Sintesi Combinatoria

Sintesi di reti combinatorie a più livelli: Introduzione

Motivazioni e Introduzione

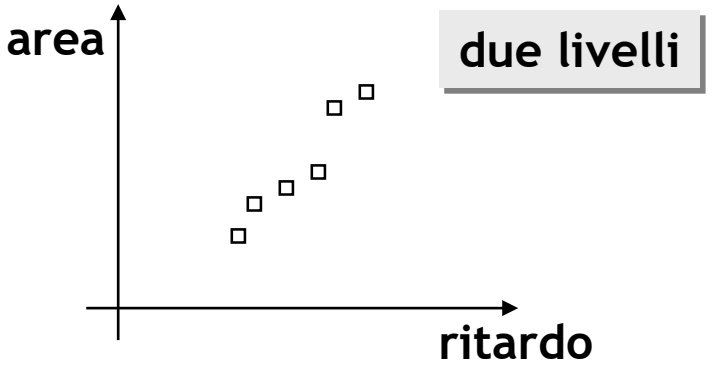
Modello per reti combinatorie a più livelli

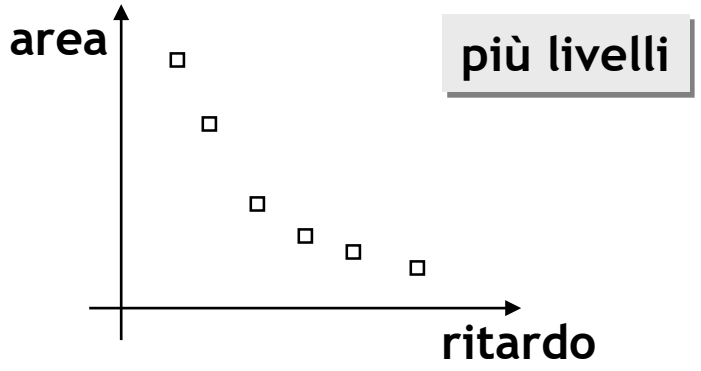
Trasformazioni e Algoritmi

versione del 22/10/04

Sintesi di reti combinatorie a più livelli: *Introduzione*

- Obiettivo della sintesi logica: ottimizzazione delle cifre di merito area e prestazioni
  - Reti combinatorie a due livelli: area e ritardo sono ridotti contemporaneamente.
  - Reti combinatorie a più livelli: area e ritardo non procedono nella stessa direzione
- Le reti a più livelli portano in generale a soluzioni più efficienti in termini di area/prestazioni e consentono un utilizzo migliore delle librerie

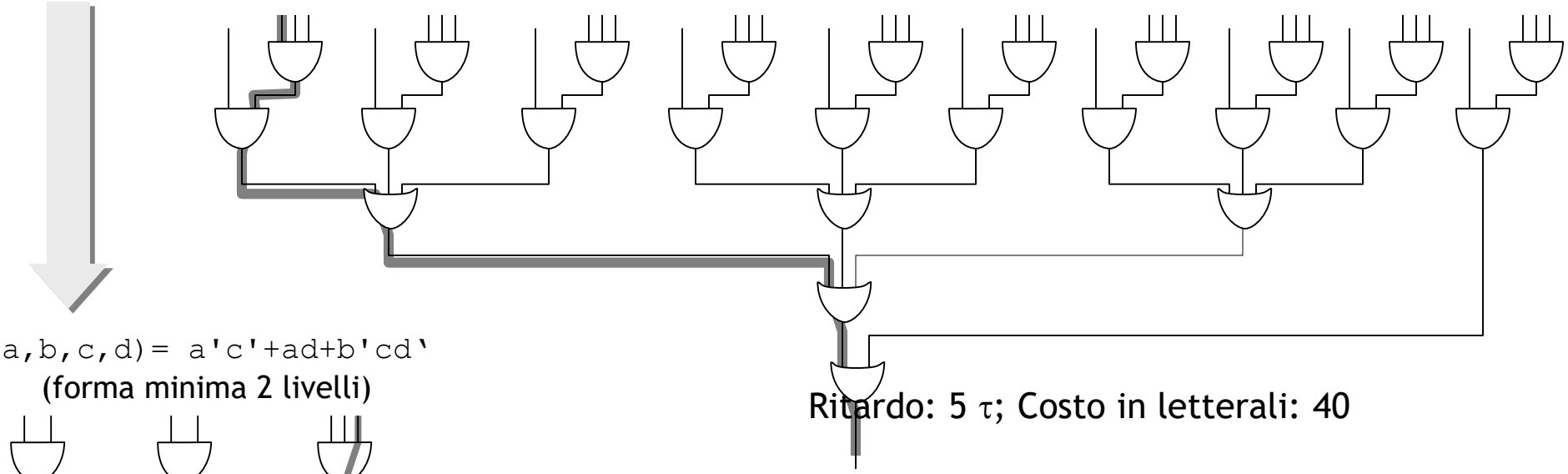




Sintesi di reti combinatorie a più livelli: *Introduzione*

- **Esempio** – (Reti combinatorie a due livelli: Area e tempo sono ridotti contemporaneamente)
  - Ipotesi: porte con un massimo di 3 ingressi (ritardo uniforme: τ)

f(a,b,c,d)= a'b'c'd'+a'b'c'd+a'b'cd'+a'bc'd'+a'bc'd+ab'c'd+ ab'cd'+ab'cd+abc'd+abcd



f(a,b,c,d)= a'c'+ad+b'cd'
(forma minima 2 livelli)

Ritardo: 5 τ; Costo in letterali: 40

Ritardo: 2 τ; Costo in letterali: 7

Sintesi di reti combinatorie a più livelli: *Introduzione*

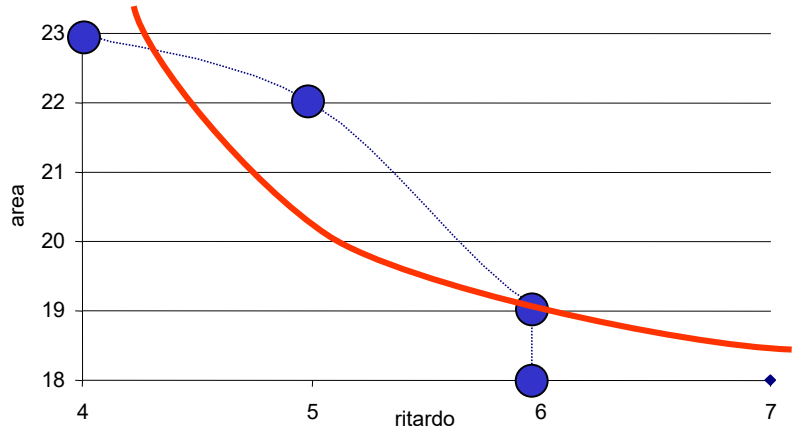
- Esempio – (Reti combinatorie a più livelli: trade-off area/prestazioni)
  - Ipotesi: porte con un massimo di 3 ingressi (ritardo uniforme: τ)

```
f= l'+ c'*g*h'+ a*b'*k'+ g*k'+ a'*b'*c'*d'*e'+ a*d'*e'*f'+e'*g'*i'+e'*j';
```
Ritardo: 4 τ; Costo: 23

```
f= l'+ c'*g*h'+ k'(a*b'+ g)+ a'*b'*c'*d'*e'+ a*d'*e'*f'+e'*g'*i'+e'*j';
```
Ritardo: 5 τ; Costo: 22

```
f= l'+ c'*g*h'+ k'(a*b'+ g)+ e'*(a'*b'*c'*d'+ a*d'*f'+g'*i'+j');
```
Ritardo: 6 τ; Costo: 19

```
f= l'+ c'*g*h'+ k'*(a*b'+ g)+ e'*(d'*(a'*b'*c'+ a*f')+g'*i'+j');
```
Ritardo: 6 τ; Costo: 18



Sintesi di reti combinatorie a più livelli: *Introduzione*

- Nella realizzazione di reti combinatorie multi-livello, più che ricercare un ottimo (l'ottimo non è sempre definibile in maniera univoca), si cerca una soluzione ragionevole in termini di area e prestazioni.

