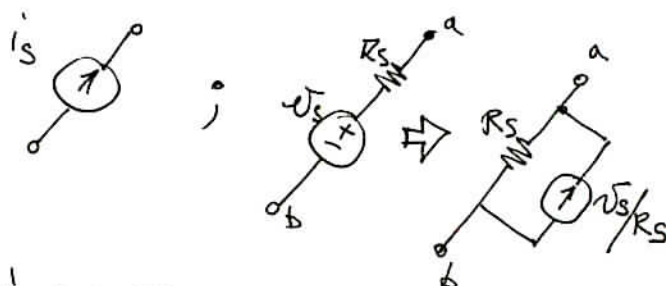


ANALISI NODALE

□ CASO #1 CIRCUITI CON SOLI GENERATORI DI CORRENTE E/O GENERATORI NON IDEALI (TRASFORMABILI!) DI TENSIONE



⇒ IL SISTEMA SI PUÒ SCRIVERE IN MODO IMMEDIATO, PER ISPEZIONE DEL CIRCUITO (vedi lezioni)

⇒ SCELTA ARBITRARIA DI \perp

EX

$$i_{s1} = 4A$$

$$i_{s2} = 3A$$

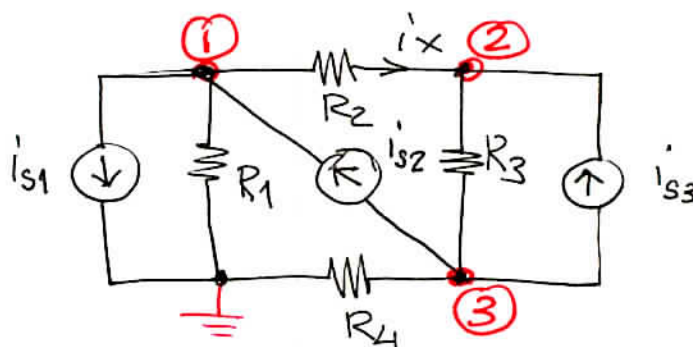
$$i_{s3} = 5A$$

$$R_1 = 2\Omega$$

$$R_2 = 4\Omega$$

$$R_3 = 2\Omega$$

$$R_4 = 2\Omega$$



Risolvere mediante il metodo dell'analisi nodale per determinare i_x .

1) SCELGO \perp (ARBITRARIO)

2) NUMERAZIONE NODI ①, ②, ③ (ARBITRARIO)

3) SISTEMA TRE EQ. IN TRE INCOGNITE

$$\begin{array}{l} \text{(KCL ①)} \\ \text{(KCL ②)} \\ \text{(KCL ③)} \end{array} \begin{array}{c} \text{①} \\ \text{②} \\ \text{③} \end{array} \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} & 0 \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_3} \\ 0 & -\frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i_{s1} + i_{s2} \\ i_{s3} \\ -i_{s2} - i_{s3} \end{bmatrix} \begin{array}{c} \text{①} \\ \text{②} \\ \text{③} \end{array}$$

(costruito per ispezione del circuito, con le regole dimostrate a lezione)

4) SOLUZIONE DEL SISTEMA LINEARE

$$\begin{cases} \frac{3}{4}v_1 + \frac{1}{4}v_2 = -1 & (1) \\ -\frac{1}{4}v_1 + \frac{3}{4}v_2 - \frac{1}{2}v_3 = 5 & (2) \\ -\frac{1}{2}v_2 + v_3 = -8 & (3) \end{cases}$$

USARE IL METODO
PREFERITO!
IS: PER SOSTITUZIONE;
KRÄMER; INVERSIONE
MATRICE; GAUSS; ...

$$(1) \rightarrow v_1 = -\frac{4}{3} + \frac{1}{3}v_2$$

$$(3) \rightarrow v_3 = -8 + \frac{1}{2}v_2$$

$$\hookrightarrow (2) \quad -\frac{1}{4}\left(-\frac{4}{3} + \frac{1}{3}v_2\right) + \frac{3}{4}v_2 - \frac{1}{2}\left(-8 + \frac{1}{2}v_2\right) = 5$$

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{12}v_2 + \frac{3}{4}v_2 + 4 - \frac{1}{4}v_2 = 5$$

