

Отчет по вычислительному практикуму

Шилов Максим

Дано уравнение в виде:

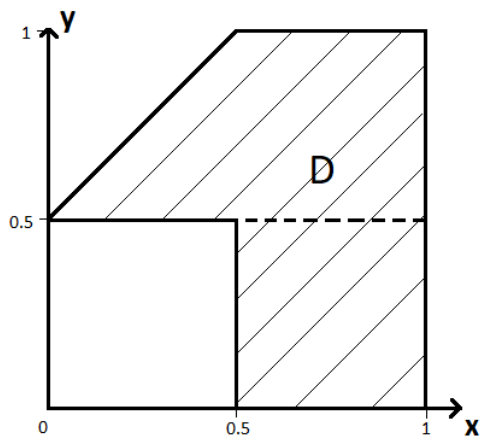
$$-a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \quad (x, y) \in D$$
$$u(x, y) = \mu(x, y), \quad (x, y) \in \partial D$$

5-точечная схема:

$$-a \frac{U_{i-1,j} - 2U_{i,j} + U_{i+1,j}}{h^2} - b \frac{U_{i,j-1} - 2U_{i,j} + U_{i,j+1}}{h^2} = f_{i,j}$$

$$a = 1, \quad b = 1.2$$

Область D



Поиск максимального и минимального собственного значения A

Максимальное собственное значение

$$Y_{i,j}^0 = 1, \quad \text{внутри области } D$$

$$Y_{i,j}^0 = 0, \quad \text{вне области и на границе } D$$

$$Y_{i,j}^{n+1} = AY_{i,j}^n = -a \frac{Y_{i-1,j}^n - 2Y_{i,j}^n + Y_{i+1,j}^n}{h^2} - b \frac{Y_{i,j-1}^n - 2Y_{i,j}^n + Y_{i,j+1}^n}{h^2}$$

$$\lambda_{\max}(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{\max}^n(A)$$

$$\lambda_{\max}^n(A) = \frac{\langle AY^n, Y^n \rangle}{\langle Y^n, Y^n \rangle} = \frac{\langle AY^n, Y^n \rangle}{\|\vec{y}^n\|_2^2} = \langle A \frac{Y^n}{\|\vec{y}^n\|_2}, \frac{Y^n}{\|\vec{y}^n\|_2} \rangle,$$

где \vec{y}^n - вектор, состоящий из элементов матрицы Y^n ('выпрямленная' матрица)

Скалярное произведение двух матриц:

$$\langle A, B \rangle = \sum_{i=1, j=1}^{n, n} a_{ij} \cdot b_{ij}$$

Остановка:

$$\frac{|\lambda_{\max}^{n+1}(A) - \lambda_{\max}^n(A)|}{\lambda_{\max}^n(A)} < \delta$$

Минимальное собственное значение

$$\lambda_{\min}(A) = \lambda_{\max}(A) - \lambda_{\max}(B)$$

$$B = \lambda_{\max}(A)E - A$$

$$\lambda_{\max}(B) - \text{находится аналогично } \lambda_{\max}(A)$$

Таблицы значений

Таблица для $\lambda_{\max}(A)$:

$\delta \backslash h$	$\frac{1}{10}$	iter	$\frac{1}{20}$	iter	$\frac{1}{40}$	iter
10^{-3}	842.1867	28	3440.873	18	13834.024	18
10^{-7}	858.4637	170	3498.311	462	14057.981	1254
10^{-8}	858.4647	203	3498.329	593	14058.266	1774
10^{-10}	858.4648	271	3498.331	860	14058.297	2831

Таблица для $\lambda_{\min}(A)$:

$\delta \backslash h$	$\frac{1}{10}$	iter	$\frac{1}{20}$	iter	$\frac{1}{40}$	iter
10^{-3}	29.3240	10	50.1463	7	103.5237	5
10^{-7}	21.5362	135	21.6885	367	22.02572	792
10^{-8}	21.5352	168	21.6705	501	21.73465	1326
10^{-10}	21.5351	235	21.6685	771	21.70230	2405

