LEGGE DI FARADAY – ESERCITAZIONE

1) Una spira viene inserita in un campo magnetico variabile nel tempo, come mostrato nella figura 3.15. Si determini la corrente che circola lungo la spira. A partire da questa si determinino poi le tensioni V_2 e V_1 ai capi dei resistori. [$V_1 = 0{,}1/3$ V, $V_2 = -0{,}2/3$ V] Sono uguali? Se la risposta è no, perché?

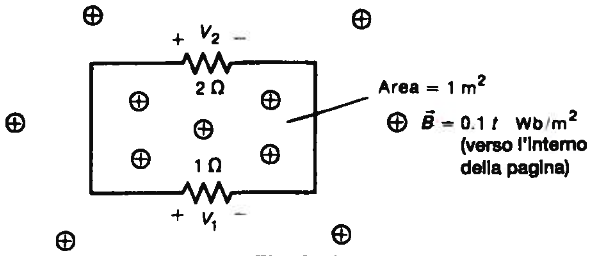


Fig. 3.15

2) Una spira con superficie di 1 m² è completamente immersa in un campo magnetico variabile nel tempo uniformemente distribuito lungo la spira stessa, come mostrato nella figura 3.16. Un voltmetro che preleva una corrente trascurabile è posizionato nei tre modi mostrati nella figura. Si determini, spiegandone i motivi, la lettura che si effettuerà con il voltmetro per ciascuna delle tre posizioni in cui è posto. [$-0{,}1/3$ V, $0{,}2/3$ V, $0{,}2/3$ V]

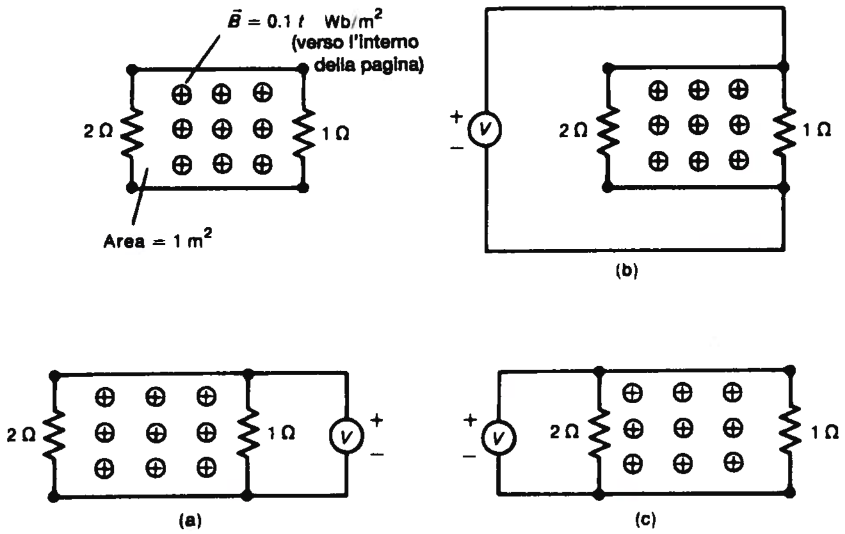


Fig. 3.16

3) Una coppia di fili sottili perfettamente conduttori è disposta in modo da costituire dei binari lungo i quali un altro filo sottile perfettamente conduttore di lunghezza L si muove con velocità u, come mostrato nella figura 3.17. Un campo magnetico $\vec{B}$ è perpendicolare alla spira così formata e diretto verso l'esterno della pagina. Si determini la f.e.m. indotta ai capi di una piccola apertura della spira nel caso in cui la polarità sia quella evidenziata nella figura e il campo magnetico sia dato da (a) $B = B_0$ e (b) $B = B_0 \cos \omega t$. [$-B_0 L u$, $-B_0 L u(\cos \omega t - t \sin \omega t)$]

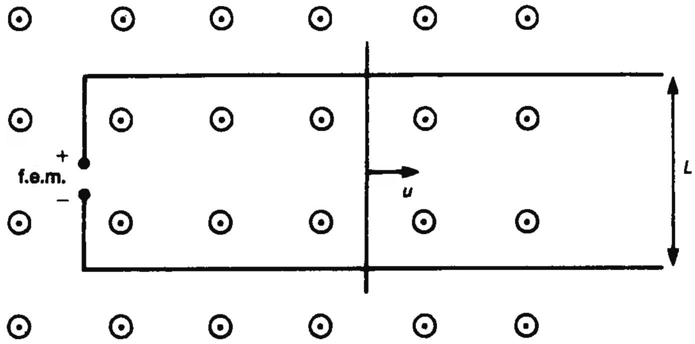


Fig. 3.17

4) Un campo magnetico uniforme e costante di 0,01 Wb/m^2 è diretto lungo l'asse z di un sistema di coordinate rettangolari. Una spira circolare posta nel piano xy e centrata nell'origine ha raggio che decresce alla velocità di 100 m/s. Si calcoli in funzione del tempo la f.e.m. indotta su tale spira nel caso in cui il raggio iniziale della spira stessa sia di 10 cm. [0,628 - 628,3 t]

5) Nella figura 3.14 è mostrata una spira rettangolare con resistenza 0,02 Ω che ruota (con verso indicato nella figura) in un campo magnetico costante $\vec{B} = 0{,}01\ \vec{a}_y$ Wb/m^2. Un lato della spira giace sull'asse z mentre gli altri ruotano con velocità angolare $\omega = 2$ rad/s. Si determini la corrente indotta nella direzione e verso indicati nella figura. La spira giace nel piano xz nell'istante $t = 0$. [$2 \times 10^{-4} \sin \omega t$ V]

