AZIONI MECCANICHE

Campi elettrici e magnetici interagiscono con le cariche elettriche attraverso la manifestazione di una forza:

$$\underline{F} = \underbrace{q\underline{E}}_{\text{forza elettrostatica}} + \underbrace{q\underline{v} \times \underline{B}}_{\text{forza di Lorenz}}$$

Quindi:

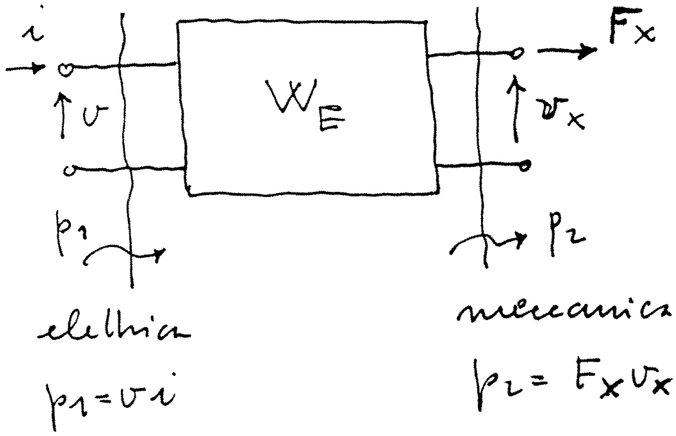
1) i campi elettrici agiscono su cariche sia in moto che ferme;

2) i campi magnetici agiscono solo su cariche in movimento.

L'analisi delle forze che si sviluppano in un sistema complesso è però difficile se si parte da una descrizione microscopica delle forze agenti sulle singole cariche in moto. Alternativamente, si può utilizzare un metodo <u>energetico</u>, più semplice. Il metodo energetico può essere esteso alla analisi di sistemi complessi come i motori elettrici; qui si farà applicazione solo a casi molto semplici, mentre l'analisi di motori e generatori sarà condotta in modo semiqualitativo.

<u>FORZE IN CAMPI ELETTRICI</u>. Consideriamo un bipolo in grado di immagazzinare energia elettrica (ad es. un condensatore) e nel quale si possano svolgere azioni meccaniche (forze, spostamenti, lavoro meccanico). Tale bipolo elettrico si può allora interpretare come un due porte in cui la porta di ingresso è una porta elettrica in senso stretto, la seconda porta è una porta meccanica caratterizzata da una forza F_x e da una velocità v_x del suo punto di applicazione. Supponiamo arbitrariamente di assegnare

alla velocità il ruolo di tensione ed alla forza il ruolo di corrente. Si ha allora la rappresentazione:



W_E è l'energia elettrica immagazzinata dal bipolo. Il bilancio energetico fornisce:

$$p_1 = p_2 + \frac{dW_E}{dt}$$

ma, per un condensatore lineare:

$$W_E = \frac{1}{2} C v^2$$

da cui:

$$p_1 = vi = v\frac{d}{dt}(Cv) = p_2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} C v^2\right) \quad \text{ossia}$$

$$p_1 = v^2\frac{dC}{dt} + \cancel{vC\frac{dv}{dt}} = p_2 + \frac{1}{2} v^2 \frac{dC}{dt} + \cancel{\frac{1}{2} C v \frac{dv}{dt}\cdot 2}$$

ossia:

$$\boxed{p_{mecc} = p_2 = \frac{1}{2} v^2 \frac{dC}{dt}}$$

Poichè il sistema contiene parti in movimento la capacità può essere variabile nel tempo. Supponendo che C dipenda da t attraverso un parametro spaziale x, si ha

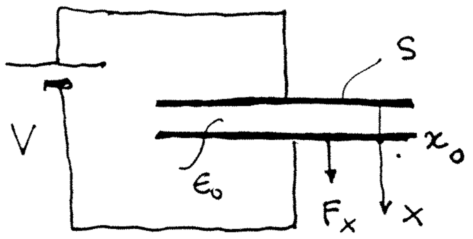
$$p_{mecc} = F_x v_x = \boxed{\frac{1}{2} v^2 \frac{dC}{dx}} \cdot \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{v_x}$$

da cui:

$$F_x = \frac{1}{2} v^2 \frac{dc}{dx}$$

ESEMPIO Calcolate la forza agente sulle armature di un condensatore posto a tensione V.

Si ha:



$$C(x) = \frac{S\epsilon_0}{x}$$

$$F_x = -\frac{S\epsilon_0}{x^2} \cdot \frac{1}{2} V^2$$

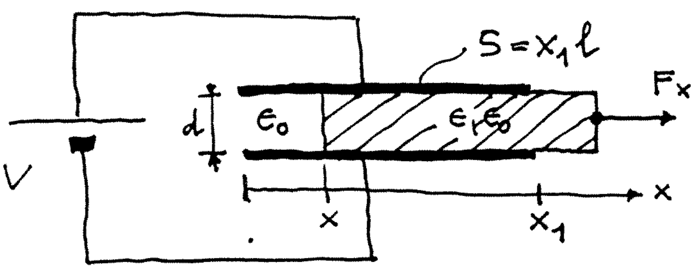
per cui, se la distanza è x_0:

$$F_x = -\frac{S\epsilon_0 V^2}{2x_0^2}$$

tende ad avvicinare le armature.

ESEMPIO Calcolare la forza che agisce sul dielettrico di un condensatore quando questo viene spostato lateralmente.

Si ha:



$$C \approx \frac{\epsilon_0 l}{d} \cdot x + \frac{\epsilon_0\epsilon_r(x_1 - x)l}{d}$$

da cui:

$$\frac{dc}{dx} = \frac{\epsilon_0 l}{d} - \frac{\epsilon_0\epsilon_r l}{d} = \frac{\epsilon_0(1-\epsilon_r)}{d} l$$

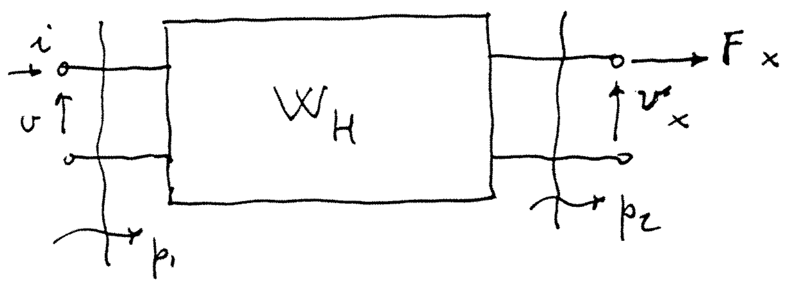
ossia:

$$F_x = -\frac{1}{2}\frac{\epsilon_0(\epsilon_r - 1)l}{d} V^2$$

quindi il dielettrico viene risucchiato fra le armature del condensatore ($F_x < 0$)

