right]$$

Interpretazione fisica della parte reale della potenza complessa

Confrontando i risultati così ottenuti osserviamo che possiamo scrivere:

$$p_a(t) = \operatorname{Re}(S_a) + \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{2} |\bar{E}_k| \cdot |\bar{I}_k| \cdot [\cos(2\omega t + \arg \bar{I}_k + \arg \bar{E}_k)] \right]$$

Possiamo dunque dire che la parte reale della potenza complessa (ovvero la potenza attiva) ha un preciso significato fisico: essa ci indica il valore medio in un periodo della potenza assorbita dal componente:

$$P_a = \operatorname{Re}(S_a) = \frac{1}{T} \int_0^T p_a(t) dt$$

Interpretazione fisica della potenza reattiva

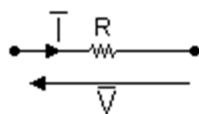
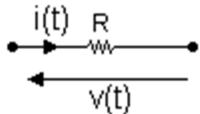
Rimane ora da chiarire il significato fisico della parte immaginaria della potenza complessa (potenza reattiva). Osserviamo innanzitutto che essa ha un significato fisico solamente in un caso particolare, ovvero solo se si studiano *circuiti reciproci*. Un circuito reciproco è un circuito dinamico lineare formato solamente da bipoli lineari, generatori indipendenti di tensione e corrente, e trasformatori ideali. Analizzeremo dunque singolarmente il significato fisico della parte immaginaria della potenza complessa per i componenti elencati.

Potenza reattiva e potenza attiva di un resistore

Consideriamo per prima cosa un resistore (figura 179). Avremo:

$$S_a = \frac{1}{2} \bar{V} \cdot \bar{I}^* = \frac{1}{2} R \cdot \bar{I} \cdot \bar{I}^* = \frac{1}{2} R \cdot |\bar{I}|^2$$

Osserviamo così che la potenza complessa è un numero reale. Di conseguenza, la potenza reattiva del resistore è sempre nulla. Possiamo perciò scrivere:



$$P_a = \frac{1}{2} R \cdot |\bar{I}|^2$$

$$Q_a = 0$$

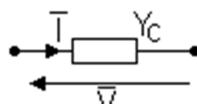
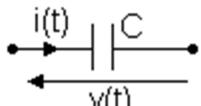
Figura 179: Resistore nel dominio del tempo e nel dominio dei fasori.

Potenza reattiva e potenza attiva di un condensatore

Consideriamo ora un condensatore (figura 180). Avremo in questo caso:

$$S_a = \frac{1}{2} \bar{V} \cdot \bar{I}^* = \frac{1}{2} \bar{V} \cdot (Y_C \bar{V})^* = \frac{1}{2} \bar{V} \cdot \bar{V}^* \cdot Y_C^* = \frac{1}{2} \cdot |\bar{V}|^2 \cdot Y_C^* = -\frac{j\omega C}{2} |\bar{V}|^2$$

Osserviamo così che la potenza complessa è un numero immaginario puro. Di conseguenza, abbiamo:



$$P_a = 0$$

$$Q_a = -\frac{1}{2} \omega C |\bar{V}|^2$$

Figura 180: Condensatore nel dominio del tempo e nel dominio dei fasori.

Come abbiamo visto, l'energia istantanea assorbita dal condensatore è calcolabile attraverso la formula:

$$w_C(t) = \frac{1}{2} C [v(t)]^2 = \frac{1}{2} C [|\bar{V}| \cdot \cos(\omega t + \arg \bar{V})]^2 = \frac{1}{2} C |\bar{V}|^2 \cos^2(\omega t + \arg \bar{V})$$

Per le note formule della Trigonometria, possiamo poi scrivere:

$$w_C(t) = \frac{1}{2} C |\bar{V}|^2 \frac{1 + \cos(2\omega t + 2 \arg \bar{V})}{2} = \frac{1}{4} C |\bar{V}|^2 + \frac{1}{4} C |\bar{V}|^2 \cos(2\omega t + 2 \arg \bar{V})$$

Siccome abbiamo scritto la funzione $w_C(t)$ come somma di un termine costante e di una funzione sinusoidale, il valor medio di $w_C(t)$ su un periodo T sarà la costante che compare in tale espressione, ovvero:

$$W_C = \frac{1}{4} C |\bar{V}|^2$$

Con W_C abbiamo indicato il valor medio dell'energia assorbita dal condensatore. Dal confronto di tale espressione con la formula ricavata per il calcolo dell'energia reattiva assorbita dal condensatore otteniamo:

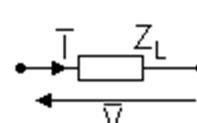
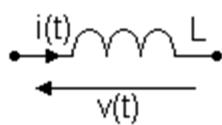
$$Q_a = -2\omega W_C$$

Potenza reattiva e potenza attiva di un induttore

Consideriamo ora un induttore (figura 181). Avremo in questo caso:

$$S_a = \frac{1}{2} \bar{V} \cdot \bar{I}^* = \frac{1}{2} Z_L \bar{I} \cdot \bar{I}^* = \frac{1}{2} j\omega L \cdot |\bar{I}|^2$$

Osserviamo così che anche in questo caso la potenza complessa è un numero immaginario puro. Di conseguenza, abbiamo:



$$P_a = 0$$

$$Q_a = \frac{\omega L}{2} |\bar{I}|^2$$

Figura 181: Induttore nel dominio del tempo e nel dominio dei fasori.

Come abbiamo visto, l'energia istantanea assorbita dall'induttore è calcolabile attraverso la formula:

$$w_L(t) = \frac{1}{2} L [i(t)]^2 = \frac{1}{2} L [|\bar{I}| \cdot \cos(\omega t + \arg \bar{I})]^2 = \frac{1}{2} L |\bar{I}|^2 \cos^2(\omega t + \arg \bar{I})$$

Per le note formule della Trigonometria, possiamo poi scrivere:

$$w_L(t) = \frac{1}{2} L |\bar{I}|^2 \frac{1 + \cos(2\omega t + 2 \arg \bar{I})}{2} = \frac{1}{4} L |\bar{I}|^2 + \frac{1}{4} L |\bar{I}|^2 \cos(2\omega t + 2 \arg \bar{I})$$

Siccome abbiamo scritto la funzione $w_L(t)$ come somma di un termine costante e di una funzione sinusoidale, il valor medio di $w_L(t)$ in un periodo T sarà la costante che compare in tale espressione, ovvero:

$$W_L = \frac{1}{4} L |\bar{I}|^2$$

Con W_L abbiamo dunque indicato il valor medio dell'energia assorbita dall'induttore. Dal confronto di tale espressione con la formula ricavata per il calcolo della potenza reattiva assorbita dall'induttore otteniamo:

$$Q_a = 2\omega W_L$$

Possiamo osservare che, sia nel caso del condensatore, sia nel caso dell'induttore, la potenza istantanea assorbita è sinusoidale, in quanto abbiamo ricavato che la potenza attiva (cioè il valor medio della potenza istantanea) vale sempre zero watt. Tuttavia, la pulsazione è in tal caso doppia rispetto a quella delle tensioni e delle correnti del circuito.

Osserviamo inoltre che, assumendo di utilizzare componenti con capacità ed induttanze positive (come è ragionevole pensare che sia), la potenza reattiva assorbita dal condensatore è sempre negativa, mentre la potenza reattiva assorbita dall'induttore è sempre positiva. Il segno della potenza reattiva assorbita dal componente ci può dunque aiutare a capire di quale tipologia di componente si tratti.

Potenza reattiva e potenza attiva di un trasformatore ideale

Consideriamo ora un trasformatore (figura 182). Avremo in questo caso:

$$S_a = \frac{1}{2} \bar{V}_1 \cdot \bar{I}_1^* + \frac{1}{2} \bar{V}_2 \cdot \bar{I}_2^*$$

Ricordando che la relazione costitutiva del trasformatore ideale è la seguente:

$$\begin{cases} \bar{V}_1 = n \bar{V}_2 \\ \bar{I}_2 = -n \bar{I}_1 \end{cases}$$

Possiamo scrivere, sostituendo nella precedente formula:

$$S_a = \frac{1}{2} n \bar{V}_2 \cdot \bar{I}_1^* + \frac{1}{2} \bar{V}_2 \cdot (-n \bar{I}_1)^* = \frac{n}{2} \bar{V}_2 \cdot \bar{I}_1^* - \frac{n}{2} \bar{V}_2 \cdot \bar{I}_1^* = 0$$

Osserviamo dunque che in questo caso sia la potenza attiva, sia la potenza reattiva, sono sempre nulle:

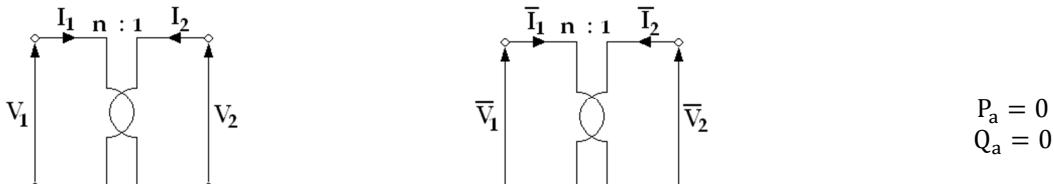


Figura 182: Trasformatore nel dominio del tempo e nel dominio dei fasori.

Naturalmente, potevamo aspettarci che la potenza attiva del trasformatore fosse sempre nulla: sappiamo infatti che essa è la media della potenza istantanea del trasformatore stesso, che, come abbiamo già dimostrato, è sempre nulla. Non potevamo però prevedere nulla sulla potenza reattiva del trasformatore.

Potenza reattiva assorbita da un componente composito

A questo punto possiamo considerare un circuito in cui sia presente un componente composito \$C_1\$, all'interno del quale siano presenti solamente resistori, condensatori, induttori e trasformatori. Consideriamo tale componente connesso ad una altro componente generico, anch'esso eventualmente composito.

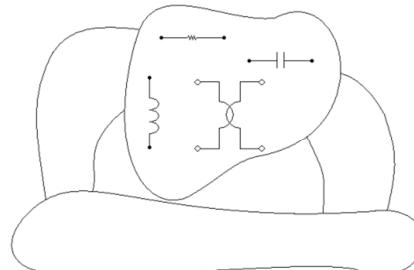


Figura 183: Componente composito costituito solo da resistori, induttori, condensatori e trasformatori ideali, connesso al componente complementare.

Indichiamo con \$S_{a_1}\$ la potenza complessa assorbita da \$C_1\$ e con \$S_{a_2}\$ la potenza complessa assorbita dal suo componente complementare. Per il teorema di Boucherot, avremo:

$$S_{a_1} + S_{a_2} = 0$$

Possiamo dimostrare che la potenza complessa assorbita da \$C_1\$ è la somma delle potenze complesse assorbite dai componenti che lo costituiscono.

Se infatti consideriamo \$C_1\$ non più come componente composito, ma prendiamo in esame tutti i singoli componenti che lo costituiscono come dei singoli componenti, possiamo applicare ancora il teorema di Boucherot, e otteniamo (indicando con i pedici R, L, C e T, rispettivamente, i resistori, gli induttori, i condensatori e i trasformatori ideali presenti in \$C_1\$):

$$\sum_i S_{a_{R_i}} + \sum_i S_{a_{C_i}} + \sum_i S_{a_{L_i}} + \sum_i S_{a_{T_i}} + S_{a_2} = 0$$

Avremo dunque, dal confronto tra tali relazioni:

$$S_{a_1} = \sum_i S_{a_{R_i}} + \sum_i S_{a_{C_i}} + \sum_i S_{a_{L_i}} + \sum_i S_{a_{T_i}}$$

Siccome le potenze complesse assorbite dai trasformatori sono tutte nulle:

$$S_{a_1} = \sum_i S_{a_{R_i}} + \sum_i S_{a_{C_i}} + \sum_i S_{a_{L_i}}$$

In base a quanto dimostrato nei precedenti paragrafi avremo inoltre:

$$S_{a_1} = \sum_i P_{a_{R_i}} + \sum_i (j \cdot 2\omega W_{L_i}) + \sum_i (-j \cdot 2\omega W_{C_i})$$

In conclusione:

$$S_{a_1} = P + j2\omega(W_L - W_C)$$

Dove abbiamo indicato:

$$P = \sum_i P_{a_{R_i}}$$

$$W_L = \sum_i W_{L_i}$$

Rappresenta la somma delle potenze istantanee medie assorbite da tutti i resistori del componente. Possiamo meglio dire che P è la media della potenza assorbita dai resistori.

È la somma delle energie medie assorbite dagli induttori nel componente, e quindi:

$$W_L = \frac{1}{T} \int_0^T [w_{L_1}(t) + w_{L_2}(t) + \dots + w_{L_n}(t)] dt$$

Cioè è la media dell'energia negli induttori.

$$W_C = \sum_i W_{C_i}$$

È la somma delle energie medie assorbite dai condensatori presenti nel componente, che è uguale alla media dell'energia nei condensatori.

Ipotizziamo ora che le resistenze, le capacità e le induttanze assumano sempre valori positivi.

