



Elettrotecnica

Parte 4: Doppi Bipoli (caso tempo invariante)

Prof . Ing. Giambattista Gruosso, Ph. D.

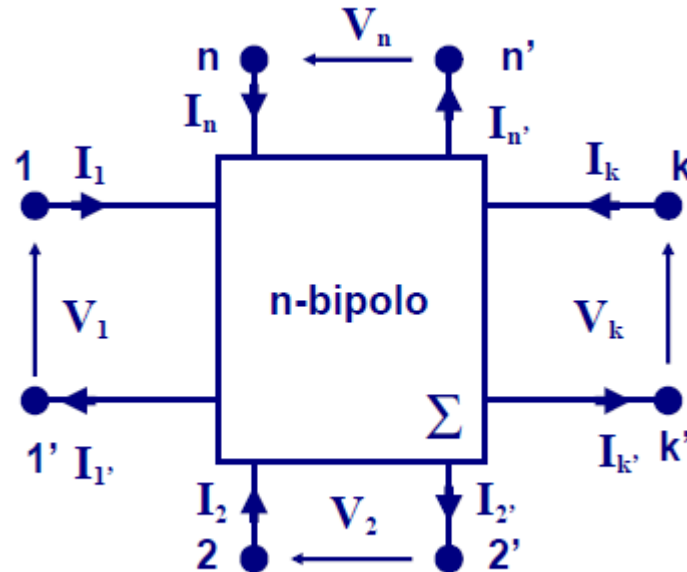
Dipartimento di Elettronica, Informazione e Bioingegneria

Indice

- **Doppi Bipoli: generalizzazione**
- **Matrice R**
- **Matrice G**
- **Matrice H**
- **Matrice H'**
- **Matrice T**
- **Matrice T'**
- **Definizione di Potenza**
- **Andrebbero inseriti i collegamenti tra i doppi bipoli e le proprietà dei doppi bipoli.**



Doppi Bipoli: Generalità



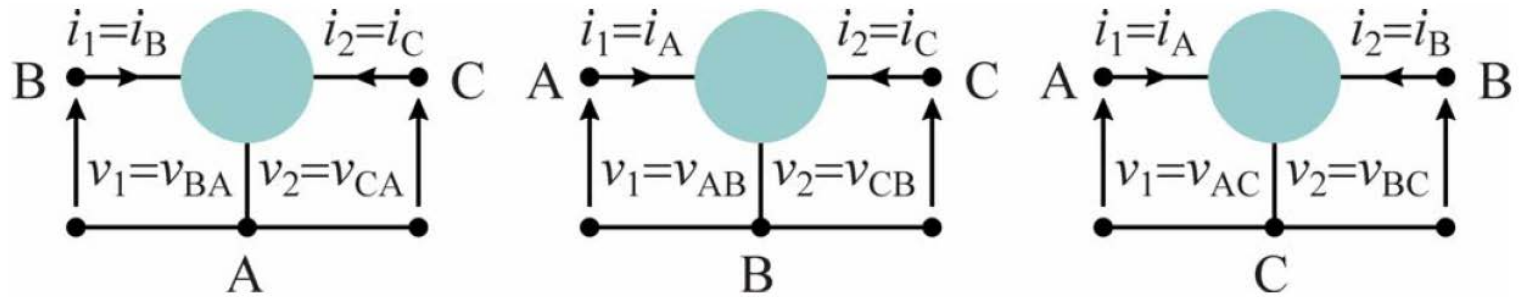
Si chiama m-polo un componente elettrico racchiuso da una superficie Σ , dalla quale fuoriescono m morsetti.

Tripoli come doppi bipoli

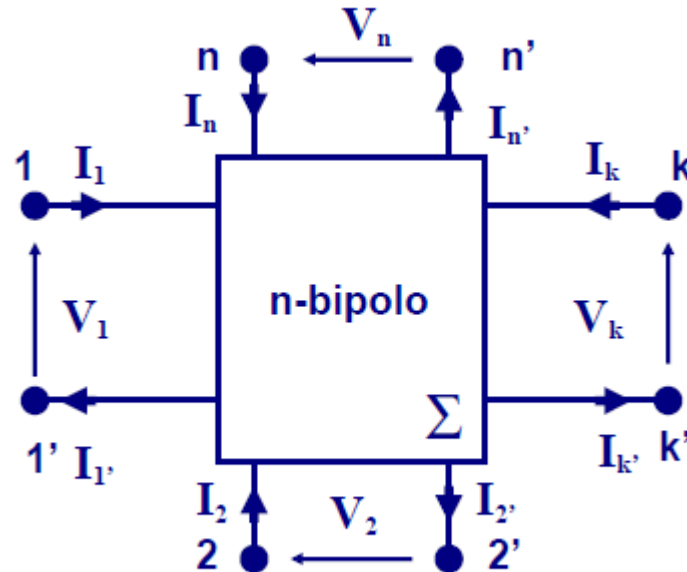
POLITECNICO DI MILANO



Prof. G. Guoss



Doppi Bipoli: Generalità

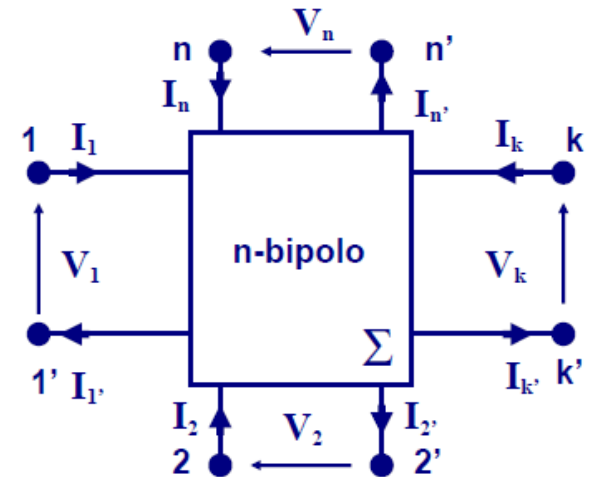


Si chiama n -bipolo un componente elettrico racchiuso da una superficie Σ , dalla quale fuoriescono n -coppie di morsetti.

Doppi Bipoli: Generalità

La proprietà principali del n-bipolo sono:

- La corrente entrante dal morsetto k è uguale a quella uscente dal morsetto k' ($k=1, \dots, n$);
- La tensione tra due morsetti (k, k') qualunque si può esprimere come differenza di potenziale tra tali morsetti.



Doppi Bipoli: Generalità

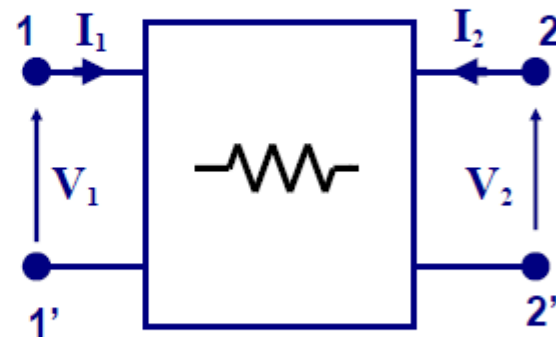
POLITECNICO DI MILANO



Tra i possibili n-bipoli risulta particolarmente interessante il **doppio bipolo**.

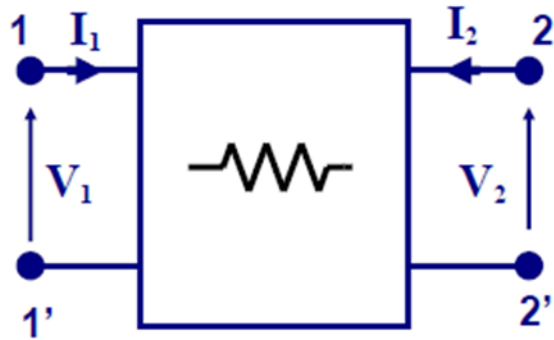
La caratteristica del doppio bipolo è descritta dalla relazione:

$$\mathbf{F} (I_1, I_2, V_1, V_2) = 0$$



Il nostro obiettivo sarà determinare l'equazione caratteristica

Caratterizzazione del doppio Bipolo



$$\begin{cases} av_1 + bv_2 + ci_1 + di_2 = e \\ a'v_1 + b'v_2 + c'i_1 + d'i_2 = e' \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1 = r_{11}i_1 + r_{12}i_2 \\ v_2 = r_{21}i_1 + r_{22}i_2 \end{cases}$$

**Rappresentazione
In corrente**

$$\begin{cases} v_1 = h_{11}i_1 + h_{12}v_2 \\ i_2 = h_{21}i_1 + h_{22}v_2 \end{cases}$$

**Rappresentazione
Ibrida**

$$\begin{cases} i_1 = g_{11}v_1 + g_{12}v_2 \\ i_2 = g_{21}v_1 + g_{22}v_2 \end{cases}$$

**Rappresentazione
In tensione**

$$\begin{cases} i_1 = h'_{11}v_1 + h'_{12}i_2 \\ v_2 = h'_{21}v_1 + h'_{22}i_2 \end{cases}$$

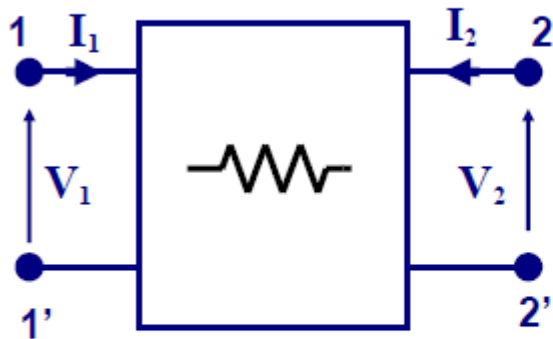
**Rappresentazione
Ibrida inversa**

Caratterizzazione del doppio Bipolo

POLITECNICO DI MILANO



Prof. G. Gruosso



Un modo per caratterizzare il doppio bipolo è quello di imporre, tramite dei generatori esterni due grandezze e di valutare le rimanenti due.

