Fratelli

Si consideri il seguente problema:

Sapendo che

1. Carlo ha un fratello;
2. tutti i fratelli di Carlo hanno figli;

provare che Carlo è zio di qualcuno.

Formalizzare il problema in un opportuno linguaggio del I ordine (facendo attenzione e descrivere correttamente i gradi di parentela).

Costanti: $\mathtt{c}$ (Carlo)
Predicati:

1. $\mathtt{B}$(x, y) (x è fratello di y)
2. $\mathtt{F}$(x, y) (x è figlio di y)
3. $\mathtt{Z}$(x, y) (x è zio di y)

Assiomi:

1. $\forall x \forall y (\mathtt{F}(x, y) \Rightarrow \neg(\mathtt{F}(y, x))) \wedge \forall x \exists y (\mathtt{F}(x, y))$
2. $\forall x \forall y (\mathtt{B}(x, y) \Leftrightarrow (x \neq y \wedge \exists z (\mathtt{F}(x, z) \wedge \mathtt{F}(y, z))))$
3. $\forall x \forall y (\mathtt{Z}(x, y) \Leftrightarrow \exists z (\mathtt{B}(x, z) \wedge \mathtt{F}(y, z)))$
4. $\exists x (\mathtt{B}(x, \mathtt{c}))$
5. $\forall x (\mathtt{B}(x, \mathtt{c}) \Rightarrow \exists y (\mathtt{F}(y, x)))$

Congettura: $\exists x (\mathtt{Z}(\mathtt{c}, x))$

```
begin_problem(fratelli).

list_of_descriptions.
name({**}).
author({**}).
status(unsatisfiable).
description({**}).
end_of_list.

list_of_symbols.
   functions[(c,0)].
predicates[(B,2), (F,2), (Z,2)].
end_of_list.

list_of_formulae(axioms).
formula(
and(
  forall([x,y],
    implies(
      F(x,y),
      not(F(y,x)))),
  forall([x],
    exists([y],
      F(x,y))))).
formula(
forall([x,y],
  equiv(
    B(x,y),
    and(
      not(equal(x,y)),
      exists([z],
        and(
          F(x,z),
          F(y,z))))))).
formula(
forall([x,y],
  equiv(
```

```
    Z(x,y),
    exists([z],
      and(
        B(x,z),
        F(y,z)))))
).
formula(exists([x],B(x,c))).
formula(
forall([x],
  implies(
    B(x,c),
    exists([y],
      F(y,x))))).

end_of_list.

list_of_formulae(conjectures).

formula(exists([x],Z(c,x))).

end_of_list.

end_problem.
```

Cavalieri e Furfanti

Si consideri il seguente problema:

Sapendo che

1. In un'isola si trovano esattamente due tipi di persone: i cavalieri, che dicono sempre la verità, e i furfanti, che mentono sempre.
2. Su quest'isola si trovano tre persone: A, B, C.
3. A afferma che tutti e tre sono furfanti.
4. B dice che fra di loro c'è esattamente un cavaliere.

Cosa sono A, B, C?
Formalizzare il problema in un opportuno linguaggio del I ordine.

```
begin_problem(TPTP_Problem).

list_of_descriptions.
name({*Cavalieri*}).
author({**}).
status(unsatisfiable).
description({*Cavalieri e furfanti*}).
end_of_list.

list_of_symbols.
functions[(A,0), (B,0), (C,0)].
predicates[(cav,1), (fur,1)].
end_of_list.

list_of_formulae(axioms).
formula(forall([x],equiv(cav(x),not(fur(x))))).

formula(implies(cav(A),and(fur(A),fur(B),fur(C)))).
formula(implies(fur(A),not(and(fur(A),fur(B),fur(C))))).


formula(implies(cav(B),or(and(cav(A),fur(B),fur(C)),and(fur(A),cav(B),fur(C)),
and(fur(A),fur(B),cav(C))))).

formula(implies(fur(B),not(or(and(cav(A),fur(B),fur(C)),and(fur(A),cav(B),fur(C)),
and(fur(A),fur(B),cav(C)))))).

end_of_list.

list_of_formulae(conjectures).

formula(and(fur(A),cav(B),fur(C))).
```

```
end_of_list.
```

Insiemi e cardinalità

Si consideri il seguente problema:

Sapendo che

1. Dato un insieme ne esiste un altro di cardinalità maggiore.
2. Se un insieme è contenuto in un altro, allora la cardinalità del primo non è maggiore di quella del secondo.
3. V contiene tutti gli insiemi.

