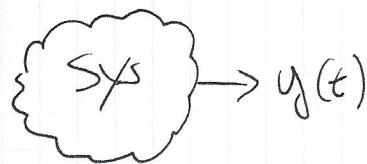


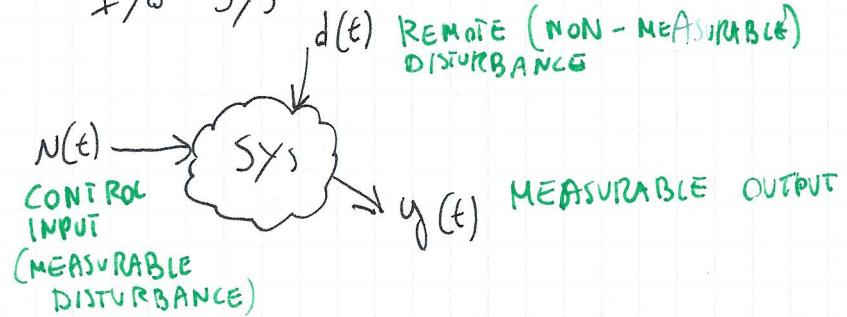
*MIDA2

2.1: NON-PARAMETRIC ID. OF I/O SYSTEMS

TIME SERIES



I/O SYS



L'APPROCCIO PARAMETRICO È QUELLO VISTO IN MIDA 1.
VEDREMO QUI UN APPROCCIO DIVERSO (4 SID):

- NO SELEZIONE A PRIORI DI UNA CLASSE DI MODELLI
- NO PERF. INDEX DEFINITION
- NO OPTIMIZATION

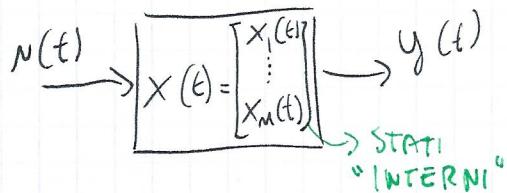
SYSTEM REPRESENTATIONS

ABBIAMO 3 MODI DI RAPPRESENTARE UN SISTEMA

- DISCRETE-TIME
- DINAMICO
- LINEARE



1) STATE-SPACE REPR.



$$\begin{cases} x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) & \text{STATE EQ} \\ y(t) = Hx(t) + Du(t) & \text{OUTPUT EQ} \end{cases}$$

$$F = [m \times m]$$

$$G = [] \quad m \times 1$$

$$H = [] \quad 1 \times m$$

$$D = [] \quad 1 \times 1$$

(= 0 PER STRICTLY-PROPER SYS)

S.S. REPR. NON E' UNICA...

$$\begin{aligned} F &\rightarrow TFT^{-1} \\ G &\rightarrow TG \\ H &\rightarrow HT^{-1} \\ D &\rightarrow D \end{aligned}$$

PER \forall MATRICE T INVERTIBILE

ES

$$\begin{cases} x_1(t+1) = \frac{1}{2}x_1(t) + 2N(t) \\ x_2(t+1) = x_1(t) + 2x_2(t) + u(t) \\ y(t) = \frac{1}{2}x_1(t) + \frac{1}{2}x_2(t) \end{cases}$$

$$F = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

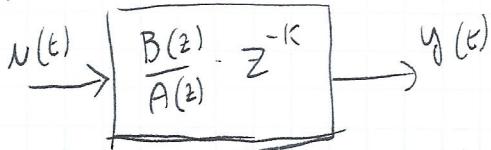
$m = 2$

$$G = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$D = 0$$

2) TRANSFER FUNCTION



$(K=0 \rightarrow \text{SYS IMPROPPIO})$

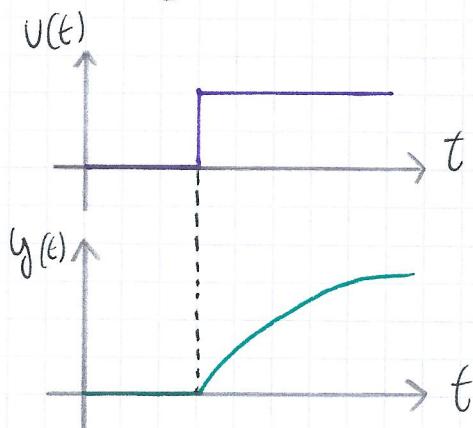
$$W(z) = \frac{B(z)}{A(z)} \cdot z^{-K}$$

"PURE" DELAY

T.F E' UNA FUNC. RAZIONALE IN Z OPERATOR.

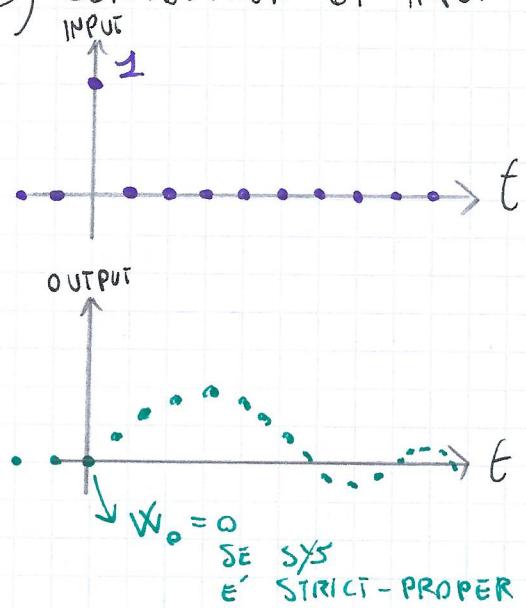
E' FACILE PASSARE DA FOT A A TIME DESCRIPTION:

$$y(t) = \left[\frac{1 + 0.5 z^{-1}}{z + \frac{1}{3} z^{-1} + \frac{1}{4} z^{-2}} \cdot z^{-1} \right] \cdot v(t) \implies y(t) = -\frac{1}{6} y(t-1) - \frac{1}{8} y(t-2) + \frac{1}{2} v(t-1) + \frac{1}{4} v(t-2)$$



SE IL SYS E' STRETT. PROPRIO ($K \geq 1$)
NON C'E' SALTO SULL'OUTPUT

3) CONVOLUTION OF INPUT WITH IMPULSE RESPONSE (I.R.)

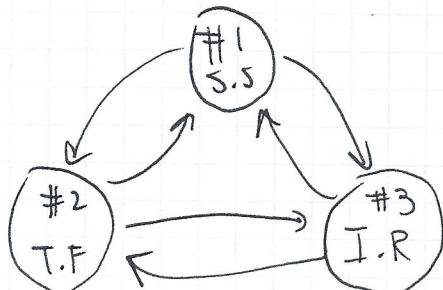


SI PUO' PROVARE CHE
 $y(t) = w(0)u(t) + w(1)u(t-1) + w(2)u(t-2) \dots$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} w(k)u(t-k)$$

↓ I/R REPR
OF THE SYS

TRASFORMAZIONI



ABBIAMO QUINDI 6 POSSIBILI TRASFORMAZIONI...

LA PIÙ USATA È $\#1 \rightarrow \#2$

$$\textcircled{1} \quad W(z) = H(zI - F)^{-1} \cdot G \quad \text{QUINDI DA } \{F, G, H\} \text{ A } W(z)$$

QUELLA DA $\#2 \rightarrow \#1$ NON È MOLTO USATA ED È CHIAMATA "REALIZZAZIONE".

$\textcircled{2}$ IL PROBLEMA PRINCIPALE È CHE DA UNA FDT POSSIAMO OTTENERE INFINITE RAPPRESENTAZIONI EQUIVALENTI.

$\textcircled{3}$ DA $\#2 \rightarrow \#3$ È INVECE FACILE APPLICANDO STEPS INFINITI DI LONG DIVISION TRA NUM E DEN:

$$W(z) = \frac{z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \Rightarrow \begin{array}{r} z^{-1} \\ \hline z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2} \\ \hline \frac{1}{2}z^{-2} \\ \hline -\frac{1}{2}z^{-2} + \frac{1}{4}z^{-3} \\ \hline \frac{1}{4}z^{-3} \end{array} \left| \begin{array}{l} 1 - \frac{1}{2}z^{-1} \\ z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2} + \frac{1}{4}z^{-3} + \dots \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow W(z) = w(0) + \frac{1}{w(1)}z^{-1} + \frac{1}{w(2)}z^{-2} + \frac{1}{w(3)}z^{-3} + \dots$$

MA ANCHE CON UNA SCORCIATOIA:

$$y(t) = \frac{z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} N(t) = \left(z^{-1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \right) N(t) \sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a} \quad (|a| < 1)$$

$$\text{DA CUI } y(t) = \left(z^{-1} \cdot \sum_0^{\infty} \left(\frac{1}{2}z^{-1} \right)^k \right) N(t) = \left(z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2} + \frac{1}{4}z^{-3} + \dots \right) N(t)$$

$$w(0)=0 \quad w(1)=1 \quad w(2)=\frac{1}{2}$$

INOLTRE PRECISIAMO:

$$W(z) = \boxed{\frac{z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}} \rightarrow \text{"I.I.R FILTER"} \quad \text{INFINITE IMPULSE RESPONSE}$$

$$W(z) = \boxed{z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2} + \frac{1}{3}z^{-3}} \rightarrow \text{"F.I.R FILTER"} \quad \text{FINITE IMPULSE RESPONSE}$$

$$w(k) = 0 \quad \forall k \geq 4$$

(4) DA #3 \rightarrow #2 CI SAREBBE LA FORMULA

$$W(z) = \mathcal{Z}(w(t)) = \sum_{t=0}^{\infty} w(t) z^{-t}$$

NON UTILIZZABILE IN PRATICA

- AVREMMO BISOGNO DI OO PUNTI I.R.
- I.R. DOVREBBERE ESSERE NOISE FREE

SOLO TEORICA...

(5) DA #1 \rightarrow #3

$$\rightarrow \begin{cases} x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) & \text{INIT. COND} \\ y(t) = Hx(t) & x(0) \neq 0 \\ y(0) = 0 & y(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(1) = Fx(0) + Gu(0) = Gu(0) \\ y(1) = Hx(1) = HGN(0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(3) = Fx(2) + Gu(2) = F^2Gu(0) + FGu(1) + Gu(2) \\ y(3) = Hx(3) = HF^2Gu(0) + HFGu(1) + HGu(2) \end{cases}$$

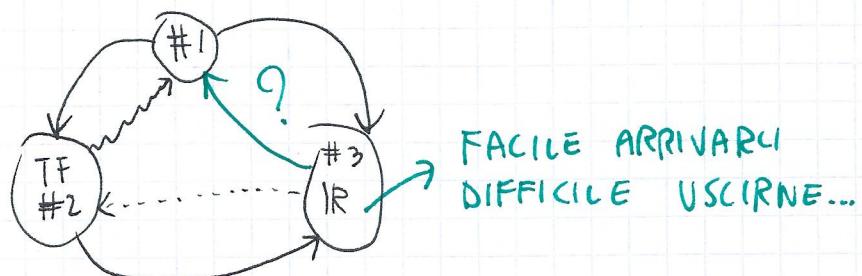
$$\begin{cases} x(2) = F(x(1)) + Gu(1) = FGu(0) + Gu(1) \\ y(2) = Hx(2) = HFGu(0) + HGu(1) \end{cases}$$

.....

$$\rightarrow y(t) = \underbrace{0}_w(t) + \underbrace{HGu(t-1)}_w(1) + \underbrace{HFGu(t-2)}_w(2) + \underbrace{HF^2Gu(t-3)}_w(3) \dots$$

$$\rightarrow w(t) = \begin{cases} 0 & t=0 \\ HF^{t-1}G & t>0 \end{cases}$$

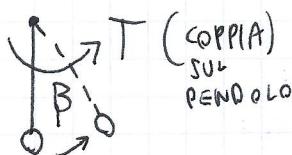
RIA SUMENDO



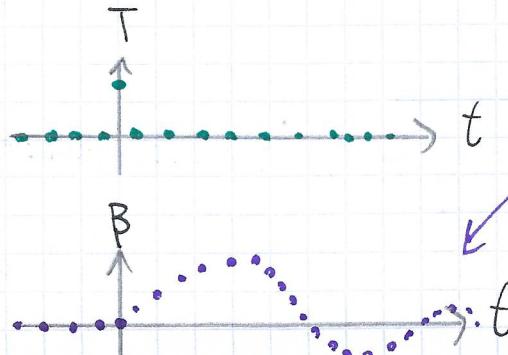
SUBSPACE-BASED STATE SPACE SYSTEM IDENTIFICATION (4SID)

4SID SI CONCENTRA PROPRIO SULLA TRASF. 6 : #3 \rightarrow #1

L'IDEA E' NATA CON LA MISURAZIONE DELL'OUTPUT DI UN SEMPLICE ESPERIMENTO



$$T \rightarrow \boxed{ } \rightarrow B$$



E' FACILE MISURARE LE I.R!

COME OTTENERE $\{\hat{F}, \hat{G}, \hat{H}\}$ DA

$\{w(0), w(1), w(2), \dots\}$?

NOTA : VEDREMO SOLO CASI CON IMPULSI CONE INPUT MA 4SID E' APPLICABILE AD OGNI I/O

NOTA 2 : VEDREMO DUE CASI :

$$1) \text{ I.R. E' NOISE FREE} \quad 2) \sim(1) \quad \tilde{w}(t) = w(t) + m(t)$$

OBSERVABILITY / CONTROLLABILITY

PRIMA DI PRESENTARE 4SID DOBBIAMO INTRODURRE QUESTI CONCETTI RELATIVI AGLI REP S.S DI UN DXN. LIN. SYSTEM.

UN SISTEMA E' **FULLY OBSERVABLE** DALL'OUTPUT SSE LA OBSERVABILITY MATRIX E' FULL RANK:

$$\Theta = \begin{bmatrix} H \\ HF_2 \\ HF^2 \\ \vdots \\ HF^{M-1} \end{bmatrix} \quad \text{E' FULL-RANK} \rightarrow \text{RANK}(\Theta) = M$$

UN SISTEMA E' **FULLY CONTROLLABLE** ("REACHABLE") DALL'INPUT SSE LA CONTROLLABILITY MATRIX E' FULL RANK:

$$R = [G \quad FG \quad F^2 G \quad \dots \quad F^{M-1} G] \quad \text{RANK}(R) = M$$

→ L'OBSERVABILITY DIPENDE SOLO DA STATE E OUTPUT: UN SYS E' OBSERVABLE SE POSSIAMO OSSERVARE LO STATO DALL'OUTPUT

→ LA CONTROLLABILITY DIPENDE SOLO DA STATE E INPUT: UN SYS E' CONTROLLABLE SE POSSIAMO CONTROLLARE LO STATO DALL'INPUT

ES

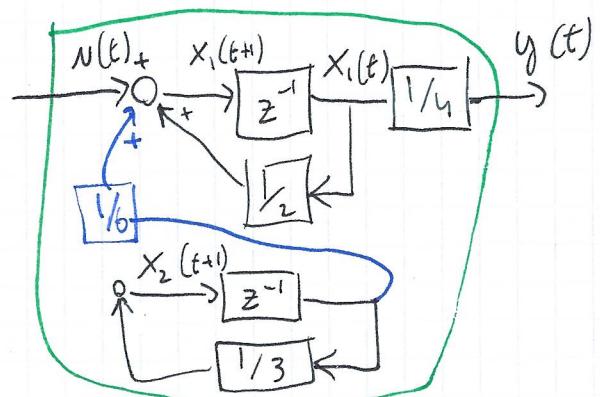
$$f: \begin{cases} x_1(t+1) = \frac{1}{2}x_1(t) + u(t) + \frac{1}{6}x_2(t) \\ x_2(t+1) = \frac{1}{3}x_2(t) \\ y(t) = \frac{1}{4}x_1(t) \end{cases}$$

$$M=2 \quad X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

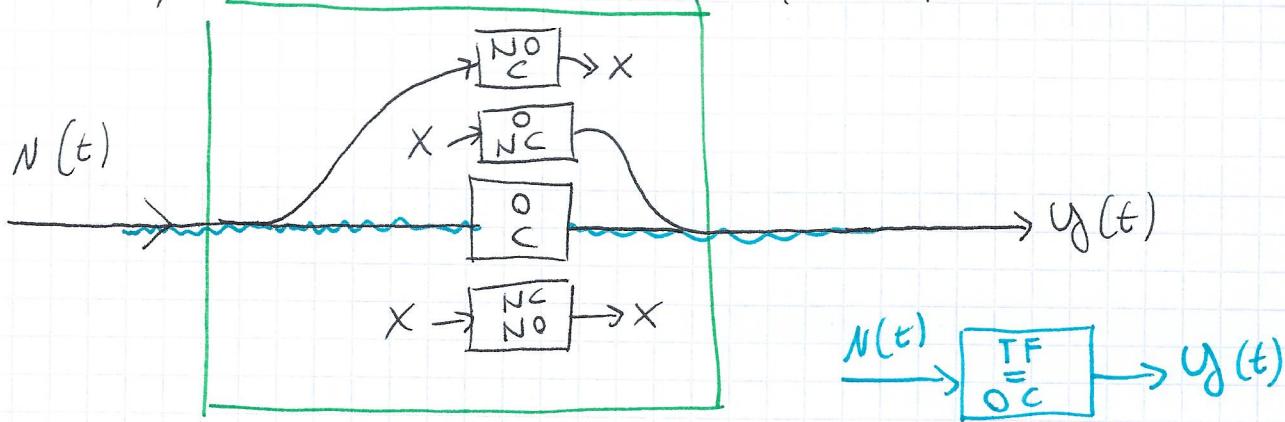
$$F = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \Theta = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{8} & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{RANK} = 1 < 2 \rightarrow \text{NOT OBSERVABLE!}$$

$$F = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \Theta = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{24} \end{bmatrix} \rightarrow \text{RANK} = 2 = 2 \rightarrow \text{OBSERVABLE!}$$

ANALOGO X CONTR.



