



POLITECNICO DI MILANO

# Identificazione dei Modelli e Analisi dei Dati 1

---

Appunti

Stefano Invernizzi

Anno accademico 2010-2011



## Sommario

Introduzione al corso.....	5
I modelli.....	5
L'identificazione e i problemi che vogliamo risolvere .....	5
Modelli di stato e modelli di ingresso/uscita .....	6
Modellistica, identificazione e predizione.....	6
Richiami su variabili casuali, vettori casuali e processi casuali.....	7
Introduzione alla predizione: processi AR, MA e ARMA .....	13
Il problema della predizione.....	13
Simbologia .....	13
Il predittore lineare a memoria finita.....	13
Problemi nella realizzazione del predittore lineare .....	14
L'errore di predizione .....	14
Il rumore bianco .....	15
Descrizione del segnale come uscita di un sistema lineare.....	15
Processi MA .....	16
Processi AR .....	18
Processi ARMA.....	22
Spettro .....	24
Rappresentazioni di un processo stazionario.....	26
Fattorizzazione spettrale canonica .....	28
La predizione .....	31
Il problema della predizione.....	31
Ipotesi di misurabilità dell'ingresso.....	32
Predizione a partire dalle misurazioni di $\mathbf{v}$ .....	35
Predizione con variabili esogene.....	37
Ricavo semplificato del predittore .....	39
L'identificazione.....	41
Introduzione: l'identificazione predittiva.....	41
Formalizzazione dei concetti relativi all'identificazione predittiva .....	42
Il metodo del minimo quadrato (LS, Least Square).....	44
Il metodo di massima verosimiglianza (ML, Maximum Likelihood) .....	49
Asintoti di PEM (Prediction Error Minimization).....	54
Algoritmi ricorsivi: RLS.....	58
RLS adattativo.....	60

Stima ricorsiva dei parametri di un modello ARMAX: algoritmo ELS .....	61
Il controllo predittivo a minima varianza .....	62
Il controllo digitale.....	62
Il controllo predittivo a minima varianza .....	63
Segnale di riferimento variabile nel tempo.....	67
Controllo predittivo a minima varianza generalizzato (GMV).....	68
Scelta della complessità .....	68
Crossvalidazione .....	69
Valutazione della bontà oggettiva di un modello a partire dalla valutazione soggettiva .....	70

# Introduzione al corso

## I modelli

I modelli sono strumenti comunemente adottati per la descrizione di sistemi e fenomeni naturali.

Essi possono essere di varia natura. Una delle tipologie di modelli è quella dei *modelli deterministici*, nei quali si assume in sostanza che il futuro "sia già scritto", ovvero possa essere determinato in maniera esatta a partire dai dati relativi al presente o al passato. Tuttavia il mondo reale è governato dall'incertezza, e ciò fa sì che questi modelli risultino essere in sostanza sbagliati. A tale proposito è nota la citazione secondo la quale "tutti i modelli sono sbagliati, ma alcuni sono utili".

All'interno del nostro corso adotteremo il punto di vista secondo il quale le risposte alle domande relative ai sistemi sono fornite dai dati, che sono in sostanza dei fenomeni visibili complessi.

## L'identificazione e i problemi che vogliamo risolvere

### **L'identificazione**

L'identificazione è l'insieme dei metodi e degli algoritmi che ci consentono di analizzare i dati per ottenere un certo modello.

Il modello così individuato ci potrà essere utile ad esempio per risolvere problemi di controllo (cioè per far in modo che si possano determinare gli interventi da mettere in atto sull'impianto affinché quest'ultimo si comporti come desiderato), oppure per eseguire delle previsioni sulle variabili del modello stesso.

### **Problemi**

I problemi che si incontrano durante l'identificazione, e che cercheremo di risolvere durante il corso, sono fondamentalmente suddivisibili in 3 classi:

1. Stima dei parametri di un modello noto;
2. Stima di un segnale non misurabile (es.: posizione di una nave spaziale) mediante la costruzione di un *sensore virtuale*.
3. Costruzione di un modello a partire dai dati e secondo un procedimento *a scatola nera* (ad es.: data mining nel settore medico). In sostanza quindi non si conosce il meccanismo che regola i dati, ma si vuole ottenere un modello del sistema. Talvolta questo approccio viene adottato pur conoscendo il meccanismo che regola i dati, ad esempio perché si sta cercando di risolvere un problema di controllo che risulterebbe altrimenti troppo complesso. In tal caso si utilizza il modello esatto solo per eseguire delle simulazioni, mentre l'analisi viene eseguita sulla base di un modello semplificato.

## Modelli di stato e modelli di ingresso/uscita

### **Modelli di ingresso/uscita**

Talvolta il sistema viene descritto per mezzo di un modello di ingresso/uscita, ovvero del tipo:

$$y(t) = w(z) \cdot u(t)$$

Dove:

- $w(z)$  è la funzione di trasferimento o FdT (che di fatto caratterizza il sistema);
- $y(t)$  è l'uscita del sistema stesso;
- $u(t)$  è l'ingresso del sistema.

In sostanza quindi il modello descrive semplicemente una relazione tra l'ingresso e l'uscita del sistema.

Si noti che il tempo verrà sempre considerato discreto nell'ambito di questo corso.

### **Modelli di stato**

Il modello di stato descrive invece il sistema mediante più parametri  $F$ ,  $G$  e  $H$ , secondo le seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}x(t+1) &= F \cdot x(t) + G \cdot u(t) \\ y(t) &= H \cdot x(t)\end{aligned}$$

## Modellistica, identificazione e predizione

### **La modellistica**

La modellistica è la costruzione di un modello, eseguita partendo dalla descrizione delle sue parti costituenti tramite le leggi che governano i fenomeni che vi hanno luogo (ad esempio, tramite le leggi della fisica). La modellistica è quindi un classico modo tramite il quale è possibile costruire un modello.

### **L'identificazione**

L'identificazione è invece la stima dei parametri incerti del modello, o la stima dei segnali ignoti, o la costruzione del modello eseguita a partire dai dati anziché dallo studio delle parti che costituiscono il sistema modellato e delle leggi che le governano.

### **Predizione**

Il principio base per l'identificazione è di tipo predittivo: un modello è buono se ci fornisce delle buone predizioni. La teoria della predizione è perciò un concetto preliminare necessario per poter parlare di identificazione.

## Richiami su variabili casuali, vettori casuali e processi casuali

### **Variabile casuale (o aleatoria, o stocastica)**

Una variabile casuale  $v$  è una funzione reale di un evento casuale, associato all'esito  $s$  di un esperimento causale. Possiamo allora indicare la variabile casuale come:

$$v(s)$$

Gli unici concetti di interesse nel nostro corso tra quelli legati alle variabili casuali sono i seguenti:

- Media

La media di una variabile casuale è sempre un numero reale, che viene indicato con:

$$E_s[v] = m = \bar{v} = v_m$$

- Varianza

La varianza di una variabile casuale è sempre un numero reale non negativo. La varianza è così definita:

$$VAR_s[v] = E[(v - m)^2] = \lambda^2 = \sigma^2 = \lambda_{vv}$$

- Deviazione standard

La deviazione standard di una variabile casuale è sempre un numero reale non negativo, che rappresenta la radice quadrata della varianza:

$$DS_s[v] = \sqrt{VAR_s[v]} = \lambda = \sigma = \sqrt{\lambda_{vv}}$$

- Varianza incrociata

Date due variabili casuali  $v_1$  e  $v_2$ , la varianza incrociata tra  $v_1$  e  $v_2$  è:

$$\lambda_{12} = E[(v_1 - m_1) \cdot (v_2 - m_2)]$$

Si noti che  $\lambda_{12} = \lambda_{21}$  e che  $\lambda_{11}$  è la deviazione standard di  $v_1$  (come ovvio anche dalle notazioni usate).

### Proprietà delle variabili casuali

1. Se la distribuzione di probabilità della variabile casuale  $v$  è gaussiana, allora con una probabilità del 95%, il valore di  $v$  appartiene all'intervallo:

$$[m - 2 \cdot DS[v]; m + 2 \cdot DS[v]]$$

2. La media è un operatore lineare, ovvero se sono date le variabili casuali  $v_1$  e  $v_2$ , ed è definita una terza variabile casuale  $v = \alpha \cdot v_1 + \beta \cdot v_2$ , allora si ha:

$$E[v] = E[\alpha \cdot v_1 + \beta \cdot v_2] = \alpha \cdot E[v_1] + \beta \cdot E[v_2]$$

### **Vettore casuale (o aleatorio, o stocastico)**

Un vettore casuale è un insieme di variabili casuali. Per comodità, il vettore casuale viene sempre organizzato come un vettore colonna. Quindi, date le variabili aleatorie  $v_1$  e  $v_2$ , il vettore:

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

È un vettore casuale. Anche in questo caso sono definiti i concetti di valor medio e di varianza:

- Valor medio

Il valor medio di un vettore casuale è il vettore dei valori medie delle variabili casuali del vettore dato:

$$E[v] = \begin{bmatrix} E[v_1] \\ E[v_2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix}$$

- Varianza

La varianza di un vettore casuale di dimensione  $n$  è una matrice  $n \times n$  così costruita ( $n = 2$ ):

$$VAR[v] = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{bmatrix}$$

In altri termini, l' $i$ -esimo elemento della diagonale principale è la varianza dell' $i$ -esima componente del vettore casuale dato, mentre per le restanti posizioni, detta  $(i, j)$  la posizione dell'elemento considerato, il corrispondente valore è la varianza incrociata tra la componente  $i$ -esima e la componente  $j$ -esima del vettore casuale di partenza.

### Proprietà della varianza di un vettore casuale

La matrice di varianza di un vettore casuale è sempre semidefinita positiva:

$$\text{VAR}[v] \geq 0$$

#### **Memo sulle matrici semidefinite positive**

Data una matrice reale  $A$  quadrata di dimensione  $n$ , diciamo che  $A$  è semidefinita positiva ( $A \geq 0$ ) se:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad y(x) = x'Ax \geq 0$$

Si noti infatti che, siccome  $x$  è un vettore colonna di dimensione  $n \times 1$ , la forma quadratica  $y(x)$  sarà certamente un numero reale. Ad esempio, se  $n = 2$ , abbiamo:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

E perciò:

$$\begin{aligned} y(x) &= [x_1 \quad x_2] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = [x_1 a_{11} + x_2 a_{21} \quad x_1 a_{12} + x_2 a_{22}] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \\ &= x_1^2 a_{11} + x_1 x_2 a_{12} + x_1 x_2 a_{21} + x_2^2 a_{22} = \sum_{i,j=1}^n x_i x_j a_{ij} \end{aligned}$$

#### **Memo sulle matrici definite positive**

Data una matrice reale  $A$  quadrata di dimensione  $n$ , diciamo che  $A$  è definita positiva ( $A > 0$ ) se:

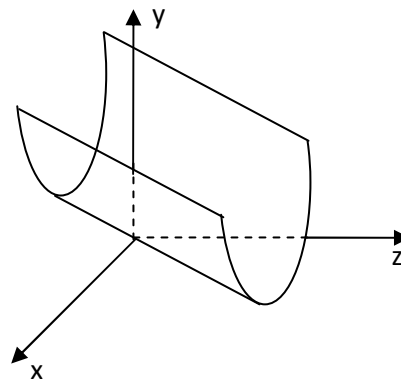
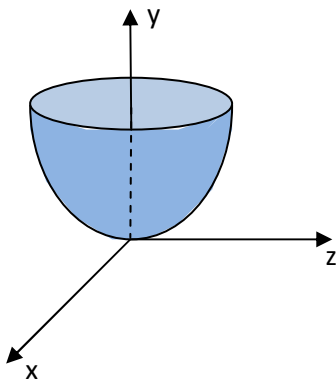
$$\forall x \in \mathbb{R}^n \text{ t. c. } x \neq 0, \quad y(x) = x'Ax > 0$$

Ovvero, per ogni vettore di  $\mathbb{R}^n$ , la forma quadratica  $y(x)$  è strettamente positiva, a patto che il vettore considerato non sia il vettore nullo (in quel caso ovviamente si avrà sempre  $y(x) = 0$ ).

Naturalmente, ogni matrice definita positiva è anche semidefinita positiva, mentre una matrice semidefinita positiva può essere o non essere definita positiva.

#### **Osservazione grafica**

Considerando ancora  $n = 2$ , notiamo che da un punto di vista grafico una matrice definita positiva rappresenta una conica del tipo mostrato nella figura a sinistra; una matrice semidefinita positiva, ma non definita positiva, rappresenta invece una conica come quella mostrata a destra.



#### **Condizioni pratiche**

- $A > 0$  se e solo se tutti i suoi autovalori sono positivi.
- $A \geq 0$  se e solo se tutti i suoi autovalori sono non negativi.
- Se  $A > 0$ , allora  $A \geq 0$ .
- Se  $A \geq 0$  ma non si ha  $A > 0$ , allora almeno un autovalore di  $A$  è nullo, cioè  $\det(A) = 0$ .



Per verificare che la matrice di varianza è semidefinita positiva, possiamo osservare che:

$$VAR[v] = E[(v - m) \cdot (v - m)']$$

Infatti:

$$E[(v - m)(v - m)'] = E \left[ \begin{bmatrix} v_1 - m_1 \\ v_2 - m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 - m_1 & v_2 - m_2 \end{bmatrix} \right] = E \left[ \begin{bmatrix} (v_1 - m_1)^2 & (v_1 - m_1)(v_2 - m_2) \\ (v_2 - m_2)(v_1 - m_1) & (v_2 - m_2)^2 \end{bmatrix} \right]$$

Possiamo ora portare l'operatore di media all'interno dei singoli elementi della matrice, perciò abbiamo:

$$E[(v - m)(v - m)'] = \begin{bmatrix} E[(v_1 - m_1)^2] & E[(v_1 - m_1)(v_2 - m_2)] \\ E[(v_2 - m_2)(v_1 - m_1)] & E[(v_2 - m_2)^2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{bmatrix} = VAR[v]$$

Di conseguenza, possiamo così calcolarla forma quadratica:

$$\begin{aligned} y(x) &= x'VAR[v]x = x'E[(v - m) \cdot (v - m)']x = E[x' \cdot (v - m) \cdot (v - m)'x] = \\ &= E \left[ (x' \cdot (v - m)) \cdot (x' \cdot (v - m))' \right] \end{aligned}$$

Siccome  $(x' \cdot (v - m))$  è un numero reale, possiamo scrivere anche:

$$y(x) = E \left[ (x' \cdot (v - m))^2 \right]$$

E siccome  $y(x)$ , indipendentemente da  $x$ , è la media di quadrati di grandezze reali, avremo certamente:

$$y(x) \geq 0$$

Siccome sappiamo che una matrice è semidefinita positiva se e solo se tutti i suoi autovalori sono non negativi, possiamo concludere anche che il determinante di  $VAR[v]$  è certamente non negativo:

$$\det(VAR[v]) \geq 0$$

Ovvero:

$$\lambda_{11}\lambda_{22} - \lambda_{12}\lambda_{21} \geq 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_{11}\lambda_{22} - \lambda_{12}^2 \geq 0$$

Coefficiente di covarianza (o di correlazione)

Il coefficiente di covarianza di un vettore casuale di dimensione 2 è definito come:

$$\rho = \frac{\lambda_{12}}{\sqrt{\lambda_{11}} \cdot \sqrt{\lambda_{22}}}$$

In virtù del risultato appena ottenuto a partire dal fatto che la matrice di varianza è semidefinita positiva, possiamo concludere che:

$$|\rho| \leq 1$$

In particolare:

- Se  $\rho = 0$ , allora diciamo che  $v_1$  e  $v_2$  sono incorrelati e scriviamo  $v_1 \perp v_2$ .
- Se  $\rho = \pm 1$ , allora diciamo che  $v_1$  e  $v_2$  sono massimamente correlati.

*Esempio:* Consideriamo  $v_1 \sim (0, \lambda_{11})$  e poniamo  $v_2 = \alpha \cdot v_1$ . Proviamo a calcolare il coefficiente di correlazione tra  $v_1$  e  $v_2$ . Avremo:

$$\lambda_{22} = VAR[v_2] = VAR[\alpha \cdot v_1] = \alpha^2 \cdot VAR[v_1] = \alpha^2 \lambda_{11}$$

Inoltre:

$$\lambda_{12} = E[(v_1 - m_1)(v_2 - m_2)] = E[(v_1 - m_1)(\alpha v_1 - \alpha m_1)] = E[\alpha(v_1 - m_1)^2]$$

Perciò:

$$\lambda_{12} = \alpha E[(v_1 - m_1)^2] = \alpha \lambda_{11}$$

A questo punto, possiamo calcolare il coefficiente di correlazione:

$$\rho = \frac{\lambda_{12}}{\sqrt{\lambda_{11}} \cdot \sqrt{\lambda_{22}}} = \frac{\alpha \lambda_{11}}{\sqrt{\lambda_{11}} \cdot \sqrt{\alpha^2 \lambda_{11}}} = \frac{\alpha}{|\alpha|} = \begin{cases} -1 & \text{se } \alpha < 0 \\ 0 & \text{se } \alpha = 0 \\ +1 & \text{se } \alpha > 0 \end{cases}$$

Si noti che a rigore se  $\alpha = 0$ ,  $\rho$  dovrebbe essere indefinito, ma possiamo porlo nullo perché intuitivamente in tal caso  $v_2$  sarebbe sempre nullo, indipendentemente dai valori di  $v_1$ , perciò le due variabili aleatorie sono di fatto incorrelate.

### **Processo casuale (o aleatorio, o stocastico)**

Un processo casuale è un insieme numerabile (o finito) di variabili casuali. Si ha perciò di norma un insieme di infinite variabili casuali, che vengono indicizzate con una variabile solitamente indicata con  $t$  (in tal modo si fa di solito riferimento al tempo, ma la variabile usata come indice può talvolta assumere significati diversi).

Il processo casuale viene indicato con:

$$v(t)$$

Tuttavia, tale notazione non mette in evidenza il fatto che in realtà si tratta di una funzione dipendente non solo dal tempo, ma anche dall'esito  $s$  dell'esperimento casuale, perciò la notazione (comunque ampiamente adottata) sottintende in realtà una scrittura del tipo:

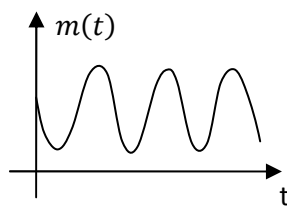
$$v(t, s)$$

- Valor medio

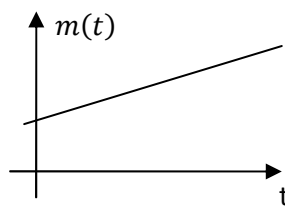
Il valor medio di un processo casuale è così definito:

$$m(t) = E[v(t)] = E_s[v(t, s)]$$

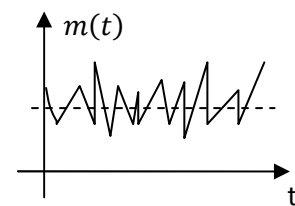
Come si nota, il valor medio non dipende dal valore di  $s$ . In sostanza quindi stiamo eseguendo la media su tutti gli esiti possibili. Si osserva anche che il valor medio varia a seconda del tempo. Ad esempio, il valor medio può essere:



Stagionale



Un trend (o linea di tendenza)



Fluttuante

- Varianza

La varianza di un processo casuale è:

$$VAR[v(t)] = E[(v(t) - m(t))^2] = \lambda^2(t)$$

La varianza può essere costante nel tempo, ma in generale non è così.

- Varianza incrociata (funzione di covarianza)

La varianza incrociata viene ottenuta considerando due valori di  $v$  in istanti diversi  $t_1$  e  $t_2$ , mediante la formula:

$$\gamma(t_1, t_2) = E[(v(t_1) - m(t_1)) \cdot (v(t_2) - m(t_2))]$$

Si nota che, nel caso in cui si abbia  $t_1 = t_2 = t$ , la funzione di covarianza coincide con la varianza:

$$\gamma(t, t) = \lambda^2(t)$$

### Processo casuale stazionario

Un processo casuale stazionario è un processo casuale nel quale:

1. La media  $m(t)$  è costante:  $m(t) = m.$
2. La varianza  $\lambda^2(t)$  è costante:  $\lambda^2(t) = \lambda^2$
3. La covarianza  $\gamma(t_1, t_2)$  dipende solo da  $\tau = t_2 - t_1$ :  $\gamma(t_1, t_2) = \gamma(\tau), \tau = t_2 - t_1$   
Si noti che in realtà dovremmo usare una lettera diversa da  $\gamma$ : a rigore matematico la scrittura appena adottata è errata, ma risulta chiaramente più pratica.

#### Proprietà della funzione di covarianza di un processo stazionario

1. La covarianza per  $\tau = 0$  è la varianza del processo:

$$\gamma(0) = \lambda^2$$

Infatti, se si ha  $\tau = 0$ , ovvero  $t_1 = t_2 = t$ , stiamo di fatto calcolando  $\gamma(t, t) = \lambda^2(t) = \lambda^2$ .

2. La covarianza in modulo non è mai superiore a  $\gamma(0)$ :

$$|\gamma(\tau)| \leq \gamma(0)$$

Infatti possiamo chiamare  $v_1$  la variabile casuale  $v(t_1)$  e  $v_2$  la variabile casuale  $v(t_2)$ . Il coefficiente di covarianza tra  $v_1$  e  $v_2$ , in virtù della proprietà precedentemente dimostrata, sarà sempre non superiore ad 1, perciò:

$$|\rho| = \left| \frac{\lambda_{12}}{\sqrt{\lambda_{11}} \cdot \sqrt{\lambda_{22}}} \right| \leq 1$$

Ma  $\lambda_{12}$  non è altro che la funzione di covarianza:

$$\lambda_{12} = E[(v_1 - m_1)(v_2 - m_2)] = E[(v(t_1) - m)(v(t_2) - m)] = \gamma(t_1, t_2) = \gamma(\tau)$$

La precedente disuguaglianza può allora essere così riscritta:

$$\left| \frac{\gamma(\tau)}{\sqrt{\lambda^2} \cdot \sqrt{\lambda^2}} \right| \leq 1 \quad \rightarrow \quad |\gamma(\tau)| \leq \lambda^2 = \gamma(0)$$

3. La funzione di covarianza è pari:

$$\gamma(\tau) = \gamma(-\tau)$$

#### Funzione di covarianza normalizzata

Talvolta viene introdotta la funzione di covarianza normalizzata, che è così definita:

$$\rho(\tau) = \frac{\gamma(\tau)}{\gamma(0)}$$

In questo modo si ottiene una funzione sempre compresa tra  $-1$  ed  $1$ .

#### Spettro di un processo stazionario

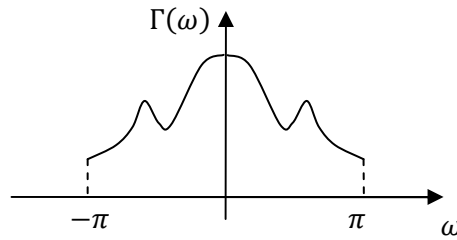
Dato un processo stazionario con funzione di covarianza  $\gamma(\tau)$ , possiamo calcolare la trasformata di Fourier di  $\gamma(\tau)$ , ottenendo:

$$\Gamma(\omega) = \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} \gamma(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau}, \quad \omega \in \mathbb{R}$$

Lo spettro di un processo stazionario ha le seguenti proprietà:

1.  $\Gamma(\omega)$  è sempre reale.
2.  $\Gamma(\omega)$  è pari.
3.  $\Gamma(\omega)$  è periodica di periodo  $2\pi$ . Se anziché le pulsazioni si utilizzano le frequenze, allora il periodo sarà unitario. Spesso si rappresenta il grafico dello spettro per pulsazioni tra  $-\pi$  e  $\pi$ , corrispondenti a frequenze tra  $-0,5$  e  $0,5$ ; quest'ultimo valore è anche la massima frequenza che si può ottenere in campo discreto: il segnale periodico che varia più rapidamente è infatti quello fluttuante tra due valori. Essendo pari, spesso è sufficiente rappresentare lo spettro tra  $0$  e  $\pi$ .
4.  $\Gamma(\omega) \geq 0$ .

La figura seguente mostra un esempio di spettro, mettendo in evidenza le proprietà appena elencate:



### Antitrasformata di Fourier

Se calcoliamo l'antitrasformata di Fourier dello spettro di un processo casuale otteniamo nuovamente la funzione di covarianza del processo stesso:

$$\gamma(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \Gamma(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega, \quad \tau \text{ intero}$$

Si noti che le definizioni di trasformata ed antitrasformata vengono date in modi diversi tra loro: nel caso più generale, esse vengono definite come:

$$\Gamma(\omega) = \alpha \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} \gamma(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} \qquad \gamma(\tau) = \beta \int_{-\pi}^{+\pi} \Gamma(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

Dove  $\alpha$  e  $\beta$  sono delle costanti reali tali che:

$$\alpha\beta = \frac{1}{2\pi}$$

Nel nostro caso, abbiamo semplicemente assunto:

$$\alpha = 1 \qquad \beta = \frac{1}{2\pi}$$

Si nota inoltre che, per  $\tau$ , ricaviamo dalla definizione dell'antitrasformata che:

$$\gamma(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \Gamma(\omega) d\omega$$

Questo significa che, a meno di una costante pari a  $(2\pi)^{-1}$ , l'area sottesa dallo spettro (in un intervallo pari al suo periodo) è pari alla varianza del processo.

# Introduzione alla predizione: processi AR, MA e ARMA

## Il problema della predizione

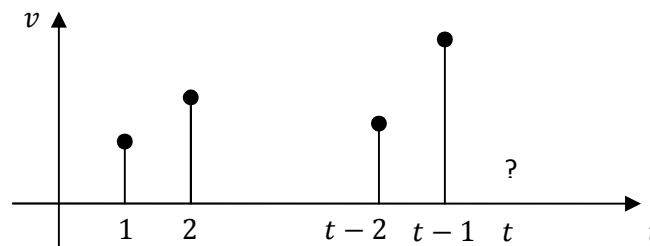
Consideriamo una sequenza di dati ordinati con un indice  $t$  (che possiamo immaginare rappresenti il tempo, anche se non è necessariamente così).

Supponiamo di avere come dati:

$$\begin{aligned} &v(1) \\ &v(2) \\ &\vdots \\ &v(t-1) \end{aligned}$$

E di voler calcolare l'incognita:  $v(t)$

Il problema può essere rappresentato come mostrato nella figura seguente:



Supponiamo inoltre di non essere a conoscenza di come i dati siano stati generati.

## Simbologia

Il dato incognito  $v(t)$ , come già abbiamo affermato, rappresenta il valore che  $v$  assumerà all'istante  $t$ . Tuttavia, dobbiamo distinguere tra il valore che effettivamente assumerà in tale istante e quello che si stima possa assumere; di conseguenza, indichiamo la stima di  $v(t)$  con il simbolo  $\hat{v}(t)$ .

Tale simbologia risulta però non sufficientemente chiara, perciò si utilizza la notazione seguente:

$$\hat{v}(t|t-1)$$

Che indica che stimiamo il valore di  $v$  all'istante  $t$ , utilizzando tutti i dati misurati fino all'istante  $t-1$ .

Naturalmente, saranno lecite anche scritture come le seguenti (il cui significato risulta ovvio):

$$\hat{v}(t|t-2)$$

$$\hat{v}(t+1|t-1)$$

## Il predittore lineare a memoria finita

Per prima cosa, proviamo a costruire un predittore lineare, ovvero un predittore che calcoli  $\hat{v}(t|t-1)$  come combinazione lineare dei dati a disposizione. Possiamo scegliere di realizzare:

- **Un predittore lineare a memoria infinita**

Ovvero un predittore nel quale  $\hat{v}(t|t-1)$  viene calcolato come combinazione di tutti i valori di  $v(\cdot)$  a partire da un certo istante iniziale 1, che è l'istante relativamente al quale si possiede il primo dato:

$$\hat{v}(t|t-1) = \alpha_1 \cdot v(t-1) + \alpha_2 \cdot v(t-1) + \dots + \alpha_{t-1} \cdot v(1)$$

Come dice il nome stesso, il predittore corrispondente all'equazione appena riportata necessita però di una memoria infinita, perché indipendentemente dal valore di  $t$ , bisogna conservare tutti i dati a partire dall'istante iniziale 1.

- **Un predittore lineare a memoria finita**

Se vogliamo realizzare invece un predittore con memoria finita, che abbia bisogno di memorizzare solamente gli ultimi  $n$  valori di  $v$ , allora dobbiamo realizzare un predittore del tipo:

$$\hat{v}(t|t-1) = \alpha_1 \cdot v(t-1) + \alpha_2 \cdot v(t-2) + \dots + \alpha_n \cdot v(t-n)$$

## Problemi nella realizzazione del predittore lineare

Nel seguito analizzeremo solamente predittori lineari a memoria finita. Tuttavia, i problemi che dobbiamo affrontare nella realizzazione di questo predittore sono fondamentalmente 2:

1. Quale memoria utilizzare? Ovvero, come scegliere il valore  $n$  da utilizzare?
2. Quali valori attribuire ai parametri  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ?

