Sintesi di Reti Combinatorie

Ottimizzazione di Reti Combinatorie a Due Livelli: Metodo di Quine-McCluskey

Introduzione al Metodo di Quine-McCluskey

Metodo di Quine-McCluskey per una funzione completamente specificata

Metodo di Quine-McCluskey per una funzione non completamente specificata

Metodo di Quine-McCluskey per più funzioni

(c) 2004 William Fornaciari

Sintesi di reti combinatorie a due livelli:
Introduzione (Replica)

- Obiettivo:

  Ridurre la complessità di una (o più) funzione(i) booleana(e) espressa(e) in forma di *Prodotto di Somme* o di *Somma di Prodotti* (SOP).

  - Ci si riferirà alla sola forma *Somma di Prodotti* o *SOP*
    - l'altra ne è la duale ed i principi sono gli stessi.
- Nella sintesi a due livelli gli obiettivi sono due:
  - Riduzione del numero dei termini prodotto (*principale*)
  - Riduzione del numero di letterali (*secondario*)
  - Esempio:
    - `f(a,d,c)=a'b'c'+a'bc'+a'b'c` equivale a `f(a,d,c)=a'b'+a'c'`
- metodologie di sintesi ottima:
  - Esatte: *Karnaugh* e *Quine - Mc Cluskey;*
  - Euristiche per sintesi a due livelli.

(c) 2004 William Fornaciari

Sintesi di reti combinatorie a due livelli:
Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey

- Metodo di minimizzazione tabellare
  - Facile da tradurre in un algoritmo.
  - Il numero di variabili trattare è teoricamente illimitato.
    - il problema dalla identificazione sia degli implicanti primi sia della copertura ottima della funzione è di complessità esponenziale. Questo rende praticamente impossibile identificare una soluzione ottima per un numero di variabili che supera l'ordine della decina.
  - Facile da estendere al caso di funzioni a più di una uscita.
- Due fasi:
  - 1) Ricerca degli implicanti primi;
  - 2) Ricerca della copertura ottima.
  - nota:
    - Per semplicità si fa riferimento alla sola forma *Somma di Prodotti* (SOP). Il procedimento mostrato in questa sezione è facilmente estendibile alla forma *prodotti di somme* (POS).

(c) 2004 William Fornaciari

Sintesi di reti combinatorie a due livelli:
Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey: Prima Fase

- La ricerca degli implicanti primi viene attuata applicando la semplificazione a `Z + a' Z = (a+a') Z = Z,` con Z termine prodotto, **sistematicamente**.
  - Nota: applicazione della proprietà distributiva
- Identificazione degli implicanti primi:
  - Il punto di partenza è l'insieme dei *mintermini* della funzione;
  1. Si confrontano esaustivamente tutti i termini prodotto ricavati dal passo precedente;
     Si semplificano tutte quelle coppie che hanno una parte comune ed una sola variabile differente.
     I termini prodotto semplificati vengono marcati;
     - La marcatura ha il compito di rendere evidente che i *mintermini/implicanti* non sono primi poiché hanno partecipato alla realizzazione di un implicante con meno letterali;
  2. Si crea un nuovo insieme di termini prodotto da confrontare e si ripete il passo 1.
  - Il processo ha termine quando non sono più possibili delle riduzioni. I termini prodotto non marcati sono implicanti primi.

(c) 2004 William Fornaciari

Sintesi di reti combinatorie a due livelli:
Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey: Prima Fase

- Esempio

a	b	c	f
0	**0**	**0**	**1**
0	0	1	0
0	1	0	0
0	**1**	**1**	**1**
1	0	0	0
1	0	1	0
1	**1**	**0**	**1**
1	**1**	**1**	**1**

Punto di partenza

a	b	c
0	0	0
0	1	1
1	1	0
1	1	1

Nessuna Riduzione: differiscono di 2 letterali

Nessuna Riduzione: differiscono di 2 letterali

Nessuna Riduzione: differiscono di 3 letterali

Nessuna Riduzione: differiscono di 2 letterali

Riduzione: `- 1 1`
(i termini `1 1 1` e `0 1 1` vengono marcati)

Riduzione: `1 1 -`
(i termini `1 1 1` e `1 1 0` vengono marcati)

Termine implicitamente replicato

Nota: Il confronto esaustivo risolve i problemi sia dovuti alla replicazione dei termini sia legati alla identificazione dei termini da raggruppare.

(c) 2004 William Fornaciari

- Esempio (cont.)

Punto di partenza

a	b	c	
0	0	0	
0	1	1	✓
1	1	0	✓
1	1	1	✓

Passo 1

a	b	c
-	1	1
1	1	-

Nessuna Riduzione: i due termini prodotto non sono compatibili poiché nel primo manca a mentre nel secondo manca c.

Fine del processo

Implicanti primi e primi essenziali

Termini non marcati

0 0 0; - 1 1; 1 1 -

a'b‘c‘; bc; ab

(c) 2004 William Fornaciari

Sintesi di reti combinatorie a due livelli: *Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey: Prima Fase*

- Il numero dei confronti effettuati può essere ridotto: non vale la pena di confrontare quei termini che sono sicuramente diversi per più di un letterale.
  - Si costruiscono dei gruppi costituiti dallo stesso numero di 1
  - Si comparano tra loro solo le configurazioni che appartengono a gruppi che differiscono per un solo 1.
    - Questo non garantisce che tutti i confronti siano utili; esclude solo i i confronti sicuramente improduttivi
    - Esempio:

a	b	c	d
0	0	0	0
0	1	1	0
0	1	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Il *gruppo 0* ed il *gruppo 2* non vengono confrontati

Il *gruppo 2* ed il *gruppo 3* vengono confrontati (*solo un confronto è produttivo*)

Il *gruppo 3* ed il *gruppo 4* vengono confrontati (*tutti i confronti sono produttivi*)

(c) 2004 William Fornaciari

Sintesi di reti combinatorie a due livelli:
Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey: Prima Fase

- Algoritmo di Quine - Mk Cluskey
  - Definizioni di insieme S_i^j:
    - insieme dei termini prodotto, all'iterazione *j*, con un numero di 1 pari ad *i*.
  - Definizione di etichetta:
    - Ad ogni termine prodotto è associata una *etichetta* che rappresenta l'insieme dei *mintermini* che esso copre.
    - L'etichetta di un nuovo termine prodotto è ottenuta per concatenamento delle etichette dei termini da cui proviene
      - L’etichetta facilita la costruzione della tabella di copertura (seconda fase)

(c) 2004 William Fornaciari

Sintesi di reti combinatorie a due livelli:
Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey: Prima Fase

- Algoritmo di Quine - Mk Cluskey (cont.)

J=0;

tutti i *mintermini* appartenenti all'ON-set vengono etichettati e posti nei loro rispettivi S_i^0;

Ripeti

Per k=min(i) **fino a** (max(i) - 1)

confronta ogni configurazione in S_i^J con ogni altra in S_{i+1}^J . Le configurazioni semplificate vengono marcate ed il risultato della semplificazione viene etichettato e posto in S_i^{J+1}.

