ВНИМАНИЕ!
спасибо за внимание

Материалы для ГОСов. 1 поток.

Исходники билетов расположены здесь: https://github.com/dmitrylala/gos
Исходники большей части билетов из основной части взяты отсюда: https://github.com/TheFieryLynx/GOOSi

Мальчик, водочки нам принеси. Мы МГУ закончили.

Москва, 2023

osn 1. Предел и непрерывность функций одной и нескольких переменных. Свойства функций непрерывных на отрезке.

Множество всех упорядоченных совокупностей $(x_1, \ldots, x_m)$ m чисел $x_1, \ldots, x_m$ наз-ся **m-мерным координатным пространством** A_m.

$\rceil$ имеется некоторое множество M и некоторая функция $\rho : M \times M \to R^+$. Функция ρ называется **метрикой** (расстоянием), а пара (M, ρ) – **метрическим пространством**, если $\forall x, y, z \in M$ выполнено:

1. $\rho(x, y) > 0$ и $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (симметричность)
3. $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (неравенство треугольника)

Если каждой точке M из $\{M\}$ точек E_m ставится в соответствие по известному закону некоторое число u, то говорят, что на множестве $\{M\}$ задана функция $u = f(M)$. $\{M\}$ — **область определения функции** $u = f(M)$. Число u, соответствующее данной M из $\{M\}$ — **значение функции** в M. Совокупность $\{u\}$ всех частных значений $u = f(M)$ — **множество значений этой функции**.

Предел по Гейне. Число $b \in R$ называется **предельным значением функции** $u = f(M)$ в точке $A \in R^m$ (пределом функции при $M \to A$), если для $\forall$ сходящейся к A последовательности $M_1, \ldots, M_n, \ldots$ точек множества $\{M\}$, где $M_n \neq A$, соответствующая последовательность $f(M_1), \ldots, f(M_n), \ldots$ значений функций сходится к b.

Предел по Коши. Число $b \in R$ называется **предельным значением функции** $u = f(M)$ в точке $A = (a_1, \ldots, a_m)$, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta : \ \forall M \in \{M\}$, удовлетворяющих $0 < \rho(M, A) < \delta$, выполняется $|f(M) - b| < \varepsilon$.

Теорема об эквивалентности определений предела. Определения предела функции по Коши и по Гейне эквивалентны.

Доказательство. (Г $\Longrightarrow$ К) $\rceil$ b – предел $u = f(M)$ в т. A по Гейне, но опр. по Коши не выполнено $\Longrightarrow$ $\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \ \exists M \in \{M\} : 0 < \rho(M, A) < \delta, |f(M) - b| \geq \varepsilon$ $\Longrightarrow$ для $\delta_n = \dfrac{1}{n}$ $\exists M_n : 0 < \rho(M_n, A) < \delta_n, \ |f(M_n) - b| \geq \varepsilon$ $\Longrightarrow$ $\{M_n\} \to A$ $\Longrightarrow$ по Гейне $\{f(M_n)\} \to b$ $\Longrightarrow$ противоречие с $|f(M_n) - b| \geq \varepsilon$.
(К $\Longrightarrow$ Г) $\rceil$ b – предел $u = f(M)$ в т. A по Коши и $\{M_n\} \to A$. Фиксируем $\varepsilon > 0$, по Коши $\exists \delta > 0 : \forall M \in \{M\} : 0 < \rho(M, A) < \delta, \ |f(M) - b| < \varepsilon$. Т.к. $\{M_n\} \to A$, то для этого δ $\exists N \in N : \forall n \geq N, \ 0 < \rho(M_n, A) < \delta \Longrightarrow |f(M_n) - b| < \varepsilon \Longrightarrow \{f(M_n)\} \to b$ □

Последовательность $M_1, \ldots, M_n$ наз-ся **фундаментальной**, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$: $\forall m \geq N, p \in \mathbb{N}$ выполнено $\rho(M_{m+p}, M_m) < \varepsilon$.
Критерий Коши сходимости посл-ти: последовательность $M_1, \ldots, M_n$ сходится $\Longleftrightarrow$ последовательность фундаментальна.

Функция $f(M)$ **удовлетворяет в точке M условию Коши**, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta : \forall M', M'' \in \mathring{U}(M)$, удовлетворяющих $0 < \rho(M', M) < \delta, \ 0 < \rho(M'', M) < \delta$, следует $|f(M') - f(M'')| < \varepsilon$

Критерий Коши $\exists$ предела ф-ции. Чтобы функция $f(x)$ имела конечное предельное значение в точке a, необходимо и достаточно, чтобы функция $f(a)$ удовлетворяла в этой точке условию Коши.

Доказательство. ($\implies$) $\rceil$ $\lim\limits_{M \to A} f(M) = b$. Выберем $\varepsilon > 0 \implies$ по опр. предела по Коши для $\dfrac{\varepsilon}{2}$ $\exists \delta > 0$, $\forall M', M'' \in \{M\} : 0 < \rho(M', A) < \delta$, $0 < \rho(M'', A) < \delta \implies \Big|f(M') - b\Big| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, $\Big|f(M'') - b\Big| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Тогда $\Big|f(M') - f(M'')\Big| = \Big|(f(M') - b) - (f(M'') - b)\Big| \leq \Big|f(M') - b\Big| + \Big|f(M'') - b\Big| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

($\impliedby$) $\rceil$ $f(M)$ удовл. в т. A усл. Коши, $\{M_n\} : \{M_n\} \to A$, $M_n \neq A$. Выберем $\varepsilon > 0$ и соотв. $\delta > 0$ такое, что вып. усл. Коши, для этого δ. $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \implies 0 < \rho(M_n, A) < \delta$ (т.к. $\{M_n\} \to A$). Таким образом для $p = 1, 2, \cdots \implies 0 < \rho(M_{n+p}, A) < \delta$ при $n \geq N \implies$ в силу усл. Коши $|f(M_{n+p}) - f(M_n)| < \varepsilon \implies \{f(M_n)\}$ – фундаментальна $\implies \{f(M_n)\}$ сход. к некоторому b.

$\rceil$ $\{M_n\} \to A$, $\{M'_n\} \to A$, $\{f(M_n)\} \to b$, $\{f(M'_n)\} \to b'$. Тогда $f(M_1), f(M'_1), \ldots, f(M_n), f(M'_n), \ldots$ сходится $\implies$ все её подпосл-ти сходятся к одному пределу $\implies b = b'$. $\square$

Функция $f(x)$ называется **непрерывной в т. а**, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ *(функция должна быть задана в т. а!)*. Для функции нескольких переменных можно определить непрерывность по каждой из переменных.

Теорема об арифметических операциях над непрерывными функциями. $\rceil$ $f(M)$ и $g(M)$ непрерывны в т. A. Тогда $f(M) + g(M)$, $f(M) - g(M)$, $f(M)g(M)$, $\dfrac{f(M)}{g(M)}$ (последнее при условии $g(M) \neq 0$) непрерывны в т. A.

$\rceil$ функции $x_1 = \phi_1(t_1, \ldots, t_k)$, $\ldots$, $x_m = \phi_m(t_1, \ldots, t_k)$ заданы на множестве $\{N\}$ евклидова пространства E_m, $t_1, \ldots, t_k$ — координаты точек в $E_k \implies \forall N(t_1, \ldots, t_k) \in \{N\}$ ставится в соответствие точка $M(x_1, \ldots, x_m)$ евклидова пространства E_m. $\rceil$ $\{M\}$ — множество всех этих точек, $u = f(x_1, \ldots, x_m)$ - функция m переменных, заданная на $\{M\} \implies$ на множестве $\{N\}$ пространства E_k **определена сложная функция** $u = f(\phi_1(t_1, \ldots, t_k), \ldots, \phi_m(t_1, \ldots, t_k)) = f(x(t))$

Теорема о непрерывности сложной функции. $\rceil$ функции $x_1 = \phi_1(t_1, \ldots, t_k), \ldots, x_m = \phi_m(t_1, \ldots, t_k)$ непрерывны в точке $a = (a_1, \ldots, a_k)$, а функция $u = f(x_1, \ldots, x_m)$ непрерывна в точке $b = (b_1, \ldots, b_m)$. Тогда сложная функция $f(x(t))$ непрерывна в точке a.

Свойства функций, непрерывных на отрезке *(тут именно отрезок, поэтому доказываем для функции одной переменной)*:

Теорема о сохранении знака. $\rceil$ $f(x)$ определена на мн-ве $\{X\}$, непрерывна в т. a и $f(a) > 0$ ($f(a) < 0$). Тогда $\exists \delta > 0 : \forall x \in \{X\}, x \in (a - \delta, a + \delta) \implies f(x) > 0$ ($f(x) < 0$).

Доказательство. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in X$, $0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$. $\rceil$ $\varepsilon = \dfrac{|f(a)|}{2} \implies -\varepsilon < f(x) - f(a) < \varepsilon \implies f(a) - \dfrac{|f(a)|}{2} < f(x) < f(a) + \dfrac{|f(a)|}{2}$ (тот же знак) $\square$

Теорема о прохождении через 0. $\rceil$ $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, $f(a) > 0; f(b) < 0$. Тогда $\exists c \in (a, b) : f(c) = 0$.

Доказательство. $\rceil$ $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, $A = \{x \in [a, b] : f(x) < 0\}$. $A \neq \varnothing$ (т.к. $a \in A$) и ограничено сверху (например, числом b) $\implies \exists supA = c$. Покажем, что $f(c) = 0$.
$\rceil$ $f(c) > 0$. Тогда $c \neq a$ и по т. о сохр. знака $\exists \delta > 0 : f(x) > 0\ \forall x \in (c - \delta, c] \implies c \neq supA \implies$ противоречие $\implies f(c) \leq 0$.
$\rceil$ $f(c) < 0$. Тогда $c \neq b$ и по т. о сохр. знака $\exists \delta > 0 : f(x) < 0\ \forall x \in [c, c + \delta) \implies c \neq supA \implies$ противоречие $\implies f(c) = 0$. □

Теорема о достижении значения. $\rceil$ $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, тогда $\forall \gamma \in [\alpha, \beta]$, где $\alpha = \min\{f(a), f(b)\}$, $\beta = \max\{f(a), f(b)\}$, $\exists c \in [a, b] : f(c) = \gamma$.

Доказательство. Если $\gamma = \alpha$ или $\gamma = \beta$ – очевидно. $\rceil$ $\alpha < \gamma < \beta$. 👁 $g(x) = f(x) - \gamma$. Она удовл. усл. пред. теоремы $\implies \exists c \in [a, b] : g(c) = 0$, т.е. $f(c) = \gamma$ □

Теорема Больцано-Вейерштрасса (нужна ниже)
Из любой ограниченной последовательности $\{x_n\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство. $\rceil$ $\{X\}$ – мн-во значений последовательности $\{x_n\}$. Если $\{X\}$ – конечно, то найдется подпосл-ть такая, что $x_{n_1} = x_{n_2} = x_{n_3}$. Если $\{X\}$ – бесконечно, то по принципу Больцано-Вейерштрасса (у любого огр. беск. мн-ва есть хотя бы 1 предельная точка) у $\{X\}$ есть предельная точка $\implies \exists$ сходящаяся к этой точке подпосл-ть. □

1-я теорема Вейерштрасса. Если $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, то она ограничена на нём.

Доказательство. Выберем $\{x_n\} : x_n \in [a, b]$, $|f(x_n)| > n$. По теореме Б-В можно выделить сход. подпосл-ть $\{x_{k_n}\}$, предел c которой $\in [a, b]$. Очевидно, что посл-ть $\{f(x_{k_n})\}$ беск. большая, но в силу непр-ти функции в т. c эта посл-ть должна сходится к $f(c) \implies$ противоречие. □

2-я теорема Вейерштрасса. Если $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, то она достигает на нем своих ТВГ и ТНГ.

Доказательство. $f(x)$ непр. на $[a, b] \implies$ она огр. на $[a, b] \implies \exists M, m$ – ТВГ и ТНГ $f(x)$ на $[a, b]$. $\rceil$ $f(x) < M\ \forall x \in [a, b]$. Введем $g(x) = \dfrac{1}{M - f(x)}$. $g(x)$ – непр. на $[a, b]$, причем знаменатель не обр. в 0 $\implies$ огр. на $[a, b] \implies \exists A > 0 : \dfrac{1}{M - f(x)} \leq A\ \forall x \in [a, b] \implies M - f(x) \geq \dfrac{1}{A} \implies f(x) \leq M - \dfrac{1}{A}\ \forall x \in [a, b] \implies M \neq supf(x) \implies$ противоречие (для ТНГ аналогично) □

Функция $f(x)$ называется **равномерно непрерывной** на множестве $\{X\}$, если для $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x', x'' \in \{X\} : \left|x' - x''\right| < \delta$, выполняется $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Теорема о равномерной непрерывности (Кантора). Непрерывная на сегменте $[a, b]$ функция равномерно непрерывна на нем.

Доказательство. $\sqsupset$ $f(x)$ непр. на $[a, b]$, но не р/н на нем. Тогда $\exists x'_n, x''_n \in [a, b] : \left| x'_n - x''_n \right| < \frac{1}{n} \forall n \in N$, но $\left| f(x'_n) - f(x''_n) \right| \geq \varepsilon$.
$\{x_n\}$ – огр. $\implies$ $\exists \{x'_{n_k}\} \in [a, b] : \exists \lim\limits_{k \to \infty} x'_{n_k} = c$. 👁 $\{x''_{n_k}\}$: $\left| x''_{n_k} - c \right| \leq \left| x''_{n_k} - x'_{n_k} \right| + \left| x'_{n_k} - c \right| \implies \{x''_{n_k}\} \to c$. По определению по Гейне непрерывности в точке: $\{f(x'_{n_k})\} \to f(c), \{f(x''_{n_k})\} \to f(c)$ – противоречие с $\left| f(x'_n) - f(x''_n) \right| \geq \varepsilon$. $\square$

osn 2. Производная и дифференциал функций одной и нескольких переменных. Достаточные условия дифференцируемости.

Производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется предел при $\Delta x \to 0$ разностного отношения (если этот предел существует): $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ ($x_0 + \Delta x \in$ области определения функции)

Функция $f(x)$ называется **дифференцируемой в точке** x_0, если она определена в некоторой окрестности этой точки, а приращение Δy этой функции в точке x_0, отвечающее приращению аргумента Δx, может быть представлено в виде $\Delta y = A\Delta x + \omega(\Delta x)$, где A — не зависящее от Δx конечное число, а $\omega(\Delta x) = o(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$

Функция $u = f(x_1, \dots, x_m)$ называется **дифференцируемой в точке** $M(x_1, \dots, x_m)$, если её полное приращение в точке M можно представить:

$$\Delta u = A_1 \Delta x_1 + \dots + A_m \Delta x_m + \alpha_1 \Delta x_1 + \dots + \alpha_m \Delta x_m$$

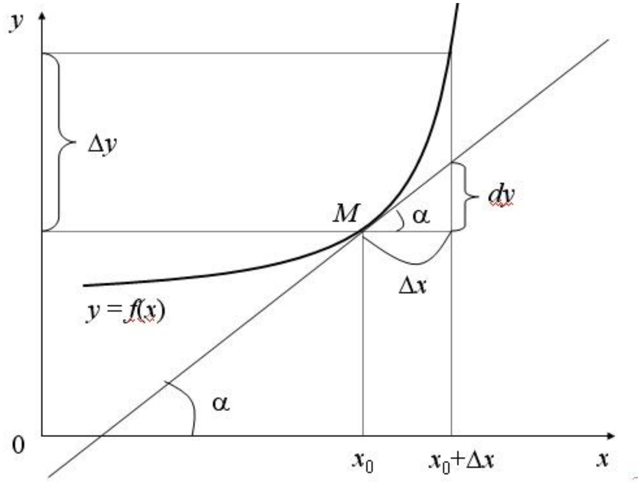
где $A_1, \dots, A_m$ — некоторые не зависящие от $\Delta x_1, \dots, \Delta x_m$ числа, а $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ — бесконечно малые при $\Delta x_1 \to 0, \dots, \Delta x_m \to 0$ функции, равные 0 при $\Delta x_1 = \dots = \Delta x_m = 0$

Частная производная функции $f(x_1, \dots, x_m)$ по переменной x_i — это предел отношения приращения функции по x_i к приращению этой переменной, при стремлении этого приращения к нулю:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + \Delta x, \dots, x_m) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_m)}{\Delta x}$$

Дифференциалом du дифференцируемой в $M(x_1, \dots, x_m)$ функции $u = f(x_1, \dots, x_m)$ называется главная линейная относительно приращений аргументов часть приращения этой функции в точке M.

$$du = A_1 \Delta x_1 + \dots + A_m \Delta x_m = \frac{\partial u}{\partial x_1} \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m} \Delta x_m$$



Критерий дифференцируемости для функции одной переменной. Функция одной переменной $f(x)$ дифференцируема в точке $x_0 \iff$ она имеет в этой точке конечную производную.

Доказательство. $(\implies)\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x \Rightarrow \{\urcorner\Delta x \neq 0\} \Rightarrow \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x) \Rightarrow$
$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = A \Rightarrow f'(x) = A$
$(\impliedby)\urcorner\exists f'(x) < \infty. \urcorner\alpha(\Delta x) = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x)$, домножим на $\Delta x : \Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$ □

Необходимое условие дифференцируемости для функций нескольких переменных. Если $u = f(x_1, \ldots, x_m)$ дифференцируема в $M(x_1, \ldots, x_m)$, то в этой точке $\exists$ частные производные по всем аргументам, причём $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} = A_i$, где A_i определяются из условия дифференцируемости функции.

Доказательство. Из условия дифференцируемости вытекает, что частные приращения $\Delta u_i = A_i\Delta x_i + \alpha_i\Delta x_i \Rightarrow \dfrac{\Delta u_i}{\Delta x_i} = A_i + \alpha_i \Rightarrow \{\alpha_i \to 0$ при $\Delta x_i \to 0\} \Rightarrow \lim\limits_{\Delta x_i \to 0} \dfrac{\Delta u_i}{\Delta x_i} = A_i$ □

Условие не является достаточным, пример: $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$ – $\exists$ ч.п. $f'_x = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{y}{x}}$, $f'_y = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{x}{y}}$, но не дифф. в т. 0.

Достаточное условие дифференцируемости функций нескольких переменных. Если $u = f(x_1, \ldots, x_m)$ имеет частные производные по всем аргументам в некоторой окрестности точки $M_0(x_1^0, \ldots, x_m^0)$, причём все эти частные производные непрерывны в точке M_0, то функция дифференцируема в точке M_0.

Доказательство. Для функции двух переменных $u = f(x, y)$: $\rceil$ ч.п. f'_x и f'_y $\exists$ в окр-ти точки $M_0(x_0, y_0)$ и непрерывны в этой точке, $\rceil$ $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ принадлежит указанной окрестности.
$\Delta u = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)] + [f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)]$
$[f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)]$ – приращение ф-ии одной переменной на сегменте $[x_0, x_0 + \Delta x]$. Т.к. $u = f(x, y)$ имеет ч.п., то $f(x, y_0 + \Delta y)$ дифф-ма и ее производная по $x = f'_x$.
Применим к указанному приращению формулу Лагранжа:
$[f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)] = f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y)\Delta x,\ \theta_1 \in (0, 1).$
Аналогично $[f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)] = f'_y(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y)\Delta y,\ \theta_2 \in (0, 1).$
f'_x и f'_y непр. в т. $M_0 \Rightarrow f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) = f'_x(x_0, y_0) + \alpha,\ f'_y(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y)\Delta y = f'_y(x_0, y_0) + \beta$, где α и β – беск. малые при $\Delta x \to 0,\ \Delta y \to 0$ ф-ии.
Отсюда: $\Delta u = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y + \alpha \Delta x + \beta \Delta y \Rightarrow u = f(x, y)$ – дифф-ма в точке M_0.
Для ф-ии m переменных $u = f(x_1, \ldots, x_m)$ аналогично, представив Δu в виде:

$$\Delta u = f(x_1^0 + \Delta x_1, \ldots, x_m^0 + \Delta x_m) - f(x_1^0, \ldots, x_m^0) = \sum_{i=1}^{m} [f(x_1^0, \ldots, x_i^0 + \Delta x_i, \ldots, x_m^0 + \Delta x_m) - f(x_1^0, \ldots, x_i^0, x_{i+1}^0 + \Delta x_{i+1}, \ldots, x_m^0 + \Delta x_m)]$$

□

osn 3. Определенный интеграл, его свойства. Основная формула интегрального исчисления.

Определения:

$\urcorner$ $f(x)$ задана на $[a, b]$, $a < b$, T — разбиение $[a, b]$: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ на n частичных сегментов $[x_0, x_1]$, $\ldots$, $[x_{n-1}, x_n]$. $\urcorner$ ξ_i — любая точка $[x_{i-1}, x_i], \Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ — длина сегмента. $\Delta = max(\Delta x_i)$.

Число $I\{x_i, \xi_i\}$, где $I\{x_i, \xi_i\} = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \cdots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ называется **интегральной суммой** $f(x)$, соответствующей данному разбиению T сегмента $[a, b]$ и данному выбору промежуточных точек ξ_i на частичных сегментах $[x_{i-1}, x_i]$.

Число I называется **пределом интегральных сумм** $I\{x_i, \xi_i\}$ при $\delta \to 0$, если для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta = \delta(\varepsilon)$: для $\forall$ разбиения T сегмента $[a, b]$, для которого $\Delta = \max \Delta x_i < \delta$, независимо от выбора точек ξ_i на $[x_{i-1}, x_i]$ выполняется неравенство $|I\{x_i, \xi_i\} - I| < \varepsilon$.

$$I = \lim_{\Delta \to 0} I\{x_i, \xi_i\}$$

Функция называется **интегрируемой (по Риману)** на $[a, b]$, если $\exists$ конечный предел I интегральных сумм $f(x)$ при $\Delta \to 0$. Предел I — **определённый интеграл** от $f(x)$ по $[a, b]$:

$$I = \int\limits_a^b f(x)dx$$

$\urcorner$ $f(x)$ ограничена на $[a, b]$, T — разбиение $[a, b]$ точками $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, M_i и m_i — точная верхняя граница и точная нижняя граница $f(x)$ на $[x_{i-1}, x_i]$. Суммы $S = \sum\limits_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$ и $s = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$ называются **верхней и нижней суммами** $f(x)$ для данного T сегмента $[a, b]$.

$\urcorner$ $\overline{I}$ — точная нижняя граница множества $\{S\}$ верхних сумм, $\underline{I}$ — точная верхняя граница множества $\{s\}$ нижних сумм: $\overline{I} = inf\{S\}$, $\underline{I} = sup\{s\}$. Числа $\overline{I}$ и $\underline{I}$ — **верхний и нижний интегралы Дарбу** от $f(x)$.

Теоремы:

Необходимое условие интегрируемости – ограниченность. Неограниченная на $[a, b]$ функция $f(x)$ не интегрируема на $[a, b]$.

Доказательство. Функция f(x) не ограничена на каком-либо промежутке $[x_{k-1}, x_k]$ $\implies$ $\forall$ разбиения слагаемое $f(\xi_k)\Delta x_k$ можно сделать сколь угодно большим $\implies$ $\nexists lim$ $\square$

Лемма Дарбу. Нижний и верхний интегралы Дарбу $\overline{I}$ и $\underline{I}$ от $f(x)$ по $[a,b]$ являются соответственно пределами верхних и нижних сумм при $\Delta \to 0$.

Доказательство. При $f(x) = const$ – очевидно. $\daleth\ f(x) \neq const$, $M = \sup\limits_{[a,b]} f(x) > \inf\limits_{[a,b]} f(x) = m$.
Фикс. $\varepsilon > 0$, $\exists$ разбиение $T^* = x_k^*,\ 0 < k < l$ – разбиение на $[a,b]$, такое что $S(T^*) - \overline{I} < \dfrac{\varepsilon}{2}$
Положим $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2(M-m)(l-1)} > 0$ (δ зависит только от ε). $\daleth$ T – произвольное разбиение $[a,b]$.
$T' = T \cup T^*$, тогда $0 \leq S(T) - S(T') \leq (M-m)\Delta_T(l-1) < (M-m)(l-1)\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$, Δ_T - диаметр разбиения $= \max\limits_{1 \leq k \leq n} \Delta x_k$, $\Delta_T < \delta$. Получаем, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такая что $\forall T$ - разбиения $[a,b] \implies 0 \leq S(T) - \overline{I} = (S(T) - S(T')) + (S(T') - \overline{I}) \leq \dfrac{\varepsilon}{2} + (S(T^*) - \overline{I}) \leq \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ $\square$

Критерий Римана интегрируемости функции. $\daleth\ f(x)$ определена и ограничена на $[a,b]$.
$f \in \mathcal{R}[a,b] \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists T$ – разбиение $[a,b]$, такое что $S(T) - s(T) < \varepsilon$.

Доказательство. ($\Rightarrow$) Пусть $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$. Тогда по определению интеграла $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon)$: для $\forall$ размеченного разбиения V сегмента $[a,b]$, для которого $\Delta_V < \delta$, выполнено: $|I - \sigma(V)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$. Или, что то же самое:$I - \dfrac{\varepsilon}{3} < \sigma(V) < I + \dfrac{\varepsilon}{3}$. Тогда для верхняя и нижняя суммы Дарбу тоже лежат в этом промежутке (так как являются точными нижней и верхней гранями). Отсюда: $|S(T) - s(T)| \leq \dfrac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$.
($\Leftarrow$) Пусть $\forall \varepsilon > 0 \exists T$ - разбиение сегмента $[a,b]$, такое что $|S(T) - s(T)| < \varepsilon$. Так как $s(T) \leq \underline{I} \leq \overline{I} \leq S(T)$, то $\overline{I} - \underline{I} < \varepsilon$. ε - произвольное, $\Rightarrow I = \overline{I} = \underline{I}$. Для $\forall$ размеченного разбиения V сегмента $[a,b], \Delta_V < \delta$, выполнено: $S(T(V)) - s(T(V)) < \varepsilon$.
Так как $s(T(V)) \leq \sigma(V) \leq S(T(V))$ и $s(T(V)) \leq I \leq S(T(V))$, то $|I - \sigma(V)| < \varepsilon$ для любого размеченного разбиения V сегмента $[a,b]$. Мы доказали, что $I = \lim\limits_{\Delta_V \to 0} \sigma(V)$. Это означает, что функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a,b]$ и $I = \displaystyle\int\limits_a^b f(x)dx$

$\square$

Свойства определённого интеграла:

1. $\displaystyle\int\limits_a^a f(x)dx = 0$

2. $\displaystyle\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$

3. $\daleth\ f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a,b]$. Тогда $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$ и $f(x) \cdot g(x)$ также интегрируемы на $[a,b]$, причём $\displaystyle\int\limits_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx$

4. Если $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, то $cf(x)$ $(c = const)$ тоже: $\int\limits_a^b cf(x)dx = c\int\limits_a^b f(x)dx$

5. Если $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, то $|f(x)|$ тоже.

6. $\urcorner$ $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$. Тогда $f(x)$ интегрируема на $\forall[c,d] \subset [a,b]$

7. $\urcorner$ $f(x)$ интегрируема на сегментах $[a,c]$ и $[c,b]$. Тогда $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, причём $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$

Основная формула интегрального исчисления.
Первообразной функции $f(x)$ называется дифференцируемая функция $F(x): \ F'(x) = f(x)$ на всей области определения $f(x)$.

Теорема. $\urcorner$ $f \in \mathcal{R}[a,b], \ F \in \mathcal{C}[a,b], \ \forall x \in [a,b] \ F'(x) = f(x)$. Тогда $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(X)\Big|_a^b$

Доказательство. $x_k - \forall$ разбиение, $F(b) - F(a) = (F(b) - F(x_{k-1})) + (F(x_{k-1}) - F(x_{k-2})) + \ldots + (F(x_1) - F(a)) = \ldots$ $\{$F удовлетворяет всем условиям теоремы Лагранжа (непрерывна на [ ] и дифф-ма на ( )) $\}$ $\cdots = f(\xi_1)(b - x_{k-1}) + f(\xi_2)(x_{k-1} - x_{k-2}) + \ldots + f(\xi_k)(x_1 - a) \to \int_a^b f(x)dx$ при $\Delta \to 0$ $\square$

[И.В. Садовничая, *Определенный интеграл*, page 14-23]

osn 4. Числовые ряды. Абсолютная и условная сходимость. Признаки сходимости: Даламбера, интегральный, Лейбница.

Определения.

- Рассмотрим произвольную числовую последовательность $u_1, u_2, \dots, u_k, \dots$ и формально образуем из её элементов бесконечную сумму вида $u_1 + u_2 + \dots + u_k + \dots = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$, называемую **числовым рядом**. Отдельные слагаемые u_k называются **членами ряда**. Сумма первых n членов ряда называется n-й **частичной суммой** ряда и обозначается S_n. Т.е. $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$.

- Ряд называется **сходящимся**, если сходится последовательность $\{S_n\}$ частичных сумм этого ряда. При этом предел S указанной последовательности $\{S_n\}$ называется **суммой ряда**.

- Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ называется **абсолютно сходящимся**, если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |u_k|$ также сходится.

- Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ называется **условно сходящимся**, если сам он сходится, а $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |u_k|$ расходится.

Теоремы:

Критерий Коши Ряд $\sum\limits_{k=1}^{n} u_k$ сходится $\iff \forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n \geq N\ \forall p \in \mathbb{N} : \left| \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| < \varepsilon$.

Доказательство. Обычный критерий Коши для последовательностей, с посл-ю частичных сумм: $|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$. □

Следствие: **Необходимое условие сходимости ряда:** $\lim\limits_{k\to\infty} u_k = 0$.

Доказательство. Критерий Коши при $p = 1$. □

Признак Даламбера. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$, $p_k > 0\ \forall k \geqslant k_0 \geqslant 1$.

П. I: Если для всех номеров k, по крайней мере начиная с некоторого номера, справедливо неравенство $\frac{p_{k+1}}{p_k} \leqslant q < 1$ $\left(\frac{p_{k+1}}{p_k} \geqslant 1\right)$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$ сходится (расходится).

Доказательство. Если $\frac{p_{k+1}}{p_k} \geqslant 1$, то $p_{k+1} \geqslant p_k$, а значит $\lim\limits_{k\to\infty} u_k \neq 0$, не выполнено необходимое условие сходимости ряда и ряд расходится.
Рассмотрим ряд из элементов геом. прогрессии:

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k = q + q^2 + \dots + \dots = \frac{1}{1-q},\ |q| < 1.$$

Если $\dfrac{p_{k+1}}{p_k} \leqslant q = \dfrac{q^{k+1}}{q^k}$, то ряд $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ сходится по признаку сравнения, так как сходится ряд $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} q_k$. $\square$

П. II: Если $\exists$ предел $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \frac{p_{k+1}}{p_k} = L$, то ряд сходится при $L < 1$ и расходится при $L > 1$ (для $L = 1$ признак не работает).

Доказательство. $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall k \geq N : L - \varepsilon < \dfrac{p_{k+1}}{p_k} < L + \varepsilon$. Выберем $\varepsilon = \dfrac{1}{2}|L-1|$.
Если $L < 1$, то $\dfrac{p_{k+1}}{p_k} < 0.5L + 0.5 = q < 1$, свели к 1 части, сходится.
Если $L > 1$, то $\dfrac{p_{k+1}}{p_k} > 0.5L + 0.5 > 1$, свели к 1 части, расходится. $\square$

Интегральный признак Коши-Маклорена. Пусть при $x \geqslant 1$ функция $f(x) \geq 0$ и не возрастает. Тогда ряд $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ сходится или расходится одновременно с несобственным интегралом $\displaystyle\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$.

Доказательство. $\forall k \in \mathbb{N}\ \forall x \in [k, k+1]$, то $f(k) \geq f(x) \geq f(k+1) \implies f(k) \geq \displaystyle\int_k^{k+1} f(x)dx \geq f(k+1),\ k = 1, \dots, n-1,\ (n \geq 2)$

$$f(1) + f(2) + \dots + f(n-1) \geq \int\limits_1^n f(x)dx \geq f(2) + \dots + f(n)$$

$$S_n - p_1 \leq \int_1^n f(x)dx \leq S_{n-1}$$

Если $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то $\displaystyle\int_1^n f(x)dx \leq M \implies S_n \leq M + p_1 \implies$ сходится

Если $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx$ расходится, то $\{f(x) \geq 0\}$ $\displaystyle\int_1^n f(x)dx \to +\infty \implies S_{n-1} \to +\infty \implies$ расходится $\square$

Признак Лейбница. Пусть последовательность $\{u_k\},\ u_k > 0\ \forall k \in \mathbb{N}$ является невозрастающей и бесконечно малой. Тогда знакочередующийся ряд $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k u_k$ сходится.

Доказательство. $S_{2n} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \dots + (u_{2n-1} - u_{2n}) = (> 0) + (> 0) + \dots + (> 0)$. Поэтому в силу невозрастания последовательности $\{u_k\}$ последовательность $\{S_{2n}\}$ не убывает. С другой стороны, $S_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - \dots - (u_{2n-2} - u_{2n-1}) - u_{2n} = u_1 - (> 0) - \dots - (> 0) - u_{2n}$. Поэтому в силу невозрастания последовательности $\{u_k\}$ и того, что $u_{2n} \geqslant 0$, последовательность $\{S_{2n}\}$ ограничена сверху числом u_1. Следовательно, $\{S_{2n}\}$ сходится к некоторому числу S. Но из того, что $S_{2n-1} = S_{2n} - u_{2n}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} u_{2n} = 0$ (из необх. условий сходимости), вытекает сходимость при $n \to \infty$ последовательности S_{2n-1} к тому же S. $\square$

[Б. Х. С. В. А. Ильин В. А. С., *Математический анализ, продолжение курса*, page 7-22]

osn 5. Функциональные ряды. Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса. Непрерывность суммы равномерно сходящегося ряда непрерывных функций.

Определения:

• $\rceil$ на числовой прямой E_1 или в m-мерном евклидовом пространстве E_m задано некоторое множество $\{x\}$. Если каждому натуральному числу n ставится в соответствие по определённому закону некоторая функция $f_n(x)$, определённая на множестве $\{x\}$, то множество занумерованных функций $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$ называется **функциональной последовательностью.**

• 👁 функциональную последовательность $\{u_n(x)\}$, с областью определения $\{x\}$. Формально написанная сумма

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

бесконечного числа членов указанной функциональной последовательности называется **функциональным рядом.** Функции $u_n(x)$ называются **членами рассматриваемого ряда**, а множество $\{x\}$, на котором определены эти функции, называется **областью определения** этого ряда.

• $\rceil$ функциональная последовательность $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$ сходится на множестве $\{x\}$ пространства E_m к предельной функции $f(x)$, т.е. сходится в каждой его точке. Последовательность **сходится к функции** $f(x)$ **равномерно** (обозн. $\rightrightarrows$) на множестве $\{x\}$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists$ номер $N(\varepsilon)$ такой, что $\forall n$, удовлетворяющих $n \geqslant N(\varepsilon)$, и $\forall x \in \{x\}$ справедливо неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

• Функциональный ряд называется **равномерно сходящимся** на множестве $\{x\}$ к сумме $S(x)$, если последовательность $\{S_n(x)\}$ его частичных сумм сходится равномерно на множестве $\{x\}$ к предельной функции $S(x)$.

Теоремы:

Критерий Коши для функциональных последовательностей. $\{f_n(x)\} \rightrightarrows$ на $\{x\} \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n \geq N\ \forall p \in \mathbb{N} : |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ выполнено $\forall x \in \{x\}$

Доказательство. $\Rightarrow$: $f(x) \equiv \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, $\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n \geq N\ \forall x \in \{x\}$:
$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ и $|f_{n+p}(x) - f(x)| < \varepsilon\ \forall p \in \mathcal{N} \implies |f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leq |f_{n+p}(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| < 2\varepsilon$
$\Leftarrow$: Заметим, что данное условие для $\forall$ фиксированного $x \in \{x\}$ означает сх. $\{f_n(x)\}$ в этой точке $x \in \{x\} \implies \exists f(x) \equiv \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ В нер-ве $|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon\ \forall p \in \mathcal{N}$ перейдем к lim при $p \to \infty \implies |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$. По определению это означает $\{f_n(x)\} \rightrightarrows f(x)$ □

Критерий Коши для функциональных рядов. Функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ равномерно на множестве $\{x\}$ сходится к некоторой сумме $\iff \forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) :\ \forall n \geqslant N(\varepsilon),\ \forall p \in \mathbb{N},\ \forall x \in \{x\}$, выполнено $\left| \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| < \varepsilon$

Доказательство. Следует из критерия Коши для функ. последовательностей, так как $\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) = S_{n+p}(x) - S_n(x)$ □

Признак Вейерштрасса. Если функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ определён на множестве $\{x\}$ пространства E_m и если существует сходящийся числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ такой, что для всех точек x множества $\{x\}$ и для всех номеров k справедливо неравенство $|u_k(x)| \leqslant c_k$, то функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится равномерно на множестве $\{x\}$.

Доказательство. $\sum c_k \to \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n \geq N\ \forall p \in \mathcal{N} : \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} c_n < \varepsilon$

Тогда $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| \leq \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} |u_k(x)| \leq \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} c_k < \varepsilon, \forall x \in \{x\}$. В силу критерия Коши теорема доказана. □

Теорема о почленном переходе к пределу. Если функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится равномерно на множестве $\{x\}$ к сумме $S(x)$ и у всех членов этого ряда существует в точке x_0 (x_0 — предельная точка множества $\{x\}$) предел $\lim\limits_{x \to x_0} u_k(x) = b_k$, то и сумма ряда $S(x)$ имеет в точке x_0 предел, причём

$$\lim_{x \to x_0} S(x) = \lim_{x \to x_0} \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{x \to x_0} u_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

(или, как говорят, к пределу можно переходить почленно), т.е. символ lim предела и символ $\sum$ суммирования можно переставлять местами.

Доказательство. $\{$Кр. Коши $\} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)\ \forall n \geq N\ \forall p \in \mathcal{N} \implies \left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| < \varepsilon$.

Фиксируем n и p и перейдем к пределу при $x \to x_0$ $|b_{n+1} + \dots + b_{n+p}| \leq \varepsilon \implies \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится.

$\forall x \in U_\delta(x_0) : \left\{ S(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x) \forall x \in U_\delta(x_0) \right\} \implies \left| S(x) - \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k \right| \le \left| \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x) - \sum\limits_{k=1}^{n} b_k \right| +$
$\left| \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| + \left| \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} b_k \right| \forall x \in U_\delta(x_0)$

Оценим слагаемые отдельно: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n : \forall x \in \mathcal{E} \implies \left| \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} b_k \right| < \frac{\varepsilon}{3}$, так как ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится; $\left| \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| < \frac{\varepsilon}{3}$, так как $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ равномерно сходимостся; $\exists \delta > 0 :$ $\forall x \in U_\delta(x_0) \left| \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x) - \sum\limits_{k=1}^{n} b_k \right| < \frac{\varepsilon}{3}$, так как $\lim\limits_{x \to x_0} u_k(x) = b_k. \implies \left| S(x) - \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k \right| < \varepsilon \forall x \in$ $U_\delta(x_0) \forall n > N$ □

Непрерывность предельной функции для ф.п.. $\rceil \ \forall n \in \mathbb{N} \implies f_n(x) \in C(E)$ и $f_n(x) \rightrightarrows^{E} f(x)$. Тогда $f(x) \in C(E)$.

Доказательство. $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) : \forall n \ge N, \forall x \in E \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Выберем $x_0 \in E, \forall x \in U(x_0)$ (ε-окрестность x_0).
👁 $|f(x) - f(x_0)| \le \underbrace{|f(x) - f_N(x)|}_{(1)} + \underbrace{|f_N(x) - f_N(x_0)|}_{(2)} +$

$+ \underbrace{|f_N(x_0) - f(x_0)|}_{(3)} < \varepsilon$

$(1) < \frac{\varepsilon}{3}, (3) < \frac{\varepsilon}{3}$ в силу сходимости к предельной функции.
$(2) < \frac{\varepsilon}{3}$ в силу непрерывности всех членов. □

Непрерывность суммы ряда. Если в условиях теоремы о почленном переходе к пределу дополнительно потребовать, чтобы точка x_0 принадлежала множеству $\{x\}$ и чтобы все члены $u_k(x)$ функционального ряда были непрерывны в точке x_0, то и сумма $S(x)$ этого ряда будет непрерывна в точке x_0.

Доказательство. Достаточно применить предыдущую теорему к функциям $f_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$ и $f(x) = S(x)$ □

[И.С. Ломов, *Рукописные лекции по математическому анализу*]

osn 6. Криволинейный интеграл, формула Грина.

$\exists\ \varphi(t), \psi(t)$ непр. на $[a, b]$. Если рассматривать t как время, эти функции определяют закон движения по плоскости точки M с координатами $x = \varphi(t), y = \psi(t),\ \alpha < t < \beta$. Множество $\{M\}$ всех точек M, координаты x, y которых определяются уравнениями $\varphi(t), \psi(t)$, называется **простой плоской кривой** L, если различным значениям параметра t из $[\alpha, \beta]$ отвечают различные точки этого множества.

$\exists\ \varphi(t), \psi(t) \in C[\{t\}]$. Уравнения $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ задают параметрически кривую L, если $\exists$ такая система сегментов $\{[t_{i-1}, t_i]\}$, разбивающих множество $\{t\}$, что для значений t из каждого данного сегмента этой системы все уравнения определяют простую кривую.

Спрямляемая кривая — кривая, имеющая конечную длину.

Длина кривой – это предел последовательности длин ломаных, вписанных в эту линию, при условии, что длина наибольшего звена $\to 0$.

$\exists\ x = \varphi(t), y = \psi(t) \in C[\alpha, \beta]$. Тогда кривая L, определяемая x, y, спрямляема и длину l ее дуги можно вычислить по формуле

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt$$

👁 произвольную спрямляемую кривую L на плоскости Oxy, не имеющую точек самопересечения и самоналегания, незамкнутую, ограниченную точками $A,\ B$, описывающуюся параметрическими ур-ями:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases},\ t \in [a, b], A = (\varphi(a), \psi(a)), B = (\varphi(b), \psi(b))$$

$\exists$ на кривой L определены три непрерывные вдоль этой кривой функции $f(x, y) = f(M),\ P(x, y) = P(M),\ Q(x, y) = Q(M)$.

👁 разбиение отрезка $[a, b]:\ a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b,\ \Delta t_k = t_k - t_{k-1},\ M_k = M_k(\varphi(t_k), \psi(t_k))$.

$\Delta l_k = |\smile M_{k-1}M_k|$ (длина дуги), $\Delta \equiv \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \Delta l_k$.

Выберем точки $N_k(\xi_k, \eta_k) \in \smile M_{k-1}M_k,\ \xi_k = \varphi(\tau_k),\ \eta_k = \psi(\tau_k),\ \tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$.

$\Delta x_k = x_k - x_{k-1},\ x_k = \varphi(t_k),\ \Delta y_k = y_k - y_{k-1},\ y_k = \psi(t_k)$

👁 три интегральные суммы:

1. $\sigma_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^n f(N_k)\Delta l_k$
2. $\sigma_2 = \displaystyle\sum_{k=1}^n P(N_k)\Delta x_k$
3. $\sigma_3 = \displaystyle\sum_{k=1}^n Q(N_k)\Delta y_k$

Число $I_s,\ s = 1, 2, 3$ называется **пределом интегральной суммы** σ_s при $\Delta \to 0$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0:\ \Delta < \delta \implies |I_s - \sigma_s| < \varepsilon$ независимо от выбора точек $N_k \in \smile M_{k-1}M_k$.

Если существует предел I_1 интегральной суммы σ_1 при $\Delta \to 0$, то он называется **криволинейным интегралом 1 рода** от функции f по кривой L.

$$I_1 = \lim_{\Delta \to 0} \sigma_1 = \int\limits_L f(x, y) dl = \int\limits_a^b f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{\varphi_t'^2(t) + \psi_t'^2(t)} dt$$

Если существуют пределы $I_2,\ I_3$ интегральных сумм $\sigma_2,\ \sigma_3$ при $\Delta \to 0$, то они называются **криволинейными интегралами 2** рода от функций $P,\ Q$ по кривой AB.

$$I_2 = \lim_{\Delta \to 0} \sigma_2 = \int\limits_{\smile AB} P(x, y) dx = \int\limits_{\smile AB} P(M) dx$$

$$I_3 = \lim_{\Delta \to 0} \sigma_3 = \int\limits_{\smile AB} Q(x, y) dy = \int\limits_{\smile AB} Q(M) dy$$

$$I_2 + I_3 = \int\limits_{\smile AB} P(x, y) dx + \int\limits_{\smile AB} Q(x, y) dy = \int\limits_{\smile AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

– **общий криволинейный интеграл 2 рода**.
Из определения криволинейных интегралов следует, что:

1. криволинейный интеграл первого рода не зависит от того, в каком направлении пробегает кривая L, а для криволинейного интеграла второго рода изменение направления кривой ведёт к изменению знака, т.е. $\int\limits_{\smile AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = -\int\limits_{\smile BA} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$

2. физически криволинейный интеграл первого рода представляет собой массу кривой L, линейная плотность которой равна $f(x, y)$;

   общий линейный интеграл второго рода физически представляет собой работу по перемещению материальной точки A в точку B вдоль кривой L под действием силы, имеющей составляющие $P(x, y)$ и $Q(x, y)$.

Во второй части билета какая-то херня. Закоментированны

совершенно рандомные куски ибо не влезает. Надо что-то придумать.

$\rceil$ t — единичный вектор касательной к кривой C, согласованной с k, т.е. положительное направление обхода кривой C совпадает в точке приложения вектора t с направлением этого вектора, и если смотреть с конца нормали k, то контур C ориентирован положительно (Его обход осуществляется против часовой стрелки). Говорят, что ориентация кривой C согласована с нормалью «по правилу штопора».
Опр. Векторным полем в $\mathcal{R}^3$ называется векторная функция, определенная в $\mathcal{R}^3$ (или на $D \subset \mathcal{R}^3$): $\overline{f}(M) : \mathcal{R}^3 \to \mathcal{R}^3$
Опр. Ротором векторного поля $f(M)$ называется $rot\mathcal{A}$
В Орт-Норм Базисе выражение для $rot(f) = rot(f_x\bar{e}_1 + f_y\bar{e}_2 + f_z\bar{e}_3)$:
$\left(\dfrac{\partial f_z}{\partial y} - \dfrac{\partial f_y}{\partial z}\right)\bar{e}_1 + \left(\dfrac{\partial f_x}{\partial z} - \dfrac{\partial f_z}{\partial x}\right)\bar{e}_2 + \left(\dfrac{\partial f_y}{\partial x} - \dfrac{\partial f_x}{\partial y}\right)\bar{e}_3$

Формула Грина. $\rceil$ a — векторное поле, дифференцируемое в области D, удовлетворяющей условиям 1 и 2, и такое, что его градиент непрерывен в объединении $D \cup C = \overline{D}$. Тогда справедлива формула

$$\iint\limits_{\overline{D}} (k, rot\ a) d\sigma = \oint\limits_{C} (a, t) dl$$

Выражение справа обычно называют **циркуляцией векторного поля** a по кривой C, а выражение слева — **потоком векторного поля** $rot\ a$ через область D.

Формулировка Пусть C – положительно ориентированная кусочно-гладкая замкнутая кривая на плоскости, а D – область, ограниченная кривой C. Если $\dfrac{\partial P}{\partial y}, \dfrac{\partial Q}{\partial x} \in \mathcal{C}(D)$, то

$$\oint\limits_{C} P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy$$

На символе интеграла часто рисуют окружность, чтобы подчеркнуть, что кривая C замкнута.

Доказательство. **Доказательство ф. Грина для простой области** $\rceil$ область D – криволинейная трапеция (область, правильная в направлении OY) : $D = \{(x, y) | a \le x \le b, y_1(x) \le y \le y_2(x)\}$

Для кривой C, ограничивающей область D зададим направление обхода по часовой стрелке. Тогда:

$$\iint\limits_{D} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy = \int\limits_{a}^{b} (P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x)))\,dx = = \int\limits_{a}^{b} P(x, y_2(x))\,dx - \int\limits_{a}^{b} P(x, y_1(x))\,dx \quad (1)$$

Заметим, что оба полученных интеграла можно заменить криволинейными интегралами: $\displaystyle\int\limits_{C_1} P(x, y)\,dx = -\int\limits_{-C_1} P(x, y)\,dx = -\int\limits_{a}^{b} P(x, y_1(x))\,dx \quad (2)$ $\displaystyle\int\limits_{C_3} P(x, y)\,dx = \int\limits_{a}^{b} P(x, y_2(x))\,dx \quad (3)$ Интеграл по C_1 берётся со знаком «минус», так как согласно ориентации контура C направление обхода данной части – от b до a.

Криволинейные интегралы по C_2 и C_4 будут равны нулю, так как $x = \text{const}$: $\displaystyle\int\limits_{C_2} P(x, y)\,dx = 0 \quad (4)$ $\displaystyle\int\limits_{C_4} P(x, y)\,dx = 0 \quad (5)$

Заменим в (1) интегралы согласно (2) и (3), а также прибавим (4) и (5), равные нулю и поэтому не влияющие на значение выражения:

$$\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \int\limits_{C_1} P(x,y)\,dx + \int\limits_{C_3} P(x,y)\,dx + \int\limits_{C_2} P(x,y)\,dx + \int\limits_{C_4} P(x,y)\,dx$$

Так как обход по часовой стрелке при правой ориентации плоскости является отрицательным направлением, то сумма интегралов в правой части является криволинейным интегралом по замкнутой кривой C в отрицательном направлении: $\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\int\limits_C P(x,y)\,dx \quad (6)$

Аналогично доказывается формула:

$\iint\limits_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \int\limits_C Q(x,y)\,dy \quad (7)$ если в качестве области D взять область, правильную в направлении OX.

Сложим (6) и (7): $\int\limits_C P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy$ □

osn 7. Производная функции комплексногопеременного. Условия Коши-Римана. Аналитическая функция.

Дифференцируемость функции.

$\rceil f(z)$ определена на $U_\delta(z_0),\ \delta > 0$. Если $\exists \lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$, то этот предел называют **производной функции** $f(z)$ в точке z_0 и обозначают $f'(z_0)$.
Положим

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y),\ z = x+iy,\ z_0 = x_0 + iy_0,$$

$$\Delta f = f(z) - f(z_0),\ \Delta f = \Delta u + i\Delta v,\ \Delta z = z - z_0,\ \Delta z = \Delta x + i\Delta y,$$

$$\Delta u = u(x,y) - u(x_0,y_0),\ \Delta v = v(x,y) - v(x_0,y_0),\ \Delta x = x - x_0,\ \Delta y = y - y_0.$$

Функция $f(z)$ называется **дифференцируемой** в точке z_0, если приращение $\Delta f = A\Delta z + \overline{o}(1)\Delta z$, где $\lim\limits_{\Delta z\to 0} \overline{o}(1) = 0$, а A не зависит от Δz.
Условия Коши-Римана: $u'_x = v'_y,\ u'_y = -v'_x$.
Критерий дифференцируемости функции комплексного переменного. Для того, чтобы функция $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ была дифференцируема в точке $z_0 = x_0 + iy_0$, необходимо и достаточно, чтобы функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ были дифференцируемы в точке (x_0,y_0) и выполнялись условия Коши-Римана.

Доказательство. ($\Longleftarrow$) Предположим, что функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ дифференцируемы в точке (x_0,y_0) и выполнены условия Коши-Римана.
Пусть $u'_x = a = v'_y,\ u'_y = -b = -v'_x$. В силу дифференцируемости функций u и v имеем:

$$\Delta u = a\Delta x - b\Delta y + \overline{o}_1(1)\Delta x + \overline{o}_2(1)\Delta y,$$

$$\Delta v = b\Delta x + a\Delta y + \overline{o}_3(1)\Delta x + \overline{o}_4(1)\Delta y,$$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \overline{o}_i(1) = 0,\ i = 1,2,3,4.$$

Отсюда $\Delta f = \Delta u + \Delta iv = a\Delta x - b\Delta y + \overline{o}_1(1)\Delta x + \overline{o}_2(1)\Delta y + ib\Delta x + ia\Delta y + i\overline{o}_3(1)\Delta x + i\overline{o}_4(1)\Delta y =$
$= \Delta x(a+ib) + \Delta y(-b+ia) + \Delta x(\overline{o}_1(1) + i\overline{o}_3(1)) + \Delta y(\overline{o}_2(1) + i\overline{o}_4(1)) =$
$= (a+ib)(\Delta x + \Delta iy) + \Delta x(\overline{o}_1(1) + i\overline{o}_3(1)) + \Delta y(\overline{o}_2(1) + i\overline{o}_4(1))$.
Тем самым

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = a + ib + \frac{\Delta x}{\Delta z}(\overline{o}_1(1) + i\overline{o}_3(1)) + \frac{\Delta y}{\Delta z}(\overline{o}_2(1) + i\overline{o}_4(1)).$$

Так как $|\Delta x| \leqslant |\Delta z|,\ |\Delta y| \leqslant |\Delta z|$, то

$$\lim_{\Delta z\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = a + ib = f'(z_0) = u'_x + iv'_x = v'_y - iu'_y = u'_x - iu'_y = v'_y + iv'_x$$

.
($\Longrightarrow$) Пусть $f(z)$ дифференцируема в точке z_0, тогда
$\Delta f = \Delta u + \Delta iv = f'(z_0)\Delta z + \overline{o}(1)\Delta z = f'(z_0)(\Delta x + i\Delta y) + \overline{o}(1)(\Delta x + i\Delta y),\ \lim\limits_{\Delta z\to 0} \overline{o}(1) = 0$
Пусть $f'(z_0) = a + ib,\ \overline{o}(1) = \alpha_1 + i\alpha_2$, тогда:
$\Delta u + \Delta iv = (a+ib)(\Delta x + i\Delta y) + (\alpha_1 + i\alpha_2)(\Delta x + i\Delta y) = (a\Delta x - b\Delta y) + i(a\Delta y + b\Delta x) + (\alpha_1\Delta x - \alpha_2\Delta y) + i(\alpha_1\Delta y + \alpha_2\Delta x)$
Отдельно для действительной и мнимой частей:

$$\Delta u = a\Delta x - b\Delta y + \alpha_1\Delta x - \alpha_2\Delta y$$

$$\Delta v = b\Delta x + a\Delta y + \alpha_1\Delta y + \alpha_2\Delta x$$

Отсюда, в силу того, что $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \alpha_1 = 0$, $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \alpha_2 = 0$, следует, что функции u, v дифференцируемы в точке (x_0, y_0) и удовлетворяют условиям Коши-Римана. $\square$

Аналитическая функция.
Достаточное условие существования $f'(z)$. Если $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ и функции $u(x,y)$, $v(x,y)$ в области D имеют непрерывные частные производные первого порядка и выполняются условия Коши-Римана, то функция $f(z)$ дифференцируема в области D и $f'(z) \in C(D)$.
Функция $f(z)$ называется **аналитической** в области D, если она в каждой точке области D имеет производную $f'(z) \in C(D)$.
Свойства аналитических функций:

1. Аналитическая в области D функция непрерывна в D.

2. Сумма и произведение аналитических функций являются аналитическими функциями. Частное $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ двух аналитических функций является аналитической всюду, где $g(z) \neq 0$.

3. Если $f(z), g(w)$ - аналитические функции, то сложная функция $t = g(f(z))$ является аналитической функцией переменного z.

4. Если функция $w = f(z)$ аналитична в области D, и в окрестности точки $z_0 \in D, f'(z) \neq 0$, то в окрестности точки $w_0 = f(z_0) \in W$ определена обратная функция $z = g(w)$, являющаяся аналитической функцией переменного w. При этом $f'(z_0) = \dfrac{1}{g'(z_0)}$.

Пусть $f(z)$ - комплекснозначная функция комплексного переменного z, $u(x,y) = Ref(z), v(x,y) = Imf(z), z = x + iy$. Интегралом по кривой L, лежащей в области определения f, называется $\int\limits_L f(z)dz = \int\limits_L (u(x,y)dx - v(x,y)dy) + i\int\limits_L (u(x,y)dy + v(x,y)dx)$.
Теорема. Пусть заданная в односвязной области D функция $f(z)$ -однозначная аналитическая функция. Тогда интеграл от $f(z)$ по любому замкнутому контуру L, лежащему в D, равен нулю: $\oint\limits_I f(z)dz = 0$.
Теорема. Пусть заданная в односвязной области D функция $f(z)$ непрерывна, а интеграл от $f(z)$ по любому замкнутому контуру L, лежащему в D, равен нулю. Тогда $f(z)$ является аналитической функцией в области D.

osn 8. Степенные ряды в действительной и комплексной области. Радиус сходимости.

Степенной ряд и область его сходимости.

Степенным рядом называется функциональный ряд вида

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots,$$

где $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ — постоянные вещественные числа, называемые **коэффициентами ряда**.

Составим с помощью коэффициентов a_n ряда числовую последовательность:

$$\{ \sqrt[n]{|a_n|} \}, \ (n = 1, 2, \dots) \tag{1}$$

Теорема Коши-Адамара.

1. Если последовательность (1) не ограничена, то степенной ряд сходится лишь при $x = 0$.

2. Если последовательность (1) ограничена и имеет верхний предел $L > 0$, то ряд абсолютно сходится для значений x, удовлетворяющих $|x| < \dfrac{1}{L}$, и расходится для значений x, удовлетворяющих неравенству $|x| > \dfrac{1}{L}$.

3. Если последовательность (1) ограничена и ее верхний предел $L = 0$, то ряд абсолютно сходится для всех значений x.

Доказательство. 1. Пусть последовательность (1) не ограничена. Тогда при $x \neq 0$ последовательность $|x| \sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{|a_n x^n|}$ также не ограничена, т.е. у этой последовательности имеются члены со сколь угодно большими номерами n, удовлетворяющие неравенству $\sqrt[n]{|a_n x^n|} > 1$, или $|a_n x^n| > 1$. Но это означает, что для ряда (при $x \neq 0$) нарушено необходимое условие сходимости, т. е. ряд расходится при $x \neq 0$.

2. Пусть последовательность (1) ограничена и ее верхний предел $L > 0$. Докажем, что ряд абсолютно сходится при $|x| < \dfrac{1}{L}$, и расходится при $|x| > \dfrac{1}{L}$.

   - Фиксируем сначала любое x, удовлетворяющее неравенству $|x| < \dfrac{1}{L}$. Тогда найдется $\varepsilon > 0$, такое, что $|x| < \dfrac{1}{L + \varepsilon}$.

   В силу свойств верхнего предела все элементы $\sqrt[n]{|a_n|}$, начиная с некоторого номера n, удовлетворяют неравенству $\sqrt[n]{|a_n|} < L + \dfrac{\varepsilon}{2}$.

   Таким образом, начиная с этого номера n, справедливо неравенство $\sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \sqrt[n]{|a_n|} < \dfrac{L + \frac{\varepsilon}{2}}{L + \varepsilon} < 1$, т. е. ряд абсолютно сходится по признаку Коши.

- Фиксируем теперь любое x, удовлетворяющее неравенству $|x| > \dfrac{1}{L}$. Тогда найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $|x| > \dfrac{1}{L-\varepsilon}$.

  По определению верхнего предела из последовательности (1) можно выделить подпоследовательность $\{\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|}\}$, $(k = 1, 2, \dots)$, сходящуюся к L. Но это означает, что, начиная с некоторого номера k, справедливо неравенство $L - \varepsilon < \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} < L + \varepsilon$.

  Таким образом, начиная с этого номера k, справедливо неравенство $\sqrt[n_k]{|a_{n_k} x^{n_k}|} = |x| \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > \dfrac{L-\varepsilon}{L-\varepsilon} = 1$, или $|a_{n_k} x^{n_k}| > 1$, откуда видно, что нарушено необходимое условие сходимости ряда и он расходится.

3. Пусть последовательность (1) ограничена и ее верхний предел $L = 0$. Докажем, что ряд абсолютно сходится при любом x. Фиксируем произвольное $x \neq 0$ (при $x = 0$ ряд заведомо абсолютно сходится). Поскольку верхний предел $L = 0$ и последовательность (1) не может иметь отрицательных предельных точек, число $L = 0$ является единственной предельной точкой, а следовательно, является пределом этой последовательности, т. е. последовательность является бесконечно малой. Но тогда для положительного числа $\dfrac{1}{2|x|}$ найдется номер, начиная с которого $\sqrt[n]{|a_n|} < \dfrac{1}{2|x|}$. Стало быть, начиная с указанного номера, $\sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x^n| \sqrt[n]{|a_n|} < \dfrac{1}{2} < 1$, т. е. ряд абсолютно сходится к признаку Коши.

$\square$

Радиус сходимости.
Теорема. Для каждого степенного ряда, если он не является рядом, сходящимся лишь в точке $x = 0$, $\exists R > 0$ (возможно, равное бесконечности) такое, что этот ряд абсолютно сходится при $|x| < R$ и расходится при $|x| > R$. Это число R называется **радиусом сходимости** рассматриваемого степенного ряда, а интервал $(-R, R)$ называется **промежутком сходимости** этого ряда. Для вычисления радиуса сходимости справедлива формула

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

(в случае, когда $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 0,\ R = \infty$)

Доказательство. Очевидно из предыдущей теоремы $\square$

Для случая комплексного пространства:

Ряд вида $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ называется **степенным рядом** с центром разложения в точке z_0, где $\{a_n\}$ — фиксированная последовательность комплексных чисел.
Теорема Коши-Адамара.

Если $R = 0$ (т. е. $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$), то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ сходится только в точке z_0.

Если $R = \infty$ (т. е. $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$), то ряд сходится абсолютно во всей комплексной плоскости C.
Если $0 < R < \infty$, то ряд сходится абсолютно внутри круга $|z - z_0| < R$, вне замкнутого круга ряд расходится.

Доказательство. Доказательство по сути идентично доказательству для вещественного случая $\square$

osn 9. Ряд Фурье по ортогональной системе функций. Неравенство Бесселя, равенство Парсеваля, сходимость ряда Фурье.

Два элемента f и g евклидова пространства называются **ортогональными**, если скалярное произведение $\langle f, g\rangle = 0$. Рассмотрим в произвольном бесконечномерном евклидовом пространстве E некоторую последовательность элементов.

$$\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n, \ldots \tag{1}$$

Последовательность (1) называется **ортонормированной системой**, если входящие в эту последовательность элементы попарно ортогональны и имеют норму, равную единице.
Пусть в произвольном бесконечномерном евклидовом пространстве E задана произвольная ортонормированная система элементов $\{\psi_k\}$. Рассмотрим какой угодно элемент f пространства E.
Назовём **рядом Фурье** элемента f по ортонормированной системе $\{\psi_k\}$ ряд вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k \psi_k,$$

в котором через f_k обозначены постоянные числа, называемые **коэффициентами Фурье** элемента f и определяемые равенствами $f_k = \langle f, \psi_k\rangle,\ k = 1, 2, \ldots$

$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f_k \psi_k$ называется n-й **частичной суммой ряда Фурье**.
Рассмотрим наряду с n-й частичной суммой произвольную линейную комбинацию первых n элементов ортонормированной системы $\{\psi_k\}$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} C_k \psi_k$ с какими угодно постоянными числами $C_1, C_2, \ldots, C_n$.
Величина $\|f - g\|$ называется **отклонением** f по норме данного евклидова пространства.

Задача о начальном приближении: $\displaystyle\min_{\forall\{C_j\}\in\mathbb{R}} \|f - \sum_{k=1}^{n} C_k \psi_k\|$

Будем минимизировать квадрат нормы:

$$\|f - \sum_{k=1}^{n} C_k \psi_k\|^2 = \left\langle f - \sum_{k=1}^{n} C_k \psi_k,\ f - \sum_{k=1}^{n} C_k \psi_k \right\rangle = \langle f, f\rangle - 2\sum_{k=1}^{n} C_k \langle f, \psi_k\rangle + \sum_{k=1}^{n} C_k^2 = \|f\|^2 + \sum_{k=1}^{n}(C_k^2 - 2C_k f_k) = \left\{ \pm \sum_{k=1}^{n} f_k^2 \right\} = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 + \sum_{k=1}^{n}(C_k - f_k)^2,$$

минимум достигается при $C_k = f_k,\ k = 1, 2, \ldots, n$. Таким образом, доказана следующая теорема:
Теорема. Среди всевозможных линейных комбинаций элементов ортонормированной системы $\{\psi_k\}$ евклидова пространства наименьшее отклонение от произвольного элемента f из пространства имеет n-я частичная сумма ряда Фурье элемента f по системе $\{\psi_k\}$.
Следствие 1. $\forall$ элемента f данного евклидова пространства, $\forall$ ортонормированной системы $\{\psi_k\}$ при произвольном выборе постоянных C_k и $\forall n$ справедливо неравенство

$$\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 \leqslant \|\sum_{k=1}^{n} C_k \psi_k - f\|^2$$

Доказательство. $\|f - \sum\limits_{k=1}^{n} C_k\psi_k\|^2 = \|f\|^2 - \sum\limits_{k=1}^{n} f_k^2 + \sum\limits_{k=1}^{n}(C_k - f_k)^2 \geq \|f\|^2 - \sum\limits_{k=1}^{n} f_k^2$ □

Следствие 2 (тождество Бесселя). $\forall$ элемента f данного евклидова пространства, $\forall$ ортонормированной системы $\{\psi_k\}$ и $\forall n$ справедливо равенство

$$\|\sum_{k=1}^{n} f_k\psi_k - f\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2$$

Доказательство. Подставить $C_k = f_k$ в $\|f - \sum\limits_{k=1}^{n} C_k\psi_k\|^2 = \|f\|^2 - \sum\limits_{k=1}^{n} f_k^2 + \sum\limits_{k=1}^{n}(C_k - f_k)^2$ □

Неравенство Бесселя. $\forall$ элемента f данного евклидова пространства, $\forall$ ортонормированной системы $\{\psi_k\}$ выполняется неравенство Бесселя:

$$\sum_{k=1}^{n} f_k^2 \leqslant \|f\|^2$$

Доказательство. Из тождества Бесселя: $\|\sum\limits_{k=1}^{n} f_k\psi_k - f\|^2 \geq 0 \implies \|f\|^2 - \sum\limits_{k=1}^{n} f_k^2 \geq 0 \implies$
$\|f\|^2 \geq \sum\limits_{k=1}^{n} f_k^2$ □

Ортонормированная система $\{\psi_k\}$ называется **замкнутой**, если $\forall$ элемента f данного евклидова пространства E и $\forall$ числа $\varepsilon > 0$ найдётся такая линейная комбинация конечного числа элементов $\{\psi_k\}$, отклонение которой от f (по норме пространства E) меньше ε.
Другими словами, любой элемент пространства можно с любой степенью точности приблизить по норме этого пространства линейной комбинацией конечного числа первых элементов этой системы.
Теорема. Если ортонормированная система $\{\psi_k\}$ является замкнутой, то $\forall$ элемента f рассматриваемого евклидова пространства неравенство Бесселя переходит в точное равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 = \|f\|^2,$$

называемое **равенством Парсеваля**.

