



JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

Sub-Riemannilaiset geodeesit

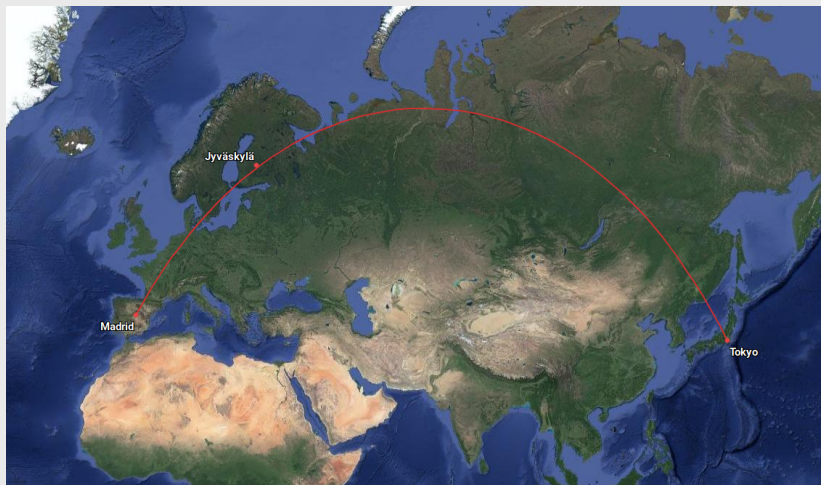
Eero Hakavuori

10.08.2019



geodeesi = lyhin reitti paikasta toiseen

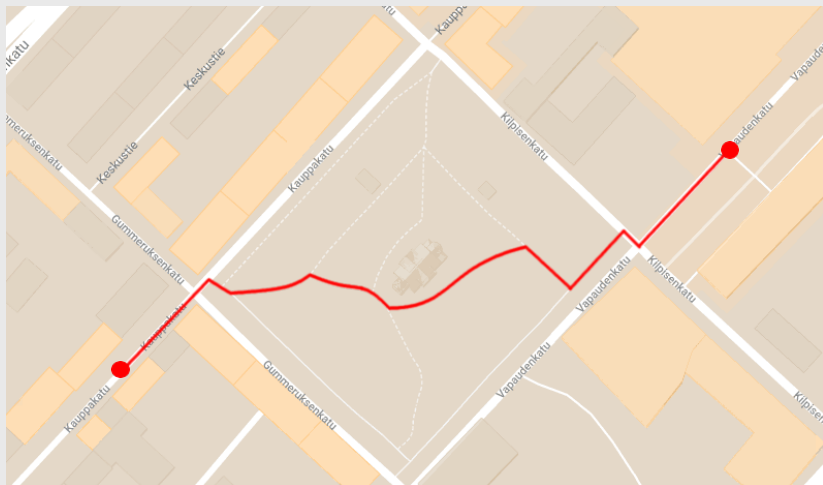
Geodeesi maapallolla



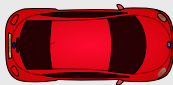
Geodeesi maapallolla



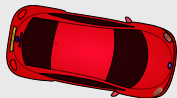
Geodeesi kaupungilla



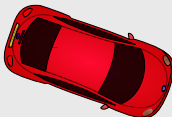
Geodeesi pysäköidessä



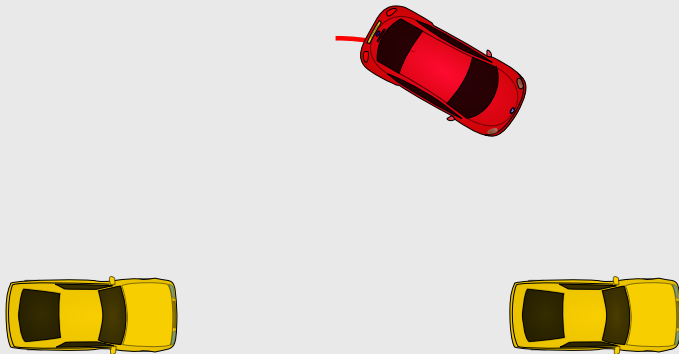
Geodeesi pysäköidessä



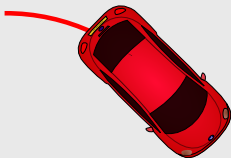
Geodeesi pysäköidessä



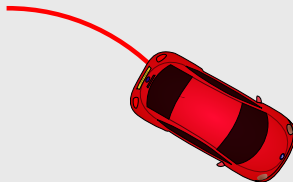
Geodeesi pysäköidessä