J=J+1;

Fino a che non sono più possibili delle riduzioni

Tutte le configurazioni non marcate sono *implicanti primi e primi essenziali*

(c) 2004 William Fornaciari

Sintesi di reti combinatorie a due livelli:
Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey: Prima Fase

- Esempio: $f(a,b,c,d) = ON(1,9,11,12,13,14,15)$

0001	1	✓
1001	9	✓
1100	12	✓
1011	11	✓
1101	13	✓
1110	14	✓
1111	15	✓

-001	1,9	
10-1	9,11	✓
1-01	9,13	✓
110-	12,13	✓
11-0	12,14	✓
1-11	11,15	✓
11-1	13,15	✓
111-	14,15	✓

1--1	9,11,13,15
11--	12,13,14,15

Implicanti Primi e primi essenziali:

P0(1,9): b' c' d
P1(9,11,13,15): a d
P2(12,13,14,15): a b

(c) 2004 William Fornaciari

Sintesi di reti combinatorie a due livelli:
Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey: Prima Fase

- Osservazione

1001	9	✓
1011	11	✓
1101	13	✓
1111	15	✓

10-1	9,11	✓
1-01	9,13	✓
1-11	11,15	✓
11-1	13,15	✓

1--1	9,11,13,15
1--1	9,11,13,15

0	0	0	0
0	0	1^{13}	1^{9}
0	0	1^{15}	1^{11}
0	0	0	0

0	0	0	0
0	0	1^{13}	1^{9}
0	0	1^{15}	1^{11}
0	0	0	0

0	0	0	0
0	0	1^{13}	1^{9}
0	0	1^{15}	1^{11}
0	0	0	0

Il confronto esaustivo identifica **tutti** i possibili raggruppamenti. Nei passi intermedi il numero dei termini può aumentare considerevolmente per poi ridursi nei passi conclusivi

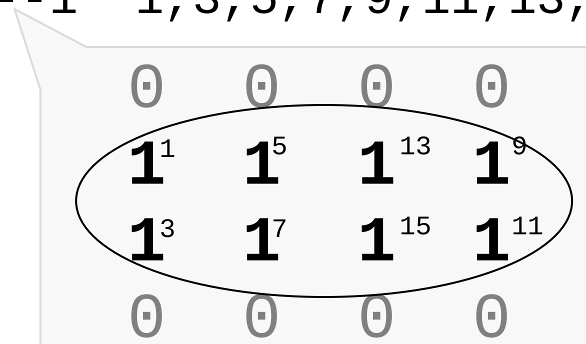
(c) 2004 William Fornaciari

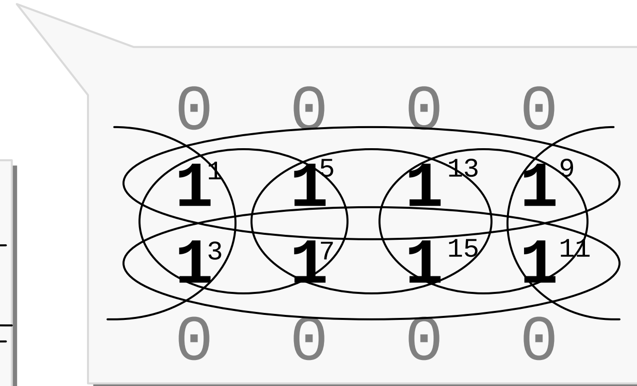
Sintesi di reti combinatorie a due livelli:

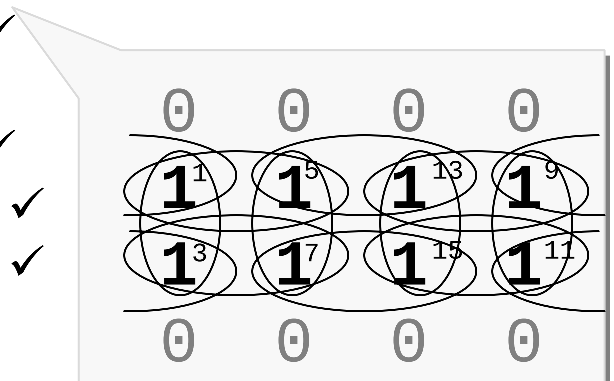
Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey: Prima Fase

- Esempio

001	1 ✓	00-1	1,3 ✓	0--1	1,3,5,7 ✓	---1	1,3,5,7,9,11,13,1
		0-01	1,5 ✓	-0-1	1,3,9,11 ✓		
011	3 ✓	-001	1,9 ✓	--01	1,5,9,13 ✓		
101	5 ✓						
001	9 ✓	0-11	3,7 ✓	--11	3,7,11,15 ✓		
		-011	3,11 ✓	-1-1	5,7,13,15 ✓		
111	7 ✓	01-1	5,7 ✓	1--1	9,11,13,15 ✓		
011	11 ✓	-101	5,13 ✓				
101	13 ✓	10-1	9,11 ✓				
		1-01	9,13 ✓				
111	15 ✓						
		-111	7,15 ✓				
		1-11	11,15 ✓				
		11-1	13,15 ✓				







(c) 2004 William Fornaciari

Sintesi di reti combinatorie a due livelli:
Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey: Seconda Fase

- Identificare il sotto insieme degli implicanti identificati tale per cui nessun 1 della funzione rimanga *scoperto*
- Si fa uso della *tabella degli implicanti* o *tabella di copertura.*
  - É una matrice binaria dove:
    - Gli indici di riga sono gli implicanti primi identificati
    - Gli indici di colonna sono i *mintermini* appartenenti all'ON-set della funzione.
    - elementi $a_{i,j}$ della matrice sono pari a 1 (o x) quando l'implicante `i_esimo` copre il *mintermine* `j_esimo`; altrimenti 0 (o nulla)

```
P0(1,9): b'c'd
P1(9,11,13,15): ad
P2(12,13,14,15): ab
```

	1	9	11	12	13	14	15
P0	x	x					
P1		x	x		x		x
P2				x	x	x	x

(c) 2004 William Fornaciari

Sintesi di reti combinatorie a due livelli:
Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey: Seconda Fase

- Il problema della copertura è intrattabile (NP completo):
  - Si utilizzano criteri di *essenzialità* e *dominanza* per ridurre la complessità del problema.
  - Successivamente si utilizza *Branch&Bound* oppure *Petrik*
- Le relazioni tra gli implicanti identificati e *mintermini* da coprire che permettono la semplificazione della tabella sono:
  - Criterio di Essenzialità
    - È un criterio di scelta (aumenta l'insieme di copertura) e, di conseguenza, di semplificazione poiché identifica ed estrae degli implicanti primi essenziali;
  - Criterio di Dominanza
    - È un criterio di sola semplificazione poiché riduce la dimensione dalla tabella di copertura eliminando righe (*implicanti/mintermini*) o colonne (*mintermini*) senza operare alcuna scelta
      - Dominanza di riga;
      - Dominanza di colonna;

(c) 2004 William Fornaciari

Sintesi di reti combinatorie a due livelli:
Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey: Seconda Fase

- Criterio di Essenzialità:
  - Descrizione:
    - Se una colonna contiene **un solo 1**, la riga che gli corrisponde è relativa ad un implicante primo essenziale (*riga essenziale*).
  - Semplificazione:
    - La riga essenziale e le colonne da essa coperte vengono eliminate dalla tabella. All'insieme di copertura viene aggiunto l'implicante identificato

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
P0	x	x									x
P1		x	x				x		x		
P2				x	x	x	x				x
P3	x		x	x		x	x	x		**x**	
P4	x	x			x	x		x	x		

Insieme di copertura: $\varnothing$

	B	E	I	K
P0	x			x
P1	x		x	
P2		x		x
P4	x	x	x	

Insieme di copertura: {P3}

(c) 2004 William Fornaciari

Sintesi di reti combinatorie a due livelli:
Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey: Seconda Fase

- Criterio di dominanza di riga:
  - Descrizione:
    - Un implicante *i-esimo* domina un implicante *j-esimo* quando P_i copre almeno tutti i *mintermini* coperti da P_j.
  - Semplificazione:
    - P_j è eliminato dalla tabella (eliminazione della riga).

	B	E	I	K
P0	x			x
~~P1~~	~~x~~		~~x~~	
P2		x		x
P4	x	x	x	

Insieme di copertura:{P3}

	B	E	I	K
P0	x			x
P2		x		x
P4	x	x	x	

Insieme di copertura:{P3}

(c) 2004 William Fornaciari

Sintesi di reti combinatorie a due livelli:
Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey: Seconda Fase

- Criterio di dominanza di riga (cont.):
  - Estrazioni Indotte:
    - L'eliminazione di una riga può generare dei nuovi implicanti essenziali;
    - Poiché questi ultimi divengono essenziali a causa di eliminazioni di riga;
    - Le righe ad essi associate vengono chiamate *righe essenziali secondarie* (implicanti primi secondari).

