Sintesi di Reti Combinatorie

Ottimizzazione di Reti Combinatorie a Due Livelli: Metodo di Quine-McCluskey

Metodo di Quine-McCluskey per più funzioni

Quine-McCluskey: Multi-Uscita

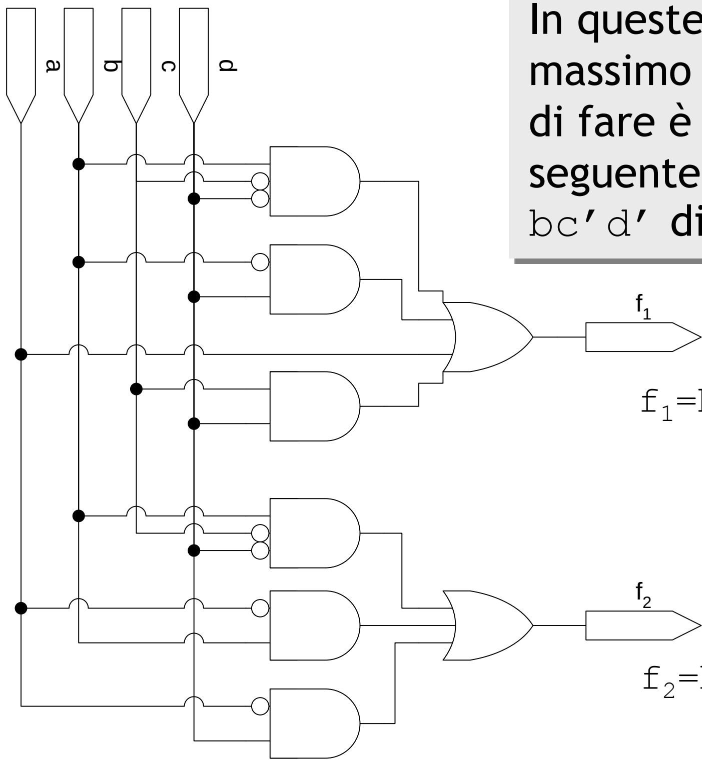
- Nel caso di funzioni a più uscite una prima soluzione consiste nel minimizzare le funzioni singolarmente.
- Il risultato ottenuto potrebbe risultare non ottimale se si considera che le funzioni potrebbero condividere degli implicanti riducendo il costo.

- Gli implicanti che possono essere condivisi non sono necessariamente primi per le funzioni prese singolarmente
  - Se prese singolarmente, le forme ottenute per le funzioni possono non essere minime

- Gli implicanti che possono essere condivisi sono implicanti primi **ma di più funzioni.**
- Come si ottengono gli implicanti primi di più funzioni?

Quine-McCluskey: Multi-Uscita

- Esempio (cifra di merito=cardinalità):

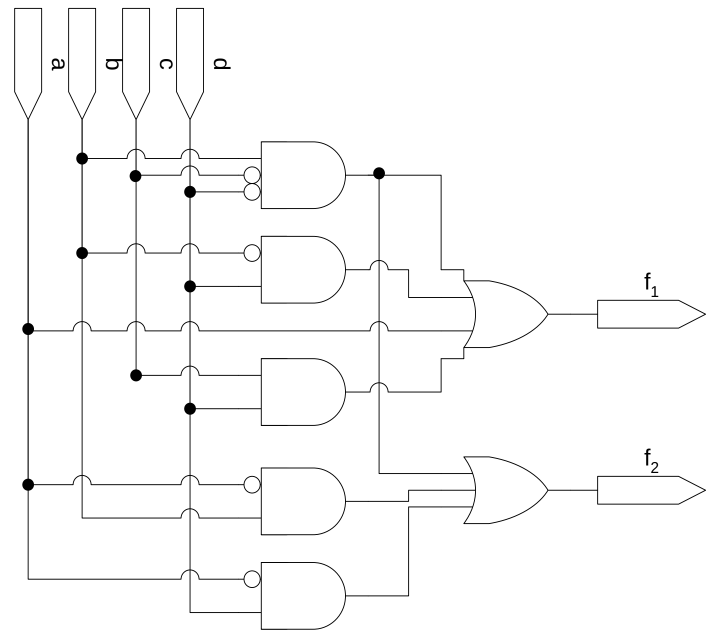


In queste condizioni, il massimo che posso pensare di fare è applicare la seguente condivisione: `bc'd'` di `f1` e `bc'd'` di `f2`.

