Esercizi su relazioni e funzioni

Esercizio 1.

Siano $X = \{a,b,c,d\}$ e $\rho \subseteq X \times X$ la relazione definita dalla seguente matrice di incidenza:

$$M_\rho = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Di che proprietà gode ρ ?
2. Costruire la chiusura riflessiva e la chiusura simmetrica di ρ .
3. Costruire la chiusura di equivalenza di ρ e determinare le classi d'equivalenza.

<u>Traccia di soluzione</u>

1. Poiché in ogni riga della matrice di incidenza di ρ c'è almeno un 1 ρ è seriale, inoltre è antisimmetrica perché ogni volta che l'elemento di posto (i.k) della matrice di incidenza è 1 l'elemento di posto (k,i) è 0.
2. La chiusura riflessiva e simmetrica R di ρ ha matrice di incidenza $M_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

   quindi R={(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(b,b),(b,c),(c,a),(c,b),(c,c),(c,d),(d,c),(d,d)}.
3. La chiusura d'equivalenza di ρ è la chiusura transitiva di R e pertanto è la relazione universale, infatti (a,c)∈R,(c,d)∈R implicano (a,d)∈R^2, (b,c)∈R,(c,d)∈R implicano (b,d)∈R^2, (d,c)∈R,(c,a)∈R implicano (d,a)∈R^2, (d,c)∈R,(c,b)∈R implicano (d,b)∈R^2. Quindi la chiusura transitiva di R è $R \cup R^2 = \omega_X$; c'è pertanto una sola classe di equivalenza formata dall'intero X.

Esercizio 2

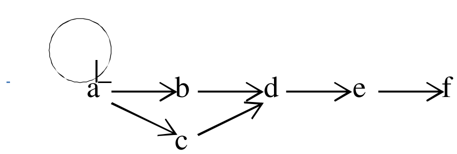
Siano $X = \{a,b,c,d,e,f\}$ e $\rho \subseteq X \times X$ così definita:

$\rho = \{(a,a),(a,b),(a,c),(b,d),(c,d),(d,e),(e,f)\}$

1. Determinare la chiusura transitiva di ρ .
2. Costruire la chiusura simmetrica della chiusura riflessiva e transitiva di ρ .

<u>Traccia di soluzione.</u>

1. Il grafo di incidenza di ρ è

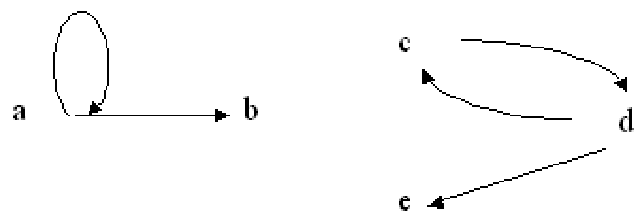
   

   per cui nella chiusura transitiva di ρ devono stare le coppie (a,d),(b,e),(d,f),(c,e) che stanno in ρ^2, (a,e),(b,f),(c,f) che stanno in ρ^3, (a,f) che sta in ρ^4. Nessuna coppia nuova sta in ρ^5 e dunque la chiusura transitiva di ρ è la relazione
   R={(a,a),(a,b),(a,c),(a,d),(a,e),(a,f),(b,d),(b,e),(b,f),(c,d),(c,e),(c,f),(d,e),(d,f),(e,f)}.
2. La chiusura riflessiva di R è {(a,a),(a,b),(a,c),(a,d),(a,e),(a,f),(b,b),(b,d),(b,e),(b,f),(c,c), (c,d),(c,e),(c,f),(d,d),(d,e),(d,f),(e,e),(e,f),(f,f)} e la chiusura simmetrica di questa relazione è

{(a,a),(a,b),(b,a),(a,c),(c,a),(a,d),(d,a),(a,e),(e,a),(a,f),(f,a),(b,b),(b,d),(d,b),(b,e),(e,b),(b,f), (f,b),(c,c),(c,d),(d,c),(c,e),(e,c),(c,f),(f,c),(d,d),(d,e),(d,f),(f,d),(e,e),(e,f),(f,e),(f,f)} (ovvero la relazione ottenuta eliminando dalla relazione universale le due coppie (b,c),(c,b)).

Esercizio 3

Siano $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ e $\rho \subseteq X \times X$ una relazione rappresentata dal seguente grafo di incidenza:



1. Di che proprietà gode ρ ?
2. Costruire la relazione d'equivalenza $\overline{\rho}$ generata da ρ .
3. Determinare l'insieme quoziente $X/\overline{\rho}$.

Traccia di soluzione

1. La relazione ρ non ha alcuna delle proprietà che abbiamo considerato nel corso (non è seriale perché nessuna freccia esce da b e da e e quindi non è neppure riflessiva, non è simmetrica perché ad esempio (a,b)$\in\rho$ ma (b,a)$\notin\rho$, non è antisimmetrica perché (c,d)$\in\rho$, (d,c)$\in\rho$ e d$\neq$c, non è transitiva perché ad esempio (c,d)$\in\rho$, (d,e)$\in\rho$ ma (c,e)$\notin\rho$.
2. La chiusura riflessiva e simmetrica di ρ è la relazione {(a,a),(a,b),(b,a),(b,b),(c,c),(c,d),(d,c),(d,d),(d,e),(e,d),(e,e)}, la cui chiusura transitiva è {(a,a),(a,b),(b,b),(b,a),(c,c),(c,d),(d,c),(d,d),(d,e),(e,d),(e,e),(c,e),(e,c)} come si può vedere facilmente dal grafo. Per definizione tale relazione è la chiusura riflessiva, simmetrica e transitiva di ρ e quindi è la relazione d'equivalenza $\overline{\rho}$ generata da ρ .
3. L'insieme quoziente $X/\overline{\rho}$ è formato dalle $\overline{\rho}$-classi di X. Si ha $\overline{\rho}_a$={a,b}=$\overline{\rho}_b$ e $\overline{\rho}_c$ ={c,d,e}=$\overline{\rho}_d = \overline{\rho}_e$, quindi $X/\overline{\rho}$ ={ $\overline{\rho}_a$, $\overline{\rho}_c$ }.

Esercizio 4

Sia **R**[x] l'insieme dei polinomi a coefficienti reali nell'indeterminata x e sia R$\subseteq$**R** [x]$\times$ **R** [x] la relazione definita nel seguente modo:

$\forall$f(x),g(x)$\in$ **R**[x] (f(x),g(x))$\in$R se e solo se $\exists$b$\in$**R** tale che f(b)=g(b)=0

a) Di che proprietà gode R?

b) Sia ρ la chiusura di equivalenza di R. Dimostrare che due polinomi che ammettono una radice reale sono sempre associati rispetto a ρ.

