Capitolo 3

LA TRASMISSIONE NUMERICA DI SEGNALI ANALOGICI

Premessa

La tendenza a rappresentare in forma numerica anche l'informazione originariamente di tipo analogico è giustificata da molti fattori tra cui citiamo i principali:

- l'uso nelle reti di comunicazione di una forma comune, tipicamente quella numerica binaria, per tutti i tipi di informazione si presenta chiaramente vantaggiosa sotto molti aspetti, dovendo la rete trattare in questo caso un unico tipo di segnale sia per la trasmissione sia per la commutazione del traffico;
- gli sviluppi dei dispositivi elettronici integrati rendono disponibili e poco costose grandi potenzialità di elaborazione numerica dei segnali;
- con i segnali in forma numerica si può ottenere maggiore protezione contro i disturbi presenti in trasmissione, ed eventuali operazioni di crittografia, se necessarie, risultano più semplici.

La grande varietà di sorgenti e applicazioni rende molto ampio lo spettro degli schemi per la codificazione numerica efficiente di sorgenti analogiche, e qui potremo considerare solo i principi e le tecniche fondamentali.

La trasformazione numerica di segnali analogici è resa possibile dal teorema del campionamento, che sommariamente richiamiamo.

Se si campiona un segnale analogico $s(t)$ con spettro $S(f)$ confinato in una banda limitata B, con una frequenza di campionamento pari almeno al doppio della sua banda, non si perde alcuna informazione: il segnale analogico è cioè perfettamente ricostruibile dai suoi campioni $s(nT_c)$ prelevati ad una frequenza $f_c=\frac{1}{T_c}>2B$. Ciò si può vedere semplicemente osservando per esempio lo spettro del segnale dopo campionamento. La sequenza di campioni $[s(nT_c)]$ che si ottiene usando per il campionamento impulsi ideali (di Dirac) $\delta(t-nT_c)]$, può essere espressa come

$$s_c(t)=s(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_c) \qquad [3.1]$$

Nel dominio delle frequenze, lo spettro $S_c(f)$ del segnale campionato $s_c(t)$ è dato da

$$S_c(f) = S(f) * \frac{1}{T_c}\Sigma_n \delta\left(f-\frac{n}{T_c}\right) = \frac{1}{T_c}\Sigma_n S\left(f-\frac{n}{T_c}\right)$$

poiché lo spettro della sequenza periodica di impulsi di campionamento è costituito da una serie di funzioni di Dirac sulle frequenze nf_c (*fig. 3.1a*).

Dalla figura si vede subito che se $f_c > 2B$, è possibile ricostruire il segnale originario $s(t)$ dal segnale campionato $s_c(t)$: basta filtrare $s_c(t)$ con un filtro passabasso ideale di banda B. Questa operazione di ricostruzione equivale nel dominio del tempo, se $f_c = 2B$, alla relazione

$$s(t) = \Sigma_n s\left(\frac{n}{2B}\right)\frac{\sin[2\pi Bt - n\pi]}{2\pi Bt - n\pi}$$

poiché la risposta impulsiva di un filtro passabasso ideale di banda B è data da $\frac{\sin 2\pi Bt}{2\pi Bt}$. Chiaramente, se $f_c < 2B$, le copie dello spettro $S(f)$ traslate sulle armoniche nf_c vanno a sovrapporsi, nello spettro $S_c(f)$, con lo spettro originario $S(f)$. Ne risulta che non è più possibile separare lo spettro originario $S(f)$ a causa di questa interferenza ("aliasing"). Il segnale $s(t)$ non può in questo caso essere ricostruito esattamente, avendo il processo di campionamento distrutto informazione.

Si osservi che nelle considerazioni precedenti si è assunto che il segnale $s(t)$, di banda limitata e quindi di durata non limitata, abbia energia finita e sia quindi dotato di spettro di Fourier. Si può dimostrare però che il teorema continua in pratica a valere anche per processi di potenza finita. Per i segnali in banda passante (si veda l'appendice B), questi possono essere rappresentati in base alle loro componenti in banda base (in fase e in quadratura), e quindi si può ancora fare riferimento al campionamento in banda base.

