POLITECNICO DI MILANO

Elettrotecnica

Parte 7: Circuiti dinamici in transitorio

Prof . Ing. Giambattista Gruosso, Ph. D.

Dipartimento di Elettronica, Informazione e Bioingegneria

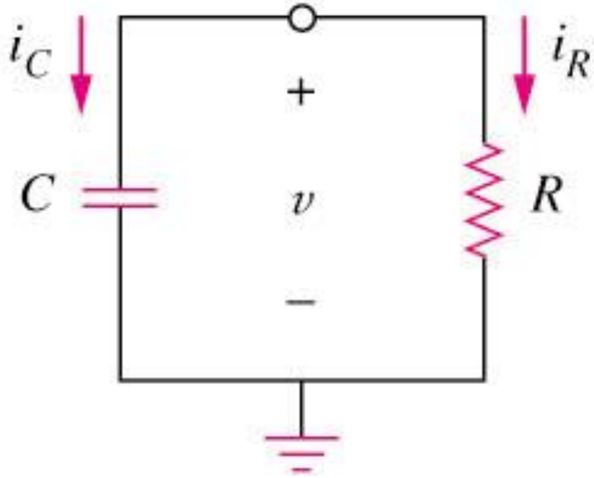
Indice

Prof. G. Gruosso

POLITECNICO DI MILANO

Prof. G. Gruosso

Circuiti del primo ordine con componenti dinamici: Risposta Libera



$$i_R + i_C = 0 \rightarrow \boxed{\frac{v}{R} + C\frac{dv}{dt} = 0}$$

$$\frac{dx}{dt} + kx = 0 \qquad \frac{dx}{dt} = -kx \qquad x = Ae^{-\frac{t}{k}}$$

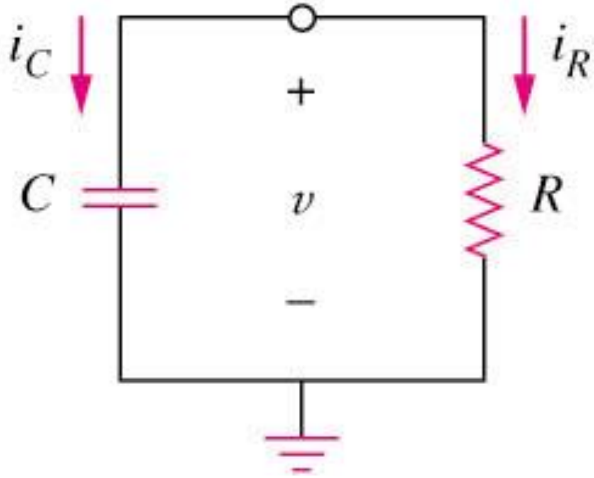
Equazione omogenea associata

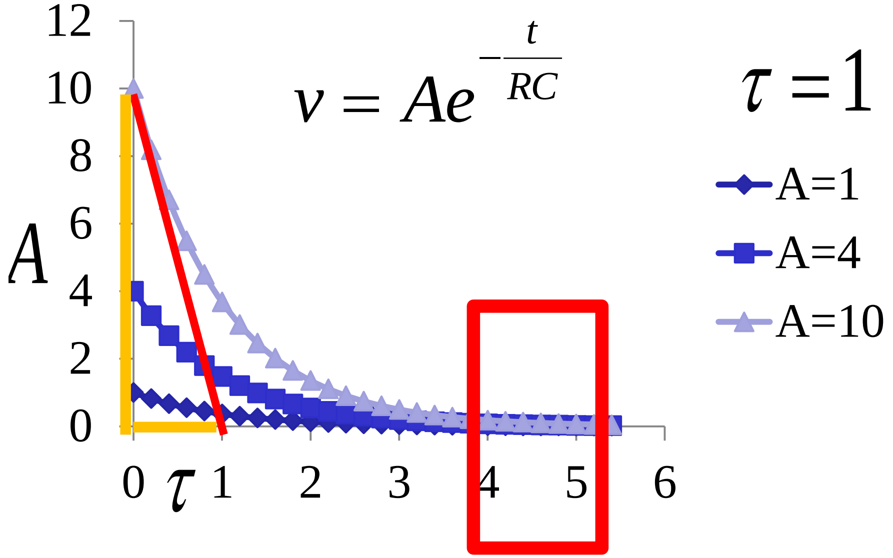
$$v = Ae^{-\frac{t}{RC}} \qquad \tau = RC$$

Circuiti del primo ordine con componenti dinamici

POLITECNICO DI MILANO

Prof. G. Gruosso



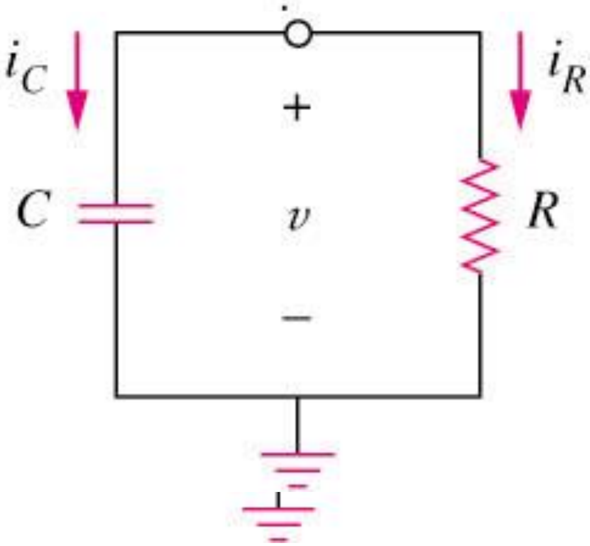


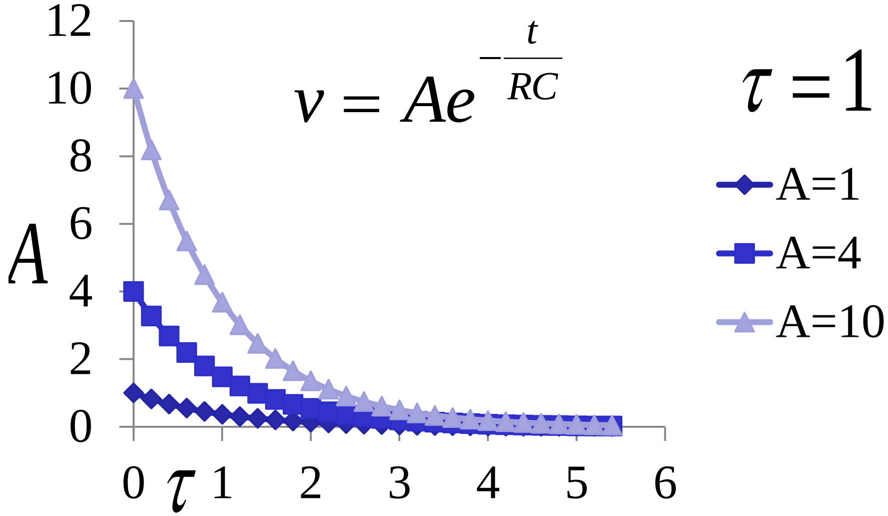
A= costante di integrazione si trova sfruttando la continuità della tensione ai capi del condensatore