Traccia di soluzione

a) R non è seriale e quindi neppure riflessiva perché, ad esempio, il polinomio x^2+1 non ha radici reali e quindi non è associato ad alcun polinomio. R è ovviamente simmetrica. R non è antisimmetrica perché ad esempio (x^2+x, x^2-1), (x^2-1, x^2+x)$\in$R e $x^2-1\neq x^2+x$. R non è transitiva in quanto ad esempio (x^2-1, x^2+x)$\in$R, (x^2+x,x)$\in$R, ma (x^2-1, x)$\notin$R.

b) Siano ora f(x) e g(x) due polinomi che ammettono una radice reale e siano a una radice reale di f (x) e b una radice reale di g(x), il polinomio (x-a)(x-b)= x^2-(a+b)x+ab è tale che (f(x), x^2-(a+b)x+ab)$\in$R$\subseteq$ρ, (x^2-(a+b)x+ab,g)$\in$R$\subseteq$ρ, quindi per la transitività di ρ, (f(x),g(x))$\in$ρ.

Esercizio 5

Sia X={a,b,c,d,e,f} e sia $R\subseteq X\times X$ una relazione su X con la seguente matrice di incidenza

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Di che proprietà gode R?

Provare che esiste la minima relazione d'ordine $\leq$ su X che contiene R. Trovare gli elementi minimali e massimali di X rispetto a $\leq$. Sono essi massimi o minimi per X? Sia Y={a,b,c,f} trovare sup Y e inf Y e dire se sono massimo e minimo per Y. Dire se X è un reticolo rispetto alla relazione $\leq$. Mostrare che esiste un sottoinsieme Z di X che è un reticolo rispetto alla stessa relazione $\leq$ (ristretta a Z).

Costruire la chiusura simmetrica e riflessiva $S\subseteq X\times X$ di $\leq$ e dire se è una relazione di equivalenza. In caso affermativo dire se è la relazione di equivalenza generata da R. Costruire tale chiusura d'equivalenza ρ e l'insieme quoziente X/ρ.

Dire se esistono funzioni da X a X contenute in R ed in caso affermativo indicarne il numero. Alcune di queste funzioni ammettono una funzione inversa o un'inversa sinistra o un'inversa destra? Fare le stesse considerazioni per le funzioni da X ad X contenute in ρ. Può esistere una funzione da X ad X con un'inversa sinistra che non è inversa destra?

<u>Traccia di soluzione</u>

R è seriale ma non riflessiva in quanto $(a,a)\notin R$. Non è simmetrica in quanto la matrice di incidenza non è simmetrica, è antisimmetrica in quanto per ogni i,k con $1\leq i\leq 6$, $1\leq k\leq 6$, se l'elemento di posto (i,k) è 1 l'elemento di posto (k,i) è 0. Non è transitiva perché, ad esempio, $(a,b)\in R$, $(b,c)\in R$ ma $(a,c)\notin R$. La chiusura riflessiva R^r di R ha matrice di incidenza $M=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Per determinare la chiusura transitiva di R^r calcoliamo $M^2=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e poiché in M^2 ci sono degli 1 che non erano presenti in M , calcoliamo $M^3=\begin{bmatrix}1&1&1&0&0&0\\0&1&1&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&1&0\\0&0&0&0&1&0\\1&1&1&0&0&1\end{bmatrix}=M^2$. A questo punto la chiusura transitiva di R^r ha matrice di incidenza $\begin{bmatrix}1&1&1&0&0&0\\0&1&1&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&1&0\\0&0&0&0&1&0\\1&1&1&0&0&1\end{bmatrix}$ ed è una relazione antisimmetrica. Dunque è una relazione d'ordine $\leq$ ed è la minima relazione d'ordine contenente R essendo la chiusura riflessiva e transitiva di R. L'insieme X rispetto alla relazione d'ordine $\leq$ ha il seguente diagramma di Hasse

$$\begin{array}{ccc} c & & \\ | & & \\ b & & \\ | & & \\ a & & e \\ | & & | \\ f & & d \end{array}$$

Gli elementi massimali di X rispetto alla relazione $\leq$ sono c ed e ed i minimali f e d e non ci sono massimi e minimi.
Dato Y={a,b,c,f}, si ha sup Y=c e inf Y=f ; c ed f sono rispettivamente massimo e minimo per Y, in quanto appartengono ad Y.
X non è reticolo rispetto alla relazione $\leq$ in quanto, ad esempio, non esiste sup{e,f}, invece Y è un reticolo rispetto a $\leq$ in quanto Y è un insieme totalmente ordinato e quindi ogni coppia di elemnti di Y ha sempre sup e inf.
La chiusura simmetrica e riflessiva S di $\leq$ coincide con la chiusura simmetrica di $\leq$, essendo $\leq$ già riflessiva, ed ha matrice di incidenza $\begin{bmatrix}1&1&1&0&0&1\\1&1&1&0&0&1\\1&1&1&0&0&1\\0&0&0&1&1&0\\0&0&0&1&1&0\\1&1&1&0&0&1\end{bmatrix}$. Si verifica facilmente che facendo il quadrato di tale matrice non si introducono nuovi 1 e quindi S è una relazione di equivalenza. E' anche la relazione d'equivalenza generata da R in quanto S contiene R, S è una relazione di equivalenza ed inoltre $\leq$ essendo la chiusura riflessiva e transitiva di R è contenuta nella relazione d'equivalenza ρ generata da R, che è una relazione riflessiva e transitiva contenente R. Da $\leq\subseteq\rho$ si ricava $\leq^{-1}\subseteq\rho^{-1}$ ma, per la simmetria di ρ, si ha $\rho^{-1}\subseteq\rho$ e quindi $S=\leq\cup\leq^{-1}\subseteq\rho$. Poiché ρ contiene ogni relazione d'equivalenza contenente R si ha $S=\rho$.
L'insieme quoziente X/ρ è allora $\{\rho_a, \rho_d\}$ con $\rho_a=\{a,b,c,f\}=\rho_b=\rho_c=\rho_f$ e $\rho_d=\{d,e\}=\rho_e$.

