Esercizi di logica

A cavallo fra logica proporzionale e logica del I ordine

<u>Esercizio 1.</u>

Scrivere una formula f(A,B,C) che ammetta la seguente tavola di verità

A	B	C	f(A,B,C)
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

e contenga solo i connettivi $\sim$ e $\Rightarrow$.

Dire, giustificando la risposta, se $\sim A\wedge C \vdash_L f(A,B,C)$ e ridimostrare il risultato ottenuto utilizzando la risoluzione.

Scrivere una formula g(A,B,C) non equivalente a f(A,B,C) che non sia una tautologia tale che $\{f(A,B,C), \sim g(A,B,C)\}$ sia un insieme di formule insoddisfacibile.

Nella formula $f(A,B,C) \Rightarrow g(A,B,C)$ sostituire ogni occorrenza di A, di B e di C rispettivamente con le formule del primo ordine $\forall x A_1^1(x)$, $\exists y A_1^2(x,y)$, $A_1^2(x,y)$ dire se la formula ottenuta è una formula logicamente valida. Portare la formula così ottenuta in forma normale prenessa e skolemizzare la sua chiusura universale.

<u>Traccia di soluzione</u>

Dalla tavola di verità si ha $f(A,B,C)\equiv(\sim A\wedge\sim B\wedge C)\vee(\sim A\wedge B\wedge C)\vee(A\wedge\sim B\wedge C)\equiv(\sim A\wedge C)\vee(A\wedge\sim B\wedge C)\equiv C\wedge(\sim A\vee(A\wedge\sim B))\equiv C\wedge(\sim A\vee\sim B)\equiv\sim((A\Rightarrow\sim B)\Rightarrow\sim C)$.

Per il teorema di correttezza e completezza $\sim A\wedge C\vdash_L f(A,B,C)$ se e solo se $\sim A\wedge C\models f(A,B,C)$. Ora $\sim A\wedge C$ assume valore 1 solo se A assume valore 0 e B assume valore 1, mentre il valore di B può essere qualunque, pertanto poiché per A che vale 0 e C che vale 1, qualsiasi sia il valore di B si ha che f(A,B,C) vale 1, ogni modello di $\sim A\wedge C$ è modello di f(A,B,C) e dunque segue che $\sim A\wedge C\vdash_L f(A,B,C)$. Poiché la risoluzione è corretta e completa per refutazione per provare lo stesso risultato usando la risoluzione dobbiamo provare che $\{\sim A\wedge C, \sim f(A,B,C)\}\vdash_R \square$. Scriviamo $\sim A\wedge C$ e $\sim f(A,B,C)$ in forma a clausole, $\sim A\wedge C$ corrisponde alle due clausole

a) $\{\sim A\}$
b) $\{C\}$

mentre $\sim f(A,B,C)\equiv\sim(C\wedge(\sim A\vee\sim B))\equiv\sim C\vee(A\wedge B)$, corrisponde alle due clausole

c) $\{\sim C, A\}$
d) $\{\sim C, B\}$

dalla clausola a) e dalla clausola c) per risoluzione si trova la clausola $\{\sim C\}$, da questa e dalla clausola b) si trova la clausola vuota.

L'insieme di formule $\{f(A,B,C), \sim g(A,B,C)\}$ è un insieme di formule insoddisfacibile se e solo se $f(A,B,C)\models g(A,B,C)$, quindi g(A,B,C) deve essere una formula la cui tavola di verità si ottiene da quella di f(A,B,C) sostituendo qualche (almeno uno) 0 con 1. Prendendo ad esempio

A	B	C	g(A,B,C)
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

si ha g(A,B,C)≡C.
Sostituendo in f(A,B,C)⇒g(A,B,C) le occorrenze di A,B,C con le formule date si ottiene la fbf $\sim((\forall x A_1^1(x) \Rightarrow \sim \exists y A_1^2(x,y)) \Rightarrow \sim A_1^2(x,y)) \Rightarrow A_1^2(x,y)$ che è logicamente valida essendo un esempio di tautologia (infatti per il teorema di deduzione semantica f(A,B,C)|=g(A,B,C) sse f(A,B,C)⇒g(A,B,C) è una tautologia).
Portiamo la formula in forma normale premessa

$\sim((\forall x A_1^1(x) \Rightarrow \sim \exists y A_1^2(x,y)) \Rightarrow \sim A_1^2(x,y)) \Rightarrow A_1^2(x,y) \equiv$
$\sim(\exists z\ (A_1^1(z) \Rightarrow \forall y \sim A_1^2(x,y)) \Rightarrow \sim A_1^2(x,y)) \Rightarrow A_1^2(x,y) \equiv$
$\sim(\exists z\ \forall y\ (A_1^1(z) \Rightarrow \sim A_1^2(x,y)) \Rightarrow \sim A_1^2(x,y)) \Rightarrow A_1^2(x,y) \equiv$
$\sim\forall z\ \exists v\ (\ (A_1^1(z) \Rightarrow \sim A_1^2(x,v)) \Rightarrow \sim A_1^2(x,y)) \Rightarrow A_1^2(x,y) \equiv$
$\exists z\ \forall v \sim(\ (A_1^1(z) \Rightarrow \sim A_1^2(x,v)) \Rightarrow \sim A_1^2(x,y)) \Rightarrow A_1^2(x,y) \equiv$
$\forall z\ \exists v (\sim(\ (A_1^1(z) \Rightarrow \sim A_1^2(x,v)) \Rightarrow \sim A_1^2(x,y)) \Rightarrow A_1^2(x,y))$

che è la forma normale prenessa.
La chiusura universale di questa formula è

$\forall x \forall y \forall z\ \exists v\ (\sim(\ (A_1^1(z) \Rightarrow \sim A_1^2(x,v)) \Rightarrow \sim A_1^2(x,y)) \Rightarrow A_1^2(x,y)),$

la sua forma di Skolem diventa

$\forall x \forall y \forall z\ (\sim(\ (A_1^1(z) \Rightarrow \sim A_1^2(x,f_1^3(x,y,z))) \Rightarrow \sim A_1^2(x,y)) \Rightarrow A_1^2(x,y)).$

