Esercizio 1

Considerare il gruppo $R \times R$ (dove R è l'insieme dei numeri reali) rispetto all'operazione

$$(a,b) + (c,d) = (a+c,b+d).$$

Mostrare che l'insieme

$$H = \{(x,y) \in R \times R \mid x+ 2y = 0\}$$

È un sottogruppo normale di $(R \times R, +)$.

Traccia di soluzione

Siano $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in H$, questo implica che $x_1+2y_1=0$ e $x_2+2y_2=0$, quindi, essendo $(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2)$ e $x_1+x_2+2(y_1+y_2)=0$, si ha che $(x_1+x_2,y_1+y_2) \in H$ e quindi $(x_1,y_1)+(x_2,y_2) \in H$. E'evidente che in $R \times R$ e quindi in H , l'opposto dell'elemento (x,y) è (-x,-y), quindi - $(x_1,y_1)= (-x_1,-y_1) \in H$ perché $-x_1+2(-y_1)=-(x_1+2y_1)=0$. Dunque H è un sottogruppo per il primo criterio di sottogruppo.

Si verifica poi subito che $(R \times R, +)$ è un gruppo abeliano e quindi ogni suo sottogruppo e in particolare H è normale.

Esercizio 2

Sia G il gruppo delle matrici non singolari di ordine 2 a elementi interi rispetto al prodotto righe per colonne

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix}, a, b, c \in Z, ac = \pm 1 \right\}$$

Dato un intero positivo n, si consideri l'insieme H_n così definito

$$H_n = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ kn & 1 \end{bmatrix}, k \in Z \right\}$$

a) Si mostri che H_n è un sottogruppo di G e che è normale in G.
b) Si provi che il gruppo quoziente G/ H_n ha ordine finito.

Traccia di soluzione

a) Siano $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ kn & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ hn & 1 \end{bmatrix}$, h,k∈Z, due elementi di H_n, Si verifica subito che $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ kn & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ hn & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ kn & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -hn & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ (k-h)n & 1 \end{bmatrix}$, che è una matrice triangolare bassa con gli elementi diagonali uguali ad 1 e con l'elemento di posto (2,1) che è un multiplo intero di n. Dunque $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ kn & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ hn & 1 \end{bmatrix}^{-1} \in H_n$ e dunque H_n è un sottogruppo di G. Dobbiamo ora verificare che è un sottogruppo normale, ovvero che per ogni $\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix} \in G$ e per ogni $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ kn & 1 \end{bmatrix} \in H_n$, $\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ kn & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix}$ appartiene ad H_n. Si ha $\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ kn & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & 0 \\ -b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ kn & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & 0 \\ -b+kan & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac & 0 \\ ka^2n & ac \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ ka^2n & 1 \end{bmatrix}$, che è una matrice triangolare bassa con gli elementi diagonali uguali ad 1 e con l'elemento di posto (2,1) che è un multiplo intero di n e pertanto appartiene ad H_n.

b) Nella notazione usata non sapete svolgere questo punto dell'esercizio, che va letto così. Se ρ è una relazione di congruenza su G tale che la ρ−classe dell'elemento neutro è H_n, allora G

ammette un numero finito di ρ-classi. Considerate la relazione ρ definita nel modo seguente $(\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} d & 0 \\ e & f \end{bmatrix}) \in \rho$ se e solo se a=d, c=f, b≡e (mod n). E' immediato verificare che ρ è una relazione d'equivalenza. Inoltre è una relazione di congruenza perché se $(\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} d & 0 \\ e & f \end{bmatrix}) \in \rho$ e $(\begin{bmatrix} a' & 0 \\ b' & c' \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} d' & 0 \\ e' & f' \end{bmatrix}) \in \rho$ si ha a=d,c=f, b≡e (mod n) e a'=d',c'=f', b'≡e' (mod n), da cui aa'=dd',cc'=ff' e a'b+cb'≡d'e+fe' (mod n), dunque essendo $\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a' & 0 \\ b' & c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa' & 0 \\ a'b + cb' & cc' \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} d & 0 \\ e & f \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d' & 0 \\ e' & f' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dd' & 0 \\ d'e + fe' & ff' \end{bmatrix}$, si ottiene $(\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a' & 0 \\ b' & c' \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} d & 0 \\ e & f \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d' & 0 \\ e' & f' \end{bmatrix}) \in \rho$ ed H_n coincide con la ρ-classe della matrice identica.
Ora è facile osservare che ogni matrice della forma $\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix}$ è associata in ρ ad una matrice $\begin{bmatrix} a & 0 \\ b' & c \end{bmatrix}$ con $0 \le b' \le n-1$ e che le matrici diverse della forma $\begin{bmatrix} a & 0 \\ b' & c \end{bmatrix}$ con $0 \le b' \le n-1$ appartengono a classi distinte, quindi le classi della nostra relazione di congruenza sono 4n (4 scelte di a, c interi con $ac = \pm 1$ ed n scelte di b').

Esercizio 3

Sia G un gruppo abeliano e si consideri l'insieme $H = \{(a,b) \mid a,b \in G\}$ strutturato a gruppo rispetto all'operazione

$$(a,b).(c,d) = (ac,bd)$$

(si osservi che l'unità di H è (1,1) ove 1 è l'unità di G)

Verificare che l'insieme $N = \{(g,g^{-1}) \mid g \in G\}$ è un sottogruppo di H .

Mostrare che l'applicazione f di H in G così definita

$$f: \quad (a,b) \to a^{-1}b$$

è un omomorfismo di gruppi.

Determinare ker f e mostrare che H/ker f è isomorfo a G.

Facoltativo

Mostrare che in un gruppo generico G, N è sottogruppo di H ed f è un omomorfismo di gruppi solo se G è abeliano.

