Appendice A IL RUMORE E LA SUA CARATTERIZZAZIONE

Si considera qui in particolare la descrizione del rumore di origine interna che s'incontra inevitabilmente nei circuiti costituenti i sistemi di trasmissione. Per quanto riguarda i rumori di origine esterna, essi possono essere di svariatissima natura a seconda della particolare situazione, potendo essere per esempio radiazioni provenienti dal mondo fisico esterno ma anche segnali spuri e interferenze provenienti da altri apparati e sistemi, di comunicazione e più in generale elettrici.

Nei circuiti e dispositivi elettronici ci sono sempre fluttuazioni casuali di corrente o tensione legate alla struttura fisica. I fenomeni principali che generano tale "rumore" sono il moto casuale di origine termica degli elettroni nei conduttori (rumore termico), e le fluttuazioni di corrente nei dispositivi elettronici dovute al fatto che il flusso di corrente è in realtà un flusso discreto di cariche, quindi il risultato della somma di impulsi elementari di corrente distribuiti casualmente nel tempo.

Nel caso del rumore termico, il moto casuale degli elettroni in un conduttore dà fluttuazioni casuali di tensione o di corrente, chiaramente a valor medio nullo. Lo studio della fisica del fenomeno consente di determinarne la densità spettrale di potenza, che risulta essere costante almeno per frequenze non troppo elevate. Si ricava per esempio che lo spettro di potenza (bilaterale) della tensione ai capi di un resistore di resistenza R è dato da

$$S_n(f) = 2KTR \quad \text{per } f << \frac{KT}{h} \qquad \text{[A.1]}$$

essendo K la costante di Boltzmann pari a $1{,}38 \cdot 10^{-23}$, h la costante di Planck pari a $6{,}63 \cdot 10^{-34}$, e T è la temperatura assoluta in gradi Kelvin. Si osservi che a temperatura ambiente, nelle bande fino alle massime frequenze radio in pratica usate, la [A.1] è senz'altro verificata. Alle frequenze ottiche, e quindi per esempio nei sistemi a fibra ottica, che usano lunghezze d'onda inferiori a 2 micron, generalmente il rumore termico è trascurabile. Un resistore R può quindi essere rappresentato mediante un circuito equivalente costituito da un resistore ideale R in serie con un generatore di tensione (di rumore) V_n, il cui valore quadratico medio è

$$E[V_n^2] = 4KTBR$$

essendo B la banda del sistema di misura.

La potenza di rumore *disponibile* è quindi pari a *KTB*. Intendiamo come potenza disponibile la massima potenza trasferibile su un carico; tale massimo trasferimento si verifica, come è noto, quando l'impedenza del carico è adattata all'impedenza interna del generatore, e cioè in questo caso è pari a *R*. Infine, poiché il rumore termico nasce dalla sovrapposizione di un grande numero di eventi elementari indipendenti, per il teorema del limite centrale esso risulta essere un processo gaussiano.

Il rumore elettronico ("shot") compare nei dispositivi elettronici o fotoelettronici per fenomeni legati alla natura discreta del flusso di particelle che costituisce una corrente elettrica. Anche se il valor medio del flusso è costante, si ha una fluttuazione casuale della corrente attorno al valor medio. Se si considera per esempio un diodo a vuoto, si può dire che la corrente è la somma di impulsi di corrente, prodotti dai singoli elettroni emessi con legge casuale dal catodo e raccolti dall'anodo. Un fenomeno analogo avviene in un fotodiodo, cioè un dispositivo che trasforma un segnale di natura ottica al suo ingresso in un segnale di corrente elettrica proporzionale alla potenza istantanea del segnale ottico. La luce incidente consiste di un flusso discreto di fotoni dispersi casualmente nel tempo, e in corrispondenza dell'arrivo di tali fotoni vengono generati in uscita impulsi di corrente.

Per entrambi i casi sopra menzionati possiamo dire che la sequenza temporale degli impulsi e la corrente in uscita possono essere rappresentati rispettivamente con i processi casuali (*fig. A.1*)

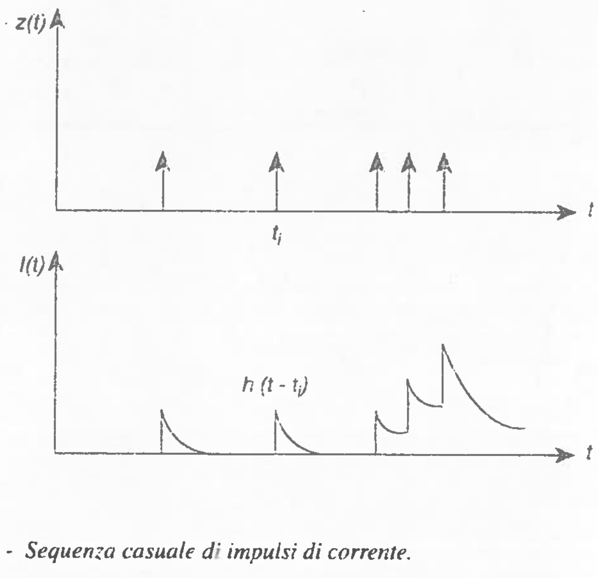

Figura A.1 - Sequenza casuale di impulsi di corrente.