1. Se il componente C₁ è costituito solamente da resistori:

La potenza complessa S_{a_1} è puramente reale e abbiamo, in particolare:

$$P_{a_1} \geq 0$$

$$Q_{a_1} = 0$$

2. Se il componente C₁ è costituito solamente da condensatori:

La potenza complessa S_{a_1} è puramente immaginaria e abbiamo, in particolare:

$$P_{a_1} = 0$$

$$Q_{a_1} = -2\omega W_C \leq 0$$

3. Se il componente C₁ è costituito solamente da induttori:

La potenza complessa S_{a_1} è puramente immaginaria e abbiamo, in particolare:

$$P_{a_1} = 0$$

$$Q_{a_1} = 2\omega W_L \geq 0$$

4. Se il componente C₁ è costituito solamente da condensatori e resistori:

La potenza complessa S_{a_1} ha sia una parte reale, sia una parte immaginaria in genere non nulle:

$$P_{a_1} \geq 0$$

$$Q_{a_1} = -2\omega W_C \leq 0$$

5. Se il componente C₁ è costituito solamente da induttori e resistori:

La potenza complessa S_{a_1} ha sia una parte reale, sia una parte immaginaria in genere non nulle:

$$P_{a_1} \geq 0$$

$$Q_{a_1} = 2\omega W_L \geq 0$$

6. Se il componente C₁ è costituito da resistori, condensatori e induttori:

La potenza complessa S_{a_1} ha sia una parte reale, sia una parte immaginaria in genere non nulle:

$$P_{a_1} \geq 0$$

$$Q_{a_1} = 2\omega(W_L - W_C) \geq 0$$

La presenza di trasformatori non implica alcun cambiamento nell'analisi fatta, perché abbiamo già dimostrato che assorbono potenza complessa nulla. Osserviamo inoltre che non valgono le implicazioni inverse. Ad esempio, se dovessimo avere $P_{a_1} = 0$ e $Q_{a_1} > 0$, non potremmo affermare con certezza che il componente contenga solamente induttori.

Si osserva inoltre che il comportamento di un componente viene classificato in tre diverse categorie:

1. Il componente ha **comportamento induttivo** se la sua potenza reattiva è maggiore di zero.
2. Il componente ha **comportamento capacitivo** se la sua potenza reattiva è minore di zero.
3. Il componente è in **risonanza** se la sua potenza reattiva è nulla. In particolare, questa situazione coincide al caso in cui le due possibili forme di energia assorbite dal componente sono in media uguali (più precisamente, tali forme di energia sono l'energia magnetica, immagazzinata dagli induttori, e l'energia elettrica, assorbita invece dai condensatori).

Da un punto di vista fisico la potenza assorbita dal resistore si disperde nell'ambiente circostante sottoforma di calore, detto anche "calore disperso per **effetto Joule**". Osserviamo invece che l'induttore e il condensatore non si surriscaldano, a differenza dei resistori, ma immagazzinano energia.

Significato dell'impedenza

Consideriamo un bipolo del tipo in figura (contenente solo resistori, induttori, condensatori e trasformatori ideali). Possiamo ridisegnare lo stesso bipolo passando nel dominio dei fasori, come evidenziato.

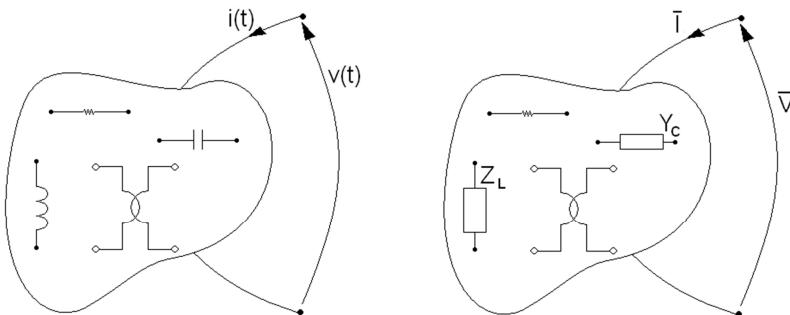


Figura 184: Bipolo costituito da soli resistori, condensatori, induttori e trasformatori nel dominio del tempo e nel dominio dei fasori.

Come abbiamo visto, la potenza di tale bipolo assumerà la forma:

$$S_a = P_a + j2\omega(W_L - W_C)$$

Siccome inoltre siamo passati nel dominio dei fasori, potremo anche applicare il Teorema di Thevenin, che ci consentirà di ottenere un bipolo equivalente più semplice. In particolare, siccome abbiamo ipotizzato che nel componente non siano presenti generatori indipendenti di tensione e di corrente, l'equivalente Thevenin del bipolo in analisi avrà certamente un generatore di tensione che forzerà un fasore nullo, e che perciò (essendo di fatto equivalente ad un cortocircuito) possiamo omettere. L'equivalente Thevenin sarà perciò un bipolo del tipo mostrato in figura 185. La potenza complessa da esso assorbita è:

$$S_a = \frac{1}{2}Z_T|\bar{I}|^2$$

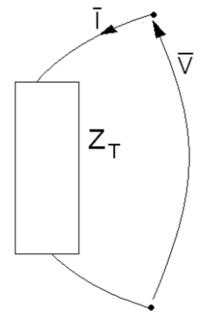


Figura 185: Equivalente Thevenin del bipolo in figura 184.

Otteniamo dunque:

$$\frac{1}{2}Z_T|\bar{I}|^2 = P_a + j2\omega(W_L - W_C)$$

Da cui possiamo ricavare:

$$Z_T = \frac{2P_a}{|\bar{I}|^2} + j\frac{4\omega(W_L - W_C)}{|\bar{I}|^2}$$

Terminologia

- La parte reale dell'impedenza prende il nome di **resistenza** e viene indicata con R_T :

$$R_T = \frac{2P_a}{|\bar{I}|^2}$$

- La parte immaginaria dell'impedenza è detta **reattanza** e viene indicata con X_T :

$$X_T = \frac{4\omega(W_L - W_C)}{|\bar{I}|^2}$$

Osservazioni

Se continuiamo a supporre che le resistenze, le induttanze e le capacità siano sempre positive, avremo che la resistenza del bipolo sarà sempre positiva. La reattanza potrà invece assumere segni diversi, e in particolare:

- Se il bipolo è composto solamente da resistori, avremo $X_T = 0$.
- Se il bipolo è composto solamente da induttori, avremo $X_T > 0$.
- Se il bipolo è composto solamente da condensatori, avremo $X_T < 0$.

La resistenza ha il significato di potenza media assorbita dai resistori (a meno di un opportuno fattore moltiplicativo). La reattanza ci indica invece l'energia media immagazzinata dai condensatori e dagli induttori (anche in questo caso, a meno di un opportuno fattore di moltiplicazione).

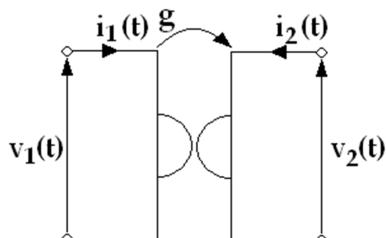
Tuttavia è opportuno mettere in evidenza che questa interpretazione dell'impedenza non vale per circuiti più generali, nei quali siano presenti componenti diversi da quelli precedentemente elencati. Possiamo infatti verificare che questa interpretazione non è valida se calcoliamo gli equivalenti Thevenin e/o Norton in circuiti di tipologie diverse da quelli finora analizzati (come faremo tra poco attraverso un esempio).

Nel caso generale non è corretto neppure parlare di comportamento induttivo, capacitivo o di risonanza.

Esempio: il giratore

Per evidenziare quanto appena visto, consideriamo ora un particolare componente, che prende il nome di giratore. Il giratore è un doppio bipolo resistivo e tempo-invariante, inventato nel '50 da Tellegen. Tale componente viene oggi realizzato come componente composito.

In figura 186 è mostrato il simbolo circuitale del giratore. A lato sono indicate le sue relazioni costitutive.



$$\begin{cases} i_1(t) = g \cdot v_2(t) \\ i_2(t) = -g \cdot v_1(t) \end{cases}$$

Figura 186: Simbolo del giratore.

Per prima cosa, possiamo dimostrare che la potenza istantanea da esso assorbita è sempre nulla:

$$p_a(t) = i_1(t) \cdot v_1(t) + i_2(t) \cdot v_2(t) = g \cdot v_2(t) \cdot v_1(t) - g \cdot v_1(t) \cdot v_2(t) = 0$$

Inoltre, possiamo dimostrare che la potenza complessa assorbita da tale componente non è nulla. Come è ovvio però la parte reale (potenza attiva) sarà sempre uguale a zero, perché è la media della potenza istantanea da esso assorbita, che, come abbiamo appena visto, è sempre nulla.

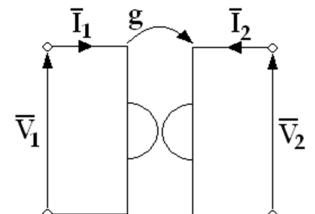


Figura 187: Giratore nel dominio dei fasori ($\omega = 1 \text{ rad/s}$).

A tale scopo, possiamo introdurre la relazione costitutiva del giratore nel dominio dei fasori, che sarà la seguente:

$$\begin{cases} \bar{I}_1 = g \cdot \bar{V}_2 \\ \bar{I}_2 = -g \cdot \bar{V}_1 \end{cases}$$

Abbiamo perciò:

$$S_a = \frac{1}{2} \bar{V}_1 \bar{I}_1^* + \frac{1}{2} \bar{V}_2 \bar{I}_2^* = \frac{g}{2} \bar{V}_1 \bar{V}_2^* - \frac{g}{2} \bar{V}_2 \bar{V}_1^* = \frac{g}{2} [\bar{V}_1 \bar{V}_2^* - (\bar{V}_1 \bar{V}_2^*)^*] = j g \operatorname{Im}(\bar{V}_1 \bar{V}_2^*)$$

Tale dimostrazione ci aiuta a capire che anche nel caso del trasformatore è ragionevole ipotizzare che la potenza attiva fosse nulla, ma non potevamo a priori dire nulla sulla potenza reattiva.

Consideriamo ora il seguente bipolo (figura 188) e calcoliamone l'equivalente Thevenin. Potremo così verificare che l'interpretazione in termini energetici di tale impedenza è in questo caso errata.

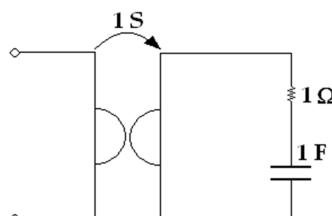


Figura 188: Bipolo di esempio.

Possiamo rappresentare tale bipolo nel dominio dei fasori, come mostrato in figura 189. Siccome nel bipolo non sono presenti generatori indipendenti, il fasore della tensione forzata dell'equivalente Thevenin sarà nullo. Per il calcolo dell'impedenza dovremo invece risolvere il circuito in figura 190.

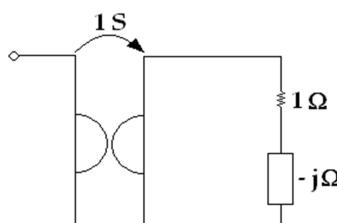


Figura 189: Bipolo di esempio nel dominio dei fasori.

Avremo, per la relazione costitutiva del giratore:

$$g \cdot \bar{V}_2 = \bar{I}_1$$

→

$$\bar{V}_2 = 1V$$

Inoltre, possiamo calcolare l'equivalente serie delle due impedenze nel circuito, che sarà un'impedenza:

$$Z = (1 - j) \Omega$$

Per la legge di Ohm abbiamo inoltre:

$$\bar{I}_2 = -\frac{\bar{V}_2}{Z} = -\frac{1}{1-j} \cdot \frac{1+j}{1+j} = \left(-\frac{1}{2} - j \frac{1}{2} \right) A$$

Sempre a seguito della relazione costitutiva del giratore, abbiamo:

$$\bar{V}_1 = -\frac{\bar{I}_2}{g} = \frac{1+j}{2} V$$

L'impedenza dell'equivalente Thevenin sarà perciò:

$$Z_T = \frac{\bar{V}_1}{1A} = \frac{1+j}{2} \Omega$$

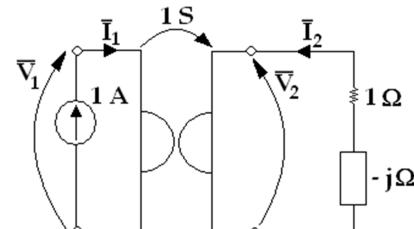


Figura 190: Circuito per il calcolo dell'impedenza dell'equivalente Thevenin del bipolo in fig. 189.

Osserviamo perciò che la reattanza dell'equivalente Thevenin è positiva, anche se all'interno del nostro bipolo non sono presenti induttori, e perciò.

Significato dell'ammettenza

Considerando ancora un componente del tipo schematizzato in figura 184, possiamo pensare di calcolarne l'equivalente Norton anziché l'equivalente Thevenin. Otterremmo in tal caso un bipolo costituito solamente da un'ammettenza Y_N (che sarà il reciproco dell'impedenza Z_T), come in figura 191.