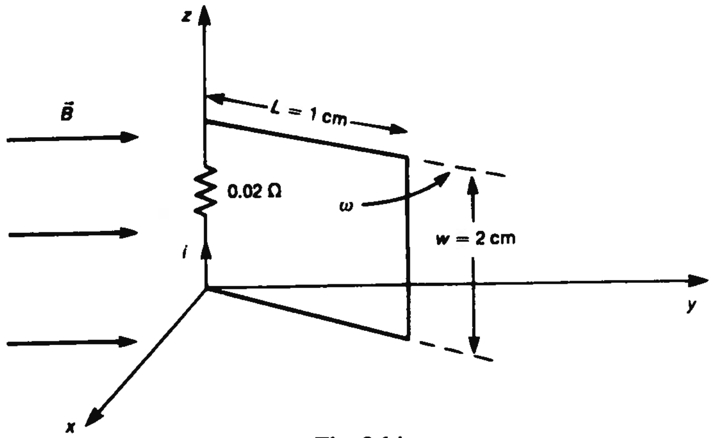
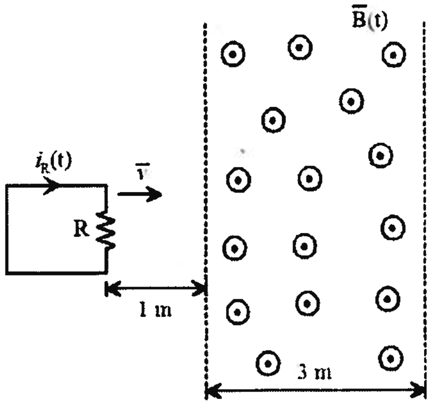


Fig. 3.14

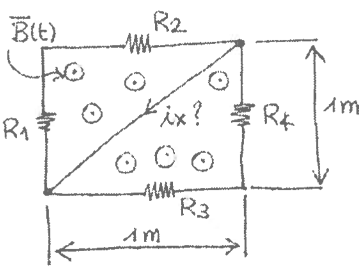
6) Una spira quadrata con lato di 20 cm è posta nello spazio libero in prossimità di un conduttore rettilineo che trasporta una corrente sinusoidale di 0,5 A alla frequenza di 5 kHz. Due dei lati della spira sono paralleli al conduttore e posti rispettivamente alle distanze di 5 cm e 25 cm dal conduttore stesso. Si interrompa ora il circuito della spira in un suo punto. Si determini in questa situazione la tensione indotta e la sua polarità ai capi dell'interruzione. [1,01 mV]

7) Una spira quadrata di lato 1 m si muove con velocità v in una regione parzialmente interessata da un campo magnetico uniforme diretto perpendicolarmente al piano e orientato come in figura. Determinare l'andamento temporale della corrente $i_R(t)$ e fornirne una rappresentazione su grafico quotato nell'intervallo [0; 6 s], sapendo che la posizione della spira al tempo t = 0 è quella in figura.

Dati: $R_1 = 1\ \Omega$; $v = 1$ m/s;
$B = 2$ Wb/m^2



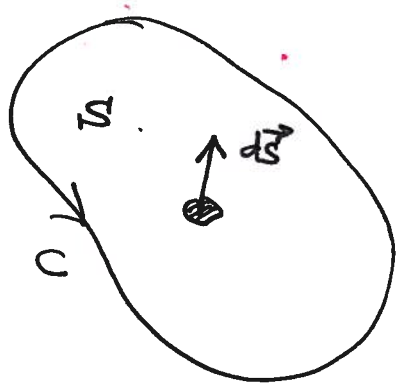
8) Nel circuito in figura, immerso in un campo magnetico uniforme $B(t) = 2\,t^2$ mWb/m^2 diretto perpendicolarmente al piano del circuito come illustrato in figura, determinare la corrente $i_X(t)$. Dati: $R_1 = 3\ \Omega$; $R_2 = 2\ \Omega$; $R_4 = R_3 = 1\ \Omega$.



LEGGE DI FARADAY

FORMA INTEGRALE

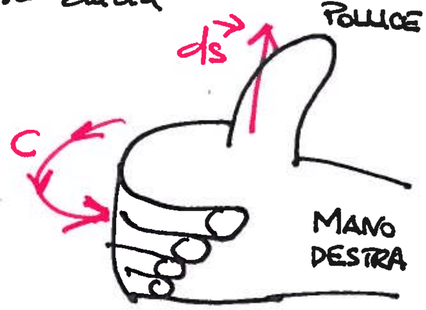
$$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{s}$$



C PERCORSO CHIUSO NELLO SPAZIO

S SUPERFICIE CHE HA C COME CONTORNO

Attenzione: l'orientazione di C e di $d\vec{S}$ sono legate dalla "REGOLA DELLA MANO DESTRA"

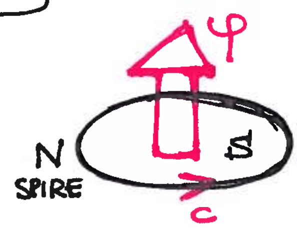


LEGGE DI LENZ (Faraday-Neumann-Lenz)