FORZE IN CAMPI MAGNETICI In pratica l'uso di forze in campi elettrici è scarsamente conveniente: infatti a questo scopo sono richiesti campi elevati e ε_r elevate. I primi sono pericolosi e soggetti a limitazioni (rigidità dielettrica); le seconde sono limitate a circa 100. Per questi motivi sono di interesse pratico molto più rilevante le azioni meccaniche in campi magnetici: infatti è possibile avere H, B molto elevati senza rischio di scarica, e i materiali magnetici hanno μ_r grandissime, in grado di permettere una elevata densità di energia magnetica.

Si consideri allora un bipolo in grado di accumulare energia magnetica (ad es. un induttore). Per semplicità supponiamo che l'induttore sia lineare; si ha allora il circuito equivalente:



da cui:

$$p_1 = vi = i\frac{d}{dt}(Li) = p_2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2\right)$$

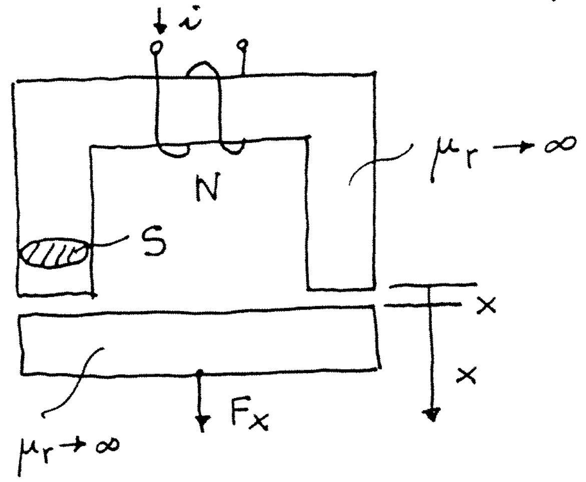
Si ottiene:

$$p_{mecc} = p_2 = \frac{1}{2} i^2 \frac{dL}{dx}$$

ossia, supponendo $L = L(x)$:

$$F_x = \frac{1}{2} i^2 \frac{dL}{dx}$$

ESEMPIO Calcolare la forza agente sull'ancora di un relè:



Si ha:

$$L = \frac{N^2}{\underbrace{\mathcal{R}_f}_{\to 0 \text{ se } \mu_r \to \infty} + \underbrace{\mathcal{R}_t}_{\text{traferro}}} = \frac{N^2}{\frac{2x}{\mu_0 S}} = \frac{N^2 \mu_0 S}{2x}$$

da cui:

$$F_x = \frac{1}{2} i^2 \frac{dL}{dx} = -\frac{1}{2} i^2 \frac{\mu_0 S N^2}{2x^2} = -\frac{1}{2} L i^2 \frac{1}{x}$$

cioè l'ancora è attratta. Si noti:

$$\frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 S}{2x} \cdot Ni \cdot Ni =$$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{\mu_0 \underbrace{Ni \frac{1}{2x}}_{H_t \text{ nel traferro}}}_{B_t} \cdot \underbrace{2x \cdot S}_{\text{volume traferro}} \cdot \underbrace{Ni \frac{1}{2x}}_{H_t \text{ nel traferro}} =$$

$$= \frac{1}{2} B_t H_t \cdot V_t = \text{energia nel traferro}$$

ossia

$$F_x \propto \text{energia nel traferro.}$$

MATERIALI MAGNETICI NON LINEARI

Consideriamo una situazione in cui il materiale magnetico è non-lineare, cioè B(H) non è rettilinea, ma presenta una isteresi trascurabile. In questo caso l'energia del campo magnetico si definisce da:

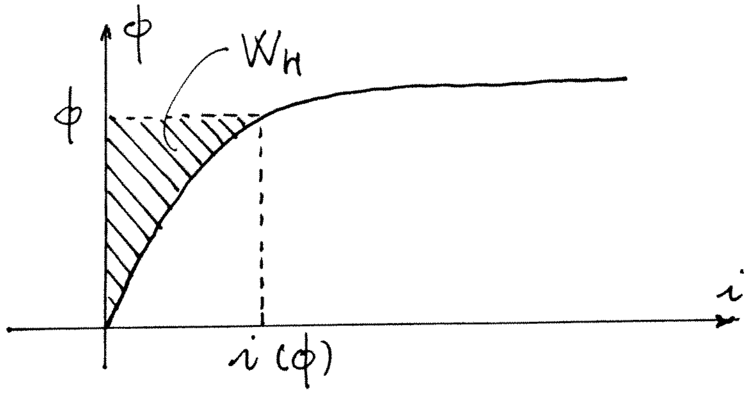
$$p = vi = i\frac{d\phi}{dt} = \frac{dW_H}{dt}$$

da cui:

$$dW_H = i\,d\phi$$

$$W_H = \int_0^{\phi} i(\phi')\,d\phi'$$

Pertanto l'energia è sempre una funzione dello stato istantaneo del sistema (cioè della variabile di stato ϕ o i) indipendentemente da come si arriva allo stato stesso. Graficamente:



Si ha poi:

$$p_{mecc} = vi - \frac{dW_H}{dt} = i\frac{d\phi}{dt} - \frac{dW_H}{dt}$$

ma:

$$\frac{dW_H}{dt} = \frac{d}{dt}\int_0^{\phi} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{la caratteristica} \\ i(\phi)\text{ dipende da } t \text{ (parti in moto)}}}{i(\phi', t)}\, d\phi' = \int_0^{\phi} \frac{\partial}{\partial t} i(\phi', t)\, d\phi' + i\frac{d\phi}{dt}$$