	B	E	I	K
P0	x			x
~~P1~~	~~x~~		~~x~~	
P2		x		x
P4	x	x	x	

	B	E	I	K
P0	x			x
P2		x		x
P4	x	x	**x**	

Essenziale secondario

	K
P0	x
P2	x

Insieme di copertura:{P3}

Insieme di copertura:{P3}

Insieme di copertura:{P3;

(c) 2004 William Fornaciari

Sintesi di reti combinatorie a due livelli:
Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey: Seconda Fase

- Dominanza tra colonne:
  - Descrizione:
    - Un *mintermine* *i-esimo* domina un *mintermine* *j-esimo* quando ogni implicante che copre m_j copre anche m_i.
  - Semplificazione:
    - m_i è eliminato dalla tabella.
  - Significato:
    - Coprire il mintermine m_j induce la copertura anche di m_i.

	B	E	I	K
P0	x			x
P1	x		x	
P2		x		x
P4	x	x	x	

Insieme di copertura:{P3}

	E	I	K
P0			x
P1		x	
P2	x		x
P4	x	x	

Insieme di copertura:{P3}

(c) 2004 William Fornaciari

Sintesi di reti combinatorie a due livelli:
Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey: Seconda Fase

- Quando tutte le righe essenziali e le colonne e righe dominate sono rimosse, la tabella ottenuta, se esiste, è ciclica: *tabella ciclica degli implicanti primi.*
- La scelta degli implicanti richiede l'uso di altri criteri:
  - Branch and Bound (B&B)
    - esponenziale con la dimensione della tabella ridotta
  - Metodo di Petrik.
- Procedura per l'identificazione dell'insieme di copertura
  1. Identificazione e scelta degli implicanti primi essenziali primari;
  2. Applicazione della dominanza di colonna e di riga;
  3. Identificazione e scelta degli implicanti primi essenziali secondari; se ne esistono si ritorna al passo 2, altrimenti vai al passo 4;
  4. Applicazione di un algoritmo di B&B o Petrik;

(c) 2004 William Fornaciari

Sintesi di reti combinatorie a due livelli:
Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey: Branch&Bound

- *Branch&Bound*: procedura
  - Si sceglie un implicante primo `Pi` come appartenente alla soluzione e si elimina la riga corrispondente e le colonne coperte da `Pi` dalla tabella di copertura.
  - La tabella ridotta viene esaminata per altre possibili semplificazioni (righe essenziali o relazioni di dominanza) che **possono** portare ad una soluzione finale `Si` di costo `Ci`.
  - Il processo viene ripetuto per tutte le possibili scelte di `Pi` come implicante primo appartenente alla soluzione finale.
  - Si mantiene sempre la soluzione a costo minore (*bound*) e si confronta il costo parziale ottenuto con il costo minore, quando lo si supera quella soluzione viene abbandonata.
  - Se la selezione di un implicante primo non porta ad una soluzione e si arriva ad una tabella ridotta ciclica, si seleziona un secondo implicante primo `Pj` tra quelli rimasti e si calcolano tutte le possibili soluzioni con `Pi` e `Pj` come elementi della soluzione. Si itera per tutti i possibili `Pj`.

(c) 2004 William Fornaciari

Sintesi di reti combinatorie a due livelli:
Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey: Branch&Bound

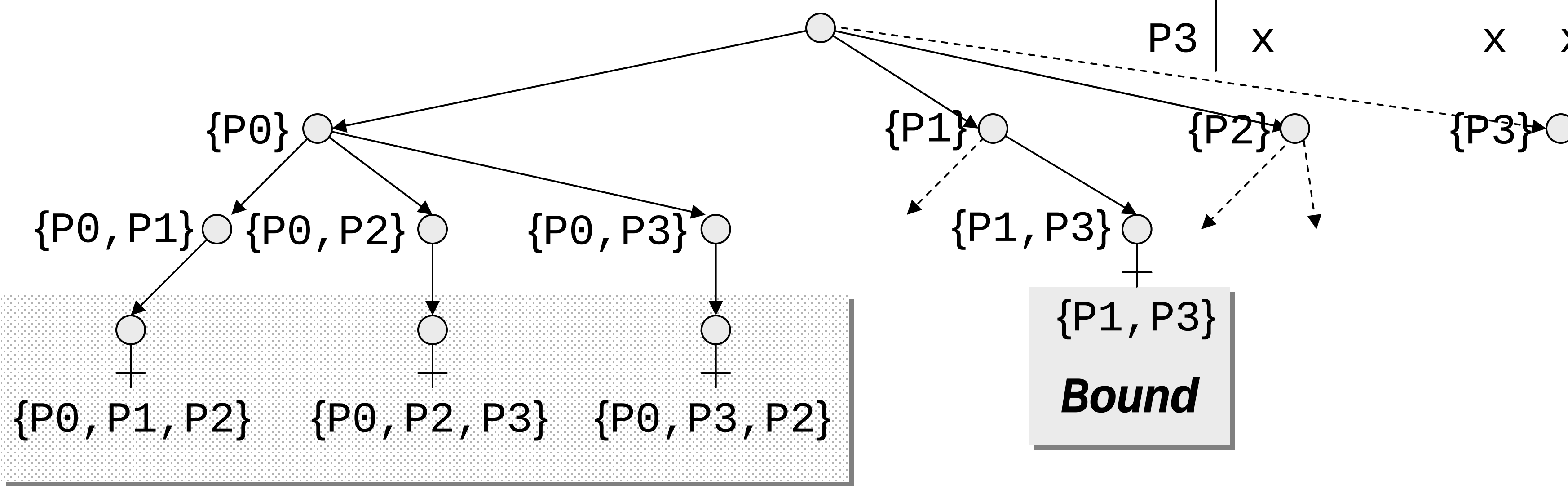
- Metodo che genera molte possibili soluzioni attraverso un processo di ricerca che può crescere esponenzialmente con le dimensioni della funzione.
- Ottimalità garantita solo se si esaminano tutte le possibili alternative.

(c) 2004 William Fornaciari

Sintesi di reti combinatorie a due livelli:
Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey: Seconda Fase

- Esempio: *B&B* (analisi in ampiezza)

	A	B	C	D	E
P0	x	x			
P1		x	x		x
P2			x	x	
P3	x			x	x



dentificato il un *bound* si scartano a priori tutte le soluzioni che richiedo più del numero di implican ndividuato; ad esempio, individuata la soluzione {P1,P3}, le soluzioni {P0,P1,P2}, {P0,P2,P3}… no saranno mai raggiunte.

(c) 2004 William Fornaciari

Metodo di Petrick

- Metodo sistematico e non esaustivo per identificare coperture di implicanti primi minimi.
- Esprimere tutte le condizioni di copertura che devono essere soddisfatte dagli implicanti primi e dai mintermini in forma di prodotto di somme:
  - Un termine somma per ogni mintermine
  - Il termine somma è composto dagli implicanti che rappresentano una copertura del mintermine
- Convertire il prodotto di somme in somma di prodotti applicando le leggi dell'algebra Booleana.
- Ogni termine prodotto che contiene il minimo numero di letterali specifica una copertura di implicanti primi minima e rappresenta quindi una possibile soluzione di copertura.

(c) 2004 William Fornaciari

Sintesi di reti combinatorie a due livelli:
Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey: Seconda Fase

- Esempio: metodo di Petrik:

	A	B	C	D	E
P0	X	X			
P1		X	X		X
P2			X	X	
P3	X			X	X

Il significato della tabella di copertura è il seguente:
per rispettare la funzionalità (*vincolo*)
si deve coprire Il *mintermine* 0, mediante P0 o (OR) mediante P3, e (AN
si deve coprire Il *mintermine* 3, mediante P0 o (OR) mediante P1, e (AND
si deve coprire Il *mintermine* 10, mediante P1 o (OR) mediante P2, e ...