Доказательство. Фиксируем произвольный элемент f рассматриваемого евклидова пространства и произвольное $\varepsilon > 0$. Т.к система f_k является замкнутой, то найдётся такой номер n и такие числа $C_1, C_2, \dots, C_n$, что квадрат нормы, стоящий в правой части неравенства из следствия 1, будет меньше ε. В силу следствия 1 это означает, что для произвольного $\varepsilon > 0$ найдётся номер n, для которого $\|f\|^2 - \sum\limits_{k=1}^{n} f_k^2 < \varepsilon$.

$\forall m > n$ это неравенство будет тем более справедливо, так как при возрастании номера n сумма, стоящая в левой части может только возрасти. В соединении с неравенством Бесселя это означает, что ряд сходится к сумме $\|f\|^2$. $\square$

osn 10. Прямая и плоскость, их уравнения. Взаимное расположение прямой и плоскости, основные задачи на прямую и плоскость.

Если в пространстве V_3 зафиксированы точка O и базис $\{e_1, e_2, e_3\}$, то говорят что в пространстве задана **афинная система координат** (или **общая декартова система координат**) $\{O, e_1, e_2, e_3\}$. Точка O называется **началом координат**. Оси, проходящие через начало координат и определенные векторами $\{e_1, e_2, e_3\}$, называются **осями координат**. (Обозначается как O_{xyz})

Ненулевой вектор коллинеарный прямой называется ее **направляющим вектором**: $\overline{M_0M} = t\overline{a}$

Два неколлинеарных вектора, параллельных плоскости, называются ее **направляющими векторами**.

Канонические уравнения.

Уравнение прямой. На плоскости в афинной системе координат O_{xy} уравнение прямой l, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ с направляющим вектором $\overline{a} = \{l, m\}$ имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ l & m \end{vmatrix} = 0 \iff \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}$$

Доказательство. $\rceil M(x, y)$ – точка. Тогда $\overline{M_0M} = (x - x_0,\ y - y_0)$. Условие $M_0M = ta$ в силу лин. координат означает, что в определении первая строка линейно выражена через вторую, а это равносильно определителю (выше). Равенство нулю определителя второго порядка равносильно пропорциональности его строк. □

Уравнение плоскости. В пространстве в афинной системе координат O_{xyz} уравнение плоскости π, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ с направляющими векторами $\overline{p_i} = \{l_i, m_i, k_i\}$ $(i = 1, 2)$ имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l_1 & m_1 & k_1 \\ l_2 & m_2 & k_2 \end{vmatrix} = 0$$

Параметрические уравнения.

$\rceil$ r $= \overline{OM}$, $r_0 = \overline{OM_0}$ – радиус-векторы точек M и M_0 относительно полюса O. Если $\overline{a}$ - направляющий вектор, то $\overline{M_0M} = t\overline{a},\ t \in \mathbb{R}$. Тогда $\overline{M_0M} = r - r_0$ может быть записано в виде:

Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(\overline{r}_0)$ с направляющим вектором $\overline{a} = \{l, m\}$ имеет вид:

$$\overline{r} = \overline{r}_0 + \overline{a}t,\ t \in \mathbb{R}$$

Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(\overline{r}_0)$ с направляющими векторами $\overline{p}_i = \{l_i, m_i, k_i\}$, $(i = 1, 2)$ имеет вид:

$$\overline{r} = \overline{r}_0 + u\overline{p}_1 + v\overline{p}_2,\ u, v \in \mathbb{R}$$

Общие уравнения.

Теорема. Линия на плоскости (или поверхность в пространстве) — есть прямая (плоскость) $\iff$ она является алгебраической линией (поверхностью) первого порядка, т. е. задается уравнением

$$Ax + By + C = 0,\ A^2 + B^2 \neq 0$$

$$(Ax + By + Cz + D = 0,\ A^2 + B^2 + C^2 \neq 0 \text{ соответственно})$$

Это уравнение называется **общим уравнением** прямой на плоскости (плоскости в пространстве).

Доказательство. ($\Longrightarrow$) l — прямая, каноническое уравнение прямой $\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ l & m \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow$ $mx - ly - mx_0 + ly_0 = 0,\ A = m,\ B = -l,\ C = -mx_0 + ly_0$, при этом $A^2 + B^2 \neq 0$, так как $\overline{a} \neq 0$.
($\Longleftarrow$) Рассмотрим линию $l:\ Ax + By + C = 0,\ A^2 + B^2 \neq 0$. Заметим, что при $x_0 = -\dfrac{AC}{A^2 + B^2}$, $y_0 = -\dfrac{BC}{A^2 + B^2}$ точка $M_0(x_0, y_0) \in l$. Вычитая из уравнения линии $Ax+By+C = 0$ уравнение $Ax_0 + By_0 + C = 0$, получим $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$, а значит $\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ -B & A \end{vmatrix} = 0$ — каноническое уравнение прямой, проходящей через точку M_0, с направляющим вектором $\{-B, A\}$, а значит линия l — прямая. $\square$

Взаимное расположение прямой и плоскости.
$\urcorner$ плоскость π задана общим уравнением $Ax+By+Cz+D = 0$, а прямая l задана каноническим уравнением $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{k}$, $M(x_0, y_0, z_0) \in l$, $\overline{p} = (A, B, C)$ – вектор нормали. Тогда:

1. Прямая l принадлежит плоскости $\pi \iff$
$\begin{cases} M \in \pi \implies Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \\ (l, \overline{p}) = 0 \implies Am + Bn + Ck = 0 \end{cases}$

2. Прямая l параллельна плоскости $\pi \iff$

$\begin{cases} M \notin \pi \implies Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0 \\ (l, \overline{p}) = 0 \implies Am + Bn + Ck = 0 \end{cases}$

3. Прямая l перпендикулярна плоскости $\pi \iff$
$l \| \overline{p} \implies \dfrac{A}{m} = \dfrac{B}{n} = \dfrac{C}{k}.$

4. Угол φ между прямой l и плоскостью π:

$$sin\varphi = sin(l, \pi) = \frac{|(l, \overline{p})|}{|l| \cdot |\overline{p}|} = \frac{|Am + Bn + Ck|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + k^2}}$$

Основные задачи на прямую и плоскость.
Углом между двумя прямыми в пространстве называется любой из углов между параллельными им прямыми, проходящими через какую-либо точку пространства. Таким образом, две прямые в пространстве образуют между собой два различных угла в сумме равных π. Угол между направляющими вектоами прямых равен одному из этих углов. Угол между прямыми $l_i : r = r_i + ta_i, i = 1, 2$, совпадающий с угом между направляющими векторами $a_i = \{m_i, n_i, k_i\}$:

$$cos\varphi = \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + k_1k_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + k_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + k_2^2}}$$

Углом между прямой и плоскостью (если они не перпендикулярны) называется меньший из углов между этой прямой и ее ортогональной проекцией на плоскость. Если же прямая и плоскость перпендикулярны, то угол между ними считается равным $\pi/2$. Угол φ между прямой $l : r = r_0 + ta$ и плоскостью $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ находится как дополнительный к углу между направляющим вектором прямой $\overline{a} = \{m, n, k\}$ и вектором нормали к плоскости $\overline{n} = \{A, B, C\}$ и вычисляется:

$$sin\varphi = \frac{|Am + Bn + Ck|}{\sqrt{m^2 + n^2 + k^2}\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},\ 0 \le \varphi \le \pi/2$$

Расстояние $\rho(M_1, l)$ **от точки** $M_1(r_1)$ до прямой $l : r = r_0 + ta$ находится как высота h параллелограмма, построенного на векторах a и $\overline{M_0M_1}$ площадь и основание которого известны

$$\rho(M_1, l) = \frac{|[a, r_1 - r_0]|}{|a|}$$

Расстоянием между скрещивающимися прямыми $l_i : r = r_i + ta_i,\ i = 1, 2$ называется расстояние между параллельными плоскостями, в которых лежат прямые l_1, l_2. Это расстояние $\rho(l_1, l_2)$ находится как высота параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{M_1M_2}, a_1, a_2$, объем и площадь основания которого известны:

$$\rho(l_1, l_2) = \frac{|(r_2 - r_1, a_1, a_2)|}{|[a_1, a_2]|}$$

Найти уравнение прямой l**:** l проходит через т. $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и перпендикулярна плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$. Ответ: $\dfrac{x - x_0}{A} = \dfrac{y - y_0}{B} = \dfrac{z - z_0}{C}$.

Найти уравнение плоскости π**:** π проходит через т. $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и перпендикулярна прямой $\dfrac{x - x_1}{m} = \dfrac{y - y_1}{n} = \dfrac{z - z_1}{k}$. Ответ: $m(x - x_0) + n(y - y_0) + k(z - z_0) = 0$.

Найти уравнение плоскости π**:** π проходит через прямую $\dfrac{x - x_1}{m} = \dfrac{y - y_1}{n} = \dfrac{z - z_1}{k}$ и через т. $M_0(x_0, y_0, z_0)$, не лежащую на этой прямой. Ответ:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ m & n & k \end{vmatrix} = 0$$

Найти уравнение плоскости π**:** π проходит через прямую $\dfrac{x - x_1}{m_1} = \dfrac{y - y_1}{n_1} = \dfrac{z - z_1}{k_1}$ и параллельна другой данной прямой $\dfrac{x - x_2}{m_2} = \dfrac{y - y_2}{n_2} = \dfrac{z - z_2}{k_2}$ (две данные прямые не параллельны). Ответ:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ m_1 & n_1 & k_1 \\ m_2 & n_2 & k_2 \end{vmatrix} = 0$$

Найти уравнение плоскости π**:** π проходит через две данные точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и перпендикулярна данной плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ (прямая M_0M_1 и данная плоскость не перпендикулярны). Ответ:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0$$

osn 11. Алгебраические линии и поверхности второго порядка, канонические уравнения, классификация.

Если в пространстве V_3 зафиксированы точка O и базис $\{e_1, e_2, e_3\}$, то говорят что в пространстве задана **афинная система координат** (или **общая декартова система координат**) $\{O, e_1, e_2, e_3\}$. Точка O называется **началом координат**. Оси, проходящие через начало координат и определенные векторами $\{e_1, e_2, e_3\}$, называются **осями координат**. (Обозначается как O_{xyz}). Если вектора e_i взаимно перепендикулярны, то задана **прямоугольная система координат**.

Пусть Oxy — афинная система координат на плоскости. **Алгебраическая линия второго порядка** определяется уравнением $F(x,y) = 0$, где $F(x,y)$ — алгебраический многочлен второй степени от переменных x и y с вещественными коэффициентами:

$$F(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

$$a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{22}^2 \neq 0.$$

Это ур-е назывется **общим уравнением алгебраической линии второго порядка на плоскости**. Группа слагаемых $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$ называется **квадратичной частью уравнения**, группа слагаемых $2a_{13}x+2a_{23}y$ — **линейной частью**, а a_{33} — свободным членом. Введем обозначения:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & b \\ b^T & a_{33} \end{pmatrix}$$

Тогда уравнение примет вид:

$$F(x,y) = X^T A X + 2b^T X + a_{33} = 0,\ A = A^T,\ A \neq \mathcal{O}.$$

Теорема. Общее уравнение линии второго порядка, заданное в прямоугольной декартовой системе координат, переходом к другой прямоугольной системе координат приводится к одному из следующих типов уравнений:

1. $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + a_0 = 0$, где $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$
2. $\lambda_2 y^2 + 2b_0 x = 0$, где $\lambda_2 b_0 \neq 0$
3. $\lambda_2 y^2 + c_0 = 0$, где $\lambda_2 \neq 0$

Эти уранения называются **приведенными уравнениями** линии второго порядка.

Доказательство. **Шаг 1**: (преобразование базиса). **Метод вращений**. Если $a_{12} \neq 0$, то поворотом осей можно привести квадратичную часть $F(x,y)$ к сумме квадратов: $F(x,y) = a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + a'_{13}x' + a'_{23}y' + a_{33} = 0$.
Шаг 2: (перенос начала). Если в полученном ур-е содержится ненулевой квадрат какой-либо переменной, то переносом начала можно освободиться от этой переменной в первой степени. Если $a'_{11} \neq 0$ и $a'_{22} \neq 0$, то

$$x'' = x' + \frac{a'_{13}}{a'_{11}},\ y'' = y' + \frac{a'_{23}}{a'_{22}},\ a'_{33} = a_{33} - \frac{{a'_{13}}^2}{a'_{11}} - \frac{{a'_{23}}^2}{a'_{22}}$$

$$a'_{11}x''^2 + a'_{22}y''^2 + a'_{33} = 0$$

Все промежуточные и окончательные системы координат оставались прямоугольными, т.к. преобразования базиса с помощью ортогональной матрицы перехода сохраняют свойства ортонормированности. $\square$

Классификация ЛИНИЙ второго порядка

Теорема. Общее уравнение линии второго порядка, заданное в прямоугольной декартовой системе координат, определяет одну и только одну из девяти линий. Для каждой из них существует прямоугольная система координат, в которой уравнение этой линии имеет **канонический вид**:

I тип:

1. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \pm 1$ — эллипс (мнимый эллипс);
2. $\dfrac{x^2}{a^2} \pm \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ — пара мнимых пересекающихся прямых (пара пересекающихся прямых);
   Только начало координат удовлетворяет ур-ю мним. пер. прям.
3. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ — гипербола;

II тип: $y^2 = 2px,\ p > 0$ — парабола;

III тип:

1. $y^2 = \pm a^2,\ a \neq 0$ — пара параллельных прямых (пара мнимых параллельных прямых);
   Ни одна точна не удовлетворяет ур-ю мним. парал. прям.
2. $y^2 = 0$ — пара совпадающих прямых.

Классификация ПОВЕРХНОСТЕЙ второго порядка

Под **общим уравнением алгебраической поверхности** второго порядка в системе координат $Oxyz$ пространства понимают уравнение вида:
$F(x,y) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2b_1x + 2b_2y + 2b_3z + c = 0$, где не все коэффициенты a_{ij} равны нулю, $a_{ij} = a_{ji}$
Введем обозначения:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & b \\ b^T & c \end{pmatrix}$$

Тогда уравнение примет вид:

$$F(x,y) = X^TAX + 2b^TX + c = 0,\ A \neq \mathcal{O},\ A = A^T.$$

Теорема. С помощью ортогонального преобразования координат (т.е. простым вращением и простым отражением) и параллельного перноса уравнение можно привести к одному из следующих типов:

1. $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + a_0 = 0,\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \neq 0$
2. $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + b_0 z = 0,\ \lambda_1\lambda_2 b_0 \neq 0$
3. $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + c_0 = 0,\ \lambda_1\lambda_2 \neq 0$
4. $\lambda_2 y^2 + p_0 x = 0,\ \lambda_1 p_o \neq 0$
5. $\lambda_2 y^2 + q = 0,\ \lambda_1 \neq 0$

Теорема. Для любой алгебраической поверхности второго порядка существует прямоугольная декартова система координат, в которой уравнение этой поверхности имеет канонический вид:
I тип:

1. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = \pm 1$ — эллипсоид (мнимый эллипсоид); Ни одна точка пространства не удовлетворяет ур-ю мним. эллипс.
2. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 0$ — вырожденный эллипсоид; Удовлетворяет только начало координат.
3. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = \pm 1$ — однополостный гиперболоид (двухполостный гиперболоид);
4. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$ — конус;

II тип: $2Z = \dfrac{x^2}{a^2} \pm \dfrac{y^2}{b^2}$ — эллиптический параболоид (гиперболический параболоид);
III тип:

1. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \pm 1$ — эллиптический цилиндр (мнимый эллиптический цилиндр); Ни одна точка пространства не удовлетворяет ур-ю мним. эл. цил.
2. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ — гиперболический цилиндр;
3. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ — пара мнимых пересекающихся плоскостей;
4. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ — пара пересекающихся плоскостей;

IV тип: $y^2 = 2px,\ p > 0$ — параболический цилиндр;
V тип:

1. $y^2 = \pm a^2$ — пара параллельных плоскостей (пара мнимых параллельных плоскостей);
2. $y^2 = 0$ — пара совпадающих плоскостей.

[Г. Д. Ким, *Линейная алгебра и аналитическая геометрия*, page 192-200, 329—341]

osn 12. Системы линейных алгебраических уравнений. Теорема Кронекера-Капелли. Общее решение системы линейных алгебраических уравнений.

Системой m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными называется совокупность отношений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Упорядоченная совокупность чисел $c_1, ..., c_n \in \mathbb{R}$ называется **решением** системы, если при подстановке этих чисел в систему вместо неизвестных $x_1, ..., x_n$ соответственно каждое уравнение обращается в тождество. Две СЛАУ **эквиваленты**, если множества их решений совпадают. СЛАУ **совместна**, если существует хотя бы одно решение. СЛАУ называется **определенной**, если она имеет единственное решение, если имеет больше одного – **неопределенной**
Теорема. СЛАУ с квадратной невырожденной матрицей совместна и имеет единственное решение.

Доказательство. В силу невырожденности матрицы А для нее существует обратная матрица A^{-1}. Вектор $x = A^{-1}b$ – решение. Оно единственно. Если y – другое решение системы, то $Ax \equiv Ay$. Умножив обе части тождества слева на A^{-1}, получим $x = y$ □

Решение СЛАУ с помощью правила Крамера.

Введём: $A_i = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \dots & a_{2,n} \\ & & & \dots & & & \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$

Тогда: $x_i = \dfrac{|A_i|}{|A|}$, $i = 1, \dots, n$. A^{-1} получается из матрицы А заменой ее i-го столбца столбцом свободных членов.
$B = (A|b)$ — **расширенная** матрица.
Теорема Кронеккера-Капелли. СЛАУ совместна $\iff rgB = rgA$.

Доказательство. ($\implies$) Пусть СЛАУ совместна $\implies \exists x_1, x_2, \dots, x_n : \ a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b \implies$ столбец b является линейной комбинацией столбцов $a_1, \dots, a_n \implies rgB = rg(A|b) = rgA$
($\impliedby$) Пусть $rgB = rg(A|b) = rgA = r$. Возьмём в матрице A произвольный базисный минор. Так как $rg(A|b) = r$, то он же будет базисным минором матрицы $(A|b)$. Следовательно, последний столбец матрицы $(A|b)$ будет являться линейной комбинацией столбцов матрицы A. Коэффициенты этой комбинации являются решением СЛАУ $Ax = B$, то есть система совместна. □

Пусть система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1r}x_r + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2r}x_r + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nr}x_r + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

совместна и $rgA = rgB = r$. Будем считать, что базисный минор матрицы A находится в левом верхнем углу:

$$M = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ & \dots & \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$$

Рассмотрим **укороченную** систему:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1r}x_r + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2r}x_r + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{r1}x_1 + \dots + a_{rr}x_r + \dots + a_{rn}x_n = b_r \end{cases} \tag{1}$$

Теорема. Укороченная система эквивалентна исходной системе.

Доказательство. Обе системы содержат одинаковое число неизвестных. Любое решение *исходной* системы является рещением системы (1). Покажем, что верно и обратное. В расширенной матрице исходной системы первые r строк являются базисными. Следовательно, все остальные строки согласно теореме о базисном миноре будут линейными комбинациями этих строк. Это означает, что каждое уравнение исходной системы, начиная с $(r+1)$-го, будет линейной комбинацией первых r уравнений этой системы. Следовательно, каждое решение первых r уравнений исходной системы обращает в тождества все последующие уравнения. □

Запишем систему в виде

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{2n}x_n \\ \dots \\ a_{r1}x_1 + \dots + a_{rr}x_r = b_r - a_{r,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{rn}x_n \end{cases}$$

Придав свободным членам $x_{r+1}, \dots, x_n$ произвольные значения $c_{r+1}, \dots, c_n$, получим систему уравнений относительно неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_r$ с квадратной невырожденной матрицей:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1,r+1}c_{r+1} - \dots - a_{1n}c_n \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2,r+1}c_{r+1} - \dots - a_{2n}c_n \\ \dots \\ a_{r1}x_1 + \dots + a_{rr}x_r = b_r - a_{r,r+1}c_{r+1} - \dots - a_{rn}c_n \end{cases} \tag{2}$$

Эта система имеет единственное решение $c_1, c_2, \dots, c_r$. Очевидно, совокупность $c_1, c_2, \dots, c_n$ является решением исходной системы.
Теорема. Придавая свободным неизвестным произвольные значения и вычисляя значения главных неизвестных, из полученной системы можно получить все решения исходной системы.

Доказательство. Пусть $(c_1, \dots, c_r, c_{r+1}, \dots, c_n)$ — произвольное решение (1). Возьмём числа $(c_{r+1}, \dots, c_n)$ в качестве свободных переменных $x_{r+1}, \dots, x_n$ и будем вычислять значения главных неизвестных из системы (2). Так как $(c_1, \dots, c_r, c_{r+1}, \dots, c_n)$ — решение (1), то $(c_1, \dots, c_r)$ — решение системы (2). Так как система (2) имеет единственное решение, то в качестве решения можем получить только $(c_1, \dots, c_r)$. □

Опр. Система линейных алгебраических уравнений с нулевой правой частью называется **однородной**.

Теорема. СЛАУ с n неизвестными имеет единственное решение $\iff rgB = rgA = n$.

Доказательство. Если $rgA < n$, то среди неизвестных будет хотя бы одно свободное неизвестное. Тогда получим бесконечно много решений. □

Общее решение СЛАУ Решим полученную систему (1) относительно главных неизвестных: $x_1 = f_1(x_{r+1}, \dots, x_n),\ \dots,\ x_r = f_r(x_{r+1}, \dots, x_n)$, где $f_1, \dots, f_r$ – однозначно определённые функции. Эти соотношения при произвольных $x_{r+1}, \dots, x_n$ описывают множество всех решений исходной системы и называются **общим решением** системы.

сюда бы пример нахождения общего решения

- Однородная СЛАУ $Ax = 0$ всегда совместна: имеет тривиальное решение $x = \theta$.

- Однородная система с n неизвестными имеет нетривиальное решение $\iff rgA < n$.

- Однородная система $Ax = 0$ с квадратной матрицей A имеет нетривиальное решение $\iff$ $|A| = 0$.

[Г. Д. Ким, *Линейная алгебра и аналитическая геометрия*, page 104-109]

osn 13. Линейный оператор в конечномерном пространстве, его матрица. Норма линейного оператора.

Полем называется множество F с введенными на нем алгебраическими операциями сложения и умножения, а также если выполнены следующие аксиомы:

- Коммутативность сложения: $\forall a, b \in F\ a + b = b + a$
- Ассоциативность сложения: $\forall a, b, c \in F\ (a + b) + c = a + (b + c)$
- Существование нулевого элемента: $\exists 0 \in F : \forall a \in F\ a + 0 = 0$
- Существование противоположного элемента: $\forall a \in F \exists (-a) \in F : a + (-a) = 0$
- Коммутативность умножения: $\forall a, b \in F : a * b = b * a$
- Ассоциативность умножения: $\forall a, b, c \in F\ (a * b) * c = a * (b * c)$
- Существование единичного элемента: $\exists e \in F$
$\{0\} : \forall a \in F\ a * e = a$
- Существование обратного элемента для ненулевых элементов: $(\forall a \in F : a \neq 0) \exists a^{-1} \in F :$ $a * a^{-1} = e$
- Дистрибутивность умножения относительно сложения: $\forall a, b, c \in F\ (a + b) * c = a * c + b * c$

👁 множество V элементов $x, y, z \ldots$ и поле P действительных или комплексных чисел. ⅂ в V введены две операции: сложение его элементов и умножение его элементов на числа из P. Т.е $\forall x, y \in V$ определён элемент $z = x + y \in V$, а $\forall x \in V,\ \forall \lambda \in P$ определён элемент $y = \lambda \cdot x \in V$. ⅂ введённые две операции удовлетворяют **следующим аксиомам**:

1. $x + y = y + x$;
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$;
3. $\exists \theta \in V$, что $\forall x \in V \implies x + \theta = x$;
4. $\forall x \in V\ \exists (-x) \in V$, что $x + (-x) = \theta$;
5. $1 \cdot x = x,\ 1 \in P$;
6. $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y,\ \lambda \in P$;
7. $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x,\ \lambda, \mu \in P$;
8. $(\lambda\mu) \cdot x = \lambda(\mu \cdot x)$.

Тогда V называется **линейным пространством** над полем P.
Если P — поле действительных чисел, то V — **действительное линейное пространство**.
Если P — поле комплексных чисел, то V — **комплексное линейное пространство**.
Максимальное число линейно независимых векторов пространства V называется его **размерностью**. Если размерность пространства V конечна, то оно называется **конечномерным**.
⅂ даны 2 линейных пространства V и W над общим полем P. Отображение $A : \ V \to W$ называется **линейным отображением (линейным оператором)**, если для $\forall x, y \in V,\ \alpha \in P$ выполнены равенства:

1. $A(x+y)=A(x)+A(y)$;

2. $A(\alpha x)=\alpha A(x)$;

$\mathcal{L}(V,W)$ — множество всех линейных операторов действующих из V в W.
Простейшие свойства.

1. *Линейный оператор переводит нулевой вектор в нулевой вектор*, так как $\mathcal{A}\theta_1 = \mathcal{A}(0x) = 0\mathcal{A}x = \theta_2$ (здесь θ_1, θ_2 - нулевые векторы пространств V и W соответственно)

2. *Линейный оператор сохраняет линейные комбинации*, т.е. переводит линейную комбиниацию векторов в линейную комбинацию образов с теми же коэффициентами: $\mathcal{A}\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{k}\alpha_i \mathcal{A}x_i$

3. *Линейный оператор сохраняет линейную зависимость*, т.е. переводит линейно зависимую систему векторов в линейно зависимую.

Теорема. $\urcorner$ $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — базис пространства V, а $g_1, g_2, \ldots, g_n$ — любые векторы пространства W. Тогда существует единственный линейный оператор $A:\ V \to W$, который переводит векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ в векторы $g_1, g_2, \ldots, g_n$ соответственно.

Доказательство. Строим оператор по правилу: если $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in V$, то $Ax = \sum_{i=1}^{n} x_i Ae_i$. Из единственности разложения вектора по базису следует, что правило однозначно определяет образ x, при этом $Ae_i = g_i$. Линейность оператора вытекает из линейности координат. Если B — любой другой оператор, удовлетворяющий условию теоремы, то $Bx = \sum_{i=1}^{n} B(x_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i g_i = Ax \implies A$ единственен. □

Матрица линейного оператора.
$\urcorner$ $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и $f_1, f_2, \ldots, f_m$ — базисы конечномерных пространств V и W. Линейный оператор $A:\ V \to W$ однозначно определяется заданием векторов $Ae_1, \ldots, Ae_n$. В свою очередь Ae_i однозначно определяются своими координатами в базисе f:

$$\begin{cases} Ae_1 = a_{11}f_1 + \cdots + a_{m1}f_m \\ Ae_2 = a_{12}f_1 + \cdots + a_{m2}f_m \\ \ldots \\ Ae_n = a_{1n}f_1 + \cdots + a_{mn}f_m \end{cases}$$

$A_{fe} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ & \ldots & \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$ называется **матрицей оператора** A в паре базисов e и f.

$\urcorner$ V — линейное пространство над полем P. **Нормой** в линейном пространстве V называется отображение $\|\cdot\|:\ V \to R$, ставящее в соответствие каждому вектору $x \in V$ действительное число $\|x\| \in R$ и удовлетворяет аксиомам: $\forall x, y \in V, \alpha \in P$

1. $\|x\| \geqslant 0$, причём норма равна нулю только если $x = 0$;

2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$;

3. $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

Линейное пространство V с заданной на нём нормой $\|\cdot\|$ называется **линейным нормированным пространством.** Число $\|x\|$ называется нормой вектора x.
$\rceil$ V, W — линейные нормированные пространства с нормами $\|\cdot\|_V$ и $\|\cdot\|_W$. $\rceil$ $\mathcal{L}(V,W)$ — линейное пространство операторов, в котором можно ввести норму со следующими ограничениями $\forall \mathcal{A} \in \mathcal{L}(V,W)$:

- **согласованность** с векторными нормами $\|\cdot\|_V$ и $\|\cdot\|_W$: $\|\mathcal{A}x\|_W \leqslant \|\mathcal{A}\| \cdot \|x\|_V$, $\forall x \in V$.

- **мультипликативность**: $\|\mathcal{A}\mathcal{B}\| \leqslant \|\mathcal{A}\| \cdot \|\mathcal{B}\|$, $\forall \mathcal{A}, \mathcal{B}$, для которых определено произведение $\mathcal{A}\mathcal{B}$.

Теорема. Собственное значение линейного оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V,V)$ не превосходит по абсолютной величине любую его согласованную норму $\|\mathcal{A}\|$.

Доказательство. Если $\mathcal{A}x = \lambda x$, то для любой согласованной нормы оператора имеем $\|\mathcal{A}x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ и $\|\mathcal{A}x\| \leqslant \|\mathcal{A}\| \cdot \|x\|$, откуда следует, что $|\lambda| \leqslant \|\mathcal{A}\|$ $\square$

Примеры операторных норм:

- $\mu(\mathcal{A}) = \sup\limits_{\|x\|_V=1} \|\mathcal{A}x\|_W$ — норма, **подчинённая** нормам $\|\cdot\|_V$ и $\|\cdot\|_W$, наименьшая из всех согласованных норм.

- $\|\mathcal{A}\|_2 = \sup\limits_{\|x\|_V=1} \sqrt{(\mathcal{A}x, \mathcal{A}x)}$ — **спектральная норма**, равная максимальному сингулярному числу (или максимальному по модулю собственному значению в случае нормального оператора).

- $\|\mathcal{A}\|_1 = \max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} \sum\limits_{i=1}^{m} |a_{ij}|$ — **максимальная столбцовая сумма**.

- $\|\mathcal{A}\|_\infty = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant m} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ — **максимальная строчная сумма**.

- $\|\mathcal{A}\|_E = \sqrt{\sum\limits_{i,j} |a_{ij}|^2}$ — **евклидова норма оператора.**

[Г. Д. Ким, *Линейная алгебра и аналитическая геометрия*, page 240-241, 352—353]

osn 14. Ортогональные преобразования евклидова пространства. Ортогональные матрицы и их свойства.

Базисом линейного пространства называется упорядоченная линейно независимая система векторов пространства, через которую линейно выражается любой вектор пространства.
Ортонормированным базисом называется базис, векторы которого имеют единичную длину и в случае n>1 попарно перпендикулярны.
Ортогональные матрицы и их свойства.

• Матрица $Q \in \mathcal{C}^{n\times n}$ называется **унитарной**, если
$QQ^H = Q^H Q = I$

• Матрица $Q \in \mathcal{R}^{n\times n}$ называется **ортогональной**, если
$QQ^T = Q^T Q = I$

Q^H – *эрмитова-сопряженная матрица*: $q_{ji} = \overline{q}_{ij}$
Q^T – *транспонированная матрица*: $q_{ij} = q_{ji}$
Свойства ортогональной матрицы:

1. Q — обратима, причём $Q^{-1} = Q^T$;

   Доказательство. $\left|Q^T\right| = |Q| \implies |Q|^2 = 1 \implies |Q| \neq 0 \implies \exists Q^{-1}, Q^T Q = I \implies$ {домн. справа на Q^{-1} } $\implies Q^T = Q^{-1}$ □

2. $det(Q) = \pm 1$;

   Доказательство. $\left|Q^T\right| = |Q| \implies |Q|^2 = 1 \implies |Q| = \pm 1$ □

3. $\forall\lambda$ — собственное значение $Q \implies \lambda = \pm 1$.

   Доказательство. Пусть $Qx = \lambda x$ тогда $(x,x) = (x, Q^T Qx) = (Qx, Qx) = (\lambda x, \lambda x) = \lambda^2(x,x) \Rightarrow (x,x) = \lambda^2(x,x) \Rightarrow \lambda^2 = 1$

   □

Линейный оператор $\mathcal{U}$, действующий в унитарном (евклидомов) пространстве, называется **унитарным** (**ортогональным**) оператором, если $\mathcal{U}^*\mathcal{U} = \mathcal{U}\mathcal{U}^* = \mathcal{I}$

• Оператор $\mathcal{U}$ унитарен (ортогонален) $\iff$ в любом ортонормироавнном базисе он имеет унитарную (ортогональную) матрицу.

• Для унитарного (ортогонального) оператора $\mathcal{U}$ справедливы равенства:
$\mathcal{U}^* = \mathcal{U}^{-1}$, $|det\mathcal{U}| = 1$.

• Унитарный (ортогональный) оператор нормален.

Критерий унитарности. В конечномерном унитарном (евклидовом) пространстве $\mathcal{V}$ следующие утверждения равносильны:

• Оператор $\mathcal{U}$ унитарен (ортогонален)

• $\mathcal{U}^*\mathcal{U} = \mathcal{I}$

- $\mathcal{U}\mathcal{U}^* = \mathcal{I}$

- оператор $\mathcal{U}$ изометричен

- оператор $\mathcal{U}$ сохраняет длину, т.е. $|\mathcal{U}x| = |x|, \forall x \in \mathcal{V}$

- оператор $\mathcal{U}$ переводит любой ортонормированный базис $\mathcal{V}$ в ортонормированный базис

- оператор $\mathcal{U}$ переводит хотя бы один ортонормированный базис $\mathcal{V}$ в ортонормированный базис

Доказательство. • $(1 \Leftrightarrow 2)$ $(\implies)$ очевидно
$(\impliedby)$ $UU^* = I \implies \exists U^{-1}, UU^* = I$ {домн. слева на U^-1} $\implies U^* = U^{-1} \implies U^*U = I$

- $(1 \Leftrightarrow 3)$ аналогично

- $(3 \Leftrightarrow 4)$ $(\implies)$ $(Ux, Uy) = (x, UU^*y) = (x, y)$
$(\impliedby)$ $(Ux, Uy) = (x, y) \implies (x, UU^*y) = (x, Iy) \implies UU^* = I$

- $(4 \Leftrightarrow 5)$ $(\implies)$ очевидно, т.к. $|x| = \sqrt{(x, x)}$
$(\impliedby)$ а). V – евкл.: $(x, y) = (|x + y|^2 - |x|^2 - |y|^2)/2$ б). V – унит.: $(x, y) = (|x + y|^2 - |x - y|^2 + i\,|x + iy|^2 - i\,|x - iy|^2)/2$

- $(4 \Leftrightarrow 5)$ $(\implies)$ e – о/н $\implies (Ue_i, Ue_j) = (e_i, e_j) = \delta_{ij}$
$(\impliedby)$ Пусть $e_1, \dots, e_n$ – о/н. $\forall x \in V : x = \sum x_i e_i, Ux = \sum x_i Ue_i \implies |x|^2 = \sum |x_i|^2, |Ux|^2 = \sum |x_i|^2 \implies U$ сохр. длину

- $(6 \Leftrightarrow 7)$ $(\implies)$ очевидно
$(\impliedby)$ доказано в предыдущем пункте $(\impliedby)$

□

Примеры ортогональных матриц.

- $Q \in \mathbb{R}^{1\times 1} \implies Q = \begin{bmatrix} \pm 1 \end{bmatrix}$

- $Q \in \mathbb{R}^{2\times 2} \implies Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix}$

$$QQ^T = Q^TQ = I \implies \begin{cases} q_{11}^2 + q_{21}^2 = 1 \\ q_{11}q_{12} + q_{21}q_{22} = 0 \\ q_{12}^2 + q_{22}^2 = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} q_{11} = \cos\varphi \\ q_{21} = \sin\varphi \\ q_{12} = -kq_{21} = -k\sin\varphi \\ q_{22} = kq_{11} = k\cos\varphi \end{cases}$$

1. $k = 1 \implies Q = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$ (поворот).

   При $\varphi = \pi k$ получаются матрицы $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

   При $\varphi \neq \pi k$ матрица не диагонализируется, так как у неё нет вещественных собственных значений.

2. $k = -1 \implies Q = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{bmatrix}$ (поворот и отражение).

   В этом случае собственные значения матрицы равны $\pm 1 \implies$
   получаются матрицы $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Таким образом, в случае $Q \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ для ортогонального оператора в евклидовом пространстве существует ортонормированный базис, в котором он имеет матрицу

либо $\begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix}$,

либо $\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$, $(\varphi \neq \pi k)$.

Теорема. $\forall$ ортогонального оператора Q в евклидовом пространстве $\exists$ ортонормированный базис e, в котором матрица оператора имеет вид:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 & \\ & & & & & & \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 & \\ & & & & & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

Доказательство. Доказательство методом математической индукции по размерности пространства $dim(V) = n$.
Для $n = 1,\ n = 2$ теорема верна (выше рассмотрены все возможные случаи).
Пусть теорема верна для $n-1,\ n-2$. Докажем для n.
Q действует в вещественном пространстве, а в нём существует либо одномерное, либо двумерное инвариантное подпространство L ($\forall x \in L\ Qx \in L$), для него можно найти базис. По свойствам ортогонального оператора $L^{\perp}$ (ортогональное подпространство) — инвариантно относительно Q. $dim(L^{\perp})$ равна либо $n-1$, либо $n-2 \implies$ теорема для него верна. Совокупность базисов для L и $L^{\perp}$ образует искомый базис с точностью до порядка базисных векторов. $\square$

[Г. Д. Ким, *Линейная алгебра и аналитическая геометрия*, page 230-233, 292—295]

osn 15. Характеристический многочлен линейного оператора. Собственные числа и собственные векторы.

Линейным оператором векторного пространства V над полем P в векторное пространство W над тем же полем P называется оператор $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$, удовлетворяющий условию линейности для всех $x, y \in V$ и $\alpha \in P$:

$$\mathcal{A}(x+y) = \mathcal{A}x + \mathcal{A}y$$

$$\mathcal{A}(\alpha x) = \alpha \mathcal{A}x$$

Пусть $e = (e_1, ..., e_n)$ и $f = (f_1, ..., f_m)$ – базисы пространств V и W. Линейный оператор $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$ однозначно определяется заданием векторов $\mathcal{A}e_1, ..., \mathcal{A}e_n$. В свою очередь вектора $\mathcal{A}e_i, i \in 1..n$ своими координатами в базисе f, т.е. коэффициентами разложений

$$\begin{cases} \mathcal{A}e_1 = a_{11}f_1 + a_{21}f_2 + ... + a_{m1}f_m \\ ... \\ \mathcal{A}e_n = a_{1n}f_n + a_{2n}f_2 + ... + a_{mn}f_m \end{cases}$$

Матрица $A_{fe} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix}$ называется **матрицей линейного оператора** $\mathcal{A}$ в базисе e и f. Матрицы линейного оператора в различных парах базисов эквивалентны.
Матрицы $A, B \in P^{m*n}$ называются **эквивалентными**, если существуют м-цы $D \in P^{m*m}, |D| \neq 0$ и $Q \in P^{n*n}, |Q| \neq 0$, такие что $B = DAQ$.
Квадратные матрицы $A, B \in P^{n*n}$ называются **подобными**, если существует м-ца $D \in P^{n*n}, |D| \neq 0$, такая что $B = D^{-1}AD$.

Собственные числа и собственные векторы.

Пусть V – линейное пространство над полем P и $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$.
Вектор $x : x \neq \theta, x \in V$ называется **собственным вектором** оператора $\mathcal{A} = \mathcal{L}(V, V)$, если $\exists \lambda \in P$, такой что :

$$\mathcal{A}x = \lambda x$$

λ называется **собственным значением** оператора $\mathcal{A}$, соответствующим собственному вектору x.
Спектр оператора $\mathcal{A}$ – это множество всех собственных значений $\mathcal{A}$.
Теорема: Собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, линейно независимы.

Доказательство. По индукции, для $n = 1$ верно, т.к. с.в. $\neq \theta$ по определению. Пусть верно для из $n-1$ векторов, докажем для n. От противного: пусть $x_1, \ldots, x_n$ — собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, — линейно зависимы. Тогда существует нетривиальная линейная комбинация этих векторов:

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = \theta$$

Подействуем на неё оператором $A :\ \alpha_1\lambda_1 x_1 + \cdots + \alpha_n\lambda_n x_n = \theta$
Домножим линейную комбинацию на $\lambda_n :\ \alpha_1\lambda_n x_1 + \cdots + \alpha_n\lambda_n x_n = \theta$
Вычтем первое равенство из второго, получим:

$$\alpha_1(\lambda_n - \lambda_1)x_1 + \cdots + \alpha_{n-1}(\lambda_n - \lambda_{n-1})x_{n-1} = \theta$$

Получили нетривиальную линейную комбинацию линейно независимых векторов, значит предположение неверно и теорема верна. $\square$

Следствие: Линейный оператор, действующий в n-мерном пространстве, не может иметь более n различных собственных значений.

Характеристический многочлен.

$f(\lambda) = |A - \lambda I|$ — **характеристический многочлен** матрицы A.
Уравнение $det(\mathcal{A} - \lambda I) = 0$ — **характеристическое уравнение** оператора $\mathcal{A}$.
Теорема: Характеристические многочлены подобных матриц совпадают, т.е. $A = Q^{-1}BQ \implies |A - \lambda I| = |B - \lambda I|$.

Доказательство. $|A - \lambda I| = |Q^{-1}BQ - \lambda I| = |Q^{-1}BQ - Q^{-1}\lambda IQ| = |Q^{-1}(B - \lambda I)Q| = |B - \lambda I|$.
Т.е. $\forall \lambda$ характеристические многочлены м-ц A и B принимают одинаковые значения. □

Следствие: Все матрицы одного и того же линейного оператора имеют одинаковые характеристические многочлены.

Образом лин. оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$ наз-ся мн-во $im\mathcal{A} = \{y \in W | \exists x \in V : \mathcal{A}x = y\}$.
Ядром лин. оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$ наз-ся мн-во $ker\mathcal{A} = \{x \in V | \mathcal{A}x = 0\}$.
Теорема: λ — собственное значение оператора $\mathcal{A} \iff \lambda$ — корень характеристического уравнения оператора $\mathcal{A}$.

Доказательство. $(\implies):$ $\lambda \in P$ — собственное значение, $\exists x :\ Ax = \lambda x,\ x \neq 0,\ (A - \lambda I)x = 0 \implies dim(ker(A - \lambda I)) \neq 0 \implies det(A - \lambda I) = 0$.
$(\impliedby):$ $\exists \lambda$ — корень характеристического уравнения $\implies dim(im(A - \lambda I)) \leqslant n - 1 \implies dim(ker(A - \lambda I)) \geqslant 1 \implies \exists x \neq \theta : (A - \lambda I)x = 0$. □

[Г. Д. Ким, *Линейная алгебра и аналитическая геометрия*, page 240-260]

osn 16.Формализация понятия алгоритма. Машины Тьюринга, нормальные алгоритмы Маркова. Алгоритмическая неразрешимость. Задача останова. Задача самоприменимости.

Интуитивное понятие алгоритма — четкая система действий, позволяющая определенным образом обработать входные данные и выдать результат решения задачи. Важен исполнитель алгоритма. Одна и та же система действий для одного исполнителя будет алгоритмом, а для другого — нет.

Алгоритм **применим** к входным данным, если исполнитель за конечное число шагов остановится и выдаст (какой-то) ответ. В противном случае алгоритм **неприменим** к конкретным входным данным, т.е. он не остановится, либо завершит своё выполнение аварийно (сломается).

Основные свойства алгоритма:

1. *Определенность (понятность).* Исполнитель алгоритма абсолютно точно знает, как выполнять все шаги алгоритма.

2. *Детерминированность.* Если алгоритм применим к конкретным входным данным, то он всегда и везде выдаст одинаковый ответ, а если неприменим, то всегда и везде зациклится или сломается.

3. *Дискретность или структурность.* Каждый достаточно сложный шаг алгоритма тоже является алгоритмом и может быть разложен на более простые шаги. Это же касается и обрабатываемых алгоритмом данных.

Существуют разные способы формализации понятия алгоритма, 👁 два из них: машины Тьюринга и нормальные алгоритмы Маркова.

Машина Тьюринга — гипотетическая машина (из-за использования бесконечной ленты). Автомат может двигаться вдоль ленты и по очереди обозревать содержимое ячеек. Он может находиться в одном из нескольких состояний $q_1, \ldots, q_k$. В зависимости от того, какую букву s_i автомат видит в состоянии q_j, то есть от пары (s_i, q_j) (i — номер ячейки, j — номер состояния) автомат может выполнить следующие действия:

– запись новой буквы в обозреваемую ячейку;

– сдвиг влево или вправо на одну ячейку;

– переход в новое состояние.

Пример: перенести первый символ непустого слова P в его конец.

	a	b	c	Λ	комментарий
q_1	λ, R, q_2	λ, R, q_3	λ, R, q_4	$, R,$	анализ I симв., удаление
q_2	$, R,$	$, R,$	$, R,$	$a, , !$	запись a справа
q_3	$, R,$	$, R,$	$, R,$	$b, , !$	запись b справа
q_4	$, R,$	$, R,$	$, R,$	$c, , !$	запись c справа

Тезис Тьюринга: если кто-то предложит какой-либо алгоритм обработки слов в заданном алфавите, то можно построить эквивалентную машину Тьюринга, которая будет применима и неприменима к одинаковым множествам слов. В случае машины Тьюринга **алгоритм** — это то, что может быть реализовано МТ.

Нормальный алгоритм Маркова:

Нет понятия ленты и подразумевается непосредственный доступ к любым частям преобразуемого слова. Пусть A, B – слова в некотором алфавите. Нормальный алгоритм можно записать в следующем виде: $A_i \left\{ \begin{matrix} \to \\ \mapsto \end{matrix} \right\} B_i$. Каждая пара – формула подстановки для замены подслов в преобразуемом слове. Ищется вхождение слова A_1 в исходное слово. Если нашли, то заменяем его на B_1, если нет, то ищем A_2 и так далее. Затем возвращаемся в начало и снова ищем вхождение A_1. Процесс заканчивается, если ни одна из подстановок не применима, либо применилась завершающая формула, в которой $\mapsto$.
Пример: $A = \{a, b\}$. Преобразовать слово P так, чтобы в его начале оказались все символы a, а в конце – все символы b.

$$\begin{cases} ba \to ab \end{cases}$$

Тезис Маркова: если кто-то предложит какой-либо алгоритм обработки слов в заданном алфавите, то его можно нормализовать, т.е. построить эквивалентный нормальный алгоритм Маркова, который будет применим и неприменим к одинаковым множествам слов. Машина Тьюринга и нормальные алгоритмы Маркова эквивалентны.

Самоприменимость

Входное слово, которое подаётся на вход алгоритму, может быть записью какого-то другого алгоритма. Когда алгоритм применим к своей записи, он называется **самоприменимым**.
Теорема. Если есть два алгоритма таких, что выходные данные одного можно использовать как входные данные для другого, то обязательно существует третий алгоритм, который работает как суперпозиция (композиция, последовательное выполнение) двух первых алгоритмов. [Давалась без док-ва]

Задача останова

Пусть требуется построить алгоритм X, который, получая на входе запись любого алгоритма A и его конкретные входные данные D, определяет, применим ли A к этим данным D (остановится ли A, получив на входе D).
Теорема. Такого алгоритма X не существует. [Давалась без док-ва]

Алгоритмическая неразрешимость

Существуют задачи, для которых в принципе невозможно построить алгоритм их решения, они и называются **алгоритмически неразрешимыми**. Пусть требуется построить алгоритм X, который, получая на вход запись любого алгоритма A, определяет, самоприменим ли этот A, или нет.
Теорема. Алгоритм X не существует.

Доказательство. Доказательство от противного. Пусть алгоритм X существует, и, получив на вход запись алгоритма A, он вырабатывает ответ DA (Да), если A самоприменим, и ответ NET (Нет), если несамоприменим. Построим вспомогательный алгоритм Y , вот его запись в форме НАМ:

$$\begin{cases} DA \to DA \\ NET \mapsto NET \end{cases}$$

Как видно, мы специально сделали так, чтобы выходные данные алгоритма X можно подать на вход алгоритма Y. Тогда обязательно существует алгоритм Z, который работает как суперпозиция $X * Y$, то есть $Z = X * Y$. 👁, самоприменим ли Z.

– Пусть Z самоприменим, тогда $\langle$запись $Z\rangle Z \to \langle$запись $Z\rangle X * Y \to \langle DA\rangle Y \to$ Зациклились, предположение неверно.

– Пусть Z несамоприменим, тогда $\langle$запись $Z\rangle Z \rightarrow \langle$запись $Z\rangle X * Y \rightarrow \langle NET\rangle Y \rightarrow$ Стоп, алгоритм самоприменим, предположение неверно.

Как видно, оба предположения неверны, поэтому делаем вывод, что алгоритм Z не существует. Однако алгоритм Y существует (мы его построили), поэтому не существует алгоритм X. $\square$

[В. Н. Пильщиков, *Машина Тьюринга и алгоритмы Маркова. Решение задач. Учебно-методическое пособие.*]

osn 17. Понятие архитектуры ЭВМ. Принципы фон Неймана. Компоненты компьютера: процессор, оперативная память, внешние устройства. Аппарат прерываний.

Компьютер — исполнитель алгоритма на языке машины.

Архитектура ЭВМ — совокупность узлов машины и взаимосвязей между ними, рассматриваемая на определённом уровне рассмотрения этой архитектуры.

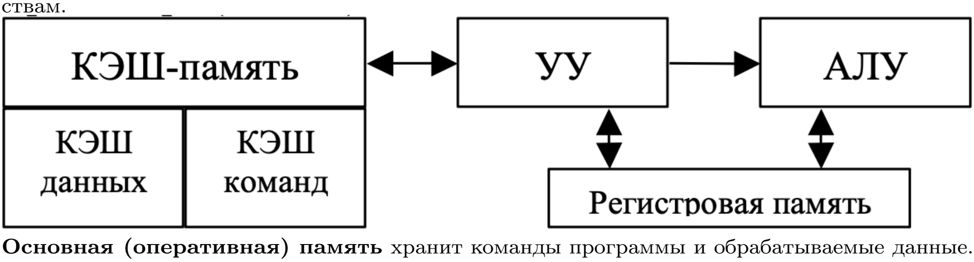
Принципы фон Неймана:

1. Принцип двоичного кодирования информации: вся информация, которая поступает и обрабатывается в компьютере, кодируется в двоичной системе счисления.

2. Принцип программного управления. Программа состоит из команд, в которых закодированы операция и операнды, над которыми должна выполниться данная операция. Выполнение компьютером программы — это автоматическое выполнение определенной последовательности команд, составляющих программу. В компьютере устройство, обеспечивающее выполнение команд, — Последовательность выполняемых процессором команд последовательностью команд и данных, составляющих программу. То есть, по сути, второй принцип – это принцип последовательной обработки.

3. Принцип хранимой программы. Для хранения команд и данных программы используется единое устройство памяти, которое представляется в виде вектора слов. Все слова имеют последовательную адресацию. Команды и данные представляются единым образом. Интерпретация информации памяти и, соответственно, ее идентификация как команды или как данных происходит неявно при выполнении очередной команды. К примеру, содержимое слова, адрес которого используется в команде перехода в качестве операнда, интерпретируется как команда. Если то же слово используется в качестве операнда команды сложения, то его содержимое интерпретируется как данные. То есть одна и та же область памяти в зависимости от команд в одном случае будет интерпретироваться как команда, в другом случае – как данные. Этот принцип фон Неймана замечателен тем, что он определяет возможность программной генерации команд с последующим их выполнением, то есть возможность компиляции программы, когда одна программа порождает другую программу, которая будет выполняться.

Процессор состоит из *устройства управления (УУ)* и *арифметико-логического устройства (АЛУ)*. АЛУ выполняет различные операции над данными, хранящимися на регистрах АЛУ. УУ выполняет команды языка машины, посылая управляющие сигналы к остальным устройствам.



Основная (оперативная) память хранит команды программы и обрабатываемые данные. ОЗУ состоит из ячеек, ячейка памяти - устройство, в котором размещается информация. Ячейка состоит из двух полей *тег* и *машинное слово*. Машинное слово - поле программно изменяемой информации. Здесь могут располагаться машинные команды или данные, с которыми будет оперировать программа. Имеет фиксированный для данной ЭВМ размер. Размер машинного слова - количество двоичных разрядов, размещаемых в машинном слове. Поле машинной информации (тег) - поле ячейки памяти, в котором схемами контроля процессами и ОЗУ автоматически размещается информация, необходимая для осуществления контроля за целостностью и корректностью использования данных. Использование тега:

- Контроль за целостностью данных - одноразрядный тег, который использовался для контроля точности.

- Контроль доступа к командам/данным. (вся информация раскрашивается в 2 цвета - команды и данные)

- Контроль доступа к машинным типам данных. (в теге записывается код типа данных)

Ячейки памяти, расположенные не в основной памяти ЭВМ, а в других устройствах, называются регистрами. В процессе работы команды поступают на регистры в УУ, а данные — на регистры в АЛУ. АЛУ может обрабатывать данные только на своих регистрах, чтобы обработать данные, расположенные в основной памяти, их надо сначала считать на регистры в АЛУ.
Внешние устройства служат для обмена программами и данными между основной (оперативной) памятью и «внешним миром».

Аппарат прерываний

Аппарат прерываний – способность ЭВМ быстро и гибко реагировать на события, происходящие как внутри процессора и оперативной памяти, так и во внешних устройствах. Каждое такое событие порождает сигнал, приходящий на специальную электронную схему – контроллер прерываний.
Прерывания делятся на:

– *Внутренние (синхронные)*, источником которых являются выполняемые команды программы, их нельзя закрыть и не реагировать на них.

– *Внешние (асинхронные)*, которые вызываются событиями в периферийных устройствах. Эти прерывания можно временно закрыть, если в данный момент процессор занят другой срочной работой.

Аппаратная реакция на прерывание заключается в сохранении информации о считающейся в данное время программе (процесса) и переключение на выполнение другой программы (процедуры обработки прерывания, т.е. события, здесь включается режим блокировки прерываний). В некоторых архитектурах это называется переключением контекста. Этот механизм позволяет (при необходимости) продолжить (возобновить) выполнение прерванной программы с текущего места.
Программная реакция на прерывание производится процедурой-обработчиком прерывания и делится на два этапа. Сначала происходит минимальная программная реакция, она производится в режиме с закрытыми прерываниями от внешних устройств. Это опасный режим, так как процессор не обращает внимание на все события в периферийных устройствах. Затем происходит полная программная реакция уже в режиме с открытыми прерываниями.

Короткое прерывание – обработка не требует дополнительных ресурсов ЦП и времени.
Фатальное прерывание – после него продолжить выполнение программы невозможно.

osn 18. Операционные системы. Процессы, взаимодействие процессов, разделяемые ресурсы, синхронизация взаимодействующих процессов, взаимное исключение. Программирование взаимодействующих процессов с использованием средств ОС UNIX (сигналы, неименованные каналы, IPC).

Операционная система — комплекс программ, используемых для управления ресурсами компьютера и предоставления интерфейса пользователю. В понятие управление ресурсами входит *выделение* ресурсов для программ (например, памяти и процессорного времени), *защита* от доступа программ к ресурсам, которыми они не владеют, а также *абстрагирование* от оборудования, например, предоставление общего интерфейса для похожих типов устройств (общий файловый интерфейс для всех дисков) или реализация виртуальных ресурсов (увеличение эффективного объема памяти за счет файла подкачки).
Физические ресурсы (устройства) – компоненты аппаратуры компьютера, используемые на программных уровнях ВС или оказывающие влияние на функционирование всей ВС. Совокупность физических ресурсов составляет аппаратный уровень вычислительной системы.
Логические, или виртуальные ресурсы (устройства) ВС – устройство/ресурс, некоторые эксплуатационные характеристики которого (возможно все) реализованы программным образом.
Состав ОС:

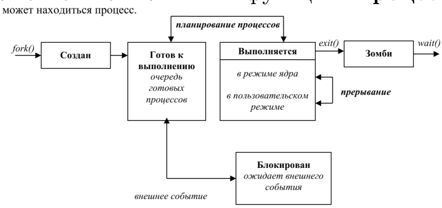
- ядро ОС - резидентная часть ОС, реализующая некоторую базовую функциональность ОС и работающая в режиме супервизора;

- динамически подгружаемые драйверы физических и виртуальных устройств. под динамически подгружаемыми понимается то, что в зависимости от ситуации состав этих драйверов при инсталяции и загрузке системы может меняться;

- интерфейсы системных вызовов.

Типы ОС:
- Пакетные ос - система, критерием эффективности которой является максимальная загрузка ЦП. Время работы процессора/время работы исполнения пользовательских программ 1. Пакет программ - совокупность программ которые системе необходимо обработать. Переключение процессов происходит по 1 из трех причин: зацикливание процесса, завершение процесса, обращение к внешнему устройству.
- ОС разделения времени - модель, представляющая собой развитие пакетных систем. Дополнительная характеристика - квант процессорного времени - некоторый фиксированный ос промежуток времени работы процессора. + причина по смене исполняемого процесса - исчерпание кванта времени.
- ОС реального времени - системы, ориентированные на обработку некоторого фиксированного набора событий, при возникновении любого из которых гарантируется обработка этого события за некоторый промежуток времени, не превосходящий определенного предельного значения.
- Сетевые ОС - ос, обеспечивающая функционирование и взаимодействие вычислительной системы в пределах сети.
- Распределенная система - система, функционирующая на многопроцессорном/многомашинном комплексе, в котором на каждом из узлов функционирует отдельное ядро, а сама система обеспечивает реализацию распределенных возможностей ОС.

Под **процессом** понимается совокупность машинных команд и данных, обрабатываемая в вычислительной системе и обладающая правами на владение некоторым набором ресурсов ВС. **Процесс (полновесный)** - объект планирования и выполняется внутри защищённой области памяти. **Легковесные процессы** - могут активироваться внутри полновесного процесса, могут быть объектами планирования, и при этом они могут функционировать внутри общей (т.е. незащищённой от других нитей) области памяти. Понятие процесса включает в себя следующее:исполняемый код, собственное адресное пространство, представляющее собой множество виртуальных адресов, которые может использовать процесс, ресурсы системы, которые назначены процессу ос, хотя бы одну выполняемую нить. **Системный вызов** - средство ос, предоставляемое пользователям (процессам), посредством которого процессы могут обращаться к ядру ос за выполнением тех или иных функций. **Процесс** - объект, порожденный



системным вызовом **fork**.

Будем говорить, что процессы называются **параллельными**, если их выполнение хотя бы частично перекрывается по времени. Совместное использование ресурса ВС двумя и более параллельными процессами, когда каждый некоторое время владеет этим ресурсом, называется **разделением ресурса.** Ситуация, когда процессы конкурируют за разделяемый ресурс, называются **гонкой процессов**. **Критический ресурс** - разделяемый ресурс, который в каждый момент времени доступен только одному из взаимодействующих процессов.

Пример. Имеется разделяемый ресурс in и два процесса. В некоторый момент времени процесс A присвоил переменной in значение X. Затем в некоторый момент процесс B присвоил значение Y этой же переменной in. Далее оба процесса читают эту переменную, и в обоих случаях процессы прочтут значение Y . То есть символ, считанный процессом A, был потерян, а символ, считанный процессом B, был выведен дважды. Результат выполнения процессов здесь зависит от того, в какой момент осуществляется переключение процессов, и от того, какой конкретно процесс будет выбран следующим для выполнения.

Взаимное исключение - способ работы с разделяемым ресурсом, при котором когда один из процессов работает с разделяемым ресурсом, все остальные не могут иметь к нему доступ.

Блокировка - доступ к разделяемому ресурсу одного из взаимодействующих процессов не обеспечивается из-за активности более приоритетных.

Тупик - взаимоблокировка.

Семафоры Дейкстры

Имеется специальный тип данных — *семафор.* Переменные типа семафор могут принимать целочисленные значения. Определены атомарные операции: опустить семафор *down(S)* (или *P(S)*) и поднять семафор *up(S)* (или *V(S)*).

Операция *down(S)* проверяет значение семафора S и, если оно больше нуля, то уменьшает его на 1. Если же это не так, процесс блокируется, причем связанная с заблокированным процессом операция down считается незавершенной.

Операция *up(S)* увеличивает значение семафора на 1. При этом если в системе присутствуют процессы, блокированные ранее при выполнении *down* на этом семафоре, то один из них разблокируется и завершает выполнение операции *down*, т.е. вновь уменьшает значение семафора. Выбор процесса для разблокирования никак не оговаривается. Используется для предотвращения тупика.

Монитор - это языковая конструкция с централизованным управлением (в отличие от семафоров, которые не обладают централизацией).

1. Структуры данных монитора доступны только через обращения к процедурам или функциям этого монитора (т.е. монитор представляет собой некоторый аналог объекта в объектно-ориентированных языках и реализует инкапсуляцию данных);

2. процесс занимает (или входит в) монитор, если он вызывает одну из процедур или функций монитора;

3. В каждый момент времени внутри монитора может находиться не более одного процесса.

Механизм передачи сообщений основан на двух функциональных примитивах: *send* и *receive*. Их можно разделить по трем характеристикам: модель синхронизации (операции посылки/приема сообщений могут быть блокирующими и неблокирующими), адресация (прямая (конкретный адрес) или косвенная (сообщение бросается в общий пул)) и формат сообщения.
Сигналы — средство оказания воздействия одним процессом на другой процесс (одним из них может быть ОС). Используются непосредственные имена процессов. Асинхронное взаимодействие (момент прихода сигнала заранее неизвестен). Действия при получении: обработка по умолчанию(процесс завершается с кодом сигнала), специальная обработка(вызывается спец ф-я), игнорирование. Порядок реагирования не определен. Чтобы установить реакцию процесса на приходящий сигнал, используется системный вызов *signal()*.
Неименованый канал (англ. pipe) - это объект, позволяющий реализовать односторонний канал между двумя процессами. Создается вызовом *pipe()*, который возвращает два файловых дескриптора, один на чтение, другой на запись. Один процесс пишет в файловый дескриптор на запись, другой читает из файлового дескриптора на чтение. При этом реального файла в файловой системе нет.
Предельный размер канала декларируется параметрами настройки ОС. Для создания – системный вызов *pipe*(). К неименованному каналу невозможен доступ по имени, существует в системе, пока существуют процессы, его использующие. Предназначен для синхронизации и организации взаимодействия родственных процессов.
IPC (Inter-Process Communication) предоставляет взаимодействующим процессам общие (разделяемые) ресурсы. Например, SytemV IPC предоставляет следующие типы разделяемых ресурсов:

• **Очередь сообщений** - это разделяемый ресурс, позволяющий организовывать очереди сообщений: один процесс может в эту очередь положить сообщение, а другой процесс - прочитать его.

• **Массив семафоров** - ресурс, представляющий собой массив из N элементов, где N задается при создании данного ресурса, и каждый из элементов является семафором IPC.

• **Общая (разделяемая) память** представляется процессу как указатель на область памяти, которая является общей для двух и более процессов.

[Маш-Маш, *Машбук. Операционные системы. Конспект лекций.*]

osn 19. Системы программирования. Основные компоненты систем программирования, схема их функционирования. Общая схема работы компилятора. Основные методы, используемые при построении компиляторов.

• **Системой программирования** называется комплекс программных средств, предназначенных для поддержки программного продукта на протяжении всего жизненного цикла этого продукта.

• **Этапы жизненного цикла** программного продукта: разработка, сопровождение, эксплуатация.

• **Этапы разработки программного продукта** анализ требований, проектирование, написание текста программ ("кодирование"), трансляция, компоновка/интеграция (связывание частей программы в единую систему), верификация (процесс проверки на правильность), тестирование (обнаружение дефектов посредством сравнения с эталоном) и отладка (процесс поиска причин дефектов и их устранение), документирование, внедрение, тиражирование, сопровождение (этот этап является повторением всех предыдущих).

• **Основные компоненты системы программирования:**

1. **Транслятор** переводит программы на исходном языке программирования в некоторый целевой язык. В случае, когда транслятор является компилятором, целевой язык — язык ассемблера, машинный код или байт-код некоторый виртуальной машины.
2. **Интерпретатор** выполняет программы без необходимости предварительной компиляции в машинный код. Может содержать **Just-in-Time** (**JIT**) компилятор, который транслирует программу в машинный код во время выполнения для оптимизации часто используемых участков кода. Если интерпретатор выполняет не исходный текст, а некоторое промежуточное представление (называемое байт-кодом), то интерпретатор называется виртуальной машиной. В этом случае для получения байт кода необходим отдельный транслятор.
3. **Макрогенератор или макропроцессор** выполняет преобразование текста программы, выполняя замену вызовов макроопределений их определениями. Если макропроцессор входит в состав транслятора, его называют **Препроцессором**. В этом случае он выполняется непосредственно трансляцией кода в целевой язык.
4. **Редактор текстов** используется для написания и редактирования исходного текста программ на языке программирования.
5. **Редактор связей** или **компоновщик** используется для связывания между собой (по внешним данным) объектных модулей, порождаемых компилятором, а также файлов библиотек (которые являются наборами обьектных модулей внутри одного файла), входящих в состав СП.
6. **Отладчик** используется для проверочных запусков программ и исправления ошибок. В нем обычно присутствуют такие возможности как интроспекция (получение типов данных) и анализ данных программы во время выполнения, остановка выполнения в определенной точке или при определенном условии, пошаговое выполнение программы и сопоставление машинного кода программы ее исходного кода при выполнении.
7. **Библиотеки стандартных программ** облегчают работу программиста, используются на этапе трансляции и исполнения.