Consideriamo l'applicazione della legge di Faraday a spire di materiale conduttore, immerse in un campo magnetico:

$$\underbrace{\oint \vec{E}\cdot d\vec{l}}_{e} = -\frac{d}{dt}\underbrace{\left[\underbrace{\int_S \vec{B}\cdot d\vec{s}}_{\varphi}\cdot N\right]}_{\psi}$$

$$\boxed{e = -\frac{d\psi}{dt}} \qquad \boxed{\psi = N\varphi}$$



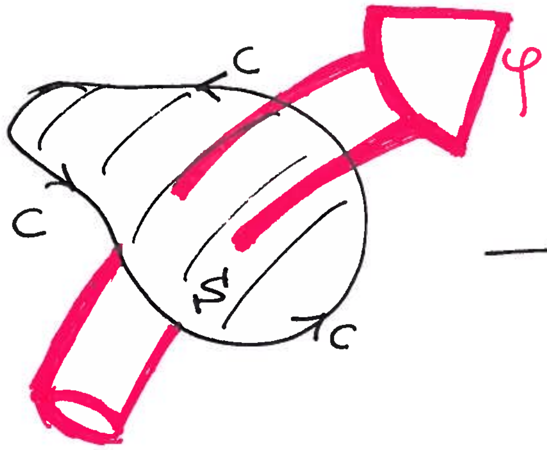
$e =$ forza elettromotrice indotta (f.e.m.)

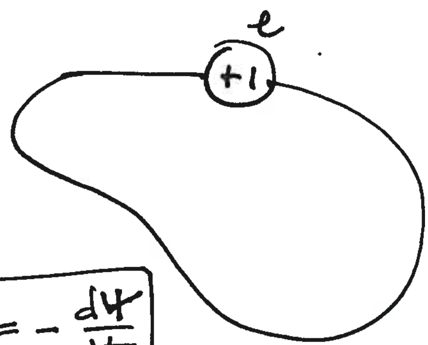
$\varphi =$ flusso del campo induzione magnetica $\vec{B}$ attraverso S

$\psi =$ flusso concatenato con S; dove N e' il "numero di concatenamenti" cioe' il numero di spire avvolte attorno a S

☐ RAPPRESENTAZIONE CIRCUITALE DELLA F.E.M.

Dalla realtà ... → ... al circuito





$$e = -\frac{d\psi}{dt}$$

$$\psi = N\varphi$$

Fare ben attenzione al verso del generatore ideale di tensione "e", che deve essere coerente con il verso di percorrenza di C, a sua volta legato al verso di attraversamento di φ dalla regola della mano destra.

☐ Il flusso concatenato ψ varia nel tempo $\left(e = -\frac{d\psi}{dt} \neq 0\right)$ per due possibili motivi:

1. Perchè $\vec{B}(t)$ varia nel tempo (⇨ F.E.M. TRASFORMATORICA)
2. Perchè $S(t)$ varia nel tempo (⇨ F.E.M. MOZIONALE)

Una spira viene inserita in un campo magnetico variabile nel tempo, come mostrato nella figura 3.15. Si determini la corrente che circola lungo la spira. A partire da questa si determinino poi le tensioni V_2 e V_1 ai capi dei resistori. [$V_1 = 0{,}1/3$ V, $V_2 = -0{,}2/3$ V] Sono uguali? Se la risposta è no, perché?

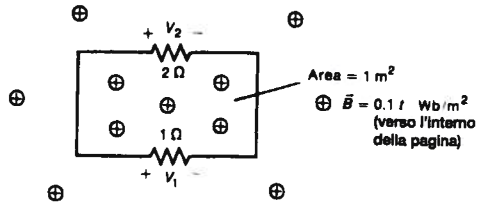
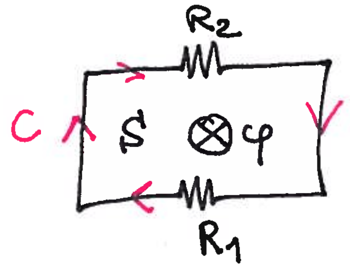


Fig. 3.15

$\otimes$ = vettore entrante nel foglio (ortogonale)

$\odot$ = vettore uscente dal foglio (ortogonale)



$R_1 = 1\,\Omega$; $R_2 = 2\,\Omega$; $S = 1\,m^2$

Flusso del campo induzione magnetica che attraversa S (entrante nel foglio)

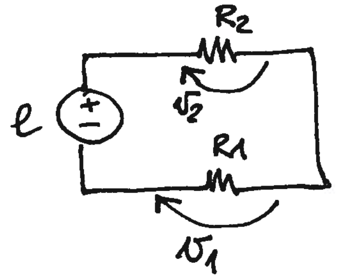
$$\varphi = B \cdot S = 0{,}1t,\ Wb$$

$$N = 1 \Rightarrow \psi = \underbrace{\varphi}_{N\varphi =} = 0{,}1t,\ Wb$$

flusso concatenato con il percorso chiuso C

Oriento C (vedi figura) coerentemente al verso di φ, mediante la regola della mano destra.