Da un *prodotto di somme* $(P_0+P_3)*(P_0+P_1)*(P_1+P_2)*(P_2+P_3)*(P_1+P_3)=1$

$(P_0+P_3 P_1)*(P_1P_3+P_2)*(P_1+P_3)=1$

$(P_0P_2+P_3 P_1)*(P_1+P_3)=1$

Ad una *somma di prodotti* $(P_0P_2P_1+P_0P_2P_3+P_3P_1)=1$

Gruppi di implicanti primi: $P_0P_2P_1$; $P_0P_2P_3$; $\boxed{P_3 P_1}$

(c) 2004 William Fornaciari

Sintesi di reti combinatorie a due livelli:
Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey

- Esempio: $f(a, b, c, d) = ON(1,4,5,6,9,13,14,15)$

```
0001   1 ✓
0100   4 ✓
-----------
0101   5 ✓
0110   6 ✓
1001   9 ✓
-----------
1101   13 ✓
1110   14 ✓
-----------
1111   15 ✓
```

```
0--1   1,5 ✓
-001   1,9 ✓
010-   4,5
01-0   4,6
-----------
-101   5,13 ✓
-110   0,14
1-01   9,13 ✓

11-1   13,15
111-   14,15
```

```
--01  1,5,9,13
```

Implicanti Identificati:

P0(1,5,9,13): c'd
P1(4,5): a'bc'
P2(4,6): a'bd'
P3(0,14): bcd'
P4(13,15): abd
P5(14,15): abc

(c) 2004 William Fornaciari

Sintesi di reti combinatorie a due livelli:
Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey

- Esempio (cont.):

Essenzialità

	1	4	5	6	9	13	14	15
P0	x		x		x	x		
P1		x	x					
P2		x		x				
P3				x			x	
P4						x		x
P5							x	x

Insieme di copertura:{P0}

Dominanza di riga

	4	6	14	15
P1	x			
P2	x	x		
P3		x	x	
P4				x
P5			x	x

Insieme di copertura:{P0}

Essenzialità secondaria

	4	6	14	15
P2	x	x		
P3		x	x	
P5			x	x

Insieme di copertura:{P0,P2,P5}

f(a,b,c,d)= c’d+a’bc’+abc

Sintesi di reti combinatorie a due livelli:
Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey : DC

- L'estensione alle funzioni *non completamente specificate* richiede l'aggiunta delle seguenti regole:
  - Ricerca degli implicanti primi:
    - Nel passo relativo alla generazione degli implicanti primi, le condizioni di indifferenza sono trattate come 1.
  - Ricerca della copertura ottima:
    - Nella tabella di copertura compaiono, come indici di colonna, solo i mintermini appartenenti all'ON-set.
      - L'ON-set rappresenta l'insieme dei termini che vincola la funzionalità da realizzare.
      - Il DC-set è l'insieme dei termini che rappresenta i gradi di libertà per realizzare la funzionalità stessa: non è obbligatorio sceglierli, può essere conveniente

(c) 2004 William Fornaciari

Sintesi di reti combinatorie a due livelli:
Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey: DC

- Esempio: $f(a, b, c, d) = ON(0,2,12,13)\ DC(4,5)$

```
0000   0 ✓          00-0   0,2
                    0-00   0,4
-----------         -----------------
0010   2 ✓          010-   4,5 ✓
0100   4 ✓          -100   4,12 ✓       -10-   4,5,12,13
-----------         -----------------
0101   5 ✓          -101   5,13 ✓
1100   12 ✓         110-  12,13 ✓
-----------
1101   13 ✓
```

Implicanti Identificati:

P0: a'b'd'
P1: a'c'd'
P2: bc'

Essenziali

	0	2	12	13
P0	x	x		
P1	x			
P2			x	x

f(a,b,c,d)= a'b'd'+bc

(c) 2004 William Fornaciari

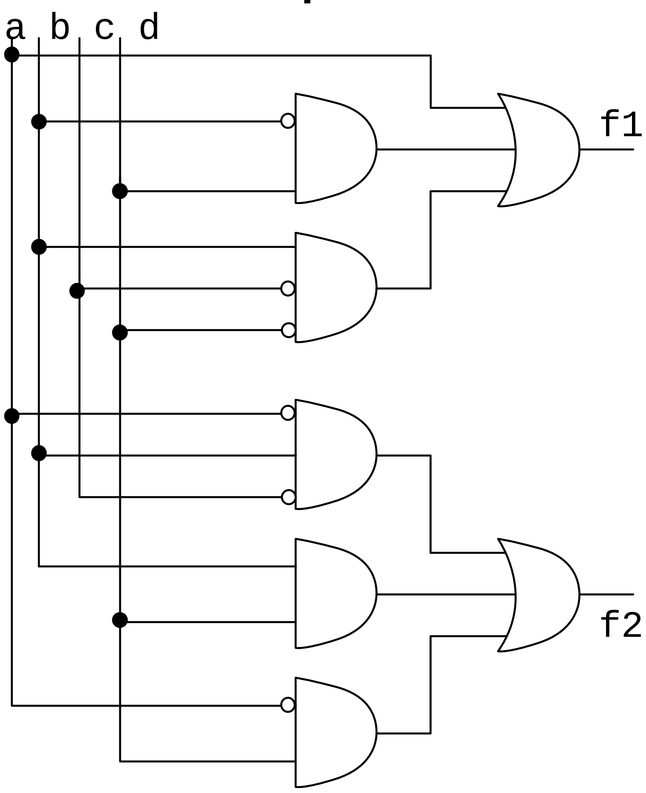
Sintesi di reti combinatorie a due livelli: *Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey: Multi-Uscita*

- Nel caso di funzioni a più uscite una prima soluzione consiste nel minimizzare le funzioni singolarmente.
- Il risultato ottenuto potrebbe risultare non ottimale se si considera che le funzioni potrebbero condividere degli implicanti riducendo il costo.
- Gli implicanti che possono essere condivisi non sono necessariamente primi per le funzioni prese singolarmente
  - Se prese singolarmente, le forme ottenute per le funzioni possono non essere minime.
- Gli implicanti che possono essere condivisi sono implicanti primi **ma di più funzioni**.

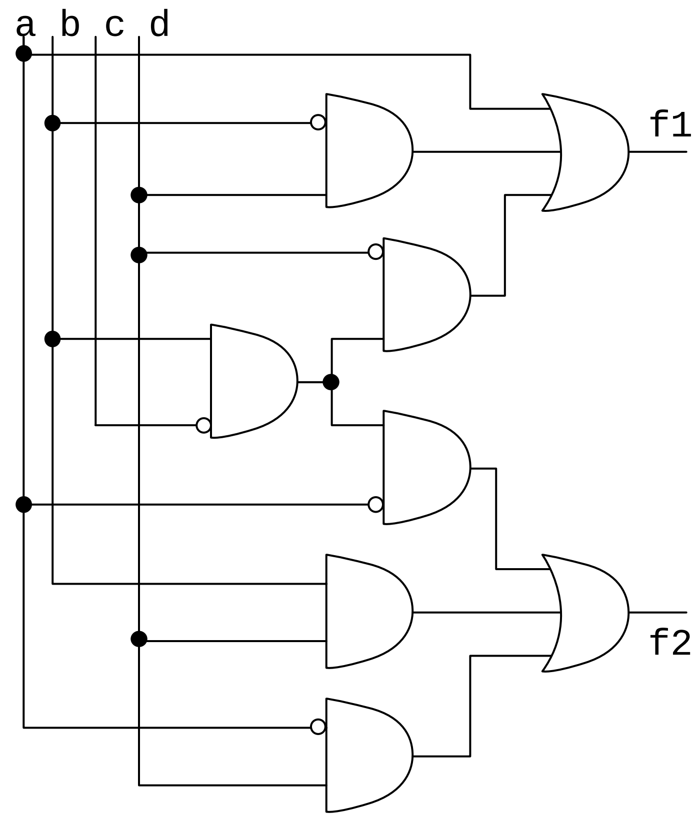
(c) 2004 William Fornaciari

Sintesi di reti combinatorie a due livelli:
Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey: Multi-Uscita

- Esempio:



In queste condizioni, il massimo che posso pensare di fare è applicare la seguente condivisione: `b!c!d` di `f1` e `!ab!c` di `f2` possono condividere il termine `b!c`.