- Sarebbe più corretto parlare di sintesi invece che di ottimizzazione. La sintesi può prevedere:
  - Minimizzazione dell'area (con vincolo sul ritardo)
  - Minimizzazione del ritardo (con vincolo sull'area)

- Le operazioni e trasformazioni definite per la sintesi multi-livello hanno come scopo base quello di manipolare l'espressione logica della rete combinatoria in modo da individuare ed estrarre sotto-espressioni logiche comuni nell'espressione di partenza
  - questo consente, in generale, di avere realizzazioni più efficienti (con riuso) in termini di porte utilizzate, rispetto all'ottimizzazione a due livelli, con tempi di propagazione peggiori

Sintesi di reti combinatorie a più livelli: *Introduzione*

- Ottimizzazione a più livelli:
  - Vantaggi:
    - Più efficiente in termini di area e prestazioni.
    - Permette di utilizzare elementi di libreria.
  - Svantaggi:
    - Maggiore complessità della ottimizzazione.
- Metodi di ottimizzazione:
  - Esatti
    - Complessità computazionale estremamente elevata: inaccettabili.
  - **Euristici**
    - Definizione di euristica: "*procedimento non rigoroso (approssimativo, intuitivo) che permette di conseguire un risultato la cui qualità è paragonabile a quella ottenuta con metodi rigorosi*"

Sintesi di reti combinatorie a più livelli: *Introduzione*

- Euristica del problema di ottimizzazione - due passi:
  a) Si produce una soluzione ottimale ignorando i vincoli di realizzazione
     - fan_in, fan_out, elementi di libreria…

     La soluzione è ottenuta tramite sequenze di trasformazioni applicate in modo iterativo. Le trasformazioni sono basate anche sulle proprietà algebriche delle espressioni booleane. La rete è definita ottima rispetto ad un insieme di trasformazioni, quando un'ulteriore applicazione di queste non può più migliorare la funzione di costo.

  b) Si raffina il risultato considerando i vincoli strutturali
     b) *library mapping* (o *library binding*).

     Risultato dell'ottimizzazione è di inferiore qualità rispetto ad una ottimizzazione che considera contemporaneamente i punti a) e b) ma risulta computazionalmente più semplice.
- In questa sezione si analizza solo il punto relativo all'identificazione della soluzione ottimale (punto a).

Sintesi di reti combinatorie a più livelli:
Modello della rete (1)

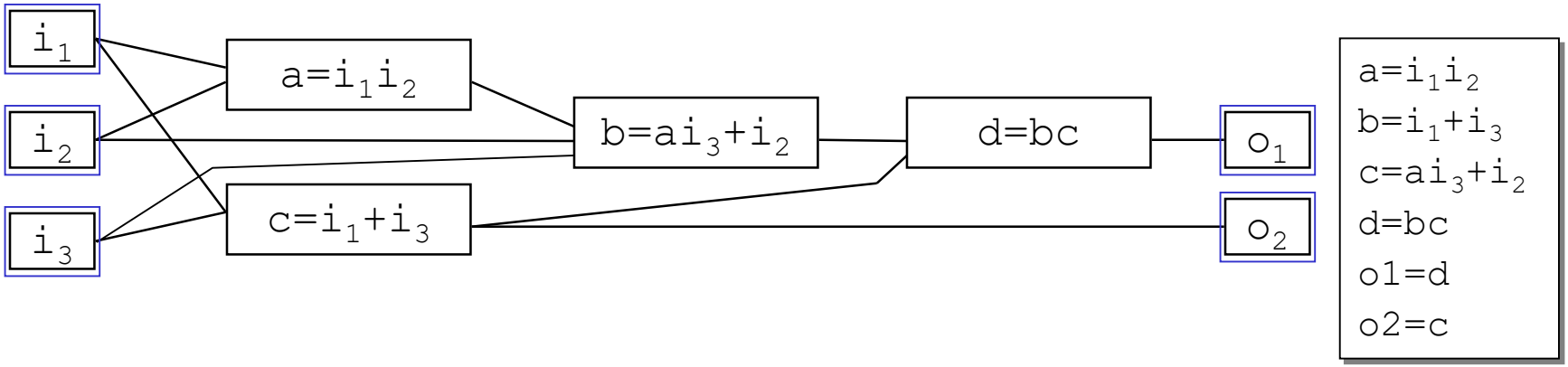
- Nella sintesi multilivello, il modello utilizzato per rappresentare un circuito combinatorio è un grafo orientato aciclico
  - DAG - Direct Acyclic Graph

- Grafo per reti combinatorie
  - È un grafo orientato G(V,E) aciclico
    - V: insieme dei nodi
    - E: insieme degli archi

- V è partizionato negli insiemi:
  - nodi di ingresso V_I (Primary Inputs - PI)
  - nodi di uscita V_O (Primary Outputs - PO)
  - nodi interni V_G: Sono moduli della rete combinatoria a cui è associata una funzione combinatoria scalare (una sola uscita)

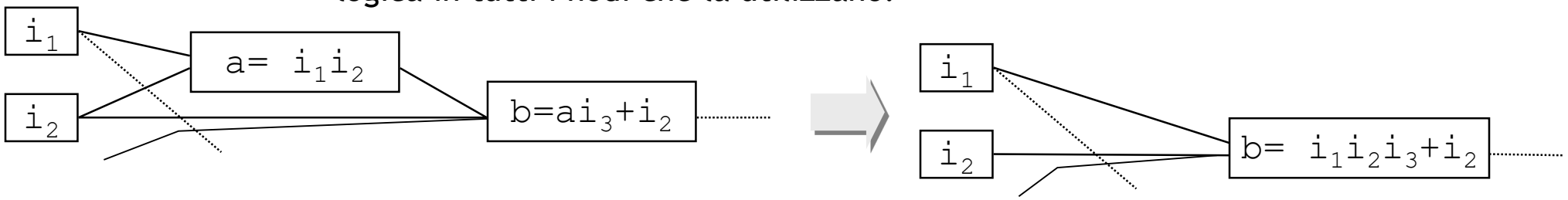
Sintesi di reti combinatorie a più livelli:
Modello della rete (2)

- E' un modello comportamentale/strutturale
  - Strutturale: connessioni.
  - Comportamentale: ad ogni nodo è associata una funzione.
    - Nel modello considerato, ogni funzione è a due livelli con una sola uscita.
- Il modello è bipolare e non gerarchico
  - Bipolare: Ogni arco può assumere valore 0 o 1.