La potenza complessa assorbita da tale bipolo sarà perciò:

$$S_a = \frac{1}{2} \bar{V} \cdot \bar{I}^* = \frac{1}{2} Y_N * |\bar{V}|^2$$

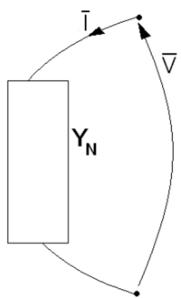


Figura 191: Equivalente Norton del bipolo in figura 184.

Dal confronto con la relazione:

$$S_a = P_a + j2\omega(W_L - W_C)$$

Otteniamo:

$$P_a + j2\omega(W_L - W_C) = \frac{1}{2} Y_N * |\bar{V}|^2$$

$$Y_N * = \frac{2P_a}{|\bar{V}|^2} + j \frac{4\omega(W_L - W_C)}{|\bar{V}|^2}$$

Ovvero:

$$Y_N = \frac{2P_a}{|\bar{V}|^2} - j \frac{4\omega(W_L - W_C)}{|\bar{V}|^2} = \frac{2P_a}{|\bar{V}|^2} + j \frac{4\omega(W_C - W_L)}{|\bar{V}|^2}$$

Terminologia

- La parte reale dell'ammettenza prende il nome di **conduttanza** e viene indicata con G_N :

$$G_N = \frac{2P_a}{|\bar{V}|^2}$$

- La parte immaginaria dell'ammettenza è detta **suscettanza** e viene indicata con B_N :

$$B_N = \frac{4\omega(W_C - W_L)}{|\bar{V}|^2}$$

Osservazioni

Se continuiamo a supporre che le resistenze, le induttanze e le capacità siano sempre positive, avremo che la conduttanza di un qualsiasi bipolo sarà sempre positiva. La suscettanza potrà invece assumere segni diversi, e in particolare sarà sempre di segno opposto rispetto alla reattanza.

Il teorema del massimo trasferimento di potenza (attiva)

Introduzione

Dato un bipolo B_1 composito, in regime sinusoidale, quanta potenza istantanea media potrà al massimo generare tale bipolo? La risposta a questa domanda dipende solo dal bipolo B_1 stesso, e ci viene fornita dal teorema del massimo trasferimento di potenza (attiva).

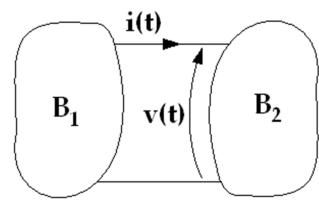


Figura 192: Introduzione al Teorema del massimo trasferimento di potenza.

Enunciato

Ipotesi:

1. Sia dato un circuito lineare in regime sinusoidale, costituito da due bipoli composti B_1 e B_2 .

Sotto tale ipotesi, potremo passare nel dominio dei fasori, come mostrato in figura 193.

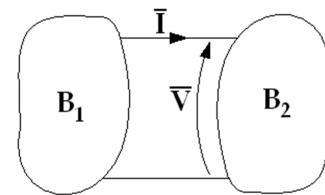


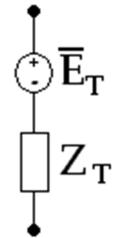
Figura 193: Passaggio al dominio dei fasori.

2. Supponiamo che il bipolo B_1 ammetta l'equivalente Thevenin e che la parte reale dell'impedenza dell'equivalente Thevenin sia strettamente positiva:

$$\operatorname{Re}(Z_T) > 0$$

Come vedremo, nell'ambito dei circuiti reciproci questa ipotesi implica solamente che ci siano dei resistori all'interno di B_1 che assorbono una potenza non nulla.

Osserviamo inoltre sin da ora che tale ipotesi è equivalente a supporre che il bipolo ammetta equivalente Norton, perché se abbiamo un'impedenza non nulla potremo certamente passare dall'equivalente Thevenin all'equivalente Norton (e viceversa). L'ipotesi che la parte reale dell'impedenza sia strettamente positiva si traduce inoltre nel porre la parte reale dell'ammettenza maggiore di zero:

Figura 194: Equivalente Thevenin del bipolo B_1 .

$$Y_N = \frac{1}{Z_T} = \frac{Z_T^*}{|Z_T|^2}$$

Perciò:

$$\operatorname{Re}(Y_N) = \operatorname{Re}\left(\frac{Z_T^*}{|Z_T|^2}\right)$$

E dunque, la parte reale dell'ammettenza ha lo stesso segno della parte reale dell'impedenza.

Tesi:

La massima potenza attiva generata dal bipolo B_1 è pari a:

$$P_{g\max} = \frac{|\bar{V}_T|^2}{8 \cdot \operatorname{Re}(Z_T)} = \frac{|\bar{A}_N|^2}{8 \cdot \operatorname{Re}(Y_N)}$$

Dimostrazione

Consideriamo l'equivalente Thevenin del bipolo B_1 (figura 195). Avremo:

$$S_g = \frac{1}{2} \bar{V} \cdot \bar{I}^*$$

Siccome la potenza attiva è la parte reale della potenza complessa:

$$P_g = \operatorname{Re}(S_g) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\bar{V} \cdot \bar{I}^*)$$

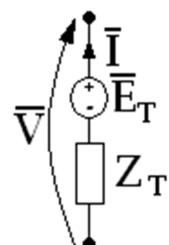
Abbiamo inoltre, per la Legge di Kirchhoff delle tensioni:

$$\bar{V} = \bar{E}_T - \bar{I} \cdot Z_T$$

Dunque, sostituendo, otteniamo:

$$\begin{aligned} P_g &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\bar{E}_T \cdot \bar{I}^* - |\bar{I}|^2 \cdot Z_T) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(|\bar{E}_T| \cdot |\bar{I}| \cdot e^{j(\arg \bar{E}_T - \arg \bar{I})} - |\bar{I}|^2 \cdot Z_T) \\ P_g &= \frac{1}{2} [|\bar{E}_T| \cdot |\bar{I}| \cdot \cos(\arg \bar{E}_T - \arg \bar{I})] - \frac{|\bar{I}|^2}{2} \operatorname{Re}(Z_T) \end{aligned}$$

In tale espressione l'unica variabile incognita è il fasore della corrente. Essendo però un fasore, la potenza generata dipenderà sia dal suo modulo, sia dalla sua fase.

Figura 195: Equivalente Thevenin del bipolo B_1 .

Supponiamo per prima cosa che il modulo del fasore della corrente sia fisso. In tal caso, la potenza generata sarà massima se sarà massimo il valore del primo termine della somma, ovvero:

$$\frac{1}{2} [|\bar{E}_T| \cdot |\bar{I}| \cdot \cos(\arg \bar{E}_T - \arg \bar{I})]$$

Tale termine sarà massimo se il coseno vale 1, ovvero se il suo argomento è nullo. Dobbiamo perciò porre:

$$\arg \bar{I} = \arg \bar{V}_T$$

Fissata in tal modo la fase del fasore della corrente, avremo:

$$P_g = \frac{|\bar{E}_T| \cdot |\bar{I}|}{2} - \frac{|\bar{I}|^2}{2} \operatorname{Re}(Z_T)$$

A questo punto, supponiamo che possa variare il modulo del fasore della corrente. Osserviamo che, rappresentando la funzione $P_g(|\bar{I}|)$ nel piano $|\bar{I}|/P_g$ otteniamo una parabola con concavità verso il basso e passante per l'origine. Il suo vertice ha ascissa:

$$|\bar{I}| = \frac{|\bar{E}_T|}{2 \operatorname{Re}(Z_T)}$$

Perciò possiamo ricavare l'ordinata (che rappresenta la massima potenza generata) andando a sostituire tale relazione nella precedente formula.

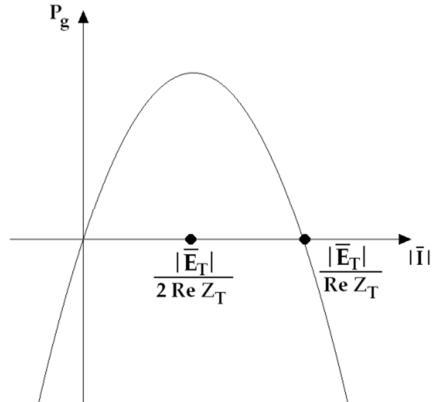


Figura 196: Grafico della potenza generata in funzione del modulo del fasore della corrente (a fase fissata).

Otteniamo:

$$P_g = \frac{|\bar{E}_T|^2}{4 \operatorname{Re}(Z_T)} - \frac{|\bar{E}_T|^2}{8 \operatorname{Re}(Z_T)} = \frac{|\bar{E}_T|^2}{8 \operatorname{Re}(Z_T)}$$

Come ottenere il massimo trasferimento di potenza

Con tale dimostrazione non solo abbiamo ricavato che la massima potenza generata dal bipolo è:

$$P_g = \frac{|\bar{E}_T|^2}{8 \operatorname{Re}(Z_T)}$$

Ma abbiamo anche dimostrato che tale trasferimento di potenza si ha se il fasore della corrente che attraversa il bipolo ha la stessa fase del fasore della tensione \bar{V}_T ed ha modulo pari a:

$$|\bar{I}| = \frac{|\bar{E}_T|}{2 \operatorname{Re}(Z_T)}$$

In altri termini, possiamo riassumere tali condizioni nella formula:

$$\bar{I} = \frac{\bar{E}_T}{2 \operatorname{Re}(Z_T)}$$

Nella pratica, se si vuole ottenere il massimo trasferimento di potenza si possono seguire moltissime strategie diverse. Ad esempio, possiamo scegliere il bipolo B_2 in modo tale che la corrente assuma il valore dato dalla relazione che abbiamo appena riportato. Un altro possibile modo, che è molto usato, prevede che si scelga un bipolo B_2 in modo che quest'ultimo corrisponda ad un'impedenza pari al coniugato dell'impedenza Z_T . In tal caso avremo:

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}_T}{Z_T + Z_T^*} = \frac{\bar{V}_T}{2 \operatorname{Re}(Z_T)}$$

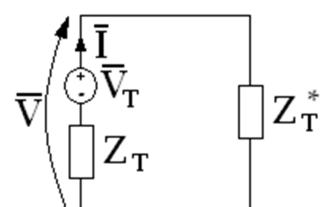


Figura 197: Possibile strategia per ottenere il massimo trasferimento di potenza.

Validità e importanza del Teorema

Il teorema del massimo trasferimento di potenza vale in circuiti molto generali, non solamente in circuiti reciproci. Inoltre tale teorema ha una grandissima importanza: la progettazione di tutti gli apparecchi da collegare alla rete che porta energia elettrica nelle nostre case deve avvenire tenendo conto di questo teorema, in modo tale che si possa assorbire dalla rete la massima potenza.

La funzione di trasferimento

Consideriamo un circuito in regime sinusoidale ed effettuiamo il passaggio dal dominio del tempo al dominio dei fasori. Prendiamo come esempio il circuito in figura 198.

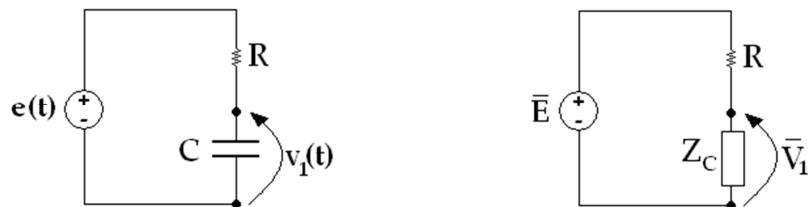


Figura 198: Circuito di esempio per l'introduzione della funzione di trasferimento.

Per un circuito di questo tipo vale il principio di sovrapposizione degli effetti. Potremo perciò scrivere:

$$\bar{V}_1 = H \bar{E}$$

Dove H è un numero complesso costante, che dipende solo dai parametri dei componenti lineari presenti nel circuito. Nel caso in analisi, possiamo con semplicità ricevere il valore di H , attraverso l'uso del partitore di tensione:

$$\bar{V}_1 = \frac{Z_C}{R + Z_C} \bar{E}$$

Perciò abbiamo:

$$H = \frac{Z_C}{R + Z_C} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{j\omega RC + 1}$$

Osserviamo quindi che H varia in funzione di ω (consideriamo fissi i parametri R e C). Possiamo dunque scrivere:

$$H(\omega) = \frac{1}{j\omega RC + 1}$$

La funzione H prende il nome di *funzione di trasferimento*. In questo contesto non approfondiremo ulteriormente lo studio della funzione di trasferimento. Possiamo però osservare che spesso è utile rappresentare il modulo e la fase della funzione di trasferimento, come mostrato in figura 199.

