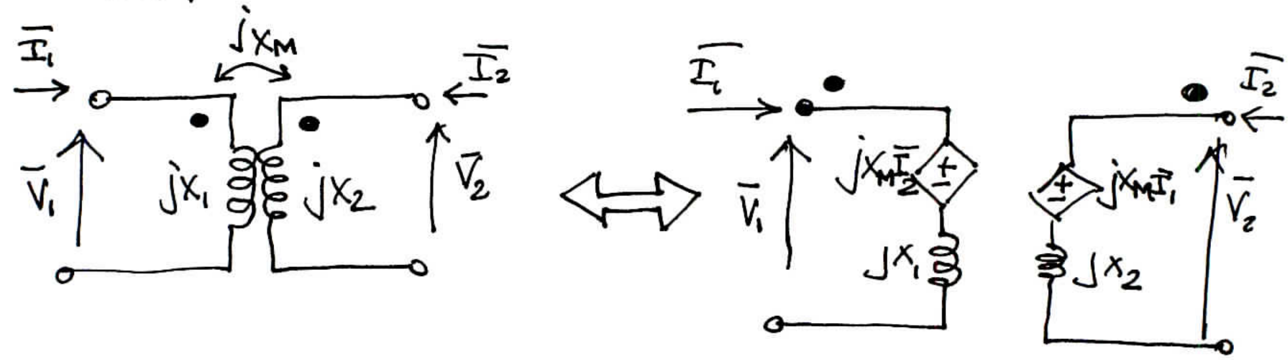
CIRCUITI CONTENENTI INDUTTORI ACCOPPIATI

Per la soluzione dei circuiti è necessario scrivere correttamente le RELAZIONI COSTITUTIVE del mutuo induttore.

- Fare riferimento al modello (vedi lezioni) contenente due induttori e due generatori di tensione pilotati in corrente:

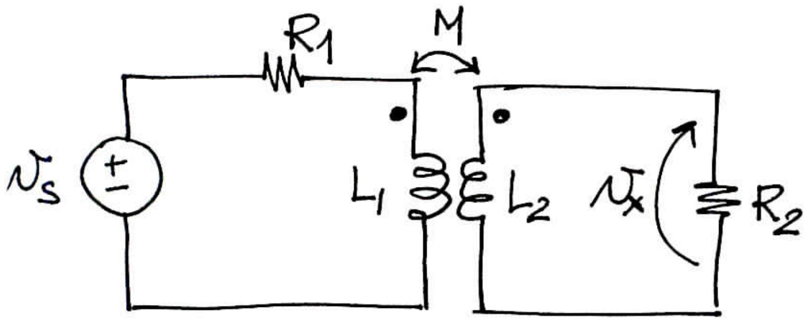


Ne segue che $\bar{I}_1$, $\bar{I}_2$ assumono il significato di GRANDEZZE PILOTANTI, e sono quindi fondamentali per la scrittura delle equazioni.

In altri termini, gli sforzi nella soluzione del circuito devono essere orientati a determinare prima le grandezze pilotanti $\bar{I}_1, \bar{I}_2$.

- Attenzione alla posizione dei morsetti contrassegnati "●" per la corretta scrittura (segni) delle relazioni costitutive.

EX



$v_s(t) = 5\cos\left(4t+\frac{\pi}{4}\right)$, V

$L_1 = 4H$ $\quad R_1 = 8\Omega$

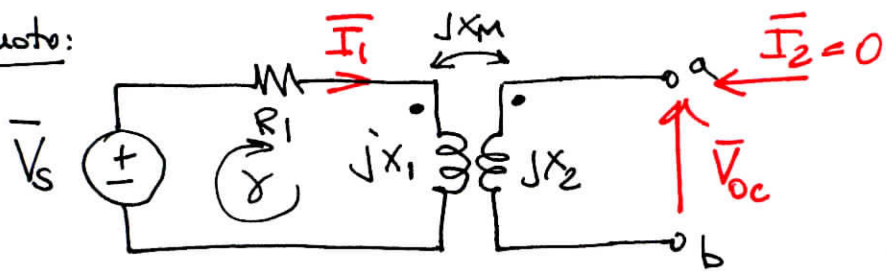
$L_2 = 3H$ $\quad R_2 = 12\Omega$

$M = 2H$

Determinare $v_x(t)$ a regime.

