Программный комплекс для исследования маятника

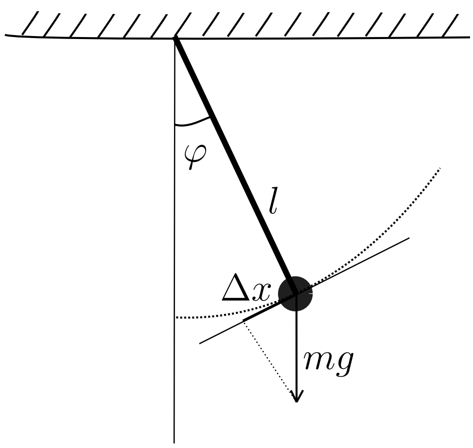
Денис Максимов, Даниил Фомин

01.06.2023

1 Математический маятник

Мы погружаемся в изучение удивительной темы дифференциальных уравнений и динамических систем. Часто мотивация для изучения динамических систем происходит из рассмотрения реальных объектов и процессов, чьё поведение зависит от времени. Если при этом поведение подчиняется определённым законам, то про такие процессы говорят, что они *детерминированные*.

Мы рассмотрим пример динамической системы, задаваемой дифференциальным уравнением, а именно **математический маятник**.



Реальный маятник обладает огромным числом физических характеристик. При построении математической модели мы оставляем только самые существенные для движения параметры. Именно, математический маятник состоит из материальной точки массы m, подвешенной на невесомое недеформируемое плечо длины l.

Выведем уравнение, описывающее движение маятника. Обозначим за φ угол отклонения от положения устойчивого равновесия. Тогда, считая приращение угла $\Delta\varphi$ малым, движение маятника можно представить как прямолинейное движение по касательной к окружности. Запишем второй закон Ньютона в проекции на касательную:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg\sin\varphi,$$

где g — усорение свободного падения. Пусть Δx - длина дуги окружности, примерно равная малой части касательной. Тогда $\Delta x = l\Delta\varphi + o(\Delta\varphi)$. Пренебрегая бесконечно малыми членами, получаем искомое уравнение:

$$ml\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mg\sin\varphi \tag{1}$$

Исследование уравнения

Мы получили уравнение колебаний, анализируя приближенную модель реального физического маятника. Теперь мы собираемся анализировать само это уравнение, чтобы извлечь новую информацию о движении этой системы.

Одной из фундаментальных концепций в теории динамических систем является понятие **фазового пространства**. Точки абстрактного фазового пространства взаимно соответствуют различным состояниям системы, при этом близкие состояния должны соответствовать близким точкам. Размерность фазового пространства равна числу параметров, задание которых однозначно определяет состояние системы. Последовательному изменению состояний во времени соответствуют траектории в фазовом пространстве.

Узнаем, как устроено фазовое пространство маятника. Уравнение 1 имеет второй порядок, поэтому мы можем свести его к системе из двух уравнений с помощью замены $\dot\varphi = \psi$:

$$\begin{cases} \dot\varphi = \psi \\ \dot\psi = -\omega^2\sin\varphi \end{cases} \tag{2}$$

где $\omega^2 = \frac{g}{l}$. Новая переменная ψ имеет угловую скорость движения. Мы можем заключить, что фазовое пространство маятника является двумерным, и его координатами являются φ и ψ. Согласно теореме о существовании и единственности решения, через каждую точку (φ_0, ψ_0) проходит фазовая траектория, отвечющая движению маятника с данными начальными условиями. Угловая скорость ψ может принимать любые действительнеы значения, а угол φ — только значения в промежутке $[-\pi, \pi]$, причем значениям $\varphi = \pi$ и $\varphi = -\pi$ соответствует одно состояние системы

— верхнее положение равновесия. Для соблюдения принципа «Близкие состояния — близкие точки фазового пространства» введем отношение эквивалентности $(\varphi, \psi) \sim (\varphi + 2\pi k, \psi))$ и возьмем фактор-пространство по нему. Мы получили, что фазовое пространство топологически эквивалентно цилиндру.

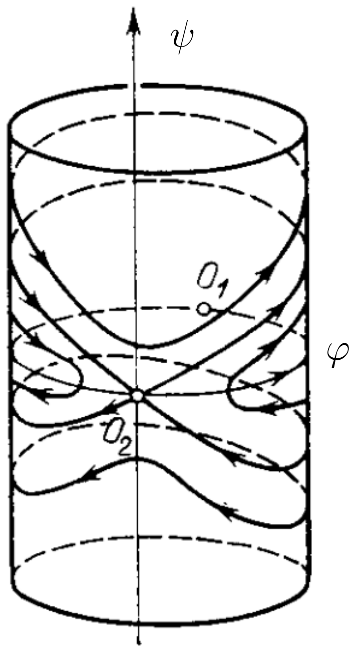
Чтобы узнать, как устроены фазовые траектории, найдем первый интеграл системы. 2. Поделив одно уравнение на другое, получаем