$$v(t = 0_-) = v(t = 0_+)$$

Prof. G. Gruosso

Circuiti del primo ordine: evoluzione libera





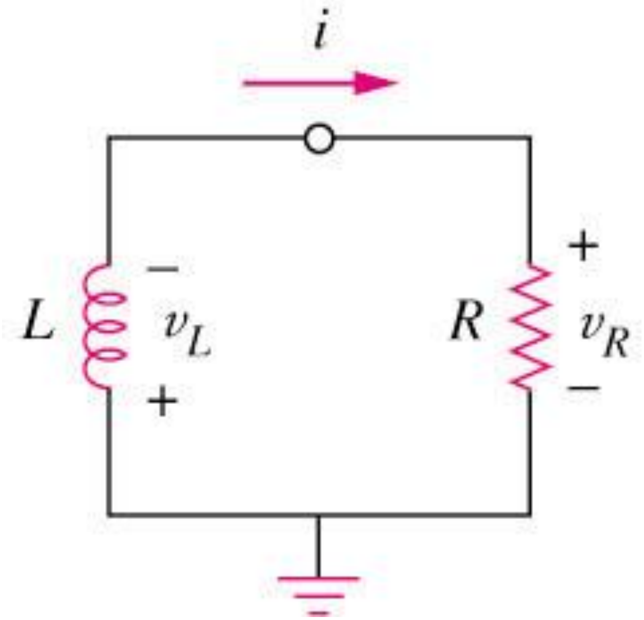
$$v(t = 0_-) = V_o \qquad v(t = 0_+) = A$$

$$V_0 = A$$

POLITECNICO DI MILANO

Prof. G. Gruosso

Circuiti del primo ordine con componenti dinamici: Riposta Libera



$$v_L + v_R = 0$$

$$\rightarrow \quad L\frac{di}{dt} + iR = 0$$

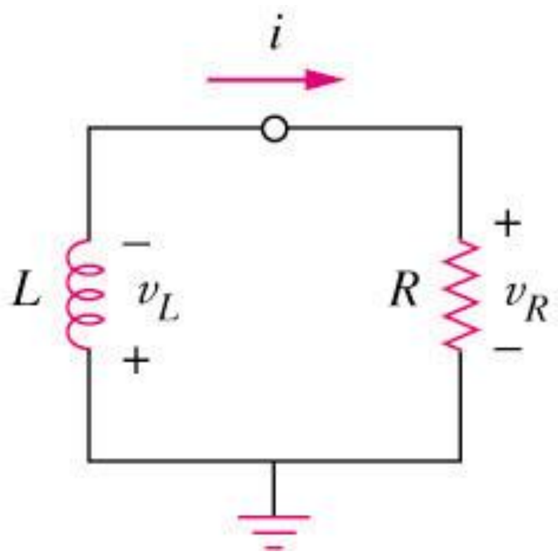
$$\rightarrow \quad \frac{di}{i} = -\frac{R}{L}dt \quad \rightarrow \quad i(t) = I_0\, e^{-Rt/L}$$

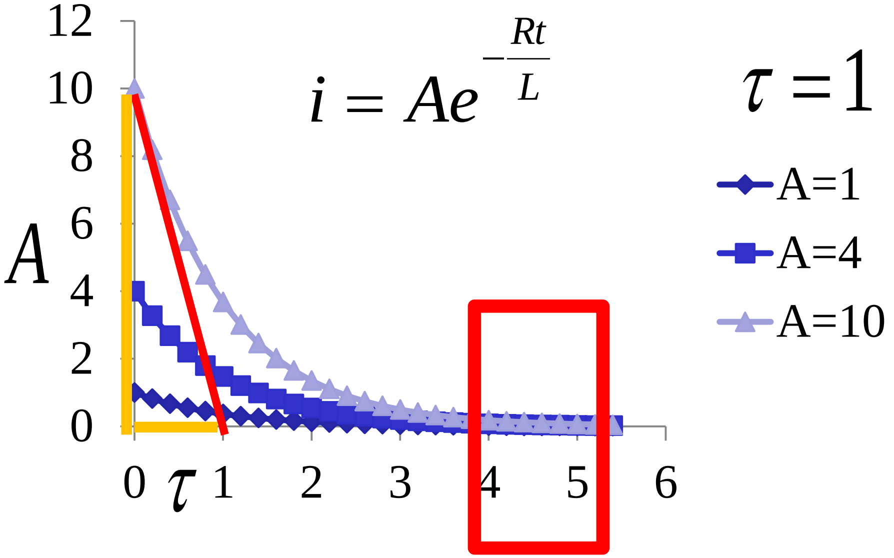
$$\tau = \frac{L}{R}$$

Circuiti del primo ordine con componenti dinamici

POLITECNICO DI MILANO

Prof. G. Gruosso





$$i = Ae^{-\frac{Rt}{L}}$$

$$\tau = 1$$

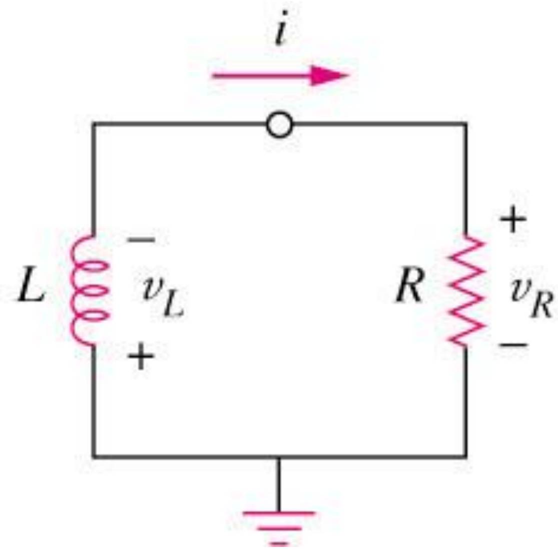
A= costante di integrazione si trova sfruttando la continuità della corrente nell'induttore