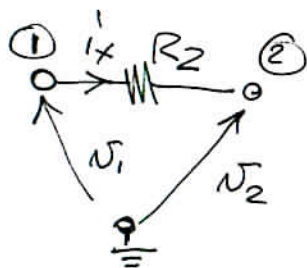
$$\left(-\frac{1}{12} + \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right)v_2 = \frac{2}{3}$$

$$v_2 = \frac{\frac{4}{12} \cdot 2}{\frac{5}{12}} = \frac{8}{5}V$$

$$v_1 = -\frac{4}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{8}{5} = -\frac{4}{3} + \frac{8}{15} = \frac{-20+8}{15} = -\frac{12}{15} = -\frac{4}{5}V$$

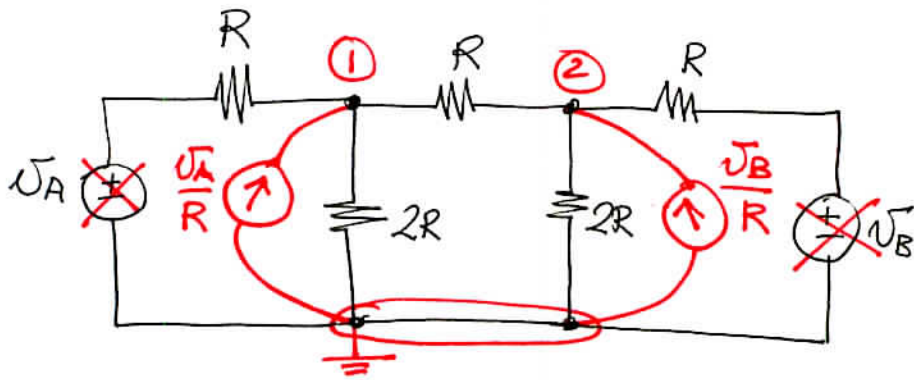
$$v_3 = -8 + \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{5} = \frac{-40+4}{5} = -\frac{36}{5}V$$

5) CALCOLO LE VARIABILI DI INTERESSE



$$i_x = \frac{v_1 - v_2}{R_2} = \frac{-\frac{4}{5} - \frac{8}{5}}{4} = -\frac{12}{5} \cdot \frac{1}{4} = -\frac{3}{5}A$$

EX



Scrivere il sistema di equazioni risolutive del circuito

- 1) Trasformazione generatori non ideali di tensione
- 2) Scelta di $\frac{1}{R}$ (arbitrarietà)
- 3) Numerazione nodi ①, ②
- 4) Sistema di due equazioni in due incognite

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R} + \frac{1}{2R} + \frac{1}{R} & -\frac{1}{R} \\ -\frac{1}{R} & \frac{1}{R} + \frac{1}{2R} + \frac{1}{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{U_A}{R} \\ \frac{U_B}{R} \end{bmatrix}$$

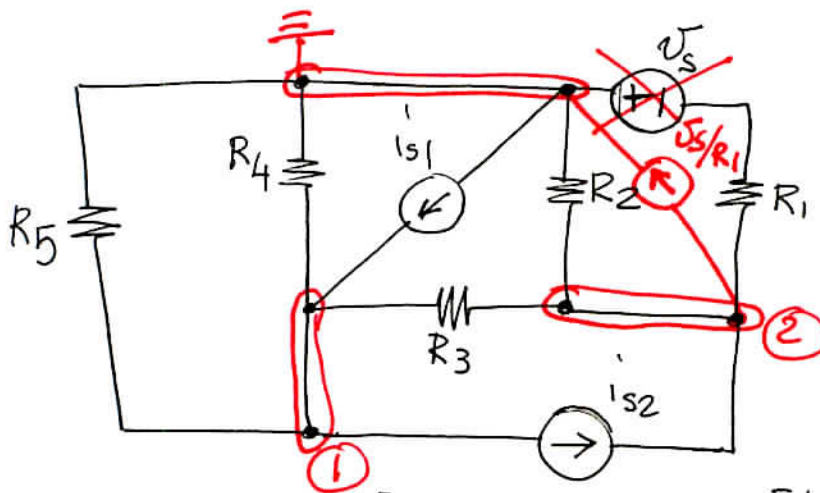
$$\begin{bmatrix} \frac{5}{2R} & -\frac{1}{R} \\ -\frac{1}{R} & \frac{5}{2R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{U_A}{R} \\ \frac{U_B}{R} \end{bmatrix}$$

Per casa, Risolvere il sistema.