(Ricordare dalla Analisi matematica:

$$\frac{d}{dt}\int_a^b f(x,t)\,dx =$$
$$= \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)\,dx + f(b,t)\frac{db}{dt} + f(a,t)\frac{da}{dt} \Big)$$

da cui:

$$p_{mecc} = i\,\cancel{\frac{d\phi}{dt}} - \int_0^{\phi} \frac{\partial i(\phi',t)}{\partial t}\,d\phi' - i\,\cancel{\frac{d\phi}{dt}}$$

ma se la caratteristica dipende da t attraverso uno spostamento x:

$$\frac{\partial i(\phi',t)}{\partial t} = \frac{\partial i(\phi',x)}{\partial x}\cdot v_x$$

e, siccome ϕ non dipende esplicitamente da x:

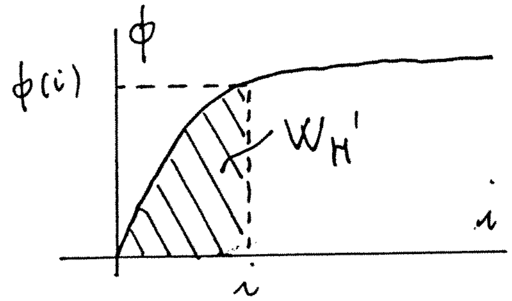
$$-\int_0^{\phi} \frac{\partial i(\phi',t)}{\partial t}\,d\phi' = -v_x\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{\phi} i(\phi',x)\,dx =$$
$$= -v_x\frac{\partial W_H(\phi,x)}{\partial x}$$

ossia:

$$\boxed{F_x = -\frac{\partial W_H(\phi,x)}{\partial x}}$$

Se si definisce una nuova funzione di stato:

$$\text{coenergia} = vi - W_H \triangleq W'_H = \int_0^i \phi(i)\,di$$



si può scrivere:

$$\boxed{F_x = \frac{\partial W'_H(i,x)}{\partial x}}$$

Nel caso lineare si ha:

$$W_H = \int_0^{\phi} i(\phi)\, d\phi = \int_0^{\phi} \frac{\phi}{L}\, d\phi = \frac{1}{2}\frac{1}{L}\phi^2$$

$$W'_H = \int_0^{i} \phi(i)\, di = \int_0^{i} L i\, di = \frac{1}{2} L i^2$$

ossia $W_H = W_H' = 1/2\, v i$. Nel caso nonlineare, può essere comodo utilizzare l'energia o la coenergia a seconda che venga imposta la corrente o il flusso.

<u>ESEMPIO</u> Nel caso visto in precedenza (relè con ancora mobile) si aveva:

$$L(x) = \frac{\mu_0 S}{2x} N^2$$

da cui:

$$W_H = \frac{1}{2} \frac{2x}{\mu_0 S} \cdot N^2 \cdot \phi^2$$

$$W_H' = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 S}{2x} \cdot N^2 \cdot i^2$$

quindi:

$$F_x = -\frac{\partial W_H}{\partial x} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\mu_0 S} \cdot \frac{1}{N^2} \phi^2 = -\frac{N^{\cancel{4}\,2}}{\cancel{\mu_0 S}} \cdot \frac{(\mu_0 S)^{\cancel{2}}}{(2x)^2}\, i^2 \frac{1}{\cancel{N^2}}$$

$$F_x = \frac{\partial W_H'}{\partial x} = -\frac{1}{4} \frac{\mu_0 S}{x^2} N^2 i^2$$

cioè in entrambi i casi:

$$F_x = -\frac{\partial W_H}{\partial x} = -\frac{\mu_0 S N^2}{4x^2} i^2 = \frac{\partial W_H'}{\partial x}$$

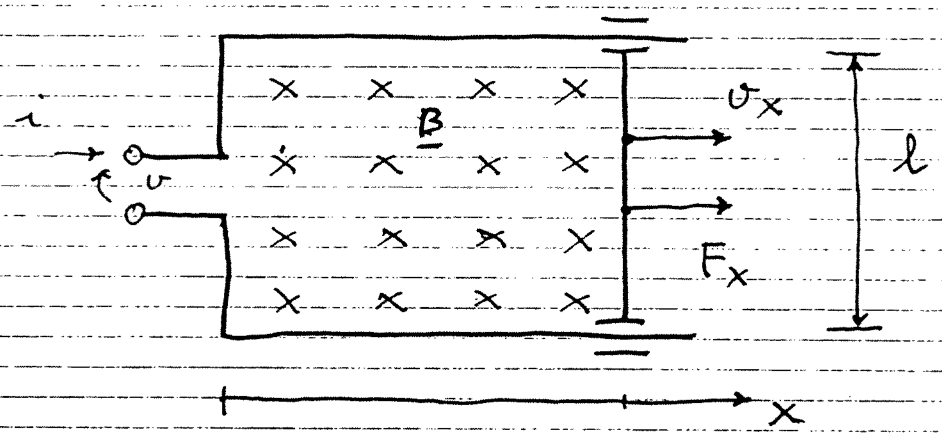
come ovvio. Quindi il calcolo delle forze attraverso energia e coenergia deve portare allo stesso risultato.

GENERATORI E MOTORI IN CORRENTE CONTINUA

Come prototipo semplice di macchina in corrente continua si analizzerà il cosidetto motore lineare (macchina lineare). Per quanto non facilmente realizzabili in pratica, la macchina lineare è interessante perchè di analisi semplice ed in grado di mettere in evidenza alcune proprietà fondamentali delle macchine elettriche, quali la reversibilità e la caratteristica forza-velocità (coppia-velocità per una macchina rotante).

LA MACCHINA LINEARE

Si consideri una spira dotata di un lato mobile di lunghezza l, immersa in un campo $\underline{B}$ diretto verso il basso, ortogonalmente al piano della pagina:



Qualitativamente:

1) una forza applicata alla asta mobile produce il moto dell'asta e quindi una variazione del flusso concatenato con la spira. La variazione di flusso si manifesta come una forza elettromotrice ai morsetti elettrici della spira stessa.

2) una corrente iniettata nella spira produce una forza sul lato mobile, che si sposta.

