בוגוב איליה,ת.ז. 342522471
תרגיל 1
שאלה 3.

$$v = (1, 2, 3, 4), w = (0, -1, 1, 2)$$

$$< v, w >= -2 + 3 + 8 = 9$$

$$< w, w >= 0 + 1 + 1 + 4 = 6$$

$$P_w(v) = w \cdot \frac{< v, w >}{< w, w >} = w \cdot \frac{3}{2} = (0, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 3)$$

שאלה 4.

$$v = (1, 2, 3, 4), w = (1, 0, 1, -1)$$

$$< v, w >= 1 + 3 - 4 = 0$$

$$P_w(v) = w \cdot \frac{< v, w >}{< w, w >} = (0, 0, 0, 0)$$

שאלה 7.
יהיה A מטריצה הפיכה

$$A = UDV^T$$

$$A^{-1} = UD^{-1}V^T$$

כאשר גדכגדכ$D_{ii}^{-1} = \frac{1}{D_{ii}}$ ו$D_{ij} = 0$ לכל $i \neq j$.
מועיל מאוד לדעת SVD במצב הזה מכיוון שהרבה יותר קל לחשב הופכית של מטריצה אלכסונית כי צריך רק כל איבר האלכסון הראשי להחליף בהופכי הכפלי שלו.

שאלה 8.

$$C = UDV^T = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$$

נמצא את SVD של C.

$$\begin{pmatrix} 26 & 18 \\ 18 & 74 \end{pmatrix} = C^T \cdot C = VD^TU^TUDV^T \stackrel{*}{=} VD^TDV^T \stackrel{**}{=} VD^2V^T$$

נלכסן את C^TC

$$det(C^T \cdot C - \lambda I) = det \begin{pmatrix} 26-\lambda & 18 \\ 18 & 74-\lambda \end{pmatrix} = (26-\lambda)(74-\lambda)-324 = \lambda^2 - 100\lambda + 1600 = (\lambda-20)(\lambda-80)$$

נמצא וקטורים עצמיים

שאלה 9.

תהיה $A \in M_{m\times n}$ של דרגה r . מגדיר $C_0 = A^TA$. C_0 , $v_1 ... v_n$של וקטורים עצמיים עם ערכים עצמיים $\lambda_1 ... \lambda_n$.

יהיה $b_0 = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i v_i$ רנדומלי.

$$b_k = \frac{C_0 \cdot b_{k-1}}{||C_0 \cdot b_{k-1}||} = \frac{C_0 \cdot \frac{C_0 \cdot b_{k-2}}{||C_0 \cdot b_{k-2}||}}{||C_0 \cdot \frac{C_0 \cdot b_{k-1}}{||C_0 \cdot b_{k-1}||}||} = \frac{C_0^2 \cdot b_{k-2}}{||C_0^2 \cdot b_{k-2}||} = ... = \frac{C_0^k \cdot b_0}{||C_0^k \cdot b_0||} =$$

$$= \frac{C^k \sum\limits_{i=1}^{k} a_i v_i}{||C^k \sum\limits_{i=1}^{k} a_i v_i||} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} a_i C^k v_i}{|| \sum\limits_{i=1}^{k} a_i C^k v_i||} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} a_i \lambda_i^k v_i}{|| \sum\limits_{i=1}^{k} a_i \lambda_i^k v_i||} = \frac{\lambda_1^k \sum\limits_{i=1}^{k} a_i \frac{\lambda_i}{\lambda_1}^k v_i}{||\lambda_1^k \sum\limits_{i=1}^{k} a_i \frac{\lambda_i}{\lambda_1}^k v_i||} \stackrel{*}{\to} \frac{a_1 \lambda_1^k v_1}{||a_1 \lambda_1^k v_1||} = v_1$$

$*$ - $\frac{\lambda_i}{\lambda_1} < 1$ לכלכ $i > 1$.

$Projection\ matrices$

יהיה V תת-מרחב k מימדי של R^d ויהיו $v_1 ... v_k$ בסיס אורתונורמלי של V . נגדיר $P = \sum\limits_{i=1}^{k} v_i v_i^T$.

שאלה 14.

נוכיח כי P הינה סימטרית.

קודם נוכיח כי לכל $1 \leq l \leq k$ $M = v_l v_l^T$ הינה סימטרית .

הוכחה:

$$M_{i,j} = v_{l,i} \cdot v_{l,j} = v_{l,j} \cdot v_{l,i} = M_{j,i}$$

וסכום של מתריצות סימטריות הינה מטריצה סימטרית.
שאלה 15.
יהיה $1 \le l \le k$

$$P \cdot v_l = \sum_{i=1}^{k} v_i v_i^T v_l = \sum_{i=1, i \neq l}^{k} v_i v_i^T v_l + v_l v_l^T v_l \stackrel{*}{=} v_l$$

$*$ $v_1 ... v_l$ אורתונורמליים.
ולכן לכל $1 \le l \le k$, v_l וקטור עצמי עם ערך עצמי 1.
שאלה 16.
מתריצה P הינה סימטרית,ולכן לכסינה אורתוגונלית . נשלים את $\{v_1 ... v_k\}$ עד לבסיס אורתונורמלי של R^d.

