Prima lezione

27 febbraio 2018

La Statistica insegna come apprendere dai dati

- Si occupa della loro raccolta, descrizione ed analisi;
- fornisce le procedure con cui trarre dai dati delle conclusioni.

I Dati

- Possono essere già disponibili.
  Esempio: lo Stato raccoglie i dati riguardanti precipitazioni, scosse telluriche, livello di disoccupazione...
- Bisogna ideare un procedimento per la raccolta dei dati.
  Esempio: un docente vuole determinare quale sia più efficace tra due metodi per insegnare l'Analisi 1.

Possibile approccio: dividere gli studenti in due gruppi e usare un diverso metodo didattico in ciascun gruppo. Alla fine del corso gli studenti vengono esaminati e i punteggi dei due gruppi confrontati.

SUDDIVISIONE "OMOGENEA" degli studenti nei due gruppi:
CAMPIONE RAPPRESENTATIVO della "POPOLAZIONE" degli studenti.

$$\Downarrow$$

DIVISIONE "A CASO " degli studenti tra i due gruppi.

Raccolta e descrizione/sintesi dei dati

Si raccolgono i punteggi nei due gruppi (dati) e quantità riassuntive dei dati (es. medie, mediane relative a ciascun gruppo).

Inferenza statistica

Raccolti i dati vogliamo:

- trarre delle conclusioni più generali.
  Esempio: qual è il metodo migliore di insegnamento dell'Analisi 1.
- valutare la "bontà" delle mie conclusioni, la loro "affidabilità".

$$\Downarrow$$

Per dedurre dai dati conclusioni valide in generale è necessario prendere in considerazione "l'influenza del caso".

Esempio: se il punteggio medio del primo gruppo è superiore di poco a quello del secondo gruppo è corretto concludere che è dovuto al metodo didattico utilizzato? O è una casualità?

I DATI SONO SOGGETTI AD UNA VARIABILITÀ/ ALEATORIETÀ

Esempio: i punteggi registrati hanno una certa “aleatorietà” che dipende da molti fattori: quali studenti scelgo, come li suddivido nei due gruppi...

Modello probabilistico per i dati

Per poter giungere a conclusioni "giustificate" è necessario fare delle assunzioni sulla "probabilità" con cui i dati assumono valori diversi.

... concludendo

L'inferenza statistica si basa sul presupposto che aspetti del fenomeno sotto studio possono essere descritti mediante un modello probabilistico, cioè ipotizza che i dati "provengano" da un modello probabilistico non completamente noto.

- Utilizza i dati per migliorare la conoscenza (fare inferenza) riguardo a certe proprietà del modello.
- Fornisce una valutazione della "correttezza" delle conclusioni (le inferenze) fatte sul modello.

... per comprendere l'inferenza statistica bisogna conoscere la probabilità.

Probabilità

La probabilità studia i modelli matematici per i “fenomeni aleatori”.

Fenomeno o esperimento aleatorio = esperimento di cui non possiamo prevedere a priori il risultato.

Supponiamo che ogni possibile risultato dell’esperimento aleatorio possa essere identificato con un elemento ω di un certo insieme Ω, allora Ω è detto spazio dei campionario o spazio dei campioni o spazio degli eventi elementari.

Eventi elementari

$$\omega \in \Omega$$

Esempi

1. Lancio un dado e osservo il numero che compare sulla faccia superiore.

   Possibili risultati: "osservo 1", "osservo 2" ... "osservo 6"

   $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ oppure $\Omega' = \{a, b, c, d, e, f\}$.

2. Osservo lo stato di un interruttore in un circuito elettrico:

   Possibili risultati: "circuito aperto", "circuito chiuso".

   $\Omega = \{0, 1\}$ $\quad$ $0 \leftrightarrow$ "circuito aperto"

   $1 \leftrightarrow$ "circuito chiuso"

3. Voto di uno studente scelto a caso nella classe.

   $\Omega = \{0, 1, \ldots, 30\}$ o una sequenza di valutazioni più fitta
   $\Omega = \{v_0, v_1, \ldots, v_k\}$ o anche $\Omega = [0, 30]$

4. Lancio una moneta fino a quando non si presenta testa.

   $\Omega = \mathbb{N} \cup \{\infty\} = \{1, 2, \ldots, \infty\}$

5. Osservo il tempo in secondi che intercorre tra l'inizio del funzionamento di un componente e il suo primo guasto (tempo di vita del componente).

   $\Omega = [0, +\infty) = \mathbb{R}_+$

6. Si lanciano due dadi (uno rosso e uno blu) e si osservano i numeri che compaiono.

   $\Omega = \{(i, j)\ \ i = 1, 6\ \ j = 1, 6\}$
   (i, j)="esce i sul dado rosso e j sul blu".