Si ottiene

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{10}{21} U_A + \frac{4}{21} U_B \\ V_2 &= \frac{10}{21} U_B + \frac{4}{21} U_A \end{aligned}$$

EX1



SCRIVERE LE
EQUAZIONI
RISOLUTIVE DEL
CIRCUITO CON
IL METODO DELL'ANALISI
NODALE.

1) TRASFORMO $\begin{array}{c} V_s \\ \text{---} \end{array} R_1$ IN $\begin{array}{c} V_s/R_1 \\ \text{---} \\ R_1 \end{array}$
(ATTENZIONE: L'EQUIVALENZA E' ESTERNA)

2) SCELGO \perp (ARBITRARIO)

3) NUMERAZIONE NODI ①, ② (ARBITRARIO)

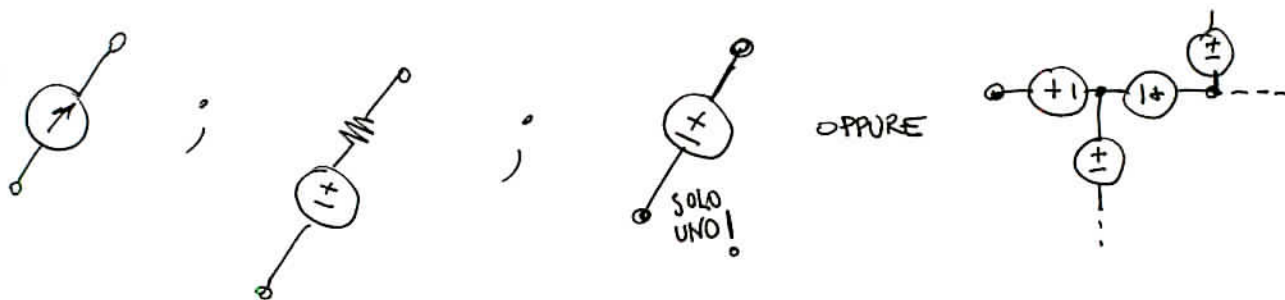
(ATTENZIONE: I nodi uniti da conduttori sono da considerare come un unico nodo equivalente agli effetti esterni)

4) SISTEMA (2 EQ. IN 2 INCOGNITE)

Per ispezione:

$$\begin{array}{l} \text{(KCL ①)} \\ \text{(KCL ②)} \end{array} \begin{array}{c} \text{①} \\ \text{②} \end{array} \begin{bmatrix} \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} & -\frac{1}{R_3} \\ -\frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{s1} - i_{s2} \\ i_{s2} - \frac{V_s}{R_1} \end{bmatrix} \begin{array}{c} \text{①} \\ \text{②} \end{array}$$

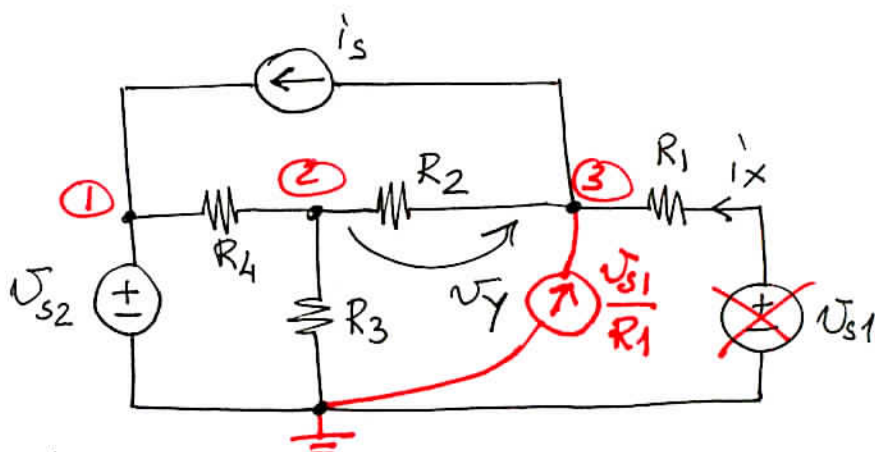
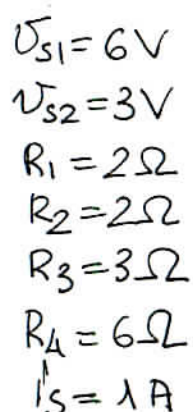
I CASO #2 IL CIRCUITO CONTIENE UN SOLO GENERATORE DI TENSIONE NON TRASFORMABILE, OPPURE PIU' GENERATORI DI TENSIONE NON TRASFORMABILI CONNESSI A NODI COMUNI



