

# Sistemi Radio Satellitari e Terrestri

xd1 - Anno Accademico 2017/18

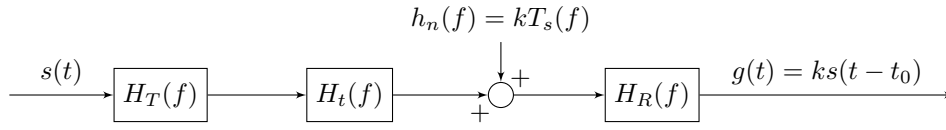
## Indice

<b>1</b>	<b>Sistema di trasmissione lineare</b>	<b>3</b>
1.1	Funzioni di trasferimento e schema a blocchi . . . . .	3
1.2	Equalizzazione . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Il rumore termico</b>	<b>3</b>
2.1	Densità spettrali di rumore (bipoli resistivi) . . . . .	3
2.2	Teorema di Nyquist . . . . .	4
2.3	Banda equivalente di rumore . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Temperatura e fattore di rumore</b>	<b>4</b>
3.1	Amplificatori . . . . .	4
3.2	Doppi bipoli passivi (attenuatori) . . . . .	4
3.3	Doppi bipoli in cascata . . . . .	4
<b>4</b>	<b>Il rapporto rumore/segnale</b>	<b>5</b>
4.1	Rapporto rumore/segnale di una sola tratta . . . . .	5
4.2	Rapporto rumore/segnale di N tratte in cascata . . . . .	5
<b>5</b>	<b>Trasmissione di impulsi e filtro adattato</b>	<b>5</b>
5.1	Trasmissione di un impulso isolato . . . . .	5
5.2	Trasmissione di una sequenza di impulsi . . . . .	6
5.3	Potenza media trasmessa in una sequenza di impulsi sovrapposti nel tempo . . . . .	6
5.4	Impulsi antipodali . . . . .	6
<b>6</b>	<b>Probabilità di errore nella trasmissione binaria</b>	<b>6</b>
6.1	Soglia di decisione ottimale (PCM con impulsi di Nyquist) . . . . .	6
6.2	Probabilità d'errore con rumore gaussiano . . . . .	6
<b>7</b>	<b>Standardizzazione della <math>P(\varepsilon)</math> gaussiana</b>	<b>7</b>
7.1	Approssimazione della funzione $Q(\gamma)$ . . . . .	7
<b>8</b>	<b>Trasmissione a minima potenza media</b>	<b>7</b>
8.1	Scelta degli impulsi . . . . .	7
8.2	Relazione tra $P(\varepsilon)$ e rapporto rumore/segnale . . . . .	7
<b>9</b>	<b>Probabilità di errore tollerabile</b>	<b>7</b>
9.1	Rapporti rumore/segnale notevoli e dimensionamento . . . . .	8
<b>10</b>	<b>Canali limitati in banda e potenza</b>	<b>8</b>
<b>11</b>	<b>Trasmissione multilivello (PAM discreta)</b>	<b>8</b>
11.1	Banda occupata . . . . .	8
11.2	Probabilità di errore sul bit ( $P_b(\varepsilon)$ ) . . . . .	8
11.3	Potenza media trasmessa . . . . .	8

<b>12</b>	<b>Tratte trasparenti e rigenerative</b>	<b>9</b>
12.1	Probabilità di errore . . . . .	9
12.2	Capacità di canale secondo Shannon . . . . .	9
<b>13</b>	<b>Trasmissione in modulazione di ampiezza</b>	<b>9</b>
13.1	Modulazione DSB-SC . . . . .	9
13.2	Trasmissione con due portanti in quadratura . . . . .	10
13.3	Rumore bianco filtrato passa banda . . . . .	10
13.4	Rapporto rumore/segnale . . . . .	10
13.5	Trasmissione numerica con due portanti in quadratura (QAM) . . . . .	10
<b>14</b>	<b>Filtro adattato alla differenza di impulsi</b>	<b>11</b>
14.1	Rapporto rumore/segnale all'uscita del campionatore . . . . .	11
14.2	Espressione del filtro adattato . . . . .	11
14.3	Impulsi ortogonali . . . . .	11
<b>15</b>	<b>Trasmissione numerica in modulazione di frequenza (FSK)</b>	<b>11</b>
15.1	Stima dello spettro . . . . .	11
15.2	Banda minima occupata . . . . .	12
15.3	Probabilità di errore . . . . .	12
<b>16</b>	<b>Trasmissione analogica in modulazione di frequenza o fase (FM e PM)</b>	<b>12</b>
16.1	Banda di Carson . . . . .	12
16.2	Caratteristiche del rumore uscente da un filtro passa banda a radiofrequenza . . . . .	12
16.3	Rapporto rumore/segnale . . . . .	13
<b>17</b>	<b>Trasmissione radio nello spazio libero</b>	<b>13</b>
17.1	Tipologie di antenna e potenza irradiata . . . . .	13
17.2	Potenza ricevuta e formula di Friis . . . . .	13
17.3	Parametri delle antenne e relazioni . . . . .	13
<b>18</b>	<b>Non idealità della trasmissione radio</b>	<b>14</b>
18.1	Effetto dell'atmosfera sulla trasmissione punto-punto . . . . .	14
18.2	Attenuazione dovuta ai cammini multipli . . . . .	14
18.3	Attenuazione dovuta alle idrometeore . . . . .	14
<b>19</b>	<b>Metodi di accesso multiplo</b>	<b>15</b>
19.1	Accesso multiplo a divisione di frequenza (FDMA) . . . . .	15
19.2	Accesso multiplo a divisione di tempo (TDMA) . . . . .	15
19.3	Accesso multiplo a divisione di codice (CDMA) . . . . .	15
	<b>Appendici</b>	<b>16</b>
<b>A</b>	<b>Segnale televisivo</b>	<b>16</b>
A.1	Numero di campioni . . . . .	16
A.2	Banda occupata e standard PAL e NTSC . . . . .	16
<b>B</b>	<b>Codifiche</b>	<b>16</b>
<b>C</b>	<b>Radiodiffusione</b>	<b>17</b>
C.1	AM . . . . .	17
C.2	FM mono . . . . .	17
C.3	FM stereo . . . . .	18
<b>D</b>	<b>Bibliografia</b>	<b>19</b>

# 1 Sistema di trasmissione lineare

## 1.1 Funzioni di trasferimento e schema a blocchi



$$\triangleright H(f) = H_T(f)H_t(f)H_R(f) = |H(f)|e^{-j\beta(f)}$$

Nell'uscita dello schema a blocchi,  $t_0$  è il ritardo *inevitabile* introdotto dal sistema, mentre  $k$  è un fattore moltiplicativo, dipendente dalle sue caratteristiche. Per  $k > 1$ , il sistema amplifica, per  $k < 1$  il sistema attenua, infine per  $k = 1$  il sistema restituisce le stesse ampiezze.

### 1.1.1 Requisiti per una trasmissione ideale

$$\triangleright \begin{cases} |H(f)| = k \\ \beta(f) = 2\pi f t_0 \end{cases}$$

Il modulo della funzione di trasferimento deve essere costante in frequenza, e la fase proporzionale alla frequenza.

## 1.2 Equalizzazione

Mediante l'operazione di equalizzazione si trasforma un sistema distortente in un sistema ideale, a partire dalle FdT del sistema.

**FdT delle apparecchiature:**  $H_T(f)H_R(f) = H_a(f) = e^{-\alpha_a(f)-j\beta_a(f)}$

**FdT delle mezzo trasmissivo:**  $H_t(f) = e^{-\alpha_t(f)-j\beta_t(f)}$

Imponendo  $H_a(f)H_t(f) = e^{-j2\pi f t_0}$  ed eguagliando le parti reali e le parti immaginarie delle due funzioni di trasferimento, segue che devono essere soddisfatte le equazioni seguenti:

$$\triangleright \begin{cases} \alpha_a(f) + \alpha_t(f) = 0 \\ \beta_a(f) + \beta_t(f) = 2\pi f t_0 \end{cases}$$

Poichè il mezzo trasmissivo è passivo, ovvero  $\alpha_t(f) \geq 0$ , la prima equazione afferma che le apparecchiature devono amplificare le componenti del segnale in modo proporzionale all'attenuazione. La seconda equazione afferma un concetto simile per la fase, tenendo presente che, a causa del ritardo non eliminabile dovuto alla propagazione, è impossibile equalizzare del tutto.

# 2 Il rumore termico

A causa dell'agitazione degli elettroni liberi, ai capi di un conduttore con i morsetti aperti si rileva una tensione a vuoto  $v(t)$ . Essa si può schematizzare come un processo aleatorio (stazionario ed ergodico) avente valor medio nullo. Equivalentemente, cortocircuitando i morsetti, si rileva una corrente  $i(t)$  avente le stesse caratteristiche.

## 2.1 Densità spettrali di rumore (bipoli resistivi)

**Densità spettrale di tensione:**  $h_v = 4kTR$

**Densità spettrale di corrente:**  $h_i = 4kTG$

**Densità spettrale di potenza:**  $h_n(f) = kT$

Alla temperatura ambiente  $T_0 = 290$  K, la densità spettrale di potenza assume il seguente valore:  $N_0 = kT_0 = -174$  dBm.

