Esercizio 1.

Siano $X = \{a,b,c,d\}$ e $\rho \subseteq X \times X$ la relazione definita dalla seguente matrice di incidenza:

$$M_\rho = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Di che proprietà gode ρ?
2. Costruire la chiusura riflessiva e la chiusura simmetrica di ρ.
3. Costruire la chiusura di equivalenza di ρ e determinare le classi d'equivalenza.

Esercizio 2

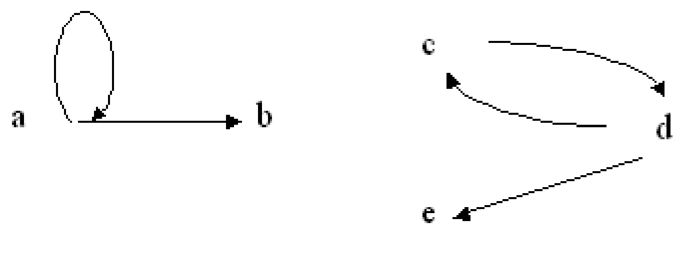
Siano $X = \{a,b,c,d,e,f\}$ e $\rho \subseteq X \times X$ così definita:

$\rho = \{(a,a),(a,b),(a,c),(b,d),(c,d),(d,e),(e,f)\}$

1. Determinare la chiusura transitiva di ρ.
2. Costruire la chiusura simmetrica della chiusura riflessiva e transitiva di ρ.

Esercizio 3

Siano $X = \{a,b,c,d,e,f\}$ e $\rho \subseteq X \times X$ una relazione rappresentata dal seguente grafo di incidenza:



1. Di che proprietà gode ρ?
2. Costruire la relazione d'equivalenza $\overline{\rho}$ generata da ρ.
3. Determinare l'insieme quoziente $X / \overline{\rho}$.

Esercizio 4

Sia $\mathbf{R}[x]$ l'insieme dei polinomi a coefficienti reali nell'indeterminata x e sia $R\subseteq\mathbf{R}[x]\times\mathbf{R}[x]$ la relazione definita nel seguente modo:
$\forall f(x),g(x)\in \mathbf{R}[x]$ $(f(x),g(x))\in R$ se e solo se $\exists b\in\mathbf{R}$ tale che $f(b)=g(b)=0$
a) Di che proprietà gode R?
b) Sia ρ la chiusura di equivalenza di R. Dimostrare che due polinomi che ammettono una radice reale sono sempre associati rispetto a ρ.

Esercizio 5

Sia $X=\{a,b,c,d,e,f\}$ e sia $R\subseteq X\times X$ una relazione su X con la seguente matrice di incidenza

$$\begin{bmatrix} 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 1&1&0&0&0&0 \end{bmatrix}$$

Di che proprietà gode R?
Provare che esiste la minima relazione d'ordine $\leq$ su X che contiene R. Trovare gli elementi minimali e massimali di X rispetto a $\leq$. Sono essi massimi o minimi per X? Sia $Y=\{a,b,c,f\}$ trovare sup Y e inf Y e dire se sono massimo e minimo per Y. Dire se X è un reticolo rispetto alla relazione $\leq$. Mostrare che esiste un sottoinsieme Z di X che è un reticolo rispetto alla stessa relazione $\leq$ (ristretta a Z).
Costruire la chiusura simmetrica e riflessiva $S\subseteq X\times X$ of $\leq$ e dire se è una relazione di equivalenza. In caso affermativo dire se è la relazione di equivalenza generata da R. Costruire tale chiusura d'equivalenza ρ e l'insieme quoziente X/ρ.
Dire se esistono funzioni da X a X contenute in R ed in caso affermativo indicarne il numero. Alcune di queste funzioni ammettono una funzione inversa o un'inversa sinistra o un'inversa destra? Fare le stesse considerazioni per le funzioni da X ad X contenute in ρ. Può esistere una funzione da X ad X con un'inversa sinistra che non è inversa destra?

Esercizio 6

Siano Z l'insieme dei numeri interi relativi ed $f : Z\rightarrow Z$ una funzione. Si consideri la relazione $R\subseteq Z\times Z$ così definita $(n,m)\in R$ se e solo se n ed m sono entrambi pari ed $f(n)=f(m)$ oppure
n ed m sono entrambi dispari.
Stabilire se $R \subseteq \ker f$ e se puo' valere l'uguaglianza $R = \ker f$.
Dire di che proprietà gode R.
Verificare che R e' una relazione di equivalenza.
Nel caso in cui f sia così definita:
$f(n)=n+1$ se n è dispari
$f(n)=|n+1|$ se n è pari,
determinare le classi di equivalenza di R.

Esercizio 7

Sia $f : A\rightarrow B$ un'applicazione.

- Sia ρ una relazione di equivalenza su B, provare che la relazione σ definita su A ponendo $(a_1,a_2)\in\sigma$ se e solo se $(f(a_1),f(a_2))\in\rho$ è una relazione di equivalenza su A
- Nel caso particolare in cui A=R, B=Z, f associa ad ogni numero reale la sua parte intera e ρ è la relazione di congruenza modulo 4, descrivere la classe di equivalenza di ½ rispetto a σ.

