# Отчет по вычислительному практикуму

Шилов Максим

## Численное интегрирование

### Интерполяционные квадратурные формулы

Необходимо вычислить определенный интеграл:

$$If = \int_a^b f(x)\,dx, \qquad f(x) \in C[a,b]$$

Формула

$$I_n f = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) \quad (2)$$

называется квадратурной формулой для приближенного вычисления определенного интеграла от функции $f(x)$ на $(n+1)$-м узле[1] $a \le x_0 < x_1 < \dots < x_n \le b$ с весами $A_0, A_1, \dots, A_n$.

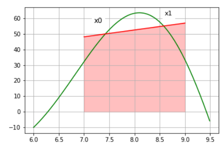
$$A_k = \int_a^b \frac{w(x)}{(x-x_k)w'(x)}\,dx$$

$$w(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$$

[1] 0, 1, …, n - кол-во узлов n+1

# Квадратура Гаусса для двух узлов

Узлы $x_0$, $x_1$ - корни полинома $w(x) = (x-c)^2 + a_1(x-c) + a_0$, $(c = \frac{a+b}{2})$ такого, что




$$\begin{cases} \int\limits_a^b w(x)(x-c)^0\,dx = 0 \\ \int\limits_a^b w(x)(x-c)^1\,dx = 0 \end{cases}$$

после вычисления интегралов эта система имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} \frac{(b-a)^3}{12} + a_0(b-a) &= 0 \\ a_1\frac{(b-a)^3}{12} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} a_0 = \frac{(b-a)^3}{12} \\ a_1 = 0 \end{aligned}\right\}$$

т.е. $w(x) = (x-c)^2 - (b-a)^2/12$ и его корни

$$\begin{cases} x_0 = \frac{(a+b)}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}(b-a) \\ x_1 = \frac{(a+b)}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}(b-a) \end{cases}$$

$$A_0 = \int\limits_a^b \frac{x-x_1}{x_0-x_1}\,dx = \frac{b-a}{2},$$

$$A_1 = \int\limits_a^b \frac{x-x_0}{x_1-x_0}\,dx = \frac{b-a}{2}$$

$$I_1 = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$$

# Квадратура Гаусса для трех узлов вычисляется аналогично $\Rightarrow$

$$\begin{cases} x_0 = \frac{(a+b)}{2} - \sqrt{\frac{3}{5}}\frac{(b-a)}{2} \\ x_1 = \frac{(a+b)}{2} \\ x_2 = \frac{(a+b)}{2} + \sqrt{\frac{3}{5}}\frac{(b-a)}{2} \end{cases}$$

$$A_0 = \int\limits_a^b \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}\,dx = \frac{1}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}\left(\frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3} - (x_1+x_2)\left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right) + x_1x_2(b-a)\right),$$

$$A_1 = \int\limits_a^b \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}\,dx = \frac{1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}\left(\frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3} - (x_0+x_2)\left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right) + x_0x_2(b-a)\right),$$

$$A_2 = \int\limits_a^b \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}\,dx = \frac{1}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}\left(\frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3} - (x_0+x_1)\left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right) + x_0x_1(b-a)\right)$$

$$I_1 = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2)$$

## Квадратуры Гаусса наивысшей алгебраической степени точности

Теорема. Квадратурная формула (2) на $n+1$ узле не может иметь алгебраическую степень точности $m > 2n+1$. $\Rightarrow$ Из теоремы следует, что если алг. степень точности равна 5 ($m = 5$), то нужно взять три узла ($n = 2$). Так же, если $m = 3$, то $n = 1$ (два узла).