NOTA

Campionamento non ideale

In pratica gli impulsi di campionamento non saranno ideali. Consideriamo per esempio il caso in cui, nella [3.1], gli impulsi di campionamento siano rettangolari con durata τ, anziché funzioni di Dirac. Si vede facilmente (lasciamo al lettore la verifica) che un filtraggio ideale è ancora in grado di ricostruire esattamente il segnale originario; rispetto al caso ideale, variano solamente le ampiezze delle armoniche nella serie di Fourier che rappresenta la sequenza degli impulsi di campionamento.

Se invece il segnale campionato viene costruito "mantenendo", per un certo intervallo τ, i campioni istantanei $s(nT_c)$ (*fig. 3.1b*), si ha che lo spettro originario $S(f)$ viene distorto. Infatti tale costruzione equivale a far passare i campioni ideali (di Dirac) $s(nT_c)\delta(t-nT_c)$ in un filtro con risposta impulsiva rettangolare di durata τ, e quindi con una funzione di trasferimento

$$\tau\,\frac{\sin \pi f\tau}{\pi f\tau}\,e^{-j\pi f\tau}$$

Tale distorsione andrà compensata all'atto della ricostruzione del segnale originario.

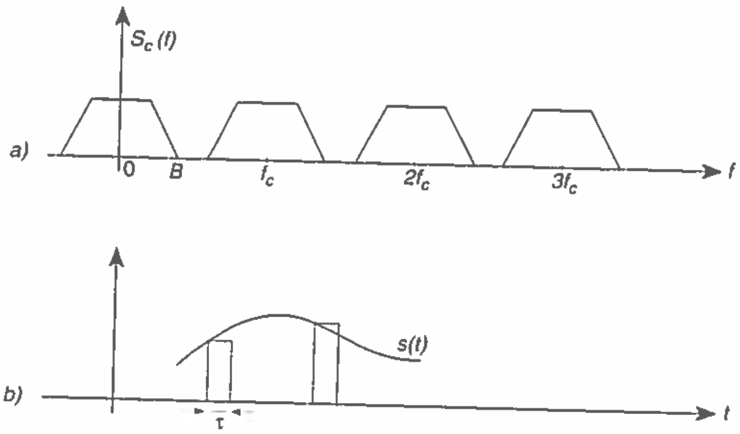

Figura 3.1 - a) Spettro di segnale analogico campionato.
b) Campionamento con mantenimento dei campioni.

3.1. LA TRASMISSIONE NUMERICA DI SEGNALI ANALOGICI: LA MODULAZIONE IMPULSIVA CODIFICATA (PCM)[1]

Si è visto che i segnali analogici, di banda limitata B, possono essere convertiti in forma numerica attraverso l'operazione di campionamento. Questa trasforma il segnale variabile continuamente nel tempo in una sequenza, discreta nel tempo, di campioni. Il segnale è a questo punto rappresentato con una sequenza di campioni, ancora continui nella loro ampiezza, che potrebbero essere trasmessi con un'opportuna forma d'onda impulsiva $g(t)$, modulata in ampiezza secondo il valore dei campioni. Per rendere il segnale completamente numerico, occorre discretizzare anche le ampiezze dei campioni. Queste possono essere "quantizzate": i possibili valori (in numero infinito) dell'ampiezza dei campioni vengono ridotti ad un numero finito M di livelli (*fig. 3.2*), approssimando il valore di ciascun campione con il livello, tra gli M pos-

[1] PCM: Pulse Code Modulation (Reeves, 1937).

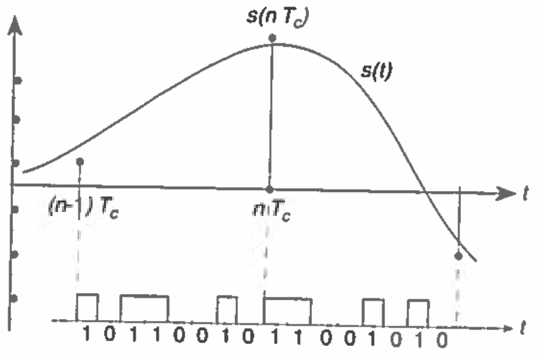

Figura 3.2 - Campionamento, quantizzazione e codificazione nei sistemi PCM.

sibili, che gli è più vicino. In tal modo si introduce inevitabilmente un errore di quantizzazione, che potrà essere mantenuto al di sotto del limite accettabile usando un numero M di livelli sufficientemente alto. Si noti anche che sarebbe inutile cercare di mantenere la precisione nelle ampiezze al di là di un certo limite, perché il rumore che s'incontra sul canale di trasmissione genera in ogni caso una certa imprecisione.