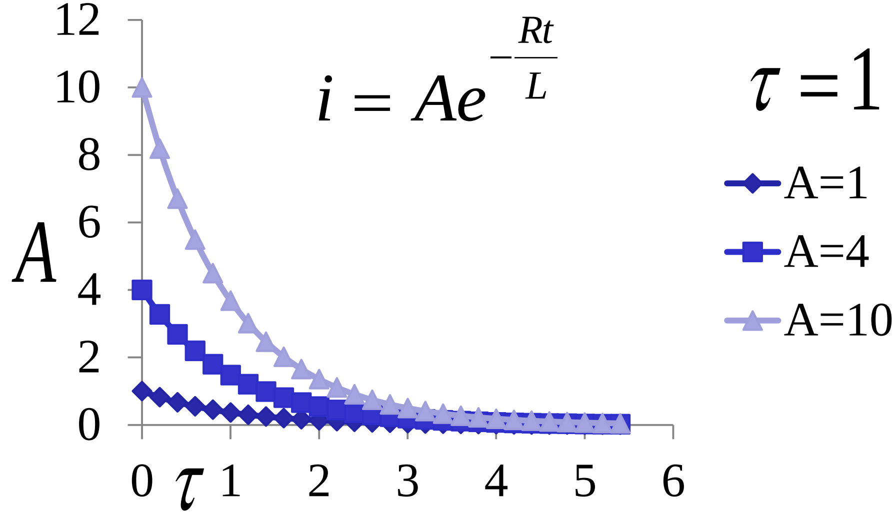
$$i(t = 0_-) = i(t = 0_+)$$

POLITECNICO DI MILANO

Prof. G. Gruosso

Circuiti del primo ordine: evoluzione libera





$$i(t = 0_-) = I_o \qquad i(t = 0_+) = A$$

$$I_0 = A$$

Confronto fra le soluzioni libere dei circuiti del primo ordine

POLITECNICO DI MILANO

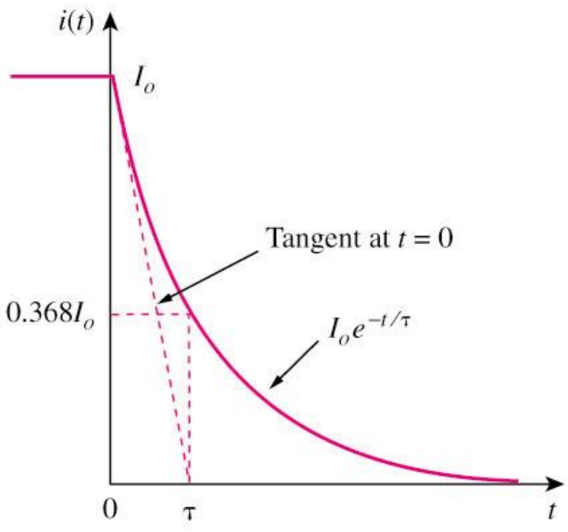
Prof. G. Gruosso

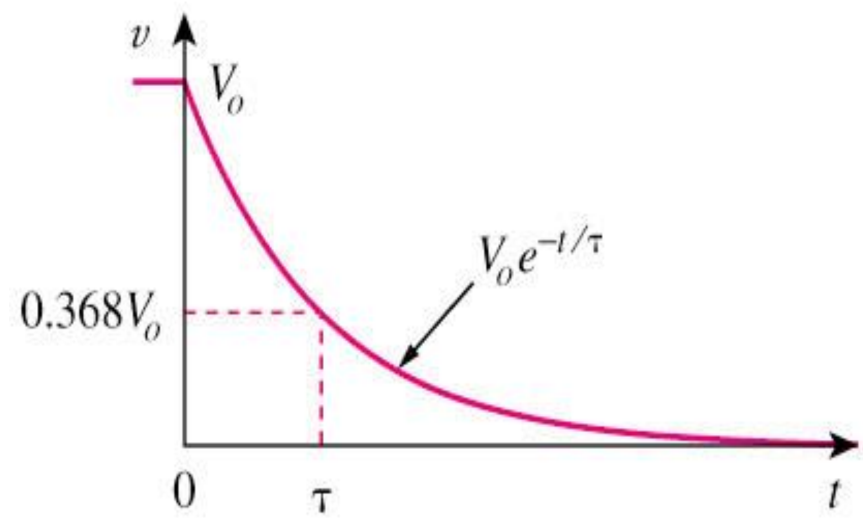
Circuito RL

$i(t) = I_0 \, e^{-t/\tau}$ **dove** $\tau = \dfrac{L}{R}$

Circuito RC

$v(t) = V_0 \, e^{-t/\tau}$ **dove** $\tau = RC$

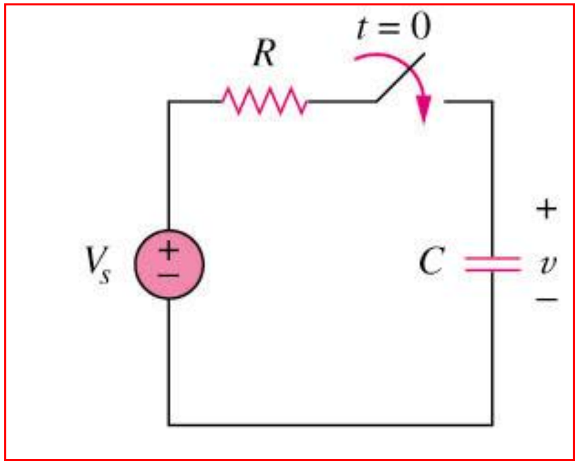




POLITECNICO DI MILANO

Prof. G. Gruosso

Circuiti del primo ordine: Evoluzione forzata

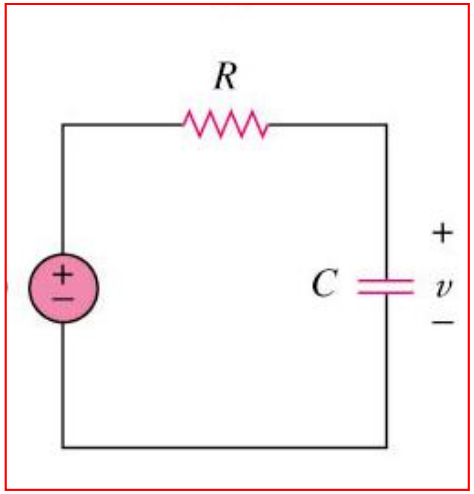


Condizione iniziale

$v(0-) = v(0+) = V_0$

Supponiamola per ora nota

$$Ri + v = V_s$$



$$RC\frac{dv}{dt} + v = V_s$$

$$v = v_o + v_p$$

$$RC\frac{dv_o}{dt} + v_o = 0$$

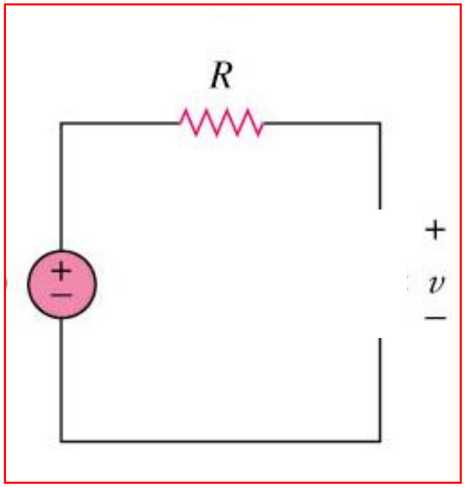
Omogenea Associata

$v_o(t) = A\,e^{-t/\tau}$ **dove** $\tau = RC$

POLITECNICO DI MILANO

Prof. G. Gruosso

Circuiti del primo ordine: Evoluzione forzata



Soluzione particolare

Ricordando che il condensatore è

Un circuito aperto in corrente continua

$$v_p = V_s$$

$$v = v_o + v_p = Ae^{-\frac{t}{RC}} + V_s$$

Come trovare A?