<u>Esercizio 2)</u>
Data la formula

$$(A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (C \Rightarrow (\neg B \vee A))$$

scrivere una formula f(A,B,C) ad essa equivalente che contenga solo i connettivi ¬, ∧, ∨. Si trovi poi una formula g(A,B,C), non equivalente ad f(A,B,C), tale che l'insieme di formule {g(A,B,C), ¬ f(A,B,C)} sia insoddisfacibile.
Si dica, utilizzando la risoluzione, se $A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \vdash_L g(A,B,C) \wedge f(A,B,C)$.
Nella formula g(A,B,C) ⇒ f(A,B,C) si sostituisca ogni occorrenza di A, di B e di C rispettivamente con le formule del primo ordine $\forall x A_1^2(x,y), A_1^1(x), \exists y A_2^1(y)$ e si dica se la formula così ottenuta è logicamente valida.
Portare infine la formula ottenuta in forma normale prenessa e skolemizzarla.
<u>Traccia di soluzione</u>
Trasformiamo la formula la formula $(A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (C \Rightarrow (\neg B \vee A))$ in una formula ad essa equivalente che contenga solo i connettivi ¬, ∧, ∨.
$(A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (C \Rightarrow (\neg B \vee A)) \equiv \neg(\neg A \vee \neg B) \vee (\neg C \vee \neg B \vee A) \equiv (A \wedge B) \vee (\neg C \vee \neg B \vee A) \equiv (\neg C \vee \neg B \vee A) \wedge (B \vee \neg C \vee \neg B \vee A) \equiv \neg C \vee \neg B \vee A$. A partire da questa formula f(A,B,C) dobbiamo trovare una formula g(A,B,C) tale che {g(A,B,C), ¬ f(A,B,C)} sia un insieme insoddisfacibile (o in altre parole una formula g(A,B,C) di cui f(A,B,C) sia conseguenza semantica), basta prendere ad esempio A

come formula g(A,B,C), infatti ogni volta che A assume valore 1 anche f(A,B,C) assume valore 1 e quindi $\neg$f(A,B,C) assume valore 0.
Per il teorema di correttezza e completezza vedere se $A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \vdash_L g(A,B,C) \wedge f(A,B,C)$ è equivalente a vedere se $A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \models g(A,B,C) \wedge f(A,B,C)$ e quindi se $\{A \Rightarrow (B \Rightarrow C), \neg(g(A,B,C) \wedge f(A,B,C))\}$ è insoddisfacibile , ovvero se dall'insieme $\{A \Rightarrow (B \Rightarrow C), \neg(g(A,B,C) \wedge f(A,B,C))\}$ si ricava per risoluzione la clausola vuota. Trasformiamo il nostro insieme di formule in forma a clausole.
$A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \equiv \neg A \vee \neg B \vee C$, $\neg(g(A,B,C) \wedge f(A,B,C)) \equiv \neg A \vee \neg(\neg C \vee \neg B \vee A) \equiv \neg A \vee (C \wedge B \wedge \neg A) \equiv$ $\equiv (\neg A \vee C) \wedge (\neg A \vee B)$, dobbiamo quindi considerare l'insieme di clausole $\Gamma = \{\{\neg A, \neg B, C\}, \{\neg A, C\}, \{\neg A, B\}\}$. Le uniche clausole di cui si può calcolare un risolvente sono la prima e la terza ma questa risolvente è la seconda clausole, quindi Ris $\Gamma = \Gamma$ e dunque Ris*$\Gamma = \Gamma$, pertanto da Γ non si ricava la clausola vuota, perciò con la nostra scelta di g(A,B,C) non si ha la deduzione in L di $g(A,B,C) \wedge f(A,B,C)$ da $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$.
La formula $g(A,B,C) \Rightarrow f(A,B,C\ )$ nel nostro caso diventa $A \Rightarrow \neg C \vee \neg B \vee A$ ed è una tautologia, in quanto come abbiamo già osservato f(A,B,C) è conseguenza semantica di g(A,B,C), facendo le sostituzioni si ha la formula $\forall x A_1^2(x,y) \Rightarrow (\neg \exists y A_2^1(y) \vee \neg A_1^1(x) \vee \forall x A_1^2(x,y))$ che essendo un esempio di tautologia è logicamente valida.
$\forall x A_1^2(x,y) \Rightarrow (\neg \exists y A_2^1(y) \vee \neg A_1^1(x) \vee \forall x A_1^2(x,y)) \equiv \exists z (A_1^2(z,y) \Rightarrow (\forall y \neg A_2^1(y) \vee \neg A_1^1(x) \vee$ $\forall x A_1^2(x,y))) \equiv \exists z (A_1^2(z,y) \Rightarrow \forall v \forall w (\neg A_2^1(v) \vee \neg A_1^1(x) \vee A_1^2(w,y)))$
$\equiv \exists z \forall v \forall w (A_1^2(z,y)(\neg A_2^1(v) \vee \neg A_1^1(x) \vee A_1^2(w,y)))$.
Skolemizzata la formula è $\forall v \forall w (A_1^2(a,y)(\neg A_2^1(v) \vee \neg A_1^1(x) \vee A_1^2(w,y)))$, la skolemizzazione della sua chiusura universale diventa $\forall x \forall v \forall w (A_1^2(f_1^1(x),y)(\neg A_2^1(v) \vee \neg A_1^1(x) \vee A_1^2(w,y)))$.

Esercizio 3.
Scrivere in forma normale premessa e skolemizzare la formula
$\forall x \mathcal{A}_1^2(x,y) \Rightarrow ((\forall x \mathcal{A}_1^1(x)) \wedge \mathcal{A}_1^2(z,x))$.

Traccia di soluzione
$\forall x \mathcal{A}_1^2(x,y) \Rightarrow ((\forall x \mathcal{A}_1^1(x)) \wedge \mathcal{A}_1^2(z,x)) \equiv \exists v (\mathcal{A}_1^2(v,y) \Rightarrow \forall w (\mathcal{A}_1^1(x) \wedge \mathcal{A}_1^2(z,x)))$

$\equiv \exists v \forall w\ (\mathcal{A}_1^2(v,y) \Rightarrow (\mathcal{A}_1^1(x) \wedge \mathcal{A}_1^2(z,x)))$ che è la forma prenessa.

$\forall w\ (\mathcal{A}_1^2(a_{Sk},y) \Rightarrow (\mathcal{A}_1^1(x) \wedge \mathcal{A}_1^2(z,x)))$ è la forma di Skolem della formula precedente.