## L'errore di predizione

### Introduzione

Naturalmente, una volta individuato il predittore, ovvero dopo aver fissato tutti i parametri che compaiono nell'equazione:

$$\hat{v}(t|t-1) = \alpha_1 \cdot v(t-1) + \alpha_2 \cdot v(t-2) + \dots + \alpha_n \cdot v(t-n)$$

il predittore stesso potrà essere utilizzato anche sul passato. In altri termini, possiamo calcolare:

$$\hat{v}(k|k-1), \quad \text{per } k = t-1, t-2, \dots$$

Per ognuno dei valori considerati possiamo calcolare l'errore di predizione, che è di fatto l'errore di stima.

### Definizione

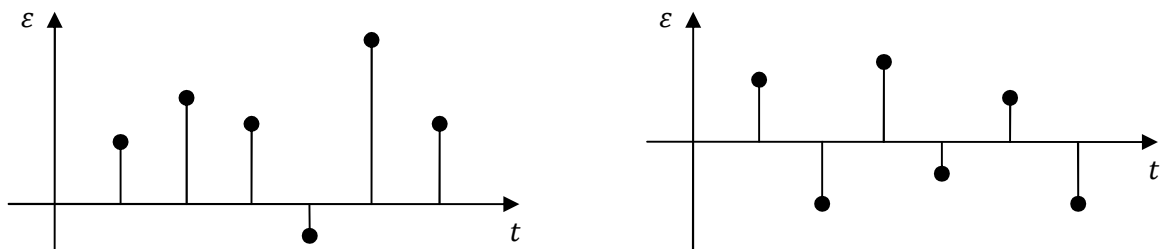
L'errore di stima è definito come la differenza tra il valore vero di una grandezza  $v$  e il suo valore stimato  $\hat{v}$ :

$$\varepsilon(t) = v(t) - \hat{v}(t|t-1)$$

Naturalmente, siccome  $v(\cdot)$  e  $\hat{v}(\cdot)$  variano nel tempo, anche  $\varepsilon(\cdot)$  varierà nel tempo. In particolare, siccome consideriamo  $v(\cdot)$  come un processo casuale, anche  $\varepsilon(\cdot)$  sarà un processo casuale.

### Quali caratteristiche deve avere l'errore di predizione perché la stima sia considerata "buona"?

Naturalmente, la situazione ideale sarebbe quella nella quale l'errore di predizione è costantemente nullo; ciò è tuttavia impossibile nella realtà dei fatti. Ci accontentiamo perciò di un risultato molto meno vincolante. A tale scopo, consideriamo gli andamenti dell'errore di predizione mostrati in figura:



1. La figura riportata a sinistra mostra chiaramente un errore di predizione con media positiva. Di conseguenza ci rendiamo conto molto facilmente del fatto che possiamo realizzare un predittore migliore di quello in analisi, tenendo conto semplicemente di questo dato evidente. Possiamo quindi concludere che uno dei requisiti dell'errore di predizione è che esso abbia media nulla.
2. La figura a sinistra mostra invece un errore con media nulla (ipotizziamo che sia così), ma nonostante questo possiamo osservare che l'errore cambia segno ad ogni istante. Anche in questo caso quindi siamo in grado di ottenere delle informazioni più dettagliate rispetto a quelle che ci vengono direttamente fornite (ad ogni istante sappiamo dire se la predizione viene fornita per eccesso o per difetto) e quindi anche in questo caso possiamo ottenere un predittore migliore. Possiamo allora concludere che il secondo requisito necessario è che il predittore non abbia una *dinamica propria*, ovvero una propria logica di funzionamento.

Più rigorosamente, questi concetti vengono formalizzati affermando che l'errore di predizione è un *rumore bianco* (WN, White Noise):

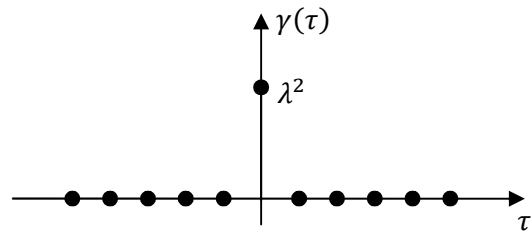
$$\varepsilon(\cdot) \sim WN(0, \lambda^2)$$

Dove il primo dei due parametri rappresenta la media (cioè 0), mentre  $\lambda^2$  è la varianza di  $\varepsilon(\cdot)$ .

## Il rumore bianco

Più formalmente, un rumore bianco, spesso indicato con il simbolo  $WN$ ,  $\eta$  oppure  $\xi$ , è un processo casuale stazionario con valor medio nullo e funzione di covarianza:

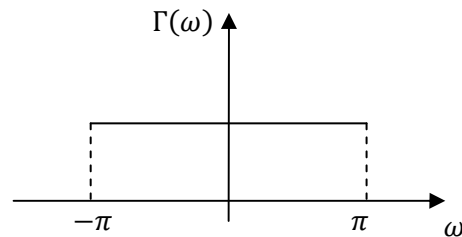
$$\gamma(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{se } \tau \neq 0 \\ \lambda^2 & \text{se } \tau = 0 \end{cases}$$



Il fatto che la funzione di covarianza sia nulla ovunque tranne che nel punto zero significa di fatto che la conoscenza del passato non serve a prevedere il futuro: non c'è alcun legame tra ciò che accade in un istante e ciò che accade in un altro.

Il calcolo della trasformata di Fourier è molto semplice, perciò otteniamo in maniera molto banale che lo spettro di un rumore bianco è costante e pari a  $\lambda^2$ :

$$\Gamma(\omega) = \lambda^2$$



## Descrizione del segnale come uscita di un sistema lineare

Immaginiamo ora che effettivamente  $\varepsilon(\cdot)$  sia un rumore bianco. Per la definizione di errore di predizione:

$$\varepsilon(t) = v(t) - \hat{v}(t|t-1)$$

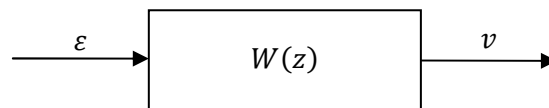
Modificando poi tale equazione con banali passaggi algebrici, otteniamo:

$$v(t) = \hat{v}(t|t-1) + \varepsilon(t)$$

A questo punto, sostituendo a  $\hat{v}(t|t-1)$  la formula nota per un predittore lineare a memoria finita:

$$v(t) = \alpha_1 \cdot v(t-1) + \alpha_2 \cdot v(t-2) + \dots + \alpha_n \cdot v(t-n) + \varepsilon(t)$$

Abbiamo così ottenuto un'equazione alle differenze avente come incognita il processo casuale  $v(\cdot)$ , che rappresenta la grandezza sulla quale stiamo cercando di eseguire la predizione. Nell'equazione compare inoltre l'errore di predizione  $\varepsilon(\cdot)$ . Per quanto noto dal corso di Automatica, questo significa che la grandezza  $v(\cdot)$  può essere vista come l'uscita di un sistema lineare avente come ingresso  $\varepsilon(\cdot)$ :



L'equazione alle differenze precedente è quindi l'equazione che descrive il comportamento del sistema rappresentato nella figura sopra riportata. A partire da tale equazione, possiamo ricavare la funzione di trasferimento  $w(z)$ , semplicemente introducendo l'operatore di ritardo unitario  $z$ , e ricordando che  $z^{-1}$  è l'operatore di anticipo unitario. Abbiamo infatti:

$$v(t) = \alpha_1 \cdot z^{-1} \cdot v(t) + \alpha_2 \cdot z^{-2} \cdot v(t) + \dots + \alpha_n \cdot z^{-n} \cdot v(t) + \varepsilon(t)$$

Da cui si ottiene facilmente:

$$v(t) \cdot (1 - \alpha_1 \cdot z^{-1} - \alpha_2 \cdot z^{-2} - \dots - \alpha_n \cdot z^{-n}) = \varepsilon(t)$$

E quindi:

$$W(z) = \frac{v(t)}{\varepsilon(t)} = \frac{1}{1 - \alpha_1 \cdot z^{-1} - \alpha_2 \cdot z^{-2} - \dots - \alpha_n \cdot z^{-n}} = \frac{z^n}{z^n - \alpha_1 \cdot z^{n-1} - \alpha_2 \cdot z^{n-2} - \dots - \alpha_n}$$

Possiamo ora calcolare gli zeri e i poli della FdT così ottenuta:

- Gli zeri si ottengono annullando il numeratore, e perciò abbiamo  $n$  zeri tutti nell'origine:

$$z = 0 \quad n \text{ volte}$$

Gli zeri vengono rappresentati nel piano dei numeri complessi con il simbolo  $\circ$ .

- I poli si ottengono annullando il denominatore, e perciò avremo  $n$  poli. A priori, non possiamo sapere in quale regione del piano dei numeri complessi si troveranno i poli della funzione di trasferimento precedentemente riportata. Il simbolo usato per indicare i poli nel piano complesso è  $\times$ .

In conclusione, per trovare un buon predittore lineare, dobbiamo cercare di descrivere il segnale esatto come l'uscita di un sistema avente una funzione di trasferimento del tipo:

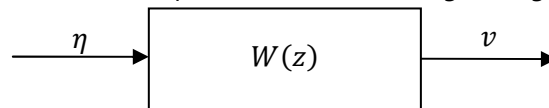
$$W(z) = \frac{z^n}{z^n - \alpha_1 \cdot z^{n-1} - \alpha_2 \cdot z^{n-2} - \dots - \alpha_n}$$

e che sia alimentato da un rumore bianco. Vediamo ora che caratteristiche avrà il processo d'uscita  $v$  in relazione alle caratteristiche del processo d'ingresso.

## Processi MA

### Il processo MA(1)

Sia dato un sistema dinamico lineare come quello mostrato nella figura seguente:



Supponiamo inoltre che il segnale d'ingresso  $\eta$  sia un rumore bianco di media  $\bar{\eta}$  e varianza  $\lambda^2$ :

$$\eta \sim WN(\bar{\eta}, \lambda^2)$$

Supponiamo per praticità che si abbia  $\bar{\eta} = 0$  (ma tale ipotesi non è in realtà necessaria). Analizziamo il sistema nel caso in cui il suo comportamento imponga la validità della seguente equazione:

$$v(t) = c_0 \eta(t) + c_1 \eta(t-1), \quad c_0, c_1 \in \mathbb{R}$$

Allora:

1. Se  $c_1 = 0$ , abbiamo semplicemente  $v(t) = c_0 \eta(t)$ , perciò:
  - a)  $E[v(t)] = E[c_0 \eta(t)] = c_0 E[\eta(t)] = 0$
  - b)  $Var[v(t)] = E[(v(t) - E[v(t)])^2] = E[(v(t))^2] = E[(c_0 \eta(t))^2] = c_0^2 E[(\eta(t))^2] = c_0^2 \lambda^2$
  - c)  $Cov(t_1, t_2) = \gamma(t_1, t_2) = E[(v(t_1) - E[v(t_1)]) \cdot (v(t_2) - E[v(t_2)])] = E[v(t_1)v(t_2)] =$   
 $= E[c_0^2 \eta(t_1)\eta(t_2)] = c_0^2 \gamma(t_1, t_2) = \begin{cases} 0 & \text{se } t_1 \neq t_2 \\ c_0^2 \lambda^2 & \text{se } t_1 = t_2 \end{cases}$

Siccome valgono tutte le relative proprietà, il segnale di uscita è ancora un processo stazionario, ed in particolare si tratta ancora di un rumore bianco.

2. Se  $c_1 \neq 0$  e  $c_0$  qualsiasi, allora:

- a)  $E[v(t)] = E[c_0 \eta(t) + c_1 \eta(t-1)] = c_0 E[\eta(t)] + c_1 E[\eta(t-1)] = 0$
- b)  $Var[v(t)] = E[v^2(t)] = E[c_0^2 \eta^2(t) + c_1^2 \eta^2(t-1) + 2c_0 c_1 \eta(t)\eta(t-1)] =$   
 $= c_0^2 E[\eta^2(t)] + c_1^2 E[\eta^2(t-1)] + 2c_0 c_1 E[\eta(t)\eta(t-1)]$

Ricordando la definizione di covarianza:

$$Var[v(t)] = c_0^2 \lambda^2 + c_1^2 \lambda^2 + \gamma(t, t-1) = c_0^2 \lambda^2 + c_1^2 \lambda^2$$

- c)  $\gamma(t_1, t_2) = E[v(t_1)v(t_2)] = E[(c_0 \eta(t_1) + c_1 \eta(t_1-1))(c_0 \eta(t_2) + c_1 \eta(t_2-1))] =$   
 $= c_0^2 E[\eta(t_1)\eta(t_2)] + c_0 c_1 E[\eta(t_1)\eta(t_2-1)] + c_0 c_1 E[\eta(t_1-1)\eta(t_2)] + c_1^2 E[\eta(t_1-1)\eta(t_2-1)]$

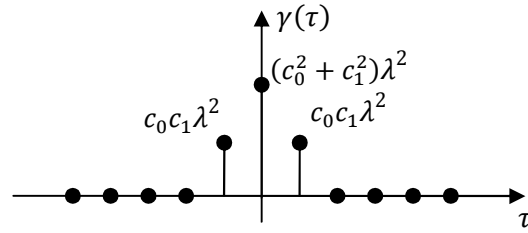
Abbiamo ora vari casi:

1. Se  $t_1 = t_2 = t$ :  $\gamma(t, t) = c_0^2 \lambda^2 + c_1^2 \lambda^2$
2. Se  $t_2 = t_1 \pm 1$ :  $\gamma(t, t+1) = c_0 c_1 \lambda^2$
3. Se  $t_2 = t_1 \pm 2$ :  $\gamma(t, t+2) = 0$



In sostanza quindi, nel caso in analisi, si ottiene ancora un processo stazionario, ma in questo caso non si tratta di un rumore bianco, perché la covarianza non si annulla nei valori  $\pm 1$ . Diciamo in questi casi che il processo in analisi è un **rumore colorato**.

$$\gamma(\tau) = \begin{cases} (c_0^2 + c_1^2)\lambda^2 & \text{se } \tau = 0 \\ c_0 c_1 \lambda^2 & \text{se } \tau = \pm 1 \\ 0 & \text{se } \tau = \pm k, k > 1 \end{cases}$$



Un processo di questo tipo è noto con il nome di processo **MA(1)**, dove l'acronimo MA sta per *Moving Average*, ovvero media mobile. Il nome è giustificato dal fatto che in sostanza il processo in uscita viene costruito calcolando la media dei 2 precedenti valori, sempre utilizzando gli stessi 2 coefficienti.

### Il caso generale: processo MA(n)

Procedendo in maniera analoga, il processo MA(n), ottenuto con un sistema del tipo:

$$v(t) = c_0 \eta(t) + c_1 \eta(t-1) + \dots + c_n \eta(t-n), \quad c_0, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$$

Sarà ancora un processo casuale stazionario, con:

$$E[v(t)] = 0$$

$$VAR[v(t)] = [c_0^2 + c_1^2 + \dots + c_n^2] \lambda^2$$

e sarà nuovamente un rumore colorato. In particolare, la sua funzione di covarianza sarà del tipo:

$$\gamma(0) = [c_0^2 + c_1^2 + \dots + c_n^2] \lambda^2$$

$$\gamma(\pm 1) = [c_0 c_1 + c_1 c_2 + \dots + c_{n-1} c_n] \lambda^2$$

$$\gamma(\pm 2) = [c_0 c_2 + c_1 c_3 + \dots + c_{n-2} c_n] \lambda^2$$

...

$$\gamma(\pm n) = c_0 c_n \lambda^2$$

$$\gamma(\pm k) = 0, k > n$$

Possiamo ora provare a calcolare la funzione di trasferimento di un generico processo MA(n):

$$v(t) = c_0 \eta(t) + c_1 z^{-1} \eta(t) + \dots + c_n z^{-n} \eta(t)$$

$$v(t) = (c_0 + c_1 z^{-1} + \dots + c_n z^{-n}) \eta(t)$$

$$w(z) = \frac{v(t)}{\eta(t)} = c_0 + c_1 z^{-1} + \dots + c_n z^{-n} = \frac{c_0 z^n + c_1 z^{n-1} + \dots + c_n}{z^n}$$

Osserviamo che si tratta di una funzione di trasferimento lineare, perciò potremo calcolarne zeri e poli; gli  $n$  poli saranno tutti coincidenti e posizionati nell'origine, mentre la posizione degli zeri dipende chiaramente dai valori che si attribuiscono ai vari coefficienti  $c_0, c_1, \dots, c_n$ .

### Il processo MA( $\infty$ )

Consideriamo ora ciò che accade se, anziché considerare un segnale che sia dato dalla media pesata tra i valori assunti dall'ingresso  $\eta$  negli ultimi  $n$  istanti (dove  $n$  è un numero finito), consideriamo il caso in cui il segnale d'uscita sia la combinazione lineare di  $\eta$  valutato in un numero infinito di istanti del passato:

$$v(t) = c_0 \eta(t) + c_1 \eta(t-1) + \dots + c_{n-1} \eta(t-1) + c_n \eta(t-n) + c_{n+1} \eta(t-n-1) + \dots$$

Avremo allora:

$$\gamma(0) = [c_0^2 + c_1^2 + \dots + c_n^2 + \dots] \lambda^2$$

Allora, affinché  $\gamma(0)$  sia una quantità finita, è necessario che sia finita la serie:

$$c_0^2 + c_1^2 + \dots = \sum_{i=0}^{+\infty} c_i^2$$

In tale ipotesi,  $\gamma$  sarà finita in ogni suo punto: sappiamo infatti che:

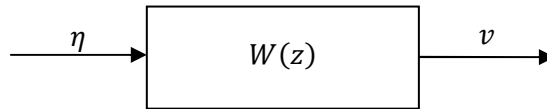
$$|\gamma(\tau)| \leq \gamma(0)$$

Perciò è sufficiente verificare che la covarianza sia finita per  $\tau = 0$ .

## Processi AR

### Il processo AR(n)

Un processo AR (autoregressivo) di ordine  $n$ , indicato con  $AR(n)$ , viene ottenuto come uscita di un sistema dinamico lineare avente come ingresso un rumore bianco  $\eta$ :



Dove il comportamento del sistema è descritto da un'equazione del tipo:

$$v(t) = a_1 v(t-1) + a_2 v(t-2) + \dots + a_n v(t-n) + \eta(t)$$

Di conseguenza, la funzione di trasferimento corrispondente si potrà così ottenere:

$$v(t) = a_1 z^{-1} v(t) + a_2 z^{-2} v(t) + \dots + a_n z^{-n} v(t) + \eta(t)$$

$$(1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2} - \dots - a_n z^{-n}) v(t) = \eta(t)$$

$$W(z) = \frac{1}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2} - \dots - a_n z^{-n}} = \frac{z^n}{z^n - a_1 z^{n-1} - a_2 z^{n-2} - \dots - a_n}$$

### Il processo AR(1)

Consideriamo ora un processo  $v(t)$  di tipo  $AR(1)$ , e stabiliamo se si tratta di un processo stazionario. Ciò dipende dal valore che assume il parametro reale  $a_1$ . La funzione di trasferimento è:

$$W(z) = \frac{1}{1 - a_1 z^{-1}} = \frac{z}{z - a_1}$$

#### Analisi del processo AR(1) – primo metodo

Per la nostra analisi, risulta utile osservare che un segnale  $AR(1)$  può sempre essere espresso come un particolare segnale  $MA(\infty)$ . Infatti:

$$\begin{aligned} v(t) &= a_1 v(t-1) + \eta(t) = a_1 [a_1 v(t-2) + \eta(t-1)] + \eta(t) = a_1^2 v(t-2) + a_1 \eta(t-1) + \eta(t) = \\ &= a_1^2 [a_1 v(t-3) + \eta(t-2)] + a_1 \eta(t-1) + \eta(t) = \dots \end{aligned}$$

All' $i$ -esima iterazione del procedimento appena illustrato avremo allora:

$$v(t) = \eta(t) + a_1 \eta(t-1) + a_1^2 \eta(t-2) + \dots + a_1^n v(t-n)$$

Perciò, se il procedimento viene iterato facendo tendere ad infinito il valore di  $n$ , otteniamo un'espressione del tipo  $MA(\infty)$ . È tuttavia necessario verificare che tale processo sia ben definito, ovvero che  $\gamma(0)$  sia finito. Nel nostro caso, il coefficiente  $i$ -esimo del processo  $MA(\infty)$  è:

$$c_i = a_1^i$$

Perciò:

$$\sum_{i=0}^{+\infty} c_i^2 = \sum_{i=0}^{+\infty} a_1^{2i}$$

Quella così ottenuta è una serie geometrica di ragione  $a_1^2$ , perciò è noto dall'Analisi Matematica che la serie è convergente se:

$$|a_1^2| < 1$$

O, equivalentemente:

$$|a_1| < 1$$

Sotto tale ipotesi, la somma della serie è

$$\sum_{i=0}^{+\infty} a_1^{2i} = \frac{1}{1 - a_1^2}$$

Possiamo così concludere che, se  $|a_1| < 1$ , allora il processo AR(1) è equivalente ad un processo MA( $\infty$ ) ben definito, e perciò è stazionario, perché abbiamo già dimostrato che tutti i processi MA sono stazionari. La varianza del processo AR(1) può essere calcolata utilizzando la formula data per i processi MA( $\infty$ ):

$$Var[v(t)] = \gamma(0) = [c_0^2 + c_1^2 + \dots + c_n^2 + \dots] \lambda^2 = \left( \sum_{i=0}^{+\infty} a_1^{2i} \right) \lambda^2 = \frac{\lambda^2}{1 - a_1^2}$$

Inoltre, possiamo valutare la funzione di covarianza nei restanti punti:

$$\gamma(1) = (c_0 c_1 + c_1 c_2 + \dots) \lambda^2 = (a_1 + a_1^3 + a_1^5 + \dots) \lambda^2 = a_1 \left( \sum_{i=0}^{+\infty} a_1^{2i} \right) \lambda^2 = \left( \sum_{i=0}^{+\infty} a_1^{2i} \right) \lambda^2 = a_1 \gamma(0)$$

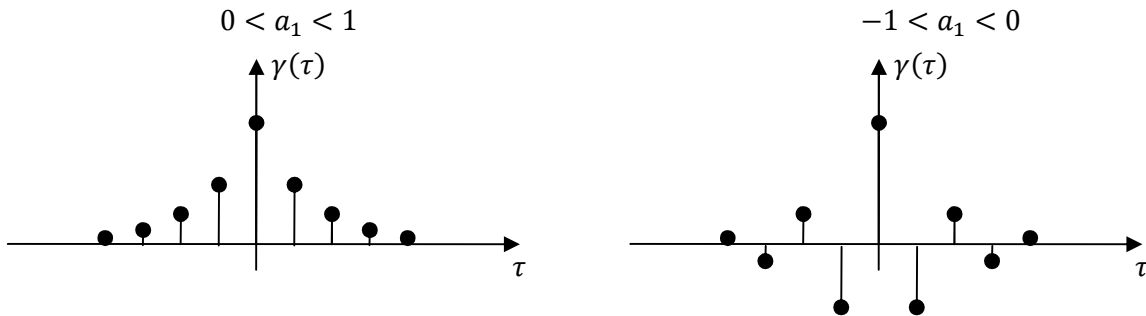
In maniera del tutto analoga:

$$\gamma(2) = (c_0 c_2 + c_1 c_3 + \dots) \lambda^2 = (a_1^2 + a_1^4 + a_1^6 + \dots) \lambda^2 = a_1^2 \left( \sum_{i=0}^{+\infty} a_1^{2i} \right) \lambda^2 = \left( \sum_{i=0}^{+\infty} a_1^{2i} \right) \lambda^2 = a_1^2 \gamma(0)$$

E così via. Si ottiene così:

$$\gamma(\tau) = a_1^\tau \gamma(0) = \frac{\lambda^2}{1 - a_1^2} a_1^\tau$$

Da un punto di vista grafico allora la funzione di covarianza sarà rappresentata da un esponenziale negativo simmetrico a tempo discreto:



Come mostra la figura a destra, nel caso  $a_1 < 0$ , il segnale generato oscilla visivamente in modo molto più significativo. Con il termine *segnale generato* si intende quello che, in maniera più rigorosa, dovrebbe essere chiamato *realizzazione del processo*, ovvero l'insieme dei valori che il processo realmente assume se lo si osserva. In sostanza, considerare una realizzazione di un processo significa fissare un certo valore di  $s$ , che ricordiamo essere la variabile che indica l'esito dell'esperimento casuale:  $v(t)$  dovrebbe infatti essere espresso come  $v(t, s)$ . Diciamo allora che:

- Se fissiamo il valore di  $t = \bar{t}$ , otteniamo  $v(\bar{t}, s)$ , ovvero una variabile casuale.
- Se fissiamo il valore di  $s = \bar{s}$ , otteniamo  $v(t, \bar{s})$ , ovvero una realizzazione del processo.

### Analisi del processo AR(1) – secondo metodo: la lunga divisione

La stessa analisi può in realtà essere condotta in maniera diversa, adottando cioè un punto di vista differente. L'obiettivo è ancora quello di esprimere la funzione di trasferimento nella forma:

$$W(z) = c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \dots$$

Per ottenere tale risultato, possiamo eseguire la *lunga divisione* tra il numeratore e il denominatore di:

$$W(z) = \frac{z}{z - a_1}$$

La lunga divisione si esegue come di seguito mostrato:

$z$	$z - a_1$
$z$	$1 + a_1 z^{-1}$
$-a_1$	
$a_1$	
$a_1$	$-a_1^2 z^{-1}$
$-a_1^2 z^{-1}$	
$a_1^2 z^{-1}$	

E così via. Al primo passo otteniamo allora:

$$W(z) = 1 + \frac{a_1}{z - a_1}$$

Al secondo passo, otteniamo:

$$W(z) = 1 + a_1 z^{-1} + \frac{a_1^2 z^{-1}}{z - a_1}$$

Cioè, ad ogni passo indichiamo il risultato della divisione, cui si somma il resto diviso per il denominatore della funzione di trasferimento iniziale. Il procedimento viene iterato all'infinito, e si ottiene, se  $|a_1| < 1$ :

$$W(z) = 1 + a_1 z^{-1} + a_1^2 z^{-2} + \dots$$

Che equivale alla funzione di trasferimento di un processo MA( $\infty$ ), a patto di porre  $c_i = a_1^i$ :

$$W(z) = c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \dots$$

### Analisi del processo AR(1) – terzo metodo: le equazioni di Yule-Walker

Un terzo metodo di analisi è quello che prevede di ricorrere all'uso delle equazioni di Yule-Walker:

1. Per prima cosa, calcoliamo la varianza  $\gamma(0)$  di  $v(\cdot)$ .

$$\gamma(0) = \text{Var}[v(t)] = E[(v(t) - E[v(t)])^2]$$

Siccome si ha:  $E[\eta(t)] = 0$

Allora avremo, per ogni valore di  $t$ :  $E[v(t)] = 0$

E quindi possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} \gamma(0) &= E[(v(t))^2] = E[\{a_1 v(t-1) + \eta(t)\}^2] = E[a_1^2 v^2(t-1) + \eta^2(t) + 2a_1 v(t-1)\eta(t)] = \\ &= a_1^2 E[v^2(t-1)] + E[\eta^2(t)] + 2a_1 E[v(t-1)\eta(t)] = a_1^2 \text{Var}[v(t-1)] + \lambda^2 + 2a_1 E[v(t-1)\eta(t)] \end{aligned}$$

Dove  $E[v(t-1)\eta(t)]$  è la correlazione tra  $v(t-1)$  e  $\eta(t)$ . Come è evidente dall'equazione che descrive  $v(t)$ ,  $v(t)$  dipende da  $v(t-1)$  e da  $\eta(t)$ ; a sua volta,  $v(t-1)$  dipende da  $v(t-2)$  e  $\eta(t-1)$ , e così via. Possiamo allora affermare che  $v(t)$  dipende dal passato di  $\eta(\cdot)$  fino all'istante  $t$ , mentre  $v(t-1)$  dipende dal passato di  $\eta(\cdot)$  fino a  $t-1$ .