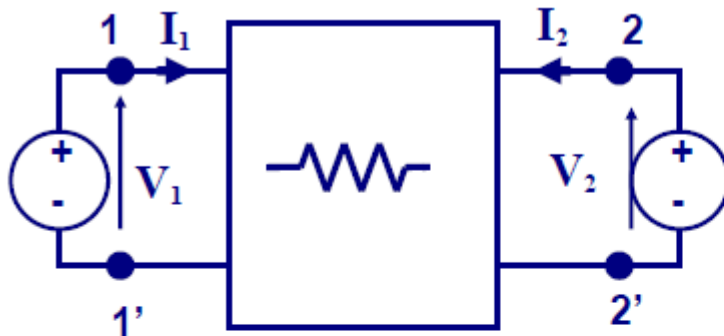
Nel caso il doppio bipolo sia costituito da resistori lineari passivi è possibile applicare il principio di sovrapposizione degli effetti.

Caratterizzazione in tensione

POLITECNICO DI MILANO



Prof. G. Gruosso



Se le variabili indipendenti sono le tensioni si ha (caratterizzazione in tensione del doppio bipolo):

$$\begin{aligned} I_1 &= G_{11}V_1 + G_{12}V_2 \\ I_2 &= G_{21}V_1 + G_{22}V_2 \end{aligned}$$

ovvero in forma matriciale:

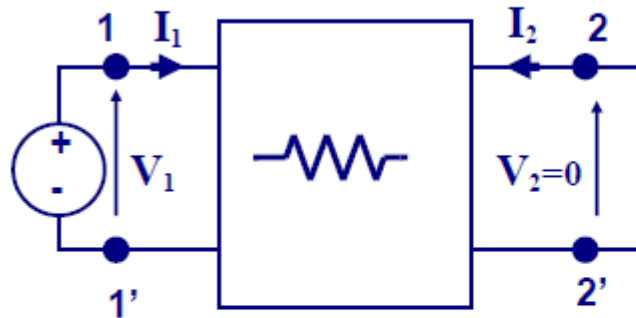
$$\underline{I} = \underline{G} \cdot \underline{V}$$

G è la **matrice delle conduttanze** del doppio bipolo.

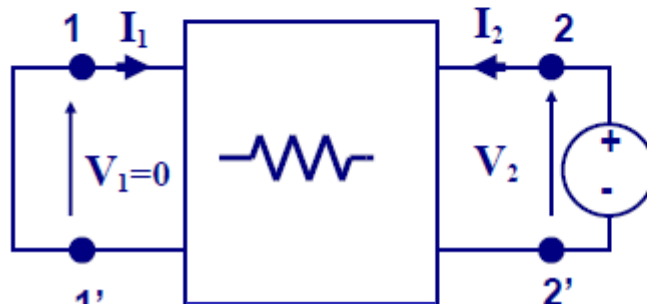
Convenzione degli utilizzatori

Caratterizzazione in tensione(prove semplici)

Gli elementi della diagonale principale della matrice delle conduttanze (**autoconduttanze**) saranno dati da:



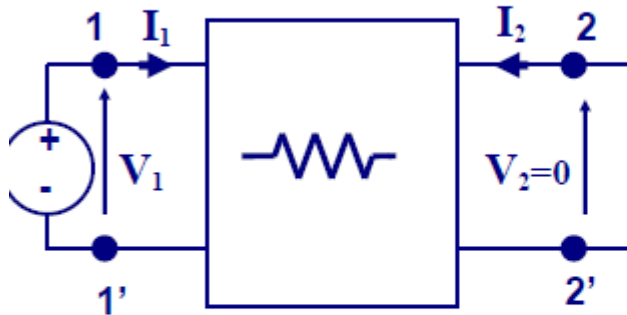
$$G_{11} = \frac{I_1}{V_1} \Big|_{V_2=0}$$



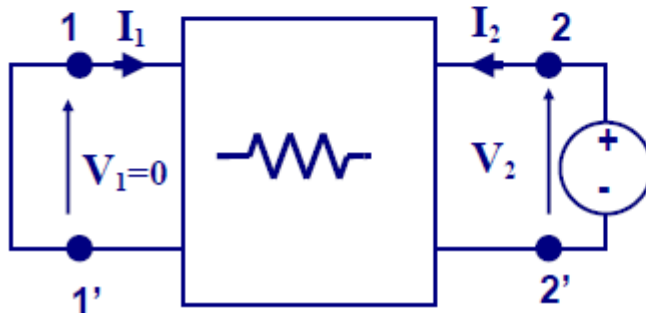
$$G_{22} = \frac{I_2}{V_2} \Big|_{V_1=0}$$

Caratterizzazione in tensione

Gli elementi della diagonale secondaria della matrice delle conduttanze (**transconduttanze**) saranno dati da:



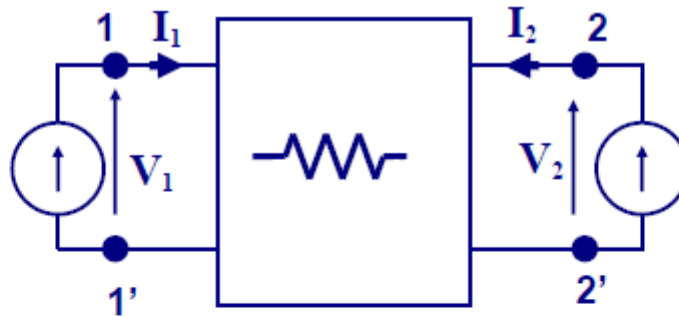
$$G_{21} = \frac{I_2}{V_1} \Big|_{V_2=0}$$



$$G_{12} = \frac{I_1}{V_2} \Big|_{V_1=0}$$

Caratterizzazione in corrente

POLITECNICO DI MILANO



Se le variabili indipendenti sono le correnti si ha (caratterizzazione in corrente del doppio bipolo):

$$V_1 = R_{11}I_1 + R_{12}I_2$$

$$V_2 = R_{21}I_1 + R_{22}I_2$$

ovvero in forma matriciale:

$$\underline{V} = \mathbf{R} \cdot \underline{I}$$

\mathbf{R} è la **matrice delle resistenze** del doppio bipolo.

Convenzione degli utilizzatori

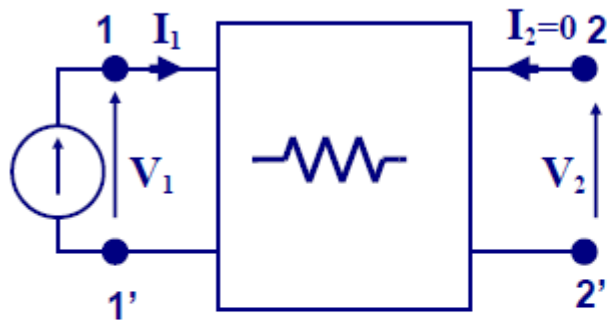
Caratterizzazione in corrente

POLITECNICO DI MILANO

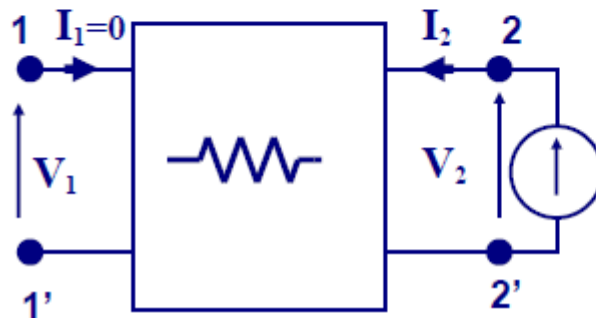


Prof. G. Guosso

Gli elementi della diagonale principale della matrice delle resistenze (**autoresistenze**) saranno dati da:



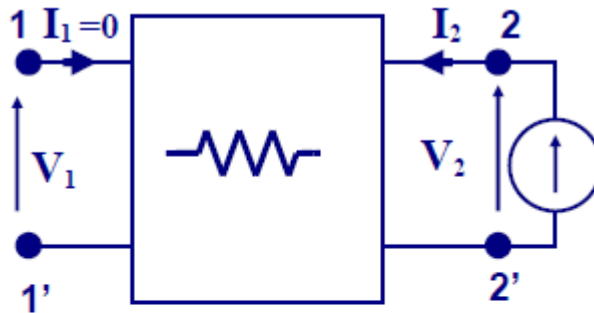
$$R_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{I_2=0}$$



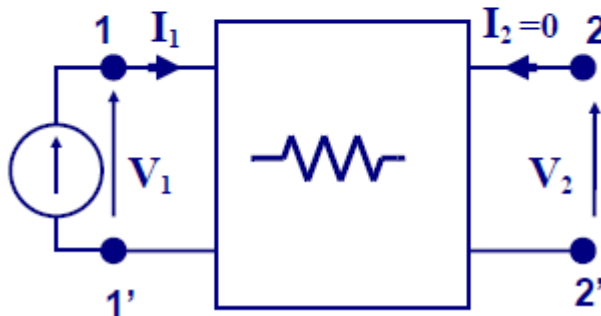
$$R_{22} = \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{I_1=0}$$