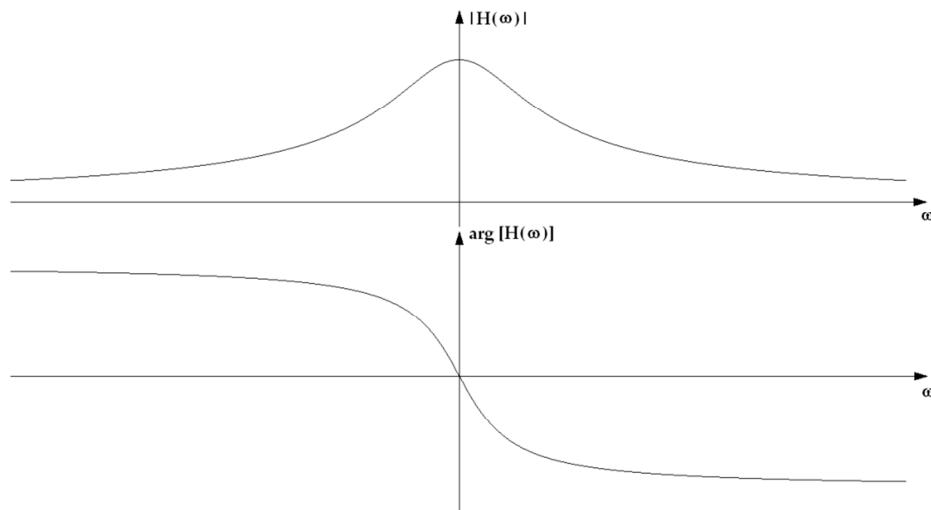


Figura 199: Grafici di modulo e fase della funzione di trasferimento.

11. Circuiti dinamici del primo ordine

Richiamo sulle equazioni differenziali lineari del primo ordine

Introduzione

Prima di introdurre i circuiti dinamici del primo ordine è opportuno un brevissimo richiamo su un argomento di Analisi Matematica che sarà necessario per lo studio di tale tipologia di circuiti: le equazioni differenziali lineari del primo ordine a coefficienti costanti.

Equazione differenziale lineare del primo ordine a coefficienti costanti e forma della soluzione

Un'equazione differenziale lineare del primo ordine nella funzione incognita $x(t)$, dove t è la variabile indipendente, è un'equazione del tipo:

$$x'(t) + \lambda \cdot x(t) = u(t)$$

L'integrale generale di tale equazione sarà del tipo:

$$x(t) = \hat{x}(t) + z(t)$$

Dove $\hat{x}(t)$ è un integrale particolare dell'equazione lineare data, mentre $z(t)$ è l'integrale generale dell'equazione lineare omogenea ad essa associata, ovvero dell'equazione:

$$z'(t) + \lambda \cdot z(t) = 0$$

Calcolo dell'integrale generale dell'equazione differenziale lineare omogenea associata

Tale equazione differenziale è a variabili separabili, perciò possiamo facilmente trovarne l'integrale generale:

$$\begin{aligned} x'(t) &= -\lambda \cdot x(t) \\ \int \frac{x'(t)}{x(t)} dt &= \int (-\lambda) dt \\ \ln|x(t)| &= -\lambda t + C \\ |x(t)| &= e^{-\lambda t+C} \\ |x(t)| &= e^C \cdot e^{-\lambda t} \\ x(t) &= k \cdot e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

Con $k = \pm e^C$.

Abbiamo dunque:

$$x(t) = \hat{x}(t) + k \cdot e^{-\lambda t}$$

Ci rimane così da individuare l'integrale particolare dell'equazione differenziale lineare data.

Calcolo dell'integrale particolare dell'equazione lineare data

Per il calcolo dell'integrale particolare dell'equazione lineare data si può utilizzare il cosiddetto metodo di somiglianza. Esso prevede diversi casi:

- La funzione $u(t)$ è una funzione costante U . L'equazione differenziale sarà perciò del tipo:

$$x'(t) + \lambda \cdot x(t) = U$$

Abbiamo due ulteriori sottocasi:

- Se $\lambda \neq 0$, allora cerchiamo una soluzione costante, del tipo $\hat{x}(t) = A$.

Per determinare il valore di tale costante, occorrerà sostituire all'interno dell'equazione differenziale data. Abbiamo:

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= A \\ \hat{x}'(t) &= 0 \end{aligned}$$

Perciò:

$$0 + \lambda \cdot A = U$$

Ottieniamo così:

$$A = \frac{U}{\lambda}$$

- Se $\lambda = 0$, allora l'equazione è del tipo $x'(t) = U$ e cerchiamo una soluzione del tipo $\hat{x}(t) = At$. Anche in questo caso dovremo sostituire nell'equazione data, e otterremo:

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= At \\ \hat{x}'(t) &= A \end{aligned}$$

Sostituendo, ottieniamo:

$$A = U$$

2. La funzione $u(t)$ è una funzione sinusoidale. L'equazione differenziale sarà perciò del tipo:

$$x'(t) + \lambda \cdot x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

Che può anche essere scritta nella forma:

$$x'(t) + \lambda \cdot x(t) = B \cdot \cos(\omega t) + C \cdot \sin(\omega t)$$

In questo caso cerchiamo una funzione sinusoidale con la stessa pulsazione ω , del tipo: $\hat{x}(t) = D \cdot \cos(\omega t) + E \cdot \sin(\omega t)$. Per il calcolo delle costanti D ed E dovremo sostituire nell'equazione di partenza:

$$\hat{x}(t) = D \cdot \cos(\omega t) + E \cdot \sin(\omega t)$$

$$\hat{x}'(t) = -D \cdot \sin(\omega t) + E \cdot \cos(\omega t)$$

Si ottiene così:

$$-D \cdot \sin(\omega t) + E \cdot \cos(\omega t) + \lambda D \cdot \cos(\omega t) + \lambda E \cdot \sin(\omega t) = B \cdot \cos(\omega t) + C \cdot \sin(\omega t)$$

$$(\lambda E - D) \cdot \sin(\omega t) + (\lambda D + E) \cdot \cos(\omega t) = B \cdot \cos(\omega t) + C \cdot \sin(\omega t)$$

Perciò:

$$\begin{cases} \lambda E - D = C \\ \lambda D + E = B \end{cases}$$

Risolvendo tale sistema, otterremo i valori cercati.

Problema di Cauchy

Se è inoltre specificata una condizione del tipo $x(t_0) = x_0$, allora si parla di problema di Cauchy. Potremo scrivere la soluzione del problema di Cauchy nella forma:

$$x(t) = \hat{x}(t) + [x_0 - \hat{x}(t_0)] \cdot e^{-\lambda(t-t_0)}$$

Circuiti dinamici del primo ordine

Definizione

Un circuito dinamico del primo ordine è un circuito governato da un'equazione differenziale lineare del primo ordine.

Noi ci limiteremo allo studio di alcuni casi di circuiti dinamici del primo ordine. In particolare, studieremo solamente circuiti contenenti un solo componente dinamico lineare, nei quali il resto del circuito sarà costituito solamente da componenti resistivi lineari tempo-invarianti o da generatori indipendenti sia tempovarianti, sia tempo-invarianti.

Possiamo perciò affermare che i circuiti che studieremo saranno solamente di due tipologie fondamentali, schematizzate dai circuiti in figura 200 e 201.

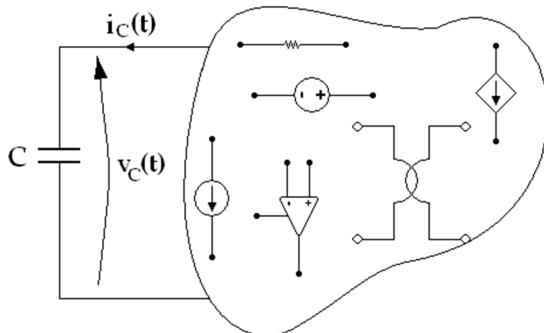


Figura 200: Circuito lineare del primo ordine con condensatore.

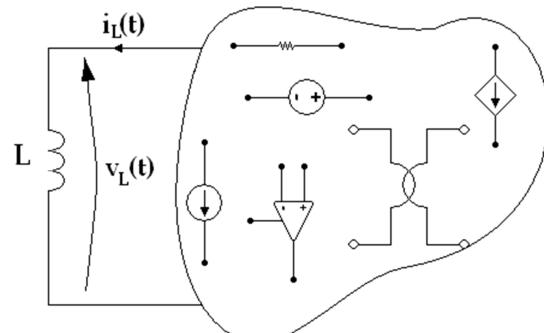


Figura 201: Circuito lineare del primo ordine con induttore.

In realtà, come vedremo, non tutti i circuiti di questo tipo sono del primo ordine, perché non sempre sono governati da un'equazione del tipo:

$$\frac{dx(t)}{dt} + \lambda \cdot x(t) = u(t)$$

Circuiti dinamici del primo ordine con condensatore

Analisi di un circuito dinamico del primo ordine con condensatore

Si consideri ora il circuito riportato in figura 200. Si supponga inoltre di voler calcolare una qualsiasi variabile circuitale (tensione o corrente) all'interno del bipolo complementare rispetto al condensatore.

Consideriamo dapprima che tale variabile circuitale sia la tensione $v_C(t)$. Avremo, per la relazione costitutiva del condensatore:

$$i_C(t) = C \frac{dv_C}{dt}(t)$$

Ipotizziamo anche che sia possibile calcolare l'equivalente Norton del bipolo complementare al condensatore (che indicheremo in seguito semplicemente con B_1). L'equivalente Norton di B_1 sarà del tipo:

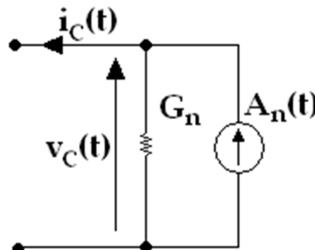


Figura 202: Equivalente Norton del bipolo B_1 nel circuito di figura 200.

La conduttanza equivalente G_n è costante. Infatti per ottenere la conduttanza equivalente di un bipolo occorre spegnere tutti i generatori indipendenti in esso presenti, perciò la conduttanza equivalente dipende solo dai componenti lineari, che sono tempo-invarianti.

Avremo perciò:

$$i_C(t) = -G_n v_C(t) + a_n(t)$$

Dal confronto tra tale equazione e la relazione costitutiva del condensatore riportata poco sopra, abbiamo:

$$C \frac{dv_C}{dt}(t) = -G_n v_C(t) + a_n(t)$$

Che può anche essere scritta nella forma:

$$\frac{dv_C}{dt}(t) + \frac{G_n}{C} v_C(t) = \frac{a_n(t)}{C}$$

Quella appena ottenuta è un'equazione differenziale lineare del primo ordine. Come abbiamo visto nel breve ripasso di Analisi Matematica, la soluzione di tale equazione sarà del tipo:

$$v_C(t) = \hat{v}_C(t) + [v_C(t_0) - \hat{v}_C(t_0)]e^{-\frac{G_n}{C}(t-t_0)}$$

Se inoltre indichiamo la **pulsazione naturale**

$$\lambda = -\frac{G_n}{C} = -\frac{R_t}{L}$$

Abbiamo:

$$v_C(t) = \hat{v}_C(t) + [v_C(t_0) - \hat{v}_C(t_0)]e^{-\lambda(t-t_0)}$$

La tensione ai capi del condensatore prende il nome di "**variabile di stato**", mentre l'equazione appena scritta è detta "**equazione di stato**".

Si osserva dall'equazione di stato che, affinché sia possibile individuare la soluzione del nostro circuito, è necessario conoscere la tensione sul condensatore in un certo istante, che considereremo come istante iniziale t_0 . Tale valore deve quindi essere un dato del problema.

Rimane poi da individuare la soluzione particolare dell'equazione differenziale, ovvero $\hat{v}_C(t)$. Analogamente a quanto accade nella risoluzione matematica dell'equazione, a seconda del tipo di funzione che si ha al secondo membro, si avranno diverse metodologie risolutive del circuito. Nel caso di B_1 costituito solamente da componenti adinamici tempo-invarianti si potranno avere due diverse situazioni:

- Caso 1: forzante costante con $\lambda \neq 0$
- Caso 2: forzante costante con $\lambda = 0$

In più considereremo il caso di forzanti sinusoidali isofrequenziali.

Caso 1: forzante costante con $\lambda \neq 0$

Se la funzione che si ha al secondo membro è una funzione costante (perciò indipendente dal tempo):

$$\frac{a_n(t)}{C} = \text{costante}$$

E la costante λ non è nulla, ovvero:

$$\lambda = -\frac{G_n}{C} \neq 0$$

Allora cerchiamo una soluzione particolare $\hat{v}_C(t)$ costante. Se la tensione ai capi del condensatore è costante, ciò implica che la corrente che attraversa il condensatore stesso (che ne è la derivata, moltiplicata per la capacità) sia nulla. Di conseguenza, ricercare una soluzione $\hat{v}_C(t)$ costante per la nostra equazione differenziale equivale, da un punto di vista circuitale, a calcolare la tensione $\hat{v}_C(t)$ indicata nel circuito in figura 203, nel quale viene sostituito al condensatore un circuito aperto:

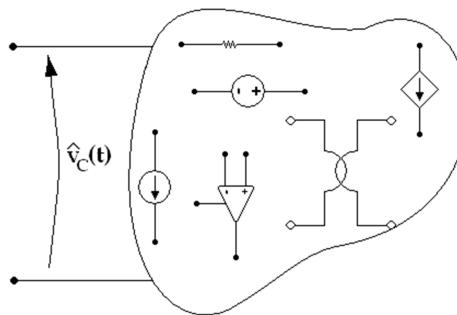


Figura 203: Calcolo di $\hat{v}_C(t)$ nel caso in cui $a_n(t)/C = \text{costante}$.

Si osserva che in realtà la tensione così rilevata sarà indipendente dal tempo (perché costante, appunto) perciò è superfluo indicare tramite parentesi la dipendenza dalla variabile t.