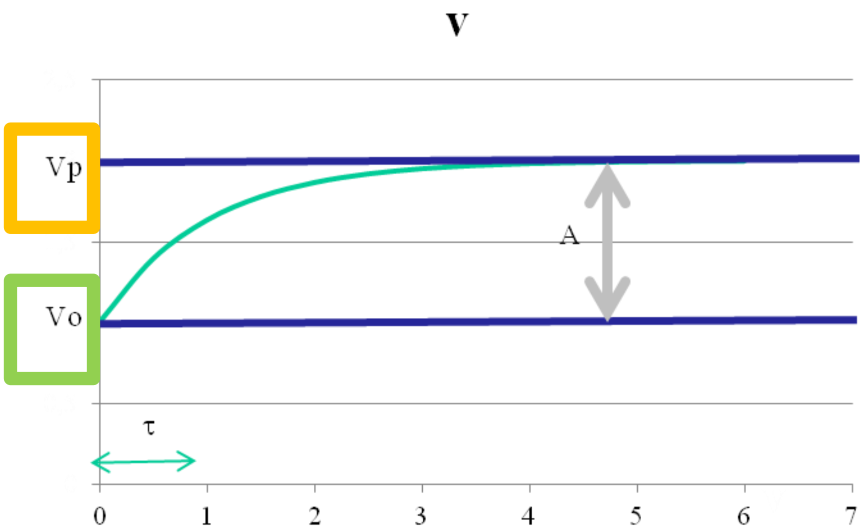
$$v(0_-) = v(0_+)$$

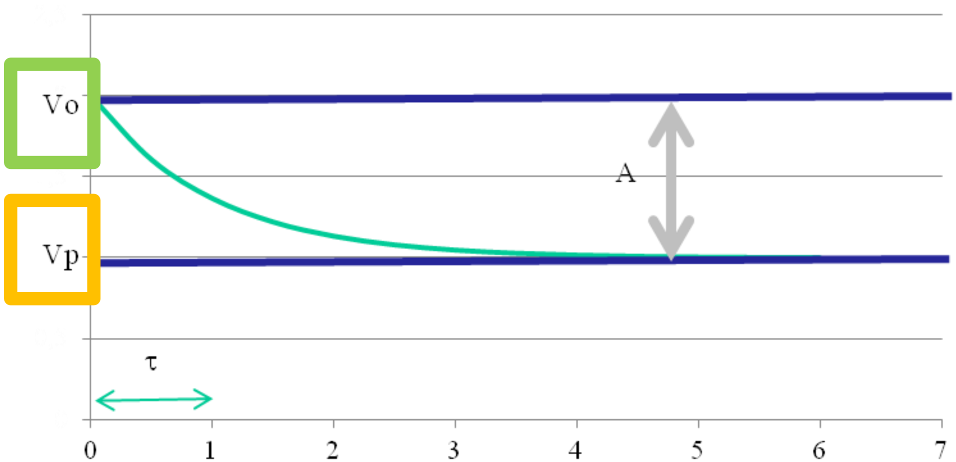
$$V_0 = Ae^{-\frac{0_+}{RC}} + V_p$$

$$A = V_0 - V_p$$

Circuiti del primo ordine: Evoluzione forzata

$$v(t) = v_p + [v(0-) - v_p]e^{-t/\tau}$$



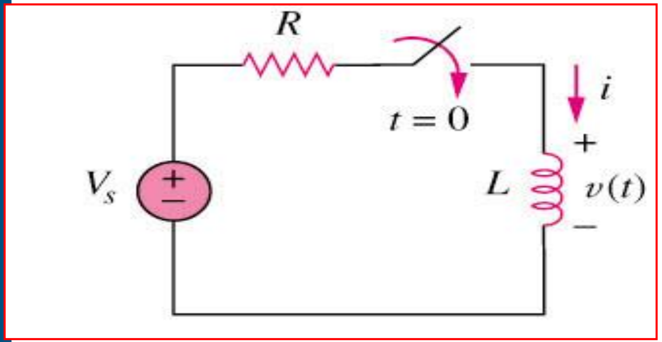


POLITECNICO DI MILANO

Prof. G. Gruosso

Prof. G. Gruosso

Circuiti del primo ordine: Evoluzione forzata

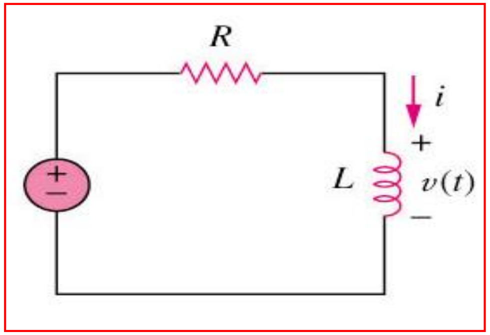


Condizione iniziale

$$i(0-) = i(0+) = I_0$$

Supponiamola per ora nota

$$Ri + v = V_s$$



$$L\frac{di}{dt} + Ri = V_s$$

$$i = i_o + i_p$$

$$L\frac{di_o}{dt} + i_o = 0$$

Omogenea Associata

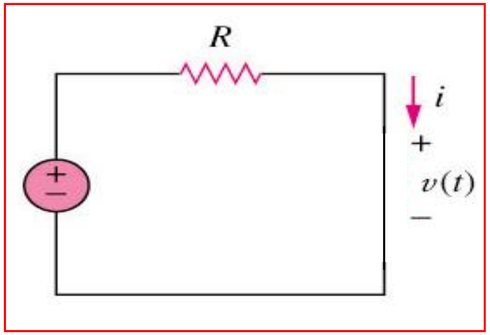
$$i_o(t) = A\,e^{-t/\tau}$$ **dove** $$\tau = \frac{L}{R}$$

POLITECNICO DI MILANO

Prof. G. Gruosso

Circuiti del primo ordine: Evoluzione forzata

Soluzione particolare



Ricordando che l'induttore è un cortocircuito in corrente continua

$$i_p = \frac{V_s}{R}$$

$$i = i_o + i_p = Ae^{-\frac{tR}{L}} + \frac{V_s}{R}$$

Come trovare A?

$$i(0_-) = i(0_+)$$

$$I_0 = Ae^{-\frac{0_+}{}} + I_p$$

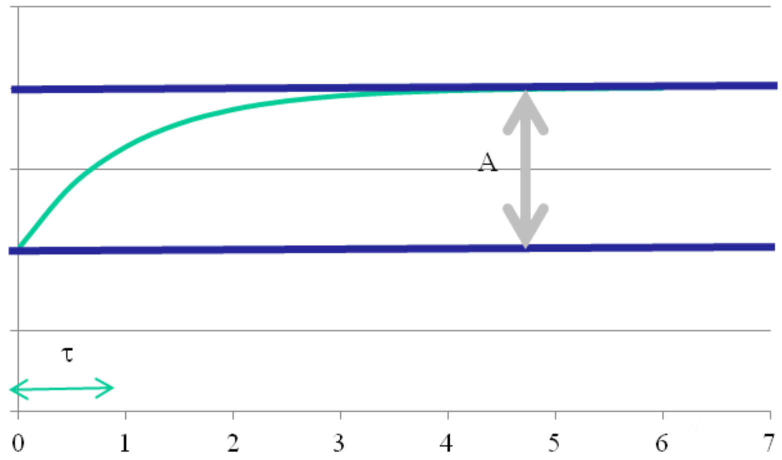
$$A = I_0 - I_p$$

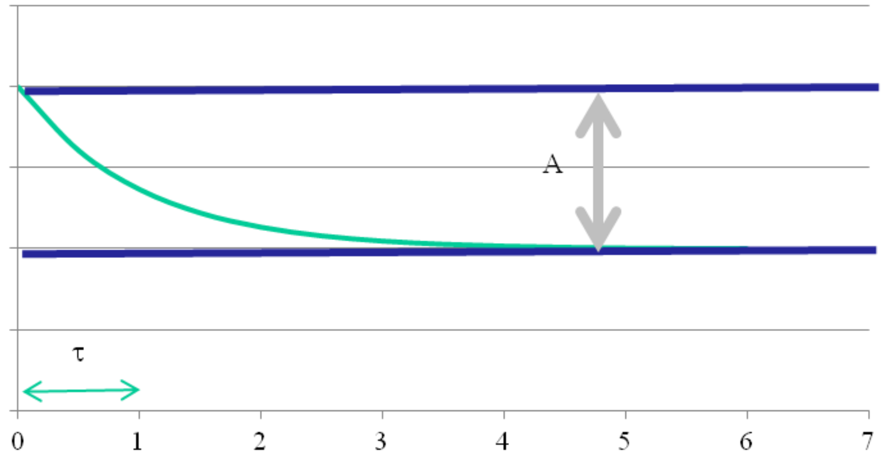
POLITECNICO DI MILANO

Prof. G. Gruosso

Circuiti del primo ordine: Evoluzione forzata

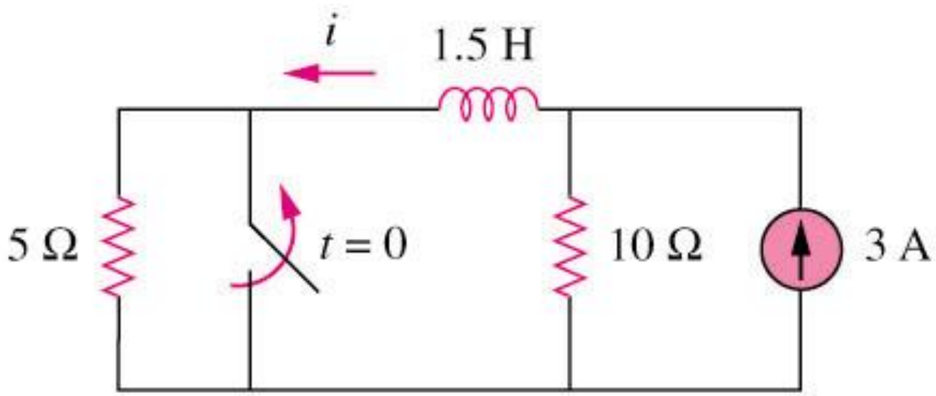
$$i(t) = i_p + [i(0-) - i_p]e^{-t/\tau}$$