La forma di Skolem della chiusura universale $\forall x\ \forall y\ \exists v \forall w\ (\mathcal{A}_1^2(v,y) \Rightarrow (\mathcal{A}_1^1(x) \wedge \mathcal{A}_1^2(z,x)))$ della formula sarebbe invece $\forall x\ \forall y\ \forall w\ (\mathcal{A}_1^2(f_{Sk}^2(x,y),y) \Rightarrow (\mathcal{A}_1^1(x) \wedge \mathcal{A}_1^2(z,x)))$

Esercizi sulle interpretazioni

Esercizio 4
Data la formula

$$(\ \forall x (\ A_1^2(\ x, f_1^2(\ y,z\ )) \vee A_2^2(\ x,y\ )) \Rightarrow (\ \forall x A_1^2(\ x, f_1^2(\ y,z\ )) \vee \forall x A_2^2(\ x,y\ )))$$

si consideri la struttura avente come dominio R-$\{0\}$ e nella quale $f_1^2(y,z)$ sia da interpretare come il prodotto tra y e z, $A_1^2(x,v)$ sia da interpretare come l'uguaglianza e $A_2^2(x,y)$ sia da interpretare come "x è il quadrato di y" .
Si dica se in tale struttura la formula è vera, falsa o soddisfacibile.

Nella stessa struttura cosa si può dire della chiusura universale e della chiusura esistenziale della suddetta formula? Si tratta di una formula logicamente valida? Portare infine la formula in forma normale di Skolem.

Traccia di soluzione

La formula nella struttura data è vera, infatti qualsiasi sia l'assegnamento fatto esiste un numero reale non nullo diverso da yz e da y^2, quindi l'antecedente della formula è sempre falso e la formula è sempre vera (quindi banalmente anche soddisfacibile da ogni assegnamento).

Le chiusure universale ed esistenziale della formula sono quindi a loro volta vere perché la chiusura universale di una formula è vera se e solo se la formula è vera e la chiusura esistenziale è vera se e solo se c'è almeno un assegnamento che soddisfa la formula data.

Cerchiamo ora di stabilire se la formula

$$(\forall x(A_1^2(x, f_1^2(y,z)) \vee A_2^2(x,y)) \Rightarrow (\forall x A_1^2(x, f_1^2(y,z)) \vee \forall x A_2^2(x,y)))$$

è logicamente valida.

La risposta è no infatti basta prendere una interpretazione fatta così:

D={a,b} ed interpretare in tale domino la funzione f_1^2 come la funzione costante che restituisce b la relazione A_1^2 come uguaglianza e la relazione A_2^2 come relazione {(a,a), (a,b),(b,a)}. L'antecedente è sempre soddisfatto se a y assegno il valore b, infatti essendo f_1^2 (-,-)=b ho che se x è b la formula $A_1^2(x, f_1^2(x,y))$ è soddisfatta, mentre se ad x assegno il valore a è soddisfatta $A_1^2(x,y)$, invece non assegnando ad y il valore b non è soddisfatta nessuna delle due formule $\forall$x $A_1^2(x, f_1^2(x,y))$ e $\forall$x $A_1^2(x,y)$, infatti se ad x è assegnato a non è soddisfatta $A_1^2(x, f_1^2(x,y))$ se x è assegnato b non è soddisfatta $A_1^2(x,y)$.

La f.n.p. di

$(\forall x(A_1^2(x, f_1^2(y,z)) \vee A_2^2(x,y)) \Rightarrow (\forall x A_1^2(x, f_1^2(y,z)) \vee \forall x A_2^2(x,y)))$ è

$\exists x \forall u \forall v\ ((A_1^2(x, f_1^2(y,z)) \vee A_2^2(x,y) \Rightarrow (A_1^2(u, f_1^2(y,z)) \vee A_2^2(v,y))$

se la chiudiamo universalmente abbiamo

$\forall y \forall z\ \exists x \forall u \forall v\ ((A_1^2(x, f_1^2(y,z)) \vee A_2^2(x,y) \Rightarrow (A_1^2(u, f_1^2(y,z)) \vee A_2^2(v,y))$

per cui la formula di Skolem diventa

$\forall y \forall z\ \forall u \forall v\ ((A_1^2(f_2^2(y,z), f_1^2(y,z)) \vee A_2^2(f_2^2(y,z), y) \Rightarrow (A_1^2(u, f_1^2(y,z)) \vee A_2^2(v,y))$

Esercizio 5

Si consideri la formula del primo ordine

$$(\forall x)(\forall y)(\mathcal{A}_1^2(x,y) \Rightarrow \mathcal{A}_1^2(f_1^1(x), f_1^1(y))) \Rightarrow \sim(\exists y)(\forall x)\mathcal{A}_1^2(f_1^1(x),y)$$

La si porti in forma normale premessa e di Skolem. Si dica se esiste una interpretazione in cui la formula è soddisfacibile, ma non vera. Si dica se la formula è logicamente valida e in caso negativo si dia un'interpretazione in cui la formula risulta vera ed una in cui risulta falsa.

Traccia di soluzione

$(\forall x)(\forall y)(\mathcal{A}_1^2(x,y) \Rightarrow \mathcal{A}_1^2(f_1^1(x), f_1^1(y))) \Rightarrow \sim(\exists y)(\forall x)\mathcal{A}_1^2(f_1^1(x),y) \equiv$

$(\exists x)(\exists y)((\mathcal{A}_1^2(x,y) \Rightarrow \mathcal{A}_1^2(f_1^1(x), f_1^1(y))) \Rightarrow (\forall y)(\exists x) \sim\mathcal{A}_1^2(f_1^1(x),y)) \equiv$

$(\exists x)(\exists y)(\forall v)(\exists z)((\mathcal{A}_1^2(x,y) \Rightarrow \mathcal{A}_1^2(f_1^1(x), f_1^1(y))) \Rightarrow \sim\mathcal{A}_1^2(f_1^1(z),v))$ forma normale prenessa

La forma di Skolem è allora $(\forall v)((\mathcal{A}_1^2(a,b) \Rightarrow \mathcal{A}_1^2(f_1^1(a), f_1^1(b))) \Rightarrow \sim\mathcal{A}_1^2(f_1^1(f_2^1(v)),v))$.

La formula è una formula chiusa quindi non può essere soddisfacibile ma non vera.

Se prendiamo un dominio qualsiasi, una qualsiasi funzione unaria sul dominio per interpretare f_1^1 , la relazione vuota per rappresentare il predicato $\mathcal{A}_1^2$, allora la formula data è vera in quanto $\mathcal{A}_1^2(x,y)$ è falsa e quindi $(\mathcal{A}_1^2(x,y) \Rightarrow \mathcal{A}_1^2(f_1^1(x), f_1^1(y)))$ è vera e quindi è vero l'antecedente mentre $\mathcal{A}_1^2(f_1^1(x),y)$ è falsa e quindi è falsa anche la formula $(\exists y)(\forall x)\mathcal{A}_1^2(f_1^1(x),y)$ per cui la sua negazione (cioè il conseguente della formula di partenza) è vera.