Nel primo caso la macchina funziona da generatore, nel secondo caso da motore. Per l'analisi, consideriamo un caso ideale in cui la spira presenta una resistenza elettrica trascurabile e l'asta meccanica una resistenza meccanica trascurabile. Compiamo l'analisi in due passi:

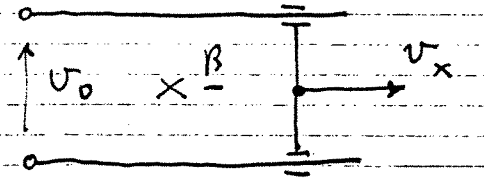
1) ANALISI A VUOTO. Supponiamo che la spira sia (elettricamente) a vuoto e che l'asta mobile si sposti con velocità v_x. Allora la tensione a vuoto v_0 ai capi della spira sarà:

$$v_0 = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(-Bxl\right) = Bl\frac{dx}{dt}$$

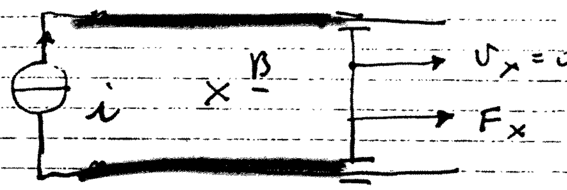
$$v_0 = Blv_x$$

poiché il flusso concatenato con la spira quando il lato mobile è in x vale in valore assoluto $B \cdot S = B \cdot x \cdot l$ ed ha un segno $-$ a causa dell'orientamento della spira rispetto alla direzione del campo $\underline{B}$.

2) ANALISI PER $v_x = 0$ Supponiamo ora che la velocità del lato mobile sia nulla, e che nella spira venga iniettata una corrente i. Allora nel lato mobile scorre una corrente i e sul lato mobile agisce una forza F_x



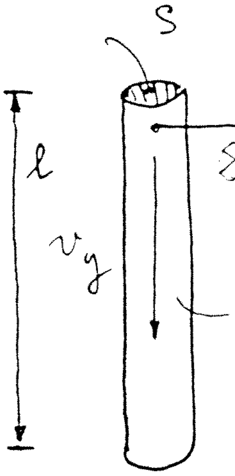
Analisi a vuoto



Analisi a $v_x = 0$

data da $F_x = Bli$. Infatti:

$$F_x = \underbrace{q v_y B}_{\tilde{F}_x \text{ forza su una carica}} \cdot \underbrace{n}_{\text{cariche permesse di volume}} \cdot \underbrace{S l}_{\text{volume del filo}}$$



velocità delle cariche positive che scorrono nel filo

$$\tilde{\underline{F}} = \text{forza su una carica} = q v_y \hat{y} \times \underline{B} =$$

$$= q v_y B \hat{x}$$

ossia $\tilde{F}_x = q v_y B$

Si ha allora:

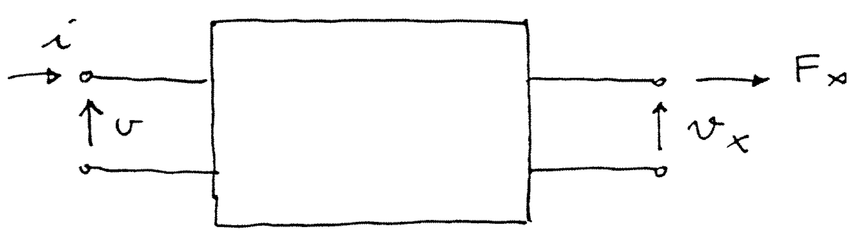
$$F_x = \underbrace{\underbrace{q n v_y}_{\rho v_y}}_{J \text{ densità di corrente nel lato mobile}} \cdot B \cdot S l \qquad \rho \frac{l s}{t} \cdot B l$$

$$= J \cdot S \cdot B \cdot l = i B l$$

ossia:

$$F_x = B l i$$

Supponiamo ora che la struttura sia LINEARE in qualsiasi condizione di funzionamento. Questa è una approssimazione perchè in realtà B è funzione di i (ossia la corrente che circola nella spira induce un campo di induzione magnetica che modifica quello applicato dall' esterno) Dalla ipotesi di linearità si ottiene che la struttura a due porte elettro-meccanica:



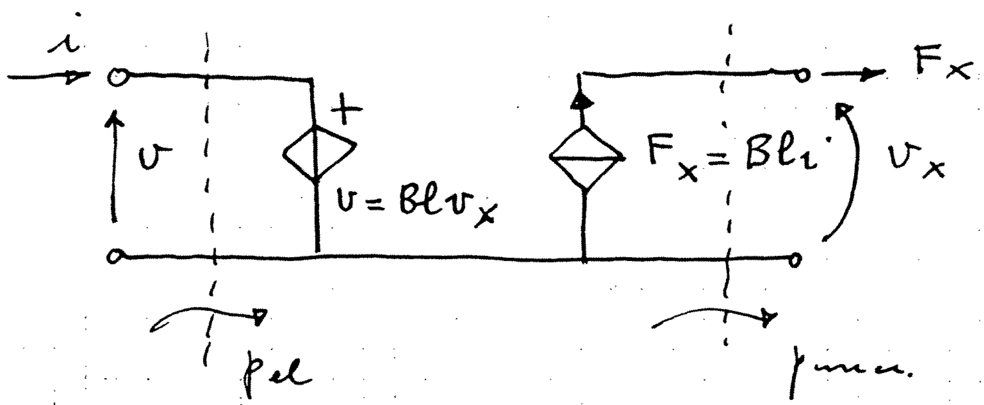
è caratterizzata dalle espressioni:

$$* \begin{cases} v = Bl\,v_x \\ F_x = Bl\,i \end{cases} \qquad \begin{matrix} v_1 = \alpha\, v_2 \\ I_2 = \alpha\, I_1 \end{matrix}$$

Si noti che v non è dipendente da i perché si è assunta trascurabile la resistenza elettrica della spira R. Similmente si è trascurata la resistenza meccanica della spira R_m (forza d'attrito). In questo caso le equazioni sarebbero state:

$$\begin{cases} v = R\,i + Bl\,v_x \\ F_x = Bl\,i - R_m v_x \end{cases}$$

Tornando al caso ideale, le equazioni * hanno una rappresentazione circuitale:



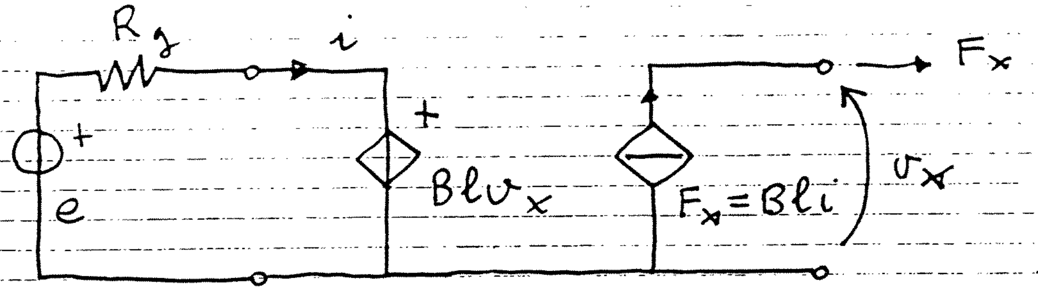
La struttura elettromeccanica ottenuta è PRIVA DI PERDITE:

$$p_{el} = vi = Blv_x i = Bli v_x = F_x v_x =$$
$$= p_{mecc.}$$

Nel funzionamento da motore $p_{mecc} > 0$; nel funzionamento da generatore $p_{mecc} < 0$.