$f_1=bc'd'+b'd+a+cd$

$f_2=bc'd'+a'b+a'd$

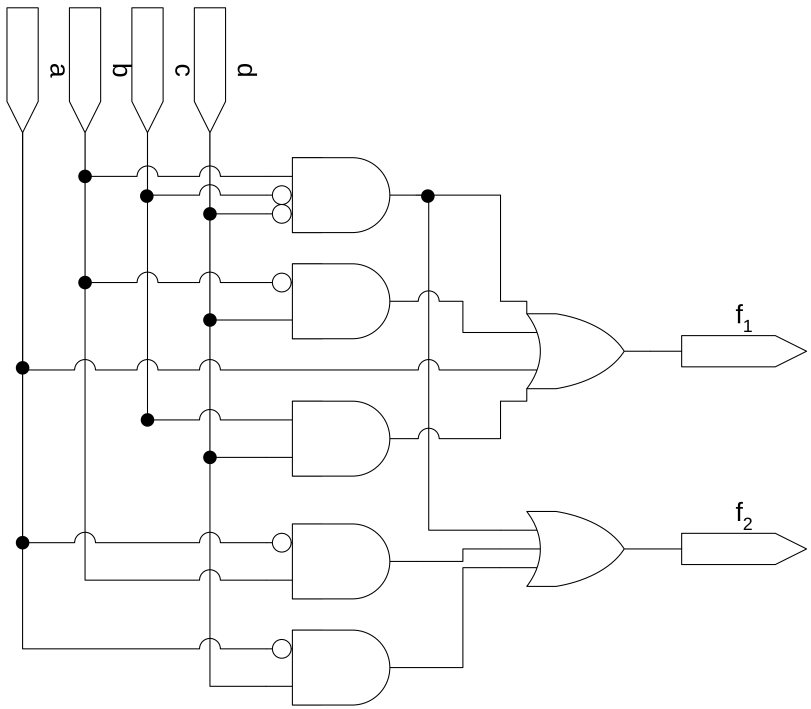
Ottimizzazione indipendente delle due funzioni: cardinalità copertura=7



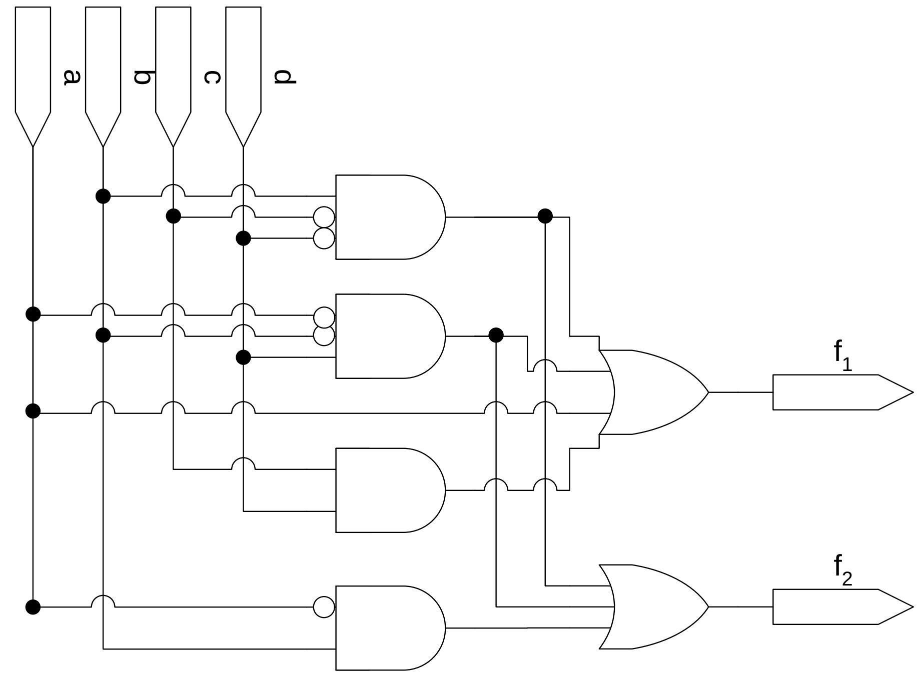
Forma sub-ottima con condivisione: cardinalità copertura=6

Quine-McCluskey: Multi-Uscita

- Esempio (cifra di merito=cardinalità):



?



Nota: il vincolo dei due livelli deve permanere

Forma sub-ottima con condivisione

Forma ottima con condivisione: cardinalità copertura =5

Quine-McCluskey: Multi-Uscita

- Esempio (cont.) (cifra di merito=cardinalità):
  - Giustificazione del risultato

Senza condivisione

f_1

c,d \ a,b	00	01	11	10
00	0	1	1	1
01	1	0	1	1
11	1	1	1	1
10	0	0	1	1

f_2

c,d \ a,b	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	1	1	0	0
11	1	1	0	0
10	0	1	0	0

Con condivisione

f_1

c,d \ a,b	00	01	11	10
00	0	1	1	1
01	1	0	1	1
11	1	1	1	1
10	0	0	1	1

f_2

c,d \ a,b	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	1	1	0	0
11	1	1	0	0
10	0	1	0	0

Nota:
Gli implicanti condivisi non sono tutti primi per f_1 e f_2 prese singolarmente

Quine-McCluskey: Multi-Uscita

- Esempio (cont.) (cifra di merito=cardinalità):
  - Giustificazione del risultato

f_1

c,d \ a,b	00	01	11	10
00	0	1	1	1
01	1	0	1	1
11	1	1	1	1
10	0	0	1	1

f_2

c,d \ a,b	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	1	1	0	0
11	1	1	0	0
10	0	1	0	0

$f_1 * f_2$

c,d \ a,b	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	1	0	0	0
11	1	1	0	0
10	0	0	0	0

Nota: gli implicanti primi di $f_1 * f_2$ che conviene utilizzare sono solo 2. La scelta è un problema legato alla copertura ottima delle funzioni.

