Algoritmo di minimizzazione (Quine-McCluskey)

Forma SOP:

1. **Raccolta degli implicanti primi**: Determinare tutti e soli gli implicanti primi della funzione combinatoria, tramite le mappe di Karnaugh.
2. **Copertura della funzione**: Effettuare una scelta di implicanti primi che:
   a) coprano tutti i mintermini della funzione
   b) siano di costo minimo (secondo il criterio di costo dei letterali)

Forma POS:

1. **Raccolta degli implicanti primi**: Determinare tutti e soli gli implicati primi della funzione combinatoria, tramite le mappe di Karnaugh.
2. **Copertura della funzione**: Effettuare una scelta di implicati primi che:
   a) coprano tutti i Maxtermini della funzione
   b) siano di costo minimo (secondo il criterio di costo dei letterali)

Osservazione: le forme minime a due livelli SOP e POS di una stessa funzione combinatoria possono avere costi differenti.

In generale, le forme minime SOP e POS non sono uniche!

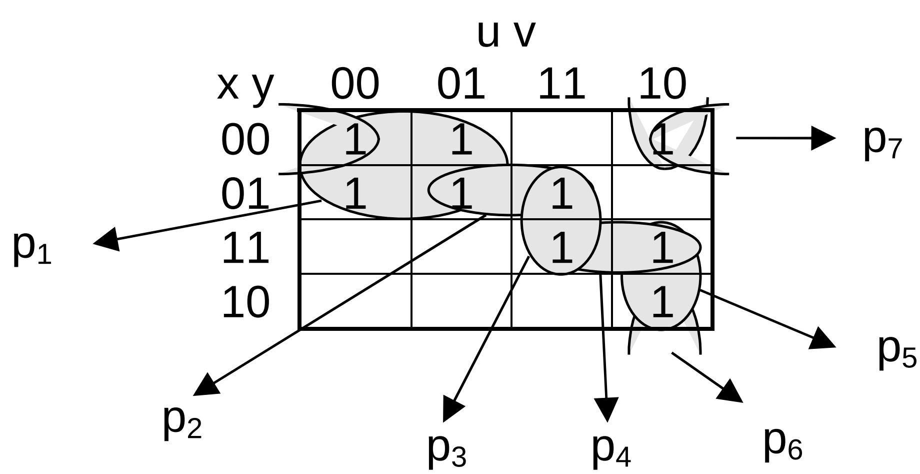
Quine-McCluskey - Raccolta degli implicanti primi

$$f(x, y, u, v) = \Sigma\,(0, 1, 2, 4, 5, 7, 10, 14, 15)$$

Enumerazione dei mintermini

x y \ u v	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

Mappa di Karnaugh - Raccolta degli implicanti primi

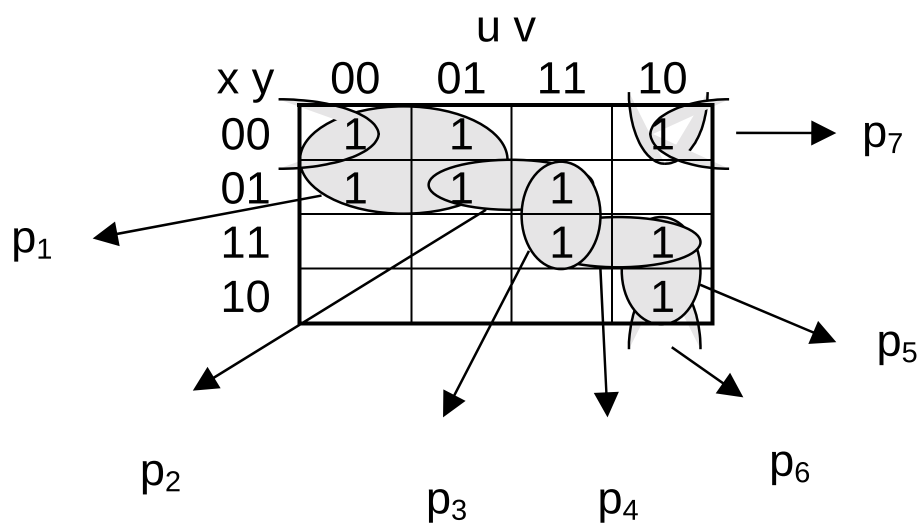


Elenco degli implicanti primi:

$p_1 = /x \cdot /u$	copre: 0, 1, 4, 5	costa: 2
$p_2 = /x \cdot y \cdot v$	copre: 5, 7	costa: 3
$p_3 = y \cdot u \cdot v$	copre: 7, 15	costa: 3
$p_4 = x \cdot y \cdot u$	copre: 14, 15	costa: 3
$p_5 = x \cdot u \cdot /v$	copre: 10, 14	costa: 3
$p_6 = /y \cdot u \cdot /v$	copre: 10, 2	costa: 3
$p_7 = /x \cdot /y \cdot /v$	copre: 0, 2	costa: 3

Quine-McCluskey - Copertura della funzione

$$f(x, y, u, v) = \Sigma\,(0, 1, 2, 4, 5, 7, 10, 14, 15)$$



Copertura ottima:

$f = p_1 + p_3 + p_5 + p_7$

$f = /x \cdot /u + y \cdot u \cdot v + x \cdot u \cdot /v + /x \cdot /y \cdot /v$

costo $= 2 + 3 + 3 + 3 = 11$

Un’altra copertura ottima:

$f = p_1 + p_2 + p_4 + p_6$

costo $= 2 + 3 + 3 + 3 = 11$

Una copertura non-ottima:

$f = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6$

costo $= 2 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 17$

Quine-McCluskey - Tabella di Copertura - Definizione

La Tabella di Copertura riporta:

- in colonna i mintermini della funzione
- in riga gli implicanti primi della funzione

Una casella della tabella va marcata se e solo se l'implicante primo relativo copre il mintermine relativo.

mintermini della funzione f

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
p_1	×	×			×	×										
p_2						×		×								
p_3								×								×
p_4															×	×
p_5											×				×	
p_6			×								×					
p_7	×		×													

Implicante primo <u>essenziale</u>: è l'unico a coprire un determinato mintermine.

Gli implicanti primi essenziali si scoprono cercando le colonne che <u>contengono una solo marca</u>.

Se un implicante primo è essenziale, è indispensabile usarlo per la copertura della funzione!

Quine-McCluskey - Tabella di Copertura - Funzione f

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
p_1	×	×			×	×										
p_2						×		×								
p_3								×								×
p_4															×	×
p_5											×				×	
p_6			×								×					
p_7	×		×													

Estrazione degli implicanti essenziali

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
p_1	×	×			×	×										
p_2						×		×								
p_3								×								×
p_4															×	×
p_5											×				×	
p_6			×								×					
p_7	×		×													

p_1 è <u>essenziale</u>: andrà usato nella copertura di f

Si estraggono la riga p_1 e le colonne 0, 1, 4 e 5

	2	3	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
p_2				×								
p_3				×								×
p_4											×	×
p_5							×				×	
p_6	×						×					
p_7	×											

Quine-McCluskey - Tabella di copertura - Funzione f

Relazione di <u>dominanza</u>: l'implicante primo p_h domina l'implicante primo p_k se e solo se la riga p_h contiene tutte le marche presenti nella riga p_k.

Un implicante primo dominato si può sempre scartare, perché copre meno mintermini del suo implicante dominante e pertanto ha costo non superiore a quello del suo implicante dominante.

Eliminazione degli implicanti dominati

	2	3	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
p_2				×								
p_3				×								×
p_4											×	×
p_5							×				×	
p_6	×						×					
p_7	×											

p_2 è <u>dominato</u> da p_3 p_7 è <u>dominato</u> da p_6

p_2 e p_7 sono dominati: non andaranno usati per coprire f

Si estraggono le righe p_2 e p_7

	2	3	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
p_3				×								×
p_4											×	×
p_5							×				×	
p_6	×						×					

Quine-McCluskey - Tabella di copertura - Funzione f

Estrazione degli implicanti essenziali secondari

	2	3	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
p_3				×								×
p_4											×	×
p_5							×				×	
p_6	×						×					

p_3 e p_6 sono essenziali secondari

p_3 e p_6 andranno usati nella copertura di f

Si estraggono le righe p_3 e p_6, e le colonne 2, 7, 10 e 15

	3	6	8	9	11	12	13	14
p_4								×
p_5								×

Quine-McCluskey - Tabella di copertura - Funzione f

Eliminazione degli implicanti dominati secondari

	3	6	8	9	11	12	13	14
p_4								×
p_5								×

p_5 è dominato da p_4 e p_4 è dominato da p_5

p_4 e p_5 sono equivalenti

si può eliminarne arbitrariamente uno, p. es. p_5

	3	6	8	9	11	12	13	14
p_4								×

Estrazione degli implicanti essenziali terziari

	3	6	8	9	11	12	13	14
p_4								×

p_4 è essenziale terziario

p_4 andrà usato nella copertura di f

La tabella non ha più righe avanzate: FINE

Quine-McCluskey - Riassunto - Funzione f

Ruolo degli implicanti primi

Implicante primo	Ruolo
p_1	essenziale
p_2	dominato da p_3
p_3	essenziale (2^o livello)
p_4	essenziale (3^o livello)
p_5	equivalente a p_4
p_6	essenziale (2^o livello)
p_7	dominato da p_6

Gli implicanti p_1, p_3, p_4 e p_6 vanno usati per coprire f. Essi sono anche sufficienti a coprire f.

