

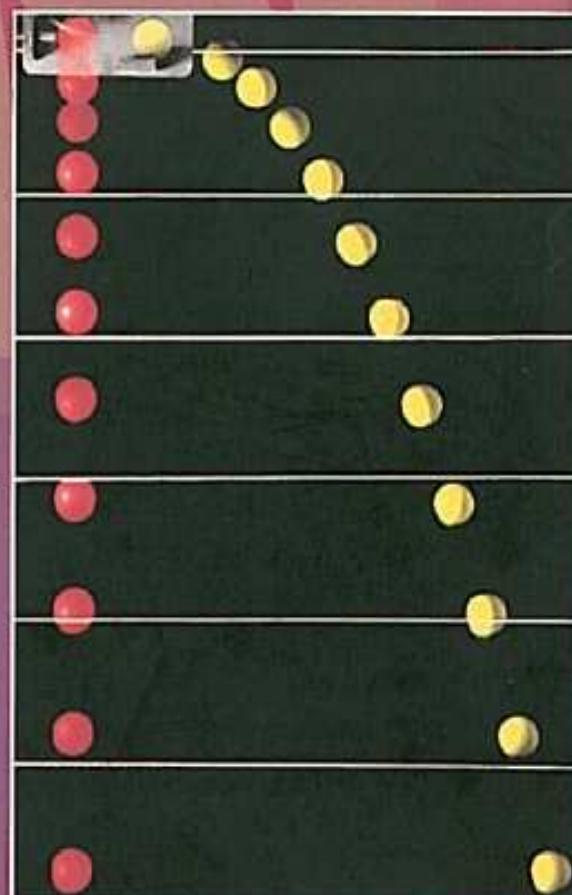
**S. FOCARDI**

**I. MASSA**

**A. UGUZZONI**

# **FISICA GENERALE**

**MECCANICA  
E TERMODINAMICA**

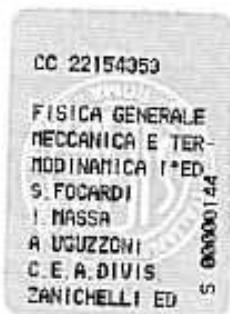


CASA EDITRICE AMBROSIANA



# **FISICA GENERALE**

## **MECCANICA E TERMODINAMICA**



**SERGIO FOCARDI**  
**IGNAZIO MASSA**  
**ARNALDO UGUZZONI**

Dipartimento di Fisica  
dell'Università di Bologna

# **FISICA GENERALE**

## **MECCANICA E TERMODINAMICA**



**SISTEMA BIBLIOTECARIO  
DI ATENEO  
Ingegneria Piacenza**

7824



CASA EDITRICE AMBROSIANA

Copyright © 1999 C.E.A. Casa Editrice Ambrosiana

I diritti di traduzione, di memorizzazione elettronica, di riproduzione e di adattamento totale o parziale, con qualsiasi mezzo (compresi i microfilm e le copie fotostatiche) sono riservati per tutti i paesi.

Fotocopie per uso personale (cioè privato e individuale) nei limiti del 15% di ciascun volume possono essere effettuate negli esercizi che aderiscono all'accordo tra SIAE - AIE - SNS e CNA - Confartigianato - CASA del 18 dicembre 2000, dietro pagamento del compenso previsto in tale accordo.

Per riproduzioni ad uso non personale l'editore potrà concedere a pagamento l'autorizzazione a riprodurre un numero di pagine non superiore al 15% delle pagine del presente volume. Le richieste per tale tipo di riproduzione varranno indirizzate a:

Associazione Italiana per i Diritti di Riproduzione  
delle Opere dell'Ingegno (AIDRO)  
via delle Erbe 2  
20121 Milano  
tel. e fax 028095060  
e-mail: aidro@iol.it

L'editore, per quanto di propria spettanza, considera rare le opere fuori del proprio catalogo editoriale. La riproduzione a mezzo fotocopia degli esemplari di tali opere esistenti nelle biblioteche è consentita, non essendo concorrenziale all'opera. Non possono considerarsi rare le opere di cui esista, nel catalogo dell'editore, una successiva edizione, le opere presenti in cataloghi di altri editori o le opere antologiche.

Disegni: Giuseppe Maserati e Andrea Jacobuzio

Copertina: Editta Gelsomini

Ristampa  
5 4 3 2 1 2001 2002 2003 2004 2005

Realizzare un libro è un'operazione complessa, che richiede numerosi controlli:  
sul testo, sulle immagini e sulle relazioni che si stabiliscono tra loro.

L'esperienza suggerisce che è praticamente impossibile pubblicare un libro  
privo di errori. Saremo quindi grati ai lettori che vorranno segnalarceli.  
Per segnalazioni o suggerimenti relativi a questo libro rivolgersi a:

C.E.A. Casa Editrice Ambrosiana  
via Gargano 21  
20139 Milano  
fax 02 52202260  
e-mail: cearedaz@tin.it

Fotocomposizione: Servizi Grafici Editoriali, Milano

Stampato da Tecnografica Milanese  
via Monte Grappa 6, Fizzonasco di Pieve Emanuele (MI)  
per conto della C.E.A. Casa Editrice Ambrosiana,  
via Gargano 21, 20139 Milano

# PREFAZIONE

Spiegare la fisica non è compito facile, perché questa disciplina non è un semplice insieme di leggi e di relazioni, come molti a torto ritengono, ma la chiave di volta per interpretare il mondo nel quale viviamo. Osservatori superficiali hanno spesso grandi difficoltà nell'individuare punti di contatto fra una qualsiasi relazione della fisica e i problemi concreti della nostra vita quotidiana: la realtà che ci circonda è assai variegata e a prima vista poco incline a lasciarsi descrivere con formule (apparentemente) astratte. E invece tali relazioni sono proprio estremamente concrete. Leggendole e interpretandole con gli strumenti appropriati, infatti, ci si accorge che esse permettono sia di fare previsioni sui fenomeni naturali sia di spiegare i principi di funzionamento delle apparecchiature che concorrono a semplificare la nostra vita. D'altra parte, la ricerca delle leggi fondamentali della fisica, che per la loro generalità possiedono anche un profondo significato filosofico, si è sviluppata attraverso un affascinante processo che ha coinvolto un grande numero di sperimentatori e molte fra le menti più geniali della storia dell'umanità, e che ha portato all'affermazione definitiva del metodo di indagine scientifica della realtà.

Uno degli aspetti più importanti della fisica, che deve riflettersi in forma adeguata anche nel suo insegnamento, è proprio la capacità di far acquisire tale metodo, e il corrispondente modo di ragionare, che stanno alla base di tutte le scienze, pure, sperimentalistiche e tecnologiche. L'esigenza di un'efficace trasmissione di questi strumenti intellettuali alle giovani generazioni è ancor più necessaria in questo momento storico, in cui stanno affiorando tendenze irrazionali e antiscientifiche.

Nello scrivere in quest'ottica un libro di fisica per l'Università, da un lato si deve far fronte alla necessità di un sufficiente rigore, dato che, specie in ambito scientifico, l'eccessiva semplificazione è spesso fuorviante e dà solo l'illusione della comprensione; d'altro canto, va tenuto presente che l'interazione fra sistema formativo e mondo della produzio-

ne sta imponendo profonde trasformazioni a strutture e metodi della didattica universitaria. In questo compito non risulta facile conciliare tali richieste, individuando inoltre gli strumenti appropriati per rendere accattivanti le materie di studio e per aiutare gli studenti ad acquisire solide conoscenze di base in un tempo ragionevole.

Abbiamo cercato di rispondere, almeno parzialmente, a tali esigenze strutturando i capitoli del libro in tre parti. La prima ne costituisce il corpo centrale; spesso gli argomenti, sviluppati fino a un certo livello in tale parte, vengono ripresi per essere trattati a un livello superiore nella parte dedicata agli approfondimenti. Nei complementi, invece, sono generalmente presentati aspetti più specialistici. Questo tipo di scelta dovrebbe consentire ai colleghi di ritagliarsi abbastanza facilmente un proprio percorso didattico, che utilizzi buona parte del corpo centrale, e quelli fra i complementi o gli approfondimenti ritenuti coerenti con la scelta didattica e con le specifiche necessità del corso di laurea. La speranza degli autori è che anche lo studente impari ad apprezzare le parti un po' più specialistiche, magari in un secondo tempo, quando avrà l'occasione (o l'esigenza) di approfondire la preparazione iniziale.

Gli argomenti trattati sono quelli tradizionali di Meccanica e Termodinamica che sono insegnati nei corsi di fisica delle Facoltà di Scienze e di Ingegneria. Nello svilupparli, si è cercato di dare particolare risalto agli aspetti peculiari della disciplina:

- la fisica si basa sempre sull'esperienza;
- la fisica descrive il mondo reale mediante modelli e schematizzazioni;
- i modelli non possono essere in contrasto con l'esperienza, e valgono solo in quanto permettono di comprendere i fatti reali;
- le teorie fisiche continuano a subire un'evoluzione, che ha portato nel tempo a estenderne o a limitarne la validità;
- l'applicazione delle leggi della fisica nella soluzione dei problemi richiede un'appropriata impostazione e una ben precisa metodologia.

Naturalmente, al di là delle buone intenzioni, non sempre è stato possibile rendere esplicite, nel corso del volume, tutte queste linee guida. Lo studente attento potrà tuttavia cogliere il tentativo di sviluppare ciascun argomento lungo una di tali linee, generalmente la più adatta.

In questo libro, Meccanica e Termodinamica sono trattate a un livello che richiede una buona conoscenza della Matematica, come quella tipica dei corsi di laurea che prevedono insegnamenti di Analisi Matematica. L'utilizzazione di alcuni concetti (limiti, derivate, integrali ed equazioni differenziali) è stata tuttavia graduata opportunamente, e agli elementi essenziali sono state dedicate opportune appendici. La trattazione degli argomenti a un livello generale, e su rigorose basi formali, pur dando inizialmente la sensazione di maggiore difficoltà, si traduce invece in una notevole economia intellettuale, perché permette di non affrontare in modo indipendente tutti i casi particolari e le varie applicazioni. L'esperienza derivante da molti anni d'insegnamento ci suggerisce di consigliare allo studente di curare, fin dalle prime battute, l'acquisizione dei concetti, anche di quelli che possono sembrargli elementari, verificando di essere riuscito a farli propri. Ciò richiede impegno personale, anche nello sviluppare la precisione nel linguaggio che corrisponde alla chiarezza delle proprie idee: nessun professore, per quanto brillante, e nessun libro, per quanto ben fatto, potranno mai sollevare gli studenti dal compito, che loro resta, di assimilare le idee portanti della disciplina.

Data la complessità dei fenomeni da studiare, la fisica procede attraverso semplificazioni e schematizzazioni. Questa strategia nell'affrontare i problemi è generalmente fonte di notevoli difficoltà per gli studenti alle prime armi, costretti a decidere se, quando e come fare le approssimazioni. L'unico modo per acquisire esperienza in questo tipo di attività consiste nel cimentarsi a risolvere le varie situazioni che possono presentarsi: per questo motivo, nel libro sono inseriti numerosi esempi, proprio per fornire allo studente un banco di prova su cui verificare le proprie conoscenze e il livello di comprensione dei metodi della disciplina. Egli dovrebbe sempre provare a impostare e, possibilmente, a sviluppare da solo la soluzione, prima di leggere quella riportata nel testo. La risoluzione dei problemi di fisica presuppone anzitutto l'approfondita comprensione delle leggi e dei principi fondamentali presentati nel testo; ciò consente di orientarsi inizialmente, valutando, ad esempio, l'opportunità di utilizzare una descrizione cinematica, o le proprietà delle forze, oppure la conservazione dell'energia o della quantità di moto, e così via. Spesso è possibile arrivare al risultato per strade diverse, ma certo una scelta oculata può semplificare enormemente il procedimento. Questa prima fase, la scelta del metodo, è quella più trascurata dagli studenti, che quindi soffrono per la loro incapacità di «catalogare» un esercizio di fisica e ogni volta hanno l'impressione di ripartire da zero.

Il lettore si accorgerà presto che non tutti gli esempi hanno lo stesso livello di difficoltà. Alcuni risultano applicazioni banali di una qualche definizione o di una legge fisica; altri, pur sempre affrontabili da chi ha studiato la materia, sono più complessi, e per questo correddati da opportuni suggerimenti per la soluzione; altri ancora presentano un elevato livello di difficoltà e servono soprattutto a mostrare come sia complessa la realtà che ci circonda, anche in situazioni apparentemente semplici. In alcuni casi, infine, sono presentati in forma di esempio gli arricchimenti di tematiche discusse nel testo e i dettagli delle dimostrazioni di alcune relazioni.

Ci è gradito esprimere un caloroso ringraziamento ai colleghi professori Silvio Bergia, Attilio Forino, Enzo Fuschini, e Decio Pescetti, nonché alle ricercatrici Franca Carloni, M. Maddalena Deninno, M. Luisa Fiandri e Marta Gagliardi, ai quali dobbiamo proposte, critiche, suggerimenti che hanno arricchito la stesura attuale. Un grazie va anche a tanti nostri studenti che, avendo utilizzato versioni preliminari di questo libro, ci hanno aiutato a migliorarlo, segnalandoci gli argomenti che andavano ulteriormente chiariti e individuando un buon numero di refusi.

Siamo consapevoli dell'impossibilità di eliminare totalmente ogni errore e di superare indenni il vaglio di tutte le esigenze alle quali ogni docente (noi inclusi) è particolarmente sensibile, nel momento in cui, con un pizzico di accademica perfidia, apre un nuovo libro. Ringraziamo quindi anticipatamente coloro che ci segnaleranno l'esistenza di imprecisioni e di refusi, o che vorranno contribuire a migliorare quest'opera attraverso le loro critiche. Chi ha accesso alla posta elettronica può rivolgersi a chiunque di noi, all'indirizzo: @bo.infn.it, preceduto dal cognome.

*Gli Autori*



# INDICE

CAPITOLO 1

## GRANDEZZE FISICHE

APPROFONDIMENTI

COMPLEMENTI

Compendio	1
1-1 Introduzione	2
1-2 Il metodo scientifico	3
1-3 Leggi della fisica e principi	4
1-4 I modelli in fisica	7
1-5 Grandezze fisiche e loro misurazione	8
1-6 Metodi di misurazione	9
1-7 Dimensioni delle grandezze fisiche	10
1-8 Sistemi di unità di misura	13
1-9 Errori	14
1-10 Tempo	15
1-11 Lunghezza	17
1-12 Massa	19
1-13 Misure e indeterminazione	20
1-14 Misure di tempo	22
1-14-1 Il secondo	22
1-14-2 Misure indirette di tempo	23
1-14-3 Misure di tempi di reazione nucleare	24
1-15 Misure di lunghezza	25
1-15-1 Il metro	25
1-15-2 Metodo della triangolazione	26
1-15-3 Metodi basati su misure di tempo	27
1-15-4 Metodi per distanze astronomiche	28
1-15-5 Metodi per dimensioni nucleari	29
1-16 Legge del decadimento	30
1-17 Errori	31
1-17-1 Errori sistematici ed errori casuali	31
1-17-2 Risultato di una misurazione	33
1-17-3 Distribuzione di Gauss	34
1-17-4 Distribuzione di Poisson	36
1-17-5 Propagazione degli errori	37
1-18 Cifre significative	37
Riepilogo di alcune relazioni significative	38

**CAPITOLO 2****CALCOLO VETTORIALE****APPROFONDIMENTI****COMPLEMENTI**

Compendio	39
2-1 Grandezze scalari e grandezze vettoriali	40
2-2 Notazioni e definizioni vettoriali	42
2-3 Somma e differenza di vettori	42
2-4 Prodotto di uno scalare per un vettore	43
2-5 Versori	44
2-6 Scomposizione di vettori	45
2-7 Prodotto scalare	47
2-8 Prodotto vettoriale	49
2-9 Rappresentazione cartesiana ortogonale	50
2-10 Equivalenza fra le rappresentazioni vettoriali	51
2-11 Espressioni cartesiane delle operazioni fra vettori	52
2-12 Derivate di vettori in forma cartesiana	54
2-13 Derivata di versori e di vettori	55
2-14 Momento di un vettore applicato	57
2-15 Vettore posizione e sistemi di coordinate	59
2-16 Coordinate polari piane	60
2-17 Vettori e proprietà di trasformazione	61
2-17-1 Traslazioni	62
2-17-2 Rotazioni attorno a uno degli assi	63
2-17-3 Riflessione speculare	65
2-18 Prodotti tripli	66
2-19 Sistemi di vettori applicati	67
2-20 Operatore Nabla	70
2-21 Coordinate polari e cilindriche	72
2-21-1 Coordinate polari sferiche	72
2-21-2 Coordinate polari cilindriche	73
Riepilogo di alcune relazioni significative	75

**CAPITOLO 3****CINEMATICA**

Compendio	76
3-1 Introduzione	77
3-2 Moto e sistemi di riferimento	77
3-3 Lo schema del punto materiale	78
3-4 Equazione vettoriale del moto: traiettoria e legge oraria	79
3-5 Introduzione al concetto di velocità	83
3-6 Il vettore velocità	84
3-7 Rappresentazione intrinseca della velocità	85
3-8 Rappresentazione cartesiana della velocità	87
3-9 Accelerazione	89
3-10 Espressione intrinseca dell'accelerazione	92
3-11 Classificazione di moti elementari	95
3-11-1 Moti uniformi	95
3-11-2 Moti con $\ddot{s} = \text{costante}$	96
3-12 Moti rettilinei	98
3-13 Moti circolari	99
3-13-1 Geometria e versori intrinseci della traiettoria	99
3-13-2 Moto circolare uniforme	100
3-13-3 Moto circolare uniformemente vario	101
3-13-4 Grandezze angolari	101
3-13-5 Periodicità del moto circolare uniforme	103
3-14 Moto oscillatorio armonico	105

3-15	Moto piano in coordinate polari	107
3-16	Il problema inverso della cinematica	110
3-17	Moto con accelerazione costante: i gravi	112
3-18	Cinematica dei moti relativi: introduzione	119
3-19	Leggi di trasformazione di velocità e accelerazione	120
3-20	Moto relativo di traslazione rettilinea	123
3-21	Trasformazioni di Galileo	123
3-22	Moto relativo di rotazione	127
3-23	Moto relativo di rototraslazione	129
3-24	Velocità e accelerazione nei moti relativi	130
3-24-1	Derivate di vettori e sistemi di riferimento	130
3-24-2	Trasformazioni delle velocità	132
3-24-3	Trasformazioni delle accelerazioni	133
3-25	Problema inverso nel moto unidimensionale	133
3-26	Cinematica e proprietà geometriche delle curve	135
3-27	Moto in coordinate polari	138
3-28	Le relazioni di Poisson	139
	Riepilogo di alcune relazioni significative	140

**CAPITOLO 4****I PRINCIPI DELLA DINAMICA****APPROFONDIMENTI**

	Compendio	142
4-1	Introduzione	143
4-2	Interazioni e ambiente	143
4-3	Forze	144
4-4	Definizione operativa delle forze	146
4-5	Reazioni vincolari	148
4-6	Introduzione ai Principi della Dinamica	149
4-7	Primo Principio della Dinamica	150
4-7-1	Le indicazioni sperimentali	150
4-7-2	I sistemi di riferimento inerziali	151
4-8	Secondo Principio della Dinamica	154
4-9	Massa inerziale	156
4-10	Principio di azione e reazione	158
4-11	Quantità di moto e impulso	160
4-12	Momento angolare	163
4-13	Massa e peso	165
4-14	Misure indirette di massa	167
4-15	Quantizzazione della massa	168
4-16	Misura dinamica delle forze	169
4-17	Principio di relatività e covarianza delle leggi fisiche	170
4-18	Interazioni fondamentali	173
4-18-1	Interazione gravitazionale	175
4-18-2	Interazione elettrodebole	176
4-18-3	Interazione nucleare forte	177
4-19	Campi di forze	178
	Riepilogo di alcune relazioni significative	179

**CAPITOLO 5****APPLICAZIONI DEI PRINCIPI DELLA DINAMICA**

	Compendio	180
5-1	Introduzione	181
5-2	Forze costanti	181
5-3	Forze elastiche e legge di Hooke	187
5-4	Il pendolo semplice	192

5-5	Forze che dipendono dalla velocità	194
5-6	Attrito radente	195
5-6-1	Attrito statico	196
5-6-2	Attrito dinamico	197
5-6-3	Attrito e locomozione	199
5-7	Dinamica di moti circolari	201
5-8	Dinamica nei sistemi di riferimento non inerziali	205
5-8-1	La dinamica in un treno accelerato	206
5-8-2	Non equivalenza dei sistemi di riferimento non inerziali	208
5-8-3	La dinamica in un ascensore accelerato	210
5-8-4	La dinamica su una piattaforma rotante	212
5-9	Sistema di riferimento terrestre	216
5-10	Oscillazioni smorzate	218
5-11	Oscillazioni forzate e risonanza	220
	Riepilogo di alcune relazioni significative	222

**COMPLEMENTI****CAPITOLO 6****LAVORO E ENERGIA**

	Compendio	224
6-1	Introduzione	225
6-2	Lavoro di una forza	226
6-3	Energia cinetica - Teorema delle forze vive	228
6-4	Campi di forze conservativi	232
6-5	Alcuni campi conservativi	235
6-5-1	Forza peso	235
6-5-2	Forza elastica	235
6-5-3	Forze centrali a simmetria sferica	236
6-5-4	Forza centrifuga	239
6-6	Forze non conservative	241
6-7	Conservazione dell'energia meccanica	243
6-8	Trasformismo dell'energia	249
6-9	Energia meccanica e sistemi a un grado di libertà	252
6-10	Trasformazioni di energia	253
6-11	Macchine semplici	256
6-12	Potenza	257
6-13	Conservazione dell'energia	259
6-14	Energia potenziale e stabilità dell'equilibrio	262
	Riepilogo di alcune relazioni significative	267

**APPROFONDIMENTI****CAPITOLO 7****DINAMICA DEI SISTEMI**

	Compendio	268
7-1	Introduzione	269
7-2	Centro di massa	269
7-2-1	Sistemi discreti	269
7-2-2	Sistemi continui	271
7-3	Quantità di moto e moto del centro di massa	275
7-3-1	Moto del centro di massa	275
7-3-2	Conservazione della quantità di moto	279
7-4	Momento angolare di un sistema	282
7-5	Equazioni cardinali	284
7-6	Terzo principio della Dinamica	286
7-7	Sistemi di forze parallele e baricentro	288
7-8	Moto rispetto al centro di massa	290
7-8-1	Momento angolare	291

	7-8-2 Energia cinetica	292
7-9	Lavoro ed energia	293
	7-9-1 Pseudolavoro	298
7-10	Sistemi di due corpi	300
7-11	Moto relativo di due corpi	303
7-12	Fenomeni d'urto	307
	7-12-1 Introduzione	307
	7-12-2 La conservazione di grandezze dinamiche negli urti	309
	7-12-3 Limitazioni derivanti dai principi di conservazione	310
7-13	Urti unidimensionali	311
<b>APPROFONDIMENTI</b>	7-14 Collisioni fra due corpi e moto relativo	315
	7-14-1 Collisioni elastiche	317
	7-14-2 Collisioni anelastiche	317
	7-14-3 Moto relativo e urti centrali	318
	7-14-4 Coefficiente di anelasticità	319
7-15	Urti e interazioni	319
7-16	Diffusione elastica in un campo coulombiano	321
<b>COMPLEMENTI</b>	7-17 Moto dei razzi	325
	Riepilogo di alcune relazioni significative	328

**CAPITOLO 8****CORPI RIGIDI**

	Compendio	329
8-1	Introduzione	330
8-2	Cinematica dei sistemi rigidi	331
	8-2-1 Moti traslatori	332
	8-2-2 Moti rotatori con asse fisso	332
	8-2-3 Moti rotatori con asse variabile	334
8-3	Momento di inerzia	335
8-4	Dinamica dei sistemi rigidi con asse fisso	340
	8-4-1 L'equazione del moto	340
	8-4-2 Assi di rotazione e assi di simmetria	343
	8-4-3 Pendolo fisico	345
	8-4-4 Pendolo di torsione	347
8-5	Conservazione del momento angolare assiale	348
8-6	Energia cinetica di un sistema rigido	351
8-7	Lavoro delle forze agenti sui sistemi rigidi	353
8-8	Energia e moto di sistemi rigidi	355
8-9	Attrito volvente	359
8-10	Statica dei sistemi rigidi	360
8-11	Fenomeni elasticci	365
<b>APPROFONDIMENTI</b>	8-12 Trasferimenti di impulso e momento angolare	367
	8-13 Stabilità dell'equilibrio	373
	8-14 Moti giroscopici	376
<b>COMPLEMENTI</b>	8-15 Dinamica del rotolamento puro	378
	Riepilogo di alcune relazioni significative	385

**CAPITOLO 9****GRAVITAZIONE**

	Compendio	386
9-1	Introduzione	386
9-2	Legge di gravitazione	387
9-3	Massa inerziale e massa gravitazionale	390
9-4	Legge di Newton e leggi di Keplero	393
9-5	Campi centrali a simmetria sferica. Costanti del moto	395

**COMPLEMENTI**

9-6	Orbite circolari nel campo gravitazionale	398
9-7	Costante gravitazionale $G$	400
9-8	Accelerazione di gravità	404
9-8-1	Effetti non inerziali	404
9-8-2	Effetti di marea	405
9-9	Prima legge di Keplero	408
9-10	Gravitazione ed esplorazioni spaziali	413
9-11	Gravitazione e cosmologia	415
9-11-1	Densità e destino dell'Universo	416
9-11-2	I buchi neri	417
	Riepilogo di alcune relazioni significative	418

**CAPITOLO 10****ELEMENTI DI MECCANICA DEI FLUIDI****APPROFONDIMENTI**

	Compendio	419
10-1	Introduzione	419
10-2	Densità	420
10-3	Pressione	421
10-4	Equazione della statica	422
10-4-1	Legge di Stevino e Legge di Pascal	424
10-4-2	La pressione atmosferica	425
10-4-3	Dipendenza della pressione atmosferica dalla quota	426
10-5	Legge di Archimede	427
10-6	Misure di pressione	429
10-7	Dinamica dei fluidi	430
10-8	Equazione di continuità	432
10-9	Teorema di Bernoulli	432
10-9-1	Tubo di Venturi	434
10-9-2	Tubo di Pitot	434
10-10	Fluidi reali	435
10-11	Resistenza del mezzo	437
	Riepilogo di alcune relazioni significative	439

**CAPITOLO 11****FENOMENI ONDULATORI**

	Compendio	440
11-1	Introduzione	440
11-2	Equazione differenziale delle onde	442
11-3	Sovrapposizione di onde	444
11-4	Interferenza	445
11-5	Onde stazionarie	449
11-6	Battimenti e velocità di gruppo	450
11-6-1	Velocità di fase e velocità di gruppo	451
11-7	Onde su una corda elastica	452
11-8	Intensità di un'onda su una corda	453
11-9	Onde stazionarie su corda vibrante	454
11-10	Onde sonore	455
11-11	Onde sonore nei gas	456
11-12	Intensità delle onde sonore	458
11-13	Onde stazionarie nei gas	460
11-14	Riflessione e trasmissione delle onde	460
11-15	Propagazione delle onde	463
11-16	Legge della riflessione	464
11-17	Rifrazione	465
11-18	Difrazione	466

<b>COMPLEMENTI</b>	11-19 Effetto Doppler	467
	Riepilogo di alcune relazioni significative	469

**CAPITOLO 12 SISTEMI TERMODINAMICI**

Compendio	470	
12-1 Introduzione	470	
12-2 Coordinate termodinamiche	472	
12-3 Pareti adiabatiche e diatermiche: equilibrio termico	474	
12-4 Princípio zero e temperatura	475	
12-5 Temperatura del termometro a gas perfetto	479	
12-6 Dilatazione termica	480	
12-7 Trasformazioni termodinamiche	482	
12-8 Termostati (serbatoi)	484	
12-9 Equazioni di stato dei gas	486	
12-9-1 Gas ideali	486	
12-9-2 Gas reali	490	
12-10 Lavoro termodinamico	492	
12-10-1 Lavoro dei gas ideali	496	
12-10-2 Lavoro dell'attrito e reversibilità	497	
12-11 Metodo statistico	498	
<b>COMPLEMENTI</b>	12-12 Stati di aggregazione e punto triplo	502
	Riepilogo di alcune relazioni significative	503

**CAPITOLO 13 PRIMO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA**

Compendio	505	
13-1 Introduzione	505	
13-2 Lavoro adiabatico ed energia interna	506	
13-3 Primo Principio e calore	508	
13-4 Trasmissione del calore	512	
13-5 Capacità termica	517	
13-6 Proprietà dei gas ideali	522	
13-6-1 Energia interna	522	
13-6-2 Capacità termica e relazione di Mayer	523	
13-6-3 Trasformazioni adiabatiche quasi-statiche	525	
13-6-4 Trasformazioni politropiche	526	
13-7 Aspetti microscopici	528	
<b>APPROFONDIMENTI</b>	13-8 Equazioni di Clapeyron	531
	13-9 Relazioni fra i calori molari	534
<b>COMPLEMENTI</b>	13-10 Esperimento di Joule	535
	Riepilogo di alcune relazioni significative	537

**CAPITOLO 14 SECONDO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA**

Compendio	539
14-1 Introduzione	540
14-2 Come ottenere lavoro da un serbatoio di calore	540
14-3 Enunciato di Kelvin-Planck: macchine termiche	541
14-4 Enunciato di Clausius: macchine frigorifere	544
14-5 Equivalenza dei due enunciati	545
14-6 Macchine reversibili e ciclo di Carnot	545
14-7 Teorema di Carnot	546
14-8 Macchina reversibile a gas perfetto	547
14-9 Temperatura termodinamica assoluta	547

14-10 Rendimento delle macchine di Carnot	548
14-11 Teorema di Clausius	553
14-12 Entropia	554
14-13 Entropia e rendimento	560
14-14 Traccia di una trasformazione ed energia degradata	562
14-15 Entropia dei sistemi idrostatici e piano $[S,T]$	566
14-16 Energie libere	568
14-17 Entropia e probabilità	568
14-17-1 Entropia e disordine	572
14-18 Entropia e informazione	573
14-19 Trasformazioni termiche	575
14-20 Temperatura assoluta	576
14-21 Ciclo di Carnot ed equazioni di Clapeyron	578
14-22 Sulla definizione di gas perfetto	579
Riepilogo di alcune relazioni significative	581

**COMPLEMENTI****APPROFONDIMENTI****CAPITOLO 15****ELEMENTI DI MECCANICA RELATIVISTICA**

Compendio	582
15-1 Introduzione	583
15-1-1 I Principi della Relatività	584
15-2 La velocità limite	585
15-3 Spazio, tempo e sistemi di riferimento	586
15-3-1 Osservatori e procedure di misurazione	586
15-3-2 Necessità di una revisione dei concetti di spazio e di tempo	587
15-3-3 Moto relativo e lunghezze trasversali	588
15-4 Simultaneità	589
15-5 Dilatazione del tempo	591
15-5-1 Verifiche sperimentali	593
15-6 Contrazione delle lunghezze	594
15-7 Relatività e trasformazioni di Lorentz	596
15-7-1 Trasformazioni di velocità e accelerazioni	598
15-8 Introduzione alla dinamica relativistica	600
15-9 Energia	601
15-9-1 Energia cinetica	601
15-9-2 Energia a riposo e massa	602
15-9-3 Energia, massa e quantità di moto	604
15-9-4 Fotoni e particelle di massa nulla	604
15-10 Forza, accelerazione e massa	605
15-11 Equivalenza massa-energia	607
15-11-1 La formula di Einstein	607
15-11-2 Alcune trasformazioni massa-energia	608
15-11-3 Difetto di massa ed energia di legame	608
Riepilogo di alcune relazioni significative	609

**APPENDICE**

A-1 Funzioni	611
A-2 Derivate e differenziali	612
A-3 Proprietà delle derivate	615
A-4 Derivate parziali	616
A-5 Approssimazione delle funzioni con polinomi	618
A-6 Integrali	619
A-7 Equazioni differenziali	622
A-8 Integrali curvilinei	624
A-9 Numeri complessi	626
Premi Nobel per la Fisica	629
Indice analitico	632

# GRANDEZZE FISICHE

## Compendio

Il metodo scientifico nasce dalle ricerche di Galileo. La Fisica basa la sua conoscenza sui fatti sperimentali; costruisce modelli dei processi naturali e li inquadra in teorie. Alla base vi sono le Leggi fisiche e i Principi; in essi figurano relazioni fra grandezze fisiche, entità che possono essere misurate. Ogni grandezza è definita con il metodo operativo, descrivendo cioè i modi in cui viene misurata. Il processo con cui si associa un numero (misura) a una grandezza è la misurazione; il suo risultato, espresso in termini dell'unità di misura, va completato con l'indicazione della sua precisione, mediante l'assegnazione dell'errore. I metodi di misurazione si distinguono in diretti, indiretti o strumentali. Ogni grandezza ha una specifica proprietà detta dimensione. Le dimensioni di alcune grandezze, chiamate fondamentali, sono utilizzate per ricavare quelle delle grandezze derivate, cioè collegate alle prime da qualche legge fisica. Le equazioni della Fisica sono relazioni fra grandezze fisiche e devono essere dimensionalmente corrette. La scelta delle grandezze fondamentali e delle relative unità definisce un sistema di unità di misura; le unità delle grandezze derivate sono espresse in termini di quelle fondamentali. I sistemi più utilizzati in Fisica sono il sistema SI e quello CGS, nei quali tempo, lunghezza e massa sono grandezze fondamentali. Nel vastissimo campo di studio della Fisica, tali grandezze spaziano su intervalli di valori molto ampi; di conseguenza i metodi utilizzati per la loro misurazione sono molto vari: tutti concorrono a definire le grandezze stesse. Gli errori che si fanno nel misurare le grandezze fisiche sono classificati come sistematici o casuali. I primi possono essere eliminati, almeno in linea di principio; i secondi no, ma seguono leggi ben conosciute: ad esempio, la distribuzione normale (di Gauss). Gli errori che si commettono misurando alcune grandezze fisiche si propagano a quelle ricavate da esse con metodi di misurazione indiretti.

## 1-1 Introduzione

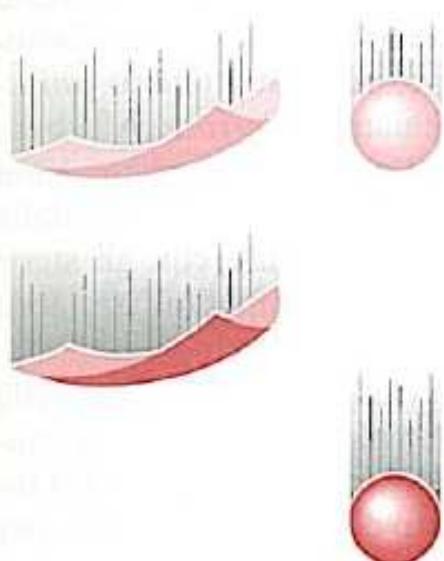
Da tempo immemorabile l'uomo ha cercato di conoscere la Natura (φύσις, in greco), studiandone i fenomeni e tentando di interpretarli. La Fisica è dunque nata come *filosofia della Natura*, cioè come la disciplina che si proponeva di fornire una spiegazione di ogni tipo di fenomeno, con riguardo sia ai corpi animati sia a quelli inanimati, nell'ambito di una visione generale della Natura ispirata a considerazioni di tipo filosofico. Essa ha conservato tale caratteristica per lungo tempo, cristallizzandosi per diversi secoli (nel mondo occidentale) nella cosiddetta Fisica aristotelica. Le basi della Fisica moderna, come *scienza*, furono poste nel XVII secolo da Galileo Galilei; fu allora che nacque il *metodo scientifico*, un modo nuovo d'investigare la Natura che ancora oggi è alla base di tutte le discipline sperimentali. E con ciò la Fisica diventò *scienza fondamentale*, ruolo che per molti aspetti essa tuttora mantiene.

Tale ruolo le deriva dalla sua generalità, che si manifesta nell'interesse per la comprensione degli aspetti più rilevanti della Natura, sulla base di un numero il più possibile limitato di concetti e principi fondamentali, e nel vastissimo campo di applicazioni, che spazia attualmente dal comportamento delle particelle subatomiche alla struttura dell'Universo.

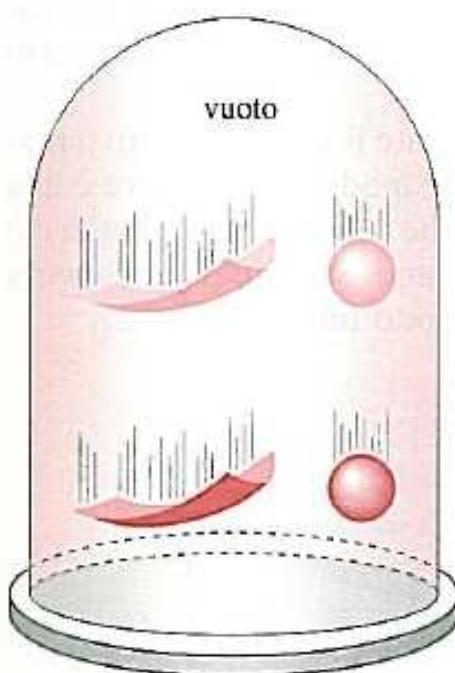
Altre discipline nacquero e progredirono lungo strade diverse: ricordiamo qui, solo come esempi, la Biologia, la Geologia e l'Astronomia. Ma i loro cammini, più o meno recentemente, si sono tutti intrecciati in modo rilevante con quello della Fisica, con le sue scoperte e con il metodo di indagine che la caratterizza: sono nate allora la Biofisica, la Geofisica, l'Astrofisica, e così via. La stessa Chimica, sviluppatasi per tanto tempo in modo indipendente, utilizza le leggi della Fisica moderna per spiegare i processi di formazione e di trasformazione delle strutture atomiche e molecolari.

L'Ingegneria, che si occupa dello sviluppo di tecniche di progetto, della costruzione e del controllo di macchine e dispositivi i più svariati, poggia le proprie basi sulle leggi fondamentali della Fisica; e in alcune scoperte della Fisica moderna essa trova spesso stimoli fondamentali per la ricerca e lo sviluppo di applicazioni tecniche innovative. È naturale che si tratti, in realtà, di uno scambio proficuo che funziona nei due sensi: si pensi a quanto debba la Fisica sperimentale moderna alle realizzazioni della tecnica più avanzata. Nel campo delle particelle elementari, ad esempio, uno dei settori di punta della Fisica di oggi, si utilizzano correntemente apparati complessi e raffinati, che richiedono il contributo determinante di ingegneri e di tecnici, oltre che di fisici. Le grandi macchine acceleratrici, i rivelatori di particelle, i calcolatori che controllano istante per istante il funzionamento di decine di migliaia di elementi degli apparati, sono ormai ingredienti fondamentali di queste ricerche avanzate.

Infine, quanto sia importante e profondo il legame fra la Fisica e la Matematica verrà sottolineato ampiamente nel seguito: la Matematica è infatti il linguaggio della scienza.

**FIGURA 1-1**

In aria una pallina di piombo arriva a terra prima di un foglio di carta.

**FIGURA 1-2**

Nel vuoto una pallina di piombo e un foglio di carta arrivano a terra insieme.

## 1-2 Il metodo scientifico

L'osservazione dell'ambiente nel quale viviamo ci dice che la Natura fornisce spontaneamente informazioni complesse, a volte confuse e perfino contraddittorie, dalle quali è difficile ricavare le leggi fondamentali che la governano. È merito di Galileo avere intuito la necessità di rivolgere alla Natura *domande* mirate, particolarmente semplici, che comportino a loro volta risposte semplici e (relativamente) oggettive.

Un esempio illuminante è quello della caduta dei corpi nelle vicinanze della superficie terrestre. L'esperienza insegna che, se lasciamo cadere contemporaneamente, dalla stessa altezza, un foglio di carta e una pallina di piombo, quest'ultima arriva a terra in un tempo molto minore (fig. 1-1). Potremmo dunque ricavarne una legge, secondo la quale i corpi più pesanti cadono verso terra più rapidamente di quelli leggeri. In realtà ci si accorge subito che la situazione è un po' più complicata. Basta appallottolare il foglio di carta e ripetere la prova: in questo caso i due oggetti arrivano a terra quasi insieme.

Oggi sappiamo che il moto di questi corpi verso terra dipende dalla presenza di due effetti concomitanti: l'attrazione gravitazionale della Terra, che provoca effettivamente la caduta, e una resistenza al moto dovuta all'aria. Se desideriamo separare le due azioni, possiamo costruire facilmente un contenitore al cui interno creare un vuoto abbastanza spinto, in modo che l'azione dell'aria venga fortemente ridotta (fig. 1-2). Provando di nuovo a far cadere i due corpi otterremmo il risultato sorprendente di vederli arrivare a terra insieme! Di conseguenza, relativamente al solo effetto di attrazione della Terra sui corpi, il risultato è completamente diverso da quanto ingenuamente supposto: in un dato luogo, tutti i corpi cadono allo stesso modo.

Il passo successivo potrebbe consistere nell'investigare con maggior dettaglio le conseguenze della presenza dell'aria. Possiamo ripetere la sperimentazione lasciando nel contenitore una piccola (nota) quantità di aria; e dopo provare ripetutamente, con densità d'aria sempre maggiori. Forse riusciremo a capire come avviene il moto; se e come dipende dalla densità dell'aria e dalla forma degli oggetti in caduta.

Abbiamo realizzato un esperimento!

L'aspetto centrale del **metodo scientifico** consiste proprio nell'eseguire esperimenti finalizzati, in funzione delle informazioni che si vogliono ottenere, cioè nel creare situazioni in cui la Natura è *costretta* a dare risposte semplici a domande semplici. In questo modo il ricercatore non è più passivo, ma in qualche modo stabilisce le regole del gioco.

Dunque, alla base del metodo scientifico sta l'*esperimento*. Il ricercatore, nell'ideazione degli esperimenti e nell'analisi dei loro risultati, si cimenta nell'individuare gli aspetti essenziali del fenomeno che lo interessa; schematizza i processi della Natura e ne costruisce **modelli**, cioè una rappresentazione mentale in termini di schemi familiari. È un modello dell'atomo quello in cui s'immagina che gli elettroni girino attorno al nucleo, così come fanno i pianeti attorno al Sole: un'esperienza visibile (macroscopica) suggerisce un analogo microscopico (non osservabile direttamente).

Può certo accadere che questi processi di schematizzazione risultino in pratica grossolani (o, addirittura, sbagliati); i risultati di esperimenti mirati suggeriranno le modifiche da apportare o l'esigenza di scegliere strade alternative.

Gli esperimenti si realizzano attraverso la misurazione di *grandezze fisiche*. Come sarà discusso in dettaglio più avanti, questo processo consiste in una serie di operazioni (*misurazione*) che hanno come risultato l'associazione di un numero a ciascuna grandezza; e, per ogni numero (*misura*), la sua attendibilità, cioè quello che viene chiamato *l'errore*. Alla base di questo ruolo centrale delle misurazioni sta l'idea della *riproducibilità delle misure*: l'assunto è che, misurando più volte una grandezza, nelle stesse condizioni sperimentali (ma non necessariamente con gli stessi strumenti), si debbano ottenere sempre risultati compatibili fra loro (cioè uguali nei limiti degli errori di misura).

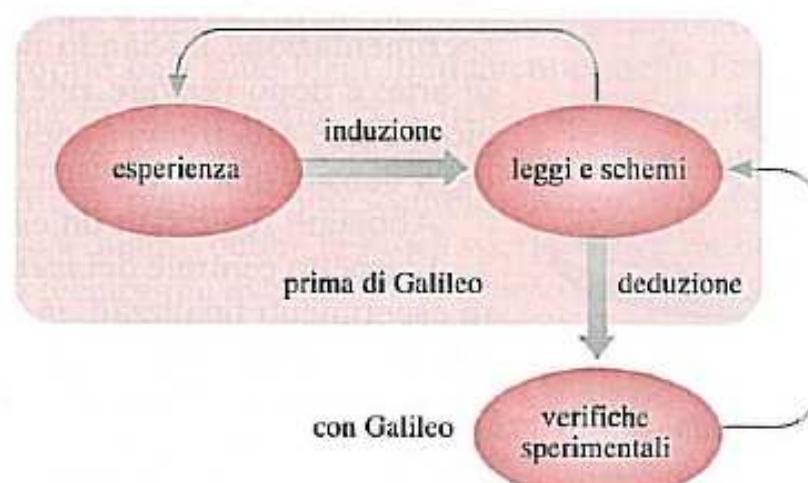
Proprio al fine di rendere comprensibili e trasparenti i risultati della ricerca, la Fisica adotta il linguaggio della *Matematica*. Essa associa numeri ai fenomeni, rappresenta le relazioni fra le grandezze attraverso relazioni analitiche: la Matematica è lo strumento che rende *oggettiva*, per quanto possibile, la trasmissione delle informazioni.

Il passo successivo del metodo scientifico consiste nell'interpretare razionalmente i risultati degli esperimenti, spiegarne le ragioni fondamentali, farne una **teoria**. Spiegare significa comunemente ricondurre lo sconosciuto al conosciuto, far diventare semplici le cose complesse; per la Fisica significa inquadrare il fenomeno studiato e le leggi trovate in uno schema razionale. Questo schema, espresso sulla base del minimo possibile di **Principi** essenziali, semplici e generali, dovrebbe essere capace di spiegare e interpretare correttamente tutti i fenomeni di un certo insieme, detto *campo di validità* della teoria.

In figura 1-3 è rappresentato schematicamente il salto qualitativo realizzato per merito di Galileo. Ancora oggi tale modo di procedere è alla base della ricerca scientifica; potremmo dire che la Fisica si occupa di ciò che può essere affrontato con il metodo galileiano. Se ciò perdura ancora oggi la ragione è molto semplice: questo metodo funziona bene.

**FIGURA 1-3**

**FIGURA 1-5**  
Con Galileo l'esperimento e il metodo deduttivo diventano i cardini della conoscenza della Natura.



### 1-3 Leggi della Fisica e Principi

Le leggi della Fisica sono sempre espresse mediante relazioni quantitative fra entità denominate grandezze fisiche e rappresentano il risultato della sperimentazione. In aggiunta alle leggi, esistono affermazioni, talvolta formalizzabili con relazioni quantitative, che sono denominate *Principi*. Essi sono di gran lunga più importanti di qualsiasi legge fisica; anzi, ne costituiscono, in qualche modo, le basi. La loro verifica sperimentale richiede sempre delicati processi di estrappolazione, la cui correttezza deve poter essere controllata, a posteriori, sulla base delle conseguenze attese.

È importante comprendere che ogni scienza sperimentale ha i suoi presupposti in una serie di proprietà della Natura, sulle quali non si può intervenire: si può solo cercare di scoprirle. Questo richiede un cammino faticoso, che se talvolta è segnato da scoperte di rilievo, molto più spesso si articola attraverso risultati parziali, talora sconfessati, ma più frequentemente solo superati, dal progredire delle conoscenze. In questo senso ogni legge fisica, così come ogni principio, ha validità solo nell'ambito in cui è stata studiata e sperimentata, ripetutamente. Col passare del tempo se ne troverà probabilmente una forma più generale, con più ampi campi di validità; la vecchia legge rappresenterà un caso particolare (ma pur sempre valido) di un comportamento più generale. Verificare sperimentalmente una legge fisica significa utilizzarla per fare previsioni quantitative su specifici fenomeni e confrontare tali previsioni con i risultati di molteplici esperimenti; in questo modo si stabilisce il grado di attendibilità e il campo di validità della legge stessa.

Pur rinviando ai paragrafi successivi la definizione di grandezza fisica, nonché la descrizione delle proprietà di alcune grandezze, può essere istruttivo analizzare qui alcuni esempi di leggi fisiche.

È noto che la lunghezza  $l$  di una barra metallica aumenta al crescere della sua temperatura  $T$ . La corrispondente *legge di dilatazione termica* è data dalla relazione

$$l = l_0(1 + \alpha T),$$

dove  $l_0$  è la lunghezza della barra alla temperatura  $0^\circ\text{C}$  e  $\alpha$  è un coefficiente che dipende dal materiale e che prende il nome di coefficiente di dilatazione lineare. La legge precedente è valida in un intervallo limitato di temperature, nel quale  $\alpha$  può essere considerato costante. Come già accennato, è questa una caratteristica comune a tutte le leggi fisiche; la loro validità non è in generale illimitata, ma ristretta a un certo intervallo di valori dei parametri fisici.

Un secondo esempio di legge fisica può essere preso a prestito dall'elettromagnetismo, con la relazione

$$V = Ri,$$

nella quale  $V$  rappresenta la differenza di potenziale ai capi di un conduttore metallico,  $R$  la resistenza elettrica del conduttore e  $i$  l'intensità di corrente che vi circola. Questa legge vale se la temperatura del conduttore si mantiene costante e si applica soltanto ai conduttori metallici; non vale per gli elettroliti e per i gas.

Consideriamo ora una relazione di cui si fa largo uso nello studio del moto dei corpi, quella che lega fra loro lo spazio  $s$  percorso, il tempo  $t$  impiegato e la velocità  $v$  del moto:

$$s = vt. \quad (1-1)$$

La validità di questa legge è limitata al caso di moto uniforme, nel quale  $v$  si mantiene costante. Essa ci offre lo spunto per un'osservazione importante: le leggi della Fisica vengono utilizzate anche per la *definizione di nuove grandezze*, a partire da altre precedentemente definite. Infatti, l'ultima relazione (opportunamente rivista) serve proprio per la definizione di velocità. La discussione sui limiti di validità di questa legge apre problemi del tutto nuovi rispetto a quelli trattati negli esempi precedenti. In effetti in Natura, per certi aspetti, il moto uniforme è un caso limite e rappresenta una schematizzazione valida per piccoli intervalli di tempo.

Come sarà chiarito nel seguito (e semplificando un po'), si può avere moto uniforme in assenza di forze; situazione che in realtà non può verificarsi, se non altro per l'impossibilità di eliminare le forze di attrito. Ma è proprio quest'essenziale processo di astrazione, nel quale si attua l'estrapolazione delle situazioni sperimentali con attrito sempre più trascurabile, che permette di esprimere uno dei Principi fondamentali della Fisica.

L'ultimo esempio che vogliamo qui discutere riguarda una grandezza fisica con la quale abbiamo una buona familiarità: il tempo. L'organizzazione della nostra vita si basa sul fatto che *il tempo è assoluto*. Con ciò intendiamo che, una volta che un certo numero di (buoni) orologi siano stati sincronizzati, essi continuano a scandire il tempo allo stesso modo; in altre parole, quando uno di essi segna mezzogiorno tutti gli altri segnano la stessa ora, e lo stesso accadrà alle dieci di domattina, e così via. Quando fissiamo un appuntamento, oppure arriviamo in orario alla stazione per prendere il treno, facciamo affidamento sul sincronismo di tutti gli orologi. In particolare, gli esperimenti condotti nell'ambito della vita di tutti i giorni mostrano che la rapidità con cui un orologio batte il tempo non dipende, per esempio, dal fatto che esso sia fermo o in movimento rispetto a chi fa la misurazione.

Potremmo dunque esprimere una legge fisica del tipo: *la durata temporale di un fenomeno, misurata da orologi diversi, è indipendente dalla loro velocità; in altre parole, il tempo è assoluto*.

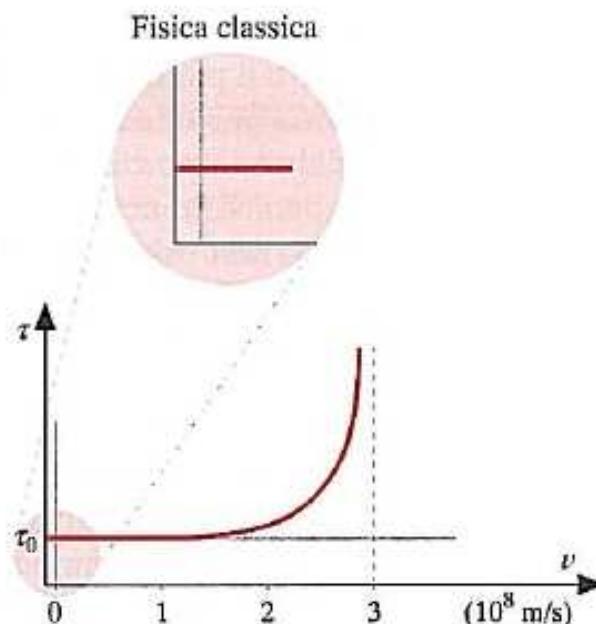
Per noi, questo fatto è in un certo senso scontato ed è stato ampiamente verificato, nei limiti delle osservazioni sperimentali realizzabili fino all'inizio del nostro secolo, e dunque per velocità non troppo alte. Oggi, però, siamo in grado di fare misurazioni anche in situazioni una volta impensabili; in particolare, possiamo misurare le grandezze caratteristiche di un corpo (tipicamente una particella elementare) anche quando esso si muove a velocità altissima rispetto a noi, quasi alla velocità della luce nel vuoto ( $c \approx 3 \cdot 10^8$  m/s). Ma non è necessario arrivare a tanto. In realtà oggigiorno abbiamo a disposizione un tipo di orologi (detti *atomici*) di qualità eccezionale: due di essi scartano al più di un secondo in un milione di anni! Basta utilizzare due di questi orologi, tenendone uno in laboratorio e mettendo l'altro su un aeroplano; e, dopo un veloce giro dell'aeroplano attorno alla Terra, riportare il secondo orologio in laboratorio per confrontarne il funzionamento con il primo. Ebbe ne, in situazioni del genere, si trova che i due orologi non segnano più la stessa ora (cioè non sono più sincronizzati), come del resto previsto da Einstein nella sua teoria della Relatività ristretta.

Gli esperimenti confermano pienamente le indicazioni di tale teoria, in particolare che il variare (rallentare) del trascorrere del tempo con il moto coinvolge tutti i fenomeni fisici: nucleari, atomici, biologici, e così via. Questo fenomeno assume dimensioni eclatanti nel caso del decadimento di alcune particelle elementari, che non sono stabili ma si trasformano dopo un breve ( $\sim 10^{-6}$  s) intervallo di tempo, a partire dalla loro formazione. Di tali particelle è possibile misurare, con grande precisione, il valore della vita media, sia quando esse sono ferme rispetto all'osservatore ( $\tau_0$ ), sia quando si muovono rispetto ad esso con alta velocità [ $\tau(v)$ ]. Dal risultato sperimentale si ottiene la seguente relazione fra  $\tau(v)$  e  $\tau_0$ :

$$\tau(v) = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma \tau_0.$$

**FIGURA 1-4**

Gli intervalli di tempo dipendono apprezzabilmente dalla velocità solo quando questa è confrontabile con quella della luce.



Si vede facilmente che il coefficiente  $\gamma$  ha minimo valore 1 e cresce poi con  $v$ , tendendo all'infinito man mano che  $v \rightarrow c$  (fig. 1-4).

Ma cosa ci consente di affermare che tutto sommato la vecchia legge, secondo cui il tempo è assoluto, funziona per velocità piccole rispetto a  $c$ , cioè nell'ambito della *Fisica classica*? Ipotizziamo una velocità di circa  $5 \cdot 10^5$  m/s; se calcoliamo  $\gamma$  otteniamo

$$\gamma = \left[ 1 - \frac{(5 \cdot 10^5)^2}{(3 \cdot 10^8)^2} \right]^{-\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{0,9999986} \approx 1,0000014.$$

Dunque, anche con una velocità piuttosto alta ( $v = 5 \cdot 10^5$  m/s  $\approx 1,8$  milioni di km/h!) l'intervalllo di tempo cambia di circa due parti su un milione: veramente molto poco per essere apprezzabile. A velocità superiore, però, il valore di  $\gamma$  cresce rapidamente all'aumentare della velocità, come mostrato in figura 1-4.

È evidente che, dal punto di vista della conoscenza, è profondamente diverso che un intervallo di tempo dipenda o non dipenda dalla velocità dell'orologio rispetto all'osservatore; ma quando abbiamo a che fare con corpi che si muovono a velocità relativamente bassa, allora la vecchia legge funziona benissimo. Se misuriamo il tempo in una corsa automobilistica, se mandiamo in orbita un satellite, e così via, possiamo tranquillamente trascurare la variazione del tempo con la velocità, trattando il tempo come assoluto, dato che l'orologio di bordo e quello a terra segnano praticamente la stessa ora.

## 1-4 I modelli in Fisica

L'analisi dei fenomeni fisici e la conseguente formulazione delle Leggi richiedono una descrizione semplificata della realtà. Occorre anzitutto valutare quali effetti siano importanti e quali trascurabili nel fenomeno che s'intende studiare, realizzando un *modello* (cioè una schematizzazione della realtà). Così, in Cinematica e in Dinamica, nel descrivere il moto di un sistema esteso, può convenire trattarlo trascurando le sue reali dimensioni, come se fosse un punto geometrico (che, per definizione, non ha dimensioni). Si parla in questo caso di *schematizzazione di punto materiale*. La semplificazione è accettabile quando le distanze percorse sono molto grandi rispetto alle dimensioni del corpo in movimento.

Per esempio, studiando il moto di un pianeta attorno al Sole, potremo trattare il pianeta come puntiforme; esso differirà da un punto geometrico solo per una sua proprietà aggiuntiva, che chiameremo la sua *massa*. Un'altra importante schematizzazione, di cui si fa spesso uso in Meccanica, consiste nel considerare rigidi, cioè indeformabili, i corpi solidi. In realtà, non esistono corpi perfettamente indeformabili, ma in molte situazioni l'ipotesi è largamente giustificata.

Analogamente, in Termodinamica, per descrivere il comportamento dei gas si fa generalmente uso di un modello che consiste nel trattare il gas come *perfetto*. Neppure i gas perfetti esistono; tuttavia questa semplificazione, come tutte le altre cui abbiamo accennato, permette di affrontare problemi che altrimenti sarebbero insolubili per le difficoltà insite in una descrizione completa del sistema.

L'uso dei modelli in Fisica va ben oltre gli esempi che abbiamo presentato. Non mancheranno nel seguito le occasioni per sottolineare questo modo di procedere e verificarne di volta in volta la correttezza.

### 1-5 Grandezze fisiche e loro misurazione

Si pone il problema d'individuare quali grandezze sono idonee a descrivere i fenomeni naturali da un punto di vista fisico. Da un lato ci può fare da guida l'esperienza; dall'altro, avendo scelto il linguaggio della Matematica per rendere *oggettiva* l'esposizione e la riproducibilità delle informazioni, abbiamo la necessità di trovare alcuni criteri per associare a ogni grandezza un numero. Solo quando questo è possibile possiamo parlare di grandezza fisica; questa è la condizione perché essa compaia in una legge fisica, che è sempre una relazione di *tipo quantitativo* fra grandezze fisiche.

L'insieme delle operazioni che si fanno per associare un numero a una grandezza fisica viene chiamato **misurazione**. Essa rende possibile e non ambiguo ogni giudizio di uguaglianza o disegualanza fra due grandezze della stessa specie (per esempio due lunghezze): è indiscutibile che una lunghezza di 1,2 m è maggiore rispetto a una di 0,8 m. È altrettanto chiaro che non ha senso confrontare quantitativamente una lunghezza (per esempio, il perimetro di una figura piana) con una superficie (per esempio, quella della stessa figura piana): si tratta di grandezze di diversa specie. I procedimenti che si utilizzano nella misurazione devono garantire che il numero, la **misura** della grandezza, sia stato ottenuto in modo non ambiguo e riproducibile. Questo è un punto importante: nel momento in cui l'esperimento diventa la base della conoscenza, la sua realizzazione deve poter essere verificata e riprodotta da qualunque altro sperimentatore. Le misurazioni più delicate richiedono sempre di essere ripetute più volte, anche e soprattutto da operatori diversi e con metodologie diverse.

Tutte le misurazioni, pur realizzate con metodi diversi e spesso con strumenti diversi, hanno una matrice comune: consentono di ottenere il rapporto fra la grandezza da misurare e un'altra, ad essa omogenea, scelta come **unità di misura**.

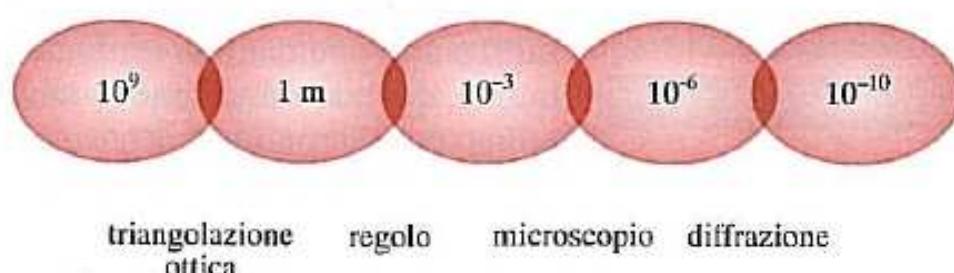
La scelta dell'unità di misura di ciascuna grandezza è del tutto arbitraria, almeno in linea di principio. Nel corso dei secoli le varie popolazioni hanno scelto per la stessa grandezza le più svariate unità, secondo le loro esigenze o la loro cultura. Solo dopo la Rivoluzione francese si è

avviato un processo di unificazione delle unità di misura, processo non ancora concluso a tutt'oggi.

È un patrimonio acquisito definitivamente dalla Fisica di questo secolo l'aver compreso che *il modo di misurare una grandezza fisica ne fissa la definizione*. Le grandezze fisiche devono essere **definite in modo operativo**. In Fisica per spiegare che cos'è il tempo si dice come si fa a misurarlo: il tempo è quella grandezza fisica che si misura con l'orologio! Il fatto che la stessa grandezza possa essere misurata in modi diversi ha come conseguenza che tutte queste procedure concorrono a definirla: ogni grandezza fisica è definita dall'insieme di *tutte le possibili operazioni di misurazione* che la riguardano; naturalmente, poiché ogni metodo può essere applicato solo in un certo campo di valori, si pone un problema di compatibilità fra i risultati ottenibili con metodi diversi. Questa compatibilità viene verificata sfruttando le regioni in cui due campi di valori si sovrappongono; dove sono cioè utilizzabili le due corrispondenti diverse procedure. La lunghezza di un tavolo si misura con un regolo tattato; la distanza fra Terra e Luna con un sistema di triangolazioni ottiche; le dimensioni lineari di un granellino di polvere con un microscopio, e così via. Ebbene, la lunghezza (grandezza fisica) è definita come quella che viene misurata con il regolo, o con la triangolazione o con il microscopio (fig. 1-5). Misurando lunghezze dell'ordine delle centinaia di metri, si potranno utilizzare sia il regolo che la triangolazione, verificando così la compatibilità delle due diverse procedure.

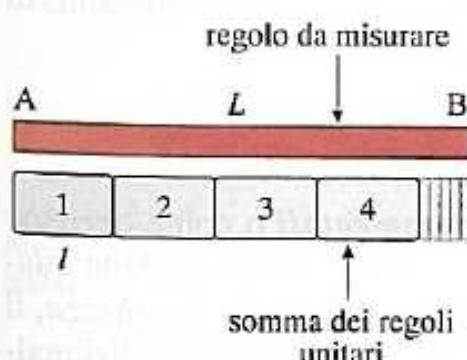
**FIGURA 1-5**

La lunghezza è definita dall'insieme di tutti i possibili modi di misurazione.



## 1-6 Metodi di misurazione

Abbiamo detto che ogni misurazione avviene di fatto stabilendo il valore del rapporto fra la grandezza da misurare e la sua unità di misura. Il modo concettualmente più semplice di far ciò consiste nel confrontare **direttamente** la grandezza (sia essa la lunghezza  $L$  di un regolo) con l'unità (la lunghezza  $l$  di un regolo campione, per esempio il *metro*). Valutiamo criticamente le operazioni che devono essere eseguite per raggiungere l'obiettivo. Anzitutto poniamo un regolo di lunghezza unitaria con un bordo affiancato a uno dei bordi (A) del regolo da misurare (fig. 1-6). Poi affianchiamo alla prima una seconda unità, e così via finché un'ulteriore aggiunta non porta la colonna che stiamo costruendo al di là del secondo bordo (B) del regolo da misurare. A questo punto possiamo continuare utilizzando delle sottounità del metro (per esempio il *decimetro*). Affianchiamo un certo numero di queste, in modo da non andare al di là del bordo. E così via. Il procedimento termina quando si riesce a far coincidere perfettamente i due secondi estremi (se si è fortunati), oppure quando il livello di approssimazione raggiunto viene ritenuto sufficiente. Nel caso di figura 1-6 ci si è fermati dopo aver messo insieme quattro unità da un metro e cinque unità da un decimetro.



**FIGURA 1-6**

Misurazione diretta di una lunghezza.

Il risultato della misurazione è espresso dall'affermazione che l'unità sta 4,5 volte nella lunghezza da misurare, cioè che il rapporto delle due lunghezze è 4,5:

$$\frac{L(\text{regolo})}{l(\text{campione})} = 4,5 \Rightarrow L = 4,5 l \equiv 4,5 \text{ m.}$$

Si faccia attenzione che, senza averlo esplicitamente dichiarato, abbiamo fatto alcune assunzioni non ovvie:

- nel decidere che quattro unità sono troppo poche e cinque troppe, abbiamo definito il criterio per valutare le disuguaglianze fra le lunghezze;
- il confronto fra la lunghezza del regolo e quella delle unità affiancate definisce l'operazione di somma delle lunghezze.

È del tutto generale il fatto che la misurazione diretta di una grandezza fisica richiede l'introduzione di (i) un criterio di confronto per definire l'uguaglianza, (ii) un criterio per la definizione dell'operazione di somma e (iii) la scelta di un campione come unità di misura.

Criteri di questo tipo non sono sempre definibili: non lo sono per una caratteristica come il *colore* di un corpo, che dunque non potrebbe essere utilizzato come grandezza fisica.

Le operazioni descritte più sopra definiscono chiaramente cosa s'intenda per **misurazione diretta** di una grandezza: il confronto diretto (appunto) con la sua unità di misura.

Nella maggioranza dei casi, però, si preferisce misurare le grandezze utilizzando strumenti precedentemente tarati: è quel che facciamo usualmente, quando misuriamo le lunghezze con un regolo tarato (fig. 1-7), il tempo con il cronometro, la velocità con il tachimetro. Questo tipo di misurazione, il più utilizzato nella vita di tutti i giorni, prende il nome di **strumentale**.

Infine, in alcuni casi può risultare comodo, oppure necessario, misurare una grandezza in **modo indiretto**. È certamente molto noioso misurare la lunghezza di una strada di alcuni chilometri utilizzando un regolo. Potremmo invece muoverci in automobile a velocità costante  $v$ , misurando il tempo  $t$  impiegato a percorrere lo spazio  $s$ ; la lunghezza  $s$  può essere ottenuta tramite la relazione (1-1). In questo caso, misurando la velocità (con il tachimetro) e il tempo impiegato (con l'orologio), si misura indirettamente una lunghezza.