### 2.1.1 Densità di probabilità della tensione e della corrente di rumore

Poichè esse sono prodotte da molti elettroni, per il Teorema del limite centrale la loro densità di probabilità risulta gaussiana con valori medi nulli e varianze date da:

$$\triangleright \begin{cases} \sigma_v^2 = 4kTRB \\ \sigma_i^2 = 4kTGB \end{cases}$$

## 2.2 Teorema di Nyquist

Un bipolo lineare passivo con impedenza d'ingresso  $Z_{in}(f) = R_{in}(f) + jX_{in}(f)$  genera una tensione a vuoto con densità spettrale di potenza uguale a  $h_v(f) = 4kTR_{in}(f)$ , con  $R_{in}(f) = \text{Re}\{Z_{in}(f)\}$ .

## 2.3 Banda equivalente di rumore

Si definisce banda equivalente di rumore la larghezza di banda di un filtro ideale di modulo  $|H(f_0)|$  che restituisce tutta la potenza media del rumore uscente da un doppio bipolo.

$$\triangleright B_e = \frac{1}{|H(0)|^2} \int_0^\infty |H(f)|^2 df$$

## 3 Temperatura e fattore di rumore

### 3.1 Amplificatori

Le due grandezze si ricavano dalla densità spettrale di potenza di rumore all'ingresso del sistema composto da generatore di segnale e amplificatore:  $h_{gt} = k(T_g + T_a) = kT_S$ , dove  $T_g$  è la temperatura di rumore del generatore (supposta nota) e  $T_a$  quella dell'amplificatore.

**Temperatura di rumore:**  $T_a = \frac{H}{A_d} = (F - 1)T_0$

**Fattore di rumore:**  $F = 1 + \frac{T_a}{T_0}$

### 3.2 Doppi bipoli passivi (attenuatori)

Sappiamo che, per il Teorema di Nyquist, la densità spettrale di potenza uscente da un doppio bipolo è uguale a  $h_{nu} = kT_0$ . Schematizzandolo mediante la temperatura di rumore si ottiene la seguente relazione:

$$\triangleright T_e = (A - 1)T_0$$

L'attenuazione  $A$  assume il significato di fattore di rumore del doppio bipolo passivo.

### 3.3 Doppi bipoli in cascata

Un ricevitore R è composto da  $n$  doppi bipoli posti in cascata. La sua temperatura di rumore sarà uguale a:

$$\triangleright T_R = T_{a1} + \frac{T_{a2}}{A_{d1}} + \frac{T_{a3}}{A_{d1}A_{d2}} + \dots + \frac{T_{an}}{A_{d1}A_{d2}\dots A_{d(n-1)}} = T_{a1} + \sum_{k=2}^n \frac{T_{ak}}{\prod_{i=1}^{k-1} A_{di}}$$

Equivalentemente il fattore di rumore è dato da:

$$\triangleright F_R = F_1 + \frac{F_2 - 1}{A_{d1}} + \frac{F_3 - 1}{A_{d1}A_{d2}} + \dots + \frac{F_k - 1}{A_{d1}A_{d2}\dots A_{d(n-1)}} = F_1 \sum_{k=2}^n \frac{F_k - 1}{\prod_{i=1}^{k-1} A_{di}}$$

Dalle formule riportate sopra si conclude che sia la temperatura che il fattore di rumore di un ricevitore sono determinati dalla temperatura di rumore e dall'amplificazione (attenuazione) del primo doppio bipolo.

## 4 Il rapporto rumore/segnale

### 4.1 Rapporto rumore/segnale di una sola tratta

Consideriamo un sistema di trasmissione lineare composto da doppi bipoli lineari e sorgenti di rumore. Si definiscono i seguenti rapporti rumore/segnale:

**Rapporto rumore/segnale entrante:**  $R_e = \int_0^B \frac{N_0}{P_R} df = \frac{N_0 B}{P_R}$

**Rapporto rumore/segnale uscente:**  $R_u = \int_0^B \frac{N_0 A_d}{P_R A_d} df = \frac{N_0 B}{P_R} = R_e$

dove  $P_R = P_T e^{-2\alpha t}$  è la potenza media uscente dal mezzo trasmissivo e  $A_d$  è il guadagno dei doppi bipoli nella banda del segnale. Si deduce quindi che è impossibile cambiare il rapporto rumore/segnale con apparecchiature lineari.

### 4.2 Rapporto rumore/segnale di N tratte in cascata

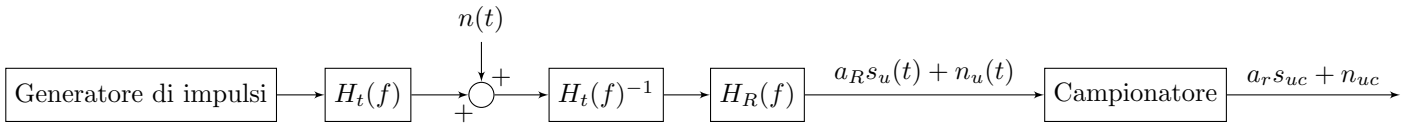
Ipotizzando che la potenza ricevuta in una tratta venga amplificata e ritrasmessa nella tratta successiva, si ottiene il seguente risultato:

$$\triangleright R_e^{ott} = \sum_i^N R_{e,i}^{ott} = R_u^{ott} = \sum_i^N R_{u,i}^{ott}$$

La formula afferma che in fondo al collegamento si accumula il rapporto rumore/segnale.

## 5 Trasmissione di impulsi e filtro adattato

### 5.1 Trasmissione di un impulso isolato



#### 5.1.1 Rapporto rumore/segnale all'uscita del campionatore

$$\triangleright R_{uc} = \frac{\overline{n_{uc}^2}}{a_R^2 s_{uc}^2} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{N_0}{2} |H_R(f)|^2 df}{\left[ a_R \int_{-\infty}^{+\infty} S_u(f) e^{j2\pi f t_c} df \right]^2}$$

#### 5.1.2 Filtro adattato

Ricordando che  $E_R = a_R^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |S_R(f)|^2 df$ , che  $S_u(f) = H_R(f) S_R(f)$  e utilizzando la disuguaglianza di Schwarz, si ottiene la seguente relazione:

$$\triangleright \frac{R_{uc} E_R}{N_0/2} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} |H_R(f)|^2 df \int_{-\infty}^{+\infty} |S_R(f)|^2 df}{\left[ \int_{-\infty}^{+\infty} H_R(f) S_R(f) e^{j2\pi f t_c} df \right]^2} \geq \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} |H_R(f)|^2 df \int_{-\infty}^{+\infty} |S_R(f)|^2 df}{\int_{-\infty}^{+\infty} |H_R(f)|^2 df \int_{-\infty}^{+\infty} |S_R(f)|^2 df} = 1$$

Prendendone il valore minimo, si trova il seguente rapporto rumore/segnale (fondamentale):  $R_{uc} = \frac{N_0/2}{E_R}$ .

Si ottiene inoltre l'espressione della FdT ottimale del filtro adattato:  $H_{R0} = S_R^*(f) e^{-j2\pi f t_c}$ .

## 5.2 Trasmissione di una sequenza di impulsi

Trasmettiamo una sequenza di impulsi, non sovrapposti nel tempo, di durata  $T$ , con un ritmo di trasmissione  $f_s = \frac{1}{T}$ . Se si utilizza il filtro adattato, basta dividere l' $R_{uc}$  della trasmissione di un singolo impulso per  $T$ :

$$\triangleright R_{uc} = \frac{N_0 f_s / 2}{P_R} = \frac{k(T_g + T_R) f_s / 2}{P_T e^{-2\alpha_t}}$$

Dalla formula si nota che  $R_{uc}$  dipende dalla potenza ricevuta e che, se si utilizza un filtro adattato, non dipende dalla forma dell'impulso.

## 5.3 Potenza media trasmessa in una sequenza di impulsi sovrapposti nel tempo

Vogliamo verificare se i risultati ottenuti si possono estendere ad una sequenza di impulsi del tipo  $\sqrt{S_u(f, \delta)}$ .

Una sequenza di impulsi ha energia  $E_T = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \sum_{i=-k}^k a_i s(t - iT) \right]^2 dt$ . Essa è uguale alla somma dei singoli impulsi quando è nullo il contributo dei doppi prodotti. Se vale questa proprietà, allora sarà valida anche per la potenza (basta moltiplicare per il ritmo  $f_s$ ). Un caso particolare in cui si verifica questa condizione è quando si ha una sequenza di impulsi con ISI nulla, ovvero come gli impulsi di Nyquist uscenti da un filtro adattato.

## 5.4 Impulsi antipodali

Essi hanno ampiezza di picco uguale a  $\pm a_r$ , ovvero con la stessa energia e la stessa potenza.

$$\text{Potenza media di ogni impulso: } P_R = \frac{a_R^2 \int S_u(f) df}{T} = \frac{a_R^2}{T^2}$$

$$\text{Potenza media di N impulsi: } P_{R,seq} = \frac{\overline{E_{R,seq}}}{T} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N E_R / N}{T} = \frac{a_R^2}{T^2}$$

Si ottiene quindi che, nella trasmissione con impulsi antipodali, la potenza media ricevuta di una sequenza è uguale alla potenza media di un singolo impulso.