Traccia di soluzione

Siano $(g,g^{-1}),(g_1,g_1^{-1}) \in N$, allora $(g,g^{-1})(g_1,g_1^{-1})=(gg_1,g^{-1}g_1^{-1})$, ma G è abeliano e quindi $g^{-1}g_1^{-1}=g_1^{-1}g^{-1} = (gg_1)^{-1}$, per cui $(g,g^{-1})(g_1,g_1^{-1}) \in N$, inoltre in H l'inverso di un elemento (a,b) risulta essere (a^{-1},b^{-1}) e dunque $(g,g^{-1})^{-1}=(g^{-1},(g^{-1})^{-1}) \in N$, quindi N è un sottogruppo di H.

Poiché il testo dice che f è un'applicazione basta verificare che f((a,b)(c,d))=f((a,b))f((c,d)).

Si ha $f((a,b)(c,d))=f(ac,bd)=(ac)^{-1}(bd)=c^{-1}a^{-1}(bd)$. Si ha poi $f((a,b))f((c,d))=(a^{-1}b)(c^{-1}d)$ da cui per la commutatività e associatività dell'operazione binaria di G si ottiene f((a,b)(c,d))=f((a,b))f((c,d)).

Per definizione $((a,b),(c,d)) \in \ker f$ se e solo se f((a,b))=f((c,d)), ovvero se e solo se $a^{-1}b=c^{-1}d$.

Essendo l'omomorfismo f un epimorfismo di H su G, in quanto ogni elemento $g \in G$ ha almeno la controimmagine (1,g) in H, per il teorema di fattorizzazione degli omomorfismi c'è un isomorfismo di H/ker f su G.

Facoltativo: Supponiamo che N sia un sottogruppo di H, per ogni $g,g_1 \in G$ abbiamo che $(g,g^{-1})(g_1,g_1^{-1})= (gg_1,g^{-1}g_1^{-1})$ deve appartenere ad N e dunque deve essere $g^{-1}g_1^{-1}=(gg_1)^{-1}$, analogamente supponiamo che f sia un omomorfismo per ogni $g,g_1 \in G$, abbiamo che $f((g,1))f((g_1,1))=f((gg_1,1))$ ovvero ancora $g^{-1}g_1^{-1}= (gg_1)^{-1}$. Dall' uguaglianza $g^{-1}g_1^{-1}= (gg_1)^{-1}$ calcolando l'inverso di entrambi i membri abbiamo $g_1g=gg_1$.

Esercizio 4

Dimostrare che la funzione f: $Z \to Z_6$ così definita : $f(z)=[3z]_6$ (dove $[x]_6$ indica la classe di resti modulo 6 contenente x) è un omomorfismo dell'anello $<Z, +, \cdot>$ in $<Z_6,+,\cdot>$. Trovare la ker f-classe di 0 e dire, giustificando la risposta , se è un ideale di $<Z, +, \cdot>$.

La corrispondenza g: $Z \to Z_4$ così definita : $g(z)=[3z]_4$ è un omomorfismo di $<Z,+,\cdot>$ in $<Z_4,+,\cdot>$?

Traccia di soluzione

La applicazione f: $Z \to Z_6$ definita da $f(n)= [3n]_6$ conserva l'operazione di somma, infatti $f(n+m)=[3(n+m)]_6=[3n+3m]_6=[3n]_6+[3m]_6=f(n)+f(m)$.

Conserva anche l'operazione di prodotto, infatti $f(nm)=[3(nm)]_6 =[9(nm)]_6=[3n]_6\ [3m]_6=f(n)f(m)$.

Dunque f è un omomorfismo dell'anello $(Z,+,\cdot)$ nell'anello $(Z_6,+,\cdot)$.

La ker f classe dello 0 è formata da tutti e soli i numeri pari infatti $f(2h)= [6h]_6= [0]_6=f(0)$ e se $f(z)=f(0)$ allora $[3z]_6=[0]_6$ e dunque 2 deve dividere z. I numeri pari sono un ideale di $<Z, +, \cdot>$, in quanto la differenza di due pari e il prodotto di un intero per un pari sono sempre pari.

La applicazione g : $Z \to Z_4$ definita da $f(n)= [3n\ ]_4$ conserva ancora l'operazione di somma, infatti $g(n+m)=[3(n+m)]_4=[3n+3m]_4=[3n]_4+[3m]_4=g(n)+g(m)$.

Verifichiamo se conserva l'operazione di prodotto: $g(nm)=[3(nm)]_4$,$g(n)g(m)=[3n]_4[3m]_4=[9nm]_4$ e non essendo 3 congruo a 9 modulo 4 si ha in genere si ha $[3(nm)]_4 \neq [9nm]_4$ (basta prendere n=m=1), dunque g non è un omomorfismo dell'anello$<Z,+,\cdot>$ nell'anello $<Z_4,+,\cdot>$.

Esercizio 5

Sia $X=\{(a,b)|\ a,b \in R\}$ dove R è l'insieme dei numeri reali, e si definiscano su X le seguenti operazioni binarie:

$\forall (a,b),(c,d) \in X$ $(a,b)\oplus(c,d)=(a+c,b+d)$

$(a,b)\otimes(c,d)=(ac,bc+ad)$

Siano inoltre $<T,+,.>$ l'anello di matrici così definito: $T=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} | a, b \in R\right\}$ rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto ed f la funzione seguente

$f: \quad <X, \oplus, \otimes> \ \to \ <T,+,.>$

$(a,b) \ \to \ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$

1. Mostrare che $<X, \oplus, \otimes>$ è un anello commutativo con unità.
2. Mostrare che f è un isomorfismo di anelli.
3. Stabilire quali sono gli elementi invertibili di X e determinare i loro inversi.