Dedurne che V non è un insieme.
Formalizzare il problema in un opportuno linguaggio del I ordine.

```
begin_problem(universe).
list_of_descriptions.
name({**}).
author({**}).
status(unknown).
description({**}).
end_of_list.
list_of_symbols.
functions[(V,0)].
predicates[(S,1),(G,2),(I,2)].
end_of_list.
list_of_formulae(axioms).
formula(forall([x],implies(S(x),exists([y],and(S(y),G(y,x)))))).
formula(forall([x,y],implies(I(x,y),not(G(x,y))))).
formula(forall([x],implies(S(x),I(x,V)))).
end_of_list.
list_of_formulae(conjectures).
formula(not(S(V))).
end_of_list.
```

```
list_of_settings(SPASS).
{*
set_flag(DocProof,1).
*}
end_of_list.
end_problem.
```

Carnivori

Si consideri il seguente problema:

Sapendo che

1. Tutti gli uomini sono animali;
2. alcuni animali sono carnivori;

Dedurne che alcuni uomini sono carnivori.
Formalizzare il problema in un opportuno linguaggio del I ordine.

```
begin_problem(carnivori).
list_of_descriptions.
name({**}).
author({**}).
status(unknown).
description({**}).
end_of_list.
list_of_symbols.
predicates[(M,1), (A,1), (C,1)].
end_of_list.
list_of_formulae(axioms).
formula(forall([x], implies(M(x), A(x)))).
formula(exists([x], and(A(x), C(x)))).
end_of_list.
list_of_formulae(conjectures).
```

```
formula(exists([x], and(M(x), C(x)))).
end_of_list.
list_of_settings(SPASS).
{*
set_flag(DocProof,1).
*}
end_of_list.
end_problem.
```

Induzione vista a lezione

Provare che l'assioma dell'induzione vista a lezione:

$$\mathcal{A}(0) \Rightarrow \big((\forall x(\mathcal{A}(x) \Rightarrow \mathcal{A}(f_1^1(x)))) \Rightarrow \forall x \mathcal{A}(x)\big)$$

è semanticamente equivalente alla più intuitiva formula:

$$\big(\mathcal{A}(0) \wedge (\forall x(\mathcal{A}(x) \Rightarrow \mathcal{A}(f_1^1(x))))\big) \Rightarrow \forall x \mathcal{A}(x)$$

Suggerimento. Mostrare che la formula:

$$\big(\mathcal{A}(0) \Rightarrow \big((\forall x(\mathcal{A}(x) \Rightarrow \mathcal{A}(f_1^1(x)))) \Rightarrow \forall x \mathcal{A}(x)\big)\big) \Leftrightarrow \big(\big(\mathcal{A}(0) \wedge (\forall x(\mathcal{A}(x) \Rightarrow \mathcal{A}(f_1^1(x))))\big) \Rightarrow \forall x \mathcal{A}(x)\big)$$

è un esempio di tautologia.
Ponendo $\mathcal{C} = \mathcal{A}(0)$, $\mathcal{D} = (\forall x(\mathcal{A}(x) \Rightarrow \mathcal{A}(f_1^1(x))))$, $\mathcal{E} = \forall x \mathcal{A}(x)$, la formula precedente diviene:

$$T:\ (\mathcal{C} \Rightarrow (\mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{E})) \Leftrightarrow ((\mathcal{C} \wedge \mathcal{D}) \Rightarrow \mathcal{E})$$

che è una tautologia. Infatti, $(\mathcal{C} \Rightarrow (\mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{E}))$ é falsa solo per il modello v con $v(\mathcal{C}) = 1$, $v(\mathcal{D}) = 1$, $v(\mathcal{E}) = 0$ che è anche modello di $((\mathcal{C} \wedge \mathcal{D}) \Rightarrow \mathcal{E})$ (verificare!). Viceversa $((\mathcal{C} \wedge \mathcal{D}) \Rightarrow \mathcal{E})$ è falso solo per $v(\mathcal{C}) = 1$, $v(\mathcal{D}) = 1$, $v(\mathcal{E}) = 0$. Quindi $(\mathcal{C} \Rightarrow (\mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{E}))$ e $((\mathcal{C} \wedge \mathcal{D}) \Rightarrow \mathcal{E})$ hanno gli stessi modelli, dunque T è una tautologia.