- Data una relazione di equivalenza τ su A la relazione κ definita su B ponendo $(b_1,b_2)\in\kappa$ se e solo se esistono $a_1,a_2 \in$ A tali che $f(a_1)=b_1, f(a_2)=b_2$ e $(a_1,a_2)\in\tau$ è une relazione di equivalenza su B? Sempre o talvolta?

Esercizio 8

Siano $A=\{2,3,4\}$, $B=\{6,7,9\}$ e sia $\tau \subseteq A\times B$ la relazione così definita:

$\forall\, a\in A, b\in B \qquad a\,\tau\, b \quad :\Leftrightarrow \quad b-a\in P,$

dove P è l'insieme dei numeri primi.

1. Rappresentare la relazione τ tramite la sua matrice di incidenza e il suo grafo di incidenza.
2. Sia $\rho \subseteq A\times B$ un'altra relazione definita nel seguente modo:

   $\forall\, a\in A, b\in B \qquad a\,\rho\, b \quad :\Leftrightarrow \quad mcd(a,b)=1$

   dove *mcd(a,b)* è il massimo comun divisore di *a* e *b.*

   Determinare le matrici di incidenza di $\tau\cap\rho$ e di $\tau\cup\rho$.
3. Siano $C=\{12,18\}$ e $\sigma \subseteq B\times C$ la relazione così definita:

   $\forall\, b\in B, c\in C \qquad b\,\sigma\, c \quad :\Leftrightarrow \quad b\,|\,c,$

   dove "|" significa "divide".

   Determinare la relazione $\tau\cdot\sigma$, il suo grafo di incidenza e la sua matrice di incidenza.
4. Determinare τ^{-1} e $\tau\cdot\tau^{-1}$.

Esercizio 9

Sia $X=\{a,b,c,d,e\}$ e si consideri la relazione binaria R su X così definita:

$R=\{(a,b),(a,d),(b,c),(c,d),(d,e)\}.$

1. Rappresentare la relazione R tramite la sua matrice di incidenza e il suo grafo d'incidenza.
2. Dire quali proprietà soddisfa R utilizzando sia la matrice che il grafo incidenza.
3. Determinare la chiusura riflessiva, la chiusura simmetrica e la chiusura transitiva di R.
4. Costruire la chiusura d'equivalenza ρ di R^2 e scrivere l'insieme quoziente X/ρ.
5. Sia δ la chiusura simmetrica di R^2. δ è una funzione? Quante funzioni contiene δ? Quante di queste sono iniettive? Quante suriettive?

Esercizio 10

Sia $A=R^2\setminus\{(0,0)\}$ con R insieme dei numeri reali e sia $\rho\subseteq A\times A$ la relazione definita nel seguente modo:

$\forall (a,b),(c,d)\in A \qquad (a,b)\,\rho\,(c,d) \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, t\in R\setminus\{0\} \quad c=at,\, d=bt.$

Dimostrare che ρ è una relazione d'equivalenza e descrivere la generica classe di equivalenza rispetto a ρ.

Esercizio 11

Sia E un insieme e sia ρ una relazione riflessiva e transitiva su E.

1. Definiamo su E una relazione σ tale che

   $a\sigma b \Leftrightarrow a\rho b,\ b\rho a$.

   Mostrare che σ è una relazione d'equivalenza.

2. Sull'insieme E/σ definiamo una relazione τ tale che:

   $[a]_\sigma \tau [b]_\sigma \Leftrightarrow a\rho b.$

   Mostrare che τ è una relazione d'ordine.

Esercizio 12

a) Si consideri l'insieme $\overline{N}$=N \ {0} dei numeri naturali non nulli e la relazione $R\subseteq\overline{N}\times\overline{N}$ così definita

$$(n,m)\in R \text{ se e solo se } n=2^{\alpha}h,\ m=2^{\alpha}k$$

con h, k interi positivi dispari ed $\alpha \in$ N (ricordare che N include lo 0).
Si mostri che R è una relazione di equivalenza su $\overline{N}$ e si determinino le classi di equivalenza di R.
b) In $\overline{N}$ si consideri ora la relazione S così definita

$$(n,m)\in S \text{ se e solo se } n=2^{\alpha}h,\ m=2^{\beta}k \text{ con } \alpha\leq\beta$$

ove $\leq$ è l'usuale relazione d'ordine su $\overline{N}$, h, k sono interi positivi dispari ed $\alpha, \beta \in$ N .
Si dica se S è una relazione d'ordine su $\overline{N}$.
c) Si consideri da ultimo l'insieme quoziente $\frac{\overline{N}}{R}$ e la relazione T su $\frac{\overline{N}}{R}$ così definita

$$([n],[m])\in T \text{ se e solo se } n=2^{\alpha}h,\ m=2^{\beta}k \text{ con } \alpha\leq\beta$$

ove [n] indica la R-classe di n ed h, k, α, β sono definiti come sopra.
Si verifichi che T è una relazione d'ordine su $\frac{\overline{N}}{R}$ e si determinino , se esistono, elementi massimali e minimali, massimo e minimo di $\frac{\overline{N}}{R}$ rispetto a T.