⇒ SCRITTURA MANUALE DELLE EQUAZIONI (NO ISPEZIONE)

⇒ PORRE $\frac{1}{s}$ SUI NODI DEL

Ex



Determinare i_x e v_y .

- 1) TRASFORMAZIONE GEN. NON IDEALI DI TENSIONE
- 2) NODO \perp SU N_{S2} (UNO DEI DUE MORSETTI)
ARBITRARIAMENTE
- 3) NUMERAZIONE NODI ①, ②, ③
- 4) SISTEMA

$$V_1 = V_{S2} \quad \text{NOT A}$$

U_2, U_3 INCOGNITE \Rightarrow KCL (2), (3)

$$\text{KCL } \textcircled{2}: \begin{cases} \frac{V_2 - V_1}{R_4} + \frac{V_2}{R_3} + \frac{V_2 - V_3}{R_2} = 0 \end{cases}$$

$$\text{KCL } \textcircled{3}: \begin{cases} \frac{V_3 - V_2}{R_2} + \frac{V_3}{R_1} + i_s - \frac{V_{s1}}{R_1} = 0 \end{cases}$$

Sostituzione tensioni note:

$$\begin{cases} \frac{V_2 - V_{s2}}{R_4} + \frac{V_2}{R_3} + \frac{V_2 - V_3}{R_2} = 0 \\ \frac{V_3 - V_2}{R_2} + \frac{V_3}{R_1} + i_s - \frac{V_{s1}}{R_1} = 0 \end{cases}$$

2 equazioni
nelle incognite
 V_2, V_3

5) SOLUZIONE

$$\begin{cases} V_2 \left(\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_2} \right) - \frac{V_3}{R_2} = \frac{V_{s2}}{R_4} \\ V_3 \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} \right) - \frac{V_2}{R_2} = \frac{V_{s1}}{R_1} - i_s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_2 \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) - \frac{V_3}{2} = \frac{1}{2} \\ V_3 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) - \frac{V_2}{2} = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V_2 - \frac{V_3}{2} = \frac{1}{2} \\ V_3 - \frac{V_2}{2} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_2 = \frac{1}{2} + \frac{V_3}{2} \\ V_3 - \frac{1}{4} - \frac{V_3}{4} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dots \\ \frac{3}{4} V_3 = \frac{9}{4} \end{cases}$$

$$V_3 = \frac{9}{4} \cdot \frac{4}{3} = 3 \text{ V}$$

$$V_2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2 \text{ V}$$

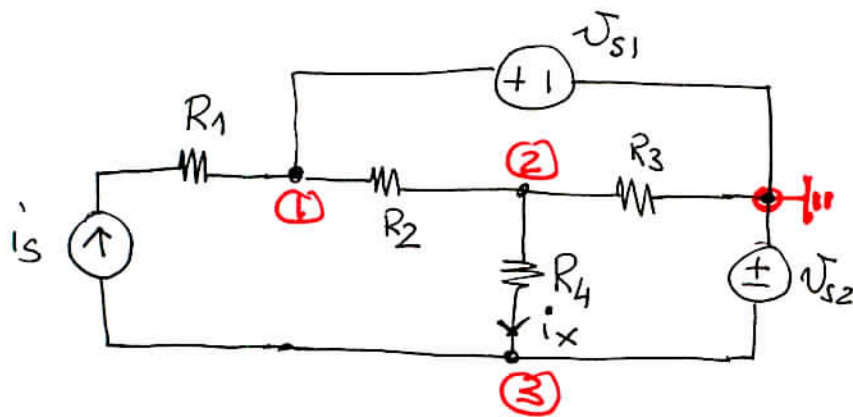
6) CALCOLO RISULTATI DESIDERATI

$$V_y = V_3 - V_2 = 3 - 2 = 1 \text{ V}$$

$$i_x = \frac{V_{s1} - V_3}{R_1} = \frac{6 - 3}{2} = \frac{3}{2} \text{ A}$$

Vedi quanto iniziale (prima della trasformazione)