Uso il teorema di Thevenin nel dominio dei fasori. Rimuovo R_2 dal circuito e determino il circuito equivalente di Thevenin visto ai morsetti a, b di R_2:

Tensione a vuoto:



$X_1 = \omega L_1 = 16\Omega$

$X_2 = \omega L_2 = 12\Omega$

$X_M = \omega M = 8\Omega$

$$\overline{V}_s = \frac{5}{\sqrt{2}}e^{j45^\circ} = \frac{5}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{5}{2}(1+j)\ V$$

$$\text{KVL } \gamma: \quad \overline{V}_s - R_1\overline{I}_1 - \big(jX_1\overline{I}_1 + \underbrace{\cancel{jX_M\overline{I}_2}}_{\overline{I}_2=0}\big) = 0$$

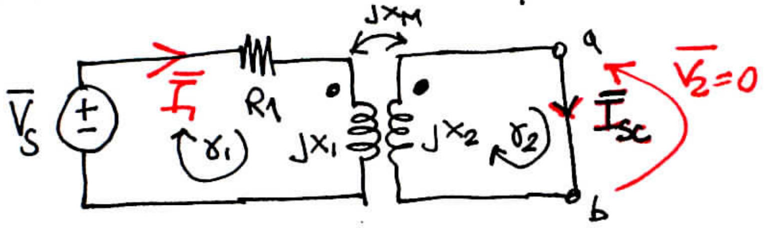
$$\Rightarrow \quad \overline{I}_1 = \frac{\overline{V}_s}{R_1 + jX_1}$$

$$\overline{V}_{oc} = jX_2\underbrace{\cancel{\overline{I}_2}}_{\overline{I}_2=0} + jX_M\overline{I}_1 = \frac{jX_M\overline{V}_s}{R_1+jX_1} = \frac{j\cancel{8}\,\frac{5}{2}(1+j)}{\cancel{8}+j\cancel{16}_{2}} =$$

$$= \frac{5}{2}\,\frac{j-1}{1+2j}\,\frac{1-2j}{1-2j} = \frac{\cancel{5}}{2}\,\frac{j-1+2+2j}{\cancel{5}} = \frac{1}{2}(1+j3) = 0{,}5 + j1{,}5\ V$$

Impedenza equivalente ai morsetti ab.

Posso determinarla come $\overline{V}_{oc}/\overline{I}_{sc}$:



KVL γ_2: $\quad -jX_2\overline{I}_{sc}+jX_M\overline{I}_1=0 \quad \Rightarrow \quad \overline{I}_1=\frac{X_2}{X_M}\overline{I}_{sc}$

KVL γ_1: $\quad \overline{V}_S-R_1\overline{I}_1-\left(jX_1\overline{I}_1-jX_M\overline{I}_{sc}\right)=0$

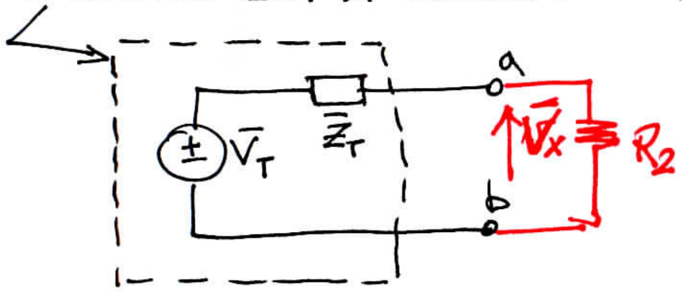
$$\overline{V}_S-(R_1+jX_1)\frac{X_2}{X_M}\overline{I}_{sc}+jX_M\overline{I}_{sc}=0$$

$$\Rightarrow \quad \overline{I}_{sc}=\frac{\overline{V}_S}{(R_1+jX_1)\frac{X_2}{X_M}-jX_M}=\frac{5}{2}\,\frac{1+j}{(\cancel{8}^{1}+j\cancel{16}^{2})\frac{12}{\cancel{8}}-j8}=$$