- **Дополнительные компоненты систем программирования:**

  1. **Система контроля версий** для версионирования исходного текста ПП (git).
  2. **Средства конфигурирования** помогают создавать различные конфигурации ПП в зависимости от конкретных параметров системного окружения.
  3. **Система сборки** позволяет автоматизировать сборку ПО (maven)
  4. **Средства тестирования** помогают при составлении набора тестов, автоматического выполнения тестов.
  5. **Профилировщик** используется для анализа поведения программы и поиска критических участков кода, на которые затрачивается наиболее количество ресурсов (пример: анализ затрачиваемого на выполнение каждой функции времени, возможно в процентах от полного временем выполнения программы). Используется для оптимизации программ.
  6. **Справочная система** содержит справочные материалы по языку программирования и компонентам СП.
  7. **Инструменты для статического анализа кода** позволяет найти дефекты в программном коде без выполнения программы с помощью формальных методов.
  8. **Средства навигации по коду** позволяют более эффективно ориентироваться в коде и поддерживают, например, переход от вызова функции к ее определению.
  9. **Инструменты подготовки документации.** (Sphinx)
  10. **Система управление разработкой.**

В другой терминологии интерпретаторы также называют трансляторами.
В системе программирования должен обязательно присутствовать транслятор или интерпретатор. также могут присутствовать оба. В этом случае они либо взаимозаменяемы (Например, tiny c compiler может либо интерпретировать Си, либо компилировать), либо, если интерпретатор это виртуальная машина, должны использоваться одновременно (Например, java: javac+javavm).
Схема функционирования компилятора и *часто применяемые алгоритмы (методы):*

1. **Лексический анализ.** Лексический анализатор читает поток символов исходного текста программы и группирует эти символы в значащие последовательности – **лексемы**. *Используется разбор с использованием регулярных грамматик для преобразования потока символов в поток лексейм.*

2. **Синтаксический анализ.** Синтаксический анализатор формирует из последовательности лексем (токенов) промежуточное представление программы (синтаксическое дерево, AST, dop24). *Используются алгоритмы разбора грамматик, наиболее эффективные для данной грамматики, например, рекурсивный спуск, LL(1), LR(1) или, для отдельных частей грамматики, регулярные выражения.*

3. **Семантический анализ.** Семантический анализатор проверяет исходную программу на семантическую согласованность с определением языка (например, проверка типов). *Используются различные обходы графов (DFS, BFS) и их пометка*

4. **Генерация промежуточного кода.** Перевод AST в некоторое промежуточное представление, на котором удобнее производить оптимизации. *Часто применяется SSA-форма (single static assignment), в которой каждой переменной можно присвоить значение лишь единожды. Для ее построения используется обход графа для генерации трехадресного кода и алгоритм преобразования генерации ф-функций для преобразования в SSA.*

5. **Машинно-независимая оптимизация.** Серия трансформаций промежуточного кода с целью увеличения скорости его работы на целевом процессоре с сохранением семантики работы программы. *Используются различные алгоритмы работы с графами, см. билеты dop25, dop26.*

6. **Машинно-зависимая оптимизация и генерация кода.** Трансляция промежуточного представления компилятора в машинный код целевого процессора с применением наиболее эффективных для целевой машины инструкций и генерация объектного файла. *Также используются различные алгоритмы работы с графами. Для выбора инструкций — сопоставления подграфа с образцом (алгоритм пытается найти фрагменты графа, которые некоторой машинной инструкции, например для* $(x << n)|(x >> (32-n))$ *может быть использован циклический сдвиг вправо) и использования знаний компилятора для выбора наиболее эффективной инструкции для данной инструкции промежуточного кода.*

Общая схема функционирования основных компонентов СП на базе компилятора (на примере СП Си):

Общая схема функционирования основных компонентов СП на базе интерпретатора:

osn 20. Основные принципы объектно-ориентированного программирования. Реализация этих принципов в языке C++. Примеры.

Основные механизмы (постулаты) ООП:

1. **Инкапсуляция** – это *механизм*, который связывает данные с обрабатывающими их кодами и защищает и те, и другие от внешних воздействий и ошибочных действий. В объектно-ориентированном языке коды и данные могут быть связаны так, что вместе они создают автономный *черный ящик*. Внутри этого ящика содержатся все необходимые данные и коды. При связывании таким образом данных и кодов создается *объект*. Другими словами, объект представляет собой устройство, поддерживающее инкапсуляцию.

Внутри объекта коды или данные или и те, и другие могут иметь атрибут *private*, что делает их закрытыми для внешнего мира, или *public*, что открывает эти элементы объекта. Закрытые коды и данные известны и доступны только из других частей того же объекта. Другими словами, к закрытым кодам и данным нельзя обратиться ни из какого фрагмента программы, существующего вне объекта. Если же код или данные объявлены с атрибутом public, то доступ к ним открыт из любых частей программы, несмотря на то, что эти элементы определены внутри объекта. Обычно открытые элементы объекта используются для обеспечения контролируемого интерфейса с закрытыми элементами того же объекта.

В C++ базовой единицей инкапсуляции является **класс**. Класс определяет содержание объекта. Класс описывает как данные, так и коды, предназначенные для операций над этими данными. C++ использует спецификацию класса при конструировании *объектов*. Объекты являются экземплярами класса. Т.е. класс в сущности представляет собой набор чертежей, по которым строится объект.

Код и данные, составляющие класс, называются *членами* класса. Конкретно, *члены-переменные*, называемые также переменными экземпляра, – это данные, определенные в классе. *Члены-функции*, или просто функции – это коды, предназначенные для операций над данными.

2. **Полиморфизм** обозначает средство, позволяющее посредством единого интерфейса получить доступ к целому классу действий. Простым примером полиморфизма может служить рулевое колесо автомобиля. Рулевое колесо (интерфейс) остается одним и тем же, независимо от того, какой тип рулевого механизма используется в данном автомобиле. Другими словами, рулевое колесо действует одинаково для любых автомобилей: с непосредственным приводом на колеса, с гидравлическим усилителем или с реечной передачей. Поворот рулевого колеса влево заставляет автомобиль двигаться влево независимо от типа рулевого механизма. Достоинство единого интерфейса, очевидно, заключается в том, что если вы умеете пользоваться рулевым колесом, вы можете ездить на любых автомобилях.

Рассмотрим стек (список, действующий по правилу "первым вошел, последним вышел"). Пусть вашей программе требуется три стека различных видов. Один стек используется для целых чисел, другой для чисел с плавающей точкой, а третий для одиночных символов. Алгоритм реализации всех трех стеков будет одинаков, несмотря на то, что данные, заносимые в разные стеки, различаются.

В общем случае концепция полиморфизма часто выражается фразой "один интерфейс, много методов". Это означает возможность разработать обобщенный интерфейс для группы схожих действий.

Различают **статический** (реализуется на этапе компиляции с помощью перегрузки функций и операций), **динамический** (реализуется во время выполнения программы с помощью механизма виртуальных функций) и **параметрический** (реализуется на этапе компиляции с использованием механизма шаблонов) полиморфизм.

3. **Наследование** является процессом, который позволяет одному объекту приобретать свой-

ства другого объекта. Важность наследования определяется тем, что оно поддерживает концепцию иерархической классификации. Большая часть наших знаний построена по иерархическому принципу. Например, антоновка является частью класса яблок, который, в свою очередь, есть часть класса фруктов; фрукты же входят в более широкий класс пищевых продуктов. Класс пищевые продукты обладает определенными качествами (съедобность, пищевая ценность и т. д.), которые, логично предположить, приложимы и к его подклассу фрукты. В дополнение к этим качествам класс фрукты обладает специфическими характеристиками (сочность, сладость и др.), которые выделяют его среди других пищевых продуктов. Класс яблоки определяет качества, характерные для яблок (растут на деревьях, не являются тропическими продуктами и т. д.). Класс антоновка, в свою очередь, наследует все качества всех предшествующих классов и определяет лишь те качества, которые выделяют антоновку среди прочих яблок.

Если не пользоваться иерархией, то каждый объект должен был бы явно определять все свои характеристики. При использовании же наследования объект определяет лишь те качества, которые делают его уникальным в рамках его класса. Более общие качества он может наследовать от родительского класса. Таким образом, механизм наследования позволяет объекту быть специфическим экземпляром более общего класса.

Примеры на C++:

1. **Инкапсуляция**. Пример класса «*коробка*», инкапсулирующего данные и предоставляющего метод для вычисления объема.

```
class Box {
    int length;
    int width;
    int height;
public:
    int volume() const {
        return length * width * height;
    }
}
```

2. **Наследование**. Наследование свойств и поведения могут контролироваться с помощью квалификаторов доступа, задаваемых при наследовании: *public, protected, private*. В примере ниже класс C является наследником класса A.

```
class A {
public:
    virtual void f(int x) {
        cout << "A::f" << '\n';
    }
};

class C: public A {
public:
    void f(int x) {
        cout << "C::f" << '\n';
    }
};
```

3. **Полиморфизм.**

Статический полиморфизм реализуется с помощью перегрузки функций и операций. Под перегрузкой функций в C++ понимается описание в одной области видимости нескольких функций с одним и тем же именем.

```
void f(int x);
void f(double x);
```

Динамический полиморфизм реализуется с помощью механизма виртуальных методов. Механизм виртуальных методов заключается в том, что результат вызова виртуального метода с использованием указателя или ссылки зависит не от того, на основе какого типа создан указатель, а от типа объекта, на который он указывает. Тип данных (класс), содержащий хотя бы одну виртуальную функцию, называется **полиморфным типом (классом)**, а объект этого типа – **полиморфным объектом**. Во всех наследниках виртуальная функция остается таковой.
В примере ниже используются описанные выше классы A и C.

```
int main() {
    A a1;
    C c1;
    C *pc = &c1;
    pc->f(1); // C::f
    A *pa = pc;
    pa->f(1); // C::f
    pc = (C*) &a1;
    pc->f(1); // A::f
    return 0;
}
```

Чистая виртуальная функция — функция вида:
virtual <тип_возвращаемого_значения> имя_функции (формальные_параметры) = 0;
Такая форма записи функции означает, что данная функция (точнее, метод класса) не имеет тела, описывающего ее алгоритм.
Абстрактный класс — это класс, содержащий хотя бы одну чистую виртуальную функцию.
Параметрический полиморфизм позволяет применить один и тот же алгоритм к разным типам данных. При этом тип является параметром тела алгоритма. При обращении к функции-шаблону после имени функции в угловых скобках указываются фактические параметры шаблона – имена реальных типов или значения объектов.

```
template <class T> T max(T &x, T &y) {
    return x > y ? x : y;
}
```

[Шилдт, *C++. Шаг за шагом*, page 20-23]

osn 21. Базы данных. Основные понятия реляционной модели данных. Реляционная алгебра. Средства языка запросов SQL.

Основные понятия реляционной модели данных:

• Понятие **типа данных** в реляционной модели данных полностью соответствует понятию типа данных в языках программирования, состоит из трех основных компонентов: определение множества значений данного типа; определение набора операций, применимых к значениям типа; определение способа внешнего представления значений типа (литералов).

• **Домен** — допустимое потенциальное, ограниченное подмножество значений данного типа.

• Для уточнения термина отношение выделяются понятия заголовка отношения, значения отношения и переменной отношения. Пусть дана совокупность типов данных $T_1, T_2, \ldots, T_n$, называемых также доменами, не обязательно различных. Тогда n-арным **отношением** R, или отношением R степени n называют подмножество декартова произведения множеств $T_1, T_2, \ldots, T_n$.

• **Тело отношения** – это множество кортежей вида $\{< A_1, T_1, v_1 >, < A_2, T_2, v_2 >, \ldots, < A_n, T_n, v_n >\}$, где $v_i \in T_i$, A_i – столбцы (атрибуты) отношения.

Алгебра Кодда – основные реляционные операции

• При выполнении операции **объединения** ($UNION$) двух отношений производится отношение, включающее все кортежи, входящие хотя бы в одно из отношений-операндов.

• Операция **пересечения** ($INTERSECT$) двух отношений производит отношение, включающее все кортежи, входящие в оба отношения-операнда.

• Отношение, являющееся **разностью** ($MINUS$) двух отношений, включает все кортежи, входящие в отношение-первый операнд, такие, что ни один из них не входит в отношение, являющееся вторым операндом.

• При выполнении **декартова произведения** ($TIMES$) двух отношений производится отношение, кортежи которого являются конкатенацией (сцеплением) кортежей первого и второго операндов.

• Результатом **ограничения** ($WHERE$) отношения по некоторому условию является отношение, включающее кортежи отношения-операнда, удовлетворяющее этому условию.

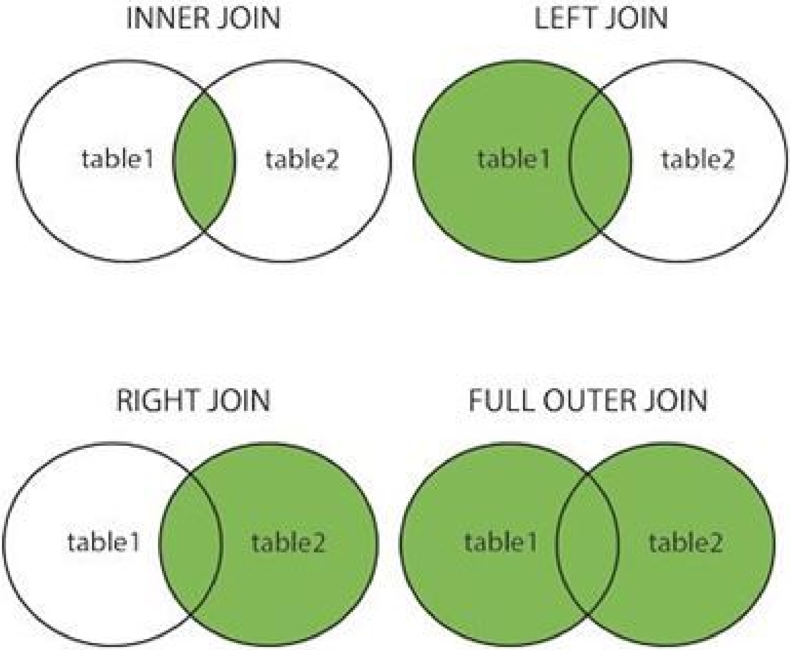
• При выполнении **проекции** ($PROJECT$) отношения на заданное подмножество множества его атрибутов производится отношение, кортежи которого производятся путем взятия соответствующих значений из кортежей отношения-операнда.

• При **соединении** ($JOIN$) двух отношений по некоторому условию образуется результирующее отношение, кортежи которого являются конкатенацией кортежей первого и второго отношений и удовлетворяют этому условию.

• У операции **реляционного деления** ($DIVIDE\ BY$) два операнда – бинарное и унарное отношения. Результирующее отношение состоит из унарных кортежей, включающих значения первого атрибута кортежей первого операнда таких, что множество значений второго атрибута (при фиксированном значении первого атрибута) включает множество значений второго операнда.

• Операция **переименования** (*RENAME*) производит отношение, тело которого совпадает с телом операнда, но имена атрибутов могут быть изменены.

• Операция **присваивания** (:=) позволяет сохранить результат вычисления реляционного выражения в существующем отношении БД.



Алгебра Кодда – специальные реляционные операции
Имеются важные частные случаи соединения – **эквисоединение** (*EQUIJOIN*) и **естественное соединение** (*NATURAL JOIN*).

• Операция соединения называется операцией **эквисоединения**, если условие соединения имеет вид (a = b), где a и b – атрибуты разных операндов соединения.

• Пусть AB обозначает объединение заголовков отношений A и B. Тогда **естественное соединение** A и B – это спроецированный на AB результат эквисоединения A и B по условию A.c = B.c.

Язык SQL
SQL — универсальный компьютерный язык, применяемый для создания, модификации и управления данными в реляционных базах данных. SQL основывается на реляционной алгебре. Язык SQL представляет собой совокупность операторов, инструкций и вычисляемых функций. Операторы SQL делятся на:

1. **операторы определения данных** (Data Definition Language, DDL):

   – *CREATE* создает объект БД (саму базу, таблицу, представление, пользователя и т. д.);

   – *ALTER* изменяет объект;

   – *DROP* удаляет объект.

2. **операторы манипуляции данными** (Data Manipulation Language, DML):

   – *SELECT* считывает данные, удовлетворяющие условиям;

   – *INSERT* добавляет новые данные;

   – *UPDATE* изменяет существующие данные;

   – *DELETE* удаляет данные.

3. **операторы определения доступа к данным** (Data Control Language, DCL):

   – *GRANT* предоставляет пользователю (группе) разрешения на определенные операции с объектом;

   – *REVOKE* отзывает ранее выданные разрешения;

   – *DENY* задает запрет, имеющий приоритет над разрешением.

4. **операторы управления транзакциями** (Transaction Control Language, TCL):

   – *COMMIT* применяет транзакцию;

   – *ROLLBACK* откатывает все изменения, сделанные в контексте текущей транзакции;

   – *SAVEPOINT* делит транзакцию на более мелкие участки.

Пример: Выбрать среднюю зарплату продавцов, которые обслуживают покупателей их штата ’CA’.

```sql
SELECT employee.last_name, employee.salary FROM
employee JOIN job using (job_id)
JOIN customer ON employee_id = salesperson_id
WHERE customer.state = 'CA' AND
job.function = 'SALESPERSON';
```

[Кузнецов, *Основы современных БД*]

osn 22. Виды параллельной обработки данных, их особенности. Компьютеры с общей и распределенной памятью. Производительность вычислительных систем, методы оценки и измерения.

Параллельная обработка данных имеет две разновидности: конвейерность и параллельность.

- **Параллельная обработка.** Увеличение количества независимо работающих устройств. Если некое устройство выполняет одну операцию за единицу времени, то тысячу операций оно выполнит за тысячу единиц. Система из N устройств ту же работу выполнит за 1000/N единиц времени (в идеальном случае).

- **Конвейерная обработка.** Усложнение самого устройства, чтобы на разных этапах могли находиться разные данные. Идея заключается в выделении отдельных этапов выполнения общей операции, причем каждый этап, выполнив свою работу, передавал бы результат следующему, одновременно принимая новую порцию входных данных. Получаем выигрыш в скорости обработки за счет совмещения прежде разнесенных во времени операций. Существует некоторая задержка (время разгона), для того, чтобы заполнить все этапы конвейера; когда он заполнен, происходит ускорение обработки.

Классификация многопроцессорных сетей по Флинну.
В контексте машины можно выделить два потока информации: **поток управления** (для передачи управляющих воздействий на конкретное устройство) и **поток данных** (циркулирующий между оперативной памятью и внешними устройствами). В связи с этим выделяют 4 основных класса: SISD (1 поток команд, 1 поток данных. "Традиционный" последовательный компьютер), SIMD (1 поток команд, много потоков данных, пример - векторные компьютеры), MISD (много п. ком., 1 п. данных), MIMD (много и потоков команд, и данных). Среди MIMD можно выделить системы с общей ОП и системы с распределенной памятью.

- **Компьютеры с общей памятью.**

В системе присутствует несколько равноправных процессоров, имеющих одинаковый доступ к единой памяти. Всё, кроме процессоров, в одном экземпляре: образ операционной системы, память, подсистема ввода-вывода и т.д. Все процессоры работают с единым адресным пространством. (+) относительная простота параллельного программирования; (–) сложность увеличения числа процессоров (роста производительности).

UMA – системы с однородным доступом к памяти (все процессоры имеют одинаковый доступ к памяти). SMP — есть общая шина, соединенная со всеми процессорами и с ОП.

NUMA (Non Uniform Memory Access) – память физически распределена, но логически общедоступна. Каждый вычислительный узел компьютера содержит процессор, локальную память, контроллер памяти и, быть может, некоторые устройства ввода/вывода. Контроллер памяти определяет, является ли запрос к памяти локальным или его необходимо передать удаленному узлу через коммутатор/шину. Проблема – синхронизация кэш.

ccNUMA (cache coherent NUMA). На аппаратном уровне решает проблему когерентности кэшей. Но остаются ограничения, связанные с централизацией – использованием системной шины, возникают ограничения, связанные с cc-архитектурой: есть системные потоки служебной информации, что ведет к дополнительным накладным расходам — загрузке общей шины служебной информацией

- **Компьютеры с распределенной памятью.**

Состоят из вычислительных узлов, каждый из которых является полноценным компьютером со своей памятью, ОС, устройствами ввода-вывода и т.п., взаимодействующих друг с другом через коммуникационную среду. (–) сложность параллельного программирования; (+) относительная простота увеличения числа процессоров (роста производительности).

Основные понятия для распределённых систем

• **Длина критического пути** – минимальное количество элементарных связей, которые нужно пройти для коммутации двух самых удаленных процессоров. что такое коммутация процессов?

• **Связность** – минимальное количество элементарных связей, которые нужно удалить, чтобы схема распалась на две несвязанные части.

• **Сложность** — общее количество необходимых элементарных связей.

• **Латентность и пропускная способность сети** – основные параметры коммуникационной сети кластеров.

Латентность — время начальной задержки при посылке сообщений.

Пропускная способность сети определяется скоростью передачи информации по каналам связи и измеряется объёмом передаваемой информации в единицу времени. Время на передачу сообщения по коммуникационной сети вычисляется по следующей формуле: $t_N = t_0 + \frac{N}{S}$, где t_0 – латентность, N – объём передаваемых данных, S – пропускная способность сети.

Схема коммутации	Длина критического пути	Связность	Сложность
линейка	$p-1$	1	$p-1$
кольцо	$\lvert\frac{p}{2}\rvert$	2	p
звезда	2	1	$p-1$
полносвязная топология	1	$p-1$	$\frac{p(p-1)}{2}$

p – количество процессов

Методы оценки производительности.

• **Пиковая производительность** – теоретический предел производительности для данного компьютера. Пиковая производительность компьютера вычисляется как сумма пиковых производительностей всех входящих в него вычислительных устройств (процессоров, ускорителей и т.д.). Даёт нижнюю оценку времени выполнения программы. Производительность компьютера на любой реальной программе никогда не только не превысит этого порога, но и не достигнет его точно.

• **Реальная производительность** – производительность данного компьютера на конкретном приложении. Традиционно используются два способа оценки производительности компьютера. Один из них опирается на число команд, выполняемых компьютером в единицу времени. Единица измерения – **MIPS** (Million Instructions Per Second). Второй способ – число вещественных операций, выполняемых компьютером в единицу времени – **Flops** (Floating point operations per second).

Популярные тесты:

– **LINPACK**: измерение производительности при обработке чисел с плавающей точкой. Задача: решение СЛАУ.

– **Graph500**: нагружает коммуникационную систему компьютера и не зависит от количества исполняемых в секунду операций с числами с плавающей точкой. Задача: поиск в ширину в большом ненаправленном графе.

– **NAS Parallel Benchmark**: набор различных задач для проверки производительности.

osn 25. Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения и системы. Фундаментальная система решений. Определитель Вронского.

Линейным дифференциальным оператором n-го порядка называется оператор $\mathcal{L}$, **линейным лифференциальным уравнением** n-го порядка называется $f(t)$:

$$\mathcal{L}y = f(t) = a_0(t)y^{(n)}(t) + a_1(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1}(t)y'(t) + a_n(t)y(t),$$

где $\mathcal{L}y(t) \in C[a,b]$, $f(t)$ – комплекснозначная функция,
$a_k(t) \in C[a,b], a_k(t) \in R\ a_0(t) \neq 0, t \in [a,b]$,
$y(t) \in C^{(n)}[a,b]$ (n раз диф-ма на отрезке $[a,b]$),
Если $f(t) = 0$ на $[a,b]$, то уравнение называется **однородным**, иначе **неоднородным**.
Теорема 1.: Если функции $y_k(t), k = 1..m$ являются решениями уравнений $\mathcal{L}y_k = f_k(t)$, то функция $y(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} c_k y_k(t)$, где c_k – комплексные постоянные, – является решением уравнения $\mathcal{L}y = f(t)$, где $f(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} c_k f_k(t)$.

Доказательство. $\mathcal{L}y = \mathcal{L}\displaystyle\sum_{k=1}^{m} c_k y_k(t) = \sum_{k=1}^{m} c_k \mathcal{L}y_k(t) = \sum_{k=1}^{m} c_k f_k(t) = f(t),\ t \in [a,b]$ □

Следствие: Линейная комбинация решений однородного уравнения является решением однородного уравнения. Разность двух решений неоднородного уравнения с одинаковой правой частью есть решение однородного уравнения
Теорема 2 Решение задачи Коши $\mathcal{L}y = f(t),\ y^{(k)}(t_0) = y_{0k},\ k = \overline{0, n-1}$ представимо в виде $y(t) = v(t) + w(t)$, где функция $v(t)$ является решением задачи Коши для *неоднородного* уравнения $\mathcal{L}v = f(t)$ с нулевыми начальными условиями $v^{(k)}(t_0) = 0, k = \overline{0, n-1}$, а функция $w(t)$ является решением задачи Коши для *однородного* уравнения $\mathcal{L}w = 0$ с ненулевыми начальными условиями $w^{(k)}(t_0) = y_{0k},\ k = \overline{0, n-1}$.

Доказательство. Сумма $y(t) = v(t) + w(t)$ удовлетворяет неоднородому ур-ю в ситу теоремы 1. Для начальных условий имеем равенства $y^{(k)}(t_0) = v^{(k)}(t_0) + w^{(k)}(t_0) = 0 + y_{0k} = y_{0k},\ k = 1..n-1$ □

Скалярные функции $\varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t)$ называются **линейно зависимыми** на отрезке $[a,b]$, если найдутся такие комплексные константы $c_k \in \mathbb{C},\ k = \overline{1, m}, \displaystyle\sum_{k=1}^{m} |c_k| > 0$, что справедливо равенство $\displaystyle\sum_{k=0}^{m} c_k \varphi_k(t) = 0,\ \forall t \in [a,b]$. Если равенство выполнено только для $c_k = 0,\ k = 1..n$, то функции **линейно независимы**.

Определителем Вронского (вронскианом) системы функций $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_m(t)$, где $\varphi_i(t) \in C^{(m-1)}[a, b]$, называется зависящий от переменной $t \in [a, b]$ определитель

$$W[\varphi_1, \ldots, \varphi_m](t) = \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \ldots & \varphi_m(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) & \ldots & \varphi_m'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(m-1)}(t) & \varphi_2^{(m-1)}(t) & \ldots & \varphi_m^{(m-1)}(t) \end{vmatrix}$$

Теорема 3: если система скалярных функций $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_m(t)$, где $\varphi_i(t) \in C^{(m-1)}[a, b]$, является линейно зависимой на отрезке $[a, b]$, то определитель Вронского этой системы тождественно равен нулю на этом отрезке: $W[\varphi_1, \ldots, \varphi_m](t) \equiv 0, \forall t \in [a, b]$.

Доказательство. Так как функции $\varphi_k(t)$ линейно зависимы на $[a, b]$, то существует нетривиальный набор констант $c_1, \ldots, c_m$, для которого на отрезке $[a, b]$ справедливо равенство выше. В этом равенстве допустимо почленное дифференцирование до порядка $m - 1$ включительно:

$$c_1\varphi_1^{(k)}(t) + \cdots + c_m\varphi_m^{(k)}(t) = 0, \; k = \overline{0, m-1}, \; t \in [a, b].$$

Отсюда следует, что вектор-столбцы определителя Вронского линейно зависимы для всех $t \in [a, b]$. Следовательно, этот определитель равен нулю для всех $t \in [a, b]$. □

Замечание. Из ЛНЗ не следует, что $W \neq 0$, контрпример: $\varphi_1(t) = t^2, \;\; \varphi_2(t) = \{-t^2, t < 0; t^2, t \geq 0\}, W \equiv 0$, но на $[-1, 1]$ функции ЛНЗ.
Теорема 4: Для решений $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ линейного однородного уравнения на отрезке $[a, b]$ справедлива следующая **альтернатива**:
либо $W[y_1, \ldots, y_n](t) = 0$ на $[a, b]$ и функции $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ линейно зависимы на этом отрезке;
либо $W[y_1, \ldots, y_n](t) \neq 0, \forall t \in [a, b]$ и функции $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ линейно независимы на $[a, b]$.
Фундаментальной системой решений линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка на отрезке $[a, b]$ называется система из n линейно независимых на данном отрезке решений этого уравнения.
Общим решением линейного однородного (неоднородного) дифференциального уравнения n-го порядка называется зависящее от n произвольных постоянных решение этого уравнения такое, что любое другое решение уравнения может быть получено из него в результате выбора некоторых значений этих постоянных.
Теорема 5: У любого линейного однородного уравнения $\mathcal{L}y = 0$ существует фундаментальная система решений на $[a, b]$.

Доказательство. Рассмотрим постоянную матрицу B с элементами $b_{ij}, \; i, j = 1, 2, \ldots, n$ такую, что $detB \neq 0$. Обозначим через $y_j(t)$ решения задачи Коши для уравнения $\mathcal{L}y = 0$ с начальными условиями:

$$y_j(t_0) = b_{1j}, \; y'(t_0) = b_{2j}, \ldots, \; y_{n-1}(t_0) = b_{nj}, j = 1, 2, \ldots, n.$$

По теореме существования и единственности решения задачи Коши для линейного дифференциального уравнения n-го порядка функции $y_j(t)$ существуют и определены однозначно. Составленный из них определитель Вронского $W[y_1, \ldots, y_n](t)$, в силу начальных условий, таков, что $W[y_1, \ldots, y_n](t_0) = detB \neq 0$. Следовательно, по предыдущей теореме он не равен нулю ни в одной точке отрезка $[a, b]$. Значит, они образуют фундаментальную систему решений уравнения $\mathcal{L}y = 0$. □

Теорема 6: Пусть $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ — фундаментальная система решений линейного однородного уравнения уравнения $\mathcal{L}y = 0$ на отрезке $[a, b]$. Тогда общее решение этого уравнения на рассматриваемом отрезке имеет вид:

$$y_{OO}(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \dots + c_n y_n(t), \ \forall c_j \in \mathbb{C}. \tag{1}$$

Доказательство. Так как линейная комбинация решений однородного уравнения $\mathcal{L}y = 0$ является решением этого уравнения, то при любых значениях постоянных c_k функция $y_{OO}(t)$, определяемая формулой (1), является решением линейного однородного дифференциального уравнения $\mathcal{L}y = 0$.
Покажем теперь, что любое решение уравнения $\mathcal{L}y = 0$ может быть получено из (1) в результате выбора значений постоянных c_k. Пусть $\tilde{y}(t)$ — некоторое решение уравнения $\mathcal{L}y = 0$. Рассмотрим систему алгебраических уравнений относительно неизвестных c_k:

$$\begin{cases} c_1 y_1(t_0) + c_2 y_2(t_0) + \dots + c_n y_n(t_0) = \tilde{y}(t_0) \\ c_1 y_1'(t_0) + c_2 y_2'(t_0) + \dots + c_n y_n'(t_0) = \tilde{y}'(t_0) \\ \dots \\ c_1 y_1^{(n-1)}(t_0) + c_2 y_2^{(n-1)}(t_0) + \dots + c_n y_n^{(n-1)}(t_0) = \tilde{y}^{(n-1)}(t_0) \end{cases} \tag{2}$$

где t_0 — некоторая точка отрезка $[a, b]$. Определитель этой системы равен определителю Вронского в точке t_0 и не равен 0, так как решения $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ линейно независимы. Следовательно, система (2) имеет единственное решение $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \dots, \tilde{c}_n$.

Рассмотрим функцию $\hat{y}(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} \tilde{c}_k y_k(t)$.

Эта функция является решением уравнения $\mathcal{L}y = 0$. Так как постоянные $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \dots, \tilde{c}_n$ представляют собой решение системы (2), то функция $\hat{y}(t)$ такова, что $\hat{y}^{(k)}(t_0) = \tilde{y}^{(k)}(t_0)$, $k = 0, 1, \dots, n-1$.
Следовательно, функции $\hat{y}(t)$ и $\tilde{y}(t)$ являются решениями уравнения $\mathcal{L}y = 0$ и удовлетворяют одним и тем же начальным условиям в точке $t0$. По теореме о существовании и единственности решения задачи Коши эти функции должны совпадать: $\hat{y}(t) = \tilde{y}(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} \tilde{c}_k y_k(t)$ □

Теорема 7: Пусть $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ — фундаментальная система решений линейного однородного уравнения $\mathcal{L}y = 0$ на отрезке $[a, b]$, $y_H(t)$ — некоторое (частное) решение неоднородного уравнения $\mathcal{L}y = f(t)$. Тогда общее решение линейного неоднородного уравнения $\mathcal{L}y = f(t)$ на рассматриваемом отрезке имеет вид:

$$y_{OH}(t) = y_H(t) + y_{OO}(t) = y_H(t) + c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \dots + c_n y_n(t), \tag{3}$$

где $c_1, c_2, \dots, c_n$ — произвольные комплексные постоянные.

Доказательство. Для любого набора констант $c_j \in \mathbb{C}$ формула (3) определяет решение линейного неоднородного уравнения $\mathcal{L}y = f(t)$ в силу линейности уравнения. Согласно определению общего решения осталось показать, что выбором констант в (3) можно получить любое наперед заданное решение $\mathcal{L}y = f(t)$, то есть для любого решения $\tilde{y}(t)$ неоднородного уравнения $\mathcal{L}y = f(t)$ найдутся константы $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \dots, \tilde{c}_n$ такие, что на отрезке $[a, b]$ будет выполнено равенство

$$\tilde{y}(t) = y_H(t) + \tilde{c}_1 y_1(t) + \tilde{c}_2 y_2(t) + \dots + \tilde{c}_n y_n(t). \tag{4}$$

Пусть $\tilde{y}(t)$ — решение неоднородного уравнения $\mathcal{L}y = f(t)$. Разность $y(t) = \tilde{y}(t) - y_H(t)$ двух решений линейного неоднородного уравнения $\mathcal{L}y = f(t)$ является решением однородного уравнения $\mathcal{L}y = 0$. По теореме об общем решении линейного однородного уравнения найдутся комплексные константы $\tilde{c}_j$ такие, что на рассматриваемом отрезке выполнено равенство $\tilde{y}(t) = \tilde{c}_1 y_1(t) + \tilde{c}_2 y_2(t) + \cdots + \tilde{c}_n y_n(t)$, а вместе с ним и искомое равенство (4). $\square$

[А. М. Денисов, *Обыкновенные дифференциальные уравнения, часть 1*, page 65-73]

osn 26. Теоремы существования и единственности решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной.

Пусть функция $f(t, y)$ определена и непрерывна в прямоугольнике $\Pi = \{(t, y) : |t - t_0| \leqslant T, |y - y_0| \leqslant A\}$.
Рассмотрим на отрезке $[t_0 - T; t_0 + T]$ дифференциальное уравнение с условием:

$$y'(t) = f(t, y(t)) \tag{1}$$

$$y(t_0) = y_0 \tag{2}$$

Требуется определить функцию $y(t)$, удовлетворяющую уравнению (1) и условию (2).
Эта задача называется **задачей с начальным условием или задачей Коши**. Рассмотрим отрезок $[t_1, t_2]$ такой, что $t_0 - T \leqslant t_1 < t_2 \leqslant t_0 + T,\ t_0 \in [t_1, t_2]$.
Опр. Функция $y(t)$ называется **решением задачи Коши** (1), (2) на отрезке $[t_1, t_2]$, если $y(t) \in C^1[t_1, t_2],\ |y(t) - y_0| \leqslant A$ для $t \in [t_1, t_2],\ y(t)$ удовлетворяет уравнению (1) для $t \in [t_1, t_2]$ и (2).
Рассмотрим на отрезке $[t_0 - T, t_0 + T]$ уравнение относительно неизвестной функции $y(t)$:

$$y(t) = y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, y(\tau))d\tau \tag{3}$$

Лемма 1. Функция $y(t)$ является решением задачи Коши (1), (2) на отрезке $[t_1, t_2]$ $\iff$ когда $y(t) \in C[t_1, t_2],\ |y(t) - y_0| \leqslant A$ для $t \in [t_1, t_2]$ и $y(t)$ удовлетворяет уравнению (3) для $t \in [t_1, t_2]$.

Доказательство. ($\Longrightarrow$) Пусть функция $\overline{y}(t)$ является решением задачи с начальным условием (1), (2) на отрезке $[t_1, t_2]$. Из определения решения следует, что $\overline{y}(t) \in C[t_1, t_2],\ |\overline{y}(t) - y_0| \leqslant A$ для $t \in [t_1, t_2]$. Покажем, что $\overline{y}(t)$ удовлетворяет уравнению (3) для $t \in [t_1, t_2]$. Интегрируя (1) от t_0 до t получим:

$$\int\limits_{t_0}^{t} \overline{y}'(\tau)d\tau = \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, \overline{y}(\tau))d\tau,\ t \in [t_1, t_2]$$

Учитывая условие (2), имеем:

$$\overline{y}(t) = y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, \overline{y}(\tau))d\tau,\ t \in [t_1, t_2]$$

Следовательно, функция $\overline{y}(t)$ удовлетворяет интегральному уравнению (3) при $t \in [t_1, t_2]$.
($\Longleftarrow$) Пусть функция $\overline{y}(t)$ такова, что $\overline{y}(t) \in C[t_1, t_2],\ |y(t) - y_0| \leqslant A$ для $t \in [t_1, t_2]$ и $\overline{y}(t)$ удовлетворяет уравнению (3) для $t \in [t_1, t_2]$, то есть:

$$\overline{y}(t) = y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, \overline{y}(\tau))d\tau,\ t \in [t_1, t_2] \tag{4}$$

Покажем, что $y(t)$ является решением задачи с начальным условием (1), (2).
Положив в (4) $t = t_0$, получим, что $\overline{y}(0) = y_0$. Следовательно условие (2) выполнено. Так как функция $\overline{y}(t)$ непрерывна на $[t_1, t_2]$, то правая часть равенства (4) непрерывно дифференцируема на $[t_1, t_2]$ как интеграл с переменным верхним пределом t от непрерывной функции $f(\tau, \overline{y}(\tau)) \in C[t_1, t_2]$. Следовательно, $\overline{y}(t)$ непрерывно дифференцируема на $[t_1, t_2]$. Дифференцируя (4), получим, что $\overline{y}(t)$ удовлетворяет (1). $\square$

Опр. Функция $f(t, y)$, заданная в прямоугольнике П, *удовлетворяет в П условию Липшица* по y, если $|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leqslant L|y_1 - y_2|$, $\forall (t, y_1), (t, y_2) \in \Pi$, где L — положительная постоянная.
Лемма Гронуолла-Беллмана. Пусть функция $z(t) \in C[a, b]$ и такова, что $0 \leqslant z(t) \leqslant c + d\left|\int\limits_{t_0}^{t} z(\tau)d\tau\right|$, $t \in [a, b]$, где постоянная c неотрицательна, постоянная d положительна, а t_0 — произвольное фиксированное число на отрезке $[a, b]$. Тогда $z(t) \leqslant ce^{d|t-t_0|}$, $t \in [a, b]$.
Теорема (единственности). Пусть функция $f(t, y)$ непрерывна в П и удовлетворяет в П условию Липшица по y. Если $y_1(t)$, $y_2(t)$ — решения задачи Коши (1), (2) на отрезке $[t_1, t_2]$, то $y_1(t) = y_2(t)$ для $t \in [t_1, t_2]$.

Доказательство. Так как $y_1(t)$ и $y_2(t)$ — решения задачи Коши (1), (2), то из Леммы 1 следует, что они являются решениями интегрального уравнения (3).
То есть:

$$y_1(t) = y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, y_1(\tau))d\tau, \ t \in [t_1, t_2],$$

$$y_2(t) = y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, y_2(\tau))d\tau, \ t \in [t_1, t_2].$$

Вычитая второе уравнение из первого и оценивая разность по модулю и используя условие Липшица, получаем: $|y_1(t) - y_2(t)| = \left|\int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, y_1(\tau))d\tau - \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, y_2(\tau))d\tau\right| \leq \left|\int\limits_{t_0}^{t} |f(\tau, y_1(\tau)) - f(\tau, y_2(\tau))|d\tau\right| \leq L\left|\int\limits_{t_0}^{t} |y_1(\tau) - y_2(\tau)|d\tau\right|$
Обозначив $z(t) = |y_1(t) - y_2(t)|$, перепишем последнее неравенство следующим образом:
$0 \leqslant z(t) \leqslant L\left|\int\limits_{t_0}^{t} z(\tau)d\tau\right|$, $t \in [t_1, t_2]$.
Применяя лемму Гронуолла-Беллмана с $c = 0$ и $d = L$, имеем $z(t) = 0$, $t \in [t_1, t_2]$. Следовательно, $y_1(t) = y_2(t)$, $t \in [t_1, t_2]$. $\square$

Теорема (существования) ((локальная)). Пусть функция $f(t, y)$ непрерыв на в П, удовлетворяет в П условию Липшица по y и $|f(t, y)| \leq M, (t, y) \in \Pi$. Тогда на

отрезке $[t_o - h, t_0 + h]$, где $h = min\{T, \dfrac{A}{M}\}$, существует функция $y(t)$ такая, что $y(t) \in C^1[t_0 - h, t_0 + h], |y(t) - y_0| \leq A, t \in [t_0 - h, t_0 + h]$,
$y'(t) = f(t, y(t)), t \in [t_0 - h, t_0 + h]\ y(t_0) = y_0$

Следует отметить, что мы можем доказать теорему существования не на всем исходном отрезке $[t0 - T, t0 + T]$*, а на некотором, вообще говоря, меньшем. Поэтому эта теорема часто называется* **локальной** *теоремой существования решения задачи Коши.*

[А. М. Денисов, *Обыкновенные дифференциальные уравнения, часть 1*, page 25-30]

osn 27. Функции алгебры логики. Реализация их формулами. Совершенная дизъюнктивная нормальная форма.

Пусть E_2 = 0,1 - основное множество. Тогда $E_2^n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n)\} \mid \forall i, a_i \in E_2\}$. Тогда всюду определенной булевой функцией назовем отображение $f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$: $E_2^n \to E_2$. Такую функцию можно задать таблично, а можно как суперпозицию других, более простых функций. Например, для n=1:

x	0	1	x	$\overline{x}$
0	0	1	0	1
1	0	1	1	0

При этом функция 0 называется константным нулем, функция 1 - константной единицей, функция x - тождественной, а функция $\overline{x}$ - отрицанием x.

Для n = 2:

x	y	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
0	0	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	1	0	1	1	0	0

При этом: f_1 - дизъюнкция $f_1 = x \vee y$
f_2 - конъюнкция $f_2 = x \wedge y$
f_3 - сложение по модулю два $f_3 = x \oplus y$
f_4 - импликация $f_4 = x \to y$
f_5 - эквивалентность $f_5 = x \equiv y$
f_6 - штрих Шеффера $f_6 = x \mid y$
f_7 - стрелка Пирса $f_7 = x \downarrow y$

Лемма (о числе слов): В алфавите $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$ из r букв можно построить ровно r^m различных слов длины m.

Доказательство. Проведем индукцию по m. Для $m = 1$ утверждение очевидно. Пусть утверждение леммы верно для $m-1$, то есть существует ровно $r^{(m-1)}$ различных слов длины $m-1$. Для каждого такого слова длины $m-1$ существует ровно r возможностей добавить одну букву в конец. Так как всего слов длины $m-1$ — $r^{(m-1)}$, то различных слов длины m получится r*$r^{(m-1)} = r^m$. □

👁 таблицу некоторой функции алгебры логики от n переменных:

x_1	x_2	...	x_n	f
0	0	...	0	a_1
0	0	...	1	a_2
...	...	...	...	...
1	1	...	1	a_{2_n-1}

Для ее задания необходимо и достаточно определить ее значения на 2^n наборах. Так, получим, что всего различных функций от n переменных столько, сколько существует различных наборов из нулей и единиц длины 2^n, то есть 2^{2^n}.

Переменная x_i называется **существенной** переменной функции алгебры логики $f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если существуют такие $(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n)$, что
$f_n(a_1, \ldots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \ldots, a_n) \neq f_n(a_1, \ldots, a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \ldots, a_n)$
Такие наборы, отличающиеся лишь одной переменной x_i, называются **соседними** по x_i. В

противном случае переменная x_i называется **фиктивной**.
Если x_i - фиктивная переменная функции f, то функция f однозначно определяется некоторой функцией $g_n(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$. Таблицу любой функции можно расширить путем введения новых фиктивных переменных. Две функции алгебры логики называются равными, если одну из них можно получить путем добавления и изъятия любого числа фиктивных переменных. Пусть имеется некоторое множество функций:
$A = \{f_1(\ldots), f_2(\ldots), \ldots, f_n(\ldots)\}$
Введем понятие **формулы** над A:

1. Любая функция из A называется формулой над A.

2. Если $f(x_1, x_2, ..., x_n) \in A$ и для любого iH_i - либо переменная, либо формула над A, то выражение вида f(H_1, H_2, ..., H_n) - формула над A.

3. Только те объекты называются формулами над A, которые можно построить с помощью пунктов 1 и 2.

Основные эквивалентности:

- Коммутативность:

$x \vee y = y \vee x$
$yx = xy$
$x + y = y + x$
$x \equiv y = y \equiv x$

- Ассоциативность

$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z) = x \vee y \vee z$
$xyz = (xy)z = x(yz)$
$x + y + z = (x + y) + z = x + (y + z)$

- Дистрибутивность

$(x + y) \wedge z = (x \wedge z) + (y \wedge z)$
$(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$
$(x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z)$

- Закон снятия двойного отрицания

$\overline{\overline{x}} = x$

- Правила де Моргана:

$\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}$
$\overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}$

- Законы поглощения:

$x \vee x = x$
$x \wedge x = x$
$x \vee \overline{x} = 1$
$x \wedge \overline{x} = 0$
$x \vee 1 = 1$
$x \wedge 1 = x$
$x \vee 0 = x$
$x \wedge 0 = 0$

• остальные формулы:
$x \mid y = \overline{xy}$
$x \downarrow y = \overline{x \vee y}$
$x \to y = \overline{x} \vee y$
$x + y = (x \wedge \overline{y}) \vee (y \wedge \overline{x})$
$x \sim y = \overline{x + y} = (xy) \vee (\overline{xy})$

Приоритет конъюнкции выше, чем приоритеты дизъюнкции и суммы по модулю два.
x в степени σ называется функция $x^\sigma = x$, если $\sigma = 1$; $x^\sigma = \overline{x}, \sigma = 0$.

Теорема о разложении функции алгебры логики по переменным: $\forall$ функции алгебры логики $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\forall k \in [1, n]$ справедливо следующее равенство:
$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$
$$= \bigvee_{(\sigma_1, \ldots, \sigma_k) \in E^k} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \ldots x_k^{\sigma_k} f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n)$$

Доказательство. $\forall$ набора $a = (a_1, \ldots, a_n)$ вычислим значение правой части на этом наборе. Как только один из сомножителей будет равен 0, вся конъюнкция обратится в 0. Таким образом, из ненулевых конъюнкций останется лишь одна — та, в которой $a_i = \sigma_i$ и $\bigvee a_1^{\sigma_1} a_2^{\sigma_2} \ldots a_n^{\sigma_n} f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_n) = 0 \vee 0 \vee \ldots \vee 0 \vee a_1^{a_1} a_2^{a_2} \ldots a_n^{a_n} f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$
Так как $x^x = 1$, указанное выражение равно $f(a_1, \ldots, a_n)$. □

Литерал – это переменная или отрицание переменной.
Конъюнкция – любое произведение нескольких литералов, не содержащее одинаковых и противоположных литералов.
Дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ) – дизъюнкция нескольких различных конъюнкций (одна отдельная конъюнкция – тоже ДНФ).
Совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ) – ДНФ, в каждой конъюнкции которой есть литерал каждой переменной.

Теорема о совершенной дизъюнктивной нормальной форме: $\forall$ функции алгебры логики $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, отличной от тождественного нуля, справедливо следующее представление:
$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigvee x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \ldots x_n^{\sigma_n}$

Доказательство. Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ отлична от тождественного нуля. Разложим данную функция по $k = n$ переменным:
$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigvee x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \ldots x_n^{\sigma_n} f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$
при этом $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) \in E_2^n$.

Это может быть переписано в эквивалентном виде:
$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigvee_{(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) : f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = 1} x_1^{\sigma_1} \ldots x_n^{\sigma_n}$$
Это представление называется **СДНФ** □

osn 28. Схемы из функциональных элементов и простейшие алгоритмы их синтеза. Оценка сложности схем, получаемых по методу Шеннона.

Орграф – это ориентированный граф.
Вершины орграфа, в которые не входит ни одной дуги, называются **истоками**.
Орграф называется **ациклическим**, если в нем нет ориентированных циклов.
Систему Б = g_1, g_2, ..., g_m, где все g_i — функции алгебры логики, будем называть **базисом функциональных элементов**.
Орграф называется **упорядоченным**, если для каждой вершины v_i, в которую входит k_i дуг, задан порядок e_1, e_2, ..., e_{k_i} этих дуг.

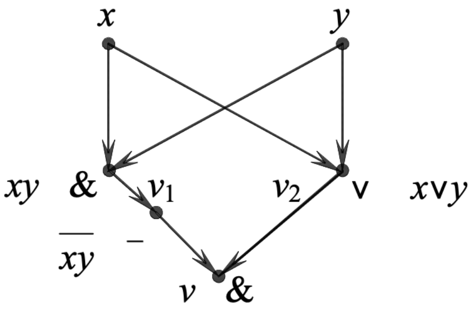
Схемой из функциональных элементов в базисе Б называется ациклический упорядоченный орграф, в котором:

- каждому истоку приписана некоторая переменная, причем разным истокам приписаны разные переменные (истоки при этом называются входами схемы, а приписанные им переменные — входными переменными);

- каждой вершине, в которую входят k $\geq$ 1 дуг, приписана функция из базиса Б, зависящая от k переменных(вершина с приписанной функцией при этом называется **функциональным элементом**);

- некоторые вершины выделены как **выходы**.

Сложностью схемы из функциональных элементов называется число функциональных элементов в схеме (число внутренних вершин).
Пример:
Полусумматор Пусть v и v_1 — выходы на рисунке, f_v = x∧y ∧ (x ∨ y)= x + y ; f_{v_1} = x∧y .
Сложность (число элементов) полусумматора равна 4.



Полусумматор Σ′

Важные ФАЛ и системы ФАЛ:

- Мультиплексорная ФАЛ μ_n порядка n

$$\mu(\underbrace{x_1, \ldots, x_n}_{\text{адресные}}, \underbrace{y_0, \ldots, y_{2^n-1}}_{\text{информационные}}) = \bigvee_{\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)} x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} y_{\nu(\alpha)},$$

где $\nu(\alpha)$ – перевод двоичного числа α в десятичное.

Реализуется мультиплексором.

- Универсальная система $\vec{P}_2(n)$ порядка n — содержит все ФАЛ от n переменных. Реализуется универсальным многополюсником.

Лемма. Для каждого натурального n существует СФЭ над базисом B $U_n \in U_B^C$(множество всех схем на базисом B), которая реализует систему ФАЛ $\vec{P}_2(n)$ и сложность которой равна $2^{2^n} - n$.

Доказательство. В силу полноты базиса в U_B^C существует система СФЭ Σ от БП $x_1, \ldots, x_n$, реализующая систему ФАЛ $\vec{P}_2(n)$. Искомая СФЭ U_n является строго приведённой СФЭ, которая эквивалентна Σ и получается из неё в результате операций присоединения эквивалентных вершин и удаления висячих вершин. Действительно, из построения следует, что число всех вершин СФЭ U_n, включая n её входов, равно 2^{2^n} и поэтому $L(U_n) = 2^{2^n} - n$ (вычитаем n входов, которые автоматически реализуют функции $x_1, \ldots, x_n$). □

Следствие. $L_B^C(\vec{P}_2(n)) \leqslant 2^{2^n} - n$.

Базис $B_0 = \{\&, \vee, \neg\}$

Определения сложности.
Сложность ФАЛ f: $L_B(f) = \min\limits_{\substack{\text{СФЭ } \Sigma \in U_B^C \\ \text{реализующие } f}} L(\Sigma)$
Функция Шеннона: $L_B(n) = \max\limits_{f \in P_2(n)} L_B(f)$

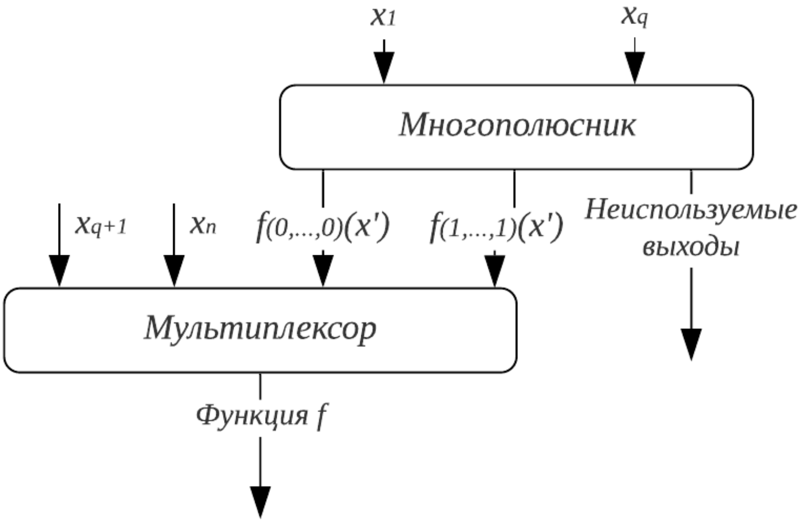
Синтез по совершенной ДНФ
Совершенная ДНФ $f(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee\limits_{\sigma \in N_f} x_1^{\sigma_1} \& \ldots \& x_n^{\sigma_n}$, где N_f — все наборы σ, на которых $f(\sigma) = 1$.
Совершенная ДНФ — формула в B_0, значит существует СФЭ Σ_f над базисом B_0, которая реализует f.
Тогда $L(\Sigma_f) \leqslant \underbrace{2^n}_{1}(\underbrace{n-1}_{2} + \underbrace{n}_{3}) + \underbrace{2^n - 1}_{4}$, где 1 — верхняя оценка $|N_f|$, т.е. количества дизъюнктов в овершенной ДНФ, 2 — количество конъюнкций в каждом дизъюнкте, 3 — верхняя оценка количества отрицаний в дизъюнкте, 4 — оценка количества дизъюнкций между дизъюнктами. СФЭ — частный случай квазидеревьев, которые эквивалентны формулам, поэтому $L^C(n) \leqslant L^\Phi(n)$ Так получаем верхнюю оценку функции Шеннона: $L^C(n) \leqslant L(\Sigma_f) \leqslant n \cdot 2^{n+1}$.

Метод Шеннона.
Выбираем параметр q, $1 \leqslant q \leqslant n$.
Используется **разложение Шеннона**:

$$f(\underbrace{x_1, \ldots, x_q}_{x'}, \underbrace{x_{q+1}, \ldots, x_n}_{x''}) =$$

$$= \bigvee_{\sigma'' = (\sigma_{q+1}, \ldots, \sigma_n)} x_{q+1}^{\sigma_{q+1}} \cdots x_n^{\sigma_n} \cdot f_{\sigma''}(x_1, \ldots, x_q, \sigma_{q+1}, \ldots, \sigma_n)$$

Для любой ФАЛ $f \in P_2(n)$ строим СФЭ Σ_f как суперпозицию $\Sigma''(\Sigma')$, где Σ'' — мультиплексор, Σ' — универсальный многополюсник.



Сложность многополюсника от q переменных: $L(\Sigma') \leqslant 2^{2^q} - q$ (следует из леммы)
Сложность мультиплексора от $n - q$ переменных: $L(\Sigma'') \leqslant 2^{n-q+2} - 3$
Полагая $q = \lfloor \log_2(n - 2\log_2 n) \rfloor$ получаем в результате преобразований:

$$L(\Sigma_f) \leqslant 2^{2^q} + 4 \cdot 2^{n-q} \leqslant \frac{8 \cdot 2^n}{n - 2\log n} + O(\frac{2^n}{n^2})$$

Таким образом, верна оценка сложности СФЭ: $L^C(n) \lesssim 8 \cdot \dfrac{2^n}{n}$

osn 29. Вероятностное пространство. Случайные величины. Закон больших чисел в форме Чебышева.

Вероятностное пространство

Пространство элементарных исходов Ω – любое непустое множество, содержащее все возможные результаты случайного эксперимента.
Элементы $\omega \in \Omega$ – **элементарные исходы** – исходы случайного эксперимента, из которых в эксперименте происходит ровно один.
Множество $\mathcal{F}$, элементами которого являются подмножества множества Ω (не обязательно все) называется **σ-алгеброй** (сигма-алгеброй), если выполнены следующие условия:
1. $\Omega \in \mathcal{F}$;
2. если $A \in \mathcal{F}$, то $\neg A \in \mathcal{F}$;
3. $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F} \implies \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$ (объединение по *счетному* числу подмножеств)

Минимальная σ-алгебра, содержащая множество всех интервалов на вещественной прямой, называется **борелевской σ-алгеброй** в $\mathbb{R}$ и обозначается $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.
Борелевское множество — элемент борелевской σ-алгебры.
Вероятность P — действительная функция случайного события: $\mathcal{F} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая следующим условиям:
1. $P(\Omega) = 1$;
2. $\forall A \in \mathcal{F} \implies P(A) \geqslant 0$;
3. $\forall A_1, A_2, \ldots, A_n, \cdots \in \mathcal{F} : \ A_i \cap A_j = \varnothing (i \neq j) \implies P(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ (счётная аддитивность).

Вероятностное пространство – тройка $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, где Ω – множество элементарных исходов, $\mathcal{F}$ – σ-алгебра над Ω, вероятность P определена на $\mathcal{F}$.
Пример: Пусть $\Omega = (\omega_1, \ldots, \omega_s)$, $\mathcal{F}$ — всевозможные подмножества множества Ω.
$P(\omega_1) = \cdots = P(\omega_s) = \dfrac{1}{s} \implies P(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|}$ — классическое определение вероятности.

Случайные величины

Пара $(X, \mathcal{U})$, где X – произвольное множество, а $\mathcal{U}$ – σ-алгебра над ним – **измеримое пространство**.
Например, $(\Omega, \mathcal{F})$ и $(R, \mathcal{B})$ – измеримые пространства.
Элементы σ-алгебры $\mathcal{U}$ называются **измеримыми множествами**.
Пусть даны измеримые пространства $(\Omega, \mathcal{F})$ и $(R, \mathcal{B})$. Функция $\xi : \Omega \to R$ называется **случайной величиной**, если прообраз любого борелевского множества $B \in \mathcal{B}$ является событием.
Распределением случайной величины ξ называется функция $P_\xi : \ \mathcal{B} \to \mathbb{R}$, определенная $\forall B \in \mathcal{B}$ по правилу $P_\xi(B) = P(\xi \in B)$.
Функцией распределения случайной величины ξ называется отображение $F_\xi : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, определённое по правилу: $F_\xi(x) = P(\xi < x)$ или $F_\xi(x) = P_\xi((-\infty, x))$.
Случайная величина ξ называется **дискретной случайной величеной**, если существует не более чем счетное множество B такое, что $P_\xi(B) = 1$. Распределение, соответствующее дискретной случайной величине, также называется дискретным.
Дискретная функция распределения имеет вид:

$$F_\xi(x) = P(\xi < x) = \sum_{x_i < x} p_i = \sum_{x_i < x} P(\xi = x_i).$$

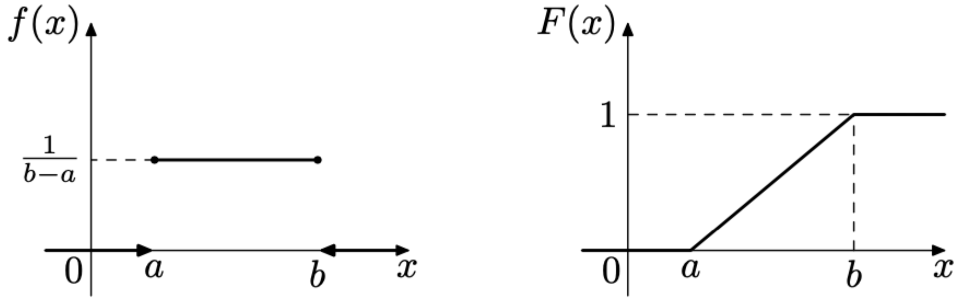
Распределение ξ называется **абсолютно непрерывным**, если существует $f(x) \geqslant 0$ такая, что для любого борелевского множества B справедливо

$$P_\xi(B) = \int\limits_B f(x)\lambda(dx),$$

где $f(x)$ — *плотность распределения*, λ — мера Лебега. *Абсолютно непрерывная функция распределения* имеет вид:

$$F_\xi(x) = P(\xi < x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Пример: равномерное распределение $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a,b] \\ 0, & x \notin [a,b] \end{cases}$



Математическим ожиданием случайной величины ξ называется число $E\xi = \int\limits_\Omega \xi(\omega)P(d\omega)$ или $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xdF_\xi(x)$. Если интеграл расходится, то говорят, что математического ожидания не существует.

В случае дискретной сл. вел.: $E\xi = \sum\limits_i x_i p_i$.

В случае абсолютно непрерывной сл. вел.: $E\xi = \int xf(x)dx$

Дисперсией случайной величины ξ называется число $D\xi = E(\xi - E\xi)^2$, $\sigma = \sqrt{D\xi}$ – **средне-квадратическое отклонение**.

Величина $\mathrm{cov}(\xi,\eta) \equiv E(\xi\eta) - E\xi\, E\eta$ называется **ковариацией** случайных величин ξ и η. Если ξ и η независимы, то $\mathrm{cov}(\xi,\eta) = 0$. Обратное, вообще говоря, неверно.

Закон больших чисел в форме Чебышева

Неравенство Чебышёва Если $\exists D\xi$, то $\forall \varepsilon > 0$

$$P(|\xi - E\xi| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{D\xi}{\varepsilon^2}.$$

Доказательство. Для $\varepsilon > 0$ неравенство $|\xi - E\xi| \geqslant \varepsilon \iff (\xi - E\xi)^2 \geqslant \varepsilon^2$, поэтому $P(|\xi - E\xi| \geqslant \varepsilon) = P\left((\xi - E\xi)^2 \geqslant \varepsilon^2\right) \leqslant \dfrac{E(\xi - E\xi)^2}{\varepsilon^2} = \dfrac{D\xi}{\varepsilon^2}$. □

Следствие: Если $\varepsilon = 3\sigma$, где σ — стандартное отклонение, то получим

$$P\Big(|\xi - E\xi| > 3\sigma\Big) \leqslant \frac{D\xi}{9\sigma^2} = \frac{D\xi}{9\,D\xi} = \frac{1}{9} \iff P\Big(|\xi - E\xi| \leqslant 3\sigma\Big) \geqslant 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}.$$

Это соотношение называется **правилом трёх сигм**.
Последовательность случайных величин $\{\xi_n\}_{n=1}^{+\infty}$ **сходится по вероятности** к случайной величине ξ ($\xi_n \xrightarrow{\mathrm{P}} \xi$), если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P\left(\left\{\omega \colon |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| > \varepsilon\right\}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Закон больших чисел в форме Чебышёва: $\forall$ последовательности $\xi_1, \xi_2, \ldots$ попарно независимых и одинаково распределённых случайных величин для которых $E\xi_i^2 < \infty \implies$

$$\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathrm{P}} E\xi_1.$$

Доказательство. $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, Из линейности матожидания получим

$$E\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{E\xi_1 + \ldots + E\xi_n}{n} = \frac{nE\xi_1}{n} = E\xi_1.$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Воспользуемся неравенством Чебышёва:

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{D\left(\frac{S_n}{n}\right)}{\varepsilon^2} = \frac{DS_n}{n^2\varepsilon^2} = \frac{D\xi_1 + \ldots + D\xi_n}{n^2\varepsilon^2} =$$
$$= \frac{nD\xi_1}{n^2\varepsilon^2} = \frac{D\xi_1}{n\varepsilon^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

т.к. $D\xi_1 < \infty$. Дисперсия суммы превратилась в сумму дисперсий в силу попарной независимости слагаемых, из-за которой все ковариации $\mathrm{cov}(\xi_i, \xi_j)$ по свойству ковариации обратились в нуль при $i \neq j$. □

Центральная предельная теорема: Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных невырожденных случайных величин с $E\xi_1^2 < \infty$ и $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Тогда

$$P\left(\frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} \leqslant x\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du \quad \forall x \in R$$

Доказательство. Пусть $E\xi_1 = m$, $D\xi_1 = \sigma^2$. Введём $X = \xi_1 - m$ и $D\phi_X(t) = Ee^{itX}$ и $D\phi_n(t) = Ee^{it\frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}}} = \left[D\phi_X\left(\dfrac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right]^n$
В силу разложения характеристической функции (при $\exists$ соответствующих моментов) $D\phi_X(t) = 1 + itEX + \ldots + \dfrac{(it)^n}{n!}EX^n + R_n(t)$

Т.к. $EX = E[\xi_1 - m] = 0$, при $n = 2$: $D\phi(t) = 1 - \dfrac{\sigma^2 t^2}{2} + \overline{o}\left(t^2\right), \quad t \to 0.$

$\forall t \in R$ при $n \to +\infty \implies D\phi_n(t) = \left[1 - \dfrac{\sigma^2 t^2}{2\sigma^2 n} + \overline{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)\right]^n \to e^{-\frac{t^2}{2}}$

Функция $e^{-\frac{t^2}{2}}$ – характеристическая функциия $N_{0,1}$. В силу теоремы о непрерывном соответствии между функциями распределения и характеристическими функциями Ц.П. теорема доказана. $\square$

[И. С. Рожков, *Почти наверное достаточное учебное пособие. Теория вероятностей и математическая статистика. Статбук*, page 1-53]

osn 30. Квадратурные формулы прямоугольников, трапеций и парабол.

Задача: Вычислить определенный интеграл $I = \int\limits_a^b f(x)dx$.

Не всегда можно посчитать аналитически, но есть универсальные алгоритмы – формулы численного интегрирования (квадратурные формулы). В них интеграл заменяется конечной суммой:

$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \sum\limits_{k=0}^{N} C_k f(x_k)$ — **квадратурная формула**, C_k — **коэффициенты квадратурной формулы**, $x_k \in [a,b]$ — **узлы квадратурной формулы**.

$\psi = \int\limits_a^b f(x)dx - \sum\limits_{k=0}^{N} C_k f(x_k)$ — **погрешность квадратурной формулы**.

Введем на $[a,b]$ равномерную сетку $\omega_n = \{x_i = a + ih,\ i \in [0,N],\ N_h = b - a\}$.

$\int\limits_a^b f(x)dx = \sum\limits_{i=0}^{N} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx$. Строим квадратурные формулы для $\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx$.

Формула прямоугольников.

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \sim f\left(x_{i-\frac{1}{2}}\right)h$$

$\psi_i = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx - f\left(x_{i-\frac{1}{2}}\right)h = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \left(f(x) - f\left(x_{i-\frac{1}{2}}\right)\right)dx = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \Bigg(f(x_{i-\frac{1}{2}}) + (x - x_{i-\frac{1}{2}})f'(x_{i-\frac{1}{2}}) + \frac{\left(x - x_{i-\frac{1}{2}}\right)^2}{2} f''(\xi)\Big|_{\xi \in [x_{i-1};x_i]} - f(x_{i-\frac{1}{2}})\Bigg)dx$

$|\psi_i| \leqslant M_{2i} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{\left(x - x_{i-\frac{1}{2}}\right)^2}{2} dx = \frac{h^3}{24} M_{2i}$, где $M_{2i} = \max\limits_{x \in [x_{i-1};x_i]} |f''(x)|$

$\int\limits_a^b f(x)dx \sim \sum\limits_{i=0}^{N} f(x_{i-\frac{1}{2}})h$

$\psi = \sum\limits_{i=0}^{N} \psi_i \leqslant \sum\limits_{i=0}^{n} \frac{h^3}{24} M_{2i} \leqslant \frac{M_2 N h^3}{24} = \frac{M_2 h^2 (b-a)}{24} \implies \psi = O(h^2)$

Формула трапеций.