Sintesi di reti combinatorie a più livelli:
Trasformazioni per reti logiche (1)

- Metodi euristici
  - Realizzano un miglioramento iterativo della rete logica mediante trasformazioni logiche che conservano il comportamento di I/O del grafo
- Rispetto al grafo che rappresenta la rete combinatoria, sono possibili due tipi di trasformazioni:
  - Locali: modificano localmente (la funzione di) un nodo non toccando la struttura della rete.
    - Esempio: la fattorizzazione di un nodo
  - Globali: modificano anche la struttura della rete
    - Esempio: l'eliminazione di un nodo nella rete sostituendo la sua espressione logica in tutti i nodi che la utilizzano.



Sintesi di reti combinatorie a più livelli:
Trasformazioni per reti logiche (2)

- Le trasformazioni logiche modificano sia l'area sia le prestazioni poiché agiscono:
  - Sulle funzioni locali;
    - sul numero dei letterali (**area**);
  - Sulle connessioni
    - variazione del n° di nodi (**area**) e del n° nodi del cammino critico (**prestazioni**: n° nodi attraversati, usato come stima per il ritardo di propagazione)

- Sono usate cifre di merito per valutare le trasformazioni
  - Trasformazioni non convenienti sono rifiutate.

- Le trasformazioni sono applicate in modo iterativo.

- La rete è considerata ottimale quando, rispetto ad un insieme di operatori, nessuno di questi la migliora.

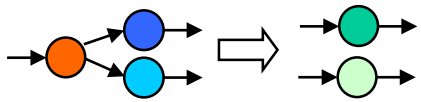
Sintesi di reti combinatorie a più livelli:
Approcci alla ottimizzazione multi-livello

- L'approccio tipicamente utilizzato è quello algoritmico
  - Ogni trasformazione è associata ad un algoritmo
  - L'algoritmo:
    - determina dove può essere applicata la trasformazione;
    - applica la trasformazione e la mantiene se porta benefici;
    - termina quando nessuna trasformazione di quel tipo è ulteriormente applicabile.
  - Il maggior vantaggio dell'approccio algoritmico è che trasformazioni di un dato tipo sono sistematicamente applicate alla rete.
  - Algoritmi legati a differenti trasformazioni sono applicati in sequenza.
  - Sfortunatamente differenti sequenze possono portare a soluzioni diverse.
  - Soluzione: uso di sequenze derivate da sperimentazioni.

Sintesi di reti combinatorie a più livelli:
Trasformazioni base - 1

- Sostituzione di nodi a 1 variabile (*sweep*)
  - sostituisce la variabile assegnata nel nodo a monte in tutti i nodi a valle (globale)

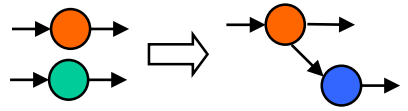
- Eliminazione (*eliminate*)
  - sostituisce l'espressione di un nodo in uno o più nodi a valle e elimina il nodo originale, +prestazioni temporali (globale, diminuisce il percorso di I/O), -area
    👎 = $n\,(l\text{-}1) - l$ 👎$lett_{max}$



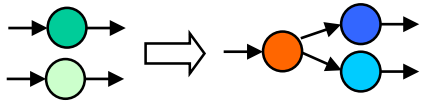
- Semplificazione (*simplify*)
  - manipola l'espressione di un nodo per portarla su due livelli (successiva all'eliminazione) – locale
- Fattorizzazione (*factor*)
  - fattorizza l'espressione di un nodo, ottenendo un'espressione su più livelli. Cerca un'espressione da portare poi a fattore comune anche per altri nodi.

Sintesi di reti combinatorie a più livelli: *Trasformazioni base - 2*

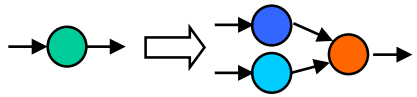
- Sostituzione (*substitute*)
  - Utilizza un nodo *già* presente nella rete per semplificare un altro nodo, sostituendo una sotto-espressione (diminuisce il n° di letterali nel secondo nodo) (globale, aumenta il percorso di I/O)



- Estrazione di una sotto-espressione (*extract*)
  - Simile alla sostituzione ma più generale: il nodo da estrarre non deve già esistere (si cerca un divisore comune a più nodi)



- Decomposizione di una espressione (*decompose*)
  - Applica il teorema di espansione di Shannon: estra da un nodo 2^k nodi (globale, aumenta il percorso di I/O)

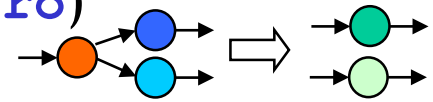


Sintesi di reti combinatorie a più livelli: *Trasformazioni e algoritmi: eliminazione*

- Eliminazione: globale, riduce la lunghezza del percorso I/O
  La lunghezza è calcolata in numero di nodi attraversati.

  - Eliminazione nella rete di tutti i vertici con un solo ingresso e di quelli relativi a funzioni costanti (**`Sweep`**)

  - Riduzione vincolata (**`Eliminate`** opzione **`Val_Intero`**)
    `eliminate 5`

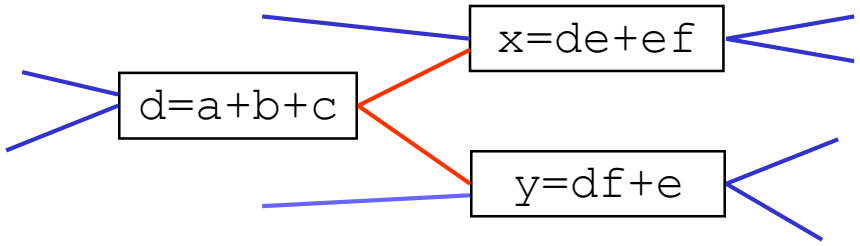


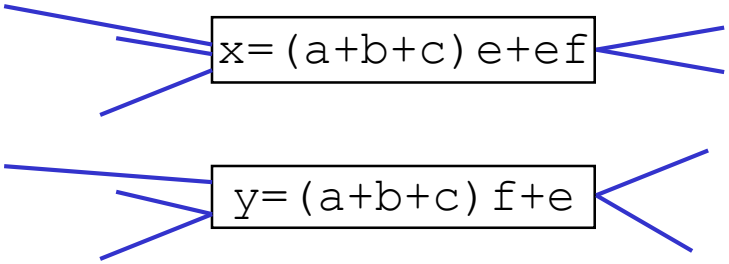
    - L'eliminazione di un vertice è accettata se incrementa l'area di una quantità inferiore a `Val_Intero`.
      - Ad esempio, l'incremento di area può venire calcolato come 👎 = $n(l\text{-}1) - l$, dove l è numero di letterali del nodo eliminato mentre n è il numero di nodi che lo assorbono

  - Riduzione non vincolata
    - tutti i nodi vengono ridotti ad un solo nodo; si ottiene una rete a due livelli.