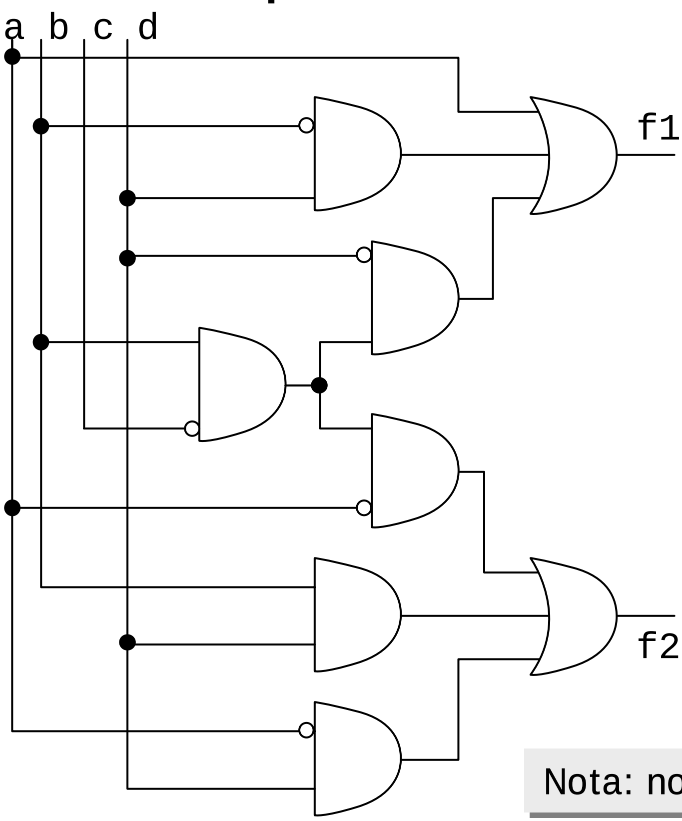
orma ottima senza condivisione

Forma sub-ottima con condivisione

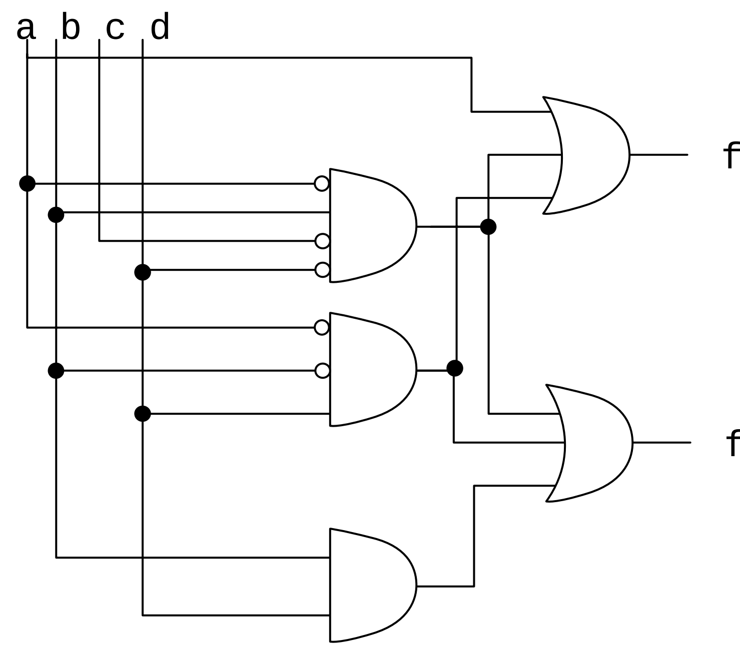
(c) 2004 William Fornaciari

Sintesi di reti combinatorie a due livelli:
Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey: Multi-Uscita

- Esempio:



?



Nota: non si dimentichi il vincolo dei due livelli deve permanere

orma sub-ottima con condivisione

Forma ottima con condivisione

(c) 2004 William Fornaciari

Sintesi di reti combinatorie a due livelli:
Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey: Multi-Uscita

- Esempio (cont.):
  - Giustificazione del risultato

Senza condivisione

f_1

c,d \ a,b	00	01	11	10
00	0	1	1	1
01	1	0	1	1
11	1	0	1	1
10	0	0	1	1

f_2

c,d \ a,b	00	01	11	10
00	0	1	0	0
01	1	1	1	0
11	1	1	1	0
10	0	0	0	0

Con condivisione

f_1

c,d \ a,b	00	01	11	10
00	0	1	1	1
01	1	0	1	1
11	1	0	1	1
10	0	0	1	1

f_2

c,d \ a,b	00	01	11	10
00	0	1	0	0
01	1	1	1	0
11	1	1	1	0
10	0	0	0	0

Nota:
Gli implicanti condivisi non sono primi per f_1 e f_2 prese singolarmente.
Il fatto che il costo di questi implicanti sia più alto è compensato dalla condivisione.

(c) 2004 William Fornaciari

Sintesi di reti combinatorie a due livelli:
Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey: Multi-Uscita

- Esempio (cont.):
  - Giustificazione del risultato

f_1

c,d \ a,b	00	01	11	10
00	0	1	1	1
01	1	0	1	1
11	1	0	1	1
10	0	0	1	1

f_2

c,d \ a,b	00	01	11	10
00	0	1	0	0
01	1	1	1	0
11	1	1	1	0
10	0	0	0	0

$f_1 * f_2$

c,d \ a,b	00	01	11	10
00	0	1	0	0
01	1	0	1	0
11	1	0	1	0
10	0	0	0	0

Nota: gli implicanti primi di $f_1 * f_2$ che conviene utilizzare sono solo 2. La scelta è un problema legato alla copertura ottima delle funzioni.

(c) 2004 William Fornaciari

Sintesi di reti combinatorie a due livelli:
Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey: Multi-Uscita

- In generale, oltre agli implicanti primi delle singole funzioni è necessario considerare anche tutti gli implicanti ottenuti combinando in tutti i modi possibile le funzioni da minimizzare.
  - Il numero delle combinazioni possibili con N funzioni è 2^N-1.
  - Ad esempio, con tre funzioni le combinazioni possibili sono: `f1`, `f2`, `f3`, `f1*f2`, `f1*f3`, `f2*f3`, `f1*f3*f3`
- Si osservi che il metodo analizzato potrebbe essere applicato anche alle *mappe di Karnaugh*. Comunque, tale metodo è limitato sia dal numero delle variabili sia dalla quantità di tabelle da realizzare
  - Ad esempio, 10 funzioni implicherebbero la realizzazione di 1023 tabelle.
- Il metodo di Quine-Mc Cluskey collassa tutte le informazioni in una unica tabella.
  - Il numero degli implicanti primi estratti resta lo stesso mantenendo il problema di copertura della stessa complessità.

(c) 2004 William Fornaciari

Sintesi di reti combinatorie a due livelli:
Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey: Multi-Uscita

- L'estensione a più funzioni *completamente specificate* o non *completamente specificate* richiede l'applicazione delle seguenti estensioni:
  - Costruzione della tabella
    - si procede come per il caso scalare con la differenza che si associa ad ogni mintermine un ulteriore identificatore costituito da tanti bit quante sono le funzioni considerate
    - il bit assume valore 1 se e solo se la funzione che ad esso corrisponde contiene tale mintermine; 0 in caso contrario.