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \sim \frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}h$$

получается путем замены $f(x)$ интерполяционным многочленом первой степени, построенным по узлам $x_{i-1},\ x_i$.

$$L_{1i} = \frac{((x-x_{i-1})f(x_i)-(x-x_i)f(x_{i-1}))}{h}$$

$$f(x)-L_{1i} = \frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)}{2}f''(\xi_i(x))$$

$$|\psi_j| = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx - \frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}h = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x)-L_{1i})dx =$$

$$= \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)}{2}f''(\xi_i(x)) \implies |\psi_j| \leqslant \frac{M_{3j}h^3}{12}$$

$$\int\limits_a^b f(x)dx \sim \sum_{i=1}^N \frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}h =$$

$= h\left(0.5f(x_0)+f(x_1)+f(x_2)+\dots+f(x_{N-1})+0.5f(x_N)\right)$ — составная формула трапеций.

$$|\psi| \leqslant \frac{M_3h^2(b-a)}{12} = O(h^2)$$

Формула Симпсона (парабол).

$L_n = \sum\limits_{k=0}^n L_{n_k} = \sum\limits_{k=0}^n \dfrac{\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)}f(x_k)$ — интерполяционный полином в Форме Лагранжа, где

$$\omega(x) = \prod_{j=0}^n (x-x_j),\ \omega'(x_k) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^n (x_k-x_j),\ f(x)-L_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}\omega(x)$$

В формуле Симпсона:

$f(x) \sim L_2 \sim \dfrac{(x-x_{i-\frac12})(x-x_i)}{(x_{i-1}-x_{i-\frac12})(x_{i-1}-x_i)}f(x_{i-1}) + \dfrac{(x-x_{i-1})(x-x_i)}{(x_{i-\frac12}-x_{i-1})(x_{i-\frac12}-x_{i-1})}f(x_{i-\frac12}) + \dfrac{(x-x_{i-1})(x-x_{i-\frac12})}{(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i-\frac12})}f(x_i) = \dfrac{2}{h^2}((x-x_{i-\frac12})(x-x_i)f(x_{i-1}) - 2(x-x_{i-1})(x-x_i)f(x_{i-\frac12}) + (x-x_{i-1})(x-x_{i-\frac12})f(x_i)),\ \forall x \in [x_{i-1}, x_i]$

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} L_{2_i}(x)dx = \frac{h}{6}(f(x_{i-1}) + 4f(x_{i-\frac{1}{2}}) + f(x_i))$$

$$\Longrightarrow \int\limits_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{N} \frac{h}{6}(f(x_{i-1}) + 4f(x_{i-\frac{1}{2}}) + f(x_i))$$

$$\int\limits_a^b L_2(x)dx \approx \frac{h}{6}(f_0 + f_N + 2(f_1 + \dots + f_{N-1}) + 4(f_{\frac{1}{2}} + \dots + f_{N-\frac{1}{2}}))$$

$$\psi_i \leqslant \frac{M_{4i}h^4}{2880}, \ |\psi| \leqslant \frac{M_4 h^4(b-a)}{2880} \Longrightarrow \psi = O(h^4)$$

сюда бы картинки разбиенитя площади под кривой для разных методов

osn 31. Методы Ньютона и секущих для решения нелинейных уравнений.

👁 ф-ию $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, и ур-ие $f(x) = 0$.
$\rceil$ $x^* \in \mathbb{R}$ — корень уравнения, и определена его окрестность радиуса a, не содержащая других корней уравнения: $U_a(x^*) = \{x : |x - x^*| < a\}$, причем заданная функция $f(x)$ определена на этой окрестности. Считаем, что начальное приближение $x^0 \in U_a(x^*)$ задано. Тогда для нахождения численного решения уравнения в рассматриваемой окрестности необходимо построить последовательность $\{x^n\}$, сходящуюся к корню x^* уравнения: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x^n) = f(x^*) = 0$.

Численное решение нелинейных уравнений можно разбить на 2 этапа:

1. Локализация корня, т.е. определение окрестности $U_a(x^*)$.

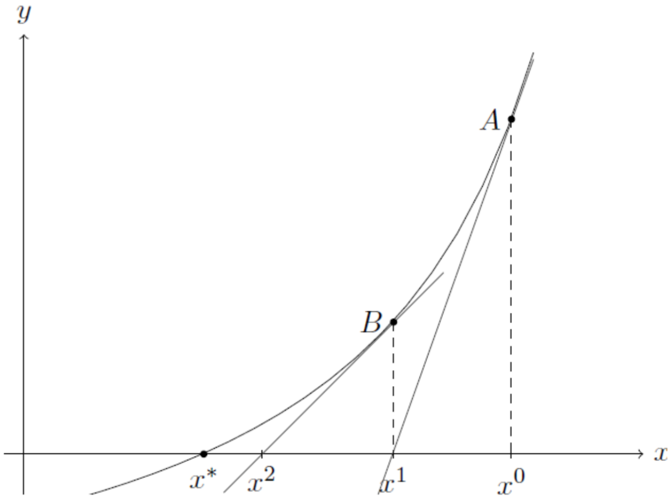
2. Задание итерационного процесса — построение последовательности $\{x^n\}$, сходящейся к корню уравнения.

Метод Ньютона

$\rceil$ в $U_a(x^*)$ существует и не обращается в ноль непрерывная первая производная функции $f(x)$: $f'(x) \neq 0, \quad x \in U_a(x^*)$.
Разложим $f(x^*)$ по формуле Тейлора в малой окрестности точки $x \in U_a(x^*)$: $f(x^*) = f(x) + (x^* - x)f'(x) + \ldots$, и отбросим в этом разложении величины, имеющие второй и выше порядок малости по $(x^* - x)$.
Заменив x^* на x^{n+1} и x на x^n, получим ур-ие $f(x^n) + (x^{n+1} - x^n)f'(x^n) = 0, \quad n \in \mathbb{Z}_+$.
Учитывая, что $f'(x^n) \neq 0$, имеем:

$$x^{n+1} = x^n - \frac{f(x^n)}{f'(x^n)}, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{1}$$

Итерационный процесс поиска корня уравнения $f(x) = 0$, задаваемый формулой (1), наз-ся **итерационным методом Ньютона**.



👁 т. $A(x^0, f(x^0))$. Определим первую итерацию x^1 как абсциссу точки пересечения с осью Ox касательной к $f(x)$, проведенной через т. A. Аналогично получаем значение x^2. Продолжая, на n-ом шаге получим значение x^n, приближающее корень x^* уравнения $f(x) = 0$ с заданной точностью.

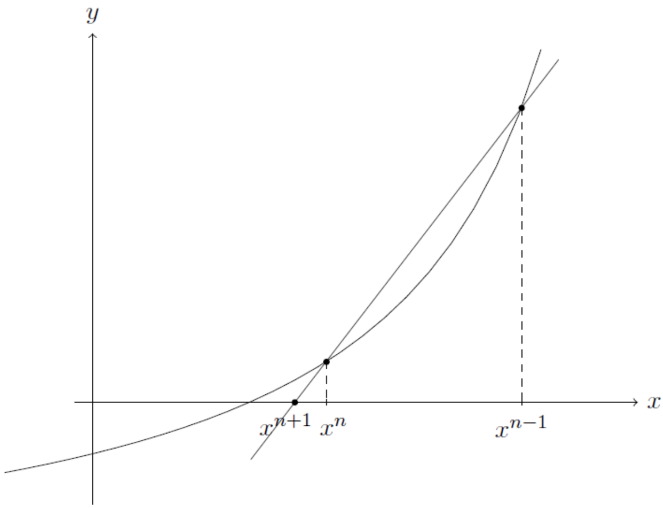
Зам. При решении задач на практике часто рассматривается модифицированный метод Ньютона, задаваемый формулой $x^{n+1} = x^n - \dfrac{f(x^n)}{f'(x^0)}$, $\quad n \in \mathbb{Z}_+$ (чтобы считать пр-ую только один раз).

Метод секущих

В методе Ньютона (1) заменим $f'(x)$ на его дискретный аналог $\dfrac{f(x^n) - f(x^{n-1})}{x^n - x^{n-1}}$, получаем итерационный метод:

$$x^{n+1} = x^n - \frac{(x^n - x^{n-1})f(x^n)}{f(x^n) - f(x^{n-1})} \tag{2}$$

Итерационный процесс 2 задает двухшаговый метод решения уравнений, называемый **методом секущих**.



Сходимость метода Ньютона

Если рассмотреть итерационный метод Ньютона как метод простой итерации ($x^{n+1} = S(x^n), n \in \mathbb{Z}_+$) с функцией $S(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$.

$|S'(x)| < 1$ при $x \in U_a(x^*)$, то он сходится. Предполагая, что функция $f(x)$ дифференцируема достаточное число раз, продифференцируем функцию $S(x)$:

$$S'(x) = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}.$$

Теорема: ⅃ $\exists$ такая константа $M > 0$, для которой выполнена оценка $\dfrac{1}{2}\left|S''(x)\right| \leqslant M, \quad x \in U_a(x^*)$. Тогда если начальное приближение x^0 выбрать в соответствии с условием $|x^0 - x^*| < \dfrac{1}{M}$, то итерационный метод Ньютона сходится, и имеет место оценка: $|x^n - x^*| \leqslant \dfrac{1}{M}\left(M|x^0 - x^*|\right)^{2^n}$.

Доказательство. Погрешность приближенного решения: $z^n = x^n - x^*$.
👁 выражение для z^{n+1}: $z^{n+1} = x^{n+1} - x^* = S(z^n + x^*) - S(x^*)$.
Разложим $S(z^n + x^*)$ по формуле Тейлора и учитывая $S'(x^*) = 0$:

$$z^{n+1} = S(x^*) + S'(x^*)z^n + \frac{1}{2}S''(\tilde{x}^n)\,(z^n)^2 - S(x^*) = \frac{1}{2}S''(\tilde{x}^n)(z^n)^2,$$

$$\tilde{x}^n = x^n + \theta z^n,\ \theta \in \mathbb{R},\ |\theta| < 1.$$

ℸ функция $f(x)$ трижды непрерывно дифференцируема в окрестности $U_a(x^*)$. Тогда $S''(x) = \left(\dfrac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}\right)'$.
ℸ $\exists$ постоянная $M > 0$ такая, что для любого $x \in U_a(x^*)$ выполняется неравенство $M \geqslant \dfrac{1}{2}\left|S''(x)\right|$.
Из этого неравенства и уравнения z^{n+1} следует оценка $|z^{n+1}| \leqslant M|(z^n)^2|$.
Домножим это неравенство на M и обозначим $v^n = M|z^n|$. Тогда получим, что $v^{n+1} \leqslant (v^n)^2$. Отсюда следует, что $v^n \leqslant (v^0)^{2^n}$, значит, $M|z^n| \leqslant \left(M\left|z^0\right|\right)^{2^n}$, $|z^n| \leqslant \dfrac{1}{M}\left(M\left|z^0\right|\right)^{2^n}$.
Введем обозначение $q = M|z_0|$. Если $0 < q < 1$, то последовательность $\{z^n\}_{n=0}^{\infty}$ стремится к нулю: $z^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, и итерационный метод Ньютона сходится. Условие на q $(0 < q < 1)$ будет выполнено, если $0 < |z^0| < \dfrac{1}{M}$, то есть $|x^0 - x^*| < \dfrac{1}{M}$. □

[Ионкин, *Лекции по курсу Численные методы*, page 99-107]

osn 32. Численное решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Примеры методов Рунге-Кутта.

Рассматривается задача Коши для системы ОДУ:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = f(t, u(t)), \quad t > 0, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{1}$$

где $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_m(t))^T$, $f(t, u(t)) = (f_1(t, u(t)), \ldots, f_m(t, u(t))^T$.
Обозначим $|u(t)| = \sqrt{u_1^2(t) + u_2^2(t) + \ldots + u_m^2(t)}$.
Теорема: Пусть $f(t, u(t))$ непрерывна в параллелепипеде $R = \{|t| \leqslant a, |u(t) - u(0)| \leqslant b, \ a, b \in \mathbb{R}\}$ и уд-ет в R условию Липшица по второму аргументу, т.е. $|f(t, u) - f(t, v)| \leqslant L|u - v|$, для всех (t, u), $(t, v) \in R$
$\Longrightarrow$ $\exists!$ решение $u(t)$ задачи (1), определенное и непрерывное на некотором отрезке.
В приведенных ниже примерах для простоты изложения предполагается, что система (1) состоит всего из одного уравнения.

Нахождение численного решения

Для нахождения численного решения вводится сетка по времени с постоянным шагом $\tau > 0$, т.е. множество точек $\omega_\tau = \{t_n = n\tau, \ n \in \mathbb{Z}_+\}$, и обозначим $u_n = u(t_n)$, $f_n = f(t_n, u_n)$. Точное решение задачи (1) будем обозначать буквой u, а **приближенное решение** (сеточная ф-ия) — буквой y: $y_n = y_n(t_n)$.

про численное решение

Двухэтапный метод Рунге–Кутта

Общий вид двухэтапного метода Рунге–Кутта для уравнения (1):

$$\begin{cases} \dfrac{y_{n+1} - y_n}{\tau} = \sigma_1 K_1 + \sigma_2 K_2, \quad n \in \mathbb{Z}_+ \\ y_0 = u_0, \\ K_1 = f(t_n, y_n), \quad K_2 = f(t_n + a_2\tau, \ y_n + b_{21}\tau f(t_n, y_n)), \end{cases} \tag{2}$$

где $\sigma_1, \sigma_2, a_2, b_{21} \in \mathbb{R}$ — некоторые числа, от выбора которых зависит как погрешность аппроксимации, так и точность численного решения.
Подставим значения K_1 и K_2 в первое уравнение системы (2):

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} = \sigma_1 f(t_n, y_n) + \sigma_2 f(t_n + a_2\tau, y_n + b_{21}\tau f(t_n, y_n)).$$

Рассмотрим **погрешность аппроксимации** разностной схемы (2) на решении задачи (1):

$$\psi_n = -\frac{u_{n+1} - u_n}{\tau} + \sigma_1 f(t_n, u_n) + \sigma_2 f\left(t_n + a_2\tau, u_n + b_{21}\tau f(t_n, u_n)\right). \tag{3}$$

Утв.: Погрешность аппроксимации этого метода имеет второй порядок малости по τ: $\psi_n = O(\tau^2)$ при $\sigma_2 = \sigma, \sigma_1 = 1 - \sigma, a_2 = b_{21} = \sigma/2$.

Разложим u_{n+1} в ряд Тейлора в окрестности точки t_n:

$$\frac{u_{n+1}-u_n}{\tau} = u_n' + \frac{\tau}{2}u_n'' + O(\tau^2)$$

Далее разложим $f(t_n + a_2\tau, u_n + b_{21}\tau f_n)$ в окрестности точки (t_n, u_n):

$$f(t_n + a_2\tau, u_n + b_{21}\tau f(t_n, u_n)) = f(t_n, u_n) + a_2\tau\frac{\partial f_n}{\partial t} + b_{21}\tau f_n\frac{\partial f_n}{\partial u} + O(\tau^2)$$

Причем $u'' = \frac{\partial f}{\partial t} + f\frac{\partial f}{\partial u}$. Тогда погрешность аппроксимации принимает вид:

$$\psi_n = -u_n' + (\sigma_1 + \sigma_2)f(t_n, u_n) + \tau((a_2\sigma_2 - 0.5)\frac{\partial f_n}{\partial t} + (b_{21}\sigma_2 - 0.5)f_n\frac{\partial f_n}{\partial u} + O(\tau^2).$$

Чтобы получить оценку погрешности со вторым порядком по τ, необходимо избавиться от слагаемых, содержащих τ в первой степени. Для этого положим:

$$\sigma_1 + \sigma_2 = 1, \sigma_2 a_2 = \sigma 2b_{21} = 0.5$$

Доказательство. Тогда $\psi_n = O(\tau^2)$.

$\square$

Погрешность решения разностной схемы (2): $z_n = y_n - u_n, n \in \mathbb{Z}$.
Утв.: Общий двухэтапный метод Рунге–Кутта при выполнении соответствующих условий имеет квадратичную точность по τ, т.е. при достаточно малых τ: $|z_{n+1}| = O(\tau^2)$, совпадающую с оценкой погрешности аппроксимации на решении исходного уравнения (1)
Частные случаи общего двухэтапного метода Рунге–Кутта:

1. При $\sigma = 1, \quad a = a_2 = 0.5, \quad b = b_{21} = 0.5$ мы получим схему Рунге–Кутта «предиктор–корректор»: $y_{n+1} = y_n + \tau f(t_{n+\frac{1}{2}}, y_n + 0.5\tau f(t_n, y_n))$. Погрешность этой схемы равна $O(\tau^2)$.

2. Если положить $\sigma = 0.5, \quad a = 1, \quad b = 1$, то мы получим симметричную разностную схему:

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} = 0.5\left(f(t_n, y_n) + f(t_n + \tau, y_n + \tau f_n)\right), n \in \mathbb{Z}_+, y_0 = u_0.$$

   Эта разностная схема является очень эффективной, имеет второй порядок точности по τ и часто используется на практике.

Общий m-этапный метод Рунге–Кутта

Общая идея m-этапного метода Рунге–Кутта заключается в том, что для вычисления значения приближенного решения в каждой следующей точке t_{n+1} вводятся m дополнительных этапов. Промежуточные значения на каждом шаге $n \in \mathbb{Z}_+$ вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned}
&K_1 = f(t_n, y_n),\\
&K_2 = f(t_n + a_2\tau, y_n + b_{21}\tau K_1),\\
&K_3 = f(t_n + a_3\tau, y_n + b_{31}\tau K_1 + b_{32}\tau K_2),\\
&\dots\\
&K_m = f(t_n + a_m\tau, y_n + b_{m1}\tau K_1 + b_{m2}\tau K_2 + \ldots + b_{mm-1}\tau K_{m-1}).
\end{aligned}$$

При этом разностная схема для исходной задачи (1) имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{y_{n+1} - y_n}{\tau} = \sigma_1 K_1 + \sigma_2 K_2 + \ldots + \sigma_m K_m \\ y_0 = u_0, n \in \mathbb{Z}_+, \end{cases} \tag{4}$$

где $\sigma_1, \ldots, \sigma_m \in \mathbb{R}$, и выполнено условие аппроксимации: $\sum\limits_{i=1}^{m} \sigma_i = 1$.

Примеры трех- и четырех- этапных методов Рунге–Кутта, имеющих третий и четвертый порядок точности соответственно:

1. $m = 3$: $\dfrac{y_{n+1} - y_n}{\tau} = \dfrac{1}{6}(K_1 + 4K_2 + K_3)$, где

$$\begin{aligned} K_1 &= f(t_n, y_n), \\ K_2 &= f(t_n + 0.5\tau, y_n + 0.5\tau K_1), \\ K_3 &= f(t_n + \tau, y_n - \tau K_1 + 2\tau K_2). \end{aligned}$$

   Данная схема имеет третий порядок точности по τ: $O(\tau^3)$.

2. $m = 4$: $\dfrac{y_{n+1} - y_n}{\tau} = \dfrac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$, где

$$\begin{aligned} K_1 &= f(t_n, y_n), \\ K_2 &= f(t_n + 0.5\tau, y_n + 0.5\tau K_1), \\ K_3 &= f(t_n + 0.5\tau, y_n + 0.5\tau K_2), \\ K_4 &= f(t_n + \tau, y_n + \tau K_3). \end{aligned}$$

   Данная схема имеет четвертый порядок точности по τ: $O(\tau^4)$.

Замечание: Формулы m-этапного метода Рунге–Кутта достаточно громоздки. Это является одной из причин того, что на практике редко используются методы Рунге–Кутта для $m > 4$.

[Ионкин, *Лекции по курсу Численные методы*, page 152-163]

osn 33. Задача Коши для уравнения колебания струны. Формула Даламбера.

Задача Коши для уравнения колебания струны.

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t) \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases}$$

где $t > 0,\ a > 0,\ u(x,t) \in C^2(t > 0, x \in \mathbb{R}) \cap C^1(t \geqslant 0, x \in \mathbb{R})$.

Физическая интерпретация: уравнение малых поперечных колебаний струны. $u(x,t)$ – положение точки струны с координатой x в момент времени t. Если концы струны закреплены, то $u(0,t) = 0, u(l,t) = 0$. Так как процесс колебаний струны зависит от ее начальной формы и распределения скоростей, то задают начальные условия. $a = \sqrt{\dfrac{T_0}{\rho}}$, где T_0 – величина натяжения (не зависит от x, ρ – линейная плотность струны. $f(x,t)$ – плотность внешних сил.

Далее будем рассматривать $f(x,t) = 0$.

(*Представим что* $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{d^2 u}{dt^2}$ *и* $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{d^2 u}{dx^2}$: $\dfrac{d^2 u}{dt^2} = a^2 \dfrac{d^2 u}{dx^2} \implies d^2 u dx^2 = a^2 dt^2 d^2 u \implies dx^2 = a^2 dt^2$.) Характеристическое уравнение: $dx^2 - a^2 dt^2 = 0$.
$dx - adt = 0,\ dx + adt = 0 \implies x - at = C_1 = const,\ x + at = C_2 = const$
Сделаем замену переменных:

$$x + at = \xi,\ x - at = \eta$$

$$\xi_x = 1,\ \xi_{xx} = 0,\ \eta_x = 1,\ \eta_{xx} = 0,$$

$$\xi_t = a,\ \xi_{tt} = 0,\ \eta_t = -a,\ \eta_{tt} = 0.$$

Тогда:

$$u_x = u_\xi \cdot \xi_x + u_\eta \cdot \eta_x,$$

$$u_t = u_\xi \cdot \xi_t + u_\eta \cdot \eta_t,$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} \cdot \xi_x^2 + 2u_{\xi\eta} \cdot \xi_x \cdot \eta_x + u_\xi \cdot \xi_{xx} + u_{\eta\eta} \cdot \eta_x^2 + u_\eta \cdot \eta_{xx},$$

$$u_{tt} = u_{\xi\xi} \cdot \xi_t^2 + 2u_{\xi\eta} \cdot \xi_t \cdot \eta_t + u_\xi \cdot \xi_{tt} + u_{\eta\eta} \cdot \eta_t^2 + u_\eta \cdot \eta_{tt}.$$

Подставляем в уравнение $u_{tt} = a^2 u_{xx}$:

$$u_{\xi\xi} \cdot \xi_t^2 + 2u_{\xi\eta} \cdot \xi_t \cdot \eta_t + \underbrace{u_\xi \cdot \xi_{tt}}_{=0} + u_{\eta\eta} \cdot \eta_t^2 + \underbrace{u_\eta \cdot \eta_{tt}}_{=0} =$$

$$= a^2(u_{\xi\xi} \cdot \xi_x^2 + 2u_{\xi\eta} \cdot \xi_x \cdot \eta_x + \underbrace{u_\xi \cdot \xi_{xx}}_{=0} + u_{\eta\eta} \cdot \eta_x^2 + \underbrace{u_\eta \cdot \eta_{xx}}_{=0})$$

Преобразуем:

$$a^2 u_{\xi\xi} - 2a^2 u_{\xi\eta} + a^2 u_{\eta\eta} = a^2 u_{\xi\xi} + 2a^2 u_{\xi\eta} + a^2 u_{\eta\eta}$$

$$4a^2 u_{\xi\eta} = 0, a > 0$$

Получаем: $u_{\xi\eta} = 0$
Найдем общий интеграл этого уравнения: $u_\eta(\xi,\eta) = f^*(\eta)$, где $f^*(\eta)$ - некоторая функция только переменного η.
Интегрируя это равенство по η при фиксированном ξ, получим:

$$u(\xi,\eta) = \int f^*(\eta)d\eta = f_1(\xi) + f_2(\eta) \tag{1}$$

Обратно, каковы бы ни были дважды дифференцируемые функции f_1 и f_2, функция $u(\xi,\eta)$, определяемая формулой (1), представляет собой решение уравнения $u_{\xi\eta} = 0$. Так как всякое решение уравнения $u_{\xi\eta} = 0$ может быть представлено в виде (1) при соответствующем выборе f_1 и f_2, то формула (1) является общим интегралом этого уравнения. Следовательно, функция

$$u(x,t) = f_1(x+at) + f_2(x-at)$$

является общим интегралом уравнения $u_{tt} = a^2 u_{xx}$.
Удовлетворим начальным условиям:

$$\begin{cases} u(x,0) = f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = -af_1'(x) + af_2'(x) = \psi(x) \end{cases}$$

Проинтегрируем второе равенство, получим:

$$\begin{cases} f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x) \\ f_1(x) - f_2(x) = \dfrac{1}{a}\displaystyle\int\limits_{x_0}^{x} \psi(\alpha)d\alpha + C \end{cases}$$

Сложим и вычтем два полученных равенства:

$$\begin{cases} f_1(x) = \dfrac{1}{2}\varphi(x) + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int\limits_{x_0}^{x} \psi(\alpha)d\alpha + \dfrac{C}{2} \\ f_2(x) = \dfrac{1}{2}\varphi(x) - \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int\limits_{x_0}^{x} \psi(\alpha)d\alpha - \dfrac{C}{2} \end{cases}$$

Подставим в $u(\xi,\eta) = f_1(x+at) + f_2(x-at)$ найденные выражения для f_1, f_2:

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\left(\int\limits_{x_0}^{x+at} \psi(\alpha)d\alpha - \int\limits_{x_0}^{x-at} \psi(\alpha)d\alpha\right)$$

Окончательно:

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha)d\alpha$$

Полученная формула – **формула Даламбера**.
Теорема о применимости формулы Даламбера. Пусть $\varphi(x) \in C^2(-\infty,\infty), \psi \in C^1[0,+\infty), a > 0$. Тогда формула Даламбера представляет единственное решение задачи Коши для уравнения колебания струны.

[А. Н. Тихонов, *Уравнения матемтической физики*, page 50-52]

osn 34. Постановка краевых задач для уравнения теплопроводности. Метод разделения переменных для решения первой краевой задачи.

Краевые задачи для уравнения теплопроводности представляют собой математические модели процессов распространения тепла, например, в стержне.
$u(x,t)$ — температура в сегменте с координатами x во время t.
$F(x,t)$ — плотность тепловых источников, $a^2 = \dfrac{k}{c\rho}$ — коэффициент температуропроводности, $f(x,t) = \dfrac{F(x,t)}{c\rho}$, c — удельная теплоемкость, k — коэффициент теплопроводности, ρ — плотность.

Одномерное уравнение теплопроводности:
$u_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) + f(x,t)$
Основные типы задач:

- **Первая краевая задача.**

$$\begin{cases} u_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) + f(x,t),\ 0 < x < l,\ t > 0 \\ u(0,t) = \mu_1(t),\ t \geqslant 0 \\ u(l,t) = \mu_2(t) \\ u(x,0) = \varphi(x),\ 0 \leqslant x \leqslant l \end{cases}$$

- **Вторая краевая задача.**

$$\begin{cases} u_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) + f(x,t),\ 0 < x < l,\ t > 0 \\ u_x(0,t) = \nu_1(t),\ t \geqslant 0 \\ u_x(l,t) = \nu_2(t) \\ u(x,0) = \varphi(x),\ 0 \leqslant x \leqslant l \end{cases}$$

- **Смешанная краевая задача.** — одно из краевых условий задано функцией $u(0,t)$ или $u(l,t)$, а другое производной u по x.

$u(x,t)$ — **решение 1-ой краевой задачи** для уравнения теплопроводности, если:

1. $u(x,t) \in C([0,l] \times [0,+\infty))$;
2. $u(x,t) \in C^2((0,l) \times (0,+\infty))$;
3. $u(x,t)$ удовлетворяет условиям 1-ой краевой задачи.

Далее будем рассматривать $f(x,t) = 0$.

Метод разделения переменных для решения первой краевой задачи.

$$\begin{cases} u_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t),\ 0 < x < l,\ t > 0 \\ u(0,t) = 0,\ t \geqslant 0 \\ u(l,t) = 0 \\ u(x,0) = \varphi(x),\ 0 \leqslant x \leqslant l \end{cases}$$

Будем искать решение в виде $u(x,t) = X(x)T(t)$. Рассмотрим задачу с однородными начальными и краевыми условиями:

$$\begin{cases} XT' = a^2 X''T \\ X(0)T(t) = 0 \\ X(l)T(t) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{T'}{a^2T} = \dfrac{X''}{X} = -\lambda \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases}$$

Получаем две задачи:

1. Задача Штурма-Лиувилля:

   $$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases}$$

   Рассматриваем 3 случая: $\lambda < 0,\ \lambda = 0,\ \lambda > 0$. При $\lambda > 0$ получаем $\lambda_n = (\dfrac{\pi n}{l})^2,\ X_n(x) = \sin\left(\dfrac{\pi n x}{l}\right),\ n \in \mathbb{N}$

2. $T' + (\dfrac{\pi n a}{l})^2 T = 0$

   Решение: $T_n(t) = a_n e^{-(\frac{\pi n a}{l})^2 t},\ n \in \mathbb{N}$

Получаем решение: $u(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e^{-(\frac{\pi n a}{l})^2 t} \sin\left(\dfrac{\pi n x}{l}\right)$

Для нахождения a_n используем начальное условие. Так как $\{\sin\left(\dfrac{\pi n x}{l}\right)\}$ — замкнутая полная система функций, то $\forall$ кусочно-дифференцируемую функцию можно разложить в ряд Фурье:

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right),\ \varphi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\left(\frac{\pi n \xi}{l}\right) d\xi$$

Так как $u(x,0) = \varphi(x)$, получаем $a_n = \varphi_n,\ n \in \mathbb{N}$. Таким образом, получаем решение:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\left(\frac{\pi n \xi}{l}\right) d\xi \cdot e^{-(\frac{\pi n a}{l})^2 t} \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)$$

Для существования решения достаточно потребовать, чтобы $\varphi \in C^2[0,l]$ и $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$.

Остальные случаи:

- $X'(0) = X(l) = 0$: $\lambda_n = \left(\dfrac{\pi(2n+1)}{2l}\right)^2, X_n = \cos\sqrt{\lambda_n}, n = 0, 1, 2, \ldots$
- $X(0) = X'(l) = 0$: $\lambda_n = \left(\dfrac{\pi(2n+1)}{2l}\right)^2, X_n = \sin\sqrt{\lambda_n}, n = 0, 1, 2, \ldots$
- $X'(0) = X'(l) = 0$: $\lambda_n = \left(\dfrac{\pi n}{l}\right)^2, X_n = \cos\sqrt{\lambda_n}, n = 1, 2, \ldots; X_0 = 1$

[А. Н. Тихонов, *Уравнения матемтической физики*, page 200-202]

dop 1. Необходимые условия экстремума функции нескольких переменных. Достаточные условия.

Вспомогательная теория

Вторая теорема Вейерштрасса: Если функция $f(x)$ непрерывна на некотором замкнутом и ограниченном множестве, то она достигает на этом множестве своих точных верхней и нижней граней.
Теорема Ферма: Если $f(x)$ дифференцируема в точке $x = c$ и имеет в этой точке локальный экстремум, то $f'(c) = 0$.

Опр: Квадратичная форма $\Phi(h_1, h_2, \ldots, h_n) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}h_ih_j$ с матрицей $A = \{a_{ij}\}$ называется:

• **положительно (отрицательно) определенной**, если для $\forall\ h_1, \ldots, h_n$, одновременно не равных нулю, эта форма принимает строго положительные (отрицательные) значения;

• **знакоопределенной**, если она является либо положительно, либо отрицательно определенной;

• **знакопеременной**, если она принимает как строго положительные, так и строго отрицательные значения;

• **квазиопределенной**, если она принимает либо только неотрицательные, либо только неположительные значения, но при этом обращается в нуль для некоторых $h_1, \ldots, h_n$, одновременно не равных нулю.

Критерий Сильвестра знакоопределенности квадратичной формы:

1. Квадратичная форма Φ с симметричной матрицей A является **положительно** определенной $\Leftrightarrow$ все главные миноры матрицы A положительны;

2. Квадратичная форма Φ с симметричной матрицей A является **отрицательно** определенной $\Leftrightarrow$ знаки главных миноров матрицы A чередуются, причем $A_1 = a_{11} < 0$.

Опр. 1: Точка $x_0 = (x_{01}, \ldots, x_{0n})$, внутренняя для области определения функции $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$, называется точкой **локального экстремума** функции f, если для любой точки x из некоторой ее окрестности $U = U(x_0)$ разность $\Delta f = f(x) - f(x_0)$ отлична от нуля и сохраняет знак. В частности, если $\Delta f > 0$, то это точка **локального минимума**, если $\Delta f < 0$, то это точка **локального максимума**.

Теорема 1 *(необходимое условие)*: Если у функции $f(x)$ в точке x_0 существуют все частные производные f'_{x_k}, и эта точка является точкой локального экстремума, то все частные производные в ней равны нулю, то есть $f'_{x_k}(x_0) = 0,\ k = 1, \ldots, n$.
► Зафиксируем у функции $f(x)$ все переменные, кроме x_k $(1 \leq k \leq n)$, и рассмотрим функцию $\varphi(x_k) = f(x_{01}, \ldots, x_{0k-1}, x_k, x_{0k+1}, \ldots, x_{0n})$ – функцию одной переменной. Очевидно, что для функции $\varphi(x_k)$ точка x_{0k} является также точкой локального экстремума. По теореме Ферма имеем, что $\varphi'(x_{0k}) = 0 \implies f'_{x_k}(x_0) = 0,\ 1 \leq k \leq n$. ■

$\boxed{\textbf{Опр. 2:}}$ Точка $x_0 = (x_{01}, \ldots, x_{0n})$ называется **стационарной** для функции $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$, если она внутренняя для ее области определения, и все частные производные в ней определены и равны нулю: $f'_{x_k}(x_0) = 0,\ k = 1, \ldots, n$.

Теорема 2 ***(достаточные условия)*:** Пусть функция $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ от n независимых переменных один раз дифференцируема в некоторой окрестности точки $x_0 = (x_{01}, \ldots, x_{0n})$, и дважды дифференцируема в самой точке x_0. Пусть x_0 – стационарная точка, то есть дифференциал функции f равен нулю в точке x_0 ($df(x_0) = 0$). Тогда если второй дифференциал $d^2f(x_0)$ представляет собой знакоопределенную квадратичную форму, то x_0 – точка локального экстремума. При этом, если форма $d^2f(x_0)$ положительно (отрицательно) определена, то x_0 – точка локального миниммума (максимума). Если же квадратичная форма $d^2f(x_0)$ знакопеременна, то локального экстремума в точке x_0 нет.

► Разложим разность Δf по формуле Тейлора при $n = 2$ с остаточным членом в форме Пеано:

$$\Delta f = f(x) - f(x_0) = df(x_0) + \frac{d^2f(x_0)}{2!} + \overline{o}(\|\Delta x\|^2) =$$

$$= \{df(x_0) = 0\} = \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f''_{x_i x_j}(x_0) \Delta x_i \Delta x_j + \overline{o}(\|\Delta x\|^2).$$

Обозначим $h_i = \dfrac{\Delta x_i}{\|\Delta x\|}$, $a_{ij} = f''_{x_i x_j}(x_0)$, $\alpha = \alpha(\|x\|) = \dfrac{\overline{o}(\|\Delta x\|^2)}{\|\Delta x\|^2}$. Отметим, что $\alpha(\|x\|)$ – бесконечно малая при $\|\Delta x\| \to 0$. Тогда Δf представляется в виде $\Delta f = \dfrac{1}{2}\|\Delta x\|^2 \left(\sum\limits_{1 \le i,j \le n} a_{ij} h_i h_j + \alpha \right)$. Заметим, что вектор $h = \{h_1, \ldots, h_n\}$ имеет норму $\|h\| = \sqrt{h_1^2 + \ldots + h_n^2} = 1$, то есть это элемент единичной сферы S^{n-1} пространства $\mathbb{R}^n$.

1) Рассмотрим случай, когда $d^2f(x_0)$ – **положительно определенная** квадратичная форма. В этом случае квадратичная форма $\Phi(h) = \sum\limits_{1 \le ,j \le n} a_{ij} h_i h_j$ – также положительно определенная непрерывная функция на единичной сфере S^{n-1}. Сфера S^{n-1} является замкнутым ограниченным множеством в $\mathbb{R}^n$, следовательно, по второй теореме Вейерштрасса функция $\Phi(h)$ достигает на S^{n-1} своего инфимума, то есть существует такая точка $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in S^{n-1}$, в которой $\Phi(\xi) = \inf\limits_{h \in S^{n-1}} \Phi(h) = \mu$. Поскольку всюду на сфере $\Phi(h) > 0$, то $\Phi(h) \le \Phi(\xi) = \mu > 0$. Воспользовавшись этим, получаем

$$\Delta f = \frac{1}{2}\|\Delta x\|^2 (\Phi(h) + \alpha) \ge \frac{1}{2}\|\Delta x\|^2 (\mu + \alpha).$$

Так как $\alpha \to 0$ при $\|\Delta x\| \to 0$, то $\exists\, \delta = \delta(\mu) > 0 \ :\ \|\Delta x\| < \delta \implies |\alpha| < \dfrac{\mu}{2}$. При этих условиях

$$\Delta f \ge \frac{1}{2}\|\Delta x\|^2 (\mu + \alpha) > \frac{1}{2}\|\Delta x\|^2 (\mu - \frac{\mu}{2}) = \frac{1}{2}\|\Delta x\|^2 \frac{\mu}{2} > 0.$$

Итак $\forall\, x \in \mathbb{R}^n \ :\ \|\Delta x\| < \delta \implies \Delta f > 0$. Следовательно, точка x_0 – точка локального минимума по определению 1.

2) В случае **отрицательно определенной** квадратичной форму $d^2f(x_0)$ совершенно аналогично доказывается, что x_0 – точка локального максимума.

3) Пусть теперь $d^2f(x_0)$ – **знакопеременная** квадратичная форма. Тогда имеем

$$\Delta f = \frac{1}{2}\rho^2(\Phi(h) + \alpha), \quad \rho = \|\Delta x\|,$$

где $\Phi(h)$ – знакопеременная квадратичная форма на единичной сфере S^{n-1}. Следовательно $\exists\ h',\ h'' \in S^{n-1}\ :\ \Phi(h') < 0,\ \Phi(h'') > 0$. При этом заметим, что $\alpha = \alpha(\rho)$ и $\alpha \to 0$ при $\rho \to 0$, а $\Phi(h)$ от ρ не зависит. Поэтому взяв ρ_0 достаточно малым, можно добиться, чтобы $|\alpha| = |\alpha(\rho_0)| < \min\left\{|\Phi(h')|/2,\ |\Phi(h'')|/2\right\}$. При этих условиях будет одновременно $\Phi(h') + \alpha(\rho_0) < 0,\ \Phi(h'') + \alpha(\rho_0) > 0$. Тогда для точек $x' = x_0 + \rho_0 h',\ x'' = x_0 + \rho_0 h''$ будем иметь

$$(\Delta f)_1 = f(x') - f(x_0) = \frac{1}{2}\rho_0^2\Big(\Phi(h') + \alpha(\rho_0)\Big) < 0,$$

$$(\Delta f)_2 = f(x'') - f(x_0) = \frac{1}{2}\rho_0^2\Big(\Phi(h'') + \alpha(\rho_0)\Big) > 0.$$

Итак, приращение функции меняет знак $\implies$ точка x_0 не является точкой экстремума функции $f(x)$. $\blacksquare$

Замечание: В случаях **квази-определенности** (полуопределенности) квадратичной формы второго дифференциала $d^2f(x_0)$ ответ о существовании локального экстремума в точке x_0 дать нельзя.

[И. В. Садовничая, *Математический анализ. Функции многих переменных: теория и задачи*, page 69-74]

dop 2. Формулы Стокса, Остроградского.

Односвязная область — область D называется односвязной, если граница ее состоит из одного замкнутого контура.

Гладкая поверхность — Φ в $Oxyz$ называется гладкой, если у каждой точки Φ есть окрестность, допускающая гладкую параметризацию: $\overrightarrow{r} = r(u,v)$, $\overrightarrow{r} = r\{x,y,z\}$, в которых $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $z = z(u,v)$ являются непрерывно дифференцируемыми в G (гладкие, непрер. диффер. и все частные производные первого порядка непрерывны).

Обыкновенная точка — если $\exists$ такая гладкая параметризация $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $z = z(u,v)$, $(u,v) \in G$ некоторой ее окрестности, что в этой точке ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}$ равен двум. Иначе это точка особая.

Двусторонняя поверхность — поверхности, на которых $\exists$ непрерывное в целом (т.е. на всей поверхности) векторное поле нормалей.

Ограниченная поверхность — поверность ограниченная, если ее можно поместить в некоторый шар конечного радиуса.

Полная поверхность — если любая фундаментальная последовательность точек этой поверхности сходится к некоторой точке поверхности Φ; т.е. поверхность Φ полная, если множество точек ее составляющее является замкнутым.

Пусть $V \subset E^3$ - односвязная область с границей $\partial V = \Phi$. Пусть Φ: кусочно-гладкая, без особых точек, двусторонняя, ограниченная, полная. Пусть $Oxyz$: для каждой из осей $\forall$ прямая, параллельная оси, пересекается с Φ не более, чем в двух точках.

Теорема 1: Пусть множество V удовлетворяет указанным выше требованиям, $\overrightarrow{n}$– внешний единичный вектор нормали к Φ, $\overrightarrow{p}$ определена и непрерывна в $\overline{V} = V \cup \Phi$, дифф. в V и $\dfrac{\partial \overrightarrow{p}}{\partial \overrightarrow{e}}$ непрерывна в $\overline{V}$, $\forall \overrightarrow{e}$. Тогда:

$$\iiint_{\overline{V}} div \overrightarrow{p}\, dv = \iint_{\Phi} \left(\overrightarrow{p}, \overline{n}\right) d\sigma$$

— формула Остроградского-Гаусса в инвариантной форме.

Доказательство: Интегралы $\exists$, так как подынтегральные функции непрерывны.

Все величины, входящие в формулу инвариантны относительно выбора базиса в пространстве. Докажем эту формулу в ОНБ. Выберем систему координат так, чтобы для каждой из осей любая прямая, параллельная оси, пересекалась с поверхностью Φ не более, чем в двух точках. Координаты векторов: $\overrightarrow{p} = \{P, Q, R\}$, $\overrightarrow{n} = \{\cos X, \cos Y, \cos Z\}$, получаем: $\iiint_{\overline{V}} \left(\dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz = \iint_{\Phi} (P\cos X + Q\cos Y + R\cos Z) d\sigma$ — это формула Остроградского-Гаусса в ОНБ. Так как $\cos Z d\sigma =$ проекция элемента площади $d\sigma$ на $Oxy = dxdy$, тогда: $\iint_{\Phi} (P\cos X + Q\cos Y + R\cos Z) d\sigma = \iint_{\Phi} (Pdydz + Qdxdz + Rdxdy)$.

Покажем: $I \equiv \iiint_{\overline{V}} \left(\dfrac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz = \iint_{\Phi} Rdxdy$. Пусть D проекция $\overline{V}$ на Oxy.

$\forall$ прямая, параллельная Oz, проходящая через $(x,y,0) \in D$, пересекает Φ не более, чем в двух точках $z_1(x,y)$, $z_2(x,y)$, $z_1 \le z_2$. Обозначим через Φ_1 часть поверхности Φ: $z = z_1(x,y)$, $(x,y) \in D$, $\left(\widehat{\overrightarrow{n}, Oz}\right) \ge \dfrac{\pi}{2}$, поэтому $\cos Z \le 0$. Через Φ_2 часть поверхности Φ: $z = z_2(x,y)$, $(x,y) \in D$, $\left(\widehat{\overrightarrow{n}, Oz}\right) \le \dfrac{\pi}{2}$, поэтому $\cos Z \ge 0$, перейдем от тройного интеграла к двойному и используем соотношения для поверхностей Φ_1 и Φ_2: $I = \iint_D \left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z} dz \right) dxdy =$ $\iint_D R(x,y,z_2(x,y))\,dxdy - \iint_D R(x,y,z_1(x,y))\,dxdy = \iint_{\Phi_2} R(x,y,z)\cos Z d\sigma -$ $(-\iint_{\Phi_1} R(x,y,z)\cos Z d\sigma) = \iint_{\Phi_2} R(x,y,z)\,dxdy + \iint_{\Phi_1} R(x,y,z)\,dxdy = \iint_{\Phi} R(x,y,z)\,dxdy$

Теорема доказана.

Формула Стокса. Теорема 2: Пусть Φ – односвязная поверхность, опирающаяся на замкнутый гладкий контур $C = \partial\Phi$ без особых точек, Φ удовлетворяет пяти условиям: кусочно-гладкая, без особых точек, двусторонняя, ограниченная, ограниченная замкнутая часть полной поверхности. Пусть $\overrightarrow{n}$– единичный вектор нормали к Φ, $\overrightarrow{t}$– единичный вектор касательной к C, согласованный с $\overrightarrow{n}$. Пусть $\overrightarrow{p}$ определена и непрерывно дифференцир. в некоторой окрестности Φ. Тогда:

$$\iint_{\Phi} \left(\overrightarrow{n}, rot\overrightarrow{p}\right) d\sigma = \oint_C \left(\overrightarrow{p}, \overrightarrow{t}\right) dl$$

— это формула Стокса в инвариантной форме. Физика: поток вихря векторного поля через поверхность Φ равен циркуляции поля по $\partial\Phi$ (работе).

Доказательство: Часть первая:

Величины, входящие в формулу инвариантны относительно выбора базиса в пространстве, поэтому достаточно доказать ее в каком-то одном базисе, выбираем ОНБ. Пусть $Oxyz$ в E^3 можно выбрать так, что Φ однозначно проецируется на все три координатные плоскости. Выберем эту систему так, что $\overrightarrow{n}$ образует острые углы с Ox, Oy, Oz.

Координаты векторов: $\overrightarrow{p} = (P, Q, R)$, $\overrightarrow{n} = (\cos X, \cos Y, \cos Z)$, $\overrightarrow{t} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. Формула Стокса в ОНБ: $\iint_{\Phi}((R_y - Q_z)\cos X + (P_z - R_z)\cos Y + (Q_x - P_y)\cos Z)d\sigma =$ $\oint_C (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dl = \oint_C (Pdx + Qdy + Rdz)$ Достаточно доказать для P, Q, R. Докажем для P. Другие аналогично.

Докажем: $I \equiv \iint_{\Phi} \left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos Y - \frac{\partial P}{\partial y}\cos Z \right) d\sigma = \oint_C Pdx$

Так как Φ однозначно проецируется на Oxy, то она является графиком дифференцируемой функции $z = z(x,y)$ и ее параметризация: $\overrightarrow{r} = \{x, y, z(x,y)\}$. Обозначим через D проекцию Φ на Oxy, $\partial D = \Gamma$ – проекция контура C. Найдем выражения для косинусов. Учтем: $\left(\widehat{\overrightarrow{n}, Oz}\right) < \frac{\pi}{2}$. Имеем, $x = u$, $y = v$, $\cos Y = +\frac{\begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}}{\left|\left[\overrightarrow{r}_u, \overrightarrow{r}_v\right]\right|} = \frac{\begin{vmatrix} z'_x & 1 \\ z'_y & 0 \end{vmatrix}}{\sqrt{1 + {z'}_x^2 + {z'}_y^2}} =$ $\frac{-z'_y}{\sqrt{1 + {z'}_x^2 + {z'}_y^2}}$, $\cos Z = +\frac{\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}}{\left|\left[\overrightarrow{r}_u, \overrightarrow{r}_v\right]\right|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{1 + {z'}_x^2 + {z'}_y^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + {z'}_x^2 + {z'}_y^2}}$. Таким образом: $\cos Y = -z'_y \cos Z$, $I = -\iint_{\Phi} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos Z d\sigma$. Так как $\left(\widehat{\overrightarrow{n}, Oz}\right) < \frac{\pi}{2}$, то $I = -\iint_D \frac{\partial}{\partial y} P(x, y, z(x,y)))dxdy$. Применим формулу Грина $\iint_D ((Q_x - P_y))dxdy =$

$\oint_\Gamma (Pdx + Qdy)$. При $Q = 0$: $I = -\iint_D \frac{\partial}{\partial y} P\left(x, y, z\left(x, y\right)\right)) dxdy = \oint_\Gamma P\left(x, y, z\left(x, y\right)\right) dx =$ $\oint_C P\left(x, y, z\right) dx$ так как, если (x, y) пробегает кривую Γ, то $\left(x, y, z\left(x, y\right)\right)$ пробегает кривую C. Таким образом, $I \equiv \iint_\Phi \left(\frac{\partial P}{\partial z} \cos Y - \frac{\partial P}{\partial y} \cos Z\right) d\sigma = \oint_C Pdx$. Первая часть доказана.

Часть вторая:
Пусть Φ ни в одной СК $Oxyz$ однозначно не проецируется сразу на все три коорд. пл. Рассмотрим этот случай. Докажем **лемму:** пусть Φ удовлетворяет условиям теоремы 2. Тогда $\exists \delta > 0$: $\forall$ части Φ_i Φ размера $d\Phi_i < \delta$, можно так выбрать $O_i xyz$, что эта часть Φ_i однозначно проецируется на все три коорд. пл. в этой СК.

Доказательство: 1) Зафиксируем $\forall M_0$ на Φ, проведем касательную пл. через M_0 к этой поверхности. Пусть $\overrightarrow{n}_{M_0}$ – единичный вектор нормали к Φ в т. M_0. Декартову систему $Oxyz$ выбираем: эта касательная пл. отсекала равные участки от осей. Тогда $\overrightarrow{n}_{M_0}$ образует острые углы с базисными векторами i, j, k – с осями координат. Так как векторное поле нормалей $\overrightarrow{n}_M$ непрерывно на Φ, то $\exists$ окрестность $\widetilde{M}$ точки M_0 на Φ: все векторы нормалей из $\widetilde{M}$ образуют острые углы с базисными векторами. Тогда у M_0 имеется окрестность, которая однозначно проецируется на все три коорд. пл. в выбранной СК. Но нельзя гарантировать размер этой окрестности: $\delta = \delta(M_0)$.

2) Выбор единого числа δ для Φ. Пусть не найдется требуемого $\delta > 0$. Тогда для $\forall \delta_n = \frac{1}{n}$, $n = 1,2,...$, $\exists$ часть Φ_n поверхности Φ размера $d(\Phi_n) < \delta_n$, которая не проецируется однозначно хотя бы на одну коорд. пл. во всевозможных $Oxyz$. Выберем $\forall$ по одной точке M_n в каждой части Φ_n, получим M_n-огранич. (пов-ть огр), то $\exists M_{n_k}$, $M_{n_k} \to M_0$. Так как Φ- замкнутое множество, то $M_0 \in \Phi$. Но тогда из части 1) $\exists Oxyz$: некоторая окрестность $\widetilde{M} \subset \Phi$ точки M_0 однозначно проецируется на все три коорд. пл. в этой СК. Так как $M_{n_k} \to M_0$, а $d\Phi_{n_k} \to 0$ при $n_k \to \infty$,то $\exists N$: $\forall n_k \geq N : \Phi_{n_k} \subset \widetilde{M}$ и все эти части Φ_{n_k} однозначно проецируются в выбранной СК на все три коорд. пл. Противоречие выбору частей Φ_n. Тогда $\exists \delta > 0$, единое для всей поверхности Φ. **Лемма доказана.**

Так как для $\forall \Phi_i$ поверхности Φ, размера $d(\Phi_i) < \delta$ справедлива формула Стокса. Разбиваем Φ гладкими кривыми на конечное число частей Φ_i без общих внутренних точек, $\Phi = \bigcup_{i=1}^{n} \Phi_i$.

Тогда $\sum_i \iint_{\Phi_i} = \iint_\Phi$ и $\sum_i \oint_{C_i} = \oint_C$, так как мы суммируем криволинейные интегралы второго рода, а интегралы по внутренним границам взаимно уничтожатся (противоположные направления). **Теорема доказана.**

Ломов, *Математический анализ.*

dop 3. Почленное интегрирование и дифференцирование функциональных рядов.

Равномерная сходимость на множестве

$\sqsupset$ ф.п. $f_n(x) \underset{\{x\}}{\longrightarrow} f(x)$, где $\{x\} \in E^m$

Ф.п. $\{f_n(x)\}$ сходится к функции $f(x)$ **равномерно на множестве** $\{x\}$ $f_n(x) \underset{\{x\}}{\rightrightarrows} f(x)$, если для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ номер $N(\varepsilon)$: для $\forall n : n \geq N(\varepsilon)$ и для $\forall x \in \{x\}$ выполняется

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \tag{1}$$

Функциональный ряд называется **равномерно сходящимся** на множестве $\{x\}$ к сумме $S(x)$, если п-ть $\{S_n(x)\}$ его частичных сумм сходится равномерно на $\{x\}$ к предельной функции $S(x)$.

Критерий Коши равномерной сх-ти.

Ф.п. $\{f_n(x)\} \underset{\{x\}}{\rightrightarrows} f(x) \Leftrightarrow$ для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N(\varepsilon)$:

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon \text{ для } \forall n : n \geq N(\varepsilon), \forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in \{x\}$$

.

Почленный переход к пределу (теорема).

Если ф.п. $\{f_n(x)\} \underset{\{x\}}{\rightrightarrows} f(x)$ и для $\forall n$ $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f_n(x)$, то и предельная функция $f(x)$ имеет предел в точке x_0, причем

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} (\lim_{n \to \infty} f_n(x)) = \lim_{n \to \infty} (\lim_{x \to x_0} f_n(x)) \tag{2}$$

Формулировка для рядов:

Если ф. ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x) \underset{\{x\}}{\rightrightarrows} S(x)$ и для $\forall k$ $\exists \lim\limits_{x \to x_0} u_k(x) = b_k$, то и сумма ряда $S(x)$ имеет в точке x_0 предел

$$\lim_{x \to x_0} S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} [\lim_{x \to x_0} u_k(x)] = \sum_{k=1}^{\infty} b_k,$$

Почленное интегрирование (теорема).

Если ф.п. $\{f_n(x)\} \underset{[\,a,b]}{\rightrightarrows} f(x)$ и если $\forall f_n(x)$ интегрируема на $[\,a,b]$, то и предельная функция $f(x)$ интегрируема на $[\,a,b]$.

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n \to \infty} f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{3}$$

Формулировка для рядов:

Если ф. ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x) \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} S(x)$ и для $\forall k$ $u_k(x)$ - интегрируемая на $[a,b]$ функция, то и $S(x)$ - интегрируемая на $[a,b]$ функция, причем

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b u_k(x)\,dx$$

сходится и имеет своей суммой $\displaystyle\int_a^b S(x)\,dx$

Доказательство. (Для функциональных последовательностей. В случае рядов достаточно заменить $f_n(x)$ на $S_n(x)$ - п-ть частичных сумм ряда)
Докажем, что предельная функция $\boldsymbol{f(x)}$ **интегрируема** на $[a,b]$

Фиксируем $\forall\varepsilon > 0$. Достаточно доказать, что для $f(x)$ найдется хотя бы одно разбиение сегмента $[a,b]$: $S - s < \varepsilon$, где S и s - верхняя и нижняя суммы разбиения для функции $f(x)$.

Для этого достаточно доказать, что для выбранного ε $\exists$ номер n: для $\forall$ разбиения сегмента $[a,b]$ выполняется

$$S - s \le (S_n - s_n) + \frac{\varepsilon}{2}, \tag{4}$$

где $S, s-$ суммы для $f(x)$, S_n, s_n- суммы для $f_n(x)$.

Так как $f_n(x)$ интегрируемы на $[a,b]$, то можно выбрать разбиение: $S_n - s_n < \frac{\varepsilon}{2}$. Если для некоторого разбиения для некоторого n будет д-но (4), то будет верно $S - s < \varepsilon$, а это и будет означать интегрируемость предельной функции $f(x)$ на $[a,b]$.

Рассмотрим произвольное разбиение $\{x_k\}(k = 1, 2, ..., m)$ сегмента $[a,b]$ и обозначим символом $\omega_k(f_n)$ колебание на k-м частичном сегменте $[x_{k-1}, x_k]$ функции $f_n(x)$ (колебание функции $f(x)$ на сегменте X есть разность $\sup\limits_{x\in X} f(x) - \inf\limits_{x\in X} f(x)$).

Неравенство (4) будет доказано, если для достаточно большого n будет выполнено:

$$\omega_k(f) \le \omega_k(f_n) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}. \tag{5}$$

Так как, умножив (5) на $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ и суммируя получающееся неравенство по всем $k = 1, 2, ..., m$, получим (4)
Для $\forall n$ и $\forall$ 2-ух точек $x', x'' \in [x_{k-1}, x_k]$ справедливо $f(x') - f(x'') \equiv [f(x') - f_n(x')] + [f_n(x') - f_n(x'')] + [f_n(x'') - f(x'')]$, из которого следует

$$|f(x') - f(x'')| \le |f(x') - f_n(x')| + |f_n(x') - f_n(x'')| + |f_n(x'') - f(x'')|, \tag{6}$$

В силу $\{f_n(x)\} \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x)$ для выбранного нами ε $\exists n : \forall x \in [a,b]$ выполняется

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}. \tag{7}$$

Используя в правой части (6) неравенство (7) получим

$$|f(x') - f(x'')| \leq |f_n(x') - f_n(x'')| + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \tag{8}$$

Так как для $\forall x', x'' \in [\,x_{k-1}, x_k]$ справедливо $|f_n(x') - f_n(x'')| \leq \omega_k(f_n)$, то из (8) получим

$$|f(x') - f(x'')| \leq \omega_k(f_n) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \tag{9}$$

Обозначим верхнюю и нижнюю точные грани $f(x)$ на $[\,x_{k-1}, x_k]$ как M_k и m_k. В силу определения точной грани $\exists$ 2 п-ти точек $\{x'_p\}$ и $\{x''_p\}$ сегмента $[\,x_{k-1}, x_k]$: $\lim\limits_{p\to\infty} x'_p = M_k$, $\lim\limits_{p\to\infty} x''_p = m_k$.
В силу (9) для $\forall p$ справедливо

$$|f(x'_p) - f(x''_p)| \leq \omega_k(f_n) + \frac{\varepsilon}{2(b-q)} \tag{10}$$

Переходя в (10) к пределу слева получим $M_k - m_k = \omega_k(f)$. Итого в пределе получаем (5). Интегрируемость $f(x)$ доказана.

Теперь докажем почленную интегрируемость. Достаточно д-ть, что для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N(\varepsilon)$: для $\forall n \geq N(\varepsilon)$: $\left| \int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \right| < \varepsilon$.
В силу $\{f_n(x)\} \underset{[\,a,b]}{\rightrightarrows} f(x)$ следует, что $\exists N(\varepsilon)$: для $\forall x \in [\,a, b]$ и для $\forall n \geq N(\varepsilon)$ выполняется $|f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Учитывая последнее неравенство получаем:

$$\left| \int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \right| = \left| \int_a^b [\,f_n(x) - f(x)]\,\,dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx \leq$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \int_a^b dx = \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon. \tag{11}$$

□

Почленное дифференцирование (теорема).
Если каждая функция $f_n(x)$ имеет производную на $[\,a, b]$, причем п-ть $\{f'_n(x)\}$ сх-ся равномерно на $[\,a, b]$, а сама п-ть $\{f_n(x)\}$ сх-ся хотя бы в одной точке $x_0 \in [\,a, b]$, то $\{f_n(x)\} \underset{[\,a,b]}{\rightrightarrows} f(x)$, причем $\lim\limits_{n\to\infty} \{f'_n(x)\} = f'(x)$ для $\forall x \in [\,a, b]$.

Формулировка для рядов:

Если для $\forall k$ $\exists u'_k(x)$ на $[\,a, b]$ и если $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u'_k(x) \underset{[\,a,b]}{\rightrightarrows}$, а сам ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится хотя бы в одной точке $x_0 \in [\,a, b]$, то $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x) \underset{[\,a,b]}{\rightrightarrows} S(x)$, причем $S'(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u'_k(x)$.

Доказательство. (Для функциональных последовательностей. В случае рядов также заменить $f_n(x)$ на $S_n(x)$- п-ть частичных сумм ряда)
Сначала докажем, что $\{f_n(x)\} \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x)$.
Из сх-ти $\{f_n(x_0)\}$ и из равномерной сх-ти $\{f'_n(x)\}$ на $[a,b]$ следует, что для $\forall\varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon)$:

$$|f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2},\ |f'_{n+p}(x) - f'_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \tag{12}$$

для всех $n \geq N(\varepsilon), \forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in [a,b]$.
Возьмем $\forall x \in [a,b]$. Т.к. для функции $[f_{n+p}(t) - f_n(t)]$ при любых фиксированных n и p на сегменте, ограниченном точками x и x_0, все условия теоремы Лагранжа, то между x и x_0 $\exists\xi : [f_{n+p}(x) - f_n(x)] - [f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0)] = [f'_{n+p}(\xi) - f'_n(\xi)]\,(x - x_0)$.

Из (12) и последнего равенства $|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ (для $\forall x \in [a,b], \forall n \geq N(\varepsilon), \forall p \in \mathbb{N}$).
В силу критерия Коши $\{f_n(x)\} \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x)$, где $f(x)-$некоторая предельная функция.
Теперь докажем, что $f'(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \{f'_n(x)\}, \forall x \in [a,b]$.
Фиксируем $x \in [a,b]$ и для него $\delta > 0 : \delta-$окрестность точки x содержалась целиком в $[a,b]$.
Если $x-$граничная, то берется полуокрестность.

Обозначим символом $\{\Delta x\}$ множество всех чисел Δx: $0 < |\Delta x| < \delta,\ x \in (a,b);\ 0 < \Delta x < \delta,\ x = a;\ -\delta < \Delta x < 0,\ x = b;$. Докажем, что п-ть

$$\phi_n(\Delta x) = \frac{f_n(x + \Delta x) - f_n(x)}{\Delta x} \tag{13}$$

сходится равномерно на $\{\Delta x\}$. В силу критерия Коши равномерной сх-ти $\{f'_n(x)\}$, $\exists N(\varepsilon)$: для $\forall x \in [a,b], \forall n \geq N(\varepsilon), \forall p \in \mathbb{N}$ выполняется

$$|f'_{n+p}(x) - f'_n(x)| < \varepsilon \tag{14}$$

Фиксируем любое $\Delta x \in \{\Delta x\}$ и при любых фиксированных n и p применим к функции $[f_{n+p}(t) - f_n(t)]$ на $[x, x + \Delta x]$ теорему Лагранжа. Согласно этой теореме $\exists\theta :\ 0 < \theta < 1$

$$\frac{[f_{n+p}(x + \Delta x) - f_n(x + \Delta x)] - [f_{n+p}(x) - f_n(x)]}{\Delta x} = \\ = f'_{n+p}(x + \theta\Delta x) - f'_n(x + \theta\Delta x)$$

Последнее равенство можно переписать в виде

$$\phi_{n+p}(\Delta x) - \phi_n(\Delta x) = f'_{n+p}(x + \theta\Delta x) - f'_n(x + \theta\Delta x)$$

Из этого равенства и из (14) следует $|\phi_{n+p}(\Delta x) - \phi_n(\Delta x)| < \varepsilon$, $\forall\Delta x \in \{\Delta x\}, \forall n \geq N(\varepsilon), \forall p \in \mathbb{N}$
В силу критерия Коши п-ть $\{\phi_n(\Delta x)\}$ равномерно сходится на $\{\Delta x\}$. Тогда к $\{\phi_n(\Delta x)\}$ можно применить теорему о почленном предельном переходе в точке $\Delta x = 0$.
$\dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ - предельная функция для $\{\phi_n(\Delta x)\}$. Согласно теореме:

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} [\lim_{n\to\infty} \phi_n(\Delta x)] = \lim_{n\to\infty} [\lim_{\Delta x\to 0} \phi_n(\Delta x)] = \\ = \lim_{n\to\infty} f'_n(x).$$

Это и означает $f'(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \{f'_n(x)\}, \forall x \in [a,b]$. □

[Б. Х. С. В. А. Ильин В. А. С., *Математический анализ, продолжение курса*]

dop 4. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Разложение элементарных функций.

Теорема Тейлора

$\rceil$Функция $f(x)$ имеет в некоторой окрестности точки a $(n+1)$-ую производную $f^{(n+1)}(x)$. $\rceil$ x — значение из указанной окрестности, $p > 0$ - любое положительное число. Тогда между точками a и x найдется точка ξ такая, что справедливо:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots$$
$$\dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1}(x), \tag{1}$$

где

$$R_{n+1}(x) = \left(\frac{x-a}{x-\xi}\right)^p \frac{(x-\xi)^{n+1}}{n!p} f^{(n+1)}(\xi). \tag{2}$$

$R_{n+1}(x)$ - остаточный член в общей форме.

Доказательство. Положим

$$\phi(x,a) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots$$
$$\dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \tag{3}$$

Обозначим за $R_{n+1}(x)$ разность

$$R_{n+1}(x) = f(x) - \phi(x,a) \tag{4}$$

Теорема будет доказана, если установим, что $R_{n+1}(x)$ определяется формулой (2).
Фиксируем $\forall x \in$ окрестности, указанной в формулировке теоремы. Ради определенности $\rceil x > a$. Пусть t — переменная с областью изменения $[a, x]$, и рассмотрим функцию $\psi(t)$:

$$\psi(t) = f(x) - \phi(x,t) - (x-t)^p Q(x), \tag{5}$$

где

$$Q(x) = \frac{R_{n+1}(x)}{(x-a)^p} \tag{6}$$

т.е.

$$\psi(t) = f(x) - f(t) - \frac{f'(t)}{1!}(x-t) - \dots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n - (x-t)^p Q(x) \tag{7}$$

Покажем, что $\psi(t)$ удовлетворяет на $[a, x]$ всем условиям теоремы Ролля.
Из формулы (7) и из условий, наложенных на функцию $f(x)$ очевидно, что функция $\psi(t) \in C[a, x]$ и дифференцируема на $[a, x]$. При $t = a$ в (5) и, учитывая (6) получим

$$\psi(a) = f(x) - \phi(x,a) - R_{n+1}(x).$$

Учитывая (4) получим $\psi(a) = 0$. А равенство $\psi(x) = 0$ сразу вытекает из (7).