Passo alla rappresentazione circuitale:



e : forza elettromotrice indotta rappresentata da un generatore ideale di tensione "concentrato" con verso coerente con l'orientamento di C

$$e = -\frac{d\psi}{dt} = -0{,}1\ V$$

Partitori di tensione:

$$v_2 = e \cdot \frac{R_2}{R_1+R_2} = -0{,}1 \cdot \frac{2}{3} = -\frac{0{,}2}{3}\ V$$

$$v_1 = e \cdot \frac{-R_1}{R_1+R_2} = -0{,}1 \cdot \frac{(-1)}{3} = \frac{0{,}1}{3}\ V$$

Una spira con superficie di 1 m^2 è completamente immersa in un campo magnetico variabile nel tempo uniformemente distribuito lungo la spira stessa, come mostrato nella figura 3.16. Un voltmetro che preleva una corrente trascurabile è posizionato nei tre modi mostrati nella figura. Si determini, spiegandone i motivi, la lettura che si effettuerà con il voltmetro per ciascuna delle tre posizioni in cui è posto. [−0,1/3 V, 0,2/3 V, 0,2/3 V]

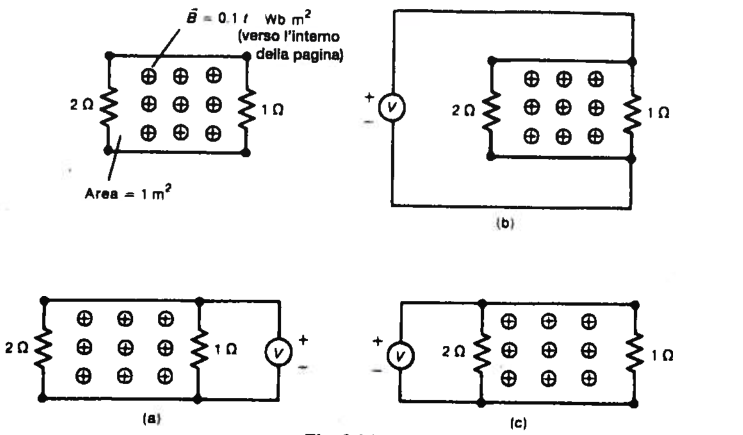
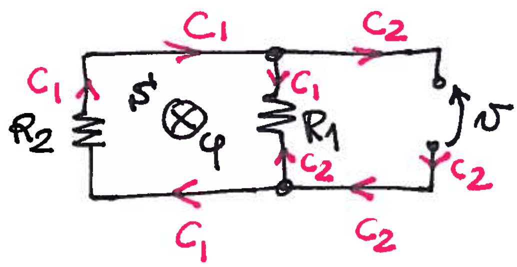


Fig. 3.16

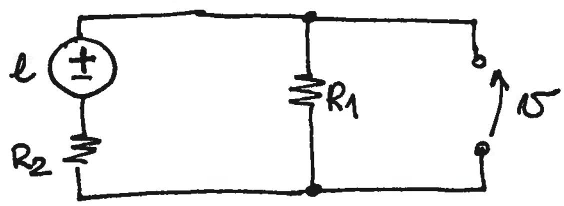
CASO (a):



Il voltmetro ideale ha resistenza → ∞ (circuito aperto)

$\vec{S} = 1\,m^2$; $R_1 = 1\,\Omega$; $R_2 = 2\,\Omega$

Ci sono due percorsi C_1 e C_2. C_2 non concatena flusso.
Rappresentazione circuitale:

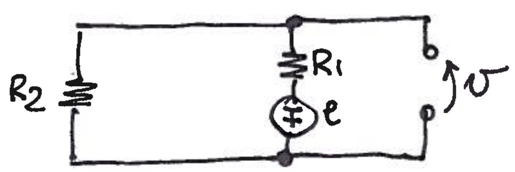


$$\Psi = N\varphi = \varphi = BS = 0{,}1t \text{ , Wb}$$

$$e = -\frac{d\Psi}{dt} = -0{,}1 \text{ V}$$

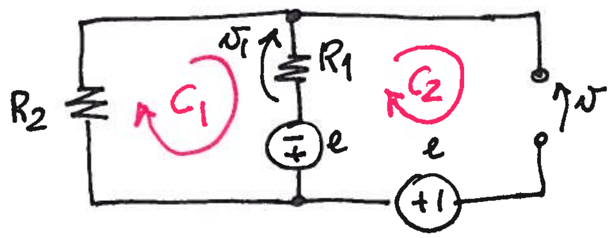
$$v = e \cdot \frac{R_1}{R_1+R_2} = -0{,}1 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{0{,}1}{3} \text{ V}$$

Nota Bene: la forza elettromotrice "e" è stata rappresentata nel circuito con un generatore di tensione. Questo è stato posizionato su uno dei fili appartenenti esclusivamente a C_1. Infatti, la forza elettromotrice su C_2 deve essere nulla (C_2 non concatena flusso).
Avrei commesso un errore, quindi, se avessi rappresentato il circuito nel seguente modo:



NO! ho posizionato il generatore "e" sia su C_2 che su C_1.

Se proprio avessi voluto inserire il generatore "e" nel filo comune a C_1 e C_2, avrei dovuto inserire un altro "e" con verso opportuno, in modo da ottenere forza elettromotrice nulla su C_2:



Su C_1: e

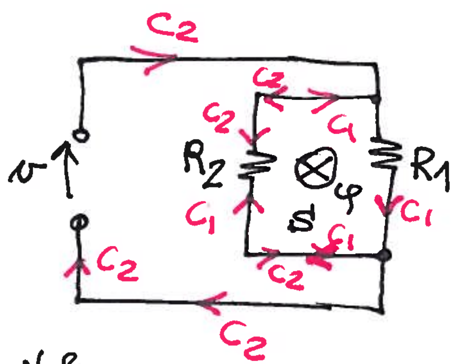
Su C_2: $e - e = 0$

$$v_1 = e \cdot \frac{R_1}{R_1+R_2} = -\frac{0,1}{3}\,V$$

KVL C_2: $v = v_1 - e + e = v_1 = -\frac{0,1}{3}\,V$ come in precedenza.