Esercizio 13

Si consideri l'insieme N={0,1,2,3,....} dei numeri naturali e la relazione R su N così definita:

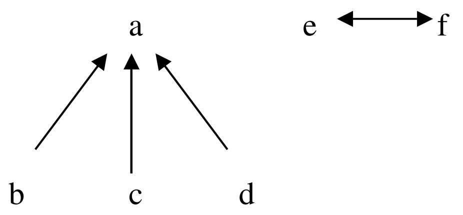
$$n \mathrel{R} m \Leftrightarrow n \text{ è dispari ed esiste t naturale pari tale che } n = m + t .$$

Si consideri inoltre la relazione T su N così definita:

$$n \mathrel{T} m \Leftrightarrow n \mathrel{R} m \text{ o } n = m \text{ pari}$$

a) Si dica di quali proprietà gode R.
b) Si dimostri che T è una relazione d'ordine su N.
c) T è la chiusura d'ordine di R?
d) Si determinino gli elementi minimali, massimali, minimo e massimo di T.
e) Posto A = { 5, 9, 11, 23 }, si determinino gli eventuali minoranti, maggioranti, estremo superiore ed estremo inferiore di A rispetto a T.
f) Si stabilisca se A rispetto a T è un reticolo .

Esercizio 14
Sia dato l'insieme X ={a,b,c,d,e,f} e la relazione binaria R su X rappresentata dal seguente grafo



a) Si provi che non esiste nessuna relazione d'ordine su X contenente. R.
b) Si mostri che R è transitiva.
c) Si trovi la relazione d'equivalenza ρ generata da R.
d) Si stabilisca se ρ coincide con la chiusura riflessiva e simmetrica di R

Esercizio 15
Siano Z l'insieme dei numeri interi e $f : Z \to Z$ la funzione definita nel seguente modo:

$$\forall n \in Z \qquad f(n) = \begin{cases} 2n^2 - n & se\ n \geq 0 \\ n^3 & se\ n < 0 \end{cases}$$

Discutere l'esistenza di possibili inverse e in caso affermativo esibirne un esempio.

Esercizio 16
Siano Σ un *alfabeto* (cioè un insieme finito non vuoto), Σ^* il *monoide libero su* Σ (cioè l'insieme di tutte le sequenze finite di elementi di Σ, dette *parole*) e, per ogni $w \in \Sigma^*$, denotiamo con $|w|$ la lunghezza di w (cioè il numero di elementi che costituiscono la parola w). Data la seguente funzione:

$$\phi : \Sigma^* \to N \cup \{0\}, \qquad \forall w \in \Sigma^* \quad \phi(w) = |w|$$

discutere l'esistenza di possibili inverse e in caso affermativo esibirne un esempio.

Esercizio 17
Sia dato l'insieme X ={a,b,c,d,e,f}.
Si consideri la relazione R su X avente la seguente matrice d'incidenza

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Si costruisca la chiusura riflessiva e transitiva S di R.
b) Si provi che S è una relazione d'ordine su X.
c) Si stabilisca se X rispetto ad S è un reticolo e, nel caso in cui lo fosse, se è di Boole.
d) Si costruisca la chiusura simmetrica T di S e si verifichi se è una relazione d'equivalenza.
e) Se sì, se ne determinino le classi d'equivalenza.
In caso contrario si determini la relazione d'equivalenza ρ generata da T e le relative classi di equivalenza.

Esercizio 18
Sia N l'insieme dei numeri naturali (0 incluso) e sia f: N→N la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} x/2 & \text{se x è pari} \\ \lfloor x/2 \rfloor & \text{se x è dispari} \end{cases}$$

(dove $\lfloor x \rfloor$ indica la parte intera di x).
Dire se f ammette inversa destra o sinistra, e in caso darne un esempio.
Calcolare le ker f classi di N.

Esercizio 19
Sia Z l'insieme dei numeri interi relativi e sia R la relazione binaria su Z così definita
$(a,b)\in R$ se e solo se a,b sono entrambi minori di 10 ed $a\equiv b$ (mod 3), oppure uno almeno fra a e b è maggiore di 10
Dire di che proprietà gode R e costruirne la sua chiusura transitiva.

Esercizio 20
Si consideri l'applicazione f:N×N→N definita ponendo f((n,m))=m.c.m (n,m): La funzione è iniettiva, suriettiva, biunivoca? Ammette un'inversa destra, sinistra o bilatera? In caso affermativo costruirne un esempio. Determinare la ker f classe della coppia (4,3). Le ker-f classi sono tutte finite? Esistono ker f classi formate da un solo elemento? Se si quali sono? Quale è la cardinalità di N×N/ker f?