Caso 2: forzante costante con $\lambda = 0$

Se la funzione che si ha al secondo membro è una funzione costante (perciò indipendente dal tempo):

$$\frac{a_n(t)}{C} = \text{costante} = \frac{A_n}{C}$$

E la costante λ è nulla, ovvero:

$$\lambda - \frac{G_n}{C} = 0$$

Allora la soluzione particolare $\hat{v}_C(t)$ è:

$$\hat{v}_C(t) = \frac{A_n}{C}(t - t_0)$$

Caso 3: forzante sinusoidale

Questo caso si verifica quando il bipolo B_1 è costituito da:

- Componenti adinamici lineari tempo-invarianti.
- Generatori indipendenti di tensione e/o corrente tempo-varianti.

In questo caso possiamo supporre di calcolare istante per istante l'equivalente Norton del nostro bipolo. La conduttanza equivalente sarà ancora costante; la corrente forzata dal generatore indipendente di corrente che compare nell'equivalente Norton non sarà invece costante, ma sarà una funzione del tempo $a_n(t)$.

I generatori indipendenti di tensione e/o corrente tempo-varianti presenti nel bipolo B_1 sono tutti generatori sinusoidali alla stessa pulsazione ω . In tal caso, $a_n(t)$ sarà sinusoidale alla pulsazione ω .

In tali condizioni possiamo cercare un integrale particolare $\hat{v}_C(t)$ sinusoidale. Per fare questo, possiamo applicare il metodo dei fasori.

Caso degenero

Tuttavia è anche possibile che l'equivalente Norton del bipolo resistivo complementare al condensatore non esista. In tal caso, il circuito considerato non è un circuito del primo ordine, e viene perciò detto "circuito degenero". L'equazione che governa il nostro circuito degenero infatti in una equazione algebrica.

Se non esiste l'equivalente Norton ma esiste l'equivalente Thevenin, sappiamo che il bipolo considerato è equivalente ad un generatore di tensione. Possiamo così applicare l'equivalente di Thevenin al bipolo B_1 : otterremo una resistenza equivalente nulla (altrimenti esisterebbe l'equivalente Norton) ed un generatore di tensione $e_T(t)$. Possiamo dunque rappresentare l'equivalente Thevenin del bipolo come mostrato in figura 204.

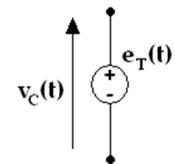
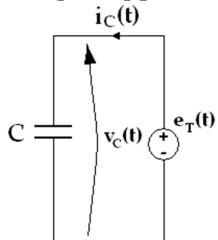


Figura 204: Equivalente Thevenin del bipolo B_1 nel caso degenero.



Se sostituiamo l'equivalente Thevenin nel circuito di partenza, otteniamo il circuito in figura 205. Viene quindi imposta una tensione $e_T(t)$ ai capi del condensatore. La soluzione del circuito sarà:

$$v_C(t) = e_T(t)$$

Figura 205: Sostituzione dell'equivalente Thevenin di B_1 nel circuito dato.

Procedimento risolutivo per il calcolo della tensione ai capi del condensatore

Fatte tali considerazioni, possiamo così riassumere il procedimento risolutivo di un circuito dinamico del primo ordine con un condensatore:

1. Si cerca la conduttanza dell'equivalente Norton del bipolo B_1 complementare al condensatore.
2. Si hanno a questo punto due casi:

- i) L'equivalente Norton esiste: in tal caso, si segue il seguente procedimento:

- Si calcola il valore di λ attraverso la formula:

$$\lambda = -\frac{G_n}{C}$$

- Si individua una soluzione particolare del circuito. A tale scopo, si suddividono a questo punto 3 ulteriori sottocasi:
 - a) Se tutti i generatori indipendenti in B_1 sono generatori di tensione e/o corrente costanti ed è stato ottenuto $\lambda \neq 0$, allora si cerca una soluzione particolare $\hat{v}_C(t)$ costante, attraverso la risoluzione del circuito ottenuto sostituendo al condensatore un c.a. (fig. 206).

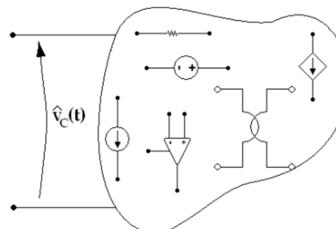


Figura 206: Calcolo di $\hat{v}_C(t)$ nel caso in cui $a_n(t)/C = \text{costante}$.

- b) Se tutti i generatori indipendenti nel bipolo B_1 sono generatori di tensione e/o corrente costanti ed è stato ottenuto $\lambda = 0$, allora una soluzione particolare del circuito sarà data da:

$$\hat{v}_C(t) = \frac{A_n}{C}(t - t_0)$$

- c) Se tutti i generatori indipendenti presenti in B_1 sono generatori di tensione e/o corrente sinusoidali tutti alla stessa pulsazione ω , allora è possibile determinare una soluzione particolare del circuito (la soluzione in regime sinusoidale) attraverso l'applicazione del metodo dei fasori. Si passerà perciò nel dominio dei fasori e, tramite le tecniche note, si ricaverà il fasore della tensione ai capi del condensatore \bar{V}_C . Si avrà infine:

$$\hat{v}_C(t) = \text{Re}(\bar{V}_C e^{j\omega t})$$

- Si avrà infine la soluzione del circuito, nella forma:

$$v_C(t) = \hat{v}_C(t) + [v_{C_0} - \hat{v}_C(t_0)]e^{-\lambda(t-t_0)}$$

Dove $v_C(t_0) = v_{C_0}$ è un dato del problema.

- ii) L'equivalente Norton non esiste: in tal caso possiamo calcolare il generatore $e(t)$ dell'equivalente Thevenin del bipolo B_1 . In conclusione, avremo semplicemente:

$$v_C(t) = e_T(t)$$

Calcolo di una variabile circuitale diversa da $v_C(t)$

Il procedimento finora illustrato ci consente di calcolare la tensione ai capi del condensatore. Tuttavia, non sempre tale grandezza è realmente quella che si desidera individuare, ma potremmo aver bisogno di individuare una generica corrente o tensione $y(t)$ all'interno di B_1 . In tal caso occorrerà applicare il **teorema di sostituzione**. Una volta nota la tensione $v_C(t)$ possiamo infatti sostituire al condensatore un generatore di tensione indipendente, che generi una tensione $v_C(t)$. Si otterrà così un circuito resistivo lineare (figura 207), nel quale potremo applicare il Principio di Sovrapposizione degli Effetti per il calcolo di $y(t)$.

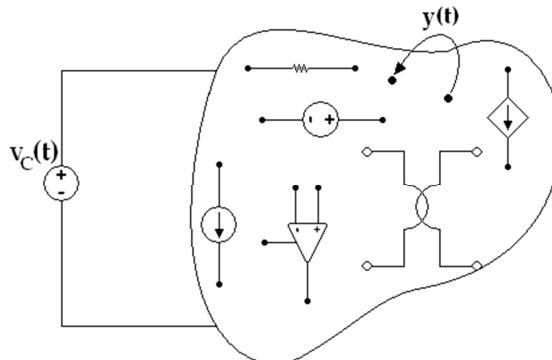


Figura 207: Applicazione del Principio di Sostituzione.

Tramite l'applicazione del PSE otterremo:

$$y(t) = H_1 v_C(t) + H_2 e_2(t) + \dots + H_n e_n(t) + K_1 a_1(t) + \dots + K_m a_m(t)$$

Dove $e_2, \dots, e_n, a_1, \dots, a_m$ sono le tensioni e le correnti forzate dai generatori indipendenti in B_1 .

Naturalmente però nella pratica tale procedimento (che è concettualmente corretto) risulta molto lungo da applicare, perciò sarebbe opportuno individuare una maniera più semplice per la risoluzione del circuito. Consideriamo che si abbia:

$$v_C(t) = \hat{v}_C(t) + [v_C(t_0) - \hat{v}_C(t_0)]e^{-\lambda(t-t_0)}$$

Ponendo

$$U(t) = H_2 e_2(t) + \dots + H_n e_n(t) + K_1 a_1(t) + \dots + K_m a_m(t)$$

Potremo perciò scrivere:

$$y(t) = H_1 \{\hat{v}_C(t) + [v_C(t_0) - \hat{v}_C(t_0)]e^{-\lambda(t-t_0)}\} + U(t)$$

Ovvero:

$$y(t) = [H_1 \hat{v}_C(t) + U(t)] + [[H_1 v_C(t_0) + U(t_0)] - [H_1 \hat{v}_C(t_0) + U(t_0)]]e^{-\lambda(t-t_0)}$$

Osserviamo che in tale espressione il primo termine rappresenta la soluzione particolare $\hat{y}(t)$, che si ha quando $v_C(t) = \hat{v}_C(t)$.

$$\hat{y}(t) = H_1 \hat{v}_C(t) + U(t)$$

Abbiamo inoltre che il termine

$$H_1 v_C(t_0) + U(t_0)$$

Rappresenta il valore che assume la variabile $y(t)$ quando la tensione ai capi del condensatore è $v_C(t_0)$. È dunque la tensione all'istante iniziale:

$$y(t_0) = H_1 v_C(t_0) + U(t_0)$$

Infine, il termine

$$H_1 \hat{v}_C(t_0) + U(t_0)$$

È il valore che assume $\hat{y}(t)$ all'istante t_0 . Abbiamo dunque:

$$\hat{y}(t_0) = H_1 \hat{v}_C(t_0) + U(t_0)$$

In conclusione, potremo scrivere:

$$y(t) = \hat{y}(t) + [y(t_0) - \hat{y}(t_0)]e^{-\lambda(t-t_0)}$$

Osserviamo perciò che $y(t)$ assume la stessa forma che assumeva $v(t)$.

Per individuare $y(t)$ non è perciò necessario aver prima calcolato $v_C(t)$. Possiamo seguire infatti il seguente procedimento:

1. Per individuare la costante λ , seguiremo gli stessi passi visti nel caso in cui si stia cercando di individuare $v_C(t)$. Si osserva infatti che λ assume sempre lo stesso valore per tutte le variabili circuituali: tale costante è perciò una proprietà del circuito, il cui significato verrà in seguito approfondito.
2. Per individuare $y(t_0)$ possiamo semplicemente fissare all'interno del nostro circuito di partenza il tempo all'istante t_0 . In tal caso, potremo fissare tutti i valori delle tensioni e delle correnti forzate dai generatori indipendenti ai valori all'istante iniziale t_0 e potremo sostituire al condensatore un generatore indipendente di tensione $v_C(t_0)$. Risolvendo il circuito così ottenuto potremo individuare il valore di $y(t_0)$.

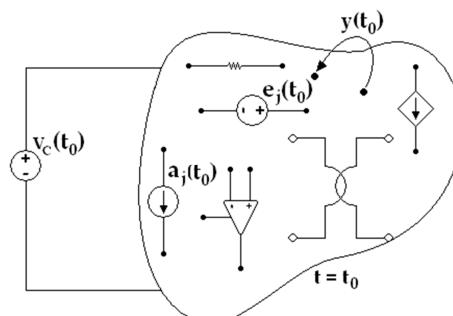


Figura 208: Calcolo del valore $y(t_0)$.

3. Per individuare $\hat{y}(t)$, dobbiamo ancora una volta distinguere 3 sottocasi:

- a) Se i generatori indipendenti di tensione e/o corrente presenti in B_1 forzano solamente tensioni e/o correnti costanti e la costante λ non è nulla, allora possiamo ricercare una soluzione particolare $\hat{y}(t)$ costante usando lo stesso circuito di figura 203, in cui al condensatore è stato sostituito un circuito aperto. In questo caso andremo però ad individuare $\hat{y}(t)$, come mostrato in figura 209.

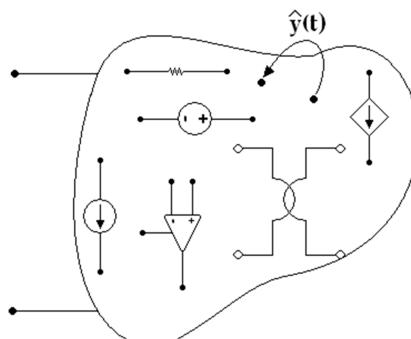


Figura 209: Determinazione di $\hat{y}(t)$ nel caso a.

- b) Se i generatori indipendenti di tensione e/o corrente presenti in B_1 forzano solamente tensioni e/o correnti costanti e la costante λ è nulla, allora possiamo ricercare una soluzione particolare $\hat{y}(t)$ sostituendo al condensatore un generatore indipendente di tensione $\frac{A_n}{C}(t - t_0)$, come in figura 210, e risolvendo tale circuito.

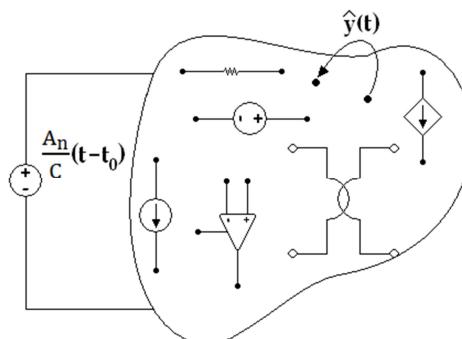


Figura 210: Determinazione di $\hat{y}(t)$ nel caso b.