MOTORE LINEARE

Colleghiamo alla porta elettrica della macchina un generatore lineare e analizziamo la caratteristica meccanica risultante alla porta 2. Si ha:



Si ha allora: $$e = R_g i + Bl v_x$$

da cui:

$$v_x = \frac{e - R_g i}{Bl}$$

ma, alla porta meccanica:

$$i = F_x / Bl$$

da cui:

$$v_x = \frac{e}{Bl} - R_g \frac{F_x}{(Bl)^2}$$

ossia:

$$F_x = \frac{Bl}{R_g} e - \frac{(Bl)^2}{R_g} v_x$$

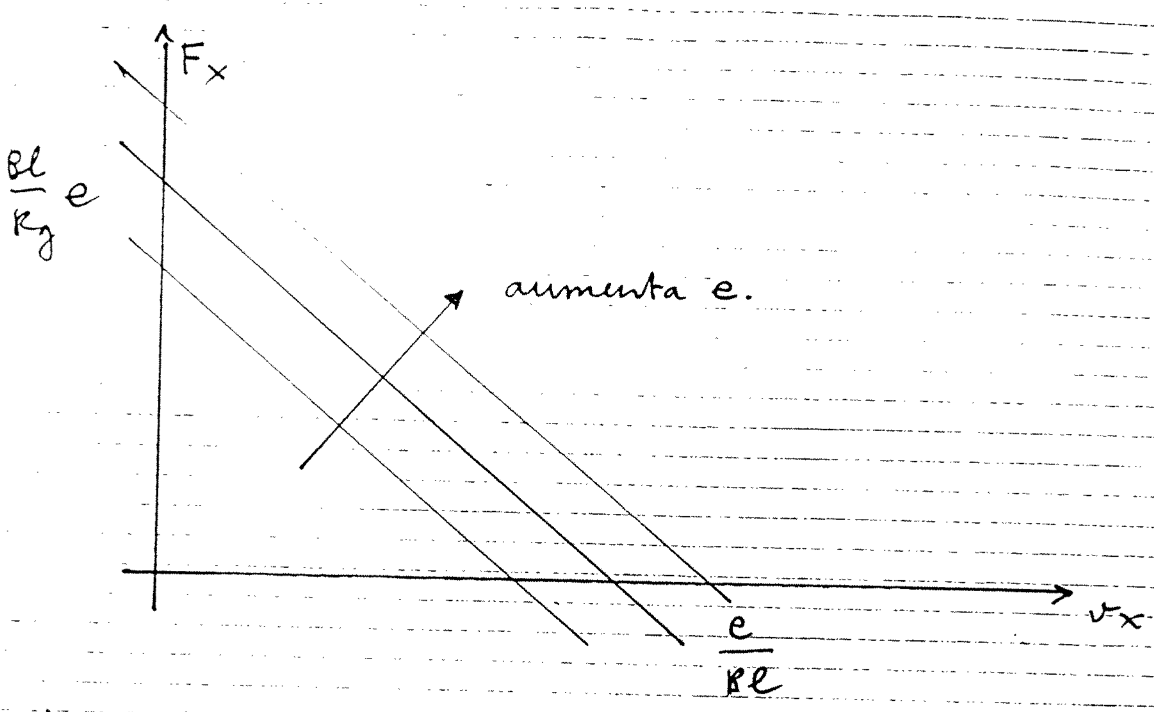
Questa è la caratteristica meccanica forza-velocità del motore; definendo allora

$$F_x(v_x = 0) \equiv \text{FORZA DI SPUNTO} = \frac{Bl}{R_g} e$$

$$v_x(F_x = 0) \equiv \text{VELOCITÀ DI FUGA} = e / Bl$$

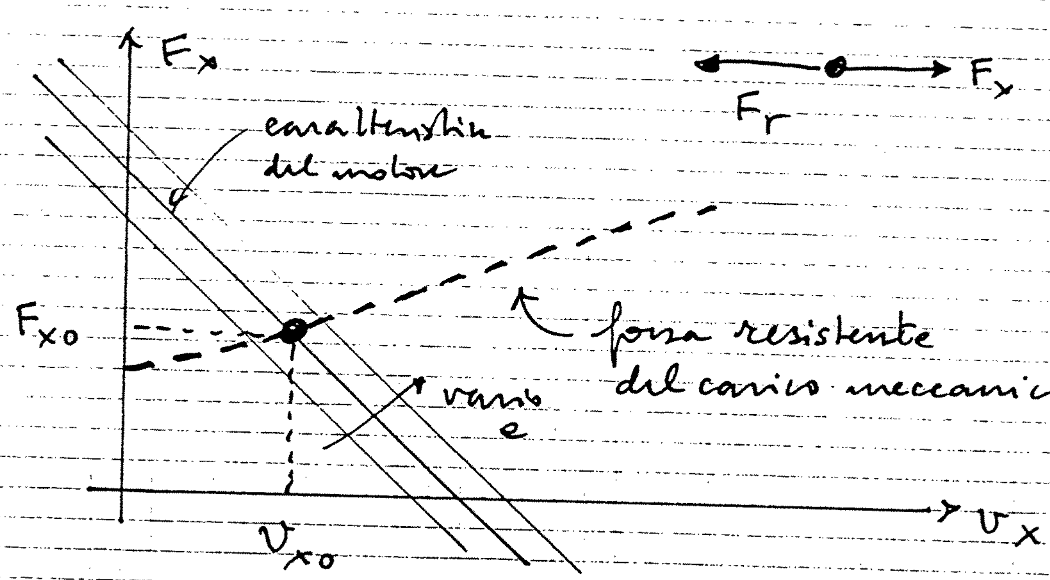
$\delta_f - 5$

la caratteristica è:



Il punto di lavoro del sistema si ottiene intersecando la caratteristica meccanica del motore con la caratteristica del carico, in modo che:

$$\underset{\text{motore}}{F_x(v_x)} = \underset{\text{forza resistente del carico}}{F_r(v_x)}$$



Si noti che il motore lineare si regola facilmente in velocità: basta cambiare e per aumentare o diminuire v_x.