$$z(t) = \Sigma_i \delta(t - t_i) \ ; \ I(t) = \Sigma_i h(t - t_i). \qquad [A.2]$$

t_i rappresenta la posizione temporale casuale degli impulsi elementari di corrente e $h(t)$ la forma dell'impulso di corrente elementare, che sarà dipendente dalle caratteristiche circuitali. Per la distribuzione casuale degli impulsi nel tempo, si può assumere che essa obbedisca alla legge di Poisson. Tale legge regola, come è noto, moltissimi processi fisici casuali in cui gli eventi (nel nostro caso gli impulsi elementari di corrente) si susseguono nel tempo in modo puramente casuale senza dipendenze statistiche di sorta. Ciò significa che, se λ è il numero medio di impulsi di corrente nell'unità di tempo, la probabilità che in un intervallo T ci siano $x = k$ impulsi è data da

$$P(x = k) = e^{-\lambda T} \frac{(\lambda T)^k}{k!} \ ; \ E[x] = \lambda T \ ; \ \sigma^2 = \lambda T$$

dove il valor medio e la varianza di x sono dati entrambi da λT.

Possiamo caratterizzare i processi $z(t)$ e $I(t)$ con la funzione di autocorrelazione $R(\tau)$ o con la densità spettrale di potenza $S(f)$. Si ha (si veda per esempio Papoulis)

$$R_z(\tau) = \lambda^2 + \lambda\delta(\tau) \ ; \ S_z(f) = \lambda^2\delta(f) + \lambda \qquad [A.3]$$

come del resto è intuibile considerando che il valor medio di $z(t)$ è pari a λ. Si ha cioè una componente continua λ ed uno spettro bianco di densità λ. Se la trasformata di Fourier dell'impulso di corrente $h(t)$ è $H(f)$, si ha per lo spettro di potenza della corrente $I(t)$ dalle [A.2] e [A.3]

$$S_I(f) = \lambda^2 |H(0)|^2\delta(f) + \lambda |H(f)|^2.$$

Vi è una componente continua di corrente data da $I_0 = \lambda H(0) = \lambda \int h(\tau) d\tau = \lambda q$, essendo q il valore della carica elettrica elementare pari a $1{,}59 \cdot 10^{-19}$ coulomb, ed una fluttuazione I_N che ha spettro di potenza pari a $\lambda |H(f)|^2$. Ciò risulta chiaro se si osserva che λ è il numero medio di impulsi al secondo e $|H(f)|^2$ rappresenta lo spettro di energia dell'impulso elementare.

La potenza della componente di rumore I_N è allora

$$\sigma^2 = \lambda \int |H(f)|^2 df = \lambda \int h^2(t) dt$$

mentre la sua densità spettrale attorno alla frequenza nulla è data da

$$\lambda |H(0)|^2 = \lambda q^2 = I_0 q.$$

Poiché generalmente gli impulsi elementari di corrente sono estremamente brevi, il rumore avrà spettro a banda molto larga (ordine di grandezza pari all'inverso della durata dell'impulso); in tale banda possiamo considerarlo bianco con densità (bilaterale) pari a $I_0 q$. Pertanto la potenza di questo rumore in un sistema di banda B sarà data da

$$E[I_N^2] = 2qI_0B.$$

In definitiva avremo in uscita una corrente media (il segnale utile) più una fluttuazione casuale (rumore) con densità spettrale di potenza proporzionale alla corrente media.

Infine si osservi che per valori elevati di λ, essendo la fluttuazione di corrente dovuta alla somma di un gran numero di eventi casuali indipendenti, si può invocare il teorema del limite centrale e quindi considerare il rumore come un processo gaussiano.

La "temperatura" di rumore

Il rumore complessivo all'uscita di un dato circuito lineare può evidentemente essere calcolato sommando in uscita tutti i contributi prodotti dalle sorgenti di rumore (termico, elettronico) presenti a monte dell'uscita del circuito.