$$=\frac{5}{2}\,\frac{1+j}{12+j16}=\frac{5}{2}\,\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{12^2+16^2}}\,\frac{e^{j45°}}{e^{j53,13°}}=\frac{\cancel{5}^{1}\sqrt{2}}{2\cdot\cancel{20}_{4}}e^{-j8,13°}\text{ A}$$

$$\overline{Z}_{ab}=\frac{\overline{V}_{oc}}{\overline{I}_{sc}}=\frac{0,5+j1,5}{\frac{\sqrt{2}}{8}e^{-j8,13°}}=\frac{1,584\,e^{j71,56°}}{0,177\,e^{-j8,13°}}=8,949\,e^{j79,69°}\,\Omega=1,6+j\,8,8\,\Omega$$

CIRCUITO EQ. DI THEVENIN $\quad \overline{V}_T=\overline{V}_{oc}\ ;\ \overline{Z}_T=\overline{Z}_{ab}$



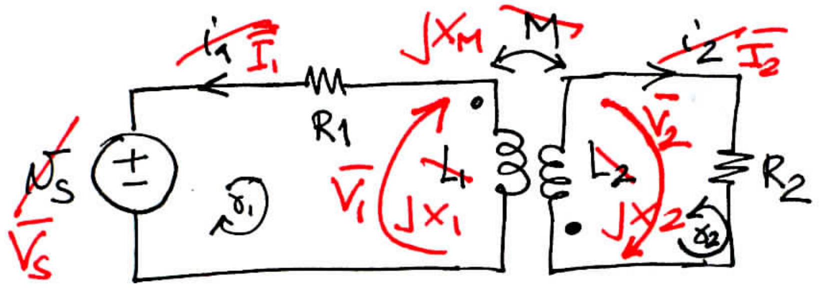
Collego R_2 e calcolo $\overline{V}_x$

$$\overline{V}_x=\overline{V}_T\cdot\frac{R_2}{\overline{Z}_T+R_2}$$

$$\overline{V}_x=1,584\,e^{j71,56°}\,\frac{12}{1,6+j8,8}=1,173\,e^{j38,66°}\text{ V}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_x(t)=\sqrt{2}\cdot1,173\cos\left(4t+38,66°\right),\text{ V}}$$

EX



$v_S(t) = \cos(100t)$, V

$R_1 = 200\,\Omega$

$R_2 = 320\,\Omega$

$L_1 = L_2 = 4$ H

$k = 0{,}8$

Determinare $i_1(t)$, $i_2(t)$ a regime.

Determinare $W_{MI}(2ms)$ (energia immagazzinata nel mutuo induttore al tempo $t = 2ms$)

Problema simile al precedente salvo la posizione dei contrassegni ai morsetti. Notare inoltre che il verso di i_1 e i_2 e' fissato dal problema (dobbiamo tenerlo così!). Dovendo determinare grandezze su entrambe le porte non conviene applicare il Th. di Thevenin.

$$\bar{V}_S = \frac{1}{\sqrt{2}} V \;; \quad X_1 = \omega L_1 = 400\,\Omega \;; \quad X_2 = \omega L_2 = 400\,\Omega$$

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \quad \text{coefficente di accoppiamento} \quad \Rightarrow \quad M = k\sqrt{L_1 L_2} = 0{,}8\sqrt{16} = 3{,}2 \text{ H}$$

$$X_M = \omega M = 320\ \Omega$$

Scrivo due equazioni sui due anelli γ_1, γ_2:

$$\begin{cases} \text{KVL } \gamma_1: & \bar{V}_S + R_1\bar{I}_1 - \bar{V}_1 = 0 \\ \text{KVL } \gamma_2: & \bar{V}_2 + R_2\bar{I}_2 = 0 \end{cases}$$

dove: (R.C. del mutuo induttore)

$$\begin{cases} \bar{V}_1 = -jX_1\bar{I}_1 + jX_M\bar{I}_2 \\ \bar{V}_2 = jX_2\bar{I}_2 - jX_M\bar{I}_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{V}_S + R_1\bar{I}_1 + jX_1\bar{I}_1 - jX_M\bar{I}_2 = 0 & (1) \\ jX_2\bar{I}_2 - jX_M\bar{I}_1 + R_2\bar{I}_2 = 0 & (2) \end{cases}$$