In ogni riga della matrice di incidenza di R c'è almeno un 1 e più precisamente in ogni riga eccetto l'ultima c'è un solo 1, mentre nell'ultima riga si hanno due 1. Ci sono pertanto due funzioni da X ad X contenute in R. Poiché nella matrice di incidenza di R c'è una colonna di tutti 0 non esistono funzioni suriettive da X ad X contenute in R e quindi neppure funzioni iniettive in quanto una funzione da un insieme finito X ad un insieme finito Y con la stessa cardinalità di X è iniettiva se e solo se è suriettiva. Non esistono pertanto funzioni contenute in R che ammettano inversa destra o sinistra. Esistono $4^4 2^2=4^5$ funzioni da X ad X contenute in ρ; tra di esse c'è la funzione identica che ammette banalmente inversa. Precisamente esistono 4!2! funzioni invertibili da X ad X, infatti le funzioni che hanno inversa sono funzioni biunivoche e quindi bisogna eliminare degli 1 nelle righe della matrice di incidenza di ρ in modo da lasciare su ogni riga e ogni colonna della matrice uno ed un solo 1, per la prima riga questo può essere fatto in 4 modi, per ogni scelta della prima riga abbiamo 3 scelte sulla seconda, per ogni scelta sulla prima e seconda riga abbiamo 2 scelte sulla terza e per ogni scelta di queste tre righe 1 sola scelta sulla sesta. Sulla quarta riga abbiamo due scelte e per ogni scelta di questa una sola scelta sulla quinta riga. Abbiamo già detto che nessuna funzione da X ad X, essendo X finito, può essere suriettiva senza essere iniettiva e quindi ogni funzione da X ad X che ammette inversa sinistra deve avere inversa destra ed allora le due inverse coincidono.

Esercizio 6

Siano Z l'insieme dei numeri interi relativi ed $f : Z \to Z$ una funzione. Si consideri la relazione $R \subseteq Z \times Z$ così definita: $(n,m) \in R$ se e solo se n ed m sono entrambi pari ed $f(n)=f(m)$ oppure n ed m sono entrambi dispari.

Stabilire se $R \subseteq \ker f$ e se puo' valere l'uguaglianza $R = \ker f$.

Dire di che proprietà gode R.

Verificare che R e' una relazione di equivalenza.

Nel caso in cui f sia così definita:

$f(n)=n+1$ se n è dispari

$f(n)=|n+1|$ se n è pari,

determinare le classi di equivalenza di R.

<u>Traccia di soluzione</u>

La relazione R non è sempre contenuta in ker f come si può facilmente notare prendendo come funzione f la funzione identica: in tal caso $(1,3) \in R$ ma $(1,3) \notin \ker f$.

L'uguaglianza R=ker f vale se f manda tutti i numeri dispari in uno stesso elemento, e non manda mai un numero pari in quell'elemento.

R è una relazione riflessiva e quindi seriale, in quanto per ogni n o n è dispari e quindi $(n,n) \in R$ o n è pari e quindi banalmente $f(n)=f(n)$ da cui ancora $(n,n) \in R$. R è simmetrica in quanto nella definizione di R n ed m hanno lo stesso ruolo. R non è antisimmetrica in quanto ad esempio sia (1,3) sia (3,1) appartengono ad R. R è transitiva perchè se $(n,m) \in R$ e $(m,t) \in R$ allora n,m,t sono tutti pari o tutti dispari, inoltre se n,m,t sono pari, $(n,m) \in R$ implica $f(n)=f(m)$ e $(m,t) \in R$ implica $f(m)=f(t)$ da cui $f(n)=f(t)$; in ogni caso si ha dunque $(n,t) \in R$.

Abbiamo quindi già provato che R è una relazione d'equivalenza.

Supponiamo ora che sia $f(n)=n+1$ se n è dispari e $f(n)=|n+1|$ se n è pari. Si ha allora che la R-classe $[2h+1]_R$ di un qualsiasi numero dispari è formato da tutti i numeri dispari e la R-classe $[2h]_R$ di un numero pari è formato da 2h e dal suo opposto -2h-2.

Esercizio 7

Sia $f : A \to B$ un'applicazione.

- Sia ρ una relazione di equivalenza su B, provare che la relazione σ definita su A ponendo $(a_1,a_2) \in \sigma$ se e solo se $(f(a_1),f(a_2)) \in \rho$ è una relazione di equivalenza su A

- Nel caso particolare in cui A=R, B=Z, f associa ad ogni numero reale la sua parte intera e ρ è la relazione di congruenza modulo 4, descrivere la classe di equivalenza di ½ rispetto a σ.
- Data una relazione di equivalenza τ su A la relazione κ definita su B ponendo $(b_1,b_2)\in\kappa$ se e solo se esistono $a_1,a_2\in$ A tali che $f(a_1)=b_1, f(a_2)=b_2$ e $(a_1,a_2)\in\tau$ è una relazione di equivalenza su B? Sempre o talvolta?

Traccia di soluzione

Verifichiamo che σ è una relazione d'equivalenza su A.

σ è riflessiva in quanto per ogni $a\in A$ si ha $(f(a),f(a))\in\rho$ in quanto ρ è una relazione d'equivalenza e quindi riflessiva.

σ è simmetrica in quanto per ogni $(a_1,a_2)\in\sigma$ si ha $(f(a_1),f(a_2))\in\rho$ e, essendo ρ una relazione d'equivalenza e quindi simmetrica, $(f(a_2),f(a_1))\in\rho$ da cui $(a_2,a_1)\in\sigma$.

σ è transitiva in quanto da $(a_1,a_2)\in\sigma$ e $(a_2,a_3)\in\sigma$ si ha $(f(a_1),f(a_2))\in\rho$ e $(f(a_2),f(a_3))\in\rho$ e, essendo ρ una relazione d'equivalenza e quindi transitiva, $(f(a_1),f(a_3))\in\rho$ da cui $(a_1,a_3)\in\sigma$.

La classe di equivalenza di ½ rispetto a σ, $[½]_\sigma$, è formata da tutti e soli i numeri reali x tali che $(½,x)\in\sigma$ ovvero da tutti e soli i numeri reali x tali che $f(½)\equiv f(x)$ (mod 4) ovvero $0=\lfloor ½\rfloor\equiv\lfloor x\rfloor$ (mod 4).
Ne segue che $[½]_\sigma=\{4h+r \mid h\in Z, r\in R \text{ con } 0\leq r<1\}$.

Se f non è suriettiva la relazione κ non è riflessiva, infatti se b non ha controimmagini mediante f $(b,b)\notin\kappa$.

Se f non è iniettiva la relazione κ potrebbe non essere transitiva, infatti supponiamo $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$ con $\tau=\{(a_1,a_1),(a_1,a_2),(a_2,a_2),(a_2,a_1),(a_3,a_3),(a_3,a_4),(a_4,a_3),(a_4,a_4)\}$ e $B=\{b_1,b_2,b_3\}$ con $f(a_1)=b_1, f(a_2)=f(a_3)=b_2, f(a_4)=b_3$, allora $(b_1,b_2)\in\kappa$, $(b_2,b_3)\in\kappa$ ma $(b_1,b_3)\notin\kappa$.