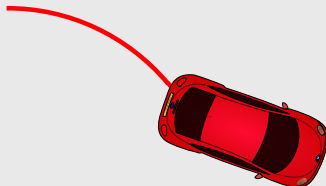
Geodeesi pysäköidessä



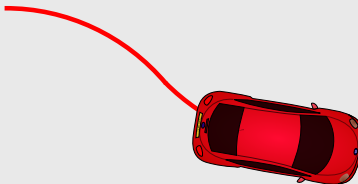
Geodeesi pysäköidessä



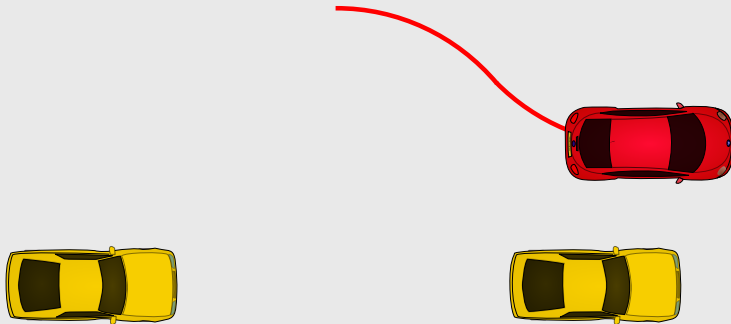
Geodeesi pysäköidessä



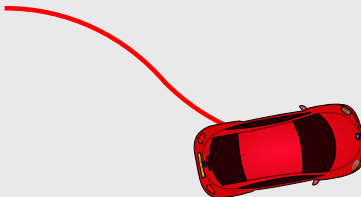
Geodeesi pysäköidessä



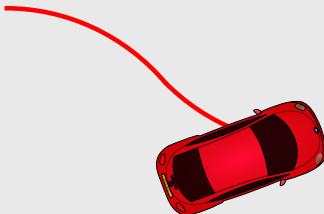
Geodeesi pysäköidessä



Geodeesi pysäköidessä



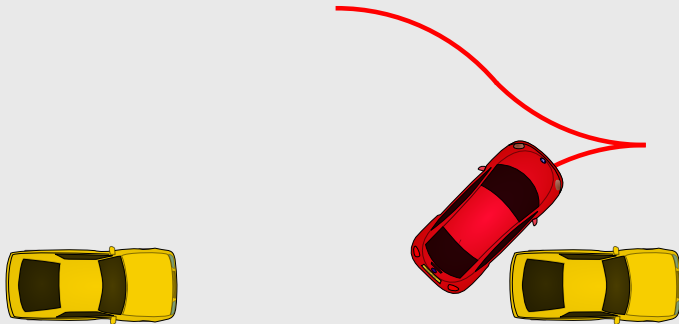
Geodeesi pysäköidessä



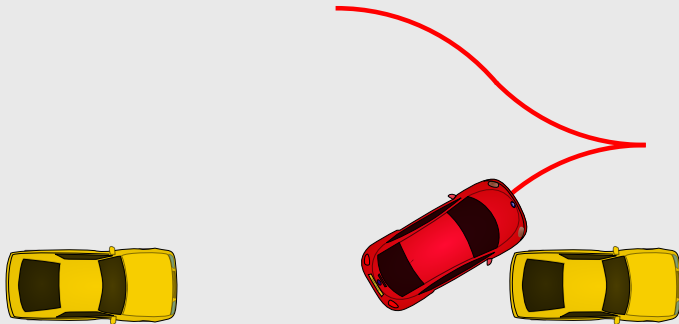
Geodeesi pysäköidessä



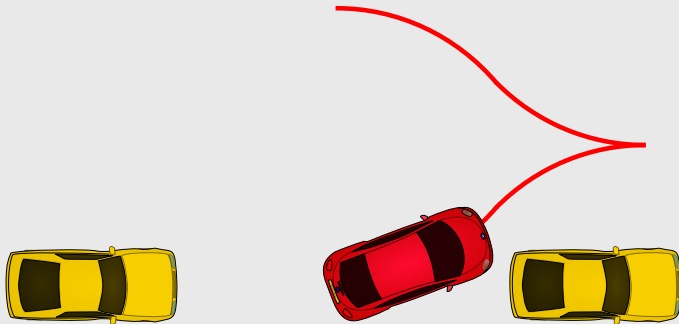
Geodeesi pysäköidessä



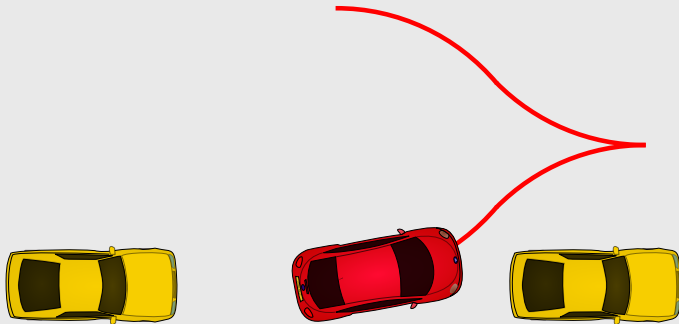
Geodeesi pysäköidessä



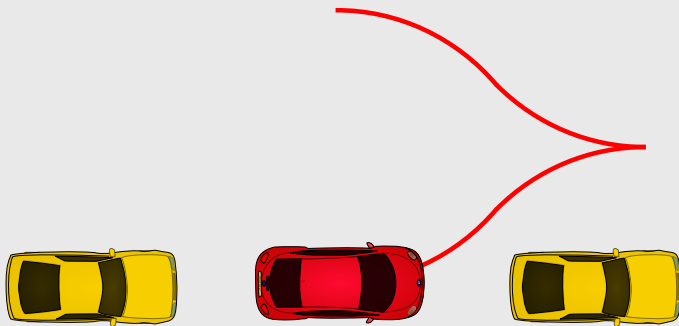