dalla (2) $(R_2+jX_2)\bar{I}_2 = jX_M\bar{I}_1 \Rightarrow \bar{I}_2 = \frac{jX_M}{R_2+jX_2}\bar{I}_1$

nella (1) $\bar{V}_S + R_1\bar{I}_1 + jX_1\bar{I}_1 - jX_M\frac{jX_M}{R_2+jX_2}\bar{I}_1 = 0$

$$\bar{V}_S = \left(-R_1 - jX_1 - \frac{X_M^2}{R_2+jX_2}\right)\bar{I}_1$$

$$\bar{I}_1 = \frac{-\bar{V}_S}{R_1+jX_1+\frac{X_M^2}{R_2+jX_2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{-1}{200+j400+\frac{320^2}{320+j400}\cdot\frac{320-j400}{320-j400}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{-1}{200+j400+\frac{320^2(320-j400)}{320^2+400^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{-1}{324{,}88+j243{,}90} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{e^{j180°}}{406{,}24\, e^{j36{,}9°}} = 1{,}74\, e^{j143{,}1°}\ mA$$

$$\bar{I}_2 = \frac{j320}{320+j400}\cdot 1{,}74\, e^{j143{,}1°} = \frac{320\, e^{j90°}\, 1{,}74\, e^{j143{,}1°}}{512{,}25\, e^{j51{,}34°}} =$$

$$= 1{,}09\, e^{j181{,}76°} = 1{,}09\, e^{-j178{,}24°}\ mA$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} i_1(t) &= \sqrt{2}\cdot 1{,}74\cos(100t+143{,}1°),\ A \\ i_2(t) &= \sqrt{2}\cdot 1{,}09\cos(100t-178{,}24°),\ A \end{aligned}}$$

N.B. calcolatrice impostata in radianti!:

$$i_1(2ms) = \sqrt{2}\cdot 1{,}74\cos\left(100\cdot 2\cdot 10^{-3}+143{,}1°\cdot\frac{\pi}{180}\right) = -2{,}22\ mA$$

$$i_2(2ms) = \sqrt{2}\cdot 1{,}09\cos\left(100\cdot 2\cdot 10^{-3}-178{,}24\cdot\frac{\pi}{180}\right) = -1{,}5\ mA$$

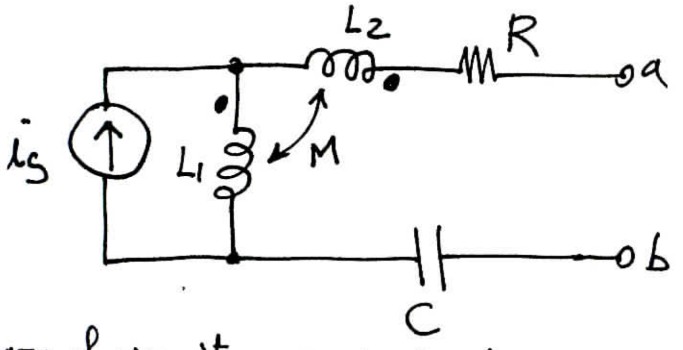
$$W_{MI}(2ms) = \frac{1}{2}L_1 i_{L_1}^2 + \frac{1}{2}L_2 i_{L_2}^2 + M i_{L_1} i_{L_2} = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot(2{,}22\cdot 10^{-3})^2 +$$

$i_{L_1} = -i_1$ $\qquad$ $i_{L_2} = i_2$

$$+\frac{1}{2}\cdot 4\cdot(-1{,}5\cdot 10^{-3})^2 + 3{,}2\cdot 2{,}22\cdot(-1{,}5)\cdot 10^{-6}$$