I campioni quantizzati possono poi essere codificati in forma binaria, con caratteri di $\log_2 M$ bit, per esempio usando la rappresentazione aritmetica binaria corrispondente agli interi $0,1,2,\ldots,M-1$: si ha così il sistema di modulazione impulsiva codificata denominato PCM (Pulse Code Modulation) che costituisce la tecnica di base per la trasmissione numerica di informazione analogica (*fig. 3.3*). In ricezione, la ricostruzione del segnale analogico avviene decodificando anzitutto i caratteri binari nei relativi campioni quantizzati, quindi facendo passare la sequenza dei campioni in un filtro passabasso di banda B. Questo restituisce in uscita lo spettro nella banda B, e quindi il segnale analogico originario, a meno naturalmente di un certo errore dovuto alla quantizzazione, ed eventualmente di errori commessi in ricezione per effetto del rumore di canale.

La quantizzazione è uniforme se l'intervallo di variazione dell'ampiezza dei campioni, compreso tra $-V$ e $+V$, è suddiviso in intervalli di quantizzazione ("quanti") tutti eguali di ampiezza $\Delta = \frac{2V}{M}$. L'errore quadratico medio che si produce nella quantizzazione $E[\epsilon^2]$ dipenderà dalla distribuzione probabilistica dell'ampiezza dei campioni. Se questa è distribuita uniformemente, l'errore ϵ sarà distribuito unifor-

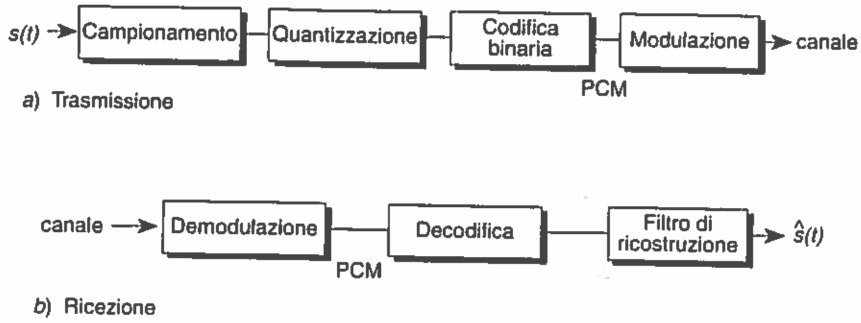

Figura 3.3 - Schema a blocchi di un sistema PCM.

memente tra i valori $-\frac{\Delta}{2}, +\frac{\Delta}{2}$ con densità di probabilità pari a $\frac{1}{\Delta}$, e la potenza del rumore di quantizzazione sarà quindi

$$P_Q = E[\epsilon^2] = \frac{1}{\Delta}\int \epsilon^2 d\epsilon = \frac{\Delta^2}{12} = \frac{V^2}{3M^2} \qquad [3.2]$$

Per il calcolo del rapporto segnale-rumore di quantizzazione, si consideri che nel caso di distribuzione uniforme delle ampiezze tra $+V$ e $-V$, il valore quadratico medio dell'ampiezza risulta pari a $\frac{V^2}{3}$. Pertanto per la [3.2] il rapporto segnale-rumore di quantizzazione è

$$\frac{P_S}{P_Q} = M^2$$

Tale rapporto cresce naturalmente al crescere di M; si badi però che al crescere di M cresce anche il ritmo di trasmissione degli impulsi binari che è pari a $2B\log_2 M$. La banda di canale richiesta per la trasmissione PCM è $\log_2 M$ volte maggiore della banda richiesta per la trasmissione impulsiva dei campioni ($2B$ impulsi al secondo modulati in ampiezza). D'altra parte il sistema PCM dà una maggiore protezione contro i disturbi presenti sul canale di trasmissione rispetto alla trasmissione impulsiva con M livelli d'ampiezza: infatti il ricevitore dovrà decidere tra due sole alternative, anziché M, per l'ampiezza degli impulsi ricevuti, e si avrà quindi in generale una minore probabilità d'errore.