7 Gara di sette cavalli individuati dai numeri 1,2,3,4,5,6,7. Esperimento: osservare l'ordine di arrivo.

$\Omega =\{$ tutti gli ordinamenti di $(1,2,3,4,5,6,7)\}$
$=\{\omega = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7) \;\; a_i = 1,7 \;\; a_i \neq a_j \;\; i \neq j\}$

es. $\omega = (6,3,7,2,5,4,1)$ rappresenta l'esito (evento elementare) per il cavallo 6 è arrivato primo, il 3 è arrivato secondo, il 7 terzo e cosí via.

Eventi

Vogliamo considerare risultati più complessi relativi al nostro esperimento aleatorio. Per esempio:
$E =$"il cavallo 6 arriva primo e il 3 arriva secondo"

possiamo rappresentare E come

$E = \{\omega = (6, 3, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7) \ \ a_i \neq 3, 6 \ \ i = 3, 7 \ \ a_i \neq a_j \ \ i \neq j\}$

$\Rightarrow E \subset \Omega$.

$E =$ “il cavallo 6 arriva primo e il cavallo 3 arriva secondo”

$A =$ “il cavallo 6 arriva primo”

$B =$ “il cavallo 3 arriva secondo ”

$E = \{\omega = (6, 3, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7) \;\; a_i \neq 3, 6 \;\; i = 3, 7\}$

$A = \{\omega = (6, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7) \;\; a_i \neq 6 \;\; i = 2, 7\}$

$B = \{\omega = (a_1, 3, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7) \;\; a_i \neq 3 \text{ per } i \neq 2\}$

$$E = A \cap B \qquad\qquad \cap \leftrightarrow e$$

$F =$ “il cavallo 6 arriva primo o il cavallo 3 arriva secondo”

F è costituito dai risultati che stanno in A o in B.

$$F = A \cup B \qquad\qquad \cup \leftrightarrow o$$

$G =$ "il cavallo 6 non arriva primo"

$G = \{\omega = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7) \;\; a_1 \neq 6\}$

$$G = A^c \qquad \textit{non} \leftrightarrow \ ^c$$

Si può osservare da questi esempi che agli operatori logici

"e" "o" "non"

attraverso la corrispondenza

eventi $\leftrightarrow$ sottoinsiemi di Ω

corrispondono le operazioni sugli insiemi

$\cap \qquad \cup \qquad ^c$

Richiamo sulle operazioni tra insiemi e loro significato in relazione agli eventi

$E \subseteq \Omega$

- Diciamo che si è verificato l'evento rappresentato da E se il risultato dell'esperimento aleatorio è un ω che sta in E.
- $E \cup F$ è l'insieme degli elementi che stanno in E o in F
  $\Rightarrow$ l'evento $E \cup F$ si verifica se e solo se almeno uno tra E o F si verifica:

$$\omega \in E \cup F \qquad \Longleftrightarrow \qquad \omega \in E \qquad o \qquad \omega \in F$$

- $E \cap F$ è l'insieme degli elementi che stanno sia in E sia in F.
  $\Rightarrow$ l'evento $E \cap F$ si verifica se e solo se entrambi E e F si verificano:

$$\omega \in E \cap F \quad \Longleftrightarrow \quad \omega \in E \quad e \quad \omega \in F$$

- E^c è l'insieme degli elementi che non stanno in E.
  $\Rightarrow$ l'evento E^c si verifica se e solo se E non si verifica:

$$\omega \in E^c \quad \Longleftrightarrow \quad \omega \notin E$$

- $\emptyset$ è l'insieme privo di elementi: è detto evento impossibile perché non si verifica mai.

- Ω è detto evento certo perché si verifica sempre.

- Se $E \cap F = \emptyset$ allora E ed F non hanno elementi in comune e si dicono disgiunti
  $\Rightarrow$ gli eventi E e F non possono verificarsi contemporaneamente e vengono detti incompatibili

  es. A= "il cavallo 6 arriva primo"
  D= "il cavallo 1 arriva primo"
  A $=\{\omega = (6, a_2, \dots, a_7) \;\; a_i \neq 6\}$
  D$=\{\omega = (1, a_2, \dots, a_7) \;\; a_i \neq 1\}$

$$A \cap D = \emptyset \qquad A \text{ e } D \text{ incompatibili.}$$

N.B.

$$\forall E \subseteq \Omega \qquad \Longrightarrow \qquad E \cap E^c = \emptyset \qquad E \cup E^c = \Omega$$

- $E \setminus F$ è l'insieme degli elementi che stanno in E ma non stanno in F. N.B. $E \setminus F = E \setminus E \cap F$.