$$= 3{,}7\cdot 10^{-6} = 3{,}7\ \mu J$$

EX



$i_S = \sqrt{2} \cdot 5 \cos(2\pi \cdot 50t)$, A

$R = 10\,\Omega$

$L_1 = 12$ mH

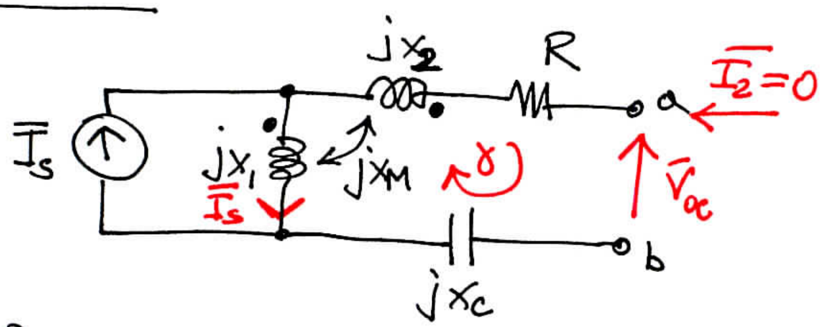
$L_2 = 4$ mH

$k = 0{,}8$

$C = 1$ mF

Determinare il circuito equivalente di thevenin nel dominio dei fasori

Tensione a vuoto



$\bar{I}_S = 5A$; $X_1 = \omega L_1 = 2\pi \cdot 50 \cdot 12 \cdot 10^{-3} = 3{,}77\,\Omega$; $X_2 = \omega L_2 = 1{,}26\,\Omega$;

$X_M = \omega M = \omega \cdot k\sqrt{L_1 L_2} = 2\pi \cdot 50 \cdot 0{,}8\sqrt{12 \cdot 4 \cdot 10^{-6}} = 1{,}74\,\Omega$

$X_C = -\frac{1}{\omega C} = -3{,}18\,\Omega$

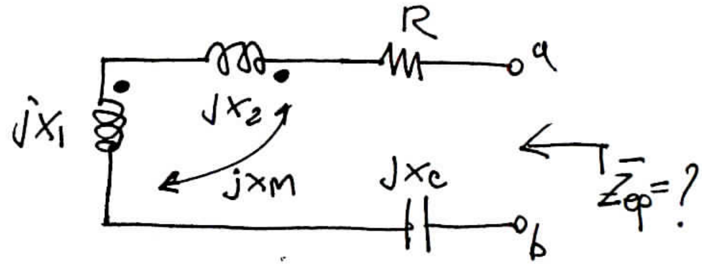
KVL γ: $\bar{V}_{OC} = jX_1 \bar{I}_S + \cancel{jX_M \bar{I}_2} + \cancel{jX_2 \bar{I}_2} + jX_M \bar{I}_S$

$\bar{I}_2 = 0$

$= j(X_1 + X_M)\bar{I}_S = j(3{,}77 + 1{,}74) \cdot 5 = j27{,}55$ V

Impedenza equivalente

Spengo le sorgenti:

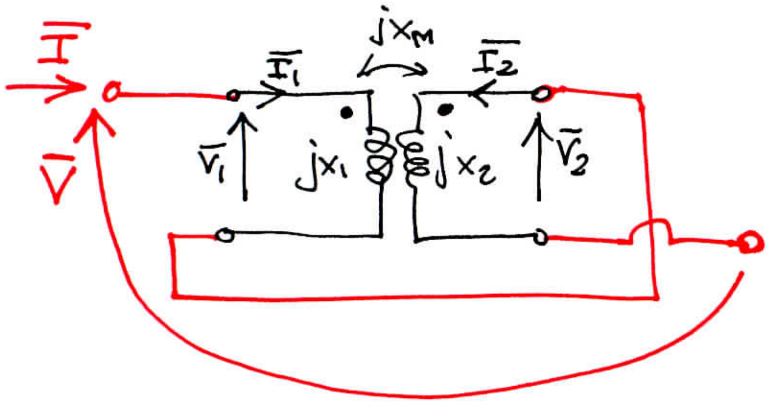


Le due porte del mutuo induttore sono connesse in "SERIE EQUIVERSA".