# 6 Probabilità di errore nella trasmissione binaria

## 6.1 Soglia di decisione ottimale (PCM con impulsi di Nyquist)

Siano  $f_0(y)$  e  $f_1(y)$  le densità di probabilità condizionate dell'ampiezza all'uscita del campionatore, corrispondenti alla trasmissione, rispettivamente, del bit 0 e del bit 1. Siano inoltre  $P(0)$  e  $P(1)$  le loro probabilità a priori.

La probabilità d'errore media è data da:

$$\triangleright P(\varepsilon) = P(0) \int_S^{+\infty} f_0(y) dy + P(1) \int_{-\infty}^S f_1(y) dy$$

Per minimizzare la  $P(\varepsilon)$ , determiniamo il corrispondente valore  $S_0$ . Derivando rispetto a  $S$  ed eguagliando a 0, si ottiene la seguente equazione implicita:

$$\triangleright \frac{f_1(S_0)}{f_0(S_0)} = \frac{P(0)}{P(1)}$$

Se i simboli sono equiprobabili (come di norma), il valore di  $S_0$  è dato dall'intersezione delle due densità di probabilità, ovvero  $f_1(S_0) = f_0(S_0)$ .

## 6.2 Probabilità d'errore con rumore gaussiano

Consideriamo il caso di impulsi equiprobabili aventi ampiezze  $a_1$  e  $a_2$ . Poiché la densità gaussiana è simmetrica, si trova che la soglia di decisione si trova a metà delle due ampiezze:  $S_0 = (a_0 + a_1)/2$ . Sempre per simmetria, ricaviamo il valore delle  $P(\varepsilon)$ :

$$\triangleright P(\varepsilon) = [P(0) + P(1)] \int_{S_0}^{+\infty} f_0(y) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_S^{+\infty} \exp \left\{ -\frac{(y - a_0)^2}{2\sigma^2} \right\} dy$$

## 7 Standardizzazione della $P(\varepsilon)$ gaussiana

Al fine di dimensionare i sistemi di comunicazione, risulta utile *standardizzare* la  $P(\varepsilon)$  in presenza di rumore gaussiano. Ponendo  $z = (y - a_0)/\sigma$ , si ottiene la seguente densità di probabilità:

$$\triangleright Q(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\gamma}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\} dz, \text{ con } \gamma = \frac{(a_1 - a_0)/2}{\sigma}$$

### 7.1 Approssimazione della funzione $Q(\gamma)$

Poichè l'integrale della funzione  $Q(\gamma)$  non è esprimibile in forma chiusa, la si approssima per eccesso con la seguente espressione:

$$\triangleright Q(\gamma) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\gamma} \exp\left\{-\frac{\gamma^2}{2}\right\}$$

Approssimando ulteriormente, si trova una formula molto utile per gli esercizi:  $\log P(\varepsilon) = -0.225\gamma^2 - 0.898$

## 8 Trasmissione a minima potenza media

Poichè la  $P(\varepsilon)$  dipende soltanto dalla differenza tra le ampiezze degli impulsi, conviene centrare le ampiezze intorno allo zero. Così facendo la differenza  $(a_1 - a_0)$  rimane costante e la potenza trasmessa viene ridotta. Questa sarà la modulazione a cui ci si riferirà, nel seguito, con la sigla PCM (*pulse code modulation*).

### 8.1 Scelta degli impulsi

Si utilizzano impulsi antipodali, di ampiezza di picco  $\pm a$ , a cui corrispondono le forme d'onda di Nyquist  $\pm aT\sqrt{S_u(f)}$ . Poichè  $a_1 = a, a_0 = -a$ , si ottiene  $\gamma^2 = a^2/\sigma^2$ .

#### 8.1.1 Potenza ricevuta

$$\triangleright P_R = \frac{a^2 T^2 \int S_u(f) df}{T} = a^2$$

### 8.2 Relazione tra $P(\varepsilon)$ e rapporto rumore/segnale

Ricordando il valore della varianza di rumore della teoria del filtro adattato ( $\sigma^2 = N_0 f_s/2$ ) e sostituendo l'espressione di  $P_R$ , si ottiene la seguente relazione:

$$\triangleright \gamma^2 = \frac{a^2}{\sigma^2} = \frac{P_R}{N_0 f_s/2} = \frac{1}{R_{uc}^{ott}}$$

Essa è molto utile per il dimensionamento dei collegamenti: una volta fissato il valore tollerabile di  $P(\varepsilon)$ , si ricava immediatamente il rapporto rumore/segnale tollerabile della tratta in esame.

## 9 Probabilità di errore tollerabile

L'utente di un sistema di comunicazione può fissare dei requisiti sulla massima  $P(\varepsilon)$  tollerabile. Le sorgenti numeriche sono già predisposte ad essere trasmesse, mentre per quelle digitalizzate è necessario effettuare alcuni accorgimenti sulla tipologia e sulla qualità della digitalizzazione. All'uscita di un filtro di ricostruzione analogico/digitale, si ha che la potenza media del rumore è data dalla somma delle varianze di rumore di quantizzazione e di errore sul bit:  $\sigma^2 = \sigma_q^2 + \sigma_\varepsilon^2$ .

**Varianza del rumore di quantizzazione (uniforme):**  $\sigma_q^2 = \frac{V_{pp}^2}{12 \cdot 2^{2n}}$

**Varianza del rumore dovuto agli errori:**  $\sigma_\varepsilon^2 = \frac{V_{pp}^2}{3} P(\varepsilon)$

## 9.1 Rapporti rumore/segnale notevoli e dimensionamento

In base al tipo di segnale considerato, si definiscono i seguenti rapporti rumore/segnale, dati da  $R_u = R_{uq} + R_{u\varepsilon}$ :

**Segnale caratterizzato da potenza picco-picco:**  $R_u = \frac{1}{12} \left[ \frac{1}{2^{2n}} + 4P(\varepsilon) \right]$

**Segnale caratterizzato da valor medio e potenza di picco:**  $R_u = \frac{1}{3} \left[ \frac{1}{2^{2n}} + 4P(\varepsilon) \right]$

**Segnale caratterizzato da potenza media, valor medio e fattore di picco:**  $R_u = \frac{k_p^2}{3} \left[ \frac{1}{2^{2n}} + 4P(\varepsilon) \right]$

Poichè il controllo del progettista verte sul rapporto rumore/segnale dovuto alla quantizzazione, sarebbe opportuno avere  $R_{u\varepsilon} \ll R_{uq}$ , in modo da minimizzare l' $R_u$  complessivo. Per dimensionare la  $P(\varepsilon)$  massima tollerata, quindi, imponiamo  $R_{u\varepsilon} = \rho R_{uq}$  ( $\rho \ll 1$ ). Infine dal termine comune tra i rapporti rumore/segnale sopracitati si ricava  $P(\varepsilon)_{max} = \frac{\rho}{2^{2(n+1)}}$ .

## 10 Canali limitati in banda e potenza

Un canale è *limitato in potenza* se il ritmo massimo di trasmissione della modulazione PCM ( $f_k = 2B_k/[1 + \delta]$ ) è maggiore del ritmo di ingresso, ma il rapporto rumore/segnale ottenibile dalla trasmissione non garantisce la probabilità di errore tollerabile. Viceversa, il canale è *limitato in banda*. I canali radio di cui ci occupiamo sono sempre limitati in banda.

## 11 Trasmissione multilivello (PAM discreta)

La modulazione multilivello PAM (*pulse amplitude modulation*) consiste nell'assegnare a gruppi di  $k$  bit impulsi con la stessa forma, ma con ampiezze diverse, che spaziano tra  $M = 2^k$  livelli.

### 11.1 Banda occupata

Poichè ogni impulso rappresenta più bit, la banda si riduce: data la banda  $B$  e il ritmo  $f_s$  del PCM, si ottiene:

$$\triangleright B_k = \frac{f_k}{2}(1 + \delta) = \frac{f_s}{2k}(1 + \delta) = \frac{B}{k}$$

### 11.2 Probabilità di errore sul bit ( $P_b(\varepsilon)$ )

Sia  $p = Q(\gamma)$  la probabilità di errore nel binario interno. Poichè gli  $M - 2$  livelli interni si possono sbagliare con probabilità  $2p$ , mentre i restanti con probabilità  $p$ , si ottiene la probabilità di errore sul simbolo, ricordando la loro equiprobabilità:

$$\triangleright P_s(\varepsilon) = 2p \frac{M-1}{M}$$

Qualunque sia la codifica dei  $k$  bit, la probabilità di errore sul bit deve essere compresa nell'intervallo  $\left[ \frac{P_s(\varepsilon)}{k}, P_s(\varepsilon) \right]$ .