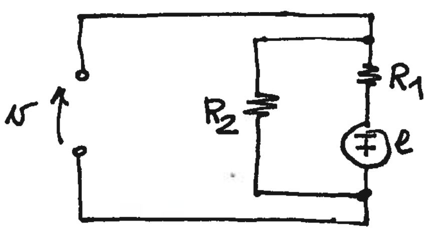
In generale, per evitare errori e seguire il procedimento più semplice, conviene inserire ogni generatore di forza elettromotrice sui fili appartenenti ... esclusivamente al percorso considerato.

Caso (b):



Ci sono due percorsi C_1 e C_2. C_2 non concatena flusso.

Rappresentazione circuitale:



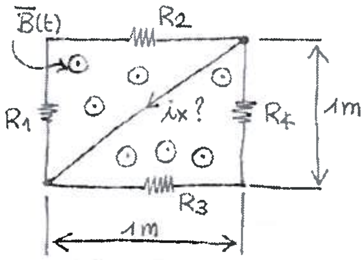
$$e = -\frac{d\varphi}{dt} = -0,1\,V$$

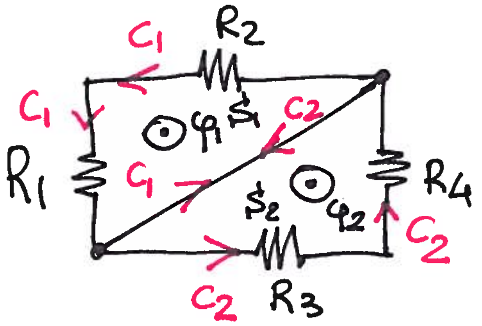
posiziono il generatore di forza elettromotrice sul percorso C_1

$$v = -e \cdot \frac{R_2}{R_1+R_2} = -(-0,1)\cdot\frac{2}{3} = \frac{0,2}{3}\,V$$

Caso (c): È uguale al caso (b)!

Nel circuito in figura, immerso in un campo magnetico uniforme $B(t) = 2\,t^2$ mWb/m^2 diretto perpendicolarmente al piano del circuito come illustrato in figura, determinare la corrente $i_X(t)$. Dati: $R_1 = 3\ \Omega$; $R_2 = 2\ \Omega$; $R_4 = R_3 = 1\ \Omega$.

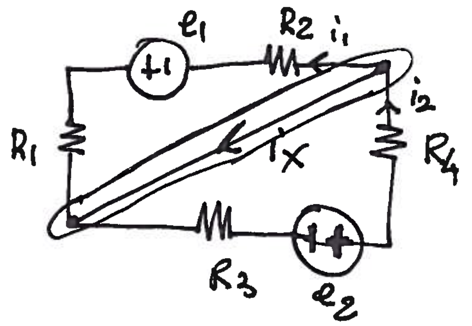




$$S_1 = S_2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}\ m^2$$

(area del triangolo)

Rappresentazione circuitale:



$$\varphi_1 = B \cdot S_1 = \cancel{2}t^2 \cdot \frac{1}{\cancel{2}} = t^2,\ mW/m^2$$

$$\varphi_2 = B \cdot S_2 = t^2,\ mW/m^2$$

$$\Psi_1 = N_1 \varphi_1 = \varphi_1 \qquad (N=1)$$

$$\Psi_2 = N_2 \varphi_2 = \varphi_2 \qquad (N=1)$$

Inserisco i generatori "e_1" e "e_2" sui fili appartenenti ai percorsi C_1 e C_2, rispettivamente.

$$e_1 = -\frac{d\Psi_1}{dt} = -2t,\ mV$$

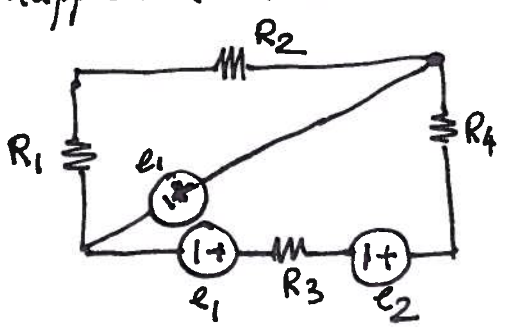
$$e_2 = -\frac{d\Psi_2}{dt} = -2t,\ mV$$

Soluzione del circuito:

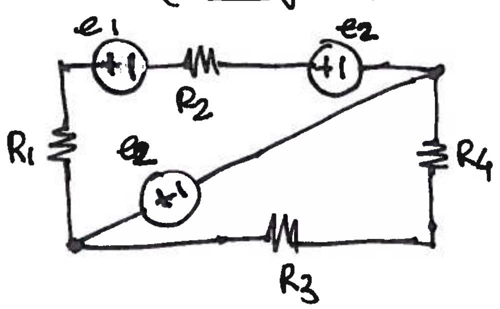
$$i_X = \overbrace{\frac{e_2}{R_3+R_4}}^{i_2} - \overbrace{\frac{e_1}{R_1+R_2}}^{i_1} = \frac{-2t}{2} - \frac{-2t}{5} =$$

$$= \frac{2}{5}t - t = \frac{2-5}{5} = -\frac{3}{5}t,\ mA$$

Nota: Rappresentazioni circuitali alternative (sconsigliate, ma corrette):



;



; ecc...