Sintesi di reti combinatorie a più livelli:
Trasformazioni e algoritmi: eliminazione

- Esempio di `eliminate 2`:





`Costo: 3+4+3= 10` `Costo: 6+5= 11`

`incremento di costo: 2*3-2-3 = 1 (accettato)`

- `eliminate -1`

	n						
	1	2	3	4	5	6	7
1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
2	-1	0	1	2	3	4	5
3	-1	1	3	5	7	9	11
l 4	-1	2	5	8	11	14	17
5	-1	3	7	11	15	19	23
6	-1	4	9	14	19	24	29
7	-1	5	11	17	23	29	35
8	-1	6	13	20	27	34	41
9	-1	7	15	23	31	39	47

Osservano i dati riportati in tabella, relativi al calcolo di `n*l-n-l` al variare di `n` e `l`, si può constatare che l'effetto di `eliminate -1` (con l=1) è quello di eliminare tutti i nodi composti da un solo letterale (*sweep*).

Sintesi di reti combinatorie a più livelli:
Trasformazioni e algoritmi: semplificazione

- Semplificazione: trasformazione locale
  - Semplificazione a due livelli di ogni nodo (**`simplify`**)
    - Metodo esatto (Quine-McCluskey) o euristico.
  - Fattorizzazione di un nodo (**`factor`**)
    - All'interno di un nodo, raccoglie a fattore comune alcuni termini >> da due a più livelli
    - Esempio: (ipotesi: porte a 3 ingressi)

`f= l'+ c'gh'+ ab'k'+ gk'+ a'b'c'd'e'+ ad'e'f'+e'g'i'+e'j';`

Ritardo: 4 τ; Costo: 23

`f= l'+ c'gh'+ k'(ab'+ g)+ e'(d'(a'b'c'+ af')+g'i'+j');`

Ritardo: 7 τ; Costo: 18

Sintesi di reti combinatorie a più livelli:
Trasformazioni e algoritmi: fattorizzazione

- *Fattorizzazione*
  - L'espressione logica fattorizzata può essere ottenuta utilizzando una euristica.
    - Politica della euristica: si pesano i letterali dell'espressione di partenza con ordinamento lessico-grafico a parità di peso
      - Elemento più a destra per primo
  - L'insieme dei termini prodotto viene ricorsivamente partizionato (*blocco della partizione e blocco residuo)* utilizzando come termine di riferimento il letterale che compare con più frequenza.
    - *Ottimizzazione*: tutti i letterali che hanno la stessa cardinalità della partizione vengono raccolti contemporaneamente
  - Ad ogni passo della ricorsione le partizioni sono in **OR** fra loro mentre i termini a fattor comune sono in **AND**.

Sintesi di reti combinatorie a più livelli:
Fattorizzazione - esempi

- Esempio 1: f=acd+a'bc'+a'bd'+b'cd

Ritardo: 3τ
costo: 12

	a	a'	b	b'	c	c'	d	d'
acd	1	0	0	0	**1**	0	**1**	0
a'bc'	0	1	1	0	0	1	0	0
a'bd'	0	1	1	0	0	0	0	1
b'cd	0	0	0	1	**1**	0	**1**	0
	1	**2**	**2**	1	**2**	1	**2**	1

Blocco della partizione indotta dal fattore comune **dc**

	a	a'	b	b'
a	1	0	0	0
b'	0	0	0	1
	1	0	0	**1**

b' + **a**

+

Blocco residuo della partizione

	a	a'	b	b'	c	c'	d	d'
a'bc'	0	**1**	**1**	0	0	1	0	0
a'bd'	0	**1**	**1**	0	0	0	0	1
	0	**2**	**2**	0	0	1	0	1

Fattore comune **a'b**

	c	c'	d	d'
c'	0	1	0	0
d'	0	0	0	1
	1	0	0	**1**

d' + **c'**

Ritardo: 3τ
costo: 8

f=**dc**(**a**+**b'**)+**a'b**(**c'**+**d'**)

Sintesi di reti combinatorie a più livelli:
Fattorizzazione - esempi

- Esempio 2: (forma 2 livelli non ottimizzata)

Ritardo: 4τ
costo: 12

f = abcd+ab'c'd+a'b'cd+a'b'c'd

	a a'	b b'	c c'	d d'
abcd	1 0	1 0	1 0	1 0
ab'c'd	1 0	0 1	0 1	1 0
a'b'cd	0 1	0 1	1 0	1 0
a'b'c'd	0 1	0 1	0 1	1 0
	2 2	1 3	2 2	**4** 0

Fattore comune *d*

	a a'	b b'	c c'
abc	1 0	1 0	1 0
ab'c'	1 0	0 1	0 1
a'b'c	0 1	0 1	1 0
a'b'c'	0 1	0 1	0 1
	2 2	1 **3**	2 2

Blocco residuo della partizione

abc

Blocco della partizione indotta dal fattore comune *b'*

	a a'	c c'
ac'	1 0	0 1
a'c	0 1	1 0
a'c'	0 1	0 1
	1 2	1 **2**

Blocco della partizione indotta dal fattore comune *c'*

	a a'
a	1 0
a'	0 1
	1 **1**

a + a'

a'c

Ritardo: 5τ
costo: 10

f = d(abc+b'(a'c+c'(a+a')))

Sintesi di reti combinatorie a più livelli:
Fattorizzazione - esempi

- Esempio 3: f=abd'+a'bd+a'b'd'+a'cd+b'cd'

Ritardo: 3τ
costo: 15

	a a'	b b'	c c'	d d'
a'bd	0 1	1 0	0 0	1 0
a'cd	0 1	0 0	1 0	1 0
abd'	1 0	1 0	0 0	0 1
a'b'd'	0 1	0 1	0 0	0 1
b'cd'	0 0	0 1	1 0	0 1
	1 3	2 2	2 0	2 **3**

Blocco della partizione indotta dal fattore comune *d'*

	a a'	b b'	c c'
ab	1 0	1 0	0 0
a'b'	0 1	0 1	0 0
b'c	0 0	0 1	1 0
	1 1	1 **2**	1 0

Blocco della partizione indotta dal fattore comune *b'*

	a a'	c c'
a'	0 1	0 0
c	0 0	1 0
	0 1	**1** 0

ab

+

a'+c

Blocco residuo della partizione

	a a'	b b'	c c'	d d'
a'bd	0 1	1 0	0 0	1 0
a'cd	0 1	0 0	1 0	1 0
	0 **2**	1 0	1 0	**2** 0