- c) Se i generatori indipendenti di tensione e/o corrente presenti in B_1 forzano solamente tensioni e/o correnti sinusoidali alla stessa pulsazione ω , allora possiamo applicare il metodo dei fasori, che ci consentirà di individuare una soluzione particolare del nostro circuito, sinusoidale e a pulsazione ω , come mostrato in figura 211.

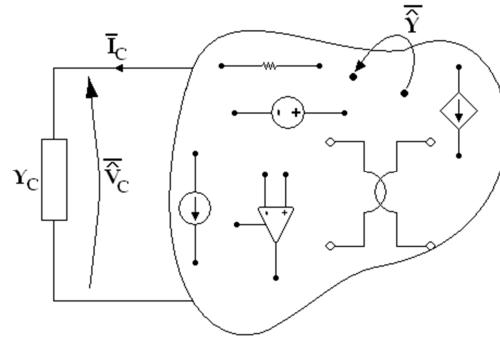


Figura 211: Determinazione di $\hat{y}(t)$ nel caso c.

4. Se il bipolo B_1 non ammette equivalente Norton, ammetterà equivalente Thevenin. Come visto per il calcolo di $v_C(t)$ possiamo perciò sostituire a B_1 il suo equivalente Thevenin, che sarà in tal caso un generatore di tensione $e_T(t)$, e ottenere $v_C(t) = e_T(t)$. Siccome, per la relazione costitutiva del condensatore, abbiamo:

$$i_C(t) = C \frac{dv_C}{dt}(t) = C \frac{de_T}{dt}(t)$$

Possiamo facilmente trovare la corrente che attraversa il condensatore in funzione del tempo. A tal punto, possiamo sostituire al condensatore un generatore indipendente di corrente $a(t) = i_C(t)$. Risolvendo il circuito così ottenuto troveremo il valore di $y(t)$.

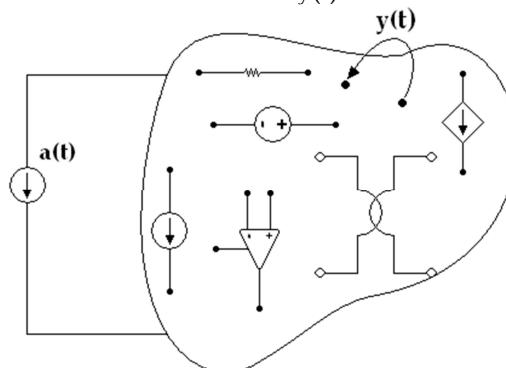


Figura 212: Determinazione di $y(t)$ nel caso degenere.

Esercizio di esempio n. 1

Consideriamo ora il circuito in figura 213, nel quale vogliamo calcolare le variabili circuituali:

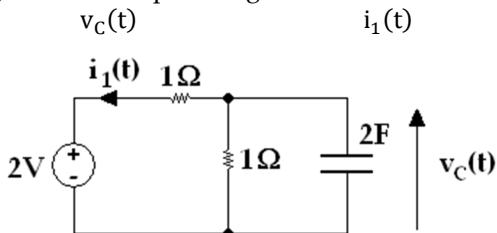


Figura 213: Esempio di risoluzione di circuito dinamico del primo ordine con condensatore.

Nel circuito sopra riportato è inoltre fornito il dato:

$$v_C(0) = -2V$$

La soluzione sarà del tipo:

$$\begin{aligned} v_C(t) &= [v_C(0) - \hat{v}_C(0)]e^{-\lambda(t-0)} + \hat{v}_C(t) \\ i_1(t) &= [i_1(0) - \hat{i}_1(0)]e^{-\lambda(t-0)} + \hat{i}_1(t) \end{aligned}$$

Per prima cosa, calcoliamo la conduttanza dell'equivalente Norton del bipolo complementare al condensatore. Per farlo, dobbiamo risolvere il circuito ottenuto spegnendo tutti i generatori indipendenti presenti nel bipolo e collegando il bipolo stesso ad un generatore di tensione arbitraria (nel nostro caso, 1V).

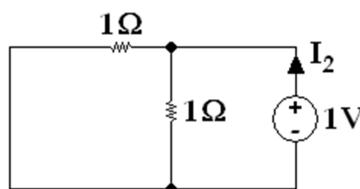


Figura 214: Calcolo della conduttanza equivalente

Possiamo facilmente verificare che le due resistenze sono in parallelo ed hanno perciò una resistenza equivalente:

$$R = \frac{1 \cdot 1}{1+1} \Omega = \frac{1}{2} \Omega$$

Perciò la corrente sarà, per la legge di Ohm:

$$I_2 = \frac{1V}{\frac{1}{2}\Omega} = 2A$$

La conduttanza equivalente è quindi:

$$G_n = \frac{I_2}{1V} = 2 S$$

Abbiamo perciò:

$$\lambda = -\frac{G_n}{C} = -1 \text{ rad/s}$$

Siccome tutti i generatori indipendenti presenti nel circuito (nel nostro caso abbiamo un solo generatore) sono costanti e la pulsazione naturale non è nulla, la tensione $\hat{v}_C(t)$ e la corrente $\hat{i}_1(t)$ saranno costanti. Possiamo perciò scrivere:

$$\begin{aligned} v_C(t) &= [v_C(0) - \hat{v}_C]e^{-\lambda t} + \hat{v}_C \\ i_1(t) &= [i_1(0) - \hat{i}_1]e^{-\lambda t} + \hat{i}_1 \end{aligned}$$

Calcoliamo ora la corrente i_1 all'istante iniziale, ovvero $i_1(0)$. Per farlo, dobbiamo risolvere il circuito:

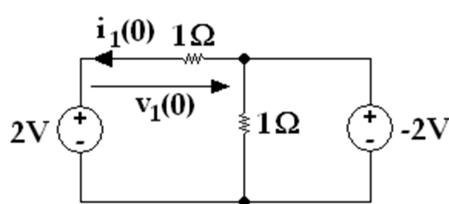


Figura 215: Calcolo di $i_1(0)$.

Applicando la LKV otteniamo:

$$v_1(0) - (-2V) + 2V = 0$$

Da cui ricaviamo:

$$v_1(0) = -4V$$

Per la legge di Ohm abbiamo inoltre:

$$i_1(0) = \frac{v_1(0)}{1\Omega} = -4A$$

Ci rimane a questo punto da calcolare le variabili ricercate "a regime", ovvero $\hat{v}_C(t)$ e $\hat{i}_1(t)$. Per farlo, dobbiamo sostituire nel circuito iniziale un circuito aperto al condensatore, e risolvere il circuito così ottenuto (vedi figura 216).

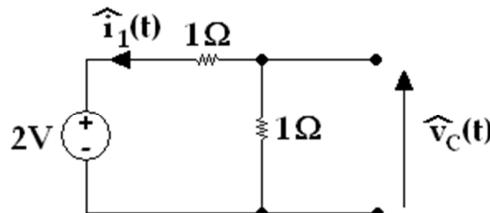


Figura 216: Calcolo di $\hat{v}_C(t)$ e $\hat{i}_1(t)$.

Possiamo facilmente calcolare la tensione $\hat{v}_C(t)$ utilizzando il partitore di tensione:

$$\hat{v}_C(t) = \frac{1}{1+1} 2V = 1V$$

Per la legge di Ohm, inoltre:

$$\hat{i}_1(t) = -\frac{1V}{1\Omega} = -1A$$

Otteniamo così i seguenti risultati:

$$v_C(t) = [-2 - 1]e^{-t} + 1 = (-3e^{-t} + 1) V$$

$$i_1(t) = [-4 - (-1)]e^{-t} + (-1) = (-3e^{-t} - 1) A$$

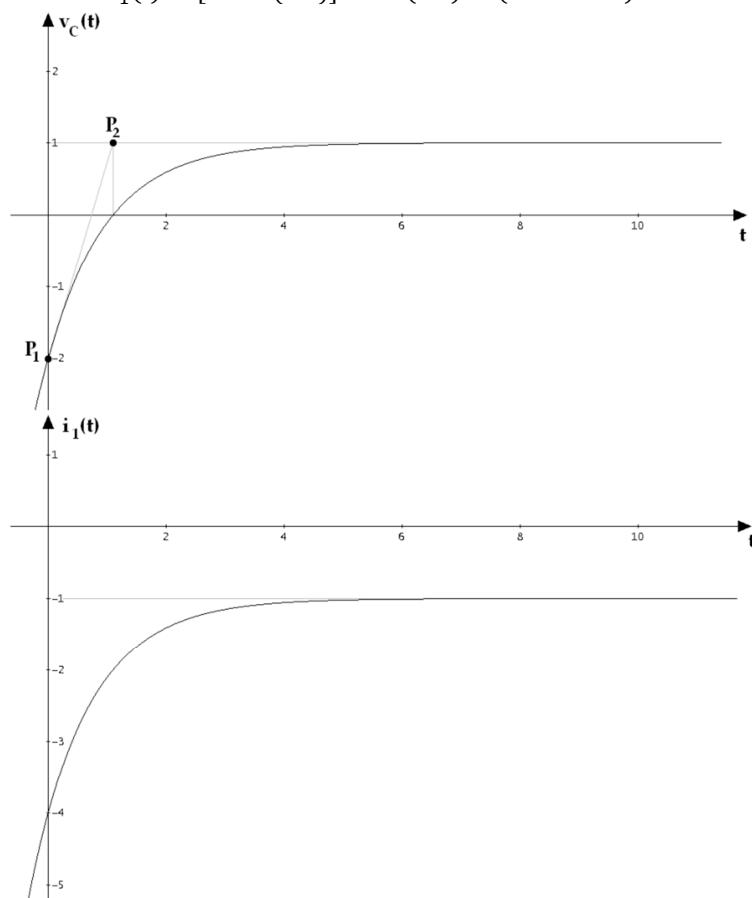


Figura 217: Grafici di $v_C(t)$ e $i_1(t)$.

Osservazioni

Nelle nostre soluzioni possiamo distinguere due diverse componenti che si sommano: una componente costante ed una componente esponenziale decrescente. Questa situazione non è casuale, bensì è la situazione che di norma si presenta nello studio di questa tipologia di circuiti (in genere infatti la pulsazione naturale è positiva, o al più negativa).

Dai grafici si può notare molto facilmente che le variabili circuituali analizzate tendono, dopo una prima fase, a diventare costanti. La prima fase, durante la quale le variabili circuituali variano considerevolmente, prende il nome di **transitorio**. Terminato il transitorio, possiamo affermare che abbiamo raggiunto la situazione di **regime**. Quando siamo in situazione di regime possiamo considerare la corrente $i_1(t)$ coincidente con $\hat{i}_1(t)$. Nel caso in analisi, diremo perciò che, terminato il transitorio, possiamo considerare costante la corrente $i_1(t)$, perché il contributo della componente esponenziale diviene trascurabile. Naturalmente possiamo ripetere un discorso analogo anche per la tensione ai capi del condensatore.

Si osserva infine che le equazioni ricavate forniscono informazioni valide non solo per $t \geq 0$, ma anche per $t < 0$: possiamo quindi usare tale risultato anche per studiare il comportamento del circuito nel passato.

La costante di tempo del circuito

La rapidità con la quale il transitorio termina e si passa alla situazione di regime è determinata dal parametro λ (pulsazione naturale). Tuttavia si preferisce spesso utilizzare un'altra grandezza, che prende il nome di costante di tempo. La costante di tempo è il reciproco della pulsazione naturale ed ha come unità di misura il secondo [s]:

$$\tau = -\frac{1}{\lambda}$$

Da un punto di vista geometrico, possiamo così descrivere il significato della costante di tempo: se consideriamo il grafico della variabile di stato, ovvero, nel nostro caso, di $v_C(t)$, possiamo individuare su tale grafico due punti: il primo (P_1) avrà per ascissa il tempo t_0 e per ordinata la tensione $v_C(t_0)$; il secondo punto (P_2) avrà per ascissa il tempo $t_0 + \tau$ e per ordinata la tensione costante di regime $\hat{v}_C(t)$. Il segmento che congiunge tali punti avrà come倾inazione la tangente del grafico di $v_C(t)$ nel punto t_0 (vedi grafico in figura 216). In altri termini, il coefficiente angolare con il quale parte il grafico è dato da:

$$\frac{t - t_0}{\tau}$$

Ne consegue che, tanto più è alto il valore della costante di tempo, tanto più breve sarà il transitorio. In particolare, possiamo considerare terminato il transitorio dopo un tempo pari a circa 4-5 volte la costante di tempo. Si osserva infatti che, trascorso un tempo pari a 4-5 volte la costante di tempo, l'esponenziale ha un valore inferiore ad un centesimo, perciò il suo contributo può essere trascurato.

Significato degli altri valori calcolati

Come già accennato, gli altri due valori calcolati hanno il seguente significato: $i_1(0)$ è il valore che assume la corrente nell'istante iniziale; $\hat{i}_1(t)$ è la corrente a regime (cioè il valore che possiamo considerare assunto dalla corrente quando è terminato il transitorio).

Esercizio di esempio n. 2

Consideriamo ora il circuito in figura 218, nel quale vogliamo calcolare la variabile circuitale $i_1(t)$.