Se prendiamo un dominio qualsiasi, una qualsiasi funzione unaria sul dominio per interpretare f_1^1 , la relazione universale per rappresentare il predicato $\mathcal{A}_1^2$, allora la formula data è falsa infatti l’antecedente continua ad essere vero, ma $\mathcal{A}_1^2(f_1^1(x),y)$ e quindi $(\exists y)(\forall x)\mathcal{A}_1^2(f_1^1(x),y)$ è vera da cui la negazione è falsa.

<u>Esercizio 6</u>
Si consideri la seguente formula del I ordine

$$\mathcal{A}_1^2(x,y) \Rightarrow (\exists z)\,(\mathcal{A}_1^2(x,z) \wedge \mathcal{A}_1^2(z,y))$$

si discuta la verità della formula data e delle sue chiusure esistenziale ed universale nell’interpretazione che ha come dominio N ed in cui $\mathcal{A}_1^2(x,y)$ è da interpretarsi come la relazione $x<y$.
Dimostrare che la formula non è logicamente valida, né logicamente contraddittoria.
<u>Traccia di soluzione</u>
Nell’interpretazione data la formula si legge
“x,y sono numeri naturali e se x è minore di y allora esiste un naturale z tale che x è minore di z e z è minore di y”.
Ovviamente la formula è soddisfatta se y non è il successore di x perché in tal caso o y è minore o uguale ad x e non è soddisfatto l’antecedente o se y è maggiore di x il successore di x è compreso fra x ed y. La formula non è soddisfatta se y è il successore di x, perché in tal caso è soddisfatto l’antecedente ma non il conseguente.
Dunque la formula nell’interpretazione data è soddisfacibile ma non vera, per cui la sua chiusura esistenziale è vera e la sua chiusura universale è falsa.
La formula non può essere logicamente valida in quanto non è vera nell’interpretazione data, non è logicamente contraddittoria in quanto non è falsa (insoddisfacibile) nell’interpretazione data.

<u>Esercizio 7</u>.
Si consideri la seguente formula del I ordine

$$(\exists x)\,(A_1^2(x,y) \wedge A_1^2(x,z)) \Rightarrow (\forall t)\,(\forall v)\; A_1^2\,(x,\; f_1^2(f_2^2(y,t),\; f_2^2(z,v))).$$

Se ne determinino le variabili libere e vincolate e si dica se il termine $f_2^2(y,t)$ è libero per x in tale formula.
Si porti la formula in forma normale prenessa.
Si trovi una interpretazione in cui la formula è vera.
Si mostri che si tratta di una formula né logicamente valida, né logicamente contraddittoria.
<u>Traccia di soluzione</u>
Le variabili libere e vincolate sono:

$$(\exists x)\,(A_1^2(x,y) \wedge A_1^2(x,z)) \Rightarrow (\forall t)\,(\forall v)\; A_1^2\,(x,\; f_1^2(f_2^2(y,t),\; f_2^2(z,v))).$$

V VL V L V V L LV LV

Il termine $f_2^2(y,t)$ non è libero per x in tale formula perché un’occorrenza libera di x cade nel campo d’azione di un quantificatore che quantifica la variabile t che compare nel termine.
La forma normale prenessa è

$$(\forall u)\,(\forall t)\,(\forall v)(\; A_1^2(u,y) \wedge A_1^2(u,z) \Rightarrow A_1^2\,(x,\; f_1^2(f_2^2(y,t),\; f_2^2(z,v))))$$

Una interpretazione in cui la formula è vera è la seguente :
dominio qualsiasi, f_1^2 , f_2^2 operazioni qualsiasi sul dominio, A_1^2 relazione universale. In tal caso infatti il conseguente è sempre vero. La formula non è logicamente contraddittoria perché c’è un’interpretazione in cui è vera.
Un’interpretazione in cui la formula non è vera è :
dominio Z, f_1^2 , f_2^2 operazione di somma e prodotto, A_1^2 relazione di minore .

L'antecedente è sempre vero, invece assegnando ad x, y e z valori positivi il conseguente risulta falso. La formula quindi non è neppure logicamente valida.

Esercizio 8
Si consideri la fbf
$(\exists x A_1^1(x) \Rightarrow \forall x\, A_2^1(x)) \Rightarrow \forall x(A_1^1(x) \Rightarrow A_2^1(x))$
portarla in forma normale prenessa. Discuterne la verità nell'interpretazione avente come dominio gli interi ed in cui i predicati $A_1^1(x)$, $A_2^1(x)$ significano rispettivamente "x è pari", "x è dispari". Dire se la formula è logicamente valida.
Traccia di soluzione
$(\exists x A_1^1(x) \Rightarrow \forall x\, A_2^1(x)) \Rightarrow \forall x(A_1^1(x) \Rightarrow A_2^1(x)) \equiv \forall x(A_1^1(x) \Rightarrow \forall x\, A_2^1(x))) \Rightarrow \forall x(A_1^1(x) \Rightarrow A_2^1(x)) \equiv$
$\forall x \forall y(A_1^1(x) \Rightarrow A_2^1(y))) \Rightarrow \forall x(A_1^1(x) \Rightarrow A_2^1(x)) \equiv \exists x \exists y((A_1^1(x) \Rightarrow A_2^1(y)) \Rightarrow \forall x(A_1^1(x) \Rightarrow A_2^1(x))) \equiv$
$\exists x \exists y \forall z((A_1^1(x) \Rightarrow A_2^1(y)) \Rightarrow (A_1^1(z) \Rightarrow A_2^1(z)))$ che è la forma normale prenessa.
Nella interpretazione suggerita l'antecedente della formula si legge: Se esiste un x pari allora tutti gli interi sono dispari ed è chiaramente falso per cui la intera formula è vera.
La formula è logicamente valida infatti la sua negazione è
$\forall x \forall y \exists z \sim((A_1^1(x) \Rightarrow A_2^1(y)) \Rightarrow (A_1^1(z) \Rightarrow A_2^1(z)))$ la cui forma di Skolem diventa
$\forall x \forall y \sim((A_1^1(x) \Rightarrow A_2^1(y)) \Rightarrow (A_1^1(f_{Sk}^2(x,y)) \Rightarrow A_2^1(f_{Sk}^2(x,y))))$. In forma a clausole la formula diventa
$\{\{\sim A_1^1(x), A_2^1(y)\}, \{A_1^1(f_{Sk}^2(x,y))\}, \{\sim A_2^1(f_{Sk}^2(x,y))\}\}$.
Facendo la separazione delle variabili otteniamo
$\{\{\sim A_1^1(x), A_2^1(y)\}, \{A_1^1(f_{Sk}^2(z,v))\}, \{\sim A_2^1(f_{Sk}^2(w,t))\}\}$. Dalla prima e seconda clausola con l'unificatore $\{f_{Sk}^2(z,v)/x\}$ troviamo la clausola $\{A_2^1(y)\}$ e da questa con la terza clausola usando l'unificatore $\{f_{Sk}^2(z,v)/y\}$ troviamo la clausola vuota.
Potevamo mostrare che la formula è logicamente valida osservando che per falsificare la formula data in qualche interpretazione avremmo dovuto avere vero l'antecedente $(\exists x A_1^1(x) \Rightarrow \forall x\, A_2^1(x))$ e falso il conseguente $\forall x(A_1^1(x) \Rightarrow A_2^1(x))$ nella stessa interpretazione . Se $\forall x(A_1^1(x) \Rightarrow A_2^1(x))$ è falsa in una intepretazione vuol dire che nel dominio dell'interpretazione esiste un assegnamento di valore ad x che soddisfa $A_1^1(x)$ e non soddisfa $A_2^1(x)$, quindi in tale interpretazione $\exists x A_1^1(x)$ è una formula vera mentre $\forall x\, A_2^1(x)$ è falsa, dunque l'antecedente $\exists x A_1^1(x) \Rightarrow \forall x\, A_2^1(x)$ della fdormula data è falso e la formula è vera.