GENERATORE LINEARE

Supponiamo ora che la porta meccanica del generatore sia collegata ad un MOTORE PRIMO avente caratteristica meccanica:

→ res. meccanica motore

$$F_{xm} = F_{xm\phi} - R_m v_x$$

In condizioni di equilibrio la forza del motore primo e la forza F_x applicata sull'asta hanno risultante NULLA, pertanto:

$$F_x + F_{xm} = 0$$

da cui:

$$Bli + (F_{xm\phi} - R_m v_x) = 0$$

ossia:

$$i = \frac{R_m}{Bl} v_x - \frac{F_{xm\phi}}{Bl}$$

da cui:

$$v_x = \frac{Bl}{R_m} i + \frac{F_{xm\phi}}{R_m}$$

e:

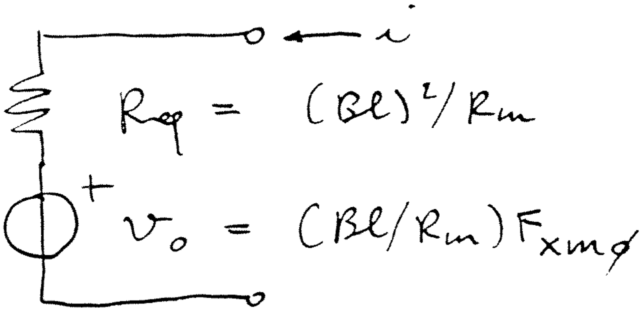
$$v = Bl v_x = \frac{(Bl)^2}{R_m} i + \frac{Bl}{R_m} F_{xm\phi} =$$

$$= R_{eq}\, i + v_0$$

dove:

$$\begin{cases} R_{eq} = \dfrac{(Bl)^2}{R_m} \\ v_0 = \dfrac{Bl}{R_m} F_{xm\phi} \end{cases}$$

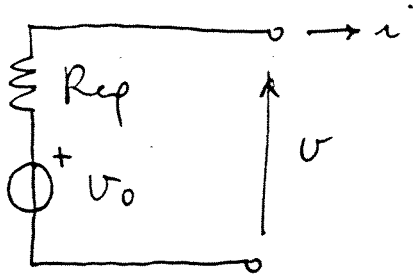
ossia ai morsetti elettrici il sistema si comporta come un generatore lineare e reale con:



$$R_{eq} = (Bl)^2/R_m$$

$$v_0 = (Bl/R_m)\,F_{xm\phi}$$

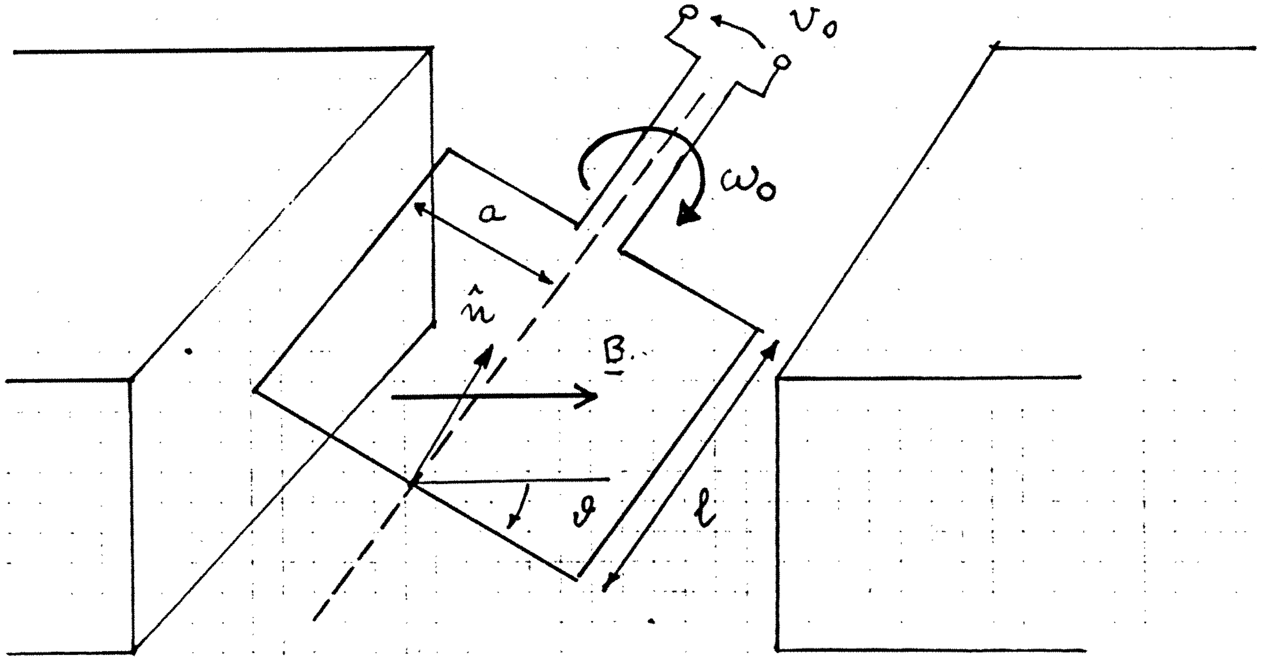
Assumendo la convenzione dei generatori si ottiene:



$$v = \frac{Bl}{R_m} F_{xm\phi} - i\,\frac{(Bl)^2}{R_m}$$

MACCHINE ROTANTI IN CONTINUA

La generazione di forze elettromotrici costanti attraverso macchine rotanti è realizzata in modo indiretto A) generando una f.e.m. sinusoidale ; B) raddrizzandola.