Se però  $\eta(\cdot)$  è un rumore bianco, allora  $\eta(t)$  è incorrelato con tutti i valori precedenti, e perciò anche con  $v(t-1)$ . Ne ricaviamo allora:

$$\gamma(0) = a_1^2 \text{Var}[v(t-1)] + \lambda^2$$

Inoltre, siccome  $v(\cdot)$  è un processo stazionario:

$$\text{Var}[v(t-1)] = \text{Var}[v(t)] = \gamma(0)$$

Perciò:

$$\gamma(0) = a_1^2 \gamma(0) + \lambda^2 \rightarrow \gamma(0) = \frac{\lambda^2}{1 - a_1^2}$$

2. Calcoliamo ora il valore  $\gamma(1)$ :

$$\gamma(1) = E[v(t)v(t-1)] = E[v(t)v(t+1)]$$

Utilizziamo, tra le due precedenti definizioni, la prima:

$$\begin{aligned}\gamma(1) &= E[v(t)v(t-1)] = E[(a_1 v(t-1) + \eta(t))v(t-1)] = \\ &= E[a_1 v^2(t-1) + \eta(t)v(t-1)] = a_1 E[v^2(t-1)] + E[\eta(t)v(t-1)] = a_1 \gamma(0)\end{aligned}$$

3. Calcoliamo ora il valore  $\gamma(2)$ :

$$\gamma(2) = E[v(t)v(t-2)] = E[v(t)v(t+2)]$$

Utilizziamo ancora, tra le due precedenti definizioni, la prima:

$$\begin{aligned}\gamma(2) &= E[v(t)v(t-2)] = E[(a_1 v(t-1) + \eta(t))v(t-2)] = \\ &= E[a_1 v(t-1)v(t-2) + \eta(t)v(t-2)] = a_1 E[a_1 v(t-1)v(t-2)] + E[\eta(t)v(t-2)] = \\ &= a_1 E[a_1 v(t-1)v(t-2)] = a_1 E[a_1 v(t)v(t-1)] = a_1 \gamma(1) = a_1^2 \gamma(0)\end{aligned}$$

Procedendo sempre nello stesso modo, si ottengono le *equazioni di Yule e Walker*:

$$\gamma(0) = \frac{\lambda^2}{1 - a_1^2} \qquad \gamma(\tau) = a_1 \gamma(\tau - 1), \quad \forall \tau: |\tau| \geq 1$$

Con queste equazioni:

1. Data la varianza  $\lambda^2$  di  $\eta(\cdot)$  siamo in grado di calcolare la funzione di correlazione  $\gamma(\tau)$ .
2. Data la funzione di correlazione  $\gamma(\tau)$ , siamo in grado di risalire a  $\lambda^2$  e  $a_1$ . Ad esempio, se consideriamo le prime due tra le infinite equazioni di Yule e Walker:

$$\begin{cases} \gamma(0) = \frac{\lambda^2}{1 - a_1^2} \\ \gamma(1) = a_1 \gamma(0) \end{cases} \rightarrow a_1 = \frac{\gamma(1)}{\gamma(0)} \quad e \quad \lambda^2 = \gamma(0)(1 - a_1^2) = \left[1 - \left(\frac{\gamma(1)}{\gamma(0)}\right)^2\right] \gamma(0)$$

Quello appena descritto è un primo esempio di procedimento di identificazione. Immaginiamo ad esempio di avere una certa serie di dati, e supponiamo di volerla modellare come l'uscita di un sistema dinamico lineare del tipo AR(1): dobbiamo naturalmente stimare i valori di  $a_1$  e di  $\lambda^2$ . A tale scopo, dalla serie temporale stimiamo direttamente i valori di  $\gamma(0)$  e  $\gamma(1)$  e poi, utilizzando le relazioni appena individuate, possiamo calcolare i parametri ignoti.

### **Equazioni di Yule-Walker per un generico processo AR(n)**

Dato un generico processo AR(n):

$$v(t) = a_1 v(t-1) + a_2 v(t-2) + \dots + a_n v(t-n) + \eta(t)$$

Possiamo generalizzare il procedimento delle equazioni di Yule-Walker, in modo da individuare la funzione di correlazione  $\gamma(\cdot)$  del processo stesso. Infatti possiamo:

1. Calcolare i primi  $n$  valori di  $\gamma(\cdot)$  mediante la risoluzione di un sistema di  $n$  equazioni in  $n$  incognite. Ad esempio, se  $n = 2$ , calcoliamo:

$$\begin{aligned}\gamma(0) &= E[v^2(t)] = E[(a_1 v(t-1) + a_2 v(t-2) + \eta(t))^2] = a_1^2 E[v^2(t-1)] + a_2^2 E[v^2(t-2)] + \\ &+ E[\eta^2(t)] + 2a_1 a_2 E[v(t-1)v(t-2)] + 2a_1 E[v(t-1)\eta(t)] + 2a_2 E[v(t-2)\eta(t)] = \\ &= a_1^2 \gamma(0) + a_2^2 \gamma(0) + VAR[\eta(t)] + 2a_1 a_2 \gamma(1) = a_1^2 \gamma(0) + a_2^2 \gamma(0) + \lambda^2 + 2a_1 a_2 \gamma(1) \\ \gamma(1) &= E[v(t)v(t-1)] = E[(a_1 v(t-1) + a_2 v(t-2) + \eta(t))v(t-1)] = \\ &= a_1 E[v^2(t-1)] + a_2 E[v(t-2)v(t-1)] + E[\eta(t)v(t-1)] = a_1 \gamma(0) + a_2 \gamma(1)\end{aligned}$$

Si ottiene allora il sistema:

$$\begin{cases} \gamma(0) = a_1^2 \gamma(0) + a_2^2 \gamma(0) + \lambda^2 + 2a_1 a_2 \gamma(1) \\ \gamma(1) = a_1 \gamma(0) + a_2 \gamma(1) \end{cases}$$

Che, una volta risolto, ci permette di conoscere  $\gamma(0)$  e  $\gamma(1)$ .

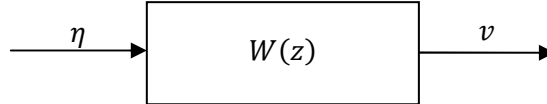
2. Calcolare poi i restanti valori mediante la formula:

$$\gamma(\tau) = a_1 \gamma(\tau - 1) + a_2 \gamma(\tau - 2) + \dots + a_n \gamma(\tau - n), \quad \forall \tau: |\tau| \geq n$$

## Processi ARMA

### Il processo ARMA( $n_a, n_c$ )

I processi ARMA( $n_a, n_c$ ) sono una famiglia di processi, che contiene tra l'altro anche tutti i processi AR e tutti i processi MA. Se consideriamo ancora il processo come uscita di un sistema dinamico lineare avente come ingresso un rumore bianco  $\eta \sim (0, \lambda^2)$ :



Allora l'equazione che ci permette di definire un processo ARMA è la seguente:

$$v(t) = a_1 v(t-1) + a_2 v(t-2) + \dots + a_{n_a} v(t-n_a) + \quad \text{(parte AR)} \\ + c_0 \eta(t) + c_1 \eta(t-1) + c_2 \eta(t-2) + \dots + c_{n_c} \eta(t-n_c) \quad \text{(parte MA)}$$

Dove:

$$a_i, c_j \in \mathbb{R}$$

Allora, la funzione di trasferimento sarà così calcolabile:

$$v(t) = a_1 z^{-1} v(t) + a_2 z^{-2} v(t) + \dots + a_{n_a} v(t-n_a) + c_0 \eta(t) + c_1 z^{-1} \eta(t) + \dots + c_{n_c} z^{-n_c} \eta(t)$$

Da cui ricaviamo l'espressione seguente, nota anche come **rappresentazione operativa del modello ARMA**.

$$(1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2} - \dots - a_{n_a} z^{-n_a}) v(t) = (c_0 + c_1 z^{-1} + \dots + c_{n_c} z^{-n_c}) \eta(t)$$

Tale espressione viene spesso indicata, per ovvie ragioni di praticità, utilizzando:

$$A(z) = 1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2} - \dots - a_{n_a} z^{-n_a} \quad C(z) = c_0 + c_1 z^{-1} + \dots + c_{n_c} z^{-n_c}$$

E quindi scriviamo:

$$A(z)v(t) = C(z)\eta(t)$$

da cui:

$$W(z) = \frac{C(z)}{A(z)} = \frac{c_0 + c_1 z^{-1} + \dots + c_{n_c} z^{-n_c}}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2} - \dots - a_{n_a} z^{-n_a}}$$

Volendo, la funzione di trasferimento può essere riscritta con esponenti positivi:

$$W(z) = \frac{c_0 z^n + c_1 z^{n-1} + \dots + c_{n_c} z^{n-n_c}}{z^n - a_1 z^{n-1} - a_2 z^{n-2} - \dots - a_{n_a} z^{n-n_a}}$$

Come mette in evidenza questa espressione, si hanno sempre  $n$  zeri e  $n$  poli, dove:

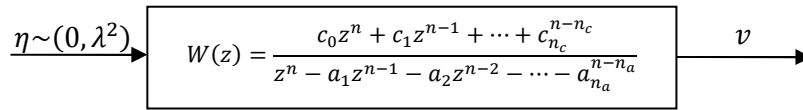
$$n = \max(n_a, n_c)$$

È evidente inoltre che

- I coefficienti  $c_i$  determinano gli zeri della funzione di trasferimento;
- I poli sono determinati dai coefficienti  $a_i$ ;
- La differenza  $n_a - n_c$  determina il numero di zeri nell'origine (o, se è negativa, il numero di poli nell'origine).
- Se  $n_c = 0$ , allora il processo è del tipo AR( $n_a$ ), e quindi ha  $n_a$  zeri nell'origine (come si ricava anche dalla precedente osservazione).

### Stazionarietà del processo ARMA

Il processo generato nel modo descritto, ovvero mediante un sistema del tipo:



non è, nel caso generale, un processo stazionario. A tal proposito, è opportuno innanzitutto distinguere tra il concetto di *modello ARMA*, che è un sistema descritto dall'equazione alle differenze del tipo:

$$(1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2} - \dots - a_{n_a} z^{-n_a})v(t) = (c_0 + c_1 z^{-1} + \dots + c_{n_c} z^{-n_c})\eta(t)$$

e il concetto di *processo ARMA*, ovvero il processo  $v$  generato dal modello ARMA, solo nel caso in cui il processo generato sia stazionario.

Naturalmente, vogliamo ora determinare quali sono le condizioni necessarie affinché il processo generato dal modello ARMA con un rumore bianco al proprio ingresso sia effettivamente stazionario.

Per farlo, possiamo osservare che, eseguendo la lunga divisione tra il numeratore ed il denominatore della  $W(z)$ , otteniamo:

$$W(z) = w_0 + w_1 z^{-1} + w_2 z^{-2} + \dots$$

Dove i coefficienti  $w_i$  sono dei numeri reali (il cui significato verrà specificato in seguito). Avremo allora:

$$v(t) = W(z)\eta(t) = (w_0 + w_1 z^{-1} + w_2 z^{-2} + \dots)\eta(t) = w_0\eta(t) + w_1\eta(t-1) + w_2\eta(t-2) + \dots$$

L'espressione individuata è quella di un processo  $MA(\infty)$  e, come noto, tale processo è stazionario se:

$$\sum_{i=0}^{+\infty} w_i^2 < +\infty$$

Di conseguenza, stabilire la stazionarietà equivale a stabilire sotto quali ipotesi tale condizione è verificata. Possiamo ora osservare che, se supponessimo che il segnale di ingresso  $\eta(t)$  fosse non un rumore bianco, ma un impulso discreto, ovvero un segnale del tipo:

$$\eta(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Allora avremmo:

$$v(0) = w_0\eta(0) = w_0 \quad v(1) = w_1\eta(0) = w_1 \quad \dots \quad v(k) = w_k\eta(0) = w_k$$

Perciò i coefficienti  $w_i$  non sono altro che i valori della risposta impulsiva del sistema nei vari istanti. Di conseguenza, individuare la condizione di stazionarietà equivale anche ad individuare quali sono le condizioni sotto le quali la risposta impulsiva del sistema è a *quadrato sommabile*:

$$\sum_{i=0}^{+\infty} w_i^2 < +\infty$$

Come noto, affinché ciò accada, la risposta impulsiva deve tendere a 0 in maniera sufficientemente rapida, e ciò accade quando il sistema è stabile.

In conclusione, se il modello ARMA è stabile:

1. La somma dei quadrati della risposta impulsiva è limitata.
2. Il modello  $MA(\infty)$  che esprime il modello ARMA dopo la lunga divisione genera un processo stazionario;
3. Il processo generato dal modello ARMA è stazionario, ovvero è un processo ARMA.

Inoltre, si ricorda che, come noto dai Fondamenti di Automatica, un sistema dinamico a tempo discreto è stabile se i suoi poli hanno tutti modulo minore di uno. Si osserva perciò che la stazionarietà del processo generato dipende solamente dai coefficienti  $a_i$  e non dai coefficienti  $c_i$ .

### Osservazioni

- I processi MA finiti, come già noto, sono sempre processi stazionari. Infatti, possono essere modellati come processi ARMA nei quali tutti i coefficienti  $a_i$  sono nulli:

$$v(t) = (c_0 + c_1 z^{-1} + \dots + c_{n_c} z^{-n_c}) \eta(t)$$

E quindi gli zeri sono tutti nell'origine:

$$W(z) = \frac{c_0 z^n + c_1 z^{n-1} + \dots + c_n}{z^n}$$

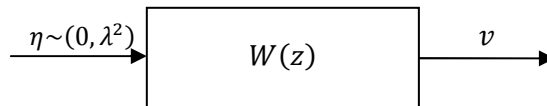
- In un processo AR invece la funzione di trasferimento sarà del tipo:

$$W(z) = \frac{z^n}{z^n - a_1 z^{n-1} - a_2 z^{n-2} - \dots - a_{n_a}^n}$$

E quindi, come abbiamo visto, la stazionarietà dipende dai valori dei coefficienti  $a_i$ . Si nota inoltre che, solo nel caso in cui tali valori siano tali da rendere stabile il sistema, il processo viene detto  $AR(n)$ .

## Spettro

Consideriamo ancora una volta il sistema:



Ipotizzando ora che  $v$  sia un processo stazionario. Chiamiamo inoltre  $\gamma(\tau)$  la funzione di covarianza. Allora, lo spettro è:

$$\Gamma(\omega) = \mathcal{F}[\gamma(\tau)] = \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} \gamma(\tau) e^{-j\omega\tau}$$

Tuttavia, trovare la funzione di covarianza  $\gamma(\tau)$  è talvolta molto complicato.

### Esempio

Consideriamo un esempio particolarmente fortunato, nel quale riusciamo ad individuare facilmente la funzione di covarianza e, da essa, l'espressione dello spettro. Tale situazione è quella che si verifica in caso di processo  $MA(1)$ :

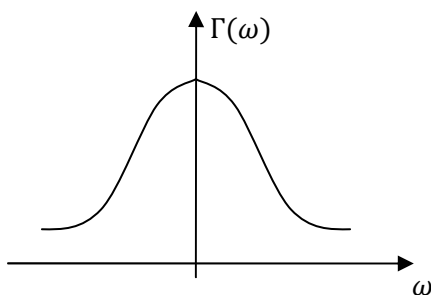
$$v(t) = c_0 \eta(t) + c_1 \eta(t-1)$$

Come abbiamo già dimostrato:

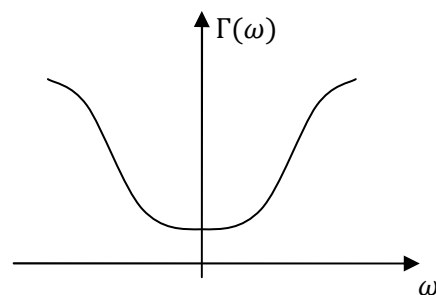
$$\gamma(\tau) = \begin{cases} (c_0^2 + c_1^2) \lambda^2 & \tau = 0 \\ c_0 c_1 \lambda^2 & \tau = 1 \\ 0 & \tau = \pm k, k \geq 2 \end{cases}$$

Allora abbiamo:

$$\begin{aligned} \Gamma(\omega) &= \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} \gamma(\tau) e^{-j\omega\tau} = \gamma(0) + \gamma(1) e^{-j\omega} + \gamma(-1) e^{j\omega} = \gamma(0) + \gamma(1) e^{-j\omega} + \gamma(1) e^{j\omega} = \\ &= \gamma(0) + \gamma(1) (e^{-j\omega} + e^{j\omega}) = \gamma(0) + 2\gamma(1) \cos \omega = (c_0^2 + c_1^2) \lambda^2 + 2c_0 c_1 \lambda^2 \cos \omega \end{aligned}$$



Caso  $c_0 c_1 > 0$



Caso  $c_0 c_1 < 0$



### Lo spettro complesso

Introduciamo ora il concetto di *spettro immaginario*  $\Phi(z)$ , che risulterà molto utile a breve:

$$\Phi(z) = Z[\gamma(\tau)] = \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} \gamma(\tau) z^{-\tau}$$

### Teorema fondamentale dell'analisi spettrale (formula magica)

Un procedimento alternativo che ci permette di ottenere lo spettro senza passare attraverso il calcolo della funzione di covarianza, è dato dall'applicazione del *teorema fondamentale dell'analisi spettrale*, noto in maniera informale anche come *formula magica*. Tale teorema afferma che:

Dato un sistema dinamico con funzione di trasferimento  $W(z)$  alimentato da un processo di ingresso stazionario  $\eta$ , se il sistema è stabile, l'uscita è un processo stazionario  $v$ , e gli spettri dei due processi sono tra loro legati dalla relazione:

$$\Gamma_v(\omega) = |W(e^{j\omega})|^2 \Gamma_\eta(\omega) = W(e^{j\omega}) W(e^{-j\omega}) \Gamma_\eta(\omega)$$

Nel caso particolare in cui il processo in ingresso è un rumore bianco:

$$\Gamma(\omega) = |W(e^{j\omega})|^2 \lambda^2 = W(e^{j\omega}) W(e^{-j\omega}) \lambda^2$$

Siccome valutare il modulo della funzione di trasferimento al variare di  $e^{j\omega}$  (e quindi su tutti i punti della circonferenza di raggio unitario) è spesso molto complesso, si usa la formula magica per calcolare lo spettro complesso:

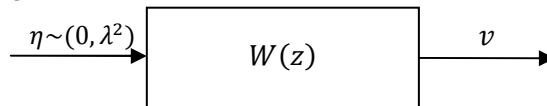
$$\Phi_v(z) = W(z) W(z^{-1}) \Phi_\eta(z)$$

Nel caso particolare in cui il processo in ingresso è un rumore bianco:

$$\Phi_v(z) = W(z) W(z^{-1}) \lambda^2$$

### Osservazioni

Con riferimento al sistema in figura:



E ipotizzando che il sistema sia stabile, si osserva che:

- Se  $z_0$  è uno zero della funzione di trasferimento  $W(z)$ , allora risulta chiaro dal teorema fondamentale dell'analisi spettrale che si ha:

$$\Phi_v(z_0) = 0$$

- Se  $p_0$  è un polo della funzione di trasferimento invece si ricava (ancora una volta dal teorema fondamentale dell'analisi spettrale) che si ha:

$$\Phi_v(z_0) = \infty$$

- Se  $W(z)$  ha uno zero (o un polo) in  $\bar{z}$ , allora  $\Phi_v$  ha uno zero (o un polo) in  $\bar{z}^{-1}$ .

## Rappresentazioni di un processo stazionario

Un processo stazionario può essere rappresentato in diversi modi:

1. Fornendone il valor medio e la funzione di covarianza  $\gamma(\tau)$ .
2. Fornendone la media e lo spettro (sia esso reale o complesso).
3. Descrivendolo come uscita di un sistema dinamico stabile alimentato da un rumore bianco, del quale è nota la funzione di trasferimento  $W(z)$ .

Se si desidera passare dalla rappresentazione 3 alla rappresentazione 2, abbiamo già visto che è possibile utilizzare il teorema fondamentale dell'analisi spettrale. Ad oggi, non è noto invece alcun modo per passare direttamente dalla rappresentazione del tipo 3 alla rappresentazione del tipo 1.

### Esempio introduttivo: i processi indistinguibili

Consideriamo ora un esempio che ci sarà utile per ricavarne importanti osservazioni. In particolare, prendiamo in analisi il processo  $MA(1)$ , rappresentato nel modo indicato con il numero 3 nel precedente elenco:

$$v(t) = c_0\eta(t) + c_1\eta(t-1)$$

Come già noto, la relativa funzione di covarianza sarà:

$$\gamma(\tau) = \begin{cases} (c_0^2 + c_1^2)\lambda^2 & \text{se } \tau = 0 \\ c_0c_1\lambda^2 & \text{se } \tau = \pm 1 \\ 0 & \text{se } |\tau| > 1 \end{cases}$$

Prendiamo ora in analisi il processo seguente:

$$\tilde{v}(t) = c_0\eta(t-1) + c_1\eta(t-2) = v(t-1)$$

Avremo allora:

$$\gamma(\tau) = \tilde{\gamma}(\tau) = \begin{cases} (c_0^2 + c_1^2)\lambda^2 & \text{se } \tau = 0 \\ c_0c_1\lambda^2 & \text{se } \tau = \pm 1 \\ 0 & \text{se } |\tau| > 1 \end{cases}$$

E inoltre, essendo uguali le funzioni di covarianza, avremo anche:

$$\tilde{\Phi}(z) = \Phi(z)$$

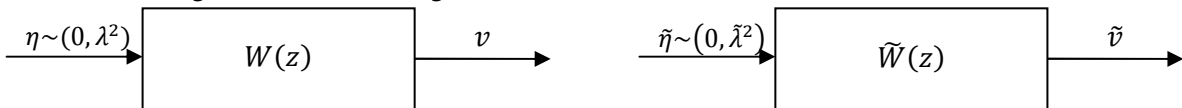
Eppure risulta chiaro che le realizzazioni dei due processi saranno diverse. Si dice in questo caso che i due processi sono *indistinguibili*, perché hanno la stessa media e la stessa funzione di covarianza.

Si osserva perciò che uno stesso processo stazionario ha in realtà diverse rappresentazioni dello stesso tipo.

### Cause della molteplicità delle rappresentazioni

Cerchiamo ora di analizzare una ad una tutte le possibili cause di molteplicità delle rappresentazioni di un processo stazionario:

1. Consideriamo i segnali descritti dai seguenti sistemi:



Con:

$$\tilde{W}(z) = \rho W(z)$$

$$\tilde{\lambda}^2 = \frac{1}{\rho^2} \lambda^2$$

Allora:

$$\tilde{\Phi}(z) = \tilde{W}(z)\tilde{W}(z^{-1})\tilde{\lambda}^2 = \rho W(z)\rho W(z^{-1})\frac{1}{\rho^2}\lambda^2 = W(z)W(z^{-1})\lambda^2 = \Phi(z)$$

Di conseguenza, abbiamo così individuato infinite rappresentazioni alternative dello stesso processo.

2. Consideriamo ancora i due sistemi rappresentati nelle figure precedenti, ma ipotizziamo in questo caso di avere:

$$\tilde{W}(z) = \frac{1}{z^n} W(z), \quad n \geq 1 \quad \tilde{\lambda}^2 = \lambda^2$$

Avremo allora:

$$\tilde{\Phi}(z) = \tilde{W}(z)\tilde{W}(z^{-1})\tilde{\lambda}^2 = \frac{1}{z^n} W(z)z^n W(z^{-1})\lambda^2 = W(z)W(z^{-1})\lambda^2 = \Phi(z)$$

Anche in questo caso quindi abbiamo individuato  $n$  modelli diversi che generano processi indistinguibili.

3. Con riferimento alla solita figura, ipotizziamo adesso di avere:

$$W(z) = \frac{z + \alpha}{z + \beta} \quad \tilde{W}(z) = \frac{z + \frac{1}{\alpha}}{z + \beta} \quad \tilde{\lambda}^2 = \alpha^2 \lambda^2$$

Allora:

$$\Phi(z) = W(z)W(z^{-1})\lambda^2 = \frac{z + \alpha}{z + \beta} \cdot \frac{\frac{1}{z} + \alpha}{\frac{1}{z} + \beta} \lambda^2 = \frac{1 + \alpha z + \frac{\alpha}{z} + \alpha^2}{1 + \beta z + \frac{\beta}{z} + \beta^2} \lambda^2$$

$$\tilde{\Phi}(z) = \tilde{W}(z)\tilde{W}(z^{-1})\tilde{\lambda}^2 = \frac{z + \frac{1}{\alpha}}{z + \beta} \cdot \frac{\frac{1}{z} + \frac{1}{\alpha}}{\frac{1}{z} + \beta} \alpha^2 \lambda^2 = \frac{1 + \frac{\alpha}{z} + \frac{1}{\alpha z} + \frac{1}{\alpha^2}}{1 + \beta z + \frac{\beta}{z} + \beta^2} \alpha^2 \lambda^2 = \frac{1 + \alpha z + \frac{\alpha}{z} + \alpha^2}{1 + \beta z + \frac{\beta}{z} + \beta^2} \lambda^2 = \Phi(z)$$

4. Possiamo poi eseguire un'operazione analoga a quella del precedente punto, ma con riferimento al denominatore:

$$W(z) = \frac{z + \alpha}{z + \beta} \quad \tilde{W}(z) = \frac{z + \alpha}{z + \frac{1}{\beta}} \quad \tilde{\lambda}^2 = \frac{1}{\beta^2} \lambda^2$$

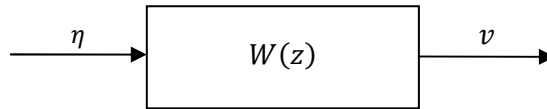
Allora:

$$\Phi(z) = W(z)W(z^{-1})\lambda^2 = \frac{z + \alpha}{z + \beta} \cdot \frac{\frac{1}{z} + \alpha}{\frac{1}{z} + \beta} \lambda^2 = \frac{1 + \alpha z + \frac{\alpha}{z} + \alpha^2}{1 + \beta z + \frac{\beta}{z} + \beta^2} \lambda^2$$

$$\tilde{\Phi}(z) = \tilde{W}(z)\tilde{W}(z^{-1})\tilde{\lambda}^2 = \frac{z + \alpha}{z + \frac{1}{\beta}} \cdot \frac{\frac{1}{z} + \alpha}{\frac{1}{z} + \frac{1}{\beta}} \frac{1}{\beta^2} \lambda^2 = \frac{1 + \alpha z + \frac{\alpha}{z} + \alpha^2}{1 + \frac{z}{\beta} + \frac{1}{\beta z} + \frac{1}{\beta^2}} \frac{1}{\beta^2} \lambda^2 = \frac{1 + \alpha z + \frac{\alpha}{z} + \alpha^2}{1 + \beta z + \frac{\beta}{z} + \beta^2} \lambda^2 = \Phi(z)$$

### Osservazione

Si noti che se si costruisce un sistema:



Con:

$$W(z) = \frac{z + \alpha}{z + \frac{1}{\alpha}}$$

Allora, ipotizzando che  $\eta$  sia un processo stazionario qualunque (non necessariamente un rumore bianco) con spettro complesso  $\Phi_\eta(z)$ , abbiamo:

$$\Phi_v(z) = \frac{z + \alpha}{z + \frac{1}{\alpha}} \frac{\frac{1}{z} + \alpha}{\frac{1}{z} + \frac{1}{\alpha}} \Phi_\eta(z) = \frac{1 + \alpha z + \frac{\alpha}{z} + \alpha^2}{1 + \frac{z}{\alpha} + \frac{1}{z\alpha} + \frac{1}{\alpha^2}} \Phi_\eta(z) = \alpha^2 \Phi_\eta(z)$$

Quindi, a meno di una costante reale, i due spettri sono uguali. Si dice per tale motivo che il filtro così costruito è un **filtro passa tutto**.

## Fattorizzazione spettrale canonica

Il problema della fattorizzazione spettrale consiste nell'individuare la funzione di trasferimento  $W(z)$  del sistema stabile che genera un processo stocastico stazionario, conoscendone lo spettro complesso  $\Phi(z)$ . Come evidente dalle osservazioni che abbiamo esposto nel precedente paragrafo, questo problema ha infinite soluzioni. Tra tutte le possibili soluzioni, si individuerà allora una funzione di trasferimento canonica, che ha le seguenti caratteristiche:

### 1. Numeratore e denominatore sono monici

Ovvero, sia al numeratore che al denominatore il coefficiente del termine di grado massimo è unitario.

Esempio:

Considerando ad esempio un processo  $MA(1)$  rappresentato nel modo consueto:

$$v(t) = c_0\eta(t) + c_1\eta(t-1)$$

Dovremo porre  $c_0 = 1$ , ottenendo così:

$$\tilde{v}(t) = \tilde{\eta}(t) + \tilde{c}\tilde{\eta}(t-1)$$

Al fine di avere le due funzioni di covarianza uguali:

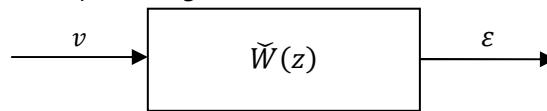
$$\gamma(\tau) = \tilde{\gamma}(\tau) = \begin{cases} (c_0^2 + c_1^2)\lambda^2 & \text{se } \tau = 0 \\ c_0c_1\lambda^2 & \text{se } \tau = \pm 1 \\ 0 & \text{se } |\tau| > 1 \end{cases} \quad \gamma(\tau) = \tilde{\gamma}(\tau) = \begin{cases} (1 + \tilde{c}^2)\tilde{\lambda}^2 & \text{se } \tau = 0 \\ \tilde{c}^2\tilde{\lambda}^2 & \text{se } \tau = \pm 1 \\ 0 & \text{se } |\tau| > 1 \end{cases}$$

Dovremo avere:

$$\begin{cases} \tilde{c} = \frac{c_1}{c_0} \\ \tilde{\lambda}^2 = c_0\lambda^2 \end{cases}$$

### 2. Numeratore e denominatore devono essere dello stesso grado

Per comprendere l'importanza di questa regola, consideriamo il sistema seguente:



Dove:

$$\tilde{W}(z) = [\hat{W}(z)]^{-1}$$

Il sistema quindi, con ingresso un processo stocastico stazionario  $v$ , ha lo scopo di ricostruire un rumore bianco  $\varepsilon$ . Come si osserva dalla formula, per fare ciò dobbiamo invertire la funzione di trasferimento  $\hat{W}(z)$  che ha generato  $v(t)$ ; se tale operazione è consentita e porta ad ottenere un sistema stabile, allora il filtro ottenuto è detto **sbiancante**. Tale operazione però non sempre è consentita. Ad esempio:

$$\hat{W}(z) = \frac{z + 0,5}{z^3 - 0,7} \rightarrow \tilde{W}(z) = \frac{z^3 - 0,7}{z + 0,5}$$

Ma si ottiene così una funzione con il grado del numeratore maggiore del grado del denominatore, e quindi si ha in sostanza un sistema nel quale l'uscita dipende anche dal valore che l'ingresso assume in valori futuri. Chiamiamo **grado relativo** la differenza tra il grado del denominatore e il grado del numeratore della funzione di trasferimento; sulla base di quanto appena detto, risulta chiaro che il grado relativo di una funzione di trasferimento deve essere sempre maggiore o uguale a zero.