Non viene utilizzato nella soluzione ottima perché i suoi "1" risultano già coperti (con cardinalità inferiore a quella generata dal suo utilizzo)

Quine-McCluskey: Multi-Uscita

- In generale, oltre agli implicanti primi delle singole funzioni è necessario considerare anche tutti gli implicanti ottenuti combinando in tutti i modi possibile le funzioni da minimizzare.
  - Il numero delle combinazioni possibili con N funzioni è 2^N-1.
  - Ad esempio, con tre funzioni le combinazioni possibili sono: `f1`, `f2`, `f3`, `f1*f2`, `f1*f3`, `f2*f3`, `f1*f2*f3`

- Si osservi che il metodo analizzato potrebbe essere applicato anche alle *mappe di Karnaugh*. Comunque, tale metodo è limitato sia dal numero delle variabili sia dalla quantità di tabelle da realizzare
  - Ad esempio, 10 funzioni implicherebbero la realizzazione di 1023 tabelle.

- Il metodo di Quine-McCluskey collassa tutte le informazioni in una unica tabella.
  - Il numero degli implicanti primi estratti mantiene il problema di copertura della stessa complessità di quello delle due funzioni.

Quine-McCluskey: Multi-Uscita – Implicanti primi

- L'applicazione del metodo a più funzioni *completamente specificate* richiede estensioni alla costruzione della tabella degli implicanti ed alla soluzione della tabella di copertura
  - Costruzione della tabella degli implicanti
    - si procede come per il caso scalare con la differenza che si associa ad ogni mintermine un ulteriore "*identificatore*" (*maschera di appartenenza)* costituito da tanti bit quante sono le funzioni considerate
    - l'identificatore consente di individuare a quale funzione/i appartiene il mintermine. Quindi, un bit dell'identificatore assume valore 1 se e solo se la funzione che ad esso corrisponde contiene nell' `ONset` tale mintermine; 0 in caso contrario (mintermine dell' `OFFset`).

Quine-McCluskey: Multi-Uscita – Implicanti primi

- Nel caso di funzioni *non completamente specificate* il problema richiede un'ulteriore trasformazione che riporta al caso multi-uscita completamente specificato:
  - I mintermini della funzione contenuti nel `DCset` sono aggiunti all' `ONset`
    - Le condizioni di indifferenza aumentano i gradi di libertà nella generazione degli implicanti primi

Quine-McCluskey: Multi-Uscita – Implicanti primi

- **Esempio1:** $F = |f_1 \;\; f_2| = |ON_1(0,2,12,13)DC_1(4,5) \;\; ON_2(1,4,13)DC_2(11,5)|$

Mappa di Karnaugh di f_1

c,d \ a,b	00	01	11	10
00	1	-	1	0
01	0	-	1	0
11	0	0	0	0
10	1	0	0	0

Mappa di Karnaugh di f_2

c,d \ a,b	00	01	11	10
00	0	1	0	0
01	1	-	1	0
11	0	0	0	-
10	0	0	0	0

Quine-McCluskey: Multi-Uscita – Implicanti primi

- Esempio1 (cont.): $F = |f_1 \quad f_2| = |ON_1(0,2,12,13)DC_1(4,5) \quad ON_2(1,4,13)DC_2(11,5)|$
  - Costruzione identificatore senza `DCset`:

0000	0	10
0001	1	01
0010	2	10
0100	4	01
1100	12	10
1101	13	11

Quine-McCluskey: Multi-Uscita – Implicanti primi

- Esempio1 (cont.): $F = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ON_1(0,2,12,13)DC_1(4,5) & ON_2(1,4,13)DC_2(11,5) \end{vmatrix}$
  - Aggiunta mintermini del `DCset` all'`ONset`:

0000	0	10
0001	1	01
0010	2	10
0100	4	11
0101	5	11
1100	12	10
1011	11	01
1101	13	11

Quine-McCluskey: Multi-Uscita – Implicanti primi

- Generazione di implicanti primi
  - La generazione dell'implicante segue le stesse modalità viste per il caso scalare.
  - L'identificatore delle funzioni di ogni nuovo implicante viene ottenuto come `AND` bit a bit dei due indicatori.
    - **Nota:** se l'indicatore ottenuto è `00..0` il nuovo implicante non è una espansione valida (cioè non appartiene a nessuna funzione) e non viene riportato.
  - Viene *marcata*, ossia coperta da un implicante di livello superiore, quella configurazione il cui indicatore è uguale al risultato dell'`AND` eseguito (l'implicante di livello superiore copre quello di livello inferiore per le stesse funzioni).