Il limite superiore si raggiunge quando tutti i bit sono sbagliati, mentre il limite inferiore quando se ne sbaglia solo uno. Per quanto riguarda il limite inferiore, si dimostra che utilizzando la codifica di Gray si ottengono dei valori di  $P_b(\varepsilon)$  poco più piccoli di  $p$ . Per un dimensionamento ottimale, imponiamo dunque  $P_b(\varepsilon) = p$ , ovvero il caso peggiore.

### 11.3 Potenza media trasmessa

Data la potenza  $P_b = a^2$  trasmessa nel binario più interno, possiamo ottenere la seguente relazione compatta per la potenza media  $P_M$ :

$$\triangleright P_M = a^2 \frac{1}{M} \sum_{n=1}^M (2n-1-M)^2 = \frac{M^2-1}{3} P_b$$

Ipotizzando che il multilivello venga trasmesso con impulsi antipodali, si ottiene che la sua potenza media è maggiore di quella del PCM, ma si beneficia in banda.

Utilizzando ad esempio 4 livelli ( $k = 2$ ), si deve trasmettere una potenza 5 volte quella del PCM, ma con banda dimezzata.



## 12 Tratte trasparenti e rigenerative

Il sistema di trasmissione analizzato precedentemente utilizzava collegamenti con tratte trasparenti. Essi possono essere attuati con tratte *rigenerative*, in cui dopo ogni tratta il segnale binario ricevuto viene ricostruito e ritrasmesso.

### 12.1 Probabilità di errore

Sia  $n$  il numero di tratte rigenerative nel sistema di trasmissione e  $P(\varepsilon) = p$  la probabilità di errore nella singola tratta. Se gli errori sono indipendenti di tratta in tratta, si ha:

$$\triangleright P_T(\varepsilon) = \sum_{i=1}^{n^{\circ} \text{dispari}} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}, \text{ con } i = 1, 3, 5, \dots$$

Per valori reali di probabilità di errore molto bassa, la formula si generalizza in  $P_T(\varepsilon) = \sum_{i=1}^n P_i(\varepsilon)$ . In fondo al collegamento, quindi, si accumula la probabilità di errore. Ciò si traduce in un risparmio notevole di potenza trasmessa, dato il legame esponenziale tra probabilità di errore e rapporto rumore/segnale.

### 12.2 Capacità di canale secondo Shannon

Sia  $N_t$  il numero di tratte in cascata. Poichè con tratte trasparenti si accumula il rapporto rumore/segnale, e con tratte rigenerative la capacità complessiva è uguale alla capacità del singolo collegamento, si ottengono le seguenti capacità di canale complessive:

**Tratte trasparenti:**  $C^{tr} = B \log_2 \left( 1 + \frac{1}{N_t R_{e,st}^{tr}} \right)$

**Tratte rigenerative:**  $C^{rig} = B \log_2 \left( 1 + \frac{1}{R_{e,st}^{tr}} \right)$

A parità di  $P(\varepsilon)$ , ogni tratta rigenerativa tollera un rapporto rumore segnale di  $N_t$  volte più grande di quello di ogni tratta trasparente: la potenza viene quindi ridotta di  $N_t$  volte.

## 13 Trasmissione in modulazione di ampiezza

### 13.1 Modulazione DSB-SC

Sia  $s(t)$  un segnale in banda base, che prende il nome di *segnale modulante*. Esso contiene l'informazione che si vuole trasmettere. La modulazione è ottenuta moltiplicando il segnale con l'oscillazione locale  $\cos(2\pi f_p t + \varphi_p)$ , detta *onda portante*.

A causa della moltiplicazione, lo spettro di  $s(t)$ , che immaginiamo compreso tra  $f_1 \approx 0$  e  $f_2$ , viene traslato alla frequenza  $f_p$ , assieme ad una sua replica ribaltata (*double side band*). Da notare anche l'assenza di una portante impulsiva alla frequenza  $f_p$  (*suppressed carrier*).

#### 13.1.1 Demodulazione coerente

La demodulazione consiste nel moltiplicare il segnale modulato  $m(t) = s(t) \cos(2\pi f_p t + \varphi_p)$  con un'oscillazione locale coerente con quella ricevuta. Così facendo si ottiene

$$\triangleright s(t) \cos(2\pi f_p t + \varphi_p) \times 2 \cos(2\pi f_p t + \varphi_p) = s(t) + s(t) \cos(4\pi f_p t + 2\varphi_p)$$

Il segnale modulante verrà poi separato dai termini ad alta frequenza con un filtro passa basso di banda  $B = f_2$ .

#### 13.1.2 Banda occupata

Se si trasmettono  $f_s$  bit al secondo, a causa delle doppie bande laterali si avrà  $B = 2 \frac{f_s}{2} (1 + \delta) = 2B_{PCM}$ .

Come vedremo, questa inefficienza di banda può essere eliminata.

## 13.2 Trasmissione con due portanti in quadratura

### 13.2.1 Effetto di un errore di fase nella demodulazione

Supponiamo di demodulare il segnale  $m(t)$  con un'oscillazione locale uguale a  $2 \cos(2\pi f_p t + \varphi_p + \Psi)$ . Effettuando i calcoli si nota che il segnale uscente dal demodulatore sarà

$$\triangleright u(t) = \frac{V_s}{2} \cos(2\pi f_s t - \Psi) + \frac{V_s}{2} \cos(2\pi f_s t + \Psi) = s(t) \cos \Psi$$

Il segnale modulante viene quindi ridotto in ampiezza di un fattore  $\cos \Psi$ . In particolare, se  $\Psi = 90^\circ$ ,  $u(t) = 0$ . Questo ci suggerisce di trasmettere due portanti in quadratura, ovvero della stessa frequenza  $f_p$  ma sfasate di  $90^\circ$  tra loro, per eliminare l'inefficienza spettrale già osservata.

### 13.2.2 Effetto sulla banda occupata

Con un convertitore serie-parallelo, si possono ricavare due canali indipendenti da una sorgente di ritmo  $f_s$ . Ciascun canale avrà ritmo  $f_s/2$ , e banda uguale a  $B = \frac{f_s}{4}(1 + \delta)$ . Trasmettendo i canali con due portanti in quadratura, si avrà

$$\triangleright B_{RF} = 2B = 2 \frac{f_s}{4}(1 + \delta) = B_{PCM}$$

Si è così eliminata l'inefficienza di banda, influenzando positivamente anche il rapporto rumore/segnale.

## 13.3 Rumore bianco filtrato passa banda

Si dimostra che il rumore bianco  $n(t)$ , all'uscita di un filtro passa banda di larghezza  $2f_2$  è indipendente dalla fase e uguale a

$$\triangleright n(t) = n_c(t) \cos(2\pi f_0 t) + n_s(t) \sin(2\pi f_0 t)$$

$n_c(t)$  e  $n_s(t)$  sono le componenti del rumore provenienti dal canale coseno e seno rispettivamente. Essi hanno densità spettrale uguale a  $2N_0$ , in quanto le componenti di rumore delle due bande laterali sono indipendenti e quindi si sommano in potenza in banda base.

## 13.4 Rapporto rumore/segnale

Per ciascun canale ortogonale, la densità spettrale di potenza uscente dal demodulatore è uguale a  $N_{nu} = 2N_0$ .

La potenza ricevuta sarà invece uguale a  $P_R = \frac{s^2(t)}{2}$ . Poichè la potenza uscente dal demodulatore è uguale a  $P_u = 2P_R$ , si nota che i rapporti rumore/segnale  $R_u$  e  $R_e$  sono uguali e indipendenti dalla frequenza, in quanto  $\frac{N_{nu}}{P_u} = \frac{N_0}{P_R}$ .

### 13.4.1 Effetto sull' $R_{uc}$

$$\triangleright R_{uc}^{\cos} = R_{uc}^{\sin} = \frac{N_0 f_s / 4}{P_R / 2} = R_{uc}^{PCM}$$

## 13.5 Trasmissione numerica con due portanti in quadratura (QAM)

Modulando ciascuna portante con un multilivello, dopo aver diviso il ritmo di trasmissione mediante un convertitore serie/parallelo, si può trasmettere a radiofrequenza con la stessa potenza media, stesso ritmo, e stessa probabilità di errore della trasmissione equivalente in banda base.

In particolare, se si utilizzano 2 livelli per portante ( $k = 1$ ), la modulazione prende il nome di QPSK (*quadrature phase shift keying*), in quanto l'informazione è contenuta solo nella fase. Essa sarà l'equivalente a radiofrequenza della trasmissione PCM.

Per  $k > 1$ , la modulazione prende il nome di QAM (*quadrature amplitude modulation*) e sarà l'equivalente a radiofrequenza del multilivello PAM. In quest'ultimo caso, i calcoli nel canale equivalente vengono effettuati con  $M = \sqrt{M_{QAM}}$ .

## 14 Filtro adattato alla differenza di impulsi

La teoria del filtro adattato, analizzata per impulsi della stessa forma, può essere generalizzata al caso di due forme d'onda diverse. Consideriamo quindi le forme d'onda  $a_0 s_{0R}(t)$  e  $a_1 s_{1R}(t)$  per i bit 0 e 1 rispettivamente.