Possiamo inoltre affermare che il grado relativo è un indicatore del ritardo dell'uscita rispetto all'ingresso: se il grado relativo di una funzione di trasferimento è  $n$ , significa che l'ingresso non influenza immediatamente l'uscita, ma la influenza solo a partire da  $n$  istanti di tempo successivi. Infatti, considerando ancora la funzione di trasferimento  $\hat{W}(z)$  usata nel precedente esempio, se calcoliamo la lunga divisione tra numeratore e denominatore, otteniamo:

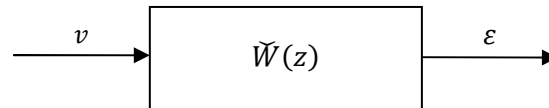
$$\hat{W}(z) = 0 + 0 \cdot z^{-1} + 1 \cdot z^{-2} + \dots$$

Ed è immediato notare che 2 è proprio il grado relativo della funzione di trasferimento data.

### 3. Zeri e poli devono avere modulo inferiore ad uno

Al fine di inibire la reciprocazione di poli e zeri, che è la causa di molteplicità di rappresentazioni indicata con i numeri 3 e 4 in precedenza, imponiamo che tutti i poli e gli zeri si trovino, quando rappresentati sul piano complesso, all'interno della circonferenza di raggio unitario.

Infatti, gli zeri di una funzione di trasferimento  $\hat{W}(z)$  sono sempre i poli della sua funzione di trasferimento reciproca,  $\tilde{W}(z) = [W(z)]^{-1}$ , e affinché quest'ultima sia stabile è necessario che i suoi poli (e perciò gli zeri di  $\hat{W}(z)$ , come abbiamo appena ricordato) siano interni alla circonferenza di raggio unitario. In questo modo, il sistema:



Avrà in uscita un rumore bianco, una volta raggiunta la situazione di regime.

### 4. Numeratore e denominatore della funzione di trasferimento devono essere coprimi

Ciò significa che il numeratore e il denominatore della funzione di trasferimento non devono avere alcun fattore in comune.

Se  $W(z)$  ha le caratteristiche appena espresse, e se vale la relazione:

$$\Phi(z) = W(z)W(z^{-1})\lambda^2$$

Allora diciamo che  $W(z)$  è la fattorizzazione canonica di  $\Phi(z)$ , e la indichiamo anche con  $\hat{W}(z)$ .

#### Esempio n. 1

Consideriamo ora la seguente rappresentazione di un processo:

$$v(t) = 2\eta(t-1) + 4\eta(t-2) \quad \eta \sim WN(0, \lambda^2)$$

Cerchiamo di verificare se si tratta della sua rappresentazione canonica e, in caso negativo, vogliamo individuare tale rappresentazione. Introducendo l'operatore di anticipo:

$$v(t) = 2z^{-1}\eta(t) + 4z^{-2}\eta(t) \rightarrow W(z) = \frac{2}{z} + \frac{4}{z^2} = \frac{2z + 4}{z^2}$$

Naturalmente, non si tratta della rappresentazione canonica, perché:

1. Il numeratore non è monico;
2. Numeratore e denominatore sono di gradi diversi;
3. Lo zero della FdT è  $z_0 = -2$ , perciò non appartiene alla circonferenza di raggio unitario.

Possiamo allora cercare di ottenere la rappresentazione canonica.

1. Rendiamo uguali tra loro il grado del numeratore e il grado del denominatore; per farlo, introduciamo il segnale  $v(t)$  traslato di un passo, che chiamiamo  $\tilde{v}(t)$ :

$$\tilde{v}(t) = v(t+1) = 2\eta(t) + 4\eta(t-1) \rightarrow v(t) = \tilde{v}(t-1)$$

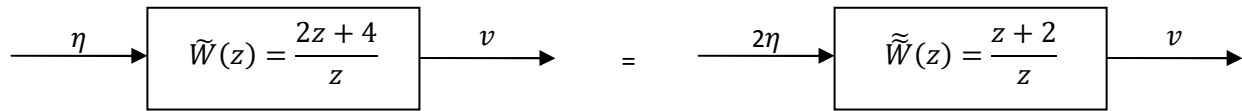
Come abbiamo già visto però questi due segnali sono indistinguibili, perciò possiamo utilizzare la funzione di trasferimento ottenuta a partire dall'espressione di  $\tilde{v}(t)$ , che è:

$$v(t) = 2\eta(t) + 4z^{-1}\eta(t) \rightarrow \tilde{W}(z) = 2 + \frac{4}{z} = \frac{2z + 4}{z}$$

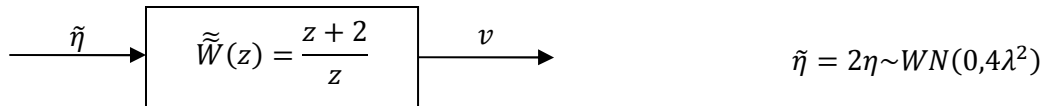
2. Rendiamo monici i polinomi a numeratore e denominatore. Per farlo, è sufficiente eseguire le seguenti operazioni:

$$\tilde{W}(z) = \frac{2z + 4}{z} = 2 \frac{z + 2}{z}$$

Perciò:



Possiamo inoltre rappresentare questa situazione nel modo seguente:



3. A questo punto, dobbiamo fare in modo che gli zeri e i poli siano interni alla circonferenza di raggio unitario. Come abbiamo già visto, basta a tal proposito eseguire la reciprocazione degli zeri e dei poli non interni. Otteniamo così:

$$\tilde{\tilde{W}}(z) = \frac{z + 0.5}{z}$$

Come abbiamo già visto in passato, è però necessario moltiplicare anche la varianza del processo in ingresso per una opportuna costante, che è pari allo zero "reciprocato" elevato al quadrato:

$$\tilde{\tilde{\eta}} \sim WN(0, 4\tilde{\lambda}^2) = WN(0, 16\lambda^2)$$

La fattorizzazione canonica è perciò  $\tilde{\tilde{W}}(z)$ , e lo spettro sarà:

$$\tilde{\tilde{W}}(z) \cdot \tilde{\tilde{W}}(z^{-1}) 16\lambda^2$$

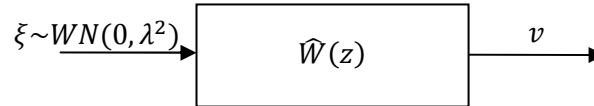
Possiamo in altri termini indicare:

$$\hat{W} = \frac{z + 0.5}{z}$$

## La predizione

### Il problema della predizione

Come abbiamo già accennato in passato, il problema della predizione consiste nel prevedere il valore che un certo segnale assumerà in un istante futuro, che indichiamo con  $t + r$ . Supponiamo ora che il segnale da stimare sia un processo stazionario descritto da un sistema del tipo:



Si noti che nel precedente schema  $\widehat{W}(z)$  è la rappresentazione canonica della funzione di trasferimento:

$$\widehat{W}(z) = \frac{C(z)}{A(z)}$$

Dove:

$$A(z) = 1 - a_1 z^{-1} - \dots - a_{n_a} z^{-n_a}$$

$$C(z) = 1 + c_1 z^{-1} + \dots + c_{n_c} z^{-n_c}$$

Abbiamo quindi:

$$v(t) = \frac{C(z)}{A(z)} \xi(t)$$

Da cui ricaviamo:

$$(1 - a_1 z^{-1} - \dots - a_{n_a} z^{-n_a}) \cdot v(t) = (1 + c_1 z^{-1} + \dots + c_{n_c} z^{-n_c}) \cdot \xi(t)$$

Ovvero:

$$v(t) = a_1 v(t-1) + a_2 v(t-2) + \dots + a_{n_a} v(t-n_a) + \xi(t) + c_1 \xi(t-1) + \dots + c_{n_c} \xi(t-n_c)$$

Sappiamo che, se eseguiamo la lunga divisione tra numeratore e denominatore di  $\widehat{W}(z)$ , otteniamo:

$$\widehat{W}(z) = w_0 + w_1 z^{-1} + w_2 z^{-2} + \dots$$

Dove  $w_0, w_1, w_2, \dots$  sono i coefficienti della risposta impulsiva del sistema. Abbiamo allora:

$$\begin{aligned} v(t) &= (w_0 + w_1 z^{-1} + w_2 z^{-2} + \dots) \xi(t) = w_0 \xi(t) + w_1 z^{-1} \xi(t) + w_2 z^{-2} \xi(t) + \dots = \\ &= w_0 \xi(t) + w_1 \xi(t-1) + w_2 \xi(t-2) + \dots \end{aligned}$$

Ricaviamo quindi:

$$\begin{aligned} v(t+r) &= w_0 \xi(t+r) + w_1 \xi(t+r-1) + w_2 \xi(t+r-2) + \dots + \\ &+ w_{r-1} \xi(t+1) + w_r \xi(t) + w_{r+1} \xi(t-1) + \dots \end{aligned}$$

Possiamo inoltre fermarci nell'eseguire la lunga divisione ad un certo passo  $r$ , ottenendo così il risultato seguente, dove  $C_r(z)$  è un opportuno polinomio che, come vedremo con i prossimi esempi, può facilmente essere calcolato

$$\widehat{W}(z) = w_0 + w_1 z^{-1} + w_2 z^{-2} + \dots + \frac{C_r(z)}{A(z)} z^{-r}$$

In particolare, se ci fermiamo al primo passo, otteniamo:

$$\begin{array}{r|l} C(z) & A(z) \\ A(z) & 1 \\ \hline C(z) - A(z) & \end{array}$$

Dove il valore 1 ottenuto è dovuto al fatto che i polinomi sono monici e di ugual grado. Allora, nel caso particolare, abbiamo ottenuto:

$$\widehat{W}(z) = 1 + \frac{C(z) - A(z)}{A(z)} = 1 + \frac{z[C(z) - A(z)]}{A(z)} z^{-1}$$

Ovvero, abbiamo ottenuto:

$$C_1(z) = z[C(z) - A(z)]$$

## Ipotesi di misurabilità dell'ingresso

### I concetti di base

Supponiamo per un istante che la misurazione del rumore d'ingresso sia attendibile (questo nella realtà non è possibile). Allora, dovremo analizzare un problema preliminare, più semplice rispetto a quello che analizzeremo in seguito: conoscendo tutti i valori che  $\xi$  assume tra l'istante  $t - \infty$  e l'istante  $t$ , dobbiamo stimare il valore di  $v(t + r)$ . L'obiettivo è quello di individuare un sistema che ci permetta di ottenere tale risultato, la cui funzione di trasferimento verrà indicata con:

$$\hat{W}_r$$

Riscriviamo ora, per praticità:

$$v(t + r) = \alpha(t) + \beta(t)$$

Dove:

$$\alpha(t) = w_r \xi(t) + w_{r+1} \xi(t - 1) + \dots$$

$$\beta(t) = w_0 \xi(t + r) + w_1 \xi(t + r - 1) + w_2 \xi(t + r - 2) + \dots + w_{r-1} \xi(t + 1)$$

Siccome sotto l'ipotesi precedentemente esposta possiamo conoscere tutti i valori di  $\xi$  per gli istanti non superiori a  $t$ , saremo certamente in grado di calcolare  $\alpha(t)$ , mentre, ovviamente, non è possibile calcolare il termine  $\beta(t)$ , in quanto dipende dai valori che  $\xi$  assumerà nel futuro. Inoltre, siccome  $\xi$  è un rumore bianco, la conoscenza del passato non può in alcun modo essere utilizzata per calcolarne l'evoluzione futura, perciò  $\beta(t)$  è incalcolabile. Possiamo allora considerare ragionevole una predizione del tipo:

$$\hat{v}(t + r|t) = \alpha(t)$$

Riassumendo, possiamo affermare che il predittore in avanti di  $k$  passi, sotto l'ipotesi di misurabilità dell'ingresso, sarà del tipo:

$$\hat{v}(t + r|t) = w_r \xi(t) + w_{r+1} \xi(t - 1) + \dots$$

Dove  $w_i$  sono i coefficienti della lunga divisione. Questo significa anche che il predittore ottimo avrà funzione di trasferimento:

$$\hat{W}_r(z) = \frac{C_r(z)}{A(z)}$$

Sulla base dei calcoli precedentemente svolti, se ad esempio stiamo cercando il predittore ottimo ad 1 passo, dovremo calcolare:

$$\hat{W}_1 = \frac{z[C(z) - A(z)]}{A(z)}$$

Siccome per ipotesi tutti gli zeri e tutti i poli di  $\hat{W}(z)$  hanno modulo minore di 1 (altrimenti non sarebbe il fattore canonico), siamo certi che i poli di  $\hat{W}_1(z)$ , che sono gli stessi di  $\hat{W}(z)$ , hanno modulo minore di 1, quindi il predittore è stabile.

### L'errore di predizione

Possiamo inoltre definire l'errore di predizione come la differenza tra il valore che  $v$  realmente assume e quello che era stato previsto che avrebbe assunto. Se stiamo considerando un predittore ad  $r$  passi, allora l'errore di predizione sarà semplicemente:

$$v(t + r) - \hat{v}(t + r|t)$$

Riprendendo l'analisi che stavamo eseguendo, se prevediamo  $\hat{v}(t + r) = \alpha(t)$ , allora risulta chiaro che l'errore di predizione è dato proprio da  $\beta(t)$ . Naturalmente, tale quantità non può però essere calcolata in maniera esatta: si tratta di una variabile casuale, della quale risulta essere molto utile valutare la varianza:

$$Var[\beta(t)] = Var[w_0 \xi(t + r) + w_1 \xi(t + r - 1) + w_2 \xi(t + r - 2) + \dots + w_{r-1} \xi(t + 1)] = \lambda^2 \sum_{k=0}^{r-1} w_k^2$$

Quindi abbiamo ad esempio:

$$Var[v(t + 1) - \hat{v}(t + 1|t)] = w_0^2 \lambda^2$$

$$Var[v(t + 2) - \hat{v}(t + 2|t)] = (w_0^2 + w_1^2) \lambda^2$$

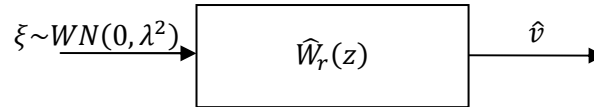


### Procedimento pratico

Cerchiamo a questo di vedere come si trova nella pratica la previsione di  $v(t+r)$ . Abbiamo visto che:

$$\hat{v}(t+r) = w_r \xi(t) + w_{r+1} \xi(t-1) + \dots = (w_r + w_{r+1} z^{-1} + w_{r+2} z^{-2} + \dots) \xi(t)$$

Perciò possiamo vedere la predizione come l'uscita del sistema:



Dove:

$$\hat{W}_r(z) = w_r + w_{r+1} z^{-1} + w_{r+2} z^{-2} + \dots$$

Ora, ricordando che il risultato della lunga divisione tra numeratore e denominatore di  $\hat{W}(z)$  ci dà come risultato:

$$\hat{W}(z) = w_0 + w_1 z^{-1} + w_2 z^{-2} + \dots + w_r z^{-r} + w_{r+1} z^{-r-1} + w_{r+2} z^{-r-2} + \dots$$

Quindi, se consideriamo solamente i termini da  $w_r z^{-r}$  in poi, abbiamo:

$$w_r z^{-r} + w_{r+1} z^{-r-1} + w_{r+2} z^{-r-2} + \dots = z^{-r} \hat{W}_r(z)$$

Riassumendo, partendo da  $\hat{W}(z)$ , calcoliamo la lunga divisione tra numeratore e denominatore di  $\hat{W}(z)$ , limitandoci a considerare i primi  $r$  passi. Otteniamo in tal modo:

$$\hat{W}(z) = w_0 + w_1 z^{-1} + w_2 z^{-2} + \dots + z^{-r} \hat{W}_r(z)$$

Dove  $\hat{W}_r(z)$  è il predittore ottimo.

#### Esempio:

Consideriamo il caso di seguito illustrato, dove  $0 < |a| < 1$ .

$$v(t) = a \cdot v(t-1) + \eta(t) \rightarrow v(t) = a z^{-1} v(t) + \eta(t) \rightarrow W(z) = \frac{1}{1 - a z^{-1}} = \frac{z}{z - a}$$

Nell'ipotesi in cui  $a$  sia diverso da zero, numeratore e denominatore sono coprimi; inoltre, abbiamo uno zero nell'origine e un polo in  $a$ , che è per ipotesi un numero con modulo minore di 1. Infine, i coefficienti dei termini di grado massimo sono unitari e il denominatore ed il denominatore sono entrambi di grado 1, perciò possiamo concludere che la funzione di trasferimento individuata è già il fattore canonico:

$$W(z) = \hat{W}(z) \quad \eta(t) = \xi(t)$$

- Per calcolare il predittore ottimo a 1 passo basato su  $\xi$ , calcoliamo allora la lunga divisione:

$$\begin{array}{r|l} z & z - a \\ z & -a \\ & a \end{array} \quad \begin{array}{l} z - a \\ 1 \end{array}$$

E otteniamo:

$$\hat{W}(z) = 1 + \frac{a}{z - a}$$

E quindi il predittore ottimo è:

$$z^{-1} \hat{W}_1(z) = \frac{a}{z - a} \rightarrow \hat{W}_1(z) = \frac{za}{z - a}$$

Ovvero:

$$\hat{v}(t+1|t) = \frac{za}{z - a} \xi(t) = \frac{a}{1 - a z^{-1}} \xi(t)$$

Da cui ricaviamo:

$$\hat{v}(t+1|t) - a \cdot z^{-1} \cdot \hat{v}(t+1|t) = a \cdot \xi(t) \rightarrow \hat{v}(t+1|t) = a \cdot \hat{v}(t|t-1) + a \cdot \xi(t)$$

L'errore di predizione che commettiamo in questo caso ha una varianza così calcolabile:

$$\text{Var}[\hat{v}(t+1|t) - v(t+1)] = \text{Var}(w_0 \xi(t+1)) = w_0^2 \text{Var}(\xi(t+1)) = w_0^2 \lambda^2$$

Siccome abbiamo trovato mediante la lunga divisione:

$$w_0 = 1$$

Possiamo concludere che la varianza dell'errore di predizione è:

$$\text{Var}[\hat{v}(t+1|t) - v(t+1)] = \lambda^2$$

- Se vogliamo ricavare il predittore ottimo a 2 passi basato su  $\xi$ , dobbiamo eseguire un ulteriore passo della lunga divisione:

$$\begin{array}{r|l} z & z - a \\ z & - a \\ a & \\ a & -a^2 z^{-1} \\ & a^2 z^{-1} \end{array}$$

Otteniamo in questo modo:

$$\tilde{W}(z) = 1 + az^{-1} + \frac{a^2 z^{-1}}{z - a} = 1 + az^{-1} + z^{-2} \frac{a^2 z}{z - a}$$

E ricaviamo che il predittore ottimo a 2 passi è caratterizzato da:

$$\hat{W}_2(z) = \frac{a^2 z}{z - a}$$

Cioè:

$$\hat{v}(t+2|t) = \frac{a^2 z}{z - a} \xi(t) \rightarrow (z - a)\hat{v}(t+2|t) = a^2 z \xi(t)$$

Proseguendo con la sostituzione dell'operatore  $z$ :

$$\hat{v}(t+3|t+1) - a\hat{v}(t+2|t) = a^2 \xi(t+1)$$

Che equivale a scrivere:

$$\hat{v}(t+2|t) = a\hat{v}(t+1|t-1) + a^2 \xi(t)$$

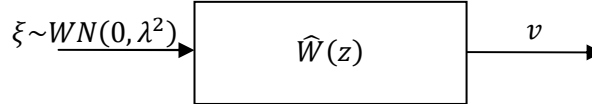
L'errore di predizione che commettiamo in questo caso ha varianza:

$$\begin{aligned} \text{Var}[\hat{v}(t+1|t) - v(t+1)] &= \text{Var}(w_0 \xi(t+1) + w_1 \xi(t+2)) = \\ &= w_0^2 \text{Var}(\xi(t+1)) + w_1^2 \text{Var}(\xi(t+2)) = w_0^2 \lambda^2 + w_1 \lambda^2 = \lambda^2 + a^2 \lambda^2 = (1 + a^2) \lambda^2 \end{aligned}$$

## Predizione a partire dalle misurazioni di $v$

### Introduzione

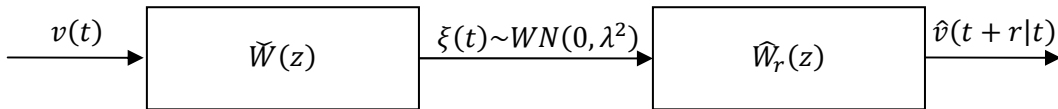
Come abbiamo già visto, nella realtà dei fatti l'ingresso del sistema, ovvero il rumore bianco  $\xi$ , risulta essere impossibile da misurare, perciò la teoria appena vista non potrà essere applicabile in maniera diretta. Cerchiamo allora di vedere come è possibile prevedere  $v$  in un sistema del tipo in figura:



Avendo come ingresso solamente i valori che  $v(t)$  ha assunto in passato. Supponiamo sempre che  $\hat{W}(z)$  sia il fattore canonico.

### I concetti di base

Il predittore ottimo in questo caso verrà costruito mediante uno schema del tipo riportato in figura:



L'idea di base è cioè quella di utilizzare un filtro sbiancante che, a partire dalle misurazioni di  $v(t)$  ci consenta di ottenere  $\xi(t)$ . In questo modo, possiamo poi riutilizzare in cascata al filtro sbiancante un predittore del tipo appena analizzato, ovvero un predittore a partire da  $\xi(t)$ .

La funzione di trasferimento del predittore ottimo dai dati è quindi ottenibile nel modo seguente:

$$W_r(z) = \tilde{W}(z) \cdot \hat{W}_r(z) = [\hat{W}(z)]^{-1} \cdot \hat{W}_r(z) = \frac{A(z)}{C(z)} \cdot \frac{C_r(z)}{A(z)} = \frac{C_r(z)}{C(z)}$$

Si nota facilmente che la funzione di trasferimento così ottenuta risulta essere molto simile a quella ottenuta per il predittore ottimo da  $\xi$ , con l'unica differenza che al denominatore si ha  $C(z)$  anziché  $A(z)$ .

Nel caso particolare in cui si stia cercando il predittore ottimo ad 1 passo, abbiamo:

$$\hat{W}_1 = \frac{z[C(z) - A(z)]}{A(z)}$$

Perciò il predittore dai dati sarà:

$$W_1 = \frac{z[C(z) - A(z)]}{C(z)}$$

Possiamo anche scrivere l'equazione alle differenze corrispondente:

$$\hat{v}(t+1|t) = \frac{z[C(z) - A(z)]}{C(z)} v(t) \rightarrow C(z)\hat{v}(t+1|t) = z[C(z) - A(z)]v(t)$$

Ovvero:

$$C(z)\hat{v}(t+1|t) = [C(z) - A(z)]v(t+1)$$

Si noti che apparentemente questa espressione ha in sé una contraddizione, in quanto sembrerebbe voler dire che stiamo calcolando la stima  $\hat{v}(t+1|t)$  di  $v(t+1)$  partendo proprio dal dato  $v(t+1)$ . Tuttavia non è così perché, siccome sia  $C(z)$  che  $A(z)$  sono monici ed il loro grado è uguale, avremo:

$$C(z) - A(z) = (a_1 + c_1)z^{-1} + (a_2 + c_2)z^{-2} + \dots$$

E quindi di fatto verranno utilizzati solo i dati di  $v$  rilevati fino all'istante  $t$ , e non fino all'istante  $t+1$ .

Si può inoltre osservare che, siccome per ipotesi tutti gli zeri e tutti i poli di  $\hat{W}(z)$  hanno modulo minore di 1 (altrimenti non sarebbe il fattore canonico), siamo certi che anche il predittore è stabile. Infatti, gli zeri del predittore sono i valori per i quali si annulla  $C(z)$ , ovvero i poli di  $\hat{W}(z)$ , che abbiamo appena detto essere in modulo minori di 1.

### Esempio

Consideriamo ancora l'esempio che abbiamo già utilizzato quando abbiamo parlato del predittore ottimo a partire da  $\xi$ . Consideriamo cioè:

$$\hat{W}(z) = \frac{z}{z-a}$$

E ipotizziamo di voler calcolare il predittore ottimo ad un passo e a due passi (partendo però dai dati anziché da  $\xi$ ).

Naturalmente, il filtro sbiancante in questo caso avrà funzione di trasferimento:

$$\tilde{W}(z) = [\hat{W}(-1)]^{-1} = \frac{z-a}{z}$$

Inoltre, abbiamo già ricavato nei precedenti paragrafi il filtro ottimo ad un passo e a due passi a partire da  $\xi$  hanno, nell'ordine, le funzioni di trasferimento riportate di seguito:

$$\hat{W}_1(z) = \frac{az}{z-a} \qquad \hat{W}_2(z) = \frac{a^2z}{z-a}$$

Perciò, il filtro ottimo ad un passo a partire dai dati ha funzione di trasferimento:

$$W_1(z) = \hat{W}_1(z)\tilde{W}(z) = \frac{az}{z-a} \frac{z-a}{z} = a$$

E perciò:

$$\hat{v}(t+1|t) = a \cdot v(t)$$

Il filtro ottimo a 2 passi a partire dai dati ha invece la funzione di trasferimento seguente:

$$W_2(z) = \hat{W}_2(z)\tilde{W}(z) = \frac{a^2z}{z-a} \frac{z-a}{z} = a^2$$

E perciò:

$$\hat{v}(t+2|t) = a^2 \cdot v(t)$$

### Osservazione

A questo punto, possiamo domandarci se i predittori così individuati hanno senso oppure no.

- Partiamo dal predittore ad un passo. Per rispondere alla domanda, possiamo osservare che di fatto il segnale  $v(t+1)$  viene generato sommando tra loro due componenti:  $av(t)$  e il rumore bianco  $\xi(t)$ . Inoltre  $\xi(t)$  è completamente imprevedibile: l'unica cosa che sappiamo è che la sua media è nulla. Intuitivamente, risulta molto sensato sostituire ad una variabile aleatoria il relativo valore medio, e perciò possiamo concludere che il predittore ad un passo individuato nell'esempio appena analizzato è coerente con il sistema che genera il segnale sul quale eseguiamo la previsione stessa.
- Se consideriamo invece il predittore a 2 passi, abbiamo:

$$v(t+2) = av(t+1) + \xi(t) = a[av(t) + \xi(t+1)] + \xi(t) = a^2v(t) + a\xi(t+1) + \xi(t)$$

In questo caso, la parte sulla quale non possiamo fare alcuna previsione risulta essere:

$$a\xi(t+1) + \xi(t)$$

Sostituiamo allora a questo termine la relativa media:

$$E[a\xi(t+1) + \xi(t)] = aE[\xi(t+1)] + E[\xi] = aE[\xi(t)] + E[\xi(t)] = 0$$

E quindi otteniamo proprio:

$$\hat{v}(t+2|t) = a^2 \cdot v(t)$$

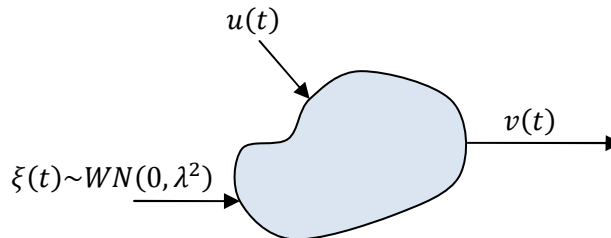
Possiamo anche calcolare la varianza dell'errore di predizione che abbiamo appena individuato:

$$Var[a\xi(t+1) + \xi(t)] = a^2Var[\xi(t+1)] + Var[\xi(t+1)] = a^2\lambda^2 + \lambda^2 = (1+a^2)\lambda^2$$

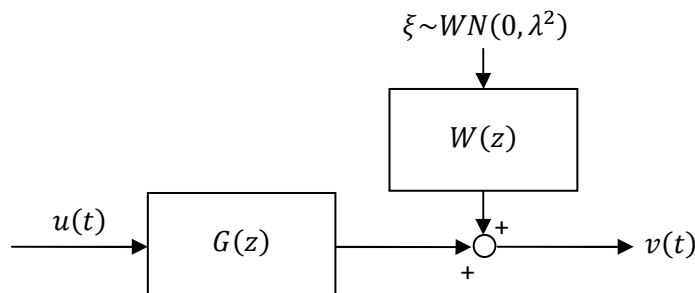
## Predizione con variabili esogene

### Introduzione: il modello di Box e Jenkins e i processi ARMAX

Fino ad ora abbiamo considerato solamente dei segnali isolati. Proviamo ora ad ipotizzare che il segnale sul quale vogliamo eseguire la predizione dipenda anche da un'altra variabile d'ingresso, che viene detta *variabile esogena*, e che indicheremo con  $u(t)$ . La variabile esogena rappresenta quindi una variabile manipolabile: a differenza di  $\xi$  non è dipendente dal caso, ma viene fissata in maniera deterministica dal progettista.