NOTA

"Compressione" dell'ampiezza dei campioni

In molti casi l'ampiezza dei campioni non è una variabile uniformemente distribuita nell'intervallo $(-V, +V)$, e può risultare conveniente nella quantizzazione utilizzare

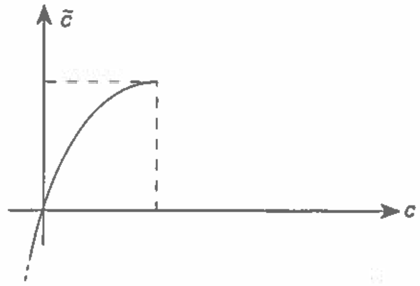

Figura 3.4 - Compressione dell'ampiezza dei 'campioni' PCM.

"quanti" di ampiezza variabile. Si pensi per esempio al segnale fonico in cui si possono riscontrare occasionalmente livelli di ampiezza molto elevati ma d'altra parte anche periodi di tempo percentualmente rilevanti in cui il segnale si mantiene a basso livello. In questo caso si ottiene una qualità migliore usando una quantizzazione più fine ai bassi livelli e più grossolana per i livelli elevati, ottenendo così un errore di quantizzazione che tende a mantenersi percentualmente costante. Questo tipo di quantizzazione non uniforme con "quanti" di ampiezza crescente al crescere del livello dei campioni può essere realizzata facendo passare i campioni prelevati di ampiezza c in un opportuno circuito con caratteristica ingresso/uscita non lineare (compressore, si veda la *fig. 3.4*), e quantizzando quindi i campioni così distorti mediante un quantizzatore uniforme. Ciò chiaramente equivale ad usare intervalli di quantizzazione tanto minori quanto più piccola è l'ampiezza c del campione. Naturalmente in ricezione occorrerà riportare le ampiezze $\tilde{c}$ dei campioni, dopo la decodificazione delle parole binarie che li rappresentano, al loro valore originario. Ciò potrà essere realizzato facendo passare i campioni "compressi" in un circuito non lineare con caratteristica complementare a quella del compressore, cioè in un circuito di "espansione".

ESEMPI

L'applicazione più importante, trattandosi del segnale più diffuso, è quella del segnale telefonico, la cui banda è essenzialmente limitata nell'intervallo di frequenze che va da 300 a 3400 Hz. La frequenza di campionamento f_c standard è 8 kHz. I livelli di quantizzazione sono tipicamente 256, corrispondenti a parole binarie di 8 bit ($\log_2 256 = 8$), distribuiti non uniformemente nel campo delle ampiezze secondo leggi di compressione standard. Ne risulta un flusso binario a velocità di 64 kbit/s. Questa velocità assume una particolare importanza, come unità di capacità di canale, in quanto rappresenta il flusso numerico corrispondente al segnale elementare più diffuso nelle reti di telecomunicazione.
Considerando invece un segnale musicale da trasmettere con elevata fedeltà, si potrà tener conto di una banda di circa 15 kHz, per cui i parametri del relativo sistema PCM potranno essere rispettivamente 32 kHz per la frequenza di campionamento e 12 bit per la codificazione binaria di ciascun campione. Ne viene un flusso di trasmissione pari a 384 kbit/s.

Per il segnale televisivo, facciamo riferimento per esempio al normale standard basato su 625 linee per quadro e 25 quadri al secondo. Volendo trasmettere con una risoluzione orizzontale corrispondente a quella verticale (circa 800 campioni per linea), si può campionare, all'uscita della telecamera, il segnale di luminanza al ritmo di $13{,}5 \cdot 10^6$ campioni/s. Se si usano altrettanti campioni per i segnali di colore, e quantizzando con 8 bit per campione, si ha un flusso totale di 216 Mbit/s ($13{,}5 \cdot 2 \cdot 8$). Volendo invece una definizione superiore, per esempio quella corrispondente a 1250 ($625 \cdot 2$) linee per quadro che è lo standard considerato per la cosiddetta TV ad alta definizione, si avrà un flusso totale circa quadruplo essendo la risoluzione circa doppia nelle due dimensioni dell'immagine.
Si noti che i valori di questi flussi possono essere drasticamente ridotti se si usano per la codifica di sorgente tecniche più sofisticate basate sullo sfruttamento delle caratteristiche statistiche specifiche del segnale.
Le tecniche di codificazione PCM naturalmente sono applicate anche in contesti diversi dalla trasmissione, per esempio nella codificazione del segnale musicale per la registrazione numerica ottica su "dischi compatti" (CD). L'elevata qualità richiesta porta ad una frequenza di campionamento di circa 44 kHz ed a caratteri di 16 bit per la codificazione di ciascun campione. Tenendo conto che si ha a che fare in questo caso con una coppia di segnali audio per la riproduzione stereofonica, si ha un flusso risultante di circa 1,4 Mbit/s. In realtà il flusso è molto maggiore poiché la codificazione di sorgente (PCM) viene completata con una codifica di "canale" per proteggere il segnale musicale dai disturbi, e da una codifica di "linea" per facilitare le operazioni di registrazione e lettura del disco. Infatti il flusso binario PCM viene segmentato in blocchi di 24 caratteri di 8 bit ciascuno, e ad essi vengono aggiunti 8 caratteri di "parità" per la correzione di eventuali errori secondo un'opportuna codificazione; si hanno in definitiva blocchi codificati di 32 caratteri e quindi un incremento del flusso nel rapporto 32/24. Un ulteriore incremento del flusso, nel rapporto 14/8, è dovuto all'introduzione di una conveniente codifica di linea (si veda il par. 2.7) che fa corrispondere parole di 14 bit ai caratteri di 8 bit. Il flusso d'informazione totale risultante è quindi pari a circa 3, 3 Mbit/s.