$$\frac{d\psi}{d\varphi} = -\frac{\omega^2 \sin\varphi}{\psi}$$

Это — уравнение с разделяющимися переменными, его решение $\frac{1}{2}\psi^2 = \omega^2\cos\varphi + C$. Значит, первый интеграл системы имеет вид $I = \frac{1}{2}\psi^2 - \omega\cos\varphi$. Поскольку $\frac{dI}{dt} = const$ в силу системы 2, то первый интеграл сохраняется вдоль фазовых траекторий. Иначе говоря, фазовые траектории являются линиями уровня функции $I(\varphi, \psi)$. Чтобы получить явную формулу для них, выразим ψ через φ:

$$\psi = \pm\sqrt{2(I + \omega^2\cos\varphi)} \tag{3}$$

При достаточно малом I подкоренное выражение может принимать как положительные, так и отрицательные значения, а значит,



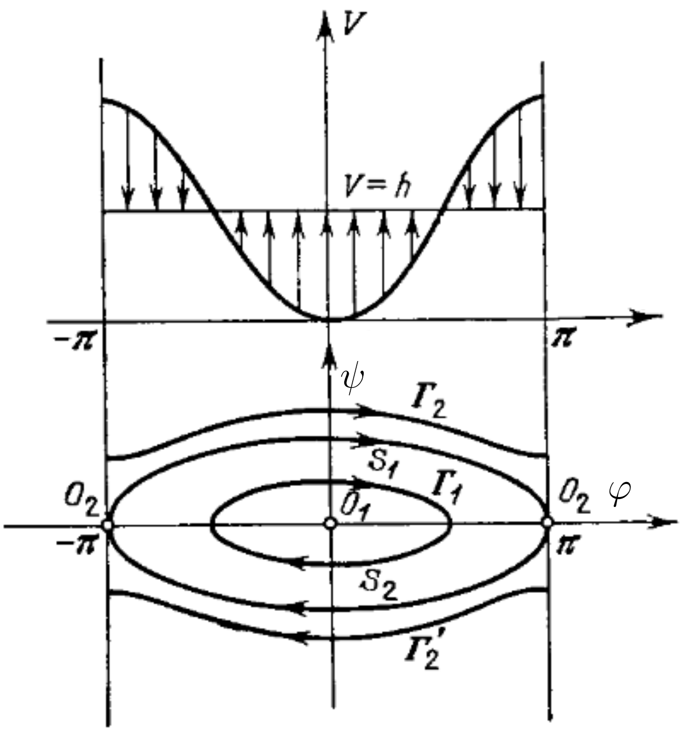


Рис. 1:

Полная энергия равна константе: $E = \frac{m\psi^2}{2} + \frac{mg}{l}(1 - \cos\varphi)$. Выражая отсюда угол, имеем.

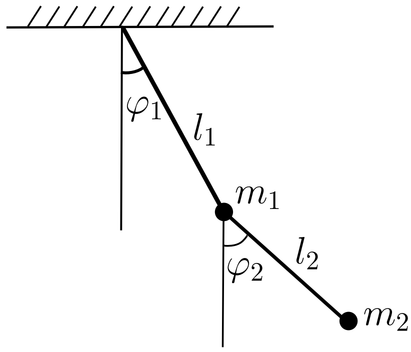
$$\varphi = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(h - \frac{mg}{l}(1 - \cos\varphi)\right)}$$

Функция $F(\varphi) = \frac{mg}{l}(1 - \cos\varphi)$ сохряняется вдоль фазовых траекторий, так как $\frac{dF}{dt} = 0$. Её изолинии (то есть уровни постоянной энергии) - одномерные торы (окружнсоти). Из анализа фазовых траекторий можно выяснить, что период колебаний растет по мере увеличения энергии. Также есть два состояния равновесия: верхнее (неустойчивое) и нижнее (устойчивое).

2 Двойной маятник

В отличие от одинарного маятника, *двойной маятник* может проявлять сложное, хаотическое поведение.

Смоделируем двойной маятник следующим образом: на твердом невесомом стержне длины l_1 подвешена материальная точка массы m_1; к ней в свою очередь на стержень длины l_2 подвешена материальная точка массы m_2. Введём полярные координаты: угол φ_1, откладываемый от вертикального подвеса, и угол φ_2 отклонения второго стержня от вертикальной оси (рис.**??**).



Таким образом, чтобы задать начальные условия для двойного маятника, потребуется задать два начальных угла φ_1, φ_2 и две начальные скорости $\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2$, поэтому фазовое пространство будет четырехмерным.