OGNI SYS PUO' ESSERE DIVISO IN 4 SOTTOPARTI:



UNA DESCRIZIONE I/O ESTERNA (T.F) VEDE SOLO LA PARTE O.C DEL SYS.

DEFINIAMO INFINE LA **HANKEL MATRIX** DI ORDINE M COSTRUITA DALLA I.R:

$$H_m = \begin{bmatrix} w(1) & w(2) & w(3) & \dots & w(m) \\ w(2) & w(3) & w(4) & \dots & w(m+1) \\ w(3) & w(4) & w(5) & \dots & w(m+2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w(m) & w(m+1) & w(m+2) & \dots & w(2m-1) \end{bmatrix} \quad \text{M}$$

CI SERVONO ALMENO $2m-1$ SAMPLES DI IR!

E NOTIAMO, RICORDANDO #1 → #3:

$$H_m = \begin{bmatrix} HG & HFG & HF^2G & \dots & HF^{m-1}G \\ HFG & HF^2G & & & HF^mG \\ HF^2G & & & & \vdots \\ \vdots & & & & HF^{m-1}G \\ HF^{m-1}G & HF^mG & & & HF^{2m-1}G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \\ \vdots \\ HF^{m-1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} G & FG & F^2G & \dots & F^{m-1}G \end{bmatrix} \quad R$$

ABBIAMO $H_m = \Theta \times R \rightarrow \text{OBSERVABILITY} \times \text{CONTROLLABILITY}$

POSSIAMO ORA INTRODURRE LA PROCEDURA PER OTENERE

$\{\tilde{F}, \tilde{G}, \tilde{H}\}$ PARTENDO DA UN NOISE FREE I.R.



STEP 1: COSTRUISCI H INCREMENTALMENTE

$$H_1 = [w(1)] \quad m=1$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} w(1) & w(2) \\ w(2) & w(3) \end{bmatrix} \quad m=2$$

$$H_3 = \begin{bmatrix} w(1) & w(2) & w(3) \\ w(2) & w(3) & w(4) \\ w(3) & w(4) & w(5) \end{bmatrix} \quad m=3$$

$$H_m = [\dots] \quad \text{RANK} = m$$

$$H_{m+1} = [\dots] \quad \text{RANK} = m$$

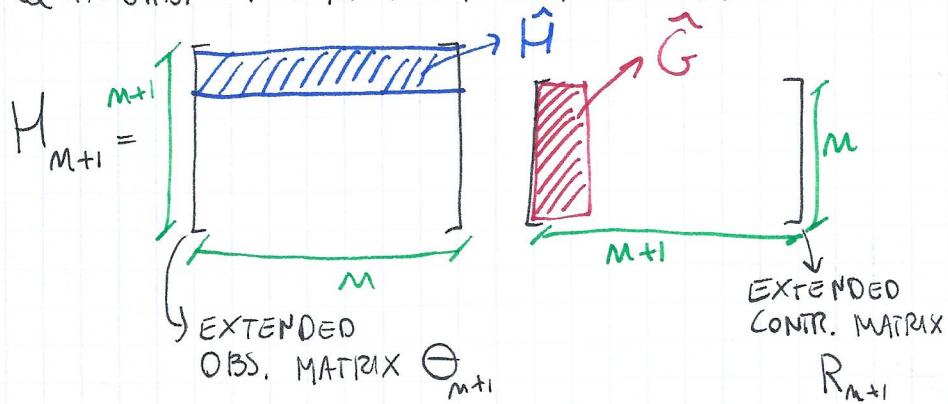
PRIMA MATRICE
NON FULL RANK

INCR. SIZE MA
NON RANK...
MI FERMO!

$m \rightarrow$ ORDINE DEL
SYS STIMATO

STEP 2: PRENDI H_{m+1} (MATRICE $m+1 \times m+1$ QUADRATA DI RANK m) E FATTORIZZALA IN DUE MATRICI RETTANGOLARI $m+1 \times m$ E $m \times m+1$

QUALSIASI FATTORIZZAZIONE VA BENE.



STEP 3: STIMA DI H, F, G : ABBIANO CHE

$$\bullet \hat{G} = R_{m+1}(:, 1)$$

ED \hat{F} ? CONSIDERIAMO Θ_{m+1} (ANCHE R_{m+1} È OK)

$$\bullet \hat{H} = \Theta_{m+1}(1 : , :)$$

$$\rightarrow \Theta_{m+1} = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \\ \vdots \\ HF^{m-1} \\ HF^m \end{bmatrix} \rightarrow \Theta_1 = \Theta_{m+1}(1:m, :) \rightarrow \Theta_2 = \Theta_{m+1}(2:m+1, :)$$

Θ_1 E Θ_2 SONO
MATRICI COLLEGATE
DALLA "SHIFT INVARIANCE
PROPERTY":

$$\Theta_2 = \Theta_1 \cdot F$$

$$\rightarrow \hat{F} = \Theta_1^{-1} \Theta_2$$

END; QUESTO METODO CONOSCIUTO COME METODO DI (ANNI '60)
KALMAN-HO E' IN REALTA' INVILE!

SE $w(\cdot)$ E' NOISY LO STEP 1 NON TERMINA E SE
ANCHE SAPESSIMO m A PRIORI LA PREDICT SAREBBE
SBALLATA...

L'IDEA VENNE ACCANTONATA FINO AGLI ANNI '80 QUANDO FU INTRODOTTO:

S. V. D.

SINGULAR
VALUES
DECOMPOSITION

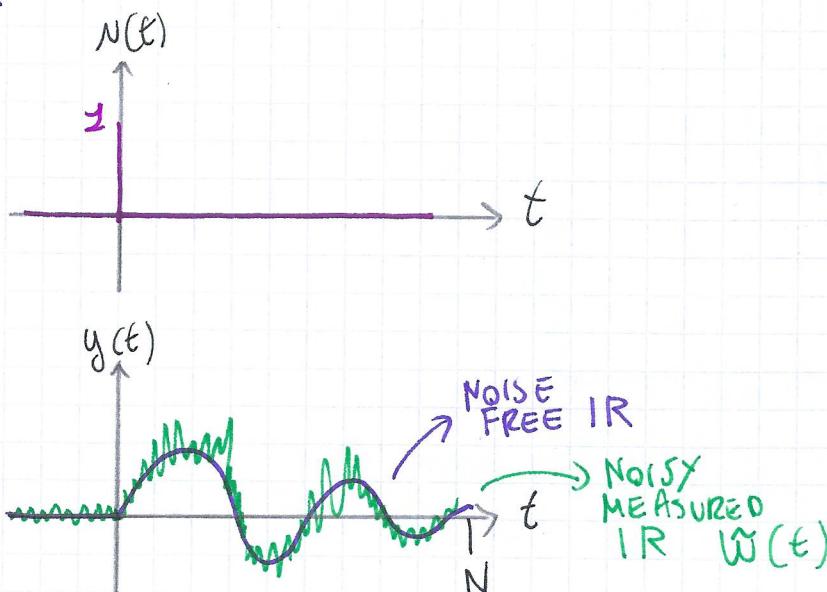
"DATA COMPRESSION"

- SEPARAZIONE OTTIMALE
TRA SIGNAL E NOISE

ORA POSSIAMO PENSARE AL VERO PROBLEMA...

$$\tilde{w}(t) = w(t) + m(t) \quad t = 0, 1, \dots, N \rightarrow \text{DI SOLITO TRA } 100 \leftrightarrow 1000$$

↓ ↓ ↓
 NOISY (MEASURED) IR NOISEFREE IR MEAS NOISE



4-SID PROCEDURE CON NOISY IR

STEP 1: COSTRUISCI H CON TUTTI GLI N DATA POINTS

$$\tilde{H}_{q,d} = \begin{bmatrix} \tilde{w}(1) & \tilde{w}(2) & \dots & \tilde{w}(d) \\ \tilde{w}(2) & & & \tilde{w}(d+1) \\ \vdots & & & \vdots \\ \tilde{w}(q) & \tilde{w}(q+1) & \dots & \tilde{w}(q+d-1) \end{bmatrix}$$

- NON QUADRATA! $q \times d$
 - $q+d-1 = N$
 COME SCEGLIERE $q \in d$?

PER HP: $q \leq d \rightarrow q = N+1-d$

- SE $q \approx d \rightarrow$ PIU' ACCURATEZZA
- SE $q \ll d \rightarrow$ MENO DIFFICOLTA' COMPUTAZIONALE

SCEGLIANO COME COMPROMESSO $\rightarrow q \approx 0.6d$

$$0.6d < q < d$$

ES

$$N = 1000$$

$$q = 400$$

$$d = 601$$

STEP 2: KEY STEP \rightarrow SVD DI \tilde{M}_{qd}

$$\tilde{M}_{qd} = \tilde{U} \cdot \tilde{S} \cdot \tilde{V}^T$$

\downarrow \downarrow \downarrow \downarrow
 $q \times d$ $= q \times q$ $q \times d$ $d \times d$

\tilde{U} E \tilde{V} SONO MATRICI UNITARIE QUADRATI
 UNITARIE = 1) $\det(M) = 1$
 2) $M^{-1} = M^T$

$$\tilde{S} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \sigma_3 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \sigma_q \end{bmatrix}$$

DONDE $\sigma_1, \dots, \sigma_q$ SONO SINGULAR VALUES DI \tilde{M}_{qd}
 OSSIA NUMERI $\in \mathbb{R}^+$ IN ORDINE DECREScente:
 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq \dots \geq \sigma_q$

I SINGULAR VALUES DI UNA MATRICE RETTANGOLARE SONO "UNA SPECIE"
 DI EIGENVALUES DI UNA MATRICE QUADRATA:
 (AUTOVALORE)

MAT QUADRATA A : $\text{eig}(A) = \text{roots}[\det(A - \lambda I)]$

MAT RETTANGOLARE M : $\text{SV}(M) = \sqrt{\text{eig}(M^T M)} = \sqrt{\text{eig}(MM^T)}$ (VALIDO PER $A \neq 0$)

$$M \rightarrow M \quad M^T \rightarrow \begin{bmatrix} \text{diagonal} \end{bmatrix}$$

$$M \rightarrow M^T \quad M \rightarrow \begin{bmatrix} \text{diagonal} \\ 0 \end{bmatrix}$$

MATRICI DIVERSE
 MA STESSI NON-ZERO SINGULAR VALUES

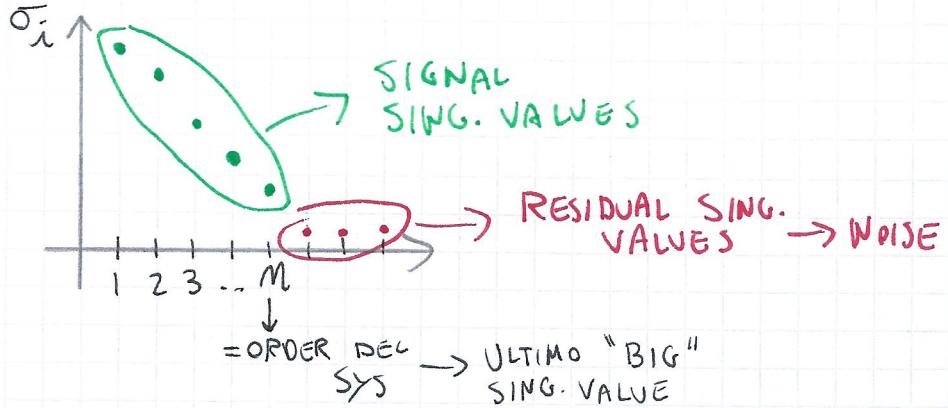
I CALCOLI NON SONO BANALI QUINDI METODI NUMERICI OTIMIZZATI SONO SEMPRE FATTIBILI..

UNA POSSIBILITÀ È ESEGUIRE DUE DIAGONALIZATION STEPS:

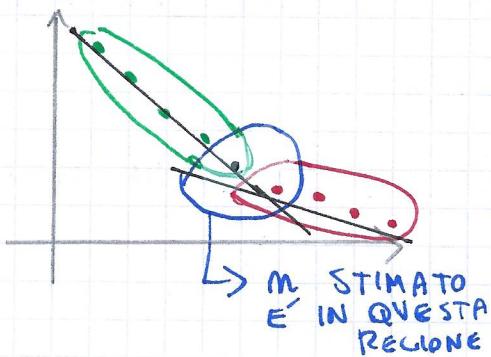
$$\tilde{M}_{qd} \times \tilde{M}_{qd}^T = \tilde{U} \begin{bmatrix} \tilde{S} & \tilde{S}^T \end{bmatrix} \tilde{U}^T \rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_q^2 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{M}_{qd}^T \times \tilde{M}_{qd} = \tilde{V} \begin{bmatrix} \tilde{S}^T & \tilde{S} \end{bmatrix} \tilde{V}^T \rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_m^2 \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

STEP 3 PLOTTA I SINGULAR VALUES E CUT-OFF LE 3 MATRICI



CASO IDEALE IN QUANTO
C'È UN JUMP CHIARO



CASO PIU' REALISTICO IN CUI M E' UNA SCELTA EMPIRICA IN UN PICCOLO RANGE DI POSSIBILI VALORI

Dopo aver deciso M SPLITTIAMO \tilde{U} , \tilde{S} , \tilde{V} :

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{qd} &= \begin{array}{c|c|c} \tilde{U} & \text{MAX} & \tilde{S} \\ \hline m & & m \end{array} \quad \tilde{V}^T \\ \text{RANK } q & \downarrow \quad \downarrow \\ & = \begin{array}{c} \tilde{U} \tilde{S} \tilde{V}^T \\ (\text{STIME}) \\ \text{RANK } m \end{array} + \begin{array}{c} H_{\text{RES } qd} \\ \text{RANK } q \end{array} \end{aligned}$$

DIFFERENZA TRA \tilde{H}_{qd} E $\tilde{U} \tilde{S} \tilde{V}^T$

STEP 4: COMPLETIAMO STIMANDO \hat{F} , \hat{G} , \hat{R} USANDO $\hat{H}_{qd} = \hat{U} \hat{S} \hat{V}^T$

$$\begin{aligned} \hat{H}_{qd} &= \hat{U} \hat{S} \hat{V}^T = \begin{array}{c|c|c} \hat{U} & \hat{S} & \hat{V}^T \\ \hline \hat{U}_1 & \hat{S}_1 & \hat{V}_1 \\ \hat{U}_2 & \hat{S}_2 & \hat{V}_2 \end{array} \\ &\quad \left[\begin{array}{c} \sqrt{\sigma_1} \\ \sqrt{\sigma_2} \\ \vdots \\ \sqrt{\sigma_m} \end{array} \right] \quad \hat{H}_{qd} = \hat{\Theta} \hat{R} \Rightarrow \begin{array}{c} \hat{\Theta} \\ \hat{R} \end{array} \end{aligned}$$

EXTENDED OBSER. MATRIX
EXTENDED CONTROL MATRIX

DA CUI

$$\begin{aligned} \hat{\Theta} &= \begin{bmatrix} \hat{\Theta}_1 & \hat{\Theta}_2 \end{bmatrix} \quad \hat{H} = \hat{\Theta}(1,:) \\ \hat{F} &= \hat{\Theta}_1^{-1} \hat{\Theta}_2 \quad \hat{\Theta}_1 \text{ NON E' QUADRATA!} \\ \hat{G} &= \hat{R}(:,1) \\ \hat{R} &= \begin{bmatrix} \hat{\Theta}_1^T \hat{\Theta}_1 & \hat{\Theta}_1^T \hat{\Theta}_2 \end{bmatrix}^{-1} \end{aligned}$$

USIAMO IL METODO LEAST-SQUARE PER TROVARE UNA MATRICE PSEUDO-INVERSA:

END;

QUESTO METODO E' "OTTIMO" NEL SENSO CHE APPLICA LA
MIGLIOR RANK-REDUCTION DI $\tilde{A}_{q,d}$

→ MINIMIZZA LA RESIDUAL MATRIX

INOLTRE, LSID E' UN METODO FATTIBILE IN MANIERA AUTOMATICA
AD ECCEZIONE DI

* SCELTA DI q E d (NON CRITICO)

* SCELTA DI $M \rightarrow$ SOLITAMENTE SUPERVISED O SI USANO
METODI COME CROSS VALIDATION.