Geodeesi pysäköidessä



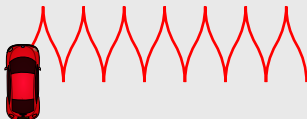
Geodeesi pysäköidessä



Geodeesi pysäköidessä

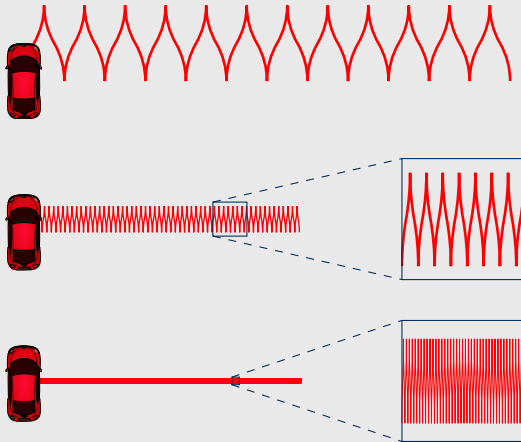


Sivuttaissiirtymä





Sivuttaissiirtymä

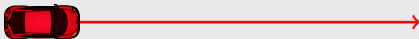


Sivuttaisliike on mahdollista, mutta tehotonta.



Sub-Riemannin geometrian ominaisuuksia

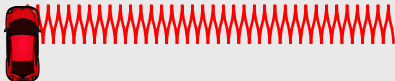
Liike joihinkin suuntiin on helppoa.



Liike toisiin suuntiin on mahdotonta.



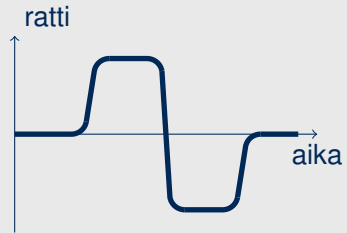
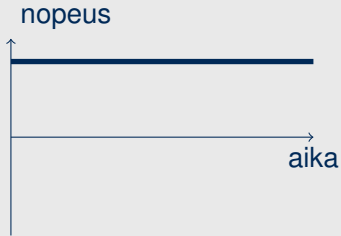
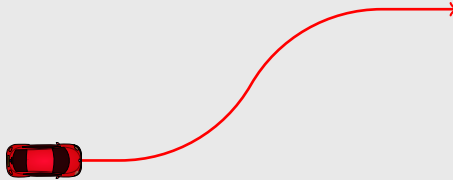
Mahdottomia suuntia voidaan approksimoida, mutta tällainen liike on hidasta.