Fattore comune *a'd*

	b b'	c c
b	1 0	0 0
c	0 0	1 0
	1 0	**1** 0

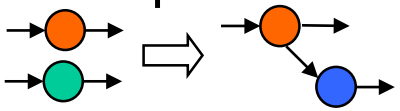
b+c

Ritardo: 5τ
costo: 10

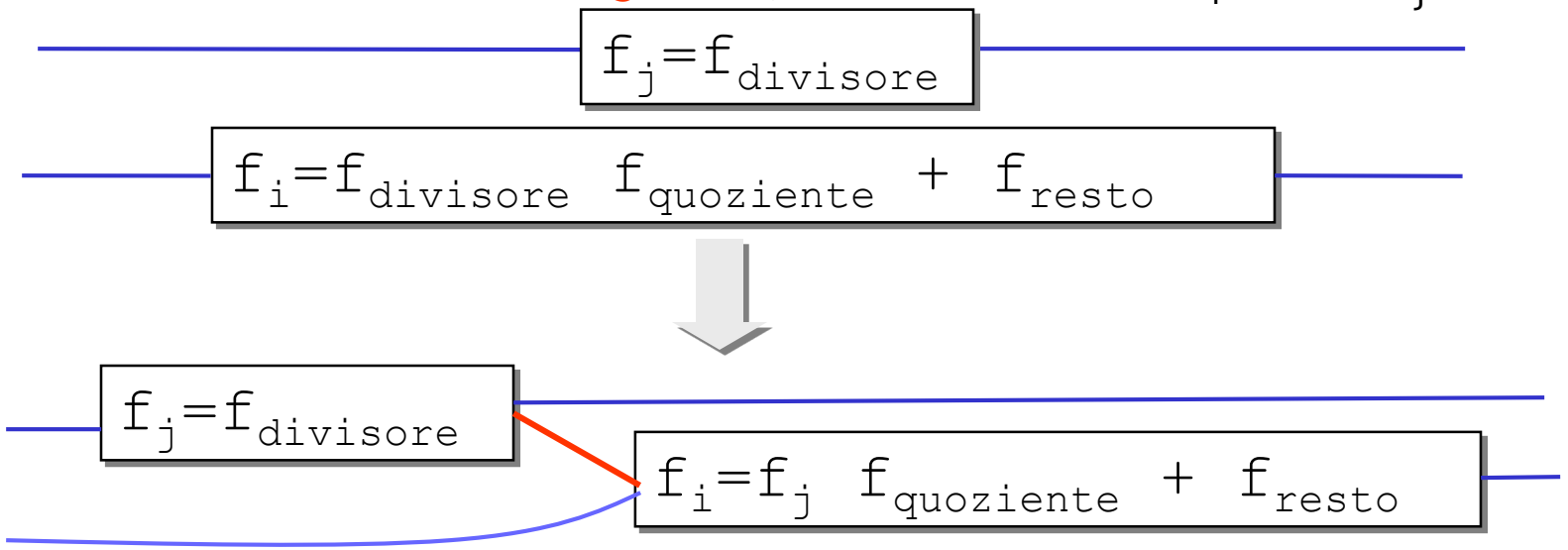
f= d'(ab+b'(a'+c))+a'd(b+c)

Sintesi di reti combinatorie a più livelli:
Trasformazioni e algoritmi: sostituzione

- Sostituzione (**`substitute`**): globale, aumenta la lunghezza del percorso I/O

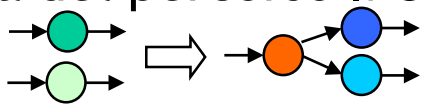


- Sostituzione di una sotto-espressione mediante una variabile (nodo) già presente nella rete. In generale, ogni sostituzione è accettata se produce guadagno nel numero di letterali.
  - Fa uso della divisione algebrica; si cerca di ridurre f_i usando f_j

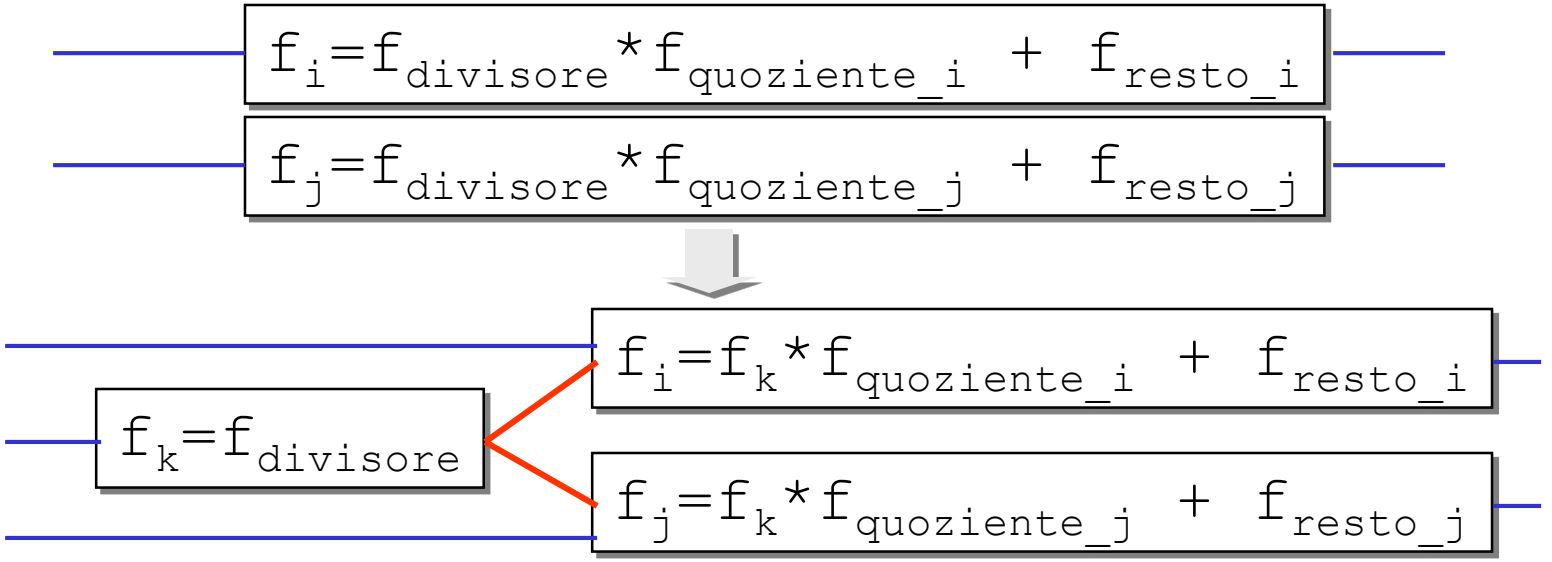


Sintesi di reti combinatorie a più livelli:
Trasformazioni e algoritmi: estrazione

- Estrazione (**`extract`**) globale, aumenta la lunghezza del percorso I/O

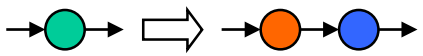


  - Estrae una espressione da gruppi di nodi. L'estrazione viene fatta fino a che è possibile.
    - Identificazione un divisore comune a due o più espressioni.
    - Il divisore costituisce un nuovo nodo della rete ed ha per successori i nodi da cui è stato estratto.