LSID E' STATO UN PUNTO DI SVOLTA PER IL MACHINE LEARNING:

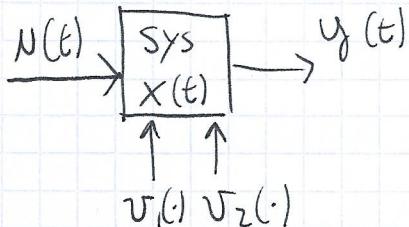
→ PERMETTE UNA EFFICIENTE COMPRESSIONE DEI DATI

→ ... E UNA EFFICIENTE SEPARAZIONE TRA DATI E NOISE

2.2 : FILTRO DI KALMAN

LA TEORIA DEI K.F E' COMPLETAMENTE BASATA SULLA RAP. SS:

$$\begin{cases} X(t+1) = F X(t) + G U(t) + V_1(t) \\ Y(t) = H X(t) + V_2(t) \end{cases} \quad \text{DOVE } V_1, V_2 \sim WN$$



QUI SIAMO INTERESSATI ANCHE AGLI STATI
INTERNI

→ USIAMO UN "2-NOISES" DESCRIPTION DELLE
INCERTEZZE DEL SYS

GOALS

DATO UN DATASET

$$\begin{cases} \{u(1), u(2), \dots, u(N)\} \\ \{y(1), y(2), \dots, y(N)\} \end{cases}$$

E' UNA DESCRIZIONE DEL MODELLO $\{F, G, H\}$

IL FILTRO DI KALMAN CI PERMETTE DI RISOLVERE

TRE PROBLEMI:

P1) TROVARE UN K-STEPS AHEAD PREDICTOR DELL'OUTPUT
 $\hat{y}(t+k | t)$ // COME AFFRONTATO IN MPA!

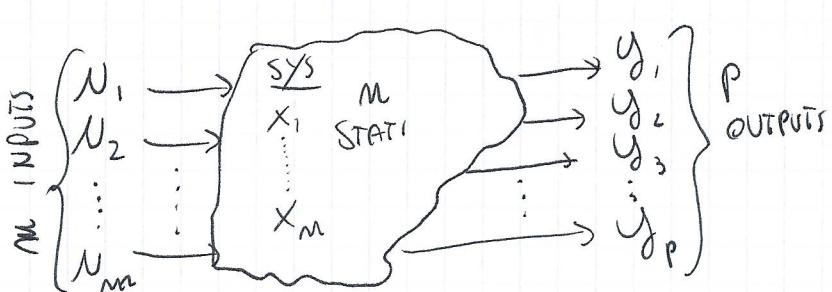
P2) TROVARE UN K-STEPS AHEAD PREDICTOR DELLO STATO:
 $\hat{x}(t+k | t)$ // NUOVO!

P3) TROVARE IL FILTRO DELLO STATO
 $\hat{x}(t | t)$ // OVVERO PREDIRE LO STATO IN T AVENDO DATA FINO A T...
 HA SENSO PERCHE' NON SEMPRE LO STATO E' FACILMENTE MISURABILE! ← PIU' IMPORTANTE

P4) ANCHE SE NON E' LO SCOPO PRINCIPALE, PUO' ESSERE USATO PER SCOPRIRE PIU' SU UN SYS "GRAY BOX" DI CUI SAPPIAMO SOLO ALCUNI PARAMETRI.

UTILITA'

UN SYS DINAMICO HA QUESTA STRUTTURA:



MIMO (M INPUTS, m STATES, p OUTPUTS)

KEY PROBLEM: SOLITAMENTE
 $p < m$

⇒ I PHYSICAL SENSORS DI SOLITO SONO MOLTO MENO DEL # DI STATI DI UN SISTEMA... * COSTO * CAVI/COMPLESSITA' * MANUTENZIONE

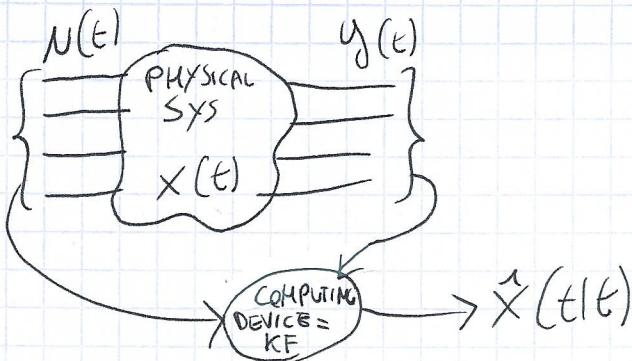
E QUINDI NON TUTTI GLI STATI HANNO UN SENSORE CORRISPONDENTE...

EPPURE SAREBBE MOLTO UTILE AVERE DEI FULL-VECTORS MEASUREMENTS:

→ CONTROLLO / DESIGN

→ MONITORAGGIO (FAULT DET., PREDICTIVE MAINTENANCE...)

LO STATE FILTERING ($\hat{x}(t | t)$) CI DA' UNA SOLUZIONE SOFTWARE AL PROBLEMA!



IL DILEMMA DI UN SYSTEM DESIGNER E':

* USARE SENSORI FISICI?

* USARE SENSORI VIRTUALI/SOFTWARE?

IN ALCUNI CASI LA SCELTA E' OBBLIGATA SUI VIRTUAL SENSORS, MA IN MOLTI CASI ENTRAMBE LE OPPORTUNITA SONO DISPONIBILI:

→ PAGO COSTI VARIABILI E NESSUN DEVELOPMENT COST?

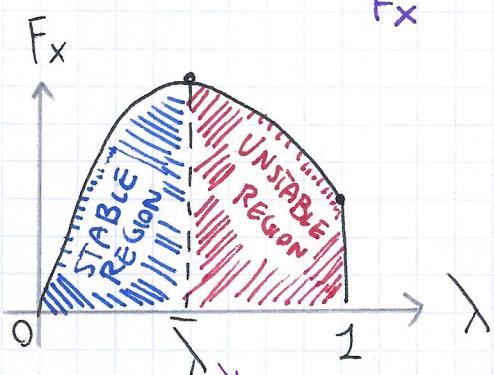
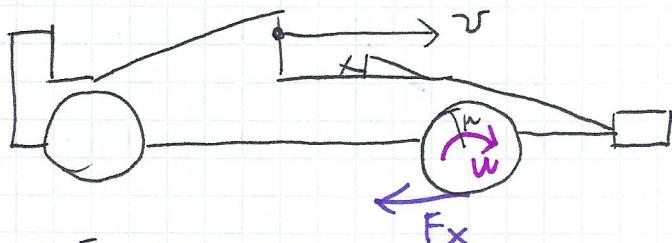
→ PAGO UN PREZZO FISSO DI DEVELOPMENT E NESSUN COSTO VARIABILE?

LE DUE DOMANDE CHIAVE PER I SENSORI SW SONO:

1) FEASIBLE? → TEST OSSERVABILITA' DELLO STATO DALL'OUTPUT

2) ANCHE SE LO STATO E' FULLY OBSERVABLE, IL LIVELLO DI NOISE SULLA RILEVAZIONE SW E' ACCETTABILE?

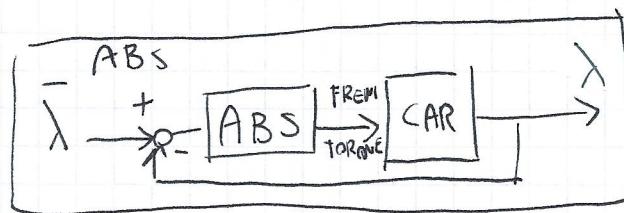
ES: ABS



DEF DI WHEEL SLIP

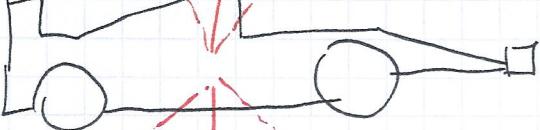
$$\lambda = \frac{v - w\mu}{v}$$

$0 < \lambda \leq 1$
"FREE ROLL"
RUOTE BLOCcate



PROBLEMA: COME MISURARE λ ?

GPS? → AVAILABILITY PROBLEM



OPTICAL SENSORS? → RELIABILITY PROBLEM

$$\lambda = \frac{v - w\mu}{v}$$

FACILMENTE MISURABILE
DIFFICILE!

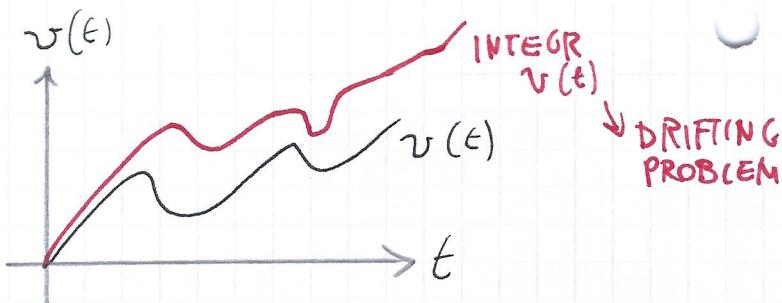
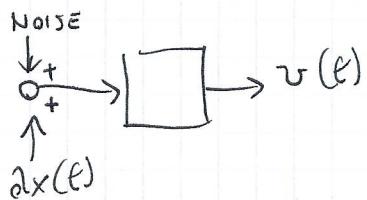
ALTRIE IDEE?

UNA POSSIBILE SOLUZIONE E' UN ACCELEROMETRO ($\ddot{x}(t)$)

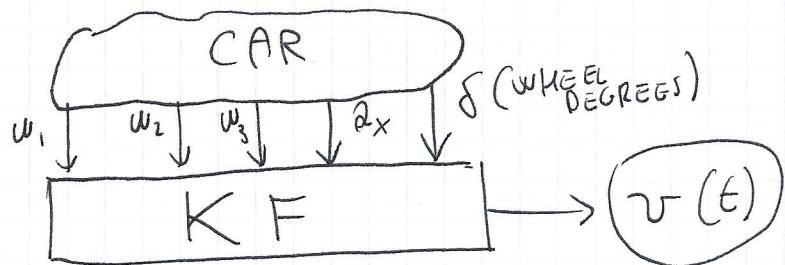
$$\rightarrow \dot{v}(t) = \int \ddot{x}(t) dt \Rightarrow \ddot{x}(t) \rightarrow \boxed{\frac{1}{z}} \rightarrow v(t) \quad \left(\boxed{\frac{1}{1-z^{-1}}} \text{ SE DISCRETO} \right)$$

MA... $\ddot{x}(t)$ HA DEL NOISE

REALTA':



POSSIAMO UTILIZZARE UN KALMAN FILTER INVECE CHE INTEGRARE:



BASIC SYSTEM

INTRODURREMO KF PER UN BASIC SYSTEM:

$$S: \begin{cases} x(t+1) = Fx(t) + \cancel{Gw(t)} + \underline{v_1(t)} & \text{STATE EQ} \\ y(t) = Hx(t) + \underline{v_2(t)} & \text{OUTPUT EQ} \end{cases}$$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{NO EXT. INPUTS } (Gw(t)) \\ \text{LINEARE} \\ \text{TIME INVARIANT} \end{array} \right.$

M STATI, M INPUTS, P OUTPUTS (MIMO)

$v_1(t)$ E' UN VECTOR WN
 $\sim WN(0, V_1)$

$$v_1(t) = \begin{bmatrix} v_{11}(t) \\ v_{12}(t) \\ \vdots \\ v_{1m}(t) \end{bmatrix}$$

E' DETTO STATE / MODEL NOISE

$$\textcircled{1} \quad E[v_1(t)] = \bar{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

MATRICE MXM

COVARIANCE MATRIX

\Rightarrow SYMM, SEMI DEFINITE

$$\textcircled{2} \quad E[v_1(t) \cdot v_1(t)^T] = V_1$$

$$\textcircled{3} \quad E[v_1(t) \cdot v_1(t-\tau)^T] = \emptyset \quad \forall \tau \neq 0$$

$\mathcal{V}_2(t)$ E' UN VECTORE WN: $\mathcal{V}_2 \sim WN(0, V^2)$

$$\mathcal{V}_2(t) = \begin{bmatrix} v_{21}(t) \\ \vdots \\ v_{2p}(t) \end{bmatrix} \rightarrow \text{E' DETTO MEASUREMENT / OUTPUT NOISE}$$

$$(1) E[\mathcal{V}_2(t)] = \bar{0}$$

MATRICE $p \times p$ DI COVARIANZA

$$(2) E[\mathcal{V}_2(t) \mathcal{V}_2(t)^T] = V_2 \rightarrow \text{ASSUMIAMO } V_2 > 0 = \underline{\text{DEFINITO}} \text{ POSITIVE}$$

$$(3) E[V_2(t) \cdot V_2(t-\tau)^T] = 0 \quad \forall \tau \neq 0, \forall t$$

IMPONIAMO ANCHE UNA RELAZIONE TRA $\mathcal{V}_1(t) \in \mathcal{V}_2(t)$:

$$E[\mathcal{V}_1(t) \cdot \mathcal{V}_2(t-\tau)^T] = \underbrace{V_{12}}_{m \times p} = \begin{cases} 0 & \text{SE } \tau \neq 0 \\ \text{ANY} & \text{SE } \tau = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} \mathcal{V}_1 \text{ E } \mathcal{V}_2 \text{ POSSONO} \\ \text{ESSERE CORRELATI} \\ \text{SOLA AGLI} \\ \text{STESO } t \end{array}$$

INOLTRE ESSENDO IL SYS DINAMICO ABBIAMO BISOGNO DI UNA INITIAL CONDITION:

$$E[X(1)] = X_0 \quad (\text{N} \times 1 \text{ VECTOR}) \rightarrow \text{SE } P_0 = 0 \rightarrow \begin{array}{l} \text{CONOSCIAMO STATO} \\ \text{INIZIALE SENZA} \\ \text{INCERTITUDINE} \end{array}$$

$$E[(X(1) - X_0)(X(1) - X_0)^T] = P_0 \geq 0 \quad (\text{SDP MATRIX})$$

ASSUMIAMO INFINE CHE $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2 \in X(1)$ SONO NON CORRELATI

$$X(1) \perp \mathcal{V}_1(t)$$

$$X(1) \perp \mathcal{V}_2(t)$$

BASIC SOL FOR BASIC SYS (1-STEP AHEAD PRED $(\hat{y}(t+1|t), \hat{x}(t+1|t))$)

5 EQ DEL KF

$$\hat{x}(t+1|t) = F \hat{x}(t|t-1) + k(t) e(t) \quad \text{STATE EQ}$$

$$\hat{y}(t|t-1) = H \hat{x}(t|t-1) \quad \text{OUTPUT EQ}$$

$$e(t) = y(t) - \hat{y}(t|t-1) \quad \text{OUTPUT PREDICTION ERROR}$$

$$k(t) = (F P(t) H^T + V_{12}) (H P(t) H^T + V_2)^{-1} \quad \text{"GAIN" OF THE FILTER}$$

$$P(t+1) = F P(t) F^T + V_1 - (F P(t) H^T + V_{12}) (H P(t) H^T + V_2)^{-1} (F P(t) H^T + V_{12})^T \quad \text{DIFFERENCE RICCATI EQ (D.R.E.)}$$

POSSIAMO RISCRIVERE DUE:

$$k(t) = (\text{MIX}) \cdot (\text{OUTPUT})^{-1}$$

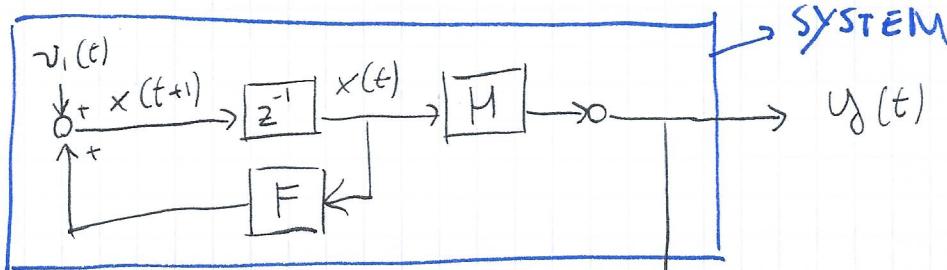
$$\text{D.R.E.} = (\text{STATE}) - (\text{MIX})(\text{OUTPUT})(\text{MIX})^T$$

$$\text{"STATE": } F P(t) F^T + V_1$$

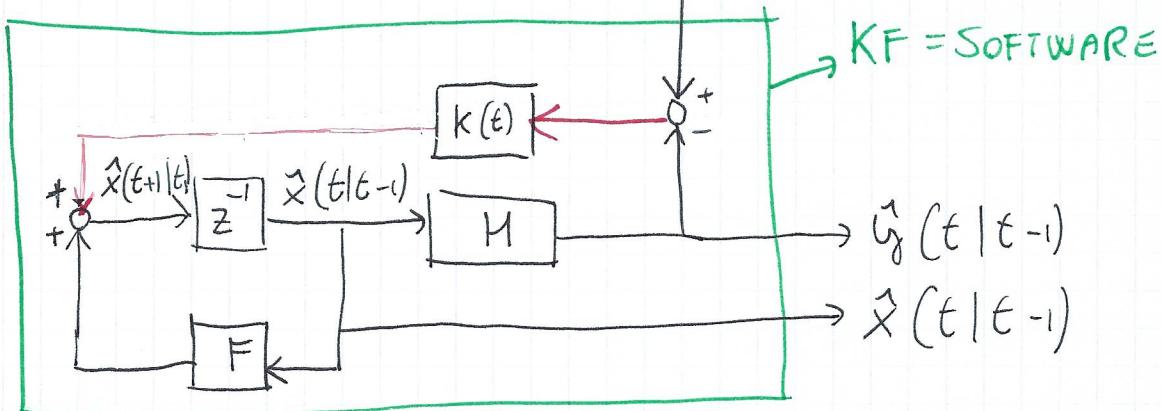
$$\text{"OUTPUT": } H P(t) H^T + V_2$$

$$\text{"MIX": } F P(t) H^T + V_{12}$$

S:



KF:



L'IDEA DEL K.F E' IN REALTA' SEMPLICE:

- * COSTRUISCI UNA REPLICA SIMULATA DEL SISTEMA (SENZA $v_1 \in \mathbb{Z}^2$)
- * COMPARA L'OUTPUT REALE E QUELLO PREVISTO ($y(t)$ VS $\hat{y}(t|t-1)$)
- * CORREGGI IL KF EQUATION PER MANTENERLO VICINO ALL'OUTPUT VERO
- * IL FEEDBACK E' USATO PER MIGLIORARE LA STIMA

$K(t)$ NON E' UN GAIN SCALARE MA UNA MATRICE POTENZIALMENTE ENORME...
IMPOSSIBILE COSTRUIRLA CON TRIAL & ERROR!