Caratterizzazione in corrente

Gli elementi fuori della diagonale principale della matrice delle resistenze (**mutue resistenze**) saranno dati da:



$$R_{12} = \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{I_1=0}$$



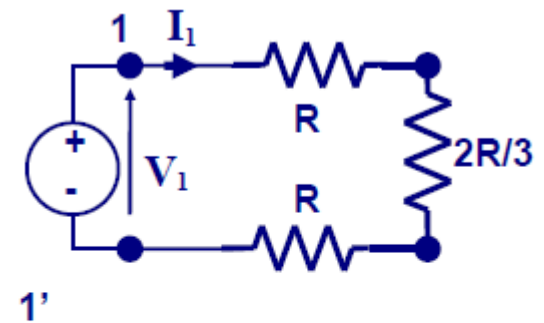
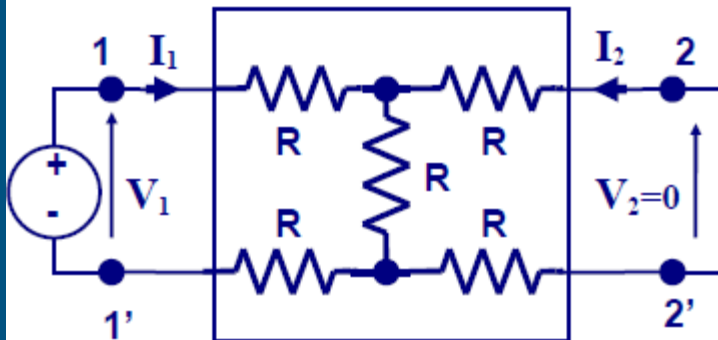
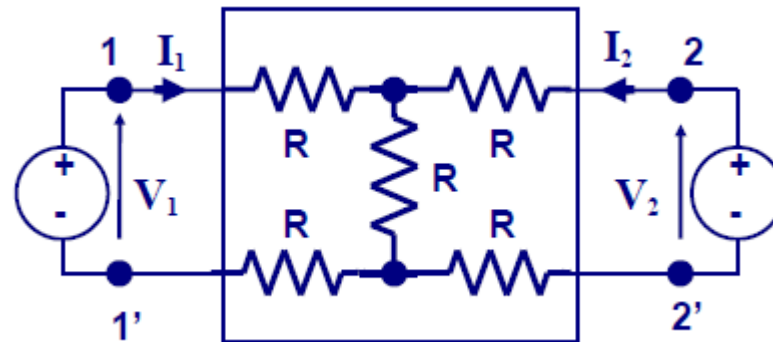
$$R_{21} = \left. \frac{V_2}{I_1} \right|_{I_2=0}$$

Esempi

POLITECNICO DI MILANO



Prof. G. Guosso



$$G_{22} = G_{11} = \left. \frac{I_1}{V_1} \right|_{V_2=0} = \frac{3}{8R}$$

$$G_{12} = G_{21} = \left. \frac{I_2}{V_1} \right|_{V_2=0} = -\frac{1}{8R}$$

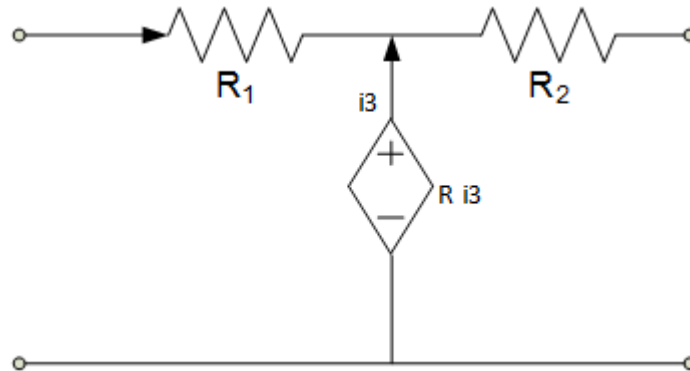
Esempi – Passaggio da rappresentazione in tensione a rappresentazione in corrente

$$\begin{cases} i_1 = G_{11}v_1 + G_{12}v_2 \\ i_2 = G_{21}v_1 + G_{22}v_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = \frac{i_1 - G_{12}v_2}{G_{11}} \\ v_2 = \frac{i_2 - G_{21}v_1}{G_{22}} \end{cases}$$

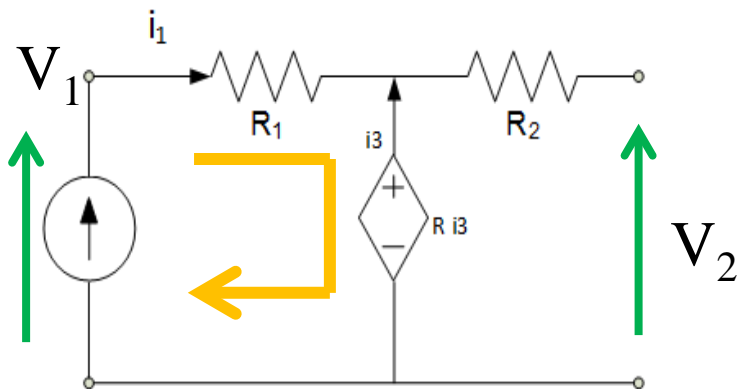
$$\begin{cases} v_1 = \frac{G_{22}}{G_{22}G_{11} - G_{12}G_{21}}i_1 - \frac{G_{12}}{G_{22}G_{11} - G_{12}G_{21}}i_2 \\ v_2 = -\frac{G_{21}}{G_{22}G_{11} - G_{12}G_{21}}i_1 + \frac{G_{11}}{G_{22}G_{11} - G_{12}G_{21}}i_2 \end{cases}$$



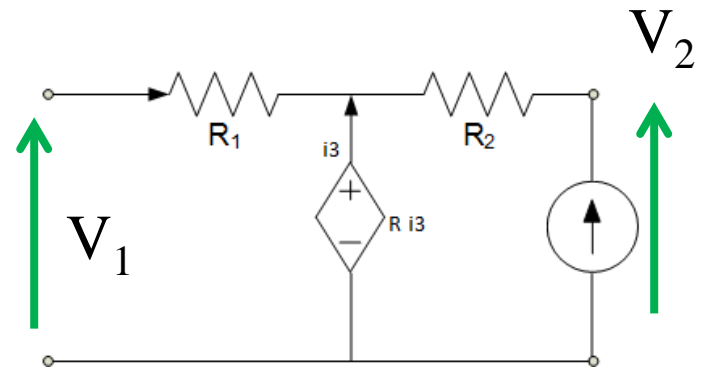
Esempi – Presenza di Generatore pilotato



Rappresentazione
in corrente



$$\begin{cases} R_{11} = \frac{V_1}{I_1} = R_1 - R \\ R_{21} = \frac{V_2}{I_1} = -R \end{cases}$$



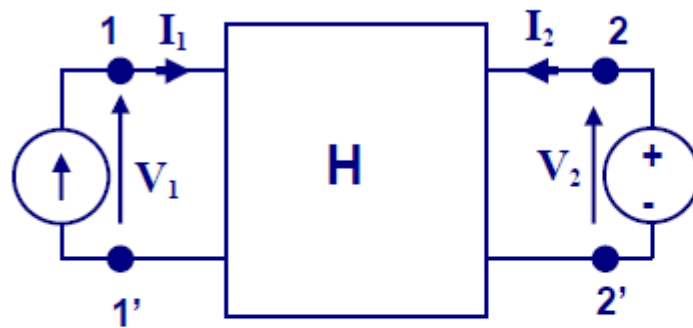
$$\begin{cases} R_{22} = \frac{V_2}{I_2} = R_2 - R \\ R_{12} = \frac{V_1}{I_2} = -R \end{cases}$$

Caratterizzazione ibrida

POLITECNICO DI MILANO



Prof. G. Grusso



$$V_1 = h_{11}I_1 + h_{12}V_2$$

$$I_2 = h_{21}I_1 + h_{22}V_2$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{X}$$

X vettore degli ingressi
Y vettore delle uscite.

Convenzione degli utilizzatori

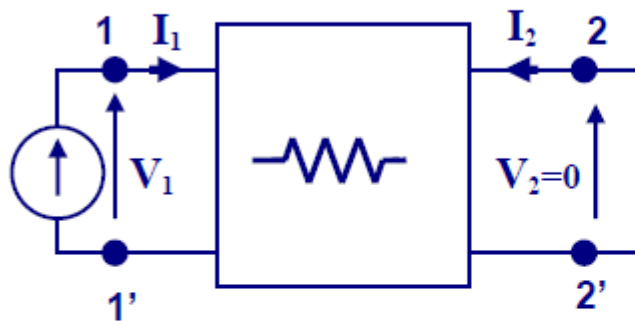
Caratterizzazione ibrida

POLITECNICO DI MILANO



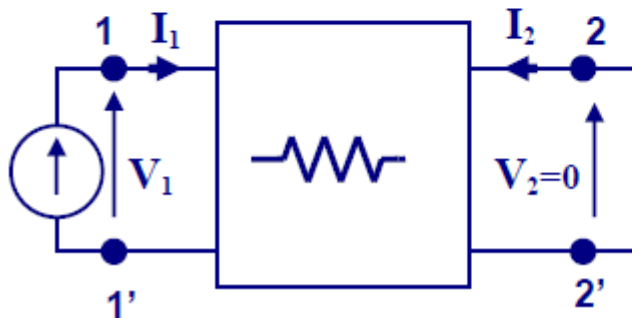
Prof. G. Guosso

I parametri ibridi h (di prima specie) risultano così definiti:



$$h_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{V_2=0}$$

Resistenza di ingresso con porta secondaria in c.c.

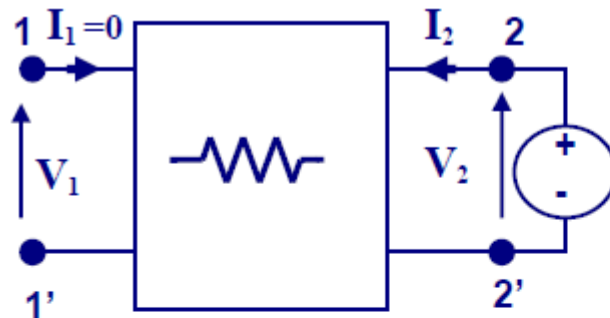


$$h_{21} = \left. \frac{I_2}{I_1} \right|_{V_2=0}$$

Guadagno di corrente con porta secondaria in c.c.