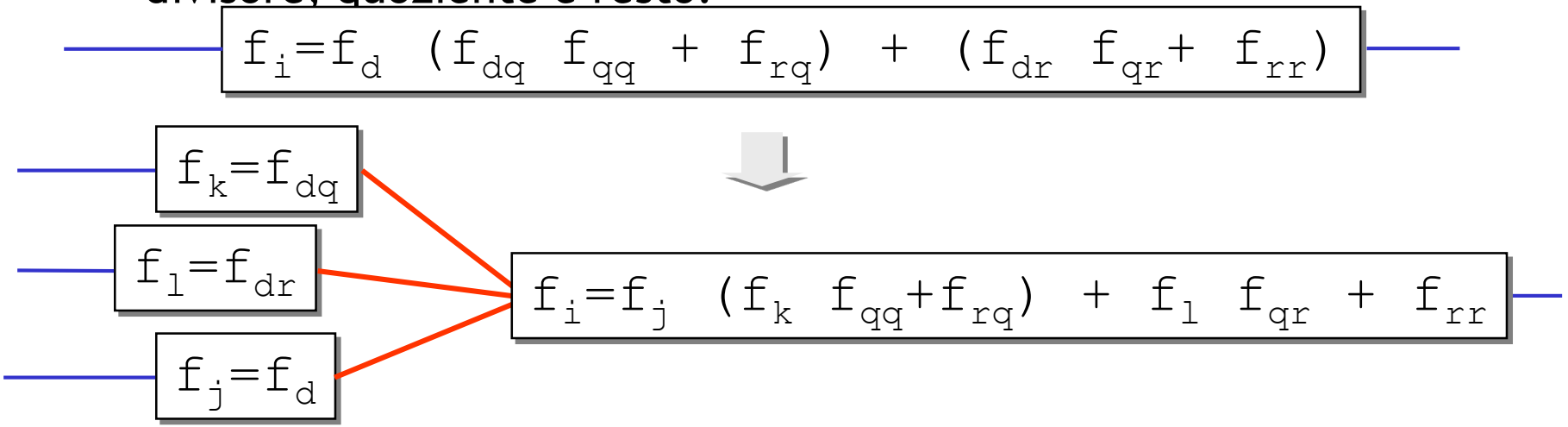


Sintesi di reti combinatorie a più livelli:
Trasformazioni e algoritmi: decomposizione algebrica

- Decomposizione algebrica (**decompose**) : globale, aumenta la lunghezza del percorso I/O



  - Riduce le dimensioni di una espressione per:
    - Rendere più semplice l'operazione di *library mapping*.
    - Aumentare la probabilità di successo della sostituzione
  - La decomposizione può essere applicata ricorsivamente al divisore, quoziente e resto.

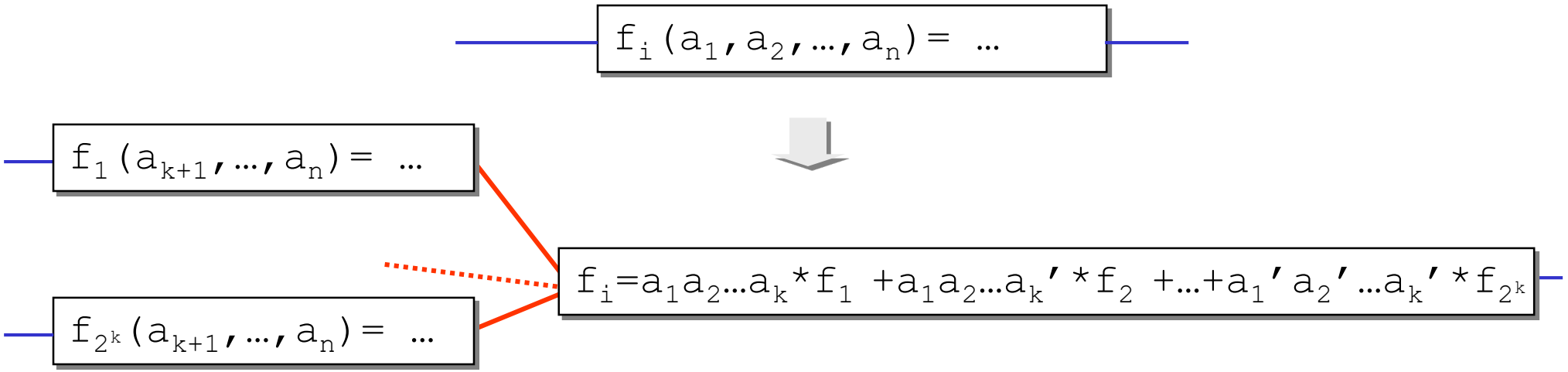


Sintesi di reti combinatorie a più livelli:
Trasformazioni e algoritmi: divisori

- Decomposizione algebrica, estrazione e sostituzione: come si trovano i divisori?
  - Modello algebrico: le espressioni booleane vengono viste come espressioni algebriche, cioè come polinomi di primo grado, nelle variabili naturali e complementate, con coefficienti unitari
  - Lavorando con il modello algebrico valgono le proprietà algebriche mentre quelle dell'algebra booleana non sono valide
  - È definita la divisione algebrica: $f_{divisore}$ è un divisore algebrico di $f_{dividendo}$ se
    - $f_{dividendo} = f_{divisore} \bullet f_{quoziente} + f_{resto}$ e
    - $f_{quoziente} \bullet f_{divisore} \neq 0$ e
    - il supporto di $f_{divisore}$ e di $f_{quoziente}$ è disgiunto
  - Esistono algoritmi diversi per calcolare i divisori di una espressione algebrica

Sintesi di reti combinatorie a più livelli: *Trasformazioni e algoritmi: decomposizione disgiuntiva*

- Decomposizione disgiuntiva semplice (**decompose**) globale, aumenta la lunghezza del percorso I/O
  - Riduce le dimensioni di una espressione (v. decomposizione algebrica)
  - La decomposizione disgiuntiva semplice può essere applicata ricorsivamente.



Decomposizione disgiuntiva (cont.)

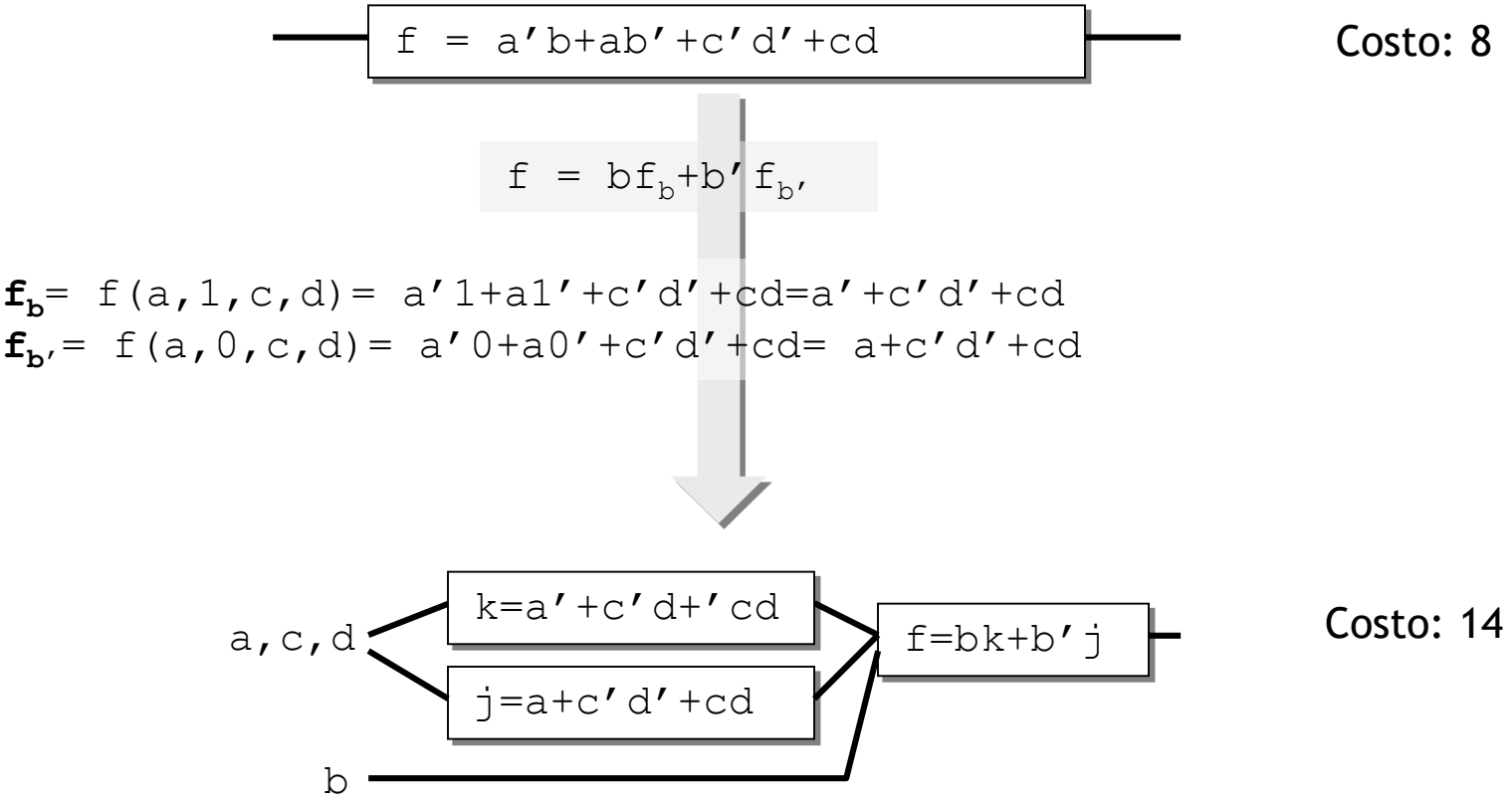
- Deriva dalla applicazione del teorema di *espansione di Shannon*:

$$f(a_1, a_2, .. a_n) = a_1 * f_{a_1} + a_1' * f_{a_1'}$$

- Il risultato, in termini di costo, dipende fortemente dalla decomposizione che viene effettuata sulle variabili di supporto della funzione.
  - Con n variabili il numero di possibili scomposizioni è $2^n - 2$

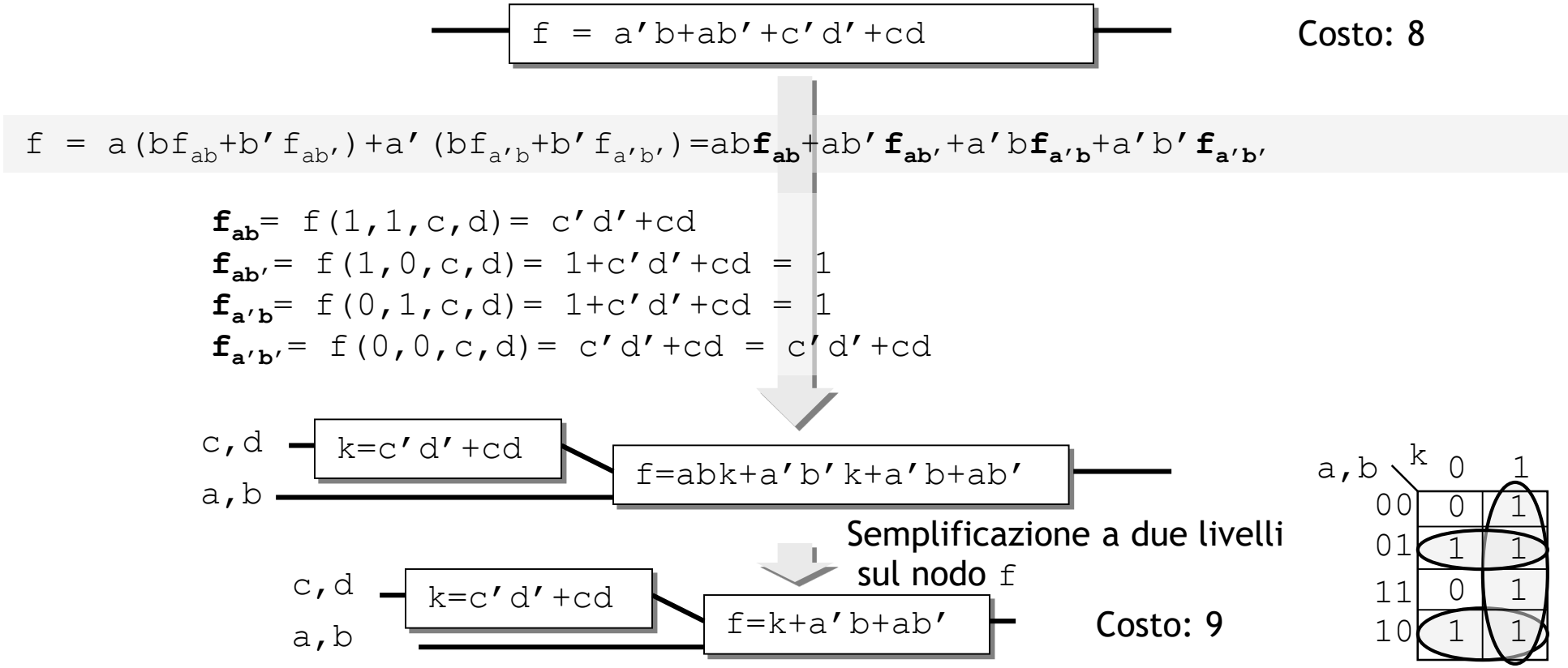
Sintesi di reti combinatorie a più livelli:
Decomposizione disgiuntiva - esempi

- Esempio 1:
  - Esempio: scomposizione disgiuntiva di `f` rispetto a `b`



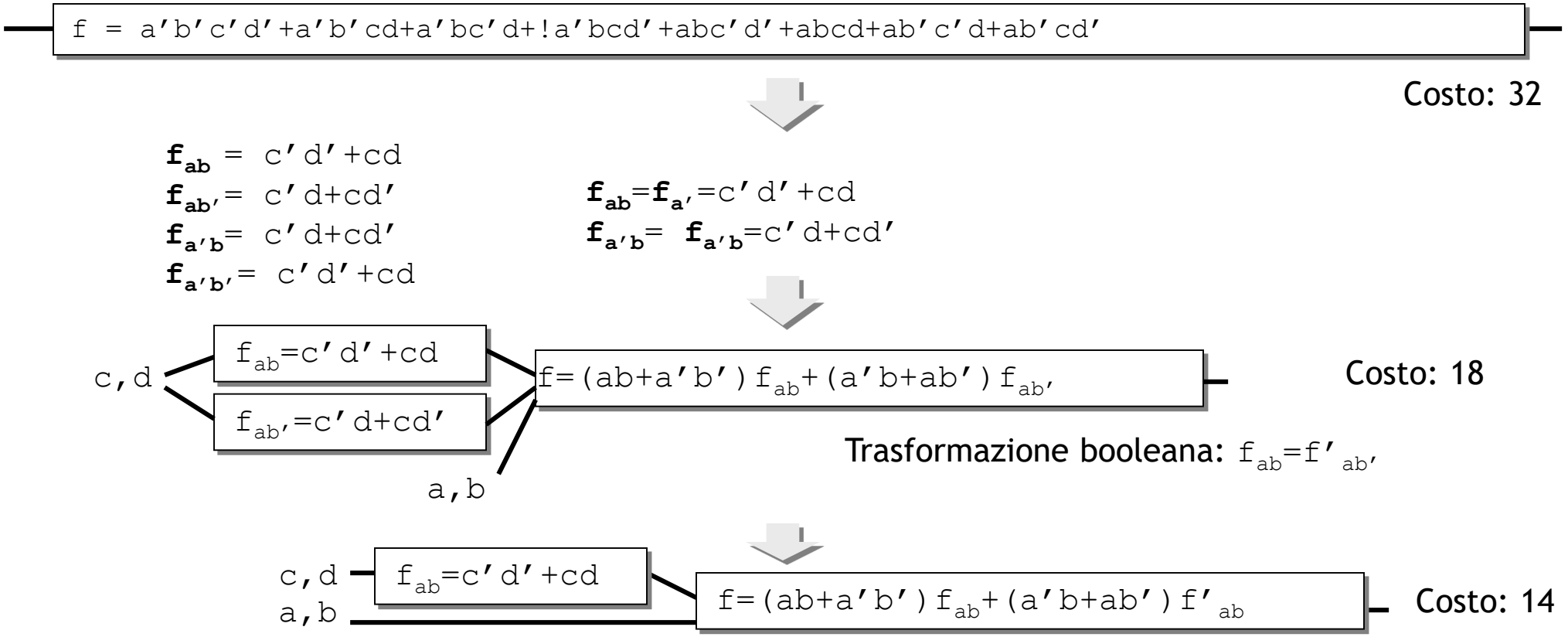
Sintesi di reti combinatorie a più livelli:
Trasformazioni e algoritmi