Situazioni analoghe a quella discussa si presentano in molti altri casi di interesse fisico (vedi gli Approfondimenti); ogni volta che si riscontra l'esistenza, in certe condizioni, di un legame fra grandezze fisiche, esso può essere utilizzato per la misurazione indiretta, in tali condizioni, di una di esse in termini delle misure delle altre.

## 1-7 Dimensioni delle grandezze fisiche

Le grandezze fisiche si classificano come **fondamentali** o come **derivate** (dalle fondamentali). Poiché il mondo fisico è fatto di materia, della quale studiamo il comportamento nello spazio e nel tempo, la **lunghezza**, il **tempo** e la **massa** sono le grandezze che in Meccanica sono tradizionalmente assunte come fondamentali. Tutte le altre grandezze meccaniche possono essere espresse attraverso una relazione funzionale con le tre fondamentali, e risultano quindi **derivate**.



**FIGURA 1-7**  
Misurazione strumentale di una lunghezza.

È un risultato sperimentale della Fisica moderna il fatto che la velocità della luce nel vuoto abbia un valore indipendente dal moto relativo fra osservatore e sorgente. Di conseguenza, avendo a disposizione una *velocità naturale*, sarebbe ragionevole assumere come grandezza fondamentale la velocità piuttosto che la lunghezza. Come vedremo presto, ciò avrebbe una serie di conseguenze dal punto di vista delle cosiddette *dimensioni* delle grandezze fisiche e comporterebbe un cambiamento delle unità di misura comunemente utilizzate. È per questa ragione che nel seguito di questo libro si continuerà ad assumere la lunghezza come grandezza fondamentale.

È importante comprendere che il legame fra grandezze derivate e grandezze fondamentali è indipendente dalle unità di misura, ma dipende invece dalla natura delle grandezze stesse.

La relazione fra grandezze fondamentali e grandezze derivate, e la distinzione fra misurazioni diretta e indiretta, sono ben esemplificate dal caso di un'altra grandezza fisica di origine geometrica: l'*area* di una superficie. Consideriamo per semplicità una superficie piana; la sua area può essere misurata in modo diretto per confronto con un'unità arbitraria, per esempio l'area di un quadratino, estendendo il procedimento illustrato in dettaglio per la misurazione delle lunghezze, cioè verificando quante superfici di area unitaria vanno poste l'una vicina all'altra per ricoprire completamente la superficie da misurare. Si trova sperimentalmente che, per ogni superficie, la *misura dell'area è proporzionale al prodotto delle misure di due lunghezze caratteristiche* della superficie stessa, mediante un fattore  $k$  che è *tipico* della *forma* della superficie. Ciò significa, ad esempio, che tutte le superfici rettangolari (in cui le suddette lunghezze caratteristiche sono quelle dei lati) hanno lo stesso valore di  $k$ . Si ha cioè la relazione generale

$$\text{Area} = k L_1 L_2,$$

nella quale  $k$  rappresenta il *fattore di forma*.

Il *valore numerico* del fattore di forma dipende tuttavia dalla relazione fra le unità di misura scelte per le aree e per le lunghezze. Se si assume come area unitaria quella di un quadratino il cui lato abbia una lunghezza unitaria (peraltro *arbitraria*), si hanno i valori riportati nella tabella 1-1, ben noti dalla geometria elementare.

Il significato della relazione precedente può essere espresso dicendo che le *dimensioni* di una superficie sono quelle di una lunghezza per quelle di un'altra lunghezza (cioè, del quadrato di una lunghezza); ciò vale per qualsiasi superficie ed è *indipendente dalle unità di misura* che si utilizzano. Formalmente si scrive

$$[S] = [L^2].$$

La conoscenza del fattore di forma per una particolare superficie può essere così impiegata per una misurazione indiretta della sua area, basata

TABELLA 1-1

Aree di alcune figure geometriche piane.

<i>Figura</i>	<i>Fattore di forma</i>	<i>Lunghezza 1</i>	<i>Lunghezza 2</i>
Quadrato	1	lato	lato
Rettangolo	1	lato minore	lato maggiore
Triangolo	$\frac{1}{2}$	base	altezza
Cerchio	$\pi$	raggio	raggio

sulla misurazione delle sue lunghezze caratteristiche. L'area può essere quindi considerata come una grandezza derivata.

Se indichiamo con  $[L]$ ,  $[T]$  e  $[M]$  le dimensioni delle grandezze meccaniche fondamentali (con ovvio significato dei simboli), quelle derivate avranno dimensioni esprimibili attraverso opportune potenze di  $L$ ,  $T$  e  $M$ .

L'*analisi dimensionale* delle grandezze fisiche è operazione particolarmente semplice. Utilizzando la proprietà secondo cui se l'esponente di una potenza è nullo essa ha valore uno, per le grandezze fondamentali possiamo scrivere

$$[L] = [L^1 M^0 T^0]; \quad [M] = [L^0 M^1 T^0]; \quad [T] = [L^0 M^0 T^1].$$

In pratica, le grandezze che compaiono con esponente 0 non contribuiscono alle dimensioni e possono essere tralasciate. Con lo stesso criterio si costruiscono le equazioni dimensionali delle grandezze derivate. Così, ad esempio, una superficie  $S$  e un volume  $V$  avranno come equazioni dimensionali rispettivamente:

$$[S] = [L^2 M^0 T^0] \equiv [L^2]; \quad [V] = [L^3 M^0 T^0] \equiv [L^3].$$

Abbiamo già visto [relazione (1-1)] che la grandezza velocità si ottiene dal rapporto fra una lunghezza e un tempo; ebbene, vedremo che ciò ha validità del tutto generale: la velocità ha le dimensioni

$$[v] = [L^1 T^{-1}].$$

Un caso particolare è quello delle grandezze per le quali tutti e tre gli esponenti di  $[L]$ ,  $[T]$  e  $[M]$  sono nulli; esse vengono chiamate **adimensionali** (cioè senza dimensioni) o numeri puri (come il fattore di forma visto poc'anzi).

Un esempio tipico di grandezza adimensionale è quello degli angoli. Un angolo è definito facendo riferimento a una circonferenza come quella di figura 1-8. Per definizione si ha:

$$\alpha = \frac{s}{R}.$$

Di conseguenza

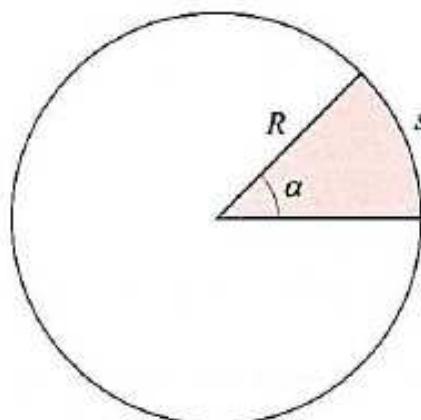
$$[\alpha] = \frac{[L^1 M^0 T^0]}{[L^1 M^0 T^0]} = [L^0 M^0 T^0].$$

In ogni legge o relazione tra grandezze fisiche *le dimensioni dei due termini dell'equazione devono essere le stesse*. Quest'importante criterio dovrebbe costituire una guida continua per lo studente, poiché permette un controllo costante della consistenza delle relazioni trovate. Se avessimo un dubbio nella scelta fra due equazioni del tipo:

$$x = \frac{1}{2} at \quad \text{e} \quad x = \frac{1}{2} at^2$$

sapendo che la grandezza  $a$  ha dimensioni  $[a] = [L^1 M^0 T^{-2}]$ ,  $x$  è una lunghezza e  $t$  il tempo, potremmo facilmente verificare che la prima è dimensionalmente sbagliata; la seconda, almeno dal punto di vista dimensionale, è invece corretta. L'*analisi dimensionale* non permette, invece, di valutare la correttezza del valore della costante adimensionale  $\frac{1}{2}$ .

Un altro criterio guida altrettanto importante consiste nell'accertarsi sempre che l'argomento delle funzioni matematiche trascendenti (come



**FIGURA 1-8**

Un angolo è definito dal rapporto  $\alpha = s/R$  fra le lunghezze del corrispondente arco e del raggio.

le funzioni trigonometriche, l'esponenziale e il logaritmo) sia privo di dimensioni. Che ciò sia necessario lo si verifica facilmente, ad esempio, nel caso della funzione  $\sin x$ . L'analisi matematica, infatti, ci dimostra che essa può essere approssimata con un polinomio, ottenuto con lo sviluppo di Taylor (vedi l'Appendice A-5):

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!}.$$

I due termini del secondo membro hanno le stesse dimensioni (condizione necessaria per essere sommati) solo se  $x$  è adimensionale. Naturalmente, in questa espressione gli **angoli** devono essere espressi in **radiani**, non in gradi!

### Esempio 1-1

Uno studente, svolgendo un compito di Fisica, scrive la seguente relazione fra lo spazio  $s$  percorso e il tempo  $t$ :

$$s = \sin t.$$

Il professore, nel correggere il compito, segna due errori. Quali e perché?

La relazione contiene due errori, entrambi di tipo dimensionale. L'argomento della funzione non può avere le dimensioni di un tempo, ma dev'essere adimensionale. Occorre introdurre una costante moltiplicativa che avrà le dimensioni  $[T^{-1}]$ . Inoltre il seno, essendo definito come rapporto fra due lunghezze, è anch'esso adimensionale. Occorre inserire una costante moltiplicativa che aggiusti le dimensioni del secondo membro. L'equazione andava scritta, per esempio, come:

$$s = A \sin(\omega t).$$

Nell'equazione scritta dallo studente mancavano dunque due parametri, che abbiamo indicato con  $A$  e  $\omega$ . Il primo ha dimensioni  $[L]$ , il secondo  $[T^{-1}]$ .

## 1-8 Sistemi di unità di misura

La scelta delle grandezze fondamentali e delle rispettive unità dà origine a un *sistema di unità di misura*. La convenzione più diffusa consiste nello scegliere come unità di misura il **metro** (m) per le lunghezze, il **kilogrammo** (kg) per le masse e il **secondo** (s) per il tempo. Il sistema che così ha origine viene chiamato **MKS**, dove l'acronimo è costruito con le iniziali delle tre unità. In realtà, poiché questo sistema è stato adottato come *sistema internazionale*, l'acronimo con cui viene universalmente indicato è **SI**. Di questo sistema, detto anche *sistema metrico*, faremo prevalentemente uso in questo libro.

Un secondo sistema di unità, che pure viene largamente utilizzato in Fisica, è quello denominato **CGS**, ancora una volta dalle iniziali delle unità di misura usate per le grandezze fondamentali: il **centimetro** (cm) per le lunghezze, il **grammo** (g) per le masse e il **secondo** per il tempo. Per entrambi i sistemi **SI** e **CGS** le grandezze fondamentali sono le stesse.

Ricordiamo anche un altro sistema di unità particolarmente importante, in quanto largamente impiegato nel campo dell'ingegneria. Esso è denominato **sistema pratico** (o *degli ingegneri*) e utilizza come grandezze fondamentali lunghezza, forza (invece della massa) e tempo. Le

corrispondenti unità di misura sono il *metro*, il *kilogrammo forza* (kgf) e il *secondo*.

Negli Stati Uniti, inoltre, è ancora largamente utilizzato il cosiddetto *sistema britannico*, che utilizza il *piede* (ft), equivalente a 0,305 m, per le lunghezze e la *libbra* (lb), equivalente a 0,454 kg, per la massa.

In ciascuno di questi sistemi le unità di misura delle grandezze derivate si ottengono facilmente dalle loro dimensioni e dalle unità scelte per le grandezze fondamentali. In tabella 1-2 sono riportati alcuni esempi, relativi a grandezze precedentemente prese in considerazione.

TABELLA 1-2

Dimensioni e unità di alcune grandezze.

Grandezza	Dimensioni	Unità SI	Unità CGS	Unità BRIT
Superficie	$[L^2]$	$m^2$	$cm^2$	$ft^2$
Volume	$[L^3]$	$m^3$	$cm^3$	$ft^3$
Velocità	$[L^1 T^{-1}]$	$m/s$	$cm/s$	$ft/s$

Un'importante caratteristica dei primi tre sistemi di unità di misura citati è che si tratta di sistemi decimali (il sistema britannico non lo è). Ciò significa che ogni multiplo (sottomultiplo) dell'unità di misura è ottenuto da questa moltiplicando (dividendo) la stessa per una potenza di dieci.

Tale proprietà semplifica notevolmente il modo in cui vengono presentati i risultati di misure o di calcoli. Inoltre esistono prefissi che hanno sempre lo stesso significato, a qualsiasi grandezza vengano applicati. Essi sono presentati nella tabella 1-3. Così, per esempio,  $\mu s$  (che si legge microsecondo) significa un milionesimo di secondo; analogamente,  $\mu g$  (microgrammo) indica un milionesimo di grammo. È evidente la semplificazione che questo tipo di scrittura comporta! L'adozione dei sistemi decimali è relativamente recente. Essa fu introdotta dall'Assemblea nazionale francese nel 1799; ovviamente la Francia fu il primo paese a utilizzarli.

## 1-9 Errori

Qualunque sia il metodo utilizzato per misurare una grandezza, è inevitabile che in ogni misurazione si commettano errori. Ciò è esemplificato dal fatto che, ripetendo più volte la misurazione di una stessa grandezza,

TABELLA 1-3

Simboli di multipli e sottomultipli nei sistemi decimali.

Moltiplica per	Nome	Simbolo	Moltiplica per	Nome	Simbolo
$10$	deca	da	$10^{-1}$	deci	d
$10^2$	etto	h	$10^{-2}$	centi	c
$10^3$	kilo	k	$10^{-3}$	milli	m
$10^6$	mega	M	$10^{-6}$	micro	$\mu$
$10^9$	giga	G	$10^{-9}$	nano	n
$10^{12}$	tera	T	$10^{-12}$	pico	p
$10^{15}$	peta	P	$10^{-15}$	femto	f
$10^{18}$	exa	E	$10^{-18}$	atto	a
$10^{21}$	zetta	Z	$10^{-21}$	zepto	z
$10^{24}$	yotta	Y	$10^{-24}$	yocto	y

si ottengono per lo più risultati diversi; fatto che è indice di un'incertezza nella conoscenza del valore cercato. Le ragioni per le quali ogni misura è accompagnata da una certa incertezza sono ampiamente discusse nel paragrafo 1-17. Qui è il caso di limitarsi a pochi punti significativi.

Anzitutto, se è vero che è la misura il risultato sperimentale di una serie di operazioni, è altrettanto importante conoscerne l'attendibilità, per poterne valutare e pesare l'utilizzazione. Fornire l'errore, insieme al valore misurato, ha proprio questo significato: attribuire un peso, grande o piccolo che sia, al proprio risultato sperimentale. Senza di ciò l'informazione che si fornisce non è oggettiva, in quanto non è correttamente interpretabile da altri ricercatori. Consideriamo, ad esempio, la misura della lunghezza di un regolo. Se, come conseguenza di una serie di misurazioni, si fornisce il risultato

$$l = (52,5 \pm 0,2) \text{ cm} \quad (1-2)$$

s'intende che il valore ottenuto  $l = 52,5 \text{ cm}$  è affetto da un errore assoluto di  $\bar{\epsilon} = 0,2 \text{ cm}$ .

Come discusso nel paragrafo 1-17, sono oramai assodate le procedure con le quali assegnare l'errore. In buona parte dei casi esse comportano un significato probabilistico per  $\bar{\epsilon}$ .

Il secondo punto importante riguarda la relazione fra  $\bar{\epsilon}$  e l'attendibilità del valore misurato  $v$ . In pratica se, come avviene nella maggior parte dei casi,  $\bar{\epsilon}$  rappresenta l'errore quadratico medio della media, il valore effettivo della grandezza misurata ha il 68% di probabilità di stare nell'intervallo di valori fra  $v - \bar{\epsilon}$  e  $v + \bar{\epsilon}$  (è per questo che si scrive  $\pm$ ). Dunque, a parità di valore misurato  $v$ , l'attendibilità del risultato è tanto maggiore quanto più è piccolo  $\bar{\epsilon}$ . Quando i valori di  $v$  sono diversi, per confrontare le attendibilità si fa riferimento al cosiddetto **errore relativo**, una grandezza adimensionale definita da:

$$\epsilon_r = \frac{\bar{\epsilon}}{v}.$$

L'errore relativo viene quasi sempre espresso in percentuale. Nel nostro esempio si avrebbe:

$$\epsilon_r = \frac{0,20}{52,5} = 3,8 \cdot 10^{-3} \approx 0,4\%.$$

A questo livello di discussione, è essenziale ricordare che ogni misura sperimentale **dove dare sempre come risultato un numero, con un errore**, in opportune **unità di misura**. Usualmente, quanto più è piccolo l'*errore relativo*, tanto migliore è la misura ottenuta, nel senso che è nota con minore incertezza. Quando l'errore non è riportato, come spesso si fa nei libri di testo, è inteso tacitamente che esso sia abbastanza piccolo da influire esclusivamente sull'ultima cifra fornita (*cifra significativa*) del valore misurato. Comunque, in generale, l'ultima cifra significativa dovrebbe essere dello stesso ordine di grandezza dell'errore. Il problema delle cifre significative è trattato in dettaglio nel paragrafo 1-18.

## 1-10 Tempo

La descrizione degli eventi d'interesse nello studio dei fenomeni naturali richiede la specificazione di **dove** e **quando** essi avvengono. È anche per questo che, come già discusso, la lunghezza e il tempo, insieme alla mas-

sa, sono tradizionalmente assunte come grandezze fondamentali della Meccanica. In accordo con l'impostazione data nei precedenti paragrafi, discuteremo ora le definizioni operative di queste grandezze.

*Il tempo è la grandezza fisica che viene misurata con l'orologio.* È noto che ogni orologio, qualunque sia il suo principio di funzionamento, sfrutta l'esistenza di qualche fenomeno ritenuto periodico, cioè che si ripete regolarmente. La bontà della scelta di fenomeni di tal genere può essere verificata solo a posteriori, sulla base dell'esperienza e del progredire della conoscenza. Potremmo pensare che il susseguirsi dei giorni sia un fenomeno periodico, così come una sequenza di svuotamenti di una clessidra. Ma utilizzando due orologi basati su tali fenomeni per misurare lo stesso intervallo temporale otteniamo risposte diverse; quale dei due orologi è da considerare più attendibile?

La ricerca di fenomeni che *apparentemente* abbiano sempre migliori caratteristiche di periodicità ci permette oggi di sfruttare le vibrazioni di un cristallo di quarzo (con errori di pochi  $\mu\text{s}$  in un anno), per utilizzazioni ormai diffuse; oppure il periodo di una specifica transizione dell'atomo  $^{133}\text{Cs}$ , un particolare isotopo del cesio, il cui nucleo è costituito da 55 protoni (*numero atomico*) e da 133 nucleoni, fra protoni e neutroni (*numero di massa*). Gli orologi al cesio (*orologi atomici*) sono attualmente i più precisi che si conoscano e vengono ovviamente utilizzati solo per ragioni scientifiche. Due di questi orologi forniscono valori che differiscono non più di un secondo su un milione di anni, il che corrisponde a un errore relativo di circa una parte su  $10^{13}$ ! Misurando la durata del giorno con un orologio di questo tipo, ripetutamente nel corso dell'anno, si possono osservare variazioni dell'ordine di 2 ms, dovute presumibilmente a effetti di marea e a variazioni stagionali dell'atmosfera terrestre. Oltre a ciò, la velocità di rotazione della Terra attorno al suo asse sta progressivamente diminuendo; di conseguenza, la durata media di un anno è oggi di circa 1 secondo minore rispetto a quella dell'inizio del secolo.

Per questo motivo l'unità di misura del tempo viene oggi definita riferendola a un orologio atomico piuttosto che, come avvenne inizialmente, alla durata del giorno:

*il secondo è l'intervallo di tempo corrispondente a 9 192 631 770 periodi della radiazione emessa nella transizione tra due particolari livelli iperfini del  $^{133}\text{Cs}$ .*

Negli Approfondimenti, dove sono anche discussi con maggior dettaglio unità e metodi di misura di tempo, è mostrato che questo particolare numero di periodi fa sì che il secondo, così definito, corrisponda a quello che si ottiene dalla durata di un giorno solare (medio) nell'anno 1900.

In tabella 1-4 sono riportati i valori delle durate di alcuni fenomeni fisici conosciuti e misurabili (direttamente o indirettamente). Come si vede, siamo in grado di associare valori di intervalli temporali a fenomeni fisici conosciuti nell'intervallo ( $10^{-26} \div 10^{17}$ ) s. Allo stato attuale delle conoscenze, valori al di fuori di tale intervallo non hanno senso: questo è il significato dei punti interrogativi che aprono e che chiudono l'elenco. Non ha senso infatti, in Fisica, parlare di grandezze che non possono essere misurate. Quindi sarebbe privo di significato fare riferimento a tempi che superino la vita dell'Universo, che, per definizione, rappresenta il tempo più grande immaginabile, e sulle cui reali dimensioni abbiamo at-

tualmente notevoli incertezze; oppure minori del tempo impiegato dal segnale più veloce conosciuto (la luce) per attraversare l'oggetto più piccolo conosciuto (l'elettrone).

Ciò non toglie che si possa speculare su alcuni fenomeni di durata molto grande, come la vita media del protone ( $>10^{40}$  s), oppure molto brevi, come le fluttuazioni che hanno caratterizzato le primissime fasi dell'evoluzione dell'Universo (tempo di Planck  $\sim 10^{-43}$  s).

Oltre a ciò, ricordiamo che non sempre è possibile, per qualsiasi grandezza, supporre l'esistenza di valori piccoli a piacere (cioè assumere che la grandezza sia continua). Alcune grandezze sono quantizzate, cioè non esistono con valori minori di una certa loro unità naturale. È noto, ad esempio, che questo vale per la carica elettrica, che possiamo trovare (libera) in Natura solo per multipli del valore  $q_e = 1,60 \cdot 10^{-19}$  C (*carica dell'elettrone*).

Come già sottolineato, la più importante caratteristica del tempo, nella *Fisica classica*, è di essere *assoluto*. Inoltre, il tempo classico è *uniforme*. Ciò vuol dire che, a parità di altre condizioni, i risultati di un esperimento non dipendono dall'istante in cui esso è stato eseguito.

TABELLA 1-4

Valori di alcuni intervalli di tempo caratteristici.

Grandezza	Tempo (s)
Età dell'Universo	??
Comparsa dell'uomo sulla Terra	$\sim 5 \cdot 10^{17}$
Durata della vita umana	$10^{14}$
Rivoluzione della Terra (un anno)	$2 \cdot 10^9$
Durata di un giorno	$3,2 \cdot 10^7$
Tempo impiegato dalla luce per il tragitto Sole-Terra	$8,6 \cdot 10^4$
Battito cardiaco normale	$5 \cdot 10^2$
Periodo di un'onda sonora	$8 \cdot 10^{-1}$
Periodo di un'onda radio	$2 \cdot 10^{-3}$
Periodo delle rotazioni molecolari	$\sim 10^{-6}$
Periodo di vibrazioni atomiche	$10^{-12}$
Periodo della radiazione X	$10^{-15}$
Tempo di attraversamento di un protone da parte della luce	$\sim 3 \cdot 10^{-19}$
Tempo di attraversamento di un elettrone da parte della luce	$< 10^{-26}$
	??

## 1-11 Lunghezza

Le misure di lunghezza sono effettuate tipicamente con un regolo. Lo spazio in cui viviamo è *tridimensionale*, per cui servono tre valori indipendenti di lunghezze per individuare univocamente la posizione di un corpo di dimensioni trascurabili. Nella Fisica classica lo spazio è anche *euclideo*, nel senso che in esso valgono le proprietà della geometria euclidea, con i suoi postulati. Per esempio, la proprietà per cui la somma degli angoli interni di un triangolo dà come risultato  $\pi$  è stata verificata con errori inferiori a qualche parte su un milione. Inoltre si trova sperimentalmente che le misurazioni danno risultati che, a parità di condizio-

ni, sono indipendenti dal luogo in cui vengono effettuate (spazio *omogeneo*) e dalle particolari orientazioni degli apparati (spazio *isotropo*).

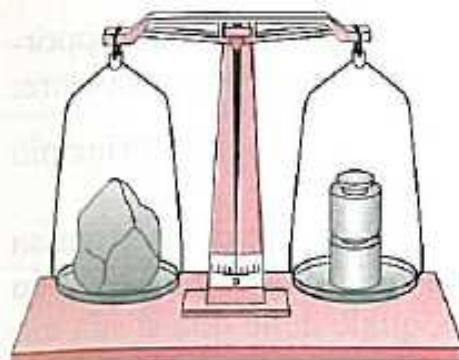
A partire dal primo campione di lunghezza, realizzato con un regolo di platino-iridio, si è arrivati a definire l'unità di lunghezza con sistemi atomici, così come avvenuto nel caso del tempo. Ad esempio, si può definire il metro come 1 650 763,73 volte la lunghezza d'onda nel vuoto di una certa luce emessa da atomi di cripto ( $^{86}\text{Kr}$ ). In realtà la definizione più recente (1983) dell'unità di misura delle lunghezze poggia sul fatto sperimentale che la velocità della luce nel vuoto è una costante fondamentale della Natura, e utilizza inoltre la definizione di *secondo*:

*il metro è la distanza percorsa dalla luce nel vuoto in un intervallo temporale di  $\frac{1}{299\,792\,458}$  secondi.*

La precisione corrispondente è dell'ordine di  $10^{-10}$ . Negli Approfondimenti sono discussi in maggior dettaglio sia l'unità di misura sia alcuni specifici metodi di misura di lunghezza. In tabella 1-5 sono riportati i valori di alcune lunghezze conosciute. Anche in questo caso valgono le considerazioni già fatte a proposito delle misure di tempo, per quanto riguarda il problema della continuità e della quantizzazione. La tabella mostra l'ampiezza dello spettro delle distanze misurabili, che copre più di 40 ordini di grandezza: cioè, il rapporto fra la più grande e la più piccola delle distanze è maggiore di  $10^{40}$ . Tale ampiezza fa intuire la varietà dei metodi che devono essere messi in atto per determinare i valori che interessano. È interessante notare che all'incirca lo stesso intervallo di ordini di grandezza si ha nel caso dei tempi (vedi la tabella 1-4); di questo fatto, peraltro, non appare evidente alcuna spiegazione fisica.

**TABELLA 1-5**  
Valori di alcune lunghezze caratteristiche.

Grandezza	Lunghezza (m)
Limite dell'Universo	??
Distanza dalla galassia di Andromeda	$\sim 10^{26}$
Raggio della nostra galassia	$6 \cdot 10^{19}$
Distanza dalla stella più vicina	$4 \cdot 10^{16}$
Anno luce	$9,5 \cdot 10^{15}$
Distanza Terra-Sole	$1,5 \cdot 10^{11}$
Distanza Terra-Luna	$3,8 \cdot 10^8$
Diametro orbite satelliti artificiali	$\sim 10^6$
Altezza di una torre	$10^2$
Altezza di un bambino	1
Dimensione di pulviscolo	$10^{-4}$
Dimensione di un virus	$\sim 10^{-7}$
Raggio atomico	$5 \cdot 10^{-11}$
Diametro del protone	$2 \cdot 10^{-15}$
Diametro di un elettrone	$< 10^{-18}$
	??

**FIGURA 1-9**

La massa di un corpo viene misurata con una bilancia a due bracci.

**TABELLA 1-6**  
Valori di alcune masse caratteristiche.

Grandezza	Massa (kg)
Universo osservabile	??
Una galassia	$\sim 10^{55}$
Sole	$10^{41}$
Giove	$2 \cdot 10^{30}$
Terra	$1,9 \cdot 10^{27}$
Luna	$6 \cdot 10^{24}$
Transatlantico	$7,4 \cdot 10^{22}$
Elefante	$7 \cdot 10^7$
Automobile	$4,5 \cdot 10^3$
Uomo	$1,5 \cdot 10^3$
Matita	$7 \cdot 10^{-2}$
Goccia di pioggia	$2 \cdot 10^{-6}$
Granello di polvere	$10^{-10}$
Virus	$\sim 10^{-14}$
Molecola di penicillina	$5 \cdot 10^{-17}$
Atomo di idrogeno	$1,7 \cdot 10^{-27}$
Elettrone	$9,1 \cdot 10^{-31}$
	??

Nella parte inferiore della tabella ci siamo volutamente fermati alle dimensioni degli elettroni, per i quali tuttavia è possibile indicare solo un limite superiore.

Secondo alcune recenti ipotesi teoriche, i più piccoli fra i costituenti elementari della materia potrebbero essere le stringhe, minuscole corde di lunghezza attorno ai  $10^{-35}$  m (cioè dell'ordine del prodotto del tempo di Planck per la velocità della luce). Se queste teorie saranno confermate in un futuro più o meno lontano, questa diventerà la lunghezza destinata a chiudere, allora, simili tabelle. Né avrà senso parlare di lunghezze minori di questa!

## 1-12 Massa

La massa è la terza grandezza fondamentale, sia del sistema **SI** sia del sistema **CGS**. Per definizione *la massa è la grandezza che viene misurata con la bilancia a due bracci*. Questo strumento è costituito da un'asta rigida, che può ruotare attorno a un asse orizzontale (fig. 1-9) ai cui estremi sono posti due piatti; se su questi sono appoggiati due corpi e l'asta è in equilibrio in posizione orizzontale, i due corpi hanno la stessa massa.

Facciamo qui un breve cenno al fatto che, in realtà, il funzionamento della bilancia sfrutta l'attrazione gravitazionale che la Terra esercita sui corpi (cioè il loro peso). Ma poiché, come discuteremo ampiamente più avanti, massa e peso sono direttamente proporzionali, in un determinato luogo, di fatto la bilancia ci permette di misurare la massa (vedi il capitolo 4). Assegnata a un oggetto campione la massa unitaria (per esempio, un *kilogrammo*), si può misurare la massa di un corpo qualsiasi poggiandolo su uno dei due piatti e verificando quanti corpi unitari (e/o sottounitari) bisogna porre sull'altro piatto perché l'asta della bilancia stia orizzontale. La bilancia è dunque lo strumento che permette di misurare le masse dei corpi staticamente. Solo le migliori bilance permettono di raggiungere precisioni dell'ordine di qualche parte su un miliardo.

Per avere un'unità di massa fu costruito un campione di platino-iridio, che è conservato nel Bureau International des Poids et Mesures (BIPM) di Sèvres (Parigi). La massa del campione corrisponde all'incirca (anche se non esattamente) a quella di un decimetro cubico di acqua distillata. Nella definizione del campione di massa non vi sono state evoluzioni importanti, come quelle avvenute per il metro e per il secondo. La situazione attuale, dovendosi fare riferimento a un campione artificiale, non è del tutto soddisfacente (la precisione è  $\sim 10^{-8}$ ).

Nel corso degli anni sono state avanzate diverse proposte di ridefinire la massa del kilogrammo attraverso quella di un determinato numero di particelle elementari (elettroni oppure atomi di  $^{28}\text{Si}$ ), ma finora nessuna di esse è stata accolta dalle commissioni internazionali che stabiliscono le norme nel campo della metrologia, in quanto il relativo errore è circa mille volte maggiore di quello ottenibile con l'adozione di unità macroscopiche.

È evidente che non sempre è possibile misurare la massa con una bilancia: certamente non lo è nel caso della massa della Terra, o di quella di un atomo; oppure per effettuare una misurazione all'interno di un satellite artificiale, dove c'è un'assenza apparente di gravità. In casi così estremi bisogna fare ricorso a metodi diversi. Così come fatto per la lunghezza e il tempo, i metodi di misurazione della massa saranno discussi

in dettaglio più avanti. Per questa grandezza, in particolare, sarà opportuna un'analisi più dettagliata, che tratti preliminarmente in particolare:

- 1) il modo in cui la massa viene definita, attraverso il secondo Principio della Dinamica;
- 2) il fatto che esistano due diverse grandezze, ambedue chiamate massa (una *inerziale*, l'altra *gravitazionale*); e che quindi debba essere ben puntualizzato, almeno in linea di principio, quale delle due si stia misurando. Tutti questi fatti saranno ampiamente discussi nel capitolo 4, dedicato ai Principi della Dinamica, al quale rimandiamo anche per gli approfondimenti.

Vale la pena di richiamare qui una grandezza che è, in qualche modo, collegata con la massa. Si tratta della *quantità di materia*, la cui unità di misura, nel sistema internazionale, è la **mole** (mol):

*la mole è la quantità di sostanza che contiene tante molecole quanti sono gli atomi in 12 grammi di  $^{12}\text{C}$ .*

Questo numero è conosciuto come *numero di Avogadro*; il suo valore è  $N_A = 6,0221367 \cdot 10^{23}$ , ed è noto con una precisione di circa  $10^{-7}$ . Il concetto di mole può essere esteso a situazioni in cui le molecole vengono sostituite con altre *entità elementari*, come atomi, ioni, elettroni, o altro ancora.

### 1-13 Misure e indeterminazione

Chiudiamo questa prima parte del capitolo ricordando ancora una volta che le proprietà delle grandezze fondamentali valide nella Fisica classica non possono essere acriticamente estese in ambito relativistico o nei campi in cui è necessario applicare la Meccanica quantistica. In particolare, le misure di queste grandezze dipendono dall'osservatore che fa la misurazione, e dunque non sono assolute. Inoltre, sia lo spazio sia il tempo risultano, come si dice, *complementari* ad altre grandezze.

Questo fa sì che, ad esempio, secondo il Principio di indeterminazione (che sta alla base della Meccanica quantistica) sia impossibile misurare contemporaneamente la posizione di un corpo e la sua quantità di moto (grandezza che sarà definita più avanti) con precisioni spinte a piacere: quanto maggiore è la precisione con cui si cerca di conoscere la posizione del corpo, tanto meno si saprà sulla corrispondente quantità di moto, e viceversa.

Nel mondo macroscopico, conoscendo la posizione di una pallina con la precisione di un millimetro, o di un decimo di millimetro, siamo in grado di ottenere la gran parte delle informazioni fisiche di interesse. Ciò non è vero, ovviamente, quando si voglia studiare un oggetto di dimensioni microscopiche, per esempio un elettrone di un atomo (che ha dimensioni  $\approx 10^{-10}$  m): in tal caso, per descriverne il moto, saremmo costretti a richiedere precisioni almeno dell'ordine di 1 pm. Quando si tenta di realizzare ciò, la Natura mostra dei comportamenti nuovi, in qualche modo collegati con gli stessi procedimenti di misurazione. Essi si esprimono nelle *relazioni di indeterminazione di Heisenberg*, una delle quali (nel caso che stiamo discutendo) lega le incertezze con cui possia-

mo conoscere la posizione dell'elettrone ( $\Delta x$ ) e la sua quantità di moto ( $\Delta q_x$ ):

$$\Delta x \Delta q_x \geq \frac{1}{2} \hbar$$

nella quale  $\hbar = (h/2\pi)$  è legata a una costante fondamentale della Natura, che prende il nome di *costante di Planck*, e vale  $h = 6,6260755 \cdot 10^{-34}$  Js (nel sistema SI).

Le due incertezze non possono quindi essere, *contemporaneamente*, arbitrariamente piccole. Come mostrato nell'esempio 1-2, il problema non sussiste invece in campo macroscopico (classico), dato il valore molto piccolo di  $\hbar$ .

Per quanto riguarda le misurazioni di grandezze microscopiche, va anche sottolineato che esse alterano in modo incontrollabile lo stato del sistema studiato. Se a livello macroscopico è ragionevole assumere che ogni grandezza abbia un *valore vero* (vedi gli Approfondimenti, par. 1-17) e che esso possa essere individuato con precisione arbitrariamente elevata (almeno in linea di principio), ciò non accade in ambito microscopico. Ad esempio, se si vuole osservare un elettrone è necessario illuminarlo, mandandogli contro un fascio di luce; la luce è composta di fotoni, cioè di particelle che urtando l'elettrone stesso, ne alterano lo stato. Dunque, l'elettrone che si osserva non si trova più nelle condizioni in cui era prima della misurazione.

In realtà, la situazione è ancora più complicata perché, nella descrizione della Meccanica quantistica, la stessa definizione di stato è diversa da quella della Fisica classica. Tutte queste considerazioni hanno lo scopo di mettere sull'avviso chi si avvicina alla Fisica: i comportamenti della Natura a livello macroscopico (quelli che ci sono più familiari e che saranno trattati in questo testo) non devono farci pensare che essi siano gli stessi anche a livello microscopico!

### Esempio 1-2

Un'automobile di massa  $m = 10^3$  kg viaggia a velocità costante  $v$  lungo una strada. Premesso che la quantità di moto è  $mv$ , con quale indeterminazione essa è nota, se la posizione della macchina è conosciuta con la precisione di 1 mm? Si può mettere in evidenza tale indeterminazione?

Essendo  $\Delta x \approx 10^{-3}$  m, dal Principio di indeterminazione segue:

$$\Delta(mv_x) = \Delta q_x \approx \frac{\hbar}{2 \cdot 10^{-3}} \approx 5 \cdot 10^{-32} \text{ unità SI.}$$

Se l'autovettura viaggia a una velocità  $v = 10$  m/s, la sua quantità di moto risulta  $10^4$ , nelle unità SI: l'errore relativo della quantità di moto è pertanto dell'ordine di  $10^{-36}$ . Nessuna misurazione fisica può raggiungere tale livello di precisione, per cui non sarà possibile mettere in evidenza gli effetti del Principio di indeterminazione.

## APPROFONDIMENTI

## 1-14 Misure di tempo

## 1-14-1 Il secondo

Come già discusso, il tempo è una delle grandezze fondamentali del sistema **SI**. Per ragioni facilmente intuibili, la sua unità di misura venne fissata inizialmente con riferimento alla durata del giorno. Il giorno è definito come l'intervallo di tempo che intercorre fra due successivi passaggi di un stella o del Sole sulla verticale del luogo. Nel primo caso si parla di *giorno sidereo* (o siderale), nel secondo di *giorno solare*. Data la grande distanza delle stelle, la durata del giorno sidereo è costante nel corso dell'anno; ciò non accade per il giorno solare, perché il moto della Terra attorno al Sole cambia nel corso dell'anno (cioè, di una rivoluzione completa attorno al Sole). Di conseguenza, se proprio si vuole utilizzare come periodo di partenza il giorno solare, occorre almeno fare riferimento a un valore medio. Indicando con  $t_1, t_2, \dots, t_n$  le durate di giorni successivi, la durata del giorno solare medio sarebbe calcolabile come

$$\bar{t} = \frac{t_1 + t_2 + \dots + t_n}{n} \equiv \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i.$$

La relazione precedente è infatti la definizione di valor medio di una grandezza di cui siano noti un insieme di valori da essa assunti.

Il secondo fu quindi definito come la durata di  $\frac{1}{60 \cdot 60 \cdot 24} \equiv \frac{1}{86\,400}$  del giorno solare medio.

Con questa definizione dell'unità, il giorno sidereo risulta 86 164,09 s. Benché esso abbia l'importante caratteristica di avere durata costante nel corso dell'anno, pur tuttavia non si presta ad essere prescelto come durata di riferimento. Misurando le giornate in giorni siderei, il Sole non conserverebbe l'importante caratteristica di sorgere e tramontare più o meno agli stessi orari. Scegliendo come unità di tempo un sottomultiplo del giorno solare medio, si utilizza come fenomeno periodico di riferimento il moto della Terra attorno al proprio asse, che era ritenuto stabile nel tempo. Come per l'unità di lunghezza (il metro), anche per il secondo si viene a stabilire un collegamento con una caratteristica del nostro pianeta. In realtà, la durata della rotazione terrestre è soggetta a variazioni di diverso genere, sia periodiche (legate alle stagioni) sia di lungo periodo (la Terra ruota sempre più lentamente). Di conseguenza, il procedimento adottato per definire il secondo non può essere solo quello di calcolare il valor medio del giorno solare su un anno, ma richiede anche la scelta di *un particolare anno*. Così il secondo venne definito imponendo che la durata dell'anno solare nel 1900 fosse di 31 556 925,9747 secondi. L'anno solare (o tropico) corrisponde all'intervallo di tempo compreso fra due equinozi di primavera.

Definito il secondo, si rende necessario disporre di sistemi in grado di contare i secondi. Questa operazione è garantita dagli orologi, i quali svolgono la funzione di registrare il trascorrere del tempo. Limitandoci a orologi di precisione, possiamo disporre essenzialmente di tre tipi di orologi: quelli basati sul pendolo, gli orologi al quarzo e quelli al cesio. I primi utilizzano la proprietà, che stiamo qui enunciando in modo assai semplificato, che un pendolo di lunghezza costante oscilla con un deter-

minato periodo. Se le variazioni di temperatura vengono opportunamente compensate, orologi di precisione a pendolo possono commettere errori di 0,5 ms in 24 ore, cioè di 1 s in alcuni anni di funzionamento. Il campione teorico dell'unità di tempo è il pendolo che batte il secondo. Gli orologi al quarzo si basano sulla proprietà del quarzo di poter essere utilizzato come generatore di segnali elettrici caratterizzati da una notevole stabilità in frequenza. Contando gli impulsi emessi dal sistema e conoscendo la frequenza, cioè il numero di impulsi emessi nell'unità di tempo, è possibile misurare il tempo. Anche gli orologi al quarzo possono raggiungere una precisione corrispondente a circa un secondo ogni tre anni.

L'orologio che permette di raggiungere la massima precisione nelle misure di tempo è quello al cesio. Esso sfrutta una particolare proprietà atomica e raggiunge una precisione che corrisponde all'errore di un secondo in un milione di anni. Questa qualità è legata soprattutto al fatto che il fenomeno che si utilizza è *naturalmente* stabile nel tempo.

Quindi, nel 1967 veniva adottata l'attuale definizione del secondo:

*il secondo è uguale a 9192631 770 volte il periodo della radiazione emessa nella transizione tra due particolari livelli iperfini del  $^{133}\text{Cs}$ .*

La grande stabilità dell'orologio al cesio ha permesso di evidenziare che, a causa del rallentamento della rotazione terrestre, la durata attuale dell'anno solare è più breve di circa un secondo rispetto a quella dell'inizio del secolo.

#### 1-14-2 Misure indirette di tempo

Il metodo più utilizzato per misurare intervalli di tempo è ovviamente quello strumentale; nella maggior parte delle situazioni misuriamo il tempo con un orologio tarato. In molti casi, però, come per esempio nel campo della paleontologia, è importante poter misurare il tempo trascorso a partire da epoche remote. Questo può essere fatto utilizzando metodi indiretti, di cui daremo una breve descrizione.

Il primo, detto metodo del *radiocarbonio*, si basa su una proprietà, comune a tutti gli elementi radioattivi, di subire trasformazioni caratterizzate da un certo intervallo di tempo (par. 1-16). Il  $^{14}\text{C}$  è un isotopo instabile, e quindi radioattivo, del carbonio. Il suo tempo di dimezzamento ( $\tau_{1/2}$ ) è di 5 730 anni. Ciò significa che, se a un certo istante esistono  $N_0$  atomi di  $^{14}\text{C}$ , 5 730 anni dopo essi si saranno ridotti alla metà; dopo altri 5 730 anni a un quarto (metà della metà) e così via di seguito. Il  $^{14}\text{C}$  è presente in Natura in una percentuale nota e stabile, perché si forma continuamente per effetto del bombardamento dell'atmosfera da parte della radiazione cosmica; così le piante contengono la stessa percentuale di  $^{14}\text{C}$  (rispetto al  $^{12}\text{C}$  che è l'isotopo stabile) che si trova in atmosfera. A partire dal momento in cui la pianta muore, in essa si arresta l'arricchimento di  $^{14}\text{C}$ , la cui percentuale comincia a decrescere per effetto del decadimento; così, misurando la percentuale di  $^{14}\text{C}$  è possibile effettuare la datazione del fossile. Con questo metodo si può risalire indietro nel tempo fino a 100 000 anni fa; naturalmente, ipotizzando che in epoche così lontane le percentuali naturali non fossero troppo diverse da quelle attuali.

Lo stesso principio può essere impiegato per la misura del tempo trascorso da epoche ancora più remote, impiegando radioisotopi che hanno tempi di dimezzamento più lunghi. L'uranio ( $^{238}\text{U}$ ), al termine di una lunga catena di decadimenti, si trasforma in  $^{206}\text{Pb}$ , con un tempo di dimezzamento di 4,4 miliardi di anni; il torio si trasforma in  $^{208}\text{Pb}$ , dimezzandosi in 13 miliardi di anni. Altri radioisotopi utilizzati per misure di datazione sono  $^{87}\text{Rb}$  e  $^{40}\text{K}$ . Impiegando di volta in volta l'elemento che meglio si presta (in virtù del valore del suo tempo di dimezzamento), è possibile misurare intervalli di tempo a partire da epoche assai remote. Con metodi basati sull'impiego dei radioisotopi si è potuta stimare l'età della Terra in circa 5,5 miliardi di anni e quella dell'Universo in un periodo dell'ordine di 15 miliardi di anni.

Consideriamo ora un esempio relativo alla misura di *piccoli intervalli di tempo*. I tempi in cui avvengono le reazioni chimiche sono dell'ordine dei picosecondi ( $10^{-12}$  s). Si può arrivare a questa determinazione in maniera concettualmente assai semplice. Occorre disporre di due laser capaci di emettere impulsi luminosi di breve durata. Il primo laser emette un impulso che ha lo scopo di fornire l'energia necessaria per scindere la molecola che s'intende studiare. Il secondo impulso, il cui ritardo rispetto al primo può essere variato, viene utilizzato per saggiare la situazione, cioè per controllare lo stato del sistema sottoposto a bombardamento; per verificare cioè se la scissione delle molecole è ancora in corso o se è già iniziato il processo di ricombinazione.

#### 1-14-3 Misure di tempi di reazione nucleare

I tempi di durata delle reazioni nucleari sono certamente i più brevi fra quelli conosciuti: essi raggiungono anche valori dell'ordine di  $10^{-22}$  s. Ciò vuol dire che essi non possono essere misurati con apparati elettronici, i quali non permettono di scendere al di là di circa  $10^{-12}$  s. In questi casi è necessario utilizzare procedure altamente sofisticate, che variano ampiamente a seconda del fenomeno investigato. Inoltre, tali procedure pongono spesso delicati problemi di principio, legati alla dipendenza da modelli complessi, che impediscono di capire fino in fondo qual è esattamente la grandezza che si misura. Spesso si tratta di fenomeni la cui durata temporale è scandita da leggi di decadimento, come quelle che governano il caso citato del  $^{14}\text{C}$ . Ciò che si misura, allora, è praticamente una **vita media** (par. 1-16).

Le durate di alcune reazioni nucleari possono essere determinate misurando la vita media del nucleo composto che si forma nel processo, mediante una tecnica che sfrutta *effetti direzionali nei cristalli*. Supponiamo dapprima che, nell'interazione delle particelle del fascio con i nuclei atomici di un bersaglio cristallino, i nuclei composti che si formano non si spostino apprezzabilmente dalle posizioni reticolari del cristallo durante il loro tempo di vita. Il moto delle particelle cariche, da essi emesse lungo un piano o un asse del cristallo, viene ostacolato dagli atomi presenti in tali strutture particolarmente dense e in quella direzione si registra un minimo nel conteggio del numero di particelle. Se invece, prima che avvenga l'emissione, i nuclei composti hanno tempo di spostarsi in posizioni intermedie rispetto a quelle reticolari, l'effetto di blocco precedentemente descritto si riduce. Dall'entità osservata di tale attenuazione si può determinare lo spostamento medio s dei nuclei emittenti e, nota la velocità  $v$  con cui essi si muovono, si può risalire alla

loro vita media  $\tau = s/v$ . I tempi misurabili con questa tecnica rientrano in un campo di valori limitato dai rapporti  $a/v$  e  $d/v$ , ove  $a$  è l'ampiezza delle vibrazioni atomiche e  $d$  è la distanza interatomica; poiché le predette distanze variano di un ordine di grandezza attorno a  $10^{-10}$  m, con valori di  $v$  dell'ordine di  $10^7$  m/s sono stati misurati tempi fra  $10^{-16}$  e  $10^{-18}$  s.

## 1-15 Misure di lunghezza

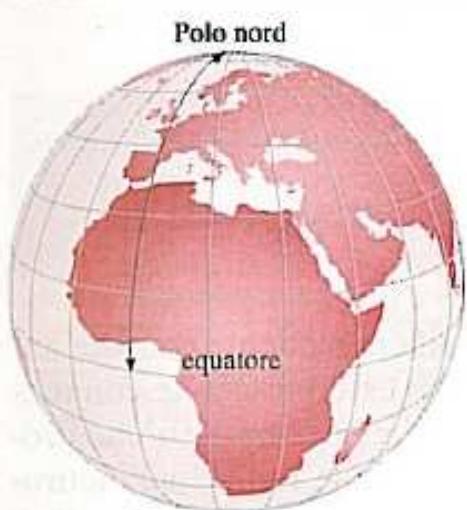
### 1-15-1 Il metro

Nel caso delle misure di lunghezze la definizione operativa è assai semplice ed è già stata ampiamente discussa: si tratta di confrontare la lunghezza incognita con l'unità di misura e contare quante volte quest'ultima è contenuta nella precedente. Tuttavia, essa non è applicabile in molti casi, in particolare quando non è possibile l'accesso diretto alla lunghezza da misurare. I metodi di misura indiretti costituiscono quindi la maggioranza dei modi con cui si misurano le lunghezze. Di alcuni daremo brevi cenni nel seguito di questo paragrafo, dopo aver richiamato la storia del metro.

Nel 1790 il governo della repubblica francese decise di adottare come unità di misura delle lunghezze il *metro*, una lunghezza considerata pari a una parte su dieci milioni di quella di un quarto di meridiano, dal Polo all'Equatore (fig. 1-10). Come meridiano fu scelto quello passante per Parigi. Se si assume che l'intero meridiano misuri esattamente quattro volte la lunghezza del tratto utilizzato, ne consegue che il metro rappresenta  $1/40\,000\,000$  dell'intero meridiano. Di questa lunghezza fu costruito un campione, riportato su un regolo fatto di una particolare lega formata da platino-iridio, che è conservato nel BIPM di Sèvres. Successivamente misure più accurate della lunghezza del meridiano mostrarono che il campione costruito in Francia non corrispondeva esattamente a  $1/10\,000\,000$  del quarto di meridiano passante per Parigi (ne differisce dello 0,023%). Si decise allora, correva l'anno 1889, di abbandonare il riferimento al meridiano e di definire il metro come la distanza fra i due tratti incisi sul campione di Sèvres. La precisione di questo campione (dell'ordine di  $10^{-7}$ ) è ovviamente limitata dalle dimensioni delle incisioni tracciate.

Nella definizione originale di metro possiamo riconoscere due diverse motivazioni o esigenze: da una parte la necessità di dar luogo a un campione di dimensioni ragionevoli per le misurazioni importanti nel commercio dell'epoca; dall'altra una sorta di ispirazione di stampo romantico, consistente nel collegare strettamente l'unità di misura delle lunghezze a una delle caratteristiche del nostro pianeta. Dal campione di Sèvres sono state ottenute molte copie, che si trovano depositate nell'ufficio centrale di pesi e misure dei diversi paesi. In Italia la conservazione del campione è affidata all'Istituto di metrologia Colonnelli di Torino. Dai campioni custoditi nei diversi uffici nazionali vengono poi ottenute ulteriori copie, ovviamente via via meno precise.

Col trascorrere del tempo, crescendo le esigenze di poter disporre agevolmente del campione di misura, il riferimento all'originale di Sèvres apparve sempre più inadeguato. Così nel 1960 la XI Conferenza internazionale di pesi e misure ridefiniva il metro come un multiplo della



**FIGURA 1-10**

Il metro fu inizialmente definito con riferimento al meridiano terrestre passante per Parigi.

lunghezza d'onda di una particolare radiazione:

$$1 \text{ m} = 1\,650\,763,73 \lambda$$

essendo  $\lambda$  la lunghezza d'onda della riga di colore rosso-arancione del cripto ( $^{86}\text{Kr}$ ). Con questa nuova definizione (precisione  $\sim 10^{-8}$ ), che di fatto veniva a sostituire la precedente, il metro diventava direttamente accessibile in qualsiasi laboratorio. Fra l'altro, veniva scongiurato il pericolo che il campione andasse distrutto o venisse trafugato, il che avrebbe reso impossibile il raccordo delle misure successive con quelle eseguite prima della perdita del campione.

Le vicissitudini del metro non erano però terminate, perché nel 1983 la XVII Conferenza internazionale di pesi e misure ridefiniva ancora una volta il metro:

*il metro è la distanza percorsa dalla luce nel vuoto in un intervallo temporale di  $\frac{1}{299\,792\,458}$  secondi.*

Il vantaggio della nuova definizione rispetto alla precedente consiste anzitutto nel fatto che le misure di tempo possono essere eseguite con precisione maggiore di quelle di lunghezza; inoltre, essa si basa su una proprietà importante della luce, e in generale di tutte le radiazioni elettromagnetiche, di propagarsi, nel vuoto, con una velocità costante. Per questa ragione, in un precedente paragrafo, si è affermato che sarebbe più corretto assumere la velocità come grandezza fondamentale e la lunghezza come derivata da quelle di velocità e di tempo. Naturalmente, questo comporterebbe anche la scelta di una sua unità, indipendente da metro e secondo. Ciò è stato già fatto, in campo scientifico, ma non ha ancora trovato spazio nell'ambito dei sistemi SI e CGS; per tale ragione, in questo testo sarà conservata la scelta tradizionale.

### 1-15-2 Metodo della triangolazione

Quand'è disponibile una *base* la cui lunghezza è misurabile, si può utilizzare il metodo della triangolazione. Nella figura 1-11 la distanza da misurare è la lunghezza del segmento CD. Perché il metodo sia utilizzabile occorre che i punti A e B siano direttamente accessibili e che la loro distanza  $l = \overline{AB}$  sia misurabile.

In A si dispone un cannocchiale dotato di goniometro, da puntare inizialmente verso B e successivamente verso C, in modo da determinare l'angolo  $\theta$ ; successivamente, posizionato il cannocchiale in B, si misura l'angolo  $\varphi$  di cui esso deve ruotare per passare dal puntamento di A a quello di C. Il triangolo ABC, essendo noti la base e i due angoli ad essa adiacenti, è completamente noto. In particolare si può ricavare l'altezza  $\overline{CD}$ . Infatti, si ha il seguente sistema lineare nelle due incognite  $x$  e  $y$  che rappresentano le lunghezze di AD e di DB:

$$\begin{cases} x + y = l \\ x \tan \theta = y \tan \varphi \end{cases}$$

La soluzione del sistema permette di trovare  $\overline{CD}$  (come  $x \tan \theta$  oppure come  $y \tan \varphi$ ).

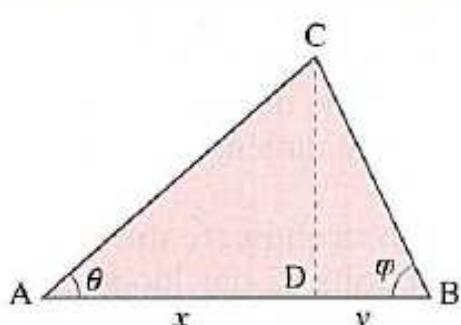


FIGURA 1-11

Schema geometrico per una misurazione di lunghezza con la triangolazione.

La tecnica ora descritta viene utilizzata in Astronomia per determinare le distanze dei corpi celesti dalla Terra (vedi il metodo della parallasse nel paragrafo 1-15-4). Si può dimostrare che la precisione del risultato migliora al crescere della distanza  $\overline{AB}$  e che, a parità di precisione, al crescere di  $\overline{CD}$  dev'essere aumentata la distanza  $\overline{AB}$ . Per grandi distanze si utilizza come base  $AB$  il diametro dell'orbita terrestre. In realtà, senza scomodare l'Astronomia, ciascuno di noi possiede in proprio un esempio di questo metodo. Infatti siamo in grado di apprezzare le distanze perché siamo dotati di due occhi che rappresentano i vertici  $A$  e  $B$  della base. In questo caso, il cervello, in virtù dell'esperienza precedentemente acquisita, esegue automaticamente la stima della lunghezza di  $CD$ . Le persone che hanno visione monoculare, invece, non riescono a valutare le distanze.

### 1-15-3 Metodi basati su misure di tempo

Se si invia un segnale luminoso di breve durata su uno specchio lontano, si raccoglie il raggio che è stato riflesso e si misura l'intervallo di tempo intercorso fra l'emissione dell'impulso luminoso e la sua registrazione, si può determinare la distanza dallo specchio attraverso la semplice relazione [vedi la relazione (1-1)]

$$2l = ct,$$

dove  $l$  è la distanza,  $t$  il tempo misurato e  $c$  la velocità della luce.

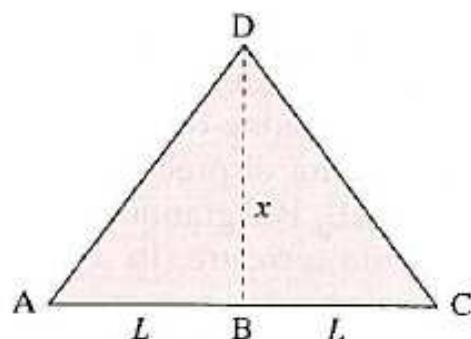
Durante la prima missione sulla Luna, nel 1969, gli astronauti lasciarono sul nostro satellite uno specchio speciale, formato da un certo numero di cubetti retroriflettenti. Grazie a questo sistema, da allora è stato possibile misurare la distanza Terra-Luna con la precisione di alcuni centimetri, inviando, con un laser, impulsi luminosi verso la Luna e misurando il ritardo con cui perviene il segnale riflesso. Il sistema ha permesso di effettuare studi, altrimenti impossibili, sulle caratteristiche dei moti lunari.

Con lo stesso principio funziona il SONAR (acronimo derivato da *sound navigation and ranging*), anche se utilizza onde di natura diversa (quelle sonore). Il SONAR si basa sull'emissione di impulsi sonori in mare e sulla misura del tempo che occorre affinché il segnale sonoro, riflesso dal fondale marino, ritorni nella posizione della sorgente. Conoscendo la velocità del suono nell'acqua si può ottenere la profondità nella posizione esaminata e quindi tracciare la mappa del fondale marino.

Le stesse proprietà di riflessione delle onde sonore vengono utilizzate negli ecografi, per costruire immagini interne di particolari organi del corpo umano. Questi strumenti funzionano con ultrasuoni, cioè con onde che il nostro orecchio non riesce a percepire, perché di frequenza al di sopra della sua soglia di udibilità. Viene sfruttata la proprietà generale delle onde di riflettersi sulle superfici di discontinuità e si misurano i tempi impiegati dall'onda per attraversare due volte il tessuto biologico.

#### Esempio 1-3

Un comando militare utilizza tre microfoni allineati  $A$ ,  $B$  e  $C$ , disposti alla distanza  $L$  l'uno dall'altro, per localizzare la posizione dell'artiglieria nemica. Il colpo sparato da un cannone avversario viene ricevuto per primo dal microfono centrale  $B$  e, successivamente, con lo stesso ritardo  $\Delta t$ , dai due microfoni  $A$  e  $C$ . Indicata con  $x$  la distanza da  $B$  del cannone nemico, e supponendo che sia  $x \gg L$ , trovare un'espressione approssimata della distanza  $x$ , in funzione della velocità  $v$  del suono e del ritardo  $\Delta t$ .



**FIGURA 1-12**  
Situazione geometrica  
dell'esempio 1-3.

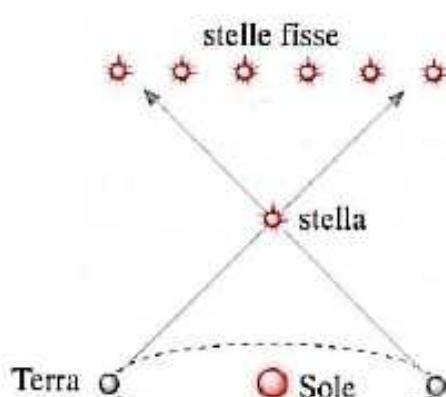
La figura 1-12 rappresenta uno schema della situazione. Dato che il ritardo  $\Delta t$  è lo stesso per i due microfoni in A e C, il punto D, che indica la posizione della batteria nemica, deve trovarsi sulla retta passante per B e perpendicolare ad AC. La differenza di percorso fra i due segnali sonori da D a C e da D a B è data da:

$$\Delta d = \sqrt{x^2 + L^2} - x.$$

Essendo (per ipotesi)  $x \gg L$ , si può approssimare la radice quadrata con uno sviluppo polinomiale (vedi l'Appendice A-5):

$$\sqrt{x^2 + L^2} = x \sqrt{1 + \frac{L^2}{x^2}} \approx x \left(1 + \frac{L^2}{2x^2}\right) \Rightarrow \Delta d \approx \frac{L^2}{2x}.$$

Di conseguenza, essendo  $\Delta d = v \Delta t$ , si ha:  $v \Delta t \approx \frac{L^2}{2x} \Rightarrow x \approx \frac{L^2}{2v \Delta t}$ .



**FIGURA 1-13**  
Schema semplificato della  
parallasse annua.

#### 1-15-4 Metodi per distanze astronomiche

Quando si deve misurare la distanza dalla Terra di una stella non troppo lontana, si utilizza un metodo detto della *parallasse annua* (che utilizza la triangolazione). Esso permette misurazioni con precisioni  $\sim 10\%$  fino a distanze non superiori a circa 70 anni luce (un *anno luce* è la distanza percorsa dalla luce nel vuoto in un anno, pari a  $9,46 \cdot 10^{15}$  m).

Le misurazioni sfruttano il fatto che la posizione di una stella relativamente vicina, così come viene vista dalla Terra, cambia rispetto alle stelle fisse, che sono molto lontane, man mano che la Terra si muove attorno al Sole. Come mostrato in figura 1-13, a distanza di sei mesi la congiungente (Terra-stella vicina) ha direzioni diverse rispetto alle stelle fisse: questo permette di ricavare la distanza della stella da noi, con semplici considerazioni geometriche, utilizzando la conoscenza della distanza Terra-Sole.

Guardando la figura s'intuisce che, quando la distanza della stella diventa troppo grande, l'effetto angolare è molto piccolo e la precisione delle misure decresce rapidamente. In questi casi si utilizzano generalmente metodi che, anziché impiegare la geometria, sfruttano la luminosità delle stelle, attraverso la misurazione di una grandezza chiamata *magnitudine*. Questi metodi richiedono che si riesca a misurare anche la cosiddetta *magnitudine assoluta*, il che può essere realizzato proprio attraverso il *metodo delle Cefeidi*, che serve per determinare le distanze di galassie lontanissime, per le quali il sistema della triangolazione si dimostra inefficiente.

Le Cefeidi sono particolari stelle caratterizzate da un'emissione luminosa variabile nel tempo. Tale fenomeno avviene perché il raggio della stella varia nel tempo, per effetto dell'azione combinata di forze di pressione (che tendono a dilatarla) e di forze gravitazionali (che la comprimono). La variazione periodica del raggio provoca una variazione della superficie che irraggia e, di conseguenza, della luminosità. Ciò permette di ottenere una relazione tra la frequenza con cui varia l'emissione e la luminosità della stella. Così, misurando la frequenza di emissione di una Cefeide se ne può conoscere la magnitudine assoluta che, confrontata con la magnitudine, permette di trovare la distanza.

I metodi di misura delle lunghezze dipendono naturalmente dalla scala delle distanze che si desiderano misurare. Ovviamente le tecniche impiegate per misurare le distanze astronomiche sono completamente differenti da quelle che si usano, per esempio, per determinare le dimensioni degli atomi o dei nuclei.

### 1-15-5 Metodi per dimensioni nucleari

È noto che le esperienze di Rutherford, all'inizio del nostro secolo, hanno stabilito in modo decisivo che la maggior parte della massa dell'atomo è concentrata in un volume di dimensioni lineari molto piccole rispetto alle dimensioni atomiche (che sono dell'ordine di  $10^{-10}$  m). Come si può fare per valutare l'ordine di grandezza delle dimensioni del *nucleo* di un atomo?

Supponiamo di disporre di un foglio di oro molto sottile, da utilizzare come bersaglio sul quale inviare un fascio di opportune particelle (per esempio  $\alpha$ ). Ciascuna di esse (considerata puntiforme), all'interno della lamina d'oro, vede ampie zone (quasi) vuote nelle quali sono localizzati i nuclei atomici, che supponiamo sferici con raggio  $R$ . Ogni particella, che funziona come una sonda, nella maggior parte dei casi può attraversare il foglio di oro senza cambiare apprezzabilmente la propria direzione; gli urti con gli elettroni, che hanno massa molto minore e sono diffusi (quasi) uniformemente su tutto il volume dell'atomo, hanno effetti trascurabili sulla sua direzione. Ciò non è vero, naturalmente, se la particella va a urtare un *nucleo* di oro; in questo caso ci dobbiamo aspettare una brusca variazione di direzione. L'urto avviene se la traiettoria della particella interseca una sezione trasversale (cerchio massimo) della sfera di raggio  $R$ ; l'area di questo cerchio (*sezione d'urto*) è quindi

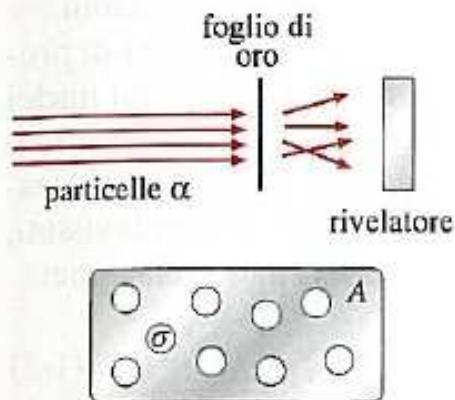
$$\sigma = \pi R^2.$$

Date le piccole dimensioni dei nuclei rispetto a quelle degli atomi, possiamo supporre (in prima approssimazione, se il foglio-bersaglio è molto sottile) che i nuclei che si trovano su piani trasversali diversi abbiano sezioni trasversali che non si sovrappongono; in pratica, possiamo supporre che si trovino tutti su un unico piano perpendicolare alla traiettoria (fig. 1-14). Se  $A$  è l'area del bersaglio investita (uniformemente) dalle particelle, la frazione di particelle che subiscono un urto che comporti un grande cambiamento della loro direzione è data semplicemente dal rapporto fra l'area totale di tutte le sezioni dei nuclei e  $A$ .