Traccia di soluzione

1. Verifichiamo che $<X, \oplus>$ è un gruppo abeliano. L'operazione $\oplus$ è un'operazione binaria interna in quanto restituisce per ogni coppia di elementi di X uno ed un solo elemento di X. L'operazione $\oplus$ eredita dalla somma in R le proprietà commutativa e associativa, infatti per ogni $(a,b),(c,d) \in X$ si ha $(a,b)\oplus(c,d)=(a+c,b+d)=(c+a,d+b)=(c,d)\oplus(a,b)$, e per ogni $(a,b),(c,d),(e,f) \in X$ si ha $((a,b)\oplus(c,d))\oplus(e,f)=(a+c,b+d) \oplus(e,f)=((a+c)+e,(b+d)+f)$ e $(a,b)\oplus((c,d)\oplus(e,f))=(a,b) \oplus(c+e,d+f)=(a+(c+e),b+(d+f))$. Per la proprietà associativa della somma in R si ha $(a+c)+e=a+(c+e)$, $(b+d)+f=b+(d+f)$ e quindi $((a,b)\oplus(c,d))\oplus(e,f)=(a,b)\oplus((c,d)\oplus(e,f))$. La coppia (0,0) funziona da elemento neutro infatti per ogni $(a,b) \in X$, $(a,b)+(0,0)=(a,b)$ e ogni $(a,b) \in X$ ammette come opposto (-a,-b), infatti $(a,b)+(-a,-b)=(a+(-a),b+(-b))=(0,0)$. Verifichiamo ora che $<X,\otimes>$ è un semigruppo commutativo con unità. X è chiuso rispetto all'operazione $(a,b)\otimes(c,d)=(ac,bc+ad)$ che restituisce per ogni coppia di elementi di X uno ed un solo elemento di X. Verifichiamo che vale la proprietà associativa: $((a,b)\otimes(c,d))\otimes(e,f)=(ac,bc + ad)\otimes(e,f) = ((ac)e, (bc + ad)e + (ac) f) = (ace,bce + ade + acf)$; $(a,b)\otimes((c,d)\otimes(e,f))=(a,b)\otimes(ce,de+cf) = (a(ce),b(ce)+a(de+cf)) = (ace,bce+ade+acf)$ da cui $((a,b)\otimes(c,d))\otimes(e,f)=(a,b)\otimes((c,d)\otimes(e,f))$. Vale la proprietà commutativa, infatti $(c,d)\otimes(a,b)=(ca,da+cb)=(ac,bc+ad)=(a,b)\otimes(c,d)$. Quindi il risultato segue usando le proprietà commutative di somma e prodotto in *R*.

L'elemento (1,0) è l'unità infatti $(a,b)\otimes(1,0)= (a\times1,b\times1+a\times0) = (a,b)$.
Restano quindi da provare le proprietà distributive, e poiché abbiamo appena provato che $<X,\otimes>$ è un semigruppo commutativo, basta verificarne una:
$((a,b)\oplus(c,d))\otimes(e,f)=(a+c,b+d)\otimes(e,f) = ((a+c)e,(b+d)e+(a+c)f)=(ae+ce,be+de+af+cf)$;
$(a,b)\otimes(e,f)\oplus(c,d)\otimes(e,f)=(ae,be+af)\oplus(ce,de+cf) = (ae+ce,be+af+de+cf)$ da cui segue immediatamente la proprietà distributiva.

2. Proviamo prima di tutto che l'applicazione f è un omomorfismo fra anelli:
$f((a,b)\oplus(c,d))=f((a+c,b+d))=\begin{bmatrix} a+c & b+d \\ 0 & a+c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} c & d \\ 0 & c \end{bmatrix}=f((a,b))+f((c,d))$ quindi f conserva l'operazione di somma; inoltre $f((a,b)\otimes(c,d))=f((ac,bc+ad))=\begin{bmatrix} ac & bc+ad \\ 0 & ac \end{bmatrix}$,
$f((a,b)f((c,d))=\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c & d \\ 0 & c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ac & ad+bc \\ 0 & ac \end{bmatrix}$ da cui (usando le proprietà commutative di somma e prodotto in R) si ottiene $f((a,b)\oplus(c,d))=f((a,b))f((c,d))$ pertanto f conserva anche l'operazione di prodotto, quindi è un omomorfismo; è inoltre evidente che si tratta di un omomorfismo suriettivo in quanto ogni elemento di T ha almeno una controimmagine in X. Inoltre $f((a,b))=f((c,d))$ equivale a $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c & d \\ 0 & c \end{bmatrix}$ e dunque implica a=c,b=d e pertanto (a,b)=(c,d). L'applicazione f è quindi iniettiva e pertanto biunivoca e dunque è un isomorfismo.
3. Sia $(a,b)\in X$ e cerchiamo (se esiste) $(x,y)\in X$, tale che $(a,b)\otimes(x,y)=(1,0)$. Da $(a,b)\otimes(x,y)=(1,0)$ segue che $ax = 1$, $bx+ay = 0$ quindi, se $a\neq0$, si ricava $x = 1/a$ e $y = -b/a^2$. Se invece $a = 0$ allora $ax = 0$ e quindi (a,b) non ha inverso.

Esercizio 6

Risolvere in Z_7 l'equazione

$$[4]x = [2]$$

e mostrare che ha un'unica soluzione
Discutere la stessa equazione in Z_6, dire anche per quali valori di a l'equazione:
$[a]\,x + [b] = [0]$ ha in Z_6 una ed una sola soluzione.
Considerare l'equazione

$$[4]x^2 - [2]x = [0].$$

Mostrare che ha esattamente due soluzioni in Z_7. Discutere l'esistenza e l'eventuale numero di soluzioni dell'equazione in Z_6.