### 14.1 Rapporto rumore/segnale all'uscita del campionatore

$$\triangleright R_{uc} = \frac{\overline{n_{uc}^2}}{\left(\frac{s_{1uc} - s_{0uc}}{2}\right)^2} = \frac{1}{\gamma^2}$$

Introducendo la trasformata del segnale differenza (fittizio)  $D_R(f)$ , il coefficiente di correlazione  $\rho = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} s_{1R}(t)s_{0R}(t) dt}{\sqrt{E_{1R}E_{0R}}}$  e applicando al denominatore la disuguaglianza di Schwarz e il teorema di Rayleigh-Parseval, si trova il valore minimo del rapporto rumore/segnale all'uscita del campionatore:

$$\triangleright R_{uco} = \frac{2N_0}{E_{1R} + E_{0R} - 2\rho\sqrt{E_{1R}E_{0R}}}$$

Se ipotizziamo che le due forme d'onda abbiano la stessa energia, l'espressione si semplifica in:

$$\triangleright R_{uco}(\rho) = \frac{N_0}{E_R(1-\rho)} = \frac{2}{(1-\rho)} R_{uco}$$

dove  $R_{uco}$  è il rapporto rumore/segnale ricavato dalla teoria del filtro adattato a una sola forma d'onda.

### 14.2 Espressione del filtro adattato

Il filtro adattato è dato da  $H_{R0}(f) = [S_{1R}^*(f) - S_{0R}^*(f)] e^{-j2\pi f t_c}$ , realizzabile fisicamente con una struttura aventi due filtri adattati alle rispettive forme d'onda posti in parallelo.

### 14.3 Impulsi ortogonali

Il valore di  $R_{uco}(\rho)$  è ovviamente minimo quando si utilizzano impulsi antipodali, ovvero con  $\rho = -1$ . Quando non è possibile generarli, come nella modulazione di frequenza FSK, si utilizzano impulsi ortogonali ( $\rho = 0$ ). In questo caso si ottiene  $R_{uco,ORT} = 2R_{uco}$ : per avere la stessa  $P(\varepsilon)$ , la trasmissione con impulsi ortogonali richiede una potenza doppia rispetto a quella con impulsi antipodali.

## 15 Trasmissione numerica in modulazione di frequenza (FSK)

Nella modulazione a spostamento di frequenza (*frequency shift keying*), ogni bit, rappresentato idealmente da un impulso rettangolare di durata  $T = 1/f_s$  e ampiezza unitaria, causa l'emissione di due diverse sinusoidi, di ampiezza e fase identiche ma aventi frequenze diverse:  $s_0(t) = A_p \cos[2\pi(f_p - \Delta f)t]$  e  $s_1(t) = A_p \cos[2\pi(f_p + \Delta f)t]$  per i bit 0 e 1 rispettivamente.

### 15.1 Stima dello spettro

Sommando i due segnali modulati  $m_0(t)$  e  $m_1(t)$  è possibile stimare lo spettro della sequenza di bit. Si ottiene

$$\triangleright m(t) = \frac{A_p}{2} \left[ 1 - \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \right] \cos[2\pi(f_p - \Delta f)t] + \frac{A_p}{2} \left[ 1 + \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \right] \cos[2\pi(f_p + \Delta f)t]$$

Ricavando i segnali  $m_0(t)$  o  $m_1(t)$  in funzione di questa espressione, si nota che lo spettro è costituito da un impulso alla frequenza  $f_0$  o  $f_1$  e da una portante soppressa, centrata alla stessa frequenza, modulata dall'impulso rettangolare di trasformata  $R(f) = T \text{sinc}(f)$ .

A causa dello spettro dell'impulso rettangolare la banda del segnale modulato è teoricamente infinita. Si filtrano quindi le code del seno cardinale dopo il primo zero, ricavando così una banda occupata pari a  $B_c = 2f_s + 2\Delta f = 2(f_s + \Delta f)$ .

## 15.2 Banda minima occupata

Ricordando l'espressione del coefficiente di correlazione tra due impulsi, imponendo la stessa energia  $E = \frac{A_p^2}{2}T$  agli impulsi della trasmissione e scegliendo una frequenza portante opportuna, otteniamo

$$\triangleright \rho = \frac{\sin(2\Delta\omega T)}{2\Delta\omega T} + \frac{\sin(2\omega_p T)}{2\omega_p T} = \frac{\sin(2\Delta\omega T)}{2\Delta\omega T}$$

Poichè il seno cardinale non assume mai il valore -1, non è possibile utilizzare impulsi antipodali. Si trasmettono quindi degli impulsi ortogonali. Affinchè l'ortogonalità sia rispettata ( $\rho = 0$ ) bisogna imporre  $\Delta f = n \frac{f_s}{4}$ . Scegliendo il valore minimo di  $\Delta f$  per risparmiare banda, si ottiene che la banda minima occupata dall'FSK è uguale a  $B_c = 2.5f_s$ .

## 15.3 Probabilità di errore

La probabilità di errore è data dalla consueta relazione  $P(\varepsilon) = Q(\gamma)$ , con  $\gamma^2$  definito come segue:

$$\triangleright \gamma^2 = \frac{E_R}{N_0} = \frac{\frac{A_p^2}{2}T}{N_0} = \frac{P_R}{N_0 f_s}$$

Questa espressione afferma che, per ottenere la stessa  $P(\varepsilon)$  a pari rumore, la modulazione FSK necessita di un raddoppio di potenza (3 dB) rispetto alla modulazione con impulsi antipodali.

## 16 Trasmissione analogica in modulazione di frequenza o fase (FM e PM)

Le modulazioni FM e PM fanno parte della famiglia delle modulazioni angolari. Una portante si dice *modulata d'angolo* se la sua fase è una funzione del segnale modulante, ovvero  $m(t) = A_p \cos \theta(t) = A_p \cos[2\pi f_p t + \varphi_p(t)]$ .

La modulazione è *di fase* (PM) se  $\varphi_p(t) = k_\varphi s(t)$ ; *di frequenza* (FM) se  $\varphi_p(t) = k_f \int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau$ .

Da queste espressioni si capisce che le due modulazioni sono strettamente legate tra loro: infatti un modulatore di fase può produrre un segnale FM se al suo ingresso inviamo l'integrale di  $s(t)$  e viceversa un modulatore di frequenza può produrre un segnale PM se al suo ingresso inviamo la derivata di  $s(t)$ .

### 16.1 Banda di Carson

Per stimare la banda occupata a radiofrequenza, distinguiamo tra deviazioni di fase piccole e grandi. Se  $\varphi_p(t) \ll 1$ ,  $m(t) \approx A_p \cos(2\pi f_p t) - \varphi_p(t) A_p \sin(2\pi f_p t)$ , quindi la banda a radiofrequenza è la stessa della modulazione d'ampiezza:  $B_{RF,min} = 2f_2$ . Se le deviazioni di fase sono grandi, si nota dall'espansione in serie di Taylor di  $\varphi_p(t)$  che la banda è infinita, in quanto sono presenti infinite portanti modulate in ampiezza (e distorte). Per ovviare al problema, si distorce parzialmente il segnale modulante (FM) o la sua derivata (PM), ottenendo così la banda detta *di Carson*:

$$\triangleright B_{RF} = B_C = \Delta f_{pp} + 2f_2 = 2(\Delta f_p + f_2) = 2(k_p \Delta f_e + f_2)$$

### 16.2 Caratteristiche del rumore uscente da un filtro passa banda a radiofrequenza

Come per la modulazione di ampiezza, posso esprimere il rumore uscente da un demodulatore ideale come la somma di due contributi tra loro ortogonali e indipendenti:  $n(t) = n_c(t) \cos[\omega_p t + \varphi_p(t)] + n_s(t) \sin[\omega_p t + \varphi_p(t)]$ .

Consideriamo dapprima il rumore uscente da un demodulatore di fase. In virtù delle caratteristiche delle due componenti di rumore, ipotizzate  $\ll A_p$ , esso sarà uguale a  $\varphi_n(t) = \arctan \frac{n_s(t)}{A_p + n_c(t)} \approx \frac{n_s(t)}{A_p}$  e poichè  $n_s(t)$  è gaussiano bianco di densità  $2N_0$ , il rumore di fase avrà una densità spettrale uguale a  $N_{0,PM} = \frac{N_0}{P_R}$ .

Dal rumore di fase posso ricavare il rumore equivalente di frequenza facendolo passare attraverso un derivatore:

$$N_{0,FM}(f) = N_{0,PM} | -jf |^2 = \frac{N_0}{P_R} f^2.$$

## 16.3 Rapporto rumore/segnale

Ricordando la potenza media del segnale,  $\overline{s^2(t)} = \Delta f_e^2$ , si può procedere al calcolo del rapporto rumore/segnale uscente:

$$\triangleright R_u = \frac{\int_0^{f_2} N_{0,FM}(f) df}{\Delta f_e^2} = \frac{N_0}{P_R} \frac{1}{3} \frac{f_2^3}{\Delta f_e^2} = \frac{1}{3} \left( \frac{f_2}{\Delta f_e} \right)^2 \frac{N_0 f_2}{P_R} \Rightarrow R_u = \left( \frac{f_2}{\Delta f_e} \right)^2 R_e$$

Questa espressione del rapporto rumore/segnale è valida finché il rumore è piccolo rispetto alla portante. Questa condizione si traduce, per un demodulatore a discriminazione di frequenza, nell'imporre  $R_{eC} = \frac{N_0 B_C}{P_R} \leq \frac{1}{20}$  fino a  $\frac{1}{10}$ .