In generale quindi la relazione κ non è di equivalenza, ma risulta esserlo se f è biettiva. In tal caso infatti per ogni $b\in B$ esiste un $a\in A$ tale che $f(a)=b$ e dunque $(b,b)\in\kappa$ perchè $(a,a)\in\tau$, quindi κ è riflessiva. κ è poi simmetrica in quanto se $(b_1,b_2)\in\kappa$ esistono $a_1,a_2\in A$ tali che $f(a_1)=b_1, f(a_2)=b_2$ e $(a_1,a_2)\in\tau$, e per la simmetria di τ $(a_2,a_1)\in\tau$, quindi $(b_2,b_1)\in\kappa$. Infine κ è transitiva in quanto se $(b_1,b_2)\in\kappa$ e $(b_2,b_3)\in\kappa$ e esistono $a_1,a_2,a_3,a_4\in A$ tali che $f(a_1)=b_1, f(a_2)=b_2$ e $(a_1,a_2)\in\tau$, $f(a_3)=b_2, f(a_4)=b_3$ e $(a_3,a_4)\in\tau$, ma per l'iniettività di f $a_2=a_3$ e allora per la transitività di τ $(a_1,a_3)\in\tau$, quindi $(b_1,b_3)\in\kappa$.

Esercizio 8

Siano $A=\{2,3,4\}$, $B=\{6,7,9\}$ e sia $\tau\subseteq A\times B$ la relazione così definita:

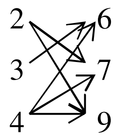
$\forall\, a\in A, b\in B \qquad a\,\tau\, b \;:\Leftrightarrow\; b-a\in P,$

dove P è l'insieme dei numeri primi.

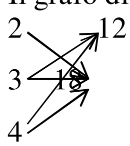
1. Rappresentare la relazione τ tramite la sua matrice di incidenza e il suo grafo di incidenza.
2. Sia $\rho\subseteq A\times B$ un'altra relazione definita nel seguente modo:
   $\forall\, a\in A, b\in B \qquad a\,\rho\, b \;:\Leftrightarrow\; mcd(a,b)=1$
   dove *mcd(a,b)* è il massimo comun divisore di *a* e *b*.
   Determinare le matrici di incidenza di $\tau\cap\rho$ e di $\tau\cup\rho$.
3. Siano $C=\{12,18\}$ e $\sigma\subseteq B\times C$ la relazione così definita:
   $\forall\, b\in B, c\in C \qquad b\,\sigma\, c \;:\Leftrightarrow\; b\mid c,$
   dove "|" significa "divide".
   Determinare la relazione $\tau\cdot\sigma$, il suo grafo di incidenza e la sua matrice di incidenza.
4. Determinare τ^{-1} e $\tau\cdot\tau^{-1}$.

Traccia di soluzione

1. Si verifica facilmente che $\tau=\{(2,7),(2,9),(3,6),(4,6),(4,7),(4,9)\}$ quindi la matrice di incidenza di τ è $\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\\1&1&1\end{bmatrix}$ ed il suo grafo di incidenza è



2. Essendo ρ={(2,7),(2,9),(3,7),(4,7),(4,9)}, si ottiene subito che la matrice di incidenza di $\tau \cap \rho$ è $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e che quella di $\tau \cup \rho$ è $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
3. Risulta σ={(6,12),(6,18),(9,18)}. La matrice di incidenza di σ è $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e quindi la matrice di incidenza di τ·σ è $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, quindi τ·σ={(3,12),(3,18),(4,12),(4,18)}, infatti
(2,9)∈τ,(9,18)∈σ e dunque (9,18)∈τ·σ; (3,6)∈τ,(6,12)∈σ e dunque (3,12)∈τ·σ;
(3,6)∈τ,(6,18)∈σ e dunque (3,18)∈τ·σ; (4,6)∈τ,(6,12)∈σ e dunque (4,12)∈τ·σ;
(4,6)∈τ,(6,18)∈σ e dunque (4,18)∈τ·σ; infine (2,12)∉ τ·σ perché solamente (6,12)∈σ e (2,6)∉σ.
Il grafo di incidenza di τ·σ è



4. τ^{-1}={(7,2),(9,2),(6,3),(6,4),(7,4),(9,4)} da cui $\tau\cdot\tau^{-1}$ ={(2,2),(2,4),(3,3),(3,4),(4,3),(4,4),(4,2)}.

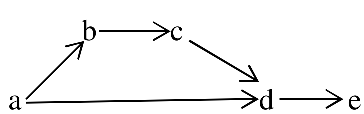
Esercizio 9

Sia $X = \{a, b, c, d, e\}$ e si consideri la relazione binaria *R* su *X* così definita:
$R = \{(a,b),(a,d),(b,c),(c,d),(d,e)\}$.

1. Rappresentare la relazione R tramite la sua matrice di incidenza e il suo grafo d'incidenza.
2. Dire quali proprietà soddisfa R utilizzando sia la matrice che il grafo incidenza.
3. Determinare la chiusura riflessiva, la chiusura simmetrica e la chiusura transitiva di R.
4. Costruire la chiusura d'equivalenza ρ di R^2 e scrivere l'insieme quoziente X/ρ.
5. Sia δ la chiusura simmetrica di R^2. δ è una funzione? Quante funzioni contiene δ? Quante di queste sono iniettive? Quante suriettive?

<u>Traccia di soluzione</u>

1. La matrice di incidenza di R è $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, il suo grafo di incidenza è



2. R è antisimmetrica (la sua matrice di incidenza è triangolare alta, tutti gli 1 stanno in posti (i,k) con i<k e tutti gli elementi di posto (k,i) in tal caso sono nulli). Dal grafo si vede infatti che nessun arco ha doppia freccia.
   Non è seriale (e quindi neppure riflessiva) perché sulla riga di e non ci sono 1, infatti dal vertice e non escono archi

Non è simmetrica perché la matrice di incidenza non è simmetrica, infatti nel grafo c'è ad esempio l'arco (a,b) ma non l'arco (b,a)
Non è transitiva perché nel grafo c'è ad esempio un cammino di lunghezza 2 fra a e c ma non c'è l'arco (a,c). Calcolando il quadrato della matrice di incidenza (che è la matrice di incidenza di R^2) abbiamo $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e dunque R^2 non è contenuta in R.