Conviene trattare in modo generale queste connessione

☐ Trattazione generale della SERIE EQUIVERSA / CONTROVERSA

- **SERIE EQUIVERSA:**



- Connessione in serie delle due porte ⇒ unica corrente $\bar{I}$
- $\bar{I}$ e' entrante nei morsetti contrassegnati di entrambe le porte oppure uscente dai morsetti contrassegnati di entrambe le porte.

$$\begin{cases} \bar{V}_1 = jx_1\bar{I}_1 + jx_M\bar{I}_2 \\ \bar{V}_2 = jx_M\bar{I}_1 + jx_2\bar{I}_2 \end{cases} \qquad \begin{aligned} \bar{V} &= \bar{V}_1 + \bar{V}_2 \\ \bar{I} &= \bar{I}_1 = \bar{I}_2 \end{aligned}$$

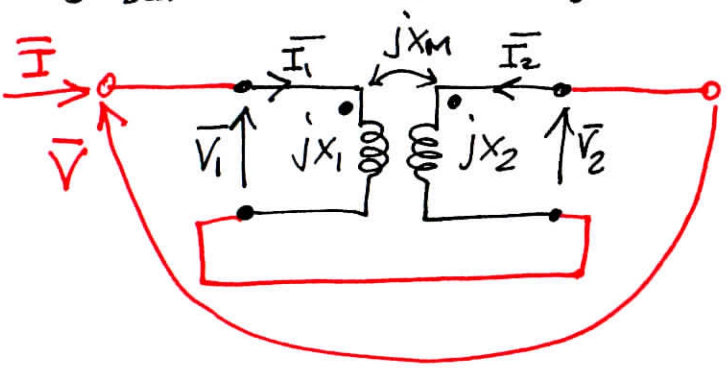
$$\Rightarrow \quad \bar{V} = jx_1\bar{I} + jx_M\bar{I} + jx_M\bar{I} + jx_2\bar{I} = j(x_1 + x_2 + 2x_M)\bar{I}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{X_{eq} = X_1 + X_2 + 2X_M}$$

RISULTATO DA RICORDARE

$L_{eq} = L_1 + L_2 + 2L_M$ (nel dominio del tempo)

- **SERIE CONTROVERSA:**



- $\bar{I}$ e' entrante nel morsetto contrassegnato di una porta, ed e' uscente dal morsetto contrassegnato dell'altra porta.

$$\bar{I} = \bar{I}_1 = -\bar{I}_2 \qquad \bar{V} = \bar{V}_1 - \bar{V}_2$$

$$\Rightarrow \quad \bar{V} = jx_1\bar{I}_1 + jx_M\bar{I}_2 - jx_M\bar{I}_1 - jx_2\bar{I}_2 = jx_1\bar{I} - jx_M\bar{I} - jx_M\bar{I} + jx_2\bar{I}$$

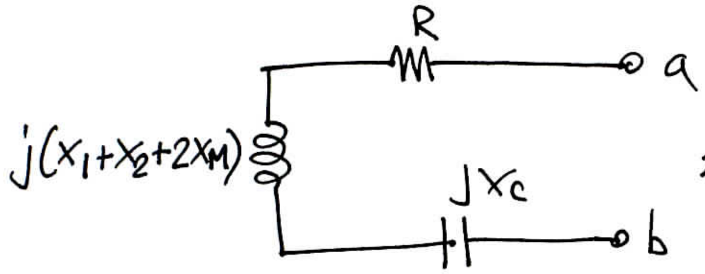
$$= j(x_1 + x_2 - 2x_M)\bar{I}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{X_{eq} = X_1 + X_2 - 2X_M}$$

RISULTATO DA RICORDARE

$L_{eq} = L_1 + L_2 - 2L_M$ (nel dominio del tempo)

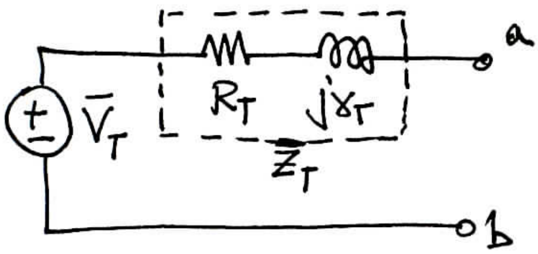
Riprendendo l'esercizio:



$$\bar{Z}_{ab} = R + j(X_1+X_2+2X_M+X_c)$$

$$\bar{Z}_{ab} = 10 + j\,(3{,}77+1{,}26+2\cdot 1{,}74-3{,}18) = 10 + j\,5{,}27\ \Omega$$