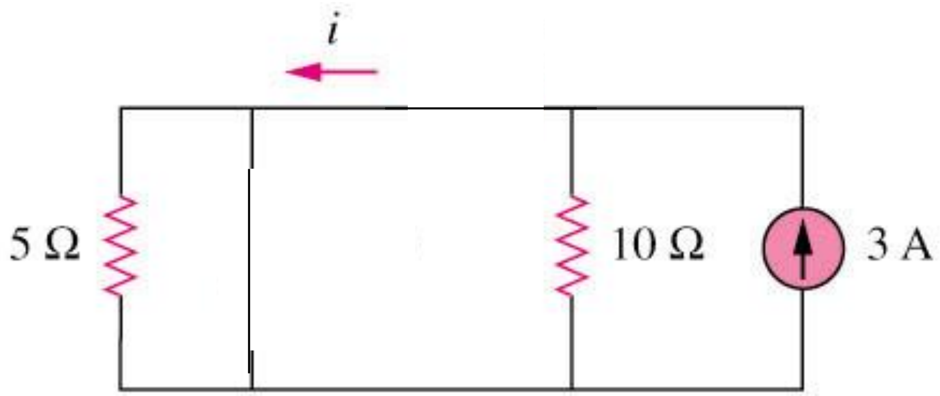


Prof. G. Gruosso

Circuiti del primo ordine: Esempio



t<0

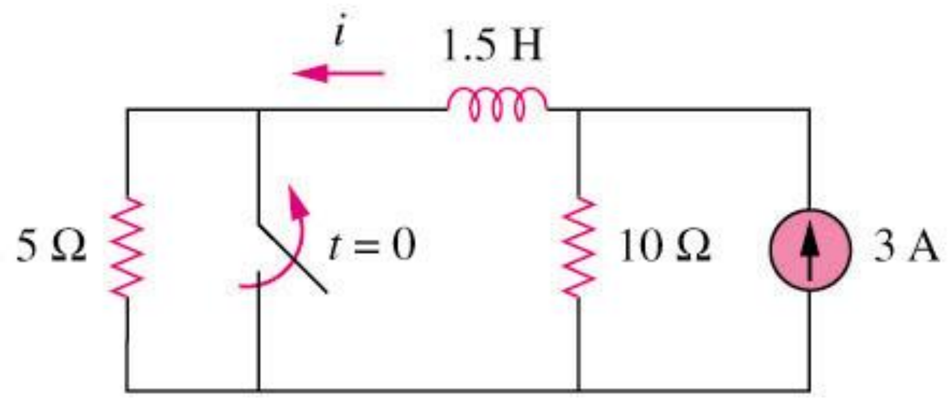


$$i(0\_) = 3A$$

POLITECNICO DI MILANO

Prof. G. Gruosso

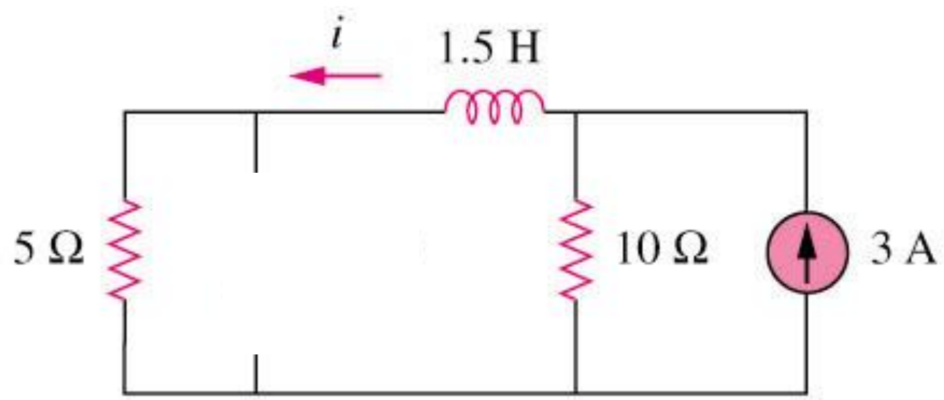
Circuiti del primo ordine: Esempio



Devo ricondurmi al circuito con una sola maglia

Uso Thevenin

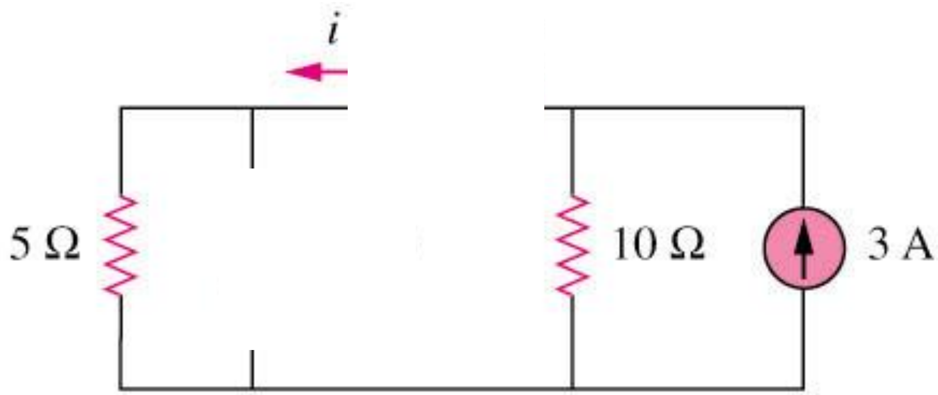
t>

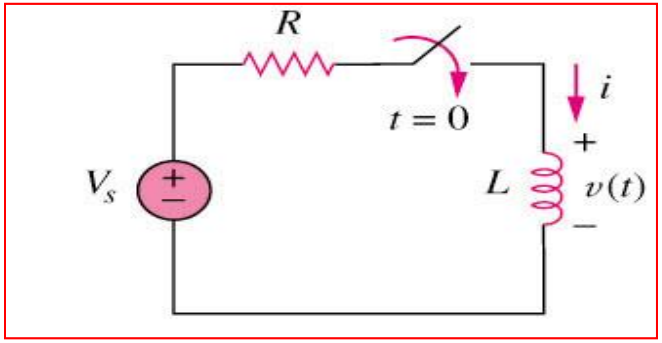


POLITECNICO DI MILANO

Prof. G. Gruosso

Circuiti del primo ordine: Esempio





$$Vs = 30V$$

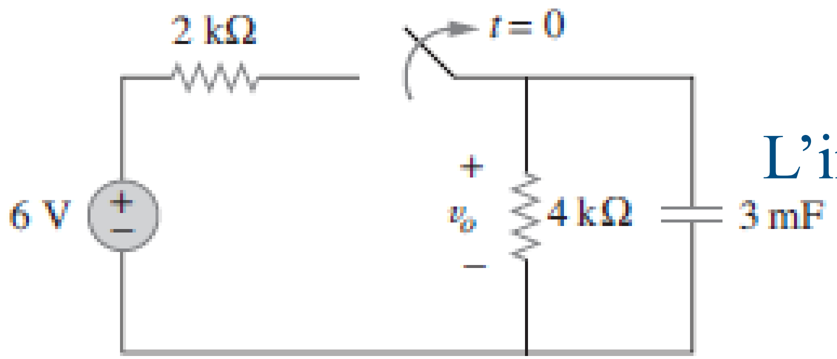
$$R = 15\Omega$$

$$i(t) = i_p + [i(0-) - i_p]e^{-t/\tau}$$

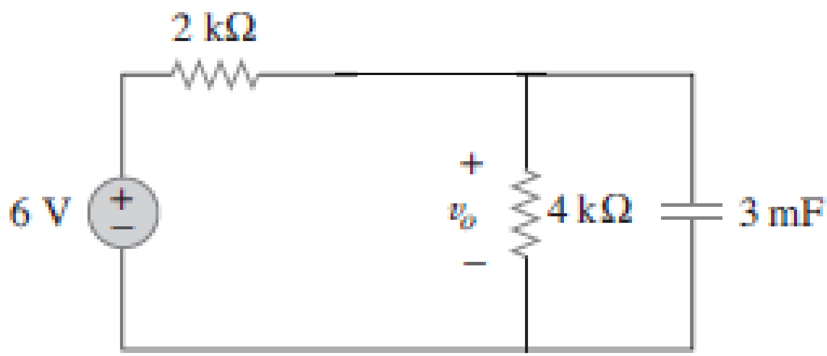
POLITECNICO DI MILANO