3. La chiusura riflessiva di R ha matrice di incidenza $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e quindi è la relazione {(a,a),(a,b),(a,d),(b,b),(b,c),(c,c),(c,d),(d,d),(d,e),(e,e)}, la chiusura simmetrica di R ha matrice di incidenza $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e quindi è la relazione {(a,b),(b,a),(a,d),(d,a), (b,c),(c,b),(c,d),(d,c),(d,e),(e,d)},
Usando il grafo di incidenza di R si vede subito che la chiusura transitiva di R è la relazione {(a,b),(a,c),(a,d),(a,e),(b,c),(b,d),(b,e),(c,d),(c,e),(d,e)}.
4. Dalla matrice di incidenza di R^2 calcolata al punto prcedente si vede che il grafo di incidenza di R^2 è

$$\begin{tikzcd} a \arrow[rr] \arrow[dr] & & e & b \arrow[r] & d \\ & c \arrow[ur] & & & \end{tikzcd}$$

e dunque la sua chiusura di equivalenza ρ è la relazione {(a,a),(a,c),(a,e),(c,a),(c,c),(c,e), (e,a),(e,c),(e,e),(b,b),(b,d),(d,b),(d,d)} e si ha X/ρ={ρ_a,ρ_b} con ρ_a={a,c,e}= ρ_c= ρ_e, ρ_b={b,e}= ρ_d.

5. La chiusura simmetrica δ di R^2 ha matrice di incidenza $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e non è una funzione perché ci sono righe che contengono più di un 1. δ contiene 8 funzioni. Vediamo quante di esse sono iniettive. Ogni funzione contenuta in δ porta b in d e d in b, perché sulla seconda e quarta riga c'è un solo 1. Se una funzione iniettiva contenuta in δ porta a in c deve portare e in a e quindi c in e. Se porta a in e allora deve portare c in a ed e in c. Ci sono quindi 2 sole funzioni iniettive da X ad X contenute in δ. Poichè ogni funzione da X ad X è iniettiva se e solo se è suriettiva, tali funzioni sono suriettive e sono le sole funzioni suriettive da X in X contenute in δ.

Esercizio 10

Sia $A = R^2 \setminus \{(0,0)\}$ con R insieme dei numeri reali e sia $\rho \subseteq A \times A$ la relazione definita nel seguente modo:

$\forall (a,b),(c,d) \in A \qquad (a,b)\ \rho\ (c,d) \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, t \in R \setminus \{0\} \quad c = at,\ d = bt.$

Dimostrare che ρ è una relazione d'equivalenza e descrivere la generica classe di equivalenza rispetto a ρ.

<u>Traccia di soluzione</u>

Per ogni (a,b)∈A abbiamo (a,b)ρ(a,b) in quanto a=a1 e b=b1 , dunque ρ è riflessiva
Se (a,b)ρ(c,d) esiste un t∈R\{0} tale che c=at, d=bt, ma allora a=c(1/t), b=d(1/t) con 1/t∈R\{0} quindi (c,d)ρ(a,b) , dunque ρ è simmetrica
Se (a,b)ρ(c,d) e (c,d)ρ(e,f) esistono t,s∈R\{0} tale che c=at, d=bt, e=cs,f=ds ma allora e=a(ts), b=f(ts) con ts∈R\{0} quindi (a,b)ρ(e,f) , dunque ρ è transitiva. Pertanto ρ è una relazione di equivalenza.
La ρ−classe di (a,b) è formata da tutte e sole le coppie di numeri reali (x,y) tali che a=xr,b=yr per qualche r ∈R\{0}, ma questo equivale a dire che ay=bx.
Quindi $\rho_{(a,b)}$={(x,y)∈A|ay=bx}.

Esercizio 11

Sia E un insieme e sia ρ una relazione riflessiva e transitiva su E.

1. Definiamo su E una relazione σ tale che
   $a\sigma b \Leftrightarrow a\rho b,\ b\rho a$.
   Mostrare che σ è una relazione d'equivalenza.
2. Sull'insieme E/σ definiamo una relazione τ tale che:
   $[a]_\sigma \tau [b]_\sigma \Leftrightarrow a\rho b.$
   Mostrare che τ è una relazione d'ordine.

<u>Traccia di soluzione</u>

1. Per ogni a∈E abbiamo aσa infatti essendo ρ riflessiva sappiamo che aρa, dunque σ è riflessiva; σ è simmetrica perché per ogni a,b∈E se aσb si ha aρb e bρa e dunque bσa. Supponiamo ora che aσb e bσc, dalla prima abbiamo aρb e bρa, dalla seconda bρc e cρb, ora per la trensitività di r da aρb e bρc otteniamo aρc , da bρa e cρb otteniamo cρa e dunque aσc , pertanto σ è transitiva e quindi è una relazione d'equivalenza.
2. Poiché la relazione τ è una relazione fra classi dobbiamo per prima cosa far vedere che è ben posta, ovvero che non dipende dalla scelta dei rappresentanti delle classi. Supponiamo allora che sia $[a]_\sigma\tau[b]_\sigma$ e $[a]_\sigma=[a']_\sigma$, $[b]_\sigma=[b']_\sigma$, mostriamo che allora $[a']_\sigma\tau[b']_\sigma$. Infatti $[a]_\sigma\tau[b]_\sigma$ implica che aρb, $[a]_\sigma=[a']_\sigma$ implica aρa' e a'ρa, $[b]_\sigma=[b']_\sigma$ implica bρb' e b'ρb. Ora a'ρa e aρb, per la transitività di ρ implicano a'ρb che a sua volta assieme a bρb' implica a'ρb' e quindi $[a']_\sigma\tau[b']_\sigma$. Ora mostriamo che τ è una relazione d'ordine su E/ρ. Per ogni $[a]_\sigma$∈E/ρ si ha $[a]_\sigma\tau[a]_\sigma$ perché ρ è riflessiva e dunque aρa. Se $[a]_\sigma\tau[b]_\sigma$ e $[b]_\sigma\tau[a]_\sigma$ allora aρb e bρa e dunque aσb da cui $[a]_\sigma=[b]_\sigma$. Infine se $[a]_\sigma\tau[b]_\sigma$ e $[b]_\sigma\tau[c]_\sigma$ allora aρb e bρc e per la transitività di ρ, aρc e dunque $[a]_\sigma\tau[c]_\sigma$. Pertanto τ è riflessiva, antisimmetrica e transitiva, dunque è una relazione d'ordine.