Traccia di soluzione

Poiché Z_7 è un campo ogni suo elemento diverso dallo 0 è invertibile e dunque l'equazione $[4]x = [2]$ in Z_7 ha una ed una soluzione data da $x=[4]^{-1}[2]$ ed essendo $[4]^{-1}=[2]$ l'unica soluzione è x=[4].
Inoltre Z_7 non ha divisori dello 0, le soluzioni dell'equazione $[4]x^2 - [2]x =[0]$ devono annullare uno dei due fattori x, [4]x-[2] e quindi sono solo x=[0] e x=[4].
Z_6 non è un campo e [4] è un divisore dello 0 in Z_6, si verifica facilmente che x=[2] è una soluzione, quindi (essendo [4][3]=[0]) è una soluzione anche x=[5] =[2]+[3]. Una equazione $[a]\,x + [b] = [0]$ in Z_n ha una e una sola soluzione se e solo se [a] è un elemento invertibile di Z_n, infatti se [a] non fosse invertibile sarebbe un divisore dello 0 e se $[c]\neq[0]$ è tale che [a][c]=[0] allora se [d] è una soluzione anche $[d]+[c]\neq[d]$ sarebbe soluzione in quanto [a]([d]+[c])+[b]=[a][d]+[a][c]+[b]=[a][d]+[b]=[0]. Gli unici elementi invertibili di Z_n sono le classi che hanno rappresentanti coprimi con n, e quindi nel caso n=6, gli elementi invertibili sono [1],[5], pertanto l'equazione $[a]\,x + [b] = [0]$ ha in Z_6 una ed una sola soluzione se e solo se [a]=[1] o [a]=[5].
L'equazione $[4]x^2 - [2]x =[0]$ in Z_6 ammette sicuramente le soluzioni [0],[2],[5] soluzioni di x=[0] o [4]x-[2]=0 e x=[3] che è soluzione del sistema x=[3], [4]x-[2]=[4].

Esercizio 7

Sia H l'insieme dei numeri complessi a coefficienti interi, cioè

$$H = \{ a+ib \mid a,b \in Z\}$$

e siano

$$K = \{ a+2bi \mid a,b \in Z\}$$
$$J = \{2a+2bi \mid a,b \in Z\}$$

Due sottoinsiemi di H.

Mostrare che:

- **a)** H è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di numeri complessi
- **b)** K è un sottoanello ma non un ideale di H.
- **c)** J è un'ideale di H.
- **d)** Considerare la funzione

$$f: H \to Z_2$$
$$f: a+ib \to [a+b].$$

Verificare se f è un omomorfismo di anelli. In caso affermativo dire se J è il suo ker.

Traccia di soluzione

a) H è un sottoanello dell'insieme dei numeri complessi in quanto sia la differenza sia il prodotto di due numeri complessi a coefficienti interi è un numero complesso a coefficienti interi

b) K è un sottoanello di H in quanto sia la somma sia il prodotto di due numeri complessi a coefficienti interi con parte immaginaria pari è un numero complesso a coefficienti interi con parte immaginaria pari (fare i semplici conti) . Non è un ideale perché ad esempio $(1+i)(1+2i)=-1+3i$.

c) J è un ideale di H, infatti per ogni coppia $2a+2bi$, $2a_1+2b_1i$ di elementi di J, si ha $2a+2bi-(2a_1+2b_1i)=2(a-a_1)+(2b-2b_1)i \in J$ e per ogni $c+di \in H$ si ha $(c+di)(2a+2bi)= (2a+2bi)(c+di)= (2ac-2bd)+(2ad+2bc)i \in J$

d) Per verificare che la funzione f è un omomorfismo di anelli dobbiamo provare che $f((a+ib)+(c+id))=f(a+ib)+f(c+id)$ e che $f((a+ib)(c+id))=f(a+ib)f(c+id)$.

e) Si ha $f((a+ib)+(c+id))=f(a+c+(b+d)i)=[a+c+b+d]$, $f(a+ib)+f(c+id) =[a+b]+[c+d]=[a+b+c+d]$ e essendo $a+c+b+d=a+b+c+d$ si ottiene $f((a+ib)+(c+id))=f(a+ib)+f(c+id)$. Consideriamo ora $f((a+ib)(c+id))=f(ac-bd+i(bc+ad))=[ac-bd+bc+ad]$ e $f(a+ib)+f(c+id) =[a+b][c+d]= [ac+ad+bc+bd]$. Piché in Z_2 si ha $-[x]=[x]$ per ogni x, si ottiene $[ac-bd+bc+ad]= [ac+ad+bc+bd]$ e quindi $f((a+ib)(c+id))=f(a+ib)f(c+id)$, pertanto f è un omomorfismo di anelli. L'ultima domanda va intesa così dire se J è la ker f classe dello 0. Per ogni $2a+2bi \in J$ si ha $f(2a+2bi)=[2a+2b]=[0]=f(0+0i)$, quindi a+ib appartiene alla ker f classe dello 0, tuttavia 1+i appartiene alla ker f classe dello 0 in quanto $f(1+i)=[0]$, ma non sta in J. Pertanto J è solo contenuto nella ker f classe dello 0.

Esercizio 8

Si verifichi se le seguenti applicazioni:

$$f: \quad Z_3 \to Z_6 \qquad\qquad g: Z_3 \to Z_6$$

$$[n]_3 \to [2n]_6 \qquad\qquad [n]_3 \to [4n]_6$$

sono omomorfismi dell'anello $(Z_3,+,\cdot)$ nell'anello $(Z_6,+,\cdot)$.

Traccia di soluzione

La applicazione $f: Z_3 \to Z_6$ definita da $f([n]_3)= [2n]_6$ conserva l'operazione di somma, infatti $f([n]_3+[m]_3)=f([n+m]_3)=[2(n+m)]_6=[2n+2m]_6=[2n]_6+[2m]_6=f([n]_3)+f([m]_3)$.