Una coppia di fili sottili perfettamente conduttori è disposta in modo da costituire dei binari lungo i quali un altro filo sottile perfettamente conduttore di lunghezza L si muove con velocità u, come mostrato nella figura 3.17. Un campo magnetico $\vec{B}$ è perpendicolare alla spira così formata e diretto verso l'esterno della pagina. Si determini la f.e.m. indotta ai capi di una piccola apertura della spira nel caso in cui la polarità sia quella evidenziata nella figura e il campo magnetico sia dato da (a) $B = B_0$ e (b) $B = B_0 \cos \omega t$.
[$-B_0Lu$, $-B_0Lu(\cos \omega t - \omega t \sin \omega t)$]

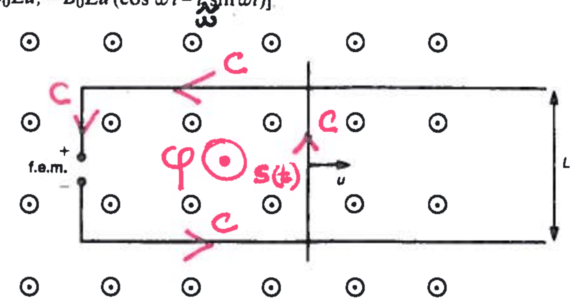
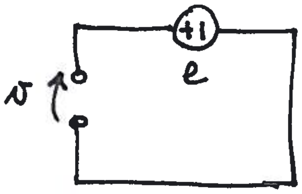


Fig. 3.17

Flusso $\varphi = B(t) \cdot S(t)$ dove $S(t) = L \cdot ut$

Flusso concatenato $(N=1)$ $\psi = N\varphi = \varphi = B(t) \cdot L \cdot ut$

Rappresentazione circuitale



Oriento la forza elettromotrice e coerentemente con la regola della mano destra e il verso del flusso (vedi percorso C)

$$v = e = -\frac{d\psi}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(B(t)\, L\, ut\right)$$

- Caso (a) (campo magnetico $B = B_0$ costante)

$$\boxed{v = e = -B_0 L u}$$

Viene indotta una forza elettromotrice MOZIONALE perche' la superficie S varia nel tempo

- Caso (b) (campo magnetico $B(t) = B_0 \cos(\omega t)$ variabile nel tempo)

$$v = e = \underbrace{-\frac{dB(t)}{dt} L u t}_{\substack{\text{forza elettromotrice} \\ \text{TRASFORMATORICA} \\ \text{(dovuta alla variazione} \\ \text{del campo magnetico } B)}} \underbrace{- B(t) L u \cancel{\frac{dt}{dt}}^{1}}_{\substack{\text{forza elettromotrice} \\ \text{MOZIONALE} \\ \text{(dovuta alla variazione} \\ \text{della superficie } S)}}$$

(derivazione del prodotto di funzioni)

$$v = e = B_0 \sin(\omega t) \cdot \omega L u t - B_0 \cos(\omega t) L u$$

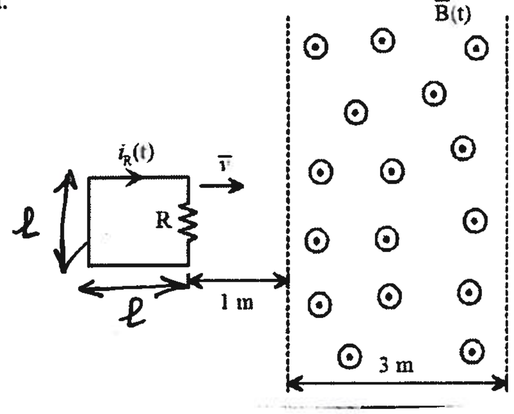
$$\boxed{v = e = B_0 L u \left[\omega t \sin(\omega t) - \cos(\omega t)\right]}$$

Una spira quadrata di lato 1 m si muove con velocità v in una regione parzialmente interessata da un campo magnetico uniforme diretto perpendicolarmente al piano e orientato come in figura. Determinare l'andamento temporale della corrente $i_R(t)$ e fornirne una rappresentazione su grafico quotato nell'intervallo [0; 6 s], sapendo che la posizione della spira al tempo t = 0 è quella in figura.

Dati: $R_1 = 1\ \Omega$; $v = 1$ m/s;

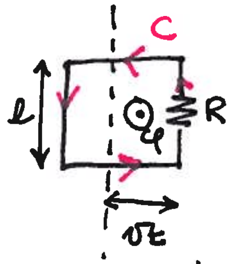
$B = 2$ Wb/m^2

$\ell = 1m$

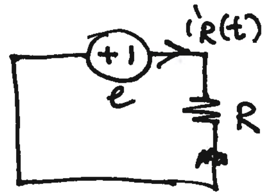


1) $0<t<1s$ $\quad \varphi = 0 \quad \psi = 0 \quad e = 0 \quad i_R(t) = 0$

2) $1<t<2s$ la spira sta entrando nella regione interessata dal campo induzione magnetica



$\Rightarrow$



$$\varphi = B\cdot S(t) = B\cdot \underbrace{\ell v t}_{S(t)}$$

$$\psi = N\varphi = \varphi \quad (N=1)$$

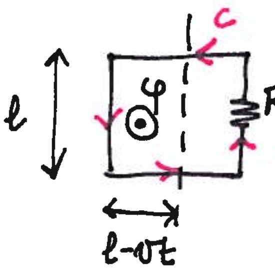
$$e = -\frac{d\psi}{dt} = -B\ell v = -2\cdot1\cdot1 = -2V$$

$$i_R(t) = -\frac{e}{R} = -\frac{-2}{1} = 2A$$

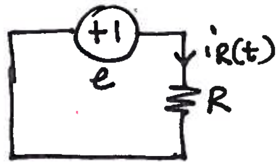
3) $2<t<4s$ la spira e' nella regione interessata dal campo

$$\psi = \varphi = B\cdot\ell^2 \text{ costante!} \Rightarrow e = -\frac{d\psi}{dt} = 0 \qquad i_R = 0$$

