

# Отчет по вычислительному практикуму

Шилов Максим

Дано уравнение в виде:

$$-a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \quad (x, y) \in D$$

$$u(x, y) = \psi(x, y), \quad (x, y) \in \partial D$$

5-точечная схема:

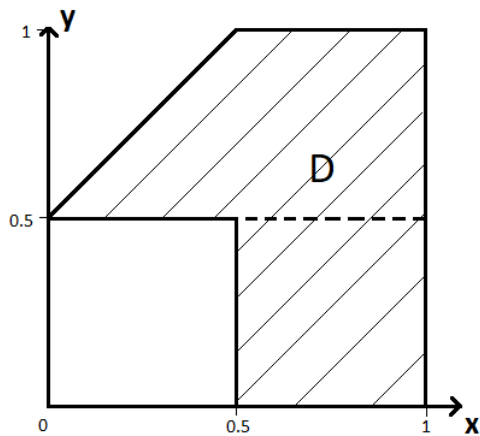
$$-a \frac{U_{i-1,j} - 2U_{i,j} + U_{i+1,j}}{h^2} - b \frac{U_{i,j-1} - 2U_{i,j} + U_{i,j+1}}{h^2} = f_{i,j}$$

$$a = 1, \quad b = 1.2$$

$$f(x, y) = 0.2e^x \cos y$$

$$\psi(x, y) = e^x \cos y$$

Область D



## Методы

$F = \{F_{i,j}\} = \{f(ih, jh)\}$  - проекция  $f$  на сетку.  $i, j$  - внутри области  $D$

$\Psi = \{\Psi_{i,j}\} = \{\psi(ih, jh)\}$  - проекция  $\psi$  на сетку.  $i, j$  - внутри и на границе области  $D$

$Y_{i,j}^0 = 1$ , внутри области  $D$

$Y_{i,j}^0 = \psi(x, y)$ , на границе  $D$

$Y_{i,j}^0 = 0$ , вне области

$$AY_{i,j}^n = -a \frac{Y_{i-1,j}^n - 2Y_{i,j}^n + Y_{i+1,j}^n}{h^2} - b \frac{Y_{i,j-1}^n - 2Y_{i,j}^n + Y_{i,j+1}^n}{h^2}$$

Метод Зейделя:

$$Y_{i,j}^n = \frac{1}{2(a+b)} (aY_{i-1,j}^n + bY_{i,j-1}^n + aY_{i+1,j}^{n-1} + bY_{i,j+1}^{n-1} + h^2 f(ih, jh))$$

Метод верхней релаксации:

$$Y_{i,j}^n = (1 - \omega)Y_{i,j}^{n-1} + \frac{\omega}{2(a+b)} (aY_{i-1,j}^n + bY_{i,j-1}^n + aY_{i+1,j}^{n-1} + bY_{i,j+1}^{n-1} + h^2 f(ih, jh))$$

Оптимальный параметр для верхней релаксации:

$$\beta = \frac{h^2}{2(a+b)} \lambda_{min}$$
$$\omega_0 = \frac{2}{1 + \sqrt{\beta(2 - \beta)}}$$

Остановка:

$$\xi_n = AY^n - F$$
$$\|\xi_{n+1} - \xi_n\| < \delta$$

Погрешность:

$$\varepsilon = \|Y^n - \Psi\|$$

Скалярное произведение двух матриц:

$$\langle A, B \rangle = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \cdot b_{ij}$$

Норма матрицы:

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}^2} h^2$$

# Таблица значений (Метод Зейделя)

Таблица для  $\varepsilon$ :

$\delta \backslash h$	$\frac{1}{10}$	iter	$\frac{1}{20}$	iter	$\frac{1}{40}$	iter
$10^{-4}$	3.576e-05	51	2.924e-05	180	0.00016	615
$10^{-6}$	4.271e-05	72	1.051e-05	269	1.097e-06	977
$10^{-8}$	4.279e-05	94	1.092e-05	359	2.732e-06	1339
$10^{-10}$	4.279e-05	115	1.091e-05	449	2.749e-06	1701
$10^{-12}$	4.279e-05	137	1.091e-05	539	2.749e-06	2381