Итак, для $\psi(t)$ на $[\,a,x]$ выполнены условия теоремы Ролля. Согласно этой теореме $\exists \xi \in (a,x)$:

$$\psi'(\xi)=0 \tag{8}$$

Подсчитаем $\psi'(t)$, продифференцировав (7):

$$\begin{aligned}\psi'(t) = -f'(t) + \frac{f'(t)}{1!} - \frac{f^{(2)}(t)}{1!}(x-t) + \frac{f^{(2)}(t)}{2!}2(x-t) - \ldots \\ \ldots + \frac{f^{n}(t)}{n!}(x-t)^{n-1} - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + p(x-t)^{p-1}Q(x)\end{aligned} \tag{9}$$

Все члены в (9) кроме последних двух взаимно уничтожаются. Таким образом

$$\psi'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + p(x-t)^{p-1}Q(x) \tag{10}$$

Полагая $t=\xi$ и, используя (8), получим

$$Q(x) = \frac{(x-\xi)^{n-p+1}}{n!p} f^{(n+1)}(\xi) \tag{11}$$

Из (11) и (6) следует

$$R_{n+1}(x) = (x-a)^p Q(x) = \frac{(x-a)^p (x-\xi)^{n-p+1}}{n!p} f^{(n+1)}(\xi).$$

Теорема доказана. □

Остаточный член в форме Лагранжа

Преобразуем формулу (2). Так как $\xi \in (a,x)$, то найдется такое $\theta \in (0,1)$: $\xi - a = \theta(x-a)$. При этом $\xi = a + \theta(x-a)$, $x - \xi = (x-a)(1-\theta)$. Тогда для из (2) получим:

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-a)^{n+1}(1-\theta)^{n-p+1}}{n!p} f^{(n+1)}[\,a+\theta(x-a)] \tag{12}$$

По условию теоремы Тейлора в качестве p можно взять любое положительное число. Пусть $p=n+1$. Тогда из (12) получим остаточный член в **форме Лагранжа**:

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}[\,a+\theta(x-a)]\,. \tag{13}$$

Разложение элементарных функций

Взяв формулу Тейлора (1) при $a=0$ получим **формулу Маклорена**.

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_{n+1}(x), \tag{14}$$

где остаточный член в форме Лагранжа примет вид:

$$R_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}[\,\theta x]\,.$$

Разложения по формуле Маклорена:

1. $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + R_{n+1}(x),$

$$\text{где } R_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}, \quad \theta \in (0,1)$$

2. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n+1}(x),$

$$\text{где } R_{2n+1}(x) = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\sin\Big(\theta x + (2n+1)\frac{\pi}{2} + \pi\Big), \quad \theta \in (0,1)$$

3. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n+2}(x)$

$$\text{где } R_{2n+2}(x) = \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cos\Big(\theta x + (2n+2)\frac{\pi}{2} + \pi\Big), \quad \theta \in (0,1)$$

4. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_{n+1}(x),$

$$\text{где } R_{n+1}(x) = \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}, \quad \theta \in (0,1)$$

5. $(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n + R_{n+1}(x),$

$$\text{где } R_{n+1}(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-(n+1)}x^{n+1}, \quad \theta \in (0,1)$$

[Э. Г. П. В. А. Ильин, *Основы математического анализа: Часть 1*]

dop.5 Ряд Лорана. Классификация изолированных особых точек.

Ряд Лорана

Определение. **Рядом Лорана** называется функциональный ряд вида:

$$\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{n=\infty} c_n(z-z_0)^n + \sum_{n=-\infty}^{n=-1} c_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{n=\infty} c_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} \tag{1}$$

где z переменная $\in \mathbb{C}\backslash\{z_0\}$, а c_n коэффициенты $\in \mathbb{C}$.

Определение. Ряд (2) называют **правильной** частью ряда Лорана.

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} c_n(z-z_0)^n \tag{2}$$

Определение. Ряд (3) называют **главной** частью ряда Лорана.

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} \tag{3}$$

Говорят, что ряд (1) сходится в т. z, если в ней сходятся ряды (2) и (3).

- Ряд (2) – обычный степенной ряд. Если его радиус сходимости $R_1 = 0$, то он сходится лишь в т.z_0, а ряд (1) не сходится нигде. Если $R_1 > 0$, то в круге $|z - z_0| < R_1$ ряд (3) сходится абсолютно к некоторой функции $f_1(z)$.

- Ряд (3) не является степенным рядом, но приводится к нему заменой $\rho = \dfrac{1}{z - z_0}$. Если радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{n=\infty} c_{-n}\rho^n(2)$ равен 0, то и ряды (1) и (3) не сходятся. Если радиус сходимости (2) $R_2^{-1} > 0$, то ряд (2) сходится абсолютно в круге $|\rho| < R_2^{-1} \Rightarrow$ ряд (3) сходится абсолютно в области $|z - z_0| > R_2$ к некоторой функции $f_2(z)$. Если $R_1 < R_2$, то области сход. рядов не пересекаются и ряд Лорана не сходится нигде. Если $R_1 = R_2 = R$, то общие точки сходимости могут лежать лишь на $|z - z_0| = R$ и их наличие требует отдельного исследования. Если $R_1 > R_2$, то оба ряда абсолютно сходятся в кольце $D : R_2 < |z - z_0| < R_1$, ряд (1) абсолютно сходится там же к функции $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$.

Замечание: Пусть ряд (1) абс.сход в кольце D к функции $f(z)$. Покажем, что коэффициенты этого ряда однозначно определяются его суммой $f(z)$. Рассмотрим ряд (1) в точках окружности $\phi : |z - z_0| = \rho$, где $R_2 < \rho < R_1$. На этой окружности как на компакте, ряд сх-ся равномерно. Равномерная сходимость сохраняется при умножении каждого члена ряда на функцию ограниченную на ϕ. Фикс k и рассмотрим функцию $\dfrac{1}{2\pi i(z-z_0)^{k+1}} \Rightarrow$

$$\frac{f(z)}{2\pi i(z-z_0)^{k+1}} = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \frac{1}{2\pi i} c_n (z-z_0)^{n-k-1} \iff$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\phi} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\, dz = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \frac{1}{2\pi i} c_n \oint_{\phi} (z-z_0)^{n-k-1}\, dz.$$

Интеграл в правой части $\neq 0$ только при $n-k-1=-1 \iff n=k$(в лекциях Доминой считался) при этом он равен $2\pi i \Rightarrow$ коэффициенты определены однозначно и равны:

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\phi} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\, dz$$

.

> **Теорема 1.** Функция $f(z) \in A(D), D: R_2 < |z-z_0| < R_1$, может быть представлена рядом Лорана по степеням $(z-z_0)$ причем это представление единственно.

Доказательство. $\Longrightarrow$: доказано в замечании.
$\Longleftarrow$: Фикс произвольную точку $z \in D$, построим вспомогательное кольцо D' с тем же центром в z_0, $D' \subset D$ и $z \subset int(D')$. Пусть $\Gamma_1^{'} : |\rho - z_0| = R_1'$ и $\Gamma_2^{'} |\rho - z_0| = R_2'$ – внутренння и внешняя границы кольца D', тогда:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1^{'}} \frac{f(\rho)}{\rho - z}\, d\rho - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_2^{'}} \frac{f(\rho)}{\rho - z}\, d\rho. \tag{4}$$

Т.к $|\dfrac{z-z_0}{\rho-z_0}| < 1$ для $\forall$ точек $\rho \in \Gamma_1^{'}$, то подынтегральную дробь $\dfrac{1}{\rho - z}$ можно заменить ∞ геом.прогрессией:

$$\frac{1}{\rho - z} = \frac{1}{\rho - z_0 + z_0 - z} = \frac{1}{\rho - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{\rho - z_0}} = \frac{1}{\rho - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(\rho-z_0)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(\rho-z_0)^{n+1}} \iff$$
$$\frac{f(\rho)}{\rho - z_0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\rho)(z-z_0)^n}{(\rho-z_0)^{n+1}}. \tag{5}$$

Ряд в правой части сходится равномерно на $\Gamma_1^{'}$ т.к мажорируется

$$\max_{\rho \in \Gamma_1^{'}} |f(\rho)| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(\rho-z_0)^{n+1}} \Rightarrow$$

можно почленно интегрировать (5) по окружности $\Gamma_1^{'}$:

$$\oint_{\Gamma_1'} \frac{f(\rho)}{\rho - z_0}\, d\rho = \sum_{n=0}^{\infty} \oint_{\Gamma_1'} \frac{f(\rho)(z-z_0)^n}{(\rho - z_0)^{n+1}}\, d\rho \Longleftrightarrow \{c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1'} \frac{f(\rho)}{(\rho - z_0)^{n+1}}\, d\rho \ , \ n = 0..\infty\} \Longleftrightarrow$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1'} \frac{f(\rho)}{\rho - z_0}\, d\rho = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \tag{6}$$

Рассмотрим второй интеграл в (4). Для $\forall$ точки $\rho \in \Gamma_2'$ выполнено

$$\mu = \frac{|\rho - z_0|}{|z - z_0|} < 1 \Rightarrow -\frac{1}{\rho - z} = \frac{1}{z - z_0 - (\rho - z_0)} = \frac{1}{z - z_0} \frac{1}{1 - \frac{\rho - z_0}{z - z_0}} =$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\rho - z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\rho - z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z - z_0)^{-n}}{(\rho-z_0)^{-n+1}}. \tag{7}$$

Получается р-но.сх-ся ряд на Γ_2' т.к мажорируется числовой прогрессией со знаменателем μ. Равномерная сходимость (7) сохранится и после умножения каждого члена на ограниченную в Γ_2' ф-цию $\frac{f(\rho)}{2\pi i}$. Интегрируя почленно $-\frac{f(\rho)}{2\pi i(\rho - z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(\rho)(z - z_0)^{-n}}{(\rho-z_0)^{-n+1}}$ по окружности Γ_2' и полагая $c_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1'} \frac{f(\rho)}{(\rho - z_0)^{-n+1}}\, d\rho$, $n = 1..\infty$. Имеем:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_2'} \frac{f(\rho)}{\rho - z}\, d\rho = \sum_{n=1}^{\infty} c^{-n} (z-z_0)^{-n} \tag{8}$$

Заменяя оба интеграла в (4) на их разложения (6) и (8) приходим к ряду Лорана. $\square$

Классификация изолированных особых точек
Пусть $D : 0 < |z - z_0| < R$ – проколотая окрестность точки $z_0 \neq \infty$ и $f(z) \in A(D)$ (в самой точке аналитичность нарушается). Точка z_0 для ф-ции $f(z)$ является **изолированной особой точкой**. D можно рассматривать как кольцо с центром в т.z_0 и внутренним радиусом 0. По теореме Лорана $f(z)$ может быть разложена в D в ряд Лорана по степеням $z - z_0$:

$$\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{n=\infty} c_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{n=\infty} c_{-n} (z-z_0)^{-n} \ , \ z \in D$$

Для этого ряда имеются 4 возможности:

1. Точка z_0 – **устранимая особая точка** $f(z)$, если главная часть ряда Лорана (1) равна нулю.

2. Точка z_0 – **полюс** $f(z)$, если главная часть ряда Лорана (1) содержит конечное число членов.

3. Точка z_0 – **полюс порядка** $k (k \in N)$ функции $f(z)$, если k – максимальная по модулю степень у ненулевого члена главной части лорановского разложения в проколотой окрестности точки z_0. А именно, ряд (1) имеет коэффициент $c_{-k} \neq 0$, в то время как $c_{-n} = 0 \; \forall n > k$.

4. Точка z_0 – **существенно особая точка** $f(z)$, если главная часть ряда (1) содержит бесконечное число членов.

Теорема 2. Следующие 3 утверждения эквивалентны: а) z_0 - устранимая особая точка ф-ции $f(z)$, б) $\exists$ конечный $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$, в) $f(z)$ ограничена в некоторой окрестности точки z.

Доказательство. а)→б): По условию $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, $z \in D$. Сумма $g(z)$ стоящего справа ряда непрерывна в т.z_0 и ее значение в этой точке равно свободному члену c_0 ряда, т.к вне z_0 функции $f(z)$ и $g(z)$ совпадают, то $\exists \lim\limits_{z \to z_0} f(z) = c_0$.

б)→в) Функция имеющая конечный lim в точке z_0 ограничена в некоторой окрестности этой точки.

в)→а) По условию в некоторой окрестности U точки z_0 выполняется соотношение $|f(z)| \leq M \forall z \in U$. Пусть $\gamma : |z - z_0| = \rho$ - окружность принадлежащая этой окрестности. Как $\Rightarrow$ из доказательства т.Лорана коэффициенты ряда (1) представимы в виде: $c_n = \dfrac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma} \dfrac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, dz \Rightarrow |c_n| \leq M\rho^{-1}$. Для отрицательных n правая часть этой оценки стремится к 0 при $\rho \to 0$. Таким образом в ряде (1) все коэффициенты c_n с отрицательными индексами $= 0 \Rightarrow z_0$ устранимая особая точка $f(z)$. □

Теорема 3. Изолир.особая точка z_0 ф-ции $f(z)$ является ее полюсом $\iff \lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$.

Доказательство.

1. Пусть z_0 – полюс $f(z)$, тогда в некоторой проколотой окрестности K точки z_0 имеется представление $f(z) = \dfrac{c_{-k}}{(z - z_0)^k} + ... + c_0 + c_1(z - z_0) + ...(3)$, где $c_{-k} \neq 0$. Равенство (3) можно переписать в виде:

$$f(z)(z - z_0)^k = c_{-k} + c_{-k+1}(z - z_0) + ... + c_0(z - z_0)^k + ...$$

   причем ряд, стоящий в правой части последнего равенства, сходится в некотором круге $K_r = \{z : |z - z_0| < r\}$. Если $\phi(z)$ сумма этого ряда, то $\phi(z) \in A(K_r)$, $\phi(z_0) = c_{-k} \neq 0$. Поэтому $f(z) = \dfrac{\phi(z)}{(z - z_0)^k}$ и очевидно $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$.

2. Обратно, пусть $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$. Тогда существует проколотая окрестность K точки z_0, где $f(z) \neq 0$, поэтому в K определена аналитическая функция $g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$, причём справедливо представление:

$$g(z) = a_k(z - z_0)^k + a_{k+1}(z - z_0)^{k+1} + ... = (z - z_0)^k (a_k + a_{k+1}(z - z_0) + ...)$$

где $k \geq 1$, $a_k \neq 0$. Значит $g(z) = (z - z_0)^k \phi(z)$, где $\phi(z_0) \neq 0$. Тогда:

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{(z - z_0)^k} \frac{1}{\phi(z)} = \{\phi(z) \in A(K) \Rightarrow \frac{1}{\phi(z)} \in A(K)$$

$$\text{значит можно разложить в ряд Лорана}\} = \frac{1}{(z - z_0)^k}(b_0 + b_1(z - z_0) + ...),$$

где $b_0 = \dfrac{1}{\phi(z_0)} = \dfrac{1}{a_k} \neq 0$, т.е z_0 – полюс $f(z)$.

□

Теорема 4. Точка z_0 – полюс порядка k функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда в K справедливо представление: $f(z) = \dfrac{\phi(z)}{(z - z_0)^k}$, где $\phi(z) \in A(z_0)$, $\phi(z_0) \neq 0$.

Доказательство. Утверждение следует из доказательства предыдущей теоремы □

Следствие.1 Для того, чтобы в точке z_0 был полюс порядка k функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы функция $g(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{f(z)} & \text{,где } z \neq z_0 \\ 0 & \text{,где } z = z_0 \end{cases}$ имела в точке z_0 нуль порядка k.

Доказательство. Точка z_0 – нуль порядка k функции $g(z)$ тогда и только тогда, когда $g(z) = (z - z_0)^k g_1(z)$, где $g_1(z) \in A(z_0)$, $g_1(z_0) \neq 0$. Далее по теореме. □

Теорема 5. Изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ является существенно особой тогда и только тогда, когда не существует $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$.

Теорема 6. *(Сохоцкого–Казорати–Вейерштрасса).* Пусть z_0 – существенно особая точка функции $f(z)$. Тогда для произвольного числа $A \in \mathbb{C}$ найдётся такая последовательность z_n, сходящаяся к z_0, что $f(z_n) \to A$, $n \to \infty$.

Доказательство. Для заданного числа A такую последовательность z_n, будем называть A-последовательностью Сохоцкого. В любой окрестности сущ.особой точки z_0 $f(z)$ не может быть ограничена(иначе была бы устранимой по теореме 2)$\Longrightarrow$ найдется последовательность точек $z_n^{'} : |z_n^{'} - z_0| < \dfrac{1}{n}$ и $f(z_n^{'}) > n$. Эту послед можно принять за ∞-последовательность Сохоцкого. $\exists$-ние A-последовательности Сохоцкого: докажем от противного: Пусть такой послед не $\exists \Longrightarrow$ найдутся окрестности $U_\delta : 0 < |z_- z_0| < \delta$ и $\alpha > 0 : |f(z) - A| > \alpha$, $\forall z \in U_\delta (1)$. Положим $\phi(z) = \dfrac{1}{f(z) - A}$. Функция $\phi(z)$ определена и $\phi(z) \in A(U_\delta)$. Из (1) $\Longrightarrow |\phi(z)| < \dfrac{1}{\alpha} \forall z \in U_\delta$. По теореме.2 z_0 устранимая точка для $\phi(z) \Longrightarrow \exists \lim\limits_{z \to z_0} \phi(z)$. Найдем его значения c_0 с помощью ∞-последовательности Сохоцкого $z_n^{'} : c_0 = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{(f(z_n^{'}) - A)} = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{1}{(f(z) - A)} = 0$, что возможно лишь при $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty \Longrightarrow z_0$ – полюс $f(z)$, противоречие. □

Теорема 7. *(Пикара).* Пусть $a \in C$ – существенно особая точка для $f(z)$. Тогда в любой проколотой окрестности точки a, $f(z)$ принимает все комплексные значения, причём каждое бесконечное число раз (за исключением, быть может, одного A)

[Народ, *Студ билеты по ТФКП*] [Физфак, *Ряды Лорана*]

dop 6. Билинейные и квадратичные формы. Приведение их к каноническому виду. Закон инерции.

Определение. Пусть V — линейное пространство над $\mathbb{R}$. Отображение $\mathcal{A}\colon V \times V \to \mathbb{R}$ называется *билинейной формой* в пространстве V, если

1. $\mathcal{A}(x+y, z) = \mathcal{A}(x, z) + \mathcal{A}(y, z)$,
2. $\mathcal{A}(\alpha x, y) = \alpha \mathcal{A}(x, y)$,
3. $\mathcal{A}(x, y+z) = \mathcal{A}(x, y) + \mathcal{A}(x, z)$,
4. $\mathcal{A}(x, \alpha y) = \alpha \mathcal{A}(x, y)$,

$\forall x, y, z \in V,\ \ \alpha \in \mathbb{R}$.

Определение. Билинейная форма называется *симметрической*, если $\mathcal{A}(x, y) = \mathcal{A}(y, x), \forall x, y \in V$, и *кососимметрической*, если $\mathcal{A}(y, x) = -\mathcal{A}(x, y), \forall x, y \in V$.

Пример 0.4.1. В n-мерном пространстве V с базисом $e_1, \ldots, e_n$ отображение $\mathcal{A} : V \times V \to \mathbb{R}$, определенное правилом

$$\mathcal{A}(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j, \tag{1}$$

$\forall x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i,\ \ y = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i e_i$, где $a_{ij}\ \ (i, j = \overline{1, n})$ — фиксированные числа, является билинейной формой (в силу линейности координат).

Определение. Представление билинейной формы в виде ((1)) называется *общим видом билинейной формы в базисе* e.
Матрица $A_e = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n} : a_{ij} = \mathcal{A}(e_i, e_j),\ \ i, j = \overline{1, n}$ называется *матрицей билинейной формы* $\mathcal{A}(x, y)$ *в базисе* e.
Общий вид билинейной формы может быть записан в компактном виде: если $x_e,\ y_e$ — координатные столбцы векторов x и y в базисе e, то

$$\mathcal{A}(x, y) = x_e^T A_e y_e,\ \ \mathcal{A}(x, y) = y_e^T A_e^T x_e. \tag{2}$$

Первое из равенств проверяется непосредственно, второе можно получить транспонированием обеих частей первого.

Определение. Пусть $\mathcal{A}(x, y)$ — симметрическая билинейная форма в пространстве V над полем $\mathbb{P}$. *Квадратичной формой* называется отображение $\mathcal{A}\colon V \to \mathbb{P}$, которое $\forall x \in V \mapsto$

$\mathcal{A}(x,x)$, то есть сужение симметрической билинейной формы на диагональ декартова квадрата $V \times V$.
Обозначение: $\mathcal{A}(x,x)$ или $\mathcal{A}(x)$

Определение. Билинейная форма $\mathcal{A}(x,y)$ при этом называется *полярной билинейной формой* к квадратичной форме $\mathcal{A}(x,x)$.

Из свойств билинейных форм следует:

1. В базисе e квадратичная форма $\mathcal{A}(x,x)$ с матрицей $A_e = (a_{ij})$ может быть записана в виде: $\forall x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$

$$\mathcal{A}(x,x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j,\ a_{ij} = a_{ji}, \tag{3}$$

2. $rg\mathcal{A}(x,x) = rg\mathcal{A}(x,y)$.

Определение. Базис $e = (e_1, \ldots, e_n)$ называется *каноническим базисом квадратичной формы* $\mathcal{A}(x,x)$, если её матрица в этом базисе диагональна, то есть $A_e = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

Определение. В каноническом базисе квадратичная форма $\mathcal{A}(x,x)$ имеет вид $\mathcal{A}(x,x) = \lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2$, который называется *каноническим видом* квадратичной формы или *суммой квадратов*. Числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ называются её *каноническими* коэффициентами.

Очевидно, число ненулевых квадратов совпадает с рангом $\mathcal{A}(x,x)$. Итак, если e — канонический базис и $r = rg\mathcal{A}(x,x)$, то

$$\mathcal{A}(x,x) = \lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_r x_r^2,\ \forall x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i. \tag{4}$$

Теорема 8. (Метод Лагранжа приведения к каноническому виду)
Для любой квадратичной формы существует канонический базис.

Доказательство.
Пусть $e = (e_1, \dots, e_n)$ — базис V. Квадратичная форма $\mathcal{A}(x, x)$ с матрицей $A_e =$ $= (a_{ij})$ имеет в этом базисе вид ((3)). Обозначим $g(x_1, \dots, x_n) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$.

Покажем, что переходом к другому базису квадратичная форма $\mathcal{A}(x, x)$ приводится к каноническому виду.
Пусть $A_e \neq O$ (если это так, то e — искомый базис). Обозначим через Δ_k угловые миноры k-го порядка матрицы A_e, то есть $\Delta_k = M^{1,\dots,k}_{1,\dots,k}$, $k = \overline{1, n}$, и положим $\Delta_0 = 1$.

1. Рассмотрим сначала случай, когда $\Delta_k \neq 0$, $k = \overline{1, n}$. В этом случае процесс состоит из $n - 1$ однотипных шагов.
   Первый шаг основан на том, что $\Delta_1 \neq 0$, то есть $a_{11} \neq 0$. Сгруппируем все члены квадратичной формы $g(x_1, \dots, x_n)$, содержащие x_1, и выделим из них полный квадрат:
   $$g(x_1, \dots, x_n) = a_{11} x_1^2 + 2 \sum_{k=2}^{n} a_{1k} x_1 x_k + \sum_{i,k=2}^{n} a_{ik} x_i x_k =$$
   $$= a_{11} \left(x_1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{a_{1k}}{a_{11}} x_k \right)^2 - a_{11} \left(\sum_{k=2}^{n} \frac{a_{1k}}{a_{11}} x_k \right)^2 + \sum_{i,k=2}^{n} a_{ik} x_i x_k.$$
   Перейдем к новым координатам: $x_1' = x_1 + \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{a_{1k}}{a_{11}} x_k$ и $x_j' = x_j$ при $j \neq 1$,
   очевидно выполнив при этом невырожденное преобразование координат с матрицей
   $$Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}. \qquad (5)$$
   Тогда в новых координатах квадратичная форма имеет вид $\mathcal{A}(x, x) =$ $= a_{11} x_1^2 + h(x_2', \dots, x_n')$, где $h(x_2', \dots, x_n')$ — квадратичная форма от переменных $x_2', \dots, x_n'$. При этом матрица $A_1 = Q_1^T A_e Q_1$ квадратичной формы $\mathcal{A}(x, x)$ в новом базисе будет иметь вид
   $$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}' & \cdots & a_{2n}' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2}' & \cdots & a_{nn}' \end{bmatrix}.$$
   Каждая строка (столбец) матрицы A_1, начиная со второй, получена из соответствующей строки (столбца) матрицы A_e вычитанием из неё первой строки (столбца) матрицы A_e, умноженной на некоторое число, поэтому угловые миноры матрицы A_1 совпадают с $\Delta_1, \dots, \Delta_n \Rightarrow \Delta_1 = a_{11}, \Delta_2 =$

$= a_{11}a'_{22}$ и
$$a'_{22} = \frac{\Delta_2}{\Delta_1} \neq 0. \qquad (6)$$
Второй шаг основан на том, что $\Delta_2 \neq 0$, то есть $a'_{22} \neq 0$, и состоит в применении действий первого шага к квадратичной форме $h(x'_2, \ldots, x'_n)$: выделяется полный квадрат среди всех членов, содержащих x'_2, выполняется невырожденное преобразование координат
$$x''_2 = x'_2 + \sum_{k=3}^{n} \frac{a'_{2k}}{a'_{22}} x'_k \text{ и } x''_j = x'_j \text{ при } j \neq 2$$
и квадратичная форма $\mathcal{A}(x, x)$ приводится к виду $\mathcal{A}(x, x) = a_{11}x''^2_1 +$ $+ a'_{22}x''^2_2 + v(x''_3, \ldots, x''_n)$, где $v(x''_3, \ldots, x''_n)$ — квадратичная форма от переменных $x''_3, \ldots, x''_n$, а ее матрица — к виду
$$A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a'_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a''_{33} & \cdots & a''_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a''_{n3} & \cdots & a''_{nn} \end{bmatrix}.$$
По-прежнему угловые миноры матрицы A_2 совпадают с $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$, поэтому
$$a''_{33} = \frac{\Delta_3}{\Delta_2} \neq 0. \qquad (7)$$
Повторяя этот процесс, через $(n-1)$ шагов мы придем к базису, в котором матрица квадратичной формы $\mathcal{A}(x, x)$ имеет диагональную форму: $A_{n-1} =$ $= diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, где с учетом ((6)) и ((7)) и обозначения $\Delta_0 = 1$
$$\lambda_i = \frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}}, \; i = \overline{1, n}. \qquad (8)$$
Каждый i-ый шаг процесса начинается с условия, что $\Delta_i \neq 0$, так как только при выполнении этого условия можно провести текущий шаг. Метод, описанный выше, называется *методом Лагранжа*.

2. Пусть теперь сред угловых миноров $\Delta_1, \ldots, \Delta_{n-1}$ могут встретиться нулевые. Модифицируем метод Лагранжа.
   Опишем i-ый шаг. Пусть после $(i-1)$-го шага матрица квадратичной формы $\mathcal{A}(x, x)$ имеет вид
$$A_{i-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & & & O \\ & \ddots & & \\ & & a_{i-1,i-1} & \\ O & & & C \end{bmatrix}, \text{ где } C = \begin{bmatrix} a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$
   (штрихи опущены для упрощения записи). Будем считать, что $C \neq O$ (если это так, то канонический базис уже построен).

(a) Если $a_{ii} \neq 0$, то выполним i-ый шаг метода Лагранжа.

(b) Пусть $a_{ii} = 0$.
а) Если среди диагональных элементов матрицы $C\ \exists\ a_{jj} \neq 0,\ j > i$, то перенумеруем переменные (то есть векторы базиса): $x'_i = x_j,\ x'_j = = x_i,\ x'_k = x_k$ при $k \neq i, j$. Тогда в матрице A_{i-1} поменяются местами строки (столбцы) с номерами i и j, поэтому в позиции (i, i) окажется ненулевой элемент $a'_{ii} = a_{jj}$, с помощью которого выполним i-ый шаг метода Лагранжа.
б) Пусть все диагональные элементы матрицы C равны нулю, тогда в ней $\exists\ a_{kj} \neq 0,\ k, j \geq i,\ k \neq j$. Это означает, что в квадратичной форме от переменных $x_i, \ldots, x_n$ отсутствуют квадраты $x_i^2, \ldots, x_n^2$, но содержится член вида $2a_{kj}x_kx_j$. Перейдем к новым координатам, положив $x_k = x'_k + x'_j,\ x_j = x'_k - x'_j$ и $x'_s = x_s$ при $s \neq k, j$. Тогда квадратичная форма будет иметь квадраты ${x'_k}^2, {x'_j}^2$ и мы окажемся в ситуации (а), при этом все преобразования координат были невырожденными.

$\square$

Определение. Пусть квадратичная форма $\mathcal{A}(x, x)$ приведена к каноническому виду ((4)). Число π положительных квадратов в ((4)) и число $\nu = r - \pi$ называются *положительным и отрицательным индексами инерции* квадратичной формы $\mathcal{A}$, а их разность $\sigma = \pi - \nu$ называется *сигнатурой* $\mathcal{A}(x, x)$.

Теорема 9. (Закон инерции)
Положительный и отрицательный индексы инерции вещественной квадратичной формы не зависят от выбора канонического базиса.

Доказательство.
Пусть e и f — канонические базисы для $\mathcal{A}(x, x)$ ранга r и для
$x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_ie_i = \sum\limits_{i=1}^{n} y_if_i$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x, x) &= a_1x_1^2 + \ldots + a_px_p^2 - a_{p+1}x_{p+1}^2 - \ldots - a_rx_r^2, \\ \mathcal{A}(x, x) &= b_1y_1^2 + \ldots + b_qy_q^2 - b_{q+1}y_{q+1}^2 - \ldots - b_ry_r^2, \end{aligned} \tag{9}$$

где $a_i > 0,\ b_i > 0,\ i = \overline{1, r}$.
Докажем, что $p \leq q$. От противного: пусть $p > q$.
Рассмотрим подпространства $L_1 = \mathcal{L}(e_1, \ldots, e_p)$ и $L_2 = \mathcal{L}(f_{q+1}, \ldots, f_n)$. Согласно $\dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_2)$, $dim(L_1 \cap L_2) = p + (n - q) - dim(L_1 + L_2)$; $dim(L_1 + L_2) \leq n$,
$p > q \Rightarrow dim(L_1 + L_2) > 0 \Rightarrow \exists\ x_0 \neq \theta,\ x_0 \in L_1 \cap L_2$.
Пусть $x_0 = \alpha_1e_1 + \ldots + \alpha_pe_p = \beta_{q+1}f_{q+1} + \ldots + \beta_nf_n$. Тогда, согласно ((9))

$$\mathcal{A}(x_0, x_0) = a_1\alpha_1^2 + \ldots + a_p\alpha_p^2 = -b_{q+1}\beta_{q+1}^2 - \ldots - b_r\beta_r^2. \tag{10}$$

Так как $x_0 \neq \theta$, то $a_1\alpha_1^2 + \ldots + a_p\alpha_p^2 > 0,\ -b_{q+1}\beta_{q+1}^2 - \ldots - b_r\beta_r^2 < 0 \Rightarrow (!) \Rightarrow p \leq q$. Аналогично доказывается, что $p \geq q$. Значит, $p = q$. $\square$

[Г. Д. Ким, *Линейная алгебра и аналитическая геометрия*]

dop 7. Принцип сжимающих отображений в полных метрических пространствах. Примеры применения.

Основные понятия

Определение. Метрическим пространством M называется множество элементов $x, y, ...$, в котором любой паре элементов x, y поставлено в соответствие некоторое число $d(x, y)$, называемое метрикой или расстоянием, удовлетворяющее следующим аксиомам:

1. $d(x, y) \geq 0$, причем $d(x, y) = 0 \iff x = y$.
2. $d(x, y) = d(y, x)$.
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)\ \forall x, y, z \in M$ (неравенство треугольника)

Примеры.

1. $\mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$.
2. $\mathbb{R}^n$, $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2}$.
3. $\mathbb{C}$, $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$.
4. $C[a, b]$, $d(f, g) = \max\limits_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|$.

Определение. Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, где все $x_n \in M$, называется **сходящейся** к $x \in M$, если $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$.
Определение. Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, где все $x_n \in M$, называется **фундаментальной**, если $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x_m) = 0$ (т.е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) \in N : \forall\ n, m > N\ d(x_n, x_m) < \varepsilon$).
Определение. Метрическое пространство M называется **полным**, если любая фундаментальная последовательность его элементов сходится (к пределу, принадлежащему M).
Определение. Пусть X, Y - метрические пространства. Отображение $f : X \to Y$ называется **непрерывным** в т. $x \in X$, если $\forall\ \{x_n\} : x_n \to x \Rightarrow f(x_n) \to f(x)$.
Определение. Отображение $f : M \to M$ называется **сжимающим**, если $\exists \alpha \in (0, 1)$: $d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y)\ \forall x, y \in M$.
Определение. Пусть $f : M \to M$. Точка $x \in M$, для которой $f(x) = x$, называется **неподвижной** точкой отображения $f(x)$.

> **Теорема 10.** *(Принцип сжимающих отображений).* У любого сжимающего отображения, действующего в полном метрическом пространстве, существует и притом единственная неподвижная точка.

Доказательство. (Существование) Пусть M - полное метрическое пространство, $f : M \to M$ - сжимающее отображение. Возьмём произв. $x_0 \in M$ и построим последовательность $x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), ..., x_{n+1} = f(x_n)$. Пусть для определённости $n > m$, тогда

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha d(x_n, x_{n-1}) \leq ... \leq \alpha^n d(x_1, x_0),$$

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_{n-1}) + ... + d(x_{m+1}, x_m) \leq$$
$$\leq (\alpha^{n-1} + ... + \alpha^m) d(x_1, x_0) \leq \frac{\alpha^m}{1 - \alpha} d(x_1, x_0),$$

$0 < \alpha < 1$, правая часть стремится к нулю при $m \to \infty$, следовательно, $\{x_n\}$ - фундаментальна.
M - полное, $\{x_n\}$ - фундаментальная $\Rightarrow \exists x \in M$ - предел последовательности $\{x_n\}$.
Сжимающее отображение - непрерывно, тогда

$$f(x) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x,$$

то есть x - неподвижная точка.
(Единственность) Пусть есть две неподвижные точки: $f(x) = x, f(\tilde{x}) = \tilde{x}$. Допустим, что $x \neq \tilde{x}$.

$$d(x, \tilde{x}) = d(f(x), f(\tilde{x})) \leq \alpha d(x, \tilde{x}) < \{\alpha < 1\} < d(x, \tilde{x}).$$

Противоречие! Следовательно, $x = \tilde{x}$. □

Замечание
Для сжимающего отображение метод последовательных приближений, $x_{n+1} = f(x_n)$, сходится к неподвижной точке x при любом начальном приближении x_0.

Теорема 11. Пусть M - полное метрическое пространство, $f : M \to M$, f^m - сжимающее при некотором $m \in N$. Тогда $\exists!\ x \in M$: $f(x) = x$.

Доказательство. (Существование)
В силу принципа сжимающих отображений $\exists!\ x \in M : f^m(x) = x$. Тогда

$$d(f(x), x) = d(f(f^m(x)), f^m(x)) = d(f^m(f(x)), f^m(x)) \leq \alpha d(f(x), x).$$

Так как $\alpha \in (0, 1)$, $d(f(x), x) = 0$, то есть $f(x) = x$
(Единственность) Пусть есть две неподвижные для f точки: $f(x) = x, f(\tilde{x}) = \tilde{x}$. Но тогда они неподвижные и для f^m: $f^m(x) = x, f^m(\tilde{x}) = \tilde{x}$. Это противоречит принципу сжимающих отображений. Следовательно, $x = \tilde{x}$. □

Определение. Открытым шаром с центром в точке $x \in R$ радиуса $R > 0$ называется множество $B(x, R) = \{y \in M | d(x, y) < R\}$.
$\overline{B(x, R)}$ - замыкание шара (то есть с предельными точками).

Теорема 12. *(Локальная форма принципа сжимающих отображений).* Пусть M - полное метрическое пространство, $f : \overline{B(x_0, r)} \to M$, f - сжимающее на $\overline{B(x_0, r)}$ и $d(f(x_0), x_0) \leq (1 - \alpha)r$. Тогда $\exists! x \in \overline{B(x_0, r)} : f(x) = x$.

Доказательство.

$$d(f(x), x_0) \leq d(f(x), f(x_0)) + d(f(x_0), x_0) \leq \alpha d(x, x_0) + (1 - \alpha)r \leq$$
$$\leq \alpha r + r - \alpha r = r,$$

то есть $f(x) \in \overline{B(x_0, r)}$ и

$$f : \overline{B(x_0, r)} \to \overline{B(x_0, r)}.$$

$\overline{B(x_0, r)}$ - полное метрическое пространство, f - сжимающее отображение $\Rightarrow$ по принципу сжимающих отображений $\exists! x \in \overline{B(x_0, r)} : f(x) = x$. □

Определение. Метрическое пространство называется **компактным**, если из любой последовательности его элементов можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Теорема 13. Пусть M - полное компактное метрическое пространство, $f : M \to M$, $d(f(x), f(y)) < d(x, y)\ \forall x, y \in M,\ x \neq y$. Тогда $\exists! x \in M\ f(x) = x$.

Доказательство. (Существование) Обозначим $d_0 = \inf\limits_{x \in M} d(f(x), x) \geq 0$.
Если $d_0 = 0$, то $\exists x_n \in M : d(f(x_n), x_n) \to 0$. В силу компактности $\exists x_{n_k} \to x \in M$. Тогда видно, что $f(x) = x$. Если $d_0 > 0$, то, рассуждая аналогично, находим x_0: $d(f(x_0), x_0) = d_0$, но тогда

$$d_0 = d(f(f(x_0)), f(x_0)) < d(f(x_0), x_0) = d_0$$

- противоречие!
(Единственность) От противного: $d(x, \tilde{x}) = d(f(x), f(\tilde{x})) < d(x, \tilde{x})$. □

Пример применения

Рассмотрим линейное интегральное уравнение

$$x(t) = \lambda \int\limits_a^b K(t, \tau) x(\tau) d\tau + b(t), t \in [a, b],$$

где $K(t, \tau) \in C([a, b] \times [a, b])$.

Пусть $M = C[a, b], d(x, y) = \max\limits_{t \in [a,b]} |x(t) - y(t)|$, $K_0 = \max\limits_{t \in [a,b]} \int\limits_a^b |K(t, \tau) d\tau|$.

Пусть

$$f(x(t)) = \lambda \int\limits_a^b K(t, \tau) x(\tau) d\tau + b(t), t \in [a, b],$$

тогда

$$d(f(x), f(y)) \leq |\lambda| K_0 d(x, y) < d(x, y),$$

если $|\lambda| K_0 < 1$ - тогда f - сжимающий и $\exists!$ решение интегрального уравнения.

[Моисеев, *Лекции Е. И. Моисеева, осень 2020-2021*, page 49-52]

dop 8. Гильбертовы пространства. Теорема Леви об ортогональной проекции.

Определение. Полное евклидово (унитарное) пространство называется *гильбертовым*. Гильбертово пространство — это банахово пространство, в котором введено скалярное произведение, согласованное с нормой: $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$.

Примеры: пространство l_2, L_2. В гильбертовом пространстве справедливо неравенство КБШ: $|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.

Теорема 14. (Тождество параллелограмма)
Норма в линейном нормированном пространстве порождается некоторым скалярным произведением $\Leftrightarrow$ выполняется *тождество параллелограмма*:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2. \tag{1}$$

Доказательство.
$\boxed{\Rightarrow}$ Необходимость очевидна.
$\boxed{\Leftarrow}$ Рассмотрим случай пространства над $\mathbb{R}$. Положим

$$(x, y) = \frac{\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2}{2}.$$

Проверим выполняемость аксиом:

1. $(x, y) = (y, x)$ — очевидно

2. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$. Обозначим $\Delta = 2\big((x + y, z) - (x, z) - (y, z)\big)$ и покажем, что $\Delta = 0$:

$$\begin{aligned}\Delta = \|x + y + z\|^2 - \|x + y\|^2 - \|z\|^2 - \|x + z\|^2 + \|x\|^2 + \|z\|^2 - \\ - \|y + z\|^2 + \|y\|^2 + \|z\|^2 = \\ = \|x + y + z\|^2 - \|x + y\|^2 - \|x + z\|^2 - \|y + z\|^2 + \|z\|^2 + \|y\|^2 + \|x\|^2.\end{aligned}$$

   Теперь применим (1) к вектору $x + y + 2z$, рассмотрев его как $(x + y + z) + (z)$ и как $(x + z) + (y + z)$:

$$\begin{aligned}\|x + y + 2z\|^2 + \|x + y\|^2 = 2\|x + y + z\|^2 + 2\|z\|^2 \\ \|x + y + 2z\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x + z\|^2 + 2\|y + z\|^2\end{aligned}$$

   Вычитая:

$$\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 = 2\big(\|x + y + z\|^2 - \|x + z\|^2 - \|y + z\|^2 + \|z\|^2\big)$$

И подставляя в Δ:

$$\Delta = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) - \|x+y\|^2 + \|x\|^2 + \|y\|^2 = 0,$$

в силу (1).

3. $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$. В силу 2 аксиомы:

   (a) $(2x, y) = (x + x, y) = (x, y) + (x, y) = 2(x, y)$, т.е. аксиома верна для $\forall \alpha \in \mathbb{N}$

   (b) $(0, y) = \dfrac{\|0+y\|^2 - \|0\|^2 - \|y\|^2}{2} = 0,$
   $0 = (0, y) = (x + (-x), y) = (x, y) + ((-x), y)$, т.е. $((-x), y) = -(x, y)$ и аксиома верна для $\forall \alpha \in \mathbb{Z}$

   (c) $(x, y) = (n\dfrac{x}{n}, y) = n(\dfrac{x}{n}, y) \Rightarrow (\dfrac{1}{n}x, y) = \dfrac{1}{n}(x, y)$ и $(\dfrac{m}{n}x, y) = \dfrac{m}{n}(x, y)$ и аксиома верна для $\forall \alpha \in \mathbb{Q}$

   (d) Из непрерывности нормы вытекает непрерывность скалярного произведения $\Rightarrow$ выполняя предельный переход получаем $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

4. $(x, x) \geq 0 \ \forall x, \ = 0 \Leftrightarrow x = 0$ — очевидно

Теперь рассмотрим случай пространства над $\mathbb{C}$. Для нормы, порожденной скалярным произведением:

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2Re(x, y)$$
$$\|x+iy\|^2 = \|x\|^2 + \|iy\|^2 + 2Im(x, y)$$

Строим скалярное произведение:

$$(x, y) = \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4} - i\frac{\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2}{4}$$

Справедливость аксиом следует из вещественного случая. $\square$

Определение. Множество называется *выпуклым*, если вместе с любой парой своих элементов оно содержит и соединяющий их отрезок.

Теорема 15. (Об элементе с наименьшей нормой)
Пусть M — *замкнутое выпуклое* подмножество гильбертова пространства H. Тогда в M $\exists\,!$ элемент с наименьшей нормой.

Доказательство.
$\boxed{\exists}$ Обозначим $d = \inf\limits_{x \in M} \|x\|$ — требуется показать, что $\exists\,! \widetilde{x} \in M\colon \|\widetilde{x}\| = d$. Рассмот-

рим последовательность $x_n \in M$, $\|x_n\| \geq d$: $\|x_n\| \to d$ (такая $\exists$ в силу определения инфимума). Тогда в силу выпуклости M: $\dfrac{x_n + x_m}{2} \in M$ и по определению инфимума $\|\dfrac{x_n + x_m}{2}\| \geq d$.

С другой стороны, $\|\dfrac{x_n + x_m}{2}\| \leq \dfrac{\|x_n\|}{2} + \dfrac{\|x_m\|}{2}$. Тогда, переходя к пределу при $n, m \to \infty$ в двойном неравенстве:

$$d \leq \|\frac{x_n + x_m}{2}\| \leq \frac{\|x_n\|}{2} + \frac{\|x_m\|}{2}$$

получаем, что $\|\dfrac{x_n + x_m}{2}\| \to d$ (по т. о двух милиционерах). Далее, в силу (1):

$$\|x_n - x_m\|^2 = 2\|x_n\|^2 + 2\|x_m\|^2 - 4\|\frac{x_n + x_m}{2}\|^2$$

$\Rightarrow \|x_n - x_m\|^2 \to 0$, т.е. x_n — фундаментальна. Тогда, в силу гильбертовости H (следовательно, полноты): $\exists \widetilde{x} \in H: x_n \to \widetilde{x}$. В силу непрерывности нормы: $\|\widetilde{x}\| = \|\lim\limits_{n\to\infty} x_n\| = \lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = d$, т.е. $\widetilde{x}$ — искомый элемент, на котором достигается инфимум.

$\boxed{!}$ Пусть $\exists x' \in H: \|x'\| = d$. Тогда:

$$d \leq \|\frac{x' + \widetilde{x}}{2}\| \leq \frac{\|x'\|}{2} + \frac{\|\widetilde{x}\|}{2} = d \Rightarrow \|\frac{x' + \widetilde{x}}{2}\| = d$$

Тогда, в силу (1):

$$\|\widetilde{x} - x'\|^2 = 2\|\widetilde{x}\|^2 + 2\|x'\|^2 - 4\|\frac{x' + \widetilde{x}}{2}\|^2 = 0 \Rightarrow \widetilde{x} = x'$$

□

Определение. Множество всех элементов, ортогональных данному множеству L, называется *ортогональным дополнением* к L.
Обозн: $L^{\perp}$.

Теорема 16. (Теорема Леви об ортогональной проекции)
Пусть E — *замкнутое* линейное подмножество H. Тогда

$$H = E \oplus E^{\perp},$$

т.е. $\forall v \in H \ \exists\, ! \ u \in E, \ w \in E^{\perp}: v = u + w$, u называется *проекцией* v на E, w — перпендикуляром.

Доказательство. (док-во по лекциям Сергеева, см. ссылки)
$\boxed{\exists}$ По теореме об элементе с наименьшей нормой ((15)) $\exists! u \in E$, ближайший к v, пусть $w := v - u$, $\|w\| = d$. Покажем, что $w \in E^{\perp}$. Для $\forall z \in E$, $\forall t \in \mathbb{R}$ имеем

$$d^2 \leq \|v - (u + tz)\|^2 = \|w - tz\|^2 = d^2 - 2t\mathrm{Re}(w, z) + t^2\|z\|^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2t\mathrm{Re}(w, z) \leq t^2\|z\|^2 \ \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathrm{Re}(w, z) = 0$$

Аналогично, используя it вместо t, показывается, что $\mathrm{Im}(w, z) = 0$, то есть $(w, z) = 0 \ \forall z \in E$ и $w \in E^{\perp}$.
$\boxed{!}$ Пусть $v = u_1 + w_1$ — другое представление, тогда имеем

$$u - u_1 = w_1 - w := z \in E \cap E^{\perp} \Rightarrow (z, z) = 0,$$

т.е. $z = 0$ и разложения совпадают. □

***Следствие* 1.** Если $\dim E = 1$, т.е. $E = \left\{v \middle| v = \lambda e,\ e \in E,\ \|e\| = 1\right\}$, то в вышеуказанном разложении $u = (v, e)e$.

[Моисеев, *Лекции Е. И. Моисеева, весна 2020-2021*] [Сергеев, *Лекции по функциональному анализу*]

dop 9. Теорема Рисса о представлении линейного функционала.

Лемма.
Пусть линейный ограниченный функционал $f(x)$, $x \in H$, не является аннулирующим (т.е. $\exists x \in H : f(x) \neq 0$), тогда $dim(cokerf) = 1$.

Доказательство:
Очевидно, $kerf \neq H$ (иначе $f \equiv 0$). Пусть $x1, x2 \notin kerf$, тогда
$f(x_2)x_1 - f(x_1)x_2 \in kerf$, стало быть, $0 < dim(cokerf) < 2$, что и требовалось доказать.

Теорема Рисса о представлении линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве:
Для любого линейного ограниченного функционала $f(x)$, $x \in H$, существует и притом единственный элемент $h \in H$ такой, что $f(x) = (x, h)$, причем $||f|| = ||h||$.

Доказательство:
Если f аннулирующий, то $h = 0$; иначе в силу леммы $dim(kerf)^{\perp} = 1$. Очевидно, $kerf$ – замкнутое линейное подпространство. По теореме о разложении гильбертова пространства $H = kerf + (kerf)^{\perp}$, так что $\forall x \in H, \exists! x_1 \in kerf$, $x_2 \in (kerf)^{\perp} : x = x_1 + x_2$. Но тогда $f(x) = f(x_2)$. Пусть $(kerf)^{\perp} = L(e), ||e|| = 1$, тогда в силу следствия из теоремы о разложении $x_2 = (x, e)e$, стало быть, $f(x) = (x, e)f(e) = (x, h)$, где $h = \overline{f(e)}e$.
Далее, по неравенству Коши-Буняковского $|f(x)| < ||x||||h||$, откуда следует, что $||f|| \leq ||h||$. Положив $x = h/||h||$, получим противоположное неравенство, откуда следует, что $||f|| = ||h||$. Единственность: если $f(x) = (x, h) = (x, \tilde{h})$, то $(x, h - \tilde{h}) = 0$, $\forall x \in H$, и осталось положить $x = h - \tilde{h}$. Теорема доказана.

Следствие 1 Соответствие между f и h взаимно однозначное и изометричное.
Следствие 2 Оператор соответствия $f \to h$ антилинейный.
Следствие 3 $H \cong H^* \cong H^{**}$

[Моисеев, *Лекции Е. И. Моисеева, весна 2020-2021*, стр. 2]

dop 10. Сопряженный оператор в гильбертовом пространстве. Вполне непрерывные операторы.

Определение. Полное евклидово (унитарное) пространство называется *гильбертовым*. Гильбертово пространство — это банахово пространство, в котором введено скалярное произведение, согласованное с нормой: $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$.

Примеры: пространство l_2, L_2. В гильбертовом пространстве справедливо неравенство Коши-Буняковского: $|(x,y)| \le \|x\| \cdot \|y\|$.

$\rceil$ H — гильбертово пространство, $\mathcal{A} \colon H \to H$ — линейный ограниченный оператор.

Определение. Оператор $\mathcal{A}^* \colon H \to H$ называется *сопряженным* к оператору $\mathcal{A}$, если

$$\forall x, y \in H \quad (\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}^* y).$$

Пример 0.4.2. Определим в $H = L_2$ интегральный оператор:

$$\mathcal{A}x = \int\limits_D K(t,s)x(s)ds, \quad \iint\limits_{D^2} \left|K(t,s)\right|^2 dsdt < \infty.$$

Сопряженным к нему оператором является следующий интегральный оператор:

$$\mathcal{A}^* y = \int\limits_D \overline{K}(t,s)y(t)dt.$$

Теорема 17.
$\exists\,!$ линейный ограниченный $\mathcal{A}^*$, причем $\|\mathcal{A}^*\| = \|\mathcal{A}\|$.

Доказательство.
$\boxed{\exists}$ Построим $\mathcal{A}^*$. Рассмотрим функционал $f(x) = (\mathcal{A}x, y)$, $\forall y \in H$, он:

1. линейный, в силу линейности $\mathcal{A}$ и скалярного произведения
2. ограниченный: $|f(x)| = |(\mathcal{A}x, y)| \le \|\mathcal{A}x\| \cdot \|y\| \le \|\mathcal{A}\| \cdot \|x\| \cdot \|y\|$

Тогда для него справедлива теорема Рисса: $\exists! h \in H \colon f(x) = (x, h)$, и получаем

$$(\mathcal{A}x, y) = (x, h), \ \forall x, y \in H$$

Таким образом, так как $\forall y \in H \ \exists! h \in H$, положим $\mathcal{A}^* y = h$, существование доказано.

$\boxed{\text{Ограниченность}}$ Пусть $x = \mathcal{A}^* y$, тогда

$$(\mathcal{A}x, y) = (\mathcal{A}\mathcal{A}^* y, y) \le \|\mathcal{A}\mathcal{A}^* y\| \cdot \|y\| \le \|\mathcal{A}\| \cdot \|\mathcal{A}^* y\| \cdot \|y\|$$

С другой стороны, $(\mathcal{A}\mathcal{A}^* y, y) = \|\mathcal{A}^* y\|^2$, и имея нер-во $\|\mathcal{A}^* y\|^2 \le \|\mathcal{A}\| \cdot \|\mathcal{A}^* y\| \cdot \|y\|$, в случае $\|\mathcal{A}^* y\| \ne 0$, делим на $\|\mathcal{A}^* y\|$, получая

$$\|\mathcal{A}^* y\| \le \|\mathcal{A}\| \cdot \|y\|, \ \forall y \in H \tag{1}$$

следовательно $\mathcal{A}^*$ — ограничен.

$\boxed{\text{Равенство норм}}$ Пусть $y \ne \theta$, разделив нер-во 1 на $\|y\|$ и переходя к sup, получаем

$$\sup_{\|y\|=1} \|\mathcal{A}^* y\| = \|\mathcal{A}^*\| \le \|\mathcal{A}\|$$

В обратную сторону: положим $y = \mathcal{A}x$ и рассмотрим цепочку

$$(\mathcal{A}x, y) = (\mathcal{A}x, \mathcal{A}x) = \|\mathcal{A}x\|^2 = (x, \mathcal{A}\mathcal{A}^* x) \le \|x\| \cdot \|\mathcal{A}\mathcal{A}^* x\| \le \\ \le \|x\| \cdot \|\mathcal{A}^*\| \cdot \|\mathcal{A}x\|$$

Аналогично, деля обе части на $\|\mathcal{A}x\| \ne 0$, получаем $\|\mathcal{A}x\| \le \|\mathcal{A}^*\| \cdot \|x\| \Rightarrow \|\mathcal{A}\| \le \|\mathcal{A}^*\|$ и в итоге $\|\mathcal{A}\| = \|\mathcal{A}^*\|$.

$\boxed{\text{Единственность}}$ От противного: пусть $\exists \mathcal{A}^*, \ \widetilde{\mathcal{A}^*}: (\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}^* y) = (x, \widetilde{\mathcal{A}^*} y)$. Тогда

$$0 = (x, (\mathcal{A}^* - \widetilde{\mathcal{A}^*})y), \ \forall x \in H \Rightarrow \daleth \ x = (\mathcal{A}^* - \widetilde{\mathcal{A}^*})y \Rightarrow \|\mathcal{A}^* - \widetilde{\mathcal{A}^*})y\|^2 = 0$$

и $\mathcal{A}^* y = \widetilde{\mathcal{A}^*} y, \ \forall y \in H$. □

Лемма. Если $x_n \xrightarrow{w} x$, то $\mathcal{A}x_n \xrightarrow{w} \mathcal{A}x$.

Доказательство. $(\mathcal{A}x_n, y) = (x_n, \mathcal{A}^* y) \longrightarrow (x, \mathcal{A}^* y) = (\mathcal{A}x, y), \ \forall y \in H$, и по определению имеем $\mathcal{A}x_n \xrightarrow{w} \mathcal{A}x$. □

Пример 0.4.3. Пример тождественного оператора показывает, что не всякий огр. оператор переводит слабо сход. посл. в последовательность, сходящуюся по норме (или в сильно сходящуюся).

Определение. Оператор $\mathcal{A}\colon H \to H$ называется *вполне непрерывным*, если он любую слабо сходящуюся последовательность переводит в последовательность, сходящуюся по норме, то есть

$$\forall \{x_n\}\colon x_n \xrightarrow{w} x \ \Rightarrow \ \|\mathcal{A}x_n - \mathcal{A}x\| \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Вполне непр. оператор ограничен, т.е. непрерывен.

Теорема 18. Если $\mathcal{A}$ — вполне непрерывный оператор, то $\mathcal{A}^*$ — тоже вполне непрерывен.

Доказательство.
Пусть $x_n \xrightarrow{w} x$. Рассмотрим $\|\mathcal{A}^*(x_n - x)\|^2$:

$$\|\mathcal{A}^* x_n - \mathcal{A}^* x\|^2 = \big(\mathcal{A}^*(x_n - x), \mathcal{A}^*(x_n - x)\big) = (\mathcal{A}\mathcal{A}^*(x_n - x), x_n - x) \leq \\ \leq \|\mathcal{A}(\mathcal{A}^*(x_n - x))\| \cdot \|x_n - x\| \longrightarrow 0,$$

так как:

1. $\|\mathcal{A}(\mathcal{A}^*(x_n - x))\| \longrightarrow 0$, т.к. $\{\mathcal{A}^*(x_n - x)\}$ сх-ся слабо, а $\mathcal{A}$ — вполне непрерывен,
2. $\|x_n - x\|$ ограничена.

□

[Моисеев, *Лекции Е. И. Моисеева, весна 2020-2021*]

dop 11. Компактные операторы.

Доп. теория

Метрическое пространство (X, ρ) называется **предкомпактным** (X - множество, ρ - метрика на нем), если у любой последовательности в X существует фундаментальная подпоследовательность.

Метрическое пространство (X, ρ) называется **ограниченным**, если $\sup\limits_{x,y\in X} \rho(x,y) < \infty$.

Предкомпактное (X, ρ) ограничено (т.к $\rho(x_m, y_n) \to \infty$ противоречит фундаментальности $\{x_m\}$ и $\{y_n\}$).

Полное евклидово (унитарное) пространство называется **гильбертовым**.
Полное линейное нормированное пространство называется **банаховым**.

Слабая сходимость $\{x_n\} \xrightarrow[n\to\infty]{w} x$ в H означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n, h) = (x, h),\ \forall h \in H$ - гильбертово пространство.

Оператор $A : X \to Y$ называется **непрерывным** или **ограниченным**, если он переводит ограниченное множество в ограниченное.

$LB(X, Y)$ - множество всех линейных ограниченных операторов, действующих из X в Y.

ε-сеть для подмножества $M \in X$ метрического пространства (X, ρ), есть множество $Z \in X$:

$$\forall x \in M\ \exists\ z \in Z : \rho(x, z) < \varepsilon.$$

M - **вполне ограниченное**, если для $\forall \varepsilon > 0$ его можно накрыть конечной ε-сетью.

$$M \subset \bigcup_{k=1}^{n} B(x_k, \varepsilon),$$

где $B(x_k, \varepsilon)$ - шар радиуса ε с центром в x_k.

Теорема Хаусдорфа. Метрическое пространство M - предкомпактно $\Leftrightarrow$ оно вполне ограничено.

Билет

$\urcorner X$ и Y - банаховы пространства. Линейный оператор $A : X \to Y$ называется **компактным**, если он любое ограниченное множество из X переводит в множество, предкомактное в Y.

Оператор называется **вполне непрерывным**, если он любую слабо сходящуюся последовательность переводит в последовательность, сходящуюся по норме.

Теорема. Линейный оператор вполне непрерывный $\Leftrightarrow$ он компактный.

Доказательство. $\Rightarrow$ A - вполне непрерывный. Возьмем ограниченную последовательность $\{x_n\}$. Из любой ограниченной последовательности можно выбрать слабо сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$. $Ax_{n_k} \to Ax$, так как A - вполне непрерывный. Следовательно A переводит огрниченную п-ть $\{x_n\}$ в п-ть $\{Ax_n\}$, у которой можно выбрать фундаментальную подп-ть $\{Ax_{n_k}\}$. Следовательно A - компактный.
$\Leftarrow$ От противного. A - компактный. Пусть $x_n \xrightarrow{w} x, Ax_n \nrightarrow Ax$. Тогда $\exists \varepsilon > 0$ и $\exists \{n_k\}$:

$$||Ax_{n_k} - Ax|| \geq \epsilon.$$

Так как $\{x_{n_k}\}$ сходится слабо, то она ограничена. Так как A - компактный, то $\{Ax_{n_k}\}$ - предкомпактна, т.е из нее можно выбрать фундаментальную подпоследовательность, что противоречит неравенству. $\square$

Примеры компактных (вполне непрерывных) операторов.

1. Если пространства X и Y конечномерные, то любой линейный оператор ограничен, т.е. переводит ограниченное множество в ограниченное, но любое ограниченное множество предкомпактно в конечномерном пространстве, Таким образом, в конечномерных пространствах все линейные операторы компактны.

2. Для нулевого оператора образом является одна точка, значит он компактен.

3. Пусть X и Y - произвольные нормированные пространства. Оператором **конечного ранга** называется $A \in LB(X, Y)$, если его образ ImA является конечномерным пространством.
Покажем, что операторы конечного ранга являются компактными. Если множество $M \subset X$ ограниченное, то $A(M) \subset Y$ ограничено и в силу конечномерности ImA множество $A(M)$ предкомпактно.

4. Интегральный оператор с вырожденным ядром.
В пространстве $C[\,0, 1]$ рассмотрим интегральный оператор с вырожденным ядром, т.е.

$$Ax(t) = \int_0^1 K(t, s)x(s)\,ds,$$

где $K(t, s) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k(t)b_k(s)$, где $a_k(t), b_k(s)$ - непрерывные функции.
Тогда

$$Ax(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k(t) \int_0^1 b_k(s)x(s)\,ds = \sum_{k=1}^{n} c_k a_k(t),$$

т.е. образ ImA принадлежит конечномерному пространству L, порожденному функциями $a_k(t)$. Интегральный оператор A - ограниченный, следовательно, это оператор конечного ранга и он компактен.

Свойства компактных операторов

1. Если A и B - **компактные операторы**, то оператор $\alpha A + \beta B$ компактен $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$.

   Доказательство. (a) Докажем, что $A + B$ - компактен.
   $\urcorner M$ - ограниченное множество. В образе $(A+B)(M)$ возьмем последовательность $y_n = (A+B)x_n$. В силу компактности оператора A из Ax_n можно выделить сходящуюся подпоследовательность Ax_{n_k}, а из подпоследовательности Bx_{n_k}, в силу компактности В - сходящуюся подпоследовательность $Bx_{n_{k_i}}$. Подпоследовательность $(A+B)x_{n_{k_i}}$ сходится, значит, множество $(A+B)(M)$ предкомпактно (т.к. для любой п-ти y_n существует сходящаяся подп-ть) и оператор $A+B$ компактен.

   (b) Оператор умножения на число λ ограничен, и, значит λA - компактный.

   (c) Учитывая предыдущие пункты, любая линейная комбинация компактных операторов дает компактный оператор.

   $\square$

2. Произведение компактного и ограниченного операторов (в любом порядке) - компактный оператор.

3. Если $A \in LB(X, Y)$, $\{An\}$ – последовательность компактных операторов, действующих из X в Y и $||A_n - A|| \to 0$, то A - компактный.

   Доказательство. Пусть M - ограниченное множество в X и $||x|| \leq C$ для $x \in M$. Воспользуемся теоремой Хаусдорфа. Для $\forall \varepsilon > 0$ рассмотрим конечную ε-сеть для множества $A(M)$. Выберем $n_0 : ||A_{n_0} - A|| \leq \varepsilon/2C$. Т.к. множество $A_{n_0}(M)$ предкомпактно, то для него существует конечная $\varepsilon/2$-сеть $S = (s_1, ..., s_m)$. Покажем, что $S - \varepsilon$-сеть для $A(M)$. Пусть $y \in A(M)$. т.е. $y = Ax$, $x \in M$. Существует $s_i : ||s_i - A_{n_0}x|| \leq \varepsilon/2$ (определение ε-сети для $A_{n_0}(M)$). Тогда

   $$||y - s_i|| \leq ||y - A_{n_0}x|| + ||A_{n_0}x - s_i|| \leq$$
   $$\leq ||A - A_{n_0}||||x|| + \varepsilon/2 \leq (\varepsilon/2C)C + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

   $\square$

[Моисеев, *Лекции Е. И. Моисеева, весна 2020-2021*] [А. Б. Антоневич, *Функциональный анализ и интегральные уравнения*]

dop 12. Теорема Гильберта-Шмидта.

Базовая теория:
1. Оператор называется **вполне непрерывным**, если он любую слабо сходящуюся последовательность переводит в последовательность, сходящуюся по норме.
2. **Гильбертово пространство** – банахово пространство, в котором введено скалярное произведение, согласованное с нормой.
3. **Банахово пространство** – полное линейное нормированное пространство.
4. Точка $\lambda \in \mathbb{C}$ называется **регулярной точкой** оператора A ($\lambda \in \rho(A)$), если оператор $R_\lambda = (A - \lambda E)^{-1}$ существует, определен на всем пр-ве и ограничен. Число $\lambda \notin \rho(A)$ называется **спектральным**. Множество спектральных чисел называется **спектром** оператора: $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$.
5. Если $\ker\Big(A - \lambda E\Big) \neq \{0\}$, то λ принадлежит **точечному спектру** $\sigma_p(A)$, т.е. точечный спектр – множество собств. знач. оператора A.
6. **Слабая сходимость** $x_n \xrightarrow{w} x$ означает, что $\forall\ h \in H$ $(x_n, h) \to (x, h)$.

$\rceil H$ – гильбертово пространство. 👁 оператор $A:\ \ H \to H$ – линейный вполне непрерывный самосопряженный оператор. Введем обозначения:

$$M = \sup_{\|x\|=1} \Big(Ax,\, x\Big), \quad -m = \inf_{\|x\|=1} \Big(Ax,\, x\Big).$$

Лемма: Спектр $\sigma(A)$ оператора A удовлетворяет условию: $\sigma(A) \ \in\ [-m,\, M]$. Если H – бесконечномерное, то $0\ \in\ [-m,\, M]$.
▶ Заметим, что $Ax = \lambda x,\ \|x\| = 1 \implies \lambda = \Big(Ax,\, x\Big)$. Ненулевые точки спектра – собственные значения $\implies\ \sigma(A)\ \in\ [-m,\, M]$. ■
Теорема: $\exists\, \lambda \in\ \sigma_p(A):\quad |\lambda| = \|A\|$.
▶ Так как $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \Big|\Big(Ax,\, x\Big)\Big|$, то $\|A\| = M$ или $\|A\| = m$. $\rceil$ $\|A\| = M$. Покажем, что $M\ \in\ \sigma_p(A)$. По определению точной верхней грани $\exists\{x_n\}$, $\|x_n\| = 1:\ \ \Big(Ax_n,\, x_n\Big) \to M$. Выберем подпоследовательность $\{n_k\}:\ x_{n_k} \xrightarrow{w} x$. Тогда имеем:

$$0 \le \|(A - ME)\, x_{n_k}\|^2 = \|Ax_{n_k}\|^2 - 2M\,\mathrm{Re}\,\Big(Ax_{n_k},\, x_{n_k}\Big) + M^2\ \to$$

$$\to\ \|Ax\|^2 - M^2 \le 0.$$

Следовательно, $\|(A - ME)\, x_{n_k}\| \to 0 \quad\implies\quad x_{n_k} \to x$ и $\|x\| = 1$. В пределе получаем $\|(A - ME)x\| = 0 \implies\ Ax = Mx,\ x \neq 0$. ■
Теорема Гильберта-Шмидта: В замыкании образа $\overline{R(A)}$ оператора A существует полная ортонормированная система собственных векторов оператора A, отвечающих $\lambda \neq 0$.
▶ **1.** В силу доказанной теоремы $\exists\, \lambda_1 \in \mathbb{R}$, $\exists\, x_1 \in H:\ \ |\lambda_1| = \|A\|,\ Ax_1 = \lambda_1 x_1,\ \|x_1\| = 1$. Обозначим $H_1 = \mathcal{L}(x_1)$ – линейная оболочка вектора x_1. Легко видеть, что $H_1^\perp$ инвариантно относительно A: если $x \in H_1^\perp$, т.е. $x \perp x_1$, то $\Big(Ax,\, x_1\Big) = \{\textit{самосопряженность}\} = \Big(x,\, Ax_1\Big) = \lambda_1\Big(x,\, x_1\Big) = \{x \perp x_1\} = 0 \quad\implies\quad Ax \in H_1^\perp$. Сужение оператора A на подпространство $H_1^\perp$ обладает теми же свойствами (линейность, ограниченность, компактность, самосопряженность) $\implies\ \ \exists\, \lambda_2 \in \mathbb{R},\ \exists\, x_2 \in H_1^\perp\ :\ |\lambda_2| = \Big\|A\Big|_{H_1^\perp}\Big\| \le |\lambda_1|,\ Ax_2 = \lambda_2 x_2,\ \|x_2\| = 1$ (если $\lambda_2 = 0$, то $R(A) = H_1$, и все доказано). Аналогично строим $H_2 = \mathcal{L}(x_1, x_2)$, и т.д.