Esercizio 9.
Data la formula

$$A_1^2(f_1^1(f_1^2(x,y)), f_1^1(f_1^2(x,z))) \Rightarrow A_1^2(y,z))$$

si consideri l'interpretazione avente come dominio l'insieme delle matrici quadrate di ordine 2 sul campo reale e nella quale $f_1^1(x)$ sia da interpretare come il quadrato di x, $f_1^2(x,y)$ come il prodotto tra x ed y, $A_1^2(x,y)$ come l'uguaglianza tra x e y.
Si dica se in tale interpretazione la formula è vera, falsa o soddisfacibile.
Nella stessa interpretazione cosa si può dire della chiusura universale e della chiusura esistenziale della suddetta formula?
Si tratta di una formula logicamente valida?
Giustificare ogni affermazione fatta.
Traccia di soluzione
Nella interpretazione proposta la formula si legge " Siano X, Y, Z tre matrici quadrate di ordine 2 su R . Se il quadrato del prodotto delle matrici X e Y è uguale al quadrato del prodotto delle matrici X e Z allora Y è uguale a Z". La formula è banalmente soddisfacibile ad esempio assegnando ad Y e Z una stessa matrice, quindi non è falsa. La formula non è vera perché ad esempio se assegniamo ad X la matrice nulla e ad Y e Z due matrici diverse fra loro, l'antecedente è soddisfatto ed il conseguente no. La formula nell'interpretazione data è dunque soddisfacibile ma non vera. La sua chiusura universale è dunque falsa e quella esistenziale vera.

La formula non è logicamente valida perché già nell'interpretazione suggerita dal testo non è vera.

Scrittura di frasi del linguaggio naturale come formule

Esercizio 10.
Si scriva una formula del primo ordine che esprima il fatto che due individui x,y sono cugini.
Traccia di soluzione
Usiamo come predicati i predicati binari C(x,y) (x,y sono cugini), G(x,y) (x è genitore di y), F(x,y) (x è fratello di y) ed abbiamo
$(\forall x)(\forall y)(C(x,y)\Leftrightarrow(\exists z)(\exists v)(G(z,x)\wedge F(z,v)\wedge G(v,y))$.
Osserviamo che la definizione così data non è precisa perché risulta che ogni persona è cugina di sé stessa e di suo fratello, quindi sarebbe meglio aggiungere un predicato D(x,y) (x non è y) e scrivere
$(\forall x)(\forall y)(C(x,y)\Leftrightarrow D(x,y)\wedge\sim F(x,y)\wedge(\exists z)(\exists v)(G(z,x)\wedge F(z,v)\wedge G(v,y))$.
Inoltre il predicato F(x,y) può essere definito in termini del predicato G(x,y) in questo modo
$(\forall x)(\forall y)(F(x,y)\Leftrightarrow D(x,y)\wedge(\forall z)(G(z,x)\Leftrightarrow G(z,y))$.

Esercizio 11
Utilizzando un opportuno linguaggio del primo ordine, si scriva la formula logica chiusa che traduca la seguente frase:
" Un elemento, diverso dallo zero, è divisore dello zero se e solo se non ammette inverso".
Supposto di aver scritto gli assiomi propri della teoria degli anelli con unità, si dica se tale frase è un teorema della teoria .
E' una formula logicamente valida?
Traccia di soluzione
Utilizziamo un linguaggio che contenga una costante a da interpretare come lo 0, una lettera predicativa A_1^2 ed interpretiamo il predicato $A_1^2(x,y)$ come x=y, una altra lettera predicativa A_2^2 ed interpretiamo il predicato $A_2^2(x,y)$ come x è l'inverso di y ed una lettera predicativa A_1^1 ed interpretiamo il predicato $A_1^1(x)$ come x è un divisore dello 0.
La formula che traduce la frase in questo linguaggio diventa
$\forall x(\neg A_1^2(x,a)\Rightarrow(A_1^1(x)\Leftrightarrow\neg\exists yA_2^2(y,x)))$.
Questa formula è abbastanza rozza, specifichiamo meglio i predicati utilizzando una lettera funzionale $f_1^2(x,y)$ da interpretare come $x\cdot y$ e una costante b da interpretare come l'elemento neutro rispetto al prodotto e la sola lettera predicativa A_1^2.
Il predicato $A_1^1(x)$ può allora essere espresso dalla formula
$\neg A_1^2(x,a)\wedge\exists y(\neg A_1^2(y,a)\wedge(A_1^2(f_1^2(x,y),a)\vee A_1^2(f_1^2(y,x),a)))$ ed il predicato $A_2^2(y,x)$ può essere espresso da $A_1^2(f_1^2(x,y),b)\wedge A_1^2(f_1^2(y,x),b)$, la formula che traduce la frase allora diventa
$\forall x(\neg A_1^2(x,a)\Rightarrow(\exists y(\neg A_1^2(y,a)\wedge(A_1^2(f_1^2(x,y),a)\vee A_1^2(f_1^2(y,x),a))))\Leftrightarrow\neg\exists y(A_1^2(f_1^2(x,y),b)\wedge A_1^2(f_1^2(y,x),b))))$.
Tale frase non è un teorema dalla teoria degli anelli con unità, infatti $<Z,+,\cdot>$ è un anello con unità privo di divisori dello 0, in cui solo 1 e –1 ammettono inverso rispetto al prodotto. Quindi esistono elementi diversi dallo 0 (ad esempio 2) che non ammettono inverso e non sono divisori dello 0.
La formula non è logicamente valida in quanto già quando la si interpreta in modo da ottenere la frase tradotta, si ha una frase che non è vera.