Supponiamo che siano noti il numero totale di nuclei nel bersaglio ( $N_t$ ) e il numero di sonde mandategli contro ( $N_s$ ). Ponendo alcuni rivelatori di particelle al di là del bersaglio, contiamo quante particelle sono state (drasticamente) deviate ( $N_d$ ) e quante lo hanno attraversato (quasi) indisturbate ( $N_s - N_d$ ). Sarà dunque

$$\frac{\sigma N_t}{A} = \frac{N_d}{N_s},$$

dalla quale si ricava facilmente  $\sigma$  e quindi  $R$ . L'ordine di grandezza dei valori sperimentali è  $R \sim 10^{-15}$  m (= 1 fm); questa lunghezza, tipica delle dimensioni nucleari, è anche chiamata *fermi*.

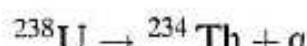


**FIGURA 1-14**  
La sonda vede tanti dischi di raggio  $R$ , non sovrapposti.

## COMPLEMENTI

## 1-16 Legge del decadimento

Il fenomeno della radioattività fu scoperto alla fine del XIX secolo. Esso consiste nella proprietà di alcune sostanze di trasformarsi (a volte spontaneamente, a volte no), emettendo particelle caratteristiche. Queste trasformazioni riguardano il *nucleo* dell'atomo e hanno un andamento comune. Un possibile esempio è quello dell'uranio (progenitore) che si trasforma in torio (discendente), secondo la reazione:



nella quale viene emessa una particella  $\alpha$  (nucleo di  ${}^4\text{He}$ ). Il processo consiste in una fissione (cioè una rottura) del nucleo originario (composto di 238 nucleoni) in due nuclei: uno di 234 e l'altro di 4 nucleoni.

Se in un certo istante iniziale si dispone di una certa quantità di progenitore ( $N_0$  nuclei), col passare del tempo, regolarmente, alcuni nuclei vanno trasformandosi. Non c'è modo di sapere *quali* nuclei subiranno il decadimento, ma si conosce con grande precisione *quanti* nuclei decadrono, al passare del tempo. Il numero di nuclei ancora sopravvissuti, dopo un tempo  $t$  dall'istante iniziale, è rappresentato dalla relazione:

$$N(t) = N_0 e^{-t/\tau}. \quad (1-3)$$

Quest'equazione è chiamata *legge del decadimento radioattivo* e la grandezza  $\tau$  è detta **vita media** del progenitore (il numero irrazionale «e» che vale circa 2,718, rappresenta la base dei logaritmi naturali o neperiani). La vita media è proporzionale a quello che abbiamo chiamato tempo di dimezzamento:

$$\tau = \frac{\tau_{1/2}}{\ln 2}.$$

Evidentemente,  $\tau$  (come  $\tau_{1/2}$ ) fissa la rapidità con cui avviene il decadimento. Si calcola facilmente il numero di nuclei ancora presenti dopo un tempo  $\tau_{1/2}$ :

$$N(\tau_{1/2}) = N_0 e^{-\frac{\tau_{1/2}}{\tau}} = N_0 e^{-\ln 2} = \frac{N_0}{2}.$$

Dopo una vita media, invece, il numero di nuclei sopravvissuti è ridotto di un fattore  $e^{-1}$ ; dopo tre vite medie solo una frazione pari a  $e^{-3} \approx 5\%$  dei nuclei originari non è ancora decaduta (fig. 1-15). Ai fini delle misure di tempi, la relazione (1-3) viene ovviamente invertita:

$$\ln \frac{N}{N_0} = -\frac{t}{\tau} \Rightarrow t = \tau \ln \frac{N_0}{N}.$$

Conoscendo  $\tau$ ,  $N_0$  e  $N$  si ricava il tempo trascorso. Se l'espressione (1-3) rappresenta il numero di nuclei ancora sopravvissuti dopo un tempo  $t$ , a partire da un certo istante iniziale in cui ve n'erano  $N_0$ , allora il numero di quelli decaduti nello stesso intervallo di tempo è

$$m = N_0 - N(t) = N_0(1 - e^{-t/\tau}) \approx N_0 \left(1 - \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)\right) = N_0 \frac{t}{\tau}$$

nella quale è stato utilizzato lo sviluppo in serie di Taylor del termine

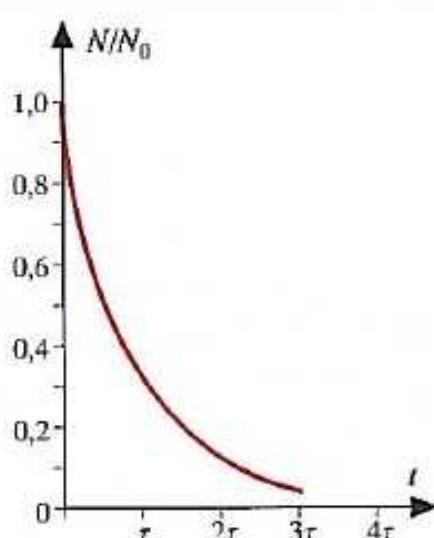


FIGURA 1-15

Rappresentazione grafica della legge del decadimento radioattivo.

esponenziale, arrestato al primo ordine, valido se  $t \ll \tau$  (vedi l'Appendice A-5). Il rapporto fra  $m$  e  $N_0$  rappresenta dunque la probabilità di decadimento di un qualsiasi nucleo, nell'intervallo di tempo  $t$ ; nelle approssimazioni fatte, essa vale  $P(t) = \frac{t}{\tau}$ .

Nel caso del  $^{14}\text{C}$ , discusso nel paragrafo 1-14-2, la probabilità di decadimento in un'ora risulta così dell'ordine di  $10^{-8}$  (cioè, molto piccola).

Vale la pena di sottolineare che la legge di decadimento è certamente fra quelle meglio verificate sperimentalmente, come altrettanto sono le vite medie degli emettitori radioattivi. L'*attività* di una sorgente radioattiva è definita come il numero di disintegrazioni nell'unità di tempo: essa risulta uguale a  $N(t)/\tau$ . Nel sistema SI l'*unità di attività* è il *becquerel* (Bq), corrispondente a una disintegrazione al secondo. Un'altra unità talvolta utilizzata è il *curie* (Ci) ( $1 \text{ Ci} = 3,70 \cdot 10^{10} \text{ Bq}$ ).

## 1-17 Errori

Abbiamo già accennato al fatto che, qualunque sia il metodo utilizzato per misurare una grandezza, ad ogni misurazione è sempre associato un certo livello d'incertezza. Questo è esemplificato dal fatto che, ripetendo più volte la misurazione della stessa grandezza, si ottengono per lo più risultati diversi. Se ammettiamo che esista un *valore vero* della grandezza, vuol dire che i valori misurati differiscono in vario modo da esso. Il modulo di ciascuna differenza è chiamato *errore*:

$$\text{errore} = |\text{valore misurato} - \text{valore vero}|.$$

### 1-17-1 Errori sistematici ed errori casuali

Le ragioni per cui ogni misura è affetta da errori sono molteplici; fra queste richiamiamo:

- Limiti e defezienze strumentali.* Consistono per lo più nel fatto che ogni strumento ha una propria precisione intrinseca, al di sopra della quale non si può andare. Comprendono anche le mancanze dell'operatore (cioè di chi fa la misurazione); ad esempio, egli potrebbe leggere male la posizione di un indice (errore di parallasse). Se misuriamo la lunghezza di un tavolo con un regolo tarato, che sia graduato ogni mezzo centimetro, difficilmente l'estremo del tavolo coinciderà proprio con un uno dei segni. Di necessità il valore verrà interpolato a occhio, con la conseguenza di una qualche incertezza.
- Metodi di misurazioni errati.* Si fa un errore di questo tipo se, per esempio, si vuole ottenere la lunghezza di una strada indirettamente, utilizzando un corpo che non si muove con velocità costante e applicando la relazione

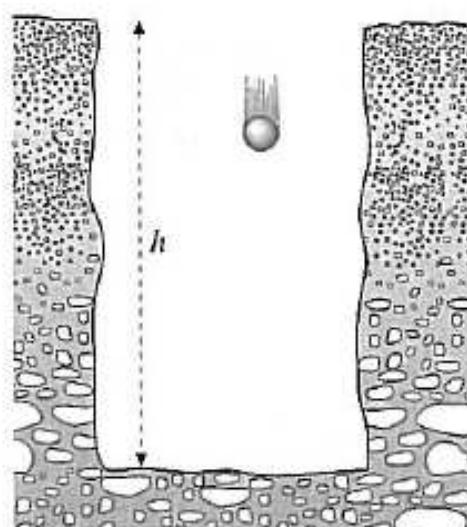
$$L = vt$$

che è un'equazione valida solo se il moto è uniforme.

- Cause accidentali.* Una serie di piccoli o grandi fattori incontrollabili che alterano il risultato della misurazione.

Questi errori vengono solitamente classificati in due tipi:

- Errori sistematici.* Producono effetti sempre nello stesso verso; in li-



**FIGURA 1-16**  
Misurazione indiretta della profondità di un pozzo.

nea di principio possono essere individuati ed eliminati. Una misura che abbia piccoli errori sistematici è detta **accurata**.

**II) Errori casuali.** Sono dovuti a una serie di cause poco controllabili che agiscono con effetti non prevedibili. Nonostante siano casuali non sono «a caso», nel senso che, come vedremo, seguono alcune leggi note che permettono di ricavarne indicazioni. Una misura affetta da piccoli errori casuali è detta **precisa**.

Proviamo a individuare dove possono nascere alcuni di questi errori in un caso concreto. Supponiamo di voler misurare la profondità di un pozzo indirettamente, misurando il tempo impiegato da un sasso a raggiungerne il fondo (fig. 1-16). Le leggi della Fisica ci dicono che la caduta del sasso può essere descritta da una relazione del tipo

$$h = \frac{1}{2} g t^2, \quad (1-4)$$

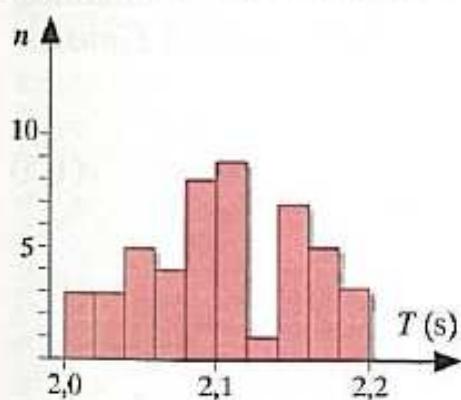
in cui  $g$  è una grandezza nota (l'accelerazione gravitazionale nel luogo considerato, il cui valore è circa  $9,8 \text{ m/s}^2$ ) e  $t$  è il tempo impiegato dal sasso per raggiungere il fondo, partendo dal bordo superiore, da fermo.

Elenchiamo una serie di errori che si possono commettere nell'ottenere in questo modo la misura della profondità ( $h$ ):

- 1) *Bontà dell'orologio.* Se l'orologio funziona male causerà (generalmente) un errore sistematico: se va troppo veloce fornirà sempre valori di  $t$  maggiori del dovuto, e quindi ne ricaveremo anche *sistematicamente* valori di  $h$  più grandi.
- 2) *Partenza e arresto dell'orologio.* È difficile sincronizzare perfettamente la partenza del cronometro con l'istante in cui si lascia cadere il sasso; è difficile sincronizzare l'arresto con l'istante in cui si sente il tonfo del sasso che tocca il fondo. In genere questi errori saranno casuali, in quanto l'azione sul cronometro avverrà a volte in anticipo, a volte in ritardo. Potremmo diminuire questi errori facendo partire il cronometro con una cella fotoelettrica, comandata da un sottile fascio luminoso (come quelle che si utilizzano negli ascensori). Il cronometro partirebbe quando il sasso attraversa il fascio; ma in questo caso il sasso non sarebbe perfettamente fermo alla partenza dell'orologio.
- 3) *La relazione (1-4) è corretta per oggetti che cadono nel vuoto.* In realtà un corpo che cade in aria viene frenato e quindi impiega un tempo maggiore di quello che si avrebbe nel vuoto. Trascurare quest'effetto significa utilizzare sistematicamente nella (1-4) un valore del tempo maggiore del dovuto.
- 4) *Velocità del suono.* Quando il sasso arriva in fondo il nostro orecchio non percepisce istantaneamente il relativo suono; il suono, infatti, impiega un tempo diverso da zero per risalire dal fondo fino al nostro orecchio. Trascurare quest'effetto vuol dire utilizzare sistematicamente nella (1-4) un valore del tempo maggiore del dovuto.
- 5) *Moti irregolari dell'aria.* Anche volendo correggere il tempo di caduta per la presenza dell'aria, il relativo frenamento dipende da una miriade di fattori, difficilmente controllabili: la densità (e quindi la temperatura), le correnti d'aria, e così via. Ripetendo le misurazioni in orari diversi è facile che si ottengano risultati diversi.

Per capire di quanto può influire, ad esempio, l'effetto riportato al punto 4), eseguiamo un calcolo approssimato, supponendo che la profondità

ELEMENTI COMPLEMENTARI

**FIGURA 1-17**

Una possibile distribuzione di valori misurati di un periodo  $T$ .

ELEMENTI COMPLEMENTARI

del pozzo sia 30 m. Assumendo una velocità del suono di 330 m/s, il tempo impiegato dal suono per risalire il pozzo è  $\Delta t \approx 30/330 \approx 0,1$  s, su un tempo totale valutabile, in prima approssimazione, dalla (1-4)

$$t \approx \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 30}{9,8}} \approx 2,5 \text{ s.}$$

Trascurare  $\Delta t$  significa alterare il valore del tempo di una frazione  $\Delta t/t \approx 0,1/2,5 = 0,04 \equiv 4\%$ . Come si vede, l'effetto è nient'affatto trascurabile. Tuttavia questa valutazione rappresenta solo una stima poiché il tempo effettivo di caduta sarà maggiore di 2,5 s per effetto della resistenza dell'aria.

### 1-17-2 Risultato di una misurazione

Per loro stessa natura gli errori sistematici possono essere individuati e quindi eliminati, almeno in linea di principio. Questo non vale per gli errori casuali, che possono solamente essere ridotti scegliendo diversi metodi di misurazione.

Supponiamo dunque di aver eliminato completamente gli errori sistematici e vediamo come influiscono quelli casuali. Per esempio, vogliamo misurare con un cronometro il periodo  $T$  di oscillazione di un pendolo. Ripetendo più volte la misurazione si ottengono valori differenti, la cui distribuzione può essere rappresentata in un istogramma come quello di figura 1-17. In esso ogni rettangolo ha l'altezza uguale al numero di misure ottenute, comprese in un certo intervallo di 0,02 s (che è la larghezza della base del rettangolo). Come indicazione, in figura si vede che sono stati ottenuti 5 valori di  $T$  fra 2,04 e 2,06 s, 8 valori fra 2,08 e 2,10 s e così via.

Ciò che interessa è comprendere in che modo possano essere utilizzate tutte queste misure, che portano a risultati fra loro diversi, per ottenerne più informazioni di quante si abbiano da una sola misura. Anzi tutto: dato che tutti i valori ottenuti hanno, a priori, la stessa credibilità, quale risultato dare di tutte queste misurazioni? Si può dimostrare che il valore più attendibile si ottiene calcolando semplicemente la media delle misure ottenute. Se indichiamo con  $v_1, v_2, \dots, v_N$  i risultati di  $N$  misurazioni, il valore medio  $\bar{v}$  è definito come

$$\bar{v} = \frac{v_1 + v_2 + \dots + v_N}{N} \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n v_i.$$

Ad esso, con procedure che verranno presentate nei prossimi paragrafi, viene assegnato un errore  $\bar{e}$  che fornisce, in qualche modo, l'attendibilità del valore  $\bar{v}$ . Il risultato di una serie di  $N$  misurazioni viene dunque dato nella forma

$$\bar{v} \pm \bar{e} \quad (\text{seguiti dall'unità di misura scelta}).$$

### 1-17-3 Distribuzione di Gauss

È stato già sottolineato che gli errori casuali non si distribuiscono *a caso*. Riprendiamo l'esempio relativo alla misura del periodo  $T$  di oscillazione di un pendolo. Ripetendo più volte la misurazione con un cronometro si ottengono risultati differenti, la cui distribuzione è stata rappresentata nell'istogramma di figura 1-17. Se aumentiamo ulteriormente il numero di misure, la distribuzione assume sempre di più un andamento regolare, come quello di figura 1-18. Se potessimo realizzare un numero altissimo di misurazioni, otterremmo una distribuzione perfettamente simmetrica attorno al valore corrispondente al massimo (fig. 1-19). Questo valore, quello ottenuto più volte, ha probabilmente un maggior grado di attendibilità ed è quello sul quale varrebbe la pena di scommettere. Data la simmetria della distribuzione, il valore cui corrisponde il massimo coincide con il valore medio. Anche quando la distribuzione non è così regolare, per esempio a causa di un numero inferiore di misure, si può dimostrare che il valore più attendibile è ancora quello che si ottiene calcolando la media dei risultati ottenuti.

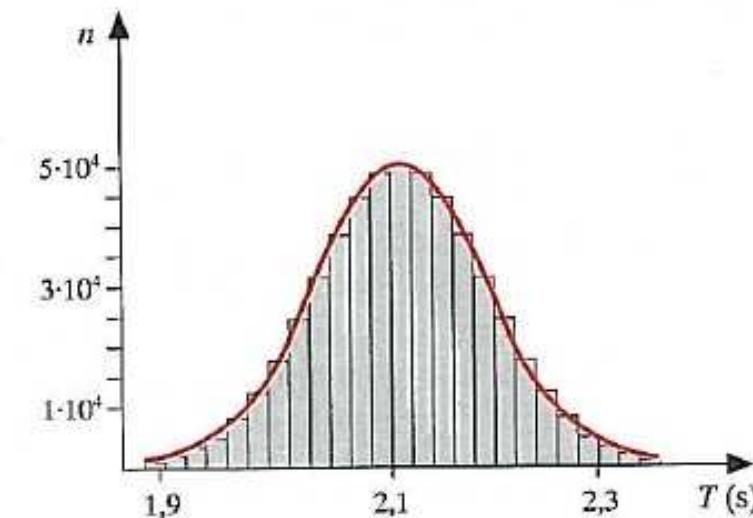
Ai fini della valutazione di  $\bar{v}$  il parametro importante è la larghezza della distribuzione attorno al valore più attendibile ( $\bar{v}$ ). Supponiamo, ad esempio, di aver misurato ripetutamente  $T$  con due procedure di misurazione diverse. Potremmo aver ottenuto due distribuzioni di valori come quelle della figura 1-20 (che sono state normalizzate sul valore massimo). La distribuzione di valori in colore è molto più raggruppata attorno al valore medio; l'altra è più sparpagliata. Nel secondo caso, il fatto che esistano molti valori anche (relativamente) abbastanza distanti da  $\bar{v}$  fa ritenere che quest'ultimo abbia un grado di attendibilità (precisione) inferiore. È per questa ragione che si determina la **precisione** con cui è stato ottenuto  $\bar{v}$  attraverso la larghezza della distribuzione di valori ottenuta. L'andamento di figura 1-19 può essere ricostruito analiticamente; la curva che si ottiene ha espressione (*distribuzione di Gauss*)

$$f(x) = A \cdot e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\varepsilon^2}}, \quad (1-5)$$



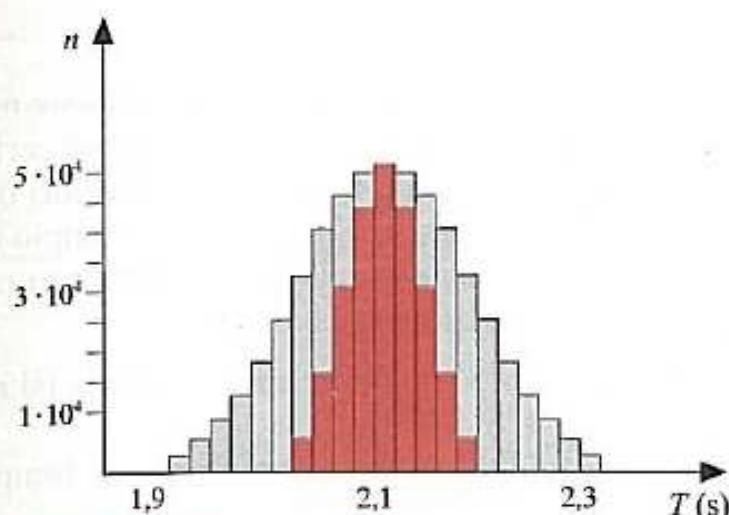
**FIGURA 1-18**

Aumentando il numero delle misure, la distribuzione è più regolare.

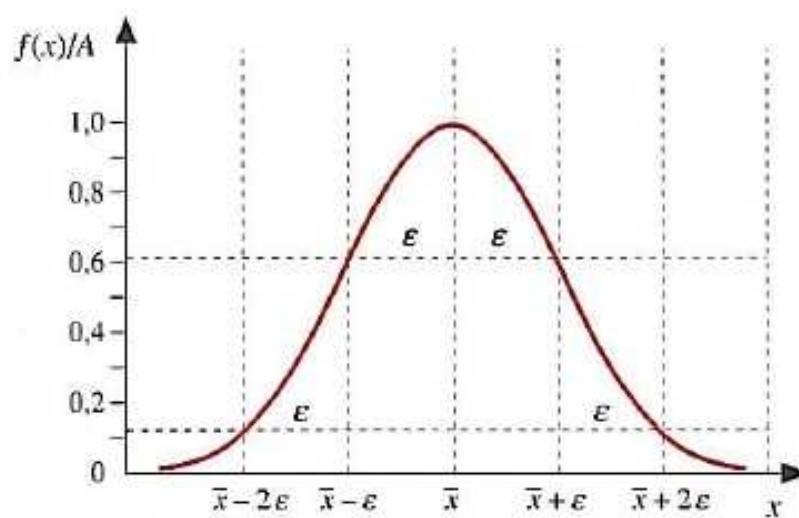


**FIGURA 1-19**

Distribuzione di un grande numero di valori misurati.



**FIGURA 1-20**  
Due diverse distribuzioni di valori misurati.



**FIGURA 1-21**  
Distribuzione normale degli errori casuali.

nella quale la costante  $A$  rappresenta il valore della funzione nel suo massimo, la costante  $\bar{x}$  è il valore dell'ascissa corrispondente al massimo (cioè al valore medio); la costante  $\epsilon$  rappresenta la semilarghezza della curva, valutata laddove la funzione  $f(x)$  vale  $Ae^{-\frac{1}{2}}$  (pari al 61% del valore massimo), come mostrato in figura 1-21.

L'espressione (1-5), che viene anche chiamata *distribuzione normale*, permette di valutare la frazione di misure che sono capitate fra  $(\bar{x} - \epsilon)$  e  $(\bar{x} + \epsilon)$ : è il rapporto fra l'area sottesa dalla curva in detto intervallo delle ascisse e l'area totale. Si trova che questo rapporto vale 0,68. Analogamente si trovano i valori che sono riportati in tabella 1-7.

Il significato di  $\epsilon$  è dunque probabilistico. Possiamo dire che, se facciamo un'ulteriore singola misurazione, abbiamo il 68% di probabilità di trovare un valore della grandezza compreso fra  $(\bar{x} - \epsilon)$  e  $(\bar{x} + \epsilon)$ . In altre parole, abbiamo il 68% di probabilità che una singola misura differisca dal valore medio (che approssima quello vero) al più di  $\epsilon$ . La quantità  $\epsilon$  prende il nome di *errore quadratico medio* (oppure *deviazione standard*). Si vede che praticamente quasi tutte le misure differiscono da  $\bar{x}$  per meno di tre volte l'errore quadratico medio.

Naturalmente, richiederebbe molto tempo eseguire un altissimo numero di misurazioni per ricavare una distribuzione come quella di figura 1-21, dalla quale estrarre  $\epsilon$ . In pratica ciò non è necessario, poiché si dimostra che una stima di  $\epsilon$  è data dalla seguente espressione:

$$\epsilon = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (v_i - \bar{v})^2}, \quad (1-6)$$

nella quale  $N$  è il numero di misure  $v_i$  e  $\bar{v}$  è il loro valor medio.

Dall'errore quadratico medio si può infine ricavare la precisione con cui è stato ottenuto il valore medio  $\bar{v}$ . Questa precisione viene chiamata *errore quadratico medio della media* (o *errore standard*) e vale

$$\bar{\epsilon} = \frac{\epsilon}{\sqrt{N}} \equiv \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (v_i - \bar{v})^2}.$$

La sintesi di questa discussione è che il risultato di una serie di  $N$  misurazioni verrà dato nella forma

$$(\bar{v} \pm \bar{\epsilon}) \text{ unità di misura.}$$

**TABELLA 1-7**  
Distribuzione degli eventi in una gaussiana.

Intervallo	Percentuale di misure
$\bar{x} - \epsilon \div \bar{x} + \epsilon$	68
$\bar{x} - 2\epsilon \div \bar{x} + 2\epsilon$	95
$\bar{x} - 3\epsilon \div \bar{x} + 3\epsilon$	99,7

#### 1-17-4 Distribuzione di Poisson

In Fisica esistono molte situazioni, nelle quali la misurazione consiste nel conteggio del numero di opportuni eventi, che si verificano in un certo intervallo di tempo (o di spazio, o di energia ...): in tal caso, i valori ottenuti non seguono la distribuzione di Gauss. Un importante esempio di questo genere si ha con fenomeni fisici come quelli del decadimento radioattivo, quando si verificano due condizioni concomitanti:

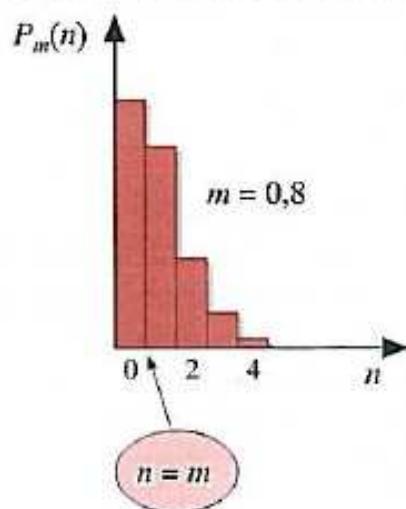
- I) il numero di candidati al decadimento (nuclei) è molto grande (si ricordi che il numero di Avogadro è  $6 \cdot 10^{23}$ !);
- II) la probabilità dell'evento (decadimento), in un intervallo di tempo molto minore della vita media, è molto piccola (par. 1-16).

Abbiamo visto che, sulla base della legge del decadimento (che è nota con enorme precisione), si può conoscere perfettamente il numero medio di eventi ( $m$ ) atteso all'interno di un intervallo di tempo  $\Delta t$  (quando  $\Delta t \ll \tau$ ). Naturalmente, facendo poi una singola misurazione per un tempo  $\Delta t$ , può capitare benissimo di misurare un numero di decadimenti ( $n$ ) diverso da  $m$ . La probabilità di misurarne proprio  $n$  è data dalla legge di distribuzione di Poisson:

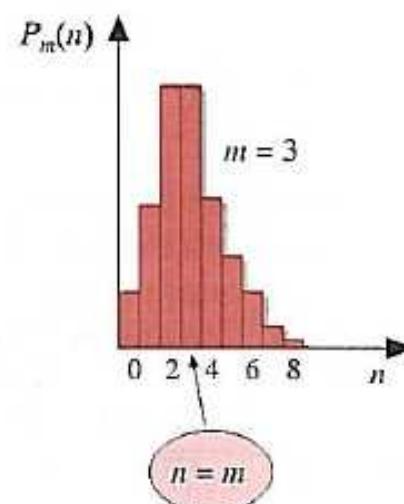
$$P_m(n) = e^{-m} \frac{m^n}{n!} \quad (\text{distribuzione di Poisson}). \quad (1-7)$$

Questa distribuzione è rappresentata nelle figure 1-22, 1-23 e 1-24 per alcuni valori di  $m$ . Ovviamente la distribuzione è discreta: il numero di eventi dev'essere intero (non lo è necessariamente, invece, il valore medio  $m$ ). Inoltre la distribuzione è asimmetrica; tende a diventare simmetrica e gaussiana al crescere di  $m$ . Si può dimostrare che l'errore standard è in questo caso  $\sqrt{m}$ . Questo risultato è molto utile: se infatti si fa una sola misurazione, il singolo valore misurato  $n$  è quello che più ragionevolmente può essere assimilato a  $m$ ; è cioè la migliore stima possibile del valore medio. E dunque, misurando  $n$ , si dà come risultato  $(n \pm \sqrt{n})$ . Ciò permette di conoscere in anticipo quanti eventi si devono contare per avere un errore prefissato. Se, ad esempio, vogliamo ottenere una misura con errore relativo dell'1% dobbiamo misurare fino a contare un numero di eventi per cui

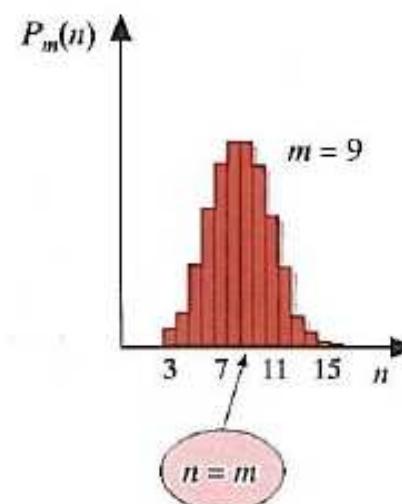
$$\frac{\sqrt{n}}{n} = 0,01 \Rightarrow n \approx 10\,000.$$



**FIGURA 1-22**  
Distribuzione di Poisson con  
valore medio atteso 0,8.



**FIGURA 1-23**  
Distribuzione di Poisson  
con valore medio atteso 3.



**FIGURA 1-24**  
Distribuzione di Poisson con  
valore medio atteso 9.

Quando il conteggio medio è alto, la distribuzione di Poisson tende a quella di Gauss;  $m$  tende al valore centrale di quest'ultima e  $\sqrt{n}$  tende a  $\varepsilon$ .

### 1-17-5 Propagazione degli errori

Nelle misurazioni indirette, gli errori sulle grandezze misurate determinano ovviamente l'errore sulla grandezza da esse ricavata. Se, per esempio, otteniamo una certa lunghezza  $L$  per *differenza* (o *somma*) di altre due ( $l_1$  e  $l_2$ ), allora l'errore ( $\varepsilon_L$ ) su  $L$  dipende dalle incertezze ( $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$ ) con cui si conoscono le due lunghezze misurate. Si trova facilmente che una stima preliminare di  $\varepsilon_L$  può essere ottenuta con la semplice relazione

$$\varepsilon_L \approx \varepsilon_1 + \varepsilon_2.$$

Si osservi che *gli errori si sommano*, anche se fra le due grandezze viene eseguita una sottrazione.

Nel caso discussso di una velocità ottenuta misurando una lunghezza ( $L \pm \varepsilon_L$ ) e un intervallo di tempo ( $\Delta t \pm \varepsilon_t$ ), e utilizzando la relazione  $v = L/\Delta t$ , evidentemente l'errore  $\varepsilon_v$  sulla velocità è funzione di  $\varepsilon_L$  e  $\varepsilon_t$ . In questo caso (*quoziente* oppure *prodotto*) si può ricavare l'ordine di grandezza di  $\varepsilon_v$  mediante la relazione

$$\frac{\varepsilon_v}{v} \approx \frac{\varepsilon_L}{L} + \frac{\varepsilon_t}{\Delta t}.$$

Cioè si ottiene l'errore relativo sommando gli errori relativi.

In realtà, queste due stime degli errori, ottenute sommando gli errori assoluti oppure gli errori relativi, sovrastimano l'errore risultante. Una valutazione più corretta mostra che una relazione dello stesso tipo sussiste per i quadrati degli stessi termini. In generale, se una grandezza  $a = f(x, y, z\dots)$  è funzione di grandezze fra loro indipendenti, e che vengono misurate con errori  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z\dots$ , allora (il quadrato di)  $\varepsilon_a$  si ottiene calcolando:

$$\varepsilon_a^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \varepsilon_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \varepsilon_y^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \varepsilon_z^2 + \dots$$

nella quale figurano le derivate parziali (Appendice A-4) della funzione.

Nel caso precedentemente trattato, si ha:

$$\varepsilon_v^2 = \Delta t^{-2} \varepsilon_L^2 + L^2 \Delta t^{-4} \varepsilon_t^2 \Rightarrow \frac{\varepsilon_v^2}{v^2} = \frac{\varepsilon_L^2}{L^2} + \frac{\varepsilon_t^2}{\Delta t^2}$$

cioè, il quadrato dell'errore relativo su  $v$  si ottiene sommando i quadrati degli errori relativi su  $L$  e  $\Delta t$ .

## 1-18 Cifre significative

Nel corso del capitolo, abbiamo spesso rappresentato i numeri utilizzando la notazione scientifica, cioè attraverso potenze di 10 (si vedano, ad esempio, le tabelle 1-4, 1-5 e 1-6). Tale notazione presenta almeno tre vantaggi:

- i) è formalmente compatta;
- ii) mette immediatamente in evidenza l'ordine di grandezza;
- iii) consente di riconoscere facilmente la precisione con cui è noto il valore numerico.

Relativamente a quest'ultimo punto, ricordiamo anzitutto che l'incertezza con cui una misura è nota viene espressa dal suo errore: ciò influisce sul numero di cifre con cui tale misura dev'essere riportata. Ad esempio, non è corretto esprimere il risultato di una misurazione nella forma  $(4,53786 \pm 0,21)10^3$ ; dall'entità dell'errore, infatti, sappiamo che già la cifra 3 non è sicura, ma può variare (almeno) da 1 a 5: non ha quindi senso presentare le cifre corrispondenti a frazioni trascurabili dell'errore. Sarà quindi opportuno scrivere il valore in oggetto nella forma  $(4,54 \pm 0,21)10^3$  (si noti l'approssimazione!) o, meglio ancora per gli scopi di questo libro, in quella  $(4,5 \pm 0,2)10^3$ .

Le cifre riportate (esclusi gli zeri iniziali, che sono riassorbiti nell'ordine di grandezza, cioè nella potenza di 10) rappresentano dunque le *cifre significative*, cioè quelle note con buona sicurezza (a parte l'ultima). Se affermiamo che il numero di Avogadro è  $N_A = 6,0221367 \cdot 10^{23}$ , intendiamo dire che l'ordine di grandezza è  $10^{23}$  e che l'errore con cui il valore è noto incide sull'ultima cifra (al più sulla penultima). In sostanza, l'ultima cifra significativa dovrebbe essere dello stesso ordine di grandezza dell'errore.

Quando poi si eseguono operazioni sui valori di più grandezze misurate, non bisogna dimenticare che, per la propagazione degli errori, l'errore percentuale sul risultato è non minore di quello relativo a ciascuna grandezza. Di conseguenza, il risultato finale andrà arrotondato in tal senso. Supponiamo, ad esempio, di dover moltiplicare le misure di due grandezze, espresse dai valori 3,56 (per il quale, se l'ultima cifra è incerta, l'errore relativo è almeno  $1/356 = 0,0028 \approx 0,003 \equiv 0,3\%$ ) e 1,2 (errore relativo almeno dell'8%). Una calcolatrice tascabile ci fornirebbe il risultato 4,272: l'errore relativo dell'8% rende già incerta la seconda cifra significativa, per cui è opportuno limitarsi a scrivere 4,3 come risultato finale. In pratica, spesso ciò equivale ad arrotondare il risultato finale al numero di cifre significative che ha la grandezza di partenza con minor numero di cifre significative (nel caso descritto, le due cifre di 1,2).

Ricordiamo infine che, sovente, valori di grandezze note con grande precisione vengono opportunamente arrotondati, per semplificare i calcoli: è scontato che per il numero di Avogadro utilizzeremo per lo più il valore  $N_A \approx 6 \cdot 10^{23}$ .

## RIEPILOGO DI ALCUNE RELAZIONI SIGNIFICATIVE

$$[L^\alpha M^\beta T^\gamma]$$

dimensione di una grandezza fisica;

$$(\bar{v} \pm \bar{\epsilon}) \quad (\text{seguito dall'unità di misura})$$

risultato di una (o più) misurazioni;

$$\bar{v} = \frac{v_1 + v_2 + \dots + v_N}{N} \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_i$$

valore medio di  $N$  misure;

$$\bar{\epsilon} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (v_i - \bar{v})^2}$$

errore standard di  $N$  misurazioni.

$$N(t) = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

legge del decadimento radioattivo.

# CALCOLO VETTORIALE

## Compendio

Oltre alle grandezze fisiche scalari, determinate da un numero (la misura), ne esistono altre che richiedono ulteriori specificazioni. Lo spostamento di un punto è individuato dalla sua entità o modulo (un numero positivo), dalla direzione e dal verso, ed è il prototipo delle grandezze vettoriali. Si distingue fra vettori liberi e vettori applicati. I vettori liberi si rappresentano con segmenti orientati paralleli. Caratteristica dei vettori è la loro algebra, in particolare la definizione di somma, rappresentata dalla regola del parallelogramma. Definita la moltiplicazione per uno scalare, si caratterizza la direzione orientata di un vettore con il suo versore (vettore di modulo unitario adimensionale). Si definiscono due tipi di moltiplicazione fra vettori: il prodotto scalare ha come risultato una grandezza scalare, che dipende dai moduli dei due vettori e dalla loro orientazione relativa, e il prodotto vettoriale, che determina un vettore ad essi perpendicolare e con verso definito dal loro ordine. Un vettore può essere espresso come somma di componenti lungo tre direzioni orientate, mutuamente ortogonali (assi cartesiani): i prodotti scalari del vettore con i versori degli assi sono le componenti cartesiane del vettore. Le operazioni fra vettori possono essere espresse in termini delle loro componenti cartesiane. Per vettori funzioni di una variabile scalare, si estende l'operazione di derivazione rispetto a tale variabile: se la terna di riferimento non dipende dalla variabile considerata, le componenti cartesiane della derivata di un vettore sono le derivate delle componenti del vettore. In generale la derivata di un vettore è la somma di due termini, uno parallelo (collegato alla derivata del modulo) e l'altro perpendicolare al vettore (dipendente dalla derivata del versore). Per un vettore applicato, si definisce il momento rispetto a un polo, come prodotto vettoriale fra lo spostamento dal polo al punto di applicazione e il vettore stesso. Il momento assiale di un vettore è la componente lungo

l'asse del momento rispetto a un polo giacente sull'asse. Ogni punto nello spazio è individuato, rispetto a un'origine di riferimento, dal corrispondente vettore posizione: le sue componenti cartesiane rispetto a una terna di assi ortogonali sono le coordinate cartesiane del punto. Altri sistemi di coordinate curvilinee ortogonali sono quelli delle coordinate polari sferiche e delle coordinate cilindriche. La posizione di un punto in un piano si può caratterizzare con le sue coordinate polari piane: la distanza dall'origine e l'angolo del vettore posizione con l'asse polare di riferimento. Le componenti cartesiane di un vettore cambiano passando da un riferimento all'altro, trasformandosi secondo ben definite leggi. Sulla base delle proprietà di trasformazione per rotazione e traslazione si dà la definizione generale di grandezze scalari, vettoriali e tensoriali. Il comportamento dei vettori per riflessione permette di distinguere fra vettori polari e vettori assiali (o pseudovettori). Elementi caratteristici dei sistemi di vettori applicati sono il vettore risultante e il momento risultante. Si introducono le nozioni di invariante scalare e di asse centrale, e la definizione di equivalenza fra sistemi di vettori. Introdotto l'operatore vettoriale Nabla, si definiscono il gradiente di uno scalare, la divergenza e il rotore di un vettore.

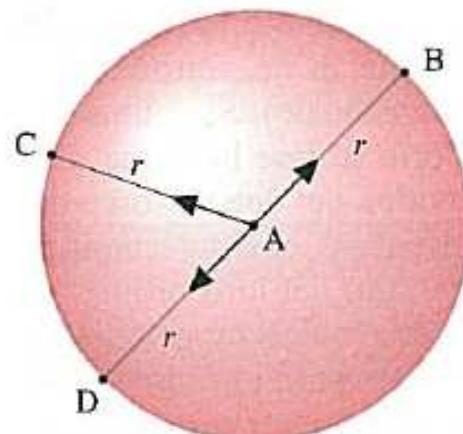
## 2-1 Grandezze scalari e grandezze vettoriali

Nel capitolo precedente abbiamo discusso il motivo per cui ogni grandezza fisica dev'essere misurabile e come sia possibile associarle un valore numerico attraverso una misurazione. In molti casi questo *numero* (con opportuna unità di misura) è sufficiente a definire univocamente la grandezza: questo vale, ad esempio, per il tempo, la massa, la temperatura, la carica elettrica, le quali sono chiamate **grandezze scalari**. Alcune di esse possono assumere solo valori positivi (come la massa), altre valori sia positivi sia negativi (come la carica elettrica).

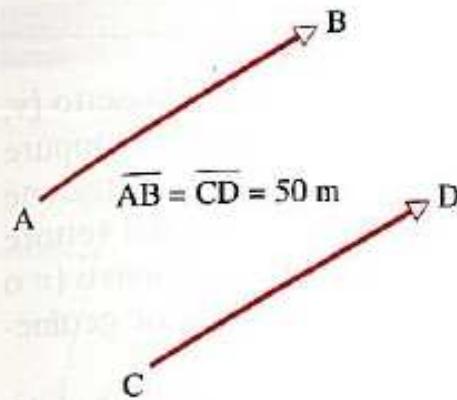
Esistono poi grandezze fisiche le quali, per la loro completa determinazione, richiedono una maggior quantità d'informazioni sperimentali; a molte di queste, in particolare, è necessario associare una direzione e un verso. Fra esse ricordiamo la velocità, l'accelerazione e la forza. Un tipico esempio di grandezze di questo genere, che vengono chiamate **grandezze vettoriali**, risulta di centrale importanza nello studio della Cinematica: lo **spostamento**.

Si consideri il caso di un corpo che si trova in un certo punto A. Se diciamo che esso si è spostato di  $r = 50 \text{ m}$ , non è evidentemente individuata in modo univoco la sua nuova posizione, che può essere uno qualsiasi dei punti della superficie sferica di raggio  $r$  e centro A (fig. 2-1). Non c'interessa, almeno per ora, sapere quale strada il corpo abbia seguito spostandosi; vogliamo solo individuare la sua nuova posizione, *relativamente* alla vecchia. Per definire il fatto che il corpo è finito in B (e non in C, oppure in D, e così via) oltre al valore di  $r$  bisogna indicare la direzione lungo cui lo spostamento è avvenuto e il verso lungo tale direzione (per distinguere B da D, per esempio). Come vedremo più avanti, ciò implica la conoscenza della lunghezza  $r$  e di altri due numeri (in generale due angoli).

Lo spostamento del corpo da A a B è quindi completamente determinato dalla conoscenza della sua entità (un *numero positivo*, detto *intensità*, o *modulo*), dalla *direzione* del segmento che congiunge A con B e da un *verso* lungo tale direzione (che viene anche detta *direzione*



**FIGURA 2-1**  
Tre diversi spostamenti di 50 m, a partire dal punto A.

**FIGURA 2-2**

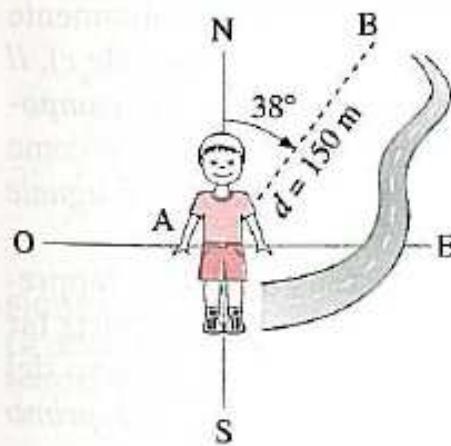
Due spostamenti uguali hanno stessa intensità, stessa direzione e stesso verso.

*orientata*). Esso può essere rappresentato graficamente mediante un segmento orientato come quelli di figura 2-2; A è detta *origine* del vettore, B *estremo libero*. Si faccia attenzione al fatto che lo spostamento è indipendente dalla sua origine. In pratica, esso definisce la posizione relativa dell'estremo libero rispetto a una qualsiasi origine. In figura 2-2 i due vettori spostamento sono uguali, avendo stesso modulo, stessa direzione e stesso verso: essi rappresentano la stessa *variazione di posizione*. In effetti, se ammettiamo che nello spazio fisico sia valida la *geometria euclidea*, possiamo considerare come rappresentativi dello stesso spostamento gli infiniti segmenti orientati che si ottengono da quello che va da A a B, spostandolo parallelamente a se stesso. È per questo che si parla di *vettori liberi*.

Quando invece diventa necessario conoscere il punto specifico di localizzazione del vettore (l'*origine*) si usa la dizione *vettori applicati*. La loro definizione richiede la conoscenza di ulteriori informazioni sperimentali; essenzialmente, le tre coordinate dell'origine. I vettori applicati saranno presi in considerazione solo più avanti. Comunque, quando si fa riferimento alle proprietà vettoriali senza particolari avvertenze, ci si riferisce a vettori liberi.

Nel seguito considereremo il vettore spostamento come un prototipo: ogni vettore dovrà comportarsi allo stesso modo di esso, cioè dovrà soddisfare l'*algebra* che introdurremo fra breve, a fondamento del cosiddetto formalismo vettoriale. Una definizione più precisa e generale delle grandezze scalari, vettoriali e tensoriali sarà discussa nel paragrafo 2-17 degli Approfondimenti. Per il momento osserviamo che la definizione introdotta prescinde dall'uso di un particolare sistema di coordinate. Possiamo quindi aspettarci che l'utilizzazione del formalismo vettoriale permetta di scrivere molte relazioni d'interesse fisico in modo indipendente dal sistema di coordinate; e, in ultima analisi, in forma semplice e compatta. Naturalmente, i limiti di utilizzazione della geometria euclidea nel mondo fisico fissano anche i limiti di applicabilità del formalismo vettoriale.

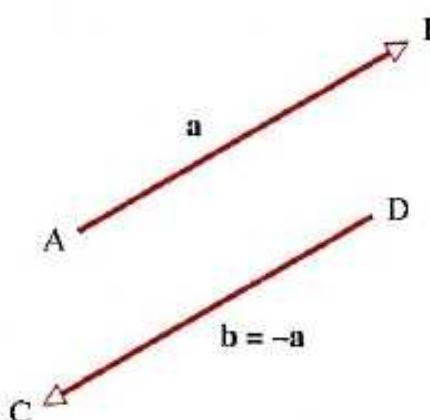
### Esempio 2-1

**FIGURA 2-3**

Lo spostamento del bambino è dal punto A al punto B.

Un bambino, che si trova inizialmente in un punto A, si mette in cammino lungo una strada pianeggiante (fig. 2-3), fino a fermarsi in un punto B. Quanti numeri bisogna conoscere per individuare in modo univoco la nuova posizione del bimbo *relativamente a quella originaria*?

Le informazioni quantitative necessarie sono due. La prima potrebbe essere la distanza  $d$  fra i due punti A e B; la seconda, disponendo ad esempio di una bussola, la direzione geografica. In questo modo, diremo che il punto B si trova a 150 m dal punto A, in direzione 38° (di azimut, cioè verso Nord-Est). Il fatto che siano richiesti due soli numeri, e non tre come nel caso generale, dipende solo dall'assunzione che il bambino si muova su un piano (almeno approssimativamente); in un mondo bidimensionale bastano due numeri per individuare B rispetto ad A.



**FIGURA 2-4**  
a e b sono vettori opposti.

## 2-2 Notazioni e definizioni vettoriali

Le grandezze vettoriali vengono indicate con una lettera in grassetto (**v**, per esempio), o con una lettera sormontata da una freccia ( $\vec{v}$ ), oppure ancora dalla seguente notazione: **AB** (nel caso della rappresentazione grafica con segmenti orientati, come in figura 2-2). Il modulo del vettore è indicato dalle stesse lettere utilizzate per il vettore, ma in corsivo (*v* o  $\underline{AB}$ ), con i segni di valore assoluto ( $|\vec{v}|$ ) oppure con la notazione geometrica  $\overline{AB}$ .

Per definizione due vettori **a** e **b** sono *uguali* se hanno *stesso modulo, stessa direzione e stesso verso*; lo sono, per esempio, i due vettori di figura 2-2 i quali, come detto, sono di fatto due rappresentazioni grafiche equivalenti della stessa grandezza. Scriveremo in questo caso:

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} \quad (\text{vettori uguali}).$$

Due vettori sono invece *opposti* se hanno *stesso modulo, stessa direzione e versi opposti* (figura 2-4):

$$\mathbf{b} = -\mathbf{a} \quad (\text{vettori opposti}).$$

Se **a** viene rappresentato con il segmento orientato **AB**, allora  $-\mathbf{a}$  potrà essere scritto come **BA**.

Per estensione viene definito *vettore nullo* ogni vettore avente modulo nullo:  $v = 0$ ; per esso non è definita alcuna direzione.

## 2-3 Somma e differenza di vettori

La definizione di somma rappresenta il punto centrale dell'algebra vettoriale; per introdurla è opportuno fare riferimento esplicito agli spostamenti. Se un corpo si sposta da A a B, e successivamente da B a C, è intuitivo assumere lo spostamento complessivo **AC**  $\equiv$  **c** come *somma* di **AB**  $\equiv$  **a** e **BC**  $\equiv$  **b**; scriveremo dunque:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}.$$

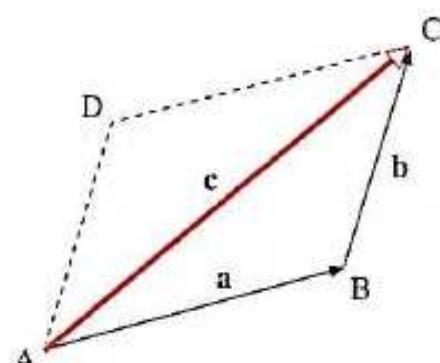
La costruzione geometrica rappresentata in figura 2-5 viene solitamente indicata come *regola del parallelogramma* (di lati **a** e **b**, e diagonale **c**). Il vettore **c** viene anche chiamato (vettore) *risultante* dei (vettori) *componenti* **a** e **b**. Facciamo notare che, come appare dalla figura 2-5 e come dimostrato nell'esempio 2-3, il modulo del vettore *somma* non è *uguale* (in generale) alla *somma dei moduli* dei componenti.

La somma di più vettori si ottiene per facile estensione, ed è rappresentata in figura 2-6. Graficamente, disegnato il primo vettore, basta far coincidere l'origine di ogni vettore successivo con l'estremo libero del precedente; il risultante si ottiene *congiungendo l'origine del primo con l'estremo libero dell'ultimo*. Formalmente possiamo scrivere:

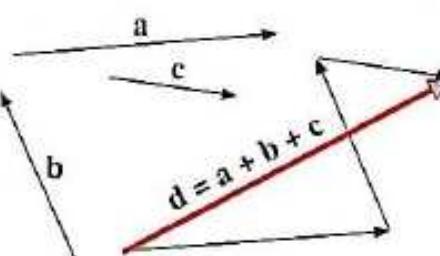
$$\mathbf{d} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}.$$

L'equazione precedente è una relazione fra vettori. Entrambi i termini dell'equazione sono vettori: non avrebbe significato una relazione di *uguaglianza fra un vettore e uno scalare*!

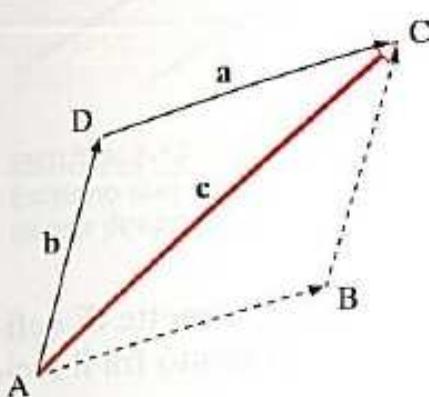
La somma fra vettori gode della *proprietà commutativa* e di quella *associativa*.



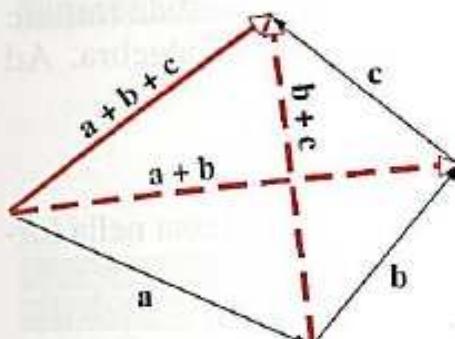
**FIGURA 2-5**  
Il vettore **c** è la somma di **a** e **b**.



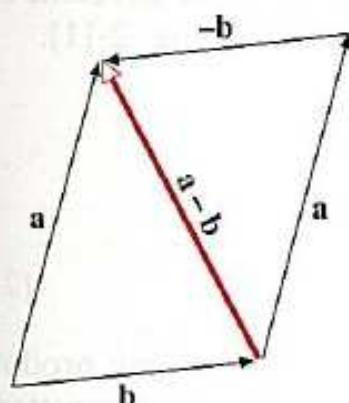
**FIGURA 2-6**  
Somma di più vettori.

**Esempio 2-2****FIGURA 2-7**

La somma dei due vettori  $\mathbf{b}$  e  $\mathbf{a}$  è uguale a quella di figura 2-5.

**FIGURA 2-8**

Rappresentazione grafica della validità della proprietà associativa nella somma di vettori.

**Esempio 2-3****FIGURA 2-9**

La differenza di due vettori è la somma del primo con l'opposto del secondo.

Dimostrare per via grafica che:

- la somma di due vettori gode della proprietà commutativa;
- la somma di tre vettori gode della proprietà associativa.

Per dimostrare la prima proprietà, è sufficiente utilizzare il fatto che i vettori possono essere rappresentati da segmenti orientati paralleli. Così, oltre alla rappresentazione di  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  usata in figura 2-5, possiamo usare per i medesimi vettori la rappresentazione di figura 2-7, nella quale il vettore  $\mathbf{b}$  è rappresentato dal segmento orientato  $\mathbf{AD}$  e il vettore  $\mathbf{a}$  da  $\mathbf{DC}$ . Applicando la regola di somma, troviamo quindi che anche  $(\mathbf{b} + \mathbf{a})$  è rappresentato dallo stesso segmento orientato  $\mathbf{AC}$  che rappresenta  $(\mathbf{a} + \mathbf{b})$ . Di conseguenza  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ . La validità della proprietà associativa richiede che sia:

$$\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}.$$

Che questo sia vero è mostrato semplicemente in figura 2-8, nella quale sono disegnati anche i due vettori intermedi  $(\mathbf{b} + \mathbf{c})$  e  $(\mathbf{a} + \mathbf{b})$ .

Naturalmente, avendo già definito il vettore opposto di un altro, si può definire la **differenza** ( $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ ) come somma di  $\mathbf{a}$  con l'opposto di  $\mathbf{b}$ :

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}).$$

Si vede dalla figura 2-9 che il vettore differenza può essere anche costruito graficamente portando i due vettori  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  ad avere l'origine in comune e unendo l'estremo libero del secondo a quello del primo. Come caso particolare, la differenza fra due vettori uguali (cioè la somma di un vettore e del suo opposto) dà come risultato un vettore nullo:

$$\mathbf{a} - \mathbf{a} = \mathbf{0}.$$

Dimostrare che il modulo del risultante di due (o più) vettori non è mai maggiore della somma dei moduli dei componenti:  $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$

I moduli dei due componenti e del risultante rappresentano le lunghezze dei tre lati di un triangolo, in virtù della regola del parallelogramma (fig. 2-7). Dunque l'affermazione da dimostrare equivale al fatto che in ogni triangolo la lunghezza di qualsiasi lato è minore della somma degli altri due. L'uguaglianza vale, evidentemente, solo nel caso in cui i due vettori componenti abbiano la stessa direzione orientata.

## 2-4 Prodotto di uno scalare per un vettore

Dato un vettore  $\mathbf{v}$  e una grandezza scalare, rappresentata (in opportune unità) da un numero reale  $k$ , il prodotto fra i due

$$\mathbf{a} = k \mathbf{v}$$

è un vettore che ha modulo  $|k|v$ , direzione coincidente con quella di  $\mathbf{v}$  e stesso verso (se  $k$  è positivo) o verso opposto ( $k$  negativo) (fig. 2-10). In particolare, se  $k = -1$  il suo prodotto con  $\mathbf{v}$  dà come risultato il vettore opposto  $-\mathbf{v}$ ; se  $k = 0$  si ottiene un vettore nullo. Tornando dunque alla differenza fra due vettori,  $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ , essa risulta la somma di  $\mathbf{a}$  e dell'opposto di  $\mathbf{b}$ , il quale, a sua volta, è ottenuto moltiplicando  $\mathbf{b}$  per  $-1$ :

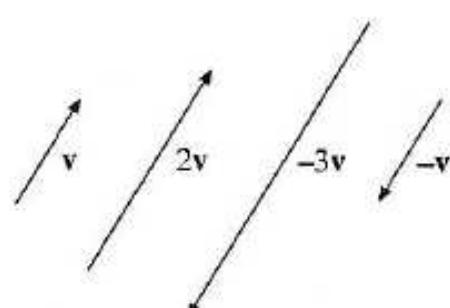


FIGURA 2-10

Esempi di prodotti di uno scalare per un vettore.

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-1) \cdot \mathbf{b}.$$

Si verificano facilmente le seguenti proprietà:

- i)  $\lambda(\mu \mathbf{a}) = (\lambda \mu \mathbf{a}) = \mu(\lambda \mathbf{a}) = \lambda \mu \mathbf{a} = \mu \lambda \mathbf{a}$ ;
- ii)  $(\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{a}$ ;
- iii)  $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}$ ;
- iv)  $\lambda \mathbf{a} = 0 \Rightarrow \lambda = 0$  oppure  $\mathbf{a} = 0$ .

L'operazione di prodotto fra uno scalare e un vettore permette di definire il **quoziente fra un vettore e uno scalare** come il prodotto fra il reciproco dello scalare e il vettore:

$$\frac{\mathbf{a}}{k} = \frac{1}{k} \mathbf{a}.$$

È importante osservare che, nelle equazioni in cui figurano operazioni di somma fra vettori e/o di prodotto fra scalari e vettori, è possibile trattare formalmente i simboli vettoriali con le usuali regole dell'algebra. Ad esempio, l'equazione vettoriale

$$\mathbf{a} + \lambda \mathbf{x} = \mathbf{c}$$

aggiungendo ad ambo i membri il vettore  $-\mathbf{a}$  può essere messa nella forma

$$\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) + \lambda \mathbf{x} = \mathbf{c} + (-\mathbf{a}) \Rightarrow \lambda \mathbf{x} = \mathbf{c} - \mathbf{a}$$

e quindi, dividendo per  $\lambda$ ,

$$\mathbf{x} = \frac{1}{\lambda} (\mathbf{c} - \mathbf{a}).$$

## 2-5 Versori

Il rapporto fra un vettore qualsiasi e il suo modulo è *per definizione* un vettore *adimensionale*, di *modulo unitario*, che ha la stessa direzione e lo stesso verso del vettore; esso prende il nome di **versore** (fig. 2-11).

$$\mathbf{u}_a = \frac{\mathbf{a}}{a}.$$

Di conseguenza si può scrivere:

$$\boxed{\mathbf{a} = a \mathbf{u}_a.} \quad (2-1)$$

In questo modo il vettore viene espresso esplicitamente come prodotto del suo modulo per il suo versore, che sono poi le due parti caratterizzanti il vettore stesso; essendo il versore *adimensionale*, le *dimensioni* della grandezza vettoriale sono attribuite al suo *modulo*. Si faccia attenzione al fatto che mentre un versore è un vettore con modulo unitario, non è vero necessariamente il viceversa. Uno spostamento di un metro, che è rappresentato da un vettore di modulo uno, non è un versore: esso *non è infatti adimensionale!*

Così come un vettore, anche una retta orientata è caratterizzata da un versore  $\mathbf{u}$ ; esso coincide con il versore di un qualsiasi vettore parallelo alla retta stessa e di verso concorde (fig. 2-11). Quindi, tutti i vettori che hanno la direzione di tale retta possono essere espressi nella forma:

$$\mathbf{a} = \lambda \mathbf{u}$$

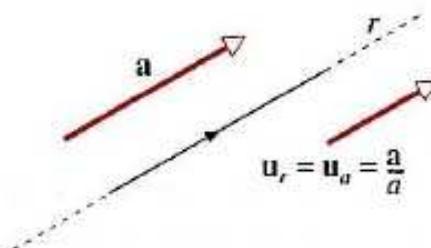


FIGURA 2-11

Versore di un vettore e di una retta orientata.

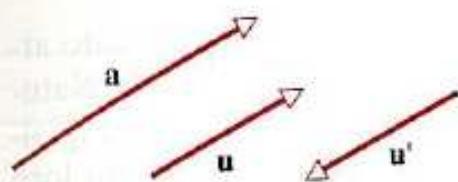


FIGURA 2-12

Esistono due versori che hanno la stessa direzione di  $\mathbf{a}$ .

ove  $\lambda$  è positivo se  $\mathbf{a}$  ha lo stesso verso di  $\mathbf{u}$ , negativo se ha verso opposto. Il numero reale  $\lambda$  viene chiamato *parte scalare* di  $\mathbf{a}$  ed è anche denotato con  $a_{\mathbf{u}}$ , per sottolinearne la dipendenza dal versore  $\mathbf{u}$ . Si ha quindi:

$$\mathbf{a} = a_{\mathbf{u}} \mathbf{u}. \quad (2-2)$$

Se  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{a}$  hanno lo stesso verso,  $a_{\mathbf{u}}$  coincide con il modulo  $a$ ; altrimenti,  $a_{\mathbf{u}}$  è uguale all'opposto del modulo,  $-a$ . È bene tener presente che, se si invierte l'orientazione della retta ( $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{u}' = -\mathbf{u}$ ), la parte scalare di un generico vettore ad essa parallelo cambia di segno (fig. 2-12).

Facciamo notare infine che il *versore*  $\mathbf{u}$  rappresenta una *direzione orientata* ed è quindi lo stesso per tutte le rette parallele a una data retta e orientate allo stesso modo. Dal punto di vista geometrico, esso rappresenta quindi un fascio di rette orientate, parallele ed equiverse.

#### Esempio 2-4

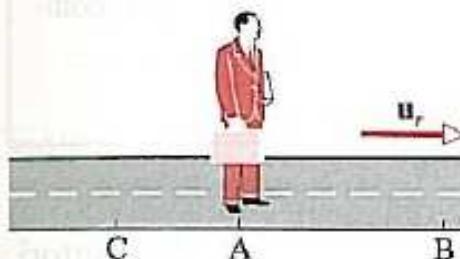


FIGURA 2-13

Un uomo si muove lungo una strada rettilinea, coincidente con una retta orientata  $r$  (fig. 2-13). In un primo tempo egli si sposta dal punto A al punto B, i quali distano di 25 m; in un secondo tempo si sposta dal punto B al punto C, i quali distano di 37 m.

Scrivere i due vettori  $\mathbf{AB}$  e  $\mathbf{BC}$  in termini del versore  $\mathbf{u}_r$  della retta; individuare i moduli e le parti scalari dei due spostamenti.

Lo spostamento  $\mathbf{AB}$  è un vettore parallelo alla retta  $r$ , e può dunque essere espresso in funzione del versore della retta,  $\mathbf{u}_r$ . Poiché il verso di  $\mathbf{AB}$  è concorde con  $\mathbf{u}_r$ , scriveremo:

$$\mathbf{AB} = (+25 \mathbf{u}_r) \text{ m.}$$

Lo spostamento  $\mathbf{BC}$ , invece, pur avendo la stessa direzione, ha verso opposto rispetto a  $\mathbf{u}_r$ ; di conseguenza:

$$\mathbf{BC} = (-37 \mathbf{u}_r) \text{ m.}$$

I due moduli sono, rispettivamente, 25 m e 37 m; le due parti scalari (riferite a  $\mathbf{u}_r$ ) sono 25 m e -37 m.

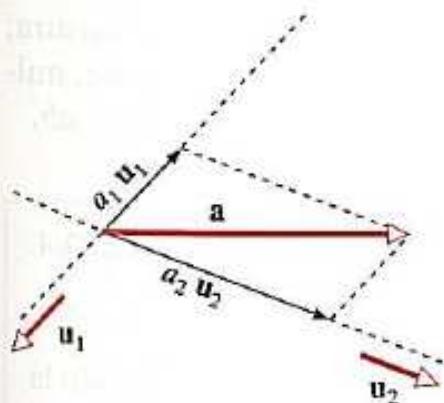
## 2-6 Scomposizione di vettori

Consideriamo due rette orientate (di versori  $\mathbf{u}_1$  e  $\mathbf{u}_2$ ) aventi un punto in comune: sia  $\sigma$  il piano da esse individuato. Un qualsiasi vettore  $\mathbf{a}$ , *complanare con*  $\sigma$ , può essere espresso come somma di due vettori componenti, diretti come le due rette date. Essi possono essere ottenuti facilmente, costruendo il parallelogramma che ha come diagonale  $\mathbf{a}$  (fig. 2-14). Ciascun componente, a sua volta, è esprimibile attraverso la relazione (2-2), per cui:

$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{u}_1 + a_2 \mathbf{u}_2$$

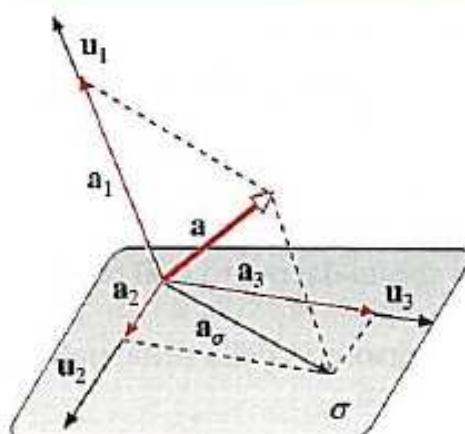
nella quale  $a_1$  e  $a_2$  sono le parti scalari dei componenti. Si osservi che (dato il verso di  $\mathbf{u}_1$  nella figura)  $a_1$  è negativa.

Le parti scalari dei vettori componenti vengono anche chiamate *le componenti* del vettore  $\mathbf{a}$  lungo le direzioni orientate  $\mathbf{u}_1$  e  $\mathbf{u}_2$ . Si faccia attenzione al fatto che, cambiando il genere del sostantivo *componenti*, se ne cambia il significato: *il componente* è un vettore, mentre *la componente* è una grandezza scalare (che, moltiplicata per il corrispondente versore, dà come risultato il componente).

FIGURA 2-14  
Scomposizione di un vettore lungo due direzioni date.

La procedura descritta mostra che un vettore può essere individuato attraverso le sue componenti lungo opportune direzioni orientate. Naturalmente il vettore dato può essere scomposto lungo due direzioni qualsiasi, nel piano  $\sigma$ . In particolare, quando i versori  $\mathbf{u}_1$  e  $\mathbf{u}_2$  sono fra loro perpendicolari, le componenti sono chiamate *ortogonal*. Se invece  $\mathbf{a}$  non giace sul piano  $\sigma$  (caso generale), la scomposizione va eseguita *lungo tre direzioni* non complanari. Vedremo più avanti che spesso queste tre direzioni vengono scelte perpendicolari fra loro.