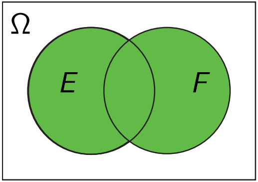
- $E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$ è l'insieme degli elementi che stanno in almeno uno degli E_i

  $\Longrightarrow$ è l'evento che si verifica se e solo se si verifica almeno uno degli eventi E_i

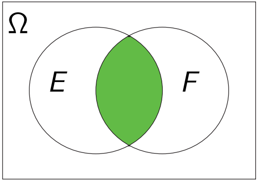
- $E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_n = \bigcap_{i=1}^{n} E_i$ è l'insieme degli elementi che stanno in tutti gli E_i

  $\Longrightarrow$ è l'evento che si verifica se e solo se si verificano tutti gli eventi E_i

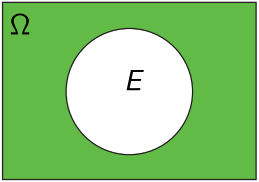
Diagrammi di Venn



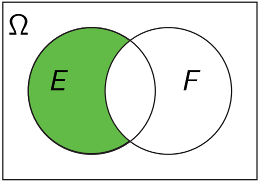
$E \cup F$



$E \cap F$

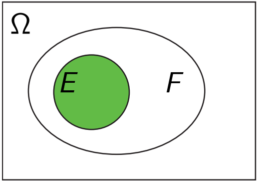


E^c

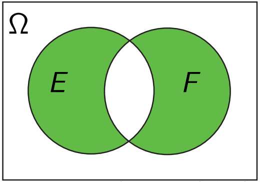


$E \setminus F = E \setminus (E \cap F)$

Diagrammi di Venn



$E \subseteq F$



$E \Delta F = (E \cup F) \setminus (E \cap F)$

Leggi di De Morgan

$$(E \cup F)^c = E^c \cap F^c$$

$$(E \cap F)^c = E^c \cup F^c$$

$$(\bigcup_{i=1}^{n} E_i)^c = \bigcap_{i=1}^{n} E_i^c$$

$$(\bigcap_{i=1}^{n} E_i)^c = \bigcup_{i=1}^{n} E_i^c$$

- Ω spazio campione
- $\omega \in \Omega$ rappresentano tutti i possibili risultati dell'esperimento aleatorio
- $E \subseteq \Omega$ rappresentano gli eventi relativi all'esperimento aleatorio.

Il nostro scopo è quello di definire un modello matematico che "corrisponda" al concetto intuitivo di "probabilità" che un evento si verifichi.

es. la "probabilità" che il cavallo 6 arrivi primo
la "probabilità" che lanciando due dadi la somma dia 7

Definizione assiomatica di probabilità

- Ω spazio campione
- $\mathcal{F}$ famiglia di sottoinsiemi $E \subseteq \Omega$: gli eventi di interesse.

Ora definiamo

- P la probabilità:

Definizione:

Una probabilità P su $(\Omega, \mathcal{F})$ è una funzione definita per ogni E in $\mathcal{F}$ tale che:

a_1) $P(E) \geq 0 \qquad \forall E \in \mathcal{F}$; $\qquad a_2$) $P(\Omega) = 1$;

a_3) Se $E_1, \ldots, E_n$ sono eventi a due a due incompatibili, cioè $E_i \cap E_j = \emptyset$ per $i \neq j$

$$P(E_1 \cup \cdots \cup E_n) = P(E_1) + \cdots + P(E_n);$$

a_4) La proprietà a_3) vale anche per una infinità numerabile di eventi incompatibili.

Spazio di probabilità

Modello matematico per un esperimento aleatorio: spazio di probabilità.

Definizione:

La terna $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, dove

- Ω è un insieme (spazio campione),
- $\mathcal{F}$ è una famiglia di sottoinsiemi di Ω (eventi di interesse),
- P è una probabilità, cioè soddisfa gli assiomi a_1), a_2), a_3) e a_4),

è detto spazio di probabilità.

Esercizio

Esperimento aleatorio: lancio tre monete eque. Sia

$$\Omega = \{(T,T,T),(T,T,C),(T,C,T),(C,T,T),\\ (T,C,C),(C,T,C),(C,C,T),(C,C,C)\}$$

uno spazio campione per questo esperimento aleatorio

e sia $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)=$ famiglia di tutti i possibili sottoinsiemi di Ω (eventi di interesse)

Mostrate che $P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{|E|}{8}$ è una probabilità, cioè soddisfa gli assiomi a_1), a_2), a_3) e a_4).

Esercizio

Esperimento aleatorio: lancio una moneta equa fino alla prima volta in cui esce testa.

Sia E_k= "esce testa per la prima volta al k-esimo lancio".

Vedremo che un modello adeguato assegna $P(E_k) = \frac{1}{2^k}$, $k = 1, 2, \ldots$.

Sia E= "prima o poi esce testa".

Mostrate che $P(E) = 1$.

(Suggerimento: $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \ldots$).

Vedremo che $P(E^c) = 1 - P(E)$, quindi $E^c =$"non esce mai testa" è un evento non vuoto con $P(E^c) = 0$.