3.2. TRASMISSIONE DI SEGNALI PCM

La qualità di un sistema di trasmissione in PCM non dipende solo dalla maggior o minore finezza di quantizzazione. Infatti nella trasmissione si avrà un certo tasso d'errore per i simboli trasmessi, e questo si tradurrà in un aumento del rumore in uscita al ricevitore. Per il calcolo della potenza del rumore prodotto in uscita dagli errori commessi nella trasmissione, facciamo riferimento allo schema illustrato nel paragrafo precedente in cui i livelli di quantizzazione vengono codificati in caratteri di $\log_2 M$ bit mediante i numeri binari corrispondenti ai numeri decimali $0,1,2,\dots,M-1$. Assumiamo inoltre che le condizioni della trasmissione siano tali da dare una probabilità d'errore sul bit trasmesso pari a $P(E)$. È facile constatare (*fig. 3.5*) che un errore sul primo bit di un carattere causa un errore sul campione ricostruito pari a V, un errore sul secondo bit dà un errore sul campione di $V/2$, e così via (si assume che l'ampiezza dei campioni sia compresa nell'intervallo $\pm V$). Poiché i singoli bit di un carattere possono essere sbagliati con probabilità $P(E)$, l'errore quadratico medio nei campioni in uscita per effetto degli errori commessi in ricezione è

$$P(E)\left[V^2+\left(\frac{V}{2}\right)^2+\left(\frac{V}{4}\right)^2+\dots\right]=P(E)V^2\sum_{0}^{n-1}{}_{i}\,\frac{1}{2^{2i}}\cong\frac{4}{3}\,P(E)V^2$$

Per determinare la potenza di rumore totale in uscita, si dovrà sommare questo termine al rumore di quantizzazione, ottenendo il valore

$$P_N=\frac{V^2}{3M^2}+\frac{4}{3}\,P(E)V^2$$

e quindi per il rapporto segnale/rumore in uscita

$$\frac{P_S}{P_N}=\frac{M^2}{1+4P(E)M^2}$$

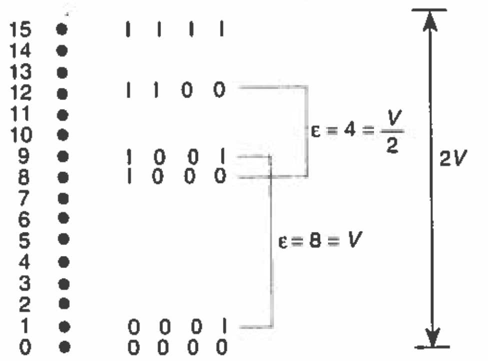

Figura 3.5 - PCM. Errore prodotto sull'ampiezza del campione in funzione della posizione del bit errato.