(c) 2004 William Fornaciari

Sintesi di reti combinatorie a due livelli:
Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey: Multi-Uscita

- Esempio1: $F = \left| f_1 \ \ f_2 \right| = \left| ON_1(0,2,12,13) DC_1(4,5) \ ON_2(1,4,13) DC_2(11,5) \right|$

0000	0	10
0001	1	01
0010	2	10
0100	4	11
0101	5	11
1100	12	10
1011	11	01
1101	13	11

Mappa di Karnaugh di f_1

c,d \ a,b	00	01	11	10
00	1	x	1	0
01	0	x	1	0
11	0	0	0	0
10	1	0	0	0

Mappa di Karnaugh di f_2

c,d \ a,b	00	01	11	10
00	0	1	0	0
01	1	x	1	0
11	0	0	0	x
10	0	0	0	0

(c) 2004 William Fornaciari

Sintesi di reti combinatorie a due livelli:
Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey: Multi-Uscita

- Esempio2: $F = |f_1 \;\; f_2| = |ON_1(8,10,11,14,15) \;\; ON_2(4,8,11,12,15)|$

0100	4	01
1000	8	11
1010	10	10
1100	12	01
1011	11	11
1110	14	10
1111	15	11

Mappa di Karnaugh di f_1

c,d \ a,b	00	01	11	10
00	0	0	0	1
01	0	0	0	0
11	0	0	1	1
10	0	0	1	1

Mappa di Karnaugh di f_2

c,d \ a,b	00	01	11	10
00	0	1	1	1
01	0	0	0	0
11	0	0	1	1
10	0	0	0	0

(c) 2004 William Fornaciari

Sintesi di reti combinatorie a due livelli:
Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey: Multi-Uscita

- L'estensione a più funzioni *completamente specificate* o non *completamente specificate* (cont.):
  - Generazione di implicanti primi
    - La generazione dell'implicante segue le stesse modalità viste per il caso scalare.
    - L'identificatore di ogni nuovo implicante viene ottenuto come AND bit a bit dei due indicatori.
      - Nota: se l'indicatore ottenuto è `00..0` il nuovo implicante non è una espansione valida (cioè non appartiene a nessuna funzione) e non viene riportato.
    - Viene *marcata,* ossia coperta da un implicante di livello superiore, quella configurazione il cui indicatore di risultante è uguale al risultato dell'AND eseguito.
      - Ad esempio, se consideriamo i due mintermini `011 3 101` e `001 1 011` si ottiene l'implicante `0-1 1,3 001` e nessun mintermine viene marcato come coperto.

(c) 2004 William Fornaciari

Sintesi di reti combinatorie a due livelli:
Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey: Multi-Uscita

- Quattro casi possibili - esempi:
  - L'identificatore di appartenenza risultante è 000…000
    - La configurazione ottenuta non corrisponde a nessuna espansione valida poiché non appartiene a nessuna delle funzioni.

```
0000   0 1100
         AND  --Passo 1-->  nessun risultato  0000
0001   1 0011
```

  - L'identificatore di appartenenza risultante non coincide con nessun identificatore di partenza
    - La configurazione ottenuta corrisponde ad una espansione valida ma non coinvolge tutte le funzioni ne del primo ne del secondo implicante coinvolto.

```
                          ≠
1100   12 1110
         AND  --Passo 1-->  110-   12,13 0110
1101   13 0111
                          ≠
```


(c) 2004 William Fornaciari

Sintesi di reti combinatorie a due livelli:
Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey: Multi-Uscita

- 4 Casi possibili:
  - L'identificatore di appartenenza risultante coincide con un solo identificatore di partenza
    - La configurazione ottenuta corrisponde ad una espansione valida che coinvolge tutte le funzioni di un solo implicante coinvolto.

```
                         ≠
1100  12 1111
         AND   Passo 1  110-  12,13 0011
1101  13 0011 ✓  Passo 2
                         ≠
```

  - L'identificatore di appartenenza risultante coincide con entrambi gli identificatore di partenza.
    - La configurazione ottenuta corrisponde ad una espansione valida e coinvolge tutte le funzioni del primo e del secondo implicante coinvolto.

```
                         ≠
1100  12 0111 ✓  Passo 2
         AND   Passo 1  110-  12,13 0111
1101  13 0111 ✓  Passo 2
                         ≠
```


(c) 2004 William Fornaciari

Sintesi di reti combinatorie a due livelli:
Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey: Multi-Uscita

- Esempio1 (cont.): $F = \left| f_1 \quad f_2 \right| = \left| ON_1(0,2,12,13)DC_1(4,5) \; ON_2(1,4,13)DC_2(11,5 \right.$
  - Alcuni esempi:

```
0000   0 10
__________
0001   1 01
0010   2 10
0100   4 11
__________
0101   5 11
1100   12 10
__________
1011   11 01
1101   13 11
```

```
0000   0 10
         AND        Passo 1   nessun risultato  00
0001   1 01

                    Passo 2          =
0100   4 11 ✓
         AND        Passo 1   010-   4,5  11
0101   5 11 ✓
                    Passo 2          =

                                     ≠
1100   12 11
         AND        Passo 1   110-   12,13  10
1101   13 10 ✓
                    Passo 2          =
```

Nota:
implicante di
più funzioni

(c) 2004 William Fornaciari

Sintesi di reti combinatorie a due livelli:
Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey: Multi-Uscita

- Esempio1 (cont.): $F = |f_1 \ f_2| = |ON_1(0,2,12,13) DC_1(4,5) \ ON_2(1,4,13) DC_2(11,5$

0000	0	10	✓
0001	1	01	✓
0010	2	10	✓
0100	4	11	✓
0101	5	11	✓
1100	12	10	✓
1011	11	01	
1101	13	11	✓

~~000-~~	~~0,1~~	~~00~~	
00-0	0,2	10	
0-00	0,4	10	
0-01	1,5	01	
010-	4,5	11	
-100	4,12	10	✓
-101	5,13	11	
110-	12,13	10	✓

-10-	4,5,12,13	10

(c) 2004 William Fornaciari

Sintesi di reti combinatorie a due livelli:
Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey: Multi-Uscita

- Esempio 2 (cont.)

Raggruppamento valido per la sola f1
Marcato solo m10

0100	4	01	✓
1000	8	11	
1010	10	10	✓
1100	12	01	✓
1011	11	11	✓
1110	14	10	✓
1111	15	11	✓

-100	4,12	01
10-0	8,10	10
1-00	8,12	01
101-	10,11	10
1-10	10,14	10
~~11-0~~	~~12,14~~	~~00~~
1-11	11,15	11
111-	14,15	10

Raggruppamento valido per f1 e f2
Marcato m11 e m15

Mappa di Karnaugh di f_1

c,d \ a,b	00	01	11	10
00	0	0	0	1
01	0	0	0	0
11	0	0	1	1
10	0	0	1	1

Raggruppamento valido per f1

Mappa di Karnaugh di f_2

c,d \ a,b	00	01	11	10
00	0	1	1	1
01	0	0	0	0
11	0	0	1	1
10	0	0	0	0

Raggruppamento valido per f1 e

Raggruppamento NON valido per f2

(c) 2004 William Fornaciari

- Esempio 2 (cont.)

```
-100   4,12   01
10-0   8,10   10
1-00   8,12   01
--------------------
101-  10,11   10  ✓
1-10  10,14   10  ✓
--------------------
1-11  11,15   11
111-  14,15   10  ✓
```

1-1- 10,11,14,15 10

Mappa di Karnaugh di f_1

c,d \ a,b	00	01	11	10
00	0	0	0	1
01	0	0	0	0
11	0	0	1	1
10	0	0	1	1

Mappa di Karnaugh di f_2

c,d \ a,b	00	01	11	10
00	0	1	1	1
01	0	0	0	0
11	0	0	1	1
10	0	0	0	0

Raggruppamento NON valido per f2

(c) 2004 William Fornaciari

Sintesi di reti combinatorie a due livelli:
Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey: Multi-Uscita

- L'estensione a più funzioni *completamente specificate* o non *completamente specificate* (cont.):
  - Tabella di Copertura
    - la tabella di copertura è ottenuta per giustapposizione delle tabelle relative ad ogni funzione in cui si riportano i soli termini del `ONset`.