E' TUTTAVIA FONDAMENTALE:

$K(t)$
TOO SMALL: NON SFRUTTIAMO TUTTA L'INFORMAZIONE DA $y(t)$
TOO BIG: CREANO NOISE AMPLIFICATION = INSTABILITA'

KALMAN HA FORNITO UNA SOLUZIONE TEORICA OTTIMA AL DESIGN DI $K(t)$.

INOLTRE ANCHE LA COSTRUZIONE DI V_1, V_2 E V_{12} DEVE ESSERE ACCURATA.

ESTENSIONI

#1) MULTI-STEP AHEAD PREDICTOR

SE $\hat{x}(t+1|t)$ È CONosciuto $\rightarrow \hat{x}(t+2|t) = F\hat{x}(t+1|t)$

$$\hat{y}(t+k|t) = H\hat{x}(t+k|t) \quad \hat{x}(t+k|t) = F^{k-1}\hat{x}(t+1|t)$$

#2) FILTRO: $\hat{x}(t|t)$

Solo se F è INVERTIBILE!

$\hat{x}(t|t) = F^{-1}\hat{x}(t+1|t) \rightarrow$ ALTRIMENTI: KF IN FILTER FORM:

KF IN FILTER FORM:
VALIDO SOLO SE $V_{12} = 0$

$$\begin{cases} \hat{x}(t|t) = F\hat{x}(t-1|t-1) + K_o(t)e(t) \\ \hat{y}(t|t-1) = H\hat{x}(t|t-1) \\ e(t) = y(t) - \hat{y} \end{cases} \rightarrow = A \text{ PRIMA}$$

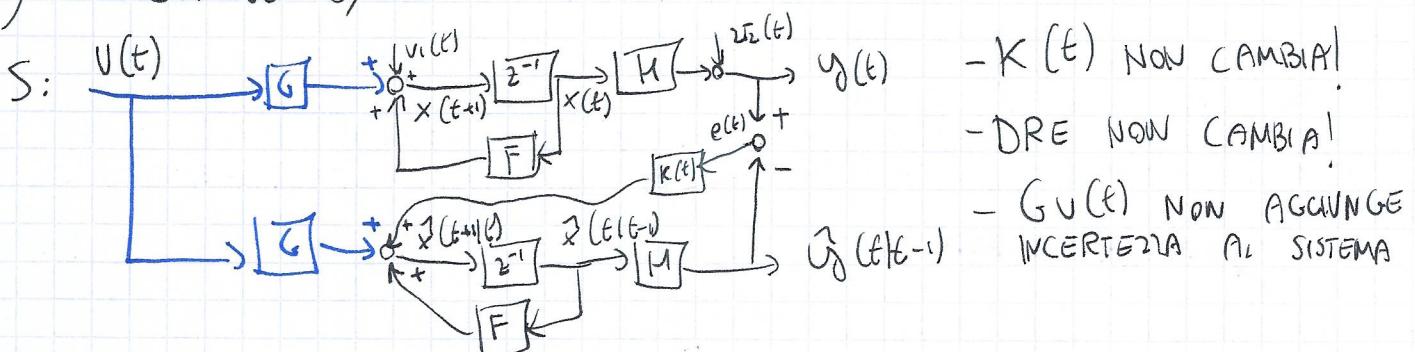
$$K_o(t) = (P(t)H^T)(HP(t)H^T + V_2)^{-1} \quad // \text{ABBIAMO TUTTO} F... \\ \text{DRE = INVARIATA}$$

#3) TIME-VARYING SYSTEM

$$F \rightarrow F(t)$$

$$S: \begin{cases} x(t+1) = F(t)x(t) + (G(t)N(t)) + \mathcal{V}_1(t) & G \rightarrow G(t) \\ y(t) = H(t)x(t) + \mathcal{V}_2(t) & H \rightarrow H(t) \end{cases}$$

#4) EXOGENOUS SYSTEM



#5) NON-LINEAR S/S

VEDREMO IN EXTENDED KF ...

ASYMPTOTIC SOL. OF KF

$K(t)$ E' TEMPO VARIANTE! DUE PROBLEMI:

- 1) CONTROLLARE LA STABILITA' E' MOLTO PIU' DIFFICILE
- 2) COMPUTAZIONALE: DOBBIAMO RISOLVERE DRE AD $\forall t$...

QUINDI NELLA PRATICA LA VERSIONE ASINTOTICA E' PREFERITA...

IDEA:

$$\text{SE } P(t) \xrightarrow{\text{CONVERGE}} \boxed{\bar{P}}$$

STEADY-STATE
VALUE DI $P(t)$

$$\text{ALLORA } K(t) \xrightarrow{\text{CONVERGE}} \boxed{\bar{K}}$$

STEADY-STATE
VALUE DI $K(t)$

→ CHECK STABILITA' CON $K(t) \rightarrow \bar{K}$ (\bar{K} ESISTE)

$$\hat{x}(t+1|t) = F\hat{x}(t|t-1) + \bar{K}e(t) \quad \bar{K} = \text{CONST} \rightarrow \text{SYS E' L.T. I USIANO STD STABILITY CHECK}$$

$$\begin{aligned} \hat{x}(t+1|t) &= F\hat{x}(t|t-1) + \bar{K}(y(t) - \hat{y}(t|t-1)) \\ &= F\hat{x}(t|t-1) + \bar{K}(y(t) - H\hat{x}(t|t-1)) \\ &= \boxed{(F - \bar{K}H)} \hat{x}(t|t-1) + \bar{K}y(t) \end{aligned}$$

NUOVA STATE MATRIX DI KF

CONTROLLIAMO GLI AUTOVALORI DI $(F - \bar{K}H)$
SE SONO IN UNIT CIRCLE, KF E' STABILE...

STAB DI SYS → MATR. F
STAB DI KF → MATR. $(F - \bar{K}H)$
 $= KF$ STABILE $\not\Rightarrow$ SYS STABILE

STABILIAMO SE \bar{K} ESISTE:

$$\bar{K} = (F\bar{P}H^T + V_{12})(H\bar{P}H^T + V_2)^{-1} \rightarrow \bar{K} \text{ ESISTE SE } \bar{P} \text{ ESISTE}$$

CHECK CONVERGENZA DI DRE

$$\rightarrow \bar{P} = \hat{f}(\bar{P}) = F\bar{P}^T + V_1 - (F\bar{P}H^T + V_{12})(H\bar{P}H^T + V_2)^{-1}(F\bar{P}H + V_{12})^T$$

EQ. Sys DISCRETO

NONLINEAR ALGEBRIC EQUATION "ARE"

QUINDI, PER $\exists \bar{P}$:

- 1) ARE HA SOLUZIONI SDP? (EXISTENCE)
- 2) SE SI', DRE CONVERGE A \bar{P} ? (CONVERGENCE)
- 3) SE SI', IL CORRISPONDENTE \bar{K} E' TALE CHE KF E' STABILE? (STABILITY)

LA RISPOSTA E' DIFFICILE, MA CI SONO DUE TEOREMI IN NOSTRO AIUTO:

1ST ASYMPTOTIC THEOREM

- SE:
- $V_{12} = \emptyset \Rightarrow$ NOISES NON CORRELATI
 - $S \in \text{ASI. STABLE} \Rightarrow \forall \text{ AUTOVAL DI } F \in \text{ IN UNIT DISK (STABILITY)}$

- THEN:
- ARE HA UNA E UNA SOLA SDP SOLUTION $\bar{P} \geq 0$
 - DRE CONVERGE A $\bar{P} \quad \forall P_0 \geq 0$
 - \bar{K} CORRISPONDENTE E' TALE CHE $KF \in \text{ASI. STABLE}$

2ND ASYMPTOTIC THEOREM

ABBIAMO BISOGNO CHE LO STATO SIA CONTROLLABILE DAL NOISE $V_1(t)$

\Rightarrow VERO SSE $R = [\Gamma F \Gamma F^2 \Gamma \dots F^{M-1} \Gamma]$ E' FULL RANK

Dove $V_1 \sim WN(0, V_1) \rightarrow V_1 = \Gamma \Gamma^T$

E CHE LO STATO SIA OSSERVABILE DALL'OUTPUT

$\Rightarrow (F, H)$ OSSERVABILE SE $\Theta = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^{M-1} \end{bmatrix}$ E' FULL RANK

QUINDI

- SE:
- $V_{12} = \emptyset$
 - (F, H) E' OBSERVABLE
 - (F, Γ) E' CONTROLLABILE ($V_1 = \Gamma \Gamma^T$)

- THEN:
- ARE HA UNA E UNA SOLA D.P. SOLUTION $\bar{P} > 0$
 - DRE CONVERGE A $\bar{P} \quad \forall P_0 \geq 0$
 - \bar{K} CORRISPONDENTE E' TALE CHE $KF \in \text{ASI. STABLE}$

QUESTI TEOREMI SONO MOLTO UTILI NELLA PRATICA SE SI RISPETTANO LE IPOTESI...

PIU' FORTE
DI 1ST THEO

ES DI KF

$$S: \begin{cases} x(t+1) = \frac{1}{2}x(t) + v_1(t) & v_1 \sim \text{WN}(0, \frac{19}{20}) \\ y(t) = 2x(t) + v_2(t) & v_2 \sim \text{WN}(0, 1) \end{cases} \quad v_1 \perp v_2 \Rightarrow V_{12} = \emptyset$$

$$v_1 \perp x(1)$$

$$v_2 \perp x(2)$$

o) \exists LO STEADY STATE KF? $\left\{ \begin{array}{l} \hat{x}(t|t-1) \\ \hat{x}(t|t) \end{array} \right.$

$$M=1 \quad x(t) = x_1(t) \quad * F E' INVERTIBILE$$

$$F = \frac{1}{2} \quad G = \emptyset \quad H = 2 \quad * ANENDO \quad V_{12} = \emptyset, \text{ PROVIAMO CON ASY. THeo.}$$

1) COMPUTE DRE

$$\begin{aligned} P(t+1) &= FP(t)F^T + V_1 - (FP(t)H^T + V_{12})(HP(t)H^T + V_2)^{-1}(FP(t)H^T + V_{12})^T \\ &= \frac{1}{4}P(t) + \frac{19}{20} - \left(\frac{P(t)^2}{4P(t)+1} \right) \\ &= \frac{\cancel{P(t)^2} + \frac{1}{4}P(t) + \frac{19}{5}P(t) + \frac{19}{20} - \cancel{P(t)^2}}{4P(t)+1} \end{aligned}$$

$P(t)^2$ DEVE SCOMPARIRE

$$DRE = P(t+1) = \frac{81P(t) + 19}{80P(t) + 20}$$

2) COMPUTE ARE

$$\bar{P} = \frac{81\bar{P} + 19}{80\bar{P} + 20} \rightarrow 80\bar{P}^2 - 61\bar{P} - 19 = 0 \rightarrow \begin{cases} \bar{P}_1 = 1 \\ \bar{P}_2 = -\frac{19}{80} \end{cases} \quad \text{LO}$$

UNICA SOL

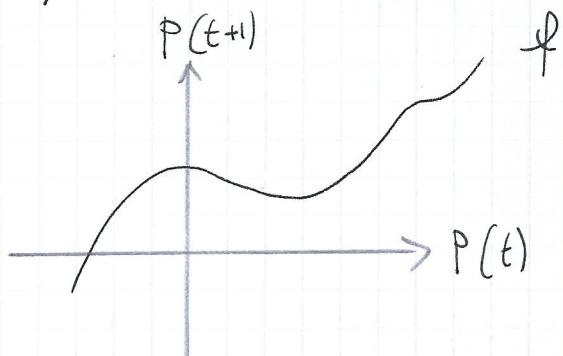
DRE HA UNA SOP STEADY STATE SOL.

PROBLEMA: DRE CONVERGE A $\bar{P}=1$? DUE POSSIBILITA':

A) ANALISI DIRETTA DRE

$$DRE = P(t+1) = f(P(t))$$

\rightarrow DOBBIAMO PLOTTARE f
NEL PIANO $P(t) - P(t+1)$

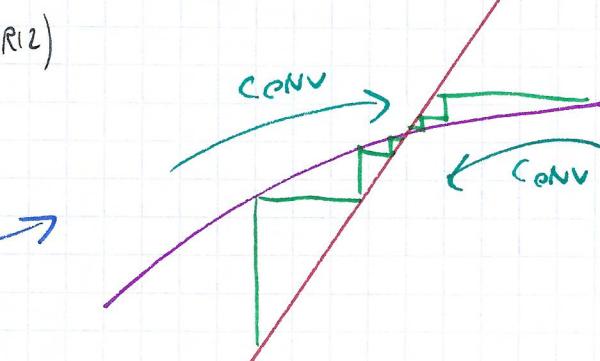
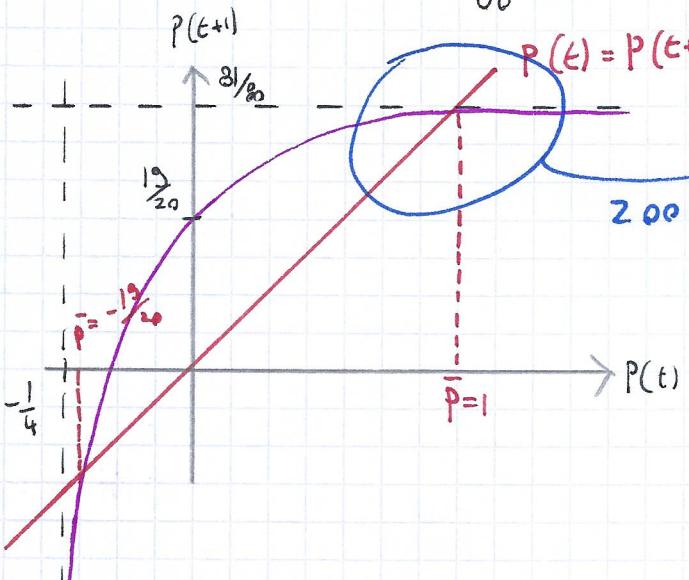


ABBIAMO

$$P(t+1) = \frac{81P(t) + 19}{80P(t) + 20}$$

VALORI ASINTOTICI:

$$P(t) = -\frac{20}{80} = -\frac{1}{4} \quad (\text{VERT})$$
$$P(t+1) = \frac{81}{80} \quad (\text{HORIZ})$$



\Rightarrow ABBIAMO LA CONFERMA!

TUTTANIA QUESTA ANALISI È FATTIBILE
SOLÒ PER $M=1$... DOPO È TROPPO
DIFFICILE.

\Rightarrow MEGLIO USARE I TEOREMI

B) TEOREMI

$$\begin{cases} V_{12} = 0 \\ F = \frac{1}{2} = \text{ASY STABLE} \end{cases} \rightarrow \text{TEO 1 OK!}$$

$$\begin{cases} V_{12} = 0 \\ \text{OBS. MATRIX DI } \{F, H\} \rightarrow \bigoplus = [2] = \text{RANK 1} = \text{SYS OBS. DA OUTPUT} \\ \text{CNT. MATRIX DI } \{F, P\} \rightarrow R = [\sqrt{\frac{19}{20}}] = \text{RANK 1} = \text{SYS CNT. DA NOISE} \end{cases}$$

\rightarrow TEO 2 OK!

\rightarrow ARE HA UNA SOL E $\bar{P} > 0$, INOLTRE DRE $\rightarrow \bar{P} \forall P_0 \geq 0$
E IL \bar{K} CORRISPONDENTE RENDE KF STABILE

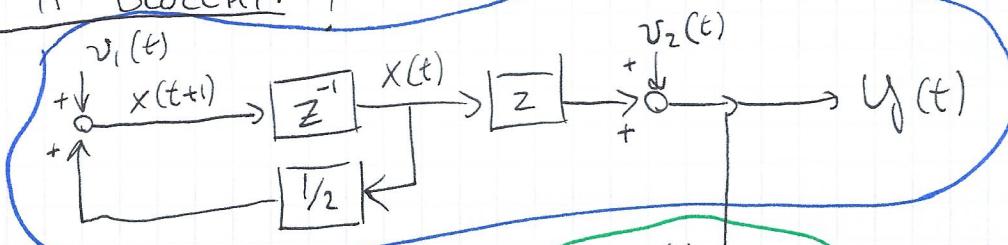
3) COMPUTA \bar{K}

$$\bar{K} = (F\bar{P}H^T + V_{12})(H\bar{P}H^T + V_2)^{-1} = \boxed{\frac{1}{5}}$$

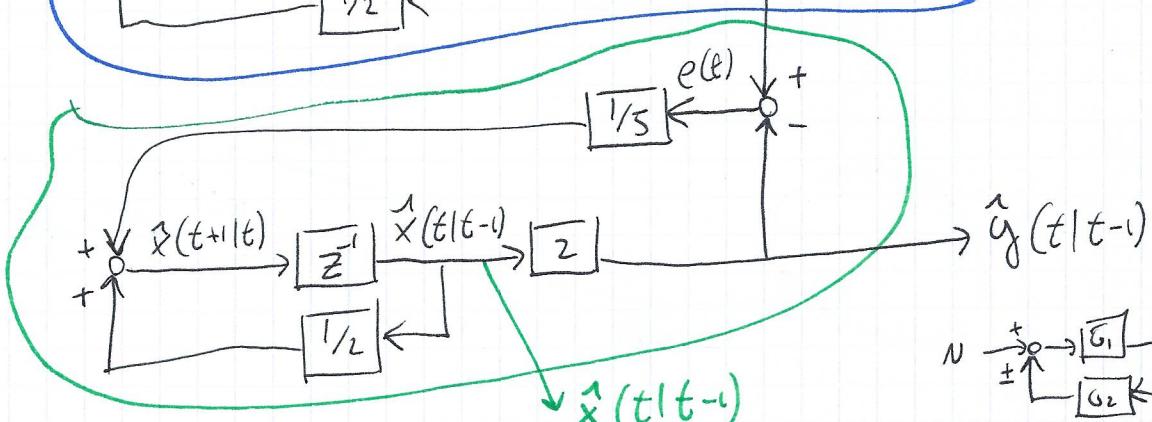
CHECK X
SICUREZZA
DI STABILITÀ : $F - \bar{K}H = \frac{1}{10}$ \rightarrow DENTRO UNIT DISK \rightarrow OK
DI KF

SCHEMA A BLOCCUO: ?