## Оценка погрешности по правилу Рунге

$\varepsilon(I_{\frac{h}{2}}) = \frac{1}{2^m - 1}|I_h - I_{\frac{h}{2}}|$, m - алг. степень точности,
h - разбиение

## Вычисления

Для примера возьмем

$$f(x) = x^2 sin(x),\ \ a = 5,\ \ b = 15\ \ \Rightarrow\ \ If = \int\limits_5^{15} x^2 sin(x)\, dx =$$

$$= (2x\, sin(x) + (2 - x^2) cos(x))\Big|_5^{15} \approx$$

$$\approx 205.032512784516$$

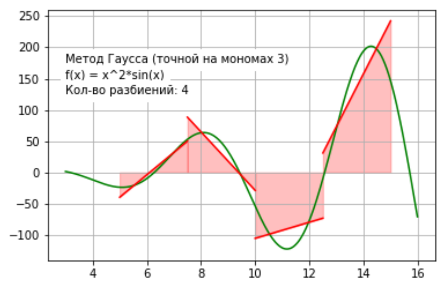
Получим следующее:

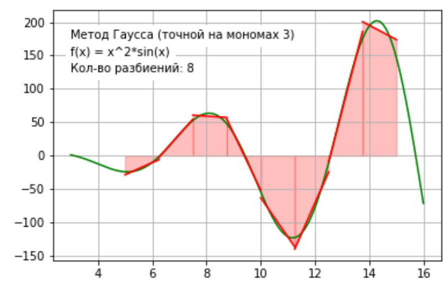
# Метод Гаусса (точной на мономах 3)

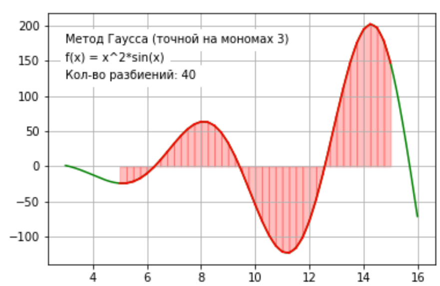
$$\varepsilon(I_{\frac{h}{2}}) = \frac{1}{2^3-1}|I_h - I_{\frac{h}{2}}| = \frac{1}{7}|I_h - I_{\frac{h}{2}}|$$

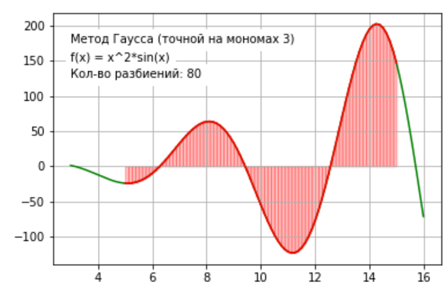
| Число разбиений: | $I_h f$ | $\varepsilon(I_{\frac{h}{2}})$ | $\lvert If - I_h f \rvert$ |
|---|---|---|---|
| 4 | 204.27857725 | 5.65723411 | 0.75393553 |
| 8 | 204.98453848 | 0.10085160 | 0.04797429 |
| 40 | 205.03243638 | 0.00016384 | 7.6398e-05 |
| 80 | 205.03250801 | 1.0232e-05 | 4.773e-06 |

$If \approx 205.032512784516$



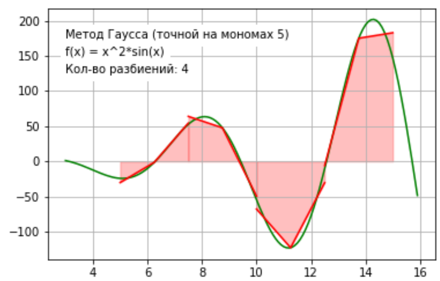



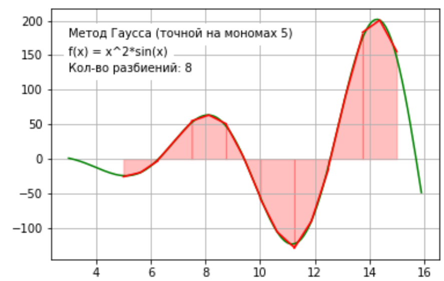
# Метод Гаусса (точной на мономах 5)

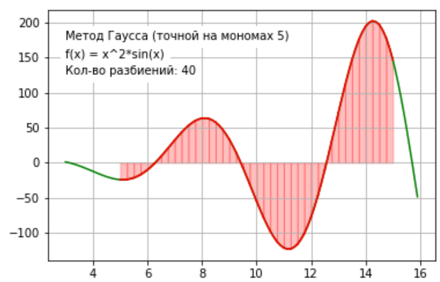
$$\varepsilon(I_{\frac{h}{2}}) = \frac{1}{2^5-1}|I_h - I_{\frac{h}{2}}| = \frac{1}{31}|I_h - I_{\frac{h}{2}}|$$