Per un demodulatore ad aggancio di fase, il limite si abbassa a  $\frac{1}{5}$ .

## 17 Trasmissione radio nello spazio libero

Se ipotizziamo che vengano rimossi tutti gli ostacoli posti tra due antenne, tra cui anche l'atmosfera, la propagazione radio si dice *in spazio libero*. Se invece non vengono rimossi, per avere una propagazione *come in spazio libero* è necessario che il 1° ellissoide di Fresnel (teoria della diffrazione) sia sgombro, come si vedrà nel seguito.

### 17.1 Tipologie di antenna e potenza irradiata

Sia  $P_T$  la potenza inviata all'antenna trasmittente. Nel caso in cui l'antenna sia isotropa, ovvero irradiante egualmente in tutte le direzioni, si ottiene una densità spettrale di potenza, distribuita su una superficie sferica di raggio  $l$ , uguale a  $S(l) = \frac{P_T}{4\pi l^2}$ .

Poiché l'antenna isotropa non è fisicamente realizzabile, bisogna adattare la formula al caso reale. Un'antenna reale irradia alla stessa distanza  $l$  una densità spettrale maggiore o minore rispetto a quella isotropa. Nella direzione in cui l'antenna irradia la massima potenza, viene definito *guadagno*, indicato con  $G_T$ , il rapporto tra le densità spettrali delle due antenne. La formula della densità spettrale diventa quindi  $S(l) = \frac{P_T G_T}{4\pi l^2}$ .

### 17.2 Potenza ricevuta e formula di Friis

Puntando l'antenna ricevente in modo tale da ottenere la massima potenza disponibile, si capta una potenza ricevuta pari a  $P_R = A_e \frac{P_T G_T}{4\pi l^2}$ .  $A_e$  è l'area equivalente dell'antenna ricevente, che per tutte le antenne è legata al guadagno  $G$  e alla lunghezza d'onda  $\lambda$  dalla relazione  $\frac{G}{A_e} = \frac{4\pi}{\lambda^2}$ .

Esprimendo  $P_R$  in funzione dei guadagni, si ottiene la formula di Friis per la propagazione in spazio libero:

$$\triangleright P_R = P_T \frac{G_T G_R}{(4\pi)^2 (l/\lambda)^2}$$

Ricordando inoltre che la potenza ricevuta è data da  $P_R = P_T e^{-2\alpha_{sl}}$ , si deduce che il mezzo trasmissivo è lineare ed ideale, con attenuazione data da  $\frac{P_T}{P_R} = A_{sl} = \frac{(4\pi)^2 (l/\lambda)^2}{G_T G_R}$ .

### 17.3 Parametri delle antenne e relazioni

L'area equivalente  $A_e$  di un'antenna è legata alla sua area geometrica dalla relazione  $A_e = \eta A_g$ . Il parametro  $\eta$  prende il nome di *efficienza* dell'antenna e avrà dei valori compresi tra 0 e 1 (tipicamente  $\eta = 0.6$ ). Per un'antenna parabolica, l'area equivalente è data da  $A_e = \eta \pi \left( \frac{D}{2} \right)^2$ .

E' possibile inoltre definire l'angolo di apertura del fascio di irradiazione  $\theta^\circ$ , misurato là dove è dimezzata la densità di potenza: per un'antenna parabolica si ha  $\theta^\circ(-3dB) = 70^\circ \frac{\lambda}{D}$ . Una volta assegnato  $\theta^\circ$ , si trova che il guadagno è indipendente dalla lunghezza d'onda e quindi dalla frequenza:  $G = \eta \pi \left( \frac{70^\circ}{\theta^\circ} \right)^2$ .

## 18 Non idealità della trasmissione radio

### 18.1 Effetto dell'atmosfera sulla trasmissione punto-punto

Supponiamo di voler costruire un ponte radio di lunghezza  $d$  tangente alla curvatura terrestre, ipotizzando l'assenza di atmosfera. Se le antenne sono distanti  $x = \frac{d}{2}$  dal punto di tangenza, per ricevere un segnale bisogna innalzare le antenne di  $h = \frac{x^2}{2R}$ , dove  $R = 6378$  km.

Introduciamo l'atmosfera: poichè essa è composta da vari strati aventi indice di rifrazione  $\sqrt{E_r}$ , il segnale trasmesso verrà deviato, interrompendo così la sua ricezione. Per far fronte a questo fenomeno, basta porre nella formula precedente un valore *corretto* del raggio terrestre, ovvero  $R_e \approx 8500$  km.

#### 18.1.1 Primo ellissoide di Fresnel

Nonostante le contromisure prese, il collegamento radio non risulta ancora in spazio libero. Per avere una trasmissione *come in spazio libero* le antenne dovranno essere innalzate di una quantità ulteriore, che ci viene data dal raggio del 1° ellissoide di Fresnel.

Se le antenne sono poste a distanza  $d_1$  e  $d_2$  da un punto di vista  $p$ , l'ellissoide avrà raggio uguale a  $\rho = \sqrt{\frac{d_1 d_2}{d_1 + d_2}} \lambda$ .

Nel caso limite in cui le distanze siano uguali,  $\rho = \frac{\sqrt{\lambda d}}{2}$ .

### 18.2 Attenuazione dovuta ai cammini multipli

Il segnale trasmesso da un'antenna all'altra può essere soggetto a fenomeni di riflessione ed eco, causando la presenza di una sua replica, ritardata e distorta, ai morsetti dell'antenna ricevente. L'effetto dell'eco è rappresentabile come un fasore avente un angolo  $\theta = \omega\tau = 2\pi\frac{c}{\lambda}\tau$ , in cui  $\Delta l = c\tau$  è il percorso aggiuntivo compiuto dalla replica. Il segnale ricevuto può dunque essere modellato come  $R = V_0 + V_0 e^{j\theta} = V_0 \left( e^{j\frac{\theta}{2}} + e^{-j\frac{\theta}{2}} \right) = 2V_0 e^{-j\frac{\theta}{2}} \cos\frac{\theta}{2}$ .

Ricordando il valore di  $\theta$  e dividendo per il segnale originale, si ottiene la funzione di trasferimento del mezzo, ossia  $H(f) = 2e^{-j\pi f\tau} \cos(\pi f\tau)$ . Dal suo modulo osserviamo che per  $f = \frac{n}{\tau}$  il disturbo si somma in fase, non causando alcun effetto sul segnale originale, mentre per  $f = \frac{2n+1}{2\tau}$  si somma in controfase, annullandolo. Nel caso pratico, la banda viene limitata in una regione in cui l'attenuazione risulta minima, e quindi la somma in controfase non si verifica mai.

#### 18.2.1 Analisi statistica

Considerando il caso di molteplici cammini multipli indipendenti, si nota che il segnale ricevuto è rappresentato da un fasore principale dato da  $V_0$ , al quale si aggiungono tanti piccoli fasori, ciascuno con il loro ritardo, la cui ampiezza è distribuita secondo una variabile aleatoria di *Rice*. Se si ipotizza che il segnale principale non venga ricevuto, e si esaminano solo i disturbi, si nota che la densità di probabilità della potenza ricevuta è di Rayleigh:  $f_{p_R}(P_R) = \frac{1}{\overline{P_R}} \exp\left\{-\frac{P_R}{\overline{P_R}}\right\}$ . La sua distribuzione di probabilità corrispondente sarà quindi  $F_{p_R} = \Pr(p_R \leq P_R) = 1 - \exp\left\{-\frac{P_R}{\overline{P_R}}\right\}$ .

Dividendo per la potenza media e calcolando la probabilità complementare, otteniamo la probabilità che l'attenuazione  $(y)_{dB} = \frac{\overline{P_R}}{P_R}$  superi un certo valore  $Y$ , ovvero  $\Pr(y \geq Y) = 1 - \exp\left\{-\frac{1}{Y}\right\} \approx \frac{1}{Y}$ , dove l'approssimazione vale per attenuazioni elevate, utili per dimensionare un collegamento affinché risulti fuori servizio per il minor tempo possibile.

### 18.3 Attenuazione dovuta alle idrometeore

Alle frequenze  $\approx 10$  GHz, la lunghezza d'onda diventa comparabile alle dimensioni di una goccia d'acqua. Le onde elettromagnetiche, quindi, possono essere attenuate da fenomeni piovosi, detti anche *idrometeore*. Si dimostra, secondo un modello di pioggia costante, che l'attenuazione dovuta alle idrometeore è uguale a  $[A]_{dB/KM} = kR^\alpha$ , dove  $R$  è l'intensità di precipitazione espressa in mm/h, e  $k$  e  $\alpha$  dipendono dalla frequenza e dal tipo di polarizzazione.

Inoltre essa cresce rapidamente all'aumentare della frequenza, in virtù della relazione  $\frac{A_2}{A_1} = \left(\frac{f_2}{f_1}\right)^2$ .