4) $4<t<5s$ la spira sta uscendo dalla regione interessata dal campo



$\Rightarrow$

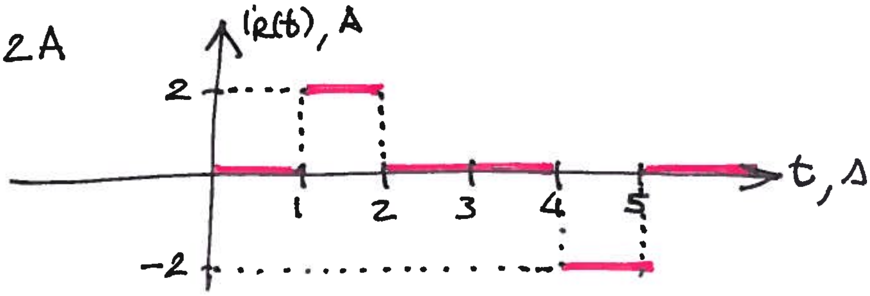


$$\varphi = B\,S(t) = B\cdot\underbrace{\ell\cdot(\ell - vt)}_{S(t)}$$

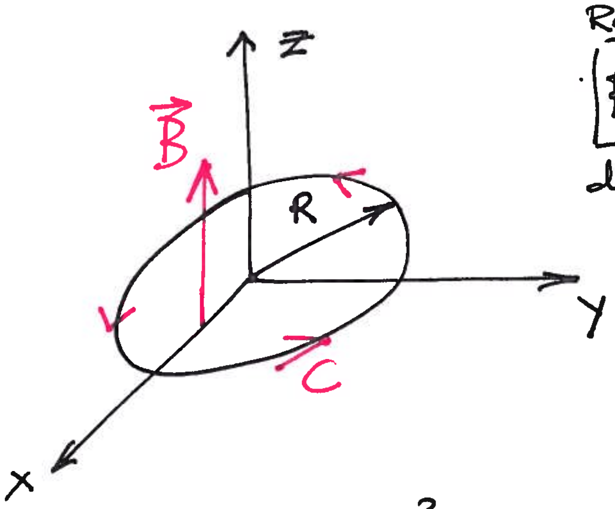
$$\psi = N\cdot\varphi = \varphi \quad (N=1)$$

$$e = -\frac{d\psi}{dt} = -(-B\ell v) = B\ell v = 2\cdot1\cdot1 = 2V$$

$$i_R(t) = \frac{-e}{R} = -\frac{2}{1} = -2A$$



Un campo magnetico uniforme e costante di 0,01 Wb/m^2 è diretto lungo l'asse z di un sistema di coordinate rettangolari. Una spira circolare posta nel piano xy e centrata nell'origine ha raggio che decresce alla velocità di 100 m/s. Si calcoli in funzione del tempo la f.e.m. indotta su tale spira nel caso in cui il raggio iniziale della spira stessa sia di 10 cm. $0{,}628 - 628{,}3t$



Raggio variabile nel tempo

$$\boxed{R(t) = R_0 - vt}$$

dove $v = 100\ m/s$

$R_0 = 10\ cm$

$$\varphi = B \cdot \pi R^2 = B\pi (R_0 - vt)^2$$

$$\psi = N\varphi \underset{N=1}{=} \varphi = B\pi R_0^2 + B\pi v^2 t^2 - 2B\pi v t R_0$$

$$e = -\frac{d\psi}{dt} = -2B\pi v^2 t + 2B\pi v R_0$$

$$= -2 \cdot 0{,}01 \cdot \pi \cdot 100^2 \cdot t + 0{,}01 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 100 \cdot 10 \cdot 10^{-2}$$

$$= -628{,}3\,t + 0{,}628\ ,V$$

Nella figura 3.14 è mostrata una spira rettangolare con resistenza 0,02 Ω che ruota (con verso indicato nella figura) in un campo magnetico costante $\vec{B} = 0{,}01\ \vec{a}_y$ Wb/m^2. Un lato della spira giace sull'asse z mentre gli altri ruotano con velocità angolare $\omega = 2$ rad/s. Si determini la corrente indotta nella direzione e verso indicati nella figura. La spira giace nel piano xz nell'istante $t = 0$. [$2 \times 10^{-4} \sin \omega t$] A

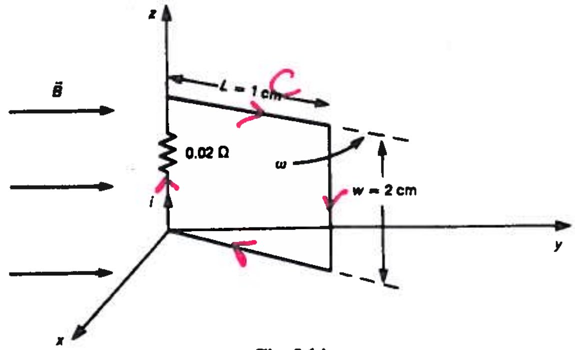
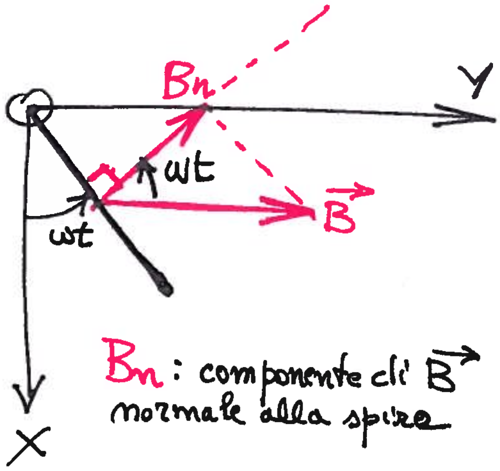