Prof. G. Gruosso

Circuiti del primo ordine: Esempio



L'interruttore si Apre per t=0



$$t<0$$

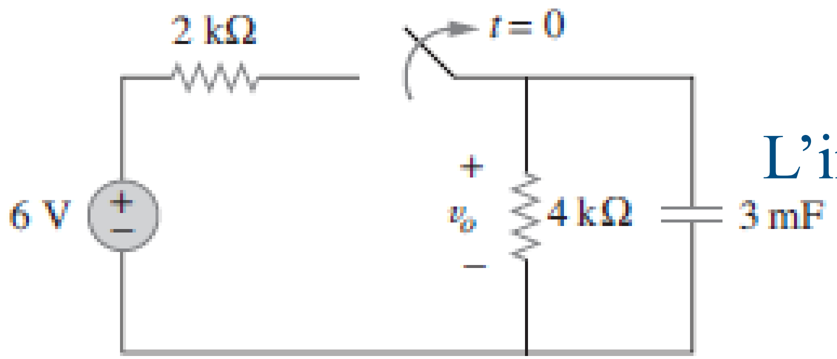
$$v_c(0-)=v_0=\frac{4}{4+2}6=4V$$

$$i_c(0-)=0$$

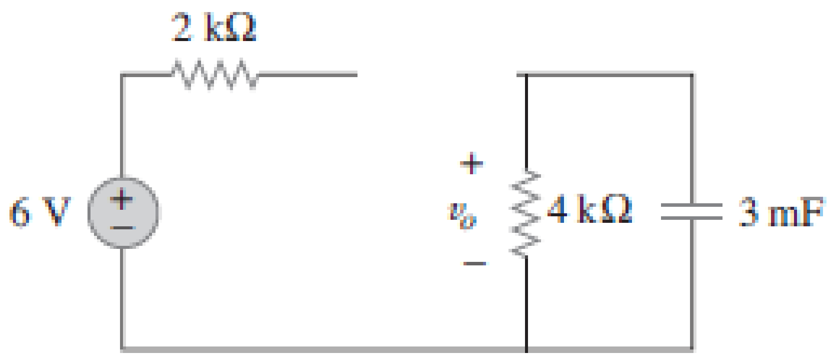
POLITECNICO DI MILANO

Prof. G. Gruosso

Circuiti del primo ordine: Esempio



L'interruttore si Apre per t=0



$$t > 0$$

$$v_c = Ae^{-\frac{t}{4000 \cdot 0{,}003}} + v_p$$

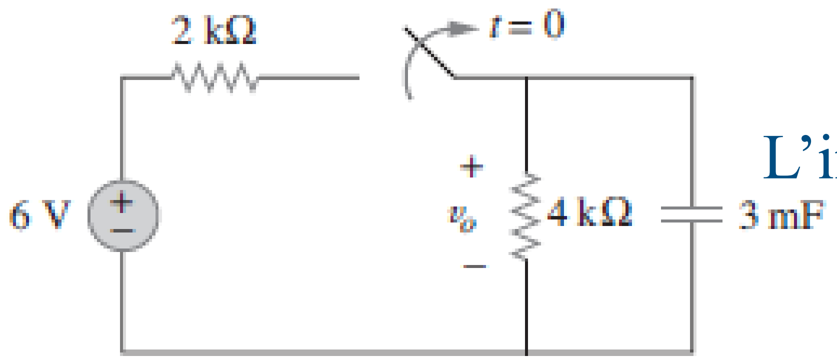
$$v_p = 0$$

$$A = v_c(0-) - v_p = 4$$

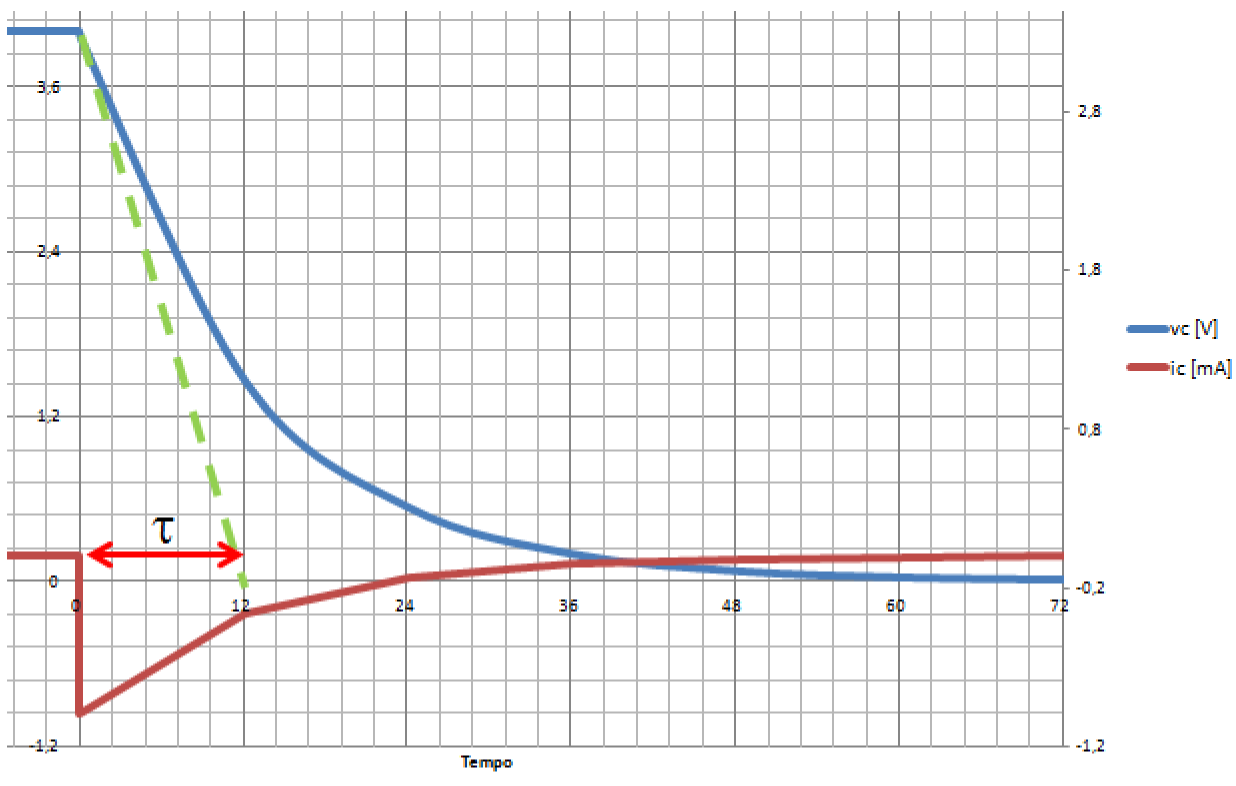
$$v_c = 4e^{-\frac{t}{12}}$$

$$i_c = C\frac{dv_c}{dt} = -\frac{4}{12}0{,}003e^{-\frac{t}{12}}A = e^{-\frac{t}{12}}mA$$

Circuiti del primo ordine: Esempio