### Esempio 2-5



**FIGURA 2-15**  
Scomposizione di un vettore lungo tre direzioni non complanari.

Dimostrare che qualsiasi vettore può essere scomposto lungo tre direzioni (non complanari) a piacere.

Conviene anzitutto riferirsi a tre rette che abbiano le direzioni date ( $\mathbf{u}_1$ ,  $\mathbf{u}_2$  e  $\mathbf{u}_3$ ), portandole a passare tutte per l'origine del vettore ( $\mathbf{a}$ ), come in figura 2-15. Poi si può sempre procedere in due tempi. Prima si scomponete il vettore lungo  $\mathbf{u}_1$  e lungo la retta intersezione dei due piani seguenti: quello che contiene  $\mathbf{u}_1$  e  $\mathbf{a}$ , e quello di  $\mathbf{u}_2$  e  $\mathbf{u}_3$  ( $\sigma$ ). Il componente ( $\mathbf{a}_\sigma$ ) può essere poi scomposto lungo  $\mathbf{u}_2$  e  $\mathbf{u}_3$ . Naturalmente:

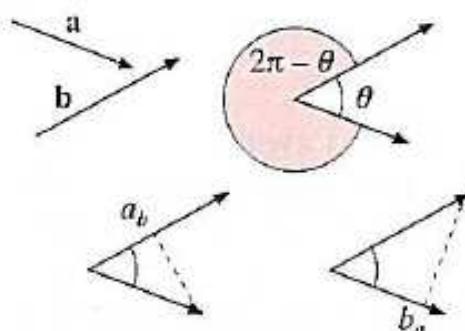
$$\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_\sigma = \mathbf{a}.$$

La scomposizione generale lungo tre direzioni ortogonali risulta più comprensibile utilizzando la nozione di prodotto scalare fra due vettori.

### 2-7 Prodotto scalare

Il prodotto scalare e quello vettoriale (che introdurremo più avanti) costituiscono due modi particolarmente utili per operare con i vettori.

Si definisce *prodotto scalare* (o *prodotto interno*) di due vettori,  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ , la grandezza scalare che si ottiene *moltiplicando fra loro i moduli dei due vettori e il coseno dell'angolo compreso* ( $\theta$ ):



**FIGURA 2-16**  
Alcuni elementi che entrano nel prodotto scalare di due vettori.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos \theta.$$

Come sappiamo, è sempre possibile trasportare i due vettori in modo che abbiano la stessa origine; in questo modo l'angolo è valutabile facilmente. Esso può essere indifferentemente uno dei due angoli formati dai vettori, la cui somma è  $2\pi$  e i cui coseni sono quindi uguali (fig. 2-16).

Il risultato del prodotto scalare di due vettori è dunque una *grandezza scalare*, cioè un numero reale accompagnato da un'unità di misura; numero positivo se l'angolo  $\theta$  è minore di  $\pi/2$ , negativo se maggiore, nullo quando i vettori sono ortogonali; di conseguenza  $-ab \leq \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \leq ab$ .

### Esempio 2-6

Calcolare il prodotto scalare dei due spostamenti descritti nell'esempio 2-4.

I due spostamenti sono  $\mathbf{AB} = (+25 \mathbf{u}_r)$  m e  $\mathbf{BC} = (-37 \mathbf{u}_r)$  m. Applicando la definizione si ha:

$$\mathbf{AB} \cdot \mathbf{BC} = AB BC \cos \pi = 25 \cdot 37 \cdot (-1) = -925 \text{ m}^2.$$

Osserviamo che

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a^2 \geq 0$$

cioè, il prodotto scalare di un vettore con se stesso è uguale al quadrato del suo modulo. In particolare, per un versore  $\mathbf{u}$  si ha

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 1.$$

Valgono, per il prodotto scalare, le seguenti proprietà:

- i) commutativa (simmetrica):  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ ;
- ii) distributiva (bilineare):  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ ;
- iii)  $\mathbf{a} \cdot (k\mathbf{b}) = k\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ .

La ii) è dimostrata nell'esempio 2-7; la verifica delle altre due è immediata.

Il significato geometrico del prodotto scalare è strettamente collegato con l'operazione di *proiezione (ortogonale)* di un vettore su una retta orientata di versore  $\mathbf{u}_r$ . Tale operazione, illustrata in figura 2-17, consiste nel tracciare le perpendicolari dagli estremi del vettore sulla retta data. Si costruisce così un vettore  $\mathbf{a}_{\parallel}$ , parallelo a  $\mathbf{u}_r$ , avente parte scalare ( $a \cos \theta$ ) rispetto a quest'ultimo. Esso si può scrivere nella forma

$$\mathbf{a}_{\parallel} = a_u \mathbf{u}_r$$

ove

$$a_u = \mathbf{a} \cdot \mathbf{u}_r = a \cos \theta$$

viene anche chiamata semplicemente *la proiezione (ortogonale)* di  $\mathbf{a}$  su  $\mathbf{u}_r$ . Per effetto del fattore  $\cos \theta$ , tale proiezione può essere positiva, negativa o nulla.

Il prodotto scalare fra due vettori,  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ , può essere interpretato in termini di proiezioni ortogonali nei modi equivalenti:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a \cos \theta)b = a_b b = a(b \cos \theta) = a b_a$$

nella quale  $a_b$  e  $b_a$  sono le proiezioni di  $\mathbf{a}$  su  $\mathbf{u}_b$  e di  $\mathbf{b}$  su  $\mathbf{u}_a$ , rispettivamente (fig. 2-16); e dunque

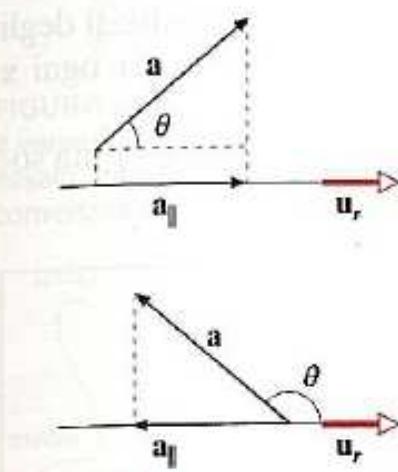
$$a_b = \mathbf{a} \cdot \mathbf{u}_b; \quad b_a = \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}_a.$$

In conclusione, si può considerare il prodotto scalare di due vettori come *prodotto del modulo di uno qualsiasi di essi per la proiezione ortogonale dell'altro sul primo*.

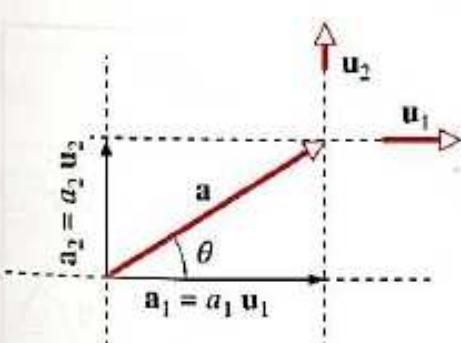
Ora siamo in grado di dare una forma esplicita alla scomposizione di un vettore attraverso le proiezioni ortogonali su due direzioni  $\mathbf{u}_1$  e  $\mathbf{u}_2$  fra loro ortogonali. La figura 2-18 mostra che  $\mathbf{a}$  risulta appunto somma dei componenti ortogonali  $\mathbf{a}_1$  e  $\mathbf{a}_2$ , paralleli rispettivamente a  $\mathbf{u}_1$  e  $\mathbf{u}_2$ , ottenuti in tale modo:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 = a_1 \mathbf{u}_1 + a_2 \mathbf{u}_2 = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}_1) \mathbf{u}_1 + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}_2) \mathbf{u}_2. \quad (2-3)$$

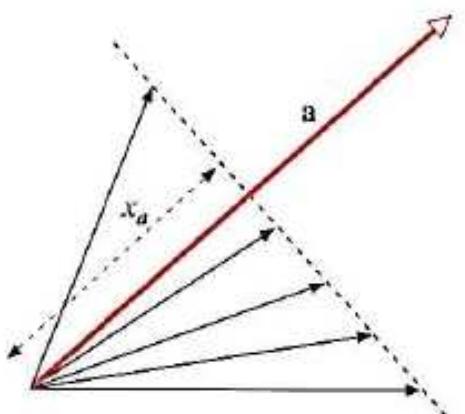
Se ci si riferisce al versore  $\mathbf{u}_1$ , il vettore  $a_1 \mathbf{u}_1$  è detto *componente parallelo*  $\mathbf{a}_{\parallel}$  e il vettore  $a_2 \mathbf{u}_2$  *componente trasverso*  $\mathbf{a}_{\perp}$ ; e viceversa, se ci si riferisce a  $\mathbf{u}_2$ . Si faccia attenzione che  $a_1$  e  $a_2$  sono le parti scalari, e non i moduli, dei due vettori! I quadrati di tali grandezze sono tuttavia uguali al quadrato del modulo dei vettori corrispondenti; infatti, applicando il *teorema di Pitagora* ai triangoli rettangoli della figura 2-18, si trova l'im-



**FIGURA 2-17**  
Proiezione ortogonale di un vettore su una retta orientata.



**FIGURA 2-18**  
Componenti ortogonali (piane) di un vettore.



**FIGURA 2-19**  
Tutti i vettori disegnati in figura  
hanno lo stesso prodotto scalare  
con  $\mathbf{a}$ .

portante relazione

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2. \quad (2-4)$$

Nell'esempio 2-8 la relazione (2-4) è invece ottenuta utilizzando direttamente le proprietà del prodotto scalare.

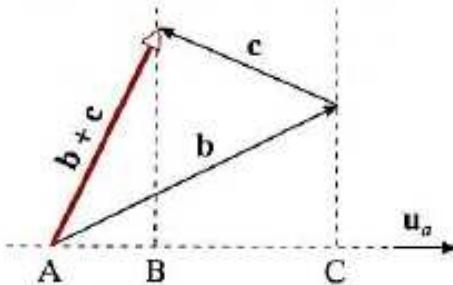
L'operazione inversa del prodotto scalare non dà un risultato univoco: dati  $\mathbf{a}$  e  $k$  non è determinato un solo vettore  $\mathbf{x}$  tale che sia

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = k.$$

La figura 2-19 mostra che il prodotto scalare di  $\mathbf{a}$  con uno qualsiasi degli altri vettori dà sempre lo stesso risultato: si ha lo stesso  $k$  per ogni  $\mathbf{x}$  avente la stessa proiezione ortogonale  $x_a$ .

Analogamente **non è definito** il rapporto fra due vettori  $\left(\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}\right)$  ma solo quello fra i loro moduli ( $a/b$ ).

### Esempio 2-7



**FIGURA 2-20**

Ricavare la proprietà distributiva del prodotto scalare:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}.$$

Se chiamiamo  $\mathbf{u}_a$  il versore di  $\mathbf{a}$ , in pratica dobbiamo dimostrare che (fig. 2-20):

$$a[(\mathbf{b} + \mathbf{c}) \cdot \mathbf{u}_a] = ab_a + ac_a, \text{ cioè che } (\mathbf{b} + \mathbf{c}) \cdot \mathbf{u}_a = b_a + c_a.$$

Stante il citato legame fra l'operazione di prodotto scalare e quella di proiezione ortogonale, la relazione è evidentemente verificata; infatti, guardando alla figura 2-20 e notando che nel caso mostrato la proiezione  $c_a$  è negativa, essa diventa:

$$\overline{AB} = \overline{AC} - \overline{BC}.$$

### Esempio 2-8

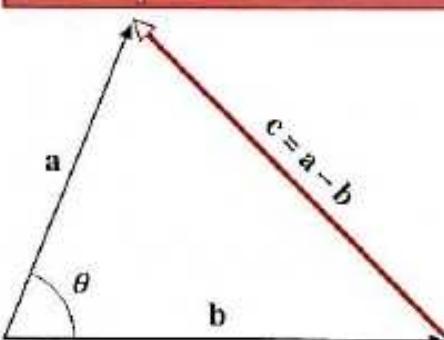
Ricavare il teorema di Pitagora, utilizzando le proprietà del prodotto scalare.

Possiamo calcolare il quadrato del modulo di  $\mathbf{a}$  facendone il prodotto scalare con se stesso; dopodiché basterà esprimere  $a$  in funzione dei suoi componenti ortogonali (fig. 2-18) e utilizzare la proprietà distributiva:

$$a^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) \cdot (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) = (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1) + (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2) + (\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_1) + (\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_2) = a_1^2 + a_2^2$$

nella quale si è utilizzato il fatto che vettori fra loro ortogonali hanno prodotto scalare nullo.

### Esempio 2-9



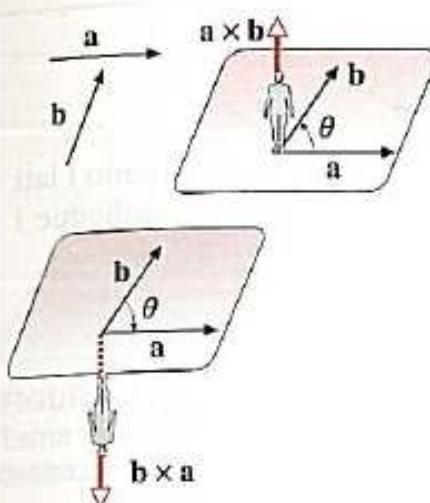
**FIGURA 2-21**

Ricavare la legge del coseno (di Carnot) per un triangolo qualsiasi.

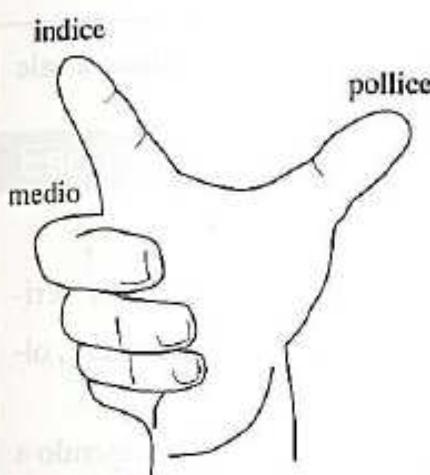
Consideriamo la differenza di due vettori (fig. 2-21):  $\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$ .

$$\begin{aligned} c^2 &= (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = a^2 + b^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}) = \\ &= a^2 + b^2 - 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = a^2 + b^2 - 2ab \cos\theta \end{aligned}$$

come volevasi dimostrare. Naturalmente, il teorema di Pitagora è un caso particolare, quando  $\theta = \pi/2$ .



**FIGURA 2-22**  
Il verso del prodotto vettoriale è fissato attraverso una convenzione.



**FIGURA 2-23**  
Convenzione della mano destra.

### Esempio 2-10

Va osservato che questa definizione fissa un verso convenzionale per  $\mathbf{c}$ ; la convenzione è detta *della mano destra*. In effetti la chiusura della mano destra avviene in senso antiorario se vista da un osservatore disposto lungo il pollice; si può dunque affermare che il verso di  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  è quello assunto dal pollice della mano destra (aperta), quando l'indice ha direzione e verso di  $\mathbf{a}$  e il medio quelli di  $\mathbf{b}$  (fig. 2-23). Come vedremo nel paragrafo 2-17 degli Approfondimenti, il fatto di adottare una convenzione determina che  $\mathbf{c}$  debba essere considerato, per certi aspetti, un vettore particolare (*pseudovettore*).

Si accetti, come dato di fatto, la proprietà per cui il prodotto vettoriale di due vettori è perpendicolare al piano da essi individuato. Perché nell'espressione del modulo compare il seno dell'angolo da loro formato (e non, per esempio, il coseno)?

Detto  $\theta$  l'angolo formato dai due vettori, esistono due soli casi in cui essi non definiscono alcun piano: quando  $\theta = \pi$  oppure quando  $\theta = 0$ . In tali condizioni il risultato del prodotto non può che essere nullo. Ciò si può ottenere introducendo nell'espressione del modulo il fattore  $\sin \theta$ .

La definizione di prodotto vettoriale implica che:

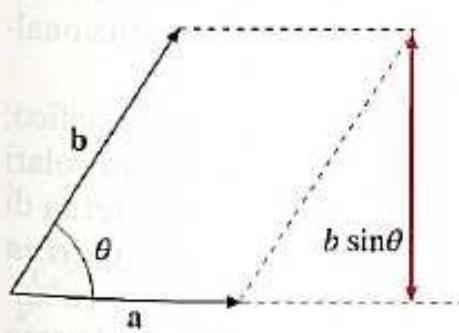
$$\mathbf{a} \times \mathbf{a} = 0; \quad \mathbf{a} \times (\lambda \mathbf{a}) = 0;$$

cioè, che il prodotto di due vettori paralleli sia nullo.

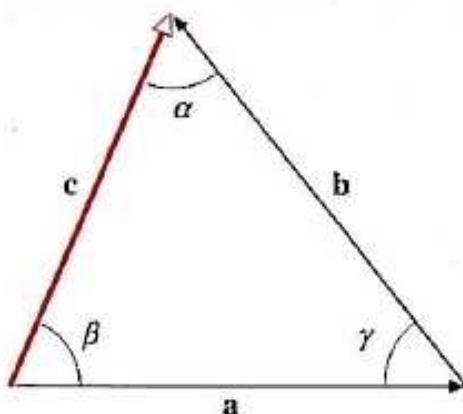
Valgono, per il prodotto vettoriale, le seguenti proprietà:

- i) anticommutativa:  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$  (fig. 2-22);
- ii) distributiva:  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$ ;
- iii)  $\mathbf{a} \times (\lambda \mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ .

Si deduce facilmente dalla definizione che il modulo del prodotto vettoriale ( $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ) è uguale all'area del parallelogramma individuato da  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  (fig. 2-24).



**FIGURA 2-24**

**Esempio 2-11**

**FIGURA 2-25**  
La legge dei seni nei triangoli qualsiasi.

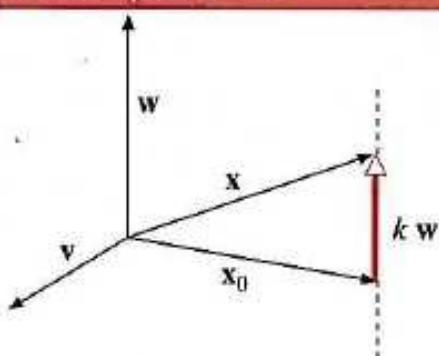
Ricavare la legge dei seni valida per un triangolo qualsiasi.

Abbiamo visto che nella relazione  $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$  i tre vettori rappresentano i lati di un triangolo (fig. 2-25). Moltiplichiamo vettorialmente  $\mathbf{a}$  per ambedue i membri di quest'uguaglianza:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{a} + \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

da cui  $a c \sin \beta = a b \sin(\pi - \gamma) = a b \sin \gamma \Rightarrow \frac{c}{\sin \gamma} = \frac{b}{\sin \beta}$ ,

che è la legge che volevamo dimostrare.

**Esempio 2-12**

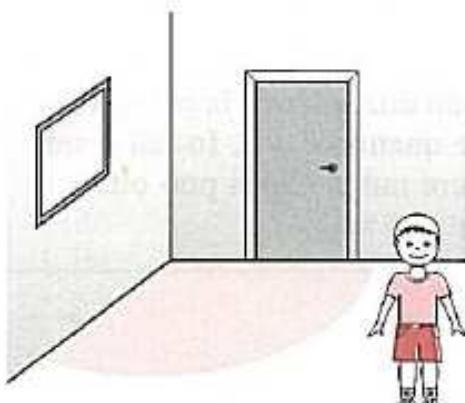
**FIGURA 2-26**  
Risultato della divisione vettoriale.

Dati due vettori non nulli,  $\mathbf{w}$  e  $\mathbf{v}$ , fra loro *ortogonali*, trovare il vettore  $\mathbf{x}$  tale che (*divisione vettoriale*):

$$\mathbf{x} \times \mathbf{w} = \mathbf{v}.$$

Una prima possibile soluzione è data dal vettore  $\mathbf{x}_0 = \frac{\mathbf{w} \times \mathbf{v}}{\mathbf{w}^2}$ , come si verifica facilmente con l'operazione  $\mathbf{x}_0 \times \mathbf{w}$ ; esso è un vettore perpendicolare, oltre che a  $\mathbf{v}$ , anche a  $\mathbf{w}$ .

Ma saranno soluzioni anche tutti i vettori che si ottengono aggiungendo a  $\mathbf{x}_0$  un qualsiasi vettore diretto come  $\mathbf{w}$ , ottenendo pertanto:  $\mathbf{x} = \frac{\mathbf{w} \times \mathbf{v}}{\mathbf{w}^2} + k \mathbf{w}$  (con  $k$  reale qualsiasi; figura 2-26).

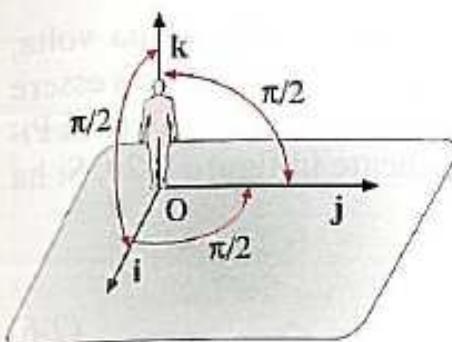
**2-9 Rappresentazione cartesiana ortogonale**

**FIGURA 2-27**  
Un sistema cartesiano ortogonale.

Abbiamo sottolineato la particolare semplicità e l'eleganza della rappresentazione vettoriale nello studio delle leggi della Fisica. In molti problemi specifici, però, è utile rappresentare questi vettori scegliendo un particolare sistema di coordinate. La scelta del tipo di sistema non è affatto univoca, ma è dettata di volta in volta soprattutto da criteri di opportunità e semplicità.

Uno dei sistemi di coordinate più utilizzati è senza dubbio il sistema cartesiano ortogonale; esso richiama alla mente le rette che coincidono con gli spigoli che convergono in un vertice della stanza in cui ci troviamo (fig. 2-27). In questo caso un vettore  $\mathbf{v}$  viene rappresentato attraverso le sue componenti su tre rette orientate, passanti per uno stesso punto O, e perpendicolari fra loro: le tre rette vengono chiamate, convenzionalmente,  $x$ ,  $y$  e  $z$ , e i loro versori (rispettivamente)  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$ .

Una *retta orientata* sulla quale sia stato definito un punto specifico, detto *origine*, prende il nome di *asse*. Dunque le tre rette perpendicolari di figura 2-28, di versori  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  e  $\mathbf{k}$ , possono essere considerate una terna di assi perpendicolari, con l'origine comune O: essa prende il nome di *terna cartesiana ortogonale*. Questa terna è definita come terna destra (o antioraria). Con ciò s'intende che ponendosi lungo il terzo asse  $\mathbf{k}$  (nel verso positivo), con ai piedi il piano degli altri due ( $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ), per portare il primo



**FIGURA 2-28**  
Terna cartesiana ortogonale,  
destra.

sul secondo lo si deve far ruotare di  $\pi/2$  in verso antiorario. L'ordine è ciclico:  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  oppure  $(\mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{i})$  oppure  $(\mathbf{k}, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ . In alternativa, si possono disporre fra loro perpendicolari tre dita della mano destra, pollice indice e medio, e stabilire la seguente corrispondenza:  $\mathbf{i} \Leftrightarrow$  pollice,  $\mathbf{j} \Leftrightarrow$  indice,  $\mathbf{k} \Leftrightarrow$  medio (si veda la convenzione per il prodotto vettoriale). La stessa regola non vale per la mano sinistra (le due mani, infatti, sono ciascuna l'*immagine speculare* dell'altra e non sono sovrapponibili, come si può facilmente verificare ponendo il palmo dell'una sul dorso dell'altra).

Poiché i tre versori  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  sono reciprocamente perpendicolari, valgono per essi le seguenti relazioni:

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0 \quad \text{e} \quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1;$$

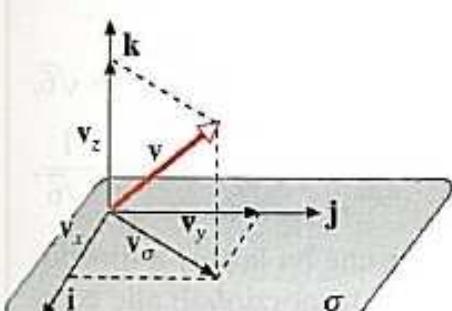
$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}; \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}; \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \quad \text{e} \quad \mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0.$$

Si noti che, nei prodotti vettoriali fra versori diversi sopra riportati, i versori sono disposti nell'ordine  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  (o loro permutazione ciclica), altrimenti interviene un cambiamento di segno.

### Esempio 2-13

Dimostrare le relazioni relative al prodotto vettoriale fra versori degli assi cartesiani ortogonali (si ricordi che i versori hanno modulo unitario).

Quando i due versori coincidono, il loro prodotto vettoriale è nullo essendo  $\sin \theta = 0$ ; altrimenti i due versori sono ortogonali, per cui, essendo  $\sin \theta = 1$ , il modulo del prodotto vettoriale è unitario. In questo caso, allora, il risultato è un versore, che è perpendicolare al piano dei versori considerati. Per esempio, nel caso  $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$  il versore risultante potrà essere  $\mathbf{k}$  oppure  $-\mathbf{k}$ ; utilizzando la regola della mano destra verificheremo che il risultato giusto è  $\mathbf{k}$ . Se nella relazione  $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$  permutiamo ciclicamente i simboli, facendo rientrare dalla parte opposta il simbolo che esce da una delle due parti, otteniamo tutte le relazioni valide per il prodotto vettoriale fra versori ortogonali.



**FIGURA 2-29**  
Scomposizione di un vettore lungo gli assi di una terna cartesiana ortogonale.

Seguendo la procedura descritta nell'esempio 2-5, possiamo scomporre  $\mathbf{v}$  lungo le direzioni dei tre assi cartesiani. Dapprima scomponiamo  $\mathbf{v}$  nei due vettori, fra loro perpendicolari,  $\mathbf{v}_z$  e  $\mathbf{v}_\sigma$  (fig. 2-29); successivamente, decomponiamo  $\mathbf{v}_\sigma$  nei due vettori  $\mathbf{v}_x$  e  $\mathbf{v}_y$  (anch'essi perpendicolari fra loro). Otteniamo così:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_x + \mathbf{v}_y + \mathbf{v}_z = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k}.$$

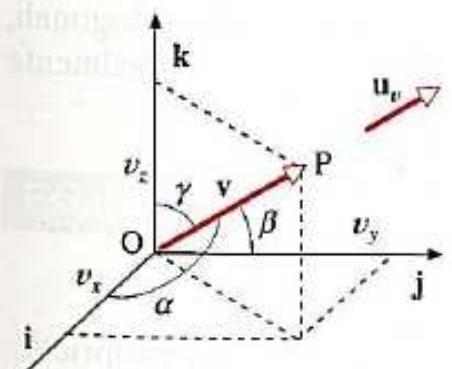
Se moltiplichiamo scalarmente la precedente equazione per  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  e  $\mathbf{k}$ , otteniamo anche

$$\begin{cases} v_x = \mathbf{v} \cdot \mathbf{i} = v \cos \alpha \\ v_y = \mathbf{v} \cdot \mathbf{j} = v \cos \beta \\ v_z = \mathbf{v} \cdot \mathbf{k} = v \cos \gamma \end{cases} \quad (2-5)$$

ove  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  sono gli angoli che  $\mathbf{v}$  forma con gli assi cartesiani (fig. 2-30).

### 2-10 Equivalenza fra le rappresentazioni vettoriali

Le relazioni (2-5) mostrano come sia possibile ottenere le componenti cartesiane di un vettore, qualora ne siano noti il modulo e i coseni degli angoli formati con i tre assi (**coseni direttori** della retta cui appartiene il vettore).



**FIGURA 2-30**  
Rappresentazioni di un vettore.

La conoscenza delle componenti cartesiane di un vettore, a sua volta, permette di determinarne modulo, direzione e verso. Il primo può essere facilmente calcolato mediante successive applicazioni del teorema di Pitagora [relazione (2-4)] alle decomposizioni indicate in figura 2-29. Si ha così  $v^2 = v_\sigma^2 + v_z^2 = (v_x^2 + v_y^2) + v_z^2$ , da cui

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \quad (2-6)$$

D'altra parte, la direzione orientata del vettore  $\mathbf{v}$  è rappresentata dal versore  $\mathbf{u}_v = \mathbf{v}/v$  che, per le (2-5), ha come componenti cartesiane proprio i suddetti coseni direttori. Si ha cioè

$$\mathbf{u}_v = \cos\alpha \mathbf{i} + \cos\beta \mathbf{j} + \cos\gamma \mathbf{k}.$$

Utilizzando ancora le (2-5) e (2-6) si trovano quindi le espressioni dei coseni direttori in funzione delle componenti cartesiane di  $\mathbf{v}$ :

$$\cos\alpha = \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}; \cos\beta = \frac{v_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}; \cos\gamma = \frac{v_z}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}$$

Da queste si ricava facilmente la relazione

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = u_v = 1.$$

Abbiamo così mostrato che un vettore può essere descritto, in modo equivalente, o in termini di componenti cartesiane ortogonali o tramite modulo, direzione e verso.

### Esempio 2-14

Un vettore  $\mathbf{a}$  è noto attraverso le sue componenti  $\mathbf{a} \equiv (2, -1, 1)$ . Trovare le componenti del versore di  $\mathbf{a}$ .

Calcoliamo anzitutto il modulo di  $\mathbf{a}$ , che risulterà  $a = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{6}$ .

Successivamente possiamo ottenere:  $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{6}}$ ;  $\cos\beta = -\frac{1}{\sqrt{6}}$ ;  $\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{6}}$ .

I tre coseni calcolati sono le componenti del versore che ha la stessa direzione della retta su cui giace  $\mathbf{a}$  e il verso di  $\mathbf{a}$ . Essi sono proporzionali alle componenti di  $\mathbf{a}$ , il che, come dimostrato nell'esempio 2-17, è un modo equivalente di esprimere il parallelismo fra i due vettori.

## 2-11 Espressioni cartesiane delle operazioni fra vettori

Siano dati due vettori, espressi in componenti cartesiane ortogonali,  $\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k}$  e  $\mathbf{w} = w_x \mathbf{i} + w_y \mathbf{j} + w_z \mathbf{k}$ ; si verificano facilmente le seguenti relazioni:

- a)  $\mathbf{v} + \mathbf{w} = (v_x + w_x)\mathbf{i} + (v_y + w_y)\mathbf{j} + (v_z + w_z)\mathbf{k}$ ;
- b)  $\mathbf{v} = \mathbf{w} \Leftrightarrow v_x = w_x, v_y = w_y, v_z = w_z$ ;
- c)  $k\mathbf{v} = kv_x \mathbf{i} + kv_y \mathbf{j} + kv_z \mathbf{k}$ ;

Inoltre, come dimostrato nell'esempio 2-15, vale la seguente proprietà

- d)  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z$ ,

che contiene anche, come caso particolare,

e)

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2.$$

Nell'esempio 2-16, infine, si ricava l'espressione cartesiana del prodotto vettoriale:

$$f) \quad \mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = (v_y w_z - v_z w_y) \mathbf{i} + (v_z w_x - v_x w_z) \mathbf{j} + (v_x w_y - v_y w_x) \mathbf{k}$$

### Esempio 2-15

Ricavare l'espressione del prodotto scalare in componenti cartesiane ortogonali.

Eseguiamo il prodotto scalare fra i due vettori:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = (v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k}) \cdot (w_x \mathbf{i} + w_y \mathbf{j} + w_z \mathbf{k}) = (v_x w_x)(\mathbf{i} \cdot \mathbf{i}) + (v_y w_y)(\mathbf{j} \cdot \mathbf{j}) + (v_z w_z)(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k})$$

dove abbiamo utilizzato la proprietà distributiva del prodotto scalare e il fatto che prodotti scalari fra versori cartesiani diversi sono nulli.

Di conseguenza, si ottiene la relazione:  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z$ .

Essa, oltre ad essere facilmente memorizzabile, permette di effettuare con estrema rapidità il calcolo del prodotto scalare.

### Esempio 2-16

Ricavare l'espressione del prodotto vettoriale in coordinate cartesiane ortogonali.

Eseguiamo il prodotto vettoriale fra i due vettori:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \times \mathbf{w} &= (v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k}) \times (w_x \mathbf{i} + w_y \mathbf{j} + w_z \mathbf{k}) = \\ &= (v_x w_y)(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) + (v_x w_z)(\mathbf{i} \times \mathbf{k}) + (v_y w_x)(\mathbf{j} \times \mathbf{i}) + (v_y w_z)(\mathbf{j} \times \mathbf{k}) + \\ &\quad + (v_z w_x)(\mathbf{k} \times \mathbf{i}) + (v_z w_y)(\mathbf{k} \times \mathbf{j}) = \\ &= (v_y w_z - v_z w_y) \mathbf{i} + (v_z w_x - v_x w_z) \mathbf{j} + (v_x w_y - v_y w_x) \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Questa relazione può essere ricavata anche dal determinante simbolico

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}.$$

Infatti si ottiene:  $\mathbf{i} \begin{vmatrix} v_y & v_z \\ w_y & w_z \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} v_x & v_z \\ w_x & w_z \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} v_x & v_y \\ w_x & w_y \end{vmatrix}$

che, sviluppando i tre determinanti, fornisce proprio il vettore indicato.

### Esempio 2-17

Siano date le componenti cartesiane di due vettori,  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ . Determinare le condizioni che devono intercorrere fra di esse affinché i due vettori siano paralleli.

Se i due vettori sono paralleli, il loro prodotto vettoriale è nullo. Dovrà dunque essere:

$$(a_y b_z - a_z b_y) = (a_z b_x - a_x b_z) = (a_x b_y - a_y b_x) = 0$$

e quindi:  $\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$

dalla quale si deduce che le componenti di due vettori paralleli sono fra loro proporzionali. Alla stessa conclusione saremmo potuti arrivare più rapidamente, utilizzando il fatto che una delle condizioni che annullano il determi-

nante  $\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$  è appunto la proporzionalità fra due sue righe.

### Esempio 2-18

Due vettori  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  hanno come componenti:  $\mathbf{a} \equiv (2, -3, 1)$  e  $\mathbf{b} \equiv (1, -1, 2)$ . Trovare la direzione della retta perpendicolare al piano individuato dai due vettori.

Il prodotto vettoriale  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  è un vettore perpendicolare ai due vettori dati. Per calcolare tale prodotto, calcoliamo il determinante della matrice:

$$\mathbf{c} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

che dà come risultato un vettore di componenti  $\mathbf{c} \equiv (-5, -3, 1)$ . Il modulo di  $\mathbf{c}$  è  $c = \sqrt{35}$  ed i coseni direttori di  $\mathbf{c}$  risultano, di conseguenza,

$$\cos \alpha = -\frac{5}{\sqrt{35}}; \quad \cos \beta = -\frac{3}{\sqrt{35}}; \quad \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{35}}.$$

Naturalmente, oltre alla soluzione trovata, esiste anche una seconda soluzione, ottenuta dalla precedente cambiando il segno a tutti i coseni direttori. Le due soluzioni corrispondono ai due possibili versori normali al piano individuato da  $\mathbf{a}$  e da  $\mathbf{b}$ .

## 2-12 Derivate di vettori in forma cartesiana

Supponiamo che un vettore  $\mathbf{w}$  sia funzione della variabile  $t$  (per esempio, ma non necessariamente, il tempo):  $\mathbf{w} = \mathbf{w}(t)$ . In un sistema di coordinate cartesiane ortogonali i cui versori non dipendono da  $t$  (e quindi fisso, se  $t$  è il tempo), abbiamo dunque:

$$\mathbf{w}(t) = w_x(t) \mathbf{i} + w_y(t) \mathbf{j} + w_z(t) \mathbf{k}.$$

In questo modo la funzione vettoriale  $\mathbf{w}(t)$  è espressa attraverso tre funzioni scalari. Questo permette di estendere facilmente alle funzioni vettoriali alcune definizioni e proprietà valide per le funzioni scalari (per un richiamo di alcuni concetti di Analisi matematica vedi l'Appendice A). In particolare, generalizzando il concetto di limite, possiamo definire la derivata di  $\mathbf{w}$  rispetto a  $t$  come

$$\frac{d\mathbf{w}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{w}}{\Delta t}.$$

Se inoltre i versori cartesiani ortogonali *non dipendono* dalla variabile  $t$ :

$$\frac{d\mathbf{w}(t)}{dt} = \frac{dw_x}{dt} \mathbf{i} + \frac{dw_y}{dt} \mathbf{j} + \frac{dw_z}{dt} \mathbf{k}. \quad (2-7)$$

Come si vede, in questo caso la derivazione della funzione vettoriale si

riduce a quella di tre funzioni scalari. Applicando dunque le note regole di derivazione, valide per le funzioni scalari, date due funzioni vettoriali derivabili  $\mathbf{w}(t)$  e  $\mathbf{v}(t)$ , si dimostrano le seguenti relazioni:

- i)  $\frac{d}{dt} [\mathbf{w}(t) + \mathbf{v}(t)] = \frac{d\mathbf{w}(t)}{dt} + \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt};$
- ii)  $\frac{d}{dt} [\lambda \mathbf{w}(t)] = \frac{d\lambda}{dt} \mathbf{w}(t) + \lambda \frac{d\mathbf{w}(t)}{dt};$
- iii)  $\frac{d}{dt} [\mathbf{w}(t) \cdot \mathbf{v}(t)] = \frac{d\mathbf{w}(t)}{dt} \cdot \mathbf{v}(t) + \mathbf{w}(t) \cdot \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt};$
- iv)  $\frac{d}{dt} [\mathbf{w}(t) \times \mathbf{v}(t)] = \frac{d\mathbf{w}(t)}{dt} \times \mathbf{v}(t) + \mathbf{w}(t) \times \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt};$
- v)  $\mathbf{w}(t) = \mathbf{w}(s(t)) \Rightarrow \frac{d\mathbf{w}(t)}{dt} = \frac{d\mathbf{w}(s)}{ds} \frac{ds}{dt}$  (funzione composta);

vi)  $d\mathbf{w}(t) = \frac{d\mathbf{w}(t)}{dt} dt$  è il differenziale di  $\mathbf{w}$ , il quale rappresenta l'incremento della funzione  $\mathbf{w}(t)$  nell'intervallo infinitesimo  $dt$  (a meno di infinitesimi di ordine superiore).

Un risultato interessante e importante per le successive applicazioni si ha quando  $\mathbf{w}(t)$  è **costante in modulo** e **non in direzione** (per esempio, un versore che cambia direzione nel tempo); ebbene, come dimostrato nell'esempio che segue, in tale caso la derivata  $\frac{d\mathbf{w}(t)}{dt}$  è *perpendicolare* a  $\mathbf{w}(t)$ .

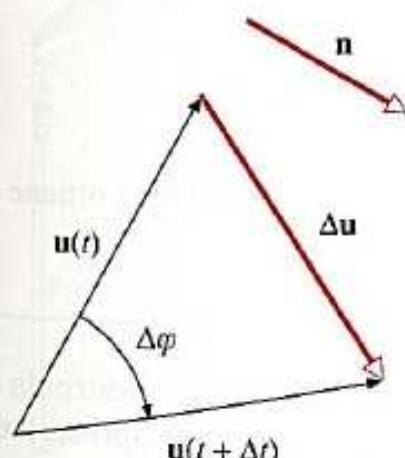
### Esempio 2-19

Dimostrare che la derivata di un vettore  $\mathbf{w}(t)$  di modulo costante è perpendicolare a  $\mathbf{w}(t)$ .

Essendo  $\mathbf{w}(t) \cdot \mathbf{w}(t) = w^2 = \text{cost}$ ,

si ha  $\frac{d\mathbf{w}^2}{dt} = 0$ , cioè  $\frac{d}{dt} [\mathbf{w}(t) \cdot \mathbf{w}(t)] = 2 \frac{d\mathbf{w}(t)}{dt} \cdot \mathbf{w}(t) = 0$

per cui il vettore  $\frac{d\mathbf{w}(t)}{dt}$  è perpendicolare a  $\mathbf{w}(t)$  (se non è nullo).



**FIGURA 2-31**  
La derivata di un vettore di modulo costante è perpendicolare al vettore stesso.

### 2-13 Derivata di versori e di vettori

Nell'esempio 2-19 abbiamo dimostrato che un versore  $\mathbf{u}$  e la sua derivata  $d\mathbf{u}/dt$  sono perpendicolari. Calcoliamo ora l'espressione esplicita di tale derivata. La figura 2-31 mostra i versori  $\mathbf{u}(t)$  e  $\mathbf{u}(t + \Delta t)$  e la loro differenza  $\Delta \mathbf{u} = \mathbf{u}(t + \Delta t) - \mathbf{u}(t)$ ; per la costanza del modulo, essi saranno semplicemente ruotati l'uno rispetto all'altro. Sia  $\Delta\varphi$  l'angolo di rotazione (corrispondente ad un  $\Delta t$  positivo). Escludendo situazioni di discontinuità, per  $\Delta t \rightarrow 0$  anche  $\Delta\varphi \rightarrow 0$ , e quindi  $\Delta \mathbf{u}$  (e con esso  $\Delta \mathbf{u}/\Delta t$ ) tende ad assumere la direzione perpendicolare a  $\mathbf{u}(t)$  e il verso dalla parte in cui ruota  $\mathbf{u}$  (cioè la direzione e il verso di  $\mathbf{n}$ , in figura). Per quanto riguarda il modulo, osserviamo in figura 2-31 che  $|\Delta \mathbf{u}| = 2u \sin(\Delta\varphi/2)$ , e quindi (essendo  $u = 1$ ):

$$\frac{|\Delta \mathbf{u}|}{\Delta t} = \frac{|\Delta \mathbf{u}|}{\Delta \varphi} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{\sin \frac{\Delta \varphi}{2}}{\frac{\Delta \varphi}{2}} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}.$$

Passando al limite per  $\Delta t \rightarrow 0$  e ricordando che  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ,

si ha:  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \mathbf{u}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta \varphi \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta \varphi}{2}}{\frac{\Delta \varphi}{2}} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}$ .

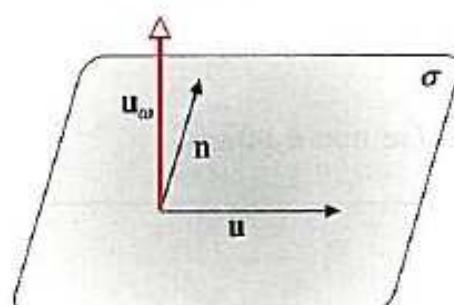
Dunque:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \mathbf{n} \quad (2-8)$$

ove  $\mathbf{n}$  è il versore che giace sul piano  $\sigma$  contenente  $\mathbf{u}(t)$  e  $\mathbf{u}(t + dt)$ , perpendicolare a  $\mathbf{u}$ , dalla parte di  $\mathbf{u}(t + dt)$ , e  $\frac{d\varphi}{dt}$  è una quantità positiva. Possiamo dare una espressione equivalente di  $\frac{d\mathbf{u}}{dt}$ , introducendo un opportuno vettore che caratterizza la rotazione del versore  $\mathbf{u}$ . Definiamo il vettore  $\boldsymbol{\omega}$ , avente modulo  $\frac{d\varphi}{dt}$ , direzione perpendicolare a  $\sigma$  e verso tale da vedere la rotazione infinitesima di  $\mathbf{u}(t)$  verso  $\mathbf{u}(t + dt)$  come antioraria: esso è rappresentato in figura 2-32. Per la definizione data, il versore di  $\boldsymbol{\omega}$  è uguale al prodotto vettoriale di  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{n}$ . Ricordando dunque le proprietà del prodotto vettoriale, si dimostra facilmente (esempio 2-20) la seguente relazione *per la derivata di un versore*:

$$\boxed{\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \mathbf{n} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}}. \quad (2-9)$$

### Esempio 2-20



**FIGURA 2-32**  
Direzione orientata del vettore  $\omega$ .

Dimostrare la relazione (2-9).

Per le definizioni date, detto  $\mathbf{u}_\omega$  il versore di  $\boldsymbol{\omega}$ , si ha:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{d\varphi}{dt} \mathbf{u}_\omega; \quad \mathbf{u}_\omega = \mathbf{u} \times \mathbf{n}.$$

I versori  $(\mathbf{u}, \mathbf{n}, \mathbf{u}_\omega)$  costituiscono una terna ortogonale destra. Di conseguenza, come si vede chiaramente anche dalla figura 2-33,  $\mathbf{u}_\omega \times \mathbf{u} = \mathbf{n}$ .

Si ha quindi:

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} = \left( \frac{d\varphi}{dt} \right) \mathbf{u}_\omega \times \mathbf{u} = \left( \frac{d\varphi}{dt} \right) \mathbf{n} = \frac{d\mathbf{u}}{dt}.$$

Si osservi che, moltiplicando vettorialmente tutti i membri per  $\mathbf{u}$ , si ottiene facilmente anche:

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{u} \times \frac{d\mathbf{u}}{dt}.$$

Nel caso di un generico vettore  $\mathbf{w}(t)$  anche il modulo può dipendere da  $t$ . Purché sia  $\mathbf{w} \neq 0$  e sia quindi definito il suo versore  $\mathbf{u}_w$ , possiamo scrivere [vedi la (2-9) e la proprietà ii) del paragrafo precedente]:

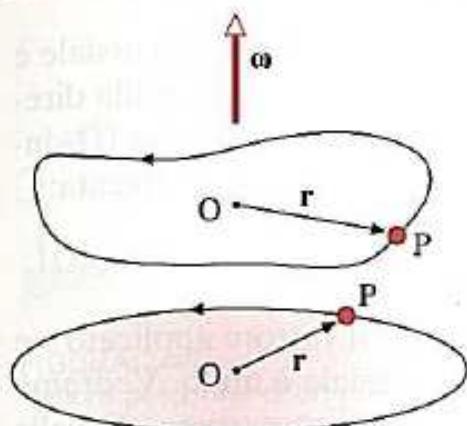
$$\frac{d\mathbf{w}}{dt} = \frac{d}{dt} (w \mathbf{u}_w) = \frac{dw}{dt} \mathbf{u}_w + w \frac{d\mathbf{u}_w}{dt} = \frac{dw}{dt} \mathbf{u}_w + w \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}_w$$

e quindi:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dt} \mathbf{u}_w + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{w}. \quad (2-10)$$

È chiaro che nell'espressione (2-10) il primo addendo riflette la (eventuale) variazione del modulo di  $\mathbf{w}$ , mentre il secondo è presente solo se  $\mathbf{w}$  cambia direzione (ed è quindi collegato con la rotazione del versore di  $\mathbf{w}$ ).

### Esempio 2-21



**FIGURA 2-34**  
Moto di un corpo lungo una curva chiusa piana.

Si consideri un corpo puntiforme che si muove lungo una curva chiusa piana (fig. 2-34). Esprimere la derivata del vettore  $\mathbf{r} \equiv \mathbf{OP}$  rispetto al tempo.

In figura il vettore  $\mathbf{r} = r\mathbf{u}_r$ , cambia nel tempo, man mano che il corpo si muove. La derivata di  $\mathbf{r}$  rispetto al tempo può essere espressa nella forma (2-10); il vettore  $\boldsymbol{\omega}$  ha in ogni istante la stessa direzione (perpendicolare al piano della curva) e verso dipendente da quello di rotazione sulla curva:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} \mathbf{u}_r + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}.$$

Se la curva è una circonferenza con centro in O, il modulo di  $\mathbf{r}$  è costante. In questo caso, allora:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}.$$

## 2-14 Momento di un vettore applicato

Vedremo più avanti che per alcune grandezze fisiche vettoriali, come la forza e la quantità di moto, è importante conoscere il punto di applicazione del vettore. Per esempio, è esperienza comune che se vogliamo far ruotare una porta spingendola (cioè applicando un *vettore forza*), a parità di effetto facciamo una minore o maggiore fatica a seconda del punto in cui spingiamo. Sappiamo bene che la rotazione avviene più facilmente se il punto di applicazione dell'azione è più distante dai cardini, cioè dall'asse di rotazione della porta (figura 2-35).

Vettori di questo tipo, che sono l'insieme di un vettore libero e di un punto di applicazione, vengono chiamati **vettori applicati**.

Si chiama **momento (polare) del vettore  $\mathbf{v}$**  (applicato in A), rispetto a un punto  $\Omega$  (chiamato **polo** o **centro di riduzione**), il **vettore libero  $\mathbf{m}$**  definito da

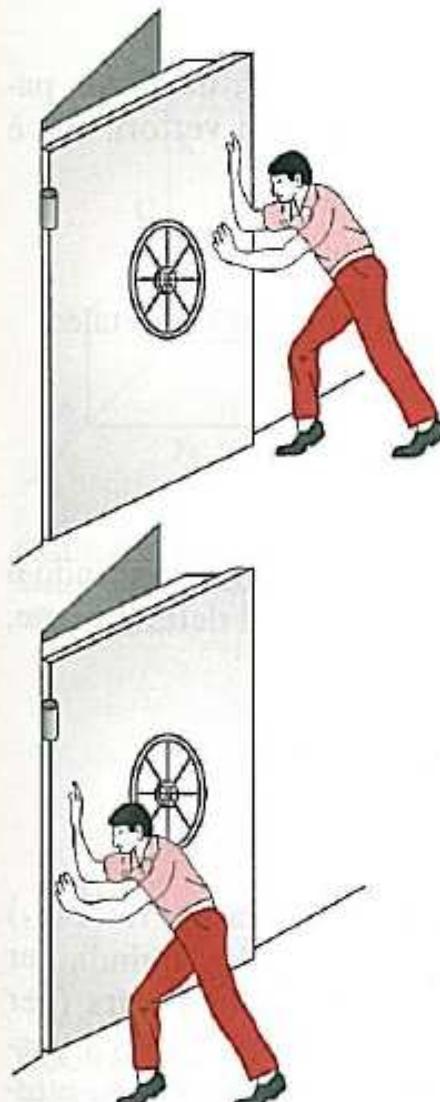
$$\mathbf{m} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} \quad (\text{con } \mathbf{r} = \Omega \mathbf{A}, \text{ fig. 2-36}).$$

Esso è perpendicolare al piano di  $\mathbf{r}$  e di  $\mathbf{v}$  e ha modulo  $m = rv \sin \theta$ .

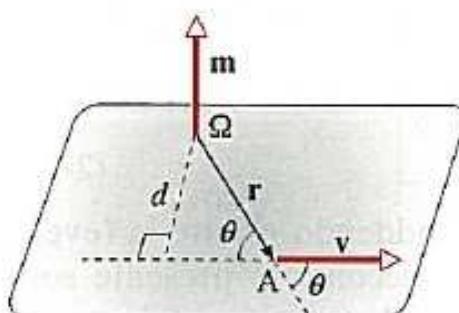
Mostriamo ora che in realtà il momento, più che dipendere dal punto di applicazione, dipende dalla retta di azione del vettore, o meglio dalla posizione della retta rispetto al polo  $\Omega$ . Si consideri, a tale proposito, la figura 2-37 nella quale sono mostrati i due vettori  $\mathbf{r} \equiv \Omega \mathbf{A}$  e  $\mathbf{v}$ . Consideriamo ora un punto B, appartenente alla retta su cui giace  $\mathbf{v}$ , il quale a sua volta viene traslato applicandolo in B anziché in A. Il momento risulta allora

$$\mathbf{m}' = \Omega \mathbf{B} \times \mathbf{v} = (\Omega \mathbf{A} + \mathbf{AB}) \times \mathbf{v} = \Omega \mathbf{A} \times \mathbf{v} = \mathbf{m}$$

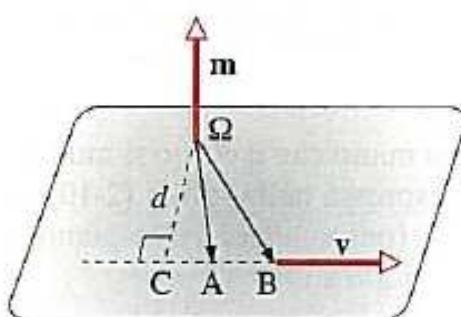
in quanto i due vettori  $\mathbf{AB}$  e  $\mathbf{v}$  sono paralleli. Ne consegue che *il momen-*



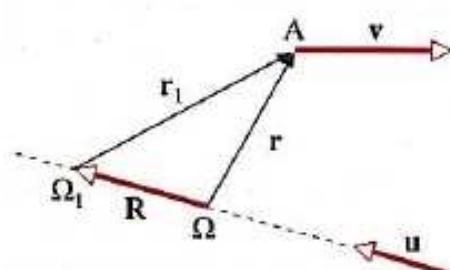
**FIGURA 2-35**  
È meno faticoso spingere una porta agendo lontano dai cardini.



**FIGURA 2-36**  
Momento di un vettore (applicato in A) rispetto a un punto  $\Omega$ .



**FIGURA 2-37**  
Il momento di un vettore applicato dipende dal braccio, cioè dalla distanza  $d$  del polo dalla retta d'azione.



**FIGURA 2-38**  
Il momento assiale di  $v$  non dipende da  $\Omega$ .

to non cambia se spostiamo il punto di applicazione del vettore lungo la sua retta di azione. In particolare possiamo scegliere come punto di applicazione il piede C della perpendicolare tracciata da  $\Omega$  sulla retta lungo la quale agisce  $v$ .

Il modulo del momento si può allora calcolare come prodotto della distanza  $d = r \sin \theta$  del polo  $\Omega$  dalla retta (*braccio*), moltiplicata per il modulo del vettore:  $m = vd$ . Se la retta lungo cui agisce  $v$  passa per il polo  $\Omega$ , il momento risulta nullo.

Si definisce **momento assiale** di  $v$  rispetto a un asse di versore  $u$  la grandezza scalare:

$$m_u = (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} \quad (\text{con } \mathbf{r} = \mathbf{\Omega A}, \text{ fig. 2-38}),$$

essendo  $\Omega$  un punto qualsiasi dell'asse considerato; il momento assiale è la proiezione ortogonale del momento vettoriale rispetto a  $\Omega$ , sulla direzione orientata di  $u$ . Scegliendo infatti un diverso punto sull'asse ( $\Omega_1$  invece di  $\Omega$ , in figura), il momento assiale non cambia, poiché diventa:

$$m_u(\Omega_1) = (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} = (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} - (\mathbf{R} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} = (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} = m_u(\Omega)$$

in quanto  $\mathbf{R} \equiv \mathbf{\Omega}\Omega_1$  è parallelo a  $u$ . Si noti che, se il vettore applicato  $v$  e il versore  $u$  sono sullo stesso piano, il momento assiale è nullo. Vedremo più avanti che può essere utile scegliere il punto  $\Omega$  come origine O della terna cartesiana usata come sistema di coordinate, e la retta coincidente con l'asse  $z$ , il cui versore è  $k$ . In questo caso il momento assiale si può scrivere

$$m_z = \mathbf{m} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}$$

nella quale, evidentemente, non è necessario esplicitare, mediante parentesi, l'ordine in cui vengono fatte le operazioni con i vettori, che è univoco. Per la proprietà f) del paragrafo 2-11, risulta

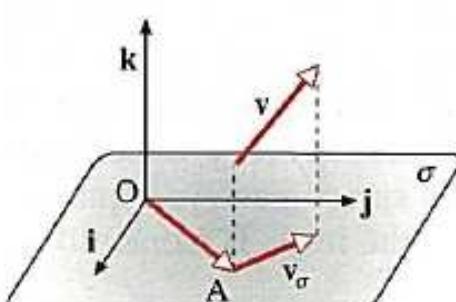
$$m_z = r_x v_y - r_y v_x.$$

Utilizziamo infatti il determinante simbolico del prodotto vettoriale:

$$m_z = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \cdot \mathbf{k}.$$

Si verifica facilmente che il risultato può essere ottenuto moltiplicando il versore  $k$  con ciascuno degli elementi della prima riga del determinante, ottenendo come risultato

$$m_z = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ r_x & r_y & r_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = r_x v_y - r_y v_x.$$



**FIGURA 2-39**  
Solo  $v_\sigma$  contribuisce al momento assiale di  $v$  rispetto a  $k$ .

Si vede che la componente di  $v$  lungo la direzione parallela alla retta ( $v_z$ ) non dà alcun contributo al momento assiale  $m_z$ . In pratica, quindi, per calcolare il momento assiale di un vettore  $v$  rispetto a una retta (per esempio  $k$  in figura 2-39) si può proiettare il vettore su un piano  $\sigma$  perpendicolare alla retta e calcolare il momento assiale del vettore  $v_\sigma$  ottenuto dalla proiezione. In questo caso il momento polare  $m$  risulta parallelo alla retta e la sua proiezione ortogonale sulla retta è uguale a  $m$  o a  $-m$ , a seconda che i versi di  $m$  e  $k$  siano concordi o discordi.

Dalla precedente discussione si può concludere che il momento assiale di un vettore rispetto a una retta assegnata si annulla nei due casi particolari in cui

- il vettore è parallelo alla retta;
- la retta d'azione del vettore incontra la retta.

## 2-15 Vettore posizione e sistemi di coordinate

Come vedremo nel prossimo capitolo, lo studio del moto di un corpo (macroscopico) presuppone che sia possibile definirne la posizione rispetto a *sistemi di riferimento* S, individuati in generale da un insieme di *altri corpi*, fissi l'uno rispetto all'altro. Assunto come origine O del sistema di riferimento un punto solidale con uno di questi corpi, la posizione di un generico altro punto P è individuata nel riferimento S dal **vettore posizione**

$$\mathbf{r} = \mathbf{OP}$$

che caratterizza lo spostamento da O a P (fig. 2-40).

La natura un po' speciale del vettore posizione, che dipende dalla scelta dell'origine del sistema di riferimento, è discussa nel paragrafo 2-17 degli Approfondimenti.

In un dato sistema di riferimento si possono usare differenti *sistemi di coordinate*, cioè diversi modi di caratterizzare numericamente la posizione di un punto rispetto all'origine del sistema, mediante le misure di tre opportune grandezze. Tra i più utili sistemi di coordinate vi sono i sistemi di *coordinate curvilinee ortogonali*, nei quali ogni vettore, in particolare il vettore posizione, può essere espresso come somma di tre componenti mutuamente ortogonali. Per maggiori dettagli su tali sistemi di coordinate si rimanda al paragrafo 2-21 dei Complementi.

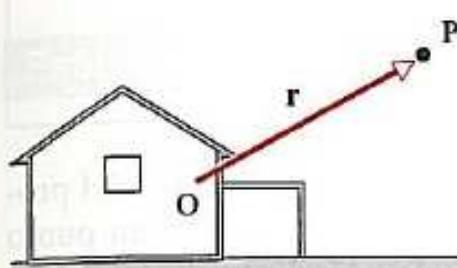
Un sistema di coordinate curvilinee ortogonali di particolare importanza e semplicità è quello delle coordinate cartesiane ortogonali, già introdotto nel paragrafo 2-9; in esso l'origine O del sistema di riferimento è anche l'origine comune di tre assi mutuamente ortogonali x, y, z caratterizzati dai vettori  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$ . In tale sistema di coordinate, il vettore posizione  $\mathbf{r}$  di un generico punto P può quindi essere rappresentato dalla terza di numeri  $(x, y, z)$ , costituita dalle sue componenti lungo  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$ , che vengono dette anche le *coordinate cartesiane* del punto:

$$\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}. \quad (2-11)$$

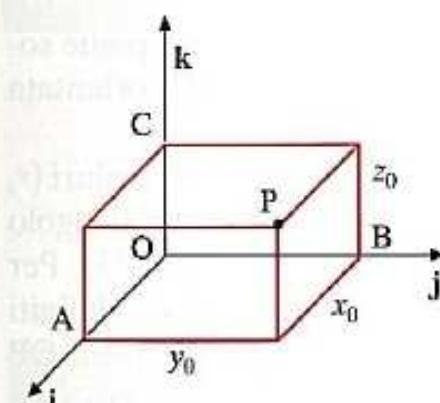
Nel sistema di coordinate cartesiane ortogonali, la determinazione della posizione di un punto avviene quindi attraverso la misurazione delle *lunghezze di tre segmenti*. Con riferimento alla figura 2-41, l'*ascissa*  $x_0$  rappresenta infatti con il suo modulo (nelle unità di misura scelte) la lunghezza del segmento OA; il suo segno è positivo o negativo, a seconda che A segua o preceda O in relazione al verso di  $\mathbf{i}$ . Analogi significato hanno l'*ordinata*  $y_0$  e la *quota*  $z_0$ , per i segmenti OB e OC e gli assi corrispondenti.

In vista del futuro studio della Cinematica, è importante osservare fin d'ora che un generico vettore spostamento  $\mathbf{AB}$  (fig. 2-42) può essere espresso come differenza dei vettori posizione di B e A:

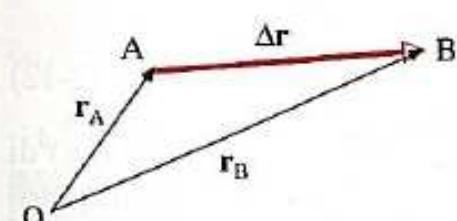
$$\mathbf{AB} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A \equiv \Delta \mathbf{r}.$$



**FIGURA 2-40**  
Vettore posizione di un punto P  
rispetto a un'origine O.



**FIGURA 2-41**  
Sistema di coordinate cartesiane  
ortogonali.



**FIGURA 2-42**  
Lo spostamento può essere  
espresso come differenza di  
vettori posizione.

## Esempio 2-22

Ricavare la formula della distanza fra due punti  $A \equiv (x_A, y_A, z_A)$  e  $B \equiv (x_B, y_B, z_B)$  in coordinate cartesiane ortogonali, utilizzando il calcolo vettoriale.

In forma vettoriale i due punti sono individuati dai vettori posizione:

$$\mathbf{r}_A = x_A \mathbf{i} + y_A \mathbf{j} + z_A \mathbf{k} \quad \text{e} \quad \mathbf{r}_B = x_B \mathbf{i} + y_B \mathbf{j} + z_B \mathbf{k}.$$

Lo spostamento  $\mathbf{AB}$  altro non è che la differenza fra questi due vettori:

$$\mathbf{AB} \equiv \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A = (x_B - x_A) \mathbf{i} + (y_B - y_A) \mathbf{j} + (z_B - z_A) \mathbf{k}.$$

La distanza  $\overline{AB}$  è il modulo di  $\mathbf{AB}$ :

$$d \equiv AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

che è la relazione cercata.

In alternativa, se risulta più comodo in relazione alla simmetria del problema studiato, si può individuare la posizione geometrica di un punto materiale con altre terne di coordinate, come le **coordinate polari sferiche**, oppure le **coordinate cilindriche**, come descritto con maggiore dettaglio nel paragrafo 2-21 dei Complementi.

## 2-16 Coordinate polari piane

In molti problemi di Cinematica saremo interessati a conoscere la posizione di un punto mobile su un piano. In questo caso, oltre ai sistemi di coordinate cartesiane  $(x, y)$ , possono essere usati anche i sistemi di coordinate polari piane.

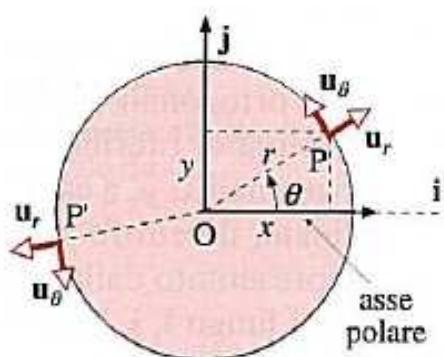
Gli elementi caratteristici di un sistema di coordinate polari piane sono l'origine O, detto **polo** e l'**asse polare**, cioè una semiretta orientata uscente da O.

Un punto generico P del piano è individuato dalla coppia di scalari  $(r, \theta)$ , che esprimono, rispettivamente, la distanza di P dal polo e l'angolo che il vettore posizione  $\mathbf{r} = \mathbf{OP}$  forma con l'asse polare (fig. 2-43). Per ogni punto P introduciamo la coppia di versori ortogonali  $\mathbf{u}_r$  e  $\mathbf{u}_\theta$ , definiti nel modo seguente: il *versore radiale*  $\mathbf{u}_r$  è il versore della semiretta OP ( $\theta = \text{cost}$ ) orientata nel verso degli *r crescenti*; il *versore trasverso*  $\mathbf{u}_\theta$  è il versore della retta tangente in P alla circonferenza di centro O e raggio OP, orientata nel verso degli angoli crescenti. Come discusso negli Apparafondimenti, essi costituiscono una base ortogonale locale (cioè, dipendente da P), in termini della quale è possibile esprimere ogni vettore, parallelo al piano considerato, come somma dei corrispondenti componenti «radiale» e «trasverso», rispettivamente paralleli a  $\mathbf{u}_r$  e  $\mathbf{u}_\theta$ . In particolare, il vettore posizione di P si scrive come

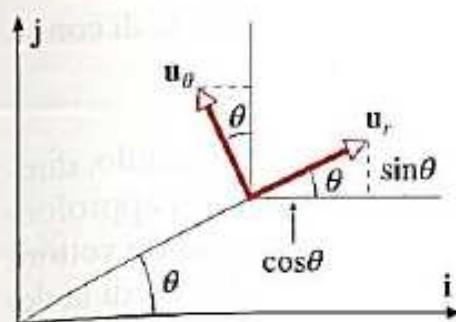
$$\mathbf{r} = r \mathbf{u}_r. \quad (2-12)$$

I legami fra le coordinate polari piane  $(r, \theta)$  e quelle cartesiane  $(x, y)$  di un dato punto si ottengono immediatamente con considerazioni trigonometriche, dalla figura 2-43. Si ha così:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} ; \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x} \end{cases} . \quad (2-13)$$



**FIGURA 2-43**  
Relazioni fra le coordinate polari e quelle cartesiane su un piano.



**FIGURA 2-44**  
Relazioni tra i versori polari piani e quelli cartesiani ortogonali.

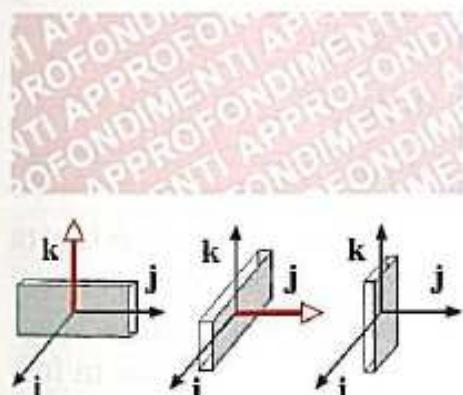
### Esempio 2-23

Dimostrare le relazioni (2-15).