$$U = [v_1 ... v_k w_{k+1} ... w_n]$$

U הינה מתריצה אורתונורמלית לפי הגדרה .
אזי

$$P = U \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^T$$

היא נראת כך כי $v_1 ... w_n$ הינו בסיס אורתונורמלי ולכל $k + 1 \le j \le n$ מתקיים כי

$$P v_j = \sum_{i=1}^{k} v_i v_i^T v_j = 0$$

שאלה 17.

$$P P^T \stackrel{*}{=} P^T P = U \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^T U \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^T \stackrel{**}{=} U \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 U^T = P^2 = U \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 U^T \stackrel{***}{=} U \ ($$

$*$ - מכך ש P סימטרית $(P = P^T)$
$**$ - U אורתונורמלית .
$1^2 = 1$ $***$
שאלה 19.

יהיה $v \in V$ ניתן לכתוב אותו בצורה:

$$\sum_{i=1}^{k} < v_i|v > v_i$$

ואז

$$Pv = \sum_{i=1}^{k} v_i v_i^T \sum_{j=1}^{k} < v_j|v > v_j = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} < v_j|v > v_i v_i^T v_j \overset{*}{=} \sum_{i=1}^{k} < v_i|v > v_i = v$$

*- $v_1 ... v_k$ בסיס אורתונורמלי,ולכן $v_i^T v_j = 0$ לכל $i \neq j$

$$Multivariate\ calculus$$

שאלה 20.
יהיה $x \in R^n$ וקטור $U \in R^{n \times m}$ מטריצה אורתוגונלית. $f : U \in R^n \to R^n$

$$f(\sigma) = U diag(\sigma) U^T x$$

$$diag(\sigma)_{ij} = \begin{cases} \sigma_i & i = j \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$$f_i(\sigma) = \sum_{j=1}^{n} u_{ij} \sigma_j u_j^T x = \sum_{j=1}^{n} u_{ij} u_j^T x \cdot \sigma_j$$

ידוע לנו מתירגול כי

$$diag(\sigma) \cdot U^T \cdot x = \begin{pmatrix} \sigma_1 u_1^T x \\ \sigma_2 u_2^T x \\ . \\ . \\ . \\ \sigma_n u_n^T x \end{pmatrix}$$

$$J_\sigma = \begin{pmatrix} u_{11}u_1^Tx & u_{12}u_2^Tx & . & . & . & u_{1,n}u_n^Tx \\ . & & & & & . \\ . & & & & & . \\ . & & & & & . \\ u_{n1}u_1^Tx & & & & & u_{n,n}u_n^Tx \end{pmatrix}$$

שאלה 21.

$$h(\sigma) = \frac{1}{2}||f(\sigma) - y||^2$$

הגדריאנט של $h(\sigma)$ הינו לפי מה שחושב בתירגול ופלי שאלה 20 :

$$\frac{1}{2} \cdot 2(f(\sigma) - y)^T \cdot \begin{pmatrix} u_{11}u_1^Tx & u_{12}u_2^Tx & . & . & . & u_{1,n}u_n^Tx \\ . & & & & & . \\ . & & & & & . \\ . & & & & & . \\ u_{n1}u_1^Tx & & & & & u_{n,n}u_n^Tx \end{pmatrix}$$

שאלה 22.

$$g(z)_j = \frac{e^{z_j}}{\sum\limits_{k=1}^{n} e^{z_k}}$$

לפי מה שראינו בתירגול, עבור $i = j$

$$\frac{\partial S_i}{\partial z_j} = \frac{\partial}{\partial z_j} \cdot \frac{e^{z_i}}{\sum\limits_{k=1}^{n} e^{z_k}} = S_i(1 - S_i)$$

ועבור $i \neq j$ מתקיים כי

$$\frac{\partial S_i}{\partial z_j} = -\frac{e^{z_i} \cdot e^{z_j}}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} e^{z_k}\right)^2} = -\frac{e^{z_i}}{\sum\limits_{k=1}^{n} e^{z_k}} \cdot \frac{e^{z_j}}{\sum\limits_{k=1}^{n} e^{z_k}} = -S_i \cdot S_j$$

אזי

$$J_{g(z)} = \begin{pmatrix} S_1(1-S_1) & -S_1S_2 & . & . & . & -S_1S_n \\ -S_2S_1 & S_2(1-S_2) & & & & . \\ & & . & & & . \\ . & & & . & & . \\ . & & & & . & \\ -S_nS_1 & & & & & S_n(1-S_n) \end{pmatrix}$$

שאלה 28.
לפי חסם של צ'בישב חייבים להשתמש ב $m(\epsilon,\delta) \leq \lceil \frac{1}{4\epsilon^2\delta} \rceil$ ו עבור אי-שוויון הופדינג $m(\epsilon,\delta) \leq \lceil \frac{1}{2\epsilon^2} \cdot log\left(\frac{2}{\delta}\right) \rceil$.
שאלה 29.