Esercizio 12
Scrivere come formula chiusa di un opportuno linguaggio del primo ordine la frase
"Una matrice quadrata ha determinante uguale a 0 se e solo se uno dei suoi autovalori è nullo".
Traccia di soluzione
Il dominio è l'insieme delle matrici quadrate, e vediamo i numeri reali come matrici di ordine 1.
Usiamo un linguaggio con i seguenti predicati
S(x) "x è una matrice quadrata di ordine 1, ovvero uno scalare"

A(x,y) “y è un autovalore di x”, in questa relazione il secondo argomento deve sempre essere uno scalare, per cui lo dovremo esplicitare nella formula.
U(x,y) “x è uguale a y”, ed inoltre con
la lettera funzionale d(x) da interpretare come determinante di x,
la costante c che rappresenta il numero 0 e le variabili x,y.
La formula che vogliamo è
$\forall x(U(d(x),c)\Leftrightarrow\exists y(S(y)\wedge A(x,y)\wedge U(y,c)))$.
La formula può essere ulteriormente dettagliata per esempio specificando il predicato A(x,y) “y è un autovalore di x”, facendo uso di due lettere funzionali f(x,y) g(x,y) che rappresentano rispettivamente la somma di due matrici x,y e l’opposto del prodotto dello scalare x per la matrice y e di una ulteriore costante i che rappresenta la matrice identica (in realtà si tratta di funzioni parziali che comunque potrebbero essere estese a funzioni su tutto il dominio e poi ristrette al dominio considerato con l’uso del predicato S(x))
A(x,y) può essere espressa come U(d(f(x,g(y,i))),c).

Esercizio 13. (era l’esercizio 17 nel file dei testi)
Usando un opportuno linguaggio del I ordine, si scriva la formula logica chiusa che traduca la seguente frase:
l’inverso del prodotto di due elementi è il prodotto dei loro inversi se e solo se il prodotto è commutativo.
Supposto di aver scritto gli assiomi propri della teoria dei gruppi si dica se tale frase un teorema della teoria
E' una formula logicamente valida?
Traccia di soluzione
Utilizziamo una lettera predicativa A_1^2 ed interpretiamo il predicato $A_1^2(x,y)$ come x=y, una lettera funzionale f_1^2 di arità 2 da interpretare come il prodotto e una lettera funzionale f_1^1 di arità 1 da interpretare come l’inverso. La formula che traduce la frase in questo linguaggio diventa:
$A_1^2(f_1^1(f_1^2(x,y)), f_1^2(f_1^1(x), f_1^1(y)))\Leftrightarrow\forall x\forall y\ A_1^2(f_1^2(x,y), f_1^2(y,x))$.
Questa formula non è un teorema della teoria dei gruppi infatti se prendiamo un gruppo nonj abeliano, il conseguente è falso ma un assegnamento che assegni ad x la identità del gruppo soddisfa l’antecedente e quindi la formula non è vera nella interpretazione data., e quindi non è neppure logicamente valida.
Osservate che la frase “l’inverso del prodotto di due qualsiasi elementi è il prodotto dei loro inversi se e solo se il prodotto è commutativo” avrebbe dovuto essere tradotta in
$\forall x\forall y(A_1^2(f_1^1(f_1^2(x,y)), f_1^2(f_1^1(x), f_1^1(y))))\Leftrightarrow\forall x\forall y\ A_1^2(f_1^2(x,y), f_1^2(y,x))$. Tale frase risulta vera per ogni gruppo, infatti sia G un gruppo abeliano allora presi comunque due suoi elementi a,b abbiamo $(ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}=a^{-1}b^{-1}$, per la commutatività del prodotto. Viceversa se per ogni coppia di elementi di un gruppo abbiamo $(ab)^{-1}=a^{-1}b^{-1}$ da $(ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}$ ricaviamo $b^{-1}a^{-1}=a^{-1}b^{-1}$ e passando all’inverso ab=ba. Anche questa formula non è logicamente valida, basta infatti cambiare l’interpretazione prendendo come dominio gli interi come operazione f_1^2 l’usuale prodotto e come f_1^1 l’operazione unaria che ad ogni intero associa il suo doppio, come A_1^2 la relazione d’uguaglianza.e si ha che $\forall x\forall y(2xy=(2x)(2y))\Leftrightarrow\forall x\forall y(xy=yx)$ che è chiaramente una formula falsa.

Esercizi di laboratorio/risoluzione

Esercizio 14 (ex 13)
In un bar due ragazzi A e B dicono di essere cugini, A dice che sua madre non è sorella del padre di B, B dice che suo padre non è fratello del padre di A. Un terzo ragazzo C dice che la madre di B non ha sorelle né fratelli.

Scrivere le specifiche nel linguaggio di input di SPASS considerando come assiomi le frasi dette da A e B, per dimostrare la congettura che C mente.
Usare la risoluzione per dimostrarlo
<u>Traccia di soluzione</u> (Non soluzione con SPASS ma solo formalizzazione del problema)
Usiamo le lettere predicative binarie C (cugini), F (fratelli o sorelle), il predicato di arità 0 V (C dice la verità), le lettere funzionali unarie m (madre di) e p (padre di), le costanti A,B.
1) C(A,B)
2) ~F(m(A),p(B))
3) ~F(p(B),p(A))
4) $V \Rightarrow \sim\exists z\, F(z,m(B))$
5) $\forall x \forall y\, (F(x,y) \Rightarrow F(y,x))$
6) $\forall x \forall y (C(x,y) \Leftrightarrow (F(m(x),m(y)) \vee F(m(x),p(y)) \vee F(p(x),m(y)) \vee F(p(x),p(y))))$
Congettura : ~V
<u>Facoltativo</u>
Le clausole da considerare sono
a) {C(A,B)}
b) {~F(m(A),p(B))}
c) {~F(p(B),p(A))}
d) {~V,F(z,m(B))}
e) {~F(x,y), F(y,x)}
f) {~C(x,y),F(m(x),m(y)),F(m(x),p(y)),F(p(x),m(y)),F(p(x),p(y))}
g) {V}
Ci sono altre clausole che si possono ricavare dalla formula 6) ma sono irrilevanti.
Separiamo le variabili ed abbiamo
a) {C(A,B)}
b) {~F(m(A),p(B))}
c) {~F(p(B),p(A))}
d) {~V,F(z,m(B))}
e) {~F(x,y), F(y,x)}
f) {~C(v,t),F(m(v),m(t)),F(m(v),p(t)),F(p(v),m(t)),F(p(v),p(t))}
g) {V}
Da a) e f) con l'unificatore {A/v,B/t} abbiamo
h) {F(m(A),m(B)),F(m(A),p(B)),F(p(A),m(B)),F(p(A),p(B))}
da h) con b) abbiamo
k) {F(m(A),m(B)),F(p(A),m(B)),F(p(A),p(B))}
che con c) produce
i) {F(m(A),m(B)),F(p(A),m(B))}
da questa con d) facendo l'unificazione {m(A)/z} si ha
l) {~V,F(p(A),m(B))}
che usata ancora con d) unificando {p(A)/z} produce
m) {~V} da cui con g) si ottiene la clausola vuota.