2. Если на каком-то этапе $\lambda_n = 0$, то все доказано, так как образ $R(A)$ конечномерный, следовательно, существует ОНМ система векторов.
Предположим, что $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots > 0$, покажем, что построенная система $\{x_n\}$ полна в $\overline{R(A)}$. Пусть $y \in R(A)$, тогда $\exists x \in H: \ Ax = y$. Приблизим элемент конечной суммой его ряда Фурье:

$$y - \sum_{k=1}^{n}(y, x_k)\, x_k \ = \ Ax - \sum_{k=1}^{n}\Big(x, Ax_k\Big)x_k \ = \ A\left(x - \sum_{k=1}^{n}\Big(x, x_k\Big)x_k\right)$$

Так как $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\Big(x, x_k\Big)x_k$ – проекция x на H_n, то $\displaystyle x - \sum_{k=1}^{n}\Big(x, x_k\Big)x_k \ \in \ H_n^{\perp}$. Тогда имеем

$$\left\|y - \sum_{k=1}^{n}\Big(y, x_k\Big)x_k\right\| \leq \left\|A\left(x - \sum_{k=1}^{n}\Big(x, x_k\Big)x_k\right)\right\| \leq \left\|A\Big|_{H_n^{\perp}}\right\| \ =$$

$$= \ |\lambda_{n+1}| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Это означает, что произвольный элемент $y \in R(A)$ можно приблизить с $\forall$ точностью конечными линейными комбинациями $\{x_n\} \implies \{x_n\}$ полна в $R(A)$. Если $y \in \overline{R(A)}$, то его можно приблизить элементов $\widetilde{y} \in R(A) \implies \{x_n\}$ полна в $\overline{R(A)}$. ■
Следствие: Так как $H = \overline{R(A)} \oplus \ker(A)$, то, дополнив базис подпространства $\overline{R(A)}$ базисом подпространства $\ker(A)$ (если последнее ненулевое), получим ОНБ в H.

Теорема Гильберта-Шмидта для интегрального оператора
Рассмотрим интегральный оператор $\displaystyle (Ax)(t) = \int_D K(t,\tau)\, x(\tau)\, d\tau, \ \ t \in D$, где

1. $K(t,\tau) = \overline{K(\tau,t)}$ (комплексное сопряжение);
2. Область D ограничена;
3. $\displaystyle\int_D |K(t,\tau)|^2\, dt\, d\tau \ \leq \ C \ \ \forall t \in D.$

Далее полагаем $H = L_2(D)$ – линейное пространство функций, для которых существует интеграл $\displaystyle\int_D |f|^2\, d\tau$, с нормой $\displaystyle\|f\|_2 = \left(\int_D |f|^2\, d\tau\right)^{1/2}$.
Теорема: Если функция $y(t)$ истокообразно представима, т.е. представима в виде $y(t) = (Ax)(t)$, то ряд Фурье по собственным функциям интегрального оператора сходится абсолютно и равномерно к функции $y(t)$ в области D.
▶ Оператор A линейный, ограниченный, вполне непрерывный в силу оценки

$$\int_D\int_D |K(t,\tau)|^2\, dt\, d\tau \ \leq \ \int_D C\, dt \ = \ C\mu(D) \ = \ const,$$

вытекающей из условия 3, и самосопряженный. Поэтому к оператору A применима теорема Гильберта-Шмидта. В силу этой теоремы ряд Фурье по собственным функциям для функции

$y = Ax$ сходится в $L_2(D)$, т.е. среднеквадратично. Докажем, что ряд сходится абсолютно и равномерно.
Воспользуемся критерием Коши:

$$\sum_{k=n}^{n+m} |(y,\, e_k)| \cdot |e_k(t)| \;=\; \sum_{k=n}^{n+m} |(Ax,\, e_k)| \cdot |e_k(t)| \;=\; \{A \text{ } \textit{самосопряженный}\} =$$

$$= \sum_{k=n}^{n+m} |(x,\, Ae_k)| \cdot |e_k(t)| \;=\; \{Ae_k = \lambda_k e_k \;\; \textit{по теореме Г.-Ш.}\} =$$

$$= \sum_{k=n}^{n+m} |\lambda_k| |(x,\, e_k)| \cdot |e_k(t)| \;=\; \sum_{k=n}^{n+m} |(x,\, e_k)| \cdot |Ae_k(t)| \;\le$$

$$\le \{\textit{нер-во Коши-Буняковского}\} \;\le\; \sqrt{\sum_{k=n}^{n+m} |(x,\, e_k)|^2} \sqrt{\sum_{k=n}^{n+m} |Ae_k(t)|^2}$$

В силу неравенства Бесселя и условия 3:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |Ae_k(t)|^2 \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \left| \int\limits_D K(t,\tau)\, e_k(\tau)\, dt\, d\tau \right|^2 \;\le\; \int\limits_D |K(t,\tau)|^2\, dt\, d\tau \;\le\; C$$

Используя полученную оценку, а также то, что коэффициенты ряда Фурье для x малы при $n \to \infty$, следовательно, $\sqrt{\sum\limits_{k=n}^{n+m} |(x,\, e_k)|^2} < \varepsilon$, имеем:

$$\sum_{k=n}^{n+m} |(y,\, e_k)| \cdot |e_k(t)| \le \varepsilon \sqrt{C}.$$

Таким образом, ряд по собственным функциям сходится абсолютно и равномерно. ■

[Моисеев, *Лекции Е. И. Моисеева, весна 2020-2021*, page 24-26]

dop 13. Функция Грина первой краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Условия существования решения краевой задачи.

Рассмотрим краевую задачу:

$$\begin{cases} Ly \equiv \dfrac{d}{dx}\left(p(x)\dfrac{dy}{dx}\right) - q(x)y = f(x), \quad 0 \le x \le l, \\ \alpha_1 y'(0) + \beta_1 y(0) = 0, \\ \alpha_2 y'(l) + \beta_2 y(l) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $p(x) \in C^1[0,l],\ p(x) > 0;\ \ q(x), f(x) \in C[0,l];\ \ \alpha_i^2 + \beta_i^2 > 0, i = 1,2.$
В случае $f(x) \equiv 0$ задача называется однородной.
Определение. Функция $y(x)$ наз. решением краевой задачи (1), если $y(x) \in C^2[0,l]$ и удовлетворяет (1).
Определение. **Функцией Грина** задачи (1) наз. определенная в квадрате $[0,l]\times[0,l]$ функция $G(x,\xi)$, которая удовлетворяет следующим условиям:

1. для $\forall\xi \in (0,l)$ функция $G(x,\xi)$ дважды непрерывно дифференцируема по x на $[0,\xi)\cup(\xi,l]$ и удовлетворяет однородному уравнению:
$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dG(x,\xi)}{dx}\right) - q(x)G(x,\xi) = 0,\ 0 \le x \le l,\ x \ne \xi;$$
2. функция $G(x,\xi)$ удовлетворяет однородным краевым условиям по x:
$$\alpha_1 G_x(0,\xi) + \beta_1 G(0,\xi) = 0,\ \alpha_2 G_x(l,\xi) + \beta_2 G(l,\xi) = 0, \quad \forall\xi \in (0,l);$$
3. функция $G(x,\xi)$ непрерывна в квадрате $[0,l]\times[0,l]$, а частная производная $G_x(x,\xi)$ имеет в точке $x=\xi$ разрыв первого рода с величиной скачка
$$\frac{d}{dx}G(x,\xi)\Big|_{x=\xi+0} - \frac{d}{dx}G(x,\xi)\Big|_{x=\xi-0} = \frac{1}{p(\xi)}.$$

Теорема. Если однородная краевая задача $Lu = 0,\ \alpha_1 u'(0) + \beta_1 u(0) = 0,\ \alpha_2 u'(l) + \beta_2 u(l) = 0$ имеет только тривиальное решение, то функция Грина задачи (1) существует и единственна.
Доказательство. Построим два линейно независимых решения $u_1,\ u_2$ однородного уравнения, каждое из которых удовлетворяет только одному из граничных условий:

$$\begin{cases} Lu_1 = 0, \quad 0 \le x \le l, \\ u_1(0) = -\alpha_1, \\ u_1'(0) = \beta_1. \end{cases} \qquad \begin{cases} Lu_2 = 0, \quad 0 \le x \le l, \\ u_2(l) = -\alpha_2, \\ u_2'(l) = \beta_2. \end{cases}$$

Они линейно независимы, т.к. в противном случае однородная краевая задача имела бы ненулевое решение.
Функцию Грина будем искать в виде:

$$G(x,\xi) = \begin{cases} c_1(\xi)u_1(x), \quad 0 \le x \le \xi, \\ c_2(\xi)u_2(x), \quad \xi \le x \le l. \end{cases}$$

c_1, c_2 определяются из условия непрерывности $G(x,\xi)$ и разрыва $G_x(x,\xi)$ в точке $x=\xi$:

$$\begin{cases} c_1(\xi)u_1(\xi) = c_2(\xi)u_2(\xi), \\ c_2(\xi)u_2'(\xi) - c_1(\xi)u_1'(\xi) = \dfrac{1}{p(\xi)}. \end{cases}$$

Получили систему уравнений относительно двух неизвестных функций $c_1(\xi)$, $c_2(\xi)$, решая которую получим:

$$c_1(\xi) = \frac{u_2(\xi)}{W(\xi)p(\xi)}, \quad c_2(\xi) = \frac{u_1(\xi)}{W(\xi)p(\xi)},$$

где $W(\xi) = u_1(\xi)u_2'(\xi) - u_2(\xi)u_1'(\xi)$ – определитель Вронского.

Получили окончательную формулу для функции Грина:

$$G(x,\xi) = \frac{1}{W(\xi)p(\xi)} \cdot \begin{cases} u_2(\xi)u_1(x), & 0 \le x \le \xi, \\ u_1(\xi)u_2(x), & \xi \le x \le l. \end{cases} \tag{2}$$

Докажем единственность. Пусть $\exists$ две функции Грина $G(x,\xi)$, $\widehat{G}(x,\xi)$. Пусть ξ – произвольная точка интервала $(0,l) \implies z(x) = G(x,\xi) - \widehat{G}(x,\xi)$ – непрерывна на $[0,l]$ и имеет непрерывную производную $z'(x)$ на $[0,l]$, т.к. у $G_x(x,\xi)$ и $\widehat{G}_x(x,\xi)$ разрыв в точке $x=\xi$ одинаков.

$Lz = 0,\ x \ne \xi \implies z'' = \dfrac{q(x)z(x) - p'(x)z'(x)}{p(x)}$ – непрерывна при $x = \xi \implies Lz = 0,\ 0 \le x \le l.$

Очевидно, что $z(x)$ удовлетворяет граничным условиям. По условию теоремы однородная краевая задача имеет только тривиальное решение на отрезке $[0,l] \implies z(x) \equiv 0 \implies G(x,\xi) = \widehat{G}(x,\xi)$. ■

Теорема. Если однородная краевая задача имеет только тривиальное решение, то решение краевой задачи (1) существует, единственно и выражается через функцию Грина

$$u(x) = \int\limits_0^l G(x,\xi)f(\xi)d\xi, \quad 0 \le x \le l.$$

Доказательство. Покажем, что функция $u(x)$, определяемая формулой выше, является решением задачи (1).

$u(x) = \displaystyle\int\limits_0^x G(x,\xi)f(\xi)d\xi + \int\limits_x^l G(x,\xi)f(\xi)d\xi = \left\{ g_0 = \frac{1}{W(\xi)p(\xi)} \right\} = \frac{u_2(x)}{g_0}\int\limits_0^x u_1(\xi)f(\xi)d\xi + \frac{u_1(x)}{g_0}\int\limits_x^l u_2(\xi)f(\xi)d\xi$ (использовали (2)).

Дифференцируем: $u'(x) = \dfrac{u_2'(x)}{g_0}\displaystyle\int\limits_0^x u_1(\xi)f(\xi)d\xi + \frac{u_1'(x)}{g_0}\int\limits_x^l u_2(\xi)f(\xi)d\xi.$

Вычислим: $\dfrac{d}{dx}\left(p(x)\dfrac{du}{dx}\right) = \dfrac{(u_1(x)u_2'(x) - u_2(x)u_1'(x))p(x)}{g_0}f(x)+$

$$+\frac{1}{g_0}\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du_2}{dx}\right)\cdot\int\limits_0^x u_1(\xi)f(\xi)d\xi + \frac{1}{g_0}\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du_1}{dx}\right)\cdot\int\limits_x^l u_2(\xi)f(\xi)d\xi.$$

Т.к. $Lu_1 = Lu_2 = 0$, а $(u_1u_2' - u_2u_1')p(x) = g_0$, то $Lu = \dfrac{d}{dx}\left(p(x)\dfrac{du}{dx}\right) - q(x)u(x) =$

$$f(x) + \frac{Lu_2}{g_0}\int\limits_0^x u_1(\xi)f(\xi)d\xi + \frac{Lu_1}{g_0}\int\limits_x^l u_2(\xi)f(\xi)d\xi = f(x).$$

Убедимся в выполнении граничных условий:

$\alpha_1 u'(0) + \beta_1 u(0) = \{$формулы для $u(x), u'(x)$ в начале док-ва$\} =$

$$= \frac{\alpha_1 u_1'(0)}{g_0}\int\limits_0^l u_2(\xi)f(\xi)d\xi + \frac{\beta_1 u_1(0)}{g_0}\int\limits_0^l u_2(\xi)f(\xi)d\xi =$$

$$= \frac{\alpha_1 u_1'(0) + \beta_1 u_1(0)}{g_0}\int\limits_0^l u_2(\xi)f(\xi)d\xi =$$

$= \{\alpha_1 u_1'(0) + \beta_1 u_1(0) = 0$ по определению$\} = 0.$

Аналогично второе условие.
Докажем единственность. Пусть $u(x)$, $\widehat{u}(x)$ – два решения задачи (1). Тогда $z(x) = u(x) - \widehat{u}(x)$ – решение однородной задачи, т.е. тривиальное (по условию теоремы) $\implies$ $z(x) \equiv 0$ $\implies$ $u(x) \equiv \widehat{u}(x)$. ■

[А. М. Денисов, *Обыкновенные дифференциальные уравнения, часть 2*, пункт 3.2]

dop 14. Задача Штурма-Лиувилля и свойства ее решений.

Рассмотрим краевую задачу

$$Ly = \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{\partial y}{\partial x}\right) - q(x)y = -\lambda y, \ 0 \le x \le l \tag{1}$$

$$\alpha_1 y'(0) + \beta_1 y(0) = 0 \tag{2}$$

$$\alpha_2 y'(l) + \beta_2 y(l) = 0 \tag{3}$$

где $p(x), q(x)$ - известные действительные функции, $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ - известные действительные постоянные такие, что $p(x) \in C^1[0,l], p(x) > 0, x \in [0,l], q(x) \in C[0,l], \alpha_i^2 + \beta_i^2 > 0, i = 1,2$ и λ - комплексный параметр.

Очевидно, что при любом значении параметра λ краевая задача (1-3) имеет решение $y(x) = 0$.

Определение 1 Если для некоторого λ_1 краевая задача (1-3) имеет нетривиальное решение $y_1(x)$, то λ_1 называется собственным значением, а $y_1(x)$ — собственной функцией.

Задача поиска собственных значений и собственных функций называется **задачей Штурма-Лиувилля.**

Собственные функции определены с точностью до произвольной постоянной: если $y(x)$ – собственная функция, то и $cy(x)$, где $c - const$, $c \ne 0$, является собственной функцией.

Задача решения уравнения (1) представляет собой задачу поиска собственных значений и собственных функций дифференциального оператора L.

Собственные значения и собственные векторы действительной матрицы могут быть комплекснозначными, поэтому мы должны рассматривать комплекснозначные значения параметра λ и комплекснозначные решения задачи (1-3).

Свойства собственных функций и собственных значений задачи Штурма-Лиувилля.

Теорема 1 Все собственные функции и собственные значения задачи Штурма-Лиувилля действительны.

Доказательство. Пусть λ_1 – собственное значение, а $y_1(x)$ – соответствующая ему собственная функция. Предположим, что они комплекснозначные, то есть $\lambda_1 = a + ib, y_1(x) = u(x) + iv(x)$. Так как функция $y_1(x)$ является решением уравнения (1), то $Ly_1 = -\lambda_1 y_1(x)$. Записывая это равенство отдельно для действительных и мнимых частей, получим

$$Lu = -au(x) + bv(x) \tag{4}$$

$$Lv = -bu(x) - av(x) \tag{5}$$

Так как функция $y_1(x)$ удовлетворяет краевым условиям (2), (3), то и функции $u(x), v(x)$ удовлетворяют этим краевым условиям. Умножим уравнение (4) на $v(x)$, а уравнение (5) на $u(x)$, проинтегрируем оба уравнения от 0 до l и вычтем из первого второе.

В результате получим

$$\int_0^l \Big(v(x)Lu - u(x)Lv\Big)dx = b\int_0^l \Big(u^2(x) + v^2(x)\Big)dx$$

Применяя следствие из теоремы Грина

$$\int_0^l \Big(v(x)Lu - u(x)Lv\Big)dx = 0$$

имеем

$$b \int_0^l \Big(u^2(x) + v^2(x)\Big) dx = 0$$

Следовательно, $b = 0$. Значит λ_1 действительно и $y_1(x)$ также действительно. ■
Теорема 2. Каждому собственному значению соответствует только одна собственная функция.
Доказательство. Пусть собственному значению λ соответствуют две собственные функции $y_1(x), y_2(x)$. Это значит, что они являются решениями уравнения (1) и удовлетворяют краевым условиям (2), (3). Из краевого условия (2) следует, что определитель Вронского $W[y_1, y_2](0) = 0$ Так как $y_1(x), y_2(x)$ – решения одного и того же линейного однородного дифференциального уравнения (1), то $y_2(x) = cy_1(x)$. ■
Введем скалярное произведение функций $v(x)$ и $w(x)$

$$(v, w) = \int_0^l v(x)w(x)dx$$

Будем называть функции $v(x)$ и $w(x)$ *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю, то есть $(v, w) = 0$
Теорема 3. Собственные функции, соответствующие различным собственным значениям, являются ортогональными.
Доказательство. Пусть $\lambda_1 \neq \lambda_2$ – различные собственные значения, а $y_1(x), y_2(x)$ – соответствующие им собственные функции. Так как $y_1(x), y_2(x)$ удовлетворяют краевым условиям (2), (3), то из следствия из формулы Грина получим, что

$$(Ly_1, y_2) - (y_1, Ly_2) = \int_0^l \Big(Ly_1 y_2(x) - y_1(x) Ly_2\Big) dx = 0$$

Так как $Ly_1 = -\lambda_1 y_1(x), Ly_2 = -\lambda_2 y_2(x)$, то

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(y_1, y_2) = \lambda_1(y_1, y_2) - \lambda_2(y_1, y_2) = (\lambda_1 y_1, y_2) - (y_1, \lambda_2 y_2) =$$
$$= -(Ly_1, y_2) + (y_1, Ly_2) = 0$$

Следовательно, $(\lambda_1 - \lambda_2)(y_1, y_2) = 0$, а значит $(y_1, y_2) = 0$ и функции $y_1(x), y_2(x)$ ортогональны. ■
Теорема 4. Пусть $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Тогда, если λ – собственное значение, то

$$\lambda \geq \min_{0 \leq x \leq l} q(x) \tag{6}$$

Доказательство. Предположим, что λ_1 - собственное значение, $y_1(x)$ - соответствующая собственная функция и

$$\lambda_1 < \min_{0 \leq x \leq l} q(x)$$

Тогда $q(x) - \lambda_1 > 0$ на отрезке $[0, l]$. Из уравнения (1) следует, что

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy_1}{dx}\right) = (-\lambda_1 + q(x))y_1(x)$$

Интегрируя от 0 до x, получим

$$p(x)y_1'(x) = p(0)y_1'(0) + \int_0^x \Big(q(s) - \lambda_1\Big) y_1(s)ds \tag{7}$$

Так как $y_1(x)$ удовлетворяет краевым условиям (2), (3) и $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, то $y_1(0) = y_1(l) = 0$. Так как $y_1(x)$ – ненулевое решение (1), то $y_1'(0) \neq 0$. Пусть для определенности $y_1'(0) > 0$. Тогда $y_1'(x) > 0$ при $x \in [0, l]$. Предположим, что это не так. Обозначим через x_0 минимальное число, при котором $y_1'(x_0) = 0$. Тогда для $x \in [0, x_0)$ производная $y_1'(x) > 0$, а значит и $y_1(x) > 0$ при $x \in (0, x_0)$. Положив в (7) $x = x_0$ и учитывая положительность $q(x) - \lambda_1$, получим, что $y_1'(x_0) > 0$. Это противоречие доказывает положительность $y_1'(x)$ при $x \in [0, l]$. Но тогда $y_1(x) > 0$ при $x \in (0, l]$, что противоречит краевому условию $y_1(l) = 0$. Следовательно, исходное предположение неверно и неравенство (6) доказано. ■

Рассмотрим собственные функции задачи Штурма-Лиувилля (1-3). Можно показать, что их счетное число. Следовательно все их можно занумеровать $y_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$. Чтобы устранить неопределенность, связанную с тем, что они содержат произвольный сомножитель, будем считать, что

$$\int_0^l (y_n(x))^2 \, dx = 1.$$

Пусть $f(x)$ некоторая непрерывная на $[0, l]$ функция. Введем обозначение

$$f_n = \int\limits_0^l f(x) y_n(x) \, dx, \ n = 1, 2, \ldots$$

Теорема 5. (Теорема Стеклова) Если $f(x) \in C^2[0, l]$ и удовлетворяет краевым условиям (2), (3), то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n y_n(x)$$

сходится равномерно на отрезке $[0, l]$ к функции $f(x)$, то есть

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n y_n(x), \quad 0 \leq x \leq l.$$

[А. М. Денисов, *Обыкновенные дифференциальные уравнения, часть 2*, page 67-73]

dop 15. Зависимость решений дифференциальных уравнений от исходных данных.

Рассмотрим задачу Коши для дифференциального уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной

$$y'(t) = f(t, y(t)),\ t \in [t_0 - T, t_0 + T],$$
$$y(t_0) = y_0.$$

Пусть функция $f(t, y)$ определена и непрерывна в прямоугольнике

$$Q = \{(t, y) :\ |t - t_0| \leq T,\ A \leq y \leq B\}.$$

Теорема 1

Пусть функции $f_1(t, y)$ и $f_2(t, y)$ непрерывны в прямоугольнике Q и $f_1(t, y)$ удовлетворяет условию Липшица по y, то есть существует константа $L > 0$ такая, что

$$|f_1(t, y) - f_1(t, \widetilde{y})| \leq L|y - \widetilde{y}|,\ \forall (t, y), (t, \widetilde{y}) \in Q$$

Тогда, если функции $y_1(t)$ и $y_2(t)$ на отрезке $[t_0 - T, t_0 + T]$ являются решениями задач Коши

$$\begin{cases} y_1'(t) = f_1(t, y_1(t)), \\ y_1(t_0) = y_{01}, \end{cases} \qquad \begin{cases} y_2'(t) = f_2(t, y_2(t)), \\ y_2(t_0) = y_{02}, \end{cases}$$

то имеет место неравенство

$$\begin{aligned} \underset{t \in [t_0 - T, t_0 + T]}{max} |y_1(t) - y_2(t)| \leq \\ \leq \Big(|y_{01} - y_{02}| + T \underset{(t,y) \in Q}{max} |f_1(t, y) - f_2(t, y)|\Big) exp\{LT\}. \end{aligned} \tag{1}$$

Доказательство. Из леммы об эквивалентности задачи Коши интегральному уравнению следует, что функции $y_1(t)$ и $y_2(t)$ являются решениями интегральных уравнений

$$y_1(t) = y_{01} + \int_{t_0}^{t} f_1(\tau, y_1(\tau)) d\tau,\ t \in [t_0 - T, t_0 + T],$$
$$y_2(t) = y_{02} + \int_{t_0}^{t} f_2(\tau, y_2(\tau)) d\tau,\ t \in [t_0 - T, t_0 + T].$$

Вычитая второе уравнение из первого и оценивая по модулю, имеем

$$|y_1(t) - y_2(t)| \leq |y_{01} - y_{02}| + \Big| \int_{t_0}^{t} (f_1(\tau, y_1(\tau)) - f_2(\tau, y_2(\tau))) d\tau \Big|.$$

Вычитая и прибавляя под знаком интеграла $f_1(\tau, y_2(\tau))$, получим

$$\begin{aligned} |y_1(t) - y_2(t)| \leq |y_{01} - y_{02}| + \Big| \int_{t_0}^{t} |f_1(\tau, y_1(\tau)) - f_1(\tau, y_2(\tau))| d\tau \Big| + \\ + \Big| \int_{t_0}^{t} |f_1(\tau, y_2(\tau)) - f_2(\tau, y_2(\tau))| d\tau \Big|,\ t \in [t_0 - T, t_0 + T]. \end{aligned} \tag{2}$$

Учитывая то, что функция $f_1(t,y)$ удовлетворяет условию Липшица, а также оценку

$$\Big|\int_{t_0}^{t}|f_1(\tau,y_2(\tau))-f_2(\tau,y_2(\tau))|d\tau\Big|\le T\max_{(t,y)\in Q}|f_1(t,y)-f_2(t,y)|,$$

справедливую для всех $t\in[t_0-T,t_0+T]$, неравенство (2) можно переписать так:

$$|y_1(t)-y_2(t)|\le\Big(|y_{01}-y_{02}|+T\max_{(t,y)\in Q}|f_1(t,y)-f_2(t,y)|\Big)+$$

$$+L\Big|\int_{t_0}^{t}|y_1(\tau)-y_2(\tau)|d\tau\Big|,\ t\in[t_0-T,t_0+T].$$

Применив к функции $|y_1(t)-y_2(t)|$ лемму Гронуолла-Беллмана, при $t\in[t_0-T,t_0+T]$ получим неравенство

$$|y_1(t)-y_2(t)|\le(|y_{01}-y_{02}|+T\max_{(t,y)\in Q}|f_1(t,y)-f_2(t,y)|)exp\{L|t-t_0|\},$$

из которого следует оценка (1). Теорема доказана.
■
Рассмотрим прямоугольник

$$Q_+=\{(t,y):\ t_0\le t\le t_0+T,\ A\le y\le B\}.$$

Далее мы используем следующее простое утверждение из математического анализа, представляющее собой формулу конечных приращений в интегральном виде.
Лемма 1
Пусть функция $f(t,y)$ непрерывна в Q_+ и имеет в Q_+ непрерывную частную производную $f_y(t,y)$. Тогда для любых $(t,y_1),(t,y_2)\in Q_+$ справедливо равенство

$$f(t,y_1)-f(t,y_2)=\int_0^1 f_y(t,y_2+\theta(y_1-y_2))d\theta(y_1-y_2). \qquad (3)$$

Докажем теперь теорему о сравнении решений двух задач Коши, которую также часто называют неравенством Чаплыгина.
Теорема 2. (Теорема сравнения)
Пусть функции $f_1(t,y)$, $f_2(t,y)$ непрерывны в Q_+ и $f_1(t,y)$ имеет в Q_+ непрерывную частную производную $\dfrac{\partial f_1}{\partial y}(t,y)$. Тогда, если функции $y_1(t),y_2(t)$ на отрезке $[t_0,t_0+T]$ являются решениями задач Коши

$$\begin{cases}y_1'(t)=f_1(t,y_1(t)),\\ y_1(t_0)=y_{01},\end{cases}\qquad\begin{cases}y_2'(t)=f_2(t,y_2(t)),\\ y_2(t_0)=y_{02},\end{cases}$$

причем

$$f_1(t,y)\ge f_2(t,y),\ (t,y)\in Q_+,\ y_{01}\ge y_{02},$$

то справедливо неравенство

$$y_1(t)\ge y_2(t),\ t\in[t_0,t_0+T].$$

Доказательство. Так как функции $y_1(t)$ и $y_2(t)$ на отрезке $[t_0, t_0+T]$ являются решениями соответствующих уравнений, то они непрерывно дифференцируемы на отрезке $[t_0, t_0+T]$, $A \leq y_i(t) \leq B, i = 1, 2$, и справедливо равенство

$$y_1'(t) - y_2'(t) = f_1(t, y_1(t)) - f_2(t, y_2(t)),\ t \in [t_0, t_0+T]. \tag{4}$$

Преобразуем правую часть этого равенства, используя формулу конечных приращений (3),

$$\begin{aligned} & f_1(t, y_1(t)) - f_2(t, y_2(t)) = \\ &= f_1(t, y_1(t)) - f_1(t, y_2(t)) + f_1(t, y_2(t)) - f_2(t, y_2(t)) = \\ &= \int_0^1 \frac{\partial f_1}{\partial y}(t, y_2(t) + \theta(y_1(t) - y_2(t)))d\theta(y_1(t) - y_2(t)) + \\ & + f_1(t, y_2(t)) - f_2(t, y_2(t)). \end{aligned}$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} v(t) &= y_1(t) - y_2(t), \\ p(t) &= \int_0^1 \frac{\partial f_1}{\partial y}(t, y_2(t) + \theta(y_1(t) - y_2(t)))d\theta, \\ h(t) &= f_1(t, y_2(t)) - f_2(t, y_2(t)). \end{aligned}$$

Тогда $f_1(t, y_1(t)) - f_2(t, y_2(t)) = p(t)v(t) + h(t)$, и равенство (4) можно переписать так:

$$v'(t) = p(t)v(t) + h(t),\ t \in [t_0, t_0+T].$$

Решение этого линейного дифференциального уравнения первого порядка с начальным условием $v(t_0) = y_{01} - y_{02}$ имеет вид

$$v(t) = (y_{01} - y_{02})exp\Big\{\int_{t_0}^t p(\xi)d\xi\Big\} + \int_{t_0}^t exp\Big\{\int_\tau^t p(\xi)d\xi\Big\}h(\tau)d\tau, t \in [t_0, t_0+T].$$

Так как из условий теоремы следует, что

$$y_{01} - y_{02} \geq 0,\ h(t) \geq 0,\ t \in [t_0, t_0+T],$$

то

$$v(t) = y_1(t) - y_2(t) \geq 0,\ t \in [t_0, t_0+T].$$

и теорема доказана.

■

Обозначим

$$Q_\mu = \{(t, y, \mu):\ |t - t_0| \leq T,\ A \leq y \leq B,\ \mu_1 \leq \mu \leq \mu_2\}.$$

Пусть функция $f(t, y, \mu)$ определена на множестве Q_μ, а функция $y_0(\mu)$ определена на отрезке $[\mu_1, \mu_2]$.

Рассмотрим задачу Коши

$$y'(t) = f(t, y(t), \mu),\ t \in [t_0 - T, t_0+T], \tag{5}$$

$$y(t_0) = y_0(\mu). \tag{6}$$

Теорема 3 (Непрерывная зависимость решения задачи Коши от параметра)
Пусть функция $f(t, y, \mu)$ непрерывна в Q_μ и удовлетворяет в Q_μ условию Липшица по y, то есть

$$|f(t, y_1, \mu) - f(t, y_2, \mu)| \leq L|y_1 - y_2|, \ \forall (t, y_1, \mu), (t, y_2, \mu) \in Q_\mu$$

а функция $y_0(\mu)$ непрерывна на отрезке $[\mu_1, \mu_2]$.
Тогда если $y(t, \mu)$ - решение задачи Коши (5), (6) на отрезке $[t_0 - T, t_0 + T]$ для всех $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$, то функция $y(t, \mu)$ непрерывна μ по при $t \in [t_0 - T, t_0 + T], \mu \in [\mu_1, \mu_2]$.

Теорема 4 (Дифференцируемость решения задачи Коши по параметру)
Пусть функция $f(t, y, \mu)$ непрерывна в Q_μ и имеет в Q_μ непрерывные частные производные $f_y(t, y, \mu)$, $f_\mu(t, y, \mu)$, а функция $y_0(\mu)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[\mu_1, \mu_2]$.
Тогда если $y(t, \mu)$ - решение задачи Коши (5), (6) на отрезке $[t_0 - T, t_0 + T]$ для всех $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$, то функция $y(t, \mu)$ имеет при $t \in [t_0 - T, t_0 + T], \mu \in [\mu_1, \mu_2]$ производную по μ.

[А. М. Денисов, *Обыкновенные дифференциальные уравнения, часть 2*, с. 6—13]

dop.16 Постановка вариационных задач. Необходимые условия экстремума.

Рассмотрим множество M, являющееся некоторым подмножеством множества непрерывных на отрезке функций $C[x_0, x_1]$.

Определение. Функционалом наз отображение множества M в множество действ чисел.

Определение. Допустимой вариацией функции $y_0(x) \in M$ наз любая функция $\delta y(x)$ такая, что $y_0(x) + \delta y(x) \in M$.

Определение. Вариацией $\delta\Phi[y_0(x), \delta y(x)]$ функционала $\Phi[y(x)]$ на функции $y_0(x) \in M$ наз:

$$\frac{d}{dt}\Phi[y_0(x) + t\delta y(x)]\Big|_{t=0}$$

Определение. Функционал $\Phi[y(x)]$ достигает на функции $y_0(x) \in M$ глобального минимума (максимума) на множестве M, если для любой $y(x) \in M$ выполнено неравенство $\Phi[y_0(x)] \leq \Phi[y(x)](\Phi[y_0(x)] \geq \Phi[y(x)])$.

Пусть на множестве M введена некоторая норма функции $y(x)$, например:

$$\|y(x)\| = \max_{x_0 \leq x \leq x_1} |y(x)|$$

Определение. Функционал $\Phi[y(x)]$ достигает на функции $y_0(x) \in M$ локального минимума (максимума) на множестве M, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что для $\forall\, y(x) \in M$ и удовлетворяет неравенству $||y(x) - y_0(x)|| < \varepsilon$, справедливо $\Phi[y_0(x)] \leq \Phi[y(x)](\Phi[y_0(x)] \geq \Phi[y(x)])$.

Теорема 19. (необходимое условие экстремума) Если функционал $\Phi[y(x)]$ достигает на функции $y_0(x) \in M$ локального максимума или минимума на множестве M и вариация функционала на $y_0(x)$ $\exists$, то вариация функционала $\delta\Phi[y_0(x), \delta y(x)]$ равна нулю для любой допустимой вариации $\delta y(x)$.

Доказательство. Пусть функционал $\Phi[y(x)]$ достигает на функции $y_0(x)$ локального экстремума. Рассмотрим $\Phi[y_0(x) + t\delta y(x)]$, где $\delta y(x)$ произвол вариация $y_0(x)$. При фиксированном $y_0(x)$ и $\delta y(x)$ функционал $\Phi[y_0(x) + t\delta y(x)]$ является функцией перемен t:

$$\varphi(t) = \Phi[y_0(x) + t\delta y(x)].$$

Так как функционал $\Phi[y(x)]$ достигает на функции $y_0(x)$ локального экстремума, то у функции $\varphi(t)$ точка $t = 0$ является точкой локального экстремума. $\Longrightarrow$ если $\varphi'(0)$ существует, то $\varphi'(0) =$

0. $\exists\ \varphi'(0)$ следует из $\exists$ вариации функционала $\Phi[y(x)]$ на $y_0(x)$:

$$\frac{d}{dt}\varphi(t)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\Phi[y_0(x)+t\delta y(x)]\Big|_{t=0} \Longrightarrow$$

$$\delta\Phi[y_0(x),\delta y(x)] = \frac{d}{dt}\Phi[y_0(x)+t\delta y(x)]\Big|_{t=0} = 0 \text{ для } \forall\delta y(x)$$

. $\square$

Пусть $C_0^n[x_0,x_1]$ – множество функций $y(x)\in C^n[x_0,x_1] : y^{(m)}(x_0) = y^{(m)}(x_1) = 0, m = 0..n-1$.

Лемма (Основная лемма вариационного исчисления). Пусть $f(x)$ – непрерывная на отрезке $[x_0,x_1]$ функция:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)y(x)\,dx = 0$$

для любой $y(x)\in C_0^n[x_0,x_1]$. Тогда $f(x)\equiv 0$ на отрезке $[x_0,x_1]$.

Доказательство. Предположим, что функция $f(x)$ отлична от нуля на отрезке $[x_0,x_1]$. Тогда $\exists$ точка $x_2\in(x_0,x_1) : f(x2)\neq 0$. Пусть для определенности $f(x_2)>0$. В силу непрерывности $f(x)\ \exists\ \varepsilon>0 : f(x)\geq\dfrac{f(x_2)}{2}>0, \forall x\in[x_2-\varepsilon,x_2+\varepsilon]\subset(x_0,x_1)$ Рассмотрим функцию $y_2(x)$ след вида:

$$y_2(x) = \begin{cases}(x-(x_2-\varepsilon))^{n+1}((x_2+\varepsilon)-x)^{n+1}, x\in[x_2-\varepsilon,x_2+\varepsilon];\\ 0, x\notin[x_2-\varepsilon,x_2+\varepsilon]\end{cases}$$

функция $y_2(x)\in C_0^n[x_0,x_1]$ и $y_2(x)>0$ при $x\in(x_2-\varepsilon,x_2+\varepsilon) \Longrightarrow$

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)y_2(x)\,dx = \int_{x_2-\varepsilon}^{x_2+\varepsilon} f(x)y_2(x)\,dx > 0$$

что противоречит условию леммы. $\square$

Уравнение Эйлера
Рассмотрим множество M непрерывно дифференцируемых на $[x_0,x_1]$ функций $y(x)$ таких, что $y(x_0)=y_0, y(x_1)=y_1$. Определим на этом множестве функционал:

$$\Phi[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x,y(x),y'(x))\,dx \tag{1}$$

Теорема 20. Предположим, что при $x\in[x_0,x_1],(y,p)\in\mathbb{R}^2$ у функции $F(x,y,p)\ \exists$ непрерывные вторые част производные. Если функционал (1) достигает локального экстремума на функции $y_0(x)\in M$, имеющей непрерывную вторую производную на отрезке $[x_0,x_1]$, то функция $y_0(x)$ является решением дифференциального уравнения:

$$F_y(x,y(x),y'(x)) - \frac{d}{dx}F_p(x,y(x),y'(x)) = 0, x_0\leq x\leq x_1. \tag{2}$$

Доказательство. Найдем вариацию функционала (1) на $y_0(x)$. Из определения множества M следует, что допустимой вариацией $\delta y(x)$ функции $y_0(x)$ является любая непрерывно дифференцируемая на отрезке $[x_0, x_1]$ функция, обращающаяся в ноль на концах этого отрезка. То есть $\delta y(x) \in C_0^1 \in [x_0, x_1]$. Используя определение вариации функционала, получим

$$\delta\Phi[y_0(x), \delta y(x)] = \frac{d}{dt}\Phi[y_0(x) + t\delta y(x)]\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\int_{x_0}^{x_1} F(x, y_0(x) + t\delta y(x), y_0'(x) + t(\delta y)'(x))dx\Big|_{t=0} =$$

$$\int_{x_0}^{x_1} \Big\{F_y(x, y_0(x) + t\delta y(x), y_0'(x) + t(\delta y)'(x))\delta y(x) +$$

$$F_p(x, y_0(x) + t\delta y(x), y_0'(x) + t(\delta y)'(x))(\delta y)'(x)\Big\}dx\Big|_{t=0} =$$

$$\int_{x_0}^{x_1} \Big\{F_y(x, y_0(x), y_0'(x))\delta y(x) + F_p(x, y_0(x), y_0'(x))(\delta y)'(x)\Big\}dx$$

Из теоремы о необходимом условии экстремума $\Longrightarrow$ что вариация функционала на $y_0(x)$ должна равняться нулю, то есть:

$$\int_{x_0}^{x_1} F_y(x, y_0(x), y_0'(x))\delta y(x)dx + \int_{x_0}^{x_1} F_p(x, y_0(x), y_0'(x))(\delta y)'(x)dx = 0$$

Интегрируя по частям второй интеграл и учитывая то, что $\delta y(x_0) = \delta y(x_1) = 0$, получим:

$$\int_{x_0}^{x_1} \Big\{F_y(x, y_0(x), y_0'(x)) - \frac{d}{dx}F_p(x, y_0(x), y_0'(x))\Big\}\delta y(x)dx = 0$$

Это равенство выполнено для $\forall$ функции $\delta y(x) \in C_0^1[x_0, x_1]$. Применяя основную лемму вариационного исчисления, имеем

$$F_y(x, y_0(x), y_0'(x)) - \frac{d}{dx}F_p(x, y_0(x), y_0'(x)) = 0, x_0 \le x \le x_1$$

$\Longrightarrow$ функция $y_0(x)$ является решением уравнения (2). $\square$

Уравнение (2) называется уравнением Эйлера для функционала (1).
Функционал, зависящий от производных порядка выше первого Рассмотрим множество M функции $y(x) \in C^n[x_0, x_1]$:

$$y(x_0) = y_{00}, y'(x_0) = y_{01}, y''(x_0) = y_{02}, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_{0n-1},$$

$$y(x_1) = y_{10}, y'(x_1) = y_{11}, y''(x_1) = y_{12}, ..., y^{(n-1)}(x_1) = y_{1n-1}$$

Определим на этом множестве функционал:

$$\Phi[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n)}(x))dx \tag{3}$$

где функция $F(x, y, p_1, ..., p_n)$ определена и непрерывна при $x \in [x_0, x_1]$, $(y, p_1, ..., p_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Теорема 21. *(необходимое условие экстремума).* Пусть функция $F(x, y, p_1, ..., p_n)$ имеет при $x \in [x_0, x_1]$,$(y, p_1, ..., p_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ непрерывные частные производные порядка $2n$. Если функция $\bar{y}(x) \in M$, $\bar{y}(x) \in C^{2n}[x_0, x_1]$, и на ней достигается экстремум функционала (3) на множестве M , то $\bar{y}(x)$ является решением уравнения решением уравнения:

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{p_1} + ... + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}F_{p_n} = 0, x_0 \leq x \leq x_1,$$

где $F = F(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n)}(x))$.

Доказательство. В силу необход.усл.экстр вариация функционала (3) на функции $\bar{y}(x)$ должна обращаться в 0 для $\forall$ допустимой вариации $\delta y(x) \in C_0^n[x_0, x_1]$. По определению вариации функционала имеем:

$$\delta\Phi[\bar{y}(x), \delta y(x)] = \frac{d}{dt}\Phi[\bar{y}(x) + t\delta y(x)]\Big|_{t=0} =$$

$$\frac{d}{dt}\int_{x_0}^{x_1} F(x, \bar{y}(x) + t\delta y(x), \bar{y}'(x) + t(\delta y)'(x), ..., \bar{y}^{(n)}(x) + t(\delta y)^{(n)}(x))dx\Big|_{t=0}$$

Дифференцируя интеграл по параметру t, полагая затем $t = 0$ и приравнивая вариацию к 0, получим:

$$\int_{x_0}^{x_1} (F_y\delta y(x) + F_{p_1}(\delta y)'(x) + ... + F_{p_n}(\delta y)^{(n)}(x))dx = 0$$

Интегрируя по частям и учитывая то, что функция $\delta y(x)$ и ее производные обращаются в 0 на концах отрезка, имеем

$$\int_{x_0}^{x_1} (F_y - \frac{d}{dx}F_{p_1} + ... + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}F_{p_n})\delta y(x)dx = 0$$

Т.к это равенство вып для $\forall$ функции $\delta y(x) \in C_0^n[x_0, x_1]$, то, применяя основную лемму вариационного исчисления, получим, что функция $\bar{y}(x)$ является решением дифференциального уравнения (3). $\square$

Функционал, зависящий от функции двух переменных
Рассмотрим функционал:

$$\Phi[u(x, y)] = \iint_D F(x, y, u(x, y), u_x(x, y), u_y(x, y))dxdy \tag{4}$$

где $F(x, y, u, p, q)$ – заданная функция, а D – область, ограниченная контуром L. Будем предполагать, что функция $F(x, y, u, p, q)$ имеет непрерывные вторые частные производные при $(x, y) \in \bar{D} = D\bigcup L, (u, p, q) \in \mathbb{R}^3$. Пусть M – множество функции $u(x, y)$, имеющих в $\bar{D}$ непрерывные частные производные и принимающих на L заданные значения $u(x, y) = \varphi(x, y), (x, y) \in L$. Вариация функции $u(x, y)$, не выводящая ее из множества M, – это функция $\delta u(x, y)$, имеющая в $\bar{D}$ непрерывные частные производные и обращающаяся в 0 на L, то есть $\delta u(x, y) = 0, (x, y) \in L$.

Лемма (аналог леммы вариационного исчисления). Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна в $\bar{D}$. Если

$$\iint_D f(x,y)v(x,y)dxdy = 0$$

для $\forall$ функции $v(x,y)$, имеющей непрерывные част производные в $\bar{D}$ и обращающейся в 0 на контуре L, то $f(x,y) = 0, (x,y) \in D$.

Доказательство. Предположим, что функция $f(x,y)$ отлична от 0 в $\bar{D}$. Тогда $\exists$ точка $(x0,y0) \in D : f(x_0, y+0) \neq 0$. Пусть для определенности $f(x_0,y_0) > 0$. Из непрерывности $f(x,y)$ в точке $(x_0,y_0) \Longrightarrow$, что $\exists$ круг:

$$S = \{(x,y) : (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < \varepsilon^2\}$$

такой, что $f(x,y) \geq \dfrac{f(x_0,y_0)}{2} > 0$ при $(x,y) \in S \subset \bar{D}$. Рассмотрим функцию $v_0(x,y)$:

$$v_0(x,y) = \begin{cases} ((x-x_0)+(y-y_0)-\varepsilon^2)^2, (x,y) \in S; \\ 0, (x,y) \in \bar{D} \backslash S. \end{cases}$$

Тогда

$$\iint_D f(x,y)v_0(x,y)dxdy = \iint_S f(x,y)v_0(x,y)dxdy \geq \frac{f(x_0,y_0)}{2} \iint_S v_0(x,y)dxdy > 0$$

что противоречит условию леммы. Полученное противоречие показы- вает, что исходное предположение было неверно. □

Теорема 22. Предположим, что функция $F(x,y,u,p,q)$ имеет непрерывные вторые частные производные при $(x,y) \in \bar{D}, (u,p,q) \in \mathbb{R}^3$. Если экстремум функционала (4) достиг на функции $\bar{u}(x,y) \in M$, имеющей непрерывные вторые частные производные в $\bar{D}$, то эта функция является решением уравнения в частных производных.

$$F_u - \frac{\partial F_p}{\partial x} - \frac{\partial F_q}{\partial y} = 0, (x,y) \in D. \tag{5}$$

Доказательство. Пусть экстремум функционала (4) достиг на функции $\bar{u}(x,y) \in M$, имеющей непрерывные вторые частные производные $\bar{D}$. Из необходимого условия экстремума $\Longrightarrow$, что вариация функционала (4) на этой функции равна 0:

$$\delta\Phi[\bar{u}(x,y), \delta u(x,y)] = \frac{d}{dt}\Phi[\bar{u}(x,y) + t\delta u(x,y)]\Big|_{t=0} = 0$$

то есть:

$$\frac{d}{dt}\iint_D F(x,y,w(x,y,t), w_x(x,y,t), w_y(x,y,t))dxdy\Big|_{t=0} = 0$$

где $w(x,y,t) = \bar{u}(x,y) + t\delta u(x,y)$. Дифференцируя по t под знаком интеграла и полагая t равным 0, получим

$$\iint_D F_u(x,y,\bar{u},\bar{u}_x,\bar{u}_y)\delta u(x,y)dxdy + \iint_D \Big\{F_p(x,y,\bar{u},\bar{u}_x,\bar{u}_y)(\delta u)_x(x,y)+ \\ +F_q(x,y,\bar{u},\bar{u}_x,\bar{u}_y)(\delta u)_y(x,y)\Big\}dxdy = 0 \tag{6}$$

Преобразуем это равенство. Очевидно, что

$$F_p(x,y,\bar{u},\bar{u}_x,\bar{u}_y)(\delta u)_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(F_p\delta u) - \frac{\partial F_p}{\partial x}\delta u$$

$$F_q(x,y,\bar{u},\bar{u}_x,\bar{u}_y)(\delta u)_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(F_q\delta u) - \frac{\partial F_q}{\partial y}\delta u \Longrightarrow$$

$$\iint_D \Big\{F_p(x,y,\bar{u},\bar{u}_x,\bar{u}_y)(\delta u)_x(x,y) + F_q(x,y,\bar{u},\bar{u}_x,\bar{u}_y)(\delta u)_y(x,y)\Big\}dxdy =$$

$$\iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(F_p\delta u) + \frac{\partial}{\partial y}(F_q\delta u)\right)dxdy - \iint_D \left(\frac{\partial F_p}{\partial x} + \frac{\partial F_q}{\partial y}\right)\delta u dxdy$$

Применяя формулу Грина к интегралу

$$\iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(F_p\delta u) + \frac{\partial}{\partial y}(F_q\delta u)\right)dxdy$$

и учитывая то, что $\delta u(x,y) = 0, (x,y) \in L$, получим

$$\iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(F_p\delta u) + \frac{\partial}{\partial y}(F_q\delta u)\right)dxdy = \oint_L \Big(F_p\delta u dy - F_q\delta u dx\Big) = 0 \Longrightarrow$$

$$\iint_D \Big\{F_p(x,y,\bar{u},\bar{u}_x,\bar{u}_y)(\delta u)_x(x,y) + F_q(x,y,\bar{u},\bar{u}_x,\bar{u}_y)(\delta u)_y(x,y)\Big\}dxdy =$$

$$= -\iint_D \left(\frac{\partial F_p}{\partial x} + \frac{\partial F_q}{\partial y}\right)\delta u dxdy$$

и равенство (6) принимает вид:

$$\iint_D \Big\{F_u - \frac{\partial}{\partial x}F_p - \frac{\partial}{\partial y}F_q\Big\}\delta u(x,y)dxdy = 0$$

где F_u, F_p, F_q вычисляются в точке $(x,y,\bar{u}(x,y),\bar{u}_x(x,y),\bar{u}_y(x,y))$. Т.к полученное равенство выполнено для $\forall$ допустимой вариации $\delta u(x,y)$, то, применяя лемму.2, получаем, что функция $\bar{u}(x,y)$ является решением уравнения (5). $\square$

Вариационная задача на условный экстремум
Рассмотрим 2 функционала:

$$\Phi[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x))dx \tag{7}$$

$$\Psi[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} G(x, y(x), y'(x))dx \tag{8}$$

где $F(x, y, p), G(x, y, p)$ – заданные дважды непрерывно дифференцируемая функции своих аргументов. Рассмотрим след экстр задачу. Пусть требуется найти функцию $\bar{y}(x)$, на которой достигается экстремум функционала (7) на множестве функций:

$$M_\Psi = \{y(x) \in C^1[x_0, x_1] : y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1, \Psi[y(x)] = l\}$$

Т.е, нужно найти экстремум функционала (7) на множестве функции определяемом тем условием, что функционал (8) принимает на этом множестве const значение. Вариационные задачи такого типа называются **задачами на условный экстремум**.
Найдем вариацию функционала (8) на множестве функции
$M = y(x) \in C^1[x_0, x_1] : y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1$. Пусть $\delta y(x)$ – допустимая вариация функции на M, то есть $\delta y(x) \in C^1[x_0, x_1], \delta y(x_0) = \delta y(x_1) = 0$.Тогда вариация функционала $\Psi[y(x)]$ на функции $\widetilde{y}(x) \in M$ равна $\delta\Psi[\widetilde{y}(x), \delta y(x)] = \dfrac{d}{dt}\Psi[\widetilde{y}(x) + t\delta y(x)]\Big|_{t=0}$. Дифференцируя по t и полагая $t = 0$, получаем

$$\delta\Psi[\widetilde{y}(x), \delta y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \Big\{G_y(x, \widetilde{y}(x), \widetilde{y}'(x))\delta y(x) + G_p(x, \widetilde{y}(x), \widetilde{y}'(x))(\delta y)'(x)\Big\}dx$$

Теорема 23. Пусть на функции $\bar{y}(x) \in M_\Psi, \bar{y}(x) \in C^2[x_0, x_1]$, достигается экстремум функционала (7) на множестве M_Ψ. Если $\exists$ функция $\delta y_0(x) \in C^1[x_0, x_1], \delta y_0(x_0) = \delta y_0(x_1) = 0$: вариация $\delta\Psi[\bar{y}(x), \delta y_0(x)] \neq 0$, то найдется число λ : $\bar{y}(x)$ удовлетворяет уравнению:

$$L_y(x, y(x), y'(x)) - \frac{d}{dx}L_p(x, y(x), y'(x)) = 0, x_0 \leq x \leq x_1 \tag{9}$$

где

$$L(x, y, p) = F(x, y, p) + \lambda G(x, y, p) \tag{10}$$

Доказательство. Возьмем произвол функцию $\delta y(x) : \delta y(x) \in C^1[x_0, x_1], \delta y(x_0) = \delta y(x_1) = 0$. Рассмотрим функции

$$\varphi(t, \tau) = \Psi[\bar{y}(x) + t\delta y(x) + \tau\delta y_0(x)]$$

$$\psi(t, \tau) = \Phi[\bar{y}(x) + t\delta y(x) + \tau\delta y_0(x)]$$

где t, τ – произвольные действительные числа. Из определения функций $\varphi(t, \tau)$ и $\psi(t, \tau)$ следует, что

$$\varphi(0, 0) = \Phi[\bar{y}(x)], \psi(0, 0) = \Psi[\bar{y}(x)],$$

$$\varphi_t(0, 0) = \delta\Phi[\bar{y}(x), \delta y(x)], \varphi_\tau(0, 0) = \delta\Phi[\bar{y}(x), \delta y_0(x)],$$

$$\psi_t(0, 0) = \delta\Psi[\bar{y}(x), \delta y(x)], \psi_\tau(0, 0) = \delta\Psi[\bar{y}(x), \delta y_0(x)]$$

Покажем, что для $\forall\ \delta y(x) \in C_0^1[x_0, x_1]$ якобиан

$$\left.\frac{D(\varphi,\psi)}{D(t,\tau)}\right|_{t=\tau=0} = det \begin{pmatrix} \delta\Phi[\bar{y}(x), \delta y(x)] & \delta\Phi[\bar{y}(x), \delta y_0(x)] \\ \delta\Psi[\bar{y}(x), \delta y(x)] & \delta\Psi[\bar{y}(x), \delta y_0(x)] \end{pmatrix} = 0 \tag{11}$$

Предположим, что это не так и $\exists\ \delta\widetilde{y}(x)$: что для нее якобиан

$$det \begin{pmatrix} \delta\Phi[\bar{y}(x), \delta\widetilde{y}(x)] & \delta\Phi[\bar{y}(x), \delta y_0(x)] \\ \delta\Psi[\bar{y}(x), \delta\widetilde{y}(x)] & \delta\Psi[\bar{y}(x), \delta y_0(x)] \end{pmatrix} \neq 0$$

Тогда из теоремы о неявных функциях $\Longrightarrow$, что при $\delta y(x) = \delta\widetilde{y}(x)$ система: $\varphi(t,\tau) = u, \psi(t,\tau) = v$ однозначно разрешима для (u, v), находящихся в достаточно малой окрестности (u_0, v_0), где $u_0 = \varphi(0,0), v_0 = \psi(0,0)$. Пусть $\bar{y}(x)$ – функция, на которой достиг локальный минимум задачи на усл экстремум. Рассмотрим систему

$$\varphi(t,\tau) = \varphi(0,0) - \varepsilon = \Phi[\bar{y}(x)] - \varepsilon$$

$$\psi(t,\tau) = \psi(0,0) = \Psi[\bar{y}(x)] = l$$

где ε – достаточно малое положительное число. Т.к $(\varphi(0,0) - \varepsilon, \psi(0,0))$ находится в достаточно малой окр (u_0, v_0), то по теор о неявной функции система имеет единственного решение $t_\varepsilon, \tau_\varepsilon \Longrightarrow \varphi(t_\varepsilon, \tau_\varepsilon) = \Phi[\bar{y}(x) + t_\varepsilon\delta\widetilde{y}(x) + \tau_\varepsilon\delta y_0(x)] = \Phi[\bar{y}(x)] - \varepsilon, \psi(t_\varepsilon, \tau_\varepsilon) = \Psi[\bar{y}(x) + t_\varepsilon\delta\widetilde{y}(x) + \tau_\varepsilon\delta y_0(x)] = l \Longrightarrow$ на функции $\bar{y}(x) + t_\varepsilon\delta\widetilde{y}(x) + \tau_\varepsilon\delta y_0(x) \in M_\Psi$ функционал (7) принимает значение меньшее, чем на $\bar{y}(x)$. Это противоречит тому, что на функции $\bar{y}(x)$ достигается локальный минимум. Из полученного противоречия $\Longrightarrow$ справедливость (11).Раскрывая определитель:

$$\delta\Phi[\bar{y}(x), \delta y(x)]\delta\Psi[\bar{y}(x), \delta y_0(x)] - \delta\Phi[\bar{y}(x), \delta y_0(x)]\delta\Psi[\bar{y}(x), \delta y(x)] = 0$$

для всех $\delta y(x) \in C_0^1[x_0, x_1]$. По условию теоремы $\delta\Psi[\bar{y}(x), \delta y_0(x)] \neq 0$. Поделив на $\delta\Psi[\bar{y}(x), \delta y_0(x)]$ и обозначив через $\lambda = -\dfrac{\delta\Phi[\bar{y}(x), \delta y_0(x)]}{\delta\Psi[\bar{y}(x), \delta y_0(x)]}$ получим $\delta\Phi[\bar{y}(x), \delta y(x)] + \lambda\delta\Psi[\bar{y}(x), \delta y(x)] = 0$.Учитывая формулы для $\delta\Phi[\bar{y}(x), \delta y(x)]$ и $\delta\Psi[\bar{y}(x), \delta y(x)]$, это равенство можно переписать так:

$$\int_{x_0}^{x_1} \Big\{ F_y(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x)) + \lambda G_y(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x)) \Big\} \delta y(x) dx +$$

$$\int_{x_0}^{x_1} \Big\{ F_p(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x)) + \lambda G_p(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x)) \Big\} \delta y'(x) dx = 0$$

Интегрируя по частям второй интеграл и учитывая определение (10) функции $L(x, y, p)$, имеем

$$\int_{x_0}^{x_1} \Big\{ L_y(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x)) - \frac{d}{dx} L_p(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x)) \Big\} \delta y(x) dx = 0, \forall \delta y(x) \in C_0^1[x_0, x_1].$$

Применяя основную лемму вариационного исчисления, получим, что функция $\bar{y}(x)$ удовлетворяет уравнению (9).

$\square$

[А. М. Денисов, *Обыкновенные дифференциальные уравнения, часть 2*]

dop 17. Первая краевая задача для уравнения колебаний струны. Интеграл энергии и единственность решения первой краевой задачи.

I. Уравнение колебаний струны

Рассматриваем малые колебания ограниченной натянутой струны.

Основные характеристики:

- x – координата вдоль струны,
- t – время,
- $l > 0$ – длина струны,
- $\rho > 0$ – линейная плотность струны,
- $T > 0$ – натяжение струны (скалярная величина, не зависящая от x),
- $F(x,t)$ – линейная плотность внешних сил,
- $u(x,t)$ – отклонение струны (по вертикали) от горизонтального положения ($u \equiv 0$ – строго горизонтальная «прямая» струна, $u > 0$ – струна отклонилась вверх, $u < 0$ – вниз).

$$u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) + f(x,t), \quad \text{где} \quad a^2 = \frac{T}{\rho(x)}, \quad f(x,t) = \frac{F(x,t)}{\rho}. \tag{1}$$

Уравнение (1) называют **уравнением малых колебаний струны**. Оно выполнено при всех $x \in (0,l)$ и всех t из рассматриваемого интервала $J \subset \mathbb{R}$.

Обычно $t \geq 0$, и тогда к уравнению (1) добавляют два *начальных условия*:

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x),$$

т. е. задают начальные отклонения и скорости струны (что согласуется со вторым законом Ньютона).

II. Энергия колебаний струны

Найдем выражение для энергии поперечных колебаний струны $E = K + U$, где K – кинетическая и U – потенциальная энергии. Элемент струны dx, движущийся со скоростью $v = u_t$, обладает кинетической энергией

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\rho(x)\,dx\,(u_t)^2.$$

Кинетическая энергия всей струны равна

$$K = \frac{1}{2}\int\limits_0^l \rho(X)[u_t(x,t)]^2\,dx.$$

Потенциальная энергия поперечных колебаний струны, имеющей при $t = t_0$ форму $u(x,t_0) = u_0(x)$, равна работе, которую надо совершить, чтобы струна из положения равновесия перешла в положение $u_0(x)$. Элемент dx под действием равнодействующей сил натяжения

$Tu_{xx}dx$ за время dt проходит путь $u_t(x,t)dt$. Работа, производимая всей струной за время t_0 равна

$$-\frac{1}{2}\int\limits_0^l T[u_x(x,t_0)]^2\,dx + \int\limits_0^{t_0} Tu_xu_t\Big|_0^l\,dt, \tag{2}$$

где $Tu_x\Big|_{x=0}$ – величина натяжения на конце струны $x=0$, $u_t(0,t)\,dt$ – перемещение этого конца (аналогично для конца $x=l$). То есть второе слагаемое интеграла (2) отвечает за работу, которую надо затратить на перемещение концов струны.

Если **концы струны закреплены**, то работа на них будет равна нулю. Следовательно, при перемещении закрепленной на концах струны из положения равновесия $u=0$ в положение $u_0(x)$ работа не зависит от способа перевода струны в это положение. Тогда потенциальная энергия струны в момент времени $t=t_0$ равна работе, взятой с обратным знаком, то есть

$$U = \frac{1}{2}\int\limits_0^l T[u_x(x,t_0)]^2\,dx$$

Таким образом, **полная энергия струны** (*интеграл энергии)* равна

$$E = \frac{1}{2}\int\limits_0^l \left[T(u_x)^2 + \rho(x)(u_t)^2\right]dx \tag{3}$$

III. Постановка первой краевой задачи

Первая краевая задача. Найти функцию $u(x,t)$, определенную в области $0\le x\le l,\ t>0$, удовлетворяющую уравнению (1) при $0<x<l,\ t>0$, граничным условиям

$$u(0,t)=\mu_1(t),\ \ u(l,t)=\mu_2(t),\ \ t>0,$$

а также начальным условиям

$$u(x,0)=\varphi(x),\ \ u_t(x,0)=\psi(x),\ \ 0<x<l.$$

Задача с закрепленными концами является важным частным случаем первой краевой задачи при $u(0,t)=u(l,t)=0,\ \ t>0$.

IV. Теорема единственности

Докажем теорему единственности для уравнения колебаний (1) в более общем случае – когда линейная плотность струны $\rho(x)$ и сила натяжения $T(x)$ могут изменяться. Для этого представим (1) в виде

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(T(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + F(x,t),\ \ \rho(x)>0,\ \ T(x)>0. \tag{4}$$

Теорема единственности. Возможно существование только одной функции $u(x,t)$, определенной в области $0 \le x \le l$, $t \ge 0$ и удовлетворяющей первой краевой задаче

$$\begin{cases} \rho(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(T(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) + F(x,t), \;\; 0 < x < l, \; t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \;\; u_t(x,0) = \psi(x), \;\; 0 < x < l, \\ u(0,t) = \mu_1(t), \;\; u(l,t) = \mu_2(t), \;\; t > 0, \end{cases}$$

если выполнены следующие условия:

1. функция $u(x,t)$ и производные, входящие в уравнение (4), а также производная u_{xt} непрерывны на отрезке $0 \le x \le l$ при $t \ge 0$;

2. коэффициенты $\rho(x)$ и $T(x)$ непрерывны на отрезке $0 \le x \le l$.

► Докажем от противного. Допустим, что существует два решения рассматриваемой задачи: $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$, и рассмотрим разность $v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$.
Функция $v(x,t)$ удовлетворяет задаче с однородными условиями и отсутствием внешних сил

$$\begin{cases} \rho(x)\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(T(x)\dfrac{\partial v}{\partial x}\right), \;\; 0 < x < l, \; t > 0, \\ v(x,0) = v_t(x,0) = 0, \;\; 0 < x < l, \\ v(0,t) = v(l,t) = 0 \;\; t > 0, \end{cases}$$

а также условию 1) теоремы единственности. Докажем, что $v(x,t) \equiv 0$.
Интеграл энергии (3) в момент времени t для струны, колебания которой описывает функция $v(x,t)$, имеет вид

$$E(t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^l \left[T(v_x)^2 + \rho(v_t)^2\right] dx.$$

Продифференцируем $E(t)$ по t:

$$\frac{dE(t)}{dt} = \int\limits_0^l (Tv_x v_{xt} + \rho v_t v_{tt})\, dx.$$

Интегрируя по частям первой слагаемое право части, получим:

$$\int\limits_0^l Tv_x v_{xt}\, dx = \left[Tv_x v_t\right]\Big|_0^l - \int\limits_0^l v_t (Tv_x)_x\, dx.$$

Подстановка обращается в нуль в силу граничных условий: $v(0,t) = 0 \implies v_t(0,t) = 0$. Отсюда

$$\frac{dE(t)}{dt} = \int\limits_0^l \left[\rho v_t v_{tt} - v_t (Tv_x)_x\right] dx = \int\limits_0^l v_t\left[\rho v_{tt} - (Tv_x)_x\right] dx = 0,$$

т.е. $E(t) = const$. Учитывая начальные условия, получаем

$$E(t) = E(0) = \frac{1}{2} \int\limits_0^l \left[T(v_x)^2 + \rho(v_t)^2 \right] \Big|_{t=0} dx = 0,$$

так как $v(x,0) = v_t(x,0) = 0$.
По условию $T > 0,\ \rho > 0 \implies v_x(x,t) \equiv 0,\ v_t(x,t) \equiv 0$, откуда следует тождество $v(x,t) = const = C_0$.
Из начального условия находим $v(x,0) = C_0 = 0 \implies v(x,t) \equiv 0$.
Таким образом показано, что если существуют две функции $u_1(x,t),\ u_2(x,t)$, удовлетворяющие всем условиям теоремы, то $u_1(x,t) \equiv u_2(x,t)$. ■

[*Лекции И. В. Тихонова*, файл 12]
[А. Н. Тихонов, *Уравнения матемтической физики*, pages 28-30, 42, 46-48]

dop 18. Принцип максимума для уравнения теплопроводности. Единственность решения первой краевой задачи.