## 19 Metodi di accesso multiplo

La *multiplazione* di un segnale permette di trasmettere molti flussi di dati simultaneamente mediante la stessa onda portante e lo stesso mezzo trasmissivo. L'*accesso multiplo* permette a molteplici utenti di accedere a un segnale multiplato.

### 19.1 Accesso multiplo a divisione di frequenza (FDMA)

Nell'FDMA (*frequency division multiple access*) un segnale di banda  $B$  è diviso in più sottobande. In ognuna delle sottobande viene effettuata una trasmissione diversa dalle altre: l'utente che voglia trasmettere viene quindi limitato in una sola di esse. Per ricevere il segnale, basta filtrare passabanda nell'intervallo di frequenze interessato.

Per  $N$  sottobande, la banda del segnale multiplo sarà uguale a  $B = N \frac{f_s}{2} (1 + \delta)$ .

### 19.2 Accesso multiplo a divisione di tempo (TDMA)

Nel TDMA (*time division multiple access*) si ha una trama di durata  $T_t$  divisa in  $N$  intervalli: ciascun utente può trasmettere in uno solo di questi intervalli e dovrà aspettare un periodo di tempo pari a  $T_t$  per poter riprendere la trasmissione. Il ritmo di trasmissione in ogni intervallo sarà uguale a  $Nf_s$ : la banda occupata sarà uguale a quella dell'FDMA, mentre la potenza da trasmettere sarà di  $N$  volte superiore.

#### 19.2.1 TDMA vs FDMA

La divisione di frequenza, a causa della non linearità delle apparecchiature di amplificazione, causa dei fenomeni di intermodulazione tra i flussi di dati, che si ripercuotono sulla qualità del segnale. Poiché il requisito di potenza della divisione di tempo può essere mitigato mediante un'allocazione dinamica delle trame, mentre l'intermodulazione non è eliminabile, il TDMA risulta più vantaggioso e flessibile dell'FDMA nelle trasmissioni che richiedono una fedeltà elevata (e quindi una  $P(\varepsilon)$  bassa) e un numero alto di utenti.

### 19.3 Accesso multiplo a divisione di codice (CDMA)

Nel CDMA (*code division multiple access*) le stazioni trasmittenti moltiplicano un segnale  $s_i(t)$  di ritmo  $f_s$  con una sequenza pseudocasuale di impulsi rettangolari  $p_i(t)$  di ritmo  $f_c \gg f_s$ . Questo contributo, una volta modulato, verrà sommato ad altri  $N$  segnali anch'essi codificati e modulati, formando il segnale multiplo  $z(t) = \sum_{i=1}^N s_i(t)p_i(t) \cos(\omega_p t + \theta_i)$ .

Supponiamo che il  $j$ -esimo ricevitore voglia estrapolare il segnale proveniente dal trasmettitore  $i$ -esimo. Il segnale ricevuto sarà  $z_j(t) = s_i(t)p_j(t) \cos(\omega_p t) + \sum_{k=1}^{N-2} s_k(t)p_k(t) \cos(\omega_p t + \theta_k)$ . Poiché il ricevitore conosce la sequenza pseudo-casuale con cui demodulare, potrà ottenere il segnale  $s_i(t)$  moltiplicando per  $p_1(t)$ . Gli  $N-2$  flussi di dati provenienti dalle altre stazioni causano un'interferenza avente densità spettrale  $N_d = (N-2) \frac{P_d}{f_c}$ .

#### 19.3.1 Modello di rumore e $R_{uc}^{ott}$

Consideriamo il caso di un solo segnale modulato e supponiamo che ad esso si sommi una portante avente la stessa frequenza  $f_p$  e una fase  $\theta$  ignota. A causa della moltiplicazione con la sequenza  $p(t)$ , il contributo  $A_p \cos(\theta)$  dovuto alla demodulazione coerente viene moltiplicato a sua volta, provocando un disturbo all'uscita del secondo filtro adattato a banda stretta, necessario per recuperare il ritmo originale  $f_s$ . La densità spettrale di potenza del disturbo risulta uguale a

$$|S_d(f)|^2 = A_p^2 T_c \frac{\sin^2 \pi f T_c}{\pi f T_c} \cos^2 \theta. \text{ Effettuando la media statistica e considerando che il seno cardinale possiede una banda}$$

molto larga in virtù di  $f_c \gg f_s$ , la densità spettrale si approssima in  $|S_d(f)|^2 = \frac{P_d}{f_c}$ , dove  $P_d$  è la potenza del disturbo.

Poiché quest'ultimo è AWGN, otteniamo un  $R_{uc}^{ott} = \frac{(N_0 + N_d)f_s/2}{P_R} = \frac{N_0 f_s/2}{P_R} + \frac{\frac{2P_d}{f_c} \cdot \frac{f_s}{2}}{P_R}$ . Il contributo del disturbo

sull' $R_{uc}$  risulta additivo: pertanto, scegliendo un valore adeguato del rapporto  $G = \frac{f_c}{f_s}$ , può essere ridotto fino a un valore trascurabile. Inoltre, il risultato ottenuto è estendibile anche al caso di  $N$  segnali modulati:  $|S_{d,N}(f)|^2 = N|S_d(f)|^2$ .

## A Segnale televisivo

### A.1 Numero di campioni

Il segnale televisivo che consideriamo, detto di *luminanza*, è relativo alla luminosità delle immagini. L'informazione relativa al colore verrà trasmessa contestualmente ad esso, modulata con due portanti in quadratura aventi la banda centrata ad un multiplo della frequenza di linea.

Il numero di campioni (*pixels*) presenti in un quadro (*frame*) è uguale a

$$\triangleright N_c = nn_h = \frac{2}{\eta_c} \frac{m_2}{R_a} \cdot \frac{2}{\eta_c} m_2 = \frac{4}{\eta_c^2 R_a} m_2^2 = R_a n^2$$

dove:

- $R_a = \frac{l}{h}$  è il rapporto d'aspetto di un'immagine di larghezza  $l$  ed altezza  $h$ .
- $n$  è il numero di righe che formano l'immagine,  $n_h$  il numero di campioni che definiscono una riga.
- $m_2$  è il numero di cicli alla massima frequenza spaziale  $f_{2s}$ .
- $\eta_c$  è l'efficienza del campionamento, sempre  $< 1$ .

### A.2 Banda occupata e standard PAL e NTSC

Si ricava la seguente formula:

$$\triangleright f_2 = \frac{1}{2} R_a \frac{\eta_c \eta_v}{\eta_h} n_t^2 f_q$$

dove:

- $f_q = \frac{1}{T_q}$  è la frequenza di quadro.
- $\eta_h$  e  $\eta_v$  sono i fattori di efficienza, rispettivamente, di riga orizzontale e verticale. Infatti,  $\eta_h T_q$  ed  $\eta_v T_q$  sono le frazioni di riga contenenti l'informazione, mentre le parti restanti contengono i sincronismi di riga.
- $n_t = \frac{n}{\eta_v}$  è il numero di linee totali del segnale, comprese anche quelle descritte durante i ritorni verticali.

I valori citati nella formula sono fissati secondo due standard: PAL (*phase alternating line*, internazionale) e NTSC (*national television system committee*, USA). Nel dettaglio:

**PAL:**  $R_a = \frac{4}{3}$ ,  $\eta_c = 0.7$ ,  $\eta_v = 0.9$ ,  $\eta_h = 0.83$ ,  $f_q = 25$  Hz,  $n_t = 625 \Rightarrow f_2 \approx 5$  MHz.

**NTSC:**  $R_a = \frac{4}{3}$ ,  $\eta_c = 0.7$ ,  $\eta_v = 0.92$ ,  $\eta_h = 0.83$ ,  $f_q = 30$  Hz,  $n_t = 525 \Rightarrow f_2 \approx 4.2$  MHz.

## B Codifiche

Per ridurre la probabilità di errore in un canale particolarmente rumoroso o soggetto a forti attenuazioni, si può applicare una codifica di canale. Ciò avviene interallacciando dei bit di codice ai bit di informazione, causando così un aumento del ritmo di trasmissione:  $f_c = \frac{n}{k} f_s$ , con  $\frac{n}{k} > 1$ .

A parità di  $P(\varepsilon)$ , il codice riduce l'energia che bisogna ricevere:  $E_{RC} = E_R - (G)_{dB}$ , dove  $G$  è il guadagno della codifica. Moltiplicando per il ritmo di trasmissione, si ottiene la relazione equivalente in potenza, ovvero  $P_{RC} = P_R - (G)_{dB}$ .

Calcolando il  $\gamma_{cod}^2 = \frac{P_R G}{N_0 f_c / 2} = \gamma^2 \cdot \frac{G}{n/k}$ , si nota che il guadagno netto della codifica sul rapporto rumore/segnale è uguale a  $\frac{G}{n/k}$ .

Al giorno d'oggi si è raggiunto un livello notevole di ottimizzazione: applicando un codice di Reed-Solomon, infatti, si guadagnano fino a 7 dB rispetto alla trasmissione non codificata.