    Ad esempio, se consideriamo i due mintermini
    - `011 3 101` e `001 1 011` si ottiene l'implicante `0-1 1,3 001`
    - e nessun mintermine viene marcato come coperto.

Quine-McCluskey: Multi-Uscita – Implicanti primi

- Quattro casi possibili - esempi:
  1. L'identificatore di appartenenza risultante è 000...000
     - La configurazione ottenuta non corrisponde a nessuna espansione valida poiché non appartiene a nessuna delle funzioni.

```
0000   0 1100
         AND        Passo 1   nessun risultato  0000
0001   1 0011
```

  2. L'identificatore di appartenenza risultante non coincide con nessun identificatore di partenza
     - La configurazione ottenuta corrisponde ad una espansione valida ma non coinvolge tutte le funzioni ne del primo ne del secondo implicante coinvolto.

```
                                   ≠
1100   12 1110
         AND        Passo 1   110-   12,13 0110
1101   13 0111
                                   ≠
```

Quine-McCluskey: Multi-Uscita – Implicanti primi

- Quattro casi possibili:
  3. L'identificatore di appartenenza risultante coincide con un solo identificatore di partenza
     - La configurazione ottenuta corrisponde ad una espansione valida che coinvolge tutte le funzioni di un solo implicante coinvolto.

```
1100   12 1111              ≠
          AND      Passo 1   110-   12,13 0011
1101   13 0011 ✓   Passo 2
                            =
```

  4. L'identificatore di appartenenza risultante coincide con entrambi gli identificatore di partenza.
     - La configurazione ottenuta corrisponde ad una espansione valida e coinvolge tutte le funzioni del primo e del secondo implicante coinvolto.

```
                            =
1100   12 0111 ✓   Passo 2
          AND      Passo 1   110-   12,13 0111
1101   13 0111 ✓   Passo 2
                            =
```

Quine-McCluskey:
Multi-Uscita – Implicanti primi

- Esempio1 (cont.): $F = |f_1 \quad f_2| = |ON_1(0,2,12,13)DC_1(4,5) \quad ON_2(1,4,13)DC_2(11,5)|$
  - alcune espansioni:

0000	0	10
0001	1	01
0010	2	10
0100	4	11
0101	5	11
1100	12	10
1011	11	01
1101	13	11

0000 0 10
AND — Passo 1 → nessun risultato 00
0001 1 01

0100 4 11 ✓ ← Passo 2 =
AND — Passo 1 → 010- 4,5 11
0101 5 11 ✓ =

1100 12 10 ✓ =
AND — Passo 1 → 110- 12,13 10
1101 13 11 ← Passo 2 ≠

Nota:
implicante di
più funzioni

Quine-McCluskey: Multi-Uscita – Implicanti primi

- Esempio1 (cont.): $F = \left| f_1 \quad f_2 \right| = \left| ON_1(0,2,12,13) DC_1(4,5) \quad ON_2(1,4,13) DC_2(11,5) \right|$

0000	0	10	✓
0001	1	01	✓
0010	2	10	✓
0100	4	11	✓
0101	5	11	✓
1100	12	10	✓
1011	11	01	
1101	13	11	✓

~~000-~~	~~0,1~~	~~00~~	
00-0	0,2	10	
0-00	0,4	10	
0-01	1,5	01	
010-	4,5	11	
-100	4,12	10	✓
-101	5,13	11	
110-	12,13	10	✓

-10-	4,5,12,13	10

Quine-McCluskey: Multi-Uscita – Implicanti primi

- Nel caso di funzioni *completamente specificate* gli implicanti non marcati sono implicanti primi
- Nel caso di funzioni *non completamente specificate* l'elenco degli implicanti ottenuti subisce un'ulteriore trasformazione:
  - Tutti gli implicanti che coprono solo mintermini del DCset **non** sono implicanti primi e vanno rimossi dall'insieme degli implicati non marcati
    - Es 1 (cont.)
      - L'implicante `1011` che copre solo il mintermine `11` della funzione f_2 non è implicante primo perché copre solo mintermini del DCset di f_2
  - Tutti gli implicanti rimasti sono implicanti primi

Quine-McCluskey: Multi-Uscita – Tabella di copertura

- Tabella di Copertura
  - la tabella di copertura è ottenuta includendo gli implicanti primi e la giustapposizione dei mintermini del `ONset` di tutte le funzioni.