S :



KF:



FDT DA $y(t)$ A $\hat{x}(t|t-1)$?

$$\boxed{\text{FORMULA} \quad y(t) = \frac{G_1(z)}{1 + G_1(z)G_2(z)} N(t)}$$

DIRECT LINE
DA U A Y
↓ LOOP FUNCTION

$$\hat{x}(t|t-1) = \frac{\frac{1}{5} \frac{z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}}{1 + \frac{1}{5} \cdot 2 \cdot \frac{z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}} = \frac{\frac{1}{5}z^{-1}}{1 - \frac{1}{10}z^{-1}} y(t) \xrightarrow{\text{TIME DOMAIN}} \hat{x}(t|t-1) = \frac{1}{10} \hat{x}(t-1|t-2) + \frac{1}{5} y(t-1|t-2)$$

DA CUI ANCHE

$$\hat{x}(t+1|t) = \frac{1}{10} \hat{x}(t|t-1) + \frac{1}{5} y(t) \quad \begin{matrix} \text{PREDICT} \\ 1-\text{STEP AHEAD} \end{matrix}$$

OUTPUT PREDICTION ?

$$\hat{y}(t|t-1) = H \hat{x}(t|t-1) = \frac{2/5}{1 - \frac{1}{10}z^{-1}} y(t-1)$$

FILTRO STATO $\hat{x}(t|t)$?

$$\hat{x}(t|t) = F^{-1} \hat{x}(t+1|t) \rightarrow F \in' \text{INVERTIBILE!}$$

$$= \frac{2/5}{1 - \frac{1}{10}z^{-1}} y(t)$$

EXTENDED KF'S STATE

TALVOLTA NEL DESIGN DEI KF LA RICHIESTA CHE \mathcal{V}_1 E \mathcal{V}_2 SIANO WHITE NOISE E' TOO - DEMANDING.

COME FARE SE ESSI NON SONO WN?

ES

$$S: \begin{cases} x_1(t+1) = a x_1(t) + m(t) \\ y(t) = b x_1(t) + v_2(t) \end{cases} \rightarrow m(t) = \frac{1}{1-cz^{-1}} e(t)$$

$v_2 \sim WN(0,1) \dots$ MA

$m(t)$ NON E' WN, QUVERO NE ABBIAMO UN MODELLO...

NON POSSIAMO APPLICARE LE FORMULE STD.
PROCEDIAMO DIVERSAMENTE:

$$\begin{aligned} m(t) &= Cm(t-1) + e(t) \\ m(t+1) &= Cm(t) + e(t+1) \rightarrow \text{DEFINIAMO } v(t) = e(t+1) \\ \downarrow \\ \rightarrow m(t+1) &= Cm(t) + v(t) \end{aligned}$$

$v \sim WN(0,1)$
 $v \perp v_2$

TRICK: $x_2(t) = m(t) \rightarrow$ ESTENSIONE DELLO STATE VECTOR

RIDEFINIAMO IL SYS ESTESO (INCLUDIAMO NEL SYS LE DINAMICHE DEL NOISE)

$$S: \begin{cases} x_1(t+1) = a x_1(t) + x_2(t) \\ x_2(t+1) = c x_2(t) + v(t) \\ y(t) = b x_1(t) + v_2(t) \end{cases} \Rightarrow v(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ v(t) \end{bmatrix} \rightarrow v_1 \sim WN(0, V_1)$$

$$V_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad v_2(t) \sim WN(0, 1)$$

$$V_{12} = \emptyset$$

SU QUESTO EXT SYS POSSIAMO APPLICARE LE KF FORMULAS...

EXTENDED KF

→ NON LINEAR EXTENSION (EKF)

CONSIDERIAMO UN SYS NON-LINEARE:

$$\begin{cases} x(t+1) = f(x(t)) + v_1(t) \\ y(t) = h(x(t)) \end{cases} \quad \text{CON}$$

$f(\cdot) \in h(\cdot)$ FUNZIONI
NON LINEARI ($\in C^1$ O PIÙ)

$$\begin{cases} x(t+1) = \frac{1}{2}x(t)^2 + v_1(t) \\ y(t) = e^{x(t)} + v_2(t) \end{cases}$$

COME CREARE IL KF IN QUESTO CASO?

IL PROBLEMA È SEMPRE $[K]$... (GAIN)

DUE POSSIBILITÀ:

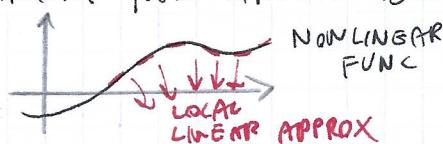
1) GAIN È NON LINEARE



2) GAIN È LINEARE TIME-VARYING $\leftarrow [K(t)] \leftarrow e(t) \quad K(t) \cdot e(t)$

MEGLIO LA 2): POSSIAMO RIUTILIZZARE MOLTO DELLA TEORIA FAENDO SOLO AGGIUSTAMENTI

⇒ APPROSSIMIAMO UN TIME-INVARIANT NON-LINEAR BLOCK CON UNO TIME-VARYING LINEARE



$K(t)$ IN EKF È DATO DA

$$K(t) = (F(t)P(t)H(t)^T + V_{12}) (H(t)P(t)H(t)^T + V_2)^{-1} \quad E \quad P(t) \quad DA:$$

$$P(t+1) = (F(t)P(t)F(t)^T + V_1) - (F(t)P(t)H(t)^T + V_{12})(H(t)P(t)H(t)^T + V_2)^T(F(t)P(t)F(t)^T + V_{12})^T$$

→ COME IN CASO CLASSICO MA $F(t) \in H(t)$ SONO TIME-VARYING...

COME LE COMPUTIAMO?

$$\downarrow \quad F(t) = \left. \frac{d f(x(t))}{d x(t)} \right|_{x(t) = \hat{x}(t|t-1)}$$

→ SONO LE LOCAL LINEARIZED MATRIX COMPUTED AROUND THE LAST AVAILABLE STATE PREDICTOR $\hat{x}(t|t-1)$

$$H(t) = \left. \frac{d h(x(t))}{d x(t)} \right|_{x(t) = \hat{x}(t|t-1)}$$

PROCEDURA PER COMPUTARE EKF:

AL TEMPO t :

* PRENDI L'ULTIMO STATE PREDICTOR DISPONIBILE: $\hat{x}(t|t-1)$

* USALO PER COMPUTARE $F(t)$ E $H(t)$

* TROVA $K(t)$ E AGGIORNA DRE

* COMPUTA $\hat{x}(t+1|t)$ PER IL PROSSIMO STEP

→ ITERA AD OGNI t SUCCESSIVO

NOTE

→ EKF È POTENTE PERCHÉ AUMENTA MOLTO LE POSSIBILITÀ DI UTILIZZO

→ EKF NON HA UNO STEADY STATE OVIAMENTE

→ I PROBLEMI SONO SIMILI A TIME-VAR KF

* MOLTO DIFFICILE AVERE GARANZIE SUA STABILITÀ¹

* COMP. LOAD

→ MOLTO USATO TRAMME CHE IN APPLICAZIONI CRITICHE

GREY-BOX IDENTIFICATION

ABBIAMO

$$S: \begin{cases} x(t+1) = \varphi(x(t), \theta) + v_1(t) & v_1, v_2 \sim WN \\ y(t) = h(x(t), \theta) + v_2(t) \end{cases}$$

θ È UN VETTORE DI PARAMETRI SCONOSCIUTI DELLE MODEL FUNCTIONS $\varphi \in h$.

È POSSIBILE STIMARE θ DA UN KF...

→ TRICK DEL **SYSTEM EXTENSION**: CONSIDERIAMO $\theta(t)$ UNA ESTENSIONE DELLO STATE VECTOR:

$$\begin{cases} x(t+1) = \varphi(x(t); \theta(t)) + v_1(t) \\ \theta(t+1) = \theta(t) + v_\theta(t) & v_\theta \sim WN(0, V_\theta) \\ y(t) = h(x(t); \theta(t)) + v_2(t) \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} \text{EQUAZIONE} \\ \text{FITTIZA} \end{array}$$

IL NOISE È IMPORTANTE PER FARLO RICERCARE IL VALORE CORRETTO DI θ

$$\hookrightarrow S_{\text{EXT}} \begin{cases} x(t+1) = f(x(t); \theta(t)) + v_1(t) \\ \dot{\theta}(t+1) = \dot{\theta}(t) + v_2(t) \\ y(t) = h(x(t); \dot{\theta}(t)) + v_3(t) \end{cases}$$

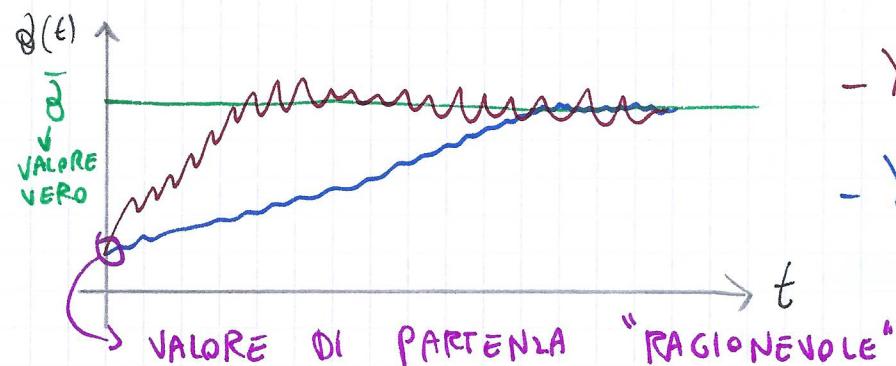
$$X_E = \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix} \quad V_{1E} = \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix}$$

CHE RIMANE DA DERIVARE $v_3(t)$?

$$v_1 \perp v_{12} \rightarrow V_3 = \begin{bmatrix} \lambda_\theta^2 & & & \emptyset \\ & \lambda_\theta^2 & & \\ \emptyset & & \ddots & \\ & & & \lambda_\theta^2 \end{bmatrix} \quad v_3 \sim \mathcal{WN}(0, V_3)$$

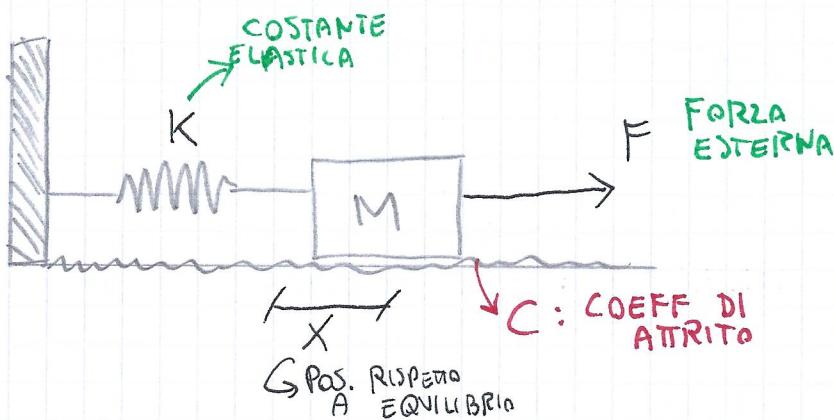
$$V_2 \perp V_{12}$$

IN PRATICA V_3 È UN DESIGN → TUNED EMPIRICAMENTE



- λ_θ^2 GRANDE → FAST MA NOISY
- λ_θ^2 PICCOLO → LENTO MA MENO NOISY

"TOY" APPLICATION EXAMPLE



GOALS

- 1) STIMARE VELOCITÀ
- 2) STIMARE IL PARAMETRO C

1) MODELLIAMO IL SISTEMA → "WHITE BOX"

$$M\ddot{x} = -Kx - C\dot{x} + F \quad \text{2nd ORDER LINEAR ORDINARY DIFF. EQ}$$

ABBIAMO QUINDI $M=2 \rightarrow x = \begin{cases} x_1 = \text{POSITION}(x) \\ x_2 = \text{SPEED}(\dot{x}) \end{cases}$

QUINDI POSSIAMO DEFINIRE LE EQ DI STATO

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \cancel{\dot{M}\dot{x}_2(t)} = -\frac{K}{M}x_1(t) - \frac{\ell}{M}x_2(t) + F(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{\ell}{M} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/M \end{bmatrix}$$

2) PASSIAMO NEL DOMINIO DEL DISCRETE TIME $(\dot{x}_1(t) \approx \frac{x_1(t+1) - x_1(t)}{\Delta T})$

$$\begin{cases} x_1(t+1) = x_1(t) + \Delta T x_2(t) \\ x_2(t+1) = -\frac{K \Delta T}{M} x_1(t) + \left(1 - \frac{\ell \Delta T}{M}\right) x_2(t) + \frac{\Delta T}{M} F(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

DOBBIAMO ESTENDERE PER TROVARE IL PAR. INCognITO



$$\begin{cases} x_1(t+1) = x_1(t) + \Delta T x_2(t) + \mathcal{U}_{11}(t) \\ x_2(t+1) = -\frac{K \Delta T}{M} x_1(t) + \left(1 - \frac{\Delta T x_3(t)}{M}\right) x_2(t) + \frac{\Delta T}{M} F(t) + \mathcal{U}_{12}(t) \\ x_3(t+1) = x_3(t) + \mathcal{U}_{13}(t) \\ y(t) = x_1(t) + \mathcal{U}_2(t) \end{cases}$$

NON LINEARE \rightarrow C1 SERVE EKF

$$\mathcal{U}_1(t) = \begin{bmatrix} \mathcal{U}_{11}(t) \\ \mathcal{U}_{12}(t) \\ \mathcal{U}_{13}(t) \end{bmatrix} \sim \mathcal{WN}(0, V_1), V_1 = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & & \\ & \lambda_{12} & \\ & & \lambda_{13} \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{U}_2(t) \sim \mathcal{WN}(0, V_2)$$

ORA POTREMMO USARE LE FORMULE.

ESEMPIO DI OTTIMIZZAZIONE DEL GAIN (K)

S: $\begin{cases} x(t+1) = 2x(t) \xrightarrow{\text{UNSTABLE!}} \mathcal{U}_1 = 0 \rightarrow \text{NO STATE NOISE} \\ y(t) = x(t) + \mathcal{U}(t) \quad \mathcal{U} \sim \mathcal{WN}(0, 1) \end{cases}$

VOGLIAMO TROVARE LO STEADY-STATE PREDICTION DELLO STATO: $\hat{x}(t+1|t)$

PROVIAMO CON DUE METODI:

1) OTTIMIZZAZIONE DIRETTA

$$\begin{cases} \hat{x}(t+1|t) = 2\hat{x}(t|t-1) + K(y(t) - \hat{y}(t|t-1)) \\ \hat{y}(t|t-1) = \hat{x}(t|t-1) \end{cases}$$

[STD. OBSERVER STRUCTURE]

MINIMIZZANDO LA VARIANZA DEGLI ERRORE DELLO STATO PREDICTOR

$$= \mathcal{U}_{AR}[x(t) - \hat{x}(t|t-1)]$$

$$x(t+1) - \hat{x}(t+1|t) = zx(t) - [z\hat{x}(t|t-1) + K(y(t) - \hat{y}(t|t-1))]$$

$$= (z-K)(x(t) - \hat{x}(t|t-1)) - Ky(t)$$

DEFINIAMO $\eta(t) = x(t) - \hat{x}(t|t-1)$

$$\hookrightarrow \eta(t+1) = (z-K)\eta(t) - Ky(t) \quad v \sim WN(0, 1)$$

$$\hookrightarrow \text{AR(1) PROCESS!} \quad \eta(t) = \frac{1}{1-(z-K)} e(t) \quad e(t) \sim WN(0, K^2)$$

FORMA CANONICA

→ TROVIAMO LA VARIANZA

$$\text{VAR}[\eta(t)] = \frac{K^2}{1-(z-K)^2} \rightarrow \text{MINIMIZZIAMO DERIVANDO} \dots$$

$K=0$ (NO FEEDBACK CORRECTION?)

$K = \frac{3}{2}$ OK!