## C Radiodiffusione

Esaminiamo esplicitamente lo standard di radiodiffusione in modulazione di ampiezza e di frequenza.

### C.1 AM

La modulazione propriamente detta AM è una variante della DSB-SC in cui, oltre alla doppia banda laterale, viene trasmessa anche la portante. Pertanto, essa prende il nome di DSB-FC (*double side band - full carrier*). L'onda trasmessa assume quindi la forma  $u_m = A_p \cos(\omega_p t + \varphi_p) + s(t) \cos(\omega_p t + \varphi_p)$ .

#### C.1.1 Demodulazione

A causa della presenza della portante, non è necessaria la presenza di un oscillatore locale per ricostruirla. Nel caso in cui  $A_p \geq |s(t)|_{pn}$ , ovvero quando l'involuppo del segnale modulato è sempre  $> 0$ , è possibile demodulare mediante un *demodulatore ad involuppo*. Esso è un circuito costituito da un diodo e un parallelo RC: esso fa sì che il condensatore resti sempre carico alla tensione di picco del segnale modulato, ovvero proprio  $s(t)$ .

#### C.1.2 Caratteristiche di trasmissione

Facendo passare  $u_m$  attraverso un generico mezzo trasmissivo si ottiene:

$$\triangleright u_{mu} = A_{pu} \cos(\omega_p t + \varphi_p) + u_d(t) \cos(\omega_p t + \varphi_p) + u_q(t) \cos(\omega_p t + \varphi_p)$$

Sappiamo che un demodulatore coerente restituirebbe  $A_{pu} + u_d(t)$ ; con un demodulatore ad involuppo, invece, si estrae il seguente segnale:

$$\triangleright r(t) = A_{pu} \sqrt{\left[1 + \frac{u_d(t)}{A_{pu}}\right]^2 + \left[\frac{u_q(t)}{A_{pu}}\right]^2}$$

Nel caso in cui  $u_d(t), u_q(t) \ll 1$ , la radice si può espandere in serie di potenze: dal punto di vista del rumore si ottiene quindi  $r(t) = A_{pu} \left\{ 1 + \frac{n_c(t)}{A_{pu}} + \frac{1}{2} \left[ \frac{n_s(t)}{A_{pu}} \right]^2 \right\}$ . Il rumore uscente  $n_u(t)$  sarà dunque costituito da due contributi:

$n_c(t)$ , gaussiano bianco, e  $\left[ \frac{n_s(t)}{A_{pu}} \right]^2$ , distorcente. Per ridurre l'influenza di quest'ultimo termine indesiderato, bisogna accrescere ancora la portante, riconducendosi così all'uscita di un tipico demodulatore coerente.

#### C.1.3 Potenza ricevuta

A causa della presenza della portante e per soddisfare le condizioni di funzionamento del demodulatore ad involuppo, si ha  $P_R = \frac{\overline{s^2(t)}}{2} + \frac{A_p^2}{2} = \frac{\overline{s^2(t)}}{2} [1 + k_{pn}^2]$ , dove  $k_{pn}^2$  è il fattore di picco negativo del segnale. Il prezzo della semplicità del demodulatore è quindi la maggiorazione della potenza da trasmettere.

### C.2 FM mono

Consideriamo un segnale musicale  $s(t)$  con frequenza massima  $f_2$ , valor medio nullo e ampiezze comprese tra  $\pm V_p$ . La sua deviazione efficace di frequenza  $\Delta f_e$ , impressa dal valore efficace  $\pm V_e$ , elevata al quadrato sarà la sua potenza media.

#### C.2.1 Densità spettrale di potenza del segnale musicale

Per un periodo di tempo non troppo breve, la densità spettrale di potenza del segnale musicale risulta uguale a

$$\triangleright h_s(f) = \frac{h_0}{1 + \left(\frac{f}{f_0}\right)^2}$$

dove  $h_0$  ed  $f_0$  sono costanti. Da notare che la potenza è prevalentemente concentrata alle frequenze  $f \ll f_0$ .

### C.2.2 Enfasi e deenfasi

A causa del rumore parabolico uscente da un demodulatore di frequenza, le alte frequenze risultano molto più disturbate. Per rendere il rumore costante in tutta la banda del segnale,  $s(t)$  viene fatto passare attraverso un filtro di *enfasi*  $E(f)$  prima della modulazione, e attraverso il filtro corrispondente di *deenfasi*  $1/E(f)$  all'uscita del demodulatore. L'espressione della sua funzione di trasferimento in potenza è data da

$$\triangleright |E(f)|^2 = k^2 \left[ 1 + \left( \frac{f}{f_0} \right)^2 \right]$$

La costante  $k^2$  si ricava imponendo che la deviazione efficace del segnale enfatizzato sia uguale a quella del segnale naturale:

$$\triangleright \int_0^{f_2} \frac{h_0}{1 + \left( \frac{f}{f_0} \right)^2} df = \int_0^{f_2} \frac{h_0}{1 + \left( \frac{f}{f_0} \right)^2} \cdot k^2 \left[ 1 + \left( \frac{f}{f_0} \right)^2 \right] df = \frac{f_0}{f_2} \arctan \left( \frac{f_2}{f_0} \right)$$

### C.2.3 Rapporto rumore/segnale e confronto con la trasmissione senza enfasi

Il calcolo della potenza di rumore (pesato) uscente dal circuito di deenfasi si effettua così:

$$\triangleright P_{nup} = \int_0^{f_2} N_{0,FM}(f) df = \frac{N_0}{P_R} \frac{1}{\frac{f_0}{f_2} \arctan \left( \frac{f_2}{f_0} \right)} \int_0^{f_2} \frac{f^2}{\left[ 1 + \left( \frac{f}{f_0} \right)^2 \right]} df = \frac{N_0}{P_R} \frac{\frac{f_2}{f_0}}{\arctan \left( \frac{f_2}{f_0} \right)} f_0^3 \left[ \frac{f_2}{f_0} - \arctan \left( \frac{f_2}{f_0} \right) \right]$$

Il rapporto rumore/segnale corrispondente sarà uguale a  $R_{up} = \frac{P_{nup}}{\Delta f_p^2}$ , in quanto il segnale non è stazionario ed è definito solo mediante la potenza di picco.

Confrontando  $R_{up}$  con l' $R_u$  della trasmissione senza enfasi, si ottiene la seguente relazione:

$$\triangleright \frac{R_u}{R_{up}} = \frac{\left( \frac{f_2}{f_0} \right)^2 \arctan \left( \frac{f_2}{f_0} \right)}{3 \left[ \frac{f_2}{f_0} - \arctan \left( \frac{f_2}{f_0} \right) \right]}$$

Sostituendo in essa i valori dello standard della radiodiffusione ( $f_2 = 15$  kHz,  $f_0 = 2.122$  kHz nello standard USA,  $f_0 = 3.183$  kHz in quello internazionale) si nota che  $R_u > R_{up}$  in entrambi i casi. In particolare, lo standard USA guadagna 6.3 dB, mentre quello internazionale 4.8 dB.

### C.3 FM stereo

All'introduzione della trasmissione stereo, volendo mantenere la retrocompatibilità per i ricevitori mono e la stessa banda occupata ( $B_C = 180$  kHz, stazioni separate da 250 kHz), venne ideato un segnale FDM composto dal segnale mono in banda base ( $f_2 = 15$  kHz), dato dalla somma del canale destro e del canale sinistro (segnale L+R) e da un segnale modulato DSB-SC ( $f_p = 38$  kHz) dalla differenza dei due canali (segnale L-R). Contestualmente ad essi viene trasmessa una sinusoide non modulata a frequenza  $\frac{f_p}{2} = 19$  kHz detta *tono pilota*. Un ricevitore stereo poteva usufruire del tono pilota (con angolo moltiplicato per due) per demodulare coerentemente il segnale L-R, mentre i ricevitori mono avrebbero continuato a funzionare come al solito. A causa della doppia banda laterale, però,  $n_{up,L-R}(t) \gg n_{up,L+R}(t)$ : ciò corrisponde ad un aumento notevole del rapporto rumore/segnale della trasmissione stereo, dato da

$$\triangleright R_{up, stereo} = R_{up, mono} \cdot \frac{P_{nup, L-R}}{P_{nup, L+R}}$$

Calcolando  $P_{nup, L-R}$  e inserendo i valori dello standard, si ottiene  $R_{up, stereo} = R_{up, mono} + 20.2$  dB: il segnale stereo risulta molto più rumoroso del mono. All'atto pratico ciò non si avverte perchè la  $P_R$  è molto maggiore della  $P_{R, min}$  richiesta: se si dovessero riscontrare delle interferenze, basta passare al segnale mono per avere una qualità audio migliore.

## D Bibliografia

- [1] Carassa F. *Comunicazioni elettriche*, Boringhieri, Torino, 1970. CL: 74-8733-9
- [2] Matricciani E. *Lezioni di fondamenti di trasmissione*, Progetto Leonardo, Bologna, 2009. ISBN: 978-88-7488-344-8
- [3] Matricciani E. *Progetti di comunicazioni elettriche*, Progetto Leonardo, Bologna, 3<sup>a</sup>, 2010. ISBN: 978-88-7488-344-8