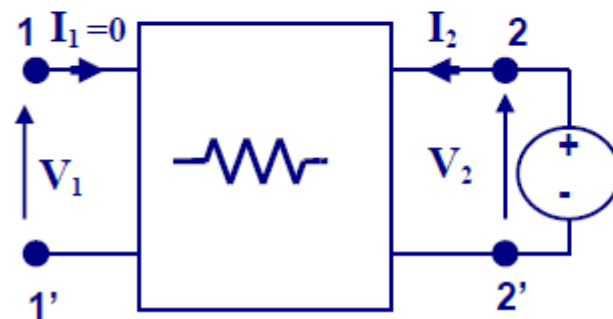
Caratterizzazione ibrida

POLITECNICO DI MILANO



$$h_{22} = \frac{I_2}{V_2} \bigg|_{I_1=0}$$

Conduttanza di uscita con porta primaria a vuoto.



$$h_{12} = \frac{V_1}{V_2} \bigg|_{I_1=0}$$

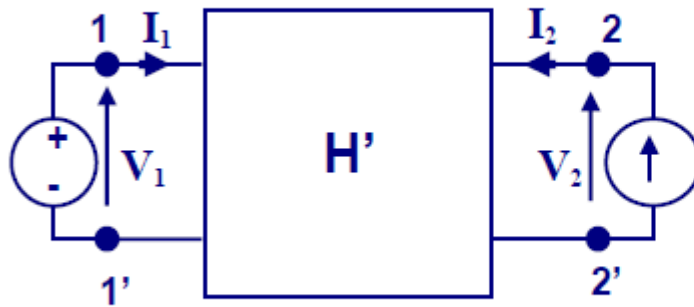
Attenuazione in tensione con porta primaria a vuoto.

Caratterizzazione ibrida inversa

POLITECNICO DI MILANO



Prof. G. Guosso



$$\begin{aligned} I_1 &= h'_{11} V_1 + h'_{12} I_2 \\ V_2 &= h'_{21} V_1 + h'_{22} I_2 \end{aligned}$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{H}' \cdot \mathbf{X}$$

Convenzione degli utilizzatori

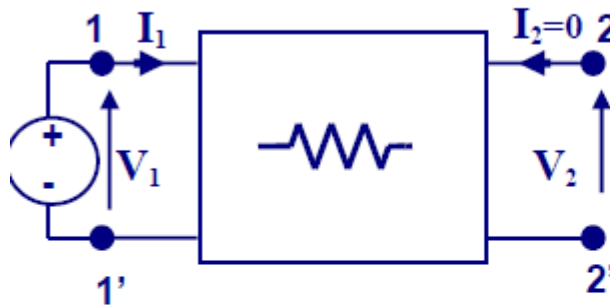
Caratterizzazione ibrida inversa

POLITECNICO DI MILANO



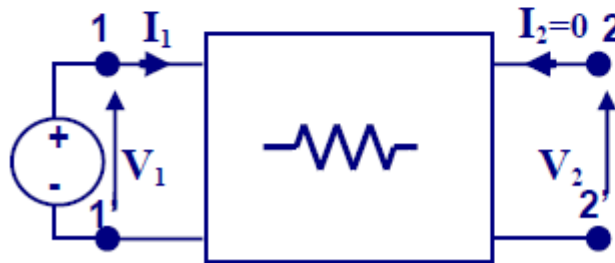
Prof. G. Guosso

I parametri ibridi h' (di seconda specie) risultano così definiti:



$$h'_{11} = \frac{I_1}{V_1} \Big|_{I_2=0}$$

Conduttanza di ingresso con porta secondaria a vuoto



$$h'_{21} = \frac{V_2}{V_1} \Big|_{I_2=0}$$

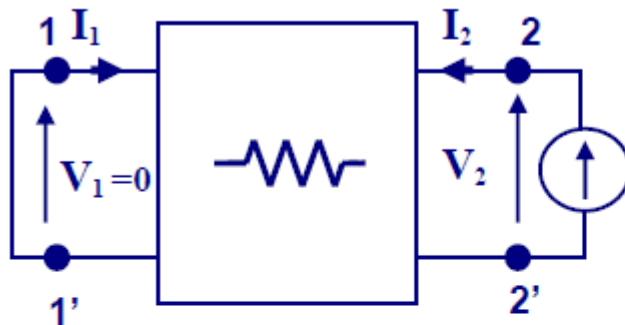
Guadagno di tensione con porta secondaria a vuoto.

Caratterizzazione ibrida inversa

POLITECNICO DI MILANO

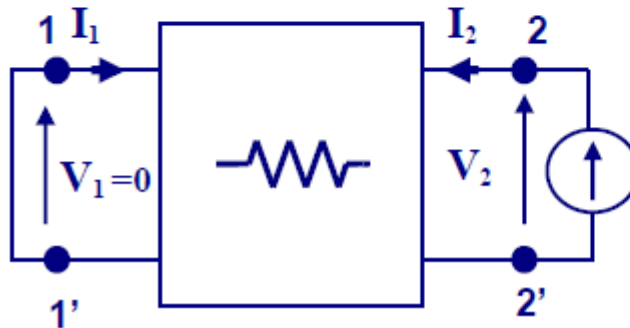


Prof. G. Guosso



$$h'_{22} = \frac{V_2}{I_2} \bigg|_{V_1=0}$$

**Resistenza
di uscita
con porta
primaria in
C.C.**



$$h'_{12} = \frac{I_1}{I_2} \bigg|_{V_1=0}$$

**Attenuazione
in corrente
con porta
primaria in
C.C.**

Esempi (passaggio di rappresentazione metodo alternativo)

POLITECNICO DI MILANO



$$v_1 = r_{11}i_1 + r_{12}i_2$$

$$v_2 = r_{21}i_1 + r_{22}i_2$$



$$v_1 = h_{11}i_1 + h_{12}v_2$$

$$i_2 = h_{21}i_1 + h_{22}v_2$$

$$h_{11} = \left. \frac{v_1}{i_1} \right|_{v_2=0}$$

$$h_{21} = \left. \frac{i_2}{i_1} \right|_{v_2=0}$$

(si pone $v_2 = 0$)

$$v_2 = 0$$



$$v_1 = r_{11}i_1 + r_{12}i_2$$

$$0 = r_{21}i_1 + r_{22}i_2$$



$$i_2 = -\frac{r_{21}}{r_{22}}i_1$$

$$v_1 = \left(r_{11} - r_{12} \frac{r_{21}}{r_{22}} \right) i_1$$

$$h_{11} = \left(r_{11} - r_{12} \frac{r_{21}}{r_{22}} \right)$$

$$h_{21} = -\frac{r_{21}}{r_{22}}$$

Esempi (passaggio di rappresentazione metodo alternativo)

POLITECNICO DI MILANO



$$v_1 = r_{11}i_1 + r_{12}i_2$$

$$v_2 = r_{21}i_1 + r_{22}i_2$$



$$v_1 = h_{11}i_1 + h_{12}v_2$$

$$i_2 = h_{21}i_1 + h_{22}v_2$$

$$h_{12} = \left. \frac{v_1}{v_2} \right|_{i_1=0}$$

$$h_{22} = \left. \frac{i_2}{v_2} \right|_{i_1=0}$$

(si pone $i_1 = 0$)

$$i_1 = 0$$



$$v_1 = r_{12}i_2$$

$$v_2 = r_{22}i_2$$



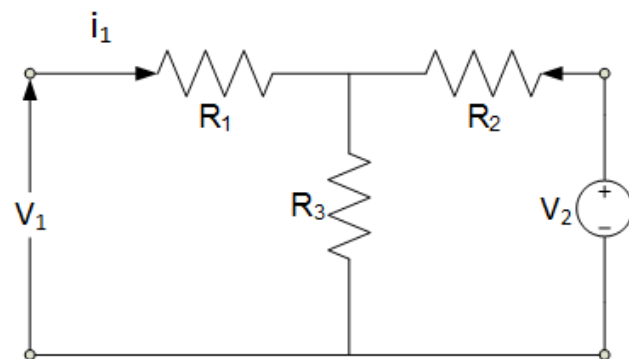
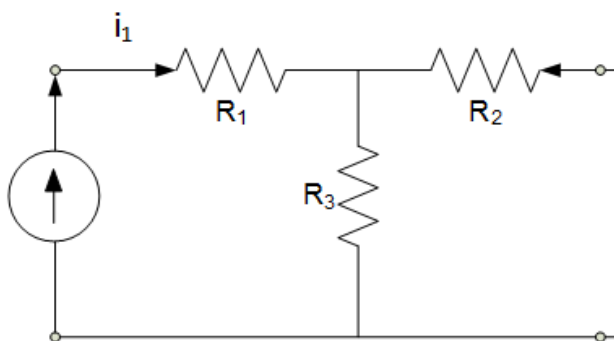
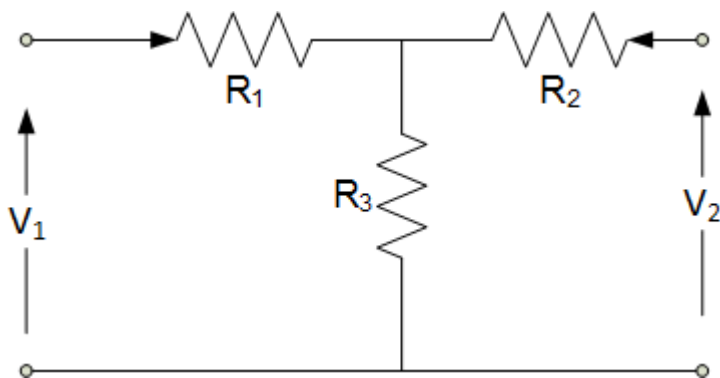
$$i_2 = \frac{1}{r_{22}}v_2$$

$$v_1 = \frac{r_{12}}{r_{22}}v_2$$

$$h_{12} = \frac{r_{12}}{r_{22}}$$

$$h_{22} = \frac{1}{r_{22}}$$

Esempi



$$\begin{cases} H_{11} = \frac{V_1}{I_1} = R_1 + \frac{R_3 R_2}{R_2 + R_3} \\ H_{21} = \frac{I_2}{I_1} = -\frac{R_3}{R_2 + R_3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_{22} = \frac{I_2}{V_2} = R_2 + R_3 \\ H_{12} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{R_3}{R_2 + R_3} \end{cases}$$