Verifichiamo se conserva l'operazione di prodotto: $f([n]_3\,[m]_3)=f([nm]_3)=[2(nm)]_6$, $f([n]_3)f([m]_3)=[2n]_6[2m]_6=[2n2m]_6=[4nm]_6$. Quindi in generale $f([n]_3\,[m]_3)\neq f([n]_3)f([m]_3)$ (basta considerare n=m=1 e si ha ovviamente $f([1]_3\,[1]_3)=[2]_6\neq[4]_6=f([1]_3)f([1]_3)$. Dunque f non è un omomorfismo dell'anello $(Z_3,+,\cdot)$ nell'anello $(Z_6,+,\cdot)$.
La applicazione $g: Z_3 \to Z_6$ definita da $f([n]_3)=[4n]_6$ conserva ancora l'operazione di somma, infatti $g([n]_3+[m]_3)=g([n+m]_3)=[4(n+m)]_6=[4n+4m]_6=[4n]_6+[4m]_6=g([n]_3)+g([m]_3)$.
Verifichiamo se conserva l'operazione di prodotto: $g([n]_3\,[m]_3)=g([nm]_3)=[4(nm)]_6$, $g([n]_3)g([m]_3)=[4n]_6[4m]_6=[4n4m]_6=[16nm]_6$ ed essendo $4\equiv16 \pmod 6$ si ha $[4(nm)]_6=[16nm]_6$, dunque g conserva anche il prodotto ed è un omomorfismo dell'anello $(Z_3,+,\cdot)$ nell'anello $(Z_6,+,\cdot)$.

Esercizio 9

Dimostrare che in Z_5 l'equazione $([4]x-[3])([2]x-[1])=0$ ha due sole soluzioni e determinarle. Indicate con [a], [b] le due soluzioni trovate, stabilire se il sottoinsieme {[1], [a], [b]} è sottogruppo di Z_5.
Risolvere l'equazione $([4]x-[3])([2]x-[1])=0$ in Z_8.

Traccia di soluzione

Poiché Z_5 è un campo e non ha divisori dello 0, le soluzioni dell'equazione devono annullare uno dei due fattori [4]x-[3], [2]x-[1]. Essendo $[4]^{-1}=[4]$ e $[2]^{-1}=[3]$, le due radici sono a=[4][3]=[2], b=[3][1]=[3]. {[1], [2], [3]} non è sottogruppo del gruppo additivo di Z_5 perché non contiene lo 0, non è sottogruppo del gruppo moltiplicativo di Z_5 in quanto [2][2]=[4]. In entrambi i casi si poteva dire che non era sottogruppo perché (se ci si riferisce al gruppo additivo) 3 non divide 5, (se ci si riferisce al gruppo moltiplicativo) 3 non divide 4.
Z_8 non è un campo, quindi si potrebbero aver anche radici che non annullano alcuno dei due fattori. Il modo più semplice è cercare esaustivamente se esistono delle soluzioni. Con facili conti si ottiene cha tali soluzioni non ci sono.

Esercizio 10

Siano G un gruppo abeliano in notazione moltiplicativa ed n un intero positivo fissato. Si dimostri che

1) la relazione ρ così definita: $(a,b)\in\rho$ se e solo se $a^n=b^n$ è una relazione di congruenza su G
2) la ρ-classe dell'elemento neutro di G è un sottogruppo di G.
3) per n= 2 e per n=3 si trovi la ρ−classe di 1 nel caso in cui G sia l'insieme dei numeri reali non nulli rispetto all'usuale prodotto.

Traccia di soluzione

1) ρ è una relazione di equivalenza, infatti $a^n=a^n$ e quindi $(a,a)\in\rho$, se $(a,b)\in\rho$ allora $a^n=b^n$ e quindi $(b,a)\in\rho$, se $(a,b)\in\rho$ e $(b,c)\in\rho$ allora $a^n=b^n$, $b^n=c^n$ e quindi $a^n=c^n$ da cui $(a,c)\in\rho$.
Poiché G è abeliano si ha per ogni $x,y\in G$ $(xy)^n=x^ny^n$ e quindi se $(a,b)\in\rho$ e $(c,d)\in\rho$ allora $a^n=b^n$, $c^n=d^n$ e quindi $(ac)^n=a^nc^n=b^nd^n=(bd)^n$ da cui $(ac,bd)\in\rho$ e ρ è una congruenza
2) E' ben noto che, per ogni congruenza ρ di un gruppo G, la ρ−classe dell'elemento neutro è un sottogruppo (normale) di G. La verifica diretta nel nostro caso è comunque banale, siano a,b appartenenti alla ρ-classe di e, allora $a^n=b^n=e$ da cui $(a^{-1})^n=(a^n)^{-1}=e$, $(ab)^n=a^nb^n=e$.
4) Per n=2 la ρ−classe di 1 nel gruppo dei numeri reali non nulli rispetto all'usuale prodotto è formata dai numeri reali il cui quadrato è 1, dunque è {+1,-1}. Per n=3, la ρ−classe di 1 nel gruppo dei numeri reali non nulli rispetto all'usuale prodotto è formata dai numeri reali il cui cubo è 1, dunque è {+1}.

Esercizio 11

Si consideri l'insieme A delle matrici quadrate di ordine 2 ad elementi in Z_7 strutturato ad anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di matrici.

a) Si consideri il sottoinsieme B di A così definito

$$B=\left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & a \end{bmatrix} \mid a,b\in Z_7\right\}$$

e si mostri che è un anello rispetto alle stesse operazioni di A.

b) Si determinino i divisori dello zero di B. Quali sono gli elementi invertibili di B?

Traccia di soluzione

a) Sappiamo che A è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di matrici, per dimostrare che B è un anello rispetto alle stesse operazioni si usa il criterio per i sottoanelli. Siano $M_1=\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & a \end{bmatrix}$, $M_2=\begin{bmatrix} c & 0 \\ d & c \end{bmatrix}$ due generici elementi di B, risulta $M_1 - M_2 = \begin{bmatrix} a-c & 0 \\ b-d & a-c \end{bmatrix}$, $M_1M_2=\begin{bmatrix} ac & 0 \\ bc+ad & ac \end{bmatrix}$, ora poiché $a,b,c,d \in Z_7$, si ha che anche $a-c$, $b-d$, ac, $bc+ad \in Z_7$, inoltre entrambe le matrici M_1-M_2 e M_1M_2 sono triangolari basse ed hanno gli elementi diagonali uguali, dunque stanno in B, pertanto B, essendo sottoanello di A, è anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di matrici.

b) Cerchiamo i divisori dello zero di B. Dobbiamo cercare, se esistono, matrici M_1 ed M_2, entrambe non nulle, tali che M_1M_2 sia la matrice nulla. Bisogna cioè vedere se possiamo trovare a,b non entrambi nulli e c,d non entrambi nulli tali che $ac=0$ e $bc+ad=0$ e questo si può fare con $a=0$ e $c=0$, sono divisori dello zero quindi le matrici della forma $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix}$.

