Testi di esercizi di logica proposizionale

1) Si consideri la seguente formula:

$f(A,B,C) = (((\sim A) \vee C) \Leftrightarrow B)$

Togliere le parentesi superflue;

Determinare l'insieme delle sottoformule di $f(A,B,C)$;

Costruire la sua tavola di verità;

Dire se è una formula soddisfacibile e, in caso affermativo, se è una tautologia.

2) Si consideri la tavola di verità

A	B	C	f(A,B,C)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

e si scriva una formula f(A,B,C) con i soli connettivi $\neg$ e $\wedge$ che abbia la suddetta tavola di verità.
Si trovi poi una formula g(A,B,C) soddisfacibile, non equivalente ad f(A,B,C), da cui si possa semanticamente dedurre f(A,B,C).
Si dica se si può dimostrare che g(A,B,C) $\vdash_L$ f(A,B,C) . Ritrovare il risultato usando la risoluzione.

3) Trovare una formula $\mathcal{A}$ contenente solo i connettivi $\sim$ e $\Rightarrow$ avente la seguente tavola di verità

A	B	C	f (A, B, C)
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	0

Determinare inoltre una formula $\mathcal{B}$, non equivalente ad $\mathcal{A}$ e che non sia una tautologia, tale che da $\mathcal{A}$ si deduca in L $\mathcal{B}$.
Stabilire dai risultati precedenti se, data una qualunque formula $\mathcal{C}$, la formula ben formata $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{C}$ è un teorema di L.
Mostrare, usando la risoluzione e tenuto conto dei risultati precedenti, che da $\mathcal{A}$ si deduce $\mathcal{B}$ e che esiste una formula $\mathcal{C}$, che non è una contraddizione, tale che l'insieme $\{\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}, \sim\mathcal{C}\}$ è soddisfacibile.

4) Si consideri la tavola di verità

A	B	C	f(A,B,C)
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	0

Scrivere una formula equivalente ad f(A,B,C) che contenga solo i connettivi $\sim$ e $\Rightarrow$.
Stabilire, giustificando l'affermazione, se in L la formula $B \Rightarrow f(A,B,C)$ può essere dedotta da $B \Rightarrow (C \Rightarrow A)$.

5) Siano f (A,B,C) e g(A,B,C) due f.b.f. aventi le seguenti tavole di verità:

A	B	C	f (A,B,C)	g(A,B,C)
1	1	1	1	1
1	1	0	0	1
1	0	1	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	0
0	1	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	0	0	1

Si scrivano le formule f (A,B,C) e g(A,B,C) in modo tale che contengano solo i connettivi $\sim$ e $\Rightarrow$.
Si determini una f.b.f. h(A,B,C) che non sia una contraddizione tale che l'insieme {f(A,B,C),g(A,B,C), h(A,B,C)} sia insoddisfacibile.
Si stabilisca se vale la seguente deduzione nella teoria L:
$f(A,B,C), g(A,B,C) \vdash_L \sim h(A,B,C)$
Si dimostri che $f(A,B,C) \models g(A,B,C) \Rightarrow \sim h(A,B,C)$ prima per via semantica e poi attraverso il metodo di risoluzione.

6) Data la seguente tavola di verità

A	B	C	f (A, B, C)
1	1	1	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	0	0	0
0	1	1	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	0	0	1

scrivere una f.b.f $\mathcal{A}$ contenente solo i connettivi ~ e $\Rightarrow$ ed avente la suddetta tavola di verità. Trovare poi una f.b.f $\mathcal{B}$ che non sia una contraddizione, tale che la formula $\mathcal{A} \Rightarrow \sim\mathcal{B}$ possa essere dedotta da $\mathcal{A}$ nella teoria formale L.
Dimostrare, usando la risoluzione, che $\{ \mathcal{A}, \sim(\mathcal{A} \Rightarrow \sim\mathcal{B})\}$ è un insieme insoddisfacibile di formule.

7) Provare che $f(A,B,C) \vdash_L A\Rightarrow(B\Rightarrow\sim C)$. E' vero che da $\{A, B\Rightarrow\sim C\}$ si deduce f(A,B,C)?
Si ha allora $\{A, B\Rightarrow\sim C\} \vdash_L \sim f(A,B,C)$?

8) Verificare che l'insieme di fbf $\{\sim A, \sim A\Rightarrow(B\vee C), B\Rightarrow(A\vee C)\}$ è soddisfacibile.
Trovare una formula di logica proposizionale f(A,B,C) che non sia una contraddizione e tale che l'insieme di fbf $\{\sim A, \sim A\Rightarrow(B\vee C), B\Rightarrow(A\vee C), f(A,B,C)\}$ sia insoddisfacibile. La formula A è una conseguenza semantica di $\{\sim A\Rightarrow(B\vee C), B\Rightarrow(A\vee C), f(A,B,C)\}$? Verificare il risultato trovato tramite la risoluzione.

9) Provare in due modi diversi che $\sim C\Rightarrow\sim B \vdash_L (A\Rightarrow B)\Rightarrow(A\Rightarrow C)$.

10) Si consideri la f.b.f. $(A\Rightarrow\sim B)\Rightarrow(C\Rightarrow(\sim B\vee A))$.
Scrivere una formula f(A,B,C) ad essa equivalente che contenga solo i connettivi $\sim, \wedge, \vee$.
Si trovi poi una formula g(A,B,C), non equivalente ad f(A,B,C), tale che l'insieme di formule $\{g(A,B,C), \sim f(A,B,C)\}$ sia insoddisfacibile.
Si dica, utilizzando la risoluzione, se $A\Rightarrow(B\Rightarrow C) \vdash_L g(A,B,C)\wedge f(A,B,C)$.

11) Si considerino i seguenti enunciati:
A: Se Anna è bionda o Beatrice è castana, allora Claudia è mora.
B: Se Anna è bionda, allora Claudia non è mora.
C: Claudia è mora o Anna non è bionda.
Mostrare per via semantica che $A, B \models C$. Provare lo stesso risultato utilizzando la risoluzione. Scrivere una formula f(A,B,C) che non sia contraddittoria e tale che $A \wedge B$ sia conseguenza semantica di f(A,B,C).

12) Si provi, utilizzando il metodo di risoluzione, che dalle frasi:
La macchina di Giovanni è rossa o decappottabile;
Se la macchina di Giovanni è rossa, è una Honda;
La macchina di Giovanni non è una Honda;
si deduce che

La macchina di Giovanni è decappottabile.

13) Dimostrare, usando il teorema di deduzione semantica e la risoluzione, che dalle seguenti ipotesi:
Se Barbara va al mare allora almeno uno tra Alberto, Carlo e Davide va al mare;
Se Davide va al mare allora Carlo va al mare;
Almeno uno tra Barbara e Alberto va al mare e se Carlo va al mare allora Barbara non ci va;
segue l'affermazione:
Alberto va al mare.
Dire se si può ottenere il risultato usando la risoluzione lineare e usando la risoluzione lineare per input.

14) Si scrivano sotto forma di formule di logica proposizionale le seguenti frasi
   a. Se Luisa ha guardato la televisione, si sente depressa.
   b. Se Luisa non è informata delle notizie, si sente depressa.
   c. Luisa è informata delle notizie se ha guardato la televisione o ha letto il giornale.
   d. Luisa si sente depressa quando non ha letto il giornale.
   e. Se Luisa ha letto il giornale non si sente depressa

   Dire se la frase d) è conseguenza semantica di a), b), c) e fare lo stesso per la frase e).
   Ritrovare i risultati precedenti facendo uso della risoluzione.