- Esempio 1:
  - Esempio: scomposizione disgiuntiva di f rispetto ad ab



Sintesi di reti combinatorie a più livelli:
Trasformazioni e algoritmi

- Esempio 2 (xor):
  - scomposizione disgiuntiva di f rispetto ad ab



Sintesi di reti combinatorie a più livelli:
Trasformazioni e algoritmi

- Esempio 3: f=ab'c+a'b'd+a'cd+c'd' — Costo: 11

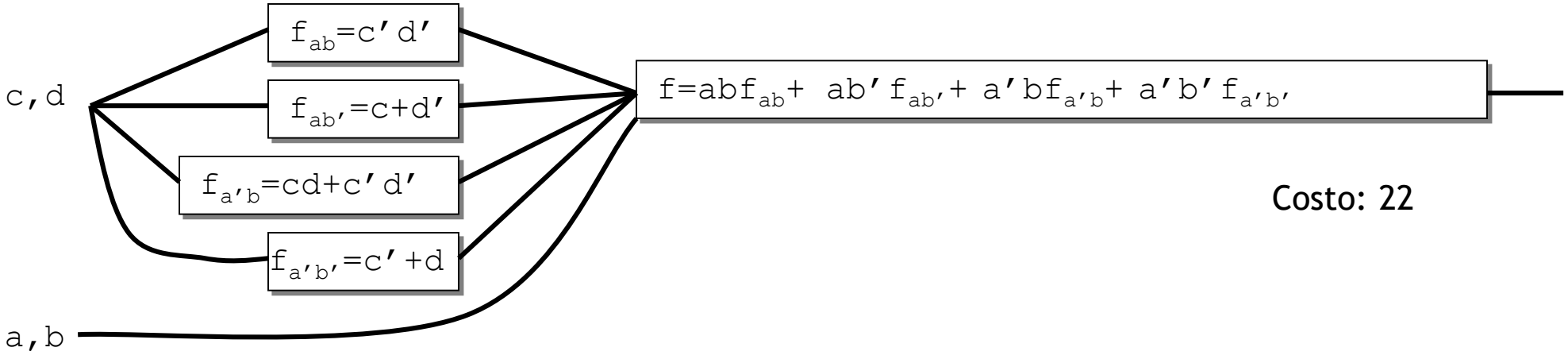
scomposizione disgiuntiva di f rispetto ad ab

$\mathbf{f_{ab}} = c'd'$

$\mathbf{f_{ab'}} = c+c'd' \Rightarrow c+d'$

$\mathbf{f_{a'b}} = cd+c'd'$

$\mathbf{f_{a'b'}} = d+cd+c'd' = \Rightarrow c'+d$



Costo: 22

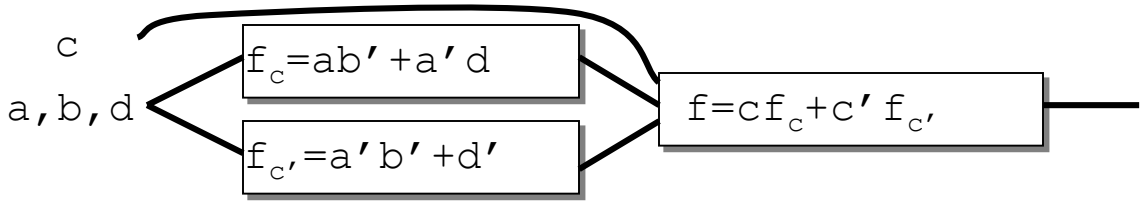
Sintesi di reti combinatorie a più livelli:
Trasformazioni e algoritmi

- Esempio 3 (cont.): $f=ab' c+a'b'd+a'cd+c'd'$ — Costo: 11

scomposizione disgiuntiva di f rispetto ad c

$f_c = ab'+a'b'd+a'd \Rightarrow ab'+a'd$

$f_{c'} = a'b'd+d' \Rightarrow a'b'+d'$



Costo: 11

scomposizione disgiuntiva di f rispetto ad a — Costo: 14

$f_a = b'c+c'd'$

$f_{a'} = b'd+cd+c'd'$

scomposizione disgiuntiva di f rispetto ad b — Costo: 15

$f_b = a'cd+c'd'$

$f_{b'} = ac+a'd+a'cd+c'd' \Rightarrow ac+a'd+c'd'$

scomposizione disgiuntiva di f rispetto ad d — Costo: 13

$f_d = ab'c+a'b'+a'c \Rightarrow ab'+a'b'+a'c$

$f_{d'} = ab'c+c' \Rightarrow ab'+c'$

Rugged script

sweep; eliminate -1; simplify -m nocomp; eliminate –1

sweep; eliminate 5; simplify -m nocomp

resub -a; fx; resub –a

sweep; eliminate –1

sweep; full_simplify -m nocomp

Sintesi di reti combinatorie a più livelli: *Esercizi*

- Esercizi & Soluzioni di fattorizzazione:

```
f= abcd'+ ab'c'+ a'bc'+ b'cd = c(abd'+ b'd)+ c'(ab'+ a'b)
```

```
f= abcd'+ abc'd + ab'c'd'+ a'bc'd'+ a'b'd + a'cd + b'cd =
   d'(abc + c'(ab'+ a'b)) +d(abc'+ c(b'+a')+ a'b')
```

```
f= ac'd+ a'bcd + a'c'd'+ b'c'd= a'bcd + c'(d(b'+a)+a'd')
```

```
f= abc'+ abd'+ ab'cd+ ac'd'+ a'bcd+ bc'd'=
   a(b'cd+ c'd')+ b(a'cd+ d'(c'+a) +a c')
```

```
f= ab'cd+ a'bcd+ a'b'c'+ a'b'd'+ b'c'd'=
   a'bcd+ b'(acd+ d'(c'+ a')+ a'c')
```