Код программы (Python 3.8)

Преамбула

```
In [0]: import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

Реализация

```
In [0]: def Euclid_norm(x):
    norm = 0
    for i in x:
        norm += i**2
    return np.sqrt(norm)

def scalar(x, y):
    sc = 0
    for i in range(len(x)):
        sc += x[i]*y[i]
    return sc

if __name__ == "__main__":

    a = 1
    b = 1.2

    n = 10
    h = 1/n

    delta = 0.000001

    Y = np.zeros((n+1, n+1))
    Y_n = np.zeros((n+1, n+1))

    # Y0 - область
    for i in range(int(n/2)+1, n):
        for j in range(1,n):
            Y[j][i] = 1

    for i in range(int(n/2), 0, -1):
        for j in range(i-1):
            Y[int(n/2)+j+1][i] = 1

    Psi = Y.copy()
```

```

# Y1 - нач
for j in range(1, n):
    for i in range(1, n):
        Y_n[j][i] = -1*(a/h**2)*(Y[j][i-1] - 2*Y[j][i] + Y[j][i+1]) - \
            (b/h**2)*(Y[j-1][i] - 2*Y[j][i] + Y[j+1][i])

lambda_max_n = scalar(Y_n.reshape(-1)/\
    Euclid_norm(Y.reshape(-1)), Y.reshape(-1)/Euclid_norm(Y.reshape(-1)))

# вычисление максимального собственного значения A
while True:

    lambda_max_0 = lambda_max_n

    Y = Y_n.copy()/Euclid_norm(Y.reshape(-1))

    for j in range(1, n):
        for i in range(1, n):
            Y_n[j][i] = -1*(a/h**2)*(Y[j][i-1] - 2*Y[j][i] + Y[j][i+1]) - \
                (b/h**2)*(Y[j-1][i] - 2*Y[j][i] + Y[j+1][i])

    lambda_max_n = scalar(Y_n.reshape(-1)/\
        Euclid_norm(Y.reshape(-1)), Y.reshape(-1)/Euclid_norm(Y.reshape(-1)))

    if np.abs(lambda_max_n - lambda_max_0)/lambda_max_0 < delta:
        break

# максимальное собственное значение A
print(lambda_max_n)

Psi_n = Psi.copy()

# Psi - нач
for j in range(1, n):
    for i in range(1, n):
        Psi_n[j][i] = lambda_max_n*Psi[j][i] + \
            (a/h**2)*(Psi[j][i-1] - 2*Psi[j][i] + Psi[j][i+1]) + \
            (b/h**2)*(Psi[j-1][i] - 2*Psi[j][i] + Psi[j+1][i])

lambda_max_B_n = scalar(Psi_n.reshape(-1)/Euclid_norm(Psi.reshape(-1)), \
    Psi.reshape(-1)/Euclid_norm(Psi.reshape(-1)))

```

```

# вычисление максимального собственного значения B
while True:

    lambda_max_B_0 = lambda_max_B_n

    Psi = Psi_n.copy()/Euclid_norm(Psi.reshape(-1))

    for j in range(1, n):
        for i in range(1, n):
            Psi_n[j][i] = lambda_max_n*Psi[j][i] + \
                (a/h**2)*(Psi[j][i-1] - 2*Psi[j][i] + Psi[j][i+1]) + \
                (b/h**2)*(Psi[j-1][i] - 2*Psi[j][i] + Psi[j+1][i])

    lambda_max_n = scalar(Psi_n.reshape(-1)/Euclid_norm(Psi.reshape(-1)), \
                          Psi.reshape(-1)/Euclid_norm(Psi.reshape(-1)))

    if np.abs(lambda_max_B_n - lambda_max_B_0)/lambda_max_B_0 < delta:
        break

# минимальное собственное значение A
print(lambda_max_n - lambda_max_B_n)

```