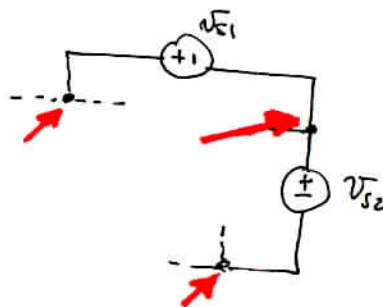
EX1



$$\begin{aligned} U_{s1} &= 4V \\ U_{s2} &= 10V \\ i_s &= 10A \\ R_1 &= 3\Omega \\ R_2 &= R_3 = R_4 = 1\Omega \end{aligned}$$

Determinare i_x

- 1) NODO \perp SU U_{s1} OPPURE U_{s2}
(UNO DEI TRE MORSETTI ARBITRARIAMENTE)
(VEDI NOTA FINALE)



- 2) NUMERAZIONE NODI ① ② ③

Nota che



(equivalente esterno)

quindi si può evitare di aggiungere un nodo \otimes fra i_s e R_1 .

- 3) SISTEMA DI EQUAZIONI

$$U_1 = U_{s1} \quad \text{NOTA}$$

$$U_3 = -U_{s2} \quad \text{NOTA}$$

$$U_2 \text{ INCOGNITA} \Rightarrow \text{KCL (2)}$$

$$\text{KCL (2): } \frac{U_2 - U_1}{R_2} + \frac{U_2}{R_3} + \frac{U_2 - U_3}{R_4} = 0$$

Sostituzione tensioni note:

$$\boxed{\frac{U_2 - U_{s1}}{R_2} + \frac{U_2}{R_3} + \frac{U_2 + U_{s2}}{R_4} = 0}$$

1 equazione in 1 incognita

- 4) SOLUZIONE

$$U_2 \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) = \frac{U_{s1}}{R_2} - \frac{U_{s2}}{R_4}$$

$$V_2 \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} \right) = \frac{4}{1} - \frac{10}{1}$$

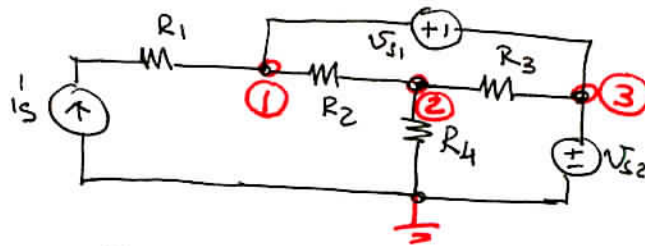
$$3V_2 = -6$$

$$\boxed{V_2 = -2 \text{ V}}$$

5) CALCOLO RISULTATI DESIDERATI

$$i_x = \frac{V_2 - V_3}{R_4} = \frac{V_2 + V_{s2}}{R_4} = \frac{-2 + 10}{1} = 8 \text{ A}$$

NOTA: Se avessi scelto un altro \perp :



SISTEMA:

$$V_1 = V_{s1} + V_{s2} \text{ NOTA}$$

$$V_3 = V_{s2} \text{ NOTA}$$

$$V_2 \text{ INCOGNITA} \Rightarrow \text{KCL (2)}$$

KCL (2):

$$\frac{V_2 - V_1}{R_2} + \frac{V_2}{R_4} + \frac{V_2 - V_3}{R_3} = 0$$

Sostituzione:

$$\boxed{\frac{V_2 - V_{s1} - V_{s2}}{R_2} + \frac{V_2}{R_4} + \frac{V_2 - V_{s2}}{R_3} = 0}$$

ecc...