Il sistema appena rappresentato in forma intuitiva, può essere più rigorosamente rappresentato nel modo di seguito riportato:



Indichiamo nel modo seguente i numeratori e i denominatori delle funzioni di trasferimento introdotte:

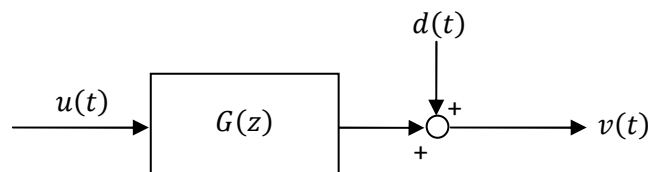
$$W(z) = \frac{C(z)}{A(z)}$$

$$G(z) = \frac{E(z)}{D(z)}$$

Abbiamo così:

$$v(t) = \frac{E(z)}{D(z)}u(t) + \frac{C(z)}{A(z)}\xi(t)$$

In altri termini, il modello che stiamo analizzando è quello rappresentato nella figura seguente, detto anche *modello di Box e Jenkins*, nel quale l'ingresso imprevedibile (il rumore bianco) è considerato come un disturbo:



Otteniamo allora:

$$A(z)v(t) = A(z)\frac{E(z)}{D(z)}u(t) + C(z)\xi(t)$$

Che indichiamo per semplicità con:

$$A(z)v(t) = C(z)\xi(t) + B(z)u(t)$$

Un processo di questo tipo è detto **ARMAX**, dove la lettera X aggiunta in coda all'acronimo sta per eXogeneous. In particolare, il termine esogeno è il termine:

$$B(z)u(t)$$

Detti  $n_1$ ,  $n_2$  e  $n_3$ , nell'ordine, il grado di  $A(z)$ ,  $C(z)$  e  $B(z)$ , tale processo viene indicato con:

$$ARMAX(n_1, n_2, n_3)$$

### ***Il procedimento per trovare il predittore***

#### Esempio

Innanzitutto, consideriamo come esempio il caso in cui si abbia:

$$v(t) = a \cdot v(t-1) + \xi(t) + 2$$

In questo caso abbiamo quindi assunto di avere:

$$A(z) = 1 - az^{-1}$$

$$C(z) = 1$$

$$B(z)u(t) = 2$$

Possiamo indicare con  $m$  la media del  $v(t)$  sul quale stiamo operando la predizione:

$$E[v(t)] = E[a \cdot v(t-1) + \xi(t) + 2] = aE[v(t-1)] + 2$$

Da cui ricaviamo:

$$m = ma + 2 \rightarrow (1-a)m = 2 \rightarrow m = \frac{2}{1-a}$$

Possiamo poi depolarizzare  $v(t)$ , introducendo:

$$\tilde{v}(t) = v(t) - m \rightarrow v(t) = \tilde{v}(t) + m$$

In questo modo, ovviamente:

$$E[\tilde{v}(t)] = E[v(t) - m] = E[v(t)] - m = m - m = 0$$

Otteniamo quindi:

$$\tilde{v}(t) + m = a \cdot [\tilde{v}(t+1) + m] + \xi(t) + 2$$

Ovvero:

$$\begin{aligned} \tilde{v}(t) + \frac{2}{1-a} &= a \cdot \tilde{v}(t+1) + \frac{2a}{1-a} + \xi(t) + 2 \rightarrow \tilde{v}(t) = a \cdot \tilde{v}(t+1) + \xi(t) + 2 + \frac{2a}{1-a} - \frac{2}{1-a} \\ \tilde{v}(t) &= a \cdot \tilde{v}(t+1) + \xi(t) + \frac{2-2a+2a-2}{1-a} \rightarrow \tilde{v}(t) = a \cdot \tilde{v}(t+1) + \xi(t) \end{aligned}$$

A questo punto, possiamo facilmente calcolare il predittore ottimo di  $\tilde{v}(t)$ , che sappiamo essere:

$$\hat{\tilde{v}}(t+1|t) = a \tilde{v}(t)$$

Siccome poi sappiamo che:

$$\tilde{v}(t) = v(t) - m$$

Possiamo facilmente intuire che il predittore ottimo per  $v(t)$  è dato da:

$$\hat{v}(t) - m = a [\hat{v}(t) - m]$$

E quindi:

$$\hat{v}(t) = a\hat{v}(t) + (1-a)m$$

Sostituendo poi il valore di  $m$ :

$$\hat{v}(t) = a\hat{v}(t) + (1-a)\frac{2}{1-a} \rightarrow \hat{v}(t) = a\hat{v}(t) + 2$$

Ovvero:

$$\hat{v}(t) = a\hat{v}(t) + u(t)$$

#### Generalizzazione

In generale, il predittore ottimo ad un passo per:

$$A(z)v(t) = C(z)\xi(t) + B(z)u(t)$$

È dato da:

$$C(z)\hat{v}(t+1|t) = [C(z) - A(z)]v(t+1) + B(z)u(t)$$

## Ricavo semplificato del predittore

### ARMA

Consideriamo un generico modello ARMA:

$$A(z)y(t) = C(z)\xi(t), \quad \xi(t) \sim WN(0, \lambda^2)$$

Come noto, il predittore è:

$$C(z)\hat{y}(t) = [C(z) - A(z)]y(t)$$

Possiamo ottenere tale formula in maniera più semplice di quanto finora abbiamo fatto. A tale scopo, partiamo dall'equazione:

$$A(z)y(t) = C(z)\xi(t)$$

E dividiamo entrambi i membri per  $C(z)$ :

$$\frac{A(z)}{C(z)}y(t) = \xi(t)$$

Aggiungendo e sottraendo  $y(t)$  al primo membro:

$$\frac{A(z)}{C(z)}y(t) + y(t) - y(t) = \xi(t)$$

Da cui ricaviamo:

$$\left[ \frac{A(z)}{C(z)} - 1 \right] y(t) + y(t) = \xi(t)$$

$$y(t) = \left[ 1 - \frac{A(z)}{C(z)} \right] y(t) + \xi(t)$$

Siccome  $A(z)$  e  $C(z)$  sono monici e di ugual grado:

$$\frac{A(z)}{C(z)} = 1 + k_1 z^{-1} + k_2 z^{-2} + \dots$$

Da cui:

$$y(t) = (1 - 1 - k_1 z^{-1} - k_2 z^{-2} - \dots)y(t) + \xi(t)$$

$$y(t) = (-k_1 z^{-1} - k_2 z^{-2} - \dots)y(t) + \xi(t)$$

Si nota quindi che:

$$\left[ 1 - \frac{A(z)}{C(z)} \right] y(t) = (-k_1 z^{-1} - k_2 z^{-2} - \dots)y(t)$$

È funzione solamente del passato di  $y$ . Possiamo perciò scrivere:

$$\hat{y}(t) = \left[ 1 - \frac{A(z)}{C(z)} \right] y(t)$$

### ARMAX

Possiamo ripetere un procedimento simile per un processo ARMAX. Consideriamo:

$$A(z)y(t) = C(z)\xi(t) + B(z)u(t), \quad \xi(t) \sim WN(0, \lambda^2)$$

Si noti che in realtà è possibile che  $y(t)$  dipenda non direttamente da  $u(t)$ , ma da  $u$  valutato in un istante precedente qualsiasi. In genere, la dipendenza si ha rispetto ai valori precedenti di  $u$ , e non rispetto a  $u(t)$ . Tale situazione può essere rappresentata, con riferimento alla precedente equazione, imponendo:

$$B(z) = b_0 z^{-1} + b_1 z^{-2} + \dots$$

In alternativa, possiamo utilizzare un'equazione del tipo:

$$A(z)y(t) = C(z)\xi(t) + B(z)u(t-1)$$

Con:

$$B(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}$$

Utilizziamo allora questa seconda simbologia. Dividendo l'equazione così ottenuta per  $C(z)$ :

$$\frac{A(z)}{C(z)}y(t) = \frac{B(z)}{C(z)}u(t-1) + \xi(t)$$

Aggiungendo e sottraendo  $y(t)$  al primo membro:

$$\frac{A(z)}{C(z)}y(t) + y(t) - y(t) = \frac{B(z)}{C(z)}u(t-1) + \xi(t)$$

Da cui:

$$\left[ \frac{A(z)}{C(z)} - 1 \right] y(t) + y(t) = \frac{B(z)}{C(z)}u(t-1) + \xi(t)$$

Ovvero:

$$y(t) = \left[ 1 - \frac{A(z)}{C(z)} \right] y(t) + \frac{B(z)}{C(z)}u(t-1) + \xi(t)$$

Con un ragionamento analogo a quello fatto nel caso ARMA, ricaviamo che:

$$\left[ 1 - \frac{A(z)}{C(z)} \right] y(t)$$

È una funzione del passato di  $y$ , e che:

$$\frac{B(z)}{C(z)}u(t)$$

È una funzione del passato di  $u$ . Di conseguenza:

$$\hat{y}(t) = \left[ 1 - \frac{A(z)}{C(z)} \right] y(t) + \frac{B(z)}{C(z)}u(t-1)$$

### Box & Jenkins

Consideriamo adesso il modello di Box & Jenkins riportato a lato e cerchiamo di ripetere anche in questo caso il procedimento usato nei casi appena analizzati.

Ipotizziamo che  $W(z)$  sia il fattore spettrale canonico:

$$W(z) = \hat{W}(z)$$

Abbiamo:

$$y(t) = G(z)u(t-1) + W(z)\xi(t)$$

Da cui, dividendo entrambi i membri per  $W(z)$ :

$$\frac{y(t)}{W(z)} = \frac{G(z)}{W(z)}u(t-1) + \xi(t)$$

Aggiungendo e sottraendo  $y(t)$  al primo membro:

$$\frac{y(t)}{W(z)} + y(t) - y(t) = \frac{G(z)}{W(z)}u(t-1) + \xi(t)$$

Ovvero:

$$y(t) = \left[ 1 - \frac{1}{W(z)} \right] y(t) + \frac{G(z)}{W(z)}u(t-1) + \xi(t)$$

Dove:

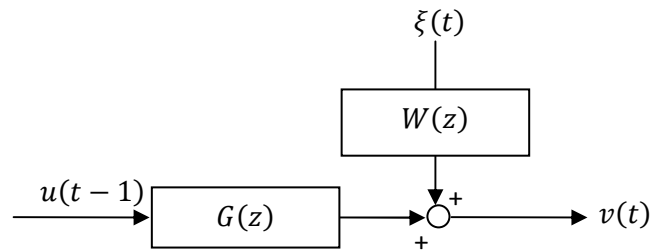
$$\left[ 1 - \frac{1}{W(z)} \right] y(t)$$

È funzione solamente del passato di  $y$ , mentre

$$\frac{G(z)}{W(z)}u(t-1)$$

È funzione solamente del passato di  $u$ . Infine,  $\xi(t)$  è un rumore bianco a media nulla, perciò otteniamo:

$$\hat{y}(t) = \left[ 1 - \frac{1}{W(z)} \right] y(t) + \frac{G(z)}{W(z)}u(t-1)$$

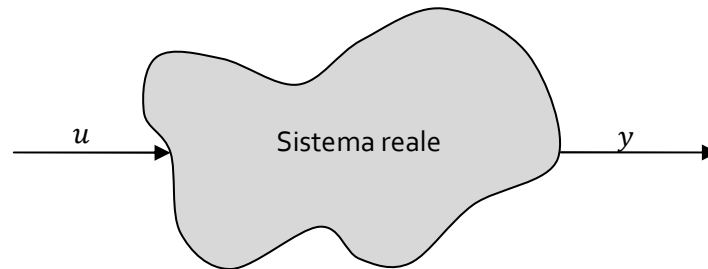




# L'identificazione

## Introduzione: l'identificazione predittiva

Entriamo ora nel vivo della trattazione del problema dell'identificazione.



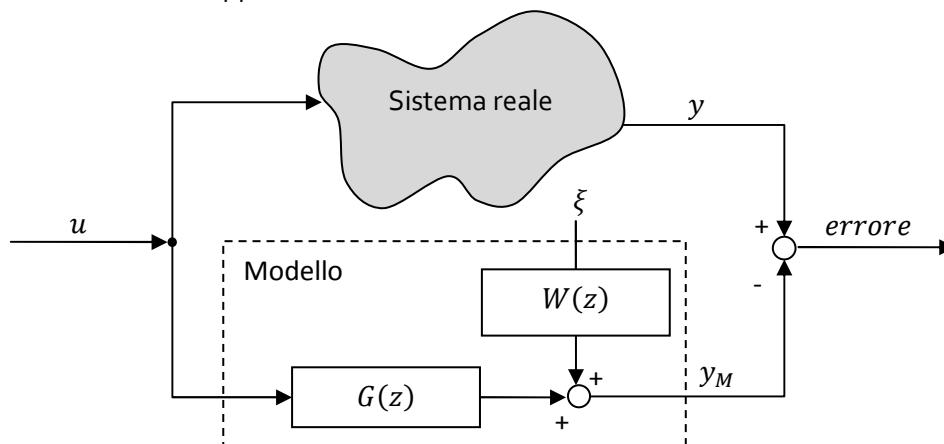
In sostanza, a partire dalle misurazioni dell'ingresso controllabile  $u$ :

$$u(1), u(2), u(3), \dots, u(n)$$

E dalle misurazioni dell'uscita negli stessi istanti:

$$y(1), y(2), y(3), \dots, y(n)$$

Vogliamo ricavare un modello lineare del sistema dato, in modo da ottenere un'interpretazione di tali dati, prescindendo però dalla fisica che regola il sistema stesso. Ad esempio, potremmo voler ricavare un modello di Box & Jenkins che rappresenti tale sistema:



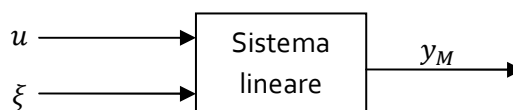
In sostanza, si pone all'ingresso del modello l'ingresso reale e si confrontano l'uscita del sistema reale e quella del modello (che perciò sono sollecitati con lo stesso ingresso):

$$y - y_M = \text{errore}$$

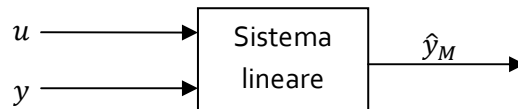
L'idea base è quella di riuscire poi a trovare dei metodi che consentano di modificare i parametri del modello per minimizzare l'errore.

Il problema fondamentale di questo approccio è legato al fatto che il valore di  $y_M$  (e quindi anche quello dell'errore) non dipende solo dai parametri del modello e da  $u$ , ma dipende anche dal rumore bianco  $\xi$ . Possiamo perciò affermare che  $y_M$  è un segnale casuale, confrontato con una sequenza di numeri ottenuti dalla realtà (cioè  $y$ ). Di conseguenza, questa strada non è praticabile.

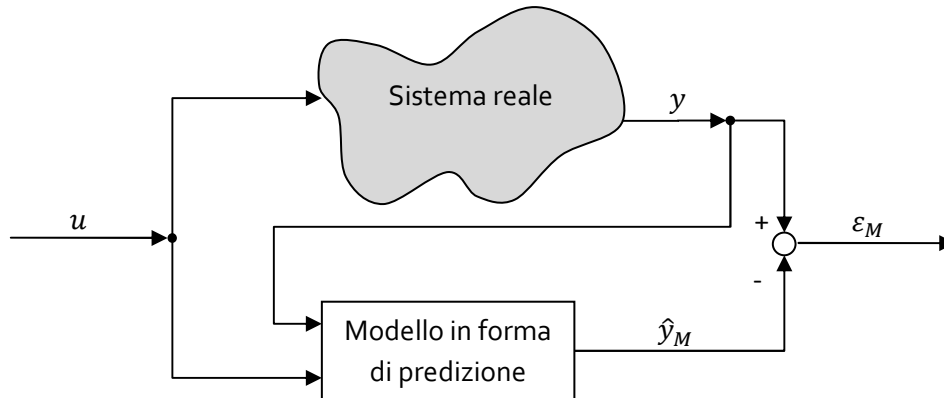
L'idea più diffusa per risolvere il problema appena illustrato consiste nell'eseguire il confronto non direttamente con il modello di Box & Jenkins:



Ma con il relativo predittore:



Nel cosiddetto **modello in forma di predizione** (che è quello appena riportato) non si ha infatti alcuna variabile aleatoria:  $\hat{y}_M$  è solamente una sequenza numerica, una volta che sono noti  $u$  e  $y$ . Lo schema diventa allora il seguente:



L'obiettivo è quindi quello di determinare qual è il miglior modello della famiglia considerata (nell'esempio, abbiamo supposto di utilizzare la famiglia dei modelli di Box & Jenkins, ma naturalmente questo vale per qualsiasi altra scelta si decida di fare), tarando i parametri in maniera da minimizzare l'errore di predizione del modello, cioè  $\varepsilon_M$ .

Si parla per questo motivo di **identificazione predittiva**: il modello "è buono" se il corrispondente predittore è buono.

## Formalizzazione dei concetti relativi all'identificazione predittiva

Cerchiamo ora di formalizzare i concetti che abbiamo finora introdotto. Le fasi da seguire sono di fatto le seguenti:

### 1. **Raccolta dei dati**

I dati dai quali partire sono rappresentati dall'insieme:

$$\{u(1), u(2), \dots, u(N), y(1), y(2), \dots, y(N)\}$$

### 2. **Individuazione della famiglia di modelli**

Si considera una famiglia di modelli, che indichiamo con la simbologia:

$$\{M(\boldsymbol{\theta}) | \boldsymbol{\theta} \in \Theta\}$$

Dove  $\boldsymbol{\theta}$  è il vettore dei parametri del modello. Stabilire la complessità della famiglia da utilizzare è un importante problema preliminare da risolversi.

#### Esempio di famiglia di modelli

Un esempio di famiglia di modelli è il seguente:

$$(1 - az^{-1})y(t) = bu(t - 1) + (1 + cz^{-1})\xi(t)$$

Dove i parametri sono rappresentati dal vettore:

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Dalle informazioni date, possiamo stabilire anche alcuni vincoli per lo spazio nel quale tali parametri possono assumere valori, ovvero  $\Theta$ . Infatti, se sappiamo che il sistema è stabile (come è ragionevole supporre), allora dobbiamo avere:

$$|a| < 1$$

Altrimenti, avremmo un polo instabile. Inoltre, se vogliamo ottenere la fattorizzazione spettrale, dobbiamo imporre:

$$|c| < 1$$

Su  $b$  invece non possiamo dire nulla. Abbiamo perciò ricavato:

$$\Theta = \{\boldsymbol{\vartheta}: |a| < 1 \text{ e } |c| < 1\}$$

### 3. **Scelta del criterio di ottimizzazione**

Si deve poi avere un criterio per scegliere qual è il miglior modello tra quelli della famiglia considerata. Il criterio che si utilizza è nel nostro caso *predittivo*: per prima cosa, si ottiene la famiglia dei modelli in forma di predizione:

$$\hat{M}(\boldsymbol{\vartheta})$$

Dopodiché si costruisce l'errore di predizione:

$$\varepsilon_{\boldsymbol{\vartheta}}(t) = y(t) - \hat{y}_{\hat{M}(\boldsymbol{\vartheta})}(t)$$

Il criterio in base al quale minimizzare l'errore sarà una cifra di merito:

$$J = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N [\varepsilon_{\boldsymbol{\vartheta}}(t)]^2$$

### 4. **Ottimizzazione**

L'ottimizzazione consiste nell'individuare:

$$\min J = \min \left\{ \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N [\varepsilon_{\boldsymbol{\vartheta}}(t)]^2 \right\} = \boldsymbol{\vartheta}_o$$

Una volta trovato questo valore, possiamo facilmente individuare il modello ottimo in forma di predizione:

$$M(\boldsymbol{\vartheta}_o)$$

### 5. **Validazione**

Questo modo di procedere potrebbe risultare in realtà non soddisfacente: è necessario quindi eseguire anche una fase di validazione del modello, che consiste nell'eseguire un'analisi critica finale del risultato ottenuto. Durante questa fase potrebbero emergere dei problemi, che possono anche portare a ripetere tutto il procedimento su una nuova famiglia di modelli, nel caso in cui quello ottenuto dovesse risultare non accettabile.

## Il metodo del minimo quadrato (LS, Least Square)

Un primo metodo che si può utilizzare per eseguire concretamente l'identificazione dei modelli è quello noto come metodo *LS* (*Least Square*, minimo quadrato).

### 1. La famiglia dei modelli

Questo metodo considera come famiglia di modelli tutti i modelli ARX, del tipo:

$$y(t) = a_1 y(t-1) + a_2 y(t-2) + \dots + y_{n_a}(t-n_a) + b_1 u(t-1) + b_2 u(t-2) + \dots + b_{n_b} u(t-n_b) + \xi(t)$$

I parametri del modello sono allora rappresentati dal vettore:

$$\boldsymbol{\vartheta} = [a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_{n_a} \quad b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_{n_b}]'$$

A tali parametri, è necessario aggiungere la varianza di  $\xi(t)$ :

$$\lambda^2$$

### 2. Il vettore delle osservazioni

Introduciamo adesso il vettore delle osservazioni (che è in pratica il vettore dei dati):

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = \begin{bmatrix} y(t-1) \\ y(t-2) \\ \dots \\ y(t-n_a) \\ u(t-1) \\ u(t-2) \\ \dots \\ u(t-n_b) \end{bmatrix}$$

Abbiamo quindi:

$$y(t) = [\boldsymbol{\varphi}(t)]' \boldsymbol{\vartheta} + \xi(t)$$

Siccome tale risultato è uno scalare, possiamo scrivere anche:

$$y(t) = \boldsymbol{\vartheta}' \boldsymbol{\varphi}(t) + \xi(t)$$

### 3. Il modello in forma di predizione

Il modello in forma di predizione  $\hat{M}(\boldsymbol{\vartheta})$  (ad un passo) può essere così rappresentato:

$$\begin{aligned} \hat{y}(t) &= [\boldsymbol{\varphi}(t)]' \boldsymbol{\vartheta} = \\ &= a_1 y(t-1) + a_2 y(t-2) + \dots + y_{n_a}(t-n_a) + b_1 u(t-1) + b_2 u(t-2) + \dots + b_{n_b} u(t-n_b) \end{aligned}$$

### 4. Il criterio di ottimizzazione

Il criterio in base al quale eseguire la minimizzazione è:

$$J = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N [\varepsilon_{\boldsymbol{\vartheta}}(t)]^2 = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N [y(t) - [\boldsymbol{\varphi}(t)]' \boldsymbol{\vartheta}]^2$$

### 5. L'ottimizzazione

A questo punto, occorre eseguire la ricerca del minimo di  $J(\boldsymbol{\vartheta})$ . Siccome però  $J$  è uno scalare e  $\boldsymbol{\vartheta}$  è un vettore, non si può semplicemente applicare il concetto di derivata, ma occorre introdurre la **matrice gradiente**, ovvero

$$\frac{dJ(\boldsymbol{\vartheta})}{d\boldsymbol{\vartheta}} = \begin{bmatrix} \frac{dJ(\boldsymbol{\vartheta})}{d\vartheta_1} \\ \dots \\ \frac{dJ(\boldsymbol{\vartheta})}{d\vartheta_n} \end{bmatrix}$$

Il gradiente può essere equivalentemente definito come il trasposto del vettore appena introdotto. Nel nostro caso, considereremo  $\frac{dJ(\boldsymbol{\vartheta})}{d\boldsymbol{\vartheta}}$  come un vettore riga:

$$\frac{dJ(\boldsymbol{\vartheta})}{d\boldsymbol{\vartheta}} = \left[ \frac{dJ(\boldsymbol{\vartheta})}{d\vartheta_1} \quad \dots \quad \frac{dJ(\boldsymbol{\vartheta})}{d\vartheta_n} \right]$$

Per il resto si procede semplicemente come nel caso scalare: occorre cioè imporre l'annullamento del gradiente, in modo da individuare i punti stazionari.

$$\frac{dJ(\vartheta)}{d\vartheta} = 0$$

Infine, è necessario verificare se il punto stazionario così individuato è effettivamente un minimo oppure no.

Per procedere nei calcoli, possiamo operare semplicemente ipotizzando che  $\vartheta$  sia uno scalare, occupandoci poi di "aggiustare" i trasposti in modo tale da ottenere conformabilità tra le matrici, laddove necessario. Otteniamo così:

$$\frac{dJ(\vartheta)}{d\vartheta} = \frac{1}{N} \frac{d}{d\vartheta} \sum_{t=1}^N [y(t) - [\varphi(t)]'\vartheta]^2 = -\frac{2}{N} \left( \sum_{t=1}^N [y(t) - [\varphi(t)]'\vartheta] \right) \cdot [\varphi(t)]'$$

Uguagliando a zero il risultato:

$$-\frac{2}{N} \left( \sum_{t=1}^N [y(t) - [\varphi(t)]'\vartheta] \right) \cdot [\varphi(t)]' = 0$$

Otteniamo:

$$\left( \sum_{t=1}^N [y(t) - [\varphi(t)]'\vartheta] \right) \cdot [\varphi(t)]' = 0$$

Da cui:

$$\sum_{t=1}^N y(t) \cdot [\varphi(t)]' = \sum_{t=1}^N ([\varphi(t)]'\vartheta)[\varphi(t)]'$$

Possiamo eseguire la trasposta di entrambi i membri:

$$\left( \sum_{t=1}^N y(t) \cdot [\varphi(t)]' \right)' = \left( \sum_{t=1}^N ([\varphi(t)]'\vartheta)[\varphi(t)]' \right)'$$

Che equivale a scrivere:

$$\sum_{t=1}^N (y(t) \cdot [\varphi(t)]')' = \sum_{t=1}^N (([\varphi(t)]'\vartheta)[\varphi(t)]')'$$

Ricordando le proprietà delle matrici, possiamo scrivere:

$$([\varphi(t)]'\vartheta)[\varphi(t)]' = (\varphi(t)([\varphi(t)]'\vartheta)')'$$

Ma siccome  $[\varphi(t)]'\vartheta$  è uno scalare:

$$([\varphi(t)]'\vartheta)[\varphi(t)]' = (\varphi(t)[\varphi(t)]'\vartheta)'$$

Analogamente, anche  $y(t)$  è uno scalare, perciò, applicando simili proprietà anche al primo membro e sostituendo al secondo membro il risultato appena ottenuto:

$$\sum_{t=1}^N \varphi(t)y(t) = \sum_{t=1}^N \varphi(t)[\varphi(t)]'\vartheta$$

L'equazione ottenuta semplicemente scambiando tra loro i due membri:

$$\left[ \sum_{t=1}^N \varphi(t)[\varphi(t)]' \right] \vartheta = \sum_{t=1}^N \varphi(t)y(t)$$

È nota come **equazione normale**. In sostanza, si tratta di un sistema lineare in  $N$  equazioni ed  $N$  incognite. Se la matrice al primo membro:

$$S(N) = \sum_{t=1}^N \varphi(t)[\varphi(t)]'$$

è una matrice invertibile, allora il sistema ammette una sola soluzione, rappresentata dalla **formula dei minimi quadrati**:

$$\vartheta = \left[ \sum_{t=1}^N \varphi(t)[\varphi(t)]' \right]^{-1} \sum_{t=1}^N \varphi(t)y(t)$$

Altrimenti, le soluzioni saranno infinite.

**Osservazione: verifica che il punto sia un minimo**

Come accennato, occorre poi verificare che effettivamente il punto stazionario sia un minimo. A tale scopo, dobbiamo calcolare la derivata seconda, o meglio, la **matrice hessiana**:

$$\frac{d^2 J}{d\vartheta^2} = \frac{d}{d\vartheta} \left( \frac{dJ}{d\vartheta} \right) = \begin{bmatrix} \frac{d^2 J}{d\vartheta_1^2} & \frac{d^2 J}{d\vartheta_1 d\vartheta_2} & \cdots \\ \frac{d^2 J}{d\vartheta_2 d\vartheta_1} & \frac{d^2 J}{d\vartheta_2^2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Nel nostro caso, otteniamo:

$$\frac{d^2 J^2(\vartheta)}{d\vartheta^2} = \frac{2}{N} \left( \sum_{t=1}^N \varphi(t)[\varphi(t)]' \right)$$

Siccome questa matrice è semidefinita positiva, siamo certi che effettivamente il punto stazionario individuato è un minimo.