2) USANDO KF

$$\begin{cases} F=2 & \mathcal{V}_1 = \emptyset \rightarrow \Gamma = \emptyset \\ H=1 & H=1 \quad \mathcal{V}_2 = 1 \quad \mathcal{V}_{12} = 0 \end{cases}$$

TEOREMI

TH 1 : $\mathcal{V}_{12} = 0$ ✓
 F ASY STABLE ✗] ⓘ

TH 2 : $\mathcal{V}_{12} = 0$ ✓
 (F, Γ) REACHABLE ✗
 (F, H) OBSERVABLE ✓] ⓘ

→ DOBBIAMO USARE ANALISI DIRETTA DEL DRE

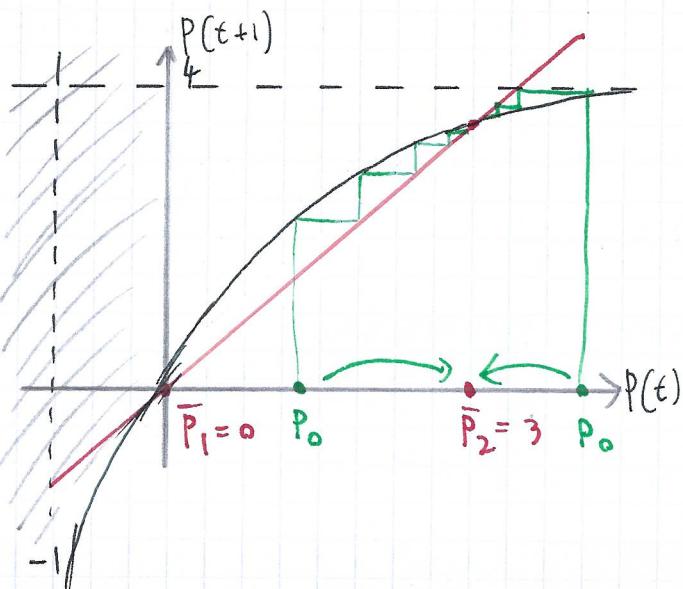
$$\text{DRE: } P(t+1) = 4P(t) - \frac{(2P(t))^2}{P(t)+1} \dots$$

PER TROVARE DEGLI STEADY STATE
→ SOLVE ARE

$$\hookrightarrow \text{ASY HOR: } y=4$$

VER: $x=-1$

$$\rightarrow \bar{P} = \frac{4\bar{P}}{\bar{P}+1} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{cases} \bar{P}_1 = 0 \\ \bar{P}_2 = 3 \end{cases} \quad (\bar{P}^2 - 3\bar{P} = 0)$$



* SE PARTIAMO DA $P_0 > 0$: NON SAPPIAMO DI PRECISO $X(1)$

→ CONVERGIAMO IN $\bar{P}=3 \rightarrow \boxed{K=\frac{3}{2}}$ OK!

* SE PARTIAMO DA $P_0 = 0 \rightarrow X(1)$ E' CONOSCIUTO!

→ RIMANIAMO IN $\bar{P}=0 \rightarrow \bar{K}=0$ (OPEN LOOP)

ESSENDO LA STATE EQ NOISE FREE, SE SAPPIAMO $X(1)$ NON ABBIAMO BISOGNO DI FEEDBACK CORRECTION...

2.3 - MINIMUM VARIANCE CONTROL

"DESIGN E ANALISI DI FEEDBACK SYSTEMS"

* CONTROL DESIGN E' LA PIU' IMPORTANTE APPLICAZIONE DEL SYSTEM IDENTIFICATION

* M.V.C E' BASATO SUA TEORIA DI MIDA 1

PROBLEMA

M.V.C E' SVILUPPATO PARTENDO DA ARRAY MODELS:

$$y(t) = \frac{B(z)}{A(z)} N(t-K) + \frac{C(z)}{A(z)} e(t) \quad e \sim WN(0, \lambda^2)$$

$$B(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_p z^{-p}$$

$$A(z) = 1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_m z^{-m}$$

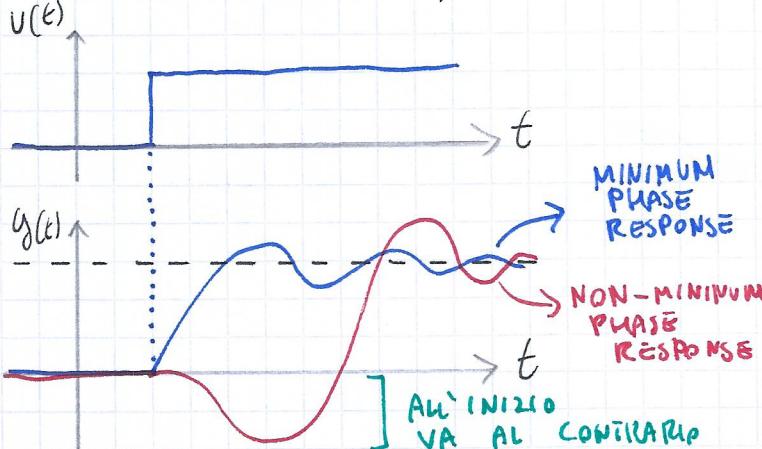
$$C(z) = 1 + c_1 z^{-1} + \dots + c_m z^{-m}$$

ASSUNZIONI

- $b_0 \neq 0 \rightarrow K \text{ E' DELAY VERO DEL SYS}$
- $\frac{C(z)}{A(z)}$ E' IN FORMA CAN.
- $\frac{B(z)}{A(z)}$ E' MINIMUM PHASE

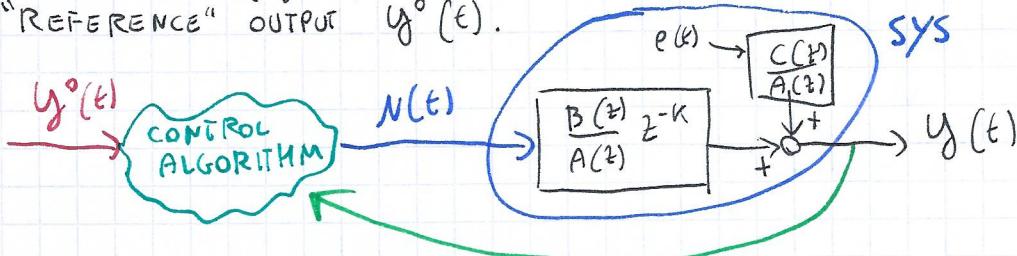
$$\Rightarrow \frac{B(z)}{A(z)}$$

È DETA MINIMUM-PHASE SE TUTTE LE RADICI DI $B(z)$ SONO STRETTAMENTE NEL UNIT DISK



È DIFFICILE CONTROLLARE UN SYS NON-MIN PHASE. NON CE NE OCCUPEREMO...

IL PROBLEMA CHE VOGLIAMO RISOLVERE E' "TRACKING" UNA VARIABILE CONTROLLATA ($y(t)$) AD UN BEHAVIOUR DESIDERATO DESCrito DAL "REFERENCE" OUTPUT $y^*(t)$.



FORMALMENTE VOGLIAMO SVILUPPARE UN CONTROLLER CHE MINIMIZZI:

$$J = E[(y(t) - y^*(t))^2]$$

ALCUNE ASSUNZIONI AGGIUNTIVE:

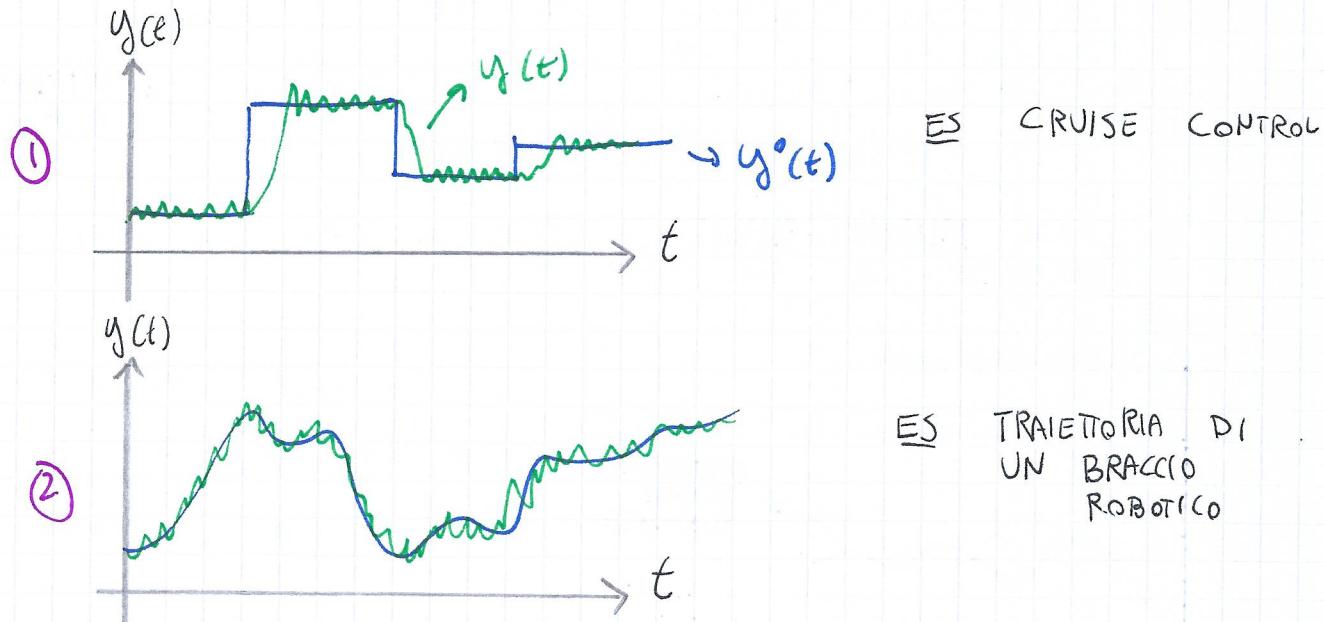
* $y^*(t) \in e(t)$ NON SONO CORRELATI ($y^*(t) \perp e(t)$)
 → SOLITAMENTE VERO

* ASSUMIAMO CHE $y^*(t)$ SIA NOTA SOLO AL TEMPO t (PRESENT TIME) CASO PESSIMO
 → NO PREVIEW DEL FUTURO DEL VALORE DESIDERATO DI $y^*(t)$!
 ASSUMIAMO QUINDI $\hat{y}^*(t+k|t) = y^*(t)$

DUE TIPI DI PROBLEMI:

① $y^*(t)$ COSTANTE / STEP WISE → "REGULATION PROBLEM"

② $y^*(t)$ SEMPRE VARIABILE → "TRACKING PROBLEM"



SIMPLIFIED PROBLEM #1

$$S: y(t) = 2y(t-1) + b_0 N(t-1) + b_1 N(t-2)$$

$$= \frac{(b_0 + b_1 z^{-1})}{1 - 2z^{-1}} N(t-1) \quad \cancel{\text{NO NOISE}}$$

$\neq 0$ $\downarrow_{K=1}$
 ROOT IN UNIT DISK

ASSUMIAMO $y^*(t) = \bar{y}^*$ → REGULATION PROBLEM

$$\mathcal{J} = E[(y(t) - y^*(t))^2] \rightarrow \begin{array}{l} \text{PROVIAMO A} \\ \text{MINIMIZZARE} \end{array} \text{ RISPETTO A } N(t) \text{ (CNTR)}$$

NO NOISE ↓

$$= (y(t) - \bar{y}^*(t))^2 = (y(t) - \bar{y}^*)^2 = \longrightarrow$$

$$\bar{J} = (\alpha y(t-1) + b_0 N(t-1) + b_1 N(t-2) - \bar{y}^o)^2$$

↓ TIME SHIFT

$$= (b_0 + b_1 z^{-1}) u(t)$$

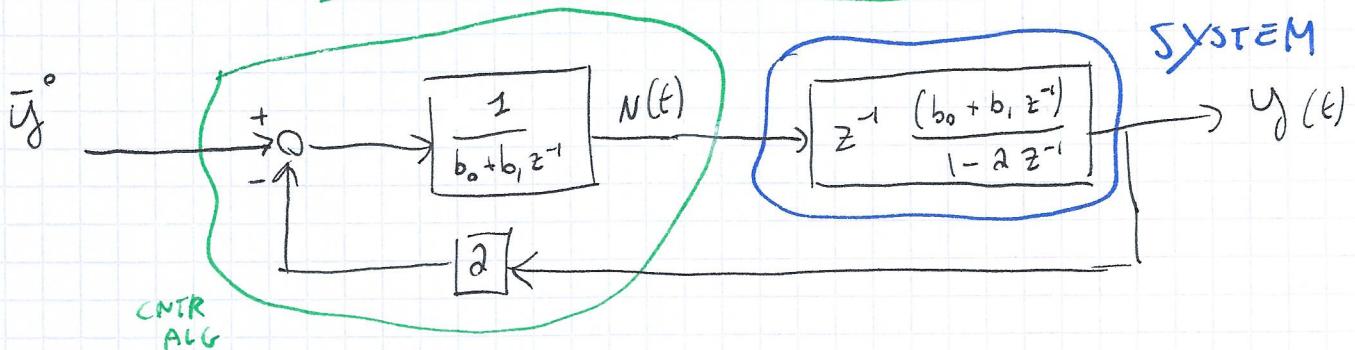
$$\bar{J} = (\alpha y(t) + b_0 N(t) + b_1 N(t-1) - \bar{y}^o)^2$$

$y(t) \in N(t-1)$ SONO
NUMERI AL TEMPO t !
DERIVATI → ZERO

$$\frac{d\bar{J}}{dN(t)} = 2(\alpha y(t) + b_0 N(t) + b_1 N(t-1) - \bar{y}^o)(b_0)$$

PONIAMO $= 0 \rightarrow N(t) = (\bar{y}^o - \alpha y(t)) \cdot \frac{1}{b_0 + b_1 z^{-1}}$

CNTR ALG!



SIMPLIFIED PROBLEM #2

$$\bar{J} = (\alpha y(t) + b_0 y(t-1) + b_1 y(t-2) + e(t))^2$$

$$S: y_d(t) = \alpha_1 y_d(t-1) + b_0 u(t-1) + b_1 N(t-2) + e(t)$$

INTRODUZIONE NOISE

- $b_0 \neq 0$, $(b_0 + b_1 z^{-1})$ È MIN. PHASE

→ REF. VAR È $y_d^o(t)$ → TRACKING PROBLEM

IL TRICK NECESSARIO È "VEDERE" $y_d(t)$ COME:

$$y_d(t) = \underbrace{\hat{y}_d(t|t-1)}_{\text{PREDICTOR}} + \underbrace{e(t)}_{\text{PRED ERROR}}$$

AVENDO $K=1 \rightarrow e(t) = \hat{e}(t)$

$$\Rightarrow y_d(t) = \hat{y}_d(t|t-1) + e(t) \downarrow$$

$$\bar{J} = E[(\hat{y}_d(t|t-1) + e(t) - y_d^o(t))^2] = E[(\hat{y}_d(t|t-1) - y_d^o(t) + e(t))^2]$$

$$\rightarrow = E[(\hat{y}_d(t|t-1) - y_d^o(t))^2] + E[e(t)^2] + E[2e(t)(\hat{y}_d(t|t-1) - y_d^o(t))]$$

0 ↓ BX ASSUMP

DATO CHE χ^2 NON DIPENDE DA $y_d(t)$:

$$\underset{u(t)}{\operatorname{argmin}} \{ \bar{J} \} = \underset{u(t)}{\operatorname{argmin}} \left\{ E[(\hat{y}_d(t|t-1) - y_d^o(t))^2] \right\} \rightarrow \boxed{\hat{y}_d(t|t-1) = y_d^o(t)}$$

POSSIAMO COMPUTARE $\hat{y}(t|t-1)$ DA S:

$$S: \hat{y}(t) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 - az^{-1}} u(t-1) + \frac{1}{1 - az^{-1}} e(t)$$

$$\text{ARMAX}(1, 0, 1+1) = \text{ARX}(1, 2)$$

$K=1$

$$B(z) = b_0 + b_1 z^{-1}$$

$$A(z) = 1 - az^{-1}$$

$$C(z) = 1$$

USANDO LA FORMULA DEL PREDICTOR PER ARMAX:

$$\begin{aligned} \hat{y}(t|t-1) &= \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1} N(t-1) + \frac{(1 - az^{-1})}{1} \hat{y}(t) \\ &= (b_0 + b_1 z^{-1}) N(t-1) + a \hat{y}(t-1) \end{aligned}$$

$$\text{IMPONGO } \hat{y}(t|t-1) = y^*(t)$$

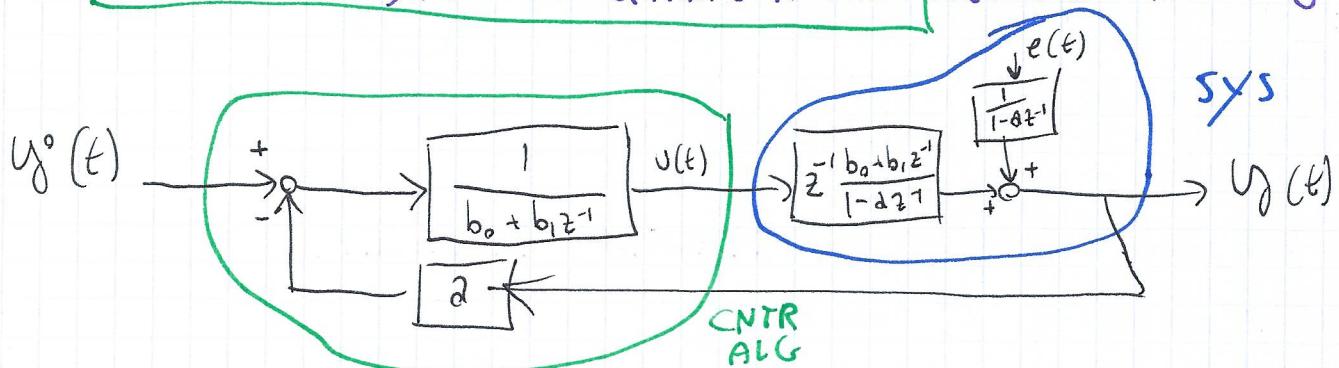
$$b_0 N(t-1) + b_1 u(t-1) + a \hat{y}(t-1) = y^*(t)$$

SHIFT ↓

$$b_0 N(t) + b_1 u(t-1) + a \hat{y}(t) = y^*(t+1)$$

$$\hookrightarrow u(t) = \left(y^*(t+1) - a \hat{y}(t) \right) \frac{1}{b_0 + b_1 z^{-1}}$$

NON LO SAPPIAMO A T... ASSUMIAMO SIA = $y^*(t)$



STABILE? → SYSTEMA CON NEGATIVE FEED → COSTRUIAMO LOOP FUN E CHECK POLINOMIO CARATTERISTICO

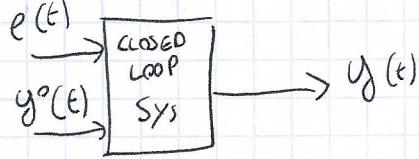
$$\text{LOOP: } L(z) = \frac{1}{b_0 + b_1 z^{-1}} \cdot \frac{z^{-1}(b_0 + b_1 z^{-1})}{1 - az^{-1}} \cdot a$$

$$\begin{aligned} \chi(z) &= az^{-1}(b_0 + b_1 z^{-1}) + (1 - az^{-1})(b_0 + b_1 z^{-1}) \\ &= (b_0 + b_1 z^{-1})(az^{-1} + 1 - az^{-1}) = b_0 + b_1 z^{-1} \end{aligned}$$

ROOTS SONO IN UNIT DISK?