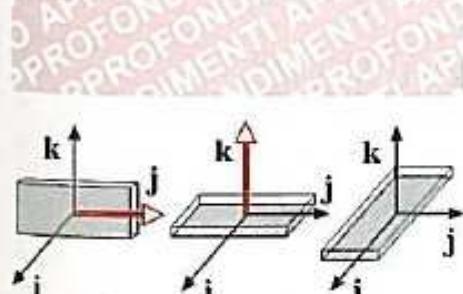
In molti casi in cui occorre calcolare la derivata di un vettore, è comodo esprimere tale vettore in termini di versori che non dipendano dalla variabile rispetto a cui si deriva. Nel nostro caso, questo può essere ottenuto utilizzando le relazioni (2-14), nelle quali i versori **i** e **j** non sono funzioni di  $\theta$ . Di conseguenza:

$$\begin{cases} \frac{du_r}{d\theta} = -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j} = \mathbf{u}_\theta \\ \frac{du_\theta}{d\theta} = -\cos \theta \mathbf{i} - \sin \theta \mathbf{j} = -\mathbf{u}_r \end{cases}$$

### APPROFONDIMENTI



**FIGURA 2-45**  
Somma di due rotazioni di  $+\pi/2$ , attorno a **k** e quindi attorno a **j**.



**FIGURA 2-46**  
Somma commutata delle stesse rotazioni di figura 2-45.

### 2-17 Vettori e proprietà di trasformazione

Abbiamo già accennato al fatto che non tutte le grandezze fisiche dotate di modulo, direzione e verso sono necessariamente dei vettori. Potremmo pensare di associare a una *rotazione finita* di un corpo attorno a un asse un *modulo* (l'angolo di rotazione), una direzione (quella dell'asse) e un verso (quello da cui la rotazione è vista come antioraria). Si può tuttavia verificare che la grandezza così introdotta non è un vettore. Si vede infatti che la *somma di due rotazioni non è commutativa*, come dovrebbe essere se si trattasse di grandezza vettoriale.

In figura 2-45 è rappresentata la sequenza (somma) di due rotazioni di un corpo (di  $\pi/2$  attorno all'asse **k**, e quindi all'asse **j**, di un sistema cartesiano ortogonale):

$$\mathcal{R}_1\left(+\frac{\pi}{2}, \mathbf{k}\right) + \mathcal{R}_2\left(+\frac{\pi}{2}, \mathbf{j}\right).$$

In figura 2-46 la sequenza è invertita (commutata):

$$\mathcal{R}_2\left(+\frac{\pi}{2}, \mathbf{j}\right) + \mathcal{R}_1\left(+\frac{\pi}{2}, \mathbf{k}\right).$$

Si vede chiaramente che le posizioni finali del corpo sono differenti. Si può dimostrare che quanto visto ora non accade per rotazioni infinitesimali; quando gli angoli di rotazione sono infinitesimali ( $d\theta$ ) la somma di due rotazioni (a meno di infinitesimali di ordine superiore) gode della pro-

prietà commutativa. È possibile dunque definire il *vettore dθ* e, di conseguenza, il *vettore ω = dθ/dt* (velocità angolare).

Verificato dunque che non tutte le grandezze dotate di modulo, direzione e verso possono essere considerate vettori, cerchiamo di approfondire ulteriormente le proprietà di trasformazione di cui godono i vettori. In particolare, ricordando che l'algebra vettoriale introdotta (vedi la definizione di somma) presuppone uno spazio omogeneo ed isotropo, c'è da attendersi che le relazioni fra vettori siano indipendenti dalla collocazione dell'origine di un eventuale sistema di coordinate (omogeneità) e dall'orientazione degli assi stessi (isotropia). Ciò richiede che le *componenti* dei vettori seguano determinate leggi di trasformazione.

La procedura esposta nei paragrafi precedenti per la scomposizione di un vettore  $\mathbf{v}$  nei suoi componenti, secondo tre assi perpendicolari fra loro, ha mostrato che le tre componenti *dipendono* dagli assi scelti. Per due terne cartesiane ortogonali  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  e  $(\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}')$ , si può scrivere

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k} = v'_x \mathbf{i}' + v'_y \mathbf{j}' + v'_z \mathbf{k}'$$

con

$$\begin{cases} v_x = \mathbf{v} \cdot \mathbf{i} \\ v_y = \mathbf{v} \cdot \mathbf{j} \\ v_z = \mathbf{v} \cdot \mathbf{k} \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} v'_x = \mathbf{v} \cdot \mathbf{i}' \\ v'_y = \mathbf{v} \cdot \mathbf{j}' \\ v'_z = \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}' \end{cases} .$$

Per trovare le relazioni fra le due terne di componenti possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} v'_x &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{i}' = (v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k}) \cdot \mathbf{i}' \\ v'_y &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{j}' = (v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k}) \cdot \mathbf{j}' \quad \Rightarrow \\ v'_z &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}' = (v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k}) \cdot \mathbf{k}' \\ \\ \Rightarrow &\begin{cases} v'_x = v_x(\mathbf{i} \cdot \mathbf{i}') + v_y(\mathbf{j} \cdot \mathbf{i}') + v_z(\mathbf{k} \cdot \mathbf{i}') \\ v'_y = v_x(\mathbf{i} \cdot \mathbf{j}') + v_y(\mathbf{j} \cdot \mathbf{j}') + v_z(\mathbf{k} \cdot \mathbf{j}') \\ v'_z = v_x(\mathbf{i} \cdot \mathbf{k}') + v_y(\mathbf{j} \cdot \mathbf{k}') + v_z(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}') \end{cases} . \end{aligned} \quad (2-16)$$

Se ne deduce che ogni componente di  $\mathbf{v}$  in uno dei due sistemi è legata alle tre relative agli assi dell'altro sistema da una relazione lineare, i cui coefficienti ( $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i}'$  e simili) dipendono solo dall'*orientazione relativa* degli assi e non da  $\mathbf{v}$ . Le relazioni scritte possono essere espresse anche in forma compatta, cioè in forma *matriciale*:

$$\begin{pmatrix} v'_x \\ v'_y \\ v'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathbf{i} \cdot \mathbf{i}') & (\mathbf{j} \cdot \mathbf{i}') & (\mathbf{k} \cdot \mathbf{i}') \\ (\mathbf{i} \cdot \mathbf{j}') & (\mathbf{j} \cdot \mathbf{j}') & (\mathbf{k} \cdot \mathbf{j}') \\ (\mathbf{i} \cdot \mathbf{k}') & (\mathbf{j} \cdot \mathbf{k}') & (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathbf{i}' \cdot \mathbf{i}) & (\mathbf{j}' \cdot \mathbf{i}) & (\mathbf{k}' \cdot \mathbf{i}) \\ (\mathbf{i}' \cdot \mathbf{j}) & (\mathbf{j}' \cdot \mathbf{j}) & (\mathbf{k}' \cdot \mathbf{j}) \\ (\mathbf{i}' \cdot \mathbf{k}) & (\mathbf{j}' \cdot \mathbf{k}) & (\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v'_x \\ v'_y \\ v'_z \end{pmatrix}. \quad (2-17)$$

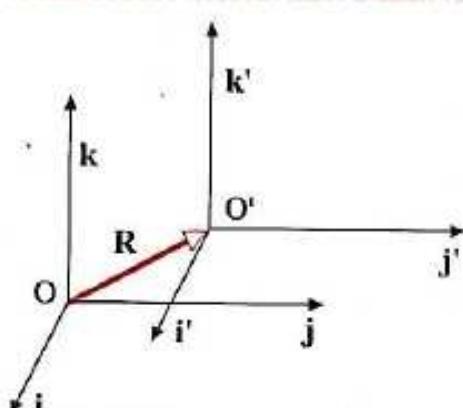


FIGURA 2-47

Traslazione di un sistema di assi ortogonali.

### 2-17-1 Traslazioni

Supponiamo che la seconda terna cartesiana si ottenga dalla prima per traslazione (fig. 2-47), e cioè che gli assi corrispondenti siano paralleli.

Allora, nell'espressione (2-17), gli unici elementi non nulli sono quelli diagonali:

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i}' = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j}' = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}' = 1.$$

Si ottiene così:

$$v'_x = v_x; v'_y = v_y; v'_z = v_z.$$

Dunque, nelle traslazioni le componenti dei vettori non cambiano: esse sono **invarianti** per traslazione.

### 2-17-2 Rotazioni attorno a uno degli assi

Con ciò intendiamo che le origini dei due sistemi ( $O$  e  $O'$ ) e gli assi  $\mathbf{k}$  e  $\mathbf{k}'$  coincidono (fig. 2-48); gli assi  $\mathbf{i}'$  e  $\mathbf{j}'$  sono nel piano  $[\mathbf{i}, \mathbf{j}]$  e formano lo stesso angolo  $\theta$  con  $\mathbf{i}$  e  $\mathbf{j}$ , rispettivamente. In questo caso si ha:

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \cdot \begin{cases} \mathbf{i}' = \cos \theta \\ \mathbf{j}' = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin \theta \\ \mathbf{k}' = 0 \end{cases} & ; \quad \mathbf{j} \cdot \begin{cases} \mathbf{i}' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta \\ \mathbf{j}' = \cos \theta \\ \mathbf{k}' = 0 \end{cases} ; \\ \mathbf{k} \cdot \begin{cases} \mathbf{i}' = 0 \\ \mathbf{j}' = 0 \\ \mathbf{k}' = 1 \end{cases} & . \end{aligned}$$

Di conseguenza:

$$\begin{cases} v'_x = v_x \cos \theta + v_y \sin \theta \\ v'_y = -v_x \sin \theta + v_y \cos \theta \\ v'_z = v_z \end{cases} . \quad (2-18)$$

Le relazioni inverse si ottengono semplicemente, scambiando  $\theta$  con  $-\theta$ :

$$\begin{cases} v_x = v'_x \cos \theta - v'_y \sin \theta \\ v_y = v'_x \sin \theta + v'_y \cos \theta \\ v_z = v'_z \end{cases} .$$

Le relazioni (2-17) consentono di dare una definizione più puntuale di vettore.

**Definiamo vettore** ogni insieme di tre numeri che, per traslazione o rotazione del sistema di coordinate, si trasforma secondo le relazioni (2-17).

È facile verificare che l'algebra vettoriale sviluppata nei paragrafi precedenti è consistente con questa nuova definizione.

#### Esempio 2-24

Verificare che il vettore somma di due vettori si trasforma secondo le relazioni (2-17).

Ricordiamo anzitutto che  $\mathbf{v} + \mathbf{w} = (v_x + w_x)\mathbf{i} + (v_y + w_y)\mathbf{j} + (v_z + w_z)\mathbf{k}$ . Inoltre, utilizzando le (2-17) si ottiene:

$$\begin{cases} v'_x = v_x(\mathbf{i} \cdot \mathbf{i}') + v_y(\mathbf{j} \cdot \mathbf{i}') + v_z(\mathbf{k} \cdot \mathbf{i}') \\ w'_x = w_x(\mathbf{i} \cdot \mathbf{i}') + w_y(\mathbf{j} \cdot \mathbf{i}') + w_z(\mathbf{k} \cdot \mathbf{i}') \end{cases} \quad (\text{e simili per le altre componenti}).$$

Da queste, sommando membro a membro:

$$v'_x + w'_x = (v_x + w_x)(\mathbf{i} \cdot \mathbf{i}') + (v_y + w_y)(\mathbf{j} \cdot \mathbf{i}') + (v_z + w_z)(\mathbf{k} \cdot \mathbf{i}')$$

che dunque si trasforma come la componente di un vettore.

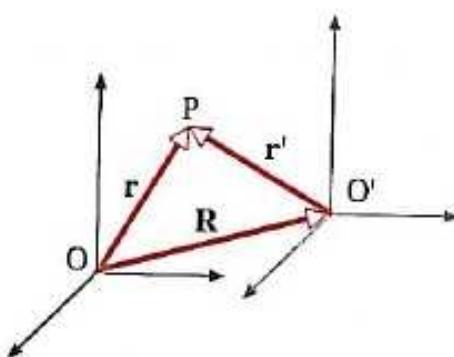


FIGURA 2-49

Vettori posizione di uno stesso punto P rispetto a due diversi sistemi di coordinate.

Da questo punto di vista, si verifica facilmente la peculiarità del vettore *posizione*  $\mathbf{r}$ . Infatti, se esso da un lato soddisfa le condizioni di trasformazione nelle rotazioni, lo stesso non vale per le traslazioni. Con riferimento alla figura 2-49, nella quale  $\mathbf{R}$  è il vettore  $\mathbf{OO}'$ , si ha  $\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{R}$ , e dunque:

$$\begin{cases} x = x' + R_x \\ y = y' + R_y \\ z = z' + R_z \end{cases} \quad (2-19)$$

relazione diversa dalla (2-17). In effetti, il vettore posizione *dipende* dalla scelta dell'origine del sistema di assi, mentre sappiamo che un vettore dovrebbe esserne indipendente. Come vedremo più avanti, in realtà nelle leggi fisiche non entra mai esplicitamente  $\mathbf{r}$  ma una sua variazione, cioè lo *spostamento* che, per definizione, è veramente un vettore. Lo spostamento  $\mathbf{AB}$ , infatti, contiene solamente informazioni sulle posizioni relative di A e B, che sono indipendenti dalla scelta di O.

*Il modulo di un vettore è invariante per le trasformazioni* (2-17). Lo si intuisce ricordando che, da un punto di vista grafico, esso rappresenta la distanza fra origine ed estremo libero del vettore; e tale distanza, ovviamente, non cambia traslando o ruotando la terna di assi coordinati.

### Esempio 2-25

Verificare che il modulo di un vettore non cambia, nel caso di una semplice rotazione attorno all'asse  $\mathbf{k}$ .

In questo caso semplificato valgono le relazioni (2-18). Di conseguenza:

$$v'^2_x + v'^2_y + v'^2_z = (v_x \cos \theta + v_y \sin \theta)^2 + (-v_x \sin \theta + v_y \cos \theta)^2 + v_z^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2.$$

La dimostrazione nel caso generale è solo formalmente più complicata.

Un'altra grandezza importante da considerare in questo contesto è il *prodotto scalare* di due vettori:  $c = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos \theta$ . Come abbiamo visto, i due moduli sono invarianti per qualsiasi trasformazione. Lo stesso accade per l'angolo  $\theta$  fra i due vettori, che non dipende dal sistema di coordinate ma solo dalle *direzioni relative*. Dunque, il prodotto scalare di due vettori è una grandezza *invariante* (cioè *non cambia*) per trasformazioni (2-17) del sistema di coordinate.

### Esempio 2-26

Verificare direttamente che il prodotto scalare non cambia, nel caso di una semplice rotazione attorno all'asse  $\mathbf{k}$ .

Ancora una volta abbiamo scelto una situazione semplificata, per evitare complicazioni di calcolo.

Si può fare una verifica confrontando le due relazioni:

$$\begin{cases} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a'_x b'_x + a'_y b'_y + a'_z b'_z \end{cases} .$$

La seconda relazione diventa dunque:

$$\begin{aligned} a'_x b'_x + a'_y b'_y + a'_z b'_z &= \\ &= (a_x \cos \theta + a_y \sin \theta)(b_x \cos \theta + b_y \sin \theta) + (-a_x \sin \theta + a_y \cos \theta) \cdot \\ &\quad \cdot (-b_x \sin \theta + b_y \cos \theta) + (a_z)(b_z) = \\ &= a_x b_x (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + a_y b_y (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + a_z b_z = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \end{aligned}$$



**FIGURA 2-50**  
Riflessione speculare di un sistema di coordinate ortogonali.

**Definiamo scalare** una grandezza rappresentata da un numero reale che è invariante per traslazioni o rotazioni del sistema di coordinate.

Come detto, il modulo di un vettore è una grandezza scalare; non lo è, per esempio, una componente del vettore, che invece cambia secondo una delle relazioni (2-17). Possiamo ora estendere le considerazioni fatte, attraverso una formulazione più generale. Le grandezze fisiche che hanno ben definite proprietà di trasformazione, al variare del sistema di coordinate, vengono chiamate **grandezze tensoriali**.

Gli **scalari** sono i cosiddetti tensori di rango zero, cioè a una sola componente ( $3^0$ ); essi sono invarianti per dette trasformazioni.

I **vettori** sono i tensori di rango uno, cioè a tre componenti ( $3^1$ ); essi si trasformano secondo le (2-17).

I **tensori** propriamente detti sono quelli di rango due, cioè a nove componenti ( $3^2$ ); essi si trasformano come i prodotti delle componenti dei vettori.

### 2-17-3 Riflessione speculare

Esistono altri tipi di trasformazioni, oltre alle traslazioni e alle rotazioni. Consideriamo ad esempio una riflessione speculare rispetto al piano (**i**, **j**); supponiamo cioè d'invertire un solo versore del sistema di coordinate ( $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}' = -\mathbf{k}$ ).

Se in precedenza il vettore **v** aveva componenti  $v_x, v_y, v_z$ , ora ha evidentemente componenti  $v_x, v_y, -v_z$  (fig. 2-50)

Consideriamo ora il prodotto vettoriale di due vettori:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}.$$

Abbiamo visto che, rispetto al sistema speculare, **a** e **b** invertono le loro componenti lungo **k**; di conseguenza il vettore **c** sarà valutabile sviluppando il determinante simbolico:

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}' \\ a_x & a_y & -a_z \\ b_x & b_y & -b_z \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} a_y & -a_z \\ b_y & -b_z \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} a_x & -a_z \\ b_x & -b_z \end{vmatrix} + \\ &+ \mathbf{k}' \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} = -c_x \mathbf{i} - c_y \mathbf{j} + c_z \mathbf{k}'. \end{aligned}$$

Si vede che le componenti di **c** non si trasformano come quelle di **a** o di **b**, cioè come quelle di uno spostamento; se così fosse, avremmo:

$$\mathbf{c} = c_x \mathbf{i} + c_y \mathbf{j} - c_z \mathbf{k}'$$

che è l'opposto del vettore ottenuto.

I vettori che per riflessione si comportano come gli spostamenti (per esempio la velocità e la forza), prendono anche il nome di **vettori polari**; quelli che invece si comportano come il prodotto vettoriale (per esempio il momento angolare, la velocità angolare e il campo magnetico), prendono anche il nome di **vettori assiali** o **pseudovettori**.

Il fatto che il prodotto vettoriale dia luogo a uno pseudovettore discende dalla sua definizione: esso infatti, insieme ai vettori di partenza, costituisce una terna destra. D'altro canto si può facilmente verificare che non è possibile far diventare destra una terna sinistra, spostandola o ruotandola in qualche modo. L'unico modo è quello di metterla davanti a uno specchio: l'immagine è destra. Naturalmente il prodotto vett-

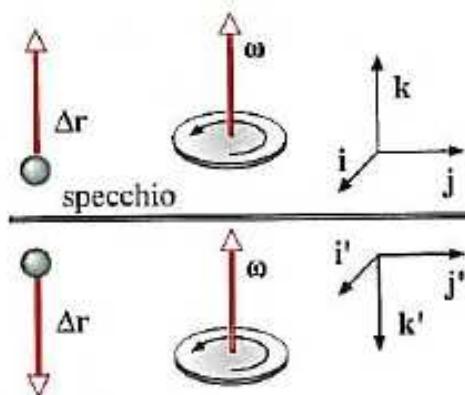


FIGURA 2-51

Lo spostamento è un vettore assiale; la velocità angolare è un vettore polare.

riale, se anche fosse stato definito in modo da formare una terna sinistra, non sarebbe comunque invariante per riflessione. Quindi gli pseudovettori derivano le loro proprietà dal fatto che si è utilizzata una qualche convenzione nel definirli. La figura 2-51 mostra che, mentre un vettore polare (lo spostamento) cambia verso per riflessione speculare, il vettore assiale (come il vettore  $\omega$  di figura 2-34) mantiene il proprio verso.

Abbiamo già sottolineato che ogni legge fisica, scritta attraverso il formalismo vettoriale, è invariante (cioè non cambia forma) per trasformazioni di coordinate come le traslazioni e le rotazioni. A lungo si è pensato che tutte le leggi fisiche fossero invarianti anche per trasformazioni come la riflessione sopra descritta. Solo a partire dagli anni Cinquanta è stato trovato sperimentalmente che esistono in Natura alcuni processi (come il decadimento  $\beta$ ) nei quali la simmetria per inversione speculare è violata. In generale, a proprietà di simmetria e d'invarianza (per una data trasformazione) corrisponde la **conservazione** di una quantità d'interesse fisico, che cioè non cambia il proprio valore al passare del tempo. Quando invece una particolare simmetria non è completamente rispettata, si ha *una parziale violazione* della corrispondente legge di conservazione. Nel caso prima ricordato, nel quale non è rispettata la simmetria per riflessione, viene violata la *Legge di conservazione della parità*.

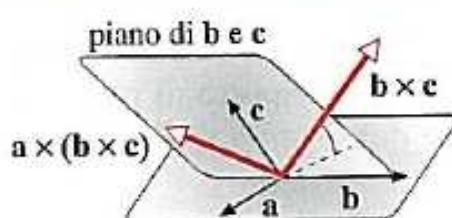


FIGURA 2-52

Valutazione del vettore  $a \times (b \times c)$ .

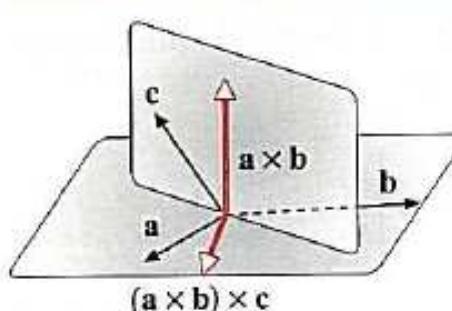


FIGURA 2-53

Valutazione del vettore  $(a \times b) \times c$ .

## 2-18 Prodotti tripli

Si chiama **prodotto vettoriale triplo** il vettore

$$\mathbf{d} = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}).$$

Il vettore  $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$  è perpendicolare al piano dei due vettori; quindi  $\mathbf{d}$ , che è perpendicolare a  $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ , giace nel piano di  $\mathbf{b}$  e  $\mathbf{c}$  (fig. 2-52).

Naturalmente esso è diverso dal vettore  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ , che invece giace sul piano che contiene  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  (fig. 2-53).

Una relazione che può risultare utile per il calcolo del prodotto triplo è la seguente:

$$\mathbf{d} = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \quad (2-20)$$

(per ricordare meglio l'espressione, si noti che i tre vettori figurano, in tutti i termini, nell'ordine ciclico  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots$ ). In particolare, tale relazione mostra la scomposizione di  $\mathbf{d}$  lungo le direzioni di  $\mathbf{b}$  e  $\mathbf{c}$ , con i quali è complanare.

### Esempio 2-27

Valutare l'ultima relazione sul prodotto vettoriale triplo nel caso particolare in cui  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{c}$  siano lo stesso versore (cioè  $\mathbf{u} = \mathbf{a} = \mathbf{c}$ ).

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{u}) = \mathbf{b}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) - \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{b} - \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{b}).$$

Risolvendo rispetto a  $\mathbf{b}$

$$\mathbf{b} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u} + \mathbf{u} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{u}) \equiv \mathbf{b}_{\parallel} + \mathbf{b}_{\perp}$$

somma del componente di  $\mathbf{b}$  parallelo a  $\mathbf{u}$  e di quello trasverso.

In particolare, possiamo scrivere la seguente relazione che esprime il componente trasverso di un vettore  $\mathbf{b}$  rispetto al versore  $\mathbf{u}$ :

$$\mathbf{b}_{\perp} = \mathbf{u} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{u}).$$

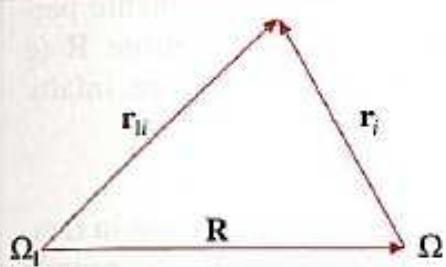
Si chiama **prodotto misto** lo scalare  $k = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ . Può essere calcolato facilmente utilizzando il formalismo dei determinanti:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

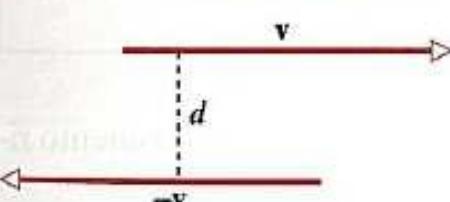
Nel derivare questa relazione, prima sono stati calcolati i prodotti scalari di  $\mathbf{c}$  con i tre versori; dopo sono stati eseguiti due scambi di righe, che in totale non hanno effetto sul valore del determinante. Il prodotto misto è uguale al volume del parallelepipedo individuato dai tre vettori, preso con il segno positivo o negativo a seconda che la terna  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  sia destra o sinistra. Questa interpretazione geometrica permette anche di comprendere facilmente che la condizione perché il prodotto triplo sia nullo è che i tre vettori considerati siano complanari.

La precedente espressione di  $k$  mostra direttamente che, per note proprietà dei determinanti, sussistono le identità:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{b} \times \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{c} \times \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}. \quad (2-21)$$



**FIGURA 2-54**  
Cambiamento del polo nel calcolo di un momento.



**FIGURA 2-55**  
La coppia è costituita da due vettori applicati opposti.

## 2-19 Sistemi di vettori applicati

Dato un sistema di  $N$  vettori *applicati* e un polo  $\Omega$ , si possono definire due vettori *liberi*

$$\text{risultante } \mathbf{V} = \sum_{i=1}^N \mathbf{v}_i; \quad \text{momento risultante } \mathbf{M} = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i$$

ove le somme sono eseguite trattando i vettori come liberi.

**Solo se** tutti i vettori del sistema hanno *lo stesso punto di applicazione* (vettori concorrenti) i vettori  $\mathbf{r}_i$  sono tutti uguali ( $\mathbf{r}$ ), per cui si ha:

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^N \mathbf{r} \times \mathbf{v}_i = \mathbf{r} \times \sum_{i=1}^N \mathbf{v}_i = \mathbf{r} \times \mathbf{V} \quad (\text{vettori concorrenti}).$$

Cambiando polo cambia anche il momento risultante. Si ha dunque (chiamando  $\mathbf{R}$  il vettore  $\Omega_1 \Omega$  e utilizzando la scomposizione  $\mathbf{r}_{ii} = \mathbf{R} + \mathbf{r}_i$ , illustrata in figura 2-54):

$$\mathbf{M}(\Omega_1) = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_{ii} \times \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_i + \mathbf{R}) \times \mathbf{v}_i = \mathbf{M}(\Omega) + \mathbf{R} \times \mathbf{V}. \quad (2-22)$$

Nel caso particolare di sistema composto di due vettori applicati opposti (**coppia**, figura 2-55), poiché il risultante è nullo, la relazione precedente diventa:

$$\mathbf{M}(\Omega_1) = \mathbf{M}(\Omega)$$

per cui il momento risultante, essendo *indipendente dal polo*, è caratteristico della coppia. Il modulo del momento risultante è, in questo caso,  $M = vd$ , ove  $d$  è la distanza fra le due rette di azione (*braccio*); la direzione di  $\mathbf{M}$  è perpendicolare al piano della coppia.

Viene chiamato **invariante scalare** di un sistema di vettori applicati la grandezza scalare  $I = \mathbf{M} \cdot \mathbf{V}$ , la quale, come dimostrato nell'esempio 2-29, non dipende dal polo.

## Esempio 2-28



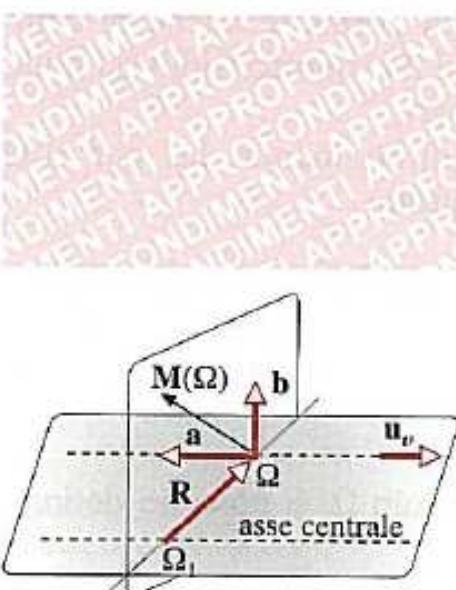
Dimostrare che la grandezza  $I = \mathbf{M} \cdot \mathbf{V}$  è indipendente dal polo.

$$I(\Omega_1) = \mathbf{M}_{\Omega_1} \cdot \mathbf{V} = (\mathbf{M}_\Omega + \mathbf{R} \times \mathbf{V}) \cdot \mathbf{V}$$

Ma  $(\mathbf{R} \times \mathbf{V}) \cdot \mathbf{V} = 0$ , per cui  $I(\Omega_1) = \mathbf{M}_\Omega \cdot \mathbf{V} = I(\Omega)$ .

In particolare questo significa che la proiezione di  $\mathbf{M}$  nella direzione di  $\mathbf{V}$  (cioè, lungo il versore  $\mathbf{u}_V$ ) non dipende dal polo.

## Esempio 2-29



**FIGURA 2-56**  
Costruzione dell'asse centrale.

Dato un sistema di vettori, a risultante  $\mathbf{V}$ , trovare il polo  $\Omega_1$  rispetto al quale è minimo il modulo del momento risultante.

Abbiamo visto dalla relazione (2-22) che  $\mathbf{M}(\Omega_1) - \mathbf{M}(\Omega) = \mathbf{R} \times \mathbf{V}$ .

Portiamo il momento risultante  $\mathbf{M}(\Omega)$  in  $\Omega$  e scomponiamolo in due vettori componenti: uno (**a**) lungo il versore di  $\mathbf{V}$  ( $\mathbf{u}_V$ ) e l'altro (**b**) ad esso perpendicolare. Poiché, come già detto, **a** non dipende dal polo, il minimo valore del modulo di  $\mathbf{M}(\Omega_1)$  si ha quando il corrispondente componente perpendicolare  $\mathbf{b}_1 = 0$ . Quindi, dovendo essere  $\mathbf{R} \times \mathbf{V} = -\mathbf{b}$ , il vettore  $\mathbf{R}$  (e quindi  $\Omega_1$ ) devono stare sul piano perpendicolare a **b**. Si deve avere, infatti:

$$\mathbf{M}(\Omega_1) - \mathbf{M}(\Omega) = (\mathbf{a}) - (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = -\mathbf{b} = \mathbf{R} \times \mathbf{V}.$$

Questa relazione vale altresì per tutti i punti del piano rappresentato in figura 2-56 che stanno sulla retta passante per  $\Omega_1$  parallela a  $\mathbf{V}$ . Tale retta prende il nome di **asse centrale**.

Per trovare l'asse centrale si procede quindi nel modo seguente: scelto un polo qualsiasi  $\Omega$ , si scomponga  $\mathbf{M}(\Omega)$  nei vettori **a** e **b**; nel piano perpendicolare a **b** si individua, lungo la perpendicolare a  $\mathbf{u}_V$  passante per  $\Omega$ , il polo  $\Omega_1$  tale che  $\mathbf{R} \times \mathbf{V}$  sia uguale a  $-\mathbf{b}$ ; la parallela a  $\mathbf{u}_V$  passante per  $\Omega_1$  è l'asse centrale. L'asse centrale è quindi il luogo geometrico dei punti rispetto ai quali il momento risultante è parallelo al risultante oppure è nullo.

Dati due sistemi di vettori applicati, con relativi risultante e momento risultante (rispetto ad uno stesso punto  $\Omega$ ):

$$(\mathbf{v}_i, \mathbf{V}, \mathbf{M}_v) \quad \text{e} \quad (\mathbf{w}_i, \mathbf{W}, \mathbf{M}_w)$$

si dice che essi sono **equivalenti** se hanno *lo stesso risultante e lo stesso momento risultante*; cioè se

$$\mathbf{V} = \mathbf{W} \quad \text{e} \quad \mathbf{M}_v = \mathbf{M}_w.$$

Se due sistemi di vettori sono equivalenti rispetto a un polo  $\Omega$ , lo sono rispetto a qualsiasi altro polo. Infatti:

$$\mathbf{M}'_v = \mathbf{M}_v + \mathbf{R} \times \mathbf{V} = \mathbf{M}_w + \mathbf{R} \times \mathbf{W} = \mathbf{M}'_w.$$

Si dimostra inoltre che:

- ogni sistema di vettori applicati, avente invariante scalare **non nullo**, è riconducibile (equivalente) a un vettore applicato **più** una coppia;
- ogni sistema di vettori applicati, avente invariante scalare **nullo**, è riconducibile (equivalente) a un vettore applicato **o** a una coppia.

La condizione *ii*) vale, in particolare, per ogni sistema di vettori applicati

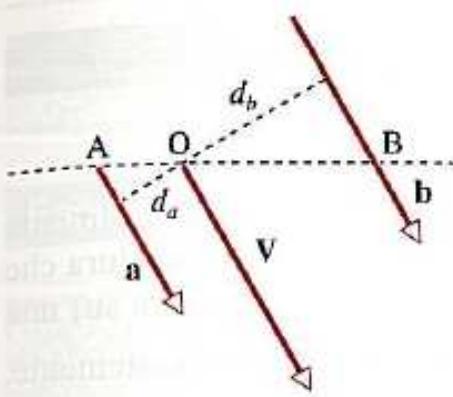


FIGURA 2-57

Due vettori paralleli e concordi sono equivalenti a un vettore che è loro parallelo e concorde.

parallelî: il sistema equivale a una sola coppia se ha risultante nullo, altrimenti equivale a un solo vettore.

Nel caso in cui questi vettori paralleli siano due e concordi, il risultante è sempre diverso da zero; come detto, l'invariante scalare è nullo, in quanto  $\mathbf{V}$  e  $\mathbf{M}$  risultano perpendicolari fra loro. Di conseguenza (punto ii) è possibile fare in modo che il sistema equivalente si riduca al solo vettore  $\mathbf{V}$ . Per fare questo, il vettore risultante dev'essere applicato in un punto interno del segmento che unisce i due punti di applicazione (A e B). Si dimostra facilmente (fig. 2-57) che tale punto O divide il segmento AB in due parti inversamente proporzionali ai due moduli dei vettori. Si ha, infatti:

$$\mathbf{V} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \text{ (non nullo)} .$$

Se scegliamo O come polo, il momento di  $\mathbf{V}$  risulta nullo, e tale deve risultare anche il momento  $\mathbf{M}$  del sistema  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ . Di conseguenza

$$ad_a = bd_b .$$

Si noti che, poiché in questo caso il modulo del momento risultante è nullo (rispetto a O), esso è anche minimo: dunque il vettore risultante è così applicato sull'*asse centrale* (esempio 2-30). È intuitivo che il processo adottato può essere iterato, nel caso in cui si abbia un sistema di più vettori, tutti paralleli (ma non necessariamente concordi): tale sistema, se il suo risultante è diverso da zero, può sempre essere ricondotto a un solo vettore applicato in un punto qualsiasi dell'asse centrale. Se il risultante è nullo il sistema sarà invece equivalente a una sola coppia.

### Esempio 2-30



FIGURA 2-58

Relazione fra i vettori posizione rispetto a O e rispetto a C.

Dimostrare che, dato un sistema di  $n$  vettori paralleli (aventi la direzione del versore  $\mathbf{u}$ )  $\mathbf{v}_i = v_i \mathbf{u}$ , applicati nei punti individuati dai vettori posizione  $\mathbf{r}_i$  (rispetto all'origine O), il punto C individuato dal vettore posizione

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_{i=1}^n v_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^n v_i}$$

si trova sull'asse centrale.

Chiamiamo  $\mathbf{R}_i$  i vettori posizione dei punti di applicazione, rispetto al punto C. Sarà dunque (fig. 2-58):

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{R} .$$

Imponiamo che il momento risultante rispetto a C sia nullo. Dovrà essere:

$$\mathbf{M}(C) = \sum_{i=1}^n \mathbf{R}_i \times \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{R}_i \times v_i \mathbf{u} = -\mathbf{u} \times \sum_{i=1}^n v_i \mathbf{R}_i = 0 .$$

Esprimiamo gli  $\mathbf{R}_i$  in funzione degli  $\mathbf{r}_i$ , in modo da trovare  $\mathbf{R}$  (vettore posizione di C rispetto ad O):

$$0 = \sum_{i=1}^n v_i \mathbf{R}_i = \sum_{i=1}^n v_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}) = \sum_{i=1}^n v_i \mathbf{r}_i - \mathbf{R} \sum_{i=1}^n v_i$$

dalla quale si ricava facilmente l'espressione di  $\mathbf{R}$  cercata.

## COMPLEMENTI

## 2-20 Operatore Nabla

Alcune operazioni di calcolo scalare o vettoriale risultano più facilmente rappresentabili se si utilizza il concetto di *operatore*, una procedura che ha significato solo nel momento in cui viene applicata a (opera su) una grandezza. Per esempio,  $\frac{d}{dx}$  è un operatore (scalare). Evidentemente, da solo non ha alcun significato; prende valore nel momento in cui viene applicato. Se lo applichiamo alla funzione  $f(x)$  allora otteniamo l'espressione sensata  $\frac{df}{dx}$ , cioè la derivata della funzione rispetto a  $x$ .

Analogamente, nel caso in cui si abbia una funzione di più variabili,  $f(x, y, z)$  per esempio, è possibile definire gli operatori scalari  $\left( \frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z} \right)$ , i quali, applicati alla funzione  $f(x, y, z)$ , ne forniscono le tre derivate parziali  $\frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y}; \frac{\partial f}{\partial z}$  (vedi l'Appendice A-4 per quanto riguarda le derivate parziali).

Possiamo definire anche operatori vettoriali, cioè operatori che hanno *componenti*, che sono a loro volta operatori scalari. Uno di questi è l'operatore **Nabla**:

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \equiv \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Le componenti dell'operatore vettoriale hanno le stesse proprietà di trasformazione delle componenti di un comune vettore (esempio 2-31).

Essendo una sorta di vettore, esso può essere applicato utilizzando le operazioni tipiche dei vettori:

- prodotto del vettore  $\nabla$  per lo scalare  $f$ :  $\nabla f$  (*gradiente*); è un vettore;
- prodotto scalare fra  $\nabla$  e  $\mathbf{v}$ :  $\nabla \cdot \mathbf{v}$  (*divergenza*); è uno scalare;
- prodotto vettoriale fra  $\nabla$  e  $\mathbf{v}$ :  $\nabla \times \mathbf{v}$  (*rotore*); è un vettore.

Utilizzando le relazioni note del calcolo vettoriale, e in particolare il fatto che

$$\mathbf{a}\lambda = (a_x\lambda)\mathbf{i} + (a_y\lambda)\mathbf{j} + (a_z\lambda)\mathbf{k} \quad \text{e} \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z,$$

si ha:

$$\nabla f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}; \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z};$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{v} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \\ &\quad + \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Le operazioni descritte possono essere rappresentate anche in coordina-

te polari, oppure in coordinate cilindriche, come descritto nel paragrafo 2-21.

### Esempio 2-31

Dimostrare che le componenti del gradiente di una funzione scalare si trasformano come quelle di un vettore.

Scriviamo esplicitamente il gradiente di  $f$  rispetto ai due sistemi di coordinate:

$$\nabla f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k} \quad \text{e} \quad \nabla f(x', y', z') = \frac{\partial f}{\partial x'} \mathbf{i}' + \frac{\partial f}{\partial y'} \mathbf{j}' + \frac{\partial f}{\partial z'} \mathbf{k}'.$$

Le componenti ( $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ ) dello spostamento infinitesimo  $d\mathbf{r}$  si possono esprimere sia come differenziali, sia in termini delle componenti di  $d\mathbf{r}'$  attraverso le solite relazioni (2-17), per cui:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial x'} dx' + \frac{\partial x}{\partial y'} dy' + \frac{\partial x}{\partial z'} dz' = dx'(\mathbf{i}' \cdot \mathbf{i}) + dy'(\mathbf{j}' \cdot \mathbf{i}) + dz'(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{i})$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x'} dx' + \frac{\partial y}{\partial y'} dy' + \frac{\partial y}{\partial z'} dz' = dx'(\mathbf{i}' \cdot \mathbf{j}) + dy'(\mathbf{j}' \cdot \mathbf{j}) + dz'(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{j})$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x'} dx' + \frac{\partial z}{\partial y'} dy' + \frac{\partial z}{\partial z'} dz' = dx'(\mathbf{i}' \cdot \mathbf{k}) + dy'(\mathbf{j}' \cdot \mathbf{k}) + dz'(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}).$$

Di conseguenza:

$$\frac{\partial f}{\partial x'} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x'} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x'} = \frac{\partial f}{\partial x} (\mathbf{i}' \cdot \mathbf{i}) + \frac{\partial f}{\partial y} (\mathbf{i}' \cdot \mathbf{j}) + \frac{\partial f}{\partial z} (\mathbf{i}' \cdot \mathbf{k})$$

che è proprio una delle tre relazioni che si ottengono dalle (2-17); le altre si ricavano in modo analogo.

### Esempio 2-32

Data una funzione scalare  $f(x, y, z)$  ed un punto  $P$  di coordinate  $(x_0, y_0, z_0)$ , determinare la direzione del vettore gradiente,  $\nabla f$ , nel punto  $P$ .

Nel punto  $P$  la funzione ha valore  $f(x_0, y_0, z_0)$ ; il luogo geometrico dei punti in cui la funzione ha questo stesso valore è una superficie  $\sigma$  (detta *di livello*). Se consideriamo uno spostamento infinitesimo lungo la superficie di livello che passa per  $P$ ,  $d\mathbf{r}_\sigma \equiv (dx, dy, dz)$ , possiamo scrivere (per l'espressione del differenziale  $df$  vedi l'Appendice A-4):

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = (\nabla f) \cdot d\mathbf{r}_\sigma = 0$$

in quanto la funzione  $f$  non cambia valore muovendosi fra due punti qualsiasi di  $\sigma$ . Poiché la relazione trovata vale per qualsiasi  $d\mathbf{r}_\sigma$  (purché appartenente a  $\sigma$ ), i due vettori  $\nabla f$  e  $d\mathbf{r}_\sigma$  devono essere perpendicolari fra loro. Dunque il vettore gradiente  $\nabla f$  è perpendicolare alla superficie di livello nel punto considerato (fig. 2-59).

Se consideriamo, invece, uno spostamento infinitesimo  $d\mathbf{r}$  qualsiasi, avremo:

$$df = \nabla f \cdot d\mathbf{r} = |\nabla f| d\mathbf{r} \cos \theta$$

nella quale  $\theta$  è l'angolo fra la direzione di  $d\mathbf{r}$  e quella della normale alla superficie di livello in  $P$ .

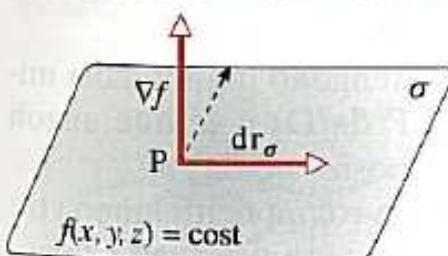


FIGURA 2-59

Il gradiente è perpendicolare alla superficie di livello in  $P$ .

Si ottiene così la *derivata direzionale* di  $f$  lungo la direzione  $d\mathbf{r}$ :

$$\frac{\partial f}{\partial r} = |\nabla f| \cos \theta.$$

Essa esprime la rapidità con cui varia la funzione  $f$  quando ci si muove nella direzione  $d\mathbf{r}$ . La derivata direzionale è massima per  $\cos \theta = 1$ , cioè per spostamenti normali rispetto a  $\sigma$ , diretti nel verso del gradiente; in questo caso la derivata direzionale coincide con il modulo del gradiente di  $f$  (in  $P$ ). Dunque, il *gradiente individua la direzione lungo la quale la funzione varia più rapidamente*.

## 2-21 Coordinate polari e cilindriche

Il sistema di coordinate cartesiane ortogonali costituisce il più semplice fra i sistemi di coordinate curvilinee ortogonali. Questa famiglia di sistemi di coordinate è caratterizzata in generale dal fatto che la posizione di un punto generico viene definita (in modo univoco) mediante l'assegnazione di tre numeri reali, che separatamente individuano, nel sistema scelto, le corrispondenti tre *superfici coordinate* mutuamente ortogonali; tali superfici hanno come unica intersezione il punto considerato.

Nel caso del sistema cartesiano le superfici suddette sono tre piani (fig. 2-41), che a due a due s'intersecano secondo linee rette, parallele agli assi coordinati. Nel caso generale queste superfici non sono necessariamente piane e s'intersecano secondo linee curve, che vengono chiamate *curve coordinate*. La trattazione generale di questi sistemi di coordinate non può rientrare nei limiti di questo testo; ci limitiamo quindi ad esaminare i cosiddetti *sistemi di coordinate polari*, iniziando da quelle sferiche.

### 2-21-1 Coordinate polari sferiche

Questo sistema di coordinate si basa sulla scelta, oltre che dell'origine  $O$ , di una retta orientata di riferimento passante per  $O$ , il cosiddetto *asse polare*, e di un semipiano di riferimento  $\sigma$  passante per tale asse. Le superfici coordinate di tale sistema sono (fig. 2-60):

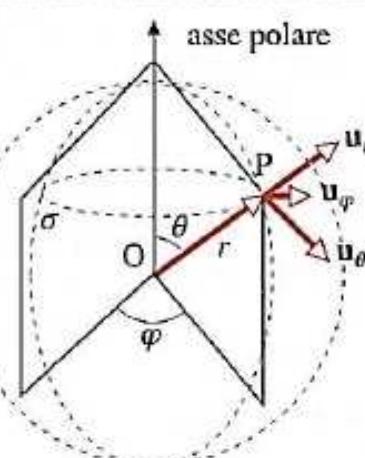
- i) le superfici sferiche con centro in  $O$ , individuate dal loro *raggio*  $r$ ;
- ii) i semiconi con vertice in  $O$  e asse coincidente con l'asse polare, caratterizzati dall'angolo  $\theta$  (*colatitudine*) che ne misura l'apertura, *contenenti* il verso positivo dell'asse polare  $0 \leq \theta < \pi$ ;
- iii) i semipiani passanti per l'asse polare e caratterizzati dall'angolo (*longitudine*) che essi formano con  $\sigma$  ( $0 \leq \varphi < 2\pi$ ).

I valori delle tre coordinate di un punto  $P$  si ottengono quindi dalla misurazione di una lunghezza ( $r$ , la distanza di  $P$  da  $O$ ) e di due angoli ( $\theta, \varphi$ ) che definiscono la direzione del vettore posizione di  $P$ .

Ogni vettore può essere espresso attraverso le componenti lungo i tre versori (fra loro ortogonali, vedi la fig. 2-60), ciascuno dei quali ortogonale a una *superficie coordinata* (passante per  $P$ ) e orientato nel verso crescente della relativa coordinata:

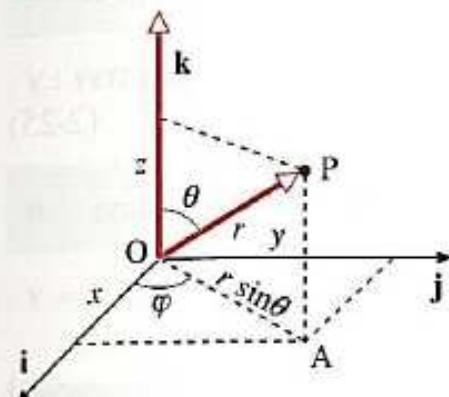
- a) il versore  $\mathbf{u}_r$ , perpendicolare alla superficie sferica con  $r$  costante;
- b) il versore  $\mathbf{u}_\theta$ , perpendicolare alla superficie conica con  $\theta$  costante;
- c) il versore  $\mathbf{u}_\varphi$ , perpendicolare al semipiano con  $\varphi$  costante.

È importante sottolineare che la terna dei tre versori  $\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\theta, \mathbf{u}_\varphi$  *dipende*



**FIGURA 2-60**

Versori delle coordinate polari sferiche.



**FIGURA 2-61**  
Relazioni fra coordinate cartesiane e coordinate polari.

dal punto P, ed è quindi diversa da punto a punto; si tratta di una *terna locale*. Questo non accade, invece, per la terna cartesiana ortogonale, che è la stessa in ogni punto; da ciò deriva la sua particolare comodità e semplicità (le superfici coordinate sono piane).

Il vettore posizione del punto P ha, in coordinate polari sferiche, la semplice rappresentazione:

$$\mathbf{r} = r \mathbf{u}_r(P).$$

Nella maggior parte dei casi si scrive semplicemente  $\mathbf{r} = r \mathbf{u}_r$ , omettendo di specificare la dipendenza di  $\mathbf{u}_r$  da P. È opportuno tuttavia ricordare che il versore  $\mathbf{u}_r$  è funzione delle altre coordinate del punto P, cioè di  $\theta$  e  $\varphi$ . Come vedremo più avanti e in Cinematica, questa dipendenza dei versori dalle coordinate del punto va tenuta in debito conto, in particolare quando si vogliano esprimere vettori che si ottengono da altri per derivazione rispetto a un parametro.

È importante ricavare la relazione fra le coordinate polari sferiche di un punto P e quelle cartesiane ortogonali riferite alla medesima origine. Assumiamo che l'asse polare coincida con l'asse z e che il semipiano  $\sigma$  coincida con il semipiano  $y = 0$  contenente il semiasse *positivo* dell'asse x. Facendo riferimento alla figura 2-61, e osservando che la lunghezza del segmento OA è  $(r \sin\theta)$ , si ha:

$$\begin{cases} x = r \sin\theta \cos\varphi \\ y = r \sin\theta \sin\varphi \\ z = r \cos\theta \end{cases} \quad (2-23)$$

da cui si ottengono anche le relazioni reciproche

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \varphi = \arctan \frac{y}{x} \end{cases} \quad (2-24)$$

È interessante osservare che, essendo valide per  $\mathbf{r}$  le due rappresentazioni

$$\mathbf{r} = r \mathbf{u}_r(P) \quad \text{e} \quad \mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$$

utilizzando le (2-23) si ottiene la rappresentazione cartesiana del versore  $\mathbf{u}_r$

$$\mathbf{u}_r = \sin\theta \cos\varphi \mathbf{i} + \sin\theta \sin\varphi \mathbf{j} + \cos\theta \mathbf{k}.$$

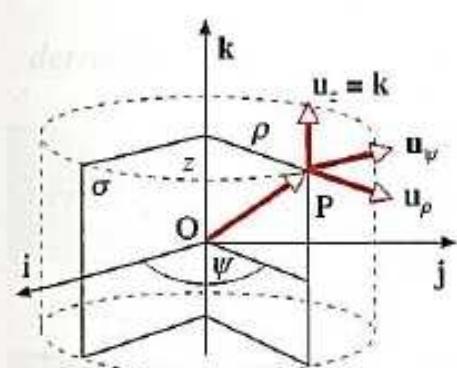
Si può anche dimostrare che le espressioni cartesiane di  $\mathbf{u}_\theta$  e  $\mathbf{u}_\varphi$  sono

$$\mathbf{u}_\theta = \cos\theta \cos\varphi \mathbf{i} + \cos\theta \sin\varphi \mathbf{j} - \sin\theta \mathbf{k}$$

$$\mathbf{u}_\varphi = -\sin\varphi \mathbf{i} + \cos\varphi \mathbf{j}.$$

## 2-21-2 Coordinate polari cilindriche

Con considerazioni analoghe è possibile definire un sistema di *coordinate (polari) cilindriche*, che si basa sulla scelta (oltre che dell'origine O) di una retta orientata Oz di riferimento e di un semipiano  $\sigma$  di riferimento, contenente tale asse. Detto  $\pi$  il piano passante per O e perpendicolare all'asse Oz, le superfici coordinate di tale sistema sono (fig. 2-62):



**FIGURA 2-62**  
Versori delle coordinate cilindriche.

- i) i piani paralleli a  $\pi$ , individuati dalla loro quota  $z$  rispetto a  $\pi$ , positiva o negativa in relazione all'orientamento dell'asse Oz; al piano passante per il punto P è perpendicolare il versore  $\mathbf{u}_z(P)$ ;
- ii) le superfici cilindriche con asse di simmetria Oz, definite dal raggio  $\rho$  della sezione normale del cilindro; alla superficie cilindrica passante per P è perpendicolare il versore  $\mathbf{u}_\rho(P)$ ;
- iii) i semipiani passanti per Oz, caratterizzati dall'angolo  $\psi$  da essi formati con  $\sigma$ ; al semipiano passante per P è perpendicolare il versore  $\mathbf{u}_\psi(P)$ .

Le coordinate cilindriche di un punto generico sono quindi date dai tre scalari  $(\rho, \psi, z)$ , che individuano le superfici coordinate che si intersecano in P. Le relazioni che collegano questa terna di coordinate a quella cartesiana ortogonale si trovano facilmente facendo riferimento alla figura 2-62:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \psi \\ y = \rho \sin \psi \\ z = z \end{cases} . \quad (2-25)$$

Da queste si ottengono anche le relazioni inverse:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \psi = \arctan \frac{y}{x} \\ z = z \end{cases} . \quad (2-26)$$

Si vede dalla stessa figura 2-62 che, in coordinate cilindriche, il vettore posizione  $\mathbf{r}$  non ha componente lungo  $\mathbf{u}_\psi$ , e viene quindi espresso come:

$$\mathbf{r} = \rho \mathbf{u}_\rho + z \mathbf{u}_z \equiv \rho \mathbf{u}_\rho + z \mathbf{k}.$$

La rappresentazione cartesiana dei tre versori delle coordinate cilindriche è quindi:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_\rho = \cos \psi \mathbf{i} + \sin \psi \mathbf{j} \\ \mathbf{u}_\psi = -\sin \psi \mathbf{i} + \cos \psi \mathbf{j} \\ \mathbf{u}_z = \mathbf{k} \end{cases}$$

Le coordinate polari piane, descritte nel paragrafo 2-16, possono essere ottenute come restrizione di quelle cilindriche al piano  $z = 0$ .

### 2-21-3 Gradiente, divergenza e rotore

Qui di seguito riportiamo le espressioni del gradiente, della divergenza e del rotore, in coordinate polari e in coordinate cilindriche:

#### *Coordinate polari*

$$\nabla f(r, \theta, \varphi) = \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \mathbf{u}_\varphi;$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (v_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi},$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{v} = & \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial (v_\varphi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} \right] \mathbf{u}_r + \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial (r v_\varphi)}{\partial r} \right] \mathbf{u}_\theta + \\ & + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial (r v_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \mathbf{u}_\varphi \end{aligned}$$

**Coordinate cilindriche**

$$\nabla f(\rho, \psi, z) = \frac{\partial f}{\partial \rho} \mathbf{u}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \psi} \mathbf{u}_\psi + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{u}_z;$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho v_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v_\psi}{\partial \psi} + \frac{\partial v_z}{\partial z};$$

$$\nabla \times \mathbf{v} = \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial v_z}{\partial \psi} - \frac{\partial v_\psi}{\partial z} \right) \mathbf{u}_\rho + \left( \frac{\partial v_\rho}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial \rho} \right) \mathbf{u}_\psi + \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial (\rho v_\psi)}{\partial \rho} - \frac{\partial v_\rho}{\partial \psi} \right] \mathbf{u}_z.$$

**RIEPILOGO DI ALCUNE RELAZIONI SIGNIFICATIVE****s : scalare**grandezza definita da un *numero*;**v : vettore;**grandezza definita da *modulo, direzione, verso* e da tipiche proprietà algebriche (*somma con regola del parallelogramma*);**u : versore**

(vettore unitario, adimensionale);

**v = v u<sub>v</sub>,***modulo v* (non negativo) per il versore  $\mathbf{u}_v$  (*direzione e verso*);  
[v] = [v];**prodotto scalare:**  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos \theta$ ;**prodotto vettoriale:**  $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$  (ha modulo  $c = ab |\sin \theta|$ , direzione ortogonale ad **a** e **b**, verso secondo la regola della mano destra);**rappresentazione cartesiana:**scomposizione in somma di *componenti* paralleli a tre versori ortogonali: **i**, **j**, **k** (terna destra);**v = v<sub>x</sub> i + v<sub>y</sub> j + v<sub>z</sub> k = v<sub>x</sub> i + v<sub>y</sub> j + v<sub>z</sub> k** (*v<sub>x</sub>*: il componente lungo **i**; *v<sub>x</sub>*: la componente lungo **i**);

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2};$$

**espressione cartesiana di operazioni vettoriali:**

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_x + b_x)\mathbf{i} + (a_y + b_y)\mathbf{j} + (a_z + b_z)\mathbf{k}; \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z;$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\mathbf{k};$$

$$\frac{d\mathbf{w}}{dt} = \frac{dw_x}{dt} \mathbf{i} + \frac{dw_y}{dt} \mathbf{j} + \frac{dw_z}{dt} \mathbf{k} \text{ (assi indipendenti da } t\text{)};$$

**derivata di un versore:**  $\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u};$ **derivata di un vettore:**  $\frac{d\mathbf{w}}{dt} = \frac{dw}{dt} \mathbf{u}_w + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}_w;$ **vettore posizione di P:** **r** (spostamento dall'origine O a P);in *coordinate cartesiane*:  $\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$ ; in *coordinate polari piane*:  $\mathbf{r} = r \mathbf{u}_r$ ;**momento di un vettore v applicato in P, rispetto ad un polo Ω :**  $\mathbf{m}_\Omega = \boldsymbol{\Omega} \mathbf{P} \times \mathbf{v}$ .

# CINEMATICA

## Compendio

Il concetto di moto ha significato solo in relazione alla scelta di un sistema di riferimento: un corpo si muove in un riferimento  $S$  se la sua posizione cambia nel tempo rispetto a  $S$ . La cinematica si occupa della descrizione spazio-temporale del moto dei corpi, assumendo che esso avvenga con continuità. Il moto di un corpo schematizzato come un punto materiale è rappresentato da un'equazione vettoriale, che contiene informazioni sia sulla traiettoria sia sulle modalità con cui essa viene percorsa (legge oraria). Le caratteristiche istantanee del moto sono descritte dal vettore velocità, definito dalla derivata rispetto al tempo del vettore posizione: direzione e verso sono quelli del moto, il modulo è la rapidità con cui esso avviene. Moti che avvengono con velocità variabile si dicono accelerati: il vettore accelerazione è definito dalla derivata rispetto al tempo della velocità. Assunto un sistema di ascisse curvilinee sulla traiettoria, si definiscono in ciascun punto i versori tangente e normale, usati per la rappresentazione intrinseca dei vettori cinematici: la velocità è data dal prodotto della velocità scalare per il versore tangente; l'accelerazione ha un componente tangente, parallelo alla velocità, che ne descrive le variazioni del modulo e del verso, e un componente normale, perpendicolare alla velocità, che dipende dalla variazione di direzione. Velocità e accelerazione si esprimono anche mediante le loro componenti cartesiane o polari.

Si distinguono e si discutono casi notevoli di moto in termini delle caratteristiche della loro traiettoria e della loro legge oraria: moti rettilinei, moti circolari, moti uniformi, moti con accelerazione tangenziale costante, moti periodici.

Il moto può essere visto come una successione di infiniti spostamenti infinitesimi, paralleli alla velocità istantanea: dalla posizione a un dato istante si può risalire a quella a un istante generico, mediante un proces-

so di integrazione (di vettori), se si conosce la velocità ad ogni istante intermedio; analoghi risultati si hanno per la velocità, nota l'accelerazione in funzione del tempo. L'applicazione di questa procedura, nel caso semplice di accelerazione costante, è illustrata per il moto dei gravi: il moto avviene lungo una traiettoria (in generale parabolica) giacente nel piano che contiene l'accelerazione e la velocità iniziale.

Per la relatività del moto, posizione velocità e accelerazione di un corpo sono dipendenti dal sistema di riferimento scelto. Vengono derivate le relazioni generali fra i vettori cinematici di un punto materiale in due sistemi di riferimento  $S$  e  $S'$ : esse dipendono dal moto relativo di  $S$  e  $S'$ . Si definiscono velocità di trascinamento, accelerazione di trascinamento e accelerazione di Coriolis. In particolare s'illustrano i casi di traslazione e di rotazione di un riferimento rispetto all'altro; nel caso di traslazione rettilinea uniforme, si hanno le trasformazioni di Galileo.

### 3-1 Introduzione

Tra i fenomeni fisici che hanno attirato l'attenzione degli uomini fin dai tempi più remoti, e hanno contribuito alla nascita e allo sviluppo della Fisica come scienza, sono di particolare rilievo quelli che coinvolgono i **moti** dei corpi: essi sono oggetto di studio di quella parte della Fisica che va sotto il nome di **Meccanica**. Basti pensare all'importanza cruciale che ebbero le esperienze di Galileo e le ricerche di Newton, che sono considerati i fondatori della **Meccanica classica**: al primo dobbiamo l'introduzione del metodo scientifico, al secondo la formulazione del primo sistema di leggi fisiche di ampia portata, che rappresenta tuttora un punto di riferimento centrale per tutta la Fisica. In effetti, la Meccanica classica può essere considerata come la pietra angolare non solo della Fisica ma anche delle altre scienze pure e applicate, sia dal punto di vista storico sia per il suo contenuto e le sue applicazioni. Come vedremo nel capitolo 4, infatti, i fondamenti della Meccanica sono strettamente collegati con la prima applicazione del metodo scientifico. Lo sviluppo della Meccanica ha stimolato anche la ricerca nel campo della Matematica, ad esempio portando all'introduzione dell'analisi infinitesimale e del calcolo integrale. D'altra parte, proprio nell'ambito della Meccanica sono stati introdotti alcuni dei concetti basilari della scienza moderna, come quelli di interazione e di energia. Infine, in vari campi, sia della Fisica sia di altre scienze, è frequente l'utilizzazione di modelli che si basano su analogie con il comportamento di opportuni *sistemi meccanici*.

La prima parte del nostro studio della Meccanica riguarda la **Cinematica**, che consiste nella descrizione del moto dei corpi dal punto di vista spazio-temporale; lo studio delle *cause* dei moti sarà invece affrontato nei capitoli dedicati alla **Dinamica**. In particolare, la Cinematica fornisce una serie di strumenti e di definizioni che fissano il linguaggio e costituiscono la premessa per discutere, nella Dinamica, le ragioni fisiche per cui i corpi si muovono in un modo piuttosto che in un altro.

### 3-2 Moto e sistemi di riferimento

È esperienza comune il fatto che la posizione e il moto di un corpo devono essere riferiti ad altri corpi e sono quindi *concetti relativi*. Quando viaggiamo in automobile il sedile è fermo rispetto a noi; invece si muove,



FIGURA 3-1

Il moto di un corpo è un concetto relativo.

insieme con tutta l'automobile e con noi, rispetto al suolo o a una qualunque persona che si trovi a terra (fig. 3-1). In sostanza, non ha senso la semplice affermazione che un corpo è *in moto*, ma bisogna dire *rispetto a cosa*: il concetto di moto presuppone l'esistenza di *qualcosa d'altro*, cui fare riferimento.

In pratica si tratta d'individuare un certo numero di corpi che non cambiano la loro reciproca posizione e che definiscono un sistema *di riferimento*. La scelta del sistema di riferimento è del tutto arbitraria, e viene quindi fatta generalmente con criteri di comodità e di semplicità. Questi ultimi non vanno certo sottovalutati, in quanto determinano spesso la rapidità con cui si progredisce nella conoscenza della Natura. Si pensi, ad esempio, alla descrizione del moto dei pianeti nel Sistema Solare. Quando l'uomo (per ragioni filosofiche) si considerava al centro dell'Universo, era ovvio descrivere tale moto rispetto a un sistema di riferimento terrestre. In questa situazione le traiettorie dei vari pianeti apparivano estremamente diversificate e incapaci di suggerire una legge fisica che ne desse una spiegazione unitaria. Semplificando un po', possiamo dire che bastò un semplice cambiamento del sistema di riferimento per illuminare il quadro sperimentale. Assumendo come corpo fisso il Sole, tutte le traiettorie diventarono semplici (ellittiche) e facilmente confrontabili; la comprensione del meccanismo di interazione fra i corpi celesti ne fu a sua volta facilitata.

Un certo numero di corpi che vengono definiti *fissi* sono quindi il presupposto di un sistema di riferimento; ma non basta. Sappiamo che la descrizione di ogni fenomeno fisico passa attraverso una serie di misurazioni; allora occorrono almeno un operatore, l'osservatore, e un certo numero di strumenti di misura. Se vogliamo descrivere il moto dei corpi, cioè come essi cambiano posizione al passare del tempo, dovremo disporre di alcuni regoli, uguali fra loro (per individuare le posizioni), e di orologi, sincronizzati fra loro (per misurare gli intervalli di tempo). È fondamentale che osservatore, regoli e orologi siano anch'essi tutti fermi rispetto agli oggetti *fissi*.

Chiameremo allora *sistema di riferimento* l'insieme di queste componenti: corpi, osservatori, regoli e orologi, tutti fissi fra loro.

La descrizione del moto dei corpi è dunque la descrizione spazio-temporale rispetto a un prescelto sistema di riferimento. Il concetto di sistema di riferimento è fondamentale in Fisica, perché si lega alle due grandezze fisiche, spazio e tempo, che sono forse le più importanti fra quante incontreremo. In effetti, lo studio del moto dei corpi costituisce il modo privilegiato per conoscere le proprietà dello spazio e del tempo.

### 3-3 Lo schema del punto materiale

I corpi possono avere le più varie forme, dimensioni e caratteristiche, di modo che risulta molto complessa una trattazione completa del loro moto, sia dal punto di vista cinematico che dinamico. In molte situazioni è tuttavia possibile adottare un'opportuna *schematizzazione*, che consente notevoli semplificazioni senza essere troppo riduttiva. Essa consiste nel trascurare le dimensioni reali dei corpi, rappresentandoli, ai fini della descrizione cinematica, come un punto geometrico, cioè un'entità astratta priva di dimensioni; a essa, per studiarne la dinamica, viene associata la proprietà caratteristica del corpo chiamata massa. In questi casi si parla quindi di *schema del punto materiale* (o della *particella puntiforme*).

Quest'approssimazione è generalmente accettabile quando le *dimensioni lineari* dei corpi sono *trascurabili* rispetto alle *distanze* che vengono percorse. Così, come vedremo nel seguito, lo studio del moto dei pianeti nel Sistema Solare può essere affrontato considerando Sole e pianeti come punti materiali. Un altro elemento importante per giudicare se quest'approssimazione è ragionevole riguarda il confronto con il dettaglio con cui sono note, o interessa conoscere, le posizioni dei corpi in esame. Ad esempio, se consideriamo il moto di una nave nell'oceano, può essere sufficiente schematizzarla come un punto materiale. Le sue dimensioni non sono invece trascurabili se si vuole studiarne le modalità di attracco in un porto: in quest'ultimo caso, per controllarne i movimenti, non si può certo prescindere da forma e dimensioni della nave. Evidentemente, dunque, uno stesso corpo può essere assimilato a un punto materiale in certi casi e non può esserlo in altri. Vedremo però, nel capitolo dedicato alla Dinamica dei sistemi, che *esiste* effettivamente un punto, caratteristico di ciascun corpo (il suo *centro di massa*), che si muove come il punto materiale con cui si schematizza l'intero corpo.