A questo punto possiamo osservare che, eseguendo lo sviluppo di Taylor di  $J(\vartheta)$ , otteniamo:

$$J(\vartheta) = J(\hat{\vartheta}) + \left. \frac{dJ(\vartheta)}{d\vartheta} \right|_{\hat{\vartheta}} (\vartheta - \hat{\vartheta}) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 J^2(\vartheta)}{d\vartheta^2} \right|_{\hat{\vartheta}} (\vartheta - \hat{\vartheta})$$

Si noti che, siccome  $J$  è una funzione quadratica di  $\vartheta$ , non è possibile che vi siano altri termini nello sviluppo di Taylor. Inoltre, siccome abbiamo calcolato  $\hat{\vartheta}$  proprio imponendo l'annullamento della matrice gradiente di  $J$ , abbiamo:

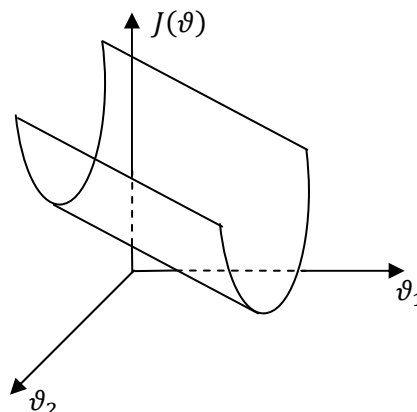
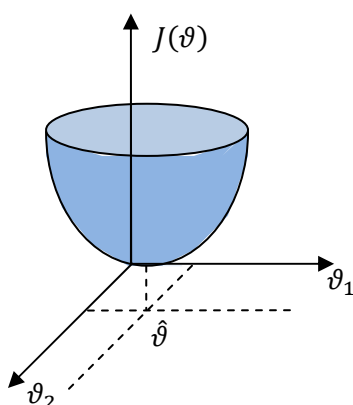
$$J(\vartheta) = J(\hat{\vartheta}) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 J^2(\vartheta)}{d\vartheta^2} \right|_{\hat{\vartheta}} (\vartheta - \hat{\vartheta})$$

Ma siccome abbiamo detto che:

$$\frac{d^2 J^2(\vartheta)}{d\vartheta^2} \geq 0$$

Allora abbiamo due possibilità:

1. Se la matrice è definita positiva, abbiamo un paraboloide con vertice in  $\hat{\vartheta}$ .
2. Se invece è semidefinita positiva ma non definita positiva, allora le soluzioni sono infinite, come mostrato nella figura più a destra.



### Altre osservazioni

Si noti comunque che la matrice  $S(N)$  è sempre una matrice simmetrica, nella quale l' $i$ -esimo elemento sulla diagonale principale è il quadrato dell' $i$ -esimo elemento di  $\varphi(t)$ . Ad esempio, se  $n_a = n_b = 2$ :

$$S(N) = \sum_{t=1}^N \begin{bmatrix} y(t-1)^2 & y(t-1)y(t-2) & u(t-1)y(t-1) & u(t-2)y(t-1) \\ y(t-2)y(t-1) & y(t-2)^2 & u(t-1)y(t-2) & u(t-2)y(t-2) \\ u(t-1)y(t-1) & u(t-1)y(t-2) & u(t-1)^2 & u(t-1)u(t-2) \\ u(t-2)y(t-1) & u(t-2)y(t-2) & u(t-2)u(t-1) & u(t-2)^2 \end{bmatrix}$$

Si nota perciò che, se  $N \rightarrow +\infty$ , allora sulla diagonale principale avremo la somma di  $N$  numeri positivi, che quindi tende a divergere. Per evitare questo fenomeno, si può introdurre la matrice:

$$R(N) = \frac{S(N)}{N}$$

E si trasforma l'equazione normale in:

$$\frac{1}{N} \left[ \sum_{t=1}^N \varphi(t) [\varphi(t)]' \right] \vartheta = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varphi(t) y(t)$$

Inoltre, se  $N \rightarrow +\infty$ , allora:

- Gli elementi sulla diagonale principale tendono alla varianza:

$$\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N y(t-1)^2 \rightarrow \gamma_{yy}(0) \qquad \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N u(t-1)^2 \rightarrow \gamma_{uu}(0)$$

- Gli altri elementi tendono alla funzione di covarianza valutata nell'istante ottenuto come differenza tra l'istante in cui viene valutato  $u$  e quello in cui si valuta  $y$  (differenza in modulo):

$$\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N y(t-1)u(t-1) \rightarrow \gamma_{yu}(0) \qquad \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N u(t-2)y(t-1) \rightarrow \gamma_{uy}(1)$$

Otteniamo in sintesi:

$$\bar{R} = \begin{bmatrix} \gamma_{yy}(0) & \gamma_{yy}(1) & \gamma_{uy}(0) & \gamma_{uy}(1) \\ \gamma_{yy}(1) & \gamma_{yy}(0) & \gamma_{uy}(1) & \gamma_{uy}(0) \\ \gamma_{uy}(0) & \gamma_{uy}(1) & \gamma_{uu}(0) & \gamma_{uu}(1) \\ \gamma_{uy}(1) & \gamma_{uy}(0) & \gamma_{uu}(1) & \gamma_{uu}(0) \end{bmatrix}$$

Siccome, come abbiamo detto, dobbiamo avere  $R(N)$  invertibile, è necessario almeno che  $\bar{R}$  sia invertibile. Possiamo osservare che tale matrice è costituita da 4 blocchi:

$$\bar{R} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

Dove  $A$  dipende solamente da  $y$ ,  $D$  dipende solo da  $u$  e  $B$  e  $C$ , che sono uno il trasposto dell'altro, dipendono sia da  $y$  che da  $u$ . Tuttavia  $u$  dipende sia da  $u$ , sia da  $y$ , perciò l'unico blocco che può essere liberamente imposto è il blocco  $D$ . Condizione necessaria perché  $\bar{R}$  sia invertibile è che  $D$  sia invertibile.

### Segnale persistentemente eccitante

Il segnale  $u$  si dice persistentemente eccitante di ordine  $k$  se la matrice quadrata di dimensione  $k \times k$  così definita:

$$\begin{bmatrix} \gamma_{uu}(0) & \gamma_{uu}(1) & \gamma_{uu}(2) & \dots & \gamma_{uu}(k-1) \\ \gamma_{uu}(1) & \gamma_{uu}(0) & \gamma_{uu}(1) & \dots & \gamma_{uu}(k-2) \\ \gamma_{uu}(2) & \gamma_{uu}(1) & \gamma_{uu}(0) & \dots & \gamma_{uu}(k-3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{uu}(k-1) & \gamma_{uu}(k-2) & \gamma_{uu}(k-3) & \dots & \gamma_{uu}(0) \end{bmatrix}$$

È invertibile. La matrice appena definita non rappresenta altro che la matrice  $D$  in  $\bar{R}$  nel caso generale (prima abbiamo considerato solamente  $k = 2$ ).

Si noti che la matrice appena definita è del tipo di Teopltz, perché su tutte le diagonali parallele alla diagonale principale si hanno sempre uguali elementi.

### Condizione necessaria per l'invertibilità di $\bar{R}$

A questo punto, possiamo così riformulare la condizione necessaria per l'invertibilità di  $\bar{R}$ : affinché tale matrice sia invertibile, è necessario che il segnale  $u$  sia persistentemente eccitante di ordine  $n_b$ .

L'idea di base è data dal fatto che, per stimare gli zeri e i poli del sistema reale, è necessario fornire un segnale che sia sufficientemente variabile nel tempo. Se ad esempio pensassimo di utilizzare un segnale costante nel tempo:

$$u(t) = 1 \quad \forall t$$

Allora il segnale stesso non sarebbe persistentemente eccitante, e quindi non potremmo individuare un modello unico. Se invece avessimo:

$$u(t) \sim WN(0, \lambda^2)$$

Allora il segnale sarebbe persistentemente eccitante per ogni  $k$ . Si noti comunque che la condizione appena esposta è necessaria, ma non sufficiente.

### Esempio

Consideriamo adesso un esempio. Supponiamo che il sistema reale sul quale eseguire la predizione sia:

$$G(z) = 10 \frac{(z + 0,8)(z + 5)}{(z + 0,5)(z + 0,8)(z - 0,2)}$$

Il sistema in analisi è un modello  $ARX(3,2)$  nel quale abbiamo 5 parametri da stimare. Tuttavia, il modello appena riportato equivale anche ad un modello  $ARX(2,1)$ , perché possiamo eseguire la banale semplificazione dello zero con il corrispondente polo:

$$G(z) = 10 \frac{(z + 5)}{(z + 0,5)(z - 0,2)}$$

Perciò è ovvio che non si potranno stimare con esattezza tutti i parametri: se ad esempio creassimo un modello di questo sistema con il parametro 0,6 al posto di 0,8, otterremo un modello di fatto equivalente; questo significa che si hanno infinite quintuple di parametri che consentono di minimizzare la cifra di merito, indipendentemente dal tipo di segnale in ingresso che si utilizza (e quindi questo vale anche se si usa un ingresso  $u$  persistentemente eccitante di ordine "sufficientemente grande").

### Condizione necessaria e sufficiente per l'invertibilità di $\bar{R}$

La matrice  $\bar{R}$  è invertibile se e solo se valgono le seguenti condizioni:

1. *Condizione di identificabilità sperimentale*

L'ingresso è persistentemente eccitante di ordine sufficientemente elevato, ovvero almeno pari al numero di parametri  $n_b$  da stimare relativi ad  $u$ .

2. *Condizione di identificabilità strutturale*

Nel modello non ci sono semplificazioni.

Si noti che la prima condizione riguarda l'esperimento eseguito per effettuare la predizione, mentre la seconda condizione è relativa alla struttura del modello. Di fatto questa condizione impone che la famiglia di modelli scelti non sia inutilmente troppo complicata rispetto alla realtà.

Si noti comunque che, nel caso in cui si ottenga una stima non unica, questo non è indice di un errore, ma solo del fatto che il modello utilizzato è più complesso del necessario.



## Il metodo di massima verosimiglianza (ML, Maximum Likelihood)

Un secondo metodo per l'identificazione di un modello è il cosiddetto *metodo di massima verosimiglianza*, che si differenzia dal precedente solamente per la famiglia di modelli che si utilizza. In particolare, il metodo ML prevede che si scelga la famiglia dei modelli ARMAX. Vediamo però di andare per gradi.

### 1. Dati

I dati sulla base dei quali il modello verrà costruito sono ovviamente i valori dell'ingresso e dell'uscita, rilevati per un certo numero  $N$  di istanti consecutivi:

$$y(1), y(2), \dots, y(N) \\ u(1), u(2), \dots, u(N)$$

### 2. Famiglia dei modelli

In base a quanto appena detto, la famiglia dei modelli è del tipo:

$$A(z)y(t) = B(z)u(t-1) + C(z)\xi(t) \quad \xi \sim WN(0, \lambda^2)$$

Dove:

$$B(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_{n_b} z^{-n_b} \\ A(z) = 1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2} - \dots - a_{n_a} z^{-n_a} \\ C(z) = 1 + c_1 z^{-1} + \dots + c_{n_c} z^{-n_c}$$

Il vettore dei parametri è perciò:

$$\vartheta = [a_1 \quad \dots \quad a_{n_a} \quad b_0 \quad \dots \quad b_{n_b} \quad c_1 \quad \dots \quad c_{n_c}]'$$

### 3. Modello in forma di predizione

Possiamo così rappresentare il nostro modello in forma di predizione,  $\hat{M}(\vartheta)$ :

$$C(z)\hat{y}(t) = [C(z) - A(z)]y(t) + B(z)u(t-1)$$

### 4. La cifra di merito

Anche in questo caso, la cifra di merito si basa sull'uso del modello in forma predittiva ed è definita come:

$$J = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N [\varepsilon_{\vartheta}(t)]^2$$

### 5. L'ottimizzazione: uso di metodi iterativi

Nel caso particolare in cui il modello considerato sia un modello ARX, sappiamo già che si ottiene:

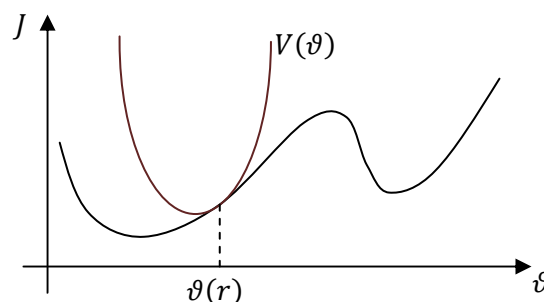
$$\hat{y}(t) = [\varphi(t)]' \vartheta = \\ = a_1 y(t-1) + a_2 y(t-2) + \dots + a_{n_a} y(t-n_a) + b_1 u(t-1) + b_2 u(t-2) + \dots + b_{n_b} u(t-n_b)$$

Tuttavia, nel caso generale ovviamente non è così, e non si è in grado di ottenere le equazioni normali.

Non esistono dei metodi universali che consentano di trovare i minimi delle funzioni non lineari, e di conseguenza si è costretti a utilizzare dei metodi numerici di ottimizzazione di tipo iterativo.

### Il metodo di Newton

Vediamo ora come primo metodo di ottimizzazione il metodo di Newton, che è di fatto il più utilizzato. Supponiamo per praticità che  $\vartheta$  sia scalare, ma lo stesso metodo può in realtà essere usato anche nel caso più generale in cui  $\vartheta$  sia un vettore. L'idea di base è quella di approssimare  $J$  con una funzione quadratica  $V(\vartheta)$ :



In particolare, all'iterazione  $r$ -esima imponiamo:

$$\begin{cases} V(\vartheta^{(r)}) = J(\vartheta^{(r)}) \\ \left. \frac{dV}{d\vartheta} \right|_{\vartheta^{(r)}} = \left. \frac{dJ}{d\vartheta} \right|_{\vartheta^{(r)}} \\ \left. \frac{d^2V}{d\vartheta^2} \right|_{\vartheta^{(r)}} = \left. \frac{d^2J}{d\vartheta^2} \right|_{\vartheta^{(r)}} \end{cases}$$

L'approssimazione sarà poi (Taylor):

$$V(\vartheta) = J(\vartheta^{(r)}) + \left. \frac{dV}{d\vartheta} \right|_{\vartheta^{(r)}} (\vartheta - \vartheta^{(r)}) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2V}{d\vartheta^2} \right|_{\vartheta^{(r)}} (\vartheta - \vartheta^{(r)})^2$$

Quindi il minimo si ha per:

$$\vartheta^{(r+1)} = \vartheta^{(r)} - \left( \left. \frac{d^2V}{d\vartheta^2} \right|_{\vartheta^{(r)}} \right)^{-1} \left( \left. \frac{dV}{d\vartheta} \right|_{\vartheta^{(r)}} \right)'$$

A questo punto, si cerca il punto minimo della forma quadratica  $V(\vartheta^{(r)})$ ; il punto di minimo individuato verrà usato come valore  $\vartheta^{(r+1)}$ . Il procedimento viene iterato fino al raggiungimento di una certa forma di convergenza, che determina quindi una opportuna condizione di arresto.

Questo metodo presenta però alcuni problemi:

1. Anziché individuare un punto di minimo globale, si potrebbe individuare un minimo locale, a seconda solamente del punto dal quale l'algoritmo viene avviato.
2. A volte, il problema è ancor più grave: anziché individuare un punto di minimo si individua un punto di massimo.

Per risolvere questi problemi (almeno parzialmente) in genere si avvia l'algoritmo più volte, partendo da punti diversi, e si confrontano poi i minimi così individuati, scegliendo poi il più piccolo.

Vediamo ora più nel dettaglio come si calcolano le derivate:

- Il calcolo della derivata prima della cifra di merito sarà del tipo:

$$\frac{dJ}{d\vartheta} = \frac{2}{N} \sum_{t=1}^N \left[ \varepsilon_{\vartheta}(t) \cdot \frac{d\varepsilon_{\vartheta}(t)}{d\vartheta} \right]$$

- Il calcolo della derivata seconda è invece del tipo:

$$\frac{d^2J}{d\vartheta^2} = \frac{2}{N} \sum_{t=1}^N \left[ \left( \frac{d\varepsilon_{\vartheta}(t)}{d\vartheta} \right)' \cdot \frac{d\varepsilon_{\vartheta}(t)}{d\vartheta} + \varepsilon_{\vartheta}(t) \cdot \frac{d^2\varepsilon_{\vartheta}(t)}{d\vartheta^2} \right]$$

Molto spesso, per semplificare i calcoli, si esegue la seguente approssimazione:

$$\frac{d^2J}{d\vartheta^2} \cong \frac{2}{N} \sum_{t=1}^N \left[ \left( \frac{d\varepsilon_{\vartheta}(t)}{d\vartheta} \right)' \cdot \frac{d\varepsilon_{\vartheta}(t)}{d\vartheta} \right]$$

In questo caso si parla di **metodo di Gauss-Newton**, e si evita di calcolare la derivata seconda di  $\varepsilon_{\vartheta}(t)$ , o meglio, la matrice Hessiana:

$$\frac{d^2\varepsilon_{\vartheta}(t)}{d\vartheta^2}$$

E si deve solamente calcolare il gradiente:

$$\frac{d\varepsilon_{\vartheta}(t)}{d\vartheta}$$

Inoltre, la matrice così ottenuta è sempre semidefinita positiva, perciò si evita il problema rappresentato dalla possibile individuazione di un massimo anziché di un minimo.

Si calcola quindi, ad ogni iterazione:

$$\vartheta^{(r+1)} = \vartheta^{(r)} - \left( \left. \frac{d^2V}{d\vartheta^2} \right|_{\vartheta^{(r)}} \right)^{-1} \left( \left. \frac{dV}{d\vartheta} \right|_{\vartheta^{(r)}} \right)'$$

Rimane però da stabilire come calcolare l'errore  $\varepsilon_\theta$  a partire dai dati, e come si calcola dai dati il gradiente.

All'iterazione  $r$ -esima avremo i valori:

$$\vartheta^{(r)}, a_i^{(r)}, b_j^{(r)}, c_k^{(r)}$$

In sostanza quindi conosciamo i polinomi:

$$A(z)^{(r)}, B(z)^{(r)}, C(z)^{(r)}$$

Dai quali vogliamo ricavare:

$$\varepsilon_\theta(t)^{(r)}$$

A tal scopo, possiamo riscrivere il modello in forma di predizione:

$$C(z)\hat{y}(t) = [C(z) - A(z)]y(t) + B(z)u(t-1)$$

Nella forma:

$$C(z)(y(t) - \hat{y}_\theta(t)) = A(z)y(t) - B(z)u(t-1)$$

Da cui ricaviamo:

$$C(z)\varepsilon_\theta(t) = A(z)y(t) - B(z)u(t-1)$$

Come noto, abbiamo:

$$\frac{d\varepsilon}{d\vartheta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varepsilon}{\partial a_1} & \frac{\partial \varepsilon}{\partial a_2} & \dots & \frac{\partial \varepsilon}{\partial a_{n_a}} & \frac{\partial \varepsilon}{\partial b_1} & \frac{\partial \varepsilon}{\partial b_2} & \dots & \frac{\partial \varepsilon}{\partial b_{n_b}} & \frac{\partial \varepsilon}{\partial c_1} & \frac{\partial \varepsilon}{\partial c_2} & \dots & \frac{\partial \varepsilon}{\partial c_{n_c}} \end{bmatrix}$$

Se allora introduciamo:

$$\Psi(t) = \left( -\frac{d\varepsilon}{d\vartheta} \right)'$$

Ovvero:

$$\Psi(t) = \begin{bmatrix} -\frac{\partial \varepsilon}{\partial a_1} & -\frac{\partial \varepsilon}{\partial a_2} & \dots & -\frac{\partial \varepsilon}{\partial a_{n_a}} & -\frac{\partial \varepsilon}{\partial b_1} & -\frac{\partial \varepsilon}{\partial b_2} & \dots & -\frac{\partial \varepsilon}{\partial b_{n_b}} & -\frac{\partial \varepsilon}{\partial c_1} & -\frac{\partial \varepsilon}{\partial c_2} & \dots & -\frac{\partial \varepsilon}{\partial c_{n_c}} \end{bmatrix}$$

Possiamo chiamare gli elementi di tale vettore come di seguito mostrato:

$$\Psi(t) = [\alpha_1(t) \quad \alpha_2(t) \quad \dots \quad \alpha_{n_a}(t) \quad \beta_1(t) \quad \beta_2(t) \quad \dots \quad \beta_{n_b}(t) \quad \gamma_1(t) \quad \gamma_2(t) \quad \dots \quad \gamma_{n_c}(t)]'$$

A questo punto possiamo osservare che, se partiamo dall'equazione:

$$C(z)\varepsilon_\theta(t) = A(z)y(t) - B(z)u(t-1)$$

Ed eseguiamo la derivata rispetto ad  $a_1$  in entrambi i membri, otteniamo:

$$C(z) \frac{\partial \varepsilon}{\partial a_1} = \frac{\partial}{\partial a_1} A(z)y(t)$$

Siccome:

$$A(z) = 1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2} - \dots - a_{n_a} z^{-n_a}$$

Quindi:

$$C(z) \frac{\partial \varepsilon}{\partial a_1} = \frac{\partial}{\partial a_1} [1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2} - \dots - a_{n_a} z^{-n_a}] y(t) = -z^{-1} y(t) = -y(t-1)$$

Perciò:

$$\alpha_1(t) = -\frac{\partial \varepsilon}{\partial a_1} = [C(z)]^{-1} y(t-1)$$

In maniera del tutto analoga, ricaviamo che:

$$C(z) \frac{\partial \varepsilon}{\partial a_2} = \frac{\partial}{\partial a_2} A(z)y(t) = \frac{\partial}{\partial a_2} [1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2} - \dots - a_{n_a} z^{-n_a}] y(t) = -z^{-2} y(t) = -y(t-2)$$

Ovvero:

$$\alpha_2(t) = -\frac{\partial \varepsilon}{\partial a_2} = [C(z)]^{-1} y(t-2)$$

Sempre con lo stesso procedimento, si trova:

$$C(z) \frac{\partial \varepsilon}{\partial b_1} = -\frac{\partial}{\partial b_1} B(z)u(t-1) = -\frac{\partial}{\partial b_1} [b_1 + b_2 z^{-1} + \dots + b_{n_b} z^{-n_b}] y(t) = -u(t-1)$$

Da cui:

$$\beta_1(t) = -\frac{\partial \varepsilon}{\partial b_1} = [C(z)]^{-1}u(t-1)$$

Senza ripetere i passaggi, troviamo anche:

$$\beta_2(t) = -\frac{\partial \varepsilon}{\partial b_2} = [C(z)]^{-1}u(t-2)$$

Inoltre, possiamo osservare che un discorso analogo si può fare per gli elementi  $\gamma_i$ ; basta infatti derivare, ad esempio rispetto a  $c_1$ , entrambi i membri dell'equazione:

$$C(z)\varepsilon_\theta(t) = A(z)y(t) - B(z)u(t-1)$$

E otteniamo:

$$\frac{\partial}{\partial c_1} [C(z)\varepsilon_\theta(t)] = 0$$

Ovvero:

$$C(z)\frac{\partial \varepsilon}{\partial c_1} + \left[ \frac{\partial}{\partial c_1} C(z) \right] \varepsilon_\theta(t) = 0$$

Da cui, ricordando che:

$$C(z) = 1 + c_1 z^{-1} + \dots c_{n_c} z^{-n_c}$$

Si ricava:

$$C(z)\frac{\partial \varepsilon}{\partial c_1} + \left[ \frac{\partial}{\partial c_1} (1 + c_1 z^{-1} + \dots c_{n_c} z^{-n_c}) \right] \varepsilon_\theta(t) = 0$$

$$C(z)\frac{\partial \varepsilon}{\partial c_1} + z^{-1}\varepsilon_\theta(t) = 0$$

$$C(z)\frac{\partial \varepsilon}{\partial c_1} + \varepsilon_\theta(t-1) = 0$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial c_1} = -[C(z)]^{-1}\varepsilon_\theta(t-1)$$

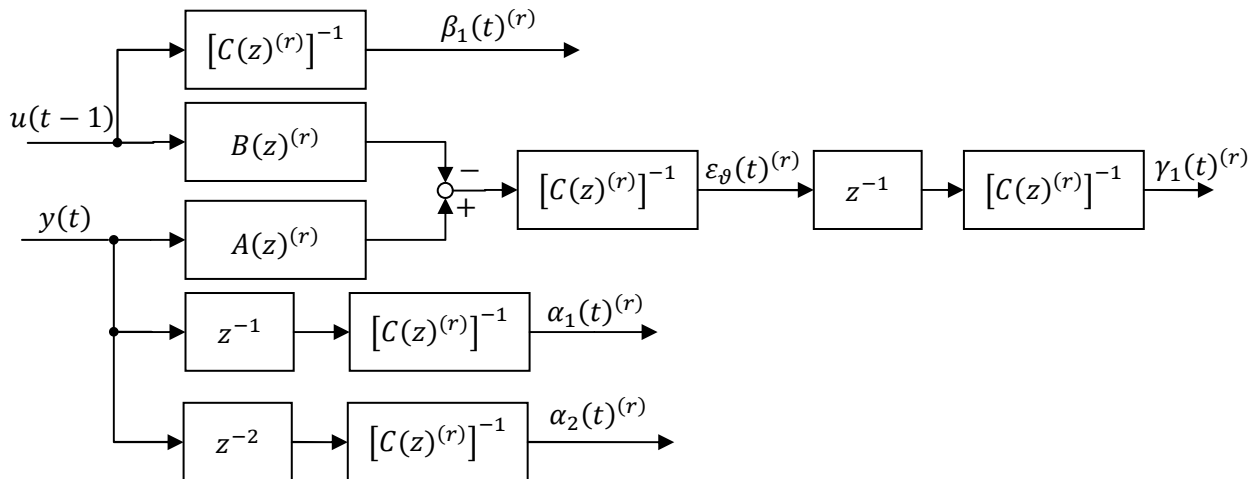
E quindi:

$$\gamma_1(t) = -\frac{\partial \varepsilon}{\partial c_1} = [C(z)]^{-1}\varepsilon_\theta(t-1)$$

E in maniera del tutto analoga possiamo verificare (anche se lo omettiamo) che:

$$\gamma_2(t) = -\frac{\partial \varepsilon}{\partial c_2} = [C(z)]^{-1}\varepsilon_\theta(t-2)$$

Abbiamo perciò un sistema del tipo:



In sostanza, mediante il procedimento appena illustrato abbiamo ricavato che, anziché calcolare:

$$\vartheta^{(r+1)} = \vartheta^{(r)} - \left( \frac{d^2 V}{d\vartheta^2} \right)^{-1} \left( \frac{dV}{d\vartheta} \right)'$$

Possiamo eseguire il calcolo:

$$\vartheta^{(r+1)} = \vartheta^{(r)} + \left( \sum_{t=1}^N [\Psi(t)\Psi(t)'] \right)^{-1} \left( \sum_{t=1}^N [\Psi(t)\varepsilon(t)] \right)'$$

Dove:

$$\Psi(t) = \frac{1}{C(z)} \begin{bmatrix} y(t-1) \\ y(t-2) \\ \dots \\ u(t-1) \\ u(t-2) \\ \dots \\ \varepsilon(t-1) \\ \varepsilon(t-2) \\ \dots \end{bmatrix}$$

### Confronto con il metodo LS

Come abbiamo visto, nel caso del metodo LS si ottiene un'equazione del tipo:

$$\vartheta = \left[ \sum_{t=1}^N \varphi(t)[\varphi(t)]' \right]^{-1} \sum_{t=1}^N \varphi(t)y(t)$$

Con:

$$\varphi(t) = \begin{bmatrix} y(t-1) \\ y(t-2) \\ \dots \\ y(t-n_a) \\ u(t-1) \\ u(t-2) \\ \dots \\ u(t-n_b) \end{bmatrix}$$

La differenza fondamentale rispetto al vettore  $\Psi(t)$  che si utilizza con il metodo ML è data dal fatto che, in  $\varphi(t)$  abbiamo un blocco in meno; inoltre, non si ha il filtraggio attraverso  $[C(z)]^{-1}$ .

## Asintoti di PEM (Prediction Error Minimization)

Proviamo ora ad analizzare il comportamento asintotico (cioè quando il numero  $N$  dei dati tende ad infinito) del metodo di identificazione a minimizzazione di errore di predizione. Come noto, abbiamo:

$$J_N = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N [\varepsilon_{\vartheta}(t)]^2$$

Il cui minimo è  $\hat{\vartheta}$ . Tuttavia possiamo facilmente notare che:

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} J_N = E[\varepsilon_{\vartheta}(t)^2] = \bar{J}(\vartheta)$$

E perciò, per  $N \rightarrow +\infty$ , il minimo di  $J_N$  tende ad un valore  $\bar{\vartheta}$ , che rappresenta appunto il minimo di  $\bar{J}(\vartheta)$ . Tuttavia, l'espressione che abbiamo appena usato è in realtà imprecisa: è infatti possibile che  $\bar{J}(\vartheta)$  non abbia un unico punto di minimo, ma un certo insieme di punti di minimo, che indichiamo con  $\Delta$ . Si hanno così diverse possibilità:

### A. Caso A

1. Sia data una famiglia di modelli:  $\mathcal{M} = \{M(\vartheta) | \vartheta \in \Theta\}$
2. Ipotizziamo che il sistema vero  $S$  che si sta identificando appartenga alla famiglia  $\mathcal{M}$ , cioè  $S \in \mathcal{M}$ .  
Questo significa che:  $\exists \vartheta_0 \in \Theta: M(\vartheta_0) = S$
3. Supponiamo che  $\bar{J}(\vartheta)$  abbia un unico punto di minimo,  $\bar{\vartheta}$ .

Allora, l'errore di predizione, che è così definito:

$$\varepsilon_{\vartheta} = y(t) - \hat{y}_{\vartheta}(t)$$

Può anche essere riscritto nella forma:

$$\varepsilon_{\vartheta} = y(t) - \hat{y}_{\vartheta}(t) - \hat{y}_{\vartheta_0}(t) + \hat{y}_{\vartheta_0}(t)$$

Ottenuta semplicemente addizionando e sottraendo la predizione dell'uscita del sistema che si ottiene se si usano i parametri esatti del sistema reale.