Esercizio 12

a) Si consideri l'insieme $\overline{N}$=N \ {0} dei numeri naturali non nulli e la relazione R⊆$\overline{N}\times\overline{N}$ così definita

$$(n,m)\in R \text{ se e solo se } n=2^\alpha h,\ m=2^\alpha k$$

con h, k interi positivi dispari ed α ∈ N (ricordare che N include lo 0).
Si mostri che R è una relazione di equivalenza su $\overline{N}$ e si determinino le classi di equivalenza di R.
b) In $\overline{N}$ si consideri ora la relazione S così definita

$$(n,m)\in S \text{ se e solo se } n=2^\alpha h,\ m=2^\beta k \text{ con } \alpha\leq\beta$$

ove ≤ è l'usuale relazione d'ordine su $\overline{N}$, h, k sono interi positivi dispari ed α,β ∈ N.
Si dica se S è una relazione d'ordine su $\overline{N}$.
c) Si consideri da ultimo l'insieme quoziente $\frac{\overline{N}}{R}$ e la relazione T su $\frac{\overline{N}}{R}$ così definita

$$([n],[m])\in T \text{ se e solo se } n=2^\alpha h,\ m=2^\beta k \text{ con } \alpha\leq\beta$$

ove [n] indica la R-classe di n ed h, k, α, β sono definiti come sopra.

Si verifichi che T è una relazione d'ordine su $\frac{\overline{N}}{R}$ e si determinino , se esistono, elementi massimali e minimali, massimo e minimo di $\frac{\overline{N}}{R}$ rispetto a T.

Traccia di soluzione

a) Per ogni $n\in \overline{N}$ si ha $(n,n)\in R$ in quanto, detto α il piu grande intero naturale tale che 2^α divida n, si ha $n=2^\alpha h$ con h dispari, quindi R è riflessiva. Se $(n,m) \in R$ allora $n=2^\alpha h$, $m=2^\alpha k$ con h,k dispari e dunque $(m,n) \in R$, cioè R è simmetrica. Se $(n,m) \in R$ $n=2^\alpha h$, $m=2^\alpha k$ con h e k dispari, se $(m,q)\in R$ allora $m=2^\beta i$, $q=2^\beta j$ con i e j dispari, ma per l'unicità della fattorizzazione di un elemento di $\overline{N}$ in fattori primi si ha a=b e k=i, dunque $q=2^\alpha j$ da cui $(n,q) \in R$, cioè R è transitiva. Quindi R è una relazione d'ordine. Sia $n=2^\alpha h$ con h intero positivo dispari. La R-classe di n è formata da tutti e soli gli elementi della forma $2^\alpha k$ con k intero positivo dispari. Quindi per ogni numero naturale α esiste una R-classe formata da tutti e soli gli elementi $2^\alpha k$ con k intero positivo dispari.

b) La S non è una relazione d'ordine perché ad esempio $(2,6)\in S$ e $(6,2)\in S$.

c) Per prima cosa mostriamo che T è una relazione ben posta, ovvero che da $([n],[m])\in T$, $[n]=[r]$, $[m]=[s]$ segue $([r],[s])\in T$. Infatti $([n],[m])\in T$ implica che $n=2^\alpha h$, $m=2^\beta k$ con $\alpha\le\beta$ ed h,k interi positivi dispari, essendo $n=2^\alpha h$ $[n]=[r]$ implica che $r=2^\alpha j$ con j intero positivo dispari, analogamente essendo $m=2^\beta k$ $[m]=[s]$ implica che $s=2^\beta i$ con i intero positivo dispari. Ora da $r=2^\alpha j$ con j intero positivo dispari, $s=2^\beta i$ con i intero positivo dispari e da $\alpha\le\beta$ si ottiene $([r],[s])\in T$.

T è una relazione riflessiva in quanto, per ogni $[n]\in \frac{\overline{N}}{R}$ si ha $([n],[n])\in T$ poiché ogni $n\in \overline{N}$ si scrive in uno ed un sol modo come $n=2^\alpha h$ con h intero positivo dispari. Se $([n],[m])\in T$ si ha $n=2^\alpha h$, $m=2^\beta k$ con $\alpha\le\beta$ ed h,k interi positivi dispari, se $([m],[n])\in T$, poiché n ed m si scrivono in uno e un sol modo come prodotto di una potenza ad esponente non negativo di 2 con un numero dispari, si ha $\beta\le\alpha$ e dunque $\alpha=\beta$ e $[n]=[m]$ e T è antisimmetrica. Se $([n],[m])\in T$ si ha $n=2^\alpha h$, $m=2^\beta k$ con $\alpha\le\beta$ ed h,k interi positivi dispari, se $([m],[r])\in T$, poiché m si scrive in uno e un sol modo come prodotto di una potenza ad esponente non negativo di 2 con un numero dispari, si ha $r=2^\gamma i$ con $\beta\le\gamma$ e i intero positivo dispari, dunque $\alpha\le\gamma$ e $([n],[r])\in T$. Dunque T è transitiva. La R-classe [1] è il minimo dell'insieme $\frac{\overline{N}}{R}$ rispetto alla relazione T, mentre $\frac{\overline{N}}{R}$ non ha né elementi massimali né massimi rispetto alla relazione T, infatti per ogni intero naturale α si ha $([2^\alpha],[2^{\alpha+1}])\in T$.

Esercizio 13

Si consideri l'insieme N={0,1,2,3,....} dei numeri naturali e la relazione R su N così definita:

n R m $\Leftrightarrow$ n è dispari ed esiste t naturale pari tale che n = m + t .

Si consideri inoltre la relazione T su N così definita:

n T m $\Leftrightarrow$ n R m o n = m pari

a) Si dica di quali proprietà gode R.
b) Si dimostri che T è una relazione d'ordine su N.
c) T è la chiusura d'ordine di R?
d) Si determinino gli elementi minimali, massimali, minimo e massimo di T.

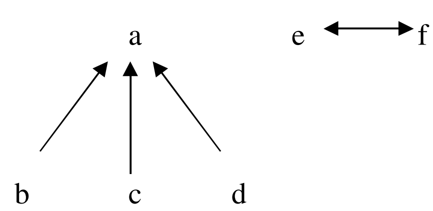
e) Posto $A = \{ 5, 9, 11, 23 \}$, si determinino gli eventuali minoranti, maggioranti, estremo superiore ed estremo inferiore di A rispetto a T.
f) Si stabilisca se A rispetto a T è un reticolo .