Ohjauksjärjestelmät

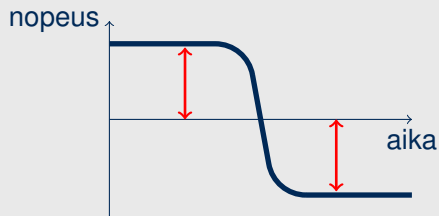
Sub-Riemannin geometrian näkökulma reitteihin:



Ohjausjärjestelmät



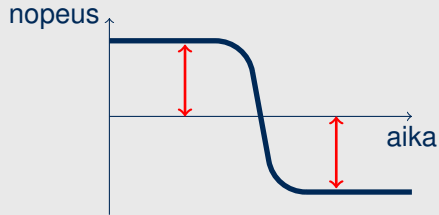
Optimaalinen ohjaus: vähiten **poikkeamaa** nolatilasta.





Ohjausjärjestelmät

Optimaalinen ohjaus: vähiten **poikkeamaa** nollatilasta.



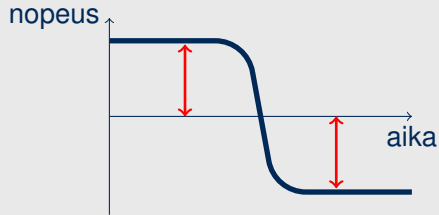
Optimaalinen ohjaustapa on usein vaikea löytää.





Ohjausjärjestelmät

Optimaalinen ohjaus: vähiten **poikkeamaa** nolatilasta.



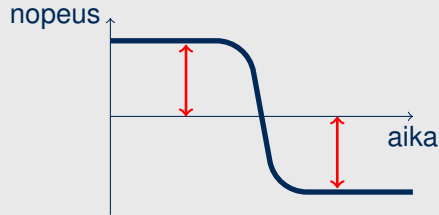
Optimaalinen ohjaustapa on usein vaikea löytää.





Ohjausjärjestelmät

Optimaalinen ohjaus: vähiten **poikkeamaa** nolatilasta.



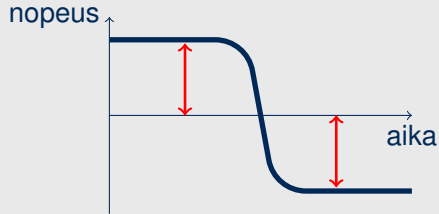
Optimaalinen ohjaustapa on usein vaikea löytää.





Ohjausjärjestelmät

Optimaalinen ohjaus: vähiten **poikkeamaa** nolatilasta.



Optimaalinen ohjaustapa on usein vaikea löytää.



Geodeesien säännöllisyys



Pääkysymys

Miltä näyttää optimaalinen ohjaustapa
sub-Riemannin geometriassa?

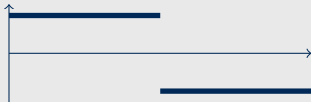
Geodeesien säännöllisyys



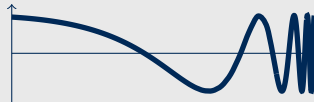
Pääkysymys

Miltä näyttää optimaalinen ohjaustapa
sub-Riemannin geometriassa?

Onko yhtäkkisiä muutoksia?



tai



Geodeesien säännöllisyys



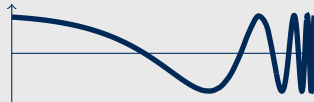
Pääkysymys

Miltä näyttää optimaalinen ohjaustapa sub-Riemannin geometriassa?

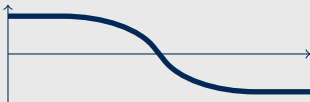
Onko yhtäkkisiä muutoksia?



tai



Ovatko muutokset sileitä?



vs.

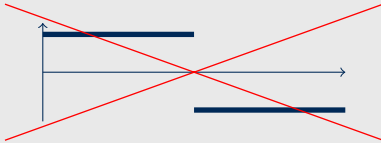




Väitöskirjan artikkelit

[A] Non-minimality of corners in sub-Riemannian geometry

Optimaalinen ohjaus ei sisällä yksittäisiä hyppäyksiä.





Väitöskirjan artikkelit

[B] Blowups and blowdowns of geodesics in Carnot groups

Optimaalisten reittien tarkastelua “läheltä” ja “kaukaa”.