Per evidenti ragioni di semplicità, ma anche in vista di queste ulteriori applicazioni, inizieremo quindi lo studio della Meccanica, e in particolare della Cinematica, assumendo che i corpi in studio possano essere schematizzati come punti materiali.

### 3-4 Equazione vettoriale del moto: traiettoria e legge oraria

Si dice che *un corpo è in moto* rispetto a un dato sistema di riferimento S quando la sua posizione in S cambia con il tempo. Nello schema del punto materiale, le caratteristiche del movimento in S sono fornite dalla conoscenza del vettore posizione  $\mathbf{r}$  del punto in funzione del tempo.

Nel nostro concetto di tempo è implicita l'ipotesi che esso vari con *continuità* (e sia quindi rappresentabile con una variabile continua  $t$ ). A quest'ipotesi ne corrisponde un'altra sulle caratteristiche del moto: la nostra intuizione infatti ci suggerisce che, se consideriamo le posizioni di un punto materiale P ai tempi  $t$  e  $t + \Delta t$ , la loro distanza sia tanto più piccola quanto più è piccolo  $\Delta t$ . In termini più formali assumiamo che, per ogni fissato  $t$ , risulti:

$$|\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t + \Delta t)| \rightarrow 0 \quad \text{per} \quad \Delta t \rightarrow 0.$$

Ciò equivale all'ipotesi di continuità del moto; in linea di principio, quindi, esso può essere descritto in maniera completa mediante l'**equazione vettoriale del moto**

$$\boxed{\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)} \quad (3-1)$$

ove  $\mathbf{r}(t)$  è espresso mediante funzioni continue del tempo (per  $t$  variabile entro l'intervallo di tempo cui si riferiscono le osservazioni sperimentali). La validità di questa ipotesi non è contraddetta dalle indicazioni sperimentali; d'altro canto, essa non può essere provata sperimentalmente in modo diretto, stanti le ovvie limitazioni nell'effettiva realizzazione pratica del procedimento di limite per  $\Delta t$  che tende a zero (questa situazione si incontra spesso nella Fisica, ove procedimenti rigorosi della Matematica vanno interpretati in modo opportuno).

La funzione vettoriale  $\mathbf{r}(t)$  può essere rappresentata per mezzo delle tre funzioni scalari

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad (3-2)$$

che danno l'andamento nel tempo delle coordinate cartesiane del punto P nel riferimento S. Rappresentazioni equivalenti possono essere fornite dalle analoghe equazioni corrispondenti ad altri sistemi di coordinate (per esempio polari).

Le equazioni (3-2) contengono la totalità delle informazioni cinematiche sul moto del corpo, nel sistema di riferimento scelto. Tali informazioni sono sia di tipo essenzialmente geometrico sia più propriamente fisiche: infatti, come risulterà chiaro dalla successiva analisi, le prime permettono di individuare una curva geometrica, la **traiettoria**, cioè l'insieme delle *posizioni* occupate dal punto nel suo moto; le seconde caratterizzano le *modalità* con cui il corpo percorre nel tempo la traiettoria. In effetti, dal punto di vista geometrico, il sistema di equazioni (3-2) è un caso particolare di rappresentazione in forma parametrica di una curva nello spazio (esempio 3-1), in cui il parametro utilizzato ha tuttavia un significato fisico speciale, essendo costituito dalla variabile tempo!

Per separare in modo più diretto, nella descrizione del moto, l'aspetto geometrico da quello più propriamente cinematico, è conveniente un altro approccio, basato sulla cosiddetta **rappresentazione intrinseca della traiettoria**.

Supponiamo di conoscere la traiettoria  $\gamma$  del punto materiale (in forma esplicita o parametrica). Ogni posizione su tale curva può essere individuata utilizzando un'opportuna estensione del metodo che utilizza assi di riferimento cartesiani e le corrispondenti coordinate. A tale scopo supponiamo di rettificare la curva, trasformandola in una successione di segmenti (infinitesimi); definiamo su di essa un'origine  $\Omega$ , un verso e scegliamo un'unità di misura per le lunghezze (fig. 3-2). A ogni punto P sulla traiettoria potremo allora fare corrispondere un numero reale  $s$ , detto **ascissa curvilinea**, il cui modulo fornisce, nell'unità scelta, la lunghezza dell'arco di curva (rettificato)  $\Omega P$ ; il segno sarà positivo o negativo a seconda che P si trovi, rispetto a  $\Omega$ , dalla parte del verso positivo o dalla parte opposta. Si osservi ad esempio la figura 3-2: il punto  $P_2$  ha ascissa  $s_2 > 0$ , mentre  $P_1$  ha ascissa  $s_1 < 0$ .

Con l'introduzione della variabile  $s$ , la descrizione del moto di P si può effettuare conoscendo le due funzioni

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}(s) \\ s &= s(t) \end{aligned}} \quad (3-3)$$

In un sistema di coordinate cartesiane, l'equazione vettoriale  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$  è equivalente alle tre equazioni scalari

$$x = x(s); \quad y = y(s); \quad z = z(s) \quad (3-4)$$

che costituiscono l'**equazione della traiettoria** in forma parametrica, in termini del *parametro intrinseco*  $s$ .

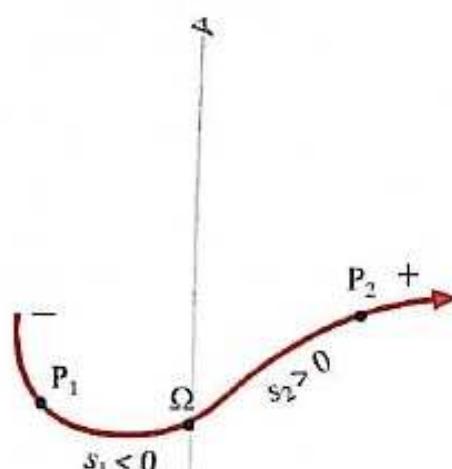


FIGURA 3-2  
Esempi di ascisse curvilinee.

L'equazione

$$s = s(t) \quad (3-5)$$

rappresenta invece l'**equazione oraria** (o *legge oraria*).

Il moto è quindi completamente descritto dalle quattro equazioni scalari (3-4) e (3-5). La conoscenza dell'equazione oraria permette di estrarre molte informazioni sulle caratteristiche del moto, com'è qualitativamente illustrato nell'esempio 3-2 e come sarà compiutamente analizzato più avanti.

### Esempio 3-1

Un punto materiale si muove su una circonferenza di raggio  $R$ , percorrendo archi uguali in tempi uguali. La circonferenza ha il centro nel punto C, di coordinate cartesiane  $(0, 0, R/2)$ , e giace su un piano parallelo al piano  $xy$ . Scrivere l'equazione della traiettoria e la legge oraria.

È noto dalla geometria che, nello spazio  $\mathcal{R}_3$  (in cui si sia stabilito un sistema di coordinate cartesiane ortogonali), una superficie è in generale rappresentata da una equazione del tipo

$$f(x, y, z) = 0,$$

mentre una curva può essere definita come intersezione fra due superfici, e quindi è esplicitamente rappresentata dal sistema delle due corrispondenti equazioni

$$\begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

Si possono avere molteplici rappresentazioni esplicite di una curva; nel caso della circonferenza di raggio  $R$ , giacente sul piano  $z = R/2$  e avente centro sull'asse  $z$ , si hanno, ad esempio, le due seguenti:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ z = \frac{R}{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + \left(z - \frac{R}{2}\right)^2 = R^2 \\ z = \frac{R}{2} \end{cases},$$

Nel primo caso la circonferenza è espressa come intersezione della superficie cilindrica di raggio  $R$ , avente l'asse  $z$  come asse di simmetria, e del piano  $z = R/2$ ; nel secondo caso l'intersezione si ha fra lo stesso piano e una superficie sferica di raggio  $R$  e centro nel punto C (vedi la fig. 3-3). D'altra parte, la stessa circonferenza può essere rappresentata anche utilizzando un *parametro*  $\alpha$ , variabile fra  $0$  e  $2\pi$ , nella forma seguente:

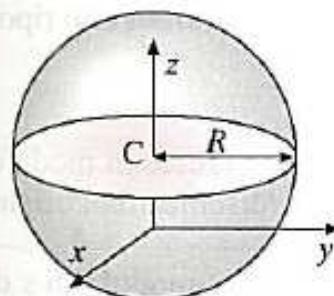
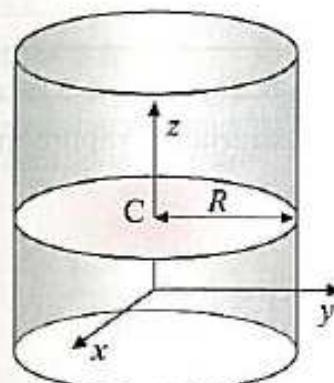
$$x = R \cos \alpha; \quad y = R \sin \alpha; \quad z = \frac{R}{2}.$$

Quest'ultimo è un esempio di rappresentazione parametrica di una curva. Si può notare che ora il numero di equazioni è tre. Il significato geometrico del parametro  $\alpha$  (un angolo) è rappresentato in figura 3-4. Introdotto un sistema di ascisse curvilinee, come indicato nella figura, essendo  $s = R\alpha$  si ha

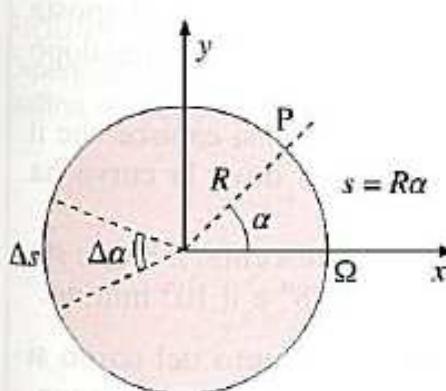
$$x = R \cos \frac{s}{R}; \quad y = R \sin \frac{s}{R}; \quad z = \frac{R}{2}.$$

Se il punto materiale percorre archi uguali in tempi uguali, gli archi percorsi, a partire dall'origine  $\Omega$ , devono essere proporzionali ai rispettivi intervalli temporali (assumendo  $t = 0$  quando il punto materiale si trova in  $\Omega$ ):

$$s = kt$$



**FIGURA 3-3**  
Due modi per ottenere una circonferenza.



**FIGURA 3-4**  
Alcuni parametri del moto lungo una circonferenza.

con  $k$  costante. In questo modo le equazioni viste diventano:

$$\begin{cases} x = R \cos(\omega_0 t) \\ y = R \sin(\omega_0 t) \\ z = \frac{R}{2} \end{cases} \quad (3-6)$$

nelle quali abbiamo indicato con  $\omega_0$  il rapporto  $k/R$ . Si vede facilmente che  $\omega_0$  ha le dimensioni dell'inverso di un tempo. In questa forma le equazioni del sistema assumono un contenuto sia geometrico sia fisico. Infatti esse, oltre a rappresentare geometricamente la circonferenza di partenza, dicono anche che essa è la traiettoria di un punto mobile che percorre archi uguali in tempi uguali. Il precedente sistema di equazioni è quindi formalmente equivalente alle equazioni

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ z = \frac{R}{2} \end{cases}$$

che rappresentano esplicitamente la traiettoria, e all'equazione oraria

$$s = (\omega_0 R)t.$$

### Esempio 3-2

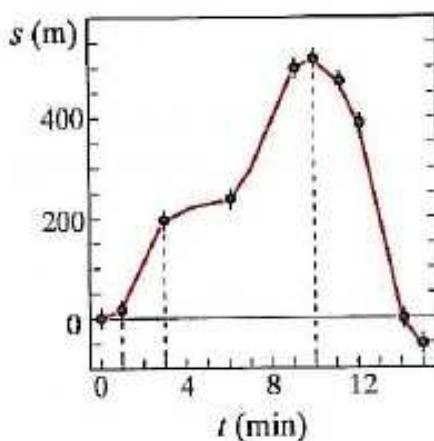


FIGURA 3-5  
Esempio di grafico di una legge oraria.

Il grafico dell'equazione oraria del moto di un punto materiale è rappresentato in figura 3-5. Trovare:

- i) il massimo valore dell'ascissa curvilinea;
- ii) il numero di volte in cui il corpo passa per l'origine;
- iii) in quali intervalli temporali il corpo si muove più rapidamente.

Si possono fare alcune considerazioni di tipo qualitativo, qui di seguito riportate:

- a) all'istante iniziale il corpo si trova nell'origine;
- b) nei primi 10 minuti il corpo si allontana dall'origine ( $s$  cresce in modulo) nel verso positivo della traiettoria; al 10° minuto la distanza dall'origine (lungo la traiettoria) è massima e vale circa 500 m;
- c) dopo il 10° minuto il corpo inverte il verso del moto (il modulo di  $s$  diminuisce) e transita di nuovo per l'origine per  $t = 14$  minuti; dunque il corpo passa due volte per l'origine;
- d) dopo il 14° minuto il corpo si allontana dall'origine, nel verso negativo delle ascisse curvilinee;
- e) fra il 1° e il 3° minuto (cioè in due minuti) il corpo si sposta (lungo la traiettoria) di circa 180 m; nei due minuti successivi, invece, si sposta di circa 30 m: prima dunque si è mosso, in media, più rapidamente, dopo più lentamente;
- f) analizzando nello stesso modo le altre zone del grafico, si capisce che il corpo si è mosso in modo più rapido (mediamente) dove la curva ha maggiore pendenza;
- g) fra il 4° e l'8° minuto, il moto avviene con rapidità crescente: il corpo sta accelerando; l'opposto avviene (decelerazione) fra l'8° e il 10° minuto.

Queste considerazioni suggeriscono che le **modalità** del moto del corpo si possano conoscere più a fondo analizzando in forma più *quantitativa* l'equazione oraria. Questo sarà il passo successivo, che richiederà una rigorosa definizione delle grandezze appena citate, come velocità e accelerazione.

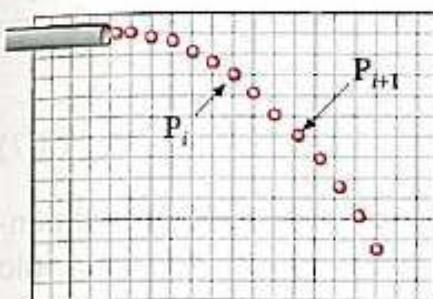
### 3-5 Introduzione al concetto di velocità

I dati di base per la descrizione e lo studio dei moti sono costituiti dall'insieme dei risultati di *misurazioni associate di posizione e di tempo*. Essi possono essere organizzati in vari modi (sotto forma di tabelle, grafici e così via) e l'analisi delle loro correlazioni porta all'individuazione degli aspetti caratteristici del moto in esame (si veda l'esempio 3-2). Per lo studio *quantitativo* dell'evoluzione del moto sono di centrale importanza i concetti di *velocità e di accelerazione*. Le grandezze fisiche corrispondenti sono grandezze vettoriali, le cui caratteristiche saranno qui introdotte con l'ausilio di un esempio particolare ma istruttivo: *il moto piano di una pallina, lanciata in direzione orizzontale* da una certa quota. La discussione si basa sui risultati di un esperimento, condotto in condizioni tali da poter trascurare gli effetti della resistenza dell'aria sul moto della pallina.

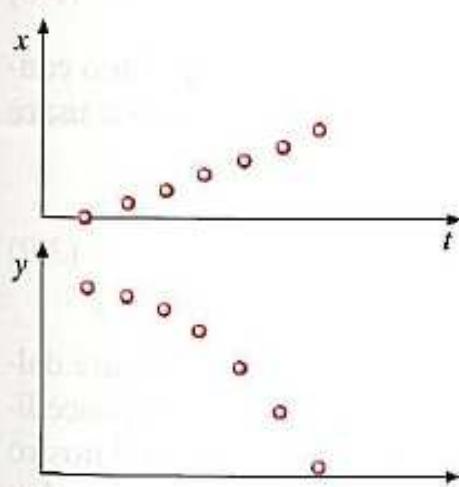
La tecnica adottata per l'osservazione e le misurazioni delle posizioni della pallina utilizza un flash e una macchina fotografica. In una successione di *istanti* egualmente intervallati ( $\Delta\tau$ ), il flash illumina la scena in cui avviene il moto, e la macchina fotografica (che ha l'otturatore sempre aperto) registra tutte le corrispondenti immagini della pallina su un solo fotogramma. I risultati di queste osservazioni sono sinteticamente rappresentati nella figura 3-6; essa permette anche una prima analisi quantitativa, utilizzando uno sfondo graduato di riferimento parallelo al piano verticale del moto.

La successione nel tempo delle posizioni della pallina appare dotata di una *regolarità* che, ripresentandosi in maniera ancora più evidente nei casi in cui si ripeta la misurazione riducendo  $\Delta\tau$ , costituisce un'indicazione della validità dell'ipotesi di continuità del moto. In quest'ipotesi, e nello schema del punto materiale, possiamo quindi aspettarci che la curva che rappresenta la traiettoria della pallina goda di definite proprietà di regolarità. Nel caso in esame, la figura 3-6 suggerisce per la traiettoria una forma parabolica, con vertice nel punto di lancio e asse verticale. Ciò è confermato da un'analisi più dettagliata delle informazioni contenute nella figura, utilizzando un sistema di coordinate cartesiane connesso con il reticolo di sfondo (asse  $x$  orizzontale e asse  $y$  verticale). Estraendo da ogni posizione registrata in figura 3-6 le coordinate  $x$  e  $y$  del centro della pallina ai vari istanti successivi, si possono costruire i due grafici riportati in figura 3-7. Da essi si deduce che le equazioni parametriche della traiettoria (piana)  $x = x(t)$  e  $y = y(t)$  sono di tipo rispettivamente lineare e quadratico in  $t$ , e quindi la traiettoria è effettivamente una parabola (par. 3-17).

Ritornando ad un esame sintetico della figura 3-6, possiamo esaminare gli spostamenti  $\mathbf{P}_i \mathbf{P}_{i+1}$  della pallina fra le posizioni generiche agli istanti  $t_i$  e  $t_{i+1}$ . Notiamo che tali vettori cambiano al variare di  $i$ , cioè cambiano con il tempo: precisamente, il loro modulo (che dà la distanza fra i punti  $P_i$  e  $P_{i+1}$ ) aumenta da un intervallo al successivo, e anche la loro direzione cambia, inclinandosi sempre più verso la verticale al crescere di  $i$ . La prima variazione suggerisce che il moto della pallina avviene con una rapidità variabile nel tempo e la seconda indica che la direzione del moto cambia con il tempo. Possiamo quindi pensare di dare un'espressione quantitativa all'evoluzione nel tempo delle caratteristiche del moto attraverso l'introduzione di opportune *grandezze vettoriali* collegate ai suddetti vettori spostamento.

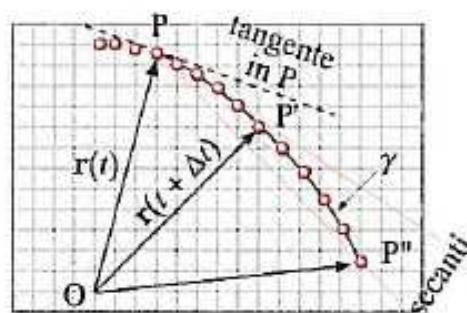


**FIGURA 3-6**  
Moto di una pallina, lanciata orizzontalmente, causato dall'attrazione terrestre.



**FIGURA 3-7**  
Dipendenza delle coordinate della pallina dal tempo.

### 3-6 Il vettore velocità



**FIGURA 3-8**  
Tangente e secante fra due punti della traiettoria.

Con riferimento all'esperimento descritto nel paragrafo precedente, consideriamo due istanti,  $t$  e  $t' = t + \Delta t$ , ove  $t$  è uno degli istanti  $t_i$  e  $\Delta t$  contiene alcuni  $\Delta\tau$ . Siano  $P$  e  $P'$  le posizioni occupate dalla pallina in tali istanti e  $\mathbf{r}(t)$  e  $\mathbf{r}(t')$  i corrispondenti vettori posizione rispetto all'origine  $O$  del sistema di riferimento (fig. 3-8). Una prima informazione sul moto (in  $\Delta t$ ) è rappresentata dal rapporto fra lo spostamento  $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t') - \mathbf{r}(t)$  effettuato in tale intervallo di tempo e la durata  $\Delta t$  di questo. Naturalmente essa è solo un'informazione di tipo *medio* su quanto è accaduto alla pallina fra  $t$  e  $t'$ ; in effetti, la sola conoscenza delle posizioni in tali istanti non permette di stabilire, per esempio, se la pallina si sia effettivamente mossa in linea retta lungo la direzione di  $\Delta\mathbf{r}$  oppure su una traiettoria curva, e nemmeno di sapere se il moto è avvenuto con rapidità uniforme o variabile in tale intervallo, o di conoscere la lunghezza del percorso compiuto. Il *vettore*

$$\mathbf{v}_m = \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} \quad (3-7)$$

viene quindi chiamato *velocità media* nell'intervallo  $\Delta t$ . Essa non dipende dal percorso effettivamente compiuto nell'intervallo fra  $t$  e  $t'$ , ma solo dalle posizioni iniziali e finali, e dal tempo di percorrenza.

Una descrizione più fedele e *puntuale* delle caratteristiche del moto può essere ottenuta quando, come nel caso in esame, si hanno ulteriori informazioni sperimentali su ciò che accade fra  $t$  e  $t'$ ; se cioè possiamo studiare come si comporta il vettore  $\mathbf{v}_m$  al ridursi della durata dell'intervallo temporale  $\Delta t$ . In altri termini, ci aspettiamo che tale descrizione possa essere data dal valore limite della velocità media per  $\Delta t$  che tende a zero.

Definiamo quindi come *velocità (istantanea)* al tempo  $t$  il vettore:

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbf{v}_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}. \quad (3-8)$$

Tenendo conto della definizione di derivata di un vettore, possiamo concludere che  $\mathbf{v}$  è la *derivata del vettore posizione rispetto al tempo* e usare per esso la scrittura

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}.$$

(3-9)

Le caratteristiche generali di questo vettore possono essere ottenute dall'esame della figura 3-8, ove sono evidenziati i passi di questo procedimento di limite (consentiti dai dati sperimentali a disposizione nel nostro esempio particolare). Nella figura è disegnata anche la traiettoria  $\gamma$  che, come si è discusso in precedenza, può essere ottenuta con ulteriori dati sperimentali e con opportune interpolazioni.

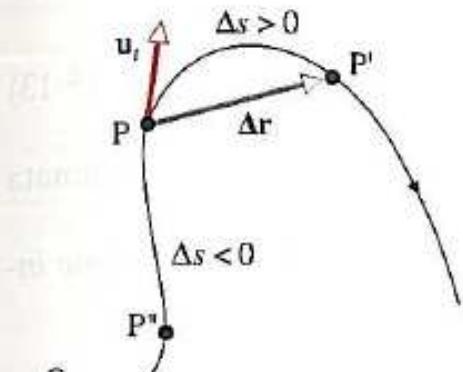
Osserviamo che, per sua definizione, la velocità media fra  $t$  e  $t'$  è un vettore parallelo allo spostamento  $\mathbf{PP}'$ , e ha quindi la direzione della retta (secante) che interseca  $\gamma$  in  $P$  e  $P'$ . Al ridursi di  $\Delta t$ ,  $P'$  tende a  $P$  e la direzione della secante  $\mathbf{PP}'$  tende (per definizione) a quella della retta tangente in  $P$  alla traiettoria; di conseguenza, la *velocità istantanea* al tempo  $t$  ha la *direzione* della retta **tangente** alla traiettoria nel punto  $P$ .

D'altra parte, al ridursi di  $\Delta t$ , lo spostamento  $\mathbf{PP}'$  tende ad *avvicinarsi* alla traiettoria e il suo modulo, che rappresenta la lunghezza della corda corrispondente, è sempre meglio approssimato dalla lunghezza del-

l'arco di traiettoria ( $|\Delta s|$ ) da esso sotteso (fig. 3-9). Si ha dunque:

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|\mathbf{PP}'|}{|\Delta s|} = 1. \quad (3-10)$$

In termini più sintetici, per  $t'$  che tende a  $t$  la direzione della *secante* tende a diventare quella della *tangente* e la *corda* tende a confondersi con l'*arco* elementare. Possiamo quindi dire che il modulo della velocità istantanea è il limite per  $\Delta t$  che tende a zero del rapporto fra la lunghezza dell'arco di traiettoria e il tempo  $\Delta t$  in cui l'arco è stato percorso; questo rapporto dà quindi effettivamente una misura della rapidità con cui viene via via percorsa la traiettoria.



**FIGURA 3-9**  
Costruzione del versore tangente  
a una curva.

### 3-7 Rappresentazione intrinseca della velocità

Un'espressione formale, che esplicita le citate caratteristiche del vettore  $\mathbf{v}$ , può essere facilmente ottenuta ricorrendo alla rappresentazione intrinseca della traiettoria, che abbiamo trattato nel paragrafo 3-4. La nozione che ora introduciamo a tale scopo è quella di **versore tangente** a una curva su cui siano stati definiti un'origine e un verso positivo per le ascisse curvilinee.

Le precedenti considerazioni, relative a secante e tangente a una curva, ci permettono di procedere rapidamente. Dati due punti  $P$  e  $P'$  della curva, individuati dalle ascisse curvilinee  $s$  e  $s' = s + \Delta s$ , e detto  $\Delta \mathbf{r}$  il vettore  $\mathbf{PP}'$ , consideriamo il rapporto  $\Delta \mathbf{r}/\Delta s$  e il suo limite per  $\Delta s$  che tende a zero (fig. 3-9). Questo vettore ha la direzione della secante e il verso *concorde* con quello degli archi crescenti, cioè con quello scelto come positivo sulla curva (si osservino nella figura 3-9 le due situazioni con  $s' > s$  e  $s' < s$ ). Nel limite considerato esso tende ad assumere la direzione tangente alla curva in  $P$  e ad avere modulo unitario [vedi la relazione (3-10)], mantenendo il verso *concorde con quello dell'orientamento della curva*.

Esso è quindi il **versore tangente** alla curva orientata (nel punto  $P$ ) e può essere espresso nella forma

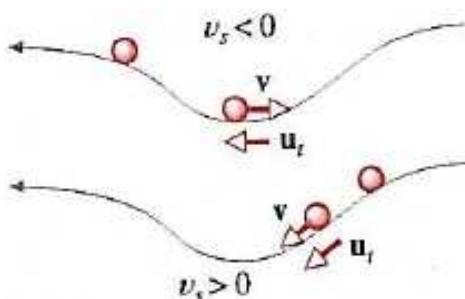
$$\mathbf{u}_t = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s} = \frac{d \mathbf{r}}{ds}. \quad (3-11)$$

La conoscenza delle equazioni parametriche della curva permette quindi di determinare  $\mathbf{u}_t$  in ogni suo punto.

Tenendo conto del ruolo di variabile intermedia fra  $\mathbf{r}$  e  $t$  giocato da  $s$ , e delle relazioni (3-9) e (3-11), possiamo stabilire il legame della velocità con le equazioni della traiettoria e con la legge oraria (utilizzando le regole per la derivazione delle funzioni composte discusse nell'Appendice A-3):

$$\mathbf{v} = \frac{d \mathbf{r}}{dt} = \frac{d \mathbf{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt} \mathbf{u}_t. \quad (3-12)$$

La (3-12) mostra esplicitamente che la *velocità è tangente alla traiettoria*, e che il suo *modulo* è dato da  $\left| \frac{ds}{dt} \right|$ . Il verso di  $\mathbf{v}$  coincide con quello di  $\mathbf{u}_t$  (a sua volta determinato dalla scelta fatta per l'orientamento della traiettoria) o con quello opposto, a seconda che il moto avvenga *istantaneamente* nel verso scelto come positivo per le ascisse curvilinee

**FIGURA 3-10**

Esempi di moti con velocità scalari di segno opposto.

$\left( \frac{ds}{dt} > 0 \right)$  o nel verso opposto (fig. 3-10). La grandezza

$$v_s = \frac{ds}{dt} \quad (3-13)$$

è la parte scalare della velocità rispetto al versore  $u_t$ ; essa viene chiamata anche *velocità scalare*<sup>(1)</sup>.

È possibile quindi scrivere la velocità nella sua *rappresentazione intrinseca*:

$$\mathbf{v} = v_s \mathbf{u}_t = \dot{s} \mathbf{u}_t. \quad (3-14)$$

La conoscenza dell'equazione oraria del moto permette di determinare la velocità scalare ad ogni istante, mediante l'operazione di derivazione rispetto al tempo.

### Esempio 3-3

Calcolare la velocità scalare di un punto materiale che si muove come descritto nell'esempio 3-1.

Abbiamo visto che il corpo descrive una traiettoria circolare, lungo la quale si muove percorrendo archi uguali in tempi uguali. La corrispondente legge oraria, ricavata nell'esempio 3-1, è:

$$s = (\omega_0 R)t$$

con  $\omega_0$  e  $R$  costanti. Di conseguenza:

$$v_s = \frac{ds}{dt} = \omega_0 R.$$

Tale velocità scalare è positiva o negativa in relazione al segno di  $\omega_0$ . Come verrà meglio discusso più avanti, un moto circolare con velocità scalare costante è detto *circolare uniforme*.

Da quanto precede dovrebbe essere chiaro che la grandezza vettoriale *velocità* fornisce le informazioni necessarie per seguire gli spostamenti elementari di un corpo in movimento. Il moto può essere considerato infatti come una successione di spostamenti (rettilinei) infinitesimi  $d\mathbf{r} = \mathbf{v} dt$ , avvenuti in intervalli temporali  $dt$ . Tali spostamenti hanno, in ogni istante, la direzione e il verso (in generale variabili) della corrispondente velocità istantanea; hanno inoltre intensità proporzionale a  $dt$ , tramite il modulo della velocità stessa. Secondo tale descrizione, è evidente che lo *spazio percorso* è la somma delle lunghezze degli archi infinitesimi percorsi sulla traiettoria e quindi è dato dalla somma delle grandezze elementari  $|ds| = |\mathbf{v}| dt \equiv v dt$ . Come è noto dall'analisi matematica (vedi anche l'Appendice A-6) questa somma può essere calcolata tramite l'integrale

$$\int_{t_1}^{t_2} |\mathbf{v}(t)| dt \equiv \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt \quad (\text{spazio percorso}) \quad (3-15)$$

<sup>(1)</sup> Il termine *velocità scalare* è usato in alcuni testi con un significato diverso da quello corrispondente alla nostra definizione. Alcuni autori, ad esempio, chiamano così il modulo  $v$  della velocità, che è una quantità non negativa. Secondo la (3-13), invece, la velocità scalare può essere anche negativa; il modulo della velocità è dato dal valore assoluto della velocità scalare.

ove  $t_1$  e  $t_2$  sono gli istanti iniziale e finale dell'intervallo di tempo considerato. Per definizione lo spazio percorso è *non negativo*, ed è nullo solo se il corpo resta fermo. Questa quantità è in generale diversa dalla somma degli archi infinitesimi  $ds$ , cioè dall'*integrale definito* della velocità scalare, che dà la differenza fra i valori finale e iniziale dell'ascissa curvilinea del punto materiale:

$$\Delta s \equiv s_2 - s_1 = \int_{t_1}^{t_2} v_s(t) dt \equiv \int_{t_1}^{t_2} \frac{ds}{dt} dt \equiv \int_{s_1}^{s_2} ds. \quad (3-16)$$

Quest'ultima differenza potrebbe essere nulla anche se il corpo è in movimento, come nel caso del moto di andata e ritorno alla posizione iniziale di un'automobile, lungo un'arbitraria traiettoria. Nel caso dell'automobile, quindi, il *tachimetro* dà una misura *non della velocità scalare* ma del suo modulo; il *contachilometri* fornisce il valore dell'integrale (3-15) e non dell'integrale (3-16).

Le dimensioni fisiche della velocità sono quelle del suo modulo, e dunque, tenendo conto della definizione, quelle del rapporto fra una lunghezza e un tempo:  $[v] = [M^0 L T^{-1}]$ . Nel Sistema Internazionale l'unità di misura della velocità è quindi il metro al secondo (m/s). La tabella 3-1 dà un'idea dell'ampio intervallo di valori di velocità misurate in varie situazioni di interesse in Fisica.

**TABELLA 3-1**  
Valori di alcune velocità caratteristiche.

Fenomeno	Velocità (m/s)
Deriva America-Europa	$10^{-9}$
Uomo che cammina	1
Jet che decolla	80
Suono in aria	$3,3 \cdot 10^2$
Moto della Terra rispetto al Sole	$3 \cdot 10^4$
Moto del Sistema Solare rispetto al centro della galassia	$2,5 \cdot 10^5$
Elettrone nell'atomo di idrogeno	$2,2 \cdot 10^6$
Moto della galassia più veloce rispetto alla Terra	$2,4 \cdot 10^8$
Propagazione della luce	$3 \cdot 10^8$

### 3-8 Rappresentazione cartesiana della velocità

Oltre che nella forma intrinseca (3-14), la velocità può essere espressa in altri modi, a seconda del sistema di coordinate usato per rappresentare il vettore posizione  $\mathbf{r}$  nel sistema di riferimento scelto. In un sistema di riferimento con origine O,  $\mathbf{r}$  ha la rappresentazione cartesiana (3-2) e quindi, dato che i versori ( $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$ ) degli assi coordinati non dipendono da  $t$ , possiamo scrivere  $\mathbf{v}$  nella forma

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy}{dt} \mathbf{j} + \frac{dz}{dt} \mathbf{k}. \quad (3-17)$$

Le componenti cartesiane di  $\mathbf{v}$  sono quindi le derivate rispetto al tempo delle corrispondenti componenti del vettore posizione

$$v_x = \frac{dx}{dt}; \quad v_y = \frac{dy}{dt}; \quad v_z = \frac{dz}{dt}. \quad (3-18)$$

L'espressione (3-17) può essere scritta anche nella forma più compatta

$$\mathbf{v} = \dot{x} \mathbf{i} + \dot{y} \mathbf{j} + \dot{z} \mathbf{k}$$

ove l'operazione di derivazione rispetto al tempo è sinteticamente rappresentata ponendo un puntino sul simbolo della funzione (come specificato nell'Appendice A-2).

La conoscenza dell'equazione vettoriale del moto  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  permette così di determinare  $\mathbf{v}(t)$  attraverso la (3-9) e di darne le componenti cartesiane mediante le (3-18). Il modulo della velocità può poi essere calcolato come  $\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ ; la sua direzione può infine essere determinata attraverso i suoi coseni direttori [vedi le relazioni (2-5)]. Gli esempi seguenti illustrano tale procedimento.

### Esempio 3-4

Determinare le componenti cartesiane della velocità nel moto descritto nella figura 3-7.

I grafici riportati in figura 3-7 mostrano per  $x(t)$  un andamento lineare in  $t$  e per  $y(t)$  un andamento quadratico in  $t$ :

$$x(t) = b t; \quad y(t) = c - d t^2$$

ove  $b, c$  e  $d$  sono costanti positive. Sulla base delle relazioni (3-18) si ottiene

$$v_x = b; \quad v_y = -2dt.$$

Questi valori corrispondono a ciò che si deduce osservando la figura 3-7 e ricordando il significato geometrico della derivata prima di una funzione  $f(t)$ . Com'è noto (vedi l'Appendice A-2) detta derivata fornisce il coefficiente angolare della retta tangente alla curva (nel punto considerato) che rappresenta  $f(t)$ . Si trova così che  $v_x$  ha un valore costante;  $v_y$ , che è nulla per  $t = 0$ , è negativa per  $t > 0$  e ha un modulo che cresce linearmente con il tempo: il moto avviene con una rapidità crescente con  $t$  (fig. 3-11).

In questo caso di moto piano, la direzione di  $\mathbf{v}$  può essere definita dal solo angolo  $\alpha$  che il vettore  $\mathbf{v}$  forma con l'asse delle  $x$ : essendo  $\tan \alpha = \frac{v_y}{v_x} = -\frac{2d}{b}t$  possiamo verificare che la direzione di  $\mathbf{v}$  cambia con il tempo, aumentando progressivamente la sua inclinazione rispetto all'asse verticale. Queste conclusioni confermano quantitativamente le osservazioni già fatte a un primo esame della figura 3-6. Vedremo più avanti come descrivere queste variazioni nel tempo del vettore velocità.

**Nota bene:** se si confronta il grafico di  $y(t)$  (fig. 3-7) con il grafico che rappresenta la traiettoria parabolica  $y = y(x)$  della pallina (fig. 3-6), si trova che essi sono del tutto simili. Questa somiglianza non deve trarre in inganno: non si devono confondere i grafici degli andamenti temporali delle coordinate del punto materiale con la rappresentazione grafica della traiettoria. In questo caso particolare una delle coordinate ( $x$ ) varia linearmente con il tempo, di modo che la dipendenza di  $y$  da  $t$  ha la stessa forma di quella di  $y$  da  $x$ .

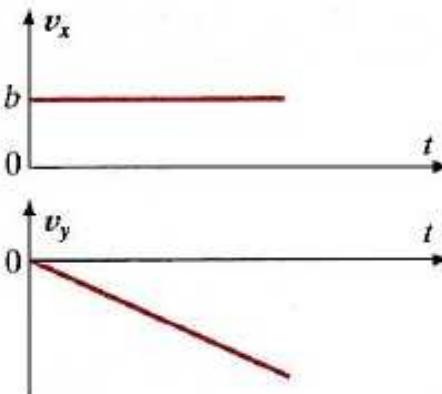


FIGURA 3-11

Componenti cartesiane della velocità, nel moto descritto in figura 3-7.

### Esempio 3-5

L'equazione vettoriale del moto di una particella è:  $\mathbf{r} = (2\alpha t^2) \mathbf{i} + \beta(2t + t_0) \mathbf{j} + 4\delta \mathbf{k}$ , con  $\alpha, \beta, \delta$  e  $t_0$  costanti. Trovare le componenti cartesiane della velocità e il suo modulo.

Le componenti della velocità si ottengono derivando le corrispondenti componenti del vettore posizione:

$$\begin{cases} \dot{x} = 4\alpha t \\ \dot{y} = 2\beta \\ \dot{z} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{v} = (4\alpha t) \mathbf{i} + (2\beta) \mathbf{j} \\ v = \sqrt{16\alpha^2 t^2 + 4\beta^2} \end{cases}$$

**Esempio 3-6**

Esprimere in coordinate cartesiane ortogonali la velocità del corpo considerato nell'esempio 3-1. Calcolare il modulo della velocità e verificare che essa è tangente alla traiettoria.

Possiamo scrivere il vettore posizione nella forma:

$$\mathbf{r} = (R \cos \omega_0 t) \mathbf{i} + (R \sin \omega_0 t) \mathbf{j} + \frac{R}{2} \mathbf{k}$$

da cui

$$\mathbf{v} = (-\omega_0 R \sin \omega_0 t) \mathbf{i} + (\omega_0 R \cos \omega_0 t) \mathbf{j}.$$

Il modulo si ottiene attraverso le componenti:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{(-\omega_0 R \sin \omega_0 t)^2 + (\omega_0 R \cos \omega_0 t)^2} = |\omega_0| R$$

che è il modulo dell'espressione già trovata nell'esempio 3-3. Per quanto riguarda la direzione di  $\mathbf{v}$ , poiché la traiettoria è circolare (con centro nell'origine degli assi), basta verificare che  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{r}$  siano perpendicolari. Facendone dunque il prodotto scalare, si ottiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} &= \left[ (R \cos \omega_0 t) \mathbf{i} + (R \sin \omega_0 t) \mathbf{j} + \frac{R}{2} \mathbf{k} \right] \cdot [(-\omega_0 R \sin \omega_0 t) \mathbf{i} + \\ &+ (\omega_0 R \cos \omega_0 t) \mathbf{j}] = -\omega_0 R^2 \sin(\omega_0 t) \cos(\omega_0 t) + \omega_0 R^2 \sin(\omega_0 t) \cos(\omega_0 t) = 0. \end{aligned}$$

**Esempio 3-7**

$\mathbf{r} = A(e^{\alpha t} \mathbf{i} + e^{-\alpha t} \mathbf{j})$ , ove  $A$  e  $\alpha$  sono due costanti positive, è l'equazione vettoriale del moto di un punto materiale. Determinare la velocità e tracciare la traiettoria.

Derivando le componenti di  $\mathbf{r}$  si ottiene:

$$\begin{aligned} v_x &= A\alpha e^{\alpha t}; v_y = -A\alpha e^{-\alpha t}; \text{ e quindi } \mathbf{v} = A\alpha(e^{\alpha t} \mathbf{i} - e^{-\alpha t} \mathbf{j}) \\ \text{da cui } v &= A\alpha \sqrt{e^{2\alpha t} + e^{-2\alpha t}}. \end{aligned}$$

Per studiare l'andamento della traiettoria è spesso utile esaminare il comportamento nei casi limite.

Per  $t = 0$  si ha:  $\mathbf{r}(0) = A(\mathbf{i} + \mathbf{j})$  e  $\mathbf{v}(0) = A\alpha(\mathbf{i} - \mathbf{j})$ .

Per  $t$  che va all'infinito tendono a zero i componenti di  $\mathbf{r}$  e di  $\mathbf{v}$  lungo  $\mathbf{j}$ , mentre tendono all'infinito quelli lungo  $\mathbf{i}$ ; di conseguenza,  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{v}$  tendono a diventare paralleli a  $\mathbf{i}$  e ad assumere un modulo infinitamente grande. Uno schizzo della traiettoria è presentato nella figura 3-12.

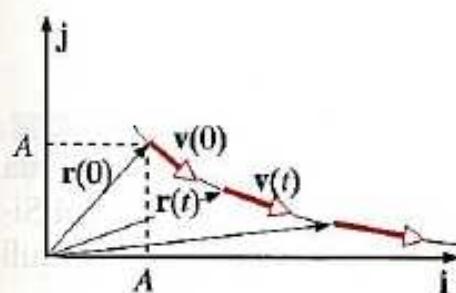


FIGURA 3-12

### 3-9 Accelerazione

In generale, durante il moto, il vettore velocità  $\mathbf{v}$  non resta costante al trascorrere del tempo, ma cambia perché variano il suo modulo, la sua direzione orientata o entrambi. Poiché le variazioni di velocità risultano importanti ai fini dello svolgimento del moto, s'introduce un vettore che tiene conto di tali cambiamenti. Il procedimento è del tutto analogo a quello seguito per la definizione della velocità, passando attraverso la definizione di una grandezza *media* e un successivo passaggio al limite quando l'intervallo temporale tende a zero.

Se all'istante  $t$  la velocità è  $\mathbf{v}(t)$  e all'istante  $t' = t + \Delta t$  la velocità è  $\mathbf{v}(t')$ , si definisce **accelerazione media** nell'intervallo  $\Delta t$  il vettore

$$\mathbf{a}_m = \frac{\mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t} \quad (3-19)$$

che si ottiene come rapporto fra la variazione di velocità e l'intervallo di tempo trascorso fra  $t$  e  $t'$ . Questa grandezza vettoriale dà un'informazione media sul cambiamento del vettore velocità fra  $t$  e  $t'$  e non tiene conto degli effettivi valori di  $\mathbf{v}$  in tale intervallo. Una migliore rappresentazione si ottiene utilizzando intervalli  $\Delta t$  sempre più piccoli e in particolare considerando il valore limite di  $\mathbf{a}_m$  per  $\Delta t$  che tende a zero. Tale limite definisce l'*accelerazione (istantanea)*:

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbf{a}_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$$

Questo vettore, essendo il limite di un rapporto incrementale, è la *derivata prima del vettore velocità* e anche, poiché  $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ , la derivata seconda del vettore posizione:

$$\boxed{\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}}. \quad (3-20)$$

Utilizzando la (3-20) e le espressioni cartesiane dei vettori posizione e velocità, si può facilmente trovare l'espressione cartesiana dell'accelerazione:

$$\mathbf{a} = \frac{dv_x}{dt} \mathbf{i} + \frac{dv_y}{dt} \mathbf{j} + \frac{dv_z}{dt} \mathbf{k} = \frac{d^2x}{dt^2} \mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \mathbf{k} \quad (3-21)$$

e cioè

$$\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}} = \ddot{x} \mathbf{i} + \ddot{y} \mathbf{j} + \ddot{z} \mathbf{k}.$$

Le componenti cartesiane dell'accelerazione sono quindi:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \equiv \ddot{x} \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} \equiv \ddot{y} \\ a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} \equiv \ddot{z} \end{array} \right. \quad (3-22)$$

Poiché l'accelerazione è il rapporto fra una velocità e un tempo, la sua equazione dimensionale è  $[a] = [M^0 L T^{-2}]$ ; la sua unità di misura nel Sistema Internazionale è il  $m/s^2$ . La tabella 3-2 raccoglie i valori dei moduli delle accelerazioni che si riscontrano in diverse situazioni.

TABELLA 3-2

Valori di alcune accelerazioni caratteristiche.

Fenomeno	Accelerazione ( $m/s^2$ )
Variazione diurna della gravità sulla Terra	$2 \cdot 10^{-6}$
Rotazione della Terra (Equatore)	$3,4 \cdot 10^{-2}$
Accelerazione gravitazionale sulla Luna	1,7
Automobile in frenata	8
Accelerazione di gravità sulla Terra	9,8
Accelerazione di gravità sul Sole	$2,7 \cdot 10^2$
Urto di automobile a 100 km/h	$10^3$
Pallone calcio	$3 \cdot 10^3$
Palla da baseball colpita da mazza	$3 \cdot 10^4$
Ultracentrifuga	$3 \cdot 10^6$
Protoni accelerati al Fermilab	$9 \cdot 10^{13}$

**Esempio 3-8**

Calcolare l'accelerazione del moto descritto nell'esempio 3-5, in coordinate cartesiane ortogonali.

Derivando rispetto al tempo le componenti cartesiane della velocità, otteniamo le seguenti componenti dell'accelerazione:

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = 4\alpha \\ \ddot{y}(t) = 0 \\ \ddot{z}(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{a} = 4\alpha \mathbf{i}$$

**Esempio 3-9**

Calcolare le componenti cartesiane dell'accelerazione nel moto trattato negli esempi 3-1 e 3-6. Verificare che l'accelerazione ha la stessa direzione e verso opposto rispetto al vettore posizione.

Riprendendo dalla soluzione dell'esempio 3-6

$$\mathbf{r} = (R \cos \omega_0 t) \mathbf{i} + (R \sin \omega_0 t) \mathbf{j} + \frac{R}{2} \mathbf{k}$$

$$\text{e } \mathbf{v} = (-\omega_0 R \sin \omega_0 t) \mathbf{i} + (\omega_0 R \cos \omega_0 t) \mathbf{j}.$$

e derivando le corrispondenti componenti della velocità, si ottengono le componenti dell'accelerazione:

$$\begin{cases} a_x = -\omega_0^2 R \cos \omega_0 t \\ a_y = -\omega_0^2 R \sin \omega_0 t \end{cases} \Rightarrow \mathbf{a} = (-\omega_0^2 R \cos \omega_0 t) \mathbf{i} + (-\omega_0^2 R \sin \omega_0 t) \mathbf{j} = -\omega_0^2 \mathbf{r}.$$

L'ultima relazione mostra che  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{r}$  hanno in ogni istante la stessa direzione, ma versi opposti.

**Esempio 3-10**

Determinare l'accelerazione per il moto descritto in figura 3-7.

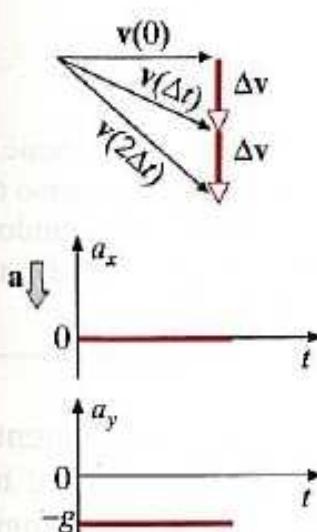
Nell'esempio 3-4 abbiamo espresso le componenti cartesiane della velocità come

$$v_x = b; \quad v_y = -2dt.$$

Di conseguenza, possiamo ottenere le componenti cartesiane dell'accelerazione, derivando rispetto al tempo:

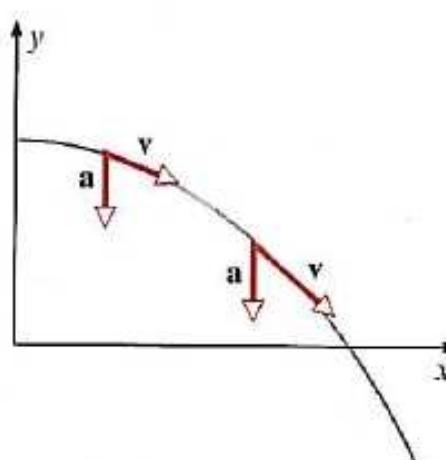
$$a_x = 0; \quad a_y = -2d.$$

Esse sono riportate nella parte inferiore della figura 3-13. Anche partendo dai dati sperimentali rappresentati in figura 3-7, si potrebbe ricavare che le variazioni di velocità nel moto della pallina sono descrivibili mediante un vettore accelerazione diretto verticalmente verso il basso e di modulo indipendente dal tempo. Ciò è mostrato graficamente nella figura 3-13, in cui sono illustrati alcuni dei passi del procedimento di limite, e dalla figura 3-14. Il valore numerico ( $g$ ) di  $a$  risulta di circa  $9,8 \text{ m/s}^2$ . È interessante osservare che il vettore accelerazione è diretto, in ogni punto della traiettoria, *verso la concavità* da essa determinata. Di questo fatto, valido in generale (vedi anche l'esempio 3-9), daremo una giustificazione fra breve.



**FIGURA 3-13**  
Componenti cartesiane  
dell'accelerazione, in un moto con  
accelerazione verticale costante.

### 3-10 Espressione intrinseca dell'accelerazione



**FIGURA 3-14**  
Velocità e accelerazione, in un moto con accelerazione verticale costante.

Il vettore accelerazione riflette le diverse possibili variazioni elementari del vettore velocità (variazioni del suo modulo, cambiamenti nella sua direzione orientata) ed è quindi importante riuscire a esprimere in una forma che metta in evidenza i singoli contributi di questi due fattori. Ciò si può fare partendo dalla sua definizione e dall'espressione intrinseca della velocità. È facile dimostrare che  $\mathbf{a}$  si può esprimere come somma di due vettori componenti, uno *parallelo alla velocità*, e collegato alla rapidità di variazione della parte scalare di questa, e un altro *perpendicolare alla velocità*, dipendente dalla rapidità di variazione della sua direzione. Infatti, applicando la regola di derivazione del prodotto alla (3-14), si ha:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v_s \mathbf{u}_t) = \frac{dv_s}{dt} \mathbf{u}_t + v_s \frac{d\mathbf{u}_t}{dt}. \quad (3-23)$$

Essendo  $v_s = \frac{ds}{dt}$ , il primo termine si può scrivere nella forma

$$\mathbf{a}_t = \frac{d^2 s}{dt^2} \mathbf{u}_t \equiv \ddot{s} \mathbf{u}_t. \quad (3-24)$$

Tale componente ha lo stesso verso di  $\mathbf{u}_t$ , se la velocità scalare cresce o verso opposto se la velocità scalare diminuisce. Esso è il componente di  $\mathbf{a}$  che riflette le variazioni del modulo e/o del verso di  $\mathbf{v}$ , e viene anche detto *componente tangenziale* di  $\mathbf{a}$  o brevemente *accelerazione tangenziale*, in quanto ha la direzione (tangente alla traiettoria) di  $\mathbf{v}$ . Come dimostrato nell'esempio seguente, esso ha lo stesso verso di  $\mathbf{v}$  se il modulo di  $\mathbf{v}$  cresce, verso opposto se il modulo di  $\mathbf{v}$  diminuisce.

#### Esempio 3-11

Dimostrare che il componente tangenziale dell'accelerazione è collegato alla variazione nel tempo del modulo della velocità.

Consideriamo il caso in cui  $v$  non sia nullo, per cui si possa scrivere  $\mathbf{v} = v \mathbf{u}_v$ . L'accelerazione è quindi

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt} \mathbf{u}_v + v \frac{d\mathbf{u}_v}{dt},$$

nella quale il primo termine, essendo parallelo a  $\mathbf{u}_v$ , è tangenziale, mentre il secondo (se non è nullo) è perpendicolare a  $\mathbf{u}_v$ . Risulta quindi

$$\mathbf{a}_t = \frac{dv}{dt} \mathbf{u}_v.$$

Tale espressione mostra che il componente tangenziale dell'accelerazione ha lo stesso verso di  $\mathbf{v}$  se il modulo della velocità cresce; altrimenti, ha verso opposto. È interessante confrontare questa relazione con la (3-24): quando la derivata della velocità scalare ha segno opposto rispetto alla derivata del modulo, anche il versore  $\mathbf{u}_v$  ha verso opposto rispetto a  $\mathbf{u}_t$ .

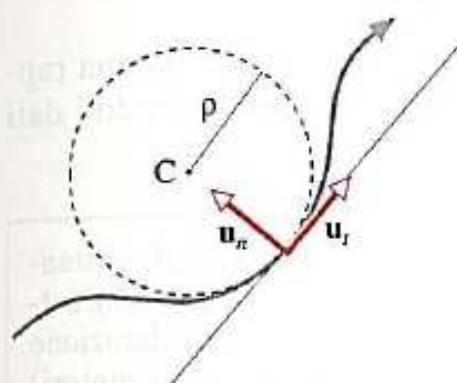
Per ottenere un'espressione più significativa del secondo componente di  $\mathbf{a}$  (perpendicolare a  $\mathbf{u}_t$ ) bisogna esplicitare la derivata del versore  $\mathbf{u}_t$  rispetto al tempo. A tale scopo ricordiamo che il versore tangente  $\mathbf{u}_t = \frac{dr}{ds}$  dipende dalla scelta del verso positivo per le ascisse curvilinee  $s$  sulla traiettoria, e non dalle effettive caratteristiche istantanee del moto. È quindi conveniente esprimere la dipendenza di  $\mathbf{u}_t$  dal tempo attrac-

verso la variazione di  $\mathbf{u}_t$ , al cambiare di  $s$  (che dipende dalla forma della traiettoria) e di quella di  $s$  al cambiare di  $t$  (che è più direttamente collegata al moto del punto). Si ha quindi:

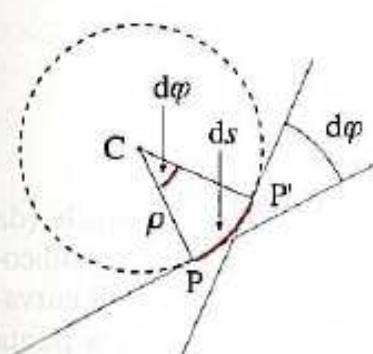
$$\frac{d\mathbf{u}_t}{dt} = \frac{d\mathbf{u}_t}{ds} \frac{ds}{dt} = \dot{s} \frac{d\mathbf{u}_t}{ds}. \quad (3-25)$$

La derivata del versore  $\mathbf{u}_t$  rispetto a  $s$  rappresenta una caratteristica intrinseca della traiettoria, dipendente dalle sue proprietà locali in  $P$ , e può essere espressa tramite la (2-8):

$$\frac{d\mathbf{u}_t}{ds} = \frac{d\varphi}{ds} \mathbf{u}_n$$



**FIGURA 3-15**  
Cerchio osculatore, centro di curvatura e versori tangente e normale, nel punto  $P$ .



**FIGURA 3-16**  
L'angolo  $d\varphi$  fra le tangenti in  $P$  e  $P'$  è uguale all'angolo al centro formato da  $CP$  e  $CP'$ .

nella quale  $\mathbf{u}_n$  è perpendicolare a  $\mathbf{u}_t$ . È noto dalla geometria (par. 3-26 dei Complementi) che un elemento di curva attorno a un generico punto  $P$  può essere approssimato con un elemento di arco di una circonferenza, il cui cerchio associato è detto *cerchio osculatore*; esso ha il centro nel cosiddetto *centro di curvatura*  $C(P)$  della curva in  $P$ , e ha raggio  $\rho$  (*raggio di curvatura*;  $1/\rho$  viene invece chiamato *curvatura*). La retta perpendicolare alla tangente in  $P$  alla curva, giacente nel piano (del cerchio) *osculatore* è chiamata *normale principale* e il versore della sua direzione, orientata da  $P$  verso il centro di curvatura, è proprio  $\mathbf{u}_n$  (*versore normale*). Tutti questi elementi sono mostrati in figura 3-15, nel caso di una curva piana, per la quale il piano osculatore coincide con il piano della curva. Sia  $\rho$  che  $\mathbf{u}_n$ , così come  $\mathbf{u}_t$ , dipendono dal punto  $P$ , e sono quindi *proprietà locali* della curva. L'estensione al caso di una traiettoria sghemba (per la quale anche il piano osculatore è una proprietà locale) è trattata negli Complementi. Poiché  $d\varphi$  è uguale all'angolo  $\frac{ds}{\rho}$  sotto il quale viene visto l'elemento di arco di curva dal centro di curvatura (fig. 3-15 e 3-16), si ha infine

$$\frac{d\mathbf{u}_t}{ds} = \frac{1}{\rho} \mathbf{u}_n. \quad (3-26)$$

Sostituendo nella (3-25) e nella (3-23) troviamo:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n = a_t \mathbf{u}_t + a_n \mathbf{u}_n = \ddot{s} \mathbf{u}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho} \mathbf{u}_n. \quad (3-27)$$

Il componente  $\mathbf{a}_n$  viene anche detto *componente normale* dell'accelerazione (o *accelerazione normale*). È importante osservare che la corrispondente parte scalare è sempre *non negativa*, per cui  $a_n$  punta sempre al centro di curvatura; essa è quindi chiamata *accelerazione centripeta* ed è esprimibile anche come

$$\mathbf{a}_n = \frac{v^2}{\rho} \mathbf{u}_n.$$

Quindi  $\mathbf{a}_n$  è presente in ogni moto su traiettoria non rettilinea e, di conseguenza, *ogni moto con traiettoria curva è accelerato*. Poiché il centro di curvatura si trova dalla parte della concavità della curva, anche  $\mathbf{a}$  punterà in generale verso quella parte, come già visto nei casi particolari degli esempi 3-9 e 3-10.

La rappresentazione di  $\mathbf{v}$  data dalla (3-14) e la decomposizione di  $\mathbf{a}$

nei componenti  $a_t$  e  $a_n$  espressi dalla (3-27) vengono dette anche *rappresentazioni intrinseche* di tali vettori.

Per le applicazioni è utile ricordare i vari modi in cui può essere espresso il modulo dell'accelerazione, a seconda della rappresentazione usata per il vettore  $\mathbf{a}$ . Così, oltre che tramite la familiare formula, in termini delle componenti cartesiane,

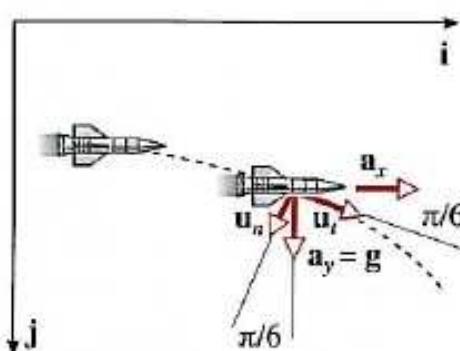
$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2},$$

si potrà scrivere il modulo di  $\mathbf{a}$ , in termini delle componenti intrinseche, come

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}.$$

L'esempio seguente mostra come possa essere utile passare da una rappresentazione all'altra per calcolare le quantità richieste, secondo i dati di cui si è a conoscenza.

### Esempio 3-12



**FIGURA 3-17**  
Missile che si muove in assetto orizzontale costante.

Un missile si sta muovendo nell'alta atmosfera, in assetto orizzontale costante (cioè mantenendosi parallelo a una fissata direzione; vedi figura 3-17), sotto l'azione dei suoi motori a razzo e dell'attrazione terrestre. L'accelerazione del missile ha una componente orizzontale (dovuta alla spinta dei motori)  $a_x = 5 \text{ m/s}^2$  e una componente verticale (dovuta alla gravità a tale quota)  $a_y = 9 \text{ m/s}^2$ . A un dato istante la velocità del missile (ossia del punto materiale con cui lo schematizziamo) è di 25 000 km/h ed è inclinata di  $30^\circ$  (verso il basso) rispetto alla direzione orizzontale.

Calcolare, in tale istante:

- l'espressione intrinseca dell'accelerazione;
- il raggio di curvatura della traiettoria;
- la rapidità con cui sta cambiando il modulo della velocità.

a) Orientiamo la traiettoria nel verso in cui viene percorsa dal missile (da sinistra a destra nella figura 3-17).  $\mathbf{u}_n$  ha la direzione della retta perpendicolare a  $\mathbf{u}_t$ , giacente nel piano del moto, e verso che punta al centro di curvatura. Per determinare tale verso osserviamo che, essendo  $a_y > 0$ ,  $\mathbf{a}$  punta verso il basso e quindi la traiettoria avrà la concavità da quella parte; perciò il verso di  $\mathbf{u}_n$  sarà quello indicato in figura. La coppia di vettori  $(\mathbf{u}_t, \mathbf{u}_n)$  è rotata di  $\pi/6$  rispetto alla coppia  $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ . Quindi:

$$\mathbf{u}_t = \cos(\pi/6)\mathbf{i} + \sin(\pi/6)\mathbf{j}; \quad \mathbf{u}_n = -\sin(\pi/6)\mathbf{i} + \cos(\pi/6)\mathbf{j}.$$

Poiché l'accelerazione è  $\mathbf{a} = (5\mathbf{i} + 9\mathbf{j}) \text{ m/s}^2$ , le sue componenti  $a_t$  e  $a_n$  si ottengono come  $a_t = \mathbf{a} \cdot \mathbf{u}_t$  e  $a_n = \mathbf{a} \cdot \mathbf{u}_n$  e risultano

$$a_t = a_x \cos(\pi/6) + a_y \sin(\pi/6); \quad a_n = -a_x \cos(\pi/3) + a_y \sin(\pi/3).$$

Quindi

$$\mathbf{a} = (8,8\mathbf{u}_t + 5,3\mathbf{u}_n) \text{ m/s}^2.$$

- b) Utilizzando la (3-27) si ha

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = 9099 \text{ km}.$$

Il valore molto elevato di  $\rho$  indica che la traiettoria ha una curvatura molto piccola ed è quindi quasi rettilinea.

- c) La grandezza richiesta è il modulo della componente tangenziale dell'accelerazione  $|a_t| = 8,8 \text{ m/s}^2$ . Poiché  $a_t$  e  $v_t$  sono entrambe positive, il modulo della velocità sta crescendo con il tempo al tasso determinato dal valore calcolato di  $a_t$ .

In generale anche il vettore accelerazione di un punto materiale può dipendere dal tempo e quindi ci si può chiedere se sia necessario introdurre un altro vettore che ne descriva la rapidità di variazione. Lo si potrebbe definire come  $\mathbf{b} = \frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3}$  e chiamarlo ad esempio *strappo*, con evidente richiamo alla sensazione che si prova quando si varia bruscamente l'accelerazione di un'automobile. Questa grandezza viene talvolta utilizzata per caratterizzare gli effetti fisiologici causati dalle variazioni delle caratteristiche del movimento su organismi viventi (per esempio, sui piloti degli aeroplani). In linea di principio anche  $\mathbf{b}$  potrebbe dipendere dal tempo e si potrebbe introdurre il vettore  $\frac{d\mathbf{b}}{dt}$ . In realtà, possiamo limitarci alla discussione delle proprietà del vettore accelerazione; infatti, come vedremo nel prossimo capitolo dedicato ai Principi della Dinamica, è proprio l'accelerazione la grandezza cinematica che risulta direttamente legata alle interazioni del corpo con l'ambiente, le quali determinano il moto del corpo stesso.

### 3-11 Classificazione di moti elementari

Le due relazioni

$$\begin{cases} \mathbf{v} = \dot{s} \mathbf{u}_t \\ \mathbf{a} = \ddot{s} \mathbf{u}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho} \mathbf{u}_n \end{cases} \quad (3-28)$$

permettono di classificare in modo assai semplice i moti più elementari su traiettoria nota, in quanto consentono di separare l'aspetto cinematico da quello geometrico (traiettoria) del moto.

Fissando l'attenzione sull'*equazione oraria* possiamo definire due importanti classi di moti:

- a) moti con  $\dot{s} = \text{costante} = \dot{s}_0$ , detti moti *uniformi*;
- b) moti con  $\ddot{s} = \text{costante} = \ddot{s}_0$  (a volte chiamati anche *uniformemente vari*).

Dal punto di vista geometrico, moti con traiettoria particolarmente semplice sono:

- c) moti *rettilinei*, caratterizzati da  $\rho \rightarrow \infty$ ;
- d) moti *circolari* in cui  $\rho = \text{costante}$ .

Per quanto riguarda il moto uniforme e il moto con  $\ddot{s} = \text{costante}$ , è possibile, partendo da questa loro caratteristica, ottenere l'*equazione oraria*  $s = s(t)$ . Di fatto, ciò corrisponde a risolvere un tipico *problema inverso*. L'attuale trattazione anticipa, in forma scalare, quella più generale sviluppata nel paragrafo 3-16.

#### 3-11-1 Moti uniformi

La ricerca di una funzione  $s(t)$ , di cui è nota la derivata, equivale a determinare una primitiva di  $\dot{s}(t)$ , cioè a farne l'*integrale indefinito* (vedi l'appendice A-6):

$$s(t) = \int \dot{s}(t) dt.$$

Quindi, nel caso in cui  $\dot{s} = \text{costante} = \dot{s}_0$

$$\text{si ottiene} \quad s(t) = \int \dot{s}_0 dt + C = \dot{s}_0 \int dt + C = \dot{s}_0 t + C.$$

Il valore di  $C$  si determina dalla conoscenza dell'ascissa curvilinea  $s_0 \equiv s(t_0)$  a un istante assegnato  $t_0$ . Di conseguenza

$$s(t) - s(t_0) = \dot{s}_0(t - t_0) \Rightarrow s(t) = \dot{s}_0(t - t_0) + s_0. \quad (3-29)$$

La relazione (3-29) rappresenta l'*equazione oraria del moto uniforme*.  $\dot{s}_0$  è la velocità scalare, in questo caso costante; positiva se il punto materiale percorre la traiettoria nel verso prescelto come positivo per l'ascissa curvilinea, negativa in caso contrario. Se  $t_0 = 0$  l'equazione oraria assume la semplice forma

$$s = \dot{s}_0 t + s_0, \quad (3-30)$$

da cui si deduce immediatamente che, nel moto uniforme, il punto materiale percorre archi di traiettoria di uguale lunghezza in tempi uguali.