<u>Traccia di soluzione</u>

a) R non è seriale in quanto ad esempio non esiste alcun intero n tale che $(2,n)\in R$, quindi R non è neppure riflessiva. R è antisimmmetrica in quanto se $(n,m)\in R$ si ha n dispari e $n=m+t$ con t intero naturale pari, se $(m,n)\in R$ si ha m dispari e $m=n+s$ con s intero naturale pari quindi si ottiene $n=n+s+t$ da cui $s+t=0$, ovvero $s=t=0$ e quindi $n=m$. R è transitiva in quanto se $(n,m)\in R$ si ha n dispari e $n=m+t$ con t intero naturale pari, se $(m,r)\in R$ si ha m dispari e $m=r+s$ con s intero naturale pari quindi si ottiene $n=r+s+t$ con $s+t$ intero positivo pari ovvero $(n,r)\in R$.
b) Si verifica facilmente che T è la chiusura riflessiva di R. Infatti per ogni $(n,m)\in T$ se n è dispari si ha $(n,m)\in R$, se n è pari si ha $(n,m)\in I_N$, dove I_N è la relazione identica su N, e quindi $T\subseteq R\cup I_N$. Se invece $(n,m)\in R\cup I_N$, se $(n,m)\in R$ allora n è dispari, se $(n,m)\in I_N$ allora $n=m$ ed inoltre se n è dispari si ha $n=n+0$ e dunque $(n,n)\in R$, dunque $R\cup I_N\subseteq T$ e tenuto conto della precedente inclusione $T= R\cup I_N$. T è allora riflessiva, inoltre è antisimmetrica perché se $(n,m)\in T$ ed n è dispari allora $(n,m)\in R$ che è antisimmetrica, se n è pari allora $n=m$. Infine T è transitiva perché se $(n,m)\in T$ e $(m,r)\in T$ allora se n è dispari anche m è dispari e dunque $(n,m)\in R$ e $(m,r)\in R$ da cui $(n,r)\in R$ per la transitività di R e di conseguenza $(n,r)\in R\cup I_N=T$, se n è pari allora $n=m$ ed essendo m pari $m=r$ da cui $n=r$ e pertanto $(n,r)\in I_N\subseteq T$.
c) $T= R\cup I_N$ è la chiusura riflessiva di R ed è una relazione d'ordine che contiene R. Per definizione ogni relazione d'ordine che contenga R deve essere riflessiva e quindi contenere la relazione T. Pertanto T è la minima relazione d'ordine che contiene R ed è la chiusura d'ordine di R.
d) Tutti i numeri pari sono associati solo a se stessi in T e quindi sono elementi sia massimali sia minimali di N rispetto a T. Anche 1 è un elemento massimale di N rispetto a T perché per ogni n dispari $(n,1)\in T$ in quanto $n=1+(n-1)$ dove $n-1$ è un numero pari non negativo.
e) A rispetto a T è un insieme totalmente ordinato di cui 5 e 23 sono rispettivamente il massimo e minimo e quindi il sup e l'inf. I maggioranti di A sono1,3,5 ed i minoranti di A sono tutti i dispari maggiori di 23.
f) A rispetto a T è un reticolo in quanto ogni coppia di elementi di A è costituita da elementi confrontabili e quindi ammette sup e inf.

Esercizio 14

Sia dato l'insieme $X =\{a,b,c,d,e,f\}$ e la relazione binaria R su X rappresentata dal seguente grafo



a) Si provi che non esiste nessuna relazione d'ordine su X contenente. R.
b) Si mostri che R è transitiva.
c) Si trovi la relazione d'equivalenza ρ generata da R.
d) Si stabilisca se ρ coincide con la chiusura riflessiva e simmetrica di R

<u>Traccia di soluzione</u>

a) Essendo R non antisimmetrica, ogni relazione che contiene R non è antisimmetrica, per cui non ci sono relazioni d'ordine che contengono R

b) R non è transitiva in quanto, ad esempio, $(e,f)\in R$, $(f,e)\in R$ ma $(e,e)\notin R$.
c) Dal grafo si vede subito che la relazione d'equivalenza generata da R è $\{(a,a),(a,b),(a,c),(a,d),(b,a),(c,a),(d,a),(b,c),(c,b),(b,d),(d,b),(c,d),(d,c),(b,b),(c,c).(d,d),(e,e),(e,f),(f,e),(f,f)\}$.
d) La chiusura riflessiva e simmetrica di R è contenuta in ρ e non contiene ad esempio la coppia $(b,c)\in\rho$ per cui non coincide con ρ.

Esercizio 15
Siano Z l'insieme dei numeri interi e $f : Z \to Z$ la funzione definita nel seguente modo:

$$\forall n \in Z \qquad f(n) = \begin{cases} 2n^2 - n & se\ n \geq 0 \\ n^3 & se\ n < 0 \end{cases}$$

Discutere l'esistenza di possibili inverse e in caso affermativo esibirne un esempio.
<u>Traccia di soluzione</u>
La funzione f porta lo 0 in 0, tutti gli interi positivi in interi positivi e quelli negativi in interi negativi. Ora se n ed m sono entrambi positivi da f(n)=f(m) si ottiene $2n^2-n=2m^2-m$ da cui si ha $2(n^2-m^2)=n-m$ e quindi o n=m o 2(n+m)=1 che è un assurdo. Se n ed m sono entrambi negativi da f(n)=f(m) si ottiene $n^3=m^3$ e quindi n=m. In ogni caso pertanto f(n)=f(m) implica n=m e la f è iniettiva ed ammette inversa destra. La f non è suriettiva perché ad esempio -2 non ha controimmagini mediante f.
Una inversa destra di f è la seguente: g(m)=n se m è un intero positivo tale che $2n^2-n=m$, g(0)=0, g(m)=n se m è un intero negativo tale che $m=n^3$, g(m)=0 per ogni m positivo tale che non esista n per cui $2n^2-n=m$ e per ogni intero negativo che non sia un cubo perfetto.

Esercizio 16
Siano Σ un *alfabeto* (cioè un insieme finito non vuoto), Σ^* il *monoide libero su* Σ (cioè l'insieme di tutte le sequenze finite –anche vuote- di elementi di Σ, dette *parole*) e, per ogni $w \in \Sigma^*$, denotiamo con $|w|$ la lunghezza di *w* (cioè il numero di elementi che costituiscono la parola *w*).
Data la seguente funzione:
$\phi : \Sigma^* \to N \cup \{0\}, \qquad \forall w \in \Sigma^* \quad \phi(w) = |w|$
discutere l'esistenza di possibili inverse e in caso affermativo esibirne un esempio.
<u>Traccia di soluzione</u>
Φ è una funzione suriettiva, infatti per ogni n c'è sempre una sequenza di n caratteri di Σ e per n=0 c'è la parola vuota (senza caratteri) che ha lunghezza 0. Φ non è iniettiva se Σ contiene almeno due elementi, infatti se $a,b\in\Sigma$ allora $\Phi(a)= \Phi(b)=1$. Se Σ ha un solo elemento a allora Φ è anche iniettiva perché la sola parola di lunghezza n per ogni n>0 è a^n, dove con a^n indichiamo la sequenza di n caratteri a, se n=0 è la parola vuota.
Quindi se Σ ha almeno due elmenti la Φ ha solo inversa sinistra, se ha un solo elemento la Φ ammette inversa. Un esempio è il seguente: sia $a\in\Sigma$ allora $\psi:N\cup\{0\}\to\Sigma^*$ che manda 0 nella parola vuota ed n>0 in a^n è un'inversa sinistra di Φ che diventa l'inversa di Φ se $\Sigma=\{a\}$.