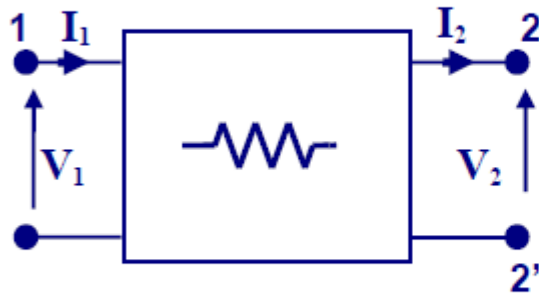


CARATTERIZZAZIONE MEDIANTE MATRICE DI TRASMISSIONE

POLITECNICO DI MILANO



Prof. G. Guosso



$$\begin{aligned} V_1 &= t_{11}V_2 + t_{12}I_2 \\ I_1 &= t_{21}V_2 + t_{22}I_2 \end{aligned}$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{X}$$

Ovvero:

$$\begin{aligned} V_2 &= t'_{11}V_1 + t'_{12}I_1 \\ I_2 &= t'_{21}V_1 + t'_{22}I_1 \end{aligned}$$

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{T}' \cdot \mathbf{X}'$$

Convenzione dei generatori sulla porta 2

CARATTERIZZAZIONE MEDIANTE MATRICE DI TRASMISSIONE

POLITECNICO DI MILANO



$$V_1 = t_{11}V_2 + t_{12}I_2$$

$$I_1 = t_{21}V_2 + t_{22}I_2$$

Ovvero:

$$V_2 = t'_{11}V_1 + t'_{12}I_1$$

$$I_2 = t'_{21}V_1 + t'_{22}I_1$$

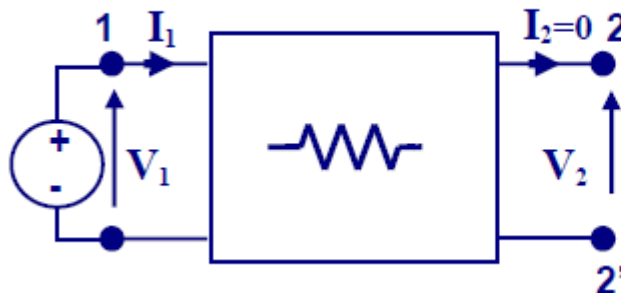
Si osserva che non è possibile imporre contemporaneamente corrente e tensione alla stessa porta: pertanto, i parametri si determinano alimentando dalla porta di uscita (grandezza a numeratore del rapporto che definisce il parametro) e valutando le grandezze di ingresso corrispondenti.

CARATTERIZZAZIONE MEDIANTE MATRICE DI TRASMISSIONE

POLITECNICO DI MILANO

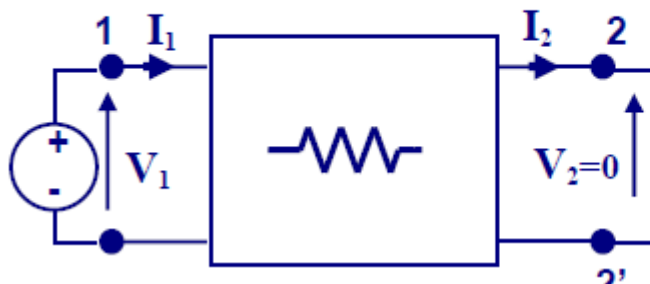


Prof. G. Gruosso



$$t_{11} = \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_2=0}$$

Rapporto di tensione con porta secondaria aperta.

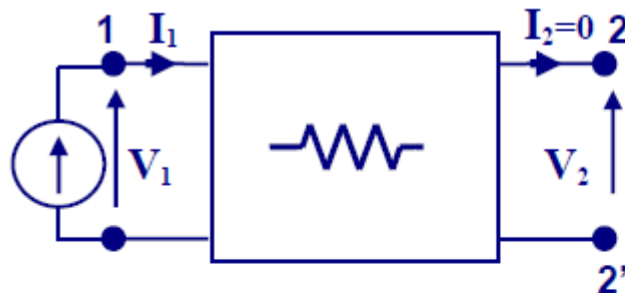


$$t_{12} = \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{V_2=0}$$

Trans-resistenza con porta secondaria in corto circuito.

CARATTERIZZAZIONE MEDIANTE MATRICE DI TRASMISSIONE

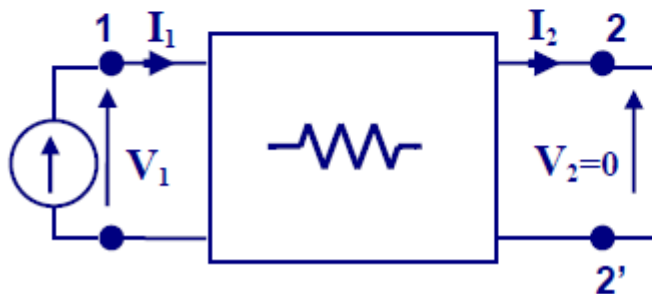
POLITECNICO DI MILANO



$$t_{21} = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{I_2=0}$$

Trans-conduttanza
con porta
secondaria aperta.

Prof. G. Grusso



$$t_{22} = \left. \frac{I_1}{I_2} \right|_{V_2=0}$$

Rapporto di
corrente con
porta
secondaria in
corto circuito.