Esercizio 12

Sia $G=\left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix} | a,b,c \in Z\right\}$.

a) Si mostri che G è gruppo rispetto all'ordinaria somma di matrici.

b) Si consideri il sottoinsieme $H = \left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix} | a \equiv 0 \bmod 7\right\}$

Si verifichi se H è un sottogruppo di (G, +) ed in caso positivo se è normale in G.

c) Si consideri ora il prodotto righe per colonne tra matrici e si verifichi se l'insieme

$G^*= \left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix} | a,b,c \in Z, ac = \pm 1\right\}$

è gruppo rispetto a tale operazione.

d) Si dica infine se $(G,+,\cdot)$ è un anello rispetto alla somma ed al prodotto sopra considerati e se l'insieme H è un sottoanello di G.

Traccia di soluzione

a) Poiché la somma di due matrici a coefficienti interi e l'opposto di una matrice a coefficienti interi sono matrici a coefficienti interi e poiché la somma di due matrici triangolari basse e l'opposto di una matrice triangolare bassa sono matrici triangolari basse G è un sottogruppo del gruppo additivo della matrici quadrate di ordine 2 e quindi G è gruppo rispetto all'ordinaria somma di matrici.

b) Analogamente la somma di due matrici il cui elemento di posto (1,1) è congruo a 0 modulo 7 è una matrice il cui elemento di posto (1,1) è congruo a 0 modulo 7 e l'opposto di una matrice il cui elemento di posto (1,1) è congruo a 0 modulo 7 è una matrice il cui elemento di posto (1,1) è congruo a 0 modulo 7, quindi H è un sottogruppo di $<G,+>$ ed è un sottogruppo normale di $<G,+>$ in quanto $<G,+>$ è un gruppo abeliano.

c) G^* è un sottoinsieme di $GL(2,R)$, verifichiamo se è un sottogruppo di tale gruppo. Siano $\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} d & 0 \\ e & f \end{bmatrix} \in G^*$, allora $\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d & 0 \\ e & f \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \pm f & 0 \\ \mp e & \pm d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pm af & 0 \\ \pm bf \mp ce & \pm cd \end{bmatrix}$, la

matrice ottenuta è triangolare bassa a coefficienti interi ed inoltre $(\pm af)(\pm cd)=acdf=\pm 1$, dunque appartiene a G*.

d) Poiché il prodotto di due matrici triangolari alte a coefficienti interi è una matrice triangolare alta a coefficienti interi $(G,+,\cdot)$ è un sottoanello dell'anello delle matrici di ordine 2 a coefficienti reali e dunque è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto fra matrici. Siano ora $\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} d & 0 \\ e & f \end{bmatrix} \in H$, si ha $\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d & 0 \\ e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad & 0 \\ bd+ce & cf \end{bmatrix}$, da $ac=\pm 1$ e $df=\pm 1$ si ottiene $adcf=\pm 1$, inoltre essendo $b\equiv 0 \pmod 7$, $e\equiv 0 \pmod 7$ si ha poi $bd\equiv 0 \pmod 7$, $ce\equiv 0 \pmod 7$ e quindi $bd+ce\equiv 0 \pmod 7$ dunque H è un sottoanello di G

Esercizio 13

Si consideri il gruppo additivo $<Z,+>$ degli interi relativi. Siano n,m due interi fissati e siano H_n ed H_m i sottogruppi di $<Z,+>$ costituti dai multipli di n ed m rispettivamente Si provi che l'intersezione insiemistica di H_n ed H_m è a sua volta un sottogruppo di $<Z,+>$, mentre l'unione insiemistica di H_n ed H_m è un sottogruppo di $<Z,+>$ se e solo se n divide m od m divide n.

Provare che il minimo sottogruppo contenente H_n ed H_m coincide con $<Z,+>$ se e solo se n ed m sono primi fra loro.

Traccia di soluzione

Proviamo che $H_n \cap H_m$ è un sottogruppo di (Z,+). Siano $i,j \in H_n \cap H_m$, allora essendo $i,j \in H_n$ con H_n sottogruppo anche $i-j \in H_n$ ed analogamente essendo $i,j \in H_m$ con H_m sottogruppo anche $i-j \in H_m$, pertanto $i-j \in H_n \cap H_m$ che è quindi sottogruppo.

Ora supponiamo che l'unione insiemistica di H_n ed H_m sia un sottogruppo e né n divida m né m divida n. Poiché n,m appartengono all'unione insiemistica di H_n ed H_m a tale unione deve appartenere n+m, ma se n+m fosse un multiplo di n avremmo che m è un multiplo di n, se fosse un multiplo di m avremmo che n è un multiplo di m, in ogni caso un assurdo, dunque se l'unione è sottogruppo deve accadere che o n divide m o m divide n. Viceversa se n divide m (o m divide n) H_m (H_n) è contenuto in H_n (H_m) e quindi l'unione insiemistica dei due sottogruppi è il sottogruppo H_n (H_m).

Il minimo sottogruppo contenente H_n ed H_m è il sottogruppo H_d costituito dai multipli di d ove d =M.C.D(n,m), infatti sia H_n sia H_m sono contenuti in H_d, inoltre se K è un sottogruppo contenente H_n ed H_m deve contenere anche tutti gli elementi della forma $an+bm$ con $a,b \in Z$. In particolare è noto che se d =M.C.D(n,m), esistono sempre un h e un k interi relativi tali che $d=hn+km$, dunque $d \in K$ e dunque K contiene H_d che è pertanto il minimo sottogruppo contenente H_n ed H_m.