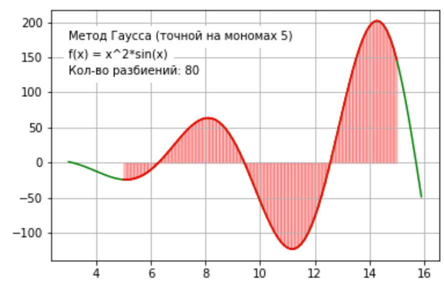
| Число разбиений: | $I_h f$ | $\varepsilon(I_{\frac{h}{2}})$ | $\lvert If - I_h f\rvert$ |
|---|---|---|---|
| 4 | 205.03121011 | 0.15303947 | 0.00130266 |
| 8 | 205.03252714 | 4.248e-05 | 1.435e-05 |
| 40 | 205.03251278 | 2.718e-09 | 1.467e-09 |
| 80 | 205.03251278 | 6.068e-11 | 4.134e-10 |

$If \approx 205.032512784516$



# Код программ (Python 3.7)

## Преамбула

```
In []: import numpy as np
       If = 205.032512784516
```

## 1 Метод Гаусса (точной на мономах 3)

```
In []: def integral_3(a1, b1, m):

               a = a1
               b = b1
               h = (b-a)/m
               Im = 0

               for i in range(m):

                       x0 = ((2*a+h)/2) - (h)*(np.sqrt(3)/6)
                       x1 = ((2*a+h)/2) + (h)*(np.sqrt(3)/6)

                       a0 = h/2
                       a1 = h/2

                       Im += a0*((x0**2)*(np.sin(x0)))
                       Im += a1*((x1**2)*(np.sin(x1)))

                       a = a + h

               return Im

       a_mon_5 = float(input('a = '))
       b_mon_5 = float(input('b = '))
       n_mon_5 = int(input())

       I_n_5 = integral_3(a_mon_5, b_mon_5, n_mon_5)
       I_2n_5 = integral_3(a_mon_5, b_mon_5, round((n_mon_5)/2))
       e_5 = (1/(2**3-1))*np.abs(I_n_5-I_2n_5)

       print(I_n_5)
       print(e_5)
       print(np.abs(If-I_n_5))
```

## 2 Метод Гаусса (точной на мономах 5)

```
In []: def integral_mon5(a1, b1, m):

           a = a1
           b = b1
           h = (b-a)/m
           Im = 0

           for i in range(m):

               x0 = ((a+a+h)/2) - ((h)/2)*(np.sqrt(3/5))
               x1 = ((a+a+h)/2)
               x2 = ((a+a+h)/2) + ((h)/2)*(np.sqrt(3/5))

               a0 = (1/((x0-x1)*(x0-x2)))*\
               ((((a+h)**3)/3)-((a**3)/3)-\
               (x1+x2)*(((a+h)**2)/2-(a**2)/2)+x1*x2*(h))

               a1 = (1/((x1-x0)*(x1-x2)))*\
               ((((a+h)**3)/3)-((a**3)/3)-\
               (x0+x2)*(((a+h)**2)/2-(a**2)/2)+x0*x2*(h))

               a2 = (1/((x2-x0)*(x2-x1)))*\
               ((((a+h)**3)/3)-((a**3)/3)-\
               (x1+x0)*(((a+h)**2)/2-(a**2)/2)+x1*x0*(h))

               Im += a0*(x0**2)*(np.sin(x0))
               Im += a1*(x1**2)*(np.sin(x1))
               Im += a2*(x2**2)*(np.sin(x2))

               a += h

           return Im

       a = float(input('a = '))
       b = float(input('b = '))
       n = int(input())

       I_n = integral_mon5(a, b, n)
       I_2n = integral_mon5(a, b, round(n/2))
       e = (1/(2**5-1))*np.abs(I_n-I_2n)

       print(I_n)
       print(e)
       print(np.abs(If-I_n))
```