È possibile ottenere lo stesso risultato con un procedimento che viene chiamato di *separazione delle variabili* (dipendente e indipendente); utilizzando la definizione di differenziale, data nell'appendice A-2, si ha

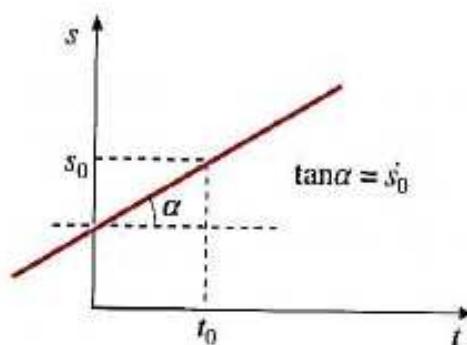
$$ds = \dot{s}_0 dt$$

e, integrando separatamente i due membri (cioè, cercando le loro primitive),

$$\int ds = \int \dot{s}_0 dt = \dot{s}_0 \int dt.$$

L'ultima equazione dà ancora, come risultato, la (3-30).

I due procedimenti illustrati sono del tutto equivalenti. In entrambi i casi, inoltre, si potrebbe arrivare al risultato tramite la procedura di integrazione definita, fra i corrispondenti valori dei limiti di integrazione. La relazione (3-29) mostra esplicitamente che, per ottenere l'equazione oraria a partire dalla velocità, è *necessario* conoscere anche il valore di  $s(t)$  a un istante dato  $t_0$ ; tale equazione è rappresentata in figura 3-18 da una retta, l'unica, fra quelle di coefficiente angolare  $\dot{s}_0$ , passante per il punto  $(t_0, s_0)$ .



**FIGURA 3-18**  
Diagramma orario del moto uniforme.

### Esempio 3-13

Una particella si muove lungo una curva data, con velocità scalare costante  $v_s = 1 \text{ m/s}$ . Possiamo determinare la sua posizione dopo 5 s dalla prima osservazione?

Evidentemente no, se non sappiamo anche dove si trovava all'istante iniziale ( $t_0 = 0$ ), o in un qualunque altro istante a piacere.

Se, per esempio, all'istante iniziale la particella si trovava in corrispondenza alla coordinata  $s_0 = -10 \text{ m}$ , allora possiamo calcolare [vedi la relazione (3-30)]

$$s(5) = -10 + 1 \cdot 5 = -5 \text{ m.}$$

### 3-11-2 Moti con $\ddot{s} = \text{costante}$

In questo caso  $\frac{ds}{dt} = \ddot{s}_0$ .

Separando le variabili  $s$  e  $t$ , così come abbiamo fatto con  $s$  e  $t$  nel caso precedente, si ha  $ds = \ddot{s}_0 dt$ .

Scelto  $t_0 = 0$ , otteniamo

$$\dot{s} = \ddot{s}_0 t + \dot{s}_0, \quad (3-31)$$

che corrisponde alla (3-30), con opportuno scambio dei simboli.

La relazione (3-31) rappresenta la legge con cui la derivata temporale dell'ascissa curvilinea (cioè, la velocità scalare) varia nel tempo.  $\ddot{s}_0$  è il valore di tale derivata all'istante  $t_0 = 0$ . Essa può essere scritta come

$$\frac{ds}{dt} = \ddot{s}_0 t + \dot{s}_0$$

per cui, separando le variabili e integrando, si ottiene

$$\begin{aligned} ds = \ddot{s}_0 t dt + \dot{s}_0 dt &\Rightarrow \int ds = \int \ddot{s}_0 t dt + \int \dot{s}_0 dt = \ddot{s}_0 \int t dt + \dot{s}_0 \int dt \\ &\Rightarrow s = \frac{1}{2} \ddot{s}_0 t^2 + \dot{s}_0 t + s_0. \end{aligned} \quad (3-32)$$

La (3-32) è la legge oraria dei moti caratterizzati dalla proprietà  $\ddot{s} = \text{costante} = \ddot{s}_0$ ; essa è rappresentata in figura 3-19.

Come risulta chiaro dal caso discusso in precedenza, l'estensione al caso generale ( $t_0 \neq 0$ ) si ottiene semplicemente, sostituendo  $t$  con  $(t - t_0)$ :

$$\begin{cases} \dot{s} = \ddot{s}_0(t - t_0) + \dot{s}_0 \\ s = \frac{1}{2} \ddot{s}_0(t - t_0)^2 + \dot{s}_0(t - t_0) + s_0 \end{cases}$$

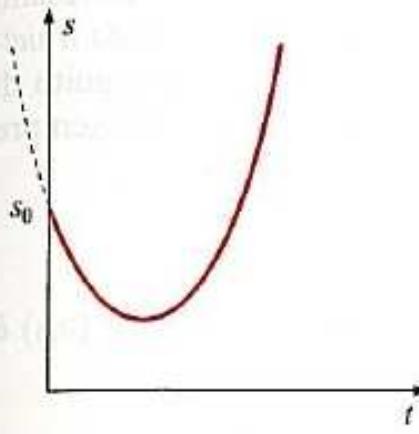
Eliminando  $t$  dal sistema di equazioni (3-31) e (3-32), si può ricavare l'utile relazione

$$v^2 = v_0^2 + 2a_t(s - s_0) \quad (3-33)$$

che esprime il modulo della velocità in funzione dell'ascissa curvilinea. Nell'esempio 3-14 lo stesso risultato è ottenuto per altra via.

FIGURA 3-19

Diagramma orario di un moto con  $\ddot{s}_0$  costante (e positivo).



### Esempio 3-14

Calcolare la dipendenza da  $s$  del modulo della velocità, in un moto con accelerazione tangenziale costante, senza far uso dell'equazione oraria.

Calcoliamo il differenziale di  $v^2$  in funzione di  $s$ :

$$\begin{cases} d(v^2) = d(\dot{s}^2) = 2\dot{s} d\dot{s} = 2\dot{s} \frac{ds}{dt} dt \\ a_t = \ddot{s} = \frac{d\dot{s}}{dt} = \frac{d\dot{s}}{ds} \dot{s} \end{cases} \Rightarrow d(v^2) = 2a_t ds.$$

Nel caso che stiamo considerando, in cui  $a_t$  è costante, integrando membro a membro la relazione trovata si ottiene

$$\int_{v_0^2}^{v^2} d(v^2) = \int_{s_0}^s 2a_t ds = 2a_t \int_{s_0}^s ds \Rightarrow v^2 - v_0^2 = 2a_t(s - s_0).$$

Nel paragrafo 3-25 degli Approfondimenti vengono trattate alcune situazioni particolari, nelle quali dalla conoscenza dell'accelerazione tangenziale si può risalire all'equazione oraria.

### 3-12 Moti rettilinei

Lo studio dei moti rettilinei è di notevole importanza anche perché, utilizzando la rappresentazione cartesiana dell'equazione vettoriale del moto, possiamo sempre considerare il moto generico di un punto materiale come la combinazione lineare di tre moti rettilinei, quelli delle proiezioni del punto sugli assi coordinati.

Dalle equazioni (3-28), se la traiettoria è rettilinea, discendono le seguenti proprietà: il versore  $\mathbf{u}_t$  è parallelo alla retta che costituisce la traiettoria; velocità  $\mathbf{v}$  e accelerazione  $\mathbf{a}$ , essendo paralleli ad  $\mathbf{u}_t$ , sono fra loro paralleli; gli spostamenti sono anch'essi paralleli alla retta lungo cui si svolge il moto. Poiché la scelta degli assi del sistema di riferimento è del tutto arbitraria, può convenire scegliere uno degli assi cartesiani (per esempio l'asse  $x$ ) coincidente con la *direzione orientata della traiettoria rettilinea*: così facendo, la  $x(t)$  coincide con la  $s(t)$ . Nel seguito di questo paragrafo, per semplicità, assumeremo anche che sia sempre  $t_0 = 0$ . Importanti casi particolari sono:

#### a) Moto rettilineo uniforme

Se il moto si svolge su traiettoria rettilinea e la velocità scalare ( $v_{s0}$ ) è costante, dalla (3-30) l'equazione oraria risulta

$$x(t) = v_{s0} t + x_0 . \quad (3-34)$$

#### b) Moto rettilineo uniformemente accelerato

Questo moto è caratterizzato dalla traiettoria rettilinea e dal fatto che  $\ddot{s} = \text{costante} = \ddot{x}_0 = a_0$ . Poiché è diretto parallelamente alla traiettoria, il vettore accelerazione  $\mathbf{a}$  risulta costante durante il moto. Dalla (3-32) l'equazione oraria risulta

$$x(t) = \frac{1}{2} a_0 t^2 + v_{s0} t + x_0 , \quad (3-35)$$

mentre l'equazione che esprime la dipendenza temporale della parte scalare della velocità, per la (3-31) è data da

$$\dot{x}(t) = a_0 t + v_{s0} . \quad (3-36)$$

Richiamiamo l'attenzione sul fatto (già discusso nel paragrafo 3-11) che, partendo dalla conoscenza dell'accelerazione, abbiamo ottenuto l'equazione oraria attraverso due integrazioni, e questo ha richiesto la specificazione dei valori di due grandezze (posizione e velocità) in istanti dati. Tali istanti sono stati assunti uguali fra loro, per ragioni di semplicità e perché questa scelta corrisponde a molte situazioni d'interesse fisico. L'esempio seguente mostra come si possa trovare  $x(t)$  qualora posizione e velocità siano note a istanti diversi fra loro.

#### Esempio 3-15

Un punto materiale si muove di moto rettilineo uniformemente accelerato, con  $a_0 = 5 \text{ m/s}^{-2}$ . Sapendo che all'istante  $t_1 = 4 \text{ s}$  esso si trova in  $x_1 = 10 \text{ m}$  e che all'istante  $t_2 = 2 \text{ s}$  la sua velocità è  $v_2 = 2 \text{ m/s}$ , determinarne posizione e velocità all'istante  $t^* = 10 \text{ s}$ .

Dalla (3-36), riferita all'istante iniziale  $t_2$ , si ha

$$v^* = v_2 + a_0(t^* - t_2) = 42 \text{ m/s}$$

e anche

$$v_1 = v_2 + a_0(t_1 - t_2) = 12 \text{ m/s}.$$

Dalla (3-35), riferita all'istante iniziale  $t_1$ , si ha

$$x^* = \frac{1}{2}a_0(t^* - t_1)^2 + v_1(t^* - t_1) + x_1 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6^2 + 12 \cdot 6 + 10 = 172 \text{ m.}$$

### 3-13 Moti circolari

Il moto circolare ha un notevole ruolo nella Fisica. Vedremo in seguito che circolari, o quasi, sono le traiettorie di molti pianeti attorno al Sole; di questo tipo sono anche le *traiettorie* degli elettroni atomici attorno al nucleo, nel modello semiclassico di Bohr. Nelle applicazioni tecniche, inoltre, molti sono i dispositivi che presentano parti mobili che si muovono su traiettorie circolari. In particolare, si muovono di moto circolare tutti i punti di un corpo rigido in rotazione attorno a un asse fisso.

Lo studio del moto circolare può essere condotto abbastanza facilmente in diversi modi e dà perciò la possibilità di illustrare e confrontare gli aspetti caratteristici delle varie descrizioni cinematiche; inoltre, esso consente di introdurre in maniera semplice grandezze e concetti che si utilizzano anche in situazioni più complesse. Anche dal punto di vista didattico, esso ha quindi un'importanza particolare.

#### 3-13-1 Geometria e versori intrinseci della traiettoria

Cominciamo la nostra descrizione studiando le (semplici) caratteristiche geometriche della traiettoria circolare, secondo lo schema introdotto nel paragrafo 3-4.

Supponiamo che la traiettoria, di raggio  $R$  e centro  $O$ , giaccia nel piano  $xy$  (cioè  $z = 0$ ); le sue equazioni parametriche, in termini dell'angolo  $\theta$  (detto *anomalia*) che il vettore posizione forma con l'asse  $x$  (fig. 3-20), sono:

$$\underline{x} = R \cos \theta; \quad \underline{y} = R \sin \theta; \quad z = 0.$$

Durante il moto il vettore posizione ha modulo costante  $R$  e versore

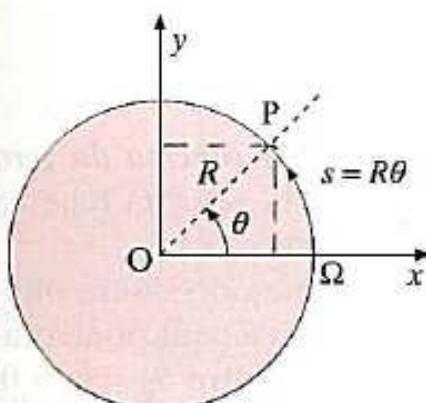
$$\underline{u}_r = \frac{\underline{r}}{R} = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}. \quad (3-37)$$

Assunto sulla circonferenza un sistema di coordinate curvilinee, con origine nel punto  $\Omega(R, 0, 0)$  e orientazione *antioraria*, si ha  $s = R\theta$  ( $0 \leq s < 2\pi R$ ) e la traiettoria è rappresentata dall'equazione vettoriale (fig. 3-20)

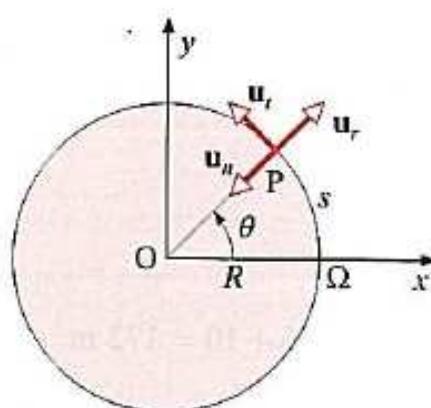
$$\underline{r}(s) = R \cos \frac{s}{R} \mathbf{i} + R \sin \frac{s}{R} \mathbf{j}. \quad (3-38)$$

Per ogni punto della traiettoria possiamo ricavare i *versori tangente e normale*, utilizzando le relazioni (3-11) e (3-26), e osservando che il centro di curvatura coincide con  $O$  e il raggio di curvatura con il raggio  $R$  della circonferenza:

$$\underline{u}_t = \frac{d\underline{r}}{ds} = \frac{d\underline{u}_r}{d\theta} = -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j} \quad (3-39)$$



**FIGURA 3-20**  
Ascissa curvilinea e anomalia in un moto circolare.



**FIGURA 3-21**  
Versori caratteristici su una traiettoria circolare.

$$\mathbf{u}_n = R \frac{d\mathbf{u}_t}{ds} = \frac{d\mathbf{u}_t}{d\theta} = -\cos \theta \mathbf{i} - \sin \theta \mathbf{j} = -\mathbf{u}_r. \quad (3-40)$$

$\mathbf{u}_t$  è perpendicolare a  $\mathbf{u}_r$ , come si può facilmente verificare calcolando il prodotto scalare fra i due, che risulta nullo; inoltre,  $\mathbf{u}_n$  punta da P verso O ed è perciò opposto a  $\mathbf{u}_r$ . I versori  $\mathbf{u}_r$ ,  $\mathbf{u}_t$  e  $\mathbf{u}_n$  in P sono rappresentati nella figura 3-21.

Le modalità con cui avviene il moto sulla traiettoria circolare sono descritte dall'equazione oraria, che può essere espressa dalla funzione  $s(t)$  oppure dalla funzione  $\theta(t)$ . Casi particolari sono quelli di moto uniforme e di moto uniformemente vario, che vengono discussi nel seguito.

### 3-13-2 Moto circolare uniforme

Come discusso nel paragrafo 3-11, se la velocità scalare è costante il moto è uniforme e si può dunque utilizzare la relazione (3-29):

$$s(t) = v_{s0}(t - t_0) + s_0,$$

oppure, essendo  $s = R\theta$ ,

$$\theta(t) = \frac{v_{s0}}{R}(t - t_0) + \theta_0.$$

Essendo  $\ddot{s} = 0$ , l'accelerazione (3-28) ha solo il componente normale:

$$\mathbf{a} = \frac{\dot{s}^2}{R} \mathbf{u}_n \equiv \frac{v_{s0}^2}{R} \mathbf{u}_n.$$

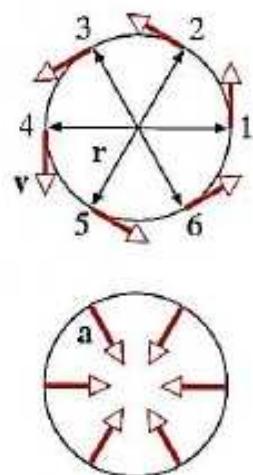
Dunque, nel moto circolare uniforme l'*accelerazione è diversa da zero* ed è centripeta; essa ha modulo costante, così come la velocità (che ha la direzione di  $\mathbf{u}_t$ ), alla quale è continuamente perpendicolare.

L'equazione vettoriale del moto circolare uniforme può essere ottenuta dalla relazione (3-38), sostituendo in essa la relativa equazione oraria. Consideriamo, in particolare, il caso  $\theta_0 = 0$ ; sia inoltre  $\dot{\theta}_0 = \omega > 0$ , coerentemente con la figura 3-22 e la figura 3-23. Il punto materiale, all'istante  $t = 0$  si trova in  $\Omega$  e si muove sulla circonferenza con velocità scalare  $v_{s0} = \omega R$ . Essendo in questo caso  $\theta = \omega t$  e  $s = \omega R t$ , si trovano le seguenti espressioni per  $\mathbf{r}(t)$  e, derivando rispetto al tempo, per  $\mathbf{v}(t)$  e  $\mathbf{a}(t)$ :

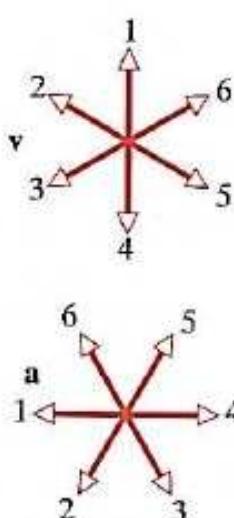
$$\begin{cases} \mathbf{r} = R \cos(\omega t) \mathbf{i} + R \sin(\omega t) \mathbf{j} \\ \mathbf{v} = -\omega R \sin(\omega t) \mathbf{i} + \omega R \cos(\omega t) \mathbf{j} = \omega R \mathbf{u}_t \\ \mathbf{a} = -\omega^2 R \cos(\omega t) \mathbf{i} - \omega^2 R \sin(\omega t) \mathbf{j} = -\omega^2 \mathbf{r} \end{cases}. \quad (3-41)$$

La figura 3-22 mostra i vettori  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{a}$  per alcune posizioni del punto materiale sulla traiettoria, occupate ad istanti equamente spaziati. Tutti e tre i vettori cinematici hanno modulo costante e direzione variabile nel tempo in modo uniforme. Nella figura 3-23  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{a}$  sono rappresentati per comodità con l'origine in comune: si può così facilmente vedere che  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{a}$  ruotano con la stessa rapidità (nel piano  $xy$ , nello stesso verso, antiorario per  $\omega > 0$ ).

Nel caso in cui sia  $\omega < 0$ , le relazioni (3-41) descrivono ancora un moto circolare uniforme, che avviene però in senso orario.



**FIGURA 3-22**  
Posizione, velocità e accelerazione, nel moto circolare uniforme.



**FIGURA 3-23**  
Rotazione di velocità e accelerazione, nel moto circolare uniforme.

### 3-13-3 Moto circolare uniformemente vario

In questo caso la velocità scalare varia linearmente nel tempo; per la (3-32) l'equazione oraria ha la forma

$$s(t) = \frac{1}{2} a_0 (t - t_0)^2 + v_0 (t - t_0) + s_0$$

o l'analogia

$$\theta(t) = \frac{1}{2} \frac{a_0}{R} (t - t_0)^2 + \frac{v_0}{R} (t - t_0) + \theta_0.$$

L'accelerazione  $\mathbf{a} = \ddot{s}_0 \mathbf{u}_t + (\dot{s}^2/R) \mathbf{u}_n$  ha sia la componente tangenziale (che ha modulo costante) sia quella normale (il cui modulo, invece, varia nel tempo).

### 3-13-4 Grandezze angolari

Il moto circolare si presta a introdurre in modo semplice alcune nuove grandezze cinematiche, che peraltro possono essere definite per moti qualsiasi. Il vantaggio del moto circolare consiste nel fatto che, se l'origine del sistema di assi cartesiani si trova nel centro della circonferenza, il vettore  $\mathbf{r}$  ha modulo costante durante il moto. Sulla base di quanto dimostrato nel paragrafo 2-13 per la derivata di un vettore di modulo costante [vedi la relazione (2-9)], si può allora scrivere, per un *generico* moto circolare (fig. 3-24):

$$\boxed{\mathbf{v}(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{r}(t)} \quad (3-42)$$

ove

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} \mathbf{k} = \dot{\theta} \mathbf{k}. \quad (3-43)$$

$\mathbf{k}$  è un versore perpendicolare al piano del moto; il vettore  $\boldsymbol{\omega}(t)$  è chiamato **velocità angolare** e caratterizza, istante per istante, la rapidità di variazione (rotazione) nel tempo della direzione del versore di  $\mathbf{r}$ . Dalla definizione, si vede che la velocità angolare ha il verso di  $\mathbf{k}$  se la variazione elementare di  $\theta$  nell'intervallo  $dt$  è positiva, e quindi la corrispondente rotazione infinitesima di  $\mathbf{r}(t)$  avviene in senso antiorario (vista da  $\mathbf{k}$ ); ha invece il verso opposto a  $\mathbf{k}$ , se tale rotazione avviene in senso orario.

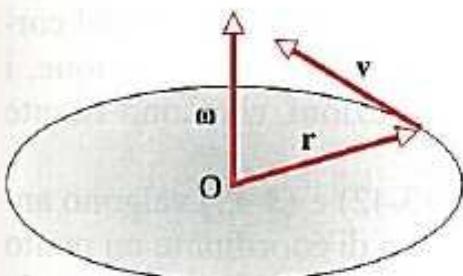


FIGURA 3-24  
Relazioni fra vettori nel moto circolare, con centro in O.

#### Esempio 3-16

Verificare per il moto circolare la consistenza della relazione (3-42) con l'espressione intrinseca della velocità  $\mathbf{v} = R\dot{\theta} \mathbf{u}_t$ .

A tale scopo, poiché  $\boldsymbol{\omega}$  è diretto come  $\mathbf{k}$ , basta verificare che  $\mathbf{u}_t = \mathbf{k} \times \mathbf{u}_r$ . Per le (3-37) e (3-39) si ha:  $\mathbf{k} \times \mathbf{u}_r = \mathbf{k} \times (\cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}) = (\cos \theta \mathbf{j} - \sin \theta \mathbf{i}) = \mathbf{u}_t$ .

In un moto circolare *generico*, il modulo e il verso di  $\boldsymbol{\omega}$  cambiano con il tempo, mentre la sua direzione è sempre perpendicolare al piano del moto. Il vettore **accelerazione angolare**, definito come

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \mathbf{k} = \ddot{\theta} \mathbf{k}, \quad (3-44)$$

è quindi perpendicolare al piano del moto.

Anche l'accelerazione  $\mathbf{a}$  può essere scritta in funzione delle grandezze angolari:

$$\mathbf{a} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$$

e quindi, per la (3-42),

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \quad (3-45)$$

e anche, come mostrato nell'esempio 3-17,

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} - \boldsymbol{\omega}^2 \mathbf{r}. \quad (3-46)$$

### Esempio 3-17

Dimostrare che  $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = -\boldsymbol{\omega}^2 \mathbf{r}$ .

Come mostrato in figura 3-24, i tre vettori  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{v}$  e  $\boldsymbol{\omega}$  costituiscono (in questo ordine) una terna ortogonale destra. Di conseguenza, il modulo del prodotto triplo è semplicemente il prodotto dei tre moduli,  $\boldsymbol{\omega}^2 R$ . Tenendo conto dei versi, la direzione risultante è la stessa di  $\mathbf{r}$ , con verso opposto.

Allo stesso risultato si può pervenire applicando la relazione (2-20):

$$\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{r}(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}) = -\boldsymbol{\omega}^2 \mathbf{r}.$$

È facile verificare che i due termini delle relazioni trovate per  $\mathbf{a}$  sono ortogonali fra loro: il vettore centripeto  $-\boldsymbol{\omega}^2 \mathbf{r}$  è il componente normale  $\mathbf{a}_n$ , e quindi  $\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}$ , perpendicolare a  $\mathbf{r}$ , è il componente tangenziale.

Si osservi che le definizioni della velocità e dell'accelerazione angolari possono essere estese a traiettorie non circolari, eventualmente non piane: in tal caso si assumerà che il punto materiale si muova (nell'intervallo di tempo infinitesimo  $dt$ ) lungo un arco infinitesimo del corrispondente cerchio osculatore. Nel caso di curve sghembe, dunque, i due vettori angolari cambiano anche le loro direzioni, che sono istante per istante perpendicolari al piano osculatore.

È importante sottolineare che le relazioni (3-42) e (3-45) valgono anche quando si assuma come origine O del sistema di coordinate un punto che non coincide con il centro C della circonferenza, ma giace sull'asse  $\mathbf{k}$ , ad esso perpendicolare e passante per C (vedi la figura 3-25 e l'esempio 3-18); in tale caso,  $\mathbf{r}$  è il nuovo vettore posizione (di modulo costante), e  $\boldsymbol{\omega}$  e  $\boldsymbol{\alpha}$  sono i medesimi vettori prima definiti (parallelvi a  $\mathbf{k}$ ). La relazione (3-46), invece, non è più valida, anche se il modulo della componente centripeta dell'accelerazione è ancora dato da  $\boldsymbol{\omega}^2 R$ .

Non stupisce il fatto che la relazione (3-42) continui a valere anche con  $\boldsymbol{\omega}$  non perpendicolare a  $\mathbf{r}$ ; in effetti, con le stesse considerazioni svolte nell'esempio 2-12, è immediato dimostrare che la (2-9) vale anche aggiungendo a  $\boldsymbol{\omega}$  un qualsiasi vettore parallelo a  $\mathbf{k}$ . Questa generalizzazione risulterà particolarmente utile nella descrizione del moto di rotazione di un corpo rigido attorno a un asse.

### Esempio 3-18

Dimostrare che le relazioni (3-42) e (3-45) valgono anche se  $\mathbf{r}$  è il vettore posizione rispetto a un'origine posta sull'asse di simmetria della circonferenza.

Con riferimento alla figura 3-25, detto  $\mathbf{r}_z$  il vettore posizione del centro della circonferenza e  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_z$  si ha

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_z}{dt}.$$

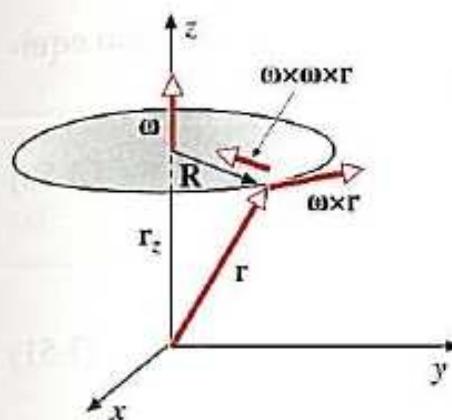


FIGURA 3-25

Componenti di velocità e accelerazione nel moto circolare.

Ma il vettore  $\mathbf{R}$  ha modulo costante, per cui la sua derivata rispetto al tempo è data da  $\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}$ ; d'altra parte  $\mathbf{r}_z$  non cambia durante il moto e la sua derivata rispetto al tempo è nulla.

Quindi, essendo  $\boldsymbol{\omega}$  e  $\mathbf{r}_z$  paralleli fra loro, aggiungendo il termine nullo  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_z$  si ha

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_z = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}.$$

Derivando  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}$  rispetto a  $t$  e procedendo come nel testo, si trova

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{R} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$$

nella quale si è utilizzato il parallelismo di  $\boldsymbol{\alpha}$  e  $\mathbf{r}_z$ .

Nel caso del moto circolare *uniforme*, in cui  $\frac{d\theta}{dt} = \omega = \text{costante}$ , il vettore  $\boldsymbol{\omega}$  è *costante nel tempo*; esso è dato da  $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{k}$ .

Poiché in questo caso l'accelerazione angolare è nulla, si ha:

$$\mathbf{a} \equiv \mathbf{a}_n = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = -\omega^2 \mathbf{r}. \quad (3-47)$$

Questa relazione e la  $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$  sono espresse in termini del medesimo vettore  $\boldsymbol{\omega}$ ; ciò traduce formalmente le osservazioni fatte a commento della figura 3-23: nel moto circolare uniforme  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{a}$  ruotano con la stessa velocità angolare.

### 3-13-5 Periodicità del moto circolare uniforme

La figura 3-23 mostra che  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{a}$  si ripetono periodicamente uguali a se stessi, dopo avere ruotato di  $2\pi$ , e ci introduce in modo naturale anche alla discussione di un'importante proprietà del moto circolare uniforme, che costituisce l'esempio più classico di **moto periodico**. In generale si dice che un moto è periodico se, a partire da un *istante qualsiasi*  $t$ , le sue caratteristiche si ripresentano inalterate dopo un certo intervallo di tempo  $T$ , detto **periodo** del moto. Ne consegue, in particolare, che ogni moto periodico deve avvenire su una traiettoria chiusa, e che ogni moto uniforme su traiettoria chiusa è periodico.

Più formalmente si chiama periodico, di periodo  $T$  (costante), un moto la cui equazione vettoriale  $\mathbf{r}(t)$  è tale che, **per ogni**  $t$  e per ogni intero  $n$ , risulti

$$\mathbf{r}(t + nT) = \mathbf{r}(t). \quad (3-48)$$

Ovviamente anche i tempi  $T_n = nT$  possono essere considerati come periodi del moto; in generale si chiama **periodo fondamentale** di un moto il più piccolo valore di  $T$  per cui è soddisfatta la (3-48).

Per quanto sopra detto, il periodo del moto circolare uniforme è dunque

$$T = \frac{2\pi}{|\omega|}. \quad (3-49)$$

Infatti, passando da  $t$  a  $t + T$ , i valori delle funzioni trigonometriche seno e coseno delle (3-41) non cambiano, in quanto il loro argomento  $\theta$  varia di  $\omega T = \pm 2\pi$ .

Il moto si ripete effettivamente, in tutto e per tutto, con le medesime modalità. In particolare, oltre a  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{a}$ , risulta periodica (di periodo  $T$ ) anche la legge oraria  $s(t)$ , il cui grafico è rappresentato in figura 3-26.

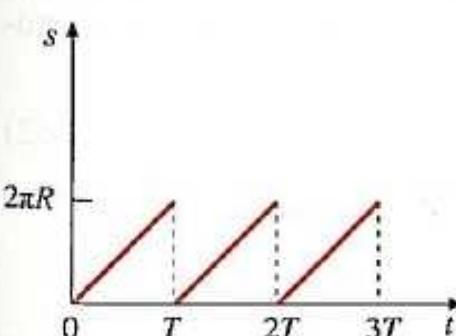


FIGURA 3-26

Periodicità della legge oraria nel moto circolare uniforme.

Due altre grandezze collegate a  $T$ , usate per caratterizzare in modo equivalente un moto periodico, sono la *frequenza*

$$\nu = \frac{1}{T} \quad (3-50)$$

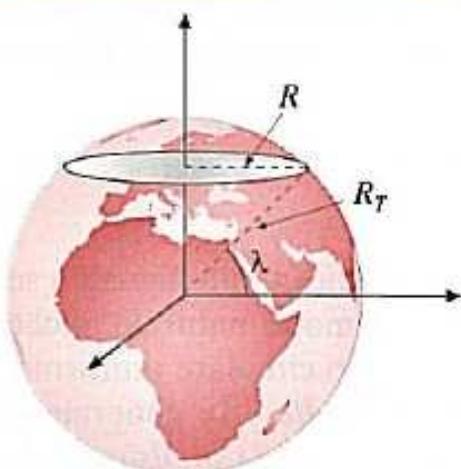
e la *pulsazione*

$$\omega_0 = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}. \quad (3-51)$$

La prima ha l'evidente significato di *numero di periodi contenuti nell'unità di tempo*, ossia di numero di *giri* compiuti nell'unità di tempo sulla traiettoria.

Osserviamo che nel moto circolare uniforme la pulsazione  $\omega_0$  (legata al carattere periodico di questo moto) coincide con il modulo della velocità angolare (che in questo caso è costante nel tempo). Come si vedrà nel caso di altri moti periodici, ad esempio quello del pendolo, questa situazione *non è valida in generale*.

### Esempio 3-19



**FIGURA 3-27**  
Moto circolare uniforme di un corpo, attorno all'asse terrestre.

Calcolare i moduli della velocità e dell'accelerazione di un corpo fermo sulla superficie terrestre, alla latitudine  $\lambda$ , rispetto a un sistema di riferimento come quello di figura 3-27, che non partecipa alla rotazione giornaliera della Terra.

Si vede dalla figura che un corpo, che si trovi alla latitudine  $\lambda$ , si muove di moto circolare, su una circonferenza di raggio  $R = R_T \cos \lambda$  (nella quale il raggio della Terra vale  $R_T = 6,4 \cdot 10^6$  m). Il moto è chiaramente uniforme, e quindi periodico, con periodo  $T = 24$  h; di conseguenza, la pulsazione vale

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{24 \cdot 60 \cdot 60} = 7,27 \cdot 10^{-5} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Otteniamo così:

$$\begin{cases} v = \omega_0 R = \omega_0 R_T \cos \lambda = 465 \cos \lambda \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ a = \omega_0^2 R = \omega_0^2 R_T \cos \lambda = 3,38 \cdot 10^{-2} \cos \lambda \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \end{cases}$$

Si osservi che l'accelerazione dovuta alla rotazione terrestre è al più dell'ordine del 3 per mille di quella gravitazionale (che vale circa  $9,8 \text{ m/s}^2$ ). Si noti anche che il modulo della velocità alla quale avviene il moto è nient'affatto trascurabile; eppure noi, sulla Terra, non ne abbiamo alcuna percezione.

### 3-13-6 Equazioni differenziali nel moto circolare uniforme

La relazione di proporzionalità (3-47) fra  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{r}$  può essere considerata uno degli aspetti caratteristici del moto circolare uniforme ed è opportuno riscriverla nella forma

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\omega_0^2 \mathbf{r} \quad (3-52)$$

(ove  $\omega_0$  è la pulsazione) corrispondente alle due equazioni

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -\omega_0^2 x(t); \quad \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = -\omega_0^2 y(t).$$

Tali equazioni hanno la medesima struttura, del tipo

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} + \omega_0^2 f(t) = 0. \quad (3-53)$$

La (3-53) è un tipico esempio di **equazione differenziale**. Essa stabilisce, infatti, un legame fra la derivata (in questo caso *seconda*) della funzione  $f(t)$  e la funzione stessa. Solo alcune funzioni, le soluzioni dell'equazione differenziale, potranno soddisfare tale condizione.

È facile verificare (vedi l'esempio 3-20) che una funzione del tipo

$$f(t) = A \cos(\omega_0 t + \delta), \quad (3-54)$$

ove  $A$  e  $\delta$  sono costanti arbitrarie, è l'«integrale generale» dell'equazione (3-53).

### Esempio 3-20

Dimostrare che la funzione (3-54) è soluzione dell'equazione differenziale (3-53), per valori arbitrari di  $A$  e  $\delta$ .

Derivando la (3-54) rispetto a  $t$  si ha:  $\frac{df}{dt} = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \delta)$ .

Derivando ulteriormente si ha:

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = \frac{d}{dt} [-\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \delta)] = -\omega_0^2 A \cos(\omega_0 t + \delta) = -\omega_0^2 f.$$

Evidentemente la  $x(t)$  che compare nella equazione vettoriale del moto circolare uniforme (3-41) corrisponde ai valori  $A = R$  e  $\delta = 0$ ; la  $y(t)$  corrisponde allo stesso valore di  $A$  e a  $\delta = -\pi/2$ . Naturalmente, questi valori risultano associati alla particolare situazione che è stata considerata, e cioè (in termini fisici) alla scelta (o conoscenza) della posizione e della velocità all'istante iniziale.

Per alcune nozioni introduttive sulle equazioni differenziali si veda l'Appendice A-7.

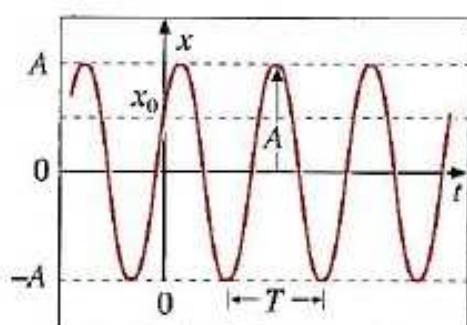
È importante osservare che, per quanto visto più sopra, il moto circolare uniforme di un punto materiale può essere visto come la sovrapposizione di moti rettilinei (per le sue proiezioni) lungo gli assi coordinati, aventi caratteristiche simili fra loro, in quanto regolati dalla medesima equazione. Esamineremo questo tipo particolare di moto rettilineo nel paragrafo successivo.

## 3-14 Moto oscillatorio armonico

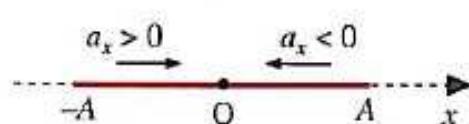
Consideriamo un punto materiale che si muove lungo una retta, che per comodità facciamo coincidere con l'asse  $x$ , secondo la legge oraria

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (3-55)$$

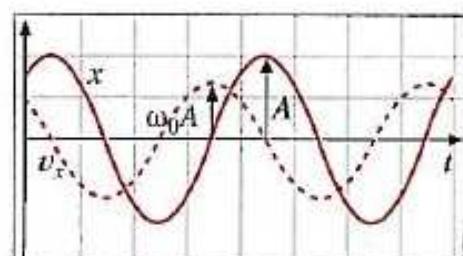
ove  $A$  e  $\omega_0$  sono due costanti reali positive e  $\varphi_0$  è una costante reale. È utile analizzare la (3-55) dal punto di vista dimensionale, ricordando che il valore e l'argomento della funzione coseno sono numeri puri, cioè grandezze adimensionali.  $A$  ha perciò le dimensioni di una lunghezza: essa prende il nome di **ampiezza** e corrisponde al massimo valore che può avere l'ascissa  $x(t)$  (che qui viene anche chiamata *elongazione*). L'argomento del coseno (un angolo:  $\varphi$ ) prende il nome di **fase**;  $\varphi_0$  è il suo valore all'istante iniziale ( $t = 0$ ) ed è dunque la *fase iniziale*. La terza costante è la **pulsazione**  $\omega_0$ . Poiché il prodotto  $\omega_0 t$  è adimensionale (è un angolo),  $\omega_0$  ha le dimensioni dell'inverso di un tempo e si misura in rad/s nel sistema SI.



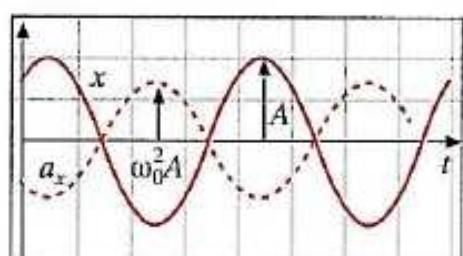
**FIGURA 3-28**  
Diagramma orario del moto oscillatorio armonico.



**FIGURA 3-29**  
Traiettoria e accelerazione del moto oscillatorio armonico.



**FIGURA 3-30**  
Grafici di velocità ed elongazione del moto oscillatorio armonico.



**FIGURA 3-31**  
Grafici di accelerazione ed elongazione del moto oscillatorio armonico.

È noto dalla trigonometria che la funzione  $\cos \varphi$  è periodica, rispetto all'angolo  $\varphi$ , con periodo (angolare)  $2\pi$ ; ma, poiché  $\varphi$  dipende linearmente da  $t$ , la legge oraria sarà periodica anche in  $t$ . Questo si può osservare graficamente: la funzione  $x(t)$  si ripete regolarmente, a partire da un qualsiasi istante  $t$ , ad ogni periodo  $T$  (fig. 3-28). Poiché un cambiamento della fase di  $2\pi$  deve corrispondere a un intervallo di tempo  $T$ , si deve avere:

$$[\omega_0(t+T) + \varphi_0] - [\omega_0 t + \varphi_0] = 2\pi$$

da cui

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

Il diagramma orario intercetta l'asse  $t = 0$  per il valore dell'elongazione  $x_0 = A \cos \varphi_0$ . Si valuti con attenzione il fatto che la figura 3-28 rappresenta la *legge oraria* e non la traiettoria. La traiettoria è rettilinea; su tale retta il corpo si muove in modo che la sua distanza dall'origine (che è il centro di oscillazione) sia al più uguale ad  $A$ . Il moto avviene quindi su un segmento come quello rappresentato in figura 3-29, e ha le caratteristiche di una oscillazione periodica fra i punti di ascisse  $-A$  e  $A$ , i quali vengono chiamati gli *estremi* dell'oscillazione.

Possiamo calcolare la velocità e l'accelerazione, per ogni valore di  $t$ :

$$\begin{cases} v_x \equiv \dot{x} = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \\ a_x \equiv \ddot{x} = -\omega_0^2 A \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = -\omega_0^2 x \end{cases} \quad (3-56)$$

Si osservi in particolare che l'accelerazione ha sempre segno opposto a quello dell'elongazione, come mostrato in figura 3-29 e in figura 3-31.

Velocità e accelerazione hanno ambedue andamenti periodici, con lo stesso periodo  $T$  della legge oraria. Sono però sfasate (in anticipo) rispetto all'elongazione  $x$ , di  $\pi/2$  la prima e di  $\pi$  la seconda. Ciò appare chiaramente nelle due rispettive rappresentazioni grafiche (figure 3-30 e 3-31). Il modulo della velocità è massimo in  $O$  ed è nullo in  $\pm A$  (dove il moto si inverte); negli estremi, invece, è massimo il modulo dell'accelerazione, poiché il vettore velocità (pur essendo nullo!) ha una grande variazione, dovuta all'inversione istantanea del verso.

Per stabilire la relazione fra  $A$ ,  $\varphi_0$  e le condizioni iniziali ( $t = 0$ ) per posizione e velocità, imponiamo

$$\begin{cases} x(0) \equiv x_0 = A \cos \varphi_0 \\ v_x(0) \equiv v_{x0} = -\omega_0 A \sin \varphi_0 \end{cases}$$

Con semplici passaggi algebrici si ottiene:

$$\begin{cases} \tan \varphi_0 = -\frac{v_{x0}}{\omega_0 x_0} \\ A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_{x0}^2}{\omega_0^2}} \end{cases} \quad (3-57)$$

Le (3-57) permettono di determinare, a partire dalla soluzione generale (3-54) dell'equazione differenziale (3-53)

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

la soluzione particolare corrispondente alle assegnate condizioni iniziali [ $x(0) = x_0$ ;  $v_x(0) = v_{x0}$ ].

Nella risoluzione di casi concreti, si ponga attenzione al fatto che, passando dalla tangente al valore dell'angolo, si trovano due valori per quest'ultimo, uno solo dei quali soddisfa le condizioni iniziali.

L'equazione differenziale (3-53) viene anche chiamata **equazione differenziale del moto oscillatorio armonico**. In effetti, si parla di moto oscillatorio armonico anche su una traiettoria curva qualunque, quando la funzione  $s(t)$ , che esprime la legge oraria, soddisfa la corrispondente equazione

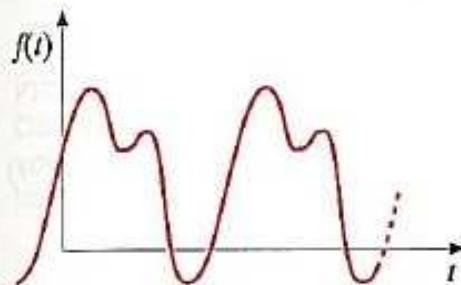
$$\ddot{s} + \omega_0^2 s = 0 .$$

Un caso di questo genere verrà discusso in dettaglio quando, studiando il moto del pendolo semplice, si vedrà che le *piccole* oscillazioni del pendolo sono appunto descrivibili in questo modo.

Fra i moti periodici, il moto oscillatorio armonico ha una fondamentale importanza; ogni altro moto periodico, infatti, può essere ricondotto a un'opportuna combinazione di moti oscillatori armonici. Esiste infatti un teorema (di *Fourier*) che dimostra che, sotto condizioni generalmente soddisfatte in ambito fisico, una funzione periodica  $f(t)$  può essere espressa come somma finita o infinita di funzioni sinusoidali (*armoniche semplici*), secondo lo sviluppo:

$$f(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^N c_k \sin(k\omega_0 t + \varphi_k) \quad (3-58)$$

Come si vede, si tratta di sommare tante armoniche semplici, aventi diverse ampiezze  $c_k$  e diverse fasi iniziali  $\varphi_k$ , ma con pulsazioni tutte multiple di una pulsazione fondamentale  $\omega_0$ . Il termine *k-esimo* ha pulsazione ( $k\omega_0$ ) e prende il nome di armonica di ordine  $k$ . Dunque ogni moto periodico, comunque complesso (fig. 3-32), può essere considerato (ed espresso) come sovrapposizione di moti armonici semplici.



**FIGURA 3-32**  
Una funzione periodica, ma non sinusoidale.

### 3-15 Moto piano in coordinate polari

Una scelta appropriata del sistema di coordinate può semplificare notevolmente la descrizione cinematica del moto, contribuendo così a una più diretta interpretazione della connessione fra le caratteristiche cinematiche del moto e le sue cause dinamiche.

I sistemi di coordinate cartesiane sono particolarmente adatti per la descrizione dei moti che avvengono in linea retta o in cui l'accelerazione è costantemente parallela a una data direzione. In altre situazioni risultano più appropriati altri sistemi di coordinate: per esempio, la descrizione del moto circolare è molto semplice nel sistema di coordinate polari piane. L'utilità di questo sistema di coordinate è notevole anche nel caso dei cosiddetti *moti piani centrali*, nei quali l'accelerazione è costantemente diretta verso un punto (che si propone in modo naturale come polo del sistema di coordinate). Anche i sistemi di coordinate polari cilindriche e sferiche possono risultare preferibili a quelli cartesiani in situazioni in cui il problema presenta le corrispondenti simmetrie.

A prescindere dalle considerazioni generali di semplicità e di simmetria, cui abbiamo qui sopra brevemente accennato e che vengono sempre tenute presenti in Fisica, la scelta del sistema di coordinate può essere imposta nella pratica anche dal tipo di misurazioni effettivamente realizzate per determinare le posizioni dei corpi; dipende inoltre dalla forma degli eventuali vincoli, oltre che, nel caso dei sistemi meccanici, dai vari

tipi di controllo che possono essere esercitati sulle singole parti. Ed è per motivi di questo tipo che i sistemi di coordinate polari vengono usati, ad esempio, nella descrizione del moto dei missili, in cui la determinazione della posizione avviene con tecniche radar, che la individuano mediante misure di distanze e di angoli.

In questo paragrafo deduciamo le espressioni che i vettori velocità e accelerazione assumono nei sistemi di coordinate polari piane (par. 2-16). Ogni vettore parallelo al piano considerato può essere espresso in termini dei suoi componenti paralleli ai versori  $\mathbf{u}_r(P)$  e  $\mathbf{u}_\theta(P)$  relativi al generico punto P, che vengono chiamati *componente radiale* e *componente trasverso*, rispettivamente. In particolare, ciò potrà essere fatto per i vettori cinematici di un punto materiale. Il punto di partenza è l'espressione (2-12) del vettore posizione:

$$\mathbf{r} = r \mathbf{u}_r.$$

Essendo  $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ , si ha [vedi la (2-15)]

$$\mathbf{v} = \frac{dr}{dt} \mathbf{u}_r + r \frac{d\mathbf{u}_r}{dt} = \frac{dr}{dt} \mathbf{u}_r + r \frac{d\mathbf{u}_r}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{dt} \mathbf{u}_r + r \frac{d\theta}{dt} \mathbf{u}_\theta.$$

$\mathbf{v}$  è quindi data dalla somma vettoriale

$$\mathbf{v} = v_r \mathbf{u}_r + v_\theta \mathbf{u}_\theta \quad (3-59)$$

ove, la *componente radiale* della velocità è

$$v_r = \frac{dr}{dt} = \dot{r} \quad (3-60)$$

e la *componente trasversa*

$$v_\theta = r \frac{d\theta}{dt} = r\dot{\theta} \quad (3-61)$$

Essendo tali componenti perpendicolari fra loro, il modulo di  $\mathbf{v}$  è dato da

$$v = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2}.$$

Il significato fisico delle due componenti *polari* della velocità è molto chiaro: la componente radiale di  $\mathbf{v}$  dà la rapidità istantanea con cui cambia la distanza del punto materiale dal polo, mentre la componente trasversa di  $\mathbf{v}$  è dovuta alla variazione di direzione del vettore posizione. È evidente che, se il punto descrive una traiettoria circolare con centro nel polo del sistema di coordinate,  $r$  è costante nel tempo, la componente radiale della velocità è identicamente nulla e la velocità è puramente trasversa (esempio 3-21).

In modo analogo possiamo derivare l'espressione dell'accelerazione come somma di un componente radiale e di un componente trasverso. A tale scopo, deriviamo rispetto al tempo l'espressione (3-59) della velocità, ricordando anche le (2-15):

$$\frac{d\mathbf{u}_\theta}{dt} = \frac{d\mathbf{u}_\theta}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = -\dot{\theta} \mathbf{u}_r.$$

Si ottiene così

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \mathbf{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \mathbf{u}_\theta. \quad (3-62)$$

Quindi si può scrivere

$$\mathbf{a} = a_r \mathbf{u}_r + a_\theta \mathbf{u}_\theta$$

ove

$$a_r = \ddot{r} - r \dot{\theta}^2 \quad (3-63)$$

è la *componente radiale* dell'accelerazione, e

$$a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2\dot{\theta}) \quad (3-64)$$

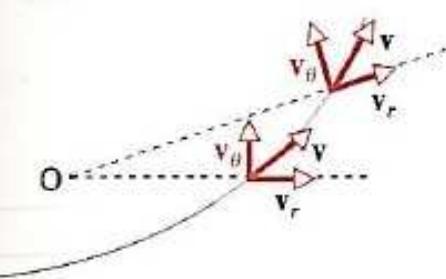
è la *componente trasversa*. La seconda espressione di  $a_\theta$  risulterà utile nello studio dei moti centrali.

In termini di  $a_r$  e  $a_\theta$ , il modulo di  $\mathbf{a}$  è dato da

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2}.$$

Le espressioni delle componenti polari di  $\mathbf{a}$  sono piuttosto complesse: entrambe le componenti sono (in generale) somma di più termini, in quanto più d'una sono le cause che contribuiscono a determinarle (fig. 3-33). Va infatti osservato che le variazioni nel tempo dei componenti radiale e trasverso di  $\mathbf{v}$  coinvolgono sia il loro modulo che la loro direzione: il primo tipo di variazione determina un contributo che ha la medesima direzione, (radiale o trasversa) del componente stesso, mentre il secondo porta a contributi con direzione perpendicolare. Ciò va tenuto presente per non essere sorpresi da situazioni, come quella discussa nell'esempio 3-23, in cui la componente radiale dell'accelerazione è nulla pur essendo variabile nel tempo la componente radiale della velocità.

Gli esempi che seguono, di varia complessità, hanno lo scopo di familiarizzare il lettore con la descrizione del moto in coordinate polari.



**FIGURA 3-33**  
Componenti polari piane della velocità, in due punti della traiettoria.

### Esempio 3-21

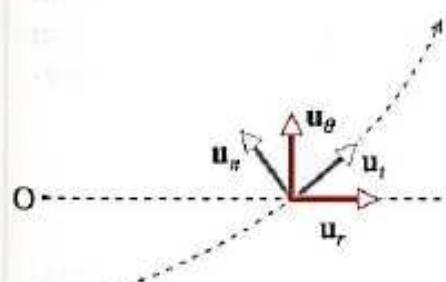
Descrivere il moto circolare in coordinate polari

Assumendo il polo O nel centro della circonferenza, per ogni punto P della traiettoria risulta  $r = R = \text{cost}$  e quindi è anche  $\dot{r} = \ddot{r} = 0$ . La velocità ha così solo la componente trasversa  $v_\theta = r\dot{\theta}$ . Nel caso di moto circolare uniforme sarà anche  $\dot{\theta} = \text{costante}$ . L'accelerazione ha, in generale, sia una componente radiale ( $a_r = -r\dot{\theta}^2$ ) che una componente trasversa ( $a_\theta = r\ddot{\theta}$ ); quest'ultima si annulla nel caso di moto uniforme.

Se si orienta la traiettoria nel verso concorde con quello degli angoli  $\theta$  crescenti, i versori intrinseci  $\mathbf{u}_r$  e  $\mathbf{u}_\theta$  coincidono rispettivamente con  $\mathbf{u}_\theta$  e  $-\mathbf{u}_r$  e quindi

$$a_\theta = a_r; \quad a_r = -a_\theta.$$

Si noti che tale coincidenza è dovuta alla particolarità della traiettoria (centro e raggio di curvatura costanti e indipendenti da P) e alla scelta del polo nel centro della circonferenza. In un moto piano generico non esiste alcun particolare legame fra la base *locale* costituita da  $\mathbf{u}_r$  e  $\mathbf{u}_\theta$  (che dipende dalla posizione di P rispetto a O) e quella *intrinseca*, collegata con le caratteristiche geometriche della traiettoria nel punto P (fig. 3-34).



**FIGURA 3-34**  
Confronto fra i versori intrinseci e quelli polari piani.

### Esempio 3-22

Un radar è disposto nel piano verticale in cui si sta muovendo un missile a motori spenti, fuori dell'atmosfera (fig. 3-35). Dalle misure effettuate con il radar si trova che all'istante in cui  $\theta = \pi/4$  e  $r = 80$  km, risulta  $\dot{r} = 1$  km/s

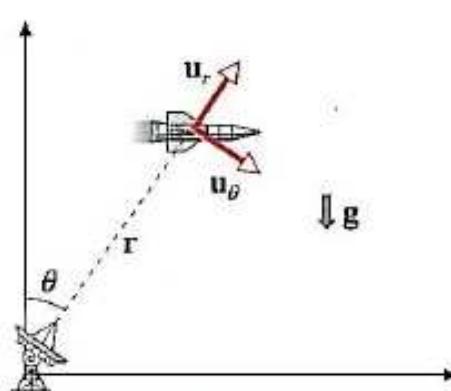


FIGURA 3-35

$$\text{e } \dot{\theta} = 1 \frac{\text{grado}}{\text{s}} = \frac{\pi}{180} \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

L'accelerazione del missile è dovuta unicamente all'attrazione gravitazionale ed è quindi diretta verticalmente verso il basso; il suo modulo vale, alla quota in cui si trova il missile,  $g = 9,6 \text{ m/s}^2$ .

Calcolare il modulo della velocità del missile e i valori di  $\ddot{r}$  e  $\ddot{\theta}$ , nell'istante considerato.

Dai dati del problema possiamo calcolare ambedue le componenti polari della velocità, e quindi il modulo di  $\mathbf{v}$ :  $v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2} = 1717 \text{ m/s}$ .

D'altra parte, come illustrato in figura 3-35, le componenti polari di  $\mathbf{a}$  sono  $a_r = -g \cos \theta$  e  $a_\theta = g \sin \theta$ . Si ottiene dunque facilmente [vedi le relazioni (3-63) e (3-64)]

$$\ddot{r} = a_r + r\dot{\theta}^2 = 17,58 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}; \quad \ddot{\theta} = \frac{a_\theta - 2\dot{r}\dot{\theta}}{r} = -3,51 \cdot 10^{-4} \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

### Esempio 3-23

Le coordinate polari di un punto materiale variano nel tempo secondo le leggi:

$$r = r_0 e^{\beta t}; \quad \theta = \omega_0 t$$

con  $r_0$ ,  $\beta$  e  $\omega_0$  costanti. Calcolare le componenti radiale e trasversa della velocità e dell'accelerazione, e determinare i valori di  $\beta$  per i quali  $a_r = 0$ .

Dalle relazioni date nel testo si trova:

$$v_r = \frac{dr}{dt} = \beta r_0 e^{\beta t}; \quad v_\theta = r \frac{d\theta}{dt} = \omega_0 r_0 e^{\beta t}$$

$$a_r = \frac{d^2r}{dt^2} - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = (\beta^2 - \omega_0^2)r_0 e^{\beta t}; \quad a_\theta = 2\beta\omega_0 r_0 e^{\beta t}.$$

Si vede che se  $\beta = \pm \omega_0$  risulta  $a_r = 0$ . A prima vista questo risultato è sorprendente, tenuto conto che la componente radiale di  $\mathbf{v}$  dipende dal tempo. Questa considerazione è tuttavia ingannevole, in quanto  $\mathbf{a}$ , riceve contributi sia da  $\ddot{r}$  sia da  $r\dot{\theta}^2$ . Non si deve dimenticare infatti che i versori  $\mathbf{u}_r$  e  $\mathbf{u}_\theta$  non sono costanti, ma cambiano con il tempo. Ciò comporta anche che in coordinate polari

$$v_r(t) - v_r(0) \neq \int_0^t a_r(t') dt',$$

diversamente dal caso delle componenti cartesiane, che viene trattato nel paragrafo successivo.

### 3-16 Il problema inverso della cinematica

In gran parte della trattazione finora svolta ci siamo posti dal punto di vista di chi ha misurato le posizioni di un corpo al passare del tempo, ricavandone la legge del moto. Abbiamo visto che si ottiene la velocità derivando  $\mathbf{r}$ , e l'accelerazione derivando  $\mathbf{v}$  (sempre rispetto al tempo).

Consideriamo ora la situazione in cui si abbiano *informazioni sperimentali sulla velocità* in un certo intervallo di tempo ( $t_0, t_f$ ), chiedendoci

se sia possibile *determinare l'equazione vettoriale del moto* in tale intervallo. La risposta è positiva, purché le conoscenze sulla velocità siano sufficientemente dettagliate (ovvero  $\mathbf{v}$  sia noto in un sufficiente numero di istanti dell'intervallo) e sia noto il vettore posizione  $\mathbf{r}(t_0)$  nell'istante iniziale. Ciò è facilmente comprensibile, riflettendo sul fatto che, per determinare la *posizione finale* conseguente a un dato spostamento, risultante dalla somma vettoriale di tanti spostamenti elementari  $d\mathbf{r} = \mathbf{v} dt$ , è necessario conoscere la *posizione iniziale*. Supponiamo dunque di conoscere le velocità agli istanti  $t_0, t_1, t_2 \dots t_{n-1}, t_f$  (per semplicità, separati di  $\Delta t$  l'uno dall'altro). Sappiamo [vedi la relazione (3-7)] che lo spostamento  $\Delta\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}(t_1) - \mathbf{r}(t_0)$  potrebbe essere espresso attraverso la corrispondente velocità media:  $\Delta\mathbf{r}_1 = \mathbf{v}_m \Delta t$ .

Sulla base dei dati sperimentali disponibili, possiamo approssimare lo spostamento  $\Delta\mathbf{r}_1$  con il prodotto  $\mathbf{v}(t_0)(t_1 - t_0)$ . Tale approssimazione è l'analogico vettoriale di quella discussa nell'Appendice A-2, ove l'incremento finito di una funzione scalare di una variabile,  $f(t + \Delta t) - f(t)$ , viene sostituito con il differenziale della funzione stessa,  $f'(t_0)\Delta t$ . L'approssimazione è tanto migliore quanto più piccolo è l'intervallo  $\Delta t$  e quindi, nel nostro caso, quanto più la velocità media è simile a  $\mathbf{v}(t_0)$ . D'altra parte

$$\mathbf{r}(t_f) = \mathbf{r}(t_0) + [\mathbf{r}(t_1) - \mathbf{r}(t_0)] + [\mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}(t_1)] + \dots + [\mathbf{r}(t_f) - \mathbf{r}(t_{n-1})];$$

quindi, effettuando le suddette approssimazioni, si ottiene

$$\mathbf{r}(t_f) \approx \mathbf{r}(t_0) + \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{v}(t_k) \Delta t.$$

Per quanto detto sopra, è chiaro che la precedente sommatoria dà una valutazione di  $\mathbf{r}(t_f)$  tanto più corretta quanto più piccoli sono gli intervalli  $\Delta t$  (fig. 3-36).

Nel limite in cui l'ampiezza di tali intervalli tende a zero, la sommatoria in questione tende per definizione a quello che viene chiamato l'integrale del vettore  $\mathbf{v}$  (sul tempo, da  $t_0$  a  $t_f$ ) e viene denotato con il simbolo

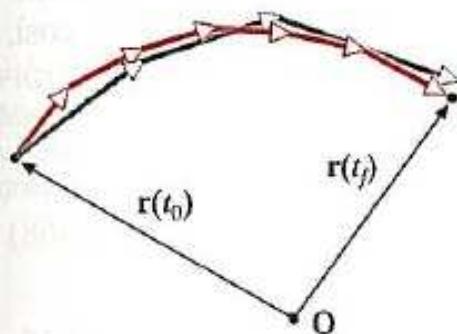
$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{v}(t_k) \Delta t = \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{v}(t) dt.$$

Si ha quindi, per un generico istante  $t > t_0$  (e chiamando  $t'$  la variabile di integrazione, per evitare confusione fra i simboli)

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{v}(t') dt' = \mathbf{r}(t_0) + \int_{\mathbf{r}(t_0)}^{\mathbf{r}(t)} d\mathbf{r}(t'). \quad (3-65)$$

Come previsto, si ottiene il vettore posizione all'istante generico  $t$  sommando al vettore posizione (iniziale)  $\mathbf{r}(t_0)$  (che deve essere noto) la somma (integrale) di tutti gli spostamenti elementari che si susseguono fino all'istante considerato.

Esaminiamo ora la situazione in cui, in un certo intervallo di tempo, è noto sperimentalmente il vettore accelerazione di un punto materiale. È evidente che, essendo  $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$  e  $d\mathbf{v} = \mathbf{a} dt$ , si può adottare un procedimento analogo a quello delineato all'inizio di questo paragrafo, per passare dalla conoscenza di  $\mathbf{a}(t)$  e di  $\mathbf{v}(t_0)$  a quella di  $\mathbf{v}(t)$ . Ripetendo le stes-



**FIGURA 3-36**  
Ricostruzione di una posizione finale, utilizzando le velocità medie.

se argomentazioni si ottiene il risultato

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{a}(t') dt' = \mathbf{v}(t_0) + \int_{\mathbf{v}(t_0)}^{\mathbf{v}(t)} d\mathbf{v}(t'). \quad (3-66)$$

In definitiva, tenendo conto delle (3-65) e (3-66), possiamo concludere che, se è nota  $\mathbf{a}(t)$  per ogni  $t$  in un dato intervallo temporale, e sono note la posizione e la velocità all'istante iniziale  $t_0$ , si può ottenere l'equazione vettoriale del moto nell'intero intervallo. Basterà usare la (3-66) per determinare la dipendenza di  $\mathbf{v}$  da  $t$ , che serve a sua volta per calcolare il vettore posizione in ogni istante [tramite la (3-65)].

Gli integrali di vettori che compaiono nelle relazioni (3-65) e (3-66) sono generalmente riconducibili a integrali di funzioni scalari. Infatti, se rappresentiamo un generico vettore  $\mathbf{w}(t)$  in forma cartesiana,

$$\mathbf{w}(t) = w_x(t) \mathbf{i} + w_y(t) \mathbf{j} + w_z(t) \mathbf{k},$$

estendendo alle funzioni vettoriali le definizioni e le proprietà riguardanti l'integrazione di funzioni scalari, si ottiene facilmente:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \mathbf{w}(t') dt' &= \int_{t_0}^t [w_x(t') \mathbf{i} + w_y(t') \mathbf{j} + w_z(t') \mathbf{k}] dt' = \\ &= \mathbf{i} \int_{t_0}^t w_x(t') dt' + \mathbf{j} \int_{t_0}^t w_y(t') dt' + \mathbf{k} \int_{t_0}^t w_z(t') dt' \end{aligned} \quad (3-67)$$

nella quale si è utilizzato il fatto che i tre versori degli assi cartesiani sono costanti nel tempo, cioè rispetto alla variabile di integrazione. Si ha così, in particolare:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0) &\equiv \Delta \mathbf{r} = \int_{t_0}^t \mathbf{v}(t') dt' = \\ &= \mathbf{i} \int_{t_0}^t v_x(t') dt' + \mathbf{j} \int_{t_0}^t v_y(t') dt' + \mathbf{k} \int_{t_0}^t v_z(t') dt'. \end{aligned} \quad (3-68)$$

$$\mathbf{v}(t) - \mathbf{v}(t_0) \equiv \Delta \mathbf{v} = \int_{t_0}^t \mathbf{a}(t') dt' = \mathbf{i} \int_{t_0}^t a_x(t') dt' + \mathbf{j} \int_{t_0}^t a_y(t') dt' + \mathbf{k} \int_{t_0}^t a_z(t') dt'. \quad (3-69)$$

### 3-17 Moto con accelerazione costante: i gravi

È un fatto sperimentale che, entro limiti che discuteremo trattando la Dinamica e in condizioni in cui risultino trascurabili gli effetti della resistenza dell'aria, tutti i corpi in caduta libera (nelle vicinanze della superficie terrestre) si muovono con una accelerazione che può essere considerata come costante, diretta verticalmente verso il basso. Per tale vettore costante, detto accelerazione di gravità, viene comunemente utilizzato il simbolo  $\mathbf{g}$ .

Trattiamo quest'importante problema come un caso di *problema inverso*, utilizzando le formule a cui si riconducono le relazioni (3-66) e (3-65), per  $\mathbf{a}(t) = \mathbf{g} = \text{costante}$ . Si ha così

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{g} dt' = \mathbf{v}_0 + \mathbf{g} \int_{t_0}^t dt' = \mathbf{v}_0 + \mathbf{g}(t - t_0), \quad (3-70)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= \mathbf{r}(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{v}(t') dt' = \mathbf{r}_0 + \int_{t_0}^t [\mathbf{v}_0 + \mathbf{g}(t' - t_0)] dt' = \\ &= \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2} \mathbf{g}(t - t_0)^2. \end{aligned} \quad (3-71)$$

È importante osservare che sia  $\mathbf{v}$  che il vettore  $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$  (che dà lo spostamento dalla posizione iniziale) si ottengono sommando due vettori che hanno le direzioni di  $\mathbf{v}_0$  e di  $\mathbf{g}$ : essi stanno quindi costantemente nel **piano** da essi definito, cioè nel piano verticale che contiene la velocità iniziale. La traiettoria è dunque una curva che giace in un piano verticale. In particolare, essa è rettilinea (lungo la retta verticale passante per  $\mathbf{r}_0$ ) se  $\mathbf{v}_0 = 0$ , cioè se il corpo è lasciato cadere da fermo, oppure se  $\mathbf{v}_0$  ha la stessa direzione di  $\mathbf{g}$ , cioè se il corpo viene inizialmente lanciato verticalmente verso l'alto o verso il basso. In tutti gli altri casi, come vedremo fra breve, la traiettoria è una parabola. Nell'ambito di questo caso generale, rientra quello particolare della pallina (esaminato ampiamente all'inizio di questo capitolo), in cui  $\mathbf{v}_0$  ha direzione (orizzontale) perpendicolare a  $\mathbf{g}$ .