Riepilogo

	R	G	H	H'	T	T'
R	$\begin{array}{cc} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{array}$	$\begin{array}{cc} \frac{g_{22}}{\Delta G} & -\frac{g_{12}}{\Delta G} \\ -\frac{g_{21}}{\Delta G} & \frac{g_{11}}{\Delta G} \end{array}$	$\begin{array}{cc} \frac{\Delta H}{h_{22}} & \frac{h_{12}}{h_{22}} \\ -\frac{h_{21}}{h_{22}} & \frac{1}{h_{22}} \end{array}$	$\begin{array}{cc} \frac{1}{h'_{11}} & -\frac{h'_{12}}{h'_{11}} \\ \frac{h'_{21}}{h'_{11}} & \frac{\Delta H'}{h'_{11}} \end{array}$	$\begin{array}{cc} \frac{A}{C} & \frac{\Delta T}{C} \\ \frac{1}{C} & \frac{D}{C} \end{array}$	$\begin{array}{cc} \frac{D'}{C'} & \frac{1}{C'} \\ \frac{\Delta T'}{C'} & \frac{A'}{C'} \end{array}$
G	$\begin{array}{cc} \frac{r_{22}}{\Delta R} & -\frac{r_{12}}{\Delta R} \\ -\frac{r_{21}}{\Delta R} & \frac{r_{11}}{\Delta R} \end{array}$	$\begin{array}{cc} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{array}$	$\begin{array}{cc} \frac{1}{h_{11}} & -\frac{h_{12}}{h_{11}} \\ \frac{h_{21}}{h_{11}} & \frac{\Delta H}{h_{11}} \end{array}$	$\begin{array}{cc} \frac{\Delta H'}{h'_{22}} & \frac{h'_{12}}{h'_{22}} \\ -\frac{h'_{21}}{h'_{22}} & \frac{1}{h'_{22}} \end{array}$	$\begin{array}{cc} \frac{D}{B} & -\frac{\Delta T}{B} \\ -\frac{1}{B} & \frac{A}{B} \end{array}$	$\begin{array}{cc} \frac{A'}{B'} & -\frac{1}{B'} \\ -\frac{\Delta T'}{B'} & \frac{D'}{B'} \end{array}$
H	$\begin{array}{cc} \frac{\Delta R}{r_{22}} & \frac{r_{12}}{r_{22}} \\ \frac{r_{21}}{r_{22}} & \frac{1}{r_{22}} \end{array}$	$\begin{array}{cc} \frac{1}{g_{11}} & -\frac{g_{12}}{g_{11}} \\ \frac{g_{21}}{g_{11}} & \frac{\Delta G}{g_{11}} \end{array}$	$\begin{array}{cc} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{array}$	$\begin{array}{cc} \frac{h'_{22}}{\Delta H} & -\frac{h'_{12}}{\Delta H} \\ -\frac{h'_{21}}{\Delta H} & \frac{h'_{11}}{\Delta H} \end{array}$	$\begin{array}{cc} \frac{B}{D} & \frac{\Delta T}{D} \\ \frac{1}{D} & \frac{C}{D} \end{array}$	$\begin{array}{cc} \frac{B'}{A'} & \frac{1}{A'} \\ -\frac{\Delta T'}{A'} & \frac{C'}{A'} \end{array}$
H'	$\begin{array}{cc} \frac{1}{r_{11}} & -\frac{r_{12}}{r_{11}} \\ \frac{r_{21}}{r_{11}} & \frac{\Delta R}{r_{11}} \\ \frac{r_{11}}{r_{11}} & \frac{r_{11}}{r_{11}} \end{array}$	$\begin{array}{cc} \frac{\Delta G}{g_{22}} & \frac{g_{12}}{g_{22}} \\ -\frac{g_{21}}{g_{22}} & \frac{1}{g_{22}} \\ g_{22} & g_{22} \end{array}$	$\begin{array}{cc} \frac{h_{22}}{\Delta H} & -\frac{h_{12}}{\Delta H} \\ -\frac{h_{21}}{\Delta H} & \frac{h_{11}}{\Delta H} \\ \frac{\Delta H}{\Delta H} & \frac{\Delta H}{\Delta H} \end{array}$	$\begin{array}{cc} h'_{11} & h'_{12} \\ h'_{21} & h'_{22} \end{array}$	$\begin{array}{cc} \frac{C}{A} & -\frac{\Delta T}{A} \\ \frac{1}{A} & \frac{B}{A} \\ \frac{A}{A} & \frac{A}{A} \end{array}$	$\begin{array}{cc} \frac{C'}{D'} & -\frac{1}{D'} \\ \frac{\Delta T'}{D'} & \frac{A'}{D'} \\ \frac{D'}{D'} & \frac{D'}{D'} \end{array}$
T	$\begin{array}{cc} \frac{r_{11}}{r_{21}} & \frac{\Delta R}{r_{21}} \\ \frac{r_{21}}{r_{21}} & \frac{r_{21}}{r_{21}} \\ \frac{1}{r_{21}} & \frac{r_{22}}{r_{21}} \end{array}$	$\begin{array}{cc} -\frac{g_{22}}{g_{21}} & -\frac{1}{g_{21}} \\ \frac{g_{21}}{\Delta G} & -\frac{g_{11}}{\Delta G} \\ g_{21} & g_{21} \end{array}$	$\begin{array}{cc} -\frac{\Delta H}{h_{21}} & -\frac{h_{11}}{h_{21}} \\ \frac{h_{21}}{h_{22}} & \frac{1}{h_{22}} \\ -\frac{h_{21}}{h_{21}} & \frac{h_{21}}{h_{21}} \end{array}$	$\begin{array}{cc} \frac{1}{h'_{21}} & \frac{h'_{22}}{h'_{21}} \\ \frac{h'_{21}}{h'_{11}} & \frac{\Delta H'}{h'_{11}} \\ \frac{h'_{21}}{h'_{21}} & \frac{h'_{21}}{h'_{21}} \end{array}$	$\begin{array}{cc} A & B \\ C & D \end{array}$	$\begin{array}{cc} \frac{D'}{\Delta T'} & \frac{B'}{\Delta T'} \\ \frac{C'}{C'} & \frac{A}{\Delta T'} \\ \frac{\Delta T'}{\Delta T'} & \frac{\Delta T'}{\Delta T'} \end{array}$
T'	$\begin{array}{cc} \frac{r_{22}}{r_{21}} & \frac{\Delta R}{r_{21}} \\ \frac{r_{21}}{r_{21}} & \frac{r_{12}}{r_{21}} \\ \frac{1}{r_{21}} & \frac{r_{11}}{r_{21}} \\ \frac{r_{12}}{r_{12}} & \frac{r_{12}}{r_{12}} \end{array}$	$\begin{array}{cc} -\frac{g_{11}}{g_{12}} & -\frac{1}{g_{12}} \\ \frac{g_{12}}{\Delta G} & -\frac{g_{11}}{\Delta G} \\ g_{12} & g_{12} \end{array}$	$\begin{array}{cc} \frac{1}{h_{12}} & \frac{h_{11}}{h_{12}} \\ \frac{h_{12}}{h_{22}} & \frac{\Delta H}{h_{22}} \\ \frac{h_{12}}{h_{12}} & \frac{h_{12}}{h_{12}} \end{array}$	$\begin{array}{cc} -\frac{\Delta H'}{h'_{12}} & -\frac{h'_{22}}{h'_{12}} \\ \frac{h'_{12}}{h'_{11}} & -\frac{1}{h'_{11}} \\ \frac{h'_{12}}{h'_{12}} & -\frac{h'_{12}}{h'_{12}} \end{array}$	$\begin{array}{cc} \frac{D}{\Delta T} & \frac{B}{\Delta T} \\ \frac{\Delta T}{C} & \frac{A}{\Delta T} \\ \frac{\Delta T}{\Delta T} & \frac{\Delta T}{\Delta T} \end{array}$	$\begin{array}{cc} A' & B' \\ C' & D' \end{array}$



Riepilogo

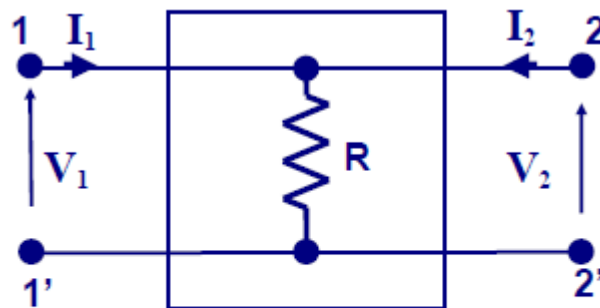
Rappresentazione	Variabili indipendenti	Variabili dipendenti
Comandata in corrente	i_1, i_2	v_1, v_2
Comandata in tensione	v_1, v_2	i_1, i_2
Ibrida (diretta)	i_1, v_2	v_1, i_2
Ibrida inversa	v_1, i_2	i_1, v_2
Trasmissione (diretta)	$v_2, -i_2$	v_1, i_1
Trasmissione inversa	$v_1, -i_1$	v_2, i_2



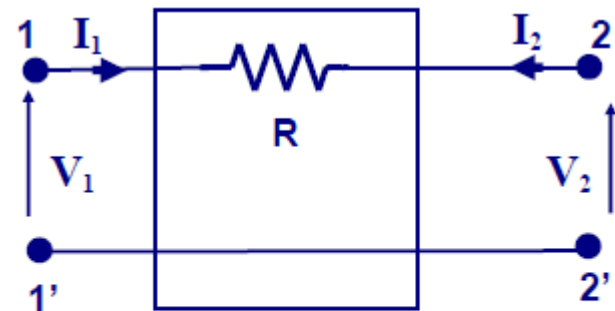
Riepilogo

Dato un doppio bipolo lineare passivo è sempre possibile determinare una qualunque sua matrice caratteristica (R , G , H , \dots)?

La risposta è no!



Non ammette
rappresentazione G



Non ammette
rappresentazione R

Proprietà di reciprocità

POLITECNICO DI MILANO



- **Ipotesi:**

$\{v'_1, v'_2, i'_1, i'_2\}$
 $\{v''_1, v''_2, i''_1, i''_2\}$ → insiemi arbitrari di tensioni e correnti che soddisfano le equazioni del doppio bipolo

- **Definizione:**

si dice che il doppio bipolo è **reciproco** se

$$v'_1 i''_1 + v'_2 i''_2 = v''_1 i'_1 + v''_2 i'_2$$

- Per interpretare il significato di questa relazione e ricavare le condizioni che devono soddisfare i parametri delle matrici del doppio bipolo si fa riferimento alle situazioni in cui una sola delle variabili indipendenti è diversa da zero

Proprietà di reciprocità

Condizione 1



$$i'_1 = I \quad i'_2 = 0$$

$$v'_2 = r_{21}i'_1 + r_{22}i'_2 = r_{21}I$$

Condizione 2



$$i''_1 = 0 \quad i''_2 = I$$

$$v''_1 = r_{11}i''_1 + r_{12}i''_2 = r_{12}I$$

Condizione di reciprocità

$$v'_1 i''_1 + v'_2 i''_2 = v''_1 i'_1 + v''_2 i'_2 \Rightarrow v'_1 \cdot 0 + v'_2 I = v''_1 I + v''_2 \cdot 0 \Rightarrow v'_2 = v''_1$$



$$r_{12} = r_{21}$$

Proprietà di simmetria

- Si dice che un doppio bipolo è **simmetrico** se, per ogni insieme di tensioni e di correnti alle porte che soddisfano le sue equazioni caratteristiche, anche l'insieme ottenuto scambiando la porta 1 con la porta 2 soddisfa le equazioni caratteristiche
 - Si può dimostrare che le matrici di un due porte simmetrico soddisfano le seguenti proprietà
 - ◆ matrice **R**: $r_{11} = r_{22}$ $r_{12} = r_{21}$
 - ◆ matrice **G**: $g_{11} = g_{22}$ $g_{12} = g_{21}$
 - ◆ matrice **H**: $h_{12} = -h_{21}$ $\det(\mathbf{H}) = 1$
 - ◆ matrice **H'**: $h'_{12} = -h'_{21}$ $\det(\mathbf{H}') = 1$
 - ◆ matrice **T**: $A = D$ $\det(\mathbf{T}) = 1$
 - ◆ matrice **T'**: $A' = D'$ $\det(\mathbf{T}') = 1$
- ➔ La simmetria implica anche la reciprocità