Esempio1 (Cont.):

$$F = |f_1 \ \ f_2| = |ON_1(0,2,12,13)DC_1(4,5) \ ON_2(1,4,13)DC_2(11,5)|$$

```
P0: 1011  11 01

P1: 00-0  0,2 10
P2: 0-00  0,4 10
P3: 0-01  1,5 01
P4: 010-  4,5  11
P5: -101  5,13 11

P6: -10-  4,5,12,13 10
```

	f1				f2		
	0	2	12	13	1	4	13
P1	x	x					
P2	x						
P6			x	x			
P0							
P3					x		
P4						x	
P5				x			x

(c) 2004 William Fornaciari

Sintesi di reti combinatorie a due livelli:
Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey: Multi-Uscita

- L'estensione a più funzioni *completamente specificate* o non *completamente specificate* (cont.):
  - Identificazione della copertura ottima.
    - si applica in maniera simile al caso di singola uscita con le seguenti differenze:
      - Essenzialità:
        - » Se l'implicante in oggetto è essenziale per **tutte** le funzioni coinvolte la riga viene eliminata (scelta dell'implicante) così come tutte le colonne coperte.
        - » l'implicante in oggetto **non** è essenziale per **tutte** le funzioni coinvolte (una o più funzioni hanno tale l'implicante non essenziale), la riga viene mantenuta e viene scelto tale implicante per le funzioni per cui è essenziale; in queste ultime vengono eliminate le sole colonne coperte.

(c) 2004 William Fornaciari

- Identificazione della copertura ottima (cont.).
  - si applica in maniera simile al caso di singola uscita con le seguenti differenze:
    - Dominanza di riga
      - » Come per il caso di funzioni ad una sola uscita.
    - Dominanza di colonna:
      - » La dominanza di colonna ha validità solo all'interno di una funzione. Una colonna della funzione f_i non può coprire ne essere coperta da una colonna presente nella funzione f_k.

(c) 2004 William Fornaciari

Sintesi di reti combinatorie a due livelli:
Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey: Multi-Uscita

- Esempio 1 (cont.):

	f1				f2		
	0	2	12	13	1	4	13
P1	x	x					
P2	x						
P6			x	x			
P0							
P3					x		
P4						x	
P5				x			x

Le espressioni Booleane sono

f1=P1+P6

f2=P3+P4+P5

Si osservi che non ci sono termini comuni.

Nota:
nella scelta di P5 a causa della sua essenzialità in f2 per 13, la riga eliminata è solo quella in corrisponenza di f2 poiché P5 non è essenziale per f1.
Si osservi che se non si fosse adottato questo criterio e P5 fosse stato scelto anche per f1, la funzione f1 sarebbe stata P1+P6+P5 con P5 inutile ai fini della funzione da svolgere con un costo aggiuntivo non necessario.
Si osservi inoltre che, sempre se non si fosse adottato questo criterio, scegliere P6 prima di P5 avrebbe condotto ad una soluzione differente (quelle corretta).

(c) 2004 William Fornaciari

Sintesi di reti combinatorie a due livelli:
Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey: Multi-Uscita

- Esempio 2 (cont.)

	f1 8	f1 10	f1 11	f1 14	f1 15	f2 4	f2 8	f2 11	f2 12	f2 15
0		x	x	x	x					
1						x			x	
2	x	x								
3							x		x	
4			x		x			x		x
5	x						x			

Soluzione parziale
f1: {P0}
f2: {P1,P4}

	f1 8	f2 8
P2	x	
P3		x
P5	x	x

Soluzione finale
f1: {P0,P5}
f2: {P1,P4,P5

Espressione Boole
f1= α+ac
f2= α+bc'd'+a
α= ab'c'd'

ota: il costo è di 14 letterali. Si osservi che il letterale α (P5) compare nelle espressioni di f1 ed f2 d aggiunge il costo di una unità per funzione (due in totale). Questo aspetto rende conto del fatto he il termine in comune interagisce con le funzioni e che tale interazione ha un costo.

(c) 2004 William Fornaciari

Sintesi di reti combinatorie a due livelli:
Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey: Multi-Uscita

- Esempio di copertura:

	f1										f2									f3						
	2	3	5	7	8	9	10	11	13	15	2	3	5	6	7	10	11	14	15	6	7	8	9	13	14	15
P0						x		x	x	x																
P1			x	x					x	x																
P2					x	x	x	x																		
P3											x	x		x	x	x	x	x	x							
P4		x		x				x		x		x			x		x		x							
P5	**x**	x					x	x			x	x				x	x									
P6			x	x									**x**		x											
P7									x	x														x		x
P8						x			x														x	x		
P9					x	x																**x**	x			
P10														x	x			x	x	**x**	x				**x**	x
P11				x						x					x				x		x					x

Identificazione ed estrazione degli essenziali

f1: {P5}

f2: {P6}

f3: {P9;P10}

(c) 2004 William Fornaciari

Sintesi di reti combinatorie a due livelli:
Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey: Multi-Uscita

- Esempio di copertura(cont.):

	f1						f2							f3
	5	7	8	9	13	15	2	3	6	10	11	14	15	13
P0				x	x	x								
P1	x	x			x	x								
P2			x	x										
P3							x	x	x	x	x	x	x	
P4		x				x		x			x		x	
P5							x	x		x	x			
P6	x	x												
P7					x	x								x
P8				x	x									x
P9			x	x										
P10									x			x	x	
P11		x				x							x	

Copertura di riga

Soluzione parziale
f1: {P5}
f2: {P6}
f3: {P9;P10}

(c) 2004 William Fornaciari

- Esempio di copertura (cont.):

	f1						f2							f3
	5	7	8	9	13	15	2	3	6	10	11	14	15	13
P0				x	x	x								
P1	x	x			x	x								
P2			x	x										
P3							x	x	x	x	x	x	x	
P4		x				x		x			x		x	
P7					x	x								x
P8				x	x									x

Copertura di colonna

Soluzione parziale
`f1: {P5}`
`f2: {P6}`
`f3: {P9;P10}`

(c) 2004 William Fornaciari

Sintesi di reti combinatorie a due livelli:
Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey: Multi-Uscita

- Esempio di copertura (cont.):

	f1				f2	f3
	5	8	13	15	2	13
P0			x	x		
P1	**x**		x	x		
P2		**x**				
P3					**x**	
P4				x		
P7			x	x		x
P8			x			x

Scelta degli implicanti primi secondari

	f3
	13
P7	x
P8	x

Soluzione parziale
f1: {P5,P1,P2}
f2: {P6,P3}
f3: {P9;P10}

Soluzione finale (2 soluz.)
f1: {P5,P1,P2}
f2: {P6,P3}
f3: {P9;P10;P7 (o P8)}

Le espressioni Booleane sono
f1=P5+P1+P2
f2=P6+P3
f3=P9+P10+P7 (o +P8)
Si osservi che non ci sono termini comuni

(c) 2004 William Fornaciari

Sintesi di reti combinatorie a due livelli:
Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey: Multi-Uscita

- Osservazioni:
  1. Tabelle Cicliche
     - É possibile applicare le tecniche viste per il caso di singola funzione con alcuni accorgimenti.
       - *B&B* viene applicato considerando le singole funzioni separatamente cioè non viene imposto che un imlpicante copra mintermini di funzioni differenti. L'aumento della complessità è notevole a causa dell'aumento dei gradi di libertà
         - » L'uso di un implicante per una funzione può errere applicato anche ad un altra; come conseguenza lo stesso implicante compare può comparire più volte nell'albero di copertura.
       - Petrik viene applicato in parallelo a tutte le funzioni ed i risulati vengono messi in AND. Scelta la copertura minima, si scelgono i termini che nelle funzioni singole rispettano tali vincoli.
         - » Si ricorda che il metodo di Petrik trasforma il problema di copertura in un vincolo Booleano. I vincoli estratti da ogni funzione devono essere validi contemporaneamente cioè devono essere messi in AND.