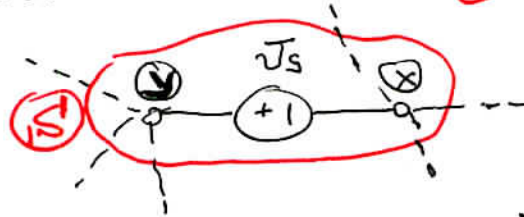
□ CASO #3 (GENERALE) PRESENZA DI GENERATORI DI TENSIONE NON TRASFORMABILI, NON CONNESSI A NODI COMUNI

⇒ SCRITTURA MANUALE DELLE EQUAZIONI (NO ISPEZIONE)

⇒ PORRE $\frac{I}{\equiv}$ SU UNO DEI $\circ \text{---} (+) \text{---} \circ$

⇒ I GENERATORI $\circ \text{---} (+) \text{---} \circ$ NON TRASFORMABILI, NON CONNESSI AL $\frac{I}{\equiv}$ (DIRETTAMENTE, O TRAMITE ALTRI $\circ \text{---} (+) \text{---} \circ$) SI

INGLOBBANO IN SUPERNODI (S) CHE CONTENGONO UNA SOLA TENSIONE NODALE INCOGNITA.

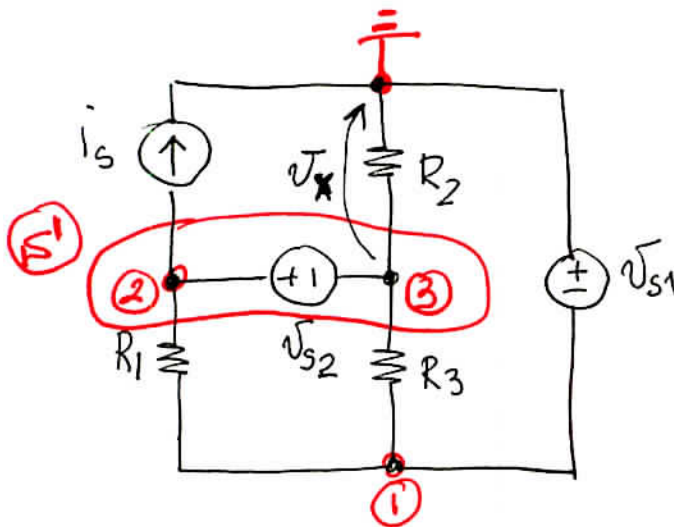


V_x INCOGNITA

$V_y = V_x + V_s$ VINCOLATA

⇒ KCL (S)

EX



$$R_1 = 12 \Omega$$

$$R_2 = 4 \Omega$$

$$R_3 = 6 \Omega$$

$$V_{s1} = 12 \text{ V}$$

$$V_{s2} = 24 \text{ V}$$

$$I_s = 1 \text{ A}$$

$$V_x = ?$$

1) NODO $\frac{I}{\equiv}$ SU UNO DEI GENERATORI V_{s1}, V_{s2} (ARBITRARIAMENTE)

2) NUMERAZIONE NODI $(1, 2, 3)$
DEFINIZIONE SUPERNODO (S) PER V_{s2}

3) SISTEMA

$$V_1 = -V_{s1} \text{ NOTA}$$

$$V_3 \text{ INCOGNITA}$$

$$V_2 = V_3 + V_{s2} \text{ VINCOLATA}$$

} KCL (S)

$$\text{KCL } \textcircled{15}: \quad i_g + \frac{v_2 - v_1}{R_1} + \frac{v_3}{R_2} + \frac{v_3 - v_1}{R_3} = 0$$

Sostituzione tensioni note e vincolate

$$\boxed{i_g + \frac{v_3 + v_{s2} + v_{s1}}{R_1} + \frac{v_3}{R_2} + \frac{v_3 + v_{s1}}{R_3} = 0}$$