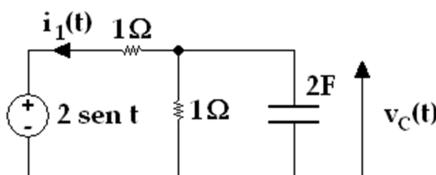


Figura 218: Esempio di risoluzione di circuito dinamico del primo ordine con condensatore.

Nel circuito sopra riportato è inoltre fornito il dato:

$$v_C(0) = -2V$$

La soluzione sarà del tipo:

$$v_C(t) = [v_C(0) - \hat{v}_C(0)]e^{-\lambda(t-t_0)} + \hat{v}_C(t)$$

$$i_1(t) = [i_1(0) - \hat{i}_1(0)]e^{-\lambda(t-t_0)} + \hat{i}_1(t)$$

Osserviamo sin da ora che tale circuito è molto simile al precedente: l'unica (sostanziale) differenza è data dal fatto che, mentre nel circuito di figura 213 il generatore indipendente forzava una tensione costante, ora il generatore indipendente forza una tensione sinusoidale.

In ogni caso, possiamo facilmente accorgerci che la pulsazione naturale (e quindi anche la costante di tempo) è indipendente dai generatori indipendenti presenti nel circuito, perciò avremo ancora:

$$\lambda = -\frac{G_n}{C} = -1 \text{ rad/s}$$

E quindi:

$$\tau = -\frac{1}{\lambda} = 1 \text{ s}$$

Ciò deriva dal fatto che la capacità del condensatore è la stessa e che per il calcolo della conduttanza equivalente tutti i generatori indipendenti presenti nel bipolo complementare al condensatore devono essere spenti.

Possiamo ora passare a calcolare il valore della corrente all'istante iniziale:

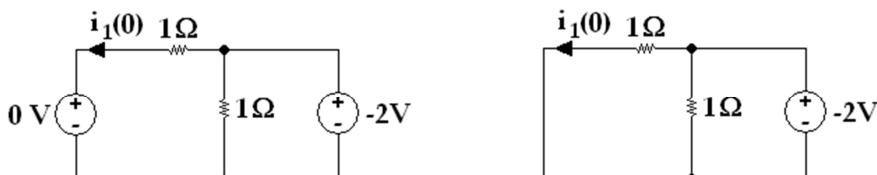


Figura 219: Calcolo della corrente all'istante iniziale.

Osserviamo che se $t = 0$, la tensione forzata dal generatore indipendente di tensione è nulla, perciò, come mostrato in figura 218, possiamo sostituirlo con un cortocircuito. Il circuito che ne deriva è molto semplice da risolvere: i due resistori sono in parallelo ed hanno ai loro capi una tensione da -2 V. Per la legge di Ohm:

$$i_1(0) = \frac{-2 \text{ V}}{1 \Omega} = -2 \text{ A}$$

Per il calcolo della corrente di regime dobbiamo invece applicare il metodo dei fasori. Per prima cosa portiamo quindi il circuito nel dominio dei fasori (figura 220).

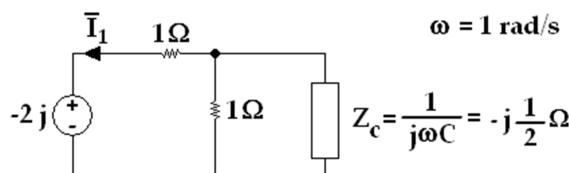


Figura 220: Calcolo della corrente in regime sinusoidale.

Possiamo calcolare l'impedenza equivalente della parallelo tra la resistenza da 1 Ohm e la Z_C , ottenendo così il circuito rappresentato in figura 221.

$$Z_1 = \frac{1 Z_C}{1 + Z_C} = \frac{-j \frac{1}{2}}{1 - j \frac{1}{2}} \Omega = \frac{-j}{2 - j} \Omega$$

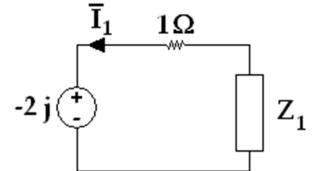
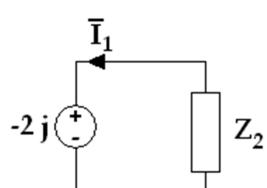


Figura 221: Sostituzione dell'impedenza equivalente parallelo per il calcolo della corrente in regime sinusoidale.

Possiamo a questo punto calcolare la resistenza equivalente alla serie tra Z_1 e la resistenza da 1 Ohm, ottenendo così il circuito riportato in figura 222.



$$Z_2 = 1 + Z_1 = 1 + \frac{-j}{2 - j} = \frac{2 - 2j}{2 - j}$$

Figura 222: Sostituzione dell'impedenza equivalente serie per il calcolo della corrente in regime sinusoidale.

A questo punto possiamo calcolare con la legge di Ohm il fasore della corrente:

$$\bar{I}_1 = -\left(-2j \frac{2 - j}{2 - 2j}\right) = j \frac{2 - j}{1 - j} \cdot \frac{1 + j}{1 + j} = j \frac{2 + 2j - j + 1}{2} = j \frac{3 + j}{2} = \frac{3j - 1}{2} \text{ A}$$

Ritornando nel dominio del tempo, otteniamo:

$$\hat{i}_1(t) = \left(-\frac{1}{2} \cos t - \frac{3}{2} \sin t\right) \text{ A}$$

In conclusione, la corrente cercata sarà data dalla seguente relazione:

$$i_1(t) = \left[-2 - \left(-\frac{1}{2} \cos 0 - \frac{3}{2} \sin 0 \right) \right] e^{-t} + \left(-\frac{1}{2} \cos t - \frac{3}{2} \sin t \right) = \left(-\frac{3}{2} e^{-t} - \frac{1}{2} \cos t - \frac{3}{2} \sin t \right) A$$

In figura 223 è rappresentato il grafico della corrente $i_1(t)$.

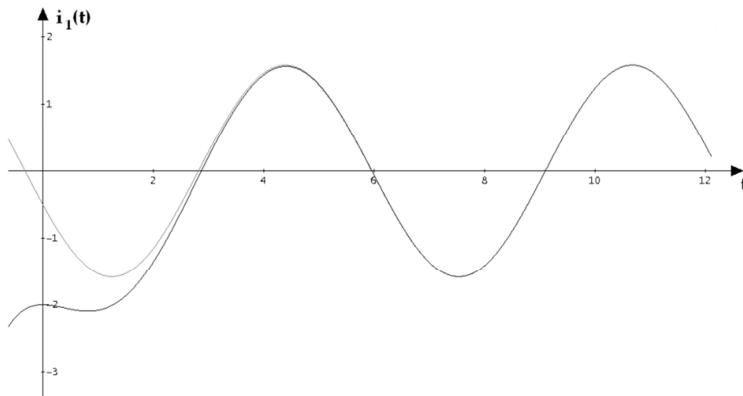


Figura 223: Grafico della corrente $i_1(t)$. In grigio è rappresentato il grafico di $\hat{i}_1(t)$.

Osservazioni

Si osserva che, pur di scegliere opportunamente la condizione iniziale, è possibile annullare il coefficiente che moltiplica l'esponenziale. In tal modo, il termine esponenziale verrebbe a mancare. Ciò ci consente così di comprendere meglio quale è il significato dell'espressione "soluzione sinusoidale", che abbiamo utilizzato quando abbiamo introdotto l'uso dei fasori.

Si osserva inoltre che non possiamo introdurre il significato geometrico della costante di tempo nel grafico sopra riportato: possiamo farlo solamente sul grafico della variabile di stato.

Esercizio di esempio n. 3

Consideriamo come terzo ed ultimo esercizio di esempio il circuito in figura 224.

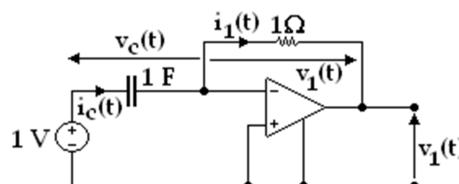


Figura 224: Esempio di risoluzione di circuito degenere.

Possiamo facilmente verificare che tale circuito è degenere. Se infatti proviamo a calcolare la conduttanza equivalente Norton dobbiamo togliere dal circuito il condensatore e collegare al posto di quest'ultimo un generatore di tensione arbitrario (supponiamo da 1 V); dobbiamo inoltre cortocircuitare il generatore già presente nel circuito. Otteniamo così il circuito in figura 225, che evidentemente non ha soluzione, perché la tensione alla porta 1 dell'amplificatore operazionale deve essere zero per la relazione costitutiva di quest'ultimo ed 1 V per la relazione costitutiva del generatore indipendente.

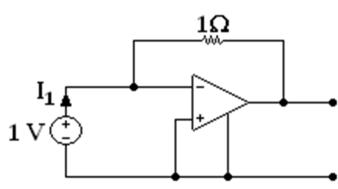


Figura 225: Tentativo di calcolo della conduttanza dell'equivalente Norton del bipolo complementare al condensatore nel circuito in fig. 224

Il procedimento che abbiamo descritto per la risoluzione di circuiti degeneri è piuttosto lungo. Osserviamo però che nel caso degenere possiamo anche procedere in maniera diversa. La tensione ai capi del condensatore sarà infatti determinata dal bipolo complementare del condensatore. Possiamo perciò calcolarla e poi, sfruttando la relazione costitutiva del condensatore, risalire alla corrente. A questo punto, potremo andare a calcolare la variabile circuitale che ci viene richiesta. Vediamo quanto detto nel caso specifico.

Per la KLV abbiamo: $v_C(t) - 1V + 0V = 0 \rightarrow v_C(t) = 1V$

Per la relazione costitutiva del condensatore:

$$i_C(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt} = 0A$$

Abbiamo inoltre, per la KLC: $i_C(t) - i_1(t) + 0A = 0 \rightarrow i_1(t) = i_C(t) = 0A$

Per la legge di Ohm, infine: $v_1(t) = 0V$.

Circuiti dinamici del primo ordine con induttore

Analisi di un circuito dinamico del primo ordine con induttore

Si consideri ora il circuito riportato in figura 201, che riportiamo nuovamente in figura 226.

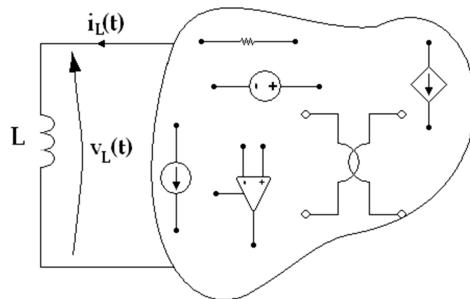


Figura 226: Circuito lineare del primo ordine con induttore.

Dove il bipolo complementare all'induttore (che indicheremo in seguito semplicemente con B_1) è costituito solamente da componenti resistivi e, in particolare, da componenti lineari tempo-invarianti e generatori indipendenti di tensione e/o corrente tempo-varianti e/o tempo-invarianti.

Si supponga inoltre di voler calcolare una qualsiasi variabile circuitale (tensione o corrente) all'interno del bipolo complementare rispetto al condensatore.

Consideriamo dapprima che tale variabile circuitale sia la corrente $i_L(t)$. Avremo, per la relazione costitutiva dell'induttore:

$$v_L(t) = L \frac{di_L}{dt}(t)$$

Ipotizziamo anche che sia possibile calcolare l'equivalente Thevenin del bipolo complementare all'induttore. L'equivalente Thevenin di B_1 sarà del tipo:

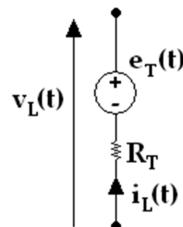


Figura 227: Equivalente Thevenin del bipolo complementare all'induttore.

Avremo dunque:

$$v_L(t) = -i_L(t)R_T + e_T(t)$$

Ovvero:

$$L \frac{di_L}{dt}(t) + i_L(t)R_T = e_T(t)$$

Abbiamo quindi ottenuto, così come ci aspettavamo, un'equazione differenziale lineare del primo ordine a coefficienti costanti. Tale equazione ammetterà infinite soluzioni, perciò abbiamo bisogno anche di avere un dato aggiuntivo, che rappresenta la condizione iniziale, ovvero il valore della corrente $i_L(t)$ ad un certo istante t_0 :

$$i_L(t_0) = i_{L_0}$$

La soluzione di questa equazione differenziale sarà una funzione $i_L(t)$ del tipo:

$$i_L(t) = [i_L(t_0) - \hat{i}_L(t_0)]e^{-\lambda(t-t_0)} + \hat{i}_L(t)$$

Dove λ (pulsazione naturale) si calcola con la formula:

$$\lambda = -\frac{R_T}{L}$$

e si misura in rad/s. Possiamo a questo punto introdurre anche la costante di tempo (purché $\lambda \neq 0$):

$$\tau = -\frac{1}{\lambda} = \frac{L}{R_T}$$

la cui unità di misura è il secondo (s).

Il regime sarà in questo caso descritto dall'integrale particolare $\hat{i}_L(t)$. Così come nel caso di circuiti lineari con condensatori, potremo avere tre diversi casi, che andremo ora ad analizzare singolarmente.