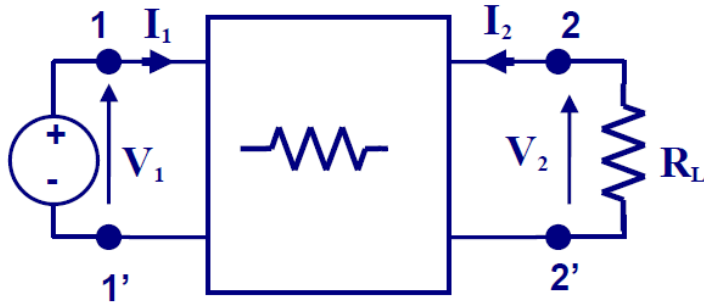


Esempi: adattamento del carico

POLITECNICO DI MILANO



Sostituendo nella prima equazione si ottiene:



$$V_1 = \left(R_{11} - \frac{R_m^2}{R_L + R_{22}} \right) I_1$$

e quindi la resistenza equivalente vista dal generatore risulta:

$$R_{eq} = \frac{V_1}{I_1} = R_{11} - \frac{R_m^2}{R_L + R_{22}}$$

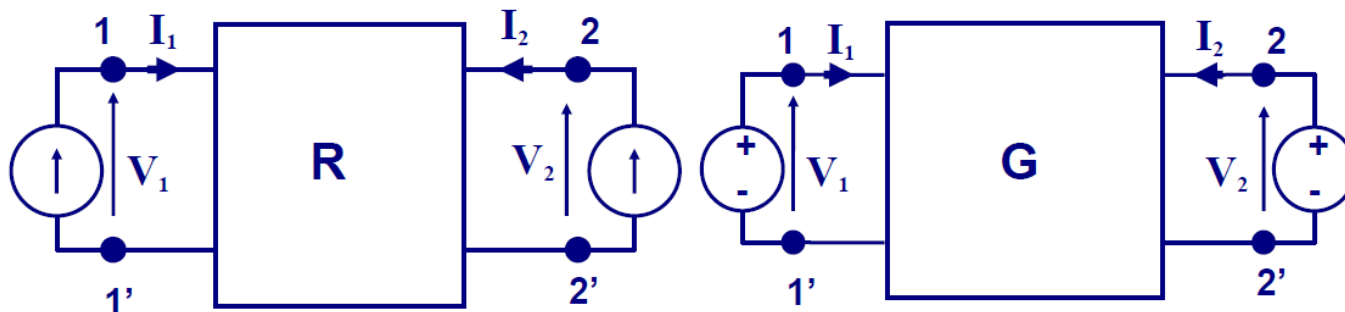
Prof. G. Guosso

Sintesi del doppio bipolo

POLITECNICO DI MILANO



Problema di sintesi: Data una matrice di conduttanze (resistenze), si deve determinare una configurazione di resistori lineari passivi che la ammetta come matrice.



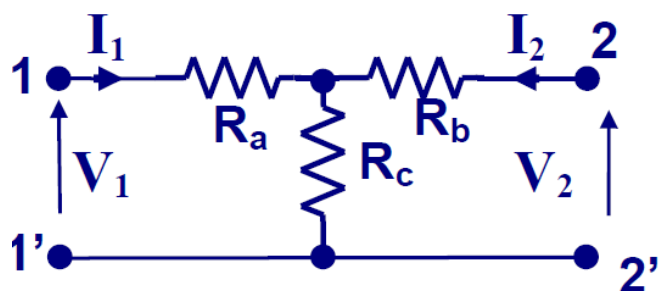
Prof. G. Guosso

Sintesi del doppio bipolo

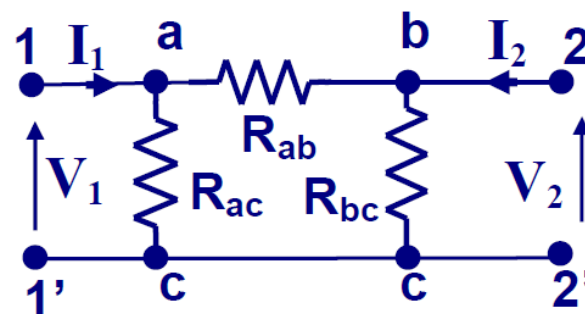
POLITECNICO DI MILANO



Tra le possibili configurazioni, due assumono particolare rilievo: la configurazione a stella o a T e quella a triangolo o a π .



configurazione a
stella o a T



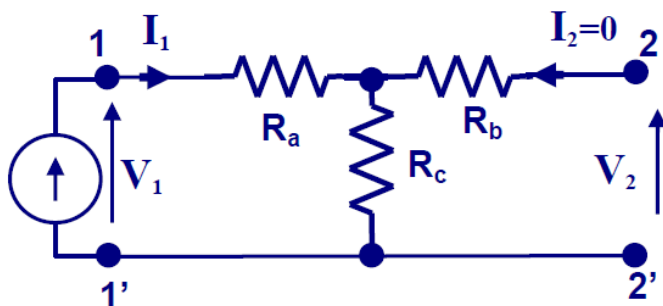
configurazione a
triangolo o a Π

Sintesi del doppio bipolo

POLITECNICO DI MILANO



Determiniamo la matrice delle resistenze per la configurazione a stella



$$R_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{I_2=0} = R_a + R_c$$

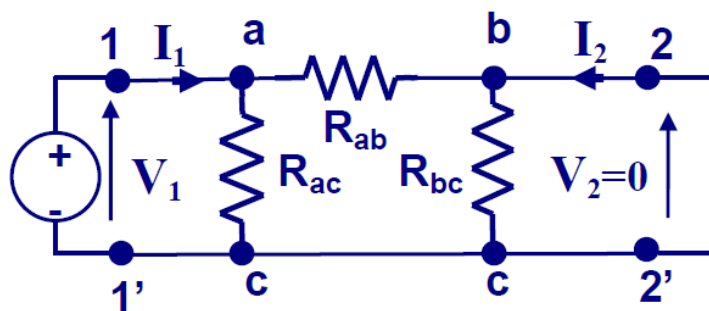
$$R_m = \left. \frac{V_2}{I_1} \right|_{I_2=0} = R_c$$

Inoltre, per la simmetria del circuito si ha:

$$R_{22} = \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{I_1=0} = R_b + R_c$$

Sintesi del doppio bipolo

Determiniamo la matrice delle conduttanze per la configurazione a triangolo o a π .



$$G_{11} = \left. \frac{I_1}{V_1} \right|_{V_2=0} = G_{ac} + G_{ab}$$

$$G_m = \left. \frac{I_2}{V_1} \right|_{V_2=0} = -G_{ab}$$

Inoltre, per la simmetria della struttura:

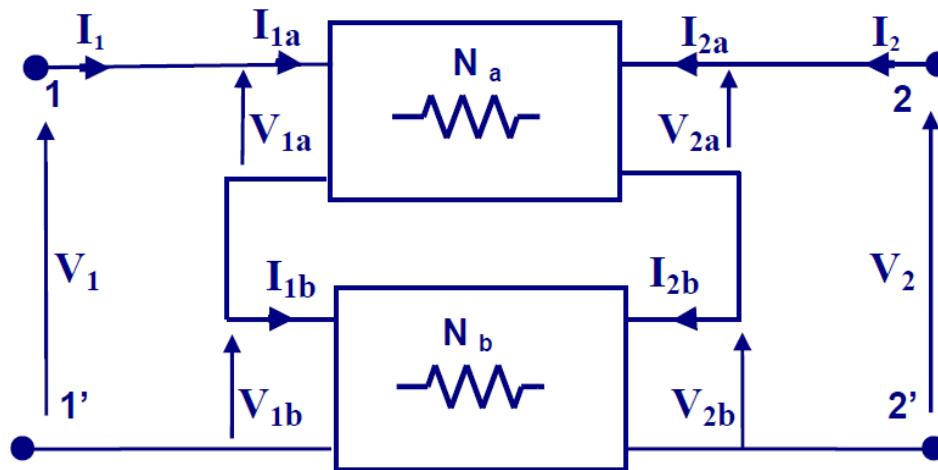
$$G_{22} = \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{V_1=0} = G_{bc} + G_{ab}$$

Collegamenti doppi bipoli

POLITECNICO DI MILANO



Collegamento in serie: Due doppi bipoli N_a e N_b sono collegati in serie quando si ha:



$$I_1 = I_{1a} = I_{1b}$$

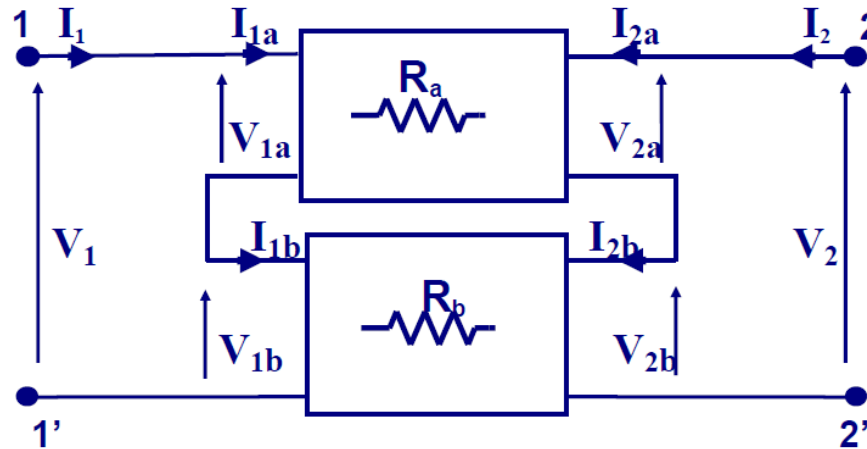
$$I_2 = I_{2a} = I_{2b}$$

$$V_1 = V_{1a} + V_{1b}$$

$$V_2 = V_{2a} + V_{2b}$$

Prof. G. Guosso

Collegamenti doppi bipoli



$$V_a = R_a I_a$$

$$V_b = R_b I_b$$

$$V = V_a + V_b = (R_a + R_b)I = RI$$



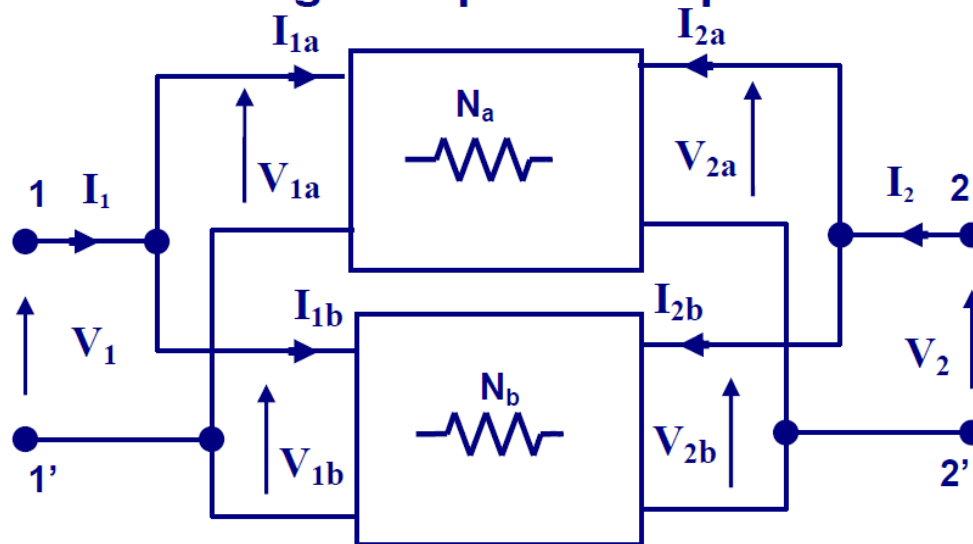
Collegamenti doppi bipoli

POLITECNICO DI MILANO



Prof. G. Gruosso

Collegamento in parallelo: Due doppi bipoli N_a e N_b sono collegati in parallelo quando si ha:



$$V_1 = V_{1a} = V_{1b}$$
$$V_2 = V_{2a} = V_{2b}$$

$$I_1 = I_{1a} + I_{1b}$$
$$I_2 = I_{2a} + I_{2b}$$

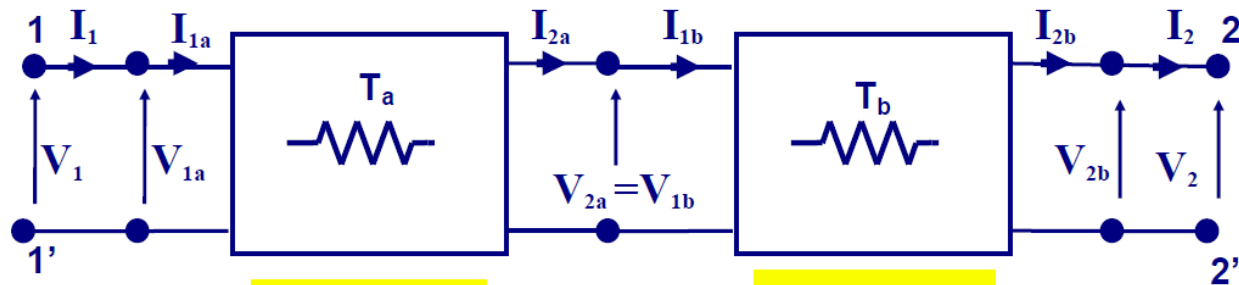
Collegamenti doppi bipoli

POLITECNICO DI MILANO



Prof. G. Gruosso

Doppi bipoli collegati in cascata: Due doppi bipoli si dicono collegati in cascata quando:

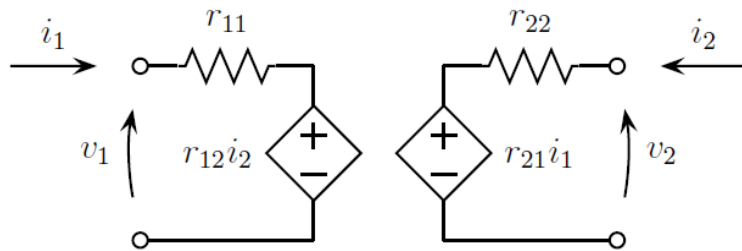


$$\begin{aligned} I_1 &= I_{1a} \\ I_{2a} &= I_{1b} \\ I_{2b} &= I_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_1 &= V_{1a} \\ V_{2a} &= V_{1b} \\ V_{2b} &= V_2 \end{aligned}$$

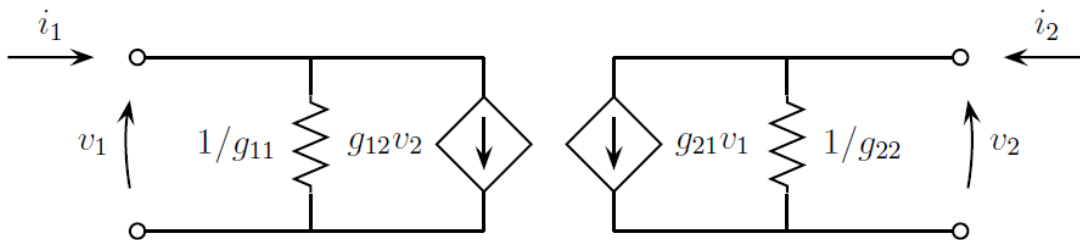
Circuiti Equivalenti di Doppio bipoli

Supponendo di conoscere una delle rappresentazioni è possibile ricavare un circuito equivalente che la descriva?



Rappresentazione
In corrente

$$\begin{cases} v_1 = r_{11}i_1 + r_{12}i_2 \\ v_2 = r_{21}i_1 + r_{22}i_2 \end{cases}$$



Rappresentazione
In Tensione

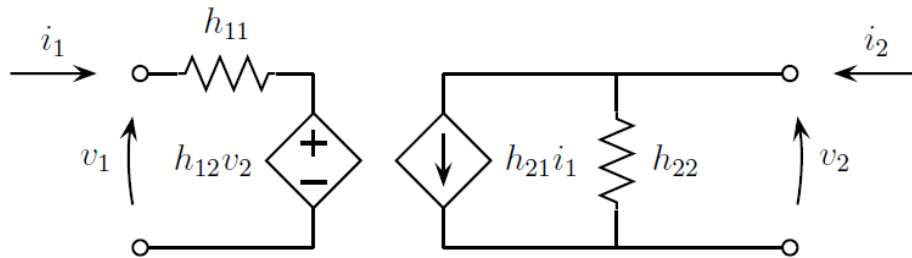
$$\begin{cases} i_1 = g_{11}v_1 + g_{12}v_2 \\ i_2 = g_{21}v_1 + g_{22}v_2 \end{cases}$$

Circuiti Equivalenti di Doppi bipoli

POLITECNICO DI MILANO

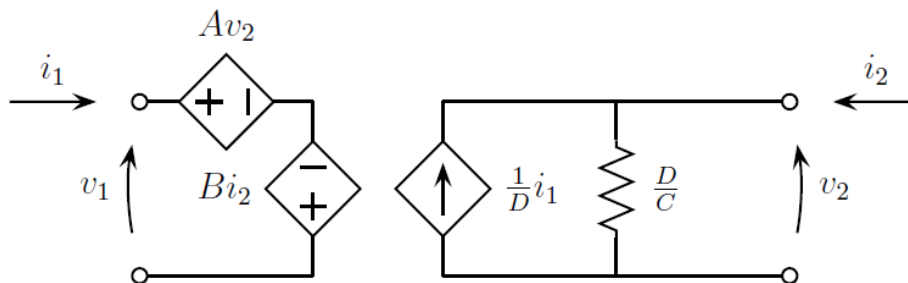


Prof. G.



Rappresentazione
ibrida

$$\begin{cases} v_1 = h_{11}i_1 + h_{12}v_2 \\ i_2 = h_{21}i_1 + h_{22}v_2 \end{cases}$$



Rappresentazione
Trasmissione

$$\begin{cases} v_1 = Av_2 - Bi_2 \\ i_1 = Cv_2 - Di_2 \end{cases}$$

Doppi Bipoli Attivi (o affini)

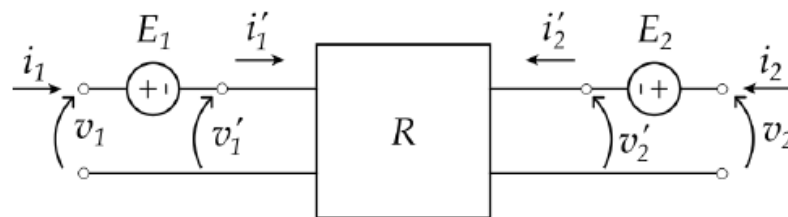
Equivalente Thevenin e Norton di doppi bipoli

Se i doppi bipoli contengono generatori ideali allora le loro rappresentazioni si modificano

1) Rappresentazione in corrente

$$v_1 = R_{11}i_1 + R_{12}i_2 + E_1$$

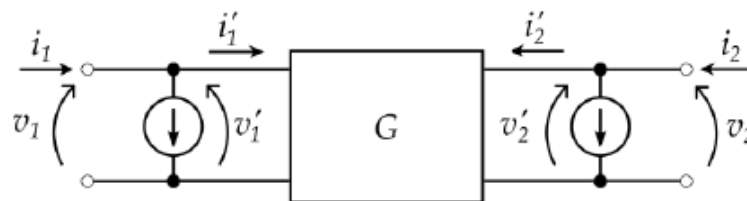
$$v_2 = R_{21}i_1 + R_{22}i_2 + E_2$$



2) Rappresentazione in tensione

$$i_1 = G_{11}v_1 + G_{12}v_2 + A_1$$

$$i_2 = G_{21}v_1 + G_{22}v_2 + A_2$$



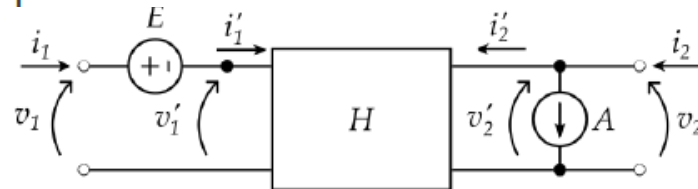
Doppi Bipoli Attivi (o affini)

Equivalente Thevenin e Norton di doppi bipoli

Se i doppi bipoli contengono generatori ideali allora le loro rappresentazioni si modificano

1) Rappresentazione ibrida

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E \\ A \end{bmatrix}$$



2) Rappresentazione ibrida inversa

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H'_{11} & H'_{12} \\ H'_{21} & H'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A \\ E \end{bmatrix}$$