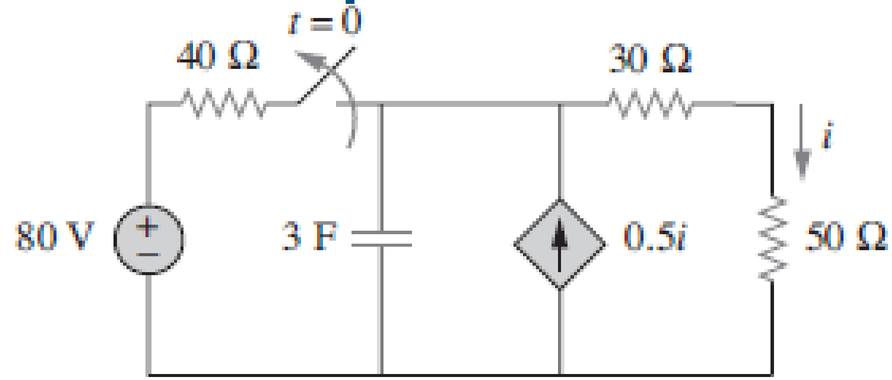


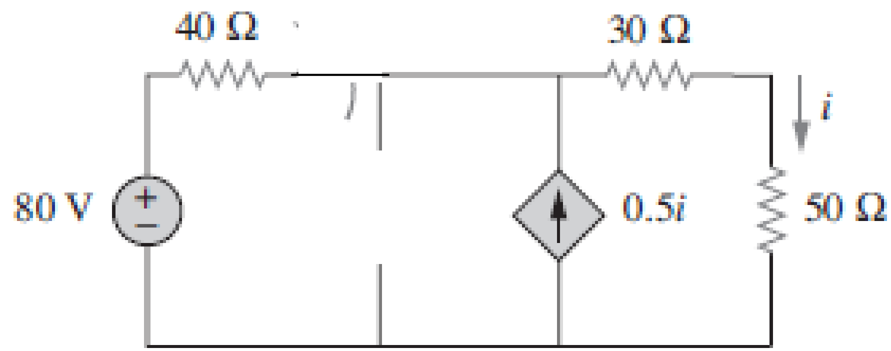
L'interruttore si Apre per t=0



POLITECNICO DI MILANO
Prof. G. Gruosso

Circuiti del primo ordine: Esempio





$$t < 0$$

$$v_c(0-) = \frac{\frac{80}{40} + 0{,}5i}{\frac{1}{40} + \frac{1}{80}} = 64V$$

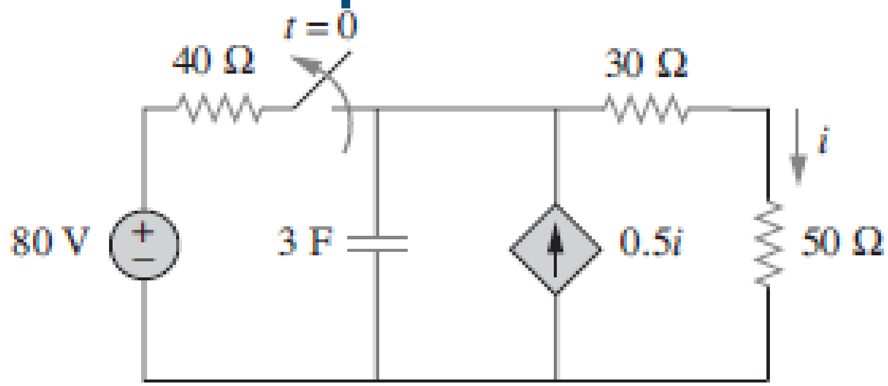
$$i = \frac{v_c(0-)}{80}$$

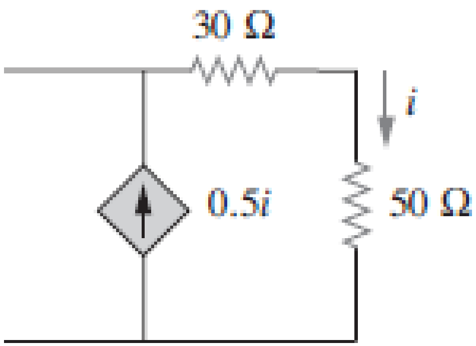
POLITECNICO DI MILANO

Prof. G. Gruosso

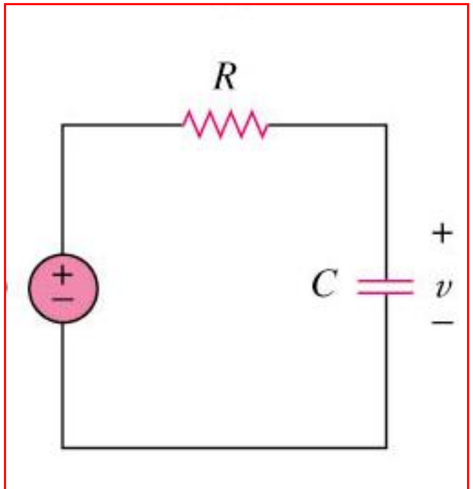
Prof. G. Gruosso

Circuiti del primo ordine: Esempio





$t > 0$



$$V_{th} = 0;$$

$$R = 53{,}34\Omega$$

$$t > 0$$

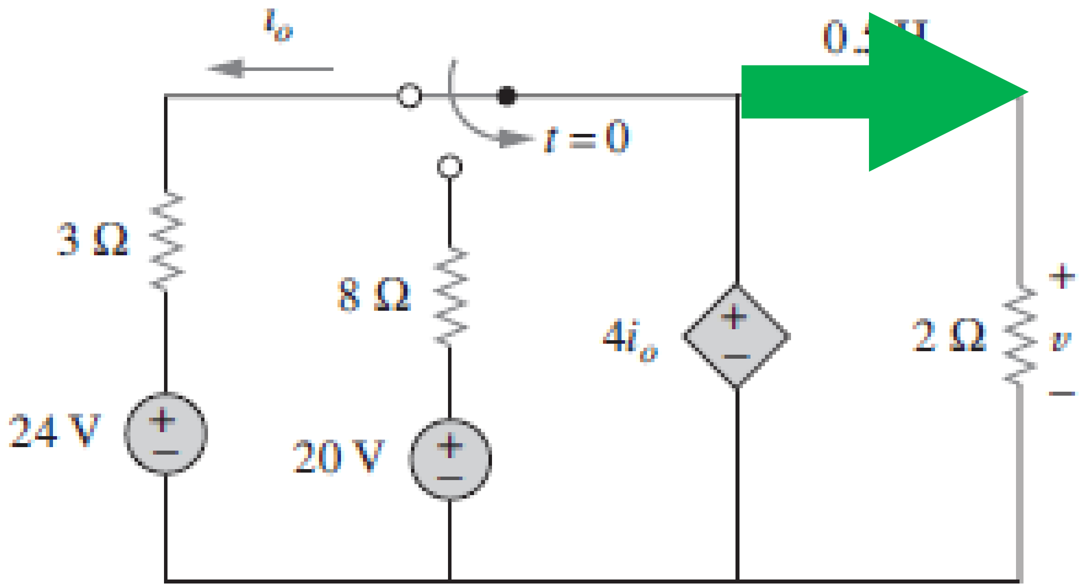
$$v_c = 64e^{-\frac{t}{53{,}34*3}} + v_p$$