(c) 2004 William Fornaciari

Sintesi di reti combinatorie a due livelli:
Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey: Multi-Uscita

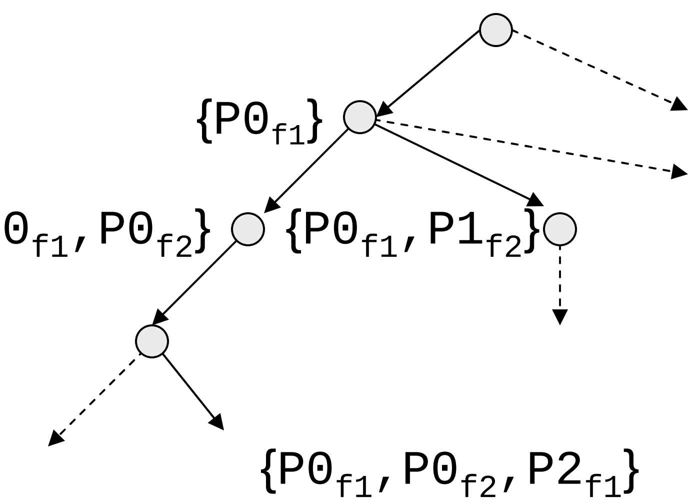
- Esempio

	f1					f2				
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	L
P0	x	x					x	x		
P1		x	x		x			x	x	
P2			x	x		x			x	x
P3	x			x	x		x			x
P4	x		x		x	x		x		

$f1=(P_0+P_3+P_4)(P_0+P_1)(P_1+P_2+P_4)(P_2+P_3)(P_1+P_3+P_4)=$

$f2=(P_2+P_4)(P_0+P_3)(P_0+P_1+P_4)(P_1+P_2)(P_2+P_3)=1$

Con f1*f2=1



$f1=P_0P_1P_2+P_0P_2P_3+P_0P_2P_4+P_1P_2P_3+P_1P_2P_4+P_1P_3+P_0P_3P_4$

$f2=P_0P_2+P_1P_2P_3+P_2P_3P_4+P_0P_1P_3P_4+P_1P_3P_4=1$

Con f1*f2=1

$f1*f2=\mathbf{P_0P_1P_2}+\mathbf{P_0P_2P_3}+\mathbf{P_0P_2P_4}+\mathbf{P_1P_2P_3}+\mathbf{P_1P_3P_4}=1$

$f1=\mathbf{P_0P_1P_2}$; $f1=\mathbf{P_0P_2P_3}$; $f1=\mathbf{P_0P_2P_4}$; $f1=\mathbf{P_1P_3}$; $f1=\mathbf{P_1P_3}$

$f2=\mathbf{P_0P_2}$; $f2=\mathbf{P_0P_2}$; $f2=\mathbf{P_0P_2}$; $f2=\mathbf{P_1P_2P_3}$; $f2=\mathbf{P_1P_3}$

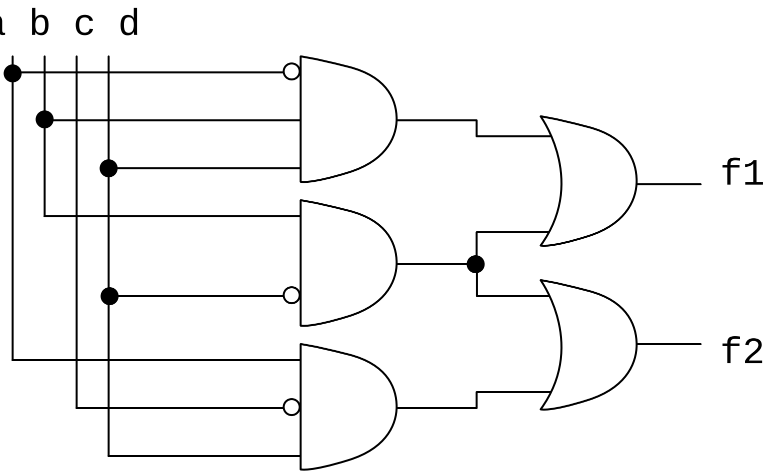
(c) 2004 William Fornaciari

- Osservazioni:
  2. Cardinalità e costo
     - L'indentificazione della copertura ottima potrebbe considerare, oltre alla cardinalità della copertura, anche il costo di ogni implicante.
       - Il costo, ad esempio, potrebbe essere utilizzato come fattore discriminante nella copertura di riga quando le righe sono uguali.
     - L'aggiunta del costo di ogni implicante potrebbe aumentare il livello di precisione nella ricerca della soluzione. Comunque, oltre ad aumentare la complessità algortimica, tale livello di precisione potrebbe essere assolutamente inutile se si considera che il collegamento alla libreria tecnologica (*library binding*) cambia la struttura del circuito e, come conseguenza, il costo della realizzazione.
       - In media, due soluzioni che differiscono nel costo stimato del 10%-20% sono da considerarsi equivalenti.

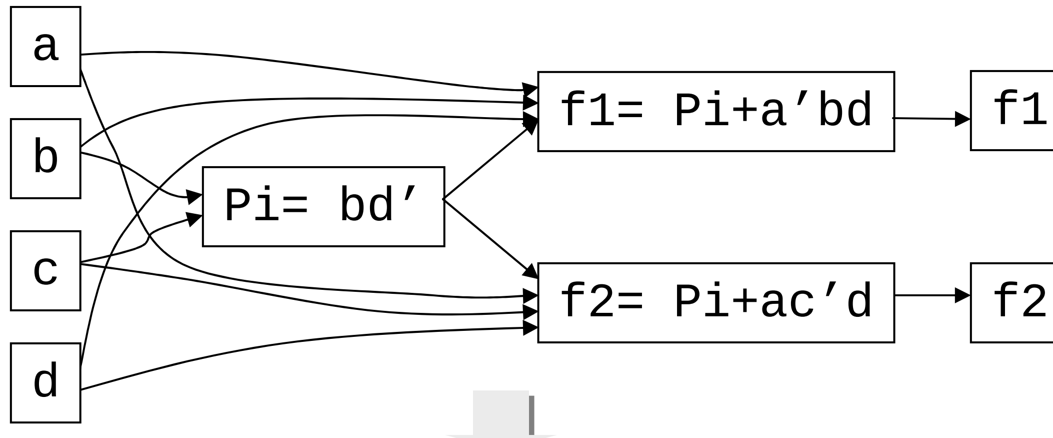
(c) 2004 William Fornaciari

- Osservazioni (cont.):
  3. Implicanti di più funzioni e espressione algebrica
     - Si consideri il seguente esempio:

Rappresentazione circuitale



Modello della rappresentazione circuitale



Espressione Boolena

f1= Pi+a’bd

f2= Pi+ac’d

Pi= bd’

Sintesi di reti combinatorie a due livelli:
Metodi esatti - Quine-Mc Cluskey: Multi-Uscita

- Osservazioni (cont.):
  - Dall’esempio si evince che:
    1. per rappresentare la condivisione nelle espressioni algebriche ogni implicante comune a più funzioni viene descritto da una specifica espressione algebrica (nell’esempio riportato, `P0`, `P1`, `P5` e `P8`).
    2. Il descrittore della funzione algebrica di ogni implicante comune a più funzioni viene utilizzato come letterale e compare nelle espressioni booleane delle funzioni che ne fanno uso.

Soluzione
```
F1: {P0,P3,P5,P8}
F2: {P1,P5,P8}
F3: {P1,P8}
F4: {P0,P6,P8}
```

Espressioni Booleane
```
F1=P0+a’bd’+P5+P8;
F2=P1+P5+P8;
F3=P1+P8;
F4=c’d’+P0+P8;
P0=a’b’d;
P1=a’b’c;
P5=b’c’;
P8=abcd;
```

Il costo è di 27 letterali

(c) 2004 William Fornaciari

Sintesi di reti combinatorie a due livelli:
Metodi esatti - Espresso-Exact

- Espresso-Exact
  - Algoritmo implementato in *Espresso* per la minimizzazione esatta.
  - I principi su cui si basa sono gli stessi della procedura di Quine-Mc Cluskey (algoritmi utilizzati sono un po' diversi).
  - Efficienza maggiore.
  - In Espresso-exact gli implicanti sono partizionati in tre insiemi:
    - Essenziali.
    - Totalmente ridondanti: sono quelli coperti da implicanti essenziali e dal DC-set.
    - Parzialmente ridondanti: i rimanenti. Questo ultimo insieme è l'unico ad essere coinvolto nella fase di copertura.
  - Una tabella di copertura ridotta è ottenuta ponendo come indici di riga i soli implicanti parzialmente ridondanti. Gli indici di colonna sono in corrispondenza uno a uno con l'insieme dei mintermini.
  - La tabella è più compatta rispetto a quella ottenuta con Quine-Mc Cluskey e non ha colonne essenziali.

(c) 2004 William Fornaciari