Формализм уравнений Ньютона уже плохо подходит для вывода уравнений двойного маятника и исследования его свойств, поэтому мы будем использовать *лагранжев формализм*. Для этого надо ввести функцию координат и скоростей $L = L(q, \dot{q})$, равную разности кинетической и потенциальной энергии частей системы и называемую *лагранжианом*. Тогда траектории движения системы являются решениями уравнения Эйлера-Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q}$$

Найдем лагранжиан для маятника. Кинетическая энергия первой точки равна $T_1 = \frac{1}{2}m_1|v_1|^2 = \frac{1}{2}m_1 l_1^2\dot{\varphi}^2$, потенциальная энергия равна $U_1 = m_1 g h_1 = -m_1 g l_1 \cos\varphi$. Чтобы вычислить энергию второй точки, выразим её декартовы координаты через углы: $x_2 = l_1 \sin\varphi_1 + l_2 \sin\varphi_2, y_2 = l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2$, откуда $T_2 = \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) = \frac{m_2}{2}(l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + l_2^2\dot{\varphi}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2))$. Потенциальная энергия второй точки дается выражением $U_2 = m_2 g h_2 = -m_2 g(l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2)$. В итоге получаем лагранжиан, равный

$$L(\varphi_1, \varphi_2, \dot{\varphi}, \dot{\varphi}_2) = T_1 + T_2 - U_1 - U_2 =$$

$$= \frac{m_1+m_2}{2} l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + (m_1+m_2) g l_1 \cos\varphi_1 + m_2 g l_2 \cos\varphi_2$$

Подставляя его в уравнение Эйлера-Лагранжа и сокращая одинаковые члены, получаем систему

$$\begin{cases} (m_1+m_2) l_1^2 \ddot{\varphi}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) = -(m_1+m_2) g l_1 \sin\varphi_1 \\ l_2 \ddot{\varphi}_2 + l_1 \ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - l_1 \dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) = -g \sin\varphi_2 \end{cases}$$

Данная система выглядит очень сложно, и, действительно, не является интегрируемой. Однако, для неё возможно численное решение, которое демонстрируется в программном комплексе.

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}_1 = -\frac{m_2 l_1 l_2 \ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1-\varphi_2) + \dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_1-\varphi_2) + (m_1+m_2) g l_1 \sin\varphi_1}{(m_1+m_2) l_1^2} \\ l_2 \ddot{\varphi}_2 - \frac{(m_2 l_1 l_2 \ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1-\varphi_2) + \dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_1-\varphi_2) + (m_1+m_2) g l_1 \sin\varphi_1)(\cos(\varphi_1-\varphi_2))}{(m_1+m_2) l_1} = -g \sin\varphi_2 + l_1 \dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi \\ \ddot{\varphi}_2 (l_2 - \frac{m_2 l_2 \cos^2(\varphi_1-\varphi_2)}{m_1+m_2}) = -g \sin\varphi_2 + l_1 \dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{(\dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_1-\varphi_2) + (m_1+m_2) g l_1 \sin\varphi_1)(c}{(m_1+m_2) l_1} \\ \ddot{\varphi}_2 = \frac{(m_1+m_2)(-g l_1 \sin\varphi_2 + l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1-\varphi_2) + (\dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_1-\varphi_2) + (m_1+m_2) g l_1 \sin\varphi_1)(\cos(\varphi_1-\varphi_2)))}{l_1 l_2 (m_1+m_2-m_2 \cos^2(\varphi_1-\varphi_2))} \\ \ddot{\varphi}_1 = \frac{l_1 l_2 (m_1+m_2-m_2 \cos^2(\varphi_1-\varphi_2))(m_2 l_1 l_2 \cos(\varphi_1-\varphi_2)(m_1+m_2)(-g l_1 \sin\varphi_2 + l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1-\varphi_2) + (\dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_1-\varphi_2) + (}{(m_1+m_2) l_1^2} \end{cases}$$

Отличительной чертой двойного маятника является его хаотическое поведение. Это можно заметить, если выбрать близкие начальные условия и следить за тем, как движется маятник. Через некоторое время движения, казавшиеся близкими, становятся совершенно не похожими друг на друга. Этот феномен не связан с ошибками в вычислениях программы, а следует из устройства уравнений движения. Они демонстрируют неустойчивость решений, или же *чувствительность к начальным условиям.* Это означает, что близкие траектории начинают расходиться друг от друга с экспоненциальной скоростью.

3 Маятник с трением

При выводе уравнения маятника мы пренебрегли многими факторами, которые, вообще говоря, могут влиять на реальное движение системы. Сейчас мы рассмотрим две модификации уравнения маятника, которые делают модель более точной в некоторых ситуациях.

Предположим, что матник движется в вязкой среде. Тогда на него действует сила, пропорциональная его скорости и направленная против его движения. С учетом этого уравнение приобретает вид

$$ml \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mg \sin\varphi - k\dot{\varphi}$$

где k – коэффициент трения. В отличие от обычного маятника, данное уравнение нельзя проинтегрировать.

4 Маятник с вынужденными колебаниями