$$v_p = 0$$

POLITECNICO DI MILANO

Prof. G. Gruosso

Circuiti del primo ordine: Esempio



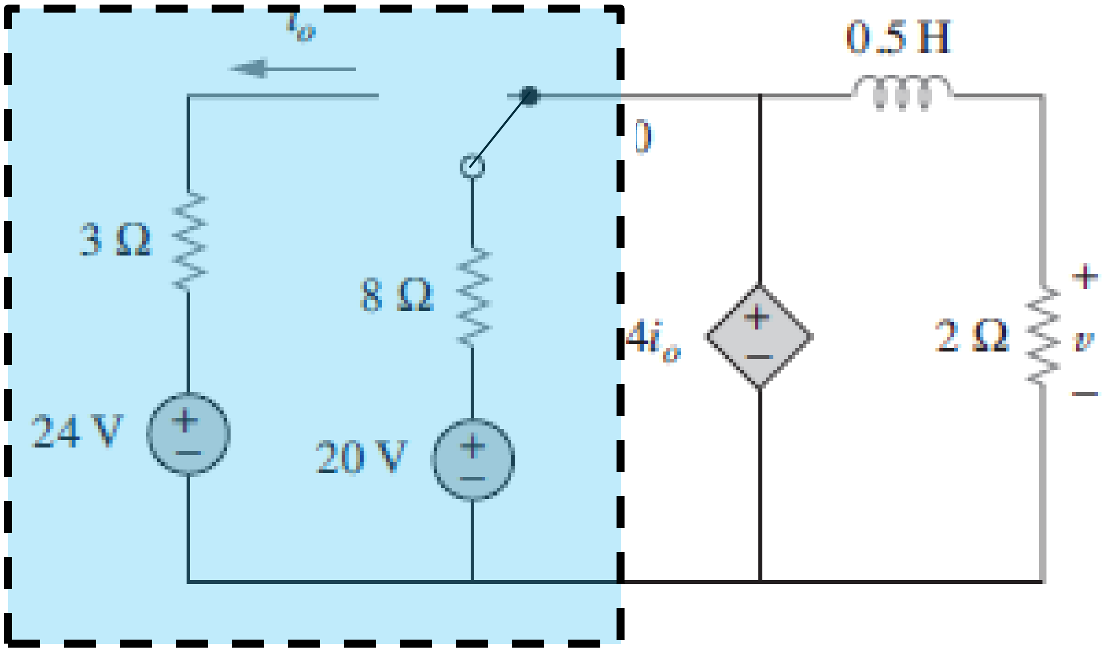
$$t<0$$

$$i_L(0-)=\frac{v}{2}$$

$$v_L(0-)=0$$

$$\begin{cases} v=4i_0=96V \\ i_0=\dfrac{v-24}{3} \end{cases} \Rightarrow i_L(0-)=48A$$

Circuiti del primo ordine: Esempio



$$t > 0$$

$$i_0 = 0$$

$$\tau = \frac{0.5}{2} = 0{,}25s$$

$$i_p = 0$$

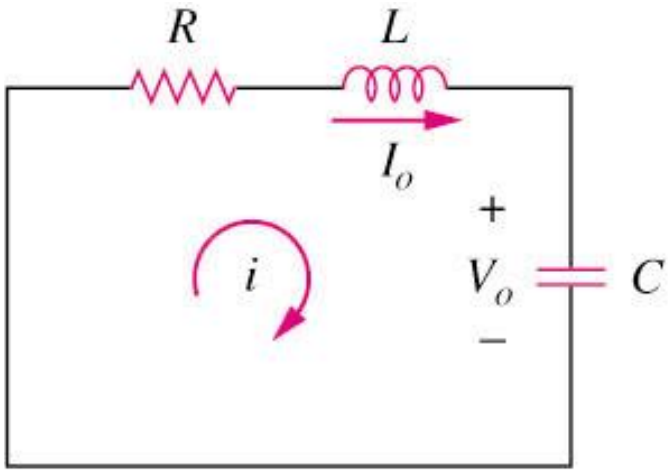
$$i_L = 48e^{-\frac{t}{0{,}25}}$$

$$v_L = L\frac{di_L}{dt} = -96e^{-\frac{t}{0{,}25}}$$

POLITECNICO DI MILANO

Prof. G. Gruosso

Circuiti del secondo ordine



$$\left.\begin{matrix} V_o \\ I_0 \end{matrix}\right\} note$$

$$v_R + v_L + v_c = 0$$

$$v_c = -v_R - v_L$$

$$v_L = L\frac{di}{dt}$$

$$i = C\frac{dv_c}{dt}$$

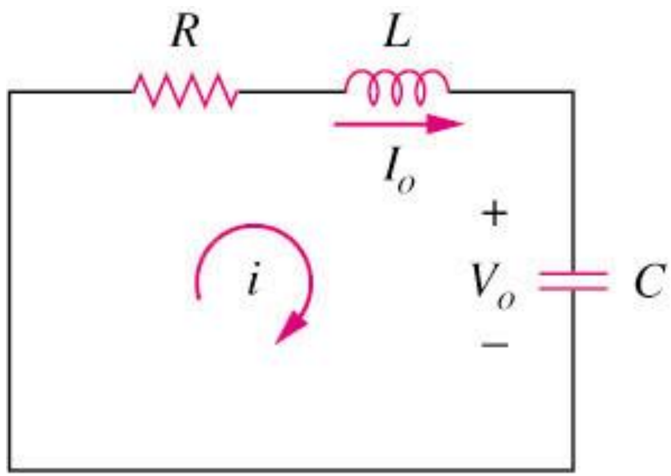
Equazione del secondo ordine

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = 0$$

POLITECNICO DI MILANO

Prof. G. Gruosso

Circuiti del secondo ordine



$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 2\alpha \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = 0$$

dove $\alpha = \frac{R}{2L}$ *and* $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$

$$s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = 0$$

Polinomio caratteristico

$$i(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

Circuiti del secondo ordine

POLITECNICO DI MILANO

Prof. G. Gruosso

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 2\alpha\frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = 0$$

1. se $\alpha > \omega_o$, sovra-smorzato

$$i(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$ **dove** $$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

2. Se $\alpha = \omega_o$, smorzamento critico

$$i(t) = (A_2 + A_1 t)e^{-\alpha t}$$ **dove** $$s_{1,2} = -\alpha$$

3. If $\alpha < \omega_o$ sotto smorzato

$$i(t) = e^{-\alpha t}(B_1 \cos\omega_d t + B_2 \sin\omega_d t)$$ $$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

dove