Разберем простейший вариант принципа экстремума на примере одномерного уравнения теплопроводности.

Ситуация.

Рассмотрим уравнение $u_t = a^2 u_{xx}$ в прямоугольнике

$$\Pi = \{(x,t) : l_1 < x < l_2, \;\; 0 < t \leq T\},$$

где $\;\; l_1, \; l_2, \; T$ – конечные числа ($l_1 < l_2$).

Верхняя крышка $t = T, \;\; l_1 < x < l_2$ включается в Π (здесь уравнение тоже должно выполняться).

Параболической границей для Π называется множество

$$\Gamma \equiv ([l_1, l_2] \times \{0\}) \cup (\{l_1\} \times [0,T]) \cup (\{l_2\} \times [0,T])$$

– именно здесь обычно задают начальное и краевые условия (см. штриховку на рисунке).

$\Pi \cup \Gamma = \overline{\Pi}$ – замыкание Π на плоскости $\mathbb{R}^2_{(x,t)}$.

Теорема 24. (Принцип экстремума.) Пусть $u(x,t)$ – решение уравнения $u_t = a^2 u_{xx}$ в прямоугольнике Π из класса $C^{2,1}(\Pi) \cap C(\overline{\Pi})$. Пусть $m \equiv \min\limits_{\Gamma}(u(x,t)), \;\; M \equiv \max\limits_{\Gamma}(u(x,t))$ – минимальное и максимальное значения $u(x,t)$ на параболической границе Γ. Тогда

$$m \leq u(x,t) \leq M \quad \text{для} \quad \forall (x,t) \in \overline{\Pi}, \tag{1}$$

т. е. минимум и максимум в $\overline{\Pi}$ функции $u(x,t)$ обязательно достигается
либо при $t = 0$, либо при $x = l_1$, либо при $x = l_2$.

Физическая интерпретация. При отсутствии внутренних источников тепла температура внутри тела не может превышать максимального значения температуры в начальный момент времени и на боковых границах.

$\boxed{\text{NB}}$ Аналогичный принцип экстремума справедлив для уравнения теплопроводности в любой размерности.

► Покажем сначала, что $u(x,t) \leq M$ всюду в $\overline{\Pi}$. Доказательство будем вести «от обратного». Допустим, что $\underline{\exists \, (x_0, t_0) \in \Pi : \;\; u(x_0,t_0) \equiv A > M}$.

Введем вспомогательную функцию

$$v(x,t) \equiv u(x,t) + \frac{A-M}{2l^2}(x - x_0)^2, \qquad l \equiv l_2 - l_1, \qquad v \in C^{2,1}(\Pi) \cap C(\overline{\Pi}).$$

На Γ имеем

$$v(x,t) \leq M + \frac{A-M}{2l^2} \cdot l^2 = M + \frac{1}{2}(A - M) = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}M < A.$$

В точке $(x_0, t_0) \in \Pi$ имеем

$$v(x_0,t_0) = u(x_0,t_0) + 0 = A > \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}M \geq \max_{\Gamma}(v(x,t)).$$

Итак, $\max\limits_{\overline{\Pi}}(v(x,t))$ не может достигаться на Γ. Но где-то в $\overline{\Pi}$ он достигается.

$\Longrightarrow\ \exists (x^*,t^*) \in \Pi:\ v(x^*,t^*) = \max\limits_{\overline{\Pi}}(v(x,t))$,
причем $l_1 < x^* < l_2,\ 0 < t^* \le T$.

В точке (x^*,t^*) имеем $\boxed{\dfrac{\partial v}{\partial t} \ge 0 \quad \text{и} \quad \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} \le 0}$ (ибо там максимум для $v(x,t)$).

Поэтому

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)\Bigg|_{(x,\,t)=(x^*,\,t^*)} \ge 0+0=0.$$

С другой стороны, всюду в Π имеем

$$\frac{\partial v}{\partial t} - a^2\,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = (u_t+0) - a^2\left(u_{xx} + \frac{A-M}{l^2}\right) = \underbrace{u_t - a^2\,u_{xx}}_{\equiv 0} - a^2\,\frac{A-M}{l^2} =$$

$$= -a^2\,\frac{A-M}{l^2} < 0.$$

Получили противоречие: в точке (x^*,t^*) оператор $v_t - a^2 v_{xx}$ и неотрицателен, и отрицателен одновременно. $\Longrightarrow$ Изначальное допущение неверно и $\underline{u(x,t) \le M \text{ всюду в } \overline{\Pi}}$.

Вторая часть «$u(x,t) \ge m$ в $\overline{\Pi}$» доказывается легко. Рассмотрим функцию $(-u(x,t))$.
Тогда

$$\max_{\Gamma}(-u(x,t)) = -\min_{\Gamma}(u(x,t)) = -m.$$

По доказанному $(-u(x,t)) \le -m$ всюду в $\overline{\Pi}$. $\Longrightarrow$ $u(x,t) \ge m$ для $\forall (x,t) \in \overline{\Pi}$.
Установили все, что требовалось. ■

<u>Следствия принципа экстремума</u>

I) Рассмотрим задачу:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \le T, \\ u(0,t) = \mu_0(t), \quad u(l,t) = \mu_1(t), \\ u(x,0) = \varphi(x). \end{cases} \tag{2}$$

Теорема 25. (Принцип единственности.) Задача (2) может иметь не более одного решения в классе $C^{2,1}(\Pi) \cap C(\overline{\Pi})$.

▶ Пусть $u^{(1)}(x,t)$, $u^{(2)}(x,t)$ – два решения задачи (2). Рассмотрим разность $u \equiv u^{(1)} - u^{(2)}$.

Тогда $u = u(x,t)$ будет решением задачи: $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \le T, \\ u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \\ u(x,0) = 0. \end{cases}$

По принципу экстремума $0 \le u(x,t) \le 0$ всюду в $\overline{\Pi}$ (см. (1)).
$\Longrightarrow$ $u \equiv 0$ и $u^{(1)} \equiv u^{(2)}$ всюду в $\overline{\Pi}$. ■

II) Рассмотрим две задачи:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \le T, \\ u(0,t) = \mu_0(t), \quad u(l,t) = \mu_1(t), \\ u(x,0) = \varphi(x). \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \le T, \\ u(0,t) = \widetilde{\mu}_0(t), \quad u(l,t) = \widetilde{\mu}_1(t), \\ u(x,0) = \widetilde{\varphi}(x). \end{cases} \tag{4}$$

Теорема 26. (Принцип устойчивости решения.) Пусть $u(x,t)$ – решение задачи (3), а $\widetilde{u}(x,t)$ – решение задачи (4) (оба из класса $C^{2,1}(\Pi) \cap C(\overline{\Pi})$). Пусть $|\widetilde{\mu}_0(t) - \mu_0(t)| \le \varepsilon$, $|\widetilde{\mu}_1(t) - \mu_1(t)| \le \varepsilon$ всюду на $[0,T]$ и $|\widetilde{\varphi}(x) - \varphi(x)| \le \varepsilon$ всюду на $[0,l]$. Тогда

$$|\widetilde{u}(x,t) - u(x,t)| \le \varepsilon \text{ всюду в } \overline{\Pi}.$$

▶ Рассмотрим разность $v(x,t) = \widetilde{u}(x,t) - u(x,t)$. Тогда

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{xx}, \\ v(0,t) = \widetilde{\mu}_0(t) - \mu_0(t), \quad v(l,t) = \widetilde{\mu}_1(t) - \mu_1(t), \\ v(x,0) = \widetilde{\varphi}(x) - \varphi(x). \end{cases}$$

По условию $-\varepsilon \le \widetilde{\mu}_k(t) - \mu_k(t) \le \varepsilon$, $k = 0,1$, $-\varepsilon \le \widetilde{\varphi}(x) - \varphi(x) \le \varepsilon \implies$

$$-\varepsilon \le \min_{\Gamma} v \le \max_{\Gamma} v \le \varepsilon.$$

По принципу эстремума $-\varepsilon \le \min\limits_{\Gamma} v \le v(x,t) \le \max\limits_{\Gamma} v \le \varepsilon \implies -\varepsilon \le \widetilde{u}(x,t) - u(x,t) \le \varepsilon$ и $|\widetilde{u}(x,t) - u(x,t)| \le \varepsilon$ всюду в $\overline{\Pi}$. ■

[*Лекции И. В. Тихонова*, файл 6.1]

dop 19. Постановка внешней и внутренней задач Дирихле для уравнения Лапласа. Единственность решения внутренней задачи Дирихле.

Оператор Лапласа в $\mathbb{R}^n$: $\Delta u \equiv \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \ldots + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$.

Уравнение Лапласа: $\Delta u = 0$.

Физическая модель. Если $\Delta u = 0$ в Ω, то $u(x)$ выражает стационарное распределение температуры в области Ω. Ясно, что такая температура внутри тела не может превосходить максимального значения температуры на границе $\Longrightarrow$ *принцип максимума.*

Принцип максимума. Пусть Ω – ограниченная область, $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $\Delta u = 0$ в Ω. Тогда $\min\limits_{\partial\Omega} u(x) \le u(x) \le \max\limits_{\partial\Omega} u(x)$ для $\forall x \in \Omega$.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – произвольная ограниченная область.
Внутренняя задача Дирихле:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi. \end{cases}$$

Здесь $u = u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ – неизвестная функция, $\varphi \in C(\partial\Omega)$ – заданная функция, $\partial\Omega$ – граница области Ω.

Теорема единственности. Для $\forall \varphi \in C(\partial\Omega)$ внутренняя задача Дирихле имеет не более одного решения в классе $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.
Доказательство. Теорема доказывается двумя способами.

1) Через 1-ую формулу Грина, но с требованием большей гладкости: $u(x) \in C^2(\overline{\Omega})$.
От противного. Пусть $u_1(x)$, $u_2(x)$ – два решения внутренней задачи Дирихле и $u(x) = u_2(x) - u_1(x)$.
Запишем 1-ую формулу Грина:

$$\int\limits_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial \nu_y} ds_y = \int\limits_{\Omega} u \Delta u dx + \int\limits_{\Omega} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right)^2 dx.$$

$u|_{\partial\Omega} = 0$, $\Delta u = 0$ в Ω, т.е. слагаемое в левой части и первое слагаемое во второй части равны нулю. Тогда второе слагаемое в правой части тоже должно быть равно нулю.

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right)^2 dx = 0 \Longrightarrow \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right)^2 = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x_j} \equiv 0 \text{ всюду в } \Omega \quad \forall j = \overline{1, n}.$$

$$\Longrightarrow u(x) \equiv C \text{ в } \overline{\Omega}. \quad u|_{\partial\Omega} = 0 \Longrightarrow C = 0 \Longrightarrow u(x) \equiv 0.$$

2) Используя принцип максимума.

От противного. Пусть $u_1(x)$, $u_2(x)$ – два решения внутренней задачи Дирихле с общей функцией $\varphi \in C(\partial\Omega)$. $u(x) = u_2(x) - u_1(x) \implies$

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

Из принципа максимума следует, что $0 \le u(x) \le 0$ для $\forall x \in \Omega \implies u(x) \equiv 0$. ■

Замечание. При неограниченной области Ω вводятся дополнительные условия, связанные с поведением функции на ∞.
Пусть Ω_0 – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}_0$.
В Ω_0 распространена некая физическая субстанция. Требуется изучить ее влияние на внешнее пространство.
Требование регулярности на ∞: $u(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$.
В этом случае единственность переносится и на внешнюю задачу.

[*Лекции И. В. Тихонова*, файлы 9 и 10.1]

dop 20. Внутренняя задача Неймана для уравнения Лапласа. Теорема единственности. Условия разрешимости.

Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей $\partial\Omega$.
Внутренняя задача Неймана:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } \Omega, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial \nu_y}\right|_{\partial\Omega} = \psi. \end{cases}$$

$u = u(x) = u(x_1, \ldots, x_n)$ – неизвестная функция, $\psi \in C(\partial\Omega)$ – заданная функция, ν_y – внешняя нормаль к $\partial\Omega$.

Физическая интерпретация в стационарной теплопроводности: требуется найти стационарное распределение температуры в Ω по заданным значениям теплового потока на границе.

Стандартный класс задач Неймана: $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Усиленный класс: $u \in C^2(\overline{\Omega})$.

Теорема (необходимое условие разрешимости). Для того, чтобы внутренняя задача Неймана имела решение в классе $C^2(\overline{\Omega})$ необходимо, чтобы выполнялось условие: $\displaystyle\int\limits_{\partial\Omega} \psi(y) dS_y = 0.$

Доказательство.
$$\int\limits_{\partial\Omega} \psi(y) dS_y = \int\limits_{\partial\Omega} \left.\frac{\partial u(y)}{\partial \nu_y}\right|_{\partial\Omega} dS_y = \{\text{теорема Гаусса}\} = \int\limits_{\Omega} \Delta u(x) dx = 0. \quad \blacksquare$$

Физический смысл. Для того, чтобы в области Ω существовало стационарное распределение температуры необходимо, чтобы суммарный поток через границу области был равен 0 (сколько тепла втекает через границу, столько и вытекает).

Теорема единственности. Пусть $u_1,\ u_2 \in C^2(\overline{\Omega})$ – два решения внутренней задачи Неймана с одинаковой функцией $\psi \in C(\partial\Omega)$. Тогда $u_2(x) = u_1(x) + C$ всюду в $\overline{\Omega}$ с некоторой константой C.
Доказательство. Рассмотрим $u(x) = u_2(x) - u_1(x),\ u \in C^2(\Omega)$, тогда

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } \Omega, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial \nu_y}\right|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

Запишем для $u(x)$ первую формулу Грина:

$$\int\limits_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial \nu_y} dS_y = \int\limits_{\Omega} u \Delta u dx + \int\limits_{\Omega} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 dx \implies$$

$$\implies \int\limits_{\Omega} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 dx = 0 \implies \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 = 0 \text{ в } \overline{\Omega} \implies$$

$$\implies \frac{\partial u}{\partial x_k} \equiv 0 \text{ в } \overline{\Omega},\ k = \overline{1, n}.$$

$$\implies u(x) \equiv C \text{ в } \overline{\Omega} \implies u_2(x) = u_1(x) + C \text{ всюду в } \overline{\Omega}. \quad \blacksquare$$

Вывод: если задача Неймана разрешима, то она имеет бесконечно много решений, но все эти решения отличаются на константу.

p.s. Обычно спрашивают по билету:
1) решение внешней задачи Неймана в пространстве размерности $n > 2$ единственно, если выполняются условие разрешимости (1-ая теорема этого билета) и условие на бесконечности: функция u равномерно сходится к нулю при $x \to \infty$;
2) в двумерном случае решение может быть найдено с точностью до константы, если выполняется условие разрешимости (1-ая теорема этого билета) и условие $|u| \leq C$ на бесконечности.

[*Лекции И. В. Тихонова*, файл 10.1]

dop 21. Формулы Грина.

Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^n$, $\quad n \geq 2$, $\quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\quad x$ – точка в $\mathbb{R}^n$. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – область в $\mathbb{R}^n$ (открытое связное множество). $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ – замыкание области (или замкнутая область). Здесь $\partial\Omega$ – граница множества Ω.

Опр. 1 $u \in C^k(\overline{\Omega})$, если всюду в Ω существуют частные производные от $u(x)$ порядка $\leq k$, непрерывные вплоть до $\partial\Omega$.

Производная по направлению

Пусть $u \in C^1(\Omega)$, $\quad x \in \Omega$ – фиксированная точка, $\overrightarrow{\nu} = \nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ – фиксированный вектор.

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{d}{ds} u(x + s\nu)\Big|_{s=0} = \nu_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + \nu_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = (\nu, \nabla u(x)),$$

где $\quad \nabla u = \operatorname{grad} u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial u}{\partial x_n} \right)$ – градиент $u(x)$.

Формула Гаусса-Остроградского

Пусть Ω – ограниченная «хорошая» область в $\mathbb{R}^n$ (например, выпуклая область с кусочно гладкой границей). $\overrightarrow{\nu_y} = \nu_y$ – единичная верхняя нормаль к $\partial\Omega$ в точке $y \in \partial\Omega$, $\quad |\overrightarrow{\nu_y}| = 1$.

Пусть $\overrightarrow{A}(x) = (A_1(x), \ldots, A_n(x))$ – векторное поле (в. п.) в $\overline{\Omega}$, причем $\overrightarrow{A} \in C^1(\overline{\Omega})$. Тогда

$$\int\limits_{\partial\Omega} (\overrightarrow{A}(y), \overrightarrow{\nu_y})\, ds_y = \int\limits_{\Omega} \operatorname{div} \overrightarrow{A}(x)\, dx, \tag{1}$$

где $\quad \operatorname{div} \overrightarrow{A}(x) \equiv \dfrac{\partial A_1}{\partial x_1}(x) + \dfrac{\partial A_2}{\partial x_2}(x) + \ldots + \dfrac{\partial A_n}{\partial x_n}(x).$

NB При $n = 3$ формула (1) принимает вид

$$\iint\limits_S (P\cos(\alpha) + Q\cos(\beta) + R\cos(\gamma))ds = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz.$$

Приложения формулы (1)

Опр. 2 Запись $\Omega \in (1)$ означает, что для $\forall$ векторного поля $\overrightarrow{A}(x)$ класса $C^1(\overline{\Omega})$ выполняется формула (1).

Будем всюду полагать, что $\quad \Omega \in (1)$, $\quad \overrightarrow{\nu_y} = \nu_y = \nu$ – единичная ($|\overrightarrow{\nu_y}| = 1$) внешняя нормаль к $\partial\Omega$.

I) Пусть $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Тогда $\nabla u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial u}{\partial x_n} \right)$ – векторное поле класса $C^1(\overline{\Omega})$,

$$(\nu, \nabla u) = \sum_{i=1}^n \nu_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial \nu}, \quad \operatorname{div}(\nabla u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \equiv \Delta u \overset{(1)}{\Longrightarrow}$$

Теорема Гаусса: $\displaystyle\int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu_y}\, ds_y = \int\limits_{\Omega} \Delta u(x)\, dx, \quad \forall u \in C^2(\overline{\Omega}).$

II) Пусть $u \in C^2(\overline{\Omega})$, $\; v \in C^1(\overline{\Omega})$. $\;$ Тогда

$$\operatorname{div}(v(x)\, \nabla u(x)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(v\, \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = \sum_{i=1}^n v\, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}\, \frac{\partial v}{\partial x_i} =$$

$$= v\Delta u + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\,\frac{\partial v}{\partial x_i}. \implies$$

$$\int\limits_{\Omega} v(x)\,\Delta u(x)\,dx \;+ \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\,\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx = \int\limits_{\Omega} \operatorname{div}(v(x)\,\nabla u(x))\,dx \overset{(1)}{=}$$

$$\overset{(1)}{=} \int\limits_{\partial\,\Omega} \Big(\overrightarrow{\nu_y},\; v(y)\,\nabla u(y)\Big)\,ds_y = \int\limits_{\partial\,\Omega} v(y)\,\frac{\partial u(y)}{\partial \nu_y}\,ds_y.$$

Первая формула Грина:

$$\boxed{\int\limits_{\partial\,\Omega} v(y)\,\frac{\partial u(y)}{\partial \nu_y}\,ds_y = \int\limits_{\Omega} v(x)\,\Delta u(x)\,dx + \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\,\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx,}$$

$\forall u \in C^2(\overline{\Omega}), \forall v \in C^1(\overline{\Omega})$.

III) Пусть $u,\; v \in C^2(\overline{\Omega})$. Тогда вычтем из равенства а) равенство б)

$$a)\; \int\limits_{\partial\,\Omega} v\,\frac{\partial u}{\partial \nu_y}\,ds_y = \int\limits_{\Omega} v\,\Delta u\,dx + \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\,\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx,$$

$$б)\; \int\limits_{\partial\,\Omega} u\,\frac{\partial v}{\partial \nu_y}\,ds_y = \int\limits_{\Omega} u\,\Delta v\,dx + \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i}\,\frac{\partial u}{\partial x_i}\,dx.$$

Вторая формула Грина:

$$\boxed{\int\limits_{\partial\,\Omega} \left(v\,\frac{\partial u}{\partial \nu_y} - u\,\frac{\partial v}{\partial \nu_y}\right) ds_y = \int\limits_{\Omega} (v\,\Delta u - u\,\Delta v)\,dx,} \qquad \forall u,\; v \in C^2(\overline{\Omega}).$$

Фундаментальная формула Грина

Опр. 3 Функция $E(x)$, определенная в $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, называется **фундаментальным решением** уравнения Лапласа в $\mathbb{R}^n$:

$$E(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\ln|x|, & n = 2, \\ -\dfrac{1}{\omega_n\,(n-2)\,|x|^{n-2}}, & n \geq 3, \end{cases} \qquad \text{где } x \in \mathbb{R}^n,\;\; |x| > 0.$$

Здесь ω_n – площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$.

Ситуация.

Зафиксируем точку $x \in \Omega$. $\exists\,\varepsilon_0 > 0:\;\; B_\varepsilon(x) \subset \Omega$ при $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Где $B_\varepsilon(x)$ – шар радиуса ε с центром в точке x. $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{B_\varepsilon(x)}$.

Пусть $u \in C^2(\overline{\Omega})$, $v(y) = E(y-x)$ – сдвинутое фундаментальное решение. Тогда $v \in C^2(\overline{\Omega_\varepsilon})$ и $\Delta v \equiv 0$ в Ω_ε.
Применим вторую формулу Грина к паре u, v в области Ω_ε:

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} \Big(E(y-x)\Delta u(y) \;-\; 0\Big)\,dy = \int\limits_{\partial\,\Omega} \left(E(y-x)\,\frac{\partial u}{\partial \nu_y} \;-\; u(y)\,\frac{\partial E(y-x)}{\partial \nu_y}\right) ds_y +$$

$$+ \int\limits_{S_\varepsilon(x)} \left(E(\varepsilon)\,\frac{\partial u}{\partial \nu_y} \;-\; u(y)\cdot\left(-\frac{1}{\omega_n \varepsilon^{n-1}}\right)\right) ds_y.$$

Здесь $S_\varepsilon(x)$ – сфера радиуса ε с центром в точке x, $E(\varepsilon) = E(y-x)\Big|_{|y-x|=\varepsilon}$, $-\dfrac{1}{\omega_n \varepsilon^{n-1}} = -\dfrac{\partial E(y-x)}{\partial r}\Bigg|_{|y-x|=\varepsilon}$ – производная по нормали к $S_\varepsilon(x)$, направленной в точку x $\quad (r = |y-x|)$.

Заметим, что

а) $\left|\displaystyle\int\limits_{S_{\varepsilon(x)}} E(\varepsilon)\frac{\partial u}{\partial \nu_y}\,ds_y\right| \le C\cdot|E(\varepsilon)|\cdot\omega_n\,\varepsilon^{n-1} \to 0$ при $\varepsilon \to 0+$

б) $\displaystyle\int\limits_{S_{\varepsilon(x)}} u(y)\frac{1}{\omega_n \varepsilon^{n-1}} ds_y = \frac{1}{\omega_n \varepsilon^{n-1}} \int\limits_{S_{\varepsilon(x)}} u(y) ds_y \to u(x)$ при $\varepsilon \to 0+$

а), б) $\implies \exists \displaystyle\int\limits_{\Omega} E(y-x)\,\Delta u(y)\,dy \equiv \lim_{\varepsilon\to 0+} \int\limits_{\Omega_\varepsilon} E(y-x)\,\Delta u(y)\,dy$ – несобственный интеграл.

При этом

$$u(x) = \int\limits_{\Omega} E(y-x)\,\Delta u(y) dy + \int\limits_{\partial\,\Omega} \frac{\partial E(y-x)}{\partial \nu_y} u(y) - E(y-x)\frac{\partial u(y)}{\partial \nu_y} ds_y. \tag{2}$$

Это и есть **фундаментальная формула Грина**. Здесь $x \in \Omega$ – произвольная точка.

Теорема Пусть $\Omega \in$ (1), $E(x)$ – фундаментальное решение в $\mathbb{R}^n$, $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Тогда для $\forall x \in \Omega$ справедливо соотношение (2). Первый интеграл в этой формуле понимается как несобственный.

Важнейший частный случай. Пусть $u \in C^2(\overline{\Omega})$ и $\Delta u(x) = 0$ всюду в Ω. Тогда (2) принимает вид

$$u(x) = \int\limits_{\partial\,\Omega} \left(\frac{\partial E(y-x)}{\partial \nu_y}\,u(y) - E(y-x)\,\frac{\partial u(y)}{\partial \nu_y}\right) ds_y, \quad \forall x \in \Omega.$$

Это **фундаментальная формула Грина для гармонических функций**.
[*Лекции И. В. Тихонова*, файлы 2.1, 10, 11.1]

dop 22. Примеры и канонический вид одношаговых итерационных методов решения систем линейных алгебраических уравнений.

I. Итерационные методы Якоби и Зейделя

Рассмотрим систему $Ax = f$, где матрица $A = \left[a_{ij}\right]$, i, $j = 1$, 2,..., m, имеет обратную, $x = (x_1, \ldots, x_m)^T$, $f = (f_1, \ldots, f_m)^T$.

Рассмотрим примеры итерационных методов. Для их построения преобразуем $Ax = f$ к виду

$$x_i = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j - \sum_{j=i+1}^{m} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j + \frac{f_i}{a_{ii}}, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad a_{ii} \neq 0. \tag{1}$$

Пусть значение суммы равно нулю, если верхний предел суммирования меньше нижнего. Тогда при $i = 1$ уравнение (1) имеет вид:

$$x_1 = -\sum_{j=2}^{m} \frac{a_{1j}}{a_{11}} x_j + \frac{f_1}{a_{11}}.$$

В дальнейшем верхний индекс это номер итерации, например: $x^n = (x_1^n, \ldots, x_m^n)^T$, где x_i^n-n-ая итерация i-ой компоненты $\overrightarrow{x}$.

В **методе Якоби** исходят из записи системы в виде (1), а итерации определяются следующим образом:

$$x_i^{n+1} = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^n - \sum_{j=i+1}^{m} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^n + \frac{f_i}{a_{ii}}, \tag{2}$$

где $n = 0$, 1,..., n_0, $i = 1$, 2,..., m. Начальные значения x_i^0, $i = 1$, 2,..., m задаются произвольно. Окончание итераций определяется либо заданием максимального числа итераций n_0, либо условием: $\max\limits_{1 \leq i \leq m} \left| x_i^{n+1} - x_i^n \right| < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ – заданное число.

Итерационный метод Зейделя имеет вид:

$$x_i^{n+1} = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{n+1} - \sum_{j=i+1}^{m} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^n + \frac{f_i}{a_{ii}}, \tag{3}$$

где $n = 0$, 1,..., n_0, $i = 1$, 2,..., m. Распишем подробнее первые два уравнения системы (3):

$$x_1^{n+1} = -\sum_{j=2}^{m} \frac{a_{1j}}{a_{11}} x_j^n + \frac{f_1}{a_{11}}, \tag{4}$$

$$x_2^{n+1} = -\frac{a_{21}}{a_{22}} x_1^{n+1} - \sum_{j=3}^{m} \frac{a_{2j}}{a_{22}} x_j^n + \frac{f_2}{a_{22}}. \tag{5}$$

Первая компонента x_1^{n+1} вектора x^{n+1} находится из уравнения (4) явным образом, для ее вычисления нужно знать x^n и f_1. При нахождении x_2^{n+1} из (5) используются найденное значение x_1^{n+1} и известные значения x_j^n, $j = 3,\ldots, m$, с предыдущей итерации. Таким образом, компоненты x_i^{n+1} вектора x^{n+1} находятся из уравнения (3) последовательно, начиная с $i = 1$.

II. Матричная запись методов Якоби и Зейделя

Для исследования сходимости удобнее записывать методы в матричной форме. Представим матрицу A системы $Ax = f$ в виде суммы трех матриц

$$A = A_1 + D + A_2,$$

где $D = \operatorname{diag}[a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{mm}]$ – диагональная матрица с той же главной диагональю, что и матрица A, A_1 – нижняя треугольная и A_2 – верхняя треугольная с нулевыми главными диагоналями.

Представление $Ax = f$ в форме (1) эквивалентно ее записи в виде матричного уравнения:

$$x = -D^{-1}A_1x - D^{-1}A_2x + D^{-1}f.$$

Метод Якоби (2) в векторной записи:

$$x^{n+1} = -D^{-1}A_1x^n - D^{-1}A_2x^n + D^{-1}f$$

или

$$Dx^{n+1} + (A_1 + A_2)\,x^n = f \tag{6}$$

Метод Зейделя (3) в векторной форме:

$$x^{n+1} = -D^{-1}A_1x^{n+1} - D^{-1}A_2x^n + D^{-1}f$$

или

$$(D + A_1)\,x^{n+1} + A_2x^n = f \tag{7}$$

Учитывая, что $A = A_1 + D + A_2$, методы (6), (7) можно переписать соответственно в виде:

$$D\left(x^{n+1} - x^n\right) + Ax^n = f, \tag{8}$$

$$(D + A_1)\left(x^{n+1} - x^n\right) + Ax^n = f. \tag{9}$$

Видно, что если итерационный метод сходится, то он сходится к решению исходной системы уравнений. Для ускорения сходимости вводят числовые параметры, которые зависят от номера итерации. Например, в методы (8), (9) можно ввести **итерационные параметры** τ_{n+1}:

$$D\frac{\left(x^{n+1} - x^n\right)}{\tau_{n+1}} + Ax^n = f,$$

$$(D + A_1)\frac{\left(x^{n+1} - x^n\right)}{\tau_{n+1}} + Ax^n = f.$$

Методы Якоби и Зейделя относятся к **одношаговым итерационным методам**, когда для нахождения x^{n+1} требуется помнить только одну предыдущую итерацию x^n. Используются и многошаговые итерационные методы, в которых x^{n+1} определяется через значения на двух и более предыдущих итерациях.

III. Каноническая форма одношаговых методов

Теперь пусть x_n будет обозначать вектор, полученный в результате n-ой итерации.

$\boxed{\textbf{Опр.}}$ *Канонической формой одношагового итерационного метода* решения $Ax = f$ называется его запись в виде:

$$B_{n+1}\frac{(x_{n+1} - x_n)}{\tau_{n+1}} + Ax_n = f, \quad n = 0, 1, \ldots, n_0. \tag{10}$$

Здесь B_{n+1} — матрица, задающая итерационный метод, τ_{n+1}— итерационный параметр. Предполагается, что задано начальное приближение x_0 и $\exists$ матрицы B_n^{-1}, $n = 1,..., n_0 - 1$. Тогда из (10) можно последовательно определить все x_n, $n = 1,..., n_0$. Для нахождения x_{n+1} по известным f и x_n достаточно решить систему уравнений:

$$B_{n+1}x_{n+1} = F_n,$$

где $F_n = (B_{n+1} - \tau_{n+1}A)\, x_n + \tau_{n+1}f$.

$\boxed{\textbf{Опр.}}$ Итерационный метод называют *явным (неявным)*, если $B_n = E$ $(B_n \neq E)$, где E— единичная матрица.

Неявные применяют, когда каждую B_n обратить легче, чем исходную матрицу A. Например, в методе Зейделя приходится обращать треугольную матрицу.

$\boxed{\textbf{Опр.}}$ Итерационный метод (10) называется *стационарным*, если $B_{n+1} = B$ и $\tau_{n+1} = \tau$ не зависят от номера итерации, и *нестационарным* в противоположном случае.

IV. Другие примеры итерационных методов

1) **Методом простой итерации** называют явный метод с постоянным параметром τ:

$$\frac{(x_{n+1} - x_n)}{\tau} + Ax_n = f$$

2) Явный метод с переменным параметром τ_{n+1} называется **итерационным методом Ричардсона**:

$$\frac{(x_{n+1} - x_n)}{\tau_{n+1}} + Ax_n = f$$

3) Обобщением метода Зейделя (9) является **метод верхней релаксации**:

$$(D + \omega A_1)\,\frac{(x_{n+1} - x_n)}{\omega} + Ax_n = f,$$

где $\omega > 0$ это заданный числовой параметр.

[А. А. Самарский, *Численные методы*, pages 82-85]

dop 23. Теорема о сходимости итерационного метода для систем с симметрической положительно определенной матрицей.

Пусть дана система уравнений $Ax = f$, где $A = [a_{ij}],\ i,j = 1,2,\dots,m$ – вещественная квадратная матрица, имеющая обратную, и $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T,\ f = (f_1, f_2, \dots, f_m)^T$. **Канонической формой одношагового итерационного метода** называется его запись в виде

$$B_{n+1}\,\frac{x_{n+1}-x_n}{\tau_{n+1}} + Ax_n = f,\ \ n = 0,1,\dots,$$

где n – номер итерации, x_0 – заданное начальное приближение, $x_n = (x_1^n, x_2^n, \dots, x_m^n)^T$. Матрицы B_{n+1} и числа $\tau_{n+1} > 0$ задают тот или иной конкретный итерационный метод.
Рассмотрим **стационарные одношаговые итерационные методы**

$$B\,\frac{x_{n+1}-x_n}{\tau} + Ax_n = f, \tag{2}$$

в которых матрица B и числовой параметр τ не зависят от номера итерации n.
Будем рассматривать решение x исходной системы и последовательные приближения x_n как элементы конечномерного линейного пространства H, а матрицы A, B и другие – как операторы, действующие в пространстве H. Предположим, что в H введены скалярное произведение (y, v) и норма $\|y\| = \sqrt{(y,y)}$. Для двух симметричных матриц A и B неравенство $A \geq B$ означает, что $\Big(Ax, x\Big) \geq \Big(Bx, x\Big)$ для всех $x \in H$. В случае симметричной положительно определенной матрицы D будем обозначать $\|y\|_D = \sqrt{(Dy,y)}$.

Теорема: Пусть A и B – симметричные положительно определенные матрицы, для которых справедливы неравенства

$$\gamma_1\,B \leq A \leq \gamma_2 B, \tag{3}$$

где $\gamma_1,\ \gamma_2$ – положительные постоянные, $\gamma_2 > \gamma_1$. При $\tau = \dfrac{2}{\gamma_1+\gamma_2}$ итерационный метод (2) сходится и для погрешности справедливы оценки

$$\|x_n - x\|_A \leq \rho^n \|x_0 - x\|_A,\ \ n = 0,1,\dots,$$

$$\|x_n - x\|_B \leq \rho^n \|x_0 - x\|_B,\ \ n = 0,1,\dots,$$

где $\|v\|_A = \sqrt{(Av,v)}, \|v\|_B = \sqrt{(Bv,v)}$ и $\rho = \dfrac{1-\xi}{1+\xi},\quad \xi = \dfrac{\gamma_1}{\gamma_2}$.

► Уравнение для погрешности $v_n = x_n - x$ имеет вид

$$B\,\frac{v_{n+1}-v_n}{\tau} + Av_n = 0,\ \ n = 0,1,\dots, \tag{4}$$

$$v_0 = x_0 - x,$$

откуда получим

$$v_{n+1} = Sv_n, \quad S = E - \tau B^{-1}A. \tag{5}$$

Лемма 1: Пусть A и B – симметричные положительно определенные матрицы и $\rho > 0$ – число. Матричные неравенства

$$\frac{1-\rho}{\tau}\,B \leq A \leq \frac{1+\rho}{\tau}\,B \tag{6}$$

необходимы и достаточны для того, чтобы при любых $v_0 \in H$ для решения задачи (4) выполнялась оценка

$$\|v_{n+1}\|_A \le \rho\, \|v_n\|_A, \quad n = 0, 1, \dots\, . \tag{7}$$

▶ Оценку (7) можно записать в виде

$$\|w_{n+1}\| \le \rho\, \|w_n\|, \tag{8}$$

где $w_n = A^{1/2} v_n,\ \|w_n\| = \sqrt{(w_n, w_n)}$. Из (5) получим, что функция w_n удовлетворяет уравнению $w_{n+1} = \widetilde{S} w_n$, где $\widetilde{S} = A^{1/2} S\, A^{-1/2} = E - \tau\, C, \quad C = A^{1/2} B^{-1} A^{1/2}$. Для решения этого уравнения в силу симметричности матрицы $\widetilde{S}$ имеем

$$\|w_{n+1}\|^2 = (\widetilde{S} w_n, \widetilde{S} w_n) = (\widetilde{S}^2\, w_n, w_n).$$

Тем самым оценка (8) эквивалентна неравенству

$$\widetilde{S}^2 \le \rho^2\, E \tag{9}$$

и остается доказать эквивалентность неравенств (6) и (9).
Справедливо следующее свойство – для симметричной матрицы S и любого числа $\rho > 0$ эквивалентны следующие матричные неравенства: $-\rho\, E \le S \le \rho\, E \quad и \quad S^2 \le \rho^2\, E$.
Тогда неравенство (9) эквивалентно двум матричным неравенствам $-\rho\, E \le \widetilde{S} \le \rho\, E$ или

$$\frac{1-\rho}{\tau}\, E \le C \le \frac{1+\rho}{\tau}\, E.$$

Так как $C = A^{1/2} B^{-1} A^{1/2}$ – симметричная положительно определенная матрица, то следующие неравенства эквивалентны: $\alpha\, C \ge \beta\, E \quad и \quad \alpha\, E \ge \beta\, C^{-1}$, где $\alpha,\ \beta$ – любые действительные числа. Следовательно, можем перейти к обратным матрицам:

$$\frac{1-\rho}{\tau}\, C^{-1} \le E \le \frac{1+\rho}{\tau}\, C^{-1}.$$

Подставляя сюда выражение для C, получим

$$\frac{1-\rho}{\tau}\, A^{-1/2} B\, A^{-1/2} \le E \le \frac{1+\rho}{\tau}\, A^{-1/2} B\, A^{-1/2}.$$

Справедливо следующее свойство – пусть $A^T = A$ и L – невырожденная матрица, тогда эквивалентны неравенства $A \ge 0 \quad и \quad L^T A L \ge 0$. Тогда умножив справа и слева последние полученные неравенства на $A^{1/2}$, получим неравенства (6). ■

Лемма 2: При тех же условиях, что и в лемме 1, неравенства (6) необходимы и достаточны для выполнения оценки

$$\|v_{n+1}\|_B \le \rho\, \|v_n\|_B, \quad n = 0, 1, \dots\, .$$

▶ Доказательство проводится аналогично лемме 1, только в качестве вектора w надо взять вектор $B^{1/2} v_n$, а в качестве C – матрицу $B^{-1/2} A\, B^{-1/2}$. ■.

Для доказательства теоремы теперь достаточно заметить, что матричные неравенства (3) можно переписать в виде (6), где $\rho = \dfrac{1-\xi}{1+\xi}, \quad \xi = \dfrac{\gamma_1}{\gamma_2}, \quad \tau = \dfrac{2}{\gamma_1 + \gamma_2}$. После этого замечания утверждение теоремы следует из лемм 1 и 2. ■

Следствия из теоремы о сходимости
Рассмотрим обобщенную задачу на собственные значения

$$A\,\mu = \lambda B\mu. \tag{10}$$

Если для матриц A и B выполнены неравенства (3), то из (10) для любого собственного вектора получим неравенства

$$\gamma_1 \big(B\mu, \mu) \le \big(A\mu, \mu\big) = \lambda\big(B\mu, \mu\big) \le \gamma_2\big(B\mu, \mu\big).$$

Отсюда следует, что

$$\gamma_1 \le \lambda_{min}(B^{-1}A), \quad \gamma_2 \ge \lambda_{max}(B^{-1}A), \tag{11}$$

где $\lambda_{min}(B^{-1}A)$, $\lambda_{max}(B^{-1}A)$ – минимальное и максимальное собственные числа задачи (10). Таким образом, наиболее точными константами, с которыми выполняются неравенства (3), являются константы $\gamma_1 = \lambda_{min}(B^{-1}A)$, $\quad \gamma_2 = \lambda_{max}(B^{-1}A)$. В этом случае параметр

$$\tau_0 = \frac{2}{\lambda_{min}(B^{-1}A) + \lambda_{max}(B^{-1}A)}$$

называется **оптимальным итерационным параметром**, так как он минимизирует величину ρ на множестве всех положительных γ_1, γ_2, удовлетворяющих условиям (11).

Следствие 1: Если $A^T = A > 0$, то для **метода простой итерации**

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{\tau} + Ax_n = f \tag{12}$$

при $\tau = \tau_0 = \dfrac{2}{\lambda_{min}(A) + \lambda_{max}(A)}$ справедлива оценка $\|x_n - x\| \le \rho_0 \|x_0 - x\|$, где $\rho_0 = \dfrac{1-\xi}{1+\xi}$, $\xi = \dfrac{\lambda_{min}(A)}{\lambda_{max}(A)}$.

Следствие 2: Для симметричной матрицы A справедливо равенство $\|E - \tau_0\, A\| = \rho_0$.

[А. А. Самарский, *Численные методы*, page 90, 96—98, 100—102]

dop 24. Интерполяционная формула Лагранжа и оценка ее погрешности.

Пусть на отрезке $a \le x \le b$ заданы точки x_k, $k = 0, 1, ..., n$ (узлы интерполирования), в которых известны значения функции $f(x)$. Задача **интерполирования алгебраическими многочленами** состоит в том, чтобы построить многочлен

$$L_n(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$$

степени n которого в заданных точках x_k, $k = 0, 1, ..., n$, совпадают со значениями функции $f(x)$ в этих точках.
Для любой непрерывной функции $f(x)$ сформулированная задача имеет единственное решение. Действительно, для отыскания коэффициентов $a_0, a_1, ..., a_n$ получаем систему линейных уравнений

$$a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + ... + a_n x_i^n = f(x_i), \quad i = 0, 1, ..., n, \tag{1}$$

определитель которой отличен от нуля, если среди точек x_i, $i = 0, 1, ..., n$ нет совпадающих.
Многочлен $L_n(x_i) = f(x_i)$, удовлетворяющий условиям

$$L_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, ..., n, \tag{2}$$

называется **интерполяционным многочленом** для функции $f(x)$, построенным по узлам $\{x_i\}_0^n$.
Решение системы (1) можно записать различным образом. **Интерполяционная формула Лагранжа** позволяет представить многочлен $L_n(x)$ в виде линейной комбинации

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k(x) f(x_k) \tag{3}$$

значений функции $f(x)$ в узлах интерполирования.
Найдем явное выражение для коэффициентов $c_k(x)$. Из условий интерполирования (2) получаем

$$\sum_{k=0}^{n} c_k(x_i) f(x_k) = f(x_i), \quad i = 0, 1, ..., n.$$

Эти соотношения будут выполнены, если на функции $c_k(x)$ наложить условия

$$c_k(x_i) = \begin{cases} 0 & i \ne k \\ 1 & i = k, i = 0, 1, ..., n, \end{cases}$$

которые означают, что каждая из функций $c_k(x)$, $k = 0, 1, ..., n$, имеет не менее n нулей на $[a, b]$. Поскольку $L_n(x)$ - многочлен степени n, коэффициенты $c_k(x)$ естественно искать также в виде многочленов степени n, а именно в виде

$$c_k(x) = \lambda_k (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})...(x - x_n).$$

Из условия $c_k(x_k) = 1$ находим

$$\lambda_k^{-1} = (x_k - x_0)(x_k - x_1)...(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})...(x_k - x_n).$$

Таким образом, коэффициенты $c_k(x)$ интерполяционного многочлена (3) находятся по формулам

$$c_k(x) = \frac{\prod\limits_{j\neq k}(x - x_j)}{\prod\limits_{j\neq k}(x_k - x_j)}$$

Часто коэффициенты $c_k(x)$ записывают в другом виде. Введем многочлен $\omega(x)$ степени $n+1$:

$$\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{k-1})(x - x_k)(x - x_{k+1})...(x - x_n)$$

и вычислим его производную в точке x_k:

$$\omega'(x) = (x - x_k)...(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})...(x_k - x_n).$$

Тогда получим, что

$$c_k = \frac{\omega(x)}{(x - x_k)\omega'(x_k)}.$$

Итак, **интерполяционный многочлен Лагранжа** имеет вид

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\omega(x)}{(x - x_k)\omega'(x_k)} f(x_k)$$

или, более подробно,

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\prod\limits_{j\neq k}(x - x_j)}{\prod\limits_{j\neq k}(x_k - x_j)} f(x_k)$$

Остаточный член интерполяционной формулы. Заменяя функцию $f(x)$ интерполяционным многочленом $L_n(x)$, мы допускаем погрешность

$$r_n(x) = f(x) - L_n(x),$$

которая называется **погрешностью интерполирования** или, что то же самое, **остаточным членом интерполяционной формулы**. Ясно, что в узлах интерполирования эта погрешность равна 0. Оценим погрешность в любой точке $x \in [a, b]$. Для этого рассмотрим вспомогательную функцию

$$g(s) = f(s) - L_n(s) - K\omega(s),$$

где $s \in [a, b]$, K - постоянная и

$$\omega(s) = (s - x_0)(s - x_1)...(s - x_n). \tag{4}$$

Пусть требуется оценить $r_n(x)$ в заданной точке $x \in [a, b]$, не являющейся узлом интерполирования. Выберем постоянную K из условия $g(x) = 0$. Для этого достаточно положить

$$K = \frac{f(x) - L_n(x)}{\omega(x)}.$$

Предположим, что $f(s)$ имеет $n+1$ непрерывную производную на отрезке $a \leq s \leq b$. Функция $g(s)$ имеет не менее $n+2$ нулей на этом отрезке, а именно в точках x, x_k, $k = 0, 1, ..., n$. Поэтому производная $g'(s)$ имеет не менее чем $n+1$ нулей на $[a, b]$, $g''(s)$ - не менее n нулей и т.д., функция $g^{(n+1)}(s)$ по крайней мере один раз обращается в нуль на $[a, b]$. Тем самым существует точка $\xi \in [a, b]$, в которой $g^{(n+1)}(\xi) = 0$.
Поскольку

$$g^{(n+1)}(s) = f^{(n+1)}(s) - (n+1)!K,$$

получаем

$$f^{(n+1)}(\xi) = \frac{f(x) - L_n(x)}{\omega(x)}(n+1)!$$

Таким образом доказано, что погрешность интерполирования можно представить в виде

$$f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega(x),$$

где $\xi \in [a, b]$ и $\omega(x)$ - многочлен, определенный согласно (4). Отсюда следует оценка

$$|f(x) - L_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega(x)|,$$

где $M_{n+1} = \sup\limits_{x \in [a,b]} |f^{(n+1)}(x)|$. В частности, если $f(x)$ - алгебраический многочлен степени n, то интерполирование, проведенное по любым точкам $x_0, x_1, ..., x_n$, осуществляется точно, т.е. $L_n(x) \equiv f(x)$.

[А. А. Самарский, *Численные методы*, page 127-129, 132—133]

dop 25. Метод прогонки решения разностных уравнений.

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений $Ay = f$ с трехдиагональной матрицей $A = [a_{ij}] : a_{ij} = 0$ *при* $j > i + 1$ *и* $j < i - 1$. В общем случае СЛАУ с трехдиагональной матрицей имеют вид

$$a_j y_{j-1} - c_j y_j + b_j y_{j+1} = -f_j, \quad j = 1, 2, \ldots, N - 1, \tag{1}$$

$$y_0 = \kappa_1 y_1 + \mu_1, \quad y_N = \kappa_2 y_{N-1} + \mu_2. \tag{2}$$

Для численного решения систем с трехдиагональными матрицами применяется **метод прогонки**, который представляет собой вариант метода последовательного исключения неизвестных.

Проведем вывод расчетных формул метода прогонки. Будем искать решение системы (1) в виде

$$y_j = \alpha_{j+1} y_{j+1} + \beta_{j+1}, \quad j = 0, 1, \ldots, N - 1, \tag{3}$$

где α_{j+1}, β_{j+1} – неизвестные пока коэффициенты. Отсюда найдем $y_{j-1} = \alpha_j y_j + \beta_j = \alpha_j (\alpha_{j+1} y_{j+1} + \beta_{j+1}) + \beta_j = \alpha_j \, \alpha_{j+1} \, y_{j+1} + (\alpha_j \beta_{j+1} + \beta_j), \quad j = 1, 2, \ldots, N - 1$.

Подставляя полученные выражения для y_j, y_{j-1} в уравнение (1), приходим при $j = 1, 2, \ldots, N - 1$ к уравнению

$$\Big[\alpha_{j+1}(a_j \alpha_j - c_j) + b_j\Big] y_{j+1} + \Big[\beta_{j+1}(a_j \alpha_j - c_j) + a_j \beta_j + f_j\Big] = 0.$$

Последнее уравнение будет выполнено, если коэффициенты α_{j+1}, β_{j+1} выбрать такими, чтобы выражения в квадратных скобках обращались в нуль. А именно, достаточно положить

$$\alpha_{j+1} = \frac{b_j}{c_j - \alpha_j a_j}, \quad \beta_{j+1} = \frac{a_j \beta_j + f_j}{c_j - \alpha_j a_j}, \quad j = 1, 2, \ldots, N - 1. \tag{4}$$

Для решения уравнений (4) необходимо задать начальные значения α_1, β_1. Из первого условия в (2) и формулы (3) имеем

$$\alpha_1 = \kappa_1, \quad \beta_1 = \mu_1. \tag{5}$$

Определение: нахождение коэффициентов α_{j+1}, β_{j+1} по формулам (4), (5) называется **прямой прогонкой**.

После того как прогоночные коэффициенты α_{j+1}, β_{j+1}, $j = 0, 1, \ldots, N - 1$, найдены, решение системы (1), (2) находится по рекуррентной формуле (3), начиная с $j = N - 1$. Для начала счета требуется знать y_N, которое определяется из уравнений

$$y_N = \kappa_2 y_{N-1} + \mu_2, \quad y_{N-1} = \alpha_N y_N + \beta_N$$

и равно $(\kappa_2 \beta_N + \mu_2)/(1 - \kappa_2 \alpha_N)$.

Определение: нахождение y_j по формулам

$$\begin{gathered} y_j = \alpha_{j+1} y_{j+1} + \beta_{j+1}, \quad j = N - 1, \, N - 2, \ldots, 0, \\ y_N = \frac{\kappa_2 \beta_N + \mu_2}{1 - \kappa_2 \alpha_N} \end{gathered} \tag{6}$$

называется **обратной прогонкой**. Алгоритм решения системы (1), (2), определяемый по формулам (4) - (6), называется **методом прогонки**.

Метод прогонки можно применять, если знаменатели выражений (4), (6) не обращаются в нуль.

Утверждение 1: для возможности применения метода прогонки достаточно потребовать, чтобы коэффициенты системы (1), (2) удовлетворяли условиям

$$a_j \neq 0, \quad b_j \neq 0, \quad |c_j| \geq |a_j| + |b_j|, \quad j = 1, 2, \ldots, N-1, \tag{7}$$

$$|\kappa_1| \leq 1, \quad |\kappa_2| < 1. \tag{8}$$

► Сначала докажем по индукции, что при условиях (7), (8) модули прогоночных коэффициентов α_j, $j = 1, \ldots, N-1$, не превосходят единицы. Согласно (5), (8) имеем $|\alpha_1| = |\kappa_1| \leq 1$. Предположим, что $|\alpha_j| \leq 1$ для некоторого j и докажем, что $|\alpha_{j+1}| \leq 1$. Из оценок

$$|c_j - \alpha_j a_j| \geq \Big||c_j| - |\alpha_j||a_j|\Big| \geq \Big||c_j| - |a_j|\Big|$$

и условий (7) получаем

$$|c_j - \alpha_j a_j| \geq |b_j| > 0,$$

т.е. знаменатели выражений (4) не обращаются в нуль. Более того

$$|\alpha_{j+1}| = \frac{|b_j|}{|c_j - \alpha_j a_j|} \leq 1.$$

Следовательно, $|\alpha_j| \leq 1$, $j = 1, 2, \ldots, N$. Далее, учитывая второе из условий (8) и то, что $|\alpha_j| \leq 1$, имеем

$$|1 - \kappa_2 \alpha_N| \geq 1 - |\kappa_2||\alpha_N| \geq 1 - |\kappa_2| > 0,$$

т.е. не обращается в нуль и знаменатель в (6).
Таким образом, при выполнении условий (7), (8) система (1)-(2) эквивалентна системе (4)-(6). Поэтому условия (7), (8) гарантируют существование и единственность решения системы (1)-(2) и возможность нахождения этого решения методом прогонки. ■
Утверждение 2: доказанные неравенства $|\alpha_j| \leq 1$, $j = 1, 2, \ldots, N$, обеспечивают **устойчивость** счета по рекуррентным формулам (6).
► Устойчивость счета означает, что погрешность, внесенная на каком-либо шаге вычислений, не будет возрастать при переходе к следующим шагам. Действительно, пусть в формуле (6) при $j = j_0 + 1$ вместо y_{j_0+1} вычислена величина $\widetilde{y}_{j_0+1} = y_{j_0+1} + \delta_{j_0+1}$. Тогда на следующем шаге вычислений, т.е. при $j = j_0$ вместо $y_{j_0} = \alpha_{j_0+1} y_{j_0+1} + \beta_{j_0+1}$ получим величину $\widetilde{y}_{j_0} = \alpha_{j_0+1}(\alpha_{j_0+1} + \delta_{j_0+1}) + \beta_{j_0+1}$ и погрешность окажется равной

$$\delta_{j_0} = \widetilde{y}_{j_0} - y_{j_0} = \alpha_{j_0+1}\delta_{j_0+1}.$$

Отсюда получим, что $|\delta_{j_0}| \leq |\alpha_{j_0+1}||\delta_{j_0+1}| \leq |\delta_{j_0+1}|$, т.е. погрешность не возрастает. ■
Замечание: условия (7), (8) могут быть заменены на:

$$a_j \neq 0, \quad b_j \neq 0, \quad |c_j| > |a_j| + |b_j|, \quad j = 1, 2, \ldots, N-1,$$

$$|\kappa_1| \leq 1, \quad |\kappa_2| \leq 1.$$

Матричная прогонка относится к *прямым методам* решения разностных уравнений. Она применяется к уравнениям, которые можно записать в виде системы векторных уравнений

$$\begin{aligned} -C_0 y_0 + B_0 y_1 &= -F_0, \\ A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} &= -F_i, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1, \\ A_N y_{N-1} - C_N y_N &= -F_N, \end{aligned} \tag{9}$$

где y_i – искомые векторы размерности M, F_i – заданные векторы, A_i, B_i, C_i – заданные квадратные матрицы порядка M.

Матричная прогонка представляет собой *обобщение обычной прогонки* на случай системы векторных уравнений (9). По сравнению с другими прямыми методами решения разностных задач матричная прогонка более универсальна, так как позволяет решать *уравнения с переменными коэффициентами* и не накладывает сильных ограничений на вид граничных условий.

Алгоритм матричной прогонки

Пусть задана система уравнений (9). Формулы матричной прогонки можно получить так же, как и формулы обычной прогонки, однако при их выводе надо учитывать, что коэффициенты уравнения (9) *неперестановочны*. Будем искать решение системы (9) в виде

$$y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad i = 0, 1, \ldots, N-1, \tag{10}$$

где α_{i+1} – квадратные матрицы того же порядка M, что и порядок матриц A_i, B_i, C_i, а β_{i+1} – вектор размерности M. Подставляя (10), а также

$$y_{i-1} = \alpha_i y_i + \beta_i = \alpha_i \alpha_{i+1} y_{i+1} + (\alpha_i \beta_{i+1} + \beta_i)$$

во второе уравнение системы (9), получаем, что это уравнение будет выполнено, если потребовать

$$(A_i\alpha_i - C_i)\alpha_{i+1} + B_{i+1} = 0,$$
$$(A_i\alpha_i - C_i)\beta_{i+1} = -(A_i\beta_i + F_i).$$

Отсюда приходим к следующим рекуррентным соотношениям для определения матриц α_{i+1} и векторов β_{i+1}:

$$\alpha_{i+1} = (C_i - A_i\alpha_i)^{-1} B_i, \tag{11}$$
$$\beta_{i+1} = (C_i - A_i\alpha_i)^{-1} (A_i\beta_i + F_i). \tag{12}$$

Здесь $i = 1, 2, \ldots, N-1$. Начальные значения α_1 и β_1 задаются в соответствии с уравнением $-C_0 y_0 + B_0 y_1 = -F_0$, которое можно переписать в виде

$$y_0 = C_0^{-1} B_0 y_1 + C_0^{-1} F_0. \tag{13}$$

Сопоставляя (13) с уравнением (10) при $i = 0$, получаем

$$\alpha_1 = C_0^{-1} B_0, \quad \beta_1 = C_0^{-1} F_0. \tag{14}$$

После того как все коэффициенты α_i, β_i найдены, векторы y_i, $i = N-1, N-2, \ldots, 1, 0$ определяются последовательно из уравнения (10), начиная с y_{N-1}. Для начала счета надо знать вектор y_N, который определяется из системы двух уравнений

$$A_N y_{N-1} - C_N y_N = -F_N, \quad y_{N-1} = \alpha_N y_N + \beta_N.$$

Отсюда получаем

$$y_N = (C_N - A_N\alpha_N)^{-1}(A_N\beta_N + F_N). \tag{15}$$

Объединяя формулы (10) - (13), (14), (15), приходим к следующему алгоритму матричной прогонки для системы (9):

$$\begin{gathered}
\alpha_{i+1} = (C_i - A_i\alpha_i)^{-1} B_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, N-1, \\
\beta_{i+1} = (C_i - A_i\alpha_i)^{-1} (A_i\beta_i + F_i), \qquad i = 1, 2, \ldots, N, \\
y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}, \qquad i = N-1,\ N-2,\ \ldots, 1, 0, \\
\alpha_1 = C_0^{-1} B_0, \qquad \beta_1 = C_0^{-1} F_0, \qquad y_N = \beta_{N+1}.
\end{gathered} \tag{16}$$

Реализация метода матричной прогонки требует запоминания всех матриц α_i, β_i, $i = 1, 2, \ldots, N-1$. А также большого числа действий. Например, при реализации формул (11) в каждой точке i приходится один раз обратить матрицу и сделать два матричных умножения порядка M, что требует $O(M^3)$ операций. Следовательно, для вычисления всех коэффициентов α_i, $i = 1, 2, \ldots, N-1$ требуется $O(M^3 N)$ действий. По этим причинам матричную прогонку редко применяют для решения задач математической физики, кроме случаев, когда матрицы A_i, B_i, C_i невысокого порядка.

Устойчивость матричной прогонки

Пусть в системе (9) y_i и F_i – векторы размерности M, A_i, B_i, C_i – квадратные матрицы порядка M. Будем рассматривать матрицы A_i, B_i, C_i как линейные операторы, действующие в M-мерном линейном пространстве H. Предположим, что в H определены нормы вектора $\|\cdot\|$ и подчиненная ей норма матрицы.

Лемма: Если для данной матрицы A существует константа $\gamma > 0$ такая, что для любого $x \in H$ выполнено неравенство $\|Ax\| \geq \gamma \|x\|$, то матрица A имеет обратную, причем $\|A^{-1}\| \leq \gamma^{-1}$.

▶ **1)** Покажем, что все собственные числа матрицы A отличны от нуля и, следовательно, существует A^{-1}. Пусть λ – любое собственное число матрицы A и z – отвечающий ему собственный вектор, т.е. $Az = \lambda z$. Из условия леммы имеем

$$\|Az\| = |\lambda| \|z\| \geq \gamma \|z\|,$$

т.е. $|\lambda| \geq \gamma > 0 \implies \lambda \neq 0$. Таким образом, матрица A имеет обратную.

2) Докажем, что выполняется оценка $\|A^{-1}\| \leq \gamma^{-1}$. Пусть $y \in H$ – любой вектор. Обозначая $x = A^{-1}y$, получим из условия леммы, что $\|A^{-1}y\| \leq \gamma^{-1}\|y\| \implies \|A^{-1}\| \leq \gamma^{-1}$. ■

Определение: Метод прогонки (16) будем называть **устойчивым**, если матрицы $C_i - A_i\alpha_i$ имеют обратные и $\|\alpha_i\| \leq 1$, $i = 1, 2, \ldots, N$.

Из устойчивости прогонки следует однозначная разрешимость системы (9). Условия $\|\alpha_i\| \leq 1$ обеспечивают численную устойчивость.

Теорема: Пусть A_i, B_i – ненулевые матрицы, $i = 1, 2, \ldots, N-1$, и пусть существуют матрицы C_i^{-1}, $i = 0, 1, \ldots, N$. Если выполнены неравенства

$$\|C_i^{-1}A_i\| + \|C_i^{-1}B_i\| \leq 1, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1, \tag{17}$$

$$\|C_0^{-1}B_0\| \leq 1, \quad \|C_N^{-1}A_N\| < 1, \tag{18}$$

то **матричная прогонка устойчива**.

▶ Докажем по индукции, что $\|\alpha_i \leq 1$ и матрицы $C_i - A_i\alpha_i$ имеют обратные, $i = 1, 2, \ldots, N$.

База индукции: неравенство $\|\alpha_1\| \leq 1$ выполнено в силу первого из условий (18).

Предположение индукции: предположим, что $\|\alpha_i\| \leq 1$ для некоторого $i \geq 1$.

Индукционный переход: докажем, что тогда $\exists\, (C_i - A_i\alpha_i)^{-1}$ и $\|\alpha_{i+1}\| \leq 1$. Так как $C_i - A_i\alpha_i = C_i(E - C_i^{-1}A_i\alpha_i)$, достаточно доказать, что $\exists\, (E - C_i^{-1}A_i\alpha_i)^{-1}$. Пусть $x \in H$ – любой вектор. Тогда

$$\|(E - C_i^{-1}A_i\alpha_i)x\| \geq \|x\| - \|C_i^{-1}A_i\alpha_i x\| \geq$$
$$\geq \|x\| - \|C_i^{-1}A_i\| \, \|\alpha_i\| \, \|x\| \geq (1 - \|C_i^{-1}A_i\|)\|x\|.$$

Отсюда и из условий (17) получим

$$\|(E - C_i^{-1}A_i\alpha_i)x\| \geq \gamma_i \|x\|, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1, \tag{19}$$

где $\gamma_i = \|C_i^{-1}B_i\| > 0$. Неравенство $\gamma_i > 0$ следует из того, что C_i^{-1} – невырожденная матрица и $B_i \neq 0$, и поэтому $C_i^{-1}B_i$ – ненулевая матрица. Из (19) и леммы следует существование $(C_i - A_i\alpha_i)^{-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1$, и оценки

$$\|(E - C_i^{-1}A_i\alpha_i)^{-1}\| \leq \|C_i^{-1}B_i\|^{-1}. \tag{20}$$

Таким образом, α_{i+1}, заданные рекуррентным соотношением (16), существуют. Перепишем выражение для α_{i+1} в виде $\alpha_{i+1} = (E - C_i^{-1}A_i\alpha_i)^{-1}(C_i^{-1}B_i)$. Тогда в силу (20) имеем оценку

$$\|\alpha_{i+1}\| \leq \|(E - C_i^{-1}A_i\alpha_i)^{-1}\|\|(C_i^{-1}B_i)\| \leq 1.$$

Итак по индукции доказано, что $\|\alpha_i\| \leq 1, \ i = 1, 2, \ldots, N$. Осталось доказать, что $\exists\ (C_N - A_N\alpha_N)^{-1}$. Поскольку $\|\alpha_N\| \leq 1$, получим, как и раннее, что

$$\|(E - C_N^{-1}A_N\alpha_N)x\| \geq (1 - \|C_N^{-1}A_N\|)\|x\|$$

для любого $x \in H$. Следовательно, неравенство (19) выполняется и при $i = N$ с константой $\gamma_N = 1 - \|C_N^{-1}$. Неравенство $\gamma_N > 0$ выполнено в силу второго из условий (18). ■

[А. А. Самарский, *Численные методы*, pages 45-47, 411—418]

dop 26. Основные понятия теории разностных схем: аппроксимация, устойчивость, сходимость.

Пусть дана исходная дифференциальная задача, которую мы запишем в виде

$$Lu(x) = f(x), \tag{1}$$

где $x \in G$, G — область m-мерного пространства, $f(x)$ — заданная функция, L — линейный дифференциальный оператор. Предполагается, что дополнительные условия (типа начальных и граничных условий) учтены оператором L и правой частью f.

Для построения разностной схемы вводится **сетка** G_h — конечное множество точек, принадлежащих G, плотность распределения которых характеризуется параметром h — **шагом сетки**. В общем случае параметр h — вектор, причем определена $|h|$ — длина вектора h. Обычно сетка G_h выбирается так, что при $|h| \to 0$ множество G_h стремится заполнить всю область G. Функция, определенная в точках сетки G, называется **сеточной функцией**.

После введения сетки G_h следует заменить в уравнении (1) дифференциальный оператор L разностным оператором L_h, правую часть $f(x)$ — сеточной функцией $\varphi_n(x)$. В результате получим систему разностных уравнений

$$L_h y_h(x) = \varphi_h(x),\ x \in G_h, \tag{2}$$

которая называется **разностной схемой** или **разностной задачей**.

Заметим, что свойство аппроксимации означает близость разностного оператора к дифференциальному. Отсюда еще не следует, вообще говоря, близость решений дифференциального и разностного уравнений. Свойство устойчивости разностной схемы является ее внутренним свойством, не зависящим от того, аппроксимирует ли эта схема какое-либо дифференциальное уравнение. Оказывается, однако, что если разностная схема аппроксимирует корректно поставленную задачу и устойчива, то ее решение сходится при $|h| \to 0$ к решению исходной дифференциальной задачи.

