

Отчет по вычислительному практикуму

Шилов Максим

Дано уравнение в виде:

$$\begin{aligned} -a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= f(x, y) \quad (x, y) \in D \\ u(x, y) &= \psi(x, y), \quad (x, y) \in \partial D \end{aligned}$$

5-точечная схема:

$$-a \frac{U_{i-1,j} - 2U_{i,j} + U_{i+1,j}}{h^2} - b \frac{U_{i,j-1} - 2U_{i,j} + U_{i,j+1}}{h^2} = f_{i,j}$$

$$a = 1, \quad b = 1.2$$

Область D

$F = \{F_{i,j}\} = \{f(ih, jh)\}$ - проекция f на сетку. i, j - внутри области D

$\Psi = \{\Psi_{i,j}\} = \{\psi(ih, jh)\}$ - проекция ψ на сетку. i, j - внутри и на границе области D

$Y_{i,j}^0 = 1$, внутри области D

$Y_{i,j}^0 = \psi(x, y)$, на границе D

$Y_{i,j}^0 = 0$, вне области

$$AY_{i,j}^n = -a \frac{Y_{i-1,j}^n - 2Y_{i,j}^n + Y_{i+1,j}^n}{h^2} - b \frac{Y_{i,j-1}^n - 2Y_{i,j}^n + Y_{i,j+1}^n}{h^2}$$

Алгоритм:

$$Y^{n+1} = Y^n - \tau_n (AY^n - F)$$

$$\xi_n = AY^n - F$$

$$\tau_n = \frac{\langle \xi_n, \xi_n \rangle}{\langle A\xi_n, \xi_n \rangle}$$

Остановка:

$$\|\xi_{n+1} - \xi_n\| < \delta$$

Погрешность:

$$\varepsilon = \|Y^n - \Psi\|$$

Скалярное произведение двух матриц:

$$\langle A, B \rangle = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \cdot b_{ij}$$

Норма матрицы:

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}^2 h^2}$$

Таблицы значений

Таблица для ε :

$\delta \backslash h$	$\frac{1}{10}$	iter	$\frac{1}{20}$	iter	$\frac{1}{40}$	iter
10^{-4}	4.175e-05	118	9.846e-06	497	1.669e-06	2019
10^{-6}	4.278e-05	162	1.091e-05	677	2.738e-06	2744
10^{-8}	4.279e-05	205	1.092e-05	856	2.749e-06	3468
10^{-10}	4.279e-05	248	1.092e-05	1035	2.749e-06	4193
10^{-12}	4.279e-05	291	1.092e-05	1215	2.749e-06	4942