Väitöskirjan artikkelit



[B] Blowups and blowdowns of geodesics in Carnot groups

Optimaalisten reittien tarkastelua “läheltä” ja “kaukaa”.



Väitöskirjan artikkelit



[B] Blowups and blowdowns of geodesics in Carnot groups

Optimaalisten reittien tarkastelua “läheltä” ja “kaukaa”.



Väitöskirjan artikkelit



[B] Blowups and blowdowns of geodesics in Carnot groups

Optimaalisten reittien tarkastelua “läheltä” ja “kaukaa”.

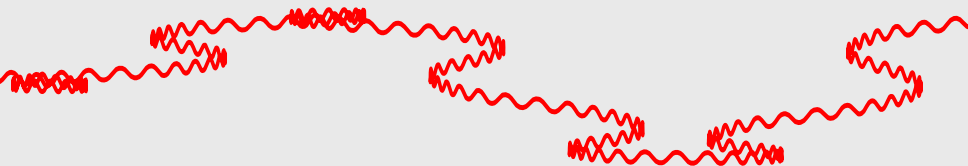


Väitöskirjan artikkelit



[B] Blowups and blowdowns of geodesics in Carnot groups

Optimaalisten reittien tarkastelua “läheltä” ja “kaukaa”.

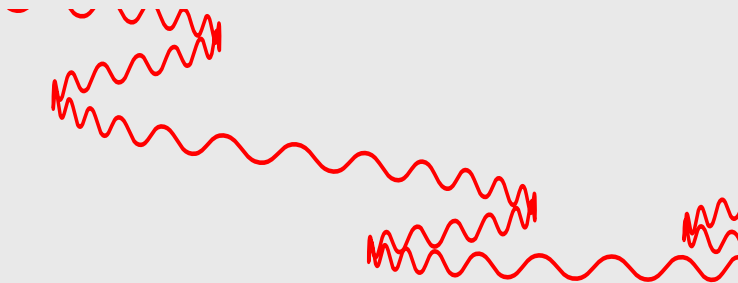


Väitöskirjan artikkelit



[B] Blowups and blowdowns of geodesics in Carnot groups

Optimaalisten reittien tarkastelua “läheltä” ja “kaukaa”.

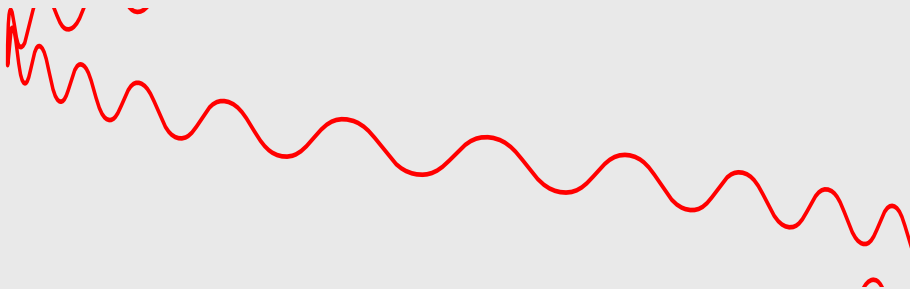


Väitöskirjan artikkelit



[B] Blowups and blowdowns of geodesics in Carnot groups

Optimaalisten reittien tarkastelua “läheltä” ja “kaukaa”.

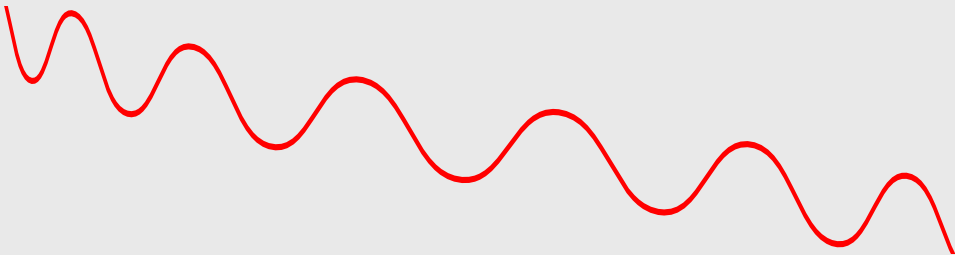


Väitöskirjan artikkelit



[B] Blowups and blowdowns of geodesics in Carnot groups

Optimaalisten reittien tarkastelua “läheltä” ja “kaukaa”.