Esercizio 14

Si considerino il gruppo additivo Z degli interi relativi e l'insieme $Z \times Z$ strutturato a gruppo rispetto all'ordinaria operazione

$$(a,b) + (c,d) = (a+c,b+d).$$

Si mostri che l'applicazione $f: Z \times Z \to Z$ definita ponendo $f((x,y))=2x+3y$ è un omomorfismo del gruppo $(Z \times Z, +)$ in (Z,+) e se ne deduca o si mostri direttamente che l'insieme

$$H = \{(x,y) \in Z \times Z \mid 2x+3y = 0\}$$

è un sottogruppo normale di $(Z \times Z, +)$.

Traccia di soluzione

Sappiamo dal testo che $Z \times Z$ è gruppo rispetto all'operazione su di esso definita ed f è una applicazione, dobbiamo quindi solo dimostrare che $f((a,b) + (c,d))=f((a,b)) + f((c,d))$.

Si ha $f((a,b) + (c,d))=f((a+c,b+d))=2(a+c)+3(b+d)=2a+2c+3b+3d$, $f((a,b))=2a+3b$, $f((c+d))=2c+3d)$ quindi per la commutatività e associatività della somma in Z $f((a,b) + (c,d))= f((a,b)) + f((c,d))$.

Con dimostrazione del tutto analoga a quella dell'esercizio 1 possiamo provare direttamente che H è sottogruppo normale di $(Z \times Z, +)$. Oppure possiamo notare che H è la ker f classe di (0,0) e quindi usare il fatto che la ker f classe dell'elemento neutro di un gruppo è un sottogruppo normale per affermare che H è un sottogruppo normale di $(Z \times Z, +)$.

Esercizio 15

Si consideri nell'anello delle classi di resti modulo 6 l'equazione lineare [a]x=[0]. Dire per quali valori di [a] tale equazione ha una ed una sola soluzione. Verificare che l'insieme delle soluzioni dell'equazione nel caso a=3 forma un sottogruppo additivo H di Z_6. H è anche un sottoanello di Z_6? Verificare che esiste un isomorfismo del gruppo additivo di Z_6/H sul gruppo additivo delle classi di resti modulo 2.

Traccia di soluzione

L'equazione lineare $[a]_6x=[0]_6$ ha una e una sola soluzione se e solo se $[a]_6$ è invertibile in Z_6, altrimenti $[a]_6$ è un divisore dello 0 e quindi esiste una classe $[b]_6 \neq [0]$ tale che $[a]_6[b]_6=[0]_6$ e quindi se l'equazione ammette una soluzione $[c]_6$ ammette anche la soluzione $[c]_6+[b]_6 \neq [c]_6$. La classe $[a]_6$ è invertibile se e solo se a e 6 sono relativamente primi (coprimi) quindi l'equazione ha una e una sola soluzione per $[a]_6=[1]_6,[5]_6$.

Per $[a]_6=[3]$ l'equazione diventa $[3]_6x=[0]_6$ ed ammette le soluzioni $[0]_6,[2]_6,[4]_6$ che è un sottogruppo additivo di Z_6, in quanto è finito e chiuso rispetto all'operazione di somma. E' anche un sottoanello di Z_6, in quanto è chiuso rispetto all'operazione di prodotto.

L'ultima domanda esula dal programma svolto, ma potreste risolvere la seguente riformulazione. Sia R la relazione di congruenza così definita $[a]_6R[b]_6$ se e solo se $[a]_6-[b]_6 \in H$, verificare che esiste un isomorfismo del gruppo additivo di Z_6/R sul gruppo additivo delle classi di resti modulo 2.

Osserviamo che c'è un omomorfismo f di $< Z_6,+>$ su $< Z_2,+>$ definito da $f([a]_6)=[3a]_2$. La relazione ker f coincide con R, infatti $f([a]_6)= f([b]_6)$ se e solo se $[3a]_2=[3b]_2$, quindi se e solo se $[3a-3b]_2=[0]_2$, ovvero se e solo se 2 divide 3(a-b) ovvero se e solo se 2 divide a-b e quindi se e solo se $[a-b]_6 \in H$ ovvero se e solo se $[a]_6-[b]_6 \in H$. Quindi per il teorema di fattorizzazione degli omomorfismi c'è un isomorfismo del gruppo additivo di Z_6/ker f ($=Z_6$/R) sul gruppo additivo di Z_2.

Esercizio 16

Nell'anello $<Z_8,+,\cdot>$

- calcolare i divisori dello 0
- discutere esistenza ed eventuale unicità della soluzione dell'equazione [6]x=[2] (dove [a] indica la classe di resti modulo 8 avente come rappresentante a)
- calcolare il numero di soluzioni dell'equazione $[6]x^2-[2]x=[0]$
- provare che $I=\{[0],[2],[4],[6]\}$ è un ideale di $<Z_8,+,\cdot>$
- Trovare gli ideali di $<Z_8,+,\cdot>$ contenuti in I

Traccia di soluzione

I divisori dello 0 di $<Z_8,+,\cdot>$ sono tutte e sole le classi che hanno un rappresentante non primo con 8 quindi [2],[4],[6].

L'equazione [6]x=[2] in Z_8 ammette le soluzioni [3],[7].

L'equazione $[6]x^2-[2]x=[0]$ ammette le soluzioni [0],[3],[7],[2],[4]. Le prime tre sono rispettivamente radici di x=[0] e [6]x-[2]=[0], Le altre sono rispettivamente le soluzioni dei sistemi x=[2] e [6]x-[2]=[4], x=[4] e [6]x-[2]=[2].