Per lo studio del moto dei gravi risulta particolarmente conveniente l'utilizzazione di un sistema di coordinate cartesiane, con gli assi  $x$  e  $y$  rispettivamente orizzontale e verticale. È usuale scegliere come verso positivo per l'asse  $y$  quello diretto verso l'alto e scrivere:

$$\mathbf{a} = \mathbf{g} = -g\mathbf{j}. \quad (3-72)$$

Assumiamo che all'istante iniziale, per semplicità considerato coincidente con l'origine dei tempi  $t_0 = 0$ , il punto si trovi nell'origine del sistema di coordinate e sia cioè  $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ . Se indichiamo con  $\alpha$  l'angolo che il vettore  $\mathbf{v}_0$  forma con l'asse  $x$  (fig. 3-37), all'istante generico  $t$  le equazioni vettoriali per  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{r}$  hanno la forma

$$\mathbf{v}(t) = (v_0 \cos \alpha)\mathbf{i} + (v_0 \sin \alpha - gt)\mathbf{j};$$

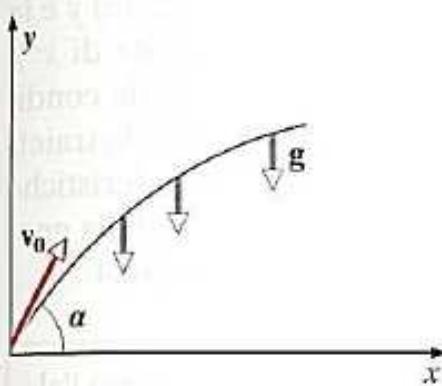
$$\mathbf{r}(t) = (v_0 \cos \alpha)t\mathbf{i} + [(v_0 \sin \alpha)t - \frac{1}{2}gt^2]\mathbf{j}.$$

Per le componenti cartesiane si ha perciò

$$\begin{cases} v_x = v_{0x} = v_0 \cos \alpha \\ v_y = v_{0y} - gt = v_0 \sin \alpha - gt \\ v_z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = (v_0 \cos \alpha)t \\ y = (v_0 \sin \alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 \\ z = 0 \end{cases} \quad (3-73)$$

Da queste equazioni si può dedurre che la *proiezione* del punto sull'asse delle ascisse si muove di moto (rettilineo) uniforme, con velocità uguale alla componente lungo  $\mathbf{i}$  della velocità iniziale; la proiezione lungo l'asse delle ordinate si muove di moto (rettilineo) uniformemente accelerato, con accelerazione scalare  $-g$ . Le caratteristiche di questi due moti sono del tutto scorrelate fra loro e si può quindi rappresentare il moto del punto come la **composizione di due moti rettilinei indipendenti**, lungo le suddette direzioni.

È importante sottolineare che l'equivalenza fra l'equazione vettoriale del moto e le tre equazioni scalari delle componenti cartesiane di  $\mathbf{r}$  permette sempre di considerare *formalmente* il moto di un punto come risultante dalla composizione dei moti delle sue tre proiezioni sugli assi; dal punto di vista fisico, invece, tale composizione è significativa solo se questi moti hanno caratteristiche fra loro indipendenti, così da potere essere studiati separatamente. Nel caso del moto dei gravi l'indipendenza di questi moti è assicurata dalla costanza dell'accelerazione e dalla scelta opportuna del sistema di assi coordinati. Essa verrebbe meno, ad esem-



**FIGURA 3-37**

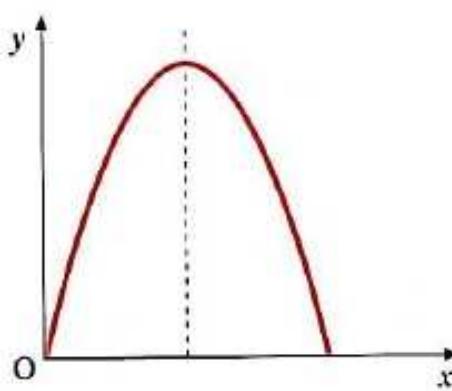
Moto di un corpo lanciato con velocità  $\mathbf{v}_0$ , nel campo gravitazionale terrestre.

pio, se l'accelerazione dipendesse dalla velocità, come avviene nei casi in cui non è trascurabile la resistenza dell'aria.

Le equazioni (3-73) sono anche le equazioni parametriche della traiettoria. Eliminando il parametro  $t$  si ottiene la traiettoria in forma esplicita:

$$\begin{cases} t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha} \\ y = (v_0 \sin \alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = (\tan \alpha)x - \left( \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \right)x^2 = \frac{v_{0y}}{v_{0x}}x - \frac{1}{2} \frac{g}{v_{0x}^2}x^2. \quad (3-74)$$



**FIGURA 3-38**

La traiettoria di un grave ha forma parabolica.

### Esempio 3-24

Determinare la quota massima raggiunta da un proiettile, lanciato verso l'alto dall'origine di un sistema di riferimento, con velocità  $v_0$ ; calcolare inoltre, in funzione delle coordinate spaziali, la velocità e il raggio di curvatura.

Affrontiamo qui questo problema da un punto di vista prettamente analitico (per un approccio più fisico si veda l'esempio successivo). L'equazione (3-74) fornisce, in forma esplicita, la traiettoria del proiettile. Si tratta dunque di trovare il massimo della funzione  $y(x)$ . Per fare ciò, dobbiamo imporre che sia nulla la derivata prima della  $y$ :

$$\frac{dy}{dx} = (\tan \alpha) - 2 \left( \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \right) x = 0 \Rightarrow x = (\tan \alpha) \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g} = v_0^2 \frac{\sin 2\alpha}{2g}.$$

Si vede facilmente che si tratta di un massimo, in quanto la derivata seconda  $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{g}{v_{0x}^2}$  è negativa. Sostituendo nella (3-74) il valore ottenuto per l'ascissa del massimo, si ottiene

$$y^* = \frac{(v_0 \sin \alpha)^2}{2g}.$$

Com'è noto, la derivata  $\frac{dy}{dx}$  esprime anche il coefficiente angolare della retta tangente alla curva, nel punto considerato:

$$\tan \theta = \frac{dy}{dx} = \tan \alpha - \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha} x$$

che può essere utilizzato per esprimere le componenti della velocità in termini delle coordinate spaziali. Si ha infatti, per le (3-73) e (3-74):

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v_0 \cos \alpha; \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} = \left( \tan \alpha - \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha} x \right) v_0 \cos \alpha = \\ &= v_0 \sin \alpha - \frac{g}{v_0 \cos \alpha} x \end{aligned}$$

da cui

$$\mathbf{v} = v_0 \cos \alpha \mathbf{i} + \left( v_0 \sin \alpha - \frac{g}{v_0 \cos \alpha} x \right) \mathbf{j},$$

relazione che esprime la velocità in funzione dell'ascissa  $x$ .

Il raggio di curvatura può essere ottenuto facilmente, passando attraverso la componente normale dell'accelerazione:  $\rho = v^2/a_n$ . Infatti, essendo  $v_y = v_x \tan \theta$ , possiamo scrivere il quadrato del modulo della velocità come

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = v_x^2 + v_x^2 \tan^2 \theta = v_x^2 (1 + \tan^2 \theta).$$

D'altro canto, anche il componente normale dell'accelerazione forma con  $\mathbf{g}$  un angolo  $\theta$ , per cui:

$$\rho = \frac{v_x^2 (1 + \tan^2 \theta)}{g \cos \theta} = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g} (1 + \tan^2 \theta)^{\frac{3}{2}} = \frac{(1 + \tan^2 \theta)^{\frac{3}{2}}}{\left| \frac{d^2 y}{dx^2} \right|}.$$

Gli stessi risultati ricavati nell'esempio 3-24 possono essere ottenuti anche con metodi fisicamente più significativi e istruttivi, che permettono di mettere in risalto alcune notevoli particolarità di quest'importante tipo di moto. Da questo punto di vista, nell'esempio 3-25 sono considerate in dettaglio le situazioni per le quali l'angolo  $\alpha$  è compreso fra  $0$  e  $\pi$ , e il corpo è quindi lanciato con una velocità iniziale che ha la componente verticale diretta verso l'alto. È evidente l'interesse anche pratico di questo caso: basti pensare al ***moto dei proiettili***. Nell'esempio 3-27 si vedrà come estendere i risultati del caso precedente anche ad altre situazioni, per mezzo della cosiddetta *parabola universale*. Alcuni importanti aspetti, connessi con l'indipendenza delle componenti orizzontale e verticale del moto dei gravi, sono infine illustrati negli esempi 3-28 e 3-29.

### Esempio 3-25

Determinare la quota massima raggiunta da un proiettile, lanciato dall'origine verso l'alto con velocità  $\mathbf{v}_0$ ; calcolare inoltre la sua distanza dal punto di lancio quando esso, ricadendo verso terra, passa di nuovo alla quota di partenza (*gittata*). Calcolare anche dopo quanto tempo dal lancio il proiettile passa per questa posizione (*tempo di volo*).

Il moto del proiettile può essere considerato come combinazione di un moto rettilineo orizzontale con velocità costante ( $v_0 \cos \alpha$ ) e di un moto rettilineo verticale con velocità iniziale ( $v_0 \sin \alpha$ ) e accelerazione scalare costante ( $-g$ ).

Possiamo quindi determinare la massima quota cui arriva il proiettile, nel caso di  $\alpha$  fra  $0$  e  $\pi$ , studiando il solo moto verticale. Nel caso in esame, la componente verticale della velocità è inizialmente positiva e decresce linearmente nel tempo. È evidente che la quota  $y$  del proiettile cresce fino al momento in cui la relativa componente della velocità è positiva, e raggiunge il suo massimo quando  $v_y$  diventa nulla.

Dalle equazioni (3-73) si vede che ciò avviene quando  $v_0 \sin \alpha = gt$ , cioè all'istante

$$t^* = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}.$$

Sostituendo nella  $y(t)$ , si trova per la corrispondente *quota massima*

$$y^* = \frac{(v_0 \sin \alpha)^2}{2g} = \frac{1}{2} g t^{*2}.$$

All'istante  $t^*$  l'ascissa  $x^*$  del punto è uguale a  $(v_0 \cos \alpha t^*)$  e quindi

$$x^* = v_0^2 \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{g} = v_0^2 \frac{\sin 2\alpha}{2g}.$$

È interessante osservare che, tenendo conto della espressione di  $t^*$ , la componente verticale della velocità, in un istante generico, può essere espressa nella forma

$$v_y = g(t^* - t)$$

che mostra chiaramente che ad istanti  $t'$  e  $t''$ , simmetrici rispetto a  $t^*$ , le componenti verticali della velocità sono uguali in modulo ma opposte. Analogamente, si potranno scrivere le (3-73) nelle forme simmetriche

$$y - y^* = -\frac{1}{2} g(t - t^*)^2; \quad x - x^* = v_{0x}(t - t^*).$$

Ne segue che, in istanti simmetrici rispetto a  $t^*$ , il proiettile passa alla medesima quota, in posizioni simmetriche rispetto all'asse verticale della parabola. A tali istanti, le velocità hanno componenti verticali uguali in modulo e di segno opposto, e componente orizzontale costante (fig. 3-39): quindi le velocità hanno lo stesso modulo, come si può dimostrare anche con il procedimento generale illustrato nell'esempio seguente.

In particolare, il proiettile si ritroverà alla quota di lancio ( $y = 0$ ) al tempo  $t_G = 2t^*$ , in quanto impiega lo stesso tempo  $t^*$  sia per salire alla massima quota  $y^*$  che per ridiscendere al livello di partenza. D'altra parte il moto lungo l'asse  $x$  è uniforme e quindi la **gittata del proiettile** sarà semplicemente data da

$$x_G = v_{0x} t_G = 2x^* = v_0^2 \frac{\sin 2\alpha}{g}.$$

Per le applicazioni balistiche è interessante notare che, a parità di velocità iniziale di lancio, la gittata è massima quando  $\sin(2\alpha) = 1$ , cioè per  $\alpha = \pi/4$  e per  $\alpha = (3/4)\pi$ .

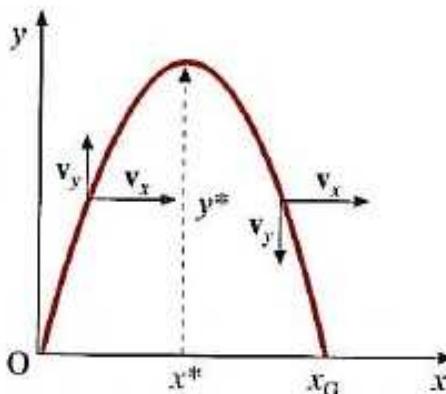


FIGURA 3-39

Il moto di un grave è simmetrico rispetto all'asse della parabola.

### Esempio 3-26

Dimostrare che nel moto dei gravi la variazione del modulo della velocità dipende solo dalla variazione della quota.

Calcoliamo la derivata del quadrato del modulo di  $\mathbf{v}$ :

$$\frac{d}{dt}(v^2) = \frac{d}{dt}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}.$$

Integrando ambedue i membri da  $t_0$  a  $t$ , dopo aver separato le variabili, e tenendo conto che  $\mathbf{a} = \mathbf{g} = -g\mathbf{j}$  = costante, si ha

$$v^2(t) - v_0^2 = 2\mathbf{a} \cdot \int_{t_0}^t \mathbf{v}(t') dt' = 2\mathbf{a} \cdot [\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)] = -2g(y - y_0).$$

Quindi, posto  $h = y - y_0$ , risulta

$$v^2 = v_0^2 - 2gh.$$

### Esempio 3-27

Dimostrare che da un punto di vista grafico tutte le traiettorie associate al medesimo valore  $v_{0x}$  della componente orizzontale della velocità fanno parte di un'unica parabola (*parabola universale*).

Il punto di partenza della dimostrazione è l'espressione generale dell'equa-

zione della traiettoria parabolica, corrispondente alla posizione iniziale  $\mathbf{r}_0 = x_0 \mathbf{i} + y_0 \mathbf{j}$  e al vettore velocità iniziale  $\mathbf{v}_0 = v_{0x} \mathbf{i} + v_{0y} \mathbf{j}$ . Possiamo generalizzare il procedimento che ha portato alla (3-74), a partire dalle equazioni vettoriali (3-70) e (3-71). Si ha così:

$$y - y_0 = \frac{v_{0y}}{v_{0x}}(x - x_0) - \frac{1}{2} \frac{g}{v_{0x}^2} (x - x_0)^2.$$

Posto  $y - y_0 = \eta$  e  $x - x_0 = \chi$ , questa equazione assume la medesima forma della (3-74):

$$\eta = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} \chi - \frac{1}{2} \frac{g}{v_{0x}^2} \chi^2.$$

Quest'ultima può quindi essere considerata come l'equazione di una *parabola universale*, da utilizzare per lo studio di tutti i possibili moti di un grave, caratterizzati dal medesimo valore costante della componente orizzontale della velocità  $v_x$ . Infatti, il termine quadratico in  $\chi$  dipende solo da  $v_{0x}$ , mentre quello lineare dipende anche da  $v_{0y}$ , di modo che per  $\chi = 0$  la retta tangente alla curva ha come coefficiente angolare il rapporto  $v_{0y}/v_{0x}$ . Quindi le singole traiettorie, corrispondenti a diverse componenti verticali della velocità iniziale, potranno essere ottenute dalla *parabola universale*, assumendo su questa come posizione iniziale  $P_0$  del punto materiale quella per la quale la retta tangente alla curva ha coefficiente angolare  $v_{0y}/v_{0x}$  e come verso del moto quello determinato dal segno di  $v_{0y}$ . Naturalmente, durante il suo moto, per  $t > t_0$  il punto percorrerà solo quel tratto della parabola universale che segue  $P_0$  nel verso suddetto. Le considerazioni fatte sono illustrate nella figura 3-40, per alcune posizioni iniziali.

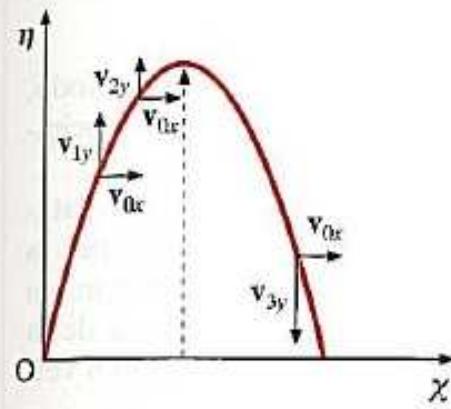


FIGURA 3-40  
Parabola universale.

### Esempio 3-28

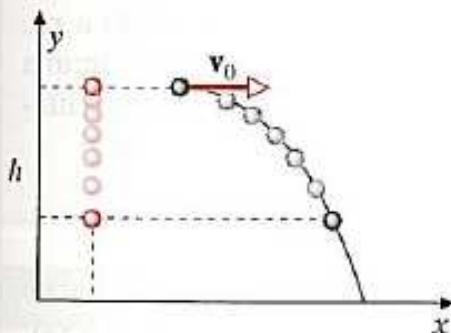


FIGURA 3-41  
Due corpi cadono dalla stessa quota, con velocità iniziali orizzontali diverse.

Due corpi sono lanciati contemporaneamente dallo stesso punto, ad altezza  $h$  rispetto al suolo, in direzione orizzontale e con velocità iniziali diverse. Dimostrare che essi arrivano a terra contemporaneamente.

Abbiamo già visto che il moto lungo la direzione verticale è indipendente dalla componente orizzontale della velocità. In questo caso, perciò, esso risulta indipendente anche dal modulo della velocità iniziale, essendo descritto semplicemente dall'equazione

$$y = h - \frac{1}{2} g t^2.$$

Vengono così confermate le famose considerazioni di Galileo sul moto dei proiettili lanciati orizzontalmente da una torre con "qualsivoglia velocità": essi arrivano a terra dopo lo stesso tempo, indipendentemente dal modulo della loro velocità iniziale. Se  $h$  è l'altezza della torre rispetto al suolo, il tempo di caduta  $t_c$  si otterrà dalla relazione scritta, ponendo  $y = 0$ . Si trova

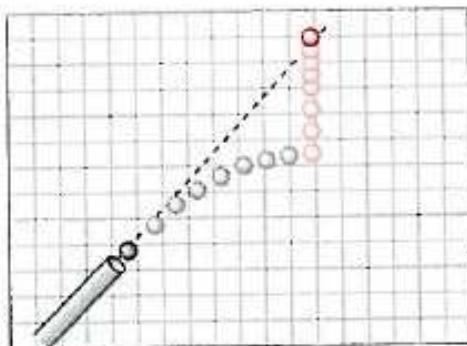
$$t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Tale fatto è illustrato, nei casi di velocità iniziale  $v_0$  e di velocità iniziale nulla, dalla figura 3-41. Naturalmente le due traiettorie sono diverse, ma i due corpi si trovano, istante per istante, alla stessa quota, e quindi arrivano insieme a terra. Quanto più grande è la velocità iniziale del secondo corpo ( $v_0$ ) tanto più lontano dal primo esso cade; ma sempre *nello stesso tempo*.

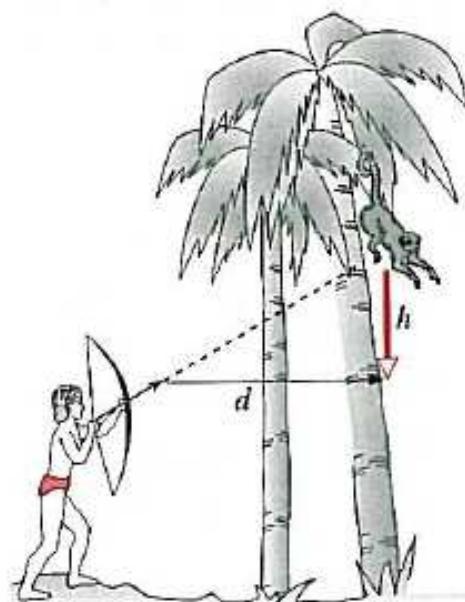
Un altro aspetto della caduta libera dei gravi, connesso con l'indipendenza dei loro moti in direzione orizzontale e verticale, è messo in par-

ticolare evidenza dalla figura 3-42, che illustra una versione didattica (e incruenta) del famoso esempio della scimmia e del cacciatore, discusso in termini vettoriali nell'esempio 3-29.

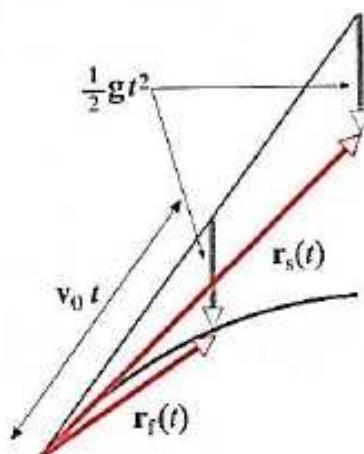
### Esempio 3-29



**FIGURA 3-42**  
Simulazione non cruenta  
dell'esempio 3-29.



**FIGURA 3-43**  
Il cacciatore e la scimmietta.



**FIGURA 3-44**  
Nello stesso tempo i due oggetti  
cadono della stessa quota.

Un cacciatore con arco e freccia vuole colpire una scimmietta che sta appesa al ramo di un albero. Il cacciatore è pronto a lanciare la freccia; la scimmia deve decidere in quale istante lasciarsi cadere, per evitare di essere colpita. Decide dunque di lasciarsi andare esattamente nell'istante in cui parte la freccia, fidando sul tempo impiegato da questa per raggiungerla. È stata ragionevole la scelta della scimmia?

Purtroppo no, perché la freccia e la scimmia «cadono» nello stesso modo, cioè sono soggette ambedue a un'accelerazione  $\mathbf{g}$  e, fatalmente per la scimmietta, arrivano a incontrarsi.

È istruttivo fare vedere come questa previsione possa essere immediatamente derivata dalle equazioni vettoriali del moto per la freccia e per la scimmietta. Assunto come origine del sistema di riferimento il punto in cui si trova inizialmente la freccia, prima che venga scoccata dall'arco, e detta  $\mathbf{v}_0$  la velocità iniziale della stessa, a un istante generico  $t$  dopo il lancio il vettore posizione  $\mathbf{r}_f$  della freccia è

$$\mathbf{r}_f(t) = \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2} \mathbf{g} t^2.$$

Analogamente, se  $\mathbf{r}_{s0}$  è il vettore posizione della scimmietta all'istante iniziale, in cui essa si lascia cadere, da ferma, si ha

$$\mathbf{r}_s(t) = \mathbf{r}_{s0} + \frac{1}{2} \mathbf{g} t^2$$

La freccia colpirà la scimmia a un certo istante solo se  $\mathbf{v}_0$  è parallelo a  $\mathbf{r}_{s0}$ , cioè purché il cacciatore abbia mirato alla posizione iniziale della scimmietta (e la gittata della freccia sia maggiore di  $d$ ). Infatti, se consideriamo la differenza fra i vettori  $\mathbf{r}_s$  e  $\mathbf{r}_f$ , vediamo che essa è data semplicemente da

$$\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_f = \mathbf{r}_{s0} - \mathbf{v}_0 t$$

che potrà annullarsi solo se i due vettori al secondo membro hanno la stessa direzione; in tale caso la scimmietta sarà colpita dalla freccia quando tali vettori avranno anche lo stesso modulo e cioè, con riferimento alle distanze indicate nella figura 3-43, per

$$t = \frac{r_{s0}}{v_0} = \frac{\sqrt{d^2 + h^2}}{v_0}.$$

Il punto d'impatto si troverà ovviamente sulle traiettorie di entrambi i corpi e quindi sulla verticale passante per la posizione iniziale della scimmietta.

Il procedimento seguito per ottenere questo risultato ha evidenziato che il vettore  $\frac{1}{2} \mathbf{g} t^2$ , presente nelle equazioni del moto di entrambi i corpi, scompare eseguendo la differenza fra  $\mathbf{r}_s(t)$  e  $\mathbf{r}_f(t)$ , che descrive il moto della scimmia *rispetto alla freccia*. Per quanto riguarda tale moto *relativo*, che determina la sorte della scimmietta, le cose vanno come se non vi fosse l'accelerazione gravitazionale; essa, infatti, ha lo stesso effetto sul moto verticale di entrambi i corpi, facendoli cadere con la stessa rapidità al passare del tempo (fig. 3-44). Quindi l'incontro avverrà fatalmente, come accadrebbe se la freccia non fosse soggetta all'accelerazione di gravità e si muovesse di moto rettilineo uniforme, e la scimmietta non si lasciasse cadere; purché naturalmente la mira del cacciatore sia quella giusta!

Il moto dei gravi, diffusamente trattato in questo paragrafo, è un caso particolare di *moto con accelerazione a costante* (o, come talvolta si dice, di moto uniformemente accelerato). In effetti, le relazioni (3-70) e (3-71), per  $\mathbf{v}(t)$  e  $\mathbf{r}(t)$ , valgono per qualsiasi moto di questo tipo, previa sostituzione di  $\mathbf{g}$  con il vettore costante  $\mathbf{a}$ . Da esse si deduce la conclusione generale che un moto con accelerazione costante è un *moto piano*. Esso avviene nel piano di  $\mathbf{a}$  e di  $\mathbf{v}_0$ , lungo una *traiettoria parabolica* (se  $\mathbf{v}_0$  non è parallelo ad  $\mathbf{a}$ ) oppure rettilinea (se  $\mathbf{v}_0$  è parallelo ad  $\mathbf{a}$ ).

### 3-18 Cinematica dei moti relativi: introduzione

Abbiamo più volte sottolineato il carattere relativo del concetto di moto e la sua stretta connessione con la scelta del sistema di riferimento. Un corpo appoggiato al suolo è fermo rispetto a un sistema di riferimento solidale con la superficie terrestre; non lo è invece rispetto a un sistema S solidale con il Sole. I pianeti descrivono traiettorie molto semplici, quasi circolari, nel sistema (copernicano) S, mentre le loro traiettorie e la descrizione del loro moto sono molto più complesse in un sistema di riferimento (tolemaico) connesso con la Terra. La conoscenza del moto della Terra rispetto a S, cioè del *moto relativo* dei due sistemi di riferimento, deve tuttavia permettere di passare da una descrizione all'altra e quindi di prevedere come si trasformano da un sistema di riferimento all'altro le grandezze caratteristiche del moto.

Naturalmente, oltre a quest'esempio classico, di notevole rilevanza storica, se ne possono portare molti altri, desumendoli da situazioni d'interesse più immediato. In particolare, i problemi in cui si studiano le condizioni nelle quali può avvenire (o si può evitare) il contemporaneo passaggio di due corpi nella medesima regione spaziale (*collisione*) possono essere convenientemente affrontati da diversi punti di vista, cioè in diversi sistemi di riferimento, uno dei quali, ad esempio, solidale con uno dei corpi in questione. Anche in questo caso il moto relativo stabilisce il collegamento necessario fra le osservazioni condotte nei due sistemi di riferimento.

#### Esempio 3-30

Un fisico, rientrando di sera in automobile da un rinfresco, dove aveva esagerato con le libagioni, finisce contro un autotreno, fermo sul bordo della strada. Agli autisti che gli contestano le sue responsabilità replica dicendo che, trovandosi fermo nel proprio sistema di riferimento, era stato investito dall'autotreno, che gli era venuto addosso. Agli agenti di polizia, chiamati sul luogo dell'incidente, riferisce la stessa versione dei fatti; anche con il primario della clinica psichiatrica sostiene la sua versione. Commentate l'episodio.

Si tratta di un tipico esempio in cui il fenomeno appare del tutto diverso se osservato da sistemi di riferimento differenti. Nel sistema dell'autotreno la macchina è il veicolo investitore; in quello dell'automobile l'investitore è l'autotreno. Tuttavia, il sistema di riferimento in cui vanno esaminati gli eventi è quello solidale con la strada, e quindi con l'autotreno, che era fermo rispetto ad essa. È evidente che, sul piano giuridico, è chiaramente definito chi sia l'investitore e chi sia stato investito.

Nei paragrafi che seguono descriveremo le leggi di trasformazione *classiche* dei vettori cinematici  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{a}$ , di uno stesso punto materiale, fra due

sistemi di riferimento, in ***moto relativo*** l'uno rispetto all'altro. Vogliamo sottolineare che il problema è qualitativamente diverso da quello, discusso nel paragrafo 2-17, che riguarda la trasformazione delle componenti cartesiane di un vettore per variazione dell'origine del sistema di coordinate o per cambiamento dell'orientazione degli assi coordinati: in quel caso, i due sistemi sono in *quiete* l'uno rispetto all'altro.

La derivazione rigorosa di queste leggi, che richiede ipotesi sulle proprietà dello spazio e del tempo, e lo studio della relazione fra le derivate rispetto al tempo di un vettore in due diversi sistemi di riferimento, è trattata in dettaglio nel paragrafo 3-24 degli Approfondimenti. In questa sede ne vengono invece anticipati i risultati, commentandone il contenuto e illustrandoli con alcuni esempi specifici.

### 3-19 Leggi di trasformazione di velocità e accelerazione

Per fissare le idee, consideriamo una nave che sta uscendo da un porto. Poco prima si trovava ferma all'attracco e si era provveduto a sincronizzare gli orologi di bordo con quelli a terra e a controllare l'uguaglianza dei regoli usati per la misurazione delle lunghezze. Ciò che accade a bordo, sul ponte della nave, può essere osservato in due diversi riferimenti, uno dei quali fisso rispetto al molo, l'altro solidale con la nave in navigazione (fig. 3-45). Un passeggero che si muove sul ponte e che, per semplicità di descrizione, sarà schematizzato come un punto materiale, appare comportarsi diversamente se osservato da riva con un cannocchiale oppure da un suo compagno di viaggio che si trova a bordo.

Per formalizzare il problema, indichiamo con  $S$  un sistema di riferimento solidale con il molo e con  $S'$  un sistema di riferimento solidale con la nave e denotiamo con  $\mathbf{r}(\mathbf{r}')$ ,  $\mathbf{v}(\mathbf{v}')$  e  $\mathbf{a}(\mathbf{a}')$ , rispettivamente, il vettore posizione, la velocità e l'accelerazione di un punto materiale misurate nel riferimento  $S$  ( $S'$ ) da osservatori fissi in tale riferimento.

Supponendo che lo *spazio* e il *tempo* siano *assoluti* (par. 3-24), si dimostra che

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_\tau \quad (3-75)$$

ove  $\mathbf{v}_\tau$  viene detta ***velocità di trascinamento***; essa dipende in generale dalla posizione del punto materiale. Il suo significato risulta evidente considerando il caso di un *punto* che sia in quiete nel riferimento  $S'$ , ovvero sia, come si dice, *solidale* con esso: essendo  $\mathbf{v}' = \mathbf{0}$ , la sua velocità in  $S$  è  $\mathbf{v}_\tau$ .

La relazione (3-75) può quindi essere letta anche nel seguente modo: la velocità di un generico punto materiale in  $S$  è data dalla somma vettoriale della velocità  $\mathbf{v}'$  in  $S'$  e della velocità  $\mathbf{v}_\tau$  in  $S$  del punto solidale con  $S'$  istantaneamente coincidente con il punto mobile. Nel caso della nave,  $\mathbf{v}_\tau$  è la velocità, rispetto al molo, del punto della nave in cui si trova all'istante considerato il passeggero in moto sulla nave.

La relazione (3-75) è la *legge di trasformazione classica delle velocità* e sarà ampiamente illustrata, in varie situazioni, nei paragrafi seguenti, ove si accennerà anche ai suoi limiti di validità.

Indichiamo con  $\mathbf{R}$  il vettore posizione dell'origine  $O'$  di  $S'$  rispetto all'origine di  $S$  (fig. 3-46); essendo

$$\mathbf{v} = \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)_S \quad \text{velocità del punto materiale in } S$$

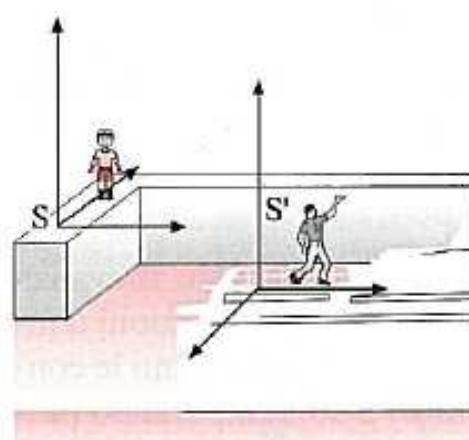


FIGURA 3-45

Due sistemi di riferimento, in moto relativo l'uno rispetto all'altro.

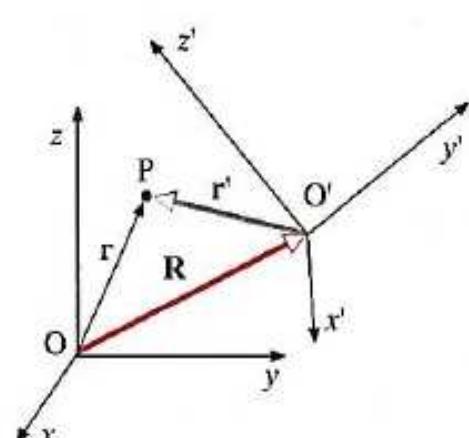


FIGURA 3-46

Vettori posizione di uno stesso punto  $P$ , in due sistemi di riferimento in moto relativo.

$$\mathbf{v}' = \left( \frac{d\mathbf{r}'}{dt} \right)_{S'} \quad \text{velocità del punto materiale in } S',$$

posto  $\mathbf{V}(t) = \left( \frac{d\mathbf{R}}{dt} \right)_S$ , per la relazione (3-95) risulta

$$\mathbf{v}_T = \mathbf{V}(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times [\mathbf{r}(t) - \mathbf{R}(t)]. \quad (3-76)$$

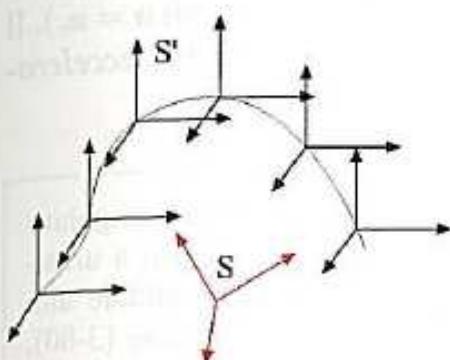


FIGURA 3-47

Traslazione relativa di due sistemi di riferimento.

La **velocità di trascinamento** dipende dal moto relativo dei due sistemi di riferimento e *inoltre* dalla particolare posizione occupata dal punto mobile all'istante considerato. Per chiarire il significato fisico della grandezza  $\boldsymbol{\omega}$  che figura nella (3-76), consideriamo due casi particolari:

a)  $\boldsymbol{\omega} = 0$ :

$\mathbf{v}_T$  è, a ogni istante, indipendente dalla posizione: tutti i punti solidali con  $S'$  si muovono rispetto a  $S$  con la medesima velocità dell'origine  $O'$  (eventualmente variabile nel tempo, sia in direzione che in modulo, vedi figura 3-47):

$$\mathbf{v}_T = \mathbf{V}(t). \quad (3-77)$$

$S'$  effettua un moto di **traslazione** rispetto a  $S$ , con velocità istantanea  $\mathbf{V}(t)$ . I versori di ogni terna  $T'$  solidale con  $S'$  si mantengono costantemente paralleli a se stessi.

b)  $\boldsymbol{\omega} \neq 0$ :

$\mathbf{v}_T$  varia da punto a punto ed è uguale alla somma vettoriale della velocità di  $O'$  e del vettore  $\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} - \mathbf{R})$ . Il significato di questo ultimo termine risulta più chiaro se consideriamo il caso particolare in cui  $O'$  è fisso in  $S$ ; allora si ha

$$\mathbf{v}_T = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} - \mathbf{R}). \quad (3-78)$$

La relazione (3-42) e l'esempio 3-18 permettono di dedurre che questo vettore rappresenta la velocità di un punto materiale che si muove in  $S$  di moto circolare, con velocità angolare  $\boldsymbol{\omega}(t)$ , sulla circonferenza di asse (variabile nel tempo) parallelo a  $\boldsymbol{\omega}(t)$  e passante per  $O'$ .  $S'$  è quindi animato rispetto a  $S$  di un moto di **rotazione** caratterizzato dalla **velocità angolare**  $\boldsymbol{\omega}(t)$ .

Il caso più generale può essere ricondotto al **moto di rototraslazione**, composizione di un moto di traslazione e di un moto di rotazione. In questo caso, l'asse istantaneo attorno al quale avviene la rotazione può essere individuato come luogo dei punti solidali con  $S'$  la cui velocità (di trascinamento) è uguale a  $\mathbf{V}(t)$ . La (3-76) mette chiaramente in evidenza che il moto di  $S'$  rispetto a  $S$  è caratterizzato dai due vettori  $\mathbf{V}(t)$  e  $\boldsymbol{\omega}(t)$ .

Per quanto riguarda le accelerazioni, si dimostra che la connessione fra  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{a}'$  è più complessa di quella fra  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{v}'$ . Infatti risulta

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{a}_T + \mathbf{a}_{co} \quad (3-79)$$

ove  $\mathbf{a}_T$  dipende dal moto relativo dei sistemi di riferimento e dalla posizione del punto materiale, mentre il terzo termine dipende anche dalla velocità del punto in  $S'$  ed è presente solo se  $\mathbf{v}'$  è diverso da zero.

L'espressione specifica di  $\mathbf{a}_T$  e  $\mathbf{a}_{co}$  è data dalle relazioni:

$$\mathbf{a}_T = \mathbf{A} + \boldsymbol{\alpha} \times (\mathbf{r} - \mathbf{R}) + \boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} - \mathbf{R})] \quad (3-80)$$

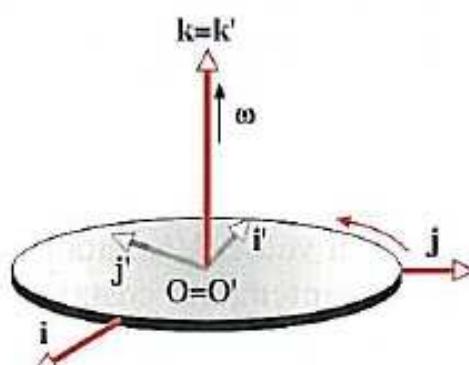
e

$$\mathbf{a}_{co} = 2\omega \times \mathbf{v}', \quad (3-81)$$

ove  $\mathbf{A} = \left( \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} \right)_S$  e  $\alpha = \left( \frac{d\omega}{dt} \right)_S$ .

Il termine  $\mathbf{a}_r$  ha un significato analogo a quello di  $\mathbf{v}_r$  e viene chiamato *accelerazione di trascinamento*. Rappresenta infatti l'accelerazione in S del punto solidale con  $S'$  in cui viene a trovarsi il punto materiale mobile (per tale punto si ha  $\mathbf{a}' = 0$ ,  $\mathbf{v}' = 0$ , e anche  $\mathbf{a}_{co} = 0$ ; quindi  $\mathbf{a} = \mathbf{a}_r$ ). Il termine  $\mathbf{a}_{co}$  non ha controparte nella (3-75) e viene chiamato *accelerazione complementare* o di *Coriolis*.

### Esempio 3-31



**FIGURA 3-48**

Il sistema  $S'$ , solidale con la piattaforma, ruota con velocità angolare  $\omega$ .

Sia data una piattaforma ruotante in verso antiorario, con velocità angolare costante  $\omega$ , attorno a un asse ad essa perpendicolare, fisso rispetto a un sistema di riferimento S (fig. 3-48). Indicato con  $S'$  un sistema solidale alla piattaforma, illustrare il significato dei singoli termini della relazione (3-80).

In tale caso ( $O$  e  $O'$  coincidenti,  $\mathbf{k} = \mathbf{k}'$ ,  $\omega = \omega \mathbf{k}$ ),  $\mathbf{a}_r$  diventa

$$\mathbf{a}_r = \alpha \times \mathbf{r} + \omega \times (\omega \times \mathbf{r})$$

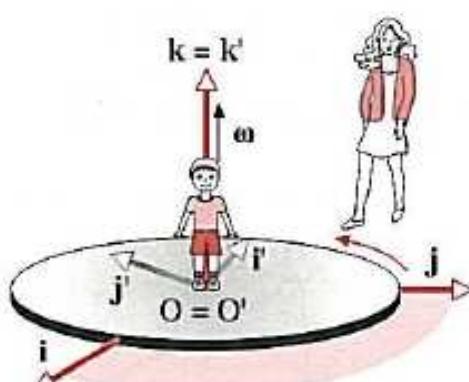
che, per la (3-45), coincide appunto con l'accelerazione di un punto che si muove di moto circolare, su una circonferenza di asse passante per  $O'$  e parallelo a  $\mathbf{k}$ , con velocità angolare  $\omega$ . Per un punto che si muova sul piano  $z = z' = 0$  si avrà

$$\mathbf{a}_r = \alpha \times \mathbf{r} - \omega^2 \mathbf{r}.$$

Nel caso particolare in cui  $\omega = \text{costante}$ , si ha semplicemente  $\mathbf{a}_r = -\omega^2 \mathbf{r}$ .

La ragione fisica della presenza del termine *complementare* di Coriolis, la cui giustificazione formale è chiarita nel paragrafo 3-24, può apparire a prima vista oscura. È quindi utile verificare, in un caso particolarmente semplice (esempio 3-32), che la presenza di questo termine è essenziale per non arrivare a conclusioni manifestamente assurde.

### Esempio 3-32



**FIGURA 3-49**

Un bambino si trova sull'asse di simmetria di una giostra, con la quale ruota con velocità angolare costante  $\omega$  rispetto al sistema di riferimento terrestre S. La mamma del bimbo è ferma in S, a distanza  $r$ . Determinare le caratteristiche del moto della mamma rispetto a un sistema di riferimento  $S'$  solidale con la giostra e verificare la necessità dell'esistenza del termine di accelerazione di Coriolis nella legge di trasformazione delle accelerazioni.

Utilizziamo i sistemi di riferimento indicati nella figura 3-49, supponendo inoltre che la rotazione della piattaforma avvenga in senso antiorario. È chiaro che, rispetto al sistema  $S'$ , la mamma si muove di *moto circolare uniforme*, su una circonferenza di raggio  $r$ , in verso orario: ella ha quindi velocità angolare uguale a  $-\omega$  e velocità  $\mathbf{v}' = -\omega \times \mathbf{r}$ .

La sua accelerazione in  $S'$  è quindi centripeta e può essere espressa vettorialmente come

$$\mathbf{a}' = -\omega^2 \mathbf{r}.$$

Avendo descritto il moto della mamma, come appare al bambino in  $S'$ , calcoliamo l'accelerazione della mamma in S, ben sapendo che deve risultare nulla.

Se la formula (3-79) fosse  $\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{a}_\tau$ , essendo per la (3-80)

$$\mathbf{a}_\tau = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = -\omega^2 \mathbf{r}$$

troveremmo

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{a}_\tau = -2\omega^2 \mathbf{r}$$

in palese contraddizione con la realtà. È facile verificare che, proprio aggiungendo il termine di Coriolis  $\mathbf{a}_{co} = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' = 2\omega^2 \mathbf{r}$ , si trova il risultato corretto  $\mathbf{a} = 0$ .

Riconsiderando infine la velocità di trascinamento (3-76), notiamo che l'effetto del *moto relativo* dei due sistemi di riferimento è caratterizzato da due vettori caratteristici di tale moto: la *velocità relativa*  $\mathbf{V}(t)$  delle origini dei due sistemi e la *velocità angolare*  $\boldsymbol{\omega}(t)$ .

Nei paragrafi seguenti saranno esaminate in dettaglio alcune situazioni di particolare interesse.

### 3-20 Moto relativo di traslazione rettilinea

Quando  $\boldsymbol{\omega} = 0$ , il *moto relativo* dei sistemi di riferimento  $S$  e  $S'$  è caratterizzato dal solo vettore  $\mathbf{V}(t)$ : la velocità di  $O'$  (origine di  $S'$ ) rispetto a  $S$ . Se tale vettore è costante in direzione e verso, ma non necessariamente in modulo, si tratta di un moto di **traslazione rettilinea** (fig. 3-50). In questo caso rientra l'esempio della nave (par. 3-18), se essa si muove rispetto al molo in una definita direzione, senza rollio o beccheggio.

Altri esempi di questo tipo sono quelli in cui  $S$  è un sistema di riferimento solidale con gli edifici di

- a) una stazione ferroviaria, b) un aeroporto, c) un supermercato;
- e  $S'$  è un sistema di riferimento solidale rispettivamente con
- a') un vagone di un treno che si muova su un tratto rettilineo di binario, b') un nastro trasportatore all'interno dell'aeroporto, c') una scala mobile.

In tutti questi casi, le rispettive terne di assi ortogonali ( $T$  e  $T'$ ) mantengono nel tempo una orientazione relativa costante, di modo che, senza ledere la generalità, possiamo anche supporre che i corrispondenti vettori ( $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  e  $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$ ) siano fra loro paralleli. Il fatto importante è che essi sono tutti **indipendenti dal tempo**, essendo  $\boldsymbol{\omega} = 0$ .

Le (3-75) e (3-79) diventano allora

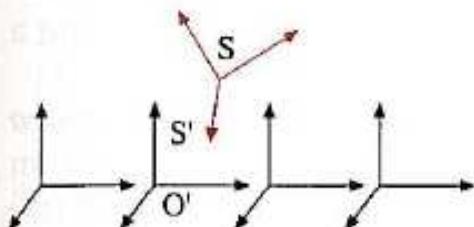
$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V} \quad (3-82)$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{A}. \quad (3-83)$$

La velocità di trascinamento è  $\mathbf{v}_\tau = \mathbf{V}$  e l'accelerazione di trascinamento è  $\mathbf{a}_\tau = \mathbf{A}$ ; come si è già detto, tali vettori sono gli stessi, istante per istante, in tutte le posizioni.

### 3-21 Trasformazioni di Galileo

Un caso particolarmente semplice è quello in cui  $\mathbf{V}$  è indipendente dal tempo: il *moto di traslazione* di cui  $S'$  è animato rispetto a  $S$  è quindi *rettilineo e uniforme*.



**FIGURA 3-50**  
 $S'$  si muove di traslazione rettilinea, rispetto a  $S$ .

Per l'importanza che esso assume in Dinamica, vale la pena di soffermarsi sulle corrispondenti relazioni di trasformazione dei vettori posizione, velocità e accelerazione. Per semplicità, assumiamo che le origini dei due sistemi di riferimento coincidano a un istante, che viene assunto come origine dei tempi, sia in S che in S'. Allora, ad ogni istante  $t$ , il vettore posizione di O' rispetto ad O (cioè  $\mathbf{R}$ ), sarà dato da  $\mathbf{R} = \mathbf{V}t$ , e quindi la relazione fra i vettori  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{r}'$  diventa (fig. 3-46)

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{V}t. \quad (3-84)$$

D'altra parte, l'ipotesi fatta sulla natura assoluta del tempo e la particolare scelta delle origini dei tempi, si traducono nell'uguaglianza fra le «coordinate temporali» di un dato evento fisico nei due sistemi di riferimento. Possiamo quindi scrivere:

$$\boxed{\begin{cases} \mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{V}t' \\ t = t' \end{cases}}. \quad (3-85)$$

È importante osservare che  $\mathbf{V}$  rappresenta la velocità del sistema S' rispetto a S; quindi, le relazioni inverse si ottengono scambiando le grandezze con e senza apice, e ponendo  $-\mathbf{V}$  (che è la velocità di S rispetto a S') al posto di  $\mathbf{V}$ .

Le (3-85) vengono chiamate *equazioni di trasformazione di Galileo* e consentono di collegare fra loro le descrizioni spazio-temporali di un evento fisico, date in due sistemi di riferimento in moto relativo di traslazione rettilinea e uniforme. La loro importanza sarà discussa in dettaglio nel capitolo successivo, ove vedremo che il moto relativo dei cosiddetti sistemi di riferimento *inerziali*, che tanto rilievo hanno nello studio della Dinamica, è di questo tipo.

Le corrispondenti leggi di trasformazione dei vettori cinematici  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{a}$  si deducono dalle (3-82) e (3-83) per  $\mathbf{V} = \text{costante}$ :

$$\boxed{\begin{cases} \mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V} \\ \mathbf{a} = \mathbf{a}' \end{cases}}. \quad (3-86)$$

La relazione fra le velocità rappresenta la *legge di composizione classica delle velocità*: essa mostra chiaramente che la velocità di un punto materiale *dipende* dal sistema di riferimento. In altri termini, si dice anche che *la velocità* in generale *non è invariante* per trasformazioni di Galileo. Naturalmente quest'affermazione si riferisce al confronto fra le velocità del medesimo *punto* materiale in due sistemi di riferimento diversi. Se consideriamo invece *due punti* materiali, è facile vedere che la *differenza*  $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$  fra le loro velocità, che talvolta viene chiamata *velocità relativa* dei due punti, è *invariante per trasformazioni di Galileo*.

D'altra parte il fatto, sperimentalmente provato, che esiste un fenomeno, la *propagazione della luce nel vuoto*, caratterizzato da una *velocità indipendente dal sistema di riferimento*, pone dei problemi di principio notevoli. Esso impone una revisione dei fondamenti concettuali (carattere assoluto dello spazio e del tempo nella *Fisica classica*) su cui si è basata la derivazione delle leggi di trasformazione di Galileo. Da tale revisione scaturiscono nuove leggi, le *leggi di trasformazione di Lorentz*, per le quali la *velocità della luce* risulta *invariante*. Le modificazioni introdotte sono comunque tali da potere essere trascurate se la velocità relativa dei due sistemi di riferimento è piccola rispetto a quella della luce

( $V \ll c$ ); in tali condizioni le trasformazioni di Galileo possono essere considerate praticamente valide.

La seconda equazione (3-86), invece, mostra che l'accelerazione non cambia passando da un sistema di riferimento a un altro, che si muova rispetto al primo di moto di traslazione rettilinea e uniforme. *L'accelerazione è invariante per le trasformazioni di Galileo*. Come vedremo nel prossimo capitolo, questo fatto ha una notevole importanza nello studio della *Dinamica classica*.

Per illustrare il ruolo delle leggi di trasformazione (3-85) e (3-86) dei vettori cinematici, discutiamo alcuni esempi di un certo interesse.

### Esempio 3-33

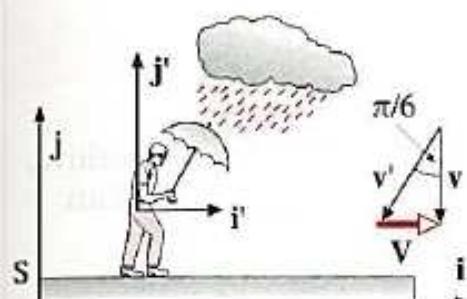


FIGURA 3-51

In una giornata noiosa, sia per la pioggia che cade a dirotto che per le lezioni universitarie in programma, uno studente, fortunatamente provvisto di ombrello, esce di casa e corre per raggiungere la fermata dell'autobus. Per non bagnarci inclina l'ombrello di 30 gradi in avanti rispetto alla verticale, che è anche la direzione lungo la quale sta cadendo la pioggia rispetto al suolo.

Sapendo che lo studente si muove rispetto al suolo con velocità  $\mathbf{V}$ , di modulo 5 m/s, potete determinare il modulo  $v$  della velocità delle gocce di pioggia rispetto al suolo?

Questo è un classico esempio di moto relativo. La direzione lungo la quale lo studente dispone l'asse dell'ombrello, per rendere massima la protezione, è quella della velocità  $\mathbf{v}'$  delle gocce di pioggia in un riferimento  $S'$ , solidale con lo studente, che trasla con velocità  $\mathbf{V}$  rispetto a un sistema di riferimento  $S$  solidale con il suolo. Il legame fra  $\mathbf{v}'$ ,  $\mathbf{V}$  e la velocità  $\mathbf{v}$  delle gocce di pioggia in  $S$  è dato dalla (3-82); i rispettivi vettori sono rappresentati in figura 3-51, dalla quale si deduce

$$v = \frac{V}{\tan \frac{\pi}{6}} = 5 \cdot \sqrt{3} = 8,66 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Rispetto allo studente, invece, le gocce di pioggia hanno una velocità di modulo

$$v' = \sqrt{v^2 + V^2} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

### Esempio 3-34

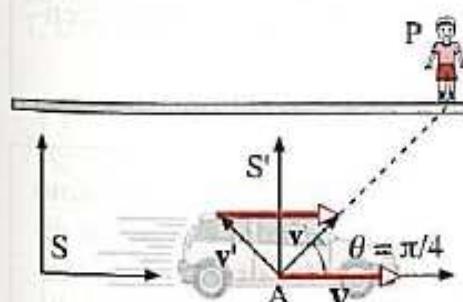


FIGURA 3-52

Un automobilista, che sta procedendo a velocità costante lungo un tratto rettilineo di strada extraurbana, vuole sbarazzarsi di una buccia di banana e, dopo avere verificato nello specchietto della portiera sinistra di non essere seguito da alcuna auto e di non avere incontrato alcun pedone o ciclista viaggiante in verso opposto, lancia dal finestrino sinistro la buccia a 45 gradi *all'indietro* (rispetto alla direzione dell'asse delle ruote), convinto quindi di non colpire nessuno. Invece, la buccia di banana va proprio a colpire un pedone  $P$ , che sta aspettando l'autobus a una fermata che si trova un po' più *avanti* rispetto alla posizione  $A$  dell'auto al momento del lancio.

Spiegiate qualitativamente la ragione di questo fatto e, per la situazione descritta nella figura 3-52, in cui la retta  $AP$  (congiungente le posizioni  $A$  dell'auto e  $P$  del pedone al momento del lancio) fa un angolo di 45 gradi *in avanti* rispetto alla direzione della velocità  $\mathbf{V}$  dell'auto, determinate il modulo di tale velocità, supponendo che la velocità impartita dall'automobilista alla buccia di banana (nel riferimento solidale con l'auto) abbia modulo  $v' = 10 \text{ m/s}$ .

L'automobilista distratto (uno studente svogliato?) non ha tenuto in debito conto la relatività del moto e la dipendenza dal sistema di riferimento della

*direzione*, oltre che del modulo, della velocità dei corpi. Essa può portare anche a *cambiare il segno* della componente della velocità lungo la direzione del moto relativo di due sistemi di riferimento, nel passare da un sistema di riferimento a un altro; di modo che, come nel caso in questione, quello che per l'automobilista era un componente all'*indietro* della velocità della buccia di banana diventa, nel riferimento solidale con la strada, un componente *in avanti*. Ciò determina la possibilità che in tale riferimento la traiettoria dell'oggetto interessi anche zone spaziali che si trovano in avanti rispetto alla posizione iniziale dell'auto e quindi che esso possa colpire il malcapitato pedone.

L'analisi quantitativa può essere condotta introducendo i sistemi di riferimento S e S' solidali rispettivamente con la strada e con l'auto, e le corrispondenti terne di assi a due a due paralleli. Assumendo la direzione comune degli assi  $x$  e  $x'$  coincidente con quella della velocità  $\mathbf{V}$  dell'auto in S, e indicando con  $\theta$  e  $\theta'$  gli angoli fra  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{i}$  e fra  $\mathbf{v}'$  e  $\mathbf{i}'$ , rispettivamente, la legge di composizione delle velocità  $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V}$ , graficamente rappresentata in figura dal triangolo vettoriale, è equivalente alle relazioni scalari

$$v_x = v \cos \theta = v'_x + V = v' \cos \theta' + V$$

$$v_y = v \sin \theta = v'_y = v' \sin \theta'$$

ove  $\theta' = 3\pi/4$  e  $\theta = \pi/4$ .

Si noti che, pur essendo  $v'_x$  negativo, se  $V > |v'_x|$  si ottiene  $v_x$  positivo, come richiesto. Eliminando  $v$  fra le equazioni del sistema si trova infatti

$$V = v' \left( \frac{\sin \theta'}{\tan \theta} - \cos \theta' \right) = v' \left( \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} \right) = v' \sqrt{2} = 14,1 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

### Esempio 3-35

Un passeggero sconsiderato scende da un tram in corsa, rivolto in direzione opposta a quella in cui si muove il veicolo. Cade per terra rovinosamente. Perché?

Indicata con  $\mathbf{V}$  la velocità del tram rispetto alla strada e con  $\mathbf{v}'$  quella del passeggero rispetto al tram, rispetto al suolo la velocità del passeggero risulterà  $\mathbf{v} = \mathbf{V} + \mathbf{v}'$ . Egli, correndo, deve conservare, almeno nei primi istanti, questa velocità e, poiché nessuno è capace di correre all'*indietro*, deve buttarsi giù dal tram con velocità  $\mathbf{v}'$  di modulo maggiore di  $V$ . In caso contrario, in particolare se  $\mathbf{v}' = 0$ , cade all'*indietro*, battendo la schiena per terra.

In conclusione, la discesa da veicoli in moto è un'attività sportiva sconsigliabile. Ma, se per evitare pericoli maggiori non potete farne a meno, scendete nel verso del moto e ... correte!

### Esempio 3-36

Una sorgente di raggi beta emette elettroni in tutte le direzioni. Supponiamo di avere misurato simultaneamente le velocità di due elettroni emessi in direzioni opposte, in un sistema di riferimento solidale con la sorgente, trovando per ciascuna di esse lo stesso modulo  $v$ , uguale a  $0,8 c$  ( $c$  è il valore della velocità della luce nel vuoto). Qual è il modulo della velocità relativa dei due elettroni? La domanda è ben posta? La risposta che siete in grado di dare vi soddisfa?

Consideriamo un sistema S, con origine nella sorgente, e un sistema S', con origine nella particella 2 e assi paralleli a quelli del sistema S. La velocità di

trascinamento  $\mathbf{v}_r$  è quella della particella 2 rispetto alla sorgente. Consideriamo le velocità  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{v}'$  della particella 1 nei sistemi S e S'; esse sono legate dalla relazione  $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_r$ , da cui  $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{v}_r$ . Ne segue che

$$v' = 2v = 1,6 c = 4,8 \cdot 10^8 \text{ m/s.}$$

$\mathbf{v}'$  è la velocità della particella 1 rispetto alla 2, cioè quella che possiamo chiamare velocità relativa. Se avessimo preso S' solidale con la particella 1, in tale sistema di riferimento la particella 2 avrebbe la stessa velocità, ma con verso opposto. La domanda è quindi ben posta.

La risposta, basata sulla legge di composizione classica delle velocità, prevede quindi che un elettrone abbia rispetto all'altro una velocità maggiore della velocità della luce nel vuoto, in contraddizione con tutti i risultati sperimentali, che indicano per la velocità  $c$  della luce il ruolo di velocità limite per le particelle e i segnali fisici. In realtà, nella meccanica relativistica si trova che le relazioni (3-86) vanno modificate; in particolare, per una particella che si muova lungo la direzione  $x$  in cui avviene il moto relativo di traslazione rettilinea uniforme di due sistemi di riferimento S e S', si ha la relazione

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}$$

invece della  $v_x = v'_x + V$  deducibile dalla (3-86). Osserviamo che per  $v'_x = V = 0,8 c$ , dalla trasformazione relativistica si ottiene  $v_x = \frac{1,6}{1,64} c$ , che è minore di  $c$ , anche se di poco.

È facile rendersi conto che, quando le velocità in questione sono molto più piccole di  $c$ , le due formule danno essenzialmente gli stessi risultati: è questo il limite in cui la Cinematica e, come vedremo, anche la Dinamica classica, forniscono risultati corretti.

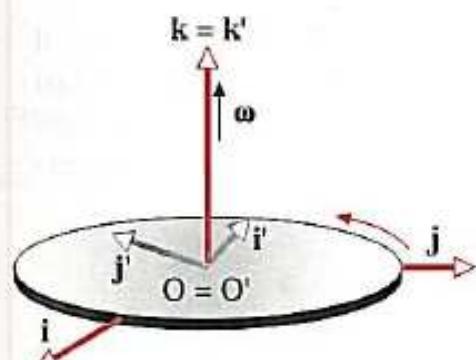


FIGURA 3-53  
La terna  $T'$  ruota rispetto alla terna  $T$ , con velocità angolare  $\omega$ .

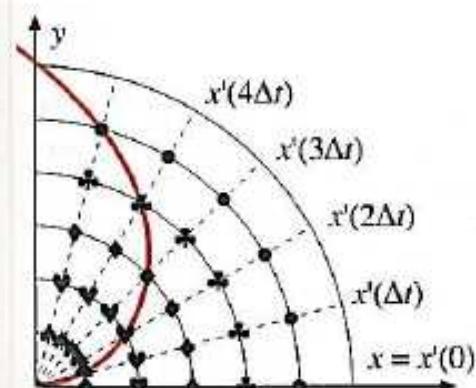


FIGURA 3-54  
Costruzione della traiettoria nel sistema di riferimento S.

### 3-22 Moto relativo di rotazione

Illustriamo ora il caso in cui il moto relativo di S e S' coinvolga la sola rotazione della terna di assi del sistema S' rispetto a quella di S.

Consideriamo un punto materiale che si muove su una piattaforma come quella di figura 3-53, ed esaminiamo il suo moto in due sistemi di riferimento: uno (S) rispetto al quale la piattaforma ruota con velocità angolare  $\omega = \text{costante}$ , diretta lungo l'asse z di tale sistema di riferimento; l'altro (S') solidale con la piattaforma. L'orientazione relativa delle terne di assi di S e di S' sia quella di figura 3-53. Supponiamo che il moto del punto avvenga lungo la direzione dell'asse  $x'$ , con velocità  $v'$  costante, di modulo  $v'_0$ : sia cioè un moto rettilineo uniforme in S'. Facciamo vedere che in S la traiettoria è curva e quindi il moto è accelerato. Ciò è sinteticamente illustrato nella figura 3-54, ove sono presentate le configurazioni assunte, rispetto a S, dalla piattaforma rotante e dal punto mobile, agli istanti  $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots$ , per la situazione in cui all'istante  $t = t' = 0$  la terna di S' coincide con quella di S e il punto mobile passa dall'origine comune dei due sistemi di riferimento. La distanza  $r$  del punto mobile dall'origine cresce proporzionalmente al tempo:

$$r = v'_0 t$$

e analoga dipendenza da  $t$  ha anche l'angolo  $\theta$  che il suo vettore posizione forma con l'asse  $x$  del riferimento S:

$$\theta = \omega t.$$

La descrizione del moto nel riferimento S potrebbe essere facilmente condotta a partire da queste due ultime equazioni, che sono direttamente utilizzabili in un sistema di coordinate polari con polo in O e asse polare coincidente con l'asse  $x$  di S (par. 2-16 e 3-15). In particolare, potremmo trovare immediatamente l'equazione esplicita della traiettoria del punto in S eliminando  $t$  fra le due suddette equazioni:

$$r = \frac{v'_0}{\omega} \theta.$$

Questa è l'equazione di una curva a spirale: il moto è quindi ovviamente accelerato. Per facilitare la comprensione della figura 3-54, sono stati introdotti sull'asse  $x'$  alcuni contrassegni di riferimento, che individuano i punti che saranno via via occupati sulla piattaforma dal punto mobile. Essi sono i punti solidali con S' la cui velocità in S rappresenta la velocità di trascinamento  $\mathbf{v}_r$  che dobbiamo sommare vettorialmente a  $\mathbf{v}' = v'_0 \mathbf{i}'$  per ottenere la velocità  $\mathbf{v}$  del punto materiale in S.

Una discussione più completa della cinematica di questo moto si può trovare nell'esempio che segue.

### Esempio 3-37

Studiare velocità e accelerazione, nel sistema di riferimento S, del punto materiale descritto in questo paragrafo.

In ogni punto,  $\mathbf{v}_r = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$  ha direzione perpendicolare al vettore posizione  $\mathbf{r}$  e modulo  $\omega r$  crescente con la distanza dall'origine, e quindi con il tempo. D'altra parte

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= \mathbf{r}' = \mathbf{v}'t = v'_0 t \mathbf{i}' = v'_0 t \mathbf{u}_r \\ \mathbf{v}_r &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \boldsymbol{\omega} \times (v'_0 t \mathbf{u}_r) = \omega v'_0 t \mathbf{u}_\theta\end{aligned}$$

e quindi  $\mathbf{v}'$  e  $\mathbf{v}_r$  sono perpendicolari fra loro: essi sono, rispettivamente, il componente di  $\mathbf{v}$  parallelo e quello perpendicolare a  $\mathbf{r}$ . In coordinate polari piane, con polo in O e asse polare coincidente con l'asse  $x$ , essi sono il componente radiale e il componente trasverso (paralleli, rispettivamente, ai versori  $\mathbf{u}_r(P)$  e  $\mathbf{u}_\theta(P)$  introdotti nel paragrafo 2-16):

$$\mathbf{v} = v'_0 \mathbf{u}_r + \omega v'_0 t \mathbf{u}_\theta.$$

Il modulo della velocità  $\mathbf{v}$  in S è quindi dato da

$$v = \sqrt{v'^2_0 + (\omega r)^2} = \sqrt{v'^2_0 + \omega^2 v'^2_0 t^2} = v'_0 \sqrt{1 + \omega^2 t^2}$$

che, come si vede, cresce con il tempo. La direzione del vettore  $\mathbf{v}$  cambia anch'essa con il tempo, com'è evidente dalla figura.

Anche in questo modo si verifica che il moto, che in S' appare uniforme, risulta accelerato in S e avviene su una traiettoria curva: sono diverse da zero sia la componente tangenziale dell'accelerazione che quella normale. Per ottenere l'espressione vettoriale esplicita dell'accelerazione  $\mathbf{a}$  in S, utilizziamo la (3-79), tenendo conto che  $\mathbf{a}' = 0$ . Risulta quindi

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_{co}.$$

È facile verificare che nel nostro caso  $\mathbf{a}_r$  e  $\mathbf{a}_{co}$  sono perpendicolari fra loro: il primo vettore è parallelo a  $\mathbf{r}$ , il secondo è perpendicolare a  $\mathbf{r}$ ; essi sono i componenti radiale e trasverso di  $\mathbf{a}$  [si lascia al lettore la verifica della consistenza con l'espressione (3-62)]. Infatti l'accelerazione di trascinamento è data da

$$\mathbf{a}_r = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = -\omega^2 \mathbf{r} = -\omega^2 v'_0 t \mathbf{u}_r$$