SÌ, GRAZIE A MINIMUM PHASE ASSUMPTION

PERFORMANCE ?



IL SISTEMA E' LINEAR-TIME - INVARIANT (LTI)
QUINDI POSSIAMO USARE IL **SUPERPOSITION PRINCIPLE**

$$y(t) = F_{y^o y}(z) \cdot y^o(t) + F_{ey}(z) \cdot e(t)$$

$$F_{y^o y}(z) = \frac{\frac{1}{b_0 + b_1 z^{-1}} \cdot \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 - az^{-1}} \text{ ol}}{1 + \frac{1}{b_0 + b_1 z^{-1}} \cdot z^{-1} \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 - az^{-1}} \text{ ol}} = \dots = z^{-1}$$

] **DIRECT LINE** $y^o \rightarrow y$
 ↓ **loop func**

$$F_{ey}(z) = \frac{\frac{1}{1 - az^{-1}}}{1 + \frac{1}{b_0 + b_1 z^{-1}} z^{-1} \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 - az^{-1}} \text{ ol}} = \dots = 1$$

$$\rightarrow y(t) = y^o(t-1) + e(t) \rightarrow \begin{matrix} y(t) \text{ "segue" } y^o(t) \text{ CON UNO} \\ \text{STEP DI DELAY} \end{matrix} \rightarrow \underline{\text{BEST Solution!}}$$

SOLUZIONE GENERICA

$$S: y(t) = \frac{B(z)}{A(z)} N(t-K) + \frac{C(z)}{A(z)} e(t) \quad e \sim WN(0, \lambda^2)$$

SYS ARMAX GENERICO

ASSUNZIONI: $\star b_0 \neq 0$

$\star B(z)$ HA ROOTS IN UNIT DISK (MIN-PHASE)

$\star \frac{C(z)}{A(z)}$ IN FORMA CANONICA

$\star y^o(t) \perp e(t)$

$\star y^o(t)$ TOTALLY UNPREDICTABLE $\rightarrow \hat{y}(t+K|t) = y^o(t)$

$$\underline{\text{GOAL}} \rightarrow \text{MINIMIZZA } J = E[(y(t) - y^o(t))^2]$$

$$\text{TRICK} \rightarrow y(t) = \hat{y}(t|t-K) + \varepsilon(t)$$

$$J = E[(\hat{y}(t|t-K) + \varepsilon(t) - y^o(t))^2] = E[((\hat{y}(t|t-K) - y^o(t)) + \varepsilon(t))^2] =$$

$$= E[(\hat{y}(t|t-K) - y^o(t))^2] + E[\varepsilon(t)^2] + 2 E[\varepsilon(t)(\hat{y}(t|t-K) - y^o(t))]$$

FUNC DI
 $e(t)$ NON
 DIPENDE DA
 $N(t)$

∅

LA SOLUZIONE OTTIMA SI TROVA IMPOSENDO

$$\hat{y}(t|t-K) = y^*(t)$$

$$\frac{C(z)}{A(z)} = E(z) + \frac{\tilde{R}(z)z^{-K}}{A(z)}$$

[RIS E RESTO LONG DIVISION]

MIDA 1

$$= \frac{B(z)E(z)}{C(z)} N(t-K) + \frac{\tilde{R}(z)}{C(z)} y(t-K)$$

SHIFT
K STEPS

$$\hat{y}(t+K|t) = \frac{B(z)E(z)}{C(z)} v(t) + \frac{\tilde{R}(z)}{C(z)} y(t)$$

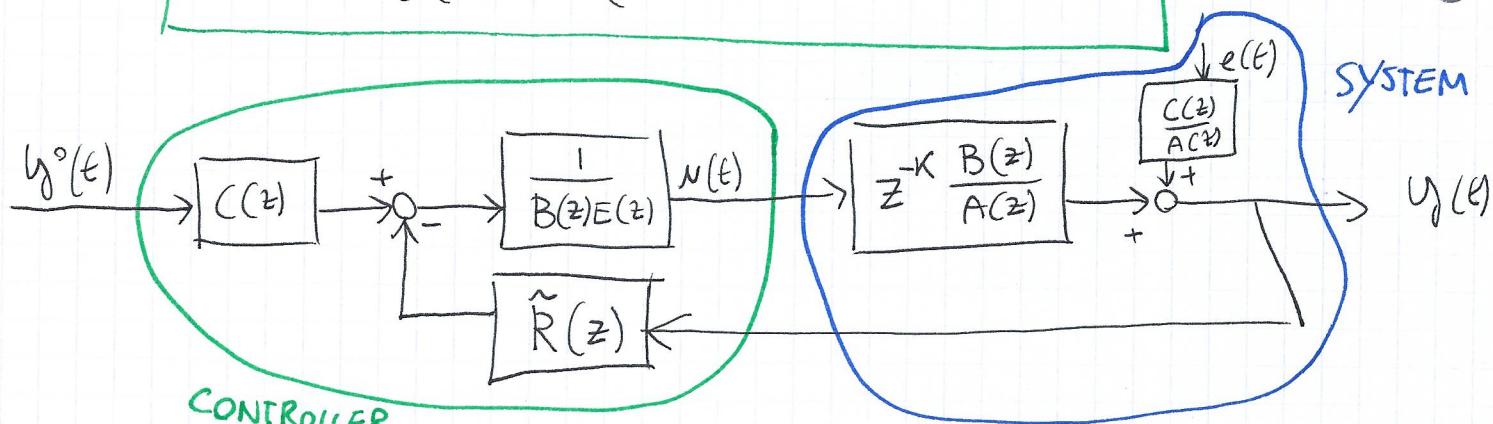
DA CUI $\hat{y}(t+K|t) = y^*(t+K)$

ASSUMP.

ESPLICATIVA
 $N(t)$

$$N(t) = \frac{1}{B(z)E(z)} \left(C(z)y^*(t) - \tilde{R}(z)y(t) \right)$$

FORMULA
GENERALE
M.V
CONTROLLER



STABILITÀ ?

$$L(z) = \frac{1}{B(z)E(z)} \cdot \frac{z^{-K}B(z)}{A(z)} \cdot \tilde{R}(z) \quad (\text{Loop Function})$$

$$\chi(z) = L_N(z) + L_D(z) = z^{-K}B(z)\tilde{R}(z) + B(z)E(z)A(z)$$

$$= B(z) \left(z^{-K}\tilde{R}(z) + E(z)A(z) \right) = \boxed{B(z)C(z)}$$

* CLOSED LOOP STABILE SE

- $B(z)$ ROOTS IN UNIT DISK
 \rightarrow SI' X MIN-PHASE ASS
- $C(z)$ ROOTS IN UNIT DISK
 \rightarrow SI' X CAN. FORM

PERFORMANCE?

$$y(t) = F_{y^o} y(z) \cdot y^o(t) + F_{ey} (z) \cdot e(t)$$

$$F_{y^o} (z) = \frac{C(z) \cdot \frac{1}{B(z)E(z)} \cdot \frac{z^{-K} B(z)}{A(z)}}{1 + \left[\frac{1}{B(z)E(z)} \cdot \frac{z^{-K} B(z)}{A(z)} \cdot \tilde{R}(z) \right]} = \dots = z^{-K}$$

$$F_{ey} (z) = \frac{\frac{C(z)}{A(z)}}{1 + [\quad]} = \dots = E(z)$$

DA CUI

$$y(t) = y^o(t-K) + E(z) e(t)$$

MIGLIOR POSSIBILE
CONTROL SYSTEM
BEHAVIOUR
→ OPTIMAL

↳ $y(t)$ SEGUE $y^o(t)$

- CON K STEP DI DELAY

- CON NOISE DI DISTURBO $E(z) e(t)$

LIMITI E GENERALIZED MVC

PER ORA ABBIAMO VISTO CHE MVC È UN OPTIMAL WAY PER COSTRUIRE DEI CONTROL SYSTEM PARTENDO DA UNA DESCRIZIONE ARMAX DEL SYS.

- I LIMITI PRINCIPALI :
 - * APPLICABILE SOLO A SISTEMI MIN-PHASE
 - SONO
 - * NON POSSIAMO MODERARE IL CONTROL / ACTUATION EFFORT

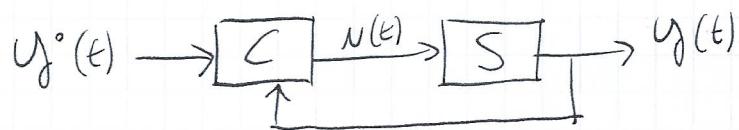
PER RISOLVERE ESISTE UN'ESTENSIONE CHIAMATA **GENERALIZED MVC**:

SOSTANZIALMENTE DEFINIAMO UN PERFORMANCE INDEX DIVERSO:

$$\text{MVC : } J = E[(y(t) - y^o(t))^2]$$

$$\text{GMVC : } J = E\left[\left(\underbrace{P(z)y(t)}_{\text{"REFERENCE MODEL"}} - y^o(t) + \underbrace{Q(z)N(t)}_{\text{"PENALIZZA L'USO DI } N(t)\text{ ALTO}}\right)^2\right]$$

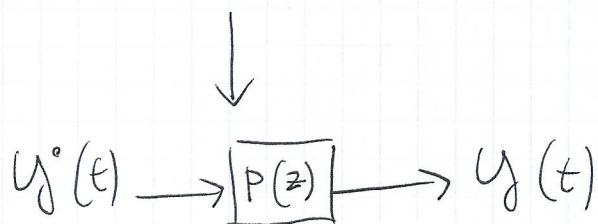
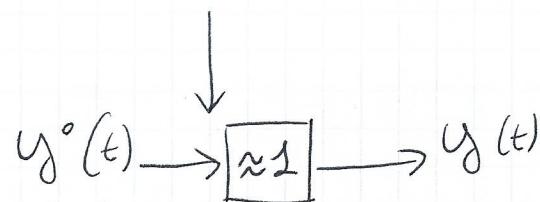
REFERENCE
MODEL :



IL GOAL

E' OTTENERE UN
BEHAVIOUR $u_r(t) \rightarrow u(t)$:
VICINO A 1

IN MOLTI CASI IL
MIGLIOR - CHOSEN CLOSED
LOOP NON E' "1" MA
E' PIU' COMPLICATO →
DATO DA REFERENCE
MODEL



2.4 - FREQUENCY DOMAIN PARAMETRIC SYS. ID (SOLO TEORIA)

APPROCCIO MOLTO USATO IN PRATICA:

- * ROBUSTO
- * FACILE DA CAIRE
- * SI ACCOPPIA BENE CON CONTROL DESIGN TECHNIQUES

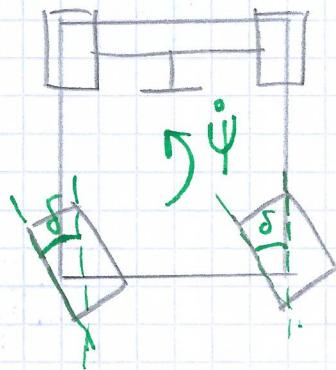
IL FUNZIONAMENTO GENERALE E' QUELLO DELLE TECNICHE DI ID. PARAMETRICHE:

- (1) EXPERIMENT DESIGN AND DATA PRE-PROCESSING [STEP "SPECIALE" IN FR. DOM. ID]
- (2) SCEGLIERE LA MODEL CLASS
- (3) DEFINIZIONE DEL PERFORMANCE INDEX
- (4) STEP DI OTTIMIZZAZIONE

IDEA GENERALE

- * EFFETUA UN SET DI | SINGLE-TONE | EXCITATION EXPERIMENTS
| SINGLE-SINUSOID |
- * DA OGNI ESPERIMENTO STIMA UN PUNTO DELLA FR. RESPONSE DEL SISTEMA
- * "FAI COMBINARE" TALI PUNTI A UN MODELLO PARAMETRICO

ES



δ = ANGOLO DI
STERZATA RUOTE
POSTERIORI

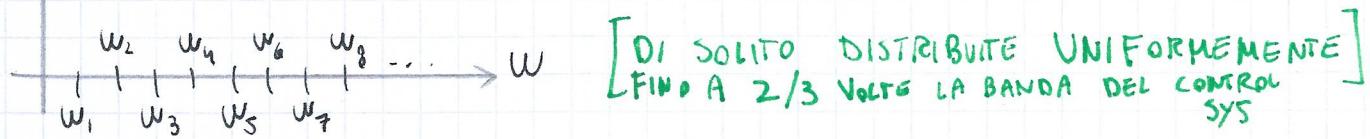
$\dot{\psi}$ = VELOCITÀ ROTAZIONALE
DELLA MACCHINA

VOGLIAMO COSTRUIRE
UN CONTROLLO
DI STABILITÀ PER
LA MACCHINA.



PRIMA DI TUTTO SCEGLIAMO UN SET DI EXCITAMENT FREQUENCIES

$$\{w_1, w_2, w_3, \dots, w_M\}$$



EFFECTUAMO POI H EXCITATION EXPERIMENTS INDIPENDENTI:

$$\text{Exp \#1} \quad u_i(t) = A_i \sin(\omega_i t) \rightarrow \boxed{\quad} \rightarrow y_i(t) \quad i = 1, 2, \dots N$$

$$\text{EXP \#2} \quad N_2(t) = A_2 \sin(\omega_2 t) \quad \boxed{\text{Graph of } N_2(t) \text{ vs } t} \quad Y_{j+}(t) \quad t = 1, 2, \dots, N$$

$$\text{Exp } \# H \quad N_H(t) = A_H \sin(\omega_H t) \xrightarrow{\text{Integrator}} y_H(t) \quad t = 1, 2, \dots N$$

DI SOLITO $A_1 \geq A_2 \geq \dots \geq A_H$ PER RISPETTARE INPUT POWER

CONCENTRIAMOCI SULL' I-ESIMO ESPERIMENTO:

$N(i) = A_i \sin(\omega_i t)$

$y(t)$

$t = 1 \dots N$

LA SINUSOIDE IN OUTPUT
E' NOISY

- ⇒ • ABBIAMO SEMPRE DEL MEASUR. NOISE
• POSSONO ESSERCI PICCOLE PERTURBAZIONI DOVUTE AD ALTRI FATTORI

SE ASSUMIAMO CHE IL MODELLO SIA LINEAR-TIME-INVARIANT (LTI) ABBIAMO CHE $y_i(t)$ DEVE ESSERE UNA SINUSOIDA DI FREQ. W .

RIVOLIAMO A ESTRARLA DAL NOISY OUTPUT?