I è formato da tutte e sole le classi che hanno rappresentanti pari, poiché 8 è pari, se una classe ha un rappresentante pari è composta tutta di numeri pari, quindi la differenza di due classi che hanno rappresentanti pari è una classe che ha rappresentante pari ed il prodotto di una qualunque classe per una classe che ha rappresentante pari ha rappresentante pari, dunque I è un ideale di $<Z_8,+,\cdot>$

L'insieme {[0]} è un ideale contenuto in I. {[0],[4]} è un ideale contenuto in I perché è formato da tutte e sole le classi i cui rappresentanti sono multipli di 4 e 8 è multiplo di 4 per cui tutti gli elementi delle due classi sono multipli di 4 e quindi la differenza di due classi ed il prodotto di una

qualunque classe di Z_8 con [0] o [4] è una classe il cui rappresentante è un multiplo di 4. Se un ideale di Z_8 contiene [2] allora contiene anche e analogamente se contiene [6]. Quindi gli ideali di Z_8 contenuti in I sono {[0]}, {[0],[4]} e I.

Esercizio 17

Sia R la relazione sull'insieme Z dei numeri interi relativi definita nel seguente modo:
a R b se e solo se $\exists$ n, m $\in$ N tali che $2^n a = 2^m b$, dove N è l'insieme dei numeri naturali.

1. Si dimostri che R è una congruenza di (Z, ·).
2. Si denoti con D l'insieme dei numeri dispari in Z e si dimostri che D $\cup$ {0} è un sottomonoide di (Z, ·).
3. Si consideri l'applicazione $\varphi : D \cup \{0\} \to Z / R$ definita $\varphi(a) = [a]_R$ e si dimostri che φ è un isomorfismo di monoidi.

Traccia di soluzione

1. La R è una relazione di equivalenza infatti
   a. aRa in quanto 2a = 2a
   b. Se aRb allora esistono n,m in N tali che $2^n a = 2^m b$ e quindi banalmente bRa
   c. Se aRb e bRc esistono n,m,r,s in N tali che $2^n a = 2^m b$ e $2^r b = 2^s c$ da cui $2^{n+r} a = 2^{m+r} b$ e $2^{m+r} b = 2^{m+s} c$, quindi $2^{n+r} a = 2^{m+s} c$, cioè aRc.

   La R è anche una relazione di congruenza infatti se aRb e cRd esistono n,m,r,s in N tali che $2^n a = 2^m b$ e $2^r c = 2^s d$, quindi $2^{n+r} ac = 2^{m+s} bd$.
2. D $\cup$ {0} è un sottomonoide di (Z, ·) in quanto 1 appartiene a D $\cup$ {0} e preso 0 ed un qualsiasi numero dispari il loro prodotto è 0, presi due numeri dispari il loro prodotto è dispari.
3. La φ è un'applicazione ben definita, dobbiamo verificare che è un isomorfismo di monoidi. Partiamo studiando Z/R, la R-classe $[0]_R$ contiene ovviamente il solo elemento 0, ogni altra R-classe contiene uno ed un solo numero dispari che possiamo scegliere come rappresentante della R-classe per cui la φ è una corrispondenza biunivoca fra D $\cup$ {0} e l'insieme quoziente Z/R. Il monoide Z/R ha come elemento neutro la R-classe di 1 e poiché $\varphi(1)=[1]_R$, se φ è un isomorfismo, è un isomorfismo di monoidi. Siano ora a,b $\in$ D $\cup$ {0}, se uno dei due numeri è 0 ovviamente $\varphi(ab)= \varphi(0)=[0]_R =[a]_R[b]_R =\varphi(a)\varphi(b)$, se a,b sono entrambi diversi da 0 abbiamo $\varphi(ab)= [ab]_R$, $\varphi(a)\varphi(b)=[a]_R[b]_R$. La R-classe $[ab]_R$ è formata da tutti e soli i numeri della forma $2^r d$ dove d è il massimo numero dispari che divide ab. Siano ora d_1,d_2 i massimi numeri dispari che dividono rispettivamente a e b, poiché $a=2^n d_1$, $b=2^m d_2$ si ha $ab=2^{n+m} d_1 d_2$ e quindi abR d_1d_2 e poiché in ogni R-classe diversa da $[0]_R$, c'è uno e un solo un numero dispari si da $d= d_1d_2$ e quindi $\varphi(ab)= [ab]_R=[d]_R=$ $=[d_1d_2]_R = [d_1]_R\ [d_2]_R=[a]_R\ [b]_R=\varphi(a)\ \varphi(b)$.

Esercizio 18

Si provi che l'insieme G dei polinomi di grado minore o uguale a 2 a coefficienti interi forma un gruppo abeliano rispetto all'operazione di somma di polinomi.
Siano $H=\{ax+2a \mid a\in Z\}$, $K=\{ax^2+2ax+1 \mid a\in Z\}$, H e K sono sottogruppi di G?
G è un anello rispetto a somma e prodotto di polinomi?

Traccia di soluzione

Poiché sappiamo che l'insieme P dei polinomi a coefficienti interi forma un gruppo abeliano rispetto alla operazione di somma di polinomi basta verificare che G è un sottogruppo di P. Poiché la somma di due polinomi di grado minore o uguale a 2 è un polinomio di grado minore o uguale a 2 e l'opposto di un polinomio di grado minore o uguale a 2 è un polinomio di grado minore o uguale a 2 G è un sottogruppo di P.
H è un sottogruppo di G perché usando il secondo criterio di sottogruppo se prendiamo due polinomi ax+2a, bx+2b in H si ha (ax+2a)-(bx+2b)=(a-b)x+2(a-b) con a-b $\in$ Z e dunque (ax+2a)-(bx+2b) $\in$H.
K non è un sottogruppo di G perché non è chiuso rispetto alla somma, infatti il termine noto della somma di due polinomi il cui termine noto è 1, diventa 2.

G non è un anello perché non è chiuso rispetto al prodotto (ad esempio il prodotto di due polinomi di grado 2 è un polinomio di grado 4)