Forma minima SOP: $f = p_1 + p_3 + p_4 + p_6$

$costo = 2 + 3 + 3 + 3 = 11$

Infatti:

- p_1 è essenziale
- p_3 e p_6 sono essenziali (di 2^o livello)
- p_4 è essenziale (di 3^o livello)
- la somma di $p_1 + p_3 + p_4 + p_6$ copre tutti gli 1 della funzione

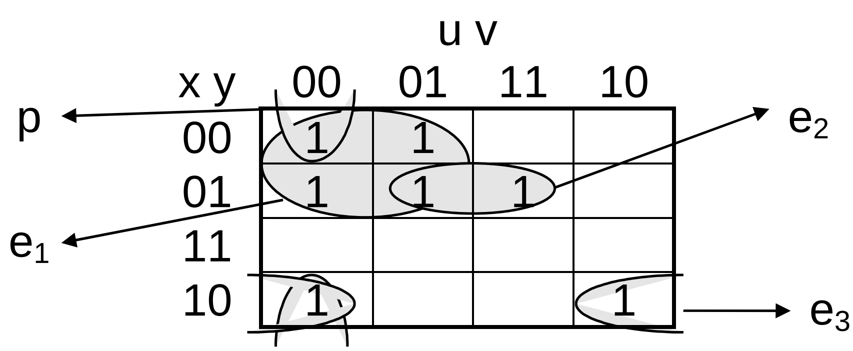
Nota bene: l'algoritmo di Quine-McCluskey ha prodotto una forma minima SOP, ma ne possono esistere altre, egualmente minime.

Nota bene: quanto fatto per trovare la forma minima SOP non implica nulla circa la forma minima POS.

Unicità della forma minima

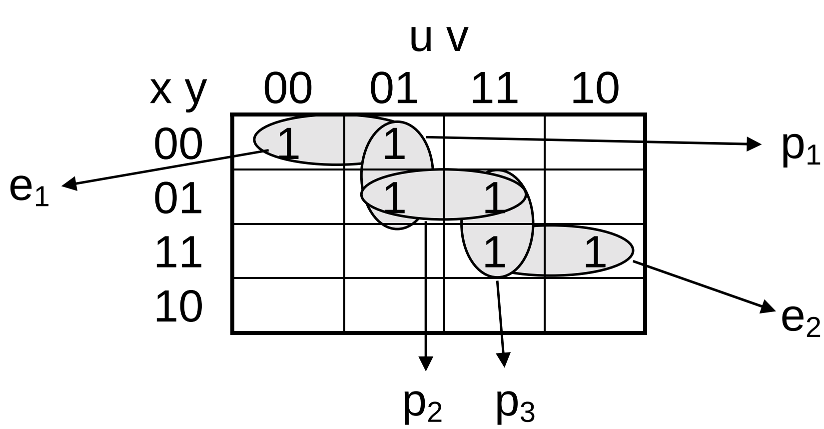
Condizione sufficiente per l'unicità della forma minima: se la funzione f ammette una copertura formata solo da implicanti primi essenziali di 1° livello, allora la forma di costo minimo è unica (questa condizione è sufficiente, ma non necessaria).

Sufficienza della condizione



Esiste una copertura formata da soli imp. primi essenziali: e_1, e_2 ed e_3 - La forma minima è unica!

Non necessità della condizione



Non esiste una copertura formata da soli imp. primi essenziali - Ma la forma minima è unica! (e_1, p_2 ed e_2)

Matrice ciclica

L'algortimo delle tabelle di copertura non conduce sempre alla forma minima. Talvolta la tabella di copertura può essere irriducibile.

Esempio:

	r	s	t
q_1	×	×	
q_2		×	×
q_3	×		×

non ci sono implicanti essenziali

nessun implicante domina nessun altro implicante

la matrice è irriducibile

Copertura: occorre fare delle scelte arbitrarie, p. es.:

$q_1 + q_2$ oppure

$q_2 + q_3$ oppure

$q_3 + q_1$

tenendo comunque conto del costo degli implicanti.

In generale, in caso di matrici cicliche si utilizzano metodi di "branch-and-bound" (ricerca operativa) per trovare le possibili coperture.