Esempio1 (Cont.):

$$F = \left| f_1 \quad f_2 \right| = \left| ON_1(0,2,12,13) DC_1(4,5) \quad ON_2(1,4,13) DC_2(11,5) \right|$$

```
P1: 00-0  10 0,2
P2: 0-00  10 0,4
P3: 0-01  01 1,5
P4: 010-  11 4,5
P5: -101  11 5,13

P6: -10-  10 4,5,12,13
```

	f1: 0	f1: 2	f1: 12	f1: 13	f2: 1	f2: 4	f2: 13
P1	x	x					
P2	x						
P6			x	x			
P3					x		
P4						x	
P5				x			x

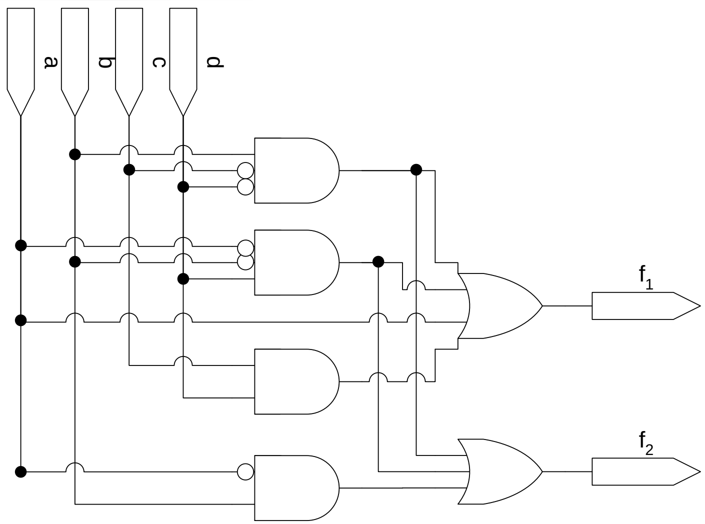
Quine-McCluskey: Multi-Uscita – Tabella di copertura

- Identificazione della copertura ottima: simile al caso di singola uscita con alcune differenze.

Costi

- è necessario inserire la colonna costo anche se questo viene considerato identico per ogni implicante (cifra di merito=cardinalità)
- quando un termine prodotto viene scelto per la prima volta e inserito nella copertura di una o più funzioni, il suo costo viene modificato
  - portato a 0 nel caso in cui la cifra di merito sia la cardinalità degli implicanti
  - portato a +1 nel caso in cui la cifra di merito sia il numero dei letterali
- La modifica del costo serve a tener conto delle possibili condivisioni degli implicanti

Quine-McCluskey: Multi-Uscita – Tabella di copertura - Costo



In questo esempio la soluzione è ottenuta per essenzialità e per dominanza di riga ed è identica sia minimizzando la cardinalità sia i letterali

$$f_1 = \underline{bc'd'} + \underline{a'b'd} + \underline{a} + \underline{cd}$$

$$f_2 = \underline{bc'd'} + \underline{a'b'd} + \underline{a'b}$$

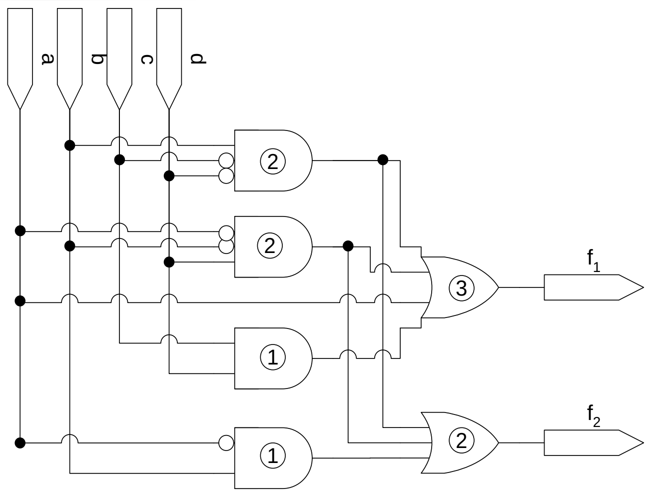
Cardinalità = 5

Numero porte ANDOR = n° tot. impl. – n° impl. con un solo letterale + n° uscite

Numero porte ANDOR = 5 – 1 + 2 = 6

Mettere 0 il costo quando un implicante viene preso significa considerare che il costo sia indipendente dal numero degli ingressi delle porte

Quine-McCluskey:
Multi-Uscita – Tabella di copertura - Costo



$P_0 = bc'd'$
$P_1 = a'b'd$
$P_2 = a$
$P_3 = cd$
$P_4 = a'b$

Espressioni che descrivono la soluzione

$\mathbf{f_1} = P_0+P_1+P_2+P_3 = \mathbf{P_0+P_1+a+cd}$
$\mathbf{f_2} = P_0+P_1+P_4 = \mathbf{P_0+P_1+a'b}$

$\left.\begin{array}{l}\mathbf{P_0 = bc'd'} \\ \mathbf{P_1 = a'b'd}\end{array}\right\}$ **Implicanti condivisi**

Numero totale letterali della soluzione = 15
Numero totale porte ANDOR(2in) = Letterali soluzione - n° implicanti condivisi – n° uscite
Numero totale porte ANDOR(2in) = 15 – 2 – 2 = 11

Mettere +1 il costo quando un implicante viene preso significa tener conto della condivisione