Будем считать, что решение $u(x)$ задачи (1) принадлежит линейному нормированному пространству $B_0, ||\cdot||_0$ —норма в B_0. Например, $B_0 = C[a,b]$, $||u||_0 = \max\limits_{x\in[a,b]} |u(x)|$. Аналогично считаем, что сеточные функции $y_h(x), \varphi_h(x)$ являются элементами линейного нормированного пространства (пространства сеточных функций) B_h с нормой $||\cdot||_h$. По существу, имеем семейство линейных нормированных пространств, зависящее от параметра h.

Чтобы иметь возможность сравнивать функции из различных пространств, вводится оператор проектирования $p_h : B_0 \to B_h$. Это, по определению, линейный оператор, сопоставляющий каждой функции из B_0 некоторую функцию из B_h. Для функции $u \in B_0$ обозначим через u_h ее проекцию на пространство B_h т. е. $u_h(x) = p_h u(x)$.

В дальнейшем будем требовать, чтобы нормы в B_h были согласованы с нормой в исходном пространстве B_0. Это означает, что для любой $u \in B_0$ выполняется условие

$$\lim_{|h|\to 0} ||p_h u||_h = ||u||_0 \tag{3}$$

Требование согласования норм обеспечивает единственность предела сеточных функций при $|h| \to 0$.

Пусть $u(x)$ — решение исходной задачи (1) и $y_h(x)$ — решение разностной задачи (2).

Определение 1. Сеточная функция $z_h(x) = y_h(x) - p_h u(x), x \in G_h$, называется *погрешностью разностной схемы* (2).

Подставим $y_h(x) = p_h u(x) + z_h(x)$ в уравнение (2). Тогда получим, что погрешность $z_h(x)$ удовлетворяет уравнению

$$L_h z_h(x) = \psi_h(x), x \in G_h \tag{4}$$

где

$$\psi_h(x) = \varphi_h(x) - L_h(p_h u(x)) \equiv \varphi_h(x) - L_h u_h(x) \tag{5}$$

Определение 2. Сеточная функция $\psi_h(x)$, определенная формулой (5), называется *погрешностью аппроксимации разностной задачи* (2) на решении исходной дифференциальной задачи (1).

Преобразуем выражение для $\psi_h(x)$. Проектируя уравнение (1) на сетку G_h, получим

$$p_h Lu(x) = p_h f(x)$$

или, учитывая принятые обозначения,

$$(Lu)_h(x) = f_h(x) \tag{6}$$

Из (5) и (6) получаем

$$\psi_h(x) = \Big[(Lu)_h(x) - L_h u_h(x)\Big] + (\varphi_h(x) - f_h(x))$$

т.е.

$$\psi_h(x) = \psi_{h,1}(x) + \psi_{h,2}(x)$$

где

$$\psi_{h,1}(x) = (Lu)_h(x) - L_h u_h(x), \quad \psi_{h,2}(x) = \varphi_h(x) - f_h(x) \tag{7}$$

Определение 3. Функции $\psi_{h,1}(x)$ и $\psi_{h,2}(x)$ называются, соответственно, **погрешностью аппроксимации дифференциального оператора** L разностным оператором L_h и **погрешностью аппроксимации правой части**.

Определение 4. Говорят, что разностная задача (2) **аппроксимирует** исходную задачу (1), если $||\psi_h||_h \to 0$ при $|h| \to 0$. Разностная схема имеет k-й **порядок аппроксимации**, если существуют постоянные $k > 0, M_1 > 0$, не зависящие от h и такие, что

$$||\psi_h||_h \leq M_1 |h|^k.$$

Аналогично определяются погрешность аппроксимации и порядок погрешности аппроксимации правых частей и дифференциального оператора.

Определение 5. Разностная схема (2) называется **корректной**, если

1) ее решение существует и единственно при любых правых частях $\varphi_h \in B_h$

2) существует постоянная $M_2 > 0$, не зависящая от h и такая, что при любых $\varphi_h \in B_h$ справедлива оценка

$$||y||_h \leq M_2 ||\varphi_h||_h \tag{8}$$

Свойство 2), означающее непрерывную зависимость, равномерную относительно h, решения разностной задачи от правой части, называется *устойчивостью* разностной схемы. Заметим, что требование 1) эквивалентно существованию оператора L_h^{-1}, обратного оператору L_h, а требование 2) эквивалентно равномерной по h ограниченности оператора L_h^{-1}.

Определение 6. Решение разностной задачи (2) **сходится** к решению дифференциальной задачи (1), если при $|h| \to 0$

$$||y_h - p_h u||_h \to 0.$$

Разностная схема имеет k-й **порядок точности**, если существуют постоянные $k > 0, M_3 > 0$, не зависящие от h и такие, что

$$||y_h - \rho_h u||_h \leq M_3 |h|^k.$$

Теорема. Пусть дифференциальная задача (1) поставлена корректно, разностная схема (2) является корректной и аппроксимирует исходную задачу (1). Тогда решение разностной задачи

(2) сходится к решению исходной задачи (1), причем порядок точности совпадает с порядком аппроксимации.

Доказательство. Доказательство следует прямо из определений. Действительно, уравнение для погрешности (4) имеет ту же структуру, что и разностная задача (2). Поэтому из требования корректности следует оценка

$$||z_h||_h \leq M_2||\psi_h||_h \tag{9}$$

Поскольку константа M_2 не зависит от h, получаем, что при $||\psi_h||_h \to 0$ норма погрешности z_h также стремится к нулю, т. е. схема сходится. Если $||\psi_h||_h \leq M_1|h|^k$, то из (9) получим

$$||z_h||_h \leq M_1 M_2 |h|^k$$

т. е. разностная схема имеет k-й порядок точности. ■

Значение приведенной выше теоремы состоит в том, что она позволяет разделить изучение сходимости на два отдельных этапа: доказательство аппроксимации и доказательство устойчивости. Обычно более сложным этапом является исследование устойчивости, которое состоит в получении оценок вида (8), называемых **априорными оценками**.

[А. А. Самарский, *Численные методы*, page 286-291]

dop 27. Разностная аппроксимация задачи Дирихле для уравнения Пуассона: постановка разностной задачи, оценка погрешности.

Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Пуассона в прямоугольнике $G = \{0 < x_1 < l_1,\ 0 < x_2 < l_2\}$:

$$\begin{cases} \Delta u(x) = -f(x), & x = (x_1, x_2) \in G, \\ u(x) = \mu(x), & x \in \partial G. \end{cases} \tag{1}$$

Введем в $\overline{G}$ равномерную разностную сетку $\Omega_h = \omega_h \cup \gamma_h$:

$$x_{ij} = (x_{1,i},\, x_{2,j});\ \ x_{1,i} = ih_1,\ x_{2,j} = jh_2;\ \ h_1 N_1 = l_1,\ h_2 N_2 = l_2;$$

$$\omega_h = \{x_{ij};\ \ i = 1, 2, \dots, N_1 - 1;\ \ j = 1, 2, \dots, N_2 - 1\};$$

$$\gamma_h = \{x_{i0},\, x_{iN_2},\, x_{0j},\, x_{N_1 j};\ \ i = 1, 2, \dots, N_1 - 1;\ \ j = 1, 2, \dots, N_2 - 1\}.$$

Здесь ω_h – множество внутренних, а γ_h – множество граничных узлов сетки. Будем пользоваться обозначениями

$$y_{\overline{x}_1 x_1,\, ij} = \frac{y_{i-1j} - 2y_{ij} + y_{i+1j}}{h_1^2}, \quad y_{\overline{x}_2 x_2,\, ij} = \frac{y_{ij-1} - 2y_{ij} + y_{ij+1}}{h_2^2},$$

$$\Delta_h y_{ij} = (y_{\overline{x}_1 x_1} + y_{\overline{x}_2 x_2})_{ij} \text{ – \textit{пятиточ. разностный оп-р Лапласа},}$$

где $y_{ij} = y(x_{ij})$ – сеточная функция, определенная на Ω_h. Сопоставим задаче (1) разностную схему:

$$\begin{cases} \Delta_h y_{ij} = -f(x_{ij}), & x_{ij} \in \omega_h, \\ y_{ij} = \mu(x_{ij}). & x_{ij} \in \gamma_h. \end{cases} \tag{2}$$

Запишем уравнение $\Delta_h y_{ij} = -f(x_{ij})$ в виде

$$\left(\frac{2}{h_1^2} + \frac{2}{h_2^2}\right) y_{ij} = \frac{y_{i-1j} + y_{i+1j}}{h_1^2} + \frac{y_{ij-1} + y_{ij+1}}{h_2^2} + f_{ij}, \quad x_{ij} \in \omega_h.$$

Введем обозначения:

- $x = x_{ij}$ – центральный узел шаблона;
- $\text{Ш}(x) = \{x,\, x_{i\pm1j},\, x_{ij\pm1}\}$ – шаблон уравнений;
- $\text{Ш}'(x) = (x) \setminus \{x\}$ – окрестность узла x;
- $A(x) = \dfrac{2}{h_1^2} + \dfrac{2}{h_2^2},\ B(x, x_{i\pm1j}) = \dfrac{1}{h_1^2}, B(x, x_{ij\pm1}) = \dfrac{1}{h_2^2}, F(x) = f(x_{ij}).$

В этих обозначениях систему (2) можно привести к **канонической форме записи**

$$\begin{cases} A(x)y(x) = \displaystyle\sum_{\xi \in \text{Ш}'(x)} B(x,\xi)y(\xi) + F(x), & x \in \omega_h, \\ A(x)y(x) = F(x), \quad x \in \gamma_h, & \textit{где } \text{Ш}'(x) = \varnothing,\ A(x) = 1,\ F(x) = \mu(x). \end{cases}$$

Замечание: выполнены *условия положительности коэффициентов*

$$A(x) > 0, \;\; B(x,\xi) > 0, \;\; D(x) = A(x) - \sum_{\xi \in Ш'(x)} B(x,\xi) \geq 0, \;\; x \in \Omega_h.$$

Принцип максимума для разностных схем

$\boxed{\textbf{Опр. 1}}$ Пусть функции $A(x)$, $B(x,\xi)$, $F(x)$ определены при всех x, $\xi \in \Omega_h$. **Разностной схемой в канонической форме записи** называется СЛАУ относительно неизвестной сеточной функции $y(x)$, определенной на Ω_h,

$$A(x)y(x) = \sum_{\xi \in Ш'(x)} B(x,\xi)y(\xi) + F(x), \quad x \in \Omega_h,$$

если каждому узлу $x \in \Omega_h$ сопоставлен один и только один шаблон и одно и только одно уравнение.

$\boxed{\textbf{Опр. 2}}$ Сетка Ω_h называется **связной**, если

$$\forall\, x', x'' \in \Omega_h : \; Ш'(x') \neq \varnothing \;\; \exists x_i \in \Omega_h, i = 1, 2, \ldots, m :$$
$$x_1 \in Ш'(x'), \; x_2 \in Ш'(x_1), \ldots, x_m \in Ш'(x_{m-1}), \; x'' \in Ш'(x_m).$$

$\boxed{\textbf{Опр. 3}}$ В узле $x \in \Omega_h$ выполнены **условия положительности коэффициентов**, если

$$A(x) > 0, \; B(x,\xi) > 0, \; \forall \xi \in Ш'(x), \; D(x) = A(x) - \sum_{\xi \in Ш'(x)} B(x,\xi) \geq 0. \tag{3}$$

Определим линейный оператор L формулами

$$Ly(x) = A(x)y(x) - \sum_{\xi \in Ш'(x)} B(x,\xi)y(\xi), \quad x \in \Omega_h.$$

Далее считаем, что $\Omega_h = \omega_h \cup \gamma_h$, где $\omega_h \neq \varnothing$ – множество внутренних узлов, γ_h – множество граничных узлов (м.б. пустым).

Теорема 1 ***(принцип максимума)*****:** Пусть функция $y(x)$ определена и не является постоянной на связной сетке Ω_h, а условия (3) выполнены при всех $x \in \omega_h$. Тогда если $Ly(x) \leq 0$ ($Ly(x) \geq 0$) для любых $x \in \omega_h$, то $y(x)$ не может принимать наибольшего положительного (наименьшего отрицательного) значения на ω_h среди всех своих значений на Ω_h.

▶ От противного. Пусть $\exists\, x' \in \omega_h : \; y(x') = \max\limits_{x \in \Omega_h} y(x) > 0$, тогда $\exists\, x'' \in \Omega_h : \; y(x'') < y(x')$, поскольку $y(x) \neq const$ на Ω_h. В силу связности Ω_h:

$$\exists\, x_i \in \omega_h, \; i = 1, \ldots, m :$$
$$x_1 \in Ш'(x'), \; x_2 \in Ш'(x_1), \ldots, x_m \in Ш'(x_{m-1}), \; x'' \in Ш'(x_m).$$

В силу условий (3) и неравенства $y(\xi) \leq y(x') = \max\limits_{x \in \Omega_h} y(x)$, $\forall \xi \in \Omega_h$

$$Ly(x') = D(x')y(x') + \sum_{\xi \in Ш'(x')} B(x',\xi)(y(x') - y(\xi)) \geq 0.$$

В то же время по условию $Ly(x') \le 0$, т.к. $x' \in \omega_h$. Отсюда вытекает, что

$$Ly(x') = 0, \; y(\xi) = y(x'), \; \forall \xi \in Ш'(x') \implies y(x_1) = y(x') = \max_{x\in\Omega_h} y(x) > 0.$$

Аналогично покажем, что $y(x_2) = y(x_1) = \max\limits_{x\in\Omega_h} y(x) > 0$, и так далее. Окончательно получим $y(x'') = y(x_m) = \ldots = y(x_1) = y(x')$, что противоречит неравенству $y(x'') < y(x')$. ■
Далее будем считать сетку Ω_h связной и выполненным условие

$$\exists\, x_0 \in \Omega_h : \; D(x_0) > 0. \tag{4}$$

Следствие 1 ***($\exists!$ решения)*:** Пусть выполнены условия (3) при всех $x \in \Omega_h$ и (4). Тогда разностная задача $Ly(x) = F(x), \; x \in \Omega_h$ имеет единственное решение.
Следствие 2 ***(теорема сравнения)*:** Пусть выполнены условия (3) при всех $x \in \Omega_h$ и (4). Тогда если $|F(x)| \le \overline{F}(x)$ для любых $x \in \Omega_h$, то $|y(x)| \le \overline{y}(x)$ для любых $x \in \Omega_h$, где $y(x)$ – решение задачи $Ly(x) = F(x), \; x \in \Omega_h$, $\overline{y}(x)$ – решение задачи $L\overline{y}(x) = \overline{F}(x), \; x \in \Omega_h$.

Устойчивость и сходимость разностной задачи (2)
По следствию 1 имеем существование и единственность решения задачи (2). Представим это решение в виде $y(x) = y_\mu(x) + y_F(x)$, где
$y_\mu(x)$ – решение задачи $Ly_\mu(x) = 0, \; x \in \omega_h; \;\; y_\mu(x) = \mu(x), \; x \in \gamma_h$,
$y_F(x)$ – решение задачи $Ly_F(x) = F(x), \; x \in \omega_h; \;\; y_F(x) = 0, \; x \in \gamma_h$.
Теорема 2 ***(устойчивость по граничным условиям)*:**

$$\|y_\mu(x)\|_{C(\Omega_h)} \le \|\mu(x)\|_{C(\gamma_h)}.$$

► Из принципа максимума следует $\max\limits_{x\in\omega_h} y(x) \le \max\limits_{x\in\gamma_h} \mu(x)$. Так как $y_\mu(x) = \mu(x), \; x \in \gamma_h$, то $\max\limits_{x\in\Omega_h} y(x) \le \max\limits_{x\in\gamma_h} \mu(x)$. ■
Теорема 3 ***(устойчивость по правой части)*:**

$$\|y_F(x)\|_{C(\Omega_h)} \le \frac{l_1^2 + l_2^2}{4} \|F(x)\|_{C(\omega_h)}.$$

► Рассмотрим функцию $\overline{y}(x) = K(l_1^2 + l_2^2 - x_1^2 - x_2^2), \; K = const, \; x = (x_1, x_2) \in \Omega_h$. Учтем, что на многочленах второй степени вторая разностная производная имеет те же значения, что и дифференциальная производная. Поэтому $L\overline{y}(x) = -\Delta_h \overline{y}(x) = -(y_{\overline{x}_1 x_1} + y_{\overline{x}_2 x_2})_{ij} = 4K$. Положим $K = \dfrac{1}{2}\|F(x)\|_{C(\omega_h)}$, тогда $\overline{y}(x)$ является решением задачи

$$L\overline{y}(x) = \overline{F}(x), \; x \in \omega_h, \quad \overline{y}(x) = \overline{\mu}(x), \; x \in \gamma_h,$$

где $\overline{F}(x) = \|F(x)\|_{C(\omega_h)}$, $\overline{\mu}(x) > 0$. По следствию 2 имеем $|y_F(x)| \le \overline{y}(x), \; \forall x \in \Omega_h$, то есть

$$\|y_F(x)\|_{C(\Omega_h)} = \max_{x\in\Omega_h} |y_F(x)| \le \max_{x\in\Omega_h} |\overline{y}(x)| \le \frac{l_1^2 + l_2^2}{4} \|F(x)\|_{C(\omega_h)}. \;\blacksquare$$

Теорема 4 ***(устойчивость разностной задачи Дирихле)*:** Для решения $y(x)$ разностной задачи (2) справедлива оценка

$$\|y(x)\|_{C(\Omega_h)} \le \|\mu(x)\|_{C(\gamma_h)} + \frac{l_1^2 + l_2^2}{4} \|F(x)\|_{C(\omega_h)}.$$

Теорема 5 ***(сходимость разностной задачи Дирихле)*****:** Пусть u – решение дифференциальной задачи (1), а y – решение разностной задачи (2). Тогда $\|y-u\|_{C(\Omega_h)} \leq M(h_1^2+h_2^2)$, где M – постоянная, не зависящая от $h_1,\ h_2$.

► Погрешность разностной задачи (2) $z_{ij} = y_{ij} - u_{ij},\ x_{ij} \in \Omega_h$ удовлетворяет уравнениям

$$\begin{cases} \Delta_h z_{ij} = -\psi_{ij}, & x_{ij} \in \omega_h, \\ z_{ij} = 0, & x_{ij} \in \gamma_h, \end{cases}$$

где $\psi_{ij} = (u_{\overline{x}_1 x_1} + u_{\overline{x}_2 x_2} + f)_{ij}$ – погрешность аппроксимации разностной задачи (2) на решении $u(x)$ дифференциальной задачи (1). Поскольку вторая разностная производная аппроксимирует вторую разностную производную достаточно гладкой функции со вторым порядком, справедливо неравенство $\|\psi\|_{C(\omega_h)} \leq \widetilde{M}(h_1^2+h_2^2)$, где постоянная $\widetilde{M}$ не зависит от $h_1,\ h_2$. В силу устойчивости имеем

$$\|z(x)\|_{C(\Omega_h)} \leq \frac{l_1^2+l_2^2}{4}\|\psi\|_{C(\omega_h)} \implies \|z(x)\|_{C(\Omega_h)} \leq M(h_1^2+h_2^2). \blacksquare$$

[М. В. Абакумов, *Лекции по численным методам математической физики*, pages 32-41]

dop 28. Двуслойные разностные схемы для уравнения теплопроводности: построение, исследование погрешности аппроксимации.

Пусть дана **первая краевая задача для уравнения теплопроводности** с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \ 0 < x < 1, \ 0 < t \leq T, \\ u(x,0) = u_0(x), \ 0 \leq x \leq 1, \\ u(0,t) = \mu_1(t), \ u(1,t) = \mu_2(t), \ 0 \leq t \leq T, \end{cases} \tag{1}$$

где $f, \ u_0, \ \mu_1, \ \mu_2$ — заданные функции. В дальнейшем будем предполагать достаточную гладкость решения $u(x,t)$ по x и t. Введем пространственно-временную сетку $\omega_{h,\tau} = \omega_h \times \omega_\tau$:

$$\omega_h = \{x_i = ih, \ i = \overline{0,N}, \ Nh = 1\},$$
$$\omega_\tau = \{t_n = n\tau, \ n = \overline{0,K}, \ K\tau = T\}$$

Определение . Слоем будем называть множество всех узлов сетки, имеющих одну и ту же временную координату.

Для функции $y(x,t)$, определенной на сетке $\omega_{h,\tau}$, обозначим

$$y_i^n = y(x_i, t_n), \ y_{t,i}^n = \frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau}, \ y_{\overline{x}x,i}^n = \frac{y_{i+1}^n - 2y_i^n + y_{i-1}^n}{h^2}$$

Зададим параметр $\sigma \in \mathbb{R}$ и сопоставим задаче (1) **разностную схему с весами**:

$$\begin{cases} y_{t,i}^n = \sigma y_{\overline{x}x,i}^{n+1} + (1-\sigma) y_{\overline{x}x,i}^n + \varphi_i^n, \ i = \overline{1,N-1}, \ n = \overline{0,K-1}, \\ y_i^0 = u_0(x_i), \ i = \overline{0,N}, \\ y_0^{n+1} = \mu_1(t_{n+1}), \ y_N^{n+1} = \mu_2(t_{n+1}), \ n = \overline{0,K-1}, \end{cases} \tag{2}$$

где φ_i^n — сеточная аппроксимация правой части $f(x,t)$.
Схема (2) содержит значения искомой функции y на двух слоях и поэтому называется **двуслойной схемой**.
При $\sigma = 0$ получим из (2) *явную схему*. При $\sigma = 1$ получим чисто *неявную схему*. Как и в случае явной схемы, решение находится по слоям, начиная с $n = 1$. Однако теперь для нахождения y_i^{n+1} по известным y_i^n требуется решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \gamma y_{i+1}^{n+1} - (1+2\gamma) y_i^{n+1} + \gamma y_{i-1}^{n+1} = -F_i^n, \ i = \overline{1,N-1}, \\ y_0^{n+1} = \mu_1(t_{n+1}), \ y_N^{n+1} = \mu_2(t_{n+1}), \ n = \overline{0,K-1}, \end{cases}$$

где $\gamma = \dfrac{\tau}{h^2}$, $F_i^n = y_i^n + \tau\varphi_i^n$, $\varphi_i^n = f(x_i, t_n) + O(\tau + h^2)$. Эту систему можно решать методом прогонки, т. к. условия устойчивости прогонки выполнены ($1+2\gamma > \gamma+\gamma$, $k_1 = k_2 = 1$).

Исследуем погрешность аппроксимации схемы (2) на решении $u(x_i, t_n)$ исходной задачи (1). Подставим $y_i^n = z_i^n + u(x_i, t_n)$ в (2):

$$\begin{cases} z_{t,i}^n = \sigma z_{\overline{x}x,i}^{n+1} + (1-\sigma) z_{\overline{x}x,i}^n + \psi_i^n, \ i = \overline{1, N-1}, \ n = \overline{0, K-1}, \\ z_i^0 = 0, \ i = \overline{0, N}, \\ z_0^{n+1} = z_N^{n+1} = 0, \ n = \overline{0, K-1}, \end{cases}$$

где $\psi_i^n = \sigma u_{\overline{x}x,i}^{n+1} + (1-\sigma) u_{\overline{x}x,i}^n - u_{t,i} + \varphi_i^n$ — погрешность аппроксимации схемы (2) на решении задачи (1).

Так как

$$u_{t,i}^n = \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_{n+\frac{1}{2}}) + O(\tau^2), \ u_{\overline{x}x,i} = u''(x_i) + \frac{h^2}{12} u^{(4)}(x_i) + O(h^4),$$

то

$$\psi_i^n = \sigma \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_{n+1}) + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i, t_{n+1}) \right) +$$
$$+(1-\sigma) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_n) + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i, t_n) \right) - \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_{n+\frac{1}{2}}) + \varphi_i^n +$$
$$+O(\tau^2 + h^4)$$

Проведем разложение в точке $a = (x_i, t_{n+\frac{1}{2}})$:

$$\psi_i^n = \sigma \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right) \Big|_{(x,t)=a} +$$
$$+(1-\sigma) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\tau}{2} \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right) \Big|_{(x,t)=a} -$$
$$-\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_{n+\frac{1}{2}}) + \varphi_i^n + O(\tau^2 + h^4) =$$
$$= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} + \varphi_i^n + (\sigma - \frac{1}{2}) \tau \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right) \Big|_{(x,t)=a} +$$
$$+O(\tau^2 + h^4)$$

Дифференцируя уравнение в (1) дважды по x, получаем:

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t)$$

И подставляя в разложение:

$$\psi_i^n = \left(\left((\sigma - \frac{1}{2}) \tau + \frac{h^2}{12} \right) \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} - f - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) \Big|_{(x,t)=a} + \varphi_i^n +$$
$$+O(\tau^2 + h^4)$$

В итоге:

1. При $\sigma = \dfrac{1}{2} - \dfrac{h^2}{12\tau}$ и $\varphi_i^n = \left(f + \dfrac{h^2}{12}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\Big|_{(x,t)=a} + O(\tau^2 + h^4)$ схема (2) имеет 2-ой порядок аппрокс. по τ и 4-ый по h,

2. При $\sigma = \dfrac{1}{2}$ и $\varphi_i^n = f(x_i, t_{n+\frac{1}{2}}) + O(\tau^2 + h^4)$ схема имеет 2-ой порядок аппрокс. по τ и h.

При остальных значениях σ и при $\varphi_i^n = f(x_i, t_{n+1}) + O(\tau + h^2)$ схема (2) имеет первый порядок аппрокс. по τ и второй по h. В частности, явная схема и чисто неявная имеют порядок $O(\tau + h^2)$.

[М. В. Абакумов, *Лекции по численным методам математической физики*, с. 41—42]
[А. А. Самарский, *Численные методы*, с. 272—273, 276—279]
[2022, *Расписанные билеты к ГОСам*, с. 259—261]

dop 29. Исследование устойчивости по начальным данным схемы с весами для уравнения теплопроводности.

Обозначим пространство $H_h = y(x)$, $x \in \Omega_h$ — пространства функций заданныых на разностной сетке Ω_h, размерность которых зависит от шагов сетки h.

Определение. Пусть заданы линейные операторы $B_1, B_2 : H_h \to H_h$ и функции $\phi_n, y_0 \in H_h$. *Двуслойной разностной схемой* называется семейство операторно-разностных уравнений

$$B_1 y_{n+1} + B_2 y_n = \phi_n, \quad n = 0, 1, \ldots, K-1.$$

Определение. *Каноническим видом* двуслойной схемы называется ее запись в форме

$$B\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + Ay_n = \phi_n, \quad n = 0, 1, \ldots, K-1. \tag{1}$$

Далее будем считать, что в канонической форме (1) для всех h, τ, n у оператора $B = B_{h,\tau}(t_n)$ существует обратный оператор B^{-1}, а также в пространстве H_h заданы нормы $||\cdot||_{1_h}$ и $||\cdot||_{2_h}$.

Определение. Разностная схема (1) называется *устойчивой*, если существуют константы $M_1, M_2 > 0$, не зависящие от h, τ, n, такие, что при любых правых частях $\phi_{h,\tau}(t_n) \in H_h$ и любых начальных данных $y_0 \in H_h$ для решения уравнения (1) выполняется оценка

$$||y_n||_{1_h} \leq M_1||y_0||_{1_h} + M_2 \max_{0\leq j\leq n-1} |\phi_j||_{2_h}, \quad n = 1, 2, \ldots, K. \tag{2}$$

Рассмотрим также однородное уравнение и уравнение с нулевыми начальными данными:

$$B\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + Ay_n = 0, \quad n = 0, 1, \ldots, K-1, \ y_0 \in H_h, \tag{$1'$}$$

$$B\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + Ay_n = \phi_n, \quad n = 0, 1, \ldots, K-1, \ y_0 = 0. \tag{$1''$}$$

Определение. Разностная схема (1) называется *устойчивой по начальным данным*, если существует постоянная $M_1 > 0$, не зависящая от h, τ, n, такая, что при любых начальных данных $y_0 \in H_h$ для решения уравнения (1') выполняется оценка

$$||y_n||_{1_h} \leq M_1||y_0||_{1_h}, \quad n = 1, 2, \ldots, K.$$

Определение. Разностная схема (1) называется *устойчивой по правой части*, если существует постоянная $M_2 > 0$, не зависящая от h, τ, n, такая, что при любых правых частях $\phi_{h,\tau}(t_n) \in H_h$ для решения уравнения (1") выполняется оценка

$$||y_n||_{1_h} \leq M_2 \max_{0\leq j\leq n-1} |\phi_j||_{2_h}, \quad n = 1, 2, \ldots, K.$$

Определение. Разностная схема (1) называется *равномерно устойчивой по начальным данным*, если существует постоянная $\rho > 0$ и постоянная $M_1 > 0$, не зависящая от h, τ, n, такие, что при любых начальных данных $y_0 \in H_h$ для решения уравнения (1') выполняется оценка

$$||y_{n+1}||_{1_h} \leq \rho||y_n||_{1_h}, \quad n = 1, 2, \ldots, K,$$

причем $\rho^n \leq M_1$.

Теорема. Пусть схема (1) равномерно устойчива по начальным данным в норме $||\cdot||_{1_h}$ и $0 \leq n\tau \leq T$. Тогда схема (1) устойчива и по правой части, причем для ее решения выполнена оценка устойчивости

$$||y_n||_{1_h} \leq M_1||y_0||_{1_h} + M_2 \max_{0\leq j\leq n-1} |\phi_j||_{2_h},$$

в которой $||\phi_j||_{2_h} = ||B_j^{-1}\phi_j||_{1_h}$ и $M_2 = M_1 T$.
Следствие. Для устойчивости двуслойной схемы достаточно равномерной устойчивости схемы по начальным данным.
Теорема об устойчивости по начальным данным
Пусть в H_h введены скалярное произведение (y, v), норма $||y|| = \sqrt{(y, y)}$ и энергетическая норма $||y||_A = \sqrt{(Ay, y)}$, если $A^* = A > 0$.
Теорема. Пусть в схеме (1) оператор A является самосопряженным, положительно определенным и не зависит от n. Тогда при выполнении операторного неравенства $B \geq 0,5\tau A$ схема (1) равномерно устойчива по начальным данным и для решения однородного уравнения (1') справедлива оценка

$$||y_{n+1}||_A \leq ||y_n||_A, \quad n = 0, 1, \ldots, K-1.$$

Уравнение теплопроводности
Первая краевая задача для одномерного уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, 0 < t \leq T;$$
$$u(0,t) = \mu_1(t), u(l,t) = \mu_2(t); u(x,0) = u_0(x)$$

Используем разностную сетку

$$\Omega_h = \{x_i = ih;\ i = 0, 1, \ldots, N;\ hN = l\};$$
$$\omega_\tau = \{t_n = n\tau;\ n = 0, 1, \ldots, K;\ \tau K = T\}$$

Сопоставим исходной задаче разностную схему

$$\begin{aligned} &\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} = \sigma y_{\bar{x}x,i}^{n+1} + (1-\sigma) y_{\bar{x}x,i}^n, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1;\ n = \overline{0, K-1}; \\ &y_0^{n+1} = \mu_1(t_{n+1}),\ y_N^{n+1} = \mu_2(t_{n+1});\ y_i^0 = u_0(x_i) \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь σ — числовой параметр, называемый весом схемы.
Введем пространство $H_h = \{y(x_i),\, x_i \in \Omega_h, y_0 = y_N = 0\}$ со скалярным произведением $(y, v) = \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i h$ и оператор

$$A : H_h \to H_h;\ (Ay)_i = -y_{\bar{x}x,i},\ i = 1, 2, \ldots, N-1;\ y_0 = y_N = 0$$

Запишем схему с весами для уравнения теплопроводности в каноническом виде:

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + \sigma A y_{n+1} + (1-\sigma) A y_n = 0, \text{ т.е.}$$
$$B\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + A y_n = \phi_n, \text{ где } B = E + \sigma\tau A,\ \phi_n = 0.$$

Поскольку $A^* = A > 0$ и не зависит от n, для устойчивости схемы достаточно выполнения неравенства

$$B = E + \sigma\tau A \geq 0,5\tau A \Leftrightarrow (0,5 - \sigma)\tau(Ay, y) \leq ||y||^2 \forall y \in H_h.$$

Учитывая оценку спектра $(Ay, y) < \dfrac{4}{h^2}||y||^2$, получим достаточное условие устойчивости схемы

$$\sigma \geq \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4\tau}$$

Это условие является также необходимым условием устойчивости схемы с весами.

[М. В. Абакумов, *Лекции по численным методам математической физики*, page 41, 117—122]

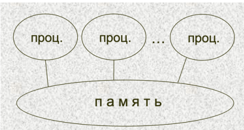
dop 30. Виды параллельной обработки данных. Компьютеры с общей и распределенной памятью. Производительность вычислительных систем, методы оценки и измерения.

Виды параллельной обработки данных:

- Параллельная обработка
- Конвейерная обработка

При параллельной обработке несколько независимых устройств выполняют какую-то задачу (увеличение производительности достигается за счет количества независимо работающих устройств).
При конвейерной обработке процесс разбивается на некоторые этапы, которые выполняются последовательно. Выйгрыш в производительности достигается за счет совмещения операций, которые ранее могли быть разнесены во времени. Для конвейерной обрабоки существует некоторая задержка для того, чтобы заполнить все этапы, но после заполнения всех этапов происходит ускорение обработки. $T = L + (N - 1)$, где T - общее время обработки, L - число ступеней конвейера, N - размер входных данных.

Компьютеры с общей памятью (SMP - Shared Memory Processors / Symmetric MultiProcessor), в SMP-компьютерах все, кроме процессоров, в одном экземпляре: образ ОС, память, подсистема ввода-вывода.
Плюс - относительная простота параллельного программирования Минус - сложность увеличения числа процессоров (роста производительности)



Компьютеры с распределенной памятью состоят из вычислительных узлов, каждый из которых является полноценным компьютером со своей памятью, ОС, устройствами ввода-вывода и т.п., взаимодействующих друг с другом через коммуникационную среду.
Плюс - относительная простота увеличения числа процессоров (роста производительности)
Минус - сложность параллельного программирования.

Основные показатели эффективности:

- p - число процессоров
- T_1 - время работы программы на одном процессоре
- T_p - время работы программы на p процессорах
- $S = T_1/T_p$ - ускорение (speedup) выполнения распараллеленной программы на p процессорах (если $S = p$ - линейное ускорение, если $S > p$ - суперлинейное ускорение)

• Эффективность реализации - R_{max}/R_{peak} - отношение реальной производительности к пиковой производительности (тк пиковая производительность на практике недостижима, то эффективность реализации всегда меньше 1)

• Эффективность распараллеливания $E = S/p$ - определяет среднюю долю времени выполнения параллельного алгоритма, в течение которого процессоры реально используются для решения задачи

• Стоимость вычислений - $C = pT_p$

• $T_0 = pT_p - T_1$ - суммарные накладные расходы

• Масштабируемость (scalability) - способность системы увеличивать свою производительность при добавлении ресурсов. Вертикальная масштабируемость - замена платформы, в которой функционирует система на новую, с большей производительностью. Горизонтальная масштабируемость - увеличение производительности за счет добавления дополнительных программных или аппаратных средств

• W - вычислительная сложность задачи (кол-во основных вычислительных шагов лучшего последовательного алгоритма, необходимого для решения задачи на одном процессоре)

• Сильная масштабируемость - зависимость производительности R от количества процессоров при фиксированной вычислительной сложности ($W = const$)

• Масштабируемость вширь (wide scaling) - зависимость производительности R от вычислительной сложности задачи W при фиксированном числе процессоров ($p = const$)

• Слабая масштабируемость (weak scaling) — зависимость производительности R от количества процессоров p при фиксированной вычислительной сложности задачи в пересчёте на один процессор ($W/p = const$).

[Воеводин, *Лекции по СКиПОДам 2020* слайды 121-128, 191-193, 158-183]

dop 31. Закон Амдала, его следствия. Этапы решения задач на параллельных вычислительных системах. Граф алгоритма, критический путь графа алгоритм, ярусно-параллельная форма графа алгоритма.

- p – число процессоров (ядер, вычислительных узлов)
- T_1 – время работы программы на одном процессоре
- T_p – время работы программы на системе из p процессоров
- $S = \dfrac{T_1}{T_p}$ – это ускорение работы программы при переходе с одного процессора на систему из p процессоров (во сколько раз программа начинает работать быстрее)
- f – доля последовательных операций в исходной программе ($0 \leq f \leq 1$).

Закон Амдала
Ускорение работы программы при переходе с одного процессора на систему из p процессоров можно оценить следующим образом:

$$S \leq \frac{1}{f + \frac{1-f}{p}}$$

Следствия:
1) $S \approx \dfrac{1}{f}$ (при большом числе процессоров)
На практике. Если доля последовательных операций в некоторой программе равна 0.1, значит вне зависимости от числа используемых процессоров ускорение не превысит 10.

2) В теории. Для того чтобы ускорить программу в q раз, необходимо ускорить не менее, чем в q раз не менее, чем $(1 - \dfrac{1}{q})$-ю часть программы. На практике. Нужно ускорить работу программы в 100 раз. Значит необходимо ускорить не менее, чем в 100 раз не менее, чем 99% этой программы.

Граф управления. Каждому оператору исходной программы ставится соответствие вершина графа, дугами в этом графе выступают переходы в состояния, описанные вершинами графа.

Информационный граф. Среди операторов принимаются во внимание только преобразователи, а в качестве отношения между ними брать отношение информационной зависимости. Сначала строится граф, в котором вершины соответствуют операторы-преобразователи. Две вершины соединяются информационной дугой, если между ними какими-нибудь срабатываниями соответствующих операторов теоретически возможна информационная связь. Информационный граф не зависит от входных данных. Информационная зависимость определяет критерий эквивалентности преобразований программ. Информационная независимость определяет ресурс параллелизма программы.

Ярусно-параллельная форма графа алгоритма. Начальная вершина каждой дуги расположена на ярусе с номером меньшим, чем номер яруса конечной вершины. Между вершинами, расположенными на одном ярусе, не может быть дуг.

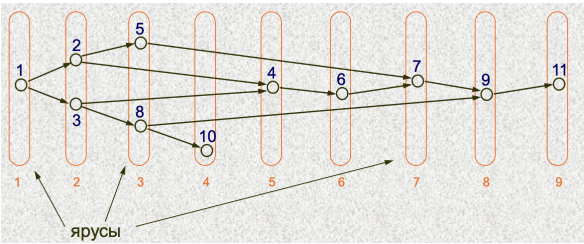
- Высота ЯПФ – это число ярусов.

- Ширина яруса – число вершин, расположенных на ярусе.

- Ширина ЯПФ – это максимальная ширина ярусов в ЯПФ.

- Высота ярусно-параллельной формы - это сложность параллельной реализации алгоритма или программы.

Ярусно-параллельная форма называется **канонической**, если у любой вершины, кроме вершин первого яруса, есть входная дуга, идущая с предыдущего яруса.
Высота канонической ЯПФ = длине критического пути + 1. Критический путь в ориентированном ациклическом графе – это путь максимальной длины.



[Воеводин, *Лекции по СКиПОДам 2020* 134-137, 709-714]

Список литературы

2022, Выпускники. *Расписанные билеты к ГОСам*. URL: https://drive.google.com/file/d/19_vbKDGYFSqAHjxaUj08NeD8tGWsOjWQ/view?usp=sharing.

А. А. Самарский, А. В. Гулин. *Численные методы*. 1989. URL: https://drive.google.com/file/d/1DHFfAf-yVPVlzz5cX5o6hIavi3jn5iaU/view?usp=sharing.

А. Б. Антоневич, Я. В. Радыно. *Функциональный анализ и интегральные уравнения*. URL: https : / / docviewer . yandex . ru / view / 303319572 / ?page = 311 & * = a4o1B0xFGagyFN1QBRE3E4IFk797InVybCI6InlhLWRpc2stcHVibGljOi8vVGZmYllIVXBzdHFpYlBpR0FxUCtBVl
2F0L7RgtC%2B0LovWzUg0YHQtdC8Ll0g0KTRg9C90LrRhtC40L7QvdCw0LvRjNC90YvQuSDQsNC90LDQu9C40Lcv0J
2F0L7QtNGA0L7QsdC90LXQtSDQuCDQv9GA0L7RidC1LCDQvdC%2BINC60YDRg9C%2F0L3Ri9C1INC%2B0L%2FQtdGH0LDRgtC60LgpLmRqdnUiLCJ0aXRsZSI6IlvQo9GH0LXQsdC90LjQul0gKDIwMDYpINCQ0L3RgtC%2B0L3QtdCy0LjRhywg0KDQsNC00YvQvdC%2BIC0g0KTQkCAoOL%2FQvtC00YDQvtCx0L3QtdC1INC4INC%2F0YDQvtGJ0LUsINC90L4g0LrRgNGD0L%2FQvdGL0LUg0L7Qv9C10YfQsNGC0LrQuCkuZGp2dSIsIm5vaWZyYW1lIj

А. М. Денисов, А. В. Разгулин. *Обыкновенные дифференциальные уравнения, часть 1*. 2009. URL: https://drive.google.com/file/d/1piqpfimj19np-256y8QIstlzqBJdG-Cs/view?usp=sharing.

— *Обыкновенные дифференциальные уравнения, часть 2*. 2009. URL: https : / / docs . yandex . ru / docs / view ? url = ya - disk - public % 3A % 2F % 2FTffbYHUpstqibPiGAqP % 2BAVXidTciqaV0g5nRVMD0x0Tx1qEMpaQcg2UvudcAoNB7q % 2FJ6bpmRy0JonT3VoXnDag % 3D % 3D % 3A % 2F2 % 20 % D0 % BA % D1 % 83 % D1 % 80 % D1 % 81 % 2F % D0 % 94 % D0 % B8 % D1 % 84 % D1 % 84 % D1 % 83 % D1 % 80 % D1 % 8B % 2F1 . %20 % D0 % 9A % D0 % BD % D0 % B8 % D0 % B3 % D0 % B8 % 2F % 5B % D1 % 83 % D1 % 87 % D0 % B5 % D0 % B1 % D0 % BD % D0 % B8 % D0 % BA % 20 % D1 % 87 . 2 % 5D % 20 % D0 % 94 % D0 % B5 % D0 % BD % D0 % B8 % D1 % 81 % D0 % BE % D0 % B2 % 20 % D0 % A0 % D0 % B0 % D0 % B7 % D0 % B3 % D1 % 83 % D0 % BB % D0 % B8 % D0 % BD % 20 % D0 % 9E % D0 % 94 % D0 % A3 % 20 - %202.pdf&name=%5B%D1%83%D1%87%D0%B5%D0%B1%D0%BD%D0%B8%D0%BA%20%D1%87.2%5D%20%D0%94%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%81%D0%BE%D0%B2%20%D0%A0%D0%B0%D0%B7%D0%B3%D1%83%D0%BB%D0%B8%D0%BD%20%D0%9E%D0%94%D0%A3%20-%202.pdf&nosw=1.

А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. *Уравнения матемтической физики*. 1977. URL: https://drive.google.com/drive/folders/12FcU7c2V-V7CsciHe577duMdVKoOweoN.

В. А. Ильин В. А. Садовничий, Б. Х. Сендов. *Математический анализ, продолжение курса*. 1987. URL: https : / / docs . yandex . ru / docs / view ? url = ya - disk - public%3A%2F%2FTffbYHUpstqibPiGAqP%2BAVXidTciqaV0g5nRVMD0x0Tx1qEMpaQcg2UvudcAoNB7q%2FJ6bpmRy0JonT3VoXnDag%3D%3D%3A%2F2%20%D0%BA%D1%83%D1%80%D1%81%2F%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B0%D0%BD%20%D0%B8%20%D0%A2%D0%A4%D0%9A%D0%9F%2F1.%20%D0%9A%D0%BD%D0%B8%D0%B3%D0%B8%2F1.%20%D0%94%D0%B5%D0%B9%D1%81%D1%82%D0%B2%D0%B8%D1%82%D0%B5%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D1%8B%D0%B9%20%D0%B0%D0%BD%D0%B0%D0%BB%D0%B8%D0%B7%2F%5B%D1%81%D0%B8%D0%BD%D0%B8%D0%B9%5D%20%D0%98%D0%BB%D1%8C%D0%B8%D0%BD%2C%20%D0%A1%D0%B0%D0%B4%D0%BE%D0%B2%D0%BD%D0%B8%D1%87%D0%B8%D0%B9%2C%20%D0%A1%D0%B5%D0%BD%D0%B4%D0%BE%D0%B2%20(%D1%87.2)%2F%D0%98%D0%BB%D1%8C%D0%B8%D0%BD%2C%20%D0%A1%D0%B0%D0%B4%D0%BE%D0%B2%

D0%BD%D0%B8%D1%87%D0%B8%D0%B9%2C%20%D0%A1%D0%B5%D0%BD%D0%B4%D0%BE%D0%B2%20-%20%D0%9C%D0%90.pdf&name=%D0%98%D0%BB%D1%8C%D0%B8%D0%BD%2C%20%D0%A1%D0%B0%D0%B4%D0%BE%D0%B2%D0%BD%D0%B8%D1%87%D0%B8%D0%B9%2C%20%D0%A1%D0%B5%D0%BD%D0%B4%D0%BE%D0%B2%20-%20%D0%9C%D0%90.pdf&nosw=1.

В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. *Основы математического анализа: Часть 1*. 2005. URL: https://docs.yandex.ru/docs/view?url=ya-disk-public%3A%2F%2FTffbYHUpstqibPiGAqP%2BAVXidTciqaV0g5nRVMD0x0Tx1qEMpaQcg2UvudcAoNB7q%2FJ6bpmRy0JonT3VoXnDag%3D%3D%3A%2F1%20%D0%BA%D1%83%D1%80%D1%81%2F%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B9%20%D0%B0%D0%BD%D0%B0%D0%BB%D0%B8%D0%B7%2F1.%20%D0%9A%D0%BD%D0%B8%D0%B3%D0%B8%2F%D0%94%D0%BE%D0%BF%D0%BE%D0%BB%D0%BD%D0%B8%D1%82%D0%B5%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D1%8B%D0%B5%2F%D0%9E%D1%81%D0%BD%D0%BE%D0%B2%D1%8B%20%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%BE%D0%B3%D0%BE%20%D0%B0%D0%BD%D0%B0%D0%BB%D0%B8%D0%B7%D0%B0.%20%D0%98%D0%BB%D1%8C%D0%B8%D0%BD%20%D0%9F%D0%BE%D0%B7%D0%BD%D1%8F%D0%BA%20(%D1%87%D0%B0%D1%81%D1%82%D1%8C1).pdf&name=%D0%9E%D1%81%D0%BD%D0%BE%D0%B2%D1%8B%20%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%BE%D0%B3%D0%BE%20%D0%B0%D0%BD%D0%B0%D0%BB%D0%B8%D0%B7%D0%B0.%20%D0%98%D0%BB%D1%8C%D0%B8%D0%BD%20%D0%9F%D0%BE%D0%B7%D0%BD%D1%8F%D0%BA%20(%D1%87%D0%B0%D1%81%D1%82%D1%8C1).pdf.

В. Н. Пильщиков В. Г. Абрамов, А. А. Вылиток. *Машина Тьюринга и алгоритмы Маркова. Решение задач. Учебно-методическое пособие.* 2016. URL: https://docs.yandex.ru/docs/view?url=ya-disk-public%3A%2F%2FTffbYHUpstqibPiGAqP%2BAVXidTciqaV0g5nRVMD0x0Tx1qEMpaQcg2UvudcAoNB7q%2FJ6bpmRy0JonT3VoXnDag%3D%3D%3A%2F1%20%D0%BA%D1%83%D1%80%D1%81%2F%5B1%20%D0%BF%D0%BE%D1%82%D0%BE%D0%BA%2C%201%20%D1%81%D0%B5%D0%BC.%5D%20%D0%90%D0%BB%D0%B3%D0%BE%D1%80%D0%B8%D1%82%D0%BC%D1%8B%20%D0%B8%20%D0%90%D0%AF%2F1.%20%D0%9A%D0%BD%D0%B8%D0%B3%D0%B8%2F%D0%9F%D0%B8%D0%BB%D1%8C%D1%89%D0%B8%D0%BA%D0%BE%D0%B2%20-%20%D0%9C%D0%B0%D1%88%D0%B8%D0%BD%D0%B0%20%D0%A2%D1%8C%D1%8E%D1%80%D0%B8%D0%BD%D0%B3%D0%B0%20%D0%B8%20%D0%B0%D0%BB%D0%B3%D0%BE%D1%80%D0%B8%D1%82%D0%BC%D1%8B%20%D0%9C%D0%B0%D1%80%D0%BA%D0%BE%D0%B2%D0%B0(2016).pdf&name=%D0%9F%D0%B8%D0%BB%D1%8C%D1%89%D0%B8%D0%BA%D0%BE%D0%B2%20-%20%D0%9C%D0%B0%D1%88%D0%B8%D0%BD%D0%B0%20%D0%A2%D1%8C%D1%8E%D1%80%D0%B8%D0%BD%D0%B3%D0%B0%20%D0%B8%20%D0%B0%D0%BB%D0%B3%D0%BE%D1%80%D0%B8%D1%82%D0%BC%D1%8B%20%D0%9C%D0%B0%D1%80%D0%BA%D0%BE%D0%B2%D0%B0(2016).pdf&nosw=1.

Воеводин, В. *Лекции по СКиПОДам 2020.* URL: https://docs.yandex.ru/docs/view?url=ya-disk-public%3A%2F%2FTffbYHUpstqibPiGAqP%2BAVXidTciqaV0g5nRVMD0x0Tx1qEMpaQcg2UvudcAoNB7q%2FJ6bpmRy0JonT3VoXnDag%3D%3D%3A%2F4%20%D0%BA%D1%83%D1%80%D1%81%2F2%20%D0%BF%D0%BE%D1%82%D0%BE%D0%BA%2F%D0%9F%D0%BE%D1%82%D0%BE%D1%87%D0%BD%D1%8B%D0%B5%2F7%20%D1%81%D0%B5%D0%BC%D0%B5%D1%81%D1%82%D1%80%2F%D0%A1%D0%9A%D0%B8%D0%9F%D0%9E%D0%94%D1%8B%2F%D0%9B%D0%B5%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B8%2F%D0%A1%D0%BB%D0%B0%D0%B9%D0%B4%D1%8B%2Fall_slides.pdf&name=all_slides.pdf&nosw=1.

Г. Д. Ким, В. А. Ильин. *Линейная алгебра и аналитическая геометрия.* 2007. URL: https://docs.yandex.ru/docs/view?url=ya-disk-public%3A%2F%2FTffbYHUpstqibPiGAqP%2BAVXidTciqaV0g5nRVMD0x0Tx1qEMpaQcg2UvudcAoNB7q%2FJ6bpmRy0JonT3VoXnDag%3D%3D%3A%2F1%20%D0%BA%D1%83%D1%80%D1%81%2F%D0%90%D0%BB%D0%B3%D0%B5%D0%B1%D1%80%D0%B0%20%D0%B8%20%D0%B3%D0%B5%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%8F%20(%D0%9B%D0%B8%D0%BD%D0%B0%D0%BB)%2F1.%20%D0%9A%D0%BD%D0%B8%D0%B3%D0%B8%2F%5B%D0%A3%D1%87%D0%B5%D0%B1%D0%BD%D0%B8%D0%BA%5D%20%D0%9A%D0%B8%D0%BC%2C%20%D0%98%D0%BB%D1%8C%D0%B8%D0%BD%20(%D0%9B%D0%B8%D0%BD%D0%B5%D0%B9%D0%BD%D0%B0%D1%8F%20%D0%B0%D0%BB%D0%B3%D0%B5%D0%B1%D1%80%D0%B0%20%D0%B8%20%D0%B0%D0%BD%D0%B0%D0%BB%D0%B8%D1%82%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B0%D1%8F%20%D0%B3%D0%B5%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D1%82%D1%80%D0%B8%

D1%8F).pdf&name=%5B%D0%A3%D1%87%D0%B5%D0%B1%D0%BD%D0%B8%D0%BA%5D%20%D0%9A%D0%B8%D0%BC%2C%20%D0%98%D0%BB%D1%8C%D0%B8%D0%BD%20(%D0%9B%D0%B8%D0%BD%D0%B5%D0%B9%D0%BD%D0%B0%D1%8F%20%D0%B0%D0%BB%D0%B3%D0%B5%D0%B1%D1%80%D0%B0%20%D0%B8%20%D0%B0%D0%BD%D0%B0%D0%BB%D0%B8%D1%82%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B0%D1%8F%20%D0%B3%D0%B5%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%8F).pdf&nosw=1.

И. В. Садовничая, Т. Н. Фоменко. *Математический анализ. Функции многих переменных: теория и задачи*. 2008. URL: https://docs.yandex.ru/docs/view?url=ya-disk-public%3A%2F%2FTffbYHUpstqibPiGAqP%2BAVXidTciqaV0g5nRVMD0x0Tx1qEMpaQcg2UvudcAoNB7q%2FJ6bpmRy0JonT3VoXnDag%3D%3D%3A%2F1%20%D0%BA%D1%83%D1%80%D1%81%2F%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B9%20%D0%B0%D0%BD%D0%B0%D0%BB%D0%B8%D0%B7%2F1.%20%D0%9A%D0%BD%D0%B8%D0%B3%D0%B8%2F%5B%D0%9C%D0%B5%D1%82%D0%BE%D0%B4%D0%B8%D1%87%D0%BA%D0%B8%5D%20%D0%A1%D0%B0%D0%B4%D0%BE%D0%B2%D0%BD%D0%B8%D1%87%D0%B0%D1%8F%20%D0%A5%D0%BE%D1%80%D0%BE%D1%88%D0%B8%D0%BB%D0%BE%D0%B2%D0%B0%20%D0%A4%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D0%BD%D0%BA%D0%BE%2F6.%20%D0%A1%D0%B0%D0%B4%D0%BE%D0%B2%D0%BD%D0%B8%D1%87%D0%B0%D1%8F.%20%D0%A4%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B8%20%D0%BC%D0%BD%D0%BE%D0%B3%D0%B8%D1%85%20%D0%BF%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%BC%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D1%8B%D1%85%20(2008).pdf&name=6.%20%D0%A1%D0%B0%D0%B4%D0%BE%D0%B2%D0%BD%D0%B8%D1%87%D0%B0%D1%8F.%20%D0%A4%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B8%20%D0%BC%D0%BD%D0%BE%D0%B3%D0%B8%D1%85%20%D0%BF%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%BC%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D1%8B%D1%85%20(2008).pdf&nosw=1.

И. С. Рожков, А. С. Рыгин. *Почти наверное достаточное учебное пособие. Теория вероятностей и математическая статистика. Статбук*. 2020. URL: https://mandaloreultimate.github.io/stat-book/main.pdf.

И.В. Садовничая, Е.В. Хорошилова. *Определенный интеграл*. URL: https://docs.yandex.ru/docs/view?url=ya-disk-public%3A%2F%2FTffbYHUpstqibPiGAqP%2BAVXidTciqaV0g5nRVMD0x0Tx1qEMpaQcg2UvudcAoNB7q%2FJ6bpmRy0JonT3VoXnDag%3D%3D%3A%2F1%20%D0%BA%D1%83%D1%80%D1%81%2F%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B9%20%D0%B0%D0%BD%D0%B0%D0%BB%D0%B8%D0%B7%2F1.%20%D0%9A%D0%BD%D0%B8%D0%B3%D0%B8%2F%5B%D0%9C%D0%B5%D1%82%D0%BE%D0%B4%D0%B8%D1%87%D0%BA%D0%B8%5D%20%D0%A1%D0%B0%D0%B4%D0%BE%D0%B2%D0%BD%D0%B8%D1%87%D0%B0%D1%8F%20%D0%A5%D0%BE%D1%80%D0%BE%D1%88%D0%B8%D0%BB%D0%BE%D0%B2%D0%B0%20%D0%A4%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D0%BD%D0%BA%D0%BE%2F5.%20%D0%A1%D0%B0%D0%B4%D0%BE%D0%B2%D0%BD%D0%B8%D1%87%D0%B0%D1%8F.%20%D0%9E%D0%BF%D1%80%D0%B5%D0%B4%D0%B5%D0%BB%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D1%8B%D0%B9%20%D0%B8%D0%BD%D1%82%D0%B5%D0%B3%D1%80%D0%B0%D0%BB.pdf&name=5.%20%D0%A1%D0%B0%D0%B4%D0%BE%D0%B2%D0%BD%D0%B8%D1%87%D0%B0%D1%8F.%20%D0%9E%D0%BF%D1%80%D0%B5%D0%B4%D0%B5%D0%BB%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D1%8B%D0%B9%20%D0%B8%D0%BD%D1%82%D0%B5%D0%B3%D1%80%D0%B0%D0%BB.pdf&nosw=1.

И.С. Ломов, А.А. Никитин. *Рукописные лекции по математическому анализу*. 2019.

Ионкин, Н.И. *Лекции по курсу Численные методы*. 2015. URL: https://docs.yandex.ru/docs/view?url=ya-disk-public%3A%2F%2FTffbYHUpstqibPiGAqP%2BAVXidTciqaV0g5nRVMD0x0Tx1qEMpaQcg2UvudcAoNB7q%2FJ6bpmRy0JonT3VoXnDag%3D%3D%3A%2F4%20%D0%BA%D1%83%D1%80%D1%81%2F3%20%D0%BF%D0%BE%D1%82%D0%BE%D0%BA%2F%D0%A7%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D1%8B%D0%B5%20%D0%BC%D0%B5%D1%82%D0%BE%D0%B4%D1%8B%2F%D0%BC%D0%B5%D1%82%D0%BE%D0%B4%D0%B8%D1%87%D0%BA%D0%B0%2C%20%D0%BB%D0%B5%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B8%2F%D0%A7%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D1%8B%D0%B5%20%D0%BC%D0%B5%D1%82%D0%BE%D0%B4%D1%8B.%20%D0%98%D0%BE%D0%BD%D0%BA%D0%B8%D0%BD%20(%D0%BC%D0%B5%D1%82%D0%BE%D0%B4%D0%B8%D1%87%D0%BA%D0%B0)%20(2015).pdf&name=%D0%A7%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D1%8B%D0%B5%20%D0%BC%D0%B5%D1%82%D0%BE%D0%B4%D1%8B.%20%D0%98%D0%BE%D0%BD%D0%BA%D0%B8%D0%BD%20(%D0%BC%D0%B5%D1%82%D0%BE%D0%B4%D0%B8%D1%87%D0%BA%D0%B0)%20(2015).pdf&nosw=1.

Кузнецов, С. Д. *Основы современных БД.* 2019. URL: https://drive.google.com/file/d/1uvAyzdQt9yHSusCXvrb7BZ_d1Yfh_D1Q/view?usp=sharing.

Лекции И. В. Тихонова. URL: https://disk.yandex.ru/d/uBxTJDaahuSjZA/3%20%D0%BA%D1%83%D1%80%D1%81/1%20%D0%BF%D0%BE%D1%82%D0%BE%D0%BA/%5B5%20%D1%81%D0%B5%D0%BC.%5D%20%D0%A3%D1%80%D0%B0%D0%B2%D0%BD%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F%20%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%BE%D0%B9%20%D1%84%D0%B8%D0%B7%D0%B8%D0%BA%D0%B8/%D0%9B%D0%B5%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B8/2020.

Ломов, И. С. *Математический анализ.* URL: https://docs.yandex.ru/docs/view?url=ya-disk-public%3A%2F%2FTffbYHUpstqibPiGAqP%2BAVXidTciqaV0g5nRVMD0x0Tx1qEMpaQcg2UvudcAoNB7q%2FJ6bpmRy0JonT3VoXnDag%3D%3D%3A%2F2%20%D0%BA%D1%83%D1%80%D1%81%2F%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B0%D0%BD%20%D0%B8%20%D0%A2%D0%A4%D0%9A%D0%9F%2F2.%20%D0%9B%D0%B5%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B8%2F3%20%D1%81%D0%B5%D0%BC%D0%B5%D1%81%D1%82%D1%80%2F2020%20%D0%92%D1%81%D0%B5%20%D0%BB%D0%B5%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B8-%D0%BF%D1%80%D0%B5%D0%B7%D0%B5%D0%BD%D1%82%D0%B0%D1%86%D0%B8%D0%B8%20%D0%9B%D0%BE%D0%BC%D0%BE%D0%B2%D0%B0.pdf&name=2020%20%D0%92%D1%81%D0%B5%20%D0%BB%D0%B5%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B8-%D0%BF%D1%80%D0%B5%D0%B7%D0%B5%D0%BD%D1%82%D0%B0%D1%86%D0%B8%D0%B8%20%D0%9B%D0%BE%D0%BC%D0%BE%D0%B2%D0%B0.pdf.

М. В. Абакумов, А. В. Гулин. *Лекции по численным методам математической физики.* 2013. URL: https://docs.yandex.ru/docs/view?url=ya-disk-public%3A%2F%2FTffbYHUpstqibPiGAqP%2BAVXidTciqaV0g5nRVMD0x0Tx1qEMpaQcg2UvudcAoNB7q%2FJ6bpmRy0JonT3VoXnDag%3D%3D%3A%2F4%20%D0%BA%D1%83%D1%80%D1%81%2F1%20%D0%BF%D0%BE%D1%82%D0%BE%D0%BA%2F%D0%A7%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D1%8B%D0%B5%20%D0%BC%D0%B5%D1%82%D0%BE%D0%B4%D1%8B%20%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%BE%D0%B9%20%D1%84%D0%B8%D0%B7%D0%B8%D0%BA%D0%B8%2F%D0%A7%D0%9C%D0%9C%D0%A4_%D0%90%D0%B1%D0%B0%D0%BA%D1%83%D0%BC%D0%BE%D0%B2_%D1%83%D1%87%D0%B5%D0%B1%D0%BD%D0%B8%D0%BA.pdf&name=%D0%A7%D0%9C%D0%9C%D0%A4_%D0%90%D0%B1%D0%B0%D0%BA%D1%83%D0%BC%D0%BE%D0%B2_%D1%83%D1%87%D0%B5%D0%B1%D0%BD%D0%B8%D0%BA.pdf&nosw=1.

Маш-Маш. *Машбук. Операционные системы. Конспект лекций.* 2017. URL: https://docs.yandex.ru/docs/view?url=ya-disk-public%3A%2F%2FTffbYHUpstqibPiGAqP%2BAVXidTciqaV0g5nRVMD0x0Tx1qEMpaQcg2UvudcAoNB7q%2FJ6bpmRy0JonT3VoXnDag%3D%3D%3A%2F2%20%D0%BA%D1%83%D1%80%D1%81%2F%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B3%D1%80%D0%B0%D0%BC%D0%BC%D0%B8%D1%80%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D0%B5%2F1.%20%D0%9E%D0%BF%D0%B5%D1%80%D0%B0%D1%86%D0%B8%D0%BE%D0%BD%D0%BD%D1%8B%D0%B5%20%D1%81%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC%D1%8B%2F1.%20%D0%9A%D0%BD%D0%B8%D0%B3%D0%B8%20(%D0%B2%20%D1%81%D0%BE%D0%BE%D1%82%D0%B2%D0%B5%D1%82%D1%81%D0%B2%D0%B8%D0%B8%20%D1%81%D0%BE%20%D1%81%D0%BF%D0%B8%D1%81%D0%BA%D0%BE%D0%BC%20%D0%BB%D0%B8%D1%82-%D1%80%D1%8B%20%D1%81%20%D0%BB%D0%B5%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B9)%2F2017.%20%D0%9C%D0%B0%D1%88%D0%B1%D1%83%D0%BA.pdf&name=2017.%20%D0%9C%D0%B0%D1%88%D0%B1%D1%83%D0%BA.pdf&nosw=1.

Моисеев, Е. И. *Лекции Е. И. Моисеева, весна 2020-2021.* URL: https://docs.yandex.ru/docs/view?url=ya-disk-public%3A%2F%2FTffbYHUpstqibPiGAqP%2BAVXidTciqaV0g5nRVMD0x0Tx1qEMpaQcg2UvudcAoNB7q%2FJ6bpmRy0JonT3VoXnDag%3D%3D%3A%2F3%20%D0%BA%D1%83%D1%80%D1%81%2F1%20%D0%BF%D0%BE%D1%82%D0%BE%D0%BA%2F%5B6%20%D1%81%D0%B5%D0%BC.%5D%20%D0%A4%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%BE%D0%BD%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D1%8B%D0%B9%20%D0%B0%D0%BD%D0%B0%D0%BB%D0%B8%D0%B7%2F%D0%9B%D0%B5%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B8%20%D0%95.%D0%98.%20%D0%9C%D0%BE%D0%B8%D1%81%D0%B5%D0%B5%D0%B2%D0%B0%202020-2021.pdf&name=%D0%9B%D0%B5%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B8%20%D0%95.%D0%98.%20%D0%9C%D0%BE%D0%B8%D1%81%D0%B5%D0%B5%D0%B2%D0%B0%202020-2021.pdf.

— *Лекции Е. И. Моисеева, осень 2020-2021.* URL: https://docs.yandex.ru/docs/view?url=ya-disk-public%3A%2F%2FTffbYHUpstqibPiGAqP%

2BAVXidTciqaVOg5nRVMDOxOTx1qEMpaQcg2UvudcAoNB7q%2FJ6bpmRyOJonT3VoXnDag%3D%3D%3A%2F3%20%D0%BA%D1%83%D1%80%D1%81%2F1%20%D0%BF%D0%BE%D1%82%D0%BE%D0%BA%2F%5B5%20%D1%81%D0%B5%D0%BC.%5D%20%D0%A4%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%BE%D0%BD%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D1%8B%D0%B9%20%D0%B0%D0%BD%D0%B0%D0%BB%D0%B8%D0%B7%2F%D0%9B%D0%B5%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B8%20%D0%95.%D0%98.%20%D0%9C%D0%BE%D0%B8%D1%81%D0%B5%D0%B5%D0%B2%D0%B0%20-%20%D0%BE%D1%81%D0%B5%D0%BD%D1%8C.pdf&name=%D0%9B%D0%B5%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B8%20%D0%95.%D0%98.%20%D0%9C%D0%BE%D0%B8%D1%81%D0%B5%D0%B5%D0%B2%D0%B0%20-%20%D0%BE%D1%81%D0%B5%D0%BD%D1%8C.pdf&nosw=1.

Народ. *Студ билеты по ТФКП.* URL: https://drive.google.com/drive/folders/1qyl-quIKM3mZmyB5_GrYJTNszmuzpzdb.

Сергеев, А. Г. *Лекции по функциональному анализу.* URL: https://www.mi-ras.ru/noc/13_14/2/sergeev/funkan.pdf.

Физфак. *Ряды Лорана.* URL: http://mph.cs.msu.ru/stud/2021-CA-grigorea-10.pdf.

Шилдт, Герберт. *C++. Шаг за шагом.* 2013. URL: https://drive.google.com/file/d/1-fCB_A7zkX9YYSGyEnkDpOogTYgUcQV0/view?usp=sharing.