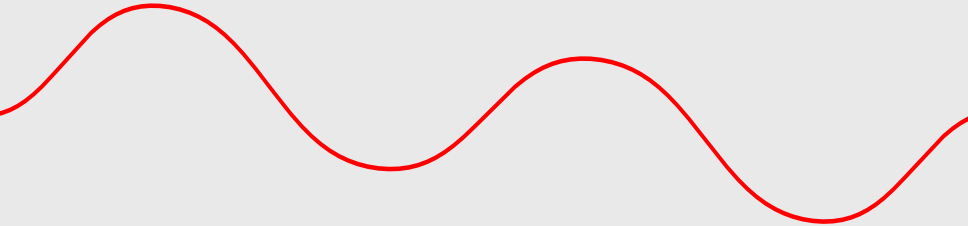




Väitöskirjan artikkelit

[B] Blowups and blowdowns of geodesics in Carnot groups

Optimaalisten reittien tarkastelua “läheltä” ja “kaukaa”.

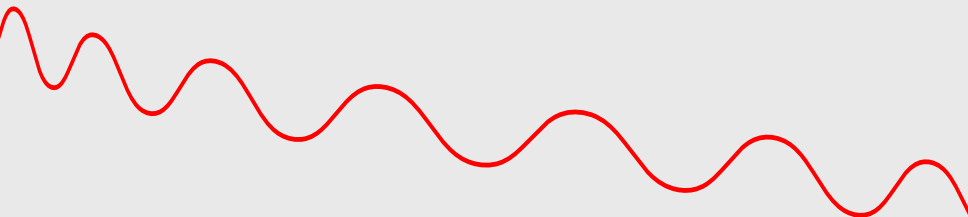


Väitöskirjan artikkelit



[B] Blowups and blowdowns of geodesics in Carnot groups

Optimaalisten reittien tarkastelua “läheltä” ja “kaukaa”.

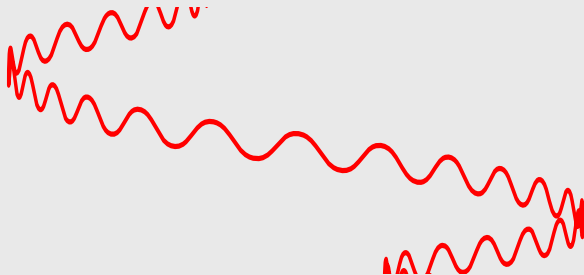


Väitöskirjan artikkelit



[B] Blowups and blowdowns of geodesics in Carnot groups

Optimaalisten reittien tarkastelua “läheltä” ja “kaukaa”.

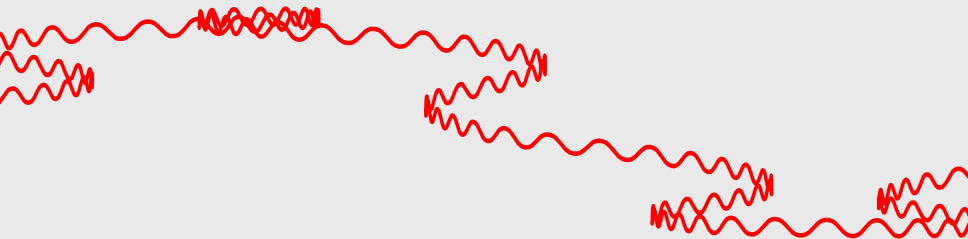


Väitöskirjan artikkelit



[B] Blowups and blowdowns of geodesics in Carnot groups

Optimaalisten reittien tarkastelua “läheltä” ja “kaukaa”.

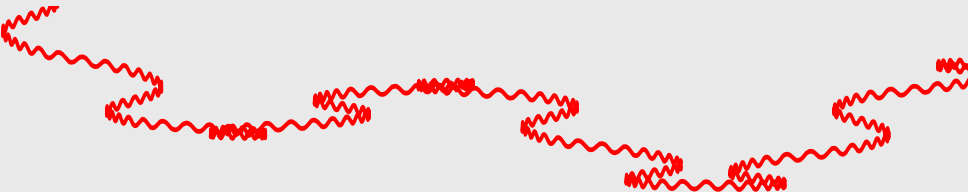


Väitöskirjan artikkelit



[B] Blowups and blowdowns of geodesics in Carnot groups

Optimaalisten reittien tarkastelua “läheltä” ja “kaukaa”.