Possiamo riscrivere la precedente espressione, con semplici passaggi algebrici, come segue:

$$\varepsilon_{\vartheta} = (y(t) - \hat{y}_{\vartheta_0}(t)) + (\hat{y}_{\vartheta_0}(t) - \hat{y}_{\vartheta}(t))$$

In modo tale da riconoscere che si tratta della somma tra:

1. Un termine  $y(t) - \hat{y}_{\vartheta_0}(t)$ , che rappresenta l'errore di predizione commesso conoscendo il meccanismo di generazione dei dati (ovvero il modello vero).

Tale errore può anche essere indicato con:

$$\varepsilon_{\vartheta_0}(t)$$

E, siccome si tratta dell'errore ottenuto con il predittore ottimo, sarà un rumore bianco.

2. Un termine  $\hat{y}_{\vartheta_0}(t) - \hat{y}_{\vartheta}(t)$ , che è una funzione solamente dei dati passati, fino all'istante  $t - 1$ , in quanto sono presenti i valori ottenuti per mezzo di due predittori.

Abbiamo così:

$$\bar{J}(\vartheta) = E[\varepsilon_{\vartheta}(t)^2] = \text{Var}[\varepsilon_{\vartheta}(t)] = \text{Var}[\varepsilon_{\vartheta_0}(t) + (\hat{y}_{\vartheta_0}(t) - \hat{y}_{\vartheta}(t))]$$

Nella formula per il calcolo della varianza non comparirà il termine di covarianza, in quanto il primo termine della somma è un rumore bianco valutato all'istante  $t$ , ed il secondo è un dato che dipende solo dal passato. Perciò:

$$\bar{J}(\vartheta) = \text{Var}[\varepsilon_{\vartheta_0}(t)] + \text{Var}[\hat{y}_{\vartheta_0}(t) - \hat{y}_{\vartheta}(t)]$$

A questo punto, osserviamo che il primo termine non dipende da  $\vartheta$ , perciò per trovare il punto di minimo ci basta considerare il secondo termine. Naturalmente, tale termine è minimo quando vale zero, ovvero quando  $\vartheta = \vartheta_0$ . Perciò abbiamo verificato che il punto di minimo di  $\bar{J}(\vartheta)$  è  $\vartheta_0$ , ovvero che la stima fornita tende al valore vero del parametro, come ovviamente desideriamo:

$$\vartheta_N \rightarrow \vartheta_0$$

### B. Caso B

1. Sia data una famiglia di modelli:  $\mathcal{M} = \{M(\vartheta) | \vartheta \in \Theta\}$
  2. Ipotizziamo che il sistema vero  $S$  che si sta identificando appartenga alla famiglia  $\mathcal{M}$ , cioè  $S \in \mathcal{M}$ . Questo significa che:  $\exists \vartheta_0 \in \Theta: M(\vartheta_0) = S$
  3. Supponiamo che  $\bar{J}(\vartheta)$  abbia più punti di minimo, descritti dall'insieme  $\Delta$ . Ciò accade quando i dati sono stati raccolti fornendo degli ingressi che non eccitano a sufficienza il sistema, oppure quando la famiglia di modelli scelta è inutilmente troppo complessa.
- In questo caso, quando  $N \rightarrow +\infty$  è possibile che la stima  $\vartheta_N$  tenda ad uno qualsiasi dei punti dell'insieme  $\Delta$ , oppure che la stima vari continuamente da un punto ad un altro all'interno dell'insieme  $\Delta$ . Questo però non rappresenta un problema, in quanto i modelli di  $\Delta$  hanno tutti la stessa capacità predittiva.

### C. Caso C

1. Sia data una famiglia di modelli:  $\mathcal{M} = \{M(\vartheta) | \vartheta \in \Theta\}$
  2. Ipotizziamo che il sistema vero  $S$  che si sta identificando non appartenga alla famiglia  $\mathcal{M}$ , cioè  $S \notin \mathcal{M}$ . Questo significa che:  $\nexists \vartheta_0 \in \Theta: M(\vartheta_0) = S$
  3. Supponiamo che  $\bar{J}(\vartheta)$  abbia un unico punto di minimo.
- In questo caso, quando  $N \rightarrow +\infty$ , la stima  $\vartheta_N$  tende alla migliore approssimazione di  $S$  nella famiglia dei modelli scelta, che indichiamo con  $\bar{\vartheta}$ .
- Naturalmente però in questo caso avremo:

$$M(\bar{\vartheta}) \neq S$$

E ciò si potrà ricavare da un'analisi dell'errore di predizione, che non sarà un rumore bianco. A tale scopo, possono essere eseguiti dei *test di bianchezza*, come ad esempio i test di Anderson, la cui idea base è quella di valutare  $\gamma(\tau)$  per valori di  $\tau$  diversi da zero e, se i valori ottenuti sono "circa nulli", si considera l'errore di predizione come un rumore bianco.

### D. Caso D

1. Sia data una famiglia di modelli:  $\mathcal{M} = \{M(\vartheta) | \vartheta \in \Theta\}$
  2. Ipotizziamo che il sistema vero  $S$  che si sta identificando non appartenga alla famiglia  $\mathcal{M}$ , cioè  $S \notin \mathcal{M}$ . Questo significa che:  $\nexists \vartheta_0 \in \Theta: M(\vartheta_0) = S$
  3. Supponiamo che  $\bar{J}(\vartheta)$  abbia più punti di minimo, descritti dall'insieme  $\Delta$ .
- In questo caso, quando  $N \rightarrow +\infty$ , di norma la stima  $\vartheta_N$  tende ad uno dei modelli dell'insieme  $\Delta$ , che sono tutti i modelli meglio approssimanti il sistema vero  $S$ , tra quelli in  $\mathcal{M}$ . Tra i modelli di  $\Delta$  non esiste quindi un modello che possa essere considerato migliore rispetto agli altri: tutti hanno la stessa capacità predittiva.

I casi più frequenti nella realtà sono il caso C ed il caso D.

### La rapidità di convergenza

Supponiamo ora di trovarci nel caso che abbiamo indicato con A, e proviamo a valutare la rapidità con la quale la stima  $\hat{\vartheta}_N$  tende al valore vero  $\vartheta_0$  che il parametro ha nel sistema da identificare. Se tutti i segnali in gioco sono stazionari, allora l'errore di predizione di  $M(\vartheta)$  è:

$$\varepsilon_{\vartheta}(t) = y(t) - \hat{y}_{\vartheta}(t)$$

E possiamo calcolare il vettore colonna:

$$\Psi_{\vartheta}(t) = \left( -\frac{\partial}{\partial \vartheta} \varepsilon_{\vartheta}(t) \right)'$$

E la matrice:

$$\bar{R} = E[\Psi_{\vartheta}(t)\Psi_{\vartheta}(t)']_{\vartheta=\vartheta_0}$$

Dove  $\bar{R}$  non dipende dal tempo, in quanto abbiamo ipotizzato che tutti i processi siano stazionari.

Abbiamo già affermato che l'errore di stima dei parametri tende a zero:

$$\hat{\vartheta}_N - \vartheta_0 \rightarrow 0$$

Per valutarne la rapidità, valutiamo quanto rapidamente tende a zero la matrice:

$$\text{Var}[\hat{\vartheta}_N - \vartheta_0]$$

Infatti, mentre la varianza è un valore deterministico, l'errore di predizione  $\hat{\vartheta}_N - \vartheta_0$  è un processo casuale, perciò non ha senso studiarne direttamente la rapidità di convergenza a zero. Otteniamo poi:

$$\text{Var}[\hat{\vartheta}_N - \vartheta_0] \rightarrow \frac{1}{N} \bar{R}^{-1} \lambda^2$$

Dove  $\lambda^2$  è la varianza dell'errore di predizione quando si usa il predittore ottimo:

$$\lambda^2 = \text{Var}[\varepsilon_{\vartheta}(t)]_{\vartheta=\vartheta_0}$$

### Esempio: stima LS

Consideriamo adesso come esempio il seguente caso:

1. Stiamo cercando di identificare un certo sistema utilizzando la famiglia di modelli:

$$M: y(t) = \varphi(t)' \cdot \vartheta$$

2. Ipotizziamo che il sistema vero appartenga alla famiglia di modelli in analisi:

$$S: y(t) = \varphi(t)' \cdot \vartheta_0$$

3. Disponiamo di un vettore di dati:

$$\varphi(t) = \begin{bmatrix} y(t-1) \\ y(t-2) \\ \dots \\ y(t-n) \end{bmatrix}$$

Nel caso in cui si stia utilizzando un modello del tipo  $AR(n)$ , oppure:

$$\varphi(t) = \begin{bmatrix} y(t-1) \\ y(t-2) \\ \dots \\ y(t-n_a) \\ u(t-1) \\ u(t-2) \\ \dots \\ u(t-n_b) \end{bmatrix}$$

Se il modello usato è del tipo  $ARX(n_a, n_b)$ .

4. Supponiamo che  $\bar{J}$  abbia un solo punto di minimo.

La stima LS sarà, come già abbiamo visto:

$$\vartheta_N = \left[ \sum_t \varphi(t)[\varphi(t)]' \right]^{-1} \sum_t \varphi(t)y(t)$$



Inoltre, sappiamo che sotto le ipotesi specificate:

$$\vartheta_N \rightarrow \vartheta_0$$

L'errore di predizione è:

$$\varepsilon_{\vartheta}(t) = y(t) - \varphi(t)' \vartheta$$

Inoltre, ricaviamo facilmente:

$$\Psi_{\vartheta}(t) = \left( -\frac{\partial}{\partial \vartheta} \varepsilon_{\vartheta}(t) \right)' = \varphi(t)$$

Perciò la matrice appena ottenuta non dipende dal parametro  $\vartheta$ . Detta:

$$\bar{R} = E[\varphi(t)\varphi(t)']$$

Come abbiamo affermato poco fa:

$$\text{Var}[\hat{\vartheta}_N - \vartheta_0] \rightarrow \frac{1}{N} \bar{R}^{-1} \lambda^2$$

Perciò, otteniamo:

$$\text{Var}[\hat{\vartheta}_N - \vartheta_0] \rightarrow \frac{1}{N} (E[\varphi(t)\varphi(t)'])^{-1} \text{Var}[\varepsilon_{\vartheta_0}(t)]$$

Tuttavia, questa formula è solamente teorica, perché non conosciamo il valore di:

$$E[\varphi(t)\varphi(t)']$$

Sostituiamo allora a tale valore la varianza campionaria:

$$E[\varphi(t)\varphi(t)'] \cong \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varphi(t)\varphi(t)'$$

Inoltre, stimiamo la varianza dell'errore di predizione ottimo come:

$$\text{Var}[\varepsilon_{\vartheta_0}(t)] \cong \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varepsilon_{\hat{\vartheta}_N}(t)^2 = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N [y(t) - \varphi(t)' \hat{\vartheta}_N]$$

Quindi:

$$\text{Var}[\hat{\vartheta}_N - \vartheta_0] \cong \frac{1}{N} \left( \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varphi(t)\varphi(t)' \right)^{-1} \left( \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N [y(t) - \varphi(t)' \hat{\vartheta}_N] \right)$$

Riassumendo, il procedimento per l'identificazione LS nel caso in cui:

- Si voglia stimare un modello  $ARX(n_a, n_b)$  a partire dai dati  $\{y(1), y(2), \dots, y(N), u(1), u(2), \dots, u(N)\}$
- Oppure si voglia stimare un modello  $AR(n)$  a partire dai dati  $\{y(1), y(2), \dots, y(N)\}$ .

È il seguente:

- Si scelgono gli ordini  $n_a$  e  $n_b$  del modello (oppure solo  $n_a$ ).
- Si costruisce il vettore delle osservazioni:

$$\varphi(t) = [y(t-1) \quad \dots \quad y(t-n_a) \quad u(t-1) \quad \dots \quad u(t-n_b)]'$$

- Si applica la formula:

$$\hat{\vartheta}_N = \left[ \sum_t \varphi(t)[\varphi(t)]' \right]^{-1} \sum_t \varphi(t)y(t)$$

Che consente di calcolare la stima  $\hat{\vartheta}_N$  dei parametri.

- Si calcola l'errore di predizione:

$$\varepsilon_{\hat{\vartheta}_N} = y(t) - [\varphi(t)]' \hat{\vartheta}_N$$

- Si esegue un test di bianchezza sull'errore di predizione  $\varepsilon_{\hat{\vartheta}_N}$ .
- Se l'errore risulta essere "troppo colorato", si cambia la famiglia di modelli, ad esempio incrementando  $n_a$  e/o  $n_b$ , oppure passando a modelli ARMA o ARMAX.
- Se l'errore è un rumore bianco, si calcola:

$$\text{Var}[\varepsilon_{\hat{\vartheta}_N}]$$

## Algoritmi ricorsivi: RLS

Tutti gli algoritmi introdotti finora sono "a lotti", ovvero utilizzano in blocco tutti i dati. Tuttavia, questo modo di operare è complesso dal punto di vista dei calcoli, ed è molto più comodo utilizzare degli algoritmi ricorsivi, che consentano di "aggiornare" di volta in volta la stima, aggiungendo dei dati.

### Algoritmo RLS – prima formulazione

L'algoritmo RLS è la forma ricorsiva dell'algoritmo LS. Come abbiamo più volte ribadito, la forma non ricorsiva dell'algoritmo è del tipo:

$$\hat{\vartheta}_N = S(N)^{-1} \sum_{t=1}^N \varphi(t)y(t)$$

Con:

$$S(N) = \sum_{t=1}^N \varphi(t)[\varphi(t)]'$$

Possiamo pensare semplicemente di separare l'ultimo termine dalla sommatoria presente nella prima delle due formule:

$$\sum_{t=1}^N \varphi(t)y(t) = \sum_{t=1}^{N-1} \varphi(t)y(t) + \varphi(N)y(N)$$

Inoltre, siccome:

$$\hat{\vartheta}_{N-1} = S(N-1)^{-1} \sum_{t=1}^{N-1} \varphi(t)y(t)$$

Possiamo anche scrivere:

$$\sum_{t=1}^{N-1} \varphi(t)y(t) = S(N-1)\hat{\vartheta}_{N-1}$$

E sostituendo nella precedente formula:

$$\sum_{t=1}^N \varphi(t)y(t) = S(N-1)\hat{\vartheta}_{N-1} + \varphi(N)y(N)$$

Inoltre, procedendo in maniera analoga:

$$S(N) = \sum_{t=1}^N \varphi(t)[\varphi(t)]' = \sum_{t=1}^{N-1} \varphi(t)[\varphi(t)]' + \varphi(N)[\varphi(N)]'$$

Perciò:

$$S(N) = S(N-1) + \varphi(N)[\varphi(N)]' \rightarrow S(N-1) = S(N) - \varphi(N)[\varphi(N)]'$$

Ricaviamo così:

$$\sum_{t=1}^N \varphi(t)y(t) = [S(N) - \varphi(N)\varphi(N)']\hat{\vartheta}_{N-1} + \varphi(N)y(N)$$

Da cui, sostituendo nella formula iniziale:

$$\begin{aligned} \hat{\vartheta}_N &= S(N)^{-1} \{ [S(N) - \varphi(N)\varphi(N)']\hat{\vartheta}_{N-1} + \varphi(N)y(N) \} = \\ &= S(N)^{-1} S(N)\hat{\vartheta}_{N-1} - S(N)^{-1}\varphi(N)\varphi(N)'\hat{\vartheta}_{N-1} + S(N)^{-1}\varphi(N)y(N) = \\ &\quad \hat{\vartheta}_{N-1} + S(N)^{-1}\varphi(N)[y(N) - \varphi(N)'\hat{\vartheta}_{N-1}] \end{aligned}$$

Si noti che in questa formula si ha:

- $\hat{\vartheta}_{N-1}$ , che è la stima al passo precedente;
- $\varphi(N)' \hat{\vartheta}_{N-1}$ , che è l'uscita prevista nell'istante  $N$  sulla base del modello individuato al passo precedente:  $\hat{y}_{\hat{\vartheta}_{N-1}}(N)$ .
- $y(N) - \varphi(N)' \hat{\vartheta}_{N-1}$ , che è l'errore di predizione commesso con il modello stimato al tempo  $N - 1$ .

Perciò abbiamo espresso  $\hat{\vartheta}_N$  come una funzione del tipo:

(stima al passo precedente) + k (errore di predizione dell'ultimo modello stimato)

Un procedimento simile è dunque di tipo ricorsivo; nel caso in cui l'errore di predizione sia nullo, come è ovvio, la stima non viene aggiornata.

Più formalmente, il modello può essere espresso mediante il seguente sistema, che rappresenta l'intero metodo (si noti che di seguito si usa una simbologia leggermente diversa rispetto a quella finora adottata):

D1)	$\hat{\vartheta}_t = \hat{\vartheta}_{t-1} + \Delta \vartheta$	vettore $n$
	$\Delta \vartheta = k(t) \varepsilon(t)$	vettore $n$
A1)	$k(t) = S(t)^{-1} \varphi(t)$	vettore $n$ , detto <i>guadagno dell'algoritmo</i>
A2)	$\varepsilon(t) = y(t) - \varphi(t)' \hat{\vartheta}_{t-1}$	scalare (errore di predizione)
D2)	$S(t) = S(t-1) + \varphi(t) \varphi(t)'$	matrice $n \times n$
	$\varphi(t)$	Vettore $n$

Si noti che il sistema è costituito dalle due equazioni algebriche A1 ed A2 e dalle due equazione dinamiche D1 e D2 (le restanti sono solamente delle definizioni).

### **Metodo RLS – formulazione n. 2**

Si noti che, siccome per definizione:

$$S(t) = \sum_{k=1}^t \varphi(k) \varphi(k)' = S(t-1) + \varphi(t) \varphi(t)'$$

Si ha:

$$S(t) \geq S(t-1)$$

Quindi, per  $t \rightarrow +\infty$ ,  $S(t)$  diverge, mentre  $k(t) \rightarrow 0$ , ovvero:

$$\hat{\vartheta}_t \rightarrow \bar{\vartheta}$$

Ciò significa che la stima converge ad un certo valore. Per evitare la divergenza di  $S(t)$ , si usa talvolta al suo posto la matrice:

$$R(t) = \frac{1}{t} S(t)$$

Che, per processi stazionari, al tendere di  $t$  ad infinito, tende ad una costante. Si ha così:

$$\begin{aligned} \hat{\vartheta}_t &= \hat{\vartheta}_{t-1} + k(t) \varepsilon(t) \\ k(t) &= \frac{1}{t} R(t)^{-1} \varphi(t) \\ \varepsilon(t) &= y(t) - \varphi(t)' \hat{\vartheta}_{t-1} \\ R(t) &= R(t-1) + \frac{1}{t} (\varphi(t) \varphi(t)' - R(t-1)) \end{aligned}$$

Si ha infatti:

$$\frac{S(t)}{t} = \frac{S(t-1)}{t} + \frac{\varphi(t) \varphi(t)'}{t} \rightarrow R(t) = \frac{t-1}{t} \frac{1}{t-1} S(t-1) + \frac{\varphi(t) \varphi(t)'}{t}$$

Da cui:

$$R(t) = \frac{t-1}{t} R(t-1) + \frac{1}{t} \varphi(t) \varphi(t)' \rightarrow R(t) = R(t-1) + \frac{1}{t} (\varphi(t) \varphi(t)' - R(t-1))$$

Tuttavia, questa formulazione nella realtà dei fatti, così come la prima, non viene molto utilizzata, e la più usata (tra le tante esistenti, che qui non vedremo) è la seguente.

### Metodo RLS – formulazione n. 3

Premessa: Lemma di inversione di matrice

Data una matrice nella forma  $F + GHK$ , la sua inversa  $(F + GHK)^{-1}$  può essere così calcolata:

$$(F + GHK)^{-1} = F^{-1} - F^{-1}G(H^{-1} + KF^{-1}G)^{-1}KF^{-1}$$

Il lemma riportato nel precedente riquadro consente di ottenere una terza formulazione del metodo RLS, nella quale non occorre calcolare ad ogni passo l'inversa di una matrice (operazione costosa e che perciò è auspicabile eliminare).

Possiamo infatti applicare il lemma per il calcolo di

$$(S(t-1) + \varphi(t)\varphi(t)')^{-1}$$

Semplicemente ponendo:

$$F = S(t-1)$$

$$G = \varphi(t)$$

$$H = 1$$

$$K = \varphi(t)'$$

E otteniamo:

$$S(t-1)^{-1} - S(t-1)^{-1}\varphi(t)(1 + \varphi(t)'S(t-1)^{-1}\varphi(t))^{-1}\varphi(t)'S(t-1)^{-1} =$$

Introduciamo adesso la matrice ausiliaria:

$$V(t) = S(t)^{-1}$$

Le equazioni diventano così:

$$\hat{\vartheta}_t = \hat{\vartheta}_{t-1} + k(t)\varepsilon(t)$$

$$k(t) = V(t)\varphi(t)$$

$$\varepsilon(t) = y(t) - \varphi(t)'\hat{\vartheta}_{t-1}$$

$$V(t) = V(t-1) - V(t-1)\varphi(t)\varphi(t)'V(t-1)\frac{1}{\beta_{t-1}}$$

$$\beta_{t-1} = 1 + \varphi(t)'V(t-1)\varphi(t)$$

Si noti che, per  $t \rightarrow +\infty$ , si ha:

$$V(t) \rightarrow 0$$

## RLS adattativo

In alcuni casi il parametro ignoto varia nel tempo, e vorremmo poterne "inseguire" il valore. Ciò non è possibile utilizzando il metodo RLS, perciò si introduce una sua variante, detta appunto RLS adattativo.

Mentre la cifra di merito che si utilizza con il metodo LS (e RLS) tradizionale, essendo del tipo:

$$J_t = \frac{1}{t} \sum_{k=1}^t [\varepsilon_{\vartheta}(k)]^2$$

Pesa di fatto tutti gli errori di predizione allo stesso modo, l'idea di base dell'RLS adattativo è quella di attribuire un peso maggiore agli errori rilevati negli istanti più recenti, ed un peso inferiore all'errore rilevato in istanti più lontani. La cifra di merito adottata viene perciò modificata nel modo seguente:

$$J_t = \frac{1}{t} \sum_{k=1}^t (\mu^{t-k} [\varepsilon_{\vartheta}(k)]^2) \quad \mu \in (0,1)$$

Naturalmente, inferiore è il valore attribuito a  $\mu$ , maggiore è la velocità con cui "ci si dimentica" del passato. In sostanza quindi, inferiore è il valore di  $\mu$ , più l'algoritmo sarà reattivo ai cambiamenti del parametro reale. Per contro, valori di  $\mu$  troppo piccoli determinano effetti più consistenti del rumore qualora il parametro dovesse risultare in realtà costante. Il metodo RLS è descritto dalle formule:

$$\hat{\vartheta}_t = \hat{\vartheta}_{t-1} + k(t)\varepsilon(t)$$

$$k(t) = S(t)^{-1}\varphi(t)$$

$$\varepsilon(t) = y(t) - \varphi(t)'\hat{\vartheta}_{t-1}$$

$$S(t) = \mu S(t-1) + \varphi(t)\varphi(t)'$$

## Stima ricorsiva dei parametri di un modello ARMAX: algoritmo ELS

Consideriamo il modello seguente:

$$y(t) = a_1 y(t-1) + a_2 y(t-2) + \dots + a_{n_a} y(t-n_a) + b_1 u(t-1) + b_2 u(t-2) + \dots + b_{n_b} u(t-n_b) + \xi(t) + c_1 \xi(t-1) + c_2 \xi(t-2) + \dots + c_{n_c} \xi(t-n_c)$$

In questo caso, i parametri da stimare sono dati dal vettore:

$$\vartheta = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_{n_a} \ b_1 \ b_2 \ \dots \ b_{n_b} \ c_1 \ c_2 \ \dots \ c_{n_c}]'$$

L'algoritmo che si usa in questi casi è detto *algoritmo ELS* (algoritmo dei minimi quadrati estesi). Ipotizziamo di conoscere come dati i valori di  $u$ ,  $y$  e  $\xi$  negli istanti da 1 ad  $N$ . Possiamo allora costruire il vettore delle osservazioni:

$$\varphi_E(t) = [y(t-1) \ y(t-2) \ \dots \ y(t-n_a) \ u(t-1) \ u(t-2) \ \dots \ u(t-n_b) \ \xi(t-1) \ \xi(t-2) \ \dots \ \xi(t-n_c)]'$$

Avremo così:

$$M: y(t) = \varphi_E(t)' \vartheta + \xi(t)$$

$$\hat{M}: \hat{y}(t) = \varphi_E(t)' \vartheta$$

Applicando poi il metodo LS:

$$\hat{\vartheta}_t = \hat{\vartheta}_{t-1} + k(t) \varepsilon(t)$$

$$k(t) = S(t)^{-1} \varphi_E(t)$$

$$\varepsilon(t) = y(t) - \varphi_E(t)' \hat{\vartheta}_{t-1}$$

$$S(t) = S(t-1) + \varphi_E(t) \varphi_E(t)'$$

Tuttavia, il problema è quello di trovare "in qualche modo" il valore di  $\xi(t)$ , che è stato inizialmente supposto noto ma, essendo un rumore bianco, è nella realtà dei fatti non misurabile. Perciò si procede supponendo:

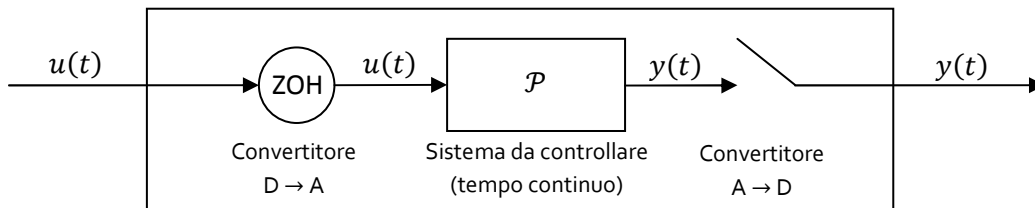
$$\xi(t) = \varepsilon(t)$$

Si noti quindi che si tratta in realtà di un metodo empirico. Questo metodo è anche detto RML (metodo di massima verosimiglianza ricorsiva).

# Il controllo predittivo a minima varianza

## Il controllo digitale

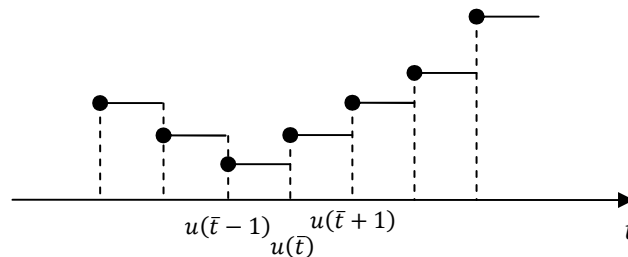
La maggior parte dei sistemi che necessitano di essere controllati nel mondo reale sono sistemi tempo-continui; tuttavia, i controllori utilizzati sono in genere a tempo discreto, come tutti quelli fino ad ora studiati. È necessario perciò introdurre un **sistema a segnali campionati**, che è il sistema a tempo discreto più diffuso al mondo. Tale sistema, rappresentato nella figura seguente, può poi essere descritto mediante un modello ARMA, ARMAX, ...



In tale schema a blocchi si identificano, oltre al sistema  $\mathcal{P}$  da controllare:

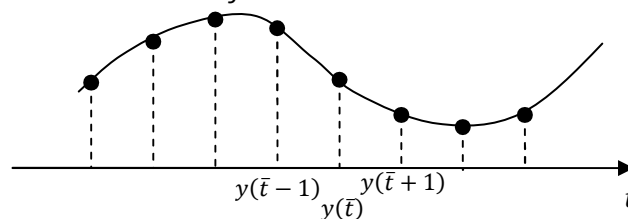
- **Il convertitore digitale analogico**

Si tratta di un dispositivo che, ricevuto un segnale digitale, lo converte in analogico. Tali convertitori possono avere funzionamenti diversi tra loro, ma uno dei più frequenti è quello che prevede semplicemente che il dispositivo mantenga la propria uscita costante al valore  $u(t)$  in tutto l'intervallo di tempo  $[t, t + 1)$ . In questo caso, si parla di convertitore *zero order holder* (ZOH), o di mantenitore di ordine zero.

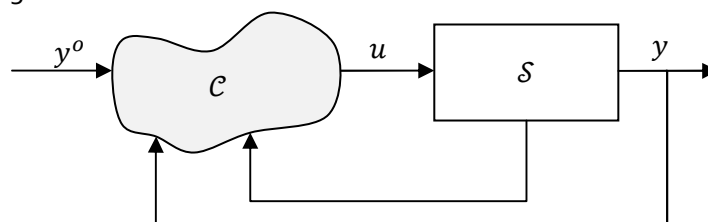


- **Il convertitore analogico digitale**

Il convertitore  $A \rightarrow D$  è un sistema che, ricevuto un segnale analogico, si occupa di campionarlo ad intervalli di tempo regolari, ottenendo così un segnale a tempo discreto. Tale dispositivo è detto più precisamente *campionatore a cadenza uniforme*.