La *fig. 3.6* riporta l'andamento del rapporto segnale/rumore in uscita in funzione di quello sul canale in ingresso al ricevitore, per vari valori di $n=\log_2 M$ bit/campione. Il rapporto segnale/rumore in ingresso al ricevitore $\frac{P_S}{N_0B}=\frac{P_S2T_c}{N_0}$ è riferito alla banda base B del segna-

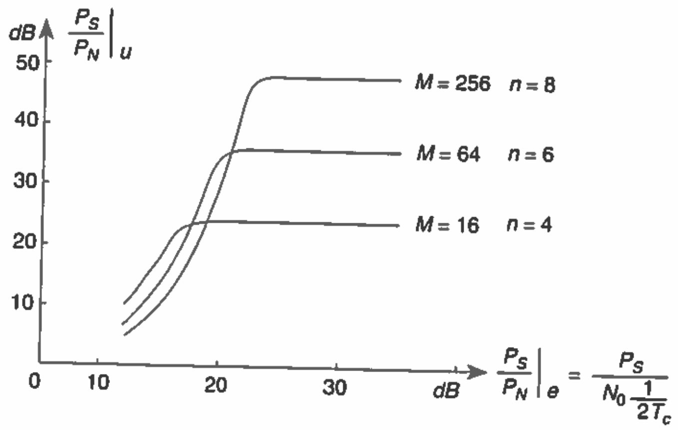

Figura 3.6 - PCM. Rapporto segnale/rumore in uscita in funzione del rapporto segnale/rumore in ingresso, per vari valori del parametro n (bit/campione).

le analogico originario, ed è quindi indipendente dalla scelta di M. I calcoli si riferiscono al caso in cui la trasmissione del segnale binario PCM avvenga con impulsi antipodali di potenza P_S su un canale con rumore additivo bianco di densità (unilaterale) N_0. Come si vede, per alti valori del rapporto segnale/rumore sul canale, si ha un rapporto segnale/rumore in uscita dal decodificatore PCM praticamente costante, dipendente solo dal rumore di quantizzazione in quanto l'effetto degli errori è trascurabile. Si noti che per ogni bit in più usato per la quantizzazione, il numero dei livelli di quantizzazione raddoppia e il rumore di quantizzazione diventa quattro volte inferiore (6 dB). Quando invece la potenza di rumore sul canale supera certi valori, gli errori in ricezione diventano frequenti e fanno crollare rapidamente le prestazioni del sistema.

3.3. IL PCM DIFFERENZIALE

Finora abbiamo considerato la codificazione numerica dei campioni assumendoli indipendenti l'uno dall'altro. In realtà nei segnali naturali, per esempio nel segnale fonico e in quello televisivo, i campioni adiacenti (nel tempo e, per le immagini, anche nello spazio) sono tra loro correlati in varia misura. Se si tiene conto della statistica dell'intero processo, cioè dell'insieme dei campioni, si possono realizzare codificazioni più efficienti, nel senso che a pari qualità è possibile utilizzare un minor numero di bit per campione (compressione, riduzione di ridondanza), e quindi in definitiva una banda di trasmissione più piccola. Il vantaggio che si ottiene cresce con il crescere della complessità del modello con cui rappresentiamo la sorgente e quindi degli algoritmi di codificazione, e può essere di grande entità. Per il segnale fonico per esempio, utilizzando modelli complessi del processo vocale, si può scendere dai 64 kbit/s prima ricordati a valori al di sotto dei 10 kbit/s.

Un semplice concetto per la riduzione del ritmo numerico di trasmissione è quello della trasmissione differenziale (PCM differenziale). Sfruttando la correlazione esistente eventualmente tra campioni adiacenti $s(iT)$, si può pensare di effettuare in trasmissione una predizione del generico campione $s(kT)$ da trasmettere sulla base dei campioni precedenti. Usando per esempio un algoritmo di predizione lineare, si può stimare il valore del campione per mezzo di una opportuna combinazione lineare di un certo numero di campioni precedenti. Si sceglieranno i coefficienti a_i in modo da ottenere il valore minimo per l'errore quadratico medio di predizione, ed essi dipenderanno dalla correlazione tra i campioni:

$$\hat{s}(kT) = a_1 s[(k-1)T] + a_2 s[(k-2)T] + \dots$$

Il valore quadratico medio dell'errore $\hat{s}(kT) - s(kT)$ che si commette nella stima sarà piccolo rispetto al valore quadratico medio dei campioni, se esiste una forte correlazione tra campioni adiacenti. L'idea è allora di trasmettere in PCM, anziché il campione $s(kT)$, la differenza $e(kT) = \hat{s}(kT) - s(kT)$ tra la predizione ed il valore vero. Infatti in ricezione si potrà determinare, come si è fatto in trasmissione, la stima $\hat{s}(kT)$ dai campioni in precedenza ricevuti, aggiungendo quindi a tale stima il valore della differenza che è stato inviato dal trasmettitore. Se tale differenza è mediamente più piccola del valore dei campioni, si potrà, a pari rumore di quantizzazione risultante sui campioni, codificarla con un numero di livelli, e quindi di bit, inferiore. La *fig. 3.7* mostra lo schema a blocchi del procedimento in trasmissione e in ricezione. Nello schema riportato, il filtro di predizione opera sulla base dei campioni quantizzati $s_q(kT)$, che sono quelli che in ricezione vengono utilizzati per la ricostruzione del segnale $s(t)$.

Evidentemente niente si guadagna se la differenza trasmessa è mediamente comparabile con i campioni stessi, il che avviene quando i campioni sono poco correlati rendendo impossibile una qualsiasi ragionevole stima.

Per esempio, per un segnale telefonico, in cui esiste una certa correlazione tra campioni contigui prelevati alla frequenza di campionamento di 8 kHz, la trasmissione differenziale può consentire di usare nella codifica binaria delle ampiezze 4 bit anziché 8 a pari qualità, cioè un flusso di 32 kbit/s anziché 64. Riduzioni ulteriori possono ottenersi con modelli e algoritmi più sofisticati. Anche per i segnali televisivi, sfruttando le correlazioni esistenti non solo tra un punto dell'immagine e

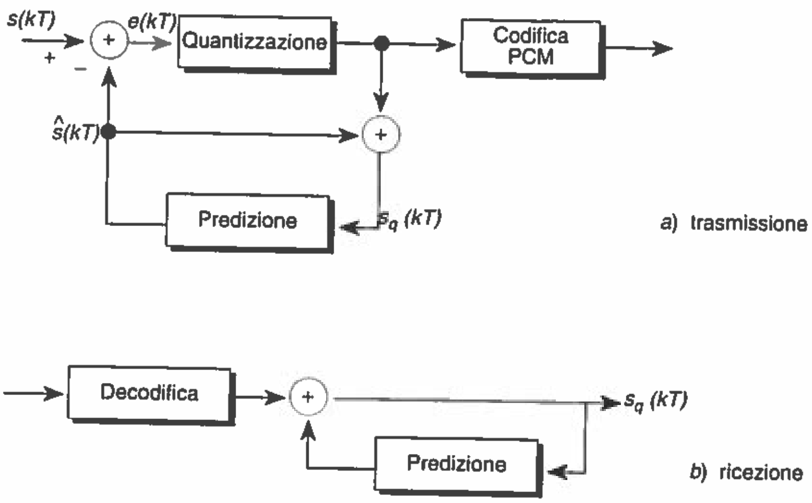

Figura 3.7 - Schema a blocchi del PCM differenziale.

i punti ad esso contigui ma anche la correlazione con i quadri precedenti, si possono realizzare codificazioni numeriche della sorgente molto efficienti, con risparmi di un ordine di grandezza e più nella velocità di trasmissione e quindi nella banda di canale necessaria.

Modulazione "delta"

Oltre al PCM, esistono altre forme di trasmissione numerica per segnali analogici, per esempio la modulazione "delta". In questa il segnale analogico viene campionato a velocità molto maggiore della frequenza minima di campionamento, e si trasmette con un bit il segno, positivo o negativo, della differenza tra due campioni successivi (cioè si usano due soli livelli di quantizzazione). Ciò corrisponde ad approssimare il segnale analogico con una sequenza di gradini di ampiezza Δ positiva o negativa, ed a trasmettere la sequenza binaria corrispondente ai gradini (gradino positivo = 1; gradino negativo = 0). Usando una frequenza di campionamento sufficientemente alta, ben maggiore della frequenza minima di campionamento 2B, si può rendere il rumore di quantizzazione sufficientemente basso. Il sistema può essere visto come un caso degenere di PCM differenziale, in cui la quantizzazione è a due soli livelli (un bit per campione), la frequenza di campionamento è molto più elevata della frequenza di Nyquist per avere forte correlazione tra campioni adiacenti, e il predittore è semplicemente costituito da un ritardo T (per la predizione di un campione si utilizza il campione precedente). Il ricevitore è allora essenzialmente costituito da un accumulatore che somma gli incrementi via via trasmessi.