Caso 1: generatori indipendenti costanti e $\lambda \neq 0$

In questo caso, cercheremo la soluzione particolare $\hat{i}_L(t)$ tra le funzioni costanti. Avremo dunque una corrente $\hat{i}_L(t) = \hat{i}_L$ indipendente dal tempo. Ciò implica quindi che la tensione ai capi dell'induttore sarà nulla. Si ricorda infatti che la relazione costitutiva dell'induttore è la seguente:

$$\hat{v}_L(t) = L \frac{d\hat{i}_L}{dt}(t)$$

Se \hat{i}_L è costante, la sua derivata è nulla, e perciò $\hat{v}_L(t) = 0$. Di conseguenza, ricercare una soluzione $\hat{i}_L(t)$ costante per la nostra equazione differenziale equivale, da un punto di vista circuitale, a calcolare la corrente $\hat{i}_L(t)$ indicata nel circuito in figura 228, nel quale viene sostituito all'induttore un cortocircuito:

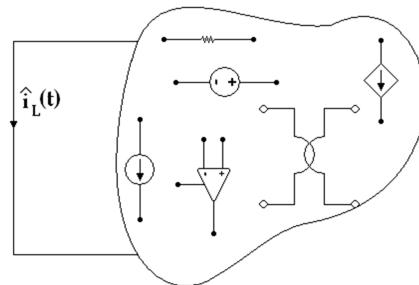


Figura 228: Calcolo di $\hat{i}_L(t)$ nel caso in cui $\lambda \neq 0$ e tutti i generatori indipendenti forzano grandezze costanti.

Caso 2: generatori indipendenti costanti e $\lambda = 0$

Se tutti i generatori indipendenti del circuito sono costanti e la costante λ è nulla, possiamo fare la seguente considerazione: siccome abbiamo $\lambda = 0$, significa necessariamente che la resistenza dell'equivalente Thevenin è nulla:

$$R_T = 0$$

Di conseguenza, l'equivalente Thevenin del bipolo complementare all'induttore è costituito solamente da un generatore di tensione $e_T(t)$, che sarà necessariamente costante.

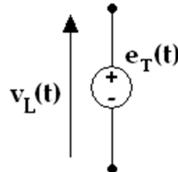


Figura 229: Equivalente Thevenin del bipolo complementare all'induttore se $\lambda = 0$.

In sostanza quindi la tensione ai capi dell'induttore è nota ed è costante. Tramite questo dato, possiamo risalire alla corrente che attraversa l'induttore semplicemente sfruttandone la relazione costitutiva:

$$i_L(t) = i_L(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v_L(\tau) d\tau$$

Caso 3: generatori sinusoidali isofrequenziali

Se supponiamo che tutti i generatori indipendenti presenti nel circuito siano sinusoidali alla stessa pulsazione ω , avremo un regime sinusoidale, che possiamo determinare attraverso il metodo dei fasori. Dovremo perciò passare al dominio dei fasori (vedi figura 230), individuare il fasore \bar{I}_L della corrente $\hat{i}_L(t)$, e potremo poi tornare nel dominio del tempo attraverso la relazione:

$$\hat{i}_L(t) = \operatorname{Re}(\bar{I}_L e^{j\omega t})$$

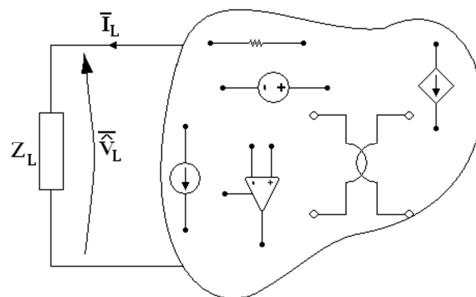


Figura 230: Passaggio al dominio dei fasori nel caso di generatori sinusoidali isofrequenziali.

Caso degenero

Rimane da analizzare il caso in cui non esista l'equivalente Thevenin del bipolo B_1 . In tal caso, se esiste l'equivalente Norton, esso sarà costituito solamente da un generatore indipendente di corrente $a_n(t)$, come in figura 231.

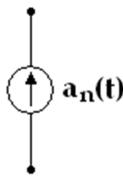


Figura 231: Equivalente Norton del bipolo complementare all'induttore nel caso degenero.

Avremo perciò una corrente nota che attraversa l'induttore:

$$i_L(t) = a_n(t)$$

Per la risoluzione di circuiti degeneri possiamo quindi pensare di individuare direttamente a partire dal circuito iniziale la corrente $i_L(t)$, che sarà forzata dagli altri componenti del circuito (ovvero dai componenti resistivi).

Calcolo di una variabile circuitale diversa da $i_L(t)$

Il procedimento finora illustrato ci consente di calcolare la corrente che attraversa l'induttore. Tuttavia, non sempre tale grandezza è realmente quella che si desidera individuare, ma potremmo aver bisogno di individuare una generica corrente o tensione $y(t)$ all'interno di B_1 . Per farlo possiamo procedere in maniera analoga a quanto fatto nel caso del condensatore. Osserviamo infatti che anche la generica variabile $y(t)$ sarà rappresentata da una funzione del tipo:

$$y(t) = \hat{y}(t) + [y(t_0) - \hat{y}(t_0)]e^{-\lambda(t-t_0)}$$

Dove λ è ancora la pulsazione naturale, che è uguale per tutte le variabili circuitali del circuito in analisi; $y(t_0)$ è il valore che assume la variabile circuitale all'istante iniziale t_0 e $\hat{y}(t)$ è la tensione o corrente di regime.

Per individuare $y(t)$ possiamo seguire il procedimento descritto nei punti successivi:

1. Per individuare la costante λ , seguiremo gli stessi passi visti nel caso in cui si stia cercando di individuare $i_L(t)$. Si osserva infatti che λ assume sempre lo stesso valore per tutte le variabili circuitali.
2. Per individuare $y(t_0)$ possiamo semplicemente fissare all'interno del nostro circuito di partenza il tempo all'istante t_0 . In tal caso, potremo fissare tutti i valori delle tensioni e delle correnti forzate dai generatori indipendenti ai valori all'istante iniziale t_0 e potremo sostituire all'induttore un generatore indipendente di corrente $i_L(t_0)$, dove $i_L(t_0) = i_{L_0}$ è un dato del problema. Risolvendo il circuito così ottenuto potremo individuare il valore di $y(t_0)$.

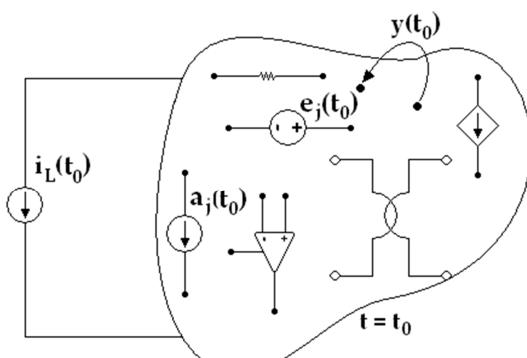


Figura 232: Calcolo del valore $y(t_0)$.

3. Per individuare $\hat{y}(t)$, dobbiamo ancora una volta distinguere 3 sottocasi:

- a) Se i generatori indipendenti di tensione e/o corrente presenti in B_1 forzano solamente tensioni e/o correnti costanti e la costante λ non è nulla, allora possiamo ricercare una soluzione particolare $\hat{y}(t)$ ricavando $\hat{y}(t)$ all'interno del circuito in figura 233, ottenuto sostituendo all'induttore un cortocircuito.

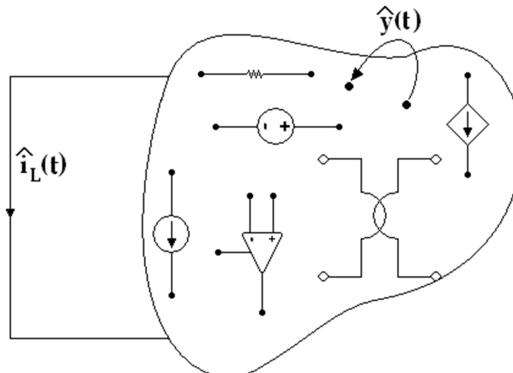


Figura 233: Determinazione di $\hat{y}(t)$ nel caso a.

- b) Se i generatori indipendenti di tensione e/o corrente presenti in B_1 forzano solamente tensioni e/o correnti sinusoidali alla stessa pulsazione ω , allora possiamo applicare il metodo dei fasori, che ci consentirà di individuare una soluzione particolare del nostro circuito, sinusoidale e a pulsazione ω , come mostrato in figura 234.

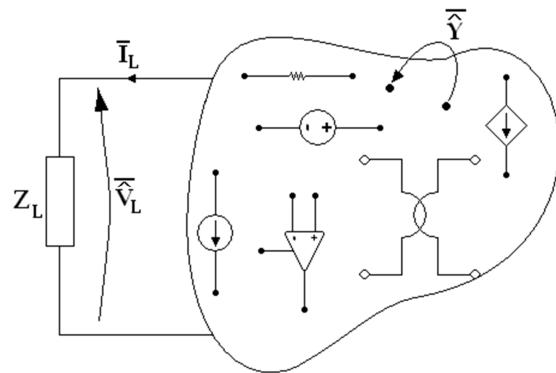


Figura 234: Determinazione di $\hat{y}(t)$ nel caso b.

- c) Se i generatori indipendenti di tensione e/o corrente presenti in B_1 forzano solamente tensioni e/o correnti costanti e la costante λ è nulla, allora possiamo procedere come indicato al punto 5.
- 5. Se la pulsazione naturale del circuito è nulla e tutti i generatori indipendenti del circuito forzano grandezze costanti, allora, anziché procedere andando a cercare una soluzione particolare del circuito, possiamo analizzare la parte resistiva del circuito stesso e determinare la tensione ai capi dell'induttore. Applicando la relazione costitutiva dell'induttore potremo così ricavare immediatamente la corrente che attraversa l'induttore e, a partire dalla grandezze così ricavate, saremo in grado di individuare il valore della generica variabile circuitale $y(t)$.

Calcolo di una variabile circuitale diversa da $i_L(t)$: caso degenero

Se il bipolo B_1 non ammette equivalente Thevenin, ammetterà equivalente Norton. Potremmo perciò sostituire all'induttore un generatore di tensione che forza la tensione precedentemente calcolata. Tuttavia a livello pratico è possibile risolvere tale tipologia di circuiti in maniera più semplice, direttamente sul circuito:

- i) Si calcola $i_L(t)$ che, in virtù delle considerazioni appena fatte, sarà forzata dai componenti resistivi che costituiscono il circuito.
- ii) Si applica la relazione costitutiva dell'induttore e si calcola così la tensione $v_L(t)$:

$$v_L(t) = L \frac{di_L}{dt}(t)$$

- iii) Si procede nella risoluzione del circuito attraverso i metodi noti, fino a ricavare il valore di $y(t)$.

Analisi di circuiti dinamici con componenti che cambiano stato repentinamente

Vogliamo ora andare ad analizzare il comportamento di un circuito dinamico nel quale siano presenti componenti che cambiano bruscamente il loro comportamento. Un esempio tipico di componenti di questa tipologia sono gli interruttori, ma saranno da analizzare in maniera analoga anche circuiti nei quali siano presenti generatori di tensioni (o correnti) discontinue, oppure ancora dei diodi.

Per semplicità, consideriamo ora che all'interno del circuito in analisi sia presente un interruttore. Possiamo pensare di limitarci a studiare il comportamento del circuito in un intervallo di tempo durante il quale l'interruttore non cambia il proprio stato: durante tale intervallo, siamo in grado di studiare il circuito secondo le tecniche che abbiamo appena introdotto.

Allo stesso modo, saremo in grado di trattare il circuito dopo che si è verificato il cambiamento di stato, fino a quando l'interruttore non cambierà (eventualmente) stato una seconda volta.

Possiamo insomma ricondurci a studiare il circuito in singoli intervalli di tempo, nei quali il circuito può essere considerato appartenente alla categoria di circuiti fino ad ora studiati.

Tuttavia il problema risulta essere l'istante in cui avviene il cambiamento di stato. Dopo il cambiamento di stato infatti dobbiamo conoscere la condizione iniziale, che non è data dal problema (avremo bisogno solo di una condizione iniziale per tutto il circuito). Come possiamo ricavare la nuova condizione iniziale?

Possiamo a tal proposito sfruttare una caratteristica delle variabili di stato, insita nella relazione costitutiva dell'induttore e del condensatore. Per semplicità, limitiamoci ora al caso dell'induttore. Nella relazione costitutiva di tale componente, compare la derivata della corrente $i_L(t)$, che in questa situazione è la variabile di stato. Di conseguenza, tale corrente dovrà essere una grandezza derivabile. Possiamo perciò concludere che la variabile di stato sarà sempre continua.

Ma attenzione!: quanto appena detto vale solo per la variabile di stato. In generale, nulla ci assicura che le altre variabili del circuito siano continue.

Possiamo perciò ricavare la condizione iniziale dopo il cambiamento di stato dell'interruttore sapendo che la corrente che attraversa l'induttore avrà lo stesso valore che aveva all'istante appena precedente rispetto al cambiamento di stato dell'interruttore stesso.

In questo modo saremo in grado di risolvere anche circuiti dinamici contenenti interruttori, diodi oppure generatori di tensioni e/o correnti non continue.