Fig. 3.14



Bn : componente di $\vec{B}$ normale alla spira

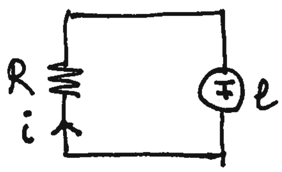
$$B_n = B\cos(\omega t)$$

componente normale che attraversa la spira. Varia nel tempo con legge sinusoidale

$$\varphi = B_n S = B\cos(\omega t)\cdot L\cdot W$$

$$\psi = N\varphi = \varphi = BLW\cos(\omega t)$$

Rappresentazione circuitale:



$R = 0{,}02\,\Omega$

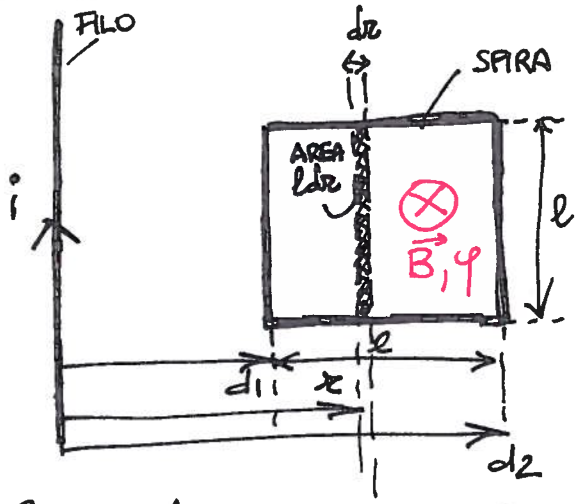
$$e = -\frac{d\psi}{dt} = -\left[-BLW\omega\sin(\omega t)\right]$$

$$= BLW\omega\sin(\omega t)$$

$$i = \frac{e}{R} = \frac{BLW\omega\sin(\omega t)}{R} = \frac{0{,}01\cdot 2\cdot 1\cdot 10^{-2}\cdot 2\cdot 10^{-2}}{0{,}02}\sin(\omega t)$$

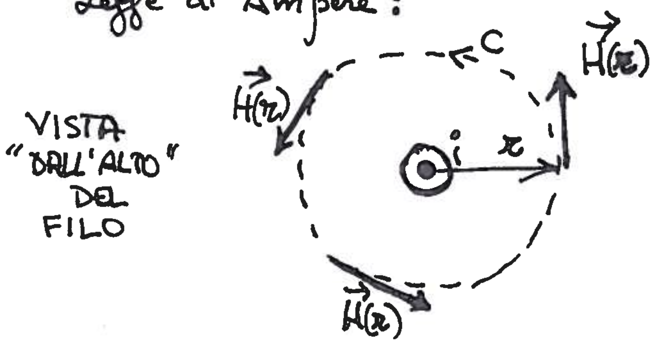
$$= 2\cdot 10^{-4}\sin(2t)\ \text{, A}$$

Una spira quadrata con lato di 20 cm è posta nello spazio libero in prossimità di un conduttore rettilineo che trasporta una corrente sinusoidale di 0,5 A alla frequenza di 5 kHz. Due dei lati della spira sono paralleli al conduttore e posti rispettivamente alle distanze di 5 cm e 25 cm dal conduttore stesso. Si interrompa ora il circuito della spira in un suo punto. Si determini in questa situazione la tensione indotta e la sua polarità ai capi dell'interruzione. [1,01 mV]



$l = 20cm$
$d_1 = 5cm$
$d_2 = 25cm$
$i = 0{,}5 \cos(2\pi f t),\ A$
$f = 5\,kHz$

La corrente i genera un campo magnetico in accordo con la Legge di Ampere:



$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = i$$

$$H \cdot 2\pi r = i \Rightarrow H(r) = \frac{i}{2\pi r}$$

$$\Rightarrow \boxed{B(r) = \mu_0 H(r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}}$$

Calcoliamo il flusso del campo induzione magnetica B concatenato con la spira

$$\varphi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_{d_1}^{d_2} B(r) \underbrace{l\,dr}_{ds} = \frac{\mu_0}{2\pi} i l \int_{d_1}^{d_2} \frac{1}{r} dr = \frac{\mu_0}{2\pi} i l \left[\ln r\right]_{d_1}^{d_2} =$$

$$= \frac{\mu_0}{2\pi} i l \left[\ln(d_2) - \ln(d_1)\right] = \frac{\mu_0}{2\pi} i l \ln\left(\frac{d_2}{d_1}\right)$$

$$\psi = N\varphi = \varphi$$

$$e = -\frac{d\psi}{dt} = -\frac{\mu_0}{2\pi} l \cdot \ln\left(\frac{d_2}{d_1}\right) \cdot \frac{di}{dt} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi} \cdot 20 \cdot 10^{-2} \cdot \ln\left(\frac{25}{5}\right) \cdot 0{,}5 \cdot 2\pi \cdot 5 \cdot 10^3 \sin(2\pi f t)$$

$e = 1{,}01 \cdot 10^{-3} \sin(2\pi f t),\ V$

$|\bar{E}| = 1{,}01\ mV$ (valore massimo)