Väitöskirjan artikkelit



[B] Blowups and blowdowns of geodesics in Carnot groups

Optimaalisten reittien tarkastelua “läheltä” ja “kaukaa”.



Väitöskirjan artikkelit



[B] Blowups and blowdowns of geodesics in Carnot groups

Optimaalisten reittien tarkastelua “läheltä” ja “kaukaa”.

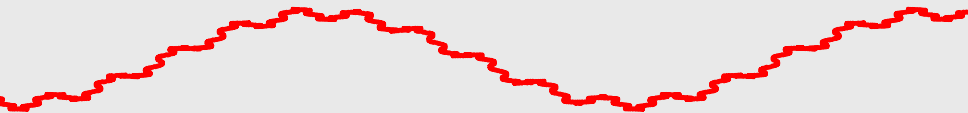


Väitöskirjan artikkelit



[B] Blowups and blowdowns of geodesics in Carnot groups

Optimaalisten reittien tarkastelua “läheltä” ja “kaukaa”.



Väitöskirjan artikkelit



[B] Blowups and blowdowns of geodesics in Carnot groups

Optimaalisten reittien tarkastelua “läheltä” ja “kaukaa”.



Väitöskirjan artikkelit



[B] Blowups and blowdowns of geodesics in Carnot groups

Optimaalisten reittien tarkastelua “läheltä” ja “kaukaa”.



Väitöskirjan artikkelit



[B] Blowups and blowdowns of geodesics in Carnot groups

Optimaalisten reittien tarkastelua “läheltä” ja “kaukaa”.



Väitöskirjan artikkelit



[B] Blowups and blowdowns of geodesics in Carnot groups

Optimaalisten reittien tarkastelua “läheltä” ja “kaukaa”.

Väitöskirjan artikkelit



[B] Blowups and blowdowns of geodesics in Carnot groups

Lähempää ja lähempää optimaalinen reitti alkaa näyttää yksinkertaisemman tilanteen optimaaliselta reitiltä.

Väitöskirjan artikkelit



[B] Blowups and blowdowns of geodesics in Carnot groups

Lähempää ja lähempää optimaalinen reitti alkaa näyttää yksinkertaisemman tilanteen optimaaliselta reitiltä.





Väitöskirjan artikkelit

[B] Blowups and blowdowns of geodesics in Carnot groups

Lähempää ja lähempää optimaalinen reitti alkaa näyttää yksinkertaisemman tilanteen optimaaliselta reitiltä.





Väitöskirjan artikkelit

[B] Blowups and blowdowns of geodesics in Carnot groups

Lähempää ja lähempää optimaalinen reitti alkaa näyttää yksinkertaisemman tilanteen optimaaliselta reitiltä.



Kauempaa ja kauempaa optimaalinen reitti alkaa näyttää yksinkertaisemman tilanteen optimaaliselta reitiltä.



Väitöskirjan artikkelit



[C] Infinite geodesics and isometric embeddings in Carnot groups of step 2

Päättymättömien optimaalisten reittien tarkastelua
yksinkertaisemmissa tilanteissa.



Väitöskirjan artikkelit



[C] Infinite geodesics and isometric embeddings in Carnot groups of step 2

Päättymättömien optimaalisten reittien tarkastelua yksinkertaisemmissa tilanteissa.



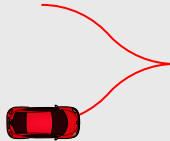
Ainoat päättymättömät optimaaliset reitit ovat “suoria”.



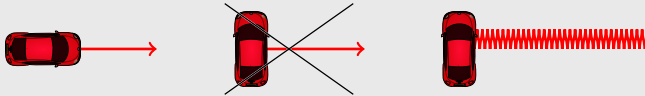


Avainkäsitteet

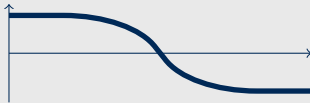
Geodeesi: lyhin reitti tilasta toiseen



Sub-Riemannin geometria: eri suunnilla eri kohtelu



Säännöllisyys: reitin tai ohjauksen laadullisia ominaisuuksia



VS.