OUTPUT MODEL:

$$\hat{y}_i(t) = \underbrace{a_i}_{\text{SCONOSCIUTI}} \sin(w_i t) + b_i \cos(w_i t)$$

[MODELLO LINEARE NEI PARAMETRI]

POSSIAMO STIMARE $\{a_i, b_i\}$:

$$\{\hat{a}_i, \hat{b}_i\} = \underset{\{a_i, b_i\}}{\text{Argmin}} \{J_N(a_i, b_i)\} \quad \text{DOVE}$$

VARIANZA STIMATA DEL MODELLO DI ERRORE

$$\Rightarrow J_N(a_i, b_i) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left(\underbrace{\hat{y}_i(t)}_{\text{OUTPUT MISURATO}} - \underbrace{a_i \sin(w_i t) - b_i \cos(w_i t)}_{\text{MODELLO}} \right)^2$$

MINIMIZZIAMO

$$\begin{cases} \frac{\partial J_N}{\partial a_i} = \cancel{\frac{2}{N}} \sum_{t=1}^N (\cancel{\sin w_i t}) (y_i(t) - a_i \sin(w_i t) - b_i \cos(w_i t))^2 = 0 \\ \frac{\partial J_N}{\partial b_i} = \cancel{\frac{2}{N}} \sum_{t=1}^N (\cancel{\cos w_i t}) (y_i(t) - a_i \sin(w_i t) - b_i \cos(w_i t))^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \sum_{t=1}^N \sin(w_i t)^2 & \sum_{t=1}^N \sin(w_i t) \cos(w_i t) \\ \sum_{t=1}^N \sin(w_i t) \cos(w_i t) & \sum_{t=1}^N \cos(w_i t)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_i \\ b_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^N y_i(t) \sin(w_i t) \\ \sum_{t=1}^N y_i(t) \cos(w_i t) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \hat{a}_i \\ \hat{b}_i \end{bmatrix} = []^{-1} []$$

SE TORNIAMO A UNA FORMA SINUSOIDALE CLASSICA:

$$[B_i] \sin(w_i t + [\varphi_i]) = \hat{a}_i \sin(w_i t) + \hat{b}_i \cos(w_i t)$$

$$\Rightarrow B_i \sin(w_i t) \cos \varphi_i + B_i \cos(w_i t) \sin \varphi_i = \hat{a}_i \sin(w_i t) + \hat{b}_i \cos(w_i t)$$

$$\begin{aligned} B_i \cos \varphi_i &= \hat{a}_i \\ B_i \sin \varphi_i &= \hat{b}_i \end{aligned} \rightarrow \frac{\hat{b}_i}{\hat{a}_i} = + \arg(\varphi_i) = \boxed{\varphi_i = \arg\left(\frac{\hat{b}_i}{\hat{a}_i}\right)}$$

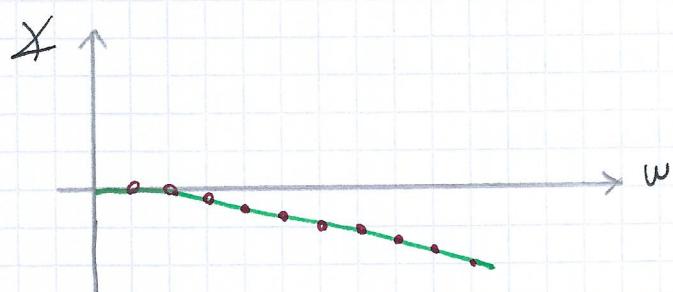
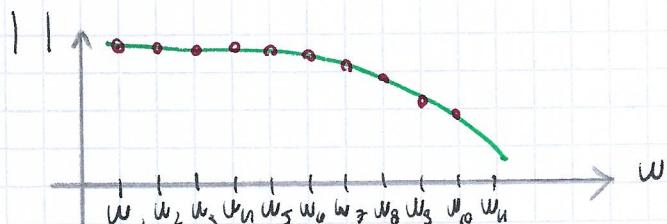
$$\boxed{B_i = \frac{\hat{a}_i / \cos \varphi_i + \hat{b}_i / \sin \varphi_i}{2}}$$

ABBIAMO ESTRATTO UNA SINUSOIDA "PULITA" $B_i \sin(\omega_i t + \phi_i)$ DA $y_i(t)$.

OTTENIAMO

$$\{B_i, \phi_i\} \xrightarrow{\text{COMBINATO A}} \{A_i, \phi\} \Rightarrow \frac{B_i}{A_i} e^{j\phi_i} \quad i=1 \dots M$$

PLOTTIAMO



(2) MODEL SELECTION

DI SOLITO USIAMO FT STANDARD

$$M(\theta) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_p z^{-p}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_m z^{-m}} z^{-1} \quad \theta = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \\ b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{bmatrix}$$

PER SCEGLIERE $M \in p$
→ MIDA 1, CROSS VALIDATION

(3) PERF. INDEX DEFINITION

TALVOLA
AGGIUNGHIAMO
UN PESO
X EVIDENZIARE
TALUNE FREQUENZE
PARTICOLARI

$$\bar{J}_H(\theta) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \left(W\left(e^{j\omega_i}; \theta\right) - \frac{B_i}{A_i} e^{j\phi_i} \right)^2$$

MODELLED FREQ RES

MEASURED FREQ RES

SE MODELLO $m(\theta_1)$ È
MEGLIO DI $m(\theta_2)$
 $\Rightarrow J(\theta_1) < J(\theta_2)$

(4) MINIMIZZIAMO $J_H(\theta)$ RISPETTO A θ

$$\hat{\theta}_H = \underset{\theta}{\operatorname{argmin}} \{ J_H(\theta) \} \quad \begin{array}{l} \text{METODI} \\ \text{COME} \\ \text{ITERATIVI} \\ \text{NEWTON} \end{array}$$

MODELLO
"OTTIMALE"

PRO E CONTRO

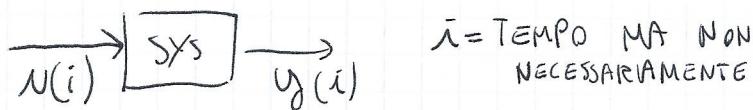
FREQ DOMAIN
IDENTIFICATION

	PRO	* ROBUSTO * INTUITIVO * SI ABBINA A FREQ. DOMAIN METHODS DI CONTROL DESIGN
	CONS	* PIÙ PESANTE E DEMANDING PER VIA DEL EXCITATION EXPERIMENT * NO NOISE MODEL OTTENUTO

2.5 : VERSO L'IDENTIFICAZIONE NON-LINEARE

ABBIAMO VISTO DUE CASI PARTICOLARI

(1) NON-LINEAR STATIC SYSTEMS



IN QUESTO CASO IL MODELLO E' $y(i) = f(u(i); \theta)$ CON $\theta = \text{PARAMETRO VETTORE}$

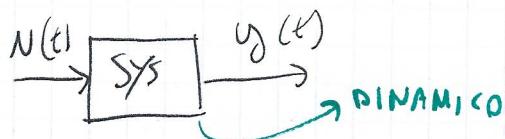
$f(\cdot; \theta)$ E' UNA NON-LINEAR STATIC PARAMETRIC CLASS OF FUNCTIONS:

* $f(\cdot; \theta)$ DEVE ESSERE UNA "UNIVERSAL APPROXIMATING FUNCTION"

* PUO' ESSERE LINEARE WRT θ O NON LINEARE WRT θ

DI SOLITO COSTRUITI CON METODI PARAMETRICI CLASSICI.

(2) LINEAR DYNAMICAL SYSTEMS

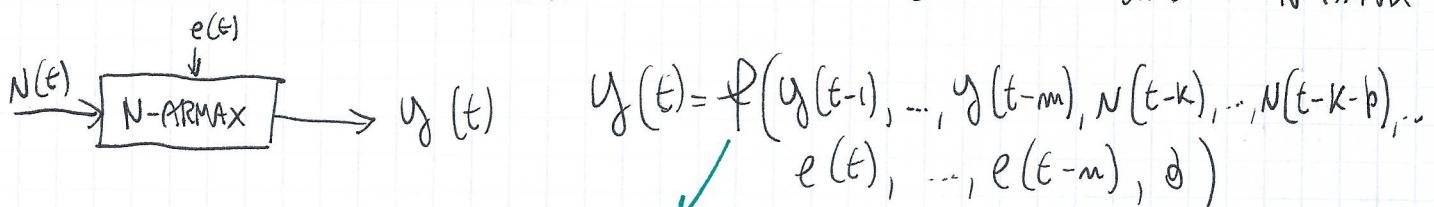


DYNAMIC: L'OUTPUT DIPIENDE DALLO STATO DEL SISTEMA E QUINDI DAL PASSATO (EQ. DIFFERENZIALI, EQ. DIFFERENCE)

NON-LINEAR: NON LINEARE RISPETTO A INPUT E STATO

SYSTEMS DINAMICI, NON-LINEARI

POSSIAMO COMBINARE LE DUE COSE: IL MODELLO PIU' VSATO E' N-ARMAX



$$y(t) = f(y(t-1), \dots, y(t-m), u(t-k), \dots, u(t-k-p), \dots, e(t), \dots, e(t-m), \theta)$$

STATIC NON-LINEAR
PARAMETRIC FUNCTION
CON $M+p+1+N$ INPUTS

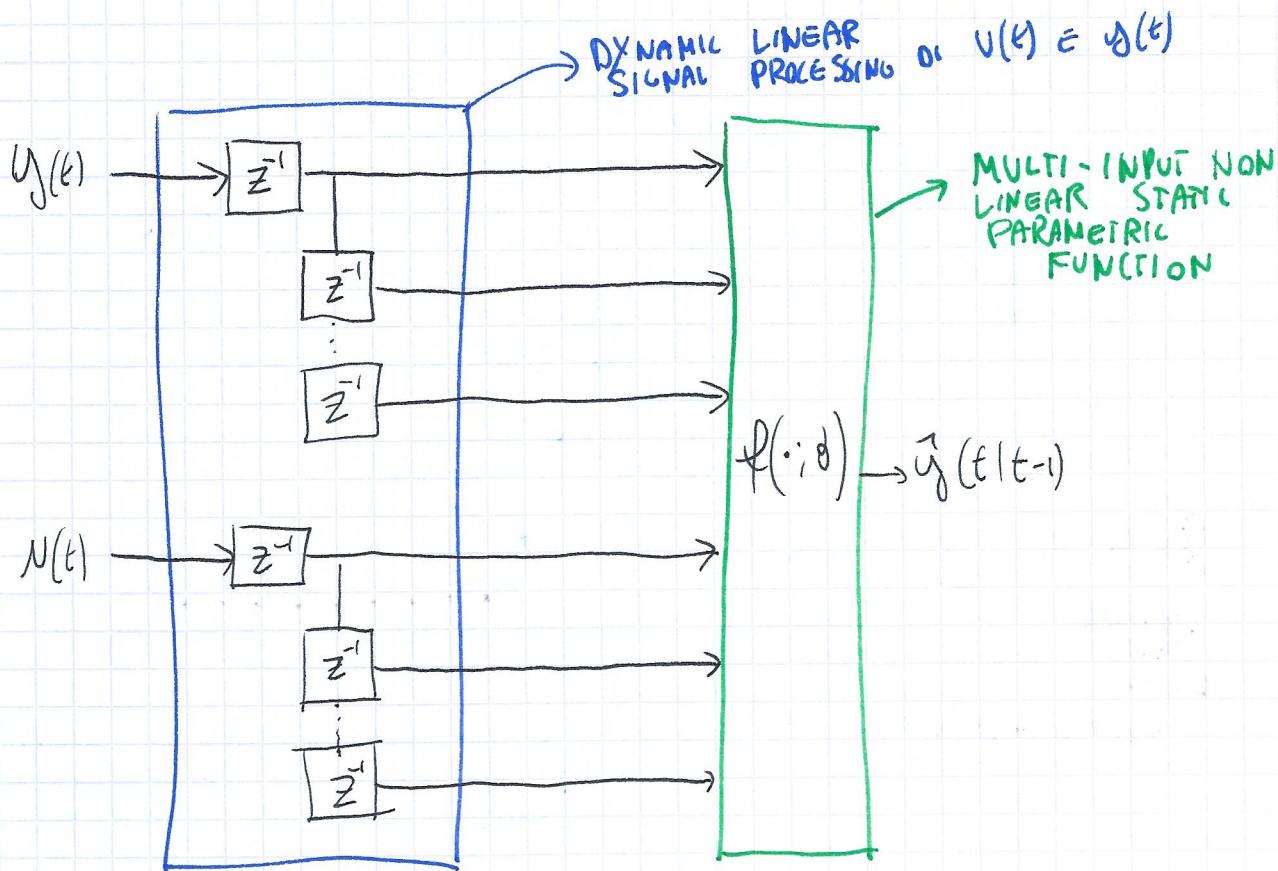
DI SOLITO SI USA LA VERSIONE SEMPLIFICATA

$$y(t) = f(y(t-1), \dots, y(t-m), u(t-k), \dots, u(t-k-p), \theta) + e(t)$$

$\sim \mathcal{N}(0, \lambda^2)$

IL PREDICTOR È' SEMPLICE:

$$\hat{y}(t|t-1) = \psi(y(t-1), \dots, y(t-m), v(t-k), \dots, v(t-k-p); \theta)$$



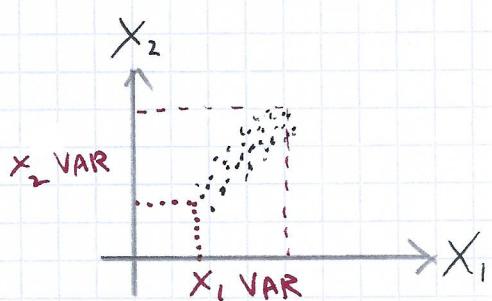
PCA - PRINCIPAL COMPONENT ANALYSIS

FOCUS: SELEZIONE OTTIMALE DI NON-LINEAR BASIS FUNCTIONS IN SYS ID.

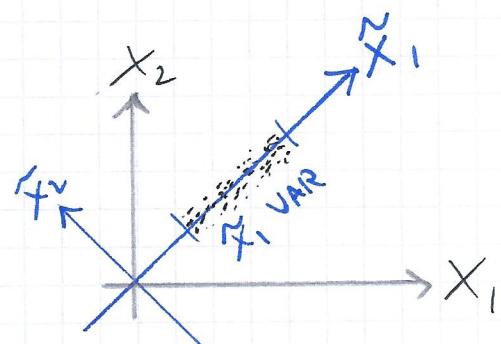
CONSIDERA UNO SPAZIO 2-DIMENSIONALE E N DATA POINTS

$$M = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{21} & \dots & X_{N1} \\ X_{12} & X_{22} & \dots & X_{N2} \end{bmatrix} \leftarrow \begin{array}{l} \text{DIM1} \\ \text{DIM2} \end{array}$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 $p_1 \quad p_2 \quad p_N$



SE ROTIAMO GLI ASSI
POSSIAMO AVERE LA
MAX VARIANZA SU \tilde{X}_1
E LA MIN VARIANZA
SU \tilde{X}_2



OGNI PUNTO P_1, \dots, P_N È' DEFINITO SIA NEL DOMINIO (X_1, X_2) CHE
IN QUELLO $(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)$. TUTTAVIA, SE RIMUOVIAMO UN ASSE:

* TOGLIERE X_2 DA (X_1, X_2) \rightarrow GRANDE PERDITA DI INFORMAZIONE

* TOGLIERE \tilde{X}_2 DA $(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)$ \rightarrow PICCOLA PERDITA DI INFORMAZIONE

POSSIAMO CONSIDERARE \tilde{x}_i , COME "COORDINATA PRINCIPALE" PER QUESTO DATASET.

IN GENERALE, PARTENDO DA UN DOMINIO \mathbb{R}^m :

$$M = \begin{bmatrix} x_{11} & \dots & x_{1i_1} & \dots & x_{1N_1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{i_1 M} & \dots & x_{i_1 m} & \dots & x_{i_1 N_m} \end{bmatrix}$$

P_i

P_N

$P_i \in \mathbb{R}^m$, DESCRITTO DA UN VETTORE DI m NUMERI

→ SE VOGLIAMO RIDURRE IL # DI COORDINATE

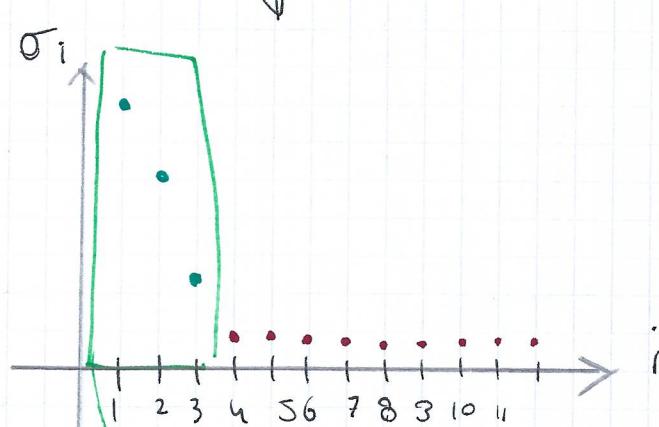
↓ APPUCCIAMO SVD A M

$$M = U S V^T$$

$$\begin{matrix} M \\ \downarrow \\ \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \end{matrix} \xrightarrow{\text{SINGULAR VALUES}} \begin{matrix} U \\ \downarrow \\ \begin{matrix} m \\ m \end{matrix} \end{matrix} \xrightarrow{\Delta} \begin{matrix} V \\ \downarrow \\ n \\ \text{N} \end{matrix}$$

SINGULAR
VALUES
DI M

$$\sigma_{11}, \sigma_2, \dots, \sigma_m$$



LA MAGGIOR PARTE DI INFORMAZIONE
DI M SI PUÒ RAPPRESENTARE
USANDO SOLO 3 COORDINATE
(U_1, U_2, U_3)

$$P_i = \begin{bmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \\ \vdots \\ x_{im} \end{bmatrix} \simeq \underbrace{\alpha_{i1} U_1 + \alpha_{i2} U_2 + \alpha_{i3} U_3}_{\left[\begin{matrix} \alpha_{i1} \\ \alpha_{i2} \\ \alpha_{i3} \end{matrix} \right]}$$