Quine-McCluskey: Multi-Uscita – Tabella di copertura

- Identificazione della copertura ottima: simile al caso di singola uscita con alcune differenze.
  - Essenzialità:
    - se l'implicante in oggetto è essenziale per **tutte** le funzioni coinvolte la riga viene eliminata (scelta dell'implicante) così come tutte le colonne coperte
    - se l'implicante in oggetto **non** è essenziale per **tutte** le funzioni coinvolte (una o più funzioni hanno tale l'implicante non essenziale), la riga viene mantenuta e viene scelto tale implicante per le funzioni per cui è essenziale; in queste ultime vengono eliminate le colonne coperte
    - viene aggiornato il costo dell'implicante

Quine-McCluskey: Multi-Uscita – Tabella di copertura

- Identificazione della copertura ottima: simile al caso di singola uscita con alcune differenze.
  - Dominanza di riga
    - Si guarda l'intera riga. Come per il caso di funzioni ad una sola uscita.
  - Dominanza di colonna
    - La dominanza di colonna ha validità solo all'interno di una funzione. Una colonna della funzione f_i non può coprire ne essere coperta da una colonna presente nella funzione f_k.

Quine-McCluskey: Multi-Uscita – Tabella di copertura

- Esempio 1 (cont.):

	f1				f2		
	0	2	12	13	1	4	13
P1	x	x					
P2	x						
P6			x	x			
P0							
P3					x		
P4						x	
P5				x			x

Nota:
nella scelta di P5 a causa della sua essenzialità in f2 per 13, la riga eliminata è solo quella in corrispondenza di f2 poiché P5 non è essenziale per f1.

Le espressioni Booleane sono

f1=P1+P6

f2=P3+P4+P5

Si osservi che non ci sono termini comuni.

Quine-McCluskey:
Multi-Uscita – Tabella di copertura – Cardinalità

- Esempio di copertura completo con cifra di merito=cardinalità:

	f1										f2									f3						
	2	3	5	7	8	9	10	11	13	15	2	3	5	6	7	10	11	14	15	6	7	8	9	13	14	15
P0						x		x	x	x																
P1			x	x					x	x																
P2					x	x	x	x																		
P3											x	x		x	x	x	x	x	x							
P4		x		x				x		x		x			x		x		x							
P5	**x**	x					x	x			x	x				x	x									
P6			x	x									**x**		x											
P7									x	x														x		x
P8						x			x														x	x		
P9					x	x																**x**	x			
P10														x	x			x	x	**x**	x				**x**	x
P11				x						x					x				x		x					x

Identificazione ed estrazione degli essenziali

f1: {P5}

f2: {P6}

f3: {P9;P10}

Quine-McCluskey:
Multi-Uscita – Tabella di copertura – Cardinalità

- Esempio di copertura completo con costo identico per tutti gli implicanti (a)

		f1						f2							f3
C		5	7	8	9	13	15	2	3	6	10	11	14	15	13
1	P0				x	x	x								
1	P1	x	x			x	x								
~~1~~	~~P2~~			~~x~~	~~x~~										
1	P3							x	x	x	x	x	x	x	
1	P4		x				x		x			x		x	
0	P5							x	x		x	x			
0	P6	x	x												
1	P7					x	x								x
1	P8				x	x									x
0	P9			x	x										
0	P10									x			x	x	
~~1~~	~~P11~~		~~x~~				~~x~~							~~x~~	

dominanza di riga

Soluzione parziale
f1: {P5}
f2: {P6}
f3: {P9;P10}

Quine-McCluskey:
Multi-Uscita – Tabella di copertura – Cardinalità

- (b)

		f1						f2							f3
C		5	7	8	9	13	15	2	3	6	10	11	14	15	13
1	P0				x	x	x								
1	P1	x	x			x	x								
1	P3							x	x	x	x	x	x	x	
1	P4		x				x		x			x		x	
0	P5							x	x		x	x			
0	P6	x	x												
1	P7					x	x								x
1	P8				x	x									x
0	P9			x	x										
0	P10									x			x	x	

dominanza di colonna

Soluzione parziale

f1: {P5}

f2: {P6}

f3: {P9;P10}

Quine-McCluskey:
Multi-Uscita – Tabella di copertura – Cardinalità

- (c)

C		f1: 5	f1: 8	f1: 13	f1: 15	f2: 2	f2: 6	f3: 13
~~1~~	~~P0~~			~~x~~	~~x~~			
1	P1	x		x	x			
1	P3					x	x	
1	P4				x			
0	P5					x		
0	P6	x						
1	P7			x	x			x
~~1~~	~~P8~~			~~x~~				~~x~~
0	P9		**x**					
0	P10						x	

righe essenziali secondarie e dominanza di riga

Soluzione parziale
f1: {P5, P9}
f2: {P6}
f3: {P9;P10}

Quine-McCluskey:
Multi-Uscita – Tabella di copertura – Cardinalità

- (d)

		f1			f2		f3
C		5	13	15	2	6	13
1	P1	x	x	x			
1	P3				x	x	
~~1~~	~~P4~~			~~x~~			
0	P5				x		
0	P6	x					
0 ~~1~~	P7		x	x			**x**
0	P10					x	

