Отчет

Шилов Максим

Формула левого прямоугольника (на одном узле)

$$x_0 = a,$$
$$w(x) = (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)$$
$$A_0 = \int\limits_a^b \frac{w(x)}{(x - x_0)w'(x_0)}\,dx = b - a$$
$$J_0 = (b - a)f(b)$$

Формула трапеций (на двух узлах)

$$x_0 = a, \quad x_1 = b,$$
$$A_0 = \int\limits_a^b \frac{w(x)}{(x - x_0)w'(x_0)}\,dx = \frac{b - a}{2},$$
$$A_1 = \int\limits_a^b \frac{w(x)}{(x - x_1)w'(x_1)}\,dx = \frac{b - a}{2}$$
$$J_1 = (b - a)\frac{f(a) + f(b)}{2}$$

Метод левых прямоугольников (составная формула)

$$x_i = a + ih, \quad h = \frac{b-a}{N}, \quad i = 0, \dots, N$$

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{x_k}^{x_{k-1}} f(x)\,dx \quad = \sum_{k=1}^{N} [f(x_k)h + \varepsilon_{n,[x_{k-1},x_k]}]$$

$$|\varepsilon_{n,[x_{k-1},x_k]}| \le \frac{\|f^{(1)}(x)\|_{C[x_{k-1},x_k]}}{2} h^2$$

$$|\varepsilon| \le \sum_{k=1}^{N} |\varepsilon_{n,[x_{k-1},x_k]}| \quad \le \frac{\|f^{(1)}(x)\|_{C[a,b]}}{2}(b-a)h$$

Метод трапеций (составная формула)

$$x_i = a + ih, \quad h = \frac{b-a}{N}, \quad i = 0, \dots, N$$

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{x_k}^{x_{k-1}} f(x)\,dx \quad = \sum_{k=1}^{N} [\frac{(f(x_{k-1}) + f(x_k))}{2} h + \varepsilon_{n,[x_{k-1},x_k]}] \quad ,$$

$$|\varepsilon_{n,[x_{k-1},x_k]}| \le \frac{\|f^{(2)}(x)\|_{C[x_{k-1},x_k]}}{12} h^3,$$

$$|\varepsilon| \le \sum_{k=1}^{N} |\varepsilon_{n,[x_{k-1},x_k]}| \quad \le \frac{\|f^{(2)}(x)\|_{C[a,b]}}{12}(b-a)h^2$$

Правило Рунге

$$\varepsilon_q(J_{\frac{N}{2}}) = |J_N - J_{\frac{N}{2}}| \quad \text{(Оценка погрешности для левых прямоугольников)}$$

,

$$\varepsilon_t(J_{\frac{N}{2}}) = \frac{1}{3}|J_N - J_{\frac{N}{2}}| \quad \text{(Оценка погрешности для трапеций)}$$

,

$$J_N f - Jf \approx CN^p$$

$$J_{\frac{N}{2}} f - Jf \approx C(\frac{N}{2})^p = C\frac{N^p}{2^p}$$

$$J_N f - J_{\frac{N}{2}} f \approx CN^p(\frac{2^p - 1}{2^p}) \quad \Rightarrow \quad CN^p \approx \frac{2^p}{2^p - 1}(J_N f - J_{\frac{N}{2}} f) \quad (1)$$

$$C(\frac{N}{2})^p \approx \frac{2^p}{2^p - 1}(J_{\frac{N}{2}} f - J_{\frac{N}{4}} f) \quad (2)$$

$$(1) : (2) \quad \Rightarrow \quad 2^p \approx \frac{(J_N f - J_{\frac{N}{2}} f)}{(J_{\frac{N}{2}} f - J_{\frac{N}{4}} f)}$$

$$\Rightarrow \quad \ln 2^p \approx \ln \frac{(J_N f - J_{\frac{N}{2}} f)}{(J_{\frac{N}{2}} f - J_{\frac{N}{4}} f)} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad p \approx \log(\frac{J_N f - J_{\frac{N}{2}} f}{J_{\frac{N}{2}} f - J_{\frac{N}{4}} f})\frac{1}{\log 2} \quad \text{(Порядок точности)}$$

Пример

$$f(x) = e^x, \quad a = 0, \quad b = \pi \quad \Rightarrow \quad Jf = \int\limits_0^{\pi} e^x \, dx = e^{\pi} - 1 \approx 22{,}1406926328$$

(в качестве π взято приближенное значение = 3.1415926535)

Метод левых прямоугольников

Число разбиений:	$J_N f$	$\lvert Jf - J_N f\rvert$	p	$\varepsilon_q(J_{\frac{N}{2}})$
4	31.96191502	9.82122239	-1.26947241	11.943680
8	26.77180992	4.63111729	-1.20241177	5.190105
40	23.02153567	0.88084303	-1.05332155	0.903589
80	22.57826935	0.43757671	-1.02749321	0.443266

Метод трапеций

Число разбиений:	$J_N f$	$\lvert Jf - J_N f\rvert$	p	$\varepsilon_t(J_{\frac{N}{2}})$
4	23.26728536	1.12659272	-1.81142146	1.123720
8	22.42449509	0.28380245	-1.94677260	0.280930
40	22.15207270	0.01138007	-1.99777917	0.011380
80	22.14353786	0.00284523	-1.99944404	0.002844

1 Метод левых прямоугольников (python 3.4)

```
import numpy as np

Jf = 22.1406926328

def In_q(a, b, m):

        h = (b-a)/m

        rad = 0

        for i in range(1, m + 1):
                x = a + i*h
                rad += np.exp(x)


        return rad*h

a_q = 0
b_q = 3.1415926535

m_q = int(input('m = '))

l_n = In_q(a_q, b_q, m_q)
l_2n = In_q(a_q, b_q, round(m_q/2))
l_4n = In_q(a_q, b_q, round(m_q/4))

e = np.log((l_n - l_2n)/(l_2n - l_4n))*(1/(np.log(2)))
e_p_q = np.abs(l_n - l_2n)

print(l_n)
print(np.abs(Jf - l_n))
print('Рунге (порядок точности) :', e)
print('Рунге (оценка погрешности) :', e_p_q)
```

2 Метод трапеций (python 3.4)

```python
import numpy as np

Jf = 22.1406926328

def In_t(a, b, m):

        h = (b-a)/m

        r9d = 0

        x_k_minus_1 = a_t

        for i in range(1, m + 1):
                x_k = a + i*h
                r9d += (np.exp(x_k_minus_1) + np.exp(x_k))/2
                x_k_minus_1 = x_k

        return r9d*h

a_t = 0
b_t = 3.1415926535
m_t = int(input('m = '))

I_n_t = In_t(a_t, b_t, m_t)
I_2n_t = In_t(a_t, b_t, round(m_t/2))
I_4n_t = In_t(a_t, b_t, round(m_t/4))
e_t = np.log((I_n_t - I_2n_t)/(I_2n_t - I_4n_t))*(1/(np.log(2)))
e_t_q = np.abs(I_n_t - I_2n_t)/3

print(I_n_t)
print(np.abs(Jf - I_n_t))
print('Рунге (порядок точности) :', e_t)
print('Рунге (оценка погрешности) :', e_t_q)
```