Consideriamo una spira in rotazione con velocità angolare ω_0 in un campo $\underline{B}$ costante generato da un magnete permanente. La forza elettromotrice v_0 può calcolarsi come:

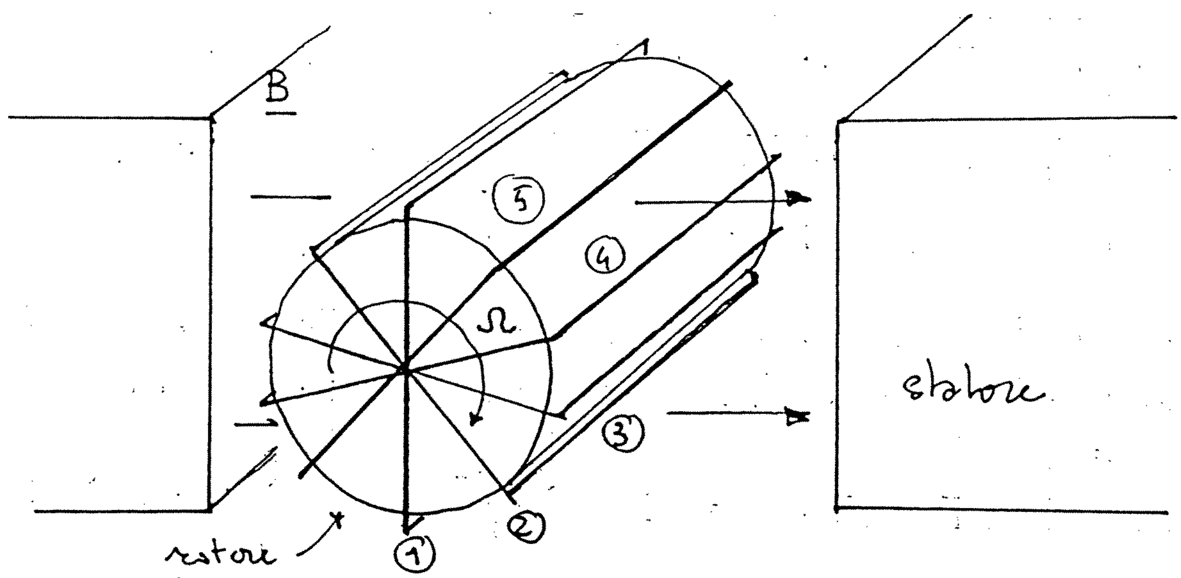
$$v_0 = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(B \cdot 2a \cdot l \cdot \sin\theta\right)$$

ma, essendo $\theta = \omega_0 t$:

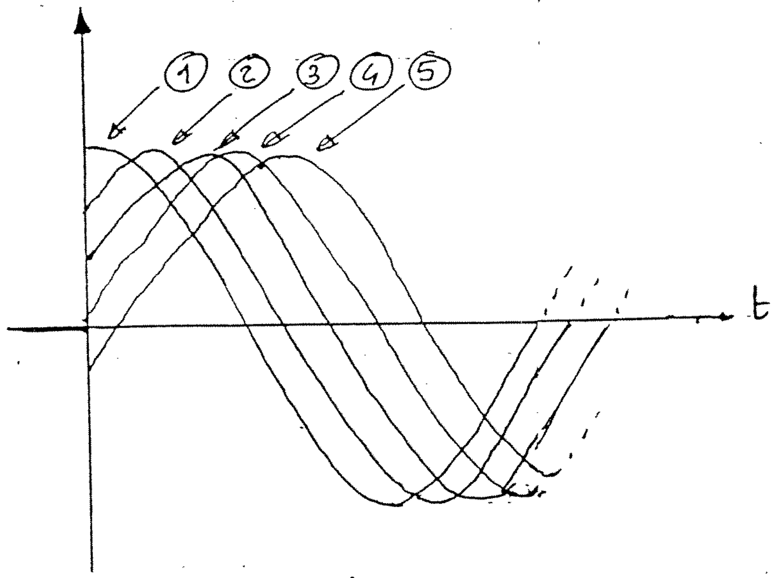
$$v_0 = -\frac{d}{dt}\left(\underbrace{2alB}_{\phi_0} \sin\omega_0 t\right) =$$

$$= -\phi_0 \omega_0 \cos\omega_0 t$$

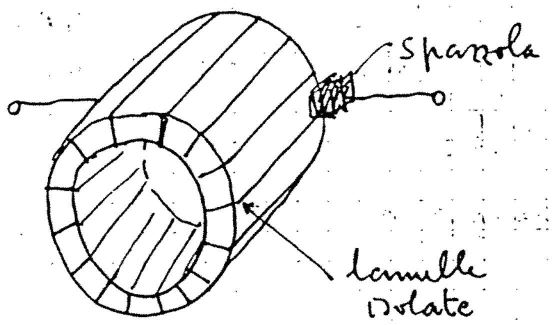
Si ha quindi una f.e.m. SINUSOIDALE di pulsazione pari alla velocità di rotazione della spira. La f.e.m. sinusoidale può essere raddrizzata attraverso un dispositivo meccanico detto COLLETTORE. Supponiamo infatti di considerare un insieme di avvolgimenti immerso in un campo magnetico fisso:



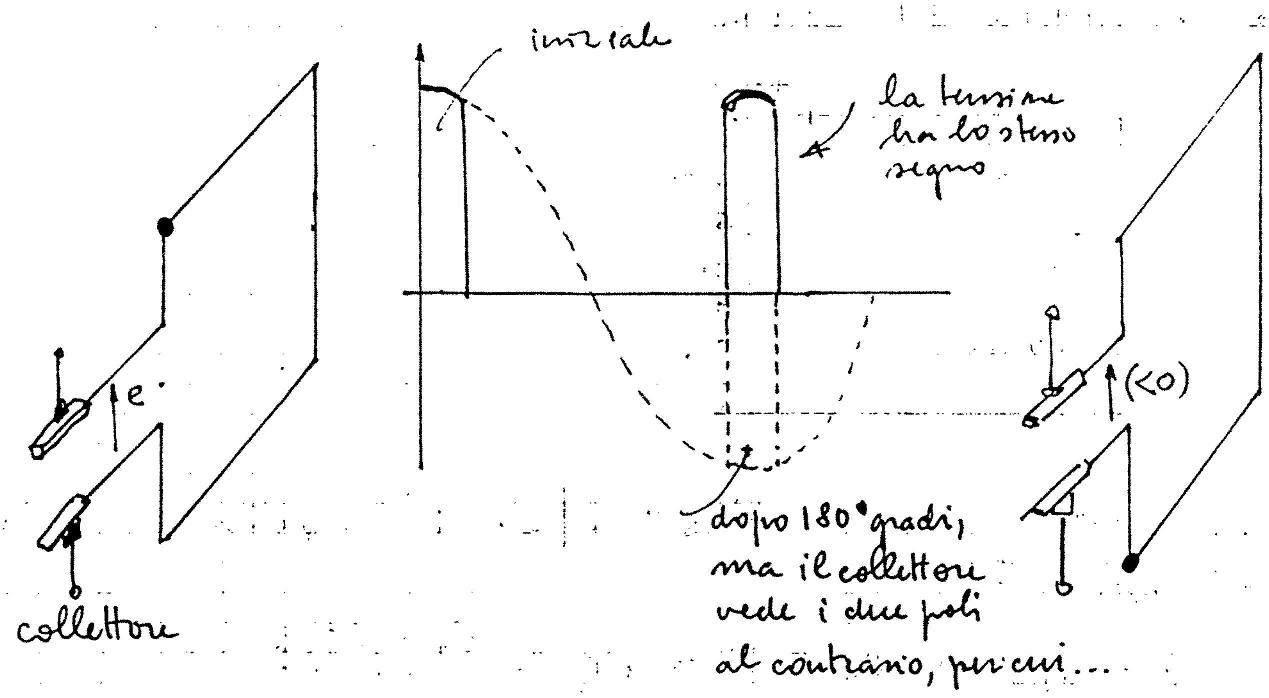
Ciascun avvolgimento fornisce una fem. sinusoidale di frequenza Ω sfasato opportunamente. Se io prelevo all'esterno queste fem. ne



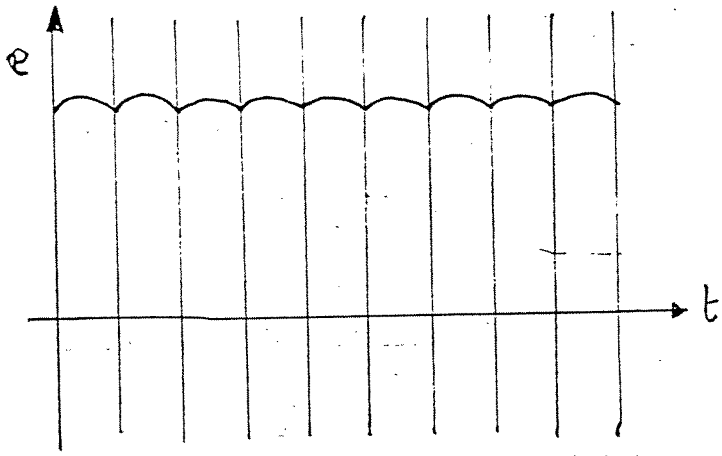
modo da raddrizzarla, cioè mediante un collettore a lamelle



io prelevo solo una delle tensioni per volta, ad es. quella che ha valore massimo :



Mettendo insieme i vari avvolgimenti si ha, se il collettore ha un numero di lamelle elevato (e quindi se vi sono parecchi avvolgimenti) una fem praticamente costante:



In definitiva si può scrivere:

$$\boxed{v = K\phi_0\omega_0}$$

dove K è una costante dipendente dalla macchina, e ϕ_0 rappresenta il flusso massimo concatenato con una spira. Nel funzionamento come motore si deve avere:

$$p_{el} = vi = C\omega_0 = p_{mecc}$$

da cui:

$$C = \frac{vi}{\omega_0} = \frac{K\phi_0\omega_0 i}{\omega_0}$$

ossia:

$$\boxed{C = K\phi_0 i}$$

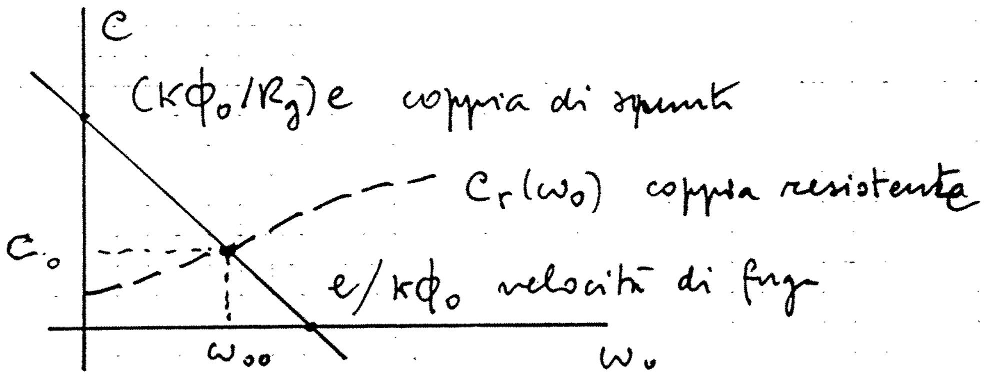
In definitiva si ottiene un risultato simile a quello del motore lineare, con le sostituzioni:

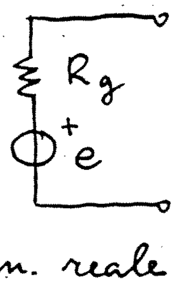
$$(B\ell) \longleftrightarrow (K\phi_0)$$
$$F_x \longleftrightarrow C$$
$$v_x \longleftrightarrow \omega_0$$

In particolare la caratteristica meccanica del motore alimentato da un generatore di tensione reale è, per analogia con il motore lineare:

$$\boxed{C = \frac{K\phi_0}{R_g} e - \frac{(K\phi_0)^2}{R_g} \omega_0}$$

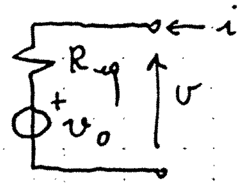
Anche qui il punto di lavoro è dato dalla uguaglianza della coppia motrice C con la coppia resistente $C_r(\omega_0)$:





Nel funzionamento da generatore, connesso ad un motore primo di coppia a vuoto $C_{m\phi}$ e resistenza meccanica interna R_m, si ha:

$$\boxed{v = \frac{K\phi_0}{R_m} C_{m\phi} - \frac{(K\phi_0)^2}{R_m} i}$$



Come il motore lineare, anche il motore rotante in continua permette una facile regolazione di velocità modificando la tensione di alimentazione.