CIRCUITO EQ. DI THEVENIN



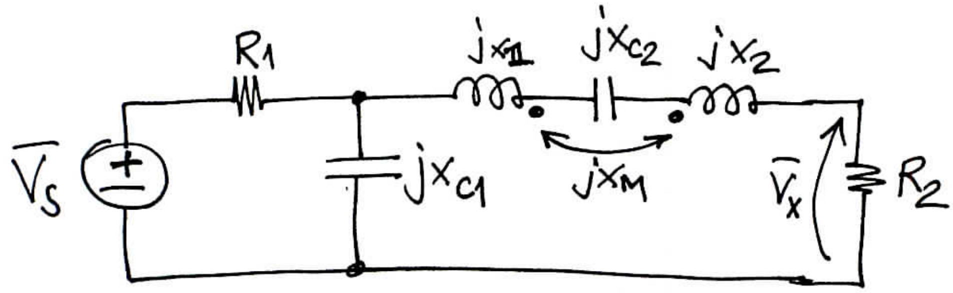
$\bar{V}_T = \bar{V}_{oc} = j27{,}55\ V$

$\bar{Z}_T = \bar{Z}_{ab} = 10 + j5{,}27\ \Omega$

$R_T = 10\ \Omega$

$X_T = 5{,}27\ \Omega$

EX



$\bar{V}_S = 10\,V$

$R_1 = R_2 = 2\,\Omega$

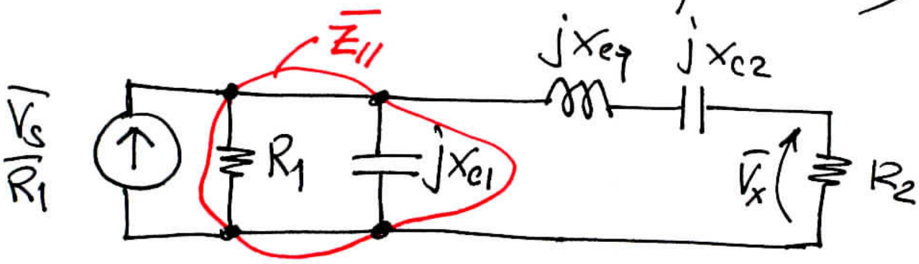
$X_1 = X_2 = 2\,\Omega$

$X_{c1} = X_{c2} = -2\,\Omega$

$X_M = 1\,\Omega$

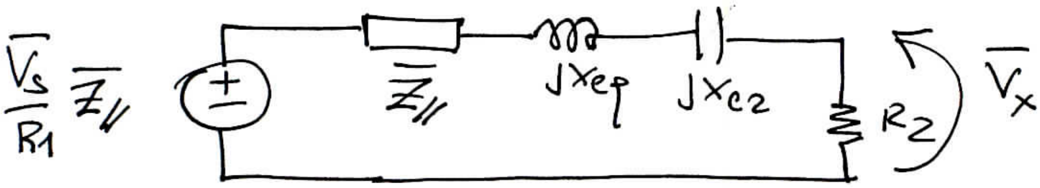
Determinare $\bar{V}_x$.

Serie controversa! (vedi risultati precedenti)



$$X_{eq} = X_1 + X_2 - 2X_M = 2+2-2 = 2\,\Omega$$

$$\bar{Z}_{//} = \frac{R_1\, jx_{c1}}{R_1 + jx_{c1}} = \frac{\cancel{2}\cdot(-j2)}{\cancel{2}-j\cancel{2}}\,\frac{1+j}{1+j} = \frac{2-j2}{2} = 1-j\ \Omega$$



$$\bar{V}_x = \frac{\bar{V}_S}{R_1}\bar{Z}_{//}\,\frac{R_2}{\bar{Z}_{//} + jx_{eq} + jx_{c2} + R_2} = \frac{10}{\cancel{2}}\cdot(1-j)\,\frac{\cancel{2}}{1-j+\cancel{j2}-\cancel{j2}+2}$$

$$= 10\,(1-j)\,\frac{1}{3-j}\,\frac{3+j}{3+j} = \frac{\cancel{10}}{\cancel{10}}\,(3+j-j3+1) = 4-j2\ V$$