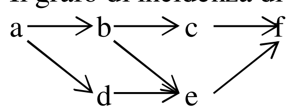
Esercizio 17
Sia dato l'insieme X ={a,b,c,d,e,f}.
Si consideri la relazione R su X avente la seguente matrice d'incidenza

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Si costruisca la chiusura riflessiva e transitiva S di R.
b) Si provi che S è una relazione d'ordine su X.
c) Si stabilisca se X rispetto ad S è un reticolo e, nel caso in cui lo fosse, se è di Boole.
d) Si costruisca la chiusura simmetrica T di S e si verifichi se è una relazione d'equivalenza.
e) Se sì, se ne determinino le classi d'equivalenza.
In caso contrario si determini la relazione d'equivalenza ρ generata da T e le relative classi di equivalenza.

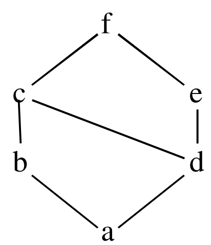
Traccia di soluzione

a) Il grafo di incidenza di R è il seguente



La chiusura riflessiva e transitiva S di R è allora {(a,a),(a,b),(a,c),(a,d),(a,e),(a,f),(b,b),(b,c),(b,e),(b,f),(c,c),(c,f),(d,d),(d,e),(d,f),(e,e),(e,f),(f,f)}.

b) S è riflessiva e transitiva per costruzione ed è antisimmetrica per cui è una relazione d'ordine il cui diagramma di Hasse è



c) Le uniche coppie di elementi non confrontabili sono b,d ; b,e; c,e. Si vede subito che sup{b,d}=c, inf{b,d}=a, sup{b,e}=f, inf{b,e}=a, sup{c,e}=f, inf{c,e}=d. Le coppie di elementi confrontabili hanno sempre sup e inf e dunque X è un reticolo rispetto a S.

d) La chiusura simmetrica T di S è {(a,a),(a,b),(a,c),(a,d),(a,e),(a,f),(b,a),(b,b),(b,c),(b,e),(b,f),(c,a),(c,b),(c,c),(c,f),(d,a),(d,d),(d,e),(d,f),(e,a),(e,b),(e,d),(e,e),(e,f),(f,a),(f,b),(f,c),(f,d),(f,e),(f,f)} e non è di equivalenza perché ad esempio (a,b),(a,d)$\in$R e (b,d)$\notin$R.

e) Dal grafo si vede subito che la relazione d'equivalenza ρ generata da T è la relazione universale su X e quindi X/ρ ha una sola classe di congruenza formata da tutto X.

Esercizio 18

Sia N l'insieme dei numeri naturali (0 incluso) e sia f: N$\rightarrow$N la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} x/2 & \text{se x è pari} \\ \lfloor x/2 \rfloor & \text{se x è dispari} \end{cases}$$

(dove $\lfloor x \rfloor$ indica la parte intera di x).

Dire se f ammette inversa destra o sinistra, e in caso darne un esempio.

Calcolare le ker f classi di N.

<u>Traccia di soluzione</u>

La funzione f è suriettiva in quanto ogni intero n è immagine di 2n. Non è invece iniettiva perché ad esempio f(0)=0 e f(1)=0.La f ammette pertanto una inversa sinistra data da g(n)=2n.

La ker f classe di n è formata da {2n,2n+1}.

Esercizio 19

Sia Z l'insieme dei numeri interi relativi e sia R la relazione binaria su Z così definita
(a,b)∈R se e solo se a,b sono entrambi minori di 10 ed a≡b (mod 3), oppure uno almeno fra a e b è maggiore di 10

Dire di che proprietà gode R e costruirne la sua chiusura transitiva.

<u>Traccia di soluzione</u>

La relazione R è seriale perché per ogni n∈Z si ha (n,11)∈R.

Non è riflessiva perché (10,10)∉R. E' simmetrica perché se (a,b)∈R e uno almeno fra a e b è maggiore di 10, allora (b,a)∈R, altrimenti a e b sono entrambi minori di 10 e a≡b (mod3) da cui b≡a (mod3) e ancora (b,a)∈R**.** Non è transitiva perché (1,11)∈R e (11,2)∈R, ma (1,2)∉R. Non è antisimmatrica perché (11,12)∈R e (12,11)∈R.

La chiusura transitiva di R è la relazione universale, infatti siano n,m∈Z, se uno di essi è maggiore di 10 si ha (n,m)∈R, se sono entrambi minori o uguali a 10 allora si ha sempre (n,11)∈R e (11,m)∈R da cui (n,m)∈R^2 e quindi (n,m) appartiene alla chiusura transitiva di R.

Esercizio 20

Si consideri l'applicazione f:N×N→N definita ponendo f((n,m))=m.c.m (n,m): La funzione è iniettiva, suriettiva, biunivoca? Ammette un'inversa destra, sinistra o bilatera? In caso affermativo costruirne un esempio. Determinare la ker f classe della coppia (4,3). Le ker-f classi sono tutte finite? Esistono ker f classi formate da un solo elemento? Se si quali sono? Quale è la cardinalità di N×N/ker f?

<u>Traccia di soluzione</u>

La f è suriettiva in quanto, per ogni n∈N, m.c.m (n,1)=n e quindi f((n,1))=n. Non è iniettiva perchè f((1,6))=f((2,3))=6. La f ammette pertanto inversa sinistra. Un esempio di inversa sinistra di f è così definita: g(n)=(1,n).

La ker f classe di (4,3) è formata da tutte le coppie di numeri naturali il cui m.c.m è 12 e dunque {(1,12),(12,1),(2,12),(12,2),(3,12),(12,3),(4,12),(12,4),(6,12),(12,6),(12,12),(4,6),(6,4),(4,3),(3,4)}.

L'unica ker f classe non finita è quella di (0,1), in quanto è formata da tutte le coppie con almeno un elemento uguale a 0. L'unica classe formata da un solo elemento è la ker f classe di (1,1).

Poiche la f è una funzione suriettiva da N×N in N sappiamo dal teorema di fattorizzazione delle applicazioni che esiste una funzione biettiva da N×N/ker f in N e dunque N×N/ker f ha la cardinalità del numerabile.