Righe essenziali secondarie e dominanza di riga

Soluzione parziale
f1: {P5, P9}
f2: {P6}
f3: {P9,P10,P7}

Quine-McCluskey:
Multi-Uscita – Tabella di copertura – Cardinalità

- (e)

C		5	13	15	2	6
		f1			f2	
1	P1	x	x	x		
1	P3				x	x
0	P5				x	
0	P6	x				
0	P7		x	x		
0	P10					x

dominanza di colonna

Soluzione parziale
f1: {P5, P9}
f2: {P6}
f3: {P9,P10,P7}

Quine-McCluskey:
Multi-Uscita – Tabella di copertura – Cardinalità

- (f)

		f1		f2	
C		5	13	2	6
1	P1	x	x		
1	P3			x	x
0	P5			x	
0	P6	x			
0	P7		x		
0	P10				x

Tabella ciclica
scelta dei rimanenti implicanti per completare la copertura
f1: per coprire 5 e 13 posso scegliere P1 (costo 1) oppure P6 e P7 (costo 0). Si sceglie **P6 e P7**
f2: per coprire 2 e 6 posso scegliere P3 (costo 1) oppure P5 e P10 (costo 0). Si sceglie **P5 e P10**

Espressioni Booleane che descrivono la soluzione

```
f1=P5+P9+P6+P7
f2=P6+P5+P10
f3=P9+P10+P7
P5= ….
P9= ..
P6= ..
P7= …
P10= …
```

Implicanti condivisi

Soluzione finale
f1: {P5, P9, P6, P7}
f2: {P6, P5, P10}
f3: {P9,P10,P7}

Cardinalità della copertura = 5

(Letterali della soluzione = 24)

Quine-McCluskey:
Multi-Uscita – Tabella di copertura – Letterali

- Esempio di copertura completo con cifra di merito= Letterali:

	f1										f2									f3							
	2	3	5	7	8	9	10	11	13	15	2	3	5	6	7	10	11	14	15	6	7	8	9	13	14	15	C
P0						x		x	x	x																	2
P1			x	x					x	x																	2
P2					x	x	x	x																			2
P3											x	x		x	x	x	x	x	x								1
P4		x		x				x		x		x			x		x		x								2
P5	**x**	x					x	x			x	x				x	x										2
P6			x	x									**x**		x												3
P7									x	x														x		x	3
P8						x			x														x	x			3
P9					x	x																**x**	x				3
P10														x	x			x	x	**x**	x				**x**	x	2
P11				x						x					x				x		x					x	3

Identificazione ed estrazione degli essenziali

f1: {P5}

f2: {P6}

f3: {P9;P10}

Quine-McCluskey:
Multi-Uscita – Tabella di copertura – Letterali

- Esempio cont.

	f1						f2							f3		
	5	7	8	9	13	15	2	3	6	10	11	14	15	13	C	
P0				x	x	x									2	
P1	x	x			x	x									2	
P2			x	x											2	
P3							x	x	x	x	x	x	x		1	
P4		x				x		x			x		x		2	
P5							x	x		x	x				2	-> 1
P6	x	x													3	-> 1
P7					x	x								x	3	
P8				x	x									x	3	
P9			x	x											3	-> 1
P10									x			x	x		2	-> 1
P11		x				x							x		3	

Identificazione delle dominanze di colonna:
F1 : 7 domina 5 ; 9 domina 8 ;
F2 : 3 domina 2 ; 11 domina 10 ; 14 domina 15;

Quine-McCluskey:
Multi-Uscita – Tabella di copertura – Letterali

- Esempio cont.

	f1				f2				f3	
	5	8	13	15	2	6	10	14	13	C
~~P0~~			x	x						2
P1	x		x	x						2
~~P2~~		x								2
P3					x	x	x	x		1
~~P4~~				x						2
~~P5~~					x		x			1
P6	x									1
P7			x	x					x	3
~~P8~~			x						x	3
P9		x								1
~~P10~~						x		x		1
~~P11~~				x						3

Identificazione delle dominanze di riga:
P1 domina P0 ; P9 domina P2 ; P7 domina P8 ; P3 domina P5 ; P3 domina P10;
P1 domina P4 ; P1 domina P11;

Quine-McCluskey:
Multi-Uscita – Tabella di copertura – Letterali

- Esempio cont.

	f1				f2				f3	
	5	8	13	15	2	6	10	14	13	C
P1	x		x	x						2
P3					**x**	**x**	**x**	**x**		1
P6	x									1
P7			x	x					**x**	3
P9		**x**								1