<u>Esercizio 15 (ex 14)</u>
Dato il seguente problema:
1) Carlo ha un fratello.
2) Tutti i fratelli di Carlo hanno figli.
3) Ogni persona è zio del figlio di suo fratello.
Provare che Carlo è zio di qualcuno.
a) Formalizzare il problema in un opportuno linguaggio del primo ordine.
b) Scrivere le precedenti formule usando la sintassi di SPASS vista in laboratorio.

Traccia di soluzione del punto a)
Usiamo la costante c per indicare Carlo e i predicati B(x,y) per dire che x è fratello di y , F(x,y) per indicare che x è figlio di y e Z(x,y) per indicare che x è zio di y.
La formula corrispondente alla frase 1 diventa $\exists x\ B(x,c)$.
La formula corrispondente alla frase 2 diventa $\forall x\ (B(x,c) \Rightarrow \exists z F(z,x))$.
La formula corrispondente alla frase 3 diventa $\forall x \forall y \forall z\ (B(x,y) \wedge F(z,y) \Rightarrow Z(x,z))$.
La congettura è $\exists x Z(c,x)$.
Può servire tenere conto di questa proprietà del predicato B(x,y) da usare come assiomi:
$\forall x \forall y (B(x,y) \Rightarrow B(y,x))$.

Esercizio 16 (ex 15)
Formalizzare usando la sintassi di SPASS vista in laboratorio il seguente problema:
n ed m sono due numeri interi
Se n è congruo a 0 modulo x allora m non è congruo a 0 modulo x.
Se y è congruo a 0 mod x e z è congruo a 0 mod y, allora z è congruo a 0 mod x.
n é congruo a 0 modulo 2
[0] ed [1] sono le uniche classi di resti modulo 2.
A cosa è congruo m (naturalmente modulo 2)?

Si ricorda che è utile prima di codificare il problema nel linguaggio input di SPASS (che usa una notazione prefissa) scrivere le formule del I ordine che caratterizzano il problema.

Facoltativo: Risolvere il problema usando la risoluzione.
Traccia di soluzione (a meno di SPASS)
Usiamo una lettera predicativa di arità 3 C(x,y,z) per indicare che x è congruo a y modulo z, n,m,0,1,2 sono costanti. Poiché il dominio è l'insieme degli interi non traduciamo la affermazione n ed m sono due numeri interi.
Traduciamo le frasi in questo modo
$\forall x (C(n,0,x) \Rightarrow \sim C(m,0,x))$
$\forall x \forall y \forall z (C(y,0,x) \wedge C(z,0,y) \Rightarrow C(z,0,x))$
$C(n,0,2)$
$\forall x((C(x,0,2) \wedge \sim C(x,1,2)) \vee (C(x,1,2) \wedge \sim C(x,0,2))$ (che traduce l'affermazione che [0] ed [1] sono le uniche classi di resti modulo 2, a cui si è aggiunta la informazione non esplicita nella frase che le due classi sono diverse e quindi disgiunte)
Ora dobbiamo fare le due congetture che sono C(m,0,2), C(m,1,2).
A mano possiamo vedere se con la risoluzione troviamo la clausola vuota dalle formule così scritte, per SPASS è opportuno invece esplicitare in modo più chiaro il predicato C(x,y,z) usando il predicato U(x,y) di uguaglianza e quindi aggiungendo gli assiomi della teoria del primo ordine con identità e due lettere funzionali di arità 2 s e p dove s(x,y) restituisce x+y e p(x,y) restituisce il prodotto.
In tal caso possiamo definire C(x,y,z) in questo modo $\forall x \forall y \forall z (C(x,y,z) \Leftrightarrow \exists v U(x,s(y,p(v,z))))$, inoltre a questo punto andrebbero date le definizioni di s e p ed i postulati dell'aritmetica.
Per la risoluzione prendiamo la congettura C(m,1,2), la negazione è la clausola $\{\sim C(m,1,2)\}$
La premessa $\forall x (C(n,0,x) \Rightarrow \sim C(m,0,x))$ in forma a clausola è $\{\sim C(n,0,x), \sim C(m,0,x)\}$.
La premessa $\forall x \forall y \forall z (C(y,0,x) \wedge C(z,0,y) \Rightarrow C(z,0,x))$ in forma a clausola è $\{\sim C(y,0,x), \sim C(z,0,y), C(z,0,x)\}$.
La premessa C(n,0,2) è la clausola $\{C(n,0,2)\}$.
La premessa $\forall x((C(x,0,2) \wedge \sim C(x,1,2)) \vee (C(x,1,2) \wedge \sim C(x,0,2))$ in forma a clausole è $\{\{C(x,0,2), C(x,1,2)\}, \{\sim C(x,1,2), \sim C(x,0,2)\}\}$.

L'insieme di clausole con le variabili separate diventa allora
{{~ C(m,1,2)},{~C(n,0,x) ,~C(m,0,x)},{~C(y,0,t),~C(z,0,y),C(z,0,t)},{C(n,0,2)},{C(v,0,2), C(v,1,2)},{~C(w,1,2), ~C(w,0,2)}}.
Quindi le clausole {~ C(m,1,2)}, {C(v,0,2), C(v,1,2)} con l'unificazione {m/v} producono {C(m,0,2)} che con {~C(n,0,x) ,~C(m,0,x)} dopo l'unificazione {2/x} produce {~C(n,0,2)}da cui con {C(n,0,2)} si ricava la clausola vuota.

Esercizio 17 (ex 16).
Formalizzare usando formule del primo ordine le seguenti frasi

a) Ogni medico è stimato da almeno un paziente
b) Nessun paziente stima un incapace
c) Non esistono medici incapaci.

