Отчет по вычислительному практикуму

Шилов Максим

Начально-краевая задача для уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad t \geqslant 0, \\ u\Big|_{t=0} = f(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = 1, \quad t \geqslant 0, \\ u\Big|_{x=1} = 1, \quad t \geqslant 0. \end{cases}$$

Здесь $f(x)$ — некоторая заданная функция.

Найти численное решение задачи, используя разностную схему Саульева для аппроксимации уравнения:

$$\frac{u_j^{n+1/2} - u_j^n}{0.5\tau} = \frac{u_{j+1}^n - u_j^n - u_j^{n+1/2} + u_{j-1}^{n+1/2}}{h^2}, \quad j = 1, \ldots, N-1, \quad (1)$$

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n+1/2}}{0.5\tau} = \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1} - u_j^{n+1/2} + u_{j-1}^{n+1/2}}{h^2}, \quad j = 1, \ldots, N-1. \quad (2)$$

Из начальных и краевых условий:

$$u_j^0 = f(j \cdot h)$$

$$u_N^k = 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = \frac{u(t, x+h) - u(t, x)}{h}\Big|_{x=0} = \frac{u(t, h) - u(t, 0)}{h} = 1$$

$$\Rightarrow \quad u_1^{l+1/2} = u_0^{l+1/2} + h \quad (3)$$

$u_1^{l+1/2} = u_0^{l+1/2} + h$ подставляем в (1), для j = 1, имеем:

$$u_1^{n+1/2} = \frac{\tau}{2h^2}(u_2^n - u_1^n - h) + u_1^n$$

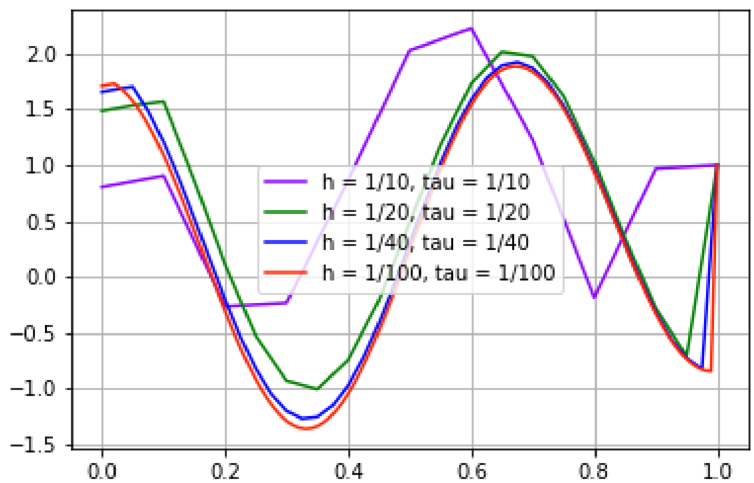
Так мы получаем $u_1^{n+1/2}$ и $u_0^{n+1/2}$ и теперь мы можем найти все значения на $n+1/2$ слое по схеме (1), где j = 2,...,N-1.

Теперь по схеме (2), где j = N-1,...,1, мы получаем все (кроме первого) значения на n+1 слое.

Первое значение находим из условия (3), т.е. $u_0^{l+1/2} = u_1^{l+1/2} - h$

Графики численного решения в зависимости от h и τ

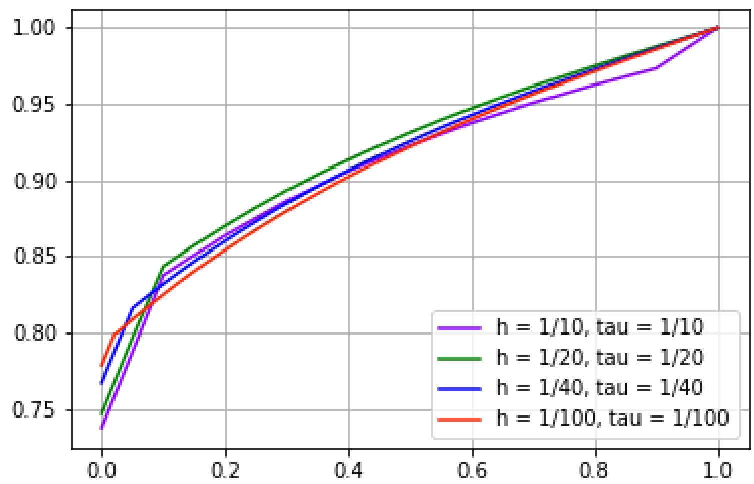
Для $f(x) = x - 1 + 4\cos(3\pi x)$



Значение численного решения $u(0.5, 0.5) = 0.54754$, при $h = 1/100, \quad \tau = 1/100$

$\tau \backslash h$	1/10	1/20	1/40	1/100
1/10	0.3174	0.2101	0.8008	1.0150
1/20	0.1338	0.1396	0.4252	0.9305
1/40	0.0473	0.1095	0.0383	0.6492
1/100	0.1853	0.0968	0.0105	0

Для $f(x) = 1$



Значение численного решения $u(0.5, 0.5) = 0.84634$, при $h = 1/100, \quad \tau = 1/100$

$\tau \backslash h$	$1/10$	$1/20$	$1/40$	$1/100$
$1/10$	0.0125	0.0779	0.1231	0.1470
$1/20$	0.0606	0.0060	0.0717	0.1297
$1/40$	0.1100	0.0642	0.0023	0.0873
$1/100$	0.1414	0.1256	0.0863	0

Код программы (Python 3)

In [1]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

In [2]:
```
def f(x):
    return x-1+4*np.cos(3*np.pi*x)

def norm(x):
    norm = 0
    for i in x:
        norm += i**2
    return np.sqrt(norm)

n = 4
m = 4
h = 1/n
tau = 1/m
u = np.zeros((2*m+1, n+1))

# начальные / граничные условия -------{
for i in range(n+1):
    u[0][i] = f(i*h)

for i in range(2*m+1):
    u[i][n] = 1

# алгоритм  -------{
for j in range(1, 2*m+1, 2):   # при m=4: цикл от 1 до 8 с шагом 2, то есть 1,3,5,7
    # находим u^(n+1/2)_0 and u^(n+1/2)_1 по условию
    u[j][1] = tau/(2*h**2)*(u[j-1][2] - u[j-1][1] - h) + u[j-1][1]
    u[j][0] = u[j][1] - h

    # (1) вычисляем n+1/2 слой (по первой схеме)
    for i in range(2, n):
        u[j][i] = (1/(1 + tau/(2*h**2)))*(tau/(2*h**2)*(u[j-1][i] -\
                            u[j-1][i-1] + u[j-1][i-1]) + u[j-1][i-1])
    # (2) вычисляем n+1 слой
            # (по второй схеме, только в обратном порядке, т.е. i = N-2,...,1)
    for i in range(n-1, 0, -1):
        u[j+1][i] = (1/(1 + tau/(2*h**2)))*(tau/(2*h**2)*(u[j+1][i+1] -\
                                        u[j][i] + u[j][i-1]) + u[j][i])

    # находим u^(n+1/2)_0 по тому же условию
    u[j+1][0] = u[j+1][1] - h

print(u)
print(norm(u.reshape(-1)))
```