Identificazione e scelta delle essenzialità:

f1: **{P5, P9}**

f2: **{P6, P3}**

f3: **{P9, P10, P7}**

Quine-McCluskey: Multi-Uscita – Tabella di copertura – Letterali

- Esempio cont

	f1			
	5	13	15	C
P1	x	x	x	2
P6	x			1
P7		x	x	3 -> 1

Identificazione delle dominanze di colonna:
F1 : 13 domina 15 ;

	f1		
	5	13	C
P1	x	x	2
P6	x		1
P7		x	1

Non sono più applicabili le riduzioni per essenzialità e per dominanza. Va risolta la tabella ciclica ad esempio con un *B&B*

Quine-McCluskey:
Multi-Uscita – Tabella di copertura – Letterali

	f1 5	13	C
P1	x	x	2
P6	x		1
P7		x	1

Le due soluzioni possibili per il completamento della copertura di f1 sono l'utilizzo di P1 oppure l'utilizzo di P6 e P7. Calcoliamo il costo delle due soluzioni per scegliere l'ottimo.

Soluzione 1

f1=P5+P9+**P1**
f2=P6+P3
f3=P9+P10+P7

Implicanti condivisi
P9= ..

Costo in letterali = 18
(cardinalità = 7)

Soluzione 2

f1=P5+P9+**P6+P7**
f2=P6+P3
f3=P9+P10+P7

Implicanti condivisi
P9= ..
P6= ..
P7= ..

Costo in letterali = 20
(cardinalità = 6)

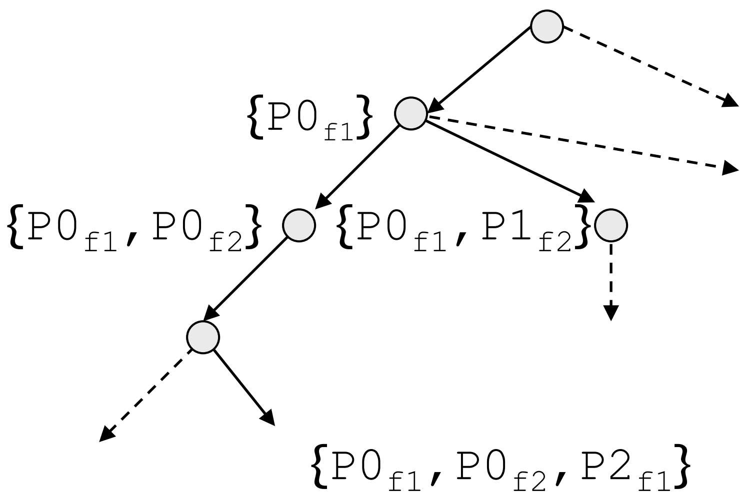
Quine-McCluskey:
Multi-Uscita – Tabelle Cicliche

- É possibile applicare il *B&B* con alcuni accorgimenti.
  - *Un implicante può essere usato per coprire mintermini di funzioni differenti.*
  - L'aumento della complessità è notevole a causa dell'aumento dei gradi di libertà
    - lo stesso implicante può comparire più volte nell'albero di copertura di *B&B*.

Quine-McCluskey: Multi-Uscita – Tabelle Cicliche

- Esempio

	f1					f2				
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	L
P0	x	x					x	x		
P1		x	x		x			x	x	
P2			x	x		x			x	x
P3	x			x	x		x			x
P4	x		x		x	x		x		



Quine-McCluskey:
Multi-Uscita – Criteri di costo

- Differenti criteri di costo implicano
  - Differenti complessità di elaborazione
    - Usare come costo i letterali comporta una soluzione più complessa
  - Differenti stime del costo del circuito
    - Considerare solo la cardinalità non tiene in conto il costo reale delle porte logiche
- Aumentare la complessità algoritmica per una stima migliore potrebbe essere assolutamente inutile se si considera che il collegamento alla libreria tecnologica (*library binding*) cambia la struttura del circuito e, come conseguenza, il costo della realizzazione.
  - In media, due soluzioni che differiscono nel costo stimato del 10%-20% sono da considerarsi equivalenti.

Sintesi di reti combinatorie a due livelli:
Metodi esatti - Espresso-Exact

- Espresso-Exact
  - Algoritmo implementato in *Espresso* per la minimizzazione esatta.
  - I principi su cui si basa sono gli stessi della procedura di Quine-McCluskey (algoritmi utilizzati sono un po' diversi).
  - In Espresso-exact gli implicanti sono partizionati in tre insiemi:
    - Essenziali.
    - Totalmente ridondanti: sono quelli coperti da implicanti essenziali e dal DC-set.
    - Parzialmente ridondanti: i rimanenti. Questo ultimo insieme è l'unico ad essere coinvolto nella fase di copertura.
  - Una tabella di copertura ridotta è ottenuta ponendo come indici di riga i soli implicanti parzialmente ridondanti. Gli indici di colonna sono in corrispondenza uno a uno con l'insieme dei mintermini.
  - La tabella è più compatta rispetto a quella ottenuta con Quine-McCluskey e non ha colonne essenziali.