1 equazione
in 1 incognita

4) RISOLVO

$$v_3 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) = -\frac{v_{s2}}{R_1} - \frac{v_{s1}}{R_1} - \frac{v_{s1}}{R_3} - i_g$$

$$v_3 \left(\underbrace{\frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4}}_{1/2} \right) = -2 - 1 - 2 - 1 = -6$$

$$\boxed{v_3 = -12 \text{ V}}$$

5) CALCOLO v_x

$$\boxed{v_x = -v_3 = 12 \text{ V}}$$

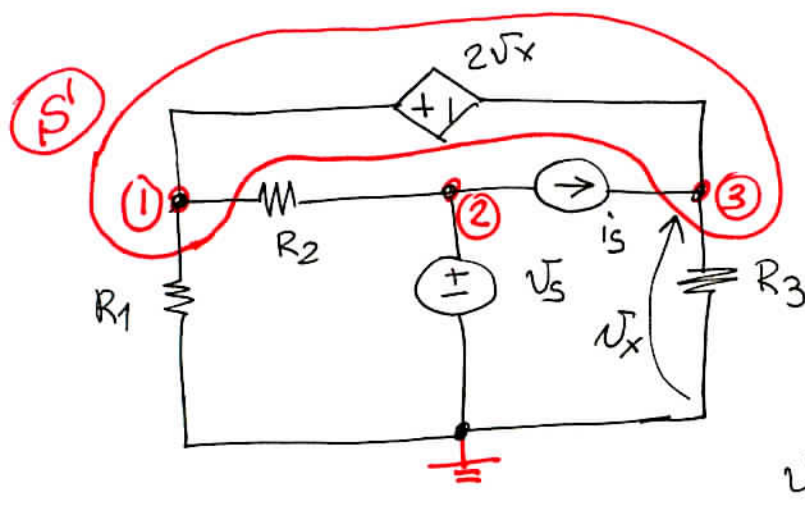
□ CIRCUITI CON GENERATORI PILOTATI

⇒ SCRITTURA MANUALE DELLE EQUAZIONI SEMPRE!

⇒ IN PRESENZA DI $\circ \text{---} (+) \text{---} \circ$; $\circ \text{---} \diamond (+) \text{---} \circ$ NON TRASFORMABILI
SI SEGUONO LE REGOLE DEI CASI #2, #3 VISTE PRIMA.

⇒ AGGIUNGERE L'ESPRESSIONE DELLE PILOTANTI IN
FUNZIONE DELLE TENSIONI NODALI.

EX



$$V_S = 12V$$

$$i_S = 6A$$

$$R_1 = 4\Omega$$

$$R_2 = 6\Omega$$

$$R_3 = 12\Omega$$

$$V_X = ?$$

1) CASO #3 ! NODO \perp IN ACCORDO

2) NUMERAZIONE NODI ①, ②, ③
DEFINIZIONE SUPERNODO S'

3) SISTEMA

$$V_2 = V_S \text{ NOTA}$$

$$V_3 \text{ INCOGNITA}$$

$$V_1 = V_3 + 2V_X \text{ VINCOLATA}$$

$$V_X = V_3$$

ESPRESSIONE DELLA PILOTANTE IN
FUNZIONE DELLE TENSIONI NODALI,
DA SOSTITUIRE NELLE EQ.

$$\Rightarrow \text{KCL } (S')$$

KCL (S') :

$$\frac{V_1}{R_1} + \frac{V_1 - V_2}{R_2} - i_S + \frac{V_3}{R_3} = 0$$

Sostituisco

$$\frac{V_3 + 2V_3}{R_1} + \frac{V_3 + 2V_3 - V_S}{R_2} - i_S + \frac{V_3}{R_3} = 0$$

1 eq. in
1 incognita

4) SOLUZIONE

$$\frac{3V_3}{R_1} + \frac{3V_3}{R_2} + \frac{V_3}{R_3} = \frac{V_S}{R_2} + i_S$$

$$V_3 \left(\frac{3}{R_1} + \frac{3}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) = \frac{V_S}{R_2} + i_S$$

$$V_3 \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{6} + \frac{1}{12} \right) = 2 + 6 = 8 \text{ A}$$

$\underbrace{\frac{3}{4} + \frac{3}{6} + \frac{1}{12}}_{\frac{9+6+1}{12} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}}$

$$\boxed{V_3 = \frac{3}{4} \cdot 8 = 6 \text{ V}}$$

5) CALCOLO RISULTATO RICHIESTO

$$\boxed{V_x = V_3 = 6 \text{ V}}$$