Il sistema a segnali campionati appena descritto deve poi essere inserito in un sistema di controllo, come mostrato nella figura seguente:



Tornando al funzionamento del sistema campionatore-mantenitore, occorre soffermarsi su un problema di particolare rilevanza: per determinare il valore dell'ingresso  $u(k)$ , risulta essere abbastanza ovvio pensare di utilizzare tutti i valori di  $y$  fino a quello rilevato nell'istante  $k$  stesso, ovvero:

$$y(k), y(k-1), y(k-2), \dots$$

Tuttavia, il calcolo di  $y(k)$  richiede l'intervento del campionatore, e quindi, per poter utilizzare tale valore,  $u(k)$  deve in realtà essere emesso con un certo ritardo  $\varepsilon$  rispetto all'istante  $k$  (si noti comunque che nella realtà  $\varepsilon$  potrebbe essere anche molto piccolo).

In ogni caso,  $y(k)$  non potrà dipendere da  $u(k)$ , ma al massimo da  $u(k-1)$ .

## Il controllo predittivo a minima varianza

### Ipotesi di partenza

Ipotizziamo di disporre di un modello ARMAX del sistema a segnali campionati  $\mathcal{S}$  (ottenuto ad esempio per mezzo di un procedimento di identificazione). Tale modello sarà così del tipo:

$$A(z)y(t) = B(z)u(t-1) + C(z)\xi(t)$$

Dove si è supposto che esista un ritardo tra l'ingresso e l'uscita, sulla base dell'osservazione precedente. Avremo quindi:

$$B(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots$$

Dove, se  $b_0 \neq 0$ , il ritardo è di un istante, mentre, se ad esempio  $b_0 = b_1 = 0$  e  $b_2 \neq 0$ , il ritardo è di tre intervalli di tempo, e così via. Indichiamo inoltre:

- Con  $t$  il tempo discreto;
- Con  $k$  il ritardo.

In tal modo, possiamo riscrivere l'equazione nel modo seguente:

$$A(z)y(t) = B(z)u(t-k) + C(z)\xi(t)$$

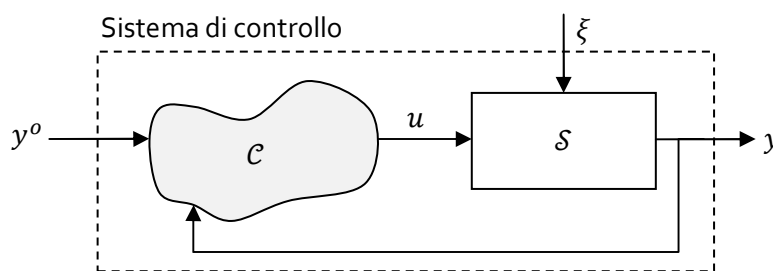
Imponendo  $b_0 \neq 0$ : così viene subito messo in evidenza il ritardo.

E possiamo affermare che il valore di  $u$  all'istante  $t$  ha influenza sul valore di  $y$  a partire dall'istante  $t+k$ .

Ipotizziamo inoltre che  $\xi$  sia un processo stazionario.

### Il sistema di controllo

Il sistema di controllo da realizzare sarà del tipo:



Dove:

$$u(t) = f(\text{segnale di riferimento}, \text{uscita}) = f(y^o, y)$$

Lo scopo del sistema di controllo in figura è quello di:

- Far in modo che il sistema complessivo risulti essere stabile, in modo tale che i disturbi non abbiano un effetto determinante sull'uscita del sistema stesso. In tal caso, l'uscita  $y$  sarà l'uscita di un sistema stabile avente come ingresso un PSS, e perciò anche  $y$  sarà un processo stocastico stazionario.
- Far in modo che l'uscita  $y$  assomigli il più possibile all'ingresso  $y^o$ . Nel caso più semplice (e più frequente), il segnale di riferimento  $y^o$  è costante nel tempo:

$$y^o = \bar{y}^o$$

Tuttavia, è ovvio che non si può agire in maniera diretta sulla variabile  $y$  per ottenere tale risultato, ma è necessario intervenire su  $u$ .

### I principi sui quali si basa il procedimento

- Il risultato precedentemente introdotto non può tradursi in una richiesta di ottenere un'uscita *esattamente* uguale al segnale di riferimento: infatti, non si può in alcun modo ottenere un'uscita costante nel tempo, perché nonostante l'ipotesi precedente sul segnale di riferimento si deve sempre tenere presente l'azione dei disturbi. Perciò, si impone:

$$E[y(t)] = \bar{y}^o$$

- La qualità del sistema di controllo viene misurata valutando la varianza dell'errore tra  $y$  e  $\bar{y}^o$ :

$$J = E[(y(t) - \bar{y}^o)^2]$$

Naturalmente, tale cifra di merito deve essere minimizzata, calcolando cioè:

$$\min J$$

Proprio per questo motivo si parla di *controllo a minima varianza*.

- Siccome però  $u$  agisce su  $y$  con un ritardo pari a  $k$ , potremo esprimere l'uscita  $y(t)$  come somma tra il predittore di  $y$  stessa a  $k$  passi ed il relativo errore di predizione  $\varepsilon$ , ovvero:

$$y(t) = \hat{y}(t|t+k) + \varepsilon(t)$$

La cifra di merito diventa quindi:

$$J = E[(\hat{y}(t|t+k) + \varepsilon(t) - \bar{y}^o)^2]$$

- Siccome sappiamo già che  $\varepsilon(t)$  risulta essere non governabile, il comportamento più ovvio è quello di costruire il sistema di controllo imponendo:

$$\hat{y}(t|t+k) = y(t)$$

Proprio da questa osservazione nasce il termine *controllo predittivo*.

### L'equazione diofantea

Da un punto di vista pratico, la condizione appena ottenuta può essere imposta mediante l'equazione diofantea (detta anche diofantina):

$$C(z) = A(z)E(z) + z^{-k}\tilde{F}(z)$$

Che viene ottenuta semplicemente calcolando la lunga divisione tra  $C(z)$  e  $A(z)$ : si otterrà infatti:

$$\frac{C(z)}{A(z)} = E(z) + z^{-k}\frac{\tilde{F}(z)}{A(z)}$$

Dove  $z^{-k}\tilde{F}(z)$  è semplicemente il resto della lunga divisione a  $k$  passi, nel quale è stato raccolto il fattore  $z^{-k}$ . Per poi ottenere l'equazione diofantea è sufficiente moltiplicare entrambi i membri per  $A(z)$ .

Per individuare i polinomi  $E(z)$  e  $\tilde{F}(z)$ , possiamo anche procedere in altro modo. Partendo dall'equazione che esprime il sistema da controllare  $\mathcal{S}$ :

$$\mathcal{S}: A(z)y(t) = B(z)u(t-k) + C(z)\xi(t)$$

Possiamo moltiplicare entrambi i membri per  $E(z)$ :

$$A(z)E(z)y(t) = B(z)E(z)u(t-k) + C(z)E(z)\xi(t)$$

Aggiungendo e sottraendo al primo membro il termine  $C(z)y(t)$ :

$$A(z)E(z)y(t) + C(z)y(t) - C(z)y(t) = B(z)E(z)u(t-k) + C(z)E(z)\xi(t)$$

Possiamo poi scrivere, con un banale passaggio algebrico:

$$C(z)y(t) = [C(z) - A(z)E(z)]y(t) + B(z)E(z)u(t-k) + C(z)E(z)\xi(t)$$

Da cui, chiamando:

$$z^{-k}\tilde{F}(z) = C(z) - A(z)E(z)$$

Otteniamo l'equazione:

$$C(z)y(t) = \tilde{F}(z)y(t-k) + B(z)E(z)u(t-k) + C(z)E(z)\xi(t)$$

$$y(t) = \frac{\tilde{F}(z)}{C(z)}y(t-k) + \frac{B(z)E(z)}{C(z)}u(t-k) + E(z)\xi(t)$$



In questo modo,  $y(t)$  è espressa come funzione di:

- Un termine

$$\frac{\tilde{F}(z)}{C(z)} y(t-k)$$

Che dipende solamente dal passato di  $y$  fino all'istante  $t-k$ .

- Un termine

$$\frac{B(z)E(z)}{C(z)}$$

Che dipende solamente dal passato di  $u$  fino all'istante  $t-k$ .

- Siccome  $E(z)$  è il risultato della divisione a  $k$  passi tra  $A(z)$  e  $B(z)$ , avremo:

$$E(z) = 1 + e_1 z^{-1} + \dots + e_{k-1} z^{-(k-1)}$$

Quindi, l'ultimo termine è:

$$E(z)\xi(t) = \xi(t) + e_1 \xi(t-1) + \dots + e_{k-1} \xi(t-k+1)$$

Ovvero, si tratta di un termine che è funzione del futuro rispetto all'istante  $t-k$ . Siccome però  $\xi$  è un rumore bianco, tale valore sarà del tutto imprevedibile dal passato.

Dalle precedenti osservazioni, consegue che il predittore ottimo sarà:

$$\hat{y}(t|t-k) = \frac{\tilde{F}(z)}{C(z)} y(t-k) + \frac{B(z)E(z)}{C(z)} u(t-k)$$

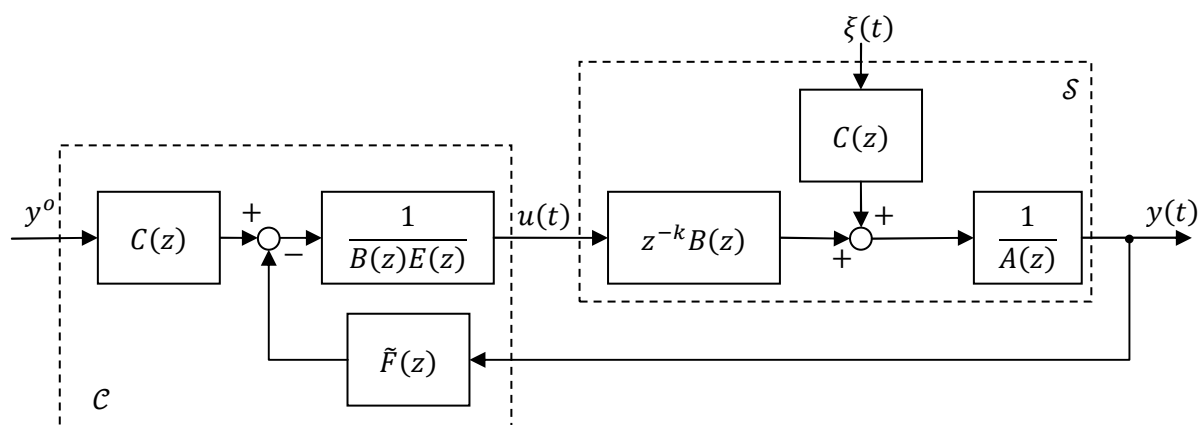
A questo punto, per ottenere il controllore ottimo è sufficiente imporre:

$$\hat{y}(t|t-k) = \bar{y}^o$$

Ovvero:

$$\begin{aligned} \bar{y}^o &= \frac{\tilde{F}(z)}{C(z)} y(t-k) + \frac{B(z)E(z)}{C(z)} u(t-k) \\ C(z)\bar{y}^o &= \tilde{F}(z)y(t-k) + B(z)E(z)u(t-k) \\ u(t-k) &= \frac{1}{B(z)E(z)} [C(z)\bar{y}^o - \tilde{F}(z)y(t-k)] \\ u(t) &= \frac{1}{B(z)E(z)} [C(z)\bar{y}^o - \tilde{F}(z)y(t)] \end{aligned}$$

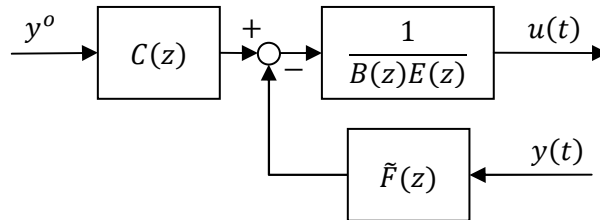
Lo schema a blocchi corrispondente a tale sistema è:



### Procedimento in sintesi

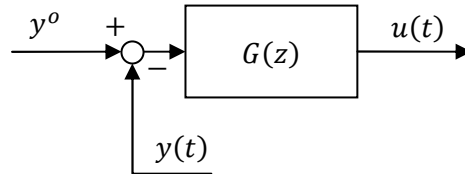
Riassumendo, il procedimento per ottenere il controllore predittivo a minima varianza:

1. Si identifica il modello ARMAX del sistema  $S$  da controllare. Si otterranno così i polinomi  $A(z)$ ,  $B(z)$  e  $C(z)$ , oltre al ritardo  $k$ .
2. Si calcolano  $E(z)$  e  $\tilde{F}(z)$  a partire da  $A(z)$  e  $C(z)$ , mediante il calcolo della lunga divisione a  $k$  passi.
3. Si costruisce il controllore:



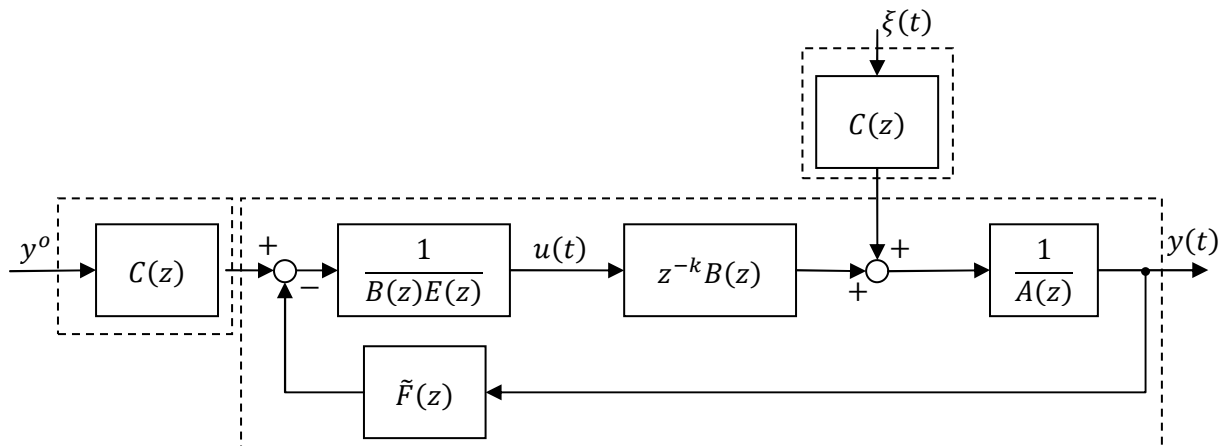
### Osservazioni

1. Il metodo di progetto del controllore appena illustrato è estremamente semplice. Tuttavia, si nota che il controllore progettato con il metodo classico è più semplice, e segue la logica:



Si osserva quindi che il controllore predittivo a minima varianza è più complesso rispetto a quello ottenuto con i metodi tradizionali.

2. Il sistema così ottenuto è stabile. Possiamo infatti verificare che il sistema complessivo:



È stabile se e solo se i tre blocchi in esso evidenziati sono stabili. Siccome si ha:

$$C(z) = 1 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \dots$$

È chiaro che  $C(z)$  sarà un sistema stabile. Rimane perciò da verificare solamente la stabilità dell'anello in retroazione. Siccome in un generico anello con funzione di trasferimento d'anello  $L(z)$  si ha:

$$F(z) = \frac{L(z)}{1 \pm L(z)} = \frac{\frac{N(z)}{D(z)}}{1 \pm \frac{N(z)}{D(z)}} = \frac{N(z)}{D(z) \pm N(z)}$$

Dove si ha il segno  $+$  se la retroazione è negativa, ed il segno  $-$  se è positiva. Il sistema è stabile se e solo se ha le radici del polinomio caratteristico tutte in modulo minori di 1; il polinomio caratteristico è:

$$\Delta(z) = D(z) \pm N(z)$$

Nel nostro caso, abbiamo:

$$L(z) = \frac{1}{B(z)E(z)} z^{-k} B(z) \frac{1}{A(z)} \tilde{F}(z) = \frac{z^{-k} B(z) \tilde{F}(z)}{B(z)E(z)A(z)}$$

Siccome poi la retroazione è negativa:

$$\Delta(z) = z^{-k} B(z) \tilde{F}(z) + B(z)E(z)A(z) = B(z)C(z)$$

In conclusione, il sistema è sicuramente stabile se  $B(z)$  e  $C(z)$  hanno le loro radici in modulo minori di 1. Se la fattorizzazione è spettrale, allora  $C(z)$  rispetterà certamente la condizione. La condizione riguardante  $B(z)$  risulta invece più restrittiva, e non sempre sarà verificata.

Siccome le radici di  $B(z)$  sono gli zeri del sistema da controllare, possiamo affermare che è possibile applicare il controllo predittivo a minima varianza solo nel caso in cui il sistema di partenza sia a sfasamento minimo.

3. Se calcoliamo la funzione di trasferimento del sistema a controllo di minima varianza da  $y^o$  a  $y$ , otteniamo:

$$S(z) = z^{-k}$$

Osserviamo perciò che, trascurando l'effetto del rumore, si ha:

$$y(t) = y^o(t - k)$$

Naturalmente, questo risultato è eccellente (il migliore che si possa desiderare). Tuttavia, il prezzo da pagare è dato da valori di  $u$  eccessivamente elevati (si dice che *l'energia del controllo* è troppo elevata), che rendono in molti casi inapplicabile questo metodo. Inoltre, a seguito dell'eccessiva energia di controllo, le variabili di stato possono assumere valori molto elevati, che fisicamente non possono essere raggiunti.

## Segnale di riferimento variabile nel tempo

Fino ad ora abbiamo ipotizzato che il segnale di riferimento  $y^o$  sia costante nel tempo. Tuttavia, non sempre è così, e talvolta esso deve essere rappresentato come una funzione  $y^o(t)$ . In questo caso, la cifra di merito deve naturalmente essere modificata in:

$$J = E \left[ (y(t) - y^o(t))^2 \right]$$

Dove, come noto, esiste un ritardo di  $k$  passi tra l'ingresso  $u$  e l'uscita  $y$ . Per minimizzare tale quantità, a patto di conoscere la predizione di  $y^o$ , possiamo imporre:

$$\hat{y}(t|t - k) = \hat{y}^o(t|t - k)$$

Nel caso invece in cui non si possa predire la grandezza di riferimento  $y^o$ , non si potrà fare altro che imporre:

$$\hat{y}(t|t - k) = y^o(t - k)$$

Siccome questa situazione si verifica spesso, molti libri definiscono sin dall'inizio la cifra di merito come:

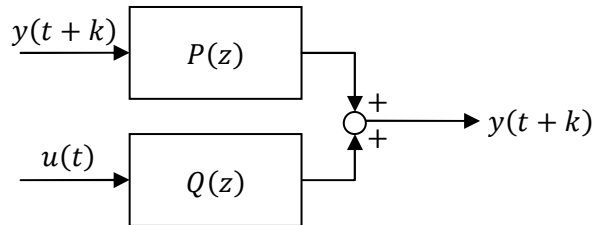
$$J = E \left[ (y(t) - y^o(t - k))^2 \right] = E \left[ (y(t + k) - y^o(t))^2 \right]$$

## Controllo predittivo a minima varianza generalizzato (GMV)

Per risolvere il problema dell'eccessiva energia di controllo, il metodo del controllo predittivo a minima varianza viene modificato nel metodo GMV (metodo di controllo a minima varianza generalizzato), il quale prevede che si tenga conto dell'energia di controllo per mezzo di una cifra di merito del tipo:

$$J = E \left[ (y_G(t+k) - y^o(t))^2 \right]$$

Dove  $y_G(t+k)$  è generato come mostrato nella figura seguente:



I polinomi  $P(z)$  e  $Q(z)$  possono essere scelti arbitrariamente dal progettista. Nel caso particolare:

$$P(z) = 1$$

$$Q(z) = 0$$

Si ottiene nuovamente il controllo a minima varianza, come descritto nei precedenti paragrafi.

## Scelta della complessità

Fino ad ora è sempre stata considerata valida l'assunzione secondo la quale si conosce anticipatamente il tipo di modello in gioco; tuttavia, è necessario considerare anche il problema che consiste nell'individuare quali e quanti sono i parametri da introdurre, ovvero qual è la complessità del modello. Tale problema, come al solito, dovrà essere risolto partendo solo dalla conoscenza dei dati.

### L'idea di base

In altri termini, utilizzando solamente i dati raccolti sul sistema reale, vogliamo scegliere qual è il modello  $ARX(n_a, n_b)$  che lo rappresenta, ovvero vogliamo individuare i valori di  $n_a$  e di  $n_b$ . Possiamo pensare di scegliere varie combinazioni di valori diversi tra loro, come ad esempio:

$$ARX(1, 1)$$

$$ARX(1, 2)$$

$$ARX(2, 1)$$

$$ARX(2, 2)$$

...

Eseguendo il procedimento di identificazione sulla base di ciascuna delle famiglie di modelli così individuate. Trovato il modello migliore per ogni famiglia, possiamo pensare di eseguire un confronto tra i risultati ottenuti, in modo da poter stabilire quale tra questi abbia il comportamento migliore.

### Esempio

Se ad esempio consideriamo il processo:

$$y(t) = 1,2y(t-1) - 0,32y(t-2) + u(t-1) + 0,5u(t-2) + \eta(t), \quad \eta(t) \sim WN(0,1), \quad u(t) \sim WN(0,1)$$

Ed eseguiamo i vari calcoli, otteniamo i seguenti risultati:

Famiglia di modelli	Parametri calcolati	Incertezze	Test di Anderson sul rumore	Cifra di merito $J$
$ARX(1,1)$	$\hat{a} = 0,952$	0,6%	Non verificato	$J = 3,864$
	$\hat{b} = 0,975$	2,3%		
$ARX(2,2)$	$\hat{a}_1 = 1,20$	2%	Verificato	$J = 0,998$
	$\hat{b}_1 = 0,984$	1%		
	$\hat{a}_2 = 0,32$	3%		
	$\hat{b}_2 = 0,485$	3%		
$ARX(3,3)$	$\hat{a}_1 = 1,19$	2%	Verificato	$J = 0,997$
	$\hat{b}_1 = 0,93$	1%		
	$\hat{a}_2 = -0,29$	10%		
	$\hat{b}_2 = 0,494$	5%		
	$\hat{a}_3 = -0,019$	68%		
	$\hat{b}_3 = -0,016$	120%		

Si nota così che la diminuzione della cifra di merito nel passaggio dalla famiglia  $ARX(2,2)$  alla famiglia  $ARX(3,3)$  è di entità quasi trascurabile, a scapito di un aumento massiccio dell'incertezza dei nuovi parametri calcolati, che risultano essere molto vicini a zero. Si capisce quindi anche intuitivamente che in questo caso la complessità dell' $ARX(3,3)$  è eccessiva, e quindi si dovrà scegliere un modello  $ARX(2,2)$ . Tuttavia, questo è solamente un esempio: nella maggior parte dei casi, la situazione non risulta essere così chiara e semplice.

## Crossvalidazione

A questo punto è necessario eseguire un'ulteriore critica al modo di procedere fino ad ora illustrato. La cifra di merito utilizzata è infatti:

$$J = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varepsilon_{\vartheta}(t)^2$$

Dove  $\varepsilon_{\vartheta}(t)$  è l'errore di predizione del modello definito dal vettore dei parametri  $\vartheta$ ; abbiamo poi minimizzato tale cifra, calcolando:

$$\hat{\vartheta}_N = \min_{\vartheta} J$$

E considerando come modello ottimo  $M(\hat{\vartheta}_N)$ . Come si nota anche dal precedente esempio, all'aumentare della complessità del modello adottato, la cifra di merito  $J$  del modello stesso non può fare altro che diminuire, indicando così una sempre maggiore aderenza al sistema reale. Tale andamento monotono nasconde però un problema. Abbiamo infatti:

$$\varepsilon_{\hat{\vartheta}_N}(t) = y(t) - y_{\hat{\vartheta}_N}(t)$$

Dove  $y_{\hat{\vartheta}_N}(t)$  è la predizione fatta sulla base del modello stimato, e non sulla base del sistema vero. Questo significa che il criterio per valutare la qualità del modello si basa in realtà sugli stessi dati che vengono usati per eseguire l'identificazione stessa, e ciò rappresenta ovviamente un problema concettuale.

Una possibile soluzione a questo problema consiste semplicemente nel dividere i dati in due diversi blocchi, uno da utilizzarsi per eseguire l'identificazione, ed uno da utilizzarsi per la valutazione della sua qualità (ovvero il calcolo di  $J$ ). Questi ultimi dati vengono anche detti *di validazione*.

In questo modo l'andamento di  $J$  non sarà necessariamente monotono non crescente rispetto all'aumento di complessità. Questo modo di procedere è anche detto crossvalidazione.

## Valutazione della bontà oggettiva di un modello a partire dalla valutazione soggettiva

### Il criterio FPE

Un'alternativa rispetto alla crossvalidazione, che consenta di non "sprecare" alcuni dei dati raccolti, è la valutazione della bontà oggettiva di un modello a partire dalla valutazione soggettiva, che viene eseguita valutando l'errore di predizione sugli stessi dati usati per l'identificazione stessa. Questo modo di procedere è dovuto al ricercatore giapponese Akaike.

Il nostro obiettivo è quello di calcolare la quantità:

$$\bar{J} = E \left[ (y(t) - \hat{y}_\theta(t))^2 \right] = E_s \left[ (y(t, s) - \hat{y}_\theta(t, s))^2 \right]$$

Dove  $\hat{y}_\theta$  è la predizione ottenuta sulla base del sistema vero, e non sulla base del modello ottenuto. Questa quantità indica perciò la bontà media del modello, calcolata su tutte le possibili stringhe di dati.

Inoltre, fino ad ora abbiamo sempre stimato i parametri con il vettore  $\hat{\theta}_N$ , ottenuto minimizzando la cifra di merito  $J$ ; tuttavia, anche  $\hat{\theta}_N$  dipende dal caso, ovvero dalle stringhe di dati che si è scelto di utilizzare per eseguire l'identificazione stessa. Possiamo quindi scrivere:

$$\hat{\theta}_N(s)$$

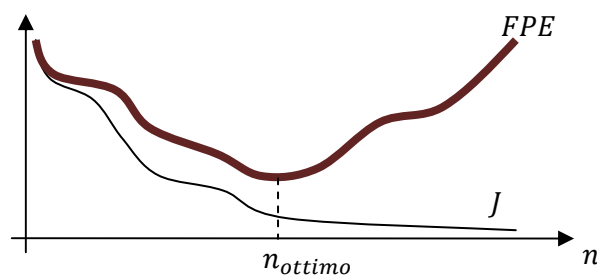
E calcolare il *final prediction error*:

$$FPE = E \left[ J(\hat{\theta}_N(s)) \right]$$

Che rappresenta l'adesione media (a tutte le possibili stringhe di dati) di tutti i modelli che possono essere stimati a partire dalle stringhe dei dati. Si nota perciò che questa quantità non dipende dal caso. Inoltre, si può dimostrare che vale l'uguaglianza:

$$FPE = \frac{N + n}{N - n} J$$

Ovvero, la valutazione oggettiva  $FPE$  viene ottenuta partendo dalla valutazione soggettiva  $J$ , semplicemente moltiplicando questa quantità per una costante che dipende dal numero di dati  $N$  e dal numero di parametri del modello  $n$ . In questo modo, si crea uno "svantaggio" per tutti quei modelli che hanno elevata complessità, con un andamento che non sarà più monotono, ma che avrà un minimo, il quale ci consente di calcolare qual è la complessità ottima del sistema, come mostrato nel grafico seguente (ottenuto considerando costante il numero  $N$  di dati a disposizione):



### Il criterio AIC

Un altro possibile criterio è noto come Akaike Information Criterion. Il criterio dell'informazione di Akaike prevede che la valutazione oggettiva si calcoli mediante la formula:

$$AIC = 2 \frac{n}{N} + \ln J$$

### **Il criterio MDL**

Infine, un altro dei molti possibili metodi è il criterio *Minimal Description Length*, simile ai precedenti ma ottenuto sulla base di studi algoritmici e non sulla base della teoria della statistica. La valutazione oggettiva viene in questo caso calcolata come:

$$MDL = \ln J + (\ln N) \frac{n}{N}$$

### **Confronto tra i vari metodi**

- Si nota che i criteri FPE ed AIC, con un elevato numero di dati  $N$ , portato allo stesso risultato. Infatti:

$$\ln FPE = \ln \left( \frac{N+n}{N-n} J \right) = \ln \left( \frac{N+n}{N-n} \right) + \ln J = \ln \frac{1 + \frac{n}{N}}{1 - \frac{n}{N}} + \ln J = \ln \left( 1 + \frac{n}{N} \right) - \ln \left( 1 - \frac{n}{N} \right) + \ln J$$

Come noto dall'Analisi Matematica:

$$\text{Per } x \rightarrow 0: \quad \ln(1+x) \sim x$$

E, se  $N \gg n$ , allora  $\frac{n}{N} \rightarrow 0$ , perciò:

$$\ln FPE \cong \frac{n}{N} - \left( -\frac{n}{N} \right) + \ln J = 2 \frac{n}{N} + \ln J = AIC$$

- Il metodo MDL risulta invece essere più "parsimonioso" rispetto ai precedenti: in altri termini, tende a suggerire una complessità ottima leggermente inferiore rispetto agli altri due metodi, specialmente se il numero di dati a disposizione non è molto elevato. Il metodo MDL viene solitamente preferito agli altri quando si dispone di un numero di dati molto elevato.