Legge debole e forte dei grandi numeri

19 aprile 2017

Esempio

Se lanciamo n volte una moneta equa, per n "grande" ci aspettiamo che

$$\frac{n^0 \text{di volte in cui esce testa}}{n} \simeq \frac{1}{2}$$

Formalizziamo questo risultato...

Consideriamo una successione $X_1, X_2, \dots$ di v.a. che assumono il valore

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se allo i-esimo lancio esce testa} \\ 0 & \text{se allo i-esimo lancio esce croce.} \end{cases}$$

È chiaro che $X_1, X_2, \dots$ formano una successione i.i.d., con $X_i \sim Be(p = 1/2)$, e posto $S_n = X_1 + \cdots + X_n$

$$\frac{n^0 \text{di teste nei primi } n \text{ lanci}}{n} = \frac{S_n}{n} \simeq \frac{1}{2},$$

cioè la frequenza relativa del risultato "testa" in n lanci è circa $1/2$.

Si tratta di specificare in che senso "$\simeq 1/2$", tenendo conto che S_n è una successione di v.a.

Legge debole dei grandi numeri

Sia $X_1, X_2, \dots$ una successione di variabili aleatorie indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.) con media μ e varianza σ^2 finite. Sia $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ per ogni $n = 1, 2, \dots$. Allora, per ogni $\epsilon > 0$

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\left| \frac{S_n}{n} - \mu \right| > \epsilon \right) = 0$$

1. In statistica si usa frequentemente la notazione

$$\overline{X}_n := \frac{S_n}{n} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$

   e $\overline{X}_n$ è una v.a. detta media campionaria di $X_1, \dots, X_n$.

2. Il risultato si può scrivere

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\left| \overline{X}_n - \mu \right| > \epsilon \right) = 0$$

   o equivalentemente

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\left| \overline{X}_n - \mu \right| \leq \epsilon \right) = 1$$

Dimostrazione

Essendo le X_i v.a. i.i.d, per le proprietà della varianza vale:

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(\overline{X}_n) = \mathbb{V}\mathrm{ar}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{V}\mathrm{ar}(X_i)}{n^2} = \frac{n\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_1)}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n},$$

e per le proprietà della media

$$\mathbb{E}(\overline{X}_n) = \mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i)}{n} = \frac{n\mathbb{E}(X_1)}{n} = \mu.$$

La disuguaglianza di Chebyshev per una v.a. Y con varianza finita dice che:

$$\mathbb{P}(|Y - \mathbb{E}(Y)| > \epsilon) \leq \frac{\mathbb{V}\mathrm{ar}(Y)}{\epsilon^2},$$

e applicata a $Y = \overline{X}_n$ fornisce

$$0 \leq \mathbb{P}(|\overline{X}_n - \mu| > \epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2} \to 0$$

per $n \to +\infty$. □

Legge forte dei grandi numeri

Sia $X_1, X_2, \dots$ una successione di variabili aleatorie indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.) che ammettono media μ. Allora

$$\mathbb{P}\left(\{\omega : \lim_{n\to+\infty} \overline{X}_n(\omega) = \mu\}\right) = 1$$

dove $\overline{X}_n(\omega) = (X_1(\omega) + \cdots + X_n(\omega))/n$.

Esempio...continua

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se allo i-esimo lancio esce testa} \\ 0 & \text{se allo i-esimo lancio esce croce.} \end{cases}$$

È chiaro che $X_1, X_2, \ldots$ formano una successione i.i.d., con $X_i \sim Be(p = 1/2)$, e posto $S_n = X_1 + \cdots + X_n$

$$\frac{n^0 \text{ di teste nei primi } n \text{ lanci}}{n} = \frac{S_n}{n} = \overline{X}_n \quad \text{e} \quad \mathbb{E}(\overline{X}_n) = \mathbb{E}(X_1) = \frac{1}{2}$$

La Legge debole dei grandi numeri afferma che, indicato con ω ogni realizzazione dell'esperimento (il risultato di una successione di lanci di una moneta equa)

$$\mathbb{P}\left(\left\{\omega : \left|\frac{n^0 \text{ teste nei primi n lanci in } \omega}{n} - \frac{1}{2}\right| > \epsilon\right)\right. \to 0 \qquad n \to +\infty.$$

La Legge forte dei grandi numeri dice che esiste $A \subseteq \Omega$ con $\mathbb{P}(A) = 1$ tale che per ogni $\omega \in A$

$$\lim_{n \to +\infty} \overline{X}_n(\omega) = \mathbb{E}(X_1) = \mu = \frac{1}{2},$$

cioè per ogni realizzazione ω dell'esperimento (il risultato di una successione di lanci di una moneta equa) in un insieme di possibili risultati che ha probabilità uguale a 1

$$\frac{n^0 \text{ di teste nei primi n lanci in } \omega}{n} \to \frac{1}{2} \qquad n \to +\infty$$

Legge forte dei grandi numeri