Per caratterizzare la "rumorosità" del circuito, si usa spesso il concetto di *temperatura di rumore* del circuito. Si descrive cioè il rumore totale come se fosse generato da un resistore, posto all'ingresso del circuito, ad una temperatura "equivalente" T_r, espressa in gradi Kelvin. Se cioè la densità spettrale di potenza (unilaterale) del rumore totale, riferita all'ingresso, è pari a N_0, diremo che il circuito ha temperatura di rumore T_r, essendo $N_0 = KT_r$. Assumiamo qui per semplicità che la densità del rumore sia costante (rumore bianco), ma il discorso può essere esteso al caso più generale in cui la densità sia una funzione qualsiasi della frequenza. Questa descrizione è di uso corrente nell'analisi dei sistemi di comunicazione perturbati da rumore bianco di origine termica ed elettronica. Ovviamente la temperatura di rumore di un circuito potrà in una certa misura essere collegata alla temperatura fisica, in quanto questa determina i valori del rumore di origine termica, ma essa conglobera anche gli effetti di altre sorgenti di rumore eventualmente presenti.

Si pensi per esempio, in un sistema di comunicazione radio, al ricevitore, tipicamente costituito da un'antenna seguita da un amplificatore, che porta il livello del segnale ricevuto a valori sufficientemente alti da consentire un buon funzionamento dei circuiti di demodulazione. Potremo descrivere l'amplificatore dal punto di vista del rumore dandone la temperatura di rumore T_e: se la banda dell'amplificatore è B e il suo guadagno in potenza è G, ciò vuol dire che la potenza totale di rumore che ritroviamo all'uscita dell'amplificatore è pari a GKT_eB. Analogamente potremo anche definire una temperatura di rumore T_a

dell'antenna, intendendo con questo che il rumore che l'antenna capta dall'esterno è espresso come KT_a (densità spettrale di potenza). Se poi consideriamo l'intero sistema costituito dall'antenna e dall'amplificatore, possiamo dire che la temperatura di rumore equivalente di questo sistema è $T_e + T_a$.

In generale occorre considerare gli effetti del rumore in particolare nei circuiti d'ingresso dei ricevitori, poiché in essi il segnale utile si trova di solito a livelli bassi, tali che il rumore non può essere trascurato.

Temperatura di rumore per una cascata di circuiti

Un sistema di ricezione è in genere costituito da una cascata di circuiti. Consideriamo per esempio una cascata di doppi bipoli ciascuno caratterizzato, agli effetti del rumore, da un guadagno di potenza G_i e da una temperatura di rumore T_i. La densità di potenza di rumore generata nel circuito i-esimo, e riportata al suo ingresso, può essere indicata come KT_i e darà luogo all'uscita del sistema ad una densità di potenza

$$KT_i G_i G_{i+1} G_{i+2} \ldots$$

Se vogliamo riferire tutto all'ingresso dell'intero sistema, possiamo pensare a tale rumore come prodotto da una sorgente equivalente posta all'ingresso del sistema, e di densità spettrale di potenza

$$\frac{KT_i}{G_{i-1} \ldots G_2 G_1}$$

Se consideriamo ora l'insieme dei circuiti costituenti il sistema (*fig. A.2*), possiamo pensare il rumore complessivo all'uscita del sistema come prodotto da un'unica sorgente di rumore posta all'ingresso e con temperatura di rumore equivalente

$$T_1 + \frac{T_2}{G_1} + \frac{T_3}{G_1 G_2} + \ldots \qquad \text{[A.4]}$$

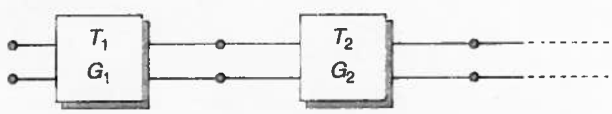

Figura A.2 - Circuiti del ricevitore in cascata (T_i e G_i sono rispettivamente temperatura di rumore e il guadagno di potenza disponibile per il circuito i-esimo).

Appare quindi chiaro come nei ricevitori con segnale d'ingresso a basso livello sia di grande importanza fare in modo che soprattutto la temperatura di rumore dell'amplificatore d'ingresso del ricevitore sia sufficientemente bassa. Infatti se il guadagno di tale amplificatore è sufficientemente alto, i contributi degli stadi successivi alla temperatura equivalente totale del ricevitore diventano trascurabili, per la [A.4], rispetto al rumore generato nel primo stadio.

Per esempio nelle trasmissioni radio a grande distanza dove la potenza di segnale ricevuta è piccolissima, lo stadio d'ingresso del ricevitore, immediatamente in cascata all'antenna ricevente, è un preamplificatore a basso rumore. Per rendere minima la temperatura equivalente di rumore, esso potrà essere raffreddato fino a temperature estremamente basse (pochi gradi Kelvin). In questo caso la temperatura di rumore del ricevitore è data dalla somma della temperatura di rumore dell'antenna, che rappresenta il rumore generato dalle radiazioni dei corpi esterni e captato dall'antenna, e della temperatura di rumore del preamplificatore.