Facoltativo. Utilizzare la risoluzione per provare se c) è una conseguenza logica di a),b)
Traccia di soluzione
Il dominio è l'insieme degli esseri umani. Servono tre predicati unari M,P, I, che saranno interpretati nel seguente modo M(x) significa "x è un medico", P(x) significa "x è un paziente", I(x) significa "x è un incapace", inoltre serve un predicato binario S ove S(x,y) significa "x stima y". In questo linguaggio le frase a) diventa $\forall x(M(x)\Rightarrow\exists y(P(y)\wedge S(y,x))$, la frase b) diventa $\forall x\forall y(P(x)\wedge I(y)\Rightarrow\sim S(x,y))$, la frase c) diventa $\sim\exists x(M(x)\wedge I(x))$.
La forma normale prenessa di a) è $\forall x\exists y\ (M(x)\Rightarrow (P(y)\wedge S(y,x))$ e la sua forma di Skolem diventa $\forall x(M(x)\Rightarrow(P(f_{Sk}^1(x))\wedge S(f_{Sk}^1(x),x))$, per cui la sua forma a clausole è $\{\{\sim M(x), P(f_{Sk}^1(x))\},\{\sim M(x), S(f_{Sk}^1(x),x)\}\}$, la b) è già in forma normale prenessa e in forma a clausole diventa $\{\sim P(x),\sim I(y), \sim S(x,y)\}$, la negazione della formula c in forma di Skolem è $\{\{M(a_{Sk})\}\{I(a_{Sk})\}\}$. Dobbiamo cercare di ricavare la clausola vuota quindi dall'insieme di clausole $\{\{\sim M(x), P(f_{Sk}^1(x))\},\{\sim M(y), S(f_{Sk}^1(y),y)\},\{\sim P(z),\sim I(t), \sim S(z,t)\}, \{M(a_{Sk})\}\{I(a_{Sk})\}\}$ dove abbiamo già effettuato la separazione delle variabili. Ora da $\{\sim M(x), P(f_{Sk}^1(x))\}$ e $\{M(a_{Sk})\}$ con l'unificazione $\{a_{Sk}/x\}$ otteniamo la clausola $\{P(f_{Sk}^1(a_{Sk}))\}$, da questa con $\{\sim P(z),\sim I(t), \sim S(z,t)\}$, facendo l'unificazione $\{f_{Sk}^1(a_{Sk})/z\}$ si ottiene $\{\sim I(t),\sim S(f_{Sk}^1(a_{Sk}),t)\}$ a sua volta da questa con $\{I(a_{Sk})\}$ si ricava facendo l'unificazione $\{a_{Sk}/t\}$ la clausola $\{\sim S(f_{Sk}^1(a_{Sk}), a_{Sk})\}$, da questa e da $\{\sim M(y), S(f_{Sk}^1(y),y)\}$ facendo l'unificazione $\{a_{Sk}/y\}$ si ottiene $\{\sim M(a_{Sk})\}$ da cui si ottiene la clausola vuota con $\{M(a_{Sk})\}$.

Esercizio 18.

Formalizzare usando la sintassi di SPASS vista in laboratorio il seguente problema

La relazione R è seriale
La relazione R è simmetrica
La relazione R è transitiva
Provare che la relazione R è riflessiva

Si ricorda che è utile prima di codificare il problema nel linguaggio input di SPASS (che usa una notazione prefissa) scrivere le formule del I ordine che caratterizzano il problema.

Facoltativo: Risolvere il problema usando la risoluzione
Traccia di soluzione (a meno di SPASS)
Il dominio è un insieme qualunque. R è un predicato binario sul dominio
La prima frase si traduce in $\forall x\exists yR(x,y)$, la seconda in $\forall x\forall y(R(x,y)\Rightarrow R(y,x))$, la terza in $\forall x\forall y\forall yz(R(x,y)\wedge R(y,z)\Rightarrow R(x,z))$, il risultato da provare è $\forall xR(x,x)$. Usiamo la risoluzione neghiamo l'ultima formula e troviamo la forma di Skolem $\sim R(a_{Sk},a_{Sk})$ e quindi la clausola $\{\sim R(a_{Sk},a_{Sk})\}$, la forma di Skolem di $\forall x\exists yR(x,y)$ è $\forall xR(x,f_{Sk}(x))$ e quindi la forma a clausole è $\{R(x,f_{Sk}(x))$, la formula $\forall x\forall y(R(x,y)\Rightarrow R(y,x))$ è già in forma di Skolem e la sua forma a clausole è

$\{\sim R(x,y), R(y,x)\}$, analogamente $\forall x \forall y \forall yz(R(x,y) \wedge R(y,z) \Rightarrow R(x,z))$ è già in forma di Skolem e la forma a clausole è $\{\sim R(x,y), \sim R(y,z), R(x,z)\}$. Separando le variabili abbiamo l'insieme di clausole $\{\{\sim R(a_{Sk},a_{Sk})\}, \{R(x,f_{Sk}(x))\}, \{\sim R(z,y),R(y,z)\}, \{\sim R(v,t),\sim R(t,w), R(v,w)\}\}$. Si ha

$$\dfrac{\{\sim R(a_{Sk},a_{Sk})\},\ \{\sim R(v,t),\sim R(t,w), R(v,w)\}}{\{\sim R(a_{Sk},t),\sim R(t,a_{Sk})\}}\quad \{a_{Sk}/v,\ a_{Sk}/w\}$$

$$\dfrac{\{\sim R(a_{Sk},t),\sim R(t,a_{Sk})\}\ ,\ \{R(x,f_{Sk}(x))\}}{\{\sim R(f_{Sk}(a_{Sk}), a_{Sk})\}}\quad \{a_{Sk}/x,\ f_{Sk}(a_{Sk})/t\}$$

$$\dfrac{\{\sim R(f_{Sk}(a_{Sk}), a_{Sk})\}\ ,\ \{\sim R(z,y),R(y,z)\}}{\{\sim R(a_{Sk},f_{Sk}(a_{Sk}))\}}\quad \{f_{Sk}(a_{Sk})/y,\ a_{Sk}/z\}$$

$$\dfrac{\{\sim R(a_{Sk},f_{Sk}(a_{Sk}))\}\ ,\ \{R(x,f_{Sk}(x))\}}{\square}\quad \{a_{Sk}/x\}$$

dove le due clausole sopra la riga indicano le clausole fra cui si effettua la risoluzione, la clausola a sinistra sotto una riga è la risolvente delle due clausole sopra la riga quando sia fatta l'unificazione indicata a finaco della riga stessa.